2025학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가

수학영역 정답 및 풀이

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01. ②	02. ⑤	03. ④	04. ②	05. ②
06. ②	07. ③	08. ①	09. ⑤	10. ①
11. ①	12. ②	13. ④	14. ⑤	15. ①
16. 7	17. 5	18. 29	19. 4	
20. 15	21. 31	22. 8		

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$32^{\frac{1}{4}} \times 4^{-\frac{1}{8}} = (2^5)^{\frac{1}{4}} \times (2^2)^{-\frac{1}{8}}$$
$$= 2^{\frac{5}{4}} \times 2^{-\frac{2}{8}} = 2^{\frac{5}{4}-\frac{1}{4}} = 2$$

정답 ②

2. **출제의도** : 미분계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$이므로

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1)$$
$$= 3 \times 1^2 + 6 \times 1 = 9$$

정답 ⑤

3. **출제의도** : 주어진 조건에서 등비수열의 첫째항과 공비를 찾아 일반항을 구할 수 있는가?

풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_2 a_3 = ar \times ar^2 = a^2 r^3 = 2$ ……㉠

$a_4 = ar^3 = 4$ ……㉡

㉠을 ㉡으로 나누면

$a = \frac{1}{2}$

이것을 ㉡에 대입하면

$\frac{1}{2} r^3 = 4$에서 $r^3 = 8$

r은 실수이므로

$r = 2$

따라서

$a_6 = ar^5 = \frac{1}{2} \times 2^5 = 2^4 = 16$

정답 ④

4. **출제의도** : 함수의 그래프를 이해하고 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\lim_{x \to 0-} f(x) = -2$, $\lim_{x \to 1+} f(x) = 1$ 이므로

$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x)$

$= -2 + 1$

$= -1$

정답 ②

5. **출제의도** : 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

$f(x)=(x+1)(x^2+x-5)$에서

$f'(x)=(x^2+x-5)+(x+1)(2x+1)$

따라서

$$\begin{aligned} f'(2) &= (2^2+2-5)+(2+1)(2\times 2+1) \\ &= 1+15 \\ &= 16 \end{aligned}$$

정답 ②

6. **출제의도** : 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\cos(\pi+\theta)=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 에서

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ 이므로

$-\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, 즉 $\cos\theta=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 에서 $\sin\theta>0$ 이므로

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \sqrt{1-\cos^2\theta} \\ &= \sqrt{1-\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

따라서

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}+\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

정답 ②

7. **출제의도** : 함수가 연속일 조건을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

함수 $f(x)=\begin{cases}(x-a)^2 & (x<4)\\ 2x-4 & (x\geq 4)\end{cases}$

가 $x=4$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=4$에서 연속이면

$$\lim_{x\to 4-}f(x)=\lim_{x\to 4+}f(x)=f(4)$$

이다. 이때

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 4-}f(x) &= \lim_{x\to 4-}(x-a)^2 \\ &= (4-a)^2 \\ &= a^2-8a+16 \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 4+}f(x)=\lim_{x\to 4+}(2x-4)=4$$

$f(4)=4$

이므로

$a^2-8a+16=4$

$a^2-8a+12=0$

$(a-2)(a-6)=0$

$a=2$ 또는 $a=6$

따라서 조건을 만족시키는 모든 상수 a의 값의 곱은

$2\times 6=12$

정답 ③

8. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 상수를 구할 수 있는가?

풀이 :

두 수 $\log_2 a$, $\log_a 8$의 합이 4이므로

$\log_2 a + \log_a 8 = 4$에서

$\log_2 a + 3\log_a 2 = 4$

$\log_2 a + \dfrac{3}{\log_2 a} = 4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\log_2 a = X$라 하면 $a > 2$이므로 $X > 1$

㉠에서

$X + \dfrac{3}{X} = 4$, $X^2 - 4X + 3 = 0$

$(X-1)(X-3) = 0$

$X > 1$이므로 $X = 3$

즉, $\log_2 a = 3$에서 $a = 2^3 = 8$

한편, 두 수 $\log_2 a$, $\log_a 8$의 곱이 k이므로

$k = \log_2 a \times \log_a 8 = \log_2 a \times 3\log_a 2$

$\quad = \log_2 a \times \dfrac{3}{\log_2 a} = 3$

따라서 $a + k = 8 + 3 = 11$

정답 ①

9. 출제의도 : 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$f(x) = x^2 + x$이므로

$$5\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 (5x + f(x))\,dx$$

$$= 5\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 5x\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= 4\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 5x\,dx$$

$$= 4\int_0^1 (x^2 + x)\,dx - \int_0^1 5x\,dx$$

$$= \int_0^1 (4x^2 + 4x)\,dx - \int_0^1 5x\,dx$$

$$= \int_0^1 (4x^2 - x)\,dx$$

$$= \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

[다른 풀이]

$f(x) = x^2 + x$이므로

$$5\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 (5x + f(x))\,dx$$

$$= 5\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 - \left[\frac{1}{3}x^3 + 3x^2\right]_0^1$$

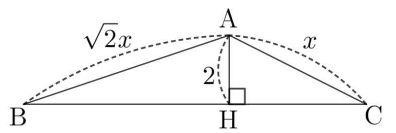
$$= 5 \times \frac{5}{6} - \frac{10}{3} = \frac{5}{6}$$

정답 ⑤

10. 출제의도 : 사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 :

$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{2} : 1$이므로 $\overline{\mathrm{AC}} = x$라 하면 $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}x$



삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 이 외접원의 넓이가 50π이므로 $\pi R^2 = 50\pi$에서 $R = 5\sqrt{2}$

직각삼각형 AHC에서

$\sin(\angle \mathrm{ACH})=\dfrac{2}{x}$, 즉 $\sin C=\dfrac{2}{x}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin C}=2R$, 즉 $\overline{\mathrm{AB}}=2R\sin C$

$\sqrt{2}x=2\times5\sqrt{2}\times\dfrac{2}{x}$, $x^2=20$, $x=2\sqrt{5}$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}x=2\sqrt{10}$ 이므로 직각삼각형 ABH에서

$\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{AH}}^2}$

$=\sqrt{(2\sqrt{10})^2-2^2}=6$

정답 ①

11. **출제의도** : 위치, 속도, 가속도 사이의 관계 및 미분을 이용하여 가속도를 구할 수 있는가?

풀이 :

$x_1=t^2+t-6$,

$x_2=-t^3+7t^2$

이므로

$x_1=x_2$에서

$t^2+t-6=-t^3+7t^2$

$t^3-6t^2+t-6=0$

$t^2(t-6)+t-6=0$

$(t-6)(t^2+1)=0$

$t\geq0$이므로

$t=6$

즉, 두 점 P, Q의 위치가 같아지는 순간의 시각은 $t=6$이다.

한편, 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_1, v_2라 하면

$v_1=\dfrac{dx_1}{dt}=2t+1$,

$v_2=\dfrac{dx_2}{dt}=-3t^2+14t$

두 점 P, Q의 시각 t에서의 가속도를 각각 a_1, a_2라 하면

$a_1=\dfrac{dv_1}{dt}=2$,

$a_2=\dfrac{dv_2}{dt}=-6t+14$

시각 $t=6$에서의 두 점 P, Q의 가속도가 각각 p, q이므로

$p=2$,

$q=-6\times6+14=-22$

따라서

$p-q=2-(-22)=24$

정답 ①

12. **출제의도** : 등차수열의 일반항을 이용하여 새롭게 정의된 수열의 합을 구할 수 있는가?

풀이 :

$b_1=\sum_{k=1}^{1}(-1)^{k+1}a_k=a_1$

$b_2=\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}a_k=a_1-a_2$

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$b_2=-2$이므로

$a_1-a_2=-d=-2$

따라서 $d=2$

또한

$b_3=\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k+1}a_k$

$=a_1-a_2+a_3$

$=-d+a_3$

$=a_3-2$

$b_7=\sum_{k=1}^{7}(-1)^{k+1}a_k$

$=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+a_7$

$=-3d+a_7$

$=a_7-6$

이므로 $b_3+b_7=0$ 에서

$(a_3-2)+(a_7-6)$

$=a_3+a_7-8$

$=(a_1+2\times2)+(a_1+6\times2)-8$

$=(a_1+4)+(a_1+12)-8$

$=2a_1+8=0$

따라서 $a_1=-4$

즉 $a_n=-4+(n-1)\times2=2n-6$이므로

$b_1=a_1=-4$

$b_2=a_1-a_2=-2$

$b_3=a_1-a_2+a_3=-2$

$b_4=a_1-a_2+a_3-a_4=-4$

$b_5=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5=0$

$b_6=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6=-6$

$b_7=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+a_7=2$

$b_8=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_7-a_8=-8$

$b_9=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_7-a_8+a_9=4$

따라서

$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_9$

$=-4+(-2)+(-2)+(-4)+0+(-6)$
$+2+(-8)+4$

$=-20$

정답 ②

[다른풀이]

$b_{2n}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2n-1}-a_{2n})$

$=-dn=-2n$

$b_{2n-1}=a_1+(a_3-a_2)+(a_5-a_4)+\cdots$
$+(a_{2n-1}-a_{2n-2})$

$=a_1+(n-1)d=-4+2(n-1)=2n-6$

따라서

$\sum_{n=1}^{9}b_n=\sum_{n=1}^{5}b_{2n-1}+\sum_{n=1}^{4}b_{2n}$

$=\sum_{n=1}^{5}(2n-6)+\sum_{n=1}^{4}(-2n)$

$=2\times\frac{5\times6}{2}-6\times5-2\times\frac{4\times5}{2}$

$=30-30-20=-20$

13. **출제의도** : 정적분을 이용하여 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

풀이 :

함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이는 y축에 의하여 이등분된다.

이때 $A=2B$이므로

$\int_0^k(-x^2+2x+6)dx=0$

이어야 한다. 즉,

$\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+6x\right]_0^k=0$

$-\frac{1}{3}k^3+k^2+6k=0$

$-\frac{1}{3}k(k+3)(k-6)=0$

$k>4$이므로 $k=6$

정답 ④

14. **출제의도** : 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

풀이 :

두 점 A_n, B_n의 좌표를 각각

$\mathrm{A}_n(\mathrm{a}_n, 2^{a_n})$, $\mathrm{B}_n(\mathrm{b}_n, 2^{b_n})$ $(a_n < b_n)$

이라 하면 조건 (가)에 의하여

$$\frac{2^{b_n}-2^{a_n}}{b_n-a_n}=3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (나)에 의하여

$$(b_n-a_n)^2+(2^{b_n}-2^{a_n})^2=10n^2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 $2^{b_n}-2^{a_n}=3(b_n-a_n)$이므로 이것을 ㉡에 대입하여 정리하면

$(b_n-a_n)^2=n^2$

$a_n<b_n$이므로 $b_n-a_n=n$, 즉 $a_n=b_n-n$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$2^{b_n}-2^{b_n-n}=3n$

이므로

$$2^{b_n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=3n$$

$$2^{b_n}=3n\times\frac{2^n}{2^n-1}$$

한편, 곡선 $y=2^x$과 곡선 $y=\log_2 x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 x_n은 점 B_n의 y좌표와 같다.

따라서

$$x_n=2^{b_n}=3n\times\frac{2^n}{2^n-1}$$

이므로

$$x_1+x_2+x_3=6+8+\frac{72}{7}=\frac{170}{7}$$

정답 ⑤

15. **출제의도** : 주어진 조건을 만족시키는 다항함수를 구하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

조건 (가)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf(x)+xg(x)=12x^3+24x^2-6x$

$$f(x)+g(x)=12x^2+24x-6 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 조건 (나)에서 $f(x)=xg'(x)$이므로 ㉠에 대입하면

$xg'(x)+g(x)=12x^2+24x-6$

$\{xg(x)\}'=12x^2+24x-6$

$$xg(x)=\int(12x^2+24x-6)dx$$

$$=4x^3+12x^2-6x+C$$

(단, C는 적분상수)

이때 $g(x)$는 다항함수이므로 $C=0$

즉 $xg(x)=4x^3+12x^2-6x$이므로

$g(x)=4x^2+12x-6$

따라서

$$\int_0^3 g(x)dx$$

$$=\int_0^3(4x^2+12x-6)dx$$

$$=\left[\frac{4}{3}x^3+6x^2-6x\right]_0^3$$

$=36+54-18$

$=72$

정답 ①

16. 출제의도 : 로그를 포함하는 방정식의 근을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\log_3(x+2)-\log_{\frac{1}{3}}(x-4)$

$=\log_3(x+2)-\log_{3^{-1}}(x-4)$

$=\log_3(x+2)+\log_3(x-4)$

$=\log_3(x+2)(x-4)$

이므로

$\log_3(x+2)(x-4)=3$

$(x+2)(x-4)=3^3$

$x^2-2x-35=0$

$(x-7)(x+5)=0$

진수 조건에 의해서 $x>4$

따라서 $x=7$

정답 7

17. 출제의도 : 함수의 부정적분과 적분상수를 구하여 함숫값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$f'(x)=6x^2+2x+1$이므로 $f'(x)$의 한 부정적분은

$\int(6x^2+2x+1)dx=2x^3+x^2+x+C$

(단, C는 적분상수)

이때 $f(0)=1$이므로 $C=1$에서

$f(x)=2x^3+x^2+x+1$

따라서 $f(1)=5$

정답 5

18. 출제의도 : $\sum$의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\sum_{k=1}^{10} ka_k=36$에서

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+10a_{10}=36$ ……㉠

$\sum_{k=1}^{9} ka_{k+1}=7$에서

$a_2+2a_3+3a_4+\cdots+9a_{10}=7$ ……㉡

㉠ − ㉡을 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\sum_{k=1}^{10} a_k$

$=36-7=29$

정답 29

[다른 풀이]

$\sum_{k=1}^{9} ka_{k+1}=7$에서

$\sum_{k=1}^{9} ka_{k+1}=\sum_{k=1}^{9}\{(k+1)a_{k+1}-a_{k+1}\}$

$=\sum_{k=1}^{9}(k+1)a_{k+1}-\sum_{k=1}^{9}a_{k+1}$

$=\sum_{k=2}^{10}ka_k-\sum_{k=2}^{10}a_k=7$

즉, $\sum_{k=2}^{10}ka_k=\sum_{k=2}^{10}a_k+7$

$\sum_{k=1}^{10}ka_k=36$에서

$\sum_{k=1}^{10}ka_k=a_1+\sum_{k=2}^{10}ka_k$

$=a_1+\sum_{k=2}^{10}a_k+7$

$=\sum_{k=1}^{10}a_k+7=36$

따라서 $\sum_{k=1}^{10}a_k=36-7=29$

19. **출제의도** : 미분을 이용하여 함수의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있는가?

풀이 :

함수 $f(x)=x^3+ax^2-9x+b$가 $x=1$에서 극소이므로

$f'(1)=0$

$f'(x)=3x^2+2ax-9$

이므로

$f'(1)=3+2a-9=0$

에서

$a=3$

한편, $f'(x)=0$에서

$3x^2+6x-9=0$

$3(x+3)(x-1)=0$

$x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극대이고, 극댓값이 28이다.

$f(-3)=(-3)^3+3\times(-3)^2-9\times(-3)+b$

$\quad\quad=27+b$

이므로

$27+b=28$

에서

$b=1$

따라서

$a+b=3+1=4$

정답 4

20. **출제의도** : 삼각함수의 그래프를 이용하여 방정식을 만족시키는 실수의 값의 합을 구할 수 있는가?

풀이 :

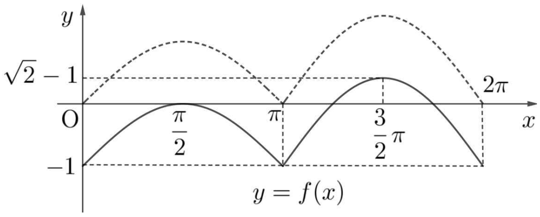
$0\le x<\pi$에서 함수 $y=\sin x-1$의 그래프는 이 구간에서 함수 $y=\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 것이다. 이때, 이 구간에서 함수 $y=\sin x-1$의 최댓값은 0이고, 최솟값은 -1이다.

$\pi\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=-\sqrt{2}\sin x-1$의 그래프는 이 구간에서 함수 $y=-\sqrt{2}\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 것이다. 이때, 이 구간에서 함수 $y=-\sqrt{2}\sin x-1$의 최댓값은 $\sqrt{2}-1$, 최솟값은 -1이다.

그러므로 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}\sin x-1 & (0\le x<\pi)\\ -\sqrt{2}\sin x-1 & (\pi\le x\le 2\pi)\end{cases}$$

의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=f(t)$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 3이다.

그러므로 $f(t)=-1$ 또는 $f(t)=0$이다.

(i) $f(t)=-1$일 때,

$t=0$ 또는 $t=\pi$ 또는 $t=2\pi$

(ii) $f(t)=0$일 때,

$t=\dfrac{\pi}{2}$ 또는

$-\sqrt{2}\sin t-1=0\,(\pi\le t\le 2\pi)$

$-\sqrt{2}\sin t-1=0$에서 $\sin t=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\pi\le t\le 2\pi$이므로 $t=\dfrac{5}{4}\pi$ 또는 $t=\dfrac{7}{4}\pi$

(i), (ii)에서 모든 t의 값의 합은

$0+\pi+2\pi+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{5}{4}\pi+\dfrac{7}{4}\pi=\dfrac{13}{2}\pi$

따라서 $p=2$, $q=13$이므로

$p+q=15$

정답 15

[참고]

함수

$y=-\sqrt{2}\sin x-1\,(\pi\le x\le 2\pi)$의 그래프와 x축이 만나는 두 점은 직선 $x=\dfrac{3}{2}\pi$에 대하여 대칭이므로 방정식 $-\sqrt{2}\sin x-1=0\,(\pi\le x\le 2\pi)$의 두 실근의 합은 3π이다.

21. **출제의도** : 부등식을 만족시키는 함수의 도함수를 추론할 수 있는가?

풀이 :

$2k-8\le\dfrac{f(k+2)-f(k)}{2}\le 4k^2+14k$ …… ㉠

에서

$2k-8=4k^2+14k$

$k^2+3k+2=0$

$(k+1)(k+2)=0$

$k=-1$ 또는 $k=-2$

즉, ㉠에 $k=-1$을 대입하면

$-10\le\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}\le-10$

이므로 $f(1)-f(-1)=-20$ …… ㉡

또, ㉠에 $k=-2$를 대입하면

$-12\le\dfrac{f(0)-f(-2)}{2}\le-12$

이므로 $f(0)-f(-2)=-24$ …… ㉢

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 상수 a, b, c에 대하여

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

로 놓으면 ㉡에서

$f(1)-f(-1)$

$=(1+a+b+c)-(-1+a-b+c)$

$=2+2b=-20$

$b=-11$

㉢에서

$f(0)-f(-2)$

$=c-(-8+4a-2b+c)$

$=8-4a+2\times(-11)$ $(\because b=-11)$

$=-4a-14=-24$

$a=\dfrac{5}{2}$

즉, $f(x)=x^3+\dfrac{5}{2}x^2-11x+c$에서

$f'(x)=3x^2+5x-11$

이므로

$f'(3)=3\times3^2+5\times3-11$

$=31$

정답 31

[다른 풀이]

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다. 상수 α, β에 대하여

$f'(x)=3x^2+\alpha x+\beta$

로 놓으면 ㉡에서

$f(1)-f(-1)$

$=\int_{-1}^{1} f'(x)\,dx$

$=\int_{-1}^{1}\left(3x^2+\alpha x+\beta\right)dx$

$=\left[x^3+\frac{\alpha}{2}x^2+\beta x\right]_{-1}^{1}$

$=2+2\beta=-20$

$\beta=-11$

㉢에서

$f(0)-f(-2)$

$=\int_{-2}^{0} f'(x)\,dx$

$=\int_{-2}^{0}\left(3x^2+\alpha x-11\right)dx$ ($\because \beta=-11$)

$=\left[x^3+\frac{\alpha}{2}x^2-11x\right]_{-2}^{0}$

$=8-2\alpha-22=-24$

$\alpha=5$

즉, $f'(x)=3x^2+5x-11$이므로

$f'(3)=3\times3^2+5\times3-11$

$=31$

22. **출제의도** : 귀납적으로 정의된 수열의 특정한 항의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

조건 (나)에서

$\left(a_{n+1}-a_n+\frac{2}{3}k\right)\left(a_{n+1}+ka_n\right)=0$

이므로

$a_{n+1}-a_n+\frac{2}{3}k=0$ 또는 $a_{n+1}+ka_n=0$

즉, $a_{n+1}=a_n-\frac{2}{3}k$ 또는 $a_{n+1}=-ka_n$

$a_1=k$이므로

$a_2=a_1-\frac{2}{3}k=k-\frac{2}{3}k=\frac{k}{3}$

또는

$a_2=-ka_1=-k\times k=-k^2$

(ⅰ) $a_2=\frac{k}{3}$일 때,

$a_3=a_2-\frac{2}{3}k=\frac{k}{3}-\frac{2}{3}k=-\frac{k}{3}$

또는

$a_3=-ka_2=-k\times\frac{k}{3}=-\frac{k^2}{3}$

(ⅰ-ⓐ) $a_3=-\frac{k}{3}$일 때

$a_2\times a_3=\frac{k}{3}\times\left(-\frac{k}{3}\right)=-\frac{k^2}{9}<0$

이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

$a_4=a_3-\frac{2}{3}k=-\frac{k}{3}-\frac{2}{3}k=-k$

또는

$a_4=-ka_3=-k\times\left(-\frac{k}{3}\right)=\frac{k^2}{3}$

(ⅰ-ⓐ-①) $a_4=-k$일 때,

$a_5=a_4-\frac{2}{3}k=-k-\frac{2}{3}k=-\frac{5}{3}k$

또는

$a_5=-ka_4=-k\times(-k)=k^2$

$a_5=-\frac{5}{3}k$ 일 때,

$a_5<0$

이고,

$a_5=k^2$일 때,

$a_5>0$

이므로

$a_5=0$을 만족시키는 양수 k의 값은 존재하지 않는다.

(i -ⓐ-②) $a_4=\frac{k^2}{3}$일 때,

$a_5=a_4-\frac{2}{3}k=\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k$

또는

$a_5=-ka_4=-k\times\frac{k^2}{3}=-\frac{k^3}{3}$

$a_5=\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k$일 때,

$a_5=0$에서

$\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k=0$

$\frac{k(k-2)}{3}=0$

$k>0$이므로

$k=2$

$a_5=-\frac{k^3}{3}$일 때,

$a_5<0$

이므로 $a_5=0$을 만족시키는 양수 k의 값은 존재하지 않는다.

(i -ⓑ) $a_3=-\frac{k^2}{3}$일 때

$a_2\times a_3=\frac{k}{3}\times\left(-\frac{k^2}{3}\right)=-\frac{k^3}{9}<0$

이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

$a_4=a_3-\frac{2}{3}k=-\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k$

또는

$a_4=-ka_3=-k\times\left(-\frac{k^2}{3}\right)=\frac{k^3}{3}$

(i -ⓑ-①) $a_4=-\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k$일 때,

$$a_5=a_4-\frac{2}{3}k=\left(-\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k\right)-\frac{2}{3}k$$
$$=-\frac{k^2}{3}-\frac{4}{3}k$$

또는

$a_5=-ka_4=-k\times\left(-\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k\right)=\frac{k^3}{3}+\frac{2}{3}k^2$

$a_5=-\frac{k^2}{3}-\frac{4}{3}k$일 때,

$a_5=-\frac{k(k+4)}{3}<0$

이고

$a_5=\frac{k^3}{3}+\frac{2}{3}k^2$일 때,

$a_5=\frac{k^2(k+2)}{3}>0$

이므로 $a_5=0$을 만족시키는 양수 k의 값은 존재하지 않는다.

(i -ⓑ-②) $a_4=\frac{k^3}{3}$일 때,

$a_5=a_4-\frac{2}{3}k=\frac{k^3}{3}-\frac{2}{3}k$

또는

$a_5=-ka_4=-k\times\frac{k^3}{3}=-\frac{k^4}{3}$

$a_5=\frac{k^3}{3}-\frac{2}{3}k$일 때,

$a_5=0$에서

$\frac{k^3}{3}-\frac{2}{3}k=0$

$\frac{k(k^2-2)}{3}=0$

$k>0$이므로

$k=\sqrt{2}$

$a_5=-\frac{k^4}{3}$일 때,

$a_5=-\frac{k^4}{3}<0$

이므로 $a_5=0$을 만족시키는 양수 k의 값은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $a_2=-k^2$일 때,

$a_3=a_2-\frac{2}{3}k=-k^2-\frac{2}{3}k$

또는

$a_3=-ka_2=-k\times(-k^2)=k^3$

(ⅱ-ⓐ) $a_3=-k^2-\frac{2}{3}k$일 때,

$a_2\times a_3=-k^2\times\left(-k^2-\frac{2}{3}k\right)=k^2\left(k^2+\frac{2}{3}k\right)>0$

이므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(ⅱ-ⓑ) $a_3=k^3$일 때,

$a_2\times a_3=-k^2\times k^3=-k^5<0$

이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

$a_3=k^3$이므로

$a_4=a_3-\frac{2}{3}k=k^3-\frac{2}{3}k$

또는

$a_4=-ka_3=-k\times k^3=-k^4$

(ⅱ-ⓑ-①) $a_4=k^3-\frac{2}{3}k$일 때,

$a_5=a_4-\frac{2}{3}k=\left(k^3-\frac{2}{3}k\right)-\frac{2}{3}k=k^3-\frac{4}{3}k$

또는

$a_5=-ka_4=-k\times\left(k^3-\frac{2}{3}k\right)=-k^4+\frac{2}{3}k^2$

$a_5=k^3-\frac{4}{3}k$일 때,

$a_5=0$에서

$k^3-\frac{4}{3}k=0$

$k\left(k^2-\frac{4}{3}\right)=0$

$k>0$이므로

$k=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$a_5=-k^4+\frac{2}{3}k^2$일 때,

$a_5=0$에서

$-k^4+\frac{2}{3}k^2=0$

$-k^2\left(k^2-\frac{2}{3}\right)=0$

$k>0$이므로

$k=\sqrt{\frac{2}{3}}$

(ⅱ-ⓑ-②) $a_4=-k^4$일 때,

$a_5=a_4-\frac{2}{3}k=-k^4-\frac{2}{3}k$

또는

$a_5=-ka_4=-k\times(-k^4)=k^5$

$a_5=-k^4-\frac{2}{3}k$일 때,

$a_5=-k\left(k^3+\frac{2}{3}\right)<0$

이고,

$a_5=k^5$일 때,

$a_5>0$

이므로 $a_5=0$을 만족시키는 양수 k의 값은 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서

k의 값은 2, $\sqrt{2}$ $\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$

따라서 k^2의 값의 합은

$2^2+(\sqrt{2})^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2=8$

정답 8

■ [선택: 기하]
23. ③ 24. ④ 25. ⑤ 26. ③ 27. ④
28. ① 29. 63 30. 54

23. **출제의도** : 성분으로 나타낸 두 벡터의 연산을 할 수 있는가?

풀이 :
$\vec{a}=(4, 0)$, $\vec{b}=(1, 3)$이므로
$$2\vec{a}+\vec{b}=2(4, 0)+(1, 3)$$
$$=(8, 0)+(1, 3)$$
$$=(9, 3)$$
따라서
$(9, 3)=(9, k)$
이므로
$k=3$

정답 ③

24. **출제의도** : 주어진 조건을 만족시키는 타원의 방정식을 구할 수 있는가?

풀이 :
타원 $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$은 중심이 원점이고 $0<b<4$이므로 두 초점은 x축 위에 있다. 이때 두 초점 사이의 거리가 6이므로 두 초점의 좌표는
$(3, 0)$, $(-3, 0)$
이다.
따라서
$4^2-b^2=3^2$
이므로
$b^2=4^2-3^2=7$

정답 ④

25. **출제의도** : 좌표공간에서 선분의 중점과 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있는가?

풀이 :
두 점 $\mathrm{A}(a, b, -5)$, $\mathrm{B}(-8, 6, c)$에 대하여 선분 AB의 중점이 zx평면 위에 있으므로 중점의 y좌표는 0이다. 즉,
$$\frac{b+6}{2}=0$$
이므로 $b=-6$
또, 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이 y축 위에 있으므로 내분하는 점의 x좌표와 z좌표는 0이다. 즉,
$$\frac{1\times(-8)+2\times a}{1+2}=0,\ \frac{1\times c+2\times(-5)}{1+2}=0$$
이므로
$a=4$, $c=10$
따라서
$a+b+c=4+(-6)+10=8$

정답 ⑤

26. **출제의도** : 포물선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하여 문제를 해결할 수 있는가?

풀이 :
포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(n^2, 2n)$에서의 접선의 방정식은
$2ny=2(x+n^2)$
즉, $x-ny+n^2=0$
이 직선이 주어진 원과 만나려면 점 $(1, 0)$까지의 거리가 6 이하여야 한다.
즉, $\frac{|1+n^2|}{\sqrt{1+n^2}}\le 6$

$\sqrt{1+n^2} \le 6$

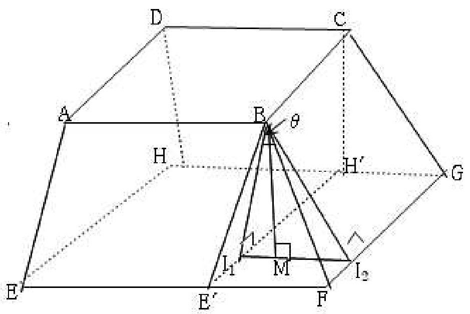
$n^2 \le 35$

따라서 $n=1, 2, 3, 4, 5$이므로 구하는 자연수 n의 개수는 5이다.

정답 ③

27. 출제의도 : 두 평면이 이루는 이면각의 크기를 이용하여 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

풀이 :



선분 BC를 지나고 사각형 AEHD와 평행한 평면이 두 선분 EF, HG와 만나는 점을 각각 E′, H′이라 하자.

점 B에서 두 선분 E′H′, FG에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{I_1}$, $\mathrm{I_2}$라 하고, 사각형 AEHD와 평면 BFGC가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\theta = \angle \mathrm{I_1BI_2}$

$\overline{\mathrm{BI_1}} = \overline{\mathrm{BI_2}}$, $\overline{\mathrm{I_1I_2}} = 6-4=2$

이등변삼각형 $\mathrm{I_1BI_2}$의 꼭짓점 B에서 선분 $\mathrm{I_1I_2}$에 내린 수선을 발을 M이라 하면

$\overline{\mathrm{BM}} = \sqrt{14}$, $\overline{\mathrm{I_1M}} = \overline{\mathrm{I_2M}} = 1$

직각삼각형 $\mathrm{BI_1M}$에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{BI_2}} = \overline{\mathrm{BI_1}} = \sqrt{\overline{\mathrm{BM}}^2 + \overline{\mathrm{I_1M}}^2}$$
$$= \sqrt{(\sqrt{14})^2 + 1^2} = \sqrt{15}$$

삼각형 $\mathrm{BI_1I_2}$에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta = \frac{\overline{\mathrm{BI_1}}^2 + \overline{\mathrm{BI_2}}^2 - \overline{\mathrm{I_1I_2}}^2}{2 \times \overline{\mathrm{BI_1}} \times \overline{\mathrm{BI_2}}}$$
$$= \frac{(\sqrt{15})^2 + (\sqrt{15})^2 - 2^2}{2 \times \sqrt{15} \times \sqrt{15}} = \frac{13}{15}$$

한편, 사다리꼴 AEHD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (\overline{\mathrm{AD}} + \overline{\mathrm{EH}}) \times \overline{\mathrm{BI_1}}$$
$$= \frac{1}{2} \times (4+6) \times \sqrt{15} = 5\sqrt{15}$$

따라서 사각형 AEHD의 평면 BFGC위로의 정사영의 넓이는

$$5\sqrt{15} \times \cos\theta = 5\sqrt{15} \times \frac{13}{15}$$
$$= \frac{13}{3}\sqrt{15}$$

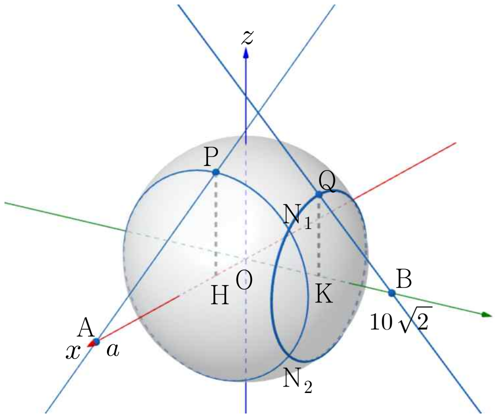
정답 ④

28. 출제의도 : 구의 방정식을 이해하고 공간도형의 성질을 활용하여 공간좌표의 성분을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\angle \mathrm{APO} = \frac{\pi}{2}$인 구 S 위의 모든 점 P가 나타내는 도형 C_1과 $\angle \mathrm{BPO} = \frac{\pi}{2}$인 구 S 위의 모든 점 Q가 나타내는 도형 C_2는 각각 x축과 y축에 중심이 있는 원이고 선분 $\mathrm{N_1N_2}$는 원 C_1의 현이다.

원 C_1위의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 원 C_1의 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{PH}}$이다.



직각삼각형 OPA에서 구 S의 반지름의 길이는 10이므로 $\overline{AP} = \sqrt{a^2-100}$

$\overline{PH} = 10\sin(\angle POA) = \dfrac{10\sqrt{a^2-100}}{a}$

삼각형 ON_1N_2에서 $\overline{ON_1} = \overline{ON_2} = 10$이므로 코사인법칙에 의해서

$$\begin{aligned}\overline{N_1N_2}^2 &= 10^2+10^2-2\times10^2\cos(\angle N_1ON_2)\\ &= 200(1-\frac{3}{5})\\ &= 80\end{aligned}$$

즉, $\overline{N_1N_2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

선분 N_1N_2와 xy평면이 만나는 점을 R라 하면 $\overline{N_1R} = 2\sqrt{5}$

원 C_2위의 점 Q에서 y축에 내린 수선의 발을 K라 하면 원 C_2의 반지름의 길이는 $\overline{QK}$이다.

직각삼각형 OQB에서 구 S의 반지름의 길이는 10이므로

$\overline{BQ} = \sqrt{(10\sqrt{2})^2-100} = 10$

그러므로 $\angle QOB = \angle QBO = \dfrac{\pi}{4}$이고

$$\begin{aligned}\overline{QK} = \overline{OK} &= 10\sin(\angle QOB)\\ &= 10\times\frac{1}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

그런데 $\overline{OK}$는 원 C_1의 중심에서 현 N_1N_2까지의 거리와 같으므로

$\overline{HR} = 5\sqrt{2}$

그러므로 직각삼각형 N_1HR에서

$\overline{N_1H} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2+(2\sqrt{5})^2}$

그런데 $\overline{N_1H}$는 원 C_1의 반지름이므로 $\overline{N_1H} = \overline{PH}$ 이다.

즉, $\overline{PH}^2 = \overline{N_1H}^2$에서

$\left(\dfrac{10\sqrt{a^2-100}}{a}\right)^2 = 70$

$100(a^2-100) = 70a^2$

$30a^2 = 10000$

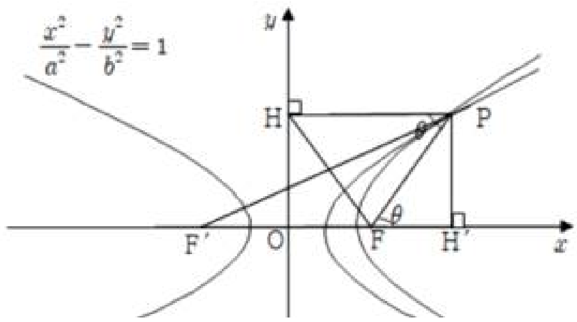
$a = \dfrac{100\sqrt{30}}{30}$ 또는 $a = -\dfrac{100\sqrt{30}}{30}$

따라서 $a = \dfrac{10\sqrt{30}}{3}$

정답 ①

29. 출제의도 : 조건을 만족시키는 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있는가?

풀이 :



$\overline{PH} : \overline{HF} = 3 : 2\sqrt{2}$이므로

$\overline{PH} = 3k$, $\overline{HF} = 2\sqrt{2}\,k\,(k>0)$

이라 하자.

점 P는 y축을 준선으로 하는 포물선 위의 점이므로 포물선의 정의에 의하여

$\overline{PF} = \overline{PH} = 3k$

삼각형 HPF에서 $\angle HPF=\theta$라 하면
코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{\overline{PH}^2+\overline{PF}^2-\overline{HF}^2}{2\times\overline{PH}\times\overline{PF}}$$

$$=\frac{(3k)^2+(3k)^2-(2\sqrt{2}k)^2}{2\times 3k\times 3k}=\frac{5}{9}$$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H'이라 하면

$\angle PFH'=\angle HPF=\theta$

$\overline{FH'}=\overline{PH}-\overline{OF}=3k-4$

$=\overline{PF}\times\cos\theta=3k\times\frac{5}{9}=\frac{5}{3}k$

$3k-4=\frac{5}{3}k$에서 $k=3$

$\overline{PF}=3k=9$, $\overline{FH'}=\frac{5}{3}k=5$

직각삼각형 PFH'에서

$\overline{PH'}=\sqrt{\overline{PF}^2-\overline{FH'}^2}=\sqrt{56}$

$\overline{F'H'}=\overline{F'F}+\overline{FH'}=8+5=13$

직각삼각형 $PF'H'$에서

$\overline{PF'}=\sqrt{\overline{F'H'}^2+\overline{PH'}^2}=15$

점 P는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$위의 점이므로

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF'}-\overline{PF}=15-9=2a$

즉, $a^2=9$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 한 초점이 $F(4,0)$이므로

$4^2=a^2+b^2$에서 $b^2=16-9=7$

따라서

$a^2\times b^2=9\times 7=63$

정답 63

30. 출제의도 : 위치벡터의 뜻과 벡터의 합을 알고 벡터를 기하학적으로 해석하여 벡터의 내적의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

풀이 :

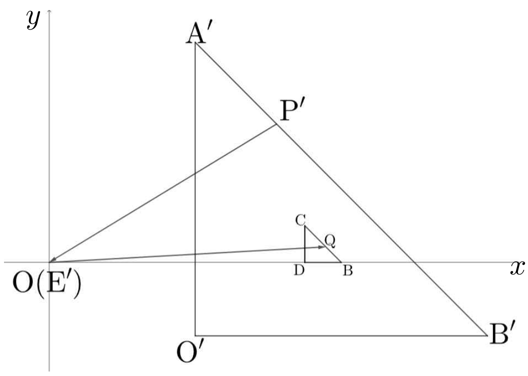
두 벡터 $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{OE}$의 합 $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{OE}$는

$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OE}$

$=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{PE}$ … ㉠

와 같이 바꾸어 나타낼 수 있다.

점 E가 원점 O에 오도록 다섯 개의 점 O, A, B, P, E를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하고 각 점을 O', A', B', P', E'이라 하면 O', A', B', E'의 좌표는 각각 $O'(4,-2)$, $A'(4,6)$, $B'(12,-2)$, $E'(0,0)$이고 점 P'은 삼각형 $A'O'B'$ 위의 점이다. 이것을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



그런데 $\overrightarrow{PE}=\overrightarrow{P'E'}=\overrightarrow{P'O}$이므로

$\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{PE}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{P'O}=\overrightarrow{P'Q}$ … ㉡

㉠과 ㉡에서 $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{P'Q}$

그러므로 $|\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{OE}|^2$의 최댓값과 최솟값은 각각 $\overline{P'Q}^2$의 최댓값, 최솟값과 같다.

ⅰ) 최솟값

직선 $A'B'$의 방정식은

$$y=\frac{-2-6}{12-4}(x-4)+6=-x+10$$

이고 직선 CB와 직선 $A'B'$이 평행하므로

최솟값 m은

$$m=\left(\frac{|-8-0+10|}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}}\right)^2=2$$

이다.

ⅱ) 최댓값

최댓값은 삼각형 O′A′B′위의 점과 삼각형 CDB 위의 점 사이의 거리 중 최댓값이므로 점 A′과 점 B사이의 거리이다.

그러므로 최댓값 M은

$$M=\left(\sqrt{(8-4)^2+(0-6)^2}\right)^2=52$$

이다.

따라서 $M+m=54$

정답 54