2024학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가

수학영역 정답 및 풀이

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01. ⑤	02. ③	03. ②	04. ①	05. ⑤
06. ③	07. ④	08. ④	09. ③	10. ③
11. ⑤	12. ①	13. ③	14. ②	15. ④
16. 6	17. 24	18. 5	19. 4	
20. 98	21. 19	22. 10		

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 값을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$3^{1-\sqrt{5}} \times 3^{1+\sqrt{5}}$

$=3^{(1-\sqrt{5})+(1+\sqrt{5})}$

$=3^2$

$=9$

정답 ⑤

2. 출제의도 : 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2x^2-x$에서

$f'(x)=4x-1$

이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=f'(1)=3$

정답 ③

3. 출제의도 : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$이고 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이므로

$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}$

$=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

정답 ②

4. 출제의도 : 그래프를 보고 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to -2+}f(x)=-2$, $\lim_{x\to 1-}f(x)=0$

이므로

$\lim_{x\to -2+}f(x)+\lim_{x\to 1-}f(x)=-2+0=-2$

정답 ①

5. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 등비수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $a>0$, $r>0$이다.

$\frac{a_3a_8}{a_6}=12$에서 $\frac{ar^2\times ar^7}{ar^5}=12$, $ar^4=12$

즉, $a_5=12$

$a_5+a_7=36$에서 $a_7=24$이므로

$r^2=\frac{a_7}{a_5}=\frac{24}{12}=2$

$\frac{a_{11}}{a_7}=r^4=(r^2)^2=2^2=4$이므로

$a_{11}=a_7\times4=24\times4=96$

정답 ⑤

6. **출제의도** : 다항함수의 극댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

이고, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대, $x=3$에서 극소이므로

$$\begin{aligned}3x^2+2ax+b&=3(x+1)(x-3)\\&=3x^2-6x-9\end{aligned}$$

따라서 $a=-3$, $b=-9$ 이고

$f(x)=x^3-3x^2-9x+1$

이므로 함수 $f(x)$의 극댓값은

$f(-1)=-1-3+9+1=6$

정답 ③

7. **출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$3a+2b=\log_3 32$, $ab=\log_9 2$이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{3a}+\frac{1}{2b}&=\frac{3a+2b}{6ab}\\&=\frac{\log_3 32}{6\times log_9 2}\\&=\frac{\log_3 2^5}{6\times log_{3^2}2}\\&=\frac{5\log_3 2}{3\log_3 2}\\&=\frac{5}{3}\end{aligned}$$

정답 ④

8. **출제의도** : 부정적분을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=6x^2-2f(1)x$에서

$f(x)=2x^3-f(1)x^2+C$ (C는 적분상수)

라 하면 $f(0)=4$이므로

$C=4$

즉, $f(x)=2x^3-f(1)x^2+4$

이 식에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2-f(1)+4$

$f(1)=3$

따라서

$f(x)=2x^3-3x^2+4$

이므로

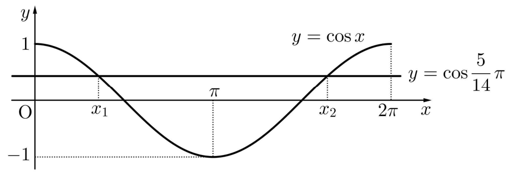
$f(2)=2\times2^3-3\times2^2+4=8$

정답 ④

9. **출제의도** : 삼각함수가 포함된 부등식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sin\dfrac{\pi}{7}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{7}\right)=\cos\dfrac{5}{14}\pi$



그림과 같이 곡선 $y=\cos x(0\le x\le 2\pi)$와 직선 $y=\cos\dfrac{5}{14}\pi$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 x_1, $x_2(x_1<x_2)$라 하면

$x_1=\dfrac{5}{14}\pi$이고 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\pi$이므로

$x_2=2\pi-x_1=\dfrac{23}{14}\pi$

따라서 $0\le x\le 2\pi$일 때, 부등식 $\cos x\le\sin\dfrac{\pi}{7}$을 만족시키는 모든 x의 값의 범위는 $\dfrac{5}{14}\pi\le x\le\dfrac{23}{14}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\dfrac{23}{14}\pi-\dfrac{5}{14}\pi=\dfrac{9}{7}\pi$

정답 ③

10. **출제의도** : 삼차함수 그래프의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (2, 3)에서의 접선이 점 (1, 3)을 지나므로

$f(x)-3=(x-a)(x-2)^2$

$f(x)=(x-a)(x-2)^2+3$ (단, a는 상수)

이때

$f'(x)=(x-2)^2+2(x-a)(x-2)$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2,f(-2))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(-2)=f'(-2)(x+2)$

이 접선이 점 $(1,3)$을 지나므로

$3-f(-2)=f'(-2)(1+2)$

$3-f(-2)=3f'(-2)$

$3-\{16(-2-a)+3\}=3\{16-8(-2-a)\}$

$3-(-29-16a)=3(32+8a)$

$32+16a=96+24a$, $8a=-64$

즉, $a=-8$이므로

$f(x)=(x+8)(x-2)^2+3$

따라서

$f(0)=8(-2)^2+3=35$

정답 ③

11. **출제의도** : 적분을 이용하여 수직선 위를 움직이는 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P가 점 A(1)에서 출발하고 속도가 $v_1(t)=3t^2+4t-7$이므로 시각 t에서의 위치를 $s_1(t)$라 하면

$s_1(t)=1+\displaystyle\int_0^t(3t^2+4t-7)dt$

$\quad=t^3+2t^2-7t+1$ -----㉠

또, 점 Q가 점 B(8)에서 출발하고 속도가 $v_2(t)=2t+4$이므로 시각 t에서의 위치를 $s_2(t)$라 하면

$s_2(t)=8+\displaystyle\int_0^t(2t+4)dt$

$\quad=t^2+4t+8$ -----㉡

이때, 두 점 P, Q사이의 거리가 4가 되는 시각은

$|s_1(t)-s_2(t)|=4$

㉠, ㉡에서

$|(t^3+2t^2-7t+1)-(t^2+4t+8)|=4$

$|t^3+t^2-11t-7|=4$

그러므로

$t^3+t^2-11t-7=4$ 또는

$t^3+t^2-11t-7=-4$

즉,

$t^3+t^2-11t-11=0$ 또는

$t^3+t^2-11t-3=0$

(i) $t^3+t^2-11t-11=0$일 때,

$t^2(t+1)-11(t+1)=0$

$(t+1)(t^2-11)=0$

$t>0$이므로

$t=\sqrt{11}$

(ii) $t^3+t^2-11t-3=0$일 때,

좌변을 인수분해하면

$(t-3)(t^2+4t+1)=0$

$t>0$이므로

$t=3$

(i), (ii)에 의하여 두 점 P, Q의 사이의 거리가 처음으로 4가 되는 시각은

$t=3$

한편,

$v_1(t)=3t^2+4t-7$

$=(3t+7)(t-1)$

이므로

$0\le t<1$일 때, $v_1(t)<0$

$t\ge 1$일 때, $v_1(t)\ge 0$

따라서 점 P가 시각 $t=0$에서 시각 $t=3$까지 움직인 거리는

$$\int_0^3 |v_1(t)|dt$$

$$=-\int_0^1 v_1(t)dt+\int_1^3 v_1(t)dt$$

$$=-\int_0^1 (3t^2+4t-7)dt+\int_1^3 (3t^2+4t-7)dt$$

$$=-\left[t^3+2t^2-7t\right]_0^1+\left[t^3+2t^2-7t\right]_1^3$$

$=-(-4)+28$

$=32$

정답 ⑤

12. **출제의도** : 귀납적으로 정의된 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

자연수 k에 대하여

(i) $a_1=4k$일 때,

a_1은 짝수이므로

$$a_2=\frac{a_1}{2}=\frac{4k}{2}=2k$$

a_2도 짝수이므로

$$a_3=\frac{a_2}{2}=\frac{2k}{2}=k$$

㉠ k가 홀수인 경우

$a_4=a_3+1=k+1$

이때

$a_2+a_4=2k+(k+1)=3k+1$

이므로

$3k+1=40$

에서 $k=13$이고,

$a_1=4k=4\times 13=52$

㉡ k가 짝수인 경우

$$a_4=\frac{a_3}{2}=\frac{k}{2}$$

이때

$$a_2+a_4=2k+\frac{k}{2}=\frac{5}{2}k$$

이므로

$$\frac{5}{2}k=40$$

에서 $k=16$이고,

$a_1=4k=4\times 16=64$

(ⅱ) $a_1 = 4k-1$일 때,

a_1은 홀수이므로

$a_2 = a_1 + 1 = 4k$

a_2는 짝수이므로

$a_3 = \frac{a_2}{2} = \frac{4k}{2} = 2k$

a_3도 짝수이므로

$a_4 = \frac{a_3}{2} = \frac{2k}{2} = k$

이때

$a_2 + a_4 = 4k + k = 5k$

이므로

$5k = 40$

에서 $k=8$이고,

$a_1 = 4k-1 = 4\times 8 - 1 = 31$

(ⅲ) $a_1 = 4k-2$일 때,

a_1은 짝수이므로

$a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{4k-2}{2} = 2k-1$

a_2는 홀수이므로

$a_3 = a_2 + 1 = (2k-1) + 1 = 2k$

a_3은 짝수이므로

$a_4 = \frac{a_3}{2} = \frac{2k}{2} = k$

이때

$a_2 + a_4 = (2k-1) + k = 3k-1$

이므로

$3k - 1 = 40$

에서 $k = \frac{41}{3}$이고, 이것은 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅳ) $a_1 = 4k-3$일 때,

a_1은 홀수이므로

$a_2 = a_1 + 1 = (4k-3) + 1 = 4k-2$

a_2는 짝수이므로

$a_3 = \frac{a_2}{2} = \frac{4k-2}{2} = 2k-1$

a_3은 홀수이므로

$a_4 = a_3 + 1 = (2k-1) + 1 = 2k$

이때

$a_2 + a_4 = (4k-2) + 2k = 6k-2$

이므로

$6k - 2 = 40$

에서 $k=7$이고,

$a_1 = 4k-3 = 4\times 7 - 3 = 25$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값의 합은

$52 + 64 + 31 + 25 = 172$

정답 ①

13. **출제의도** : 도함수를 활용하여 함수가 주어진 증가, 감소에 대한 조건을 만족시키도록 하는 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^3 - ax^2 - bx & (x<0) \\ \frac{1}{3}x^3 + ax^2 - bx & (x \ge 0) \end{cases}$$

에서

$$f'(x) = \begin{cases} -x^2 - 2ax - b & (x<0) \\ x^2 + 2ax - b & (x>0) \end{cases}$$

이다.

함수 $f(x)$가 $x=-1$의 좌우에서 감소하다가 증가하고, 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하므로

$f'(-1) = 0$

$-1 + 2a - b = 0$, $b = 2a - 1$

$x<0$일 때

$f'(x) = -x^2 - 2ax - 2a + 1$

$$=-(x+1)(x+2a-1)$$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=-2a+1$이다. 이때 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ -1]$에서 감소하고, 구간 $[-1,\ 0]$에서 증가하므로 $(-\infty,\ -1)$에서 $f'(x)\le 0$, $(-1,\ 0)$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

즉, $f'(-2a+1)=0$에서 $-2a+1\ge 0$이어야 한다.

그러므로 $a\le\dfrac{1}{2}$ …… ㉠

한편, $x>0$일 때

$$f'(x)=x^2+2ax-b$$
$$=x^2+2ax-2a+1$$
$$=(x+a)^2-a^2-2a+1$$

이고 함수 $f(x)$가 구간 $[0,\ \infty)$에서 증가하므로 $(0,\ \infty)$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

(ⅰ) $-a<0$, 즉 $a>0$인 경우

$(0,\ \infty)$에서 $f'(x)\ge 0$이려면

$f'(0)=-2a+1\ge 0$이면 된다.

그러므로 $0<a\le\dfrac{1}{2}$

(ⅱ) $-a\ge 0$, 즉 $a\le 0$인 경우

$(0,\ \infty)$에서 $f'(x)\ge 0$이려면

$f'(-a)=-a^2-2a+1\ge 0$이면 된다.

$a^2+2a-1\le 0$,

$-1-\sqrt{2}\le a\le -1+\sqrt{2}$

그러므로 $-1-\sqrt{2}\le a\le 0$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$-1-\sqrt{2}\le a\le\dfrac{1}{2}$ …… ㉡

즉, ㉠, ㉡에서 구하는 a의 값의 범위는 $-1-\sqrt{2}\le a\le\dfrac{1}{2}$이므로 $a+b=3a-1$의 값의 최댓값은 $a=\dfrac{1}{2}$일 때 $\dfrac{1}{2}$, 최솟값은 $a=-1-\sqrt{2}$일 때 $-4-3\sqrt{2}$이다.

따라서

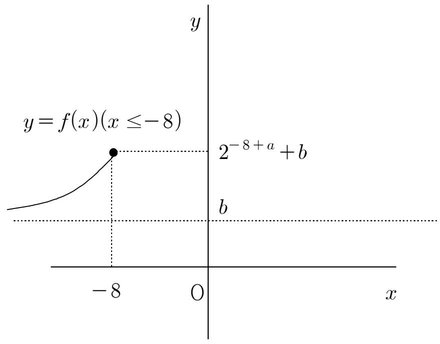
$$M-m=\frac{1}{2}-(-4-3\sqrt{2})=\frac{9}{2}+3\sqrt{2}$$

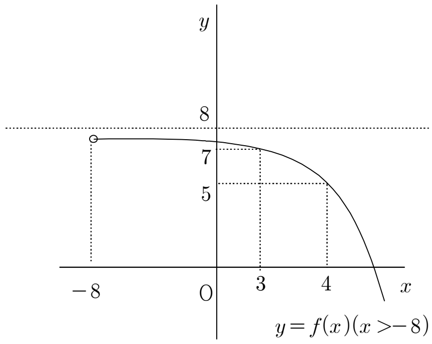
정답 ③

14. 출제의도 : 지수함수의 그래프를 이해하고 조건을 만족시키는 지수함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x\le -8$과 $x>-8$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 각각 그림과 같다.





또한 주어진 조건에서 $3\le k<4$이므로 $x>-8$인 경우에 정수 $f(x)$는

$f(x)=6$ 또는 $f(x)=7$

이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키기 위해서는 $x\le -8$인 경우에 정수 $f(x)$는 6뿐이어야 한다.

즉 $b=5$이고 $6 \le f(-8) < 7$ 이어야 하므로

$6 \le 2^{-8+a}+5 < 7$

$1 \le 2^{-8+a} < 2$

$0 \le -8+a < 1$, $8 \le a < 9$

이때 a는 자연수이므로 $a=8$

따라서 $a+b=8+5=13$

정답 ②

15. 출제의도 : 함수의 극한과 연속을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to 3} g(x) = g(3)-1$ ----㉠

이므로 $x=3$일 때, $f(3)$의 값에 따라 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(ⅰ) $f(3) \ne 0$일 때,

$x=3$에 가까운 x의 값에 대하여 $f(x) \ne 0$이므로

$$g(x) = \frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$$

이때 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 $f(x)$, $f(x+3)$, $f(x)+1$은 연속이다.

그러므로 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 연속이다. 즉,

$\lim_{x\to 3} g(x) = g(3)$

이 식을 ㉠에 대입하면 만족하지 않는다.

(ⅱ) $f(3)=0$일 때,

함수 $f(x)$가 삼차함수이므로 방정식 $f(x)=0$은 많아야 서로 다른 세 실근을 갖는다.

그러므로 $x=3$에 가까우며 $x \ne 3$인 x의 값에 대하여

$f(x) \ne 0$

이때,

$\lim_{x\to 3} g(x)$

$= \lim_{x\to 3} \frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$ ----㉡

위에서 $x\to 3$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$에서

$\lim_{x\to 3} f(x+3)\{f(x)+1\}=0$

$f(6)\{f(3)+1\}=0$

$f(6)=0$

그러므로

$f(x)=(x-3)(x-6)(x-k)$

(k는 상수)

이 식을 ㉡에 대입하면

$\lim_{x\to 3} g(x)$

$= \lim_{x\to 3} \frac{x(x-3)(x+3-k)\{(x-3)(x-6)(x-k)+1\}}{(x-3)(x-6)(x-k)}$

$= \lim_{x\to 3} \frac{x(x+3-k)\{(x-3)(x-6)(x-k)+1\}}{(x-6)(x-k)}$

$= \frac{3(6-k)}{-3(3-k)}$

$= \frac{6-k}{k-3}$

이 값을 ㉠에 대입하면 $g(3)=3$이므로

$\frac{6-k}{k-3} = 3-1$

$6-k=2k-6$

$3k=12$

$k=4$

따라서,

$f(x)=(x-3)(x-4)(x-6)$

이고 $f(5) \ne 0$이므로

$$g(5) = \frac{f(8)\{f(5)+1\}}{f(5)} = \frac{5\times 4\times 2\times \{2\times 1\times (-1)+1\}}{2\times 1\times (-1)} = 20$$

정답 ④

정답 24

16. 출제의도 : 로그방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

로그의 진수 조건에 의하여

$x-1>0$에서 $x>1$ ……㉠

$13+2x>0$에서 $x>-\frac{13}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $x>1$

$\log_2(x-1)=\log_4(13+2x)$

에서

$\log_2(x-1)=\frac{1}{2}\log_2(13+2x)$

$2\log_2(x-1)=\log_2(13+2x)$

$\log_2(x-1)^2=\log_2(13+2x)$

$(x-1)^2=13+2x$

$x^2-4x-12=0$

$(x+2)(x-6)=0$

$x>1$이므로 $x=6$

정답 6

17. 출제의도 : 합의 기호 $\sum$의 성질을 이해하여 주어진 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)&=\sum_{k=1}^{10}\{(2a_k-b_k)-a_k\}\\&=\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k)-\sum_{k=1}^{10}a_k\\&=34-10\\&=24\end{aligned}$$

18. 출제의도 : 곱의 미분법을 이용하여 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=(x^2+1)(x^2+ax+3)$에서

$f'(x)=2x(x^2+ax+3)+(x^2+1)(2x+a)$

이므로

$$\begin{aligned}f'(1)&=2(a+4)+2(a+2)\\&=4a+12=32\end{aligned}$$

따라서 $a=5$

정답 5

19. 출제의도 : 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 정적분을 이용하여 구할 수 있는가?

정답풀이 :

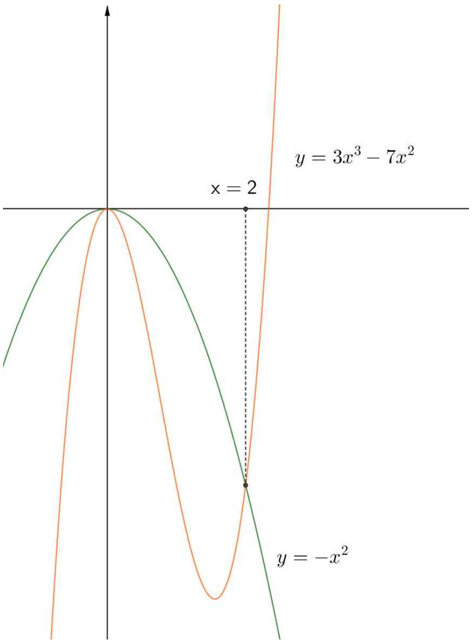
두 곡선 $y=3x^3-7x^2$, $y=-x^2$이 만나는 점의 x좌표는

$3x^3-7x^2=-x^2$

$3x^2(x-2)=0$

$x=0$ 또는 $x=2$

이때, 두 함수 $y=3x^3-7x^2$, $y=-x^2$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2 \{(-x^2)-(3x^3-7x^2)\}dx$$
$$=\int_0^2 (-3x^3+6x^2)dx$$
$$=\left[-\frac{3}{4}x^4+2x^3\right]_0^2$$
$$=(-12+16)-0$$
$$=4$$

정답 4

20. 출제의도 : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin\frac{3}{4}\pi}=2R_1,\ \frac{\overline{BD}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2R_1$$

$$R_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{BD}$$

이고, 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin\frac{2}{3}\pi}=2R_2,\ \frac{\overline{BD}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R_2$$

$$R_2=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}\times\overline{BD}$$

이다. 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2=2^2+1^2-2\times2\times1\times\cos\frac{2}{3}\pi$$
$$=2^2+1-\boxed{(-2)}$$
$$=7$$

이므로

$$R_1\times R_2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{BD}\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\times\overline{BD}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{6}\times\overline{BD}^2$$
$$=\boxed{\frac{7\sqrt{6}}{6}}$$

이다.

따라서 $p=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $q=-2$, $r=\frac{7\sqrt{6}}{6}$이므로

$$9\times(p\times q\times r)^2=9\times\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\times(-2)\times\frac{7\sqrt{6}}{6}\right\}^2$$
$$=9\times\frac{98}{9}$$
$$=98$$

정답 98

21. 출제의도 : 등차수열의 일반항과 합을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자. 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수이므로 a는 자연수이고 d는 0 이상의 정수이다.

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=\frac{d}{2}n^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)n$$

이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{7}S_k&=\sum_{k=1}^{7}\left\{\frac{d}{2}k^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)k\right\}\\&=\frac{d}{2}\times\sum_{k=1}^{7}k^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)\times\sum_{k=1}^{7}k\\&=\frac{d}{2}\times\frac{7\times8\times15}{6}+\left(a-\frac{d}{2}\right)\times\frac{7\times8}{2}\\&=70d+28\left(a-\frac{d}{2}\right)\\&=28a+56d\end{aligned}$$

$28a+56d=644$에서

$a+2d=23$ …… ㉠

a_7이 13의 배수이므로 자연수 m에 대하여

$a+6d=13m$ …… ㉡

㉡$-$㉠에서 $4d=13m-23$

$4d+23+13=13m+13$

$4(d+9)=13(m+1)$

$$d+9=\frac{13(m+1)}{4}$$

이 값이 자연수가 되어야 하므로 $m+1$의 값은 4의 배수이어야 한다. 즉, m이 될 수 있는 값은

3, 7, 11, 15, $\cdots$

한편, $d=\dfrac{13m-23}{4}$이므로 ㉡에서

$$\begin{aligned}a&=13m-6d\\&=13m-6\times\left(\frac{13m-23}{4}\right)\\&=13m-\frac{39}{2}m+\frac{69}{2}\\&=-\frac{13}{2}m+\frac{69}{2}\end{aligned}$$

이고 이 값이 양수이어야 하므로

$$-\frac{13}{2}m+\frac{69}{2}>0,\ m<\frac{69}{13}$$

따라서 $m=3$이고 이때 $d=4$이므로

$a=23-2d=15$

이고

$a_2=a+d=15+4=19$

정답 19

22. 출제의도 : 곱의 미분법과 부정적분을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구하고, 그 정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에 $x=1$을 대입하면

$0=f(1)-3$

이므로

$f(1)=3$ ……㉠

조건 (가)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-4x$

이고, $f(x)$는 다항함수이므로

$f'(x)=4$

즉,

$f(x)=4x+C_1$ (C_1은 적분상수)

로 놓을 수 있다. 이때 ㉠에서

$f(1)=3$

이므로

$f(1)=4+C_1=3$

$C_1=-1$

즉, $f(x)=4x-1$이므로

$F(x)=2x^2-x+C_2$ (C_2는 적분상수)

한편, 조건 (나)에서

$f(x)G(x)+F(x)g(x)=\{F(x)G(x)\}'$

이므로 양변을 x에 대하여 적분하면

$F(x)G(x)=2x^4+x^3+x+C_3$ (C_3은 적분 상수)

로 놓을 수 있다.

이때 $F(x)=2x^2-x+C_2$이고 $G(x)$도 다항함수이므로 $G(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

$G(x)=x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수)

로 놓으면

$$(2x^2-x+C_2)(x^2+ax+b)=2x^4+x^3+x+C_3$$

양변의 x^3의 계수를 비교하면

$2a-1=1$

즉, $a=1$이므로

$G(x)=x^2+x+b$

따라서

$$\begin{aligned}\int_1^3 g(x)dx &= \Big[G(x)\Big]_1^3 \\ &= G(3)-G(1) \\ &= (3^2+3+b)-(1^2+1+b) \\ &= 10\end{aligned}$$

정답 10

■ [선택: 미적분]
23. ④ 24. ② 25. ② 26. ⑤ 27. ①
28. ② 29. 18 30. 32

23. **출제의도** : 지수함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{7x}-1}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{7x}-1}{7x}\times\frac{2x}{e^{2x}-1}\times\frac{7}{2}\right)$$

$$=\frac{7}{2}\times\lim_{x\to0}\frac{e^{7x}-1}{7x}\times\lim_{x\to0}\frac{2x}{e^{2x}-1}$$

$$=\frac{7}{2}\times1\times1=\frac{7}{2}$$

정답 ④

24. **출제의도** : 매개변수로 나타내어진 함수의 미분을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$\frac{dx}{dt}=1-2\sin2t$, $\frac{dy}{dt}=2\sin t\cos t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\sin t\cos t}{1-2\sin2t}\ \cdots\ ㉠$$

(단, $1-2\sin2t\neq0$)

㉠의 우변에 $t=\frac{\pi}{4}$를 대입하면

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}}{1-2\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-2\times1}$$

$$=\frac{1}{1-2}=-1$$

정답 ②

25. **출제의도** : 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=1+\frac{1}{x}$이므로

$$\int_1^e\left(1+\frac{1}{x}\right)f(x)dx$$

$$=\int_1^e f'(x)f(x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\{f(x)\}^2\right]_1^e$$

$$=\frac{1}{2}\{f(e)\}^2-\frac{1}{2}\{f(1)\}^2$$

$$=\frac{1}{2}(e+1)^2-\frac{1}{2}(1+0)^2$$

$$=\frac{e^2}{2}+e$$

정답 ②

26. **출제의도** : 급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d $(d>0)$이라 하면

$$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{d}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\right.$$

$$\left.\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\ \cdots\ ㉠$$

이때

$a_n = a_1 + (n-1)d = dn + 1 - d$

이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(dn+1-d) = \infty$

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_{n+1}} = 0$

㉠에서

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$= \frac{1}{d}\left(\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$= \frac{1}{d}(1-0)$

$= \frac{1}{d}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n a_{n+1}} + b_n\right) = 2$에서

$\frac{1}{a_n a_{n+1}} + b_n = c_n$이라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 2$

$b_n = c_n - \frac{1}{a_n a_{n+1}}$이므로 급수의 성질에 의하여

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n - \frac{1}{a_n a_{n+1}}\right)$

$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}}$

$= 2 - \frac{1}{d} \quad \cdots$ ㉡

따라서 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r라 하면

$-1 < r < 1$이고 $a_2 b_2 = (1+d)r = 1$에서

$r = \frac{1}{1+d}$

이때 $d > 0$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{b_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{1+d}} = \frac{1+d}{d} \quad \cdots$ ㉢

이므로 ㉡, ㉢에서

$2 - \frac{1}{d} = \frac{1+d}{d}$,

$\frac{2d-1}{d} = \frac{1+d}{d}$

$d = 2$

㉡ 또는 ㉢에서

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{3}{2}$

정답 ⑤

27. **출제의도** : 정적분을 이용하여 곡선의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$y = \begin{cases} -\frac{e^x + e^{-x}}{2} + 1 & (x < 0) \\ 0 & (x \ge 0) \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} -\frac{e^x - e^{-x}}{2} & (x < 0) \\ 0 & (x \ge 0) \end{cases}$$

이므로 $x < 0$일 때

$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2$

에서

$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2}$

$= \left|\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right| = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

이고, $x \ge 0$일 때

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+0=1$$

따라서 $-\ln4 \le x \le 1$에서의 곡선의 길이는

$$\int_{-\ln4}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_{-\ln4}^{0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx+\int_0^1 1dx$$

$$=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_{-\ln4}^{0}+[x]_0^1$$

$$=\left(\frac{e^0-e^0}{2}-\frac{e^{-\ln4}-e^{\ln4}}{2}\right)+(1-0)$$

$$=\left(0-\frac{\frac{1}{4}-4}{2}\right)+1$$

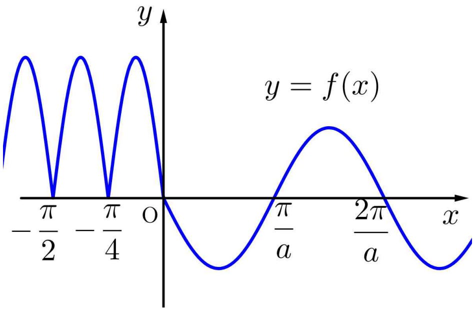
$$=\frac{15}{8}+1=\frac{23}{8}$$

정답 ①

28. 출제의도 : 정적분과 절댓값이 포함된 함수가 미분가능할 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$F(x)=\int_{-a\pi}^{x}f(t)dt$라 하자.

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $F(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

이때 정적분의 성질에 의하여

$F'(x)=f(x)$

이고,

$$g(x)=\begin{cases}-F(x) & (F(x)<0)\\ F(x) & (F(x)\ge 0)\end{cases}$$

이므로

$$g'(x)=\begin{cases}-f(x) & (F(x)<0)\\ f(x) & (F(x)>0)\end{cases}$$

따라서 함수 $g(x)=|F(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$F(k)=0$인 실수 k가 존재하지 않거나

$F(k)=0$인 모든 실수 k에 대하여

$F'(k)=f(k)=0$이어야 한다.

(i) 함수 $g(x)$가 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 미분가능할 조건

$-a\pi<0$이고 모든 음의 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이므로

$F(k)=\int_{-a\pi}^{k}f(t)dt=0$인 음의 실수 k의 값은 $-a\pi$뿐이다.

이때

$f(k)=f(-a\pi)=2|\sin(-4a\pi)|=0$

이어야 하므로 $-4a\pi=-n\pi$, 즉

$a=\frac{n}{4}$ (n은 자연수) … ㉠

(ii) 함수 $g(x)$가 구간 $[0,\ \infty)$에서 미분가능할 조건

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(-2\sin4t)dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}\cos4t\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{0}$$

$$=\frac{1}{2}\cos0-\frac{1}{2}\cos(-\pi)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

이고 모든 음의 실수 x에 대하여

$f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=f(x)$가 성립하므로 ㉠에서

$$\int_{-a\pi}^{0} f(t)dt=\int_{-\frac{n}{4}\pi}^{0} f(t)dt$$

$$=n\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt=n$$

따라서 양의 실수 x에 대하여

$$F(x)=\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt$$

$$=\int_{-\frac{n}{4}\pi}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{x} f(t)dt$$

$$=n+\int_{0}^{x}(-\sin at)dt$$

$$=n+\left[\frac{1}{a}\cos at\right]_{0}^{x}$$

$$=n+\left(\frac{1}{a}\cos ax-\frac{1}{a}\cos 0\right)$$

$$=n+\frac{1}{a}\cos ax-\frac{1}{a}$$

$$=n+\frac{4}{n}\cos\frac{n}{4}x-\frac{4}{n}$$

이때 $F(k)=0$인 양수 k가 존재하면

$$n=\frac{4}{n}\left(1-\cos\frac{n}{4}k\right)$$

에서

$$\cos\frac{n}{4}k=1-\frac{n^2}{4} \quad \cdots ㉡$$

이때 $f(k)=-\sin ak=-\sin\frac{n}{4}k=0$이어야 하므로

$\frac{n}{4}k=m\pi$ (m은 자연수)에서

㉡에서

$$\cos m\pi=1-\frac{n^2}{4}$$

이때 m, n은 자연수이므로

$\cos m\pi=1-\frac{n^2}{4}=-1$, 즉 $n^2=8$을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

그러므로 함수 $g(x)$가 구간 $[0, \infty)$에서 미분가능하려면 모든 양의 실수 x에 대하여

$$F(x)=n+\frac{4}{n}\cos\frac{n}{4}x-\frac{4}{n}>0$$

즉,

$$\cos\frac{n}{4}x>1-\frac{n^2}{4}$$

이어야 한다.

따라서 $1-\frac{n^2}{4}<-1$이어야 하므로

$$n^2>8$$

따라서 자연수 n의 최솟값은 3이므로 ㉠에서 a의 최솟값은 $\frac{3}{4}$이다.

정답 ②

29. **출제의도** : 등비수열의 극한을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(ⅰ) $1<a<3$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{3}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+a\left(\frac{a}{3}\right)^n}{3+\left(\frac{a}{3}\right)^n}$$

$$=\frac{1+a\times 0}{3+0}=\frac{1}{3}=a$$

$a=\frac{1}{3}<1$이므로 모순이다.

(ⅱ) $a=3$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+3^{n+1}}{3^{n+1}+3^n}$$

$= \lim_{n\to\infty} 1 = 1 = a$

이므로 모순이다.

(ⅲ) $a > 3$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{a}\right)^n = 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n + a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{a}\right)^n + a}{3\left(\frac{3}{a}\right)^n + 1}$$

$= \frac{0+a}{3\times 0+1} = a$

이므로 등식을 만족시킨다.

(1) $3 < a < b$일 때

같은 방법으로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n + b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}$

$= b > 3 = \frac{9}{3} > \frac{9}{a}$

이므로 등식을 만족시키지 않는다.

(2) $3 < b < a$일 때

같은 방법으로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n + b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}$

$= \frac{1}{a} \neq \frac{9}{a}$

이므로 등식을 만족시키지 않는다.

(3) $3 < a = b$일 때

$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n + b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{a^n + a^{n+1}}{a^{n+1}+a^n} = 1 = \frac{9}{a}$

에서

$a = 9,\ b = 9$

이상에서 $a = 9,\ b = 9$이므로

$a + b = 18$

정답 18

30. **출제의도** : 삼각함수의 미분법과 음함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

선분 AB의 중점을 O라 하면

$\overline{OP} = 5$

$\overline{OC} = \overline{AO} - \overline{AC} = 5 - 4 = 1$

삼각형 PCO에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{OP}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{OC}^2 - 2\times\overline{CP}\times\overline{OC}\times\cos\theta$

$\overline{CP} = x$라 하면

$5^2 = x^2 + 1^2 - 2\times x\times 1\times cos\theta$

$x^2 - 2x\cos\theta - 24 = 0$ ……㉠

$\theta = \frac{\pi}{4}$를 ㉠에 대입하면

$x^2 - \sqrt{2}x - 24 = 0$

$x > 0$이므로 $x = 4\sqrt{2}$

㉠을 θ에 대하여 미분하면

$2x\frac{dx}{d\theta} - 2\cos\theta\frac{dx}{d\theta} + 2x\sin\theta = 0$

$\frac{dx}{d\theta} = \frac{x\sin\theta}{\cos\theta - x}$

$\theta = \frac{\pi}{4}$일 때, $\frac{dx}{d\theta}$의 값은

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{4\sqrt{2}\times\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4} - 4\sqrt{2}} = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

선분 PQ의 중심을 M이라 하면

$S(\theta) = \frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{CM}$

$= \frac{1}{2}\times 2x\sin\theta\times x\cos\theta$

$= x^2\sin\theta\cos\theta$

이 식의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$$\frac{dS(\theta)}{d\theta}$$

$$= 2x\frac{dx}{d\theta}\sin\theta\cos\theta + x^2\cos^2\theta - x^2\sin^2\theta$$

이 식에 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 를 대입하면

$$S'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2\times 4\sqrt{2}\times\left(-\frac{4\sqrt{2}}{7}\right)\times\cos\frac{\pi}{4}\times\sin\frac{\pi}{4} + (4\sqrt{2})^2\cos^2\frac{\pi}{4} - (4\sqrt{2})^2\sin^2\frac{\pi}{4}$$

$$= -\frac{32}{7}$$

따라서 $-7\times S'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -7\times\left(-\frac{32}{7}\right) = 32$

정답 32