ch4 随机变量的数字特征

随机变量的均值与方差

1

例 1 设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立，其中 X_1 在 $[0,6]$ 上服从均匀分布，X_2 服从正态分布 $N(0,2^2)$，X_3 服从参数为 $\lambda=3$ 的泊松分布．记 $Y=X_1-2X_2+3X_3$，则 $D(Y)=$ ________．

2

例 2 设 X 是一个随机变量，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 1-x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则方差 $D(X)=$ ________．

6

例 6 设 X 的均值、方差都存在，且 $D(X)\neq 0$，并且

$$Y=\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}},$$

则 $E(X)=$ ________，$D(Y)=$ ________．

8

例 8 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，则 $P\{X>\sqrt{D(X)}\}=$ ________．(2004 年数学一)

9

例 9 设二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，则随机变量 $\xi=X+Y$ 与 $\eta=X-Y$ 不相关的充分必要条件为（　　）．

(A) $E(X)=E(Y)$；　　(B) $E(X^2)-[E(X)]^2=E(Y^2)-[E(Y)]^2$；

(C) $E(X^2)=E(Y^2)$；　　(D) $E(X^2)+[E(X)]^2=E(Y^2)+[E(Y)]^2$．

11

例 11 设 X 是一随机变量，$E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2(\mu,\sigma>0$ 常数)，则对任意常数 C，必有(　　).

(A) $E(X-C)^2=EX^2-C^2$；　(B) $E(X-C)^2=E(X-\mu)^2$；

(C) $E(X-C)^2<E(X-\mu)^2$；　(D) $E(X-C)^2\geqslant E(X-\mu)^2$.

12

例 12 设排球队 A 与 B 进行比赛，若有一队胜 3 场，则比赛结束. 假定 A 在每场比赛中获胜的概率 $p=\frac{1}{2}$，试求比赛场数 X 的数学期望.

15

例 15 某人用 n 把钥匙去开门，只有一把能打开，今逐个任取一把试开，求打开此门所需开门次数 X 的数学期望及方差.

17

例 17 设 X 服从自由度为 n 的 χ^2 分布，它的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

其中 n 为正整数，求 $E(X)$ 及 $D(X)$.

19

例 19 一台设备由三大部件构成，在设备运转中各部件需要调整的概率相应为 0.10，0.20 和 0.30. 假设各部件的状态相互独立，以 X 表示同时需要调整的部件数，试求 X 的概率分布，数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$.

23

例 23 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

对 X 独立地重复观察 4 次，用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数，求 Y^2 的数学期望.

25

例 25 已知甲、乙两箱中装有同种产品,其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品,乙箱中仅装有 3 件合格品.从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后,求:

(1) 乙箱中次品件数 X 的数学期望;

(2) 从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

协方差和相关系数

26

例 26 设随机变量 X 和 Y 独立同分布,记 $U=X-Y$, $V=X+Y$,则随机变量 U 与 V 必然(　　).

(A) 不独立;　(B) 独立;　(C) 相关系数不为零;　(D) 相关系数为零.

27

例 27 设随机变量 X 和 Y 的方差存在且不等于 0,则 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$是 X 和 Y (　　).

(A) 不相关的充分条件,但不是必要条件;　(B) 独立的充分条件,但不是必要条件;

(C) 不相关的充分必要条件;　(D) 独立的充分必要条件.

31

例 31 已知随机变量(X,Y)服从二维正态分布,并且 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(1,3^2)$和 $N(0,4^2)$, X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$. 设 $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$,

(1) 求 Z 的数学期望$E(Z)$和方差 $D(Z)$;

(2) 求 X 与Z 的相关系数 ρ_{XZ}.

34

例 34 设 $\xi(X,Y)$的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 判别 X,Y 是否相互独立,是否相关;

(2) 求 $E(\xi)$, $D(\xi)$, $D(X+Y)$.

38

例 38 已知二维随机变量(X,Y)服从联合正态分布,且$EX=EY=0$,$D(X)=1$,$D(Y)=4$,$\rho(X,Y)=\frac{1}{2}$.

(1) 写出(X,Y)的联合密度函数;

(2) 已知$Z=aX+Y$与Y独立,求a.

42

例 42 设随机变量X和Y的相关系数为0.9,若$Z=X-0.4$,则Y与Z的相关系数为______.

44

例 44 设二维随机变量(X,Y)服从二维正态分布,则随机变量$\xi=X+Y$与$\eta=X-Y$不相关的充分必要条件为

(A) $E(X)=E(Y)$;　(B) $E(X^2)-[E(X)]^2=E(Y^2)-[E(Y)]^2$;

(C) $E(X^2)=E(Y^2)$;　(D) $E(X^2)+[E(X)]^2=E(Y^2)+[E(Y)]^2$.

45

例 45 设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$独立同分布,且其方差为$\sigma^2>0$.令$Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,则

(A) $\text{cov}(X_1,Y)=\frac{\sigma^2}{n}$;　(B) $\text{cov}(X_1,Y)=\sigma^2$;

(C) $D(X_1+Y)=\frac{n+2}{n}\sigma^2$;　(D) $D(X_1-Y)=\frac{n+1}{n}\sigma^2$.　(2004 年数学一)

48

例 48 设A,B为随机事件,且$P(A)=\frac{1}{4}$,$P(B|A)=\frac{1}{3}$,$P(A|B)=\frac{1}{2}$,令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{ 发生},\\ 0, & A\text{ 不发生},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{ 发生},\\ 0, & B\text{ 不发生}.\end{cases}$$

求:(1) 二维随机变量(X,Y)的概率分布;

(2) X与Y的相关系数ρ_{XY}.(2004 年数学一)

二维随机变量的均值和方差

49

例 49 设二维随机向量(X,Y)的联合分布密度函数

$$p(x,y)=\begin{cases}2xe^{-(y-5)}, & 0\leqslant x\leqslant 1, y\geqslant 5,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则 $E(XY)=$________.

50

例 50 设

$$\xi\sim(X,Y)\sim p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}\sin x\sin y, & 0\leqslant x\leqslant\pi, 0\leqslant y\leqslant\pi,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求:(1) $E(\xi)$; (2) $D(\xi)$; (3) ρ_{XY}.

51

例 51 设 $\xi=(X,Y)$服从在 D 上的均匀分布,其中 D 为 x 轴、y 轴及直线 $x+\frac{y}{2}=1$ 所围成的三角形区域,求 $E(\xi)$和 $D(\xi)$.

52

例 52 设随机向量(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}A\sin(x+y), & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 (1) 系数 A; (2) 数学期望 $E(X),E(Y)$; (3) 方差$D(X),D(Y)$; (4) 协方差 $\mathrm{cov}(X,Y)$ 和相关系数 ρ_{XY}.

53

例 53 设二维随机变量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2}[\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)],$$

其中 $\varphi_1(x,y)$和 $\varphi_2(x,y)$都是二维正态密度函数,且它们对应的二维随机变量的相关系数分别为$\frac{1}{3}$和$-\frac{1}{3}$,它们的边缘密度函数所对应的随机变量的数学期望都是零,方差都是 1.

(1) 求随机变量 X 和 Y 的密度函数$f_1(x)$和 $f_2(y)$,及 X 和 Y 的相关系数ρ(可以直接利用二维正态密度的性质);

(2) 问 X 和 Y 是否独立? 为什么? (2000 年数学四)

例 54 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ $(n>2)$为独立同分布的随机变量，且均服从 $N(0,1)$，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$Y_i=X_i-\overline{X}$，$i=1,2,\cdots,n$．求：

（Ⅰ）Y_i 的方差 $D(Y_i)$，$i=1,2,\cdots,n$；

（Ⅱ）Y_1 与 Y_n 的协方差 $\mathrm{cov}(Y_1,Y_n)$；

（Ⅲ）$P\{Y_1+Y_n\leqslant 0\}$．(2005 年数学四)

本章小结

1．牢记常见分布的均值与方差，它们是两点(0-1)分布、二项分布、泊松分布、几何分布、均匀分布、指数分布及正态分布．

2．熟练掌握随机变量函数的数学期望公式(又称为表示性定理)，即

$$E[f(X)]=\begin{cases}\sum\limits_i f(x_i)p_i, & X\text{ 为离散型},\\ \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)p(x)\mathrm{d}x, & X\text{ 为连续型},\end{cases}$$

其中 x_i 为 X 的正概率点，$p(x)$为连续型随机变量分布密度，$Y=f(X)$为随机变量 X 的函数，注意这里的 $f(X)$也可以是一个分段函数．

3．灵活运用均值、方差的性质求解问题，需要指出的是：X 与 Y 不相关是下面性质成立的充分必要条件：

$$E(X\cdot Y)=E(X)\cdot E(Y),\quad D(X\pm Y)=D(X)+D(Y).$$

4．正确理解二维随机变量的均值向量、方差向量与协方差、相关系数的概念及性质，了解协方差阵、相关阵的概念．

5．正确理解“独立”与“不相关”之间的关系与区别．

6．若 $\xi=(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则

(1) X 与 Y 相互独立$\Leftrightarrow$相关系数 $\rho=0$；

(2) X 和 Y 的边缘分布都是正态分布，即 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$；

(3) X 与 Y 线性组合仍为正态分布．

注意，两个边缘分布都是正态分布的二维随机变量其联合分布不一定是正态分布，这时若 $\rho=0$ 不能导出 X 与 Y 相互独立，并且它们线性组合也不一定是正态分布．

7．由 $\xi=(X,Y)$的联合分布求 $E(\xi)=(E(X),E(Y))$或 $D(\xi)=(D(X),D(Y))$时，可使用二维表示性定理，即

$$E[f(X,Y)]=\begin{cases}\sum\limits_i\sum\limits_j f(x,y)p_{ij}, & (X,Y)\text{ 为离散型},\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & (X,Y)\text{ 为连续型},\end{cases}$$

只要令其中 $f(x,y)$分别为 x,y 即可求出．

需要指出的是，我们也可先求出 X 与 Y 的边缘分布，再利用一维的有关分式分别计算 $E(X),E(Y),D(X),D(Y)$，有时也较为方便．