Olympiad Training

Taught by Emerson Soriano

Yohan Min

Summer 2022

This is a collection of the problems that we discussed during the class. Some problems that were not discussed during the class are under the subsection "Practice Problems". The letters `E`, `M`, `H` and `Z` indicate the hardness of a problem at an increasing level. The green, blue and red colors indicate that the problem was solved during the class, the problem was solved after the class or using a hint, and the problem was solved by the teacher.

Contents

§1 Week 1 (03/14 – 03/18)

[E] **Problem 1.1** (IMO Shortlist 2006 A5)**.** If a, b, c are the sides of a triangle, prove that

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} \leq 3.$$

Solución. Sea $x = \sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a} > 0$ y análogamente se definen y y z. Por la desigualdad de Schur tenemos que

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{(x-y)(x-z)}{x^2} \geq 0.$$

Note que

$$b+c-a = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+z}{2}\right)^2 - \left(\frac{y+z}{2}\right)^2 = \frac{x^2+xy+xz-yz}{2}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}\right)^2 &\leq \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}\right)^2 \\
&= \frac{x^2+xy+xz-yz}{2x^2} \\
&= 3 - \sum_{\text{cyc}} \frac{(x-y)(x-z)}{2x^2} \\
&\leq 3
\end{aligned}$$

y esto resuelve el problema. □

[E] **Problem 1.2** (IMO Shortlist 2006 N7)**.** For all positive integers n, show that there exists a positive integer m such that n divides $2^m + m$.

Solución. El problema es trivial cuando n es una potencia de 2. Ahora, supongamos que para algún $n \in \mathbb{Z}^+$ existe un $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n \mid 2^m + m$. En efecto, sea $k = \frac{2^m+m}{n}$ y sea p un primo impar arbitrario mayor o igual que todos los factores primos de n. Sea $n = p^e n_0$ donde $p \nmid n_0$. Sea $m_0 = m + \phi(p^{e+1}n_0)t$ para algún $n_0 \mid t$ tal que $n_0 k \equiv \phi(n_0)t \pmod{p}$. Luego,

$$\begin{aligned}
2^{m_0} + m_0 &\equiv 2^m + m + p^e(p-1)\phi(n_0)t \\
&= p^e\left(n_0 k + (p-1)\phi(n_0)t\right) \\
&\equiv 0 \pmod{p^{e+1}n_0}
\end{aligned}$$

y aquí terminamos por inducción. □

[M] **Problem 1.3** (IMO Shortlist 2007 A4)**.** Find all functions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ satisfying $f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y)$ for all pairs of positive reals x and y.

[M] **Problem 1.4** (IMO Shortlist 2007 N3)**.** Let X be a set of 10000 integers, none of them is divisible by 47. Prove that there exists a 2007-element subset Y of X such that $a - b + c - d + e$ is not divisible by 47 for any $a, b, c, d, e \in Y$.

[E] **Problem 1.5** (Iran MO 2000 3rd Round)**.** A sequence of natural numbers $c_1, c_2, \ldots$ is called *perfect* if every natural number m with $1 \le m \le c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ can be represented as

$$m = \frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_2} + \cdots + \frac{c_n}{a_n}.$$

Given n, find the maximum possible value of c_n in a perfect sequence (c_i).

[AoPS:389506]

[M] **Problem 1.6** (IMO Shortlist 2008 N3)**.** Let $a_0, a_1, a_2, \ldots$ be a sequence of positive integers such that $\gcd(a_i, a_{i+1}) > a_{i-1}$. Prove that $a_n \ge 2^n$ for all $n \ge 0$.

[E] **Problem 1.7** (IMO Shortlist 2018 A1)**.** Determine all functions $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ satisfying

$$f(x^2 f(y)^2) = f(x)^2 f(y)$$

for all $x, y \in \mathbb{Q}^+$.

Solución. Si $x^2 f(y)^2 = y$ entonces $f(x) = 1$. Si $f(y) = 1$ tenemos que $f(x^2) = f(x)^2$ para todo $x \in \mathbb{Q}^+$. Es decir, $f(xf(y))^2 = f(x)^2 f(y)$ de donde existe una función $f_1 : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ tal que $f(x) = f_1(x)^2$. Luego, $f_1(xf(y))^2 = f_1(x)^2 f_1(y)$ de donde existe una función $f_2 : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ tal que $f_1(x) = f_2(x)^2$. Luego, $f_2(xf(y))^2 = f_2(x)^2 f_2(y)$ y así sucesivamente. Por lo tanto, $f(x) \equiv 1$. □

[M] **Problem 1.8** (IMO Shortlist 2018 A2)**.** Find all integers $n \ge 3$ for which there exist real numbers $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} = a_1, a_{n+2} = a_2$ such that

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

for all $i = 1, 2, \ldots, n$.

Solución. Probaremos que se cumple para todo $3 \mid n$. □

[M] **Problem 1.9** (IMO Shortlist 2018 A3)**.** Given any set S of positive integers, show that at least one of the following two assertions holds:

(1) There exist distinct finite subsets F and G of S such that $\sum_{x \in F} 1/x = \sum_{x \in G} 1/x$;

(2) There exists a positive rational number $r < 1$ such that $\sum_{x \in F} 1/x \ne r$ for all finite subsets F of S.

Solución. Si S es un conjunto finito, es claro que la (2) es verdadera. Ahora, supongamos que S es infinito y la (2) no se cumple. Sean $a_1 < a_2 < \cdots$ los elementos de S. Sea $i \ge 1$ un índice cualquiera. Si $\frac{1}{a_i} \le \frac{1}{a_{i+1}} + \frac{1}{a_{i+2}} + \cdots + \frac{1}{a_j} < \frac{2}{a_i}$, sea $r = \frac{1}{a_{i+1}} + \frac{1}{a_{i+2}} + \cdots + \frac{1}{a_j} - \frac{1}{a_i} < \frac{1}{a_i} \le 1$. Es decir, $r = \frac{1}{a_{x_1}} + \cdots + \frac{1}{a_{x_k}} < \frac{1}{a_i}$ de donde

$$\frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_{x_1}} + \cdots + \frac{1}{a_{x_k}} = \frac{1}{a_i} + r = \frac{1}{a_{i+1}} + \frac{1}{a_{i+2}} + \cdots + \frac{1}{a_j}$$

y la (1) es verdad. Ahora, supongamos que

$$\frac{1}{a_{i+1}} + \frac{1}{a_{i+2}} + \cdots + \frac{1}{a_j} < \frac{1}{a_i}$$

para todo $j > i > 0$. Si $a_{i+1} > 2a_i$, sea $\frac{1}{a_{i+1}} < r = \frac{2}{a_{i+1}} < \frac{1}{a_i} \le 1$. Es decir, $r = \frac{1}{a_{x_1}} + \cdots + \frac{1}{a_{x_k}} < \frac{1}{a_i}$. Si $x_1, \ldots, x_k > i + 1$ entonces $r < \frac{1}{a_{i+1}}$ lo cual es una contradicción. Por ende, $r = \frac{1}{a_{i+1}} + \frac{1}{a_{y_1}} + \cdots + \frac{1}{a_{y_l}} < \frac{2}{a_{i+1}}$ lo cual es un absurdo. Por lo tanto, $a_{i+1} \leq 2a_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}^+$. Luego,

$$\frac{1}{a_{i+1}}\left(2 - \frac{1}{2^{j-i-1}}\right) = \sum_{k=0}^{j-i-1} \frac{1}{2^k a_{i+1}} \leq \frac{1}{a_{i+1}} + \cdots + \frac{1}{a_j} < \frac{1}{a_i}$$

de donde $a_{i+1} \geq 2a_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}^+$. Es decir, $a_{i+1} = 2a_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}^+$. Si $r = \frac{1}{3a_1} < \frac{1}{a_1} < 1$, tenemos que

$$\frac{1}{3} = \frac{a_1}{a_{x_1}} + \cdots + \frac{a_1}{a_{x_k}} = \frac{1}{2^{x_1-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{x_k-1}} = \frac{M}{N}$$

donde M es impar y N es par, lo cual es un absurdo. $\square$

Problem 1.10 (IMO Shortlist 2018 A4)**.** Let $a_0, a_1, a_2, \ldots$ be a sequence of real numbers such that $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, and for every $n \geq 2$ there exists $1 \leq k \leq n$ satisfying

$$a_n = \frac{a_{n-1} + \cdots + a_{n-k}}{k}.$$

Find the maximal possible value of $a_{2018} - a_{2017}$.

Solución. La respuesta es $\frac{2016}{2017^2}$, cuando $a_1 = a_2 = \cdots = a_{2016} = 1$ y $(a_{2017}, a_{2018}) = \left(\frac{2016}{2017}, 1 - \frac{1}{2017^2}\right)$. $\square$

§2 Week 2 (03/21 – 03/25)

Problem 2.1 (IMO Shortlist 2007 N5)**.** Find all surjective functions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that for every $m, n \in \mathbb{N}$ and every prime p, the number $f(m+n)$ is divisible by p if and only if $f(m) + f(n)$ is divisible by p.

Problem 2.2 (IMO Shortlist 2007 N6)**.** Let k be a positive integer. Prove that the number $(4 \cdot k^2 - 1)^2$ has a positive divisor of the form $8kn - 1$ if and only if k is even.

[E] **Problem 2.3** (Petrozavodsk Winter 2021, UPC Contest/B)**.** We say that a permutation $a_0, \dots, a_{n-1}$ of $0, \dots, n-1$ is *beautiful* if the sequence $b_0, \dots, b_{n-1}$ given by $b_i = |a_i - i|$ is also a permutation of $0, \dots, n-1$.

Determine for which n there exists a beautiful permutation of $0, \dots, n-1$.

[AoPS:21584017]

Solución. Note que

$$\frac{n(n-1)}{2} = \sum_{i=0}^{n-1} |a_i - i| \equiv \sum_{i=0}^{n-1} a_i - \sum_{i=0}^{n-1} i = 0 \pmod 2$$

de donde $n = 4k$ o $n = 4k+1$. Ahora, si $n = 4k + c$ donde $c \in \{0, 1\}$ sea $a_k = k$. Considerando el resto de los números, sea (C) un ciclo que alterna entre el mayor y el menor de los números que sobran. Por ejemplo, si $n = 4 \times 2 = 8$, $(C) = (7\ 0\ 6\ 1\ 5\ 3\ 4)$. Note que el conjunto de las diferencias consecutivas de (C) es $1, 2, \dots, n-1$ con ningún número repetido. Entonces, podemos definir $a = (k)(C)$ y esta satisface lo requerido. □

Problem 2.4 (IMO Shortlist 2007 N4)**.** For every integer $k \geq 2$, prove that 2^{3k} divides the number

$$\binom{2^{k+1}}{2^k} - \binom{2^k}{2^{k-1}}$$

but 2^{3k+1} does not.

Problem 2.5 (IMO Shortlist 2008 A6)**.** Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ be a function which satisfies

$$f\left(x + \frac{1}{f(y)}\right) = f\left(y + \frac{1}{f(x)}\right)$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$. Prove that there is a positive integer which is not a value of f.

[E] **Problem 2.6** (RMM Shortlist 2018 N1)**.** Determine all polynomials f with integer coefficients such that $f(p)$ is a divisor of $2^p - 2$ for every odd prime p.

[AoPS:11822580]

Solución. Sea $f(x) = x^n \cdot g(x)$ donde $g(0) \neq 0$.

- Si $g(x) = c$ es una función constante, tenemos que $3^n \cdot c \mid 2^3 - 2 = 6$. Si $n = 0$, tenemos que $c \mid 6$. Si $n = 1$, tenemos que $c \mid 2$. Por lo tanto, $f(x) = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm x, \pm 2x$.

- Si g no es constante, por Schur existe un primo $q > 3$ suficientemente grande tal que $q \nmid g(0)$ y $q \mid g(m)$ para algún $m \in \mathbb{Z}^+$. Como $m \mid g(m) - g(0)$, es claro que $q \nmid m$. Como $q(q-1)$ y $m(q-1) + q$ son coprimos, por Dirichlet existe un primo impar p de la forma $q(q-1)k - (m(q-1) + q) \equiv m \pmod q$. Es decir, $q \mid g(p) \mid 2^p - 2$ donde $\operatorname{mcd}(p-1, q-1) = \operatorname{mcd}(q-1, 2) = 2$. Por ende, $q \mid \operatorname{mcd}(2^{p-1} - 1, 2^{q-1} - 1) = 2^2 - 1 = 3$, lo cual es un absurdo.

□

[E] **Problem 2.7** (All-Russian Olympiad 1998/9.8)**.** Two distinct positive integers a, b are written on the board. The smaller of them is erased and replaced with the number $\frac{ab}{|a-b|}$. This process is repeated as long as the two numbers are not equal. Prove that eventually the two numbers on the board will be equal.

[AoPS:2621673]

Solución. Digamos que $a > b$. Si $a = bq + r$ donde $0 \leq r < b$, tenemos que

$$(a, b) \to \left(a, \frac{ab}{a-b}\right) \to \cdots \to \left(a, \frac{ab}{a-bq}\right) = \left(\frac{a}{r} \cdot r, \frac{a}{r} \cdot b\right)$$

y así podemos continuar con la pareja (b, r) hasta obtener la pareja (d, d) (multiplicado por algún número racional) siendo $d = \text{mcd}(a, b)$. □

[E] **Problem 2.8.** En una fila, que tiene la forma de un tablero infinito (en ambas direcciones), hay varios caramelos. Un *movimiento* consiste en elegir una casilla que contenga al menos cuatro caramelos, luego, se extrae cuatro caramelos de esa casilla y se coloca 2 caramelos en la casilla anterior y 2 caramelos en la casilla posterior. ¿Es posible que después de un número finito de movimientos se pueda regresar a la configuración inicial?

Solución. La respuesta es no. Sea X la casilla que está más a la izquierda tal que el número de caramelos en ella es mayor que el número inicial. En cada operación, X no se mueve o se mueve más a la izquierda. Por lo tanto, siempre existe una casilla con el número de caramelos mayor que el inicial. □

[E] **Problem 2.9.** Inicialmente hay 2022 osos de peluche repartidos aleatoriamente en 127 cajas. Un *movimiento* consiste en elegir una caja que no contenga a todos los osos de peluche, retirar un oso de peluche, y colocarlo en otra caja cuyo número de peluches sea mayor o igual que el de la caja elegida. Demuestre que eventualmente todos los osos de peluches estarán en una misma caja.

Solución. Sea C el conjunto de los números de osos de peluche (mayores que 0) en cada caja y sea P el producto de todos los elementos de C. En cada movimiento, elegimos dos cajas con números de osos $a \leq b$ y tendremos $(a, b) \to (a-1, b+1)$. Como $(a-1)(b+1) < ab$, el producto P o el cardinal $|C|$ disminuye, por lo que al final siempre tendremos una sola caja conteniendo todos los osos de peluche. □

[M] **Problem 2.10** (IMO Shortlist 2005 C5)**.** There are n markers, each with one side white and the other side black. In the beginning, these n markers are aligned in a row so that their white sides are all up. In each step, if possible, we choose a marker whose white side is up (but not one of the outermost markers), remove it, and reverse the closest marker to the left of it and also reverse the closest marker to the right of it. Prove that, by a finite sequence of such steps, one can achieve a state with only two markers remaining if and only if $n - 1$ is not divisible by 3.

[E] **Problem 2.11.** En $n - 1$ casillas de un tablero de $n \times n$ se ha escrito el número 1 y en las casillas restantes se ha escrito el número cero. Un *movimiento* consiste en elegir una casilla, restarle 1 al número escrito en ella y sumarle 1 a todos los números que están en casillas de su misma fila y a todos los números que están en casillas de su misma columna. ¿Es posible, luego de algunos movimientos, obtener un tablero cuyos números son todos iguales?

[M] **Problem 2.12** (IberoAmerican 1995/5)**.** The incircle of a triangle ABC touches the sides BC, CA, AB at the points D, E, F respectively. Let the line AD intersect this incircle of triangle ABC at a point X (apart from D). Assume that this point X is the midpoint of the segment AD, this means, $AX = XD$. Let the line BX meet the incircle of triangle ABC at a point Y (apart from X), and let the line CX meet the incircle of triangle ABC at a point Z (apart from X). Show that $EY = FZ$.

[AoPS:15699]

Solución. Sea P el punto medio de FD. Como XY es simediana de $\triangle XFD$, tenemos que

$$\angle BFY = \angle FXY = \angle PXD = \angle FAD$$

de donde $FY \parallel AD$ y análogamente $EZ \parallel AD$. Por lo tanto, $FY \parallel EZ$ de donde $EY = FZ$. □

[E] **Problem 2.13** (Peru EGMO TST 2022/1)**.** En cada casilla de un tablero 4×4 se escribe un número entero positivo de modo que el número escrito en cada casilla es igual a la cantidad de números distintos entre sí escritos en sus casillas vecinas. ¿Cuántos números distintos como máximo pueden haber en el tablero?

Nota: Casillas vecinas son las que comparten un lado en común o un vértice en común.

Solución. Supongamos que hay n números distintos en el tablero, donde M es el máximo de ellos. Luego, $M = n$ y $1, 2, \ldots, n$ son los números que están en el tablero. Si $n \geq 3$, existe un 1 que es vecino de n. Considerando la posición del 1, es fácil ver que 1 está en una esquina del tablero. Es decir, tenemos lo siguiente.

1	n		
n	n		

Es fácil ver que $n \in \{3, 4\}$, pero analizando por casos tenemos un absurdo. Por ende, la máxima cantidad de números distintos en el tablero es 2. Como ejemplo considere el siguiente tablero.

1	2	2	1
2	2	2	2
2	2	2	2
1	2	2	1

□

[E] **Problem 2.14** (Peru EGMO TST 2022/2)**.** Encuentre todos los enteros positivos a, b y c tales que

$$a^{b!} + b^{a!} = c^{c!}.$$

Solución. Si $a = 1$ o $b = 1$, tenemos que $(a, b, c) = \left(1, c^{c!} - 1, c\right), \left(c^{c!} - 1, 1, c\right)$ para algún valor de $c > 1$. Ahora, si $a, b \geq 2$ tenemos que $c \geq 2$. Note que si $a = b$, tenemos que $2a^{a!} = c^{c!}$ lo cual es un absurdo pues $a!$ y $c!$ son exponentes pares. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a > b \geq 2$. Luego, $c \geq 3$. Si $b \geq 3$, los exponentes $b!$, $a!$ y $c!$ son múltiplos de 3, lo cual es un absurdo por el último teorema de Fermat. Por ende, $b = 2$. Si $a = 3$, tenemos que $73 = c^{c!}$ lo cual es un absurdo. Por ende, $a \geq 4$. Si

$c = 3$, $1024 = 2^{10} < 2^{a!} < c^{c!} = 729$, lo cual es un absurdo. Por ende, $c \geq 4$. Luego, los exponentes $a!$ y $c!$ son múltiplos de 4, de donde tenemos una ecuación de la forma $x^2 = y^4 - z^4$, lo cual es un absurdo. □

[E] **Problem 2.15** (Peru EGMO TST 2022/3)**.** Los puntos A_2, B_2, C_2 son los puntos medios de las alturas AA_1, BB_1, CC_1 del triángulo acutángulo ABC. Demuestre que la suma de los ángulos $\angle B_2A_1C_2$, $\angle C_2B_1A_2$ y $\angle A_2C_1B_2$ es $180°$.

Solución. Sea H el ortocentro del triángulo ABC. Si M es el punto medio del lado BC, tenemos que $\angle HB_2M = \angle HC_2M = \angle HA_1M = 90°$, de donde $\angle B_2A_1C_2 = \angle B_2HC_2$ y análogamente $\angle C_2B_1A_2 = \angle C_2HA_2$ y $\angle A_2C_1B_2 = \angle A_2HB_2$. Aquí se termina la prueba. □

[M] **Problem 2.16** (Peru EGMO TST 2022/4)**.** Encuentre todos los enteros positivos m, n y a tales que

$$|(a^n + 1)^n - a^m| \leq a^2.$$

Solución. Supongamos que $n = 1$. Como $a = 1$ cumple, supongamos que $a > 1$. Si $m = 1$, es trivial. Si $m = 2$, $0 < a^2 - a - 1 < a^2$. Si $m \geq 3$,

$$a^m - a - 1 \geq a^3 - a - 1 = (a-1)^2(a+1) - 2 + a^2 > a^2.$$

Ahora, supongamos que $n > 1$. Note que si $a = 1$ tenemos $2^n - 1 > 1$, de donde $a > 1$. Si $m \leq n^2$, tenemos que

$$(a^n + 1)^n - a^m \geq \left(a^{n^2} - a^m\right) + a^n + 1 > a^2$$

de donde $m \geq n^2 + 1$. Si $n = 2$, tenemos que

$$a^{n^2+1} - (a^n + 1)^n = (a-1)(a^4 - 3a - 3) - 4 + a^2 > a^2.$$

Si $n \geq 3$, note que

$$\begin{aligned} a^{n^2+1} - (a^n + 1)^n &\geq a^{n^2+1} - \left(a^{n^2} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} a^{n(n-1)}\right) \\ &= a^{n^2+1} - a^{n^2} - (2^n - 1)a^{n(n-1)} \\ &= a^{n(n-1)}\left(a^n(a-1) - 2^n + 1\right) \\ &> a^2 \end{aligned}$$

de donde $a^m - (a^n + 1)^n \geq a^{n^2+1} - (a^n + 1)^n > a^2$. Finalmente, concluimos que las ternas $(m, n, a) = (m, 1, 1), (1, 1, a), (2, 1, a)$ cumplen, donde $m \geq 1$ y $a > 1$ son enteros positivos. □

[E] **Problem 2.17** (JBMO Shortlist 2016 C4)**.** A splitting of a planar polygon is a finite set of triangles whose interiors are pairwise disjoint, and whose union is the polygon in question. Given an integer $n \geq 3$, determine the largest integer m such that no planar n-gon splits into less than m triangles.

[AoPS:9180563]

Solución. La respuesta es $m = \lceil n/3 \rceil$. La figura 1 muestra un ejemplo con $n = 6$.

En este caso, el mínimo número requerido de triángulos es claramente 2. Generalmente, es posible construir un n-ágono compuesto por $\lceil n/3 \rceil$ triángulos. Ahora, si t es el número de triángulos, tenemos que probar que $n \leq 3t$. Pero claramente, cada vértice del polígono corresponde a al menos un vértice de un triángulo, y cada triángulo tiene 3 vértices. Con esto se termina la prueba. □

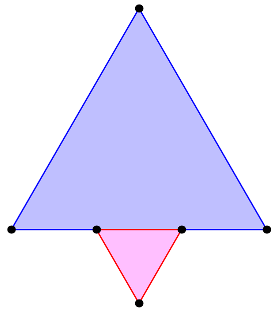

Figure 1: Hexágono cóncavo cuvierto por 2 triángulos.

[E] **Problem 2.18** (JBMO Shortlist 2016 N4)**.** Find all triples of integers (a, b, c) such that the number

$$N = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2} + 2$$

is a power of 2016.

[AoPS:6565545]

Solución. Sea $N = 2016^n$ donde $n \in \mathbb{Z}_0^+$. Si $n = 0$, $(a-b)(b-c)(c-a) = -2$ de donde $(a, b, c) = (k+2, k+1, k), (k+1, k, k+2), (k, k+2, k+1)$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Si $n \geq 1$, nos va a quedar una ecuación como

$$(x+y)xy = 2(2016^n - 2) \equiv -4 \pmod 9$$

donde $x \equiv y \pmod 3$. Analizando por casos sale un absurdo. □

[M] **Problem 2.19** (IberoAmerican 2021/3)**.** Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una sucesión de enteros positivos y sea $b_1, b_2, b_3, \ldots$ la sucesión de números reales dada por

$$b_n = \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}, \quad \text{para } n \geq 1.$$

Demuestre que si entre cada millón de términos consecutivos de la sucesión $b_1, b_2, b_3, \ldots$ existe al menos uno que es entero, entonces existe algún k tal que $b_k > 2021^{2021}$.

[AoPS:23437726]

Solución. Supongamos que existe un entero M tal que $b_i \leq M$ para todo $i \geq 1$. Sea $i_0 > 10^6 \cdot M$ un índice tal que b_{i_0} es entero. Luego, existe un índice $i_1 > i_0$ tal que $i_1 \leq i_0 + 10^6$ y b_{i_1} es entero. Sea t el número de índices $i_0 < i \leq i_1$ tales que $a_i > 1$. Si $t = 0$, claramente $b_{i_0} > b_{i_1}$ de donde

$$\frac{a_1 a_2 \cdots a_{i_0}(i_1 - i_0)}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{i_0})(a_1 + a_2 + \cdots + a_{i_1})} = b_{i_0} - b_{i_1} \geq 1$$

y

$$b_{i_0} = \frac{a_1 a_2 \cdots a_{i_0}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{i_0}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{i_1}}{i_1 - i_0} \geq \frac{i_1}{10^6} > M$$

lo cual es una contradicción. Por ende, $t \geq 1 = \frac{10^6}{10^6} > \frac{i_1 - i_0}{i_0 - 1}$ de donde $2^t - 1 \geq t >$

$\frac{2t+(i_1-i_0-t)}{i_0}$. Sea $P = a_{i_0+1}a_{i_0+2}\cdots a_{i_1} \geq 2^t$. Luego,

$$\begin{aligned} 1 &> \frac{1}{2^t} + \frac{1}{i_0}\left(\frac{t}{2^{t-1}} + \frac{i_1 - i_0 - t}{2^t}\right) \\ &\geq \frac{1}{P} + \frac{1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{i_0}}\left(\frac{a_{i_0+1} + a_{i_0+2} + \cdots + a_{i_1}}{P}\right) \\ &= \frac{b_{i_0}}{b_{i_1}} \end{aligned}$$

de donde $b_{i_1} > b_{i_0}$. Por lo tanto, existe una secuencia estrictamente creciente de índices $\{i_j\}_{j\geq 0}$ tal que $\{b_{i_j}\}_{j\geq 0}$ es una secuencia estrictamente creciente de enteros. Luego, existe un b_i tal que $b_i > M$, lo cual es una contradicción. Es decir, la secuencia $\{b_i\}_{i\geq 1}$ no es acotada superiormente. Aquí se termina la prueba. □

[E] **Problem 2.20** (IberoAmerican 2021/5)**.** Para un conjunto finito C de enteros, se define $S(C)$ como la suma de los elementos de C. Encuentre dos conjuntos no vacíos A y B cuya intersección es vacía, cuya unión es el conjunto $\{1, 2, \dots, 2021\}$ y tales que el producto $S(A)S(B)$ es un cuadrado perfecto.

[AoPS:23437791]

Solución. Considere a los números $(a, b) = (6063 \cdot 9^2, 6063 \cdot 16^2)$. Note que $a + b = 6063 \cdot 337 = \frac{2021\cdot 2022}{2}$ y $ab = (6063 \cdot 9 \cdot 16)^2$. Es claro que existen subconjuntos no vacíos y disjuntos A y B de $\{1, 2, \dots, 2021\}$ tales que $|A| = a$ y $|B| = b$. Aquí se termina la prueba. □

Problem 2.21 (IberoAmerican 2021/6)**.** Considere un polígono regular de n lados, $n \geq 4$, y sea V un subconjunto de r vértices del polígono. Demuestre que si $r(r-3) \geq n$, entonces existen al menos dos triángulos congruentes cuyos vértices pertenecen a V.

[AoPS:23437854]

Problem 2.22 (RMM 2021/1)**.** Let T_1, T_2, T_3, T_4 be pairwise distinct collinear points such that T_2 lies between T_1 and T_3, and T_3 lies between T_2 and T_4. Let ω_1 be a circle through T_1 and T_4; let ω_2 be the circle through T_2 and internally tangent to ω_1 at T_1; let ω_3 be the circle through T_3 and externally tangent to ω_2 at T_2; and let ω_4 be the circle through T_4 and externally tangent to ω_3 at T_3. A line crosses ω_1 at P and W, ω_2 at Q and R, ω_3 at S and T, and ω_4 at U and V, the order of these points along the line being P, Q, R, S, T, U, V, W. Prove that $PQ + TU = RS + VW$.

[AoPS:23374851]

[E] **Problem 2.23** (Balkan MO 2016/3)**.** Find all monic polynomials f with integer coefficients satisfying the following condition: there exists a positive integer N such that p divides $2(f(p)!) + 1$ for every prime $p > N$ for which $f(p)$ is a positive integer.

[AoPS:6316984]

Solución. Es claro que $f(p) < p$ para todo primo $p > N$. Es decir, $\deg f = 1$. En efecto, sea $f(x) = x - c$ donde $c \in \mathbb{Z}^+$. Si $c \leq 2$, claramente $2(p-1)! + 1 \equiv -1 \pmod p$ y $2(p-2)! + 1 \equiv 3 \pmod p$ para $p > 3$ lo cual es un absurdo. Si $c > 3$, note que

$$2(p-3)! + 1 \equiv 0 \equiv 2(p-c)! + 1 \pmod p$$

de donde $(p-c+1)(p-c+2)\cdots(p-3) \equiv 1 \pmod p$. Luego, $3 \cdot 4 \cdots (c-1) \equiv (-1)^{c-3} \pmod p$ para todo $p > 3$ de donde

$$3 \leq 3 \cdot 4 \cdots (c-1) = (-1)^{c-3} \leq 1$$

lo cual es un absurdo. Por lo tanto, $c = 3$ y $f(x) = x - 3$. □

§2.1 Homework

[E] **Problem 2.24** (RMM 2016/1). Let ABC be a triangle and let D be a point on the segment BC, $D \neq B$ and $D \neq C$. The circle ABD meets the segment AC again at an interior point E. The circle ACD meets the segment AB again at an interior point F. Let A' be the reflection of A in the line BC. The lines $A'C$ and DE meet at P, and the lines $A'B$ and DF meet at Q. Prove that the lines AD, BP and CQ are concurrent (or all parallel).

Solución. Sean E' y F' los simétricos de E y F con respecto a la recta BC. Note que

$$\angle BDF' = \angle FDB = \angle FAC \equiv \angle BAE = \angle CDE$$

de donde $F' \in DE$. Análogamente, $E' \in DF$. Como $F'A'CD$ es cíclico, $PA' \cdot PC = PF' \cdot PD$ de donde BP es el eje radical de $\odot(A'BC)$ y $\odot(F'DB)$. Análogamente, CQ es el eje radical de $\odot(A'BC)$ y $\odot(E'DC)$. Como $\triangle DBF' \cong \triangle DE'C$, el punto $R = BE' \cap CF'$ es la intersección de las circunferencias $\odot(F'DB)$ y $\odot(E'DC)$. Luego,

$$\angle F'DR = \angle F'BR \equiv \angle A'BE' = \angle EBA = \angle EDA$$

de donde $R \in AD$. Es decir, AD es el eje radical de $\odot(F'DB)$ y $\odot(E'DC)$. Por lo tanto, AD, BP y CQ concurren en el centro radical de las circunferencias $\odot(A'BC)$, $\odot(F'DB)$ y $\odot(E'DC)$. □

[H] **Problem 2.25** (RMM 2016/2). Given positive integers m and $n \geq m$, determine the largest number of dominoes (1×2 or 2×1 rectangles) that can be placed on a rectangular board with m rows and $2n$ columns consisting of cells (1×1 squares) so that:

(1) each domino covers exactly two adjacent cells of the board;

(2) no two dominoes overlap;

(3) no two form a 2×2 square; and

(4) the bottom row of the board is completely covered by n dominoes.

Solución. Sean C_i el conjunto de los dominós verticales en la columna i, H_i el conjunto de los dominós horizontales tales que sus dos casillas están en las columnas i y $i+1$, y X_i el conjunto de los dominós en V_i que están en la fila 1. Ahora, considere el subtablero de $2n \times 2$ formado por las columnas i y $i+1$. Note que los dominós en V_i separan al subtablero en varios subtableros de $2 \times t_1, 2 \times t_2, \ldots, 2 \times t_k$ donde

$$\sum_{j=1}^{k} t_j = 2n - |V_i|\,.$$

Es claro que un dominó que pertenece en H_i o H_{i+1} está en algún subtablero de $2 \times t_j$. Por la tercera condición, en cada subtablero de $2 \times t_j$ hay a lo sumo $t_j - 1$ dominós horizontales. Por lo tanto,

$$|H_i| + |H_{i+1}| \leq \sum_{j=1}^{k} (t_j - 1) = 2n - |V_i| - k$$

de donde $|H_i| + |H_{i+1}| + 2|V_i| \le 2n - 1 + |V_i| + 1 - k$. Luego,

$$\begin{aligned} 2\sum_{i=1}^{m} |H_i| + 2\sum_{i=1}^{m} |V_i| &\le |H_1| + |H_m| + (2n-1)(m-1) \\ &= (|H_1| - n) + (|H_m| - n) + 2mn - m + 1 \\ &\le 2mn - m + 1 \end{aligned}$$

de donde $mn - \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ es el mayor número de fichas de dominó en el tablero. $\square$

Problem 2.26 (RMM 2016/3)**.** A *cubic sequence* is a sequence of integers given by $a_n = n^3 + bn^2 + cn + d$, where b, c and d are integer constants and n ranges over all integers, including negative integers.

(a) Show that there exists a cubic sequence such that the only terms of the sequence which are squares of integers are a_{2015} and a_{2016}.

(b) Determine the possible values of $a_{2015} \cdot a_{2016}$ for a cubic sequence satisfying the condition in part (a).

[M] **Problem 2.27.** Sea M un conjunto finito de enteros positivos. Demuestre que es posible agregarle elementos (puede ser ninguno) de tal manera que en el nuevo conjunto, la suma de todos sus elementos es igual al mínimo común múltiplo de todos sus elementos.

Solución. Si $|M| = 1$, es trivial. Ahora, supongamos que $|M| > 1$. Si para algún entero $n > 1$ existen enteros positivos distintos $x_1, x_2, \ldots, x_k$ tales que

$$\operatorname{mcm}(n-1, x_1, x_2, \ldots, x_k) = 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k$$

tenemos que

$$\operatorname{mcm}(n, n-1, nx_1, nx_2, \ldots, nx_k) = 1 + (n-1) + nx_1 + nx_2 + \cdots + nx_k$$

y

$$\operatorname{mcm}(n, n^2-1, y_1, y_2, \ldots, y_k) = (n+1) + (n^2-1) + y_1 + y_2 + \cdots + y_k$$

donde $y_i = n(n+1)x_i$ para todo $1 \le i \le k$. Sea $n > 1$ el mínimo común múltiplo de los elementos de M. Como $\operatorname{mcm}(1,2,3) = 1 + 2 + 3$, por inducción existen enteros positivos distintos $x_1, x_2, \ldots, x_k$ mayores que n tales que

$$\operatorname{mcm}(n, x_1, x_2, \ldots, x_k) = n + 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k.$$

Si S es la suma de los elementos de M, tenemos que

$$\operatorname{mcm}(n, Sn, Sx_1, Sx_2, \ldots, Sx_k) = S + Sn + Sx_1 + Sx_2 + \cdots + Sx_k.$$

Es decir, agregando los números $Sn, Sx_1, Sx_2, \ldots, Sx_k$ al conjunto M podemos lograr lo deseado. $\square$

§3 Week 3 (03/28 – 04/01)

[E] **Problem 3.1** (Peru EGMO TST 2022/5)**.** Sean $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales distintos entre sí tales que

$$x_{k-1}x_k \le x_k \le x_k x_{k+1}, \quad \text{para todo } k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Determine el mayor valor posible de n.

Solución. El mayor valor de n es 6 y un ejemplo que cumple es

$$(x_0, x_1, \ldots, x_6) = (5/2, -1/2, 0, 1/2, 1, 3/2, 2).$$

Si $n \ge 7$, supongamos que $x_i > 0$ para algún $1 \le i \le 3$. Considerando índices $i \le k \le i+3$ tenemos que $x_{i+1} \ge 1$, $x_{i+2} \ge 1$, $x_{i+1} \le 1$ y $x_{i+2} \le 1$ de donde $x_{i+1} = x_{i+2} = 1$, lo cual es un absurdo. Por ende, $x_1, x_2, x_3 \le 0$. Si $x_i < 0$ para algún $2 \le i \le 3$, como $x_{i-1}x_i \le x_i$ tenemos que $x_{i-1} \ge 1 > 0$, lo cual es una contradicción. Luego, $x_2 = x_3 = 0$ lo cual es un absurdo. □

[E] **Problem 3.2** (Peru EGMO TST 2022/6)**.** Para cada entero positivo n, sea $S(n)$ la suma de todos los dígitos de n. Pruebe que para todo entero positivo $n \ge 2022$ se cumple que $\left\lfloor \frac{n}{S(n)} \right\rfloor \ne \left\lfloor \frac{n+1}{S(n+1)} \right\rfloor$.

Solución. Supongamos que $\left\lfloor \frac{n}{S(n)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{S(n+1)} \right\rfloor = k \in \mathbb{Z}_0^+$. Si $1 \le a \le 9$ y $\alpha \ge 3$ son enteros tales que $a \cdot 10^\alpha \le n < (a+1) \cdot 10^\alpha$, tenemos

$$\begin{aligned} n &\ge a \cdot 10^\alpha > a \cdot 100\alpha^2 > a \cdot (81\alpha^2 + 27\alpha + 10) \\ &\ge (a + 9\alpha)(a + 9\alpha + 1) \\ &\ge S(n) \cdot (S(n) + 1) \end{aligned}$$

de donde $k > \frac{n}{S(n)} - 1 > S(n)$. Luego,

$$S(n) - S(n+1) < \frac{k \cdot (S(n)+1)}{k+1} - \frac{n+1}{k+1} \le \frac{k-1}{k+1} < 1$$

de donde $S(n+1) = S(n) + 1$. Por ende,

$$0 < k \cdot (S(n)+1) - (k+1) \cdot S(n) < (n+1) - n = 1$$

lo cual es un absurdo. □

[E] **Problem 3.3** (Peru EGMO TST 2022/7)**.** Sea $n \ge 3$ un número entero. Se tienen n colores distintos $C_1, C_2, \ldots, C_n$ y una cantidad ilimitada de fichas de cada uno de dichos colores. Decimos que un entero $m \ge n+1$ es *n-colorido* si es posible colocar m fichas alrededor de un círculo de modo que en cualquier grupo de $n+1$ fichas consecutivas haya al menos una ficha de cada uno de los colores $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Pruebe que sólo existe una cantidad finita de enteros m que no son n-coloridos y encuentre el mayor de ellos.

Solución. Si $m = n(n-1) - 1$ es un n-colorido, existe un color C_i que se repite a lo sumo $n-2$ veces. Si consideramos una ficha de color C_i, podemos dividir las fichas restantes en $n-2$ sectores de $n+1$ fichas consecutivos. Entonces, existe un sector que no contiene al color C_i, lo cual es un absurdo. Ahora, sea $m = nq + r$ un entero positivo donde q y $0 \le r < n$ son enteros. Si $m \ge n(n-1)$, probaremos que m es n-colorido. Primero, vamos a dividir el círculo en q sectores, donde en cada sector colocaremos n fichas de colores $C_1, C_2, \dots, C_n$ en ese orden. Como $q \geq n-1 \geq r$, es posible elegir r pares de sectores adyacentes (S_i, S_{i+1}) e insertar una ficha de cualquier color entre S_i y S_{i+1}. Es fácil ver que esto cumple, así que m es un n-colorido. Finalmente, $n^2 - n - 1$ es el mayor entero que no es n-colorido. $\square$

[E] **Problem 3.4** (Kyiv City MO 2022 Round 2/11.3)**.** Find the largest k for which there exists a permutation $(a_1, a_2, \dots, a_{2022})$ of integers from 1 to 2022 such that for at least k distinct i with $1 \leq i \leq 2022$ the number

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_i}{1 + 2 + \cdots + i}$$

is an integer larger than 1.

[AoPS:24269928]

Solución. El mayor valor de k es 1011 y un ejemplo es

$$a_i = \begin{cases} 2i & \text{si } i \leq 1011, \\ 2i - 2023 & \text{si } i > 1011. \end{cases}$$

Ahora, supongamos que $k \geq 1012$. Sea

$$A_i = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_i}{1 + 2 + \cdots + i}$$

para todo índice i. Luego, existen dos índices $i > j \geq 1011$ tales que $A_i, A_j > 1$ son enteros. Si $A_i \geq 3$, tenemos que

$$\begin{aligned} 2023i - \frac{i(i+1)}{2} &= 2022 + 2021 + \cdots + (2023 - i) \\ &\geq a_1 + a_2 + \cdots + a_i \\ &\geq 3(1 + 2 + \cdots + i) \\ &= \frac{3i(i+1)}{2} \end{aligned}$$

de donde $i \leq 1010$, lo cual es un absurdo. Por ende, $A_i = 2$ y análogamente $A_j = 2$. Luego,

$$\begin{aligned} a_{j+1} + a_{j+2} + \cdots + a_i &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_i) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_j) \\ &= 2(1 + 2 + \cdots + i) - 2(1 + 2 + \cdots + j) \\ &= 2((j+1) + (j+2) + \cdots + i) \\ &> \underbrace{2022 + 2022 + \cdots + 2022}_{i-j \text{ veces}} \end{aligned}$$

lo cual es un absurdo. $\square$

[M] **Problem 3.5** (MEMO 2021 T-2)**.** Given a positive integer n, we say that a polynomial P with real coefficients is *n-pretty* if the equation $P(\lfloor x \rfloor) = \lfloor P(x) \rfloor$ has exactly n real solutions. Show that for each positive integer n

(a) there exists an n-pretty polynomial;

(b) any n-pretty polynomial has a degree of at least $\frac{2n+1}{3}$.

[AoPS:23091282]

Solución. Sea A el conjunto de las soluciones reales a la ecuación $P(\lfloor x \rfloor) = \lfloor P(x) \rfloor$. Note que si $x \in A$ entonces $\lfloor x \rfloor \in A$. Luego,

$$A = I \cup \bigcup_{i \in I} S_i$$

donde $I = \{x \in \mathbb{Z} : P(x) \in \mathbb{Z}\}$ y $S_i = \{x \in (i, i+1) : P(x) \in [P(i), P(i)+1)\}$. Por ende,

$$n = |A| = |I| + \sum_{i \in I} |S_i| .$$

Si $|I| > \deg P$, es posible construir un polinomio $Q \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $\deg Q \leq \deg P$ y $P(x) - Q(x)$ tiene más de $\deg P$ raíces reales. Luego, $P(x) \equiv Q(x)$ de donde existen infinitos $x \in \mathbb{Z}$ tales que $P(x) \in \mathbb{Z}$, lo cual es un absurdo ya que $|I| \leq n$. Es decir, $|I| \leq \deg P$. Sea $\delta \in (i, i+1)$ para algún $i \in I$. Si $P(\delta) > P(i)$, para todo $\epsilon \in (P(i), P(\delta))$ existe algún $x \in (i, \delta)$ tal que $P(x) = \epsilon$. Luego, existen infinitos $x \in (i, i+1)$ tales que $P(x) \in (P(i), P(i)+1)$, lo cual es un absurdo ya que $|S_i| \leq n$. Por ende, $P(x) \leq P(i)$ para todo $x \in (i, i+1)$ y $P(x) = P(i)$ para todo $x \in S_i$. Es decir, en el intérvalo $(i, i+1)$ existen $2\,|S_i|$ ceros reales de la derivada de P. Luego,

$$n = |I| + \sum_{i \in I} |S_i| < \deg P + \frac{1}{2} \deg P = \frac{3}{2} \deg P$$

de donde $\deg P \geq \frac{2n+1}{3}$. Un ejemplo de un polinomio n-bonito es

$$P(x) = -\pi (x-1)^2 (x-2)^2 \cdots (x-n)^2$$

donde $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $S_i = \varnothing$ para todo $i \in I$. □

[M] **Problem 3.6** (MEMO 2020 I-4)**.** Find all positive integers n for which there exist positive integers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ such that

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{2}{x_2^2} + \frac{4}{x_3^2} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{x_n^2} = 1.$$

[AoPS:17377469]

Solución. Probaremos que $\mathbb{Z}^+ \setminus \{2\}$ es el conjunto de valores de n.

- Si $n = 1$, es suficiente con $x_1 = 1$.
- Si $n = 2$, es claro que $x_1, x_2 \geq 2$. Luego, $1 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{2}{x_2^2} \leq \frac{3}{4}$ lo cual es un absurdo.
- Si $n \geq 3$ es impar, sean $x_n = 2^{n-1}$ y $x_i = 2^{\frac{n-1}{2}}$ para todo $1 \leq i \leq n-1$. Luego,
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2^{i-1}}{x_i^2} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2^{i-1}}{2^{n-1}} + \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^2} = \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} = 1.$$
- Si $n \geq 4$ es par, sean $(x_1, x_{n-1}, x_n) = \left(3 \cdot 2^{\frac{n-2}{2}}, 2^{n-2}, 3 \cdot 2^{n-3}\right)$ y $x_i = 2^{\frac{n-2}{2}}$ para todo $2 \leq i \leq n-2$. Luego,
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \frac{2^{i-1}}{x_i^2} &= \frac{1}{9 \cdot 2^{n-2}} + \sum_{i=2}^{n-2} \frac{2^{i-1}}{2^{n-2}} + \frac{2^{n-2}}{(2^{n-2})^2} + \frac{2^{n-1}}{9 \cdot (2^{n-3})^2} \\ &= \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{2^{n-2}-2}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-2}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

[E] **Problem 3.7** (MEMO 2018 I-4). (a) Prove that for every positive integer m there exists an integer $n \geq m$ such that

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdots \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \binom{n}{m}. \qquad (*)$$

(b) Denote by $p(m)$ the smallest integer $n \geq m$ such that the equation $(*)$ holds. Prove that $p(2018) = p(2019)$.

[AoPS:10959197]

Solución. Note que

$$\prod_{i=1}^{m} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \geq \prod_{i=1}^{m} \frac{n-i+1}{i} = \binom{n}{m}$$

de donde $i \mid n-i+1$ para todo $1 \leq i \leq m$. Es decir, $n = k \cdot \text{mcm}(1, 2, \ldots, m) - 1$ para algún $k \in \mathbb{Z}^+$. De esto tenemos que $p(m) = \text{mcm}(1, 2, \ldots, m) - 1$ para todo $m > 1$. Como $2019 = 3 \times 673$ divide a $\text{mcm}(1, 2, \ldots, 2018)$, tenemos que

$$p(2018) = \text{mcm}(1, 2, \ldots, 2018) - 1 = \text{mcm}(1, 2, \ldots, 2019) - 1 = p(2019).$$

Con esto se termina la prueba. □

[E] **Problem 3.8** (MEMO 2018 T-7). Let $a_1, a_2, a_3, \ldots$ be the sequence of positive integers such that

$$a_1 = 1 \quad \text{and} \quad a_{k+1} = a_k^3 + 1, \text{ for all positive integers } k.$$

Prove that for every prime number p of the form $3\ell + 2$, where ℓ is a non-negative integer, there exists a positive integer n such that a_n is divisible by p.

[AoPS:10935321]

Solución. Note que si $x^3 \equiv y^3 \pmod{p}$, tenemos que

$$x \equiv (x^3)^{\frac{2p-1}{3}} \equiv (y^3)^{\frac{2p-1}{3}} \equiv y \pmod{p}.$$

Como el mapeo $x \mapsto x^3 + 1 \pmod{p}$ es biyectivo, la secuencia (a_i) es periódica en módulo p. Es decir, $a_{n+1} \equiv a_1 \equiv 1 \pmod{p}$ para algún $n \in \mathbb{Z}^+$, de donde $a_n \equiv 0 \pmod{p}$. □

[M] **Problem 3.9** (MEMO 2018 T-8). An integer n is called *Silesian* if there exist positive integers a, b and c such that

$$n = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}.$$

(a) Prove that there are infinitely many Silesian integers.

(b) Prove that not every positive integer is Silesian.

[AoPS:10931715]

Solución. Si $n = 4$, digamos que $\text{mcd}(a, b, c) = 1$. Luego, $4 \mid a^2 + b^2 + c^2$ de donde a, b, c son pares, lo cual es un absurdo. Por lo tanto, 4 no es Silesio. Ahora, supongamos que $n = a^2 + (1-a)^2 + (a^2 - a + 1)^2$, donde $b = 1 - a$ y $c = a^2 - a + 1$ para algún valor de a. Podemos comprobar que esto cumple, por lo que $b = 1 - a$ es una raíz de la ecuación $b^2 - n(c+a)b + (c^2 + a^2 - nca) = 0$. Es decir, la otra raíz es igual a $n(c+a) - (1-a) > 0$. Por ende, $a^2 + (1-a)^2 + (a^2 - a + 1)^2$ es Silesio para todo $a \in \mathbb{Z}^+$. Aquí se termina la prueba. □

§4 Week 4 (04/04 – 04/08)

[E] **Problem 4.1.** Si $a^2 < b^2$ son dos números de 1001 dígitos, demuestre que existe un número capicúa en el intervalo (a^2, b^2).

Solución. Es claro que entre $a^2+1, a^2+2, \ldots, a^2+10^{500}$ existe un múltiplo de 10^{500} y sea $\overline{a_{500}a_{499}\ldots a_1a_0}\cdot 10^{500}$ dicho número. Luego,

$$a^2 < \overline{a_{500}a_{499}\ldots a_1a_0a_1\ldots a_{499}a_{500}} \leq a^2 + 2\cdot 10^{500} < (a+1)^2 \leq b^2$$

y aquí se termina la prueba. □

[E] **Problem 4.2** (IMO 2014/1)**.** Let $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ be an infinite sequence of positive integers. Prove that there exists a unique integer $n \geq 1$ such that

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

[AoPS:3542095]

[E] **Problem 4.3.** Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$, k y M enteros positivos tales que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = k \quad \text{y} \quad M = a_1a_2\cdots a_n.$$

Si $M > 1$, demuestre que el polinomio

$$P(x) = M(x+1)^k - (x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)$$

no tiene raíces positivos.

Solución. Si $r > 0$ es una raíz de $P(x)$, tenemos que

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{a_i(r+1)^{\frac{1}{a_i}}}{r+a_i} = 1$$

pero note que

$$a^a(r+1) = \binom{a}{1}ra^{a-1} + a^a \leq (r+a)^a$$

de donde

$$\frac{a(r+1)^{\frac{1}{a}}}{r+a} \leq 1$$

para todo $a \in \mathbb{Z}^+$. Es decir, $a_i = 1$ para todo $1 \leq i \leq n$ de donde $M = 1$ lo cual es un absurdo. □

[E] **Problem 4.4.** Determine todas las parejas (x, y) de enteros positivos tales que

$$\sqrt[3]{7x^2 - 13xy + 7y^2} = |x-y| + 1.$$

Solución. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x \geq y$. No es difícil ver que

$$(x-y-2)^2(4x-4y+1) = (x+y)^2$$

de donde $x - y = k^2 + k$ para algún $k \in \mathbb{Z}_0^+$. Si $k = 0$, tenemos que $x - y = 0$ y $x + y = 2$ de donde $x = y = 1$. Si $k \geq 1$, note que

$$x + y = (k^2+k-2)(2k+1) = 2k^3 + 3k^2 - 3k - 2$$

de donde $(x, y) = (k^3 + 2k^2 - k - 1, k^3 + k^2 - 2k - 1)$ para algún $k \geq 2$. □

Problem 4.5. Para cada entero positivo n, el Banco de Ciudad del Cabo produce monedas de valor $\frac{1}{n}$. Dada una colección finita de tales monedas (no necesariamente de distintos valores) cuyo valor total no supera $99 + \frac{1}{2}$, demostrar que es posible separar esta colección en 100 o menos montones, de modo que el valor total de cada montón sea como máximo 1.

[E] **Problem 4.6** (EGMO 2022/1)**.** Let ABC be an acute-angled triangle in which $BC < AB$ and $BC < CA$. Let point P lie on segment AB and point Q lie on segment AC such that $P \neq B$, $Q \neq C$ and $BQ = BC = CP$. Let T be the circumcentre of triangle APQ, H the orthocentre of triangle ABC, and S the point of intersection of the lines BQ and CP. Prove that T, H and S are collinear.

Sea ABC un triángulo acutángulo con $BC < AB$ y $BC < AC$. Considere los puntos P y Q en los segmentos AB y AC, respectivamente, tales que $P \neq B$, $Q \neq C$ y $BQ = BC = CP$. Sea T el circuncentro del triángulo APQ, H el ortocentro del triángulo ABC y S el punto de intersección de las rectas BQ y CP. Pruebe que los puntos T, H y S están en una misma recta.

Solución. Como BH y CH son las bisectrices del triángulo SBC, la recta HS biseca al ángulo $\angle BSC$. Note que

$$\angle PSQ = \angle BSC = 2\angle BHC - 180^\circ = 2(180^\circ - \angle BAC) - 180^\circ = 180^\circ - \angle PTQ$$

de donde $TPSQ$ es cíclico. Como T es el punto medio del arco PQ que no contiene a S, la recta TS biseca al ángulo $\angle PSQ$. Por ende, T, H y S pertenecen a la bisectriz del ángulo $\angle BSC$. $\square$

[M] **Problem 4.7** (EGMO 2022/2)**.** Find all functions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that for any positive integers a and b, the following two conditions hold:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$, and

(2) at least two of the numbers $f(a)$, $f(b)$ and $f(a+b)$ are equal.

Determine todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que para cualquier pareja de enteros positivos a y b, se cumplen las siguientes dos condiciones:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$, y

(2) al menos dos de los números $f(a)$, $f(b)$ y $f(a+b)$ son iguales.

Solución. Si $p \in \mathbb{Z}^+$ es el menor tal que $f(p) > 1$, es claro que p es primo. Si $a > p$ es el menor número coprimo con p tal que $f(a) > 1$, considerando a $f(p) > 1$, $f(a-p) = 1$ y $f(a) > 1$ tenemos que $f(a) = f(p)$. Si $a > p^2$, considerando a $f(p^2) = f(p)^2 > 1$, $f(a-p^2) = 1$ y $f(a) > 1$ tenemos que $f(p) = f(a) = f(p)^2$ lo cual es un absurdo. Ahora, sea $k = \lfloor p^2/a \rfloor$ donde $0 < k < p$. Como $0 < p^2 - ka < a$, considerando a $f(ka) = f(p)$, $f(p^2 - ka) = 1$ y $f(p^2) = f(p)^2$ tenemos un absurdo. Por ende, $f(a) = 1$ para todo $a \in \mathbb{Z}^+$ coprimo con p de donde $f(n) = a^{\nu_p(n)}$ para algún $a \in \mathbb{Z}^+$. Por lo tanto, $f(n) = 1$ o $f(n) = a^{\nu_p(n)}$ para algún entero $a > 1$ y un primo p. $\square$

[E] **Problem 4.8** (EGMO 2022/3)**.** An infinite sequence of positive integers $a_1, a_2, \ldots$ is called *good* if

(1) a_1 is a perfect square, and

(2) for any integer $n \geq 2$, a_n is the smallest positive integer such that

$$na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n$$

is a perfect square.

Prove that for any good sequence $a_1, a_2, \ldots$, there exists a positive integer k such that $a_n = a_k$ for all integers $n \geq k$.

Se dice que una sucesión infinita de enteros positivos $a_1, a_2, \ldots$ es *húngara* si

(1) a_1 es un cuadrado perfecto, y

(2) para todo entero $n \geq 2$, a_n es el menor entero positivo tal que

$$na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n$$

es un cuadrado perfecto.

Pruebe que si $a_1, a_2, \ldots$ es una sucesión húngara, entonces existe un entero positivo k tal que $a_n = a_k$ para todo entero $n \geq k$.

Solución. Sea $c_n^2 = na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n$. Note que $c_n - c_{n-1}$ es decreciente y c_n es estrictamente creciente, de donde existe un $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $(c_n - c_{n-1} - 1)^2 \leq c_n$ para todo $n \geq k$. Es decir,

$$(2c_n - c_{n-1} - 1)^2 - c_n^2 \leq c_n^2 - c_{n-1}^2 < (2c_n - c_{n-1})^2 - c_n^2$$

de donde $c_{n+1} - c_n = c_n - c_{n-1} = d$ donde $d \in \mathbb{Z}^+$ es fijo. Es decir,

$$a_{n+1} = (c_{n+1}^2 - c_n^2) - (c_n^2 - c_{n-1}^2) = 2d^2$$

es fijo para todo $n \geq k$. □

§4.1 Homework

[E] **Problem 4.9** (EGMO 2022/4)**.** Given a positive integer $n \geq 2$, determine the largest positive integer N for which there exist $N+1$ real numbers $a_0, a_1, \ldots, a_N$ such that

(1) $a_0 + a_1 = -\frac{1}{n}$, and

(2) $(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$ for $1 \leq k \leq N-1$.

Para cada entero positivo $n \geq 2$, determine el mayor entero positivo N con la propiedad de que existen $N+1$ números reales $a_0, a_1, \ldots, a_N$ tales que

(1) $a_0 + a_1 = -\frac{1}{n}$, y

(2) $(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$ para todo $1 \leq k \leq N-1$.

Solución. Sea $S_i = a_i + a_{i+1}$ para todo $0 \leq i \leq N-1$. Luego, $(1 - S_k)(1 + S_{k-1}) = 1$ para todo $1 \leq k \leq N-1$ de donde si $S_{k-1} = -\frac{1}{n-k+1}$ entonces $S_k = -\frac{1}{n-k}$. Es fácil ver que el mayor valor de N es n. □

[E] **Problem 4.10** (EGMO 2022/5)**.** For all positive integers n, k, let $f(n, 2k)$ be the number of ways an $n \times 2k$ board can be fully covered by nk dominoes of size 2×1. (For example, $f(2, 2) = 2$ and $f(3, 2) = 3$.) Find all positive integers n such that for every positive integer k, the number $f(n, 2k)$ is odd.

Dados n y k enteros positivos, sea $f(n, 2k)$ el número de formas en que un tablero de tamaño $n \times 2k$ puede ser completamente cubierto por nk fichas de dominó de tamaño 2×1. Encuentre todos los enteros positivos n tales que para todo entero positivo k, el número $f(n, 2k)$ es impar.

Solución. Si n es impar, por simetría con respecto a la fila central, podemos notar que $f(n, 2k) \equiv f(\frac{n-1}{2}, 2k) \pmod 2$. Si n es par, por simetría con respecto a la diagonal principal, podemos notar que $f(n, n)$ es par. Ahora, sea $n = 2^t n_1 - 1$ donde n_1 es impar. Si $n_1 > 1$,

$$f(2^t n_1 - 1, n_1 - 1) \equiv f(2^{t-1} n_1 - 1, n_1 - 1) \equiv \cdots \equiv f(n_1 - 1, n_1 - 1) \equiv 0 \pmod 2$$

de donde $n_1 = 1$. Por ende,

$$f(n, 2k) = f(2^t - 1, 2k) \equiv f(2^{t-1} - 1, 2k) \equiv \cdots \equiv f(1, 2k) = 1 \pmod 2$$

para todo $k \in \mathbb{Z}^+$. Aquí se termina la prueba. □

[E] **Problem 4.11** (EGMO 2022/6)**.** Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral with circumcentre O. Let the internal angle bisectors at A and B meet at X, the internal angle bisectors at B and C meet at Y, the internal angle bisectors at C and D meet at Z, and the internal angle bisectors at D and A meet at W. Further, let AC and BD meet at P. Suppose that the points X, Y, Z, W, O and P are distinct. Prove that O, X, Y, Z and W lie on the same circle if and only if P, X, Y, Z and W lie on the same circle.

Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico con circuncentro O. Sea X el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle DAB$ y $\angle ABC$; sea Y el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle ABC$ y $\angle BCD$; sea Z el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle BCD$ y $\angle CDA$; y sea W el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle CDA$ y $\angle DAB$. Sea P el punto de intersección de las rectas AC y BD. Suponga que los puntos O, P, X, Y, Z y W son distintos. Pruebe que O, X, Y, Z y W están sobre una misma circunferencia si y solo si P, X, Y, Z y W están sobre una misma circunferencia.

Solución. Si $Q = AB \cap CD$, $R = AD \cap BC$, $S = OQ \cap PR$ y $T = OR \cap PQ$ entonces $QS \cdot QO = QA \cdot QB = QY \cdot QW$. Luego, si $\odot(XYZW) \neq \odot(OSPT)$ entonces QR es el eje radical de ellas. Es decir, como O y P no pertenecen a QR, entonces O y P no están sobre $\odot(XYZW)$. Si $\odot(XYZW) = \odot(OSPT)$ entonces O y P están sobre $\odot(XYZW)$. Con esto se termina la prueba. □

§4.2 Practice Problems

[M] **Problem 4.12** (Balkan MO 2005/4)**.** Let $n \geq 2$ be an integer. Let S be a subset of $\{1, 2, \ldots, n\}$ such that S neither contains two elements one of which divides the other, nor contains two elements which are coprime. What is the maximal possible number of elements of such a set S?

[AoPS:225001]

Solución. La respuesta es $\lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor$. □

[M] **Problem 4.13** (Croatian MO 2018/5)**.** Let n be a positive integer. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ are points inside a circle and $B_1, B_2, \ldots, B_n$ points on that circle such that the segments A_iB_i are pairwise disjoint for $1 \leq i \leq n$. A grasshopper can move from point A_i to A_j where $i \neq j$ if and only if segment A_iA_j doesn't pass through any of segments A_kB_k for $1 \leq k \leq n$.

Prove that the grasshopper can move from any point A_i to A_j in a finite sequence of moves.

[AoPS:12394250]

[E] **Problem 4.14** (Pedro Alegría, Spain)**.** Demostrar que x es racional si y solo si la sucesión

$$x, x+1, x+2, \ldots$$

contiene al menos tres términos en progresión geométrica.

Solución. Supongamos que x es un número racional. Si x no es positivo, vamos a sumarle 1 hasta que sea positivo. Sea $x = \frac{p}{q}$ donde $p, q \in \mathbb{Z}^+$. Luego, los números x, $x+p$ y $x+p(q+2)$ están en una progresión geométrica. Ahora, supongamos que existen tres enteros $i, j, k \geq 0$ tales que $x+i$, $x+j$ y $x+k$ están en una progresión geométrica. En efecto, $(x+i)(x+k) = (x+j)^2$ de donde $x(i+k-2j) = j^2 - ik$. Si $i+k = 2j$, tenemos que $(i-k)^2 = (i+k)^2 - 4ik = 4(j^2 - ik) = 0$ de donde $i = k$, lo cual es un absurdo. Por ende, x es racional. $\square$

[E] **Problem 4.15** (CGMO 2008/8)**.** Let $f_n = \lfloor 2^n\sqrt{2008} \rfloor + \lfloor 2^n\sqrt{2009} \rfloor$ for all $n \in \mathbb{Z}^+$. Prove there are infinitely many odd numbers and infinitely many even numbers in the sequence $f_1, f_2, \ldots$.

[AoPS:1236876]

Solución. Sea $a_n = 1$ si $\left\{2^n\sqrt{2008}\right\} > \frac{1}{2}$ y 0 de lo contrario. Análogamente se define b_n con respecto a 2009. Si solamente hay finitos números de alguna paridad, tenemos que $f_{n+1} - 2f_n = a_n + b_n$ tiene la misma paridad para n suficientemente grande. Luego, $a_n = b_n$ o $a_n + b_n = 1$ para todo $n \geq N$ donde $N \in \mathbb{Z}^+$. Por ende, $2^N\sqrt{2008} \pm 2^N\sqrt{2009}$ es racional, lo cual es un absurdo. Finalmente, existen infinitos números pares e impares en la secuencia. $\square$

§5 Week 5 (04/11 – 04/15)

[E] **Problem 5.1** (IMO Shortlist 2003 A2)**.** Find all nondecreasing functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

(i) $f(0) = 0, f(1) = 1;$

(ii) $f(a) + f(b) = f(a)f(b) + f(a + b - ab)$ for all real numbers a, b such that $a < 1 < b$.

[E] **Problem 5.2** (IMO Shortlist 2003 A3)**.** Consider pairs of sequences of positive real numbers

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots, \quad b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots$$

and the sums

$$A_n = a_1 + \cdots + a_n, \quad B_n = b_1 + \cdots + b_n; \quad n = 1, 2, \ldots.$$

For any pair define $c_i = \min\{a_i, b_i\}$ and $C_n = c_1 + \cdots + c_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

(1) Does there exist a pair $(a_i)_{i\geq 1}$, $(b_i)_{i\geq 1}$ such that the sequences $(A_n)_{n\geq 1}$ and $(B_n)_{n\geq 1}$ are unbounded while the sequence $(C_n)_{n\geq 1}$ is bounded?

(2) Does the answer to question (1) change by assuming additionally that $b_i = 1/i$, $i = 1, 2, \ldots$?

[M] **Problem 5.3** (IMO Shortlist 2003 A4)**.** Let n be a positive integer and let $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ be real numbers.

(1) Prove that

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j|\right)^2 \leq \frac{2(n^2-1)}{3} \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_j)^2.$$

(2) Show that the equality holds if and only if $x_1, \ldots, x_n$ is an arithmetic sequence.