2022학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가

수학영역 정답 및 풀이

[공통: 수학 I ·수학 II]				
01. ④	02. ⑤	03. ①	04. ①	05. ③
06. ④	07. ②	08. ④	09. ⑤	10. ②
11. ②	12. ③	13. ⑤	14. ③	15. ②
16. 2	17. 11	18. 4	19. 6	20. 8
21. 24	22. 61			

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}}$

$=2^{\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})}$

$=2^2$

$=4$

정답 ④

2. **출제의도** : 부정적분을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=\int(3x^2-2x)dx$

$=x^3-x^2+C$ (C는 적분상수)

$f(1)=1^3-1^2+C=1$에서

$C=1$

따라서 $f(x)=x^3-x^2+1$이므로

$f(2)=2^3-2^2+1=5$

정답 ⑤

3. **출제의도** : 삼각함수의 정의를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\tan\theta=\frac{12}{5}$이고 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로

각 θ가 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하는 어떤 원의 교점이

$\mathrm{P}(-5,\ -12)$이다.

따라서 원점 O에 대하여

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}=13$

이므로

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{-12}{13}+\frac{-5}{13}=-\frac{17}{13}$

정답 ①

4. **출제의도** : 함수의 그래프에서 좌극한의 값과 우극한의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to 0-}f(x)=-2$

$\lim_{x\to 2+}f(x)=0$

따라서

$\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 2+}f(x)$

$=-2+0=-2$

정답 ①

5. **출제의도** : 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x)=(x^2+3)f(x)$에서

$g'(x)=2xf(x)+(x^2+3)f'(x)$

따라서

$g'(1)=2f(1)+4f'(1)$
$=2\times2+4\times1$
$=8$

정답 ③

6. **출제의도** : 정적분을 이용하여 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
곡선 $y=3x^2-x$와 직선 $y=5x$의 교점의 x좌표는
$3x^2-x=5x$
$3x^2-6x=0$
$3x(x-2)=0$
$x=0$ 또는 $x=2$
구간 $[0, 2]$에서 직선 $y=5x$가 곡선 $y=3x^2-x$보다 위쪽에 있거나 만나므로 구하는 넓이는

$$S=\int_0^2\{5x-(3x^2-x)\}dx$$
$$=\int_0^2(6x-3x^2)dx$$
$$=\left[3x^2-x^3\right]_0^2$$
$$=3(4-0)-(8-0)$$
$$=4$$

정답 ④

7. **출제의도** : 등차수열에서 주어진 조건을 만족시키는 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$S_3-S_2=a_3$이므로
$a_6=2a_3$
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$2+5d=2(2+2d)$
$2+5d=4+4d$에서
$d=2$
따라서 $a_{10}=2+9\times2=20$이므로

$$S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}$$
$$=\frac{10\times(2+20)}{2}$$
$$=110$$

정답 ②

8. **출제의도** : 함수의 연속의 성질을 이용하여 주어진 함수가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
함수 $f(x)$가 $x=a$를 제외한 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2$이 $x=a$에서 연속이면 함수 $\{f(x)\}^2$은 실수 전체의 집합에서 연속이다.
함수 $\{f(x)\}^2$이 $x=a$에서 연속이려면
$$\lim_{x\to a+}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to a-}\{f(x)\}^2=\{f(a)\}^2$$
이어야 한다.
이때,
$$\lim_{x\to a+}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to a+}(2x-a)^2=a^2$$
$$\lim_{x\to a-}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to a-}(-2x+6)^2=(-2a+6)^2$$
$$\{f(a)\}^2=(2a-a)^2=a^2$$
이므로

$a^2=(-2a+6)^2$에서

$3(a-2)(a-6)=0$

$a=2$ 또는 $a=6$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은

$2+6=8$

정답 ④

9. **출제의도** : 귀납적으로 정의된 수열의 항을 찾을 수 있는가?

정답풀이 :

$a_{12}=\frac{1}{2}$이고 $a_{12}=\frac{1}{a_{11}}$이므로

$a_{11}=2$

또, $a_{11}=8a_{10}$이므로

$a_{10}=\frac{1}{4}$

또, $a_{10}=\frac{1}{a_9}$이므로

$a_9=4$

또, $a_9=8a_8$이므로

$a_8=\frac{1}{2}$

또, $a_8=\frac{1}{a_7}$이므로

$a_7=2$

또, $a_7=8a_6$이므로

$a_6=\frac{1}{4}$

또, $a_6=\frac{1}{a_5}$이므로

$a_5=4$

또, $a_5=8a_4$이므로

$a_4=\frac{1}{2}$

또, $a_4=\frac{1}{a_3}$이므로

$a_3=2$

또, $a_3=8a_2$이므로

$a_2=\frac{1}{4}$

또, $a_2=\frac{1}{a_1}$이므로

$a_1=4$

따라서

$a_1+a_4=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

정답 ⑤

10. **출제의도** : 로그함수의 그래프가 만나는 점이 조건을 만족하도록 하는 n의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

진수 조건에서 $x>0$

$-\log_n(x+3)+1=\log_n\frac{n}{x+3}$이므로

$\log_n x=\log_n\frac{n}{x+3}$에서

$x=\frac{n}{x+3}$

$x^2+3x-n=0$

$f(x)=x^2+3x-n$이라 하면

$f(1)<0$, $f(2)>0$이어야 한다.

$f(1)=4-n<0$에서 $n>4$

$f(2)=10-n>0$에서 $n<10$

따라서 $4<n<10$이므로

n의 값은 $5, 6, 7, 8, 9$이고, 그 합은

$5+6+7+8+9=35$

정답 ②

11. **출제의도** : 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=-f(x+1)+1$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭 이동시킨 후, x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 것이다.

$f(0)=0,\ f(1)=1,\ \int_{0}^{1} f(x)dx=\frac{1}{6}$

이므로

조건 (가)에서

$$\int_{-1}^{0} g(x)dx = \int_{-1}^{0} \{-f(x+1)+1\}dx$$
$$=1-\frac{1}{6}$$
$$=\frac{5}{6}$$

$$\int_{0}^{1} g(x)dx=\int_{0}^{1} f(x)dx=\frac{1}{6}$$

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{0} g(x)dx+\int_{0}^{1} g(x)dx$$
$$=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}$$
$$=1$$

조건 (나)에서

$g(x+2)=g(x)$

이므로

$$\int_{-3}^{2} g(x)dx$$
$$=\int_{-3}^{-1} g(x)dx+\int_{-1}^{1} g(x)dx+\int_{1}^{2} g(x)dx$$
$$=2\int_{-1}^{1} g(x)dx+\int_{-1}^{0} g(x)dx$$
$$=2\times 1+\frac{5}{6}$$
$$=\frac{17}{6}$$

정답 ②

12. **출제의도** : 코사인법칙과 삼각비를 이용하여 변의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 ABD에서

$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BDA}$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=4$이므로

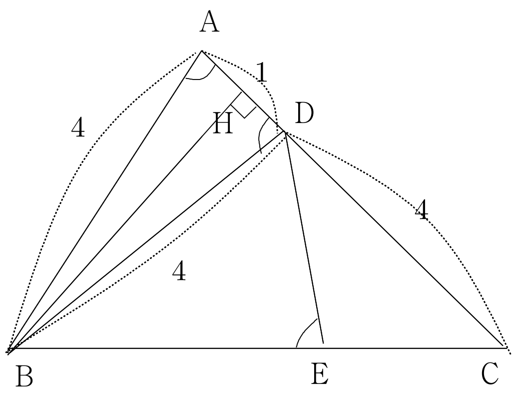
$\overline{\mathrm{BD}}=4$ ……㉠

이때, 점 B에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AB}}\cos(\angle\mathrm{BAC})=4\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

그러므로

$\overline{\mathrm{AD}}=1$

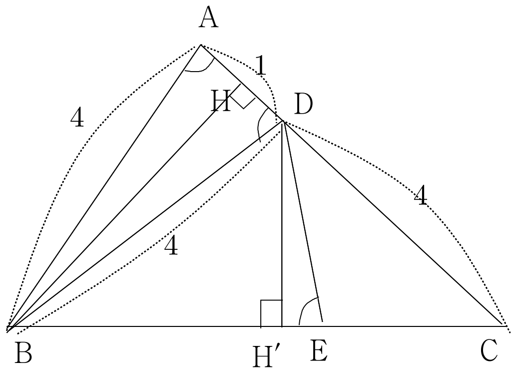


삼각형 BCD는 $\overline{\mathrm{DB}}=\overline{\mathrm{DC}}=4$인 이등변삼각형이다.

점 D에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H′, $\overline{\mathrm{DE}}=x$라 하면

$$\overline{\mathrm{DH'}}=x\sin(\angle\mathrm{H'ED})$$
$$=x\times\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{63}}{8}x \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$



한편, 삼각형 ABC에서

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$
$$-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos(\angle BAC)$$
$$= 4^2+5^2-2\times4\times5\times\frac{1}{8}$$
$$= 36$$

이므로

$\overline{BC}=6$

이때,

$$\overline{BH'} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 3 \quad \cdots\cdots \text{㉢}$$

직각삼각형 DBH′에서 ㉠, ㉡, ㉢을 이용하면

$$4^2 = \left(\frac{\sqrt{63}}{8}x\right)^2 + 3^2$$

$$\frac{63}{64}x^2 = 7$$

$$x^2 = \frac{64}{9}$$

$\overline{DE} = x$이므로 $x>0$

따라서 $\overline{DE} = \frac{8}{3}$

정답 ③

13. 출제의도 : 주기함수에서 함숫값을 구하고, 그 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(ⅰ) $k=1, 4, 9, 16$일 때

$f(1)=1$이고 $f(x+1)=f(x)$이므로

$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=1$에서

$f(\sqrt{k})=1$

(ⅱ) $k\neq 1, 4, 9, 16$일 때

$f(\sqrt{k})=3$

따라서

$\sum_{k=1}^{20} k = 210$이고, $1+4+9+16=30$이므로

$$\sum_{k=1}^{20}\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$$
$$= \sum_{k=1}^{20}\left\{k\times\frac{f(\sqrt{k})}{3}\right\}$$
$$= 30\times\frac{1}{3}+(210-30)\times\frac{3}{3}$$
$$= 10+180=190$$

정답 ⑤

14. 출제의도 : 절댓값을 포함한 함수의 미분가능성을 판단할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f'(x) = 3x^2-6x-9$$
$$= 3(x+1)(x-3)$$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $f(-1)=-7$을 갖고, $x=3$에서 극솟값 $f(3)=-39$를 갖는다.

조건 (가)에서

$xg(x)=|xf(x-p)+qx|$

이므로

$$g(x)=\begin{cases}|f(x-p)+q| & (x>0)\\ -|f(x-p)+q| & (x<0)\end{cases}$$

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$|f(-p)+q|=-|f(-p)+q|$

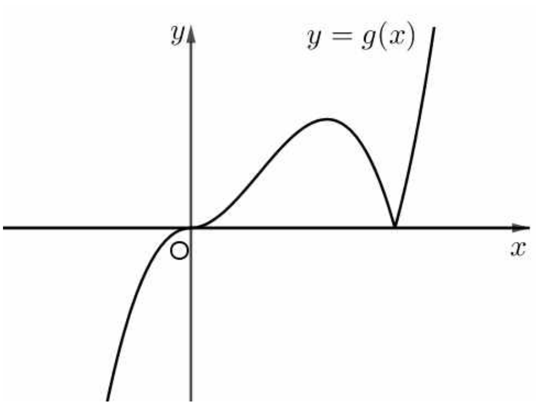
즉, $|f(-p)+q|=0$이어야 한다.

한편, 함수 $y=|f(x-p)+q|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동시킨 후, $y<0$인 부분에 그려진 부분을 x축에 대하여 대칭이동시킨 것이다.

이때, p, q가 모두 양수이고 조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수가 1이므로

$p=1$, $q=7$이어야 한다.

따라서 $p+q=1+7=8$



정답 ③

15. 출제의도 :

삼각함수의 그래프를 이해하고 이를 이용하여 삼각함수가 포함된 방정식의 근에 관련된 문제를 추론할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ.

방정식

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2}-t\right)=0$$

에서

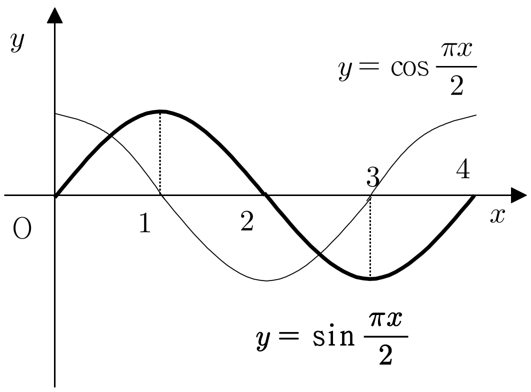
$\sin\frac{\pi x}{2}=t$ 또는 $\cos\frac{\pi x}{2}=t$

이 방정식의 실근은 두 함수

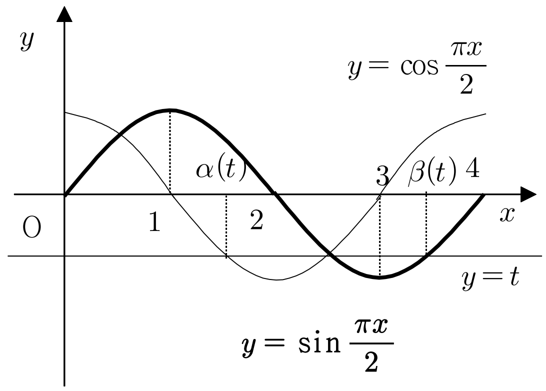
$y=\sin\frac{\pi x}{2}$, $y=\cos\frac{\pi x}{2}$의 그래프와

$y=t$와의 교점의 x좌표이다.

한편, 두 함수 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$, $y=\cos\frac{\pi x}{2}$의 주기가 모두 4이므로 다음과 같다.



$-1\le t<0$이면 직선 $y=t$와 $\alpha(t)$, $\beta(t)$는 다음 그림과 같다.



이때, 함수 $y=\cos\frac{\pi x}{2}$의 그래프는 함수 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$의 그래프를 평행이동시키면 겹쳐질 수 있고 함수 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$의 그래프는 직선 $x=1$, $x=3$에 대하여 대칭이고 점 $(2,0)$에 대하여 대칭이다.

그러므로

$\alpha(t)=1+k\ (0<k\le 1)$

로 놓으면

$\beta(t)=4-k$

그러므로

$\alpha(t)+\beta(t)=5$ <참>

ㄴ.

실근 $\alpha(t)$, $\beta(t)$는 집합 $\{x|0\le x<4\}$의 원소이므로

$\beta(0)=3,\ \alpha(0)=0$

그러므로 주어진 식은

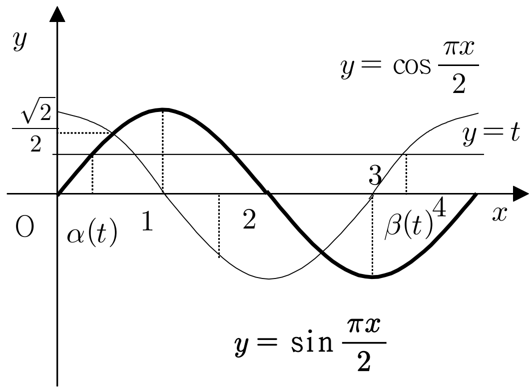
$\{t|\beta(t)-\alpha(t)=\beta(0)-\alpha(0)\}$

$=\{t|\beta(t)-\alpha(t)=3\}$

(ⅰ) $0\le t\le\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때,

$t=0$이면 $\beta(0)-\alpha(0)=3-0=3$

$t\neq 0$이면 다음 그림과 같다.



이때,

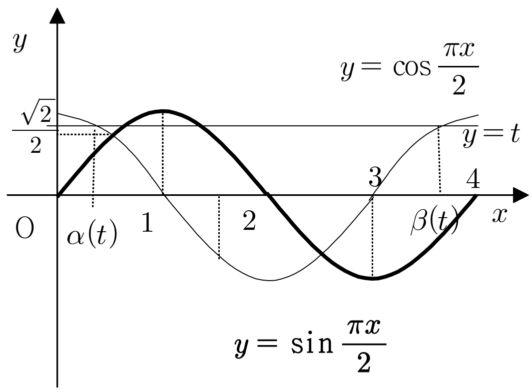
$\alpha(t)=k\ \left(0<k\le\frac{1}{2}\right)$

이라 하면

$\beta(t)=3+k$

그러므로 $\beta(t)-\alpha(t)=3$

(ⅱ) $\frac{\sqrt{2}}{2}<t<1$일 때,



이때,

$\alpha(t)=k\ \left(0<k<\frac{1}{2}\right)$

이라 하면

$\beta(t)=4-k$

그러므로

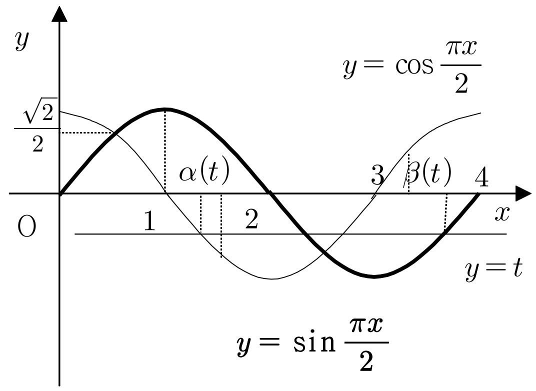
$\beta(t)-\alpha(t)=4-2k\ (0<2k<1)$

(ⅲ) $t=1$일 때,

$\alpha(1)=0,\ \beta(1)=1$이므로

$\beta(1)-\alpha(1)=1$

(iv) $-1 \le t < 0$일 때,



$1 < \alpha(t) \le 2$, $3 \le \beta(t) < 4$이므로

$\beta(t)-\alpha(t) < 3$

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에서

$\{t | \beta(t)-\alpha(t)=3\}$

$=\left\{t \middle| 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ <참>

ㄷ, $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$이기 위해서는

$$0 < t_1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < t_2$$

이때, $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)=\alpha$라 하면

$t_1=\sin\frac{\pi}{2}\alpha$, $t_2=\cos\frac{\pi}{2}\alpha$

이때, $t_2=t_1+\frac{1}{2}$이므로

$\cos\frac{\pi}{2}\alpha=\sin\frac{\pi}{2}\alpha+\frac{1}{2}$

이 식을 $\cos^2\frac{\pi}{2}\alpha+\sin^2\frac{\pi}{2}\alpha=1$에 대입하면

$2\sin^2\frac{\pi}{2}\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\alpha+\frac{1}{4}=1$

$8\sin^2\frac{\pi}{2}\alpha+4\sin\frac{\pi}{2}\alpha-3=0$

$\sin\frac{\pi}{2}\alpha=\frac{-2\pm\sqrt{28}}{8}$

이때, $\sin\frac{\pi}{2}\alpha>0$이므로

$\sin\frac{\pi}{2}\alpha=\frac{-1+\sqrt{7}}{4}$

그러므로

$t_1=\frac{-1+\sqrt{7}}{4}$,

$t_2=t_1+\frac{1}{2}=\frac{1+\sqrt{7}}{4}$

따라서

$t_1\times t_2=\frac{(-1+\sqrt{7})(1+\sqrt{7})}{16}=\frac{3}{8}$ <거짓>

정답 ②

16. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\log_4\frac{2}{3}+\log_4 24$

$=\log_4\left(\frac{2}{3}\times 24\right)$

$=\log_4 16$

$=\log_4 4^2$

$=2$

정답 2

17. 출제의도 : 다항함수의 극솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이다.

따라서 $a=1$

$f(a)=f(1)=1^3-3\times1+12=10$

이므로

$a+f(a)=1+f(1)=1+10=11$

정답 11

18. **출제의도** : 등비수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r, $a_1=a$라 하면 $a_2=36$에서

$ar=36$ …… ㉠

또, $a_7=\dfrac{1}{3}a_5$에서

$ar^6=\dfrac{1}{3}ar^4$

$r^2=\dfrac{1}{3}$ …… ㉡

따라서 ㉠과 ㉡에서

$a_6=ar^5$

$=ar\times r^4$

$=36\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$

$=4$

정답 4

19. **출제의도** : 수직선 위를 움직이는 점의 속도를 이용하여 점의 위치의 변화량을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

시각 t에서 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면

시각 $t=0$에서 점 P의 위치가 0이므로

$v(t)=3t^2-4t+k$에서

$x(t)=t^3-2t^2+kt$

이때 $x(1)=-3$에서

$-1+k=-3$, $k=-2$

따라서 $x(t)=t^3-2t^2-2t$이고,

$x(3)=27-18-6=3$이다.

그러므로 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은

$x(3)-x(1)=3-(-3)=6$

정답 6

20. **출제의도** : 정적분으로 나타내어진 함수가 극값을 하나만 갖도록 하는 상수 a의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에서

$f'(x)=3x^2-24x+45$

$=3(x-3)(x-5)$

$g(x)=\displaystyle\int_a^x\{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4dt$

$$=f(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt-\int_a^x \{f(t)\}^5 dt$$

$$g'(x)=f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt+\{f(x)\}^5-\{f(x)\}^5$$

$$=f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt$$

$g'(x)=0$에서

$f'(x)=0$ 또는 $x=a$

(ⅰ) $a\neq 3$, $a\neq 5$일 때,

$g'(x)=0$에서

$x=3$ 또는 $x=5$ 또는 $x=a$

함수 $g(x)$는 $x=3$, $x=5$, $x=a$에서 모두 극값을 갖는다.

(ⅱ) $a=3$일 때

$g'(x)=0$에서

$x=3$ 또는 $x=5$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $g(x)$는 $x=5$에서만 극값을 갖는다.

(ⅲ) $a=5$일 때

$g'(x)=0$에서

$x=3$ 또는 $x=5$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$		$\nearrow$

함수 $g(x)$는 $x=3$에서만 극값을 갖는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

함수 $g(x)$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 값은 3 또는 5이다.

따라서 모든 a의 값의 합은

$3+5=8$

정답 8

21. **출제의도** : a의 n제곱근의 의미를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 최솟값이 음수이므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ⅰ) n이 홀수일 때,

방정식 $x^n=64$의 실근의 개수는 1이다.

그러므로 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$의 근이 모두 중근일 수 없다.

(ⅱ) n이 짝수일 때,

방정식 $x^n=64$의 실근은

$x=\sqrt[n]{64}$ 또는 $x=-\sqrt[n]{64}$

즉,

$x=2^{\frac{6}{n}}$ 또는 $x=-2^{\frac{6}{n}}$

이때, 조건 (가)를 만족하기 위해서는

$$f(x)=\left(x-2^{\frac{6}{n}}\right)\left(x+2^{\frac{6}{n}}\right) \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편, 조건 (나)에서 함수$f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다. ㉠에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖고 그 값은

$-2^{\frac{6}{n}}\times 2^{\frac{6}{n}}=-2^{\frac{12}{n}}$

이 값이 음의 정수이기 위해서는 n의 값은

2, 4, 6, 12

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 n의 모든 값의 합은

$2+4+6+12=24$

정답 24

22. **출제의도** : 방정식의 실근의 개수를 이용하여 조건을 만족시키는 삼차함수의 그래프를 찾고, 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하면

$f(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta)$

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서

$x-f(x)=\alpha$ 또는 $x-f(x)=\beta$

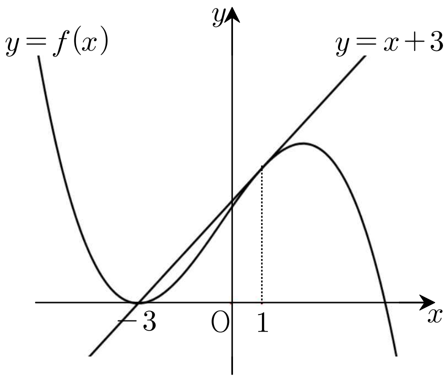
를 만족시키는 서로 다른 x의 값의 개수가 3이어야 한다.

즉 $f(x)=x-\alpha$ 또는 $f(x)=x-\beta$에서 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=x-\alpha$, $y=x-\beta$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 3이어야 한다.

한편, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 4)$에서의 접선의 기울기가 1이므로

접선의 방정식은 $y=x+3$

그런데 $f(0)>0$, $f'(0)>1$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x+3$는 그림과 같다.



$f(x)-(x+3)=k(x+3)(x-1)^2$이므로

$f(x)=k(x+3)(x-1)^2+x+3$

$f'(x)=k(x-1)^2+k(x+3)\times 2(x-1)+1$

…… ㉠

이때, $f'(-3)=0$이므로

㉠에 $x=-3$을 대입하면

$0=k\times 16+1$에서 $k=-\dfrac{1}{16}$

따라서

$f(x)=-\dfrac{1}{16}(x+3)(x-1)^2+x+3$이므로

$f(0)=-\dfrac{1}{16}\times 3\times 1+3=\dfrac{45}{16}$

즉 $p=16$, $q=45$이므로

$p+q=16+45=61$

정답 61

[선택: 미적분]
23. ② 24. ② 25. ④ 26. ③ 27. ④
28. ① 29. 17 30. 11

23. **출제의도** : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}{1+\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1+1}{1}=2$$

정답 ②

24. **출제의도** : 매개변수로 나타낸 함수의 도함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\frac{dx}{dt}=e^t-\sin t$, $\frac{dy}{dt}=\cos t$ 이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\cos t}{e^t-\sin t}$$

따라서 $t=0$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{1}{1-0}=1$$

정답 ②

25. **출제의도** : 두 접선이 이루는 예각의 크기 θ에 대하여 $\tan\theta$의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=e^{|x|}$는 y축에 대하여 대칭이다.

$x\geq 0$일 때 $y=e^x$이고 접점을 (t, e^t)이라 하면 $y'=e^x$이므로 접선의 방정식은

$y-e^t=e^t(x-t)$

이 접선이 원점을 지나므로

$-e^t=e^t(-t)$, $t=1$

따라서 접선의 기울기는 e이고 이 접선과 y축에 대하여 대칭인 접선의 기울기는 $-e$이다.

$$\tan\theta=\frac{-e-e}{1+(-e)\times e}=\frac{-2e}{1-e^2}=\frac{2e}{e^2-1}$$

정답 ④

26. **출제의도** : 한없이 반복되는 도형에서 넓이의 합을 등비급수를 활용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$S_1=\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$$

$\angle O_1A_2O_2=\frac{\pi}{4}$이므로 삼각형 $O_1A_2O_2$에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{O_2A_2}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\overline{O_1O_2}}{\sin\frac{\pi}{4}},\quad \frac{\overline{O_2A_2}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\overline{O_2A_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

따라서 닮음비는 $1:\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로 넓이의

비는 $1:\frac{1}{2}$이다.

즉, 구하는 극한값은 첫째항이 $\frac{\pi}{8}$이고, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비급수의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{8}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

정답 ③

27. 출제의도 : 방정식의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3일 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$e^x=k\sin x$ 에서 $\frac{1}{k}=\frac{\sin x}{e^x}\cdots$ ㉠이므로

$h(x)=\frac{\sin x}{e^x}$라 하면

$$h'(x)=\frac{e^x\cos x-e^x\sin x}{e^{2x}}=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}$$

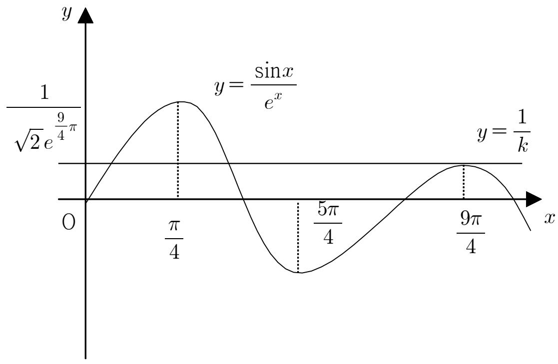
따라서 $x>0$에서 $h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi,\ \cdots$$

이므로 함수 $y=h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$
$h'(x)$	1	+	0	-	0	+
$h(x)$	0	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$	↘	$-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi}}$	↗

x	$\cdots$	$\frac{9}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{13}{4}\pi$	$\cdots$
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}}$	↘	$-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{13}{4}\pi}}$	↗



이때 ㉠의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3이기 위해서는 그림과 같이 직선 $y=\frac{1}{k}$이 $x=\frac{9}{4}\pi$에서 곡선 $y=\frac{\sin x}{e^x}$와 접해야 하므로

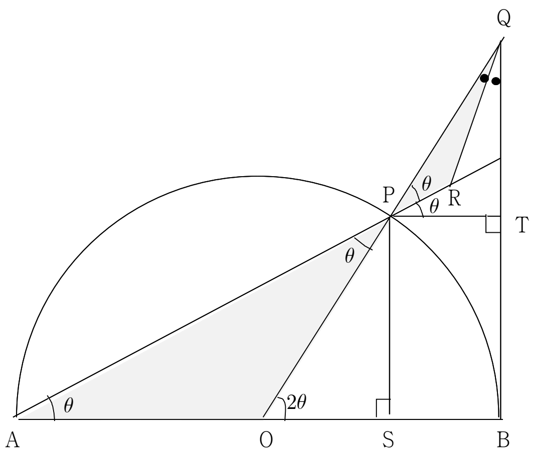
$$\frac{1}{k}=\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}}$$

따라서 $k=\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}$

정답 ④

28. 출제의도 : 도형에서 여러 가지 조건을 이용하여 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin(\pi-2\theta)=\frac{\sin2\theta}{2}$$

또한, $\angle\mathrm{APO}=\angle\mathrm{QPR}=\theta$이므로

점 P에서 두 선분 AB, BQ에 내린 수선의 발을 각각 S, T라 하면

$\angle\mathrm{QPT}=2\theta$

즉, 점 R는 삼각형 PTQ의 내심이다.

이때,

$\overline{\mathrm{OS}}=\cos2\theta$, $\overline{\mathrm{PS}}=\sin2\theta$, $\overline{\mathrm{BQ}}=\tan2\theta$

이므로

$\overline{\mathrm{PT}}=1-\cos2\theta$

$\overline{\mathrm{QT}}=\tan2\theta-\sin2\theta=\tan2\theta(1-\cos2\theta)$

이고

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{\cos2\theta}-1=\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}$$

따라서 삼각형 PTQ의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\frac{1}{2}\times(1-\cos2\theta)\times\tan2\theta(1-\cos2\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\times r\times\left\{\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}+1-\cos2\theta\right.$$
$$\left.+\tan2\theta(1-\cos2\theta)\right\}$$

에서

$$r=\frac{(1-\cos2\theta)\sin2\theta}{1+\sin2\theta+\cos2\theta}$$

이다.

그러므로

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\times\frac{(1-\cos2\theta)\sin2\theta}{1+\sin2\theta+\cos2\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{(1-\cos2\theta)^2\sin2\theta}{\cos2\theta(1+\sin2\theta+\cos2\theta)}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sin^4 2\theta\times\sin2\theta}{\cos2\theta(1+\sin2\theta+\cos2\theta)(1+\cos2\theta)^2}$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^4\times f(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\left(\frac{\sin2\theta}{2\theta}\right)^4\times16\right.$$
$$\left.\times\frac{1}{\cos2\theta(1+\sin2\theta+\cos2\theta)(1+\cos2\theta)^2}\right\}$$

$$=1^4\times16\times\frac{1}{8}=2$$

정답 ①

29. **출제의도** : 여러 가지 함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f'(x)=\frac{2t\ln x}{x}-2x=\frac{2t\ln x-2x^2}{x}$$

이고 $f(x)$는 $x=k$에서 극대이므로

$2t\ln k-2k^2=0$

$t\ln k=k^2$

이때 실수 k의 값을 $g(t)$라 했으므로

$t\ln g(t)=\{g(t)\}^2$ ⋯⋯㉠

그런데 $g(\alpha)=e^2$ 이므로

㉠에 $t=\alpha$를 대입하면

$\alpha\ln g(\alpha)=\{g(\alpha)\}^2$

$2\alpha=e^4$, $\alpha=\dfrac{e^4}{2}$

또한, ㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$\ln g(t)+t\times\frac{g'(t)}{g(t)}=2g(t)\times g'(t)$$

이 식에 $t=\alpha$를 대입하면

$$\ln g(\alpha)+\alpha\times\frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}=2g(\alpha)\times g'(\alpha)$$

$$2+\frac{e^4}{2}\times\frac{g'(\alpha)}{e^2}=2e^2\times g'(\alpha)$$

$$\frac{3}{2}e^2\times g'(\alpha)=2$$

$$g'(\alpha)=\frac{4}{3e^2}$$

$$\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{e^4}{2}\times\frac{16}{9e^4}=\frac{8}{9}$$

따라서 $p=9$, $q=8$ 이므로

$p+q=17$

정답 17

30. **출제의도** : 여러 가지 함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})$과 직선 $y=x+t$가 만나는 두 점을

$\mathrm{P}(\alpha,\alpha+\mathrm{t})$, $\mathrm{Q}(\beta,\beta+\mathrm{t})$ $(\alpha<\beta)$

로 놓으면

$$f(t)=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2}$$
$$=\sqrt{2}(\beta-\alpha)$$

이때, α, β는 방정식

$\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})=x+t$

의 서로 다른 두 실근이므로

$1+e^{2x}-e^{-2t}=e^{x+t}$

$e^{2x}-e^t\times e^x+1-e^{-2t}=0$

$e^x=k(k>0)$로 놓으면

$k^2-e^tk+1-e^{-2t}=0$

따라서,

$$k=\frac{e^t\pm\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2}$$

이므로

$$e^\alpha=\frac{e^t-\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2}$$

$$e^\beta=\frac{e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2}$$

즉

$$\alpha=\ln\frac{e^t-\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2}$$

$$\beta=\ln\frac{e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2}$$

이므로

$\beta-\alpha$

$$=\ln\frac{e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{e^t-\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}$$

$$=\ln\frac{(e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4})^2}{4(1-e^{-2t})}$$

$$=2\ln(e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4})-\ln4-\ln(1-e^{-2t})$$

따라서

$$g(t)=2\ln(e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4})$$
$$-\ln4-\ln(1-e^{-2t})$$

라 하면

$$g'(t)=2\times\frac{e^t+\dfrac{2e^{2t}-8e^{-2t}}{2\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}}{e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}$$
$$-\frac{2e^{-2t}}{1-e^{-2t}}$$

이므로

$$g'(\ln2)=2\times\frac{2+\dfrac{8-2}{2}}{2+1}-\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$$

즉, $f(t)=\sqrt{2}g(t)$에서

$$f'(\ln2)=\sqrt{2}g'(\ln2)=\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

이므로 $p=3$, $q=8$

따라서 $p+q=11$

정답 11