2025학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가

수학영역 정답 및 풀이

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01. ②	02. ⑤	03. ④	04. ②	05. ②
06. ②	07. ③	08. ①	09. ⑤	10. ①
11. ①	12. ②	13. ④	14. ⑤	15. ①
16. 7	17. 5	18. 29	19. 4	
20. 15	21. 31	22. 8		

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$32^{\frac{1}{4}} \times 4^{-\frac{1}{8}} = (2^5)^{\frac{1}{4}} \times (2^2)^{-\frac{1}{8}}$$
$$= 2^{\frac{5}{4}} \times 2^{-\frac{2}{8}} = 2^{\frac{5}{4}-\frac{1}{4}} = 2$$

정답 ②

2. 출제의도 : 미분계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$이므로

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1)$$
$$= 3 \times 1^2 + 6 \times 1 = 9$$

정답 ⑤

3. 출제의도 : 주어진 조건에서 등비수열의 첫째항과 공비를 찾아 일반항을 구할 수 있는가?

풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_2 a_3 = ar \times ar^2 = a^2 r^3 = 2$ ……㉠

$a_4 = ar^3 = 4$ ……㉡

㉠을 ㉡으로 나누면

$a = \frac{1}{2}$

이것을 ㉡에 대입하면

$\frac{1}{2} r^3 = 4$에서 $r^3 = 8$

r은 실수이므로

$r = 2$

따라서

$a_6 = ar^5 = \frac{1}{2} \times 2^5 = 2^4 = 16$

정답 ④

4. 출제의도 : 함수의 그래프를 이해하고 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\lim_{x \to 0-} f(x) = -2$, $\lim_{x \to 1+} f(x) = 1$ 이므로

$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x)$

$= -2 + 1$

$= -1$

정답 ②

5. **출제의도** : 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

$f(x)=(x+1)(x^2+x-5)$에서

$f'(x)=(x^2+x-5)+(x+1)(2x+1)$

따라서

$$f'(2)=(2^2+2-5)+(2+1)(2\times2+1)$$
$$=1+15$$
$$=16$$

정답 ②

6. **출제의도** : 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\cos(\pi+\theta)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 에서

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ 이므로

$-\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 즉 $\cos\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 에서 $\sin\theta>0$ 이므로

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$=\sqrt{1-\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

따라서

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}+\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

정답 ②

7. **출제의도** : 함수가 연속일 조건을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

함수 $f(x)=\begin{cases}(x-a)^2 & (x<4)\\ 2x-4 & (x\geq4)\end{cases}$

가 $x=4$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=4$에서 연속이면

$\lim_{x\to4-}f(x)=\lim_{x\to4+}f(x)=f(4)$

이다. 이때

$$\lim_{x\to4-}f(x)=\lim_{x\to4-}(x-a)^2$$
$$=(4-a)^2$$
$$=a^2-8a+16$$

$\lim_{x\to4+}f(x)=\lim_{x\to4+}(2x-4)=4$

$f(4)=4$

이므로

$a^2-8a+16=4$

$a^2-8a+12=0$

$(a-2)(a-6)=0$

$a=2$ 또는 $a=6$

따라서 조건을 만족시키는 모든 상수 a의 값의 곱은

$2\times6=12$

정답 ③

8. **출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 상수를 구할 수 있는가?

풀이 :

두 수 $\log_2 a$, $\log_a 8$의 합이 4이므로

$\log_2 a + \log_a 8 = 4$에서

$\log_2 a + 3\log_a 2 = 4$

$\log_2 a + \dfrac{3}{\log_2 a} = 4$ …… ㉠

$\log_2 a = X$라 하면 $a > 2$이므로 $X > 1$

㉠에서

$X + \dfrac{3}{X} = 4$, $X^2 - 4X + 3 = 0$

$(X-1)(X-3) = 0$

$X > 1$이므로 $X = 3$

즉, $\log_2 a = 3$에서 $a = 2^3 = 8$

한편, 두 수 $\log_2 a$, $\log_a 8$의 곱이 k이므로

$k = \log_2 a \times \log_a 8 = \log_2 a \times 3\log_a 2$

$= \log_2 a \times \dfrac{3}{\log_2 a} = 3$

따라서 $a + k = 8 + 3 = 11$

정답 ①

9. **출제의도** : 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$f(x) = x^2 + x$이므로

$5\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 (5x + f(x))\,dx$

$= 5\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 5x\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx$

$= 4\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 5x\,dx$

$= 4\int_0^1 (x^2 + x)\,dx - \int_0^1 5x\,dx$

$= \int_0^1 (4x^2 + 4x)\,dx - \int_0^1 5x\,dx$

$= \int_0^1 (4x^2 - x)\,dx$

$= \left[\dfrac{4}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$= \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{6}$

[다른 풀이]

$f(x) = x^2 + x$이므로

$5\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 (5x + f(x))\,dx$

$= 5\left[\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2\right]_0^1 - \left[\dfrac{1}{3}x^3 + 3x^2\right]_0^1$

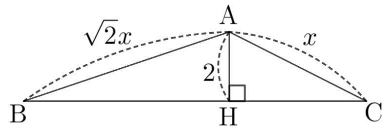
$= 5 \times \dfrac{5}{6} - \dfrac{10}{3} = \dfrac{5}{6}$

정답 ⑤

10. **출제의도** : 사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 :

$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{2} : 1$이므로 $\overline{\mathrm{AC}} = x$라 하면 $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}x$



삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 이 외접원의 넓이가 50π이므로 $\pi R^2 = 50\pi$에서 $R = 5\sqrt{2}$

직각삼각형 AHC에서

$\sin(\angle \mathrm{ACH}) = \frac{2}{x}$, 즉 $\sin C = \frac{2}{x}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin C} = 2R$, 즉 $\overline{\mathrm{AB}} = 2R\sin C$

$\sqrt{2}x = 2 \times 5\sqrt{2} \times \frac{2}{x}$, $x^2 = 20$, $x = 2\sqrt{5}$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}x = 2\sqrt{10}$ 이므로 직각삼각형 ABH에서

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BH}} &= \sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2 - \overline{\mathrm{AH}}^2} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{10})^2 - 2^2} = 6\end{aligned}$$

정답 ①

11. **출제의도** : 위치, 속도, 가속도 사이의 관계 및 미분을 이용하여 가속도를 구할 수 있는가?

풀이 :

$x_1 = t^2 + t - 6$,

$x_2 = -t^3 + 7t^2$

이므로

$x_1 = x_2$에서

$t^2 + t - 6 = -t^3 + 7t^2$

$t^3 - 6t^2 + t - 6 = 0$

$t^2(t-6) + t - 6 = 0$

$(t-6)(t^2+1) = 0$

$t \geq 0$이므로

$t = 6$

즉, 두 점 P, Q의 위치가 같아지는 순간의 시각은 $t = 6$이다.

한편, 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_1, v_2라 하면

$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = 2t + 1$,

$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = -3t^2 + 14t$

두 점 P, Q의 시각 t에서의 가속도를 각각 a_1, a_2라 하면

$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = 2$,

$a_2 = \frac{dv_2}{dt} = -6t + 14$

시각 $t = 6$에서의 두 점 P, Q의 가속도가 각각 p, q이므로

$p = 2$,

$q = -6 \times 6 + 14 = -22$

따라서

$p - q = 2 - (-22) = 24$

정답 ①

12. **출제의도** : 등차수열의 일반항을 이용하여 새롭게 정의된 수열의 합을 구할 수 있는가?

풀이 :

$b_1 = \sum_{k=1}^{1} (-1)^{k+1} a_k = a_1$

$b_2 = \sum_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2$

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$b_2 = -2$이므로

$a_1 - a_2 = -d = -2$

따라서 $d = 2$

또한

$b_3 = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} a_k$

$=a_1-a_2+a_3$

$=-d+a_3$

$=a_3-2$

$b_7=\sum_{k=1}^{7}(-1)^{k+1}a_k$

$\quad=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+a_7$

$\quad=-3d+a_7$

$\quad=a_7-6$

이므로 $b_3+b_7=0$ 에서

$(a_3-2)+(a_7-6)$

$=a_3+a_7-8$

$=(a_1+2\times 2)+(a_1+6\times 2)-8$

$=(a_1+4)+(a_1+12)-8$

$=2a_1+8=0$

따라서 $a_1=-4$

즉 $a_n=-4+(n-1)\times 2=2n-6$이므로

$b_1=a_1=-4$

$b_2=a_1-a_2=-2$

$b_3=a_1-a_2+a_3=-2$

$b_4=a_1-a_2+a_3-a_4=-4$

$b_5=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5=0$

$b_6=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6=-6$

$b_7=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+a_7=2$

$b_8=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_7-a_8=-8$

$b_9=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_7-a_8+a_9=4$

따라서

$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_9$

$=-4+(-2)+(-2)+(-4)+0+(-6)$
$\qquad+2+(-8)+4$

$=-20$

정답 ②

[다른풀이]

$b_{2n}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2n-1}-a_{2n})$

$\quad=-dn=-2n$

$b_{2n-1}=a_1+(a_3-a_2)+(a_5-a_4)+\cdots$
$\qquad+(a_{2n-1}-a_{2n-2})$

$\quad=a_1+(n-1)d=-4+2(n-1)=2n-6$

따라서

$\sum_{n=1}^{9}b_n=\sum_{n=1}^{5}b_{2n-1}+\sum_{n=1}^{4}b_{2n}$

$\quad=\sum_{n=1}^{5}(2n-6)+\sum_{n=1}^{4}(-2n)$

$\quad=2\times\frac{5\times 6}{2}-6\times 5-2\times\frac{4\times 5}{2}$

$\quad=30-30-20=-20$

13. **출제의도** : 정적분을 이용하여 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

풀이 :

함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이는 y축에 의하여 이등분된다.

이때 $A=2B$이므로

$\int_0^k(-x^2+2x+6)dx=0$

이어야 한다. 즉,

$\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+6x\right]_0^k=0$

$-\frac{1}{3}k^3+k^2+6k=0$

$-\frac{1}{3}k(k+3)(k-6)=0$

$k>4$이므로 $k=6$

정답 ④

14. 출제의도 : 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

풀이 :

두 점 A_n, B_n의 좌표를 각각

$\mathrm{A}_n(\mathrm{a}_n, 2^{a_n})$, $\mathrm{B}_n(\mathrm{b}_n, 2^{b_n})$ $(a_n < b_n)$

이라 하면 조건 (가)에 의하여

$$\frac{2^{b_n}-2^{a_n}}{b_n-a_n}=3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (나)에 의하여

$$(b_n-a_n)^2+(2^{b_n}-2^{a_n})^2=10n^2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 $2^{b_n}-2^{a_n}=3(b_n-a_n)$이므로 이것을 ㉡에 대입하여 정리하면

$(b_n-a_n)^2=n^2$

$a_n<b_n$이므로 $b_n-a_n=n$, 즉 $a_n=b_n-n$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$2^{b_n}-2^{b_n-n}=3n$

이므로

$$2^{b_n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=3n$$

$$2^{b_n}=3n\times\frac{2^n}{2^n-1}$$

한편, 곡선 $y=2^x$과 곡선 $y=\log_2 x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 x_n은 점 B_n의 y좌표와 같다.

따라서

$$x_n=2^{b_n}=3n\times\frac{2^n}{2^n-1}$$

이므로

$$x_1+x_2+x_3=6+8+\frac{72}{7}=\frac{170}{7}$$

정답 ⑤

15. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 다항함수를 구하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

조건 (가)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf(x)+xg(x)=12x^3+24x^2-6x$

$f(x)+g(x)=12x^2+24x-6 \qquad \cdots\cdots ㉠$

이때 조건 (나)에서 $f(x)=xg'(x)$이므로 ㉠에 대입하면

$xg'(x)+g(x)=12x^2+24x-6$

$\{xg(x)\}'=12x^2+24x-6$

$$xg(x)=\int(12x^2+24x-6)dx$$

$$=4x^3+12x^2-6x+C$$

(단, C는 적분상수)

이때 $g(x)$는 다항함수이므로 $C=0$

즉 $xg(x)=4x^3+12x^2-6x$이므로

$g(x)=4x^2+12x-6$

따라서

$$\int_0^3 g(x)dx$$

$$=\int_0^3(4x^2+12x-6)dx$$

$$=\left[\frac{4}{3}x^3+6x^2-6x\right]_0^3$$

$=36+54-18$

$=72$

정답 ①

16. **출제의도** : 로그를 포함하는 방정식의 근을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\log_3(x+2)-\log_{\frac{1}{3}}(x-4)$

$=\log_3(x+2)-\log_{3^{-1}}(x-4)$

$=\log_3(x+2)+\log_3(x-4)$

$=\log_3(x+2)(x-4)$

이므로

$\log_3(x+2)(x-4)=3$

$(x+2)(x-4)=3^3$

$x^2-2x-35=0$

$(x-7)(x+5)=0$

진수 조건에 의해서 $x>4$

따라서 $x=7$

정답 7

17. **출제의도** : 함수의 부정적분과 적분상수를 구하여 함숫값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$f'(x)=6x^2+2x+1$이므로 $f'(x)$의 한 부정적분은

$\int(6x^2+2x+1)dx=2x^3+x^2+x+C$

(단, C는 적분상수)

이때 $f(0)=1$이므로 $C=1$에서

$f(x)=2x^3+x^2+x+1$

따라서 $f(1)=5$

정답 5

18. **출제의도** : $\sum$의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\sum_{k=1}^{10}ka_k=36$에서

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+10a_{10}=36$ ……㉠

$\sum_{k=1}^{9}ka_{k+1}=7$에서

$a_2+2a_3+3a_4+\cdots+9a_{10}=7$ ……㉡

㉠ − ㉡을 하면

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\sum_{k=1}^{10}a_k$$
$$=36-7=29$$

정답 29

[다른 풀이]

$\sum_{k=1}^{9}ka_{k+1}=7$에서

$$\sum_{k=1}^{9}ka_{k+1}=\sum_{k=1}^{9}\{(k+1)a_{k+1}-a_{k+1}\}$$
$$=\sum_{k=1}^{9}(k+1)a_{k+1}-\sum_{k=1}^{9}a_{k+1}$$
$$=\sum_{k=2}^{10}ka_k-\sum_{k=2}^{10}a_k=7$$

즉, $\sum_{k=2}^{10}ka_k=\sum_{k=2}^{10}a_k+7$

$\sum_{k=1}^{10}ka_k=36$에서

$$\sum_{k=1}^{10}ka_k=a_1+\sum_{k=2}^{10}ka_k$$
$$=a_1+\sum_{k=2}^{10}a_k+7$$
$$=\sum_{k=1}^{10}a_k+7=36$$

따라서 $\sum_{k=1}^{10}a_k=36-7=29$

19. **출제의도** : 미분을 이용하여 함수의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있는가?

풀이 :

함수 $f(x)=x^3+ax^2-9x+b$가 $x=1$에서 극소이므로

$f'(1)=0$

$f'(x)=3x^2+2ax-9$

이므로

$f'(1)=3+2a-9=0$

에서

$a=3$

한편, $f'(x)=0$에서

$3x^2+6x-9=0$

$3(x+3)(x-1)=0$

$x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극대이고, 극댓값이 28이다.

$$f(-3)=(-3)^3+3\times(-3)^2-9\times(-3)+b$$
$$=27+b$$

이므로

$27+b=28$

에서

$b=1$

따라서

$a+b=3+1=4$

정답 4

20. **출제의도** : 삼각함수의 그래프를 이용하여 방정식을 만족시키는 실수의 값의 합을 구할 수 있는가?

풀이 :

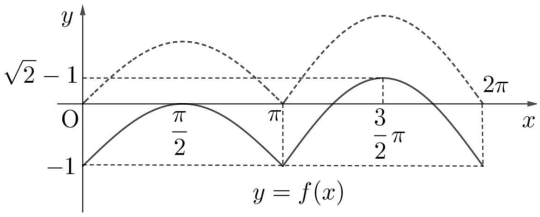
$0\le x<\pi$에서 함수 $y=\sin x-1$의 그래프는 이 구간에서 함수 $y=\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 것이다. 이때, 이 구간에서 함수 $y=\sin x-1$의 최댓값은 0이고, 최솟값은 -1이다.

$\pi\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=-\sqrt{2}\sin x-1$의 그래프는 이 구간에서 함수 $y=-\sqrt{2}\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 것이다. 이때, 이 구간에서 함수 $y=-\sqrt{2}\sin x-1$의 최댓값은 $\sqrt{2}-1$, 최솟값은 -1이다.

그러므로 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}\sin x-1 & (0\le x<\pi)\\ -\sqrt{2}\sin x-1 & (\pi\le x\le 2\pi)\end{cases}$$

의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=f(t)$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 3이다.

그러므로 $f(t)=-1$ 또는 $f(t)=0$이다.

(i) $f(t)=-1$일 때,

$t=0$ 또는 $t=\pi$ 또는 $t=2\pi$

(ii) $f(t)=0$일 때,

$t=\frac{\pi}{2}$ 또는

$-\sqrt{2}\sin t-1=0(\pi\le t\le 2\pi)$

$-\sqrt{2}\sin t-1=0$에서 $\sin t=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\pi\le t\le 2\pi$이므로 $t=\dfrac{5}{4}\pi$ 또는 $t=\dfrac{7}{4}\pi$

(i), (ii)에서 모든 t의 값의 합은

$0+\pi+2\pi+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{5}{4}\pi+\dfrac{7}{4}\pi=\dfrac{13}{2}\pi$

따라서 $p=2$, $q=13$이므로

$p+q=15$

정답 15

[참고]

함수

$y=-\sqrt{2}\sin x-1(\pi\le x\le 2\pi)$의 그래프와 x축이 만나는 두 점은 직선 $x=\dfrac{3}{2}\pi$에 대하여 대칭이므로 방정식 $-\sqrt{2}\sin x-1=0(\pi\le x\le 2\pi)$의 두 실근의 합은 3π이다.

21. **출제의도** : 부등식을 만족시키는 함수의 도함수를 추론할 수 있는가?

풀이 :

$$2k-8\le\frac{f(k+2)-f(k)}{2}\le 4k^2+14k \quad\cdots\cdots ㉠$$

에서

$2k-8=4k^2+14k$

$k^2+3k+2=0$

$(k+1)(k+2)=0$

$k=-1$ 또는 $k=-2$

즉, ㉠에 $k=-1$을 대입하면

$$-10\le\frac{f(1)-f(-1)}{2}\le -10$$

이므로 $f(1)-f(-1)=-20$ $\cdots\cdots$ ㉡

또, ㉠에 $k=-2$를 대입하면

$$-12\le\frac{f(0)-f(-2)}{2}\le -12$$

이므로 $f(0)-f(-2)=-24$ $\cdots\cdots$ ㉢

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 상수 a, b, c에 대하여

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

로 놓으면 ㉡에서

$f(1)-f(-1)$

$=(1+a+b+c)-(-1+a-b+c)$

$=2+2b=-20$

$b=-11$

㉢에서

$f(0)-f(-2)$

$=c-(-8+4a-2b+c)$

$=8-4a+2\times(-11)$ $(\because b=-11)$

$=-4a-14=-24$

$a=\dfrac{5}{2}$

즉, $f(x)=x^3+\dfrac{5}{2}x^2-11x+c$에서

$f'(x)=3x^2+5x-11$

이므로

$f'(3)=3\times 3^2+5\times 3-11$

$=31$

정답 31

[다른 풀이]

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다. 상수 α, β에 대하여

$f'(x)=3x^2+\alpha x+\beta$

로 놓으면 ㉡에서

$f(1)-f(-1)$

$=\int_{-1}^{1} f'(x)dx$

$=\int_{-1}^{1}(3x^2+\alpha x+\beta)dx$

$=\left[x^3+\frac{\alpha}{2}x^2+\beta x\right]_{-1}^{1}$

$=2+2\beta=-20$

$\beta=-11$

㉢에서

$f(0)-f(-2)$

$=\int_{-2}^{0} f'(x)dx$

$=\int_{-2}^{0}(3x^2+\alpha x-11)dx$ $(\because \beta=-11)$

$=\left[x^3+\frac{\alpha}{2}x^2-11x\right]_{-2}^{0}$

$=8-2\alpha-22=-24$

$\alpha=5$

즉, $f'(x)=3x^2+5x-11$이므로

$f'(3)=3\times 3^2+5\times 3-11$

$=31$

22. **출제의도** : 귀납적으로 정의된 수열의 특정한 항의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

조건 (나)에서

$\left(a_{n+1}-a_n+\frac{2}{3}k\right)(a_{n+1}+ka_n)=0$

이므로

$a_{n+1}-a_n+\frac{2}{3}k=0$ 또는 $a_{n+1}+ka_n=0$

즉, $a_{n+1}=a_n-\frac{2}{3}k$ 또는 $a_{n+1}=-ka_n$

$a_1=k$이므로

$a_2=a_1-\frac{2}{3}k=k-\frac{2}{3}k=\frac{k}{3}$

또는

$a_2=-ka_1=-k\times k=-k^2$

(i) $a_2=\frac{k}{3}$일 때,

$a_3=a_2-\frac{2}{3}k=\frac{k}{3}-\frac{2}{3}k=-\frac{k}{3}$

또는

$a_3=-ka_2=-k\times\frac{k}{3}=-\frac{k^2}{3}$

(i -ⓐ) $a_3=-\frac{k}{3}$일 때

$a_2\times a_3=\frac{k}{3}\times\left(-\frac{k}{3}\right)=-\frac{k^2}{9}<0$

이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

$a_4=a_3-\frac{2}{3}k=-\frac{k}{3}-\frac{2}{3}k=-k$

또는

$a_4=-ka_3=-k\times\left(-\frac{k}{3}\right)=\frac{k^2}{3}$

(i -ⓐ-①) $a_4=-k$일 때,

$a_5=a_4-\frac{2}{3}k=-k-\frac{2}{3}k=-\frac{5}{3}k$

또는

$a_5=-ka_4=-k\times(-k)=k^2$

$a_5=-\frac{5}{3}k$ 일 때,

$a_5<0$

이고,

$a_5=k^2$일 때,

$a_5>0$

이므로

$a_5=0$을 만족시키는 양수 k의 값은 존재하지 않는다.

(ⅰ-ⓐ-②) $a_4=\frac{k^2}{3}$일 때,

$a_5=a_4-\frac{2}{3}k=\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k$

또는

$a_5=-ka_4=-k\times\frac{k^2}{3}=-\frac{k^3}{3}$

$a_5=\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k$일 때,

$a_5=0$에서

$\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k=0$

$\frac{k(k-2)}{3}=0$

$k>0$이므로

$k=2$

$a_5=-\frac{k^3}{3}$일 때,

$a_5<0$

이므로 $a_5=0$을 만족시키는 양수 k의 값은 존재하지 않는다.

(ⅰ-ⓑ) $a_3=-\frac{k^2}{3}$일 때

$a_2\times a_3=\frac{k}{3}\times\left(-\frac{k^2}{3}\right)=-\frac{k^3}{9}<0$

이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

$a_4=a_3-\frac{2}{3}k=-\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k$

또는

$a_4=-ka_3=-k\times\left(-\frac{k^2}{3}\right)=\frac{k^3}{3}$

(ⅰ-ⓑ-①) $a_4=-\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k$일 때,

$$a_5=a_4-\frac{2}{3}k=\left(-\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k\right)-\frac{2}{3}k$$
$$=-\frac{k^2}{3}-\frac{4}{3}k$$

또는

$a_5=-ka_4=-k\times\left(-\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k\right)=\frac{k^3}{3}+\frac{2}{3}k^2$

$a_5=-\frac{k^2}{3}-\frac{4}{3}k$일 때,

$a_5=-\frac{k(k+4)}{3}<0$

이고

$a_5=\frac{k^3}{3}+\frac{2}{3}k^2$일 때,

$a_5=\frac{k^2(k+2)}{3}>0$

이므로 $a_5=0$을 만족시키는 양수 k의 값은 존재하지 않는다.

(ⅰ-ⓑ-②) $a_4=\frac{k^3}{3}$일 때,

$a_5=a_4-\frac{2}{3}k=\frac{k^3}{3}-\frac{2}{3}k$

또는

$a_5=-ka_4=-k\times\frac{k^3}{3}=-\frac{k^4}{3}$

$a_5=\frac{k^3}{3}-\frac{2}{3}k$일 때,

$a_5=0$에서

$\frac{k^3}{3}-\frac{2}{3}k=0$

$\frac{k(k^2-2)}{3}=0$

$k>0$이므로

$k=\sqrt{2}$

$a_5=-\frac{k^4}{3}$일 때,

$a_5=-\frac{k^4}{3}<0$

이므로 $a_5=0$을 만족시키는 양수 k의 값은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $a_2=-k^2$일 때,

$a_3=a_2-\frac{2}{3}k=-k^2-\frac{2}{3}k$

또는

$a_3=-ka_2=-k\times(-k^2)=k^3$

(ⅱ-ⓐ) $a_3=-k^2-\frac{2}{3}k$일 때,

$a_2\times a_3=-k^2\times\left(-k^2-\frac{2}{3}k\right)=k^2\left(k^2+\frac{2}{3}k\right)>0$

이므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(ⅱ-ⓑ) $a_3=k^3$일 때,

$a_2\times a_3=-k^2\times k^3=-k^5<0$

이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

$a_3=k^3$이므로

$a_4=a_3-\frac{2}{3}k=k^3-\frac{2}{3}k$

또는

$a_4=-ka_3=-k\times k^3=-k^4$

(ⅱ-ⓑ-①) $a_4=k^3-\frac{2}{3}k$일 때,

$a_5=a_4-\frac{2}{3}k=\left(k^3-\frac{2}{3}k\right)-\frac{2}{3}k=k^3-\frac{4}{3}k$

또는

$a_5=-ka_4=-k\times\left(k^3-\frac{2}{3}k\right)=-k^4+\frac{2}{3}k^2$

$a_5=k^3-\frac{4}{3}k$일 때,

$a_5=0$에서

$k^3-\frac{4}{3}k=0$

$k\left(k^2-\frac{4}{3}\right)=0$

$k>0$이므로

$k=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$a_5=-k^4+\frac{2}{3}k^2$일 때,

$a_5=0$에서

$-k^4+\frac{2}{3}k^2=0$

$-k^2\left(k^2-\frac{2}{3}\right)=0$

$k>0$이므로

$k=\sqrt{\frac{2}{3}}$

(ⅱ-ⓑ-②) $a_4=-k^4$일 때,

$a_5=a_4-\frac{2}{3}k=-k^4-\frac{2}{3}k$

또는

$a_5=-ka_4=-k\times(-k^4)=k^5$

$a_5=-k^4-\frac{2}{3}k$일 때,

$a_5=-k\left(k^3+\frac{2}{3}\right)<0$

이고,

$a_5=k^5$일 때,

$a_5>0$

이므로 $a_5=0$을 만족시키는 양수 k의 값은 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서

k의 값은 2, $\sqrt{2}$ $\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$

따라서 k^2의 값의 합은

$2^2+(\sqrt{2})^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2=8$

정답 8

■ [선택: 미적분]
23. ⑤ 24. ④ 25. ④ 26. ③ 27. ②
28. ③ 29. 57 30. 25

23. **출제의도** : 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin5x}{5x}\times5\right)$$
$$=1\times5$$
$$=5$$

정답 ⑤

24. **출제의도** : 여러 가지 함수의 부정적분을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

풀이 :
양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기가
$$\frac{1}{t}+4e^{2t}$$
이므로
$$f'(t)=\frac{1}{t}+4e^{2t}$$
이다. 즉, 양수 x에 대하여
$$f'(x)=\frac{1}{x}+4e^{2x}$$
이므로
$$f(x)=\int\left(\frac{1}{x}+4e^{2x}\right)dx$$
$=\ln x+2e^{2x}+C$ (C는 적분상수)
이때, $f(1)=2e^2+1$이므로
$$\ln1+2e^2+C=2e^2+1$$
$$C=1$$
따라서
$$f(x)=\ln x+2e^{2x}+1$$
이므로
$$f(e)=\ln e+2e^{2e}+1$$
$$=1+2e^{2e}+1$$
$$=2e^{2e}+2$$

정답 ④

25. **출제의도** : 등비수열의 극한값을 구할 수 있는가?

풀이 :
등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면
$$a_n=a_1\times r^{n-1}$$
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\times a_n-1}{3\times2^{n+1}}=1$에서
$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\times a_n-1}{3\times2^{n+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\times r^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$
이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\times r^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

(i) $|r|<\frac{1}{2}$일 때,

㉠에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\times r^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1\times(2r)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{6}$$

이때,

$|2r|<1$

이므로

$\lim_{n\to\infty}(2r)^{n-1}=0$

이다. 즉,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1\times(2r)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{6}=0$$

이므로 ㉠을 만족시키지 못한다.

(ii) $|r|>\frac{1}{2}$일 때

㉠에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\times r^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1\times(2r)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{6}$$

이때,

$|2r|>1$

이므로

$\lim_{n\to\infty}(2r)^{n-1}$의 값이 존재하지 않는다.

즉, ㉠을 만족시키지 못한다.

(iii) $r=\frac{1}{2}$일 때

㉠에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\times r^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{6}$$

$$=\frac{a_1}{3}$$

이므로

$\frac{a_1}{3}=1$

$a_1=3$

(iv) $r=-\frac{1}{2}$일 때

㉠에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\times r^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1\times(-1)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{6}$$

이때,

$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}$의 값이 존재하지 않으므로

㉠을 만족시키지 못한다.

(ⅰ) ~ (ⅳ)에서

$a_1=3,\ r=\frac{1}{2}$

따라서

$a_2=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

이므로

$a_1+a_2=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$

정답 ④

[다른 풀이]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$a_n=a_1r^{n-1}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\times a_n-1}{3\times 2^{n+1}}=1$에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\times a_n-1}{3\times 2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\times a_n-\frac{1}{2^n}}{6}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\times a_1r^{n-1}-\frac{1}{2^n}}{6}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1\times(2r)^{n-1}-\frac{1}{2^n}}{6}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1\times(2r)^{n-1}-\frac{1}{2^n}}{6}=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$이고 ㉠에서 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$2r=1$, 즉 $r=\frac{1}{2}$

㉠에 $r=\frac{1}{2}$을 대입하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1-\frac{1}{2^n}}{6}=\frac{a_1}{3}=1$$

$a_1=3$

따라서 $a_n=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$a_2=\frac{3}{2}$

이고

$a_1+a_2=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$

26. **출제의도** : 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

풀이 :

$\sqrt{\frac{\pi}{6}}\le t\le\sqrt{\frac{\pi}{2}}$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{\pi}{2}t^3\sin t^2$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}S(t)dt$$

$$=\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\frac{\pi}{2}t^3\sin t^2dt$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}t^3\sin t^2dt$$

이때 $t^2=u$라 하면 $t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$일 때 $u=\frac{\pi}{2}$, $t=\sqrt{\frac{\pi}{6}}$일 때 $u=\frac{\pi}{6}$ 이고

$2t=\dfrac{du}{dt}$ 이므로

$$\frac{\pi}{2}\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} t^3\sin t^2 dt$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} u\sin u du$$

$$=\frac{\pi}{4}\left([-u\cos u]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos u du\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+[\sin u]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{12}\pi+1-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}\pi^2+6\pi}{48}$$

정답 ③

27. **출제의도** : 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)+f'\left(\frac{1}{2}\sin x\right)\times\frac{1}{2}\cos x=\cos x \text{---㉠}$$

㉠에 $x=\pi$를 대입하면

$$f'(\pi)+f'(0)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

$$f'(\pi)-\frac{1}{2}f'(0)=-1 \text{---㉡}$$

㉠에 $x=0$을 대입하면

$$f'(0)+f'(0)\times\frac{1}{2}=1,\ \frac{3}{2}f'(0)=1$$

따라서 $f'(0)=\dfrac{2}{3}$이므로 ㉡에 대입하면

$$f'(\pi)-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=-1$$

$$f'(\pi)=-1+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}$$

정답 ②

28. **출제의도** : 치환적분과 부분적분을 이용하여 함수의 정적분 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$g(0)=f'(0)\sin 0+0=0$

$g(1)=f'(2)\sin\pi+1=1$이므로

$$\int_0^1 g(x)dx+\int_{g(0)}^{g(1)} g^{-1}(x)dx$$

$$=\int_0^1 g(x)dx+\int_0^1 g^{-1}(x)dx$$

$$=1\times1-0\times0=1$$

따라서

$$\int_0^1 g(x)dx+\int_0^1 g^{-1}(x)dx=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에

$g(x)=f'(2x)\sin\pi x+x$,

$$\int_0^1 g^{-1}(x)dx=2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x dx+\frac{1}{4}$$

을 대입하면

$$\int_0^1\{f'(2x)\sin\pi x+x\}dx$$

$$+2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x dx+\frac{1}{4}=1$$

$$3\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x dx+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\frac{1}{4}=1$$

$$3\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x dx=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

따라서

$$\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx = \frac{1}{12} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

한편, $\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x dx$ 에서

$x = 2t$라 하면 $\frac{dx}{dt} = 2$이고

$x=0$일 때, $t=0$, $x=2$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$$

$$= 2\int_0^1 f(2t)\cos\pi t\,dt$$

$u(t) = f(2t)$, $v(t) = \frac{1}{\pi}\sin\pi t$로 놓으면

$u'(t) = 2f'(2t)$, $v'(t) = \cos\pi t$이므로

$$2\int_0^1 f(2t)\cos\pi t\,dt$$

$$= 2\left[\frac{1}{\pi}f(2t)\sin\pi t\right]_0^1 - \frac{4}{\pi}\int_0^1 f'(2t)\sin\pi t\,dt$$

$$= 0 - \frac{4}{\pi}\int_0^1 f'(2t)\sin\pi t\,dt$$

$$= -\frac{4}{\pi}\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx$$

이므로 ㉡에서

$$\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x dx = -\frac{4}{\pi}\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x dx$$

$$= -\frac{4}{\pi}\times\frac{1}{12}$$

$$= -\frac{1}{3\pi}$$

정답 ③

29. 출제의도 : 급수의 합을 이용하여 일반항을 구할 수 있는가?

풀이 :

S_m

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{m+1}{n(n+m+1)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+m+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{m+2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+3}\right)+\cdots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m+n+1}\right)\right\}$$

따라서

S_1

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$= 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

이므로

$$a_1 = S_1 = \frac{3}{2}$$

또한

S_9

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{13}\right)+\cdots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+10}\right)\right\}$$

$$= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}$$

S_{10}

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{14}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+11}\right)\right\}$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}$

$=S_9+\frac{1}{11}$

이므로

$a_{10}=S_{10}-S_9$

$=\left(S_9+\frac{1}{11}\right)-S_9$

$=\frac{1}{11}$

따라서

a_1+a_{10}

$=\frac{3}{2}+\frac{1}{11}$

$=\frac{35}{22}$

이므로 $p=22$, $q=35$

$p+q=57$

정답 57

30. 출제의도 : 절댓값과 지수함수 e^x을 포함한 함수의 부정적분을 구하여 k의 값에 따른 함수의 그래프를 추론하고 그 함수의 최솟값을 구할 수 있는가?

풀이 :

x의 범위에 따라 함수

$$f(x)=\begin{cases}(k-x)e^{-x} & (x\ge 0)\\(k+x)e^{-x} & (x<0)\end{cases}$$

의 한 부정적분을 구하면

$$F(x)=\begin{cases}(x-k+1)e^{-x}+C_1 & (x\ge 0)\\(-x-k-1)e^{-x}+C_2 & (x<0)\end{cases}$$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

이때, 함수 $F(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하므로 $x=0$에서 $F(x)$는 연속이다. 즉, $\lim_{x\to 0+}F(x)=\lim_{x\to 0-}F(x)$에서

$C_2=C_1+2$

$g(k)$를 $F(0)$의 최솟값으로 정의하였으므로

$F(0)=-k+1+C_1$ $\cdots$ ㉠

의 최솟값이 $g(k)$이다.

함수 $h(x)=F(x)-f(x)$라 하면

$$h(x)=\begin{cases}(2x-2k+1)e^{-x}+C_1 & (x\ge 0)\\(-2x-2k-1)e^{-x}+C_1+2 & (x<0)\end{cases}$$

이고

$$h'(x)=\begin{cases}(-2x+2k+1)e^{-x} & (x>0)\\(2x+2k-1)e^{-x} & (x<0)\end{cases}$$

이므로 $h'(x)=0$에서

$x\ge 0$일 때 $x=\frac{2k+1}{2}$

이고

$x<0$일 때 $x=\frac{1-2k}{2}$.

이때 $\frac{1-2k}{2}\ge 0$이면 $x<0$에서 $h'(x)<0$

이므로 $x=0$과 $x=\frac{2k+1}{2}$의 좌우에서 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2k+1}{2}$	$\cdots$
$h'(x)$	-		+	0	-
$h(x)$	↘		↗		↘

또한, $\frac{1-2k}{2}<0$일 때 $x=\frac{2k+1}{2}$과 $x=\frac{1-2k}{2}$의 좌우에서 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$\frac{1-2k}{2}$	$\cdots$	$\frac{2k+1}{2}$	$\cdots$
$h'(x)$	-	0	+	0	-
$h(x)$	↘		↗		↘

또, $h(0)=-2k+1+C_1$이고

$\lim_{x\to\infty}h(x)=C_1$, $\lim_{x\to-\infty}h(x)=\infty$

이므로 $\frac{1-2k}{2}$의 부호에 따라 C_1의 범위를 정하여 $F(0)$의 최솟값을 구하면

i) $\frac{1-2k}{2}\ge 0$일 때 $x=0$에서 극솟값 $h(0)$을 갖고 $1-2k\ge 0$이므로

$h(0)=-2k+1+C_1 \ge C_1=\lim_{x\to\infty}h(x)$

그런데 모든 실수 x에 대하여 $F(x)\ge f(x)$이므로 $h(x)\ge 0$에서 $C_1\ge 0$이다.

즉, ㉠에서 $F(0)=-k+1+C_1\ge -k+1$

ii) $\frac{1-2k}{2}<0$일 때

$x=\frac{1-2k}{2}$일 때 $h(x)$의 극솟값은

$h\left(\frac{1-2k}{2}\right)=-2e^{\frac{2k-1}{2}}+C_1+2$이다.

$\frac{1-2k}{2}<0$에서 $(e^{-1})^{\frac{1-2k}{2}}>(e^{-1})^0=1$이므로 $-2e^{\frac{2k-1}{2}}+C_1+2\le C_1$

그러므로 $-2e^{\frac{2k-1}{2}}+C_1+2$은 $h(x)$의 최솟값이다.

그런데 $F(x)\ge f(x)$에서 $h\left(\frac{1-2k}{2}\right)\ge 0$이므로 $-2e^{\frac{2k-1}{2}}+C_1+2\ge 0$

즉, $F(0)=-k+1+C_1$

$\ge -k+2e^{\frac{2k-1}{2}}-1$

그런데 $g(k)$는 $F(0)$의 최솟값이므로

$$g(k)=\begin{cases}-k+1 & (0<k\le\frac{1}{2})\\ -k+2e^{\frac{2k-1}{2}}-1 & (k>\frac{1}{2})\end{cases}$$

그러므로

$g\left(\frac{1}{4}\right)+g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4}+\left(-\frac{3}{2}\right)+2e-1=pe+q$

$2e-\frac{7}{4}=pe+q$에서 $p=2$, $q=-\frac{7}{4}$

따라서 $100(p+q)=25$

정답 25