

■ [공통: 수학 I·수학 II]

01. ② 02. ⑤ 03. ④ 04. ② 05. ②
 06. ② 07. ③ 08. ① 09. ⑤ 10. ①
 11. ① 12. ② 13. ④ 14. ⑤ 15. ①
 16. 7 17. 5 18. 29 19. 4
 20. 15 21. 31 22. 8

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\begin{aligned} 32^{\frac{1}{4}} \times 4^{-\frac{1}{8}} &= (2^5)^{\frac{1}{4}} \times (2^2)^{-\frac{1}{8}} \\ &= 2^{\frac{5}{4}} \times 2^{-\frac{2}{8}} = 2^{\frac{5}{4}} - \frac{1}{4} = 2 \end{aligned}$$

정답 ②

2. 출제의도 : 미분계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 3x^2 - 5 \text{이므로} \\ f'(x) &= 3x^2 + 6x \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= f'(1) \\ &= 3 \times 1^2 + 6 \times 1 = 9 \end{aligned}$$

정답 ⑤

3. 출제의도 : 주어진 조건에서 등비수열의 첫째항과 공비를 찾아 일반항을 구할 수 있는가?

풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$a_2 a_3 = ar \times ar^2 = a^2 r^3 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$a_4 = ar^3 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦을 ⑧으로 나누면

$$a = \frac{1}{2}$$

이것을 ⑧에 대입하면

$$\frac{1}{2} r^3 = 4 \text{에서 } r^3 = 8$$

r 은 실수이므로

$$r = 2$$

따라서

$$a_6 = ar^5 = \frac{1}{2} \times 2^5 = 2^4 = 16$$

정답 ④

4. 출제의도 : 함수의 그래프를 이해하고 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \\ = -2 + 1 \\ = -1 \end{aligned}$$

정답 ②

5. 출제의도 : 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\begin{aligned}f(x) &= (x+1)(x^2+x-5) \text{에서} \\f'(x) &= (x^2+x-5)+(x+1)(2x+1) \\&\text{따라서} \\f'(2) &= (2^2+2-5)+(2+1)(2\times 2+1) \\&= 1+15 \\&= 16\end{aligned}$$

정답 ②

6. 출제의도 : 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\begin{aligned}\cos(\pi+\theta) &= \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{에서} \\\cos(\pi+\theta) &= -\cos\theta \text{이므로} \\-\cos\theta &= \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \therefore \cos\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 에서 $\sin\theta > 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \sqrt{1-\cos^2\theta} \\&= \sqrt{1-\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\sin\theta + \cos\theta &= \frac{\sqrt{5}}{5} + \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

정답 ②

7. 출제의도 : 함수가 연속일 조건을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

함수 $f(x) = \begin{cases} (x-a)^2 & (x < 4) \\ 2x-4 & (x \geq 4) \end{cases}$ 가 $x=4$ 에서 연속이면 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $f(x)$ 가 $x=4$ 에서 연속이면 $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4)$ 이다. 이때

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} (x-a)^2 \\&= (4-a)^2\end{aligned}$$

$$= a^2 - 8a + 16$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (2x-4) = 4$$

$$f(4) = 4$$

이므로

$$a^2 - 8a + 16 = 4$$

$$a^2 - 8a + 12 = 0$$

$$(a-2)(a-6) = 0$$

$a=2$ 또는 $a=6$

따라서 조건을 만족시키는 모든 상수 a 의 값의 곱은

$$2 \times 6 = 12$$

정답 ③

8. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 상수를 구할 수 있는가?

풀이 :

두 수 $\log_2 a, \log_a 8$ 의 합이 4이므로
 $\log_2 a + \log_a 8 = 4$ 에서

$$\log_2 a + 3\log_a 2 = 4$$

$$\log_2 a + \frac{3}{\log_2 a} = 4 \quad \dots \quad \textcircled{7}$$

$\log_2 a = X$ 라 하면 $a > 2$ 이므로 $X > 1$

⑦에서

$$X + \frac{3}{X} = 4, \quad X^2 - 4X + 3 = 0$$

$$(X-1)(X-3) = 0$$

$X > 1$ 이므로 $X = 3$

즉, $\log_2 a = 3$ 에서 $a = 2^3 = 8$

한편, 두 수 $\log_2 a, \log_a 8$ 의 곱이 k 이므로

$$k = \log_2 a \times \log_a 8 = \log_2 a \times 3\log_a 2$$

$$= \log_2 a \times \frac{3}{\log_2 a} = 3$$

따라서 $a + k = 8 + 3 = 11$

정답 ①

9. 출제의도 : 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$f(x) = x^2 + x$$

$$5 \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 (5x + f(x)) dx$$

$$= 5 \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 5x dx - \int_0^1 f(x) dx$$

$$= 4 \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 5x dx$$

$$= 4 \int_0^1 (x^2 + x) dx - \int_0^1 5x dx$$

$$= \int_0^1 (4x^2 + 4x) dx - \int_0^1 5x dx$$

$$= \int_0^1 (4x^2 - x) dx$$

$$= \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

[다른 풀이]

$$f(x) = x^2 + x$$

$$5 \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 (5x + f(x)) dx$$

$$= 5 \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 - \left[\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^1$$

$$= 5 \times \frac{5}{6} - \frac{10}{3} = \frac{5}{6}$$

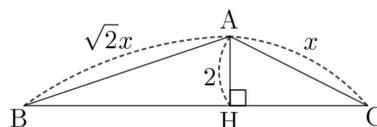
정답 ⑤

10. 출제의도 : 사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{2} : 1$$

$$\text{면 } \overline{AB} = \sqrt{2}x$$



삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 하면 이 외접원의 넓이가 50π 이므로 $\pi R^2 = 50\pi$ 에서 $R = 5\sqrt{2}$
 직각삼각형 AHC에서

$$\sin(\angle ACH) = \frac{2}{x}, \quad \sin C = \frac{2}{x}$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin C} = 2R, \quad \overline{AB} = 2R \sin C$$

$$\sqrt{2}x = 2 \times 5\sqrt{2} \times \frac{2}{x}, \quad x^2 = 20, \quad x = 2\sqrt{5}$$

따라서 $\overline{AB} = \sqrt{2}x = 2\sqrt{10}$ 이므로 직각삼각형 ABH에서

$$\begin{aligned}\overline{BH} &= \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AH}^2} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{10})^2 - 2^2} = 6\end{aligned}$$

정답 ①

11. 출제의도 : 위치, 속도, 가속도 사이의 관계 및 미분을 이용하여 가속도를 구할 수 있는가?

풀이 :

$$x_1 = t^2 + t - 6,$$

$$x_2 = -t^3 + 7t^2$$

이므로

$x_1 = x_2$ 에서

$$t^2 + t - 6 = -t^3 + 7t^2$$

$$t^3 - 6t^2 + t - 6 = 0$$

$$t^2(t-6) + t - 6 = 0$$

$$(t-6)(t^2+1) = 0$$

$t \geq 0$ 이므로

$$t = 6$$

즉, 두 점 P, Q의 위치가 같아지는 순간의 시각은 $t = 6$ 이다.

한편, 두 점 P, Q의 시각 t 에서의 속도를 각각 v_1, v_2 라 하면

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = 2t + 1,$$

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = -3t^2 + 14t$$

두 점 P, Q의 시각 t 에서의 가속도를 각각 a_1, a_2 라 하면

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = 2,$$

$$a_2 = \frac{dv_2}{dt} = -6t + 14$$

시각 $t = 6$ 에서의 두 점 P, Q의 가속도가 각각 p, q 이므로

$$p = 2,$$

$$q = -6 \times 6 + 14 = -22$$

따라서

$$p - q = 2 - (-22) = 24$$

정답 ①

12. 출제의도 : 등차수열의 일반항을 이용하여 새롭게 정의된 수열의 합을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$b_1 = \sum_{k=1}^1 (-1)^{k+1} a_k = a_1$$

$$b_2 = \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2$$

이때 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$b_2 = -2$$

$$a_1 - a_2 = -d = -2$$

따라서 $d = 2$

또한

$$b_3 = \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} a_k$$

$$\begin{aligned}
&= a_1 - a_2 + a_3 \\
&= -d + a_3 \\
&= a_3 - 2 \\
b_7 &= \sum_{k=1}^7 (-1)^{k+1} a_k \\
&= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 \\
&= -3d + a_7 \\
&= a_7 - 6 \\
\text{o} \mid \text{므로 } b_3 + b_7 &= 0 \text{ 에서} \\
(a_3 - 2) + (a_7 - 6) &= \\
&= a_3 + a_7 - 8 \\
&= (a_1 + 2 \times 2) + (a_1 + 6 \times 2) - 8 \\
&= (a_1 + 4) + (a_1 + 12) - 8 \\
&= 2a_1 + 8 = 0 \\
\text{따라서 } a_1 &= -4 \\
\text{즉 } a_n &= -4 + (n-1) \times 2 = 2n - 6 \text{ o} \mid \text{므로} \\
b_1 &= a_1 = -4 \\
b_2 &= a_1 - a_2 = -2 \\
b_3 &= a_1 - a_2 + a_3 = -2 \\
b_4 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = -4 \\
b_5 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 = 0 \\
b_6 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 = -6 \\
b_7 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 = 2 \\
b_8 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_7 - a_8 = -8 \\
b_9 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_7 - a_8 + a_9 = 4 \\
\text{따라서} & \\
b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_9 &= \\
&= -4 + (-2) + (-2) + (-4) + 0 + (-6) \\
&\quad + 2 + (-8) + 4 \\
&= -20 \\
\text{정답 } ② &
\end{aligned}$$

$= -dn = -2n$
 $b_{2n-1} = a_1 + (a_3 - a_2) + (a_5 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n-2})$
 $= a_1 + (n-1)d = -4 + 2(n-1) = 2n - 6$
 따라서
 $\sum_{n=1}^9 b_n = \sum_{n=1}^5 b_{2n-1} + \sum_{n=1}^4 b_{2n}$
 $= \sum_{n=1}^5 (2n-6) + \sum_{n=1}^4 (-2n)$
 $= 2 \times \frac{5 \times 6}{2} - 6 \times 5 - 2 \times \frac{4 \times 5}{2}$
 $= 30 - 30 - 20 = -20$

13. 출제의도 : 정적분을 이용하여 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

풀이 :

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로 곡선 $y = f(x)$ 와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이는 y 축에 의하여 이등분된다.

o 때 $A = 2B$ o므로

$$\int_0^k (-x^2 + 2x + 6) dx = 0$$

o어야 한다. 즉,

$$\left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 6x \right]_0^k = 0$$

$$-\frac{1}{3}k^3 + k^2 + 6k = 0$$

$$-\frac{1}{3}k(k+3)(k-6) = 0$$

$$k > 4 \text{ o} \mid \text{므로 } k = 6$$

정답 ④

[다른풀이]

$$b_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

14. 출제의도 : 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

풀이 :

두 점 A_n, B_n 의 좌표를 각각

$$A_n(a_n, 2^{a_n}), B_n(b_n, 2^{b_n}) \quad (a_n < b_n)$$

이라 하면 조건 (가)에 의하여

$$\frac{2^{b_n} - 2^{a_n}}{b_n - a_n} = 3 \quad \dots\dots \textcircled{①}$$

조건 (나)에 의하여

$$(b_n - a_n)^2 + (2^{b_n} - 2^{a_n})^2 = 10n^2 \quad \dots\dots \textcircled{②}$$

①에서 $2^{b_n} - 2^{a_n} = 3(b_n - a_n)$ 이므로 이것을 ②에 대입하여 정리하면

$$(b_n - a_n)^2 = n^2$$

$a_n < b_n$ 이므로 $b_n - a_n = n$, 즉 $a_n = b_n - n$

이것을 ①에 대입하여 정리하면

$$2^{b_n} - 2^{b_n - n} = 3n$$

이므로

$$2^{b_n} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 3n$$

$$2^{b_n} = 3n \times \frac{2^n}{2^n - 1}$$

한편, 곡선 $y = 2^x$ 과 곡선 $y = \log_2 x$ 는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 x_n 은 점 B_n 의 y 좌표와 같다.

따라서

$$x_n = 2^{b_n} = 3n \times \frac{2^n}{2^n - 1}$$

이므로

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6 + 8 + \frac{72}{7} = \frac{170}{7}$$

정답 ⑤

15. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 다항함수를 구하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

조건 (가)의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$xf(x) + xg(x) = 12x^3 + 24x^2 - 6x$$

$$f(x) + g(x) = 12x^2 + 24x - 6 \quad \dots\dots \textcircled{⑦}$$

이때 조건 (나)에서 $f(x) = xg'(x)$ 이므로 ⑦에 대입하면

$$xg'(x) + g(x) = 12x^2 + 24x - 6$$

$$\{xg(x)\}' = 12x^2 + 24x - 6$$

$$xg(x) = \int (12x^2 + 24x - 6)dx$$

$$= 4x^3 + 12x^2 - 6x + C$$

(단, C 는 적분상수)

이때 $g(x)$ 는 다항함수이므로 $C=0$

즉 $xg(x) = 4x^3 + 12x^2 - 6x$ 이므로

$$g(x) = 4x^2 + 12x - 6$$

따라서

$$\int_0^3 g(x)dx$$

$$= \int_0^3 (4x^2 + 12x - 6)dx$$

$$= \left[\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - 6x \right]_0^3$$

$$= 36 + 54 - 18$$

$$= 72$$

정답 ①

16. 출제의도 : 로그를 포함하는 방정식의 근을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\begin{aligned} & \log_3(x+2) - \log_{\frac{1}{3}}(x-4) \\ &= \log_3(x+2) - \log_{3^{-1}}(x-4) \\ &= \log_3(x+2) + \log_3(x-4) \\ &= \log_3(x+2)(x-4) \end{aligned}$$

○]므로

$$\log_3(x+2)(x-4) = 3$$

$$(x+2)(x-4) = 3^3$$

$$x^2 - 2x - 35 = 0$$

$$(x-7)(x+5) = 0$$

진수 조건에 의해서 $x > 4$

따라서 $x = 7$

정답 7

17. 출제의도 : 함수의 부정적분과 적분상수를 구하여 함숫값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$f'(x) = 6x^2 + 2x + 1 \text{]으로 } f'(x) \text{의 부정적분은 }$$

부정적분은

$$\int (6x^2 + 2x + 1) dx = 2x^3 + x^2 + x + C$$

(단, C 는 적분상수)

이때 $f(0) = 1$]으로 $C = 1$ 에서

$$f(x) = 2x^3 + x^2 + x + 1$$

따라서 $f(1) = 5$

정답 5

18. 출제의도 : \sum 의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\sum_{k=1}^{10} ka_k = 36 \text{에서}$$

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 10a_{10} = 36 \quad \dots \dots \textcircled{7}$$

$$\sum_{k=1}^9 ka_{k+1} = 7 \text{에서}$$

$$a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \dots + 9a_{10} = 7 \quad \dots \dots \textcircled{8}$$

⑦ - ⑧ 을 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = \sum_{k=1}^{10} a_k$$

$$= 36 - 7 = 29$$

정답 29

[다른 풀이]

$$\sum_{k=1}^9 ka_{k+1} = 7 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^9 ka_{k+1} = \sum_{k=1}^9 \{(k+1)a_{k+1} - a_{k+1}\}$$

$$= \sum_{k=1}^9 (k+1)a_{k+1} - \sum_{k=1}^9 a_{k+1}$$

$$= \sum_{k=2}^{10} ka_k - \sum_{k=2}^{10} a_k = 7$$

$$\therefore \sum_{k=2}^{10} ka_k = \sum_{k=2}^{10} a_k + 7$$

$$\sum_{k=1}^{10} ka_k = 36 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^{10} ka_k = a_1 + \sum_{k=2}^{10} ka_k$$

$$= a_1 + \sum_{k=2}^{10} a_k + 7$$

$$= \sum_{k=1}^{10} a_k + 7 = 36$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^{10} a_k = 36 - 7 = 29$$

19. 출제의도 : 미분을 이용하여 함수의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\text{함수 } f(x) = x^3 + ax^2 - 9x + b \text{가 } x=1 \text{에서}$$

극소이므로

$$f'(1) = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 9$$

이므로

$$f'(1) = 3 + 2a - 9 = 0$$

에서

$$a = 3$$

한편, $f'(x) = 0$ 에서

$$3x^2 + 6x - 9 = 0$$

$$3(x+3)(x-1) = 0$$

$$x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	극대	\searrow	극소	\nearrow

함수 $f(x)$ 는 $x = -3$ 에서 극대이고, 극댓값이 28이다.

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^3 + 3 \times (-3)^2 - 9 \times (-3) + b \\ &= 27 + b \end{aligned}$$

이므로

$$27 + b = 28$$

에서

$$b = 1$$

따라서

$$a + b = 3 + 1 = 4$$

정답 4

20. 출제의도 : 삼각함수의 그래프를 이용하여 방정식을 만족시키는 실수의 값의 합을 구할 수 있는가?

풀이 :

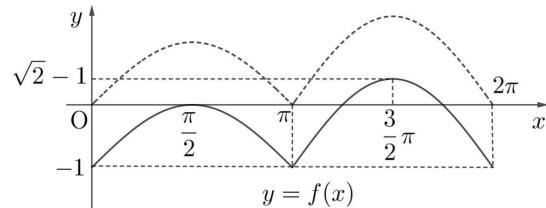
$0 \leq x < \pi$ 에서 함수 $y = \sin x - 1$ 의 그래프는 이 구간에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 것이다. 이때, 이 구간에서 함수 $y = \sin x - 1$ 의 최댓값은 0이고, 최솟값은 -1이다.

$\pi \leq x \leq 2\pi$ 에서 함수 $y = -\sqrt{2} \sin x - 1$ 의 그래프는 이 구간에서 함수 $y = -\sqrt{2} \sin x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 것이다. 이때, 이 구간에서 함수 $y = -\sqrt{2} \sin x - 1$ 의 최댓값은 $\sqrt{2} - 1$, 최솟값은 -1이다.

그러므로 닫힌구간 $[0, 2\pi]$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - 1 & (0 \leq x < \pi) \\ -\sqrt{2} \sin x - 1 & (\pi \leq x \leq 2\pi) \end{cases}$$

의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $f(x) = f(t)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = f(t)$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수가 3이다.

그러므로 $f(t) = -1$ 또는 $f(t) = 0$ 이다.

(i) $f(t) = -1$ 일 때,

$$t = 0 \text{ 또는 } t = \pi \text{ 또는 } t = 2\pi$$

(ii) $f(t) = 0$ 일 때,

$$t = \frac{\pi}{2} \text{ 또는}$$

$$\begin{aligned}
 -\sqrt{2}\sin t - 1 &= 0 \quad (\pi \leq t \leq 2\pi) \\
 -\sqrt{2}\sin t - 1 = 0 \Rightarrow \sin t &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \pi \leq t \leq 2\pi \text{이므로 } t &= \frac{5}{4}\pi \text{ 또는 } t = \frac{7}{4}\pi \\
 \text{(i), (ii)에서 모든 } t \text{의 값의 합은} \\
 0 + \pi + 2\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{5}{4}\pi + \frac{7}{4}\pi &= \frac{13}{2}\pi \\
 \text{따라서 } p = 2, q = 13 \text{이므로} \\
 p+q &= 15
 \end{aligned}$$

정답 15

[참고]

함수

$y = -\sqrt{2}\sin x - 1$ ($\pi \leq x \leq 2\pi$)의 그래프와 x 축이 만나는 두 점은 직선 $x = \frac{3}{2}\pi$ 에 대하여 대칭이므로 방정식 $-\sqrt{2}\sin x - 1 = 0$ ($\pi \leq x \leq 2\pi$)의 두 실근의 합은 3π 이다.

21. 출제의도 : 부등식을 만족시키는 함수의 도함수를 추론할 수 있는가?

풀이 :

$$2k-8 \leq \frac{f(k+2)-f(k)}{2} \leq 4k^2 + 14k \quad \dots \textcircled{7}$$

에서

$$2k-8 = 4k^2 + 14k$$

$$k^2 + 3k + 2 = 0$$

$$(k+1)(k+2) = 0$$

$$k = -1 \text{ 또는 } k = -2$$

즉, $\textcircled{7}$ 에 $k = -1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned}
 -10 &\leq \frac{f(1)-f(-1)}{2} \leq -10 \\
 \text{이므로 } f(1)-f(-1) &= -20 \quad \dots \textcircled{①}
 \end{aligned}$$

또, $\textcircled{7}$ 에 $k = -2$ 를 대입하면

$$-12 \leq \frac{f(0)-f(-2)}{2} \leq -12$$

$$\text{이므로 } f(0)-f(-2) = -24 \quad \dots \textcircled{②}$$

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이

므로 상수 a, b, c 에 대하여

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

로 놓으면 $\textcircled{①}$ 에서

$$f(1)-f(-1)$$

$$= (1+a+b+c) - (-1+a-b+c)$$

$$= 2 + 2b = -20$$

$$b = -11$$

$\textcircled{②}$ 에서

$$f(0)-f(-2)$$

$$= c - (-8 + 4a - 2b + c)$$

$$= 8 - 4a + 2 \times (-11) \quad (\because b = -11)$$

$$= -4a - 14 = -24$$

$$a = \frac{5}{2}$$

$$\text{즉, } f(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 11x + c \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 5x - 11$$

이므로

$$f'(3) = 3 \times 3^2 + 5 \times 3 - 11$$

$$= 31$$

정답 31

[다른 풀이]

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이

므로 $f'(x)$ 는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다. 상수 α, β 에 대하여

$$f'(x) = 3x^2 + \alpha x + \beta$$

로 놓으면 ①에서

$$f(1) - f(-1)$$

$$= \int_{-1}^1 f'(x) dx$$

$$= \int_{-1}^1 (3x^2 + \alpha x + \beta) dx$$

$$= \left[x^3 + \frac{\alpha}{2}x^2 + \beta x \right]_{-1}^1$$

$$= 2 + 2\beta = -20$$

$$\beta = -11$$

②에서

$$f(0) - f(-2)$$

$$= \int_{-2}^0 f'(x) dx$$

$$= \int_{-2}^0 (3x^2 + \alpha x - 11) dx \quad (\because \beta = -11)$$

$$= \left[x^3 + \frac{\alpha}{2}x^2 - 11x \right]_{-2}^0$$

$$= 8 - 2\alpha - 22 = -24$$

$$\alpha = 5$$

즉, $f'(x) = 3x^2 + 5x - 11$ 이므로

$$f'(3) = 3 \times 3^2 + 5 \times 3 - 11$$

$$= 31$$

$$a_{n+1} - a_n + \frac{2}{3}k = 0 \text{ 또는 } a_{n+1} + ka_n = 0$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} = a_n - \frac{2}{3}k \text{ 또는 } a_{n+1} = -ka_n$$

$a_1 = k$ 이므로

$$a_2 = a_1 - \frac{2}{3}k = k - \frac{2}{3}k = \frac{k}{3}$$

또는

$$a_2 = -ka_1 = -k \times k = -k^2$$

(i) $a_2 = \frac{k}{3}$ 일 때,

$$a_3 = a_2 - \frac{2}{3}k = \frac{k}{3} - \frac{2}{3}k = -\frac{k}{3}$$

또는

$$a_3 = -ka_2 = -k \times \frac{k}{3} = -\frac{k^2}{3}$$

(i - ②) $a_3 = -\frac{k}{3}$ 일 때

$$a_2 \times a_3 = \frac{k}{3} \times \left(-\frac{k}{3} \right) = -\frac{k^2}{9} < 0$$

이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

$$a_4 = a_3 - \frac{2}{3}k = -\frac{k}{3} - \frac{2}{3}k = -k$$

또는

$$a_4 = -ka_3 = -k \times \left(-\frac{k}{3} \right) = \frac{k^2}{3}$$

(i - ② - ①) $a_4 = -k$ 일 때,

$$a_5 = a_4 - \frac{2}{3}k = -k - \frac{2}{3}k = -\frac{5}{3}k$$

또는

$$a_5 = -ka_4 = -k \times (-k) = k^2$$

$a_5 = -\frac{5}{3}k$ 일 때,

$$a_5 < 0$$

이고,

$$a_5 = k^2$$
 일 때,

$$a_5 > 0$$

이므로

22. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 특정한 항의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

조건 (나)에서

$$\left(a_{n+1} - a_n + \frac{2}{3}k \right) (a_{n+1} + ka_n) = 0$$

이므로

$a_5 = 0$ 을 만족시키는 양수 k 의 값은 존재하지 않는다.

(i - ④-②) $a_4 = \frac{k^2}{3}$ 일 때,

$$a_5 = a_4 - \frac{2}{3}k = \frac{k^2}{3} - \frac{2}{3}k$$

또는

$$a_5 = a_4 - \frac{2}{3}k = \frac{k^2}{3} - \frac{2}{3}k$$

$$a_5 = -ka_4 = -k \times \frac{k^2}{3} = -\frac{k^3}{3}$$

$a_5 = 0$ 에서

$$\frac{k^2}{3} - \frac{2}{3}k = 0$$

$$\frac{k(k-2)}{3} = 0$$

$k > 0$ 이므로

$k = 2$

$$a_5 = -\frac{k^3}{3} \text{ 일 때},$$

$$a_5 < 0$$

이므로 $a_5 = 0$ 을 만족시키는 양수 k 의

값은 존재하지 않는다.

(i - ④-③) $a_3 = -\frac{k^2}{3}$ 일 때

$$a_2 \times a_3 = \frac{k}{3} \times \left(-\frac{k^2}{3}\right) = -\frac{k^3}{9} < 0$$

이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

$$a_4 = a_3 - \frac{2}{3}k = -\frac{k^2}{3} - \frac{2}{3}k$$

또는

$$a_4 = -ka_3 = -k \times \left(-\frac{k^2}{3}\right) = \frac{k^3}{3}$$

(i - ④-①) $a_4 = -\frac{k^2}{3} - \frac{2}{3}k$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_5 &= a_4 - \frac{2}{3}k = \left(-\frac{k^2}{3} - \frac{2}{3}k\right) - \frac{2}{3}k \\ &= -\frac{k^2}{3} - \frac{4}{3}k \end{aligned}$$

또는

$$a_5 = -ka_4 = -k \times \left(-\frac{k^2}{3} - \frac{2}{3}k\right) = \frac{k^3}{3} + \frac{2}{3}k^2$$

$$a_5 = -\frac{k^2}{3} - \frac{4}{3}k \text{ 일 때},$$

$$a_5 = -\frac{k(k+4)}{3} < 0$$

이고

$$a_5 = \frac{k^3}{3} + \frac{2}{3}k^2 \text{ 일 때},$$

$$a_5 = \frac{k^2(k+2)}{3} > 0$$

이므로 $a_5 = 0$ 을 만족시키는 양수 k 의
값은 존재하지 않는다.

(i - ④-②) $a_4 = \frac{k^3}{3}$ 일 때,

$$a_5 = a_4 - \frac{2}{3}k = \frac{k^3}{3} - \frac{2}{3}k$$

또는

$$a_5 = -ka_4 = -k \times \frac{k^3}{3} = -\frac{k^4}{3}$$

$$a_5 = \frac{k^3}{3} - \frac{2}{3}k \text{ 일 때},$$

$a_5 = 0$ 에서

$$\frac{k^3}{3} - \frac{2}{3}k = 0$$

$$\frac{k(k^2 - 2)}{3} = 0$$

$k > 0$ 이므로

$$k = \sqrt{2}$$

$$a_5 = -\frac{k^4}{3} \text{ 일 때},$$

$$a_5 = -\frac{k^4}{3} < 0$$

이므로 $a_5 = 0$ 을 만족시키는 양수 k 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a_2 = -k^2$ 일 때,

$$a_3 = a_2 - \frac{2}{3}k = -k^2 - \frac{2}{3}k$$

또는

$$a_3 = -ka_2 = -k \times (-k^2) = k^3$$

(ii -ⓐ) $a_3 = -k^2 - \frac{2}{3}k$ 일 때,

$$a_2 \times a_3 = -k^2 \times \left(-k^2 - \frac{2}{3}k\right) = k^2 \left(k^2 + \frac{2}{3}k\right) > 0$$

이므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(ii -ⓑ) $a_3 = k^3$ 일 때,

$$a_2 \times a_3 = -k^2 \times k^3 = -k^5 < 0$$

이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

$$a_3 = k^3$$
 이므로

$$a_4 = a_3 - \frac{2}{3}k = k^3 - \frac{2}{3}k$$

또는

$$a_4 = -ka_3 = -k \times k^3 = -k^4$$

(ii -ⓑ - ①) $a_4 = k^3 - \frac{2}{3}k$ 일 때,

$$a_5 = a_4 - \frac{2}{3}k = \left(k^3 - \frac{2}{3}k\right) - \frac{2}{3}k = k^3 - \frac{4}{3}k$$

또는

$$a_5 = -ka_4 = -k \times \left(k^3 - \frac{2}{3}k\right) = -k^4 + \frac{2}{3}k^2$$

$$a_5 = k^3 - \frac{4}{3}k$$
 일 때,

$$a_5 = 0$$
 에서

$$k^3 - \frac{4}{3}k = 0$$

$$k \left(k^2 - \frac{4}{3}\right) = 0$$

$$k > 0$$
 이므로

$$k = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$a_5 = -k^4 + \frac{2}{3}k^2$$
 일 때,

$$a_5 = 0$$
 에서

$$-k^4 + \frac{2}{3}k^2 = 0$$

$$-k^2 \left(k^2 - \frac{2}{3}\right) = 0$$

$$k > 0$$
 이므로

$$k = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

(ii -ⓑ - ②) $a_4 = -k^4$ 일 때,

$$a_5 = a_4 - \frac{2}{3}k = -k^4 - \frac{2}{3}k$$

또는

$$a_5 = -ka_4 = -k \times (-k^4) = k^5$$

$$a_5 = -k^4 - \frac{2}{3}k$$
 일 때,

$$a_5 = -k \left(k^3 + \frac{2}{3}\right) < 0$$

이고,

$$a_5 = k^5$$
 일 때,

$$a_5 > 0$$

이므로 $a_5 = 0$ 을 만족시키는 양수 k 의

값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서

$$k \text{의 값은 } 2, \sqrt{2}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}$$

따라서 k^2 의 값의 합은

$$2^2 + (\sqrt{2})^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = 8$$

정답 8

■ [선택: 확률과 통계]

23. ⑤ 24. ① 25. ⑤ 26. ③ 27. ④
28. ④ 29. 994 30. 93

23. 출제의도 : 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

풀이 :

숫자 1, 2, 2, 3, 3을 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!2!} = 30$$

정답 ⑤

24. 출제의도 : 독립사건을 이해하여 사건의 확률을 구할 수 있는가?

풀이 :

두 사건 A , B 가 서로 독립이고

$$P(A) = \frac{2}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{6} \text{이므로}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{2}{3}P(B) = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$$

따라서

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

정답 ①

25. 출제의도 : 확률의 덧셈정리를 이해하여 사건의 확률을 구할 수 있는가?

풀이 :

11 이하의 자연수 중에서 7 이상의 홀수는 7, 9, 11이므로 다음의 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) 선택한 2개의 수 중 1개의 수만 7

이상의 홀수인 경우

나머지 하나는 11개의 자연수 중 3개를 제외한 8개 중에서 하나를 선택해야 하므로 이 사건의 확률은

$$\frac{{}_3C_1 \times {}_8C_1}{{}_{11}C_2} = \frac{3 \times 8}{\frac{11 \times 10}{2}} = \frac{24}{55}$$

(ii) 선택한 2개의 수 모두 7 이상의 홀수인 경우

이 사건의 확률은

$$\frac{{}_3C_2}{{}_{11}C_2} = \frac{\frac{3 \times 2}{2}}{\frac{11 \times 10}{2}} = \frac{3}{55}$$

(i), (ii)에서 구하는 사건의 확률은

$$\frac{24}{55} + \frac{3}{55} = \frac{27}{55}$$

정답 ⑤

[다른 풀이]

구하는 사건의 여사건은 7, 9, 11을 제외한 8개의 수 중에서 2개를 선택하는 사건이므로 구하는 사건의 확률은

$$1 - \frac{{}_8C_2}{{}_{11}C_2} = 1 - \frac{\frac{8 \times 7}{2}}{\frac{11 \times 10}{2}} = 1 - \frac{28}{55} = \frac{27}{55}$$

26. 출제의도 : 표본평균의 확률분포를 이용하여 주어진 확률을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

규분포를 따르므로

$$\frac{12-m}{2} = 2$$

$$\text{따라서 } m = 8$$

풀이 :

정답 ③

정규분포 $N(m, 6^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 \bar{X} 에 대하여

$$E(\bar{X}) = E(X) = m,$$

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$$

이다. 그러므로 확률변수 \bar{X} 는 정규분포

$$N(m, 2^2) \text{ 을 따르고, } Z_1 = \frac{\bar{X}-m}{2} \text{ 으로}$$

놓으면 확률변수 Z_1 은 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

정규분포 $N(6, 2^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 \bar{Y} 에 대하여

$$E(\bar{Y}) = E(Y) = 6,$$

$$\sigma(\bar{Y}) = \frac{\sigma(Y)}{\sqrt{4}} = \frac{2}{2} = 1$$

이다. 그러므로 확률변수 \bar{Y} 는 정규분포

$$N(6, 1^2) \text{ 을 따르고, } Z_2 = \frac{\bar{Y}-6}{1} \text{ 으로}$$

놓으면 확률변수 Z_2 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(\bar{X} \leq 12) + P(\bar{Y} \geq 8) = 1 \text{ 에서}$$

$$P\left(Z_1 \leq \frac{12-m}{2}\right) + P\left(Z_2 \geq \frac{8-6}{1}\right) = 1$$

$$P\left(Z_1 \leq \frac{12-m}{2}\right) + P(Z_2 \geq 2) = 1$$

$$P\left(Z_1 \leq \frac{12-m}{2}\right) = 1 - P(Z_2 \geq 2) \\ = P(Z_2 \leq 2)$$

이때 두 확률변수 Z_1, Z_2 는 모두 표준정

27. 출제의도 : 이산확률변수의 분포를 이용하여 평균에 대한 조건을 만족시키는 확률의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$k=0, k=2 \text{ 일 때},$$

$$P(X=0) = P(X=2) = P(X=4)$$

$$k=1 \text{ 일 때, } P(X=1) = P(X=3)$$

$$P(X=0) = a, P(X=1) = b \text{ 라 할 때,}$$

이산확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	a	b	a	b	a	1

확률변수 X 가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$$3a+2b=1 \dots \textcircled{①}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times a + 1^2 \times b + 2^2 \times a + 3^2 \times b + 4^2 \times a$$

$$\text{이상 } E(X^2) = \frac{35}{6} \text{ 이므로}$$

$$20a+10b = \frac{35}{6} \dots \textcircled{②}$$

①, ②에서

$$a = \frac{1}{6}, b = \frac{1}{4}$$

$$\text{따라서 } P(X=0) = \frac{1}{6}$$

정답 ④

28. 출제의도 : 조건부확률을 이해하여 사건의 확률을 구할 수 있는가?

풀이 :

$f: X \rightarrow X$ 인 모든 함수 f 중에서 임의로 선택한 함수 f 가 조건을 만족시키는 사건을 A , $f(4)$ 가 짝수인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

이다. 한편, a 가 b 의 약수이면 b 는 a 의 배수이므로 주어진 조건을 다음과 같이 해석할 수 있다.

' $a \in X$, $b \in X$ 에 대하여

b 가 a 의 배수이면 $f(b)$ 는 $f(a)$ 의 배수이다.'

이때 다음의 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $f(1)=4$ 인 경우

2, 3, 4 모두 1의 배수이므로 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ 모두 $f(1)$ 인 4의 배수어야 한다. 4의 배수인 X 의 원소는 4뿐이므로

$$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=4$$

이어야 한다.

이 경우 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는 1이고, $f(4)$ 가 짝수인 함수 f 의 개수는 1이다.

(ii) $f(1)=3$ 인 경우

2, 3, 4 모두 1의 배수이므로 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ 모두 $f(1)$ 인 3의 배수어야 한다. 3의 배수인 X 의 원소는 3뿐이므로

$$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=3$$

이어야 한다.

이 경우 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는 1이고, $f(4)$ 가 짝수인 함수 f 의 개수는 0이다.

(iii) $f(1)=2$ 인 경우

2는 1의 배수이므로 $f(2)$ 는 $f(1)$ 인 2의 배수이어야 한다. 2의 배수인 X 의 원소는 2, 4이므로 $f(2)=2$ 또는 $f(2)=4$ 이다. 이때 각각의 경우에 대하여 $f(4)$ 는 $f(2)$ 의 배수이어야 하므로 $f(2)$ 와 $f(4)$ 의 순서쌍 ($f(2)$, $f(4)$)는 $(2, 2), (2, 4), (4, 4)$ 이다.

한편, 위의 각각의 경우에 대하여 $f(3)=2$ 또는 $f(3)=4$ 이므로 이 경우 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는 $3 \times 2 = 6$ 이고, $f(4)$ 가 짝수인 함수 f 의 개수도 6이다.

(iv) $f(1)=1$ 인 경우

2는 1의 배수이므로 $f(2)$ 는 $f(1)$ 인 1의 배수이어야 한다. 즉, $f(2)$ 는 1 또는 2 또는 3 또는 4이다. 이때 각각의 경우에 대하여 $f(4)$ 는 $f(2)$ 의 배수이어야 하므로 $f(2)$ 와 $f(4)$ 의 순서쌍 ($f(2)$, $f(4)$)는 $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3),$

(4, 4)
이다.

한편, 위의 각각의 경우에 대하여
 $f(3)$ 은 1 또는 2 또는 3 또는 4이
므로 이 경우 조건을 만족시키는 함
수 f 의 개수는
 $(4+2+1+1) \times 4 = 32$
이고, $f(4)$ 가 짝수인 함수 f 의 개수
는
 $(2+2+1) \times 4 = 20$
이다.

(i)~(iv)에서

$$\begin{aligned}n(A) &= 1 + 1 + 6 + 32 = 40 \\n(A \cap B) &= 1 + 6 + 20 = 27\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\&= \frac{n(A \cap B)}{n(A)} \\&= \frac{27}{40}\end{aligned}$$

정답 ④

29. 출제의도 : 이항분포와 정규분포의
관계를 이해하고 구하는 확률을 정규분
포로 근사하여 구할 수 있는가?

$B(16200, \frac{1}{3})$ 을 따르고,

$$E(X) = 16200 \times \frac{1}{3} = 5400$$

$$V(X) = 16200 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 3600 = 60^2$$

이다. 이때 16200은 충분히 큰 수이므로
확률변수 X 는 근사적으로 정규분포
 $N(5400, 60^2)$ 을 따른다.

점 A의 위치가 5700 이하이려면 주사위
를 던져 나온 눈의 수가 4 이하인 횟수
에서 5 이상인 횟수를 뺀 값이 5700 이
하이어야 하므로

$$(16200 - X) - X \leq 5700$$

$$X \geq 5250$$

따라서 구하는 확률을 표준정규분포표를
이용해 구한 값 k 는

$$k = P(X \geq 5250)$$

$$= P\left(Z \geq \frac{5250 - 5400}{60}\right)$$

$$= P(Z \geq -2.5)$$

$$= P(-2.5 \leq Z \leq 0) + P(Z \geq 0)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 2.5) + P(Z \geq 0)$$

$$= 0.494 + 0.5$$

$$= 0.994$$

따라서

$$1000 \times k = 1000 \times 0.994 = 994$$

정답 994

풀이 :

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 4
이하일 확률은 $\frac{2}{3}$, 5 이상일 확률은 $\frac{1}{3}$
이므로 주사위를 16200번 던졌을 때 5
이상의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X
라 하면 확률변수 X 는 이항분포

30. 출제의도 : 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

풀이 :

조건 (가)에서 학생 A가 받는 공의 개수는 0 또는 1 또는 2이다.

(i) 학생 A가 받는 공의 개수가 0일 때, 흰 공 4개를 두 학생 B, C에게 남김 없이 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2H_4 = {}_{2+4-1}C_4 = {}_5C_4 = 5$$

이고, 이 각각에 대하여 검은 공 4개를 두 학생 B, C에게 남김 없이 나누어 주는 경우의 수는 ${}_2H_4 = 5$ 이다.

이 중에서 학생 B가 받는 공의 개수가 0인 경우의 수는 1이고, 학생 B가 받는 공의 개수가 1인 경우는 흰 공 1개를 받는 경우 또는 검은 공 1개를 받는 경우에서 그 경우의 수가 2이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우의 수는 3이다.

따라서 학생 A가 받는 공의 개수가 0일 때, 조건 (나)를 만족시키는 경우의 수는

$$5 \times 5 - 3 = 22$$
이다.

(ii) 학생 A가 받는 공의 개수가 1일 때, 학생 A가 흰 공 1개를 받는다고 하면, 이러한 경우의 수는 1이다.

이때 남은 흰 공 3개를 두 학생 B, C에게 남김 없이 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2H_3 = {}_{2+3-1}C_3 = {}_4C_3 = 4$$

이고, 이 각각에 대하여 검은 공 4개를 두 학생 B, C에게 남김 없이 나누어 주는 경우의 수는 ${}_2H_4 = 5$ 이다.

이 중에서 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우의 수는 (i)과 마찬가지의 방법

으로 3이다.

그러므로 학생 A가 흰 공 1개를 받을 때, 조건 (나)를 만족시키는 경우의 수는 $1 \times 4 \times 5 - 3 = 17$ 이다.

마찬가지 방법으로 학생 A가 검은 공 1개를 받을 때, 조건 (나)를 만족시키는 경우의 수는 17이다.

따라서 학생 A가 받는 공의 개수가 1일 때, 조건 (나)를 만족시키는 경우의 수는 $17 + 17 = 34$ 이다.

(iii) 학생 A가 받는 공의 개수가 2일 때,

(iii-1) 학생 A가 흰 공 2개를 받는 경우

학생 A가 흰 공 2개를 받는 경우의 수는 1이다.

이때 남은 흰 공 2개를 두 학생 B, C에게 남김 없이 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2H_2 = {}_{2+2-1}C_2 = {}_3C_2 = 3$$

이고, 이 각각에 대하여 검은 공 4개를 두 학생 B, C에게 남김 없이 나누어 주는 경우의 수는 ${}_2H_4 = 5$ 이다.

이 중에서 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우의 수는 (i)과 마찬가지의 방법으로 3이다.

그러므로 학생 A가 흰 공 2개를 받을 때, 조건 (나)를 만족시키는 경우의 수는 $1 \times 3 \times 5 - 3 = 12$ 이다.

(iii-2) 학생 A가 검은 공 2개를 받는 경우

(iii-1)과 마찬가지의 방법으로 이 경우의 수는 12이다.

(iii-3) 학생 A가 흰 공 1개와 검은 공

1개를 받는 경우

학생 A가 흰 공 1개와 검은 공 1개를 받는 경우의 수는 1이다.

이때 남은 흰 공 3개를 두 학생 B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 ${}_2H_3 = 4$ 이고, 이 각각에 대하여 검은 공 3개를 두 학생 B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 ${}_2H_3 = 4$ 이다.

이 중에서 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우의 수는 (i)과 마찬가지의 방법으로 3이다.

그러므로 학생 A가 흰 공 1개와 검은 공 1개를 받을 때, 조건 (나)를 만족시키는 경우의 수는 $1 \times 4 \times 4 - 3 = 13$ 이다.

따라서 학생 A가 받는 공의 개수가 2일 때의 경우의 수는 $12 + 12 + 13 = 37$ 이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 $22 + 34 + 37 = 93$

정답 93