Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп’ютерних наук та кібернетики
Лабораторна робота №2
з дисципліни «Чисельні методи в інформатиці»
Тема: прямі й ітераційні методи розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь
Варіант 3

Виконала студентка третього курсу
Групи ІПС-32
Михайлова Софія

1) Постановка задачі:

Варіант 3

Методом Гауса розв'язати систему рівнянь, знайти визначник та обернену матрицю.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 38 \\ 48 \\ 56 \end{pmatrix}$$

Методом прогонки розв'язати систему рівнянь

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 22 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Методом Зейделя розв'язати систему рівнянь,

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 21 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Точність обчислень ε має складати 10^{-3}; користувач повинен мати можливість змінити точність.

2) Теорія метод Гауса:

Метод Гауса — це алгоритм, що використовується для розв'язання систем лінійних рівнянь. Він є основою для чисельного розв'язування лінійних систем за допомогою матричних операцій. Метод полягає в перетворенні матриці коефіцієнтів на верхньотріангульований вигляд, після чого за допомогою зворотного підставлення знаходять розв'язки рівнянь.

Основні етапи методу Гауса:

1. Перетворення матриці до верхньотріангульованої форми (прямий хід):
    - Метою цього етапу є перетворення матриці A у верхньотріангульовану матрицю U. Це досягається через елементарні операції над рядками:
        - Обмін рядків.
        - Помноження рядка на ненульову константу.
        - Додавання до одного рядка іншого, помноженого на константу.
    - Основною ідеєю є зробити всі елементи нижче головної діагоналі рівними нулю.
2. Зворотне підставлення:
    - Після того як система набуває вигляду верхньотріангульованої матриці, можна здійснити зворотне підставлення для знаходження значень невідомих.
    - Для цього починають з останнього рівня і поступово рухаються до першого. У кожному рівнянні на даному етапі є тільки одна невідома, оскільки всі інші вже були знайдені на попередніх етапах.
3. Обчислення визначника:
    - Визначник матриці знаходиться як добуток елементів на головній діагоналі в процесі перетворення до верхньотріангульованої форми. Якщо на діагоналі зустрічається нуль, це означає, що система не має розв'язку (матриця сингулярна).

2.1) Покрокова реалізація методу Гауса:

1. Прямий хід:
    - Для кожного рядка i матриці A вибирається максимальний елемент у стовпці i (це зменшує вплив числових неточностей). Замість нього ставиться на головну діагональ.
    - Для кожного рядка нижче i віднімається кратне рядка i, так щоб елементи під головною діагоналлю стали нулями.

2. Зворотне підставлення:
   - Починаючи з останнього рівня (останнього рядка), обчислюється значення змінної.
   - Крок за кроком рухаються вгору по системі рівнянь, підставляючи вже знайдені значення змінних.

Визначник та обернена матриця:

- Визначник: Визначник матриці після виконання методу Гауса обчислюється як добуток елементів на головній діагоналі.
- Обернена матриця: Якщо матриця A є невиродженою (її визначник не нульовий), після виконання методу Гауса можна отримати обернену матрицю за допомогою методу Гауса-Жордана. Це розширений метод Гауса, в якому одночасно з перетворенням матриці A у верхньотріангульовану форму також обчислюється її обернена матриця.

Моя система лінійних рівнянь:

Розглянемо систему:

$$4 \cdot X_1 + 3 \cdot X_2 + 1 \cdot X_3 = 29$$

$$-2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + 6 \cdot X_3 + 1 \cdot X_4 = 38$$

$$0 \cdot X_1 + 5 \cdot X_2 + 2 \cdot X_3 + 3 \cdot X_4 = 48$$

$$0 \cdot X_1 + 1 \cdot X_2 + 2 \cdot X_3 + 7 \cdot X_4 = 56$$

1. Почнемо з перетворення коефіцієнтів на верхньотріангульований вигляд.
2. Виконуємо зворотне підставлення для знаходження значень X_1, X_2, X_3, X_4.
3. Обчислюємо визначник матриці за допомогою добутку елементів на головній діагоналі.

Результат роботи програми:

```
Enter the precision ε (e.g., 1e-3):  1e-3
Solution (X1, X2, X3, X4): [7. 9. 5. 5.]
Determinant: 1
Inverse Matrix:
[[ 0.24418605 -0.01162791 -0.15552326  0.06831395]
 [-0.02325581 -0.04651163  0.25290698 -0.10174419]
 [ 0.09302326  0.18604651 -0.13662791  0.03197674]
 [-0.02325581 -0.04651163  0.00290698  0.14825581]]
```

3) Теорія метод прогонки

Метод прогонки (іноді його називають методом трідіагональних систем або методом прогонки для трідіагональних матриць) є чисельним методом для розв'язання систем лінійних рівнянь, де матриця коефіцієнтів має трідіагональну структуру. Це означає, що лише елементи на головній діагоналі та двох прилеглих до неї діагоналях є ненульовими, а всі інші елементи матриці рівні нулю.

Загальний вигляд системи трідіагональних рівнянь
Розглянемо систему рівнянь:

$$
\begin{gathered}
a_1 x_1 + b_1 x_2 = d_1 \\
a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2 \\
\vdots \\
a_{n-1} x_{n-2} + b_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} x_n = d_{n-1} \\
a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n
\end{gathered}
$$

де:

- a_i — елементи під головною діагоналлю (subdiagonal),
- b_i — елементи на головній діагоналі (diagonal),
- c_i — елементи над головною діагоналлю (superdiagonal),
- d_i — праві частини рівнянь.

Принцип роботи методу прогонки
Метод прогонки зазвичай складається з двох основних етапів:

1. Прямий хід (forward pass): на цьому етапі система рівнянь модифікується таким чином, щоб на головній діагоналі залишалися тільки ненульові елементи. Це досягається через рекурсивне "внесення" коефіцієнтів із нижніх рівнів вищих рівнів.
2. Зворотне підставлення (back substitution): після того як система перетворена, знаходяться значення змінних шляхом підстановки вже відомих значень у рівняння для решти змінних.

3.1) Хід роботи:

код реалізує метод прогонки для розв'язання трідіагональної системи рівнянь у вигляді:

$$A \cdot X = d,$$

де матриця A є трідіагональною матрицею, X — це вектор змінних, а d — це вектор правих частин рівнянь. У коді це представлено у вигляді чотирьох масивів:

- a — субдіагональ, тобто елементи під головною діагоналлю,
- b — головна діагональ,
- c — супердіагональ, тобто елементи над головною діагоналлю,
- d — праві частини рівнянь.

Покрокова інтерпретація коду:

1. Ініціалізація коефіцієнтів: Масиви a, b, c та d визначаються для трідіагональної системи рівнянь. Наприклад:
   - a=[0,2,0] — це піддіагональ.
   - b=[1,2,3] — це головна діагональ.
   - c=[2,4,0] — це супердіагональ.
   - d=[5,22,18] — це праві частини рівнянь
2. Прямий хід (forward pass): У циклі прогонки спочатку виконується модифікація коефіцієнтів:
   - Для кожного елемента, починаючи з другого рядка, обчислюється factor — коефіцієнт, на який потрібно помножити попередній елемент з головної діагоналі, щоб усунути елементи під головною діагоналлю.
   - Потім ці зміни застосовуються до решти елементів в рядках і правих частинах рівнянь.
3. Зворотне підставлення (back substitution): Після того як ми отримали нові значення для коефіцієнтів, починаючи з останнього рівня, обчислюються значення змінних x1 ,x2 ,…,xn . Для кожного рівня виконується підстановка вже знайдених значень у рівняння для решти змінних.
4. Результати:

```
Enter the precision ε (e.g., 1e-3):  1e-3
```

[2]:

	X1	X2	X3
0	-7.0	6.0	6.0

Розв'язок системи зберігається в масиві x, і після цього результати перетворюються в таблицю за допомогою pandas.DataFrame, що дозволяє вивести результат у вигляді таблиці.

4) Теорія метод Зейделя

Метод Зейделя — це ітераційний метод для розв'язання систем лінійних рівнянь. Він є варіантом методу Гауса-Зейделя, де на кожному кроці ітерації ми використовуємо значення змінних, які були знайдені на попередньому кроці, для обчислення наступних.

Опис методу Зейделя:
Метод Зейделя використовує наступний підхід для системи рівнянь:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Усі змінні крім x_i на кожному кроці беруться з попереднього обчислення, а поточне значення x_i обчислюється за формулою:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

де $x_j^{(k)}$ — це значення змінної x_j після k-го кроку, а $x_j^{(k+1)}$ — значення, яке використовуватиметься для наступного обчислення.

4.1) Хід роботи

1. Ініціалізація: Ми задаємо коефіцієнти для матриці A і праві частини b.
2. Ітераційний процес:
    - Ітеративно обчислюємо нові значення змінних, використовуючи значення з попереднього кроку.
    - Перевірка на збіжність: процес завершується, коли різниця між новим і старим розв'язком менша за ϵ
3. Результати: Кількість ітерацій та кінцеві значення змінних виводяться у вигляді таблиці.

Enter the precision ε (e.g., 1e-3): 1e-3

	X1	X2	X3	X4	Iterations
0	1.081411	1.959295	2.632854	4.693804	7