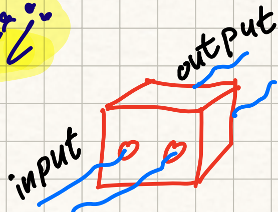
Математичні функції



15

§ 4. Функції

Функції та їх графіки

Залежність змінної y від змінної x називається **функцією**, якщо кожному значенню x відповідає єдине значення y.

Функція позначається або однією буквою f (або) $f(x)$, або рівністю $y = f(x)$, де x – незалежна змінна або аргумент, y – залежна змінна або значення функції $f(x_0)$ – значення функції f в точці x_0.

Область визначення і множина значень функції

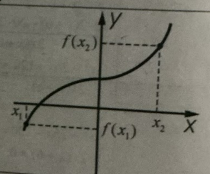
Область визначення функції (D) – множина тих значень, які може приймати аргумент.

Множина значень функції (E) – це множина тих значень, які може приймати сама функція при всіх значеннях аргумента із області визначення. Наприклад: $f(x) = \frac{2}{x-1}$.

Область визначення (0.0): $x - 1 \neq 0$; $x \neq 1$, x — будь-яке число, крім $x = 1$.

Графік функції

Графіком функції $y = f(x)$ називається множина точок площини з координатами $(x; y)$, де перша координата x «пробігає» всю область визначення функції $f(x)$, а друга координата — це відповідне значення функції f в точці x.



Способи задання функції

1. **Аналітичний спосіб:** функція задається за допомогою математичної формули.	$y = x^2$; $y = 5x - 8$; $y = \frac{10}{x}$.
2. **Табличний спосіб:** функція задається за допомогою таблиці.	(таблиця нижче)
3. **Описовий спосіб:** функція задається сло-весним описом.	Функція Дирихле: $f(x) = 1$ для раціональних x, $f(x) = 0$ для ірраціональних x.
4. **Графічний спосіб:** функція задається за допомогою графіка.	

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

17

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

1. Знайти координати точок перетину графіків функцій з осями координат. $y = \frac{-24}{x} + 1$.

Розв'язання.
Для того, щоб знайти точку перетину графіка з віссю $0x$, необхідно розв'язати рівняння: $y = 0$, тобто $\frac{-24}{x} + 1 = 0$; $\frac{-24 + x}{x} = 0$, якщо $\begin{cases} x \neq 0, \\ -24 + x = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq 0, \\ x = 24. \end{cases}$

Графік перетинає вісь $0x$ в точці $(24;0)$.
З віссю $0y$ графік перетинається за умови, що абсциса точки перетину $x = 0$, але область визначення цієї функції виключає це значення, тому графік даної функції не перетинає вісь $0y$.

Відповідь: $(24;0)$.

2. Знайти координати точок перетину графіків функцій з осями координат. $y = \frac{3x}{5x+1} - 2$.

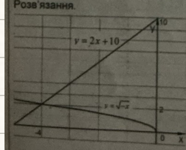
Розв'язання.
Для того, щоб знайти точку перетину з віссю $0x$, розв'яжемо рівняння: $\frac{3x}{5x+1} - 2 = 0$; $\frac{3x - 10x - 2}{5x+1} = 0$;
$\frac{-7x-2}{5x+1} = 0$, тобто $\begin{cases} -7x - 2 = 0; \\ 5x + 1 \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{-2}{7}; \\ x \neq -\frac{1}{5}. \end{cases}$
$\left(-\frac{2}{7};0\right)$ – точка перетину графіка з віссю $0x$.

Для того, щоб знайти точку перетину графіка з віссю $0y$, треба знайти значення функції y при $x = 0$.
При $x = 0$ $y = \frac{3 \cdot 0}{5 \cdot 0 + 1} - 2 = \frac{0}{1} - 2 = -2$.
Точка перетину графіка з віссю $0y$: $(0;-2)$.

Відповідь: $\left(-\frac{2}{7};0\right)$; $(0;2)$.

3. Розв'язати рівняння графічно. $\sqrt{-x} = 2x + 10$.

Розв'язання.



Для того, щоб розв'язати це рівняння графічно, потрібно побудувати графіки функцій $y = \sqrt{-x}$ та $y = 2x + 10$. Абсциса точки перетину цих графіків є розв'язком даного рівняння. Розглянемо функцію $y = \sqrt{-x}$ і побудуємо її графік. Областю визначення цієї функції є множина значень $x \leq 0$.
Складемо таблицю:

x	0	–1	–4	–9
y	0	+1	2	3

Графіком функції $y = 2x + 10$ є пряма, що проходить через точки $(0;10)$; $(-4;2)$. Графіки перетинаються в точці $(-4;2)$. Розв'язок рівн...

Відповідь: –4.

16

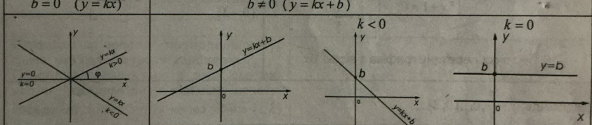
Лінійна функція та її графік

Лінійною функцією називають функцію виду $y = kx + b$, де k і b — деякі числа, x — незалежна змінна.

Властивості	Значення змінних
1. Область визначення.	x — будь-яке дійсне число $x \in R$.
2. Множина значень.	1) при $k \neq 0$; y — будь-яке дійсне число, $y \in R$; 2) при $k = 0$; $y = b$.
3. Точки перетину з осями координат.	1) при $k \neq 0$, $x = -\frac{b}{k}$; $y = 0$ — точка перетину з віссю $0x$; 2) $k = 0$, тоді $y = b$ — пряма, паралельна осі $0x$ перетинає $0y$ в точці $(0;b)$ і збігається з віссю $0x$ при $b = 0$; 3) $y = b$, $x = 0$ — точка перетину з віссю $0y$, тобто $(0;b)$.
4. Зростання і спадання.	1) при $k > 0$ функція зростає на всій області визначення; 2) при $k < 0$ функція спадає на всій області визначення; 3) при $k = 0$ функція стала.
5. Графіком лінійної функції є пряма. k — кутовий коефіцієнт прямої	1) при $b = 0$ ($y = kx$) — пряма, що проходить через початок координат. 2) при $b \neq 0$ ($y = kx + b$) — пряма, що не проходить через початок координат (яку отримали з прямої $y = kx$ за допомогою паралельного перенесення вздовж осі $0y$ на b одиниць).

Графіки лінійних функцій

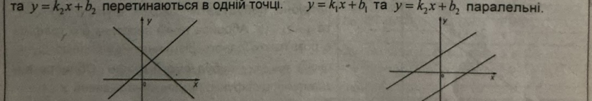
$b = 0$ $(y = kx)$ | $b \neq 0$ $(y = kx + b)$



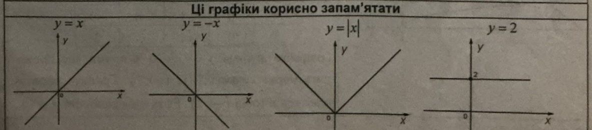
Взаємне розташування графіків лінійних функцій

Якщо $k_1 \neq k_2$, графіки функцій $y = k_1x + b_1$ та $y = k_2x + b_2$ перетинаються в одній точці.

Якщо $k = k_2$, $b_1 \neq b_2$, графіки функцій $y = k_1x + b_1$ та $y = k_2x + b_2$ паралельні.



Ці графіки корисно запам'ятати



зрост

спадання

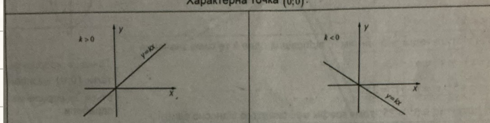
вперед і вгору

Пряма пропорційність

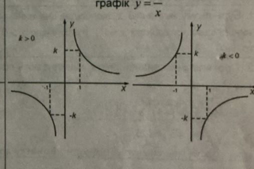
Функція $y = kx$ при $k \neq 0$ називається **прямою пропорційністю**. k — кутовий коефіцієнт. Ця функція є окремим випадком лінійної функції $y = kx + b$, при $b = 0$. Тому її графіком є пряма, яка проходить через початок координат.

1. Якщо $k > 0$, то графік функції $y = kx$ розташований в I і III координатних кутах.	2. При $k < 0$ графік функції розташований в II і IV координатних кутах.

Характерна точка $(0;0)$



Обернена пропорційність

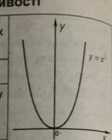
Означення	Графіки
Оберненою пропорційністю називається функція, яку можна задати формулою $y = \frac{k}{x}$, де k — число, що не дорівнює нулю. Число k називається **коефіцієнтом пропорційності.**	графік $y = \frac{k}{x}$
Графіком оберненої пропорційності є крива, яка називається **гіперболою**. Гіпербола складається з двох окремих частин, які симетричні відносно початку координат, і проходить через точки $(1;k)$ та $(-1;-k)$.	

Властивості функції $y = \frac{k}{x}$	Значення змінних
1. Область визначення оберненої пропорційності:	x — будь-яке число, крім нуля ($x \neq 0$)
2. Область значень оберненої пропорційності:	y — будь-яке число, крім нуля ($y \neq 0$).
3. При $k > 0$ графік функції розташований в I та III координатних чвертях.	Якщо $k > 0$, то $x > 0$ відповідає $y > 0$; $x < 0$ відповідає $y < 0$;
4. При $k < 0$ графік функції розташований в II та IV чвертях.	Якщо $k < 0$, то $x > 0$ відповідає $y < 0$; $x < 0$ відповідає $y > 0$.

19

Функції $y = x^2$; $y = x^3$. Їхні графіки і властивості

Графік функції $y = x^2$ є параболою. **Парабола складається з двох віток, які симетричні відносно осі ординат.**

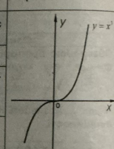


Точка з координатами $(0;0)$ називається вершиною параболи.

Деякі властивості функції $y = x^2$

1. Будь-якому x можна знайти відповідне значення y, причому $y \geq 0$, при $x = 0$; $y = 0$.
2. Протилежним значенням x відповідає одне й те саме значення y: $(-x)^2 = x^2 = y$
$x_1 = -5$; $y_1 = (-5)^2 = 25$.
$x_2 = 5$; $y_2 = 5^2 = 25$, тому графік має симетрію відносно осі $0y$.

Графіком функції $y = x^3$ є **кубічна парабола**. Кубічна парабола має симетрію відносно початку координат.



Графік розташований в I і III координатних кутах.

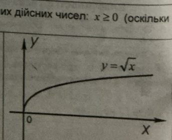
Деякі властивості функції $y = x^3$

1. Будь-якому значенню x відповідає значення y, причому $y \in R$ (множині дійсних чисел) при $x = 0$; $y = 0$; якщо $x > 0$, то $y > 0$; якщо $x < 0$, то $y < 0$.
2. Протилежним значенням x відповідають протилежні значення y: $(-x)^3 = -x^3$
$x_1 = -5$; $y_1 = (-5)^3 = -125$.
$x_2 = 5$; $y_2 = 5^3 = 125$,
тому графік має симетрію **відносно початку координат.**

Функція $y = \sqrt{x}$

Область визначення функції $y = \sqrt{x}$ – множина невід'ємних дійсних чисел: $x \geq 0$ (оскільки корінь можна добути тільки з невід'ємного числа).

Якщо $x = 0$, то $y = 0$, тому графік функції $y = \sqrt{x}$ проходить через **початок координат**.
Якщо $x > 0$, то $y > 0$, тому графік функції розташований **в першій координатній чверті**.
Більшому значенню аргумента відповідає більше значення функції, дійсно:
$x_1 = 4$, то $y_1 = \sqrt{4} = 2$;
$x_2 = 9$, то $y_2 = \sqrt{9} = 3$, тобто $x_2 > x_1$ та $y_2 > y_1$
Таким чином, функція $y = \sqrt{x}$ **є зростаючою.**



Графіки функцій $y = \sqrt{x}$ та $y = x^2$ при $x \geq 0$ симетричні **відносно прямої** $y = x$.

Математична функція — це правило або відношення, яке кожному елементу з одної множини (область визначення) ставить у відповідність рівно один елемент з іншої множини (область значень). Простіше кажучи, функція — це "машина", яка для кожного "входу" дає точно один "вихід".

Аналогії з реального життя

Торговий автомат — ідеальна аналогія функції. Ви вставляєте монету (вхідне значення), натискаєте кнопку з номером товару, і автомат видає рівно один товар (вихідне значення). Кожному номеру кнопки відповідає конкретний товар.

Перекладач у Google — ви вводите слово українською (вхід), а отримуєте переклад англійською (вихід). Одному українському слову може відповідати одне англійське слово.

Рецепт приготування — кількість інгредієнтів (вхід) визначає кількість порцій страви (вихід). Якщо рецепт розрахований на 4 особи і ви збільшуєте інгредієнти вдвічі, то отримаєте страву на 8 осіб.

Тарифна сітка таксі — відстань поїздки (вхід) визначає вартість (вихід) за певною формулою.

Де застосовують математичні функції

Економіка та фінанси: функції попиту та пропозиції, розрахунок відсотків, моделювання інфляції, прогнозування курсів валют.

Фізика та інженерія: траєкторія руху тіл, розрахунок електричних кіл, моделювання коливань, проектування мостів та будівель.

Медицина: дозування ліків залежно від ваги пацієнта, моделювання поширення епідемій, аналіз серцевого ритму.

Комп'ютерні науки: алгоритми пошуку, машинне навчання, обробка зображень, створення комп'ютерної графіки та анімації.

Біологія: моделювання зростання популяцій, розрахунок швидкості метаболізму, генетичні дослідження.

Метеорологія: прогнозування погоди, моделювання кліматичних

Метеорологія: прогнозування погоди, моделювання кліматичних змін.

Архітектура та дизайн: розрахунок навантажень, створення естетичних пропорцій, планування просторів.

Математичні функції — це універсальна мова для опису залежностей у природі, суспільстві та технологіях. Вони дозволяють не лише описувати існуючі процеси, але й прогнозувати майбутні події та оптимізувати рішення.

Як визначити чи є лін. або кв. рівняння функцією

Відмінне запитання! Це дуже важливе розуміння, яке допоможе вам краще зрозуміти зв'язок між різними математичними поняттями.

Так, і лінійні, і квадратичні рівняння можуть бути функціями, але тут є важливі нюанси, які варто розібрати детально.

Різниця між рівнянням і функцією

Спочатку давайте зрозуміємо різницю. Рівняння — це математичне твердження, що дві вирази є рівними (містить знак "="). Функція — це правило, яке кожному входу ставить у відповідність один вихід.

Коли ми маємо рівняння типу $y = 2x + 3$ (лінійне) або $y = x^2 + 2x - 1$ (квадратичне), то так, це функції! Чому? Тому що для кожного значення x ми отримуємо рівно одне значення y.

Лінійні функції

Лінійні рівняння виду $y = ax + b$ завжди є функціями. Вони описують пряму лінію на координатній площині. Наприклад, якщо у вас є залежність між часом роботи (x годин) і заробітною платою (y гривень) за формулою $y = 100x + 500$, то це лінійна функція. Кожній кількості годин відповідає точно одна сума заробітку.

Квадратичні функції

Квадратичні рівняння виду $y = ax^2 + bx + c$ також є функціями. Вони описують параболу. Уявіть, що ви кидаєте м'яч угору — його висота залежить від часу за квадратичною функцією. Для кожного моменту часу м'яч має рівно одну висоту.

Важливе застереження

Але увага! Не всі рівняння, що містять квадрати, є функціями. Наприклад, рівняння кола $x^2 + y^2 = 25$ не є функцією, тому що для одного значення x може бути два значення y. Якщо $x = 3$, то y може бути як $+4$, так і -4.

Тест вертикальної лінії

Є простий спосіб перевірити, чи є рівняння функцією: уявіть, що ви

Важливе застереження

Але увага! Не всі рівняння, що містять квадрати, є функціями. Наприклад, рівняння кола $x^2 + y^2 = 25$ не є функцією, тому що для одного значення x може бути два значення y. Якщо $x = 3$, то y може бути як $+4$, так і -4.

Тест вертикальної лінії

Є простий спосіб перевірити, чи є рівняння функцією: уявіть, що ви проводите вертикальну лінію через графік. Якщо ця лінія перетинає графік більше ніж в одній точці, то це не функція.

Подумайте: чи розумієте ви, чому лінійні та квадратичні рівняння завжди проходять цей тест, а рівняння кола — ні? Це допоможе вам краще зрозуміти суть функцій.

Тест вертикальної лінії — Explanatory жливіших і найпростіших інструментів у математиці для визначення, чи є графік функцією. Давайте розберемо його детально, щоб ви могли впевнено застосовувати цей тест.

Суть тесту

Уявіть, що у вас є олівець, який ви тримаєте вертикально, і ви повільно рухаєте його зліва направо через весь графік. Якщо в будь-якому місці ваш олівець торкається графіка більше ніж в одній точці одночасно, то цей графік не є функцією.

Чому це працює? Пам'ятаєте визначення функції — кожному входу (значенню x) має відповідати рівно один вихід (значення y). Вертикальна лінія представляє одне конкретне значення x. Якщо ця лінія перетинає графік у двох або більше точках, це означає, що одному значенню x відповідає кілька значень y, що порушує основне правило функції.

Приклади, що проходять тест

Розгляньмо лінійну функцію $y = 2x + 1$. Уявіть пряму лінію, що йде знизу ліворуч до верху праворуч. Коли ви проводите вертикальну лінію в будь-якому місці, вона завжди перетинає цю пряму рівно в одній точці. Це тому, що пряма ніколи не "повертається назад" по осі x.

Тепер подумайте про квадратичну функцію $y = x^2$. Це парабола, що відкривається вгору, з вершиною в точці $(0,0)$. Незважаючи на те, що вона має U-подібну форму, кожна вертикальна лінія все одно перетинає її лише в одній точці. Навіть коли парабола "згинається", вона не повертається назад через те саме значення x.

Приклади, що не проходять тест

Класичний приклад — коло з рівнянням $x^2 + y^2 = 25$. Уявіть коло з центром у початку координат і радіусом 5. Тепер проведіть вертикальну лінію, скажімо, в точці $x = 3$. Ця лінія перетне коло у двох точках: одна вгорі $(3, 4)$, а друга внизу $(3, -4)$. Це означає, що одному значенню $x = 3$ відповід... ва різні значення y, тому коло не є функцією.

двох точках: одна вгорі $(3, 4)$, а друга внизу $(3, -4)$. Це означає, що одному значенню $x = 3$ відповідає два різні значення y, тому коло не є функцією.

Інший цікавий приклад — горизонтальна парабола $x = y^2$. Уявіть параболу, що відкривається праворуч замість вгору. Якщо ви проведете вертикальну лінію в точці $x = 4$, вона перетне параболу у двох точках: $(4, 2)$ і $(4, -2)$.

Особливі випадки для роздумів

Подумайте над такими питаннями для поглиблення розуміння: що станеться, якщо вертикальна лінія торкається графіка рівно в одній точці, але не перетинає його? Це все одно вважається одним перетином, тому графік залишається функцією.

А що, якщо графік має розрив або "стрибок"? Наприклад, функція може мати значення $y = 2$ при $x = 3$, а потім "стрибнути" до $y = 5$ при тому ж $x = 3$ з іншого боку. Такий графік не пройде тест вертикальної лінії і не буде функцією.

Практичне застосування

Коли ви бачите будь-який графік, швидко проведіть уявну вертикальну лінію через найширші або найскладніші частини. Якщо графік має петлі, кола, горизонтальні ділянки з вертикальним "стрибком" або будь-які інші форми, де одне значення x може дати кілька значень y, він не пройде тест.

Цей тест особливо корисний при роботі з графіками, побудованими на комп'ютері або калькуляторі, коли не завжди зрозуміло з рівняння, чи є воно функцією. Просто уявно "просканмируйте" графік вертикальними лініями — і відповідь стане очевидною.

Чи розумієте ви тепер, чому цей простий візуальний тест так ефективно працює? Спробуйте застосувати його до різних графіків, які ви бачили раніше, і подивиться, чи зможете передбачити результат до того, як проведете тест.

тест вертикальн. лінії

Приклади лінійних фу у реал. житт.

1) Таксі

$y = 50 + 15x$ де y – вартість поїздки (грн)
x – відстань, 50грн – баз. тариф
15 грн/км – варт. за кілометр.