ch5：大数定律与中心极限定理

切比雪夫不等式

2

例 2 对于上例中的随机变量 X，估计概率 $P\{\mu-4<\overline{X}<\mu+5\}\geqslant$ ________.

3

例 3 设随机变量 $X_1,\cdots,X_9$ 相互独立同分布，$E(X_i)=1, D(X_i)=1, i=1,\cdots,9$. 令 $S_9=\sum_{i=1}^{9}X_i$. 则对任意 $\varepsilon>0$，从切比雪夫不等式直接可得(   ).

(A) $P\{|S_9-1|<\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{1}{\varepsilon^2}$;　　(B) $P\{|S_9-9|<\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{9}{\varepsilon^2}$;

(C) $P\{|S_9-9|<\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{1}{\varepsilon^2}$;　　(D) $P\left\{\left|\frac{1}{9}S_9-1\right|<\varepsilon\right\}\geqslant 1-\frac{1}{\varepsilon^2}$.

5

例 5 假设随机变量 $X_1,X_2,\cdots$ 相互独立且服从同参数 λ 的泊松分布. 则下面随机变量序列中不满足切比雪夫大数定律条件的是(   ).

(A) $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$;　　(B) $X_1+1,X_2+2,\cdots,X_n+n,\cdots$;

(C) $X_1,2X_2,\cdots,nX_n,\cdots$;　　(D) $X_1,\frac{1}{2}X_2,\cdots,\frac{1}{n}X_n,\cdots$.

7

例 7 设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为 -2 和 2，方差分别为 1 和 4，而相关系数为 -0.5，试根据切比雪夫不等式估计 $P\{|X+Y|\geqslant 6\}$ 之值.

8

例 8 在每次试验中，事件 A 发生的概率为 0.5，利用切比雪夫不等式估计：在 1 000 次独立试验中，事件 A 发生的次数在 400~600 之间的概率.

大数定律

9

例 9 假设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立同分布，X_i 的概率密度是 $f(x)$，问 $X_1, X_2, \cdots$ 是否一定满足大数定律？

10

例 10 设 $\{X_k\}$ 为相互独立且同分布的随机变量序列，并且 X_k 的概率分布为

$$P\{X_k = 2^{i-2\ln i}\} = 2^{-i} \quad (i = 1,2,\cdots),$$

试证 $\{X_k\}$ 服从大数定律.

11

例 11 设 $\{X_k\}$ 为相互独立的随机变量序列，且

$$X_k \sim \begin{bmatrix} -2^k & 0 & 2^k \\ \frac{1}{2^{2k+1}} & 1-\frac{1}{2^{2k}} & \frac{1}{2^{2k+1}} \end{bmatrix}, \quad k = 1,2,\cdots,$$

试证 $\{X_k\}$ 服从大数定律.

12

例 12 设总体 X 服从参数为 2 的指数分布，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，则当 $n \to \infty$ 时，$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 依概率收敛于______.

中心极限定理

13

例 13 某工厂有 400 台同类机器，各台机器发生故障的概率都是 0.02. 假设各台机器工作是相互独立的，试求机器出故障的台数不少于 2 的概率.

14

例 14 某地抽样调查结果表明，考生的外语成绩（百分制）近似正态分布，平均成绩为 72 分，96 分以上的占考生总数的 2.3%，试求考生的外语成绩在 60 分至 84 分之间的概率.

附表

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$\Phi(x)$	0.500	0.692	0.841	0.933	0.977	0.994	0.999

表中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数.

16

例 16 某保险公司多年的统计资料表明，在索赔户中被盗索赔户占20%，以 X 表示在随意抽查的100个索赔户中因被盗向保险公司索赔的户数.

(1) 写出 X 的概率分布；

(2) 利用棣莫弗-拉普拉斯定理，求被盗索赔户不少于14户且不多于30户的概率的近似值.

［附表］设 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$\Phi(x)$	0.500	0.692	0.841	0.933	0.977	0.994	0.999

18

例 18 设有1000人独立行动，每个人能够按时进入掩蔽体的概率为0.9. 以95%概率估计，在一次行动中：(1) 至少有多少人能够进入掩蔽体；(2) 至多有多少人能进入掩蔽体.

20

例 20 假设 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立同分布，$E(X_i^k)=a_k(i=1,2,3,4)$. 证明当 n 充分大时，随机变量

$$Z_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$$

近似服从正态分布，并指出其分布参数.

21

例 21 一个供电网内共有10000盏功率相同的灯，夜晚每一盏灯开着的概率都是0.7. 假设各盏灯开、关彼此独立. 求夜晚同时开着的灯数在6800到7200之间的概率.

22

例 22 假设一条自动生产线生产的产品合格率是0.8. 要使一批产品的合格率达到在76%与84%之间的概率不小于90%，问这批产品至少要生产多少件？

23

例 23 多次重复观测一个物理量，假设每次测量产生的随机误差都服从正态分布 $N(0,0.3^2)$. 如果取 n 次测量的算术平均值作为测量结果，试计算：

(1) 测量结果与真值之差的绝对值小于一个小正数 δ 的概率 p；

(2) 当 $n=100,\delta=0.05$ 时，概率 p 的近似值；

(3) 给定 $\delta=0.05$，要使(1)中概率 p 不小于0.95，至少应进行的测量次数 n.

24

例 24 某车间有同型号机床 200 部,每部机床开动的概率为 0.7.假定各机床开动与否互不影响,开动时每部机床需消耗电能 15 个单位.问至少供应多少单位电能才可以 95%的概率保证不致因供电不足而影响生产.

29

例 29 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$,则根据列维-林德伯格(Levy-Lindberg)中心极限定理,当 n 充分大时, S_n 近似服从正态分布,只要 $X_1, X_2, \cdots, X_n$

(A) 有相同的数学期望; (B) 有相同的方差;

(C) 服从同一指数分布; (D) 服从同一离散型分布.

30

例 30 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 为独立同分布的随机变量列,且均服从参数为 $\lambda(\lambda>1)$的指数分布,记 $\Phi(x)$为标准正态分布函数,则

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\lambda}{\lambda\sqrt{n}} \leqslant x\right\} = \Phi(x)$; (B) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leqslant x\right\} = \Phi(x)$;

(C) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}} \leqslant x\right\} = \Phi(x)$; (D) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leqslant x\right\} = \Phi(x)$.

(2005 年数学四)

本章小结

1. 切比雪夫不等式

一般用来估计随机变量 X 在以 $E(X)$ 为中心的对称区间上取值的概率. 解题时, 首先求出 $E(X)$, $D(X)$ 的值, 并确定在具体问题中的 ε 之值, 按照以下两种标准模式:

$$P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$

或

$$P(|X - E(X)| < \varepsilon) > 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

求解.

2. 中心极限定理

一般用来求 n 个独立同分布(不管其分布如何, 只要 $E(X_i)$, $D(X_i)$ 存在)的随机变量 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 之和 $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ 在某个区间内取值概率的近似值. 我们只需求出

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i), \quad D(Y) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i),$$

则

$$Y \doteq N(E(Y), D(Y)).$$

(1) 列维-林德伯格定理(独立同分布的中心极限定理)

此定理用于 X_i 的分布未知, 但 $E(X_i) = \mu$, $D(X_i) = \sigma^2$ 存在情况下, 对于任意实数 x, 当 n 充分大时, 有

$$\frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \doteq N(0,1).$$

(2) 棣莫佛-拉普拉斯定理(二项分布以正态分布为极限分布)

此定理用于 $X_i \sim B(n, p)$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 当 n 充分大时, 有

$$\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \doteq N(0,1).$$

注意, 在具体使用时, 往往 $X_i \sim B(1, p)$.