2026학년도 대학수학능력시험
수학영역 정답 및 풀이

■ [공통: 수학 Ⅰ·수학 Ⅱ]

01. ①	02. ④	03. ⑤	04. ③	05. ③
06. ②	07. ⑤	08. ①	09. ④	10. ③
11. ③	12. ②	13. ⑤	14. ④	15. ④
16. 9	17. 16	18. 12	19. 15	
20. 130	21. 65	22. 457		

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$9^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}} = (3^2)^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}}$$
$$= 3^{2\times\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}}$$
$$= 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{2}}$$
$$= 3^{\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)}$$
$$= 3^0$$
$$= 1$$

정답 ①

2. **출제의도** : 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=3x^3+4x+1$에서

$f'(x)=9x^2+4$

이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$$
$$=9+4=13$$

정답 ④

3. **출제의도** : 시그마의 정의와 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{4}(2a_k-k)=2\sum_{k=1}^{4}a_k-\sum_{k=1}^{4}k$$
$$=2\sum_{k=1}^{4}a_k-\frac{4\times 5}{2}$$
$$=2\sum_{k=1}^{4}a_k-10$$
$$=0$$

에서 $2\sum_{k=1}^{4}a_k=10$

따라서 $\sum_{k=1}^{4}a_k=5$

정답 ⑤

4. **출제의도** : 함수의 연속의 정의를 이용하여 미정계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이어야 한다.

즉,

$$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$$

이어야 한다.

이때,

$$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(3x-2)$$
$$=3\times 1-2=1$$

$$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}(x^2-3x+a)$$
$$=1^2-3\times 1+a=-2+a$$

$f(1)=1^2-3\times 1+a=-2+a$

이므로

$1=-2+a$

따라서

$a=3$

정답 ③

5. **출제의도** : 곱의 미분법을 이용하여 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=(x+2)(2x^2-x-2)$에서

$f'(x)=1\times(2x^2-x-2)+(x+2)\times(4x-1)$

따라서

$$f'(1)=(2-1-2)+(1+2)\times(4-1)$$
$$=-1+9$$
$$=8$$

정답 ③

6. **출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

로그의 정의에 의하여

$\log_a b=3$에서

$b=a^3$

이때

$$\log_3\frac{b}{a}=\log_3\frac{a^3}{a}=\log_3 a^2=2\log_3 a=\frac{1}{2}$$

에서

$$\log_3 a=\frac{1}{4}$$

이므로

$$\log_3 b=3\log_3 a=\frac{3}{4}$$

따라서 로그의 성질에 의해

$$\log_9 ab=\log_{3^2}(a\times a^3)$$
$$=\frac{4}{2}\log_3 a$$
$$=2\times\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{2}$$

정답 ②

7. **출제의도** : 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 곡선 $y=x^2+3$, $y=-\frac{1}{5}x^2+3$은 점 $(0,3)$에서 접하고 모든 실수 x에 대하여

$$x^2+3\geq-\frac{1}{5}x^2+3$$

이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^2\left\{(x^2+3)-\left(-\frac{1}{5}x^2+3\right)\right\}dx$$
$$=\int_0^2\frac{6}{5}x^2dx$$
$$=\left[\frac{2}{5}x^3\right]_0^2$$
$$=\frac{16}{5}$$

정답 ⑤

8. **출제의도** : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 사인함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta>0$

이므로

$\cos\theta<0$

이때,

$\sin\theta+3\cos\theta=0$

에서

$\sin\theta=-3\cos\theta>0$

이고,

$$\begin{aligned}\sin^2\theta&=9\cos^2\theta\\&=9(1-\sin^2\theta)\\&=9-9\sin^2\theta\end{aligned}$$

$10\sin^2\theta=9$

$\sin^2\theta=\dfrac{9}{10}$

$\sin\theta>0$이므로

$\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

정답 ①

9. **출제의도** : 삼차함수의 그래프와 극값을 이용하여 x축에 평행한 직선과 삼차함수의 그래프가 접할 때의 삼차함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}f'(x)&=3x^2+6ax-9a^2\\&=3(x+3a)(x-a)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서

$x=-3a$ 또는 $x=a$

$a>0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-3a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

한편, $f(0)=4<5$이고,

직선 $y=5$가 곡선 $y=f(x)$에 접하므로

$f(-3a)=5$

이어야 한다.

$$\begin{aligned}f(-3a)&=(-3a)^3+3a(-3a)^2-9a^2(-3a)+4\\&=27a^3+4\end{aligned}$$

이므로

$27a^3+4=5$에서

$a^3=\dfrac{1}{27}$

a가 양수이므로

$a=\dfrac{1}{3}$

따라서 $f(x)=x^3+x^2-x+4$

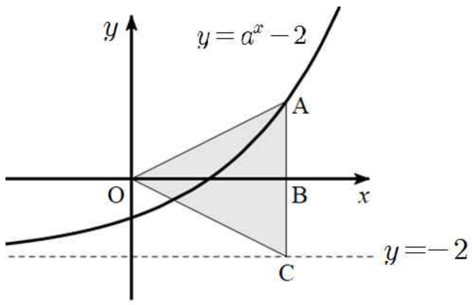
이므로

$$\begin{aligned}f(2)&=2^3+2^2-2+4\\&=14\end{aligned}$$

정답 ④

10. **출제의도** : 지수함수의 그래프를 이용하여 조건을 만족시키는 상수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



$a>1$이므로 함수 $y=a^x-2$의 그래프는 위 그림과 같고 이 곡선의 점근선은 직선 $y=-2$이다.

점 A의 좌표를 (p, q)라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=2$

이므로

$q=2$

점 A는 곡선 $y=a^x-2$ 위의 점이므로

$2=a^p-2$

즉, $a^p=4$에서 $p=\log_a 4$

이때 삼각형 AOC의 넓이가 8이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{\text{AC}}\times\overline{\text{OB}}=8$

에서

$\overline{\text{OB}}=4$

즉, $\log_a 4=4$이므로

$a^4=4$

$a>1$이므로 $a=\sqrt{2}$

따라서

$$\begin{aligned} a\times\overline{\text{OB}} &= \sqrt{2}\times 4 \\ &= 2^{\frac{1}{2}+2} \\ &= 2^{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

정답 ③

11. **출제의도** : 수직선 위를 움직이는 점의 속도를 이용하여 위치와 운동 방향, 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $k=0$이면 $v(t)=t^2+4$이므로

$t=1$일 때 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} &0+\int_0^1 (t^2+4)dt \\ &=\left[\frac{1}{3}t^3+4t\right]_0^1 \\ &=\frac{1}{3}+4-0 \\ &=\frac{13}{3}\ \text{(참)} \end{aligned}$$

ㄴ. $k=3$이면 $v(t)=t^2-3t+4$이므로

$v(t)=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$

따라서 출발한 후 점 P의 운동 방향은 바뀌지 않는다. (거짓)

ㄷ. $k=5$이면 $v(t)=t^2-5t+4$이므로

$v(t)=(t-1)(t-4)$

$0<t<1$일 때, $v(t)>0$이고

$1<t<2$일 때, $v(t)<0$이므로

시각 $t=0$에서 시각 $t=2$까지

점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$$\begin{aligned} s &= \int_0^2 |v(t)|dt \\ &= \int_0^2 |t^2-5t+4|dt \\ &= \int_0^1 (t^2-5t+4)dt \\ &\quad +\int_1^2 \{-(t^2-5t+4)\}dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+4t\right]_0^1 \\ &\quad -\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+4t\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3}-\frac{5}{2}+4 \\ &\quad -\left\{\left(\frac{8}{3}-10+8\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+4\right)\right\} \\ &= 3\ \text{(참)} \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답 ③

12. **출제의도** : 등비수열의 일반항을 이용하여 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하자.

$2(a_1+a_4+a_7)=6$에서

$2(a_1+a_1r^3+a_1r^6)=2a_1(1+r^3+r^6)=6$

$a_1(1+r^3+r^6)=3$ …… ㉠

$a_4+a_7+a_{10}=6$에서

$a_1r^3+a_1r^6+a_1r^9$

$=a_1r^3(1+r^3+r^6)=6$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^3=2$

㉠에 $r^3=2$를 대입하면

$a_1(1+2+2^2)=3$

$a_1=\frac{3}{7}$

따라서

$a_{10}=a_1r^9=\frac{3}{7}\times 2^3=\frac{24}{7}$

정답 ②

13. **출제의도** : 곱의 미분법과 접선의 방정식을 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=2x-4$에서 $f'(1)=-2$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, -6)$에서의 접선 l의 방정식은

$y=-2(x-1)-6$

즉, $y=-2x-4$

$g(x)=(x^3-2x)f(x)$에서 곱의 미분법에 의하여

$g'(x)=(3x^2-2)f(x)+(x^3-2x)f'(x)$

이므로

$g'(1)=(3-2)f(1)+(1-2)f'(1)$

$=1\times(-6)+(-1)\times(-2)=-4$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, 6)$에서의 접선 m의 방정식은

$y=-4(x-1)+6$

즉, $y=-4x+10$

이때 두 직선 $y=-2x-4$, $y=-4x+10$의 교점의 x좌표는

$-2x-4=-4x+10$에서 $x=7$이므로 두 직선과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\{10-(-4)\}\times 7=49$

정답 ⑤

14. **출제의도** : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\angle \mathrm{HCG}=\angle \mathrm{BAC}=\theta_1$이라 하자.

직각삼각형 ABC에서

$\overline{\mathrm{AC}}^2=\sqrt{(\overline{\mathrm{AB}})^2+(\overline{\mathrm{BC}})^2}$

$=\sqrt{3^2+4^2}=5$

이므로

$\sin\theta_1=\frac{4}{5}$

또한

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{AG}}=2$

이므로 $\angle \mathrm{CAG}=\theta_2$라 하면 삼각형 ACG에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta_2=\frac{(\overline{\mathrm{AG}})^2+(\overline{\mathrm{AC}})^2-(\overline{\mathrm{CG}})^2}{2\times\overline{\mathrm{AG}}\times\overline{\mathrm{AC}}}$

$=\frac{2^2+5^2-(2\sqrt{6})^2}{2\times2\times5}=\frac{1}{4}$

따라서 삼각형 AEG에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{GE}}^2 = (\overline{\mathrm{AG}})^2 + (\overline{\mathrm{AE}})^2 - 2\times\overline{\mathrm{AG}}\times\overline{\mathrm{AE}}\times\cos\theta_2$

$= 2^2 + 2^2 - 2\times 2\times 2\times\frac{1}{4} = 6$

$\therefore\ \overline{\mathrm{GE}} = \sqrt{6}$

삼각형 CGE에서 $\angle\mathrm{ECG} = \theta_3$이라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta_3 = \frac{(\overline{\mathrm{CG}})^2 + (\overline{\mathrm{CE}})^2 - (\overline{\mathrm{GE}})^2}{2\times\overline{\mathrm{CG}}\times\overline{\mathrm{CE}}}$$

$$= \frac{(2\sqrt{6})^2 + 3^2 - (\sqrt{6})^2}{2\times 2\sqrt{6}\times 3} = \frac{3\sqrt{6}}{8}$$

따라서

$$\sin\theta_3 = \sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{6}}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{8}$$

삼각형 CGE의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$$2R = \frac{\overline{\mathrm{GE}}}{\sin\theta_3}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{10}}{8}} = \frac{8\sqrt{15}}{5}$$

따라서 삼각형 CHG에서 사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{GH}} = 2R\times\sin\theta_1$$

$$= \frac{8\sqrt{15}}{5}\times\frac{4}{5}$$

$$= \frac{32\sqrt{15}}{25}$$

정답 ④

15. 출제의도 : 정적분으로 정의된 함수의 도함수와 함수의 극대, 극소를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

$h(x) = \int_0^x (g(t) - f(t))dt$에서

$h'(x) = g(x) - f(x)$

이므로 함수 $h(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면

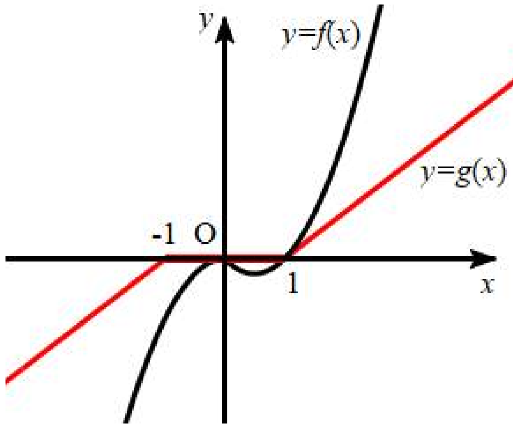
$h'(x) = 0$, 즉 $f(x) = g(x)$

이면서 $h'(x) = 0$인 점의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 바뀌는 점이 오직 한 개만 있어야 한다.

이때 $f'(1) = 1$이므로 $a \le 1$이면 다음 그림과 같이 $x = 0$ 또는 $x = 1$에서만

$f(x) = g(x)$

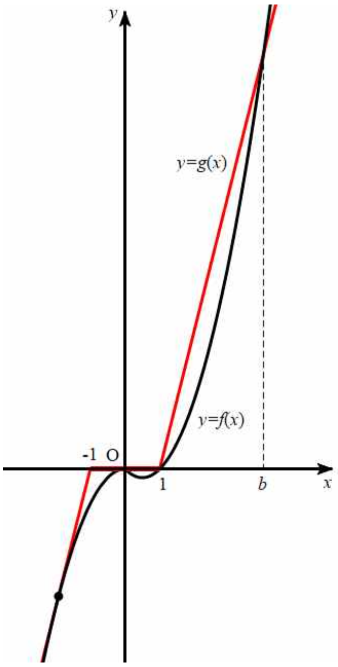
이다.



이때 $x < 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \ge f(x)$이므로 함수 $h(x)$는 $x = 0$에서 극값을 갖지 않고, $0 < x < 1$에서 $g(x) > f(x)$, $x > 1$에서 $f(x) > g(x)$이므로 함수 $h(x)$는 $x = 1$에서만 극값을 갖는다.

즉, $a \le 1$이면 조건을 만족시킨다.

한편 $a > 1$이면 다음 그림과 같이 $x > 1$에서 $f(x) = g(x)$인 x의 값이 있다. 이 값을 b라 하자.



이때 $f(b)=g(b)=0$이고 $1<x<b$에서 $g(x)>f(x)$, $x>b$에서 $f(x)>g(x)$이므로 함수 $h(x)$는 $x=b$에서 극값을 갖는다.

그러므로 조건을 만족시키려면 $x<-1$에서 $f(x)>g(x)$인 구간이 없어야 하므로 a의 값은 위 그림과 같이 $x<-1$에서 곡선 $y=-x^2$과 직선 $y=ax+a$가 접할 때 최대가 된다.

이 접점의 좌표를 $(t,\ -t^2)$이라 하면 접선의 기울기가 $-2t$이므로 접선의 방정식은

$y+t^2=-2t(x-t)$

이다. 이 직선이 점 $(-1,0)$을 지나야 하므로

$t^2=-2t(-1-t)$

$t(t+2)=0$

$t<-1$이므로 $t=-2$

즉, 조건을 만족시키는 a의 최댓값은

$-2t=4$

이므로

$k=4$

이때, $x\geq 1$에서 $g(x)=4x-4$이므로

$$h(3)=\int_0^3 (g(t)-f(t))dt$$

$$=\int_0^1(-t^2+t)dt+\int_1^3\{(4t-4)-(t^2-t)\}dt$$

$$=\int_0^1(-t^2+t)dt+\int_1^3(-t^2+5t-4)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^1$$

$$+\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{5}{2}t^2-4t\right]_1^3$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{10}{3}=\frac{7}{2}$$

따라서 $k+h(3)=4+\frac{7}{2}=\frac{15}{2}$

정답 ④

16. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열을 이용하여 특정한 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=n^2a_n+1$ …… ㉠

을 만족시키므로

㉠에 $n=1$을 대입하면

$a_2=1^2\times a_1+1$

$=1\times 1+1$

$=2$

㉠에 $n=2$를 대입하면

$a_3=2^2\times a_2+1$

$=4\times 2+1$

$=9$

정답 9

17. 출제의도 : 함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$F(x)$가 함수 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$$F(x)=\int f(x)dx$$
$$=\int (4x^3-2x)dx$$
$$=x^4-x^2+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$F(0)=4$이므로 $C=4$

따라서 $F(x)=x^4-x^2+4$이므로

$F(2)=16-4+4=16$

정답 16

18. 출제의도 : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos(\angle\mathrm{BAC})=-\dfrac{3}{5}$

이고, $\sin(\angle\mathrm{BAC})>0$ 이므로

$$\sin(\angle\mathrm{BAC})=\sqrt{1-\cos^2(\angle\mathrm{BAC})}$$
$$=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\sin(\angle\mathrm{BAC})$$
$$=\frac{1}{2}\times5\times6\times\frac{4}{5}=12$$

정답 12

19. 출제의도 : 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2x^3+3x^2-12x-8$이라 하면

$$f'(x)=6x^2+6x-12$$
$$=6(x+2)(x-1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=1$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 $f(-2)=12$를 갖고, $x=1$에서 극솟값 $f(1)=-15$를 갖는다.

이때 $f(2)=-4$이므로 $-2\le x\le 2$에서 $-15\le f(x)\le 12$

따라서 양수 k의 최솟값은 15이다.

정답 15

20. 출제의도 : 수열의 합과 일반항 사이의 관계 및 $\sum$의 정의를 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

2이상의 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_k$이므로

$$a_{n+1}$$
$$=\left\{\frac{2}{3}a_{n+1}+\frac{1}{6}(n+1)^2-\frac{1}{6}(n+1)+10\right\}$$
$$-\left(\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{6}n^2-\frac{1}{6}n+10\right)$$

$= \frac{2}{3}(a_{n+1} - a_n) + \boxed{\frac{1}{3}n}$

이고, 이 식을 정리하면

$2a_n + a_{n+1} = 3 \times \boxed{\frac{1}{3}n}$

즉, $2a_n + a_{n+1} = n$ …… ㉠

이다.

$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}n^2 - \frac{1}{6}n + 10 \ (n \geq 2)$

에서 양변에 $n=2$를 대입하면

$a_1 + a_2 = \frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{6} \times 2^2 - \frac{1}{6} \times 2 + 10$

즉, $a_1 + \frac{1}{3}a_2 = \frac{31}{3}$

$a_1 = 7$이므로

$a_2 = 3 \times \left(\frac{31}{3} - 7\right) = \boxed{10}$ …… ㉡

이다. ㉠과 ㉡에 의하여

$\sum_{k=1}^{12} a_k + \sum_{k=1}^{5} a_{2k+1}$

$= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{12})$

$\quad + (a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11})$

$= a_1 + a_2 + 2(a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11})$

$\qquad + (a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12})$

$= a_1 + a_2 + \sum_{k=1}^{5}(2a_{2k+1} + a_{2k+2})$

$= a_1 + a_2 + \sum_{k=1}^{5}(2k+1)$

$= 7 + 10 + (3 + 5 + 7 + 9 + 11)$

$= 17 + 7 \times 5 = \boxed{52}$

이다.

이때 $f(n) = \frac{1}{3}n$, $p = 10$, $q = 52$이므로

$\frac{p \times q}{f(12)} = \frac{10 \times 52}{4} = 130$

정답 130

21. **출제의도** : 극한의 성질과 미분계수를 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면

$\lim_{x \to t-} g(x) = \lim_{x \to t+} g(x) = g(t)$

즉,

$\lim_{x \to t-} (-f(x)) = \lim_{x \to t+} f(x) = f(t)$ …… ㉠

이어야 한다.

그런데

$\lim_{x \to t-} (-f(x)) = -f(t)$, $\lim_{x \to t+} f(x) = f(t)$

이므로 ㉠에서

$f(t) = -f(t)$, 즉 $f(t) = 0$

조건 (가)에서 $a=0$ 또는 $a=2$일 때에도

$\lim_{x \to a+} \frac{g(x)}{x(x-2)}$의 값이 존재해야 하므로

$g(0) = g(2) = 0$, 즉

$f(0) = f(2) = 0$

그러므로

$f(x) = \alpha x(x-2)(x-k)$ (k는 상수) …… ㉡

로 놓을 수 있다.

한편, 자연수 m에 대하여 조건 (나)에서

$\lim_{x \to m+} \frac{g(x)}{x(x-2)} < 0$일 조건은 다음과 같다.

(i) $m=1$일 때

$\lim_{x \to 1+} x(x-2) = 1 \times (1-2) < 0$이므로

$g(1) > 0$이어야 한다.

이때 $-\frac{7}{2}g(1) < 0$이므로 조건 (나)에

서 $-\frac{7}{2}g(1)$이 자연수라는 조건에 모순이다.

그러므로 1은 조건 (나)를 만족시키는 자연수 m이 될 수 없다.

(ⅱ) $m=2$일 때

$$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)}{x(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2+}\frac{1}{x}\times\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}<0$$

이므로

$$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}<0$$

이어야 한다.

(ⅲ) $m>2$일 때

$\lim_{x\to m+}\frac{g(x)}{x(x-2)}=\frac{g(m)}{m(m-2)}$이고

$m(m-2)>0$이므로

$g(m)<0$

이어야 한다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $\lim_{x\to m+}\frac{g(x)}{x(x-2)}<0$인 자연수 m의 개수가 2이려면

$g(m)<0$이고 $m>2$

인 자연수 m이 적어도 한 개 존재해야 한다.

그러므로 ㉡에서

$f(x)=\alpha x(x-2)(x-k)$ $(k>3)$

이고, 조건 (나)에서

$g(-1)>0$, $g(1)<0$

이므로

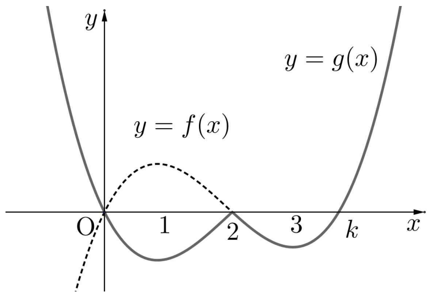
$t=2$

이어야 한다.

그러므로

$$g(x)=\begin{cases}-\alpha x(x-2)(x-k) & (x<2)\\ \alpha x(x-2)(x-k) & (x\ge 2)\end{cases}$$

이다.



이때 2와 3이 조건 (나)를 만족시키므로 $3<k\le 4$이어야 한다.

한편,

$g(-1)=3\alpha(k+1)$, $g(1)=-\alpha(k-1)$

이고, 조건 (나)에서

$g(-1)=2$, $-\frac{7}{2}g(1)=3$

또는

$g(-1)=3$, $-\frac{7}{2}g(1)=2$

이다.

① $g(-1)=2$, $-\frac{7}{2}g(1)=3$일 때

$3\alpha(k+1)=2$에서 $\alpha=\frac{2}{3(k+1)}$

$-\frac{7}{2}\times\{-\alpha(k-1)\}=3$에서

$\alpha=\frac{6}{7(k-1)}$

$\frac{2}{3(k+1)}=\frac{6}{7(k-1)}$에서

$7(k-1)=9(k+1)$

$7k-7=9k+9$

$k=-8$

이는 $3<k\le 4$에 모순이다.

② $g(-1)=3$, $-\frac{7}{2}g(1)=2$일 때

$3\alpha(k+1)=3$에서 $\alpha=\frac{1}{k+1}$

$-\dfrac{7}{2}\times\{-\alpha(k-1)\}=2$에서

$\alpha=\dfrac{4}{7(k-1)}$

$\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{4}{7(k-1)}$에서

$7(k-1)=4(k+1)$

$7k-7=4k+4$

$k=\dfrac{11}{3}$

이는 $3<k\leq 4$를 만족시킨다.

$k=\dfrac{11}{3}$일 때

$\alpha=\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{3}{14}$

그러므로

$g(-5)=-\dfrac{3}{14}\times(-5)\times(-7)\times\left(-\dfrac{26}{3}\right)$

$=65$

정답 65

22. 출제의도 : 지수함수와 로그함수의 위치 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y=\log_{16}(8x+2)$에서

$16^y=8x+2$ …… ㉠

$y=4^{x-1}-\dfrac{1}{2}$에서

$4^x=4y+2$ …… ㉡

이므로 ㉠에서 y대신에 $\dfrac{x}{2}$, x대신에 $\dfrac{y}{2}$를 대입하면 ㉡과 일치한다. …… (ⅰ)

점 $\mathrm{A}(a,\ b)$가 곡선 $y=\log_{16}(8x+2)$위의 점이므로

$16^b=8a+2$

또한 $\mathrm{B}(c,\ d)$라 하면 점 B는 곡선 $y=4^{x-1}-\dfrac{1}{2}$위의 점이므로

$4^c=4d+2$

그리고 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 (b,a)가 직선 OB위에 있어야 하므로

$a=\dfrac{d}{c}\times b,\ ac-bd=0$ …… ㉢

이때 (ⅰ)에 의하여

$a=\dfrac{d}{2},\ b=\dfrac{c}{2}$ 즉 $d=2a.\ c=2b$ …… ㉣

이고 이 관계는 ㉢을 만족시킨다.

따라서 선분 AB의 중점의 좌표가 $\left(\dfrac{77}{8},\dfrac{133}{8}\right)$이므로

$\dfrac{a+c}{2}=\dfrac{77}{8},\ \dfrac{b+d}{2}=\dfrac{133}{8}$

$a+c=\dfrac{77}{4},\ b+d=\dfrac{133}{4}$

$a+2b=\dfrac{77}{4}.\ 2a+b=\dfrac{133}{4}$

따라서 $a=\dfrac{63}{4},\ b=\dfrac{7}{4}$이므로

$a\times b=\dfrac{441}{16}$

즉 $p=16,\ q=441$이므로

$p+q=457$

정답 457

■ [선택: 기하]
23. ③ 24. ① 25. ⑤ 26. ② 27. ④
28. ④ 29. 360 30. 221

23. **출제의도** : 두 벡터의 합의 성분의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\vec{a}=(4,\ 1)$, $\vec{b}=(-1,\ -1)$이므로

$\vec{a}+\vec{b}=(4,\ 1)+(-1,\ -1)$

$=(3,\ 0)$

따라서 $\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합은

$3+0=3$

정답 ③

24. **출제의도** : 도형의 평행이동을 이해하고 포물선의 식을 통해 포물선의 초점과 준선 사이의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

포물선 $y^2=12(x-2)$는 포물선 $y^2=12x$를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 포물선 $y^2=12(x-2)$의 초점과 준선 사이의 거리는 포물선 $y^2=12x$의 초점과 준선 사이의 거리와 같다.

포물선 $y^2=12x=4\times3\times x$의

초점의 좌표는 $(3,\ 0)$

준선의 방정식은 $x=-3$이다.

따라서 포물선 $y^2=12(x-2)$의 초점과 준선 사이의 거리는

$3-(-3)=6$

정답 ①

25. **출제의도** : 좌표공간에서 평면 또는 점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 $\mathrm{A}\left(3,\ -\dfrac{3}{2},\ -2\right)$를 yz평면에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는

$\mathrm{B}\left(-3,\ -\dfrac{3}{2},\ -2\right)$

이고, 점 $\mathrm{A}\left(3,\ -\dfrac{3}{2},\ -2\right)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점 C의 좌표는

$\mathrm{C}\left(-3,\ \dfrac{3}{2},\ 2\right)$

따라서 선분 BC의 길이는

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{0^2+3^2+4^2}=5$

정답 ⑤

26. **출제의도** : 쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 이용하여 조건을 만족시키는 양수 a의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=-1\ (a>0)$ 위의 점 $(a,\ \sqrt{2}a)$에서의 접선의 방정식은

$\dfrac{ax}{a^2}-\dfrac{\sqrt{2}ay}{a^2}=-1$

$x-\sqrt{2}y+a=0$

위의 직선의 방정식에 $x=0$을 대입하면

$-\sqrt{2}y+a=0$

$y=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

즉, 점 P의 좌표는 $\left(0,\ \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$이다.

한편, 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=-1$의 두 초점 F, F′의 좌표를 각각 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F'}(0,\ -c)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=a^2+a^2=2a^2$

$c=\sqrt{2}a$

이므로 $\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}=8$에서

$\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}$

$=\left|\sqrt{2}a-\frac{a}{\sqrt{2}}\right|\times\left|-\sqrt{2}a-\frac{a}{\sqrt{2}}\right|$

$=2a^2-\frac{a^2}{2}$

$=\frac{3a^2}{2}=8$

$a^2=\frac{16}{3}$

따라서

$a=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

정답 ②

27. 출제의도 : 삼수선의 정리를 이용하여 원기둥의 높이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

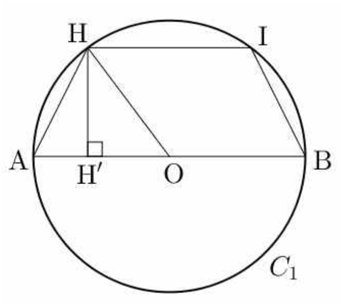
점 D에서 원 C_1을 포함하는 평면에 내린 수선의 발이 H이므로

$\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AH}}^2+\overline{\mathrm{DH}}^2}$

점 C에서 원 C_1을 포함하는 평면에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{BI}}^2+\overline{\mathrm{CI}}^2}$

이때 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BC}}$이고 두 선분 DH, CI는 원기둥의 높이로 서로 같으므로 $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{BI}}$이다. 따라서 두 선분 AB, HI는 서로 평행하다.



선분 AB가 원 C_1의 지름이므로 선분 AB의 중점을 O라 하면 점 O는 원 C_1의 중심이고, 점 H에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 $\overline{\mathrm{HI}}=\overline{\mathrm{CD}}=3$이므로

$\overline{\mathrm{OH'}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{HI}}=\frac{3}{2}$

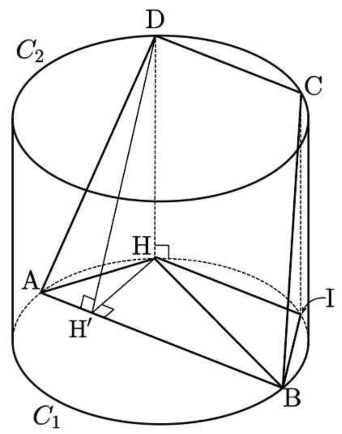
직각삼각형 OHH′에서

$\overline{\mathrm{HH'}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OH}}^2-\overline{\mathrm{OH'}}^2}$

$=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=2$

그러므로 삼각형 ABH의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{HH'}}=\frac{1}{2}\times5\times2=5$



한편, 선분 DH가 원 C_1을 포함하는 평면과 수직이고, $\overline{\mathrm{HH'}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{DH'}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$

두 선분 AB, HI는 서로 평행하므로 두 선분 AB, DC는 서로 평행하고 사각형 ABCD는 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BC}}$인 등변사다리꼴이다.

그러므로 사각형 ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{DC}})\times\overline{\mathrm{DH'}}=\frac{1}{2}\times 8\times\overline{\mathrm{DH'}}$$
$$=4\overline{\mathrm{DH'}}$$

사각형 ABCD의 넓이가 삼각형 ABH의 넓이의 4배이므로

$4\overline{\mathrm{DH'}}=4\times 5$에서 $\overline{\mathrm{DH'}}=5$

직각삼각형 DHH′에서

$$\overline{\mathrm{DH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{DH'}}^2-\overline{\mathrm{HH'}}^2}$$
$$=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$$

따라서 원기둥의 높이는 $\sqrt{21}$이다.

정답 ④

28. 출제의도 : 두 평면의 수직 조건과 평면에 접하는 구의 성질을 이용하여 도형의 평면 위로의 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{BH}}\perp\overline{\mathrm{CD}}$이고,

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BD}}$이므로 $\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{DH}}$

$\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{CH}}=2$이므로

$$\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}=4$$

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{AH}}=4$이므로

삼각형 ABH는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이다.

$\overline{\mathrm{AH}}\perp\overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{BH}}\perp\overline{\mathrm{CD}}$이므로 평면 ABH와 직선 CD는 서로 수직이고, 평면 ACD는 직선 CD를 포함하므로 두 평면 ABH와 ACD는 서로 수직이다.

즉, 삼각형 ABH의 무게중심 G에서 평면 ACD에 내린 수선의 발을 I라 하면 점 I는 선분 AH 위에 있고, 구 S와 평면 ABH가 만나서 생기는 원은 정삼각형 ABH의 내접원이므로

$$\overline{\mathrm{AG}}=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{\mathrm{GI}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AG}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{\mathrm{AI}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AH}}=2$$

이때 $\angle\mathrm{AIG}=\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle\mathrm{APG}=\frac{\pi}{2}$인 구 S 위의 모든 점 P가 나타내는 도형 T는 점 I를 지나고 직선 AG에 수직인 평면이 구 S와 만나서 생기는 원과 같다. 이 원의 반지름의 길이를 r이라 하면

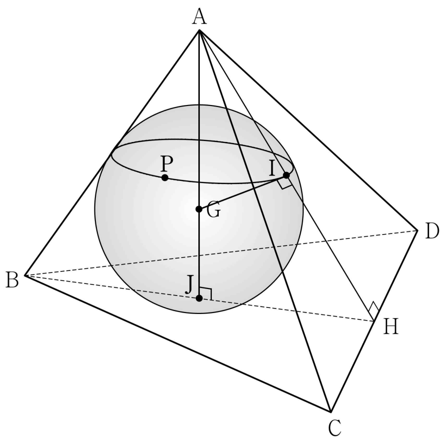
$\overline{\mathrm{AI}}\times\overline{\mathrm{GI}}=\overline{\mathrm{AG}}\times r$

$$2\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}r$$

$r=1$

이므로 도형 T의 넓이는

$1^2\times\pi=\pi$



정삼각형 ABH의 내접원이 선분 BH와 만나는 점을 J라 하면 세 점 A, G, J는 한 직선 위에 있고, 두 평면 ABH와 BCD가 서로 수직이므로 평면 BCD와 직선 AJ는 서로 수직이다.

즉, 도형 T가 포함된 평면과 평면 BCD가 서로 평행하므로 도형 T가 포함된 평면과 평면 ABC가 이루는 예각의 크기는 두 평면 BCD와 ABC가 이루는 예각의 크기와 같다. 이 각의 크기를 θ라 하자.

$\overline{\mathrm{AH}}=4$, $\overline{\mathrm{CH}}=2$이고 $\angle\mathrm{AHC}=\frac{\pi}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{AB}}=4$이므로 삼각형 ABC의 넓이를 k라 하면

$$k=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\sqrt{\overline{\mathrm{AC}}^2-\left(\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}$$
$$=\frac{1}{2}\times4\times4$$
$$=8$$

삼각형 ABC의 평면 BCD 위로의 정사영은 삼각형 JBC와 같다. 삼각형 JBC의 넓이를 k'이라 하면

$$k'=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BJ}}\times\overline{\mathrm{CH}}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$$

따라서 두 평면 BCD와 ABC가 이루는 예각의 크기 θ에 대하여

$$\cos\theta=\frac{k'}{k}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

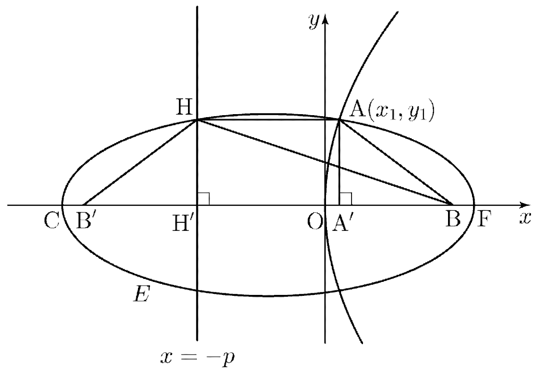
이므로 도형 T의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는

$$\pi\cos\theta=\pi\times\frac{1}{4}=\frac{\pi}{4}$$

정답 ④

29. 출제의도 : 포물선과 타원의 정의 및 타원의 대칭성을 이용하여 포물선의 초점 및 포물선 위의 점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



세 점 F, A, H를 지나는 타원을 E라 하고, 타원 E의 점 B가 아닌 초점을 B′, 타원 E가 x축과 만나는 점 중 F가 아닌 점을 C라 하자.

점 A의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AF}=\overline{AH}=p+x_1$

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 A′, 직선 $x=-p$가 x축과 만나는 점을 H′이라 하면 타원 E는 선분 A′H′의 중점을 지나고 x축에 수직인 직선에 대하여 대칭이므로

$\overline{A'F}=\overline{CH'}=p-x_1$

타원의 정의에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{BH}+\overline{B'H}=\overline{CF}&=2\times\overline{A'F}+\overline{A'H'}\\&=2(p-x_1)+(p+x_1)\\&=3p-x_1\end{aligned}$$

이때 $\overline{AB}=\overline{HB'}$이므로 삼각형 AHB의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{AB}+\overline{BH}+\overline{AH}&=(\overline{B'H}+\overline{BH})+\overline{AH}\\&=\overline{CF}+\overline{AH}\\&=(3p-x_1)+(p+x_1)\\&=4p\end{aligned}$$

삼각형 AHB의 둘레의 길이가 $p+27$이므로

$4p=p+27$에서 $p=9$

즉, 포물선의 방정식은 $y^2=36x$이므로

$y_1{}^2=36x_1$ …… ㉠

한편, 삼각형 AHB의 넓이가

$2p+12=30$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{AA'}=30$

에서

$\frac{1}{2}\times(9+x_1)\times y_1=30$

즉, $y_1(9+x_1)=60$ …… ㉡

㉡의 양변을 제곱하면

$y_1{}^2(x_1+9)^2=3600$

㉠을 위 등식에 대입하면

$36x_1(x_1+9)^2=3600$

$x_1{}^3+18x_1{}^2+81x_1-100=0$

$(x_1-1)(x_1{}^2+19x_1+100)=0$

$x_1{}^2+19x_1+100>0$이므로 $x_1=1$

㉡에서 $y_1=6$

직각삼각형 FHH′에서

$$\begin{aligned}\overline{FH'}=\overline{FA'}+\overline{A'H'}&=(p-x_1)+(p+x_1)\\&=2p=18\end{aligned}$$

$\overline{AA'}=y_1=6$

이므로

$\overline{FH}^2=\overline{FH'}^2+\overline{HH'}^2=18^2+6^2=360$

따라서 $k^2=360$

정답 360

30. **출제의도** : 벡터의 내적과 벡터 사이의 관계를 이용하여 조건을 만족시키는 두 벡터의 내적의 절댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

좌표평면에서 선분 AB를 지름으로 하는 원을 C라 하자. 선분 AB의 중점을 O라 하면 점 O는 원 C의 중심이고, 두 점 P, Q가 원 C 위의 점이고 $\overline{AB}=10\sqrt{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OQ}|&=\frac{1}{2}\overline{AB}\\&=5\sqrt{2}\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{PB}|=14$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{OB}$와 $\overrightarrow{OP}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 삼각형 OBP에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OP}|^2-|\overrightarrow{PB}|^2}{2|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OP}|}$$

$$=\frac{(5\sqrt{2})^2+(5\sqrt{2})^2-14^2}{2\times5\sqrt{2}\times5\sqrt{2}}$$

$$=-\frac{24}{25}$$

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta$$

$$=5\sqrt{2}\times5\sqrt{2}\times\left(-\frac{24}{25}\right)$$

$$=-48$$

한편

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PO}=-2\overrightarrow{OP}$$

이고

$$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})$$

$$=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OQ}-2\overrightarrow{OP}$$

이므로

$$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PB})$$

$$=-2\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OQ}-2\overrightarrow{OP})$$

$$=-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}+4|\overrightarrow{OP}|^2$$

$$=-2\times(-48)-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}+4\times(5\sqrt{2})^2$$

$$=296-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$$

이고

$$|\overrightarrow{PQ}|^2=|\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}|^2$$

$$=|\overrightarrow{OQ}|^2+|\overrightarrow{OP}|^2-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$$

$$=(5\sqrt{2})^2+(5\sqrt{2})^2-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$$

$$=100-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$$

이므로

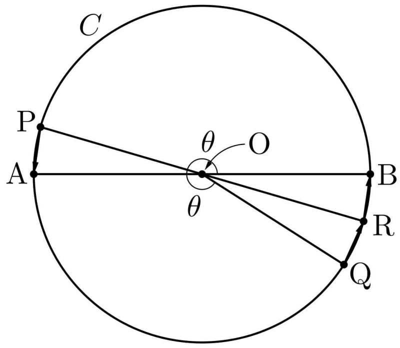
$$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PB})=2|\overrightarrow{PQ}|^2$$

에서

$$296-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=2\times(100-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ})$$

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-48$$

즉, 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OQ}$가 이루는 각의 크기는 두 벡터 $\overrightarrow{OB}$와 $\overrightarrow{OP}$가 이루는 각의 크기 θ와 같다. 이때 $|\overrightarrow{QB}|>0$이므로 점 Q는 점 B와 일치하지 않고, 따라서 네 점 A, B, P, Q는 그림과 같다.



$\overline{PB}=14$, $\overline{AB}=10\sqrt{2}$이고 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\overline{PA}=\sqrt{14^2-(10\sqrt{2})^2}=2$$

직선 OP가 원 C와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 R이라 하자.

두 직선 PA, QR이 이루는 각의 크기를 α라 하면

$$\alpha=\pi-\angle APR-\angle QRP=\pi-2\angle APR$$

$$=\angle POA=\pi-\theta$$

이고

$$|\overrightarrow{QR}|=|\overrightarrow{RB}|=|\overrightarrow{PA}|=2$$

이므로

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{QR}=|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{QR}|\cos(\pi-\alpha)$$

$$=2\times2\times\cos\theta$$

$$=2\times2\times\left(-\frac{24}{25}\right)=-\frac{96}{25}$$

한편

$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RB}} = -|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{RB}}| = -4$

이므로

$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QB}}$

$= \overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{QR}} + \overrightarrow{\mathrm{RB}}) = \overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QR}} + \overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RB}}$

$= -\dfrac{96}{25} + (-4) = -\dfrac{196}{25}$

이고

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QB}}| = \left| -\dfrac{196}{25} \right| = \dfrac{196}{25}$

따라서 $p=25$, $q=196$이므로

$p+q=25+196=221$

정답 221