

Математичні функції

15

§ 4. Функції

Функції та їх графіки

Залежність змінної y від змінної x називається функцією, якщо кожному значенню x відповідає єдине значення y .

Функція назначається або однією буквово (f або) $f(x)$, або рівністю $y = f(x)$, де x — незалежна змінна або аргумент, y — залежна змінна або значення функції $f(x_0)$ — значення функції f в точці x_0 .

Область визначення і множина значень функції

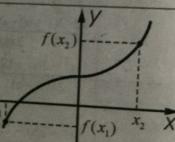
Область визначення функції (D) — множина тих значень, які може приймати аргумент.

Множина значень функції (E) — це множина тих значень, які може приймати сама функція при всіх значеннях аргумента із областю визначення. Наприклад: $f(x) = \frac{2}{x-1}$.

Область визначення (D): $x - 1 \neq 0$; $x \neq 1$, x — будь-яке число, крім $x = 1$.

Графік функції

Графіком функції $y = f(x)$ називається множина точок площини з координатами (x, y) , де перша координата x «побудовав» всю область визначення функції $f(x)$, а друга координата — це відповідне значення функції f в точці x .



Способи задання функції

1. Аналітичний спосіб: функція задається за допомогою математичної формулі.
2. Табличний спосіб: функція задається за допомогою таблиці.

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

3. Описовий спосіб: функція задається словесним списком.
4. Графічний спосіб: функція задається за допомогою графіка.

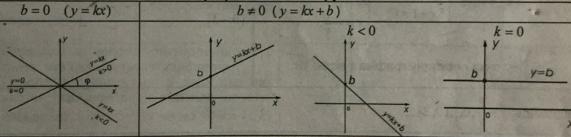
Функція Дірихле: $f(x) = 1$ для раціональних x , $f(x) = 0$ для іраціональних x .

16 Лінійна функція та її графік

Лінійною функцією називається функція виду $y = kx + b$, де $k \neq b$ — деякі числа, x — незалежна змінна.

Властивості	Значення змінних
1. Область визначення.	x — будь-яке дійсне число $x \in \mathbb{R}$.
2. Множина значень.	1) при $k \neq 0$: y — будь-яке дійсне число, $y \in \mathbb{R}$; 2) при $k = 0$: $y = b$.
3. Точки перетину з осями координат.	1) при $k \neq 0$, $x = -\frac{b}{k}$; $y = 0$ — точка перетину з віссю $0x$; 2) $k = 0$, тоді $y = b$ — пряма, паралельна осі $0x$ перетинає $0y$ в точці $(0; b)$ і збігається з віссю $0x$ при $b = 0$; 3) $y = b$, $x = 0$ — точка перетину з віссю $0y$, тобто $(0; b)$.
4. Зростання і спадання.	1) при $k > 0$ функція зростає на всій області визначення; 2) при $k < 0$ функція спадає на всій області визначення; 3) при $k = 0$ функція стала.
5. Графіком лінійної функції є пряма.	k — кутовий коефіцієнт прямої

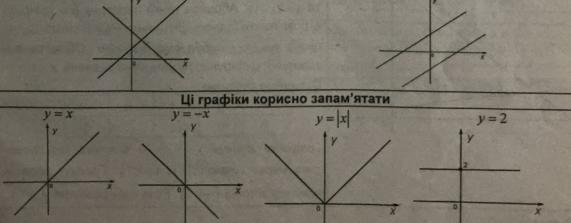
Графіки лінійних функцій



Взаємне розташування графіків лінійних функцій

Якщо $k_1 \neq k_2$, графіки функцій $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ перетинаються в одній точці.

Якщо $k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$, графіки функцій $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ паралельні.



зростання
спадання

відповідність
інтервалу

Математична функція — це правило або відношення, яке кожному елементу з однієї множини (область визначення) ставить у відповідність рівно один елемент з іншої множини (область значень). Простіше кажучи, функція — це «машина», яка для кожного «входу» дає точно один «вихід».

Аналогії з реального життя

Торговий автомат — ідеальна аналогія функції. Ви вставляєте монету (вхідне значення), натискаєте кнопку з номером товару, і автомат видає рівно один товар (виходне значення). Кожному номеру кнопки відповідає конкретний товар.

Перекладач у Google — ви вводите слово українською (вхід), а отримуєте переклад англійською (вихід). Одному українському слову може відповісти одне англійське слово.

Рецепт приготування — кількість інгредієнтів (вхід) визначає кількість порцій страви (вихід). Якщо рецепт розрахованій на 4 особи і ви збільшуєте інгредієнти вдвічі, то отримаєте страву на 8 осіб.

Тарифна сітка таксі — відстань поїздки (вхід) визначає вартість (вихід) за певною формулою.

Де застосовують математичні функції

Економіка та фінанси: функції попиту та пропозиції, розрахунок відсотків, моделювання інфляції, прогнозування курсів валют.

Фізика та інженерія: траєкторія руху тіл, розрахунок електричних кіл, моделювання коливань, проектування мостів та будівель.

Медицина: дозування ліків залежно від ваги pacienta, моделювання поширення епідемій, аналіз серцевого ритму.

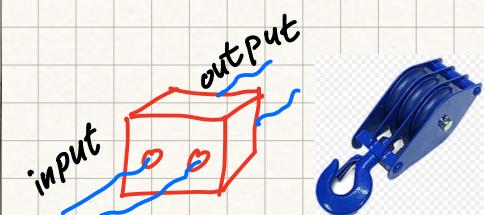
Комп'ютерні науки: алгоритми пошуку, машинне навчання, обробка зображень, створення комп'ютерної графіки та анімації.

Біологія: моделювання зростання популяцій, розрахунок швидкості метаболізму, генетичні таслідження.

Метеорологія: прогнозування погоди, моделювання кліматичних змін.

Архітектура та дизайн: розрахунок навантажень, створення естетичних пропорцій, планування просторів.

Математичні функції — це універсальна мова для опису залежностей у природі, суспільстві та технологіях. Вони дозволяють не лише описувати існуючі процеси, але й прогнозувати майбутні події та оптимізувати рішення.



* Властивість яка продовжує функцію, друкуючи її значення.

17 УЧІНІВСЬКА СТОРІНКА

1. Знайдіть координати точок перетину графіків функцій з осями координат.

$$y = \frac{-24}{x} + 1.$$

Графік перетинає вісс $0x$ в точці $(24, 0)$. Для того, щоб знайти точку перетину графіка з вісс $0y$, необхідно розв'язати рівняння: $y = 0$, тобто $\frac{-24}{x} + 1 = 0$, якщо $x \neq 0$, $-24 + x = 0$, $x = 24$.

Відповідь: $(24, 0)$.

2. Знайдіть координати точок перетину графіків функцій з осями координат.

$$y = \frac{3x}{5x+1} - 2.$$

Для того, щоб знайти точку перетину з віссю $0x$, розв'язмо рівняння: $\frac{3x}{5x+1} - 2 = 0$, $3x - 10x - 2 = 0$, $5x+1 = 0$, $x = -\frac{1}{5}$.

При $x = 0$ $y = \frac{3 \cdot 0}{5 \cdot 0 + 1} - 2 = \frac{0}{1} - 2 = -2$.

Точка перетину графіка з віссю $0y$ $(0, -2)$.

Відповідь: $(-\frac{1}{5}, 0); (0, -2)$.

3. Розв'язати рівняння графічно.

$$\sqrt{x} = 2x + 10.$$

Для того, щоб розв'язати це рівняння графічно потрібно побудувати графіки функції $y = \sqrt{x}$ та $y = 2x + 10$. Абсциса точок перетину цих графіків є розв'язком даного рівняння. Розглянемо функцію $y = \sqrt{x}$ і побудуємо її графік. Область визначення цієї функції є множиною значень $x \geq 0$.

Складемо таблицю:

x	0	-1	-4	-9
y	0	+1	2	3

Графіком функції $y = 2x + 10$ є пряма, що проходить через точки $(0; 10); (-4; 2)$. Графіки перетинаються в точці $(-4; 2)$. Розв'язанням рівняння є точка $(-4, 2)$.

Відповідь: $(-4, 2)$.

Пряма пропорційність

Функція $y = kx$ при $k \neq 0$ називається прямою пропорційністю. k — кутовий коефіцієнт.

Ця функція є окремим випадком лінійної функції $y = kx + b$, при $b = 0$. Тому її графіком

є пряма, яка проходить через початок координат.

1. Якщо $k > 0$, то графік функції $y = kx$ розташований в I та III координатних кутах.

2. При $k < 0$ графік функції розташований в II та IV координатних кутах.

Характеристика точки $(0; 0)$:

Означення

Графіки

Графік функції $y = \frac{k}{x}$

Графік функції $y = \frac{k}{x}$ називається оберненою пропорційністю.

Графік оберненої пропорційності є кривою, яка називається гіперболою.

Гіпербола складається з двох окремих частин, які симетричні відносно початку координат, і проходить через точки $(1; k)$ та $(-1; -k)$.

Властивості функції $y = \frac{k}{x}$

Значення змінних

x — будь-яке число, крім нуля ($x \neq 0$).

y — будь-яке число, крім нуля ($y \neq 0$).

3. При $k > 0$ графік функції розташований в I та III координатних квадрантах.

Якщо $k > 0$, то $x > 0$, $y > 0$; $x < 0$ відповідає $y < 0$.

Якщо $k < 0$, то $x > 0$ відповідає $y < 0$; $x < 0$ відповідає $y > 0$.

4. При $k \neq 0$ графік функції розташований в II та IV квадрантах.

Функції $y = x^2$; $y = x^3$. Іхні графіки і властивості

Графік функції $y = x^2$ є параболою. Парабола складається з двох віткових симетричних відносно початку координат.

Декілька властивостей функції $y = x^2$:

1. Будь-якому x можна знайти відповідне значення y , причому $y \geq 0$.

2. При $x = 0$, $y = 0$.

3. Протилежним значенням x відповідає одне тає же значення y :

$$(-x)^2 = x^2 = y$$

$x_1 = -5$; $y_1 = (-5)^2 = 25$.

$x_2 = 5$; $y_2 = 5^2 = 25$.

тому графік має симетрію відносно осі $0y$.

Графік функції $y = x^3$ є кубичною параболою.

Декілька властивостей функції $y = x^3$:

1. Будь-якому значення x відповідає значення y , причому $y \in \mathbb{R}$ (множина дійсних чисел): $x \neq 0$, $y \neq 0$; $x > 0$, $y > 0$; $x < 0$, $y < 0$; $y > 0$.

2. Протилежним значенням x відповідає протилежне значення y :

$$(-x)^3 = -x^3 = y$$

$x_1 = -5$; $y_1 = (-5)^3 = -125$.

$x_2 = 5$; $y_2 = 5^3 = 125$.

тому графік має симетрію відносно початку координат.

Функція $y = \sqrt{x}$

Область визначення функції $y = \sqrt{x}$ — множина невід'ємних дійсних чисел: $x \geq 0$ (оскільки корінь можна додати тільки з невід'ємного числа).

Якщо $x = 0$, то $y = 0$, тому графік функції $y = \sqrt{x}$ проходить через початок координат.

Якщо $x > 0$, то $y > 0$, тому графік функції розташований в I квадранті.

Більшому значенням аргумента відповідає більше значення функції, дійсно:

$x_1 = 4$, то $y_1 = \sqrt{4} = 2$;

$x_2 = 9$, то $y_2 = \sqrt{9} = 3$, тобто $x_2 > x_1$ та $y_2 > y_1$.

Таким чином, функція $y = \sqrt{x}$ є зростаючою.

Графік функції $y = \sqrt{x}$ та $y = x^2$ при $x \geq 0$ симетричні відносно прямої $y = x$.

Як відмежити чи є лін. або кв. уявлення функцією

Відмінне запитання! Це дуже важливе розуміння, яке допоможе вам краще зрозуміти зв'язок між різними математичними поняттями.

Так, і лінійні, і квадратичні рівняння можуть бути функціями, але тут є важливі нюанси, які варто розібрати детально.

Різниця між рівнянням і функцією

Спочатку давайте зрозумімо різницю. Рівняння — це математичне твердження, що дві вирази є рівними (містить знак “=”). Функція — це правило, яке кожному входу ставить у відповідність один вихід.

Коли ми маємо рівняння типу $y = 2x + 3$ (лінійне) або $y = x^2 + 2x - 1$ (квадратичне), то так, це функції! Чому? Тому що для кожного значення x ми отримуємо рівно одне значення y .

Лінійні функції

Лінійні рівняння виду $y = ax + b$ завжди є функціями. Вони описують пряму лінію на координатній площині. Наприклад, якщо у вас є залежність між часом роботи (x годин) і заробітною платою (y гривень) за формулою $y = 100x + 500$, то це лінійна функція. Кожній кількості годин відповідає точно одна сума заробітку.

Квадратичні функції

Квадратичні рівняння виду $y = ax^2 + bx + c$ також є функціями. Вони описують параболу. Уявіть, що ви кидаете м'яч угору — його висота залежить від часу за квадратичною функцією. Для кожного моменту часу м'яч має рівно одну висоту.

Важливе застереження

Але увага! Не всі рівняння, що містять квадрати, є функціями. Наприклад, рівняння кола $x^2 + y^2 = 25$ не є функцією, тому що для одного значення x може бути два значення y . Якщо $x = 3$, то уможе бути як $+4$, так і -4 .

Тест вертикальної лінії

Є простий спосіб перевірити, чи є рівняння функцією: уявіть, що ви

Важливе застереження

Але увага! Не всі рівняння, що містять квадрати, є функціями. Наприклад, рівняння кола $x^2 + y^2 = 25$ не є функцією, тому що для одного значення x може бути два значення y . Якщо $x = 3$, то уможе бути як $+4$, так і -4 .

Тест вертикальної лінії

Є простий спосіб перевірити, чи є рівняння функцією: уявіть, що ви проводите вертикальну лінію через графік. Якщо ця лінія перетинає графік більше ніж в одній точці, то це не функція.

Подумайте: чи розумієте ви, чому лінійні та квадратичні рівняння завжди проходять цей тест, а рівняння кола — ні? Це допоможе вам краще зрозуміти суть функцій.

Тест вертикальної лінії — Explanatory жливіших і найпростіших інструментів у математиці для визначення, чи є графік функцією. Давайте розберемо його детально, щоб ви могли впевнено застосовувати цей тест.

Суть тесту

Уявіть, що у вас є олівець, який ви тримаєте вертикально, і ви повільно рухаєте його зліва направо через весь графік. Якщо в будь-якому місці ваш олівець торкається графіка більше ніж в одній точці одночасно, то цей графік не є функцією.

Чому це працює? Пам'ятаєте визначення функції — кожному входу (значенню x) має відповідати рівно один вихід (значення y). Вертикальна лінія представляє одне конкретне значення x . Якщо ця лінія перетинає графік у двох або більше точках, це означає, що одному значенню x відповідає кілька значень y , що порушує основне правило функції.

Приклади, що проходять тест

Розглянемо лінійну функцію $y = 2x + 1$. Уявіть пряму лінію, що йде знизу ліворуч до верху праворуч. Коли ви проводите вертикальну лінію в будь-якому місці, вона завжди перетинає цю пряму рівно в одній точці. Це тому, що пряма ніколи не “повертається назад” по осі x .

Тепер подумайте про квадратичну функцію $y = x^2$. Це парабола, що відкривається вгору, з вершиною в точці $(0,0)$. Незважаючи на те, що вона має U-подібну форму, кожна вертикальна лінія все одно перетинає її лише в одній точці. Навіть коли парабола “згинається”, вона не повертається назад через те саме значення x .

Приклади, що не проходять тест

Класичний приклад — коло з рівнянням $x^2 + y^2 = 25$. Уявіть коло з центром у початку координат і радіусом 5. Тепер проведіть вертикальну лінію, скажімо, в точці $x = 3$. Ця лінія перетне коло у двох точках: одна вгорі $(3, 4)$, а друга внизу $(3, -4)$. Це означає, що одному значенню $x = 3$ відповідає \downarrow за різні значення y , тому коло не є функцією.

Інший цікавий приклад — горизонтальна парабола $x = y^2$. Уявіть параболу, що відкривається праворуч замість вгору. Якщо ви проведете вертикальну лінію в точці $x = 4$, вона перетне параболу у двох точках: $(4, 2)$ і $(4, -2)$.

Особливі випадки для роздумів

Подумайте над такими питаннями для поглиблення розуміння: що станеться, якщо вертикальна лінія торкається графіка рівно в одній точці, але не перетинає його? Це все одно вважається одним перетином, тому графік залишається функцією.

А що, якщо графік має розрив або “стрибок”? Наприклад, функція може мати значення $y = 2$ при $x = 3$, а потім “стрибнути” до $y = 5$ при тому ж $x = 3$ з іншого боку. Такий графік не пройде тест вертикальної лінії і не буде функцією.

Практичне застосування

Коли ви бачите будь-який графік, швидко проведіть уявну вертикальну лінію через найширші або найскладніші частини. Якщо графік має петлі, кола, горизонтальні ділянки з вертикальним “стрибком” або будь-які інші форми, де одне значення x може дати кілька значень y , він не пройде тест.

Цей тест особливо корисний при роботі з графіками, побудованими на комп’ютері або калькуляторі, коли не завжди зрозуміло з рівняння, чи є воно функцією. Просто уявно “просканируйте” графік вертикальними лініями — і відповідь стане очевидно.

Чи розумієте ви тепер, чому цей простий візуальний тест так ефективно працює? Спробуйте застосувати його до різних графіків, які ви бачили раніше, і подивітесь, чи зможете передбачити результат до того, як проведете тест.

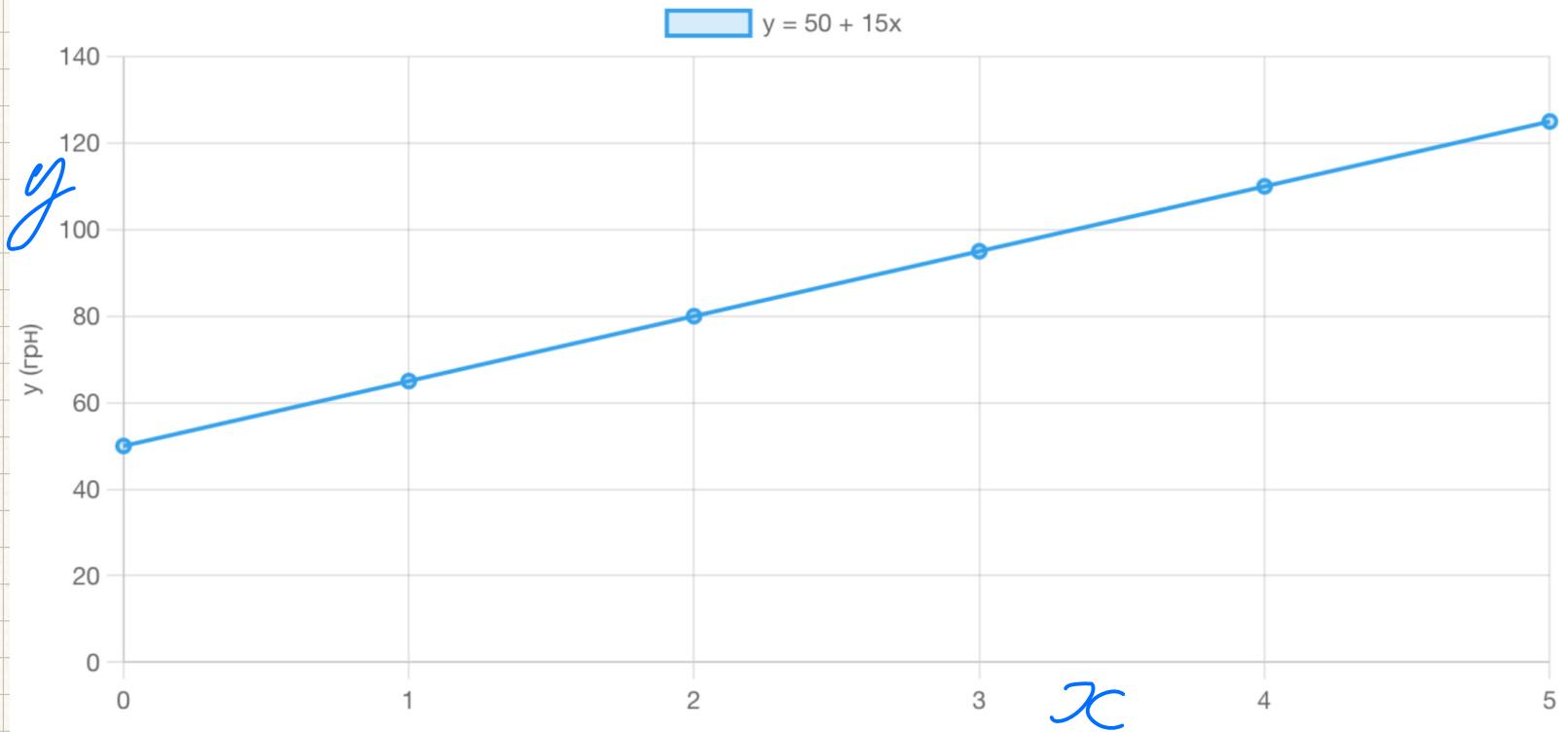


Функція = залежність
= відповідність

Приклади лінійних функцій у реал. знач.

1) Ідея

$y = 50 + 15x$ де y - вартість поїздання (грн)
 x - відстань , 50 грн - баз. тариф
15 грн/км - варт. за кілометр.



- Лінійна функція \Rightarrow пряма (лінія)
- * Хоча y не залежить від x , вона залежить від x . Якщо x збільшиться на 1, y зростає на 15
 - * Це означає що зростання y відповідає зростанню x на 1
 - * Відомий член 50 є початковим значенням y при $x=0$
 - * Відомий член 15 є коефіцієнтом пропорційності

x	0	1	2
y	50	65	80

$$\text{При } x=1; \quad y = 50 + 15 \cdot 1 = 65$$

$$\text{При } x=2; \quad y = 50 + 15 \cdot 2 = 80$$

2) Погодинна оплата

$$y = 120x$$

Заробітна плата з погодинною оплатою
 y - заробіток за добу (УНІ); Залежність змінна - залежність від x

x - відпрац. годин.; Залежність змінна - яку можна змінювати.

120 грн/год - погодинна ставка; Коеф при x який показує єдину пропорційність.

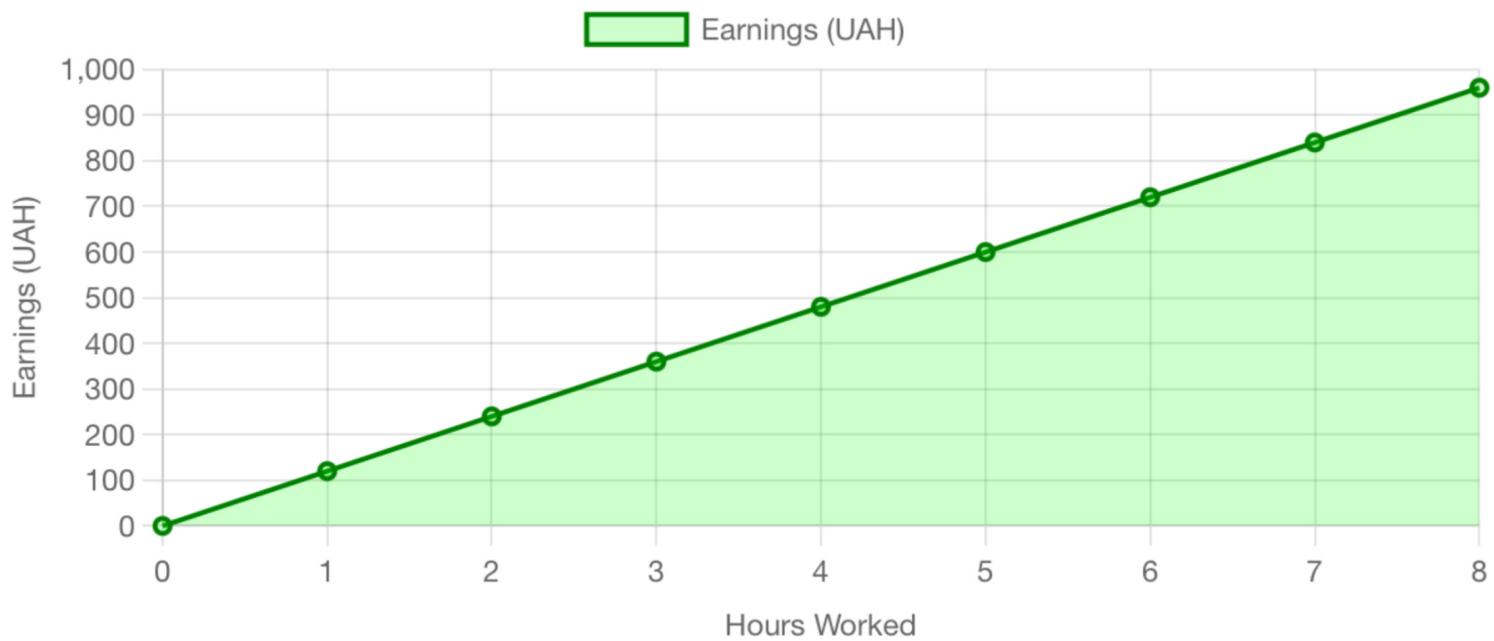
* лінія від $y=0$ показує таку пропорційність.
zn. Прив. пропорц. кільк. відпрац. годин.

* Ставка та зв. змінн. Кожна відпрац. година здійснила заробіток на розмір суму 120 грн.

Ставка відпрац. змінн. є характеристикою фін. ф.

* Ця фін. ф. є моделью для розрахунку зн. по основі погодинної ставки та к-ті відпрац. год.

Earnings Based on Hours Worked



3) Випадок падіння

Чу. модель випадку падіння

$$y = 500 - 8x$$

де y - залишок пасива (u) Залежність
змінної - змінч. значення від x .

x - проїзд відстань (ки). $1=100$ тащу чо
вказую розріз 8 ліній від 100 км.

Незалежності змінна - залежність між змінними.

500 - початковий об'єм бака. Від'ємні члени -
є можливі перевищує з y . Число. коеф. негат.

Число. пропорційності = кутовий коеф

> Визначте ін. змінн у відносно x .

> На когану однією з дійсних x значення y
змінюється на k однією ($y = b - kx$) $k = -8$

$|k|$ - віднагл. показ при зміні: чим більше абсолютне
значення, тими крутіше пряма (що вказує зростання об'є-
мів) $k > 0 \nearrow k = 0 \downarrow$.

* лінійна функція моделює випадки падіння і описує залежність
між змінною від часу. k - є К.К. і К.п. видається
швидкістю та напрямок зміни об'єму від часу відносно
іншої. Чу. лін. тащу швидкість зміни розмежує на котри

Швидкість зміни $\frac{dy}{dx} = -8 \text{ км/год}$

Пояснений в. ср.

x	0	1	2
y	0	492	484

$x = 0$; стояло на місці

$x = 1$; ($1=100$) $y = 500 - 8 \cdot 1 = 492$ км 8 к

$x = 2$; ($2=200$) $y = 500 - 8 \cdot 2 = 484$ (u) 16 к

> Максим. бігстапу на пътнику бак:

$$\text{Без пътника } y=0; 0=500-8x; 8x=500; x=\frac{500}{8}=62.5$$

Останки $x=100$; $62,5 \cdot 100 \text{ km} = 6250 \text{ km}$ до пътнико
внешната

> Витрати на 1 km; $8x/100 \text{ km} = 0,08 \text{ л/км.}$

График дру

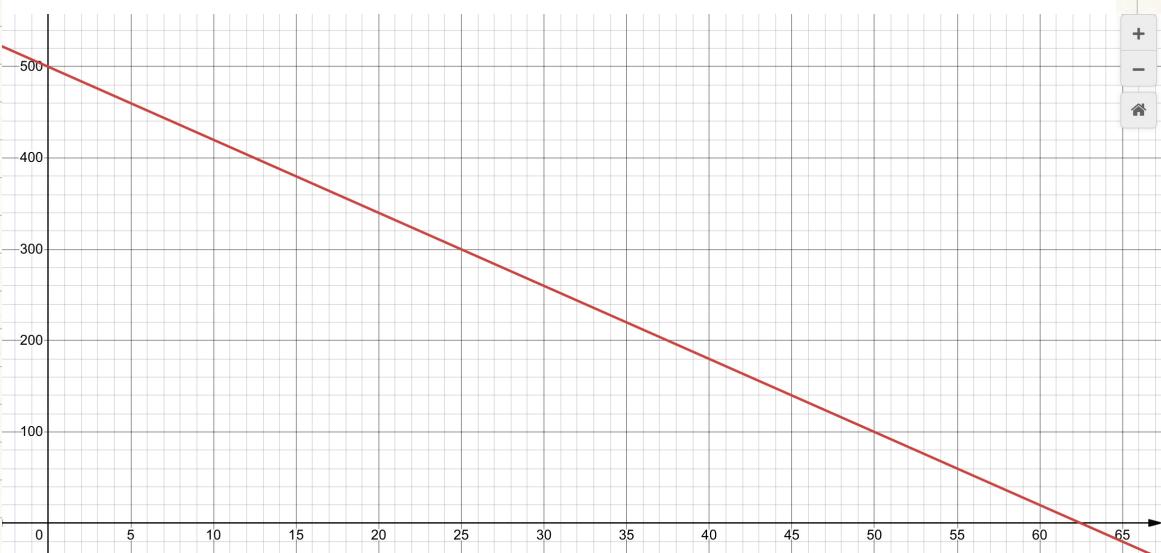
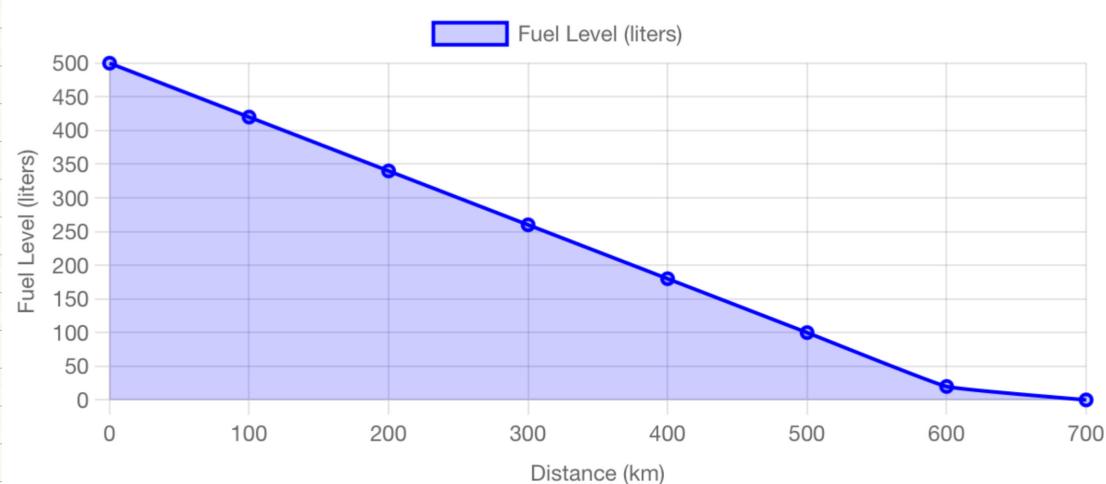
Висло y : начало 6 м. (0,500) ноб. бак.

Кумови коефи: -8 (при всяка стъпка висъкът се намалява)

Пътнико \downarrow ; Задават \nearrow ; Задават x и същият им

$$x=0,5=50; x=1,2=120$$

Fuel Level Based on Distance Traveled



4) Чоргіваний боди ($y = kx + b$)

Лінійна фу. модель (десмополіє) відповідний
(залежс. взаємозалежс.) - температури до гасу при нагріванні.

$$y = 20 + 5x \quad y - t^{\circ}\text{C} \text{ боди}; \text{ залежс. зміна}$$

x - час нагрів (хв); Чезалежс. зміна

20°C - початкова температура Відмінні член

$5^{\circ}\text{C}/\text{хв}$ - кв. нагріваний К.К. К.М.

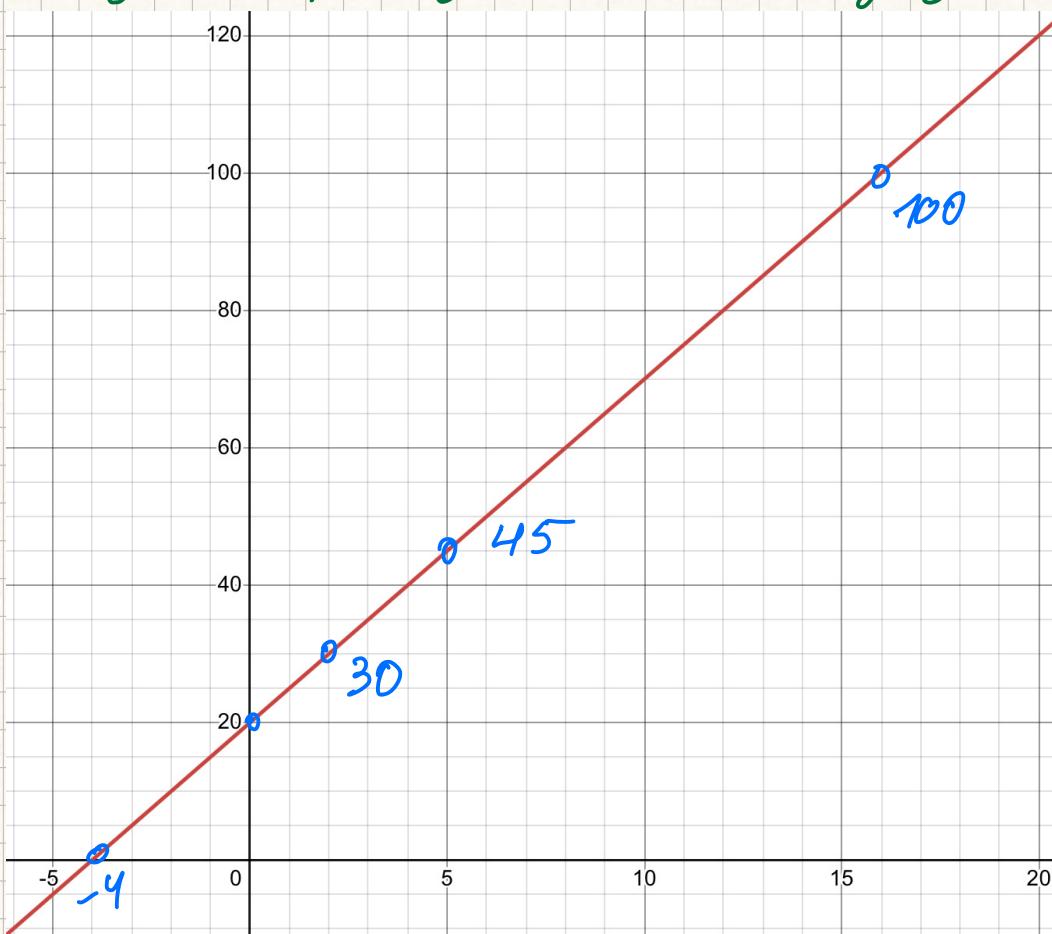
x	0	2	5
y	20	30	45

$$\text{Через } 0 \text{ хв: } y = 20 + 5 \cdot 0 = 20$$

$$2 \text{ хв: } y = 20 + 5 \cdot 2 = 30$$

$$5 \text{ хв: } y = 20 + 5 \cdot 5 = 45$$

* Физ. лін - зрос (спад) прямолінійно t° з T
зручно при змінах які відбуваються поспільно кв.



* Задача

$$y = 100^{\circ}\text{C}$$

$$100 = 20 + 5 \cdot x$$

$$5x = 80$$

$$x = \frac{80}{5}; x = 16$$

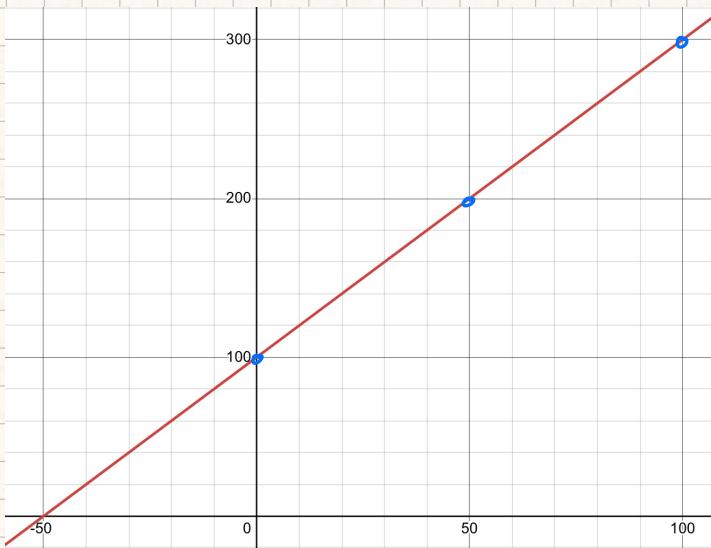
5) Модіусний таунер ($y = kx + b$)

Мод таунер котиже 100 ун на міс. плюс 2 ун за збільшу розмов. Тобуд таунер здієс членісальної функції виг k -ті хв. розмов (від 0 до 100 хв.)

$$y = 100 + 2x$$

Дог:

x	0	1	2	100
y	100	102	104	300



$$\text{При } x=0; y = 100 + 2 \cdot 0 = 100$$

$$x=1; y = 100 + 2 \cdot 1 = 102$$

$$x=2; y = 100 + 2 \cdot 2 = 104$$

$$x=100; y = 100 + 2 \cdot 100 = 300$$

6) Вимікаючі боди (вилама)

$$(y = kx + b)$$

Гезербуад 1000 л, шоквасими вимикає 25 л. Тобуд таунер здієс k -ті боди виг часу (від 0 до 40 хв)

$$y = 1000 - 25x$$

x	0	1	4	5	10	20	30	40
y	1000	975	0	875	750	500	250	0

$$x=0; y=1000$$

$$x=1; y = 1000 - 25 = 975$$

$$x=40; y = 1000 - 25 \cdot 40 =$$

$$= 1000 - 1000 = 0;$$

$$1000 - 25 \cdot 30 (30; 250)$$

$$1000 - 25 \cdot 20 (20; 500)$$

$$1000 - 25 \cdot 5 (5; 875)$$

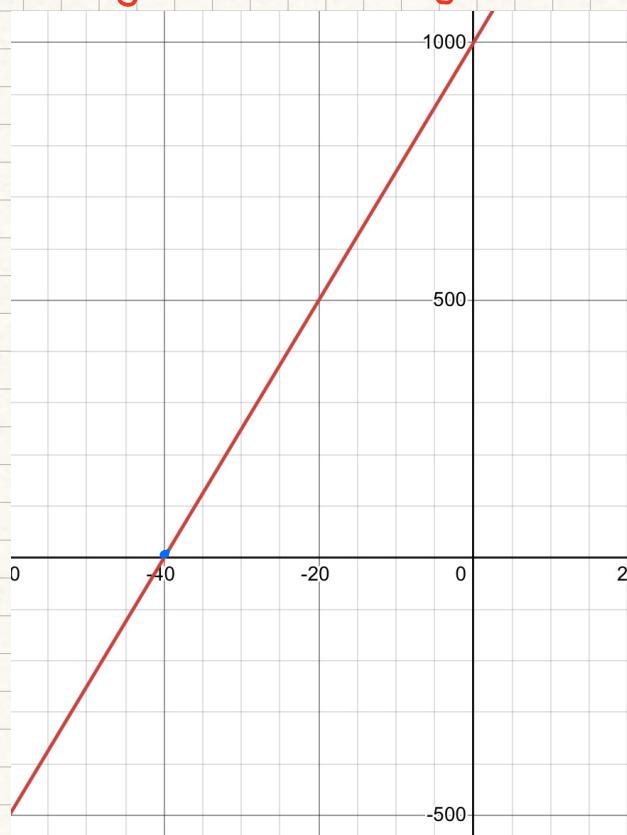
$$1000 - 25 \cdot 10 (10; 750)$$

?

?

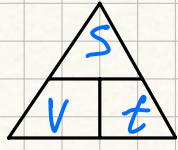
?

?



3) Моделювання велосипедиста ($y = kx + b$)

Велосипедист, шв. 20 км/год. Побудувалим уявіть залежності пройденої відстані від часу (від 0 до 5 годин)



$s(t) = 20 \cdot t$ лінійна фу. описує рух велосипедиста.

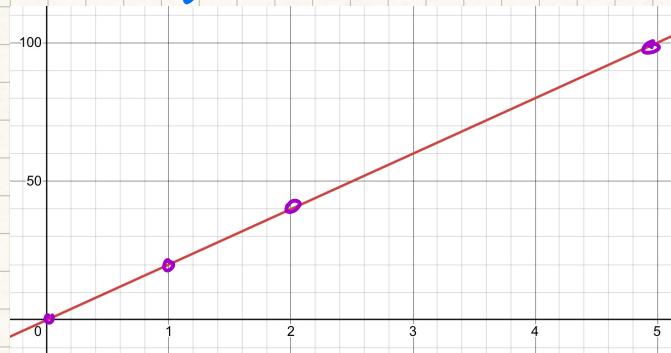
x	0	1	2	5
y	0	20	40	100

При $t = 1$:

$$s(1) = 20 \cdot 1 = 20$$

$$s(2) = 20 \cdot 2 = 40$$

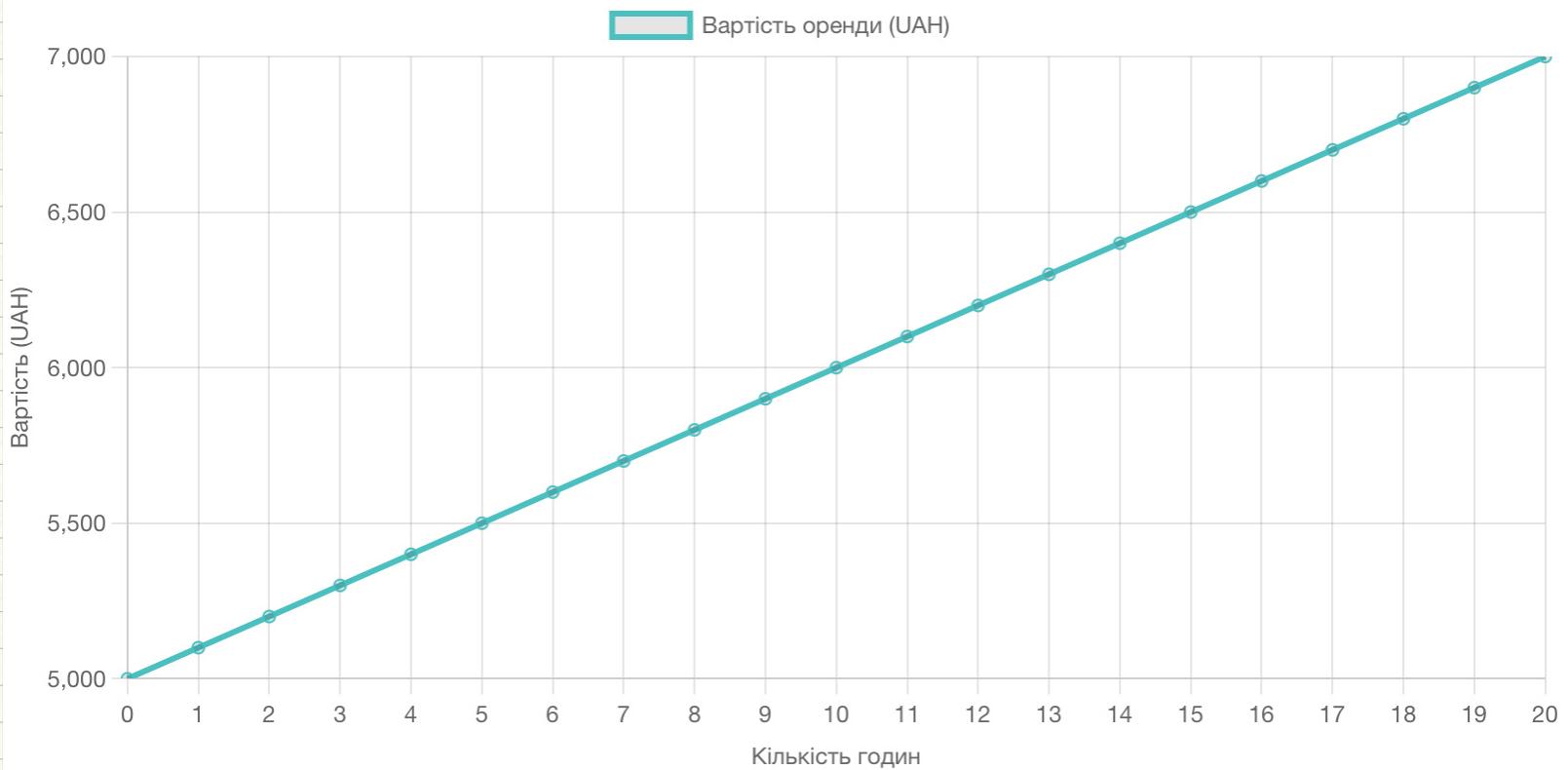
$$s(5) = 20 \cdot 5 = 100$$



8) Оренда пристрій

Оренда 5000 грн фіксована. Нарост 100 грн за кожну годину використання. Побудувалим уявіть залежність від кількості годин (від 0 до 20)

$$y = 5000 + 20x \quad cost = 5000 + 20 \cdot t$$



9) Бізнес - план кафе

Задача 1: Бізнес-план кафе

Власник кафе планує відкрити новий заклад. Початкові витрати на обладнання становлять 240 000 грн. Щомісячні постійні витрати (оренда, зарплата) — 36 000 грн. Прибуток з одного відвідувача в середньому 45 грн.

Завдання:

1. Складіть функцію загальних витрат $V(t)$ залежно від кількості місяців роботи t
2. Складіть функцію загального доходу $D(n,t)$, якщо щомісяця кафе відвідує n клієнтів
3. Знайдіть функцію прибутку $P(n,t) = D(n,t) - V(t)$
4. Визначте, скільки клієнтів щомісяця потрібно, щоб вийти в нуль через 12 місяців
5. Побудуйте графік залежності місячного прибутку від кількості клієнтів (при $t=12$)
6. Розрахуйте, через скільки місяців окупляться початкові вкладення при 2000 клієнтах на місяць

- > Початкові витрати 240 000 грн
- > Щомісяч постійні вит. 36000 грн
- > Прибуток з одног клієнта - 45 грн.

1) Екв. залишків бінурал $V(t)$

$V(t) = 240000 + 36000 \cdot t$ бінурал сяюг Рис. 2
із початкових та змінчуючих

2) Екв. зар. доходу $D(n, t)$

$D(n, t) = 45 \cdot n \cdot t$ змін. зар. залеж. від n та t

3) Екв. прибутку $P(n, t)$

$P(n, t) = D(n, t) - V(t) = 45nt - (240000 + 36000t)$

4) Свід. кот. потрібно змінити, щоб бінур вийшов через 12 міс.

Потрібно n , коли $P(n, 12) = 0$

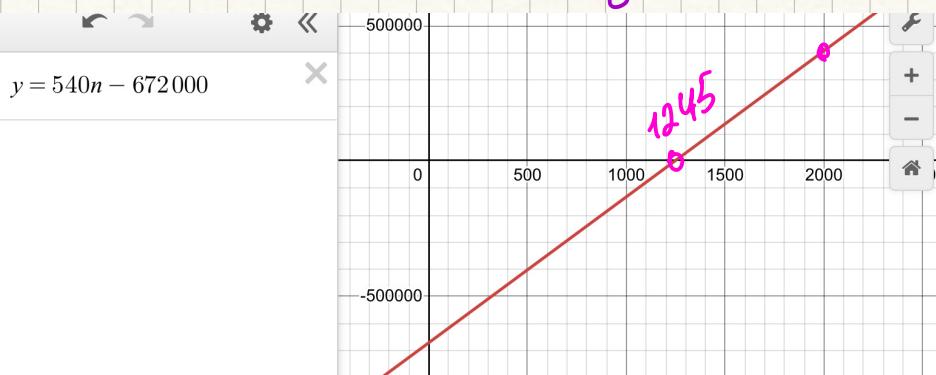
$$45 \cdot n \cdot 12 = 240000 + 36000 \cdot 12 \Rightarrow 540n =$$

$$240000 + 432000 = 672000 \Rightarrow n = \frac{672000}{540} = \\ = 1244,44$$

Потрібно ≈ 1245 кілограмів на місяць, щоб бінур вийшов через 12 місяців.

5) Граф. залежності між. прибутку від кількості кілограмів при $t=12$.

$$P(n, 12) = 540n - 672000 \quad (y = 540n - 672000)$$



6) Через скільки місяців отримається прибуток при

2000 клієнтах на місяць.

Искажемо t , коли:

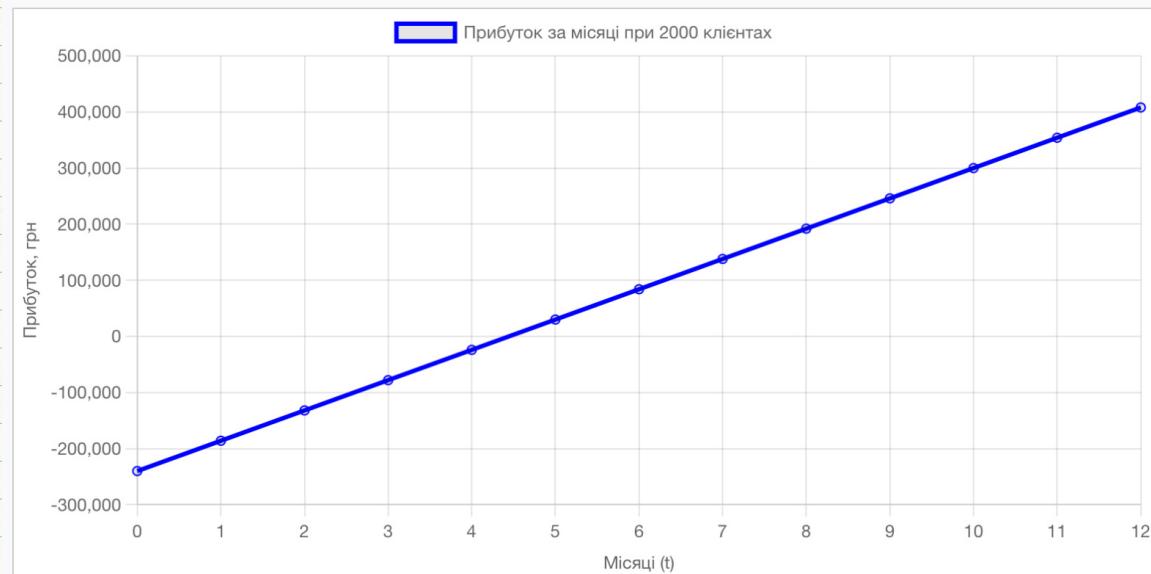
$$P(2000, t) = 45 \cdot 2000 \cdot t - (240000 + 36000 \cdot t) = 0$$

$$80000t - 240000 - 36000t = 0 \Rightarrow$$

$$54000t = 240000 \Rightarrow t = \frac{240000}{54000} = 4.44$$

Прибуток через 4,5 місяці при 2000 клієнтах.

3. Прибуток $P(2000, t)$ залежно від місяців (2000 клієнтів/міс)



Бізнес-план кафе: графіки витрат, доходів і прибутку

1. Загальні витрати $V(t)$

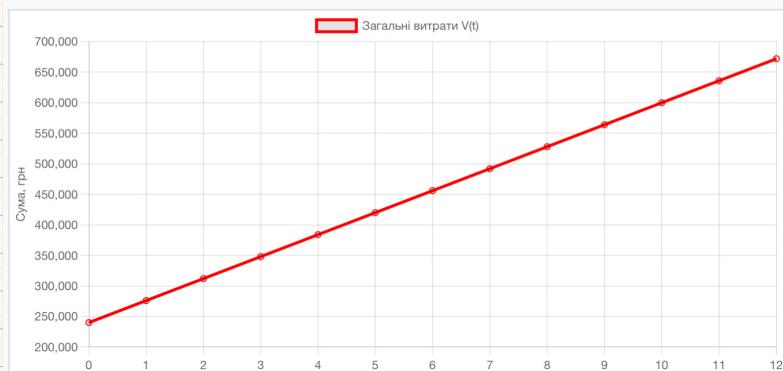


Рис. 2

2. Прибуток $P(n, 12)$ залежно від клієнтів за рік

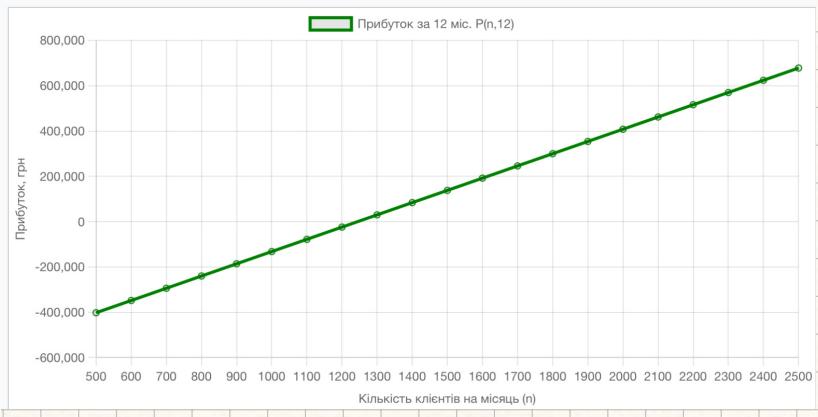


Рис. 1

10) Система водопостачання

Задача 2: Система водопостачання

У селищі встановлюють нову систему водопостачання.

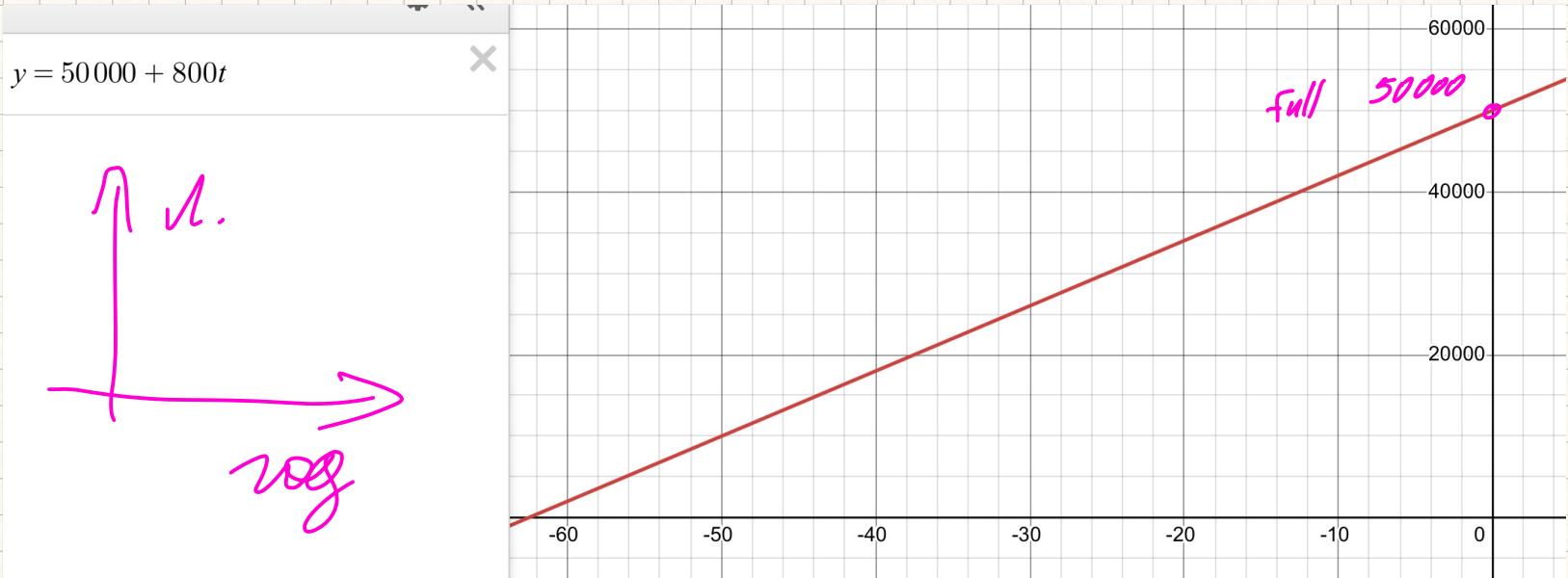
Водонапірна башта містить 50 000 л води. Вночі (з 22:00 до 6:00) башта наповнюється зі швидкістю 800 л/год. Вдень споживання води становить 1200 л/год, але наповнення не припиняється.

Завдання:

1. Складіть функцію кількості води $V_1(t)$ для нічного періоду (t — години після 22:00)
2. Складіть функцію кількості води $V_2(t)$ для денного періоду (t — години після 6:00)
3. Визначте кількість води в башті о 6:00 ранку
4. Знайдіть, о котрій годині дня рівень води буде мінімальним
5. Побудуйте графік зміни рівня води протягом доби
6. Розрахуйте, на скільки потрібно збільшити швидкість наповнення, щоб рівень води ніколи не опускався нижче 20 000 л

1) Функція є функцією періоду ($y = 50000 + 800t$)

$V_1(t) = 50000 + 800t$ час починається з 10:00 PM (from 10:00PM to 6:00AM)
поступовий наповнення за певний період 800 л/год.



$t=0$ в 22:00, $V(0)$ – початковий об'єм в 22:00 в баках.

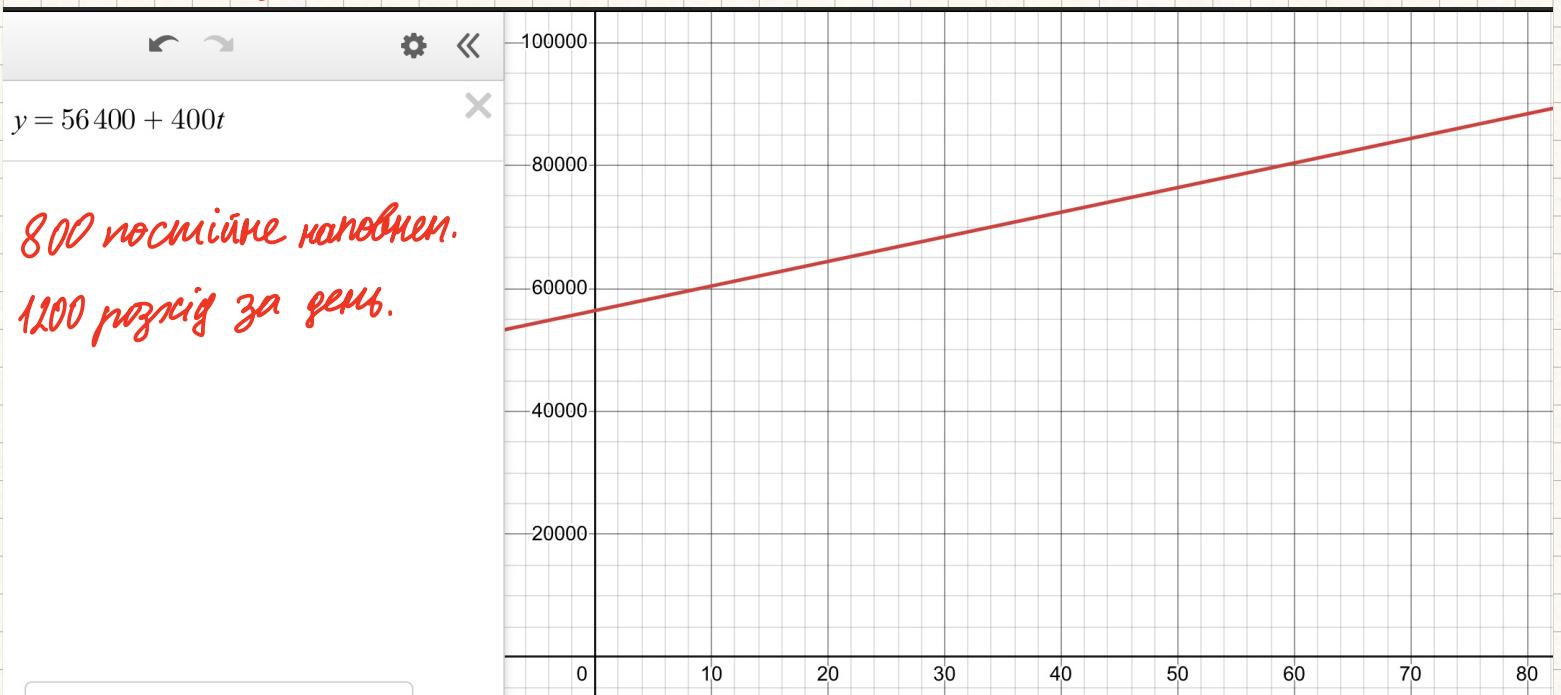
$$V_1(t) = V_0 + 800t \text{ де } t \in [0, 8] \text{ годин.}$$

2) Як х-ти баки є функцією періоду

$$V_2(t) = 56400 - 400t \text{ Часовник і витрати баку}$$

$$800 - 1200 = -400 \text{ л/год} \cdot 3 \text{ год} = 6 \text{ годин.}$$

$$\text{Об'єм з 6:00AM } 50000 + 800 \cdot 8 = 50000 + 6400 = 56400$$



800 постійне наповнення.

1200 витрати за годину.



$$y = 56400 + 400t$$

$$y = 50000 + 800t$$

$$V_1(t) = 50000 + 800t$$

$$V_2(t) = 56400 - 400t$$



Увійдіть або
[зареєструйтесь](#), щоб
зберегти свою
прекрасний
математичний твір!

