LATIHAN DAN TUGAS 13

Buktikan bahwa operator *displacement*

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle = e^{\alpha a^{+} - \alpha^{*} a}|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle\right)$$

Jawaban :

Dengan

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha a^{+} - \alpha^{*} a}$$

Untuk

$$e^{A+B} = e^{A+B-\frac{1}{2}[A,B]} = e^{A}e^{B}e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$$

Di atas merupakan *zassenhaus formula* dimana $[A, B] \neq 0$. Maka teori tersebut dapat diambil untuk mengubah *displacement* menjadi

$$\begin{aligned} e^{\alpha a^{+} - \alpha^{*} a} &= e^{\alpha a^{+}} e^{-\alpha^{*} a} e^{-\frac{1}{2}[\alpha a^{+}, -\alpha^{*} a]} \\ &= e^{\alpha a^{+}} e^{-\alpha^{*} a} e^{-\frac{1}{2}(-\alpha a^{+}\alpha^{*} a + \alpha^{*} a \alpha a^{+})} \\ &= e^{\alpha a^{+}} e^{-\alpha^{*} a} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2(-a^{+} a + a a^{+})} \\ &= e^{\alpha a^{+}} e^{-\alpha^{*} a} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 [a, a^{+}]} \\ e^{\alpha a^{+} - \alpha^{*} a} &= e^{\alpha a^{+}} e^{-\alpha^{*} a} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \end{aligned}$$

Lalu dikalikan dengan *ground state* maka

$$\begin{aligned} \hat{D}(\alpha)|0\rangle &= e^{\alpha a^{+} - \alpha^{*} a}|0\rangle \\ &= \left(e^{\alpha \hat{a}^{+}} e^{-\alpha^{*} \hat{a}} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\right)|0\rangle \\ \hat{D}(\alpha)|0\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^{+}}\left(e^{-\alpha^{*} a}|0\rangle\right) \end{aligned}$$

Pada bagian dalam kurung di atas menggunakan $e^{x} = \sum_m \frac{x^m}{m!}$ atau deret Taylor menjadi

$$e^{-\alpha^{*} a}|0\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\alpha^{*} a)^m}{m!}|0\rangle$$

Yang berlaku hanya $a^{m=0}\,|0\rangle \rightarrow 1|0\rangle$ karena sisanya $a^{m}|0\rangle = \sqrt{0}|-1\rangle = 0$ sehingga

$$e^{-\alpha^{*} a}|0\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\alpha^{*} a)^m}{m!}|0\rangle = \frac{(-\alpha^{*} a)^0}{0!}|0\rangle = |0\rangle$$

Balik lagi ke persamaan sebelumnya menjadi

$$\hat{D}(\alpha)|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\left(e^{\alpha a^+}|0\rangle\right)$$

Dengan menggunakan deret Taylor kembali menjadi

$$\hat{D}(\alpha)|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha a^+)^n}{n!}|0\rangle\right)$$

Untuk $(a^+)^n|0\rangle = \sqrt{n!}\,|n\rangle$ dari

$$a^+a^+ \dots a^{+n}|0\rangle = \sqrt{1}\sqrt{2}\dots\sqrt{n}|n\rangle$$

Maka dengan persamaan tersebut didapat

$$\hat{D}(\alpha)|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)^n}{n!}\sqrt{n!}\,|n\rangle\right)$$

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle\right)$$

TUGAS 13

Dalam *thermal states*

$$\rho = \frac{1}{Z}e^{-\beta H} = \frac{1}{Z}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\beta E_n}|n\rangle\langle n|$$

Jika $T = 0 \rightarrow \beta = \infty$ maka

$$\rho = |0\rangle\langle 0|$$

Sementara itu,

Buktikan bahwa hal tersebut dapat terjadi berikut

Jawaban :

$$\rho = \lim_{\beta\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{\beta E_n}}{Z}|n\rangle\langle n|$$

Semenjak $E_n > \cdots > E_1 > E_0$ maka $E^{-\beta(E_0)}$ decay paling lambat. Sehingga persamaan density matrix di atas dapat dipecah menjadi

$$\rho = \lim_{\beta\to\infty}\frac{e^{-\beta E_0}|0\rangle\langle 0| + \sum_{n>0}^{\infty}e^{-\beta E_n}|n\rangle\langle n|}{e^{-\beta E_0} + \sum_{n>0}^{\infty}e^{-\beta E_n}}$$

$$= \lim_{\beta\to\infty}\frac{g_0|0\rangle\langle 0| + \sum_{n>0}^{\infty}e^{-\beta(E_n-E_0)}|n\rangle\langle n|}{g_0 + \sum_{n>0}^{\infty}e^{-\beta(E_n+E_0)}}$$

$$\rho = |0\rangle\langle 0|$$