

2023학년도 대학수학능력시험
수학영역 정답 및 풀이

*최근 수정일 : 24.8.27(화)

[공통: 수학 I·수학 II]

- 01. ⑤ 02. ④ 03. ① 04. ③ 05. ⑤
- 06. ② 07. ④ 08. ④ 09. ③ 10. ④
- 11. ① 12. ② 13. ③ 14. ① 15. ⑤
- 16. 10 17. 15 18. 22 19. 7
- 20. 17 21. 33 22. 13

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 계산 할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{2^{\sqrt{2}}}\right)^{2+\sqrt{2}} &= (2^2 \div 2^{\sqrt{2}})^{2+\sqrt{2}} \\ &= (2^{2-\sqrt{2}})^{2+\sqrt{2}} \\ &= 2^{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} \\ &= 2^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

정답 ⑤

2. 출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2} + 3x}{x+5} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{2}{x^2}} + 3}{1 + \frac{5}{x}} \\ &= \frac{\sqrt{1-0}+3}{1+0} \\ &= 4 \end{aligned}$$

정답 ④

3. 출제의도 : 등비수열의 첫째항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 $r(r>0)$ 이라 하자.

$$a_2 + a_4 = 30 \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

$$\text{한편, } a_4 + a_6 = \frac{15}{2}$$

에서

$$r^2(a_2 + a_4) = \frac{15}{2} \quad \dots \dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$r^2 \times 30 = \frac{15}{2}$$

$$r^2 = \frac{1}{4}$$

$r > 0$ 이므로

$$r = \frac{1}{2}$$

①에서

$$a_1 r + a_1 r^3 = 30$$

$$a_1 \times \frac{1}{2} + a_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 30$$

$$a_1 \times \frac{5}{8} = 30$$

따라서

$$a_1 = 30 \times \frac{8}{5} = 48$$

정답 ①

4. 출제의도 : 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$g(x) = x^2 f(x) \text{에서 미분하면}$$

$$g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x)$$

이때, $f(2) = 1$, $f'(2) = 3$ 이므로

$$g'(2) = 4f(2) + 4f'(2)$$

$$= 4 \times 1 + 4 \times 3$$

$$= 16$$

정답 ③

는가?

정답풀이 :

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + ax + 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + a$$

함수 $f(x)$ 가 $x = 1$ 에서 극대이므로

$$f'(1) = 6 - 18 + a = 0$$

$$a = 12$$

이때,

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$$

$$= 6(x-1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

이때 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극소이므로

$$b = 2$$

$$\text{따라서 } a+b = 12+2 = 14$$

정답 ②

5. 출제의도 : 조건을 만족시키는 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta \text{이므로}$$

$$\sin\theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$\tan\theta < 0$, $\sin\theta < 0$ 이므로 θ 는 제4사분면의 각이고, $\cos\theta > 0$ 이다.

그리고

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$= 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2$$

$$= \frac{4}{5}$$

에서

$$\cos\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 또는 } \cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

따라서 $\cos\theta > 0$ 이므로

$$\cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

정답 ⑤

7. 출제의도 : 등차수열의 일반항과 \sum 의 정의를 이용하여 등차수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공차가 같으

므로 $a_1 = a$ 라 하면

$$a_n = a + (n-1) \times a$$

$$= an$$

한편

6. 출제의도 : 함수의 극대, 극소의 성질을 이용하여 두 상수의 합을 구할 수 있

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = 2$$

에서

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} \\ &= \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{ak} + \sqrt{a(k+1)}} \\ &= \sum_{k=1}^{15} \frac{\sqrt{a(k+1)} - \sqrt{ak}}{a} \\ &= \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{15} (\sqrt{a(k+1)} - \sqrt{ak}) \\ &= \frac{1}{a} \{ (\sqrt{2a} - \sqrt{a}) + (\sqrt{3a} - \sqrt{2a}) + \dots \\ &\quad \dots + (\sqrt{16a} - \sqrt{15a}) \} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a} (4\sqrt{a} - \sqrt{a})$$

$$= \frac{3\sqrt{a}}{a}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{a}} = 2$$

이때,

$$2\sqrt{a} = 3$$

$$a = \frac{9}{4}$$

따라서,

$$a_4 = 4a = 4 \times \frac{9}{4} = 9$$

정답 ④

8. 출제의도 : 곡선 밖의 점에서 그은 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$y = x^3 - x + 2 \text{에서}$$

$$y' = 3x^2 - 1$$

이때 곡선 $y = x^3 - x + 2$ 위의 점

$(t, t^3 - t + 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - (t^3 - t + 2) = (3t^2 - 1)(x - t)$$

이 직선이 점 $(0, 4)$ 를 지나므로

$$4 - (t^3 - t + 2) = (3t^2 - 1)(0 - t)$$

정리하면 $t^3 = -1$ 이므로

$$t = -1$$

따라서 점 $(0, 4)$ 에서 곡선 $y = x^3 - x + 2$

에 그은 접선의 방정식은

$$y - 2 = 2(x + 1)$$

$$y = 2x + 4$$

그러므로 직선 $y = 2x + 4$ 의 x 절편은 -2 이다.

정답 ④

9. 출제의도 : 닫힌구간에서 탄젠트함수의 최댓값과 최솟값을 이용하여 두 상수의 곱을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x) = a - \sqrt{3} \tan 2x$ 의 그래프의 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6}, b\right]$ 에서 최댓값과 최솟값을 가지므로

$$-\frac{\pi}{6} < b < \frac{\pi}{4}$$

이다.

한편, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 구간 $\left[-\frac{\pi}{6}, b\right]$ 에서 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

함수 $f(x)$ 는 $x = -\frac{\pi}{6}$ 에서 최댓값 7을 가지므로

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = a - \sqrt{3} \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 7 \text{에서}$$

$$a + \sqrt{3} \tan \frac{\pi}{3} = 7$$

$$a + 3 = 7$$

$$a = 4$$

함수 $f(x)$ 는 $x=b$ 에서 최솟값 3을 가지

므로

$$f(b) = 4 - \sqrt{3} \tan 2b = 3 \text{에서}$$

$$\tan 2b = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

이때, $-\frac{\pi}{3} < 2b < \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$2b = \frac{\pi}{6}$$

$$b = \frac{\pi}{12}$$

$$\text{따라서 } a \times b = 4 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

정답 ③

10. 출제의도 : 정적분과 넓이의 관계를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

$A = B^o$ [므로]

$$\int_0^2 \{(x^3 + x^2) - (-x^2 + k)\} dx = 0$$

이어야 한다.

이때,

$$\int_0^2 \{(x^3 + x^2) - (-x^2 + k)\} dx$$

$$= \int_0^2 (x^3 + 2x^2 - k) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - kx \right]_0^2$$

$$= 4 + \frac{16}{3} - 2k$$

$$= \frac{28}{3} - 2k = 0$$

따라서,

$$2k = \frac{28}{3}$$

$$k = \frac{14}{3}$$

정답 ④

11. 출제의도 : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\angle BAC = \angle CAD = \theta$ 라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos\theta$$

$$= 25 + 45 - 2 \times 5 \times 3\sqrt{5} \times \cos\theta$$

$$= 70 - 30\sqrt{5} \cos\theta$$

또 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AD} \times \overline{AC} \times \cos\theta$$

$$= 49 + 45 - 2 \times 7 \times 3\sqrt{5} \times \cos\theta$$

$$= 94 - 42\sqrt{5} \cos\theta$$

이때 $\angle BAC = \angle CAD$ 이므로

$$\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2$$

$$70 - 30\sqrt{5} \cos\theta = 94 - 42\sqrt{5} \cos\theta \text{에서}$$

$$\cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\overline{BC}^2 = 70 - 30\sqrt{5} \cos\theta$$

$$= 70 - 30\sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$= 10$$

즉, $\overline{BC} = \sqrt{10}$

한편,

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \right)^2 = \frac{1}{5}$$

이므로 $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이를 R 라 하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \theta} = 2R$$

$$\frac{\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = 2R$$

$$5\sqrt{2} = 2R$$

즉, $R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

정답 ①

12. 출제의도 : 정적분과 넓이의 관계를 이용하여 함수를 구한 후, 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속
이므로

$$n-1 \leq x \leq n \text{ 일 때},$$

$$f(x) = 6(x-n+1)(x-n)$$

또는

$$f(x) = -6(x-n+1)(x-n)$$

함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 최솟값 0을 가지

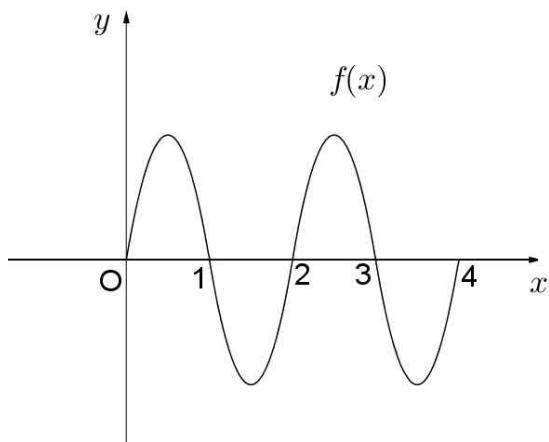
므로

$$g(2) = \int_0^2 f(t)dt - \int_2^4 f(t)dt = 0$$

$$\int_0^2 f(t)dt = \int_2^4 f(t)dt$$

이때, 함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 최솟값을

가져야 하므로 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



따라서

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1}{2}}^4 f(x)dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx \\ &\quad + \int_3^4 f(x)dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx \\ &\quad - \int_0^1 f(x)dx \\ &= - \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx \\ &= - \int_0^{\frac{1}{2}} \{-6x(x-1)\}dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (6x^2 - 6x)dx \\ &= [2x^3 - 3x^2]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

정답 ②

2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

이므로

$$f(4) = 7$$

13. 출제의도 : 거듭제곱근의 뜻을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

m^{12} 의 n 제곱근은 x 에 대한 방정식

$$x^n = m^{12} \quad \text{---} \textcircled{7}$$

의 근이다.

이때, m 의 값에 따라 ⑦의 방정식이 정수근을 갖도록 하는 2 이상의 자연수 n 의 개수를 구하면 다음과 같다.

(i) $m = 2$ 일 때,

⑦의 방정식은

$$x^n = 2^{12}$$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n 의 값은

2, 3, 4, 6, 12

이므로

$$f(2) = 5$$

(ii) $m = 3$ 일 때,

⑦의 방정식은

$$x^n = 3^{12}$$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n 의 값은

2, 3, 4, 6, 12

이므로

$$f(3) = 5$$

(iii) $m = 4$ 일 때,

⑦의 방정식은

$$x^n = 4^{12}$$

즉,

$$x^n = 2^{24}$$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n 의 값은

(iv) $m = 5$ 일 때,

⑦의 방정식은

$$x^n = 5^{12}$$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n 의 값은

2, 3, 4, 6, 12

이므로

$$f(5) = 5$$

(v) $m = 6$ 일 때,

⑦의 방정식은

$$x^n = 6^{12}$$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n 의 값은

2, 3, 4, 6, 12

이므로

$$f(6) = 5$$

(vi) $m = 7$ 일 때,

⑦의 방정식은

$$x^n = 7^{12}$$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n 의 값은

2, 3, 4, 6, 12

이므로

$$f(7) = 5$$

(vii) $m = 8$ 일 때,

⑦의 방정식은

$$x^n = 8^{12}$$

즉,

$$x^n = 2^{36}$$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n 의 값은

2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

이므로

$$f(8) = 8$$

(viii) $m = 9$ 일 때,

⑦의 방정식은

$$x^n = 9^{12}$$

즉,

$$x^n = 3^{24}$$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n 의 값은

$$2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$$

이므로

$$f(9) = 7$$

따라서,

$$\sum_{m=2}^9 f(m)$$

$$= f(2) + f(3) + \dots + f(9)$$

$$= 5 + 5 + 7 + 5 + 5 + 5 + 8 + 7$$

$$= 5 \times 5 + 7 \times 2 + 8$$

$$= 47$$

정답 ③

14. 출제의도 : 극한으로 표현된 함수에 대하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별 할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ.

$x > 1$ 에서 $g(x) = x$ 이므로

$$h(1) = \lim_{t \rightarrow 0+} g(1+t) \times \lim_{t \rightarrow 2+} g(1+t)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} (1+t) \times \lim_{t \rightarrow 2+} (1+t)$$

$$= 1 \times 3$$

$$= 3 \text{ (참)}$$

ㄴ.

$$h(x) = \lim_{t \rightarrow 0+} g(x+t) \times \lim_{t \rightarrow 2+} g(x+t)$$

이므로

$$x < -3 \text{ 일 때 } h(x) = x \times (x+2)$$

$$x = -3 \text{ 일 때 } h(-3) = -3 \times f(-1)$$

$$-3 < x < -1 \text{ 일 때 }$$

$$h(x) = x \times f(x+2)$$

$$x = -1 \text{ 일 때 } h(-1) = f(-1) \times 1$$

$$-1 < x < 1 \text{ 일 때 }$$

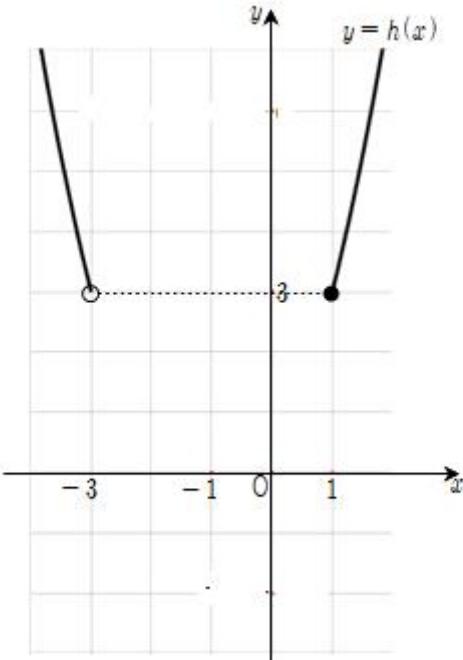
$$h(x) = f(x) \times (x+2)$$

$$x = 1 \text{ 일 때 } h(1) = 1 \times 3$$

$$x > 1 \text{ 일 때 } h(x) = x \times (x+2)$$

즉, $x < -3$ 또는 $x \geq 1$ 일 때, 함수

$y = h(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

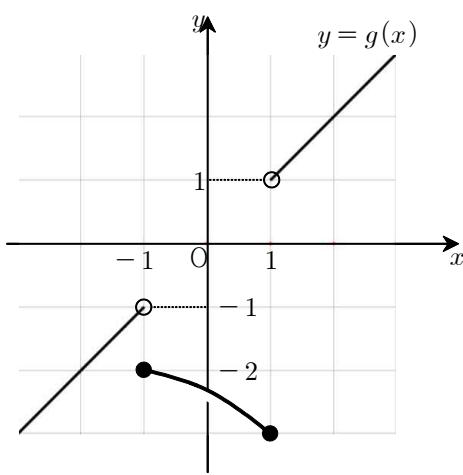


$f(-3) \neq 3$ 이면 함수 $h(x)$ 는 $x = -3$ 에서 불연속이다.

즉, 함수 $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이라 할 수 없다. (거짓)

ㄷ.

함수 $g(x)$ 가 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 감소하고 $g(-1) = -2$ 일 때, 함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



이 때,

$$h(-3) = -3 \times f(-1) = -3 \times (-2) = 6$$

$$h(-1) = f(-1) \times 1 = -2 \times 1 = -2$$

이다.

$-3 < x < -1$ 에서 $h(x) > 0$

또 $-1 < x < 1$ 에서

$$h(x) = f(x) \times (x+2)$$

$$h'(x) = f'(x) \times (x+2) + f(x)$$

$$f'(x) < 0, \quad x+2 > 0, \quad f(x) < 0 \text{ 이므로}$$

$$h'(x) < 0$$

즉, $-1 < x < 1$ 에서 함수 $h(x)$ 는 감소하고, $h(1) = 3$ 이므로

함수 $h(x)$ 는 최솟값을 갖지 않는다.

(거짓)

이상에서 옳은 것은 그뿐이다.

정답 ①

[다른 풀이]

ㄴ. <반례>

$$f(x) = 2 \text{라 하자.}$$

$$-3 < x < -1 \text{ 일 때, } h(x) = x \times 2 = 2x$$

$$x = -1 \text{ 일 때, } h(x) = 2 \times 1 = 2$$

$$-1 < x < 1 \text{ 일 때, } h(x) = 2(x+2)$$

이 때,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} 2x = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 2(x+2) = 2$$

$$h(-1) = 2$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} h(x)$$

이다.

즉, 함수 $h(x)$ 는 $x = -1$ 에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. <반례>

$$f(x) = -x - 3 \text{이라 하자.}$$

$$x < -3 \text{ 일 때, } h(x) = x(x+2)$$

$$x = -3 \text{ 일 때, } h(x) = -3 \times (-2) = 6$$

$$-3 < x < -1 \text{ 일 때, }$$

$$h(x) = x \times \{- (x+2) - 3\} = -x(x+5)$$

$$x = -1 \text{ 일 때, } h(-1) = -2 \times 1 = -2$$

$$-1 < x < 1 \text{ 일 때, }$$

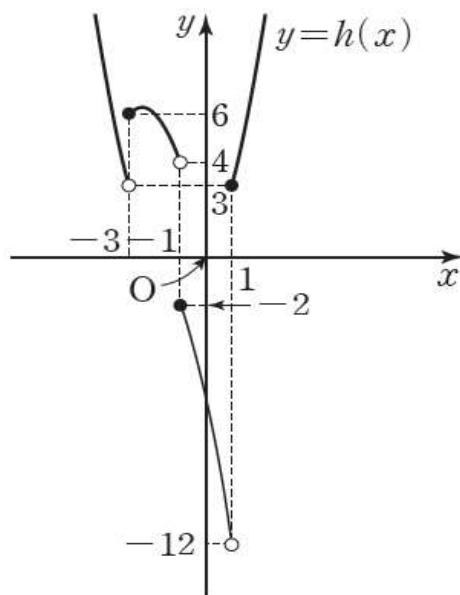
$$h(x) = (-x-3) \times (x+2) = -(x+3)(x+2)$$

$$x = 1 \text{ 일 때, } h(1) = 1 \times 3 = 3$$

$$x > 1 \text{ 일 때, } h(x) = x(x+2)$$

$$\text{이 때, } \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = -12, \quad h(1) = 3 \text{ 이므로}$$

함수 $h(x)$ 의 최솟값은 없다. (거짓)



15. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 a_9 의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(i) a_6 이 3의 배수인 경우

$a_7 = 40$ 이므로

$$\frac{a_6}{3} = a_7$$

$$a_6 = 3a_7 = 3 \times 40 = 120$$

$a_7 = 40$ 이 3의 배수가 아니므로

$$a_8 = a_6 + a_7 = 120 + 40 = 160$$

$a_8 = 160$ 이 3의 배수가 아니므로

$$a_9 = a_7 + a_8 = 40 + 160 = 200$$

(ii) $a_6 = 3k - 2$ (k 는 자연수)인 경우

$$a_5 + a_6 = a_7$$

$$a_5 = a_7 - a_6$$

$$= 40 - (3k - 2)$$

$$= 42 - 3k$$

$$= 3(14 - k)$$

a_5 는 자연수이므로

$3(14 - k) > 0$ 에서

$$k < 14$$

한편, a_5 는 3의 배수이므로

$$a_6 = \frac{a_5}{3}$$

즉, $3k - 2 = \frac{3(14 - k)}{3}$ 에서

$$4k = 16$$

$$k = 4$$

따라서

$$a_6 = 3 \times 4 - 2 = 10$$

이므로

$$\begin{aligned} a_8 &= a_6 + a_7 \\ &= 10 + 40 \\ &= 50 \end{aligned}$$

$a_8 = 50$ 이 3의 배수가 아니므로

$$\begin{aligned} a_9 &= a_7 + a_8 \\ &= 40 + 50 \\ &= 90 \end{aligned}$$

(iii) $a_6 = 3k - 1$ (k 는 자연수)인 경우

$$a_5 + a_6 = a_7$$

$$\begin{aligned} a_5 &= a_7 - a_6 \\ &= 40 - (3k - 1) \\ &= 41 - 3k \end{aligned}$$

a_5 는 자연수이므로

$41 - 3k > 0$ 에서

$$k < \frac{41}{3} \quad \dots \textcircled{I}$$

한편, a_5 는 3의 배수가 아니므로

$a_4 + a_5 = a_6$ 에서

$$\begin{aligned} a_4 &= a_6 - a_5 \\ &= (3k - 1) - (41 - 3k) \\ &= 6k - 42 \\ &= 3(2k - 14) \end{aligned}$$

a_4 가 자연수이므로

$3(2k - 14) > 0$ 에서

$$k > 7 \quad \dots \textcircled{L}$$

\textcircled{I}, \textcircled{L}에서

$$7 < k < \frac{41}{3}$$

한편, a_4 는 3의 배수이므로

$$a_5 = \frac{a_4}{3}$$

즉, $41 - 3k = \frac{3(2k - 14)}{3}$ 에서

$$5k = 55$$

$$k = 11$$

따라서

$$a_6 = 3 \times 11 - 1 = 32$$

이므로

$$\begin{aligned}a_8 &= a_6 + a_7 \\&= 32 + 40 \\&= 72\end{aligned}$$

$a_8 = 72$ 가 3의 배수이므로

$$a_9 = \frac{a_8}{3} = \frac{72}{3} = 24$$

(i), (ii), (iii)에서 a_9 의 최댓값은 $M = 200$ 이고 최솟값은 $m = 24$ 이다.
따라서
 $M+m = 200+24 = 224$

정답 ⑤

16. 출제의도 : 로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

$$\log_2(3x+2) = 2 + \log_2(x-2)$$

에서

$$\log_2(3x+2) = \log_2 2^2 + \log_2(x-2)$$

$$\log_2(3x+2) = \log_2\{4 \times (x-2)\}$$

이므로

$$3x+2 = 4(x-2)$$

$$3x+2 = 4x-8$$

$$x = 10$$

정답 10

17. 출제의도 : 부정적분을 이용하여 합수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}f(x) &= \int f'(x) dx \\&= \int (4x^3 - 2x) dx \\&= x^4 - x^2 + C \quad (C \text{는 적분상수})\end{aligned}$$

이때 $f(0) = 3$ 이므로 $C = 3$

따라서

$$f(x) = x^4 - x^2 + 3$$

$$f(2) = 16 - 4 + 3 = 15$$

정답 15

18. 출제의도 : 수열의 합의 기호의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^5 (3a_k + 5) = 55 \text{에서}$$

$$3 \sum_{k=1}^5 a_k + 25 = 55$$

$$\sum_{k=1}^5 a_k = 10$$

$$\sum_{k=1}^5 (a_k + b_k) = 32 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^5 a_k + \sum_{k=1}^5 b_k = 32$$

따라서

$$\sum_{k=1}^5 b_k = - \sum_{k=1}^5 a_k + 32$$

$$= -10 + 32$$

$$= 22$$

정답 22

19. 출제의도 : 근의 조건이 주어진 방정식에서 미분을 이용하여 정수 k 를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

방정식

$$2x^3 - 6x^2 + k = 0 \quad \text{----} \textcircled{7}$$

에서

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + k$$

라 하면 방정식의 실근은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축이 만나는 점의 x 좌표이다.

한편,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 12x \\ &= 6x(x-2) \end{aligned}$$

이므로

$$f'(x) = 0$$

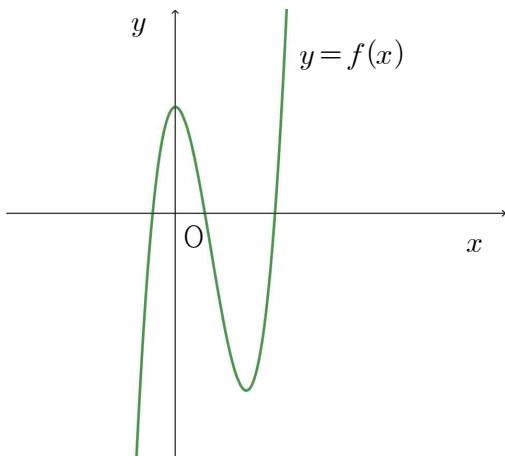
에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=2$$

그러므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	k	↘	$k-8$	↗

이때, ⑦이 2개의 서로 다른 양의 실근을 갖기 위해서는 다음 그림과 같아야 한다.



즉, 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 양수이어야 하고 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 음수이어야 한다.

그러므로

$$k > 0 \text{이고 } k-8 < 0$$

이므로

$$0 < k < 8$$

따라서, 정수 k 는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7로 그 개수는 7이다.

정답 7

20. 출제의도 : 속도와 가속도를 이용하여 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$t \geq 2$ 일 때

$$v(t) = 3t^2 + 4t + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

이때 $v(2)=0$ 이므로

$$12+8+C=0 \text{에서 } C=-20$$

즉, $0 \leq t \leq 3$ 에서

$$v(t) = \begin{cases} 2t^3 - 8t & (0 \leq t \leq 2) \\ 3t^2 + 4t - 20 & (2 \leq t \leq 3) \end{cases}$$

따라서 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} &\int_0^3 |v(t)| dt \\ &= \int_0^2 |v(t)| dt + \int_2^3 |v(t)| dt \\ &= - \int_0^2 v(t) dt + \int_2^3 v(t) dt \\ &= - \int_0^2 (2t^3 - 8t) dt + \int_2^3 (3t^2 + 4t - 20) dt \\ &= - \left[\frac{1}{2}t^4 - 4t^2 \right]_0^2 + [t^3 + 2t^2 - 20t]_2^3 \\ &= -(-8) + 9 \\ &= 17 \end{aligned}$$

정답 17

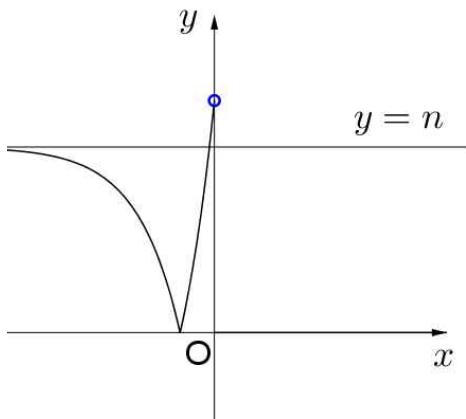
21. 출제의도 : 지수함수의 그래프와 로그함수의 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 자연수의 값의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

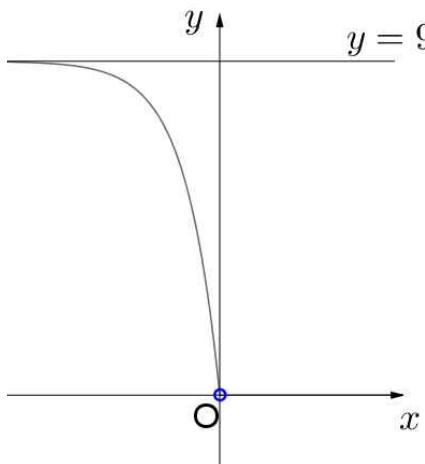
함수 $y = 3^{x+2} - n$ 의 그래프는 함수 $y = 3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 $-n$ 만큼 평행이동한 그래프이다.

함수 $y = |3^{x+2} - n|$ 의 그래프는 점 $(0, |9-n|)$ 을 지나고 점근선의 방정식은 $y = n$ 이다.

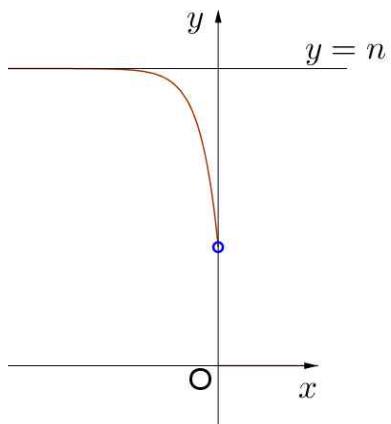
$x < 0$ 일 때, 자연수 n 의 값에 따른 함수 $y = |3^{x+2} - n|$ 의 그래프는 다음과 같다.
 $1 \leq n < 9$ 일 때,



$n = 9$ 일 때,



$n > 9$ 일 때,

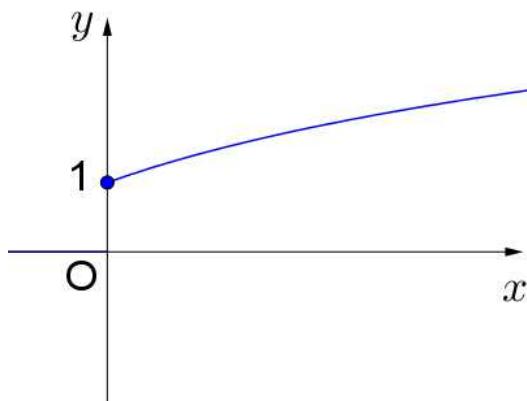


또, 함수 $y = \log_2(x+4) - n$ 의 그래프는 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -4 만큼, y 축의 방향으로 $-n$ 만큼 평행이동한 그래프이다.

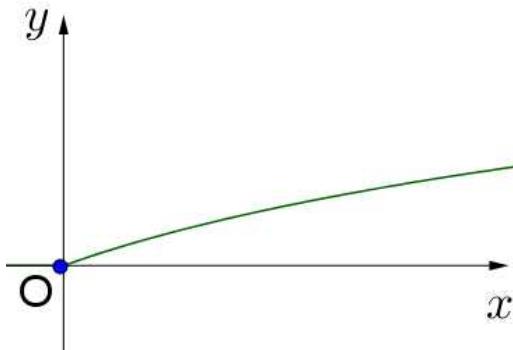
함수 $y = |\log_2(x+4) - n|$ 의 그래프는 점 $(0, |2-n|)$ 을 지나고 점근선의 방정식은 $x = -4$ 이다.

$x \geq 0$ 일 때, 자연수 n 의 값에 따른 함수 $y = |\log_2(x+4) - n|$ 의 그래프는 다음과 같다.

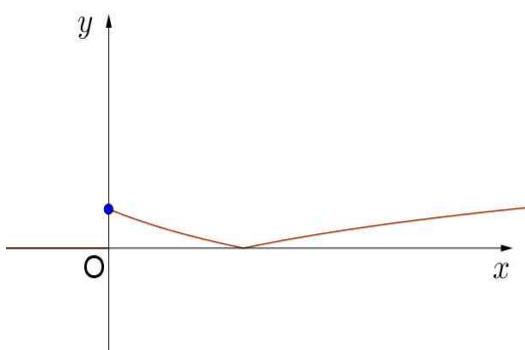
$n = 1$ 일 때,



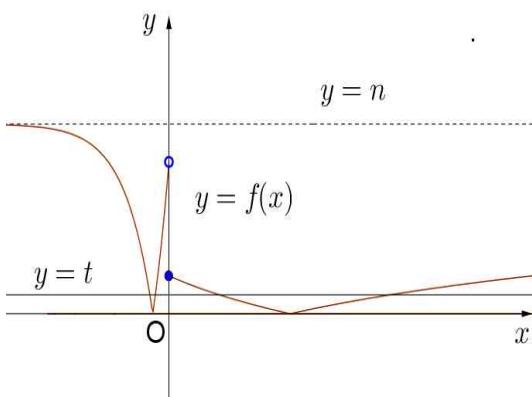
$n = 2$ 일 때,



$n > 2$ 일 때,



x 에 대한 방정식 $f(x) = t$ 의 서로 다른 실근의 개수 $g(t)$ 는 함수 $y = f(x)$ 의 그 래프와 직선 $y = t$ 가 만나는 점의 개수와 같다.



함수 $g(t)$ 의 최댓값이 4이므로
 $9 - n > 0$ 이고 $2 - n < 0$ 이어야 한다.
즉, $2 < n < 9$ 이다.

따라서 자연수 n 의 값은
3, 4, 5, 6, 7, 8
이고, 그 합은
 $3+4+5+6+7+8=33$
이다.

정답 33

22. 출제의도 : 평균값의 정리와 접선의 방정식을 이용하여 함수 $f(x)$ 를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
최고차항의 계수가 1이고 $f(0) = -3$ 이므로

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 3$$

이라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

조건 (가)에서

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(g(x))$$

이므로 $x \neq 1$ 일 때,

$$f'(g(x)) = \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \quad \text{---\textcircled{7}}$$

이때, 두 점 $(1, f(1))$, $(x, f(x))$ 를 지나는
직선의 기울기가 $f'(g(x))$ 이고

조건(나)에서 $g(x) \geq \frac{5}{2}$ 이므로 두 점

$(1, f(1))$, $\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$ 를 지나는 직선은

점 $\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$ 에서 접하는 직선이다.

그러므로 직선

$$y - f\left(\frac{5}{2}\right) = f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

는 점 $(1, f(1))$ 을 지난다,
즉,

$$1 + a + b - 3 - \left\{ \left(\frac{5}{2}\right)^3 + a\left(\frac{5}{2}\right)^2 + b\left(\frac{5}{2}\right) - 3 \right\}$$

$$= \left\{ 3 \times \left(\frac{5}{2} \right)^2 + 5a + b \right\} \left(1 - \frac{5}{2} \right)$$

이 식을 정리하면

$$-\frac{117}{8} - \frac{21}{4}a - \frac{3}{2}b = \left(\frac{75}{4} + 5a + b \right) \left(-\frac{3}{2} \right)$$

$$\frac{9}{4}a = -\frac{108}{8}$$

$$a = -6$$

그러므로

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + bx - 3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + b$$

한편, ⑦에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

이때, $g(x)$ 는 연속함수이므로 $g(1) = k$ 라 하면 좌변은

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(g(x))$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \{3\{g(x)\}^2 - 12g(x) + b\}$$

$$= 3k^2 - 12k + b \quad \text{-----⑧}$$

또, 우변은

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= f'(1)$$

$$= 3 - 12 + b$$

$$= b - 9 \quad \text{-----⑨}$$

⑧과 ⑨으로부터

$$3k^2 - 12k + b = b - 9$$

$$3k^2 - 12k + 9 = 0$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0$$

$$(k-1)(k-3) = 0$$

$$k = 1 \text{ 또는 } k = 3$$

즉,

$$g(1) = 1 \text{ 또는 } g(1) = 3$$

이때, $g(1) = 1$ 은 $g(x)$ 가 최솟값 $\frac{5}{2}$ 를 갖

는다는 것에 모순이다.

그러므로

$$g(1) = 3$$

한편, 조건 (다)에서 $f(g(1)) = 6$ 이므로

$$f(3) = 6$$

$$27 - 54 + 3b - 3 = 6$$

$$3b = 36$$

$$b = 12$$

따라서,

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 3$$

이므로

$$f(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 + 12 \times 4 - 3 = 13$$

정답 13

[다른 풀이 1]

조건(가)와 조건(나)에 의해 두 점

$(1, f(1)), \left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right) \right)$ 를 지나는 직선은

점 $\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right) \right)$ 에서 접하는 직선이다.

따라서 삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x) - \left\{ f'\left(\frac{5}{2}\right) \left(x - \frac{5}{2} \right) + f\left(\frac{5}{2}\right) \right\}$$

$$= (x-1) \left(x - \frac{5}{2} \right)^2 \quad \text{-----⑩}$$

이다.

조건 (가)에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} f'(g(x))$$

이고 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$f'(1) = f'(g(1))$$

이다.

⑩의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) - f'\left(\frac{5}{2}\right) = \left(x - \frac{5}{2} \right)^2 + 2(x-1) \left(x - \frac{5}{2} \right)$$

$$= 3 \left(x - \frac{3}{2} \right) \left(x - \frac{5}{2} \right) \quad \text{-----⑪}$$

이고 $g(1) = k \left(k \geq \frac{5}{2} \right)$ 라 하면

$$f'(1) = f'(k)$$

이므로 ⑤에서

$$f'(1) - f'\left(\frac{5}{2}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

이고

$$f'(k) - f'\left(\frac{5}{2}\right) = 3 \left(k - \frac{3}{2}\right) \left(k - \frac{5}{2}\right)$$

에서

$$3 \left(k - \frac{3}{2}\right) \left(k - \frac{5}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

이므로

$$k = 3$$

따라서

$$f'(1) = f'(3) = \alpha \text{ 라 하면}$$

$$f'(x) = 3(x-1)(x-3)+\alpha$$

$$= 3x^2 - 12x + 9 + \alpha$$

양변을 x 에 대하여 부정적분하면

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + (9+\alpha)x + C$$

(단, C 는 적분상수)

조건 (다)에서 $f(0) = -3$, $f(3) = 6$ 이므로

$$C = -3, \alpha = 3$$

그러므로

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 3$$

따라서

$$f(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 + 12 \times 4 - 3 = 13$$

[다른 풀이 2]

조건 (다)에서 $f(0) = -3$ 이므로 두 상수 a, b 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 3$$

한편, 조건 (가)에서

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(g(x))$$

이므로

$$\begin{aligned} & f(x) - f(1) \\ &= (x^3 + ax^2 + bx - 3) - (1 + a + b - 3) \end{aligned}$$

$$= x^3 - 1 + a(x^2 - 1) + b(x - 1)$$

$$= (x-1)\{x^2 + x + 1 + a(x+1) + b\}$$

$$= (x-1)\{x^2 + (a+1)x + a + b + 1\}$$

즉,

$$f'(g(x)) = x^2 + (a+1)x + a + b + 1 \quad \text{--- } \textcircled{J}$$

그리고

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \text{] 고}$$

$$g(x) = y \text{ 라 하면}$$

$$3y^2 + 2ay + b = x^2 + (a+1)x + a + b + 1$$

따라서 y 에 대하여 정리하면

$$3y^2 + 2ay - \{x^2 + (a+1)x + a + 1\} = 0$$

이고 y 에 대하여 풀면

$$y = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 3\{x^2 + (a+1)x + a + 1\}}}{3}$$

이고 근호 안을 정리하면

$$a^2 + 3\{x^2 + (a+1)x + a + 1\}$$

$$= 3\left\{x^2 + (a+1)x + \frac{1}{3}a^2 + a + 1\right\}$$

$$= 3\left\{\left(x + \frac{a+1}{2}\right)^2 + \frac{(a+3)^2}{12}\right\}$$

따라서

$$g(x) = \frac{-a \pm \sqrt{3\left\{\left(x + \frac{a+1}{2}\right)^2 + \frac{(a+3)^2}{12}\right\}}}{3}$$

즉,

$y = g(x)$ 의 그래프는 $y = \pm k\sqrt{x^2 + l}$ (k, l 은 상수)의 그래프를 평행이동한 그래프이다.

이때 함수 $g(x)$ 가 최솟값을 가지므로

$$g(x) = \frac{-a + \sqrt{3\left\{\left(x + \frac{a+1}{2}\right)^2 + \frac{(a+3)^2}{12}\right\}}}{3}$$

이고, $g(x)$ 는 $x = -\frac{a+1}{2}$ 에서 최솟값

$$\frac{-a + \sqrt{\frac{(a+3)^2}{4}}}{3} = \frac{-a + \frac{|a+3|}{2}}{3}$$

다.

따라서

(i) $a \geq -3$ 인 경우

$$\frac{-a + \frac{|a+3|}{2}}{3} = \frac{-a + \frac{a+3}{2}}{3} = \frac{-a+3}{6} = \frac{5}{2}$$

에서 $a = -12$ 인데 $a \geq -3$ 을 만족하지 않는다.

(ii) $a < -3$ 인 경우

$$\frac{-a + \frac{|a+3|}{2}}{3} = \frac{-a - \frac{a+3}{2}}{3} = \frac{-3a-3}{6} = \frac{5}{2}$$

에서 $a = -6$

(i),(ii)에 의해 $a = -6$

그러므로

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + bx - 3 \quad \text{-----(1)}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + b \quad \text{-----(2)}$$

한편, (1)에서 $f'(x)$ 와 $g(x)$ 가 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$f'(g(1)) = f'(1)$$

이때, $g(1) = k$ 라 하면 (2)으로부터

$$3k^2 - 12k + b = -9 + b$$

$$3k^2 - 12k + 9 = 0$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0$$

$$(k-1)(k-3) = 0$$

$k = 1$ 또는 $k = 3$

즉,

$g(1) = 1$ 또는 $g(1) = 3$

이때, $g(1) = 1$ 은 $g(x)$ 가 최솟값 $\frac{5}{2}$ 를 갖

는다는 것에 모순이다.

그러므로

$$g(1) = 3$$

한편, 조건 (다)에서 $f(g(1)) = 6$ 으로

$$f(3) = 6$$

이것을 (1)에 대입하면

$$27 - 54 + 3b = 9$$

$$3b = 36$$

$$b = 12$$

따라서,

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 3$$

이므로

$$f(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 + 12 \times 4 - 3 = 13$$

■ [선택: 기하]

23. ⑤ 24. ③ 25. ④ 26. ② 27. ①
28. ② 29. 12 30. 24

23. 출제의도 : 좌표공간의 점을 대칭이동한 점의 좌표와 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

좌표공간의 점 A(2, 2, -1)을 x축에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는

$$B(2, -2, 1)$$

따라서 점 C(-2, 1, 1)에 대하여 선분 BC의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= \sqrt{(-2-2)^2 + (1+2)^2 + (1-1)^2} \\ &= \sqrt{16+9} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5\end{aligned}$$

정답 ⑤

24. 출제의도 : 초점의 좌표와 준선의 방정식이 주어진 포물선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

초점이 점 F($\frac{1}{3}, 0$)이고 준선이 직선

$x = -\frac{1}{3}$ 인 포물선의 방정식은

$$y^2 = \frac{4}{3}x$$

이 포물선 위에 점 (a, 2)가 있으므로

$$2^2 = \frac{4}{3} \times a$$

따라서 $a = 3$

정답 ③

[다른 풀이]

점 (a, 2)가 초점이 점 F($\frac{1}{3}, 0$)이고 준선이 직선 $x = -\frac{1}{3}$ 인 포물선 위에 있으므로 A(a, 2)라 하면 선분 AF의 길이와 점 A에서 직선 $x = -\frac{1}{3}$ 까지의 거리가 같다. 즉,

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 + (2-0)^2} &= \left|a - \left(-\frac{1}{3}\right)\right| \\ \left(a - \frac{1}{3}\right)^2 + 4 &= \left(a + \frac{1}{3}\right)^2 \\ a^2 - \frac{2}{3}a + \frac{1}{9} + 4 &= a^2 + \frac{2}{3}a + \frac{1}{9} \\ \frac{4}{3}a &= 4 \\ \text{따라서 } a &= 3\end{aligned}$$

25. 출제의도 : 타원 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하고, 타원의 방정식에서 두 초점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 (2, 1)이 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위에 있으므로

$$\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 (2, 1)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 1$$

즉,

$$y = -\frac{2b^2}{a^2}x + b^2$$

이고, 주어진 조건에 의하여 접선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이므로

$$-\frac{2b^2}{a^2} = -\frac{1}{2}$$

$$a^2 = 4b^2$$

이것을 ⑦에 대입하면

$$\frac{4}{4b^2} + \frac{1}{b^2} = 1$$

$$b^2 = 2$$

$$a^2 = 8$$

그러므로 주어진 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

타원의 두 초점을 각각 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c > 0$)이라 하면

$$c^2 = 8 - 2 = 6$$

이므로

$$c = \sqrt{6}$$

따라서 구하는 두 초점 사이의 거리는

$$\overline{FF'} = 2\sqrt{6}$$

정답 ④

26. 출제의도 : 위치벡터의 성분과 벡터의 내적, 벡터의 연산을 이용하여 좌표 평면 위의 위치벡터의 종점이 그리는 도형의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\vec{p} = (x, y)$, $\vec{q} = (x', y')$ 이라 하고
 $A(2, 4)$, $B(2, 8)$, $C(1, 0)$, $P(x, y)$,

$Q(x', y')$ 이라 하자.

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$$

이므로

$$\overline{AP} \perp \overline{PB}$$

이다. 그러므로 점 P는 선분 AB을 지름

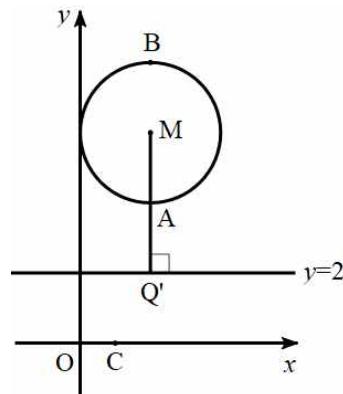
으로 하는 원 위를 움직인다. 즉, 점 P는 선분 AB의 중점인 점 M(2, 6)을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 위에 있다.

한편,

$$\begin{aligned}\vec{q} &= \frac{1}{2}\vec{a} + t\vec{c} \\ &= \frac{1}{2}(2, 4) + t(1, 0) \\ &= (1+t, 2)\end{aligned}$$

이므로 점 Q는 직선 $y=2$ 위에 있다.

이때 $|\vec{p} - \vec{q}|$ 의 값은 두 점 P, Q 사이의 거리와 같고 다음 그림과 같이 점 M에서 직선 $y=2$ 에 내린 수선의 발을 Q' 이라 하면 점 P가 점 A에 있고, 점 Q가 점 Q' 에 있을 때 두 점 P, Q 사이의 거리가 최소가 된다.



이때 $A(2, 4)$, $Q'(2, 2)$ 이므로

$$|\vec{p} - \vec{q}| = \overline{PQ} \geq \overline{AQ'} = 2$$

따라서 구하는 최솟값은 2이다.

정답 ②

[참고]

$\vec{p} = (x, y)$ 라 하고 $A(2, 4)$, $B(2, 8)$, $P(x, y)$ 라 하면
 $(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$
 에서
 $(x-2, y-4) \cdot (x-2, y-8) = 0$

$$(x-2)^2 + (y-4)(y-8) = 0$$

$$(x-2)^2 + (y-6)^2 = 4$$

이므로 점 P는 중심이 (2, 6)이고 반지름의 길이가 2인 원 위의 점이다.

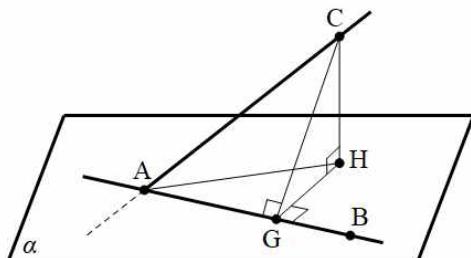
27. 출제의도 : 삼수선의 정리를 이용하여 공간에서 두 직선이 이루는 각의 크기, 직선과 평면이 이루는 각의 크기, 두 평면이 이루는 각의 크기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

다음 그림과 같이 점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 G, 평면 α 에 내린 수선의 발을 H라 하면, 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{HG} \perp \overline{AB}$$

이다.



직각삼각형 AGC에서 $\angle CAG = \theta_1$ 이고,

$$\sin \theta_1 = \frac{4}{5} \text{이므로 양수 } k \text{에 대하여}$$

$$\overline{AC} = 5k \text{라 하면 } \overline{CG} = 4k \text{이고,}$$

$$\cos \theta_1 = \frac{3}{5} \text{이다.}$$

또, 직각삼각형 AHC에서

$$\angle CAH = \frac{\pi}{2} - \theta_1 \text{이므로}$$

$$\overline{CH} = \overline{AC} \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)$$

$$= 5k \times \cos \theta_1$$

$$= 5k \times \frac{3}{5} = 3k$$

이때 직각삼각형 CGH에서

$$\overline{GH} = \sqrt{\overline{CG}^2 - \overline{CH}^2}$$

$$= \sqrt{(4k)^2 - (3k)^2}$$

$$= \sqrt{7}k$$

이고, $\angle CGH = \theta_2$ 이므로

$$\cos \theta_2 = \frac{\overline{GH}}{\overline{CG}}$$

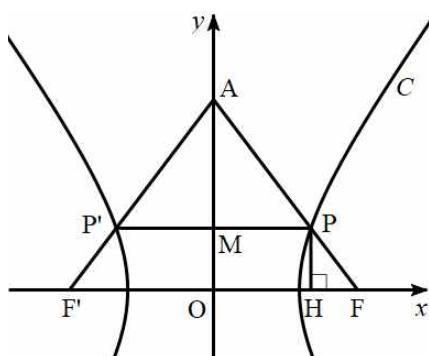
$$= \frac{\sqrt{7}k}{4k} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

정답 ①

28. 출제의도 : 쌍곡선의 점근선의 방정식을 이용하여 쌍곡선의 방정식을 구하고, 주축의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 선분 PP'이 y축과 만나는 점을 M이라 하자.



$\overline{AP} : \overline{PP'} = 5 : 6$ 이고 점 M은 선분 PP'의 중점이므로

$$\overline{AP} : \overline{MP} = 5 : 3$$

이고, 직각삼각형 AMP에서

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MP}} = \frac{4}{3}$$

즉, 직선 AF의 기울기는 $-\frac{4}{3}$ 이고 직선 AF'의 기울기는 $\frac{4}{3}$ 이므로 쌍곡선 C의 두 점근선의 기울기는 $\pm\frac{4}{3}$ 이다.

쌍곡선 C의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } a > 0, b > 0)$$

으로 놓으면

$$\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$$

이므로

$$a = 3k, b = 4k \quad (\text{단, } k > 0)$$

이라 하면 쌍곡선 C의 방정식은

$$\frac{x^2}{9k^2} - \frac{y^2}{16k^2} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이다.

이때 점 F의 x좌표는

$$\sqrt{9k^2 + 16k^2} = \sqrt{25k^2} = 5k$$

이고, 직각삼각형 PHF에서 $\overline{PF} = 1$ 이므로

$$\overline{HF} = \frac{3}{5}, \overline{PH} = \frac{4}{5}$$

이다.

즉, 점 P의 좌표는

$$P\left(5k - \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

이고 이 점이 쌍곡선 C 위에 있으므로 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$\frac{\left(5k - \frac{3}{5}\right)^2}{9k^2} - \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^2}{16k^2} = 1$$

$$25k^2 - 6k + \frac{9}{25} - \frac{9}{25} = 9k^2$$

$$16k^2 - 6k = 0$$

$$2k(8k - 3) = 0$$

$$k > 0 \text{이므로 } k = \frac{3}{8}$$

따라서 구하는 쌍곡선 C의 주축의 길이는

$$2a = 2 \times 3k = 6k = 6 \times \frac{3}{8} = \frac{9}{4}$$

정답 ②

29. 출제의도 : 벡터의 연산과 벡터의 내적을 이용하여 조건을 만족시키는 점의 위치를 찾고, 벡터의 내적을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{BP} &= \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \\ &= \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

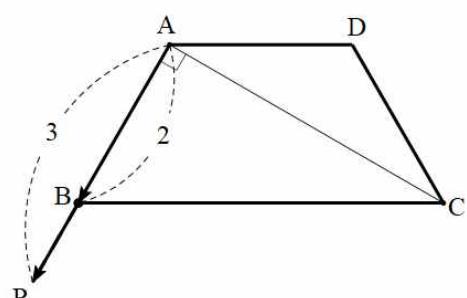
이므로

$$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

따라서 점 P는 선분 BA를 1:3으로 외분하는 점이고,

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = 3$$

이다.



한편, $\overline{AB} = 2$, $\overline{BC} = 4$, $\angle CBA = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$\angle BAC = \frac{\pi}{2}$, $\overline{AC} = 2\sqrt{3}$ 이다.

따라서 점 P에서 직선 AC에 내린 수선의 발이 A이다.

점 Q에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 조건 (나)에 의하여 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH} = 6$

이어야 하므로 점 H는 선분 AC 위에 있고

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH} = |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AH}| = 2\sqrt{3} \times \overline{AH} = 6$$

즉,

$$\overline{AH} = \sqrt{3}$$

이다.

따라서 점 H는 선분 AC의 중점이므로 점 Q는 선분 AC의 수직이등분선인 직선 DH 위에 있다.

이때 삼각형 ABQ에서

$$\angle PBQ = \angle BAQ + \angle BQA$$

이므로

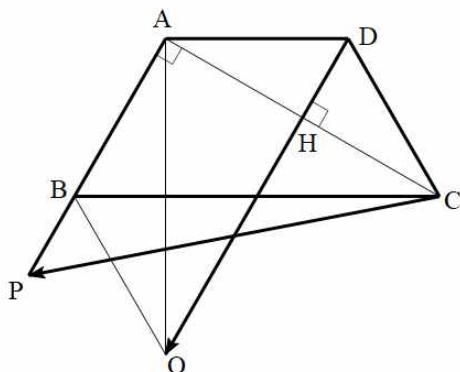
$$2 \times \angle BQA = \angle PBQ$$

를 만족시키려면

$$\angle BAQ = \angle BQA,$$

즉, $\overline{AB} = \overline{BQ}$ 이어야 한다.

따라서 조건을 만족시키는 점 Q는 다음 그림과 같이 점 A를 지나고 직선 BC에 수직인 직선이 직선 DH와 만나는 점이어야 한다.



이때 직각삼각형 AQD에서

$$\overline{AD} = 2, \overline{AQ} = 2\sqrt{3}$$

이므로

$$\overline{DQ} = \sqrt{4+12} = 4$$

따라서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DQ} &= (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP}) \cdot \overrightarrow{DQ} \\ &= \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DQ} \\ &= |\overrightarrow{CA}| |\overrightarrow{DQ}| \cos \frac{\pi}{2} + |\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{DQ}| \cos 0 \\ &= 0 + 3 \times 4 \times 1 \\ &= 12\end{aligned}$$

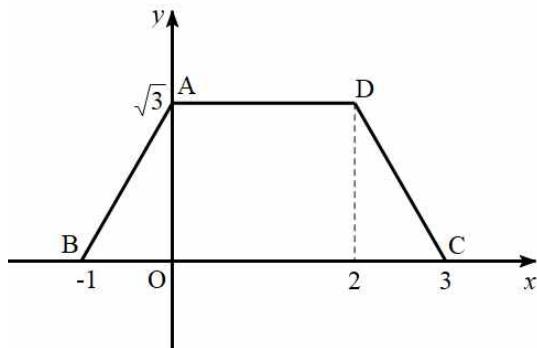
정답 12

[다른 풀이]

다음 그림과 같이 네 점 A, B, C, D의 좌표가 각각

$$A(0, \sqrt{3}), B(-1, 0), C(3, 0), D(2, \sqrt{3})$$

이 되도록 좌표평면을 설정하자.



점 P의 좌표를 $P(a, b)$ 라 하면

$$\overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BP})$$

에서

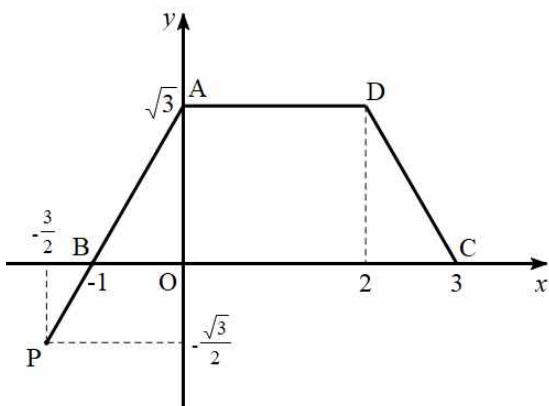
$$(3, -\sqrt{3}) = 2\{(2, 0) + (a+1, b)\}$$

$$3 = 2(a+3) \text{에서 } a = -\frac{3}{2}$$

$$-\sqrt{3} = 2b \text{에서 } b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

즉, $P\left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 이므로 다음 그림과

같이 세 점 A, B, P는 한 직선 위에 있고 $\overline{BP} = 1$ 이다.



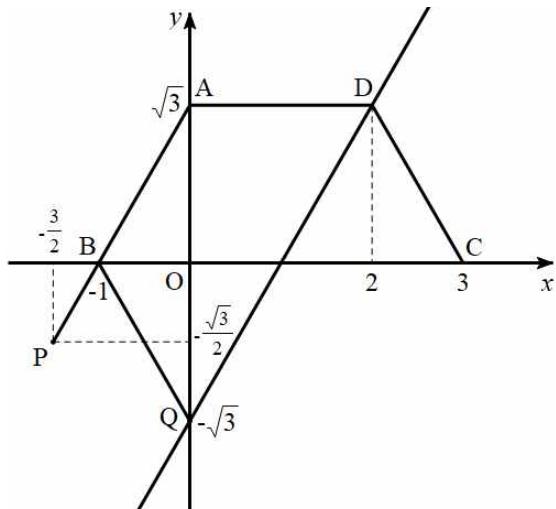
또, 점 Q의 좌표를 $Q(x, y)$ 라 하면
 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PQ} = 6$
 에서

$$(3, -\sqrt{3}) \cdot \left(x + \frac{3}{2}, y + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 6$$

$$3x + \frac{9}{2} - \sqrt{3}y - \frac{3}{2} = 6$$

$$y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$$

이므로 점 Q는 직선 $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$ 위에 있다.



이때 삼각형 ABQ에서

$$\angle PBQ = \angle BAQ + \angle BQA$$

이므로

$$2 \times \angle BQA = \angle PBQ$$

를 만족시키려면

$$\angle BAQ = \angle BQA,$$

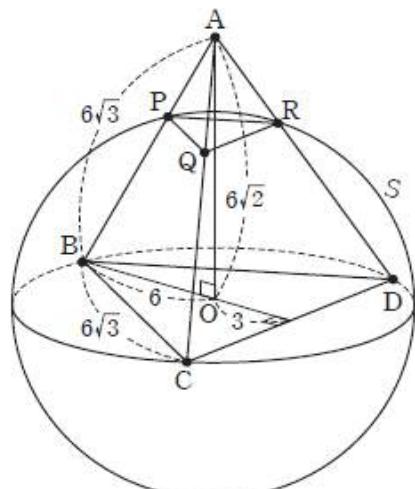
따라서 조건을 만족시키는 점 Q의 좌표
는 $Q(0, -\sqrt{3})$ 이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DQ} &= \left(-\frac{9}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot (-2, -2\sqrt{3}) \\ &= 9 + 3 \\ &= 12\end{aligned}$$

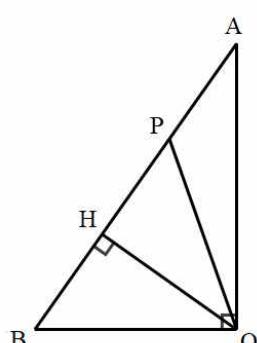
30. 출제의도 : 공간에서 두 평면이 이루는 각의 크기를 구하여 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

구 S 의 중심, 즉 삼각형 BCD 의 외심을 O 라 하면 직각삼각형 ABO 에서
 $\overline{AB} = 6\sqrt{3}$, $\overline{BO} = 6$, $\overline{AO} = 6\sqrt{2}$
 이다.



이때 점 P 가 구 S 위에 있으므로 $\overline{OP} = 6$



즉, 삼각형 OBP가 이등변삼각형이므로
점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을
H라 하면 점 H는 선분 BP의 중점이다.
한편, $\triangle ABO \sim \triangle OBH$ 이므로

$$6 : 6\sqrt{3} = \overline{BH} : 6 \text{에서}$$

$$\overline{BH} = 2\sqrt{3}$$

따라서

$$\overline{AP} = \overline{AB} - \overline{BP}$$

$$= \overline{AB} - 2 \times \overline{BH}$$

$$= 6\sqrt{3} - 2 \times 2\sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{3}$$

이므로 삼각형 PQR는 한 변의 길이가
 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형이다.

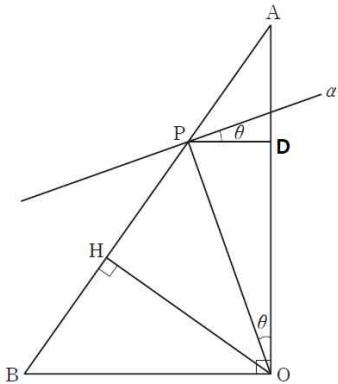
즉, 삼각형 PQR의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{3})^2 = 3\sqrt{3}$$

한편, 다음 그림과 같이 평면 α 와 평면
PQR가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\angle AOP = \theta$$

이다.



점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을
D라 하면

$$\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AD} : \overline{OD} = 1 : 2 \text{이므로}$$

$$\overline{OD} = \frac{2}{3} \overline{OA} = \frac{2}{3} \times 6\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

그러므로

$$\cos \theta = \frac{\overline{OD}}{\overline{OP}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$$k = 3\sqrt{3} \times \cos \theta$$

$$= 3\sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$= 2\sqrt{6}$$

이므로

$$k^2 = (2\sqrt{6})^2 = 24$$

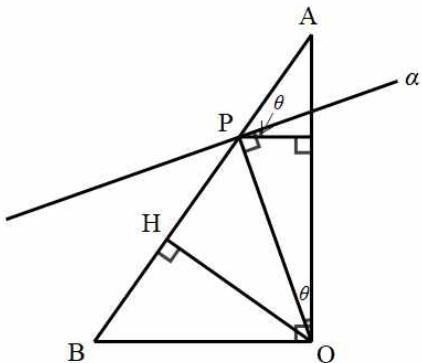
정답 24

[참고]

$\cos \theta$ 를 구하는 과정에서

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ 를 이용하여

계산할 수 있다.



직각삼각형 OHB에서

$$\sin(\angle BOH) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos(\angle BOH) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

이고, $\theta = \frac{\pi}{2} - 2\angle BOH$ 이므로

$$\cos \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\angle BOH\right)$$

$$= \sin(2\angle BOH)$$

$$= 2\sin(\angle BOH)\cos(\angle BOH)$$

$$= 2 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}$$