**Матеріали курсу**

**«Бізнес аналітика»**

**Автор: Євген Пенцак, PhD (Lausanne University)[[1]](#footnote-1)**

**Частина 1.** **Економічне моделювання. Максимізація прибутку компанії в умовах конкуренції.**

**Заняття 1. Економічне моделювання. Функція корисності економічного агента. Крива індиферентності, оптимальна споживча в’язка і крива попиту. Моделювання і калібрування кривої попиту. Моделювання нецінових факторів впливу на криву попиту. Калібрування функції витрат і прибутку компанії.**

**Моделювання економічних процесів.**

***Все потрібно спрощувати до того часу, поки це можливо, але не більше***.

Альберт Ейнштейн

Головною особливістю бізнес-аналітики є побудова адекватної моделі функціонування бізнесу, тобто спрощеного опису реальної ситуації в бізнесі для прийняття більш ефективних рішень. Оскільки модель є менш складною, ніж сама реальність, то вона дозволяє виявити і врахувати релевантні фактори, сприяє кращому обговоренню та аналізу бізнес-проблеми в групі топ-менеджерів. Моделювання дозволяє експериментувати, здійснювати прогнози, вимірювати ефекти впливу різних управлінських рішень на результат, оцінювати ризики тощо.

Побудова бізнес-моделі є процесом, що включає наступні етапи: постановка задачі, переведення проблеми з вербального рівня на параметричний, специфікація моделей від найпростішої до загальної, перевірка моделі на достовірність, застосування, модифікація і коригування моделі, та розробка нової моделі.

Як правило, найпростіші економічні та фінансові рішення підпадають під просту схему. Спочатку розглядають простір усіх альтернатив, тобто середовище, в якому будуть прийматись рішення. Оскільки середовище може бути дуже складним, щоб підлягати інтуїтивному чи формальному опису, то його часто спрощують, вимагаючи тільки збереження його найважливіших характеристик. Після цього визначають цільову функцію, що буде досліджуватись на екстремум, аргументами якої є елементи простору альтернатив. Альтернативи, при яких ця функція досягає оптимального значення, називають оптимальними. Дуже часто в економіці чи у фінансах ця функція буває завуальованою, визначеною нечітко, потребує подальшого уточнення чи теоретичного обґрунтування. При зміні бізнес-середовища чи зміні регуляторних норм часто доводиться і переглядати цільові функції для різних економічних агентів, включаючи фірми і корпорації.

Проте фундаментальним постулатом сучасної утилітарної економіки та раціональної поведінки економічних агентів є те, що кожен економічний агент максимізує деяку цільову функцію, яку часто називають **функцією корисності** (*utility function*).

Рекомендую подивитись:

виступ Барі Шварца (Barry Schwartz) на платформі TED стосовно проблеми вибору – «The paradox of choice», з якою стикаються споживачі;[[2]](#footnote-2)

виступ Шини Аєнгар (Sheena Iyengar) на платформі TED стосовно вибору, як мистецтва, автора книги «The art of choosing».[[3]](#footnote-3) Шина стверджує, що ми і наш вибір є тісно взаємопов’язаними: «Вибір робимо ми, а потім вибір робить нас»;

виступ Малкольма Гладвела (Malcolm Gladwell) на платформі TED стосовно того, як люди роблять свій вибір: «Choice, happiness and spaghetti sauce»[[4]](#footnote-4), обґрунтувавши ідеї нового економічного підходу, побудованого на основі теорії контрактів і принципу «Розподіляй і володарюй».

**Функція корисності економічного агента.** У економічній теорії ***функція корисності*** (*utility function*) використовується для опису пріоритетів споживача стосовно різноманітних наборів товарів та послуг. Під товарами ми розуміємо різноманітні споживчі елементи, що розрізняються фізичними характеристиками, часом та умовами споживання.

Нехай споживач вибирає споживчу в’язку товарів з деякої множини *Х*. означає, що ***в’язка*** (*bundle*) ***х*** не гірша за в’язку ***у****.* Найбільш загальними та стандартними аксіомами, що описують властивості впорядкування множини *Х* є: **повнота, рефлективність, транзитивність** та **неперервність**. Таке відношення передпорядку  на множині *Х* індукує відношення строгої переваги та відношення еквівалентності .



**Аксіома 1**. (*Повнота*). Для кожної пари в’язок ***х*** та ***у*** або  або .

**Аксіома 2**. (*Рефлексивність*). Для кожної в’язки ***х***: .



**Аксіома 3**. (*Транзитивність*). Для кожної трійки в’язок ***х***, ***у*** та ***z***, якщо та , то



Виявляється, що навіть цих аксіом є недостатньо, щоб описати пріоритет споживача з допомогою функції корисності, тобто функції , що задовольняє умовам:



(1)



З цією метою було введено аксіому неперервності.

**Аксіома 4**. (*Неперервність*). Для кожної в’язки ***х*** множини в’язок, що є строго кращими від ***х*** та строго гіршими від ***х***, є обидві відкритими в *Х* (*Х* – топологічний простір).

Було доведено наступний результат:

**Теорема 1.** Для кожного впорядкування замкненої та опуклої множини Х, що задовольняє *Аксіомам* 1–4, існує неперервна функція корисності , що задовольняє умові (1).



Для того, щоб краще оперувати з функцією корисності, як правило, роблять ще одне припущення: функція є двічі диференційовною, зростаючою та ***опуклою вгору*** (*concave*).



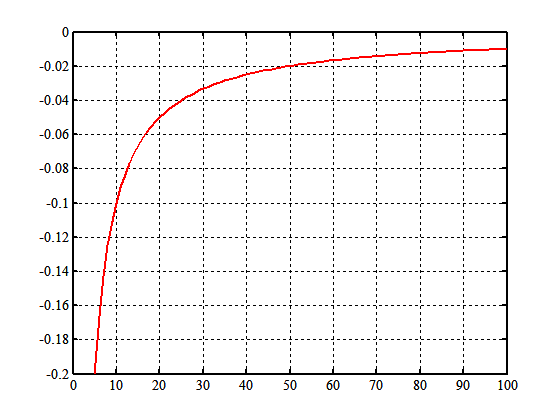
**Завдання 1.** **(Функція корисності від багатства).** Для наступних функцій корисності відносно багатства *w* (*w*>0)



визначте області допустимих значень параметрів та *w*, що роблять їх добре визначеними, тобто . Зобразіть їх графічно.

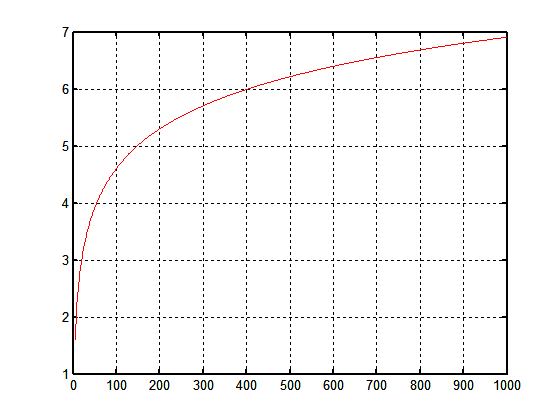


**Розв’язання**.

****

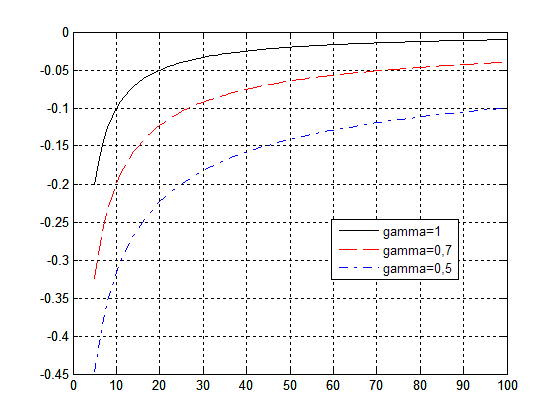
Функція корисності:





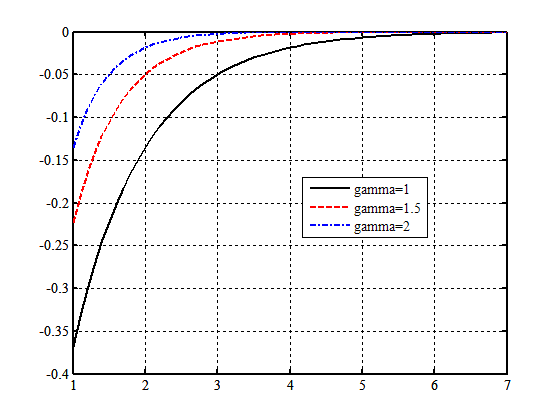
Функція корисності:





Сім'я функцій корисності:





Сім'я функцій корисності:



Ми бачимо, що спільною рисою всіх допустимих функцій корисності економічних агентів від грошей є те, що зі зростанням багатства задоволення кожного економічного агента зростає його задоволення (зростаюча функція, ), а також спадання граничного задоволення для кожного рівня багатства економічного агента (функція опукла вгору, ). Простою мовою це означає, що більше багатства, тим краще, і зі зростанням багатства додаткова 1 у.о. є менш цінною, ніж у випадку, коли грошей є мало.

Якщо ми знаємо функцію корисності для даного інвестора, то з її допомогою ми можемо порівнювати різні інвестиційні альтернативи, використовуючи значення очікуваної функції корисності:

(2)

Тут, інвестиційна альтернатива Х зображена у вигляді лотереї з виплатами у *n* станах ринку з відповідними ймовірностями .

Якщо інвестор володіє багатством W і інвестиційним проектом Х, то безризиковим еквівалентом СЕ при продажу проекту Х називається величина СЕ, що визначається з рівняння:

(3)

Якщо інвестор володіє багатством W і хоче придбати інвестиційний проект Х, то безризиковим еквівалентом СЕ при купівлі проекту Х називається величина СЕ, що визначається з рівняння:

(4)

**Крива індиферентності, оптимальна споживча в’язка і крива попиту.** Для того щоб охарактеризувати всі в’язки товарів, до яких споживач ставиться індиферентно (байдуже, однаково) у двовимірному випадку використовують ***криві індиферентності*** (*indifference curve*), наприклад, . Найбільш стандартною проблемою в теорії вибору є вибір споживачем оптимальної в’язки товарів з доступної множини *Х*. У термінах функції корисності споживач максимізує корисність згідно до його фінансових обмежень. Формально для даного вектору цін ***р*** споживач розв’язує наступну задачу:

де *w* – початкове ***багатство*** (*wealth*) споживача. Вводячи ще деякі додаткові припущення на множину *Х* ми можемо гарантувати єдність її розв’язку.

**Завдання 2. (Оптимальна споживча в’язка).** Розв’яжемо задачу вибору оптимальної в’язки споживчих товарів за умов обмеженого бюджету споживача. Нехай ціни на товари 1 та 2 відповідно дорівнюють та , а доступний рівень багатства споживача . Припустимо, що функція задоволення від споживання товарів 1 та 2 в кількостях та визначається формулою . Знайдіть оптимальну кількість товарів та (допускаються дробові значення споживання товарів), що максимізують задоволення даного споживача.

**Розв’язання**. Спочатку визначимо формальні обмеження на простір допустимих альтернатив :

, , .

Тоді оптимізаційна модель розв’язку даної проблеми матиме вигляд:

,

якщо , , .

Зрозуміло, що вираз набуває найбільшого значення у заданій проблемі тоді і лише тоді, коли максимального значення набуває вираз . Можна зауважити, що споживач максимізує своє задоволення, коли він повністю використає своє багатство на споживання товарів, тобто виконується . Таким чином, первинна економіко-математична модель спрощується до вигляду:

,

якщо , , . Тоді, виразивши через з рівності , ми отримаємо . Як відомо з курсу математики, оптимального значення дана функція досягає в точках, де її похідна дорівнює 0, тобто:

*.*

Тоді , , а цільова функція задоволення від споживання .

Запишемо код вирішення цього завдання у середовищі Matlab:

clear all;

x1=5:0.1:25;

x2=(500-20\*x1)/30;

U=sqrt(x1.\*x2);

M= max(U)

I=find(U==M);

x1\_opt=x1(I)

x2\_opt=(500-20\*x1\_opt)/30

Виконавши код, ми отримаємо наступний результат:

M = 10.2062, x1\_opt = **12.5000**, x2\_opt = **8.3333**

**Завдання 3. (Вибір кращої споживчої в’язки).**

Припустимо, що економічний агент отримує задоволення від споживання товарів А, В та С згідно до формули, що описує низький ступінь взаємозамінності

.

Нехай , , , і припустимо, що за однакову суму коштів економічний агент може придбати дві в’язки товарів:

а) ; або б) .

Яка в’язка товарів а) чи б) є кращою для даного економічного агента?

**Розв’язання**. Для того щоб визначити кращу споживчу в’язку товарів, потрібно підставити відповідні значення кількостей споживання у функцію задоволення економічного агента і порівняти отримані значення:

;

.

Оскільки значення функції задоволення економічного агента є більшим для в’язки товарів б), то вона є для нього кращою.

Запишемо код вирішення цього завдання у середовищі Matlab:

clear all;

a=0.4; b=0.6; c=0.8;

QA1=0.9; QB1=2; QC1=0.7;

QA2=2.9; QB2=1.1; QC2=0.6;

U1=QA1^a+QB1^b+QC1^c

U2=QA2^a+QB2^b+QC2^c

Виконавши код, ми отримаємо наступний результат:

U1 = 3.2262

U2 = 3.2543

**Завдання 4. (Функція корисності Коба-Дугласа).**

Припустимо, що економічний агент отримує задоволення від споживання товарів А, В та С згідно до формули, що описує високий ступінь взаємозамінності

.

Нехай , , , і припустимо, що за однакову суму коштів економічний агент може придбати дві в’язки товарів:

а) ; або б) .

Яка в’язка товарів а) чи б) є кращою для даного економічного агента?

**Розв’язання**. Для того щоб визначити кращу споживчу в’язку товарів, потрібно підставити відповідні значення кількостей споживання у функцію задоволення економічного агента і порівняти отримані значення:

;

.

Оскільки значення функції задоволення економічного агента є більшим для в’язки товарів а), то вона є для нього кращою.

Запишемо код вирішення цього завдання у середовищі Matlab:

clear all;

a=0.4; b=0.6; c=0.8;

QA1=0.9; QB1=2; QC1=0.7;

QA2=2.9; QB2=1.1; QC2=0.6;

U1=QA1^a\*QB1^b\*QC1^c

U2=QA2^a\*QB2^b\*QC2^c

Виконавши код, ми отримаємо наступний результат:

U1 = 1.0924

U2 = 1.0772

**Завдання 5. (Функція корисності від багатства і очікувана функція корисності).**

Аналізуючи можливі виплати по даному інвестиційному проекту, інвестор отримав наступні оцінки:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ймовірність | 0.05 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.2 | 0.1 | 0.05 |
| Прибуток або втрати | 4000 | 3000 | 2000 | 1000 | 0 | -1000 | -2000 |

Нехай функція корисності даного інвестора , його початкове багатство у.о. і параметр . Припустимо, що вартість проекту дорівнює 1000 у.о.

5.1 Яке рішення прийме інвестор стосовно інвестування даного проекту?

5.2 Яким є безризиковий еквівалент для даного проекту? Якою найменшою повинна бути вартість проекту, щоб вона була прийнятною для інвестора?

5.3 Як ця вартість залежить від ? Від *w*?



**Розв’язання**.

5.1 Перед інвестором стоїть дилема: інвестувати чи не інвестувати в даний інвестиційний проект. Якщо інвестор не інвестує, то він залишається з початковим багатством 10000 у.о., отримуючи задоволення .

Якщо ж інвестор вкладає 1000 у.о., то в результаті інвестування отримає

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ймовірність | 0,05 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0,05 |
| Багатство | 13000 | 12000 | 11000 | 10000 | 9000 | 8000 | 7000 |

Обчисливши значення при інвестуванні в ризиковий інвестиційний проект, отримаємо 1,2055. Оскільки задоволення інвестора від багатства 10000 більше, ніж від інвестування в проект – 1,2076>1,2055, то інвестор відмовиться від цієї інвестиційної пропозиції.

5.2 Якщо W – багатство інвестора, а Х – виплати по даному інвестиційному проекту, то безризиковий еквівалент інвестиційного проекту визначається зі співвідношення:

Зробивши відповідні обчислення, знайдемо значення СЕ=893 у.о. Оскільки проект передбачає інвестування 1000 у.о., то інвестор відмовиться від даної інвестиційної пропозиції.

5.3 Якщо початкове багатство інвестора зростає, то в загальному зростає й толерантність інвестора до ризику, тобто інвестор допускає меншу компенсацію за ризик від інвестування. У нашому прикладі це означає, що він готовий заплатити за проект більше. Наприклад, якщо початкове багатство інвестора складає не 10000 у.о., а 50000 у.о., то безризиковий еквівалент проекту СЕ=975 у.о. – найбільша сума, яку інвестор готовий інвестувати у цей проект.

Якщо ж обчислити безризиковий еквівалент інвестиційного проекту для , то СЕ=823 у.о., тобто толерантність до ризику інвестора зменшиться, оскільки він готовий буде інвестувати в даний інвестиційний проект не більше 823 у.о.

**Завдання 6. (Безризиковий еквівалент інвестиційного проекту, СЕ).**

Розглянемо економічного агента з добре визначеною функцією корисності та рівнем багатства W. Припустимо, що виплати по проекту характеризуються наступною лотереєю .



1. Знайдемо мінімальну ціну, за якою даний агент погодився би продати цей проект, припускаючи, що він ним володіє. Запишемо співвідношення, якому ця ціна повинна задовольняти.



2. Знайдемо максимальну ціну, за якою даний агент погодився би придбати цей проект, припускаючи, що він ним не володіє. Запишемо співвідношення, якому ця ціна повинна задовольняти.



3. Припустимо, що W=10, G=26, B=6, *p*=0.5 і . Знайдемо купівельну та продажну ціни на даний проект. Чи є вони однаковими? Коли вони можуть бути однаковими?



4. Як зміниться розв’язок та висновки пункту 3 цієї задачі, якщо ?



Зобразимо схематично дану лотерею L

G

B

p

1-p

W

**Розв’язання**.

10.  Ціна повинна задовольняти



або



20. Ціна повинна задовольняти



30. Згідно до пунктів 10 та 20:

, звідки і ;



, звідки . Легко бачити, що . Поясненням цьому може бути те, що володіючи лотереєю, агент володіє мінімальним багатством 16, а намагаючись придбати лотерею, він володіє лише багатством 10. У першому випадку він є більш толерантним до ризику, ніж у другому. Якби агент був нейтральним до ризику, тобто , то тоді .



40. Повторимо кроки розв’язку пункту 3:

, звідки ;



або , звідки .



Тобто, ми бачимо, що різні економічні агенти, маючи різні функції корисності, по різному оцінюють даний інвестиційний проект.

**Крива попиту.**

Під попитом в економіці розуміють кількість товару, яку споживачі готові придбати при даній ціні. Як правило, при зменшенні ціни споживачі купують більше даного товару. Криву попиту зображають у вигляді спадної функції, коли на вертикальній осі знаходиться ціна, а на горизонтальній – обсяги продаж. Функцію попиту зручно моделювати з допомогою сім’ї лінійних або експоненційних функцій , де Q – кількість, Р – ціна, а *a*, *b*, *A*, *B* – невідомі параметри, які потрібно визначити з ринку на даний товар чи послугу.

**Завдання 7. (Крива попиту та еластичність попиту).**

Розглянемо криву попиту, що моделюється з допомогою такої параметричної сім’ї функцій

,

де р – ціна, а , – параметри.

1. Зобразіть графічно криві попиту для та , ,

**Розв’язання**. Запишемо короткий код програми в МАТЛАБ

clear all;

p=1:1:100;

a=0.1;

b1=-3;

b2=-3.2;

b3=-3.4;

d1=exp(-a\*p-b1);

d2=exp(-a\*p-b2);

d3=exp(-a\*p-b3);

plot(d1,p,'k',d2,p,'--', d3,p,'-.')

axis ([0 20 0 50])

В результаті виконання отримаємо:



2. Обчисліть еластичність кривої попиту для та при ціні та .

**Розв’язання**. Нагадаємо, що цінова еластичність кривої попиту в точці визначається за формулою

*або*

Тому, знайдемо

і відповідну функцію еластичності

Отже, еластичність кривої попиту для та при ціні дорівнює , а при ціні - .

3. Нехай ціна одиниці товару зміниться з 20 до 17. Порахуйте при цьому як зміняться обсяги продаж і виручка, якщо крива попиту описується функцією

,

де та .

**Розв’язання**. Знайдемо

,

тобто продажі зростуть на 1 одиницю товару.

У нашому випадку ціна знизилась на , а обсяги продаж збільшились на , причому коефіцієнт цінової еластичності дорівнює .

Знайдемо також, як зміниться виручка від продаж при падінні ціни з 20 до 17: .

Оскільки попит при даній ціні 20 є еластичним, то при зменшенні ціни виручка зростає.

**Моделювання і калібрування кривої попиту.**

**Завдання 8. (Калібрування кривої попиту).** Відомо, що споживачі реагують на зміну ринкових цін зміною обсягів своїх покупок. Відділ продаж компанії оцінив вплив ціни на обсяги продаж у вигляді таблиці:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ціна, тис. грн | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 | 2 | 2,1 | 2,2 | 2,3 |
| Обсяг продаж, шт. | 430 | 397 | 361 | 336 | 313 | 292 | 273 | 256 |

Потрібно побудувати криву попиту, що задається функцією вигляду

де Q – обсяги продаж, – ціна, а , , – параметри, і найкраще наближає заданий масив значень. Нехай , – заданий масив точок, – заданий клас функцій, тоді параметри визначають оптимальне наближення заданого масиву точок, якщо вони є розв’язком проблеми

.

**Розв’язання**. Дане завдання відноситься до класу інтерполяційних завдань, які вирішуються з допомогою стандартних оптимізаційних алгоритмів. Зокрема, в середовищі Matlab використовують клас операторів **fit** зі специфікацією заданої сім’ї функцій. Наведемо відповідний код розв’язку:

clear all

P=[1.6 1.7 1.8 1.9 2 2.1 2.2 2.3];

D=[430 397 361 336 313 292 273 256];

d=D/100; %нормалізація масштабу обчислень

f1 = fittype('exp(a-b\*x)+c');% уведення класу функцій

[demand1,gof1] = fit(P',d',f1);%калібрування параметрів

p1=1.5:0.01:2.4;

plot(D,P,'o',100\*demand1(p1),p1,'k')%вивід отриманого результату у вигляді графіка

axis([200 500 1.2 2.6])% специфікація розміщення графіку у заданому діапазоні

Зобразимо графічно отриманий результат:



Ми бачимо, що отримана крива з заданого класу функцій достатньо добре апроксимувала заданий набір точок.

Надаємо також оцінені значення параметрів:

General model:

demand1(x) = exp(a-b\*x)+c

Coefficients (with 95% confidence bounds):

a = 3.167 (2.86, 3.474)

b = 1.317 (1.048, 1.586)

c = 1.419 (1.034, 1.803)

**Завдання 9. (Калібрування кривої попиту).** Відділ продаж компанії оцінив вплив ціни на обсяги продаж у вигляді таблиці:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ціна, тис. грн | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 | 2 | 2,1 | 2,2 | 2,3 |
| Обсяг продаж, шт. | 430 | 397 | 361 | 336 | 313 | 292 | 273 | 256 |

Апроксимуйте заданий масив значень з допомогою функцій класів:

де Q – обсяги продаж, – ціна, а , – шукані параметри. Зобразіть на одному графіку отримані результати.

**Розв’язання**. Апроксимацію заданого масиву точок здійснимо з використанням процедури fit у Matlab:

clear all

P=[1.6 1.7 1.8 1.9 2 2.1 2.2 2.3];

D=[430 397 361 336 313 292 273 256];

d=D/100;

f1 = fittype('-log((x)^a)+b');

[demand1,gof1] = fit(P',d',f1);%клас функцій

f2 = fittype('((x/b)^(-a)-1)/a');

[demand2,gof2] = fit(P',d',f2);%клас функцій

p1=1.5:0.01:2.4;

plot(D,P,'o',100\*demand1(p1),p1,'r',100\*demand2(p1),p1,'b--')

axis([200 500 1.4 2.6])

Наведемо графічний результат апроксимації.



З графіків видно, що клас функцій 2) забезпечує кращу апроксимацію кривої попиту на даний товар.

У результаті апроксимації було знайдено оптимальні параметри для двох класів функцій:

1. General model:

demand1(x) = -log((x)^a)+b

Coefficients (with 95% confidence bounds):

a = 4.781 (4.391, 5.17)

b = 6.482 (6.22, 6.743)

1. General model:

demand2(x) = ((x/b)^(-a)-1)/a

Coefficients (with 95% confidence bounds):

a = 1.134 (1.092, 1.176)

b = 7.615 (7.414, 7.816)

**Завдання 10. (Калібрування кривої попиту).** Відділ продаж компанії оцінив вплив ціни на обсяги продаж у вигляді таблиці:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ціна, тис. грн | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 | 2 | 2,1 | 2,2 | 2,3 |
| Обсяг продаж, шт. | 430 | 397 | 361 | 336 | 313 | 292 | 273 | 256 |

Апроксимуйте заданий масив значень з допомогою функцій класів:

1. .

де Q – обсяги продаж, – ціна, а , – шукані параметри. Зобразіть на одному графіку отримані результати.

**Розв’язання**. Апроксимацію заданого масиву точок здійснимо з використанням процедури fit у Matlab:

clear all

P=[1.6 1.7 1.8 1.9 2 2.1 2.2 2.3];

D=[430 397 361 336 313 292 273 256];

d=D/100;

f1 = fittype('(a/x+c)\*(1-b\*x)');

[demand1,gof1] = fit(P',d',f1);%клас функцій

f2 = fittype('(x)^c/b+d');

[demand2,gof2] = fit(P',d',f2);%клас функцій

p1=1.5:0.01:2.4;

plot(D,P,'o',100\*demand1(p1),p1,'b',100\*demand2(p1),p1,'r-.')

axis([200 500 1.3 2.6])



Ми бачимо, що два класи функцій достатньо добре апроксимують криву попиту на товар, що задається заданим масивом точок. Надаємо також результати оцінки параметрів функцій:

demand1 = General model:

demand1(x) = (a/x+c)\*(1-b\*x)

Coefficients (with 95% confidence bounds):

a = 9.094 (4.382, 13.8)

b = 0.08217 (-22.83, 22.99)

c = -0.7867 (-204.6, 203)

demand2 = General model:

demand2(x) = (x)^c/b+d

Coefficients (with 95% confidence bounds):

b = 0.119 (0.1156, 0.1224)

c = -1.511 (-2.006, -1.016)

d = 0.1767 (-0.8617, 1.215)

**Калібрування функції витрат і прибутку компанії.**

**Завдання 11. (Калібрування функції витрат).**

Для прийняття ефективних економічних рішень важливо вміти моделювати функцію загальних витрат компанії на виробництво продукції. Припустимо, що середні витрати компанії на виробництво 1 од. продукції в залежності від обсягів виробництва, а також загальні витрати виражено з допомогою наступної таблиці:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Обсяги виробництва, Q | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 |
| Середні витрати, AC | 3,4 | 2,3 | 1,6 | 1,3 | 1,2 | 1,1 | 1,05 | 1 |
| Загальні витрати, TC | 340 | 460 | 480 | 520 | 600 | 660 | 735 | 800 |

Здійсніть інтерполяцію середніх витрат компанії з допомогою многочлена третього степеня: , а також інтерполяцію загальних витрат компанії з допомогою многочлена четвертого степеня: . Результати інтерполяції зобразіть графічно.

**Розв’язання**. Апроксимацію середніх та загальних витрат здійснимо з використанням процедури fit у Matlab:

clear all

Q=[100 200 300 400 500 600 700 800];

AC=[2.9 2.7 2.4 2.1 1.7 1.5 1.4 1.3];

TC=Q.\*AC;

Q1=Q/100;

f1 = fittype('a+b\*x+c\*x^2+d\*x^3');

[acost1,gof1] = fit(Q1',AC',f1);%клас функцій

f2 = fittype('a+b\*x+c\*x^2+d\*x^3+e\*x^4');

[tcost1,gof1] = fit(Q1',TC',f2);%клас функцій

q=100:1:800;

figure(1)

plot(q,acost1(q/100),'k',Q,AC,'o')

figure(2)

plot(Q, TC,'o', q, tcost1(q/100),'--')

У результаті апроксимації середніх витрат отримаємо



Запишемо також результат калібрування параметрів функції середніх витрат:

acost1 = General model:

acost1(x) = a+b\*x+c\*x^2+d\*x^3

Coefficients (with 95% confidence bounds):

a = 3.014 (2.701, 3.328)

b = -0.03348 (-0.3171, 0.2502)

c = -0.07879 (-0.1499, -0.007639)

d = 0.007071 (0.001851, 0.01229)

У результаті апроксимації загальних витрат отримаємо



Запишемо також результат калібрування параметрів функції загальних витрат:

tcost1 = General model:

tcost1(x) = a+b\*x+c\*x^2+d\*x^3+e\*x^4

Coefficients (with 95% confidence bounds):

a = -116.1 (-470.1, 237.9)

b = 480.6 (7.058, 954.2)

c = -85.06 (-282.5, 112.4)

d = 6.149 (-25.94, 38.24)

e = -0.0947 (-1.869, 1.68)

**Завдання 12. (Максимізація функції прибутку).**

Економісти компанії дослідили залежність між обсягами виробництва Q (в тис. шт.) та прибутком компанії Profit (в тис. у.о.), і виразили її з допомогою формули:

.

При яких обсягах виробництва Q прибуток компанії буде найбільшим? Зобразіть графічно функцію прибутку компанії від обсягів виробництва.

**Розв’язання**. Дану проблему можна вирішити аналітичним методом, використовуючи елементи диференційного числення. А саме, потрібно взяти похідну шуканої функції (прибутку) по змінній Q і прирівняти до 0. Отриманий корінь (корені) відповідного рівняння і є претендентом на оптимальний обсяг виробництва. Найбільше значення прибутку можна отримати, послідовно підставивши отримані корені у функцію прибутку. У нашому випадку

Для розв’язку цього рівняння скористаємось кодом у Matlab:

x = solve('-8.8\*x^3+62.4\*x^2-135\*x+87.2=0')

В результаті виконання алгоритму отримаємо:

x = 1.1936 2.3220 3.5753

Підставимо послідовно три отримані корені у функцію прибутку:

Отже, найбільшого прибутку компанія досягне при обсягах виробництва 3575 штук і прибуток буде 10057 у.о. Зобразимо також графік функції прибутку в залежності від обсягів виробництва:



Отриманий графік був побудований з допомогою коду в Matlab:

q=1:0.01:4;

Profit=-2.2\*q.^4+20.8\*q.^3-67.5\*q.^2+87.5\*q-30;

plot(q, Profit,'k')

Можна також отримати розв’язок цієї задачі шляхом знаходження максимуму вектора прибутку, використовуючи наступний код у Matlab:

q=1:0.0001:4;

Profit=-2.2\*q.^4+20.8\*q.^3-67.5\*q.^2+87.2\*q-30;

M=max(Profit);

I=find(Profit==M);

Q=q(I)

Виконавши код, отримаємо

Q = 3.5753

1. @ Євген Пенцак [↑](#footnote-ref-1)
2. http://www.ted.com/talks/barry\_schwartz\_on\_the\_paradox\_of\_choice#t-430409 [↑](#footnote-ref-2)
3. <http://www.ted.com/talks/sheena_iyengar_on_the_art_of_choosing#t-186329> [↑](#footnote-ref-3)
4. http://www.ted.com/talks/malcolm\_gladwell\_on\_spaghetti\_sauce#t-943224 [↑](#footnote-ref-4)