Tugas 16

Catatan terkait Operator Density dan juga *phase-space probability distributions* berikut ini :

Jadi dengan menggunakan *density operator* yang diberikan sebelumnya yaitu

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

Dan untuk *trace* dari operator tersebut adalah

$$Tr(\hat{\rho}) = \sum_i p_i = 1$$

Maka dapat digunakan operator tersebut untuk mencari **nilai ekspektasi** dari suatu operator seperti operator $\hat{A}$ berikut

$$\langle\hat{A}\rangle = Tr(\hat{\rho}\hat{A}) = \sum_i p_i \langle\psi_i|\hat{A}|\psi_i\rangle$$

Operator *density* dalam representasi *number state* $|n\rangle$ dapat dibuat

$$\hat{\rho} = \sum_n \sum_m |m\rangle\rho_{mn}\langle n|$$

Dengan begitu operator *density* juga dapat direpresentasikan dalam bentuk *coherent state* sebagai berikut

$$\hat{\rho} = \int\int \langle\alpha|\rho|\alpha'\rangle|\alpha\rangle\langle\alpha'| \frac{d^2\alpha\, d^2\alpha'}{\pi^2}$$

Atau

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha|\, d^2\alpha$$

Dengan nilai Trace dari operator *density* adalah

$$\begin{aligned} Tr(\hat{\rho}) &= Tr\left(\int P(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha|\, d^2\alpha\right) \\ &= \sum_n \langle n| \int P(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha|\, d^2\alpha|n\rangle \\ &= \int P(\alpha) d^2\alpha = 1 \end{aligned}$$

Dengan $P(\alpha)$ adalah Glauber-Sudarshan *P-function*. Untuk mencari fungsi P dapat menggunakan cara

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= \frac{e^{|\alpha|^2}}{\pi^2} \int e^{|u|^2} \langle -u|\rho|u\rangle e^{u^*\alpha - u\alpha^*} d^2u \\ &= \delta^2(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

KEMUDIAN

Untuk suatu operator $\hat{B}$, bentuk *P-representation*-nya adalah

$$\hat{B} = \int B_p(\alpha, \alpha^*)|\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha$$

Dengan **nilai rata-rata** $\hat{B}$

$$\begin{aligned}
\langle\hat{B}\rangle &= \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{B}) \\
&= \sum_n \langle n| \int \hat{\rho} B_p(\alpha, \alpha^*)|\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha\, |n\rangle \\
&= \int B_p(\alpha, \alpha^*) d^2\alpha \sum_n \langle n|\hat{\rho}|\alpha\rangle\langle\alpha|n\rangle \\
&= \int B_p(\alpha, \alpha^*) d^2\alpha \sum_n \langle\alpha|n\rangle\langle n|\hat{\rho}|\alpha\rangle \\
\langle\hat{B}\rangle &= \int B_p(\alpha, \alpha^*)\langle\alpha|\hat{\rho}|\alpha\rangle d^2\alpha
\end{aligned}$$

Berdasarkan hasil di atas, dapat dilihat bahwa **nilai ekspektasi** dari *density operator* terhadap *coherent states* merupakan bagian dari distribusi *phase-space probability*. Nilai tersebut dapat disebut juga sebagai *Q-function* atau Husimi *Q distribution* dengan bentuk berikut

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi}\langle\alpha|\hat{\rho}|\alpha\rangle$$

Lalu dengan $\hat{B} = \hat{I}$ maka sama seperti dengan *density operator*, nilai Trace $\hat{B}$ berikut

$$Tr(\hat{B}) = \int Q(\alpha) d^2\alpha = 1$$

Nilai *Q-function* itu positif untuk semua *quantum states*. Maka sama seperti sebelumnya untuk *P-reperesentation, Q-representation* dari operator $\hat{B}$ dapat dicari

$$\begin{aligned}
\hat{B} &= \hat{1}\hat{B}\hat{1} \\
&= \sum_n |n\rangle\langle n|\, \hat{B} \sum_m |m\rangle\langle m| \\
&= \sum_n \sum_m |n\rangle\langle n|\hat{B}|m\rangle\langle m| \\
\hat{B} &= \sum_n \sum_m |n\rangle \hat{B}_{nm} \langle m|
\end{aligned}$$

Nah sekarang dimasukkan untuk nilai ekspektasi dari *coherent state* atau *Q-representation* berikut

$$\langle\alpha|\hat{B}|\alpha\rangle = \langle\alpha|\left(\sum_n\sum_m |n\rangle\hat{B}_{nm}\langle m|\right)|\alpha\rangle$$

$$= \left(\sum_n\sum_m \langle\alpha|n\rangle\hat{B}_{nm}\langle m|\,\alpha\rangle\right)$$

$$= \sum_n\sum_m e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_l \frac{(\alpha^*)^l}{\sqrt{l!}}\langle l|n\rangle\hat{B}_{nm}\langle m|e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_l \frac{(\alpha)^l}{\sqrt{l!}}|l\rangle$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_n \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}}\delta_{nn}\hat{B}_{nm}e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_m \frac{(\alpha)^m}{\sqrt{m!}}\delta_{mm}$$

$$B_Q(\alpha,\alpha^*) = e^{-|\alpha|^2}\sum_n\sum_m \frac{(\alpha)^m(\alpha^*)^n}{\sqrt{m!\,n!}}\hat{B}_{nm}$$

Dengan diketahui *Q-representation* dapat dicari juga nilai ekspektasi operator $\hat{B}$ untuk bentuk $\hat{\rho}$ dalam *P-representation* berikut ini

$$\langle\hat{B}\rangle = Tr(\hat{\rho}\hat{B})$$

$$= Tr\left(\int P(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha\,.\,\hat{B}\right)$$

$$= \sum_n \langle n|\int P(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha\,.\,\hat{B}\,|n\rangle$$

$$= \int P(\alpha)\sum_n \langle n|\hat{B}|\alpha\rangle\langle\alpha|n\rangle\,d^2\alpha$$

$$= \int P(\alpha)\sum_n \langle\alpha|n\rangle\langle n|\hat{B}|\alpha\rangle\,d^2\alpha$$

$$= \int P(\alpha)\,\langle\alpha|\hat{B}|\alpha\rangle d^2\alpha$$

$$\langle\hat{B}\rangle = \int P(\alpha)\,B_Q(\alpha,\alpha^*)d^2\alpha$$

Jadi, didapatkan **nilai ekspektasi** dari suatu operator $\hat{B}$ yang dapat dilihat dari ***P-function*** dan ***Q-representation***.