수학영역 정답 및 풀이

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01. ⑤	02. ③	03. ②	04. ①	05. ⑤
06. ③	07. ④	08. ④	09. ③	10. ③
11. ⑤	12. ①	13. ③	14. ②	15. ④
16. 6	17. 24	18. 5	19. 4	
20. 98	21. 19	22. 10		

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 값을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$3^{1-\sqrt{5}}\times 3^{1+\sqrt{5}}$

$=3^{(1-\sqrt{5})+(1+\sqrt{5})}$

$=3^2$

$=9$

정답 ⑤

2. 출제의도 : 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2x^2-x$에서

$f'(x)=4x-1$

이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=f'(1)=3$

정답 ③

3. 출제의도 : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$이고 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이므로

$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}$

$=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

정답 ②

4. 출제의도 : 그래프를 보고 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to -2+}f(x)=-2,\ \lim_{x\to 1-}f(x)=0$

이므로

$\lim_{x\to -2+}f(x)+\lim_{x\to 1-}f(x)=-2+0=-2$

정답 ①

5. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 등비수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $a>0$, $r>0$이다.

$\frac{a_3a_8}{a_6}=12$에서 $\frac{ar^2\times ar^7}{ar^5}=12$, $ar^4=12$

즉, $a_5=12$

$a_5+a_7=36$에서 $a_7=24$이므로

$r^2=\frac{a_7}{a_5}=\frac{24}{12}=2$

$\frac{a_{11}}{a_7}=r^4=(r^2)^2=2^2=4$이므로

$a_{11}=a_7\times4=24\times4=96$

정답 ⑤

6. **출제의도** : 다항함수의 극댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

이고, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대, $x=3$에서 극소이므로

$$\begin{aligned}3x^2+2ax+b&=3(x+1)(x-3)\\&=3x^2-6x-9\end{aligned}$$

따라서 $a=-3$, $b=-9$ 이고

$f(x)=x^3-3x^2-9x+1$

이므로 함수 $f(x)$의 극댓값은

$f(-1)=-1-3+9+1=6$

정답 ③

7. **출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$3a+2b=\log_3 32$, $ab=\log_9 2$이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{3a}+\frac{1}{2b}&=\frac{3a+2b}{6ab}\\&=\frac{\log_3 32}{6\times log_9 2}\\&=\frac{\log_3 2^5}{6\times log_{3^2}2}\\&=\frac{5\log_3 2}{3\log_3 2}\\&=\frac{5}{3}\end{aligned}$$

정답 ④

8. **출제의도** : 부정적분을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=6x^2-2f(1)x$에서

$f(x)=2x^3-f(1)x^2+C$ (C는 적분상수)

라 하면 $f(0)=4$이므로

$C=4$

즉, $f(x)=2x^3-f(1)x^2+4$

이 식에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2-f(1)+4$

$f(1)=3$

따라서

$f(x)=2x^3-3x^2+4$

이므로

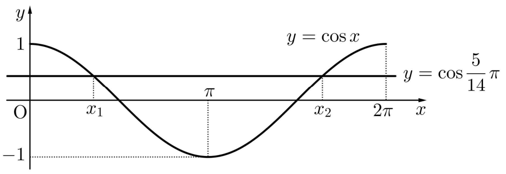
$f(2)=2\times2^3-3\times2^2+4=8$

정답 ④

9. **출제의도** : 삼각함수가 포함된 부등식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sin\frac{\pi}{7}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)=\cos\frac{5}{14}\pi$



그림과 같이 곡선 $y=\cos x(0\le x\le 2\pi)$ 와 직선 $y=\cos\frac{5}{14}\pi$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 x_1, $x_2\,(x_1<x_2)$라 하면

$x_1=\frac{5}{14}\pi$이고 $\frac{x_1+x_2}{2}=\pi$이므로

$x_2=2\pi-x_1=\frac{23}{14}\pi$

따라서 $0\le x\le 2\pi$일 때, 부등식 $\cos x\le\sin\frac{\pi}{7}$을 만족시키는 모든 x의 값의 범위는 $\frac{5}{14}\pi\le x\le\frac{23}{14}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\frac{23}{14}\pi-\frac{5}{14}\pi=\frac{9}{7}\pi$

정답 ③

10. **출제의도** : 삼차함수 그래프의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (2, 3)에서의 접선이 점 (1, 3)을 지나므로

$f(x)-3=(x-a)(x-2)^2$

$f(x)=(x-a)(x-2)^2+3$ (단, a는 상수)

이때

$f'(x)=(x-2)^2+2(x-a)(x-2)$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2, f(-2))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(-2)=f'(-2)(x+2)$

이 접선이 점 $(1,3)$을 지나므로

$3-f(-2)=f'(-2)(1+2)$

$3-f(-2)=3f'(-2)$

$3-\{16(-2-a)+3\}=3\{16-8(-2-a)\}$

$3-(-29-16a)=3(32+8a)$

$32+16a=96+24a,\ 8a=-64$

즉, $a=-8$이므로

$f(x)=(x+8)(x-2)^2+3$

따라서

$f(0)=8(-2)^2+3=35$

정답 ③

11. **출제의도** : 적분을 이용하여 수직선 위를 움직이는 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P가 점 A(1)에서 출발하고 속도가 $v_1(t)=3t^2+4t-7$이므로 시각 t에서의 위치를 $s_1(t)$라 하면

$s_1(t)=1+\int_0^t(3t^2+4t-7)dt$

$=t^3+2t^2-7t+1$ -----㉠

또, 점 Q가 점 B(8)에서 출발하고 속도가 $v_2(t)=2t+4$이므로 시각 t에서의 위치를 $s_2(t)$라 하면

$s_2(t)=8+\int_0^t(2t+4)dt$

$=t^2+4t+8$ -----㉡

이때, 두 점 P, Q사이의 거리가 4가 되는 시각은

$|s_1(t)-s_2(t)|=4$

㉠, ㉡에서

$|(t^3+2t^2-7t+1)-(t^2+4t+8)|=4$

$|t^3+t^2-11t-7|=4$

그러므로

$t^3+t^2-11t-7=4$ 또는

$t^3+t^2-11t-7=-4$

즉,

$t^3+t^2-11t-11=0$ 또는

$t^3+t^2-11t-3=0$

(i) $t^3+t^2-11t-11=0$일 때,

$t^2(t+1)-11(t+1)=0$

$(t+1)(t^2-11)=0$

$t>0$이므로

$t=\sqrt{11}$

(ii) $t^3+t^2-11t-3=0$일 때,

좌변을 인수분해하면

$(t-3)(t^2+4t+1)=0$

$t>0$이므로

$t=3$

(i), (ii)에 의하여 두 점 P, Q의 사이의 거리가 처음으로 4가 되는 시각은

$t=3$

한편,

$v_1(t)=3t^2+4t-7$

$=(3t+7)(t-1)$

이므로

$0\leq t<1$일 때, $v_1(t)<0$

$t\geq 1$일 때, $v_1(t)\geq 0$

따라서 점 P가 시각 $t=0$에서 시각 $t=3$까지 움직인 거리는

$$\int_0^3 |v_1(t)|dt$$

$$=-\int_0^1 v_1(t)dt+\int_1^3 v_1(t)dt$$

$$=-\int_0^1 (3t^2+4t-7)dt+\int_1^3 (3t^2+4t-7)dt$$

$$=-\left[t^3+2t^2-7t\right]_0^1+\left[t^3+2t^2-7t\right]_1^3$$

$=-(-4)+28$

$=32$

정답 ⑤

12. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

자연수 k에 대하여

(i) $a_1=4k$일 때,

a_1은 짝수이므로

$$a_2=\frac{a_1}{2}=\frac{4k}{2}=2k$$

a_2도 짝수이므로

$$a_3=\frac{a_2}{2}=\frac{2k}{2}=k$$

㉠ k가 홀수인 경우

$a_4=a_3+1=k+1$

이때

$a_2+a_4=2k+(k+1)=3k+1$

이므로

$3k+1=40$

에서 $k=13$이고,

$a_1=4k=4\times13=52$

㉡ k가 짝수인 경우

$$a_4=\frac{a_3}{2}=\frac{k}{2}$$

이때

$$a_2+a_4=2k+\frac{k}{2}=\frac{5}{2}k$$

이므로

$$\frac{5}{2}k=40$$

에서 $k=16$이고,

$a_1=4k=4\times16=64$

(ⅱ) $a_1=4k-1$일 때,

a_1은 홀수이므로

$a_2=a_1+1=4k$

a_2는 짝수이므로

$a_3=\frac{a_2}{2}=\frac{4k}{2}=2k$

a_3도 짝수이므로

$a_4=\frac{a_3}{2}=\frac{2k}{2}=k$

이때

$a_2+a_4=4k+k=5k$

이므로

$5k=40$

에서 $k=8$이고,

$a_1=4k-1=4\times8-1=31$

(ⅲ) $a_1=4k-2$일 때,

a_1은 짝수이므로

$a_2=\frac{a_1}{2}=\frac{4k-2}{2}=2k-1$

a_2는 홀수이므로

$a_3=a_2+1=(2k-1)+1=2k$

a_3은 짝수이므로

$a_4=\frac{a_3}{2}=\frac{2k}{2}=k$

이때

$a_2+a_4=(2k-1)+k=3k-1$

이므로

$3k-1=40$

에서 $k=\frac{41}{3}$이고, 이것은 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅳ) $a_1=4k-3$일 때,

a_1은 홀수이므로

$a_2=a_1+1=(4k-3)+1=4k-2$

a_2는 짝수이므로

$a_3=\frac{a_2}{2}=\frac{4k-2}{2}=2k-1$

a_3은 홀수이므로

$a_4=a_3+1=(2k-1)+1=2k$

이때

$a_2+a_4=(4k-2)+2k=6k-2$

이므로

$6k-2=40$

에서 $k=7$이고,

$a_1=4k-3=4\times7-3=25$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값의 합은

$52+64+31+25=172$

정답 ①

13. **출제의도** : 도함수를 활용하여 함수가 주어진 증가, 감소에 대한 조건을 만족시키도록 하는 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}x^3-ax^2-bx & (x<0)\\ \frac{1}{3}x^3+ax^2-bx & (x\geq0)\end{cases}$$

에서

$$f'(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-b & (x<0)\\ x^2+2ax-b & (x>0)\end{cases}$$

이다.

함수 $f(x)$가 $x=-1$의 좌우에서 감소하다가 증가하고, 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하므로

$f'(-1)=0$

$-1+2a-b=0$, $b=2a-1$

$x<0$일 때

$f'(x)=-x^2-2ax-2a+1$

$=-(x+1)(x+2a-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=-2a+1$이다. 이때 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ -1]$에서 감소하고, 구간 $[-1,\ 0]$에서 증가하므로 $(-\infty,\ -1)$에서 $f'(x)\le 0$, $(-1,\ 0)$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

즉, $f'(-2a+1)=0$에서 $-2a+1\ge 0$이어야 한다.

그러므로 $a\le \dfrac{1}{2}$ …… ㉠

한편, $x>0$일 때

$$f'(x)=x^2+2ax-b$$
$$=x^2+2ax-2a+1$$
$$=(x+a)^2-a^2-2a+1$$

이고 함수 $f(x)$가 구간 $[0,\ \infty)$에서 증가하므로 $(0,\ \infty)$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

(ⅰ) $-a<0$, 즉 $a>0$인 경우

$(0,\ \infty)$에서 $f'(x)\ge 0$이려면

$f'(0)=-2a+1\ge 0$이면 된다.

그러므로 $0<a\le \dfrac{1}{2}$

(ⅱ) $-a\ge 0$, 즉 $a\le 0$인 경우

$(0,\ \infty)$에서 $f'(x)\ge 0$이려면

$f'(-a)=-a^2-2a+1\ge 0$이면 된다.

$a^2+2a-1\le 0$,

$-1-\sqrt{2}\le a\le -1+\sqrt{2}$

그러므로 $-1-\sqrt{2}\le a\le 0$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$-1-\sqrt{2}\le a\le \dfrac{1}{2}$ …… ㉡

즉, ㉠, ㉡에서 구하는 a의 값의 범위는 $-1-\sqrt{2}\le a\le \dfrac{1}{2}$이므로 $a+b=3a-1$의 값의 최댓값은 $a=\dfrac{1}{2}$일 때 $\dfrac{1}{2}$, 최솟값은 $a=-1-\sqrt{2}$일 때 $-4-3\sqrt{2}$이다.

따라서

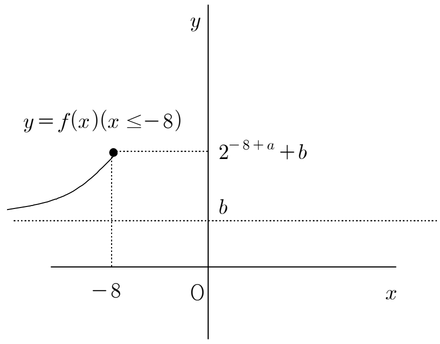
$$M-m=\frac{1}{2}-(-4-3\sqrt{2})=\frac{9}{2}+3\sqrt{2}$$

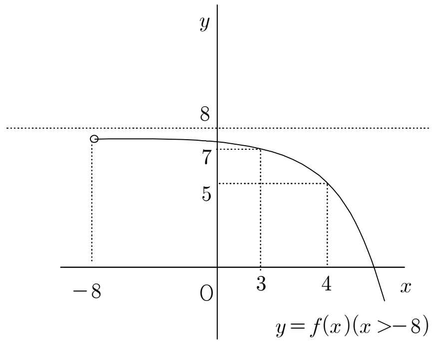
정답 ③

14. 출제의도 : 지수함수의 그래프를 이해하고 조건을 만족시키는 지수함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x\le -8$과 $x>-8$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 각각 그림과 같다.





또한 주어진 조건에서 $3\le k<4$이므로 $x>-8$인 경우에 정수 $f(x)$는

$f(x)=6$ 또는 $f(x)=7$

이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키기 위해서는 $x\le -8$인 경우에 정수 $f(x)$는 6뿐이어야 한다.

즉 $b=5$이고 $6 \le f(-8) < 7$ 이어야 하므로

$6 \le 2^{-8+a}+5 < 7$

$1 \le 2^{-8+a} < 2$

$0 \le -8+a < 1$, $8 \le a < 9$

이때 a는 자연수이므로 $a=8$

따라서 $a+b=8+5=13$

정답 ②

15. **출제의도** : 함수의 극한과 연속을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to 3} g(x) = g(3)-1$ ----㉠

이므로 $x=3$일 때, $f(3)$의 값에 따라 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(ⅰ) $f(3) \ne 0$일 때,

$x=3$에 가까운 x의 값에 대하여 $f(x) \ne 0$이므로

$$g(x) = \frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$$

이때 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 $f(x)$, $f(x+3)$, $f(x)+1$은 연속이다.

그러므로 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 연속이다. 즉,

$\lim_{x\to 3} g(x) = g(3)$

이 식을 ㉠에 대입하면 만족하지 않는다.

(ⅱ) $f(3)=0$일 때,

함수 $f(x)$가 삼차함수이므로 방정식 $f(x)=0$은 많아야 서로 다른 세 실근을 갖는다.

그러므로 $x=3$에 가까우며 $x \ne 3$인 x의 값에 대하여

$f(x) \ne 0$

이때,

$\lim_{x\to 3} g(x)$

$= \lim_{x\to 3} \frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$ ----㉡

위에서 $x\to 3$일 때, (분모)→0이므로

(분자)→0에서

$\lim_{x\to 3} f(x+3)\{f(x)+1\}=0$

$f(6)\{f(3)+1\}=0$

$f(6)=0$

그러므로

$f(x)=(x-3)(x-6)(x-k)$

(k는 상수)

이 식을 ㉡에 대입하면

$\lim_{x\to 3} g(x)$

$= \lim_{x\to 3} \frac{x(x-3)(x+3-k)\{(x-3)(x-6)(x-k)+1\}}{(x-3)(x-6)(x-k)}$

$= \lim_{x\to 3} \frac{x(x+3-k)\{(x-3)(x-6)(x-k)+1\}}{(x-6)(x-k)}$

$= \frac{3(6-k)}{-3(3-k)}$

$= \frac{6-k}{k-3}$

이 값을 ㉠에 대입하면 $g(3)=3$이므로

$\frac{6-k}{k-3} = 3-1$

$6-k=2k-6$

$3k=12$

$k=4$

따라서,

$f(x)=(x-3)(x-4)(x-6)$

이고 $f(5) \ne 0$이므로

$g(5) = \frac{f(8)\{f(5)+1\}}{f(5)}$

$= \frac{5\times 4\times 2\times\{2\times 1\times(-1)+1\}}{2\times 1\times(-1)}$

$=20$

정답 ④

정답 24

16. **출제의도** : 로그방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

로그의 진수 조건에 의하여

$x-1>0$에서 $x>1$ ……㉠

$13+2x>0$에서 $x>-\frac{13}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $x>1$

$\log_2(x-1)=\log_4(13+2x)$

에서

$\log_2(x-1)=\frac{1}{2}\log_2(13+2x)$

$2\log_2(x-1)=\log_2(13+2x)$

$\log_2(x-1)^2=\log_2(13+2x)$

$(x-1)^2=13+2x$

$x^2-4x-12=0$

$(x+2)(x-6)=0$

$x>1$이므로 $x=6$

정답 6

17. **출제의도** : 합의 기호 $\sum$의 성질을 이해하여 주어진 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)&=\sum_{k=1}^{10}\{(2a_k-b_k)-a_k\}\\&=\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k)-\sum_{k=1}^{10}a_k\\&=34-10\\&=24\end{aligned}$$

18. **출제의도** : 곱의 미분법을 이용하여 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=(x^2+1)(x^2+ax+3)$에서

$f'(x)=2x(x^2+ax+3)+(x^2+1)(2x+a)$

이므로

$$\begin{aligned}f'(1)&=2(a+4)+2(a+2)\\&=4a+12=32\end{aligned}$$

따라서 $a=5$

정답 5

19. **출제의도** : 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 정적분을 이용하여 구할 수 있는가?

정답풀이 :

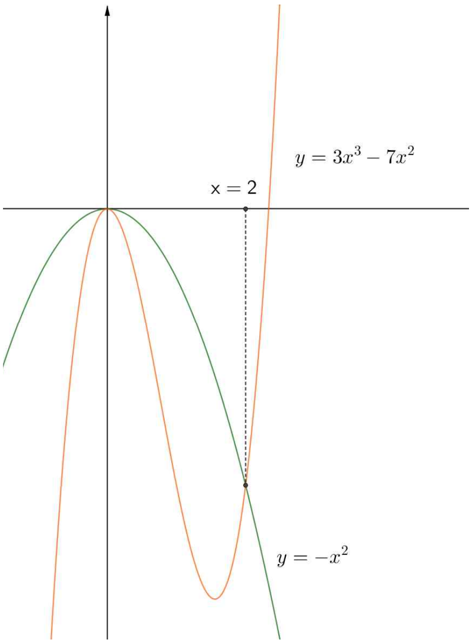
두 곡선 $y=3x^3-7x^2$, $y=-x^2$이 만나는 점의 x좌표는

$3x^3-7x^2=-x^2$

$3x^2(x-2)=0$

$x=0$ 또는 $x=2$

이때, 두 함수 $y=3x^3-7x^2$, $y=-x^2$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2 \{(-x^2)-(3x^3-7x^2)\}dx$$

$$=\int_0^2 (-3x^3+6x^2)dx$$

$$=\left[-\frac{3}{4}x^4+2x^3\right]_0^2$$

$$=(-12+16)-0$$

$$=4$$

정답 4

20. 출제의도 : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin\frac{3}{4}\pi}=2R_1,\ \frac{\overline{BD}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2R_1$$

$$R_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{BD}$$

이고, 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin\frac{2}{3}\pi}=2R_2,\ \frac{\overline{BD}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R_2$$

$$R_2=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}\times\overline{BD}$$

이다. 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2=2^2+1^2-2\times2\times1\times\cos\frac{2}{3}\pi$$

$$=2^2+1-\boxed{(-2)}$$

$$=7$$

이므로

$$R_1\times R_2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{BD}\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\times\overline{BD}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{6}\times\overline{BD}^2$$

$$=\boxed{\frac{7\sqrt{6}}{6}}$$

이다.

따라서 $p=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $q=-2$, $r=\frac{7\sqrt{6}}{6}$이므로

$$9\times(p\times q\times r)^2=9\times\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\times(-2)\times\frac{7\sqrt{6}}{6}\right\}^2$$

$$=9\times\frac{98}{9}$$

$$=98$$

정답 98

21. 출제의도 : 등차수열의 일반항과 합을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자. 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수이므로 a는 자연수이고 d는 0 이상의 정수이다.

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=\frac{d}{2}n^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)n$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{7}S_k=\sum_{k=1}^{7}\left\{\frac{d}{2}k^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)k\right\}$$
$$=\frac{d}{2}\times\sum_{k=1}^{7}k^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)\times\sum_{k=1}^{7}k$$
$$=\frac{d}{2}\times\frac{7\times8\times15}{6}+\left(a-\frac{d}{2}\right)\times\frac{7\times8}{2}$$
$$=70d+28\left(a-\frac{d}{2}\right)$$
$$=28a+56d$$

$28a+56d=644$에서

$a+2d=23$ …… ㉠

a_7이 13의 배수이므로 자연수 m에 대하여

$a+6d=13m$ …… ㉡

㉡−㉠에서 $4d=13m-23$

$4d+23+13=13m+13$

$4(d+9)=13(m+1)$

$$d+9=\frac{13(m+1)}{4}$$

이 값이 자연수가 되어야 하므로 $m+1$의 값은 4의 배수이어야 한다. 즉, m이 될 수 있는 값은

3, 7, 11, 15, …

한편, $d=\dfrac{13m-23}{4}$이므로 ㉡에서

$$a=13m-6d$$
$$=13m-6\times\left(\frac{13m-23}{4}\right)$$
$$=13m-\frac{39}{2}m+\frac{69}{2}$$
$$=-\frac{13}{2}m+\frac{69}{2}$$

이고 이 값이 양수이어야 하므로

$-\dfrac{13}{2}m+\dfrac{69}{2}>0$, $m<\dfrac{69}{13}$

따라서 $m=3$이고 이때 $d=4$이므로

$a=23-2d=15$

이고

$a_2=a+d=15+4=19$

정답 19

22. 출제의도 : 곱의 미분법과 부정적분을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구하고, 그 정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에 $x=1$을 대입하면

$0=f(1)-3$

이므로

$f(1)=3$ ……㉠

조건 (가)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-4x$

이고, $f(x)$는 다항함수이므로

$f'(x)=4$

즉,

$f(x)=4x+C_1$ (C_1은 적분상수)

로 놓을 수 있다. 이때 ㉠에서

$f(1)=3$

이므로

$f(1)=4+C_1=3$

$C_1=-1$

즉, $f(x)=4x-1$이므로

$F(x)=2x^2-x+C_2$ (C_2는 적분상수)

한편, 조건 (나)에서

$f(x)G(x)+F(x)g(x)=\{F(x)G(x)\}'$

이므로 양변을 x에 대하여 적분하면

$F(x)G(x)=2x^4+x^3+x+C_3$ (C_3은 적분 상수)

로 놓을 수 있다.

이때 $F(x)=2x^2-x+C_2$이고 $G(x)$도 다항함수이므로 $G(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

$G(x)=x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수)

로 놓으면

$$(2x^2-x+C_2)(x^2+ax+b)$$
$$=2x^4+x^3+x+C_3$$

양변의 x^3의 계수를 비교하면

$2a-1=1$

즉, $a=1$이므로

$G(x)=x^2+x+b$

따라서

$$\int_1^3 g(x)dx=\Big[G(x)\Big]_1^3$$
$$=G(3)-G(1)$$
$$=(3^2+3+b)-(1^2+1+b)$$
$$=10$$

정답 10

■ **[선택: 확률과 통계]**
23. ① 24. ③ 25. ③ 26. ② 27. ④
28. ⑤ 29. 62 30. 336

23. **출제의도** : 이항분포의 평균을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

이항분포 $\mathrm{B}\left(30, \frac{1}{5}\right)$을 따르는 확률변수 X의 평균은

$\mathrm{E}(X)=30\times\frac{1}{5}=6$

정답 ①

24. **출제의도** : 같은 것이 있는 순열을 이용하여 도로망에서 최단 거리로 가는 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

A지점에서 P지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!\times1!}=4$

P지점에서 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{2!}{1!\times1!}=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times2=8$

정답 ③

25. **출제의도** : 두 사건의 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 사건 A, B^C이 서로 배반사건이므로

$A\subset B$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{5}$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\frac{7}{10}-\mathrm{P}(A)\\&=\frac{7}{10}-\frac{1}{5}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

따라서 $A\subset B$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\\&=\frac{3}{10}\end{aligned}$$

정답 ③

26. **출제의도** : 표준정규분포표를 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

시험 점수를 확률변수 X라 하면

X는 정규분포 $\mathrm{N}(68, 10^2)$을 따르고

$Z=\frac{X-68}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는

표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(55\le X\le 78)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{55-68}{10}\le Z\le\frac{78-68}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(-1.3\le Z\le 1)\\&=\mathrm{P}(-1.3\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.3)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.4032+0.3413\\&=0.7445\end{aligned}$$

정답 ②

27. 출제의도 : 확률의 덧셈정리를 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

X에서 Y로의 일대일함수 f의 개수는

${}_7\mathrm{P}_4=7\times6\times5\times4$

(i) 함수 f의 치역에 4가 포함되고 6이 포함되지 않는 경우

함숫값이 4인 정의역의 원소를 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1=3$

함숫값이 2, 4가 아닌 경우, 함숫값이 홀수이어야 하므로

나머지 두 함숫값을 정하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{P}_2=4\times3=12$

즉, 이 경우의 확률은

$$\frac{3\times12}{7\times6\times5\times4}=\frac{3}{70}$$

(ii) 함수 f의 치역에 6이 포함되고 4가 포함되지 않는 경우

(i)과 같은 방법으로 이 경우의 확률은

$$\frac{3\times12}{7\times6\times5\times4}=\frac{3}{70}$$

(iii) 함수 f의 치역에 4와 6이 모두 포함되는 경우

함숫값이 4, 6인 정의역의 원소와 함숫값을 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{P}_2=3\times2=6$

함숫값이 2, 4, 6이 아닌 경우, 함숫값이 홀수이어야 하므로

나머지 함숫값을 정하는 경우의 수는 4

즉, 이 경우의 확률은

$$\frac{6\times4}{7\times6\times5\times4}=\frac{1}{35}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{3}{70}+\frac{3}{70}+\frac{1}{35}=\frac{4}{35}$$

정답 ④

28. 출제의도 : 주어진 시행과 표본평균의 의미를 이해하고 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주머니 A에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가 1일 확률은 $\frac{2}{3}$

주머니 A에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가 2일 확률은 $\frac{1}{3}$

주머니 B에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가 1일 확률은 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

주머니 B에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가 2일 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

주머니 B에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가 3일 확률은 $\frac{1}{6}$

첫 번째 시행에서 기록한 수를 X_1, 두 번째 시행에서 기록한 수를 X_2라 하면 구하는 확률은 $X_1+X_2=4$일 확률이다.

(i) $(X_1, X_2)=(1, 3)$인 경우

첫 번째 시행에서 3의 배수의 눈이 나온 경우의 확률은

$$\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{81}$$

첫 번째 시행에서 3의 배수가 아닌 눈이 나온 경우의 확률은

$\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{27}$

이 경우의 확률은

$\frac{2}{81}+\frac{1}{27}=\frac{5}{81}$

(ⅱ) $(X_1, X_2)=(3, 1)$인 경우

(ⅰ)과 같은 방법으로 이 경우의 확률은

$\frac{2}{81}+\frac{1}{27}=\frac{5}{81}$

(ⅲ) $(X_1, X_2)=(2, 2)$인 경우

① 주머니 A에서만 공을 꺼내는 경우

이 경우의 확률은

$\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{81}$

② 주머니 B에서만 공을 꺼내는 경우

이 경우의 확률은

$\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{81}$

③ 주머니 A와 주머니 B에서 한 번씩 공을 꺼내는 경우

이 경우의 확률은

$2\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{81}$

이 경우의 확률은

$\frac{1}{81}+\frac{4}{81}+\frac{4}{81}=\frac{1}{9}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은

$\frac{5}{81}+\frac{5}{81}+\frac{1}{9}=\frac{19}{81}$

정답 ⑤

29. 출제의도 : 독립시행의 확률을 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

동전을 두 번 던져 앞면이 나온 횟수가 2일 확률은 $\frac{1}{4}$

앞면이 나온 횟수가 0 또는 1일 확률은

$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

문자 B가 보이도록 카드가 놓이려면 뒤집는 횟수가 홀수이어야 한다.

따라서

구하는 확률은 5번의 시행 중 앞면이 나온 횟수가 2인 횟수가 1 또는 3 또는 5인 확률이므로

$$p={}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^4+{}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0$$

$=\frac{405+90+1}{4^5}$

$=\frac{31}{64}$

즉, $128\times p=128\times\frac{31}{64}$

$=62$

정답 62

30. 출제의도 : 중복조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에서

$a\times d$가 홀수이므로 a와 d는 모두 홀수이고, $b+c$가 짝수이므로 b와 c가 모두 홀수이거나 b와 c가 모두 짝수이다.

(ⅰ) b와 c가 모두 홀수인 경우

a, b, c, d가 모두 13 이하의 홀수이다. 13 이하의 홀수의 개수는 7이고, 조건 (가)에서 $a\le b\le c\le d$이므로 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 서로 다른 7개

에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수 ${}_{7}\mathrm{H}_{4}$와 같다.

$${}_{7}\mathrm{H}_{4}={}_{10}\mathrm{C}_{4}=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$$

(ⅱ) b와 c가 모두 짝수인 경우

a와 d가 모두 홀수, b와 c가 모두 짝수, $a\le b\le c\le d$이므로 $d-a$의 값은 12 이하의 자연수이다.

① $d-a=12$인 경우 순서쌍 (a, d)의 개수는 1, 순서쌍 (b, c)의 개수는 서로 다른 짝수 6개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수 ${}_{6}\mathrm{H}_{2}$이므로 구하는 순서쌍의 개수는

$$1\times{}_{6}\mathrm{H}_{2}=1\times{}_{7}\mathrm{C}_{2}=1\times\frac{7\times6}{2\times1}=21$$

② $d-a=10$인 경우 순서쌍 (a, d)의 개수는 2이고, 순서쌍 (b, c)의 개수는 서로 다른 짝수 5개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수 ${}_{5}\mathrm{H}_{2}$이므로 구하는 순서쌍의 개수는

$$2\times{}_{5}\mathrm{H}_{2}=2\times{}_{6}\mathrm{C}_{2}=2\times\frac{6\times5}{2\times1}=30$$

③ $d-a=8$인 경우 순서쌍 (a, d)의 개수는 3이고, 순서쌍 (b, c)의 개수는 서로 다른 짝수 4개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수 ${}_{4}\mathrm{H}_{2}$이므로 구하는 순서쌍의 개수는

$$3\times{}_{4}\mathrm{H}_{2}=3\times{}_{5}\mathrm{C}_{2}=3\times\frac{5\times4}{2\times1}=30$$

④ $d-a=6$인 경우 순서쌍 (a, d)의 개수는 4이고, 순서쌍 (b, c)의 개수는 서로 다른 짝수 3개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수 ${}_{3}\mathrm{H}_{2}$이므로 구하는 순서쌍의 개수는

$$4\times{}_{3}\mathrm{H}_{2}=4\times{}_{4}\mathrm{C}_{2}=4\times\frac{4\times3}{2\times1}=24$$

⑤ $d-a=4$인 경우 순서쌍 (a, d)의 개수는 5이고, 순서쌍 (b, c)의 개수는 서로 다른 짝수 2개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수 ${}_{2}\mathrm{H}_{2}$이므로 구하는 순서쌍의 개수는

$$5\times{}_{2}\mathrm{H}_{2}=5\times{}_{3}\mathrm{C}_{2}=5\times\frac{3\times2}{2\times1}=15$$

⑥ $d-a=2$인 경우 순서쌍 (a, d)의 개수는 6이고, 순서쌍 (b, c)의 개수는 $a+1=b=c$에서 1이므로 구하는 순서쌍의 개수는

$6\times1=6$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 모든 순서쌍의 개수는

$210+21+30+30+24+15+6=336$

정답 336

[다른 풀이]

(ⅱ) b와 c가 모두 짝수인 경우

홀수 a, d와 짝수 b, c에 대하여

$1\le a\le b\le c\le d\le 13$

이므로

$a=a'$, $b-a=b'$, $c-b=c'$, $d-c=d'$, $14-d=e'$

이라 하면

a', b', d', e'은 홀수이고, c'은 0 또는 짝수이다.

$a'+b'+c'+d'+e'=14$

음이 아닌 정수 a'', b'', c'', d'', e''에 대하여

$a'=2a''+1$, $b'=2b''+1$, $c'=2c''$, $d'=2d''+1$, $e'=2e''+1$

이라 하면

$a''+b''+c''+d''+e''=5$

그러므로 구하는 순서쌍의 개수는

$${}_5\mathrm{H}_5={}_9\mathrm{C}_5={}_9\mathrm{C}_4=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$$