2024학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가

수학영역 정답 및 풀이

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01. ⑤	02. ③	03. ②	04. ①	05. ⑤
06. ③	07. ④	08. ④	09. ③	10. ③
11. ⑤	12. ①	13. ③	14. ②	15. ④
16. 6	17. 24	18. 5	19. 4	
20. 98	21. 19	22. 10		

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 값을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$3^{1-\sqrt{5}} \times 3^{1+\sqrt{5}}$

$=3^{(1-\sqrt{5})+(1+\sqrt{5})}$

$=3^2$

$=9$

정답 ⑤

2. **출제의도** : 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2x^2-x$에서

$f'(x)=4x-1$

이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=f'(1)=3$

정답 ③

3. **출제의도** : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$이고 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이므로

$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}$

$=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

정답 ②

4. **출제의도** : 그래프를 보고 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to -2+}f(x)=-2$, $\lim_{x\to 1-}f(x)=0$

이므로

$\lim_{x\to -2+}f(x)+\lim_{x\to 1-}f(x)=-2+0=-2$

정답 ①

5. **출제의도** : 주어진 조건을 만족시키는 등비수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $a>0$, $r>0$이다.

$\dfrac{a_3a_8}{a_6}=12$에서 $\dfrac{ar^2\times ar^7}{ar^5}=12$, $ar^4=12$

즉, $a_5=12$

$a_5+a_7=36$에서 $a_7=24$이므로

$r^2=\dfrac{a_7}{a_5}=\dfrac{24}{12}=2$

$\dfrac{a_{11}}{a_7}=r^4=(r^2)^2=2^2=4$이므로

$a_{11}=a_7\times4=24\times4=96$

정답 ⑤

6. **출제의도** : 다항함수의 극댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

이고, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대, $x=3$에서 극소이므로

$$3x^2+2ax+b=3(x+1)(x-3)$$
$$=3x^2-6x-9$$

따라서 $a=-3$, $b=-9$ 이고

$f(x)=x^3-3x^2-9x+1$

이므로 함수 $f(x)$의 극댓값은

$f(-1)=-1-3+9+1=6$

정답 ③

7. **출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$3a+2b=\log_3 32$, $ab=\log_9 2$이므로

$$\frac{1}{3a}+\frac{1}{2b}=\frac{3a+2b}{6ab}$$
$$=\frac{\log_3 32}{6\times log_9 2}$$
$$=\frac{\log_3 2^5}{6\times log_{3^2} 2}$$
$$=\frac{5\log_3 2}{3\log_3 2}$$
$$=\frac{5}{3}$$

정답 ④

8. **출제의도** : 부정적분을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=6x^2-2f(1)x$에서

$f(x)=2x^3-f(1)x^2+C$ (C는 적분상수)

라 하면 $f(0)=4$이므로

$C=4$

즉, $f(x)=2x^3-f(1)x^2+4$

이 식에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2-f(1)+4$

$f(1)=3$

따라서

$f(x)=2x^3-3x^2+4$

이므로

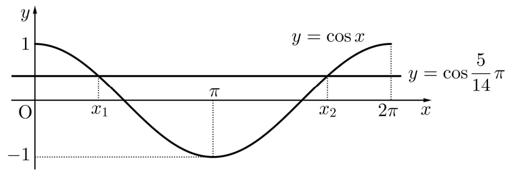
$f(2)=2\times2^3-3\times2^2+4=8$

정답 ④

9. **출제의도** : 삼각함수가 포함된 부등식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sin\frac{\pi}{7}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)=\cos\frac{5}{14}\pi$



그림과 같이 곡선 $y=\cos x(0\le x\le 2\pi)$ 와 직선 $y=\cos\frac{5}{14}\pi$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 x_1, $x_2(x_1<x_2)$라 하면

$x_1=\frac{5}{14}\pi$이고 $\frac{x_1+x_2}{2}=\pi$이므로

$x_2=2\pi-x_1=\frac{23}{14}\pi$

따라서 $0\le x\le 2\pi$일 때, 부등식 $\cos x\le\sin\frac{\pi}{7}$을 만족시키는 모든 x의 값의 범위는 $\frac{5}{14}\pi\le x\le\frac{23}{14}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\frac{23}{14}\pi-\frac{5}{14}\pi=\frac{9}{7}\pi$

정답 ③

10. **출제의도** : 삼차함수 그래프의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (2, 3)에서의 접선이 점 (1, 3)을 지나므로

$f(x)-3=(x-a)(x-2)^2$

$f(x)=(x-a)(x-2)^2+3$ (단, a는 상수)

이때

$f'(x)=(x-2)^2+2(x-a)(x-2)$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2, f(-2))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(-2)=f'(-2)(x+2)$

이 접선이 점 $(1,3)$을 지나므로

$3-f(-2)=f'(-2)(1+2)$

$3-f(-2)=3f'(-2)$

$3-\{16(-2-a)+3\}=3\{16-8(-2-a)\}$

$3-(-29-16a)=3(32+8a)$

$32+16a=96+24a$, $8a=-64$

즉, $a=-8$이므로

$f(x)=(x+8)(x-2)^2+3$

따라서

$f(0)=8(-2)^2+3=35$

정답 ③

11. **출제의도** : 적분을 이용하여 수직선 위를 움직이는 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P가 점 A(1)에서 출발하고 속도가 $v_1(t)=3t^2+4t-7$이므로 시각 t에서의 위치를 $s_1(t)$라 하면

$s_1(t)=1+\int_0^t(3t^2+4t-7)dt$

$=t^3+2t^2-7t+1$ -----㉠

또, 점 Q가 점 B(8)에서 출발하고 속도가 $v_2(t)=2t+4$이므로 시각 t에서의 위치를 $s_2(t)$라 하면

$s_2(t)=8+\int_0^t(2t+4)dt$

$=t^2+4t+8$ -----㉡

이때, 두 점 P, Q사이의 거리가 4가 되는 시각은

$|s_1(t)-s_2(t)|=4$

㉠, ㉡에서

$|(t^3+2t^2-7t+1)-(t^2+4t+8)|=4$

$|t^3+t^2-11t-7|=4$

그러므로

$t^3+t^2-11t-7=4$ 또는

$t^3+t^2-11t-7=-4$

즉,

$t^3+t^2-11t-11=0$ 또는

$t^3+t^2-11t-3=0$

(i) $t^3+t^2-11t-11=0$일 때,

$t^2(t+1)-11(t+1)=0$

$(t+1)(t^2-11)=0$

$t>0$이므로

$t=\sqrt{11}$

(ii) $t^3+t^2-11t-3=0$일 때,

좌변을 인수분해하면

$(t-3)(t^2+4t+1)=0$

$t>0$이므로

$t=3$

(i), (ii)에 의하여 두 점 P, Q의 사이의 거리가 처음으로 4가 되는 시각은

$t=3$

한편,

$v_1(t)=3t^2+4t-7$

$=(3t+7)(t-1)$

이므로

$0\le t<1$일 때, $v_1(t)<0$

$t\ge 1$일 때, $v_1(t)\ge 0$

따라서 점 P가 시각 $t=0$에서 시각 $t=3$까지 움직인 거리는

$$\int_0^3 |v_1(t)|dt$$

$$=-\int_0^1 v_1(t)dt+\int_1^3 v_1(t)dt$$

$$=-\int_0^1 (3t^2+4t-7)dt+\int_1^3 (3t^2+4t-7)dt$$

$$=-\left[t^3+2t^2-7t\right]_0^1+\left[t^3+2t^2-7t\right]_1^3$$

$$=-(-4)+28$$

$$=32$$

정답 ⑤

12. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

자연수 k에 대하여

(i) $a_1=4k$일 때,

a_1은 짝수이므로

$$a_2=\frac{a_1}{2}=\frac{4k}{2}=2k$$

a_2도 짝수이므로

$$a_3=\frac{a_2}{2}=\frac{2k}{2}=k$$

㉠ k가 홀수인 경우

$a_4=a_3+1=k+1$

이때

$a_2+a_4=2k+(k+1)=3k+1$

이므로

$3k+1=40$

에서 $k=13$이고,

$a_1=4k=4\times 13=52$

㉡ k가 짝수인 경우

$$a_4=\frac{a_3}{2}=\frac{k}{2}$$

이때

$$a_2+a_4=2k+\frac{k}{2}=\frac{5}{2}k$$

이므로

$$\frac{5}{2}k=40$$

에서 $k=16$이고,

$a_1=4k=4\times 16=64$

(ⅱ) $a_1=4k-1$일 때,

a_1은 홀수이므로

$a_2=a_1+1=4k$

a_2는 짝수이므로

$$a_3=\frac{a_2}{2}=\frac{4k}{2}=2k$$

a_3도 짝수이므로

$$a_4=\frac{a_3}{2}=\frac{2k}{2}=k$$

이때

$a_2+a_4=4k+k=5k$

이므로

$5k=40$

에서 $k=8$이고,

$a_1=4k-1=4\times8-1=31$

(ⅲ) $a_1=4k-2$일 때,

a_1은 짝수이므로

$$a_2=\frac{a_1}{2}=\frac{4k-2}{2}=2k-1$$

a_2는 홀수이므로

$a_3=a_2+1=(2k-1)+1=2k$

a_3은 짝수이므로

$$a_4=\frac{a_3}{2}=\frac{2k}{2}=k$$

이때

$a_2+a_4=(2k-1)+k=3k-1$

이므로

$3k-1=40$

에서 $k=\frac{41}{3}$이고, 이것은 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅳ) $a_1=4k-3$일 때,

a_1은 홀수이므로

$a_2=a_1+1=(4k-3)+1=4k-2$

a_2는 짝수이므로

$$a_3=\frac{a_2}{2}=\frac{4k-2}{2}=2k-1$$

a_3은 홀수이므로

$a_4=a_3+1=(2k-1)+1=2k$

이때

$a_2+a_4=(4k-2)+2k=6k-2$

이므로

$6k-2=40$

에서 $k=7$이고,

$a_1=4k-3=4\times7-3=25$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값의 합은

$52+64+31+25=172$

정답 ①

13. **출제의도** : 도함수를 활용하여 함수가 주어진 증가, 감소에 대한 조건을 만족시키도록 하는 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}x^3-ax^2-bx & (x<0)\\ \frac{1}{3}x^3+ax^2-bx & (x\ge0)\end{cases}$$

에서

$$f'(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-b & (x<0)\\ x^2+2ax-b & (x>0)\end{cases}$$

이다.

함수 $f(x)$가 $x=-1$의 좌우에서 감소하다가 증가하고, 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하므로

$f'(-1)=0$

$-1+2a-b=0$, $b=2a-1$

$x<0$일 때

$f'(x)=-x^2-2ax-2a+1$

$=-(x+1)(x+2a-1)$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-1$ 또는 $x=-2a+1$ 이다. 이때 함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty,\ -1]$ 에서 감소하고, 구간 $[-1,\ 0]$ 에서 증가하므로 $(-\infty,\ -1)$ 에서 $f'(x)\le 0$, $(-1,\ 0)$ 에서 $f'(x)\ge 0$ 이어야 한다.

즉, $f'(-2a+1)=0$ 에서 $-2a+1\ge 0$ 이어야 한다.

그러므로 $a\le \dfrac{1}{2}$ …… ㉠

한편, $x>0$ 일 때

$$\begin{aligned} f'(x)&=x^2+2ax-b \\ &=x^2+2ax-2a+1 \\ &=(x+a)^2-a^2-2a+1 \end{aligned}$$

이고 함수 $f(x)$ 가 구간 $[0,\ \infty)$ 에서 증가하므로 $(0,\ \infty)$ 에서 $f'(x)\ge 0$ 이어야 한다.

(ⅰ) $-a<0$, 즉 $a>0$ 인 경우

$(0,\ \infty)$ 에서 $f'(x)\ge 0$ 이려면

$f'(0)=-2a+1\ge 0$ 이면 된다.

그러므로 $0<a\le \dfrac{1}{2}$

(ⅱ) $-a\ge 0$, 즉 $a\le 0$ 인 경우

$(0,\ \infty)$ 에서 $f'(x)\ge 0$ 이려면

$f'(-a)=-a^2-2a+1\ge 0$ 이면 된다.

$a^2+2a-1\le 0$,

$-1-\sqrt{2}\le a\le -1+\sqrt{2}$

그러므로 $-1-\sqrt{2}\le a\le 0$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$-1-\sqrt{2}\le a\le \dfrac{1}{2}$ …… ㉡

즉, ㉠, ㉡에서 구하는 a 의 값의 범위는

$-1-\sqrt{2}\le a\le \dfrac{1}{2}$ 이므로 $a+b=3a-1$ 의 값의 최댓값은 $a=\dfrac{1}{2}$ 일 때 $\dfrac{1}{2}$, 최솟값은 $a=-1-\sqrt{2}$ 일 때 $-4-3\sqrt{2}$ 이다.

따라서

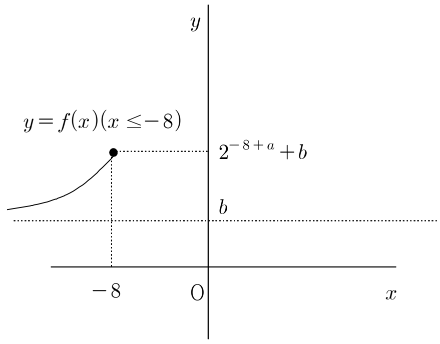
$$M-m=\frac{1}{2}-(-4-3\sqrt{2})=\frac{9}{2}+3\sqrt{2}$$

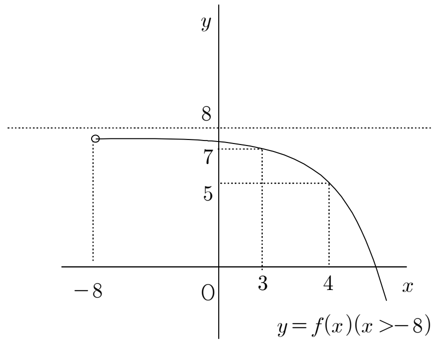
정답 ③

14. 출제의도 : 지수함수의 그래프를 이해하고 조건을 만족시키는 지수함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x\le -8$과 $x>-8$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 각각 그림과 같다.





또한 주어진 조건에서 $3\le k<4$이므로 $x>-8$인 경우에 정수 $f(x)$는

$f(x)=6$ 또는 $f(x)=7$

이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키기 위해서는 $x\le -8$인 경우에 정수 $f(x)$는 6뿐이어야 한다.

즉 $b=5$이고 $6 \le f(-8) < 7$ 이어야 하므로

$6 \le 2^{-8+a}+5 < 7$

$1 \le 2^{-8+a} < 2$

$0 \le -8+a < 1$, $8 \le a < 9$

이때 a는 자연수이므로 $a=8$

따라서 $a+b=8+5=13$

정답 ②

15. **출제의도** : 함수의 극한과 연속을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to 3} g(x)=g(3)-1$ ----㉠

이므로 $x=3$일 때, $f(3)$의 값에 따라 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(ⅰ) $f(3)\ne 0$일 때,

$x=3$에 가까운 x의 값에 대하여 $f(x)\ne 0$이므로

$g(x)=\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$

이때 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 $f(x)$, $f(x+3)$, $f(x)+1$은 연속이다.

그러므로 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 연속이다. 즉,

$\lim_{x\to 3} g(x)=g(3)$

이 식을 ㉠에 대입하면 만족하지 않는다.

(ⅱ) $f(3)=0$일 때,

함수 $f(x)$가 삼차함수이므로 방정식 $f(x)=0$은 많아야 서로 다른 세 실근을 갖는다.

그러므로 $x=3$에 가까우며 $x\ne 3$인 x의 값에 대하여

$f(x)\ne 0$

이때,

$\lim_{x\to 3} g(x)$

$=\lim_{x\to 3}\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$ ----㉡

위에서 $x\to 3$일 때, (분모)$\to 0$이므로

(분자)$\to 0$에서

$\lim_{x\to 3} f(x+3)\{f(x)+1\}=0$

$f(6)\{f(3)+1\}=0$

$f(6)=0$

그러므로

$f(x)=(x-3)(x-6)(x-k)$

(k는 상수)

이 식을 ㉡에 대입하면

$\lim_{x\to 3} g(x)$

$=\lim_{x\to 3}\dfrac{x(x-3)(x+3-k)\{(x-3)(x-6)(x-k)+1\}}{(x-3)(x-6)(x-k)}$

$=\lim_{x\to 3}\dfrac{x(x+3-k)\{(x-3)(x-6)(x-k)+1\}}{(x-6)(x-k)}$

$=\dfrac{3(6-k)}{-3(3-k)}$

$=\dfrac{6-k}{k-3}$

이 값을 ㉠에 대입하면 $g(3)=3$이므로

$\dfrac{6-k}{k-3}=3-1$

$6-k=2k-6$

$3k=12$

$k=4$

따라서,

$f(x)=(x-3)(x-4)(x-6)$

이고 $f(5)\ne 0$이므로

$g(5)=\dfrac{f(8)\{f(5)+1\}}{f(5)}$

$=\dfrac{5\times 4\times 2\times\{2\times 1\times(-1)+1\}}{2\times 1\times(-1)}$

$=20$

정답 ④

정답 24

16. **출제의도** : 로그방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

로그의 진수 조건에 의하여

$x-1>0$에서 $x>1$ ······㉠

$13+2x>0$에서 $x>-\dfrac{13}{2}$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $x>1$

$\log_2(x-1)=\log_4(13+2x)$

에서

$\log_2(x-1)=\dfrac{1}{2}\log_2(13+2x)$

$2\log_2(x-1)=\log_2(13+2x)$

$\log_2(x-1)^2=\log_2(13+2x)$

$(x-1)^2=13+2x$

$x^2-4x-12=0$

$(x+2)(x-6)=0$

$x>1$이므로 $x=6$

정답 6

17. **출제의도** : 합의 기호 $\sum$의 성질을 이해하여 주어진 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)&=\sum_{k=1}^{10}\{(2a_k-b_k)-a_k\}\\&=\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k)-\sum_{k=1}^{10}a_k\\&=34-10\\&=24\end{aligned}$$

18. **출제의도** : 곱의 미분법을 이용하여 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=(x^2+1)(x^2+ax+3)$에서

$f'(x)=2x(x^2+ax+3)+(x^2+1)(2x+a)$

이므로

$$\begin{aligned}f'(1)&=2(a+4)+2(a+2)\\&=4a+12=32\end{aligned}$$

따라서 $a=5$

정답 5

19. **출제의도** : 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 정적분을 이용하여 구할 수 있는가?

정답풀이 :

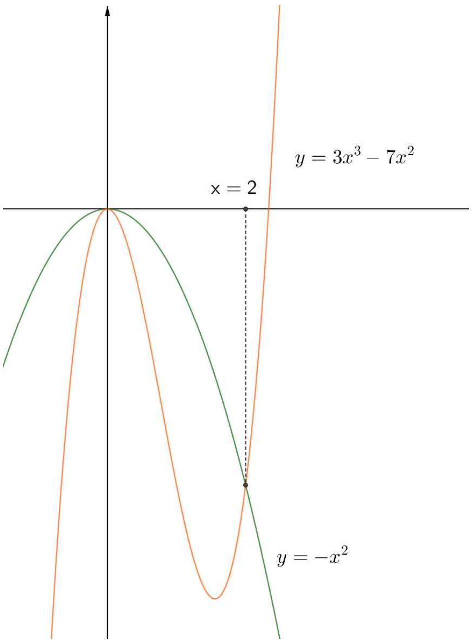
두 곡선 $y=3x^3-7x^2$, $y=-x^2$이 만나는 점의 x좌표는

$3x^3-7x^2=-x^2$

$3x^2(x-2)=0$

$x=0$ 또는 $x=2$

이때, 두 함수 $y=3x^3-7x^2$, $y=-x^2$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2 \{(-x^2)-(3x^3-7x^2)\}dx$$

$$=\int_0^2 (-3x^3+6x^2)dx$$

$$=\left[-\frac{3}{4}x^4+2x^3\right]_0^2$$

$$=(-12+16)-0$$

$$=4$$

정답 4

20. **출제의도** : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin\frac{3}{4}\pi}=2R_1,\ \frac{\overline{BD}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2R_1$$

$$R_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{BD}$$

이고, 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin\frac{2}{3}\pi}=2R_2,\ \frac{\overline{BD}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R_2$$

$$R_2=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}\times\overline{BD}$$

이다. 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2=2^2+1^2-2\times2\times1\times\cos\frac{2}{3}\pi$$

$$=2^2+1-\boxed{(-2)}$$

$$=7$$

이므로

$$R_1\times R_2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{BD}\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\times\overline{BD}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{6}\times\overline{BD}^2$$

$$=\boxed{\frac{7\sqrt{6}}{6}}$$

이다.

따라서 $p=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $q=-2$, $r=\frac{7\sqrt{6}}{6}$이므로

$$9\times(p\times q\times r)^2=9\times\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\times(-2)\times\frac{7\sqrt{6}}{6}\right\}^2$$

$$=9\times\frac{98}{9}$$

$$=98$$

정답 98

21. **출제의도** : 등차수열의 일반항과 합을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자. 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수이므로 a는 자연수이고 d는 0 이상의 정수이다.

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=\frac{d}{2}n^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)n$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{7}S_k=\sum_{k=1}^{7}\left\{\frac{d}{2}k^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)k\right\}$$
$$=\frac{d}{2}\times\sum_{k=1}^{7}k^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)\times\sum_{k=1}^{7}k$$
$$=\frac{d}{2}\times\frac{7\times8\times15}{6}+\left(a-\frac{d}{2}\right)\times\frac{7\times8}{2}$$
$$=70d+28\left(a-\frac{d}{2}\right)$$
$$=28a+56d$$

$28a+56d=644$에서

$a+2d=23$ …… ㉠

a_7이 13의 배수이므로 자연수 m에 대하여

$a+6d=13m$ …… ㉡

㉡−㉠에서 $4d=13m-23$

$4d+23+13=13m+13$

$4(d+9)=13(m+1)$

$$d+9=\frac{13(m+1)}{4}$$

이 값이 자연수가 되어야 하므로 $m+1$의 값은 4의 배수이어야 한다. 즉, m이 될 수 있는 값은

3, 7, 11, 15, …

한편, $d=\frac{13m-23}{4}$이므로 ㉡에서

$$a=13m-6d$$
$$=13m-6\times\left(\frac{13m-23}{4}\right)$$
$$=13m-\frac{39}{2}m+\frac{69}{2}$$
$$=-\frac{13}{2}m+\frac{69}{2}$$

이고 이 값이 양수이어야 하므로

$-\frac{13}{2}m+\frac{69}{2}>0$, $m<\frac{69}{13}$

따라서 $m=3$이고 이때 $d=4$이므로

$a=23-2d=15$

이고

$a_2=a+d=15+4=19$

정답 19

22. 출제의도 : 곱의 미분법과 부정적분을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구하고, 그 정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에 $x=1$을 대입하면

$0=f(1)-3$

이므로

$f(1)=3$ …… ㉠

조건 (가)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-4x$

이고, $f(x)$는 다항함수이므로

$f'(x)=4$

즉,

$f(x)=4x+C_1$ (C_1은 적분상수)

로 놓을 수 있다. 이때 ㉠에서

$f(1)=3$

이므로

$f(1)=4+C_1=3$

$C_1=-1$

즉, $f(x)=4x-1$이므로

$F(x)=2x^2-x+C_2$ (C_2는 적분상수)

한편, 조건 (나)에서

$f(x)G(x)+F(x)g(x)=\{F(x)G(x)\}'$

이므로 양변을 x에 대하여 적분하면

$F(x)G(x)=2x^4+x^3+x+C_3$ (C_3은 적분 상수)

로 놓을 수 있다.

이때 $F(x)=2x^2-x+C_2$이고 $G(x)$도 다항함수이므로 $G(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

$G(x)=x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수)

로 놓으면

$$(2x^2-x+C_2)(x^2+ax+b)=2x^4+x^3+x+C_3$$

양변의 x^3의 계수를 비교하면

$2a-1=1$

즉, $a=1$이므로

$G(x)=x^2+x+b$

따라서

$$\begin{aligned}\int_1^3 g(x)dx&=\Big[G(x)\Big]_1^3\\&=G(3)-G(1)\\&=(3^2+3+b)-(1^2+1+b)\\&=10\end{aligned}$$

정답 10

■ [선택: 기하]
23. ④ 24. ① 25. ⑤ 26. ② 27. ③
28. ① 29. 17 30. 27

23. 출제의도 : 좌표공간의 점을 대칭이동한 점의 좌표와 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
좌표공간의 점 A$(8, 6, 2)$를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는
B$(8, 6, -2)$
따라서 선분 AB의 길이는
$$\overline{AB} = \sqrt{(8-8)^2+(6-6)^2+(-2-2)^2}$$
$$= \sqrt{16}$$
$$= 4$$

정답 ④

24. 출제의도 : 쌍곡선의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
쌍곡선 $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{6}=1$ 위의 점 $(7,\ 6)$에서의 접선의 방정식은
$$\frac{7x}{7}-\frac{6y}{6}=1$$
즉, $y=x-1$
이다.
직선 $y=x-1$에서
$y=0$일 때,
$0=x-1$
$x=1$
따라서 구하는 x절편은
1

정답 ①

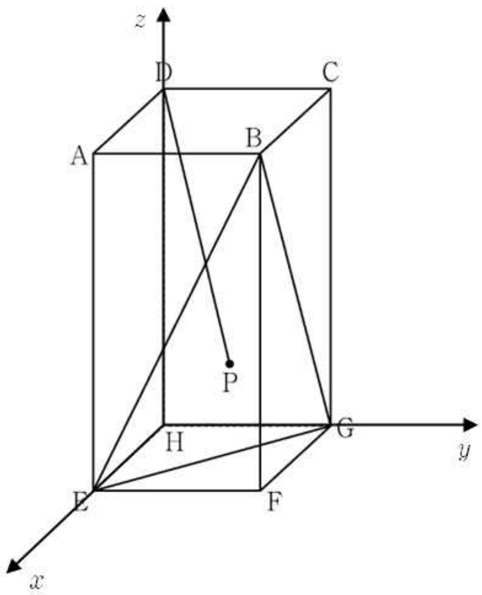
25. 출제의도 : 벡터의 성질을 이용하여 점 P가 나타내는 도형의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
A$(4,\ 3)$이므로
$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{4^2+3^2}=5$$
$$|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OA}|$$
이므로
$$|\overrightarrow{OP}|=5$$
점 P가 나타내는 도형은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 5인 원이다.
따라서 점 P가 나타내는 도형의 길이는
$2\pi\times 5=10\pi$

정답 ⑤

26. 출제의도 : 공간도형에 공간좌표를 적용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
점 H를 원점이라 하고,
반직선 HE가 x축의 양의 방향,
반직선 HG가 y축의 양의 방향,
반직선 HD가 z축의 양의 방향이 되도록 직육면체 ABCD$-$EFGH를 놓으면 그림과 같다.



$\overline{HE} = \overline{AD} = 3$,

$\overline{HG} = \overline{AB} = 3$,

$\overline{HD} = \overline{AE} = 6$

이므로

$B(3,\ 3,\ 6)$,

$E(3,\ 0,\ 0)$,

$G(0,\ 3,\ 0)$

이다.

삼각형 BEG의 무게중심 P의 좌표는

$$\left(\frac{3+3+0}{3},\ \frac{3+0+3}{3},\ \frac{6+0+0}{3}\right)$$

즉, $(2,\ 2,\ 2)$

이다.

따라서

$D(0,\ 0,\ 6)$

이므로

$$\overline{DP} = \sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2+(2-6)^2}$$
$$= \sqrt{4+4+16}$$
$$= \sqrt{24}$$
$$= 2\sqrt{6}$$

정답 ②

27. 출제의도 : 포물선의 성질을 이용하여 포물선의 초점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

포물선 $y^2 = 4px$에서

초점 F의 좌표는

$(p,\ 0)$

이고, 준선의 방정식은

$x = -p$

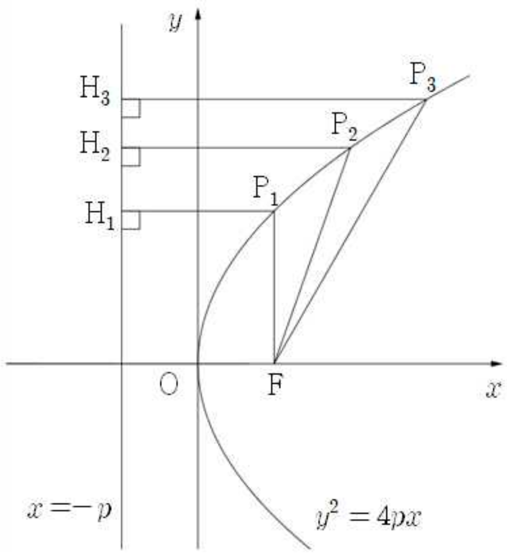
이다.

포물선 위의 세 점 P_1, P_2, P_3에서

포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각

H_1, H_2, H_3

이라 하자.



세 점 P_1, P_2, P_3의 x좌표가 각각

p, $2p$, $3p$

이므로

포물선의 성질에 의해

$\overline{FP_1} = \overline{H_1P_1} = p+p = 2p$,

$\overline{FP_2} = \overline{H_2P_2} = p+2p = 3p$,

$\overline{FP_3} = \overline{H_3P_3} = p+3p = 4p$

이다.

$\overline{FP_1}+\overline{FP_2}+\overline{FP_3}=27$에서

$2p+3p+4p=27$

$9p=27$

따라서 $p=3$

정답 ③

28. 출제의도 : 정사영의 성질을 이용하여 정사영시킨 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

좌표공간에서 원점을 O라 하자.

점 P는 중심이 A(0, 0, 1)이고 반지름의 길이가 4인 구 위의 점이므로

$\overline{AP}=4$

이다.

$\overline{OA}\perp(xy$ 평면)

이고

점 P가 xy 평면 위에 있으므로

$\overline{OA}\perp\overline{OP}$

이다.

직각삼각형 AOP

$\overline{OA}=1$

이므로

$$\overline{OP}=\sqrt{\overline{AP}^2-\overline{OA}^2}$$
$$=\sqrt{4^2-1^2}$$
$$=\sqrt{15}$$

원점 O에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$\overline{PM}=\overline{QM}$

이다.

$\overline{OA}\perp(xy$ 평면),

$\overline{OM}\perp\overline{PQ}$

이므로

삼수선의 정리에 의해

$\overline{AM}\perp\overline{PQ}$

이다.

점 A에서 선분 PQ까지의 거리가 2이므로

$\overline{AM}=2$

이다.

직각삼각형 OAM에서

$$\overline{OM}=\sqrt{\overline{AM}^2-\overline{OA}^2}$$
$$=\sqrt{2^2-1^2}$$
$$=\sqrt{3}$$

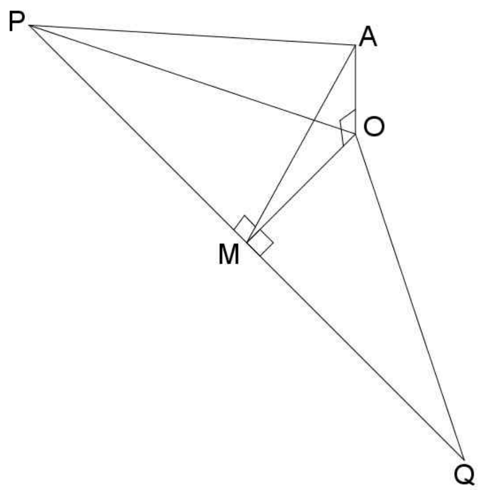
직각삼각형 OPM에서

$$\overline{PM}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OM}^2}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{15})^2-(\sqrt{3})^2}$$
$$=2\sqrt{3}$$

이고,

$\overline{PQ}=2\overline{PM}=4\sqrt{3}$

이다.



한편, 선분 PQ를 지름으로 하는 구 T는 중심이 M이고 반지름의 길이는 $2\sqrt{3}$

이다.

구 S와 구 T가 만나서 생기는 원을 C_1이라 하고, 원 C_1을 포함하는 평면을 α라 하면

$\alpha \perp \overline{\text{AM}}$
이다.
삼각형 OAM에서
$\angle \text{AMO} = \theta$
라 하면
$\cos\theta = \dfrac{\overline{\text{OM}}}{\overline{\text{AM}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
이므로
$\theta = \dfrac{\pi}{6}$
이다.
이때, 평면 α와 xy평면이 이루는 예각의 크기는
$\dfrac{\pi}{3}$
이다.
점 B에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{\text{BH}} \le 2\sqrt{3}$
이므로
삼각형 BPQ의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{\text{PQ}} \times \overline{\text{BH}}$$
$$\le \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}$$
$$= 12$$

이다.
삼각형 BPQ의 xy평면 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 하면

$$S' = S \times \cos\frac{\pi}{3}$$
$$\le 12 \times \frac{1}{2}$$
$$= 6$$

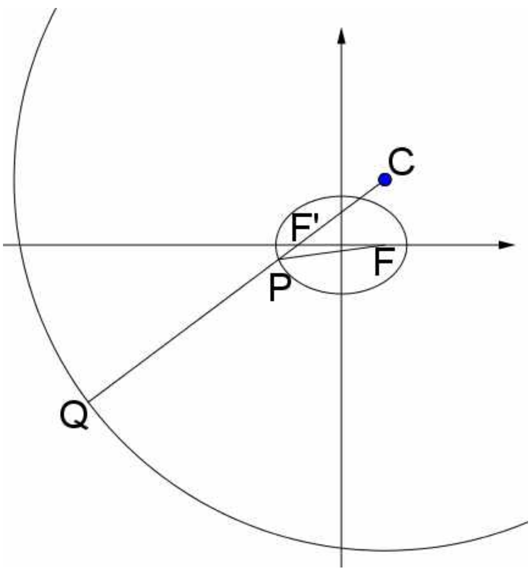
따라서 삼각형 BPQ의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은
6
이다.

정답 6

29. 출제의도 : 타원의 성질을 이용하여 세 점 P, Q, F 사이의 관계를 파악한 후, 원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
타원 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$의 한 초점이
$\text{F}(c,\ 0)(c > 0)$이므로
타원의 성질에 의해
$c^2 = 9 - 5 = 4$
$c > 0$이므로
$c = 2$
이다.
타원 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$의 다른 한 초점을 F'이라 하면
$\text{F}'(-2,\ 0)$
이다.
점 P가 타원 위의 점이므로
타원의 성질에 의해
$\overline{\text{PF}} + \overline{\text{PF}'} = 6$ …… ㉠
이다.
이때,
$\overline{\text{PQ}} - \overline{\text{PF}} \ge 6$ …… ㉡
이므로
㉠, ㉡에서
$\overline{\text{PQ}} + \overline{\text{PF}'} \ge 12$ …… ㉢
이다.
한편, 원의 중심을 C라 하면
$\text{C}(2,\ 3)$
이므로
$\overline{\text{CF}'} = \sqrt{(-2-2)^2 + (0-3)^2} = 5$
이다.

이때, 주어진 조건을 만족시키는 타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$과 중심이 C(2, 3)이고 반지름의 길이가 r인 원은 다음 그림과 같다.



㉢에서
세 점 P, Q, F′이 일직선 위에 있을 때 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF'}}$의 값이 최소이고,
$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF'}}$의 값의 최솟값은 12이다.
따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF'}}$의 값이 최소일 때 원의 반지름의 길이 r의 값은

$r=\overline{\mathrm{CF'}}+\overline{\mathrm{F'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}$
$=5+12$
$=17$

정답 17

30. 출제의도 : 벡터의 내적을 이용하여 조건을 만족시키는 벡터의 크기의 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
조건 (가)에서

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$는 방향이 같다. ……㉠

$9|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=9|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2\times\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}$,

$4|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}=4|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2\times\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}$

㉠에서 $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}$이므로

$9|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=4|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\dfrac{2}{3}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ ……㉡

조건 (나)에서

$\dfrac{\pi}{2}<\angle\mathrm{CAQ}<\pi$

조건 (다)와 ㉠에서

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{CB}}|\cos(\angle\mathrm{ABC})$
$=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{CB}}|\cos\dfrac{\pi}{4}$

$|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|=\sqrt{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\left(\dfrac{2}{3}\times|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\right)\times(\sqrt{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|)\cos\dfrac{\pi}{4}$
$=\dfrac{2}{3}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=24$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=6$

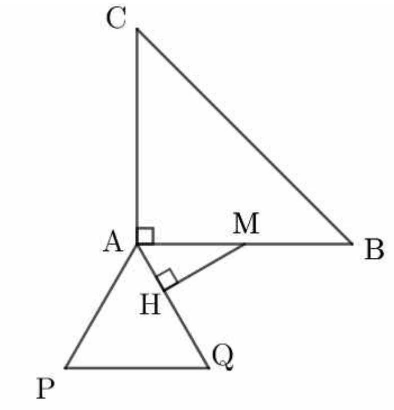
㉡에서

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\dfrac{2}{3}\times6=4$

삼각형 APQ가 정삼각형이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=4$

$\angle\mathrm{BAQ}=\dfrac{\pi}{3}$



선분 AB의 중점을 M, 점 M에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}| &= |2\overrightarrow{XM}| \\ &\geq 2|\overrightarrow{HM}| \\ &= 2\times|\overrightarrow{AM}|\times \sin\frac{\pi}{3} \\ &= 2\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 3\sqrt{3}\end{aligned}$$

따라서 $m=3\sqrt{3}$ 이므로

$m^2=27$

정답 27

[다른 풀이]

세 점 A, B, C의 좌표를 각각

A$(0, 0)$, B$(6, 0)$, C$(0, 6)$

이라 하면 점 P와 Q의 좌표는

P$(-2, -2\sqrt{3})$, Q$(2, 2\sqrt{3})$

점 X는 선분 AQ 위의 점이므로 X의 좌표는

X$(t, -\sqrt{3}t)$ $(0\leq t\leq 2)$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}| &= |(-t, \sqrt{3}t)+(6-t, \sqrt{3}t)| \\ &= |(6-2t, 2\sqrt{3}t)| \\ &= \sqrt{4t^2-12t+36} \\ &= \sqrt{4\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+27}\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}|$의 최솟값은 $t=\frac{3}{2}$일 때, $\sqrt{27}$ 이다.

따라서 $m=\sqrt{27}$ 이므로

$m^2=27$