ch6：数理统计的基本概念

练习

1

例 1 设随机变量 X 和 Y 相互独立且都服从正态分布 $N(0,3^2)$. $x_1,\cdots,x_9$ 和 $y_1,\cdots,y_9$ 分别是来自总体 X 和 Y 的随机样本，则统计量 $U=\dfrac{x_1+\cdots+x_9}{\sqrt{y_1^2+\cdots+y_9^2}}$ 服从______分布，参数为______.

2

例 2 设 x_1,x_2,x_3,x_4 是来自正态总体 $N(0,2^2)$ 的简单随机样本，$X=a(x_1-2x_2)^2+b(3x_3-4x_4)^2$，则当 $a=$______，$b=$______时，统计量 X 服从 χ^2 分布，其自由度为______.

3

例 3 设总体 X 服从正态分布 $N(0,2^2)$，而 $x_1,x_2,\cdots,x_{15}$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则随机变量

$$Y=\frac{x_1^2+\cdots+x_{10}^2}{2(x_{11}^2+\cdots+x_{15}^2)}$$

服从______分布，参数为______.

4

例 4 设 n 个随机变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 独立同分布，

$$D(x_1)=\sigma^2,\quad \bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2,$$

则(　　).

(A) S 是 σ 的无偏估计量；

(B) S 是 σ 的最大似然估计量；

(C) S 是 σ 的相合估计量(即一致估计量)；

(D) S 与 $\bar{x}$ 相互独立.

6

例 6 假设随机变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本；已知 $E(X^k)=\alpha_k(k=1,2,3,4)$. 证明当 n 充分大时，随机变量 $Z_n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ 近似服从正态分布，并指出其分布参

7

例7 设总体 X 服从正态分布，$\bar{x}$ 与 S^2 分别为样本均值和样本方差，又设 $x_{n+1} \sim N(\mu,\sigma^2)$ 且 x_{n+1} 与 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 相互独立，求统计量

$$T = \frac{x_{n+1} - \bar{x}}{S}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

的分布.

8

例8 设随机变量 $x_1, \cdots, x_{10}; y_1, \cdots, y_{15}$ 相互独立且都为 $N(20, (\sqrt{3})^2)$ 分布，求 $P\{|\bar{x} - \bar{y}| > 0.3\}$.

9

例9 若随机变量 X 具有自由度为 n_1, n_2 的 F 分布，求证

(1) $Y = \frac{1}{X}$ 具有自由度为 n_2, n_1 的 F 分布；

(2) 并由此证明 $F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}$.

11

例11 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma > 0)$，从该总体中抽取简单随机样本 $x_1, x_2, \cdots, x_{2n}(n \geqslant 2)$，其样本均值为 $\bar{x} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} x_i$，求统计量 $Y = \sum_{i=1}^{n}(x_i + x_{n+i} - 2\bar{x})^2$ 的数学期

13

例13 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 X 的简单随机样本，

$$Y_1 = \frac{1}{6}(X_1 + \cdots + X_6), \quad Y_2 = \frac{1}{3}(X_7 + X_8 + X_9),$$

$$S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i - Y_2)^2, \quad Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S},$$

证明统计量 Z 服从自由度为2的 t 分布.

15

例15 设随机变量 $X \sim t(n)(n > 1)$，$Y = \frac{1}{X^2}$，则(　　).

(A) $Y \sim \chi^2(n)$；　　(B) $Y \sim \chi^2(n-1)$；

(C) $Y \sim F(n,1)$；　　(D) $Y \sim F(1,n)$.

16

例 16 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，对给定的 α $(0<\alpha<1)$，数 u_α 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$. 若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 x 等于

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$； (B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$； (C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$； (D) $u_{1-\alpha}$. (2004 年数学一)

17

例 17 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n\geqslant 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则

(A) $n\overline{X}\sim N(0,1)$； (B) $nS^2\sim\chi^2(n)$；

(C) $\dfrac{(n-1)\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$； (D) $\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n}X_i^2}\sim F(1,n-1)$. (2005 年数学一)

本章小结

1. 牢记数理统计中常用样本函数，它们是

(1) 样本均值 $\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$；

(2) 样本方差 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$；

(3) 样本标准差 $S=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$；

(4) 样本的二阶中心矩 $\tilde{S}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$；

(5) 来自正态总体叫样本函数(非统计量)及其分布

$$u=\frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}}\sim N(0,1),$$

$$t=\frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}}\sim(n-1),$$

$$w=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1);$$

(6) 来自正态总体几个统计量，它们是：

$$U=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}},\quad T=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}},\quad W=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}.$$

2. 理解产生 χ^2, t, F 分布的典型模式，并掌握查表确定它们的分位数方法. 注意，目前考研试题中已使用国家标准的正态 χ^2, t, F 分布表(见本书后面附表 2,3,4,5).

3. 了解来自正态总体的几个重要样本函数，如 $\bar{x}, S^2, U, W, T, F$ 等的分布及性质.