2022학년도 대학수학능력시험

수학영역 정답 및 풀이

*최근 수정일 : 22.03.07

■ [공통: 수학 I ·수학 II]

01.②	02.⑤	03.⑤	04.④	05.①
06.③	07.①	08.①	09.④	10.⑤
11.③	12.③	13.②	14.③	15.②
16. 3	17. 4	18. 12	19. 6	
20. 110	21. 678	22. 9		

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\left(2^{\sqrt{3}}\times 4\right)^{\sqrt{3}-2}$

$=\left(2^{\sqrt{3}}\times 2^2\right)^{\sqrt{3}-2}$

$=\left(2^{\sqrt{3}+2}\right)^{\sqrt{3}-2}$

$=2^{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}$

$=2^{3-4}$

$=2^{-1}$

$=\dfrac{1}{2}$

정답 ②

2. **출제의도** : 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=3x^2+6x+1$

이므로

$f'(1)=3+6+1=10$

정답 ⑤

3. **출제의도** : 등차수열의 일반항을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_2=a_1+d=6$ …… ㉠

$a_4+a_6=36$에서

$(a_1+3d)+(a_1+5d)=36$

$2a_1+8d=36$

$a_1+4d=18$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a_1=2,\ d=4$

따라서

$a_{10}=2+9\times 4=38$

정답 ⑤

4. **출제의도** : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x\to -1-$일 때, $f(x)\to 3$이므로

$\lim\limits_{x\to -1-} f(x)=3$

또, $x\to 2$일 때, $f(x)\to 1$이므로

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$

따라서,

$\lim\limits_{x\to -1-} f(x)+\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3+1=4$

정답 ④

5. **출제의도** : 귀납적으로 정의된 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_1=1$이므로 $a_2=2$

$a_2=2$이므로 $a_3=4$

$a_3=4$이므로 $a_4=8$

$a_4=8$이므로 $a_5=1$

$a_5=1$이므로 $a_6=2$

$a_6=2$이므로 $a_7=4$

$a_7=4$이므로 $a_8=8$

따라서

$$\sum_{k=1}^{8} a_k = 2\times(1+2+4+8)$$
$$=2\times15$$
$$=30$$

정답 ①

6. **출제의도** : 미분을 활용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

방정식 $2x^3-3x^2-12x+k=0$, 즉

$2x^3-3x^2-12x=-k$ …… ㉠

에서

$f(x)=2x^3-3x^2-12x$라 하자.

$f'(x)=6x^2-6x-12$

$=6(x+1)(x-2)$

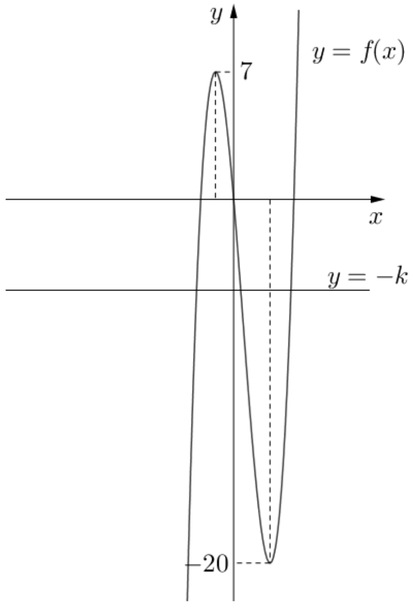
$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	7	$\searrow$	-20	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 7을 갖고, $x=2$에서 극솟값 -20을 갖는다.



방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$-20<-k<7$

즉, $-7<k<20$ 이다.

따라서 정수 k의 값은

$-6,\ -5,\ -4,\ \cdots,\ 19$

이고, 그 개수는 26이다.

정답 ③

7. **출제의도** : 삼각함수의 정의와 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\tan\theta-\dfrac{6}{\tan\theta}=1$이므로

양변에 $\tan\theta$를 곱하면

$\tan^2\theta-6=\tan\theta$

$\tan^2\theta-\tan\theta-6=0$

$(\tan\theta+2)(\tan\theta-3)=0$

$\tan\theta=-2$ 또는 $\tan\theta=3$

이때, $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$이므로

$\tan\theta = 3$

이때,

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 3$,

$\sin\theta = 3\cos\theta$

이므로

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$에 대입하면

$9\cos^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$10\cos^2\theta = 1$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ 또는 $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

이때, $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$이므로

$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ $\cdots\cdots$ ㉠

이 값을 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$에 대입하면

$\sin^2\theta + \frac{1}{10} = 1$

$\sin^2\theta = \frac{9}{10}$

$\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ 또는 $\sin\theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$

이때, $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$이므로

$\sin\theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ $\cdots\cdots$ ㉡

따라서, ㉠과 ㉡에서

$$\begin{aligned}\sin\theta + \cos\theta &= \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\\ &= -\frac{4}{\sqrt{10}}\\ &= -\frac{2\sqrt{10}}{5}\end{aligned}$$

정답 ①

8. **출제의도** : 정적분을 이용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

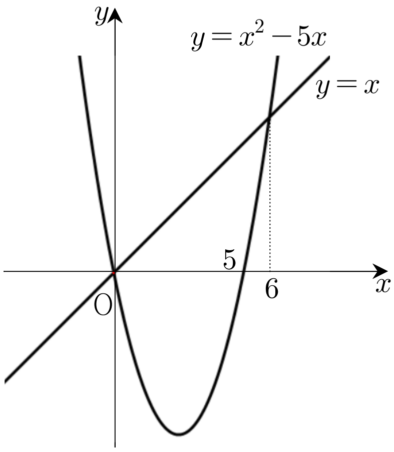
정답풀이 :

$x^2 - 5x = x$에서

$x(x-6) = 0$

$x = 0$ 또는 $x = 6$

곡선 $y = x^2 - 5x$와 직선 $y = x$가 만나는 점은 원점과 $(6, 6)$이다.



곡선 $y = x^2 - 5x$와 직선 $y = x$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^6 \{x - (x^2 - 5x)\}\,dx$$

$$= \int_0^6 (6x - x^2)\,dx$$

$$= \left[3x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^6$$

$$= 36$$

따라서 직선 $x = k$가 넓이를 이등분하므로

$$18 = \int_0^k \{x - (x^2 - 5x)\}\,dx$$

$$= \int_0^k (6x - x^2)\,dx$$

$$= \left[3x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^k$$

$=3k^2-\frac{1}{3}k^3$

정리하면

$k^3-9k^2+54=0$

$(k-3)(k^2-6k-18)=0$

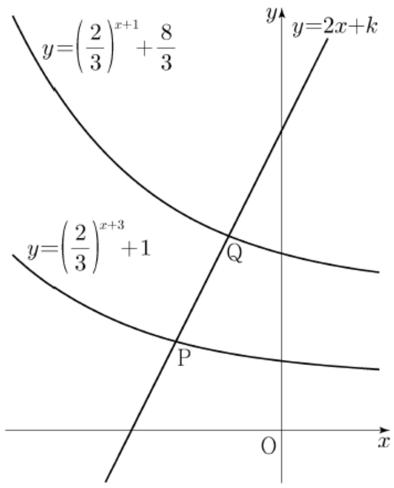
즉, $0<k<6$이므로

$k=3$

정답 ①

9. **출제의도** : 지수방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



두 점 P, Q의 x좌표를 각각 p, $q(p<q)$라 하면

두 점 P, Q는 직선 $y=2x+k$ 위의 점이므로

$\mathrm{P}(p,\ 2p+k)$, $\mathrm{Q}(q,\ 2q+k)$

로 놓을 수 있다.

이때, $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$, 즉 $\overline{\mathrm{PQ}}^2=5$이므로

$(q-p)^2+(2q-2p)^2=5$

$(q-p)^2=1$

$q-p>0$이므로

$q-p=1$

즉, $q=p+1$이다.

한편, 점 P는 함수 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1$의 그래프 위의 점이므로

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+1=2p+k$ …… ㉠

점 Q는 함수 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$의 그래프 위의 점이므로

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}+\frac{8}{3}=2p+k+2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}+\frac{8}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+3$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}=1$

$p+2=0$, 즉 $p=-2$

$p=-2$를 ㉠에 대입하면

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2+3}+1=2\times(-2)+k$

따라서 $k=\frac{17}{3}$

정답 ④

10. **출제의도** : 다항함수의 도함수와 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 $(0,0)$이 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$f(0)=0$ …… ㉠

이때, 점 $(0,0)$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(0)(x-0)+0$

$y=f'(0)x$ …… ㉡

또, 곡선 $y=xf(x)$ 위에 점 $(1,2)$가 있으므로

$1\times f(1)=2$

$f(1)=2$ …… ㉢

$y=xf(x)$에서

$y'=f(x)+xf'(x)$이므로

$(1,2)$에서의 접선의 방정식은

$y=\{f(1)+f'(1)\}(x-1)+2$

$=\{f'(1)+2\}(x-1)+2$

$=\{f'(1)+2\}x-f'(1)$ …… ㉣

이때, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 하면

㉠에서

$d=0$

이때, $f(x)=ax^3+bx^2+cx$이므로

㉢에서

$a+b+c=2$ …… ㉤

㉡과 ㉣에서

두 접선이 일치해야 하므로

$f'(0)=f'(1)+2,\ f'(1)=0$

따라서 $f'(0)=2,\ f'(1)=0$

이때, $f'(x)=3ax^2+2bx+c$이므로

$f'(0)=2$에서

$c=2$

이때, $f'(x)=3ax^2+2bx+2$이므로

$f'(1)=0$에서

$3a+2b+2=0$

㉤에서 $c=2$를 대입하면

$a+b=0$이므로

$b=-a$를 위 식에 대입하여 a,b를 구하면 $a=-2,\ b=2$이므로

$f(x)=-2x^3+2x^2+2x,$

$f'(x)=-6x^2+4x+2$

따라서

$f'(2)=-14$

정답 ⑤

11. **출제의도** : 삼각함수의 그래프의 성질을 이용하여 조건을 만족하는 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\dfrac{\pi}{\frac{\pi}{a}}=a$이므로

함수 $f(x)$의 주기는 a이다.

직선 AB는 원점을 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선이므로

양수 t에 대하여

$\mathrm{B}(t,\ \sqrt{3}t)$로 놓으면

$\mathrm{A}(-t,\ -\sqrt{3}t)$이고,

$\overline{\mathrm{AB}}=4t$이다.

이때, 함수 $f(x)$의 주기가 a이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=4t=a$이고,

$\mathrm{C}(-t+a,\ -\sqrt{3}t)$, 즉 $\mathrm{C}(3t,\ -\sqrt{3}t)$이다.

점 C가 곡선 $y=\tan\dfrac{\pi x}{a}=\tan\dfrac{\pi x}{4t}$ 위의 점이므로

$-\sqrt{3}t=\tan\dfrac{\pi\times 3t}{4t}$

$-\sqrt{3}t=\tan\dfrac{3\pi}{4}$에서

$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4t)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

정답 ③

12. **출제의도** : 함수의 연속의 성질을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$에서

$\{f(x)-1\}\{f(x)+x\}\{f(x)-x\}=0$

이므로

$f(x)=1$ 또는 $f(x)=-x$ 또는 $f(x)=x$

이때, $f(0)=1$ 또는 $f(0)=0$이다.

(i) $f(0)=1$일 때,

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고, 최댓값이 1이므로

$f(x)=1$

이다. 이때, 함수 $f(x)$의 최솟값이 0이 아니므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $f(0)=0$일 때,

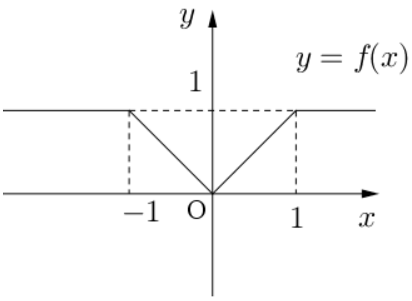
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고, 최댓값이 1이므로

$$f(x)=\begin{cases} |x| & (|x|\le 1) \\ 1 & (|x|>1) \end{cases}$$

이다.

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases} |x| & (|x|\le 1) \\ 1 & (|x|>1) \end{cases}$$



따라서

$$f\left(-\frac{4}{3}\right)=1,\ f(0)=0,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

이므로

$$f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)=1+0+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

정답 ③

13. **출제의도** : 로그의 정의와 성질을 활용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 $(a, \log_2 a)$, $(b, \log_2 b)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}(x-a)+\log_2 a$$

그러므로 이 직선의 y절편은

$$-\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}+\log_2 a \quad \cdots\cdots ㉠$$

두 점 $(a, \log_4 a)$, $(b, \log_4 b)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{\log_4 b-\log_4 a}{b-a}(x-a)+\log_4 a$$

그러므로 이 직선의 y절편은

$$-\frac{a(\log_4 b-\log_4 a)}{b-a}+\log_4 a$$

$$=-\frac{1}{2}\times\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}+\frac{1}{2}\log_2 a$$

$\cdots\cdots$ ㉡

㉠과 ㉡이 같으므로

$$-\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}+\log_2 a$$

$$=-\frac{1}{2}\times\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}+\frac{1}{2}\log_2 a$$

이 식을 정리하면

$$\frac{1}{2}\times\log_2 a=\frac{1}{2}\times\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}$$

$$\log_2 a=\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}$$

$$(b-a)\log_2 a=a\log_2\frac{b}{a}$$

$$\log_2 a^{b-a}=\log_2\left(\frac{b}{a}\right)^a$$

$$a^{b-a}=\frac{b^a}{a^a}$$

$$a^b=b^a \quad \cdots\cdots ㉢$$

한편, $f(x)=a^{bx}+b^{ax}$이고

$f(1)=40$이므로

$a^b + b^a = 40$

㉢을 대입하면

$a^b + a^b = 40$

$a^b = 20$

따라서 $b^a = 20$이므로

$$\begin{aligned} f(2) &= a^{2b} + b^{2a} \\ &= (a^b)^2 + (b^a)^2 \\ &= 20^2 + 20^2 \\ &= 800 \end{aligned}$$

정답 ②

14\. **출제의도** : 수직선 위를 움직이는 점의 운동에 대하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

$x(0)=0,\ x(1)=0$이므로

점 P의 위치는 $t=0$일 때 수직선의 원점이고, $t=1$일 때도 수직선의 원점이다.

또, $\int_0^1 |v(t)|\,dt = 2$이므로

점 P가 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리가 2이다.

ㄱ. 점 P의 $t=0$에서 $t=1$까지 위치의 변화량이 0이므로
$\int_0^1 v(t)\,dt = 0$ (참)

ㄴ. $|x(t_1)| > 1$이면
점 P와 원점 사이의 거리가 1보다 큰 시각 t_1이 존재하므로
점 P가 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리가 2 보다 크다. (거짓)

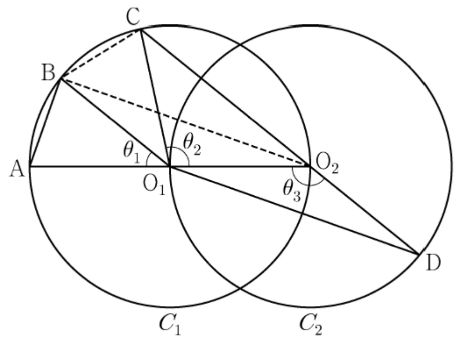
ㄷ. $0 \le t \le 1$인 모든 시각 t에서 점 P와 원점 사이의 거리가 1 보다 작고, 점 P가 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리가 2이므로
점 P는 $0 < t < 1$에서 적어도 한 번 원점을 지나간다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답 ③

15\. **출제의도** : 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이의 비를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



$\angle CO_2O_1 + \angle O_1O_2D = \pi$이므로

$\theta_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta_2}{2}$이고

$\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$에서 $2\theta_1 + \theta_2 = \pi$이므로

$\angle CO_1B = \theta_1$이다.

이때, $\angle O_2O_1B = \theta_1 + \theta_2 = \theta_3$이므로

삼각형 O_1O_2B와 삼각형 O_2O_1D는 합동이다.

$\overline{AB} = k$라 할 때,

$\overline{BO_2} = \overline{O_1D} = 2\sqrt{2}k$이므로

$\overline{AO_2} = \sqrt{k^2 + (2\sqrt{2}k)^2} = \boxed{3k}$이고,

$\angle BO_2A = \frac{\theta_1}{2}$이므로

$\cos\frac{\theta_1}{2} = \frac{2\sqrt{2}k}{3k} = \boxed{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$이다.

삼각형 O_2BC에서

$\overline{BC}=k$, $\overline{BO_2}=2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B=\frac{\theta_1}{2}$이므로

삼각형 BO_2C에서

$\overline{O_2C}=x(0<x<3k)$라 하면

코사인법칙에 의하여

$$k^2=x^2+(2\sqrt{2}k)^2-2\times x\times 2\sqrt{2}k\times\cos\frac{\theta_1}{2}$$

$$k^2=x^2+(2\sqrt{2}k)^2-2\times x\times 2\sqrt{2}k\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$3x^2-16kx+21k^2=0$

$(3x-7k)(x-3k)=0$

$0<x<3k$이므로

$$x=\frac{7}{3}k$$

즉, $\overline{O_2C}=\boxed{\frac{7}{3}k}$이다.

$\overline{CD}=\overline{O_2D}+\overline{O_2C}=\overline{O_1O_2}+\overline{O_2C}$이므로

$\overline{AB}:\overline{CD}=k:\left(\frac{\boxed{3k}}{2}+\boxed{\frac{7}{3}k}\right)$이다.

이상에서

$$f(k)=3k,\ g(k)=\frac{7}{3}k,\ p=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이므로

$f(p)\times g(p)$

$$=\left(3\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\times\left(\frac{7}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$=\frac{56}{9}$$

정답 ②

16. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\log_2 120-\frac{1}{\log_{15}2}$$

$=\log_2 120-\log_2 15$

$$=\log_2\frac{120}{15}$$

$=\log_2 8$

$=\log_2 2^3$

$=3$

정답 3

17. 출제의도 : 도함수가 주어진 함수의 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x)=\int f'(x)dx$$

$$=\int(3x^2+2x)dx$$

$=x^3+x^2+C$ (단, C는 적분상수)

이때, $f(0)=2$이므로 $C=2$

따라서

$f(x)=x^3+x^2+2$이므로

$f(1)=1+1+2=4$

정답 4

18. 출제의도 : 합의 기호 $\sum$의 성질을 이용하여 수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{7}\frac{a_k}{2}=56 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\sum_{k=1}^{10}2a_k-\sum_{k=1}^{8}a_k=100$에서

$$\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{8}\frac{a_k}{2}=50 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠ − ㉡을 하면

$$\frac{a_8}{2}=6$$

따라서 $a_8=12$

정답 12

19. **출제의도** : 미분을 이용하여 함수의 그래프의 개형을 알 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3+ax^2-(a^2-8a)x+3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-(a^2-8a)$

이때, 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면

$f'(x)\ge 0$

이때, 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $D/4\le 0$이어야 하므로

$D/4=a^2-3(-a^2+8a)$

$\quad =4a^2-24a$

$\quad =4a(a-6)\le 0$

그러므로

$0\le a\le 6$

따라서, a의 최댓값은 6이다.

정답 6

20. **출제의도** : 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$에 대하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x+1)-xf(x)=ax+b$에

$x=0$을 대입하면

$f(1)=b$

닫힌구간 $[0,1]$에서 $f(x)=x$이므로

$b=1$

또, $f(x+1)-xf(x)=ax+1$이므로

$0\le x\le 1$에서

$f(x+1)=xf(x)+ax+1$

$\quad =x^2+ax+1$

$x+1=t$로 치환하면

$f(t)=(t-1)^2+a(t-1)+1$

$\quad =t^2+(a-2)t+2-a$ …… ㉠

$f'(t)=2t+(a-2)$이고,

닫힌구간 $[0,1]$에서 $f(x)=x$이고, 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이므로 $f'(1)=1$이므로

$a=1$

따라서 ㉠에서 $1\le x\le 2$일 때

$f(x)=x^2-x+1$ 이다.

$$\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2 (x^2-x+1)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_1^2$$

$$=\frac{8}{3}-\frac{5}{6}=\frac{11}{6}$$

즉, $60\times\int_1^2 f(x)\,dx=60\times\frac{11}{6}$

$\quad =110$

정답 110

21. **출제의도** : 등비수열의 합을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가), (나)에서

수열 $\{|a_n|\}$은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이므로

$|a_n|=2^n$

한편,

$$\sum_{k=1}^{9}|a_k|=\sum_{k=1}^{9}2^k=\frac{2(2^9-1)}{2-1}=2^{10}-2,$$

$|a_{10}|=2^{10}$

조건 (다)에서

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=-14$$

를 만족하기 위해서는

$a_1 = -2,\ a_2 = -4$

$$\sum_{k=3}^{9} a_k = \sum_{k=3}^{9} 2^k = \frac{2^3(2^7-1)}{2-1} = 2^{10}-8,$$

$a_{10} = -1024$

이어야 한다.

따라서

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$

$= (-2) + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^9$

$= 678$

정답 678

22. 출제의도 :

함수의 극한을 이용하여 도함수 $f'(x)$의 특징을 찾아 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구할 수 있는가?

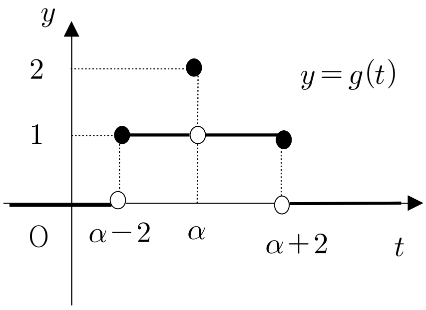
정답풀이 :

이차방정식 $f'(x)=0$이 실근을 갖지 않거나 중근을 갖는 경우에는 조건(나)에서 함수 $g(t)$가 함숫값 1과 2를 모두 갖는다는 조건에 모순이다.

그러므로 이차방정식 $f'(x)=0$는 서로 다른 두 실근 α, $\beta(\alpha<\beta)$를 갖는다.

(i) $\beta=\alpha+2$일 때,

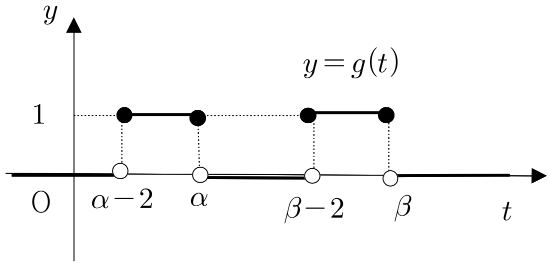
함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



이는 조건 (가)를 만족한다.

(ii) $\beta>\alpha+2$일 때,

함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.

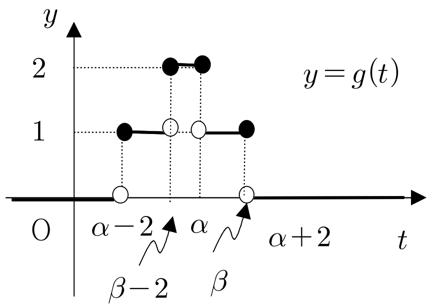


이는 조건 (나)에서

$g(t)$가 함숫값 2를 갖는 것에 모순이다.

(iii) $\beta<\alpha+2$일 때,

함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



이때, $\beta-2 \le a \le \alpha$인 a에 대하여 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

따라서 위에서 조건을 만족시키는 것은 (i)의 경우이다.

한편, 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이므로 함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수는 $\frac{3}{2}$이다.

그러므로

$$f'(x) = \frac{3}{2}(x-\alpha)\{x-(\alpha+2)\}$$

$$= \frac{3}{2}\{x^2-(2\alpha+2)x+\alpha^2+2\alpha\}$$

로 놓을 수 있다.

이때,

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}(\alpha+1)x^2+\frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha)x+C$$

(단, C는 적분상수) …… ㉠

한편, 조건 (나)에서

$g(f(1))=g(f(4))=2$

이고 $g(t)$의 함숫값이 2인 t의 값의 개수는 1이므로

$f(1)=f(4)$

㉠에서

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(\alpha+1)+\frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha)+C$$

$$=32-24(\alpha+1)+6(\alpha^2+2\alpha)+C$$

따라서

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(\alpha+1)+\frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha)$$

$$=32-24(\alpha+1)+6(\alpha^2+2\alpha)$$

양변에 2를 곱하면

$$1-3(\alpha+1)+3(\alpha^2+2\alpha)$$

$$=64-48(\alpha+1)+12(\alpha^2+2\alpha)$$

이 식을 정리하면

$3\alpha^2+3\alpha-2=12\alpha^2-24\alpha+16$

$9\alpha^2-27\alpha+18=0$

$\alpha^2-3\alpha+2=0$

$(\alpha-1)(\alpha-2)=0$

$\alpha=1$ 또는 $\alpha=2$

((ⅰ)-①) $\alpha=1$일 때,

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x+C$$

이때, $f(1)=\alpha$에서

$f(1)=1$이어야 하므로

$$\frac{1}{2}-3+\frac{9}{2}+C=1$$

$2+C=1$

$C=-1$

이때, $f(0)=-1$이므로

$g(f(0))=g(-1)=1$

그러므로 조건을 만족시킨다.

((ⅰ)-②) $\alpha=2$일 때,

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+12x+C$$

이때, $f(1)=\alpha$에서

$f(1)=2$이어야 하므로

$$\frac{1}{2}-\frac{9}{2}+12+C=2$$

$8+C=2$

$C=-6$

이때, $f(0)=-6$이므로

$g(f(0))=g(-6)=0$

그러므로 조건을 만족시키지 못한다.

따라서, ((ⅰ)-①)에서

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x-1$$

이므로

$$f(5)=\frac{1}{2}\times5^3-3\times25+\frac{9}{2}\times5-1$$

$$=\frac{125}{2}-75+\frac{45}{2}-1$$

$$=9$$

정답 9

[선택: 기하]
23. ② 24. ③ 25. ⑤ 26. ② 27. ④
28. ⑤ 29. 100 30. 23

23. **출제의도** : 좌표공간의 점의 대칭이동을 이해하고 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

좌표공간의 점 $A(2, 1, 3)$을 xy평면에 대하여 대칭이동시킨 점 P의 좌표는

$P(2, 1, -3)$

점 A를 yz평면에 대하여 대칭이동시킨 점 Q의 좌표는

$Q(-2, 1, 3)$

따라서 구하는 선분 PQ의 길이는

$$\overline{PQ}=\sqrt{(2+2)^2+(1-1)^2+(-3-3)^2}$$
$$=\sqrt{52}$$
$$=2\sqrt{13}$$

정답 ②

24. **출제의도** : 초점의 좌표가 주어진 쌍곡선의 방정식을 이해하여 쌍곡선의 주축의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{6}=1$의 한 초점의 좌표가 $(3\sqrt{2}, 0)$이므로

$a^2+6=18$

$a^2=12$

$a>0$이므로

$a=2\sqrt{3}$

따라서 구하는 쌍곡선의 주축의 길이는

$2a=2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

정답 ③

25. **출제의도** : 좌표평면의 두 직선의 방향벡터를 이해하고 이를 이용하여 두 직선이 이루는 예각의 크기에 대한 코사인 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 직선

$\dfrac{x+1}{2}=y-3$, $x-2=\dfrac{y-5}{3}$

의 방향벡터를 각각

$\overrightarrow{u_1}=(2, 1)$, $\overrightarrow{u_2}=(1, 3)$

이라 하면

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|}$$
$$=\frac{|2\times1+1\times3|}{\sqrt{2^2+1^2}\times\sqrt{1^2+3^2}}$$
$$=\frac{5}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

정답 ⑤

26. **출제의도** : 타원의 정의를 이해하여 조건을 만족시키는 원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

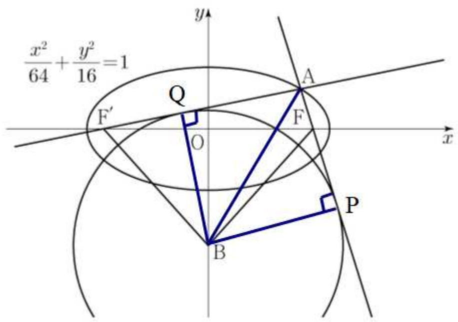
정답풀이 :

$\overline{AF}=p$, $\overline{AF'}=q$라 하면 타원의 정의에 의하여

$p+q=2\times8=16$

원 C가 두 직선 AF, AF′과 접하는 두 점을 각각 P, Q, 원 C의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{BP}=\overline{BQ}=r$



사각형 AFBF′의 넓이를 삼각형 ABF와 삼각형 ABF′으로 나누어 생각하면

$$\frac{1}{2}\times p\times r+\frac{1}{2}\times q\times r=72$$

따라서

$$r=72\times\frac{2}{p+q}$$

$$=72\times\frac{2}{16}$$

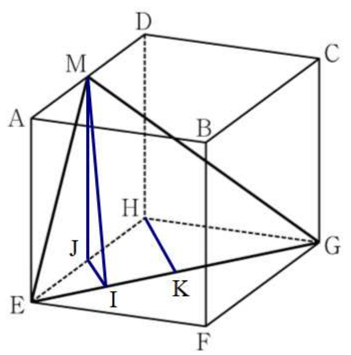
$$=9$$

정답 ②

27. 출제의도 : 삼수선의 정리를 이용하여 주어진 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

그림과 같이 점 M에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 I, 선분 EH에 내린 수선의 발을 J라 하자.



삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{JI}}\perp\overline{\mathrm{EG}}$$

이므로 점 H에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 K라 하면 점 K는 선분 EG의 중점이고

$$\overline{\mathrm{IJ}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{HK}}$$

$$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}$$

$$=\sqrt{2}$$

한편, 직각삼각형 MJI에서

$$\overline{\mathrm{MJ}}=4$$

이므로

$$\overline{\mathrm{MI}}=\sqrt{\overline{\mathrm{MJ}}^2+\overline{\mathrm{IJ}}^2}$$

$$=\sqrt{16+2}$$

$$=3\sqrt{2}$$

따라서 구하는 삼각형 MEG의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{EG}}\times\overline{\mathrm{MI}}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times3\sqrt{2}$$

$$=12$$

정답 ④

28. 출제의도 : 포물선의 정의와 방정식을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

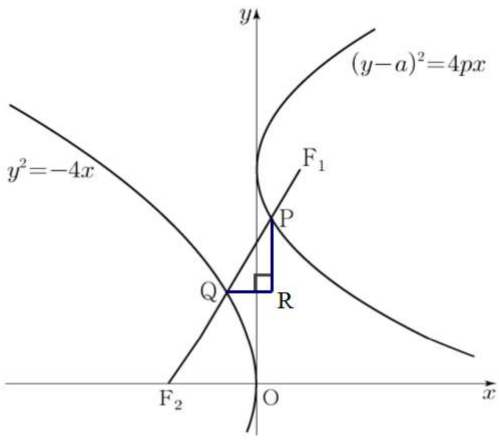
두 점 F_1, F_2의 좌표가 각각

$\mathrm{F}_1(p,\ a)$, $\mathrm{F}_2(-1,\ 0)$

이고, $\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2}=3$이므로

$$(p+1)^2+a^2=9 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

그림과 같이 점 P를 지나고 x축에 수직인 직선과 점 Q를 지나고 y축에 수직인 직선이 만나는 점을 R라 하자.



직선 PQ의 기울기는 직선 F_1F_2의 기울기와 같은 $\dfrac{a}{p+1}$이므로 직각삼각형 PQR에서 양수 t에 대하여

$\overline{PR}=at$, $\overline{QR}=(p+1)t$

로 놓을 수 있다.

이때 $\overline{PQ}=1$이므로

$a^2t^2+(p+1)^2t^2=1$

에서

$$t^2=\frac{1}{a^2+(p+1)^2}=\frac{1}{9}$$

즉, $t=\dfrac{1}{3}$

한편, 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하면

$\overline{PF_1}=p+x_1$,

$\overline{QF_2}=1-x_2$,

$\overline{PF_1}+\overline{QF_2}=2$

이고

$$x_1-x_2=(p+1)t=\frac{1}{3}(p+1)$$

이므로

$(p+x_1)+(1-x_2)=2$

에서

$p=1-(x_1-x_2)$

$$=1-\frac{1}{3}(p+1)$$

즉, $p=\dfrac{1}{2}$

㉠에서

$$\left(\frac{1}{2}+1\right)^2+a^2=9$$

이므로

$$a^2=\frac{27}{4}$$

따라서

$$a^2+p^2=\frac{27}{4}+\frac{1}{4}=7$$

정답 ⑤

29. **출제의도** : 평면벡터의 연산과 내적을 이용하여 조건을 만족시키는 벡터의 크기의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에 의하여 점 P는 평행사변형 OACB의 둘레 또는 내부에 있는 점이다.

조건 (나)에서

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}+(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OA}$

$=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$=\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})-|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos(\angle AOB)$

$=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}-\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}\times\dfrac{1}{4}$

$=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}-1=2$

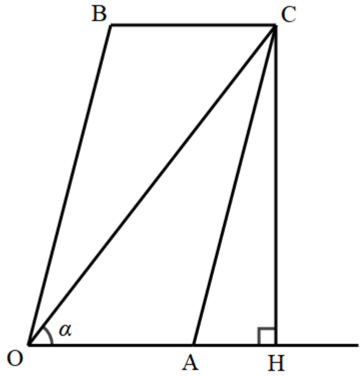
이므로

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}=3$

(ⅰ) 벡터 $3\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OX}$의 크기는 $\overrightarrow{OP}$의 크기가 최대이고 $\overrightarrow{OX}$가 $\overrightarrow{OP}$와 반대 방향일 때 최대가 되고, $\overrightarrow{OP}$의 크기는 점 P가 선분 OA 위에 있을 때 최

대가 된다.

다음 그림과 같이 점 C에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\angle \mathrm{COA}=\alpha$라 하자.



$\angle \mathrm{CAH}=\angle \mathrm{AOB}$에서

$\cos(\angle \mathrm{CAH})=\cos(\angle \mathrm{AOB})=\frac{1}{4}$

이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AH}}&=\overline{\mathrm{AC}}\times\cos(\angle \mathrm{CAH})\\&=\overline{\mathrm{OB}}\times\frac{1}{4}\\&=2\sqrt{2}\times\frac{1}{4}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

한편,

$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$

$=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$=(\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2+2\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{1}{4}$

$=2+8+2=12$

이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=2\sqrt{3}$

그러므로

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

즉, 점 P가 선분 OA 위에 있을 때

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\alpha\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{6}}{4}\\&=\frac{3\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=3\end{aligned}$$

이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{2}$

이때 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$가 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 반대 방향이면

$|3\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OX}}|=3|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|+|\overrightarrow{\mathrm{OX}}|$

이므로

$M=3\sqrt{2}+\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

(ii) 벡터 $3\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OX}}$의 크기는 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 크기가 최소이고 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$가 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 같은 방향일 때 최소가 되고, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 크기는 점 P가 선분 OC 위에 있을 때 최소가 된다.

이때

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\times2\sqrt{3}=3\end{aligned}$$

이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$가 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 같은 방향이면

$|3\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OX}}|=3|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|-|\overrightarrow{\mathrm{OX}}|$

이므로

$m=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}$

(i), (ii)에 의하여

$$\begin{aligned}M\times m&=4\sqrt{2}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}\right)\\&=6\sqrt{6}-8\end{aligned}$$

이므로

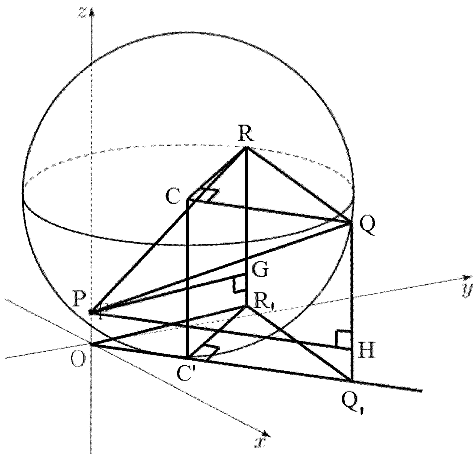
$$\begin{aligned}a^2+b^2&=6^2+(-8)^2\\&=100\end{aligned}$$

정답 100

30. 출제의도 : 좌표공간의 구의 방정식 및 도형의 위치관계를 이해하고 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 C′이라 하면 $\overline{CC'}=5$이므로 구 S는 점 C′에서 xy평면에 접한다.



평면 OPC는 점 C′을 지나므로 점 Q_1은 직선 OC′ 위에 있다. 이때 선분 OQ_1의 길이가 최대가 되려면 점 Q가 점 C를 지나고 직선 OC′과 평행한 직선이 구 S와 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점이어야 한다.

이때

$\overline{OQ_1}=\overline{OC'}+5=3+5=8$

한편, 삼각형 OQ_1R_1의 넓이가 최대가 되려면 점 R가 점 C를 지나고 직선 CQ에 수직인 직선이 구 S와 만나는 점이어야 한다.

이때 $\overline{R_1C'}\perp\overline{OC'}$이고, $\overline{R_1C'}=5$이므로 삼각형 OQ_1R_1의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 8\times 5=20$

이제 삼각형 PQR의 넓이를 구해 보자.

점 P에서 직선 QQ_1에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{PH}=\overline{OQ_1}=8$,

$\overline{QH}=\overline{QQ_1}-1=4$

이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{64+16}=4\sqrt{5}$ ……㉠

직각삼각형 CQR에서

$\overline{QR}=\sqrt{\overline{CQ}^2+\overline{CR}^2}=\sqrt{25+25}=5\sqrt{2}$ ……㉡

직각삼각형 $OC'R_1$에서

$\overline{OR_1}=\sqrt{\overline{OC'}^2+\overline{R_1C'}^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$

이므로 점 P에서 직선 RR_1에 내린 수선의 발을 G라 하면

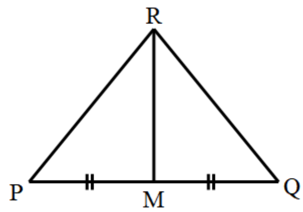
$\overline{PG}=\overline{OR_1}=\sqrt{34}$

$\overline{RG}=\overline{RR_1}-1=4$

직각삼각형 RPG에서

$\overline{PR}=\sqrt{\overline{PG}^2+\overline{RG}^2}=\sqrt{34+16}=5\sqrt{2}$ ……㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여 삼각형 PQR는 $\overline{PR}=\overline{QR}$인 이등변삼각형이다.



위 그림과 같이 선분 PQ의 중점을 M이라 하면

$\overline{RM}=\sqrt{\overline{PR}^2-\overline{PM}^2}$

$=\sqrt{50-20}$

$=\sqrt{30}$

이므로 삼각형 PQR의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 4\sqrt{5}\times\sqrt{30}=10\sqrt{6}$

이때 삼각형 PQR의 xy평면 위로의 정사

영이 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$이므로 두 평면 PQR와 $\mathrm{OQ_1R_1}$이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta = \frac{20}{10\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

따라서 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 평면 PQR 위로의 정사영의 넓이는

$$20 \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{20}{3}\sqrt{6}$$

이므로

$p+q=3+20=23$

정답 23