

## Матеріали курсу

### «Бізнес аналітика»

Автор: Євген Пенцак, PhD (Lausanne University)<sup>1</sup>

#### Частина 3. Фінансова економетрика.

**Заняття 15-16. Двовимірні параметричні випадкові величини, калібрування їх параметрів та генерування багатовимірних випадкових величин. Декомпозиція Холецького. Копульні підходи до моделювання параметричних багатовимірних випадкових величин.**

#### Декомпозиція Холецького

Для роботи з симулятивними методами Монте-Карло нам часто потрібно генерувати випадкові величини з заданими властивостями. Однією з характеристик взаємної поведінки змінних є кореляція. Якщо застосовують кореляцію до різних змінних, наприклад до інфляції і динаміки продаж, то кореляцію можуть називати крос-кореляцією, на відміну від випадку автокореляції.

Для генерування кількох змінних з заданою кореляційною або коваріаційною матрицею часто використовують такий матричний вигляд:

$$x_1 = a_{11} \times \varepsilon_1$$

$$x_2 = a_{21} \times \varepsilon_1 + a_{22} \times \varepsilon_2$$

$$x_3 = a_{31} \times \varepsilon_1 + a_{32} \times \varepsilon_2 + a_{33} \times \varepsilon_3$$

Припустимо, що випадкові змінні  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  мають задані описові характеристики або характеризуються заданими сім'ями параметричних розподілів. У нашому найпростішому випадку – це середнє значення і стандартне відхилення або може бути задано сім'ю нормальних розподілів. Ми припускаємо,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  мають середнє значення 0, стандартне відхилення 1, а також взаємна кореляція між ними дорівнює 0.

Тоді

$$\text{cov}(x_1; x_2) = \text{cov}(a_{11} \times \varepsilon_1; a_{21} \times \varepsilon_1 + a_{22} \times \varepsilon_2) = \text{cov}(a_{11} \times \varepsilon_1; a_{21} \times \varepsilon_1) + \text{cov}(a_{11} \times \varepsilon_1; a_{22} \times \varepsilon_2) = a_{11} \times a_{21}$$

$$\text{cov}(x_1; x_3) = \text{cov}(a_{11} \times \varepsilon_1; a_{31} \times \varepsilon_1 + a_{32} \times \varepsilon_2 + a_{33} \times \varepsilon_3) = a_{11} \times a_{31}$$

---

<sup>1</sup> @ Євген Пенцак

$$\begin{aligned} cov(x_2; x_3) &= cov(a_{21} \times \varepsilon_1 + a_{22} \times \varepsilon_2; a_{31} \times \varepsilon_1 + a_{32} \times \varepsilon_2 + a_{33} \times \varepsilon_3) \\ &= a_{21} \times a_{31} + a_{22} \times a_{32} \end{aligned}$$

$$var(x_1) = a_{11}^2$$

$$var(x_2) = a_{21}^2 + a_{22}^2$$

$$var(x_3) = a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2$$

Розглянемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

і добуток  $A \times A^T$  (знайдіть самостійно або з допомогою SWP)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ 0 & a_{22} & a_{32} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{11}a_{21} & a_{11}a_{31} \\ a_{11}a_{21} & a_{21}^2 + a_{22}^2 & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} \\ a_{11}a_{31} & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} & a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 \end{pmatrix}$$

Таким чином, якщо нам відома коваріаційна матриця, то для генерування випадкових змінних з заданими властивостями нам потрібно знати матрицю А. Якраз матрицю А знаходять через так звану декомпозицію Холецького, як розв'язок рівняння

$$A \times A^T = \Sigma.$$

У Матлаб це рівняння розв'язується з допомогою функції chol(X, 'lower').

Якщо нам потрібно згенерувати вибірку зі значень трьох випадкових змінних з середнім значенням 0 та стандартним відхиленням 1, то декомпозицію Холецького можна застосувати до кореляційної матриці  $\Omega$ , тобто обчислити chol( $\Omega$ , 'lower').

Наприклад, знайдемо відповідний розклад Холецького у випадку:  
r = [1 0.3 0.2;

0.3 1 -0.1;

0.2 -0.1 1];

A = chol(r, 'lower')

Отримаємо розв'язок:

A = 1.0000      0      0

0.3000 0.9539 0

0.2000 -0.1677 0.9653

Зробимо перевірку:

$R = A \cdot A'$

R = 1.0000 0.3000 0.2000

0.3000 1.0000 -0.1000

0.2000 -0.1000 1.0000

Тобто, функція chol працює правильно.

Якщо  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  - незалежні стандартні нормально розподілені випадкові змінні, тобто їх середнє значення дорівнює 0, а стандартне відхилення – 1, то випадкові змінні  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  також є стандартними нормально розподіленими, але з заданою кореляційною структурою:

$$\eta_1 = a_{11} \times \varepsilon_1$$

$$\eta_2 = a_{21} \times \varepsilon_1 + a_{22} \times \varepsilon_2$$

$$\eta_3 = a_{31} \times \varepsilon_1 + a_{32} \times \varepsilon_2 + a_{33} \times \varepsilon_3$$

Згенеруємо в Матлаб n=10000 значень цієї вибірки

n=1000;

E1=normrnd(0,1,1,n);

E2=normrnd(0,1,1,n);

E3=normrnd(0,1,1,n);

N1=A(1,1)\*E1;

N2=A(2,1)\*E1+A(2,2)\*E2;

N3=A(3,1)\*E1+A(3,2)\*E2+A(3,3)\*E3;

Перевіримо, що кореляційна матриця для цієї вибірки з трьох змінних співпадає з заданою:

Cmatrix=corr([N1' N2' N3'])

Результат, справді, дуже близький до значень заданої кореляційної матриці:

Cmatrix = 1.0000 0.3022 0.1824

```
0.3022  1.0000 -0.1102
0.1824 -0.1102  1.0000
```

Оскільки ми маємо задані параметри середнього значення та стандартного відхилення кожної змінної (наприклад, капітальні витрати, обсяг продаж, собівартість), то ми можемо згенерувати відповідні вибірки, використавши перетворення:

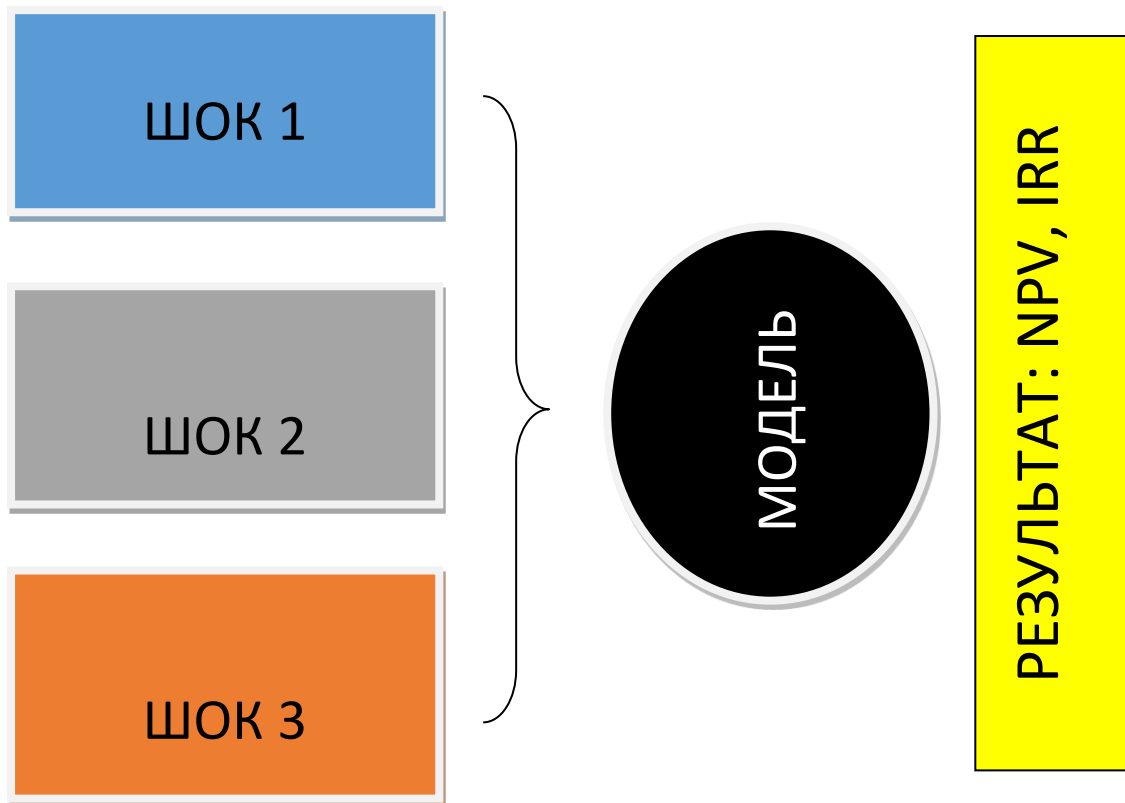
$$x_1 = m_1 + \sigma_1 \times \eta_1$$

$$x_2 = m_2 + \sigma_2 \times \eta_2$$

$$x_3 = m_3 + \sigma_3 \times \eta_3$$

```
clear all;
r=[1 0.3 0.2;
   0.3 1 -0.1;
   0.2 -0.1 1];
A=chol(r,'lower');
R=A*A';
n=1000;
E1=normrnd(0,1,1,n);
E2=normrnd(0,1,1,n);
E3=normrnd(0,1,1,n);
N1=A(1,1)*E1;
N2=A(2,1)*E1+A(2,2)*E2;
N3=A(3,1)*E1+A(3,2)*E2+A(3,3)*E3;
```

Таким чином, вміючи моделювати комплексну систему шоків, що відповідають різним факторам ризику, ми можемо виконати інтегрований симулятивний аналіз Монте Карло відносно одночасного генерування кількох випадкових величин з заданою кореляційною структурою і зробити відповідну оцінку розподілу NPV та IRR.

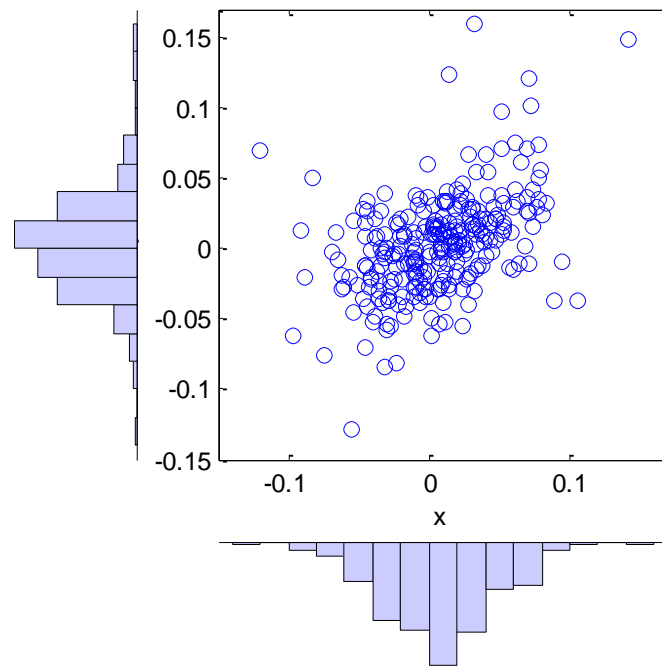


### Копульне моделювання.

Розглядається проблема застосування копул у сучасних фінансових моделях. Наводяться приклади Архімедових копул та генеруються двовимірні випадкові величини із заданими граничними розподілами, які не є нормально розподіленими, а також проводиться економетрична оцінка параметрів копул та граничних розподілів.

Розглянемо, наприклад, двовимірну вибірку доходності двох акцій

```
clear all;
X=xlsread('stock_data.xlsx','page1','i2:o274');%зчитуємо тижневу доходність акцій
AAPL=X(:,1);
[muA sigA]=normfit(AAPL);
GOOG=X(:,2);
[muG sigG]=normfit(GOOG);
scatterhist(AAPL, GOOG);
```



Кореляція є сьогодні чи не найбільшим викликом для науковців, що займаються чисельним моделюванням. Оцінювання похідних фінансових інструментів, умовних вимог (*contingent claims*), управлінські рішення в сфері ціноутворення, оцінки страхових контрактів, самооцінка ризиків компаніями є далеко неповним переліком сфер використання моделей з взаємозалежними стохастичними факторами. Лише легкість та зрозумілість використання зробили кореляцію найбільш розповсюдженою мірою взаємного впливу випадкових величин. Фінансовий аналіз сучасних фінансових ринків показав цілковиту неспроможність кореляції пояснити ринкові ціни складніших фінансових продуктів та послуг з вбудованим відшкодуванням, що базуються на кількох факторах ризику. Швидкий розвиток програмного забезпечення та стохастичного моделювання сьогодні дає змогу аналітикам компаній використовувати найсучасніший інструментарій для економічного та фінансового аналізу. І саме поняття копули (*copula*) стало необхідною складовою сучасного моделювання. Перед тим, як дати визначення копули та окреслити сфери їх можливого застосування, ми нагадаємо деякі традиційні міри взаємозалежності випадкових величин.

### Традиційні міри взаємозалежності випадкових величин.

Нехай  $\psi(x, y)$  – спільна функція щільності двох випадкових змінних  $x$  та  $y$ . Граничною функцією щільності випадкової величини  $x$  та  $y$  називають, відповідно,

$$\psi_x(x) = \int \psi(x, y) dy, \quad (1)$$

$$\psi_y(y) = \int \psi(x, y) dx. \quad (2)$$

Дві випадкові змінні називаються незалежними, якщо їх спільна функція щільності є добутком їх граничних функцій щільності, тобто

$$\psi(x, y) = \psi_x(x) \cdot \psi_y(y) \quad (3)$$

Лінійною кореляцією (або  $r$  Пірсона) двох випадкових змінних  $x$  та  $y$  називають величину

$$\rho_{xy} = \frac{Cov[x, y]}{\sqrt{V[x] \cdot V[y]}}, \quad (4)$$

де

$$Cov[x, y] = \int xy\psi(x, y)dxdy - \int x\psi_x(x)dx \cdot \int y\psi_y(y)dy \quad (5)$$

$$V[x] = \int x^2\psi_x(x)dx - \left[ \int x\psi_x(x)dx \right]^2 \quad (6)$$

Лінійна кореляція є доброю мірою взаємозалежності нормально розподілених випадкових величин. Проте, чим далі ми віддаляємось від нормального розподілу, тим більш неадекватною стає ця міра. Як граничний випадок розглянемо наступний приклад [1]. Нехай пара випадкових змінних  $(x, y)$  може приймати з однаковою ймовірністю 0,25 одне з наступних значень  $\{(0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0)\}$ . Тоді їх коефіцієнт лінійної кореляції дорівнює 0, а ненульові значення  $x$  призводять до цілковитої визначеності значення змінної  $y$ , що суперечить інтуїтивному розумінню некорельованості.

Ще одним важливим недоліком лінійної кореляції є те, що ми не можемо з її допомогою відновити спільний розподіл пари випадкових змінних, знаючи їх граничні розподіли (окрім випадку нормально розподілених випадкових змінних). Більше того, для даної пари функцій щільності  $\psi_x(x)$  та  $\psi_y(y)$  ми можемо навіть не знайти їх спільну функцію щільності  $\psi(x, y)$  для кожного  $\rho_{xy} \in [-1, 1]$ . Лінійна кореляція не є інваріантною до нелінійних перетворень випадкових змінних  $x$  та  $y$ .

З концепцією лінійної кореляції є дуже тісно пов'язана ще одна міра взаємної залежності,  $\rho_s$  Спірмана, що є лінійною кореляцією кумулятивних функцій розподілу  $\Psi_x(x)$  та  $\Psi_y(y)$  від даних випадкових змінних. Можна показати, що

$$\rho_s = 12 \cdot \iint \Psi_x(x) \cdot \Psi_y(y) \cdot \psi(x, y) dx dy - 3 \quad (7)$$

Ще однією мірою взаємозалежності випадкових змінних є  $\tau_K$  Кендала. Якщо

$$\Psi(x, y) = \int_{x=-\infty}^x \int_{y=-\infty}^y \psi(x', y') dx' dy', \quad (8)$$

то

$$\tau_K = 4 \cdot \iint \Psi(x, y) \cdot \psi(x, y) dx dy - 1. \quad (9)$$

$\rho_S$  Спірмана та  $\tau_K$  Кендала мають ту перевагу над лінійною кореляцією, що вони є інваріантними від індивідуальних перетворень змінних та завжди є можливість побудувати спільну функцію щільності, знаючи граничні функції щільності та значення  $\rho_S$ ,  $\tau_K$ , відповідно.

### Поняття копули.

Копульний підхід є стратегією моделювання, в якій спільний розподіл моделюється з допомогою граничних розподілів та копулою, функцією, що їх поєднує. Копула параметризує структуру залежності випадкових змінних, відображаючи їх взаємну поведінку. Під копулою розуміють багатовимірну функцію розподілу, одновимірні граничні розподіли якої є рівномірними на інтервалі (0,1). У відповідності до теореми Склера, кожен неперервний багатовимірний розподіл можна розкласти на одновимірні граничні розподіли та параметричну копулу, що враховує їх взаємну залежність. Таким чином

$$\Psi(x, y; \theta) = C(\Psi_x(x), \Psi_y(y); \theta), \quad (10)$$

де  $\theta$  – набір параметрів, що характеризує даний клас копул. Знаючи функцію розподілу, ми можемо легко визначити функцію щільності двовимірної випадкової величини

$$\psi(x, y; \theta) = C_{12}(\Psi_x(x), \Psi_y(y); \theta) \cdot \psi_x(x) \cdot \psi_y(y), \quad (11)$$

$$\text{де } C_{12} = \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y}.$$

В емпіричних дослідженнях виділяють наступні три копули, як граничні міри взаємозалежності випадкових змінних:

1) копула добутку (*product copula*)

$$\Pi = C(u, v) = u \cdot v, \text{ де } (u, v) \in [0, 1]^2, \quad (12)$$

що відповідає стохастичній незалежності випадкових змінних;

2) копула Фреше нижньої межі

$$W = \max(u + v - 1, 0), \text{ де } (u, v) \in [0, 1]^2; \quad (13)$$

3) копула Фреше верхньої межі

$$M = \min(u, v), \text{ де } (u, v) \in [0, 1]^2. \quad (14)$$

Відомо, що для всіх копул на  $[0, 1]^2$  виконується

$$W \leq C \leq M \quad (15)$$



Одним з використання копул Фреше є демонстрація гнучкості даної сім'ї копул, тобто її здатності відображати різні ступені асоціації випадкових змінних в межах від нижньої до верхньої меж копул Фреше. Наприклад, для двовимірної гаусівської сім'ї копул

$$C(u, v, \theta) = \Phi_2(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)), \text{ де } \theta \in [-1, 1] \quad (16)$$

і  $\Phi(\cdot)$  позначає кумулятивну функцію розподілу стандартної нормальної випадкової величини, а  $\Phi_2(\cdot, \cdot; \theta)$  - кумулятивну функцію розподілу двовимірної стандартної нормальної випадкової величини з коефіцієнтом лінійної кореляції  $\theta$ . Можна показати, що

$$C(u, v; -1) = W \quad (17)$$

$$C(u, v; 0) = \Pi \quad (18)$$

$$C(u, v; 1) = M. \quad (19)$$

У таких випадках кажуть, щось сім'я копул є вичерпною (*comprehensive*) або має повне покриття. Сім'я копул Фарлі-Гумбеля-Морґенштерна (*Farlie-Gumbel-Morgenstern*)

$$C(u, v; \theta) = uv(1 + \theta(1-u)(1-v)), \text{ де } \theta \in [-1, 1], \quad (20)$$

включає  $\Pi$ , але не включає  $W$  та  $M$ . Для цієї сім'ї копул  $\tau_K(\theta) = (2\theta)/9$  і  $\rho_S = \theta/3$ . Математична простота цієї сім'ї копул є її привабливою рисою, проте виконання нерівностей

$$-(2/9) \leq \tau_K(\theta) \leq (2/9) \quad (21)$$

$$-(1/3) \leq \rho_S(\theta) \leq (1/3) \quad (22)$$

робить проблематичним її використання на практиці.

### Архімедові копули.

Одним з найпоширеніших загальних класів копул є Архімедові копули, тобто копул, що визначаються неперервною, опуклою вниз, спадною генеруючою функцією

$$\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, \infty) \quad (23)$$

з граничною умовою

$$\varphi(1) = 0. \quad (24)$$

До найбільш вживаних Архімедових копул відносять сім'ї копул Клейтона (*Clayton*), Франка (*Frank*), Гумбеля (*Gumbel*), Джо (*Joe*) та Алі-Міхаїла-Хага (*Ali-Mikhail-Haq*).

Для сім'ї копул Клейтона

$$C(u, v; \theta) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, \text{ де } \theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}, \quad (25)$$

генеруюча функція

$$\varphi(t) = \frac{t^{-\theta} - 1}{\theta}. \quad (26)$$

Для сім'ї копул Франка

$$C(u, v; \theta) = -\frac{\ln[(\eta - (1 - e^{-\theta u})(1 - e^{-\theta v}))/\eta]}{\theta}, \text{ де } \eta = 1 - e^{-\theta} \text{ і } \theta \in (-\infty, \infty), \quad (27)$$

генеруюча функція

$$\varphi(t) = -\frac{\ln(1 - e^{-\theta t})}{1 - e^{-\theta}}. \quad (28)$$

Для сім'ї копул Гумбеля

$$C(u, v; \theta) = e^{-(u_1^\theta + v_1^\theta)^{1/\theta}}, \text{ де } u_1 = -\ln(u), \quad v_1 = -\ln(v) \text{ і } \theta \in [1, \infty), \quad (29)$$

генеруюча функція

$$\varphi(t) = -\ln t^\theta. \quad (30)$$

Для сім'ї копул Джо

$$C(u, v; \theta) = 1 - [(1 - u)^\theta + (1 - v)^\theta - (1 - u)^\theta (1 - v)^\theta]^{1/\theta}, \text{ де } \theta \in [1, \infty), \quad (31)$$

генеруюча функція

$$\varphi(t) = -\ln(1 - (1 - t)^\theta). \quad (32)$$

Для сім'ї копул Алі-Міхаїла-Хага

$$C(u, v; \theta) = \frac{uv}{1 - \theta(1 - u)(1 - v)}, \text{ де } \theta \in [-1, 1), \quad (33)$$

генеруюча функція

$$\varphi(t) = \ln \frac{1 - \theta(1 - t)}{t}. \quad (34)$$

Якщо сім'я копул є Архімедовою, то існує простий взаємозв'язок між  $\tau_K$  Кендала та генеруючою функцією:

$$\tau_K(\theta) = 4 \cdot \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt + 1. \quad (35)$$

Графік функції  $\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}$  є цікавим тому, що він візуально пов'язує залежність між параметром копули та її „положенням” відносно меж Фреше. Для нижньої межі Фреше  $\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} = t - 1$ , а коли  $\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}$  прямує до нуля, то відповідна копула наближається до верхньої межі Фреше.

Наприклад, для сім'ї копул Клейтона

$$\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{t^\theta - 1}{\theta} t. \quad (36)$$

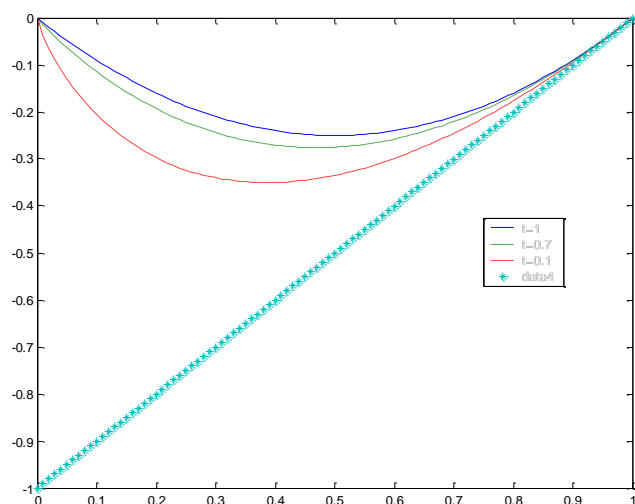


Рис. 1. Графік функції  $\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{t^\theta - 1}{\theta} t$  для різних значень  $\theta$  сім'ї копул Клейтона.

У Таблиці 1 крім генератора Архімедової копули вказано множину допустимих значень параметра та саму копульну залежність  $C_\theta$ . Багато копул, які наведено у Таблиці 1, не мають назви, а тому в разі потреби їх визначають за їх номером у списку.

Таблиця 1

Архімедові копули	$C_\theta(u, v)$	$\varphi_\theta(t)$	$\theta \in$
1. Сім'я Клейтона	$[\max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0)]^{-1/\theta}$	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$	$[-1, \infty) \setminus \{0\}$
2.	$\max(1 - [(1-u)^\theta + (1-v)^\theta]^{1/\theta}, 0)$	$(1-t)^\theta$	$[1, \infty)$
3. Сім'я Алі-Міхаїла-Хага	$\frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}$	$\ln \frac{1 - \theta(1-t)}{t}$	$[-1, 1)$
4. Сім'я Гумбеля	$\exp(-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta})$	$(-\ln t)^\theta$	$[1, \infty)$
5. Сім'я Франка	$-\frac{1}{\theta} \ln \left( 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right)$	$-\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$	$(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$
6. Сім'я Джо	$1 - [(1-u)^\theta + (1-v)^\theta - (1-u)^\theta(1-v)^\theta]^{1/\theta}$	$-\ln[1 - (1-t)^\theta]$	$[1, \infty)$
7.	$\max(\theta uv + (1-\theta)(u+v-1), 0)$	$-\ln[\theta t + (1-\theta)]$	$(0, 1]$
8.	$\max\left(\frac{\theta^2 uv - (1-u)(1-v)}{\theta^2 - (\theta-1)^2(1-u)(1-v)}, 0\right)$	$\frac{1-t}{1 + (\theta-1)t}$	$[1, \infty)$

9. Сім'я Гумбеля-Барнета	$uv \exp(-\theta \ln u \ln v)$	$\ln(1 - \theta \ln t)$	$(0, 1]$
10.	$\frac{uv}{[1 + (1 - u^\theta)(1 - v^\theta)]^{1/\theta}}$	$\ln(2t^{-\theta} - 1)$	$(0, 1]$
11.	$[\max(u^\theta v^\theta - 2(1 - u^\theta)(1 - v^\theta), 0)]^{1/\theta}$	$\ln(2 - t^\theta)$	$(0, 1/2]$
12.	$(1 + [(u^{-1} - 1)^\theta + (v^{-1} - 1)^\theta]^{1/\theta})^{-1}$	$(\frac{1}{t} - 1)^\theta$	$[1, \infty)$
13.	$\exp(1 - [(1 - \ln u)^\theta + (1 - \ln v)^\theta - 1]^{1/\theta})$	$(1 - \ln t)^\theta - 1$	$(0, \infty)$
14.	$(1 + [(u^{-1/\theta} - 1)^\theta + (v^{-1/\theta} - 1)^\theta]^{1/\theta})^{-\theta}$	$(t^{-1/\theta} - 1)^\theta$	$[1, \infty)$
15.	$\left\{ \max\left(1 - [(1 - u^{1/\theta})^\theta + (1 - v^{1/\theta})^\theta]^{1/\theta}, 0\right) \right\}^\theta$	$(1 - t^{1/\theta})^\theta$	$[1, \infty)$
16.	$\frac{1}{2}(S + \sqrt{S^2 + 4\theta}),$ $S = u + v - 1 - \theta\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} - 1\right)$	$(\frac{\theta}{t} + 1)(1 - t)$	$[0, \infty)$
17.	$\left(1 + \frac{[(1 + u)^{-\theta} - 1][(1 + v)^{-\theta} - 1]}{2^{-\theta} - 1}\right)^{-1/\theta} - 1$	$-\ln \frac{(1 + t)^{-\theta} - 1}{2^{-\theta} - 1}$	$(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$
18.	$\max(1 + \theta / \ln[e^{\theta/(u-1)} + e^{\theta/(v-1)}], 0)$	$e^{\theta/(t-1)}$	$[2, \infty)$
19.	$\theta / \ln(e^{\theta/u} + e^{\theta/v} - e^{-\theta})$	$e^{\theta/t} - e^\theta$	$(0, \infty)$
20.	$[\ln(\exp(u^{-\theta}) + \exp(v^{-\theta}) - e)]^{-1/\theta}$	$\exp(t^{-\theta}) - e$	$(0, \infty)$
21.	$1 - \left(1 - \left\{ \max\left([1 - (1 - u)^\theta]^{1/\theta} + [1 - (1 - v)^\theta]^{1/\theta} - 1, 0\right) \right\}^\theta\right)^{1/\theta}$	$1 - [1 - (1 - t)^\theta]^{1/\theta}$	$[1, \infty)$
22.	$\max\left([1 - (1 - u^\theta)\sqrt{1 - (1 - v^\theta)^2} - (1 - v^\theta)\sqrt{1 - (1 - u^\theta)^2}]^{1/\theta}, 0\right)$	$\arcsin(1 - t^\theta)$	$(0, 1]$

Для деяких сімей Архімедових копул ми можемо знайти аналітичний вираз для  $\tau_K$  Кендала. Наприклад, для сім'ї копул Клейтона

$$\tau_K(\theta) = \frac{\theta}{\theta + 2}, \text{ де } \theta \geq -1, \quad (37)$$

для сім'ї копул Гумбеля

$$\tau_K(\theta) = \frac{\theta - 1}{\theta}, \text{ де } \theta \geq -1, \quad (38)$$

а для сім'ї копул Франка

$$\tau_K(\theta) = 1 - \frac{4}{\theta}(1 - D_1(\theta)), \quad (39)$$

де

$$D_1(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{t}{e^t - 1} dt \quad (40)$$

$$D_2(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{e^t - 1} dt \quad (41)$$

У багатьох випадках множину значень  $\tau_K$  Кендала для даної Архімедової сім'ї копул є важко визначити, оскільки вона не є зв'язною, а складається з об'єднання інтервалів, які потрібно визначати числовими методами інтегрування. Такі випадки у Таблиці 2 позначено словом «невизначено». Підставивши у формулу (35) генеруючу функцію  $\varphi$  для даної Архімедової сім'ї копул, ми можемо знайти аналітичний вигляд для значення параметра  $\tau_K$  Кендала. Якщо ж аналітичного вигляду для формули (35) не вдалось знайти, то у Таблиці 2 такий випадок позначено «немає аналітичного представлення».

Таблиця 2

Архімедові копули	$\tau_K$	$\tau_K \in$
1. Сім'я Клейтона	$\frac{\theta}{\theta + 2}$	$[-1, 1] \setminus \{0\}$
2.	$1 - \frac{2}{\theta}$	$[1; 1]$
3. Сім'я Алі-Міхаїла-Хага	$1 + 4 \times \left( \frac{-1}{6\theta} - \frac{(\log(1 - \theta)(\theta - 1)^2)}{6\theta^2} \right)$	$\left[ -0,181276; \frac{1}{3} \right]$
4. Сім'я Гумбеля	$1 - \frac{1}{\theta}$	$[0, 1]$
5. Сім'я Франка	немає аналітичного представлення	$[-1, 1] \setminus \{0\}$
6. Сім'я Джо	немає аналітичного представлення	невизначено
7.	$\frac{2(\theta - 1)(\theta + \log(1 - \theta) - \theta \log(1 - \theta))}{\theta^2}$	$[-1, 0]$
8.	$\frac{-4 + \theta}{3\theta}$	$\left[ -1, \frac{1}{3} \right]$
9. Сім'я Гумбеля-Барнета	немає аналітичного представлення	невизначено
10.	немає аналітичного представлення	невизначено
11.	немає аналітичного представлення	невизначено
12.	$1 - \frac{2}{3\theta}$	$\left[ \frac{1}{3}, 1 \right]$
13.	немає аналітичного представлення	невизначено
14.	$1 - \frac{4}{2 + 4\theta}$	$\left[ \frac{1}{3}, 1 \right]$
15.	$1 - \frac{4}{2 - 4\theta}$	$[-1, 1]$
16.	немає аналітичного представлення	невизначено
17.	немає аналітичного представлення	невизначено
18.	$1 - \frac{4}{3\theta}$	$\left[ \frac{1}{3}, 1 \right]$
19.	немає аналітичного представлення	невизначено
20.	немає аналітичного представлення	невизначено
21.	немає аналітичного представлення	невизначено
22.	немає аналітичного представлення	невизначено

Архімедові копули можуть покрити широкий спектр взаємної поведінки випадкових змінних, наприклад, асиметрію, спільний куртозис. Можна показати, що для Архімедових копул функція щільності

$$\psi(x, y) = \frac{\varphi''(C(\Psi_x(x), \Psi_y(y))) \cdot \varphi'(\Psi_x(x)) \cdot \varphi'(\Psi_y(y))}{[\varphi'(C(\Psi_x(x), \Psi_y(y)))]^3} \psi_x(x) \cdot \psi_y(y) \quad (42)$$

Застосувавши формулу (42) до сім'ї копул Клейтона, ми отримаємо

$$\psi(x, y) = [\Psi_x(x)]^{-\theta-1} \cdot [\Psi_y(y)]^{-\theta-1} \cdot \left\{ [\Psi_x(x)]^{-\theta} + [\Psi_y(y)]^{-\theta} - 1 \right\}^{-1/\theta-2} \cdot (\theta+1) \cdot \psi_x(x) \cdot \psi_y(y) \quad (43)$$

Проілюструємо лінії рівня двовимірної функції щільності, що моделюється копулою Клейтона з граничними нормальними розподілами та  $\tau_K = 0.5$ .

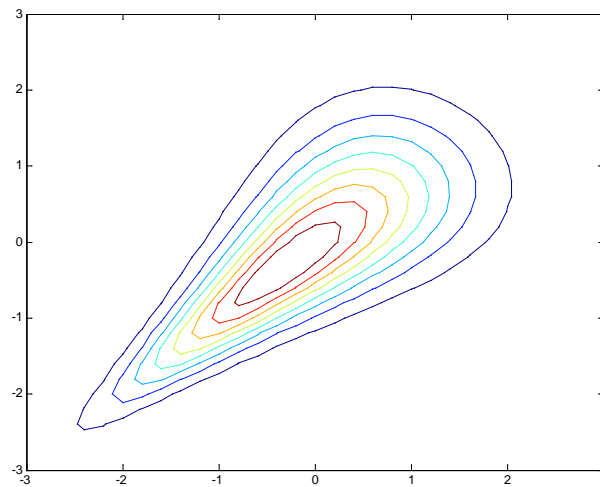


Рис. 2. Лінії рівня двовимірної функції щільності, утвореної копулою Клейтона з параметром  $\theta = 2$  та стандартними нормальними граничними розподілами.

### Копули та ненормальність граничних розподілів.

Як ми вже зазначали, використання копул є особливо ефективним у випадку, коли граничні розподіли не є нормально розподіленими. У фінансах, ризик менеджменті, страховому менеджменті особливої популярності набули розподіли екстремальних значень, що враховують „товсті хвости” та скіс. Найбільш гнучкими серед них є узагальнений гама розподіл та розподіл Пірсона четвертого типу.

Функцію щільності розподілу Пірсона четвертого типу (PTIV) можна записати у вигляді

$$f(x; \alpha, \delta, \rho) = k \left[ \left( \frac{x - \alpha}{\delta} \right)^2 + 1 \right]^{-\frac{1}{2}(\rho+2)} \exp \left[ -\frac{\alpha \rho}{\delta} \arctg \left( \frac{x - \alpha}{\delta} \right) \right], \quad (44)$$

де  $k$  – нормуючий множник [3].

Узагальнений гама розподіл (див. [4]) визначається функцією щільності

$$f(x; \nu, \gamma, c) = \frac{c^{-\nu} \gamma}{\Gamma(\nu)} (x - \mu)^{\nu} \exp(-((x - \mu)/c)^{\gamma}) \quad (45)$$

де  $\nu > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $c > 0$ , та  $\Gamma(\cdot)$  позначає звичайну гама функцію і

$$\mu = -c \frac{\Gamma(\nu + 1/\gamma)}{\Gamma(\nu)}. \quad (46)$$

Зобразимо тепер лінії рівня двовимірної функції щільності, що моделюється копулою Клейтона з граничними стандартним нормальним розподілом, розподілом Пірсона четвертого типу з параметрами  $\alpha = 1$ ,  $\delta = 2$ ,  $\rho = 6$  та  $\tau_K = 0.5$ .

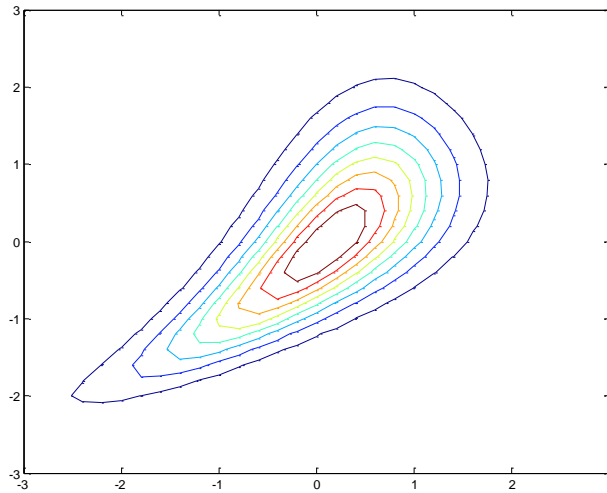


Рис. 3. Лінії рівня двовимірної функції щільності, утвореної копулою Клейтона з параметром  $\theta = 2$ , стандартним нормальним граничним розподілом та граничним розподілом РТІV з параметрами  $\alpha = 1$ ,  $\delta = 2$ ,  $\rho = 6$ .

### Генерування двовимірних випадкових величин з допомогою копул.

Існує багато різних процедур для генерування спостережень  $(x, y)$  пари випадкових змінних  $(X, Y)$  зі спільною функцією розподілу  $\Psi$ . Наведемо один з алгоритмів генерування  $(x, y)$  з допомогою копули  $C$ :

- 1) згенерувати дві незалежні рівномірно розподілені на інтервалі  $(0, 1)$  випадкові змінні  $u$  і  $v$ ;
- 2) знайти  $v = c_u^{(-1)}(t)$ , де  $c_u^{(-1)}(t)$  - квазі-обернене відображення до  $c_u = \frac{\partial}{\partial u} C(u, v)$  ;
- 3) знайти  $x = \Psi_x^{(-1)}(u)$  та  $y = \Psi_y^{(-1)}(v)$ ;

4) шукана пара –  $(x,y)$ .

Зараз ми згенеруємо двовимірну випадкову величину, використовуючи наведений вище алгоритм, для копули Клейтона з тими самими параметрами, що й у рисунках 2, 3.

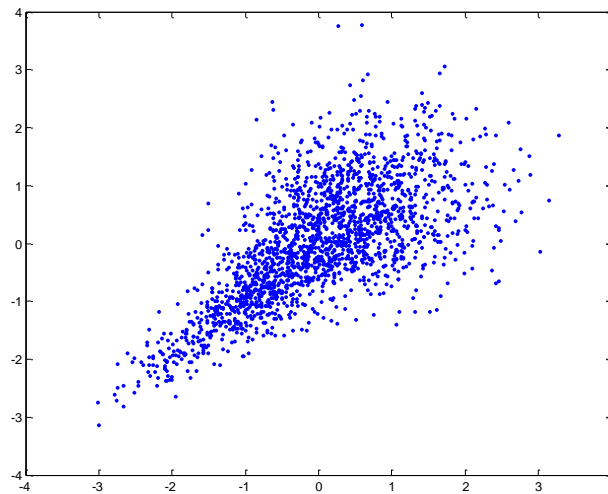


Рис. 4. Точкове зображення згенерованої двовимірної випадкової величини, змодельованої з допомогою копули Клейтона з параметром  $\theta = 2$  та стандартними нормальними граничними розподілами.

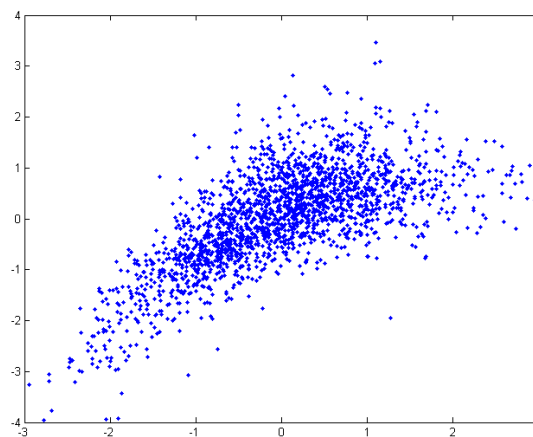


Рис. 5. Точкове зображення згенерованої двовимірної випадкової величини, змодельованої з допомогою копули Клейтона з параметром  $\theta = 2$ , стандартним нормальним граничним розподілом та граничним розподілом PTIV з параметрами  $\alpha = 1$ ,  $\delta = 2$ ,  $\rho = 6$ .

Подібним чином ми могли б зобразити лінії рівня двовимірної функції щільності та згенеровані аналоги випадкових величин для інших Архімедових копул. Вибір параметризованої сім'ї копул можна аргументувати візуальним зображенням емпіричних даних. Сучасні економетричні пакети дозволяють без особливих труднощів оцінити методом максимальної правдоподібності параметри для даної сім'ї копул, а також параметри граничних розподілів. У



сучасному менеджменті використовують також різноманітні критерії, що вказують на якість наближення емпіричних даних тою чи іншою сім'єю копул.

### Калібрування параметра Архімедової копули методом Генеста-Рівеста.

Цей метод є досить простим для використання. Нехай  $n$  – обсяг вибірки, що складається зі спостережень  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ . Пара спостережень  $(x_i, y_i)$  та  $(x_j, y_j)$  називається узгодженою, якщо або  $x_i > x_j$  та  $y_i > y_j$  або  $x_i < x_j$  та  $y_i < y_j$ . Якщо  $x_i = x_j$  або  $y_i = y_j$ , то пара не є ні узгодженою, ні неузгодженою. У всіх інших випадках пара спостережень називається неузгодженою. Вибірковим значенням  $\hat{\tau}_K$  Кендала називають

$$\hat{\tau}_K = \frac{(\text{кількість узгоджених пар}) - (\text{кількість неузгоджених пар})}{\frac{1}{2} \times n \times (n-1)} \quad (47)$$

Отже, завдання визначення параметра Архімедової копули зводиться до розв'язку рівняння

$$\hat{\tau}_K = \tau_K(\theta), \quad (48)$$

де права частина рівняння задана в аналітичному або в інтегральному вигляді (35).

Вибіркове значення  $\hat{\tau}_K$  Кендала для вибірки прибутковостей золота та обмінного курсу євро/долар дорівнює  $\hat{\tau}_K = 0,2757$ . У Таблиці 3 вказано результат розв'язку рівняння (48) аналітичним методом або методами числового інтегрування. Якщо відповідна Архімедова сім'я копул відсутня у Таблиці 3, то це означає, що для даної сім'ї значення  $\hat{\tau}_K = 0,2757$  не входить у множину допустимих значень коефіцієнта Кендала.

Таблиця 3

Архімедові копули	Параметр копули, $\hat{\theta}$
1. Сім'я Клейтона	0,761
2.	2,761
3. Сім'я Алі-Міхаїла-Хага	0,895
4. Сім'я Гумбеля	1,381
5. Сім'я Франка	2,647
6. Сім'я Джо	1,683
8.	23,135
10.	0,787
13.	2,318
15.	1,881

17.	3,345
20.	0,325
21.	2,132

## Економетрична оцінка параметрів копул методом максимальної правдоподібності

Оцінка параметрів методом максимальної правдоподібності полягає в розв'язку оптимізаційної проблеми

$$\max_{\theta} \prod_{i=1}^N \psi(x_i, y_i; \theta) \quad (49)$$

або

$$\max_{\theta} \sum_{i=1}^N \ln(\psi(x_i, y_i; \theta)). \quad (50)$$

Функція щільності для двовимірної випадкової величини (U,V) з граничними рівномірно розподіленими випадковими величинами визначається формулою

$$\psi_{\theta}(u, v) = C_{\theta;12}(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} C_{\theta}(u, v) \quad (51)$$

Тоді шукане значення параметра  $\hat{\theta}$  для граничних рівномірних розподілів знаходиться шляхом вирішення оптимізаційної проблеми

$$\max_{\theta} \sum_{i=1}^n \ln[C_{\theta;12}(U_i, V_i)] \quad (52)$$

Ми наводимо формули  $C_{12}(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} C(u, v)$  для деяких Архімедових копул. Сім'ї копул, які не мають аналітичного представлення  $C_{12}(u, v)$ , ми позначили фразою «немає представлення».

Таблиця 4

Архімедові копули	$C_{\theta}(u, v)$	$C_{12}(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} C(u, v)$
1. Сім'я Клейтона	$[\max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0)]^{-1/\theta}$	$(\theta + 1) \times u^{-1-\theta} \times v^{-1-\theta} \times (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{(-2-\frac{1}{\theta})}$
2.	$\max(1 - [(1-u)^{\theta} + (1-v)^{\theta}]^{1/\theta}, 0)$	немає представлення
3. Сім'я Алі-Міхаїла-Хара	$\frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}$	$\frac{-1 + \theta^2 \times (u + v - uv - 1) - \theta \times (u + v + uv - 2)}{(-1 + \theta(u-1)(v-1))^3}$
4. Сім'я Гумбеля	$\exp(-[(-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta}]^{1/\theta})$	$\frac{(-\log u)^{-1+\theta} (-1 + \theta + ((-\log u)^{\theta} + (-\log v)^{\theta})^{\frac{1}{\theta}} ((-\log u)^{\theta} + (-\log v)^{\theta})^{(-2+\frac{1}{\theta})} (-\log v)^{-1+\theta}}{\exp(-\log u)^{\theta} + (-\log v)^{\theta} (\frac{1}{\theta}) uv}$
5. Сім'я Франка	$-\frac{1}{\theta} \ln \left( 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right)$	$-\theta e^{-\theta u} e^{-\theta v} \frac{e^{-\theta} - 1}{(e^{-\theta} - e^{-\theta u} - e^{-\theta v} + e^{-\theta u} e^{-\theta v})^2}$

6. Сім'я Джо	$-1[(1-u)^\theta + (1-v)^\theta - (1-u)^\theta(1-v)^\theta]^{1/\theta}$	$(1-u)^{-1+\theta}(\theta - (-1 + (1-u)^\theta)(-1 + (1-v)^\theta))((1-u)^\theta + (1-v)^\theta - (1-u)^\theta(1-v)^\theta)^{-2+1/\theta}(1-v)^{-1+\theta}$
8.	$\max\left(\frac{\theta^2 uv - (1-u)(1-v)}{\theta^2 - (\theta-1)^2(1-u)(1-v)}, 0\right)$	немає представлення
10.	$\frac{uv}{[1 + (1-u^\theta)(1-v^\theta)]^{\frac{1}{\theta}}}$	$(2 - v^\theta + u^\theta(-1 + v^\theta))^{-2-\frac{1}{\theta}}(4 - 2v^\theta + u^\theta(-2 - (-1 + \theta)v^\theta))$
13.	$\exp\left(1 - [(1 - \ln u)^\theta + (1 - \ln v)^\theta - 1]^{1/\theta}\right)$	$\frac{1}{uv} \exp(1 - (-1 + (1 - \log u)^\theta + (1 - \log v)^\theta)^{\frac{1}{\theta}}) \times (1 - \log u)^{-1+\theta} \left(-1 + \theta + (-1 + (1 - \log u)^\theta + (1 - \log v)^\theta)^{\frac{1}{\theta}}\right) \times (-1 + (1 - \log u)^\theta + (1 - \log v)^\theta)^{(-2+\frac{1}{\theta})} (1 - \log v)^{-1+\theta}$
15.	$\left\{\max\left(1 - [(1 - u^{1/\theta})^\theta + (1 - v^{1/\theta})^\theta]^{1/\theta}, 0\right)\right\}^\theta$	немає представлення
17.	$\left(1 + \frac{[(1+u)^{-\theta} - 1][(1+v)^{-\theta} - 1]}{2^{-\theta} - 1}\right)^{-1/\theta} - 1$	$\frac{2^\theta((-1+2^\theta)\theta(1+u)^\theta(1+v)^\theta + 2^\theta(-1+(1+u)^\theta)(-1+(1+v)^\theta))}{(1+u)(1+v)(2^\theta - 2^\theta(1+u)^\theta - 2^\theta(1+v)^\theta + (1+u)^\theta(1+v)^\theta)^2} \times \frac{1}{(1 + \frac{(-1+(1+u)^{-\theta})(-1+(1+v)^{-\theta})}{-1+2^{-\theta}})^{\frac{1}{\theta}}}$
20.	$[\ln(\exp(u^{-\theta}) + \exp(v^{-\theta}) - e)]^{-1/\theta}$	$\exp(u^{-\theta} + v^\theta)u^{-1-\theta}v^{-1-\theta} \log\left(-e + e^{\frac{1}{u^\theta}} + e^{\frac{1}{v^\theta}}\right)^{-2-\frac{1}{\theta}} (1 + \theta \ln\left(-e + e^{\frac{1}{u^\theta}} + e^{\frac{1}{v^\theta}}\right) + \theta \times \frac{1}{(-e + e^{\frac{1}{u^\theta}} + e^{\frac{1}{v^\theta}})^{\frac{1}{\theta}}})$
21.	$1 - \left(1 - \left\{\max\left([1 - (1-u)^\theta]^{\frac{1}{\theta}} + [1 - (1-v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}}\right)\right\}^\theta\right)^{1/\theta}$	немає представлення

Сучасні економетричні пакети (STATA, Matlab) дозволяють без особливих труднощів провести економетричні оцінки параметрів  $\theta$  відповідних моделей.

Розглянемо найпростіші приклади, що відповідають двовимірним випадковим величинам, модельованим з допомогою копул Клейтона. Нехай

$$\begin{cases} x = \beta_1 + u_1 \\ y = \beta_2 + u_2 \end{cases} \quad (53)$$

де  $(u_1, u_2)$  має спільний розподіл, що визначається копулою Клейтона з параметром  $\theta = 2$  та нормальними граничними розподілами з  $\mu_1 = \mu_2 = 0$  та  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ . Використовуючи метод симуляцій Монте Карло (100 симуляцій) з 2000 спостережень, ми отримали методом найбільшої наступні характеристики оцінок параметрів  $\beta_1, \beta_2, \sigma_1, \sigma_2, \theta$ :

Таблиця 5

$\bar{\hat{\beta}}_1 = -0,0013$	$\sigma(\hat{\beta}_1) = 0,0206$
$\bar{\hat{\beta}}_2 = 0,0031$	$\sigma(\hat{\beta}_2) = 0,0249$
$\bar{\hat{\sigma}}_1 = 0,9970$	$\sigma(\hat{\sigma}_1) = 0,0150$
$\bar{\hat{\sigma}}_2 = 0,9993$	$\sigma(\hat{\sigma}_2) = 0,0162$
$\bar{\hat{\theta}} = 1,9956$	$\sigma(\hat{\theta}) = 0,0823$

Тут, символами  $\bar{\beta}$  та  $\sigma(\beta)$  ми позначили, відповідно, середнє значення та стандартну девіацію оцінок. З Таблиці 4 видно, що наші оцінки є достатньо добрими, і не виникає проблем ідентифікації.

Використовуючи копулу Клейтона з параметром  $\theta=2$  та нормальним граничним розподілом з  $\mu_1=0$ ,  $\sigma_1=1$  та граничним розподілом РТІV з параметрами  $\alpha=1$ ,  $\delta=2$ ,  $\rho=6$ , ми згенерували двовимірну випадкову величину згідно до моделі (53). Виконавши 100 симуляцій з 2000 спостережень, ми отримали наступні характеристики оцінених параметрів  $\beta_1, \beta_2, \sigma_1, \alpha, \delta, \rho, \theta$ :

Таблиця 6

$\bar{\hat{\beta}}_1 = 0,0040$	$\sigma(\hat{\beta}_1) = 0,0186$
$\bar{\hat{\beta}}_2 = 0,0089$	$\sigma(\hat{\beta}_2) = 0,0277$
$\bar{\hat{\sigma}}_1 = 0,9981$	$\sigma(\hat{\sigma}_1) = 0,0141$
$\bar{\hat{\delta}} = 2,0084$	$\sigma(\hat{\delta}) = 0,0497$
$\bar{\hat{\rho}} = 6,0014$	$\sigma(\hat{\rho}) = 0,0190$
$\bar{\hat{\theta}} = 1,9803$	$\sigma(\hat{\theta}) = 0,0896$

Ці приклади показують, що сучасні можливості економетричних пакетів дозволяють ефективно працювати з багатовимірними економетричними моделями, що враховують складну та структуру взаємозалежності випадкових факторів.

### Висновок

Даний матеріал знайомить читачів з практичними аспектами використання складних структур взаємної залежності випадкових величин, що моделюються з допомогою копул. Найбільш інтенсивно такі моделі використовуються у сфері фінансів для аналізу та оцінювання складних похідних фінансових інструментів, у страховій індустрії для прогнозування майбутніх витрат тримачів страхових

полісів та симулятивних моделях прогнозування прибутковості компанії. Розвинена копульна методика дає можливість гнучко інтегрувати в економетричну модель граничні розподіли випадкових величин різної природи та їх коваріаційну структуру. Ця методика сьогодні вже ввійшла в інструментарій сучасного західного фінансового менеджера.

### **Завдання 1. Генерування двовимірних випадкових величин з допомогою копульного підходу.**

Що ж робити, щоб згенерувати двовимірну випадкову величину з заданими граничними розподілами і заданою копульною залежністю? У цьому випадку використовують двох кроковий алгоритм:

- 1) генерують двовимірну випадкову величину з заданими параметрами копули і рівномірно розподіленими граничними розподілами;
- 2) використовують обернену до функції розподілу функцію, щоб згенерувати випадкову величину з потрібними властивостями граничних розподілів.

Розглянемо приклад: згенеруємо двовимірну випадкову величину з нормально розподіленими граничними значеннями:  $\mu_1 = 3$ ,  $\sigma_1 = 0,5$  та  $\mu_2 = 5$ ,  $\sigma_2 = 1,5$  з копульною залежністю Клейтона з параметром Кендала  $\tau_K = 0,7$ .

```
clear all;

% специфікація нормальних граничних розподілів
mu1=3; %середнє значення
sig1=0.5; % стандартне відхилення
mu2=5; %середнє значення
sig2=1.5; % стандартне відхилення
tau = 0.7; % параметр Кендала
rho = copulaparam('clayton',tau) % параметр Клейтона
u = copularnd('clayton',rho,1000); % генеруємо 2-вимірну випадкову величину
з сім'ї копул Клейтона і рівномірно розподіленими граничними випадковими
величинами

b1 = norminv(u(:,1),mu1,sig1);% перетворюємо рівномірний в нормальний
розподіл
```

`b2 = norminv(u(:,2),mu2,sig2); % перетворюємо рівномірний в нормальний розподіл`

`tau_sample1 = kendall([u(:,1) u(:,2)]) % перевіряємо коефіцієнт Кендала`

`tau_sample2 = kendall([b1 b2]) % перевіряємо коефіцієнт Кендала`

`scatterhist(b1,b2)% генеруємо зображення вибірки`

При цьому ми отримаємо наступний результат

