Tugas 20

Albert Andersen

Dengan mempunyai *state initial atom-field* adalah

$$|\psi(0)\rangle = |\psi(0)\rangle_{atom} \otimes |\psi(0)\rangle_{field}$$

Di mana

$$|\psi(0)\rangle_{atom} = C_g|g\rangle + C_e|e\rangle$$

$$|\psi(0)\rangle_{field} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n|n\rangle$$

Lalu hamiltonian dari interaksi atom dengan medan adalah

$$\hat{H}_{II} = -\hbar\Delta - \hbar\lambda(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^+)$$

Maka tentukan solusi berupa persamaan gelombang 4.120 melalui persamaan Schrodinger bergantung waktu berikut

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}_{II}|\psi(t)\rangle$$

Jawaban :

Mencari tahu terlebih dahulu *state* pada waktu $t = 0$ yaitu

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\left(C_gC_n|g\rangle|n\rangle + C_eC_n|e\rangle|n\rangle\right)$$

Dimana $|g\rangle|n\rangle$ dan $|e\rangle|n\rangle$ merupakan *tensor product*. Lalu mencari *state* bergantung waktu yang dikerjakan ke dalam Hamiltonian yaitu

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n(t)|g\rangle|n\rangle + B_n(t)|e\rangle|n-1\rangle + P_n(t)|e\rangle|n\rangle + Q_n(t)|g\rangle|n+1\rangle)$$

Dimana ada kemungkinan $|g\rangle|n\rangle \rightarrow |g\rangle|n\rangle\ or\ |e\rangle|n-1\rangle$ dan begitu juga untuk $|e\rangle|n\rangle$. Selanjutnya memasukkan persamaan fungsi gelombang ke dalam pers. Schrodinger

$$i\hbar\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dot{A}_n(t)|g\rangle|n\rangle + \dot{B}_n(t)|e\rangle|n-1\rangle + \dot{P}_n(t)|e\rangle|n\rangle + \dot{Q}_n(t)|g\rangle|n+1\rangle\right)$$

$$= -\hbar\lambda(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^+)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(A_n(t)|g\rangle|n\rangle + B_n(t)|e\rangle|n-1\rangle + P_n(t)|e\rangle|n\rangle + Q_n(t)|g\rangle|n+1\rangle)\right)$$

$$= -\hbar\lambda\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n(t)\sqrt{n}|e\rangle|n-1\rangle + B_n(t)\sqrt{n}|g\rangle|n\rangle + P_n(t)\sqrt{n+1}|g\rangle|n+1\rangle + Q_n(t)\sqrt{n+1}|e\rangle|n\rangle\right)\right)$$

Maka dengan menyamakan *state*-nya menjadi

$$\dot{A}_n(t) = i\lambda\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n(t)\sqrt{n}\right)$$

$$\dot{B}_n(t) = i\lambda\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)\sqrt{n}\right)$$

$$\dot{P}_n(t) = i\lambda\left(\sum_{n=0}^{\infty} Q_n(t)\sqrt{n+1}\right)$$

$$\dot{Q}_n(t) = i\lambda\left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)\sqrt{n+1}\right)$$

Untuk persamaan A_n dan B_n dapat menjadi

$$\ddot{B}_n(t) = i\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \dot{A}_n(t)\sqrt{n}$$

$$\ddot{B}_n(t) = i\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \left(i\lambda\big(B_n(t)\sqrt{n}\big)\right)\sqrt{n}$$

$$\ddot{B}_n(t) + \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} nB_n(t) = 0$$

Solusi dari persamaan di atas adalah

$$B_n(t) = e^{i\alpha t}$$

Dimana

$$0 = \frac{d^2}{dt^2}\left(e^{i\alpha t}\right) + \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} n\, e^{i\alpha t}$$

$$0 = -\alpha^2 + \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} n$$

$$\alpha_{\pm} = \pm\lambda\sqrt{n}$$

Maka untuk hasil solusi menjadi

$$B_n(t) = A_+ e^{i\alpha_+ t} + A_- e^{i\alpha_- t}$$

$$= -\frac{1}{2} C_g C_n e^{i(\lambda\sqrt{n})t} + \frac{1}{2} C_g C_n e^{-i(\lambda\sqrt{n})t}$$

$$B_n(t) = -iC_g C_n \sin \lambda t\sqrt{n}$$

Begitu pula untuk bagian $A_n(t)$

$$A_n(t) = C_g C_n \cos \lambda t\sqrt{n}$$

Untuk $\dot{P}_n$ dan $\dot{Q}_n$ juga sama sehingga hasilnya

$$P_n(t) = C_e C_n \cos \lambda t\sqrt{n+1}$$

$$Q_n(t) = -iC_e C_n \sin \lambda t\sqrt{n+1}$$

Persamaan yang telah didapat bisa dimasukkan ke persamaan fungsi gelombang di awal yaitu

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(C_g C_n \cos \lambda t\sqrt{n}\, |g\rangle|n\rangle - iC_g C_n \sin \lambda t\sqrt{n}\, |e\rangle|n-1\rangle$$
$$+ C_e C_n \cos \lambda t\sqrt{n+1}\, |e\rangle|n\rangle - iC_e C_n \sin \lambda t\sqrt{n+1}\, |g\rangle|n+1\rangle \Big)$$

Mengingat ada kemungkinan $|g\rangle|n\rangle \rightarrow |g\rangle|n\rangle\ or\ |e\rangle|n-1\rangle$ dan begitu juga untuk $|e\rangle|n\rangle$ maka persamaan tersebut dapat disamakan kembali menjadi

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\big[C_g C_n \cos \lambda t\sqrt{n} - iC_e C_{n-1} \sin \lambda t\sqrt{n}\big] |g\rangle|n\rangle$$
$$+ \big[C_e C_n \cos \lambda t\sqrt{n+1} - iC_g C_{n+1} \sin \lambda t\sqrt{n+1}\big] |e\rangle|n\rangle \Big)$$