

Projeto de Estudos

Nome do estudante: *Myke Albuquerque Pinto de Oliveira*

Curso: *Equações Diferenciais Parciais* – Docente: *Christian Wagner*
Data de entrega: *4 de novembro de 2020*

Parte I

Equação da Onda

Problema 10

Considere uma corda elástica de comprimento L . A extremidade $x = 0$ é mantida fixa enquanto a extremidade $x = L$ está solta; assim, as condições de contorno são $u(0, t) = 0$ e $u(L, t) = 0$. A corda é colocada em movimento, sem velocidade inicial, a partir da posição inicial $u(x, 0) = f(x)$, em que

$$f(x) = \begin{cases} 1, & L/2 - 1 < x < L/2 + 1 \quad (L > 2), \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Calcule o deslocamento $u(x, t)$.
- (b) Com $L = 10$ e $a = 1$, faça o gráfico de u em função de x para $0 \leq x \leq 10$ e para diversos valores de t . Preste atenção especial aos valores de t entre 3 e 7. Note como a perturbação inicial é refletida em cada extremidade da corda.
- (c) Com $L = 10$ e $a = 1$, faça o gráfico de u em função de t para diversos valores de x .
- (d) Construa uma animação da solução no tempo durante pelo menos um período.
- (e) Descreva o movimento da corda em algumas frases.

Resposta. Em primeiro lugar, vamos resolver a EDP da onda $a^2 u_{xx} = u_{tt}$. Usando o método da separação de variáveis, vamos tentar a solução $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$. Aplicando na EDP, tem-se:

$$a^2 X''(x) \cdot T(t) = X(x) \cdot T''(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)}$$

$$\begin{cases} \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \\ \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \end{cases}$$

Caso $\lambda < 0$:

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$T(t) = Ce^{a\sqrt{-\lambda}t} + De^{-a\sqrt{-\lambda}t}$$

Impondo a condição de contorno:

$$u(0, t) = X(0)T(t) = (A + B)(Ce^{\sqrt{-\lambda}t} + De^{-\sqrt{-\lambda}t})$$

Isso implica $A + B = 0$ ou $C = 0$ e $D = 0$, ou seja, a solução trivial, a qual não estamos interessados.

Caso $\lambda = 0$:

$$X(x) = Ax + B$$

$$T(t) = Ct + D$$

Impondo as condições de contorno:

$$u(0, t) = X(0)T(t) = B(Ct + D) = 0$$

O que também acarreta na solução trivial.

Caso $\lambda > 0$:

$$X(x) = A \sin(\sqrt{-\lambda}x) + B \cos(\sqrt{-\lambda}x)$$

$$T(t) = C \sin(a\sqrt{-\lambda}t) + D \cos(a\sqrt{-\lambda}t)$$

Impondo as condições de contorno:

$$u(0, t) = \left[A \sin(\sqrt{-\lambda}x) + B \cos(\sqrt{-\lambda}x) \right]_{x=0} \cdot \left[C \sin(a\sqrt{-\lambda}t) + D \cos(a\sqrt{-\lambda}t) \right] = 0$$

$$u(0, t) = B \left[C \sin(a\sqrt{-\lambda}t) + D \cos(a\sqrt{-\lambda}t) \right]$$

$$B = 0$$

$$u(L, t) = \left[A \sin(\sqrt{-\lambda}x) \right]_{x=L} \cdot \left[C \sin(a\sqrt{-\lambda}t) + D \cos(a\sqrt{-\lambda}t) \right] = 0$$

$$u(L, t) = \left[A \operatorname{sen} \left(\sqrt{-\lambda} L \right) \right] \cdot \left[C \operatorname{sen} \left(a \sqrt{-\lambda} t \right) + D \cos \left(a \sqrt{-\lambda} t \right) \right] = 0$$

Para algum n natural:

$$\sqrt{-\lambda} L = n\pi$$

$$\sqrt{-\lambda} = \frac{n\pi}{L}$$

E a condição inicial de velocidade nula:

$$u_t(x, 0) = \left[A \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \right] \cdot \left[Ca \frac{n\pi}{L} \cos \left(a \frac{n\pi}{L} t \right) + Da \frac{n\pi}{L} \operatorname{sen} \left(a \frac{n\pi}{L} t \right) \right]_{t=0} = 0$$

$$u_t(x, 0) = \left[A \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \right] \cdot \left[Ca \frac{n\pi}{L} \right] = 0$$

$$C = 0$$

Reescrevendo $u(x, t)$:

$$u(x, t) = \left[A \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \right] \cdot \left[D \cos \left(a \frac{n\pi}{L} t \right) \right]$$

$$u(x, t) = AD \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \cdot \cos \left(a \frac{n\pi}{L} t \right)$$

Definindo $b_n = AD$, tem-se uma solução para cada natural n .

$$u_n(x, t) = b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \cdot \cos \left(a \frac{n\pi}{L} t \right)$$

Vamos procurar por uma solução que satisfaça a condição inicial de posição a partir da combinação destas soluções já encontradas.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \cdot \cos \left(a \frac{n\pi}{L} t \right)$$

Impondo a condição inicial:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) = f(x)$$

Os termos da série de Fourier são dados por:

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{L/2-1}^{L/2+1} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{L} \left[-\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_{L/2-1}^{L/2+1} \\
b_n &= -\frac{2}{n\pi} \left[\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_{L/2-1}^{L/2+1} \\
b_n &= -\frac{2}{n\pi} \left[\cos\left(\frac{n\pi(L/2+1)}{L}\right) - \cos\left(\frac{n\pi(L/2-1)}{L}\right) \right] \\
b_n &= -\frac{2}{n\pi} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{L}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{n\pi}{L}\right) \right] \\
b_n &= -\frac{2}{n\pi} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) \right] \\
b_n &= \frac{4}{n\pi} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) \right]
\end{aligned}$$

Explicitando a solução:

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot \cos\left(a\frac{n\pi}{L}t\right) \\
b_n &= \begin{cases} \frac{4}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right), & n \equiv 1 \pmod{4} \\ 0, & n \equiv 2 \vee n \equiv 0 \pmod{4} \\ -\frac{4}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right), & n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}
\end{aligned}$$

Seguem os gráficos para vários valores de t:

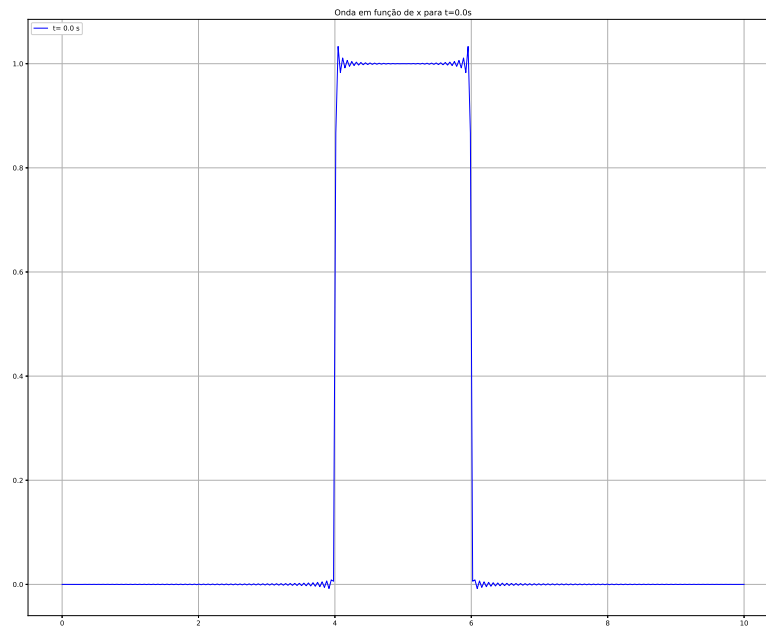


Figura 1: Onda na corda elástica no instante t=0.000s

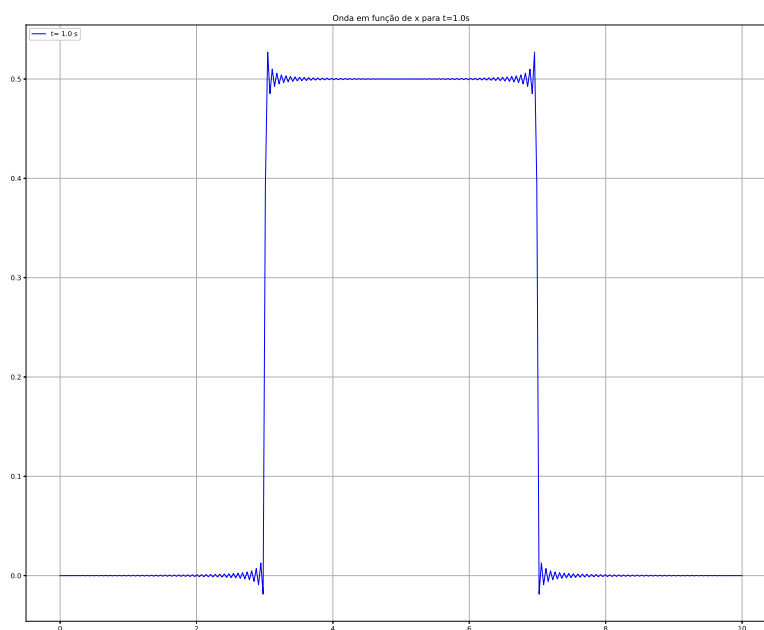


Figura 2: Onda na corda elástica no instante $t=1.000\text{s}$

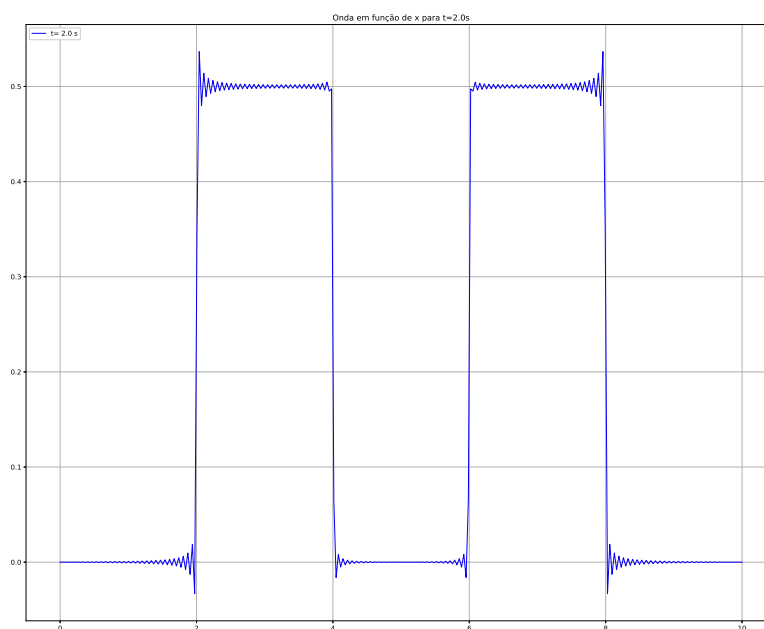


Figura 3: Onda na corda elástica no instante $t=2.000\text{s}$

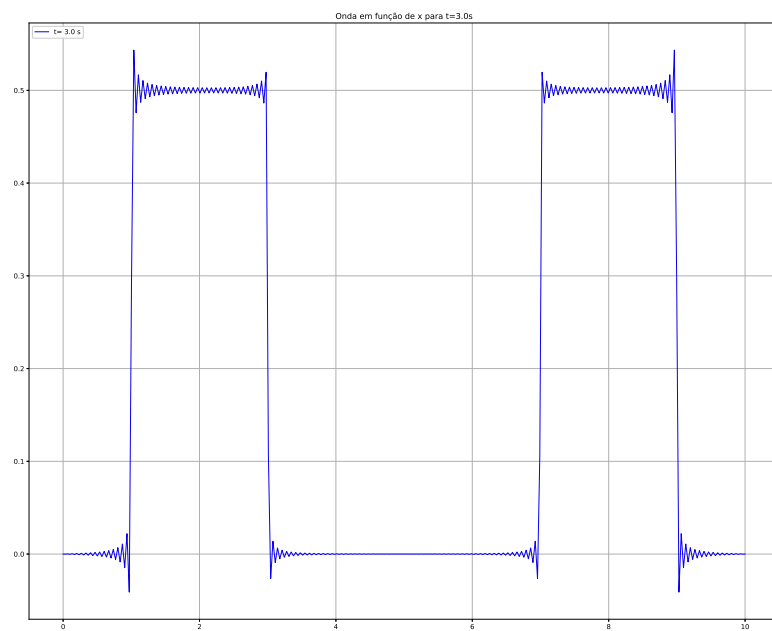


Figura 4: Onda na corda elástica no instante $t=3.000$ s

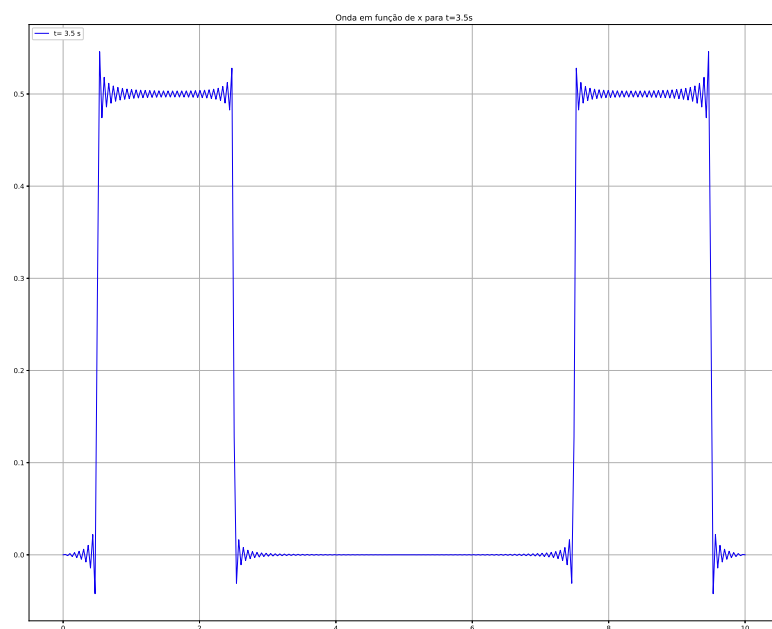


Figura 5: Onda na corda elástica no instante $t=3.500$ s

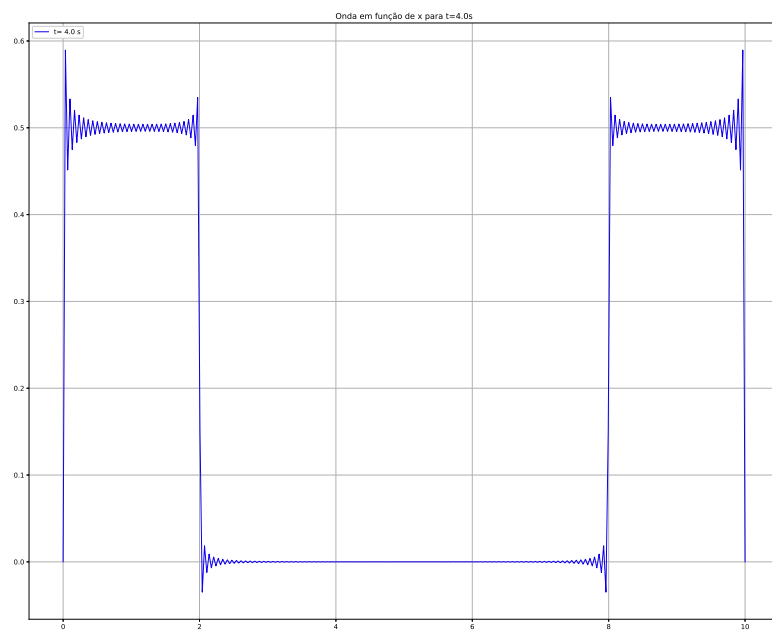


Figura 6: Onda na corda elástica no instante $t=4.000s$

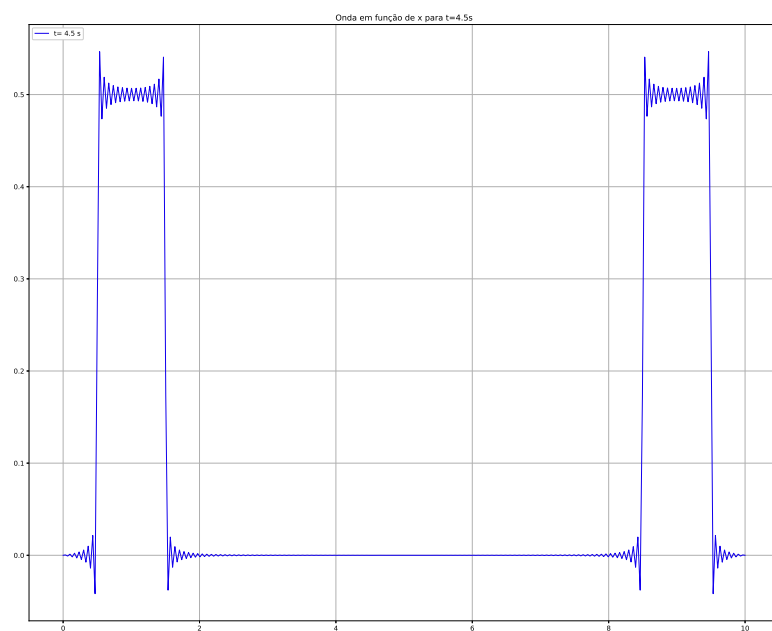


Figura 7: Onda na corda elástica no instante $t=4.500s$

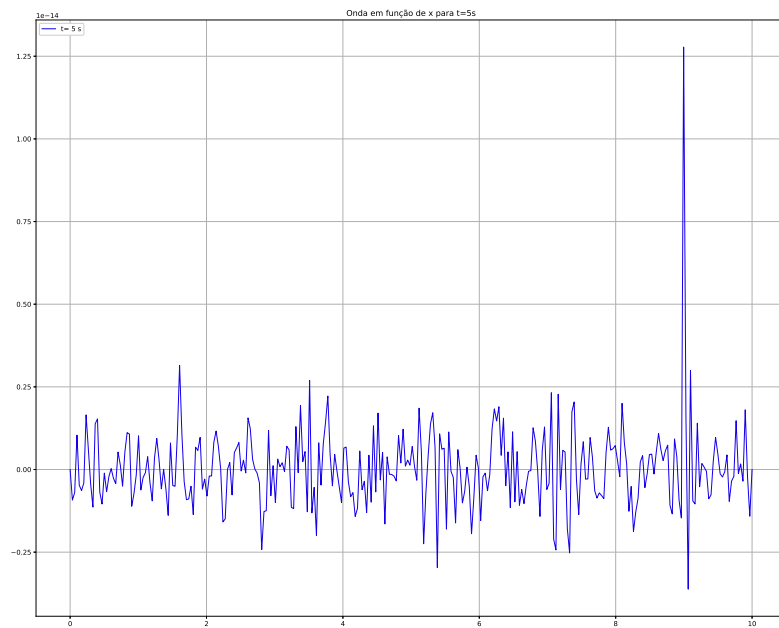


Figura 8: Onda na corda elástica no instante $t=5.000s$

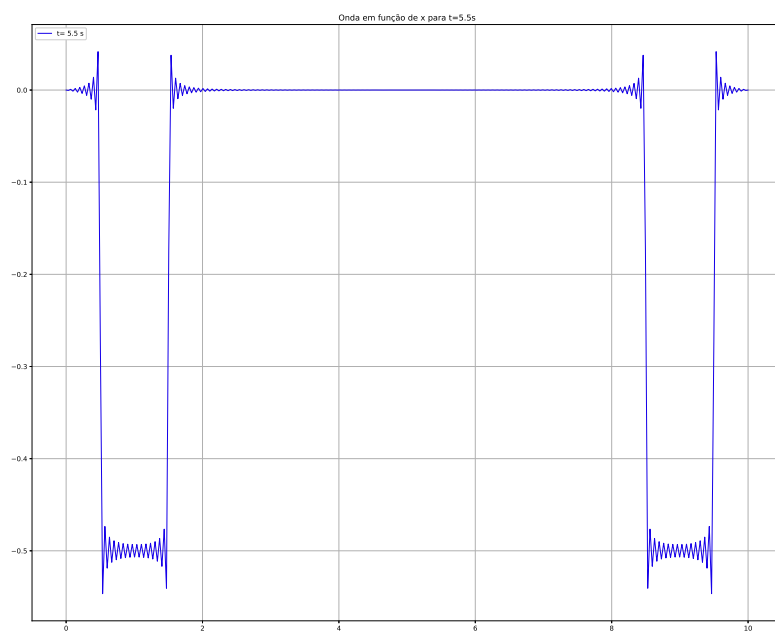
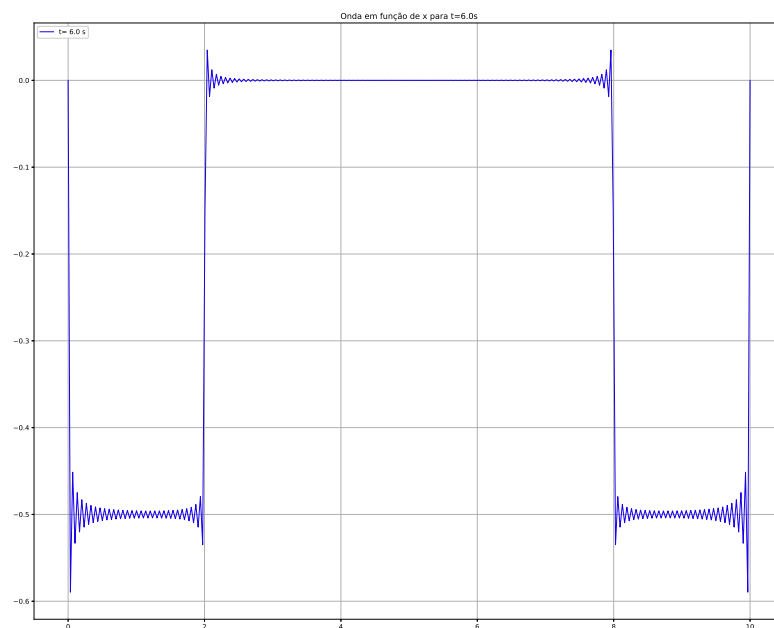
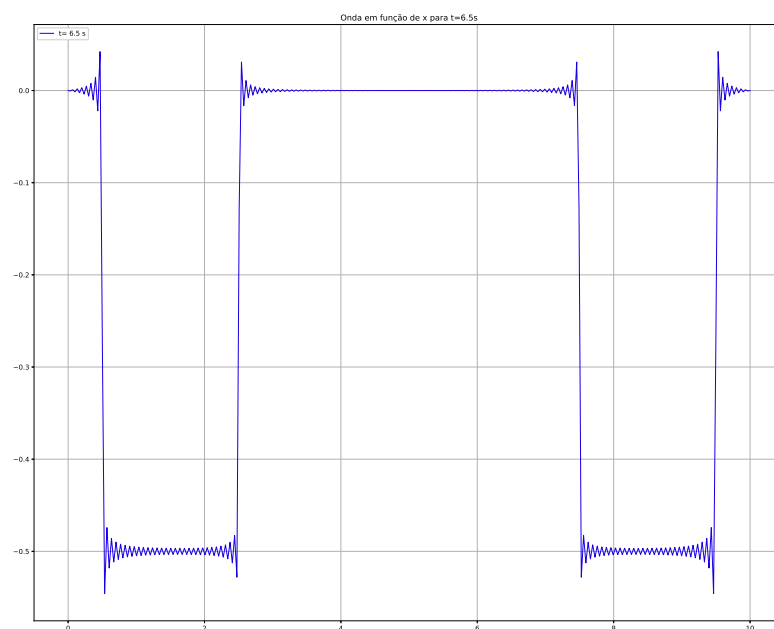


Figura 9: Onda na corda elástica no instante $t=5.500s$

Figura 10: Onda na corda elástica no instante $t=6.000\text{s}$ Figura 11: Onda na corda elástica no instante $t=6.500\text{s}$

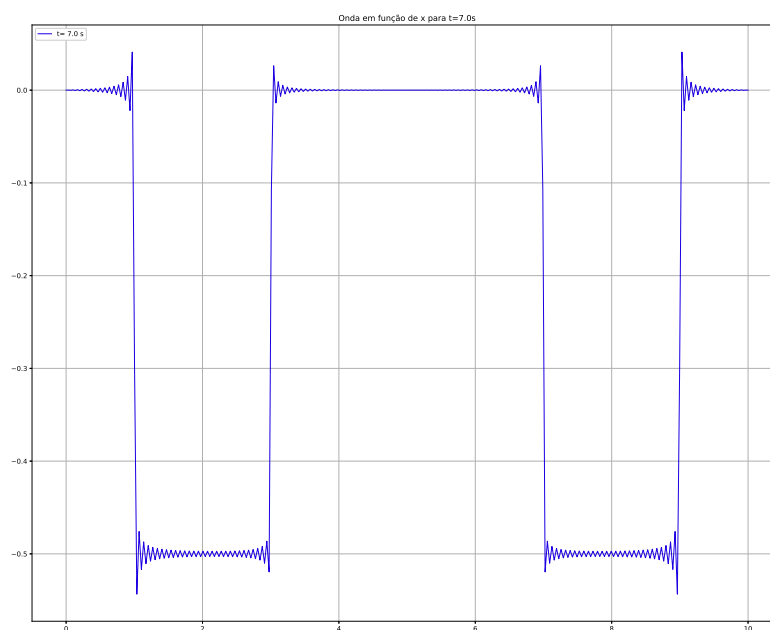


Figura 12: Onda na corda elástica no instante $t=7.000$ s

Seguem agora os gráficos da onda em função de t para vários x 's.

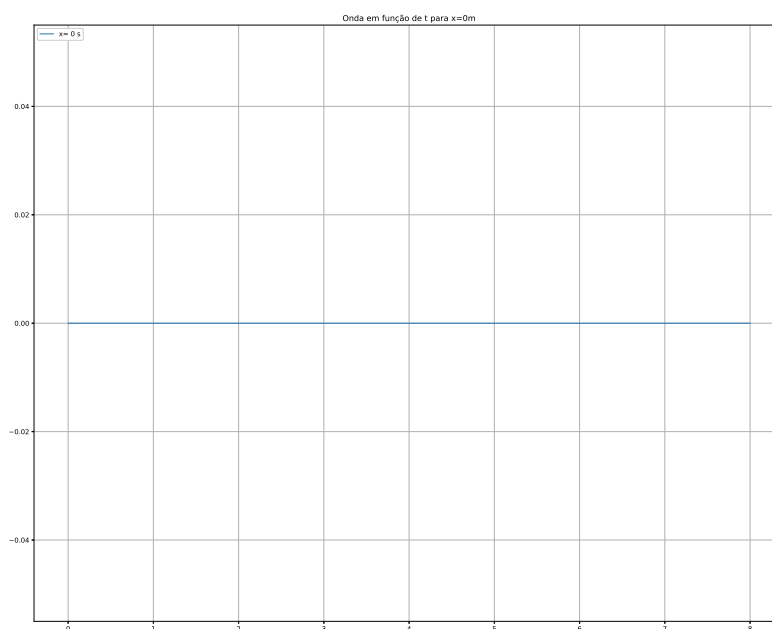
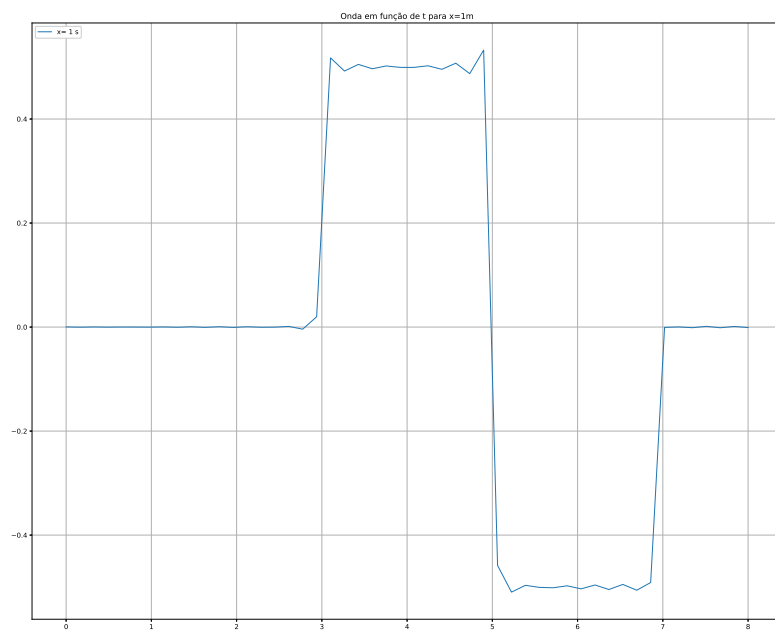
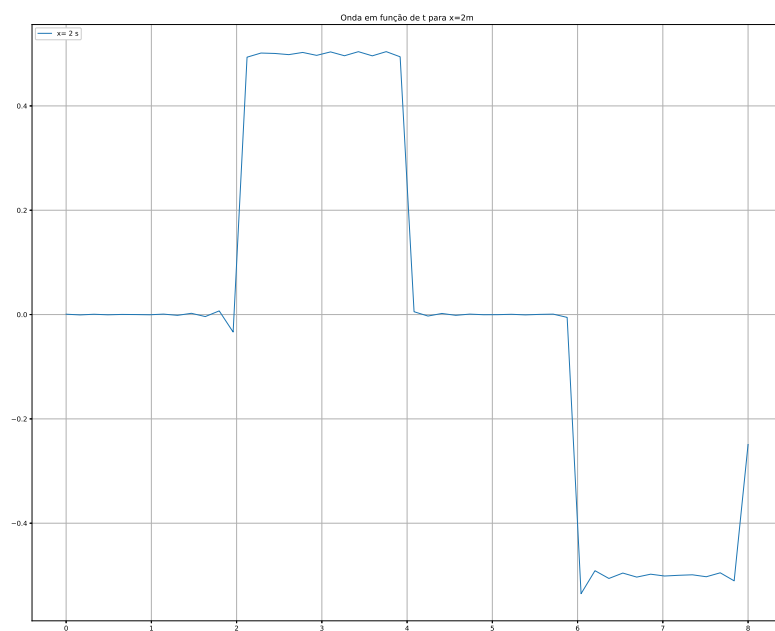
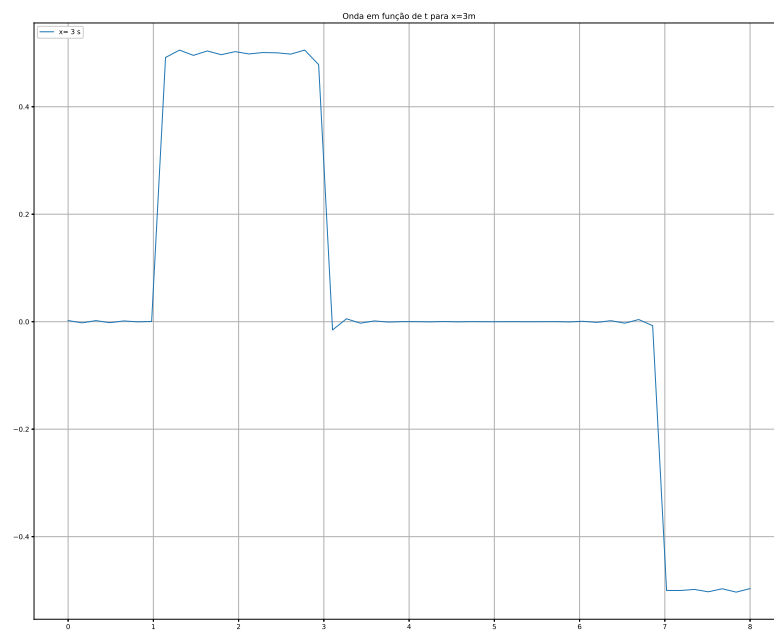
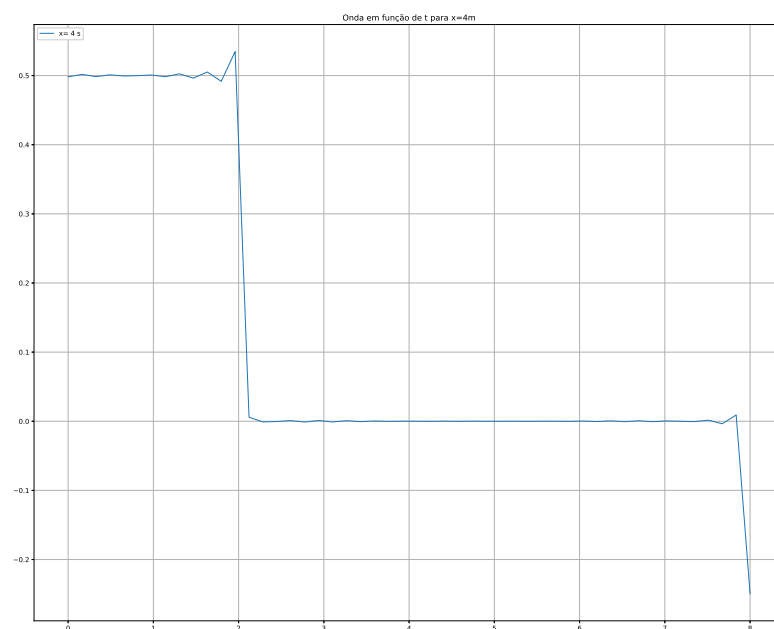
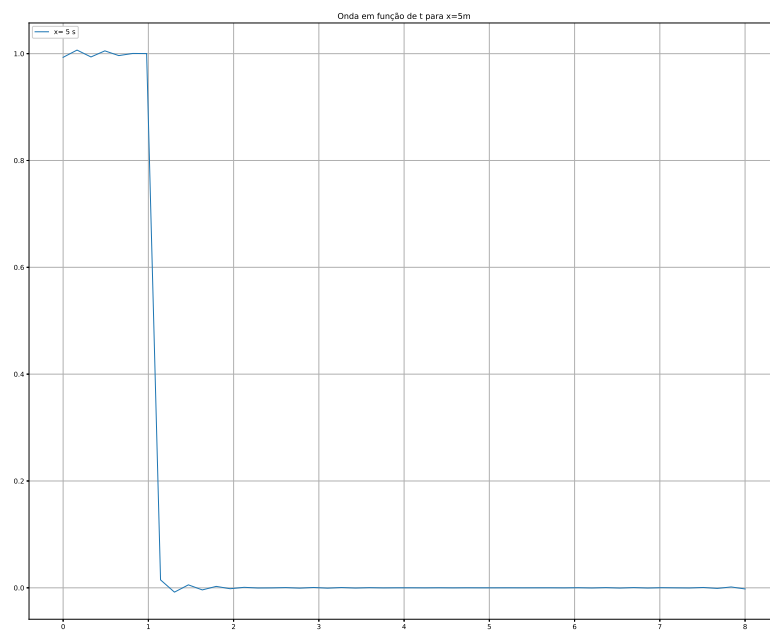
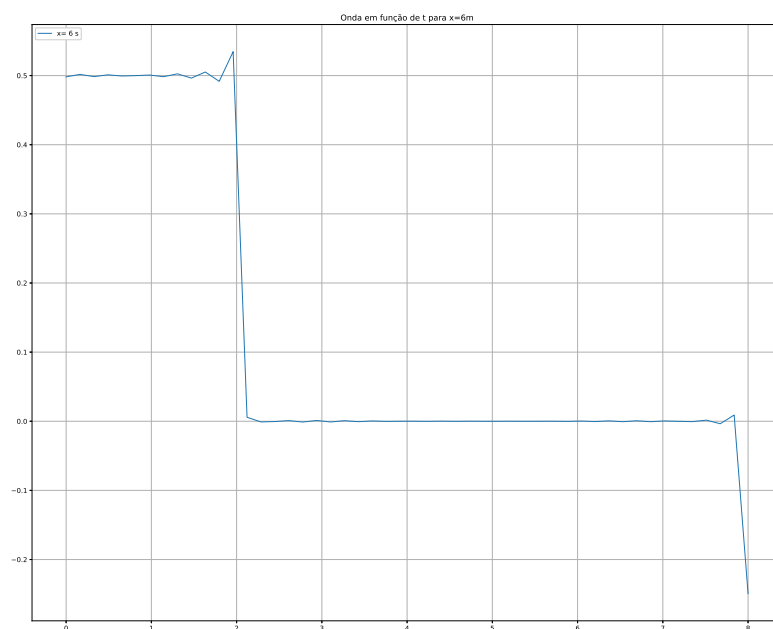
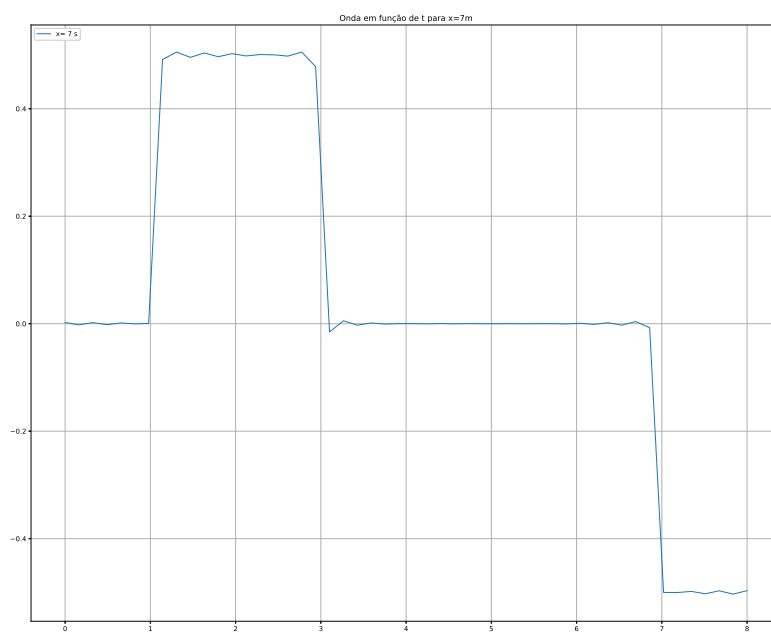
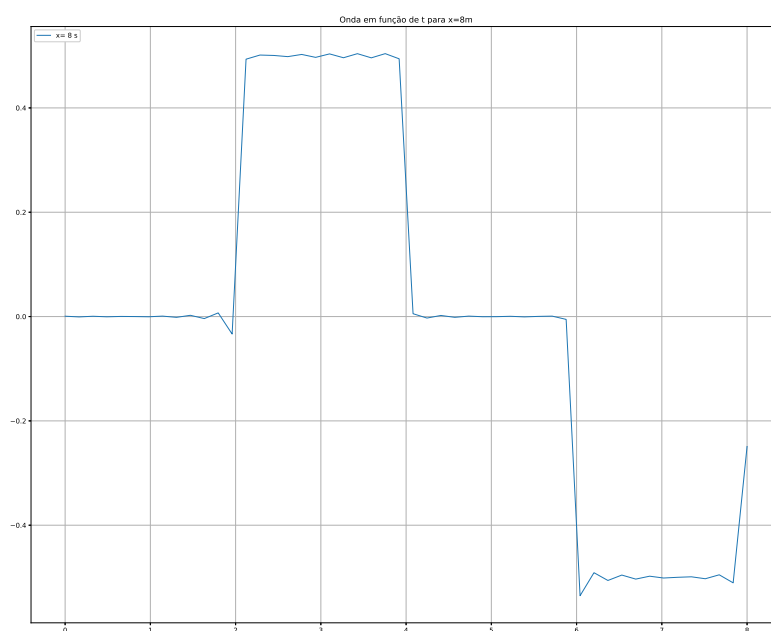


Figura 13: Onda na corda elástica na cota $x=0.000$ m

Figura 14: Onda na corda elástica na cota $x=1.000\text{m}$ Figura 15: Onda na corda elástica na cota $x=2.000\text{m}$

Figura 16: Onda na corda elástica na cota $x=3.000\text{m}$ Figura 17: Onda na corda elástica na cota $x=4.000\text{m}$

Figura 18: Onda na corda elástica na cota $x=5.000\text{m}$ Figura 19: Onda na corda elástica na cota $x=6.000\text{m}$

Figura 20: Onda na corda elástica na cota $x=7.000\text{m}$ Figura 21: Onda na corda elástica na cota $x=8.000\text{m}$

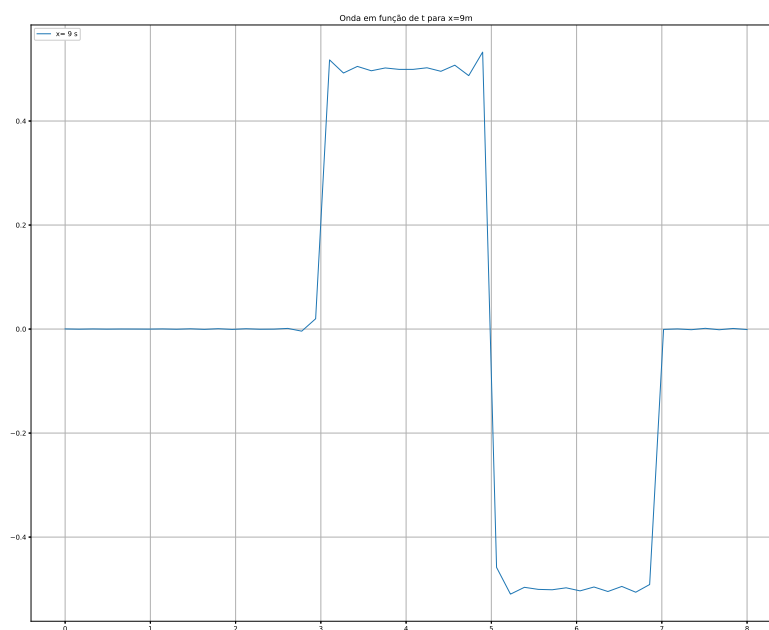


Figura 22: Onda na corda elástica na cota $x=9.000\text{m}$

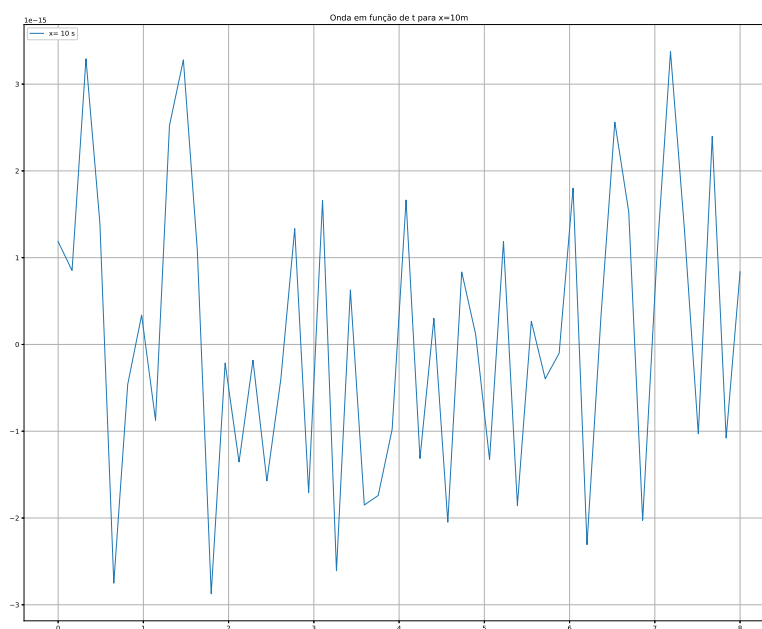


Figura 23: Onda na corda elástica na cota $x=10.000\text{m}$

A simulação animada está disponível em <https://youtu.be/wT0QXQ16sjE>.

Podemos perceber que a perturbação inicial se divide igualmente e se propaga para cada um dos lados. Ao atingir uma extremidade fixa, a perturbação reflete em oposição de fase, interferindo em si própria e quando os pulsos se encontram forma uma interferência construtiva aumentando sua intensidade.

Parte II

Equação de Laplace

Problema 12

- (a) Encontre a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a, 0 < y < b$, que satisfaz as condições de contorno

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0, \quad u(a, y) = 0, & 0 < y < b, \\ u_y(x, 0) &= 0, \quad u(x, b) = g(x), & 0 \leq x \leq a. \end{aligned}$$

Note que esse não é um problema de Dirichlet nem de Neumann, mas um problema misto no qual u é dada em parte da fronteira e sua derivada normal é dada no resto.

- (b) Encontre a solução se

$$g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq a/2, \\ a - x, & a/2 \leq x \leq a \end{cases}$$

- (c) Sejam $a = 3$ e $b = 1$. Fazendo gráficos apropriados, compare essa solução com a do Problema 1.

Resposta.

$$\nabla^2 u = 0$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Tomando $u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$.

$$X''(x) \cdot Y(y) + X(x) \cdot Y''(y) = 0$$

$$X''(x) \cdot Y(y) = -X(x) \cdot Y''(y)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

$$\begin{cases} \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \\ \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 \end{cases}$$

Caso $\lambda < 0$:

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$Y(y) = C \cos(\sqrt{-\lambda}y) + D \sin(\sqrt{-\lambda}y)$$

Impondo a condição $u(0, y) = 0$ implica na solução trivial.

Caso $\lambda = 0$:

$$X(x) = Ax + B$$

$$Y(y) = Cy + D$$

Impondo a condição $u(0, y) = 0$ e $u(a, y) = 0$ implica na solução trivial.

Caso $\lambda > 0$:

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

$$Y(y) = Ce^{\sqrt{\lambda}y} + De^{-\sqrt{\lambda}y}$$

Impondo a condição $u(0, y) = 0$, implica que $A = 0$, e impondo $u(a, y) = 0$, implica em $\sqrt{\lambda}a = n\pi \rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{a}$ para algum n natural.

$$X(x) = B \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

$$Y(y) = Ce^{\frac{n\pi}{a}y} + De^{-\frac{n\pi}{a}y}$$

$$Y'(y) = C\frac{n\pi}{a}e^{\frac{n\pi}{a}y} - D\frac{n\pi}{a}e^{-\frac{n\pi}{a}y}$$

Impondo a condição de contorno $u_y(x, 0) = 0$, tem-se:

$$C\frac{n\pi}{a} - D\frac{n\pi}{a} = 0$$

$$C = D$$

O que resulta na solução para um n particular:

$$u_n(x, y) = \left[B \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \right] \cdot \left[C \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \right]$$

$$u_n(x, y) = a_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

Impondo a condição de contorno $u(x, b) = g(x)$, tem-se:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \cdot \sinh \left(\frac{n\pi}{a} b \right) = g(x)$$

Os coeficientes da série de Fourier são:

$$a_n \sinh \left(\frac{n\pi}{a} b \right) = \frac{1}{a} \int_{-a}^a g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) dx$$

$$a_n = \frac{1}{a \sinh \left(\frac{n\pi}{a} b \right)} \int_{-a}^a g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) dx$$

Explicitando a solução, tem-se:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a \sinh \left(\frac{n\pi}{a} b \right)} \int_{-a}^a g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) dx \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \cdot \sinh \left(\frac{n\pi}{a} y \right)$$

Vamos agora tomar a solução dada no item (b).

$$\int_{-a}^a g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) dx = 2 \int_0^a g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) dx$$

$$= 2 \left(\int_0^{a/2} x \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) dx + \int_{a/2}^a (a-x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) dx \right)$$

$$\int_0^{a/2} x \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) dx = \left[-\frac{a}{n\pi} x \cos \left(\frac{n\pi}{a} x \right) + \frac{a^2}{n^2 \pi^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \right]_0^{a/2}$$

$$= -\frac{a^2}{2n\pi} \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) + \frac{a^2}{n^2 \pi^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right)$$

$$\int_{a/2}^a (a-x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) dx = \int_{a/2}^a a \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) dx - \int_{a/2}^a x \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) dx$$

$$= \left[-a \cos \left(\frac{n\pi}{a} x \right) + \frac{a}{n\pi} x \cos \left(\frac{n\pi}{a} x \right) - \frac{a^2}{n^2 \pi^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \right]_{a/2}^a$$

$$= -a \cos(n\pi) + \frac{a^2}{n\pi} \cos(n\pi) - \frac{a^2}{n^2 \pi^2} \operatorname{sen}(n\pi)$$

$$+ a \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) - \frac{a^2}{2n\pi} \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) + \frac{a^2}{n^2 \pi^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right)$$

$$= -a \cos(n\pi) + \frac{a^2}{n\pi} \cos(n\pi) + a \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right)$$

$$- \frac{a^2}{2n\pi} \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) + \frac{a^2}{n^2 \pi^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{a^2}{n\pi} - a \right) \cos(n\pi) + \left(a - \frac{a^2}{2n\pi} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right)$$

$$+ \frac{a^2}{n^2 \pi^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{a/2} x \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) dx + \int_{a/2}^a (a-x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) dx &= -\frac{a^2}{2n\pi} \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) + \frac{a^2}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) \\ &+ \left(\frac{a^2}{n\pi} - a \right) \cos(n\pi) + \left(a - \frac{a^2}{2n\pi} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) + \frac{a^2}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{a/2} x \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) dx + \int_{a/2}^a (a-x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) dx &= \left(a - \frac{a^2}{n\pi} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) + \frac{2a^2}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) \\ &+ \left(\frac{a^2}{n\pi} - a \right) \cos(n\pi) \\ &= \left(a - \frac{a^2}{n\pi} \right) \left(\cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) - \cos(n\pi) \right) \\ &+ \frac{2a^2}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) dx &= \left(a - \frac{a^2}{n\pi} \right) \left(\cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) - \cos(n\pi) \right) \\ &+ \frac{2a^2}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) \end{aligned}$$