

2024학년도 10월 고2 전국연합학력평가

정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

* 본 전국연합학력평가는 17개 시도 교육청 주관으로 시행되며, 해당 자료는 EBSi에서만 제공됩니다.
무단 전재 및 재배포는 금지됩니다.

1	③	2	⑤	3	④	4	④	5	①
6	②	7	③	8	⑤	9	①	10	③
11	②	12	①	13	⑤	14	②	15	⑤
16	④	17	①	18	②	19	③	20	④
21	③	22	8	23	7	24	34	25	6
26	385	27	54	28	22	29	48	30	75

1. [출제의도] 지수법칙 계산하기

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{4})^2 \times 2^{\frac{2}{3}} &= \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^2 \times 2^{\frac{2}{3}} \\ &= 2^{\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} \\ &= 2^{\frac{4}{3} + \frac{2}{3}} \\ &= 2^2 = 4 \end{aligned}$$

2. [출제의도] 미분계수 이해하기

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \times \frac{1}{x+2}$$

$$= \frac{f'(2)}{4} = 3$$

따라서 $f'(2) = 3 \times 4 = 12$

3. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

$$\text{함수 } y = \cos \frac{\pi}{4} x \text{의 주기는 } \frac{2\pi}{\left| \frac{\pi}{4} \right|} = 8$$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3 + 1 = 4$$

5. [출제의도] 함수의 극한의 성질 이해하기

$$x > \frac{1}{2} \text{ 인 모든 실수 } x \text{에 대하여}$$

$$\frac{3}{2x+1} < f(x) < \frac{3}{2x-1} \text{이므로}$$

$$\frac{3x}{2x+1} < xf(x) < \frac{3x}{2x-1}$$

$$\text{이 때 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{2x-1} = \frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$\text{함수의 극한의 대소 관계에 의하여 } \lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) = \frac{3}{2}$$

6. [출제의도] 등차수열 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 3이므로

$$a_2 \times a_4 = (a_3 - 3)(a_3 + 3)$$

$$= a_3^2 - 9 = 72$$

에서 $a_3 = 9$ 또는 $a_3 = -9$

$$a_3 = -9 \text{이면 } a_1 = a_3 - 6 = -15 < 0$$

따라서 $a_3 = 9$

7. [출제의도] 미분계수 이해하기

함수 $f(x)$ 가 $x = 2$ 에서 미분가능하므로

함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \text{에서}$$

$$2 - a = 4 + 2b + a, b = -a - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-a) - (2-a)}{x - 2}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{x-2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x^2+bx+a)-(2-a)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-(a+1)x+2(a-1)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x-a+1)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-a+1) = 3-a \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 가 $x = 2$ 에서 미분가능하므로

$$1 = 3 - a \text{에서 } a = 2, b = -3$$

$$\text{따라서 } f(2) = 0$$

8. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계 이해하기

$$\begin{aligned} a_1 &= S_1 = \frac{1}{2} \\ a_5 &= S_5 - S_4 = \frac{1}{6} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{30} \\ \text{따라서 } a_1 + a_5 &= \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{30}\right) = \frac{7}{15} \end{aligned}$$

9. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x) = \log_2(x+a)+1$ 의 밑이 1보다 크므로 x 의 값이 증가하면 $f(x)$ 의 값도 증가한다. 그러므로 함수 $f(x)$ 는 단조증가 $[a, 5]$ 에서 $x = a$ 일 때 최솟값 3을 갖는다.

$$f(a) = \log_2 2a + 1 = 3 \text{에서 } a = 2$$

$$\text{따라서 } f(a+4) = f(6) = \log_2 8 + 1 = 3 + 1 = 4$$

10. [출제의도] 등비수열의 합 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 $r(r \neq 0)$ 이라 하자.

$$a_1 = 0 \text{이면 } \sum_{k=1}^5 a_k = 0 = 33 \text{이므로 } a_1 = 0$$

$$a_3 + 2a_4 = a_1 r^2 + 2a_1 r^3 = a_1 r^2 (1+2r) = 0$$

$$\text{에서 } r = -\frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^5 a_k = \frac{a_1 \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^5\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{11}{16} a_1 = 33$$

$$\text{따라서 } a_1 = 48$$

11. [출제의도] 삼각함수의 성질을 활용하여 문제해결하기

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) = -\sin\theta, \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) \times \tan\theta &= -\sin\theta \times \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ &= -\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \text{이므로 } \frac{\cos^2\theta - 1}{\cos\theta} = \frac{8}{3}$$

$$3\cos^2\theta - 8\cos\theta - 3 = 0$$

$$(\cos\theta - 3)(3\cos\theta + 1) = 0$$

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1 \text{이므로 } \cos\theta = -\frac{1}{3}$$

12. [출제의도] 수열의 합을 활용하여 문제해결하기

$$a_{2n} = \sum_{k=1}^{2n-1} (k - a_k) = \sum_{k=1}^{2n-1} k - \sum_{k=1}^{2n-1} a_k$$

$$a_{2n} + \sum_{k=1}^{2n-1} a_k = \sum_{k=1}^{2n-1} k + \sum_{k=1}^{2n-1} a_k = \sum_{k=1}^{2n-1} k$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{k=1}^9 k = \frac{9 \times 10}{2} = 45$$

13. [출제의도] 삼각함수의 정의 이해하기

점 P의 x좌표를 $a(a > 0)$ 이라 하면 점 P의 좌표는 $P(a, a+1)$

각의 크기 θ 를 나타내는 동경과 각의 크기 70°를 나타내는 동경이 일치하므로

$$7\theta = \theta + 2n\pi(n \text{은 정수})$$

$$\theta = \frac{n}{3}\pi$$

이때 점 P는 제1사분면 위의 점이고

$$0 < \theta < 2\pi \text{이므로 } n = 1, \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\tan \frac{\pi}{3} = \frac{a+1}{a} \text{에서 } \sqrt{3}a = a+1, (\sqrt{3}-1)a = 1$$

$$\text{따라서 } a = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

14. [출제의도] 함수의 연속을 활용하여 문제해결하기

조건 (가)의 식의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$0 \times f(0) = b \text{에서 } b = 0$$

조건 (가)의 식의 양변에 $x = 4$ 를 대입하면

$$2f(4) = 16 + 4a$$

조건 (나)에 의하여 $4 = 16 + 4a$ 에서 $a = -3$

그러므로 $x \geq -\frac{1}{2}$ 이고 $x \neq 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = \frac{x(x-3)}{\sqrt{2x+1}-1}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 연속이다.

$$\text{따라서 } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-3)}{\sqrt{2x+1}-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-3)(\sqrt{2x+1}+1)}{(\sqrt{2x+1}-1)(\sqrt{2x+1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-3)(\sqrt{2x+1}+1)}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-3)(\sqrt{2x+1}+1)}{2} \\ &= \frac{-3 \times 2}{2} = -3 \end{aligned}$$

15. [출제의도] 거듭제곱근의 정의 이해하기

(i) n 이 홀수일 때

$$f(n) = 1 \text{이므로 } f(3) = f(5) = f(7) = f(9) = 1$$

(ii) n 이 짝수일 때

$$n = 2, 4 \text{이면 } \sin \frac{n}{5}\pi > 0 \text{이므로 } f(2) = f(4) = 2$$

$$n = 6, 8 \text{이면 } \sin \frac{n}{5}\pi < 0 \text{이므로 } f(6) = f(8) = 0$$

$$n = 10 \text{이면 } \sin \frac{10}{5}\pi = 0 \text{이므로 } f(10) = 1$$

$$(i), (ii)에 의하여 \sum_{n=2}^{10} f(n) = 1 \times 4 + 2 \times 2 + 1 = 9$$

16. [출제의도] 로그의 성질을 활용하여 문제해결하기

$$\log_n 4 \times \left(\frac{4}{\log_m 2} + \log_2 n \right)$$

$$= 2 \log_n 2 \times (4 \log_2 m + \log_2 n)$$

$$= 8 \log_n 2 \times \log_2 m + 2 \log_n 2 \times \log_2 n$$

$$= 8 \log_n m + 2 = 8$$

$$\log_n m = \frac{3}{4} \text{에서 } m = n^{\frac{3}{4}}$$

$n^{\frac{3}{4}}$ 이 자연수가 되기 위해서는 어떤 자연수

k 에 대하여 $n = k^4$ 이어야 한다.

$1 < n < 100$ 이므로 $n = 2^4$ 또는 $n = 3^4$ 이다.

$$n = 2^4 \text{ 이면 } m = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^3 = 8 \text{ 이므로}$$

$$m+n = 8+16 = 24$$

$$n = 3^4 \text{ 이면 } m = (3^4)^{\frac{3}{4}} = 3^3 = 27 \text{ 이므로}$$

$$m+n = 27+81 = 108$$

따라서 $m+n$ 의 최댓값은 108

17. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 추론하기

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos^2 x - \sin x - 1 \\ &= (1 - \sin^2 x) - \sin x - 1 \\ &= -\sin^2 x - \sin x = -\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$f(\pi) = 0$ 이고 π 가 구간 $(\pi, a]$ 에 속하지 않으므로 구간 $(\pi, a]$ 에서 함수 $f(x)$ 가 최솟값을 갖기 위해서는 $f(x) \leq 0$ 을 만족시키는 x 의 값이 구간 $(\pi, a]$ 에 존재해야 한다.

$f(x) \leq 0$ 에서 $\sin x = -1$ 또는 $\sin x \geq 0$

$$x > \pi \text{에서 } \sin x = -1 \text{인 } x \text{의 최솟값은 } \frac{3}{2}\pi$$

$x > \pi$ 에서 $\sin x \geq 0$ 인 x 의 최솟값은 2π

$$\text{그러므로 } p = \frac{3}{2}\pi$$

한편 구간 $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$ 에서 $-1 \leq \sin x < 0$ 이므로

$$f(x) = -\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{그러므로 } M = \frac{1}{4}$$

$$\text{따라서 } p \times M = \frac{3}{8}\pi$$

18. [출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

점 A의 좌표를 $A(p, 3p+2)$ 라 하면

점 B는 선분 DA를 2:1로 외분하는 점이므로

점 B의 좌표는 $B(2p, 6p+2)$ 이다.

함수 $y = a^x + k$ 의 그래프와 함수 $y = \log_a(x-k)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 서로 대칭이고, 곡선 $y = a^x + k$ 위의 점 B와 곡선 $y = \log_a(x-k)$ 위의 점 C를 지나는 직선이 직선 $y = x$ 와 서로 수직이므로 점 C는 점 B를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동시킨 점이다.

그러므로 점 C의 좌표는 $C(6p+2, 2p)$ 이다.

삼각형 CBD는 이등변삼각형이므로

두 직선 BD, AC는 서로 수직이다.

직선 BD의 기울기가 3이므로

직선 AC의 기울기는

$$\frac{2p-(3p+2)}{(6p+2)-p} = \frac{-p-2}{5p+2} = -\frac{1}{3} \text{ 이므로 } p = 2$$

그러므로 $A(2, 8)$, $B(4, 14)$

점 A가 곡선 $y = a^x + k$ 위의 점이므로 $a^2 + k = 8$

점 B가 곡선 $y = a^x + k$ 위의 점이므로 $a^4 + k = 14$

두 식을 연립하면

$$a^4 - a^2 - 6 = 0, (a^2 + 2)(a + \sqrt{3})(a - \sqrt{3}) = 0$$

$$a > 1 \text{ 이므로 } a = \sqrt{3}, k = 5$$

$$\text{따라서 } a \times k = 5\sqrt{3}$$

19. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제해결하기

두 호 AD, DE의 길이가 같으므로

두 호 AD, DE에 대한 원주각의 크기가 같다.

$\angle DBA = \angle EBD = \theta$, $\overline{AD} = k$ 라 하면

$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{CD}$ 이므로 $\overline{CD} = 2k$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$k^2 = 2^2 + \sqrt{6}^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{6} \times \cos \theta$$

$$k^2 = 10 - 4\sqrt{6} \cos \theta \dots \textcircled{1}$$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$(2k)^2 = \sqrt{6}^2 + 4^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{6} \times \cos \theta$$

$$2k^2 = 11 - 4\sqrt{6} \cos \theta \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 을 연립하면 } k = 1, \cos \theta = \frac{3}{8}\sqrt{6}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{8}\sqrt{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{8}$$

원 C의 반지름의 길이를 R이라 하면

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AD}}{\sin \theta} = 2R \text{에서 } R = \frac{2}{5}\sqrt{10}$$

$$\text{따라서 원 } C \text{의 넓이는 } \pi \times \left(\frac{2}{5}\sqrt{10}\right)^2 = \frac{8}{5}\pi$$

20. [출제의도] 평균변화율을 이용하여 추론하기

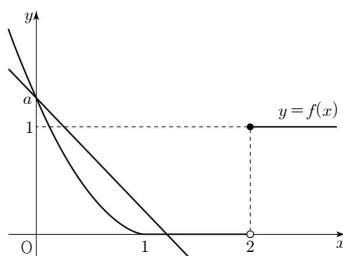
$f(0) = a$ 이므로 양수 t에 대하여

$$g(t) = \frac{f(t) - f(0)}{t-0} = \frac{f(t) - a}{t}$$

이고, 함수 $g(t)$ 의 값은 두 점 $(0, a)$, $(t, f(t))$ 를 지나는 직선의 기울기와 같다.

$$\therefore a = 1 \text{ 일 때 } g(1) = \frac{f(1) - 1}{1} = -1 \text{ (참)}$$

$\therefore (i) a \geq 1$ 일 때

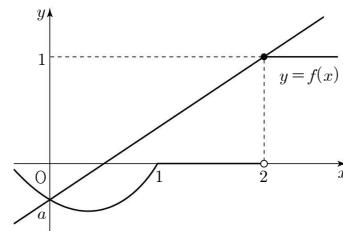


모든 양수 t에 대하여

$$f(t) \leq a \text{ 이므로 } g(t) = \frac{f(t) - a}{t} \leq 0$$

그러므로 함수 $g(t)$ 의 최댓값은 1이 될 수 없다.

(ii) $-1 < a < 1$ 일 때

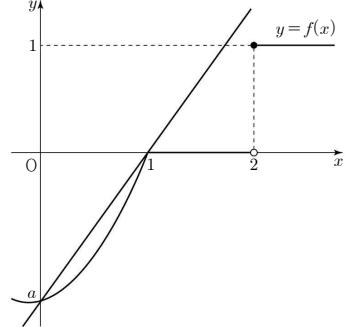


함수 $g(t)$ 는 $t = 2$ 일 때 최댓값을 갖는다.

$$g(2) = \frac{f(2) - a}{2} = \frac{1-a}{2} < 1$$

그러므로 함수 $g(t)$ 의 최댓값은 1보다 작다.

(iii) $a \leq -1$ 일 때



함수 $g(t)$ 는 $t = 1$ 일 때 최댓값을 갖는다.

$$g(1) = \frac{f(1) - a}{1} = -a$$

함수 $g(t)$ 의 최댓값이 1이기 위해서는

$$a = -1$$

$$\text{이 때 } g(2) = \frac{f(2) - a}{2} = \frac{1 - (-1)}{2} = 1$$

(i), (ii), (iii)에 의하여

함수 $g(t)$ 의 최댓값이 1 일 때, $g(2) = 1$ (거짓)

ㄷ. $0 < k < 2$ 인 k에 대하여

두 점 $(0, a)$, $(k, f(k))$ 를 지나는 직선을 l이라 하자. $g(k) = g(k+1) = g(k+2)$ 인

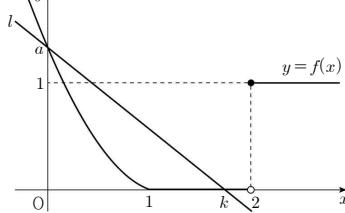
양수 k ($0 < k < 2$)가 존재하기 위해서는

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 l의 교점 중

$(0, a)$ 가 아닌 점이 3개이어야 하고,

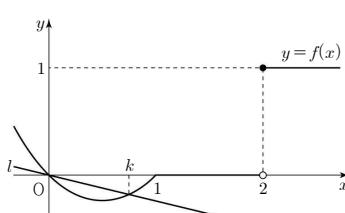
이 세 교점의 x좌표는 k , $k+1$, $k+2$ 이어야 한다.

(i) $a > 0$ 일 때



함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 l의 교점 중 x좌표가 양수인 점은 $(k, f(k))$ 뿐이므로 $g(k) = g(k+1) = g(k+2)$ 인 k 가 존재하지 않는다.

(ii) $a = 0$ 일 때



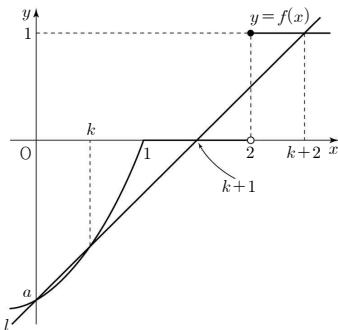
0 < $k < 1$ 일 때, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 l의 교점 중 x좌표가 양수인 점은 $(k, f(k))$ 뿐이므로 $g(k) = g(k+1) = g(k+2)$ 인 k 가 존재하지 않는다.

$1 \leq k < 2$ 일 때, 직선 l의 기울기가 0이므로 $g(k) = 0$

$$\text{이 때 } g(k+1) = \frac{1-0}{(k+1)-0} = \frac{1}{k+1} > 0 \text{ 이므로}$$

$g(k) \neq g(k+1)$
그러므로 $g(k)=g(k+1)=g(k+2)$ 인 k 가
존재하지 않는다.

(iii) $a < 0$ 일 때



함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 l 의 교점 중 $(0, a)$ 가 아닌 점이 3개이기 위해서는 $0 < k < 1$ 이고

$f(k+1)=0$, $f(k+2)=1$ 이어야 한다.

$$\frac{1-0}{(k+2)-(k+1)} = 1 \text{이므로 직선 } l \text{의 기울기는 } 1$$

직선 l 위의 두 점 $(k, f(k))$, $(k+1, 0)$ 에 대하여 $\frac{0-f(k)}{(k+1)-k} = 1$ 이므로 $f(k) = -1$

즉, $(k-1)(k-a) = -1 \dots \textcircled{i}$

직선 l 위의 두 점 $(0, a)$, $(k, f(k))$ 에 대하여 $\frac{f(k)-a}{k-0} = \frac{-1-a}{k} = 1$ 이므로

$a = -k-1 \dots \textcircled{j}$

$\textcircled{i}, \textcircled{j}$ 을 연립하면

$$(k-1)(2k+1) = -1, 2k^2 - k = 0$$

$$0 < k < 1 \text{이므로 } k = \frac{1}{2}, a = -\frac{3}{2}$$

그러므로

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right) & (x < 1) \\ 0 & (1 \leq x < 2) \\ 1 & (x \geq 2) \end{cases}$$

이때

$$(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right) = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\ = \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} \geq -\frac{25}{16}$$

함수 $y=f(x)$ 의 최솟값 $-\frac{25}{16}$ 가 $-\frac{3}{2}$ 보다 작으므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와

직선 $y = -\frac{3}{2}$ 은 서로 다른 두 점에서 만난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

21. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

$a_1 \geq 2$ 이므로 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n > 0$

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 \geq 1 \text{이므로 } a_3 = \frac{1}{4}a_1$$

$$a_5 < 1 \text{이라 하면 } a_6 = \frac{1}{2}(a_5 + a_1) \text{이므로}$$

$$a_5 + 2a_6 = 2a_5 + a_1 > 2 \text{이므로 } a_5 \geq 1$$

$$\text{그러므로 } a_6 = \frac{1}{2}a_5 \text{이므로 } a_5 + 2a_6 = 2a_5 = 2 \text{이므로}$$

$$a_5 = 1$$

$a_4 < 1$ 이라 하면 $a_5 = \frac{1}{2}(a_4 + a_1) = 1$ 에서

$$a_4 = 2 - a_1 \leq 0 \text{이므로 } a_4 \geq 1$$

$$\text{그러므로 } a_5 = \frac{1}{2}a_4 = 1 \text{에서 } a_4 = 2$$

(i) $a_1 \geq 4$ 일 때

$$a_3 = \frac{1}{4}a_1 \geq 1 \text{이므로 } a_4 = \frac{1}{8}a_1 = 2 \text{에서}$$

$$a_1 = 16$$

(ii) $a_1 < 4$ 일 때

$$a_3 = \frac{1}{4}a_1 < 1 \text{이므로}$$

$$a_4 = \frac{1}{2}(a_3 + a_1) = \frac{5}{8}a_1 = 2 \text{에서 } a_1 = \frac{16}{5}$$

(i), (ii)에 의하여 모든 a_1 의 값의 합은

$$16 + \frac{16}{5} = \frac{96}{5}$$

22. [출제의도] 지수방정식 계산하기

방정식 $(\sqrt{3})^{x-2} = 27$ 에서

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} = 3^3, 3^{\frac{x}{2}-1} = 3^3$$

$$\frac{x}{2} - 1 = 3 \text{에서 } x = 8$$

23. [출제의도] 호도법 이해하기

$$\frac{1}{2} \times 8 \times a\pi = 28\pi \text{에서 } a = 7$$

24. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$f(x)$ 가 다행함수이고 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-2x^3}{x^2} = 3$ 이므로

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3 \text{이고 } \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

그러므로 $b = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 3x^2 + ax}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 + 3x + a) \\ = a = 3$$

그러므로 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 3x$

따라서 $f(2) = 34$

25. [출제의도] 로그의 정의 이해하기

$\log_{|a|}(-a^2 - 4a + 21)$ 의 밑이 $|a|$ 이므로

$|a| > 0$ 이고 $|a| \neq 1 \dots \textcircled{i}$

$\log_{|a|}(-a^2 - 4a + 21)$ 의 전수가 $-a^2 - 4a + 21$ 이므로

$$-a^2 - 4a + 21 > 0$$

$$a^2 + 4a - 21 = (a+7)(a-3) < 0 \dots \textcircled{j}$$

$\textcircled{i}, \textcircled{j}$ 을 동시에 만족시키는 정수 a 는

$$-6, -5, -4, -3, -2, 2$$

따라서 구하는 정수 a 의 개수는 6

26. [출제의도] 수열의 합을 활용하여 문제해결하기

$n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n-1} (\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}})$$

$$= (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}) + (\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}) + \dots \\ + (\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{a_n})$$

$$= \sqrt{a_1} - \sqrt{a_n} = \frac{n-1}{n}$$

$$a_1 = 1 \text{이므로 } n \geq 2 \text{일 때 } \sqrt{a_n} = 1 - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$

그러므로 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = \frac{1}{n^2}$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385$$

27. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$$\frac{2t}{x} = -\frac{1}{t}x + 3 \text{에서 } 2t^2 = -x^2 + 3tx$$

$$x^2 - 3tx + 2t^2 = 0, (x-t)(x-2t) = 0$$

그러므로 두 점 A, B의 좌표는 A(t, 2), B(2t, 1)

$$\overline{OA} = \sqrt{t^2 + 4}, \overline{OB} = \sqrt{4t^2 + 1}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{\overline{OB} - \overline{OA}}{t-1}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{4t^2 + 1} - \sqrt{t^2 + 4}}{t-1}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{4t^2 + 1} - \sqrt{t^2 + 4})(\sqrt{4t^2 + 1} + \sqrt{t^2 + 4})}{(t-1)(\sqrt{4t^2 + 1} + \sqrt{t^2 + 4})}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{3(t^2 - 1)}{(t-1)(\sqrt{4t^2 + 1} + \sqrt{t^2 + 4})}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{3(t+1)}{\sqrt{4t^2 + 1} + \sqrt{t^2 + 4}} = \frac{3}{5}\sqrt{5}$$

$$\text{따라서 } 30 \times k^2 = 30 \times \left(\frac{3}{5}\sqrt{5}\right)^2 = 54$$

28. [출제의도] 등차수열을 이용하여 추론하기

$$a_k + a_{k+1} + a_{k+2} = 3a_{k+1} = 21 \text{에서 } a_{k+1} = 7$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d (d 는 자연수)라 하자.

$$a_1 = a_{k+1} - dk = 7 - dk,$$

$$a_{k+4} = a_{k+1} + 3d = 7 + 3d \text{이므로}$$

$$S_{k+4} = \frac{(k+4)(a_1 + a_{k+4})}{2} \\ = \frac{(k+4)\{14 + (3-k)d\}}{2} = 11$$

$$\text{에서 } (k+4)\{14 + (3-k)d\} = 22$$

$k+4$ 는 4보다 큰 자연수이므로

$$k+4 = 11 \text{ 또는 } k+4 = 22$$

즉, $k = 7$ 또는 $k = 18$

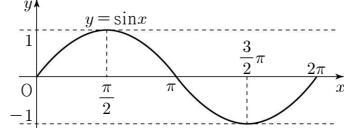
$k = 7$ 일 때, $14 + (3-7)d = 2$ 에서 $d = 3$

$$k = 18 \text{일 때, } 14 + (3-18)d = 1 \text{에서 } d = \frac{13}{15}$$

d 는 자연수이므로 $d = 3, k = 7$

$$\text{따라서 } a_{k+6} = a_{k+1} + 5d = 7 + 5 \times 3 = 22$$

29. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 추론하기



$$\frac{1}{4}k = -\frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{4}k \text{에서 } k(k-2) = 0$$

$$k = 0 \text{ 또는 } k = 2$$

(i) $k = 0$ 또는 $k = 2$ 일 때

$$\text{방정식 } \left(\sin x - \frac{1}{4}k\right)\left(\sin x + \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{4}k\right) = 0 \text{의}$$

서로 다른 해의 개수는 방정식 $\sin x = \frac{1}{4}k$ 의

서로 다른 해의 개수와 같다.

방정식 $\sin x = \frac{1}{4}k$ 의 서로 다른 해의 개수는

$k = 0$ 일 때 3이고 $k = 2$ 일 때 2이다.

그러므로

$$\text{방정식 } \left(\sin x - \frac{1}{4}k\right)\left(\sin x + \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{4}k\right) = 0 \text{ 의 서로 다른 해의 개수가 2가 되도록 하는 } k \text{의 값은 } 2 \text{ 이다.}$$

(ii) $k \neq 0$ 이고 $k \neq 2$ 일 때

$$\text{방정식 } \left(\sin x - \frac{1}{4}k\right)\left(\sin x + \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{4}k\right) = 0 \text{ 의 서로 다른 해의 개수는}$$

방정식 $\sin x = \frac{1}{4}k$ 의 서로 다른 해의 개수와

방정식 $\sin x = -\frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{4}k$ 의 서로 다른 해의 개수의 합과 같다.

(a) 방정식 $\sin x = \frac{1}{4}k$ 의 서로 다른 해의 개수가

0일 때

$$|k| > 4 \text{ 이고},$$

$|k| > 4$ 일 때 방정식 $\sin x = -\frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{4}k$ 의

서로 다른 해의 개수는 0이다.

그러므로

$$\text{방정식 } \left(\sin x - \frac{1}{4}k\right)\left(\sin x + \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{4}k\right) = 0 \text{ 의 서로 다른 해의 개수는 } 0 \text{ 이다.}$$

(b) 방정식 $\sin x = \frac{1}{4}k$ 의 서로 다른 해의 개수가

1일 때

$$|k| = 4 \text{ 이므로 } k = 4 \text{ 또는 } k = -4$$

방정식 $\sin x = -\frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{4}k$ 의 서로 다른 해의 개수는

$k = 4$ 일 때 1이고 $k = -4$ 일 때 0이므로

$$\text{방정식 } \left(\sin x - \frac{1}{4}k\right)\left(\sin x + \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{4}k\right) = 0 \text{ 의 서로 다른 해의 개수가 2가 되도록 하는 } k \text{의 값은 } 4 \text{ 이다.}$$

(c) 방정식 $\sin x = \frac{1}{4}k$ 의 서로 다른 해의 개수가

2일 때

$$|k| < 4 \dots \textcircled{1}$$

방정식 $\left(\sin x - \frac{1}{4}k\right)\left(\sin x + \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{4}k\right) = 0$ 의 서로 다른 해의 개수가 2가 되기 위해서는

방정식 $\sin x = -\frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{4}k$ 의 서로 다른 해의 개수가 0이어야 하므로 $k < -1, k > 4 \dots \textcircled{2}$

\textcircled{1}, \textcircled{2} 을 동시에 만족시키는 정수 k 는 $-3, -2$

(i), (ii)에 의하여 구하는 정수 k 는

$-3, -2, 2, 4$ 이므로 모든 정수 k 의 값은 $-3 \times (-2) \times 2 \times 4 = 48$

30. [출제의도] 함수의 연속을 이용하여 추론하기

$$y = \frac{bx}{x+a} = -\frac{ab}{x+a} + b \text{ 이므로}$$

함수 $y = \frac{bx}{x+a}$ 의 그래프의 점근선은

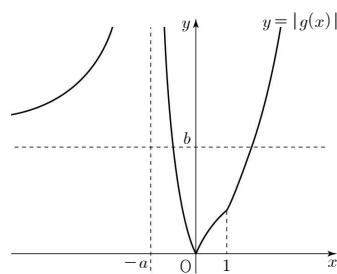
$$x = -a, y = b$$

함수 $g(x)$ 는 $x = 1$ 에서 연속이므로

$$g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{bx}{x+a} = \frac{b}{1+a} < b$$

이차함수 $f(x)$ 의 꼭짓점의 x 좌표를 k 라 하자.

$k \leq 1$ 일 때, 함수 $y = |g(x)|$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$0 < t \leq b$ 인 t 에 대하여 $h(t) = 2$ 이고

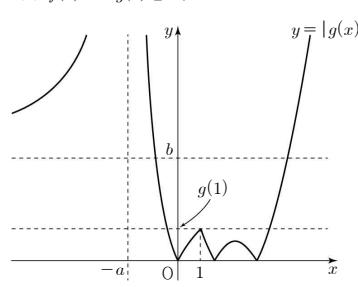
$t > b$ 인 t 에 대하여 $h(t) = 3$ 이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $k > 1$

(i) $f(k) > -b$ 일 때

(a) $f(k) \geq -g(1)$ 일 때



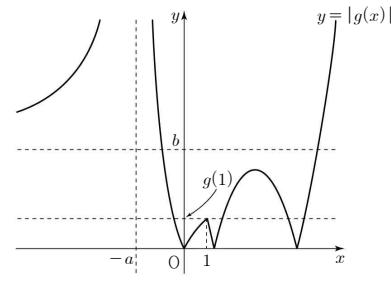
$|f(k)| \leq g(1)$ 이므로

$g(1) < t \leq b$ 인 t 에 대하여 $h(t) = 2$ 이고

$t > b$ 인 t 에 대하여 $h(t) = 3$ 이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(b) $-b < f(k) < -g(1)$ 일 때



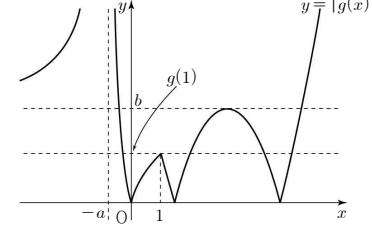
$g(1) < -f(k) < b$ 이므로

$-f(k) < t \leq b$ 인 t 에 대하여 $h(t) = 2$ 이고

$t > b$ 인 t 에 대하여 $h(t) = 3$ 이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $f(k) = -b$ 일 때



$t < 0$ 일 때, $h(t) = 0$

$t = 0$ 일 때, $h(0) = 3$

$0 < t < g(1)$ 일 때, $h(t) = 6$

$t = g(1)$ 일 때, $h(g(1)) = 5$

$g(1) < t < b$ 일 때, $h(t) = 4$

$t \geq b$ 일 때, $h(t) = 3$

그러므로

$$h(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 3 & (t = 0, t \geq b) \\ 4 & (g(1) < t < b) \\ 5 & (t = g(1)) \\ 6 & (0 < t < g(1)) \end{cases}$$

이며 함수 $h(t)$ 는 조건 (가)를 만족시킨다.

함수 $h(t)$ 가 $t = 0, t = g(1), t = b$ 에서만

불연속이므로 조건 (나)에 의하여

$$\alpha = g(1), \beta = b$$

$$g(1) = \alpha = h(0) = 3 \text{ 이므로 } g(1) = \frac{b}{1+a} = 3$$

$$h(\alpha) = h(g(1)) = 5 \text{ 이고}$$

$$h(\alpha) = \beta - 1 = b - 1 \text{ 이므로 } b = 6, a = 1$$

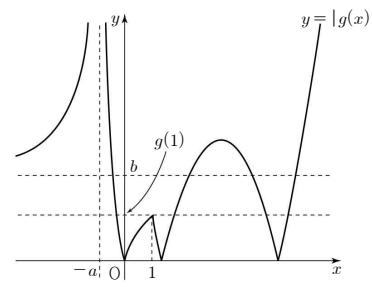
$$f(k) = -6 \text{ 이므로 } f(x) = (x - k)^2 - 6$$

$$f(1) = g(1) = 3 \text{ 이므로}$$

$$(1 - k)^2 - 6 = 3 \text{에서 } k = 4$$

$$\text{그러므로 } f(x) = (x - 4)^2 - 6$$

(iii) $f(k) < -b$ 일 때



$-f(k) > b$ 이므로

$g(1) < t \leq b$ 인 t 에 대하여 $h(t) = 4$ 이고

$b < t < -f(k)$ 인 t 에 대하여 $h(t) = 5$ 이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$f(a - b) = f(1 - 6) = (-5 - 4)^2 - 6 = 75$$