Раціональні вирази

Раціональні вирази — це математичні вирази, які складаються з многочленів у чисельнику та знаменнику. Вони мають вигляд дробу, де і чисельник, і знаменник є многочленами. Раціональні вирази використовуються для представлення відношень між двома многочленами.

Види раціональних виразів

1. **Прості раціональні вирази**: Це вирази, в яких чисельник і знаменник є одночленами або простими многочленами. Наприклад:

$$\frac{x}{2}, \quad \frac{x+1}{x-1}$$

3. **Складні раціональні вирази**: Це вирази, в яких чисельник і/або знаменник є складнішими многочленами. Наприклад:

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}, \quad \frac{x^3-8}{x^2+4x+4}$$

4. **Раціональні функції**: Це функції, які можна представити у вигляді раціонального виразу. Наприклад:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$$

Застосування раціональних виразів

1. **Алгебра та аналіз**: Раціональні вирази використовуються для розв'язання рівнянь, спрощення виразів, інтегрування та диференціювання.
2. **Фізика**: Вони застосовуються для моделювання фізичних явищ, таких як рух тіл, електричні кола тощо.

RADIO

3. **Економіка**: Раціональні вирази використовуються для моделювання економічних процесів, таких як попит і пропозиція, оптимізація ресурсів.
4. **Інженерія**: Вони застосовуються для проектування та аналізу систем, таких як механічні конструкції, електричні мережі тощо.
5. **Комп'ютерні науки**: Раціональні вирази використовуються в алгоритмах обчислень, комп'ютерній графіці та обробці даних.

CS

Раціональні вирази є важливим інструментом у багатьох галузях науки та техніки, допомагаючи аналізувати та розв'язувати різноманітні задачі.

Чи можна вважати раціональні вирази складними дробами

Раціональні вирази **можна** представити у вигляді **складних дробів**, але **не всі раціональні вирази є складними дробами**.

Визначення:

- **Раціональний вираз** — це вираз у вигляді дробу, чисельник і знаменник якого є многочленами.

Наприклад:

$$\frac{x^2+1}{x-3}$$

- **Складний дріб** — це дріб, у якому **чисельник або знаменник (або обидва)** є також дробом.

Наприклад:

$$\frac{\frac{1}{x}+2}{\frac{3}{x^2}-1}$$

Висновок:

Раціональний вираз **може бути** складним дробом, якщо має у своєму складі інші дроби. Але **не кожен раціональний вираз — складний дріб**.

Наприклад:

- $\frac{x+1}{x-2}$ — **раціональний вираз**, але **не складний дріб**.
- $\frac{\frac{1}{x}+2}{3x}$ — **раціональний вираз і складний дріб**.

Отже, **складні дроби — це підвид раціональних виразів**, але не тотожні їм.

1

§ 1. Раціональні вирази

Дробові раціональні вирази

Розрізняють цілі і дробові раціональні вирази. В **цілому** виразі немає ділення на змінну. В **дробовому** виразі є ділення на вираз, в який входить змінна.

Правило	Приклади
Значення змінних, при яких можливі всі математичні дії, записані в раціональному виразі, називаються **допустимими значеннями змінних**.	$\frac{4}{x-8}$ — у цього раціонального дробу при $x=8$ в знаменнику отримуємо $x-8=8-8=0$, тому допустимими значеннями даного дробу є всі числа, крім $x=8$.
Щоб знайти допустимі значення раціонального дробу, треба прирівняти знаменник до нуля, знайти розв'язки отриманого рівняння, і з усіх чисел виключити розв'язки отриманого рівняння.	Знайти допустимі значення виразу: $\frac{x}{3x-x^2}$; Прирівняємо знаменник до нуля і розв'яжемо це рівняння: $3x-x^2=0$, винесемо x за дужки $x(3-x)=0$, добуток дорівнює нулю, якщо хоча б один із множників дорівнює нулю, тобто $x=0$, або $3-x=0$. Допустимими значеннями змінної є всі числа, крім $x=0$ або $x=3$. Відповідь: x — будь-яке число, крім 0 та 3.

Дії з раціональними дробами

Правило	Приклади
Скорочення дробів	
Скоротити дріб — це означає поділити чисельник і знаменник дробу на спільний множник. Ця дія обумовлена основною властивістю дробу. Для того, щоб скоротити дріб, треба: а) розкласти чисельник і знаменник дробу на множники; б) виділити спільний множник в чисельнику і знаменнику дробу; в) розділити чисельник і знаменник дробу на спільний множник.	Скоротити дріб: $\frac{3x-18x^2}{15x^2-90x^3}$, а) розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники, для цього винесемо за дужки спільний множник: $\frac{3x(1-6x)}{15x^2(1-6x)}$; б) виберемо спільний множник в чисельнику і знаменнику – це $3x(1-6x)$; в) скоротимо дріб на $3x(1-6x)$. Відповідь: $\frac{1}{5x}$.
Додавання і віднімання дробів	
Сума (різниця) двох дробів з однаковими знаменниками дорівнює дробу з тим самим знаменником і чисельником, який дорівнює сумі (різниці) чисельників вихідних дробів.	$\frac{3a-4}{a-1}+\frac{7-4a}{a-1}=\frac{3a-4+7-4a}{a-1}=\frac{3-a}{a-1}$; $\frac{3a-4}{a-1}-\frac{7-4a}{a-1}=\frac{3a-4-(7-4a)}{a-1}=$ $=\frac{3a-4-7+4a}{a-1}=\frac{7a-11}{a-1}$.

При додаванні (відніманні) двох раціональних дробів з різними знаменниками треба звести дроби до спільного знаменника та виконати додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками.	$\frac{5}{x-1}+\frac{4}{x+1}=\frac{5(x+1)}{x-1}+\frac{4(x-1)}{x+1}=\frac{5x+5+4x-4}{(x-1)(x+1)}=\frac{9x+1}{x^2-1}$; $\frac{1}{c}-\frac{3a}{c^2+3ac}=\frac{1(c+3a)}{c}-\frac{3a}{c(c+3a)}=\frac{c+3a-3a}{c(c+3a)}=\frac{1}{c+3a}$.
Множення і ділення дробів	
Добуток двох раціональних дробів дорівнює дробу, чисельник якого дорівнює добутку чисельників, а знаменник дорівнює добутку знаменників дробів, що помножуються.	$\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{4x+1}{x-1}=\frac{(x-1)(4x+4)}{(x+1)(x-1)}=\frac{(x-1)4(x+1)}{(x+1)(x-1)}=4$.
Частка від ділення двох раціональних дробів дорівнює добутку дробу, діленого на дріб, обернений дільнику.	$\frac{x}{a^2-4}:\frac{3x^2}{5a-10}=\frac{x(5a-10)}{(a^2-4)3x^2}=$ $=\frac{5x(a-2)}{(a-2)(a+2)3x^2}=\frac{5}{3x(a+2)}$.
Зручніше перед множенням або діленням раціональних дробів розкласти, якщо це можливо, їх чисельники і знаменники на множники.	
Піднесення раціональних дробів до степеня	
Степінь раціонального дробу дорівнює дробу, у якого чисельник є степенем чисельника, а знаменник – степенем знаменника.	$\left(\frac{x^2-9}{xy+3y}\right)^3=\left(\frac{(x-3)(x+3)}{y(x+3)}\right)^3=\left(\frac{x-3}{y}\right)^3=\frac{(x-3)^3}{y^3}$; $\left(\frac{5ac^2}{3x^3}\right)^4=\frac{(5ac^2)^4}{(3x^3)^4}=\frac{5^4a^4c^8}{3^4x^{12}}=\frac{625a^4c^8}{81x^{12}}$.

Степінь з цілим показником

Множина цілих чисел (Z) – це множина, що складається з натуральних чисел, числа нуль і чисел протилежних натуральним.

Тому поняття степеня a^n, де $n-$ натуральне число, можна розширити, якщо розглянути випадки $n=0$ і n — ціле від'ємне число.

Означення	Приклади
Якщо $a\neq 0$ і $n-$ ціле від'ємне число, то $a^n=\frac{1}{a^{-n}}$	$5^{-3}=\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125}$; $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^3}=5^3=125$.
$a^0=1$.	$(1,25)^0=1$; $(-17)^0=1$.

Корисно запам'ятати

0^0 – не визначено.	$0^{-3}=\frac{1}{0^3}-$ не визначено
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$, $(a\neq 0;\ b\neq 0)$	$\left(\frac{2}{7}\right)^{-3}=\left(\frac{7}{2}\right)^3$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=\left(\frac{2}{1}\right)^3=2^3=8$

Властивості степеня з цілим показником

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$5^5 \cdot 5^{-7} = 5^{5-7} = 5^{-2}$	$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, (a \neq 0)$	$3^{-7} : 3^5 = 3^{-7-5} = 3^{-12}$	$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n} (a \neq 0)$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(3^{-2})^3 = 3^{-6};\ (3^2)^{-3} = 3^{-6}$	$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m;$
$(ab)^n = a^n \cdot b^n$	$(2 \cdot 3)^{-3} = 2^{-3} \cdot 3^{-3}$	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, (b \neq 0)$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n (b \neq 0)$

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

1. Виконати дії. **Рекомендація**. Подібні завдання краще робити за діями — зменшується можливість помилки!	$\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{x+y}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\right) : \frac{(x+y)^2}{x^2y^2}.$
Розв'язання.	1) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$,
	2) $\frac{2}{x+y} \cdot \frac{x+y}{xy} = \frac{2(x+y)}{(x+y)xy} = \frac{2}{xy}$,
	3) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} = \frac{y^2 + x^2 + 2xy}{x^2y^2} = \frac{(x+y)^2}{x^2y^2}$,
	4) $\frac{(x+y)^2}{x^2y^2} : \frac{(x+y)^2}{x^2y^2} = 1.$
Відповідь: 1.	
2. Довести тотожність.	$\frac{a - \frac{x^2}{a}}{x - \frac{a^2}{x}} = -\frac{x}{a}.$
Доведення. Спростимо ліву частину рівняння:	$\frac{a - \frac{x^2}{a}}{x - \frac{a^2}{x}} = \left(a - \frac{x^2}{a}\right) : \left(x - \frac{a^2}{x}\right)$
чисельник:	1) $a - \frac{x^2}{a} = \frac{a^2 - x^2}{a}$,
знаменник:	2) $x - \frac{a^2}{x} = \frac{x^2 - a^2}{x}$,
	3) $\frac{a^2 - x^2}{a} : \frac{x^2 - a^2}{x} = \frac{a^2 - x^2}{a} \cdot \frac{x}{x^2 - a^2} = \frac{(a^2 - x^2)x}{-a(a^2 - x^2)} = -\frac{x}{a}$,

тотожність доведена:	4) $-\frac{x}{a} = -\frac{x}{a}$.
3. Скоротити дріб.	$\frac{ax+ay-bx-by}{ax-ay-bx+bx}$.
Розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники способом групування:	$\frac{ax+ay-bx-by}{ax-ay-bx+by} = \frac{a(x+y)-b(x+y)}{a(x-y)-b(x-y)} = \frac{(x+y)(a-b)}{(x-y)(a-b)} = \frac{x+y}{x-y}$.
Відповідь: $\frac{x+y}{x-y}$.	
4. Скоротити дріб.	$\frac{a^2b+ab^2}{a^3+b^3+3ab(a+b)}$.
Для того, щоб розкласти на множники, в чисельнику винесемо спільний множник за дужки, а в знаменнику застосуємо формулу суми кубів і винесемо спільний множник за дужки, тоді отримаємо:	$\frac{a^2b+ab^2}{a^3+b^3+3ab(a+b)} = \frac{ab(a+b)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)+3ab(a+b)} =$ $= \frac{ab(a+b)}{(a+b)(a^2-ab+b^2+3ab)} = \frac{ab}{a^2+2ab+b^2} = \frac{ab}{(a+b)^2}$.
Відповідь: $\frac{ab}{(a+b)^2}$.	
5. Скоротити дріб.	$\frac{a^2+3a+2}{a^2+6a+5}$.
Для того, щоб розкласти чисельник і знаменник дробу на множники, застосуємо спосіб групування.	Для цього подамо a^2+3a+2 як $a^2+a+2a+2$, аналогічно подамо знаменник: $a^2+6a+5 = a^2+a+5a+5$, отримаємо: $\frac{a^2+3a+2}{a^2+6a+5} = \frac{a^2+a+2a+2}{a^2+a+5a+5} = \frac{a(a+1)+2(a+1)}{a(a+1)+5(a+1)} = \frac{(a+1)(a+2)}{(a+1)(a+5)} = \frac{a+2}{a+5}$.
Відповідь: $\frac{a+2}{a+5}$.	
6. Спростити алгебраїчний вираз.	$\frac{a^6+64}{a^4-4a^2+16} - \frac{a^4-16}{a^2+4}$.
Застосуємо формулу різниці кубів і різниці квадратів в чисельниках дробів:	$\frac{a^6+64}{a^4-4a^2+16} - \frac{a^4-16}{a^2+4} = \frac{(a^2)^3+4^3}{a^4-4a^2+16} - \frac{(a^2)^2-4^2}{a^2+4} =$ $= \frac{(a^2+4)(a^4-4a^2+16)}{a^4-4a^2+16} - \frac{(a^2-4)(a^2+4)}{a^2+4} =$ $= a^2+4-(a^2-4) = a^2+4-a^2+4 = 8$.
Відповідь: 8.	

7. Спростити вираз.	$\frac{x^3+y^3}{x+y}:\left(x^2-y^2\right)+\frac{2y}{x+y}-\frac{xy}{x^2-y^2}$.
Інколи для перетворення алгебраїчних виразів застосовують спосіб послідовних перетворень або одночасно декількох перетворень. Кажуть: «Спростимо "ланцюжком"». При користуванні цим методом, треба бути дуже уважним.	$\frac{(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)}{x+y}\cdot\frac{1}{(x-y)(x+y)}+$ $+\frac{2y(x-y)-xy}{(x+y)(x-y)}=\frac{x^2-xy+y^2}{(x-y)(x+y)}+\frac{2xy-2y^2-xy}{(x-y)(x+y)}=$ $=\frac{x^2-xy+y^2+xy-2y^2}{(x-y)(x+y)}=\frac{x^2-y^2}{x^2-y^2}=1.$
Відповідь: 1.	
8. Виконати дії	$\frac{3^{-2}a^{-1}b}{27^{-1}x}$;
Використаємо означення степеня з від'ємним показником:	$\frac{3^{-2}a^{-1}b}{27^{-1}x}=\frac{27b}{3^2ax}=\frac{3^3b}{3^2ax}=\frac{3b}{ax}$.
Відповідь: $\frac{3b}{ax}$.	
9. Спростити вираз.	$\left(\frac{2}{3}a^{-2}\left(b^3\right)^{-3}\right)^4$.
	$\left(\frac{2}{3}a^{-2}\left(b^3\right)^{-3}\right)^4=\frac{2^4}{3^4}a^{-8}b^{-36}=\frac{2^4}{3^4a^8b^{36}}$.
Відповідь: $\frac{2^4}{3^4a^8b^{36}}$.	
10. Подати вираз у вигляді дробу.	$\left(5a^{-1}+b^{-2}\right)\cdot\left(5a^{-1}-b^{-2}\right)$.
Використаємо формулу різниці квадратів і означення степеня з від'ємним показником:	$\left(5a^{-1}+b^{-2}\right)\cdot\left(5a^{-1}-b^{-2}\right)=$ $=\left(5a^{-1}\right)^2-\left(b^{-2}\right)^2=\left(\frac{5}{a}\right)^2-\left(\frac{1}{b^2}\right)^2=$ $=\frac{25}{a^2}-\frac{1}{b^4}=\frac{25b^4-a^2}{a^2b^4}$.
Відповідь: $\frac{25b^4-a^2}{a^2b^4}$.	

Арифметичні дії над раціон. виразами

Додавання

З однаков знаменниками

$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3+2}{7} = \frac{5}{7}$; $\frac{8}{11} - \frac{3}{11} = \frac{8-3}{11} = \frac{5}{11}$;

З різними знаменниками

$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$; $\frac{5}{6} - \frac{1}{8} = \frac{20}{24} - \frac{3}{24} = \frac{17}{24}$

Множення

$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$; $\frac{3}{7} \cdot \frac{14}{9} = \frac{3 \cdot 14}{7 \cdot 9} = \frac{42}{63} = \frac{2}{3}$

Ділення

$\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$; $\frac{7}{12} : \frac{14}{3} = \frac{7}{12} \cdot \frac{3}{14} = \frac{21}{168} = \frac{1}{8}$

Скорочення

$\frac{12}{18} = \frac{12/6}{18/6} = \frac{2}{3}$; $\frac{24}{36} = \frac{24/12}{36/12} = \frac{2}{3}$

Перетворення мішаних чисел

$2\frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{7}{3}$; $\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$ (оскільки $11 : 4 = 2$ остача 3)

Порівняння

$\frac{3}{4}$ і $\frac{5}{6}$ приводимо до спільного знаменника $\frac{9}{12}$ і $\frac{10}{12}$ тому

$\frac{3}{4} < \frac{5}{6}$

1. Спрощення виразів:

- Знайдіть спільний знаменник для всіх дробів у виразі.
- Спростіть чисельник і знаменник, якщо це можливо, шляхом винесення спільних множників.

2. Додавання і віднімання:

- Знайдіть спільний знаменник для дробів.
- Перетворіть кожен дріб так, щоб вони мали спільний знаменник.
- Додайте або відніміть чисельники, залишаючи знаменник незмінним.
- Спростіть отриманий вираз, якщо це можливо.

3. Множення:

- Перемножте чисельники між собою і знаменники між собою.
- Спростіть отриманий вираз, якщо це можливо.

4. Ділення:

- Перетворіть ділення на множення, взявши обернений дріб до діленого.
- Виконайте множення, як описано вище.

1. Спрощення виразу $\frac{x^2-4}{x-2}$; $\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2$

2. Додавання $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$; $\frac{y}{xy}+\frac{x}{xy}=\frac{x+y}{xy}$ (xy - спільний знам)

3. Віднімання $\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}$;

Знайдемо спільний знаменник x^2

$$\frac{3x}{x^2}-\frac{2}{x^2}=\frac{3x-2}{x^2}$$

????

4. Множення $\frac{2}{x}\cdot\frac{3}{y}$

Перемножуємо чисельник і знаменник

$$\frac{2\cdot 3}{x\cdot y}=\frac{6}{xy}$$

5. Ділення $\frac{4}{x}:\frac{2}{y}$

Перетворюємо ділення на множення оберненим дробом

$$\frac{4}{x}\cdot\frac{y}{2}=\frac{4y}{2x}=\frac{2y}{x}$$

6. Піднесення до степеня $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{3^3}{3^3}=\frac{8}{27};\quad \left(\frac{x^2}{y^3}\right)^2=\frac{(x^2)^2}{(y^3)^2}=\frac{x^4}{y^6}$$

$$\left(\frac{2x^3}{3y^2}\right)^3=\frac{(2x^3)^3}{(3y^2)^3}=\frac{8x^9}{27y^6};\quad \left(\frac{a^{-2}}{b^{-3}}\right)^2=\frac{(a^{-2})^2}{(b^{-3})^2}=\frac{a^{-4}}{b^{-6}}=\frac{b^6}{a^4}$$

$$\left(\frac{a^{-1}}{b^{-2}}\right)^2=\frac{(a^{-1})^2}{(b^{-2})^2}=\frac{a^{-2}}{b^{-4}}=\frac{b^4}{a^2}$$

Rational Expressions Actions

Піднесення до степеню виразу з різними змінними.

$$\left(\frac{x^2y^3}{z^4}\right)^3=\frac{(x^2y^3)^3}{(z^4)^3}=\frac{x^6y^9}{x^{12}}$$

П.д.с. виразу з множниками та різн. змінними:

$$\left(\frac{2a^3b^2}{3c^4d^5}\right)^2=\frac{(2a^3b^2)^2}{(3c^4d^5)^2}=\frac{4a^6b^4}{9c^8d^{10}}$$

П.д.с. виразу з від'ємними показ:

$$\left(\frac{x^{-1}y^2}{z^{-3}w^4}\right)^2=\frac{(x^{-1}y^2)^2}{(z^{-3}w^4)^2}=\frac{x^{-2}y^4}{z^{-6}w^8}=\frac{y^4z^6}{x^2w^8}$$

П.д.с. виразу із різними змінними та складнішими показниками:

$$\left(\frac{a^2b^{-3}c^4}{x^{-1}y^2z^3}\right)^3=\frac{(a^2b^{-3}c^4)^3}{(x^{-1}y^2z^3)^3}=\frac{a^6b^{-9}c^{12}}{x^{-3}y^6z^9};$$

$\frac{a^6b^{-9}c^{12}}{x^{-3}y^6z^9}$ 1. Переписування вираз з урах. від'ємних степ.

від'ємні степ. можна предст. $b^{-9}=\frac{1}{b^9}$; $x^{-3}=\frac{1}{x^3}$ отже:

$$\frac{a^6b^{-9}c^{12}}{x^{-3}y^6z^9}=\frac{a^6\cdot\frac{1}{b^9}\cdot c^{12}}{\frac{1}{x^3}\cdot y^6\cdot z^9};$$ Еквівалентно $\frac{a^6c^{12}}{b^9}\cdot\frac{x^3}{y^6z^9}$

2. Спрощення (Перевіряємо чи є спіл. мно. в чисел. і знамен. які можна скоротити)

$$\frac{a^6c^{12}x^3}{b^9y^6z^9}$$

* Всі змінні різні нема що скорочув.

3. Альтернативна форма $\frac{a^6c^{12}x^3}{b^9y^6z^9}$ максимально спрощена форма (якщо пред. додат. ст.)

$$\frac{a^6c^{12}x^3}{b^9y^6z^9}=a^6b^{-9}c^{12}x^3y^{-6}z^{-9};$$

Оскільки ділення на y^6z^9 еквівалентно множ. на $y^{-6}z^{-9}$

1. Додавання і віднімання р. в.

$\frac{x^2y}{z^3}+\frac{ab^2}{c^2}-\frac{mn^3}{p^4}$; Чи може бути спільн. знам $z^3c^2p^4$

1) Аналіз

$\frac{x^2y}{z^3} \Rightarrow z^3$ $\frac{ab^2}{c^2} \Rightarrow c^2$ $\frac{mn^3}{p^4} \Rightarrow p^4$

Оскільки знаменники різні для проведення дій (+,-) потрібно знайти НСЗ для $z^3c^2p^4$ буде $c^2p^4z^3$ якщо припуст. що всі змінні незалежні.

2) Привести до спільного знам (спільне спрощення алгебраїчн. виразів)

для $\frac{x^2y}{z^3}$ помножте чис. і знам на c^2p^4 щоб отримат. знам. $c^2p^4z^3$

$$\frac{x^2y\cdot c^2p^4}{z^3\cdot c^2p^4}=\frac{x^2yc^2p^4}{c^2p^4z^3}$$

для $\frac{ab^2}{c^2}$ помножте чис і зн на p^4z^3

$$\frac{ab^2\cdot p^4z^3}{c^2\cdot p^4z^3}=\frac{ab^2p^4z^3}{c^2p^4z^3}$$

3) Об'єднання дробів

тепер вираз із спільн. зм. $c^2p^4z^3$

$$\frac{x^2yc^2p^4}{c^2p^4z^3}+\frac{ab^2p^4z^3}{c^2p^4z^3}-\frac{mn^3c^2z^3}{c^2p^4z^3}$$

скоротимо чисельн.

$$x^2yc^2p^4+ab^2p^4z^3-mn^3c^2z^3$$

$$\frac{x^2yc^2p^4+ab^2p^4z^3-mn^3c^2z^3}{c^2p^4z^3}$$

Відповідь: неможливо далі розкладати без додатк. умов.

2. Множення:

$$\frac{x^3y^2}{ab^4}\cdot\frac{m^2n^3}{p^5q^2}=\frac{x^3y^2m^2n^3}{ab^4p^5q^2}$$

3. Множення:

$$\frac{x^4y^5}{a^2b^3}:\frac{m^3n^2}{p^4q^5}=\frac{x^4y^5}{a^2b^3}\cdot\frac{p^4q^5}{m^3n^2}=\frac{x^4y^5p^4q^5}{a^2b^3m^3n^2}$$

4. Комбіновані операції

$$\left(\frac{a^2b^3}{x^4y^5}+\frac{m^3n^2}{p^4q^5}\right)\cdot\frac{x^2y^3}{ab^2};$$

Спочатку знай спільн. зн. для дробів у дужках щоб виконати множення.

Спільний знаменник для $\frac{a^2b^3}{x^4y^5}$ та $\frac{m^3n^2}{p^4q^5}$ буде $x^4y^5p^4q^5$

> Приведення до спільного знаменника

$$\frac{a^2b^3}{x^4y^5}=\frac{a^2b^3\cdot p^4q^5}{x^4y^5\cdot p^4q^5}=\frac{a^2b^3p^4q^5}{x^4y^5p^4q^5}$$

$$\frac{m^3n^2}{p^4q^5}=\frac{m^3n^2\cdot x^4y^5}{p^4q^5\cdot x^4y^5}=\frac{m^3n^2x^4y^5}{x^4y^5p^4q^5}$$

> Додаємо дроби в дужках $\frac{a^2b^3}{x^4y^5}+\frac{m^3n^2}{p^4q^5}=\frac{a^2b^3p^4q^5+m^3n^2x^4y^5}{x^4y^5p^4q^5}$

> Множимо на другий дріб

$$\frac{a^2b^3p^4q^5+m^3n^2x^4y^5}{x^4y^5p^4q^5}\cdot\frac{x^2y^3}{ab^2}=\frac{(a^2b^3p^4q^5+m^3n^2x^4y^5)\cdot x^2y^3}{x^4y^5p^4q^5\cdot ab^2}$$

$$\frac{(a^2b^3p^4q^5+m^3n^2x^4y^5)x^2y^3}{x^4y^5p^4q^5ab^2}=\frac{x^2y^3(a^2b^3p^4q^5+m^3n^2x^4y^5)}{x^4y^5p^4q^5ab^2}$$

> Спростимо степені $x^2:x^4=\frac{1}{x^2}$; $y^3:y^5=\frac{1}{y^2}$

Відповідь: $\frac{a^2b^3p^4q^5+m^3n^2x^4y^5}{x^2y^2p^4q^5ab^2}$

Спосіб 2

$$\left(\frac{a^2b^3}{x^4y^5}+\frac{m^3n^2}{p^4q^5}\right)\cdot\frac{x^2y^3}{ab^2};$$

Розподільчий множення на кожен доданок у дужках

$$\frac{a^2b^3}{x^4y^5}\cdot\frac{x^2y^3}{ab^2}+\frac{m^3n^2}{p^4q^5}\cdot\frac{x^2y^3}{ab^2}$$

Обчислити кожен добуток окремо

1) $\frac{a^2b^3}{x^4y^5}\cdot\frac{x^2y^3}{ab^2}=\frac{a^2b^3\cdot x^2y^3}{x^4y^5\cdot ab^2};$

спрощений степенів

$a^2:a=a^1=a$

$b^3:b=b^1=b$

$x^2:x^4=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$

$y^3:y^5=y^{-2}=\frac{1}{y^2}$

$$\frac{ab}{x^2y^2}$$

2) $\frac{m^3n^2}{p^4q^5}\cdot\frac{x^2y^3}{ab^2}=\frac{m^3n^2x^2y^3}{p^4q^5ab^2}$

Відповідь: $\frac{ab}{x^2y}+\frac{m^3n^2x^2y^3}{p^4q^5ab^2}$

2. Піднесення до степеня р. в.

$$\left(\frac{x^2y^3}{a^4b^5}\right)^2 \cdot \frac{m^3n^2}{p^4q^5};$$

1. Піднес до степеня

$$\left(\frac{x^2y^3}{a^4b^5}\right)^2 = \frac{(x^2y^3)^2}{(a^4b^5)^2} = \frac{x^4y^6}{a^8b^{10}}$$

2. Перемноження дробів $\frac{x^4y^6}{a^8b^{10}} \cdot \frac{m^3n^2}{p^4q^5}$

Перемнож ч і ч, з і з.

$$\frac{x^4y^6 \cdot m^3n^2}{a^8b^{10} \cdot p^4q^5} = \frac{x^4y^6m^3n^2}{a^8b^{10}p^4q^5};$$

Відповідь: $\frac{x^4y^6m^3n^2}{a^8b^{10}p^4q^5}$

* Далі складніші приклади спрощення і скорочення р.в. при діленні р.в. Далі будуть представл. такі операції як. розклад. на множ (різниця кв. різн. кубів, повні квадрати, розклад многочленів)

Перетворення ділен в множ. на обернен. дріб

Систематич. скороч. спільних множн.

Урахуван області допус знач ОДЗ

Факторизація чисельн і знамен

1) $\dfrac{x^2-9}{x^2+6x+9} : \dfrac{x^2-2x-3}{x^2+4x+3}$

1) Розкладаємо всі многочлени на множники

$x^2-9=(x-3)(x+3)$ різниця квадратів

$x^2+6x+9=(x+3)^2$ квадрат суми (повний квадрат)

$x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$ розкладання тричлена

$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$ розклад тричлена

2) Перетвор ділення на множ. на обер. дріб

$$\frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)^2}\cdot\frac{(x+1)(x+3)}{(x-3)(x+1)}$$

3) Скороч спільні множн.

$$\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x+3)^2}}\cdot\frac{\cancel{(x+1)}\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x-3)}\cancel{(x+1)}}$$

Відповідь: $\frac{1}{1}=1$, за умови що $x \neq -3, -1, 3$

2) $\dfrac{2x^2-8x}{x^2-16} : \dfrac{x^2-6x+8}{x^2-2x-8}$

1) Розклад многочлена на множники

$2x^2-8x=2x(x-4)$

$x^2-16=(x-4)(x+4)$ різниця квадрат

$x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$

$x^2-2x-8=(x-4)(x+2)$

2) Перетворення в множення

$$\frac{2x(x-4)}{(x-4)(x+4)}\cdot\frac{(x-4)(x+2)}{(x-2)(x-4)}$$

3) скороч спільн множ.

$$\frac{2x(x-4)}{(\cancel{x-4})(x+4)} \cdot \frac{(\cancel{x-4})(x+2)}{(x-2)(\cancel{x-4})}$$

Відповідь: $\frac{2x(x+2)}{(x+4)(x-2)}$ О.Д.З. $x \neq 0, 2, 4, -2, -4$

3) $$\frac{x^3-1}{x^2-1} : \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1} \cdot \frac{x+1}{x^2-x+1}$$

1) Розкладаємо всі многочлени

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ різниця кубів

$x^2-1=(x-1)(x+1)$ різниця квадратів

x^2+x+1

2) Підставляємо нові вирази

$$\frac{(\cancel{x-1})\cancel{(x^2+x+1)}}{(\cancel{x-1})(x+1)} \cdot \frac{(x+1)^2}{\cancel{x^2+x+1}} \cdot \frac{x+1}{x^2-x+1}$$

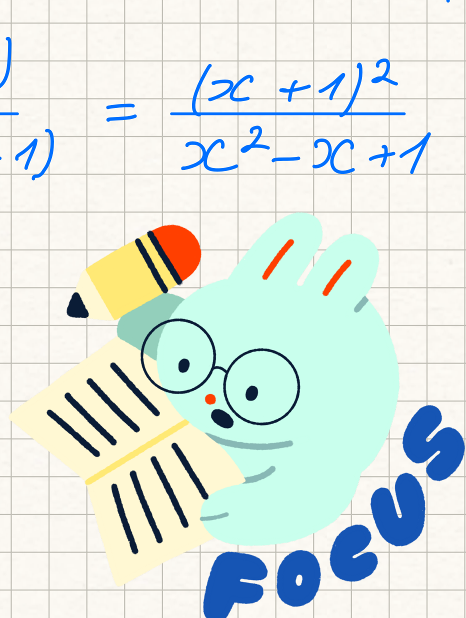
3) Поетапне скорочення $\frac{1}{x+1}\cdot(x+1)^2\cdot\frac{x+1}{x^2-x+1}$

$$\frac{(x+1)^2\cdot(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}$$

Відповідь: $\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}$, $x \neq 1, -1$

* правила виріш. складних р.в.

1. розклад многоч. на множники
2. перетвор ділення на множен.
3. Виписати обл. допус. знач ОДЗ окремо
4. скороч множників поетапно
5. Перевірити результ підстановкою простих значень.



4) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^3-8} : \dfrac{x^2-4}{x^2+2x+4}$

1.) Ділення на множення

$$\frac{x^2-4x+4}{x^3-8}\cdot\frac{x^2+2x+4}{x^2-4}$$

2) Факторизація чисельн. і знамен.

розкладання кожного виразу на множники

$x^2-4x+4=(x-2)^2$ квадратний тричлен, корінь $x=2$

$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$ різниця кубів

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, де $a=x$, $b=2$

x^2+2x+4 не розкладається на лінійні множники

оскільки дискримінант $D=2^2-4\cdot1\cdot4=4-16=-12<0$

$x^2-4=(x-2)(x+2)$ різниця квадратів

$$\frac{\cancel{(x-2)^2}}{(x-2)\cancel{(x^2+2x+4)}}\cdot\frac{\cancel{x^2+2x+4}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}$$

3) Скорочення спільних множників

$$\frac{(x-2)}{1}\cdot\frac{1}{(x+2)}=\frac{x-2}{x+2}$$

4) Перевірка умов Вираз визначений коли знам $\neq 0$

$x^3-8=0 \Rightarrow x=2$

$x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm2$;

Отже, $x\neq2$, $x\neq-2$

Відповідь: $\dfrac{x-2}{x+2}$; $x\neq\pm2$

5) $\dfrac{2x^3+3x^2-2x-3}{x^4-x^2} : \dfrac{2x^2+5x+3}{x^3+x}$

1) Перетв діл на множ.

$$\frac{2x^3+3x^2-2x-3}{x^4-x^2}\cdot\frac{x^3+x}{2x^2+5x+3}$$

2) Факторизація ч. і м.

Спробуємо розкласти методом групування або підбір коренів (за теоремою про раціональні корені)

Перевіримо можливі корені $(\pm1, \pm3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2})$

Для $x=-1$: $2(-1)^3+3(-1)^2-2(-1)-3+3+2-3=0$ отже $x=-1$ – корінь

• Виконуємо ділення многочлена $2x^3+3x^2-2x-3$ на $x+1$

Метод ділення многочленів за "синтетичним методом" або метод Горнера", оскільки дільник є лінійним многочленом виду $x-a$ де $a=-1$

off detailed

1) Запис коеф-ів многочлена

Многочлен: $2x^3+3x^2-2x-3$

Коефіцієнти: $2, 3, -2, -3$.

Дільник $x+1=x-(-1)$ отже $a=-1$

2) Виконання синтетичного ділення

Схема синтет. ділен.

-1	2	3	-2	-3
		-2	-1	3
	2	1	-3	0

Пояснення:

Спускаємо перші коеф: 2

1) $2\cdot(-1)=-2$, дод до наступ коеф. $3+(-2)=1$

2) $1\cdot(-1)=-1$, дод: $-2+(-1)=-3$

3) $-3\cdot(-1)=3$, дод $-3+3=0$

Остан. число 0 - це залишок. залишок від ділення $= 0$ що означ, що $x+1$ є дільником многочлена

3) Запис результату

Коефіц результату (зліва від залишку) $2, 1, -3$

Це відповідає многочлену на один степінь нижчому, ніж початковий $2x^2 + x - 3$

Отже результ ділення: $\frac{2x^3+3x^2-2x-3}{x+1} = 2x^2 + x - 3$

4) Перевірка.

Розкладемо $2x^2 + x - 3$: $2x^2 + x - 3 = (2x+3)(x-1)$

Перевірка:

$$(x+1)(2x+3)(x-1) = (x+1)(2x^2+3x-2x-3) = (x+1)(2x^2+x-3) =$$

$$2x^3 + x^2 - 3x + 2x^2 + x - 3 = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$$

Відповідь: $\frac{2x^3+3x^2-2x-3}{x+1} = 2x^2 + x - 3$

Уникнути ділення на 0

Або у факторизованому вигляді:

$$2x^2 + x - 3 = (2x+3)(x-1), \quad x \neq -1$$

Для $x = -1$: $2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 2(-1) - 3 + 3 + 2 - 3 = 0$ отже $x = -1$ - корінь

• Виконуємо ділення многочлена $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$ на $x + 1$

-1	2	3	-2	-3
		-2	-1	3
	2	1	-3	0

Отримаємо $2x^2 + x - 3$. Перевіряємо, чи розкладається $2x^2 + x - 3$

$$2x^2 + x - 3 = (2x+3)(x-1)$$

Отже, $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 = (x+1)(2x+3)(x-1)$

Знаменник перш. дробу $x^4 - x^2 = x^2(x^2-1) = x^2(x-1)(x+1)$

Чисельн. другого. дробу $x^3 + x = x(x^2+1)$

Знам. друг. дробу $2x^2+5x+3=(2x+3)(x+1)$

Вираз після факторизації:

$$\frac{(x+1)(2x+3)(x-1)}{x^2(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x(x^2+1)}{(2x+3)(x+1)}$$

3) Запис результату

Коеф-и результату (зліва від залишку): 2, 1, −3

Це відповідає многочлену на один степінь нижчому, ніж початковий $2x^2+x-3$, отже

$$\frac{2x^3+3x^2-2x-3}{x+1}=2x^2+x-3$$

4) Перевірка:

Розкладаємо $2x^2+x-3$

$$2x^2+x-3=(2x+3)(x-1)$$

Тепер перевірка

$$(x+1)(2x+3)(x-1)=(x+1)(2x^2+3x-2x-3)=(x+1)(2x^2+x-3)=$$

$$2x^3+x^2-3x+2x^2+x-3=2x^3+3x^2-2x-3$$

Результ збіг з початковим многоч, отже, ділення виконано правильно

Відповідь: $\frac{2x^3+3x^2-2x-3}{x+1}=2x^2+x-3$

???

Крок 3: Скорочення спільних множників

- Скорочуємо $(x+1)$ (з'являється в чисельнику і знаменнику).
- Скорочуємо $(x-1)$.
- Скорочуємо $(2x+3)$.

Після скорочення:

$$\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x(x^2+1)}{1} = \frac{x(x^2+1)}{x^2}$$

Крок 4: Спрощення виразу

$$\frac{x(x^2+1)}{x^2} = \frac{x^3+x}{x^2} = \frac{x^3}{x^2} + \frac{x}{x^2} = x + \frac{1}{x}$$

Крок 5: Перевірка умов

Знаменники не дорівнюють нулю:

- $x^4 - x^2 = 0 \implies x^2(x^2-1) = 0 \implies x = 0, \pm 1$.
- $2x^2 + 5x + 3 = 0 \implies D = 25 - 24 = 1, x = \dfrac{-5 \pm 1}{4} \implies x = -1, -\dfrac{3}{2}$.
- $x^3 + x = 0 \implies x(x^2+1) = 0 \implies x = 0$ (оскільки $x^2 + 1 \neq 0$).

Отже, $x \neq 0, \pm 1, -\dfrac{3}{2}$.

Кінцева відповідь:

$$x + \frac{1}{x}, \quad x \neq 0, \pm 1, -\frac{3}{2}$$

6) $\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3+x^2-2x} : \dfrac{x^2-1}{x^3-x}$

1) Перетв дії в множ $\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3+x^2-2x} \cdot \dfrac{x^3-x}{x^2-1}$

2) Факторизація ч і з і скорочен

x^4-5x^2+4 Це біквадратний вираз, підстав

$u=x^2$ тоді $u^2-5u+4=(u-4)(u-1)=(x^2-4)(x^2-1)$

Далі $x^2-4=(x-2)(x+2)$, $x^2-1=(x-1)(x+1)$

Отже $x^4-5x^2+4=(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)$

$x^3+x^2-2x=x(x^2+x-2)=x(x+2)(x-1)$

$x^3-x=x(x^2-1)=x(x-1)(x+1)$

$x^2-1=(x-1)(x+1)$

Вираз після факторизації: $\dfrac{(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)}{x(x+2)(x-1)} \cdot \dfrac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}$

$$\dfrac{(x-2)\cancel{(x+2)}\cancel{(x-1)}(x+1)}{x\cancel{(x+2)}\cancel{(x-1)}} \cdot \dfrac{x\cancel{(x-1)(x+1)}}{\cancel{(x-1)(x+1)}}$$

$$\dfrac{(x-2)\cdot 1}{x\cdot 1} \cdot \dfrac{x\cdot 1}{1} = \dfrac{x-2}{x}\cdot x = x-2$$

3) Спрощення уже спрощений вираз $x-2$

4) Перевірка, підстановка Знамен. не дорів 0

$x^3+x^2-2x=x(x+2)(x-1)=0 \Rightarrow 0, -2, 1$

$x^2-1=(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x=\pm 1$

$x^3-x=x(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x=0, \pm 1$ Отже $x\neq 0, \pm 1, -2$

Відповідь: $x-2$, $x\neq 0, \pm 1, -2$