

수학 영역

* 본 전국연합학력평가는 17개 시도 교육청 주관으로 시행되며, 해당 자료는 EBSi에서만 제공됩니다.
무단 전재 및 재배포는 금지됩니다.

정답

1	④	2	③	3	⑤	4	①	5	②
6	⑤	7	②	8	④	9	①	10	①
11	②	12	③	13	⑤	14	④	15	⑤
16	③	17	③	18	④	19	②	20	①
21	①	22	3	23	55	24	5	25	16
26	432	27	10	28	98	29	133	30	25

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$$2^3 \times 4^{-\frac{1}{2}} = 2^3 \times (2^2)^{-\frac{1}{2}} \\ = 2^3 \times 2^{-1} = 2^2 = 4$$

2. [출제의도] 함수의 극한 계산하기

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{(x+1)^2 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{2x+1} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{x}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{3}{2}$$

3. [출제의도] 등차수열 계산하기

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여
 a_2 는 두 항 a_1 , a_3 의 등차중항이므로
 $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = 8$
 공차가 5이므로
 $a_4 = a_2 + 2 \times 5 = 8 + 10 = 18$

4. [출제의도] 삼각함수 이해하기

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ 이서}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{3} \text{ 일 때},$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ 또는 } \sin \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi \text{ 이므로 } \sin \theta < 0$$

$$\sin \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = -2\sqrt{2}$$

5. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -1$$

6. [출제의도] 일반각과 호도법 이해하기

부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$\frac{1}{2} \times 6^2 \times \theta = 18\theta = 15\pi$$

$$\theta = \frac{5}{6}\pi$$

7. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

두 점 A(2, $\log_a 2$), B(4, $\log_a 4$)를 지나는 직선의 기울기가

$$\frac{\log_a 4 - \log_a 2}{4 - 2} = \frac{\log_a 2}{2} = -\frac{1}{4} \text{ 이므로}$$

$$\log_a 2 = -\frac{1}{2}, a^{-\frac{1}{2}} = 2$$

$$a = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

8. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 계산하기

$$a_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right)$$

$$\sum_{k=1}^8 a_k = \frac{1}{3} \times \sum_{k=1}^8 \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \times \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{22} \right) + \left(\frac{1}{22} - \frac{1}{25} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{25} \right) = \frac{8}{25}$$

9. [출제의도] 로그가 포함된 부등식 이해하기

$\log(x-1)$, $\log(x+2)$ 가 정의되기 위해서는 $x-1 > 0$ 이고 $x+2 > 0$ 이어야 한다.

그러므로 $x > 1 \dots \textcircled{①}$

$$\log(x-1) + \log(x+2) \leq 1$$

$$\log(x-1)(x+2) \leq \log 10$$

$$(x-1)(x+2) \leq 10$$

$$x^2 + x - 12 \leq 0$$

$$-4 \leq x \leq 3 \dots \textcircled{②}$$

①, ②에 의하여 $1 < x \leq 3$ 이므로

부등식을 만족시키는 자연수 x 는 2, 3이고 그 값의 합은 5

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

함수 $y = \sin \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($0 \leq x < 4\pi$)의

그래프와 x 축이 만나는 점의

x 좌표를 t ($0 \leq t < 4\pi$)라 하면

$$\sin \frac{t}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0, \sin \frac{t}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0 \leq \frac{t}{2} < 2\pi \text{ 이므로 } \frac{t}{2} = \frac{4}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{t}{2} = \frac{5}{3}\pi$$

$$t = \frac{8}{3}\pi \text{ 또는 } t = \frac{10}{3}\pi$$

선분 AB의 길이는

$$\frac{10}{3}\pi - \frac{8}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$$

11. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x) = \log_2(x+a)+b$ 의 그래프가 두 점 $(0, -2)$, $(3, 0)$ 을 지나므로

$$\log_2 a + b = -2 \dots \textcircled{①}$$

$$\log_2(3+a) + b = 0 \dots \textcircled{②}$$

①, ②에 의하여 $\log_2(3+a) - \log_2 a = 2$

$$\log_2(3+a) = \log_2 4a$$

$$a = 1, b = -2$$

함수 $f(x) = \log_2(x+1)-2$

$$f(15) = \log_2(15+1)-2 = 2$$

12. [출제의도] 등차수열 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 할 때,

$$S_n = \frac{n\{2a + (n-1)\times(-4)\}}{2}$$

$$= n\{a - 2(n-1)\}$$

$$S_{12} = 12(a-22) = 0, a = 22$$

$$S_n = n(-2n+24) = -2n^2 + 24n$$

$$= -2(n-6)^2 + 72$$

$n = 6$ 일 때, S_n 의 최댓값은 72

13. [출제의도] 로그 이해하기

$a^3 = b^2 = k$ (k 는 1이 아닌 양수)라 하면

$$a = k^{\frac{1}{3}}, b = k^{\frac{1}{2}}$$

$$\log_a c = \log_{\frac{1}{3}} c = 3 \log_k c,$$

$$\log_b c = \log_{\frac{1}{2}} c = 2 \log_k c \text{ 이므로}$$

$\log_a c = \log_b c + 1$ 에서

$$3 \log_k c = 2 \log_k c + 1$$

$$\log_k c = 1, c = k$$

$$\log_c ab = \log_k k^{\frac{1}{3}} k^{\frac{1}{2}} = \log_k k^{\frac{5}{6}} = \frac{5}{6}$$

14. [출제의도] 거듭제곱근을 활용하여 문제 해결하기

2 이상의 자연수 n 에 대하여

(i) n 이 홀수인 경우

$$n^2 - 12n + 27 \geq 0 \text{ 이면 } f(n) = 0$$

$$n^2 - 12n + 27 < 0 \text{ 이면 } f(n) = 1$$

(ii) n 이 짝수인 경우

$$n^2 - 12n + 27 > 0 \text{ 이면 } f(n) = 1$$

$$n^2 - 12n + 27 \leq 0 \text{ 이면 } f(n) = 0$$

$$n^2 - 12n + 27 = (n-3)(n-9) \text{ 이므로}$$

(i), (ii)에 의하여

$$\sum_{n=2}^{20} f(n) = f(2) + f(5) + f(7) + f(10) + f(12) \\ + f(14) + f(16) + f(18) + f(20) = 9$$

15. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 이해하기

자연수 n 에 대하여 두 점 A_n , B_n 의 x 좌표를 각각 α_n , β_n ($\alpha_n < \beta_n$)이라 하면

α_n , β_n 은 x 에 대한 방정식

$$x^2 - nx - 2n^2 = x + n \text{의 실근이다.}$$

$$x^2 - (n+1)x - n(2n+1) = 0$$

$$(x+n)(x-2n-1) = 0 \text{에서}$$

$$\alpha_n = -n, \beta_n = 2n+1$$

두 점 $A_n(-n, 0)$, $B_n(2n+1, 3n+1)$ 에

대하여 점 B_n 에서 직선 OA_n 에 내린

수선의 발을 H_n 이라 하면

$$H_n(2n+1, 0)$$

$$S_n = \frac{1}{2} \times \overline{OA_n} \times \overline{B_n H_n}$$

$$= \frac{1}{2} \times n \times (3n+1) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } \sum_{k=1}^4 S_k &= \sum_{k=1}^4 \left(\frac{3}{2} k^2 + \frac{1}{2} k \right) \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{4 \times 5 \times 9}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{4 \times 5}{2} \\ &= 50 \end{aligned}$$

16. [출제의도] 로그함수를 활용하여 문제 해결하기

(i) $0 < x \leq \frac{1}{3}$ 인 경우 $0 < x < 3x \leq 1$ 이므로

$$f(x) + f(3x) = \log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} 3x$$

$$= \log_{\frac{1}{3}} 3x^2 = 3$$

$$3x^2 = \frac{1}{27}$$

$$x = -\frac{1}{9} \text{ 또는 } x = \frac{1}{9}$$

$$0 < x \leq \frac{1}{3} \text{ 이므로 } x = \frac{1}{9}$$

(ii) $\frac{1}{3} < x \leq 1$ 인 경우

$$\frac{1}{3} < x \leq 1 < 3x \text{ 이므로}$$

$$f(x) + f(3x) = \log_{\frac{1}{3}} x + \log_3 3x$$

$$= \log_{\frac{1}{3}} x + \log_3 3 + \log_3 x = 1$$

이므로 방정식 $f(x) + f(3x) = 3$ 의 실근은 존재하지 않는다.(iii) $x > 1$ 인 경우 $1 < x < 3x$ 이므로

$$f(x) + f(3x) = \log_3 x + \log_3 3x$$

$$= \log_3 3x^2 = 3$$

$$3x^2 = 27$$

$$x = -3 \text{ 또는 } x = 3$$

$$x > 1 \text{ 이므로 } x = 3$$

(i) ~ (iii) 에 의하여

방정식 $f(x) + f(3x) = 3$ 의 모든 실근은

$$\frac{1}{9}, 3 \text{ 이고 그 합은 } \frac{28}{9}$$

17. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제 해결하기

점 P의 좌표는 $P(t, t^2)$ 점 Q의 좌표는 $Q(t, \sqrt{t})$ 점 A에서 직선 $x = t$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 $H(t, 1)$

$$S(t) = \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{AH}$$

$$= \frac{1}{2} \times (t^2 - \sqrt{t}) \times (t - 1)$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{S(t)}{(t-1)^2} &= \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{(t^2 - \sqrt{t})(t-1)}{2(t-1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \times \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{(t^4 - t)}{(t-1)(t^2 + \sqrt{t})} \\ &= \frac{1}{2} \times \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{t(t-1)(t^2 + t + 1)}{(t-1)(t^2 + \sqrt{t})} \\ &= \frac{1}{2} \times \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{t(t^2 + t + 1)}{t^2 + \sqrt{t}} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

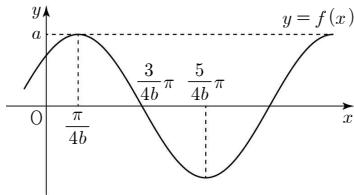
18. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제 해결하기

$$a \cos \left(bx - \frac{\pi}{4} \right) = a \cos b \left(x - \frac{\pi}{4b} \right) \text{ 이므로}$$

$$\text{함수 } f(x) = a \cos \left(bx - \frac{\pi}{4} \right) \text{의 그래프는}$$

함수 $y = a \cos bx$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{4b}$ 만큼 평행이동한 그래프와 일치한다.

$$\text{함수 } y = a \cos bx \text{의 주기는 } \frac{2\pi}{b} \text{ 이므로}$$

함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다. $0 \leq x \leq \pi$ 에서함수 $f(x)$ 의 최솟값이 음수이므로

$$\frac{3}{4b}\pi < \pi \quad \dots \textcircled{①}$$

함수 $f(x)$ 의 최댓값이 4 이므로 $a = 4$

$$\frac{5}{4b}\pi \leq \pi \text{ 일 때,}$$

함수 $f(x)$ 의 최솟값이 -4 ($\neq -2\sqrt{2}$) 이므로 $\pi < \frac{5}{4b}\pi \quad \dots \textcircled{②}$

①, ②에 의하여

 $0 \leq x \leq \pi$ 에서 함수 $f(x)$ 가 $x = \pi$ 일 때, 최솟값 $-2\sqrt{2}$ 를 갖는다.

$$\frac{3}{4b}\pi < \pi < \frac{5}{4b}\pi \text{ 이므로 } \frac{\pi}{2} < b\pi - \frac{\pi}{4} < \pi$$

$$f(\pi) = 4 \cos \left(b\pi - \frac{\pi}{4} \right) = -2\sqrt{2}$$

$$\cos \left(b\pi - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi, b = 1$$

$$a + b = 5$$

19. [출제의도] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제 해결하기

두 점 A, B는 곡선 $y = 3^x + b$ 위의 점이다. $b > 0$ 이므로 곡선 $y = 3^x + b$ 는직선 $y = x$ 와 만나지 않는다.점 B를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $B'(3^{a+3} + b, a+3)$ 이라 하자.

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AP} + \overline{B'P} \geq \overline{AB'} \text{ 이므로}$$

 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 값은 점 P가 직선 AB' 과직선 $y = x$ 의 교점일 때 최소이다.직선 AB' 과 직선 $y = x$ 의 교점을 P_0 이라 하면

$$\overline{AP_0} + \overline{BP_0} = \overline{AP_0} + \overline{B'P_0} = \overline{AB'} = 55$$

점 C의 y좌표가 $a+3$ 이므로

$$\log_3(x-a-b) = a+3, x = 3^{a+3} + a+b$$

 $C(3^{a+3} + a+b, a+3)$ 이다.점 C는 점 B' 을 x 축의 방향으로 a ($a > 0$) 만큼평행이동한 점과 일치하므로 $\overline{B'C} = a$ 이고직선 $B'C$ 는 x 축과 평행하다.

$$\overline{AB'} + \overline{B'C} = \overline{AC}$$
 이므로

점 B' 은 선분 AC 위의 점이고직선 AB' 은 x 축과 평행하다.

$$3^a + b = a+3 \quad \dots \textcircled{①}$$

$$\overline{AB'} = 55 \text{ 이므로}$$

$$3^{a+3} + b - a = 55 \quad \dots \textcircled{②}$$

$$\textcircled{①}, \textcircled{②}에 의하여 } 3^{a+3} - 3^a = 52$$

$$3^a = 2, a = \log_3 2, b = a+1$$

$$a+b = 2a+1 = \log_3 12$$

20. [출제의도] 균율적으로 정의된 수열 추론하기

(I) a_2 가 홀수인 경우

조건 (나)에 의하여

$$a_3 = \frac{a_2 + 3}{2} \geq a_2 \text{ 이므로 } a_2 \leq 3$$

① $a_2 = 1$ 인 경우

$$a_3 = 2, a_4 = 3 \text{ 이므로}$$

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

② $a_2 = 3$ 인 경우

$$a_3 = 3, a_4 = 3, a_5 = 3, \dots$$

$$a_1 = 3 \text{ 또는 } a_1 = 2$$

(II) a_2 가 짝수인 경우① $a_2 = 4k$ (k 는 자연수) 인 경우

$$a_3 = 6k, a_4 = 9k \text{ 이므로}$$

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

② $a_2 = 4k-2$ (k 는 자연수) 인 경우

$$a_3 = 6k-3, a_4 = 3k$$

(i) k 가 홀수인 경우

$$a_5 = \frac{3k+3}{2}, a_4 + a_5 = \frac{9k+3}{2} \leq 24$$

$$k \leq 5 \text{ 이므로 } k = 1, 3, 5$$

④ $k = 1$ 인 경우

$$a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 3, a_5 = 3, \dots$$

$$a_1 = 1 \text{ 또는 } a_1 = \frac{4}{3}$$

조건에 의하여 $a_1 = 1$ ⑤ $k = 3$ 인 경우

$$a_2 = 10, a_3 = 15$$

$$a_1 = 17 \text{ 또는 } a_1 = \frac{20}{3}$$

조건을 만족시키지 않는다.

⑥ $k = 5$ 인 경우

$$a_2 = 18, a_3 = 27, a_4 = 15, a_5 = 9,$$

$$a_6 = 6, a_7 = 9, a_8 = 6, \dots$$

$$a_1 = 33 \text{ 또는 } a_1 = 12$$

조건 (나)에 의하여 $a_1 = 12$ (ii) k 가 짝수인 경우

$$a_5 = \frac{9}{2}k, a_4 + a_5 = \frac{15}{2}k \leq 24$$

$$k \leq \frac{16}{5} \text{ 이므로 } k = 2$$

$$a_2 = 6, a_3 = 9, a_4 = 6, a_5 = 9, \dots$$

$$a_1 = 9 \text{ 또는 } a_1 = 4$$

(I), (II)에 의하여

 a_1 의 값은 1, 2, 3, 4, 9, 12 이고 그 합은 31

[참고]

조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 은 다음과 같다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	\dots
1	2	3	3	3	3	3	\dots
2	3	3	3	3	3	3	\dots
3	3	3	3	3	3	3	\dots
4	6	9	6	9	6	9	\dots
9	6	9	6	9	6	9	\dots
12	18	27	15	9	6	9	\dots

21. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기

$\angle ADB$, $\angle ACB$ 는 호 AB 에 대한 원주각이므로

$$\angle ADB = \angle ACB \quad \textcircled{⑦}$$

$\angle ABD$, $\angle ACD$ 는 호 AD 에 대한 원주각이므로

$$\angle ABD = \angle ACD \quad \textcircled{⑧}$$

선분 AC 가 삼각형 BCD 에 내접하는 원 C_2 의 넓이를 이등분하므로

$$\angle ACB = \angle ACD$$

⑦, ⑧에 의하여

$$\angle ABD = \angle ADB \text{이므로}$$

삼각형 ABD 는 이등변삼각형이다.

$$\overline{AB} = \overline{AD} = 2$$

$$\angle ACB = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right) \text{라 하면}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \theta} = \frac{2\sqrt{21}}{3}, \sin \theta = \frac{\sqrt{21}}{7} \text{이므로}$$

$$\cos \theta = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

$$\overline{BC} = x \text{ 라 하면}$$

삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + x^2 - 2 \times \overline{AC} \times x \times \cos \theta$$

$$4 = 7 + x^2 - 2 \times \sqrt{7} \times x \times \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0, (x-1)(x-3) = 0$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

$$\overline{CD} = y \text{ 라 하면}$$

삼각형 ACD 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + y^2 - 2 \times \overline{AC} \times y \times \cos \theta$$

$$4 = 7 + y^2 - 2 \times \sqrt{7} \times y \times \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

$$y^2 - 4y + 3 = 0, (y-1)(y-3) = 0$$

$$y = 1 \text{ 또는 } y = 3$$

$$\overline{BC} > \overline{CD} \text{ 이므로 } \overline{BC} = 3, \overline{CD} = 1$$

삼각형 ABD 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2}{2 \times \overline{AB} \times \overline{BD}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

$$\overline{BD} = \frac{8\sqrt{7}}{7}$$

삼각형 BCD 에서 $\angle BCD = 2\theta$ 이므로
사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin 2\theta} = \frac{2\sqrt{21}}{3}, \sin 2\theta = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

원 C_2 의 반지름의 길이를 r ,

삼각형 BCD 의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times r \times (\overline{BC} + \overline{CD} + \overline{BD})$$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{CD} \times \sin 2\theta \text{ 에서}$$

$$\frac{1}{2} \times r \times \left(3 + 1 + \frac{8\sqrt{7}}{7}\right) = \frac{1}{2} \times 3 \times 1 \times \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$r = \sqrt{3} - \frac{2}{7}\sqrt{21}$$

22. [출제의도] 지수가 포함된 방정식 계산하기

$$(5^2)^x = (5^{-1})^{x-9}, 5^{2x} = 5^{-x+9}$$

$$2x = -x + 9, x = 3$$

23. [출제의도] \sum 의 성질 이해하기

$$\sum_{k=1}^{10} (2a_k - b_k) + \sum_{k=1}^{10} b_k = 2 \times \sum_{k=1}^{10} a_k \text{이므로}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{1}{2} \times (80 + 30) = 55$$

24. [출제의도] 로그 이해하기

$$\log_3 25 \times (\log_5 9 + \log_5 25^3)$$

$$= \log_3 25 \times \log_5 9 + \log_3 25 \times \log_5 25^3$$

$$= 2\log_3 5 \times 2\log_5 3 + 1 = 5$$

25. [출제의도] 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기

삼각형 ABC 에서 $\angle B = \theta \left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$ 라 하면

삼각형 ABC 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 12 \times \sin \theta = 12\sqrt{15}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{15}}{4}, \cos \theta = -\frac{1}{4}$$

코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 8^2 + 12^2 - 2 \times 8 \times 12 \times \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$= 64 + 144 - 192 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = 256$$

선분 AC 의 길이는 16

26. [출제의도] 등비수열을 활용하여 문제 해결하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a_1 ($a_1 > 0$),

공비를 r 이라 하면

$$a_2 = a_1 \times r = -54 \quad \textcircled{⑨}$$

이므로 $r < 0$

$$6S_1 + S_2 + S_4 = 0 \text{이므로}$$

$$6a_1 + \frac{a_1 \times (1-r^2)}{1-r} + \frac{a_1 \times (1-r^4)}{1-r} = 0$$

$$6 + (1+r) + (1+r+r^2+r^3) = 0$$

$$r^3 + r^2 + 2r + 8 = 0$$

$$(r+2)(r^2 - r + 4) = 0$$

$$r = -2 \quad \textcircled{⑩}$$

⑨, ⑩에 의하여

$$a_5 = a_2 \times r^3 = (-54) \times (-8) = 432$$

27. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제 해결하기

함수 $y = a \sin \frac{\pi}{4}x + b$ 의 주기는 8,

치역은 $\{y | b-a \leq y \leq b+a\}$

정수 k 에 대하여 $A_k = \{x | f(x) = k\}$ 라 할 때,

$i \neq j$ 이면 $A_i \cap A_j = \emptyset$

임의의 집합 X ($\neq \emptyset$)에 대하여

집합 X 의 모든 원소의 합을 $S(X)$ 라 하자.

$A_{b+a} = \{2\}, S(A_{b+a}) = 2$

$A_b = \{0, 4, 8\}, S(A_b) = 12$

$A_{b-a} = \{6\}, S(A_{b-a}) = 6$

집합 $A = \{x | f(x) = n, n$ 은 자연수}라 할 때,

$(A_b \cup A_{b+a}) \subset A, S(A_b \cup A_{b+a}) = 14$

(i) $b = 1$ 인 경우

① $a = 1$ 일 때

$$f(x) = \sin \frac{\pi}{4}x + 1 \text{이고}$$

$$A_b \cup A_{b+a} = A, S(A) = 14 \text{이므로}$$

조건을 만족시키지 않는다.

② $a \geq 2$ 일 때

$b < m < b+a$ 인 정수 m 에 대하여

$$S(A_m) = 4,$$

$$(b+a) - b - 1 = 2, a = 3$$

$$A_b \cup A_{b+1} \cup A_{b+2} \cup A_{b+3} = A, S(A) = 22$$

(ii) $b \geq 2$ 인 경우

① $a = 1$ 일 때

$$f(x) = \sin \frac{\pi}{4}x + b \text{이고}$$

$$A_{b-a} \cup A_b \cup A_{b+a} = A, S(A) = 20 \text{이므로}$$

조건을 만족시키지 않는다.

② $a \geq 2$ 일 때

$$b-a < b-1 < b, S(A_{b-1}) = 12$$

$$(A_{b-1} \cup A_b \cup A_{b+a}) \subset A,$$

$$S(A_{b-1} \cup A_b \cup A_{b+a}) = 26$$

$S(A) > 22$ 이므로

조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $a = 3, b = 1$

$$a^2 + b^2 = 10$$

28. [출제의도] 등비수열을 활용하여 문제 해결하기

조건 (가)에 의하여

$$b_n = a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n} = 3a_{3n-1}$$

조건 (나)에 의하여 수열 $\{b_n\}$ 은

첫째항이 $3a_2$, 공비가 3인 등비수열이므로

모든 자연수 n 에 대하여

$$b_n = 3a_{3n-1} = 3a_2 \times 3^{n-1}$$

$$a_{3n-1} = a_2 \times 3^{n-1}$$

$$\sum_{k=1}^{14} a_k = a_{13} + a_{14} + \sum_{k=1}^4 (a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k})$$

$$= a_{13} + 81a_2 + \sum_{k=1}^4 b_k$$

$$= a_{13} + 81a_2 + 3a_2 \times \sum_{k=1}^4 3^{k-1}$$

$$= a_{13} + 81a_2 + 3a_2 \times \frac{3^4 - 1}{3 - 1}$$

$$= a_{13} + 201a_2 = 500$$

수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 자연수이므로

$$a_2 = 1 \text{ 또는 } a_2 = 2$$

(i) $a_2 = 1$ 인 경우

$$a_{13} = 299, a_{14} = 81, a_{15} < 0$$

조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_2 = 2$ 인 경우 $a_{13} = 98, a_{14} = 162, a_{15} = 226$ 이므로 조건을 만족시킨다.(i), (ii)에 의하여 $a_{13} = 98$

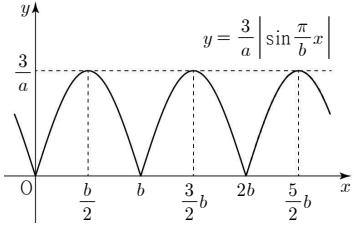
29. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 추론하기

두 자연수 a, b 에 대하여

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f\left(\sin \frac{\pi}{b}x + 3\right) \\ &= \frac{3}{a}\left|\left(\sin \frac{\pi}{b}x + 3\right) - 3\right| - b \\ &= \frac{3}{a}\left|\sin \frac{\pi}{b}x\right| - b \end{aligned}$$

함수 $y = \frac{3}{a}|\sin \frac{\pi}{b}x|$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $-b$ 만큼 평행이동하면함수 $y = f(g(x))$ 의 그래프와 일치하므로함수 $y = \frac{3}{a}|\sin \frac{\pi}{b}x|$ 의 그래프가직선 $x = 3$ 에 대하여 대칭일 때

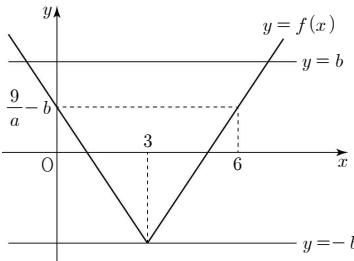
조건 (가)를 만족시킨다.

함수 $y = \frac{3}{a}|\sin \frac{\pi}{b}x|$ 의 주기는 b 함수 $y = \frac{3}{a}|\sin \frac{\pi}{b}x|$ 의 그래프는직선 $x = \frac{k}{2}b$ (k 는 정수)에 대하여 대칭이므로 $\frac{k}{2}b = 3$ 이다.조건 (가)를 만족시키는 자연수 b 는 $1, 2, 3, 6$ 함수 $y = g(f(x))$ 의 그래프가 직선 $y = 3$ 과만나는 점의 x 좌표를 α 라 할 때, $g(f(\alpha)) = 3$ $f(\alpha) = t$ 라 하면 $g(t) = 3$

$\sin \frac{\pi}{b}t + 3 = 3, \sin \frac{\pi}{b}t = 0$

 $t = 0, \pm b, \pm 2b, \dots$ $0 \leq x \leq 6$ 일 때, 함수 $y = g(f(x))$ 의 그래프가직선 $y = 3$ 과 만나는 서로 다른 점의 개수는함수 $y = f(x)$ 의 그래프가직선 $y = 0, y = \pm b, y = \pm 2b, \dots$ 와 만나는 서로 다른 점의 개수의 합과 같으므로

$0 \leq f(0) < b, 0 \leq \frac{9}{a} - b < b$

 $b \leq \frac{9}{a} < 2b$ 일 때, 조건 (나)를 만족시킨다.(i) $b = 1$ 인 경우

$1 \leq \frac{9}{a} < 2$ 이므로 $a = 5, 6, 7, 8, 9$

(ii) $b = 2$ 인 경우

$2 \leq \frac{9}{a} < 4$ 이므로 $a = 3, 4$

(iii) $b = 3$ 인 경우

$3 \leq \frac{9}{a} < 6$ 이므로 $a = 2, 3$

(iv) $b = 6$ 인 경우

$6 \leq \frac{9}{a} < 12$ 이므로 $a = 1$

(i) ~ (iv)에 의하여 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(5, 1), (6, 1), (7, 1), (8, 1), (9, 1),$ $(3, 2), (4, 2), (2, 3), (3, 3), (1, 6)$ $2a+b$ 의 최댓값 $M = 19$, 최솟값 $m = 7$

$M \times m = 133$

30. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 추론하기

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq g(x)$ 이면 $h(x) = g(x) + f(x)$ 이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 두 함수 $f(x), g(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만난다.방정식 $f(x) = g(x)$ 의 서로 다른 두 실근을 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)라 하자. $x \leq x_1$ 일 때, $f(x) \geq g(x)$ $x_1 < x < x_2$ 일 때, $f(x) < g(x)$ $x \geq x_2$ 일 때, $f(x) \geq g(x)$ 를 만족시킨다.

$$h(x) = \begin{cases} g(x) + f(x) & (x \leq x_1 \text{ 또는 } x \geq x_2) \\ g(x) - f(x) & (x_1 < x < x_2) \end{cases}$$

함수 $h(x)$ 는 $x = x_1$ 과 $x = x_2$ 를 제외한 모든 실수에서 극한값을 가지므로조건 (가)에 의하여 $x_1 = 2$ 또는 $x_2 = 2$ (i) $x_1 = 2$ 인 경우

$\lim_{x \rightarrow x_2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_2^+} h(x)$ 이다.

$\lim_{x \rightarrow x_2^-} h(x) = g(x_2) - f(x_2) = 0,$

$\lim_{x \rightarrow x_2^+} h(x) = g(x_2) + f(x_2) = 2g(x_2)$ 이므로

$g(x_2) = 0$

직선 $y = g(x)$ 의 기울기가 양수이므로

$g'(x_1) = g'(2) < 0$ 이다.

$\lim_{x \rightarrow x_1^-} h(x) = g(x_1) + f(x_1) = 2g(x_1) = 2g(2),$

$\lim_{x \rightarrow x_1^+} h(x) = g(x_1) - f(x_1) = 0$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow x_1^-} |h(x) - 1| = |2g(2) - 1| > 1,$

$\lim_{x \rightarrow x_1^+} |h(x) - 1| = |0 - 1| = 1$

 $|h(x) - 1|$ 의 값이 존재하지 않으므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.(ii) $x_2 = 2$ 인 경우

$\lim_{x \rightarrow x_1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_1^+} h(x)$ 이다.

$\lim_{x \rightarrow x_1^-} h(x) = g(x_1) + f(x_1) = 2g(x_1),$

$\lim_{x \rightarrow x_1^+} h(x) = g(x_1) - f(x_1) = 0$ 이므로

$g(x_1) = 0$

직선 $y = g(x)$ 의 기울기가 양수이므로 $g'(x_2) = g'(2) > 0$ 이다.

$\lim_{x \rightarrow x_2^-} h(x) = g(x_2) - f(x_2) = 0,$

$\lim_{x \rightarrow x_2^+} h(x) = g(x_2) + f(x_2) = 2g(x_2) = 2g(2)$ 이므로

$x_2 = 2$

$\lim_{x \rightarrow x_2^-} |h(x) - 1| = |0 - 1| = 1,$

$\lim_{x \rightarrow x_2^+} |h(x) - 1| = |2g(2) - 1|$

조건 (나)에 의하여 $g'(2) = 1$ (i), (ii)에 의하여 $x_2 = 2$

$g(2) = \frac{2}{3} + a = 1, a = \frac{1}{3}$ 이므로

$g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

$g(x_1) = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3} = 0, x_1 = -1$

$f(x_1) = f(-1) = g(-1) = 0,$

$f(x_2) = f(2) = g(2) = 1$

상수 p 에 대하여

$f(x) - g(x) = p(x+1)(x-2)$ 라 하면

$x_1 < 0 < x_2$ 이므로

$h(0) = g(0) - f(0) = 2p = \frac{7}{3}$

$p = \frac{7}{6}$

$f(x) = \frac{7}{6}(x+1)(x-2) + g(x)$

$x_2 < 5$ 이므로

$h(5) = g(5) + f(5) = 2 + (21 + 2) = 25$