

2026학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가
수학영역 정답 및 풀이

최근 수정일 : 2025. 6. 5.(목)

■ [공통: 수학 I·수학 II]

01. ② 02. ① 03. ③ 04. ③ 05. ②
06. ④ 07. ⑤ 08. ⑤ 09. ② 10. ①
11. ⑤ 12. ② 13. ④ 14. ② 15. ①
16. 2 17. 6 18. 133 19. 8
20. 85 21. 42 22. 38

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} 4^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}} &= (2^2)^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}} \\ &= 2^{2 \times \frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}} \\ &= 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \\ &= 2^1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

정답 ②

2. 출제의도 : 미분계수를 이용하여 극한 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 1 \text{ 에서} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= f'(1) \\ &= 2 \times 1 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

정답 ①

3. 출제의도 : 시그마의 정의를 이용하여

합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^7 a_k = 8$$

이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^7 (2a_k + 1) &= 2 \sum_{k=1}^7 a_k + \sum_{k=1}^7 1 \\ &= 2 \times 8 + 1 \times 7 \\ &= 23 \end{aligned}$$

정답 ③

4. 출제의도 : 함수의 연속의 정의를 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y = -x^2 + a$ 와 함수 $y = 5x - a$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)$ 가 $x = 3$ 에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3-} (-x^2 + a) \\ &= -9 + a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3+} (5x - a) \\ &= 15 - a \end{aligned}$$

$$f(3) = 15 - a$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = f(3)$$

에서

$$-9 + a = 15 - a$$

따라서

$$a = 12$$

정답 ③

5. 출제의도 : 정적분의 값을 구할 수 있

는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}\int_0^2 (6x^2 - 2x + 1)dx &= \left[2x^3 - x^2 + x \right]_0^2 \\ &= 14 - 0 \\ &= 14\end{aligned}$$

정답 ②

6. 출제의도 : 삼각함수의 그래프의 최댓값과 주기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$ 의 최댓값이 8이고
 $a > 0$ 이므로
 $a + 1 = 8$ 에서
 $a = 7$
함수 $f(x)$ 의 주기가 π 이고
 $b > 0$ 이므로
 $\frac{2\pi}{b} = \pi$ 에서
 $b = 2$
따라서
 $a + b = 7 + 2 = 9$

정답 ④

7. 출제의도 : 함수의 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}g(x) &= 5x^2 + xf(x) \\ \text{이므로} \\ g'(x) &= 10x + f(x) + xf'(x) \\ \text{따라서} \\ g'(3) &= 30 + f(3) + 3 \times f'(3) \\ &= 30 + 2 + 3 \times 1 \\ &= 35\end{aligned}$$

정답 ⑤

8. 출제의도 : 삼각함수의 성질과 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}\sin(\pi - \theta) &> 0 \text{에서 } \sin\theta > 0 \\ 2\cos\theta &= \sin\theta \quad \dots\dots \textcircled{7} \\ \textcircled{7} \text{에서 } \sin\theta &> 0 \text{이므로 } \cos\theta > 0 \\ \textcircled{7} \text{의 양변을 제곱하면} \\ 4\cos^2\theta &= \sin^2\theta \\ \sin^2\theta &= 1 - \cos^2\theta \text{이므로 이를 위 등식에 대입하면} \\ 4\cos^2\theta &= 1 - \cos^2\theta \\ 5\cos^2\theta &= 1 \\ \cos^2\theta &= \frac{1}{5} \\ \text{따라서 } \cos\theta &> 0 \text{이므로} \\ \cos\theta &= \frac{\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

정답 ⑤

9. 출제의도 : 정적분의 성질을 이용하여 주어진 식을 만족시키는 함수의 미정계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}\int_{-3}^3 (x+1)f(x)dx &= 36 + \int_{-3}^3 f(x)dx \\ \text{에서} \\ \int_{-3}^3 (x+1)f(x)dx &= \int_{-3}^3 \{xf(x) + f(x)\}dx \\ &= \int_{-3}^3 xf(x)dx + \int_{-3}^3 f(x)dx\end{aligned}$$

이므로

$$\int_{-3}^3 xf(x)dx = 36$$

이때 $f(x) = x^2 + ax$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{-3}^3 xf(x)dx &= \int_{-3}^3 x(x^2 + ax)dx \\ &= \int_{-3}^3 (x^3 + ax^2)dx \\ &= 2 \int_0^3 ax^2 dx \\ &= 2 \left[\frac{a}{3} x^3 \right]_0^3 \\ &= 2 \times 9a \\ &= 18a\end{aligned}$$

따라서

$$18a = 36$$

이므로

$$a = 2$$

정답 ②

10. 출제의도 : 로그의 성질과 로그방정식을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y = \log_a(x+3)$ 이

곡선 $y = \log_a(-x+3)$ 과 만나는 점 A의

좌표를 구해 보자

$\log_a(x+3) = \log_a(-x+3)$ 에서

$$x+3 = -x+3$$

$$x = 0$$

$x = 0$ 일 때, $y = \log_a 3$ 이므로

점 A의 좌표는 $(0, \log_a 3)$ 이다.

곡선 $y = \log_a(x+3)$ 에서

$y = 0$ 일 때

$$\log_a(x+3) = 0$$

$$x+3 = 1$$

$$x = -2$$

그러므로 점 B의 좌표는 $(-2, 0)$ 이다.

곡선 $y = \log_a(-x+3)$ 에서

$y = 0$ 일 때

$$\log_a(-x+3) = 0$$

$$-x+3 = 1$$

$$x = 2$$

그러므로 점 C의 좌표는 $(2, 0)$ 이다.

삼각형 ABC가 정삼각형이므로

원점을 O라 하면

$$\tan \frac{\pi}{3} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \text{에서}$$

$$\sqrt{3} = \frac{\log_a 3}{2}$$

$$\log_a 3 = 2\sqrt{3}$$

$$a^{2\sqrt{3}} = 3$$

따라서

$$a = 3^{\frac{1}{2\sqrt{3}}} = 3^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$$

정답 ①

11. 출제의도 : 위치, 속도, 가속도 사이의 관계 및 미분을 이용하여 가속도를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $x = t^3 - t^2 - t + 1$ 에 $t = 1$ 을 대입하면

$$x = 1^3 - 1^2 - 1 + 1 = 0 \text{ (거짓)}$$

ㄴ. 점 P의 시각 t 에서의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 2t - 1$$

이므로 시각 $t = 1$ 일 때 점 P의 속도는

$$v = 3 \times 1^2 - 2 \times 1 - 1 = 0 \text{ (참)}$$

ㄷ. ㄴ에서 시각 $t=1$ 일 때 점 P의 속도는 0이고 시각 $t=1$ 의 좌우에서 속도 v 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 출발한 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각은 $t=1$ 이다. 점 P의 시각 t 에서의 가속도를 a 라 하면

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 2$$

이므로 시각 $t=1$ 일 때 점 P의 가속도는

$$a = 6 \times 1 - 2 = 4 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

12. 출제의도 : 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 특정한 항의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에서

$$a_{n+1} = a_n - 3 \text{ 또는 } a_{n+1} = 2a_n$$

조건 (가)에서 $a_3 = a_1$ ㉠

(i) $a_3 = a_2 - 3$, $a_2 = a_1 - 3$ 인 경우

$$a_3 = a_2 - 3 = (a_1 - 3) - 3$$

$$a_3 = a_1 - 6$$

이 식은 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_3 = a_2 - 3$, $a_2 = 2a_1$ 인 경우

$$a_3 = a_2 - 3 = 2a_1 - 3$$

㉠에서

$$a_3 = 2a_3 - 3$$

$$a_3 = 3$$

$$a_4 = a_3 - 3 = 0 \text{ 또는 } a_4 = 2a_3 = 6$$

(iii) $a_3 = 2a_2$, $a_2 = a_1 - 3$ 인 경우

$$a_3 = 2(a_1 - 3) = 2a_1 - 6$$

㉠에서

$$a_3 = 2a_3 - 6$$

$$a_3 = 6$$

$$a_4 = a_3 - 3 = 3 \text{ 또는 } a_4 = 2a_3 = 12$$

(iv) $a_3 = 2a_2$, $a_2 = 2a_1$ 인 경우

$$a_3 = 2a_2 = 2(2a_1) = 4a_1$$

㉠에서 $a_3 = 4a_3$

$$a_3 = 0$$

$$a_4 = a_3 - 3 = -3 \text{ 또는 } a_4 = 2a_3 = 0$$

(i) ~ (iv)에서

$$a_4 = -3 \text{ 또는 } a_4 = 0 \text{ 또는 } a_4 = 3 \text{ 또는}$$

$$a_4 = 6 \text{ 또는 } a_4 = 12$$

이므로

a_4 의 최댓값은 12

정답 ②

13. 출제의도 : 정적분과 넓이의 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 상수 k 의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 조건에서

$$(A \text{의 넓이}) + (C \text{의 넓이}) = (B \text{의 넓이})$$

가 성립해야 하므로

$$\int_0^k \left\{ (3x^2 - 7x + 2) - \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \right) \right\} dx = 0$$

$$\int_0^k \left(3x^2 - \frac{22}{3}x + \frac{8}{3} \right) dx = 0$$

$$\left[x^3 - \frac{11}{3}x^2 + \frac{8}{3}x \right]_0^k = 0$$

$$k^3 - \frac{11}{3}k^2 + \frac{8}{3}k = 0$$

$$3k^3 - 11k^2 + 8k = 0$$

$$k(k-1)(3k-8) = 0$$

이때 $k > 2$ 이므로 $k = \frac{8}{3}$

정답 ④

14. 출제의도 : 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 삼각형의 외접원의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 APQ에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{PQ}}{\sin(\angle QAP)} = \frac{\overline{AQ}}{\sin(\angle APQ)}$$

조건에서 $\overline{AQ} = 3\sqrt{2}$ 이고

$\sin(\angle QAP) : \sin(\angle APQ) = \sqrt{2} : 3$ 이므로

$$\overline{PQ} = \frac{\sin(\angle QAP)}{\sin(\angle APQ)} \times \overline{AQ}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \times 3\sqrt{2}$$

$$= 2$$

점 P는 선분 BC의 중점이고 점 Q는 선분 BC를 5:1로 내분하는 점이므로

$$\begin{aligned} \overline{BC} &= \overline{BP} + \overline{PQ} + \overline{QC} \\ &= \frac{1}{2}\overline{BC} + 2 + \frac{1}{6}\overline{BC} \\ &= \frac{2}{3}\overline{BC} + 2 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{3}\overline{BC} = 2, \overline{BC} = 6$$

한편, $\overline{BQ} = \frac{5}{6}\overline{BC} = 5$ 이고 $\overline{AB} = 2\sqrt{7}$ 이므로

삼각형 ABQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos(\angle ABQ) &= \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BQ}^2 - \overline{AQ}^2}{2 \times \overline{AB} \times \overline{BQ}} \\ &= \frac{(2\sqrt{7})^2 + 5^2 - (3\sqrt{2})^2}{2 \times 2\sqrt{7} \times 5} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{4}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos(\angle ABC) \\ &= (2\sqrt{7})^2 + 6^2 - 2 \times 2\sqrt{7} \times 6 \times \frac{\sqrt{7}}{4} \end{aligned}$$

$$= 22$$

이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{22}$$

이때

$$\begin{aligned} \sin(\angle ABC) &= \sqrt{1 - \cos^2(\angle ABC)} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

이므로 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)} = 2R$$

이므로

$$R = \frac{\sqrt{22}}{2 \times \frac{3}{4}} = \frac{2\sqrt{22}}{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$$\pi R^2 = \pi \times \left(\frac{2\sqrt{22}}{3}\right)^2 = \frac{88}{9}\pi$$

정답 ②

15. 출제의도 : 미분을 이용하여 상수와 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼차함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a, b, c, d \text{는 상수})$$

수, $a \neq 0$)이라 하자

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f'(0) = c \text{ 이므로}$$

$$c = 6$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 6 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$x \neq -1, x \neq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여

함수 $g(x)$ 는 미분가능하고

$$x < -1 \text{ 또는 } x > 1 \text{ 에서 } g'(x) = f'(x),$$

$$-1 < x < 1 \text{ 에서}$$

$$g'(x) = -f'(x) \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

이다.

조건 (가)에서 모든 실수 a 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \text{ 의 값이 존재하므로}$$

$$a \neq -1, a \neq 1 \text{ 에서}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= g'(a) \end{aligned}$$

모든 실수 a 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

의 값이 0 이하이므로

\textcircled{B} 에서 함수 $f(x)$ 는

$$x < -1 \text{ 또는 } x > 1 \text{ 에서 } f'(x) \leq 0$$

$$-1 < x < 1 \text{ 에서 } f'(x) \geq 0$$

을 만족시킨다.

함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 과 $x = 1$ 에서 모두

극값을 가지므로

$$f'(-1) = f'(1) = 0 \text{ 이어야 한다.}$$

\textcircled{A} 에서

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 6 = 3a(x+1)(x-1)$$

$$3ax^2 + 2bx + 6 = 3ax^2 - 3a$$

양변의 일차항 계수와 상수항을 비교하면

$$2b = 0 \text{ 에서 } b = 0$$

$$6 = -3a \text{ 에서 } a = -2$$

$$f(x) = -2x^3 + 6x + d$$

조건 (가)에서

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$$

의 값이 존재하고

$x \rightarrow 1+$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = g(1) \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

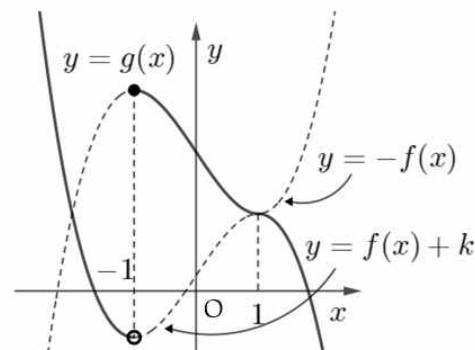
$$\lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x) + k\} = -f(1)$$

$$f(1) + k = -f(1) \text{ 이므로}$$

$$f(1) = -\frac{k}{2} \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

$$\begin{aligned} \text{한편 } \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} \{-f(x)\} \\ &= -f(1) = g(1) \end{aligned}$$

이고 \textcircled{C} 에서 함수 $g(x)$ 는 $x = 1$ 에서 연속이므로 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



조건 (나)에서

방정식 $g(x) = t$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t 의 최댓값이 13 이므로

$$g(-1) = -f(-1) = 13$$

$$f(-1) = 2 - 6 + d = -13 \text{ 이므로}$$

$$d = -9$$

$$f(x) = -2x^3 + 6x - 9$$

\textcircled{D} 에서

$$f(1) = -2 + 6 - 9 = -\frac{k}{2}$$

$$k=10$$

따라서

$$k+f\left(\frac{1}{2}\right)=10+\left(-\frac{1}{4}+3-9\right) \\ =\frac{15}{4}$$

정답 ①

16. 출제의도 : 로그에 미지수가 포함된 방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\log_5(x+1)+\log_5(x-1)=\log_{25}9 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

진수 조건에 의해

$$x+1>0, x-1>0 \text{이므로 } x>1$$

⑦에서

$$\log_5(x+1)(x-1)=\log_{5^2}3^2$$

$$\log_5(x^2-1)=\log_53$$

$$\text{즉, } x^2-1=3 \text{에서 } x^2=4$$

따라서 $x>1$ 이므로

$$x=2$$

정답 2

17. 출제의도 : 다항함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f'(x)=3x^2+4x$$

$$f(x)=\int f'(x)dx$$

$$=\int (3x^2+4x)dx$$

$$=x^3+2x^2+C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)}$$

$$f(0)=3 \text{이므로}$$

$$C=3$$

따라서

$$f(x)=x^3+2x^2+3$$

이므로

$$f(1)=1+2+3=6$$

정답 6

18. 출제의도 : \sum 의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^6(k^2+2k)=\sum_{k=1}^6k^2+2\sum_{k=1}^6k \\ =\frac{6\times7\times13}{6}+2\times\frac{6\times7}{2} \\ =91+42 \\ =133$$

정답 133

19. 출제의도 : 함수의 그래프를 이용하여 극솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f'(x)=9x^2-18x=9x(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| | | | | | |
|---------|------------|----|------------|----|------------|
| x | \cdots | 0 | \cdots | 2 | \cdots |
| $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(x)$ | \nearrow | 극대 | \searrow | 극소 | \nearrow |

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대이고 극댓값은 $f(0)=a$ 이므로

$$a=20$$

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극소이므로 극솟값은

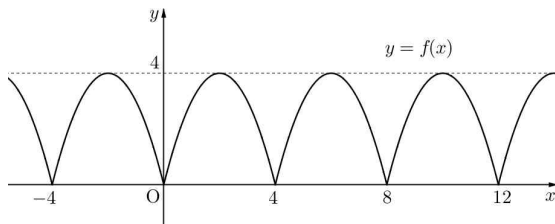
$$f(2)=24-36+20=8$$

정답 8

20. 출제의도 : 주기함수를 이해하고 등차수열의 일반항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$0 \leq x < 4$ 일 때 $f(x) = -x^2 + 4x$ 이고 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+4) = f(x)$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



방정식 $f(x) = x$ 에서

$$-x^2 + 4x = x$$

$$-x(x-3) = 0$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = 3$$

방정식 $f(x) = x$ 의 모든 실근이 0, 3이므로 방정식 $f(f(x)) = f(x)$ 의 실근을 구하는 것은 방정식 $f(x) \times (f(x) - 3) = 0$ 의 실근을 구하는 것과 같다.

$0 \leq x < 4$ 일 때,

$$f(x) = 0 \text{에서 } x = 0$$

$$f(x) = 3 \text{에서 } -x^2 + 4x = 3$$

$$-(x-1)(x-3) = 0$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

그러므로 $0 \leq x < 4$ 일 때, 방정식

$f(x) \times (f(x) - 3) = 0$ 의 모든 실근은

0, $\boxed{1}$, 3이므로

$$a_1 = 0, a_2 = \boxed{1}, a_3 = 3$$

이다. 또한 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+4) = f(x)$ 이므로 세 수열 $\{a_{3n-2}\}$, $\{a_{3n-1}\}$, $\{a_{3n}\}$ 은 첫째항이 각각 0, $\boxed{1}$, 3이고, 공차가 모두 $\boxed{4}$ 인 등차수열이다.

따라서

$$a_{20} = a_{3 \times 7 - 1} = 1 + 6 \times 4 = 25,$$

$$a_{21} = a_{3 \times 7} = 3 + 6 \times 4 = 27,$$

$$a_{22} = a_{3 \times 8 - 2} = 0 + 7 \times 4 = 28$$

이므로

$$a_{20} + a_{21} + a_{22} = 25 + 27 + 28 = \boxed{80} \text{이다.}$$

이때 $p = 1$, $q = 4$, $r = 80$ 이므로

$$p + q + r = 85$$

정답 85

21. 출제의도 : 함수의 극한의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = (x-1)(x-2)$$

(i) $a < 1$ 또는 $a > 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) \times f(x)}{f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\ &= g(a) \end{aligned}$$

(ii) $1 < a < 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) \times (-f(x))}{f(x)} \\ &= -\lim_{x \rightarrow a} g(x) \\ &= -g(a) \end{aligned}$$

(iii) $a = 1$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{g(x) \times f(x)}{f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) \\ &= g(1), \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{g(x) \times (-f(x))}{f(x)}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 1+} g(x)$$

$$= -g(1)$$

$$a=1 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)} \text{의 극한}$$

값이 존재해야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)}$$

이어야 한다.

즉, $g(1) = -g(1)$ 이므로

$$g(1) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(iv) $a=2$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{g(x) \times (-f(x))}{f(x)}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 2-} g(x)$$

$$= -g(2),$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{g(x) \times f(x)}{f(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+} g(x)$$

$$= g(2)$$

$$a=2 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)} \text{의 극한}$$

값이 존재해야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)}$$

이어야 한다.

즉, $-g(2) = g(2)$ 이므로

$$g(2) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

(i) ~ (iv)에서

모든 실수 a 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)}$$

의 극한값이 존재하려면

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 에서

$$g(1) = g(2) = 0$$

이어야 한다.

이때, 함수 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로

$$g(x) = f(x)h(x)$$

(단, $h(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차함수)로 놓을 수 있다.

한편,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|g(x) - f(x)|}{g(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)h(x) - f(x)|}{f(x)h(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)| \times |h(x) - 1|}{f(x)h(x)}$$

(v) $a < 1$ 또는 $a > 2$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|g(x) - f(x)|}{g(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \times |h(x) - 1|}{f(x)h(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{|h(x) - 1|}{h(x)}$$

이때, $h(a) = 0$ 이면 극한값이 존재하지 않으므로

$h(a) \neq 0$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|h(x) - 1|}{h(x)}$$

$$= \frac{|h(a) - 1|}{h(a)}$$

(vi) $1 < a < 2$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|g(x) - f(x)|}{g(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-f(x) \times |h(x) - 1|}{f(x)h(x)}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow a} \frac{|h(x) - 1|}{h(x)}$$

이때, $h(a) = 0$ 이면 극한값이 존재하지 않으므로

$h(a) \neq 0$ 이고

$$- \lim_{x \rightarrow a} \frac{|h(x) - 1|}{h(x)} = - \frac{|h(a) - 1|}{h(a)}$$

(vii) $a = 1$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{|g(x) - f(x)|}{g(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) \times |h(x) - 1|}{f(x)h(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{|h(x) - 1|}{h(x)}$$

이때, $h(1) = 0$ 이면 극한값이 존재하지 않으므로

$h(1) \neq 0$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{|h(x) - 1|}{h(x)}$$

$$= \frac{|h(1) - 1|}{h(1)},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{|g(x) - f(x)|}{g(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{-f(x) \times |h(x) - 1|}{f(x)h(x)}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{|h(x) - 1|}{h(x)}$$

이때, $h(1) = 0$ 이면 극한값이 존재하지 않으므로

$h(1) \neq 0$ 이고

$$- \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{|h(x) - 1|}{h(x)}$$

$$= - \frac{|h(1) - 1|}{h(1)}$$

$$a = 1 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|g(x) - f(x)|}{g(x)}$$

의 극한값이 존재해야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{|g(x) - f(x)|}{g(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{|g(x) - f(x)|}{g(x)}$$

이어야 한다.

$$\text{즉, } \frac{|h(1) - 1|}{h(1)} = - \frac{|h(1) - 1|}{h(1)} \text{ 이므로}$$

$$|h(1) - 1| = -|h(1) - 1|$$

$$h(1) = 1 \quad \dots\dots \textcircled{E}$$

이다.

(viii) $a = 2$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{|g(x) - f(x)|}{g(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{-f(x) \times |h(x) - 1|}{f(x)h(x)}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{|h(x) - 1|}{h(x)}$$

이때, $h(2) = 0$ 이면 극한값이 존재하지 않으므로

$h(2) \neq 0$ 이고

$$- \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{|h(x) - 1|}{h(x)} = - \frac{|h(2) - 1|}{h(2)},$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{|g(x) - f(x)|}{g(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x) \times |h(x) - 1|}{f(x)h(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{|h(x) - 1|}{h(x)}$$

이때, $h(2) = 0$ 이면 극한값이 존재하지 않으므로

$h(2) \neq 0$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{|h(x) - 1|}{h(x)} = \frac{|h(2) - 1|}{h(2)}$$

$$a = 2 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|g(x) - f(x)|}{g(x)}$$

의 극한값이 존재해야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{|g(x) - f(x)|}{g(x)} \\ = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{|g(x) - f(x)|}{g(x)}$$

이어야 한다.

$$\text{즉, } -\frac{|h(2)-1|}{h(2)} = \frac{|h(2)-1|}{h(2)} \text{ 이므로}$$

$$-|h(2)-1| = |h(2)-1|$$

$$h(2)=1 \quad \dots\dots \textcircled{\text{㉞}}$$

이다.

(v) ~ (viii)에서

모든 실수 a 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|g(x) - f(x)|}{g(x)}$$

의 극한값이 존재하려면

㉞, ㉞에서

$$h(1)=h(2)=1$$

이어야 한다.

이때, 함수 $h(x)$ 는 최고차항의 계수가 1

인 이차함수이므로

$$h(x)-1=(x-1)(x-2)$$

$$\text{즉, } h(x)=f(x)+1$$

따라서

$$g(x)=f(x) \times (f(x)+1)$$

이고,

$$f(-1)=(-1-1)(-1-2)=6$$

이므로

$$g(-1)=6 \times (6+1)=42$$

정답 42

[참고]

$$h(x)=f(x)+1$$

$$=(x-1)(x-2)+1$$

$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

이므로 모든 실수 a 에 대하여

$h(a) \neq 0$ 을 만족시킨다.

22. 출제의도 : 지수함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

두 곡선

$$y=2^x+\frac{k}{2}, \quad y=k \times \left(\frac{1}{2}\right)^x+k-2$$

가 만나는 점 A의 x 좌표를 a 라 하면

$$2^a+\frac{k}{2}=k \times \left(\frac{1}{2}\right)^a+k-2$$

$$2^a=t(t>0) \text{라 하면}$$

$$t+\frac{k}{2}=\frac{k}{t}+k-2$$

$$2t^2+(4-k)t-2k=0$$

$$(t+2)(2t-k)=0$$

$t>0$ 이므로

$$t=\frac{k}{2}$$

$$\text{즉, } 2^a=\frac{k}{2} \text{ 이므로}$$

$$a=\log_2 \frac{k}{2}$$

이고,

$$2^{\log_2 \frac{k}{2}}+\frac{k}{2}=\frac{k}{2}+\frac{k}{2}=k$$

이므로 점 A의 좌표는

$$\left(\log_2 \frac{k}{2}, k\right)$$

이다.

$$\text{이때, 실수 } k \text{에 대하여 } 2^{\log_2 \frac{k}{2}}=\frac{k}{2} \text{ 이므}$$

$$\text{로 점 A는 곡선 } 2^x=\frac{y}{2}, \text{ 즉 } y=2^{x+1}$$

위를 움직인다.

한편, 곡선 $y=2^{x-2}-3$ 은 곡선 $y=2^{x+1}$ 을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이므로 점 A를 지나고 기울기가 -1 인 직선이 곡선

$y = 2^{x-2} - 3$ 과 만나는 점 B의 좌표는

$$\left(\log_2 \frac{k}{2} + 3, k - 3\right)$$

이고, 두 점 A, B 사이의 거리는

$$\sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

이다.

이때 원점 O에서 직선 AB까지의 거리를 h 라 하면 삼각형 OAB의 넓이가 16

이므로

$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times h = 16$$

에서

$$h = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

이다.

한편, 직선 AB의 방정식은

$$y - k = -\left(x - \log_2 \frac{k}{2}\right)$$

즉, $x + y - k - \log_2 \frac{k}{2} = 0$ 이고 원점과 직

선 AB사이의 거리가 $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ 이므로

$$\frac{\left| -k - \log_2 \frac{k}{2} \right|}{\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

$$\left| -k - \log_2 k + 1 \right| = \frac{32}{3}$$

$k > 1$ 이므로

$$k + \log_2 k - 1 = \frac{32}{3}$$

$$k + \log_2 k = \frac{35}{3}$$

따라서 $p = 3$, $q = 35$ 이므로

$$p + q = 38$$

정답 38

■ [선택: 미적분]

23. ① 24. ② 25. ④ 26. ② 27. ③
28. ① 29. 109 30. 25

23. 출제의도 : 등비수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \times 3^{n+1}}{2^n + 3^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \times 3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} \\ &= \frac{12}{0+1} \\ &= 12\end{aligned}$$

정답 ①

24. 출제의도 : 음함수로 나타내어진 함수에서 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$3x + y + \cos(xy) = 2$$

의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3 + \frac{dy}{dx} - \sin(xy) \times \left(y + x \frac{dy}{dx} \right) = 0$$

$$\{1 - x \sin(xy)\} \frac{dy}{dx} = y \sin(xy) - 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \sin(xy) - 3}{1 - x \sin(xy)}$$

(단, $1 - x \sin(xy) \neq 0$)

이때 $x=0$, $y=1$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$\frac{0-3}{1-0} = -3$$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y = -3x + 1$$

따라서 이 접선의 x 절편은

$$-3x + 1 = 0 \text{에서}$$

$$x = \frac{1}{3}$$

정답 ②

25. 출제의도 : 급수와 수열의 극한값 사이의 관계를 이용하여 미지수를 구한 후 급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a-3n}{n} + \frac{an+6}{n+a} \right)$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a-3n}{n} + \frac{an+6}{n+a} \right) = 0$$

따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a-3n}{n} + \frac{an+6}{n+a} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{n} - 3 + \frac{a + \frac{6}{n}}{1 + \frac{a}{n}} \right)$$

$$= 0 - 3 + a = 0$$

$$\text{즉 } a = 3$$

이때

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a-3n}{n} + \frac{an+6}{n+a} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3-3n}{n} + \frac{3n+6}{n+3} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{3}{n} - 3 + \frac{3(n+3)-3}{n+3} \right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n} - 3 + 3 - \frac{3}{n+3} \right)$$

$$= 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right)$$

이고

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) \right.$$

$$+ \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\left. + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right) \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{11}{6}$$

따라서

$$S = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right)$$

$$= 3 \times \frac{11}{6}$$

$$= \frac{11}{2}$$

이므로

$$a + S = 3 + \frac{11}{2} = \frac{17}{2}$$

정답 ④

26. 출제의도 : 역함수의 미분법을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

$$g'(a) = \frac{1}{f'(g(a))} \text{이므로}$$

$$g'(a) = \frac{1}{8}$$

에서

$$f'(g(a)) = 8$$

이때

$$f(x) = e^{3x} - 3e^{2x} + 4e^x$$

에서

$$f'(x) = 3e^{3x} - 6e^{2x} + 4e^x$$

이고

$$g(a) = b$$

라 하면

$$\begin{aligned} f'(g(a)) &= f'(b) \\ &= 3e^{3b} - 6e^{2b} + 4e^b \end{aligned}$$

이고

$$f'(g(a)) = 8$$

이므로

$$3e^{3b} - 6e^{2b} + 4e^b = 8$$

$$3e^{3b} - 6e^{2b} + 4e^b - 8 = 0$$

$$(e^b - 2)(3e^{2b} + 4) = 0$$

$$e^b > 0 \text{이므로 } e^b = 2$$

$$\text{즉, } b = \ln 2$$

$$g(a) = b$$

에서

$$a = f(b)$$

이므로

$$a = f(\ln 2)$$

$$= e^{3\ln 2} - 3e^{2\ln 2} + 4e^{\ln 2}$$

$$= e^{\ln 8} - 3e^{\ln 4} + 4e^{\ln 2}$$

$$= 8 - 3 \times 4 + 4 \times 2$$

$$= 4$$

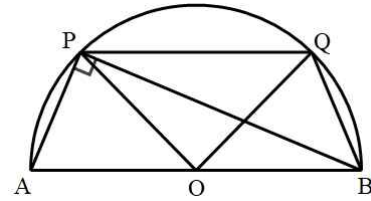
따라서

$$a + f'(g(a)) = 4 + 8 = 12$$

정답 ②

27. 출제의도 : 삼각함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



선분 AB의 중점을 O라 하면 삼각형 OPA는

$$\overline{OP} = \overline{OA} = 1, \angle AOP = \pi - 2\theta$$

인 이등변삼각형이다. 사각형 ABQP는 원에 내접하는 사각형이므로

$\angle BQP = \pi - \theta$ 이고, 선분 AB와 선분 PQ가 평행하므로 $\angle OBQ = \theta$ 이다.

따라서 삼각형 OBQ는

$$\overline{OQ} = \overline{OB} = 1, \angle BOQ = \pi - 2\theta$$

인 이등변삼각형이다.

또, 삼각형 OPQ는

$$\overline{OP} = \overline{OQ} = 1,$$

$$\angle POQ = \pi - 2(\pi - 2\theta) = 4\theta - \pi$$

인 이등변삼각형이다.

이때, 사각형 ABQP의 넓이는

$$f(\theta) = 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin(\pi - 2\theta)$$

$$+ \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin(4\theta - \pi)$$

$$= \sin(\pi - 2\theta) + \frac{1}{2} \sin(4\theta - \pi)$$

$$= \sin 2\theta - \frac{1}{2} \sin 4\theta$$

이므로

$$f'(\theta) = 2\cos 2\theta - 2\cos 4\theta$$

이다.

한편, $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 3$ 일 때 삼각형 ABP는

$$\angle BAP = a, \angle APB = \frac{\pi}{2}$$

인 직각삼각형이므로

$$\cos a = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

이다. 이때,

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos(a+a) \\ &= \cos a \cos a - \sin a \sin a \\ &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) \\ &= 2\cos^2 a - 1 \\ &= 2 \times \frac{1}{10} - 1 \\ &= -\frac{4}{5}\end{aligned}$$

이고, 마찬가지로

$$\begin{aligned}\cos 4a &= \cos(2a+2a) \\ &= 2\cos^2 2a - 1 \\ &= 2 \times \frac{16}{25} - 1 \\ &= \frac{7}{25}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}f'(a) &= 2\cos 2a - 2\cos 4a \\ &= 2 \times \left(-\frac{4}{5}\right) - 2 \times \frac{7}{25} \\ &= -\frac{54}{25}\end{aligned}$$

정답 ③

28. 출제의도 : 사잇값의 정리와 합성함수의 미분법 및 이계도함수를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에서 $f(-3)f(3) < 0$ 이므로

사잇값의 정리에 의하여

$$f(\alpha) = 0 \quad (-3 < \alpha < 3)$$

을 만족시키는 α 가 존재한다.

또한, 조건 (가)의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}5(f(x))^4 \times f'(x) + 3(f(x))^2 \times f'(x) + a \\ = \frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}} \quad \dots\dots \textcircled{7}\end{aligned}$$

다시 ⑦의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}20(f(x))^3 \times (f'(x))^2 + 5(f(x))^4 \times f''(x) \\ + 6f(x) \times (f'(x))^2 + 3(f(x))^2 \times f''(x) \\ = \frac{2\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right) - (2x+1)(2x+1)}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}20(f(x))^3 \times (f'(x))^2 + 5(f(x))^4 \times f''(x) \\ + 6f(x) \times (f'(x))^2 + 3(f(x))^2 \times f''(x) \\ = \frac{-2(x+2)(x-1)}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2} \quad \dots\dots \textcircled{8}\end{aligned}$$

⑧은 x 에 대한 항등식이므로 $x = \alpha$ 를 대입하면

$$0 = \frac{-2(\alpha+2)(\alpha-1)}{\left(\alpha^2+\alpha+\frac{5}{2}\right)^2}$$

따라서

$$\alpha = -2 \text{ 또는 } \alpha = 1$$

(i) $\alpha = -2$ 일 때

⑦에 $x = \alpha = -2$ 를 대입하면

$$a = \frac{2(-2)+1}{(-2)^2+(-2)+\frac{5}{2}} = \frac{-3}{\frac{9}{2}} = -\frac{2}{3}$$

이때 ⑦에서

$$5(f(x))^4 \times f'(x) + 3(f(x))^2 \times f'(x)$$

$$= \frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}$$

이므로 $x=2$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} & 5(f(2))^4 \times f'(2) + 3(f(2))^2 \times f'(2) \\ &= \frac{2 \times 2 + 1}{2^2 + 2 + \frac{5}{2}} + \frac{2}{3} = \frac{64}{51} \end{aligned}$$

즉

$$5(f(2))^4 \times f'(2) + 3(f(2))^2 \times f'(2)$$

$$= \frac{64}{51}$$

이고, 이것은 조건 (나)의 $f'(2) > 0$ 을 만족시킨다.

또, 조건 (가)에 $x = \alpha = -2$ 를 대입하면

$$-\frac{2}{3} \times (-2) + b = \ln \left\{ (-2)^2 + (-2) + \frac{5}{2} \right\}$$

$$\frac{4}{3} + b = \ln \frac{9}{2}$$

$$b = -\frac{4}{3} + \ln \frac{9}{2}$$

(ii) $\alpha = 1$ 일 때

㉠에 $x = \alpha = 1$ 을 대입하면

$$a = \frac{2 \times 1 + 1}{1 + 1 + \frac{5}{2}} = \frac{3}{\frac{9}{2}} = \frac{2}{3}$$

이때 ㉠에서

$$\begin{aligned} & 5(f(x))^4 \times f'(x) + 3(f(x))^2 \times f'(x) \\ &= \frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

이므로 $x=2$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} & 5(f(2))^4 \times f'(2) + 3(f(2))^2 \times f'(2) \\ &= \frac{2 \times 2 + 1}{2^2 + 2 + \frac{5}{2}} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

즉

$$\begin{aligned} & 5(f(2))^4 \times f'(2) + 3(f(2))^2 \times f'(2) \\ &= -\frac{4}{51} \end{aligned}$$

그런데 조건 (나)에서 $f'(2) > 0$ 이므로 (좌변) ≥ 0 , (우변) < 0

따라서 모순이다.

(i), (ii)에 의하여

$$a = -\frac{2}{3}, \quad b = -\frac{4}{3} + \ln \frac{9}{2}$$

이므로

$$\begin{aligned} a \times e^b &= -\frac{2}{3} \times e^{-\frac{4}{3} + \ln \frac{9}{2}} \\ &= -\frac{2}{3} \times e^{-\frac{4}{3}} \times e^{\ln \frac{9}{2}} \\ &= -\frac{2}{3} \times \frac{9}{2} \times e^{-\frac{4}{3}} \\ &= -3e^{-\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

정답 ①

29. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 수열을 구한 후 등비급수의 합이 존재하는 수열을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 조건에 의하여

$$a_1 = \alpha \times \sin \frac{\pi}{2} + \beta \times \cos \frac{\pi}{2} = \alpha$$

$$a_2 = \alpha \times \sin \pi + \beta \times \cos \pi = -\beta$$

$$a_3 = \alpha \times \sin \frac{3}{2}\pi + \beta \times \cos \frac{3}{2}\pi = -\alpha$$

$$a_4 = \alpha \times \sin 2\pi + \beta \times \cos 2\pi = \beta$$

$$a_5 = \alpha$$

\vdots

이므로

수열 $\{a_n\}$ 은

$$\alpha, -\beta, -\alpha, \beta, \alpha, \dots$$

이다.

따라서

$$a_{4n-2} = -\beta, \quad a_{4n-3} = \alpha$$

이고

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 = \alpha^2 \beta^2 = 4$$

에서

$$\alpha\beta = -2 \quad \text{또는} \quad \alpha\beta = 2$$

그런데 $\alpha, \beta (\alpha > \beta)$ 는 정수이므로

$$\alpha = 2, \beta = 1 \quad \text{또는} \quad \alpha = -1, \beta = -2 \quad \text{또는}$$

$$\alpha = 2, \beta = -1 \quad \text{또는} \quad \alpha = 1, \beta = -2$$

이다.

이때, 등비수열 $\{b_n\}$ 의 공비를 r 이라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{4n-2} b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{4n-3} b_{2n}) = 6$$

$$-\beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

이고 $\textcircled{7}$ 을 만족시키기 위해서는

$$-1 < r < 1$$

이어야 한다.

따라서

$$-\beta \times \frac{b_1}{1-r} = \alpha \times \frac{b_1 r}{1-r^2} = 6$$

(i) $\alpha = 2, \beta = 1$ 일 때

$$-\frac{b_1}{1-r} = 6$$

에서 $1-r > 0$ 이므로

$$b_1 < 0$$

이것은 $b_1 > 0$ 을 만족시키지 않는다.

(ii) $\alpha = -1, \beta = -2$ 일 때

$$2 \times \frac{b_1}{1-r} = -\frac{b_1 r}{1-r^2} = 6$$

이므로

$$2 = \frac{-r}{1+r}, \quad 2+2r = -r$$

$$r = -\frac{2}{3}$$

따라서

$$\frac{2b_1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{2b_1}{\frac{5}{3}} = \frac{6b_1}{5} = 6$$

에서

$$b_1 = 5$$

이므로

$$b_3 = b_1 r^2 = 5 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{20}{9}$$

(iii) $\alpha = 2, \beta = -1$ 일 때

$$\frac{b_1}{1-r} = 2 \times \frac{b_1 r}{1-r^2} = 6$$

이므로

$$1 = \frac{2r}{1+r}, \quad 1+r = 2r, \quad r = 1$$

이것은 $-1 < r < 1$ 을 만족시키지 않는다.

(iv) $\alpha = 1, \beta = -2$ 일 때

$$2 \times \frac{b_1}{1-r} = \frac{b_1 r}{1-r^2} = 6$$

이므로

$$2 = \frac{r}{1+r}, \quad 2+2r = r, \quad r = -2$$

이것은 $-1 < r < 1$ 을 만족시키지 않는다.

(i) ~ (iv)에서

$$b_1 = 5, \quad b_3 = \frac{20}{9}$$

이므로

$$b_1 \times b_3 = 5 \times \frac{20}{9} = \frac{100}{9}$$

따라서 $p = 9, q = 100$ 이므로

$$p+q = 109$$

정답 109

30. 출제의도 : 도함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

$$h(x) = \frac{2}{1+e^{-x}}$$

라 하면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1+e^{-x}} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{1+e^{-x}} = 0$$

이고,

$$h'(x) = \frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} > 0$$

이므로

$$0 < h(x) < 2$$

이다.

$f(h(x)) > 0$ 일 때, $g(x) = f(h(x))$ 이므로

$$g'(x) = f'(h(x))h'(x)$$

이고,

$f(h(x)) < 0$ 일 때, $g(x) = -f(h(x))$ 이므로

$$g'(x) = -f'(h(x))h'(x)$$

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분 가능하고 조건 (가)에 의하여 $x=0$ 에서 극소이므로

$$g'(0) = 0$$

이때, $g(0) > 0$ 이므로

$$f(h(0)) > 0 \text{ 또는 } f(h(0)) < 0 \dots\dots \textcircled{7}$$

그러므로

$$g'(0) = f'(h(0))h'(0) = \frac{1}{2}f'(1)$$

또는

$$g'(0) = -f'(h(0))h'(0) = -\frac{1}{2}f'(1)$$

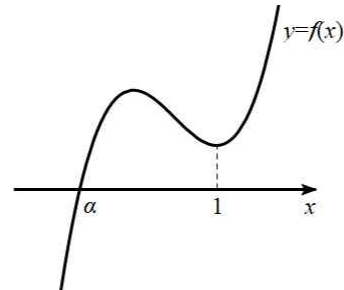
이므로 $g'(0) = 0$ 이려면 $f'(1) = 0$ 이어야 한다.

또, $g'(x) = f'(h(x))h'(x)$ 또는

$g'(x) = -f'(h(x))h'(x)$ 에서 모든 실수 x 에 대하여 $h'(x) > 0$ 이고, 함수 $g'(x)$ 의 부호가 $x=0$ 의 좌우에서 바뀌므로 $f'(x)$ 의 부호가 $x=h(0)=1$ 의 좌우에서 바뀐다.

즉, 삼차함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극값을 가져야 하고 $\textcircled{7}$ 에서 $f(1) > 0$ 또는 $f(1) < 0$ 이다.

만일 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극소이면 함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 극소이고, 함수 $|f(h(x))|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분 가능하므로 그림과 같이 $f(1) > 0$ 이어야 한다.



또, $f(\alpha) = 0$ 이고 $h(x) = \alpha$ 인 x 가 존재하면 함수 $g(x)$ 가 $h(x) = \alpha$ 인 x 에서 미분 가능하지 않으므로 $\alpha \leq 0$ 이어야 한다.

이때 $0 < h(x) < 2$ 에서 $f(h(x)) > 0$ 이므로 $g(x) = f(h(x))$

이고,

$$g'(x) = f'(h(x))h'(x)$$

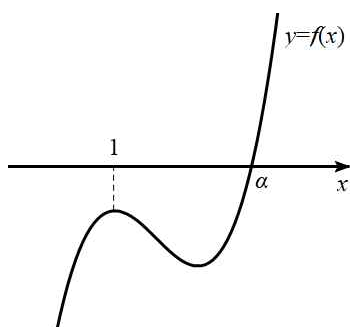
$$= f'\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right) \times \frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

이 경우

$$\begin{aligned} g'(\ln 3) &= f'\left(\frac{2}{1+\frac{1}{3}}\right) \times \frac{\frac{2}{3}}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2} \\ &= f'\left(\frac{3}{2}\right) \times \frac{3}{8} \end{aligned}$$

에서 $f'\left(\frac{3}{2}\right) > 0$ 이므로 $g'(\ln 3) > 0$ 이다.

이것은 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
 그러므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이고, 이 경우 함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 극소이고 함수 $|f(h(x))|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 그림과 같이 $f(1) < 0$ 이어야 한다.



마찬가지로 $f(\alpha) = 0$ 이고 $h(x) = \alpha$ 인 x 가 존재하면 함수 $g(x)$ 가 $h(x) = \alpha$ 인 x 에서 미분가능하지 않으므로 $\alpha \geq 2$ 이어야 한다.

이때 $0 < h(x) < 2$ 에서 $f(h(x)) < 0$ 이므로 $g(x) = -f(h(x))$

이고,

$$g'(x) = -f'(h(x))h'(x) \\ = -f'\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right) \times \frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

이 경우

$$g'(\ln 3) = -f'\left(\frac{2}{1+\frac{1}{3}}\right) \times \frac{\frac{2}{3}}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2} \\ = -f'\left(\frac{3}{2}\right) \times \frac{3}{8}$$

이므로 $f'\left(\frac{3}{2}\right) > 0$ 이면 조건 (나)의

$g'(\ln 3) < 0$ 을 만족시킨다.

또, 조건 (나)에서

$$|g'(-\ln 3)| = \frac{3}{8}g(-\ln 3)$$

이고 $f'\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ 이므로

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8} \times \left\{-f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$\text{즉, } f'\left(\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right)$$

한편, $f'(1) = 0$ 이고 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$$f'(x) = 3(x-1)(x-a) \quad (a \text{는 } 1 \text{보다 큰 상수})$$

로 놓을 수 있다.

이때,

$$f(x) = x^3 - \frac{3(a+1)}{2}x^2 + 3ax + C$$

(C 는 적분상수)

라 하면

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{3(a+1)}{8} + \frac{3a}{2} + C \\ = \frac{9}{8}a - \frac{1}{4} + C,$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{3(a+1)}{2} + 3a = \frac{3}{2}a - \frac{3}{4}$$

이므로

$$\frac{3}{2}a - \frac{3}{4} = -\frac{9}{8}a + \frac{1}{4} - C$$

$$\text{즉, } C = -\frac{21}{8}a + 1 \text{이므로}$$

$$f(x) = x^3 - \frac{3(a+1)}{2}x^2 + 3ax - \frac{21}{8}a + 1$$

그러므로

$$g(0) = -f(1) = \frac{9}{8}a - \frac{1}{2}$$

이때 $f(2) \leq 0$ 이어야 하므로

$$3 - \frac{21}{8}a \leq 0$$

$$\text{즉, } a \geq \frac{8}{7} \text{이고}$$

$$g(0) \geq \frac{9}{8} \times \frac{8}{7} - \frac{1}{2} = \frac{11}{14}$$

이므로 $g(0)$ 의 최솟값은 $\frac{11}{14}$ 이다.

따라서 $p+q=14+11=25$

정답 25