

2022학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가
수학영역 정답 및 풀이

[공통: 수학 I · 수학 II]

01. ④ 02. ⑤ 03. ① 04. ① 05. ③
 06. ④ 07. ② 08. ④ 09. ⑤ 10. ②
 11. ② 12. ③ 13. ⑤ 14. ③ 15. ②
 16. 2 17. 11 18. 4 19. 6 20. 8
 21. 24 22. 61

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & 2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}} \\ &= 2^{\sqrt{3} + (2 - \sqrt{3})} \\ &= 2^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

정답 ④

2. 출제의도 : 부정적분을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (3x^2 - 2x) dx \\ &= x^3 - x^2 + C \quad (C \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

$$f(1) = 1^3 - 1^2 + C = 1 \text{에서}$$

$$C = 1$$

따라서 $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ 이므로

$$f(2) = 2^3 - 2^2 + 1 = 5$$

정답 ⑤

3. 출제의도 : 삼각함수의 정의를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\tan \theta = \frac{12}{5} \text{이고 } \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{이므로}$$

각 θ 가 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하는 어떤 원의 교점이 $P(-5, -12)$ 이다.

따라서 원점 O에 대하여

$$\overline{OP} = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = 13$$

이므로

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{-12}{13} + \frac{-5}{13} = -\frac{17}{13}$$

정답 ①

4. 출제의도 : 함수의 그래프에서 좌극한의 값과 우극한의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$$

따라서

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \\ &= -2 + 0 = -2 \end{aligned}$$

정답 ①

5. 출제의도 : 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$g(x) = (x^2 + 3)f(x) \text{에서}$$

$$g'(x) = 2xf(x) + (x^2 + 3)f'(x)$$

따라서

$$\begin{aligned}g'(1) &= 2f(1) + 4f'(1) \\&= 2 \times 2 + 4 \times 1 \\&= 8\end{aligned}$$

정답 ③

6. 출제의도 : 정적분을 이용하여 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y = 3x^2 - x$ 와 직선 $y = 5x$ 의 교점의 x 좌표는

$$3x^2 - x = 5x$$

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x-2) = 0$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=2$$

구간 $[0, 2]$ 에서 직선 $y = 5x$ 가 곡선 $y = 3x^2 - x$ 보다 위쪽에 있거나 만나므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}S &= \int_0^2 [5x - (3x^2 - x)] dx \\&= \int_0^2 (6x - 3x^2) dx \\&= [3x^2 - x^3]_0^2 \\&= 3(4-0) - (8-0) \\&= 4\end{aligned}$$

정답 ④

7. 출제의도 : 등차수열에서 주어진 조건을 만족시키는 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$S_3 - S_2 = a_3 \text{이므로}$$

$$a_6 = 2a_3$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$2+5d = 2(2+2d)$$

$$2+5d = 4+4d \text{에서}$$

$$d=2$$

따라서 $a_{10} = 2+9 \times 2 = 20$ 이므로

$$\begin{aligned}S_{10} &= \frac{10(a_1 + a_{10})}{2} \\&= \frac{10 \times (2+20)}{2} \\&= 110\end{aligned}$$

정답 ②

8. 출제의도 : 함수의 연속의 성질을 이용하여 주어진 함수가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 를 제외한 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2$ 이 $x=a$ 에서 연속이면 함수 $\{f(x)\}^2$ 은 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $\{f(x)\}^2$ 이 $x=a$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \{f(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow a^-} \{f(x)\}^2 = \{f(a)\}^2$$

이어야 한다.

이때,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \{f(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow a^+} (2x-a)^2 = a^2$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \{f(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow a^-} (-2x+6)^2 = (-2a+6)^2$$

$$\{f(a)\}^2 = (2a-a)^2 = a^2$$

이므로

$$a^2 = (-2a+6)^2 \text{에서}$$

$$3(a-2)(a-6) = 0$$

$$a=2 \text{ 또는 } a=6$$

따라서 모든 상수 a 의 값의 합은

$$2+6=8$$

정답 ④

$$\text{또, } a_4 = \frac{1}{a_3} \text{이므로}$$

$$a_3 = 2$$

$$\text{또, } a_3 = 8a_2 \text{이므로}$$

$$a_2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{또, } a_2 = \frac{1}{a_1} \text{이므로}$$

$$a_1 = 4$$

따라서

$$a_1 + a_4 = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

정답 ⑤

정답풀이 :

$$a_{12} = \frac{1}{2} \text{이므로 } a_{12} = \frac{1}{a_{11}} \text{이므로}$$

$$a_{11} = 2$$

$$\text{또, } a_{11} = 8a_{10} \text{이므로}$$

$$a_{10} = \frac{1}{4}$$

$$\text{또, } a_{10} = \frac{1}{a_9} \text{이므로}$$

$$a_9 = 4$$

$$\text{또, } a_9 = 8a_8 \text{이므로}$$

$$a_8 = \frac{1}{2}$$

$$\text{또, } a_8 = \frac{1}{a_7} \text{이므로}$$

$$a_7 = 2$$

$$\text{또, } a_7 = 8a_6 \text{이므로}$$

$$a_6 = \frac{1}{4}$$

$$\text{또, } a_6 = \frac{1}{a_5} \text{이므로}$$

$$a_5 = 4$$

$$\text{또, } a_5 = 8a_4 \text{이므로}$$

$$a_4 = \frac{1}{2}$$

10. 출제의도 : 로그함수의 그래프가 만나는 점이 조건을 만족하도록 하는 n 의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

진수 조건에서 $x > 0$

$$-\log_n(x+3)+1 = \log_n \frac{n}{x+3} \text{이므로}$$

$$\log_n x = \log_n \frac{n}{x+3} \text{에서}$$

$$x = \frac{n}{x+3}$$

$$x^2 + 3x - n = 0$$

$$f(x) = x^2 + 3x - n \text{이라 하면}$$

$$f(1) < 0, f(2) > 0 \text{이어야 한다.}$$

$$f(1) = 4 - n < 0 \text{에서 } n > 4$$

$$f(2) = 10 - n > 0 \text{에서 } n < 10$$

따라서 $4 < n < 10$ 이므로

n 의 값은 5, 6, 7, 8, 9이고, 그 합은

$$5+6+7+8+9=35$$

정답 ②

11. 출제의도 : 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y = -f(x+1) + 1$ 의 그래프는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭 이동시킨 후, x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동시킨 것이다.

$$f(0)=0, f(1)=1, \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{6}$$

이므로

조건 (가)에서

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 g(x)dx &= \int_{-1}^0 \{-f(x+1)+1\}dx \\ &= 1 - \frac{1}{6} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{6}$$

$$\int_{-1}^1 g(x)dx$$

$$= \int_{-1}^0 g(x)dx + \int_0^1 g(x)dx$$

$$= \frac{5}{6} + \frac{1}{6}$$

$$= 1$$

조건 (나)에서

$$g(x+2) = g(x)$$

이므로

$$\int_{-3}^2 g(x)dx$$

$$= \int_{-3}^{-1} g(x)dx + \int_{-1}^1 g(x)dx + \int_1^2 g(x)dx$$

$$= 2 \int_{-1}^1 g(x)dx + \int_{-1}^0 g(x)dx$$

$$= 2 \times 1 + \frac{5}{6}$$

$$= \frac{17}{6}$$

정답 ②

12. 출제의도 : 코사인법칙과 삼각비를 이용하여 변의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 ABD에서

$$\angle BAC = \angle BDA \text{이고 } \overline{AB} = 4 \text{이므로}$$

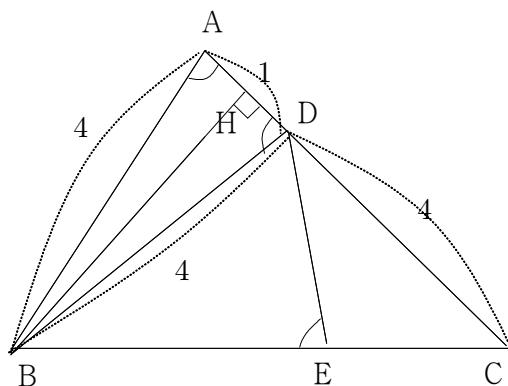
$$\overline{BD} = 4 \quad \dots\dots \odot$$

이때, 점 B에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \overline{AB} \cos(\angle BAC) = 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

그러므로

$$\overline{AD} = 1$$



삼각형 BCD는 $\overline{DB} = \overline{DC} = 4$ 인 이등변삼각형이다.

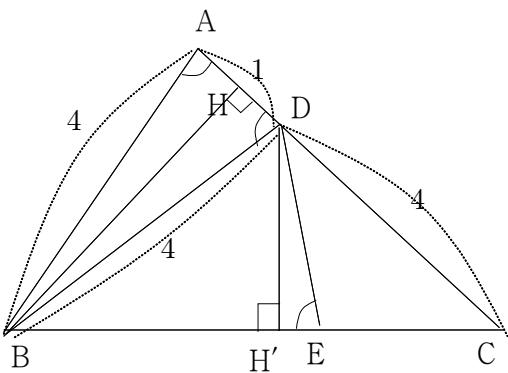
점 D에서 변 BC에 내린 수선의 발을

$$H', \overline{DE} = x \text{라 하면}$$

$$\overline{DH'} = x \sin(\angle H'ED)$$

$$= x \times \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{63}}{8}x \quad \dots \textcircled{L}$$



한편, 삼각형 ABC에서

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \\ &\quad - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos(\angle BAC) \\ &= 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \frac{1}{8} \\ &= 36\end{aligned}$$

이므로

$$\overline{BC} = 6$$

이때,

$$\overline{BH'} = \frac{1}{2} \overline{BC} = 3 \quad \dots \textcircled{E}$$

직각삼각형 DBH'에서 \textcircled{D} , \textcircled{L} , \textcircled{E} 를 이용하면

$$4^2 = \left(\frac{\sqrt{63}}{8}x \right)^2 + 3^2$$

$$\frac{63}{64}x^2 = 7$$

$$x^2 = \frac{64}{9}$$

$$\overline{DE} = x \quad \text{이므로 } x > 0$$

$$\text{따라서 } \overline{DE} = \frac{8}{3}$$

정답 ③

13. 출제의도 : 주기함수에서 합수값을 구하고, 그 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(i) $k = 1, 4, 9, 16$ 일 때

$$\begin{aligned}f(1) &= 1 \text{이고 } f(x+1) = f(x) \text{이므로} \\ f(1) &= f(2) = f(3) = f(4) = 1 \text{에서} \\ f(\sqrt{k}) &= 1\end{aligned}$$

(ii) $k \neq 1, 4, 9, 16$ 일 때

$$f(\sqrt{k}) = 3$$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20} k &= 210 \text{이고, } 1 + 4 + 9 + 16 = 30 \text{이므로} \\ \sum_{k=1}^{20} \frac{k \times f(\sqrt{k})}{3} &= \sum_{k=1}^{20} \left\{ k \times \frac{f(\sqrt{k})}{3} \right\} \\ &= 30 \times \frac{1}{3} + (210 - 30) \times \frac{3}{3} \\ &= 10 + 180 = 190\end{aligned}$$

정답 ⑤

14. 출제의도 : 절댓값을 포함한 함수의 미분가능성을 판단할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 - 6x - 9 \\ &= 3(x+1)(x-3)\end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ 에서

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	극대	\searrow	극소	\nearrow

함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극댓값 $f(-1) = -7$ 을 갖고, $x = 3$ 에서 극솟값 $f(3) = -39$ 를 갖는다.

조건 (가)에서

$$xg(x) = |xf(x-p) + qx|$$

이므로

$$g(x) = \begin{cases} |f(x-p) + q| & (x > 0) \\ -|f(x-p) + q| & (x < 0) \end{cases}$$

함수 $g(x)$ 가 $x = 0$ 에서 연속이므로

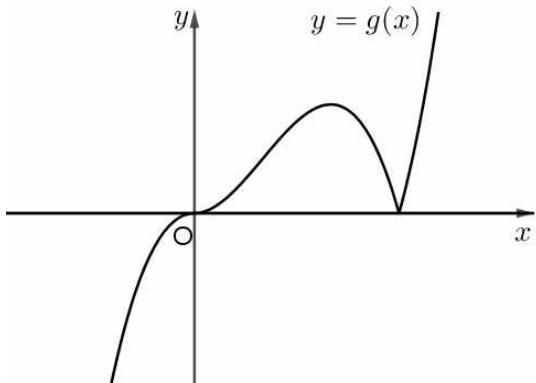
$$|f(-p) + q| = -|f(-p) + q|$$

즉, $|f(-p) + q| = 0$ 이어야 한다.

한편, 함수 $y = |f(x-p) + q|$ 의 그래프는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동시킨 후, $y < 0$ 인 부분에 그려진 부분을 x 축에 대하여 대칭이동시킨 것이다.

이때, p, q 가 모두 양수이고 조건 (나)에서 함수 $g(x)$ 가 $x = a$ 에서 미분가능하지 않은 실수 a 의 개수가 1이므로 $p = 1, q = 7$ 이어야 한다.

따라서 $p+q = 1+7 = 8$



15. 출제의도 :

삼각함수의 그래프를 이해하고 이를 이용하여 삼각함수가 포함된 방정식의 근에 관련된 문제를 추론할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ.

방정식

$$\left(\sin \frac{\pi x}{2} - t\right)\left(\cos \frac{\pi x}{2} - t\right) = 0$$

에서

$$\sin \frac{\pi x}{2} = t \text{ 또는 } \cos \frac{\pi x}{2} = t$$

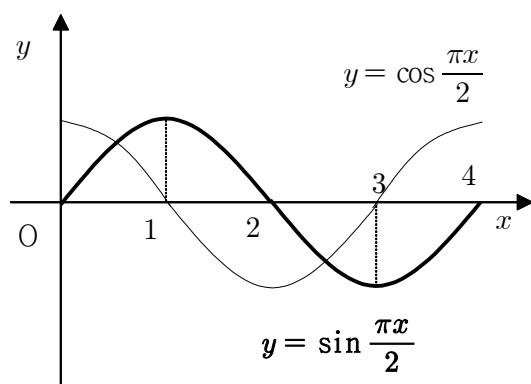
이 방정식의 실근은 두 함수

$$y = \sin \frac{\pi x}{2}, y = \cos \frac{\pi x}{2} \text{의 그래프와}$$

$y = t$ 와의 교점의 x 좌표이다.

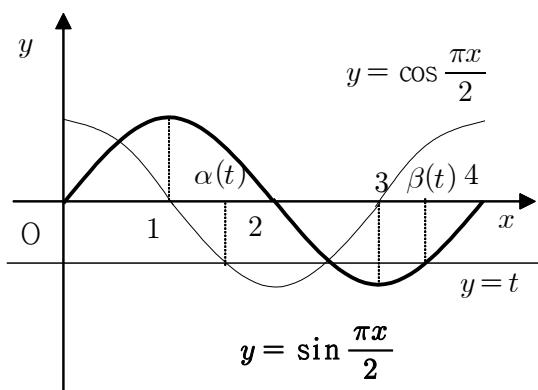
$$\text{한편, 두 함수 } y = \sin \frac{\pi x}{2}, y = \cos \frac{\pi x}{2}$$

의 주기가 모두 4이므로 다음과 같다.



$-1 \leq t < 0$ 이면 직선 $y = t$ 와 $\alpha(t), \beta(t)$ 는 다음 그림과 같다.

정답 ③



이때, 함수 $y = \cos \frac{\pi x}{2}$ 의 그래프는 함수

$y = \sin \frac{\pi x}{2}$ 의 그래프를 평행이동시키면

겹쳐질 수 있고 함수 $y = \sin \frac{\pi x}{2}$ 의 그래프는 직선 $x=1, x=3$ 에 대하여 대칭이고 점 $(2, 0)$ 에 대하여 대칭이다.

그러므로

$$\alpha(t) = 1 + k \quad (0 < k \leq 1)$$

로 놓으면

$$\beta(t) = 4 - k$$

그러므로

$$\alpha(t) + \beta(t) = 5 \quad <\text{참}>$$

∴

실근 $\alpha(t), \beta(t)$ 는 집합 $\{x | 0 \leq x < 4\}$ 의 원소이므로

$$\beta(0) = 3, \alpha(0) = 0$$

그러므로 주어진 식은

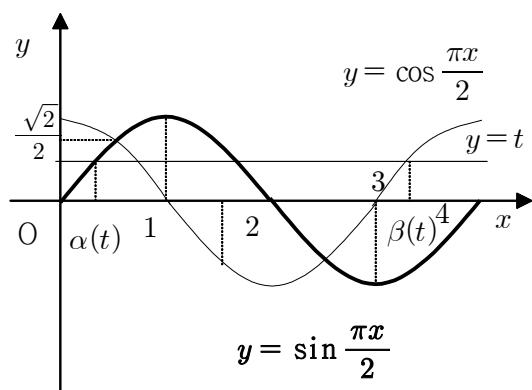
$$\{t | \beta(t) - \alpha(t) = \beta(0) - \alpha(0)\}$$

$$= \{t | \beta(t) - \alpha(t) = 3\}$$

$$(i) \quad 0 \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 일 때},$$

$$t=0 \text{ 이면 } \beta(0) - \alpha(0) = 3 - 0 = 3$$

$t \neq 0$ 이면 다음 그림과 같다.



이때,

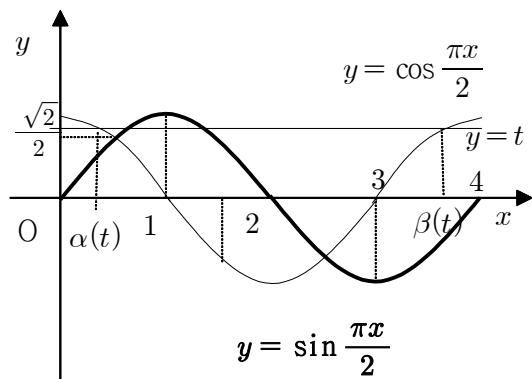
$$\alpha(t) = k \quad \left(0 < k \leq \frac{1}{2}\right)$$

이라 하면

$$\beta(t) = 3 + k$$

$$\text{그러므로 } \beta(t) - \alpha(t) = 3$$

$$(ii) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} < t < 1 \text{ 일 때},$$



이때,

$$\alpha(t) = k \quad \left(0 < k < \frac{1}{2}\right)$$

이라 하면

$$\beta(t) = 4 - k$$

그러므로

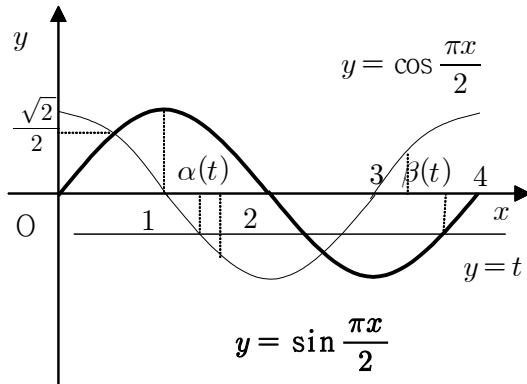
$$\beta(t) - \alpha(t) = 4 - 2k \quad (0 < 2k < 1)$$

$$(iii) \quad t = 1 \text{ 일 때},$$

$$\alpha(1) = 0, \beta(1) = 1 \text{ 이므로}$$

$$\beta(1) - \alpha(1) = 1$$

(iv) $-1 \leq t < 0$ 일 때,



$$1 < \alpha(t) \leq 2, \quad 3 \leq \beta(t) < 4 \text{ 이므로}$$

$$\beta(t) - \alpha(t) < 3$$

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에서
 $\{t | \beta(t) - \alpha(t) = 3\}$

$$= \left\{ t | 0 \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \quad \text{〈참〉}$$

□, $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ 이기 위해서는

$$0 < t_1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < t_2$$

이때, $\alpha(t_1) = \alpha(t_2) = \alpha$ 라 하면

$$t_1 = \sin \frac{\pi}{2} \alpha, \quad t_2 = \cos \frac{\pi}{2} \alpha$$

이때, $t_2 = t_1 + \frac{1}{2}$ 이므로

$$\cos \frac{\pi}{2} \alpha = \sin \frac{\pi}{2} \alpha + \frac{1}{2}$$

이 식을 $\cos^2 \frac{\pi}{2} \alpha + \sin^2 \frac{\pi}{2} \alpha = 1$ 에 대입하

면

$$2 \sin^2 \frac{\pi}{2} \alpha + \sin \frac{\pi}{2} \alpha + \frac{1}{4} = 1$$

$$8 \sin^2 \frac{\pi}{2} \alpha + 4 \sin \frac{\pi}{2} \alpha - 3 = 0$$

$$\sin \frac{\pi}{2} \alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{8}$$

이때, $\sin \frac{\pi}{2} \alpha > 0$ 이므로

$$\sin \frac{\pi}{2} \alpha = \frac{-1 + \sqrt{7}}{4}$$

그러므로

$$t_1 = \frac{-1 + \sqrt{7}}{4},$$

$$t_2 = t_1 + \frac{1}{2} = \frac{1 + \sqrt{7}}{4}$$

따라서

$$t_1 \times t_2 = \frac{(-1 + \sqrt{7})(1 + \sqrt{7})}{16} = \frac{3}{8} \text{ <거짓>}$$

정답 ②

16. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & \log_4 \frac{2}{3} + \log_4 24 \\ &= \log_4 \left(\frac{2}{3} \times 24 \right) \\ &= \log_4 16 \\ &= \log_4 4^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

정답 2

17. 출제의도 : 다항함수의 극솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 에서

$x = -1$ 또는 $x = 1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극소이다.

따라서 $a = 1$

$$f(a) = f(1) = 1^3 - 3 \times 1 + 12 = 10$$

이므로

$$a + f(a) = 1 + f(1) = 1 + 10 = 11$$

정답 11

18. 출제의도 : 등비수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r , $a_1 = a$ 라 하

면 $a_2 = 36$ 에서

$$ar = 36 \quad \dots \quad \textcircled{7}$$

또, $a_7 = \frac{1}{3}a_5$ 에서

$$ar^6 = \frac{1}{3}ar^4$$

$$r^2 = \frac{1}{3} \quad \dots \quad \textcircled{8}$$

따라서 $\textcircled{7}$ 과 $\textcircled{8}$ 에서

$$\begin{aligned} a_6 &= ar^5 \\ &= ar \times r^4 \end{aligned}$$

$$= 36 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$= 4$$

정답 4

19. 출제의도 : 수직선 위를 움직이는 점의 속도를 이용하여 점의 위치의 변화량을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

시각 t 에서 점 P의 위치를 $x(t)$ 라 하면

시각 $t = 0$ 에서 점 P의 위치가 0이므로

$$v(t) = 3t^2 - 4t + k \text{에서}$$

$$x(t) = t^3 - 2t^2 + kt$$

$$\text{이때 } x(1) = -3 \text{에서}$$

$$-1 + k = -3, \quad k = -2$$

$$\text{따라서 } x(t) = t^3 - 2t^2 - 2t \text{이고,}$$

$$x(3) = 27 - 18 - 6 = 3 \text{이다.}$$

그러므로 시각 $t = 1$ 에서 $t = 3$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$x(3) - x(1) = 3 - (-3) = 6$$

정답 6

20. 출제의도 : 정적분으로 나타내어진 함수가 극값을 하나만 갖도록 하는 상수 a 의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 3 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 24x + 45 \\ &= 3(x-3)(x-5) \end{aligned}$$

$$g(x) = \int_a^x \{f(x) - f(t)\} \times \{f(t)\}^4 dt$$

$$= f(x) \int_a^x \{f(t)\}^4 dt - \int_a^x \{f(t)\}^5 dt$$

따라서 모든 a 의 값의 합은
 $3+5=8$

$$g'(x) = f'(x) \int_a^x \{f(t)\}^4 dt + \{f(x)\}^5 - \{f(x)\}^5$$

정답 8

$$= f'(x) \int_a^x \{f(t)\}^4 dt$$

$g'(x)=0$ 에서

$f'(x)=0$ 또는 $x=a$

(i) $a \neq 3, a \neq 5$ 일 때,

$g'(x)=0$ 에서

$x=3$ 또는 $x=5$ 또는 $x=a$

함수 $g(x)$ 는 $x=3, x=5, x=a$ 에서 모두 극값을 갖는다.

(ii) $a=3$ 일 때

$g'(x)=0$ 에서

$x=3$ 또는 $x=5$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	3	...	5	...
$g'(x)$	-	0	-	0	+
$g(x)$	↘		↘	극소	↗

함수 $g(x)$ 는 $x=5$ 에서만 극값을 갖는다.

(iii) $a=5$ 일 때

$g'(x)=0$ 에서

$x=3$ 또는 $x=5$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	3	...	5	...
$g'(x)$	-	0	+	0	+
$g(x)$	↘	극소	↗		↗

함수 $g(x)$ 는 $x=3$ 에서만 극값을 갖는다.

(i), (ii), (iii)에서

함수 $g(x)$ 가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a 의 값은 3 또는 5이다.

21. 출제의도 : a 의 n 제곱근의 의미를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1이고 최솟값이 음수이므로 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i) n 이 홀수일 때,

방정식 $x^n = 64$ 의 실근의 개수는 1이다.

그러므로 방정식 $(x^n - 64)f(x)=0$ 의 근이 모두 중근일 수 없다.

(ii) n 이 짝수일 때,

방정식 $x^n = 64$ 의 실근은

$x = \sqrt[n]{64}$ 또는 $x = -\sqrt[n]{64}$

즉,

$$x = 2^{\frac{6}{n}} \text{ 또는 } x = -2^{\frac{6}{n}}$$

이때, 조건 (가)를 만족하기 위해서는

$$f(x) = \left(x - 2^{\frac{6}{n}} \right) \left(x + 2^{\frac{6}{n}} \right) \dots \quad \textcircled{D}$$

한편, 조건 (나)에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 음의 정수이다. \textcircled{D} 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최솟값을 갖고 그 값은

$$-2^{\frac{6}{n}} \times 2^{\frac{6}{n}} = -2^{\frac{12}{n}}$$

이 값이 음의 정수이기 위해서는 n 의 값은

2, 4, 6, 12

따라서 (i), (ii)에서 n 의 모든 값의 합은

$$2+4+6+12=24$$

정답 24

22. 출제의도 : 방정식의 실근의 개수를 이용하여 조건을 만족시키는 삼차함수의 그래프를 찾고, 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 실근을 α, β 라 하면

$$f(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta)$$

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서

$$x-f(x)=\alpha \text{ 또는 } x-f(x)=\beta$$

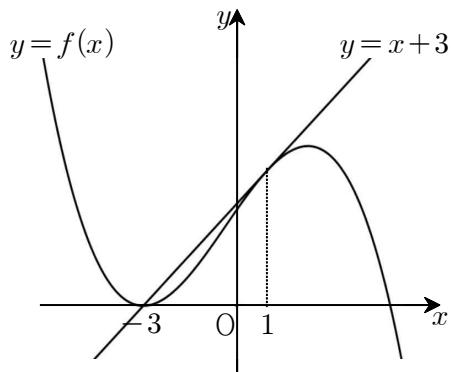
를 만족시키는 서로 다른 x 의 값의 개수가 3이어야 한다.

즉 $f(x)=x-\alpha$ 또는 $f(x)=x-\beta$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와 두 직선 $y=x-\alpha, y=x-\beta$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수가 3이어야 한다.

한편, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 4)$ 에서의 접선의 기울기가 1이므로

접선의 방정식은 $y=x+3$

그런데 $f(0)>0, f'(0)>1$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x+3$ 는 그림과 같다.



$$f(x)-(x+3)=k(x+3)(x-1)^2 \text{이므로}$$

$$f(x)=k(x+3)(x-1)^2+x+3$$

$$f'(x)=k(x-1)^2+k(x+3)\times 2(x-1)+1$$

..... ⑦

$$\text{이때, } f'(-3)=0 \text{이므로}$$

⑦에 $x=-3$ 을 대입하면

$$0=k\times 16+1 \text{에서 } k=-\frac{1}{16}$$

따라서

$$f(x)=-\frac{1}{16}(x+3)(x-1)^2+x+3 \text{이므로}$$

$$f(0)=-\frac{1}{16}\times 3\times 1+3=\frac{45}{16}$$

$$\text{즉 } p=16, q=45 \text{이므로}$$

$$p+q=16+45=61$$

정답 61

[선택: 기하]

23. ② 24. ⑤ 25. ① 26. ② 27. ③
28. ③ 29. 80 30. 48

23. 출제의도 : 두 벡터의 평행 조건을 이용하여 주어진 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 벡터 $\vec{a} = (k+3, 3k-1)$ 과 $\vec{b} = (1, 1)$ 이 서로 평행하므로 적당한 실수 m 에 대하여

여

$$\vec{a} = m\vec{b}$$

가 성립한다.

$$(k+3, 3k-1) = m(1, 1) \text{에서}$$

$$k+3 = m, 3k-1 = m$$

$$\text{따라서 } k=2, m=5$$

정답 ②

24. 출제의도 : 타원 위의 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\text{타원 } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ 위의 점 } (2, \sqrt{2}) \text{에서}$$

의 접선의 방정식은

$$\frac{2x}{8} + \frac{\sqrt{2}y}{4} = 1$$

이므로 이 직선의 x 절편은 4이다.

정답 ⑤

25. 출제의도 : 벡터로 나타내어진 식을 이용하여 주어진 점이 나타내는 도형을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{AB}| \text{에서}$$

$$|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{AB}|$$

이때

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3-1)^2 + (5-2)^2} = 5$$

이므로

$$|\overrightarrow{AP}| = 5$$

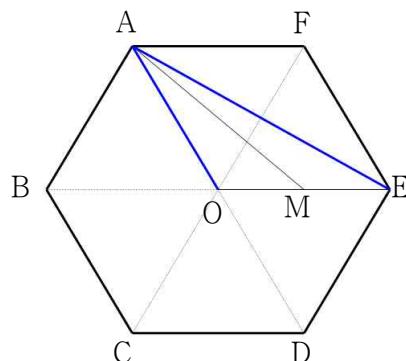
따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원이므로 그 길이는 10π 이다.

정답 ①

26. 출제의도 : 도형에서 두 벡터의 합의 크기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 선분 AD와 BE의 교점을 O라 하고 선분 OE의 중점을 M이라 하면 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO}$ 이므로



$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{AM} \quad \text{… } \textcircled{7}$$

삼각형 AOM에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM}^2 &= \overrightarrow{AO}^2 + \overrightarrow{OM}^2 - 2 \times \overrightarrow{AO} \times \overrightarrow{OM} \times \cos 120^\circ \\ &= 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \times 1 \times \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{7}{4} \end{aligned}$$

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$|\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC}| = 2\overline{AM} = 2 \times \frac{\sqrt{7}}{2} = \sqrt{7}$$

정답 ②

27. 출제의도 : 쌍곡선 위의 점에서의 접선을 구하여 주축의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\text{점 } P(4, k) \text{는 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 위의}$$

점이므로

$$\frac{16}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} = 1 \cdots ⑦$$

점 P에서 쌍곡선에 그은 접선의 방정식은

$$\frac{4x}{a^2} - \frac{ky}{b^2} = 1$$

이므로 두 점 Q와 R의 좌표는 각각

$$Q\left(\frac{a^2}{4}, 0\right), R\left(0, -\frac{b^2}{k}\right)$$

따라서 삼각형 QOR의 넓이는

$$A_1 = \frac{1}{2} \times \frac{a^2}{4} \times \left| -\frac{b^2}{k} \right| = \frac{a^2 b^2}{8k}$$

삼각형 PRS의 넓이는

$$A_2 = \frac{1}{2} \times \overline{PS} \times \overline{OS} = \frac{1}{2} \times k \times 4 = 2k$$

이므로

$$A_1 : A_2 = 9 : 4$$

$$\frac{a^2 b^2}{8k} : 2k = 9 : 4$$

$$36k^2 = a^2 b^2 \cdots ⑧$$

⑧을 ⑦에 대입하여 정리하면

$$\frac{16}{a^2} - \frac{k^2}{36k^2} = 1, \quad \frac{16}{a^2} - \frac{a^2}{36} = 1$$

$$a^4 + 36a^2 - 16 \times 36 = 0$$

$$(a^2 - 12)(a^2 + 48) = 0$$

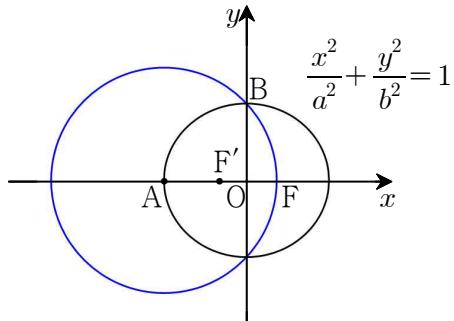
$a^2 = 12$ 에서 $a = 2\sqrt{3}$ 이므로 주어진 쌍곡선의 주축의 길이는 $2a = 4\sqrt{3}$ 이다.

정답 ③

28. 출제의도 : 타원의 방정식에서 꼭짓점과 초점을 이용하여 장축의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

그림과 같이 타원의 중심을 원점으로 하고 장축이 x축 위에 놓이도록 좌표축을 설정하자.



이때 타원의 장축의 길이가 $2a$ 이므로 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > 0$)라 하면 두 초점의 좌표는

$$F'(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0), F(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$$

이다.

주어진 타원이 음의 x축과 만나는 점을 A, 양의 y축과 만나는 점을 B라 하면 두 점 A와 B의 좌표는 각각 $A(-a, 0)$, $B(0, b)$ 이다.

점 A를 중심으로 하고 두 점 B와 F를

지나는 원의 반지름의 길이는 1이므로

$$\overline{AB} = 1 \text{에서 } \sqrt{a^2 + b^2} = 1$$

$$b^2 = 1 - a^2 \dots \textcircled{\text{D}}$$

$$\overline{AF} = 1 \text{에서 } \sqrt{a^2 - b^2} + a = 1 \dots \textcircled{\text{E}}$$

$\textcircled{\text{D}}, \textcircled{\text{E}}$ 에서

$$\sqrt{a^2 - (1 - a^2)} = 1 - a$$

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$2a^2 - 1 = 1 - 2a + a^2$$

$$a^2 + 2a - 2 = 0$$

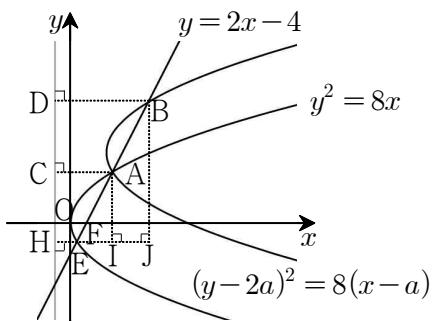
$$\text{따라서 } a = -1 + \sqrt{3} \quad (a > 0)$$

정답 ③

29. 출제의도 : 포물선의 정의를 이용하여 포물선 위의 점에서 준선까지의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

[풀이]



직선 $y = 2x - 4$ 가 포물선 $y^2 = 8x$ 와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 E, x축과 만나는 점을 F라 하고, 점 E에서 직선 $x = -2$ 에 내린 수선의 발을 H라 하자.

또, 두 점 A, B에서 직선 HE에 내린 수선의 발을 각각 I, J라 하자.

점 F의 좌표는 $(2, 0)$ 이므로 포물선 $y^2 = 8x$ 의 초점과 일치한다.

따라서 $\overline{AF} = p$, $\overline{EF} = q$ 라 하면 포물선의

정의에 의하여

$$\overline{AC} = p, \overline{EH} = q$$

이때 포물선의 준선의 방정식이 $x = -2$

이므로 두 점 A, E의 x좌표는 각각 $p - 2, q - 2$ 이다.

선분 AI와 x축의 교점을 P, 점 E에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 하면

$$\overline{FP} = p - 4, \overline{FQ} = 4 - q$$

이므로 두 직각삼각형 AFP, EFQ에서

$$p = \sqrt{5}(p - 4), q = \sqrt{5}(4 - q)$$

따라서

$$p = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \sqrt{5}(\sqrt{5}+1) = 5 + \sqrt{5},$$

$$q = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1} = \sqrt{5}(\sqrt{5}-1) = 5 - \sqrt{5}$$

이므로

$$\overline{EI} = p - q = 2\sqrt{5}$$

한편, 포물선 $(y - 2a)^2 = 8(x - a)$ 는 포물선 $y^2 = 8x$ 를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2a만큼 평행이동한 것으로 두 점 A, B는 각각 두 점 E, A를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2a만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $\overline{AB} = \overline{AE}$ 이므로 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AC} + \overline{BD} - \overline{AB}$$

$$= \overline{AC} + \overline{BD} - \overline{AE}$$

$$= \overline{AC} + \overline{BD} - (\overline{AF} + \overline{EF})$$

$$= \overline{AC} + \overline{BD} - (\overline{AC} + \overline{EH})$$

$$= \overline{BD} - \overline{EH}$$

$$= \overline{EJ}$$

$$= 2 \times \overline{EI}$$

$$= 2 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

따라서 $k = 4\sqrt{5}$ 이므로

$$k^2 = 80$$

[다른 풀이]

직선 $y = 2x - 4$ 가 포물선 $y^2 = 8x$ 와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 E, x 축과 만나는 점을 F라 하고, 점 E에서 직선 $x = -2$ 에 내린 수선의 발을 H라 하자. 또, 두 점 A, B에서 직선 HE에 내린 수선의 발을 각각 I, J라 하자.

점 F의 좌표는 $(2, 0)$ 이므로 포물선 $y^2 = 8x$ 의 초점과 일치한다.

이때 연립방정식

$$\begin{cases} y^2 = 8x \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$

의 해는 $y^2 = 4(y+4)$ 즉, $y^2 - 4y - 16 = 0$ 에서 $y = 2 \pm 2\sqrt{5}$

$y = 2 + 2\sqrt{5}$ 이면 $x = 3 + \sqrt{5}$

$y = 2 - 2\sqrt{5}$ 이면 $x = 3 - \sqrt{5}$

이므로 두 점 A와 E의 좌표는 각각 $A(3 + \sqrt{5}, 2 + 2\sqrt{5})$, $E(3 - \sqrt{5}, 2 - 2\sqrt{5})$ 이다.

포물선 $(y - 2a)^2 = 8(x - a)$ 은 포물선 $y^2 = 8x$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 $2a$ 만큼 평행이동한 것이므로 $\overline{AB} = \overline{AE}$

따라서 포물선의 정의에 의해

$$\overline{AC} + \overline{BD} - \overline{AB}$$

$$= \overline{AC} + \overline{BD} - \overline{AE}$$

$$= \overline{AC} + \overline{BD} - (\overline{AF} + \overline{EF})$$

$$= \overline{AC} + \overline{BD} - (\overline{AC} + \overline{EH})$$

$$= \overline{BD} - \overline{EH}$$

$$= \overline{EJ}$$

$$= 2 \times \overline{EI}$$

$$= 2 \times \{(3 + \sqrt{5}) - (3 - \sqrt{5})\}$$

$$= 4\sqrt{5}$$

$$k = 4\sqrt{5} \text{ 이므로 } k^2 = 80$$

정답 80

30. 출제의도 : 벡터로 표현된 식을 이용하여 두 벡터의 내적의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \text{ 또는 } \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$$

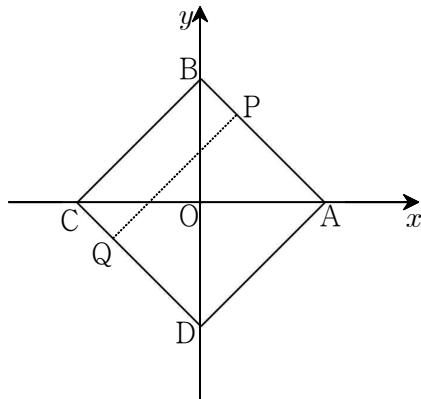
이므로 다음과 같이 두 가지의 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, 즉 $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AB}$ 인 경우

두 조건 (나)와 (다)에서

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} \geq 0, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OQ} \leq 0$$

이므로 점 P는 선분 AB 위의 점이고 점 Q는 선분 CD 위의 점이다.



점 P의 좌표를 $P(a, 2-a)$ ($0 \leq a \leq 2$)라 하면 점 Q의 좌표는

$$Q(a-2, -a)$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} \geq -2 \text{에서}$$

$$(2, 0) \cdot (a, 2-a) = 2a \geq -2$$

이므로

$$a \geq -1 \cdots \textcircled{\text{D}}$$

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} \geq 0 \text{에서}$$

$$(0, 2) \cdot (a, 2-a) = 2(2-a) \geq 0$$

이므로

$$a \leq 2 \cdots \textcircled{\text{L}}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} \geq -2 \text{에서}$$

$$(2, 0) \cdot (a-2, -a) = 2(a-2) \geq -2$$

이므로

$$a \geq 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OQ} \leq 0 \text{에서}$$

$$(0, 2) \cdot (a-2, -a) = -2a \leq 0$$

이므로

$$a \geq 0 \cdots \textcircled{2}$$

⑦, ⑧, ⑨, ⑩에서

$$1 \leq a \leq 2 \cdots \textcircled{3}$$

한편, 점 R(4, 4)에 대하여

$$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR}$$

$$= (a, 2-a) - (4, 4)$$

$$= (a-4, -a-2)$$

$$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR}$$

$$= (a-2, -a) - (4, 4)$$

$$= (a-6, -a-4)$$

이므로

$$\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$$

$$= (a-4, -a-2) \cdot (a-6, -a-4)$$

$$= (a-4)(a-6) + (a+2)(a+4)$$

$$= 2a^2 - 4a + 32$$

$$= 2(a-1)^2 + 30$$

⑩에서

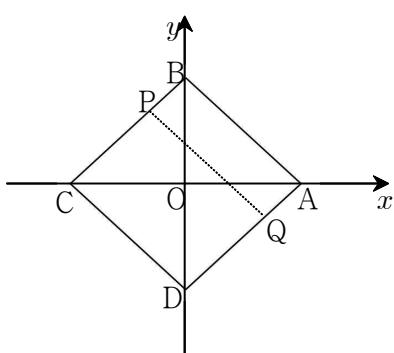
$$30 \leq \overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} \leq 32$$

(ii) $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, 즉 $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AD}$ 인 경우

두 조건 (나)와 (다)에서

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} \geq 0, \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OQ} \leq 0$$

이므로 점 P는 선분 BC 위의 점이고 점 Q는 선분 AD 위의 점이다.



점 P의 좌표를 $P(a, a+2)$ ($-2 \leq a \leq 0$)

라 하면 점 Q의 좌표는

$$Q(a+2, a)$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} \geq -2 \text{에서}$$

$$(2, 0) \cdot (a, a+2) = 2a \geq -2$$

이므로

$$a \geq -1 \cdots \textcircled{4}$$

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} \geq 0 \text{에서}$$

$$(0, 2) \cdot (a, a+2) = 2(a+2) \geq 0$$

이므로

$$a \geq -2 \cdots \textcircled{5}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} \geq -2 \text{에서}$$

$$(2, 0) \cdot (a+2, a) = 2(a+2) \geq -2$$

이므로

$$a \geq -3 \cdots \textcircled{6}$$

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OQ} \leq 0 \text{에서}$$

$$(0, 2) \cdot (a+2, a) = 2a \leq 0$$

이므로

$$a \leq 0 \cdots \textcircled{7}$$

④, ⑤, ⑥, ⑦에서

$$-1 \leq a \leq 0 \cdots \textcircled{8}$$

한편, 점 R(4, 4)에 대하여

$$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR}$$

$$= (a, a+2) - (4, 4)$$

$$= (a-4, a-2)$$

$$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR}$$

$$= (a+2, a) - (4, 4)$$

$$= (a-2, a-4)$$

이므로

$$\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$$

$$= (a-4, a-2) \cdot (a-2, a-4)$$

$$= 2(a-4)(a-2)$$

$$= 2(a^2 - 6a + 8)$$

$$= 2(a-3)^2 - 2$$

⑧에서

$$16 \leq \overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} \leq 30$$

(i), (ii)에서

$$16 \leq \overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} \leq 32$$

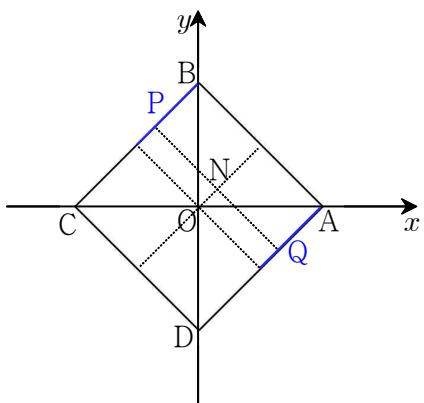
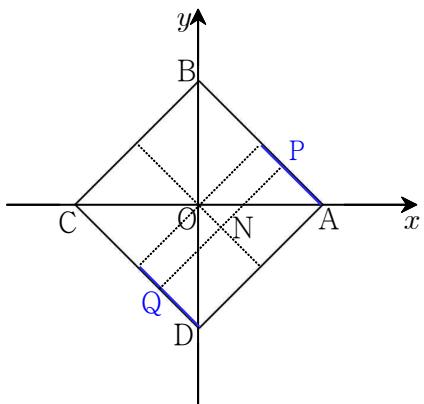
따라서 $\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$ 의 최댓값은 $M=32$, 최솟값은 $m=16$ 이므로

$$M+m=48$$

정답 48

[다른 풀이]

위의 풀이에서 두 점 P, Q가 지나는 영역은 다음 그림의 굵은 선분 위이다.



선분 PQ의 중점을 N이라 하면 조건

(가)에 의하여

$$\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{NQ} = 0,$$

$$\overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{NQ} = |\overrightarrow{NP}| |\overrightarrow{NQ}| \cos \pi = -|\overrightarrow{NP}|^2$$

이므로

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} \\ &= (\overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP}) \cdot (\overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NQ}) \\ &= \overrightarrow{RN} \cdot \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{RN} \cdot \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{NQ} \end{aligned}$$

$$= |\overrightarrow{RN}|^2 + \overrightarrow{RN} \cdot (\overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{NP}) + \overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{NQ}$$

$$= |\overrightarrow{RN}|^2 + 0 - |\overrightarrow{NP}|^2$$

이때 항상 $\overline{PQ} = 2\sqrt{2}$ 이므로

$$|\overrightarrow{NP}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2}$$

따라서

$$\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} = |\overrightarrow{RN}|^2 - 2$$

이므로 $\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$ 의 최댓값과 최솟값은 $|\overrightarrow{RN}|$ 의 최댓값과 최솟값에 의하여 결정된다.

$|\overrightarrow{RN}|$ 이 최대일 때의 두 점 P, Q의 좌표는 각각 (2,0), (0,-2)이므로

$$N(1, -1)$$

따라서

$$|\overrightarrow{RN}| = \sqrt{(4-1)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{34}$$

이므로 $\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$ 의 최댓값은

$$M = (\sqrt{34})^2 - 2 = 32$$

$|\overrightarrow{RN}|$ 이 최소일 때의 두 점 P, Q의 좌표는 각각 (0,2), (2,0)이므로

$$N(1, 1)$$

따라서

$$|\overrightarrow{RN}| = \sqrt{(4-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{18}$$

이므로 $\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$ 의 최솟값은

$$m = (\sqrt{18})^2 - 2 = 16$$

이상에서

$$M+m = 32+16 = 48$$