2026학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가

수학영역 정답 및 풀이

최근 수정일 : 2025. 6. 5.(목)

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01. ②	02. ①	03. ③	04. ③	05. ②
06. ④	07. ⑤	08. ⑤	09. ②	10. ①
11. ⑤	12. ②	13. ④	14. ②	15. ①
16. 2	17. 6	18. 133	19. 8	
20. 85	21. 42	22. 38		

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$4^{\frac{1}{4}}\times 2^{\frac{1}{2}}=(2^2)^{\frac{1}{4}}\times 2^{\frac{1}{2}}$$
$$=2^{2\times\frac{1}{4}}\times 2^{\frac{1}{2}}$$
$$=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$$
$$=2^1$$
$$=2$$

정답 ②

2. **출제의도** : 미분계수를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=2x-1$ 에서

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$$
$$=2\times 1-1$$
$$=1$$

정답 ①

3. **출제의도** : 시그마의 정의를 이용하여 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{7}a_k=8$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{7}(2a_k+1)=2\sum_{k=1}^{7}a_k+\sum_{k=1}^{7}1$$
$$=2\times 8+1\times 7$$
$$=23$$

정답 ③

4. **출제의도** : 함수의 연속의 정의를 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=-x^2+a$와 함수 $y=5x-a$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이때

$$\lim_{x\to 3-}f(x)=\lim_{x\to 3-}(-x^2+a)$$
$$=-9+a$$
$$\lim_{x\to 3+}f(x)=\lim_{x\to 3+}(5x-a)$$
$$=15-a$$

$f(3)=15-a$

이므로

$$\lim_{x\to 3-}f(x)=\lim_{x\to 3+}f(x)=f(3)$$

에서

$-9+a=15-a$

따라서

$a=12$

정답 ③

5. **출제의도** : 정적분의 값을 구할 수 있

는가?

정답풀이 :

$$\int_0^2 (6x^2-2x+1)dx = \left[2x^3-x^2+x\right]_0^2$$
$$=14-0$$
$$=14$$

정답 ②

6. **출제의도** : 삼각함수의 그래프의 최댓값과 주기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$의 최댓값이 8이고

$a>0$이므로

$a+1=8$에서

$a=7$

함수 $f(x)$의 주기가 π이고

$b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi$에서

$b=2$

따라서

$a+b=7+2=9$

정답 ④

7. **출제의도** : 함수의 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x)=5x^2+xf(x)$

이므로

$g'(x)=10x+f(x)+xf'(x)$

따라서

$$g'(3)=30+f(3)+3\times f'(3)$$
$$=30+2+3\times 1$$
$$=35$$

정답 ⑤

8. **출제의도** : 삼각함수의 성질과 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sin(\pi-\theta)>0$에서 $\sin\theta>0$

$2\cos\theta=\sin\theta$ …… ㉠

㉠에서 $\sin\theta>0$이므로 $\cos\theta>0$

㉠의 양변을 제곱하면

$4\cos^2\theta=\sin^2\theta$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$이므로 이를 위 등식에 대입하면

$4\cos^2\theta=1-\cos^2\theta$

$5\cos^2\theta=1$

$\cos^2\theta=\frac{1}{5}$

따라서 $\cos\theta>0$이므로

$\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$

정답 ⑤

9. **출제의도** : 정적분의 성질을 이용하여 주어진 식을 만족시키는 함수의 미정계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_{-3}^{3}(x+1)f(x)dx=36+\int_{-3}^{3}f(x)dx$$

에서

$$\int_{-3}^{3}(x+1)f(x)dx$$
$$=\int_{-3}^{3}\{xf(x)+f(x)\}dx$$
$$=\int_{-3}^{3}xf(x)dx+\int_{-3}^{3}f(x)dx$$

이므로

$$\int_{-3}^{3} xf(x)dx = 36$$

이때 $f(x)=x^2+ax$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{3} xf(x)dx &= \int_{-3}^{3} x(x^2+ax)dx \\ &= \int_{-3}^{3}(x^3+ax^2)dx \\ &= 2\int_{0}^{3} ax^2 dx \\ &= 2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^3 \\ &= 2\times 9a \\ &= 18a\end{aligned}$$

따라서

$18a=36$

이므로

$a=2$

정답 ②

10. 출제의도 : 로그의 성질과 로그방정식을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=\log_a(x+3)$이

곡선 $y=\log_a(-x+3)$과 만나는 점 A의 좌표를 구해 보자

$\log_a(x+3)=\log_a(-x+3)$에서

$x+3=-x+3$

$x=0$

$x=0$일 때, $y=\log_a 3$이므로

점 A의 좌표는 $(0,\ \log_a 3)$이다.

곡선 $y=\log_a(x+3)$에서

$y=0$일 때

$\log_a(x+3)=0$

$x+3=1$

$x=-2$

그러므로 점 B의 좌표는 $(-2,\ 0)$이다.

곡선 $y=\log_a(-x+3)$에서

$y=0$일 때

$\log_a(-x+3)=0$에서

$-x+3=1$

$x=2$

그러므로 점 C의 좌표는 $(2,\ 0)$이다.

삼각형 ABC가 정삼각형이므로

원점을 O라 하면

$\tan\frac{\pi}{3}=\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$에서

$\sqrt{3}=\frac{\log_a 3}{2}$

$\log_a 3=2\sqrt{3}$

$a^{2\sqrt{3}}=3$

따라서

$a=3^{\frac{1}{2\sqrt{3}}}=3^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$

정답 ①

11. 출제의도 : 위치, 속도, 가속도 사이의 관계 및 미분을 이용하여 가속도를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $x=t^3-t^2-t+1$에 $t=1$을 대입하면

$x=1^3-1^2-1+1=0$ (거짓)

ㄴ. 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-2t-1$$

이므로 시각 $t=1$일 때 점 P의 속도는

$v=3\times1^2-2\times1-1=0$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 시각 $t=1$일 때 점 P의 속도는 0이고 시각 $t=1$의 좌우에서 속도 v의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 출발한 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각은 $t=1$이다. 점 P의 시각 t에서의 가속도를 a라 하면

$$a=\frac{dv}{dt}=6t-2$$

이므로 시각 $t=1$일 때 점 P의 가속도는

$a=6\times1-2=4$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

12. 출제의도 : 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 특정한 항의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에서

$a_{n+1}=a_n-3$ 또는 $a_{n+1}=2a_n$

조건 (가)에서 $a_3=a_1$ …… ㉠

(i) $a_3=a_2-3$, $a_2=a_1-3$인 경우

$a_3=a_2-3=(a_1-3)-3$

$a_3=a_1-6$

이 식은 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_3=a_2-3$, $a_2=2a_1$인 경우

$a_3=a_2-3=2a_1-3$

㉠에서

$a_3=2a_3-3$

$a_3=3$

$a_4=a_3-3=0$ 또는 $a_4=2a_3=6$

(iii) $a_3=2a_2$, $a_2=a_1-3$인 경우

$a_3=2(a_1-3)=2a_1-6$

㉠에서

$a_3=2a_3-6$

$a_3=6$

$a_4=a_3-3=3$ 또는 $a_4=2a_3=12$

(iv) $a_3=2a_2$, $a_2=2a_1$인 경우

$a_3=2a_2=2(2a_1)=4a_1$

㉠에서 $a_3=4a_3$

$a_3=0$

$a_4=a_3-3=-3$ 또는 $a_4=2a_3=0$

(i) ~ (iv)에서

$a_4=-3$ 또는 $a_4=0$ 또는 $a_4=3$ 또는 $a_4=6$ 또는 $a_4=12$

이므로

a_4의 최댓값은 12

정답 ②

13. 출제의도 : 정적분과 넓이의 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 상수 k의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 조건에서

(A의 넓이)+(C의 넓이)=(B의 넓이)

가 성립해야 하므로

$$\int_0^k\left\{(3x^2-7x+2)-\left(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)\right\}dx=0$$

$$\int_0^k\left(3x^2-\frac{22}{3}x+\frac{8}{3}\right)dx=0$$

$$\left[x^3-\frac{11}{3}x^2+\frac{8}{3}x\right]_0^k=0$$

$$k^3-\frac{11}{3}k^2+\frac{8}{3}k=0$$

$3k^3-11k^2+8k=0$

$k(k-1)(3k-8)=0$

이때 $k>2$ 이므로 $k=\frac{8}{3}$

정답 ④

14. 출제의도 : 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 삼각형의 외접원의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 APQ에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{PQ}}{\sin(\angle QAP)}=\frac{\overline{AQ}}{\sin(\angle APQ)}$$

조건에서 $\overline{AQ}=3\sqrt{2}$ 이고

$\sin(\angle QAP):\sin(\angle APQ)=\sqrt{2}:3$이므로

$\overline{PQ}$

$=\frac{\sin(\angle QAP)}{\sin(\angle APQ)}\times\overline{AQ}$

$=\frac{\sqrt{2}}{3}\times 3\sqrt{2}$

$=2$

점 P는 선분 BC의 중점이고 점 Q는 선분 BC를 $5:1$로 내분하는 점이므로

$\overline{BC}=\overline{BP}+\overline{PQ}+\overline{QC}$

$\quad=\frac{1}{2}\overline{BC}+2+\frac{1}{6}\overline{BC}$

$\quad=\frac{2}{3}\overline{BC}+2$

$\frac{1}{3}\overline{BC}=2$, $\overline{BC}=6$

한편, $\overline{BQ}=\frac{5}{6}\overline{BC}=5$이고 $\overline{AB}=2\sqrt{7}$이므로 삼각형 ABQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle ABQ)=\frac{\overline{AB}^2+\overline{BQ}^2-\overline{AQ}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BQ}}$$

$$=\frac{(2\sqrt{7})^2+5^2-(3\sqrt{2})^2}{2\times 2\sqrt{7}\times 5}$$

$$=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2$

$=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos(\angle ABC)$

$=(2\sqrt{7})^2+6^2-2\times 2\sqrt{7}\times 6\times\frac{\sqrt{7}}{4}$

$=22$

이므로

$\overline{AC}=\sqrt{22}$

이때

$\sin(\angle ABC)=\sqrt{1-\cos^2(\angle ABC)}$

$\quad=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}$

$\quad=\frac{3}{4}$

이므로 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)}=2R$$

이므로

$$R=\frac{\sqrt{22}}{2\times\frac{3}{4}}=\frac{2\sqrt{22}}{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$$\pi R^2=\pi\times\left(\frac{2\sqrt{22}}{3}\right)^2=\frac{88}{9}\pi$$

정답 ②

15. 출제의도 : 미분을 이용하여 상수와 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$(a, b, c, d는 상

수, $a \neq 0$)이라 하자

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f'(0)=c$이므로

$c=6$

$f'(x)=3ax^2+2bx+6$ ...... ㉠

$x \neq -1$, $x \neq 1$인 모든 실수 x에 대하여 함수 $g(x)$는 미분가능하고

$x<-1$ 또는 $x>1$에서 $g'(x)=f'(x)$,

$-1<x<1$에서

$g'(x)=-f'(x)$ ...... ㉡

이다.

조건 (가)에서 모든 실수 a에 대하여

$\lim_{x \to a+} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$의 값이 존재하므로

$a \neq -1$, $a \neq 1$에서

$$\lim_{x \to a+} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a)$$

모든 실수 a에 대하여

$\lim_{x \to a+} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$

의 값이 0 이하이므로

㉡에서 함수 $f(x)$는

$x<-1$ 또는 $x>1$에서 $f'(x) \leq 0$

$-1<x<1$에서 $f'(x) \geq 0$

을 만족시킨다.

함수 $f(x)$는 $x=-1$과 $x=1$에서 모두 극값을 가지므로

$f'(-1)=f'(1)=0$이어야 한다.

㉠에서

$f'(x)=3ax^2+2bx+6=3a(x+1)(x-1)$

$3ax^2+2bx+6=3ax^2-3a$

양변의 일차항 계수와 상수항을 비교하면

$2b=0$에서 $b=0$

$6=-3a$에서 $a=-2$

$f(x)=-2x^3+6x+d$

조건 (가)에서

$\lim_{x \to 1+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1}$

의 값이 존재하고

$x \to 1+$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x \to 1+} g(x)=g(1)$ ...... ㉢

$\lim_{x \to 1+} \{f(x)+k\}=-f(1)$

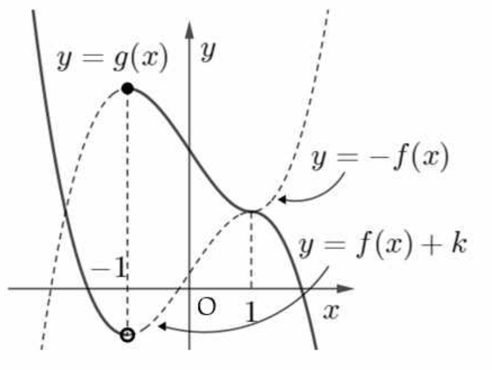
$f(1)+k=-f(1)$이므로

$f(1)=-\frac{k}{2}$ ...... ㉣

한편 $\lim_{x \to 1-} g(x)=\lim_{x \to 1-} \{-f(x)\}$

$=-f(1)=g(1)$

이고 ㉢에서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



조건 (나)에서

방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 최댓값이 13이므로

$g(-1)=-f(-1)=13$

$f(-1)=2-6+d=-13$이므로

$d=-9$

$f(x)=-2x^3+6x-9$

㉣에서

$f(1)=-2+6-9=-\frac{k}{2}$

$k=10$

따라서

$$k+f\left(\frac{1}{2}\right)=10+\left(-\frac{1}{4}+3-9\right)$$
$$=\frac{15}{4}$$

정답 ①

16. 출제의도 : 로그에 미지수가 포함된 방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\log_5(x+1)+\log_5(x-1)=\log_{25}9$ …… ㉠

진수 조건에 의해

$x+1>0$, $x-1>0$이므로 $x>1$

㉠에서

$\log_5(x+1)(x-1)=\log_{5^2}3^2$

$\log_5(x^2-1)=\log_5 3$

즉, $x^2-1=3$에서 $x^2=4$

따라서 $x>1$이므로

$x=2$

정답 2

17. 출제의도 : 다항함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=3x^2+4x$

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int(3x^2+4x)dx$$
$$=x^3+2x^2+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f(0)=3$이므로

$C=3$

따라서

$f(x)=x^3+2x^2+3$

이므로

$f(1)=1+2+3=6$

정답 6

18. 출제의도 : $\sum$의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{6}(k^2+2k)=\sum_{k=1}^{6}k^2+2\sum_{k=1}^{6}k$$
$$=\frac{6\times7\times13}{6}+2\times\frac{6\times7}{2}$$
$$=91+42$$
$$=133$$

정답 133

19. 출제의도 : 함수의 그래프를 이용하여 극솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=9x^2-18x=9x(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 $f(0)=a$이므로

$a=20$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이므로 극솟값은

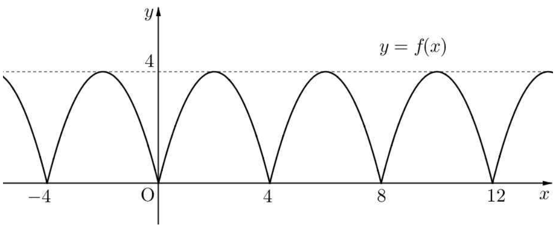
$f(2)=24-36+20=8$

정답 8

20. **출제의도** : 주기함수를 이해하고 등차수열의 일반항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$0 \le x < 4$일 때 $f(x) = -x^2+4x$이고 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



방정식 $f(x)=x$에서

$-x^2+4x=x$

$-x(x-3)=0$

$x=0$ 또는 $x=3$

방정식 $f(x)=x$의 모든 실근이 0, 3이므로 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 실근을 구하는 것은 방정식 $f(x)\times(f(x)-3)=0$의 실근을 구하는 것과 같다.

$0 \le x < 4$일 때,

$f(x)=0$에서 $x=0$

$f(x)=3$에서 $-x^2+4x=3$

$-(x-1)(x-3)=0$

$x=1$ 또는 $x=3$

그러므로 $0 \le x < 4$일 때, 방정식 $f(x)\times(f(x)-3)=0$의 모든 실근은 0, $\boxed{1}$, 3이므로

$$a_1=0,\ a_2=\boxed{1},\ a_3=3$$

이다. 또한 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이므로 세 수열 $\{a_{3n-2}\}$, $\{a_{3n-1}\}$, $\{a_{3n}\}$은 첫째항이 각각 0, $\boxed{1}$, 3이고, 공차가 모두 $\boxed{4}$인 등차수열이다.

따라서

$a_{20}=a_{3\times7-1}=1+6\times4=25$,

$a_{21}=a_{3\times7}=3+6\times4=27$,

$a_{22}=a_{3\times8-2}=0+7\times4=28$

이므로

$a_{20}+a_{21}+a_{22}=25+27+28=\boxed{80}$이다.

이때 $p=1$, $q=4$, $r=80$이므로

$p+q+r=85$

정답 85

21. **출제의도** : 함수의 극한의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=(x-1)(x-2)$

(i) $a<1$ 또는 $a>2$일 때,

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)\times f(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}g(x)=g(a)$$

(ii) $1<a<2$일 때,

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)\times(-f(x))}{f(x)}=-\lim_{x\to a}g(x)=-g(a)$$

(iii) $a=1$일 때,

$$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}=\lim_{x\to1-}\frac{g(x)\times f(x)}{f(x)}=\lim_{x\to1-}g(x)=g(1),$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{g(x)\times(-f(x))}{f(x)}$$
$$=-\lim_{x\to1+}g(x)$$
$$=-g(1)$$

$a=1$에서 $\lim_{x\to1}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$의 극한값이 존재해야 하므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$

이어야 한다.

즉, $g(1)=-g(1)$이므로

$g(1)=0$ …… ㉠

(iv) $a=2$일 때,

$$\lim_{x\to2-}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to2-}\frac{g(x)\times(-f(x))}{f(x)}$$
$$=-\lim_{x\to2-}g(x)$$
$$=-g(2),$$

$$\lim_{x\to2+}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{g(x)\times f(x)}{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to2+}g(x)$$
$$=g(2)$$

$a=2$에서 $\lim_{x\to2}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$의 극한값이 존재해야 하므로

$$\lim_{x\to2-}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$

이어야 한다.

즉, $-g(2)=g(2)$이므로

$g(2)=0$ …… ㉡

(i) ~ (iv)에서

모든 실수 a에 대하여

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$

의 극한값이 존재하려면

㉠, ㉡에서

$g(1)=g(2)=0$

이어야 한다.

이때, 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로

$g(x)=f(x)h(x)$

(단, $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수)로 놓을 수 있다.

한편,

$$\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)h(x)-f(x)|}{f(x)h(x)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|\times|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$

(v) $a<1$ 또는 $a>2$일 때,

$$\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)\times|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

이때, $h(a)=0$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$h(a)\neq0$이고

$$\lim_{x\to a}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$
$$=\frac{|h(a)-1|}{h(a)}$$

(vi) $1<a<2$일 때,

$$\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{-f(x)\times|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$

$$=-\lim_{x\to a}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

이때, $h(a)=0$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$h(a)\neq 0$이고

$$-\lim_{x\to a}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}=-\frac{|h(a)-1|}{h(a)}$$

(ⅶ) $a=1$일 때,

$$\lim_{x\to 1-}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$

$$=\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)\times|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$

$$=\lim_{x\to 1-}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

이때, $h(1)=0$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$h(1)\neq 0$이고

$$\lim_{x\to 1-}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

$$=\frac{|h(1)-1|}{h(1)},$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$

$$=\lim_{x\to 1+}\frac{-f(x)\times|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$

$$=-\lim_{x\to 1+}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

이때, $h(1)=0$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$h(1)\neq 0$이고

$$-\lim_{x\to 1+}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

$$=-\frac{|h(1)-1|}{h(1)}$$

$a=1$에서 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$

의 극한값이 존재해야 하므로

$$\lim_{x\to 1-}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$

$$=\lim_{x\to 1+}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$

이어야 한다.

즉, $\dfrac{|h(1)-1|}{h(1)}=-\dfrac{|h(1)-1|}{h(1)}$이므로

$|h(1)-1|=-|h(1)-1|$

$h(1)=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

이다.

(ⅷ) $a=2$일 때,

$$\lim_{x\to 2-}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$

$$=\lim_{x\to 2-}\frac{-f(x)\times|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$

$$=-\lim_{x\to 2-}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

이때, $h(2)=0$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$h(2)\neq 0$이고

$$-\lim_{x\to 2-}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}=-\frac{|h(2)-1|}{h(2)},$$

$$\lim_{x\to 2+}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$

$$=\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)\times|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$

$$=\lim_{x\to 2+}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

이때, $h(2)=0$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$h(2)\neq 0$이고

$$\lim_{x\to 2+}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}=\frac{|h(2)-1|}{h(2)}$$

$a=2$에서 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$

의 극한값이 존재해야 하므로

$$\lim_{x\to 2-}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$

$$=\lim_{x\to 2+}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$

이어야 한다.

즉, $-\frac{|h(2)-1|}{h(2)}=\frac{|h(2)-1|}{h(2)}$이므로

$-|h(2)-1|=|h(2)-1|$

$h(2)=1$ $\cdots\cdots$ ㉣

이다.

(ⅴ) ~ (ⅷ)에서

모든 실수 a에 대하여

$$\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$

의 극한값이 존재하려면

㉢, ㉣에서

$h(1)=h(2)=1$

이어야 한다.

이때, 함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$h(x)-1=(x-1)(x-2)$

즉, $h(x)=f(x)+1$

따라서

$g(x)=f(x)\times(f(x)+1)$

이고,

$f(-1)=(-1-1)(-1-2)=6$

이므로

$g(-1)=6\times(6+1)=42$

정답 42

[참고]

$h(x)=f(x)+1$

$=(x-1)(x-2)+1$

$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

이므로 모든 실수 a에 대하여

$h(a)\neq 0$을 만족시킨다.

22. 출제의도 : 지수함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

두 곡선

$y=2^x+\frac{k}{2}$, $y=k\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+k-2$

가 만나는 점 A의 x좌표를 a라 하면

$2^a+\frac{k}{2}=k\times\left(\frac{1}{2}\right)^a+k-2$

$2^a=t(t>0)$라 하면

$t+\frac{k}{2}=\frac{k}{t}+k-2$

$2t^2+(4-k)t-2k=0$

$(t+2)(2t-k)=0$

$t>0$이므로

$t=\frac{k}{2}$

즉, $2^a=\frac{k}{2}$이므로

$a=\log_2\frac{k}{2}$

이고,

$2^{\log_2\frac{k}{2}}+\frac{k}{2}=\frac{k}{2}+\frac{k}{2}=k$

이므로 점 A의 좌표는

$\left(\log_2\frac{k}{2},\ k\right)$

이다.

이때, 실수 k에 대하여 $2^{\log_2\frac{k}{2}}=\frac{k}{2}$이므로 점 A는 곡선 $2^x=\frac{y}{2}$, 즉 $y=2^{x+1}$ 위를 움직인다.

한편, 곡선 $y=2^{x-2}-3$은 곡선 $y=2^{x+1}$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선

$y=2^{x-2}-3$과 만나는 점 B의 좌표는
$\left(\log_2 \frac{k}{2}+3,\ k-3\right)$
이고, 두 점 A, B 사이의 거리는
$\sqrt{3^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$
이다.
이때 원점 O에서 직선 AB까지의 거리를 h라 하면 삼각형 OAB의 넓이가 16이므로
$\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times h=16$
에서
$h=\frac{16\sqrt{2}}{3}$
이다.
한편, 직선 AB의 방정식은
$y-k=-\left(x-\log_2 \frac{k}{2}\right)$
즉, $x+y-k-\log_2 \frac{k}{2}=0$이고 원점과 직선 AB사이의 거리가 $\frac{16\sqrt{2}}{3}$이므로
$\frac{\left|-k-\log_2 \frac{k}{2}\right|}{\sqrt{2}}=\frac{16\sqrt{2}}{3}$
$|-k-\log_2 k+1|=\frac{32}{3}$
$k>1$이므로
$k+\log_2 k-1=\frac{32}{3}$
$k+\log_2 k=\frac{35}{3}$
따라서 $p=3$, $q=35$이므로
$p+q=38$

정답 38

■ [선택: 기하]
23. ② 24. ④ 25. ② 26. ① 27. ③
28. ④ 29. 20 30. 36

23. **출제의도** : 성분으로 나타낸 평면벡터의 연산을 할 수 있는가?

정답풀이 :
$\vec{a}=(2,\ 6)$, $\vec{b}=(k,\ -6)$에서
$\vec{a}+\vec{b}=(2+k,\ 0)$
$\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합이 4이므로
$(2+k)+0=4$, $k=2$

정답 ②

24. **출제의도** : 포물선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
포물선 $y^2=12x$ 위의 점 $(3, 6)$에서의 접선의 방정식은
$6y=6(x+3)$, 즉 $y=x+3$
위의 직선이 점 $(1, a)$를 지나므로
$a=1+3=4$

정답 ④

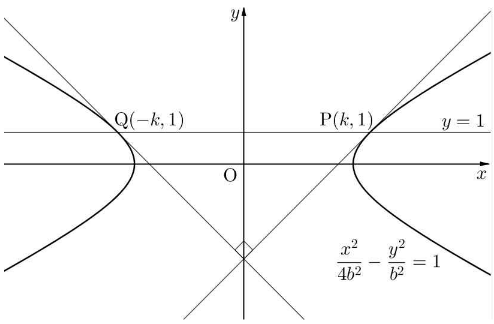
25. **출제의도** : 법선벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
두 점 $\mathrm{A}(4,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ -4)$에 대하여
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ -4)-(4,\ 0)=(-2,\ -4)$
이므로 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$에 수직이고 점 A를 지나는 직선의 방정식은
$-2(x-4)-4(y-0)=0$, 즉 $y=-\dfrac{1}{2}x+2$
따라서 이 직선의 y절편은 2이다.

정답 ②

26. **출제의도** : 쌍곡선의 점근선의 방정식을 이해하고 쌍곡선의 접선의 방정식을 이용하여 조건을 만족시키는 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 한 점근선의 방정식이 $y=\dfrac{1}{2}x$이고, $a>0$, $b>0$이므로
$\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{2}$에서 $a=2b$ …… ㉠
그러므로 이 쌍곡선의 방정식은
$\dfrac{x^2}{4b^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$



이 쌍곡선이 직선 $y=1$과 만나는 점 중 제1사분면의 점을 P, 제2사분면의 점을 Q라 하고, 점 P의 x좌표를 k $(k>0)$이라 하면 두 점 P, Q는 y축에 대하여 대칭이므로
$\mathrm{P}(k,\ 1)$, $\mathrm{Q}(-k,\ 1)$

두 점 P, Q가 쌍곡선 $\frac{x^2}{4b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\frac{k^2}{4b^2}-\frac{1}{b^2}=1$에서 $b^2=\frac{k^2}{4}-1$ …… ㉡

쌍곡선 $\frac{x^2}{4b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(k,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{kx}{4b^2}-\frac{y}{b^2}=1$, 즉 $y=\frac{k}{4}x-b^2$

쌍곡선 $\frac{x^2}{4b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 두 점 P, Q에서의 접선이 y축에 대하여 대칭이고 서로 수직이므로 점 P에서의 접선의 기울기가 1이어야 한다.

즉, $\frac{k}{4}=1$이므로 $k=4$

㉡에서 $b^2=4-1=3$

㉠에서 $a^2=4b^2=4\times3=12$

따라서 $a^2+b^2=15$

정답 ①

27. 출제의도 : 벡터의 내적을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$|\vec{a}+\vec{b}|=6$의 양변을 제곱하여 정리하면

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}+\vec{b}|^2&=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})\\
&=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}\\
&=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=36 \quad \cdots \text{㉠}
\end{aligned}
$$

마찬가지로 $|2\vec{a}-\vec{b}|=9$의 양변을 제곱하여 정리하면 $|2\vec{a}-\vec{b}|^2=81$에서

$4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=81$ … ㉡

한편, $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$에서

$|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=0$, 즉 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ … ㉢

㉢을 ㉠, ㉡에 각각 대입하여 정리하면

$|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=18$ … ㉣

$5|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}=81$ … ㉤

$5\times$㉣$-$㉤을 하면

$9\vec{a}\cdot\vec{b}=9$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$ … ㉥

㉥을 ㉣에 대입하여 정리하면

$|\vec{a}|^2=17$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=\sqrt{17}$

㉥에서

$|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\angle\mathrm{AOB})=1$

$\cos(\angle\mathrm{AOB})=\frac{1}{17}$

$$
\begin{aligned}
\sin(\angle\mathrm{AOB})&=\sqrt{1-\cos^2(\angle\mathrm{AOB})}\\
&=\sqrt{1-\left(\frac{1}{17}\right)^2}\\
&=\frac{12\sqrt{2}}{17}
\end{aligned}
$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\times|\vec{a}|\times|\vec{b}|\times\sin(\angle\mathrm{AOB})\\
&=\frac{1}{2}\times(\sqrt{17})^2\times\frac{12\sqrt{2}}{17}=6\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

[다른 풀이]

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=\sqrt{17}$

이고 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{17}$이므로 삼각형 OAB는 이등변삼각형이다. 선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{OM}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$이고 $|\vec{a}+\vec{b}|=6$에서

$|\vec{a}+\vec{b}|=|2\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=2\overline{\mathrm{OM}}=6$

$\overline{\mathrm{OM}}=3$

직각삼각형 OAM에서

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathrm{AM}}&=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OM}}^2}\\
&=\sqrt{(\sqrt{17})^2-3^2}\\
&=2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AM}}=4\sqrt{2}$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OM}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times3=6\sqrt{2}$

정답 ③

28. 출제의도 : 타원의 정의와 도형의 성질을 이용하여 타원의 장축의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

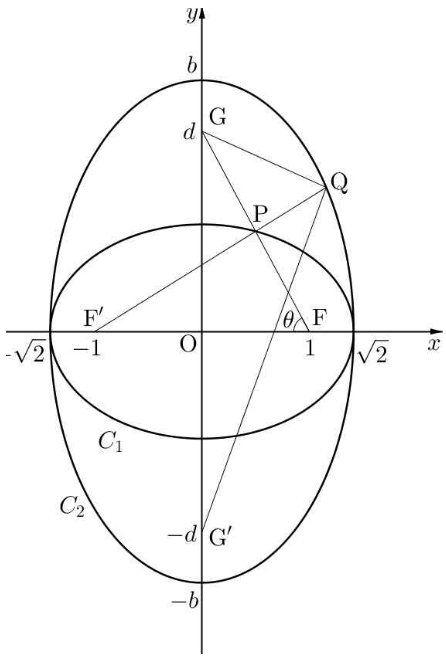
타원 $C_1 : \frac{x^2}{a^2}+y^2=1$의 장축의 길이가 $2a$이고, $\overline{GP}=\overline{PF}$이므로

$\overline{GP}+\overline{PF'}=\overline{PF}+\overline{PF'}=2a$

즉, $2a=2\sqrt{2}$에서 $a=\sqrt{2}$

이때 $c^2=a^2-1=1$에서 $c=1$이므로

$F(1,\ 0)$, $F'(-1,\ 0)$



$\overline{PF}=k\ (k>0)$이라 하면 $\overline{GF}=2k$이고,

$\overline{PF'}=2\sqrt{2}-\overline{PF}=2\sqrt{2}-k$

$\angle PFF'=\theta$라 하면 직각삼각형 GOF에서

$$\cos\theta=\frac{\overline{OF}}{\overline{GF}}=\frac{1}{2k} \quad \cdots\cdots ㉠$$

삼각형 PF′F에서 코사인법칙에 의해

$$\cos\theta=\frac{\overline{PF}^2+\overline{F'F}^2-\overline{PF'}^2}{2\times\overline{PF}\times\overline{F'F}}$$
$$=\frac{k^2+4-(2\sqrt{2}-k)^2}{2\times2\times k}$$
$$=\frac{4k\sqrt{2}-4}{4k}$$
$$=\frac{k\sqrt{2}-1}{k} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{1}{2k}=\frac{k\sqrt{2}-1}{k}$$

$2k\sqrt{2}=3$

$$k=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

그러므로 직각삼각형 GOF에서

$\overline{OG}^2=\overline{GF}^2-\overline{OF}^2$

이므로

$d^2=4k^2-1$

$$=4\times\frac{9}{8}-1=\frac{7}{2}$$

타원 C_2의 꼭짓점 중 y좌표가 양수인 점의 y좌표를 b라 하면

$$b^2-(\sqrt{2})^2=\frac{7}{2}$$

이므로

$$b^2=\frac{11}{2}$$

이때 $b>0$이므로

$$b=\frac{\sqrt{22}}{2}$$

따라서 $\overline{QG}+\overline{QG'}$의 값은 타원 C_2의 장축의 길이이므로

$\overline{QG}+\overline{QG'}=2b=2\times\frac{\sqrt{22}}{2}=\sqrt{22}$

정답 ④

29. **출제의도** : 쌍곡선의 정의와 도형의 성질을 이용하여 쌍곡선의 주축의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 쌍곡선은 y축에 대하여 대칭이므로

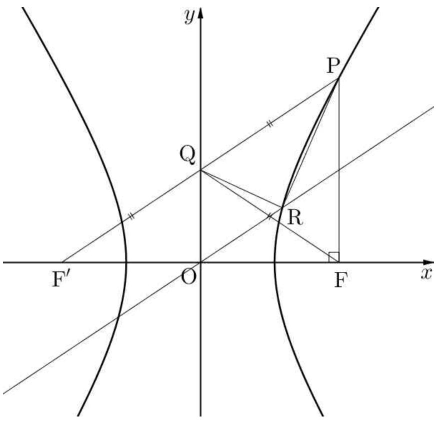
$\overline{F'Q}=\overline{QP}=\overline{QF}$

즉, 점 Q는 세 점 P, F′, F를 지나는 원의 중심이고 이때 선분 PF′이 이 원의 지름이므로

$\angle PFF'=\frac{\pi}{2}$

또, 삼각형 QF′O와 삼각형 PF′F가 서로 닮음이고 그 닮음비가 $1:2$이므로

$\overline{PF}=2\times\overline{OQ}=4$



한편, 직선 F′P와 직선 OR이 서로 평행하며 $\overline{F'Q}=\overline{QP}$이고, 삼각형 PQR의 넓이가 3이므로 삼각형 QF′O의 넓이도 3이다.

즉, $\frac{1}{2}\times\overline{OF'}\times\overline{OQ}=3$에서

$\frac{1}{2}\times\overline{OF'}\times2=3,\ \overline{OF'}=3$

그러므로

$\overline{F'Q}^2=\overline{OF'}^2+\overline{OQ}^2$

$=3^2+2^2=13$

즉, $\overline{F'Q}=\overline{QP}=\sqrt{13}$

이때 $\overline{PF'}-\overline{PF}=2\sqrt{13}-4$이므로 이 쌍곡선의 주축의 길이는 $2\sqrt{13}-4$이다.

따라서 $p=-4,\ q=2$이므로

$p^2+q^2=16+4=20$

정답 20

30. **출제의도** : 벡터의 성질과 내적을 이용하여 벡터의 내적의 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$2\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$에서

$\overrightarrow{BE}=\frac{3\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}}{3-1}$

이므로 점 E는 선분 AC를 $3:1$로 외분하는 점이다.

선분 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 점 P′을

$\overrightarrow{BP'}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AB}$

가 되도록 잡으면

$\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BQ}-\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{BQ}-(\overrightarrow{BP'}-\overrightarrow{AB})-\overrightarrow{AB}$

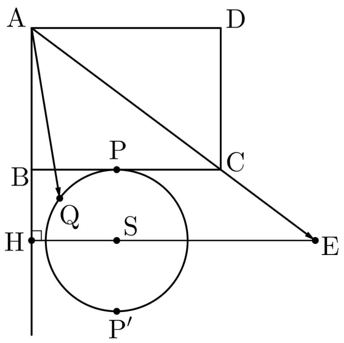
$=\overrightarrow{BQ}-\overrightarrow{BP'}$

$=\overrightarrow{P'Q}$

이고 $\overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{AB})=0$에서

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{P'Q}=0$

즉, 점 Q는 선분 PP′을 지름으로 하는 원 위의 점이다.



점 Q가 나타내는 원의 중심을 S, 점 S에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 E는 직선 SH 위의 점이다.

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AE}\cdot(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HS}+\overrightarrow{SQ})$

$\quad=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{HS}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{SQ}$

이고, $0\le t\le 8$인 실수 t에 대하여

$\overrightarrow{HS}=t\overrightarrow{BC}$

이므로 $t=0$이고 두 벡터 $\overrightarrow{SQ}$, $\overrightarrow{AE}$의 방향이 서로 반대일 때 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 값은 최소이다. 즉, $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 최솟값은

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AH}+0+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{SQ}$

$\quad=|\overrightarrow{AH}|^2-|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{SQ}|$

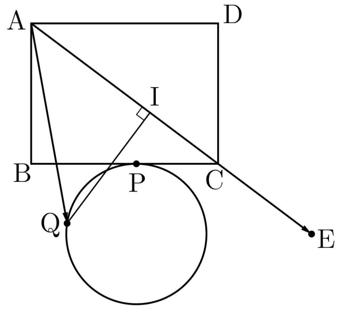
$\quad=9^2-\sqrt{9^2+12^2}\times 3$

$\quad=81-15\times 3$

$\quad=36$

정답 36

[다른 풀이 1]



점 Q에서 직선 AE에 내린 수선의 발을 I라 하면 점 I는 점 P의 위치에 관계없이 선분 AE 위에 있고

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AQ}=|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{AQ}|\cos(\angle QAE)$

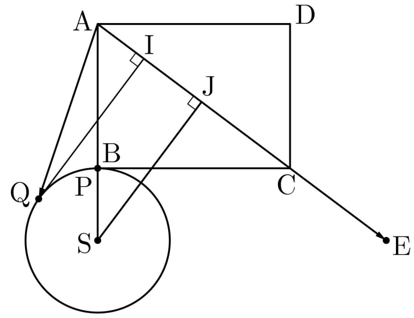
$\quad=\overline{AE}\times\overline{AI}$

이다. 이때

$\overline{AE}=\dfrac{3}{2}\overline{AC}=\dfrac{3}{2}\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}$

$\quad=\dfrac{3}{2}\times\sqrt{6^2+8^2}=\dfrac{3}{2}\times 10=15$

이고 선분 AI의 길이는 점 P가 점 B와 일치하고 직선 QI가 점 Q가 나타내는 원에 접할 때 최소이다.



점 Q가 나타내는 원의 중심을 S라 하고 점 S에서 직선 AE에 내린 수선의 발을 J라 하면

$\overline{AJ}=\overline{AS}\cos(\angle SAJ)=9\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{27}{5}$

$\overline{AI}=\overline{AJ}-\overline{IJ}=\dfrac{27}{5}-3=\dfrac{12}{5}$

따라서 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 최솟값은

$\overline{AE}\times\overline{AI}=15\times\dfrac{12}{5}=36$

[다른 풀이 2]

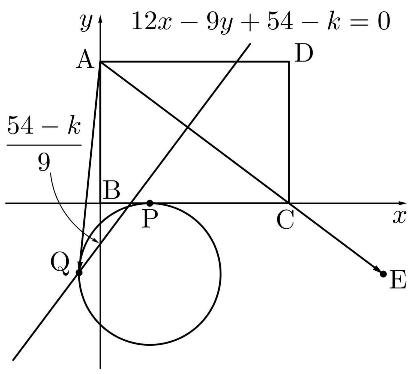
네 점 A, B, C, D의 좌표를 각각 $(0,\ 6)$, $(0,\ 0)$, $(8,\ 0)$, $(8,\ 6)$이라 하자. $2\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$에서

$\overrightarrow{BE}=\dfrac{3\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}}{2}$

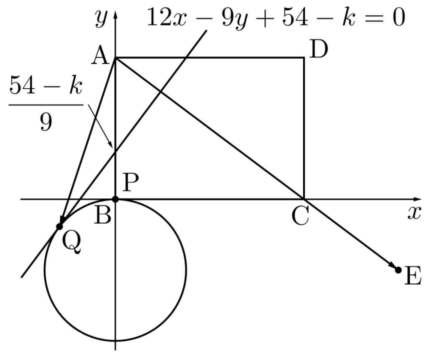
$\quad=\dfrac{3(8,\ 0)-(0,\ 6)}{2}$

$\quad=(12,\ -3)$

이다. 점 P가 선분 BC 위를 움직이는 점이므로 $0 \le t \le 8$인 실수 t에 대하여 점 P의 좌표를 $(t,\ 0)$으로 놓을 수 있다.
점 Q의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면
$\overrightarrow{PQ} \cdot (\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{AB}) = 0$에서
$(x-t,\ y) \cdot ((x-t,\ y)-(0,\ -6))$
$=(x-t,\ y) \cdot (x-t,\ y+6)$
$=(x-t)^2+y(y+6)=0$
$(x-t)^2+(y+3)^2=9$
즉, 점 Q는 점 $(t,\ -3)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 위의 점이다.
이때 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AQ} = k$라 하면
$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AQ}$
$=((12,\ -3)-(0,\ 6)) \cdot ((x,\ y)-(0,\ 6))$
$=(12,\ -9) \cdot (x,\ y-6)$
$=12x-9(y-6)$
$=12x-9y+54=k$
$12x-9y+54-k=0$



즉, $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AQ}$의 값은 기울기가 $\frac{4}{3}$이고 점 Q를 지나는 직선의 y절편이 최대일 때 최소이다.



따라서 $t=0$일 때, 즉, 원
$x^2+(y+3)^2=9$
에 접하고 기울기가 $\frac{4}{3}$인 직선의 y절편이 최대일 때 k의 값이 최소이므로 k의 최솟값을 k_0이라 하면
$$\frac{|-9\times(-3)+54-k_0|}{\sqrt{12^2+(-9)^2}}=3$$
에서 $81-k_0=45$
$k_0=81-45=36$

EBS