2026학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가

수학영역 정답 및 풀이

최근 수정일 : 2025. 6. 5.(목)

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01. ②	02. ①	03. ③	04. ③	05. ②
06. ④	07. ⑤	08. ⑤	09. ②	10. ①
11. ⑤	12. ②	13. ④	14. ②	15. ①
16. 2	17. 6	18. 133	19. 8	
20. 85	21. 42	22. 38		

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$4^{\frac{1}{4}}\times 2^{\frac{1}{2}}=(2^2)^{\frac{1}{4}}\times 2^{\frac{1}{2}}$$
$$=2^{2\times\frac{1}{4}}\times 2^{\frac{1}{2}}$$
$$=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$$
$$=2^1$$
$$=2$$

정답 ②

2. **출제의도** : 미분계수를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=2x-1$ 에서

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$$
$$=2\times 1-1$$
$$=1$$

정답 ①

3. **출제의도** : 시그마의 정의를 이용하여 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{7}a_k=8$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{7}(2a_k+1)=2\sum_{k=1}^{7}a_k+\sum_{k=1}^{7}1$$
$$=2\times 8+1\times 7$$
$$=23$$

정답 ③

4. **출제의도** : 함수의 연속의 정의를 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=-x^2+a$와 함수 $y=5x-a$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이때

$$\lim_{x\to 3-}f(x)=\lim_{x\to 3-}(-x^2+a)$$
$$=-9+a$$
$$\lim_{x\to 3+}f(x)=\lim_{x\to 3+}(5x-a)$$
$$=15-a$$
$$f(3)=15-a$$

이므로

$$\lim_{x\to 3-}f(x)=\lim_{x\to 3+}f(x)=f(3)$$

에서

$$-9+a=15-a$$

따라서

$$a=12$$

정답 ③

5. **출제의도** : 정적분의 값을 구할 수 있

는가?

정답풀이 :

$$\int_0^2 (6x^2-2x+1)dx = \Big[2x^3-x^2+x\Big]_0^2$$
$$=14-0$$
$$=14$$

정답 ②

6. 출제의도 : 삼각함수의 그래프의 최댓값과 주기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$의 최댓값이 8이고

$a>0$이므로

$a+1=8$에서

$a=7$

함수 $f(x)$의 주기가 π이고

$b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi$에서

$b=2$

따라서

$a+b=7+2=9$

정답 ④

7. 출제의도 : 함수의 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x)=5x^2+xf(x)$

이므로

$g'(x)=10x+f(x)+xf'(x)$

따라서

$$g'(3)=30+f(3)+3\times f'(3)$$
$$=30+2+3\times1$$
$$=35$$

정답 ⑤

8. 출제의도 : 삼각함수의 성질과 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sin(\pi-\theta)>0$에서 $\sin\theta>0$

$2\cos\theta=\sin\theta$ …… ㉠

㉠에서 $\sin\theta>0$이므로 $\cos\theta>0$

㉠의 양변을 제곱하면

$4\cos^2\theta=\sin^2\theta$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$이므로 이를 위 등식에 대입하면

$4\cos^2\theta=1-\cos^2\theta$

$5\cos^2\theta=1$

$\cos^2\theta=\frac{1}{5}$

따라서 $\cos\theta>0$이므로

$\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$

정답 ⑤

9. 출제의도 : 정적분의 성질을 이용하여 주어진 식을 만족시키는 함수의 미정계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_{-3}^{3}(x+1)f(x)dx=36+\int_{-3}^{3}f(x)dx$$

에서

$$\int_{-3}^{3}(x+1)f(x)dx$$
$$=\int_{-3}^{3}\{xf(x)+f(x)\}dx$$
$$=\int_{-3}^{3}xf(x)dx+\int_{-3}^{3}f(x)dx$$

이므로

$$\int_{-3}^{3} xf(x)dx = 36$$

이때 $f(x) = x^2 + ax$이므로

$$\int_{-3}^{3} xf(x)dx = \int_{-3}^{3} x(x^2+ax)dx$$

$$= \int_{-3}^{3} (x^3+ax^2)dx$$

$$= 2\int_{0}^{3} ax^2 dx$$

$$= 2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^3$$

$$= 2\times 9a$$

$$= 18a$$

따라서

$18a = 36$

이므로

$a = 2$

정답 ②

10. **출제의도** : 로그의 성질과 로그방정식을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y = \log_a(x+3)$이

곡선 $y = \log_a(-x+3)$과 만나는 점 A의 좌표를 구해 보자

$\log_a(x+3) = \log_a(-x+3)$에서

$x+3 = -x+3$

$x = 0$

$x = 0$일 때, $y = \log_a 3$이므로

점 A의 좌표는 $(0,\ \log_a 3)$이다.

곡선 $y = \log_a(x+3)$에서

$y = 0$일 때

$\log_a(x+3) = 0$

$x+3 = 1$

$x = -2$

그러므로 점 B의 좌표는 $(-2,\ 0)$이다.

곡선 $y = \log_a(-x+3)$에서

$y = 0$일 때

$\log_a(-x+3) = 0$에서

$-x+3 = 1$

$x = 2$

그러므로 점 C의 좌표는 $(2,\ 0)$이다.

삼각형 ABC가 정삼각형이므로

원점을 O라 하면

$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$에서

$$\sqrt{3} = \frac{\log_a 3}{2}$$

$\log_a 3 = 2\sqrt{3}$

$a^{2\sqrt{3}} = 3$

따라서

$$a = 3^{\frac{1}{2\sqrt{3}}} = 3^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$$

정답 ①

11. **출제의도** : 위치, 속도, 가속도 사이의 관계 및 미분을 이용하여 가속도를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $x = t^3 - t^2 - t + 1$에 $t = 1$을 대입하면

$x = 1^3 - 1^2 - 1 + 1 = 0$ (거짓)

ㄴ. 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 2t - 1$$

이므로 시각 $t = 1$일 때 점 P의 속도는

$v=3\times1^2-2\times1-1=0$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 시각 $t=1$일 때 점 P의 속도는 0이고 시각 $t=1$의 좌우에서 속도 v의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 출발한 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각은 $t=1$이다. 점 P의 시각 t에서의 가속도를 a라 하면

$$a=\frac{dv}{dt}=6t-2$$

이므로 시각 $t=1$일 때 점 P의 가속도는

$a=6\times1-2=4$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

12. **출제의도** : 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 특정한 항의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에서

$a_{n+1}=a_n-3$ 또는 $a_{n+1}=2a_n$

조건 (가)에서 $a_3=a_1$ …… ㉠

(ⅰ) $a_3=a_2-3$, $a_2=a_1-3$인 경우

$a_3=a_2-3=(a_1-3)-3$

$a_3=a_1-6$

이 식은 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a_3=a_2-3$, $a_2=2a_1$인 경우

$a_3=a_2-3=2a_1-3$

㉠에서

$a_3=2a_3-3$

$a_3=3$

$a_4=a_3-3=0$ 또는 $a_4=2a_3=6$

(ⅲ) $a_3=2a_2$, $a_2=a_1-3$인 경우

$a_3=2(a_1-3)=2a_1-6$

㉠에서

$a_3=2a_3-6$

$a_3=6$

$a_4=a_3-3=3$ 또는 $a_4=2a_3=12$

(ⅳ) $a_3=2a_2$, $a_2=2a_1$인 경우

$a_3=2a_2=2(2a_1)=4a_1$

㉠에서 $a_3=4a_3$

$a_3=0$

$a_4=a_3-3=-3$ 또는 $a_4=2a_3=0$

(ⅰ) ~ (ⅳ)에서

$a_4=-3$ 또는 $a_4=0$ 또는 $a_4=3$ 또는 $a_4=6$ 또는 $a_4=12$

이므로

a_4의 최댓값은 12

정답 ②

13. **출제의도** : 정적분과 넓이의 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 상수 k의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 조건에서

(A의 넓이)+(C의 넓이)=(B의 넓이)

가 성립해야 하므로

$$\int_0^k\left\{(3x^2-7x+2)-\left(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)\right\}dx=0$$

$$\int_0^k\left(3x^2-\frac{22}{3}x+\frac{8}{3}\right)dx=0$$

$$\left[x^3-\frac{11}{3}x^2+\frac{8}{3}x\right]_0^k=0$$

$$k^3-\frac{11}{3}k^2+\frac{8}{3}k=0$$

$$3k^3-11k^2+8k=0$$

$$k(k-1)(3k-8)=0$$

이때 $k>2$ 이므로 $k=\frac{8}{3}$

정답 ④

14. 출제의도 : 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 삼각형의 외접원의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 APQ에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{PQ}}{\sin(\angle QAP)}=\frac{\overline{AQ}}{\sin(\angle APQ)}$$

조건에서 $\overline{AQ}=3\sqrt{2}$ 이고

$\sin(\angle QAP):\sin(\angle APQ)=\sqrt{2}:3$ 이므로

$\overline{PQ}$

$=\frac{\sin(\angle QAP)}{\sin(\angle APQ)}\times\overline{AQ}$

$=\frac{\sqrt{2}}{3}\times 3\sqrt{2}$

$=2$

점 P는 선분 BC의 중점이고 점 Q는 선분 BC를 $5:1$로 내분하는 점이므로

$\overline{BC}=\overline{BP}+\overline{PQ}+\overline{QC}$

$=\frac{1}{2}\overline{BC}+2+\frac{1}{6}\overline{BC}$

$=\frac{2}{3}\overline{BC}+2$

$\frac{1}{3}\overline{BC}=2$, $\overline{BC}=6$

한편, $\overline{BQ}=\frac{5}{6}\overline{BC}=5$ 이고 $\overline{AB}=2\sqrt{7}$ 이므로 삼각형 ABQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle ABQ)=\frac{\overline{AB}^2+\overline{BQ}^2-\overline{AQ}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BQ}}$$

$$=\frac{(2\sqrt{7})^2+5^2-(3\sqrt{2})^2}{2\times 2\sqrt{7}\times 5}$$

$$=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2$

$=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos(\angle ABC)$

$=(2\sqrt{7})^2+6^2-2\times 2\sqrt{7}\times 6\times\frac{\sqrt{7}}{4}$

$=22$

이므로

$\overline{AC}=\sqrt{22}$

이때

$\sin(\angle ABC)=\sqrt{1-\cos^2(\angle ABC)}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}$

$=\frac{3}{4}$

이므로 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)}=2R$$

이므로

$$R=\frac{\sqrt{22}}{2\times\frac{3}{4}}=\frac{2\sqrt{22}}{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$$\pi R^2=\pi\times\left(\frac{2\sqrt{22}}{3}\right)^2=\frac{88}{9}\pi$$

정답 ②

15. 출제의도 : 미분을 이용하여 상수와 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$(a, b, c, d는 상

수, $a\neq 0$)이라 하자

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f'(0)=c$이므로

$c=6$

$f'(x)=3ax^2+2bx+6$ …… ㉠

$x\neq -1$, $x\neq 1$인 모든 실수 x에 대하여 함수 $g(x)$는 미분가능하고

$x<-1$ 또는 $x>1$에서 $g'(x)=f'(x)$,

$-1<x<1$에서

$g'(x)=-f'(x)$ …… ㉡

이다.

조건 (가)에서 모든 실수 a에 대하여

$\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}$의 값이 존재하므로

$a\neq -1$, $a\neq 1$에서

$$\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$
$$=g'(a)$$

모든 실수 a에 대하여

$\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}$

의 값이 0 이하이므로

㉡에서 함수 $f(x)$는

$x<-1$ 또는 $x>1$에서 $f'(x)\leq 0$

$-1<x<1$에서 $f'(x)\geq 0$

을 만족시킨다.

함수 $f(x)$는 $x=-1$과 $x=1$에서 모두 극값을 가지므로

$f'(-1)=f'(1)=0$이어야 한다.

㉠에서

$f'(x)=3ax^2+2bx+6=3a(x+1)(x-1)$

$3ax^2+2bx+6=3ax^2-3a$

양변의 일차항 계수와 상수항을 비교하면

$2b=0$에서 $b=0$

$6=-3a$에서 $a=-2$

$f(x)=-2x^3+6x+d$

조건 (가)에서

$\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$

의 값이 존재하고

$x\to 1+$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 1+}g(x)=g(1)$ …… ㉢

$\lim\limits_{x\to 1+}\{f(x)+k\}=-f(1)$

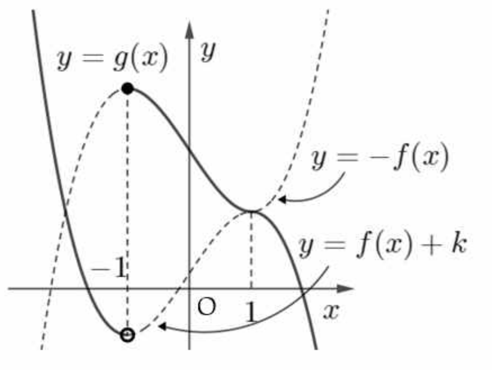
$f(1)+k=-f(1)$이므로

$f(1)=-\dfrac{k}{2}$ …… ㉣

한편 $\lim\limits_{x\to 1-}g(x)=\lim\limits_{x\to 1-}\{-f(x)\}$

$=-f(1)=g(1)$

이고 ㉢에서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



조건 (나)에서

방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 최댓값이 13이므로

$g(-1)=-f(-1)=13$

$f(-1)=2-6+d=-13$이므로

$d=-9$

$f(x)=-2x^3+6x-9$

㉣에서

$f(1)=-2+6-9=-\dfrac{k}{2}$

$k=10$

따라서

$$k+f\left(\frac{1}{2}\right)=10+\left(-\frac{1}{4}+3-9\right)$$
$$=\frac{15}{4}$$

정답 ①

16. **출제의도** : 로그에 미지수가 포함된 방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\log_5(x+1)+\log_5(x-1)=\log_{25}9$ …… ㉠

진수 조건에 의해

$x+1>0$, $x-1>0$이므로 $x>1$

㉠에서

$\log_5(x+1)(x-1)=\log_{5^2}3^2$

$\log_5(x^2-1)=\log_5 3$

즉, $x^2-1=3$에서 $x^2=4$

따라서 $x>1$이므로

$x=2$

정답 2

17. **출제의도** : 다항함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=3x^2+4x$

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int (3x^2+4x)dx$$
$$=x^3+2x^2+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f(0)=3$이므로

$C=3$

따라서

$f(x)=x^3+2x^2+3$

이므로

$f(1)=1+2+3=6$

정답 6

18. **출제의도** : $\sum$의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{6}(k^2+2k)=\sum_{k=1}^{6}k^2+2\sum_{k=1}^{6}k$$
$$=\frac{6\times7\times13}{6}+2\times\frac{6\times7}{2}$$
$$=91+42$$
$$=133$$

정답 133

19. **출제의도** : 함수의 그래프를 이용하여 극솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=9x^2-18x=9x(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 $f(0)=a$이므로

$a=20$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이므로 극솟값은

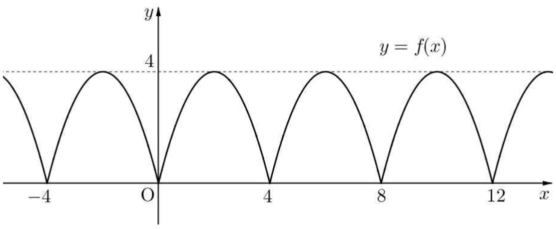
$f(2)=24-36+20=8$

정답 8

20. **출제의도** : 주기함수를 이해하고 등차수열의 일반항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$0 \le x < 4$일 때 $f(x) = -x^2 + 4x$이고 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4) = f(x)$이므로 함수 $y = f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



방정식 $f(x) = x$에서

$-x^2 + 4x = x$

$-x(x-3) = 0$

$x = 0$ 또는 $x = 3$

방정식 $f(x) = x$의 모든 실근이 0, 3이므로 방정식 $f(f(x)) = f(x)$의 실근을 구하는 것은 방정식 $f(x) \times (f(x) - 3) = 0$의 실근을 구하는 것과 같다.

$0 \le x < 4$일 때,

$f(x) = 0$에서 $x = 0$

$f(x) = 3$에서 $-x^2 + 4x = 3$

$-(x-1)(x-3) = 0$

$x = 1$ 또는 $x = 3$

그러므로 $0 \le x < 4$일 때, 방정식 $f(x) \times (f(x) - 3) = 0$의 모든 실근은 0, $\boxed{1}$, 3이므로

$$a_1 = 0,\ a_2 = \boxed{1},\ a_3 = 3$$

이다. 또한 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4) = f(x)$이므로 세 수열 $\{a_{3n-2}\}$, $\{a_{3n-1}\}$, $\{a_{3n}\}$은 첫째항이 각각 0, $\boxed{1}$, 3이고, 공차가 모두 $\boxed{4}$인 등차수열이다.

따라서

$a_{20} = a_{3\times7-1} = 1 + 6\times4 = 25$,

$a_{21} = a_{3\times7} = 3 + 6\times4 = 27$,

$a_{22} = a_{3\times8-2} = 0 + 7\times4 = 28$

이므로

$a_{20} + a_{21} + a_{22} = 25 + 27 + 28 = \boxed{80}$이다.

이때 $p = 1$, $q = 4$, $r = 80$이므로

$p + q + r = 85$

정답 85

21. **출제의도** : 함수의 극한의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = (x-1)(x-2)$

(ⅰ) $a < 1$ 또는 $a > 2$일 때,

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g(x)\times f(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$

(ⅱ) $1 < a < 2$일 때,

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g(x)\times(-f(x))}{f(x)} = -\lim_{x\to a} g(x) = -g(a)$$

(ⅲ) $a = 1$일 때,

$$\lim_{x\to 1-} \frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)} = \lim_{x\to 1-} \frac{g(x)\times f(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 1-} g(x) = g(1),$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$

$$=\lim_{x\to1+}\frac{g(x)\times(-f(x))}{f(x)}$$

$$=-\lim_{x\to1+}g(x)$$

$$=-g(1)$$

$a=1$에서 $\lim_{x\to1}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$의 극한값이 존재해야 하므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$

$$=\lim_{x\to1+}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$

이어야 한다.

즉, $g(1)=-g(1)$이므로

$g(1)=0$ …… ㉠

(iv) $a=2$일 때,

$$\lim_{x\to2-}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$

$$=\lim_{x\to2-}\frac{g(x)\times(-f(x))}{f(x)}$$

$$=-\lim_{x\to2-}g(x)$$

$$=-g(2),$$

$$\lim_{x\to2+}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$

$$=\lim_{x\to2+}\frac{g(x)\times f(x)}{f(x)}$$

$$=\lim_{x\to2+}g(x)$$

$$=g(2)$$

$a=2$에서 $\lim_{x\to2}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$의 극한값이 존재해야 하므로

$$\lim_{x\to2-}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$

$$=\lim_{x\to2+}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$

이어야 한다.

즉, $-g(2)=g(2)$이므로

$g(2)=0$ …… ㉡

(i) ~ (iv)에서

모든 실수 a에 대하여

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$

의 극한값이 존재하려면

㉠, ㉡에서

$g(1)=g(2)=0$

이어야 한다.

이때, 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로

$g(x)=f(x)h(x)$

(단, $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수)로 놓을 수 있다.

한편,

$$\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)h(x)-f(x)|}{f(x)h(x)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|\times|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$

(v) $a<1$ 또는 $a>2$일 때,

$$\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)\times|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

이때, $h(a)=0$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$h(a)\neq0$이고

$$\lim_{x\to a}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

$$=\frac{|h(a)-1|}{h(a)}$$

(vi) $1<a<2$일 때,

$$\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{-f(x)\times|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$
$$=-\lim_{x\to a}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

이때, $h(a)=0$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$h(a)\neq 0$이고

$$-\lim_{x\to a}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}=-\frac{|h(a)-1|}{h(a)}$$

(vii) $a=1$일 때,

$$\lim_{x\to 1-}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)\times|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

이때, $h(1)=0$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$h(1)\neq 0$이고

$$\lim_{x\to 1-}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$
$$=\frac{|h(1)-1|}{h(1)},$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$
$$=\lim_{x\to 1+}\frac{-f(x)\times|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$
$$=-\lim_{x\to 1+}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

이때, $h(1)=0$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$h(1)\neq 0$이고

$$-\lim_{x\to 1+}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$
$$=-\frac{|h(1)-1|}{h(1)}$$

$a=1$에서 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$

의 극한값이 존재해야 하므로

$$\lim_{x\to 1-}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$
$$=\lim_{x\to 1+}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$

이어야 한다.

즉, $\dfrac{|h(1)-1|}{h(1)}=-\dfrac{|h(1)-1|}{h(1)}$이므로

$|h(1)-1|=-|h(1)-1|$

$h(1)=1$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉢

이다.

(viii) $a=2$일 때,

$$\lim_{x\to 2-}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$
$$=\lim_{x\to 2-}\frac{-f(x)\times|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$
$$=-\lim_{x\to 2-}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

이때, $h(2)=0$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$h(2)\neq 0$이고

$$-\lim_{x\to 2-}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}=-\frac{|h(2)-1|}{h(2)},$$

$$\lim_{x\to 2+}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$
$$=\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)\times|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$
$$=\lim_{x\to 2+}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

이때, $h(2)=0$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$h(2)\neq 0$이고

$$\lim_{x\to 2+}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}=\frac{|h(2)-1|}{h(2)}$$

$a=2$에서 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$

의 극한값이 존재해야 하므로

$$\lim_{x\to 2-}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$

$$=\lim_{x\to 2+}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$

이어야 한다.

즉, $-\frac{|h(2)-1|}{h(2)}=\frac{|h(2)-1|}{h(2)}$이므로

$-|h(2)-1|=|h(2)-1|$

$h(2)=1 \quad \cdots\cdots$ ㉣

이다.

(ⅴ) ~ (ⅷ)에서

모든 실수 a에 대하여

$$\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$

의 극한값이 존재하려면

㉢, ㉣에서

$h(1)=h(2)=1$

이어야 한다.

이때, 함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$h(x)-1=(x-1)(x-2)$

즉, $h(x)=f(x)+1$

따라서

$g(x)=f(x)\times(f(x)+1)$

이고,

$f(-1)=(-1-1)(-1-2)=6$

이므로

$g(-1)=6\times(6+1)=42$

정답 42

[참고]

$$\begin{aligned}h(x)&=f(x)+1\\&=(x-1)(x-2)+1\\&=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\end{aligned}$$

이므로 모든 실수 a에 대하여

$h(a)\neq 0$을 만족시킨다.

22. 출제의도 : 지수함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

두 곡선

$y=2^x+\frac{k}{2}$, $y=k\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+k-2$

가 만나는 점 A의 x좌표를 a라 하면

$2^a+\frac{k}{2}=k\times\left(\frac{1}{2}\right)^a+k-2$

$2^a=t(t>0)$라 하면

$t+\frac{k}{2}=\frac{k}{t}+k-2$

$2t^2+(4-k)t-2k=0$

$(t+2)(2t-k)=0$

$t>0$이므로

$t=\frac{k}{2}$

즉, $2^a=\frac{k}{2}$이므로

$a=\log_2\frac{k}{2}$

이고,

$2^{\log_2\frac{k}{2}}+\frac{k}{2}=\frac{k}{2}+\frac{k}{2}=k$

이므로 점 A의 좌표는

$\left(\log_2\frac{k}{2},\ k\right)$

이다.

이때, 실수 k에 대하여 $2^{\log_2\frac{k}{2}}=\frac{k}{2}$이므로 점 A는 곡선 $2^x=\frac{y}{2}$, 즉 $y=2^{x+1}$ 위를 움직인다.

한편, 곡선 $y=2^{x-2}-3$은 곡선 $y=2^{x+1}$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선

$y=2^{x-2}-3$과 만나는 점 B의 좌표는

$\left(\log_2 \frac{k}{2}+3,\ k-3\right)$

이고, 두 점 A, B 사이의 거리는

$\sqrt{3^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$

이다.

이때 원점 O에서 직선 AB까지의 거리를 h라 하면 삼각형 OAB의 넓이가 16이므로

$\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times h=16$

에서

$h=\frac{16\sqrt{2}}{3}$

이다.

한편, 직선 AB의 방정식은

$y-k=-\left(x-\log_2 \frac{k}{2}\right)$

즉, $x+y-k-\log_2 \frac{k}{2}=0$이고 원점과 직선 AB사이의 거리가 $\frac{16\sqrt{2}}{3}$이므로

$\frac{\left|-k-\log_2 \frac{k}{2}\right|}{\sqrt{2}}=\frac{16\sqrt{2}}{3}$

$\left|-k-\log_2 k+1\right|=\frac{32}{3}$

$k>1$이므로

$k+\log_2 k-1=\frac{32}{3}$

$k+\log_2 k=\frac{35}{3}$

따라서 $p=3$, $q=35$이므로

$p+q=38$

정답 38

■ **[선택: 확률과 통계]**

23. ③ 24. ④ 25. ③ 26. ⑤ 27. ①
28. ⑤ 29. 44 30. 115

23. **출제의도** : 같은 것이 있는 순열의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

6개의 문자 a, a, a, a, b, c 중에서

문자 a가 4개 있으므로

이 6개의 문자를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{4!}=6\times 5=30$

정답 ③

24. **출제의도** : 확률의 덧셈정리와 배반사건, 여사건의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 사건 A와 B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=0$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\\&=1\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(A^C)=2\mathrm{P}(A)$에서

$1-\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(A)$

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=1-\mathrm{P}(A)\\&=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

정답 ④

25. **출제의도** : 이항정리를 이용하여 다항식에서 항의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$(2x-1)^5(x+1)=(2x-1)^5\times x+(2x-1)^5$

이므로

다항식 $(2x-1)^5(x+1)$의 전개식에서

x^3의 계수는 $(2x-1)^5$의 전개식에서

x^2의 계수와 x^3의 계수의 합과 같다.

$(2x-1)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5\mathrm{C}_r(2x)^{5-r}(-1)^r={}_5\mathrm{C}_r 2^{5-r}(-1)^r x^{5-r}$

$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$

x^2항은 $r=3$일 때이고

x^3항은 $r=2$일 때이므로

x^2의 계수와 x^3의 계수의 합은

${}_5\mathrm{C}_3\times 2^2\times(-1)^3+{}_5\mathrm{C}_2\times 2^3\times(-1)^2$

$=\dfrac{5\times4\times3}{3\times2\times1}\times(-4)+\dfrac{5\times4}{2\times1}\times 8$

$=40$

정답 ③

26. **출제의도** : 여사건의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 곱이 짝수인 사건을 A라 하면 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 곱이 홀수인 사건은 A^C이다.

양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 곱이 홀수가 되도록 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 홀수 1, 3, 5, 7이 적혀 있는 4장의 카드 중에서 서로 다른 2장의 카드를 택하여 양 끝에 나열한 후, 나머지 5장의 카드를 나열된 홀수가 적힌 2장의 카드 사이에 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_4\mathrm{P}_2\times5!}{7!}=\frac{(4\times3)\times5!}{7!}=\frac{4\times3}{7\times6}=\frac{2}{7}$$

따라서

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$$

정답 ⑤

27. **출제의도** : 원순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

남학생 4명, 여학생 1명을 선택한 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_4\times{}_3\mathrm{C}_1={}_5\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1=5\times3=15$

남학생 5명을 선택한 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_5=1$

선택한 5명의 학생을 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉게 하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$(15+1)\times24=384$

정답 ①

28. 출제의도 : 독립시행을 이용하여 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

이 시행을 5번 반복한 후

상자 B에 들어 있는 공의 개수가 홀수인 사건을 X,

상자 A에 들어 있는 공의 개수와 상자 C에 들어 있는 공의 개수의 합이 8 이상인 사건을 Y라 하면

구하는 확률은

$\mathrm{P}(Y|X)$

이다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3의 배수일 확률은

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

이고, 나온 눈의 수가 3의 배수가 아닐 확률은

$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

이다.

이 시행을 5번 반복할 때,

3의 배수의 눈이 나온 횟수를

m $(m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$,

3의 배수가 아닌 눈이 나온 횟수를

n $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$라 하면

$m+n=5$

이 시행을 5번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 홀수이려면 n이 홀수이어야 한다. 즉,

$n=1$ 또는 $n=3$ 또는 $n=5$

이다.

$n=1$일 때, $m=4$

$n=3$일 때, $m=2$

$n=5$일 때, $m=0$

이므로

$$\mathrm{P}(X)={}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^4+{}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^0$$

$$=\frac{10}{3^5}+\frac{80}{3^5}+\frac{32}{3^5}$$

$$=\frac{122}{243}$$

한편,

$n=1,\ m=4$일 때,

상자 A에 들어 있는 공의 개수와 상자 C에 들어 있는 공의 개수의 합은

$5+1=6$

$n=3,\ m=2$일 때,

상자 A에 들어 있는 공의 개수와 상자 C에 들어 있는 공의 개수의 합은

$5+3=8$

$n=5,\ m=0$일 때,

상자 A에 들어 있는 공의 개수와 상자 C에 들어 있는 공의 개수의 합은

$5+5=10$

그러므로 사건 $X\cap Y$는

$n=3,\ m=2$ 또는 $n=5,\ m=0$

일 때이고,

$$\mathrm{P}(X\cap Y)={}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^0$$

$$=\frac{80}{3^5}+\frac{32}{3^5}$$

$$=\frac{112}{243}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}$$

$$=\frac{\frac{112}{243}}{\frac{122}{243}}=\frac{56}{61}$$

정답 ⑤

29. **출제의도** : 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a+b=8$인 사건을 X,

$b \ge c$인 사건을 Y라 하면

$a+b=8$ 또는 $b \ge c$일 확률은

$\mathrm{P}(X \cup Y)$

이고,

사건 $X \cap Y$는 $a+b=8$이고 $b \ge c$인 사건이다.

(ⅰ) $a+b=8$인 경우

$a+b=8$을 만족시키는 두 수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(2,\ 6)$, $(3,\ 5)$, $(4,\ 4)$, $(5,\ 3)$, $(6,\ 2)$

이다.

한편 c는 1부터 6까지 모든 수가 가능하므로

$$\mathrm{P}(X)=\frac{5}{6^2}\times 1=\frac{5}{36}$$

(ⅱ) $b \ge c$인 경우

$b \ge c$를 만족시키는 두 수 b, c의 순서쌍 $(b,\ c)$의 개수는 1부터 6까지의 자연수 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$\begin{aligned}{}_6\mathrm{H}_2 &= {}_{6+2-1}\mathrm{C}_2\\ &={}_7\mathrm{C}_2\\ &=\frac{7\times 6}{2\times 1}\\ &=21\end{aligned}$$

한편, a는 1부터 6까지 모든 수가 가능하므로

$$\mathrm{P}(Y)=1\times\frac{21}{6^2}=\frac{7}{12}$$

(ⅲ) $a+b=8$이고 $b \ge c$인 경우

$a+b=8$이고 $b \ge c$인 경우는 다음과 같다.

$a=2$, $b=6$일 때,

c의 값은 1, 2, 3, $\cdots$, 6

$a=3$, $b=5$일 때,

c의 값은 1, 2, 3, 4, 5

$a=4$, $b=4$일 때,

c의 값은 1, 2, 3, 4

$a=5$, $b=3$일 때,

c의 값은 1, 2, 3

$a=6$, $b=2$일 때,

c의 값은 1, 2

그러므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\cap Y)&=\frac{6+5+4+3+2}{6^3}\\ &=\frac{5}{54}\end{aligned}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\cup Y)&=\mathrm{P}(X)+\mathrm{P}(Y)-\mathrm{P}(X\cap Y)\\ &=\frac{5}{36}+\frac{7}{12}-\frac{5}{54}\\ &=\frac{15+63-10}{108}\\ &=\frac{17}{27}\end{aligned}$$

따라서 $p=27$, $q=17$이므로

$$\begin{aligned}p+q&=27+17\\ &=44\end{aligned}$$

정답 44

30. **출제의도** : 중복조합을 이용하여 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)의 x에 1, 2, 3, 4를 각각 대입하면

$f(2)+3 \geq f(1)+1$
$f(3)+3 \geq f(2)+2$
$f(4)+3 \geq f(3)+3$
$f(5)+3 \geq f(4)+4$
이므로
$1 \leq f(1) \leq f(2)+2$,
$f(2)-1 \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5)-1 \leq 4$
조건 (나)에서 $f(2)$의 값은 홀수이므로
$f(2)$의 값은 1 또는 3 또는 5

(ⅰ) $f(2)=1$인 경우
$1 \leq f(1) \leq 3$,
$1 \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5)-1 \leq 4$
이므로 $f(1)$의 값을 정하는 경우의 수는 3
$f(3)$, $f(4)$, $f(5)-1$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로
$${}_4H_3 = {}_{4+3-1}C_3 = {}_6C_3 = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20$$
따라서 이 경우의 함수 f의 개수는
$3\times20=60$

(ⅱ) $f(2)=3$인 경우
$1 \leq f(1) \leq 5$,
$2 \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5)-1 \leq 4$
이므로 $f(1)$의 값을 정하는 경우의 수는 5
$f(3)$, $f(4)$, $f(5)-1$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로
$${}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5\times4}{2\times1} = 10$$
따라서 이 경우의 함수 f의 개수는
$5\times10=50$

(ⅲ) $f(2)=5$인 경우
$1 \leq f(1) \leq 5$
$4 \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5)-1 \leq 4$
이므로 $f(1)$의 값을 정하는 경우의 수는 5
$f(3)$, $f(4)$, $f(5)-1$의 값은 모두 4이므로 경우의 수는 1
따라서 이 경우의 함수 f의 개수는
$5\times1=5$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서
구하는 함수 f의 개수는
$60+50+5=115$

정답 115