**Матеріали курсу**

**«Бізнес аналітика»**

**Автор: Євген Пенцак, PhD (Lausanne University)[[1]](#footnote-1)**

**Частина 3**. **Фінансова економетрика.**

**Заняття 17-18. Цільові функції ефективності інвестиційного менеджменту – інвестиційні критерії: Шарпа, Трейнора, Дженсена, Марковиця та їх модифіковані аналоги. Моделі оптимального управління портфелем акцій та розв’язування задач квадратичного програмування.**

**Критерії ефективності портфельних інвестицій**

Перші моделі оцінки роботи портфельних менеджерів розробили Джек Трейнор, Вільям Шарп та Мішель Йєнсен ще в 70-их роках минулого століття, пов’язавши їх з загальновідомою теорією САРМ (*Capital Asset Pricing Model*). З іменами цих трьох фінансистів у світову практику увійшли три відомі міри ефективності управління інвестиційним портфелем.

**Коефіцієнт Шарпа** (*Sharp measure*) визначається за формулою

,



де - середня прибутковість портфеля за деякий період, - безризикова процентна ставка і - волатильність портфеля за цей самий період. Коефіцієнт Шарпа вказує на прибутковість у розрахунку на одну одиницю ризику, виміряного з допомогою стандартного відхилення.



**Коефіцієнт Трейнора** (*Treynor measure*) визначається за формулою

,



де - середня прибутковість портфеля за деякий період, - безризикова процентна ставка і - «бета» портфеля за цей самий період. Коефіцієнт Трейнора вказує на прибутковість у розрахунку на одну одиницю систематичного ризику, виміряного з допомогою «бета».



**Коефіцієнт Йєнсена** (*Jensen measure*) або **коефіцієнт альфа, ,** визначають за формулою



,



де - середня прибутковість портфеля за деякий період, - безризикова процентна ставка, - середня прибутковість ринкового портфеля і - «бета» портфеля за цей самий період. Коефіцієнт альфа вказує на додаткову доходність портфеля, яку вдалось досягнути інвестиційному менеджеру, у порівнянні з нормою прибутковості, розрахованої через САРМ.



Нагадаємо, що стандартне відхилення прибутковості інвестиційного портфеля шукають за статистичною формулою:

,



а «бета» портфелю (чутливість прибутковості портфелю до ринкового фактору) визначають як

,



де позначає коваріацію даного портфеля та ринкового індексу. Нагадаємо, що «бета» більше від 1 відповідає «агресивному» активу, тобто вказує, що по даному портфелю можна заробити більше (або й втратити більше), ніж по ринковому індексу.



В останні роки популярною стала міра ефективності, що була запропонована Нобелівським лауреатом Франко Модільяні (*Franco Modigliani*) та його внучкою Лі Модільяні (*Leah Modigliani*), яка є **модифікованим коефіцієнтом Шарпа,** . Цей показник визначають з формули:



,



де - середня прибутковість скоригованого на ризик портфеля за деякий період, - середня прибутковість ринкового портфеля.



Під скоригованим на ризик портфелем розуміють портфель, утворений з даного шляхом додаткового інвестування у безризиковий актив (чи деінвестування), волатильність якого співпадає з волатильністю біржевого індексу.

Подібно до модифікованого коефіцієнта Шарпа визначають **модифікований коефіцієнт Трейнора,** :



,



де - середня прибутковість портфеля за деякий період, - безризикова процентна ставка, - середня прибутковість ринкового портфеля і - «бета» портфеля за цей самий період.



То ж на які показники слід орієнтуватись інвестору, довіряючи професійному менеджеру управління його інвестиційним портфелем? Кажуть, що коли менеджер управляє усім інвестиційним портфелем, то слід більше уваги приділяти коефіцієнту Шарпа, а коли він управляє лише його частиною чи формує портфель у вузькому сегменті ринку, то потрібно звертати увагу на коефіцієнт Трейнора[[2]](#footnote-2). Коефіцієнт альфа використовують для порівняння ефективності роботи трейдерів, що працюють в одному сегменті ринку. В останні роки керівництво великих трейдингових компаній розробляє мотиваційні плани для своїх співробітників, використовуючи модифіковані коефіцієнти Шарпа та Трейнора. Дебати тривають і сьогодні, фінансові аналітики розробляють більш адекватні міри ефективності управління інвестиційним портфелем.

Загальною проблемою коректування ефективності інвестицій з врахуванням ризику є припущення того, що протягом деякого періоду ризик є постійним, незалежно від того чи виміряний він через стандартне відхилення чи через «бета».

Інвестиційний менеджер, ребалансуючи портфель, може постійно змінювати стандартне відхилення та «бета», вносячи хаос у ці показники. Дуже часто інвестиційні менеджери вміло маніпулюють ними, підганяючи їх під оптимальні для них показники мотиваційного пакету. Інші ж недоліки використання описаних у цьому розділі мір ефективності управління інвестиційним портфелем лежать ще глибше, а саме у статистичних показниках, що вказують на характеристики розподілів прибутковості активів на фондовому ринку та їх взаємної поведінки.

**Завдання 1. Інвестиційний портфель пенсійного фонду.**

Припустимо, що пенсійний фонд „Київ-Інвест” володіє великим блоком акцій кондитерської фабрики „Світанок”, що становить 50% його капіталу, а також фонд підписав угоду про неможливість продажу акцій фірми „Світанок” протягом наступних двох років. Вартість акцій фірми „Світанок” залежить від цін на цукор наступним чином

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Нормальний рік | | Анормальний рік |
|  | Стан ринку 1 | Стан ринку 2 | Цукрова криза |
| Ймовірність | 0.5 | 0.3 | 0.2 |
| Прибуток, % | 25 | 10 | -25 |

Знайдемо дискриптивні характеристики ціни на акції фірми „Світанок”, тобто середній дохід, квадратичне відхилення та стандартну девіацію:



Пенсійний фонд „Київ-Інвест” з метою зменшення ризику роздумує над інвестицією решти його капіталу у безризикові активи, тобто облігації державного займу з 5% рівнем доходу. Знайдемо дискриптивні характеристики портфеля цього пенсійного фонду, який ми позначимо L:



Як ми бачимо стандартна девіація портфеля зменшилася вдвічі, але й очікуваний прибуток також зменшився з 10.5% до 7.75%. Отже й премія за ризик зменшилася з 10.5-5=5.5% до 7.75-5=2.75%.

На момент прийняття інвестиційного рішення у пенсійний фонд влаштувався випускник МВF програми, Андрій. Він зауважив такий дивний збіг протягом кількох років, коли в Україні є неврожай цукру, то на Кубі цей рік є дуже врожайним. Знайшовши на європейському фондовому ринку кубинську цукрову компанію „Sugar Cu” він оцінив її акцію таким чином

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Нормальний рік | | Анормальний рік |
|  | Стан ринку 1 | Стан ринку 2 | Цукрова криза |
| Ймовірність | 0.5 | 0.3 | 0.2 |
| Прибуток, % | 1 | -5 | 35 |

Обчисливши характеристики ціни акції „Sugar Cu” , Андрій отримав: Е(S)=6%, . Старі працівники пенсійного фонду відразу ж забракували проект Андрія, оскільки ризик інвестиції у „Sugar Cu” є надто високим у порівнянні з очікуваними прибутками. Але Андрій продовжував розрахунки, а саме він розглянув можливість інвестування половини капіталу у „Sugar Cu”. Тоді новий портфель опишеться згідно таблиці



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Нормальний рік | | Анормальний рік |
|  | Стан ринку 1 | Стан ринку 2 | Цукрова криза |
| Ймовірність | 0.5 | 0.3 | 0.2 |
| Прибуток, % | 13 | 2.5 | 5 |

Очікуваний дохід цього портфеля є 8.25%, а стандартна девіація 4.83%. Якщо ж ми порівняємо три інвестиційні можливості для пенсійного фонду, а саме: все інвестувати у „Світанок”, інвестувати половину у державні облігації, інвестувати половину у „Sugar Cu”, то числа самі скажуть за себе. Тут, вже всі товариші Андрія змушені були визнати перевагу його інвестиційного проекту.

На наступний день Андрій прочитав своїм колегам невеличку лекцію з теорії диверсифікації. Цей приклад демонструє, що ризик окремих активів повинен вимірюватися в контексті всього портфеля, а не як окремо взятий. Лише ризик, який обернено залежить від ризику початкового портфеля, може вести до зменшення ризику кінцевого портфеля.

У теорії, щоб чисельно оцінити міру взаємозалежності двох ризиків, тобто потенційну можливість для диверсифікації, використовують поняття коваріації та кореляції. Знайдемо **коваріацію** прибутків з акцій фірми „Світанок” та „Sugar Cu”:



Коефіцієнтом кореляції називають величину



Що вказує на тенденцію зміни ціни однієї акції в залежності від іншої. Наприклад, якщо є близьким до 1, то ціни акцій змінюються в такт, а коли є близьким до -1, то їх ціни перебувають в протифазі, і такі акції є цінними для зменшення ризику портфеля.



З метою спрощення знаходження дискриптивних характеристик портфеля з двох ризикованих акцій використовують наступну формулу



Застосуємо цю формулу до попереднього прикладу



,



тобто ми отримали справді той самий результат.

Яким же чином формалізувати ставлення інвестора до ризику? Більшу корисність матимуть для інвестора профілі з більш привабливими співвідношеннями «прибуток-ризик». Наприклад, однією з широковживаних на практиці функцій корисності є

,



де параметр характеризує відразу інвестора до ризику, а є відносним рівнем прибутку від даного проекту. Зауважимо, що введена таким чином функція корисності володіє такими необхідними для неї рисами: збільшення середнього прибутку веде до збільшення значення функції корисності, а збільшення варіації зменшує рівень корисності від даного проекту.



Повертаючись до інвестиційних можливостей Андрія, порівняємо ризиковану інвестицію з очікуваним процентом прибутку 22% та стандартною девіацією 34% з безризиковою 5% інвестицією. Припустимо, що параметр відрази до ризику Андрія =3. Тоді корисність від даної інвестиції дорівнює



що є трохи менше від корисності безризикової інвестиції. Таким чином, Андрій відхилить ризиковий проект на користь безризикового.

Якби ж Андрій був більш толерантним до ризику, наприклад =2, то рівень корисності ризикового проекту був би 10.44%, і був би більш прийнятним для Андрія у порівнянні з безризиковою інвестицією.



Отже, типовий інвестор має відразу до ризику. У нашому прикладі це відображено тим, що >0 . Але, взагалі кажучи, модель допускає =0 та <0. У першому випадку кажуть, що інвестор є нейтральним до ризику, а у другому – любить ризик. Такий підхід до ризику ще називають середньо квадратичним критерієм, тобто проект А домінує над проектом В, якщо



і



та принаймні одна з нерівностей є строгою.

**1.** Розглянемо координатну площину, де на осі *х* відкладатимемо стандартне відхилення, а на осі *у* – очікуване значення відносного прибутку. Таким чином, кожному проекту з відомими дескриптивними характеристиками відповідатиме точка на цій площині. Зобразіть ризиковану інвестиційну можливість Андрія точкою Р на площині. Проведіть через цю точку вертикальну та горизонтальну прямі. Що ви можете завідомо сказати про області домінування проектів, якщо ваша функція корисності має вигляд ? Побудуйте криві індиферентності, що проходять через точку Р, якщо =2 та =3.



**2**. Розглянемо два цінні папери *Х* та *Y* з наступними характеристиками: , , , і . Знайдіть залежність очікуваного прибутку та варіації портфеля від вагових коефіцієнтів та , відповідно.



**3.** Припустимо, що в умовах попередньої задачі . Знайдіть тепер залежність очікуваного прибутку та стандартного відхилення портфеля від вагових коефіцієнтів.



**4.** Прокоментуйте різницю між цими двома прикладами. Яка з ситуацій є кращою на ринку для інвесторів? Чому? Якщо на ринку є ще одна акція, то інвестор зможе краще диверсифікувати свій ризик. Чи вірне це твердження? Аргументуйте позитивну роль глобалізації з точки зору диверсифікації. Припустимо, що безризикова процентна ставка є 5%. Зобразіть ринковий портфель у Вправах 2 і 3. Як інвестор вибиратиме оптимальний для нього портфель? На двох рисунках, зображених вище, знайдіть портфель з найменшим ризиком. Зобразіть інтуїтивно множину ефективних портфелів за умови існування безризикового активу та з ним. Припускаючи, що ринок знаходиться в рівновазі, чи всі акції будуть входити у ринковий портфель?

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

**Завдання 2. ФЛІРТУВАННЯ З РИЗИКОМ**

Коли Ральф, чоловік Марі Овенс, залишив її вдовою три місяці тому, він залишив їй також чималий спадок, який був акумульований у звичайних акціях. Ральф працював інженером на виробництві хірургічних інструментів понад 30 років і в повній мірі скористався накопичувальним пенсійним заощадженням. Решту капіталовкладень він робив у декілька швидко зростаючих компаній. Протягом всього періоду інвестування його портфель зріс до 900 000 доларів і складався з акцій трьох компаній. Ральф був дуже везучим і його інвестиційний портфель зростав дуже швидко.

Марі була дуже консервативною і обережною людиною. Вона присвятила своє життя дітям і чоловіку, будучи гарною домогосподаркою. Її старший син, Джим 28 років, пішов по стопах батька, ставши інженером з виробництва. Потім він закінчив одну з престижних бізнес-шкіл. Її донька Анна 26 років, працювала у головному госпіталі. Її діти були одружені і самостійно справлялися з їх фінансовими справами.

Проте Марі було важко розібратися з фінансовим управлінням інвестиційним портфелем, який залишив у спадок Ральф. Вона звернулась за порадою до своєї подруги Агни, також вдови, яка порадила Марі свого фінансового консультанта Біла Мея. Біл Мей вже допоміг Агні ребалансувати її інвестиційний портфель, який стабільно зростав протягом останніх років без великої волатильності.

Біл Мей протестував портфель Марі і зауважив його надмірну сфокусованість. Виявилось, що протягом останнього року акції технологічних компаній впали на 30%. Це були саме акції, які тримав у своєму портфелі Ральф. «Напевно, Ральф любив фліртувати з ризиком», - зауважив Біл. «Перш за все ми диверсифікуємо ваш портфель і понизимо його бета. Беручи до уваги ваш теперішній стан, ви не повинні нести надто багато ризику. Напевно, ви зі мною погодитесь», - сказав Біл. «Диверсифікувати ... Бета ... Про що він говорить? Ці терміни ставлять мене в ніякове становище. Ви праві, Біл, я не хочу дуже ризикового портфеля. Але як ви зможете понизити його ризик?» Біл побачив, що для Марі необхідно дати лекцію з основ інвестування. Для цього він підготував наступну таблицю

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Сценарій | Ймовірність | Депозит | Індексний фонд | Енерго-генеруюча компанія | Високо-технологічна компанія | Проти циклічна компанія |
| Спад | 20% | 5% | -10% | 6% | -25% | 20% |
| Малий спад | 20% | 5% | -6% | 7% | -20% | 16% |
| Нормальний | 30% | 5% | 12% | 9% | 15% | 12% |
| Зростання | 10% | 5% | 15% | 11% | 25% | -9% |
| Бум | 20% | 5% | 20% | 14% | 35% | -20% |

1. Уявіть, що ви Біл. Як ви поясните Марі співвідношення між ризиком та прибутковістю індивідуальної акції?
2. Марі не знає, що таке бета і яким чином воно пов’язане з прибутковістю активу. Допоможіть їй зрозуміти цю концепцію.
3. Як би Біл продемонстрував переваги диверсифікації?
4. Який ефект зміни процентної ставки на оптимальний диверсифікований портфель?
5. Чи не слід запропонувати Білу вкласти весь капітал Марі у депозит?
6. Що слід відповісти на запитання Марі: «Я чула, що деякі брокери пропонують гарячі пропозиції з дуже привабливими умовами інвестування у недооцінені акції. Запропонуйте і мені. Я вам віддячусь?!»
7. Опишіть портфель Марі, в якому вона розподілить свої активи порівну між високотехнологічними компаніями і протиціклічною?
8. Що трапиться, якщо 70% вона вкладе у високотехнологічну компанію і 30% - у індексний фонд?
9. Яку комбінацію ви би запропонували для Марі?

**Завдання 3. Оптимальний портфель**

Використовуючи наступну інформацію про компанії Метал і Нафта,

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Стан ринку | Ймовірність, % | Доходність, %  Метал | Доходність, %  Нафта |
| Рецесія | 20 | -20 | -15 |
| Нормальний | 60 | 5 | 20 |
| Зростання | 20 | 60 | 40 |
| Очікувана доходність |  |  | 17 |
| Стандартне відхилення |  |  | 17,78 |

1. Знайдіть значення очікуваної доходності компанії *Метал*

2. Знайдіть стандартне відхилення доходності компанії *Метал*

3. Знайдіть ймовірність того, що доходність акцій *Нафта* впаде нижче (– 9,2%)

4. Якщо ми інвестуємо 55% нашого капіталу в компанію *Метал*, а решту – в компанію *Нафта*, то яка очікувана доходність нашого портфеля?

5. Знайдіть коефіцієнт кореляції між доходністю акцій *Метал* та *Нафта*.

6. Якщо ми інвестуємо 50% нашого капіталу в компанію *Метал*, а решту – в компанію *Нафта*, то яке стандартне відхилення доходності нашого портфеля?

7. Якщо доходність безризикового активу дорівнює 5%, то в якому співвідношенні потрібно вкласти в безризиковий актив і в акції компанії *Нафта*, щоб доходність портфеля склала 12%?

8. Чи може доходність ринкового індексу, в який входять компанії Метал та Нафта, дорівнювати доходності акцій компанії Метал, а його стандартне відхилення доходності – стандартному відхиленню доходності акцій компанії Нафта? Відповідь аргументуйте.

**Завдання 4. «Портфель Хімка і Сталь»**

Припустимо, що очікування інвестиційного аналітика відносно річної доходності акцій компанії ***Хімка*** і компанії ***Сталь*** відповідають даним, що наведені у наступній таблиці

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Можлива доходність | Ймовірність настання події | | | | |
| 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,3 | 0,1 |
| Акції компанії ***Хімка***, % | -25 | -10 | 20 | 40 | 60 |
| Акції компанії ***Сталь***, % | -10 | 10 | 50 | 30 | 10 |

Безризикова норма доходності – 10%.

1.1 а) Яка очікувана доходність і стандартне відхилення доходності акцій компанії ***Хімка*** ?

б) Яка очікувана доходність і стандартне відхилення доходності акцій компанії ***Сталь*** ?

1.2 Знайдіть коефіцієнт кореляції між доходністю двох активів: акціями компанії ***Хімка*** і компанії ***Сталь***

1.3 а) Побудуйте таблицю залежності між станом ринку та доходністю портфеля, складеного на 50% з акцій компанії ***Хімка***  і на 50% з акцій компанії ***Сталь*** ?

б) Яка очікувана доходність і стандартне відхилення доходності портфеля, складеного на 50% з акцій компанії ***Хімка***  і на 50% из акцій компанії ***Сталь*** ?

1.4 Якщо припущення фінансового аналітика правильні, порівняйте між собою три альтернативи інвестування:

1. інвестувати 100% капіталу в акції компанії ***Хімка***;
2. інвестувати 100% капіталу в акції компанії ***Сталь***;
3. інвестувати 50% капіталу в акції компанії ***Хімка*** і 50% - в акції компанії ***Сталь***?

а) Яка альтернатива завідомо гірша від інших?

б) Які альтернативи ми не можемо порівняти однозначно, оскільки потрібна додаткова інформація? Яка інформація потрібна для повної відповіді на це запитання?

1.5 Якщо припущення фінансового аналітика правильні,, порівняйте між собою три альтернативи інвестування:

1. інвестувати 50% капіталу в безризиковий актив і 50% - в акції компанії ***Хімка***;
2. інвестувати 50% капіталу в безризиковий актив і 50% - в акції компанії ***Сталь***;
3. інвестувати 50% капіталу в безризиковий актив і 25% - в акції компанії ***Хімка***, 25% - в акції компанії ***Сталь.***

Дайте відповідь на це запитання найбільш оптимальний чином, не виконуючи розрахунків очікуваної доходності та стандартного відхилення..

1.6 Припустимо, що індекс фондової біржі, в лістингу якої знаходяться компанії ***Хімка*** і ***Сталь*** має наступні характеристики

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Можлива доходність | Ймовірність настання події | | | | |
| 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,3 | 0,1 |
| Індекс, % | -5 | 0 | 10 | 20 | 30 |

а) Знайдіть коефіцієнт «бета» акцій компанії ***Хімка***.

б) Знайдіть коефіцієнт «бета» акцій компанії ***Сталь***.

в) Знайдіть коефіцієнт «бета» портфеля, складеного на 50% з безризикового активу, на 25% з акцій компанії ***Хімка*** і на 25% из акцій компанії ***Сталь***.

г) Знайдіть коефіцієнт «бета» ринкового портфеля (індексу фондової біржі)

д) Чи може «бета» акції дорівнювати 0? Відповідь обґрунтуйте.

е) Чи може «бета» акції дорівнювати (-1,5)? Відповідь обґрунтуйте.

ж) Чи може «бета» деякої акції з лістингу даної фондової біржі дорівнювати 1? Відповідь обґрунтуйте.

з) Чи правильне твердження: «Якщо бети двох акцій на фондовій біржі рівні, то і їх очікувані доходності також рівні». Відповідь обґрунтуйте.

**Прикладна теорія Марковиця.**

**Інвестиції у ризикові активи.** Розглянемо загальну постановку проблеми оптимізації портфеля за умови відсутності ризикового активу. Припустимо, що ми маємо можливість інвестувати в ризикових активів, котрі характеризуються вектором їх очікуваної прибутковості та матрицею , що визначає їх варіації та коваріації. Під портфелем ми будемо розуміти набір акцій, в які вкладається капітал у пропорціях, що визначаються ваговим вектором . Проблема вибору оптимального портфеля інвестором полягає у виборі портфеля з заданим рівнем очікуваної прибутковості при найменшому ризику, що в умовах теорії Марковиця означає мінімальну дисперсію. Зауважимо, що для даного портфеля його очікувана прибутковість



,



та варіація

.



Тоді формально дана проблема запишеться наступним чином:



Для її розв’язку запишемо Лагранжіан



і необхідні умови екстремуму



Тоді



і, підставивши цей вираз у другу рівність системи, ми отримаємо



або

(1)



|  |
| --- |
|  |

Використавши третю рівність системи, матимемо



або

(2)



Розв’язавши систему рівнянь (1)-(2), ми отримаємо остаточно



(за нерівністю Коші-Шварца)



Отже, ми можемо отримати вираз для портфеля з мінімальною варіацією:



**Інвестиції у ризикові активи за умови існування безризикового активу.** Розглянемо тепер проблему вибору оптимального портфеля за умови існування безризикового активу, прибутковість якого дорівнює . Тепер у нас зникає умова обмеженості , а частка інвестиції в безризиковий актив складає . Тоді прибутковість отриманого портфеля



,



що зводиться до умови

.



Запишемо формально проблему вибору оптимального портфеля



Записавши Лагранжіан

,



сформуємо необхідні умови екстремуму



.



З першого рівняння цієї системи

і .



Для визначення скористаємось другою умовою



,



звідки

,



де А, В, С , як визначені раніше. Варіація оптимального портфеля



Ми бачимо, що в просторі варіації та очікуваної прибутковості мінімальна варіація є параболою, а в просторі стандартної девіації ми отримуємо пару променів з кутовим коефіцієнтом нахилу .



Для того щоб визначити точку дотику кривих портфелів з мінімальною варіацією та прямої, що проходить через без ризикову ставку прибутковості, ми повинні розв’язати рівняння:

.



Розв’язком цього рівняння є

.



Тоді

.



Можна показати, що за умови існування безризикового активу ринковий чи дотичний портфель можна визначити за формулою



де - безризикова процентна ставка.



Звичайно, що на цьому проблема знаходження оптимального портфеля в реальних умовах не закінчується. На практиці, в багатьох країнах короткі позиції (негативна позиція) на акції є забороненими; для пенсійних фондів існують верхні межі інвестування у деякі акції. У таких випадках потрібно застосовувати портфельний аналіз з обмеженнями. І числові алгоритми розв’язання задач квадратичного програмування є конче необхідними.

**Вибір оптимального портфеля для конкретного інвестора.**

Згідно до теорії Марковиця функція, що визначає корисність інвестора від обраного інвестиційного проекту, записується в термінах очікуваної прибутковості та варіації проекту у вигляді



Нехай - композиція портфеля для *і*-ого інвестора. Тоді його очікувана прибутковість та варіація, відповідно, дорівнюють



Підставивши ці вирази у функцію корисності інвестора, ми отримаємо задачу



Необхідна умова екстремуму



веде до розв’язку



**Завдання.** Оптимізуйте портфель акцій, використовуючи аналітичну модель теорії Марковиця і дані з файлу stock\_data.xlsx.

Використаємо наступний код:

clear all;

mp=0:0.001:0.015;% діапазон доходності інвестиційного портфеля

X1=xlsread('stock\_data.xlsx','page1','i2:n274');

X2=xlsread('stock\_data.xlsx','page1','i2:i274');

X3=xlsread('stock\_data.xlsx','page1','m2:n274');

X=[X1(:,1) X1(:,2) X1(:,3) X1(:,5) X1(:,6)];

index=xlsread('stock\_data.xlsx','page1','o2:o274')

muindex=mean(index)

sindex=std(index)

mu=mean(X)

SIG=cov(X)

sp=sqrt(diag(SIG))%стандартні відхилення даних акцій

R=0.001 % доходність безризикового активу

id1=ones(length(mu),1);% одиничний вектор розміру 3х1

A=id1'\*inv(SIG)\*id1;% коефіцієнт А

B=id1'\*inv(SIG)\*mu';% коефіцієнт В

C=mu\*inv(SIG)\*mu';% коефіцієнт С

wt=(1/(B-A\*R))\*inv(SIG)\*(mu'-R\*id1)%композиія дот. портфеля

mut=(C-B\*R)/(B-A\*R)%доходність дот. портфеля

sig2t=(C-2\*R\*B+R^2\*A)/(B-A\*R)^2%варіація дот. портфеля

sigt=sqrt(sig2t)%стандартне відх дот. портфеля

v=(mp-R).^2/(C-2\*R\*B+R^2\*A);%мінімальна варіація при заданій доходності при наявності безризикового активу

v1=(A\*mp.^2-2\*B\*mp+C)/(A\*C-B^2);%мінімальна варіація при заданій доходності за відсутності безризикового активу

s=sqrt(v);

s1=sqrt(v1);

ai=5;%персональне ставлення до ризику

wi=(1/ai)\*inv(SIG)\*(mu'-R\*id1) %оптимальний портфель для заданого коефіцієнту несприйняття ризмку

wR=1-sum(wi) % інвестиції в безризиковий актив

mui=R+wi'\*(mu'-R\*id1) %доходність оптимального портфеля

sig2i=wi'\*SIG\*wi %варіація оптимального портфеля

%plot(v,mp,'k',v1,mp,'-.',sig2t,mut,'o',sig2i,mui,'+') % - генерування в просторі варіацій

%ми побудували ефективну криву фондового ринку, що складається з трьох

%ризикових і одного безризикового активу

plot(s,mp,'-.',s1,mp,'--',sigt, mut, 'o',sqrt(sig2i),mui,'r+',sp, mu, '\*',sindex, muindex, 'O') %- генерування в просторі стандартного відхилення

В результаті оптимізації отримаємо:

1. композиція оптимального портфеля:

wi = [ 0.6016 -0.1931 0.0504 0.2289 0.2214 ]

wR = 0.0907

1. композиція дотичного портфеля:

wt = [ 0.6617 -0.2124 0.0555 0.2518 0.2435]

****

**Завдання.** Оптимізуйте портфель акцій, використовуючи чисельну модель оптимізації Марковиця і дані з файлу stock\_data.xlsx. У моделі використайте обмеження: додатні вагові коефіцієнти і у кожну акцію не можна інвестувати більше 30% вартості портфеля. Візьміть коефіцієнт несприйняття ризику а=5.

clear all;%очищення пам"яті

X=xlsread('stock\_data.xlsx','page1','i2:o274');%зчитуємо тижневу доходність акцій

mu=mean(X);

%дані матриці кореляцій, які оцінюються статистично

CORX=corr(X);

%cтандартне відхилення кожного активу портфеля

s=std(X) ;

%діагоналізація вектора, тобто перетворення у матрицю з елементами вектора

%по діагоналі

s1=diag(s);

%матриця варіацій - коваріацій

H=s1\*CORX\*s1;

f1=-mu;

H2=(5\*52)\*H;

[x,fval,exitflag] = quadprog(H2,f1,[],[],ones(1,length(mu)),1,[0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0], [0.3 0.3 0.3 0.3 0.3 0.3 0.3])

opt=x';

Результат оптимізації:

w =[ 0.1277 0.1333 0.3000 0.0000 0.1368 0.0022 0.3000]

1. @ Євген Пенцак [↑](#footnote-ref-1)
2. Боді З., Кейн А., Маркус Дж. Принципи інвестицій. – В: «Вільямс», 2002. [↑](#footnote-ref-2)