Будем рассматривать задачу Коши для уравнения Хопфа

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad (1)$$

С начальными данными

$$u(x,0)=\varphi(x) \quad (2)$$

Пусть для определенности $\varphi(x)\geq\varepsilon>0$

Кроме характеристической формы (1) с данными Коши будем рассматривать формулировку задачи с дивергентной формой записи (1)

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2}{2}=0 \qquad (3)$$

Если и правую и левую части (1) умножить на u, то можно получить другую дивергентную форму (1)

$$\frac{\partial u^2}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{2u^3}{3}=0 \quad (4)$$

Рассмотрим теперь множество разностных схем для численного решения уравнения Хопфа.

Простейшие сеточно-характеристические схемы в инвариантах. Использующие две дивергентные формы

Наряду с уравнением (3) рассмотрим вторую дивергентную форму (4). Введем обозначение $u^2=v$, тогда имеем следствие (3)

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

А (4) перепишем в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}uv=0$$

Или $\dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{2}{3}v\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{2}{3}u\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$.

В качестве данных Коши рассмотрим $u(x,0)=\varphi(x)$, $v(x,0)=\varphi^2(x)$

Тогда можно строить сеточно-характеристические разностные схемы для решения системы уравнений.

Запишем систему в матричной форме

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial t}\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1/2\\ 2v/3 & 2u/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}\end{pmatrix}=0 \qquad (7)$$

Для построения схем в инвариантах найдем собственные числа матрицы системы (7) и набор левых собственных векторов

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1/2 \\ 2v/3 & 2u/3-\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 - \frac{2}{3}u\lambda - \frac{v}{3} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{3}\left(u \pm \sqrt{u^2+3v}\right)$$

Как и ожидалось, оба собственных числа действительные, система имеет гиперболический тип.

Интересный и несколько неожиданный факт – для уравнения Хопфа при использовании двух дивергентных форм появилась характеристика с «противоположенным» наклоном (одно из собственных значений при любом знаке решения положительное, а одно – отрицательное).

Базис из левых собственных векторов

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}\left(u + \sqrt{u^2+3v}\right)$$

$$\begin{pmatrix}\omega_1 & \omega_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\left(u+\sqrt{u^2+3v}\right) & 1/2 \\ 2v/3 & \frac{1}{3}\left(u-\sqrt{u^2+3v}\right) \end{pmatrix} = (0,0)$$

$$\begin{pmatrix}\omega_1 & \omega_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \frac{1}{3}\left(u+\sqrt{u^2+3v}\right) \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{3}\left(u - \sqrt{u^2+3v}\right)$$

$$\begin{pmatrix}\omega_1 & \omega_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\left(u-\sqrt{u^2+3v}\right) & 1/2 \\ 2v/3 & \frac{1}{3}\left(u+\sqrt{u^2+3v}\right) \end{pmatrix} = (0,0)$$

$$\begin{pmatrix}\omega_1 & \omega_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \frac{1}{3}\left(u-\sqrt{u^2+3v}\right) \end{pmatrix}$$

Тогда матрица системы представима в виде $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{\Omega}^{1}$, где

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(u+\sqrt{u^2+3v}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\left(u-\sqrt{u^2+3v}\right) \end{pmatrix} \quad \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 1/2 & \frac{1}{3}\left(u+\sqrt{u^2+3v}\right) \\ 1/2 & \frac{1}{3}\left(u-\sqrt{u^2+3v}\right) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega}^{-1} = -\frac{3}{\sqrt{u^2+3v}}\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(u-\sqrt{u^2+3v}\right) & -\frac{1}{3}\left(u+\sqrt{u^2+3v}\right) \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Подставляем эти разложения в (7). Теперь, умножая правую и левую части (7) на матрицу Ω слева, получим запись системы (7) в инвариантах Римана

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial R^+}{\partial t} \\ \dfrac{\partial R^-}{\partial t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3}\left(u+\sqrt{u^2+3v}\right) & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{3}\left(u-\sqrt{u^2+3v}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial R^+}{\partial x} \\ \dfrac{\partial R^-}{\partial x} \end{pmatrix} = 0$$

Где $R^+ = \dfrac{u}{2} - \dfrac{1}{3}\left(u+\sqrt{u^2+3v}\right)v,\ \ R^- = \dfrac{u}{2} - \dfrac{1}{3}\left(u-\sqrt{u^2+3v}\right)v,$

С формулами восстановления «естественных» переменных

$$u = -\frac{1}{\sqrt{u^2+3v}}\left(\left(u-\sqrt{u^2+3v}\right)R^+ - \left(u+\sqrt{u^2+3v}\right)R^-\right)$$

$$v = -\frac{3}{2\sqrt{u^2+3v}}\left(R^+ - R^-\right)$$

Запишем две схемы в инвариантах – «первого» и «второго» порядков

Аналог схемы Куранта -Изаксона -Риса (первого порядка с аппроксимацией против потока)

$$\frac{R^{+n+1}_{\ \ m} - R^{+n}_{\ \ m}}{\tau} + \frac{1}{3}\left(u+\sqrt{u^2+3v}\right)_m^n \frac{R^{+n}_{\ \ m} - R^{+n}_{\ \ m-1}}{h} = 0,$$

$$\frac{R^{-n+1}_{\ \ m} - R^{-n}_{\ \ m}}{\tau} + \frac{1}{3}\left(u-\sqrt{u^2+3v}\right)_m^n \frac{R^{-n}_{\ \ m+1} - R^{-n}_{\ \ m}}{h} = 0,$$

И аналог схемы Лакса-Вендроффа для инвариантов

$$\frac{R^{+n+1}_{\ \ m} - R^{+n}_{\ \ m}}{\tau} + \frac{1}{3}\left(u+\sqrt{u^2+3v}\right)_m^n \frac{R^{+n}_{\ \ m+1} - R^{+n}_{\ \ m-1}}{2h} = \frac{\tau}{18}\left[\left(u+\sqrt{u^2+3v}\right)_m^n\right]^2 \frac{R^{+n}_{\ \ m+1} - 2R^{+n}_{\ \ m} - R^{+n}_{\ \ m-1}}{h^2},$$

$$\frac{R^{-n+1}_{\ \ m} - R^{-n}_{\ \ m}}{\tau} + \frac{1}{3}\left(u-\sqrt{u^2+3v}\right)_m^n \frac{R^{-n}_{\ \ m+1} - R^{-n}_{\ \ m-1}}{2h} = \frac{\tau}{18}\left[\left(u-\sqrt{u^2+3v}\right)_m^n\right]^2 \frac{R^{-n}_{\ \ m+1} - 2R^{-n}_{\ \ m} - R^{-n}_{\ \ m-1}}{h^2},$$