

## Матеріали курсу

### «Бізнес аналітика»

Автор: Євген Пенцак, PhD (Lausanne University)<sup>1</sup>

#### Частина 3. Фінансова економетрика.

**Заняття 13-14. Параметричні та непараметричні функції щільності розподілів доходності фінансових інструментів та значень інвестиційних критеріїв. Нормалізовані моменти вибірки доходності акцій, їх візуалізація та використання у фінансовій аналітиці. Генерування одновимірних випадкових величин з заданими характеристиками. Калібрування параметрів функцій щільності.**

#### Параметричні та непараметричні функції щільності.

Відомо, що багато залежних змінних, наприклад, витрати на лікування, дохід, заробітна плата, прибутковість активів, володіють специфічними рисами, що суперечать припущенню про нормальний розподіл. Зокрема, такі розподіли звично демонструють надмірну асиметрію (*skewness*) та надлишковий ексцес (*kurtosis*), що навіть звичний для моделювання цього явища логнормальний розподіл не може врахувати особливостей емпіричного розподілу витрат.

Існує багато статистичних та економетричних методів, що дозволяють моделювати зазначені вище специфічні риси цих розподілів. Серед цих методів розрізняють непараметричні методи оцінювання, метод моментів та різні методики, що є стійкими до незначних трансформацій баз даних. Ми зупинимося на параметричних методах оцінки розподілів, які не є нормально розподіленими. Емпіричні дослідження показують, що навіть дуже добра апроксимація емпіричного розподілу в його «голові» не ґарантує прийнятних властивостей прогнозів, побудованих на таких припущеннях статистичних моделей. Тому фахівці в галузі фінансового моделювання звертають особливу увагу на здатності параметричного розподілу апроксимувати нормалізовані моменти емпіричного розподілу.

Ми зробимо огляд основних розподілів, що пропонуються для моделювання ненормально розподілених випадкових величин, та визначимо їх теоретичні області покриття нормалізованих моментів третього (коефіцієнт асиметрії) та четвертого порядків (коефіцієнт ексцесу). Ця інформація може служити для дослідників важливим індикатором про придатність обраного розподілу для моделювання досліджуваного явища. Спочатку ми опишемо стандартні параметричні функції щільності, що використовуються для моделювання асиметрії та «товстих хвостів» емпіричних розподілів. Потім ми опишемо проблему моментів Ґамбургера, визначимо теоретичну границю покриття коефіцієнтів асиметрії та ексцесу та наведемо графічну ілюстрацію

---

<sup>1</sup> @ Євген Пенцак

нормалізованих моментів третього та четвертого порядків для стандартних розподілів.

Наведемо типові приклади функцій щільності, що включені у стандартні статистичні та економетричні пакети, які допускають оцінку їх параметрів методом максимальної правдоподібності вбудованими у них засобами. Оскільки нас будуть цікавити теоретичні області покриття розподілами нормалізованих третіх та четвертих моментів, ми також наведемо формули для їх обчислення. Для кількісної оцінки відхилення від нормальності дослідники використовують міру асиметрії та міру ексцесу, що визначаються як

$$\gamma_1 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}} \quad (1)$$

$$\beta_2 = \frac{m_4}{m_2^2} \quad (2)$$

відповідно, де  $m_i$  - є центральним моментом порядку  $i$ . Коефіцієнт  $\gamma_1$ , відомий як «стандартизований третій центральний момент», вказує на відхилення від симетрії і називається коефіцієнтом асиметрії. Коли розподіл є симетричним, то  $\gamma_1 = 0$ . Проте можливо отримати  $\gamma_1 = 0$  і тоді, коли розподіл не є цілком симетричним. Коефіцієнт  $\gamma_2 = \beta_2 - 3$  ( $\beta_2$  відомий як «стандартизований четвертий центральний момент») допомагає класифікувати розподіли відносно їх поведінки у «хвостах» і називається коефіцієнтом ексцесу.

### Параметричні функції щільності стандартних розподілів.

Ми детальніше зупинимось на стандартних підходах до моделювання неперервно розподілених випадкових величин, що використовуються у фінансовому моделюванні.

### Нормальний розподіл.

Його функція щільності

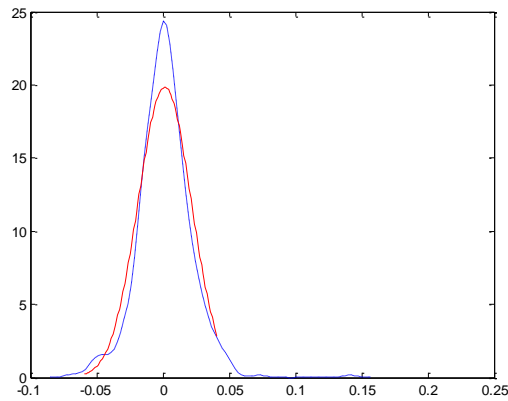
$$f_N(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

де  $\mu \in (-\infty; \infty)$  і  $\sigma \in (0; \infty)$ . Відомо, що для нормального розподілу  $\gamma_1 = 0$  і  $\gamma_2 = 0$ .

**Завдання 1.** Відкалібруйте функцію щільності розподілу денних доходностей акцій компанії FB з допомогою нормального розподілу і результат калібрування зобразіть графічно, використавши дані з файлу ADJ\_PRICES.xlsx.

Розв'язання. Запишемо відповідний код

```
clear all;
X=xlsread('ADJ_PRICES.xlsx','DAY','H2:H428');
m1=mean(X);
s1=std(X);
[ff xx]=ksdensity(X);
x=m1-3*s1:0.001:m1+2*s1;
Y1=normpdf(x,m1,s1);
plot(xx, ff, 'b--', x, Y1, 'r')
```



### Логнормальний розподіл.

Його функція щільності

$$f_{LN}(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

де  $\mu \in (-\infty; \infty)$  і  $\sigma \in (0; \infty)$ . Відомо, що для логнормального розподілу

$$\gamma_1 = \frac{\exp(3\sigma^2) - 3\exp(\sigma^2) + 2}{(\exp(\sigma^2) - 1)^{3/2}}$$

і

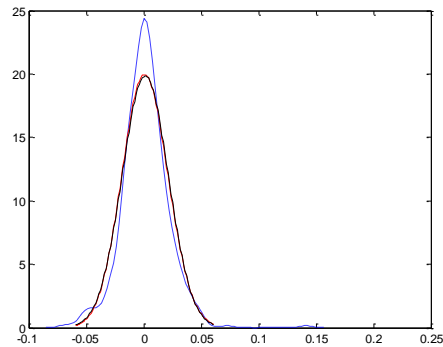
$$\gamma_2 = \frac{\exp(6\sigma^2) - 4\exp(3\sigma^2) - 3\exp(2\sigma^2) + 12\exp(\sigma^2) - 6}{(\exp(\sigma^2) - 1)^2}.$$

**Завдання 2.** Відкалібруйте функцію щільності розподілу денних доходностей акцій компанії FB з допомогою логнормального розподілу і результат калібрування зобразіть графічно.

Розв'язання. Запишемо відповідний код

```
clear all;
X=xlsread('ADJ_PRICES.xlsx','DAY','H2:H428');
m1=mean(X);
s1=std(X);
[ff xx]=ksdensity(X);
M=lognfit(X+1);
x=m1-3*s1:0.001:m1+3*s1;
Y = lognpdf(x+1,M(1),M(2));
plot(xx, ff, 'b--', x, Y, 'r', x, normpdf(x, m1, s1), 'k')
```

і графічно зобразимо результат калібрування



### Гама розподіл.

Його функція щільності

$$f_G(x; a, b) = \frac{x^{a-1}}{b^a} \exp\left(-\frac{x}{b}\right), \quad x \in (0; \infty),$$

де  $a \in (0; \infty)$  і  $b \in (0; \infty)$ . Відомо, що для гама розподілу

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(3+a) - 3a\Gamma(2+a) + 2a^3\Gamma(a)}{a^{3/2}\Gamma(a)}$$

і

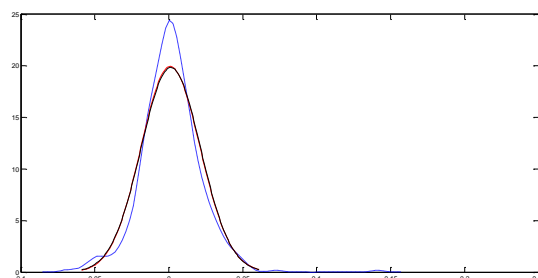
$$\gamma_2 = \frac{\Gamma(4+a) - 4a\Gamma(3+a) + 6a^2\Gamma(2+a) - 3a^4\Gamma(a) - 3a^2\Gamma(a)}{a^2\Gamma(a)}.$$

**Завдання 3.** Відкалібруйте функцію щільності розподілу денних доходностей акцій компанії FB з допомогою гама розподілу і результат калібрування зобразіть графічно.

Розв'язання. Запишемо відповідний код

```
clear all;
X=xlsread('ADJ_PRICES.xlsx','DAY','H2:H428');
m1=mean(X);
s1=std(X);
[ff xx]=ksdensity(X);
M=gamfit(X+1);
x=m1-3*s1:0.001:m1+3*s1;
Y = gampdf(x+1,M(1),M(2));
plot(xx, ff, 'b--', x, Y, 'r', x, normpdf(x, m1, s1), 'k')
```

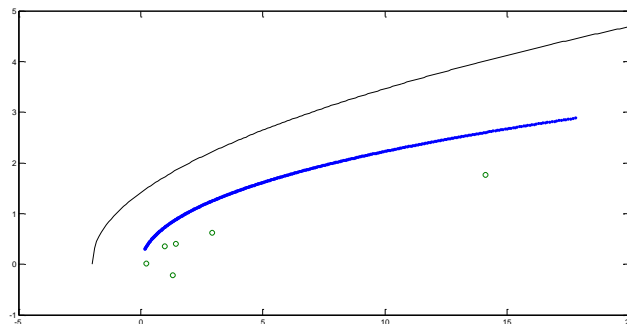
і графічно зобразимо результат калібрування



**Завдання 4.** Зобразить графічно нормалізовані третій та четвертий моменти доходностей акцій з файлу `stock_data.xlsx`, теоретичну межу для відповідних моментів, а також криву скосу і ексцесу для параметричної гамма сім'ї розподілів.

**Розв'язання.** Запишемо відповідний код

```
clear all;
X=xlsread('stock_data.xlsx','page1','i2:n274');
sk=skewness(X);
kur=kurtosis(X);
exkur=kur-3;
s=0.1:0.001:0.7;
gam1=(exp(3*s.^2)-3*exp(s.^2)+2)./(exp(s.^2)-1).^(3/2);
gam2=(exp(6*s.^2)-4*exp(3*s.^2)-3*exp(2*s.^2)+...
    12*exp(s.^2)-6)./(exp(s.^2)-1).^2;
g2=-2:0.1:20;
g1=sqrt(g2+2);
plot(gam2, gam1, '.', g2, g1, 'k', exkur, sk, 'o')
```



### Розподіл Вейбула.

Його функція щільності

$$f_W(x; a, b) = \frac{bx^{b-1}}{a^b} \exp\left(-\left(\frac{x}{a}\right)^b\right),$$

де  $a \in (0; \infty)$  і  $b \in (0; \infty)$ . Відомо, що для розподілу Вейбула

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(1+3/b) - 3\Gamma(1+2/b)\Gamma(1+1/b) + 2\Gamma^3(1+1/b)}{(\Gamma(1+2/b) - \Gamma^2(1+1/b))^{3/2}}$$

і

$$\gamma_2 = \frac{\Gamma(1+4/b) - 4\Gamma(1+3/b)\Gamma(1+1/b) + 12\Gamma(1+2/b)\Gamma^2(1+1/b)}{(\Gamma(1+2/b) - \Gamma^2(1+1/b))^2} - \frac{3\Gamma^2(1+2/b) + 6\Gamma^4(1+1/b)}{(\Gamma(1+2/b) - \Gamma^2(1+1/b))^2}$$

### Розподіл Стюдента.

Його функція щільності

$$f_{ST}(x; \nu) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)} \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} \frac{1}{(1+x^2/\nu)^{(\nu+1)/2}},$$

де  $\nu \in (0; \infty)$ . Відомо, що для розподілу Стюдента  $\gamma_1 = 0$  і

$$\gamma_2 = \frac{6}{\nu-4}.$$

### **Розподіл Рейлі.**

Його функція щільності

$$f_R(x; \sigma) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in (0; \infty),$$

де  $\sigma \in (0; \infty)$ . Відомо, що для розподілу Рейлі

$$\gamma_1 = \frac{2\sqrt{\pi}(\pi-3)}{(4-\pi)^{3/2}}$$

і

$$\gamma_2 = \frac{(3\pi-8)^2}{(4-\pi)^2}.$$

### **Обернений розподіл Гауса.**

Його функція щільності

$$f_{IG}(x; a, b) = \frac{\sqrt{b}}{\exp(0.5 \ln(x/a))} f_N\left(\frac{\sqrt{b}(x/a-1)}{\exp(0.5 \ln(x/a))}; 0, 1\right), \quad x \in (0; \infty),$$

де  $a \in (0; \infty)$  і  $b \in (0; \infty)$ . Відомо, що для оберненого розподілу Гауса

$$\gamma_1 = \frac{3}{\sqrt{b}}$$

і

$$\gamma_2 = \frac{15}{b}.$$

### **Розподіл Бірнбаума-Саундерса.**

Його функція щільності

$$f_{BS}(x; a, b) = \frac{\sqrt{x/a} + \sqrt{a/x}}{2bx} f_N\left(\frac{\sqrt{x/a} - \sqrt{a/x}}{b}; 0, 1\right), \quad x \in (0; \infty),$$

де  $a \in (0; \infty)$  і  $b \in (0; \infty)$ . Відомо, що для розподілу Бірнбаума-Саундерса

$$\gamma_1 = \frac{16a^2(11a^2+6)}{(5a^2+4)^3}$$

і

$$\gamma_2 = \frac{6a^2(93a^2 + 41)}{(5a^2 + 4)^2}.$$

### **Бета розподіл.**

Його функція щільності

$$f_B(x; a, b) = \frac{1}{B(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}, \quad x \in (0; 1),$$

де  $a \in (0; \infty)$  і  $b \in (0; \infty)$ . Відомо, що для бета розподілу

$$\gamma_1 = \frac{2(b-a)}{(a+b+2)} \sqrt{\frac{a+b+1}{ab}}$$

і

$$\gamma_2 = 6 \frac{a^3 - a^2(2b-1) + b^2(b+1) - 2ab(b+2)}{ab(a+b+2)(a+b+3)}.$$

### **Розподіл Фішера.**

Його функція щільності

$$f_F(x; \nu) = \frac{\Gamma((\nu_1 + \nu_2)/2)}{\Gamma(\nu_1/2)\Gamma(\nu_2/2)} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\nu_1/2} \frac{x^{\nu_1/2-1}}{(1 + (\nu_1/\nu_2)x^2)^{(\nu_1+\nu_2)/2}},$$

де  $\nu_1 \in (0; \infty)$  і  $\nu_2 \in (0; \infty)$ . Відомо, що для розподілу Фішера

$$\gamma_1 = \frac{2\nu_1 + \nu_2 - 2}{\nu_2 - 6} \sqrt{\frac{8(\nu_2 - 4)}{\nu_1(\nu_1 + \nu_2 - 2)}}$$

і

$$\gamma_2 = 12 \frac{20\nu_2 - 8\nu_2^2 + \nu_2^3 + 44\nu_1 - 32\nu_1\nu_2 + 5\nu_1\nu_2^2 - 22\nu_1^2 + 5\nu_1^2\nu_2 - 16}{\nu_1(\nu_2 - 6)(\nu_2 - 8)(\nu_1 + \nu_2 - 2)} - 3.$$

Як легко бачити з наведених вище формул для обчислення коефіцієнтів асиметрії та ексцесу, для розподілу Рейлі та нормального розподілу значення цих коефіцієнтів є сталими, а для розподілу Стюдента значення коефіцієнта асиметрії дорівнює нулеві. Оскільки ми зацікавлені в пошуках гнучких сімей функцій щільності, що здатні покрити цілу область у площині коефіцієнтів асиметрії та ексцесу, то надалі ми зупинимось лише на їх геометричній ілюстрації.

Теоретичні засади характеристизації можливого покриття коефіцієнта асиметрії та коефіцієнта ексцесу ґрунтуються на проблемі Гамбургера (Jondeau

Е., Rockinger М., 2003) і стосуються проблеми існування такої неспадної функції  $\alpha$  для послідовності нецентральных моментів  $\mu_j, j=1, \dots, M$ , що

$$\mu_j = \int_{-\infty}^{\infty} z^j d\alpha(z). \quad (3)$$

У роботі (Widder D.V.) було доведено що достатньою умовою для цього є додатна визначеність послідовності  $\mu_j$ , тобто

$$\mu_0 \geq 0, \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} \geq 0, \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \end{vmatrix} \geq 0, \dots \quad (4)$$

Зокрема, для проблеми чотирьох моментів з (4) додатна визначеність визначає наступне співвідношення між коефіцієнтом асиметрії та ексцесу:

$$\gamma_1^2 < \beta_2 - 1 \quad (5)$$

А тому, для даного значення ексцесу може бути реалізована лише обмежена область коефіцієнта асиметрії. Проте, область покриття для коефіцієнтів асиметрії та ексцесу може бути навіть набагато вужчою, ніж задана теоретичним обмеженням (5). Ґрунтуючись на моментах емпіричного розподілу, зокрема на коефіцієнтах асиметрії та ексцесу, деякі дослідники намагаються будувати ентропійні щільності (Jondeau Е., Rockinger М., 2002), щільності Ґрема–Чарлі (Jondeau Е., Rockinger М., 2001), чи знайти наближення з допомогою параметричних сімей щільностей розподілів. Не зупиняючись на обговоренні недоліків перших двох способів, ми звернемо нашу увагу на останньому підході.

Наведемо графічну ілюстрацію (Рис. 1) коефіцієнта асиметрії (вісь у) та ексцесу (вісь х) для деяких параметричних сімей розподілів, що розглядалися вище.



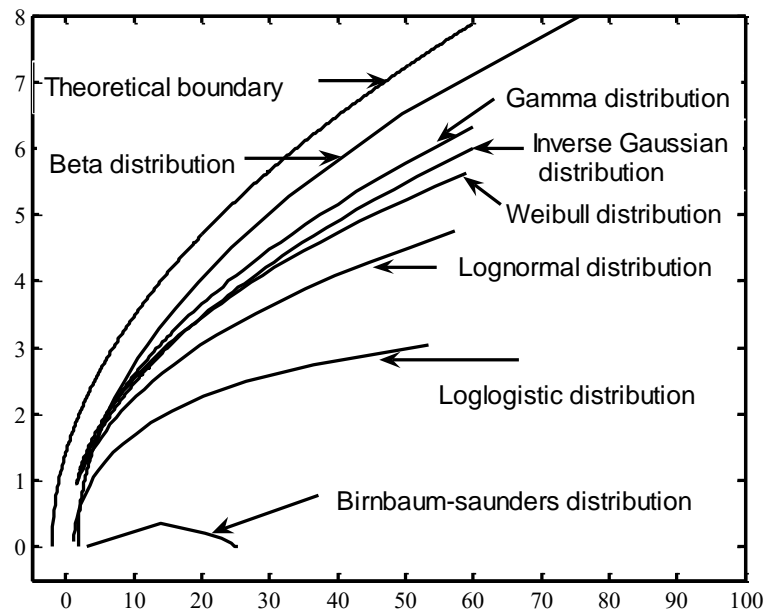


Рис. 1: Графічна ілюстрація коефіцієнтів ексцесу та асиметрії для деяких параметричних розподілів

З Рис. 1 ми бачимо, що спектр покриття коефіцієнтів ексцесу та асиметрії різними стандартними параметричними сім'ями розподілів є достатньо широким, проте кожен з розподілів зокрема не покриває широку область всередині теоретичної границі.