

최근 수정일 : 2025. 8. 13.(수)

■ [공통: 수학 I·수학 II]

01. ④ 02. ⑤ 03. ③ 04. ③ 05. ⑤
06. ① 07. ④ 08. ① 09. ③ 10. ⑤
11. ⑤ 12. ③ 13. ③ 14. ④ 15. ②
16. 7 17. 23 18. 2 19. 16
20. 24 21. 15 22. 231

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\left(\frac{5}{\sqrt[3]{25}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{5}{5^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \\ = 5^{\frac{1}{3} \times \frac{3}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

정답 ④

2. 출제의도 : 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = x^2 + x + 2 \text{에서 } f'(x) = 2x + 1$$

따라서,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(2) \\ = 2 \times 2 + 1 = 5$$

정답 ⑤

3. 출제의도 : 합의 기호 \sum 의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^5 (a_k + 1) = \sum_{k=1}^5 a_k + \sum_{k=1}^5 1 \\ = \sum_{k=1}^5 a_k + 1 \times 5 \\ = 9$$

에서

$$\sum_{k=1}^5 a_k = 9 - 5 = 4$$

따라서

$$\sum_{k=1}^6 a_k = \sum_{k=1}^5 a_k + a_6 \\ = 4 + 4 = 8$$

정답 ③

4. 출제의도 : 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 2 + 1 = 3$$

정답 ③

5. 출제의도 : 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 2x + 2) \text{에서}$$

$$f'(x) = 2x(x^2 + 2x + 2) + (x^2 - 1)(2x + 2)$$

이므로

$$f'(1) = 2 \times 5 = 10$$

정답 ⑤

6. 출제의도 : 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{3}{5} \text{에서} \\ \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left\{-\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right\} \\ &= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= -\cos\theta\end{aligned}$$

이므로

$$-\cos\theta = \frac{3}{5}$$

$$\text{즉 } \cos\theta = -\frac{3}{5}$$

한편, $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 에서

$$\sin\theta < 0$$

따라서

$$\begin{aligned}\sin\theta &= -\sqrt{1 - \cos^2\theta} \\ &= -\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} \\ &= -\sqrt{\frac{16}{25}} \\ &= -\frac{4}{5}\end{aligned}$$

정답 ①

7. 출제의도 : 다항함수의 미분을 활용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + k$ 로 놓으면

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1, x = 3$$

$$f(-1) = k+5, f(3) = k-27$$

삼차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 $x = -1$ 에서 극댓값 $k+5$ 를 갖고, $x = 3$ 에서 극솟값 $k-27$ 을 갖는다.

이때 방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되려면 극댓값 또는 극솟값이 0이어야 하므로

$$k+5 = 0 \text{ 또는 } k-27 = 0$$

$$\text{즉 } k = -5 \text{ 또는 } k = 27$$

따라서 조건을 만족시키는 모든 실수 k 의 값의 합은

$$-5 + 27 = 22$$

정답 ④

8. 출제의도 : 등비수열의 일반항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하면

$$a_6 = 16$$

이므로

$$a_8 = a_6 \times r^2 = 16r^2, a_7 = a_6 \times r = 16r$$

$$2a_8 - 3a_7 = 32 \text{이므로}$$

$$2 \times 16r^2 - 3 \times 16r = 32$$

$$2r^2 - 3r - 2 = 0$$

$$(2r+1)(r-2) = 0$$

$$a_1 a_2 < 0 \text{에서 } r < 0 \text{이므로}$$

$$r = -\frac{1}{2}$$

따라서

$$\begin{aligned}a_9 + a_{11} &= a_6 \times r^3 + a_6 \times r^5 \\ &= 16 \times \left(-\frac{1}{8}\right) + 16 \times \left(-\frac{1}{32}\right)\end{aligned}$$

$$= -2 + \left(-\frac{1}{2}\right) \\ = -\frac{5}{2}$$

정답 ①

9. 출제의도 : 함수가 연속일 조건을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서만 불연속이므로
함수 $(f(x)+a)^2$ 이 $x=0$ 에서 연속이
되도록 a 의 값을 정한다.

$$\lim_{x \rightarrow 0-} (f(x)+a)^2 = (f(0)+a)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \left(x - \frac{1}{2} + a\right)^2 = (3+a)^2$$

$$\left(-\frac{1}{2} + a\right)^2 = (3+a)^2$$

$$a^2 - a + \frac{1}{4} = a^2 + 6a + 9$$

$$7a = -\frac{35}{4}$$

$$\text{따라서 } a = -\frac{5}{4}$$

정답 ③

10. 출제의도 : 사인법칙, 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$
라 하고, 삼각형 ABC의 외접원의 반지
름의 길이를 R 이라 하자.

삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 9π 이므로
 $\pi R^2 = 9\pi$ 에서 $R=3$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

조건 (가)에서 $3\sin A = 2\sin B$ 이므로

$$3 \times \frac{a}{2R} = 2 \times \frac{b}{2R}$$

$$b = \frac{3}{2}a \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

조건 (나)에서 $\cos B = \cos C$ 이므로

$$b = c \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧에서 양수 k 에 대하여 $a=2k$ 라 하
면 $b=c=3k$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ = \frac{(3k)^2 + (3k)^2 - (2k)^2}{2 \times 3k \times 3k} = \frac{7}{9}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{9}\right)^2} = \frac{4}{9} \sqrt{2}$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R = 2 \times 3 = 6 \text{에서}$$

$$a = 6 \sin A = 6 \times \frac{4}{9} \sqrt{2} = \frac{8}{3} \sqrt{2}$$

$$b = c = \frac{3}{2}a = \frac{3}{2} \times \frac{8}{3} \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

따라서 구하는 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} \times \frac{4}{9} \sqrt{2} \\ = \frac{64}{9} \sqrt{2}$$

정답 ⑤

11. 출제의도 : 미분계수의 정의를 이용
하여 삼차함수의 그래프의 접선의 방정
식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$ 이므로

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx \quad (p, q \text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다.

이때

$$f'(x) = 3x^2 + 2px + q$$

이다.

삼차함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - 1}{x - a} = 3 \text{에서}$$

$$f(a) = 1 \text{이고 } f'(a) = 3 \text{이다.}$$

한편, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

이므로

$$y = 3(x - a) + 1, \text{ 즉 } y = 3x - 3a + 1 \text{이다.}$$

이 접선의 y 절편이 4이므로

$$-3a + 1 = 4$$

에서

$$a = -1$$

이상에서 $f(-1) = 1, f'(-1) = 3$ 이므로

$$f(-1) = -1 + p - q = 1 \text{에서}$$

$$p - q = 2 \quad \cdots \text{㉠}$$

이고,

$$f'(-1) = 3 - 2p + q = 3 \text{에서}$$

$$2p - q = 0 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하면

$$p = -2, q = -4$$

이므로

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x$$

이다.

$$\text{따라서 } f(1) = 1 - 2 - 4 = -5$$

정답 ⑤

12. 출제의도 : 지수함수의 그래프를 이

용하여 조건을 만족시키는 사각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 A, B의 x 좌표를 a 라 하면

$$A(a, 1 - 2^{-a}), B(a, 2^a)$$

이므로

$$\overline{AB} = 2^a - (1 - 2^{-a}) = 2^a + 2^{-a} - 1$$

두 점 C, D의 x 좌표를 c 라 하면

$$C(c, 2^c), D(c, 1 - 2^{-c})$$

이므로

$$\overline{CD} = 2^c - (1 - 2^{-c}) = 2^c + 2^{-c} - 1$$

이때 두 점 A, C의 y 좌표가 같으므로

$$2^c = 1 - 2^{-a}$$

즉,

$$\overline{CD} = (1 - 2^{-a}) + \frac{1}{1 - 2^{-a}} - 1$$

$$= -2^{-a} + \frac{2^a}{2^a - 1}$$

주어진 조건에 의하여 $\overline{AB} = 2\overline{CD}$ 이므로

$$2^a + 2^{-a} - 1 = -2^{-a+1} + \frac{2^{a+1}}{2^a - 1}$$

여기서 $2^a = t$ 로 놓으면

$$t + \frac{1}{t} - 1 = -\frac{2}{t} + \frac{2t}{t-1}$$

양변에 $t(t-1)$ 을 곱하여 정리하면

$$t^3 - 4t^2 + 4t - 3 = 0$$

$$(t-3)(t^2 - t + 1) = 0$$

t 는 실수이므로 $t = 3$

$$\text{즉, } 2^a = 3 \text{이므로 } a = \log_2 3$$

이때

$$2^c = 1 - 2^{-a} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

이므로

$$c = \log_2 \frac{2}{3} = 1 - \log_2 3$$

따라서 조건을 만족시키는 사각형
ABCD의 넓이는

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times (a-c) \times (2^a - 1 + 2^{-c}) \\ &= \frac{1}{2} \times (2\log_2 3 - 1) \times \left(3 - 1 + \frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{7}{4} (2\log_2 3 - 1) \\ &= \frac{7}{2} \log_2 3 - \frac{7}{4} \end{aligned}$$

정답 ③

13. 출제의도 : 정적분을 이용하여 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x, \quad g(x) = mx + 2 \text{라 하고}$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 교점의
 x 좌표를 α 라 하면

$$A = \int_0^{\alpha} \{g(x) - f(x)\} dx$$

$$B = \int_{\alpha}^2 \{f(x) - g(x)\} dx$$

따라서

$$B - A$$

$$= \int_{\alpha}^2 \{f(x) - g(x)\} dx - \int_0^{\alpha} \{g(x) - f(x)\} dx$$

$$= \int_{\alpha}^2 \{f(x) - g(x)\} dx + \int_0^{\alpha} \{f(x) - g(x)\} dx$$

$$= \int_0^2 \{f(x) - g(x)\} dx$$

$$= \int_0^2 \left\{ \left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x \right) - (mx + 2) \right\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{m}{2}x^2 - 2x \right]_0^2$$

$$= 1 + 1 - 2m - 4$$

$$= -2m - 2 = \frac{2}{3}$$

$$\text{따라서 } m = -\frac{4}{3}$$

정답 ③

14. 출제의도 : 로그의 성질 및 로그부
등식을 이용하여 주어진 조건을 만족시
키는 모든 자연수 k 의 값의 합을 구할
수 있는가?

정답풀이 :

$$\log_2 \sqrt{-n^2 + 10n + 75} \text{에서}$$

진수 조건에 의하여

$$\sqrt{-n^2 + 10n + 75} > 0,$$

$$\text{즉 } -n^2 + 10n + 75 > 0 \text{에서}$$

$$n^2 - 10n - 75 < 0$$

$$(n+5)(n-15) < 0$$

$$-5 < n < 15$$

이때, n 이 자연수이므로

$$1 \leq n < 15 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\text{또 } \log_4(75 - kn) \text{에서}$$

진수 조건에 의하여

$$75 - kn > 0,$$

$$\text{즉 } n < \frac{75}{k} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

한편,

$$\log_2 \sqrt{-n^2 + 10n + 75} - \log_4(75 - kn)$$

의 값이 양수이므로

$$\log_2 \sqrt{-n^2 + 10n + 75} - \log_4(75 - kn) > 0$$

에서

$$\log_4(-n^2 + 10n + 75) - \log_4(75 - kn) > 0$$

$$\log_4(-n^2 + 10n + 75) > \log_4(75 - kn)$$

이때 밑 4가 1보다 크므로

$$-n^2 + 10n + 75 > 75 - kn$$

$$n(n - 10 - k) < 0$$

k 가 자연수이므로

$$0 < n < 10 + k \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

주어진 조건을 만족시키는 자연수 n 의 개수가 12이므로

\textcircled{A} , \textcircled{C} 에서

$$10 + k > 12$$

이어야 한다.

즉, $k > 2$ 이어야 한다.

(i) $k=3$ 일 때,

\textcircled{A} , \textcircled{C} , \textcircled{E} 에서

$$1 \leq n < 13$$

따라서 자연수 n 의 개수가 12이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) $k=4$ 일 때,

\textcircled{A} , \textcircled{C} , \textcircled{E} 에서

$$1 \leq n < 14$$

따라서 자연수 n 의 개수가 13이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(iii) $k=5$ 일 때,

\textcircled{A} , \textcircled{C} , \textcircled{E} 에서

$$1 \leq n < 15$$

따라서 자연수 n 의 개수가 14이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(iv) $k=6$ 일 때,

\textcircled{A} , \textcircled{C} , \textcircled{E} 에서

$$1 \leq n < \frac{25}{2}$$

따라서 자연수 n 의 개수가 12이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(v) $k \geq 7$ 일 때

$$\frac{75}{k} < 11 \text{이므로}$$

주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(i) ~ (v)에서

$$k=3 \text{ 또는 } k=6$$

따라서 모든 자연수 k 의 값의 합은

$$3 + 6 = 9$$

정답 ④

15. 출제의도 : 정적분의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼차함수 $f(x)$ 에 대하여

$$g(x) = \begin{cases} 2x - k & (x \leq k) \\ f(x) & (x > k) \end{cases} \text{이므로}$$

$$g'(x) = \begin{cases} 2 & (x < k) \\ f'(x) & (x > k) \end{cases}$$

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 를 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (단, a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

또한,

$$h_1(t) = |t(t-1)| + t(t-1)$$

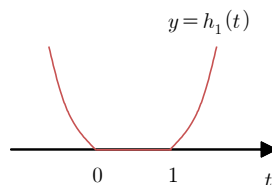
$$h_2(t) = |(t-1)(t+2)| - (t-1)(t+2)$$

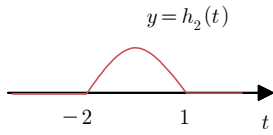
라 할 때,

$$h_1(t) = \begin{cases} 2t(t-1) & (t \leq 0 \text{ 또는 } t \geq 1) \\ 0 & (0 < t < 1) \end{cases}$$

$$h_2(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq -2 \text{ 또는 } t \geq 1) \\ -2(t-1)(t+2) & (-2 < t < 1) \end{cases}$$

이므로 두 함수 $y = h_1(t)$, $y = h_2(t)$ 의 그래프는 각각 다음과 같다.





한편,

p 가 상수일 때, 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_p^x h(t)dt \geq 0 \text{ 이기 위해서는}$$

구간 $[p, x]$ 에서는 $h(t) \geq 0$ 이고

구간 $[x, p]$ 에서는 $h(t) \leq 0$

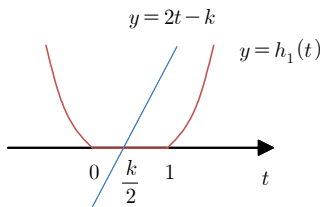
이어야 한다.

(i) 조건 (나)에서 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_0^x g(t)h_1(t)dt \geq 0 \text{ 이므로}$$

$$\text{그림과 같이 } 0 \leq \frac{k}{2} \leq 1, \text{ 즉 } 0 \leq k \leq 2$$

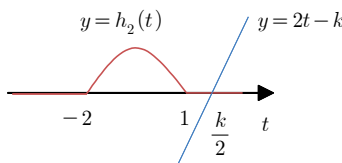
이어야 한다.



(ii) 조건 (나)에서 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_3^x g(t)h_2(t)dt \geq 0 \text{ 이므로}$$

$$\text{그림과 같이 } \frac{k}{2} \geq 1, \text{ 즉 } k \geq 2 \text{ 이어야 한다.}$$



(i), (ii)에 의하여 $k = 2$

조건 (가)에서 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x = k = 2$ 에서도 미분가능하고 연속이다.

$$g'(2) = f'(2) = 2 \text{ 에서}$$

$$12 + 4a + b = 2, \quad b = -4a - 10$$

$$g(2) = f(2) = 2 \text{ 에서}$$

$$8 + 4a + 2b + c = 2$$

$$c = -4a - 2b - 6$$

$$= -4a - 2(-4a - 10) - 6 = 4a + 14$$

따라서

$$f(x) = x^3 + ax^2 - (4a + 10)x + 4a + 14 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

한편,

함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분 가능하고 증가하므로 $g'(x) \geq 0$ 이다.

따라서 $x \geq 2$ 일 때 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

$$f'(x) = 3\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 + b - \frac{a^2}{3} \text{ 에서}$$

$$\textcircled{1} \quad -\frac{a}{3} < 2, \text{ 즉 } a > -6 \text{ 일 때}$$

$$f'(2) = 12 + 4a + b = 12 + 4a - 4a - 10 = 2 > 0 \text{ 이 되어 조건을 만족시킨다.}$$

$$a > -6 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$\textcircled{2} \quad -\frac{a}{3} \geq 2, \text{ 즉 } a \leq -6 \text{ 일 때}$$

$$b - \frac{a^2}{3} \geq 0, \text{ 즉 } a^2 - 3b \leq 0 \text{ 이어야 하}$$

므로

$$a^2 - 3b = a^2 - 3(-4a - 10) \leq 0$$

$$a^2 + 12a + 30 \leq 0, \quad (a + 6)^2 \leq 6$$

$$-6 - \sqrt{6} \leq a \leq -6 + \sqrt{6} \text{ 이므로}$$

$$-6 - \sqrt{6} \leq a \leq -6 \quad \dots\dots \textcircled{\ominus}$$

$\textcircled{L}, \textcircled{\ominus}$ 에서

$$a \geq -6 - \sqrt{6} \quad \dots\dots \textcircled{\omin�}$$

$\textcircled{7}$ 에 $x = 3$ 을 대입하면 $\textcircled{\omin�}$ 에서

$$\begin{aligned} g(k+1) &= g(3) = f(3) \\ &= 27 + 9a - 12a - 30 + 4a + 14 \\ &= a + 11 \geq 5 - \sqrt{6} \end{aligned}$$

따라서 $g(3)$ 의 최솟값은 $5 - \sqrt{6}$ 이다.

정답 ②

16. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 로그가 포함된 방정식의 해를 구할 수

있는가?

정답풀이 :

로그의 진수의 조건에 의하여

$$x+1>0, x-3>0$$

$$\text{즉 } x>3 \cdots \cdots \textcircled{\ominus}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-3)=-\log_2(x-3) \text{이므로}$$

$$\log_2(x+1)-5=\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \text{에서}$$

$$\log_2(x+1)+\log_2(x-3)=5$$

$$\log_2(x+1)(x-3)=5$$

$$(x+1)(x-3)=2^5=32$$

$$x^2-2x-35=0$$

$$(x+5)(x-7)=0$$

$$x=-5 \text{ 또는 } x=7$$

이때 $\textcircled{\ominus}$ 에 의하여

$$x=7$$

정답 7

17. 출제의도 : 부정적분을 이용하여 함
숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f'(x)=6x^2+2 \text{이므로}$$

$$f(x)=\int (6x^2+2)dx$$

$$=2x^3+2x+C \text{ (} C \text{는 적분상수)}$$

$$f(0)=3 \text{이므로}$$

$$C=3$$

따라서

$$f(x)=2x^3+2x+3$$

이므로

$$f(2)=2 \times 2^3+2 \times 2+3$$

$$=23$$

정답 23

18. 출제의도 : 여러 가지 수열의 합을
구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^9 (ak^2-10k)$$

$$=a \sum_{k=1}^9 k^2-10 \sum_{k=1}^9 k$$

$$=a \times \frac{9 \times 10 \times 19}{6}-10 \times \frac{9 \times 10}{2}$$

$$=285a-450=120$$

$$285a=570$$

$$\text{따라서 } a=2$$

정답 2

19. 출제의도 : 속도와 거리의 관계와
정적분을 이용하여 점 P의 위치를 구할
수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각에서
 $v(t)=0$ 이다.

$$0 \leq t \leq 3 \text{일 때,}$$

$$-t^2+t+2=0 \text{에서 } (t-2)(t+1)=0$$

$$t>0 \text{이므로 } t=2$$

$$t>3 \text{일 때,}$$

$$k(t-3)-4=0 \text{에서 } kt=3k+4$$

$$t=3+\frac{4}{k}$$

따라서 출발 후 점 P의 운동 방향이 두

번재로 바뀌는 시각은 $t=3+\frac{4}{k}$

원점을 출발한 점 P의 시각 $t=3+\frac{4}{k}$ 에

서의 위치가 1이므로

$$\int_0^{3+\frac{4}{k}} v(t) dt = 1 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^3 v(t) dt + \int_3^{3+\frac{4}{k}} v(t) dt \\ &= \int_0^3 (-t^2 + t + 2) dt + \int_3^{3+\frac{4}{k}} (kt - 3k - 4) dt \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} \int_0^3 (-t^2 + t + 2) dt &= \left[-\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 2t \right]_0^3 \\ &= -9 + \frac{9}{2} + 6 = \frac{3}{2} \quad \cdots \cdots \text{㉠} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_3^{3+\frac{4}{k}} (kt - 3k - 4) dt &= \left[\frac{1}{2}kt^2 - (3k+4)t \right]_3^{3+\frac{4}{k}} \\ &= -\frac{8}{k} \quad \cdots \cdots \text{㉡} \end{aligned}$$

㉠, ㉡에서

$$\int_0^3 v(t) dt + \int_3^{3+\frac{4}{k}} v(t) dt = \frac{3}{2} + \left(-\frac{8}{k} \right) = 1$$

$$\frac{8}{k} = \frac{1}{2} \text{에서 } k = 16$$

정답 16

20. 출제의도 : 삼각함수의 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 두 자연수의 합의 최댓값과 최솟값의 곱을 구할 수 있는가?

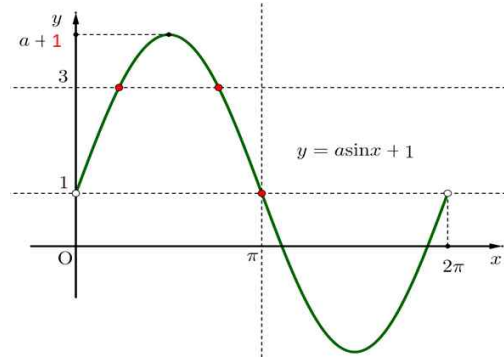
정답풀이 :

(i) $b=1$ 인 경우

$n(A \cup B \cup C) = 3$ 을 만족시키려면

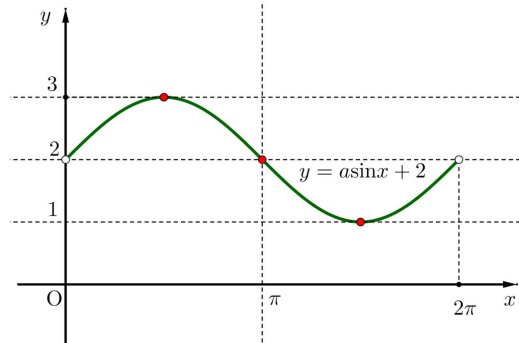
$$a+1 > 3, \text{ 즉 } a > 2$$

이어야 하므로 5 이하의 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는



$(3,1), (4,1), (5,1)$
이다.

(ii) $b=2$ 인 경우

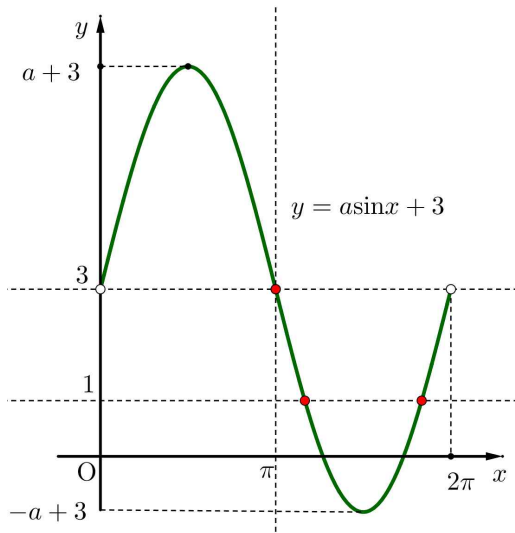


$n(A \cup B \cup C) = 3$ 을 만족시키려면

$$a = 1$$

이어야 하므로 5 이하의 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는
 $(1, 2)$
이다.

(iii) $b=3$ 인 경우



$n(A \cup B \cup C) = 3$ 을 만족시키려면

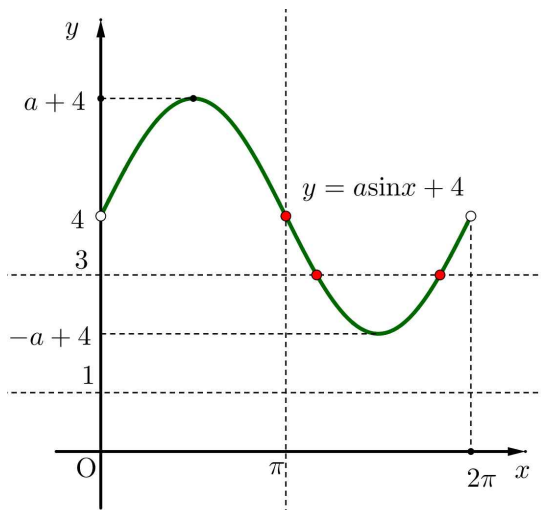
$-a+3 < 1$, 즉 $a > 2$

이어야 하므로 5 이하의 자연수 a, b 의
순서쌍 (a, b) 는

$(3, 3), (4, 3), (5, 3)$

이다.

(iv) $b=4$ 인 경우



$n(A \cup B \cup C) = 3$ 을 만족시키려면

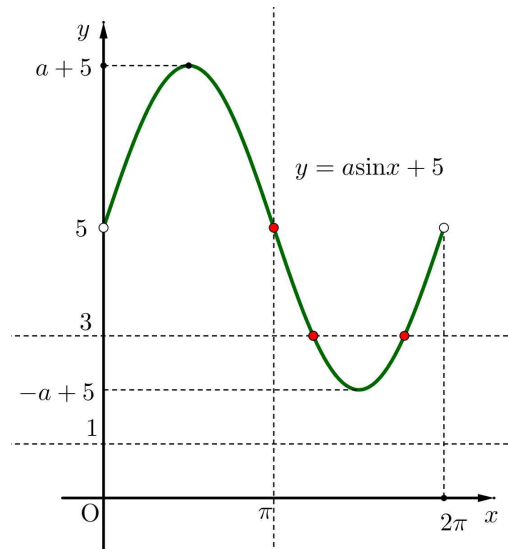
$1 < -a+4 < 3$, 즉 $1 < a < 3$

이어야 하므로 5 이하의 자연수 a, b 의
순서쌍 (a, b) 는

$(2, 4)$

이다.

(v) $b=5$ 인 경우



$n(A \cup B \cup C) = 3$ 을 만족시키려면

$1 < -a+5 < 3$, 즉 $2 < a < 4$

이어야 하므로 5 이하의 자연수 a, b 의
순서쌍 (a, b) 는

$(3, 5)$

이다.

이상에서 $a+b$ 의 최댓값과 최솟값은 각각

$M=8, m=3$

이므로

$M \times m = 24$

정답 24

21. 출제의도 : 다항함수의 미분을 활용하여 함수의 그래프에 대한 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에서 방정식 $f(x)=k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3 이상인 실수 k 의 값이 존재하므로 삼차방정식 $f'(x)=0$ 은

서로 다른 세 실근을 갖는다.

삼차방정식 $f'(x)=0$ 의 서로 다른 세 실근을 각각 $\alpha, \beta, \gamma(\alpha < \beta < \gamma)$ 라 하면 부등식 $f'(x) \leq 0$ 의 해가

$$x \leq \alpha \text{ 또는 } \beta \leq x \leq \gamma$$

이므로 조건 (가)에 의하여 $\gamma=2$

$f'(1)=0, f'(2)=0$ 에서 $b \neq 1, b < 2$ 인 상수 b 에 대하여

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4(x-1)(x-2)(x-b) \\ &= 4x^3 - 4(b+3)x^2 + 4(3b+2)x - 8b \end{aligned}$$

로 놓으면

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)dx \\ &= x^4 - \frac{4}{3}(b+3)x^3 + 2(3b+2)x^2 - 8bx + C \\ &\quad (C \text{는 상수}) \end{aligned}$$

$f(0)=0$ 에서 $C=0$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - \frac{4}{3}(b+3)x^3 + 2(3b+2)x^2 - 8bx \\ &\dots\dots\textcircled{7} \end{aligned}$$

이때 조건 (나)를 만족시키는 경우는 다음과 같다.

(i) $b < 1$ 이고 $f(b) < f(2)$ 인 경우

조건 (나)에 의하여 $f(2) = \frac{8}{3}$ 이어야 하므로

로 $\textcircled{7}$ 에서

$$\begin{aligned} f(2) &= 16 - \frac{32}{3}(b+3) + 8(3b+2) - 16b \\ &= -\frac{8}{3}b = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$b = -1$$

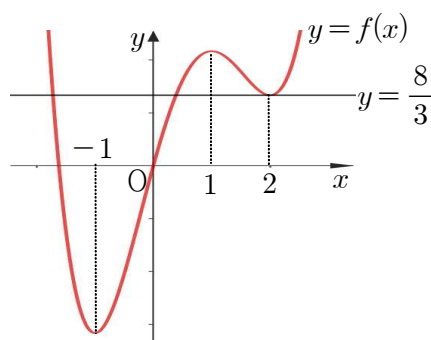
$$f(x) = x^4 - \frac{8}{3}x^3 - 2x^2 + 8x \text{에서}$$

$$f(-1) = 1 + \frac{8}{3} - 2 - 8 = -\frac{19}{3} < \frac{8}{3} \text{이므로}$$

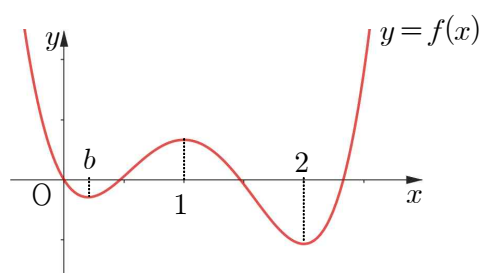
조건을 만족시킨다.

따라서

$$f(3) = 81 - 72 - 18 + 24 = 15$$



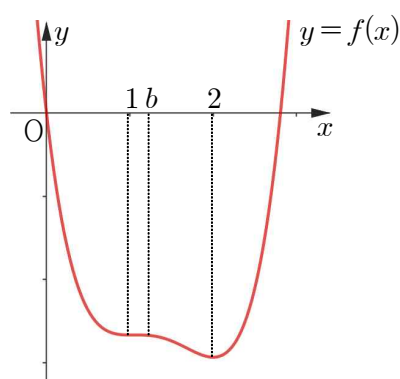
(ii) $b < 1$ 이고 $f(2) < f(b)$ 인 경우



함수 $f(x)$ 는 $x=b$ 에서 극소이고 $f(0)=0$ 이므로 $f(b) \leq 0$ 이다.

따라서 방정식 $f(x)=k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k 의 최솟값은 0 또는 음수이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $1 < b < 2$ 인 경우



함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이고 $f(0)=0$ 이므로 $f(1) < 0$ 이다.

따라서 방정식 $f(x)=k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k 의 최솟값은 음수이므로 조건 (나)를 만

족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $f(3)=15$ 이다.

정답 15

22. 출제의도 : 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 첫째항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

15 이하의 자연수 n 에 대하여

$n \neq 4, n \neq 9$ 이면 $a_{n+1} = a_n + 1$ 이므로

$$a_n = a_{n+1} - 1$$

그러므로 $a_{15} = 1$ 에서 $a_{14} = a_{15} - 1 = 0$,

$$a_{13} = a_{14} - 1 = -1, a_{12} = a_{13} - 1 = -2$$

$$a_{11} = a_{12} - 1 = -3, a_{10} = a_{11} - 1 = -4$$

i) $a_9 > 0$ 일 때

$$a_9 - \sqrt{9} \times a_{\sqrt{9}} = a_{10} = -4$$

그러므로 $a_9 = 3a_3 - 4$ 에서 $a_5 = 3a_3 - 8$

i -1) $a_4 > 0$ 일 때

$$a_5 = a_4 - \sqrt{4} \times a_{\sqrt{4}} \text{이므로}$$

$$a_4 - 2a_2 = 3a_3 - 8. \text{ 즉, } a_4 = 3a_3 + 2a_2 - 8$$

그러므로 $a_4 = a_3 + 1$ 에서 $a_3 = a_4 - 1$ 이므로

$$a_3 = 3a_3 + 2a_2 - 9$$

$$\text{즉, } a_3 + a_2 = \frac{9}{2}$$

$$a_3 = a_2 + 1 \text{이므로 } a_2 = \frac{7}{4}, a_3 = \frac{11}{4}$$

$$a_9 = \frac{33}{4} - 4 > 0, a_4 = \frac{33}{4} + \frac{14}{4} - 8 > 0$$

$$\text{그러므로 } a_1 = -a_2 = -\frac{7}{4}$$

i -2) $a_4 \leq 0$ 일 때

$$a_4 + 1 = a_5 = 3a_3 - 8$$

그러므로 $a_4 = 3a_3 - 9$ 에서

$$a_3 = a_4 - 1 = 3a_3 - 9 - 1$$

$$a_3 = 3a_3 - 10$$

$$\text{즉, } a_3 = 5$$

그런데 $a_3 = 5$ 이면 $a_4 = 6 > 0$ 이므로 모순이다.

ii) $a_9 \leq 0$ 일 때

$$a_9 = a_{10} - 1 = -5 \text{에서 } a_5 = -9$$

ii -1) $a_4 > 0$ 일 때

$$a_5 = a_4 - \sqrt{4} \times a_{\sqrt{4}} = a_4 - 2a_2$$

$$\text{즉, } a_4 = a_5 + 2a_2 \text{이므로 } a_4 = 2a_2 - 9$$

$$\text{또, } a_3 = a_4 - 1 = 2a_2 - 9 - 1 = 2a_2 - 10$$

그런데 $a_3 = a_2 + 1$ 이므로

$$a_2 + 1 = 2a_2 - 10$$

$$a_2 = 11$$

$$a_4 = 2 \times 11 - 9 > 0$$

$$\text{그러므로 } a_1 = -a_2 = -11$$

ii -2) $a_4 \leq 0$ 일 때

$$a_5 = a_4 + 1 = -9$$

$$\text{그러므로 } a_4 = -10 \text{에서}$$

$$a_3 = -11, a_2 = -12$$

$$\text{그러므로 } a_1 = -a_2 = 12$$

i), ii)에서 모든 a_1 의 곱은

$$-\frac{7}{4} \times (-11) \times 12 = 231$$

정답 231

■ [선택: 미적분]

23. ② 24. ③ 25. ③ 26. ② 27. ②
28. ④ 29. 55 30. 25

23. 출제의도 : 등비수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^n} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{3} \times 0}{\frac{1}{2} + 0} \\ &= 2 \end{aligned}$$

정답 ②

24. 출제의도 : 음함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x \sin 2y + 3x = 3$ 에서

y 를 x 의 함수로 보고 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$\sin 2y + x \cos 2y \times 2 \times \frac{dy}{dx} + 3 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2y + 3}{-2x \cos 2y} \quad (\text{단, } x \cos 2y \neq 0)$$

따라서 점 $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\begin{aligned} & \frac{\sin\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) + 3}{-2 \times 1 \times \cos\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sin \pi + 3}{-2 \cos \pi} \\ &= \frac{3}{-(-2)} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

정답 ③

25. 출제의도 : 급수와 일반항 사이의 관계를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{3n^2 - n}{2n^2 + 1} \right) = 2$$

이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{3n^2 - n}{2n^2 + 1} \right) = 0$$

이때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n}{2n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{3}{2}$$

이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(a_n - \frac{3n^2 - n}{2n^2 + 1} \right) + \frac{3n^2 - n}{2n^2 + 1} \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{3n^2 - n}{2n^2 + 1} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n}{2n^2 + 1}$$

$$= 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + 2a_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{3}{2}$$

$$= \frac{9}{4} + 3 = \frac{21}{4}$$

정답 ③

26. 출제의도 : 지수함수의 그래프를 이용하여 삼각형의 넓이를 로그로 나타내고, 로그함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 A의 x좌표를 a라 하면

$$e^{a^2} - 1 = t$$

이므로

$$a^2 = \ln(1+t)$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = \sqrt{\ln(1+t)}$$

또, 점 B의 x좌표를 b라 하면

$$e^{b^2} - 1 = 5t$$

이므로

$$b^2 = \ln(1+5t)$$

$$b > 0 \text{ 이므로 } b = \sqrt{\ln(1+5t)}$$

그러므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$S(t) = \frac{1}{2} \times 5t \times (\sqrt{\ln(1+5t)} - \sqrt{\ln(1+t)})$$

따라서

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)}{t\sqrt{t}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{5t(\sqrt{\ln(1+5t)} - \sqrt{\ln(1+t)})}{2t\sqrt{t}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{5}{2} \left(\sqrt{\frac{\ln(1+5t)}{t}} - \sqrt{\frac{\ln(1+t)}{t}} \right)$$

$$= \frac{5}{2} (\sqrt{5} - 1)$$

정답 ②

27. 출제의도 : 도함수를 활용하여 접선의 방정식과 함수의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$y = a^x \text{ 에서 } y' = a^x \ln a$$

이때 점 A(t, a^t)에서의 접선 l의 기울기는

$$a^t \ln a$$

이므로 직선 l에 수직인 직선의 기울기는

$$-\frac{1}{a^t \ln a}$$

그러므로 점 A를 지나고 직선 l에 수직인 직선의 방정식은

$$y - a^t = -\frac{1}{a^t \ln a}(x - t)$$

이 식에 y=0을 대입하면

$$-a^t = -\frac{1}{a^t \ln a}(x - t)$$

$$x = t + a^{2t} \ln a$$

이므로 점 B의 좌표는

$$B(t + a^{2t} \ln a, 0)$$

한편 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 원점을 O라 하면

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{HO}}{\overline{HB}} = \frac{t}{a^{2t} \ln a}$$

$$f(t) = \frac{t}{a^{2t} \ln a} \text{ 라 하면}$$

$$f'(t) = \frac{a^{2t} \ln a - t a^{2t} \times 2(\ln a)^2}{(a^{2t} \ln a)^2}$$

$$= \frac{a^{2t} \ln a (1 - 2t \ln a)}{(a^{2t} \ln a)^2}$$

$$f'(t) = 0 \text{ 에서}$$

$$1 - 2t \ln a = 0$$

$$t = \frac{1}{2 \ln a}$$

이고, 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 조사하면 함수 $f(t)$ 는 $t = \frac{1}{2\ln a}$ 에서 최댓값을 가짐을 알 수 있다.

따라서 $\frac{1}{2\ln a} = 1$ 이므로

$$\ln a = \frac{1}{2}$$

$$a = \sqrt{e}$$

정답 ②

28. 출제의도 : 역함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$h_1(x) = (x - a - 2)^2 e^x$$

$$h_2(x) = e^{2a}(x - a) + 4e^a$$

이라 하면

$$f(x) = \begin{cases} h_1(x) & (x \geq a) \\ h_2(x) & (x < a) \end{cases}$$

이고

$$\begin{aligned} h_1'(x) &= 2(x - a - 2)e^x + (x - a - 2)^2 e^x \\ &= (x - a)(x - a - 2)e^x \end{aligned}$$

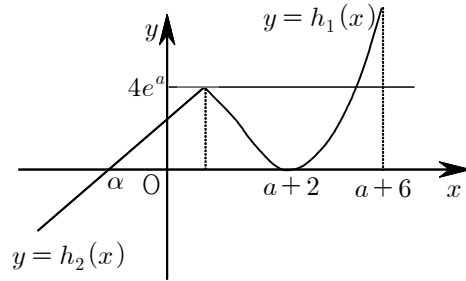
$$h_2'(x) = e^{2a}$$

이므로

$$f'(x) = \begin{cases} (x - a)(x - a - 2)e^x & (x > a) \\ e^{2a} & (x < a) \end{cases}$$

이다.

$f(a) = 4e^a$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



이때 실수 t 에 대하여 $f(x) = t$ 를 만족시키는 x 의 최솟값이 $g(t)$ 이므로

$t \leq 4e^a$ 일 때, $h_2(g(t)) = t$

$t > 4e^a$ 일 때, $h_1(g(t)) = t$

가 성립한다.

또한, 함수 $g(t)$ 는 $t = 4e^a$ 에서 불연속이므로

$$4e^a = 12, \text{ 즉 } e^a = 3$$

$$t = f(a + 2) = 0 < 4e^a \text{이므로}$$

$$h_2'(g(t)) \times g'(t) = 1 \text{에서}$$

$$h_2'(g(f(a + 2))) \times g'(f(a + 2)) = 1$$

직선 $y = h_2(x)$ 가 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 α ($\alpha < a$)라 하면 $g(0) = \alpha$ 이므로

$$\begin{aligned} g'(f(a + 2)) &= \frac{1}{h_2'(g(f(a + 2)))} \\ &= \frac{1}{h_2'(\alpha)} = \frac{1}{e^{2a}} \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

$$t = f(a + 6) = 16e^{a+6} > 4e^a \text{이므로}$$

$$h_1'(g(t)) \times g'(t) = 1 \text{에서}$$

$$h_1'(g(f(a + 6))) \times g'(f(a + 6)) = 1$$

$$\begin{aligned} g'(f(a + 6)) &= \frac{1}{h_1'(g(f(a + 6)))} \\ &= \frac{1}{h_1'(a + 6)} = \frac{1}{6 \times 4 \times e^{a+6}} \\ &= \frac{1}{24e^{a+6}} \quad \dots\dots \textcircled{㉡} \end{aligned}$$

㉠, ㉡에서 $e^a = 3$ 이므로

$$\frac{g'(f(a + 2))}{g'(f(a + 6))} = \frac{24e^{a+6}}{e^{2a}} = \frac{24e^6}{e^a}$$

$$= \frac{24}{3}e^6 = 8e^6$$

정답 ④

29. 출제의도 : 미분법을 이용하여 함수가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \ln(1+x^2) + a \text{에서}$$

$$f'(x) = x^2 - 2x + \frac{2x}{1+x^2}$$

$$= \frac{x^2(x-1)^2}{x^2+1}$$

이때 $f'(x) = 0$ 에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=1$$

이고 $f'(x) \geq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

또한

$$f''(x) = \frac{(4x^3 - 6x^2 + 2x)(x^2 + 1) - (x^4 - 2x^3 + x^2) \times 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{2x(x-1)(x^3 + 2x - 1)}{(x^2 + 1)^2}$$

이고 $h(x) = x^3 + 2x - 1$ 라 하면

$$h'(x) = 3x^2 + 2 > 0$$

이므로 $h(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값을 α 라 하면

$$h(0) = -1, h(1) = 2$$

이므로 $0 < \alpha < 1$

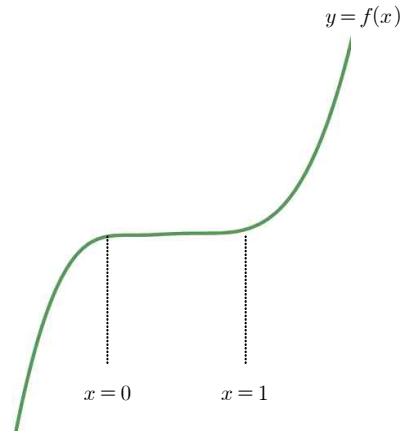
따라서 변곡점은

$$(0, f(0)), (\alpha, f(\alpha)), (1, f(1))$$

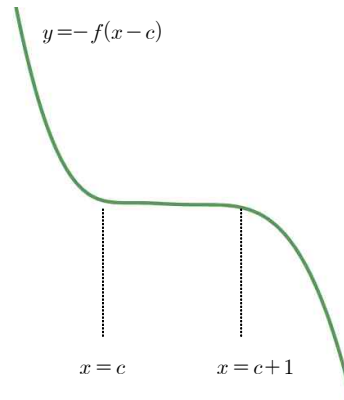
이고 변곡점에서의 미분계수는

$$f'(0) = 0, f'(\alpha) > 0, f'(1) = 0$$

즉 곡선 $y = f(x)$ 의 개형은 그림과 같다.



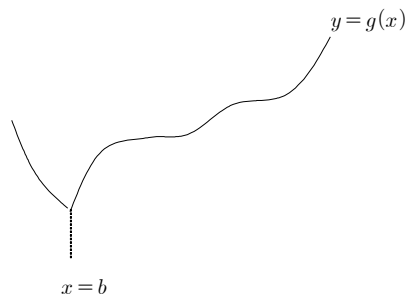
또한, 곡선 $y = -f(x-c)$ 는 곡선 $y = f(x)$ 를 x 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 후 x 축에 대하여 대칭이동한 것 이므로 곡선 $y = -f(x-c)$ 의 개형은 그림과 같다.



이때 함수 $g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \geq b) \\ -f(x-c) & (x < b) \end{cases}$ 가

실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=b$ 에서 연속이어야 한다.

그런데 $a \geq 0$ 인 경우에는 함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형이 그림과 같다.



즉 $\lim_{x \rightarrow b-} g'(x) < 0$, $\lim_{x \rightarrow b+} g'(x) \geq 0$ 이므로

함수 $g(x)$ 는 $x=b$ 에서 미분가능하지 않다.

$a < 0$ 인 경우

$$f(0) = a, f'(0) = 0,$$

$$f(1) = -\frac{2}{3} + \ln 2 + a, f'(1) = 0$$

이고

$$x < b \text{ 에서 } \lim_{x \rightarrow b-} g'(x) \leq 0$$

$$x \geq b \text{ 에서 } \lim_{x \rightarrow b+} g'(x) \geq 0$$

이므로 $x=b$ 에서 미분가능하려면

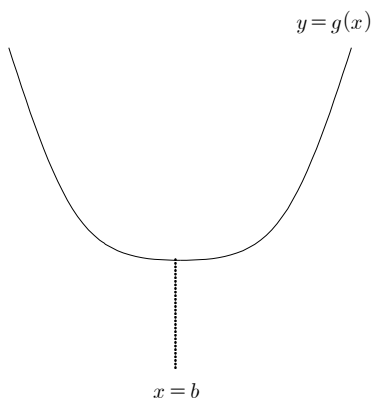
$$\lim_{x \rightarrow b-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow b+} g'(x) = 0$$

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow b} g'(x) = 0$$

이어야 한다.

따라서, $|f(0)| = |f(1)|$, $b=1$, $c=1$ 이면

함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분 가능하다.



$$\text{즉 } -a = -\frac{2}{3} + \ln 2 + a \text{ 에서}$$

$$a = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \ln 2$$

이므로

$$\begin{aligned} a+b+c &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) + 1 + 1 \\ &= \frac{7}{3} - \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

따라서 $p = \frac{7}{3}$, $q = -\frac{1}{2}$ 이므로

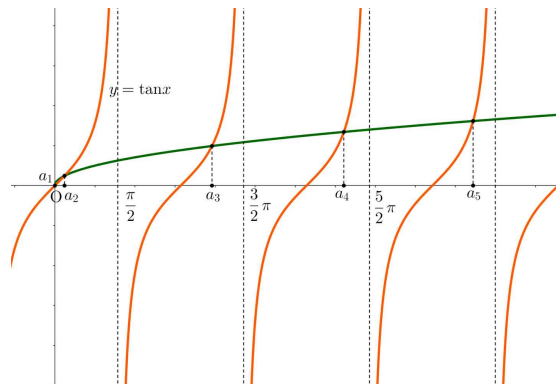
$$\begin{aligned} 30(p+q) &= 30 \left(\frac{7}{3} - \frac{1}{2} \right) \\ &= 30 \times \frac{11}{6} = 55 \end{aligned}$$

정답 55

30. 출제의도 : 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 함수 $y = \frac{\sqrt{x}}{10}$, $y = \tan x$ 의 그래프와 수열 $\{a_n\}$ 을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



이때

$$\frac{\sqrt{a_n}}{10} = \tan a_n$$

이므로 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned} \tan(a_{n+1} - a_n) &= \frac{\tan a_{n+1} - \tan a_n}{1 + \tan a_{n+1} \tan a_n} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{10} - \frac{\sqrt{a_n}}{10}}{1 + \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{10} \times \frac{\sqrt{a_n}}{10}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{10}}{\frac{100 + \sqrt{a_{n+1}a_n}}{100}} \\
&= 10 \times \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{100 + \sqrt{a_{n+1}a_n}} \\
&= \frac{10(a_{n+1} - a_n)}{(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n})(100 + \sqrt{a_{n+1}a_n})}
\end{aligned}$$

즉,

$$\tan^2(a_{n+1} - a_n)$$

$$= \frac{100(a_{n+1} - a_n)^2}{(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n})^2(100 + \sqrt{a_{n+1}a_n})^2}$$

한편, 곡선 $y = \tan x$ 의 점근선의 방정식은

$$x = \frac{2n-1}{2}\pi \quad (n \text{은 정수})$$

이고

$$n \rightarrow \infty \text{일 때 } \frac{\sqrt{a_n}}{10} \rightarrow \infty$$

이므로 위의 그래프에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{2n-3}{2}\pi \right) = 0$$

임을 알 수 있다.

이때 $b_n = a_n - \frac{2n-3}{2}\pi$ 로 놓으면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(b_{n+1} + \frac{2n-1}{2}\pi - b_n - \frac{2n-3}{2}\pi \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (b_{n+1} - b_n + \pi)$$

$$= 0 - 0 + \pi = \pi$$

이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} + \frac{2n-1}{2}\pi}{b_n + \frac{2n-3}{2}\pi}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{b_{n+1}}{n} + \frac{2n-1}{2n}\pi}{\frac{b_n}{n} + \frac{2n-3}{2n}\pi}$$

$$= \frac{0 + \pi}{0 + \pi} = 1$$

이다.

이때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n})^2}{a_n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n}} \right)^2$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_n}} + \sqrt{\frac{a_n}{a_n}} \right)^2$$

$$= (\sqrt{1} + \sqrt{1})^2 = 4$$

이고,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(100 + \sqrt{a_{n+1}a_n})^2}{a_n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{100}{a_n} + \frac{\sqrt{a_{n+1}a_n}}{a_n} \right)^2$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{100}{a_n} + \sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_n}} \right)^2$$

$$= (0 + \sqrt{1})^2 = 1$$

이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^3 \tan^2(a_{n+1} - a_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100a_n^3(a_{n+1} - a_n)^2}{(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n})^2(100 + \sqrt{a_{n+1}a_n})^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100(a_{n+1} - a_n)^2}{\frac{(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n})^2(100 + \sqrt{a_{n+1}a_n})^2}{a_n^3}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100(a_{n+1} - a_n)^2}{\frac{(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n})^2}{a_n} \times \frac{(100 + \sqrt{a_{n+1}a_n})^2}{a_n^2}}$$

$$= \frac{100\pi^2}{4 \times 1} = 25\pi^2$$

따라서

$$\frac{1}{\pi^2} \times \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^3 \tan^2(a_{n+1} - a_n) = 25$$

정답 25