Лекція 7

**Замикання відношень**

**Озн:** **Замиканням відношення** R за властивістю q називають найменше відношення C, яке має властивість q і таке, що R⊂C. Термін „найменше відношення” означає, що С є підмножиною будь-якого відношення S, для якого виконуються умови:

1) S має властивість q

2) R⊂S.

**Т:** Теорема. Нехай R – відношення на множині A. Шлях довжиною n від елемента a до елемента b у відношенні R існує тоді й лише тоді, коли (a, b)∈R^n.

**Т:** Транзитивне замикання відношення R дорівнює з’єднувальному відношенню R\*.

Л: Нехай R – відношення на n-елементній множині A. Якщо в R існує шлях довжиною щонайменше один від a до b, то існує шлях від a до b, довжина якого не перевищує n. Більше того, коли a ≠ b, якщо в R існує шлях від a до b довжиною щонайменше один, то існує шлях від a до b, довжина якого не перевищує n – 1.

**Т:** Нехай MR матриця відношення R на множині з n елементів. Тоді

M R\* = M R ∨ (M R)[2] ∨ (M R) [3] ∨...∨ (M R) [n]

Лекція 8

**Відношення еквівалентності. Відношення часткового порядку**

Озн: Відношення на множині A називають **відношенням еквівалентності**, якщо воно рефлексивне, симетричне й транзитивне.

Озн: Нехай R – відношення еквівалентності на множині А. Множину всіх елементів, які еквівалентні до елемента a∈A, називають **класом еквівалентності** за відношенням R, його позначають як [а]R .

Маючи на увазі якесь певне відношення еквівалентності, використовують позначення [a] для цього класу еквівалентності.

Отже: [a]R = {x ∈ A (a, x)∈ R}. Елемент b∈ [a]R називають представником цього класу еквівалентності. Будь-який елемент із класу еквівалентності може бути використаний як представник цього класу.

Л: Нехай R – відношення еквівалентності на множині А. Тоді такі твердження

еквівалентні:

(I) aRb,

(II) [a] = [b],

(III) [a] ∩ [b] ≠ ∅.

**Т:** Кожне відношення еквівалентності R на множині А породжує розбиття

множини А на класи еквівалентності.

**Т:** Будь-яке розбиття множини A визначає на множині A відношення

еквівалентності.

Озн: Відношення R на множині A називають **відношенням часткового порядку** (або частковим порядком), якщо воно рефлексивне, антисиметричне й транзитивне. Множину A з частковим порядком R називають частково впорядкованою множиною йпозначають (A, R).

Озн: Два елементи a та b частково впорядкованої множини (A, R) називають **порівнюваними,** якщо aRb або bRa. Якщо а та b – такі елементи, що ні aRb, ні bRa, то їх називають **непорівнюваними.**

Озн: Якщо (A, R) – частково впорядкована множина, у якій будь-які два елементи порівнювані, то її називають **лінійно, або тотально впорядкованою,** а частковий порядок R – лінійним, або тотальним порядком.

Лекція 9

**Діаграма Гассе**

Багато дуг в орієнтованому графі для скінченної впорядкованої множини можна не зображати, бо вони присутні обов’язково. Наприклад, розглянемо орієнтований граф для відношення часткового порядку {(a, b) a ≤ b} на множині {1, 2, 3, 4}. Оскільки це відношення – частковий порядок, то воно рефлексивне, і його граф має петлі у всіх вершинах. Тому що відношення часткового порядку транзитивне, ми можемо не показувати дуги, наявність яких зумовлена властивістю транзитивності. Якщо ми домовимось, що всі дуги «спрямовані вверх», то стрілки можна не ставити.

Впорядкована множина може мати більше одного максимального чи мінімального елемента.

Озн: Частково впорядковану множину, у якій кожна пара елементів має як найменшу верхню, так і найбільшу нижню грані, називають решіткою.

Озн: Лінійний порядок ≤ називають сумісним із частковим порядком R, якщо з a R b випливає

a ≤ b. Побудову лінійного порядку, сумісного із заданим частковим порядком, називають **топологічним сортуванням**.

**Т:** Кожна скінченна непорожня частково впорядкована множина (A, R) має принаймні один мінімальний елемент.

Лекція 10

**Комбінаторика**

**Правило суми**. Якщо деякий об’єкт x можна вибрати n1 способами, а інший об’єкт y – n2 способами, то вибрати або x або y можна n1+n2 способами.

**Правило добутку.** Якщо об’єкт x можна вибрати n1 способами та після кожного такого вибору об’єкт y можна вибрати n2 способами, то пару об’єктів (x, y) у зазначеному порядку можна вибрати n1·n2 способами.

Озн: Вибірку називають **упорядкованою**, якщо задано порядок її елементів, а ні – то **невпорядкованою.**

Озн: Упорядковані r-вибірки з n-елементної множини називають **розміщеннями** з n елементів по r, а невпорядковані – **сполученнями** з n елементів по r.

Озн: Розглянемо два способи вибору елементів. Згідно з першим способом вибору на кожному кроці вибирають елемент з усієї множини A. Отже, один і той самий елемент із множини A може зустрітись у вибірці декілька разів. Такі вибірки називають **вибірками з повтореннями.**

Озн: У разі застосування другого способу вибраний елемент вилучають із множини A. Це означає, що на кожному j-му кроці (1<j≤k) вибирають елемент із множини A \ {x1, x2 ,..,

xj−1}, і вибірка не містить однакових елементів. Такі вибірки називають **вибірками без повторень.**

Озн : Перестановка – це особливий випадок розміщення без повторень з n елементів, коли в розміщення входять усі елементи. Окремі перестановки різняться лише порядком елементів. Кількість таких перестановок позначають як Pn.

Формулу для Pn одержують із формули для кількості розміщень без

повторень: Pn = Ann = n!

Лекція 11

**Рекурентні рівняння. Діріхле. Включення-виключення.**

Озн: **Розв’язком рекурентного рівняння** називають послідовність, яка задовольняє це рівняння. Інакше кажучи, послідовність задано рекурентною формулою, а потрібно знайти явний вираз для an через n.

Метод рекурентних рівнянь у комбінаториці полягає в зведенні комбінаторної задачі до аналогічної задачі для меншої кількості об’єктів.

**Т: (принцип коробок Діріхле).** Якщо k+1 або більше предметів розкладено в k коробках, то існує принаймні одна коробка, яка містить два або більше предметів.

**Т: (узагальнений принцип коробок Діріхле)**. Якщо N предметів розкладено в k коробках, то існує принаймні одна коробка, яка містить щонайменше N/k предметів.

Лекція 12

**Дискретна ймовірність**

Нехай S – скінченний непорожній простір рівноможливих результатів, E – подія, тобто підмножина S, тоді ймовірність E визначають як p (E ) = E/S.