Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп’ютерних наук та кібернетики
Лабораторна робота №1
з дисципліни «Чисельні методи в інформатиці»
Тема: розв’язок нелінійного рівняння
Варіант 3

Виконала студентка третього курсу
Групи ІПС-32
Михайлова Софія

1) Постановка задачі:

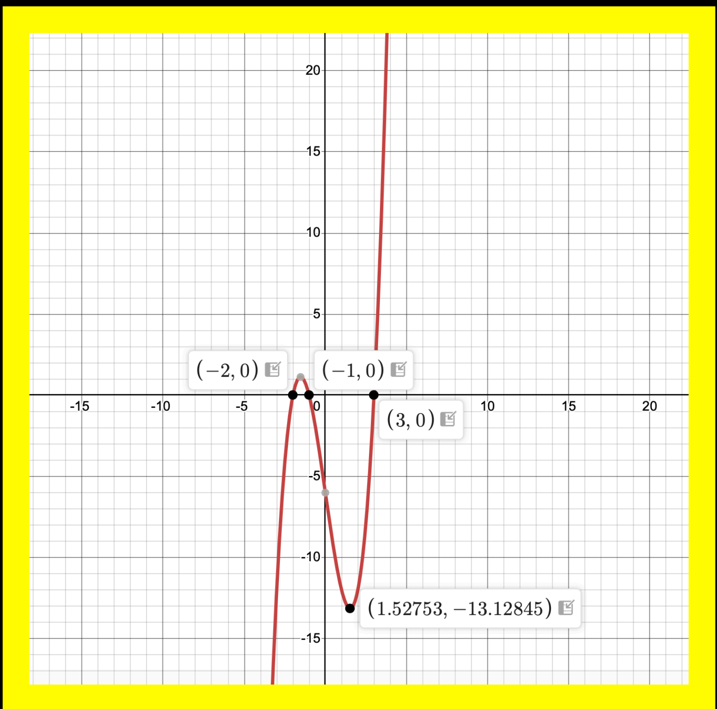
Знайти розв'язок рівняння вказаним методом з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$. Дати можливість користувачу ввести іншу точність.

Варіант 3

Знайти розв'язок $x^3 - 7x - 6 = 0$ модифікованим методом Ньютона

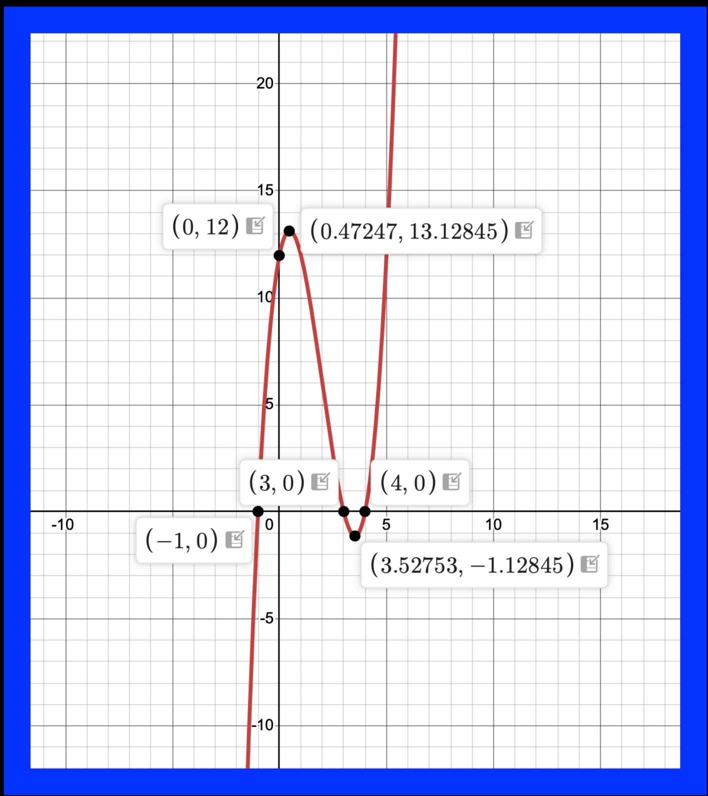
Знайти розв'язок $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$ методом простої ітерації

Графіки рівнянь:



Перше рівняння

Друге рівняння



2) Деяке уточнення:

Теоретичне пояснення середовища:

1. Python як середовище програмування: Для виконання лабораторної роботи використовувала Python — високорівневу мову програмування, яка широко використовується в наукових обчисленнях, обробці даних, математичному моделюванні і чисельних методах. Python має великий набір бібліотек, що підтримують різноманітні наукові та інженерні задачі.
2. Jupyter Notebook / JupyterLab: Для виконання лабораторної роботи використовувала Jupyter Notebook(або JupyterLab). Це інтерактивне середовище для роботи з кодом, яке дозволяє комбінувати код, графіки та текстові пояснення в одному документі. Це дуже зручно для виконання чисельних методів, створення графіків та візуалізації результатів. Jupyter Notebook підтримує мови програмування Python, R, Julia та інші, що дозволяє ефективно працювати з різними типами задач.
3. Бібліотеки Python: Для цієї роботи було використано такі бібліотеки:
   - NumPy: для математичних обчислень, зокрема для створення масивів значень та чисельних операцій.
   - Matplotlib: для побудови графіків функцій, що дозволяє візуалізувати поведінку рівнянь.
   - Pandas: ця бібліотека містить DataFrame — основну структуру даних Pandas, яка дозволяє зберігати таблицю з усіма результатами(тобто так я відображала таблицю з результатами)

Технічні деталі:
Віртуальне середовище (pipx): Для ізоляції бібліотек і залежностей використовувала pipx, що дозволяє створювати окремі віртуальні середовища для кожної задачі. Це корисно, коли потрібно уникати конфліктів між різними бібліотеками чи версіями Python на комп'ютері.

3) Теорія
Чисельні методи для розв'язання нелінійних рівнянь, які я маю застосувати в цій лабораторній роботі - це модифікований метод Ньютона та метод простої ітерації.

Модифікований метод Ньютона:

Для обчислення рівняння з умови необхідно скористатися модифікованим методом Ньютона. Цей метод застосовують для розв'язання задачі типу $f(x) = 0$ із неперервно диференційовною функцією $f(x)$.

Метод Ньютона базується на ідеї поступового наближення до кореня функції за допомогою дотичних до графіка функції. Кожна ітерація використовує попереднє наближення, а нова точка обчислюється за допомогою дотичної до графіка функції в цій точці.
Спершу необхідно обрати початкове наближення x0, а наступні наближення обчислювати за формулою:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Порядок швидкості збіжності модифікованого методу Ньютона є лінійним.

Достатня умова збіжності. Якщо функція $f(x) \in C^2_{[a;b]}$; $f'(x)$, $f''(x)$ – знакосталі на $[a;b]$; $f'(x) \neq 0$ на $[a;b]$, то ітераційний процес (3) збігається $\exists x^* : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.

Умова припинення ітераційного процесу: $|x_n - x_{n-1}| \leqslant \varepsilon$.

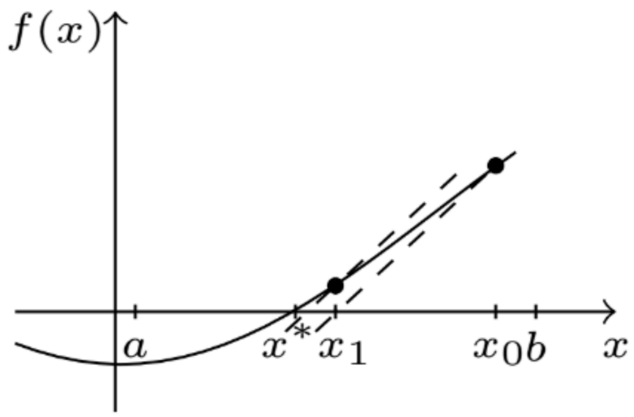


Рис 3: геометрична репрезентація модифікованого методу Ньютона

Метод простої ітерації:

Метод простої ітерації грунтується на зведенні нелінійного рівняння

до вигляду $x = \varphi(x)$,

де $\varphi(x) = x + \Psi(x) f(x)$, $\Psi(x)$ – знакостала неперервна функція.

Початкове наближення обирається довільне з проміжку: $x_0 \in [a;b]$, ітераційний процес має вигляд:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n). \tag{6}$$

Достатня умова збіжності. Нехай для $\forall x_0 : x_0 \in S$, де $S = \{x : |x - x_0| \leqslant \delta\}$, $\varphi(x)$ задовольняє умовам:

1. $\max\limits_{x\in S} |\varphi'(x)| \leqslant q < 1$;
2. $|\varphi(x_0) - x_0| \leqslant (1-q)\delta$;

тоді ітераційний процес (6) збігається $\exists x^* : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$, при чому швидкість збіжності лінійна:

$$|x_n - x^*| \leqslant \frac{q^n}{1-q} |\varphi(x_0) - x_0|. \tag{7}$$

Зауваження. Замість умови 1) $\max\limits_{x \in S} |\varphi'(x)| \leqslant q < 1$ можна використати умову Ліпшиця: $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant q|x - y|$, $x, y \in S$.

З формули швидкості збіжності (7) можна вивести апріорну оцінку кількості кроків:

$$n \geqslant \left[\frac{\ln \frac{|\varphi(x_0) - x_0|}{(1-q)\varepsilon}}{\ln(1/q)} \right] + 1.$$

Умова припинення залежить від q:

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{1-q}{q}\varepsilon, \text{ якщо } q < \frac{1}{2};$$

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \varepsilon, \text{ в інших випадках.}$$

3) Розрахунок апріорної кількості ітерацій

Апріорна кількість ітерацій для чисельних методів, таких як метод Ньютона або метод простої ітерації, може бути оцінена за допомогою теоретичних формул, що ґрунтуються на швидкості збіжності методу і точності, до якої потрібно наблизитися.

1. Метод Ньютона

Для методу Ньютона апріорну кількість ітерацій можна оцінити за допомогою наступної формули: $N_{newton} \approx \log(\epsilon) / (\log(|f'(x)| / 2|f(x)|))$

де:

- ϵ — бажана точність (похибка),
- $f'(x)$ — похідна функції,
- $f(x)$ — значення функції на поточній ітерації.

Це наближена формула для оцінки кількості ітерацій, яку можна перераховувати при кожній зміні точності. Для методу Ньютона кількість ітерацій зазвичай менша через його квадратичну швидкість збіжності (якщо початкове наближення досить близьке до реального кореня).

2. Метод простої ітерації

Для методу простої ітерації апріорну кількість ітерацій можна оцінити за допомогою наступної формули:

$N_{iteration} \approx (\log(\epsilon / |x_0 - x_{final} |)) / \log(|g'(x)|)$

де:

- ϵ — бажана точність (похибка),
- $g'(x)$ — похідна функції $g(x)$, яка отримується при перетворенні рівняння у вигляд $x=g(x)$,
- x_0 — початкове наближення.

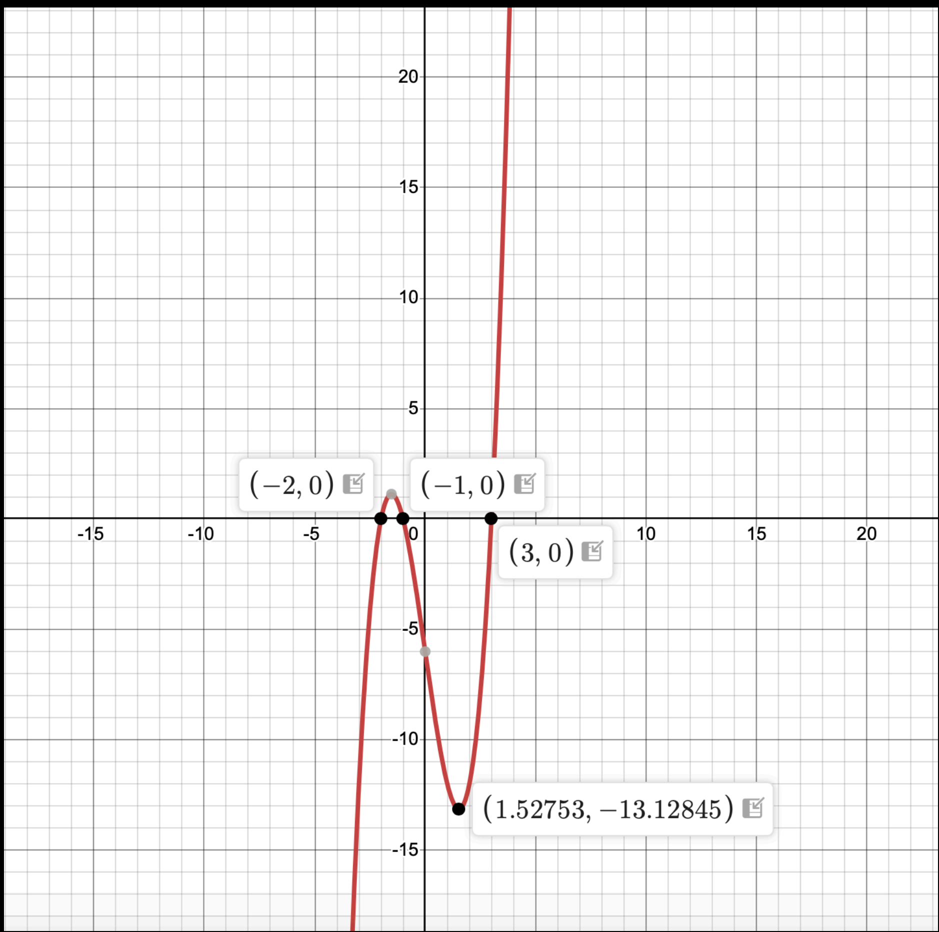
Для методу простої ітерації важливо, щоб величина $|g'(x)|$ була меншою за 1, інакше метод може не збігатися. Тому оцінка ітерацій залежить від цього значення.

Як це застосовується до лабораторної роботи:

1. **Оцінка для методу Ньютона:** Для рівняння $x^3-7x-6=0$ та початкового наближення $x_0=2.5$, можна зробити оцінку кількості ітерацій, щоб досягти бажаної точності $\epsilon=1\times10^{-3}$. Для цього потрібно обчислити значення функції та її похідної в точці початкового наближення x_0 .
2. **Оцінка для методу простої ітерації:** Для рівняння $x^3-6x^2+5x+12=0$ також треба визначити, як виглядатиме функція $g(x)$, яку я використовую для методу ітерацій, і обчислити похідну $g'(x)$. Потім можна буде оцінити кількість ітерацій

Хід роботи:

1. Аналіз графіка першого графіка та розв'язання першого рівняння модифікованим методом Ньютона:



Графік функції $x^3-7x-6=0$ показує, що вона має три корені. Один із коренів знаходиться в діапазоні [1,2], інший — в діапазоні [2,3], і третій корінь, ймовірно, має значення -2 за допомогою графічного аналізу.

Рішення:

Будемо застосовувати модифікований метод Ньютона для знаходження кореня функції в одному з цих інтервалів, наприклад, в [2,3], та обчислювати апріорну та апостеріорну кількість ітерацій. Після цього програма також виведе таблицю ітерацій.

Кроки:

1. Апріорна кількість ітерацій обчислюється на основі початкового наближення і точності ϵ.
2. Апостеріорна кількість ітерацій визначається на основі фактичного виконання методу Ньютона.
3. Таблиця результатів буде містити для кожної ітерації:
   - Номер ітерації
   - Поточне наближення
   - Значення функції в точці наближення.

Визначення кореня:

Будемо обирати початкове наближення x_0 =2.5, оскільки це наближення знаходиться в інтервалі, де є корінь. Точність ϵ можна взяти як 10^{-3}, але також надамо можливість користувачу ввести свою точність.

Отриманий програмно результат:

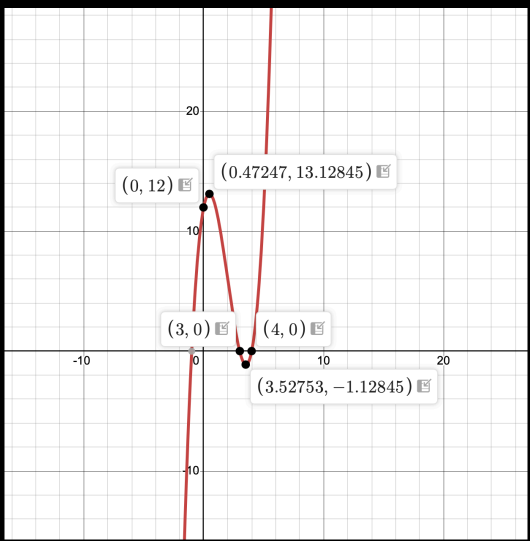
```
Введіть точність (наприклад, 1e-3):  1e-3
Апріорна кількість ітерацій: 18
Метод Ньютона:
Апріорна кількість ітерацій: 18
   Ітерація  Наближення          f(x)
0         1    3.170213 -7.875000e+00
1         2    3.011689  3.669938e+00
2         3    3.000061  2.350159e-01
3         4    3.000000  1.220110e-03
4         5    3.000000  3.349183e-08
Розв'язок рівняння: x = 3.0, f(x) = 3.349182620127067e-08
Апостеріорна кількість ітерацій: 5

3.0
```

Аналіз результату:

1. Апріорна кількість ітерацій (18):
   - Це значення отримано за формулою, яка оцінює кількість ітерацій, необхідних для досягнення заданої точності $\epsilon=10^{-3}$.
   - Апріорна кількість є орієнтовною оцінкою і вказує, скільки ітерацій може бути необхідно для досягнення точності до початку виконання методу.

2. Апостеріорна кількість ітерацій (5):
   - Це фактична кількість ітерацій, які програма виконала до досягнення заданої точності.
   - Програма вивела, що для досягнення точності $\epsilon=10-3$ знадобилось лише 5 ітерацій, що є значно менше за апріорну кількість (18). Це свідчить про те, що реальний процес наближення був більш ефективним, ніж прогнозувалося.
3. Розв'язок рівняння:
   - Кінцевий результат $x=3.0$ з точністю 10^{-3} дає нам правильний розв'язок, оскільки значення $f(x)=3.349182620127067\times10^{-8}$ є дуже близьким до нуля (в межах заданої точності).
   - Це означає, що програма успішно знайшла корінь рівняння.

2. Аналіз другого графіка та розв’язання другого рівняння методом простої ітерації:



Аналіз графіка функції:

- Графік функції $f(x)=x^3-6x^2+5x+12$ показує три корені:
  - Один знаходиться в інтервалі [0,3], що добре підходить для вибору початкового наближення.
  - Початкове наближення $x_0=2$ було вибрано на основі цього інтервалу.
  - Графік також показує, що $f(x_0)=f(2)$ дає значення $f(x_0)$, яке є достатньо близьким до 0, що дозволяє розпочати ітераційний процес.

Метод простої ітерації:

- Функція для методу простої ітерації вибрана таким чином, щоб забезпечити збіжність ітерацій.
- Початкове наближення $x_0=2$ було вибрано через його близькість до кореня, що знаходиться в межах інтервалу [0,3].

Розрахунок апріорної та апостеріорної кількості ітерацій:

- Апріорна кількість ітерацій: Вираховувалась перед початком ітерацій за допомогою логарифмічної формули, на основі початкового наближення x_0 та заданої точності $\epsilon=10^{-3}$.
- Апостеріорна кількість ітерацій: Визначалась після виконання ітерацій, коли метод стабільно наблизився до розв'язку.

Результат:

```
Введіть точність (наприклад, 1e-3):  1e-3
Апріорна кількість ітерацій: 45
Метод простої ітерації:
    Ітерація  Наближення           f(x)
0          1    0.500000      13.125000
1          2  -52.000000 -157080.000000
2          3    6.091716      45.862068
3          4    4.855842       9.300870
4          5    4.461389       3.682446
5          6    4.276379       1.861316
6          7    4.174597       1.061216
7          8    4.113704       0.647558
8          9    4.075438       0.411762
9         10    4.050646       0.268752
10        11    4.034267       0.178419
11        12    4.023304       0.119792
12        13    4.015904       0.081040
13        14    4.010879       0.055105
14        15    4.007453       0.037600
15        16    4.005112       0.025717
16        17    4.003509       0.017618
17        18    4.002410       0.012083
18        19    4.001655       0.008293
19        20    4.001137       0.005695
20        21    4.000782       0.003912
21        22    4.000537       0.002688
22        23    4.000369       0.001847
23        24    4.000254       0.001270
24        25    4.000175       0.000873
Розв'язок рівняння: x = 4.000174529693347, f(x) = 0.0008728312357355605
Апостеріорна кількість ітерацій: 25
```

Розв'язок: Отриманий розв'язок рівняння після виконання всіх ітерацій: x=4.000174529693347, з функцією, що дорівнює f(x)=0.0008728312357355605. Це є досить точний результат, оскільки величина функції в розв'язку близька до нуля, що підтверджує точність методу.

Апостеріорна кількість ітерацій: Після виконання методів ітерацій, апостеріорна кількість ітерацій дорівнює 25. Це число показує фактичну кількість ітерацій, необхідних для досягнення заданої точності.