

최근 수정일 : 2024.12.19.(목)

■ [공통: 수학 I·수학 II]

01. ⑤ 02. ④ 03. ⑤ 04. ② 05. ④  
06. ⑤ 07. ③ 08. ① 09. ④ 10. ③  
11. ② 12. ① 13. ⑤ 14. ④ 15. ②  
16. 7 17. 33 18. 96 19. 41  
20. 36 21. 16 22. 64

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{5} \times 25^{\frac{1}{3}} &= 5^{\frac{1}{3}} \times (5^2)^{\frac{1}{3}} \\ &= 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} \\ &= 5^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} \\ &= 5^1 = 5\end{aligned}$$

정답 ⑤

2. 출제의도 : 미분계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 - 8 \text{이므로} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= f'(2) \\ &= 3 \times 2^2 - 8 \\ &= 4\end{aligned}$$

정답 ④

3. 출제의도 : 등비수열의 일반항을 이용하여 양수  $k$ 의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공비가 모두 양수  $k$ 이므로

$$a_n = k^n$$

$$\frac{a_4}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} = 30 \text{에서}$$

$$\frac{k^4}{k^2} + \frac{k^2}{k} = 30$$

$$k^2 + k = 30$$

$$k^2 + k - 30 = 0$$

$$(k+6)(k-5) = 0$$

$$k > 0 \text{이므로}$$

$$k = 5$$

정답 ⑤

4. 출제의도 : 함수의 연속의 정의를 이해하고 상수의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

함수  $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로  $x = -2$ 에서 연속이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = f(-2) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} (5x + a) = -10 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+} (x^2 - a) = 4 - a$$

$$f(-2) = 4 - a$$

이므로

$$-10+a=4-a, a=7$$

따라서 상수  $a$ 의 값은 7이다.

정답 ②

5. 출제의도 : 함수의 곱의 미분법을 사용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

$$f(x)=(x^2+1)(3x^2-x) \text{에서}$$

$$f'(x)=2x \times (3x^2-x) + (x^2+1) \times (6x-1)$$

따라서

$$f'(1)=2 \times 2 + 2 \times 5 = 14$$

정답 ④

6. 출제의도 : 삼각함수의 성질을 이해하여 식의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{5} \text{에서}$$

$$\sin\theta=\frac{1}{5}$$

따라서

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}=\frac{\sin\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{\frac{1}{5}}=5$$

정답 ⑤

7. 출제의도 : 정적분으로 정의된 함수를 이해하고 함숫값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\int_0^x f(t)dt=3x^3+2x \text{의 양변을 } x \text{에 대해}$$

미분하면

$$f(x)=9x^2+2$$

따라서

$$f(1)=9 \times 1^2 + 2 = 11$$

정답 ③

8. 출제의도 : 로그의 정의와 성질을 이용하여 값을 간단히 나타낼 수 있는가?

풀이 :

$$a=2\log\frac{1}{\sqrt{10}}+\log_2 20$$

$$=2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\log 10 + \log_2 2 + \log_2 10$$

$$=-1+1+\log_2 10=\log_2 10$$

$$a \times b = \log_2 10 \times \log 2 = 1$$

정답 ①

9. 출제의도 : 정적분의 정의와 성질을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\int_{-2}^a f(x)dx = \int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \dots\dots \textcircled{7}$$

⑦의 좌변은 정적분의 성질을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_{-2}^a f(x)dx = \int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

그러므로 ⑦에서

$$\int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_{-2}^0 f(x)dx$$

$$\text{즉, } \int_0^a f(x)dx = 0$$

이때

$$\begin{aligned} \int_0^a f(x)dx &= \int_0^a (3x^2 - 16x - 20)dx \\ &= \left[ x^3 - 8x^2 - 20x \right]_0^a \\ &= a^3 - 8a^2 - 20a \end{aligned}$$

이므로

$$a^3 - 8a^2 - 20a = 0 \text{에서}$$

$$a(a^2 - 8a - 20) = 0$$

$$a(a+2)(a-10) = 0$$

따라서 양수  $a$ 의 값은 10이다.

정답 ④

10. 출제의도 : 코사인함수의 최댓값과 주기를 구할 수 있는가?

풀이 :

함수  $f(x) = a \cos bx + 3$ 의 그래프는  
함수  $y = a \cos bx$ 의 그래프를  $y$ 축의 방향으로 3만큼 평행이동시킨 것이다.

$a$ 가 자연수이므로

$$f(0) \geq f(x)$$

이다.

한편, 함수  $y = a \cos bx + 3$ 의 주기는

$$\frac{2\pi}{b}$$

닫힌구간  $[0, 2\pi]$ 에서 정의된 함수  $f(x)$

가  $x = \frac{\pi}{3}$ 에서 최댓값 13을 가지므로

$$a + 3 = 13 \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\frac{2\pi}{b} \leq \frac{\pi}{3} \dots\dots \textcircled{8}$$

이어야 한다.

⑦에서

$$a = 10$$

⑧에서

$$b \geq 6$$

따라서  $a+b$ 의 최솟값은  $b=6$ 일 때

$$10 + 6 = 16$$

정답 ③

11. 출제의도 : 속도와 가속도를 구할 수 있는가?

풀이 :

점 P의 시각  $t$ 에서의 속도와 가속도를 각각  $v$ ,  $a$ 라 하면

$$v = x' = 3t^2 - 3t - 6$$

$$a = v' = 6t - 3$$

이때 출발한 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각은

$$v = 3t^2 - 3t - 6 = 3(t-2)(t+1) = 0$$

에서

$$t = 2$$

따라서  $t=2$ 에서 점 P의 운동 방향이 바뀌므로 구하는 가속도는

$$6 \times 2 - 3 = 9$$

정답 ②

12. 출제의도 : 시그마의 성질을 이용하여 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{b_{k+1}} = \frac{1}{2} n^2 \quad \dots\dots ⑦$$

⑦에  $n=1$ 을 대입하면

$$\frac{a_1}{b_2} = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = 2 \text{이므로 } b_2 = 4$$

등차수열  $\{b_n\}$ 에서  $b_1 = 2$ ,  $b_2 = 4$ 이므로  $\{b_n\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열이다.

$$\text{즉, } b_n = 2n$$

한편, ⑦의 양변에  $n$  대신  $n-1$ 을 대입하면

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{b_{k+1}} = \frac{1}{2} (n-1)^2 \quad \dots\dots ⑧$$

⑦-⑧을 하면

$$\frac{a_n}{b_{n+1}} = \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{2} (n-1)^2 = n - \frac{1}{2}$$

$$b_{n+1} = 2(n+1) \text{이므로}$$

$$a_n = 2(n+1) \left( n - \frac{1}{2} \right)$$

$$= 2n^2 + n - 1 \quad (n \geq 2)$$

이 때,  $a_1 = 2$ 이므로

$$a_n = 2n^2 + n - 1$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 a_k &= \sum_{k=1}^5 (2k^2 + k - 1) \\ &= 2 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} + \frac{5 \times 6}{2} - 1 \times 5 \\ &= 120 \end{aligned}$$

정답 ①

13. 출제의도 : 정적분을 활용하여 두 곡선 사이의 넓이를 구할 수 있는가?

풀이 :

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고  $f(1) = f(2) = 0$ 이므로

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-k) \quad (k \text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다.

이때,

$$f'(x) = (x-2)(x-k) + (x-1)(x-k) + (x-1)(x-2)$$

이고,  $f'(0) = -7$ 이므로

$$2k + k + 2 = -7$$

즉,  $k = -3$ 이므로

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x+3)$$

이고,  $f(3) = 12$ 이므로 점 P의 좌표는

$$P(3, 12)$$

따라서 직선 OP의 방정식은  $y = 4x$ 이므로

$$\begin{aligned} B-A &= \int_0^3 \{4x - f(x)\} dx \\ &= \int_0^3 \{4x - (x^3 - 7x + 6)\} dx \\ &= \int_0^3 (-x^3 + 11x - 6) dx \\ &= \left[ -\frac{1}{4}x^4 + \frac{11}{2}x^2 - 6x \right]_0^3 \\ &= -\frac{1}{4} \times 81 + \frac{11}{2} \times 9 - 6 \times 3 \\ &= \frac{45}{4} \end{aligned}$$

정답 ⑤

[참고]

점 Q의 x좌표를 a라 하면

$$B-A$$

$$\begin{aligned} &= \int_a^3 \{4x - f(x)\} dx - \int_0^a \{f(x) - 4x\} dx \\ &= \int_a^3 \{4x - f(x)\} dx + \int_0^a \{4x - f(x)\} dx \\ &= \int_0^3 \{4x - f(x)\} dx \end{aligned}$$

14. 출제의도 : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 넓이의 최댓값을 구할 수 있는가?

풀이 :

원 O의 반지름의 길이를 r이라 하면

$$\overline{AD} = \overline{AE} = r$$

이고  $\overline{AD} : \overline{DB} = 3 : 2$  이므로

$$\overline{BD} = \frac{2}{3}r$$

또한  $\overline{CE} = x$ 라 하면 삼각형 ADE와 삼각형 ABC의 넓이가 각각

$$\frac{1}{2} \times r \times r \times \sin A = \frac{1}{2} r^2 \sin A$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{3}r \times (r+x) \times \sin A = \frac{5}{6}r(r+x) \sin A$$

이고 삼각형 ADE와 삼각형 ABC의 넓이의 비가 9 : 35이므로

$$\frac{1}{2} r^2 \sin A : \frac{5}{6} r(r+x) \sin A = 9 : 35$$

$$3r + 3x = 7r, \quad x = \frac{4}{3}r$$

이때 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{\overline{AB}}{\sin C}$$

이고

$$\overline{AB} = \frac{5}{3}r, \quad \sin A : \sin C = 8 : 5$$

이므로

$$\begin{aligned} \overline{BC} &= \overline{AB} \times \frac{\sin A}{\sin C} \\ &= \frac{5}{3}r \times \frac{8}{5} \end{aligned}$$

$$= \frac{8}{3}r$$

$\angle ACB = \theta$ 라 하면 삼각형 ABC에서  
코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta = \frac{\left(\frac{8}{3}r\right)^2 + \left(\frac{7}{3}r\right)^2 - \left(\frac{5}{3}r\right)^2}{2 \times \frac{8}{3}r \times \frac{7}{3}r}$$

$$= \frac{11}{14}$$

이므로

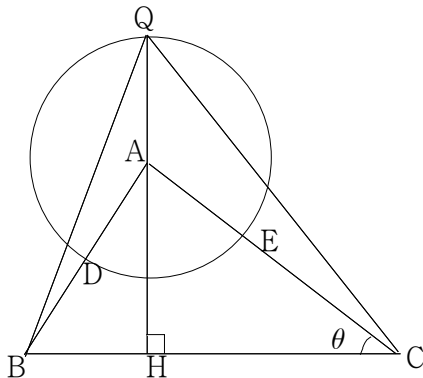
$$\begin{aligned}\sin\theta &= \sqrt{1 - \cos^2\theta} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{11}{14}\right)^2} \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{14}\end{aligned}$$

또한 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의  
길이가 7이므로

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\theta} = 2 \times 7, \text{ 즉 } \frac{\frac{5}{3}r}{\sin\theta} = 14 \text{ 에서}$$

$$\frac{5}{3}r = 14\sin\theta = 14 \times \frac{5\sqrt{3}}{14} = 5\sqrt{3}$$

$$r = 3\sqrt{3}$$



점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을  
H라 하면

$$\overline{AH} = \overline{AC}\sin\theta$$

$$= \frac{7}{3}r\sin\theta$$

$$= \frac{7}{3} \times 3\sqrt{3} \times \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

$$= \frac{15}{2}$$

따라서 직선 AH와 원 O가 만나는 점  
중 삼각형 ABC의 외부의 점을 Q라  
하면, 삼각형 PBC의 넓이가 최대일  
때는 점 P가 점 Q의 위치에 있을  
때이다.

이때

$$\begin{aligned}\overline{QH} &= r + \overline{AH} \\ &= 3\sqrt{3} + \frac{15}{2}\end{aligned}$$

이므로 삼각형 PBC의 넓이의 최댓값은

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2} \times \frac{8}{3} \times 3\sqrt{3} \times \left(3\sqrt{3} + \frac{15}{2}\right) \\ &= 36 + 30\sqrt{3}\end{aligned}$$

정답 ④

15. 출제의도 : 함수의 미분가능과 함수  
의 극대, 극소 및 그래프를 이용하여 함  
수를 구할 수 있는가?

풀이 :

$$g(0) = 7$$

$x < 0$ 일 때,

$$g'(x) = 3x^2 + 2ax + 15$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = 15$$

조건 (가)에서 함수  $g(x)$ 가 실수 전체의  
집합에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = 15$$

이차함수  $f(x)$ 의 최고차항의 계수를  $p(p < 0)$ 라 하면

$$f(x) = px^2 + 15x + 7$$

$$f'(x) = 2px + 15$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$2px + 15 = 0$$

$$x = -\frac{15}{2p}$$

이때,  $p < 0$ 이므로

$$-\frac{15}{2p} > 0$$

한편,  $h(x) = x^3 + ax^2 + 15x + 7$ 이라 하면

$$h'(x) = 3x^2 + 2ax + 15$$

이차방정식  $h'(x) = 0$ 의 판별식을  $D$ 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 45$$

(i) 이차방정식  $h'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 때

$$\frac{D}{4} = a^2 - 45 > 0 \text{에서}$$

$$a < -3\sqrt{5} \text{ 또는 } a > 3\sqrt{5}$$

이때, 방정식  $h'(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 즉, 삼차함수  $h(x)$ 는 극댓값과 극솟값을 갖는다.

조건 (나)에서

$x$ 에 대한 방정식  $g'(x) \times g'(x-4) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4이므로

함수  $g(x)$ , 즉 함수  $h(x)$ 는  $x < 0$ 에서 극댓값과 극솟값을 갖고,

방정식  $h'(x) = 0$ 의 서로 다른 두 실근을

$$\alpha, \beta (\alpha < \beta < 0)$$

라 하면

$$\beta = \alpha + 4, -\frac{15}{2p} = \beta + 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이어야 한다.

이차방정식  $3x^2 + 2ax + 15 = 0$ 의 서로 다른 두 실근이  $\alpha, \alpha + 4$ 이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + (\alpha + 4) = -\frac{2a}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\alpha(\alpha + 4) = 5 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$ 에서

$$\alpha^2 + 4\alpha - 5 = 0$$

$$(\alpha + 5)(\alpha - 1) = 0$$

$\alpha < 0$ 이므로

$$\alpha = -5$$

$\alpha = -5$ 를  $\textcircled{3}$ 에 대입하면

$$-5 + (-5 + 4) = -\frac{2a}{3}$$

$$a = 9$$

$\alpha = -5$ 를  $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$\beta = -5 + 4 = -1$$

$$-\frac{15}{2p} = -1 + 4$$

$$p = -\frac{5}{2}$$

(ii) 이차방정식  $h'(x) = 0$ 이 중근을 가질 때

$$\frac{D}{4} = a^2 - 45 = 0 \text{이고,}$$

$$a \neq 3\sqrt{5} \text{이므로}$$

$$a = -3\sqrt{5}$$

$h'(x) = 0$ 에서

$$3x^2 - 6\sqrt{5}x + 15 = 0$$

$$3(x - \sqrt{5})^2 = 0$$

$$x = \sqrt{5}$$

이때 방정식  $g'(x) \times g'(x-4) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(iii) 이차방정식  $h'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 허근을 가질 때

이때 방정식  $g'(x) \times g'(x-4) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(i), (ii), (iii)에서

$$a = 9, p = -\frac{5}{2}$$

이므로

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + 9x^2 + 15x + 7 & (x \leq 0) \\ -\frac{5}{2}x^2 + 15x + 7 & (x > 0) \end{cases}$$

따라서

$$g(-2) = (-2)^3 + 9 \times (-2)^2 + 15 \times (-2) + 7 = 5$$

$$g(2) = -\frac{5}{2} \times 2^2 + 15 \times 2 + 7 = 27$$

이므로

$$g(-2) + g(2) = 5 + 27 = 32$$

정답 ②

16. 출제의도 : 로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식의 해를 구할 수 있는가?

풀이 :

로그의 진수의 조건에 의해

$$x - 3 > 0, 3x - 5 > 0$$

$$\text{즉, } x > 3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\log_2(x-3) = \log_4(3x-5) \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때

$$\log_2(x-3) = \log_{2^2}(x-3)^2 = \log_4(x-3)^2$$

이므로 ⑧에서

$$\log_4(x-3)^2 = \log_4(3x-5)$$

$$\text{즉, } (x-3)^2 = 3x-5 \text{에서}$$

$$x^2 - 6x + 9 = 3x - 5$$

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$(x-2)(x-7) = 0$$

따라서 ⑦에 의해  $x = 7$

정답 7

17. 출제의도 : 다항함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (9x^2 + 4x) dx$$

$$= 3x^3 + 2x^2 + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)}$$

$$\text{이때 } f(1) = 6 \text{이므로 } C = 1$$

$$\text{따라서 } f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1 \text{이므로}$$

$$f(2) = 24 + 8 + 1 = 33$$

정답 33

18. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열을 이해하여 수열의 합을 구할 수 있는가?



풀이 :

$$a_n + a_{n+4} = 12 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^8 a_n &= \sum_{n=1}^4 (a_n + a_{n+4}) \\ &= \sum_{n=1}^4 12 = 12 \times 4 = 48 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=9}^{16} a_n &= \sum_{n=9}^{12} (a_n + a_{n+4}) \\ &= \sum_{n=9}^{12} 12 = 12 \times 4 = 48 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{16} a_n &= \sum_{n=1}^4 (a_n + a_{n+4}) + \sum_{n=9}^{12} (a_n + a_{n+4}) \\ &= 48 + 48 = 96 \end{aligned}$$

정답 96

19. 출제의도 : 삼차함수의 극댓값을 구할 수 있는가?

정답 41

풀이 :

$$f(x) = 2x^3 - 3ax^2 - 12a^2x \text{에서}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 6ax - 12a^2 \\ &= 6(x+a)(x-2a) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = -a \text{ 또는 } x = 2a$$

$$a > 0 \text{이므로}$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	$\dots$	$-a$	$\dots$	$2a$	$\dots$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수  $f(x)$ 는  $x = -a$ 에서 극댓값을 갖고,  
 $x = 2a$ 에서 극솟값을 갖는다.

함수  $f(x)$ 의 극댓값이  $\frac{7}{27}$ 이고

$$f(-a) = -2a^3 - 3a^3 + 12a^3 = 7a^3$$

이므로

$$7a^3 = \frac{7}{27} \text{에서}$$

$$a^3 = \frac{1}{27}$$

$a > 0$ 이므로

$$a = \frac{1}{3}$$

따라서

$$f(x) = 2x^3 - x^2 - \frac{4}{3}x$$

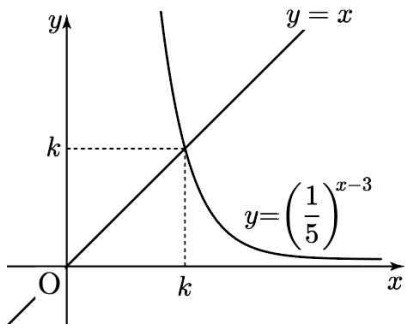
이므로

$$f(3) = 54 - 9 - 4 = 41$$

20. 출제의도 : 지수의 성질과 지수함수의 그래프를 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

곡선  $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$  과 직선  $y = x$ 는 다음 그림과 같다.



$x > k$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여  
 $f(f(x)) = 3x$  ..... ㉠

곡선  $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$  과 직선  $y = x$ 가 만나는  
 점의  $x$ 좌표가  $k$ 이므로

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{k-3} = k$$

$$\text{즉, } \left(\frac{1}{5}\right)^k \times \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = k \text{에서}$$

$$k \times 5^k = 5^3$$

그러므로 구하는 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{k^3 \times 5^{3k}}\right) &= f\left(\left(\frac{1}{k \times 5^k}\right)^3\right) \\ &= f\left(\left(\frac{1}{5^3}\right)^3\right) \\ &= f\left(\frac{1}{5^9}\right) \end{aligned} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

한편,

$$x > k \text{에서 } f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3} \text{이므로}$$

$k$ 보다 작은 임의의 두 양수  
 $y_1, y_2$  ( $y_1 < y_2$ )에 대하여

$$f(x_1) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x_1-3} = y_1$$

$$f(x_2) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x_2-3} = y_2$$

인  $x_1, x_2$  ( $k < x_2 < x_1$ )이 존재한다.

㉠에서

$$f(f(x_1)) = 3x_1, \quad f(f(x_2)) = 3x_2$$

이므로

$$f(f(x_1)) > f(f(x_2))$$

즉,  $f(y_1) > f(y_2)$ 이므로

함수  $f(x)$ 는  $x < k$ 에서 감소하고,

$x > k$ 에서  $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$  이므로

함수  $f(x)$ 는  $x > k$ 에서 감소한다.

그러므로 ㉠에서

$$f(\alpha) = \frac{1}{5^9}$$

인 실수  $\alpha$  ( $\alpha > k$ )가 존재한다.

이때

$$f(\alpha) = \left(\frac{1}{5}\right)^{\alpha-3} = \frac{1}{5^9}$$

에서

$$\alpha - 3 = 9, \quad \text{즉 } \alpha = 12$$

따라서 ㉡에 의해 구하는 값은

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{k^3 \times 5^{3k}}\right) &= f\left(\frac{1}{5^9}\right) \\ &= f(f(\alpha)) \\ &= 3\alpha \\ &= 3 \times 12 \\ &= 36 \end{aligned}$$

정답 36

**21. 출제의도 :** 함수의 극한에 대한 조건이 주어졌을 때 미정계수를 구할 수 있는가?

**풀이 :**

삼차방정식  $x^3 + ax^2 + bx + 4 = 0$ 은 적어도 하나의 실근을 가지므로  $f(\beta) = 0$ 인 실수  $\beta$ 가 존재한다.

모든 실수  $\alpha$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(2x+1)}{f(x)}$ 의

값이 존재하므로  $f(\beta)=0$ 인  $\beta$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow \beta} f(x)=0 \text{이고, } \lim_{x \rightarrow \beta} f(2x+1)=0$$

함수  $f(x)$ 는 연속이므로  $f(2\beta+1)=0$

즉  $2\beta+1$ 은 방정식  $f(x)=0$ 의 근이다.

마찬가지 방법으로  $2\beta+1$ 이 방정식  $f(x)=0$ 의 근이면  $2(2\beta+1)+1=4\beta+3$

도 방정식  $f(x)=0$  근이고

$2(4\beta+3)+1=8\beta+7$ 도 방정식  $f(x)=0$ 의 근이다.

만약  $\beta \neq 2\beta+1$ , 즉  $\beta \neq -1$ 이면

$\beta, 2\beta+1, 4\beta+3, 8\beta+7$ 가 방정식  $f(x)=0$ 의 서로 다른 네 근이다.

그러므로 방정식  $f(x)=0$ 는  $x=-1$ 만 실근으로 갖는다.

$f(-1)=0$ 에서

$$f(-1)=-1+a-b+4=0$$

$$b=a+3$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + ax^2 + (a+3)x + 4 \\ &= (x+1)\{x^2 + (a-1)x + 4\} \end{aligned}$$

$f(x) \neq (x+1)^3$ 이므로

이차방정식  $x^2 + (a-1)x + 4 = 0$ 의 실근은 존재하지 않는다.

위의 이차방정식의 판별식을  $D$ 라 할 때

$$D=(a-1)^2-16 < 0$$

$$a^2-2a-15 < 0$$

$$(a+3)(a-5) < 0$$

$$-3 < a < 5$$

$$f(1)=a+b+5=a+(a+3)+5=2a+8$$

서  $f(1)$ 의 최댓값은  $a=4$ 일 때,

$$2 \times 4 + 8 = 16$$

정답 16

22. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열을 이해하여 첫째항의 절댓값을 추론할 수 있는가?

풀이 :

조건 (나)에서  $|a_m|=|a_{m+2}|$ 를 만족시키는 자연수  $m$ 의 최솟값이 3이므로 다음의 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i)  $|a_3|$ 이 홀수인 경우

$a_4=a_3-3$ 이고 짝수이다.

$$a_5=\frac{1}{2}a_4=\frac{1}{2}(a_3-3)$$

$|a_3|=|a_5|$ 에서

$$|a_3|=\left|\frac{1}{2}(a_3-3)\right|$$

$$a_3=1 \text{ 또는 } a_3=-3$$

$a_3=1$ 이면  $a_4=-2$ 이고 1은 홀수이므로

$a_2$ 는 짝수이고  $a_2=2$ 이므로  $|a_2|=|a_4|$ 가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$a_3=-3$ 이면  $a_4=-6$ 이고  $a_2=-6$ 이므로

$|a_2|=|a_4|$ 가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii)  $|a_3|$ 이 0 또는 짝수인 경우

$a_3$	$a_4$	$a_5$
$a_3$	$\frac{1}{2}a_3$	$\frac{1}{2}a_3-3$
		$\frac{1}{4}a_3$

$$|a_3|=\left|\frac{1}{4}a_3\right| \text{에서 } a_3=0$$

$a_3=0$ 이면 3 이상의 모든 자연수  $m$ 에 대하여  $a_m=0$ 이고  $a_2, a_1$ 은 다음과 같다.

$a_3$	$a_2$	$a_1$
0	3	6
	0	

$a_2 = 0$ 이면  $|a_2| = |a_4|$ 가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않으므로, 이때의 조건을 만족시키는  $a_1$ 의 값은 6이다.

한편,  $|a_3| = \left| \frac{1}{2}a_3 - 3 \right|$ 에서

$a_3 = 2$  또는  $a_3 = -6$

$a_3 = 2$ 이면  $a_4 = 1$ 이고  $a_2, a_1$ 은 다음과 같다.

$a_3$	$a_2$	$a_1$
2	5	10
	4	7
		8

이때 조건을 만족시키는  $a_1$ 의 값은 10, 7, 8이다.

$a_3 = -6$ 이면  $a_4 = -3$ 이고  $a_2, a_1$ 은 다음과 같다.

$a_3$	$a_2$	$a_1$
-6	-3	
	-12	-9
		-24

$a_2 = -3$ 이면  $|a_2| = |a_4|$ 가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않으므로, 이때의 조건을 만족시키는  $a_1$ 의 값은 -9, -24이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $|a_1|$ 의 값의 합은

$$6 + (10 + 7 + 8) + (9 + 24) = 64$$

정답 64

■ [선택: 미적분]

23. ③ 24. ④ 25. ② 26. ① 27. ①  
28. ② 29. 25 30. 17

23. 출제의도 : 삼각함수의 극한을 계산할 수 있는가?

풀이 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{\sin^2 x} = 3 \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = 3$$

정답 ③

24. 출제의도 : 여러 가지 함수의 부정적분을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\int_0^{10} \frac{x+2}{x+1} dx = \int_0^{10} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) dx = \left[ x + \ln|x+1| \right]_0^{10} = 10 + \ln 11$$

정답 ④

25. 출제의도 : 수열의 극한에 대한 성질을 이용하여 주어진 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$b_n = \frac{na_n}{n^2+3} \text{ 이라 하면}$$

$$a_n = \frac{b_n(n^2+3)}{n} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n(n^2+3)}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+3}{n^2} = 1 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{a_n^2 + n} - a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 + n - a_n^2}{\sqrt{a_n^2 + n} + a_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a_n}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}} + \frac{a_n}{n}} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 0} + 1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

정답 ②

26. 출제의도 : 정적분을 활용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

풀이 :

직선  $x = t (1 \leq t \leq e)$ 를 포함하고  $x$ 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를  $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \left( \sqrt{\frac{t+1}{t(t+\ln t)}} \right)^2 = \frac{t+1}{t(t+\ln t)}$$

따라서 이 입체도형의 부피는

$$\int_1^e S(t) dt = \int_1^e \frac{t+1}{t(t+\ln t)} dt$$

이때  $t + \ln t = s$ 라 하면

$$\frac{ds}{dt} = 1 + \frac{1}{t} = \frac{t+1}{t}$$

이고  $t=1$ 일 때  $s=1$ ,  $t=e$ 일 때  $s=e+1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^e S(t) dt &= \int_1^e \frac{t+1}{t(t+\ln t)} dt \\ &= \int_1^{e+1} \frac{1}{s} ds \\ &= \left[ \ln s \right]_1^{e+1} \\ &= \ln(e+1) \end{aligned}$$

정답 ①

27. 출제의도 : 역함수의 미분법을 이해하여 함숫값을 구할 수 있는가?

풀이 :

곡선  $y=g(x)$  위의 점  $(0, g(0))$ 에서의 접선이  $x$ 축이므로  $g(0)=0$ ,  $g'(0)=0$ 이다.

$$g(0)=f(e^0)+e^0=f(1)+1=0$$

$$f(1)=-1 \dots\dots \ominus$$

$$g'(x)=f'(e^x) \times e^x + e^x \text{이므로}$$

$$g'(0)=f'(e^0) \times e^0 + e^0 = f'(1)+1=0$$

$$f'(1)=-1 \dots\dots \ominus$$

한편, 함수  $g(x)$ 가 역함수를 가지므로 모든 실수  $x$ 에 대하여  $g'(x) \geq 0$  또는  $g'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(e^x) \times e^x + e^x \\ &= e^x \{f'(e^x) + 1\} \end{aligned}$$

에서 모든 실수  $x$ 에 대하여  $e^x > 0$ 이고 함수  $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f'(e^x)+1 \geq 0$ , 즉

$$f'(e^x) \geq -1$$

이어야 한다.

④에서  $f'(1)=-1$ 이고 함수  $f'(x)$ 는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로

$$f'(x)=3(x-1)^2-1$$

이어야 한다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \{3(x-1)^2-1\} dx \\ &= (x-1)^3 - x + C \quad (C \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

이고 ①에서  $f(1)=-1$ 이므로

$$f(1)=-1+C=-1, \quad C=0$$

$$f(x)=(x-1)^3-x$$

$$\begin{aligned} g(x) &= f(e^x) + e^x \\ &= (e^x-1)^3 - e^x + e^x \\ &= (e^x-1)^3 \end{aligned}$$

한편, 함수  $h(x)$ 가 함수  $g(x)$ 의 역함수이므로  $h(8)=k$ 라 하면  $g(k)=8$ 에서

$$(e^k-1)^3=8, \quad e^k-1=2, \quad e^k=3, \quad k=\ln 3$$

따라서

$$\begin{aligned} h'(8) &= \frac{1}{g'(h(8))} = \frac{1}{g'(\ln 3)} \\ &= \frac{1}{e^{\ln 3} \{f'(e^{\ln 3}) + 1\}} \\ &= \frac{1}{3 \times [\{3 \times (3-1)^2 - 1\} + 1]} = \frac{1}{36} \end{aligned}$$

정답 ①

28. 출제의도 : 부정적분과 접선의 방정식을 이용하여 주어진 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

풀이 :

$x > 0$ 에서

$$f''(x) = -1 - 2xe^{1-x^2} < 0 \text{이므로}$$

따라서 곡선  $y=f(x)$ 는  $x > 0$ 에서 위로 볼록이다. 따라서 양수  $t$ 에 대하여 점  $(t, f(t))$ 에서의 접선과 곡선

$y=f(x)(x > 0)$ 의 교점은 점  $(t, f(t))$  하나이고, 접선은 곡선의 위쪽에 위치한다.

점  $(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$ 에 대하여

$$g(t) = \int_0^t \{f'(t)(x-t) + f(t) - f(x)\} dx$$

이때  $f'(x) = -x + e^{1-x^2}$ 에서 양변에  $x$ 를

$$\text{곱하면 } xf'(x) = -x^2 + xe^{1-x^2}$$

$$\int xf'(x) dx = \int (-x^2 + xe^{1-x^2}) dx$$

$$xf(x) - \int f(x) dx = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}e^{1-x^2}$$

$$\int f(x) dx = xf(x) + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}e^{1-x^2}$$

$$g(t) = \left[ \frac{f'(t)}{2}x^2 - tf'(t)x + f(t)x \right]_0^t - \int_0^t f(x) dx \text{이다.}$$

$$= \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}(t^2+1)e^{1-t^2} + \frac{1}{2}e$$

$$g'(t) = \frac{1}{2}t^2 + t^3e^{1-t^2}$$

따라서

$$g(1) + g'(1) = \left(-\frac{5}{6} + \frac{1}{2}e\right) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}e + \frac{2}{3}$$

정답 ②

29. 출제의도 : 조건을 만족시키는 등비급수를 이용하여 급수의 합을 구할 수 있는가?

풀이 :

등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$ , 공비를  $r$ 이라 하자.

$a > 0, r > 0$ 인 경우 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $|a_n| - a_n = 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$a < 0, r > 0$ 인 경우 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $|a_n| + a_n = 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서  $a > 0, r < 0$ 이거나  $a < 0, r < 0$

(i)  $a > 0, r < 0$ 인 경우

$$= \frac{1}{2}t^2f'(t) - t^2f'(t) + tf(t) - \left[ xf(x) + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \left( \left| \frac{e}{2} \right|^n + a_n \right) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{2n-1} = \frac{2a}{1-r^2} = \frac{40}{3}$$

$$= -\frac{1}{2}t^2f'(t) + tf(t) - \left( tf(t) + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}e^{1-t^2} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| - a_n) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-2a_{2n}) = \frac{-2ar}{1-r^2} = \frac{20}{3}$$

$$= -\frac{1}{2}t^2(-t + e^{1-t^2}) - \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}e^{1-t^2} + \frac{1}{2}e$$

$$\frac{2a}{1-r^2} \times (-r) = \frac{20}{3}, \quad \frac{40}{3} \times (-r) = \frac{20}{3}$$

$$r = -\frac{1}{2}, \quad a = 5$$

(ii)  $a < 0, \quad r < 0$ 인 경우

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{2n} = \frac{2ar}{1-r^2} = \frac{40}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (-2a_{2n-1})$$

$$= \frac{-2a}{1-r^2} = \frac{20}{3}$$

$$\frac{2a}{1-r^2} \times r = \frac{40}{3}, \quad -\frac{20}{3}r = \frac{40}{3}$$

$$r = -2$$

이때,  $r < -1$ 이므로  $r^2 > 1$ 이 되어

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + a_n) \text{와} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| - a_n) \text{ 모두 수}$$

렴하지 않는다.

$$(i), (ii) \text{에서} \quad a = 5, \quad r = -\frac{1}{2}$$

이므로

$$a_n = 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

부등식

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \left( (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \times a_{m+k} \right) > \frac{1}{700} \text{에서}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1} \times \sum_{k=1}^{2n} \left( (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right) \right\}$$

$$> \frac{1}{700}$$

이때

$$\sum_{k=1}^{2n} \left( (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} \left( (-1)^{\frac{k(k+3)}{2}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \right) \text{에서}$$

$$k = 4l - 3 \text{이면 } (-1)^{\frac{k(k+3)}{2}} = 1$$

$$k = 4l - 2 \text{이면 } (-1)^{\frac{k(k+3)}{2}} = -1$$

$$k = 4l - 1 \text{이면 } (-1)^{\frac{k(k+3)}{2}} = -1$$

$$k = 4l \text{이면 } (-1)^{\frac{k(k+3)}{2}} = 1$$

(단,  $l$ 은 자연수)이므로

$2n = 4p - 2$  ( $p$ 는 자연수)이면

$$\sum_{k=1}^{2n} \left( (-1)^{\frac{k(k+3)}{2}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \right) \\ = \sum_{i=1}^p \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{16}\right)^{i-1} - \sum_{i=1}^p \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}$$

$$- \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{8} \times \left(\frac{1}{16}\right)^{i-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{16} \times \left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}$$

$2n = 4p$  ( $p$ 는 자연수)이면

$$\sum_{k=1}^{2n} \left( (-1)^{\frac{k(k+3)}{2}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \right) \\ = \sum_{i=1}^p \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{16}\right)^{i-1} - \sum_{i=1}^p \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}$$

$$- \sum_{i=1}^p \frac{1}{8} \times \left(\frac{1}{16}\right)^{i-1} + \sum_{i=1}^p \frac{1}{16} \times \left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}$$

$n \rightarrow \infty$ 이면  $p \rightarrow \infty$ 이고

$2n = 4p - 2, \quad 2n = 4p$ 의 두 경우 모두 각

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1} \times \sum_{k=1}^{2n} \left( (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right) \right\}$$

$$= 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1} \times \left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right) \times \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} \right\}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1} > \frac{1}{700}$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는  $m$

의 값은 1, 3, 5, 7, 9이고, 그 합은



$$1+3+5+7+9=25$$

정답 25

30. 출제의도 : 합성함수의 미분법을 이용하여 극대를 갖는  $x$ 의 값을 추론할 수 있는가?

풀이 :

$f(x) = \sin(ax + b + \sin x)$ 이고 조건 (가)에서  $f(0) = 0$ 이므로

$$f(0) = \sin b = 0, \quad b = k\pi \quad (\text{단, } k \text{는 정수}) \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$f(2\pi) = 2\pi a + b \text{이므로}$$

$$f(2\pi) = \sin(2\pi a + b) = 2\pi a + b \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

이때  $\sin x = x$ 를 만족시키는 실수  $x$ 의 값은 0뿐이므로  $\textcircled{B}$ 에서

$$2\pi a + b = 0, \quad b = -2\pi a \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{C}$ 에서

$$-2\pi a = k\pi, \quad a = -\frac{k}{2} \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

이고  $f(x) = \sin(ax - 2\pi a + \sin x)$ 이다.

$1 \leq a \leq 2$ 이고  $\textcircled{D}$ 에서  $a = -\frac{k}{2}$  ( $k$ 는 정수)이므로

$$a = 1 \text{ 또는 } a = \frac{3}{2} \text{ 또는 } a = 2 \text{이다.}$$

이때

$$f'(x) = \cos(ax - 2\pi a + \sin x) \times (a + \cos x)$$

에서

$$f'(0) = \cos(-2\pi a) \times (a + 1)$$

$$= (a + 1)\cos 2\pi a$$

$$f'(4\pi) = \cos 2\pi a \times (a + 1) = (a + 1)\cos 2\pi a$$

이고

$$f'(2\pi) = \cos 0 \times (a + 1) = a + 1$$

이므로  $a = 1$  또는  $a = 2$ 이면

$$f'(0) = (a + 1)\cos 2\pi a = a + 1$$

즉,  $f'(0) = f'(2\pi)$ 이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서

$$a = \frac{3}{2}, \quad b = -2\pi a = -3\pi$$

이고

$$f(x) = \sin\left(\frac{3}{2}x - 3\pi + \sin x\right)$$

$$f'(x) = \left(\cos x + \frac{3}{2}\right)\cos\left(\frac{3}{2}x - 3\pi + \sin x\right)$$

이다. 모든 실수  $x$ 에 대하여  $\cos x + \frac{3}{2} \neq 0$ 이므로  $f'(x) = 0$ 에서

$$\cos\left(\frac{3}{2}x - 3\pi + \sin x\right) = 0$$

$$g(x) = \frac{3}{2}x - 3\pi + \sin x \text{라 하면 모든 실수}$$

$x$ 에 대하여  $g'(x) > 0$ 이므로 실수 전체의 집합에서 함수  $g(x)$ 는 증가하고

$$g(0) = -3\pi, \quad g(4\pi) = 3\pi$$

이다. 이때  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 에 대하여

$$g(x) = \frac{2i-7}{2}\pi \text{를 만족시키는 실수 } x$$

의 값을  $\beta_i$ 라 하면 함수  $f(x)$ 는  $x = \beta_1,$

$x = \beta_3, \quad x = \beta_5$ 에서 극소이고  $x = \beta_2,$

$x = \beta_4, \quad x = \beta_6$ 에서 극대이다. 즉,  $n = 3$

이다.

$$g(\beta_2) = -\frac{3}{2}\pi \text{에서}$$

$$\frac{3}{2}\beta_2 - 3\pi + \sin \beta_2 = -\frac{3}{2}\pi$$

$$\sin \beta_2 = -\frac{3}{2}(\beta_2 - \pi)$$

---

이때 곡선  $y = \sin x$ 와 직선

$y = -\frac{3}{2}(x - \pi)$ 는 점  $(\pi, 0)$ 에서만 만나

로  $\beta_2 = \pi$ 이다. 즉,  $\alpha_1 = \pi$ 이다.

따라서

$$n\alpha_1 - ab = 3 \times \pi - \frac{3}{2} \times (-3\pi)$$

$$= \frac{15}{2}\pi$$

$p = 2$ ,  $q = 15$ 이므로

$$p + q = 2 + 15 = 17$$

정답 17