Questões

1. Considere a ordenação de n números armazenados no vetor $A = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$, localizando primeiro o menor elemento de A e permutando esse elemento com o elemento contido em $A[1]$. Em seguida, determine o segundo menor elemento de A e permute-o com $A[2]$. Continue dessa maneira para os primeiros $n-1$ elementos de A. Escreva o pseudocódigo para esse algoritmo, conhecido como **ordenação por seleção**. Forneça os tempos de execução $T(n)$ do melhor caso e do pior caso da ordenação por seleção. O cálculo de $T(n)$ deve ser feito de modo formal, como foi realizado em sala para a ordenação por inserção.

2. É verdade que $10n^2 + 200n + 500/n = O(n^2)$? É verdade que $n^2 - 200n - 300 = O(n)$? Prove que suas respostas são válidas.

3. Prove as seguintes afirmações:

    - $(n+1)^2 = O(n^2)$
    - Seja $C(n, k)$ o número de combinações de n objetos tomados k a k. Mostre que $C(n, 2) = O(n^2)$
    - $\lg(100n^3 + 200n + 300)^2 = O(\lg n)$

Resolução

1. O algoritmo pode ser escrito da seguinte forma:

```
fn selectionSort(A, n):
    for i = 0 to n - 1:
        min = i
        for j = i + 1 to n - 1:
            if A[j] < A[min]:
                min = j
        end for
        swap(A[i], A[min])
    end for
end fn
```

Considerando o primeiro elemento como A[0]

"to" indica um intervalo que não inclui o ultimo elemento

O Selection Sort sempre terá o mesmo tempo de execução de $O(n^2)$, independentemente da ordenação do vetor. Isso acontece porque, para cada posição i do vetor (de 0 até $n-2$), o algoritmo percorre o restante do vetor para encontrar o menor elemento.

Assim, temos o seguinte número de comparações:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n-2}(\sum_{j=i+1}^{n-1} 1) = \sum_{i=0}^{n-2}(n-1-i)$$

$$= (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\therefore T(n) = O(n^2)$$

Como essa quantidade de comparações é sempre realizada, independentemente da ordem inicial dos elementos, o tempo de execução no melhor, médio e pior casos é sempre $O(n^2)$.

---

2. Prova de que $10n^2 + 200n + 500/n = O(n^2)$:

Dado que $\forall n \geq n_0, 0 \leq f(n) \leq C * g(n)$, temos:

$$10n^2 + 200n + 500/n \leq 10n^2 + 200n^2 + 500n^2$$

$$10n^2 + 200n + 500/n \leq 710n^2$$

$$\therefore C = 710$$

Para $n_0 = 1$, temos:

$$10n_0^2 + 200n_0 + 500/n_0 \leq 710n_0^2$$

$$10 + 200 + 500 \leq 710$$

$$710 \leq 710$$

$$\therefore 10n^2 + 200n + \frac{500}{n} = O(n^2) \text{ dado que } 0 \leq 10n^2 + 200n + \frac{500}{n} \leq 710n^2 \text{ para } n \geq 1.$$

Prova de que $n^2 - 200n - 300 \neq O(n)$:

Dado que $\forall n \geq n_0, 0 \leq f(n) \leq C * g(n)$, suponhamos que $n^2 - 200n - 300 = O(n)$. Seja C uma constante qualquer, então temos:

$$n^2 - 200n - 300 \leq C * n$$

$$n - 200 - 300/n \leq C$$

O que não é verdade, dado que $n^2 - 200n - 300$ cresce infinitamente, portanto não pode ser menor que C. Por contradição, temos:

$$\therefore n^2 - 200n - 300 \neq O(n)$$

---

3. - $(n+1)^2 = O(n^2)$:

     Primeiramente, vamos reescrever $(n+1)^2$:

     $$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

     Dado que $\forall n \geq n_0, 0 \leq f(n) \leq C * g(n)$, temos:

     $$n^2 + 2n + 1 \leq n^2 + 2n^2 + n^2$$

     $$n^2 + 2n + 1 \leq n^2 + 2n^2 + n^2$$

     $$\therefore C = 4$$

     Para $n_0 = 1$, temos:

     $$n_0^2 + 2n_0 + 1 \leq 4n_0^2$$

     $$1 + 2 + 1 \leq 4$$

     $$4 \leq 4$$

     $$\therefore (n+1)^2 = O(n^2) \text{ dado que } 0 \leq (n+1)^2 \leq 4n^2 \text{ para } n \geq 1.$$

   - Seja $C(n, k)$ o número de combinações de n objetos tomados k a k. Mostre que $C(n, 2) = O(n^2)$:

     Primeiramente, vamos reescrever $C(n, 2)$:

$$C(n,2) = \frac{n!}{(n-2)!2!}$$

$$C(n,2) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$C(n,2) = \frac{n^2-n}{2}$$

$$C(n,2) = 0,5n^2 - 0,5n$$

Dado que $\forall n \geq n_0, 0 \leq f(n) \leq A * g(n)$, temos:

$$0,5n^2 - 0,5n \leq 0,5n^2$$

$$\therefore A = 0,5$$

Para $n_0 = 1$, temos:

$$0,5n_0^2 - 0,5n_0 \leq 0,5n_0^2$$

$$0,5(1)^2 - 0,5(1) \leq 0,5(1)^2$$

$$0,5 - 0,5 \leq 0,5$$

$$0 \leq 0,5$$

$$\therefore C(n,2) = O(n^2) \text{ dado que } C(n,2) \leq 0,5n^2 \text{ para } n \geq 1.$$

- $\lg(100n^3 + 200n + 300)^2 = O(\lg n)$:

  Primeiramente, vamos reescrever $\lg(100n^3 + 200n + 300)^2$. Seja m um número qualquer, temos:

$$\lg(m) = \lg(100n^3 + 200n + 300)^2$$

$$m = 2^{\lg(100n^3+200n+300)^2}$$

$$\lg(m) = \lg(2^{\lg(100n^3+200n+300)^2})$$

Dado que $\forall n \geq n_0, 0 \leq f(n) \leq C * g(n)$, temos:

$$\lg(2^{\lg(100n^3+200n+300)^2}) \leq \lg(2^{\lg(100n^3+200n+300)^2})$$

$$\therefore C = 1$$

Para $n_0 = 0$, temos:

$$\lg(2^{\lg(100n_0^3+200n_0+300)^2}) \leq \lg(2^{\lg(100n_0^3+200n_0+300)^2})$$

$$\lg(2^{\lg(100(0)^3+200(0)+300)^2}) \leq \lg(2^{\lg(100(0)^3+200(0)+300)^2})$$

$$\lg(2^{\lg(300)^2}) \leq \lg(2^{\lg(300)^2})$$

$$\lg(300)^2 \leq \lg(300)^2$$

$$\therefore \lg(100n^3 + 200n + 300)^2 = O(\lg n) \text{ dado que } 0 \leq \lg(100n^3 + 200n + 300)^2 \leq \lg(2^{\lg(100(3)+200+300)^2}) \text{ para } n \geq 0.$$

José Mykael Alves Nogueira