UNISULVIRTUAL
UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA

Projeto de Estudos

Nome do estudante: *Myke Albuquerque Pinto de Oliveira*

Curso: *Equações Diferenciais Parciais* – Docente: *Christian Wagner*
Data de entrega: *4 de novembro de 2020*

Parte I

Equação da Onda

Problema 10

Considere uma corda elástrica de comprimento L. A extremidade $x = 0$ é mantida fixa enquanto a extremidade $x = L$ está solta; assim, as condições de contorno são $u(0,t) = 0$ e $u(L,t) = 0$. A corda é colocada em movimento, sem velocidade inicial, a partir da posição inicial $u(x,0) = f(x)$, em que

$$f(x) = \begin{cases} 1,\ L/2 - 1 < x < L/2 + 1\ (L > 2), \\ 0 \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Calcule o deslocamento $u(x,t)$.

(b) Com $L = 10$ e $a = 1$, faça o gráfico de u em função de x para $0 \leq x \leq 10$ e para diversos valores de t. Preste atenção especial aos valores de t entre 3 e 7. Note como a perturbação inicial é refletida em cada extremidade da corda.

(c) Com $L = 10$ e $a = 1$, faça o gráfico de u em função de t para diversos valores de x.

(d) Construa uma animação da solução no tempo durante pelo menos um período.

(e) Descreva o movimento da corda em algumas frases.

Resposta. Em primeiro lugar, vamos resolver a EDP da onda $a^2 u_{xx} = u_t t$. Usando o método da separação de variáveis, vamos tentar a solução $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$. Aplicando na EDP, tem-se:

$$a^2 X''(x) \cdot T(t) = X(x) \cdot T''(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)}$$

$$\begin{cases} \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \\ \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \end{cases}$$

Caso $\lambda < 0$:

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$T(t) = Ce^{a\sqrt{-\lambda}t} + De^{-a\sqrt{-\lambda}t}$$

Impondo a condição de contorno:

$$u(0,t) = X(0)T(t) = (A+B)(Ce^{\sqrt{-\lambda}t} + De^{-\sqrt{-\lambda}t})$$

Isso implica $A + B = 0$ ou $C = 0$ e $D = 0$, ou seja, a solução trivial, a qual não estamos interessados.

Caso $\lambda = 0$:

$$X(x) = Ax + B$$

$$T(t) = Ct + D$$

Impondo as condições de contorno:

$$u(0,t) = X(0)T(t) = B(Ct + D) = 0$$

O que também acarreta na solução trivial.

Caso $\lambda > 0$:

$$X(x) = A \operatorname{sen}\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + B\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right)$$

$$T(t) = C \operatorname{sen}\left(a\sqrt{-\lambda}t\right) + D\cos\left(a\sqrt{-\lambda}t\right)$$

Impondo as condições de contorno:

$$u(0,t) = \left[A \operatorname{sen}\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + B\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right)\right]_{x=0} \cdot \left[C \operatorname{sen}\left(a\sqrt{-\lambda}t\right) + D\cos\left(a\sqrt{-\lambda}t\right)\right] = 0$$

$$u(0,t) = B\left[C \operatorname{sen}\left(a\sqrt{-\lambda}t\right) + D\cos\left(a\sqrt{-\lambda}t\right)\right]$$

$$B = 0$$

$$u(L,t) = \left[A \operatorname{sen}\left(\sqrt{-\lambda}x\right)\right]_{x=L} \cdot \left[C \operatorname{sen}\left(a\sqrt{-\lambda}t\right) + D\cos\left(a\sqrt{-\lambda}t\right)\right] = 0$$

$$u(L,t) = \left[A \operatorname{sen}\left(\sqrt{-\lambda}L\right)\right] \cdot \left[C \operatorname{sen}\left(a\sqrt{-\lambda}t\right) + D\cos\left(a\sqrt{-\lambda}t\right)\right] = 0$$

Para algum n natural:

$$\sqrt{-\lambda}L = n\pi$$

$$\sqrt{-\lambda} = \frac{n\pi}{L}$$

E a condição inicial de velocidade nula:

$$u_t(x,0) = \left[A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right] \cdot \left[Ca\frac{n\pi}{L}\cos\left(a\frac{n\pi}{L}t\right) + Da\frac{n\pi}{L}\operatorname{sen}\left(a\frac{n\pi}{L}t\right)\right]_{t=0} = 0$$

$$u_t(x,0) = \left[A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right] \cdot \left[Ca\frac{n\pi}{L}\right] = 0$$

$$C = 0$$

Reescrevendo $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \left[A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right] \cdot \left[D\cos\left(a\frac{n\pi}{L}t\right)\right]$$

$$u(x,t) = AD \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot \cos\left(a\frac{n\pi}{L}t\right)$$

Definindo $b_n = AD$, tem-se uma solução para cada natural n.

$$u_n(x,t) = b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot \cos\left(a\frac{n\pi}{L}t\right)$$

Vamos procurar por uma solução que satisfaça a condição inicial de posição a partir da combinação destas soluções já encontradas.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot \cos\left(a\frac{n\pi}{L}t\right)$$

Impondo a condição inicial:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

Os termos da série de Fourier são dados por:

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{L/2-1}^{L/2+1} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{L}\left[-\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_{L/2-1}^{L/2+1}$$

$$b_n = -\frac{2}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_{L/2-1}^{L/2+1}$$

$$b_n = -\frac{2}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi(L/2+1)}{L}\right) - \cos\left(\frac{n\pi(L/2-1)}{L}\right)\right]$$

$$b_n = -\frac{2}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{n\pi}{L}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{n\pi}{L}\right)\right]$$

$$b_n = -\frac{2}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}\right) - \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}\right) - \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\right.\right.$$

$$b_n = \frac{4}{n\pi}\left[\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\right)\right]$$

Explicitando a solução:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cdot\cos\left(a\frac{n\pi}{L}t\right)$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{n\pi}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\right), & n \equiv 1 \mod 4 \\ 0, & n \equiv 2 \vee n \equiv 0 \mod 4 \\ -\frac{4}{n\pi}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\right), & n \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$$

Seguem os gráficos para vários valores de t:

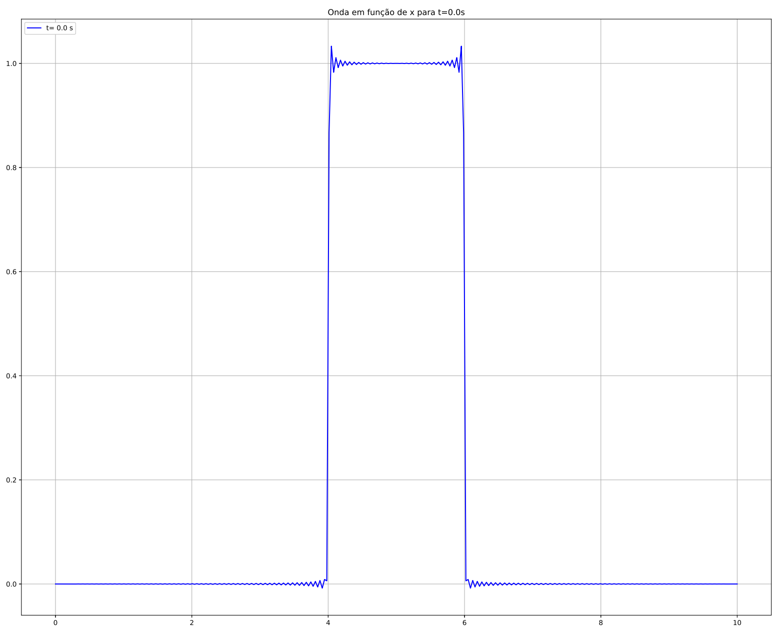

Figura 1: Onda na corda elástica no instante t=0.000s

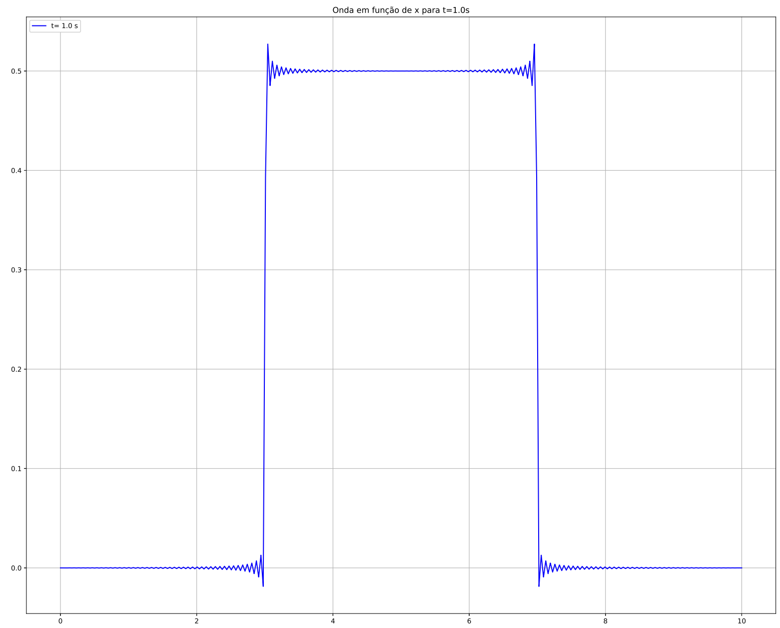

Figura 2: Onda na corda elástica no instante t=1.000s

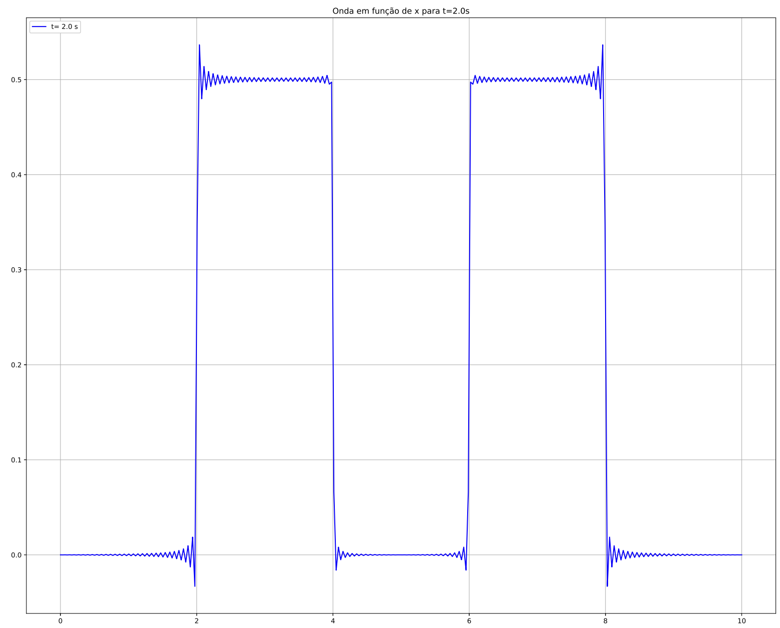

Figura 3: Onda na corda elástica no instante t=2.000s

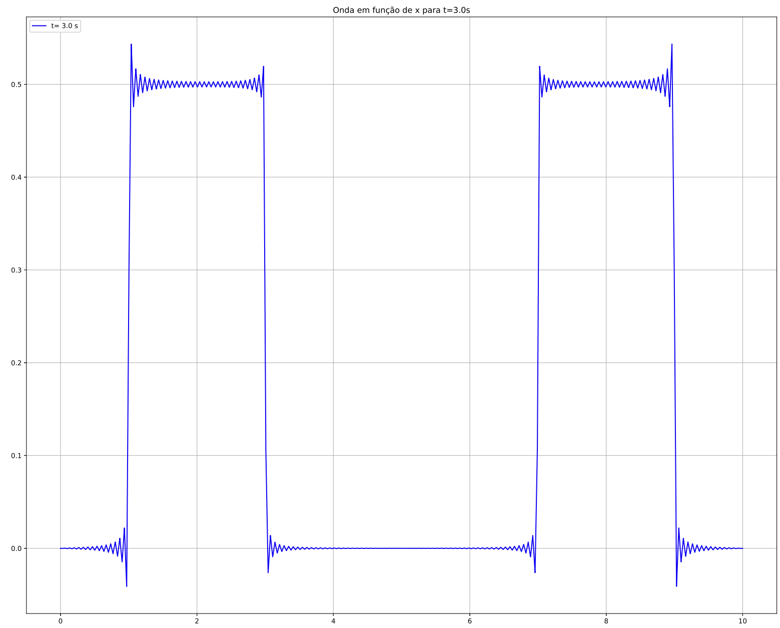

Figura 4: Onda na corda elástica no instante t=3.000s

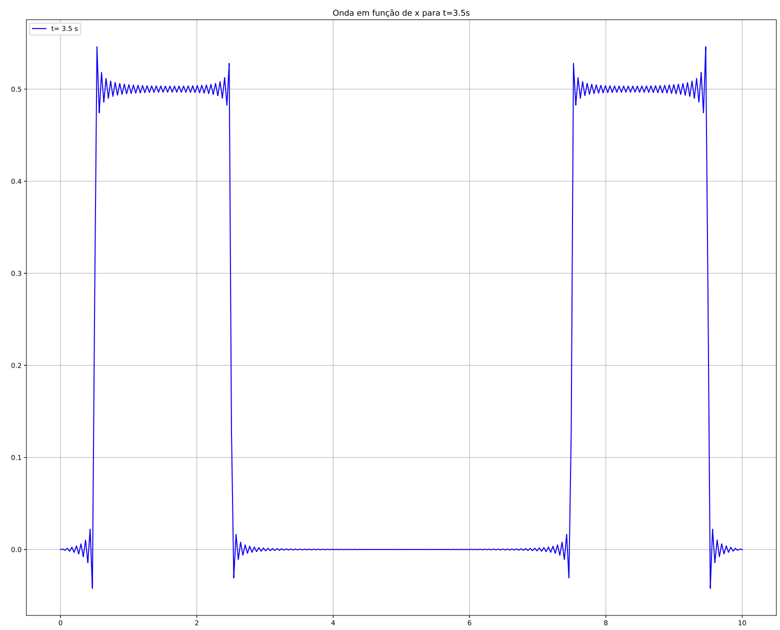

Figura 5: Onda na corda elástica no instante t=3.500s

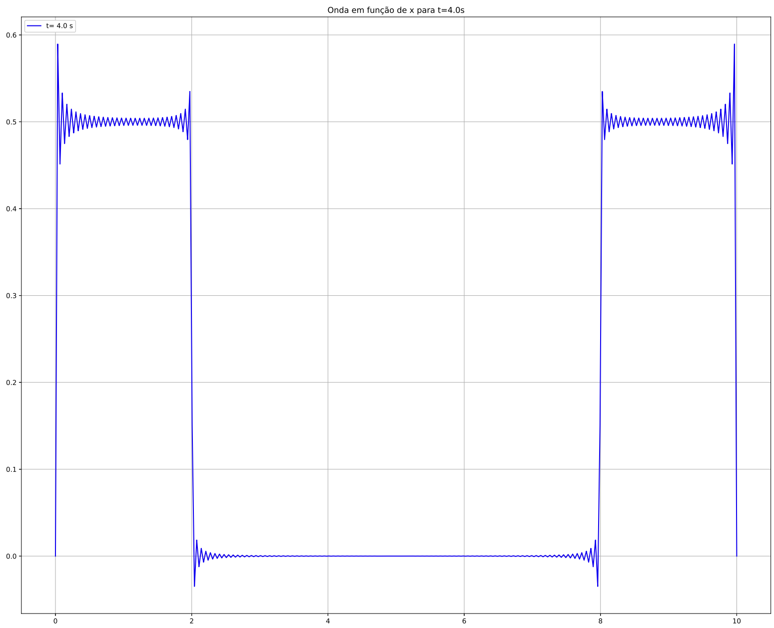

Figura 6: Onda na corda elástica no instante t=4.000s

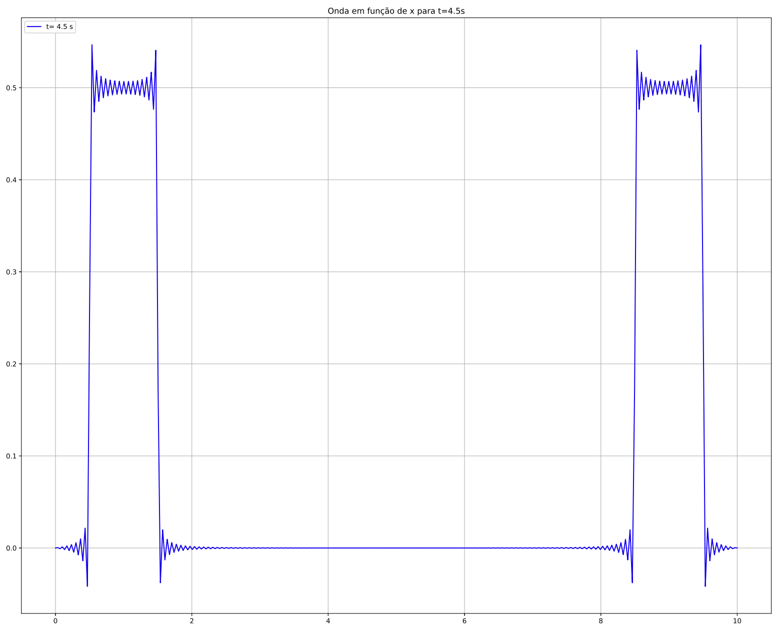

Figura 7: Onda na corda elástica no instante t=4.500s

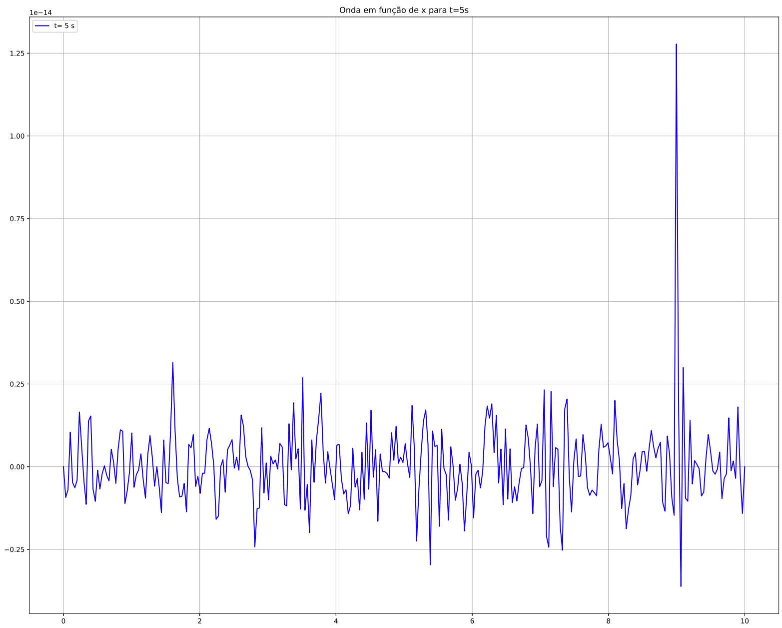

Figura 8: Onda na corda elástica no instante t=5.000s

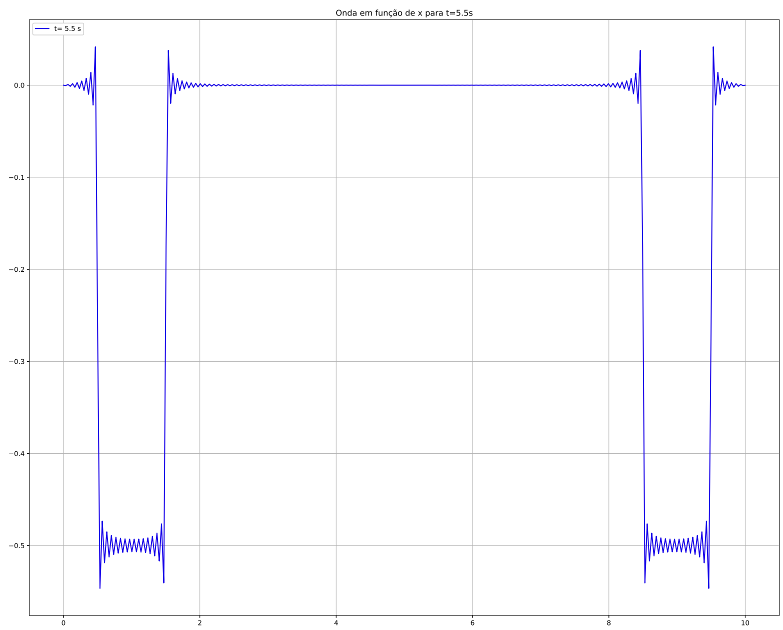

Figura 9: Onda na corda elástica no instante t=5.500s

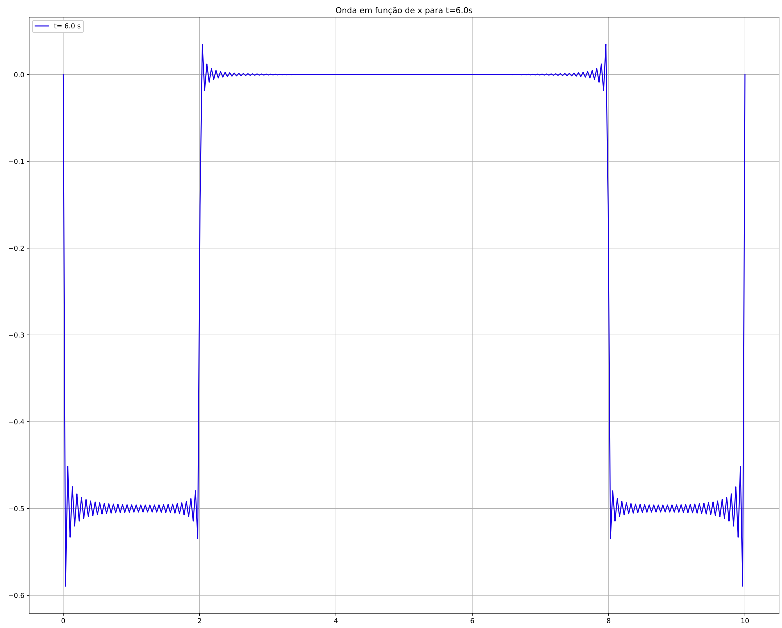

Figura 10: Onda na corda elástica no instante t=6.000s

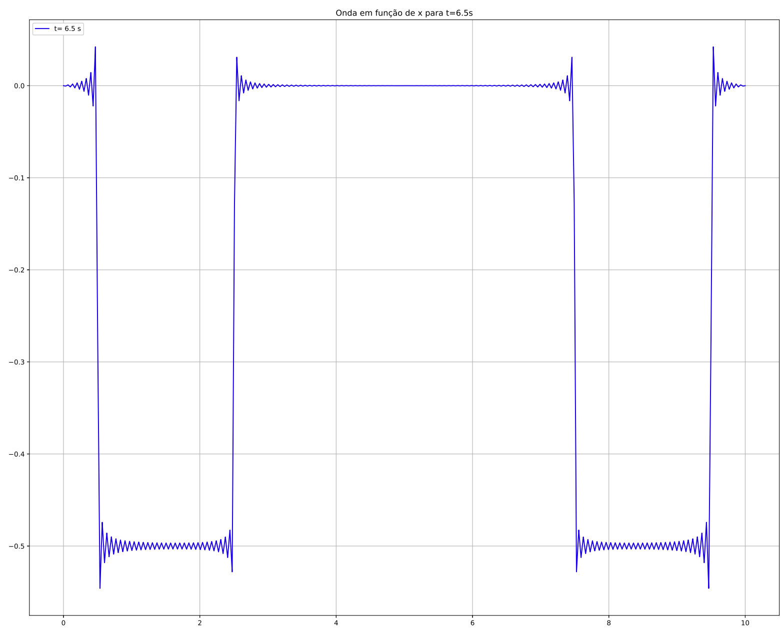

Figura 11: Onda na corda elástica no instante t=6.500s

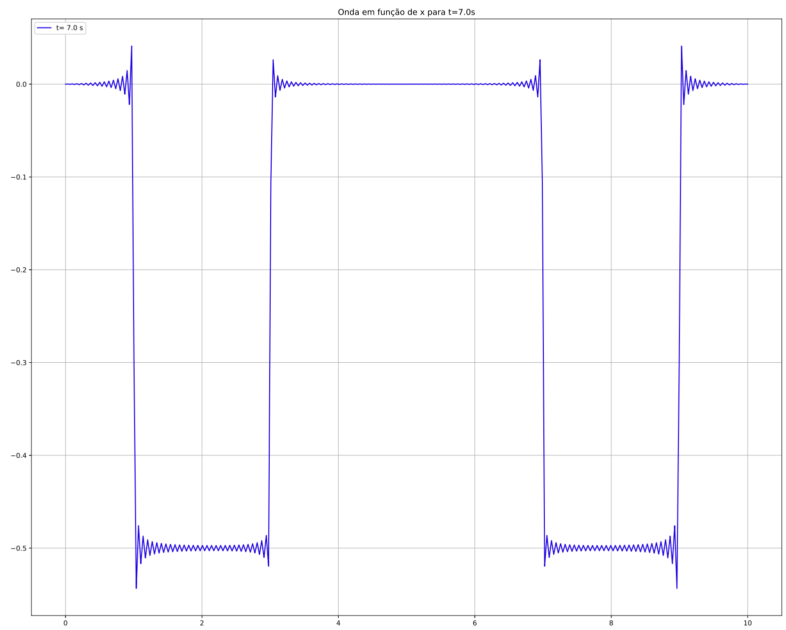

Figura 12: Onda na corda elástica no instante t=7.000s

Seguem agora os gráficos da onda em função de t para vários x's.

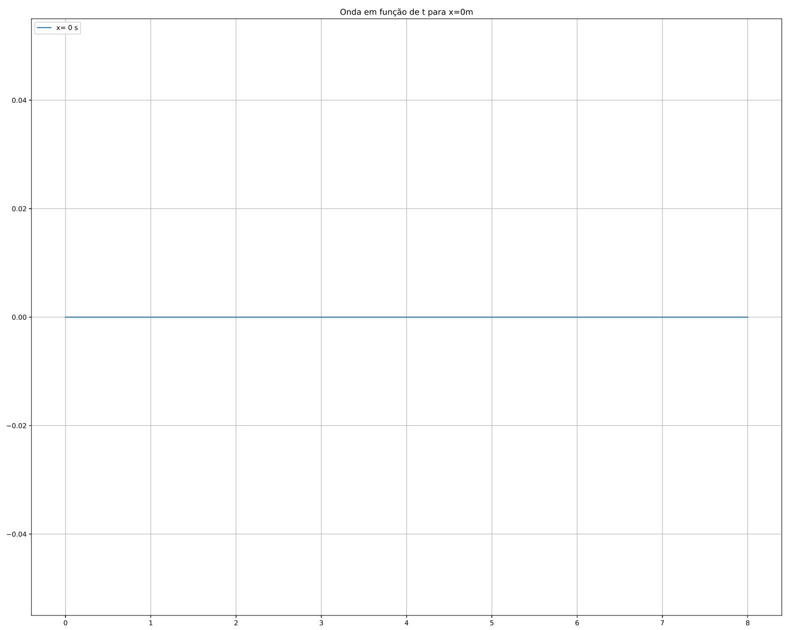

Figura 13: Onda na corda elástica na cota x=0.000m

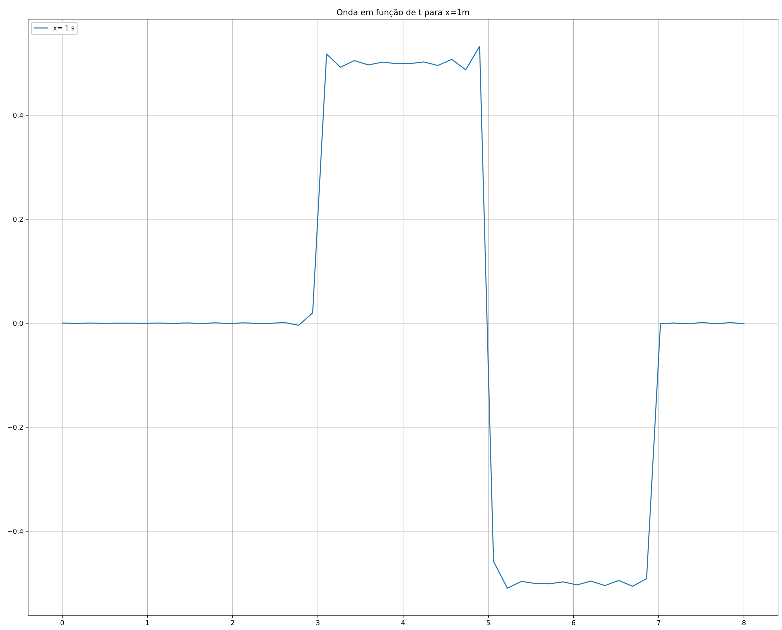

Figura 14: Onda na corda elástica na cota x=1.000m

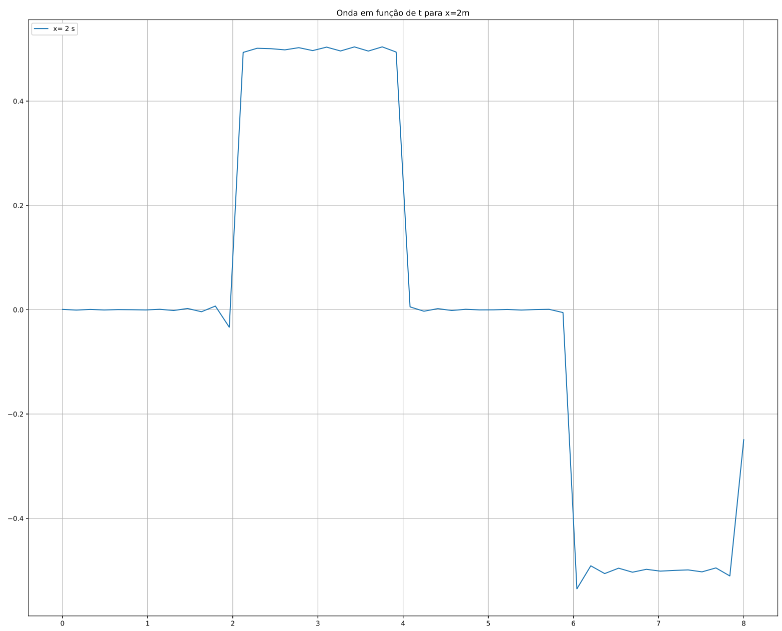

Figura 15: Onda na corda elástica na cota x=2.000m

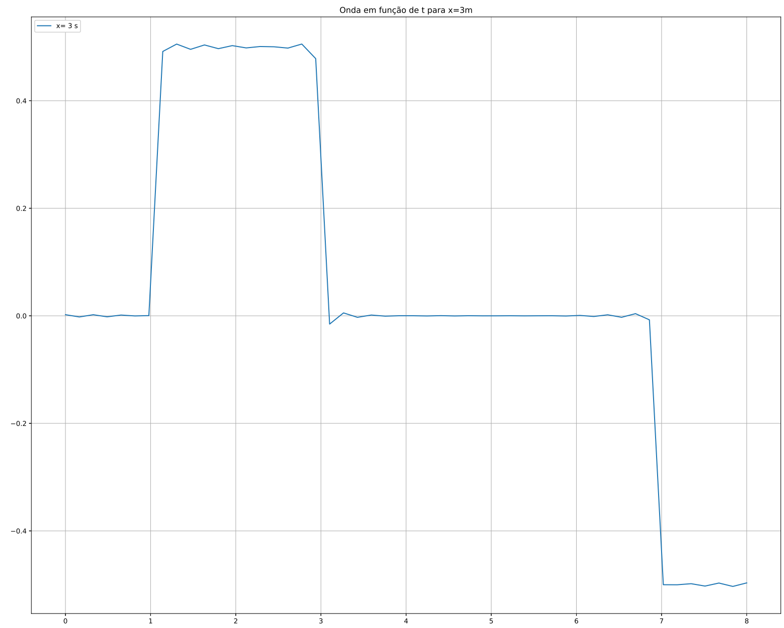

Figura 16: Onda na corda elástica na cota x=3.000m

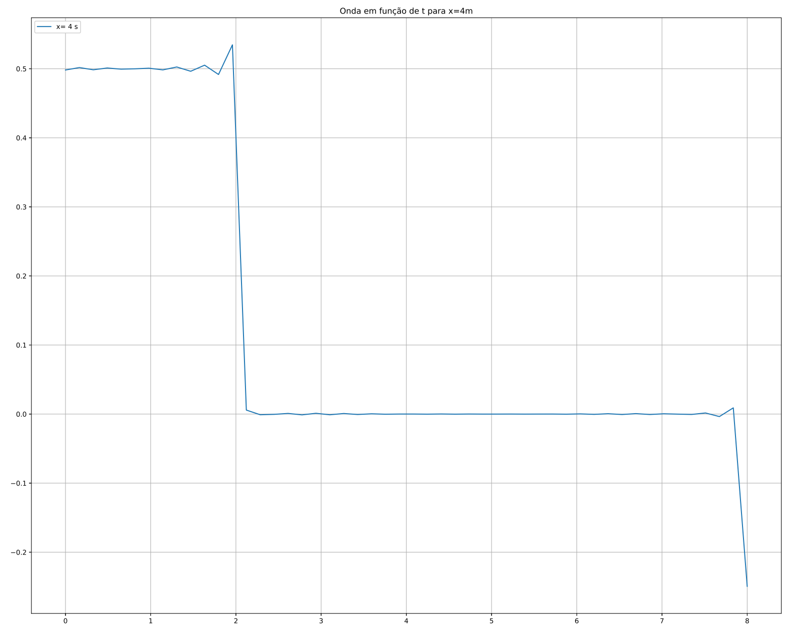

Figura 17: Onda na corda elástica na cota x=4.000m

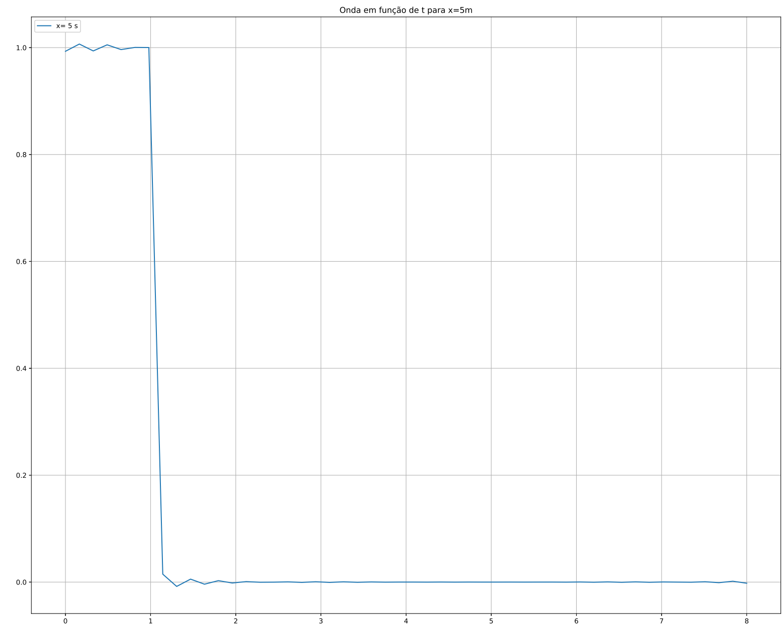

Figura 18: Onda na corda elástica na cota x=5.000m

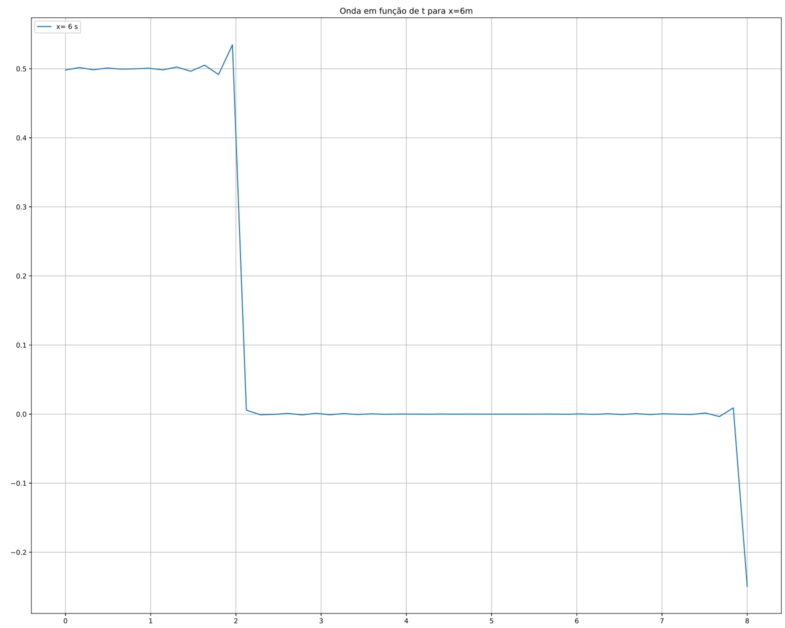

Figura 19: Onda na corda elástica na cota x=6.000m

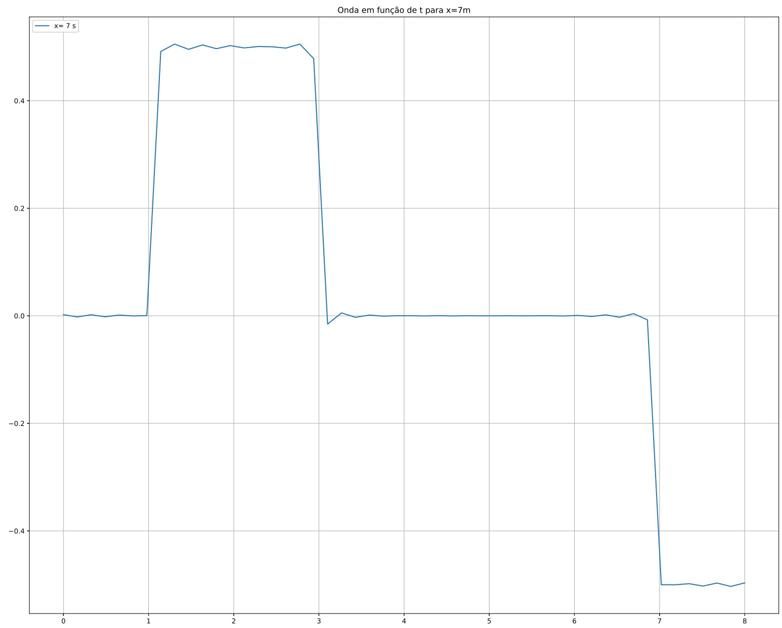

Figura 20: Onda na corda elástica na cota x=7.000m

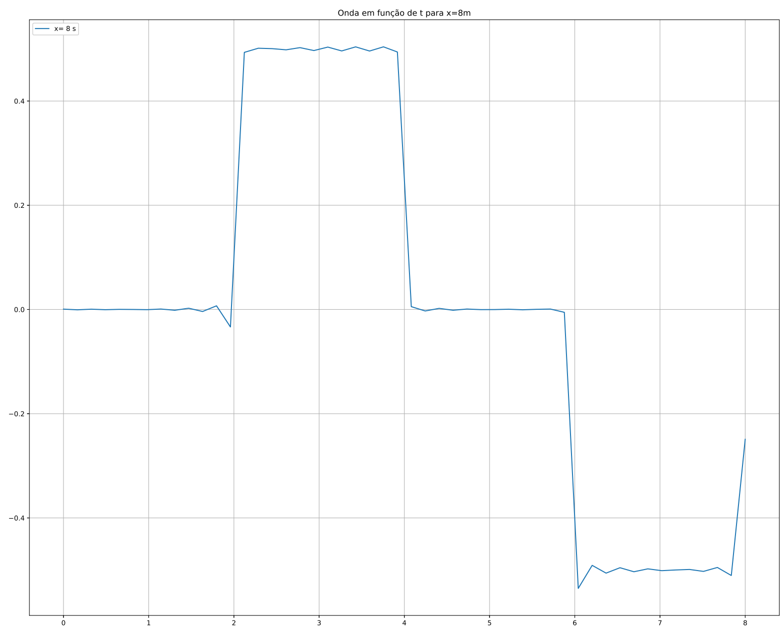

Figura 21: Onda na corda elástica na cota x=8.000m

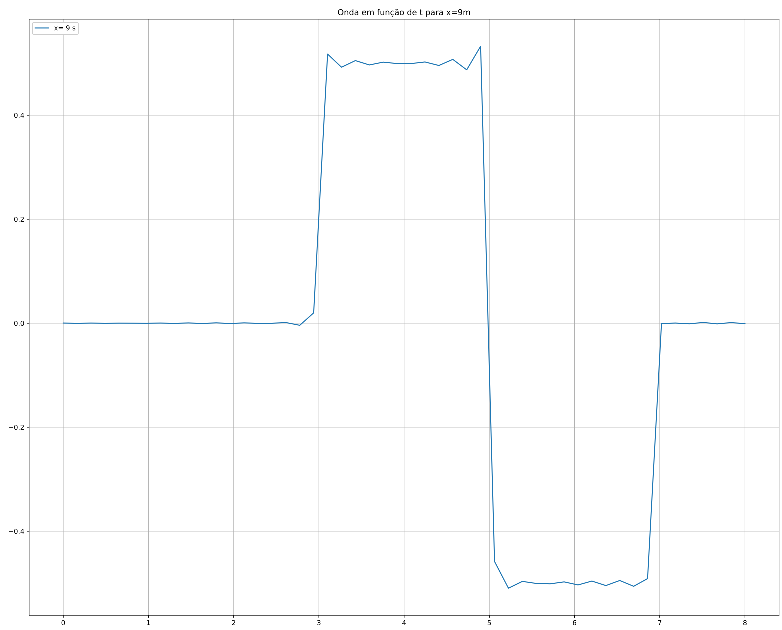

Figura 22: Onda na corda elástica na cota x=9.000m

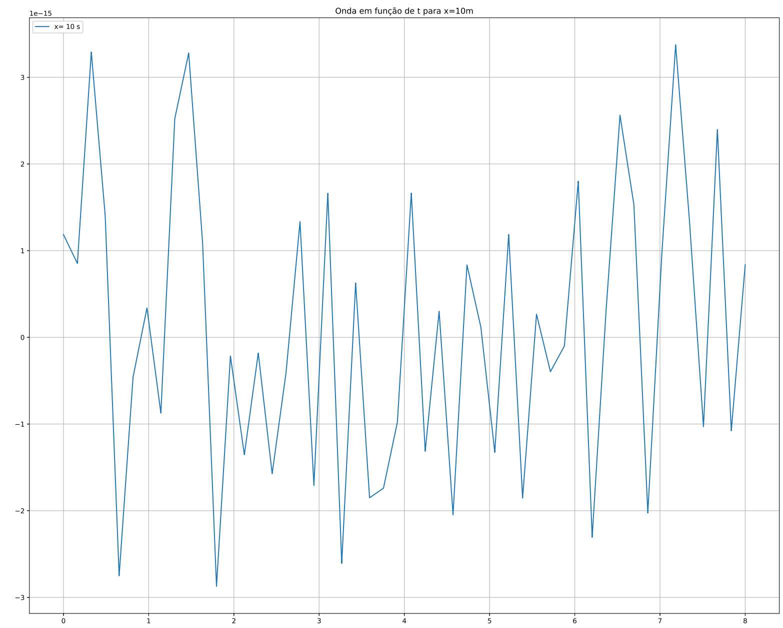

Figura 23: Onda na corda elástica na cota x=10.000m

A simulação animada está disponível em https://youtu.be/wT0QXQl6sjE.

Podemos perceber que a perturbação inicial se divide igualmente e se propaga para cada um dos lados. Ao atingir uma extremidade fixa, a perturbação reflete em oposição de fase, interferindo em si própria e quano os pulsos se encontram forma uma interferência construtiva aumentando sua intensidade.

Parte II
Equação de Laplace

Problema 12

(a) Encontre a solução $u(x,y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a, 0 < y < b$, que satisfaz as condições de contorno

$$\begin{aligned} u(0,y) &= 0, \quad u(a,y) = 0, \qquad 0 < y < b, \\ u_y(x,0) &= 0, \quad u(x,b) = g(x), \quad 0 \leq x \leq a. \end{aligned}$$

Note que esse não é um problema de Dirichlet nem de Neumann, mas um problema misto no qual u é dada em parte da fronteira e sua derivada normal é dada no resto.

(b) Encontre a solução se

$$g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq a/2, \\ a - x, & a/2 \leq x \leq a \end{cases}$$

(c) Sejam $a = 3$ e $b = 1$. Fazendo gráficos apropriados, compare essa solução com a do Problema 1.

Resposta.

$$\nabla^2 u = 0$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Tomando $u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$.

$$X''(x) \cdot Y(y) + X(x) \cdot Y''(y) = 0$$

$$X''(x) \cdot Y(y) = -X(x) \cdot Y''(y)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

$$\begin{cases} \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \\ \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 \end{cases}$$

Caso $\lambda < 0$:

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{\sqrt{-\lambda}x}$$

$$Y(y) = C\cos\left(\sqrt{-\lambda}y\right) + D\,\text{sen}\left(\sqrt{-\lambda}y\right)$$

Impondo a condição $u(0, y) = 0$ implica na solução trivial.
Caso $\lambda = 0$:

$$X(x) = Ax + B$$

$$Y(y) = Cy + D$$

Impondo a condição $u(0, y) = 0$ e $u(a, y) = 0$ implica na solução trivial.
Caso $\lambda > 0$:

$$X(x) = A\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + B\,\text{sen}\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$

$$Y(y) = Ce^{\sqrt{\lambda}y} + De^{-\sqrt{\lambda}y}$$

Impondo a condição $u(0, y) = 0$, implica que $A = 0$, e impondo $u(a, y) = 0$, implica em $\sqrt{\lambda}a = n\pi \rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{a}$ para algum n natural.

$$X(x) = B\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

$$Y(y) = Ce^{\frac{n\pi}{a}y} + De^{\frac{n\pi}{a}y}$$

$$Y'(y) = C\frac{n\pi}{a}e^{\frac{n\pi}{a}y} - D\frac{n\pi}{a}e^{-\frac{n\pi}{a}y}$$

Impondo a condição de contorno $u_y(x, 0) = 0$, tem-se:

$$C\frac{n\pi}{a} - D\frac{n\pi}{a} = 0$$

$$C = D$$

O que resulta na solução para um n particular:

$$u_n(x, y) = \left[B\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right] \cdot \left[C\,\text{senh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\right]$$

$$u_n(x, y) = a_n\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \text{senh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \text{senh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

Impondo a condição de contorno $u(x,b) = g(x)$, tem-se:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}b\right) = g(x)$$

Os coeficientes da série de Fourier são:

$$a_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}b\right) = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} g(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{a\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}b\right)}\int_{-a}^{a} g(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\, dx$$

Explicitando a solução, tem-se:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}b\right)}\int_{-a}^{a} g(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\, dx \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cdot\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

Vamos agora tomar a solução dada no item (b).

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} g(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\, dx &= 2\int_{0}^{a} g(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\, dx \\
&= 2\left(\int_{0}^{a/2} x\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\, dx + \int_{a/2}^{a}(a-x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\, dx\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{a/2} x\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\, dx &= \left[-\frac{a}{n\pi}x\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) + \frac{a^2}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right]_0^{a/2} \\
&= -\frac{a^2}{2n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{a^2}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{a/2}^{a}(a-x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\, dx &= \int_{a/2}^{a} a\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\, dx - \int_{a/2}^{a} x\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\, dx \\
&= \left[-\frac{a^2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) + \frac{a}{n\pi}x\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) - \frac{a^2}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right]_{a/2}^{a} \\
&= -\frac{a^2}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{a^2}{n\pi}\cos(n\pi) - \frac{a^2}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}(n\pi) \\
&+ \frac{a^2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{a^2}{2n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{a^2}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\
&= \frac{a^2}{2n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{a^2}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\int_{-a}^{a} g(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\, dx = 2\left(-\frac{a^2}{2n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{a^2}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{a^2}{2n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{a^2}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$$

$$\int_{-a}^{a} g(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\, dx = 2\left(\frac{a^2}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{a^2}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$$

$$\int_{-a}^{a} g(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\, dx = \frac{4a^2}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

A solução completa:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a\,\text{senh}\left(\frac{n\pi}{a}b\right)} \frac{4a^2}{n^2\pi^2} \,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \text{senh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

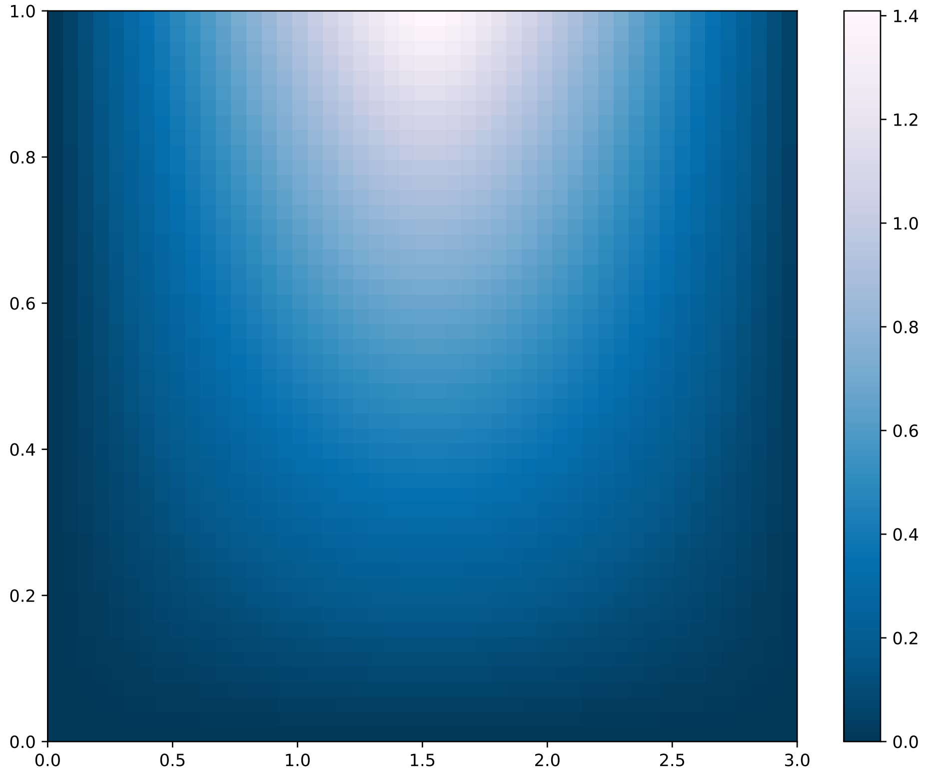

Figura 24: Representação da solução em tons de azul

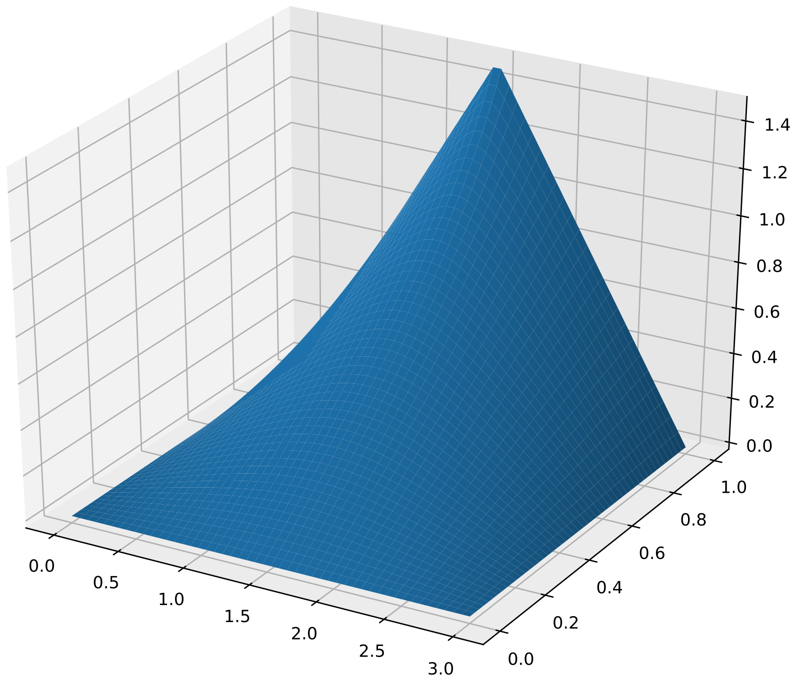

Figura 25: Representação em superfície da solução