«Бізнес аналітика»

Автор: Євген Пенцак

Домашнє завдання №5 (від 16.05.2018)

Всього – 150 балів
Термін виконання – до 28 травня, 10:00.

Заняття 9-10. Калібрування кривої доходності процентних ставок. Біноміальна модель ринку. Оцінка умовних вимог у біноміальній моделі. Повні та неповні ринки. Знаходження рівноважних цін на інвестиційні проекти.
Заняття 11-12. Модель Кокса-Роса-Рубінштейна оцінювання вартості умовних вимог. Модель Блека-Шоулза і Мертона оцінювання опціонів. Застосування моделі БШМ у корпоративних фінансах.

Завдання 1 (10 балів).

1.1 (5 балів) Нехай відомі процентні ставки доходності s в моменти часу, що описані вектором T: $T = (0.5 \quad 5 \quad 30)$, $s = (0.015 \quad 0.0194 \quad 0.032)$.

Відкалібруйте криву процентних ставок у вигляді многочлена третього степеня

$$s(0, \mathrm{T}) = \alpha_3 \mathrm{T}^3 + \alpha_2 \mathrm{T}^2 + \alpha_1 \mathrm{T} + \alpha_0$$

і зобразіть її графічно. Використайте додатково обмеження, що крива процентних ставок є плоскою в точці T=30 років, тобто $s'(0{,}30) = 0$.

1.2 (5 балів) Нехай відомі процентні ставки доходності s в моменти часу, що описані вектором T: $T = (0.5 \quad 5 \quad 15 \quad 30)$, $s = (0.015 \quad 0.0194 \quad 0.029 \quad 0.032)$.

Відкалібруйте криву процентних ставок у вигляді многочлена четвертого степеня

$$s(0, T) = \alpha_4 T^4 + \alpha_3 T^3 + \alpha_2 T^2 + \alpha_1 T + \alpha_0$$

і зобразіть її графічно. Використайте додатково обмеження, що крива процентних ставок є плоскою в точці T=30 років, тобто $s'(0{,}30) = 0$.

Завдання 2 (10 балів). Нехай непараметрично оцінена з даних ринку державних облігацій крива процентних ставок задана з допомогою Таблиці 1.

Таблиця 1

t, роки	0,1	1	2	3	4	5	6	7	8
R	0,01	0,0175	0,024	0,035	0,039	0,042	0,043	0,044	0,043

2.1 Відкалібруйте криву процентних ставок у вигляді

$$NS(t) = \beta_1 + \beta_2 \times \frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda t} + \beta_3 \times (\frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda t} - e^{-\lambda t})$$

і зобразіть криву процентних ставок графічно. Візьміть параметр $\lambda = 0.004528$

2.2 Відкалібруйте криву процентних ставок у вигляді

$$s(t) = \alpha_4 t^4 + \alpha_3 t^3 + \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0$$

і зобразіть криву процентних ставок графічно.

2.3 Зобразіть дві кривих процентних ставок, отриманих в 2.1 та 2.2 на одному графіку. Зробіть висновок щодо можливості їх використання в якості апроксимації заданих значень процентних ставок.

Завдання 3 (50 балів).

Розглянемо найпростішу модель фінансового ринку – біноміальну одно періодичну модель, в якій на ринку є доступними два активи: 1) безризиковий з фіксованою доходністю R; 2) ризиковий S, який може перебувати лише у двох станах ринку у момент T=1 – вгору (up), вниз (down).

Нехай $S_0 = 100$, $u = 1{,}3$, $d = 0{,}7$, ймовірність того, що ринок піде вгору - $p_u = 0{,}7$, а ймовірність того, що ринок піде вниз - $p_d = 0{,}3$, безризикова доходність $R = 5\%$.

Тоді цінову динаміку для активу S можна записати у вигляді

$$S_0 = 100$$

$$S_1 = \begin{cases} 130 & p_u = 0,7 \\ 70 & p_d = 0,3 \end{cases}.$$

Нагадаємо, оскільки актив S є ризиковим, а інвестори на ринку мають певний рівень несприйняття ризику, то дисконтоване очікуване значення виплат по активу S за безризиковою процентною ставкою R завжди буде більшим від ринкової ціни активу S. Перевіримо це:

$$\frac{1}{1+R}E^P[S_1] = \frac{0,7\cdot 130 + 0,3\cdot 70}{1+0,05} = 106,67 > S_0 = 100$$

Тому одним з загально прийнятих підходів у фінансовому менеджменті є врахування ризику для оцінки ризикових інструментів шляхом збільшення ставки дисконтування. Збільшуючи ставку дисконтування, ми зменшуємо вартість ризикового активу сьогодні. І саме теорія CAPM була покликана встановити рівновагу між ризиком та доходністю на фінансових ринках. Проте питання вимірювання ризиків кожного активу є доволі складним, а тим більше визначення для кожного з них адекватної ставки дисконтування.

Тоді фінансистами-науковцями було запропоновано інший підхід: чи можна знайти такі нейтральні до ризику ймовірності (risk neutral probabilities) q_u та $q_d = 1 - q_u$, для яких би виконувалась формула

$$\frac{1}{1+R}E^Q[S_1] = \frac{1}{1+R}[q_u S_0 u + q_d S_0 d] = S_0$$

Виявилось, що при деяких ринкових умовах такі ймовірності завжди існують. Зокрема, для нашої біноміальної моделі ринку повинно виконуватись

$$d \le 1 + R \le u.$$

У нашому випадку $0,7 < 1,05 < 1,3$. Тоді ймовірності q_u та $q_d = 1 - q_u$ знаходяться за формулою

$$\begin{cases} q_u = \dfrac{(1+R)-d}{u-d} \\ q_d = \dfrac{u-(1+R)}{u-d} \end{cases}$$

3.1 (10 балів) Знайдіть нейтральні до ризику ймовірності у цій біноміальній моделі.

3.2 (10 балів) Покажіть, що, використовуючи нейтральні до ризику ймовірності, справді виконується рівність

$$\frac{1}{1+R}E^{Q}[S_1] = \frac{1}{1+R}[q_u S_0 u + q_d S_0 d] = S_0$$

Нагадаємо, що фінансовим деривативом чи похідним фінансовим інструментом називається стохастична змінна X вигляду $X = \Phi(Z)$, де Z є стохастична змінна, що визначає процес для S. Для нашої біноміальної моделі ринку деривативом X назвемо будь-яку функцію, виплати якої в момент часу T=1 залежать від виплат базового активу (*underlying asset*) S, тобто $X = \Phi(S_1)$.

При цьому функція Φ називається *контрактною* функцією. Типовим прикладом похідного фінансового інструменту може бути Європейський кол чи пут зі страйковою ціною K. Зокрема, для Європейського колу

$$\Phi(u) = S_0 u - K$$

$$\Phi(d) = 0 .$$

3.3 (10 балів) Розглянемо кол опціон зі страйковою ціною K=100. Запишіть функцію виплат по цьому опціону в момент часу T=1 і знайдіть його вартість, використовуючи біноміальну модель ринку.

Виявляється, використовуючи нейтральні до ризику ймовірності, можна оцінити не тільки базовий актив, але й усі деривативи, виплати по яких відомі в момент часу T=1.

3.4 (10 балів) Знайдіть вартість пут опціону зі страйком K=100, використовуючи біноміальну модель ринку.

Кажуть, що дериватив *X* є ***репліковним***, якщо існує такий портфель з двох активів: безризикового B з доходністю R та ризикового S, що повністю реплікує (відтворює) виплати деривативa X в момент T=1. Якщо всі деривативи є репліковними, то такий фінансовий ринок називається ***повним***.

У біноміальній моделі фондового ринку ми маємо два активи і два стани ринку (up та down). Тому нам слід очікувати, що цей ринок є повним. Перевіримо це, тобто знайдемо портфель, який повністю відтворює виплати по деякому деривативу. Візьмемо для прикладу кол опціон зі страйком K=100.

Функція виплат (payoff function) по кол опціону матиме вигляд

$$X = \begin{cases} 30 & S_1 = 130 \\ 0 & S_1 = 70 \end{cases}$$

Для знаходження компонент реплікованого портфеля скористаємось твердженням:

Твердження. Якщо для біноміальної моделі ринку виконується

$$d \le 1 + R \le u \text{ ,}$$

то модель ринку є повною. При цьому реплікований портфель $h = (x, y)$ для деривативу $X = \Phi(Z)$ визначається згідно до формул:

$$x = \frac{1}{1+R} \cdot \frac{u\Phi(d) - d\Phi(u)}{u-d}$$

$$y = \frac{1}{S_0} \cdot \frac{\Phi(u) - \Phi(d)}{u-d} \text{ .}$$

Тут x – інвестиція (деінвестиція) у актив з фіксованою доходністю R, а y – кількість придбаних акцій, що відповідають активу S.

3.5 (10 балів) Знайдіть компоненти реплікованого портфеля для деривативу – кол опціон на S зі страйком 100. Знайдіть вартість реплікованого портфеля в момент часу T=0.
За умов повного ринку ринкова вартість реплікованого портфеля і відповідного деривативу повинні бути однаковими. Це і є основним безарбітражним (arbitrage free) принципом оцінювання фінансових інструментів.

Перевірте, що вартість кол опціону, що порахована з використанням нейтральних до ризику ймовірностей у пункті 3.3, співпадає з вартістю кол опціону, що порахована через реплікацію портфелем безризиковим та ризиковим активами.

Завдання 4 (30 балів).

4.1 (10 балів) Припустимо, що ви купили одну акцію компанії AMZN за ціною $1000 та один європейський пут-опціон на акції компанії AMZN зі страйковою ціною E=$1000 з терміном виконання T=6 місяців вартістю $50. Зобразіть графічно прибуток по цій інвестиційній стратегії через 6 місяців у залежності від вартості акцій компанії AMZN.

4.2 (10 балів) Припустимо, що ви володієте 3-ма акціями компанії AMZN, придбали один пут-опціон на акції компанії AMZN зі страйковою ціною E=$1000 і два пут-опціони зі страйковою ціною E=$800. Термін виконання опціонів – 6 місяців. Зобразіть графічно функцію виплат по такому вашому інвестиційному портфелю через 6 місяців.

4.3 (10 балів) Припустимо, що ви купили один європейський кол-опціон на акції компанії AMZN зі страйковою ціною E=$1000 з терміном виконання T=6 місяців вартістю $50, увійшли в коротку позицію по двох кол-опціонах зі страйком $1100 по ціні $14 кожен, а також придбали один кол-опціон зі страйком $1200 по ціні $3. Зобразіть графічно прибуток по цій інвестиційній стратегії через 6 місяців у залежності від вартості акцій компанії AMZN.

Завдання 5 (50 балів). Розглянемо європейський кол-опціон на 1 тройську унцію золота з ціною виконання $1300, поточна ціна 1 тр. ун. золота складає $1320, волатильність базового активу золота складає 12%, безризикова процентна ставка R=1,75%, опціон виконується через 3 місяці. Знайдіть вартість кол-опціону, використовуючи формули:

5.1 (10 балів) Блека-Шоулза і Мертона – **blsprice** в Matlab

5.2 (10 балів) Кокса-Роса-Рубінштейна – **binprice** в Matlab

5.3 (10 балів) Покажіть, що збільшуючи кількість кроків у формулі Кокса-Роса-Рубінштейна, ми отримаємо результат обчислення вартості кол-опціону дуже близький до результату, який визначається формулою Блека-Шоулза і Мертона.

5.4 (10 балів) Знайдіть вбудовану (implied) волатильність для кол-опціону зі страйковою ціною $1300 вартістю $40, поточною ціною базового активу $1320.

5.5 (10 балів) Побудуйте графік залежності ціни кол опціону зі страйковою ціною $1300 в залежності від ціни золота зараз.