

■ [공통: 수학 I·수학 II]

01. ② 02. ⑤ 03. ④ 04. ② 05. ②  
06. ② 07. ③ 08. ① 09. ⑤ 10. ①  
11. ① 12. ② 13. ④ 14. ⑤ 15. ①  
16. 7 17. 5 18. 29 19. 4  
20. 15 21. 31 22. 8

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\begin{aligned} 32^{\frac{1}{4}} \times 4^{-\frac{1}{8}} &= (2^5)^{\frac{1}{4}} \times (2^2)^{-\frac{1}{8}} \\ &= 2^{\frac{5}{4}} \times 2^{-\frac{2}{8}} = 2^{\frac{5}{4} - \frac{1}{4}} = 2 \end{aligned}$$

정답 ②

2. 출제의도 : 미분계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 5 \text{ 이므로}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1)$$

$$= 3 \times 1^2 + 6 \times 1 = 9$$

정답 ⑤

3. 출제의도 : 주어진 조건에서 등비수열의 첫째항과 공비를 찾아 일반항을 구할 수 있는가?

풀이 :

등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$ , 공비를  $r$ 이라 하면

$$a_2 a_3 = ar \times ar^2 = a^2 r^3 = 2 \quad \dots\dots ㉠$$

$$a_4 = ar^3 = 4 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡으로 나누면

$$a = \frac{1}{2}$$

이것을 ㉡에 대입하면

$$\frac{1}{2} r^3 = 4 \text{에서 } r^3 = 8$$

$r$ 은 실수이므로

$$r = 2$$

따라서

$$a_6 = ar^5 = \frac{1}{2} \times 2^5 = 2^4 = 16$$

정답 ④

4. 출제의도 : 함수의 그래프를 이해하고 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$= -2 + 1$$

$$= -1$$

정답 ②

5. 출제의도 : 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

$$f(x) = (x+1)(x^2+x-5) \text{에서}$$

$$f'(x) = (x^2+x-5) + (x+1)(2x+1)$$

따라서

$$f'(2) = (2^2+2-5) + (2+1)(2 \times 2+1)$$

$$= 1+15$$

$$= 16$$

정답 ②

6. 출제의도 : 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\cos(\pi+\theta) = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{에서}$$

$$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta \text{이므로}$$

$$-\cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \text{ 즉 } \cos\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{에서 } \sin\theta > 0 \text{이므로}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{1-\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

따라서

$$\sin\theta + \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{5} + \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

정답 ②

7. 출제의도 : 함수가 연속일 조건을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\text{함수 } f(x) = \begin{cases} (x-a)^2 & (x < 4) \\ 2x-4 & (x \geq 4) \end{cases}$$

가  $x=4$ 에서 연속이면 함수  $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수  $f(x)$ 가  $x=4$ 에서 연속이면

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4)$$

이다. 이때

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (x-a)^2$$

$$= (4-a)^2$$

$$= a^2 - 8a + 16$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (2x-4) = 4$$

$$f(4) = 4$$

이므로

$$a^2 - 8a + 16 = 4$$

$$a^2 - 8a + 12 = 0$$

$$(a-2)(a-6) = 0$$

$$a = 2 \text{ 또는 } a = 6$$

따라서 조건을 만족시키는 모든 상수  $a$

의 값의 곱은

$$2 \times 6 = 12$$

정답 ③

8. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 상수를 구할 수 있는가?

풀이 :

두 수  $\log_2 a, \log_a 8$ 의 합이 4이므로

$$\log_2 a + \log_a 8 = 4 \text{에서}$$

$$\log_2 a + 3\log_a 2 = 4$$

$$\log_2 a + \frac{3}{\log_2 a} = 4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$\log_2 a = X$ 라 하면  $a > 2$ 이므로  $X > 1$

$\textcircled{7}$ 에서

$$X + \frac{3}{X} = 4, \quad X^2 - 4X + 3 = 0$$

$$(X-1)(X-3) = 0$$

$X > 1$ 이므로  $X = 3$

즉,  $\log_2 a = 3$ 에서  $a = 2^3 = 8$

한편, 두 수  $\log_2 a, \log_a 8$ 의 곱이  $k$ 이므로

$$k = \log_2 a \times \log_a 8 = \log_2 a \times 3\log_a 2$$

$$= \log_2 a \times \frac{3}{\log_2 a} = 3$$

따라서  $a + k = 8 + 3 = 11$

정답 ①

9. 출제의도 : 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$f(x) = x^2 + x$ 이므로

$$5 \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 (5x + f(x)) dx$$

$$= 5 \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 5x dx - \int_0^1 f(x) dx$$

$$= 4 \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 5x dx$$

$$= 4 \int_0^1 (x^2 + x) dx - \int_0^1 5x dx$$

$$= \int_0^1 (4x^2 + 4x) dx - \int_0^1 5x dx$$

$$= \int_0^1 (4x^2 - x) dx$$

$$= \left[ \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

[다른 풀이]

$f(x) = x^2 + x$ 이므로

$$5 \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 (5x + f(x)) dx$$

$$= 5 \left[ \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 - \left[ \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^1$$

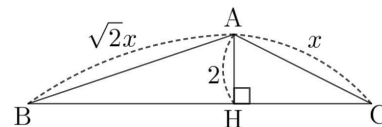
$$= 5 \times \frac{5}{6} - \frac{10}{3} = \frac{5}{6}$$

정답 ⑤

10. 출제의도 : 사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 :

$\overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{2} : 1$ 이므로  $\overline{AC} = x$ 라 하면  $\overline{AB} = \sqrt{2}x$



삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를  $R$ 이라 하면 이 외접원의 넓이가  $50\pi$

이므로  $\pi R^2 = 50\pi$ 에서  $R = 5\sqrt{2}$

직각삼각형 AHC에서

$$\sin(\angle ACH) = \frac{2}{x}, \text{ 즉 } \sin C = \frac{2}{x}$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin C} = 2R, \text{ 즉 } \overline{AB} = 2R \sin C$$

$$\sqrt{2}x = 2 \times 5 \sqrt{2} \times \frac{2}{x}, x^2 = 20, x = 2\sqrt{5}$$

따라서  $\overline{AB} = \sqrt{2}x = 2\sqrt{10}$  이므로 직각삼각형 ABH에서

$$\begin{aligned} \overline{BH} &= \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AH}^2} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{10})^2 - 2^2} = 6 \end{aligned}$$

정답 ①

11. 출제의도 : 위치, 속도, 가속도 사이의 관계 및 미분을 이용하여 가속도를 구할 수 있는가?

풀이 :

$$x_1 = t^2 + t - 6,$$

$$x_2 = -t^3 + 7t^2$$

이므로

$$x_1 = x_2 \text{에서}$$

$$t^2 + t - 6 = -t^3 + 7t^2$$

$$t^3 - 6t^2 + t - 6 = 0$$

$$t^2(t-6) + t-6 = 0$$

$$(t-6)(t^2+1) = 0$$

$$t \geq 0 \text{이므로}$$

$$t = 6$$

즉, 두 점 P, Q의 위치가 같아지는 순간의 시각은  $t=6$ 이다.

한편, 두 점 P, Q의 시각  $t$ 에서의 속도를 각각  $v_1, v_2$ 라 하면

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = 2t + 1,$$

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = -3t^2 + 14t$$

두 점 P, Q의 시각  $t$ 에서의 가속도를 각각  $a_1, a_2$ 라 하면

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = 2,$$

$$a_2 = \frac{dv_2}{dt} = -6t + 14$$

시각  $t=6$ 에서의 두 점 P, Q의 가속도가 각각  $p, q$ 이므로

$$p = 2,$$

$$q = -6 \times 6 + 14 = -22$$

따라서

$$p - q = 2 - (-22) = 24$$

정답 ①

12. 출제의도 : 등차수열의 일반항을 이용하여 새롭게 정의된 수열의 합을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$b_1 = \sum_{k=1}^1 (-1)^{k+1} a_k = a_1$$

$$b_2 = \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2$$

이때 등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차를  $d$ 라 하면

$$b_2 = -2 \text{이므로}$$

$$a_1 - a_2 = -d = -2$$

$$\text{따라서 } d = 2$$

또한

$$b_3 = \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} a_k$$

$$= a_1 - a_2 + a_3$$

$$= -d + a_3$$

$$= a_3 - 2$$

$$b_7 = \sum_{k=1}^7 (-1)^{k+1} a_k$$

$$= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7$$

$$= -3d + a_7$$

$$= a_7 - 6$$

이므로  $b_3 + b_7 = 0$  에서

$$(a_3 - 2) + (a_7 - 6)$$

$$= a_3 + a_7 - 8$$

$$= (a_1 + 2 \times 2) + (a_1 + 6 \times 2) - 8$$

$$= (a_1 + 4) + (a_1 + 12) - 8$$

$$= 2a_1 + 8 = 0$$

따라서  $a_1 = -4$

즉  $a_n = -4 + (n-1) \times 2 = 2n - 6$  이므로

$$b_1 = a_1 = -4$$

$$b_2 = a_1 - a_2 = -2$$

$$b_3 = a_1 - a_2 + a_3 = -2$$

$$b_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = -4$$

$$b_5 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 = 0$$

$$b_6 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 = -6$$

$$b_7 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 = 2$$

$$b_8 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_7 - a_8 = -8$$

$$b_9 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_7 - a_8 + a_9 = 4$$

따라서

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_9$$

$$= -4 + (-2) + (-2) + (-4) + 0 + (-6)$$

$$+ 2 + (-8) + 4$$

$$= -20$$

정답 ②

[다른풀이]

$$b_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

$$= -dn = -2n$$

$$b_{2n-1} = a_1 + (a_3 - a_2) + (a_5 - a_4) + \dots$$

$$+ (a_{2n-1} - a_{2n-2})$$

$$= a_1 + (n-1)d = -4 + 2(n-1) = 2n - 6$$

따라서

$$\sum_{n=1}^9 b_n = \sum_{n=1}^5 b_{2n-1} + \sum_{n=1}^4 b_{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^5 (2n-6) + \sum_{n=1}^4 (-2n)$$

$$= 2 \times \frac{5 \times 6}{2} - 6 \times 5 - 2 \times \frac{4 \times 5}{2}$$

$$= 30 - 30 - 20 = -20$$

13. 출제의도 : 정적분을 이용하여 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

풀이 :

함수  $y=f(x)$ 의 그래프는  $y$ 축에 대하여 대칭이므로 곡선  $y=f(x)$ 와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이는  $y$ 축에 의하여 이등분된다.

이때  $A=2B$ 이므로

$$\int_0^k (-x^2 + 2x + 6) dx = 0$$

이어야 한다. 즉,

$$\left[ -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 6x \right]_0^k = 0$$

$$-\frac{1}{3}k^3 + k^2 + 6k = 0$$

$$-\frac{1}{3}k(k+3)(k-6) = 0$$

$$k > 4 \text{ 이므로 } k = 6$$

정답 ④

14. 출제의도 : 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

풀이 :

두 점  $A_n, B_n$ 의 좌표를 각각

$$A_n(a_n, 2^{a_n}), B_n(b_n, 2^{b_n}) \quad (a_n < b_n)$$

이라 하면 조건 (가)에 의하여

$$\frac{2^{b_n} - 2^{a_n}}{b_n - a_n} = 3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

조건 (나)에 의하여

$$(b_n - a_n)^2 + (2^{b_n} - 2^{a_n})^2 = 10n^2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$ 에서  $2^{b_n} - 2^{a_n} = 3(b_n - a_n)$ 이므로 이것을  $\textcircled{8}$ 에 대입하여 정리하면

$$(b_n - a_n)^2 = n^2$$

$a_n < b_n$ 이므로  $b_n - a_n = n$ , 즉  $a_n = b_n - n$

이것을  $\textcircled{7}$ 에 대입하여 정리하면

$$2^{b_n} - 2^{b_n - n} = 3n$$

이므로

$$2^{b_n} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 3n$$

$$2^{b_n} = 3n \times \frac{2^n}{2^n - 1}$$

한편, 곡선  $y = 2^x$ 과 곡선  $y = \log_2 x$ 는 직선  $y = x$ 에 대하여 대칭이므로  $x_n$ 은 점  $B_n$ 의  $y$ 좌표와 같다.

따라서

$$x_n = 2^{b_n} = 3n \times \frac{2^n}{2^n - 1}$$

이므로

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6 + 8 + \frac{72}{7} = \frac{170}{7}$$

정답 ⑤

15. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 다항함수를 구하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

조건 (가)의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$xf(x) + xg(x) = 12x^3 + 24x^2 - 6x$$

$$f(x) + g(x) = 12x^2 + 24x - 6 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때 조건 (나)에서  $f(x) = xg'(x)$ 이므로

$\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$xg'(x) + g(x) = 12x^2 + 24x - 6$$

$$\{xg(x)\}' = 12x^2 + 24x - 6$$

$$xg(x) = \int (12x^2 + 24x - 6)dx$$

$$= 4x^3 + 12x^2 - 6x + C$$

(단,  $C$ 는 적분상수)

이때  $g(x)$ 는 다항함수이므로  $C = 0$

즉  $xg(x) = 4x^3 + 12x^2 - 6x$ 이므로

$$g(x) = 4x^2 + 12x - 6$$

따라서

$$\int_0^3 g(x)dx$$

$$= \int_0^3 (4x^2 + 12x - 6)dx$$

$$= \left[ \frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - 6x \right]_0^3$$

$$= 36 + 54 - 18$$

$$= 72$$

정답 ①

16. 출제의도 : 로그를 포함하는 방정식의 근을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\begin{aligned} & \log_3(x+2) - \log_{\frac{1}{3}}(x-4) \\ &= \log_3(x+2) - \log_{3^{-1}}(x-4) \\ &= \log_3(x+2) + \log_3(x-4) \\ &= \log_3(x+2)(x-4) \end{aligned}$$

이므로

$$\log_3(x+2)(x-4) = 3$$

$$(x+2)(x-4) = 3^3$$

$$x^2 - 2x - 35 = 0$$

$$(x-7)(x+5) = 0$$

진수 조건에 의해서  $x > 4$

따라서  $x = 7$

정답 7

17. 출제의도 : 함수의 부정적분과 적분상수를 구하여 함숫값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$f'(x) = 6x^2 + 2x + 1$ 이므로  $f'(x)$ 의 한 부정적분은

$$\int (6x^2 + 2x + 1) dx = 2x^3 + x^2 + x + C$$

(단,  $C$ 는 적분상수)

이때  $f(0) = 1$ 이므로  $C = 1$ 에서

$$f(x) = 2x^3 + x^2 + x + 1$$

따라서  $f(1) = 5$

정답 5

18. 출제의도 :  $\sum$ 의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\sum_{k=1}^{10} k a_k = 36 \text{에서}$$

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 10a_{10} = 36 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$\sum_{k=1}^9 k a_{k+1} = 7 \text{에서}$$

$$a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \cdots + 9a_{10} = 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A} - \textcircled{B}$ 을 하면

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} &= \sum_{k=1}^{10} a_k \\ &= 36 - 7 = 29 \end{aligned}$$

정답 29

[다른 풀이]

$$\sum_{k=1}^9 k a_{k+1} = 7 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^9 k a_{k+1} &= \sum_{k=1}^9 \{ (k+1) a_{k+1} - a_{k+1} \} \\ &= \sum_{k=1}^9 (k+1) a_{k+1} - \sum_{k=1}^9 a_{k+1} \\ &= \sum_{k=2}^{10} k a_k - \sum_{k=2}^{10} a_k = 7 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \sum_{k=2}^{10} k a_k = \sum_{k=2}^{10} a_k + 7$$

$$\sum_{k=1}^{10} k a_k = 36 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} k a_k &= a_1 + \sum_{k=2}^{10} k a_k \\ &= a_1 + \sum_{k=2}^{10} a_k + 7 \\ &= \sum_{k=1}^{10} a_k + 7 = 36 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^{10} a_k = 36 - 7 = 29$$

19. 출제의도 : 미분을 이용하여 함수의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있는가?

풀이 :

함수  $f(x) = x^3 + ax^2 - 9x + b$ 가  $x = 1$ 에서 극소이므로

$$f'(1) = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 9$$

이므로

$$f'(1) = 3 + 2a - 9 = 0$$

에서

$$a = 3$$

한편,  $f'(x) = 0$ 에서

$$3x^2 + 6x - 9 = 0$$

$$3(x+3)(x-1) = 0$$

$$x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	$\dots$	$-3$	$\dots$	$1$	$\dots$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수  $f(x)$ 는  $x = -3$ 에서 극대이고, 극댓값이 28이다.

$$f(-3) = (-3)^3 + 3 \times (-3)^2 - 9 \times (-3) + b = 27 + b$$

이므로

$$27 + b = 28$$

에서

$$b = 1$$

따라서

$$a + b = 3 + 1 = 4$$

정답 4

20. 출제의도 : 삼각함수의 그래프를 이용하여 방정식을 만족시키는 실수의 값의 합을 구할 수 있는가?

풀이 :

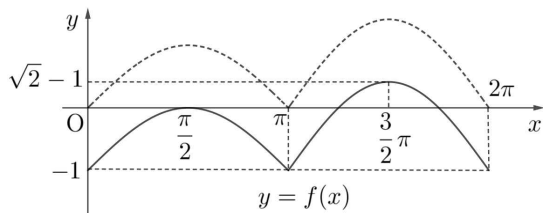
$0 \leq x < \pi$ 에서 함수  $y = \sin x - 1$ 의 그래프는 이 구간에서 함수  $y = \sin x$ 의 그래프를  $y$ 축의 방향으로  $-1$ 만큼 평행이동시킨 것이다. 이때, 이 구간에서 함수  $y = \sin x - 1$ 의 최댓값은  $0$ 이고, 최솟값은  $-1$ 이다.

$\pi \leq x \leq 2\pi$ 에서 함수  $y = -\sqrt{2}\sin x - 1$ 의 그래프는 이 구간에서 함수  $y = -\sqrt{2}\sin x$ 의 그래프를  $y$ 축의 방향으로  $-1$ 만큼 평행이동시킨 것이다. 이때, 이 구간에서 함수  $y = -\sqrt{2}\sin x - 1$ 의 최댓값은  $\sqrt{2} - 1$ , 최솟값은  $-1$ 이다.

그러므로 닫힌구간  $[0, 2\pi]$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - 1 & (0 \leq x < \pi) \\ -\sqrt{2}\sin x - 1 & (\pi \leq x \leq 2\pi) \end{cases}$$

의 그래프는 그림과 같다.



방정식  $f(x) = f(t)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로 함수  $y = f(x)$ 의 그래프와 직선  $y = f(t)$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수가 3이다.

그러므로  $f(t) = -1$  또는  $f(t) = 0$ 이다.

(i)  $f(t) = -1$ 일 때,

$$t = 0 \text{ 또는 } t = \pi \text{ 또는 } t = 2\pi$$

(ii)  $f(t) = 0$ 일 때,

$$t = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 }$$

$-\sqrt{2}\sin t - 1 = 0 (\pi \leq t \leq 2\pi)$   
 $-\sqrt{2}\sin t - 1 = 0$ 에서  $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$   
 $\pi \leq t \leq 2\pi$ 이므로  $t = \frac{5}{4}\pi$  또는  $t = \frac{7}{4}\pi$   
 (i), (ii)에서 모든  $t$ 의 값의 합은  
 $0 + \pi + 2\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{5}{4}\pi + \frac{7}{4}\pi = \frac{13}{2}\pi$   
 따라서  $p=2$ ,  $q=13$ 이므로  
 $p+q=15$

정답 15

[참고]

함수  
 $y = -\sqrt{2}\sin x - 1 (\pi \leq x \leq 2\pi)$ 의 그래프  
 와  $x$ 축이 만나는 두 점은 직선  $x = \frac{3}{2}\pi$   
 에 대하여 대칭이므로 방정식  
 $-\sqrt{2}\sin x - 1 = 0 (\pi \leq x \leq 2\pi)$ 의 두 실  
 근의 합은  $3\pi$ 이다.

21. 출제의도 : 부등식을 만족시키는 함수의 도함수를 추론할 수 있는가?

풀이 :

$$2k-8 \leq \frac{f(k+2)-f(k)}{2} \leq 4k^2+14k \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

에서

$$2k-8 = 4k^2+14k$$

$$k^2+3k+2=0$$

$$(k+1)(k+2)=0$$

$$k=-1 \text{ 또는 } k=-2$$

즉, ⑦에  $k=-1$ 을 대입하면

$$-10 \leq \frac{f(1)-f(-1)}{2} \leq -10$$

$$\text{이므로 } f(1)-f(-1)=-20 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

또, ⑦에  $k=-2$ 를 대입하면

$$-12 \leq \frac{f(0)-f(-2)}{2} \leq -12$$

$$\text{이므로 } f(0)-f(-2)=-24 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

삼차함수  $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이  
 므로 상수  $a, b, c$ 에 대하여

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

로 놓으면 ⑧에서

$$\begin{aligned}
 f(1)-f(-1) &= (1+a+b+c)-(-1+a-b+c) \\
 &= 2+2b=-20
 \end{aligned}$$

$$b=-11$$

⑨에서

$$\begin{aligned}
 f(0)-f(-2) &= c-(-8+4a-2b+c) \\
 &= 8-4a+2 \times (-11) \quad (\because b=-11) \\
 &=-4a-14=-24
 \end{aligned}$$

$$a = \frac{5}{2}$$

$$\text{즉, } f(x)=x^3+\frac{5}{2}x^2-11x+c \text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2+5x-11$$

이므로

$$\begin{aligned}
 f'(3) &= 3 \times 3^2 + 5 \times 3 - 11 \\
 &= 31
 \end{aligned}$$

정답 31

[다른 풀이]

삼차함수  $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이  
 므로  $f'(x)$ 는 최고차항의 계수가 3인 이  
 차함수이다. 상수  $\alpha, \beta$ 에 대하여

$$f'(x)=3x^2+\alpha x+\beta$$

로 놓으면 ㉔에서

$$f(1) - f(-1)$$

$$= \int_{-1}^1 f'(x) dx$$

$$= \int_{-1}^1 (3x^2 + \alpha x + \beta) dx$$

$$= \left[ x^3 + \frac{\alpha}{2} x^2 + \beta x \right]_{-1}^1$$

$$= 2 + 2\beta = -20$$

$$\beta = -11$$

㉕에서

$$f(0) - f(-2)$$

$$= \int_{-2}^0 f'(x) dx$$

$$= \int_{-2}^0 (3x^2 + \alpha x - 11) dx \quad (\because \beta = -11)$$

$$= \left[ x^3 + \frac{\alpha}{2} x^2 - 11x \right]_{-2}^0$$

$$= 8 - 2\alpha - 22 = -24$$

$$\alpha = 5$$

즉,  $f'(x) = 3x^2 + 5x - 11$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(3) &= 3 \times 3^2 + 5 \times 3 - 11 \\ &= 31 \end{aligned}$$

**22. 출제의도 :** 귀납적으로 정의된 수열의 특정한 항의 값을 구할 수 있는가?

**풀이 :**

조건 (나)에서

$$\left( a_{n+1} - a_n + \frac{2}{3}k \right) (a_{n+1} + ka_n) = 0$$

이므로

$$a_{n+1} - a_n + \frac{2}{3}k = 0 \quad \text{또는} \quad a_{n+1} + ka_n = 0$$

$$\text{즉, } a_{n+1} = a_n - \frac{2}{3}k \quad \text{또는} \quad a_{n+1} = -ka_n$$

$a_1 = k$ 이므로

$$a_2 = a_1 - \frac{2}{3}k = k - \frac{2}{3}k = \frac{k}{3}$$

또는

$$a_2 = -ka_1 = -k \times k = -k^2$$

$$(i) \quad a_2 = \frac{k}{3} \text{ 일 때,}$$

$$a_3 = a_2 - \frac{2}{3}k = \frac{k}{3} - \frac{2}{3}k = -\frac{k}{3}$$

또는

$$a_3 = -ka_2 = -k \times \frac{k}{3} = -\frac{k^2}{3}$$

$$(i - \text{㉔}) \quad a_3 = -\frac{k}{3} \text{ 일 때}$$

$$a_2 \times a_3 = \frac{k}{3} \times \left( -\frac{k}{3} \right) = -\frac{k^2}{9} < 0$$

이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

$$a_4 = a_3 - \frac{2}{3}k = -\frac{k}{3} - \frac{2}{3}k = -k$$

또는

$$a_4 = -ka_3 = -k \times \left( -\frac{k}{3} \right) = \frac{k^2}{3}$$

$$(i - \text{㉔}-\text{㉕}) \quad a_4 = -k \text{ 일 때,}$$

$$a_5 = a_4 - \frac{2}{3}k = -k - \frac{2}{3}k = -\frac{5}{3}k$$

또는

$$a_5 = -ka_4 = -k \times (-k) = k^2$$

$$a_5 = -\frac{5}{3}k \text{ 일 때,}$$

$$a_5 < 0$$

이고,

$$a_5 = k^2 \text{ 일 때,}$$

$$a_5 > 0$$

이므로

$a_5 = 0$ 을 만족시키는 양수  $k$ 의 값은 존재하지 않는다.

( i - ㉔-㉕)  $a_4 = \frac{k^2}{3}$ 일 때,

$$a_5 = a_4 - \frac{2}{3}k = \frac{k^2}{3} - \frac{2}{3}k$$

또는

$$a_5 = -ka_4 = -k \times \frac{k^2}{3} = -\frac{k^3}{3}$$

$$a_5 = \frac{k^2}{3} - \frac{2}{3}k \text{ 일 때,}$$

$$a_5 = 0 \text{에서}$$

$$\frac{k^2}{3} - \frac{2}{3}k = 0$$

$$\frac{k(k-2)}{3} = 0$$

$$k > 0 \text{이므로}$$

$$k = 2$$

$$a_5 = -\frac{k^3}{3} \text{ 일 때,}$$

$$a_5 < 0$$

이므로  $a_5 = 0$ 을 만족시키는 양수  $k$ 의 값은 존재하지 않는다.

( i - ㉖)  $a_3 = -\frac{k^2}{3}$ 일 때

$$a_2 \times a_3 = \frac{k}{3} \times \left(-\frac{k^2}{3}\right) = -\frac{k^3}{9} < 0$$

이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

$$a_4 = a_3 - \frac{2}{3}k = -\frac{k^2}{3} - \frac{2}{3}k$$

또는

$$a_4 = -ka_3 = -k \times \left(-\frac{k^2}{3}\right) = \frac{k^3}{3}$$

( i - ㉖-㉗)  $a_4 = -\frac{k^2}{3} - \frac{2}{3}k$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_5 &= a_4 - \frac{2}{3}k = \left(-\frac{k^2}{3} - \frac{2}{3}k\right) - \frac{2}{3}k \\ &= -\frac{k^2}{3} - \frac{4}{3}k \end{aligned}$$

또는

$$a_5 = -ka_4 = -k \times \left(-\frac{k^2}{3} - \frac{2}{3}k\right) = \frac{k^3}{3} + \frac{2}{3}k^2$$

$$a_5 = -\frac{k^2}{3} - \frac{4}{3}k \text{ 일 때,}$$

$$a_5 = -\frac{k(k+4)}{3} < 0$$

이고

$$a_5 = \frac{k^3}{3} + \frac{2}{3}k^2 \text{ 일 때,}$$

$$a_5 = \frac{k^2(k+2)}{3} > 0$$

이므로  $a_5 = 0$ 을 만족시키는 양수  $k$ 의 값은 존재하지 않는다.

( i - ㉘-㉙)  $a_4 = \frac{k^3}{3}$ 일 때,

$$a_5 = a_4 - \frac{2}{3}k = \frac{k^3}{3} - \frac{2}{3}k$$

또는

$$a_5 = -ka_4 = -k \times \frac{k^3}{3} = -\frac{k^4}{3}$$

$$a_5 = \frac{k^3}{3} - \frac{2}{3}k \text{ 일 때,}$$

$$a_5 = 0 \text{에서}$$

$$\frac{k^3}{3} - \frac{2}{3}k = 0$$

$$\frac{k(k^2-2)}{3} = 0$$

$$k > 0 \text{이므로}$$

$$k = \sqrt{2}$$

$$a_5 = -\frac{k^4}{3} \text{ 일 때,}$$

$$a_5 = -\frac{k^4}{3} < 0$$

이므로  $a_5 = 0$ 을 만족시키는 양수  $k$ 의 값은 존재하지 않는다.

(ii)  $a_2 = -k^2$ 일 때,

$$a_3 = a_2 - \frac{2}{3}k = -k^2 - \frac{2}{3}k$$

또는

$$a_3 = -ka_2 = -k \times (-k^2) = k^3$$

(ii-㉠)  $a_3 = -k^2 - \frac{2}{3}k$ 일 때,

$$a_2 \times a_3 = -k^2 \times \left(-k^2 - \frac{2}{3}k\right) = k^2 \left(k^2 + \frac{2}{3}k\right) > 0$$

이므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(ii-㉡)  $a_3 = k^3$ 일 때,

$$a_2 \times a_3 = -k^2 \times k^3 = -k^5 < 0$$

이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

$a_3 = k^3$ 이므로

$$a_4 = a_3 - \frac{2}{3}k = k^3 - \frac{2}{3}k$$

또는

$$a_4 = -ka_3 = -k \times k^3 = -k^4$$

(ii-㉢-㉠)  $a_4 = k^3 - \frac{2}{3}k$ 일 때,

$$a_5 = a_4 - \frac{2}{3}k = \left(k^3 - \frac{2}{3}k\right) - \frac{2}{3}k = k^3 - \frac{4}{3}k$$

또는

$$a_5 = -ka_4 = -k \times \left(k^3 - \frac{2}{3}k\right) = -k^4 + \frac{2}{3}k^2$$

$$a_5 = k^3 - \frac{4}{3}k \text{일 때,}$$

$a_5 = 0$ 에서

$$k^3 - \frac{4}{3}k = 0$$

$$k \left(k^2 - \frac{4}{3}\right) = 0$$

$k > 0$ 이므로

$$k = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$a_5 = -k^4 + \frac{2}{3}k^2 \text{일 때,}$$

$a_5 = 0$ 에서

$$-k^4 + \frac{2}{3}k^2 = 0$$

$$-k^2 \left(k^2 - \frac{2}{3}\right) = 0$$

$k > 0$ 이므로

$$k = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

(ii-㉢-㉡)  $a_4 = -k^4$ 일 때,

$$a_5 = a_4 - \frac{2}{3}k = -k^4 - \frac{2}{3}k$$

또는

$$a_5 = -ka_4 = -k \times (-k^4) = k^5$$

$$a_5 = -k^4 - \frac{2}{3}k \text{일 때,}$$

$$a_5 = -k \left(k^3 + \frac{2}{3}\right) < 0$$

이고,

$$a_5 = k^5 \text{일 때,}$$

$$a_5 > 0$$

이므로  $a_5 = 0$ 을 만족시키는 양수  $k$ 의

값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서

$$k \text{의 값은 } 2, \sqrt{2}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}$$

따라서  $k^2$ 의 값의 합은

$$2^2 + (\sqrt{2})^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = 8$$

정답 8

■ [선택: 확률과 통계]

23. ⑤ 24. ① 25. ⑤ 26. ③ 27. ④  
28. ④ 29. 994 30. 93

23. 출제의도 : 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

풀이 :

숫자 1, 2, 2, 3, 3을 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!2!} = 30$$

정답 ⑤

24. 출제의도 : 독립사건을 이해하여 사건의 확률을 구할 수 있는가?

풀이 :

두 사건  $A$ ,  $B$ 가 서로 독립이고

$$P(A) = \frac{2}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{6} \text{ 이므로}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{2}{3}P(B) = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$$

따라서

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{3}{4}$$

정답 ①

25. 출제의도 : 확률의 덧셈정리를 이해하여 사건의 확률을 구할 수 있는가?

풀이 :

11 이하의 자연수 중에서 7 이상의 홀수는 7, 9, 11이므로 다음의 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) 선택한 2개의 수 중 1개의 수만 7 이상의 홀수인 경우

나머지 하나는 11개의 자연수 중 3개를 제외한 8개 중에서 하나를 선택해야 하므로 이 사건의 확률은

$$\frac{{}_3C_1 \times {}_8C_1}{{}_{11}C_2} = \frac{3 \times 8}{\frac{11 \times 10}{2}} = \frac{24}{55}$$

(ii) 선택한 2개의 수 모두 7 이상의 홀수인 경우

이 사건의 확률은

$$\frac{{}_3C_2}{{}_{11}C_2} = \frac{\frac{3 \times 2}{2}}{\frac{11 \times 10}{2}} = \frac{3}{55}$$

(i), (ii)에서 구하는 사건의 확률은

$$\frac{24}{55} + \frac{3}{55} = \frac{27}{55}$$

정답 ⑤

[다른 풀이]

구하는 사건의 여사건은 7, 9, 11을 제외한 8개의 수 중에서 2개를 선택하는 사건이므로 구하는 사건의 확률은

$$1 - \frac{{}_8C_2}{{}_{11}C_2} = 1 - \frac{\frac{8 \times 7}{2}}{\frac{11 \times 10}{2}} = 1 - \frac{28}{55} = \frac{27}{55}$$

26. 출제의도 : 표본평균의 확률분포를 이용하여 주어진 확률을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

정규분포  $N(m, 6^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균  $\bar{X}$ 에 대하여

$$E(\bar{X}) = E(X) = m,$$

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$$

이다. 그러므로 확률변수  $\bar{X}$ 는 정규분포

$$N(m, 2^2) \text{을 따르고, } Z_1 = \frac{\bar{X} - m}{2} \text{으로}$$

놓으면 확률변수  $Z_1$ 은 표준정규분포  $N(0, 1)$ 을 따른다.

정규분포  $N(6, 2^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균  $\bar{Y}$ 에 대하여

$$E(\bar{Y}) = E(Y) = 6,$$

$$\sigma(\bar{Y}) = \frac{\sigma(Y)}{\sqrt{4}} = \frac{2}{2} = 1$$

이다. 그러므로 확률변수  $\bar{Y}$ 는 정규분포

$$N(6, 1^2) \text{을 따르고, } Z_2 = \frac{\bar{Y} - 6}{1} \text{으로}$$

놓으면 확률변수  $Z_2$ 는 표준정규분포  $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(\bar{X} \leq 12) + P(\bar{Y} \geq 8) = 1 \text{에서}$$

$$P\left(Z_1 \leq \frac{12-m}{2}\right) + P\left(Z_2 \geq \frac{8-6}{1}\right) = 1$$

$$P\left(Z_1 \leq \frac{12-m}{2}\right) + P(Z_2 \geq 2) = 1$$

$$P\left(Z_1 \leq \frac{12-m}{2}\right) = 1 - P(Z_2 \geq 2)$$

$$= P(Z_2 \leq 2)$$

이때 두 확률변수  $Z_1, Z_2$ 는 모두 표준정

규분포를 따르므로

$$\frac{12-m}{2} = 2$$

따라서  $m = 8$

정답 ③

27. 출제의도 : 이산확률변수의 분포를 이용하여 평균에 대한 조건을 만족시키는 확률의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$k=0, k=2$ 일 때,

$$P(X=0) = P(X=2) = P(X=4)$$

$k=1$ 일 때,  $P(X=1) = P(X=3)$

$P(X=0) = a, P(X=1) = b$ 라 할 때,

이산확률변수  $X$ 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$X$	0	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$a$	$b$	$a$	$b$	$a$	1

확률변수  $X$ 가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$$3a + 2b = 1 \quad \cdots \textcircled{A}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times a + 1^2 \times b + 2^2 \times a + 3^2 \times b + 4^2 \times a$$

$$\text{이고 } E(X^2) = \frac{35}{6} \text{이므로}$$

$$20a + 10b = \frac{35}{6} \quad \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에서

$$a = \frac{1}{6}, b = \frac{1}{4}$$

$$\text{따라서 } P(X=0) = \frac{1}{6}$$

정답 ④

28. 출제의도 : 조건부확률을 이해하여 사건의 확률을 구할 수 있는가?

풀이 :

$f: X \rightarrow X$ 인 모든 함수  $f$  중에서 임의로 선택한 함수  $f$ 가 조건을 만족시키는 사건을  $A$ ,  $f(4)$ 가 짝수인 사건을  $B$ 라 하면 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

이다. 한편,  $a$ 가  $b$ 의 약수이면  $b$ 는  $a$ 의 배수이므로 주어진 조건을 다음과 같이 해석할 수 있다.

‘ $a \in X$ ,  $b \in X$ 에 대하여

$b$ 가  $a$ 의 배수이면  $f(b)$ 는  $f(a)$ 의 배수이다.’

이때 다음의 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i)  $f(1)=4$ 인 경우

2, 3, 4 모두 1의 배수이므로  $f(2)$ ,  $f(3)$ ,  $f(4)$  모두  $f(1)$ 인 4의 배수이어야 한다. 4의 배수인  $X$ 의 원소는 4뿐이므로

$$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=4$$

이어야 한다.

이 경우 조건을 만족시키는 함수  $f$ 의 개수는 1이고,  $f(4)$ 가 짝수인 함수  $f$ 의 개수는 1이다.

(ii)  $f(1)=3$ 인 경우

2, 3, 4 모두 1의 배수이므로  $f(2)$ ,  $f(3)$ ,  $f(4)$  모두  $f(1)$ 인 3의 배수이어야 한다. 3의 배수인  $X$ 의 원소는 3뿐이므로

$$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=3$$

이어야 한다.

이 경우 조건을 만족시키는 함수  $f$ 의 개수는 1이고,  $f(4)$ 가 짝수인 함수  $f$ 의 개수는 0이다.

(iii)  $f(1)=2$ 인 경우

2는 1의 배수이므로  $f(2)$ 는  $f(1)$ 인 2의 배수이어야 한다. 2의 배수인  $X$ 의 원소는 2, 4이므로

$$f(2)=2 \text{ 또는 } f(2)=4$$

이다. 이때 각각의 경우에 대하여  $f(4)$ 는  $f(2)$ 의 배수이어야 하므로  $f(2)$ 와  $f(4)$ 의 순서쌍  $(f(2), f(4))$ 는

$$(2, 2), (2, 4), (4, 4)$$

이다.

한편, 위의 각각의 경우에 대하여

$$f(3)=2 \text{ 또는 } f(3)=4$$

이므로 이 경우 조건을 만족시키는 함수  $f$ 의 개수는

$$3 \times 2 = 6$$

이고,  $f(4)$ 가 짝수인 함수  $f$ 의 개수도 6이다.

(iv)  $f(1)=1$ 인 경우

2는 1의 배수이므로  $f(2)$ 는  $f(1)$ 인 1의 배수이어야 한다. 즉,  $f(2)$ 는 1 또는 2 또는 3 또는 4이다. 이때 각각의 경우에 대하여  $f(4)$ 는  $f(2)$ 의 배수이어야 하므로  $f(2)$ 와  $f(4)$ 의 순서쌍  $(f(2), f(4))$ 는

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4),$$

$$(2, 2), (2, 4),$$

$$(3, 3),$$

(4, 4)

이다.

한편, 위의 각각의 경우에 대하여  $f(3)$ 은 1 또는 2 또는 3 또는 4이므로 이 경우 조건을 만족시키는 함수  $f$ 의 개수는

$$(4+2+1+1) \times 4 = 32$$

이고,  $f(4)$ 가 짝수인 함수  $f$ 의 개수는

$$(2+2+1) \times 4 = 20$$

이다.

(i)~(iv)에서

$$n(A) = 1 + 1 + 6 + 32 = 40$$

$$n(A \cap B) = 1 + 6 + 20 = 27$$

이므로

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{n(A \cap B)}{n(A)} \\ &= \frac{27}{40} \end{aligned}$$

정답 ④

29. 출제의도 : 이항분포와 정규분포의 관계를 이해하고 구하는 확률을 정규분포로 근사하여 구할 수 있는가?

풀이 :

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 4 이하일 확률은  $\frac{2}{3}$ , 5 이상일 확률은  $\frac{1}{3}$

이므로 주사위를 16200번 던졌을 때 5 이상의 눈이 나오는 횟수를 확률변수  $X$ 라 하면 확률변수  $X$ 는 이항분포

$B\left(16200, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르고,

$$E(X) = 16200 \times \frac{1}{3} = 5400$$

$$V(X) = 16200 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 3600 = 60^2$$

이다. 이때 16200은 충분히 큰 수이므로 확률변수  $X$ 는 근사적으로 정규분포  $N(5400, 60^2)$ 을 따른다.

점 A의 위치가 5700 이하하려면 주사위를 던져 나온 눈의 수가 4 이하인 횟수에서 5 이상인 횟수를 뺀 값이 5700 이하이어야 하므로

$$(16200 - X) - X \leq 5700$$

$$X \geq 5250$$

따라서 구하는 확률을 표준정규분포표를 이용해 구한 값  $k$ 는

$$\begin{aligned} k &= P(X \geq 5250) \\ &= P\left(Z \geq \frac{5250 - 5400}{60}\right) \end{aligned}$$

$$= P(Z \geq -2.5)$$

$$= P(-2.5 \leq Z \leq 0) + P(Z \geq 0)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 2.5) + P(Z \geq 0)$$

$$= 0.494 + 0.5$$

$$= 0.994$$

따라서

$$1000 \times k = 1000 \times 0.994 = 994$$

정답 994

30. 출제의도 : 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

풀이 :

조건 (가)에서 학생 A가 받는 공의 개수는 0 또는 1 또는 2이다.

(i) 학생 A가 받는 공의 개수가 0일 때, 흰 공 4개를 두 학생 B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2H_4 = {}_{2+4-1}C_4 = {}_5C_4 = 5$$

이고, 이 각각에 대하여 검은 공 4개를 두 학생 B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는  ${}_2H_4 = 5$ 이다.

이 중에서 학생 B가 받는 공의 개수가 0인 경우의 수는 1이고, 학생 B가 받는 공의 개수가 1인 경우는 흰 공 1개를 받는 경우 또는 검은 공 1개를 받는 경우에서 그 경우의 수가 2이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우의 수는 3이다.

따라서 학생 A가 받는 공의 개수가 0일 때, 조건 (나)를 만족시키는 경우의 수는

$$5 \times 5 - 3 = 22 \text{이다.}$$

(ii) 학생 A가 받는 공의 개수가 1일 때, 학생 A가 흰 공 1개를 받는다고 하면, 이러한 경우의 수는 1이다.

이때 남은 흰 공 3개를 두 학생 B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2H_3 = {}_{2+3-1}C_3 = {}_4C_3 = 4$$

이고, 이 각각에 대하여 검은 공 4개를 두 학생 B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는  ${}_2H_4 = 5$ 이다.

이 중에서 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우의 수는 (i)과 마찬가지로 방법

으로 3이다.

그러므로 학생 A가 흰 공 1개를 받을 때, 조건 (나)를 만족시키는 경우의 수는  $1 \times 4 \times 5 - 3 = 17$ 이다.

마찬가지 방법으로 학생 A가 검은 공 1개를 받을 때, 조건 (나)를 만족시키는 경우의 수는 17이다.

따라서 학생 A가 받는 공의 개수가 1일 때, 조건 (나)를 만족시키는 경우의 수는  $17 + 17 = 34$ 이다.

(iii) 학생 A가 받는 공의 개수가 2일 때,

(iii-1) 학생 A가 흰 공 2개를 받는 경우

학생 A가 흰 공 2개를 받는 경우의 수는 1이다.

이때 남은 흰 공 2개를 두 학생 B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2H_2 = {}_{2+2-1}C_2 = {}_3C_2 = 3$$

이고, 이 각각에 대하여 검은 공 4개를 두 학생 B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는  ${}_2H_4 = 5$ 이다.

이 중에서 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우의 수는 (i)과 마찬가지로 방법으로 3이다.

그러므로 학생 A가 흰 공 2개를 받을 때, 조건 (나)를 만족시키는 경우의 수는  $1 \times 3 \times 5 - 3 = 12$ 이다.

(iii-2) 학생 A가 검은 공 2개를 받는 경우

(iii-1)과 마찬가지로 방법으로 이 경우의 수는 12이다.

(iii-3) 학생 A가 흰 공 1개와 검은 공 1개를 받는 경우

학생 A가 흰 공 1개와 검은 공 1개를 받는 경우의 수는 1이다.

---

이때 남은 흰 공 3개를 두 학생 B, C  
에게 남김없이 나누어 주는 경우의  
수는  ${}_2H_3 = 4$ 이고, 이 각각에 대하여  
검은 공 3개를 두 학생 B, C에게 남  
김없이 나누어 주는 경우의 수는  
 ${}_2H_3 = 4$ 이다.

이 중에서 조건 (나)를 만족시키지 않  
는 경우의 수는 (i)과 마찬가지로 방  
법으로 3이다.

그러므로 학생 A가 흰 공 1개와 검  
은 공 1개를 받을 때, 조건 (나)를 만  
족시키는 경우의 수는

$$1 \times 4 \times 4 - 3 = 13 \text{ 이다.}$$

따라서 학생 A가 받는 공의 개수가  
2일 때의 경우의 수는

$$12 + 12 + 13 = 37 \text{ 이다.}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$22 + 34 + 37 = 93$$

정답 93