**Матеріали курсу**

**«Бізнес аналітика»**

**Автор: Євген Пенцак, PhD (Lausanne University)[[1]](#footnote-1)**

**Частина 2**. **Фінансова економіка.**

**Моделі оцінки фінансових контрактів.**

**Заняття 7-8. Фінансова математика. Вартість грошей у часі та модель еквівалентних платежів. Персональне фінансове планування. Калібрування функції задоволення від грошей інвестора.**

**Часова вартість грошей. Майбутня вартість грошей. Складні проценти.**

|  |
| --- |
| Компанії інвестують у різного роду активи з метою отримання в майбутньому грошових потоків, що з запасом компенсують витрати. Так само приватні особи, наприклад, молоді люди інвестують в освіту, очікуючи в майбутньому винагороди за свої вміння та навики, здобуті в процесі навчання. Компанії залучають кошти, наприклад, підписуючи боргові угоди, що передбачають виплати у вигляді процентів за користування. Усі фінансові рішення, які приймаються компаніями чи приватними особами, вимагають порівняння з іншими можливими альтернативами. Для ефективного порівняння інвестиційних альтернатив у фінансових обчисленнях використовують різноманітні процентні ставки.  *Майбутня вартість* (*future value*) – величина, до якої зростуть інвестиції в майбутньому.  *Складні проценти* (*compound interests*) – проценти, нараховані на проценти.  *Прості проценти* (*simple interests*) – проценти, нараховані тільки на початкову інвестицію.  Насправді, ми вже звикли давно до підрахунку прибутку, отриманого від розміщення грошей на депозитний рахунок банку. Якщо ми кладемо 1000 грн. під 15% на депозитний рахунок терміном на один рік, то через рік ми отримаємо грн. Якщо ж ми продовжуємо тримати гроші і наступного року згідно такого ж контракту, то через два роки ми матимемо  грн.  Такий процес нарахування відсотків називається *компаундуванням* (*compounding*), або нарахуванням складних процентів, тобто  ,  де FV - майбутня вартість від *поточного* (*present*) значення PV, *r* - процентна ставка, а Т – кількість періодів.  Найбільш вражаючим прикладом використання складних процентів є продаж *Manhattan Island* за $24 Пітеру Мін’юіту у 1626 році. Якщо взяти до уваги ціни на нерухомість сьогодні у Нью-Йорку, то видається, що це справді була фантастична операція для містера Мін’юіта. Давайте розглянемо майбутнє значення $24, які були інвестованими на 390 років (2016 мінус 1626) під 8% річних:  трильйонів  Проте загальна вартість землі на Манґетені сьогодні є за оцінками трохи меншою за 1,4 трильйонів доларів. Тому, можливо, ця операція не була вже аж такою успішною? Але чи 8% ставка була історично обґрунтованою? Звичайно, що ні. В середньому ми спостерігали 3,5% ставку, а тому майбутнє значення зменшиться катастрофічно:  мільйонів  Порівняно з 80 мільярдами – це супер справа! Причому, ми ще ігнорували рентною платою за користування землею протягом 384 років. |
| Але як визначити процентні ставки на коротші періоди часу, ніж один рік? Дуже часто при наданні кредитів використовують місячну процентну ставку. Як, знаючи місячну процентну ставку, перетворити її у річну, використовуючи складні проценти?  *Ефективна річна процентна ставка* (*effective annual interest rate, EAR*) – процентна ставка, що визначається шляхом компаундування протягом одного року, тобто визначається зі співвідношення  ,  де - ефективна річна процентна ставка, а - процентна ставка протягом деякого періоду, - їх кількість в році.  Якщо уявити собі, що ми можемо подрібнити періоди компаундування на дуже дрібні проміжки, то згідно до відомої формули з математичного аналізу ми отримаємо  .  Отже, при неперевному компаундуванні майбутня вартість визначається зі співвідношення:  ,  де R - річна процентна ставка. Наприклад, якщо R=6%, то ефективна процентна ставка при неперервному компаундуванні дорівнюватиме  .  **Поточна вартість. Ануїтети. Кредити.**   |  | | --- | | *Поточна вартість* (*present value*) – це сьогоднішня вартість майбутнього грошового потоку. *Ставка дисконту* (*discount rate*) – це процентна ставка, що використовується для обчислення теперішньої вартості майбутніх грошових потоків.  Запишемо основне співвідношення, що пов’язує поточну та майбутню вартість, а також дисконтну ставку  ,  де Т – кількість періодів, що розділяють теперішню та майбутню вартість.  **Завдання 1.** У 1995 р. компанія Coca-Cola потребувала $250 мільйонів і випустила 25 річні безкупонні бонди (*zero-coupon bond*) номіналом $1000. Ринкова процентна ставка на той час становила 8.53%. Якою би мала бути вартість одного бонду?  *Розв’язання*. Згідно до формули для обчислення теперішнього значення  Як з допомогою дисконтної ставки приймати інвестиційні рішення?  **Завдання 2.** Дві компанії з продажу автомобілів, „Слон-Сервіс” та „Лев-Транс”, пропонують вам дві схеми продажу автомобіля вартістю $10000. „Слон-Сервіс” пропонує вам заплатити зараз $4000 і решту – через два роки. А „Лев-Транс” робить вам скидку зараз на $500. Якій з обраних схем ви віддасте перевагу, якщо процентна ставка складає 10%?  *Розв’язання.* Зобразимо грошовий потік витрат на купівлю автомобіля, який пропонує „Слон-Сервіс” і знайдемо його теперішнє значення.  $4000  $6000  .  Безумовно, що це є краще, ніж погодитися на варіант „Лев-Трансу”, заплативши $9500. | | **Завдання 3.**  Часто фінансові радники вказують на термін, протягом якого ваші капіталовкладення подвояться. Яка ж справжня процентна ставка співмірна з такими обіцянками?  *Розв’язання.* Розглянемо, наприклад, випадок, подвоєння капіталу через 8 років. Тоді ми повинні розв’язати рівняння або  Проте, часто зручно користуватись *Правилом* 72: ***Для того щоб визначити час подвоєння капіталу потрібно 72/r , де r – процентна ставка, виражена в процентах.*** У нашому прикладі, якщо ми обчислимо 72/9, то отримаємо якраз 8 років. Широко розповсюдженою схемою продажу товарів в кредит є схема з однаковими помісячними виплатами, С. Таку схему погашення боргу називають *ануїтетом* (*annuity*) або *рентою*. Якщо виплати по ренті проводяться у кінці кожного місяця, то така рента називається *звичайною*, а якщо на початку, то – *вексельною*. Деколи ануїтети мають невизначений термін погашення або тривають нескінченно довго, тобто є довічними. Поточне значення вічного щорічного та Т – річного ануїтетів визначають відповідно за формулами   |  |  |  | | --- | --- | --- | |  | (1) | | |  | | (2) | |   **Завдання 4.** У травні 1992 р. 60-річна нянька, поклавши в казіно „Рено” $12, зірвала найбільший в історії джекпот – $9,3 мільйони. Але сума, що підлягала до виплати, була розбита на 20 однакових щорічних траншів величиною $465000 кожен. Процентна ставка в цей час була приблизно 8%. Яким же було теперішнє значення такого грошового потоку?  *Розв’язання*. Для обчислення теперішнього значення 20-річного ануїтету скористаємось формулою (2):  .  Тобто правдиве значення „$9,3 мільйонного призу” є близько $4,6 мільйони.  **Завдання 5.** Вважають, що султан Брунею є найбагатшою людиною в світі. Величину його багатства оцінюють в $37 мільярдів. Скільки б ви порадили султану витрачати на коштовності та розваги протягом наступних 40 років, щоб потратити якраз все багатство? У якості дисконтної ставки візьміть ставку 10%.  *Розв’язання*. Для знаходження щорічних виплат скористаємось наслідком формули (2):  Тоді мільярдів. | |

**Персональне фінансове планування.**

|  |
| --- |
| Розглянемо модель заощаджень протягом життя людини.  Нехай вам 35 років і до пенсії залишилось 30 років. Ви очікуєте прожити до 80 років. Теперішній ваш дохід складає 60 тис. грн. в рік і ви поки що не маєте жодних заощаджень. Темпи росту ваших доходів співпадають з темпами росту інфляції. Нехай реальна процентна ставка складає 5% річних.  **Завдання 6. *Цільова ставка заміщення.***  Ви плануєте цільову ставку заміщення вашого пенсійного доходу на рівні 75% від вашого допенсійного доходу. Як скласти ваш план споживання та заощаджень? Метод розрахунку складається з двох етапів:   * знайти суму необхідну для реалізації вашого плану після пенсії; * розрахувати річну величину заощаджень для досягнення цілі у попередньому пункті.   Отже, ви бажаєте споживати тис. грн. в рік на пенсії. А тому ви повинні заощадити до виходу на пенсію  тис. грн.  Розрахуємо тепер скільки потрібно заощаджувати протягом 30 років, щоб акумулювати 467,08 тис. грн.:  , звідки С=7030 грн.  Таким чином, заощаджуючи 7030 грн. щороку, ви будете витрачати на споживання 52970 грн. А на пенсії ви будете витрачати всього 45000 грн. в рік. |
| Якщо ж ви хочете мати однаковий рівень споживання на пенсії, як і до пенсії, то повинні скористатися наступним методом.  **Завдання 7. *Сталий рівень споживання***. Нехай С – це сталий рівень споживання. Тоді теперішня вартість вашого споживання до 80 років складе:  ,  а грошові надходження, що забезпечують такий рівень споживання будуть  тис. грн.  А тому для знаходження С ми повинні розв’язати рівняння  , звідки С=51853 грн.  Отже, ви повинні заощаджувати 8147 грн. щороку.  Теперішня вартість доходу, отриманого працівником за роботу у наступних періодах, називають ***людським капіталом*** (*human capital*). У даному випадку людський капітал складає 922,35 грн.  Припустимо, що в умовах попереднього прикладу ви отримали у спадок 100 тис. грн. у віці 35 років. Як зміниться при цьому ваш план заощаджень за умови збереження постійного рівня споживання?  Нехай С – це сталий рівень споживання. Тоді теперішня вартість вашого споживання до 80 років складе:  ,  а грошові надходження, що забезпечують такий рівень споживання будуть  тис. грн.  А тому для знаходження С ми повинні розв’язати рівняння  , звідки С=57519 грн.  Отже, ви повинні заощаджувати 2481 грн. щороку. |

1. @ Євген Пенцак [↑](#footnote-ref-1)