Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Лабораторна робота №5
з дисципліни «Чисельні методи в інформатиці»
Тема: інтегрування
Варіант 3

Виконала студентка третього курсу
Групи ІПС-32
Михайлова Софія

1) Постановка задачі

Виконати наближення інтегралу, використовуючи квадратурні формули.

Варіант 3

1. Побудувати квадратурну формулу інтерполяційного типу для наближеного інтегралу функції $2 * x^7 + 3 * x^4 + 2 * x^2 + 2$ за цілочисельними вузлами на проміжку [0..4]. Визначити алгебраїчний степінь точності.
2. Наближено оцінити інтеграл з попереднього пункту за формулою середніх прямокутників та Сімпсона.

2) Теоретичні відомості та розрахунки. Квадратурна формула інтерполяційного типу

Квадратурна формула інтерполяційного типу – це метод чисельного інтегрування, який використовується для наближення значення інтегралів функцій. Ця формула побудована на основі поліномів Лагранжа, які проходять через задані вузли. Вона дозволяє обчислювати наближений інтеграл функції за допомогою цих поліномів, взятих у вузлах.

Алгебраїчний степінь точності (AST) – це максимальний степінь полінома, для якого квадратурна формула точно обчислює інтеграл на заданому інтервалі. Алгебраїчний степінь точності визначається через перевірку точності квадратурної формули для поліномів різних степенів.

- Для визначення AST потрібно поступово перевіряти точність формули для поліномів f(x)=xk, починаючи з k=0.
- Якщо квадратурна формула точно обчислює інтеграл для всіх поліномів до степеня k=m, а для степеня k=m+1 перестає бути точною, то AST дорівнює m.

Розрахунки:

- **Поліноми Лагранжа:** Для кожної точки x_i, де $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, будується поліном Лагранжа $l_i(x)$, який має вигляд:

$$l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

  Цей поліном дозволяє інтерполювати значення функції через задані точки, таким чином наближаючи функцію.

- **Інтегрування поліномів Лагранжа:** Після того, як поліноми Лагранжа побудовані, їх інтегрують, щоб отримати значення коефіцієнтів для квадратурної формули. Інтеграція здійснюється за допомогою виразу:

$$\int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$$

  для кожного степеня полінома x^k.

- **Алгебраїчний степінь точності (AST):** Алгебраїчний степінь точності визначається через перевірку точності для поліномів степенів 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 і порівняння результатів із точними значеннями інтегралів цих поліномів.

Результати роботи програми:

```
Розрахунок поліномів Лагранжа:
Поліном Лагранжа для точки 0 (l[0]):
(24.0 + -50.0 * x + 35.0 * x^2 + -10.0 * x^3 + 1.0 * x^4)/24
Поліном Лагранжа для точки 1 (l[1]):
(-24.0 * x + 26.0 * x^2 + -9.0 * x^3 + 1.0 * x^4)/-6
Поліном Лагранжа для точки 2 (l[2]):
(-12.0 * x + 19.0 * x^2 + -8.0 * x^3 + 1.0 * x^4)/4
Поліном Лагранжа для точки 3 (l[3]):
(-8.0 * x + 14.0 * x^2 + -7.0 * x^3 + 1.0 * x^4)/-6
Поліном Лагранжа для точки 4 (l[4]):
(-6.0 * x + 11.0 * x^2 + -6.0 * x^3 + 1.0 * x^4)/24

Таблиця інтегрованих поліномів:
   x^0  x^1       x^2       x^3       x^4       x^5
0  0.0  1.0 -1.041667  0.486111 -0.104167  0.008333
1  0.0 -0.0  2.000000 -1.444444  0.375000 -0.033333
2  0.0  0.0 -1.500000  1.583333 -0.500000  0.050000
3  0.0 -0.0  0.666667 -0.777778  0.291667 -0.033333
4  0.0  0.0 -0.125000  0.152778 -0.062500  0.008333

Таблиця значень w:
       w[0]      w[1]      w[2]      w[3]      w[4]
0  0.311111  1.422222  0.533333  1.422222  0.311111

Пошук алгебраїчного степеня точності (AST):
Крок 0:
Інтеграл(x^0) на [0, 4] = 4.0
Сума(w[i] * f[i]): 3.9999999999999982
Крок 1:
Інтеграл(x^1) на [0, 4] = 8.0
Сума(w[i] * f[i]): 8.0
Крок 2:
Інтеграл(x^2) на [0, 4] = 21.333333333333332
Сума(w[i] * f[i]): 21.33333333333333
Крок 3:
Інтеграл(x^3) на [0, 4] = 64.0
Сума(w[i] * f[i]): 63.99999999999997
Крок 4:
Інтеграл(x^4) на [0, 4] = 204.8
Сума(w[i] * f[i]): 204.79999999999984
Крок 5:
Інтеграл(x^5) на [0, 4] = 682.6666666666666
Сума(w[i] * f[i]): 682.666666666666
Крок 6:
Інтеграл(x^6) на [0, 4] = 2340.5714285714284
Сума(w[i] * f[i]): 2346.6666666666633
Алгебраїчний степінь точності (AST) = 5
Наближене значення інтегралу: 17219.733333333308

([np.float64(0.31111111111110823),
  np.float64(1.4222222222222243),
  np.float64(0.5333333333333314),
  np.float64(1.4222222222222243),
  np.float64(0.31111111111111)],
 5,
 np.float64(17219.733333333308))
```

Пояснення:

1. **Поліноми Лагранжа:** Для кожної точки були побудовані поліноми Лагранжа. Наприклад, для точки 0 поліном має вигляд:

$$l[0](x) = \frac{24.0 + (-50.0) \cdot x + 35.0 \cdot x^2 - 10.0 \cdot x^3 + 1.0 \cdot x^4}{24}$$

Кожен поліном має унікальний вигляд, залежно від місця точки x_i.

2. **Таблиця інтегрованих поліномів:** Інтеграція кожного полінома Лагранжа дає таблицю результатів для поліномів від x^0 до x^5. Результати для інтегралів у вигляді:

$$\int_0^4 x^0 dx = 4.0, \quad \int_0^4 x^1 dx = 8.0, \quad \int_0^4 x^2 dx = 21.3333$$

показують точність обчислення для цих поліномів.

3. **Таблиця значень w:** Це ваги, які використовуються для обчислення наближеного значення інтегралів:

$$w[0] = 0.311111, \quad w[1] = 1.422222, \quad w[2] = 0.533333, \quad w[3] = 1.422222, \quad w[4] = 0.311111$$

Ваги отримані на основі поліномів Лагранжа та використовуються для оцінки наближеного значення інтегралів.

4. **Алгебраїчний степінь точності (AST):** Визначення AST показує, що квадратурна формула точно обчислює інтеграл для поліномів до степеня $k = 5$. Це підтверджується результатами перевірки точності для кожного степеня.

5. **Наближене значення інтегралу:** Остаточний результат для наближеного значення інтегралу функції $2x^7 + 3x^4 + 2x^2 + 2$ на інтервалі $[0, 4]$ дорівнює:

$$17219.733333308$$

- **Розрахунок інтегралів для поліномів:** Результати для інтегралів від x^k на інтервалі [0,4] дають точні значення для поліномів від x^0 до x^5. Це вказує на те, що для цих степенів квадратурна формула працює без помилок.
- **Алгебраїчний степінь точності:** Кроки перевірки AST показують, що точність квадратурної формули відповідає поліномам до степеня 5. Для степеня 6 точність втрачається (оскільки значення не збігаються).
- **Таблиця значень ваг:** Ваги визначають значення, які використовуються для обчислення наближеного значення інтегралів через поліноми Лагранжа. Вони дозволяють правильно комбінувати результати поліномів для точних оцінок інтегралів.

Висновок:

Отримані результати демонструють правильність побудови квадратурної формули інтерполяційного типу для функції 2x^7+3x^4+2x^2+2 на інтервалі [0,4]. Алгебраїчний степінь точності дорівнює 5, що свідчить про точність інтеграції для поліномів до 5-го степеня.

3) Теоретичні відомості та розрахунки. Формула середніх прямокутників та Сімпсона

Метод середніх прямокутників: Метод середніх прямокутників є простим чисельним методом інтегрування, який використовує прямокутники для апроксимації площі під кривою функції. Формула цього методу для обчислення визначеного інтегралу функції
f(x) на інтервалі [a,b] з розбиттям на n рівних частин виглядає так:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\cdot \Delta x$$

де $x_i = a + (i+0.5)\Delta x$, а $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Метод Сімпсона: Метод Сімпсона — це більш точний метод чисельного інтегрування, який є поліноміальним методом, що використовує параболи для апроксимації функції на кожному підінтервалі. Формула методу Сімпсона виглядає так:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}\left(f(a)+f(b)+4\sum_{i=1,3,5,\ldots}^{n-1} f(x_i)+2\sum_{i=2,4,6,\ldots}^{n-2} f(x_i)\right)$$

де $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, і n має бути парним.

Кроки виконання:

1. **Визначення функції f(x)**: у завданні функція f(x)=2x^7+3x^4+2x^2+2, яку потрібно інтегрувати на проміжку [0,4].
2. Обчислення інтегралу за методом середніх прямокутників:
   - Визначаємо кількість підінтервалів n, крок Δx.
   - Для кожного підінтервалу обчислюємо середнє значення функції та додаємо його до загальної суми.
3. Обчислення інтегралу за методом Сімпсона:
   - Визначаємо кількість підінтервалів n, що повинно бути парним.
   - Використовуємо відповідну формулу для оцінки інтегралу через функцію f(x).
4. **Порівняння результатів**: після обчислення інтегралів для обох методів порівнюємо їх результати, щоб оцінити точність методів.

Результати:

```
Інтеграл за методом середніх прямокутників: 16664.89011200001
Інтеграл за методом Сімпсона: 17064.180906666672
```

- Інтеграл за методом середніх прямокутників: 16664.89011200001
- Інтеграл за методом Сімпсона: 17064.18090666672

Як видно, метод Сімпсона надає точніше наближення, ніж метод середніх прямокутників, оскільки він використовує більш складнішу апроксимацію (параболічну), в той час як метод середніх прямокутників є більш спрощеним і використовує прямокутники.