

2024학년도 10월 고1 전국연합학력평가

정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

* 본 전국연합학력평가는 17개 시도 교육청 주관으로 시행되며, 해당 자료는 EBSi에서만 제공됩니다.
무단 전재 및 재배포는 금지됩니다.

1	①	2	①	3	④	4	⑤	5	①
6	④	7	②	8	②	9	②	10	①
11	③	12	③	13	⑤	14	⑤	15	⑤
16	③	17	②	18	⑤	19	④	20	④
21	⑤	22	3	23	15	24	11	25	8
26	5	27	27	28	25	29	154	30	36

1. [출제의도] 다항식 계산하기

$$A - B = (2x^2 + x + 3) - (x^2 + x + 2) = x^2 + 1$$

2. [출제의도] 두 점 사이의 거리 계산하기

두 점 $(1, 3)$, $(2, 5)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(2-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{5}$$

3. [출제의도] 집합의 연산 이해하기

$A^C = \{2, 4\}$ 이므로 집합 A^C 의 모든 원소의 곱은 $2 \times 4 = 8$

4. [출제의도] 평행이동 이해하기

직선 $y = 2x + 4$ 를 x 축의 방향으로 1만큼,

y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $y - 3 = 2(x - 1) + 4$

$$y = 2x + 5$$

따라서 구하는 직선의 y 절편은 5

5. [출제의도] 항등식 이해하기

주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$$x^3 + 8 = x^3 + (a-3)x + 4b$$

항등식의 성질을 이용하여 양변에서 동류항의 계수를 비교하면

$$a-3=0, 4b=8 \text{이므로 } a=3, b=2$$

따라서 $a \times b = 6$

6. [출제의도] 연립이차방정식 이해하기

$$\begin{aligned} x-y &= 2 & \cdots \textcircled{1} \\ x^2+8x+y^2 &= 2 & \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

\textcircled{1}에서 $y = x - 2$

\textcircled{2}에 $y = x - 2$ 를 대입하면

$$x^2 + 8x + (x-2)^2 = 2$$

$$2x^2 + 4x + 2 = 2(x+1)^2 = 0$$

$$\text{에서 } x = -1, y = -3$$

$$\text{따라서 } \alpha + \beta = -1 + (-3) = -4$$

7. [출제의도] 나머지정리 이해하기

다항식 $P(x)$ 를 $x^2 - 2x - 8$ 로 나누었을 때의

몫을 $Q(x)$ 라 하고 나머지 $R(x)$ 를 $ax+b$ 라 하면

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 - 2x - 8)Q(x) + ax + b \\ &= (x+2)(x-4)Q(x) + ax + b \end{aligned}$$

$$P(-2) = -2a + b = 0, P(4) = 4a + b = 12$$

$$\text{두 식을 연립하여 계산하면 } a=2, b=4$$

$$\text{따라서 } R(x) = 2x + 4 \text{이므로 } R(1) = 6$$

8. [출제의도] 복소수의 뜻과 연산 이해하기

$$z = a + bi (a, b \text{는 실수}) \text{라 하자.}$$

z 는 실수가 아니므로 $b \neq 0$

$$z - 3\bar{z} = z^2 \text{에서}$$

$$(a+bi) - 3(a-bi) = (a+bi)^2$$

$$-2a + 4bi = (a^2 - b^2) + 2abi$$

$$\text{이므로 } -2a = a^2 - b^2, 4b = 2ab$$

$$b \neq 0 \text{에서 } a = 2 \text{이고 } b^2 = 8$$

$$\text{따라서 } z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = 2^2 + 8 = 12$$

9. [출제의도] 선분의 내분점과 외분점 이해하기

선분 AB 를 $2:3$ 으로 외분하는 점의 좌표는

$$\frac{2 \times 0 - 3 \times 3}{2-3} = 9, \quad \frac{2 \times a - 3 \times 0}{2-3} = -2a$$

$$\text{에서 } (9, -2a)$$

$$\text{이 점이 원 } (x-3)^2 + (y+8)^2 = 36 \text{ 위에 있으므로}$$

$$(9-3)^2 + (-2a+8)^2 = 36$$

$$(-2a+8)^2 = 0$$

$$\text{따라서 } a = 4$$

10. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계 이해하기

중심이 원점이고 직선 $y = -2x + k$ 와 만나는 원의 넓이가 최소가 되려면 원점과 직선 $2x + y - k = 0$

사이의 거리가 반지름의 길이와 같아야 한다.

원점과 직선 $2x + y - k = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2 \times 0 + 1 \times 0 - k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|-k|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} k$$

원 C 의 반지름의 길이를 r 이라 하자.

원 C 의 넓이가 45π 이므로

$$r^2\pi = 45\pi \text{에서 } r = 3\sqrt{5}$$

$$\text{따라서 } \frac{\sqrt{5}}{5} k = 3\sqrt{5} \text{이므로 } k = 15$$

11. [출제의도] 선분의 내분점과 외분점 이해하기

점 B 의 좌표를 $B(p, q)$ 라 하자.

선분 AB 의 중점의 좌표가 $(6, 7)$ 이므로

$$\frac{1+p}{2} = 6, \quad \frac{2+q}{2} = 7 \text{에서 } p = 11, q = 12$$

그러므로 점 B 의 좌표는 $B(11, 12)$

선분 AC 의 중점을 M 이라 하자.

삼각형 ABC 의 무게중심은 선분 BM 을 $2:1$ 로

내분하는 점이므로

$$\frac{2 \times a + 1 \times 11}{2+1} = 5, \quad \frac{2 \times 6 + 1 \times 12}{2+1} = b$$

$$\text{에서 } a = 2, b = 8$$

$$\text{따라서 } a+b = 10$$

12. [출제의도] 집합의 연산을 이용하여 추론하기

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

이므로 조건 (가)에서 $n(A \cap B) = 0, A \cap B = \emptyset$

그러므로

$$(A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

$$= \emptyset \cup C = C$$

조건 (나)에 의하여

$$n(C) = 2 \times n(B-C) = 2 \times \{n(B \cup C) - n(C)\}$$

$$n(C) = \frac{2}{3} \times n(B \cup C)$$

$$\text{따라서 } n(B \cup C) = 12 \text{에서 } n(C) = 8$$

13. [출제의도] 집합의 포함 관계를 이용하여 추론하기

$$n(A \cap B) = p \text{라 하면}$$

$(A \cap B) \subset X \subset A$ 를 만족시키는 집합 X 의 개수는

$$2^{3-p} \text{이므로 } 2^{3-p} = 2 \text{에서 } p = 2$$

$n(A \cap B) = 2$ 이므로 집합 A 의 세 원소 1, 3, 4 중 2개는 집합 B 의 원소이고 나머지 1개는 집합 B 의 원소가 아니다.

$$B = \left\{ \frac{k+1}{2}, \frac{k+3}{2}, \frac{k+4}{2} \right\} \text{에서}$$

집합 B 의 두 원소의 차의 최댓값은 $\frac{3}{2}$ 이므로

$n(A \cap B) = 2$ 이려면 $1 \in B, 3 \in B, 4 \in B$ 이어야

한다. 집합 B 의 원소 중 차가 1인 두 원소는

$$\frac{k+1}{2}, \frac{k+3}{2} \text{이므로 } \frac{k+1}{2} = 3, \frac{k+3}{2} = 4$$

$$\text{따라서 } k = 5$$

14. [출제의도] 연립이차부등식 이해하기

$$\begin{cases} (x+9)(x-a^2+6a) \leq 0 & \cdots \textcircled{1} \\ (x-2a)(x-2a+16) \leq 0 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$(a^2-6a) - (-9) = (a-3)^2 \text{이므로}$$

$$a = 3 \text{이면 } a^2 - 6a = -9 \text{이고,}$$

$$a \neq 3 \text{이면 } a^2 - 6a > -9 \text{이다.}$$

(i) $a = 3$ 일 때

$$\textcircled{1} \text{에서 } (x+9)^2 \leq 0 \text{이므로 } x = -9,$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } (x-6)(x+10) \leq 0 \text{이므로 } -10 \leq x \leq 6$$

그리므로 연립부등식을 만족시키는 실수 x 의 값은 -9 뿐이다.

(ii) $a \neq 3$ 일 때

$$\textcircled{1} \text{에서 } -9 \leq x \leq a^2 - 6a,$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } 2a - 16 \leq x \leq 2a$$

이므로 연립부등식을 만족시키는 실수 x 가 오직 하나 존재하려면 $2a = -9$ 이거나 $a^2 - 6a = 2a - 16$ 이어야 한다.

$$2a = -9 \text{이면 } a = -\frac{9}{2},$$

$$a^2 - 8a + 16 = (a-4)^2 = 0 \text{이면 } a = 4$$

이므로 연립부등식을 만족시키는 실수 x 가 오직 하나 존재하도록 하는 실수 a 의 값은 $-\frac{9}{2}, 4$ 이다.

따라서 (i), (ii)에 의하여 연립부등식을

만족시키는 실수 x 가 오직 하나 존재하도록 하는

$$\text{모든 실수 } a \text{의 값의 합은 } 3 + \left(-\frac{9}{2}\right) + 4 = \frac{5}{2}$$

15. [출제의도] 대칭이동을 활용하여 문제해결하기

두 점 $A(a, b)$, $B(b, a)$ 는 직선 $y = x$ 에 대하여

대칭이고 $\overline{AP} = \overline{BP}$, $\overline{AQ} = \overline{BQ}$ 를 만족시키는

두 점 P, Q 는 선분 AB 의 수직이등분선 위의 점이다.

이때, 선분 AB 의 수직이등분선은 직선 $y = x$ 이므로

두 점 P, Q 는 원 C 의 지름이므로 $\overline{PQ} = 4$

선분 AB 와 직선 $y = x$ 가 만나는 점을 H 라 하자.

사각형 $APBQ$ 는 넓이가 $2\sqrt{2}$ 이고

사각형 $APBQ$ 의 넓이는 두 삼각형 APQ , BQP 의 넓이의 합과 같으므로

$$\frac{1}{2} \times 4 \times \overline{AH} + \frac{1}{2} \times 4 \times \overline{BH} = 2(\overline{AH} + \overline{BH})$$

$$= 2\overline{AB} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{에서 } \overline{AB} = \sqrt{2}$$

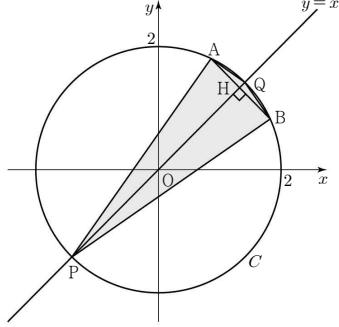
$$\text{또한 } \overline{AB} = \sqrt{(b-a)^2 + (a-b)^2} = \sqrt{2(a-b)^2}$$

$$\text{이므로 } \sqrt{2(a-b)^2} = \sqrt{2} \text{에서 } |a-b| = 1$$

양변을 제곱하면 $a^2 - 2ab + b^2 = 1$

점 $A(a, b)$ 가 원 C 위의 점이므로 $a^2 + b^2 = 4$

따라서 두 식을 연립하여 계산하면 $a \times b = \frac{3}{2}$



16. [출제의도] 명제와 조건을 활용하여 문제해결하기

$P \neq \emptyset$ 이려면 $x^2 - 4x + a + 2 \leq 0$ 을 만족시키는 실수 x 가 존재해야 한다.

이차방정식 $x^2 - 4x + a + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D = (-4)^2 - 4(a+2)$ 이고

$D \geq 0$ 이어야 하므로

$(-4)^2 - 4(a+2) \geq 0$ 에서 $a \leq 2$

$P \neq \emptyset$ 가 되도록 하는 자연수 a 의 값은 1, 2

또한 $0 < |x-b| \leq 4$ 에서

$Q = \{x | b-4 \leq x < b \text{ 또는 } b < x \leq b+4\}$

(i) $a=1$ 일 때

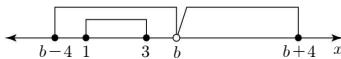
$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) \leq 0$$

$P = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$ 이므로 $P \subset Q$ 이려면

$P \subset \{x | b-4 \leq x < b\}$ 이거나

$P \subset \{x | b < x \leq b+4\}$ 이어야 한다.

(a) $P \subset \{x | b-4 \leq x < b\}$ 일 때



$b-4 \leq 1, 3 < b$ 에서 $3 < b \leq 5$ 이므로

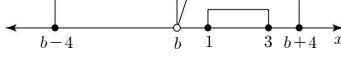
$P \subset Q$ 가 되도록 하는 자연수 b 의 값은 4, 5

그러므로 $P \neq \emptyset, P \subset Q$ 가 되도록 하는

두 자연수 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 는

(1, 4), (1, 5)

(b) $P \subset \{x | b < x \leq b+4\}$ 일 때



$b < 1, 3 \leq b+4$ 에서 $-1 \leq b < 1$ 이므로

$P \subset Q$ 가 되도록 하는 자연수 b 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a=2$ 일 때

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \leq 0$$

에서 $P = \{2\}$ 이므로

$P \subset Q$ 이려면

$b-4 \leq 2 < b$ 또는 $b < 2 \leq b+4$

이어야 하므로

$2 < b \leq 6$ 또는 $-2 \leq b < 2$

$P \subset Q$ 가 되도록 하는 자연수 b 의 값은

1, 3, 4, 5, 6

그러므로 $P \neq \emptyset, P \subset Q$ 가 되도록 하는

두 자연수 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 는

(2, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)

따라서 (i), (ii)에 의하여

구하는 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수는 7

17. [출제의도] 이차함수의 최대와 최소를 이용하여 추론하기

조건 (가)에서 $f(p)=f(q)$ (p, q 는 서로 다른 정수)

이므로 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는

직선 $x = \frac{p+q}{2}$ 에 대하여 대칭이다.

$$n+3 \leq \frac{p+q}{2} \text{ 이거나 } \frac{p+q}{2} \leq n \text{ 이면}$$

$n \leq x \leq n+3$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합이 $f(n) \times f(n+3)$ 의 값과 같아지므로

$n \leq x \leq n+3$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합이 $f(n) \times f(n+3)$ 의 값과 같지 않으면

$$n < \frac{p+q}{2} < n+3 \text{이어야 한다.}$$

조건 (나)에 의하여 이 부등식이 성립하도록 하는 모든 자연수 n 의 값은 4, 5, 6이므로

$$6 < \frac{p+q}{2} < 7$$

$12 < p+q < 14$ 에서 $p+q=13$ 이므로 이차함수

$$y=f(x)$$
의 그래프의 축의 방정식은 $x = \frac{13}{2}$ 이다.

또한 이차함수 $f(x)$ 의 최솟값이 1이므로

$$f(x) = \left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + 1$$

$$\text{따라서 } f(8) = \left(8 - \frac{13}{2}\right)^2 + 1 = \frac{13}{4}$$

18. [출제의도] 이차부등식을 활용하여 문제해결하기

세 점 P, Q, R의 좌표는 각각

$$P(a, a^2 - 3a + 3), Q(2a^2 - 4a), R(a, 0)$$

이므로 $\overline{PR} = |a^2 - 3a + 3|, \overline{QR} = |2a^2 - 4a|$ 이다.

이차방정식 $x^2 - 3x + 3 = 0$ 의 판별식을 D라 하면

$$D = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -3 < 0$$

이므로 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - 3x + 3 > 0$

그러므로

$$\overline{PR} = |a^2 - 3a + 3| = a^2 - 3a + 3$$

$$2a^2 - 4a = 2a(a-2)$$

에서 $0 < a < 2$ 이면 $2a^2 - 4a < 0$ 이므로 $\overline{QR} = -2a^2 + 4a$,

$a > 2$ 면 $2a^2 - 4a > 0$ 이므로 $\overline{QR} = 2a^2 - 4a$ 이다.

(i) $0 < a < 2$ 일 때

$$\overline{PR} + \overline{QR} = (a^2 - 3a + 3) + (-2a^2 + 4a) \leq 3$$

에서 $a(a-1) \geq 0$ 이므로 $a \leq 0$ 또는 $a \geq 1$

그러므로 $1 \leq a < 2$

(ii) $a > 2$ 일 때

$$\overline{PR} + \overline{QR} = (a^2 - 3a + 3) + (2a^2 - 4a) \leq 3$$

에서 $3a\left(a - \frac{7}{3}\right) \leq 0$ 이므로 $0 \leq a \leq \frac{7}{3}$

그러므로 $2 < a \leq \frac{7}{3}$

(i), (ii)에 의하여 $1 \leq a < 2$ 또는 $2 < a \leq \frac{7}{3}$

따라서 실수 a 의 최댓값과 최솟값의 합은

$$\frac{7}{3} + 1 = \frac{10}{3}$$

19. [출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계를 활용하여 문제해결하기

원 C의 반지름의 길이는 r이라 하자.

원 C의 넓이가 8π 이므로 $r^2\pi = 8\pi$ 에서

$$r = 2\sqrt{2}$$

점 A를 지나고 원 C에 접하는 직선과 직선 AB는

서로 수직이므로 직선 AB의 기울기는 -1

직선 AB의 y절편은 k라 하면

직선 AB의 방정식은 $y = -x + k$

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β ($\alpha < \beta$)라 하자.

곡선 $y = -x^2 + 6x$ 와 직선 $y = -x + k$ 가

두 점 A, B에서 만나므로 α, β 는 이차방정식

$$x^2 - 7x + k = 0$$

의 서로 다른 두 실근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 7, \alpha\beta = k$$

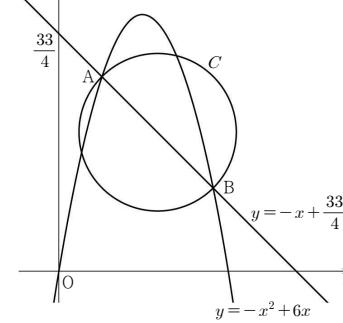
$\overline{AB} = 4\sqrt{2}$ 이고 직선 AB의 기울기가 -1이므로

$$(\beta - \alpha)\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

에서 $\beta - \alpha = 4$

두 식을 연립하여 계산하면 $\alpha = \frac{3}{2}, \beta = \frac{11}{2}$

따라서 직선 AB의 y절편은 $\frac{3}{2} \times \frac{11}{2} = \frac{33}{4}$



20. [출제의도] 삼차방정식을 활용하여 문제해결하기

점 P는 선분 AB를 1:a로 내분하는 점이고

점 Q는 선분 DC를 1:a로 내분하는 점이므로

두 선분 AP, DQ의 길이는

$$\overline{AP} = \overline{DQ} = (3a^2 + 10a + 7) \times \frac{1}{1+a} = 3a + 7$$

점 P에서 선분 EF에 내린 수선의 발을 P',

점 Q에서 선분 HG에 내린 수선의 발을 Q'이라

하자. 삼각기둥 PFB-QGC의 부피는

삼각기둥 PP'F-QQ'G의 부피와 같으므로

$$V_1 - V_2 = V_1 - (\text{삼각기둥 PP'F-QQ'G의 부피})$$

= (직육면체 APQD - EP'Q'H의 부피)

$$= (3a+7) \times a \times a = 3a^3 + 7a^2$$

$V_1 - V_2 = 4$ 에서

$$3a^3 + 7a^2 - 4 = 0$$

조립제법을 이용하여 인수분해하면

-1	3	7	0	-4
		-3	-4	4
3	4	-4		0

$$3a^3 + 7a^2 - 4 = (a+1)(3a^2 + 4a - 4)$$

$$= (a+1)(a+2)(3a-2) = 0$$

$$a > 0 \text{에서 } a = \frac{2}{3}$$

따라서 선분 AP의 길이는 $3 \times \frac{2}{3} + 7 = 9$

21. [출제의도] 대칭이동을 이용하여 추론하기

두 원 C_1, C_2 의 중심을 각각 O_1, O_2 라 하면 두 점

O_1, O_2 의 좌표는 각각 $O_1(2, 6), O_2(6, 4)$ 이고

두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이는 각각 1, 3이다.

두 원 C_1, C_2 를 y 축에 대하여 대칭이동한 원을

각각 C'_1, C'_2 이라 하고

네 점 O_1, O_2, P, Q 를 y 축에 대하여 대칭이동한

점을 각각 O_1' , O_2' , P' , Q' 이라 하고 점 B 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라 하자.

ㄱ. 두 점 $A(4, 2)$, $A'(4, -2)$ 는 x 축에 대하여 대칭이므로 두 선분 AR , $A'R'$ 는 x 축에 대하여 대칭이다.

그러므로 $\overline{AR} = \overline{A'R'}$ (참)

ㄴ. ㄱ에 의하여 $\overline{AR} = \overline{A'R'}$

두 선분 PR' , $P'R'$ 은 y 축에 대하여 대칭이므로 $\overline{PR'} = \overline{P'R'}$

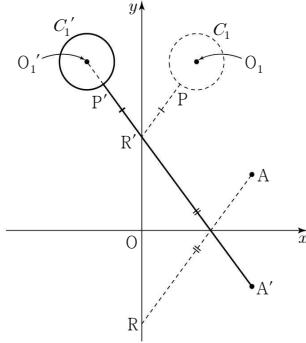
$$\overline{AR} + \overline{PR'} = \overline{A'R'} + \overline{P'R'}$$

$$= (\overline{A'R'} + \overline{R'P'} + \overline{P'O_1'}) - 1$$

$\overline{A'R'} + \overline{R'P'} + \overline{P'O_1'}$ 의 값은 두 점 R' , P' 이 선분 $A'O_1'$ 위에 있을 때 최소이고 그 값은 $\overline{A'O_1'}$ 이다.

그러므로 $\overline{AR} + \overline{PR'}$ 의 최솟값은

$$\overline{A'O_1'} - 1 = \sqrt{(4 - (-2))^2 + ((-2) - 6)^2} - 1 = 9 \text{ (참)}$$



ㄷ. ㄴ과 같은 방법으로

$$(\overline{BR} + \overline{PR}) \text{의 최솟값} = \overline{B'O_1} - 1$$

$$(\overline{BS} + \overline{QS}) \text{의 최솟값} = \overline{B'O_2} - 3$$

이므로

$$(\overline{BR} + \overline{PR}) \text{의 최솟값} = (\overline{BS} + \overline{QS}) + 2$$

에서

$$\overline{B'O_1} - 1 = (\overline{B'O_2} - 3) + 2$$

$$\overline{B'O_1} = \overline{B'O_2}$$

점 B' 에서 두 점 O_1' , O_2' 까지의 거리가

같으므로 점 B' 은 선분 $O_1'O_2'$ 의 수직이등분선 위에 있다.

두 점 O_1' , O_2' 의 좌표는 각각

$$O_1'(-2, 6), O_2'(-6, 4) \text{이므로}$$

선분 $O_1'O_2'$ 의 중점의 좌표는 $(-4, 5)$

$$\text{또한 직선 } O_1'O_2' \text{의 기울기는 } \frac{4-6}{-6-(-2)} = \frac{1}{2}$$

이므로 선분 $O_1'O_2'$ 의 수직이등분선은

점 $(-4, 5)$ 를 지나고 기울기가 -2 인 직선이다.

그러므로 선분 $O_1'O_2'$ 의 수직이등분선의 방정식은

$$y - 5 = -2(x - (-4))$$

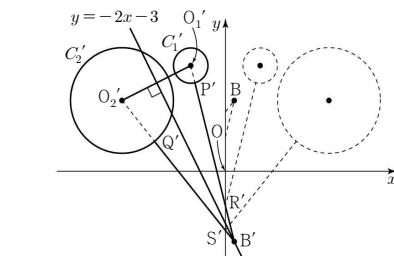
$$y = -2x - 3$$

점 $B'(a, -6a - 1)$ 이 이 직선 위의 점이므로

$$-6a - 1 = -2a - 3 \text{에서 } a = \frac{1}{2}$$

$$\text{점 } B \text{의 좌표가 } B\left(\frac{1}{2}, 4\right) \text{이므로}$$

$$\overline{OB} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4^2} = \frac{\sqrt{65}}{2} \text{ (참)}$$



22. [출제의도] 두 직선의 위치 관계 이해하기

두 점 $(0, a)$, $(2, 2a+1)$ 을 지나는 직선의 기울기가 2이므로

$$\frac{(2a+1)-a}{2-0} = \frac{a+1}{2} = 2$$

따라서 $a = 3$

23. [출제의도] 삼차방정식 이해하기

삼차방정식 $x^3 + 3x^2 + (16-a)x + a - 20 = 0$ 을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	3	16-a	a-20
	1	4	20-a	0
1	4	20-a	0	

$$x^3 + 3x^2 + (16-a)x + a - 20$$

$$= (x-1)(x^2 + 4x + 20-a) = 0$$

$$\text{이므로 방정식 } x^3 + 3x^2 + (16-a)x + a - 20 = 0 \text{ 이다.}$$

허근을 가지려면 이차방정식 $x^2 + 4x + 20 - a = 0$ 이

서로 다른 두 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2 + 4x + 20 - a = 0$ 의 판별식을

$$D \text{라 하면 } D = 4^2 - 4(20-a) < 0 \text{에서 } a < 16$$

따라서 구하는 자연수 a 의 개수는 15

24. [출제의도] 필요조건 이해하기

$$x + 5 \leq k \text{에서 } x \leq k - 5 \text{이고}$$

$$x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x-6) = 0$$

에서 $x = 2$ 또는 $x = 6$

그러므로 실수 x 에 대한 두 조건 p , q 의 진리집합을 각각 P , Q 라 하면

$$P = \{x | x \leq k-5\}, Q = \{2, 6\}$$

p 가 q 이기 위한 필요조건이 되려면

$Q \subset P$ 이어야 하므로

$$2 \leq k-5, 6 \leq k-5 \text{에서 } k \geq 11$$

따라서 구하는 실수 k 의 최솟값은 11

25. [출제의도] 인수분해 이해하기

$$x^2 + 2x = X \text{라 하면}$$

$$(x^2 + 2x)(2x^2 + 4x + 5) + 3$$

$$= X(2X^2 + 5) + 3 = 2X^3 + 5X + 3$$

$$= (X+1)(2X+3)$$

$$= (x^2 + 2x + 1)(2x^2 + 4x + 3)$$

$$= (x+1)^2(2x^2 + 4x + 3)$$

따라서 $a+b+c = 1+4+3 = 8$

26. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 문제 해결하기

두 직선 $y = 2x + 6$, $y = -2x + 6$ 에 모두 접하는 원의 중심을 $C(a, b)$, 반지름의 길이를 r 이라 하자.

점 C 와 직선 $2x - y + 6 = 0$ 사이의 거리는 r 이고

점 C 와 직선 $2x + y - 6 = 0$ 사이의 거리도 r 이므로

$$r = \frac{|2a-b+6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|2a+b-6|}{\sqrt{2^2+1^2}} \dots \textcircled{1}$$

에서 $|2a-b+6| = |2a+b-6|$ 이고,

$$2a-b+6 = 2a+b-6 \text{이면 } b=6,$$

$$2a-b+6 = -(2a+b-6) \text{이면 } a=0 \text{이다.}$$

중심이 $C(a, 6)$ 이고 두 직선 $y = 2x + 6$,

$y = -2x + 6$ 에 모두 접하는 원은 $(2, 0)$ 을 지날 수 없으므로 $b \neq 6$

그러므로 $a=0$ 이고, 원의 중심 C 의 좌표는 $C(0, b)$

점 $C(0, b)$ 에서 점 $(2, 0)$ 까지의 거리는 r 이므로

①에 의하여

$$\sqrt{(2-0)^2 + (0-b)^2} = \frac{|b-6|}{\sqrt{5}}$$

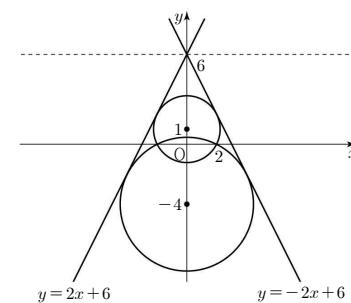
$$b^2 + 4 = \frac{(b-6)^2}{5}$$

$$4b^2 + 12b - 16 = 4(b+4)(b-1) = 0$$

에서 $b=-4$ 또는 $b=1$

그러므로 두 직선 $y = 2x + 6$, $y = -2x + 6$ 에 모두 접하는 두 원의 중심 O_1 , O_2 의 좌표는 $(0, -4)$, $(0, 1)$

따라서 선분 O_1O_2 의 길이는 5



27. [출제의도] 집합의 포함 관계를 이용하여 추론하기

$A \cap B \subset A$ 이므로 조건 (가)에서 $\{3, 6\} \subset A$

3, 6이 모두 a 의 배수이므로 $a=1$ 또는 $a=3$

$a=1$ 이면 $A = U$ 가 되어 $B-A = \emptyset$ 이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $a=3$ 이고, $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

또한 $A \cap B \subset B$ 이므로 조건 (가)에서 $\{3, 6\} \subset B$

3, 6이 모두 b 의 약수이므로

$b=6$ 또는 $b=12$ 또는 $b=18$

(i) $b=6$ 일 때

$B = \{1, 2, 3, 6\}$ 이므로 $B-A = \{1, 2\}$ 가 되어 조건 (나)를 만족시킨다.

$A-B = \{9, 12, 15, 18\}$ 이므로

집합 $A-B$ 의 모든 원소의 합은

$$9+12+15+18=54$$

(ii) $b=12$ 일 때

$B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로

$B-A = \{1, 2, 4\}$ 가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $b=18$ 일 때

$B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ 이므로

$B-A = \{1, 2\}$ 가 되어 조건 (나)를 만족시킨다.

$A-B = \{12, 15\}$ 이므로

집합 $A-B$ 의 모든 원소의 합은 $12+15=27$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여

집합 $A-B$ 의 모든 원소의 합의 최솟값은 27

28. [출제의도] 인수정리를 활용하여 문제 해결하기

$P(x)$, $Q(x)$ 는 각각 이차다항식이고 조건 (가)에서 모든 실수 x 에 대하여

$$\{P(x)+Q(x)\} \times \{P(x)-Q(x)\} = x^2(x-1)(x-2)$$

… ⑦

그리므로 $P(x)+Q(x)$, $P(x)-Q(x)$ 는 각각 이차다항식이고 $x^2(x-1)(x-2)$ 의 인수이다. 이때 $P(x)-Q(x)$ 가 $x-1$ 을 인수로 가지면 인수정리에 의하여 $P(1)-Q(1)=0$ 이 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$P(x)-Q(x)$ 는 $x-1$ 을 인수로 갖거나 $x(x-2)$ 를 인수로 갖는다.

(i) $P(x)-Q(x)=ax^2$ (a 는 0이 아닌 실수)일 때 $|P(2)-Q(2)|=|4a|$, $|P(1)-Q(1)|=|a|$ 이고 $|4a|>|a|$ 이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $P(x)-Q(x)=ax(x-2)$ (a 는 0이 아닌 실수)일 때 $|P(2)-Q(2)|=0$, $|P(1)-Q(1)|=|a|$ 이고 $0<|a|$ 이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여 $P(x)-Q(x)=ax(x-2)$ 이고

⑦에 의하여 $P(x)+Q(x)=\frac{1}{a}x(x-1)$ 이다.

$$P(3)+Q(3)=\frac{1}{a} \times 3 \times 2=24 \text{에서 } a=\frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$P(x)-Q(x)=\frac{1}{4}x(x-2),$$

$$P(x)+Q(x)=4x(x-1)$$

두 식을 연립하여 계산하면

$$P(x)=\frac{17}{8}x^2-\frac{9}{4}x, Q(x)=\frac{15}{8}x^2-\frac{7}{4}x$$

따라서 $P(4)=25$

29. [출제의도] 곱셈공식을 활용하여 문제해결하기

세 원 C_1 , C_2 , C_3 의 반지름의 길이를 각각 a , b , c 라 하자.

(사각형 $\text{AO}_2\text{O}_3\text{B}$ 의 넓이)

= (삼각형 AO_1B 의 넓이) - (삼각형 $\text{O}_2\text{O}_1\text{O}_3$ 의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \times \overline{\text{O}_1\text{A}} \times \overline{\text{O}_1\text{B}} - \frac{1}{2} \times \overline{\text{O}_1\text{O}_2} \times \overline{\text{O}_1\text{O}_3}$$

$$= \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}(a-b)(a-c)$$

$$= \frac{1}{2}(ab-bc+ca)$$

이고, 사각형 $\text{AO}_2\text{O}_3\text{B}$ 의 넓이가 34이므로

$$ab-bc+ca=68$$

또한 $\overline{\text{O}_1\text{C}} + \overline{\text{O}_1\text{D}} = 6\sqrt{2}$ 에서

$$(a-2b)+(a-2c)=6\sqrt{2}$$

$$a-b-c=3\sqrt{2}$$

그러므로 세 원 C_1 , C_2 , C_3 의 넓이의 합은

$$\begin{aligned} a^2\pi + b^2\pi + c^2\pi &= (a^2+b^2+c^2)\pi \\ &= \{(a-b-c)^2+2(ab-bc+ca)\}\pi \\ &= \{(3\sqrt{2})^2+2 \times 68\}\pi \\ &= 154\pi \end{aligned}$$

따라서 $p=154$

30. [출제의도] 이차함수를 이용하여 추론하기

집합 X 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=1$ 또는 직선 $y=-1$ 과 만나는 점의 x 좌표를 원소로 갖는 집합이고

집합 Y 는 함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 직선 $y=1$

또는 직선 $y=-1$ 과 만나는 점의 x 좌표를 원소로 갖는 집합이다.

조건 (가)에서 $n(X \cap Y)=3$, $n(X \cup Y)=4$ 이므로

$$3 \leq n(X) \leq 4, 3 \leq n(Y) \leq 4$$

또한 $n(X \cup Y)=n(X)+n(Y)-n(X \cap Y)$ 에서

$$n(X)+n(Y)=n(X \cup Y)+n(X \cap Y)=7$$

$$n(X)=3, n(Y)=4 \text{ 또는 } n(X)=4, n(Y)=3$$

$$(i) n(X)=3, n(Y)=4 \text{ 일 때}$$

함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 양수인

이차함수이고 $n(X)=3$ 이므로

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는

직선 $y=-1$ 에 접하고

직선 $y=1$ 과 서로 다른 두 점에서 만난다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-1$ 이

만나는 점의 x 좌표를 a 라 하면 함수 $y=f(x)$ 의

그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(a, -1)$ 이므로

$$f(x)=k(x-a)^2-1 \quad (k \text{는 양의 실수})$$

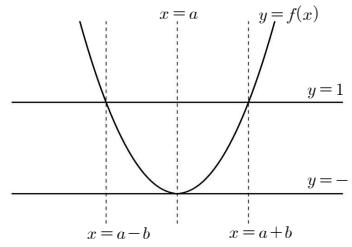
함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $x=a$ 에 대하여

대칭이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가

직선 $y=1$ 과 만나는 두 점의 x 좌표는

어떤 양의 실수 b 에 대하여 $a-b$, $a+b$ 이다.

그러므로 $X=\{a-b, a, a+b\}$



$n(X)=n(X \cap Y)=3$ 에서 $X=X \cap Y$ 이므로 조건 (나)에 의하여

$$(a-b)+a+(a+b)=3a=3, a=1$$

그리므로 $f(x)=k(x-1)^2-1$ 이 되어

$f(2)<f(1)$ 을 만족시키지 않는다.

$$(ii) n(X)=4, n(Y)=3 \text{ 일 때}$$

함수 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 음수인

이차함수이고 $n(Y)=3$ 이므로

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는

직선 $y=1$ 에 접하고

직선 $y=-1$ 과 서로 다른 두 점에서 만난다.

함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 이 만나는

점의 x 좌표를 a 라 하면 함수 $y=g(x)$ 의

그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(a, 1)$ 이므로

$$g(x)=k(x-a)^2+1 \quad (k \text{는 음의 실수})$$

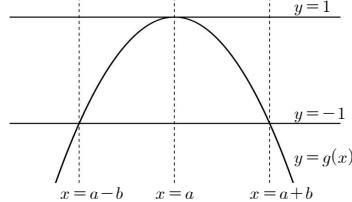
함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 직선 $x=a$ 에 대하여

대칭이므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프가

직선 $y=-1$ 과 만나는 두 점의 x 좌표는

어떤 양의 실수 b 에 대하여 $a-b$, $a+b$ 이다.

그러므로 $Y=\{a-b, a, a+b\}$



$n(Y)=n(X \cap Y)=3$ 에서 $Y=X \cap Y$ 이므로

조건 (나)에 의하여

$$(a-b)+a+(a+b)=3a=3, a=1$$

그러므로 $Y=\{a-b, a, a+b\}$ 이고

$$g(x)=k(x-1)^2+1 \dots \textcircled{7}$$

$n(X)=4$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 두 직선 $y=1$, $y=-1$ 과 각각 서로 다른 두 점에서 만난다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식을 $x=m$ 이라 하면

$$f(x)=t(x-m)^2+s \quad (t \text{는 양의 실수}, s \text{는 실수})$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $x=m$ 에 대하여

대칭이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가

직선 $y=-1$ 과 만나는 두 점의 x 좌표는

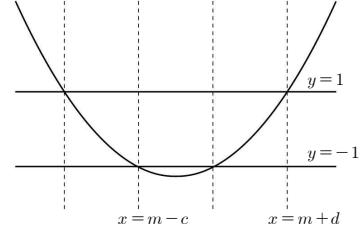
어떤 양의 실수 c 에 대하여 $m-c$, $m+c$ 이고

직선 $y=1$ 과 만나는 두 점의 x 좌표는

어떤 양의 실수 d 에 대하여 $m-d$, $m+d$ 이다.

(단, $c < d$)

그러므로 $X=\{m-d, m-c, m+c, m+d\}$



$n(X)=n(X \cup Y)=4$ 에서 $X=X \cup Y$ 이므로

조건 (나)에 의하여

$$(m-d)+(m-c)+(m+c)+(m+d)=4m=8, m=2$$

그러므로

$$f(x)=t(x-2)^2+s \dots \textcircled{8}$$

가 되어 $f(2)<f(1)$ 을 만족시킨다.

$$Y=\{1-b, 1, 1+b\},$$

$$X=\{2-d, 2-c, 2+c, 2+d\} \text{이고}$$

$$Y=(X \cap Y) \subset (X \cup Y)=X$$

집합 Y 의 원소 중 1보다 작거나 같은 수는

$$1-b, 1\text{뿐} \text{이고 } (1-b) \in X, 1 \in X \text{이므로}$$

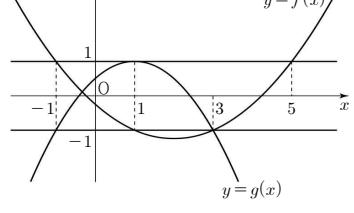
$$1-b=2-d, 1=2-c \text{에서 } d=b+1, c=1$$

그러므로 $X=\{1-b, 1, 3+b\}$

또한 $(1+b) \in X$ 에서

$$1+b=3, b=2 \text{이므로}$$

$$X=\{-1, 1, 3, 5\}, Y=\{-1, 1, 3\}$$



함수 $y=f(x)$ 의 그래프가

두 점 $(-1, 1)$, $(1, -1)$ 을 지나므로 $\textcircled{8}$ 에서

$$f(-1)=9t+s=1, f(1)=t+s=-1$$

두 식을 연립하여 계산하면 $t=\frac{1}{4}$, $s=-\frac{5}{4}$ 이고

$$f(x)=\frac{1}{4}(x-2)^2-\frac{5}{4}$$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 점 $(-1, -1)$ 을 지나므로 $\textcircled{7}$ 에서

$$g(-1)=4k+1=-1, k=-\frac{1}{2} \text{이고}$$

$$g(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2+1$$

따라서 (i), (ii)에 의하여

$$f(7)-g(9)=5-(-31)=36$$