热统习题 4（第六章）

1、 理想费米气体的巨配分函数为

$$Z_G = Tr\exp\{-\beta\sum_p(\epsilon(p)-\mu)\hat{n}_p\}$$

其中$\hat{n}_p$的本征值为 0 或 1.证明

（1） $Z_G = \prod_p(1+e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)})$

（2） 根据热力学关系求$U=\sum_p\epsilon(p)\,\hat{n}_p$ 和$< N >=\Sigma_p\hat{n}_p$

（3） 若$\epsilon(p)=\frac{p^2}{2m},\sum_p\to V\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}$，求 T=0 时 <N>. （设 $\mu=\varepsilon_F$ 是费米能。

（4） 证明 T>0, $\beta\varepsilon_F\gg 1$时，

$$\frac{< N >}{V}=\frac{(2m\mu)^{\frac{1}{2}}}{6\pi^2}(1+\frac{\pi^2}{8}(\beta\mu)^{-2}+\frac{7\pi^4}{640}(\beta\mu)^{-4}+\cdots$$

$$\frac{U}{V}=\frac{(2m\mu)^{\frac{3}{2}}}{10\pi^2}(1+\frac{5\pi^2}{8}(\beta\mu)^{-2}-\frac{7\pi^4}{384}(\beta\mu)^{-4}+\cdots$$

（积分公式 $\int_0^\infty\frac{du}{e^{-\alpha+u}+1}\left(\frac{d\varphi}{du}\right)=\varphi(u)+2\sum_{n=1}^\infty C_{2n}\left(\frac{d^{2n}\varphi}{du^{2n}}\right)_{u=\alpha}$，$C_m=\sum_{k=1}^\infty\frac{(-1)^{k+1}}{k^m},C_2=\frac{\pi^2}{12},C_4=\frac{7\pi^2}{720}$ ）

2、 声子的状态可用一组整数｛$n_{k\lambda}$｝来表征（λ=1，2，3 是声波的偏振方向），能量为 $E_{\{n_{\vec{k}\lambda}\}}=\sum_{\vec{k}\lambda}(n_{\vec{k}\lambda}+\frac{1}{2})\omega_{0\lambda}(\vec{k})$ 。在低能近似下，$\omega_{01,2}(\vec{k})=c_Tk,\omega_{03}(\vec{k})=c_Lk.$

（1）利用$Z=\prod_{\vec{k}\lambda}\sum_{n_{k\lambda}}^\infty e^{-\beta(n_{\vec{k}\lambda}+\frac{1}{2})\omega_{0\lambda}}$ 求 Z 和 F。

（用$<n_{\vec{k}\lambda}\geq[1-e^{-\beta\omega_{0\lambda}}]^{-1}$表达。

（2）设ω_T和ω_L是横、纵声子的频率上限，把ω连续化，写出 F。

3、 粒子数守恒的玻色子系统，巨配分函数为 $Z_G=\prod_{N=0}^\infty\sum_{\{n_p\}}e^{-\beta\sum_{\vec{p}}(\epsilon(\vec{p})-\mu)}$，求和$\sum_{\{n_p\}}1=N.$

（1）证明 $Z_G = \Pi_{\vec{p}}[1 - e^{-\beta(\epsilon(\vec{p})-\mu)}]^{-1}$.

（2）若 $\epsilon(p) = \frac{p^2}{2m}$, 在把求和化作积分后，证明

$\ln Z_G = V(\frac{m}{2\pi\beta})^{\frac{3}{2}} g_{\frac{5}{2}}(\beta\mu)$, $g_k(\beta\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n\beta\mu}}{n^k}$

（3）$g_k(\nu)$只在$\nu \le 0$才收敛，即对玻色子化学势最大为 0.说明存在临界密度 $n_c = (\frac{m}{2\pi\beta})^{\frac{3}{2}} g_{\frac{3}{2}}(0)$，当密度$n \le n_c, \mu \le 0$。

反之，对给定 n，有一个临界温度$T_c^{-1} = \frac{km}{2\pi}(\frac{g_{\frac{3}{2}}(0)}{n})^{2/3}$,

当 $T \ge T_c, \mu \le 0$. 问将温度降到 T<Tc，会发生什么物理现象？

（4）$< n >= [1 - e^{-\beta(\epsilon(\vec{p})-\mu)}]^{-1}$ 在 p=0 时是无意义的，⟨N⟩中的 p=0 部分应单独写出

$$< N >= N_0 + \frac{(2m)^{3/2} V}{(2\pi)^2} \int_{0^+}^{\infty} d\varepsilon\ \varepsilon^{\frac{1}{2}} (e^{\beta\varepsilon} - 1)$$

证明 T<Tc 时，N_0/V 是一个宏观量

$\frac{N_0}{V} = n(1 - (\frac{T}{T_c})^{\frac{3}{2}})$