**国外研究现状：**

设 为 中的光滑有界区域, 表示 在范数 下的完备化空间。经典的 Sobolev 嵌入定理表示 , 但是当 时, 不能嵌 入到 中, 比如函数 , 定义域是 。 可以证明, 。后来, Trudinger-Moser 通过研究 的情形, 得到了如下的经典的 Trudinger-Moser 不等式:

其中 表示 维单位球面测度。对于上式的极值函数存在性问题, 已经有了很多的结果, 在 [1] 中 Carleson 和 Chang 证明了 是单位球时, 极值函数是存在的。之后在 [2] 中, Struwe 证明 了当 的测度接近于单位球时, 极值函数存在; 在 [3] 中, Flucher 将其推广到二维平面中的任意区域 ; 在 [4] 中, Lin 证明了高维情形下 的存在性。对于 (1) 式的推广, 一般从有界区域推广到无界区域, 从低维情形推广到高维情形。

Calanchi和Ruf在[5]中研究了，在的单位开球上，定义的权重为对数型加权Sobolev范数的情况。事实上，他们考虑的子空间，可以定义为径向函数在空间和范数

下的完备化空间，其中或者。Calanchi和Ruf证明了以下结果。设，那么，对于函数，我们有

进一步，

显然，如果，我们就得到了经典的Trudinger-Moser不等式。其次，Calanchi和Ruf考虑了和的极限情况。在这种情况下， 不同的权会对嵌入产生影响。事实上，在经典的Trudinger-Moser不等式中，最大增长函数可以提升，因此现在允许双指数增长。

进而，研究了奇异型于对数加权的情形。在 [6] 中, 下, 加权的 Sobolev 空间表示 在范数 完备化下得到的空间, 记为 。若空间中的函数是径向函数时, 记为 。Van Hong Nguyen 得到了存在 , 当 时

的极值函数存在, 这里 。

在本文中, 我们将关注上式的极值函数存在性问题。

**国内研究现状：**

在[7]中，朱茂春,刘杰，研究了一维直线上的奇异型Trudinger-Moser不等式，利用分数次Sobolev空间上函数的Green表示公式,得到了一类奇异型Trudinger-Moser不等式。在此基础上，在[8]中，朱茂春,陈文欢继续研究了二维空间上一类各向异性对数加权径向Sobolev空间上的Trudinger-Moser不等式，他们通过建立一个重要的径向引理,并利用著名的Leckband泛函不等式得到了对数加权约束下的最佳Trudinger-Moser增长指标。后来，在[9]中，朱茂春,李栋梁，研究了全空间上与Trudinger-Moser-Lorentz不等式相关的集中紧性原理，利用函数的水平截断方法,将有界区域上与Trudinger-Moser-Lorentz不等式相关的集中紧性原理推广到了无界区域上。最近，在[10]中，刘宇航研究了加权Sobolev空间下的Trudinger-Moser不等式和Lorentz-Sobolev空间下的Adams不等式。

**参考文献：**

[1] Carleson, Lennart, and Sun-Yung A. Chang. "ON THE EXISTENCE OF AN EXTREMAL FUNCTION FOR AN INEQUALITY OF MOSER, J." Bulletin des Sciences Mathématiques (1986): 113-127.

[2] Struwe M. Critical points of embeddings of H01, n into Orlicz s-paces[C]Annales de l’Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire. Elsevier Masson, 1988, 5(5): 425-464.

[3] Martin Flucher,Extremal functions for the Trudinger-Moser inequality in 2 dimensions,Comment.Math.Helv.67(1992),no.3,471-497.

[4] Kai-Ching Lin,Extremal functions for Moser’s inequality Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996),no.7,2663-2671.

[5] M. Calanchi and B. Ruf, Trudinger-Moser type inequalities with logarithmic weights in dimension N, Nonlinear Anal. 121 (2015), 403–411.

[6] Nguyen,Van."Remarks on the Moser-Trudinger type inequality with log-arithmic weights in dimension N".Proceedings of the American Mathe-matical Society 147.12(2019):5183-5193.

[7]朱茂春,刘杰.一维直线上的奇异型Trudinger-Moser不等式[J].数学杂志,2021,41(03):219-226.DOI:10.13548/j.sxzz.2021.03.004.

[8]朱茂春,陈文欢.二维空间上对数加权各向异性范数约束下的Trudinger-Moser不等式（英文）[J].应用数学,2022,35(04):766-775.DOI:10.13642/j.cnki.42-1184/o1.2022.04.007.

[9]朱茂春,李栋梁.全空间上与Trudinger-Moser-Lorentz不等式相关的集中紧性原理[J].应用数学学报,2021,44(02):294-306.

[10]刘宇航. 几类Trudinger-Moser及Adams不等式的研究[D].江苏大学,2021.DOI:10.27170/d.cnki.gjsuu.2021.002402.

**主要内容：**

本文研究了单位球 上对数加权的奇异型的 Trudinger-Moser 不等式的极值函数存在性问题。这里的权是 , 。证明将运用函数变换，集中紧性原理，径向引理，集中水平，Holder不等式，Young不等式以及Lebesgue控制收敛定理等方法，最终证明极值函数的存在性。最后得到了 , 对于 , 对数加权的奇异型的 Trudinger-Moser 不等式的极值函数存在。