Kerjakan soal berikut

1. Terkait SHO dengan $\mathrm{H} = \frac{\mathrm{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$

   Dimana $a = \sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}(m\omega q + ip)$ dan $a^{+} = \sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}(m\omega q - ip)$

   Tunjukkan :

   a. $[a, a^{+}] = 1$

   b. $\mathrm{H} = \omega\hbar\left(a^{+}a + \frac{1}{2}\right)$

   c. $[\mathrm{H}, \mathrm{a}] = [H, a^{+}] = 0$

   Jawaban :

   a. Maka

$$[\mathrm{a}, \mathrm{a}^{+}] = aa^{+} - a^{+}a$$

$$= \frac{1}{2m\omega\hbar}\left((m\omega q)^2 + ipm\omega q - m\omega qip + p^2\right) - \frac{1}{2m\omega\hbar}\left((m\omega q)^2 + m\omega qip - ipm\omega q + p^2\right)$$

$$= \frac{1}{2m\omega\hbar}\left(-im\omega[q,p] - (im\omega[q,p])\right)$$

$$= \frac{1}{2\hbar}\left(-2i(i\hbar)\right)$$

$$[a, a^{+}] = 1$$

   Dengan asumsi q adalah operator posisi mengingat persamaan hamiltoniannya dengan mengikuti *cannonical commutation relation* dimana $[q, p] = i\hbar$.

   b. Untuk membuktikan bagian ini, mengikuti persamaan hamiltonian di atas maka

$$\mathrm{H} = \omega\hbar\left(\frac{p^2}{2m\omega\hbar} + \frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right)$$

   Untuk memudahkan, penulisan operator p dan q disederhanakan menjadi

$$y^2 = \frac{p^2}{2m\omega\hbar} \rightarrow y = \sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}p \;\text{ dan }\; z^2 = \frac{m\omega}{2\hbar}q^2 \rightarrow z = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}q$$

   maka

$$\mathrm{H} = \omega\hbar(\mathrm{z}^2 + y^2)$$

$$= \omega\hbar(z + iy)(z - iy)$$

   Dalam hal ini, seperti pada bagian (a.) maka

$$a = z + iy \text{ dan } a^{+} = z - iy$$

   Melihat juga hasil bagian (a.) dimana

$$aa^{+} = z^2 - i[z, y] + y^2$$

$$a^{+}a = z^2 + i[z, y] + y^2$$

Sehingga jika kita menjumlahkan kedua persamaan di atas maka

$$aa^+ + a^+a = 2(z^2 + y^2)$$

Jika dimasukkan ke dalam hamiltonian akan menjadi

$$\mathrm{H} = \omega\hbar\frac{(aa^+ + a^+a)}{2}$$

Dengan menggunakan sifat commut bagian (a.) juga dimana

$$aa^+ - a^+a = 1 \rightarrow aa^+ = 1 + a^+a$$

Maka jika dimasukkan ke dalam persamaan hamiltonian menjadi

$$\mathrm{H} = \omega\hbar\frac{2a^+a + 1}{2} = \omega\hbar\left(a^+a + \frac{1}{2}\right)$$

c. Sifat *commut hamiltonian* dideskripsikan berikut ini

$$\begin{aligned}
[H, a] &= \left[\omega\hbar\left(a^+a + \frac{1}{2}\right), a\right] \\
&= \omega\hbar[a^+a, a] + \omega\hbar\left[\frac{1}{2}, a\right] \\
&= \omega\hbar(a^+[a, a] + [a^+, a]a) \\
&= \omega\hbar(a^+(aa - aa) + (a^+a - aa^+)a) \\
&= \omega\hbar(-((aa^+ - a^+a)a)) \\
&= -\omega\hbar([a, a^+]a) \\
&= -\omega\hbar a
\end{aligned}$$

2. Terkait atom Hidrogen dengan $\mathrm{H} = \frac{\mathrm{p}^2}{2m} + V(r)$

   Dengan $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$, $[x, p_x] = i\hbar$, $[y, p_x] = 0$

   Tunjukkan :

   a. $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$

   b. $[L^2, L_z] = 0$

   Jawaban :

   Potensial coulomb dari atom hidrogen $v(r) = -k\frac{q}{r^2}$ dan mengingat $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ dimana diperoleh untuk masing-masing komponen x, y, z dan arah masing-masing p sebagai berikut

$$L_x = yp_z - zp_y,\ L_y = zp_x - xp_z,\ L_z = xp_y - yp_z$$

a. $[L_x, L_y] = [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z]$

$$[L_x, L_y] = [yp_z, zp_y] - [yp_z, xp_z] - [zp_y, zp_x] + [zp_y, xp_z]$$

$$= y[p_z, zp_x] + [y, zp_x]p_z + z[p_y, xp_z] + [z, xp_z]p_y$$

$$= y[p_z, z]p_x + x[z, p_z]p_y$$

$$= -i\hbar yp_x + i\hbar xp_y$$

$$= i\hbar(xp_y - yp_x)$$

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z$$

b. $[L^2, L_z] = [L_x^2 + L_Y^2 + L_z^2, L_z]$

$$= [L_x^2, L_z] + [L_z^2, L_z] + [L_z^2, L_z]$$

$$= L_xL_xL_z - L_zL_xL_x + L_yL_yL_z - L_zL_yL_y$$

Untuk masing-masing term bisa dipecah agar tidak kepanjangan tulisannya menjadi

$$L_xL_xL_z = L_xL_zL_x - i\hbar L_xL_y$$

$$L_zL_xL_x = L_xL_zL_x + i\hbar L_yL_x$$

$$L_yL_yL_z = L_xL_zL_x + i\hbar L_yL_x$$

$$L_zL_yL_y = L_xL_zL_x - i\hbar L_xL_y$$

Jika dimasukkan kembali ke dalam persamaan menjadi

$$[L^2, L_z] = -i\hbar L_xL_y + i\hbar L_yL_x - i\hbar L_yL_x + i\hbar L_xL_y = 0$$