1. **引言以及主要结果**

有界域（见[24,31]）上的经典的Trudinger-Moser不等式表明存在一个常数，使得

（1.1）

其中表示 维单位球面测度。对于无界区域，特别是整个欧几里得空间，已经建立了几种Trudinger-Moser型不等式，详见[1,7,22,29]。之后，在[2]中，Adimurthi和Sandeep将Trudinger-Moser不等式(1.1)扩展为奇异加权型。更准确地说，他们证明了以下结果。

**定理1.1（[2，定理2.1]）**设是一个光滑有界区域。对于任意和，我们有

进而，

（1.2）

在[3]中，最新的结果是由Adimurthi和Yang推广到了整个空间，如下所示。

**定理1.2（[3，定理1.1]）**对于所有，，以及，我们有

其中，，进一步，对于所有，，我们有

其中

奇异型不等式的极值函数存在性问题已在[21]中讨论过。我们还不得不提到Li的[20]，这可以看作是对定理1.2的改进。在[27]中，我们也需要提到Nguyen和Takahashi关于奇异型Trudinger-Moser不等式的最近的工作。现在，关于加权Sobolev空间上所定义的Trudinger-Moser不等式，详见 [4-6,8-11,14,15,17,18,26]。这些工作大多数考虑了对径向函数的限制，在[18]中，虽然权不一定是径向的，但它的增长可以通过径向重排变成径向的情况。这种简化径向函数不等式的兴趣主要是由于它能够提高可积性。最近，Calanchi和Ruf在[11]中研究了，在的单位开球上，定义的权重为对数型加权Sobolev范数的情况。  
 事实上，他们考虑的子空间，可以定义为径向函数在空间和范数

下的完备化空间，其中或者。  
 首先，Calanchi和Ruf证明了以下结果。  
**定理1.3（[11，定理1]）**设，那么，对于函数，我们有

（1.3）

进一步，

（1.4）

显然，如果，我们就得到了经典的Trudinger-Moser不等式。其次，Calanchi和Ruf考虑了和的极限情况。在这种情况下， 不同的权会对嵌入产生影响。事实上，在经典的Trudinger-Moser不等式中，最大增长函数可以提升，因此现在允许双指数增长。更确切地说，他们证明了下面的定理。  
**定理1.4（[11，定理4]）**我们有

，所有 （1.5）

和

（1.6）

利用这个新的Trudinger-Moser不等式，Calanchi, Ruf和Sani在[12]中证明了,一个定义在的单位球上的，椭圆问题的非平凡径向解的存在性问题，其非线性在无穷远处具有双指数增长。  
 在本文中，第一步，当出现奇异项(如定理1.1)时，我们扩展了定理1.3和定理1.4中证明的不等式。第二步，我们将结果推广到整个空间。这种概括(一点也不简单)，即使在没有奇异的情况下，本身也是全新和有趣的。最后，通过解决定义在上且非线性在无穷远处呈双指数增长的椭圆方程，给出了一个应用。

在整个工作中，我们考虑标准加权Sobolev空间，定义为相对于范数的完备化空间

用表示相应的径向函数的子空间，其中

（1.7）

本文的第一个结果是定理1.3的以下扩展。  
**定理1.5.**设，通过（1.7）所定义，设，那么对于每一个和，我们有

（1.8）

进一步，

（1.9）

这里。

我们可以很容易地看出，是一种二阶极限情况。在现实中，对于这个“极值”，我们发现可积性的最大增长是双指数型的。  
**定理1.6.**设，通过（1.7）所定义，且，，那么，对于每个，

（1.10）

进一步，我们有

（1.11）

**注记1.7.** 显然，如果，则(1.9)是(1.2)中所述的经典奇异型Trudinger-Moser不等式。同样，如果，则不等式(1.9)和(1.11)分别是(1.4)和(1.6)。  
在这项工作的第二部分，我们对的无界域的情况感兴趣。更准确地说，我们考虑一个径向加权

（1.12）

其中，和是一个连续函数，使得，。用表示加权的Sobolev空间

的标准Sobolev范数为

在这部分工作中，我们使用这种符号

下面是定理1.5的第一个扩展。  
**定理1.8.**设，由（1.12）所定义。对于所有，，我们有  
 （1.13）  
进一步，如果，那么

（1.14）  
如果 ，那么

的值并不一定属于，在(1.14)中其极值是有限的正值范围。然而，当我们考虑不同的空间时，Trudinger-Moser不等式的奇异情况可以修复。更准确地说，对于，定义为径向函数空间相对于范数

的完备化空间。

对于这个空间，我们得到了奇异型Trudinger-Moser不等式，它是定理1.5的第二个扩展。  
**定理1.9.**设，由（1.12）所定义，对于所有，我们有

如果，那么

最后，我们列出了定理1.6的以下扩展。  
**定理1.10.**对于所有和，我们有

（1.15）

如果，那么

（1.16）  
如果，那么

在本工作的最后一部分，我们证明了，奇异椭圆方程至少存在两个解

其中由（1.12）所定义，且是由Trudinger-Moser不等式(1.16)定义的双指数增长的Carathéodory函数。详见第7节。