Матеріали курсу

«Бізнес аналітика»

Автор: Євген Пенцак, PhD (Lausanne University)[1]

Частина 2. Фінансова економіка.
Моделі оцінки фінансових контрактів.

Заняття 9-10. Калібрування кривої доходності процентних ставок. Біноміальна модель ринку. Оцінка умовних вимог у біноміальній моделі. Повні та неповні ринки. Знаходження рівноважних цін на інвестиційні проекти.

Моделювання і калібрування кривої процентних ставок.

Спот процентна ставка $R_{0;t}$ визначається як річна процентна ставка безкупонного бонду з терміном погашення t. Спот процентну ставку можна розглядати як геометричне середнє неявних послідовно заданих форвардних процентних ставок

$$1 + R_{0;t} = \left[(1 + R_{0;1}) \cdot (1 + R_{1;2}) \cdot (1 + R_{2;3}) \cdots (1 + R_{t-1;t})\right]^{1/t}$$

Для моделювання кривої процентних ставок розглянемо дві найбільш вживані сім'ї функцій.

1) Многочлен третього степеня

$$p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \times t + \alpha_2 \times t^2 + \alpha_3 \times t^3, \qquad (3)$$

де t – змінна, що визначає час (в роках), а α_0, α_1, α_2, α_3 – параметри, що визначають відповідну криву процентних ставок.

2) Сім'я функцій Нельсона-Сігела, що визначає наступну форвардну часову структуру процентних ставок:

$$f_1(t) = \beta_1 + \beta_2 \times e^{-\lambda t} + \beta_3 \times \lambda \times t \times e^{-\lambda t} \qquad (4)$$

---

[1] @ Євген Пенцак

де t – час, а $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \lambda_1$ – параметри, що характеризують форму відповідної кривої форвардних ставок. Відповідну до (4) спот-структуру процентних ставок можна визначити з допомогою формули:

$$F_1(t) = \beta_1 + \beta_2 \times \frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda t} + \beta_3 \times (\frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda t} - e^{-\lambda t}) \quad (5)$$

Завдання 9. Відкалібруйте криву процентних ставок з допомогою моделі (3), якщо для заданих часових періодів відомі процентні ставки:

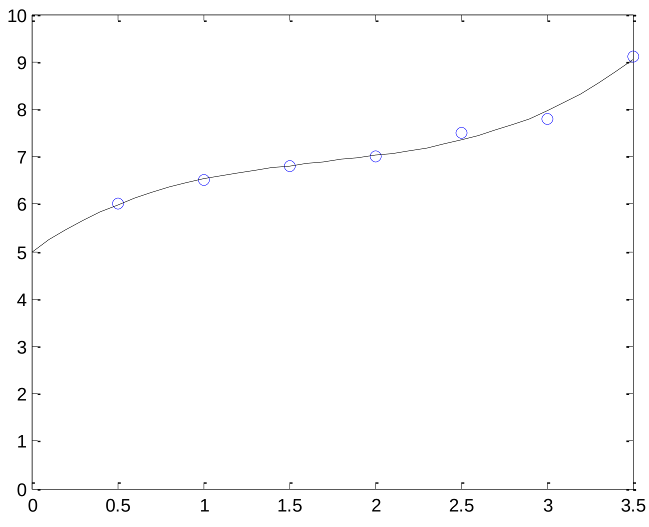
Таблиця 1

t, роки	1/12	1	1,5	2	2,5	3	3,5
R	0,01	0,02	0,028	0,032	0,0345	0,0345	0,0356

Розв'язання.

Запишемо код у середовищі Matlab з використанням функції fit:

```
clear all;
    x=[0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 ]; %час в роках
    x1=0:0.1:3.5;% проміжок наближення
    y=[6 6.5 6.8 7 7.5 7.8 9.1];% спот процентні ставки
    f = fittype('a*x^3+b*x^2+c*x+d')%функціональний тип наближення
    cfun = fit(x',y',f)% результат калібрування
    z = cfun(x1);%значення в точках у заданому інтервалі
    plot(x,y,'o',x1,z,'k')%графічне відображення
    axis([0 3.5 0 10])%специфікація осей
```



Розглянемо ще один спосіб апроксимації спот структури процентних ставок поліномом третього степеня:

$$s(z) = \alpha_3 z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z^1 + \alpha_0,$$

що в наших позначеннях запишеться як

$$s(0,\mathrm{T}) = \alpha_3 \mathrm{T}^3 + \alpha_2 \mathrm{T}^2 + \alpha_1 \mathrm{T} + \alpha_0$$

Отже, для того щоб визначити поточне положення кривої процентних ставок, заданої функціонально як многочлен третього степеня, нам достатньо знати значення спот процентних ставок для трьох значень Т

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{T}_0, s(0,\mathrm{T}_0)) \equiv (\mathrm{T}_0, s_0),\\
&(\mathrm{T}_1, s(0,\mathrm{T}_1)) \equiv (\mathrm{T}_1, s_1),\\
&(\overline{\mathrm{T}}, s(0,\overline{\mathrm{T}})) \equiv (\overline{\mathrm{T}}, \bar{s}),
\end{aligned}$$

використавши додаткового плоскість цієї кривої поза $\overline{T}$, тобто у крайній правій точці кривої похідна функції доходності дорівнює 0. Таким чином ми отримаємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{aligned}
&\alpha_3 \mathrm{T}_0^3 + \alpha_2 \mathrm{T}_0^2 + \alpha_1 \mathrm{T}_0 + \alpha_0 = s_0,\\
&\alpha_3 \mathrm{T}_1^3 + \alpha_2 \mathrm{T}_1^2 + \alpha_1 \mathrm{T}_1 + \alpha_0 = s_1,\\
&\alpha_3 \overline{\mathrm{T}}^3 + \alpha_2 \overline{\mathrm{T}}^2 + \alpha^1 \overline{\mathrm{T}} + \alpha_0 = \bar{s},\\
&3\alpha_3 \overline{\mathrm{T}}^2 + 2\alpha_2 \overline{\mathrm{T}} + \alpha_1 = 0
\end{aligned}$$

Позначивши

$$\alpha = (\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0)'$$

$$s = (s_0, s_1, \bar{s}, 0)'$$

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} \mathrm{T}_0^3 & \mathrm{T}_0^2 & \mathrm{T}_0 & 1 \\ \mathrm{T}_1^3 & \mathrm{T}_1^2 & \mathrm{T}_1 & 1 \\ \overline{\mathrm{T}}^3 & \overline{\mathrm{T}}^2 & \overline{\mathrm{T}} & 1 \\ 3\overline{\mathrm{T}}^2 & 2\overline{\mathrm{T}} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

наша система запишеться у матричному вигляді як

$$\mathrm{T} \cdot \alpha = s,$$

звідки

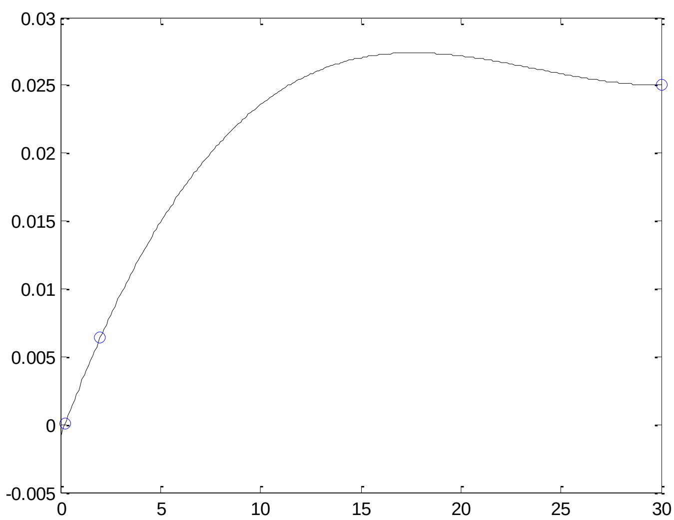
$$\alpha = T^{-1} \cdot s$$

Завдання 10. Нехай $T = (0.25\ 2\ 30)$, $s = (0.0001\ 0.0064\ 0.025)$

Відкалібруйте криву процентних ставок у вигляді многочлена третього степеня і зобразіть її графічно.

Розв'язання. Використаємо код у середовищі Matlab для розв'язання відповідної системи рівнянь.

```
clear all;
T=[0.25^3 0.25^2 0.25 1;
  2^3 2^2 2 1;
  30^3 30^2 30 1;
  3*30^2 2*30 1 0];
s=[0.0001 0.0064 0.025 0];
a=inv(T)*s'
x=0:0.1:30;
y=a(1)*x.^3+a(2)*x.^2+a(3)*x+a(4);
plot(x,y,'k', [0.25 2 30], [s(1) s(2) s(3)], 'o')
```



Завдання 11. Нехай $T = (0.25\ 2\ 30)$, $s = (0.01\ 0.64\ 2.59)$ і значення деяких процентних ставок на кривій процентних ставок мають вигляд, як у Таблиці 2

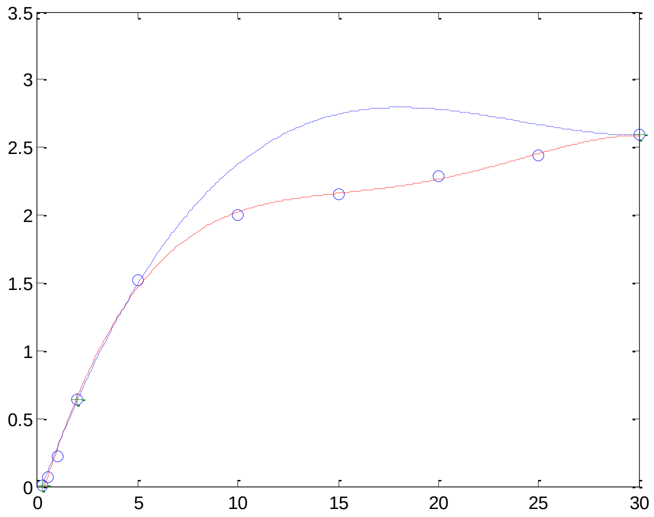
Таблиця 2

t, роки	0,25	0,5	1	2	5	10	15	20	25	30
R	0,01	0,07	0,22	0,64	1,52	2	2,15	2,29	2,44	2,59

Відкалібруйте криву процентних ставок у вигляді многочлена третього степеня з допомогою двох способів (див. Завдання 9 і 10), зобразіть криві процентних ставок графічно і зробіть висновок.

Розв'язання. Об'єднаємо два коди розв'язку завдань 9 і 10:

```
    clear all;
    x0=0:0.1:30;
    x1=[0.25 0.5 1 2 5 10 15 20 25 30];
    y1=[0.01    0.07    0.22    0.64    1.52    2   2.15    2.29    2.44
2.59];
    f1 = fittype('a1*x^4+b1*x^3+c1*x^2+d1*x+e1')
    cfun1 = fit(x1',y1',f1)
    z1 = cfun1(x0);
    T=[0.25^3 0.25^2 0.25 1;
  2^3 2^2 2 1;
  30^3 30^2 30 1;
  3*30^2 2*30 1 0];
s=[0.01 0.64 2.59 0];
a=inv(T)*s'
y=a(1)*x0.^3+a(2)*x0.^2+a(3)*x0+a(4);
    plot(x1,y1,'o',x0,z1,'r--',x0,y,'b-.',[0.25 2 30], [s(1) s(2) s(3)], '+' )
    axis([0 30 0 3.5])
```



Завдання 12. Нехай непараметрично оцінена з ринку державних облігацій крива процентних ставок задана з допомогою Таблиці 3.

Таблиця 3

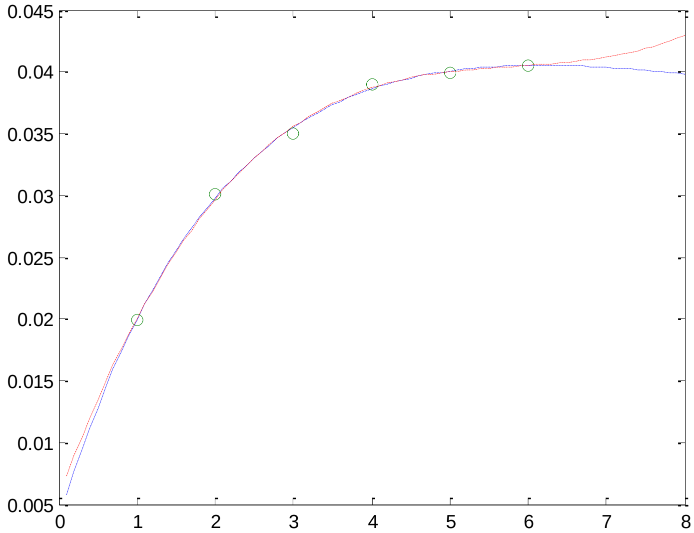
t, роки	1	2	3	4	5	6
R	0,020	0,030	0,035	0,039	0,040	0,041

Відкалібруйте криву процентних ставок у вигляді многочлена третього степеня з допомогою двох способів – моделей (3) та (5), зобразіть криві процентних ставок графічно і зробіть висновок.

Розв'язання.

```
clear all;
R=[0.0199028847642593   0.0300666952936262  0.0349943944097717
0.0390158795056419  0.0399627009661119  0.0405005211357965];
I=1:1:length(R);
C = fittype('b1+b2*(1-exp(-lam*x))/(lam*x)+b3*((1-exp(-lam*x))/(lam*x)-exp(-
lam*x))')
F=fit(I',R',C);
C30 = fittype('a3*x^3+a2*x^2+a1*x+a0')
F30=fit(I',R',C30);
z=0.1:0.1:8;
plot(z, F(z'),'--',I,R,'o',z,F30(z'),'r-.')
```

У результаті калібрування з допомогою моделей (3) та (5) методами чисельної оптимізації було отримано наступний результат:



Модель 3): $\alpha_0 = 0.005615$, $\alpha_1 = 0.01709$, $\alpha_2 = -0.002858$, $\alpha_3 = 0.0001632$.

Модель 5): $\beta_1 = 0.02494$, $\beta_2 = -0.02119$, $\beta_3 = 0.08187$, $\lambda = 0.396$.

У цьому матеріалі ми розглянемо найпростішу модель фінансового ринку – біноміальну модель[2]. Хоча ця модель є моделлю з дискретним часом, проте вона добре відображає процес оцінки фінансових інструментів у неперервному часі і може бути трансформована у граничному випадку до неперервних моделей фінансового ринку.

Для простоти ми розглядаємо одно періодичну модель, тобто модель, що має один період, що триває між $t=0$ (сьогодні) і $t=1$ (завтра). На ринку є доступними два активи: бонд (облігація) та акція. У час t ціну бонду позначимо B_t, а ціну акції S_t. Таким чином ми отримаємо два цінових процеси B і S. Ціна бонду описується детерміністичним процесом

$$B_0 = 1$$

$$B_1 = 1 + R$$

Сталу R ми інтерпретуємо як спот процентну ставку протягом періоду, що розглядається в моделі. Це може бути, наприклад, банківська депозитна процентна ставка.

Процес, що описує коливання ціни акції, є стохастичним, і його динаміка описується наступним чином:

$$S_0 = s$$

$$S_1 = \begin{cases} s \cdot u, & p_u \\ s \cdot d, & p_d \end{cases}$$

Цей процес також зручно записувати у вигляді

$$\begin{cases} S_0 = s \\ S_1 = s \cdot Z \end{cases},$$

де Z є стохастичною змінною, визначеною з умови

[2] Дж. Халл Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. И.: Вильямс, 2007.

$$Z = \begin{cases} u, & p_u \\ d, & p_d \end{cases}$$

Ми припускаємо, що сьогоднішня ціна акції s є відомою, а також відомими є сталі u, d та ймовірності p_u, p_d, причому $d < u$ і, звичайно, $p_u + p_d = 1$.

Ми вивчаємо властивості різноманітних портфелів на (B,S) фінансовому ринку і позначатимемо їх у вигляді вектора $h = (x, y)$. Тут, x позначає кількість бондів, якими ми володіємо, а y – кількість акцій. Якщо значення змінної x чи y є позитивним, то на фінансовому жаргоні кажуть, що ми маємо довгу позицію у даному активі, а якщо відповідне значення є негативним, то – коротку. Суттєвим припущенням моделі є те, що короткі позиції є допустимими. Опишемо формальним чином усі припущення біноміальної моделі.

Припущення одно періодичної біноміальної моделі фінансового ринку:

- короткі позиції та як завгодно дрібні частки активів є дозволеними, тобто $h \in R^2$;
- не беруться до уваги бід-аск спреди, тобто ціна активів є єдиною як для купівлі так і для їх продажу;
- не беруться до уваги кошти за послуги з купівлі та продажу активів;
- фінансовий ринок є цілком ліквідним, тобто завжди є можливо купити чи продати необмежену кількість активів на ринку, зокрема є можливим позичити необмежену кількість бондів в банку, тобто продати бонди коротко.

Означення. Визначимо процес V_t^h, що відображає вартість портфеля h, тобто

$$V_t^h = xB_t + yS_t, \; t = 0{,}1,$$

чи більш детально

$$V_0^h = x + ys,$$

$$V_1^h = x(1+R) + ysZ \; .$$

Для трейдера чи спекулянта (*arbitrageur*) фінансового ринку основною метою є побудова арбітражного портфеля, концепція якого лежить в основі фінансової теорії.

Означення. Арбітражним портфелем називається портфель h з наступними властивостями:

$$V_0^h = 0,$$

$$V_1^h > 0, \text{ з ймовірністю 1.}$$

Інтуїтивно, арбітражний портфель є ***дійною коровою*** чи машиною, що без кінця приносить прибуток, не вимагаючи вкладень. Існування такого портфеля є серйозною ознакою нестабільності ринку, що може раптово зникнути. Тому природно, що для моделювання використовують вільні від арбітражу ринки. Можна показати, що у вільній від арбітражу біноміальній моделі повинно виконуватись

$$d \le 1 + R \le u \,.$$

Попередня нерівність може бути переписана у наступній формі

$$1 + R = q_u \cdot u + q_d \cdot d \,,$$

де $q_u, q_d \ge 0$ і $q_u + q_d = 1$. Тоді q_u та q_d можна інтерпретувати як нові ймовірності, для яких

$$\frac{1}{1+R} E^Q[S_1] = \frac{1}{1+R}[q_u su + q_d sd] = \frac{1}{1+R} \cdot s(1+R) = s \,.$$

Ці ймовірності ще називаються нейтральними до ризику ймовірностями, а ймовірнісна міра, що визначається з їх допомогою, називається ***нейтральною до ризику*** або ***мартингальною***. Виявляється, що існування такої міри є еквівалентним тому, що фінансовий ринок є вільним від арбітражу. Для нашої одно періодичної біноміальної моделі фінансового ринку

$$\begin{cases} q_u = \dfrac{(1+R) - d}{u - d} \\ q_d = \dfrac{u - (1+R)}{u - d} \end{cases}$$

Означення. Фінансовим деривативом чи похідним фінансовим інструментом називається стохастична змінна Х вигляду $X = \Phi(Z)$, де Z є стохастична змінна, що визначає процес для S.

Функція Φ називається *контрактною* функцією. Типовим прикладом похідного фінансового інструменту може бути Європейський кол чи пут зі страйковою ціною К. Для Європейського колу

$$\Phi(u) = su - K$$

$$\Phi(d) = 0 .$$

Головною проблемою фінансової математики є знаходження справедливої ціни за Х. Якщо ми позначимо через $\Pi(t; X)$ ціну за дериватив Х в момент часу t, то $\Pi(1; X) = X$, то наша проблема полягає в знаходженні $\Pi(0; X)$. Оскільки ми припустили відсутність арбітражу, тобто неможливість генерування грошей з нічого, то виникає цікаве питання про те, чого ми можемо досягнути з допомогою нашого ринку.

Означення. Кажуть, що дериватив *X* є ***репліковним***, якщо існує такий портфель h, що $V_1^h = X$ з ймовірністю 1. При цьому кажуть, що портфель h реплікує дериватив *X*. Якщо всі похідні фінансові інструменти є репліковними, то такий фінансовий ринок називається ***повним***.

За умов повного ринку ринкова вартість реплікованого портфеля і відповідного деривативу повинні бути однаковими. Це і є основним принципом оцінювання фінансових інструментів, тобто $\Pi(t; X) = V_t^h$.

Легко довести наступне твердження.

Твердження. Якщо біноміальна модель є вільною від арбітражу, то вона є повною. При цьому реплікований портфель $h = (x, y)$ для деривативу $X = \Phi(Z)$ визначається згідно до

$$x = \frac{1}{1+R} \cdot \frac{u\Phi(d) - d\Phi(u)}{u - d}$$

$$y = \frac{1}{s} \cdot \frac{\Phi(u) - \Phi(d)}{u - d}.$$

Оскільки біноміальна модель є повною, то

$$\Pi(0; X) = x + sy = \frac{1}{1+R}\left\{ \frac{(1+R) - d}{u-d} \cdot \Phi(u) + \frac{u - (1+R)}{u-d} \cdot \Phi(d) \right\},$$

тобто

$$\Pi(0; X) = \frac{1}{1+R} \cdot \{ q_u \Phi(u) + q_d \Phi(d) \} = \frac{1}{1+R} E^Q[X].$$

Тут Q є мартингальною мірою, що єдиним чином визначається з умови

$$S_0 = \frac{1}{1+R} E^Q[S_1]$$

Ми підсумуємо наші результати для біноміальної моделі фінансового ринку:

- обчислюючи вільну від арбітражу ціну фінансового деривативу, ми проводимо всі обчислення так, ніби ми живемо у безризиковому світі;
- це не означає, що ми справді живемо у безризиковому світі, тобто є нейтральними до ризику;
- формула оцінювання деривативів є справедливою для всіх інвесторів, незалежно від їх ставлення до ризику, враховується лише, що кожен інвестор віддає перевагу більшій кількості грошей перед меншою, тобто отримана формула є вільною від відношення пріоритетів інвесторів.

Завдання 13. Нехай $s = 100$, $u = 1.2$, $d = 0.8$, $p_u = 0.6$, $p_d = 0.4$ і $R = 0$. Тоді цінова динаміка для акції є

$$S_0 = 100$$

$$S_1 = \begin{cases} 120 & p_u = 0.6 \\ 80 & p_d = 0.4 \end{cases}.$$

Якщо ми обчислимо дисконтовану очікувану вартість акцій згідно до об’єктивних ймовірностей *P*, то ми отримаємо

$$\frac{1}{1+R} E^P[S_1] = 0.6 \cdot 120 + 0.4 \cdot 80 = 104$$

Як ми бачимо ця величина є більшою за 100, тобто ринок має деякий рівень неприйняття ризику. Розглянемо Європейський кол зі страйковою ціною $K = 110$, тобто дериватив X описується як

$$X = \begin{cases} 10 & S_1 = 120 \\ 0 & S_1 = 80 \end{cases}$$

Згідно до формули обчислення нейтральних до ризику ймовірностей ми знайдемо $q_u = q_d = 0.5$. Тоді коректна теоретична ціна за X складає

$$\Pi(0; X) = \frac{1}{1+0}[0.5 \cdot 10 + 0.5 \cdot 0] = 5 .$$

Теорія також дає нам можливість побудувати репліковний портфель

$$x = \frac{1.2 \cdot 0 - 0.8 \cdot 10}{1.2 - 0.8} = -20$$

$$y = \frac{1}{100} \cdot \frac{10 - 0}{1.2 - 0.8} = \frac{1}{4} .$$

Це означає, що репліковний портфель можна сформувати, позичивши 20 у.о. в банку, і інвестувати їх у чверть акції. Тоді

$$V_1^h = \begin{cases} -20 + \frac{1}{4} \cdot 120 = 10 & S_1 = 120 \\ -20 + \frac{1}{4} \cdot 80 = 0 & S_1 = 80 \end{cases},$$

тобто отриманий портфель є справді репліковним.

Якби ми хотіли зробити модель фінансового ринку більш реалістичною, ми повинні перш за все розглянути багатоперіодичну модель. Якщо розглядати лише 20 періодів, то ми отримаємо $2^{20} \approx 10^6$ елементарних наслідків, що перевищує кількість активів на кожному існуючому фондовому ринку. Тобто, в реальності ми знаходимося далеко від припущення повноти фінансового ринку, як у нашій моделі. Але, на щастя, у багатоперіодичній моделі ми маємо можливість проміжних торгів, тобто ребалансування нашого портфелю. Це дає нам більше степенів свободи, і можна показати, що повнота біноміальної моделі досягається. Уведення в модель коштів за послуги з купівлі та продажу активів, можливої неліквідності, можливості формувати короткі позиції, неперервності торгів та інших реалістичних специфікацій призводить до сучасних моделей фінансового ринку, які використовуються при визначенні оптимальних стратегій для трейдингу. Але ці моделі є далеко за межами можливого обговорення зараз, вони заслуговують значно ґрунтовнішого аналізу.

З метою кращого розуміння концепції повноти фінансового ринку та важливої ролі похідних фінансових інструментів для його поповнення ми наводимо наступні вправи.

Завдання 14. Припустимо, що є 4 можливих стани природи і 5 наступних інвестиційних проектів є доступними на ринку:

Проект 1: $I_1 = (4,3,2,1)$ вартістю 2

Проект 2: $I_2 = (1,1,1,1)$ вартістю 1,25

Проект 3: $I_3 = (1,0,1,0)$ вартістю 0,5

Проект 4: $I_4 = (6,3,4,1)$ вартістю 3

Проект 5: $I_5 = (3,1,3,1)$ вартістю 2,25

Чи є даний ринок повним?

Розв'язання: Для цього нам потрібно знайти ранг матриці (кількість лінійно незалежних рядків у матриці), утвореної з виплат по кожному інвестиційному проекту у різних станах природи:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Використавши оператор *rank* у середовищі matlab, ми знайдемо, що ранг матриці дорівнює 3, а тому не існує однозначного представлення Ероу-Дебрю зобов’язань через задані інвестиційні проекти. Тобто даний фінансовий ринок не є повним.

Завдання 15. Припустимо, що на цьому ринку торгується кол опціон на Проект 1 з ціною виконання 2 (*strike price*) вартістю 0,225.

Чи буде тепер фінансовий ринок повним?

Якщо так, то реплікуйте (виразіть у вигляді лінійної комбінації) Ероу-Дебрю зобов’язання:

Ероу-Дебрю 1: Q_1=(1, 0, 0, 0)

Ероу-Дебрю 2: Q_2=(0, 1, 0, 0)

Ероу-Дебрю 3: Q_3=(0, 0, 1, 0)

Ероу-Дебрю 4: Q_4=(0, 0, 0, 1)

і знайдіть їхню вартість.

Розв’язання: спочатку нам потрібно описати виплати по кол опціонному контракту у вигляді Проекту 6: $I_6 = (2,1,0,0)$ вартістю 0,225. Тепер сформуємо нову матрицю виплат, що характеризує даний фінансовий ринок:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тепер ранг матриці дорівнює 4, а тому існує однозначне представлення Ероу-Дебрю зобов’язань через задані інвестиційні проекти. Тобто даний фінансовий ринок є повним. Ми бачимо, як введення додаткового похідного фінансового продукту (кол опціону) поповнило ринок. Оскільки у нас торгується 6 фінансових активів, а є лише 4 стани природи, то для реплікації Ероу-Дебрю зобов’язань нам потрібно вибрати лише 4 проекти. Візьмемо для прикладу проекти 1, 2, 3 та 6, оскільки ранг відповідної матриці виплат

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

дорівнює 4. Перевіримо, що Проекти 4 та 5 можна реплікувати через Проекти 1, 2, 3 та 6. Відповідний розв'язок визначається зі співвідношення:

$$\left(\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T\right)^{-1} \times \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тоді вартість Проектів 4 та 5, відповідно складе:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1{,}25 & 0{,}5 & 0{,}225 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2{,}25 \end{pmatrix}.$$

Тобто ми бачимо, що наша модель є вільною від арбітражу, бо вартість проектів 4 та 5 на ринку є справді 3 та 2,25, відповідно.

Знайдемо тепер реплікацію Ероу-Дебрю зобов'язань через задані інвестиційні проекти 1, 2, 3 та 6:

$$\left(\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T\right)^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 & 0{,}5 & -1 \\ 0{,}5 & -1 & -0{,}5 & 2 \\ 0{,}5 & -1 & 0{,}5 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Тоді вартість кожного Ероу-Дебрю зобов'язання дорівнюватиме:

$$\begin{pmatrix}2 & 1{,}25 & 0{,}5 & 0{,}225\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-0{,}5 & 1 & 0{,}5 & -1\\ 0{,}5 & -1 & -0{,}5 & 2\\ 0{,}5 & -1 & 0{,}5 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}025 & 0{,}4 & 0{,}725\end{pmatrix}$$

Отже, найціннішою є 1 одиниця в стані 4, тобто Ероу-Дебрю зобов’язання (0, 0, 0, 1), за яке сьогодні потрібно заплатити 0,725. Аналогом стану 4 може бути рецесія, а тоді за 1 грошову одиницю можна придбати набагато більше благ, ніж в стані зростання ринку. Тому й за цю 1 потрібно зараз заплатити дуже багато – 0,725.