2022학년도 대학수학능력시험

수학영역 정답 및 풀이

*최근 수정일 : 22.03.07

■ [공통: 수학 I ·수학 II]

01.②	02.⑤	03.⑤	04.④	05.①
06.③	07.①	08.①	09.④	10.⑤
11.③	12.③	13.②	14.③	15.②
16. 3	17. 4	18. 12	19. 6	
20. 110	21. 678	22. 9		

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\left(2^{\sqrt{3}}\times 4\right)^{\sqrt{3}-2}$

$=\left(2^{\sqrt{3}}\times 2^2\right)^{\sqrt{3}-2}$

$=\left(2^{\sqrt{3}+2}\right)^{\sqrt{3}-2}$

$=2^{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}$

$=2^{3-4}$

$=2^{-1}$

$=\dfrac{1}{2}$

정답 ②

2. **출제의도** : 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=3x^2+6x+1$

이므로

$f'(1)=3+6+1=10$

정답 ⑤

3. **출제의도** : 등차수열의 일반항을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_2=a_1+d=6$ …… ㉠

$a_4+a_6=36$에서

$(a_1+3d)+(a_1+5d)=36$

$2a_1+8d=36$

$a_1+4d=18$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a_1=2,\ d=4$

따라서

$a_{10}=2+9\times 4=38$

정답 ⑤

4. **출제의도** : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x\to -1-$일 때, $f(x)\to 3$이므로

$\lim_{x\to -1-} f(x)=3$

또, $x\to 2$일 때, $f(x)\to 1$이므로

$\lim_{x\to 2} f(x)=1$

따라서,

$\lim_{x\to -1-} f(x)+\lim_{x\to 2} f(x)=3+1=4$

정답 ④

5. **출제의도** : 귀납적으로 정의된 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_1=1$이므로 $a_2=2$

$a_2=2$이므로 $a_3=4$

$a_3=4$이므로 $a_4=8$

$a_4=8$이므로 $a_5=1$

$a_5=1$이므로 $a_6=2$

$a_6=2$이므로 $a_7=4$

$a_7=4$이므로 $a_8=8$

따라서

$$\sum_{k=1}^{8} a_k = 2\times(1+2+4+8)$$

$$=2\times 15$$

$$=30$$

정답 ①

6. **출제의도** : 미분을 활용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

방정식 $2x^3-3x^2-12x+k=0$, 즉

$2x^3-3x^2-12x=-k$ $\cdots\cdots$ ㉠

에서

$f(x)=2x^3-3x^2-12x$라 하자.

$f'(x)=6x^2-6x-12$

$=6(x+1)(x-2)$

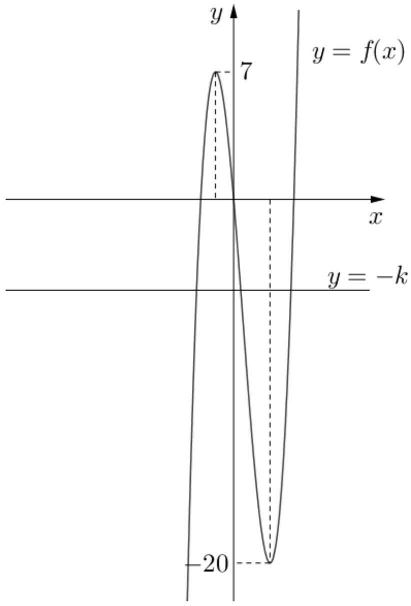
$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	7	↘	-20	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 7을 갖고, $x=2$에서 극솟값 -20을 갖는다.



방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$-20<-k<7$

즉, $-7<k<20$ 이다.

따라서 정수 k의 값은

$-6,\ -5,\ -4,\ \cdots,\ 19$

이고, 그 개수는 26이다.

정답 ③

7. **출제의도** : 삼각함수의 정의와 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\tan\theta-\dfrac{6}{\tan\theta}=1$이므로

양변에 $\tan\theta$를 곱하면

$\tan^2\theta-6=\tan\theta$

$\tan^2\theta-\tan\theta-6=0$

$(\tan\theta+2)(\tan\theta-3)=0$

$\tan\theta=-2$ 또는 $\tan\theta=3$

이때, $\pi < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$이므로

$\tan\theta = 3$

이때,

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = 3$,

$\sin\theta = 3\cos\theta$

이므로

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$에 대입하면

$9\cos^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$10\cos^2\theta = 1$

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ 또는 $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

이때, $\pi < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$이므로

$\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ …… ㉠

이 값을 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$에 대입하면

$\sin^2\theta + \dfrac{1}{10} = 1$

$\sin^2\theta = \dfrac{9}{10}$

$\sin\theta = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$ 또는 $\sin\theta = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

이때, $\pi < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$이므로

$\sin\theta = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ …… ㉡

따라서, ㉠과 ㉡에서

$$\begin{aligned}\sin\theta + \cos\theta &= \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\\ &= -\frac{4}{\sqrt{10}}\\ &= -\frac{2\sqrt{10}}{5}\end{aligned}$$

정답 ①

8. **출제의도** : 정적분을 이용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

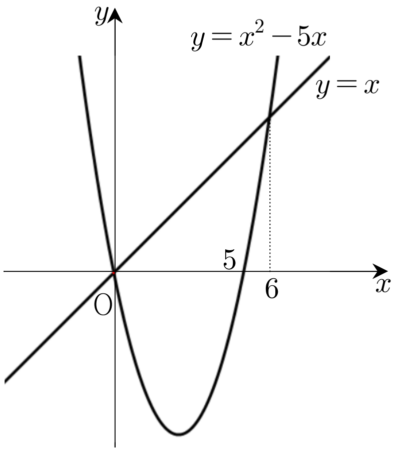
정답풀이 :

$x^2 - 5x = x$에서

$x(x-6) = 0$

$x = 0$ 또는 $x = 6$

곡선 $y = x^2 - 5x$와 직선 $y = x$가 만나는 점은 원점과 $(6, 6)$이다.



곡선 $y = x^2 - 5x$와 직선 $y = x$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned}&\int_0^6 \{x - (x^2 - 5x)\}\,dx\\ &= \int_0^6 (6x - x^2)\,dx\\ &= \left[3x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^6\\ &= 36\end{aligned}$$

따라서 직선 $x = k$가 넓이를 이등분하므로

$$\begin{aligned}18 &= \int_0^k \{x - (x^2 - 5x)\}\,dx\\ &= \int_0^k (6x - x^2)\,dx\\ &= \left[3x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^k\end{aligned}$$

$=3k^2-\frac{1}{3}k^3$

정리하면

$k^3-9k^2+54=0$

$(k-3)(k^2-6k-18)=0$

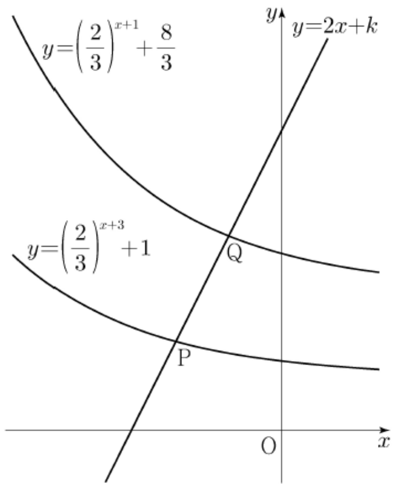
즉, $0<k<6$이므로

$k=3$

정답 ①

9. **출제의도** : 지수방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



두 점 P, Q의 x좌표를 각각

p, $q(p<q)$라 하면

두 점 P, Q는 직선 $y=2x+k$ 위의 점이므로

$\mathrm{P}(p,\ 2p+k)$, $\mathrm{Q}(q,\ 2q+k)$

로 놓을 수 있다.

이때, $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$, 즉 $\overline{\mathrm{PQ}}^2=5$이므로

$(q-p)^2+(2q-2p)^2=5$

$(q-p)^2=1$

$q-p>0$이므로

$q-p=1$

즉, $q=p+1$이다.

한편, 점 P는 함수 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1$의 그래프 위의 점이므로

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+1=2p+k$ $\cdots\cdots$ ㉠

점 Q는 함수 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$의 그래프 위의 점이므로

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}+\frac{8}{3}=2p+k+2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}+\frac{8}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+3$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}=1$

$p+2=0$, 즉 $p=-2$

$p=-2$를 ㉠에 대입하면

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2+3}+1=2\times(-2)+k$

따라서 $k=\frac{17}{3}$

정답 ④

10. **출제의도** : 다항함수의 도함수와 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 $(0,0)$이 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$f(0)=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때, 점 $(0,0)$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(0)(x-0)+0$

$y=f'(0)x$ $\cdots\cdots$ ㉡

또, 곡선 $y=xf(x)$ 위에 점 $(1,2)$가 있으므로

$1\times f(1)=2$

$f(1)=2$ $\cdots\cdots$ ㉢

$y=xf(x)$에서
$y'=f(x)+xf'(x)$이므로
$(1,2)$에서의 접선의 방정식은
$y=\{f(1)+f'(1)\}(x-1)+2$
$\quad=\{f'(1)+2\}(x-1)+2$
$\quad=\{f'(1)+2\}x-f'(1)$ …… ㉣
이때, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 하면
㉠에서
$d=0$
이때, $f(x)=ax^3+bx^2+cx$이므로
㉢에서
$a+b+c=2$ …… ㉤
㉡과 ㉣에서
두 접선이 일치해야 하므로
$f'(0)=f'(1)+2,\ f'(1)=0$
따라서 $f'(0)=2,\ f'(1)=0$
이때, $f'(x)=3ax^2+2bx+c$이므로
$f'(0)=2$에서
$c=2$
이때, $f'(x)=3ax^2+2bx+2$이므로
$f'(1)=0$에서
$3a+2b+2=0$
㉤에서 $c=2$를 대입하면
$a+b=0$이므로
$b=-a$를 위 식에 대입하여 a,b를 구하면 $a=-2,\ b=2$이므로
$f(x)=-2x^3+2x^2+2x$,
$f'(x)=-6x^2+4x+2$
따라서
$f'(2)=-14$

정답 ⑤

11. **출제의도** : 삼각함수의 그래프의 성질을 이용하여 조건을 만족하는 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$\dfrac{\pi}{\frac{\pi}{a}}=a$이므로
함수 $f(x)$의 주기는 a이다.
직선 AB는 원점을 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선이므로
양수 t에 대하여
$B(t,\ \sqrt{3}t)$로 놓으면
$A(-t,\ -\sqrt{3}t)$이고,
$\overline{AB}=4t$이다.
이때, 함수 $f(x)$의 주기가 a이므로
$\overline{AC}=4t=a$이고,
$C(-t+a,\ -\sqrt{3}t)$, 즉 $C(3t,\ -\sqrt{3}t)$이다.
점 C가 곡선 $y=\tan\dfrac{\pi x}{a}=\tan\dfrac{\pi x}{4t}$ 위의 점이므로
$-\sqrt{3}t=\tan\dfrac{\pi\times 3t}{4t}$
$-\sqrt{3}t=\tan\dfrac{3\pi}{4}$에서
$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
따라서 삼각형 ABC의 넓이는
$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4t)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

정답 ③

12. **출제의도** : 함수의 연속의 성질을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$에서

$\{f(x)-1\}\{f(x)+x\}\{f(x)-x\}=0$

이므로

$f(x)=1$ 또는 $f(x)=-x$ 또는 $f(x)=x$

이때, $f(0)=1$ 또는 $f(0)=0$이다.

(i) $f(0)=1$일 때,

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고, 최댓값이 1이므로

$f(x)=1$

이다. 이때, 함수 $f(x)$의 최솟값이 0이 아니므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $f(0)=0$일 때,

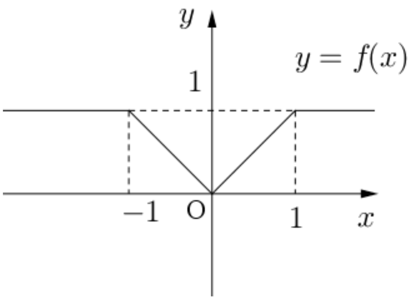
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고, 최댓값이 1이므로

$$f(x)=\begin{cases}|x| & (|x|\le 1)\\ 1 & (|x|>1)\end{cases}$$

이다.

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases}|x| & (|x|\le 1)\\ 1 & (|x|>1)\end{cases}$$



따라서

$$f\left(-\frac{4}{3}\right)=1,\ f(0)=0,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

이므로

$$f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)=1+0+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

정답 ③

13. **출제의도** : 로그의 정의와 성질을 활용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 $(a, \log_2 a)$, $(b, \log_2 b)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}(x-a)+\log_2 a$$

그러므로 이 직선의 y절편은

$$-\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}+\log_2 a \quad \cdots\cdots ㉠$$

두 점 $(a, \log_4 a)$, $(b, \log_4 b)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{\log_4 b-\log_4 a}{b-a}(x-a)+\log_4 a$$

그러므로 이 직선의 y절편은

$$-\frac{a(\log_4 b-\log_4 a)}{b-a}+\log_4 a$$

$$=-\frac{1}{2}\times\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}+\frac{1}{2}\log_2 a \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠과 ㉡이 같으므로

$$-\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}+\log_2 a$$

$$=-\frac{1}{2}\times\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}+\frac{1}{2}\log_2 a$$

이 식을 정리하면

$$\frac{1}{2}\times\log_2 a=\frac{1}{2}\times\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}$$

$$\log_2 a=\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}$$

$$(b-a)\log_2 a=a\log_2\frac{b}{a}$$

$$\log_2 a^{b-a}=\log_2\left(\frac{b}{a}\right)^a$$

$$a^{b-a}=\frac{b^a}{a^a}$$

$$a^b=b^a \quad \cdots\cdots ㉢$$

한편, $f(x)=a^{bx}+b^{ax}$이고

$f(1)=40$이므로

$a^b + b^a = 40$

㉢을 대입하면

$a^b + a^b = 40$

$a^b = 20$

따라서 $b^a = 20$이므로

$$\begin{aligned} f(2) &= a^{2b} + b^{2a} \\ &= (a^b)^2 + (b^a)^2 \\ &= 20^2 + 20^2 \\ &= 800 \end{aligned}$$

정답 ②

14. 출제의도 : 수직선 위를 움직이는 점의 운동에 대하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

$x(0) = 0$, $x(1) = 0$이므로

점 P의 위치는 $t = 0$일 때 수직선의 원점이고, $t = 1$일 때도 수직선의 원점이다.

또, $\int_0^1 |v(t)|\, dt = 2$이므로

점 P가 $t = 0$에서 $t = 1$까지 움직인 거리가 2이다.

ㄱ. 점 P의 $t = 0$에서 $t = 1$까지 위치의 변화량이 0이므로 $\int_0^1 v(t)\, dt = 0$ (참)

ㄴ. $|x(t_1)| > 1$이면 점 P와 원점 사이의 거리가 1보다 큰 시각 t_1이 존재하므로 점 P가 $t = 0$에서 $t = 1$까지 움직인 거리가 2 보다 크다. (거짓)

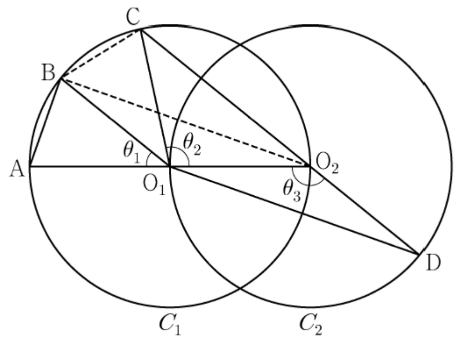
ㄷ. $0 \le t \le 1$인 모든 시각 t에서 점 P와 원점 사이의 거리가 1 보다 작고, 점 P가 $t = 0$에서 $t = 1$까지 움직인 거리가 2이므로 점 P는 $0 < t < 1$에서 적어도 한 번 원점을 지나간다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답 ③

15. 출제의도 : 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이의 비를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



$\angle CO_2O_1 + \angle O_1O_2D = \pi$이므로

$\theta_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta_2}{2}$이고

$\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$에서 $2\theta_1 + \theta_2 = \pi$이므로

$\angle CO_1B = \theta_1$이다.

이때, $\angle O_2O_1B = \theta_1 + \theta_2 = \theta_3$이므로

삼각형 O_1O_2B와 삼각형 O_2O_1D는 합동이다.

$\overline{AB} = k$라 할 때,

$\overline{BO_2} = \overline{O_1D} = 2\sqrt{2}k$이므로

$\overline{AO_2} = \sqrt{k^2 + (2\sqrt{2}k)^2} = \boxed{3k}$이고,

$\angle BO_2A = \frac{\theta_1}{2}$이므로

$\cos\frac{\theta_1}{2} = \frac{2\sqrt{2}k}{3k} = \boxed{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$이다.

삼각형 O_2BC에서

$\overline{BC}=k$, $\overline{BO_2}=2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로

삼각형 BO_2C에서

$\overline{O_2C}=x(0<x<3k)$라 하면

코사인법칙에 의하여

$$k^2=x^2+(2\sqrt{2}k)^2-2\times x\times 2\sqrt{2}k\times\cos\frac{\theta_1}{2}$$

$$k^2=x^2+(2\sqrt{2}k)^2-2\times x\times 2\sqrt{2}k\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$3x^2-16kx+21k^2=0$

$(3x-7k)(x-3k)=0$

$0<x<3k$이므로

$$x=\frac{7}{3}k$$

즉, $\overline{O_2C}=\boxed{\dfrac{7}{3}k}$이다.

$\overline{CD}=\overline{O_2D}+\overline{O_2C}=\overline{O_1O_2}+\overline{O_2C}$이므로

$\overline{AB}:\overline{CD}=k:\left(\dfrac{\boxed{3k}}{2}+\boxed{\dfrac{7}{3}k}\right)$이다.

이상에서

$$f(k)=3k,\ g(k)=\frac{7}{3}k,\ p=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이므로

$f(p)\times g(p)$

$$=\left(3\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\times\left(\frac{7}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$=\frac{56}{9}$$

정답 ②

16. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\log_2 120-\frac{1}{\log_{15}2}$$

$$=\log_2 120-\log_2 15$$

$$=\log_2\frac{120}{15}$$

$$=\log_2 8$$

$$=\log_2 2^3$$

$$=3$$

정답 3

17. 출제의도 : 도함수가 주어진 함수의 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$

$$=\int(3x^2+2x)\,dx$$

$=x^3+x^2+C$ (단, C는 적분상수)

이때, $f(0)=2$이므로 $C=2$

따라서

$f(x)=x^3+x^2+2$이므로

$f(1)=1+1+2=4$

정답 4

18. 출제의도 : 합의 기호 $\sum$의 성질을 이용하여 수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{7}\frac{a_k}{2}=56 \quad\cdots\cdots ㉠$$

$$\sum_{k=1}^{10}2a_k-\sum_{k=1}^{8}a_k=100$$에서

$$\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{8}\frac{a_k}{2}=50 \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠ − ㉡을 하면

$$\frac{a_8}{2}=6$$

따라서 $a_8=12$

정답 12

19. **출제의도** : 미분을 이용하여 함수의 그래프의 개형을 알 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3+ax^2-(a^2-8a)x+3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-(a^2-8a)$

이때, 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면

$f'(x)\geq 0$

이때, 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $D/4\leq 0$이어야 하므로

$$\begin{aligned}D/4&=a^2-3(-a^2+8a)\\&=4a^2-24a\\&=4a(a-6)\leq 0\end{aligned}$$

그러므로

$0\leq a\leq 6$

따라서, a의 최댓값은 6이다.

정답 6

20. **출제의도** : 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$에 대하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x+1)-xf(x)=ax+b$에

$x=0$을 대입하면

$f(1)=b$

닫힌구간 $[0,1]$에서 $f(x)=x$이므로

$b=1$

또, $f(x+1)-xf(x)=ax+1$이므로

$0\leq x\leq 1$에서

$$\begin{aligned}f(x+1)&=xf(x)+ax+1\\&=x^2+ax+1\end{aligned}$$

$x+1=t$로 치환하면

$$\begin{aligned}f(t)&=(t-1)^2+a(t-1)+1\\&=t^2+(a-2)t+2-a\ \cdots\cdots\ ㉠\end{aligned}$$

$f'(t)=2t+(a-2)$이고,

닫힌구간 $[0,1]$에서 $f(x)=x$이고, 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이므로 $f'(1)=1$이므로

$a=1$

따라서 ㉠에서 $1\leq x\leq 2$일 때

$f(x)=x^2-x+1$ 이다.

$$\begin{aligned}\int_1^2 f(x)\,dx&=\int_1^2 (x^2-x+1)\,dx\\&=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_1^2\\&=\frac{8}{3}-\frac{5}{6}=\frac{11}{6}\end{aligned}$$

즉, $60\times\int_1^2 f(x)\,dx=60\times\dfrac{11}{6}$

$=110$

정답 110

21. **출제의도** : 등비수열의 합을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가), (나)에서

수열 $\{|a_n|\}$은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이므로

$|a_n|=2^n$

한편,

$\sum_{k=1}^{9}|a_k|=\sum_{k=1}^{9}2^k=\dfrac{2(2^9-1)}{2-1}=2^{10}-2$,

$|a_{10}|=2^{10}$

조건 (다)에서

$\sum_{k=1}^{10}a_k=-14$

를 만족하기 위해서는

$a_1=-2,\ a_2=-4$

$\sum_{k=3}^{9} a_k=\sum_{k=3}^{9} 2^k=\frac{2^3(2^7-1)}{2-1}=2^{10}-8,$

$a_{10}=-1024$

이어야 한다.

따라서

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$

$=(-2)+2^3+2^5+2^7+2^9$

$=678$

정답 678

22. 출제의도 :

함수의 극한을 이용하여 도함수 $f'(x)$의 특징을 찾아 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구할 수 있는가?

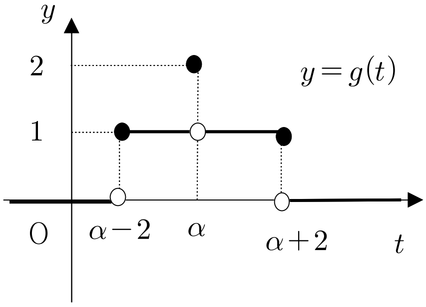
정답풀이 :

이차방정식 $f'(x)=0$이 실근을 갖지 않거나 중근을 갖는 경우에는 조건(나)에서 함수 $g(t)$가 함숫값 1과 2를 모두 갖는다는 조건에 모순이다.

그러므로 이차방정식 $f'(x)=0$는 서로 다른 두 실근 $\alpha, \beta(\alpha<\beta)$를 갖는다.

(i) $\beta=\alpha+2$일 때,

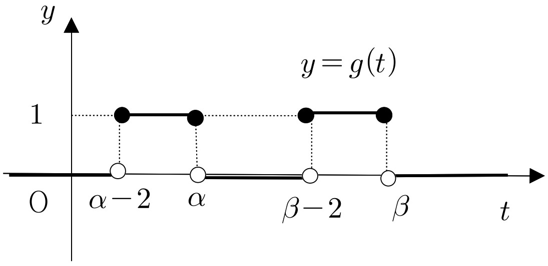
함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



이는 조건 (가)를 만족한다.

(ii) $\beta>\alpha+2$일 때,

함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.

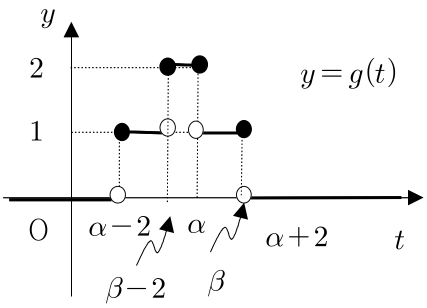


이는 조건 (나)에서

$g(t)$가 함숫값 2를 갖는 것에 모순이다.

(iii) $\beta<\alpha+2$일 때,

함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



이때, $\beta-2\le a\le\alpha$인 a에 대하여 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

따라서 위에서 조건을 만족시키는 것은 (i)의 경우이다.

한편, 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이므로 함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수는 $\frac{3}{2}$이다.

그러므로

$$f'(x)=\frac{3}{2}(x-\alpha)\{x-(\alpha+2)\}$$

$$=\frac{3}{2}\{x^2-(2\alpha+2)x+\alpha^2+2\alpha\}$$

로 놓을 수 있다.

이때,

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}(\alpha+1)x^2+\frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha)x+C$$

(단, C는 적분상수) …… ㉠

한편, 조건 (나)에서

$g(f(1))=g(f(4))=2$

이고 $g(t)$의 함숫값이 2인 t의 값의 개수는 1이므로

$f(1)=f(4)$

㉠에서

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(\alpha+1)+\frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha)+C$$

$$=32-24(\alpha+1)+6(\alpha^2+2\alpha)+C$$

따라서

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(\alpha+1)+\frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha)$$

$$=32-24(\alpha+1)+6(\alpha^2+2\alpha)$$

양변에 2를 곱하면

$$1-3(\alpha+1)+3(\alpha^2+2\alpha)$$

$$=64-48(\alpha+1)+12(\alpha^2+2\alpha)$$

이 식을 정리하면

$$3\alpha^2+3\alpha-2=12\alpha^2-24\alpha+16$$

$$9\alpha^2-27\alpha+18=0$$

$$\alpha^2-3\alpha+2=0$$

$$(\alpha-1)(\alpha-2)=0$$

$\alpha=1$ 또는 $\alpha=2$

((ⅰ)-①) $\alpha=1$일 때,

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x+C$$

이때, $f(1)=\alpha$에서

$f(1)=1$이어야 하므로

$$\frac{1}{2}-3+\frac{9}{2}+C=1$$

$2+C=1$

$C=-1$

이때, $f(0)=-1$이므로

$g(f(0))=g(-1)=1$

그러므로 조건을 만족시킨다.

((ⅰ)-②) $\alpha=2$일 때,

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+12x+C$$

이때, $f(1)=\alpha$에서

$f(1)=2$이어야 하므로

$$\frac{1}{2}-\frac{9}{2}+12+C=2$$

$8+C=2$

$C=-6$

이때, $f(0)=-6$이므로

$g(f(0))=g(-6)=0$

그러므로 조건을 만족시키지 못한다.

따라서, ((ⅰ)-①)에서

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x-1$$

이므로

$$f(5)=\frac{1}{2}\times5^3-3\times25+\frac{9}{2}\times5-1$$

$$=\frac{125}{2}-75+\frac{45}{2}-1$$

$$=9$$

정답 9

[선택: 미적분]
23. ⑤ 24. ④ 25. ② 26. ③ 27. ①
28. ② 29. 11 30. 143

23. **출제의도** : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}\right)\times n}{\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}\right)\times n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{1-\frac{2}{n^2}}$$

$$=\frac{5+0}{1-0}=5$$

정답 ⑤

24. **출제의도** : 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$f(x^3+x)=e^x$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(x^3+x)\times(3x^2+1)=e^x$ ⋯ ㉠
이다.
$x^3+x=2$에서
$x^3+x-2=(x-1)(x^2+x+2)=0$
이므로 $x=1$이다.
따라서 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$f'(1+1)\times(3+1)=e$
이므로
$f'(2)=\frac{e}{4}$

정답 ④

25. **출제의도** : 등비급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면
$a_n=ar^{n-1}$
이때
$$a_{2n-1}-a_{2n}=ar^{2n-2}-ar^{2n-1}$$
$$=ar^{2n-2}(1-r)$$
$$=a(1-r)(r^2)^{n-1}$$
이므로 수열 $\{a_{2n-1}-a_{2n}\}$은 첫째항이 $a(1-r)$이고 공비가 r^2인 등비수열이다.
따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=3$에서
$-1<r<1$
이고
$\frac{a(1-r)}{1-r^2}=3$
이고 $r\neq1$이므로
$\frac{a}{1+r}=3$ ⋯ ㉠
또, $\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2=\sum_{n=1}^{\infty}a^2r^{2n-2}=6$이므로
$\frac{a^2}{1-r^2}=\frac{a}{1-r}\times\frac{a}{1+r}=6$
따라서 ㉠에서
$\frac{a}{1-r}\times3=6$
이므로

$$\frac{a}{1-r}=2$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

$$=\frac{a}{1-r}=2$$

정답 ②

26. **출제의도** : 급수와 정적분의 관계를 이용하여 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+2kn}{k^3+3k^2n+n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2+2\times\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^3+3\times\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}\times\frac{1}{n}\right\}$$

$$=\int_0^1\frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\ln\left(x^3+3x^2+1\right)\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}(\ln 5-\ln 1)$$

$$=\frac{\ln 5}{3}$$

정답 ③

27. **출제의도** : 평면 위의 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 두 점의 좌표는

$(\alpha,\ \alpha^2)$, $(\beta,\ \beta^2)$

이므로 이 두 점의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)\ \cdots\ ㉠$$

이다. 두 식 $y=x^2$, $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$를 연립하면

$$x^2=t^2x-\frac{\ln t}{8},$$

$$x^2-t^2x+\frac{\ln t}{8}=0$$

이 방정식의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=t^2,$$

$$\alpha\beta=\frac{\ln t}{8}$$

따라서

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

$$=t^4-\frac{\ln t}{4}$$

이므로 ㉠에서 중점의 좌표는

$\left(\frac{1}{2}t^2,\ \frac{1}{2}t^4-\frac{\ln t}{8}\right)$이다.

그러므로 점 P의 시각 t에서의 위치는

$$x=\frac{1}{2}t^2,\quad y=\frac{1}{2}t^4-\frac{\ln t}{8}$$

이다.

이때

$$\frac{dx}{dt}=t,\quad \frac{dy}{dt}=2t^3-\frac{1}{8t}$$

이므로

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$=\sqrt{t^2+\left(2t^3-\frac{1}{8t}\right)^2}$$

$$=\sqrt{t^2+4t^6-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{64t^2}}$$

$$= \sqrt{4t^6 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{64t^2}}$$

$$= \sqrt{\left(2t^3 + \frac{1}{8t}\right)^2}$$

$$= 2t^3 + \frac{1}{8t}$$

따라서 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^e \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= \int_1^e \left(2t^3 + \frac{1}{8t}\right)dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{8}\ln|t|\right]_1^e$$

$$= \frac{1}{2}e^4 + \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{2} + 0\right)$$

$$= \frac{e^4}{2} - \frac{3}{8}$$

정답 ①

28. 출제의도 : 합성함수의 미분법을 이용하여 극소가 되는 x의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x) = 3f(x) + 4\cos f(x)$이므로

$g'(x) = 3f'(x) - 4f'(x)\sin f(x)$

$\quad = f'(x)\{3 - 4\sin f(x)\}$

$\quad = 12\pi(x-1)\{3 - 4\sin(6\pi(x-1)^2)\}$

이므로 $g'(x) = 0$에서

$x=1$ 또는 $\sin(6\pi(x-1)^2) = \frac{3}{4}$

(i) $x=1$일 때

$x=1$일 때 $\sin(6\pi(x-1)^2) = 0$이므로

$x=1$ 부근에서 $3 - 4\sin(6\pi(x-1)^2) > 0$ 이다.

이때 $x-1$은 $x=1$의 좌우에서 음에서 양으로 변하므로

$g'(x) = 12\pi(x-1)\{3 - 4\sin(6\pi(x-1)^2)\}$도 $x=1$의 좌우에서 음에서 양으로 변한다.

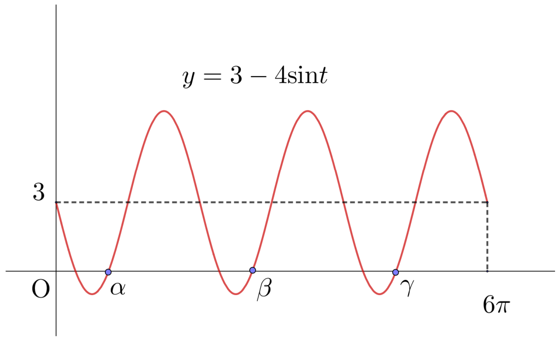
따라서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극소이다.

(ii) $1 < x < 2$일 때

$12\pi(x-1) > 0$이고, 함수 $f(x)$는 구간 $[1, 2]$에서 0에서 6π까지 증가한다.

즉, $f(x) = t$라 하면 x의 값이 1에서 2까지 증가할 때 t의 값은 0에서 6π까지 증가한다.

이때 함수 $y = 3 - 4\sin t$의 그래프는 다음과 같으므로 $t = \alpha$, β, γ의 좌우에서 $y = 3 - 4\sin t$의 값은 음에서 양으로 변한다.



따라서 $f(x) = \alpha$, β, γ인 x의 좌우에서 $y = 3 - 4\sin f(x)$의 값은 음에서 양으로 변하고 이러한 x는 세 수 α, β, γ에 대하여 각각 하나씩 존재한다.

따라서 함수 $g(x)$가 $1 < x < 2$에서 극소가 되는 x의 개수는 3이다.

(iii) $0 < x < 1$일 때

함수 $y = f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

즉, 모든 실수 x에 대하여

$f(1-x)=f(1+x)$

가 성립한다.

이때

$$\begin{aligned} g(1-x)&=3f(1-x)+4\cos f(1-x)\\ &=3f(1+x)+4\cos f(1+x)\\ &=g(1+x) \end{aligned}$$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프도 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

따라서 (ⅱ)와 같이 $0<x<1$에서 함수 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수도 3이다.

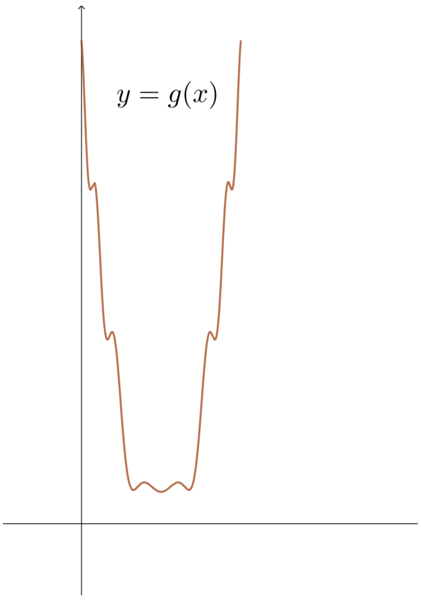
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 x의 개수는

$1+3+3=7$

이다.

<참고>

$0<x<2$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



정답 ②

29. **출제의도** : 도형의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

선분 AB의 중점을 M이라 하면

$\angle \mathrm{AMQ}=2\times\angle \mathrm{ABQ}=2\times 2\theta=4\theta$

이므로

(부채꼴 AMQ의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times 1^2\times 4\theta=2\theta$,

(삼각형 MBQ의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times 1^2\times\sin(\pi-4\theta)=\dfrac{1}{2}\sin 4\theta$

삼각형 RAB에서 $\angle \mathrm{ARB}=\pi-3\theta$이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{2}{\sin(\pi-3\theta)}=\dfrac{\overline{\mathrm{BR}}}{\sin\theta}$,

즉

$\overline{\mathrm{BR}}=\dfrac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}$

이므로

(삼각형 RAB의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BR}}\times\sin 2\theta$

$=\dfrac{1}{2}\times 2\times\dfrac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}\times\sin 2\theta=\dfrac{2\sin\theta\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$

그러므로

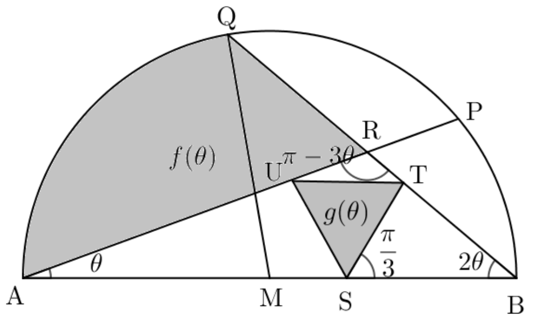
$f(\theta)=2\theta+\dfrac{1}{2}\sin 4\theta-\dfrac{2\sin\theta\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$

이므로

$\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta}$

$=\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\left(2+2\times\frac{\sin 4\theta}{4\theta}-\frac{4\times\dfrac{\sin\theta}{\theta}\times\dfrac{\sin 2\theta}{2\theta}}{3\times\dfrac{\sin 3\theta}{3\theta}}\right)$

$=2+2-\dfrac{4}{3}=\dfrac{8}{3}$ … ㉠



정삼각형 STU의 한 변의 길이를 a라 하면 삼각형 TSB에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin 2\theta}=\frac{\overline{\mathrm{BT}}}{\sin\frac{\pi}{3}},$$

즉

$$\overline{\mathrm{BT}}=\frac{\sqrt{3}\,a}{2\sin 2\theta}$$

두 삼각형 RUT, RAB가 서로 닮음이므로

$$\overline{\mathrm{RT}}:\overline{\mathrm{RB}}=\overline{\mathrm{UT}}:\overline{\mathrm{AB}}$$

$$\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}-\frac{\sqrt{3}\,a}{2\sin 2\theta}:\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}=a:2$$

$$\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}a=\frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta}-\frac{\sqrt{3}}{\sin 2\theta}a$$

$$\left(\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}+\frac{\sqrt{3}}{\sin 2\theta}\right)a=\frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta}$$

$$\frac{2\sin\theta\sin 2\theta+\sqrt{3}\sin 3\theta}{\sin 2\theta\sin 3\theta}a=\frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta}$$

$$a=\frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta}\times\frac{\sin 2\theta\sin 3\theta}{2\sin\theta\sin 2\theta+\sqrt{3}\sin 3\theta}$$

이때

$$g(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

이고

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{a}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta}\times\frac{\sin 2\theta\sin 3\theta}{2\sin\theta\sin 2\theta+\sqrt{3}\sin 3\theta}\times\frac{1}{\theta}\right)$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta}\times\frac{\frac{\sin 2\theta\sin 3\theta}{\theta^2}}{\frac{2\sin\theta\sin 2\theta+\sqrt{3}\sin 3\theta}{\theta}}\right)$$

$$=\frac{4}{3}\times\frac{2\times 3}{0+3\sqrt{3}}$$

$$=\frac{8}{3\sqrt{3}}$$

이므로

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{a}{\theta}\right)^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)^2$$

$$=\frac{16\sqrt{3}}{27}\quad\cdots\ ㉡$$

따라서 ㉠, ㉡에서

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{g(\theta)}{\theta^2}}{\frac{f(\theta)}{\theta}}$$

$$=\frac{\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2}}{\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta}}$$

$$=\frac{\frac{16\sqrt{3}}{27}}{\frac{8}{3}}$$

$$=\frac{2}{9}\sqrt{3}$$

이므로

$p+q=9+2=11$

정답 11

30. **출제의도** : 치환적분법과 부분적분법을 활용하여 정적분의 값을 구할 수 있

는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서 $f(1)=1$이므로 조건 (나)에 의하여

$g(2)=2f(1)=2$

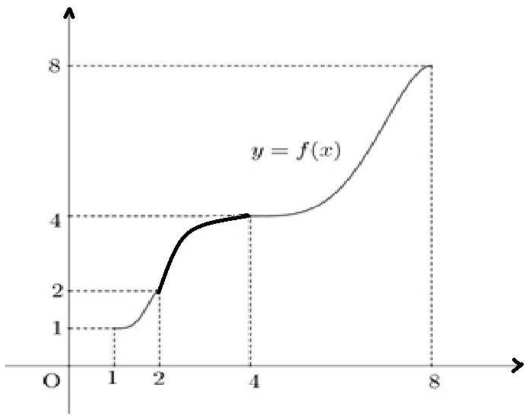
따라서 $f(2)=2$이므로

$g(4)=2f(2)=4$

따라서 $f(4)=4$이므로

$g(8)=2f(4)=8$

따라서 $f(8)=8$이다.



부분적분법에 의하여

$$\int_1^8 xf'(x)dx$$

$$=[xf(x)]_1^8-\int_1^8 f(x)dx$$

$$=8f(8)-f(1)-\int_1^8 f(x)dx$$

$$=8\times8-1-\int_1^8 f(x)dx$$

$$=63-\int_1^8 f(x)dx \cdots ㉠$$

이때

$$\int_1^8 f(x)dx$$

$$=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx+\int_4^8 f(x)dx$$

$\cdots$ ㉡

이고,

$$\int_1^2 f(x)dx=\frac{5}{4} \cdots ㉢$$

이다.

이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 대칭성에 의하여

$$\int_2^4 f(x)dx=4\times4-2\times2-\int_2^4 g(y)dy$$

$$=12-\int_2^4 g(y)dy \cdots ㉣$$

이때 $y=2t$로 놓으면 치환적분법에 의하여

$$\int_2^4 g(y)dy=2\int_1^2 g(2t)dt$$

이므로 조건 (나)에서

$$\int_2^4 g(y)dy=2\int_1^2 g(2t)dt$$

$$=2\int_1^2 2f(t)dt$$

$$=4\int_1^2 f(x)dx$$

$$=4\times\frac{5}{4}=5$$

㉣에서

$$\int_2^4 f(x)dx=12-\int_2^4 g(y)dy$$

$$=12-5=7 \cdots ㉤$$

또, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 대칭성에 의하여

$$\int_4^8 f(x)dx=8\times8-4\times4-\int_4^8 g(y)dy$$

$= 48 - \int_4^8 g(y)dy$ ⋯ ㉥

이때 $y=2t$로 놓으면 치환적분법에 의하여

$$\int_4^8 g(y)dy = 2\int_2^4 g(2t)dt$$

이므로 조건 (나)에서

$$\int_4^8 g(y)dy = 2\int_2^4 g(2t)dt$$

$$= 2\int_2^4 2f(t)dt$$

$$= 4\int_2^4 f(x)dx$$

$$= 4\times 7 = 28$$

㉥에서

$$\int_4^8 f(x)dx = 48 - \int_4^8 g(y)dy$$

$= 48 - 28 = 20$ ⋯ ㉦

㉡, ㉢, ㉤, ㉦에서

$$\int_1^8 f(x)dx$$

$$= \int_1^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx + \int_4^8 f(x)dx$$

$$= \frac{5}{4} + 7 + 20 = \frac{113}{4}$$

이므로 ㉠에서

$$\int_1^8 xf'(x)dx$$

$$= 63 - \int_1^8 f(x)dx$$

$$= 63 - \frac{113}{4} = \frac{139}{4}$$

따라서

$p+q = 4 + 139 = 143$

정답 143

[다른 풀이]

$\int_1^8 xf'(x)dx$에서 $x=g(y)$라 하면

$x=1$일 때 $y=1$, $x=8$일 때 $y=8$이고,

$$\frac{dx}{dy} = g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

이므로

$$\int_1^8 xf'(x)dx = \int_1^8 g(y)dy$$

$$= \int_1^2 g(y)dy + \int_2^4 g(y) + \int_4^8 g(y)dy$$

이때

$$\int_1^2 g(y)dy = 2\times 2 - 1\times 1 - \int_1^2 f(x)dx$$

$$= 3 - \frac{5}{4} = \frac{7}{4}$$

한편, $\int_2^4 g(y)dy = \int_2^4 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$에서

$\frac{y}{2} = t$라 하면 $y=2$일 때 $t=1$, $y=4$일 때 $t=2$이고, $\frac{1}{2} = \frac{dt}{dy}$이므로

$$\int_2^4 g(y)dy = \int_2^4 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$$

$$= \int_1^2 4f(t)dt = 4\int_1^2 f(t)dt$$

$$= 4\times\frac{5}{4} = 5,$$

또, $\int_4^8 g(y)dy = \int_4^8 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$에서

$\frac{y}{2} = t$라 하면 $y=4$일 때 $t=2$, $y=8$일 때 $t=4$이고, $\frac{1}{2} = \frac{dt}{dy}$이므로

$$\int_4^8 g(y)dy = \int_4^8 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$$

$$=\int_2^4 4f(t)dt=4\int_2^4 f(t)dt$$

$$=4\times\left\{4\times4-2\times2-\int_2^4 g(y)dy\right\}$$

$$=4(12-5)=28$$

따라서

$$\int_1^8 xf'(x)dx=\int_1^8 g(y)dy$$

$$=\int_1^2 g(y)dy+\int_2^4 g(y)+\int_4^8 g(y)dy$$

$$=\frac{7}{4}+5+28=\frac{139}{4}$$

이므로

$$p+q=4+139=143$$

<참고>

조건 (나)의 성질

$$g(2x)=2f(x)$$

에서 다음 그림과 같이 각 부분의 넓이가 대각선 방향으로 4배씩 증가함을 알 수 있다.