Entrenamiento para la IMO

Yohan Min

5 de julio de 2022

El propósito de este documento es para repasar lo que estudié cada semana. Podrán encontrar diversos problemas de Olimpiadas Matemáticas y sus soluciones, donde la mayoría han sido discutidos y resueltos en las clases del profesor Emerson Soriano.

Como referencia, las letras `E` (easy), `M` (medium) y `H` (hard) indican los niveles de los problemas, y los colores indican lo siguiente:

- **`verde`** Resolví el problema solo (sin pistas).
- **`azul`** Resolví el problema usando pistas, lo intenté más de una vez y me salió, resolví la parte (a) pero no la parte (b), me tomó mucho tiempo para resolverlo, o mi solución estaba mal y luego la corregí.
- **`rojo`** No pude resolver el problema y vi su solución.
- **`negro`** Aún no resolví el problema porque no lo intenté mucho, o me dio pereza ponerle color a la letra (?).

Índice

§1 Semana 1 (03/14 – 03/20)

Miércoles
2022-03-16

[E] Problema 1.1 (ISL 2006/A5)**.** If a, b, c are the sides of a triangle, prove that

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} \leq 3.$$

Solución. Sea $x=\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}>0$ y análogamente se definen y y z. Por la desigualdad de Schur tenemos que

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{(x-y)(x-z)}{x^2} \geq 0.$$

Note que

$$b+c-a=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{x+z}{2}\right)^2-\left(\frac{y+z}{2}\right)^2=\frac{x^2+xy+xz-yz}{2}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}\right)^2 &\leq \sum_{\text{cyc}}\left(\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}\right)^2 \\
&= \frac{x^2+xy+xz-yz}{2x^2} \\
&= 3-\sum_{\text{cyc}} \frac{(x-y)(x-z)}{2x^2} \\
&\leq 3
\end{aligned}$$

y esto resuelve el problema. □

[E] Problema 1.2 (ISL 2006/N7)**.** Demuestre que para todo entero positivo n, existe un entero positivo m tal que $n \mid 2^m + m$.

[aops:867486]

Solución. El problema es trivial cuando n es una potencia de 2. Ahora, supongamos que para algún $n \in \mathbb{Z}^+$ existe un $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n \mid 2^m + m$. En efecto, sea $k = \frac{2^m+m}{n}$ y sea p un primo impar arbitrario mayor o igual que todos los factores primos de n. Sea $n = p^e n_0$ donde $p \nmid n_0$. Sea $m_0 = m + \phi(p^{e+1} n_0)t$ para algún $n_0 \mid t$ tal que $n_0 k \equiv \phi(n_0)t \pmod{p}$. Luego,

$$\begin{aligned}
2^{m_0} + m_0 &\equiv 2^m + m + p^e(p-1)\phi(n_0)t \\
&= p^e\left(n_0 k + (p-1)\phi(n_0)t\right) \\
&\equiv 0 \pmod{p^{e+1} n_0}
\end{aligned}$$

y aquí terminamos por inducción. □

[M] Problema 1.3 (ISL 2007/A4)**.** Determine todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tales que $f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$.

[aops:1165901]

[M] Problema 1.4 (ISL 2007/N3)**.** Sea X un conjunto de 10000 enteros no divisibles por 47. Demuestre que existe $Y \subset X$ con $|Y| = 2007$, tal que $47 \nmid a - b + c - d + e$ para todo $a, b, c, d, e \in Y$.

[aops:1187204]

[E] Problema 1.5 (Iran MO 2000 3rd Round)**.** La secuencia $(c_i)_{i\geq 1}$ de enteros positivos satisface la siguiente condición: para todo $m, n \in \mathbb{Z}^+$ con $1 \leq m \leq c_1 + c_2 + \cdots + c_n$, existen enteros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que

$$m = \frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_2} + \cdots + \frac{c_n}{a_n}.$$

Para cada índice i, hallar el mayor valor de c_i.

[aops:389506]

[M] Problema 1.6 (ISL 2008/N3)**.** Sea $(a_i)_{i\geq 0}$ una secuencia de enteros positivos tal que $\operatorname{mcd}(a_i, a_{i+1}) > a_{i-1}$ para todo $i \geq 1$. Demuestre que $a_n \geq 2^n$ para todo $n \geq 0$.

[aops:1555931]

Viernes
2022-03-18

[E] Problema 1.7 (ISL 2018/A1)**.** Determine todas las funciones $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ tales que

$$f(x^2 f(y)^2) = f(x)^2 f(y)$$

para todo $x, y \in \mathbb{Q}^+$.

[aops:12752810]

Solución. Si $x^2 f(y)^2 = y$ entonces $f(x) = 1$. Si $f(y) = 1$ tenemos que $f(x^2) = f(x)^2$ para todo $x \in \mathbb{Q}^+$. Es decir, $f(xf(y))^2 = f(x)^2 f(y)$ de donde existe una función $f_1 : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ tal que $f(x) = f_1(x)^2$. Luego, $f_1(xf(y))^2 = f_1(x)^2 f_1(y)$ de donde existe una función $f_2 : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ tal que $f_1(x) = f_2(x)^2$. Luego, $f_2(xf(y))^2 = f_2(x)^2 f_2(y)$ y así sucesivamente. Por lo tanto, $f(x) \equiv 1$. □

[M] Problema 1.8 (ISL 2018/A2)**.** Determine todos los enteros $n \geq 3$ para los cuales existen números reales $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ donde $a_{n+1} = a_1$ y $a_{n+2} = a_2$, tales que

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

[aops:10626524]

Solución. Respuesta: múltiplos de 3. □

[M] Problema 1.9 (ISL 2018/A3)**.** Dado un conjunto S de enteros positivos, demuestre que al menos una de las siguientes dos proposiciones es verdadera:

(1) Existen dos subconjuntos finitos y distintos F y G de S tales que $\sum_{x\in F} 1/x = \sum_{x\in G} 1/x$;

(2) Existe un número racional positivo $r < 1$ tal que $\sum_{x\in F} 1/x \neq r$ para todo subconjunto finito F de S.

Solución. Si S es un conjunto finito, es claro que la (2) es verdadera. Ahora, supongamos que S es infinito y la (2) no se cumple. Sean $a_1 < a_2 < \cdots$ los elementos de S. Sea $i \geq 1$ un índice cualquiera. Si $\frac{1}{a_i} \leq \frac{1}{a_{i+1}} + \frac{1}{a_{i+2}} + \cdots + \frac{1}{a_j} < \frac{2}{a_i}$, sea $r = \frac{1}{a_{i+1}} + \frac{1}{a_{i+2}} + \cdots + \frac{1}{a_j} - \frac{1}{a_i} < \frac{1}{a_i} \leq 1$. Es decir, $r = \frac{1}{a_{x_1}} + \cdots + \frac{1}{a_{x_k}} < \frac{1}{a_i}$ de donde

$$\frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_{x_1}} + \cdots + \frac{1}{a_{x_k}} = \frac{1}{a_i} + r = \frac{1}{a_{i+1}} + \frac{1}{a_{i+2}} + \cdots + \frac{1}{a_j}$$

y la (1) es verdadera. Ahora, supongamos que

$$\frac{1}{a_{i+1}} + \frac{1}{a_{i+2}} + \cdots + \frac{1}{a_j} < \frac{1}{a_i}$$

para todo $j > i > 0$. Si $a_{i+1} > 2a_i$, sea $\frac{1}{a_{i+1}} < r = \frac{2}{a_{i+1}} < \frac{1}{a_i} \leq 1$. Es decir, $r = \frac{1}{a_{x_1}} + \cdots + \frac{1}{a_{x_k}} < \frac{1}{a_i}$. Si $x_1, \ldots, x_k > i+1$ entonces $r < \frac{1}{a_{i+1}}$ lo cual es una contradicción. Por ende, $r = \frac{1}{a_{i+1}} + \frac{1}{a_{y_1}} + \cdots + \frac{1}{a_{y_l}} < \frac{2}{a_{i+1}}$ lo cual es un absurdo. Por lo tanto, $a_{i+1} \leq 2a_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}^+$. Luego,

$$\frac{1}{a_{i+1}}\left(2 - \frac{1}{2^{j-i-1}}\right) = \sum_{k=0}^{j-i-1} \frac{1}{2^k a_{i+1}} \leq \frac{1}{a_{i+1}} + \cdots + \frac{1}{a_j} < \frac{1}{a_i}$$

de donde $a_{i+1} \geq 2a_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}^+$. Es decir, $a_{i+1} = 2a_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}^+$. Si $r = \frac{1}{3a_1} < \frac{1}{a_1} < 1$, tenemos que

$$\frac{1}{3} = \frac{a_1}{a_{x_1}} + \cdots + \frac{a_1}{a_{x_k}} = \frac{1}{2^{x_1-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{x_k-1}} = \frac{M}{N}$$

donde M es impar y N es par, lo cual es un absurdo. □

Problema 1.10 (ISL 2018/A4)**.** Sea $(a_i)_{i\geq 0}$ una secuencia de números reales tal que $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, y para todo $n \geq 2$ existe un $1 \leq k \leq n$ tal que

$$a_n = \frac{a_{n-1} + \cdots + a_{n-k}}{k}.$$

Determine el máximo valor de $a_{2018} - a_{2017}$.

Solución. La respuesta es $\frac{2016}{2017^2}$, cuando $a_1 = a_2 = \cdots = a_{2016} = 1$ y $(a_{2017}, a_{2018}) = \left(\frac{2016}{2017}, 1 - \frac{1}{2017^2}\right)$. □

§2 Semana 2 (03/21 – 03/27)

Lunes
2022-03-21

Problema 2.1 (ISL 2007/N5)**.** Determine todas las funciones suryectivas $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que para cada $m, n \in \mathbb{N}$ y para cada número primo p, el número $f(m+n)$ es divisible por p si y solo si $f(m) + f(n)$ es divisible por p.

Problema 2.2 (ISL 2007/N6)**.** Sea k un entero positivo. Demuestre que el número $(4k^2 - 1)^2$ tiene un divisor positivo de la forma $8kn - 1$ si y solo si k es par.

[E] Problema 2.3 (Petrozavodsk Winter 2021, UPC Contest/B)**.** Determine todos los $n \in \mathbb{Z}^+$ para los cuales existe una permutación $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ de los números $0, 1, \ldots, n-1$ de tal manera que la secuencia $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ dada por $b_i = |a_i - i|$ también es una permutación de los números $0, 1, \ldots, n-1$.

[aops:21584017]

Solución. Note que

$$\frac{n(n-1)}{2} = \sum_{i=0}^{n-1} |a_i - i| \equiv \sum_{i=0}^{n-1} a_i - \sum_{i=0}^{n-1} i = 0 \pmod 2$$

de donde $n = 4k$ o $n = 4k + 1$. Ahora, si $n = 4k + c$ donde $c \in \{0, 1\}$ sea $a_k = k$. Considerando el resto de los números, sea (C) un ciclo que alterna entre el mayor y el menor de los números que sobran. Por ejemplo, si $n = 4 \times 2 = 8$, $(C) = (7\ 0\ 6\ 1\ 5\ 3\ 4)$. Note que el conjunto de las diferencias consecutivas de (C) es $1, 2, \ldots, n-1$ con ningún número repetido. Entonces, podemos definir $a = (k)(C)$ y esta satisface lo requerido. $\square$

Martes
2022-03-22

Problema 2.4 (ISL 2007/N4)**.** Para todo entero $k \geq 2$, demuestre que

$$2^{3k} \,\Big\|\, \binom{2^{k+1}}{2^k} - \binom{2^k}{2^{k-1}}.$$

Problema 2.5 (ISL 2008/A6)**.** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ una función que satisface

$$f\left(x + \frac{1}{f(y)}\right) = f\left(y + \frac{1}{f(x)}\right)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Demuestre que f no es sobreyectiva.

[E] Problema 2.6 (RMM Shortlist 2018/N1)**.** Determine todos los polinomios $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tales que $f(p) \mid 2^p - 2$ para todo primo impar p.

[aops:11822580]

Solución. Sea $f(x) = x^n \cdot g(x)$ donde $g(0) \neq 0$.

- Si $g(x) = c$ es una función constante, tenemos que $3^n \cdot c \mid 2^3 - 2 = 6$. Si $n = 0$, tenemos que $c \mid 6$. Si $n = 1$, tenemos que $c \mid 2$. Por lo tanto, $f(x) = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm x, \pm 2x$.

- Si g no es constante, por Schur existe un primo $q > 3$ suficientemente grande tal que $q \nmid g(0)$ y $q \mid g(m)$ para algún $m \in \mathbb{Z}^+$. Como $m \mid g(m) - g(0)$, es claro que $q \nmid m$. Como $q(q-1)$ y $m(q-1) + q$ son coprimos, por Dirichlet existe un primo impar p de la forma $q(q-1)k - (m(q-1) + q) \equiv m \pmod q$. Es decir, $q \mid g(p) \mid 2^p - 2$ donde $\operatorname{mcd}(p-1, q-1) = \operatorname{mcd}(q-1, 2) = 2$. Por ende, $q \mid \operatorname{mcd}(2^{p-1} - 1, 2^{q-1} - 1) = 2^2 - 1 = 3$, lo cual es un absurdo.

□

Miércoles
2022-03-23

[E] Problema 2.7 (All-Russian Olympiad 1998/9.8)**.** Dos enteros positivos a y b son escritos en una pizarra. En un *movimiento*, se borra el menor de los números en la pizarra y en su lugar se escribe el número $\frac{ab}{|a-b|}$. Demuestre que en algún momento, los dos números en la pizarra serán iguales.

[aops:2621673]

Solución. Digamos que $a > b$. Si $a = bq + r$ donde $0 \le r < b$, tenemos que

$$(a, b) \to \left(a, \frac{ab}{a-b}\right) \to \cdots \to \left(a, \frac{ab}{a-bq}\right) = \left(\frac{a}{r} \cdot r, \frac{a}{r} \cdot b\right)$$

y así podemos continuar con la pareja (b, r) hasta obtener la pareja (d, d) (multiplicado por algún número racional) siendo $d = \operatorname{mcd}(a, b)$. □

[E] Problema 2.8. En una fila, que tiene la forma de un tablero infinito (en ambas direcciones), hay varios caramelos. Un *movimiento* consiste en elegir una casilla que contenga al menos cuatro caramelos, luego, se extrae cuatro caramelos de esa casilla y se coloca 2 caramelos en la casilla anterior y 2 caramelos en la casilla posterior. ¿Es posible que después de un número finito de movimientos se pueda regresar a la configuración inicial?

Solución. La respuesta es no. Sea X la casilla que está más a la izquierda tal que el número de caramelos en ella es mayor que el número inicial. En cada operación, X no se mueve o se mueve más a la izquierda. Por lo tanto, siempre existe una casilla con el número de caramelos mayor que el inicial. □

[E] Problema 2.9. Inicialmente hay 2022 osos de peluche repartidos aleatoriamente en 127 cajas. Un *movimiento* consiste en elegir una caja que no contenga a todos los osos de peluche, retirar un oso de peluche, y colocarlo en otra caja cuyo número de peluches sea mayor o igual que el de la caja elegida. Demuestre que eventualmente todos los osos de peluches estarán en una misma caja.

Solución. Sea C el conjunto de los números de osos de peluche (mayores que 0) en cada caja y sea P el producto de todos los elementos de C. En cada movimiento, elegimos dos cajas con números de osos $a \le b$ y tendremos $(a, b) \to (a-1, b+1)$. Como $(a-1)(b+1) < ab$, el producto P o el cardinal $|C|$ disminuye, por lo que al final siempre tendremos una sola caja conteniendo todos los osos de peluche. □

[M] Problema 2.10 (ISL 2005/C5)**.** Se dispone de n fichas en una fila, cada una de las cuales tiene un lado blanco y un lado negro, donde inicialmente están con el lado blanco hacia arriba. Un *movimiento* consiste en elegir una ficha con el lado blanco (que no sea de ningún extremo), quitarlo de la ficha y voltear sus dos fichas vecinas. Demuestre que es posible conseguir una configuración con exactamente dos fichas si y solo si $n-1$ no es divisible por 3.

[E] Problema 2.11. En $n-1$ casillas de un tablero de $n \times n$ se ha escrito el número 1 y en las casillas restantes se ha escrito el número cero. Un *movimiento* consiste en elegir una casilla, restarle 1 al número escrito en ella y sumarle 1 a todos los números que están en casillas de su misma fila y a todos los números que están en casillas de su misma columna. ¿Es posible, luego de algunos movimientos, obtener un tablero cuyos números son todos iguales?

Jueves
2022-03-24

[M] Problema 2.12 (IberoAmerican 1995/5)**.** La circunferencia inscrita en el triángulo ABC es tangente a BC, CA y AB en D, E y F respectivamente. Suponga que dicha circunferencia corta de nuevo a AD en su punto medio X, es decir, $AX = XD$. Las rectas XB y XC cortan de nuevo a la circunferencia inscrita en Y y en Z, respectivamente. Demuestre que $EY = FZ$.

[aops:15699]

Solución. Sea P el punto medio de FD. Como XY es simediana de $\triangle XFD$, tenemos que

$$\angle BFY = \angle FXY = \angle PXD = \angle FAD$$

de donde $FY \parallel AD$ y análogamente $EZ \parallel AD$. Por lo tanto, $FY \parallel EZ$ de donde $EY = FZ$. □

Viernes 2022-03-25

[E] Problema 2.13 (JBMO Shortlist 2016/C4)**.** A splitting of a planar polygon is a finite set of triangles whose interiors are pairwise disjoint, and whose union is the polygon in question. Given an integer $n \geq 3$, determine the largest integer m such that no planar n-gon splits into less than m triangles.

[aops:9180563]

Solución. La respuesta es $m = \lceil n/3 \rceil$. La figura 1 muestra un ejemplo con $n = 6$.

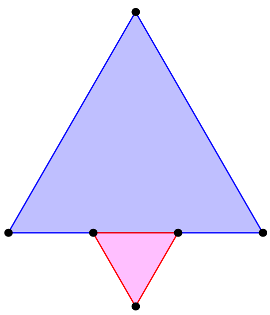

Figura 1: Hexágono cóncavo cuvierto por 2 triángulos.

En este caso, el mínimo número requerido de triángulos es claramente 2. Generalmente, es posible construir un n-ágono compuesto por $\lceil n/3 \rceil$ triángulos. Ahora, si t es el número de triángulos, tenemos que probar que $n \leq 3t$. Pero claramente, cada vértice del polígono corresponde a al menos un vértice de un triángulo, y cada triángulo tiene 3 vértices. Con esto se termina la prueba. □

[E] Problema 2.14 (JBMO Shortlist 2016/N4)**.** Find all triples of integers (a, b, c) such that the number

$$N = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2} + 2$$

is a power of 2016.

[aops:6565545]

Solución. Sea $N = 2016^n$ donde $n \in \mathbb{Z}_0^+$. Si $n = 0$, $(a-b)(b-c)(c-a) = -2$ de donde $(a, b, c) = (k+2, k+1, k), (k+1, k, k+2), (k, k+2, k+1)$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Si $n \geq 1$, nos va a quedar una ecuación como

$$(x+y)xy = 2(2016^n - 2) \equiv -4 \pmod 9$$

donde $x \equiv y \pmod 3$. Analizando por casos sale un absurdo. □

[M] **Problema 2.15** (IberoAmerican 2021/3)**.** Sea $a_1, a_2, a_3, \dots$ una sucesión de enteros positivos y sea $b_1, b_2, b_3, \dots$ la sucesión de números reales dada por

$$b_n = \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}, \quad \text{para } n \geq 1.$$

Demuestre que si entre cada millón de términos consecutivos de la sucesión $b_1, b_2, b_3, \dots$ existe al menos uno que es entero, entonces existe algún k tal que $b_k > 2021^{2021}$.

[aops:23437726]

Solución. Supongamos que existe un entero M tal que $b_i \leq M$ para todo $i \geq 1$. Sea $i_0 > 10^6 \cdot M$ un índice tal que b_{i_0} es entero. Luego, existe un índice $i_1 > i_0$ tal que $i_1 \leq i_0 + 10^6$ y b_{i_1} es entero. Sea t el número de índices $i_0 < i \leq i_1$ tales que $a_i > 1$. Si $t = 0$, claramente $b_{i_0} > b_{i_1}$ de donde

$$\frac{a_1 a_2 \cdots a_{i_0} (i_1 - i_0)}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{i_0})(a_1 + a_2 + \cdots + a_{i_1})} = b_{i_0} - b_{i_1} \geq 1$$

y

$$b_{i_0} = \frac{a_1 a_2 \cdots a_{i_0}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{i_0}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{i_1}}{i_1 - i_0} \geq \frac{i_1}{10^6} > M$$

lo cual es una contradicción. Por ende, $t \geq 1 = \frac{10^6}{10^6} > \frac{i_1 - i_0}{i_0 - 1}$ de donde $2^t - 1 \geq t > \frac{2t + (i_1 - i_0 - t)}{i_0}$. Sea $P = a_{i_0+1} a_{i_0+2} \cdots a_{i_1} \geq 2^t$. Luego,

$$\begin{aligned} 1 &> \frac{1}{2^t} + \frac{1}{i_0}\left(\frac{t}{2^{t-1}} + \frac{i_1 - i_0 - t}{2^t}\right) \\ &\geq \frac{1}{P} + \frac{1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{i_0}}\left(\frac{a_{i_0+1} + a_{i_0+2} + \cdots + a_{i_1}}{P}\right) \\ &= \frac{b_{i_0}}{b_{i_1}} \end{aligned}$$

de donde $b_{i_1} > b_{i_0}$. Por lo tanto, existe una secuencia estrictamente creciente de índices $\{i_j\}_{j \geq 0}$ tal que $\{b_{i_j}\}_{j \geq 0}$ es una secuencia estrictamente creciente de enteros. Luego, existe un b_i tal que $b_i > M$, lo cual es una contradicción. Es decir, la secuencia $\{b_i\}_{i \geq 1}$ no es acotada superiormente. Aquí se termina la prueba. □

[E] **Problema 2.16** (IberoAmerican 2021/5)**.** Para un conjunto finito C de enteros, se define $S(C)$ como la suma de los elementos de C. Encuentre dos conjuntos no vacíos A y B cuya intersección es vacía, cuya unión es el conjunto $\{1, 2, \dots, 2021\}$ y tales que el producto $S(A)S(B)$ es un cuadrado perfecto.

[aops:23437791]

Solución. Considere a los números $(a, b) = (6063 \cdot 9^2, 6063 \cdot 16^2)$. Note que $a + b = 6063 \cdot 337 = \frac{2021 \cdot 2022}{2}$ y $ab = (6063 \cdot 9 \cdot 16)^2$. Es claro que existen subconjuntos no vacíos y disjuntos A y B de $\{1, 2, \dots, 2021\}$ tales que $|A| = a$ y $|B| = b$. Aquí se termina la prueba. □

Problema 2.17 (IberoAmerican 2021/6)**.** Considere un polígono regular de n lados, $n \geq 4$, y sea V un subconjunto de r vértices del polígono. Demuestre que si $r(r-3) \geq n$, entonces existen al menos dos triángulos congruentes cuyos vértices pertenecen a V.

[aops:23437854]

Problema 2.18 (RMM 2021/1)**.** Sean T_1, T_2, T_3 y T_4 puntos colineales, distintos por parejas, tales que T_2 se encuentra entre T_1 y T_3; T_3 se encuentra entre T_2 y T_4. Sea ω_1 un círculo que pasa por T_1 y T_4; sea ω_2 el círculo que pasa por T_2 y es tangente interiormente a ω_1 en T_1; sea ω_3 el círculo que pasa por T_3 y es tangente exteriormente a ω_2 en T_2; sea ω_4 el círculo que pasa por T_4 y es tangente exteriormente a ω_3 en T_3. Una recta corta a ω_1 en P y W, a ω_2 en Q y R, a ω_3 en S y T, a ω_4 en U y V, siendo el orden de estos puntos P, Q, R, S, T, U, V, W. Demuestra que $PQ + TU = RS + VW$.

[aops:23374851]

[E] **Problema 2.19** (Balkan MO 2016/3)**.** Find all monic polynomials f with integer coefficients satisfying the following condition: there exists a positive integer N such that p divides $2(f(p)!) + 1$ for every prime $p > N$ for which $f(p)$ is a positive integer.

[aops:6316984]

Solución. Es claro que $f(p) < p$ para todo primo $p > N$. Es decir, $\deg f = 1$. En efecto, sea $f(x) = x - c$ donde $c \in \mathbb{Z}^+$. Si $c \leq 2$, claramente $2(p-1)! + 1 \equiv -1 \pmod{p}$ y $2(p-2)! + 1 \equiv 3 \pmod{p}$ para $p > 3$ lo cual es un absurdo. Si $c > 3$, note que

$$2(p-3)! + 1 \equiv 0 \equiv 2(p-c)! + 1 \pmod{p}$$

de donde $(p-c+1)(p-c+2)\cdots(p-3) \equiv 1 \pmod{p}$. Luego, $3 \cdot 4 \cdots (c-1) \equiv (-1)^{c-3} \pmod{p}$ para todo $p > 3$ de donde

$$3 \leq 3 \cdot 4 \cdots (c-1) = (-1)^{c-3} \leq 1$$

lo cual es un absurdo. Por lo tanto, $c = 3$ y $f(x) = x - 3$. □

Sábado
2022-03-26
Simulacro

[E] **Problema 2.20** (RMM 2016/1)**.** Sea ABC un triángulo y sea D un punto en el segmento BC, $D \neq B$ y $D \neq C$. La circunferencia ABD intersecta nuevamente al segmento AC en el punto interior E. La circunferencia ACD intersecta nuevamente al segmento AB en el punto interior F. Sea A' el simétrico de A con respecto a la recta BC. Las rectas $A'C$ y DE se intersectan en P, y las rectas $A'B$ y DF se intersectan en Q. Pruebe que las rectas AD, BP y CQ son concurrentes (o todas paralelas).

Solución. Sean E' y F' los simétricos de E y F con respecto a la recta BC. Note que

$$\angle BDF' = \angle FDB = \angle FAC \equiv \angle BAE = \angle CDE$$

de donde $F' \in DE$. Análogamente, $E' \in DF$. Como $F'A'CD$ es cíclico, $PA' \cdot PC = PF' \cdot PD$ de donde BP es el eje radical de $\odot(A'BC)$ y $\odot(F'DB)$. Análogamente, CQ es el eje radical de $\odot(A'BC)$ y $\odot(E'DC)$. Como $\triangle DBF' \cong \triangle DE'C$, el punto $R = BE' \cap CF'$ es la intersección de las circunferencias $\odot(F'DB)$ y $\odot(E'DC)$. Luego,

$$\angle F'DR = \angle F'BR \equiv \angle A'BE' = \angle EBA = \angle EDA$$

de donde $R \in AD$. Es decir, AD es el eje radical de $\odot(F'DB)$ y $\odot(E'DC)$. Por lo tanto, AD, BP y CQ concurren en el centro radical de las circunferencias $\odot(A'BC)$, $\odot(F'DB)$ y $\odot(E'DC)$. □

[H] **Problema 2.21** (RMM 2016/2)**.** Dados los enteros positivos m y $n \geq m$, determine el mayor número de fichas de dominó que pueden ser colocadas en un tablero cuadriculado rectangular de m filas y $2n$ columnas, tales que:

(i) cada ficha cubre exactamente dos casillas adyacentes del tablero;

(ii) no hay dos fichas que se sobrepongan;

(iii) no hay dos fichas que formen un cuadrado de 2×2; y

(iv) la fila inferior del tablero está completamente cubierta por n fichas.

Solución. Sean C_i el conjunto de los dominós verticales en la columna i, H_i el conjunto de los dominós horizontales tales que sus dos casillas están en las columnas i y $i+1$, y X_i el conjunto de los dominós en V_i que están en la fila 1. Ahora, considere el subtablero de $2n \times 2$ formado por las columnas i y $i+1$. Note que los dominós en V_i separan al subtablero en varios subtableros de $2 \times t_1, 2 \times t_2, \dots, 2 \times t_k$ donde

$$\sum_{j=1}^{k} t_j = 2n - |V_i| .$$

Es claro que un dominó que pertenece en H_i o H_{i+1} está en algún subtablero de $2 \times t_j$. Por la tercera condición, en cada subtablero de $2 \times t_j$ hay a lo sumo $t_j - 1$ dominós horizontales. Por lo tanto,

$$|H_i| + |H_{i+1}| \le \sum_{j=1}^{k} (t_j - 1) = 2n - |V_i| - k$$

de donde $|H_i| + |H_{i+1}| + 2|V_i| \le 2n - 1 + |V_i| + 1 - k$. Luego,

$$\begin{aligned} 2\sum_{i=1}^{m} |H_i| + 2\sum_{i=1}^{m} |V_i| &\le |H_1| + |H_m| + (2n-1)(m-1) \\ &= (|H_1| - n) + (|H_m| - n) + 2mn - m + 1 \\ &\le 2mn - m + 1 \end{aligned}$$

de donde $mn - \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ es el mayor número de fichas de dominó en el tablero. □

Problema 2.22 (RMM 2016/3)**.** Una *sucesión cúbica* es una sucesión de números enteros dada por $a_n = n^3 + bn^2 + cn + d$, donde b, c y d son constantes enteras y n recorre todos los enteros, incluyendo a los enteros negativos.

(a) Pruebe que existe una sucesión cúbica tal que los únicos términos de la sucesión que son cuadrados de enteros son a_{2015} y a_{2016}.

(b) Determine los posibles valores de $a_{2015} \cdot a_{2016}$ para una sucesión cúbica que satisface la condición de la parte (a).

Domingo
2022-03-27

[M] Problema 2.23. Sea M un conjunto finito de enteros positivos. Demuestre que es posible agregarle elementos (puede ser ninguno) de tal manera que en el nuevo conjunto, la suma de todos sus elementos es igual al mínimo común múltiplo de todos sus elementos.

Solución. Si $|M| = 1$, es trivial. Ahora, supongamos que $|M| > 1$. Si para algún entero $n > 1$ existen enteros positivos distintos $x_1, x_2, \dots, x_k$ tales que

$$\operatorname{mcm}(n-1, x_1, x_2, \dots, x_k) = 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k$$

tenemos que

$$\operatorname{mcm}(n, n-1, nx_1, nx_2, \dots, nx_k) = 1 + (n-1) + nx_1 + nx_2 + \cdots + nx_k$$

y

$$\text{mcm}(n, n^2 - 1, y_1, y_2, \ldots, y_k) = (n + 1) + (n^2 - 1) + y_1 + y_2 + \cdots + y_k$$

donde $y_i = n(n + 1)x_i$ para todo $1 \leq i \leq k$. Sea $n > 1$ el mínimo común múltiplo de los elementos de M. Como $\text{mcm}(1, 2, 3) = 1 + 2 + 3$, por inducción existen enteros positivos distintos $x_1, x_2, \ldots, x_k$ mayores que n tales que

$$\text{mcm}(n, x_1, x_2, \ldots, x_k) = n + 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k.$$

Si S es la suma de los elementos de M, tenemos que

$$\text{mcm}(n, Sn, Sx_1, Sx_2, \ldots, Sx_k) = S + Sn + Sx_1 + Sx_2 + \cdots + Sx_k.$$

Es decir, agregando los números $Sn, Sx_1, Sx_2, \ldots, Sx_k$ al conjunto M podemos lograr lo deseado. $\square$

§3 Semana 3 (03/28 – 04/03)

Martes
2022-03-29

[E] Problema 3.1 (Kyiv City MO 2022 Round 2/11.3)**.** Hallar el mayor $k \in \mathbb{Z}^+$ para el cual existe una permutación $a_1, a_2, \ldots, a_{2022}$ de los números $1, 2, \ldots, 2022$ tal que para al menos k índices $1 \leq i \leq 2022$, el siguiente número

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_i}{1 + 2 + \cdots + i}$$

es un entero mayor que 1.

[aops:24269928]

Solución. El mayor valor de k es 1011 y un ejemplo es

$$a_i = \begin{cases} 2i & \text{si } i \leq 1011, \\ 2i - 2023 & \text{si } i > 1011. \end{cases}$$

Ahora, supongamos que $k \geq 1012$. Sea

$$A_i = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_i}{1 + 2 + \cdots + i}$$

para todo índice i. Luego, existen dos índices $i > j \geq 1011$ tales que $A_i, A_j > 1$ son enteros. Si $A_i \geq 3$, tenemos que

$$\begin{aligned} 2023i - \frac{i(i+1)}{2} &= 2022 + 2021 + \cdots + (2023 - i) \\ &\geq a_1 + a_2 + \cdots + a_i \\ &\geq 3(1 + 2 + \cdots + i) \\ &= \frac{3i(i+1)}{2} \end{aligned}$$

de donde $i \leq 1010$, lo cual es un absurdo. Por ende, $A_i = 2$ y análogamente $A_j = 2$. Luego,

$$\begin{aligned} a_{j+1} + a_{j+2} + \cdots + a_i &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_i) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_j) \\ &= 2(1 + 2 + \cdots + i) - 2(1 + 2 + \cdots + j) \\ &= 2((j+1) + (j+2) + \cdots + i) \\ &> \underbrace{2022 + 2022 + \cdots + 2022}_{i-j \text{ veces}} \end{aligned}$$

lo cual es un absurdo. □

Miércoles
2022-03-30

[M] Problema 3.2 (MEMO 2021 T-2)**.** Dado un entero positivo n, decimos que un polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ es *n-bonito* si la ecuación $P(\lfloor x \rfloor) = \lfloor P(x) \rfloor$ tiene exactamente n soluciones. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

(a) existe algún polinomio n-bonito;

(b) todo polinomio n-bonito tiene grado mayor o igual que $\frac{2n+1}{3}$.

[aops:23091282]

Solución. Sea A el conjunto de las soluciones reales a la ecuación $P(\lfloor x \rfloor) = \lfloor P(x) \rfloor$. Note que si $x \in A$ entonces $\lfloor x \rfloor \in A$. Luego,

$$A = I \cup \bigcup_{i \in I} S_i$$

donde $I = \{x \in \mathbb{Z} : P(x) \in \mathbb{Z}\}$ y $S_i = \{x \in (i, i+1) : P(x) \in [P(i), P(i)+1)\}$. Por ende,

$$n = |A| = |I| + \sum_{i \in I} |S_i| .$$

Si $|I| > \deg P$, es posible construir un polinomio $Q \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $\deg Q \le \deg P$ y $P(x) - Q(x)$ tiene más de $\deg P$ raíces reales. Luego, $P(x) \equiv Q(x)$ de donde existen infinitos $x \in \mathbb{Z}$ tales que $P(x) \in \mathbb{Z}$, lo cual es un absurdo ya que $|I| \le n$. Es decir, $|I| \le \deg P$. Sea $\delta \in (i, i+1)$ para algún $i \in I$. Si $P(\delta) > P(i)$, para todo $\epsilon \in (P(i), P(\delta))$ existe algún $x \in (i, \delta)$ tal que $P(x) = \epsilon$. Luego, existen infinitos $x \in (i, i+1)$ tales que $P(x) \in (P(i), P(i)+1)$, lo cual es un absurdo ya que $|S_i| \le n$. Por ende, $P(x) \le P(i)$ para todo $x \in (i, i+1)$ y $P(x) = P(i)$ para todo $x \in S_i$. Es decir, en el intérvalo $(i, i+1)$ existen $2|S_i|$ ceros reales de la derivada de P. Luego,

$$n = |I| + \sum_{i \in I} |S_i| < \deg P + \frac{1}{2} \deg P = \frac{3}{2} \deg P$$

de donde $\deg P \ge \frac{2n+1}{3}$. Un ejemplo de un polinomio n-bonito es

$$P(x) = -\pi (x-1)^2 (x-2)^2 \cdots (x-n)^2$$

donde $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $S_i = \varnothing$ para todo $i \in I$. □

[M] **Problema 3.3** (MEMO 2020 I-4)**.** Determine todos los enteros positivos n para los cuales existen enteros positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tales que

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{2}{x_2^2} + \frac{4}{x_3^2} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{x_n^2} = 1.$$

[aops:17377469]

Solución. Probaremos que $\mathbb{Z}^+ \setminus \{2\}$ es el conjunto de valores de n.

- Si $n = 1$, es suficiente con $x_1 = 1$.
- Si $n = 2$, es claro que $x_1, x_2 \ge 2$. Luego, $1 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{2}{x_2^2} \le \frac{3}{4}$ lo cual es un absurdo.
- Si $n \ge 3$ es impar, sean $x_n = 2^{n-1}$ y $x_i = 2^{\frac{n-1}{2}}$ para todo $1 \le i \le n-1$. Luego,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2^{i-1}}{x_i^2} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2^{i-1}}{2^{n-1}} + \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^2} = \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} = 1.$$

- Si $n \ge 4$ es par, sean $(x_1, x_{n-1}, x_n) = \left(3 \cdot 2^{\frac{n-2}{2}}, 2^{n-2}, 3 \cdot 2^{n-3}\right)$ y $x_i = 2^{\frac{n-2}{2}}$ para todo $2 \le i \le n-2$. Luego,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \frac{2^{i-1}}{x_i^2} &= \frac{1}{9 \cdot 2^{n-2}} + \sum_{i=2}^{n-2} \frac{2^{i-1}}{2^{n-2}} + \frac{2^{n-2}}{(2^{n-2})^2} + \frac{2^{n-1}}{9 \cdot (2^{n-3})^2} \\ &= \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{2^{n-2}-2}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-2}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

$\square$

Viernes
2022-04-01

[E] Problema 3.4 (MEMO 2018 I-4)**.** (a) Demuestre que para todo $m \in \mathbb{Z}^+$ existe un entero $n \geq m$ tal que

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdots \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \binom{n}{m}. \tag{$*$}$$

(b) Sea $p(m)$ el menor entero $n \geq m$ tal que la ecuación $(*)$ cumple. Demuestre que $p(2018) = p(2019)$.

[aops:10959197]

Solución. Note que

$$\prod_{i=1}^{m} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \geq \prod_{i=1}^{m} \frac{n-i+1}{i} = \binom{n}{m}$$

de donde $i \mid n-i+1$ para todo $1 \leq i \leq m$. Es decir, $n = k \cdot \mathrm{mcm}(1, 2, \ldots, m) - 1$ para algún $k \in \mathbb{Z}^+$. De esto tenemos que $p(m) = \mathrm{mcm}(1, 2, \ldots, m) - 1$ para todo $m > 1$. Como $2019 = 3 \times 673$ divide a $\mathrm{mcm}(1, 2, \ldots, 2018)$, tenemos que

$$p(2018) = \mathrm{mcm}(1, 2, \ldots, 2018) - 1 = \mathrm{mcm}(1, 2, \ldots, 2019) - 1 = p(2019).$$

Con esto se termina la prueba. $\square$

[E] Problema 3.5 (MEMO 2018 T-7)**.** Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una secuencia definida por

$$a_1 = 1 \quad \text{y} \quad a_{k+1} = a_k^3 + 1, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}^+.$$

Demuestre que para todo número primo p de la forma $3\ell + 2$ con $\ell \in \mathbb{Z}_0^+$, existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $p \mid a_n$.

[aops:10935321]

Solución. Note que si $x^3 \equiv y^3 \pmod{p}$, tenemos que

$$x \equiv (x^3)^{\frac{2p-1}{3}} \equiv (y^3)^{\frac{2p-1}{3}} \equiv y \pmod{p}.$$

Como el mapeo $x \mapsto x^3 + 1 \pmod{p}$ es biyectivo, la secuencia (a_i) es periódica en módulo p. Es decir, $a_{n+1} \equiv a_1 \equiv 1 \pmod{p}$ para algún $n \in \mathbb{Z}^+$, de donde $a_n \equiv 0 \pmod{p}$. $\square$

[M] Problema 3.6 (MEMO 2018 T-8)**.** Un entero positivo n es llamado *interesante* si existen enteros positivos a, b y c tales que

$$n = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}.$$

(a) Demuestre que existen infinitos números interesantes.

(b) Demuestre que no todos los enteros positivos son interesantes.

[aops:10931715]

Solución. Si $n = 4$, digamos que $\mathrm{mcd}(a, b, c) = 1$. Luego, $4 \mid a^2 + b^2 + c^2$ de donde a, b, c son pares, lo cual es un absurdo. Por lo tanto, 4 no es Silesio. Ahora, supongamos que $n = a^2 + (1-a)^2 + (a^2 - a + 1)^2$, donde $b = 1 - a$ y $c = a^2 - a + 1$ para algún valor de a. Podemos comprobar que esto cumple, por lo que $b = 1 - a$ es una raíz de la ecuación $b^2 - n(c+a)b + (c^2 + a^2 - nca) = 0$. Es decir, la otra raíz es igual a $n(c+a) - (1-a) > 0$. Por ende, $a^2 + (1-a)^2 + (a^2 - a + 1)^2$ es Silesio para todo $a \in \mathbb{Z}^+$. Aquí se termina la prueba. $\square$

§4 Semana 4 (04/04 – 04/10)

Lunes
2022-04-04
Entrenamiento EGMO

[M] Problema 4.1 (Balkan MO 2005/4). Sea $n \geq 2$ un entero. Sea S un subconjunto de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tal que S no contiene dos elementos tal que uno divida al otro, ni tampoco contiene dos elementos que sean coprimos. Determine el mayor número posible de elementos de S.

[aops:225001]

Solución. La respuesta es $\left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor$. □

[M] Problema 4.2 (Croatian MO 2018/5). Sea n un entero positivo y $\mathcal{C}$ una circunferencia. En la región interior de $\mathcal{C}$ se ubican los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y en $\mathcal{C}$ se ubican los puntos $B_1, B_2, \ldots, B_n$, de modo que $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ son disjuntos dos a dos. Un saltamontes puede saltar del vértice A_i al vértice A_j, donde $i \neq j$, si A_iA_j no interseca al interior de ninguno de los segmentos $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$.

Demuestre que el saltamontes puede trasladarse de un vértice A_i a cualquier otro vértice A_j en un número finito de saltos.

[aops:12394250]

Martes
2022-04-05
Entrenamiento EGMO

[E] Problema 4.3 (Spain [A1]). Demostrar que x es racional si y solo si la sucesión

$$x,\ x+1,\ x+2,\ \ldots$$

contiene al menos tres términos en progresión geométrica.

Solución. Supongamos que x es un número racional. Si x no es positivo, vamos a sumarle 1 hasta que sea positivo. Sea $x = \frac{p}{q}$ donde $p, q \in \mathbb{Z}^+$. Luego, los números x, $x+p$ y $x + p(q+2)$ están en una progresión geométrica. Ahora, supongamos que existen tres enteros $i, j, k \geq 0$ tales que $x+i$, $x+j$ y $x+k$ están en una progresión geométrica. En efecto, $(x+i)(x+k) = (x+j)^2$ de donde $x(i+k-2j) = j^2 - ik$. Si $i+k = 2j$, tenemos que $(i-k)^2 = (i+k)^2 - 4ik = 4(j^2 - ik) = 0$ de donde $i = k$, lo cual es un absurdo. Por ende, x es racional. □

[E] Problema 4.4 (CGMO 2008/8). Sea $f_n = \left\lfloor 2^n\sqrt{2008} \right\rfloor + \left\lfloor 2^n\sqrt{2009} \right\rfloor$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Demuestre que la secuencia $(f_n)_{n\geq 1}$ contiene infinitos pares y también infinitos impares.

[aops:1236876]

Solución. Sea $a_n = 1$ si $\left\{2^n\sqrt{2008}\right\} > \frac{1}{2}$ y 0 de lo contrario. Análogamente se define b_n con respecto a 2009. Si solamente hay finitos números de alguna paridad, tenemos que $f_{n+1} - 2f_n = a_n + b_n$ tiene la misma paridad para n suficientemente grande. Luego, $a_n = b_n$ o $a_n + b_n = 1$ para todo $n \geq N$ donde $N \in \mathbb{Z}^+$. Por ende, $2^N\sqrt{2008} \pm 2^N\sqrt{2009}$ es racional, lo cual es un absurdo. Finalmente, existen infinitos números pares e impares en la secuencia. □

Miércoles
2022-04-06

[E] Problema 4.5 (ISL 2003/A1). Let a_{ij} $(i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3)$ be real numbers such that a_{ij} is positive for $i = j$ and negative for $i \neq j$.

Prove the existence of positive real numbers c_1, c_2, c_3 such that the numbers

$$a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3, \quad a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23}c_3, \quad a_{31}c_1 + a_{32}c_2 + a_{33}c_3$$

are either all negative, all positive, or all zero.

[E] Problema 4.6. Si $a^2 < b^2$ son dos números de 1001 dígitos, demuestre que existe un número capicúa en el intervalo (a^2, b^2).

Solución. Es claro que entre $a^2+1, a^2+2, \ldots, a^2+10^{500}$ existe un múltiplo de 10^{500} y sea $\overline{a_{500}a_{499}\ldots a_1a_0} \cdot 10^{500}$ dicho número. Luego,

$$a^2 < \overline{a_{500}a_{499}\ldots a_1a_0a_1\ldots a_{499}a_{500}} \leq a^2 + 2\cdot 10^{500} < (a+1)^2 \leq b^2$$

y aquí se termina la prueba. □

[E] Problema 4.7 (IMO 2014/1)**.** Let $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ be an infinite sequence of positive integers. Prove that there exists a unique integer $n \geq 1$ such that

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

[aops:3542095]

[E] Problema 4.8. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$, k y M enteros positivos tales que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = k \quad \text{y} \quad M = a_1a_2\cdots a_n.$$

Si $M > 1$, demuestre que el polinomio

$$P(x) = M(x+1)^k - (x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)$$

no tiene raíces positivos.

Solución. Si $r > 0$ es una raíz de $P(x)$, tenemos que

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{a_i(r+1)^{\frac{1}{a_i}}}{r+a_i} = 1$$

pero note que

$$a^a(r+1) = \binom{a}{1} r a^{a-1} + a^a \leq (r+a)^a$$

de donde

$$\frac{a(r+1)^{\frac{1}{a}}}{r+a} \leq 1$$

para todo $a \in \mathbb{Z}^+$. Es decir, $a_i = 1$ para todo $1 \leq i \leq n$ de donde $M = 1$ lo cual es un absurdo. □

[E] Problema 4.9. Determine todas las parejas (x, y) de enteros positivos tales que

$$\sqrt[3]{7x^2 - 13xy + 7y^2} = |x - y| + 1.$$

Solución. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x \geq y$. No es difícil ver que

$$(x-y-2)^2(4x-4y+1) = (x+y)^2$$

de donde $x - y = k^2 + k$ para algún $k \in \mathbb{Z}_0^+$. Si $k = 0$, tenemos que $x - y = 0$ y $x + y = 2$ de donde $x = y = 1$. Si $k \geq 1$, note que

$$x + y = (k^2 + k - 2)(2k+1) = 2k^3 + 3k^2 - 3k - 2$$

de donde $(x, y) = (k^3 + 2k^2 - k - 1, k^3 + k^2 - 2k - 1)$ para algún $k \geq 2$. □

Problema 4.10. Para cada entero positivo n, el Banco de Ciudad del Cabo produce monedas de valor $\frac{1}{n}$. Dada una colección finita de tales monedas (no necesariamente de distintos valores) cuyo valor total no supera $99 + \frac{1}{2}$, demostrar que es posible separar esta colección en 100 o menos montones, de modo que el valor total de cada montón sea como máximo 1.

Viernes
2022-04-08
EGMO 2022
Día 1

[E] Problema 4.11 (EGMO 2022/1)**.** Sea ABC un triángulo acutángulo con $BC < AB$ y $BC < AC$. Considere los puntos P y Q en los segmentos AB y AC, respectivamente, tales que $P \neq B$, $Q \neq C$ y $BQ = BC = CP$. Sea T el circuncentro del triángulo APQ, H el ortocentro del triángulo ABC y S el punto de intersección de las rectas BQ y CP. Pruebe que los puntos T, H y S están en una misma recta.

Solución. Como BH y CH son las bisectrices del triángulo SBC, la recta HS biseca al ángulo $\angle BSC$. Note que

$$\angle PSQ = \angle BSC = 2\angle BHC - 180^\circ = 2(180^\circ - \angle BAC) - 180^\circ = 180^\circ - \angle PTQ$$

de donde $TPSQ$ es cíclico. Como T es el punto medio del arco PQ que no contiene a S, la recta TS biseca al ángulo $\angle PSQ$. Por ende, T, H y S pertenecen a la bisectriz del ángulo $\angle BSC$. $\square$

[M] Problema 4.12 (EGMO 2022/2)**.** Determine todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que para cualquier pareja de enteros positivos a y b, se cumplen las siguientes dos condiciones:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$, y

(2) al menos dos de los números $f(a)$, $f(b)$ y $f(a+b)$ son iguales.

Solución. Si $p \in \mathbb{Z}^+$ es el menor tal que $f(p) > 1$, es claro que p es primo. Si $a > p$ es el menor número coprimo con p tal que $f(a) > 1$, considerando a $f(p) > 1$, $f(a-p) = 1$ y $f(a) > 1$ tenemos que $f(a) = f(p)$. Si $a > p^2$, considerando a $f(p^2) = f(p)^2 > 1$, $f(a - p^2) = 1$ y $f(a) > 1$ tenemos que $f(p) = f(a) = f(p)^2$ lo cual es un absurdo. Ahora, sea $k = \lfloor p^2/a \rfloor$ donde $0 < k < p$. Como $0 < p^2 - ka < a$, considerando a $f(ka) = f(p)$, $f(p^2 - ka) = 1$ y $f(p^2) = f(p)^2$ tenemos un absurdo. Por ende, $f(a) = 1$ para todo $a \in \mathbb{Z}^+$ coprimo con p de donde $f(n) = a^{\nu_p(n)}$ para algún $a \in \mathbb{Z}^+$. Por lo tanto, $f(n) = 1$ o $f(n) = a^{\nu_p(n)}$ para algún entero $a > 1$ y un primo p. $\square$

[E] Problema 4.13 (EGMO 2022/3)**.** Se dice que una sucesión infinita de enteros positivos $a_1, a_2, \ldots$ es *húngara* si

(1) a_1 es un cuadrado perfecto, y

(2) para todo entero $n \geq 2$, a_n es el menor entero positivo tal que

$$na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n$$

es un cuadrado perfecto.

Pruebe que si $a_1, a_2, \ldots$ es una sucesión húngara, entonces existe un entero positivo k tal que $a_n = a_k$ para todo entero $n \geq k$.

Solución. Sea $c_n^2 = na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n$. Note que $c_n - c_{n-1}$ es decreciente y c_n es estrictamente creciente, de donde existe un $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $(c_n - c_{n-1} - 1)^2 \leq c_n$ para todo $n \geq k$. Es decir,

$$(2c_n - c_{n-1} - 1)^2 - c_n^2 \leq c_n^2 - c_{n-1}^2 < (2c_n - c_{n-1})^2 - c_n^2$$

de donde $c_{n+1} - c_n = c_n - c_{n-1} = d$ donde $d \in \mathbb{Z}^+$ es fijo. Es decir,

$$a_{n+1} = (c_{n+1}^2 - c_n^2) - (c_n^2 - c_{n-1}^2) = 2d^2$$

es fijo para todo $n \geq k$. □

Miscelánea

[E] Problema 4.14. Determine todos los polinomios $f(x)$ y $g(x)$ con coeficientes enteros tales que

$$f(g(x)) = x^{2015} + 2x + 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

[E] Problema 4.15. Determine si existe una secuencia $(a_i)_{i\geq 1}$ de enteros positivos tales que cada entero positivo aparece exactamente una vez en las secuencias $(a_i)_{i\geq 1}$ y $(|a_i - a_{i-1}|)_{i\geq 1}$.

Sábado
2022-04-09
EGMO 2022 Día 2

[E] Problema 4.16 (EGMO 2022/4)**.** Para cada entero positivo $n \geq 2$, determine el mayor entero positivo N con la propiedad de que existen $N+1$ números reales $a_0, a_1, \ldots, a_N$ tales que

(1) $a_0 + a_1 = -\frac{1}{n}$, y

(2) $(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$ para todo $1 \leq k \leq N-1$.

Solución. Sea $S_i = a_i + a_{i+1}$ para todo $0 \leq i \leq N-1$. Luego, $(1 - S_k)(1 + S_{k-1}) = 1$ para todo $1 \leq k \leq N-1$ de donde si $S_{k-1} = -\frac{1}{n-k+1}$ entonces $S_k = -\frac{1}{n-k}$. Es fácil ver que el mayor valor de N es n. □

[E] Problema 4.17 (EGMO 2022/5)**.** Dados n y k enteros positivos, sea $f(n, 2k)$ el número de formas en que un tablero de tamaño $n \times 2k$ puede ser completamente cubierto por nk fichas de dominó de tamaño 2×1. Encuentre todos los enteros positivos n tales que para todo entero positivo k, el número $f(n, 2k)$ es impar.

Solución. Si n es impar, por simetría con respecto a la fila central, podemos notar que $f(n, 2k) \equiv f(\frac{n-1}{2}, 2k) \pmod{2}$. Si n es par, por simetría con respecto a la diagonal principal, podemos notar que $f(n, n)$ es par. Ahora, sea $n = 2^t n_1 - 1$ donde n_1 es impar. Si $n_1 > 1$,

$$f(2^t n_1 - 1, n_1 - 1) \equiv f(2^{t-1} n_1 - 1, n_1 - 1) \equiv \cdots \equiv f(n_1 - 1, n_1 - 1) \equiv 0 \pmod{2}$$

de donde $n_1 = 1$. Por ende,

$$f(n, 2k) = f(2^t - 1, 2k) \equiv f(2^{t-1} - 1, 2k) \equiv \cdots \equiv f(1, 2k) = 1 \pmod{2}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}^+$. Aquí se termina la prueba. □

[E] Problema 4.18 (EGMO 2022/6)**.** Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico con circuncentro O. Sea X el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle DAB$ y $\angle ABC$; sea Y el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle ABC$ y $\angle BCD$; sea Z el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle BCD$ y $\angle CDA$; y sea W el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle CDA$ y $\angle DAB$. Sea P el punto de intersección de las rectas AC y BD. Suponga que los puntos O, P, X, Y, Z y W son distintos. Pruebe que O, X, Y, Z y W están sobre una misma circunferencia si y solo si P, X, Y, Z y W están sobre una misma circunferencia.

Solución. Si $Q = AB \cap CD$, $R = AD \cap BC$, $S = OQ \cap PR$ y $T = OR \cap PQ$ entonces $QS \cdot QO = QA \cdot QB = QY \cdot QW$. Luego, si $\odot(XYZW) \neq \odot(OSPT)$ entonces QR es el eje radical de ellas. Es decir, como O y P no pertenecen a QR, entonces O y P no están sobre $\odot(XYZW)$. Si $\odot(XYZW) = \odot(OSPT)$ entonces O y P están sobre $\odot(XYZW)$. Con esto se termina la prueba. □

§5 Semana 5 (04/11 – 04/17)

Lunes
2022-04-11
Álgebra

[E] Problema 5.1 (ISL 2003/A2)**.** Find all nondecreasing functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

(i) $f(0) = 0, f(1) = 1$;

(ii) $f(a) + f(b) = f(a)f(b) + f(a + b - ab)$ for all real numbers a, b such that $a < 1 < b$.

[E] Problema 5.2 (ISL 2003/A3)**.** Consider pairs of sequences of positive real numbers

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots, \quad b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots$$

and the sums

$$A_n = a_1 + \cdots + a_n, \quad B_n = b_1 + \cdots + b_n; \quad n = 1, 2, \ldots.$$

For any pair define $c_i = \min\{a_i, b_i\}$ and $C_n = c_1 + \cdots + c_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

(1) Does there exist a pair $(a_i)_{i\geq 1}$, $(b_i)_{i\geq 1}$ such that the sequences $(A_n)_{n\geq 1}$ and $(B_n)_{n\geq 1}$ are unbounded while the sequence $(C_n)_{n\geq 1}$ is bounded?

(2) Does the answer to question (1) change by assuming additionally that $b_i = 1/i$, $i = 1, 2, \ldots$?

[M] Problema 5.3 (ISL 2003/A4)**.** Let n be a positive integer and let $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ be real numbers.

(1) Prove that
$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j|\right)^2 \leq \frac{2(n^2-1)}{3} \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_j)^2.$$

(2) Show that the equality holds if and only if $x_1, \ldots, x_n$ is an arithmetic sequence.

Miércoles
2022-04-13

[E] Problema 5.4 (Kosovo MO 2021/10.4)**.** Let M be the midpoint of segment BC of $\triangle ABC$. Let D be a point such that $AD = AB$, $AD \perp AB$ and points C and D are on different sides of AB. Prove that

$$\sqrt{AB \cdot AC + BC \cdot AM} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} CD.$$

[aops:20639935]

Combinatoria

[E] Problema 5.5 (ISL 2003/C4)**.** Let $x_1, \ldots, x_n$ and $y_1, \ldots, y_n$ be real numbers. Let $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ be the matrix with entries

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } x_i + y_j \geq 0; \\ 0, & \text{if } x_i + y_j < 0. \end{cases}$$

Suppose that B is an $n \times n$ matrix with entries 0, 1 such that the sum of the elements in each row and each column of B is equal to the corresponding sum for the matrix A. Prove that $A = B$.

[M] **Problema 5.6** (ISL 2003/C5)**.** Every point with integer coordinates in the plane is the center of a disk with radius $1/1000$.

(1) Prove that there exists an equilateral triangle whose vertices lie in different discs.

(2) Prove that every equilateral triangle with vertices in different discs has side-length greater than 96.

Problema 5.7 (ISL 2003/C6)**.** Let $f(k)$ be the number of integers n that satisfy the following conditions:

(i) $0 \leq n < 10^k$, so n has exactly k digits (in decimal notation), with leading zeroes allowed;

(ii) the digits of n can be permuted in such a way that they yield an integer divisible by 11.

Prove that $f(2m) = 10f(2m-1)$ for every positive integer m.

§6 Semana 6 (04/18 – 04/24)

Lunes
2022-04-18
Álgebra

[E] Problema 6.1. Sean a, b, c, d, e, f números reales no negativos que suman 6. Determine el máximo valor de

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab.$$

Solución. La respuesta es 8 (un ejemplo es $(a, b, c, d, e, f) = (2, 2, 2, 0, 0, 0)$). Es claro que la expresión dada es igual a $a(bc + ef + fb) + d(bc + ce + ef)$. Analizando por casos, tenemos que $0 \in \{a, d\} \cap \{b, e\} \cap \{c, f\}$. Es decir, la expresión dada es igual a 0 o sin pérdida de generalidad $a, b, c \neq 0$ y $d, e, f = 0$. Luego, la expresión dada es igual a $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = 8$. □

[M] Problema 6.2. Una secuencia (a_n) de números reales no negativos satisface

$$|a_m - a_n| \geq \frac{1}{m+n}, \quad \forall\, m \neq n.$$

Demuestre que si $a_n < c$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces $c \geq 1$.

Solución. Note que si $i_1, i_2, \ldots, i_n$ es una permutación de $1, 2, \ldots, n$ tal que $a_{i_1} \geq a_{i_2} \geq \cdots \geq a_{i_n}$, entonces

$$\begin{aligned} c \geq a_{i_1} - a_{i_n} &= \sum_{j=1}^{n-1} (a_{i_j} - a_{i_{j+1}}) \\ &\geq \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{i_j + i_{j+1}} \geq \frac{(n-1)^2}{2(i_1 + i_2 + \cdots + i_n) - i_1 - i_n} \\ &> \frac{(n-1)^2}{n(n+1)} \end{aligned}$$

para todo $n > 1$ de donde $c \geq 1$. □

Martes
2022-04-19

Problema 6.3 (Iran TST 2019 Test 1/5)**.** Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that for all $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f\left(f(x)^2 - y^2\right)^2 + f(2xy)^2 = f\left(x^2 + y^2\right)^2.$$

[aops:12147602]

Combinatoria

Teorema 6.4 (Hall's Marriage Theorem)
Let G be a finite bipartite graph with bipartite sets X and Y. Then, there is an X-perfect matching if and only if

$$|W| \leq |N_G(W)|$$

for every subset W of X.

[E] Problema 6.5. Tenemos dos superficies congruentes compuestas por 2022 regiones de área 1. Demostrar que si superponemos las dos superficies, es posible pinchar las 4044 regiones en solo 2022 pinchazos.

[E] **Problema 6.6.** En cada fila y columna de un tablero de $n \times n$ hay k fichas. Demuestre que es posible elegir n fichas que están en filas diferentes y columnas diferentes.

[E] **Problema 6.7.** En un tablero de 4×13 se colocan 52 cartas de naipe (una en cada casilla). Demuestre que existen 13 cartas de números distintos que están en columnas distintas.

[E] **Problema 6.8.** En cada casilla de un tablero de $n \times n$ está escrito un 0 o un 1 de tal manera que entre cualesquiera n casillas que no están en la misma fila ni en la misma columna, al menos una de ellas tiene escrito el número 1. Demuestre que existen i filas y j columnas de tal manera que $i + j \geq n + 1$ y en las ij casillas de sus intersecciones esté escrito el número 1.

[E] **Problema 6.9.** Sea $\mathcal{X}$ un conjunto finito y sean

$$\bigcup_{i=1}^{n} X_i = \mathcal{X} \qquad \bigcup_{j=1}^{n} Y_j = \mathcal{X}$$

dos descomposiciones disjuntas de $\mathcal{X}$, de tal manera que los $2n$ subconjuntos X_i y Y_j tengan el mismo número de elementos. Demuestre que podemos elegir n elementos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ de $\mathcal{X}$ de tal manera que estos n elementos estén en diferentes conjuntos en cada descomposición.

[E] **Problema 6.10.** En cada casilla de un tablero de $n \times n$ se ha escrito un número entero no negativo de tal manera que la suma de los n números en cada fila y en cada columna es 1. Demuestre que es posible elegir n números de diferentes filas y diferentes columnas que son positivos.

[E] **Problema 6.11.** Para cada conjunto finito $\mathcal{S}$ de números enteros positivos, sea $\mathcal{S}^*$ el conjunto que se obtiene al sumar 2 a cada elemento de $\mathcal{S}$. ¿Para cuántos conjuntos $\mathcal{S}$ se cumple que la unión de $\mathcal{S}$ con $\mathcal{S}^*$ es el conjunto de todos los enteros positivos del 1 al 2022?

Solución. La respuesta es f_{1010}^2. Pista: recurrencias. □

Miércoles
2022-04-20
Geometría

[E] **Problema 6.12** (IberoAmerican 1999/6)**.** Sean A y B puntos del plano y C un punto de la mediatriz del segmento AB. Se construye una secuencia de puntos (C_i) de la siguiente manera: $C_1 = C$ y para $n \geq 1$, si C_n no pertenece al segmento AB, entonces C_{n+1} es el circuncentro del triángulo ABC_n. Determine todos los puntos C para los cuales la secuencia (C_n) está definida para todo entero positivo n y es eventualmente periódica.

[E] **Problema 6.13** (IberoAmerican 2002/3)**.** Un punto P, en el interior de un triángulo equilátero ABC, es tal que $\angle APC = 120°$. Sea M el punto de intersección de las rectas CP y AB, y sea N el punto de intersección de las rectas AP y BC. Determine el lugar geométrico del circuncentro del triángulo MBN al variar P.

Solución. Respuesta: El segmento que une los puntos medios de los arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{BC}$ de $\odot(ABC)$. □

[M] **Problema 6.14.** Sea X un punto variable sobre el arco AC, del circuncírculo del triángulo ABC, que no contiene al punto B. El punto Y está sobre la prolongación de BA por A y es tal que $AY = AX$, donde A está entre B y Y. El punto Z está en la prolongación de BC por C y es tal que $CZ = CX$, donde C está entre B y Z. Determine el lugar geométrico de todos los puntos medios del segmento YZ al variar X.

Solución. Si M y P son puntos medios de AC y YZ respectivamente, note que

$$\begin{aligned}4 \cdot |MP|^2 &= \left\|2 \cdot \overrightarrow{MP}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AY} + \overrightarrow{CZ}\right\|^2 \\ &= |AY|^2 + |CZ|^2 + 2 \cdot |AY| \cdot |CZ| \cdot \cos \angle ABC \\ &= |XA|^2 + |XC|^2 - 2 \cdot |XA| \cdot |XC| \cdot \cos \angle AXC \\ &= |AC|^2\end{aligned}$$

de donde P pertenece a la semicircunferencia de diámetro AC. □

Viernes 2022-04-22

[E] Problema 6.15. Let $ABCD$ be a trapezoid with parallel sides $AB > CD$. Points K and L lie on the line segments AB and CD, respectively, so that $AK/KB = DL/LC$. Suppose that there are points P and Q on the line segment KL satisfying

$$\angle APB = \angle BCD \quad \text{and} \quad \angle CQD = \angle ABC.$$

Prove that the points P, Q, B and C are concyclic.

Solución. Pista: semejanza y angulitos. □

Teoría de Números

[E] Problema 6.16. Para cada entero positivo n, denotemos por $P(n)$ al mayor divisor primo del número $n^2 + n + 1$. Demuestre que

$$P(n) > 2n + \sqrt{2n}$$

para infinitos enteros positivos n.

Solución. Pista: demuestra primero que $P(n) > 2n$ y luego que $2n < P(n) \leq 2n + \sqrt{2n}$ no cumple. □

[E] Problema 6.17. Demuestre que existe un $c \in \mathbb{R}^+$ tal que para cualesquiera $a, b, n \in \mathbb{Z}^+$, con $n > 1$ y $a!b! \mid n!$, se cumple la desigualdad

$$a + n < n + c \cdot \ln(n).$$

Solución. Pista: sale con la identidad

$$\nu_p(n) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = \frac{n - s_p(n)}{p - 1}$$

con $p = 3$ (también con $p = 2$). □

[E] Problema 6.18. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$n! \mid \prod_{k=0}^{n-1} (2^n - 2^k).$$

Solución. Pista: para todo primo $p = 2$ y $2 \nmid p$, demuestra que el ν_p del lado izquierdo es menor o igual que el del lado derecho. □

[E] Problema 6.19. Demuestre que la ecuación

$$\frac{1}{10^n} = \frac{1}{n_1!} + \frac{1}{n_2!} + \cdots + \frac{1}{n_k!}$$

no tiene soluciones enteras, con $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_k$.

Solución. Pista: demuestra que si la ecuación es verdadera, se cumple que $n = \nu_5(n_k!)$. $\square$

[E] Problema 6.20. Sea $n > 1$ un número entero. Demuestre que

$$n \nmid 2^{n-1} + 1.$$

Solución. Pista: demuestra que $2^{\nu_2(n-1)+1} \mid \operatorname{ord}_p(2) \mid p - 1$ para todo $p \mid n$. $\square$

[M] Problema 6.21. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Demuestre que

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a_i - a_j}{i - j} \in \mathbb{Z}.$$

[M] Problema 6.22. Sea $n > 1$ un número entero, y sean $1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k < n$ enteros positivos tales que $\operatorname{mcm}(a_i, a_j) > n$ para todo $i \neq j$. Demuestre que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} < \frac{3}{2}.$$

Solución. Pista: considere la cantidad de números divisibles por algún a_i menores o iguales que n. $\square$

Sábado
2022-04-23
Simulacro

[E] Problema 6.23. Miguel tiene una lista de varios subconjuntos de 10 elementos de $\{1, 2, \ldots, 100\}$. Él le dice a Cecilia: si eliges cualquier subconjunto de 10 elementos de $\{1, 2, \ldots, 100\}$, será disjunto con al menos un subconjunto de mi lista.

¿Cuál es la mínima cantidad de subconjuntos que puede tener la lista de Miguel, si lo que le dice a Cecilia es cierto?

Solución. La respuesta es 13 y se puede conseguir con subconjuntos

$$A_1 \cup A_2, A_2 \cup A_3, A_3 \cup A_1,$$

$$A_4 \cup A_5, A_5 \cup A_6, A_6 \cup A_4,$$

$$A_7 \cup A_8, A_9 \cup A_{10}, \ldots, A_{19} \cup A_{20}$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_{20} \subset \{1, 2, \ldots, 100\}$ son subconjuntos disjuntos de tamaño 5. Ahora, si la lista de Miguel tuviera 12 o menos subconjuntos, podemos añadir algún subconjunto que ya está en la lista, así que supongamos que Miguel tiene 12 subconjuntos. Como hay $12 \times 10 = 120$ números en la lista, existe un número x que pertenece a al menos 2 subconjuntos de la lista. Además de esos dos subconjuntos, tenemos 10 subconjuntos de la lista. Si x pertenece a alguno de esos 10 subconjuntos, de cada uno de los otros 9 subconjuntos podemos elegir 9 números (no necesariamente distintos). De lo contrario, existe un número y que pertenece a al menos 2 de esos 10 subconjuntos, y de cada uno de los otros 8 subconjuntos podemos elegir 8 números. Es decir, existe un subconjunto $B \subset \{1, 2, \ldots, 100\}$ de tamaño 10 tal que B no es disjunto con ningún subconjunto de la lista, lo cual es una contradicción. $\square$

[E] Problema 6.24. Sean Ω_1, Ω_2, Ω_3 y Ω_4 circunferencias distintas tales que Ω_1 y Ω_3 son tangentes externas en el punto P, y Ω_2 y Ω_4 son tangentes externas en el mismo punto P. Suponga que Ω_1 y Ω_2, Ω_2 y Ω_3, Ω_3 y Ω_4, Ω_4 y Ω_1 se intersectan en los puntos A, B, C, D, respectivamente, y que esos cuatro puntos son distintos de P. Demuestre que

$$\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{PB^2}{PD^2}.$$

Solución. Pista: inversión centrada en P de radio 1. $\square$

[M] **Problema 6.25.** La secuencia $a_0, a_1, a_2, \ldots$ está definida de la siguiente manera:

$$a_0 = 2 \quad \text{y} \quad a_{k+1} = 2a_k^2 - 1, \text{ para } k \geq 0.$$

Demuestre que si un primo impar p divide a a_n, entonces 2^{n+3} divide a $p^2 - 1$.

Solución. Se puede probar que

$$a_n = \frac{1}{2}\left((2+\sqrt{3})^{2^n} + (2-\sqrt{3})^{2^n}\right) = \sum_{i=0}^{2^{n-1}} \binom{2^n}{2k} 2^{2k} 3^{2^{n-1}-k}$$

para todo $n \geq 0$. $\square$

§7 Semana 7 (04/25 – 05/01)

Lunes
2022-04-25
Álgebra

[E] Problema 7.1. Determine todas las parejas (a, b) de números reales tales que

$$a \lfloor bn \rfloor = b \lfloor an \rfloor,$$

para todo entero positivo n.

Solución. Respuesta: $a, b \in \mathbb{Z}$ o $(a, b) = (0, k), (k, 0), (k, k)$ donde $k \in \mathbb{R}$. $\square$

[E] Problema 7.2 (Indonesia MO Shortlist 2014/A1)**.** Sean a y b números reales positivos tales que $\lfloor a^k \rfloor + \lfloor b^k \rfloor = \lfloor a \rfloor^k + \lfloor b \rfloor^k$ para infinitos enteros positivos k. Demuestre que

$$\lfloor a^{2014} \rfloor + \lfloor b^{2014} \rfloor = \lfloor a \rfloor^{2014} + \lfloor b \rfloor^{2014}.$$

[aops:12396258]

Solución. Note que $a^k \geq \lfloor a \rfloor^k$ de donde $\lfloor a^k \rfloor \geq \lfloor a \rfloor^k$ para todo $k \in \mathbb{Z}^+$. Luego, se cumple la igualdad para infinitos $k \in \mathbb{Z}^+$ de donde $a, b \in \mathbb{Z}^+ \cup (0, 1)$. Finalmente, $\lfloor a^k \rfloor + \lfloor b^k \rfloor = \lfloor a \rfloor^k + \lfloor b \rfloor^k$ para todo $k \in \mathbb{Z}^+$. $\square$

[E] Problema 7.3. Determine todas las parejas (a, b) de números reales tales que

$$\lfloor a \lfloor bn \rfloor \rfloor = n - 1,$$

para todo entero positivo n.

Solución. Si $a > 0$ tenemos que $-1 \leq n(ab - 1) < a$ y si $a < 0$ tenemos que $0 > n(ab - 1) > a - 1$ de donde $n\,|ab - 1|$ es acotado. Por ende, $ab = 1$ y $a > 0$. $\square$

[M] Problema 7.4. Sea $n \geq 2$ un número entero. Los n conjuntos finitos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ satisfacen:

$$|A_i \triangle A_j| = |i - j|, \quad \forall\, i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Determine el mínimo valor de

$$\sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Solución. La respuesta es $\lfloor n^2/4 \rfloor$ y un ejemplo es cuando A_i es el conjunto de todos los enteros $x \neq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ que están entre i y $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ (tendremos $|A_i| = \left| \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - i \right|$ en este caso). Ahora, note que

$$|A_i| + |A_{n+1-i}| \geq |A_i \triangle A_{n+1-i}| = |n + 1 - 2i|$$

para todo $1 \leq i \leq n$ de donde

$$\sum_{i=1}^{n} |A_i| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (|A_i| + |A_{n+1-i}|) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} |n + 1 - 2i| = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

$\square$

Problema 7.5. Sea $\alpha \geq 1$ un número real y sea n un entero positivo tal que

$$\lfloor \alpha^{n+1} \rfloor, \lfloor \alpha^{n+2} \rfloor, \ldots, \lfloor \alpha^{4n} \rfloor$$

son todos cuadrados perfectos. Demuestre que $\lfloor \alpha \rfloor$ es un cuadrado perfecto.

Martes
2022-04-26
Combinatoria

[E] Problema 7.6. Sea $A = (a_1, a_2, \dots, a_{2001})$ una secuencia de enteros positivos. Sea m el número de subsecuencias de tres términos (a_i, a_j, a_k) tales que $a_k = a_j + 1$ y $a_j = a_i + 1$. Considerando todas las secuencias A, determine el mayor valor de m.

Solución. Respuesta: 667^3. □

[E] Problema 7.7. Para $i = 1, 2, \dots, 11$, sea M_i un conjunto de 5 elementos, y asuma que para $1 \le i < j \le 11$, $M_i \cap M_j \ne \varnothing$. Sea m el mayor número para el cual existen m conjuntos $M_{x_1}, M_{x_2}, \dots, M_{x_m}$ tales que $M_{x_1} \cap M_{x_2} \cap \cdots \cap M_{x_m} \ne \varnothing$. Determine el mínimo valor de m sobre todos los posibles conjuntos iniciales.

Solución. Respuesta: 4. □

[M] Problema 7.8 (High-School Mathematics 1994/1, China [An03][1])**.** Determine cuantos subconjuntos de $\{1, 2, \dots, 2000\}$ tienen suma de elemento múltiplo de 5.

Solución. Sea

$$P(x) = \prod_{i=1}^{2000} (x^i + 1) = \sum_{j=0}^{\deg P} c_j x^j$$

un polinomio y sea $\zeta = e^{2\pi i/5}$ una raíz compleja de la ecuación $z^5 = 1$. Luego, $1 + \zeta^1 + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 = 0$ y

$$2^{2000} + 4 \cdot 2^{400} = \sum_{i=0}^{4} P(\zeta^i) = \sum_{j=0}^{\deg P} c_j \cdot \sum_{i=0}^{4} \zeta^{ij} = 5 \sum_{5 \mid j} c_j.$$

Por lo tanto, la respuesta es $\dfrac{2^{2000} + 4 \cdot 2^{400}}{5}$. □

[E] Problema 7.9 (MOSP 1999)**.** Sea X un conjunto finito y no vacío de enteros positivos, y sea A un subconjunto de X. Demuestre que existe $B \subset X$ tal que A es el conjunto de todos los elementos de X que dividen a un número impar de elementos de B.

Solución. Nos basta probar que la función $f : X \to X$ tal que

$$f(A) = \{x \in X : x \text{ divide a un número impar de elementos de } A\}$$

es biyectiva. Primero, probaremos que f es inyectiva y para eso supongamos que existen $A, B \subset X$ tales que $f(A) = f(B)$. Si $A \ne B$, sea x el mayor elemento de $A \triangle B$ donde $x \in A$ sin pérdida de generalidad. Luego, x divide a un número más del conjunto A que de B, de donde $x \in f(A) \triangle f(B) = \varnothing$, lo cual es un absurdo. Por lo tanto, f es inyectiva y por ende biyectiva pues X es finito. □

Miércoles
2022-04-27
Geometría

[E] Problema 7.10. Las reflexiones de la diagonal BD de un cuadrilátero convexo $ABCD$ (el cual no tiene lados iguales), con respecto a las bisectrices de los ángulos interiores $\angle B$ y $\angle D$, pasan por el punto medio del lado AC. Demuestre que las reflexiones de la diagonal AC con respecto a las bisectrices interiores $\angle A$ y $\angle C$, pasan por el punto medio de BD.

[E] Problema 7.11. Sea ABC un triángulo. Sobre los lados BC, CA y AB se toman los puntos X, Y y Z, respectivamente, tales que las rectas AX, BY y CZ son concurrentes y $AY = AZ$. La bisectriz interior del ángulo $\angle BAC$ corta a la recta XZ en el punto T. Si M y N son los puntos medios de los lados BC y CA, respectivamente, demuestre que los puntos M, N y T son colineales.

[1] Un video de 3Blue1Brown cubriendo este problema: `https://www.youtube.com/watch?v=bOXCLR3Wric`.

[E] Problema 7.12. Sea ABC un triángulo y sea $A'B'C'$ la reflexión de ABC con respecto a un punto cualquiera P del plano. Demuestre que los circuncírculos de $AB'C'$, $BC'A'$ y $CA'B'$ pasan por un mismo punto en el circuncírculo del triángulo ABC.

[E] Problema 7.13. Sean P y Q dos puntos distintos sobre el circuncírculo del triángulo ABC de tal manera que las rectas de Simson de P y Q se intersectan perpendicularmente en el punto X. Demuestre que X es un punto de la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC.

[E] Problema 7.14. Sea Ω el circuncírculo de un triángulo escaleno ABC. Las rectas tangentes a Ω que pasan por B y C se intersectan en el punto Q. Sea P un punto sobre la semirecta BC de tal manera que AP y AQ son perpendiculares. Los puntos D y E están sobre la semirecta PQ, con E entre D y P, y son tales que $DQ = BQ = EQ$. Demuestre que los triángulos ABC y ADE son semejantes.

[E] Problema 7.15. Sea $ABCD$ un rectángulo. Los puntos P, Q, R y S pertenecen a los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente. Demuestre que el perímetro de $PQRS$ es mayor o igual que el doble de la diagonal de $ABCD$.

[E] Problema 7.16. Sea Γ una circunferencia y sea P un punto en su exterior. Las tangentes por P a Γ tocan a la circunferencia en A y B. Sea M el punto medio del segmento AB. La mediatriz de AM intersecta a Γ en un punto C del interior del triángulo ABP. La recta AC corta a PM en G, y PM corta a Γ en un punto D exterior al triángulo ABP. Si $BD \parallel AC$, demuestre que G es el baricentro del triángulo ABP.

[E] Problema 7.17. Determine el mayor entero positivo k para el cual existe un polígono $P_1P_2\cdots P_{2015}$ tal que exactamente k de los cuadriláteros $P_iP_{i+1}P_{i+2}P_{i+3}$, con $i = 1, 2, \ldots, 2015$ (con índices en el módulo 2015) tienen una circunferencia inscrita.

Solución. Respuesta: 1007. Se puede probar que no existen $|i_1 - i_2| = 1$ tales que $P_iP_{i+1}P_{i+2}P_{i+3}$ tenga una circunferencia inscrita para $i = i_1, i_2$. Ahora, si $k = 2007$, el polígono debe ser cíclico y se puede probar que existe uno que cumple. □

Viernes
2022-04-29
Teoría de Números

[E] Problema 7.18 (ISL 2001/N1)**.** Prove that there is no positive integer n such that, for $k = 1, 2, \ldots, 9$, the leftmost digit (in decimal notation) of $(n+k)!$ equals k.

[M] Problema 7.19 (ISL 2001/N3)**.** Let $a_1 = 11^{11}, a_2 = 12^{12}, a_3 = 13^{13}$, and

$$a_n = |a_{n-1} - a_{n-2}| + |a_{n-2} - a_{n-3}|, \quad \forall\, n \geq 4.$$

Determine $a_{14^{14}}$.

Solución. Respuesta: 1. Primero, demuestre que $(|a_{i+1} - a_i|)_{i\geq 1}$ es decreciente y que a_{7k} es impar para todo $k \in \mathbb{Z}^+$. □

Problema 7.20 (ISL 2001/N4)**.** Let $p \geq 5$ be a prime number. Prove that there exists an integer a with $1 \leq a \leq p-2$ such that neither $a^{p-1} - 1$ nor $(a+1)^{p-1} - 1$ is divisible by p^2.

Problema 7.21 (ISL 2001/N5)**.** Let $a > b > c > d$ be positive integers and suppose

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Prove that $ab + cd$ is not prime.

Problema 7.22 (ISL 2001/N6)**.** Is it possible to find 100 positive integers not exceeding 25000, such that all pairwise sums of them are different?

§8 Semana 8 (05/02 – 05/08)

Lunes
2022-05-02
Álgebra

[E] Problema 8.1 (ISL 2001/A2)**.** Sea $(a_n)_{n\geq 0}$ una secuencia infinita de números reales positivos. Demuestre que

$$1 + a_n > a_{n-1}\sqrt[n]{2}$$

para infinitos $n \in \mathbb{Z}^+$.

[M] Problema 8.2 (ISL 2001/A3)**.** Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \cdots + \frac{x_n}{1+x_1^2+\cdots+x_n^2} < \sqrt{n}.$$

Martes
2022-05-03
Combinatoria

[E] Problema 8.3 (ISL 2001/C3)**.** Define a *k-clique* to be a set of k people such that every pair of them are acquainted with each other. At a certain party, every pair of 3-cliques has at least one person in common, and there are no 5-cliques. Prove that there are two or fewer people at the party whose departure leaves no 3-clique remaining.

[M] Problema 8.4 (ISL 2001/C4)**.** A set of three nonnegative integers $\{x, y, z\}$ with $x < y < z$ is called historic if $\{z - y, y - x\} = \{1776, 2001\}$. Show that the set of all nonnegative integers can be written as the union of pairwise disjoint historic sets.

Miércoles
2022-05-04
Geometría

[E] Problema 8.5 (ISL 2001/G1)**.** Let A_1 be the center of the square inscribed in acute triangle ABC with two vertices of the square on side BC. Thus one of the two remaining vertices of the square is on side AB and the other is on AC. Points B_1, C_1 are defined in a similar way for inscribed squares with two vertices on sides AC and AB, respectively. Prove that lines AA_1, BB_1, CC_1 are concurrent.

[aops:119194]

[M] Problema 8.6 (ISL 2001/G2)**.** In acute triangle ABC with circumcenter O and altitude AP, $\angle C \geq \angle B + 30^\circ$. Prove that $\angle A + \angle COP < 90^\circ$.

[M] Problema 8.7 (ISL 2001/G3)**.** Let ABC be a triangle with centroid G. Determine, with proof, the position of the point P in the plane of ABC such that $AP \cdot AG + BP \cdot BG + CP \cdot CG$ is a minimum, and express this minimum value in terms of the side lengths of ABC.

Viernes
2022-05-06
Teoría de Números

[E] Problema 8.8. Demuestre que todo entero positivo coprimo con 3 posee un múltiplo cuya suma de dígitos es un número primo.

Solución. Como n es coprimo con 3, existe $m = \overline{a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_1 a_0}$ tal que m es coprimo con 30 y $n \mid 10^\alpha \cdot m$ para algún $\alpha \in \mathbb{Z}^+$. Luego,

$$m \cdot (10^t - 1) = \overline{a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_1(a_0-1)\underbrace{99\cdots 9}_{t-k \text{ veces}}(9-a_{k-1})(9-a_{k-2})\cdots(9-a_1)(10-a_0)}$$

de donde $S(m \cdot (10^t - 1)) = 9t$ para todo $t > k$. Por ende, existe un $m \mid M$ tal que $S(M)$ es coprimo con $S(m)$ y por Dirichlet, la suma de dígitos de $\overline{\underbrace{(M)(M)\cdots(M)}_{\beta \text{ veces}}(m)\underbrace{00\cdots 0}_{\alpha \text{ veces}}}$ es un primo para algún $\beta \in \mathbb{Z}^+$. Con esto se termina la prueba, pues M y m son múltiplos de n. $\square$

§9 Semana 9 (05/09 – 05/15)

Lunes
2022-05-09
Álgebra

[M] Problema 9.1 (ISL 2001/A4)**.** Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, satisfying

$$f(xy)(f(x) - f(y)) = (x - y)f(x)f(y)$$

for all x, y.

Solución. Con $(x, y) = (1, 0)$ y $(x, 1)$ tenemos que $f(0) = 0$ y que $f(x) = 0$ o $f(x) = xf(1)$. Luego, $f(x) = xc$ para todo $x \in G$, y $f(x) = 0$ para todo $x \notin G$ donde $(G, \cdot)$ es un grupo multiplicativo y c es una constante. □

[M] Problema 9.2 (ISL 2001/A5)**.** Find all positive integers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ such that

$$\frac{99}{100} = \frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

where $a_0 = 1$ and $(a_{k+1} - 1)a_{k-1} \geq a_k^2(a_k - 1)$ for $k = 1, 2, \ldots, n - 1$.

Martes
2022-05-10
Combinatoria

[E] Problema 9.3 (ISL 1998/N3)**.** Determine the smallest integer n, $n \geq 4$, for which one can choose four different numbers a, b, c, d from any n distinct integers such that $a + b - c - d$ is divisible by 20.

[aops:124432]

[E] Problema 9.4. Form a 2000×2002 screen with unit screens. Initially, there are more than 1999×2001 unit screens which are *on*. In any 2×2 screen, as soon as there are 3 unit screens which are *off*, the 4^{th} screen turns off automatically. Prove that the whole screen can never be totally off.

Solución. Pista: considere a la cantidad de cuadrados de 2×2. □

[M] Problema 9.5. Given an initial sequence $a_1, a_2, \ldots, a_n$ of real numbers, we perform a series of steps. At each step, we replace the current sequence $x_1, x_2, \ldots, x_n$ with $|x_1 - a|, |x_2 - a|, \ldots, |x_n - a|$ for some a. For each step, the value of a can be different.

(a) Prove that it is always possible to obtain the null sequence consisting of all 0's.

(b) Determine with proof the minimum number of steps required, regardless of initial sequence, to obtain the null sequence.

Miércoles
2022-05-11
Teoría de Números

[E] Problema 9.6. Sean $1 \leq a_1, a_2, \ldots, a_{10^6} \leq 9$ algunos dígitos. Demuestre que el conjunto

$$A = \left\{\overline{a_1 a_2 \cdots a_k} : 1 \leq k \leq 10^6\right\}$$

contiene a lo más 100 cuadrados perfectos.

Solución. Por el absurdo, supongamos que existen más de 100 índices k tales que $\overline{a_1 a_2 \cdots a_k}$ es un cuadrado perfecto. Entonces, hay 50 de la misma paridad. Como $2^{50} > 2^{20} = 1024^2 > 1000^2 = 10^6$, existen índices $j < i < 2j$ tales que $2 \mid i - j$ y

$$\begin{aligned}
\overline{a_1 a_2 \cdots a_i} &= \overline{a_1 a_2 \cdots a_j} \cdot 10^{i-j} + \overline{a_{j+1} a_{j+2} \cdots a_i} \\
&= \left(n \cdot 10^{\frac{i-j}{2}}\right)^2 + \overline{a_{j+1} a_{j+2} \cdots a_i} \\
&\geq \left(n \cdot 10^{\frac{i-j}{2}} + 1\right)^2
\end{aligned}$$

de donde

$$10^{i-j} > \overline{a_{j+1} a_{j+2} \cdots a_i} > 2n \cdot 10^{\frac{i-j}{2}} > 10^{\frac{i-1}{2}}$$

y $i \geq 2j$, lo cual es un absurdo. □

Viernes
2022-05-13

[M] Problema 9.7 (IberoAmerican 2012/6)**.** Demostrar que, para todo entero positivo n, existen n enteros positivos consecutivos tales que ninguno es divisible por la suma de sus respectivos dígitos.

[aops:2814652]
[omaforos:1201]

Solución. Procederemos por inducción sobre n. Si $n = 1$, es claro que $s(11) \nmid 11$ donde $s(x)$ denota la suma de dígitos de x. Ahora, supongamos que existe un $m \in \mathbb{Z}_0^+$ tal que $s(m+i) \nmid m+i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Sea $m' = M \cdot 10^k + m$ donde M es un número formado por $N!$ bloques consecutivos de $N!$, siendo $k, N \in \mathbb{Z}^+$ suficientemente grandes. Si $s(m'+i) \mid m'+i$ para algún $1 \leq i \leq n$, entonces

$$s(m+i) \mid N! \cdot s(N!) + s(m+i) = s(m'+i) \mid m'+i = M \cdot 10^k + m + i$$

de donde $s(m+i) \mid m+i$, absurdo. Si $s(m'+n+1) \mid m'+n+1$ para k y $k+1$, entonces $s(M)+s(m+n+1)$ divide simultáneamente a $M \cdot 10^k + m+n+1$ y a $M \cdot 10^{k+1} + m+n+1$. Luego,

$$N! \cdot s(N!) + s(m+n+1) \mid 9(m+n+1)$$

lo cual no es posible para un valor grande de N. Por lo tanto, existe un $m' \in \mathbb{Z}_0^+$ tal que $s(m'+i) \nmid m'+i$ para todo $1 \leq i \leq n+1$. □

[E] Problema 9.8. Hallar la menor cantidad de dígitos de un número N que contiene a todas las permutaciones de 1234.

Solución. Vamos a dividir las 24 permutaciones en 6 ciclos. Digamos que dos bloques de 4 son *adyacentes* si esos bloques son de la forma $abcd$ y $bcde$ donde los dígitos a, b, c, d, e son consecutivos. Si dos bloques son de distintos ciclos, esos bloques no pueden ser adyacentes. Luego, si t es la cantidad de bloques que no son permutaciones de 1234, entonces $n - 3 \geq 24 + t$. Como existen a lo sumo $t+1$ ciclos, entonces $t+1 \geq 6$ de donde $n \geq 27 + t \geq 32$, pero es fácil ver que no se da la igualdad. Un ejemplo con 33 es

$$N = 123412314231243121342132413214321.$$

□

[E] Problema 9.9. Un número es *ascendente* si sus dígitos están en orden creciente, de izquierda a derecha. Por ejemplo, 123 y 11224 son ascendentes. Demuestre que para todo entero positivo n, es posible encontrar un cuadrado perfecto de exactamente n dígitos que sea ascendente.

Solución. Note que

$$\begin{aligned} 2^2 &= 4 \\ 17^2 &= 289 \\ 167^2 &= 27889 \\ 1667^2 &= 2778889 \\ &\vdots \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
4^2 &= 16 \\
34^2 &= 1156 \\
334^2 &= 111556 \\
3334^2 &= 11115556 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

así que con esto es suficiente. $\square$

[E] Problema 9.10. Demostrar que para cualquier entero positivo N, al menos uno de los números N y $N+1$ se puede representar de la forma $k + s(k)$ para algún entero positivo k.

Solución. Note que si $k = \overline{(a-1)\underbrace{99\ldots9}_{t \text{ veces}}}$ donde $1 \leq a \leq 9$ y $t \geq 0$ son enteros, tenemos que

$$\begin{aligned}
k + s(k) &= a \cdot 10^t + s(a) + 9t - 2 \\
k + 1 + s(k+1) &= a \cdot 10^t + s(a)
\end{aligned}$$

y por inducción,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \{k + s(k) - 1, k + s(k)\} = \mathbb{Z}^+.$$

$\square$

§10 Semana 10 (05/16 – 05/22)

Lunes
2022-05-16
Álgebra

[E] Problema 10.1 (ISL 2002/A2)**.** Let $a_1, a_2, \ldots$ be an infinite sequence of real numbers, for which there exists a real number c with $0 \leq a_i \leq c$ for all i, such that

$$|a_i - a_j| \geq \frac{1}{i+j} \quad \text{for all } i, j \text{ with } i \neq j.$$

Prove that $c \geq 1$.

[aops:118699]

[M] Problema 10.2 (ISL 2002/A3)**.** Let P be a cubic polynomial given by $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, where a, b, c, d are integers and $a \neq 0$. Suppose that $xP(x) = yP(y)$ for infinitely many pairs x, y of integers with $x \neq y$. Prove that the equation $P(x) = 0$ has an integer root.

[aops:118702]

[M] Problema 10.3 (ISL 2002/A4)**.** Find all functions f from the reals to the reals such that

$$(f(x) + f(z))\,(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

for all real x, y, z, t.

[aops:118703]

Martes
2022-05-17
Combinatoria

[E] Problema 10.4 (ISL 2002/C1)**.** Let n be a positive integer. Each point (x, y) in the plane, where x and y are non-negative integers with $x + y < n$, is coloured red or blue, subject to the following condition: if a point (x, y) is red, then so are all points (x', y') with $x' \leq x$ and $y' \leq y$. Let A be the number of ways to choose n blue points with distinct x-coordinates, and let B be the number of ways to choose n blue points with distinct y-coordinates. Prove that $A = B$.

[aops:118710]

[E] Problema 10.5 (ISL 2002/C2)**.** For n an odd positive integer, the unit squares of an $n \times n$ chessboard are coloured alternately black and white, with the four corners coloured black. A *tromino* is an L-shape formed by three connected unit squares. For which values of n is it possible to cover all the black squares with non-overlapping trominos? When it is possible, what is the minimum number of trominos needed?

[aops:118712]

Solución. Respuesta: $n \geq 7$ y el mínimo es $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$. □

[M] Problema 10.6 (ISL 2002/C3)**.** Let n be a positive integer. A sequence of n positive integers (not necessarily distinct) is called *full* if it satisfies the following condition: for each positive integer $k \geq 2$, if the number k appears in the sequence then so does the number $k - 1$, and moreover the first occurrence of $k - 1$ comes before the last occurrence of k. For each n, how many full sequences are there?

[aops:118714]

Solución. Respuesta: $n!$, considerando una biyección. □

Teoría de Números

[E] Problema 10.7 (Russia 2022[2]). Demuestre que existe un entero positivo b que tiene la siguiente propiedad: para todo entero $n > b$, la suma de los dígitos del número $n!$ es mayor o igual que 10^{100}.

[aops:27238158]

Solución. Note que si $n > b$, entonces $b \mid n!$. Además, $s(x-y) \geq s(x) - s(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{Z}^+$. Sea $b = \underbrace{99\cdots 9}_{N \text{ veces}}$ donde $N \in \mathbb{Z}^+$ es suficientemente grande, y sea $M \cdot 10^k \cdot b$ un múltiplo de b donde $10 \nmid M$. Luego,

$$\begin{aligned} s(M \cdot 10^k \cdot b) &= s(M \cdot (10^N - 1)) \\ &= s\left(\overline{(M-1)\underbrace{99\cdots 9}_{N \text{ veces}}} - (M-1)\right) \\ &\geq s(M-1) + 9N - s(M-1) \\ &= 9N \end{aligned}$$

de donde $s(n!) \geq 9N > 10^{100}$ para todo $n > b$. □

Miércoles
2022-05-18
Geometría

[E] Problema 10.8 (ISL 2001/G5). Let ABC be an acute triangle. Let DAC, EAB, and FBC be isosceles triangles exterior to ABC, with $DA = DC$, $EA = EB$, and $FB = FC$, such that

$$\angle ADC = 2\angle BAC, \quad \angle BEA = 2\angle ABC, \quad \angle CFB = 2\angle ACB.$$

Let D' be the intersection of lines DB and EF, let E' be the intersection of EC and DF, and let F' be the intersection of FA and DE. Find, with proof, the value of the sum

$$\frac{DB}{DD'} + \frac{EC}{EE'} + \frac{FA}{FF'}.$$

[aops:119201]

Solución. Si P es un punto interior de ABC tal que

$$\angle CPA = \pi - \angle A, \quad \angle APB = \pi - \angle B, \quad \angle BPC = \pi - \angle C$$

entonces P es la intersección de circunferencias $\odot(D, DA), \odot(E, EB), \odot(F, FC)$ de donde

$$\triangle PDE \equiv \triangle ADE, \quad \triangle PEF \equiv \triangle BEF, \quad \triangle PFD \equiv \triangle CFD.$$

Luego,

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{DB}{DD'} = \sum_{\text{cyc}} \frac{|DEBF|}{|DEF|} = 3 + \frac{|ADE| + |BEF| + |CFD|}{|PDE| + |PEF| + |PFD|} = 4.$$

□

[E] Problema 10.9 (ISL 2001/G6). Let ABC be a triangle and P an exterior point in the plane of the triangle. Suppose AP, BP, CP meet the sides BC, CA, AB (or extensions thereof) in D, E, F, respectively. Suppose further that the areas of triangles PBD, PCE, PAF are all equal. Prove that each of these areas is equal to the area of triangle ABC itself.

[aops:119203]

[2] Kvant/M2693

Solución. Sin pérdida de generalidad, supongamos que P pertenece al lado opuesto de A con respecto a BC. Si C está entre B y D, entonces $\triangle PBD$ contiene al $\triangle PCE$. Si B está entre C y D, entonces $\triangle PAF$ contiene al $\triangle PBD$. Por ende, D está en el lado BC. Si A está entre E y C, entonces $\triangle PCE$ contiene al $\triangle PBD$. Si B está entre F y A, entonces $\triangle PAF$ contiene al $\triangle PBD$. Es decir, los segmentos dirigidos $\frac{PA}{PD}, \frac{PB}{PE}, \frac{PC}{PF}$ tienen signos $+, -, +$, respectivamente. Note que

$$\frac{|PBD|}{|ABC|} = \frac{BD}{BC} \cdot \frac{PD}{AD} \quad \text{y} \quad \frac{BD}{BC} \cdot \frac{FC}{FP} \cdot \frac{AP}{AD} = 1$$

considerando áreas y segmentos con signos. Es decir,

$$\left(\frac{PC}{PF} - 1\right) \cdot \frac{PA}{PD} = \frac{|ABC|}{|PBD|} = k$$

donde $k \in \mathbb{R}^-$ es una constante. Con un poco de cálculo obtenemos

$$(x(x-1) - k)(k+1) = 0$$

donde $x = \frac{PA}{PD} \geq 1$. Por lo tanto, $k = -1$. □

[E] Problema 10.10 (ISL 2001/G7)**.** Let O be an interior point of acute triangle ABC. Let A_1 lie on BC with OA_1 perpendicular to BC. Define B_1 on CA and C_1 on AB similarly. Prove that O is the circumcenter of ABC if and only if the perimeter of $A_1B_1C_1$ is not less than any one of the perimeters of AB_1C_1, BC_1A_1, and CA_1B_1.

[aops:119204]

Solución. Digamos que $O' \neq O$ es un punto interior de $\triangle ABC$, siendo O el circuncentro de ABC. Si O' pertenece en el interior del $\triangle BOC$, tenemos que

$$\angle BC_1A_1 = \angle BO'A_1 = \frac{\pi}{2} - \angle A_1BO' \geq \frac{\pi}{2} - \angle CBO = \angle A$$

y análogamente $\angle CB_1A_1 \geq \angle A$, de donde $A_1B_1 + A_1C_1 \leq AB_1 + AC_1$. Es decir, $p(A_1B_1C_1) < p(AB_1C_1)$. □

[E] Problema 10.11 (ISL 2001/G8)**.** Let ABC be a triangle with $\angle BAC = 60°$. Let AP bisect $\angle BAC$ and let BQ bisect $\angle ABC$, with P on BC and Q on AC. If $AB + BP = AQ + QB$, what are the angles of the triangle?

[aops:119207]

Solución. Sea R un punto en la recta AB tal que $BR = BP$ y B está entre R y A. Si S es un punto del rayo AC tal que $AR = AS$, entonces

$$QS = AS - AQ = AR - AQ = AB + BR - AQ = AB + BP - AQ = QB$$

y

$$\angle QSP = \angle ASP = \angle ARP = \frac{1}{2}\angle ABP = \angle QBP.$$

Como $BPSQ$ no es un paralelogramo, QP es bisectriz de $\angle BQC$. Es decir,

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{BP}{PC} = \frac{BA}{AC} = \frac{c}{b}$$

de donde $BQ = \frac{ca}{c+a}$. Además, como $\angle A = 60°$, tenemos que

$$\left(\frac{ca}{c+a}\right)^2 = BQ^2 = AB^2 + AQ^2 - AB \cdot AQ = c^2 + \left(\frac{bc}{c+a}\right)^2 - \frac{bc^2}{c+a}$$

y

$$a^2 = BC^2 = AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC = b^2 + c^2 - bc.$$

Simplificando nos queda que $a = b - 2c$, y de esto no es difícil ver que los ángulos $\angle A, \angle B, \angle C$ son $60°, 105°, 15°$. □

Jueves 2022-05-19
Punto Humpty (HM) [Mu17]

[E] Problema 10.12. In $\triangle ABC$ with orthocenter H, the circle with diameter $\overline{AH}$ and $\odot(BHC)$ intersect again on the A-median at a point X_A.

Solución. Si A' es la reflexión de A con respecto a BC, entonces HA' es el diámetro de $\odot(BHC)$ de donde X_A pertenece a AA', que claramente es la A-mediana. □

[E] Problema 10.13 (ELMO Shortlist 2013/G3)**.** In $\triangle ABC$, a point D lies on line BC. The circumcircle of ABD meets AC at F (other than A), and the circumcircle of ADC meets AB at E (other than A). Prove that as D varies, the circumcircle of AEF always passes through a fixed point other than A, and that this point lies on the median from A to BC.

[aops:3151962]

Solución. Si $P = BF \cap EC$ y A' la reflexión de A con respecto a BC, entonces P pertenece a $\odot(AEF)$ y $\odot(BHC)$. Como AA' pasa por X_A, $\angle AX_AP = \angle A'CP = \angle AEP$ de donde $X_A \in \odot(AEF)$. □

[E] Problema 10.14 (ELMO 2014/5)**.** Let ABC be a triangle with circumcenter O and orthocenter H. Let ω_1 and ω_2 denote the circumcircles of triangles BOC and BHC, respectively. Suppose the circle with diameter $\overline{AO}$ intersects ω_1 again at M, and line AM intersects ω_1 again at X. Similarly, suppose the circle with diameter $\overline{AH}$ intersects ω_2 again at N, and line AN intersects ω_2 again at Y. Prove that lines MN and XY are parallel.

[aops:3534946]

Solución. Pista: con angulitos tenemos que M es el punto medio de la cuerda A-simediana, N es el A-punto Humpty, X es la intersección de las tangentes a $\odot(ABC)$ por B y C, Y es la reflexión de A con respecto a BC. □

[E] Problema 10.15 (USA TST 2005/6)**.** Let ABC be an acute scalene triangle with O as its circumcenter. Point P lies inside triangle ABC with $\angle PAB = \angle PBC$ and $\angle PAC = \angle PCB$. Point Q lies on line BC with $QA = QP$. Prove that $\angle AQP = 2\angle OQB$.

[aops:734440]

[E] Problema 10.16 (Brazil National Olympiad 2015/6)**.** Let $\triangle ABC$ be a scalene triangle and X, Y and Z be points on the lines BC, AC and AB, respectively, such that $\measuredangle AXB = \measuredangle BYC = \measuredangle CZA$. The circumcircles of BXZ and CXY intersect at P. Prove that P is on the circumference which diameter has ends in the orthocenter H and in the barycenter G of $\triangle ABC$.

[aops:5469201]

Solución. Se prueba que P es el centro de roto-homotecia que manda $\triangle ABC \mapsto \triangle A_1B_1C_1$ donde $A_1 = BY \cap CZ$ y análogamente para B_1 y C_1. Con esto se prueba que $\measuredangle BAP = \measuredangle CBP$ y $\measuredangle CAP = \measuredangle BCP$, de donde P es el A-punto Humpty, entonces $\angle HPA = \angle HPG = 90°$. □

[E] Problema 10.17 (Sharygin Geometry Olympiad 2015 Final Round/10.3)**.** Let A_1, B_1 and C_1 be the midpoints of sides BC, CA and AB of triangle ABC, respectively. Points B_2 and C_2 are the midpoints of segments BA_1 and CA_1 respectively. Point B_3 is symmetric to C_1 with respect to B, and C_3 is symmetric to B_1 with respect to C. Prove that one of common points of circles BB_2B_3 and CC_2C_3 lies on the circumcircle of triangle ABC.

[aops:10667375]

Solución. Considere al centro de roto-homotecia que manda $AB \mapsto B_1B_2$ y otra que manda $AC \mapsto C_1C_2$, y sea P ese punto. Luego,

$$\angle BB_3B_2 = \angle(AB, B_1B_2) = \angle BPB_2$$

de donde $P \in \odot(BB_2B_3)$ y análogamente $P \in \odot(CC_2C_3)$. Además,

$$\angle PBB_2 + \angle PCC_2 = \angle PAB_1 + \angle PAC_1 = \angle A$$

de donde $P \in \odot(ABC)$. □

Viernes 2022-05-20

Problema 10.18 (ISL 2014/G6)**.** Let ABC be a fixed acute-angled triangle. Consider some points E and F lying on the sides AC and AB, respectively, and let M be the midpoint of EF. Let the perpendicular bisector of EF intersect the line BC at K, and let the perpendicular bisector of MK intersect the lines AC and AB at S and T, respectively. We call the pair (E, F) *interesting*, if the quadrilateral $KSAT$ is cyclic. Suppose that the pair (E_1, F_1) and (E_2, F_2) are interesting. Prove that

$$\frac{E_1E_2}{AB} = \frac{F_1F_2}{AC}.$$

Solución. Como M pertenece a la mediana del $\triangle AST$ y su reflexión con respecto a BC pertenece a $\odot(AST)$, entonces AK es la simediana del $\triangle AST$. Como K pertenece a la mediatriz del segmento EF, tenemos que KE y KF son tangentes a $\odot(AEF)$. Luego,

$$\begin{aligned}\frac{AE}{AB} &= \frac{AE}{EF}\cdot\frac{EF}{KE}\cdot\frac{KE}{CK}\cdot\frac{CK}{BC}\cdot\frac{BC}{AB}\\ &= \frac{\sin\alpha}{\sin\angle A}\cdot\frac{\sin 2\angle A}{\sin\angle A}\cdot\frac{\sin\angle C}{\sin\alpha}\cdot\frac{CK}{BC}\cdot\frac{\sin\angle A}{\sin\angle C}\\ &= 2\cos\angle A\cdot\frac{CK}{BC}\end{aligned}$$

donde $\alpha = \angle AFE = \angle CEK$, y análogamente $\frac{AF}{AC} = 2\cos\angle A\cdot\frac{BK}{BC}$. Por ende,

$$\frac{AE}{AB} + \frac{AF}{AC} = 2\cos\angle A$$

es una constante. Con esto es suficiente. □

[E] Problema 10.19 (USA TSTST 2015/2)**.** Let ABC be a scalene triangle. Let K_a, L_a and M_a be the respective intersections with BC of the internal angle bisector, external angle bisector, and the median from A. The circumcircle of AK_aL_a intersects AM_a a second time at point X_a different from A. Define X_b and X_c analogously. Prove that the circumcenter of $X_aX_bX_c$ lies on the Euler line of ABC.

[aops:5017915]

Solución. Como X_a es un punto de la A-mediana que pertenece a la A-circunferencia de Apolonio, entonces X_a es el A-punto Humpty del $\triangle ABC$. Por ende, $\angle HX_aG = 90°$ y el circuncentro del $\triangle X_aX_bX_c$ es el punto medio del segmento HG. □

[E] **Problema 10.20** (WOOT 2013 Practice Olympiad 3/5)**.** A semicircle has center O and diameter AB. Let M be a point on AB extended past B. A line through M intersects the semicircle at C and D, so that D is closer to M than C. The circumcircles of triangles AOC and DOB intersect at O and K. Show that $\angle MKO = 90°$.

[E] **Problema 10.21** (IMO 2010/4, modified)**.** In $\triangle ABC$ with orthocenter H, suppose P is the projection of H onto the C-median; let the second intersections of AP, BP, CP with $\odot(ABC)$ be K, L, M respectively. Show that $MK = ML$.

[E] **Problema 10.22** (EGMO 2016/4)**.** Two circles ω_1 and ω_2, of equal radius intersect at different points X_1 and X_2. Consider a circle ω externally tangent to ω_1 at T_1 and internally tangent to ω_2 at point T_2. Prove that lines X_1T_1 and X_2T_2 intersect at a point lying on ω.

[E] **Problema 10.23** (USA TST 2008/7)**.** Let ABC be a triangle with G as its centroid. Let P be a variable point on segment BC. Points Q and R lie on sides AC and AB respectively, such that $PQ \parallel AB$ and $PR \parallel AC$. Prove that, as P varies along segment BC, the circumcircle of triangle AQR passes through a fixed point X such that $\angle BAG = \angle CAX$.

[aops:1247506]

[E] **Problema 10.24** (Mathematical Reflections/O371)**.** Let ABC be a triangle with $AB < AC$. Let D, E be the feet of altitudes from B, C to sides AC, AB respectively. Let M, N, P be the midpoints of the segments BC, MD, ME respectively. Let NP intersect BC again at a point S and let the line through A parallel to BC intersect DE again at point T. Prove that ST is tangent to the circumcircle of triangle ADE.

Problema 10.25 (ELMO Shortlist 2012/G7)**.** Let $\triangle ABC$ be an acute triangle with circumcenter O such that $AB < AC$, let Q be the intersection of the external bisector of $\angle A$ with BC, and let P be a point in the interior of $\triangle ABC$ such that $\triangle BPA$ is similar to $\triangle APC$. Show that $\angle QPA + \angle OQB = 90°$.

[aops:2728473]

Problema 10.26 (Iranian Geometry Olympiad 2014/S4)**.** The tangent to the circumcircle of an acute triangle ABC (with $AB < AC$) at A meets BC at P. Let X be a point on line OP such that $\angle AXP = 90°$. Points E and F lie on sides AB and AC, respectively, and are on the same side of line OP such that $\measuredangle EXP = \measuredangle ACX$ and $\measuredangle FXO = \measuredangle ABX$. Let EF meet the circumcircle of triangle ABC at points K, L. Prove that the line OP is tangent to the circumcircle of triangle KLX.

[aops:3758542]

Teoría de Números

[E] **Problema 10.27** (ISL 2001/N4)**.** Let $p \geq 5$ be a prime number. Prove that there exists an integer a with $1 \leq a \leq p-2$ such that neither $a^{p-1} - 1$ nor $(a+1)^{p-1} - 1$ is divisible by p^2.

[M] **Problema 10.28** (ISL 2001/N5)**.** Let $a > b > c > d$ be positive integers and suppose that

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Prove that $ab + cd$ is not prime.

[H] **Problema 10.29** (ISL 2001/N6)**.** Is it possible to find 100 positive integers not exceeding 25000, such that all pairwise sums of them are different?

§11 Semana 11 (05/23 – 05/29)

Lunes
2022-05-23
Álgebra

[E] Problema 11.1. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Demuestre que

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

Solución. Como la desigualdad dada es homogenea, supongamos que $a+b+c=1$. Sabemos que la función $f(x) = x^{-1/2}$ es convexa, entonces por Jensen

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} &= \sum_{\text{cyc}} a \cdot f(a^2+8bc) \\
&\geq f\left(\sum_{\text{cyc}} a(a^2+8bc)\right) \\
&= f(a^3+b^3+c^3+24abc) \\
&\geq f(a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)) \\
&= f(1) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

[E] Problema 11.2. Sea $n \geq 3$ un número entero y sean $t_1, t_2, \ldots, t_n$ números reales positivos tales que

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \cdots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right).$$

Demuestre que para todo i, j, k, con $1 \leq i < j < k \leq n$, los números t_i, t_j, t_k son las longitudes de los lados de un triángulo.

[E] Problema 11.3. La secuencia $(a_n)_{n\geq 0}$ está definida por

$$a_n = |a_{n+1} - a_{n+2}|, \quad \forall n \geq 0,$$

donde $a_0, a_1 \in \mathbb{R}^+$, con $a_0 \neq a_1$. ¿Puede que la secuencia (a_n) sea acotada?

Solución. La respuesta es no. Considere tres casos: $a_0 > a_1$, $a_0 = a_1$ y $a_0 < a_1$. □

[M] Problema 11.4. Determine todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes reales tales que

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c)$$

para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $ab + bc + ca = 0$.

Martes
2022-05-24
Punto Dumpty [Sa21]

[E] Problema 11.5 (USAMO 2008/2)**.** Let ABC be an acute, scalene triangle, and let M, N, and P be the midpoints of $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, and $\overline{AB}$, respectively. Let the perpendicular bisectors of $\overline{AB}$ and $\overline{AC}$ intersect ray AM in points D and E respectively, and let lines BD and CE intersect in point F, inside of triangle ABC. Prove that points A, N, F, and P all lie on one circle.

[aops:1116181]

Miércoles
2022-05-25

[M] **Problema 11.6** (Indian TST Practice Test 2019/2)**.** Let ABC be a triangle with $\angle A = \angle C = 30°$. Points D, E, F are chosen on the sides AB, BC, CA respectively so that $\angle BFD = \angle BFE = 60°$. Let p and p_1 be the perimeters of the triangles ABC and DEF, respectively. Prove that $p \leq 2p_1$.

[aops:12753024]

[E] **Problema 11.7** (USA TST 2008/7)**.** Let ABC be a triangle with G as its centroid. Let P be a variable point on segment BC. Points Q and R lie on sides AC and AB respectively, such that $PQ \parallel AB$ and $PR \parallel AC$. Prove that, as P varies along segment BC, the circumcircle of triangle AQR passes through a fixed point X such that $\angle BAG = \angle CAX$.

[aops:1247506]

Sábado
2022-05-28

[M] **Problema 11.8.** Demuestre que para cualesquiera enteros positivos m y n existen infinitas parejas de enteros positivos (a, b), coprimos, tales que

$$a + b \mid a \cdot m^a + b \cdot n^b.$$

Solución. Pista: considerar $a + b = p$ donde p es un número primo apropiado. □

Simulacro Nivel 2

[E] **Problema 11.9.** Sean AK y BL las alturas de un triángulo ABC trazadas desde los vértices A y B, respectivamente. El punto P tomado del segmento AK es tal que $LK = LP$. La paralela a BC que pasa por P intersecta en el punto Q a la paralela a PL que pasa por B. Demuestre que $\angle AQB = \angle ACB$.

Solución. Sea M el punto medio de QB. Como $QP \parallel BC \perp AK$, entonces ML es la mediatriz de PK. Como $MB \parallel PL$, tenemos

$$\angle BML = \angle PLM = \angle MLK = \angle A = \angle BAL$$

de donde $BMAL$ es cíclico y $\angle AMB = \angle ALB = 90°$. Por ende,

$$\angle AQB = \angle ABM = \angle ALM = \angle ACB.$$

□

[E] **Problema 11.10.** Sea $n > 1$ un número entero. Se marcan k casillas en un tablero de $n \times n$. Determine el mayor valor posible de k para el cual es posible permutar filas y columnas de tal manera que las k casillas marcadas estén en la diagonal principal o por encima de ella.

Solución. Respuesta: $n + 1$ por inducción. El siguiente es un contraejemplo de $n + 2$.

♣				♣
	♣			
		⋱		
			♣	
♣				♣

□

[M] **Problema 11.11.** Sean a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y b_3 enteros positivos distintos dos a dos tales que

$$(n+1)a_1^n + na_2^n + (n-1)a_3^n \mid (n+1)b_1^n + nb_2^n + (n-1)b_3^n$$

para todo entero positivo n. Demuestre que existe un número entero positivo k tal que $b_i = k \cdot a_i$ para $i = 1, 2, 3$.

§12 Semana 12 (05/30 – 06/05)

Lunes
2022-05-30
Ecuaciones Funcionales

[M] **Problema 12.1.** Determine todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x + yf(x)) + f(xf(y) - y) = f(x) - f(y) + 2xy$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Solución. Con $(x, y) = (0, 0)$ obtenemos $f(0) = 0$. Con $(x, y) = (0, x)$ obtenemos $f(-x) = -f(x)$. Con $(x, y) = (-x, y)$ obtenemos

$$f(x + yf(x)) + f(xf(y) + y) = f(x) + f(y) + 2xy$$

de donde

$$f(y + xf(y)) + f(y - xf(y)) = 2f(y)$$

y así f es aditiva. Luego, de la ecuación original

$$f(yf(x)) + f(xf(y)) = 2xy$$

y

$$f(xf(x)) = x^2.$$

Si $f(a) = f(b)$, entonces $f(x + a) = f(x + b)$ de donde

$$2 \cdot (a - b) \cdot 2(a - b) = f(3(a - b)f(a - b)) = 2 \cdot 0 \cdot 3(a - b)$$

y $a = b$. Es decir, f es inyectiva. Con $(x, y) = (xf(x), 1/x)$ obtenemos

$$f(xf(x)f(1/x)) = f(x)$$

de donde

$$f(1/x) = 1/f(x)$$

y con $(x, y) = (x, 1/x)$ obtenemos

$$f(a) + 1/f(a) = 2$$

donde $a = f(x)/x$. Luego, $f(a) = 1$ de donde $f(x) = xc$ siendo $c \in \mathbb{R}$ una constante. Finalmente, $f(x) = x$ y $f(x) = -x$ son las únicas que cumplen. □

[E] **Problema 12.2.** Determine todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x)^2 + 2yf(x) + f(y) = f(y + f(x))$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Solución. Es claro que $f(x) = 0$ es una solución. Ahora, si existe un $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) \neq 0$, con $(x, y) = \left(a, \frac{x - f(a)^2}{2f(a)}\right)$ obtenemos

$$x = f(a)^2 + (x - f(a)^2) = f(t) - f(s)$$

para algunos $t, s \in \mathbb{R}$. Con $(x, y) = (s, -f(s))$ obtenemos

$$f(s)^2 - 2f(s)^2 + f(-f(s)) = f(0)$$

de donde $f(-f(s)) = f(s)^2 + f(0)$. Luego, con $(x, y) = (t, -f(s))$ obtenemos

$$(f(t) - f(s))^2 + f(0) = f(t)^2 - 2f(t)f(s) + (f(s)^2 + f(0)) = f(f(t) - f(s))$$

de donde $f(x) = x^2 + c$ para algún $c \in \mathbb{R}$ fijo. □

[M] **Problema 12.3.** Determine todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Solución. Si $x = \frac{1}{2}(f(0) - t)$ y $y = -f(x)$ para algún $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$f(0) = f(0) - t + f(f(y) - x)$$

de donde f es sobreyectiva. Luego, existe un $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = 0$. Si $x = a$, tenemos que

$$f(y) = 2a + f(f(y) - a)$$

de donde $f(x) = x + c$ siendo $c \in \mathbb{R}$ una constante. □

[E] **Problema 12.4.** Determine todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Solución. Si $x = 0$ tenemos que $f(f(x)) = x + f(0)^2$. Es decir, f es biyectiva. Luego, existe un $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = 0$. Con $(x, y) = (a, f(x))$ obtenemos

$$f(a^2 + f(f(x))) = f(x) + f(a)^2 = f(x)$$

de donde

$$x + f(0)^2 = f(f(x)) = x - a^2$$

y así $f(0) = 0$, es decir, $f(f(x)) = x$. Luego, si $y = 0$ tenemos que $f(x^2) = f(x)^2$ de donde

$$f(-x)^2 = f(x^2) = f(x)^2$$

y $f(-x) = -f(x)$. Con $y = f(y^2)$ obtenemos

$$f(x^2 + y^2) = f(x^2) + f(y^2)$$

y $f(x^2) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de donde f satisface las condiciones de la ecuación funcional de Cauchy en el intérvalo $[0, +\infty)$. Es decir, $f(x) = cx$ para algún $c \in \mathbb{R}$ fijo. Es fácil ver que $c = 1$, por lo que $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. □

Martes
2022-05-31
Combinatoria

[E] **Problema 12.5.** Sea $n > 2$ un número entero. Hay n lámparas alrededor de una circunferencia, las cuales están etiquetadas con los números del 1 al n en sentido horario. Cada lámpara puede estar encendida o apagada. Un *movimiento* consiste en cambiar simultáneamente el estado de dos lámparas adyacentes. Si al inicio todas las lámparas están apagadas, ¿cuántas configuraciones distintas de estados de lámparas es posible lograr usando algunos movimientos?

[E] **Problema 12.6.** ¿De cuántas formas podemos escribir los números del 1 al $3n$ en las casillas de un tablero de 3 filas y n columnas, sin repetir, de tal manera que cualesquiera dos números consecutivos estén en casillas vecinas (que comparten un lado) y que los números 1 y $3n$ estén en casillas vecinas?

[E] Problema 12.7. ¿De cuántas formas podemos escribir los números del 1 al $3n$ en las casillas de un tablero de 3 filas y n columnas, sin repetir, de tal manera que el número 1 esté en la primera columna, el número $3n$ esté en la última columna, y cualesquiera dos números consecutivos estén en casillas vecinas (que comparten un lado)?

[E] Problema 12.8. Un tablero finito ha sido cubierto por fichas de 1×2 cumpliendo las siguientes reglas:

- los bordes de las fichas están sobre las líneas del tablero;
- ninguna ficha puede salir del tablero;
- cada casilla está cubierta por exactamente dos fichas.

Demuestre que es posible quitar algunas fichas del tablero de tal manera que cada casilla esté cubierta por exactamente una ficha.

[E] Problema 12.9. Sea n un entero positivo. Hay 2^n soldados en una fila. Los soldados se pueden reacomodar en una nueva fila respetando la siguiente regla: los soldados que se encuentran en posiciones impares se mueven al frente de la fila, manteniendo sus posiciones entre sí; mientras que los soldados que están en posiciones pares se mueven al frente de la fila, al final de la nueva fila, manteniendo sus posiciones entre sí. Demuestre que después de n reordenamientos los soldados estarán en el mismo orden que al principio.

[M] Problema 12.10 (Estonia TST 2021/4)**.** (a) There are $2n$ rays marked in a plane, with n being a natural number. Given that no two marked rays have the same direction and no two marked rays have a common initial point, prove that there exists a line that passes through none of the initial points of the marked rays and intersects with exactly n marked rays.

(b) Would the claim still hold if the assumption that no two marked rays have a common initial point was dropped?

[aops:23997712]

Solución. Respuesta: sí. □

[E] Problema 12.11 (Estonia National Olympiad 2020/10.1[3])**.** A room of the shape of a rectangular parallelepiped has vertical walls covered by mirrors. A laser beam of diameter 0 enters the room from one corner and moves horizontally along the bisector of that corner. After reflecting from some wall, the beam continues moving horizontally according to the laws of reflection (i.e. the bisector of the angle between the imaginary continuation of the trajectory of the beam before reflection and the real continuation trajectory is along the wall). When the beam reaches a corner, it will return along the way it arrived.

(a) Prove that if the ratio of the side lengths of the floor of the room is rational then the beam eventually returns to the point of entrance.

(b) Prove that if the ratio of the side lengths of the floor of the room is irrational then the beam never returns to the point of entrance.

[E] Problema 12.12 (Estonia National Olympiad 2020/12.4)**.** On a horizontal line, one colors $2k$ points red and, in the right of them, $2l$ points blue. On every move, one chooses two points of different color, such that there is exactly one colored point between them, and interchanges the colors of the chosen points. How many different configurations can one obtain using these moves?

[3]Un video relacionado de Mates Mike: `https://www.youtube.com/watch?v=5PAGXnPTE94`.

Solución. Respuesta: $\binom{k+l}{k}^2$. □

Problema 12.13 (Estonia National Olympiad 2020/12.5)**.** Let n be a positive integer, $n \geq 3$. In a regular n-gon, one draws a maximal set of diagonals, no two of which intersect in the interior of the n-gon. Every diagonal is labelled with the number of sides of the n-gon between the endpoints of the diagonal along the shortest path. Find the maximum value of the sum of the labels.

Miércoles
2022-06-01
Teoría de Números

[M] **Problema 12.14** (CSMO 2020/10.4)**.** Sea $a_1, a_2, \ldots, a_{17}$ una permutación de los números $1, 2, \ldots, 17$ tal que

$$(a_1 - a_2)(a_2 - a_3) \cdots (a_{17} - a_1) = n^{17}$$

para algún número entero n. Determine el máximo valor de n.

[aops:16999538]

Solución. La respuesta es 6. Por MA-MG, es fácil ver que $n \leq 8$. Si $n = 8$, hay al menos 15 índices i tal que $|a_i - a_{i+1}| = 8$, absurdo. Si $n = 7$, $a_i - a_{i+1}$ es impar para todo i, absurdo. Así que $n \leq 6$ y un ejemplo es

$$17, 8, 16, 7, 15, 6, 14, 5, 13, 4, 2, 11, 10, 1, 3, 12, 9.$$

□

[E] **Problema 12.15** (CSMO 2020/11.1)**.** Let $a_1, a_2, \ldots, a_{17}$ be a permutation of $1, 2, \ldots, 17$ such that $(a_1 - a_2)(a_2 - a_3) \cdots (a_{17} - a_1) = 2^n$. Find the maximum possible value of positive integer n.

[aops:16999514]

Solución. Respuesta: 38. Como ejemplo considere a lo siguiente:

$$1, 17, 9, 13, 5, 3, 11, 15, 7, 8, 16, 12, 4, 6, 14, 10, 2.$$

□

[M] **Problema 12.16** (CSMO 2020/11.7)**.** Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ la secuencia de todos los enteros positivos libres de cuadrados, en forma creciente. Demuestre que $a_{n+1} - a_n = 2020$ para infinitos enteros positivos n.

[aops:16952166]

Solución. Por el teorema chino del resto, existe un $x \in \mathbb{Z}^+$ tal que $p_i \mid x + i$ para todo $1 \leq i \leq 2019$, donde $p_1, p_2, \ldots, p_{2019}$ son algunos primos distintos. Luego, sea $M = p_1 p_2 \ldots p_{2019}$ y p un primo. Si fijamos un $N \in \mathbb{Z}^+$ suficientemente grande, hay a lo sumo $\left\lceil \frac{N}{p^2} \right\rceil$ números $1 \leq k \leq N$ tales que $p^2 \mid kM^2 + x$. Análogamente, hay a lo sumo $\left\lceil \frac{N}{p^2} \right\rceil$ números $1 \leq k \leq N$ tales que $p^2 \mid kM^2 + x + 2020$. Note que $p^2 \leq kM^2 + x + 2020 \leq M^2(N+2)$ de donde $p \leq M\sqrt{N+2}$. Ahora, consideremos un resultado bien conocido:[4]

$$\sum_{p \text{ es primo}} \frac{1}{p^2} \approx 0{,}45224742 < 0{,}48$$

[4] Es conocido como $P(2)$, donde $P(s)$ es la función zeta prima (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Prime_zeta_function).

de donde

$$\begin{aligned} N - 2 \sum_{\substack{p \text{ es primo} \\ p \leq M\sqrt{N+2}}} \left\lceil \frac{N}{p^2} \right\rceil &\geq N - 2N \sum_{p \text{ es primo}} \frac{1}{p^2} - 2M\sqrt{N+2} \\ &> 0{,}04N - 2M\sqrt{N+2} \end{aligned}$$

tiende al infinito cuando $N \to +\infty$, así que con esto terminamos. $\square$

§13 Semana 13 (06/06 – 06/12)

Martes
2022-06-07
Álgebra

[M] Problema 13.1 (ISL 2009/A5)**.** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Demuestre que existen $x, y \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x - f(y)) > yf(x) + x.$$

[aops:1932913]

Solución. Supongamos por el absurdo que $f(x - f(y)) \le yf(x) + x$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Si $y = 0$, tenemos $f(x) \le x + f(0)$ de donde $f(x) \le 0$ para todo $x \le -f(0)$. Si $(x, y) = (f(x), x)$ y $x \ge 0$, entonces

$$f(0) \le xf(f(x)) + f(x) \tag{1}$$

Ahora, si $f(x) \le -f(0)$ tenemos $f(f(x)) \le 0$, de donde $f(0) \le f(x)$. Es decir, $f(x) \ge -|f(0)|$ para todo $x \ge 0$. Ahora, digamos que $x \in \mathbb{R}$ es un número cualquiera. Luego, existe un $y \to -\infty$ tal que $f(y) < x$. Pero si $f(x) > 0$, entonces

$$-|f(0)| \le f(x - f(y)) \le yf(x) + x$$

lo cual es un absurdo. Por ende, $f(x) \le 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De la ecuación (1) tenemos que $f(x) \ge f(0)$ para todo $x \ge 0$. Ahora, si existe algún $x \ge 0$ tal que $f(x) < 0$, sea $y \in \mathbb{R}^+$ suficientemente grande. Luego,

$$f(0) \le f(x - f(y)) \le yf(x) + x$$

lo cual es un absurdo. Por ende, $f(x) = 0$ para todo $x \ge 0$. Ahora, si existe algún $x < 0$ tal que $f(x) < 0$, sea $y \in \mathbb{R}^+$ suficientemente grande. Luego,

$$-f(x)(y - 1) \le x$$

lo cual es un absurdo. Por lo tanto, $f \equiv 0$ pero claramente esto es un absurdo. □

[M] Problema 13.2 (ISL 2009/A6)**.** Suponga que la secuencia $s_1, s_2, s_3, \ldots$ es una secuencia estrictamente creciente de enteros positivos tal que las subsecuencias

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \quad \text{y} \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

son ambas progresiones aritméticas. Demuestre que $s_1, s_2, s_3, \ldots$ es también una progresión aritmética.

[aops:1561573]

Solución. Sea $s_{s_i} = a_1 + (i-1)d_1$ y $s_{s_i+1} = a_2 + (i-1)d_2$ para todo $i \in \mathbb{Z}^+$. Luego,

$$s_{s_i} = a_1 + (i-1)d_1 < s_{s_i+1} = a_2 + (i-1)d_2 \le s_{s_{i+1}} = a_1 + id_1$$

de donde $d_1 \le d_2$, $a_1 < a_2$ y $d_2 \le d_1$ de donde $d_1 = d_2 = d$. Entonces,

$$0 < s_{i+1} - s_i \le s_{s_{i+1}} - s_{s_i} = d$$

y en efecto sean N y M el valor mínimo y máximo de $s_{i+1} - s_i$. Si $M = s_{k+1} - s_k$, entonces

$$N \cdot M = N \cdot (s_{k+1} - s_k) \le s_{s_{k+1}} - s_{s_k} = d$$

y análogamente $N \cdot M \ge d$ de donde $d = N \cdot M$ y como se cumple la igualdad, $N = s_{s_k+1} - s_{s_k} = a_2 - a_1$ y análogamente $M = a_2 - a_1$ de donde $s_{i+1} - s_i$ es constante. □

[M] **Problema 13.3** (ISL 2009/A7)**.** Determine todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(xf(x+y)) = f(yf(x)) + x^2$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

[aops:1932915]

Solución. Si $x = 0$, tenemos $f(0) = f(yf(0))$ de donde si $f(0) \neq 0$ entonces f es constante, lo cual es un absurdo. Por ende, $f(0) = 0$. Si $y = 0$, tenemos

$$f(xf(x)) = f(0) + x^2 = x^2.$$

Si $f(x) = 0$, $0 = f(0) = x^2$ de donde $x = 0$. Si $y = -x$, tenemos $f(-xf(x)) = -x^2$ de donde f es suryectiva. Ahora, si $f(a) = f(b)$ entonces sea $(x, y) = (a, b - a)$, luego

$$a^2 = f(af(b)) = f((b-a)f(a)) + a^2$$

de donde $f((b-a)f(a)) = 0$ y $a = b$. Es decir, f es inyectiva. Luego,

$$f(xf(x)) = x^2 = f(-xf(-x))$$

de donde $f(-x) = -f(x)$. Si $(x, y) = (x, 2x)$ y $(x, y) = (2x, -x)$, entonces

$$f(2xf(x)) = f(-xf(2x)) + 4x^2 = 4x^2 - (2x^2) = f(xf(2x))$$

de donde $f(2x) = 2f(x)$. Sea $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(k) = 1$. Luego,

$$1 = f(k) = f(kf(k)) = k^2$$

de donde $k = \pm 1$, es decir, $f(1) = \pm 1$. Si $(x, y) = (x, 1)$ y $(x, y) = (x + 1, -x)$ entonces $f(xf(x+1)) = f(f(x)) + x^2$ y $f(1)f(x+1) = -f(xf(x+1)) + (x+1)^2$ de donde $f(f(x)) = 2x + 1 - f(1)f(x+1)$. Si $(x, y) = (1, x - 1)$ entonces $f(f(x)) = f(1)f(x-1) + 1$ de donde $2x = f(1)(f(x+1) + f(x-1))$. Si $x = 2x + 1$, entonces

$$2(2x+1) = f(1)(f(2x+2) + f(2x)) = 2f(1)(f(x+1) + f(x))$$

de donde $f(1)f(x+1) = 2x + 1 - f(1)f(x)$. Es decir,

$$f(f(x)) = 2x + 1 - f(1)f(x+1) = f(1)f(x)$$

de donde $f(x) = \pm x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. □

[E] **Problema 13.4** (ISL 2010/A2)**.** Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $a + b + c + d = 6$ y $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 12$. Demuestre que

$$36 \leq 4(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a^4 + b^4 + c^4 + d^4) \leq 48.$$

[aops:2362276]

Solución. Note que

$$\sum_{\text{cyc}} (a-1)^2 = \sum_{\text{cyc}} a^2 - 2\sum_{\text{cyc}} a + 4 = 4$$

de donde

$$4 \leq \sum_{\text{cyc}} (a-1)^4 \leq 16.$$

Como

$$(x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$

entonces

$$4\sum_{\text{cyc}} a^3 - \sum_{\text{cyc}} a^4 = 6\sum_{\text{cyc}} a^2 - 4\sum_{\text{cyc}} a + 4 - \sum_{\text{cyc}} (a-1)^4 = 52 - \sum_{\text{cyc}} (a-1)^4$$

de donde

$$36 \leq 4\sum_{\text{cyc}} a^3 - \sum_{\text{cyc}} a^4 \leq 48.$$

□

[M] **Problema 13.5** (ISL 2010/A3)**.** Sean $x_1, x_2, \ldots, x_{100} \in \mathbb{R}_0^+$ tales que $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \leq 1$ para todo $i = 1, 2, \ldots, 100$ (donde $x_{101} = x_1$, $x_{102} = x_2$). Determine el máximo valor de $S = \sum_{i=1}^{100} x_i x_{i+2}$.

[aops:2362280]

Solución. Note que

$$x_i^2 + x_i x_{i+1} + x_i x_{i+2} \leq x_i$$

de donde

$$S \leq \frac{1}{2}\sum (x_i + x_{i+1})(1 - x_i - x_{i+1}) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 100 = \frac{25}{2}$$

y un ejemplo es cuando

$$x_i = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 2 \mid i, \\ 0 & \text{si } 2 \nmid i. \end{cases}$$

□

[E] **Problema 13.6** (ISL 2010/A4)**.** Una secuencia $x_1, x_2, \ldots$ está definida por $x_1 = 1$ y $x_{2k} = -x_k$, $x_{2k-1} = (-1)^{k+1} x_k$ para todo $k \geq 1$. Demuestre que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq 0$ para todo $n \geq 1$.

[aops:2362283]

Solución. Pista: inducción de $x \mapsto 4x, 4x+1, 4x+2, 4x+3$. □

[E] **Problema 13.7** (ISL 2010/A5)**.** Determine todas las funciones $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ tales que

$$f(f(x)^2 y) = x^3 f(xy)$$

para todo $x, y \in \mathbb{Q}^+$.

[aops:2362286]

Solución. Si $y = 1$ entonces $f(f(x)^2) = x^3 f(x)$ por lo que f es inyectiva. Luego, si $y = f(y)^2$ entonces

$$f(f(x)^2 f(y)^2) = x^3 f(x f(y)^2) = x^3 y^3 f(xy) = f(f(xy)^2)$$

de donde f es multiplicativa. Si $g(x) = \frac{f(f(x))}{x}$, tenemos $f(x) = x g(x)^2$ de donde $g(g(x))^4 = g(x)^5$ y esto significa que si $g(x) \neq 1$ y N es el mínimo común múltiplo de todos los exponentes primos de $g(x)$, entonces $4N \mid 5N$ lo cual es un absurdo. Es decir, $g(x) = 1$ de donde $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{Q}^+$. □

[H] **Problema 13.8** (ISL 2010/A6)**.** Sean $f, g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ tales que $f(g(n)) = f(n) + 1$ y $g(f(n)) = g(n) + 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Demuestre que $f(n) = g(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

[aops:2362289]

Miércoles
2022-06-08

[H] **Problema 13.9** (ISL 2010/A7[5])**.** Sean $a_1, a_2, \ldots, a_r$ números reales positivos. Para $n > r$, inductivamente definimos

$$a_n = \max_{1 \leq k \leq n-1} (a_k + a_{n-k}).$$

Demuestre que existen enteros positivos $\ell \leq r$ y N tales que $a_n = a_{n-\ell} + a_\ell$ para todo $n \geq N$.

[aops:1936918]

[M] **Problema 13.10** (ISL 2010/A8)**.** Sean $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}^+$ tales que $a < b < c < d < e < f$. Consideremos $a + c + e = S$ y $b + d + f = T$. Demuestre que

$$2ST > \sqrt{3(S + T)\,(S(bd + bf + df) + T(ac + ae + ce))}.$$

[aops:2362291]

[E] **Problema 13.11** (ISL 2011/A2)**.** Determine todas las secuencias $(x_1,\, x_2, \ldots, x_{2011})$ de enteros positivos tales que para todo entero positivo n existe un entero positivo a que satisface:

$$x_1^n + 2x_2^n + \cdots + 2011x_{2011}^n = a^{n+1} + 1.$$

[aops:2737640]

[M] **Problema 13.12** (ISL 2011/A3)**.** Determine todas las parejas de funciones (f, g), con $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tales que

$$g(f(x + y)) = f(x) + (2x + y)g(y)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

[aops:2737643]

Problema 13.13 (ISL 2011/A4)**.** Determine todas las parejas de funciones (f, g), con $f, g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, tales que

$$f^{g(n)+1}(n) + g^{f(n)}(n) = f(n + 1) - g(n + 1) + 1$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Nota. $f^k(n) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{k \text{ veces}}(n)\ldots)).$

[aops:2737644]

Solución. Sea $a_1 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $f(a_1)$ es mínimo. Note que si $a_1 > 1$, con $n = a_1 - 1$ tenemos $f(f^{g(n)}(n)) < f(a_1)$ lo cual es un absurdo, por lo que $a_1 = 1$. Ahora, si $a_2 > 1$ es tal que $f(a_2)$ es el segundo mínimo, entonces con $n = a_2 - 1$ tenemos $f(f^{g(n)}(n)) < f(a_2)$ de donde

$$f(f^{g(n)-1}(n)) = f^{g(n)}(n) = 1.$$

Es decir, $f^{g(n)-1}(n) = 1$ y así sucesivamente hasta que $n = 1$, por lo que $a_2 = 2$. Podemos probar de manera similar que $a_3 = 3, a_4 = 4, \ldots$ y que $f(a_2) = 2, f(a_3) = 3, \ldots$ de donde $f(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Luego, $g^{f(n)}(n) + g(n + 1) = 2$ de donde $g(n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. $\square$

Jueves
2022-06-09
Teoría de Números

[E] Problema 13.14 (ISL 2010/N2). Determine el mayor entero n para el cual existe un conjunto $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ que consiste de n enteros positivos que satisfacen

$$\left(1-\frac{1}{s_1}\right)\left(1-\frac{1}{s_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{s_n}\right)=\frac{51}{2010}.$$

[aops:2361998]

Solución. Note que

$$\frac{51}{2010} \geq \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

de donde $n \geq 39$, y un ejemplo es $(s_1, \ldots, s_{39}) = (2, 3, \ldots, 33, 35, 36, \ldots, 40, 67)$. □

[E] Problema 13.15 (ISL 2010/N3). Determine el menor entero positivo n para el cual existen polinomios $f_1, f_2, \ldots, f_n$ con coeficientes racionales tales que

$$x^2+7=f_1(x)^2+f_2(x)^2+\cdots+f_n(x)^2.$$

[aops:2362006]

Solución. Es claro que $\deg f_i \leq 1$ así que sea $f_i(x) = a_i x + b_i$ donde $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$ para todo $1 \leq i \leq 5$. Luego, $\sum a_i^2 = 1$, $\sum a_i b_i = 0$ y $\sum b_i^2 = 7$. Vamos a multiplicar los a_i's y b_i's por $D \in \mathbb{Z}^+$ para que sean todos enteros (digamos que D es el mínimo). Luego,

$$\sum(a_i+b_i)^2=\sum(a_i-b_i)^2=8D^2.$$

Si $n \leq 4$, como $8 \mid \sum(a_i \pm b_i)^2$ entonces $2 \mid a_i - b_i$, de donde

$$D^2=\sum a_i^2 \equiv \sum b_i^2 = 7D^2 \pmod 4.$$

Es decir, $4 \mid 6D^2$ de donde $2 \mid D$. Luego,

$$8 \mid 2D^2 = \sum\left(\frac{a_i \pm b_i}{2}\right)^2$$

de donde $4 \mid a_i \pm b_i$ y

$$4 \mid (a_i+b_i)+(a_i-b_i)=2a_i$$

de donde a_i's y b_i's son pares. Es decir, podemos dividir los a_i's, los b_i's y el D por 2, lo cual es un absurdo a la minimalidad de D. Por ende, $n \geq 5$ y un ejemplo es $(f_1, \ldots, f_5) = (x, 2, 1, 1, 1)$. □

[E] Problema 13.16 (ISL 2010/G3[6]). Sea $A_1A_2\cdots A_n$ un polígono convexo. El punto P es escogido en el interior del polígono de tal manera que sus proyecciones $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sobre las rectas $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$, respectivamente, pertenecen a los lados del polígono (y no a sus prolongaciones). Pruebe que si $X_1, \ldots, X_n$ son puntos arbitrarios que pertenecen a los lados $A_1A_2, \ldots, A_nA_1$, respectivamente, se cumple la desigualdad:

$$\max\left\{\frac{X_1X_2}{P_1P_2},\ldots,\frac{X_nX_1}{P_nP_1}\right\}\geq 1.$$

[aops:2361975]

[5] IMO 2010/6

[6] Peru IMO TST 2011/2

Solución. Supongamos por el absurdo que $X_iX_{i+1} < P_iP_{i+1}$ para todo índice $1 \leq i \leq n$. Note que si X_i está en el segmento A_iP_i, entonces X_{i+1} está en el segmento $A_{i+1}P_{i+1}$ y así sucesivamente. Por ende, supongamos sin pérdida de generalidad que X_i está en el segmento A_iP_i para todo $1 \leq i \leq n$. Es claro que existe un i tal que $\angle PX_iP_i \leq \angle PX_{i+1}P_{i+1}$ (digamos $i = 1$). Ahora, sea Y un punto en el segmento A_1P_1 tal que $\angle PYP_1 = \angle PX_2P_2$. Luego, $\triangle PYP_1 \sim \triangle PX_2P_2$ de donde $\triangle PYX_2 \sim \triangle PP_1P_2$. Por ende,

$$X_1X_2 \geq YX_2 = \frac{PY}{PP_1} \cdot P_1P_2 \geq P_1P_2$$

lo cual es un absurdo. $\square$

[M] Problema 13.17 (ISL 2010/N4[7])**.** Sean a, b números enteros, y sea $P(x) = ax^3 + bx$. Dado un entero positivo n, decimos que el par ordenado (a, b) es *n-bueno* si $n \mid P(m) - P(k)$ implica que $n \mid m - k$ para todos los enteros m, k. Decimos también que el par (a, b) es *muy bueno* si (a, b) es n-bueno para infinitos enteros positivos n.

(a) Encuentre un par (a, b) que sea 51-bueno, pero que no sea muy bueno.

(b) Demuestre que todos los pares 2010-buenos también son muy buenos.

[aops:2362008]

Solución. Para la parte (a), considere el polinomio $P(x) = x^3 - 51^2x$ con $(a, b) = (1, -51^2)$. Luego, si $51 \mid P(m) - P(k)$ entonces

$$m \equiv m^3 \equiv k^3 \equiv k \pmod{3}$$

y

$$m \equiv m^{33} \equiv k^{33} \equiv k \pmod{1}7$$

lo cual implica que $51 \mid m - k$. Por ende, (a, b) es 51-bueno. Si $n > 51$ y $(m, k) = (51, 0)$, note que $n \mid 0 = P(m) - P(k)$ pero $n \nmid 51 = m - k$, así que (a, b) no es muy bueno.

Para la parte (b), note que $P(m) - P(k) = (m - k)(a(m^2 + mk + k^2) + b)$. Supongamos que existe un par de enteros (m, k) tales que $67 \mid a(m^2 + mk + k^2) + b$. Sea (m_1, k_1) un par de enteros tales que $m_1 \equiv k_1 \equiv 0 \pmod{3}0$, $m_1 \equiv m \pmod{67}$ y $k_1 \equiv k \pmod{67}$, considerando que $2010 = 30 \times 67$. Luego, $2010 \mid P(m_1) - P(k_1)$ de donde $2010 \mid m_1 - k_1$, es decir, $m \equiv k \pmod{67}$. Ahora, sea (m_2, k_2) un par de enteros tales que $m_2 \equiv k_2 \equiv 0 \pmod{3}0$, $m_2 \equiv m \pmod{67}$ y $k_2 \equiv -2m \pmod{67}$. Luego, $2010 \mid P(m_2) - P(k_2)$ de donde $2010 \mid m_2 - k_2$, es decir, $67 \mid m$ y $67 \mid b$. Ahora, sea (m_3, k_3) un par de enteros tales que $m_3 \equiv k_3 \equiv 0 \pmod{3}0$, $m_3 \equiv 1 \pmod{67}$ y $k_3 \equiv 2^{22} \pmod{67}$. Luego, $2010 \mid P(m_3) - P(k_3)$ de donde $2010 \mid m_3 - k_3$, es decir, $2^{22} \equiv 1 \pmod{67}$ lo cual es un absurdo. Por ende, $67 \nmid a(m^2 + mk + k^2) + b$ para todo par de enteros (m, k), lo cual implica que (a, b) es n-bueno para todo $n = 67^e$ siendo $e \in \mathbb{Z}^+$, es decir, (a, b) es muy bueno. $\square$

[E] Problema 13.18 (ISL 2010/N5[8])**.** Determine todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que $(f(m) + n)(m + f(n))$ es un cuadrado perfecto para todos los enteros positivos m y n.

[aops:1935854]

[7] Peru IMO TST 2011/3

[8] IMO 2010/3

Solución. Se sabe que para todo primo p se cumple lo siguiente: para todo $t \in \mathbb{Z}$ existen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^+$ suficientemente grandes tales que $t = k_1 - k_2$, donde $2 \mid \nu_p(k_1), \nu_p(k_2)$. Ahora, sea p un primo y supongamos que $p \mid f(m) - f(n)$ para algunos $m, n \in \mathbb{Z}^+$. Si $f(m) - f(n) = pt = pk_1 - pk_2$, sea $N = pk_1 - f(m) = pk_2 - f(n)$ un entero positivo. Como $(f(m) + N)(m + f(N)) = pk_1(m + f(N))$ es un cuadrado perfecto y $\nu_p(pk_1)$ es impar, entonces $p \mid m + f(N)$ y análogamente $p \mid n + f(N)$ de donde $p \mid m - n$. Si $f(a) = f(b)$ tenemos que $p \mid f(a) - f(b)$ para todo primo p, es decir, $p \mid a - b$ para todo primo p de donde $a = b$. Si existe un primo p que divide a $f(a+1) - f(a)$, entonces $p \mid (a+1) - a = 1$ lo cual es un absurdo, así que $f(a+1) - f(a) = \pm 1$. Esto implica que $f(x) = x + c$ donde $c \in \mathbb{Z}_0^+$ es fijo. $\square$

[E] Problema 13.19 (ISL 2002/N3)**.** Sean $p_1, p_2, \ldots, p_n$ números primos distintos y mayores que 3. Demuestre que el número $2^{p_1 p_2 \cdots p_n} + 1$ tiene al menos 4^n divisores positivos.

[aops:118690]

Solución 1. Procederemos por inducción sobre n. Si $n = 1$, los números $1 < 3 < \frac{N}{3} < N$ son los divisores del número $N = 2^{p_1} + 1$. Ahora, sea $n > 1$ y supongamos que $a + 1$ tiene al menos 4^{n-1} divisores, donde $a = 2^{p_1 p_2 \cdots p_{n-1}}$ y $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$. Note que

$$\operatorname{mcd}(2^{p_1 p_2 \cdots p_{n-1}} + 1, 2^{p_n} + 1) = 2^{\operatorname{mcd}(p_1 p_2 \cdots p_{n-1}, p_n)} + 1 = 3$$

así que $\frac{2^{p_n}+1}{3}$ divide a $N = \frac{a^{p_n}+1}{a+1}$. En efecto, sea $N = \frac{2^{p_n}+1}{3} \cdot M$. Note que

$$\nu_3\left(\frac{2^{p_n}+1}{3}\right) = \nu_3(3) = 1$$

de donde si p es un factor primo de $\frac{2^{p_n}+1}{3}$, entonces $p > 3$ y $\operatorname{ord}_p(2) = 2p_n \mid p - 1$. Luego, $p > p_n$ de donde p es coprimo con $p_1 p_2 \cdots p_n$. Por ende,

$$\nu_p\left(\frac{2^{p_n}+1}{3}\right) = \nu_p(2^{p_n} + 1) = \nu_p(2^{p_1 p_2 \cdots p_n} + 1)$$

de donde $p \nmid M$. Note que

$$N = a^{p_n - 1} - a^{p_n - 2} + \cdots + 1 \equiv p_n \pmod{a+1}$$

de donde $\operatorname{mcd}(N, a+1) \mid p_n$. Como $\frac{2^{p_n}+1}{3} > p_n$ y $M > p_n$ son coprimos, existen factores primos $q_1 \neq q_2$ de $\frac{2^{p_n}+1}{3}$ y M, coprimos con $a+1$. Por ende, $2^{p_1 p_2 \cdots p_n} + 1$ tiene al menos $4^{n-1} \cdot 2 \cdot 2 = 4^n$ divisores. $\square$

Solución 2. Por Zsigmondy, para cada divisor d de $p_1 p_2 \cdots p_n$ existe un factor primo primitivo de $2^d + 1$ (excepto cuando $d = 3$, lo cual no puede ocurrir), así que tenemos al menos 2^n factores primos de $2^{p_1 p_2 \cdots p_n} + 1$ y por ende al menos $2^{2^n} \geq 4^n$ divisores. $\square$

Viernes 2022-06-10

[E] Problema 13.20 (ISL 2002/N4)**.** Determine si existe un entero positivo m para el cual la ecuación

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} = \frac{m}{a+b+c}$$

tiene infinitas soluciones en los enteros positivos a, b, c.

[aops:118691]

Solución. Probaremos que $m = 12$ cumple, y digamos que la terna (a, b, c) de enteros positivos con $a < b < c$ satisface la ecuación dada y que además $a \mid bc + 1$, $b \mid c + a$ y $c \mid ab + 1$. Ahora, sea $(a', b', c') = \left(b, c, \frac{bc+1}{a}\right)$ una terna de enteros positivos. Note que la terna (a', b', c') también satisface las condiciones anteriores y la ecuación dada, y que $a' + b' + c' > a + b + c$. Como la terna $(1, 2, 3)$ cumple, es claro que existen infinitas soluciones para la ecuación dada. □

[E] Problema 13.21 (ISL 2002/N6)**.** Determine todas las parejas de enteros positivos $m, n \geq 3$ para los cuales existen infinitos enteros positivos a que satisface

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1} \in \mathbb{Z}.$$

[aops:118695]

Solución. Sean $Q, R \in \mathbb{Z}[x]$ con $\deg R < n$ tales que

$$x^m + x - 1 = Q(x) \cdot (x^n + x^2 - 1) + R(x).$$

Luego, $a^n + a^2 - 1 \mid R(a)$ para infinitos $a \in \mathbb{Z}^+$ de donde $R(x) = 0$, es decir,

$$x^m + x - 1 = Q(x) \cdot (x^n + x^2 - 1).$$

Ahora, sea $\varepsilon \in (0, 1)$ tal que $\varepsilon^n + \varepsilon^2 = 1$. Luego,

$$a^n + a > a^n + a^2 = a^m + a = 1 > a^{2n} + a$$

de donde $m < 2n$. Si $a = 2$, entonces $2^n + 3 \mid 2^m + 1$ de donde $2^n + 3 \mid 3 \cdot 2^{m-n} - 1$. Como $0 < m - n < n$, se cumple la igualdad, entonces $(m, n) = (5, 3)$. Note que

$$x^5 + x - 1 = (x^3 + x^2 - 1)(x^2 - x + 1)$$

así que la única pareja que cumple es $(5, 3)$. □

[M] Problema 13.22 (ISL 2003/N5)**.** Un entero n es llamado *bueno* si $|n|$ no es un cuadrado perfecto. Determine todos los números enteros m con la siguiente propiedad: m se puede representar de infinitas formas, como la suma de tres números buenos distintos cuyo producto es el cuadrado de un número entero impar.

[aops:18558]

Solución. Es claro que esos tres números son de la forma a^2yz, b^2zx, c^2xy donde $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ y $x, y, z \in \mathbb{Z}$ son impares, es decir,

$$n = a^2yz + b^2zx + c^2xy \equiv \frac{(x + y + z)^2 - x^2 - y^2 - z^2}{2} \equiv 3 \pmod{4}.$$

Ahora, sea $p \equiv 5 \pmod{8}$ un número primo suficientemente grande y sea

$$(x, y, z) = \left(-p, p + 2n, \frac{1 + pn(p + 2n)}{2}\right)$$

una terna de enteros impares coprimos. Como $x \equiv y \equiv 3 \pmod{8}$, entonces n es la suma de los números buenos distintos yz, zx, n^2xy cuyo producto es un cuadrado perfecto de un número impar. Finalmente, todo entero $n \equiv 3 \pmod{4}$ cumple. □

[E] **Problema 13.23** (ISL 2003/N6[9]). Sea p un número primo. Demuestre que existe un número primo q tal que para todo número entero n, el número $n^p - p$ no es múltiplo de q.

[aops:266]

Solución. Sea $q \not\equiv 1 \pmod{p^2}$ un factor primo de

$$\frac{p^p - 1}{p - 1} = p^{p-1} + p^{p-2} + \cdots + 1.$$

Luego, $\operatorname{ord}_q p \mid \operatorname{mcd}(p, q-1)$ de donde $\operatorname{ord}_q p = p$ y $q = pk + 1$ tal que $p \nmid k$. Ahora, si existe un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $q \mid n^p - p$ entonces claramente $q \nmid n$ y

$$p^k \equiv n^{pk} = n^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$$

de donde $p \mid k$ lo cual es un absurdo. □

[M] **Problema 13.24** (ISL 2005/N7). Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, donde $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, $a_n > 0$ y $n \geq 2$. Demuestre que existe un $m \in \mathbb{Z}^+$ para el cual $P(m!)$ es un número compuesto.

[aops:789443]

Solución. Si $|a_0| \neq 1$, existe un primo q tal que $q \mid a_0$. Es decir, $q \mid P(N!) > N!$ para algún $N \in \mathbb{Z}^+$ suficientemente grande, así que $P(N!)$ es compuesto. Si $a_0 = \pm 1$, sea $m = p_i! + 1$ para algún $i \in \mathbb{Z}^+$ suficientemente grande, donde p_i es el i-ésimo primo. Ahora, sea $P'(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, luego

$$P\left(\frac{1}{m!}\right) = \frac{P'(m!)}{(m!)^n} = k \cdot \frac{a_n}{(m!)^n}$$

donde

$$k = a_0 \cdot \frac{(m!)^n}{a_n} + \cdots + a_{n-1} \cdot \frac{m!}{a_n} + 1 \equiv 1 \pmod{\frac{m!}{a_n}}.$$

Es decir, existe un factor primo $q \geq p_i! + p_{i+1}$ de $P'(m!)$ tal que $N! = (q - p_i! - 2)! \geq q$, luego

$$\begin{aligned} N! &= (q - p_i! - 2)! \\ &= \frac{(q-1)!}{(q - p_i! - 1)\cdots(q-2)(q-1)} \\ &\equiv \frac{-1}{(-1)^m \cdot m!} \\ &= \frac{1}{m!} \pmod{q} \end{aligned}$$

de donde

$$P(N!) \equiv P\left(\frac{1}{m!}\right) \equiv 0 \pmod{q}.$$

Luego, $q \mid P(N!) > N!$ así que $P(N!)$ es compuesto. □

[9] IMO 2003/6

[E] Problema 13.25 (ISL 2009/N4)**.** Determine todos los $n \in \mathbb{Z}^+$ para los cuales existe una secuencia $a_1, a_2, \ldots, a_n$ que satisface

$$a_{k+1} = \frac{a_k^2 + 1}{a_{k-1} + 1} - 1$$

para todo $2 \leq k \leq n - 1$.

[aops:1932944]

Solución. Para $n \leq 4$, considere la secuencia $4, 33, 217, 1384$. Ahora, suponga que $n \geq 5$. Note que si a_{k-1} es impar entonces a_k es impar y a_{k+1} es par para todo $2 \leq k \leq n-1$, así que si a_2 es impar, entonces a_3 es impar y a_4 es par, pero a_4 es impar ya que a_3 es impar, lo cual es un absurdo. Es decir, si $(a, b) = (a_1, a_2)$ tenemos que $2 \mid b$ y

$$(a_3, a_4) = \left(\frac{b^2 - a}{a+1}, \frac{(b^2 - a)^2 - b(a+1)^2}{(a+1)^2(b+1)}\right)$$

de donde $a + 1 \mid b^2 + 1$ y $b + 1 \mid a^2 + 1$. Si $d = \text{mcd}(a+1, b+1) > 1$ entonces $d = 2$, pero $2 \nmid b + 1$ lo cual es un absurdo. Luego,

$$k = \frac{a^2 + b^2}{(a+1)(b+1)} \in \mathbb{Z}^+.$$

Ahora, fijemos k y supongamos que (a, b) es la pareja que cumple la ecuación de arriba y que además la suma $a + b$ es la mínima. Note que si (a, b) cumple entonces $a + 1 \mid b^2 + 1$ de donde $a \leq b^2$. Si $a = b^2$ entonces de $b + 1 \mid a^2 + 1$ tenemos que $b + 1 \mid 2$, de donde $a = b = 1$, luego $k = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}^+$ lo cual es un absurdo. Es decir, $a < b^2$ y la pareja $\left(\frac{b^2-a}{a+1}, b\right)$ también cumple, así que

$$\frac{b^2}{a} > \frac{b^2 - a}{a+1} \geq a$$

de donde $b > a$ y análogamente $a > b$ lo cual es un absurdo. □

[E] Problema 13.26 (ISL 2008/N1)**.** Sea n un entero positivo y sea p un número primo. Demuestre que si los números enteros a, b y c (no necesariamente positivos) satisfacen las ecuaciones

$$a^n + pb = b^n + pc = c^n + pa$$

entonces $a = b = c$.

[aops:1555927]

Solución. Note que si $a = b$ entonces $a = b = c$. Ahora, supongamos que a, b, c son distintos, luego

$$a - b \mid b^n - a^n = p(b - c)$$

y análogamente $b - c \mid p(c - a)$ y $c - a \mid p(a - b)$. Si $q \neq p$ es un primo, Entonces $\nu_q(a - b) \leq \nu_q(b - c)$ y análogamente con $\nu_q(b - c)$ y $\nu_q(c - a)$, así que $\nu_q(a - b) = \nu_q(b - c) = \nu_q(c - a)$. Es decir,

$$(|a - b|, |b - c|, |c - a|) = (M \cdot p^\alpha, M \cdot p^\beta, M \cdot p^\gamma)$$

para algún entero positivo impar M y $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_0^+$ donde $\alpha = \text{máx}(\alpha, \beta, \gamma)$ sin pérdida de generalidad. Luego, $\pm p^\alpha \pm p^\beta \pm p^\gamma = 0$ de donde $p = 2$. Entonces, a, b, c tienen la misma paridad, de donde

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} \equiv \frac{b^n - c^n}{b - c} \equiv \frac{c^n - a^n}{c - a} \equiv na^{n-1} \pmod{2}.$$

Si na^{n-1} es impar, tenemos

$$\nu_2(a-b) < \nu_2(2(a-b)) = \nu_2(c^n - a^n) = \nu_2(c-a)$$

lo cual es un absurdo, así que na^{n-1} es par, de donde $a-b \mid \frac{b^n-a^n}{2} = b-c$ y análogamente $b-c \mid c-a$ y $c-a \mid a-b$. Luego, $|a-b| = |b-c| = |c-a|$ y $a=b=c$, lo cual es un absurdo. □

[E] Problema 13.27 (ISL 2008/N2)**.** Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números enteros positivos distintos, con $n \geq 3$. Demuestre que existen índices distintos i y j de tal manera que la suma $a_i + a_j$ no divide a ninguno de los números $3a_1, 3a_2, \ldots, 3a_n$.

[aops:1555929]

Solución. Supongamos por el absurdo que para todo $i \neq j$ existe k tal que $a_i + a_j \mid 3a_k$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ y que $\text{mcd}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$. Si $1 \leq i \leq n-1$, existe un k tal que $a_i + a_n = 3a_k$ o $a_i + a_n = \frac{3}{2}a_k$, es decir, $a_i \equiv -a_n \pmod{3}$ para todo $1 \leq i \leq n-1$ de donde $3 \neq a_n$. Entonces, si $1 \leq i \leq n-2$ existe un k tal que $a_i + a_{n-1} \mid 3a_k$, de donde $a_i + a_{n-1} \mid a_k$. Luego, $a_{n-1} < a_k$ de donde $k = n$. Si $2a_i + 2a_{n-1} \leq a_n$, entonces $2a_{n-1} < a_n$. Sea k tal que $a_{n-1} + a_n = 3a_k$ o $a_{n-1} + a_n = \frac{3}{2}a_k$. Luego, $3a_{n-1} < a_{n-1} + a_n \leq 3a_k$ de donde $k = n$. Por ende, $a_{n-1} = 2a_n$ o $2a_{n-1} = a_n$, lo cual es un absurdo. Es decir, $a_i = a_n - a_{n-1}$ para todo $1 \leq i \leq n-2$, de donde $n = 3$. Luego, $3a_1 < a_2 + a_3 \mid 3a_k < 2a_2 + 2a_3$ para algún $k > 1$, de donde $a_2 + a_3 = 3a_2$ o $a_2 + a_3 = 3a_3$. Por ende, $a_3 = 2a_2$ o $a_2 = 2a_3$ lo cual es un absurdo. □

[E] Problema 13.28 (ISL 2009/N2)**.** Un entero positivo N es llamado *balanceado* si $N = 1$ o si N puede representarse como el producto de una cantidad par de números primos, no necesariamente distintos. Dados los enteros positivos a y b, considere el polinomio $P(x) = (x+a)(x+b)$.

(a) Demuestre que existen dos enteros positivos distintos a y b para los cuales cada uno de los números $P(1), P(2), \ldots, P(50)$ es balanceado.

(b) Demuestre que si $P(n)$ es balanceado para todo entero positivo n, entonces $a = b$.

[aops:1932941]

Solución. Si $f(n) = \sum_{p \text{ es primo}} \nu_p(n)$, entonces N es balanceado si y solo si $f(N)$ es par. Es decir, $P(n)$ es balanceado si y solo si $f(x+a) \equiv f(x+b) \pmod{2}$. Ahora, por el principio de las casillas existen enteros positivos $a \neq b$ tales que

$$(f(a+1), f(a+2), \ldots, f(a+50)) \equiv (f(b+1), f(b+2), \ldots, f(b+50)) \pmod{2}$$

de donde $P(1), P(2), \ldots, P(50)$ es balanceado. Ahora, si $P(n)$ es balanceado para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces $f(n+a) \equiv f(n+b) \pmod{2}$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Si $a > b$, entonces por Dirichlet existe un primo $p = (a-b)k + 1 > b$ para algún $k \in \mathbb{Z}^+$, de donde

$$1 = f(p) \equiv f(p^2) \equiv 0 \pmod{2}$$

lo cual es un absurdo, así que $a = b$. □

[M] Problema 13.29 (ISL 2005/N2[10])**.** Sea $a_1, a_2, \ldots$ una secuencia de números enteros con infinitos términos positivos e infinitos términos negativos. Suponga que para cada entero positivo n, los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tienen n restos distintos al ser divididos entre n. Demuestre que cada número entero aparece exactamente una vez en la secuencia.

[aops:281572]

[10] IMO 2005/2

Solución. Sea $N \in \mathbb{Z}^+$ suficientemente grande. Note que si $N \mid a_i - a_j$ para algunos $i \neq j$, por la condición tenemos $\max(i, j) > N$, es decir, ningún entero se repite en la secuencia y además $\max(i, j) > |a_i - a_j|$ para todo $i \neq j$. Si existe un $a \in \mathbb{Z}$ que no aparece en la secuencia, por la condición existe un $1 \leq i \leq N$ tal que $a_i \equiv a \pmod{N}$, de donde $a_i \geq a + N$ o $a_i \leq a - N$. Además, $N \geq \max(i, j) > |a_i - a_j|$ para todo $1 \leq j \neq i \leq N$, de donde $N > a_i - a_j > -N$. Si $a_i \geq a + N > a$, entonces $a_j > a_i - N \geq a$ de donde $a_k > a$ para todo $1 \leq k \leq N$. Análogamente, si $a_i \leq a - N < a$, entonces $a_k < a$ para todo $1 \leq k \leq N$, de donde $a_k > a$ para todo $k \in \mathbb{Z}^+$ o $a_k < a$ para todo $k \in \mathbb{Z}^+$, lo cual contradice la infinidad de términos negativos o positivos. Es decir, cada entero aparece exactamente una vez en la secuencia. $\square$

[E] Problema 13.30 (ISL 2008/N6[11])**.** Demuestre que existen infinitos $n \in \mathbb{Z}^+$ para los cuales $n^2 + 1$ tiene un factor primo mayor que $2n + \sqrt{2n}$.

[aops:1190546]

Solución. Sea $p \equiv 1 \pmod{4}$ un primo suficientemente grande. Luego, existe un entero $x = \frac{p-1}{2} - m$ donde $1 < m < \frac{p-1}{2}$ tal que $p \mid x^2 + 1$, de donde $p \mid (2m + 1)^2 + 4$. Luego, $p < (2m+1)^2 + 2m + 1$ de donde $2x = p - 2m - 1 < (2m+1)^2$ y $\sqrt{2x} < 2m + 1 = p - 2x$ de donde $p > 2x + \sqrt{2x}$. Como $x \geq \sqrt{p-1}$, $n^2 + 1$ tiene un factor primo mayor que $2n + \sqrt{2n}$ para infinitos $n \in \mathbb{Z}^+$. $\square$

[11] IMO 2008/3

§14 Semana 14 (06/13 – 06/19)

Lunes
2022-06-13
Álgebra

[H] Problema 14.1 (ISL 2011/A5)**.** Demuestre que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, el conjunto $\{2, 3, \ldots, 3n+1\}$ puede ser dividido en n subconjuntos de tres elementos de tal manera que los tres números en cada terna sean las longitudes de los lados de un triángulo obtusángulo.

[aops:2737645]

Solución. Procederemos por inducción fuerte sobre n. Probaremos que $\{2, 3, \ldots, 3n+1\}$ puede ser dividido en n subconjuntos $A_2, A_3, \ldots, A_{n+1}$ de tal manera que $A_i = \{i, a_i, b_i\}$ (siendo $i < a_i < b_i$ las longitudes de un triángulo obtusángulo) para todo $2 \le i \le n+1$. Si $n = 1$, claramente $A_2 = \{2, 3, 4\}$ cumple. Ahora, supongamos que $n \ge 2$ y que todo $m < n$ cumple. Si $t = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor < n$ entonces t cumple, así que $\{2, 3, \ldots, 3t+1\}$ puede ser dividido en $A'_2, A'_3, \ldots, A'_{t+1}$ tales que $A'_i = \{i, a'_i, b'_i\}$ para todo $2 \le i \le t+1$. Sabemos que si $a < b < c$ son las longitudes de un triángulo obtusángulo, $a < b + x < c + x$ también lo son, así que sea $B_i = \{i, a'_i + n - t, b'_i + n - t\}$ para todo $2 \le i \le t+1$ y $B_i = \{i, 2n + 2t - i + 3, 3n + t - i + 3\}$ para todo $t + 2 \le i \le n+1$. Luego, es posible dividir $\{2, 3, \ldots, 3n+1\}$ en n subconjuntos $B_2, B_3, \ldots, B_{n+1}$ cumpliendo la condición del problema. □

Martes
2022-06-14

[E] Problema 14.2 (ISL 2011/A6)**.** sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que

$$f(x+y) \le yf(x) + f(f(x))$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Demuestre que $f(x) = 0$ para todo $x \le 0$.

[aops:2363539]

[H] Problema 14.3 (ISL 2011/A7)**.** Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ tales que $\text{mín}(a+b, b+c, c+a) \ge \sqrt{2}$ y $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Demuestre que

$$\frac{a}{(b+c-a)^2} + \frac{b}{(c+a-b)^2} + \frac{c}{(a+b-c)^2} \ge \frac{3}{(abc)^2}.$$

[aops:2737646]

[E] Problema 14.4. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ tales que $a + b + c = 3$. Demuestre que

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \ge ab + bc + ca.$$

Teoría de Números

[E] Problema 14.5 (ISL 2011/N1)**.** Para cada $d \in \mathbb{Z}^+$ sea $f(d)$ el menor entero positivo que tiene exactamente d divisores positivos. Demuestre que $f(2^k) \mid f(2^{k+1})$ para todo $k \ge 0$.

[aops:2737648]

[M] Problema 14.6 (ISL 2011/N2)**.** Sea $P(x) = (x+d_1)(x+d_2)\cdots(x+d_9)$, donde $d_1, d_2, \ldots, d_9$ son enteros distintos. Demuestre que existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $P(x)$ es múltiplo de algún primo mayor que 20, para todo entero $x \ge N$.

[aops:2737650]

Miércoles
2022-06-15

[E] Problema 14.7 (ISL 2011/N3)**.** Sea $n \ge 1$ un número entero impar. Determine todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que para todo $x, y \in \mathbb{Z}$ la diferencia $f(x) - f(y)$ divide a $x^n - y^n$.

[aops:2737651]

Solución. Sea $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots\}$ el conjunto de los primos. Sea $g(x) = \pm(f(x) - f(0))$ tal que $g(1) = 1$ y $g(-1) = -1$. Luego, $g(p) \mid p^n$ para todo $p \in \mathcal{P}$ de donde $g(p) = \pm p^d$ donde $d \mid n$. Si $g(p) = -p^d$, entonces $g(p) - 1 \mid p^n - 1$ de donde $p^d + 1 \mid p^n - 1$ y $2 \mid n$, lo cual es un absurdo, así que $g(p) = p^d$. Como los divisores de n son finitos, existe un divisor d de n tal que $g(p) = p^d$ para infinitos $p \in \mathcal{P}$. Luego, $g(x) - p^d \mid x^n - p^n$ y $g(x) - p^d \mid x^n - g(x)^{\frac{n}{d}}$ para infinitos $p \in \mathcal{P}$, de donde $x^n - g(x)^{\frac{n}{d}} = 0$ para todo $x \in \mathbb{Z}$. Por ende, $f(x) = \pm x^d + c$, para algún divisor positivo $d \mid n$ y $c \in \mathbb{Z}$. $\square$

[M] Problema 14.8 (ISL 2011/N4)**.** Para cada $k \in \mathbb{Z}^+$, sea $t(k)$ el mayor divisor impar de k. Determine todos los $a \in \mathbb{Z}^+$ para el cual existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que todas las diferencias

$$t(n+a) - t(n),\ t(n+a+1) - t(n+1),\ \dots,\ t(n+2a-1) - t(n+a-1)$$

son divisibles por 4.

[aops:2737653]

Solución. Si $2 \mid a$, sea $0 \le r \le a-1$ un entero tal que $r \equiv \frac{a}{2} - n \pmod{a}$. Luego,

$$\frac{n+r}{a/2} = t(n+r) \equiv t(n+a+r) = \frac{n+a+r}{a/2} \pmod{4}$$

de donde $4 \mid \frac{a}{a/2} = 2$, lo cual es un absurdo. Es decir, $2 \nmid a$. Si $a = 7$, sea $0 \le r \le a-1 = 6$ un entero tal que $r \equiv 3 - n \pmod{8}$ o $r \equiv 6 - n \pmod{8}$. Luego, $t(n+r) \equiv t(n+a+r) \pmod{4}$ de donde $r \equiv 2 - n \pmod{8}$ o $r \equiv 7 - n \pmod{8}$, lo cual es un absurdo. Si $a > 8$, sea $0 \le r \le a-1$ un entero tal que $r \equiv 2a - n \pmod{8}$. Luego,

$$\frac{n+r}{2} = t(n+r) \equiv t(n+a+r) = n+a+r \pmod{4}$$

de donde $r \equiv -2a - n \pmod{8}$, lo cual es un absurdo. Por ende, $a \in \{1, 3, 5\}$ y $1, 1, 23$ son los valores de n que cumplen en los respectivos casos. $\square$

[M] Problema 14.9 (ISL 2011/N5[12])**.** Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^+$ una función tal que para cada $m, n \in \mathbb{Z}$, la diferencia $f(m) - f(n)$ es divisible por $f(m-n)$. Demuestre que para todo $m, n \in \mathbb{Z}$, con $f(m) \le f(n)$, el número $f(n)$ es divisible por $f(m)$.

[aops:2365041]

Solución. Si $n = 0$ tenemos $f(m) \mid f(0)$, y si $(m, n) = (0, -m)$ entonces $f(m) \mid f(-m)$ y análogamente $f(-m) \mid f(m)$ de donde $f(-m) = f(m)$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Ahora, sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $f(a) \le f(b)$. Si $f(a) = f(b)$ ya está, así que $f(a) < f(b)$. De $(m, n) = (a, -b), (a+b, b)$ tenemos que $f(a+b) \mid f(a) - f(b)$ y $f(a) \mid f(a+b) - f(b)$ de donde $|f(a+b) - f(b)| < f(a+b) + f(b) \le f(a)$. Por ende, $f(a+b) = f(b)$ de donde $f(b) \mid f(a)$ y con esto terminamos. $\square$

[M] Problema 14.10 (ISL 2011/N6)**.** Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios con coeficientes enteros tal que ningún polinomio no constante de coeficientes racionales divide simultáneamente a $P(x)$ y $Q(x)$. Suponga que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ los números $P(n)$ y $Q(n)$ son positivos, y $2^{Q(n)} - 1$ divide a $3^{P(n)} - 1$. Demuestre que $Q(x)$ es un polinomio constante.

[aops:2737654]

[12] IMO 2011/5

Solución. Es claro que existen $A, B \in \mathbb{Z}[x]$ y $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ fijo tal que $P(x)A(x) + Q(x)B(x) = c$. Por Schur, existe un primo suficientemente grande $p > |c|$ que divide a $Q(n)$ para algún $n \in \mathbb{Z}^+$. Si $o = \operatorname{ord}_{2^p-1}(3)$, entonces $p \mid Q(n+pk)$ de donde $o \mid P(n+pk)$ para todo $k \in \mathbb{Z}_0^+$. Sea $P_0(x) = P(x) = a_m x^m + \cdots + a_0$ y $P_i(x) = P_{i-1}(x+p) - P_{i-1}(x)$ para todo $1 \leq i \leq m$. Luego,

$$o \mid P_1(n+pk) = P_0(n+p(k+1)) - P_0(n+pk)$$

y así sucesivamente hasta que $o \mid P_m(x)$ que es una función constante. Como el coeficiente principal de $P_i(x)$ es $p^i \cdot \frac{m!}{(m-i)!} \cdot a_m$ entonces $o \mid p^m \cdot m! \cdot a_m$. Como p es suficientemente grande, $p \mid o \mid P(n)$ de donde $p \mid c$, lo cual es un absurdo. $\square$

[M] Problema 14.11 (IMO 2011/N7)**.** Sea p un número primo impar. Para cada $a \in \mathbb{Z}$, definimos

$$S_a = \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2} + \cdots + \frac{a^{p-1}}{p-1}.$$

Sean $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$S_3 + S_4 - 3S_2 = \frac{m}{n}.$$

Demuestre que $p \mid m$.

[aops:2737656]

Solución. Note que

$$\begin{aligned} -\frac{a^k}{k} &= \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} \cdot (-a)^k \\ &\equiv \frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)}{k!} \cdot (-a)^k \\ &= \frac{1}{p}\binom{p}{k} \cdot (-a)^k \pmod{p} \end{aligned}$$

de donde

$$S_a = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{a^k}{k} \equiv -\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k} \cdot (-a)^k = -\frac{a^p - (a-1)^p - 1}{p} \pmod{p}$$

por lo que

$$\begin{aligned} S_3 + S_4 - 3S_2 &\equiv -\frac{(3^p - 2^p - 1) + (4^p - 3^p - 1) - 3(2^p - 1^p - 1)}{p} \\ &= -\frac{(2^p-2)^2}{p} \\ &\equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

así que $p \mid m$. $\square$

Álgebra

[E] Problema 14.12 (ISL 1998/A3)**.** Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ tales que $xyz = 1$. Demuestre que

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{x^3}{(1+y)(1+z)} \geq \frac{3}{4}.$$

[aops:124421]

Solución. Pista: Cauchy-Schwartz y MA-MG. □

Jueves
2022-06-16
Teoría de Números

[H] Problema 14.13 (ISL 2011/N8)**.** Let k be a positive integer and set $n = 2^k + 1$. Prove that n is a prime number if and only if the following holds: there is a permutation $a_1, \ldots, a_{n-1}$ of the numbers $1, 2, \ldots, n-1$ and a sequence of integers $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$ such that n divides $g_i^{a_i} - a_{i+1}$ for every $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, where we set $a_n = a_1$.
[aops:2737657]

Solución. Supongamos que n es compuesto, en efecto $n = ts$ donde $t, s > 1$ son enteros. Si $t = s$, tenemos $2^k = (t+1)(t-1)$ de donde $k = 3$ y $n = 9$. Ahora, es claro que existe un i tal que $a_{i+1} \in \{3, 6\}$ y $a_i > 1$, luego $9 \mid g_i^{a_i} - a_{i+1}$ de donde $3 \mid g_i$. Luego, $9 \mid g_i^{a_i}$ de donde $9 \mid a_{i+1}$, lo cual es un absurdo. Ahora, considerando a todos los $a_i \in \{2, 4, \ldots, n-1\}$ tenemos al menos $\frac{n-1}{2}$ residuos cuadráticos módulo n, es decir, $a^2 \not\equiv b^2 \pmod{n}$ para todo $1 \leq a \neq b \leq \frac{n-1}{2}$. Pero note que $2^{k-1} \geq \frac{t+s}{2} > \frac{|t-s|}{2} \geq 1$ y

$$\left(\frac{t+s}{2}\right)^2 \equiv \left(\frac{t-s}{2}\right)^2 \pmod{n}$$

lo cual es una contradicción. Ahora, supongamos que $n = p$ para algún primo p. Si $k = 1$ o $k = 2$, $(a_1, a_2) = (1, 2)$ con $g_1 = g_2 = 2$ y $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 3, 2, 4)$ con $g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = 3$ cumplen. Si $k \geq 3$, es claro que $3 \nmid 2^k + 1$ de donde $2 \mid k$. Sean $g_1, g_2, \ldots, g_{p-1} = g$ la raíz primitiva módulo p y sea G un grafo dirigido, tal que $a_i \to j$ si y solo si $g_i^{a_i} \equiv j \pmod{p}$. Note que

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = 1 \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{3-1}{2} \cdot \frac{p-1}{2}} \left(\frac{p}{3}\right) = -1$$

de donde $2^1 \cdot 3, 2^2 \cdot 3, \ldots, 2^{k-2} \cdot 3$ no son residuos cuadráticos módulo n. Es decir, existen $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{k-2}}$ impares tales que $a_{i_j} \to 2^j \cdot 3$ para todo $1 \leq j \leq k-2$. Además, $2^{k-1} \to 2^k \to 1$. Note que si $a_i = 2^e \cdot m_1 \to g^{2^e \cdot x_1} \pmod{p}$ y $a_j = 2^e \cdot m_2 \to g^{2^e \cdot x_2} \pmod{p}$ con $2 \nmid m_1, m_2, x_1, x_2$ tales que a_i y a_j pertenecen a componentes distintos de G, podemos modificar el g_i y g_j de manera que $a_i = 2^e \cdot m_1 \to g^{2^e \cdot x_2} \pmod{p}$ y $a_j = 2^e \cdot m_2 \to g^{2^e \cdot x_1} \pmod{p}$. Es decir, al final tendremos que si $a_i = 2^e \cdot m_1$ y $a_j = 2^e \cdot m_2$ entonces a_i y a_j pertenecen a un mismo componente de G. Por lo tanto, G es conexo y por ende podemos encontrar un ciclo Hamiltoniano, de donde $p \mid g_i^{a_i} - a_{i+1}$ para todo $1 \leq i \leq n-1$. □

[E] Problema 14.14 (ISL 2012/N2)**.** Determine todas las ternas (x, y, z) de enteros positivos, con $x \leq y \leq z$, tales que

$$x^3(y^3 + z^3) = 2012(xyz + 2).$$

[aops:3160603]

Solución. Note que $x \mid 2012 \cdot 2 = 2^3 \cdot 503$. Si $d \in \{4, 503\}$ divide a x, entonces $d^3 \mid 2012(xyz + 2)$ de donde $d \mid 2$ lo cual es un absurdo. Es decir, $x \in \{1, 2\}$.

- Si $x = 1$, tenemos $y^3 + z^3 = 2012(yz + 2)$. Como

$$y \equiv \left(y^3\right)^{335} \equiv \left(-z^3\right)^{335} \equiv -z \pmod{503}$$

entonces $503 \mid y + z$, de donde $y^2 - yz + z^2 \mid 4(yz + 2)$. Note que $y \equiv z \pmod{2}$. Si $2 \nmid y, z$, entonces $y^2 - yz + z^2 \mid yz + 2$ de donde $(z - y)^2 \leq 2$. Si $z = y$, entonces

$z^2 \mid 2^2 \cdot 503$ de donde $z \in \{1, 2\}$, y en ambos casos tenemos un absurdo. Si $z = y+1$, entonces $y^2 - yz + z^2 = yz + 1$ de donde $yz + 1 = y^2 - yz + z^2 \mid 1$, lo cual es un absurdo. Por ende, $2 \mid y, z$ y sean $(y_1, z_1) = (y/2, z/2)$. Luego, $y_1^3 + z_1^3 = 503(2y_1z_1 + 1)$ de donde $503 \mid y_1 + z_1$ y $y_1^2 - y_1z_1 + z_1^2 \mid 2y_1z_1 + 1$. Si $y_1 = z_1$ entonces $y_1^2 \mid 503$ de donde $y_1 = 1$, pero en este caso tenemos un absurdo. Entonces, $2(y_1^2 - y_1z_1 + z_1^2) > 2y_1z_1 + 1$ de donde $y_1^2 - y_1z_1 + z_1^2 = 2y_1z_1 + 1$ de donde $z_1 = y_1 + 1$ y $y_1 + z_1 = 503$. Es decir,

$$5 \mid 5y_1z_1 = (y_1 + z_1)^2 - (y_1^2 - 3y_1z_1 + z_1^2) = 503^2 - 1 = 502 \cdot 504$$

lo cual es un absurdo.

- Si $x = 2$, tenemos $y^3 + z^3 = 503(yz + 1)$. Luego, $503 \mid y + z$ y $y^2 - yz + z^2 \mid yz + 1$ de donde $(z - y)^2 \leq 1$. Si $z = y$, tenemos $z^2 \mid 503$ de donde $2 = x \leq z = 1$ lo cual es un absurdo. Es decir, $z = y + 1$ y $y^2 - yz + z^2 = yz + 1$ de donde $y + z = 503$. Por ende, $(x, y, z) = (2, 251, 252)$ es la única terna que cumple.

$\square$

[E] Problema 14.15 (ISL 2012/N3)**.** Determine todos los números enteros $m \geq 2$ tales que para cada n, con $\frac{m}{3} \leq n \leq \frac{m}{2}$, n divide al coeficiente binomial $\binom{n}{m-2n}$.

[aops:3156840]

Solución. Si $m = 2$ es trivial. Si $m > 2$ y $2 \mid m$, con $n = m/2 > 1$ tenemos $n \mid \binom{n}{m-2n} = 1$, lo cual es un absurdo. Por ende, $2 \nmid m$. Si m es compuesto, $m = pk$ para algún primo p y $k \geq p$. Con $n = \frac{m-p}{2}$ tenemos $n \mid \binom{n}{p}$ de donde

$$p \mid p! \mid (n-1)(n-2) \cdots (n-p+1),$$

lo cual es un absurdo. Es decir, $m = p$ para algún primo $p > 2$. Si $\frac{m}{3} \leq n \leq \frac{m}{2}$, sea $k = m - 2n > 0$. Luego, $\operatorname{mcd}(n, k) = \operatorname{mcd}(m, n) = 1$ y como $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ es entero, entonces $k \mid \binom{n-1}{k-1}$ de donde $n \mid \binom{n}{k}$. Por ende, $m = p$ para algún primo p. $\square$

[M] Problema 14.16 (Thailand Online MO 2021/9)**.** Sean $a, b \in \mathbb{Z}^+$ tales que

$$\tau(\tau(an)) = \tau(\tau(bn))$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Demuestre que $a = b$.

[aops:21336290]

Solución. Sea p un primo y supongamos que $a = p^\alpha a_1$ y $b = p^\beta b_1$ tales que $p \nmid a_1, b_1$ con $\alpha > \beta$. Si $n = p^N$ para algún $N \in \mathbb{Z}_0^+$, entonces $\tau(an) = (\alpha + N + 1)\tau(a_1)$ y $\tau(bn) = (\beta + N + 1)\tau(b_1)$. Ahora, sea $N = \tau(b_1)M^2 - \beta - 1$ para algún $M \in \mathbb{Z}^+$ suficientemente grande. Luego, $\tau(bn) = \tau(b_1)^2M^2$ es un cuadrado perfecto, de donde $\tau(\tau(bn))$ es impar, así que $\tau(\tau(an))$ también es impar. Por ende, $\tau(an) = \tau(a_1)(\alpha - \beta) + \tau(a_1)\tau(b_1)M^2$ es un cuadrado perfecto. Es decir, $x + yM^2$ es un cuadrado perfecto para todo $M \in \mathbb{Z}^+$ suficientemente grande, donde $x, y \in \mathbb{Z}^+$ son fijos. Si $x \mid M$, tenemos que x es un cuadrado perfecto. Ahora, supongamos que $\sqrt{x} \mid M$ y por ende supongamos que $x = 1$ sin pérdida de generalidad. Si $M = q$ para algún primo q suficientemente grande, entonces $yq^2 = (z-1)(z+1)$ de donde $q^2 \mid z \pm 1$ y $yq^2 \geq (q^2-1)^2 - 1 = q^4 - 2q^2$. Por ende, $y \geq q^2 - 2$ lo cual es un absurdo. Por lo tanto, $\alpha = \beta$ y de esta manera tenemos que $\nu_p(a) = \nu_p(b)$ para todo primo p, es decir, $a = b$. $\square$

[E] Problema 14.17 (ISL 2012/N4)**.** An integer a is called *friendly* if the equation $(m^2 + n)(n^2 + m) = a(m - n)^3$ has a solution over the positive integers.

(a) Prove that there are at least 500 friendly integers in the set $\{1, 2, \ldots, 2012\}$.

(b) Decide whether $a = 2$ is friendly.

[aops:3160606]

Solución. Si $(m, n) = (2k+1, k)$ para algún $k \in \mathbb{Z}^+$ obtenemos $a = 4k+1$, así que $5, 9, 13, \ldots, 2001$ son amigables. Ahora, supongamos que $a = 2$ es amigable. Es claro que $m > n$. Si $p^e \parallel m - n$ entonces $p^{3e} \mid (m^2+n)(n^2+m)$ de donde p^e divide a m^2+n o n^2+m, es decir, $p^e \mid n^2+n$. Por ende, $m - n \mid n^2+n$, pero

$$(m-n)^2(n^2+m) < (m^2+n)(n^2+m) = 2(m-n)^3$$

de donde $n^2+m < 2(m-n)$. Por ende, $n^2+n < m-n$ lo cual es una contradicción. Es decir, $a = 2$ no es amigable. □

[E] Problema 14.18 (ISL 2012/N5)**.** For a nonnegative integer n define $\operatorname{rad}(n) = 1$ if $n = 0$ or $n = 1$, and $\operatorname{rad}(n) = p_1p_2\cdots p_k$ where $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ are all prime factors of n. Find all polynomials $f(x)$ with nonnegative integer coefficients such that $\operatorname{rad}(f(n))$ divides $\operatorname{rad}(f(n^{\operatorname{rad}(n)}))$ for every nonnegative integer n.

[aops:3160608]

Solución. Sea $f(x) = x^m \cdot g(x)$ donde $g \in \mathbb{Z}_0^+[x]$ tal que $g(0) > 0$ y $m \in \mathbb{Z}_0^+$. Si $\deg g > 0$, por Schur existe un primo p suficientemente grande tal que $p \mid g(n)$ para algún $p \nmid n$. Sea $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $m \equiv n \pmod{p}$ y $m \equiv 0 \pmod{p-1}$. Note que $p \mid g(m) \mid f(m)$ de donde $p \mid f(m^k)$ donde $k = \operatorname{rad}(m)$. Luego,

$$p \mid g(m^k) \implies p \mid g(m^{k^2}) \implies \cdots$$

y así sucesivamente hasta que $p \mid g(m^{k^e})$ para algún $e \in \mathbb{Z}^+$ tal que $p-1 \mid k^e$. Luego, $p \mid g(1)$ de donde $g(1) = 0$, así que todos los coeficientes de g son ceros, y de esta manera $g(x) \equiv 0$, lo cual es una contradicción. Por ende, $\deg g = 0$ y $f(x) = cx^m$ para algunos $c, m \in \mathbb{Z}_0^+$ fijos. □

Viernes
2022-06-17

[H] Problema 14.19 (ISL 2012/N6)**.** Let x and y be positive integers. If $x^{2^n} - 1$ is divisible by $2^ny + 1$ for every positive integer n, prove that $x = 1$.

[aops:3156844]

Solución. Probaremos que hay infinitos primos $p \equiv 3 \pmod{4}$ que dividen a 2^ny+1. Si no lo es, supongamos sin pérdida de generalidad que y es impar y sea $2y+1 = p_1^{e_1}\cdots p_t^{e_t}$ su factorización y sean $p_{t+1}, \ldots, p_{t+s}$ los demás primos congruentes a 3 módulo 4. Si $n = 1 + \phi(p_1^{e_1}\cdots p_t^{e_t}p_{t+1}\cdots p_{t+s})$, tenemos que

$$2^ny+1 \equiv 2y+1 = p_1^{e_1}\cdots p_t^{e_t} \pmod{p_1^{e_1}\cdots p_t^{e_t}p_{t+1}\cdots p_{t+s}}$$

de donde $2^ny+1 = p_1^{e_1}\cdots p_t^{e_t}\cdot(4k+1)$ para algún $k \in \mathbb{Z}_0^+$, es decir,

$$1 \equiv 2^ny+1 \equiv p_1^{e_1}\cdots p_t^{e_t} = 2y+1 \equiv 3 \pmod{4},$$

lo cual es un absurdo. Ahora, si $p \equiv 3 \pmod{4}$ es un primo suficientemente grande que divide a 2^ny+1, entonces $p \mid x^{2^n}-1$. Si $o = \operatorname{ord}_p(x)$, entonces $o \mid \operatorname{mcd}(2^n, p-1) = 2$ de donde $p \mid x^2-1$, es decir, $x = 1$. □

Sábado
2022-06-18
Simulacro

[E] Problema 14.20 (Thailand MO 2020/10)**.** Determine all polynomials $P(x)$ with integer coefficients which satisfies $P(n) \mid n! + 2$ for all positive integer n.

[aops:19622974]

[E] Problema 14.21 (Thailand MO 2020/8)**.** For all positive real numbers a, b, c with $a + b + c = 3$, prove the inequality

$$\frac{a^6}{c^2 + 2b^3} + \frac{b^6}{a^2 + 2c^3} + \frac{c^6}{b^2 + 2a^3} \geq 1.$$

[aops:19622970]

[E] Problema 14.22 (Thailand MO 2020/9)**.** Let n, k be positive integers such that $n > k$. There is a square-shaped plot of land, which is divided into $n \times n$ grid so that each cell has the same size. The land needs to be plowed by k tractors; each tractor will begin on the lower-left corner cell and keep moving to the cell sharing a common side until it reaches the upper-right corner cell. In addition, each tractor can only move in two directions: up and right. Determine the minimum possible number of unplowed cells.

[aops:19622972]

[M] Problema 14.23 (ISL 2020/G6)**.** Let ABC be a triangle with $AB < AC$, incenter I, and A excenter I_A. The incircle meets BC at D. Define $E = AD \cap BI_A$, $F = AD \cap CI_A$. Show that the circumcircle of $\triangle AID$ and $\triangle I_AEF$ are tangent to each other.

[aops:22698132]

§15 Semana 15 (06/20 – 06/26)

Lunes
2022-06-20

[E] Problema 15.1. Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo, y h_a, h_b, h_c las longitudes de las alturas de dicho triángulo relativas a los lados a, b, c, respectivamente. Si $t \geq \frac{1}{2}$ es un número real, demuestre que existe un triángulo de lados $t \cdot a + h_a, t \cdot b + h_b, t \cdot c + h_c$.

Solución. Note que $h_a = \frac{2S}{a} = \frac{bc}{2R}$ donde S y R son el área y el circunradio del triángulo de lados a, b, c. Luego,

$$R(b+c-a) \geq \left(\frac{b+c}{4}\right)(b+c-a) > bc - ca - ab$$

de donde

$$t(b+c-a) > \frac{bc - ca - ab}{2R} = h_a - h_b - h_c$$

lo cual implica que

$$t \cdot b + h_b + t \cdot c + h_c > t \cdot a + h_a$$

y con esto es suficiente. □

Combinatoria

[E] Problema 15.2 (ISL 2011/C2)**.** Suponga que 1000 estudiantes están sentados alrededor de una circunferencia. Pruebe que existe un entero k, con $100 \leq k \leq 300$, para el cual existe un grupo de $2k$ estudiantes consecutivos tal que la primera mitad del grupo contiene el mismo número de mujeres que la segunda mitad.

Solución. Para cada grupo G de $2k$ estudiantes consecutivos (con $100 \leq k \leq 300$), denotemos como $d(G)$ al número de mujeres en la primera mitad menos el de la segunda mitad. Si $d(G) = 0$ para algún grupo G, ya está. De lo contrario, supongamos que $d(G) \neq 0$ para todo grupo G. Ahora, sean $G_1, G_2, \ldots, G_{1000}$ todos los grupos de 600 estudiantes consecutivos que están en ese orden en la circunferencia. Si $d(G_i) = 0$ para algún índice i, ya está. De lo contrario, existe un índice i tal que $d(G_i) > 0 > d(G_{i+1})$. Si $G_i = X\,(A)\,Y\,(B)$ y $G_{i+1} = (A)\,Y\,(B)\,Z$ tal que $G_i = |X| + |A| - |Y| - |B|$ y $G_{i+1} = |A| + |Y| - |B| - |Z|$, tenemos que $(|X|, |Y|, |Z|) = (1, 0, 1)$ y $|A| = |B|$. Digamos que $A = (A_1 A_2 \cdots A_{300})$ y $B = (B_1 B_2 \cdots B_{300})$. Si $|A_1| = 0$, tenemos que $d(A_2 A_3 \cdots A_{300} Y B_1 B_2 \cdots B_{300}) = 0$, una contradicción. Es decir, $|A_1| = 1$ y análogamente $|B_{300}| = 1$. Podemos seguir sucesivamente hasta que $|A_{200}| = 1$ y $|B_{101}| = 1$. Es decir, $|A_1| = |A_2| = \cdots = |A_{200}| = 1$ de donde $d(A_1 A_2 \cdots A_{200}) = 0$, una contradicción. □

[M] Problema 15.3 (ISL 2011/C3[13])**.** Sea $\mathcal{S}$ un conjunto finito de dos o más puntos del plano. En $\mathcal{S}$ no hay tres puntos colineales. Un *remolino* es un proceso que empieza con una recta ℓ que pasa por un único punto P de $\mathcal{S}$. Se rota ℓ en el sentido de las manecillas del reloj con centro en P hasta que la recta encuentre por primera vez otro punto de $\mathcal{S}$ al cual llamaremos Q. Con Q como nuevo centro se sigue rotando la recta en el sentido de las manecillas del reloj hasta que la recta encuentre otro punto de $\mathcal{S}$. Este proceso continúa indefinidamente.

Demostrar que se puede elegir un punto P de $\mathcal{S}$ y una recta ℓ que pasa por P tales que el remolino que resulta usa cada punto de $\mathcal{S}$ como centro de rotación un número infinito de veces.

[13] IMO 2011/2; como referencia un video de 3Blue1Brown: https://www.youtube.com/watch?v=M64HUIJFTZM.

[E] Problema 15.4 (ISL 2011/C4)**.** Determine the greatest positive integer k that satisfies the following property: The set of positive integers can be partitioned into k subsets $A_1, A_2, \dots, A_k$ such that for all integers $n \geq 15$ and all $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ there exist two distinct elements of A_i whose sum is n.

Solución. La respuesta es 3, y como ejemplo considere a los conjuntos

$$A_1 = \{1, 2, 3\} \cup \{12, 15, 18, \dots\}$$
$$A_2 = \{4, 5, 6\} \cup \{10, 13, 16, \dots\}$$
$$A_3 = \{7, 8, 9\} \cup \{11, 14, 17, \dots\}.$$

Si $k \geq 4$, sea $B_i = \{x \in A_i : x < 24\}$ para todo $1 \leq i \leq k$. Si $|B_j| \leq 5$ para algún índice j, entonces

$$\{x + y : x < y,\ (x, y) \in B_j \times B_j\} = \{15, 16, \dots, 24\}$$

de donde $|B_j| = 5$. Si S es la suma de elementos de B_j, tenemos que $4S = 15 + 16 + \cdots + 24 = 5 \cdot 39$ lo cual es un absurdo. Por ende, $|B_i| \geq 6$ de donde

$$24 > \left| \bigcup_{i=1}^{k} B_i \right| \geq 6k \geq 24$$

lo cual es un absurdo. □

[H] Problema 15.5 (ISL 2011/C5)**.** Let m be a positive integer and consider a checkerboard consisting of m by m unit squares. At the center of some of these unit squares there is an ant. At time 0, each ant starts moving with speed 1 parallel to some edge of the checkerboard. When two ants moving in the opposite directions meet, they both turn 90° clockwise and continue moving with speed 1. When more than 2 ants meet, or when two ants moving in perpendicular directions meet, the ants continue moving in the same direction as before they met. When an ant reaches one of the edges of the checkerboard, it falls off and will not re-appear.

Considering all possible starting positions, determine the latest possible moment at which the last ant falls off the checkerboard or prove that such a moment does not necessarily exist.

Martes
2022-06-21

[E] Problema 15.6 (ISL 2011/C6)**.** Let n be a positive integer and let $W = \dots x_{-1}x_0x_1 x_2 \dots$ be an infinite periodic word consisting of the letters a and b. Suppose that the minimal period N of W is greater than 2^n.

A finite nonempty word U is said to *appear* in W if there exist indices $k \leq \ell$ such that $U = x_k x_{k+1} \dots x_\ell$. A finite word U is called *ubiquitous* if the four words Ua, Ub, aU, and bU all appear in W. Prove that there are at least n ubiquitous finite nonempty words.

Solución. Pista: inducción (?). □

[H] Problema 15.7 (ISL 2011/C7)**.** On a square table of 2011 by 2011 cells we place a finite number of napkins that each cover a square of 52 by 52 cells. In each cell we write the number of napkins covering it, and we record the maximal number k of cells that all contain the same nonzero number. Considering all possible napkin configurations, what is the largest value of k?

Miércoles
2022-06-22
Geometría

[E] Problema 15.8 (ISL 2020/G1)**.** Let ABC be an isosceles triangle with $BC = CA$, and let D be a point inside side AB such that $AD < DB$. Let P and Q be two points inside sides BC and CA, respectively, such that $\angle DPB = \angle DQA = 90°$. Let the perpendicular bisector of PQ meet line segment CQ at E, and let the circumcircles of triangles ABC and CPQ meet again at point F, different from C.

Suppose that P, E, F are collinear. Prove that $\angle ACB = 90°$.

[aops:22698577]

[E] Problema 15.9 (ISL 2020/G2[14])**.** Considere el cuadrilátero convexo $ABCD$. El punto P está en el interior de $ABCD$. Asuma las siguientes igualdades de razones:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Demuestre que las siguientes tres rectas concurren en un punto: la bisectriz interna del ángulo $\angle ADP$, la bisectriz interna del ángulo $\angle PCB$ y la mediatriz del segmento AB.

[aops:17821635]

[E] Problema 15.10 (ISL 2020/G3)**.** Let $ABCD$ be a convex quadrilateral with $\angle ABC > 90°$, $CDA > 90°$, and $\angle DAB = \angle BCD$. Denote by E and F the reflections of A in lines BC and CD, respectively. Suppose that the segments AE and AF meet the line BD at K and L, respectively. Prove that the circumcircles of triangles BEK and DFL are tangent to each other.

[aops:22698213]

[M] Problema 15.11 (ISL 2020/G4)**.** In the plane, there are $n \geq 6$ pairwise disjoint disks $D_1, D_2, \ldots, D_n$ with radii $R_1 \geq R_2 \geq \cdots \geq R_n$. For every $i = 1, 2, \ldots, n$, a point P_i is chosen in disk D_i. Let O be an arbitrary point in the plane. Prove that

$$OP_1 + OP_2 + \cdots + OP_n \geq R_6 + R_7 + \cdots + R_n.$$

(A disk is assumed to contain its boundary.)

[aops:22698346]

[M] Problema 15.12 (ISL 2020/G5)**.** Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral with no two sides parallel. Let K, L, M, and N be points lying on sides AB, BC, CD, and DA, respectively, such that $KLMN$ is a rhombus with $KL \parallel AC$ and $LM \parallel BD$. Let ω_1, ω_2, ω_3, and ω_4 be the incircles of triangles ANK, BKL, CLM, and DMN, respectively. Prove that the internal common tangents to ω_1 and ω_3 and the internal common tangents to ω_2 and ω_4 are concurrent.

[aops:22698285]

[M] Problema 15.13 (ISL 2020/G6)**.** Let I and I_A be the incenter and the A-excenter of an acute-angled triangle ABC with $AB < AC$. Let the incircle meet BC at D. The line AD meets BI_A and CI_A at E and F, respectively. Prove that the circumcircles of triangles AID and I_AEF are tangent to each other.

[aops:22698132]

[M] Problema 15.14 (ISL 2020/G7)**.** Let P be a point on the circumcircle of an acute-angled triangle ABC. Let D, E, and F be the reflections of P in the midlines of triangle ABC parallel to BC, CA, and AB, respectively. Denote by ω_A, ω_B, and ω_C the circumcircles of triangles ADP, BEP, and CFP, respectively. Denote by ω the

[14] IMO 2020/1

circumcircle of the triangle formed by the perpendicular bisectors of segments AD, BE and CF.

Show that ω_A, ω_B, ω_C, and ω have a common point.

[aops:22698237]

[H] Problema 15.15 (ISL 2020/G8)**.** Let Γ and I be the circumcircle and the incenter of an acute-angled triangle ABC. Two circles ω_B and ω_C passing through B and C, respectively, are tangent at I. Let ω_B meet the shorter arc AB of Γ and segment AB again at P and M, respectively. Similarly, let ω_C meet the shorter arc AC of Γ and segment AC again at Q and N, respectively. The rays PM and QN meet at X, and the tangents to ω_B and ω_C at B and C, respectively, meet at Y.

Prove that the points A, X, and Y are collinear.

[aops:22698191]

[H] Problema 15.16 (ISL 2020/G9[15])**.** Pruebe que existe una constante positiva c para la que se satisface la siguiente afirmación:

Sea $n > 1$ un entero y sea $\mathcal{S}$ un conjunto de n puntos del plano tal que la distancia entre cualesquiera dos puntos diferentes de $\mathcal{S}$ es al menos 1. Entonces existe una recta ℓ separando $\mathcal{S}$ tal que la distancia de cualquier punto de $\mathcal{S}$ a ℓ es al menos $cn^{-1/3}$.

(Una recta ℓ *separa* un conjunto de puntos $\mathcal{S}$ si ℓ corta a alguno de los segmentos que une dos puntos de $\mathcal{S}$.)

Nota. Los resultados más débiles que se obtienen al sustituir $cn^{-1/3}$ por $cn^{-\alpha}$ se podrán valorar dependiendo del valor de la constante $\alpha > 1/3$.

[aops:17821732]

Teoría de Números

[E] Problema 15.17 (Russia 2001)**.** Does there exist a positive integer such that the product of its proper divisors ends with exactly 2001 zeroes?

Jueves 2022-06-23
Geometría

[E] Problema 15.18 (ISL 2019/G1)**.** Let ABC be a triangle. Circle Γ passes through A, meets segments AB and AC again at points D and E respectively, and intersects segment BC at F and G such that F lies between B and G. The tangent to circle BDF at F and the tangent to circle CEG at G meet at point T. Suppose that points A and T are distinct. Prove that line AT is parallel to BC.

[aops:17828603]

[E] Problema 15.19 (ISL 2019/G2)**.** Let ABC be an acute-angled triangle and let D, E, and F be the feet of altitudes from A, B, and C to sides BC, CA, and AB, respectively. Denote by ω_B and ω_C the incircles of triangles BDF and CDE, and let these circles be tangent to segments DF and DE at M and N, respectively. Let line MN meet circles ω_B and ω_C again at $P \neq M$ and $Q \neq N$, respectively. Prove that $MP = NQ$.

[aops:17828685]

[M] Problema 15.20 (ISL 2019/G3[16])**.** En el triángulo ABC, el punto A_1 está en el lado BC y el punto B_1 está en el lado AC. Sean P y Q puntos en los segmentos AA_1 y BB_1, respectivamente, tales que PQ es paralelo a AB. Sea P_1 un punto en la recta PB_1 distinto de B_1, con B_1 entre P y P_1, y $\angle PP_1C = \angle BAC$. Análogamente, sea Q_1 un punto en la recta QA_1 distinto de A_1, con A_1 entre Q y Q_1, y $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Demostrar que los puntos P, Q, P_1, y Q_1 son concíclicos.

[aops:12744870]

[15] IMO 2020/6
[16] IMO 2019/2

[H] Problema 15.21 (ISL 2019/G4)**.** Let P be a point inside triangle ABC. Let AP meet BC at A_1, let BP meet CA at B_1, and let CP meet AB at C_1. Let A_2 be the point such that A_1 is the midpoint of PA_2, let B_2 be the point such that B_1 is the midpoint of PB_2, and let C_2 be the point such that C_1 is the midpoint of PC_2. Prove that points A_2, B_2, and C_2 cannot all lie strictly inside the circumcircle of triangle ABC.

[aops:17828733]

[M] Problema 15.22 (ISL 2019/G5)**.** Let $ABCDE$ be a convex pentagon with $CD = DE$ and $\angle EDC \neq 2 \cdot \angle ADB$. Suppose that a point P is located in the interior of the pentagon such that $AP = AE$ and $BP = BC$. Prove that P lies on the diagonal CE if and only if $\text{area}(BCD) + \text{area}(ADE) = \text{area}(ABD) + \text{area}(ABP)$.

[aops:17828826]

Simulacro IMO Día 1

[E] Problema 15.23 (Peru Mock IMO 2022/1.1[17])**.** Determine todos los números enteros $n \geq 1$ para los cuales existe una pareja (a, b) de enteros positivos tal que ningún cubo de un número primo es divisor de $a^2 + b + 3$ y

$$\frac{ab + 3b + 8}{a^2 + b + 3} = n.$$

[E] Problema 15.24 (Peru Mock IMO 2022/1.2[18])**.** Sea n un entero positivo. Halle el menor valor posible de

$$\left\lfloor \frac{a_1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_2}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{a_n}{n} \right\rfloor$$

sobre todas las permutaciones $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $(1, 2, \ldots, n)$.

[H] Problema 15.25 (Peru Mock IMO 2022/1.3[19])**.** Sean n y k números enteros tales que $n > k \geq 1$. Hay $2n + 1$ estudiantes alrededor de una circunferencia. Cada estudiante S tiene $2k$ *vecinos*: los k estudiantes más cerca a S por la derecha y los k estudiantes más cerca a S por la izquierda.

Suponga que $n + 1$ estudiantes son mujeres y n son hombres. Pruebe que existe una mujer que tiene al menos k mujeres entre sus vecinos.

Viernes 2022-06-24 **Teoría de Números**

[E] Problema 15.26 (ISL 2020/N1)**.** Given a positive integer k, show that there exists a prime p such that one can choose distinct integers $a_1, a_2, \ldots, a_{k+3} \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ such that p divides $a_i a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3} - i$ for all $i = 1, 2, \ldots, k$.

[aops:22698342]

[M] Problema 15.27 (ISL 2020/N2)**.** For each prime p, there is a kingdom of p-Landia consisting of p islands numbered $1, 2, \ldots, p$. Two distinct islands numbered n and m are connected by a bridge if and only if p divides $(n^2 - m + 1)(m^2 - n + 1)$. The bridges may pass over each other, but cannot cross. Prove that for infinitely many p there are two islands in p-Landia not connected by a chain of bridges.

[aops:22698104]

[M] Problema 15.28 (ISL 2020/N3[20])**.** Se tiene una baraja de $n > 1$ cartas, con un entero positivo escrito en cada carta. La baraja tiene la propiedad de que la media aritmética de los números escritos en cada par de cartas es también la media geométrica de los números escritos en alguna colección de una o más cartas.

¿Para qué valores de n se tiene que los números escritos en las cartas son todos iguales?

[aops:17821528]

[17] ISL 2021/N1
[18] ISL 2021/A3
[19] ISL 2021/C5
[20] IMO 2020/5

Solución. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ son los números de las barajas tales que $\operatorname{mcd}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$. Supongamos que existe un primo p que divide a a_n. Si $a_{n-1} = a_n$, entonces $p \mid a_{n-1}$; de lo contrario

$$\frac{a_{n-1} + a_n}{2} = \sqrt[k]{a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k}} > a_{n-1}$$

de donde $a_{i_j} \geq a_n$ para algún $1 \leq j \leq k$. Es decir, $p \mid a_{n-1} + a_n$ de donde $p \mid a_{n-1}$. De la misma manera, podemos ver que $p \mid a_i$ para todo $1 \leq i \leq n$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ para todo $n > 1$. ☐

`[M]` **Problema 15.29** (ISL 2020/N4)**.** For any odd prime p and any integer n, let $d_p(n) \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ denote the remainder when n is divided by p. We say that $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ is a *p-sequence*, if a_0 is a positive integer coprime to p, and $a_{n+1} = a_n + d_p(a_n)$ for $n \geq 0$.

(a) Do there exist infinitely many primes p for which there exist p-sequences $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ and $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ such that $a_n > b_n$ for infinitely many n, and $b_n > a_n$ for infinitely many n?

(b) Do there exist infinitely many primes p for which there exist p-sequences $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ and $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ such that $a_0 < b_0$, but $a_n > b_n$ for all $n \geq 1$?

`[aops:22698019]`

Solución. La respuesta es sí para ambos casos. Sea

$$s_p(n) = d_p(n) + d_p(2n) + \cdots + d_p(2^{o-1}n)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, donde $o = \operatorname{ord}_p(2)$. Como $a_{n+1} \equiv 2a_n \pmod{p}$ para todo $n \geq 0$, entonces $a_{n+o} \equiv 2^o a_n \equiv a_n \pmod{p}$. Es decir, $s_p(a_n) = s_p(a_0)$ para todo $n \geq 0$. Luego,

$$a_{n+o} = a_n + \sum_{i=0}^{o-1} (a_{n+i+1} - a_{n+i}) = a_n + s_p(a_0).$$

- Para la parte (a), considere a un primo $p \geq 11$ y $r = \left\lfloor \frac{p-1}{4} \right\rfloor$ con $4r < p < 6r$, y sea $(a_0, b_0) = (4r, p + r)$. Luego, $(a_1, b_1) = (8r, p + 2r)$ de donde $a_0 < b_0$ y $a_1 > b_1$. Además, $s_p(a_0) = s_p(b_0)$ de donde $a_{ok} < b_{ok}$ y $a_{ok+1} > b_{ok+1}$ para todo $k \in \mathbb{Z}_0^+$.

- Para la parte (b), sea q un primo suficientemente grande y p un factor primo de $2^q - 1$. Luego, $o = \operatorname{ord}_p(2) \mid q$ de donde $o = q$ es impar. Si $s_p(n)$ es una constante t para todo $1 \leq n \leq p-1$, entonces

$$(p-1)t = \sum_{n=1}^{p-1} s_p(n) = \sum_{i=0}^{o-1} \sum_{n=1}^{p-1} d_p(2^i n) = o \cdot \frac{(p-1)p}{2}$$

  de donde op es par, lo cual es un absurdo. Es decir, existen $1 \leq r_a \neq r_b \leq p-1$ tales que $s_p(r_a) > s_p(r_b)$. Sea $(a_0, b_0) = (r_a, p + r_b)$, luego $a_0 < b_0$ y

$$a_{ok+i} - b_{ok+i} = k(s_p(r_a) - s_p(r_b)) + (a_i - b_i) > 0$$

  para todo $k \in \mathbb{Z}^+$ suficientemente grande y $0 \leq i \leq o-1$. Es decir, existe un j tal que $a_j < b_j$ y $a_n > b_n$ para todo $n > j$. Entonces, podemos cambiar la pareja (a_0, b_0) por (a_j, b_j) para que se cumpla lo requerido.

□

[M] Problema 15.30 (China TST 2022/3.1)**.** Given two circles ω_1 and ω_2 where ω_2 is inside ω_1, show that there exists a point P such that for any line ℓ not passing through P, if ℓ intersects circle ω_1 at A, B and ℓ intersects circle ω_2 at C, D, where A, C, D, B lie on ℓ in this order, then $\angle APC = \angle BPD$.

[aops:25099111]

Solución. Sea O la intersección de la recta O_1O_2 con el eje radical de ω_1 y ω_2. Luego, sea $R^2 = \text{Pot}_{w_1}(O) = \text{Pot}_{w_2}(O)$. Sean P y Q los puntos de intersección de la circunferencia $w = (O, R)$ con la recta O_1O_2. Como w es ortogonal a ω_1 y ω_2, la inversión con centro en P manda a ω_1 y ω_2 a dos circunferencias con centro en Q^*. Luego, los puntos de intersección A^*, B^*, C^*, D^* de ω_1^* y ω_2^* con la circunferencia ℓ^* cumplen que A^*, C^* y B^*, D^* son simétricos con respecto a la mediatriz de A^*D^*, es decir, $A^*B^* \parallel C^*D^*$. Como P, A^*, B^*, C^*, D^* son concíclicos,

$$\angle APC = \angle A^*PC^* = \angle B^*PD^* = \angle BPD.$$

□

[M] Problema 15.31 (China TST 2022/3.2)**.** Two positive real numbers α, β satisfy that for any positive integers k_1, k_2, it holds that $\lfloor k_1\alpha \rfloor \neq \lfloor k_2\beta \rfloor$. Prove that there exist positive integers m_1, m_2 such that $\frac{m_1}{\alpha} + \frac{m_2}{\beta} = 1$.

[aops:25099157]

[H] Problema 15.32 (China TST 2022/3.3)**.** Given a positive integer $n \geq 2$, find all n-tuples of positive integers $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, such that $1 < a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n$, a_1 is odd, and

(1) $M = \frac{1}{2^n}(a_1 - 1)a_2a_3 \cdots a_n$ is a positive integer;

(2) one can pick n-tuples of integers $(k_{i,1}, k_{i,2}, \ldots, k_{i,n})$ for $i = 1, 2, \ldots, M$ such that for any $1 \leq i_1 < i_2 \leq M$, there exists $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ such that $k_{i_1,j} - k_{i_2,j} \not\equiv 0, \pm 1 \pmod{a_j}$.

[aops:25099220]

Domingo
2022-06-26
Entrenamiento IMO

Definición 15.33 (Continuidad)**.** Una función $f : D \to \mathbb{R}$ es *continua en* $x_0 \in D$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

En otras palabras, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Decimos que f es *continua* si f es continua en x para todo $x \in D$.

Proposición 15.34

Una función $f : D \to \mathbb{R}$ es continua en $x_0 \in D$ si y solo si

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Teorema 15.35 (Ecuación funcional de Cauchy)
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Luego $f(qx) = qf(x)$ para todo $q \in \mathbb{Q}$. Además, f es lineal si cumple alguna de las siguientes condiciones:

- f es continua en algún intérvalo.
- f es monótona.
- f es acotada en algún intérvalo no trivial.
- Existe algún (a, b) y $\varepsilon > 0$ tal que $(x-a)^2 + (f(x)-b)^2 > \varepsilon$ para todo x (en otras palabras, la gráfica de f omite algún disco $D \subseteq R^2$).

Problema 15.36 (IMO 1983/1)**.** Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ que cumplen

(i) $f(xf(y)) = yf(x)$ para todo x, y reales positivos;

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

[aops:366613]

Problema 15.37. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ que cumplen

(i) $f(xf(y)) = yf(x)$ para todo x, y reales positivos;

(ii) f está acotada superiormente en un intérvalo.

Problema 15.38. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo x, y reales;

(ii) $f(p(x)) = p(f(x))$ para algún polinomio p de grado mayor o igual a 2.

Problema 15.39 (APMO 2002/5)**.** Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

(i) $f(x^4 + y) = x^3 f(x) + f(f(y))$ para todo x, y reales;

(ii) existe una cantidad finita de números reales s tales que $f(s) = 0$.

[aops:474887]

Problema 15.40. Sea T el conjunto de números reales mayores que 1 y n un entero positivo dado. Encuentra todas las funciones $f : T \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x^{n+1} + y^{n+1}) = x^n f(x) + y^n f(y),$$

para todo x, y en T.

Problema 15.41. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo x, y reales;

(ii) $f(xy) = f(x)f(y)$ para todo x, y reales.

Problema 15.42 (All-Russian Olympiad 1993/11.3)**.** Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tales que

$$f(x^y) = f(x)^{f(y)}$$

para todo x, y reales positivos.

[aops:2356852]

Problema 15.43. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ tales que

$$f(x^2 + y^2) = f(x^2 - y^2) + f(2xy)$$

para todo x, y reales.

§16 Semana 16 (06/27 – 07/03)

Lunes
2022-06-27
Teoría de Números

[H] Problema 16.1 (ISL 2020/N6)**.** For a positive integer n, let $d(n)$ be the number of positive divisors of n. Does there exist a constant C such that

$$\frac{\phi(d(n))}{d(\phi(n))} \leq C$$

for all $n \geq 1$?

[aops:22698064]

Solución. La respuesta es no. Sea $N \in \mathbb{Z}^+$ y sean primos $1 < p_1 < p_2 < \cdots < p_k < N \leq p_{k+1} < p_{k+2} < \cdots < p_{k+s} < 2N$. Si $n = (p_1 p_2 \cdots p_k)^{q-1} p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+s}$ para algún primo q suficientemente grande, entonces

$$\phi(d(n)) = \phi(2^s q^k) = 2^{s-1} q^{k-1}(q-1)$$

y

$$d(\phi(n)) = d\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{q-2} \cdot \prod_{j=1}^{k+s}(p_j - 1)\right) = \prod_{i=1}^{k}(q - 1 + c_i)$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{Z}_0^+$ son fijos. Entonces,

$$\frac{\phi(d(n))}{d(\phi(n))} = 2^{s-1} \cdot \frac{q^{k-1}(q-1)}{\prod_{i=1}^{k}(q-1+c_i)} > 2^{s-2}.$$

Si existe un $t \in \mathbb{Z}^+$ tal que $s \leq t$ para todo $2^e \leq p_{k+1} < p_{k+2} < \cdots < p_{k+s} < 2^{e+1}$, entonces

$$\sum_{p \text{ es primo}} \frac{1}{p} \leq \sum_{e=1}^{\infty} \frac{t}{2^e} = t$$

lo cual es un absurdo. Es decir, $\frac{\phi(d(n))}{d(\phi(n))}$ no es acotado superiormente. □

Martes
2022-06-28

[E] Problema 16.2. Para cada entero positivo n, definimos

$$f(n) = \tau(k_1) + \tau(k_2) + \cdots + \tau(k_t)$$

donde $k_1 < k_2 < \cdots < k_t$ son todos los divisores positivos de n. Determine todos los enteros $n > 1$ para los cuales $f(n) = n$.

Nota. $\tau(n)$ es el número de divisores positivos de n.

Solución. Sea $p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ la descomposición de n. Luego,

$$f(n) = \sum_{\substack{0 \leq x_i \leq e_i \\ \forall 1 \leq i \leq r}} (x_1+1)\cdots(x_r+1) = \prod_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{e_i}(j+1) = \prod_{i=1}^{r}\frac{(e_i+1)(e_i+2)}{2}$$

de donde

$$\prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i} = \prod_{i=1}^{r}\frac{(e_i+1)(e_i+2)}{2}.$$

Note que $p^e \geq \frac{(e+1)(e+2)}{2}$ para todo $p \geq 3$ y $e \geq 1$ con igualdad si y solo si $(p, e) = (3, 1)$, y $2^e > \frac{(e+1)(e+2)}{2}$ para todo $e \geq 4$. Primero, supongamos que $p_1 = 2$, lo cual implica que $e_1 \leq 3$.

- Si $e_1 = 1$, entonces $\frac{(e_1+1)(e_2+1)}{2} = 3$ de donde $p_2 = 3$. Como $2 \cdot 3^e > 3 \cdot \frac{(e+1)(e+2)}{2}$ para todo $e \geq 3$, tenemos que $e_2 \leq 2$, pero si $e_2 = 1$ entonces
$$3 \cdot \frac{(e_2+1)(e_2+2)}{2} = 3^2 \nmid n$$
lo cual es un absurdo. Por ende, $e_2 = 2$ y tenemos $2 \cdot 3^2 = 3 \cdot \frac{(2+1)(2+2)}{2}$ de donde $n = 18$.

- Si $e_1 = 2$, entonces $\frac{(e_1+1)(e_2+1)}{2} = 6$ de donde $p_2 = 3$. Como $2^2 \cdot 3^e > 6 \cdot \frac{(e+1)(e+2)}{2}$ para todo $e \geq 3$, tenemos que $e_2 \leq 2$, pero si $e_2 = 1$ entonces
$$6 \cdot \frac{(e_2+1)(e_2+2)}{2} = 2 \cdot 3^2 \nmid n$$
lo cual es un absurdo. Por ende, $e_2 = 2$ y tenemos $2^2 \cdot 3^2 = 6 \cdot \frac{(2+1)(2+2)}{2}$ de donde $n = 36$.

- Si $e_1 = 3$, entonces $\frac{(e_1+1)(e_2+1)}{2} = 10$ de donde $p_i = 5$ para algún $2 \leq i$. Pero como
$$2^3 \cdot 5^e > 10 \cdot \frac{(e+1)(e+2)}{2}$$
tenemos un absurdo.

Ahora, supongamos que $p_1 \geq 3$. Luego, $(p_1, e_1) = (3, 1)$ y $n = 3$ para que se cumpla la igualdad. Finalmente, los valores de n son 3, 18 y 36. □

[H] Problema 16.3 (ISL 2020/N7)**.** Let $\mathcal{S}$ be a set consisting of $n \geq 3$ positive integers, none of which is a sum of two other distinct members of $\mathcal{S}$. Prove that the elements of $\mathcal{S}$ may be ordered as $a_1, a_2, \ldots, a_n$ so that a_i does not divide $a_{i-1} + a_{i+1}$ for all $i = 2, 3, \ldots, n-1$.

[aops:22698513]

Solución. Probaremos que los elementos de $\mathcal{S}$ pueden ser ordenados como $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que a_i no divide a los números $a_{i-1} + a_{i+1}$ y $a_{i-1} - a_{i+1}$ para todo $2 \leq i \leq n-1$. Si $n = 3$, sean $a > b > c$ los elementos de $\mathcal{S}$. Si $a \mid b + c < 2a$ entonces $a = b + c$, absurdo. Es claro que $a \nmid b - c < a$, por lo tanto $n = 3$ cumple. Ahora, supongamos que $n \geq 4$ y que $n-1$ cumple. Sea a el máximo elemento de $\mathcal{S}$ y considere al conjunto $\mathcal{T} = \mathcal{S} \setminus \{a\}$ de $n-1$ elementos. Por hipótesis, los elementos de $\mathcal{T}$ pueden ser ordenados como $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ de modo que cumplan las condiciones. Note que $a \nmid b_i + b_{i+1}$ para todo $1 \leq i \leq n-2$. Si $b_1 \mid a \pm b_2$, $b_2 \mid a \pm b_3$, $b_{n-2} \mid a \pm b_{n-3}$, $b_{n-1} \mid a \pm b_{n-2}$, y $b_{i-1} \mid a \pm b_{i-2}$ o $b_i \mid a \pm b_{i+1}$ para todo $3 \leq i \leq n-2$, entonces por casillas existe un índice $1 \leq j \leq n-1$ tal que $b_j \mid a \pm b_{j-1}$ y $b_j \mid a \pm b_{j+1}$. Luego, $b_j \mid b_{j-1} \pm b_{j+1}$ lo cual es una contradicción, así que podemos insertar al número a entre los b_i's de manera que siga cumpliendo las condiciones. La demostración queda completa por inducción. □

[E] Problema 16.4 (ISL 2019/N2)**.** Find all triples (a, b, c) of positive integers such that $a^3 + b^3 + c^3 = (abc)^2$.

[aops:17828751]

Solución. Sin pérdida de generalidad supongamos que $a \geq b \geq c$. Luego, $b^3 + c^3 = a^2(b^2c^2 - a) > 0$ de donde
$$2b^3 \geq b^3 + c^3 = a \cdot a(b^2c^2 - a) \geq b(b^2c^2 - 1)$$

y $1 \geq b^2(c^2-1)$. Por ende, $c=1$ y $b^3+1=a^2(b^2-a)$. Si $a=b$, entonces $a \mid 1$ de donde $a=b=1$, lo cual no cumple. Luego,

$$b+1=b^3+1-b(b^2-1) \geq b^3+1-b\cdot a(b^2-a)=(a-b)a(b^2-a) \geq b+1$$

de donde $a=b+1$ y $b^2-a=1$, lo cual implica que $(a,b)=(3,2)$. Por lo tanto, las ternas (a,b,c) que cumplen son todas las permutaciones de $(3,2,1)$. □

Miércoles 2022-06-29
Simulacro IMO Día 2

[E] **Problema 16.5** (Peru Mock IMO 2022/2.1[21]). Sea S un conjunto infinito formado por enteros positivos, tales que existen cuatro elementos distintos dos a dos $a,b,c,d \in S$ tales que $\operatorname{mcd}(a,b) \neq \operatorname{mcd}(c,d)$. Pruebe que existen tres elementos distintos dos a dos $x,y,z \in S$ tales que $\operatorname{mcd}(x,y)=\operatorname{mcd}(y,z) \neq \operatorname{mcd}(z,x)$.

Solución. Supongamos por lo contrario que si $\operatorname{mcd}(x,y)=\operatorname{mcd}(y,z)$ entonces $\operatorname{mcd}(x,y)=\operatorname{mcd}(y,z)=\operatorname{mcd}(z,x)$. Como $\operatorname{mcd}(x,k) \mid x$ para todo $k \in S$ y $x \in \{a,b,c,d\}$, existen $k_1,k_2 \in S \setminus \{a,b,c,d\}$ tales que $\operatorname{mcd}(x,k_1)=\operatorname{mcd}(x,k_2)$ para todo $x \in \{a,b,c,d\}$. Luego,

$$\operatorname{mcd}(k_1,k_2)=\operatorname{mcd}(a,k_1)=\operatorname{mcd}(b,k_1)=\operatorname{mcd}(c,k_1)=\operatorname{mcd}(d,k_1)$$

de donde $\operatorname{mcd}(a,b)=\operatorname{mcd}(c,d)$, lo cual es un absurdo. □

[M] **Problema 16.6** (Peru Mock IMO 2022/2.2[22]). Pruebe que solo existen un número finito de cuaternas (a,b,c,n) de enteros positivos tales que

$$n! = a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}.$$

Solución. Veamos que pasa cuando $n \leq 4$.

- Si $n=1$, tenemos $1=a^0+b^0+c^0=3$, absurdo.
- Si $n=2$, tenemos $2=a^1+b^1+c^1 \geq 3$, absurdo.
- Si $n=3$, tenemos $6=a^2+b^2+c^2$ de donde (a,b,c) es una permutación de $(1,1,2)$.
- Si $n=4$, tenemos $24=a^3+b^3+c^3$ de donde $(a,b,c)=(2,2,2)$.

Ahora, supongamos que existen $a,b,c,n \in \mathbb{Z}^+$ con $n \geq 5$ que satisfacen la ecuación dada. Si n es impar, como $4 \mid n! = a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}$ entonces $2 \mid a,b,c$. Luego, $2^{n-1} \mid a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}=n!$ de donde

$$n-1 \leq \nu_2(n!) = \sum_{s=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{2^s} \right\rfloor \leq \sum_{s=1}^{k} \frac{n}{2^s} = n - \frac{n}{2^k}$$

donde $k=\lfloor \log_2 n \rfloor$. Luego, $n \leq 2^k$ que es un absurdo, y por ende n es par. Note que

$$n! = n\cdot(2\cdot 3 \cdots (n-1)) \leq n\left(\frac{\frac{(n-1)n}{2}-1}{n-2}\right)^{n-2} = n\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n-2} < 2\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n-1}.$$

Luego,

$$2\left(\frac{b+c}{2}\right)^{n-1} \leq b^{n-1}+c^{n-1} < n! < 2\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n-1}$$

de donde $b+c \leq n$ y análogamente $c+a, a+b \leq n$. Ahora, supongamos que $(b+c, c+a, a+b) = (2^x, 2^y, 2^z)$ para algunos $x,y,z \in \mathbb{Z}^+$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x \leq y \leq z$.

[21] ISL 2021/C1

[22] ISL 2021/N5; pensé que no me iba a salir y pasé a resolver la 3, que era mucho más difícil y al final no pude resolver ninguna de las dos. :'v

- Si $x \geq 3$, entonces $4 \mid a, b, c$ de donde $4^{n-1} \mid a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1} = n!$. Luego,

$$2n - 2 \leq \nu_2(n!) = \sum_{s=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{2^s} \right\rfloor < \sum_{s=1}^{\infty} \frac{n}{2^s} = n$$

  de donde $n < 2$, absurdo.

- Si $x \leq 2$, como $2 \mid n! = a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}$ y $2 \mid c + a$ entonces $2 \mid b$ y análogamente $2 \mid c$ de donde $4 \leq b + c = 2^x \leq 4$. Entonces, $x = 2$ y $b = c = 2$ de donde

$$a \mid n! = a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1} = a^{n-1} + 2^n$$

  lo cual implica que $a \mid 2^n$. Como $4 \nmid a = 2^y - 2$, tenemos que $y = 2$ y $a = 2$. Por ende, $5 \mid n! = 3 \cdot 2^{n-1}$, absurdo.

Por lo tanto, existe un primo impar p que divide a alguno de $b+c, c+a, a+b$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $p \mid b + c \leq n$. Luego, $p \mid b^{n-1} + c^{n-1}$ de donde $p \mid a$. Ahora, note que

$$\nu_p(n!) = \sum_{s=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^s} \right\rfloor \leq \sum_{s=1}^{\infty} \frac{n}{p^s} = \frac{n}{p-1} < n - 1.$$

Si $p \mid b, c$ entonces $p^{n-1} \mid n!$, absurdo. Por ende, $p \nmid b, c$ y como $\nu_p(n!) < n - 1$ tenemos que

$$\nu_p(n!) = \nu_p(b^{n-1} + c^{n-1}) = \nu_p(b + c) + \nu_p(n - 1)$$

de donde

$$p^{\nu_p(n!) - \nu_p(n-1)} \parallel b + c \leq n.$$

Note que por inducción $kp \leq p^{k-1}$ para todo $k \geq 3$ y $kp + 1 < p^{k-1}$ para todo $k \geq 4$.

- Si $p \nmid n - 1$, entonces

$$p^{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor} \leq p^{\nu_p(n!)} \leq n < p \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + p$$

  de donde $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \leq 1$. Luego, $p \mid b + c, a \leq n < 2p$ de donde $a = b + c = p$ y

$$p \mid n! = p^{n-1} + b^{n-1} + (p - b)^{n-1}$$

  implica que $b, c \mid 2$. Entonces, $p = b + c \leq 4$ de donde $p = 3$ y $\{b, c\} = \{1, 2\}$, además $2p > n > 4$ de donde $n = 5$. Luego,

$$120 = 5! = 3^4 + 1^4 + 2^4 = 98$$

  lo cual es un absurdo.

- Si $p \mid n - 1$, entonces $0 < \nu_p(b + c) = \nu_p(n!) - \nu_p(n - 1)$ de donde $n \geq 3p + 1$. Luego,

$$p^{\frac{n-1}{p} - 1} \leq p^{\nu_p(n!) - \nu_p(n-1)} \leq n = p \left(\frac{n-1}{p} \right) + 1$$

  de donde $\frac{n-1}{p} \leq 3$. Por ende, $n = 3p + 1$ y

$$p^2 = p^{\frac{n-1}{p} - 1} \leq n = 3p + 1$$

de donde $p = 3$. Luego, $3^2 \mid b + c \leq n = 10$ de donde $b + c = 9$. Además,

$$6^9 = 10077696 > 3628800 = 10! = a^9 + b^9 + c^9$$

de donde $a, b, c \leq 5$. Como $3 \mid a$ entonces $a = 3$ y $\{b, c\} = \{4, 5\}$. Luego,

$$0 \equiv 10! = 3^9 + 4^9 + 5^9 \equiv 2 \pmod 5$$

lo cual es un absurdo.

Finalmente, las únicas cuaternas (a, b, c, n) de enteros positivos que satisfacen la ecuación son $(1, 1, 2, 3)$, $(1, 2, 1, 3)$, $(2, 1, 1, 3)$ y $(2, 2, 2, 4)$. □

[H] Problema 16.7 (Peru Mock IMO 2022/2.3[23])**.** Sea ω la circunferencia circunscrita del triángulo ABC y sea Ω_A la circunferencia ex-inscrita de dicho triángulo, que es tangente al segmento BC. Sean X y Y los puntos de intersección de ω y Ω_A. Sean P y Q las proyecciones de A sobre las rectas tangentes a Ω_A en los puntos X y Y, respectivamente. La recta tangente en P a la circunferencia circunscrita del triángulo APX interseca a la recta tangente en Q a la circunferencia circunscrita del triángulo AQY en R. Pruebe que AR es perpendicular a BC.

Jueves
2022-06-30
Simulacro IMO Día 3

[E] Problema 16.8 (Peru Mock IMO 2022/3.1[24])**.** Para cada entero $n \geq 1$ considere un tablero de $n \times n$ que tiene escrito el número $\left\lfloor \frac{ij}{n+1} \right\rfloor$ en la intersección de la fila i y columna j, para todo $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, n$.

Determine todos los enteros $n \geq 1$ para los cuales la suma de los n^2 números del tablero es igual a $\frac{n^2(n-1)}{4}$.

Solución. Pista: demostrar que

$$2 \sum_{j=1}^{n} \left\lfloor \frac{ij}{n+1} \right\rfloor = \operatorname{mcd}(n+1, i) + n(i-1) - 1$$

y con eso demostrar que

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{mcd}(n+1, i) = n$$

de donde $n = p - 1$ para algún primo p. □

[M] Problema 16.9 (Peru Mock IMO 2022/3.2[25])**.** Sea n un entero positivo fijo y sea S un conjunto de puntos (x, y) en el plano cartesiano tales que ambas coordenadas x y y son enteros no negativos menores que $2n$ (por lo tanto, $|S| = 4n^2$). Sea $\mathcal{F}$ un conjunto que consiste de n^2 cuadriláteros tales que todos sus vértices pertenecen a S y cada punto de S es vértice de exactamente uno de los cuadriláteros de $\mathcal{F}$. Determine el mayor valor posible de la suma de las áreas de los n^2 cuadriláteros de $\mathcal{F}$.

Solución. Sea $\mathcal{F} = \{C_i : 1 \leq i \leq n^2\}$. Sean (x_j, y_j) los vértices de C_i, para todo $4i - 3 \leq j \leq 4i$, y sea

$$A_i = \frac{1}{2} \left| \sum_{j=4i-3}^{4i} (x_j y_{j+1} - x_{j+1} y_j) \right|$$

[23] ISL 2021/G8
[24] ISL 2021/A2
[25] ISL 2021/G3; al principio entendí mal el problema y pensé que los lados de los cuadriláteros eran paralelos a los ejes, y me salió n^4 usando la misma idea. :'v

el área de C_i. Luego, en cada una de $(x_1, x_2, \ldots, x_{4n^2})$ y $(y_1, y_2, \ldots, y_{4n^2})$, cada número $0, 1, \ldots, 2n-1$ aparece exactamente $2n$ veces. Entonces, por la desigualdad del reordenamiento,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n^2} A_i &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n^2}\left|\sum_{j=4i-3}^{4i}(x_j y_{j+1} - x_{j+1} y_j)\right| \\ &\le \frac{1}{2}\left(2n\cdot\sum_{i=0}^{2n-1} i^2 - 2n\cdot\sum_{i=0}^{2n-1} i(2n-1-i)\right) \\ &= \frac{n^2(4n^2-1)}{3}\end{aligned}$$

donde la igualdad se puede obtener considerando $\mathcal{F} = \{C_{ij} : 0 \le i, j < n\}$ tal que los vértices de C_{ij} son iguales a

$$(i, j),\ (j, 2n-1-i),\ (2n-1-i, 2n-1-j),\ (2n-1-j, i)$$

para todo $0 \le i, j < n$. □

[M] **Problema 16.10** (Peru Mock IMO 2022/3.3[26]). El reino de Anisotropía consiste de n ciudades. Para cualesquiera dos ciudades existe exactamente una vía de un solo sentido que las une. Decimos que un *camino de X a Y* es una secuencia de vías tales que podemos ir de X a Y siguiendo esa secuencia de vías sin pasar dos veces por una misma ciudad. Una colección de caminos es llamada *diversa* si ninguna vía pertenece a dos o más caminos de la colección.

Sean A y B dos ciudades distintas en Anisotropía. Sea N_{AB} el máximo número de caminos que puede haber en una colección diversa de caminos de A a B. Similarmente, sea N_{BA} el máximo número de caminos que puede haber en una colección diversa de caminos de B a A. Pruebe que la igualdad $N_{AB} = N_{BA}$ ocurre si y solo si el número de vías que salen de A es igual al número de vías que salen de B.

Solución. Sea G un grafo dirigido de n vértices tal que $X \to Y$ si y solo si existe una vía de la ciudad X a la ciudad Y. Considere a los conjuntos $V(X) = \{P \in G : X \to P\}$, $C(A, B) = \{P \in G : A \to P, B \to P\}$ y $C'(A, B) = \{P \in G : P \to A, P \to B\}$. Sea $M(A, B)$ el conjunto de todos los vértices $P \ne A$ para los cuales existe un camino c tal que $c = A \to P \to B$ o $c = A \to B$ ($P = B$ en este caso, si fuera posible), y para ese P sea $f(P) = c$. Luego, $V(A) = M(A, B) \cup C(A, B)$. Sea L_{AB} el máximo número de caminos que puede haber en una colección diversa de caminos $c_i = A \to X_i \to \cdots \to Y_i \to B$ que satisfacen $X_i \in C(A, B)$ y $Y_i \in C'(A, B)$, y sea $L(A, B)$ una colección que cumple lo anterior. Entonces, los X_i's y Y_i's no se repiten, además L_{BA} es mayor o igual que el número de caminos de la colección diversa de $c'_i = B \to X_i \to \cdots \to Y_i \to A$, de donde $L_{BA} \ge L_{AB}$. Análogamente, $L_{AB} \ge L_{BA}$ de donde $L_{AB} = L_{BA}$. Ahora, consideremos una colección diversa de N_{AB} caminos $c_i = A \to P_i \to \cdots \to B$ (note que si $c_i = A \to B$ entonces $P_i = B$). Es claro que los P_i's son distintos, además satisfacen que $P_i = B$, $P_i \to B$ o $B \to P_i$ de donde $P_i \in M(A, B)$ o $P_i \in C(A, B)$. Ahora, supongamos que el número de P_i's que pertenecen a $M(A, B)$ tales que $c_i = f(P_i)$ es máximo, y para cada $P_i \in C(A, B)$ sea Q_i tal que $c_i = A \to P_i \to \cdots \to Q_i \to B$. Supongamos que existe un i tal que $P_i \in C(A, B)$ pero $Q_i \notin C'(A, B)$. Luego,

$$c_i = A \to P_i \to v_1 \to \cdots \to v_{t-1} \to Q_i \to B$$

[26] ISL 2021 C4

es tal que $A \to Q_i$. Si la vía $A \to Q_i$ no está usada, podemos hacer que $c_i = f(Q_i)$. Si la vía $A \to Q_i$ está usada en algún camino

$$c_j = A \to Q_i \to w_1 \to \cdots \to w_s \to B,$$

y podemos modificar los caminos para que sean $c_i = f(Q_i)$ y

$$c_j = A \to P_i \to v_1 \to \cdots \to v_{t-1} \to Q_i \to w_1 \to \cdots \to w_s \to B.$$

Como las vías no se repiten, tenemos una contradicción a la maximalidad, de donde $Q_i \in C'(A, B)$ para todo $P_i \in C(A, B)$. Por ende, $N_{AB} \leq |M(A, B)| + L_{AB}$, y la igualdad se consigue considerando a la colección de caminos $f(P)$ para todo $P \in M(A, B)$ y los L_{AB} caminos de $L(A, B)$. Luego,

$$N_{AB} - |V(A)| = L_{AB} - |C(A, B)| = L_{BA} - |C(B, A)| = N_{BA} - |V(B)|$$

de donde $N_{AB} = N_{BA}$ si y solo si $|V(A)| = |V(B)|$, y con esto es suficiente. $\square$

Entrenamiento IMO

Problema 16.11. Sean $n \geq 1$ un entero y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enteros positivos. Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(x) = 1$, para cada entero $x < 0$, y

$$f(x) = 1 - f(x - a_1)f(x - a_2) \cdots f(x - a_n)$$

para cada entero $x \geq 0$. Probar que existen enteros positivos s y t tales que $f(x+t) = f(x)$, para todo $x > s$.

Problema 16.12. Sea p un número primo y sea m un entero positivo. Probar que existe un entero positivo n tal que existan m ceros consecutivos en la representación decimal de p^n.

Problema 16.13. Considere la secuencia $\{a_n\}$ tal que $a_0 = 4$, $a_1 = 22$ y $a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}$, para $n \geq 2$. Probar que existen secuencias $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ de enteros positivos tal que

$$a_n = \frac{y_n^2 + 7}{x_n - y_n}$$

para todo $n \geq 0$.

Problema 16.14. Los enteros positivos están dispuestos en fila en algún orden, y cada uno aparece exactamente una vez. ¿Existe siempre un bloque de al menos dos números adyacentes en algún lugar de esta disposición de modo que la suma de los números en el bloque sea un número primo?

Problema 16.15. Sea m un entero positivo y $n = 2^m + 1$. Sean $f_1, f_2, \ldots, f_n : [0, 1] \to [0, 1]$ funciones crecientes. Supongamos que para $i = 1, 2, \ldots, n$ se tiene que:

(i) $f_i(0) = 0$;

(ii) $|f_i(x) - f_i(y)| \leq |x - y|$, para todo $x, y \in [0, 1]$.

Probar que existen enteros $1 \leq i < j \leq n$ tal que

$$|f_i(x) - f_j(x)| \leq \frac{1}{m}$$

para todo $x \in [0, 1]$.

Problema 16.16. Sea p un número primo y sea M un polígono convexo. Supongamos que hay exactamente p formas de embaldosar M con triángulos equiláteros de lado 1 y cuadrados de lado 1. Demuestre que alguno de los lados de M tiene longitud $p-1$.

Problema 16.17. Sean $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios reales, no constantes y del mismo grado. Suponga que para cada $x \in \mathbb{R}$ tal que $Q(x) \in \mathbb{Z}$, entonces $P(x) \in \mathbb{Z}$. Demuestre que existen enteros a y b tales que $P(x) = aQ(x) + b$.

Viernes
2022-07-01

[E] **Problema 16.18** (Emerson Soriano[27]). Un número entero $n > 1$, cuyos divisores positivos son $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, es llamado *subdivisible* si todos los números

$$d_2 - d_1,\ d_3 - d_2,\ \ldots,\ d_k - d_{k-1}$$

son divisores de n.

(a) Encontrar un entero positivo subdivisible que tenga al menos cuatro factores primos.

(b) Demuestre que existen infinitos enteros positivos que no son subdivisibles y tienen exactamente 2022 divisores positivos que son subdivisibles.

[aops:25854152]
[omaforos:8072]

Solución. (a) Note que si $p-1$ es subdivisible para algún primo p, entonces $p(p-1)$ también lo es. De esta manera podemos ver que el número $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43$ es subdivisible con cuatro factores primos.

(b) Considere al número $n = 2^{2022} \cdot p$, donde $p > 2^{2022} + 1$ es un primo cualquiera. Si $2^e \cdot p$ es subdivisible para algún $0 \leq e \leq 2022$, entonces $p - 2^e \mid 2^e \cdot p$ de donde $1 < p - 2^e \mid 1$, absurdo. Por lo tanto, los únicos divisores subdivisibles de n son $2^1, 2^2, \ldots, 2^{2022}$ que son claramente 2022.

□

Álgebra

[E] **Problema 16.19** (ISL 2018/A5). Determine all functions $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ satisfying

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) f(y) = f(xy) + f\left(\frac{y}{x}\right)$$

for all $x, y > 0$.

[aops:12752798]

[H] **Problema 16.20** (ISL 2018/A6). Let $m, n \geq 2$ be integers. Let $f(x_1, \ldots, x_n)$ be a polynomial with real coefficients such that

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \left\lfloor \frac{x_1 + \cdots + x_n}{m} \right\rfloor \text{ for every } x_1, \ldots, x_n \in \{0, 1, \ldots, m-1\}.$$

Prove that the total degree of f is at least n.

[aops:12752880]

Sábado
2022-07-02
Entrenamiento IMO

[27] Cono Sur 2022/5

Problema 16.21 (JBMO Shortlist 2014/A9)**.** Sea n un entero positivo y $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ números reales positivos, tales que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1.$$

Demuestre que

$$|x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| \leq 2 - \min_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{y_i} - \min_{1 \leq i \leq n} \frac{y_i}{x_i}.$$

[aops:12226720]

Problema 16.22 (Turkey TST 2014/3.3)**.** En la esquina superior izquierda y en la esquina inferior izquierda de un tablero de ajedrez de tamaño 2014×2014 hay varios gusanos. Aquellos en la esquina superior izquierda solamente pueden moverse hacia abajo o hacia la derecha. Aquellos en la esquina inferior izquierda solamente pueden moverse hacia arriba o hacia la derecha.

Determine el mínimo número de gusanos necesarios para que sea posible que después de un número finito de pasos cada casilla haya sido visitada al menos una vez.

[aops:3426175]

Problema 16.23 (ISL 2003/N8)**.** Sea p un número primo y sea A un conjunto de enteros positivos mayores que 1, que satisfacen las condiciones:

(i) el conjunto de divisores primos de los elementos de A consiste de $p-1$ elementos;

(ii) para un subconjunto no vacío de A, el producto de sus elementos no es una potencia p-ésima.

¿Cuál es el mayor número posible de elementos en A?

[aops:119994]

Problema 16.24 (Bulgaria National Olympiad 2020/2)**.** Sean $b_1, b_2, \ldots, b_n$ números reales con suma 2 y $a_0, a_1, \ldots, a_n$ números satisfaciendo: $a_0 = a_n = 0$ y $|a_i - a_{i-1}| \leq b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Demuestre que

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + a_{i-1}) b_i \leq 2.$$

[aops:16127593]

Problema 16.25 (Tournament of Towns, Spring 2022, Senior A-5)**.** ¿Cuál es el mayor número posible de raíces en el intérvalo $(0, 1)$ para un polinomio de grado 2022 y coeficientes enteros de modo que el coeficiente principal sea 1?

[aops:25217698]

Problema 16.26 (Nordic 2021/3)**.** Sea n un entero positivo. Alicia y Bob juegan el siguiente juego:

- Primero, Alicia escoge $n+1$ subconjuntos de tamaño 2^{n-1}

$$A_1, A_2, \ldots, A_{n+1} \subset \{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}.$$

- Después de eso, Bob escoge $n+1$ enteros arbitrarios $a_1, \ldots, a_{n+1}$.
- Finalmente, Alicia escoge un entero t.

Bob gana si existe un entero $1 \leq i \leq n+1$ y $s \in A_i$ tal que

$$s + a_i \equiv t \pmod{2^n}.$$

Caso contrario, Alicia gana. Encuentre todos los valores de n para los que Alicia posee una estrategia ganadora.

[aops:21955425]

§17 Semana 17 (07/04 – 07/10)

Lunes
2022-07-04
Ecuaciones Funcionales
[Ompc11]

[E] Problema 17.1 (Azerbaijan)**.** Find all functions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ such that

$$f(x + |f(y)|) = x + f(y)$$

for all $x, y \in \mathbb{N}$.

[aops:2470438]

Solución. Si existe un $a \in \mathbb{N}$ tal que $f(a) < 0$, con $(x, y) = (-f(a), a)$ tenemos $f(-2f(a)) = 0$. Si existe un $a \in \mathbb{N}$ tal que $f(a) = 0$, con $y = a$ tenemos $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{N}$. Ahora, supongamos que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{N}$. Si $c = \inf_{x \in \mathbb{N}} f(x)$, es claro que $f(x) = x$ para todo $x > c$. Además, $f(x) \geq c$ para todo $x \leq c$. Es fácil verificar que esta función cumple. □

[E] Problema 17.2 (Belarus TST 2010/2.4)**.** Find all pairs of functions $f, g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ satisfying the following equality

$$f(x + g(y)) = g(x) + 2y + f(y)$$

for all $x, y \in \mathbb{Q}$.

[aops:14519514]

Solución. Con $(x, y) = (-g(0), 0)$ tenemos $g(-g(0)) = 0$. Luego, con $y = -g(0)$ tenemos que $f(x) - g(x)$ es una constante. Por ende,

$$g(x + g(y)) = g(x) + 2y + g(y).$$

Con $y = -g(0)$ tenemos $g(0) = 0$. Luego, con $x = 0$ tenemos $g(g(y)) = 2y + g(y)$. Comparando $(x, y) = (u + v, v/2)$ y $(x, y) = (u, g(v/2))$ tenemos

$$\begin{aligned} g(u + v) + v + g(v/2) &= g(u + v + g(v/2)) \\ &= g(u + g(g(v/2))) \\ &= g(u) + 2g(v/2) + g(g(v/2)) \\ &= g(u) + v + 3g(v/2) \end{aligned}$$

de donde $g(u+v) = g(u)+2g(v/2)$. Si $u = 0$, tenemos $g(v) = 2g(v/2)$ de donde $g(u+v) = g(u) + g(v)$ para todo $u, v \in \mathbb{Q}$. Es decir, g satisface la ecuación funcional de Cauchy, por lo que $g(x) = ax$ para algún $a \in \mathbb{Q}$ fijo. Luego, $a^2 y = g(g(y)) = 2y + g(y) = 2y + ay$ de donde $a \in \{-1, 2\}$. Por lo tanto, $(f(x), g(x)) = (ax + b, ax)$ donde $a \in \{-1, 2\}$ y $b \in \mathbb{Q}$ son fijos. □

[E] Problema 17.3. Find all non-constant functions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ satisfying all of the following conditions:

(i) $f(x-y)+f(y-z)+f(z-x) = 3(f(x)+f(y)+f(z))-f(x+y+z)$ for all $x, y, z \in \mathbb{Z}$

(ii) $\sum_{k=1}^{15} f(k) \leq 1995$

[aops:2468108]

Solución. Con $(x,y,z) = (0,0,0)$ tenemos que $f(0) = 0$. Con $(x,y,z) = (a,a,-a)$ tenemos $f(2a)+f(-2a) = 5f(a)+3f(-a)$ y análogamente $f(2a)+f(-2a) = 5f(a)+3f(-a)$. Luego, $f(a) = f(-a)$ para todo $a \in \mathbb{Z}$, y en particular con $a = 1$ tenemos $f(2) = 4f(1)$. Ahora, sea b un entero. Con $(x,y,z) = (b-1,b-1,b-1)$ tenemos $f(3b-3) = 9f(b-1)$. Con $(x,y,z) = (b,b-1,b-2)$ tenemos

$$\begin{aligned} 6f(1) &= f(1)+f(1)+f(2) \\ &= 3(f(b)+f(b-1)+f(b-2)) - f(3b-3) \\ &= 3f(b) - 6f(b-1) + 3f(b-2) \end{aligned}$$

de donde $f(b) = 2f(b-1) - f(b-2) + 2f(1)$. Por inducción, $f(b) = b^2 f(1)$ para todo $b \in \mathbb{Z}^+$. Es decir, $f(x) = cx^2$ para todo $x \in \mathbb{Z}$, donde $c \in \mathbb{Z}_0^+$ es una constante. Como f no es constante, $c \geq 1$. Además,

$$1240c = c\sum_{k=1}^{15} k^2 = \sum_{k=1}^{15} f(k) \leq 1995$$

de donde $c = 1$. Por lo tanto, $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{Z}$. $\square$

[M] Problema 17.4 (Japan MO Finals 2006/3)**.** Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$f(x)^2 + 2yf(x) + f(y) = f(y + f(x))$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$.

[aops:444449]

Solución. Es claro que $f \equiv 0$ es una solución. Ahora, supongamos que existe un $t \in \mathbb{R}$ tal que $f(t) \neq 0$. Sea $g(x) = f(x) - x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Luego, $g(y) = g(y + f(x))$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Note que si $g(a) = g(b)$, entonces $g(a^2 - b^2) = g(f(a) - f(b)) = g(f(a)) = g(0)$. Por ende,

$$g(2yf(t) + f(t)^2) = g((y + f(t))^2 - y^2) = g(0)$$

para todo $y \in \mathbb{R}$ de donde g es constante. Es decir, $f(x) = x^2 + c$ para algún $c \in \mathbb{R}$. $\square$

[E] Problema 17.5. Demuestre que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es aditiva si y solo si

$$f(x + y + xy) = f(x) + f(y) + f(xy)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

[aops:1897092]

Solución. Es claro que si f es aditiva entonces $f(x+y+xy) = f(x)+f(y)+f(xy)$. Ahora, supongamos que $f(x+y+xy) = f(x)+f(y)+f(xy)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Si $x = y = 0$ entonces $f(0) = 0$, y con $y = -x$ tenemos $f(-x) = -f(x)$. Con $(x,y) = (a,b)$ y $(x,y) = (-a,-b)$ tenemos que

$$f(ab + a + b) + f(ab - a - b) = 2f(ab)$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$. Es decir, $f(t) + f(s) = 2f\left(\frac{t+s}{2}\right)$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$ tales que $(t-s)^2 \geq 8(t+s)$. De esto se puede obtener que

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$, que es la ecuación funcional de Jensen. Como $f(0) = 0$, esta satisface la ecuación funcional de Cauchy. Por lo tanto, $f(x+y) = f(x)+f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. $\square$

[E] Problema 17.6 (ISL 2002/A1)**.** Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x)$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$.

[aops:118698]

Solución. Con $(x, y) = (-a/2, -f(-a/2))$ podemos notar que para todo $a \in \mathbb{R}$ existe un $b \in \mathbb{R}$ tal que $f(b) = a + f(0)$. Es decir, f es suryectiva. Si $f(u) = f(v)$ para algunos $u, v \in \mathbb{R}$, existe un $w \in \mathbb{R}$ tal que $f(w) = u + v$. Luego,

$$2u = f(f(u) + w) - f(f(w) - u) = f(f(v) + w) - f(f(w) - v) = 2v$$

de donde $u = v$. Es decir, f es inyectiva. Con $x = 0$ tenemos que $f(f(0) + y) = f(f(y))$ para todo $y \in \mathbb{R}$ de donde $f(y) = y + f(0)$. Por lo tanto, $f(x) = x + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$, siendo $c \in \mathbb{R}$ una constante. $\square$

Martes
2022-07-05

[E] Problema 17.7. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$.

[E] Problema 17.8. Find all $a \in \mathbb{R}$ for which there exists a non-constant function $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ such that

$$a + f(x + y - xy) + f(x)f(y) \leq f(x) + f(y)$$

for all $x, y \in (0, 1]$.

[E] Problema 17.9. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$.

[E] Problema 17.10 (ELMO 2021/1)**.** Find all functions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that

$$f^{f^{f(x)}(y)}(z) = x + y + z + 1$$

for all $x, y, z \in \mathbb{N}$.

[aops:16724045]

[E] Problema 17.11 (ELMO Shortlist 2018/A1)**.** Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a bijective function. Does there always exist an infinite number of functions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that $f(g(x)) = g(f(x))$ for all $x \in \mathbb{R}$?

[aops:10581480]

[M] Problema 17.12 (ELMO Shortlist 2019/A4)**.** Find all nondecreasing functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that for all real numbers x, y,

$$f(f(x)) + f(y) = f(x + f(y)) + 1.$$

[aops:12623572]

[M] Problema 17.13 (ELMO Shortlist 2017/A2)**.** Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that for all real numbers a, b, and c:

(i) If $a + b + c \geq 0$ then $f(a^3) + f(b^3) + f(c^3) \geq 3f(abc)$.

(ii) If $a + b + c \leq 0$ then $f(a^3) + f(b^3) + f(c^3) \leq 3f(abc)$.

[aops:8509522]

§18 Enunciados en Inglés

Aquí están los enunciados originales (o traducidos al inglés) de algunos problemas.

1.2 For all positive integers n, show that there exists a positive integer m such that n divides $2^m + m$.

1.3 Find all functions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ satisfying $f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y)$ for all pairs of positive reals x and y.

1.4 Let X be a set of 10000 integers, none of them is divisible by 47. Prove that there exists a 2007-element subset Y of X such that $a - b + c - d + e$ is not divisible by 47 for any $a, b, c, d, e \in Y$.

1.5 A sequence of natural numbers $c_1, c_2, \ldots$ is called *perfect* if every natural number m with $1 \le m \le c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ can be represented as

$$m = \frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_2} + \cdots + \frac{c_n}{a_n}.$$

Given n, find the maximum possible value of c_n in a perfect sequence (c_i).

1.6 Let $a_0, a_1, a_2, \ldots$ be a sequence of positive integers such that $\gcd(a_i, a_{i+1}) > a_{i-1}$. Prove that $a_n \ge 2^n$ for all $n \ge 0$.

1.7 Determine all functions $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ satisfying

$$f(x^2 f(y)^2) = f(x)^2 f(y)$$

for all $x, y \in \mathbb{Q}^+$.

1.8 Find all integers $n \ge 3$ for which there exist real numbers $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} = a_1, a_{n+2} = a_2$ such that

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

for all $i = 1, 2, \ldots, n$.

1.9 Given any set S of positive integers, show that at least one of the following two assertions holds:

(1) There exist distinct finite subsets F and G of S such that $\sum_{x \in F} 1/x = \sum_{x \in G} 1/x$;

(2) There exists a positive rational number $r < 1$ such that $\sum_{x \in F} 1/x \neq r$ for all finite subsets F of S.

1.10 Let $a_0, a_1, a_2, \ldots$ be a sequence of real numbers such that $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, and for every $n \ge 2$ there exists $1 \le k \le n$ satisfying

$$a_n = \frac{a_{n-1} + \cdots + a_{n-k}}{k}.$$

Find the maximal possible value of $a_{2018} - a_{2017}$.

2.1 Find all surjective functions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that for every $m, n \in \mathbb{N}$ and every prime p, the number $f(m + n)$ is divisible by p if and only if $f(m) + f(n)$ is divisible by p.

2.2 Let k be a positive integer. Prove that the number $(4 \cdot k^2 - 1)^2$ has a positive divisor of the form $8kn - 1$ if and only if k is even.

2.3 We say that a permutation $a_0, \dots, a_{n-1}$ of $0, \dots, n-1$ is *beautiful* if the sequence $b_0, \dots, b_{n-1}$ given by $b_i = |a_i - i|$ is also a permutation of $0, \dots, n-1$.

Determine for which n there exists a beautiful permutation of $0, \dots, n-1$.

2.4 For every integer $k \geq 2$, prove that 2^{3k} divides the number

$$\binom{2^{k+1}}{2^k} - \binom{2^k}{2^{k-1}}$$

but 2^{3k+1} does not.

2.5 Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ be a function which satisfies

$$f\left(x + \frac{1}{f(y)}\right) = f\left(y + \frac{1}{f(x)}\right)$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$. Prove that there is a positive integer which is not a value of f.

2.6 Determine all polynomials f with integer coefficients such that $f(p)$ is a divisor of $2^p - 2$ for every odd prime p.

2.7 Two distinct positive integers a, b are written on the board. The smaller of them is erased and replaced with the number $\frac{ab}{|a-b|}$. This process is repeated as long as the two numbers are not equal. Prove that eventually the two numbers on the board will be equal.

2.10 There are n markers, each with one side white and the other side black. In the beginning, these n markers are aligned in a row so that their white sides are all up. In each step, if possible, we choose a marker whose white side is up (but not one of the outermost markers), remove it, and reverse the closest marker to the left of it and also reverse the closest marker to the right of it. Prove that, by a finite sequence of such steps, one can achieve a state with only two markers remaining if and only if $n - 1$ is not divisible by 3.

2.12 The incircle of a triangle ABC touches the sides BC, CA, AB at the points D, E, F respectively. Let the line AD intersect this incircle of triangle ABC at a point X (apart from D). Assume that this point X is the midpoint of the segment AD, this means, $AX = XD$. Let the line BX meet the incircle of triangle ABC at a point Y (apart from X), and let the line CX meet the incircle of triangle ABC at a point Z (apart from X). Show that $EY = FZ$.

2.18 Let T_1, T_2, T_3, T_4 be pairwise distinct collinear points such that T_2 lies between T_1 and T_3, and T_3 lies between T_2 and T_4. Let ω_1 be a circle through T_1 and T_4; let ω_2 be the circle through T_2 and internally tangent to ω_1 at T_1; let ω_3 be the circle through T_3 and externally tangent to ω_2 at T_2; and let ω_4 be the circle through T_4 and externally tangent to ω_3 at T_3. A line crosses ω_1 at P and W, ω_2 at Q and R, ω_3 at S and T, and ω_4 at U and V, the order of these points along the line being P, Q, R, S, T, U, V, W. Prove that $PQ + TU = RS + VW$.

2.20 Let ABC be a triangle and let D be a point on the segment BC, $D \neq B$ and $D \neq C$. The circle ABD meets the segment AC again at an interior point E. The circle ACD meets the segment AB again at an interior point F. Let A' be the reflection of A in the line BC. The lines $A'C$ and DE meet at P, and the lines $A'B$ and DF meet at Q. Prove that the lines AD, BP and CQ are concurrent (or all parallel).

2.21 Given positive integers m and $n \geq m$, determine the largest number of dominoes (1×2 or 2×1 rectangles) that can be placed on a rectangular board with m rows and $2n$ columns consisting of cells (1×1 squares) so that:

(i) each domino covers exactly two adjacent cells of the board;

(ii) no two dominoes overlap;

(iii) no two form a 2×2 square; and

(iv) the bottom row of the board is completely covered by n dominoes.

2.22 A *cubic sequence* is a sequence of integers given by $a_n = n^3 + bn^2 + cn + d$, where b, c and d are integer constants and n ranges over all integers, including negative integers.

(a) Show that there exists a cubic sequence such that the only terms of the sequence which are squares of integers are a_{2015} and a_{2016}.

(b) Determine the possible values of $a_{2015} \cdot a_{2016}$ for a cubic sequence satisfying the condition in part (a).

3.1 Find the largest k for which there exists a permutation $(a_1, a_2, \ldots, a_{2022})$ of integers from 1 to 2022 such that for at least k distinct i with $1 \leq i \leq 2022$ the number

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_i}{1 + 2 + \cdots + i}$$

is an integer larger than 1.

3.2 Given a positive integer n, we say that a polynomial P with real coefficients is *n-pretty* if the equation $P(\lfloor x \rfloor) = \lfloor P(x) \rfloor$ has exactly n real solutions. Show that for each positive integer n

(a) there exists an n-pretty polynomial;

(b) any n-pretty polynomial has a degree of at least $\frac{2n+1}{3}$.

3.3 Find all positive integers n for which there exist positive integers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ such that

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{2}{x_2^2} + \frac{4}{x_3^2} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{x_n^2} = 1.$$

3.4 (a) Prove that for every positive integer m there exists an integer $n \geq m$ such that

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdots \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \binom{n}{m}. \qquad (*)$$

(b) Denote by $p(m)$ the smallest integer $n \geq m$ such that the equation $(*)$ holds. Prove that $p(2018) = p(2019)$.

3.5 Let $a_1, a_2, a_3, \ldots$ be the sequence of positive integers such that

$$a_1 = 1 \quad \text{and} \quad a_{k+1} = a_k^3 + 1, \text{ for all positive integers } k.$$

Prove that for every prime number p of the form $3\ell + 2$, where ℓ is a non-negative integer, there exists a positive integer n such that a_n is divisible by p.

3.6 An integer n is called *Silesian* if there exist positive integers a, b and c such that

$$n = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}.$$

(a) Prove that there are infinitely many Silesian integers.

(b) Prove that not every positive integer is Silesian.

4.1 Let $n \geq 2$ be an integer. Let S be a subset of $\{1, 2, \ldots, n\}$ such that S neither contains two elements one of which divides the other, nor contains two elements which are coprime. What is the maximal possible number of elements of such a set S?

4.2 Let n be a positive integer. A_1, A_2, $\ldots$, A_n are points inside a circle and B_1, B_2, $\ldots$, B_n points on that circle such that the segments A_iB_i are pairwise disjoint for $1 \leq i \leq n$. A grasshopper can move from point A_i to A_j where $i \neq j$ if and only if segment A_iA_j doesn't pass through any of segments A_kB_k for $1 \leq k \leq n$.

Prove that the grasshopper can move from any point A_i to A_j in a finite sequence of moves.

4.4 Let $f_n = \lfloor 2^n \sqrt{2008} \rfloor + \lfloor 2^n \sqrt{2009} \rfloor$ for all $n \in \mathbb{Z}^+$. Prove there are infinitely many odd numbers and infinitely many even numbers in the sequence $f_1, f_2, \ldots$.

4.11 Let ABC be an acute-angled triangle in which $BC < AB$ and $BC < CA$. Let point P lie on segment AB and point Q lie on segment AC such that $P \neq B$, $Q \neq C$ and $BQ = BC = CP$. Let T be the circumcentre of triangle APQ, H the orthocentre of triangle ABC, and S the point of intersection of the lines BQ and CP. Prove that T, H and S are collinear.

4.12 Find all functions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that for any positive integers a and b, the following two conditions hold:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$, and

(2) at least two of the numbers $f(a)$, $f(b)$ and $f(a + b)$ are equal.

4.13 An infinite sequence of positive integers $a_1, a_2, \ldots$ is called *good* if

(1) a_1 is a perfect square, and

(2) for any integer $n \geq 2$, a_n is the smallest positive integer such that

$$na_1 + (n - 1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n$$

is a perfect square.

Prove that for any good sequence $a_1, a_2, \ldots$, there exists a positive integer k such that $a_n = a_k$ for all integers $n \geq k$.

4.16 Given a positive integer $n \geq 2$, determine the largest positive integer N for which there exist $N+1$ real numbers $a_0, a_1, \ldots, a_N$ such that

(1) $a_0 + a_1 = -\frac{1}{n}$, and

(2) $(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$ for $1 \leq k \leq N-1$.

4.17 For all positive integers n, k, let $f(n, 2k)$ be the number of ways an $n \times 2k$ board can be fully covered by nk dominoes of size 2×1. (For example, $f(2,2) = 2$ and $f(3,2) = 3$.) Find all positive integers n such that for every positive integer k, the number $f(n, 2k)$ is odd.

4.18 Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral with circumcentre O. Let the internal angle bisectors at A and B meet at X, the internal angle bisectors at B and C meet at Y, the internal angle bisectors at C and D meet at Z, and the internal angle bisectors at D and A meet at W. Further, let AC and BD meet at P. Suppose that the points X, Y, Z, W, O and P are distinct. Prove that O, X, Y, Z and W lie on the same circle if and only if P, X, Y, Z and W lie on the same circle.

7.2 Let a, b be positive real numbers such that there exist infinite number of natural numbers k such that $\lfloor a^k \rfloor + \lfloor b^k \rfloor = \lfloor a \rfloor^k + \lfloor b \rfloor^k$. Prove that

$$\lfloor a^{2014} \rfloor + \lfloor b^{2014} \rfloor = \lfloor a \rfloor^{2014} + \lfloor b \rfloor^{2014}.$$

7.8 Find the number of subsets of $\{1, \ldots, 2000\}$, the sum of whose elements is divisible by 5.

7.9 Let X be a finite set of positive integers and A a subset of X. Prove that there exists a subset B of X such that A equals the set of elements of X which divide an odd number of elements of B.

9.7 Show that, for every positive integer n, there exist n consecutive positive integers such that none is divisible by the sum of its digits.

10.7 Prove that there exists a natural number b such that for any natural $n > b$ the sum of the digits of $n!$ is not less than 10^{100}.

12.14 Let $a_1, a_2, \ldots, a_{17}$ be a permutation of $1, 2, \ldots, 17$ such that $(a_1 - a_2)(a_2 - a_3) \cdots (a_{17} - a_1) = n^{17}$. Find the maximum possible value of n.

12.16 Arrange all square-free positive integers in ascending order $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$. Prove that there are infinitely many positive integers n, such that $a_{n+1} - a_n = 2020$.

13.1 Let f be any function that maps the set of real numbers into the set of real numbers. Prove that there exist real numbers x and y such that

$$f(x - f(y)) > y f(x) + x.$$

13.2 Suppose that $s_1, s_2, s_3, \ldots$ is a strictly increasing sequence of positive integers such that the sub-sequences

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \quad \text{and} \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

are both arithmetic progressions. Prove that the sequence $s_1, s_2, s_3, \ldots$ is itself an arithmetic progression.

13.3 Find all functions f from the set of real numbers into the set of real numbers which satisfy for all x, y the identity

$$f(xf(x+y)) = f(yf(x)) + x^2.$$

13.4 Let the real numbers a, b, c, d satisfy the relations $a+b+c+d=6$ and $a^2+b^2+c^2+d^2=12$. Prove that

$$36 \leq 4(a^3+b^3+c^3+d^3) - (a^4+b^4+c^4+d^4) \leq 48.$$

13.5 Let $x_1, \ldots, x_{100}$ be nonnegative real numbers such that $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \leq 1$ for all $i = 1, \ldots, 100$ (we put $x_{101} = x_1, x_{102} = x_2$). Find the maximal possible value of the sum $S = \sum_{i=1}^{100} x_i x_{i+2}$.

13.6 A sequence $x_1, x_2, \ldots$ is defined by $x_1 = 1$ and $x_{2k} = -x_k$, $x_{2k-1} = (-1)^{k+1} x_k$ for all $k \geq 1$. Prove that $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq 0$ for all $n \geq 1$.

13.7 Determine all functions $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ which satisfy the following equation for all $x, y \in \mathbb{Q}^+$:

$$f(f(x)^2 y) = x^3 f(xy).$$

13.8 Suppose that f and g are two functions defined on the set of positive integers and taking positive integer values. Suppose also that the equations $f(g(n)) = f(n) + 1$ and $g(f(n)) = g(n) + 1$ hold for all positive integers. Prove that $f(n) = g(n)$ for all positive integer n.

13.9 Let $a_1, \ldots, a_r$ be positive real numbers. For $n > r$, we inductively define

$$a_n = \max_{1 \leq k \leq n-1} (a_k + a_{n-k}).$$

Prove there exist positive integers $\ell \leq r$ and N such that $a_n = a_{n-\ell} + a_\ell$ for all $n \geq N$.

13.10 Given six positive numbers a, b, c, d, e, f such that $a < b < c < d < e < f$. Let $a + c + e = S$ and $b + d + f = T$. Prove that

$$2ST > \sqrt{3(S+T)\left(S(bd+bf+df) + T(ac+ae+ce)\right)}.$$

13.11 Determine all sequences $(x_1, x_2, \ldots, x_{2011})$ of positive integers such that for every positive integer n there is an integer a with

$$x_1^n + 2x_2^n + \cdots + 2011 x_{2011}^n = a^{n+1} + 1.$$

13.12 Determine all pairs (f, g) of functions from the set of real numbers to itself that satisfy

$$g(f(x+y)) = f(x) + (2x+y)g(y)$$

for all real numbers x and y.

13.13 Determine all pairs (f, g) of functions from the set of positive integers to itself that satisfy

$$f^{g(n)+1}(n) + g^{f(n)}(n) = f(n+1) - g(n+1) + 1$$

for every positive integer n. Here, $f^k(n)$ means $\underbrace{f(f(\ldots f}_{k}(n)\ldots))$.

13.14 Find the least positive integer n for which there exists a set $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ consisting of n distinct positive integers such that

$$\left(1 - \frac{1}{s_1}\right)\left(1 - \frac{1}{s_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{s_n}\right) = \frac{51}{2010}.$$

13.15 Find the smallest number n such that there exist polynomials $f_1, f_2, \ldots, f_n$ with rational coefficients satisfying

$$x^2 + 7 = f_1(x)^2 + f_2(x)^2 + \cdots + f_n(x)^2.$$

13.16 Let $A_1A_2\cdots A_n$ be a convex polygon. Point P inside this polygon is chosen so that its projections $P_1, \ldots, P_n$ onto lines $A_1A_2, \ldots, A_nA_1$ respectively lie on the sides of the polygon. Prove that for arbitrary points $X_1, \ldots, X_n$ on sides $A_1A_2, \ldots, A_nA_1$ respectively,

$$\max\left\{\frac{X_1X_2}{P_1P_2}, \ldots, \frac{X_nX_1}{P_nP_1}\right\} \geq 1.$$

13.17 Let a, b be integers, and let $P(x) = ax^3 + bx$. For any positive integer n we say that the pair (a, b) is *n-good* if $n \mid P(m) - P(k)$ implies $n \mid m - k$ for all integers m, k. We say that (a, b) is *very good* if (a, b) is n-good for infinitely many positive integers n.

(a) Find a pair (a, b) which is 51-good, but not very good.

(b) Show that all 2010-good pairs are very good.

13.18 Find all functions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that the number $(f(m) + n)(m + f(n))$ is a square for all $m, n \in \mathbb{N}$.

13.19 Let $p_1, p_2, \ldots, p_n$ be distinct primes greater than 3. Show that $2^{p_1p_2\cdots p_n} + 1$ has at least 4^n divisors.

13.20 Is there a positive integer m such that the equation

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} = \frac{m}{a+b+c}$$

has infinitely many solutions in positive integers a, b, c?

13.21 Find all pairs of positive integers $m, n \geq 3$ for which there exist infinitely many positive integers a such that

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

is itself an integer.

13.22 An integer n is said to be *good* if $|n|$ is not the square of an integer. Determine all integers m with the following property: m can be represented, in infinitely many ways, as a sum of three distinct good integers whose product is the square of an odd integer.

13.23 Let p be a prime number. Prove that there exists a prime number q such that for every integer n, the number $n^p - p$ is not divisible by q.

13.24 Let $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, where $a_0, \ldots, a_n$ are integers, $a_n > 0$, $n \geq 2$. Prove that there exists a positive integer m such that $P(m!)$ is a composite number.

13.25 Find all positive integers n such that there exists a sequence of positive integers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ satisfying

$$a_{k+1} = \frac{a_k^2 + 1}{a_{k-1} + 1} - 1$$

for every k with $2 \leq k \leq n - 1$.

13.26 Let n be a positive integer and let p be a prime number. Prove that if a, b, c are integers (not necessarily positive) satisfying the equations

$$a^n + pb = b^n + pc = c^n + pa$$

then $a = b = c$.

13.27 Let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ be distinct positive integers, $n \geq 3$. Prove that there exist distinct indices i and j such that $a_i + a_j$ does not divide any of the numbers $3a_1, 3a_2, \ldots, 3a_n$.

13.28 A positive integer N is called *balanced* if $N = 1$ or if N can be written as a product of an even number of not necessarily distinct primes. Given positive integers a and b, consider the polynomial P defined by $P(x) = (x + a)(x + b)$.

(a) Prove that there exist distinct positive integers a and b such that all the number $P(1), P(2), \ldots, P(50)$ are balanced.

(b) Prove that if $P(n)$ is balanced for all positive integers n, then $a = b$.

13.29 Let $a_1, a_2, \ldots$ be a sequence of integers with infinitely many positive terms and infinitely many negative terms. Suppose that for every positive integer n, the numbers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ leave n different remainders on division by n. Prove that every integer occurs exactly once in the sequence.

13.30 Prove that there are infinitely many positive integers n such that $n^2 + 1$ has a prime divisor greater than $2n + \sqrt{2n}$.

14.1 Prove that for every positive integer n, the set $\{2, 3, \ldots, 3n + 1\}$ can be partitioned into n triples in such a way that the numbers from each triple are the lengths of the sides of some obtuse triangle.

14.2 Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a real-valued function defined on the set of real numbers that satisfies

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

for all real numbers x and y. Prove that $f(x) = 0$ for all $x \leq 0$.

14.3 Let a, b and c be positive real numbers satisfying $\min(a + b, b + c, c + a) > \sqrt{2}$ and $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Prove that

$$\frac{a}{(b + c - a)^2} + \frac{b}{(c + a - b)^2} + \frac{c}{(a + b - c)^2} \geq \frac{3}{(abc)^2}.$$

14.5 For any integer $d > 0$, let $f(d)$ be the smallest possible integer that has exactly d positive divisors (so for example we have $f(1) = 1$, $f(5) = 16$, and $f(6) = 12$). Prove that for every integer $k \geq 0$ the number $f(2^k)$ divides $f(2^{k+1})$.

14.6 Consider a polynomial $P(x) = (x + d_1)(x + d_2) \cdots (x + d_9)$, where $d_1, d_2, \ldots, d_9$ are nine distinct integers. Prove that there exists an integer N such that for all integers $x \geq N$ the number $P(x)$ is divisible by a prime number greater than 20.

14.7 Let $n \geq 1$ be an odd integer. Determine all functions f from the set of integers to itself such that for all integers x and y the difference $f(x) - f(y)$ divides $x^n - y^n$.

14.8 For each positive integer k, let $t(k)$ be the largest odd divisor of k. Determine all positive integers a for which there exists a positive integer n such that all the differences

$$t(n+a) - t(n),\ t(n+a+1) - t(n+1),\ \ldots,\ t(n+2a-1) - t(n+a-1)$$

are divisible by 4.

14.9 Let f be a function from the set of integers to the set of positive integers. Suppose that, for any two integers m and n, the difference $f(m) - f(n)$ is divisible by $f(m-n)$. Prove that, for all integers m and n with $f(m) \leq f(n)$, the number $f(n)$ is divisible by $f(m)$.

14.10 Let $P(x)$ and $Q(x)$ be two polynomials with integer coefficients such that no nonconstant polynomial with rational coefficients divides both $P(x)$ and $Q(x)$. Suppose that for every positive integer n the integers $P(n)$ and $Q(n)$ are positive, and $2^{Q(n)} - 1$ divides $3^{P(n)} - 1$. Prove that $Q(x)$ is a constant polynomial.

14.11 Let p be an odd prime number. For every integer a, define the number

$$S_a = \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2} + \cdots + \frac{a^{p-1}}{p-1}.$$

Let m and n be integers such that

$$S_3 + S_4 - 3S_2 = \frac{m}{n}.$$

Prove that p divides m.

14.12 Let x, y and z be positive real numbers such that $xyz = 1$. Prove that

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}.$$

14.14 Find all triples (x, y, z) of positive integers such that $x \leq y \leq z$ and

$$x^3(y^3 + z^3) = 2012(xyz + 2).$$

14.15 Determine all integers $m \geq 2$ such that every n with $\frac{m}{3} \leq n \leq \frac{m}{2}$ divides the binomial coefficient $\binom{n}{m-2n}$.

14.16 For each positive integer k, denote by $\tau(k)$ the number of all positive divisors of k, including 1 and k. Let a and b be positive integers such that $\tau(\tau(an)) = \tau(\tau(bn))$ for all positive integers n. Prove that $a = b$.

15.2 Suppose that 1000 students are standing in a circle. Prove that there exists an integer k with $100 \leq k \leq 300$ such that in this circle there exists a contiguous group of $2k$ students, for which the first half contains the same number of girls as the second half.

15.3 Let $\mathcal{S}$ be a finite set of at least two points in the plane. Assume that no three points of $\mathcal{S}$ are collinear. A *windmill* is a process that starts with a line ℓ going through a single point $P \in \mathcal{S}$. The line rotates clockwise about the *pivot* P until the first time that the line meets some other point belonging to $\mathcal{S}$. This point, Q, takes over as the new pivot, and the line now rotates clockwise about Q, until it next meets a point of $\mathcal{S}$. This process continues indefinitely.

Show that we can choose a point P in $\mathcal{S}$ and a line ℓ going through P such that the resulting windmill uses each point of $\mathcal{S}$ as a pivot infinitely many times.

15.9 Consider the convex quadrilateral $ABCD$. The point P is in the interior of $ABCD$. The following ratio equalities hold:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Prove that the following three lines meet in a point: the internal bisectors of angles $\angle ADP$ and $\angle PCB$ and the perpendicular bisector of segment AB.

15.16 Prove that there exists a positive constant c such that the following statement is true:

Consider an integer $n > 1$, and a set $\mathcal{S}$ of n points in the plane such that the distance between any two different points in $\mathcal{S}$ is at least 1. It follows that there is a line ℓ separating $\mathcal{S}$ such that the distance from any point of $\mathcal{S}$ to ℓ is at least $cn^{-1/3}$.

(A line ℓ *separates* a set of points $\mathcal{S}$ if some segment joining two points in $\mathcal{S}$ crosses ℓ.)

Note. Weaker results with $cn^{-1/3}$ replaced by $cn^{-\alpha}$ may be awarded points depending on the value of the constant $\alpha > 1/3$.

15.20 In triangle ABC, point A_1 lies on side BC and point B_1 lies on side AC. Let P and Q be points on segments AA_1 and BB_1, respectively, such that PQ is parallel to AB. Let P_1 be a point on line PB_1, such that B_1 lies strictly between P and P_1, and $\angle PP_1C = \angle BAC$. Similarly, let Q_1 be the point on line QA_1, such that A_1 lies strictly between Q and Q_1, and $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Prove that points P, Q, P_1, and Q_1 are concyclic.

15.28 A deck of $n > 1$ cards is given. A positive integer is written on each card. The deck has the property that the arithmetic mean of the numbers on each pair of cards is also the geometric mean of the numbers on some collection of one or more cards.

For which n does it follow that the numbers on the cards are all equal?

15.36 Find all functions f defined on the set of positive real numbers which take positive real values and satisfy the conditions:

(i) $f(xf(y)) = yf(x)$ for all positive x, y;

(ii) $f(x) \to 0$ as $x \to \infty$.

15.39 Find all functions f from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ satisfying:

(i) there are only finitely many s in $\mathbb{R}$ such that $f(s) = 0$, and

(ii) $f(x^4 + y) = x^3 f(x) + f(f(y))$ for all x, y in $\mathbb{R}$.

15.42 Find all functions $f(x)$ with the domain of all positive real numbers, such that for any positive numbers x and y, we have $f(x^y) = f(x)^{f(y)}$.

16.21 Let n be a positive integer, and let $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ be positive real numbers such that $x_1 + \cdots + x_n = y_1 + \cdots + y_n = 1$. Show that

$$|x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| \leq 2 - \min_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{y_i} - \min_{1 \leq i \leq n} \frac{y_i}{x_i}.$$

16.22 At the bottom-left corner of a 2014×2014 chessboard, there are some green worms and at the top-left corner of the same chessboard, there are some brown worms. Green worms can move only to right and up, and brown worms can move only to right and down. After a while, the worms make some moves and all of the unit squares of the chessboard become occupied at least once throughout this process. Find the minimum total number of the worms.

16.23 Let p be a prime number and let A be a set of positive integers that satisfies the following conditions:

(i) the set of prime divisors of the elements in A consists of $p - 1$ elements;

(ii) for any nonempty subset of A, the product of its elements is not a perfect p-th power.

What is the largest possible number of elements in A?

16.24 Let $b_1, \ldots, b_n$ be nonnegative integers with sum 2 and $a_0, a_1, \ldots, a_n$ be real numbers such that $a_0 = a_n = 0$ and $|a_i - a_{i-1}| \leq b_i$ for each $i = 1, \ldots, n$. Prove that

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + a_{i-1}) b_i \leq 2.$$

16.25 What is the maximal possible number of roots on the interval $(0, 1)$ for a polynomial of degree 2022 with integer coefficients and with the leading coefficient equal to 1?

16.26 Let n be a positive integer. Alice and Bob play the following game. First, Alice picks $n + 1$ subsets $A_1, \ldots, A_{n+1}$ of $\{1, \ldots, 2^n\}$ each of size 2^{n-1}. Second, Bob picks $n + 1$ arbitrary integers $a_1, \ldots, a_{n+1}$. Finally, Alice picks an integer t. Bob wins if there exists an integer $1 \leq i \leq n + 1$ and $s \in A_i$ such that $s + a_i \equiv t \pmod{2^n}$. Otherwise, Alice wins.

Find all values of n where Alice has a winning strategy.

Referencias

[**Al**] Pedro Alegría. «Progresiones y sucesiones». En: Taller de Matemáticas. Cap. 6, pág. 51. URL: https://www.ehu.eus/~mtpalezp/descargas/olimprogre.pdf.

[**An03**] Titu Andreescu. *102 Combinatorial Problems*. Birkhäuser, 2003. Cap. 2, pág. 10. ISBN: 9780817682224.

[**Mu17**] Anant Mudgal. «A Special Point on the Median». En: *Mathematical Reflections* 2 (2017). URL: https://www.awesomemath.org/wp-pdf-files/math-reflections/mr-2017-02/article_1_a_special_point_on_the_median.pdf.

[**Ompc11**] Moubinool Omarjee y Patrick (pco). *169 Functional Equations*. 2011. URL: https://artofproblemsolving.com/community/c6h440189p2480646.

[**Sa21**] Srijon Sarkar. «Midpoint of Symmedian Chord». En: *Mathematical Reflections* 4 (2021). URL: https://www.awesomemath.org/wp-pdf-files/math-reflections/mr-2021-04/mr_4_2021_midpoint_of_symmedian_chord.pdf.