**一类对数加权下奇异型的Trudinger-Moser不等式的极值函数问题**

郭永强

**摘要：**

本文研究了单位球上对数加权的奇异型的Trudinger-Moser不等式的极值函数存在性问题。这里的权是，。证明基于单位球上的函数变换，集中水平上界法以及经典的Trudinger-Moser不等式。最后得到了，对于，对数加权的奇异型的Trudinger-Moser不等式的极值函数存在。

**关键词:**Trudinger-Moser不等式 奇异型 极值函数 集中水平

**1引言**

设为中的光滑有界区域，表示在范数下的完备化空间。经典的Sobolev嵌入定理表示，但是当时，不能嵌入到中，比如函数，定义域是。可以证明，。后来,Trudinger-Moser通过研究的情形，得到了如下的经典的Trudinger-Moser不等式：

（1）

其中，表示维单位球面测度。对于(1)的极值函数存在性问题,已经有了很多的结果，在[1]中Carleson和Chang证明了是单位球时，极值函数是存在的。之后在[2]中，Struwe证明了当的测度接近于单位球时，极值函数存在；在[3]中，Flucher将其推广到二维平面中的任意区域；在[4]中，Lin证明了高维情形下的存在性。对于(1)式的推广，一般从有界区域推广到无界区域，从低维情形推广到高维情形。后来，研究了奇异型于对数加权的情形。在[5]中，下，加权的Sobolev空间表示在范数完备化下得到的空间，记为。若空间中的函数是径向函数时，记为。VanHongNguyen得到了存在，当时



的极值函数存在，这里。

SamiAouaoui和RahmaJlel在[6]中得到了，且时，对于，有，进一步



这里，这里，记。

在本文中，我们关注(2)式的极值函数存在性问题。首先,给出记号



时，(2)的极值函数的存在性[5]中已证明。

本文得到的主要定理如下：

存在，当时，的极值函数存在。

接下来，第二部分介绍一些有用的引理，第三部分证明本文的定理。

**2预备知识**

**引理1([5])**

每一个函数，有



证明:由，运用Hölder不等式得：



**引理2**设是空间中的序列，且该序列满足条件，弱收敛于，且

证明：**还需完善！**

**引理3**，有



当时，有。

证明：

根据定义



由引理1得



所以



**3证明部分**

分两种情形研究：

**3.1次临界情形**

在次临界情形时，由(2)知(3)在上的积分有一致的界，因此取极大化序列，且，(3)依然成立。所以通过维塔利收玫定理，该极大化序列的极限就是(3)的极值函数，即

****

**3.2临界情形**

在临界情形时，利用[1][7]中的讨论方法，定义泛函



泛函的集中水平定义为



由[8]知，，这一结论对极值函数的讨论有很重要的作用。

**定理1**。

证明：由(5)及已知事实得：



对于，上式依然成立。

下证：。取是里的归一化集中序列，取子列使得存在。由引理3所定义，因此，，且，有界。假设，由于，在，这里。由弱极限的唯一性得：。

**情形一**，以及，当时，。因此，由引理2与Hölder不等式知在中有界，所以



这就得到了。

**情形二**，可以通过取子列，使得。定义的性质有：在里有。如果是归一化集中序列，那么



由(6)知，对于有成立。

如果非归一化集中序列，，以及，当时，。定义：



的性质有：，且当时有,。选择足够小的，使得，结合Young不等式以及(7)的定义有



，选取适当的以及权，使得在中有界。在里，由，推出在中有界。

我们会得到



在上，由引理2与勒贝格-控制收敛定理有



综上所述，由(8)，(9)得



所以。

至此，对于,有成立。

**定理2**。

证明：

假设,满足，由(4)所定义,对于，有，通过的定义，有



所以,成立，这里。故关于单调递减，则有



下面证明：

，由于极值函数可达，因此存在,且满足。故：



对于时，时,有。

我们有



当时，由法图引理得：



当时，再一次由法图引理得：



综上所述：



**定理3**存在，当时，的极值函数存在。

证明：

由(10)与已知的结论



结合(11)，定理1与2得



下面取的极大化序列，由于范数有界，因此在里，。且对某些，取，在里，。若，且是归一化集中序列，那么，这与(12)矛盾。因此非归一化集中序列。若，存在，当时,有。此时



这与（12）矛盾。所以，由引理2与Hölder不等式知在中有界，故有



这种情况下，我们发现。当时，



这是一个矛盾。

综上所述，，且就是的极值函数。

**参考文献：**

[1]Carleson, Lennart, and Sun-Yung A. Chang. "ON THE EXISTENCE OF AN EXTREMAL FUNCTION FOR AN INEQUALITY OF MOSER, J." Bulletin des Sciences Mathématiques 110.2 (1986): 113-127.

[2]Struwe M. Critical points of embeddings of H01, n into Orlicz spaces[C]Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire. Elsevier Masson, 1988, 5(5): 425-464.

[3]Martin Flucher,Extremal functions for the Trudinger-Moser inequality in 2 dimensions,Comment.Math.Helv.67(1992),no.3,471-497.

[4]Kai-Ching Lin,Extremal functions for Moser's inequality Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996),no.7,2663-2671.

[5]Nguyen,Van."Remarks on the Moser-Trudinger type inequality with logarithmic weights in dimension N".Proceedings of the American Mathematical Society 147.12(2019):5183-5193.

[6]Aouaoui,Sami,and Rahma Jlel."A new Singular Trudinger-Moser Type Inequality with Logarithmic Weights and Applications."Advanced Nonliner Studies 20.1(2020):113-139.

[7]Prosenjit Roy,Extremal function for Moser-Trudinger type inequality with logarithmic weight,Nonliner Anal.135(2016),194-204.

[8]Wang, Xu Min. "Singular Supercritical Trudinger-Moser Inequalities and the Existence of Extremals." Acta Mathematica Sinica, English Series 36.8 (2020): 873-888.