2026학년도 대학수학능력시험

수학영역 정답 및 풀이

최근 수정일 : 2025. 11. 20.(목)

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01. ①	02. ④	03. ⑤	04. ③	05. ③
06. ②	07. ⑤	08. ①	09. ④	10. ③
11. ③	12. ②	13. ⑤	14. ④	15. ④
16. 9	17. 16	18. 12	19. 15	
20. 130	21. 65	22. 457		

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}9^{\frac{1}{4}}\times 3^{-\frac{1}{2}} &= (3^2)^{\frac{1}{4}}\times 3^{-\frac{1}{2}}\\ &= 3^{2\times\frac{1}{4}}\times 3^{-\frac{1}{2}}\\ &= 3^{\frac{1}{2}}\times 3^{-\frac{1}{2}}\\ &= 3^{\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)}\\ &= 3^0\\ &= 1\end{aligned}$$

정답 ①

2. 출제의도 : 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=3x^3+4x+1$에서

$f'(x)=9x^2+4$

이므로

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= f'(1)\\ &= 9+4=13\end{aligned}$$

정답 ④

3. 출제의도 : 시그마의 정의와 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4}(2a_k-k) &= 2\sum_{k=1}^{4}a_k-\sum_{k=1}^{4}k\\ &= 2\sum_{k=1}^{4}a_k-\frac{4\times 5}{2}\\ &= 2\sum_{k=1}^{4}a_k-10\\ &= 0\end{aligned}$$

에서 $2\sum_{k=1}^{4}a_k=10$

따라서 $\sum_{k=1}^{4}a_k=5$

정답 ⑤

4. 출제의도 : 함수의 연속의 정의를 이용하여 미정계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이어야 한다.

즉,

$$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$$

이어야 한다.

이때,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1-}f(x) &= \lim_{x\to 1-}(3x-2)\\ &= 3\times 1-2=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1+}f(x) &= \lim_{x\to 1+}(x^2-3x+a)\\ &= 1^2-3\times 1+a=-2+a\end{aligned}$$

$f(1)=1^2-3\times 1+a=-2+a$

EBS

이므로

$1 = -2 + a$

따라서

$a = 3$

정답 ③

5. **출제의도** : 곱의 미분법을 이용하여 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = (x+2)(2x^2 - x - 2)$에서

$f'(x) = 1 \times (2x^2 - x - 2) + (x+2) \times (4x - 1)$

따라서

$f'(1) = (2-1-2) + (1+2) \times (4-1)$

$= -1 + 9$

$= 8$

정답 ③

6. **출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

로그의 정의에 의하여

$\log_a b = 3$에서

$b = a^3$

이때

$\log_3 \frac{b}{a} = \log_3 \frac{a^3}{a} = \log_3 a^2 = 2\log_3 a = \frac{1}{2}$

에서

$\log_3 a = \frac{1}{4}$

이므로

$\log_3 b = 3\log_3 a = \frac{3}{4}$

따라서 로그의 성질에 의해

$\log_9 ab = \log_{3^2} (a \times a^3)$

$= \frac{4}{2} \log_3 a$

$= 2 \times \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{2}$

정답 ②

7. **출제의도** : 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 곡선 $y = x^2 + 3$, $y = -\frac{1}{5}x^2 + 3$은 점 $(0,3)$에서 접하고 모든 실수 x에 대하여

$x^2 + 3 \geq -\frac{1}{5}x^2 + 3$

이므로 구하는 넓이는

$\int_0^2 \left\{(x^2+3) - \left(-\frac{1}{5}x^2 + 3\right)\right\} dx$

$= \int_0^2 \frac{6}{5}x^2 dx$

$= \left[\frac{2}{5}x^3\right]_0^2$

$= \frac{16}{5}$

정답 ⑤

8. **출제의도** : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 사인함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta>0$

이므로

$\cos\theta<0$

이때,

$\sin\theta+3\cos\theta=0$

에서

$\sin\theta=-3\cos\theta>0$

이고,

$$\begin{aligned}\sin^2\theta&=9\cos^2\theta\\&=9(1-\sin^2\theta)\\&=9-9\sin^2\theta\end{aligned}$$

$10\sin^2\theta=9$

$\sin^2\theta=\dfrac{9}{10}$

$\sin\theta>0$이므로

$\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

정답 ①

9. **출제의도** : 삼차함수의 그래프와 극값을 이용하여 x축에 평행한 직선과 삼차함수의 그래프가 접할 때의 삼차함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}f'(x)&=3x^2+6ax-9a^2\\&=3(x+3a)(x-a)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서

$x=-3a$ 또는 $x=a$

$a>0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-3a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

한편, $f(0)=4<5$이고,

직선 $y=5$가 곡선 $y=f(x)$에 접하므로

$f(-3a)=5$

이어야 한다.

$$\begin{aligned}f(-3a)&=(-3a)^3+3a(-3a)^2-9a^2(-3a)+4\\&=27a^3+4\end{aligned}$$

이므로

$27a^3+4=5$에서

$a^3=\dfrac{1}{27}$

a가 양수이므로

$a=\dfrac{1}{3}$

따라서 $f(x)=x^3+x^2-x+4$

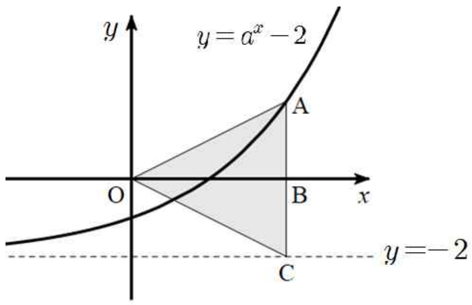
이므로

$$\begin{aligned}f(2)&=2^3+2^2-2+4\\&=14\end{aligned}$$

정답 ④

10. **출제의도** : 지수함수의 그래프를 이용하여 조건을 만족시키는 상수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



$a>1$이므로 함수 $y=a^x-2$의 그래프는 위 그림과 같고 이 곡선의 점근선은 직선 $y=-2$이다.

점 A의 좌표를 (p,q)라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=2$

이므로

$q=2$

점 A는 곡선 $y=a^x-2$ 위의 점이므로

$2=a^p-2$

즉, $a^p=4$에서 $p=\log_a 4$

이때 삼각형 AOC의 넓이가 8이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{OB}}=8$

에서

$\overline{\mathrm{OB}}=4$

즉, $\log_a 4=4$이므로

$a^4=4$

$a>1$이므로 $a=\sqrt{2}$

따라서

$$a\times\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{2}\times 4 = 2^{\frac{1}{2}+2} = 2^{\frac{5}{2}}$$

정답 ③

11. 출제의도 : 수직선 위를 움직이는 점의 속도를 이용하여 위치와 운동 방향, 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $k=0$이면 $v(t)=t^2+4$이므로

$t=1$일 때 점 P의 위치는

$$0+\int_0^1(t^2+4)dt = \left[\frac{1}{3}t^3+4t\right]_0^1 = \frac{1}{3}+4-0 = \frac{13}{3}\ (\text{참})$$

ㄴ. $k=3$이면 $v(t)=t^2-3t+4$이므로

$$v(t)=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$$

따라서 출발한 후 점 P의 운동 방향은 바뀌지 않는다. (거짓)

ㄷ. $k=5$이면 $v(t)=t^2-5t+4$이므로

$v(t)=(t-1)(t-4)$

$0<t<1$일 때, $v(t)>0$이고

$1<t<2$일 때, $v(t)<0$이므로

시각 $t=0$에서 시각 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$$\begin{aligned}s&=\int_0^2|v(t)|dt\\&=\int_0^2\left|t^2-5t+4\right|dt\\&=\int_0^1(t^2-5t+4)dt\\&\quad+\int_1^2\{-(t^2-5t+4)\}dt\\&=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+4t\right]_0^1\\&\quad-\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+4t\right]_1^2\\&=\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+4\\&\quad-\left\{\left(\frac{8}{3}-10+8\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+4\right)\right\}\\&=3\ (\text{참})\end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답 ③

12. 출제의도 : 등비수열의 일반항을 이용하여 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하자.

$2(a_1+a_4+a_7)=6$에서

$2(a_1+a_1r^3+a_1r^6)=2a_1(1+r^3+r^6)=6$

$a_1(1+r^3+r^6)=3$ …… ㉠

$a_4+a_7+a_{10}=6$에서

$a_1r^3+a_1r^6+a_1r^9$

$=a_1r^3(1+r^3+r^6)=6$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^3=2$

㉠에 $r^3=2$를 대입하면

$a_1(1+2+2^2)=3$

$a_1=\frac{3}{7}$

따라서

$a_{10}=a_1r^9=\frac{3}{7}\times 2^3=\frac{24}{7}$

정답 ②

13. **출제의도** : 곱의 미분법과 접선의 방정식을 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=2x-4$에서 $f'(1)=-2$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,-6)$에서의 접선 l의 방정식은

$y=-2(x-1)-6$

즉, $y=-2x-4$

$g(x)=(x^3-2x)f(x)$에서 곱의 미분법에 의하여

$g'(x)=(3x^2-2)f(x)+(x^3-2x)f'(x)$

이므로

$g'(1)=(3-2)f(1)+(1-2)f'(1)$

$=1\times(-6)+(-1)\times(-2)=-4$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1,6)$에서의 접선 m의 방정식은

$y=-4(x-1)+6$

즉, $y=-4x+10$

이때 두 직선 $y=-2x-4$, $y=-4x+10$의 교점의 x좌표는

$-2x-4=-4x+10$에서 $x=7$이므로 두 직선과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\{10-(-4)\}\times 7=49$

정답 ⑤

14. **출제의도** : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\angle\mathrm{HCG}=\angle\mathrm{BAC}=\theta_1$이라 하자.

직각삼각형 ABC에서

$\overline{\mathrm{AC}}^2=\sqrt{(\overline{\mathrm{AB}})^2+(\overline{\mathrm{BC}})^2}$

$=\sqrt{3^2+4^2}=5$

이므로

$\sin\theta_1=\frac{4}{5}$

또한

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{AG}}=2$

이므로 $\angle\mathrm{CAG}=\theta_2$라 하면 삼각형 ACG에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta_2=\frac{(\overline{\mathrm{AG}})^2+(\overline{\mathrm{AC}})^2-(\overline{\mathrm{CG}})^2}{2\times\overline{\mathrm{AG}}\times\overline{\mathrm{AC}}}$

$=\frac{2^2+5^2-(2\sqrt{6})^2}{2\times 2\times 5}=\frac{1}{4}$

따라서 삼각형 AEG에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{GE}}^2 = (\overline{\mathrm{AG}})^2 + (\overline{\mathrm{AE}})^2 - 2\times\overline{\mathrm{AG}}\times\overline{\mathrm{AE}}\times\cos\theta_2$$
$$= 2^2 + 2^2 - 2\times2\times2\times\frac{1}{4} = 6$$
$\therefore\ \overline{\mathrm{GE}} = \sqrt{6}$

삼각형 CGE에서 $\angle\mathrm{ECG} = \theta_3$이라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta_3 = \frac{(\overline{\mathrm{CG}})^2 + (\overline{\mathrm{CE}})^2 - (\overline{\mathrm{GE}})^2}{2\times\overline{\mathrm{CG}}\times\overline{\mathrm{CE}}}$$
$$= \frac{(2\sqrt{6})^2 + 3^2 - (\sqrt{6})^2}{2\times2\sqrt{6}\times3} = \frac{3\sqrt{6}}{8}$$

따라서

$$\sin\theta_3 = \sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{6}}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{8}$$

삼각형 CGE의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$$2R = \frac{\overline{\mathrm{GE}}}{\sin\theta_3}$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{10}}{8}} = \frac{8\sqrt{15}}{5}$$

따라서 삼각형 CHG에서 사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{GH}} = 2R\times\sin\theta_1$$
$$= \frac{8\sqrt{15}}{5}\times\frac{4}{5}$$
$$= \frac{32\sqrt{15}}{25}$$

정답 ④

15. 출제의도 : 정적분으로 정의된 함수의 도함수와 함수의 극대, 극소를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

$h(x) = \int_0^x (g(t) - f(t))dt$에서

$h'(x) = g(x) - f(x)$

이므로 함수 $h(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면

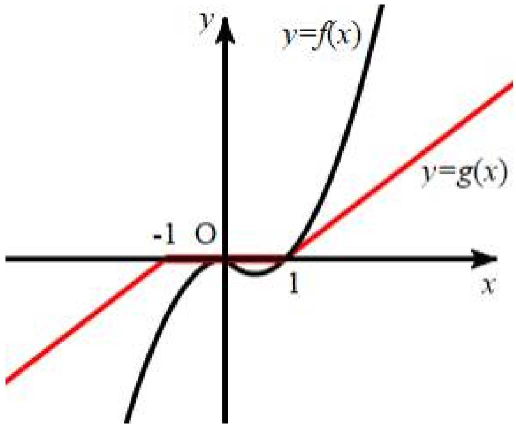
$h'(x) = 0$, 즉 $f(x) = g(x)$

이면서 $h'(x) = 0$인 점의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 바뀌는 점이 오직 한 개만 있어야 한다.

이때 $f'(1) = 1$이므로 $a \le 1$이면 다음 그림과 같이 $x = 0$ 또는 $x = 1$에서만

$f(x) = g(x)$

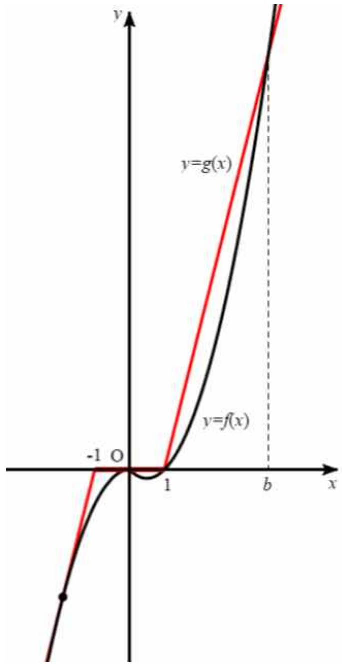
이다.



이때 $x < 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \ge f(x)$이므로 함수 $h(x)$는 $x = 0$에서 극값을 갖지 않고, $0 < x < 1$에서 $g(x) > f(x)$, $x > 1$에서 $f(x) > g(x)$이므로 함수 $h(x)$는 $x = 1$에서만 극값을 갖는다.

즉, $a \le 1$이면 조건을 만족시킨다.

한편 $a > 1$이면 다음 그림과 같이 $x > 1$에서 $f(x) = g(x)$인 x의 값이 있다. 이 값을 b라 하자.



이때 $f(b)=g(b)=0$이고 $1<x<b$에서 $g(x)>f(x)$, $x>b$에서 $f(x)>g(x)$이므로 함수 $h(x)$는 $x=b$에서 극값을 갖는다.

그러므로 조건을 만족시키려면 $x<-1$에서 $f(x)>g(x)$인 구간이 없어야 하므로 a의 값은 위 그림과 같이 $x<-1$에서 곡선 $y=-x^2$과 직선 $y=ax+a$가 접할 때 최대가 된다.

이 접점의 좌표를 $(t,\ -t^2)$이라 하면 접선의 기울기가 $-2t$이므로 접선의 방정식은

$y+t^2=-2t(x-t)$

이다. 이 직선이 점 $(-1,0)$을 지나야 하므로

$t^2=-2t(-1-t)$

$t(t+2)=0$

$t<-1$이므로 $t=-2$

즉, 조건을 만족시키는 a의 최댓값은

$-2t=4$

이므로

$k=4$

이때, $x\ge 1$에서 $g(x)=4x-4$이므로

$$\begin{aligned}h(3)&=\int_0^3(g(t)-f(t))dt\\&=\int_0^1(-t^2+t)dt+\int_1^3\{(4t-4)-(t^2-t)\}dt\\&=\int_0^1(-t^2+t)dt+\int_1^3(-t^2+5t-4)dt\\&=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^1\\&\qquad+\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{5}{2}t^2-4t\right]_1^3\\&=\frac{1}{6}+\frac{10}{3}=\frac{7}{2}\end{aligned}$$

따라서 $k+h(3)=4+\frac{7}{2}=\frac{15}{2}$

정답 ④

16. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열을 이용하여 특정한 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=n^2a_n+1$ …… ㉠

을 만족시키므로

㉠에 $n=1$을 대입하면

$$\begin{aligned}a_2&=1^2\times a_1+1\\&=1\times1+1\\&=2\end{aligned}$$

㉠에 $n=2$를 대입하면

$$\begin{aligned}a_3&=2^2\times a_2+1\\&=4\times2+1\\&=9\end{aligned}$$

정답 9

17. **출제의도** : 함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$F(x)$가 함수 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$$F(x)=\int f(x)dx$$
$$=\int (4x^3-2x)dx$$
$$=x^4-x^2+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$F(0)=4$이므로 $C=4$

따라서 $F(x)=x^4-x^2+4$이므로

$F(2)=16-4+4=16$

정답 16

18. **출제의도** : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos(\angle \mathrm{BAC})=-\dfrac{3}{5}$

이고, $\sin(\angle \mathrm{BAC})>0$ 이므로

$$\sin(\angle \mathrm{BAC})=\sqrt{1-\cos^2(\angle \mathrm{BAC})}$$
$$=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\sin(\angle \mathrm{BAC})$$
$$=\frac{1}{2}\times5\times6\times\frac{4}{5}=12$$

정답 12

19. **출제의도** : 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2x^3+3x^2-12x-8$이라 하면

$$f'(x)=6x^2+6x-12$$
$$=6(x+2)(x-1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=1$이므로

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 $f(-2)=12$를 갖고, $x=1$에서 극솟값 $f(1)=-15$를 갖는다.

이때 $f(2)=-4$이므로 $-2\le x\le 2$에서

$-15\le f(x)\le 12$

따라서 양수 k의 최솟값은 15이다.

정답 15

20. **출제의도** : 수열의 합과 일반항 사이의 관계 및 $\sum$의 정의를 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

2이상의 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_k$이므로

$$a_{n+1}$$
$$=\left\{\frac{2}{3}a_{n+1}+\frac{1}{6}(n+1)^2-\frac{1}{6}(n+1)+10\right\}$$
$$-\left(\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{6}n^2-\frac{1}{6}n+10\right)$$

$$=\frac{2}{3}(a_{n+1}-a_n)+\boxed{\frac{1}{3}n}$$

이고, 이 식을 정리하면

$$2a_n+a_{n+1}=3\times\boxed{\frac{1}{3}n}$$

즉, $2a_n+a_{n+1}=n$ …… ㉠

이다.

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{6}n^2-\frac{1}{6}n+10\ (n\geq 2)$$

에서 양변에 $n=2$를 대입하면

$$a_1+a_2=\frac{2}{3}a_2+\frac{1}{6}\times 2^2-\frac{1}{6}\times 2+10$$

즉, $a_1+\frac{1}{3}a_2=\frac{31}{3}$

$a_1=7$이므로

$$a_2=3\times\left(\frac{31}{3}-7\right)=\boxed{10}$$ …… ㉡

이다. ㉠과 ㉡에 의하여

$$\sum_{k=1}^{12}a_k+\sum_{k=1}^{5}a_{2k+1}$$

$$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{12})$$

$$+(a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11})$$

$$=a_1+a_2+2(a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11})$$

$$+(a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12})$$

$$=a_1+a_2+\sum_{k=1}^{5}(2a_{2k+1}+a_{2k+2})$$

$$=a_1+a_2+\sum_{k=1}^{5}(2k+1)$$

$$=7+10+(3+5+7+9+11)$$

$$=17+7\times 5=\boxed{52}$$

이다.

이때 $f(n)=\frac{1}{3}n$, $p=10$, $q=52$이므로

$$\frac{p\times q}{f(12)}=\frac{10\times 52}{4}=130$$

정답 130

21. **출제의도** : 극한의 성질과 미분계수를 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면

$$\lim_{x\to t-}g(x)=\lim_{x\to t+}g(x)=g(t)$$

즉,

$$\lim_{x\to t-}(-f(x))=\lim_{x\to t+}f(x)=f(t)$$ …… ㉠

이어야 한다.

그런데

$$\lim_{x\to t-}(-f(x))=-f(t),\ \lim_{x\to t+}f(x)=f(t)$$

이므로 ㉠에서

$f(t)=-f(t)$, 즉 $f(t)=0$

조건 (가)에서 $a=0$ 또는 $a=2$일 때에도

$\lim\limits_{x\to a+}\frac{g(x)}{x(x-2)}$의 값이 존재해야 하므로

$g(0)=g(2)=0$, 즉

$f(0)=f(2)=0$

그러므로

$f(x)=\alpha x(x-2)(x-k)$ (k는 상수) …… ㉡

로 놓을 수 있다.

한편, 자연수 m에 대하여 조건 (나)에서

$\lim\limits_{x\to m+}\frac{g(x)}{x(x-2)}<0$일 조건은 다음과 같다.

(ⅰ) $m=1$일 때

$\lim\limits_{x\to 1+}x(x-2)=1\times(1-2)<0$이므로

$g(1)>0$이어야 한다.

이때 $-\frac{7}{2}g(1)<0$이므로 조건 (나)에

서 $-\frac{7}{2}g(1)$이 자연수라는 조건에 모순이다.

그러므로 1은 조건 (나)를 만족시키는 자연수 m이 될 수 없다.

(ⅱ) $m=2$일 때

$$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)}{x(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2+}\frac{1}{x}\times\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}<0$$

이므로

$$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}<0$$

이어야 한다.

(ⅲ) $m>2$일 때

$$\lim_{x\to m+}\frac{g(x)}{x(x-2)}=\frac{g(m)}{m(m-2)}\text{이고}$$

$m(m-2)>0$이므로

$g(m)<0$

이어야 한다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $\lim_{x\to m+}\frac{g(x)}{x(x-2)}<0$인 자연수 m의 개수가 2이려면

$g(m)<0$이고 $m>2$

인 자연수 m이 적어도 한 개 존재해야 한다.

그러므로 ㉡에서

$f(x)=\alpha x(x-2)(x-k)$ $(k>3)$

이고, 조건 (나)에서

$g(-1)>0$, $g(1)<0$

이므로

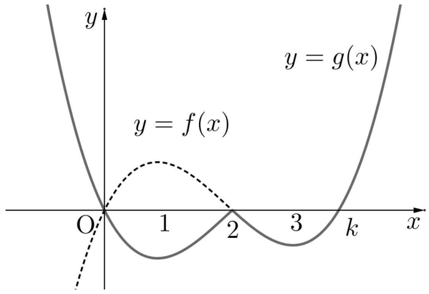
$t=2$

이어야 한다.

그러므로

$$g(x)=\begin{cases}-\alpha x(x-2)(x-k) & (x<2)\\ \alpha x(x-2)(x-k) & (x\geq 2)\end{cases}$$

이다.



이때 2와 3이 조건 (나)를 만족시키므로 $3<k\leq 4$이어야 한다.

한편,

$g(-1)=3\alpha(k+1)$, $g(1)=-\alpha(k-1)$

이고, 조건 (나)에서

$$g(-1)=2,\ -\frac{7}{2}g(1)=3$$

또는

$$g(-1)=3,\ -\frac{7}{2}g(1)=2$$

이다.

① $g(-1)=2$, $-\frac{7}{2}g(1)=3$일 때

$3\alpha(k+1)=2$에서 $\alpha=\frac{2}{3(k+1)}$

$-\frac{7}{2}\times\{-\alpha(k-1)\}=3$에서

$$\alpha=\frac{6}{7(k-1)}$$

$$\frac{2}{3(k+1)}=\frac{6}{7(k-1)}\text{에서}$$

$7(k-1)=9(k+1)$

$7k-7=9k+9$

$k=-8$

이는 $3<k\leq 4$에 모순이다.

② $g(-1)=3$, $-\frac{7}{2}g(1)=2$일 때

$3\alpha(k+1)=3$에서 $\alpha=\frac{1}{k+1}$

$-\dfrac{7}{2}\times\{-\alpha(k-1)\}=2$에서

$\alpha=\dfrac{4}{7(k-1)}$

$\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{4}{7(k-1)}$에서

$7(k-1)=4(k+1)$

$7k-7=4k+4$

$k=\dfrac{11}{3}$

이는 $3<k\le 4$를 만족시킨다.

$k=\dfrac{11}{3}$일 때

$\alpha=\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{3}{14}$

그러므로

$g(-5)=-\dfrac{3}{14}\times(-5)\times(-7)\times\left(-\dfrac{26}{3}\right)$

$=65$

정답 65

22. **출제의도** : 지수함수와 로그함수의 위치 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y=\log_{16}(8x+2)$에서

$16^y=8x+2$ …… ㉠

$y=4^{x-1}-\dfrac{1}{2}$에서

$4^x=4y+2$ …… ㉡

이므로 ㉠에서 y대신에 $\dfrac{x}{2}$, x대신에 $\dfrac{y}{2}$를 대입하면 ㉡과 일치한다. …… (ⅰ)

점 $\mathrm{A}(a,\ b)$가 곡선 $y=\log_{16}(8x+2)$위의 점이므로

$16^b=8a+2$

또한 $\mathrm{B}(c,\ d)$라 하면 점 B는 곡선 $y=4^{x-1}-\dfrac{1}{2}$위의 점이므로

$4^c=4d+2$

그리고 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 (b,a)가 직선 OB위에 있어야 하므로

$a=\dfrac{d}{c}\times b,\ ac-bd=0$ …… ㉢

이때 (ⅰ)에 의하여

$a=\dfrac{d}{2},\ b=\dfrac{c}{2}$ 즉 $d=2a.\ c=2b$

…… ㉣

이고 이 관계는 ㉢을 만족시킨다.

따라서 선분 AB의 중점의 좌표가 $\left(\dfrac{77}{8},\dfrac{133}{8}\right)$이므로

$\dfrac{a+c}{2}=\dfrac{77}{8},\ \dfrac{b+d}{2}=\dfrac{133}{8}$

$a+c=\dfrac{77}{4},\ b+d=\dfrac{133}{4}$

$a+2b=\dfrac{77}{4}.\ 2a+b=\dfrac{133}{4}$

따라서 $a=\dfrac{63}{4},\ b=\dfrac{7}{4}$이므로

$a\times b=\dfrac{441}{16}$

즉 $p=16,\ q=441$이므로

$p+q=457$

정답 457

EBS

■ [선택: 미적분]

23. ③ 24. ④ 25. ③ 26. ① 27. ②
28. ⑤ 29. 97 30. 11

23. **출제의도** : 삼각함수의 극한을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan6x}{2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan6x}{6x}\times3\right)$$
$$=3\lim_{x\to0}\frac{\tan6x}{6x}$$
$$=3\lim_{t\to0}\frac{\tan t}{t}$$
$$=3\times1$$
$$=3$$

정답 ③

24. **출제의도** : 치환적분을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sin x-\sin^3x=\sin x(1-\sin^2x)$$
$$=\sin x\cos^2x$$

또한

$\sin x=t$라 하면

$\sin0=0$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$이고

$\cos x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x-\sin^3x}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x\cos^2x}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{\sin x}\times\cos x)dx$$
$$=\int_0^1\sqrt{t}\,dt$$
$$=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{3}$$

정답 ④

25. **출제의도** : 수열의 극한의 대소관계를 이용하여 주어진 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sqrt{9n^2-5}+2n<a_n<5n+1$$

을 만족시키므로

$$\frac{\sqrt{9n^2-5}+2n}{n}<\frac{a_n}{n}<\frac{5n+1}{n}$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2-5}+2n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9-\frac{5}{n^2}}+2\right)$$
$$=3+2=5,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n}\right)=5$$

이므로 수열의 극한의 대소관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=5$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+2)^2}{na_n+5n^2-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a_n}{n}+\frac{2}{n}\right)^2}{\frac{a_n}{n}+5-\frac{2}{n^2}}$$

$$=\frac{(5+0)^2}{5+5-0}$$

$$=\frac{5}{2}$$

정답 ③

26. 출제의도 : 정적분을 활용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

구하는 입체도형의 부피는

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{x+x\ln x}\right)^2 dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^2 (x+x\ln x)dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^2 x(1+\ln x)dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 부분적분법에 의하여

$$\int_1^2 x(1+\ln x)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}(1+\ln x)\right]_1^2-\int_1^2\left(\frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\left\{\frac{4}{2}(1+\ln 2)\right\}-\left\{\frac{1}{2}(1+\ln 1)\right\}-\int_1^2\frac{x}{2}dx$$

$$=\frac{3+4\ln 2}{2}-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2$$

$$=\frac{3+4\ln 2}{2}-\frac{4-1}{4}$$

$$=\frac{3+8\ln 2}{4}$$

㉠에서 구하는 입체도형의 부피는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{3+8\ln 2}{4}=\frac{\sqrt{3}(3+8\ln 2)}{16}$$

정답 ①

27. 출제의도 : 매개변수로 나타내어진 함수의 도함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x=e^{4t}(1+\sin^2\pi t)$, $y=e^{4t}(1-3\cos^2\pi t)$를

$y=3x-5e$에 대입하면

$$e^{4t}(1-3\cos^2\pi t)=3e^{4t}(1+\sin^2\pi t)-5e$$

$$e^{4t}\{-2-3(\cos^2\pi t+\sin^2\pi t)\}=-5e$$

$$e^{4t}(-2-3\times 1)=-5e$$

$$e^{4t}=e$$

$4t=1$에서 $t=\frac{1}{4}$

이때

$$\frac{dx}{dt}=e^{4t}(4+4\sin^2\pi t+2\pi\sin\pi t\cos\pi t),$$

$$\frac{dy}{dt}=e^{4t}(4-12\cos^2\pi t+6\pi\cos\pi t\sin\pi t)$$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{e^{4t}(4-12\cos^2\pi t+6\pi\cos\pi t\sin\pi t)}{e^{4t}(4+4\sin^2\pi t+2\pi\sin\pi t\cos\pi t)}$$

$$=\frac{4-12\cos^2\pi t+6\pi\cos\pi t\sin\pi t}{4+4\sin^2\pi t+2\pi\sin\pi t\cos\pi t}$$

위 식에 $t=\frac{1}{4}$을 대입하면

$$\frac{4-12\times\frac{1}{2}+6\pi\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{4+4\times\frac{1}{2}+2\pi\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$=\frac{4-6+3\pi}{4+2+\pi}=\frac{3\pi-2}{\pi+6}$$

따라서 곡선 C가 직선 $y=3x-5e$와 만나는 점 P에서의 접선의 기울기는

$\frac{3\pi-2}{\pi+6}$

정답 ②

28. **출제의도** : 부분적분과 치환적분을 이용하여 새롭게 정의된 함수의 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\ln(1+x)$에서

$f'(x)=x-1+\frac{1}{1+x}=\frac{x^2}{x+1}$

점 $(s,\ f(s))(s>0)$에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\mathrm{H}(0,\ f(s))$

또한 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(s,f(s))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(s)=\frac{s^2}{s+1}(x-s)$

이고 이 접선이 y축과 만나는 점을 I라 하면

$\mathrm{I}\left(0,\ -\frac{s^3}{s+1}+f(s)\right)$

이때 $s>0$에서 $f'(s)=\frac{s^2}{s+1}>0$이므로

두 점 H, I 사이의 거리는

$f(s)-\left(-\frac{s^3}{s+1}+f(s)\right)=\frac{s^3}{s+1}$

즉 $t=\frac{s^3}{s+1}$이다.

이때

$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}} g(t)dt=\Big[\ tg(t)\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}}-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}} tg'(t)dt$

이고

$t=\frac{1}{2}$일 때

$\frac{s^3}{s+1}=\frac{1}{2}$, $2s^3-s-1=0$

$(s-1)(2s^2+2s+1)=0$

에서 $s>0$이므로 $s=1$

$t=\frac{27}{4}$일 때

$\frac{s^3}{s+1}=\frac{27}{4}$, $4s^3-27s-27=0$

$(s-3)(2s+3)^2=0$

에서 $s>0$ 이므로 $s=3$

즉

$$\Big[\ tg(t)\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}}=\frac{27}{4}g\left(\frac{27}{4}\right)-\frac{1}{2}g\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{27}{4}\times3-\frac{1}{2}\times1$$

$$=\frac{79}{4}$$

또한 $s=g(t)$이므로 $g'(t)=\frac{ds}{dt}$

따라서

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}} tg'(t)dt$$

$$=\int_1^3 \frac{s^3}{s+1}ds$$

$$=\int_1^3 \left(s^2-s+1-\frac{1}{s+1}\right)ds$$

$$=\left[\frac{1}{3}s^3-\frac{1}{2}s^2+s-\ln|s+1|\right]_1^3$$

$$=\left(9-\frac{9}{2}+3-\ln 4\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1-\ln 2\right)$$

$$=\left(\frac{15}{2}-2\ln 2\right)-\left(\frac{5}{6}-\ln 2\right)$$

$$=\frac{20}{3}-\ln 2$$

이므로

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}} g(t)dt$$

$$=\frac{79}{4}-\left(\frac{20}{3}-\ln 2\right)$$

$$=\frac{157}{12}+\ln 2$$

정답 ⑤

29. **출제의도** : 조건을 만족시키는 등차수열과 등비수열을 구하여 급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 첫째항도 d이므로

$a_n = d+(n-1)d = nd \ (n=1, 2, 3, \cdots)$

이때 어떤 자연수 k에 대하여

$$b_{k+1} = \frac{1}{a_1}-1 = \frac{1}{d}-1$$

$$b_{k+2} = \frac{1}{a_2}-1 = \frac{1}{2d}-1$$

$$b_{k+3} = \frac{1}{a_3}-1 = \frac{1}{3d}-1$$

이고 수열 $\{b_n\}$은 등비수열이므로

$$\left(\frac{1}{2d}-1\right)^2 = \left(\frac{1}{d}-1\right)\left(\frac{1}{3d}-1\right)$$

$$\frac{1}{4d^2}-\frac{1}{d}+1 = \frac{1}{3d^2}-\frac{1}{d}-\frac{1}{3d}+1$$

$$\frac{1}{12d^2} = \frac{1}{3d}$$

$$d=\frac{1}{4}$$

이때 $b_{k+1}=3$, $b_{k+2}=1$, $b_{k+3}=\frac{1}{3}$이므로 등비수열 $\{b_n\}$의 공비는 $\frac{1}{3}$이고 첫째항 b_1은 3의 거듭제곱 꼴이다.

한편 $0<\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n-\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right)<30$에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{b_1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}b_1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n(n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty} 16\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} 16\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=16$$

이므로

$$0<\frac{3}{2}b_1-16<30$$

$$\frac{32}{3}<b_1<\frac{92}{3}$$

EBS

이때 b_1은 3의 거듭제곱 꼴이어야 하므로

$b_1=27$

즉, $a_n=\frac{n}{4}$이고, 수열 $\{b_{2n}\}$은

첫째항이 $b_2=b_1\times\frac{1}{3}=27\times\frac{1}{3}=9$,

공비가 $\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$인 등비수열이므로

$$a_2\times\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}=\frac{2}{4}\times\frac{9}{1-\frac{1}{9}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{81}{8}=\frac{81}{16}$$

따라서 $p=16$, $q=81$이므로

$p+q=97$

정답 97

30. **출제의도** : 역함수의 성질과 역함수의 미분법을 활용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 실수 전체에서 증가하는 연속함수이므로 역함수 $f^{-1}(x)$도 실수 전체에서 증가하는 연속함수이다.

따라서 조건 (가)에서 $|x|\le 1$일 때

$$f^{-1}(x)=-\frac{x}{2}(x^2-5)$$

이고, 조건 (나)에서 $x>1$일 때

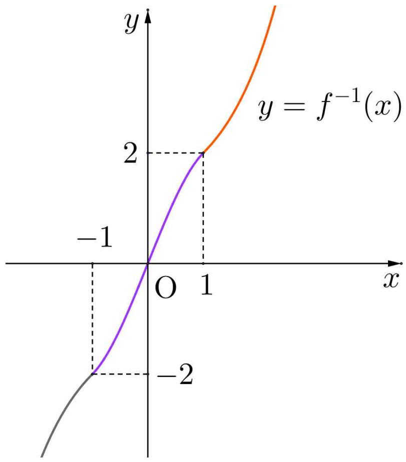
$$f^{-1}(x)=e^{x-1}+1$$

이며 $x<-1$일 때

$$f^{-1}(x)=-(e^{-x-1}+1)$$

이다.

역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 다음과 같다.



(i) 점 (0, 1)을 지나고 곡선

$y=-\frac{x}{2}(x^2-5)$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{2}x$

에 접하는 직선 l의 기울기를 구해 보자.

$y'=-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}$이므로 접점의 x좌표를 α라 하면

$$\frac{-\frac{1}{2}\alpha^3+\frac{5}{2}\alpha-1}{\alpha-0}=-\frac{3}{2}\alpha^2+\frac{5}{2}$$

$-\alpha^3+5\alpha-2=-3\alpha^3+5\alpha$

$\alpha=1$

따라서 접선 l의 기울기는 1이다.

한편, $y=e^{x-1}+1$에서 $y'=e^{x-1}$이므로 이 곡선 위의 점 (1, 2)에서의 접선의 기울기도 1이다.

(ii) 점 (0, 1)을 지나고 곡선

$y=-(e^{-x-1}+1)$, 즉 $y=-e^{-x-1}-1$

에 접하는 직선 m의 기울기를 구해 보자.

$y'=e^{-x-1}$이므로 접점의 x좌표를 β라 하면

$$\frac{-e^{-\beta-1}-1-1}{\beta-0}=e^{-\beta-1}$$

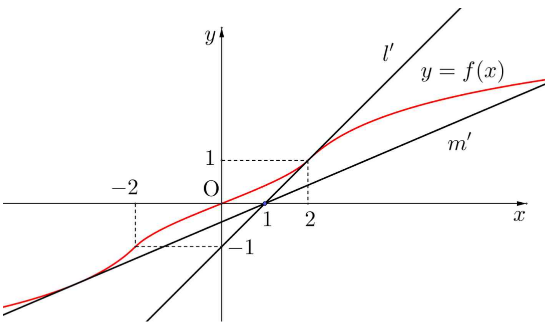
$-e^{-\beta-1}-2=\beta e^{-\beta-1}$

$(\beta+1)e^{-(\beta+1)}=-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

한편, 두 직선 l, m을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선을 각각 l', m'이라 하면 두 직선 l', m'의 기울기는 각각 $\frac{1}{1}=1$, $\frac{1}{e^{-\beta-1}}=e^{\beta+1}$

이다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 점 $(1,\ 0)$에서 이 곡선에 그은 접선은 다음 그림과 같다.



따라서

$$g(m)=\begin{cases} 1 & (m\le 0) \\ 3 & (0<m<e^{\beta+1}) \\ 2 & (m=e^{\beta+1}) \\ 1 & (m>e^{\beta+1}) \end{cases}$$

이므로 함수 $g(m)$이 $m=a$, $m=b$ $(a<b)$에서 불연속인 a, b는

$a=0$, $b=e^{\beta+1}$

이다.

$b=e^{\beta+1}$에서 $\ln b=\beta+1$이고

㉠에서

$$(\beta+1)e^{-(\beta+1)}=\frac{\beta+1}{e^{\beta+1}}=-2$$

이므로

$$\frac{\ln b}{b}=\frac{\beta+1}{e^{\beta+1}}=-2$$

따라서

$$g(a)\times\left(\lim_{m\to a+}g(m)\right)+g(b)\times\left(\frac{\ln b}{b}\right)^2$$

$$=1\times3+2\times(-2)^2=11$$

정답 11