

Подібні доданки і прапорча дужок

Подібні доданки

Означення

Подібними доданками називають доданки, які рівні, або які відрізняються лише коефіцієнтами.

Звести подібні доданки — означає додати їх коефіцієнти, а буквену частину залишити незмінною.

Приклади

$$11a - 2b + 4a - 12a + c - 7b = \\ = (11+4-12)a + (-2-7)b + c = \\ = 3a - 9b + c.$$

Дужки

Дужки у виразі вводяться для зміни звичайного порядку дій:

- 1) піднесення до степеня (справа наліво);
- 2) множення або ділення (зліва направо);
- 3) додавання або віднімання (зліва направо).

$$13 + (7 - 3)^2 = 13 + 4^2 = 13 + 16 = 29; \\ (113 + 17) : (123 - 121) = 130 : 2 = 65; \\ (200 - 28) - (17 + 53) = 172 - 70 = 102.$$

Правила розкриття дужок

Якщо перед дужками стоїть знак «+», то дужки опускаються, а знаки доданків у дужках залишаються без змін.

$$\dots + (a + b) = \dots + a + b.$$

Якщо перед дужками стоїть знак «-», то дужки опускаються і знаки доданків змінюються на протилежні.

$$\dots - (a + b) = \dots - a - b.$$

Обчислити значення виразу

$$(2 + (3 \cdot 4)) : (5 - 1) = (2 + 12) : 4 = 14 : 4 = 3.5$$

Розкриття дужок та спрощення виразу

$$3(x + 2) + 4(2x - 1)$$

1) Розкриття дужок

$$3(x + 2) = 3x + 6$$

$$4(2x - 1) = 8x - 4$$

2) Об'єднаємо вирази

$$3x + 6 + 8x - 4 = 11x + 2$$



Розкриття бінарних дужок

$$2(3x + (4-x))$$

1) Розкриття виокремлених дужок

$$2(3x + (4-x)) = 2(3x + 4 - x) = 6x + 8 - 2x = 4x + 8$$

Розкриття дужок з піднесенням до степеня

$$(x+2)^2$$

1) Використання формул квадратів суми

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2) Піднесення знаків

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2$$

3) Способом

$$x^2 + 4x + 4 \quad (5x^2 + 4 ???)$$



Розкриття дужок з множниками мономів

$$(x+3)(x-2) = x(x-2) + 3(x-2) \leftarrow \text{Використ. розпод. } y ??$$

$$2) \text{Розкривати дужки } x^2 - 2x + 3x - 6$$

$$3) \text{Способом } x^2 + x - 6$$

$$(x+3)(x-2) = x(x-2) + 3(x-2) = x^2 - 2x + 3x - 6 = x^2 + x - 6$$

Іноді к додатку - це додатки, які мають одинакові дужкові частини. (коєфіцієнти)

$$3x + 5x = 8x; \quad 4m^2 + 3m^2 = 7m^2$$

$$7a + 2a = 9a; \quad 5xy + 2xy = 7xy$$

$$2a + 5b + 3a = 5a + 5b; \quad 4x^2 + 3xy + 2x^2 = 9x^2 + 3xy;$$

$$4ab + 2a + 5ab = 9ab + 2a$$

Розкритий дужок з подібними доданками

Пр.1 $3(2x + 2y) - 2(x - 3y)$

1) Використовуємо розподільну властивість.

$$3(2x + 2y) - 2(x - 3y) = 6x + 15y - 2x + 6y = \underline{(6x - 2x) + (15y + 6y)} = \underline{4x + 21y}$$

Пр.2

$$5(a+2b) + 2(3a-b) = 5a + 10b + 6a - 2b = (5a+6a) + (10b-2b) = 11a + 8b$$

$$5(a+2b) + 2(3a-b) =$$

$$5a + 10b + 6a - 2b =$$

$$(5a+6a) + (10b-2b) =$$

$$11a + 8b$$



Використання переставової та сполучної властив.

$$4x + 5y + 3x + 2y$$

1) Використов. переставову властивість щоб згрупувати подібні доданки

$$4x + 5y + 3x + 2y = \underline{4x + 3x} + 5y + 2y = (4+3)x + (5+2)y = 10x + 7y$$

Результат сума з подібними доданками

$$(2a+3b)(a-b)$$

$$(2a+3b)(a-b) = 2a(a-b) + 3b(a-b) = 2a^2 - 2ab + 3ab - 3b^2 =$$

$$\underline{2a^2 + (-2ab + 3ab) - 3b^2} = 2a^2 + ab - 3b^2 ;$$

$$(2a+3b)(a-b) =$$

$$2a(a-b) + 3b(a-b) =$$

(позодильна власт.)

$$2a^2 - 2ab + 3ab - 3b^2 =$$

(позодильна власт.)

$$2a^2 + (-2ab + 3ab) - 3b^2 =$$

зупинюю позодиї доданки

$$2a^2 + ab - 3b^2$$

Піднчуд квадратів з позодими доданками

$$(5a+b)^2 - (5a-b)^2 ;$$

Формула піднчуд квадратів

$$(5a+b)^2 - (5a-b)^2 =$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$[(5a+b) + (5a-b)][(5a+b) - (5a-b)] = (10a)(2b) = 20ab$$

Піднчуд до квадрату з використанням скороченого множ

$$\text{Пр.1. } (3x+2y)^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(3x+2y)^2 = \underline{(3x)^2 + 2(3x)(2y) + (2y)^2} = 9x^2 + 12xy + 4y^2$$

Пр.2.

$$2(3x-4y+z) + 5(x+2y-3z) =$$

$$6x - 8y + 2z + 5x + 10y - 15z =$$

$$(6x+5x) + (-8y+10y) + (2z-15z) =$$

$$11x + 2y = 13z$$

Винесення спільного членника за дужки

Пр.1. $12a^2b + 9ab^2 - 3ab = \underline{3ab}(4a + 3b - 1)$

Пр.2. $4x^2y + 6xy^2 - 10xy = \underline{2xy}(2x + 3y - 5)$

Правила розкриття дужок

+ перед дужками не міняє знак в дужках при розкритті

$$+(a+b) = +a+b$$

Пр.1. $+ (3+5) = +3+5 = 3+5 = 8$

$$+(x+y) = +x+y = x+y$$

$$2 + (3+4) = 2+3+4 = 9$$

$$m + (n+p) = m+n+p$$



Правило розкриття дужок з відніманням

- перед дужками значить що при розкритті дужок всі знаки в дужках міняються на противоположні

$$-(a+b) = -a-b$$

$$-(a-b) = -a+b$$

ПР

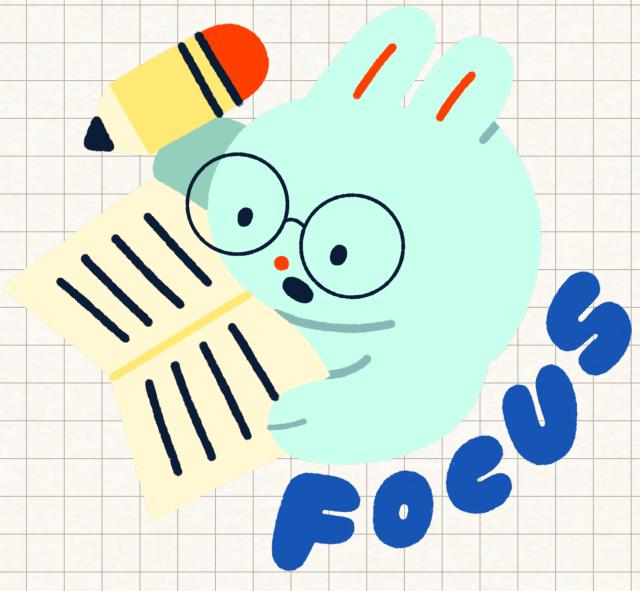
$$-(3+5) = -3-5 = -8$$

$$-(y-2) = -y+2 = -5$$

$$6 - (4+3) = 6-4-3 = -1$$

$$x - (y+z) = x-y-z$$

$$-(x-y-z) = -x+y+z$$



$$-(\beta+2) = -5; \quad 4-(6+8+3) = -13; \quad 3-(4+2-1) = -2$$

Множення одночленів на многочлен

При множенні одночленів на многочлен кожен член многочлена множиться на одночлен

$$a(b+c+d) = ab + ac + ad$$

Пр. 1

$$2(x+3) = 2x+6$$

$$-5(a-b+c) = -5a+5b-5c$$

$$x(y+z-3) = xy+xz-3x$$

$$3a^2(a+2b-c) = 3a^3 + 6a^2b - 3a^2c$$



Множення многочленів на многочлен (орієнтована "кожний з кожним")

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Пр. 1 $(x+2)(x+3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$

$$(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$$

$$(2x+1)(x-3) = 2x^2 - 6x + x - 3 = 2x^2 - 5x - 3$$

$$(x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 - x^2y + xy^2 + x^2y - x^2y + y^3 = x^3 + y^3$$

Формула скороченого множення

Квадрат суми $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Пр. 1 $(x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

$$(2a+b)^2 = (2a)^2 + 2 \cdot (2a) \cdot b + b^2 = 4a^2 + 4ab + b^2$$

Квадрат різниці $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Пр. $(x-5)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$

$$(3y-2)^2 = (3y)^2 - 2 \cdot (3y) \cdot 2 + 2^2 = 9y^2 - 12y + 4$$

Різниця квадратів $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$(x+3)(x-3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$$

$$(2y+5)(2y-5) = (2y)^2 - 5^2 = 4y^2 - 25$$

Куб суми $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 1 + 3x \cdot 1^2 + 1^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

Куб різниці $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$$(y-2)^3 = y^3 - 3y^2 \cdot 2 + 3y \cdot 2^2 - 2^3 = y^3 - 6y^2 + 12y - 8$$

Сума кубів $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$$x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - x \cdot 2 + 2^2) = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

Різниця кубів $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$$2^3 - y^3 = 3^3 - y^3 = (3-y)(3^2 + 3 \cdot y + y^2) = (3-y)(9 + 3y + y^2)$$

4. Піднесення до степеня

Піднесення виразу в дужках до степеня

Для піднесення виразу в дужках до степеня використовується біном Ньютона або формули скороченого множення.

Формула для біному Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C(n,k) \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Де $C(n,k) = n! / (k! \cdot (n-k)!)$ - це біноміальні коефіцієнти.

Приклади:

- $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$
- $(2a-b)^3 = (2a)^3 - 3(2a)^2b + 3(2a)b^2 - b^3 = 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$

Ділення многочлена на одночлен

При діленні многочлена на одночлен, кожен член многочлена окремо ділиться на одночлен

$$(a+b+c):d = a/d + b/d + c/d$$

Пр. $(6x + 9) : 3 = \frac{6x}{3} + \frac{9}{3} = 2x + 3$;

$$(8a^3 - 4a^2 + 12a) : 4a = \frac{8a^3}{4a} - \frac{4a^2}{4a} + \frac{12a}{4a} = 2a^2 - a + 3$$

Ділення многочлена на многочлен

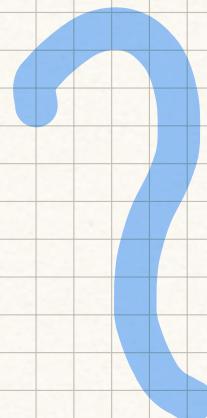
Ділення многочлена на многочлен

Це більш складна операція, яка виконується за допомогою алгоритму ділення многочленів (за методом кута).

Приклад:

Ділення $(x^2 + 5x + 6) \div (x + 2)$:

$$\begin{array}{r} x + 3 \\ \hline x+2) \quad x^2 + 5x + 6 \\ \quad \quad \quad x^2 + 2x \\ \hline \quad \quad \quad 3x + 6 \\ \quad \quad \quad 3x + 6 \\ \hline \quad \quad \quad 0 \end{array}$$



Отже, $(x^2 + 5x + 6) \div (x + 2) = x + 3$

6. Комбіновані приклади

1. $2[3 - (4 + 2)] = 2[3 - 6] = 2[-3] = -6$
2. $5 - 3[2 - (8 - 3)] = 5 - 3[2 - 5] = 5 - 3[-3] = 5 + 9 = 14$
3. $(2x + 3)^2 - (x - 1)(x + 2) = 4x^2 + 12x + 9 - (x^2 + x - 2) = 4x^2 + 12x + 9 - x^2 - x + 2 = 3x^2 + 11x + 11$
4. $-2[3(x - 1) - 2(x + 4)] = -2[3x - 3 - 2x - 8] = -2[x - 11] = -2x + 22$
5. $(3x^2 - 2x + 5)(x + 1) = 3x^3 + 3x^2 - 2x^2 - 2x + 5x + 5 = 3x^3 + x^2 + 3x + 5$

§ 1. Рівняння. Рівняння з однією змінною.

Вирази та їх перетворення

Рівняння та його розв'язки

Означення	Приклади
Рівняння – це рівність, яка містить змінну.	$3(x-4) = 24$, при $x=12$ $3(12-4) = 24$ $3 \cdot 8 = 24$ $24 = 24$ $x=12$ – розв'язок рівняння.
Розв'язок рівняння – це значення змінної, при якому рівняння перетворюється у правильну рівність.	
Розв'язати рівняння – це означає знайти його розв'язки або довести, що їх немає.	$3(x-4) = 24$, $x=12$.
Рівносильні рівняння – це рівняння, які мають одні і ті самі розв'язки.	$3x = 36$ і $3(x-4) = 24$; їх розв'язок $x=12$.

Деякі властивості рівнянь

У будь-якій частині рівняння можна звести подібні доданки. Якщо з однієї частини рівняння перенести доданки в іншу частину і при цьому змінити знаки доданків на протилежні, отримаємо рівняння, рівносильне даному. При діленні (помноженні) обох частин рівняння на одне і те саме число, відмінне від нуля, отримаємо рівняння, рівносильне даному.	$3x - 4 + 5x = 36$ $3x + 5x = 36 + 4$ $8x = 4 + 36$ $8x = 40$.
	поділимо обидві частини рівняння $8x = 40$ на 8: $x = 5$ — це рівняння рівносильне $8x = 40$, їх розв'язок 5.

9

Лінійне рівняння

Означення	Приклади
Рівняння виду $ax = b$, де x — змінна, a і b — деякі числа, називається лінійним рівнянням .	$4 - 5x = 6 - 2(x+2)$, використовуючи властивості рівняння: $4 - 5x = 6 - 2x - 4$, $-5x + 2x = 6 - 4 - 4$, $-3x = -2$, $x = \frac{-2}{-3}$, $x = \frac{2}{3}$.

Розв'язування лінійних рівнянь

$ax + b = 0$; $ax = -b$.	$5x + 4 = 0$; $5x = -4$.
$a \neq 0$; $x = -\frac{b}{a}$ — єдиний розв'язок.	$x = -\frac{4}{5}$ — розв'язок.
$a = 0$; $0x = -b$ — немає розв'язків.	$0x = -10$ немає розв'язків -10 на 0 поділити неможливо.
$a = 0$; $b = 0$. $0 \cdot x = 0$ — нескінчена множина розв'язків.	$7x = 7x$, $7x - 7x = 0$, $0x = 0$, x — будь-яке число.

Види виразів

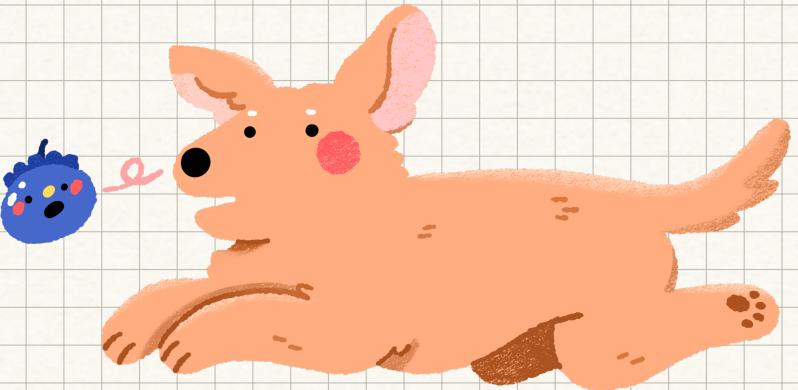
Типи квадратичних рівнянь з одним змінним

1. Лінійні рівняння

$$3x + 5 = 14$$

$$2x - 4 = 9$$

$$x : 4 + 6 = 10$$



2. Квадратичні рівняння

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$3x^2 - 12 = 0$$

$$x^2 - 9 = 0$$

3. Дробово-раціональні рівняння

$$(x+3) : (x-1) = 2$$

$$x : (x+5) = 3:5$$

4. Ірраціональні рівняння

$$\sqrt{x+3} = 5$$

$$\sqrt{2x-1} = x-3$$

5. Показникові рівняння

$$2^x = 8$$

$$3^{x+1} = 27$$

6. Логарифмічні рівняння

$$\log_2(x+3) = 4$$

$$\ln(x) = 2$$

7. Тригонометричні рівняння

$$\sin(x) = \frac{1}{2}$$

$$2\cos(x) + 1 = 0$$



Всі ці рівняння містять тільки одну змінну (x) і вимагають знайдення значення цієї змінної, при якому рівняння перетворюється на відповідь рівності.

Приклади додаткових властивостей рівнень

1. Властивість рівносильності при додаванні однакових виразів до обох частин

Якщо $a=b$ то $a+c=b+c$

Пр. $x+5=12$ то $x+5+3=12+3$ тобто $x+8=15$

2. Властивість рівносильності при відніманні однакових виразів від обох частин

Якщо $a=b$ то $a-c=b-c$

Пр. Якщо $2x=10$ то $2x-6=10-6$ тобто $2x-6=4$

3. Властивість рівносильності при множенні обох частин на нечількове число

Якщо $a=b$ і $c \neq 0$, то $a \cdot c = b \cdot c$

Пр. Якщо $x=7$ то $3x=3 \cdot 7$ тобто $3x=21$

4. Властивість рівносильності при діленні обох частин на нечількове число

Якщо $a=b$ і $c \neq 0$ то $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

Пр. Якщо $4x=20$ то $4x : 4 = 20 : 4$ тобто $x=5$

5. Властивість рівносильності при піднесені до степеня обох частин до степеня.

Якщо $a=b$, $a^n=b^n$ (з урахуванням знака обмежень.)

Пр. Якщо $x=3$, то $x^2=3^2$, тобто $x^2=9$

6. Властивість рівносильності при застосуванні однакових функцій до обох частин

Якщо $a=b$ то $f(a)=f(b)$ (з урахуванням області визначення фу.)

Якщо $x=8$ то $\sqrt{x}=\sqrt{8}$ тобто $\sqrt{x}=2\sqrt{2}$

7. Пропорційність рівностей

Якщо $a=b$ і $b=c$ то $a=c$

Пр. Якщо $x=y$ і $y=5$ то $x=5$



8. Симетричність рівності

Якщо $a=b$, то $b=a$

Пр. Якщо $3x=15$ то $15=3x$

Ці властивості є фундаментальними для розв'язання рівнень та становищем основу алгебраїчних перетворень.

Лінійні рівнення

Це рівнення виду $ax+b=0$; x -змінна; a і b - числа

1. Пустий випадок (Для звільненої змінної)

$$3x = 6;$$

Розв'язання: поділимо обидві частини на 3

$$x = \frac{6}{3}; \quad x = 2; \quad \left[\frac{3}{3}x = \frac{6}{3} = 1x = 2; \quad x = 2 \right]$$

2. Рівнення з звільненою змінною

$$2x+5=11$$

Розв'язання: віднімемо 5 від обох частин.

$$2x = 11 - 5$$

$$2x = 6$$

2. Поділимо на 2: $x = \frac{6}{2}; \quad x = 3$

3. Рівнення з від'ємними числами

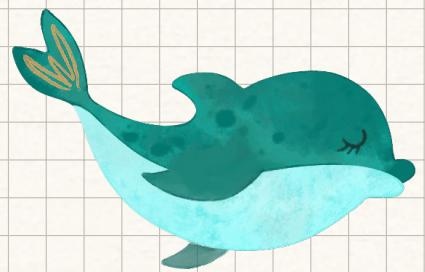
$$-4x - 7 = 5$$

Додамо 7 до обох частин: $-4x = 5 + 7; \quad -4x = 12$

Рішення на -4: $x = \frac{12}{-4}; x = -3$

4. Рівнення з дробовими коефіцієнтами

$$\frac{1}{2}x + 3 = y$$



Розв'язання:

1. Віднімемо 3: $\frac{1}{2}x = y - 3$

2. Множимо обидві частини на 2: $x = 4 \cdot 2; x = 8$

5. Рівнення зі змінними в обох частинах

$$5x - 3 = 2x + 9$$

Розв'язання:

1. Перенесемо $2x$ біля -3 , а -3 вправо:

$$5x - 2x = 9 + 3$$

$$3x = 12$$



2. Рішення на 3: $x = \frac{12}{3}; x = 4$

Приклади тотожностей і застосування їх властивостей

Алгебраїчні тотожності

1. Формули скороченого множення:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 - Приклад: $(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 - Приклад: $(2x - 5)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
 - Приклад: $(x + 7)(x - 7) = x^2 - 49$

2. Розклад многочленів:

- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
 - Приклад: $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
 - Приклад: $27y^3 - 1 = 3^3y^3 - 1^3 = (3y - 1)(9y^2 + 3y + 1)$

Тригонометричні тотожності

1. Основні спiввiдношення:

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
 - Застосування: $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = (1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2 = 1/4 + 3/4 = 1$
- $\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$ ($\cos\alpha \neq 0$)
 - Приклад: $\operatorname{tg} 45^\circ = \sin 45^\circ / \cos 45^\circ = (\sqrt{2}/2) / (\sqrt{2}/2) = 1$

2. Формули додавання:

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$
 - Приклад: $\sin(\pi/4 + \pi/6) = \sin(\pi/4) \cdot \cos(\pi/6) + \cos(\pi/4) \cdot \sin(\pi/6) = (\sqrt{2}/2) \cdot (\sqrt{3}/2) + (\sqrt{2}/2) \cdot (1/2) = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$
 - Приклад: $\cos(60^\circ + 30^\circ) = \cos 60^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 60^\circ \cdot \sin 30^\circ = (1/2) \cdot (\sqrt{3}/2) - (\sqrt{3}/2) \cdot (1/2) = 0$

Застосування властивостей тотожностей

Застосування властивостей тотожностей

1. Спрощення виразів:

- Вираз: $4x^2 - 9y^2$
- Застосування тотожності: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- Результат: $4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x + 3y)(2x - 3y)$

2. Розв'язування рівнянь:

- Рівняння: $\sin^2 x + \cos^2 x = 2$
- Застосування тотожності: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- Аналіз: $1 = 2$ (суперечність)
- Висновок: рівняння не має розв'язків

3. Обчислення без калькулятора:

- Обчислити: 101×99
- Застосування: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- $a = 100, b = 1: 101 \times 99 = (100 + 1)(100 - 1) = 100^2 - 1^2 = 10000 - 1 = 9999$

4. Доведення:

- Довести: $(a + b)^3 + (a - b)^3 = 2a(3a^2 + b^2)$
- Розкладаємо: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- Сума: $(a + b)^3 + (a - b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = 2a^3 + 6ab^2 = 2a(a^2 + 3b^2)$

Тотожності дозволяють спрощувати вирази, розв'язувати рівняння та доводити математичні твердження ефективно та елегантно.

Види виразів

Означення	Приклади
Вираз – це правило, що задає сукупність дій, які треба виконувати над значеннями змінних і сталих в певному порядку, щоб отримати значення цього виразу.	$\frac{11}{20} - \frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} - 8^2 ; 3x - 18y + 6 ;$ $\frac{11(y-2)}{13y} ; (a+b)c - ab .$
Числовий вираз – це вираз, що складається з чисел за допомогою знаків дій та дужок.	$(21-13)^2 - \frac{1}{5} .$
Вираз із змінними – це вираз, що складається із чисел і змінних за допомогою знаків дій і дужок.	$1,5x^2 - (28y - 127) : 3 .$
Підставляючи у вираз значення змінних, отримаємо числовий вираз . Знайшовши значення цього числового виразу, отримаємо значення виразу із змінною .	якщо $x = 2; y = 5,5 ,$ то $1,5x^2 - (28y - 127) : 3 =$ $= 1,5 \cdot 2^2 - (28 \cdot 5,5 - 127) \cdot 3 =$ $= 1,5 \cdot 4 - (154 - 127) \cdot 3 =$ $= 6 - 27 : 3 = 6 - 9 = -3 .$

Перетворення виразів

Означення	Приклади
Тотожність – це рівність, справедлива при всіх допустимих значеннях змінних, які входять до неї.	$3a - 4 + 5a = 8a - 4 .$
Тотожне перетворення виразу – це заміна одного виразу іншим, тотожно рівним йому.	$3x - 4 = x + 2$ і $2x = 6$ – тотожні рівності.

* Властивості арифметичних дій є тодіжностями використовуючись тодіжностями.

Відомі тотожності

Означення	Приклади
$a + b = b + a ; ab = ba$ переставна властивість.	$17 + 13 = 13 + 17 ; 5 \cdot 3 = 3 \cdot 5 .$
$(a + b) + c = a + (b + c) ; (ab)c = a(bc)$ сполучна властивість.	$(17 + 13) + 33 = 17 + (13 + 33) ;$ $(2 \cdot 8) \cdot 4 = 2 \cdot (8 \cdot 4) .$
$a(b + c) = ab + ac$ розподільна властивість.	$7 \cdot (11 + 13) = 7 \cdot 11 + 7 \cdot 13 .$

1. Формули скороченого множення:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ (різниця квадратів)
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

2. Тотожності з дробами:

- $\frac{(a/b) + (c/b)}{1} = \frac{(a+c)/b}{1}$
- $\frac{(a/b) - (c/b)}{1} = \frac{(a-c)/b}{1}$
- $\frac{(a/b) \cdot (c/d)}{1} = \frac{(ac)/(bd)}{1}$
- $\frac{(a/b) \div (c/d)}{1} = \frac{(a/b) \cdot (d/c)}{1} = \frac{(ad)/(bc)}{1}$

3. Тригонометричні тотожності:

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = 1/\cos^2\alpha$
- $\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = 1/\sin^2\alpha$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

4. Показникові та логарифмічні тотожності:

- $a^{(m+n)} = a^m \cdot a^n$
- $a^{(m-n)} = a^m / a^n$
- $(a^m)^n = a^{(m \cdot n)}$
- $\log_a(bc) = \log_a(b) + \log_a(c)$
- $\log_a(b/c) = \log_a(b) - \log_a(c)$
- $\log_a(b^n) = n \cdot \log_a(b)$

5. Біноміальна формула:

- $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C(n,k) \cdot a^{(n-k)} \cdot b^k$, де $C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Ці тотожності використовуютьс̄  я спрощення алгебраїчних виразів і розв'язування рівнянь.

Тотожність

Тотожність - це рівняння, яке виконується для всіх допустимих значень змінних. Інакше кажучи, ліва і права частини тотожності завжди рівні між собою, незалежно від значень змінних.

Приклади тотожностей:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $2(x + y) = 2x + 2y$

Рівносильність

Рівносильність (еквівалентність) стосується відношення між рівняннями. Два рівняння називаються рівносильними, якщо вони мають однакову множину розв'язків.

Приклад: рівняння $x^2 = 4$ та $|x| = 2$ є рівносильними, оскільки обидва мають розв'язки $x = 2$ або $x = -2$.

Інші важливі поняття

1. Область допустимих значень (ОДЗ) - множина значень змінних, при яких вираз має зміст.
2. Сторонні розв'язки - розв'язки, які з'являються при перетвореннях, але не задовольняють початкове рівняння.
3. Несумісні рівняння - рівняння, які не мають розв'язків.
4. Тотожні рівняння - рівняння, які виконуються при будь-яких значеннях змінних.
5. Параметричні рівняння - рівняння, що містять параметри, від значень яких залежить розв'язок.

Операції, що можуть порушити рівносильність

1. Піднесення обох частин рівняння до парного степеня
2. Логарифмування
3. Множення на вираз із змінною
4. Ділення на вираз із змінною

При виконанні таких перетворень потрібно обов'язково перевіряти отримані розв'язки підстановкою у вихідне рівняння.

Приклади застосування дистрибуційних властивостей

1. Зберігши скороченого множини

Пр. 1. Спростити вираз $(x+3)^2$

$$(x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

Пр. 2. Розкиніть на множники $x^2 - 25$

$$x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x+5)(x-5)$$

Пр. 3. Спростити $(2x-1)^3$

$$(2x-1)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2 \cdot 1 + 3(2x) \cdot 1^2 - 1^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$$

2. Діломісності з дробами

Пр. 1. Спростити $\left(\frac{3}{x}\right) + \left(\frac{5}{x}\right)$

$$\left(\frac{3}{x}\right) + \left(\frac{5}{x}\right) = \frac{3+5}{x} = \frac{8}{x}$$

Пр. 2. Обчислити $\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{9}{4}\right)$

$$\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{9}{4}\right) = \frac{(2 \cdot 9)}{(3 \cdot 4)} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$



3. Дистрибуційні властивості

Пр. 1. Поверти, що $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ при $\alpha = 30^\circ$

$$\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = (1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2 = 1/4 + 3/4 = 1$$

Пр. 2. Обчислити $\sin 45^\circ$ - за формулою $\sin(\alpha + \beta)$

$$\begin{aligned} \sin 45^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \\ &= (\sqrt{2}/2) \cdot (\sqrt{3}/2) + (\sqrt{2}/2) \cdot (1/2) = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4 \end{aligned}$$

4. Показникові та логарифмічні тотожності

Приклад 1: Спростити $2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8 = 256$

Приклад 2: Обчислити $\log_2(16)$ за властивостями логарифмів

$$\log_2(16) = \log_2(2^4) = 4 \cdot \log_2(2) = 4 \cdot 1 = 4$$

Приклад 3: Розв'язати рівняння $\log_3(x) + \log_3(x+3) = 1$

$$\log_3(x) + \log_3(x+3) = 1$$

$$\log_3(x \cdot (x+3)) = 1$$

$$x(x+3) = 3^1$$

$$x^2 + 3x = 3$$

$$x^2 + 3x - 3 = 0$$

$$x = (-3 + \sqrt{21})/2 \text{ або } x = (-3 - \sqrt{21})/2$$

Оскільки $x > 0$ (бо $\log_3(x)$ має бути визначеним), то $x = (-3 + \sqrt{21})/2 \approx 0.79$

5. Біноміальна формула

Приклад: Розкрити вираз $(x + 2)^4$

$$\begin{aligned}(x + 2)^4 &= C(4, 0) \cdot x^4 \cdot 2^0 + C(4, 1) \cdot x^3 \cdot 2^1 + \\&C(4, 2) \cdot x^2 \cdot 2^2 + C(4, 3) \cdot x^1 \cdot 2^3 + C(4, 4) \cdot x^0 \cdot 2^4 \\&= 1 \cdot x^4 \cdot 1 + 4 \cdot x^3 \cdot 2 + 6 \cdot x^2 \cdot 4 + 4 \cdot x \cdot 8 + 1 \cdot 1 \cdot 16 \\&= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16\end{aligned}$$

Практичні застосування

- У фізиці: Формули скороченого множення використовуються для обчислення кінетичної енергії ($\frac{1}{2}mv^2$) та інших фізичних величин.
- У геометрії: Тотожність $a^2 + b^2 = c^2$ застосовується в теоремі Піфагора.
- В інженерії: Тригонометричні тотожності застосовуються у розрахунках електричних кіл змінного струму.
- У комп’ютерних науках: Логарифмічні тотожності використовуються в аналітических алгоритмів для оцінки їхньої складності.

ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

Многочлени

$$\begin{aligned}a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \\(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\(a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \\(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\(a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

Властивості степенів

$$\begin{aligned}a^n \cdot a^m &= a^{n+m} \\(a^n)^m &= a^{nm} \\a^n b^n &= (ab)^n \\a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\\frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m} \\a^{1/n} &= \sqrt[n]{a}\end{aligned}$$

Арифметичною прогресією називають послідовність $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, до якого додається одне й те саме число d , яке називають різницею арифметичної прогресії:

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Кожний член арифметичної прогресії, починаючи з другого, дорівнює середньому арифметичному двох сусідніх членів:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Сума перших n членів арифметичної прогресії дорівнює середньому арифметичному першого і n -го членів цієї прогресії, помноженому на їх кількість:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Геометричною прогресією називають послідовність $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне й те саме число q ($q \neq 0, |q| \neq 1$), яке називають знаменником геометричної прогресії.

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, \text{ де } q \neq 0, q \neq 1$$

В геометричній прогресії n -ий член визначається формулою:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

де n - номер члена, b_n - n -ий член, b_1 - перший член, q - знаменник прогресії.

Суму n перших членів геометричної прогресії можна знайти за формулою:

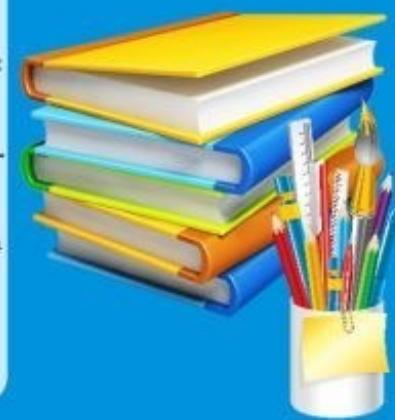
$$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Властивості коренів

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a \cdot b} &= \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \\\sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \\(\sqrt[n]{a})^k &= \sqrt[n]{a^k} \\\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[mn]{a} \\\sqrt[nk]{a^k} &= \sqrt[n]{a}\end{aligned}$$

Закони дій

$$\begin{aligned}a+b &= b+a \\(a+b)+c &= a+(b+c) \\a \cdot b &= b \cdot a \\(a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c) \\a \cdot (b+c) &= a \cdot b + a \cdot c\end{aligned}$$



ALGEBRA

PROPERTIES

ARITHMETIC PROPERTIES

ASSOCIATIVE $a(bc) = (ab)c$

COMMUTATIVE $a + b = b + a$ and $ab = ba$

DISTRIBUTIVE $a(b + c) = ab + ac$

ARITHMETIC OPERATIONS EXAMPLES

$$\begin{aligned} ab + ac &= a(b + c) & \frac{a}{b} - \frac{c}{d} &= \frac{ad - bc}{bd} \\ a\left(\frac{b}{c}\right) &= \frac{ab}{c} & \frac{a - b}{c - d} &= \frac{b - a}{d - c} \\ \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) &= \frac{a}{bc} & \frac{a + b}{c} &= \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \\ \frac{a}{c} &= \frac{ac}{bc} & \frac{ab + ac}{a} &= b + c, a \neq 0 \\ \left(\frac{b}{c}\right)^{-1} &= \frac{b}{c} & \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} &= \frac{ad}{bc} \\ \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{ad + bc}{bd} & \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} &= \frac{bc}{ad} \end{aligned}$$

QUADRATIC EQUATION

For the equation $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

RADICAL PROPERTIES

$a, b \geq 0$ for even n

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \text{ if } n \text{ is odd}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|, \text{ if } n \text{ is even}$$

LOGARITHM PROPERTIES

if $y = \log_b x$ then $b^y = x$

$$\log_b b = 1 \text{ and } \log_b 1 = 0$$

$$\log_b b^x = x$$

$$b^{\log_b x} = x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_b(x^r) = r \log_b x$$

$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$$

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$$

EXPONENT PROPERTIES

$$a^n a^m = a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = \frac{1}{a^{m-n}}$$

$$a^0 = 1, a \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\frac{1}{a^{-n}} = a^n$$

$$\frac{a}{a^m} = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = (a^n)^{\frac{1}{m}}$$

PROPERTIES OF INEQUALITIES

If $a < b$ then $a + c < b + c$ and $a - c < b - c$

If $a < b$ and $c > 0$ then $ac < bc$ and $a/c < b/c$

If $a < b$ and $c < 0$ then $ac > bc$ and $a/c > b/c$

PROPERTIES OF COMPLEX NUMBERS

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1$$

$$\sqrt{-a} = i\sqrt{a}, \quad a \geq 0$$

$$(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = a - c + (b - d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$$

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\overline{(a + bi)} = a - bi$$

$$\overline{(a + bi)(a + bi)} = |a + bi|^2$$

$$\frac{1}{(a + bi)} = \frac{(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

COMMON FACTORING EXAMPLES

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$$

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

$$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x + a)^3$$

$$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$$

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$$

$$x^{2n} - a^{2n} = (x^n - a^n)(x^n + a^n)$$

ABSOLUTE VALUE

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{if } a \geq 0 \\ -a, & \text{if } a < 0 \end{cases}$$

$$|a| = |-a|$$

$$|a| \geq 0$$

$$|ab| = |a||b|$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Розв'язання рівнянь

Пр. 3 $x - 2(8 - 5x) = 12x$

розділівася по дужкам

$$3x - 16 + 10x = 12x$$

перенесемо доданки і змінимо їх знаки на противоположні, зберігаючи подібні доданки

$$3x - 16 + 10x = 12x$$

$$3x + 10x - 12x = 16$$

$$x = 16$$

Пр. 2. $\frac{2x - 3}{4} + \frac{x + 2}{2} = \frac{3x + 3}{4}$

Розшукано ліву і праву частину на 4 - стійкий знаменник

$$\frac{4(2x - 3)}{4} + \frac{4(x + 2)}{2} = \frac{4(3x + 3)}{4}$$

Позначимо числовими має значеннями

$$2x - 3 + 2(x + 2) = 3x + 3$$

$$2x - 3 + 2x + 4 = 3x + 3$$

$$2x + 2x - 3x = 3 - 4 + 3; \quad x = 2$$

Пр. 3. $\frac{4x - 1}{2} - \frac{6x + 2}{3} = -\frac{1}{6}$

$$3(4x - 1) - 2(6x + 2) = -1$$

$$12x - 3 - 12x - 4 = -1$$

$$-7 = -1 \quad \text{є невідповідь}$$

Відповідь: немає розв'язків

Пр. 4. $3x + 2 + 4(2x - 1) = 11x - 2$

$$3x + 2 + 8x - 4 = 11x - 2$$

$$11x - 2 = 11x - 2$$

$$0 \cdot x = 0$$

Відповідь: будь-яке число.

Автомобіль проїхав за три дні 2299 км, причому за другий день він проїхав на 48 км більше, ніж за перший, а за третій – на 31 км більше, ніж за другий день. Скільки кілометрів проїжджає автомобіль кожного дня?

I спосіб

Чехом за перший день автомобіль проїхав x км, тоді за другий – $(x+48)$ км, а за третій день $(x+48+31) = (x+79)$

Складемо рівняння і розв'яжемо його

$$x + x + 48 + x + 79 = 2299$$

$$3x + 127 = 2299$$

$$3x = 2172; x = 724$$

I день – 724 км

II день – $724 + 48 = 772$ (км)

III день – $772 + 31 = 803$ (км)

Відповідь: разом за 3 дні за умовою – 2299 км.

I – 724 км; II – 772 км; III = 803 км

II спосіб

I \varnothing - ? x км

II \varnothing - ? $(x+48)$ км

III \varnothing - ? $(x+48+31)$ км

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 2299 \text{ км.}$$

$$x + x + 48 + x + 48 + 31 = 2299$$

$$3x = 2172$$

$$x = 724$$

Відповідь: 724 км, 772 км, 803 км;

I \varnothing – 724 км

II \varnothing – $724 + 48 = 772$ (км)

III \varnothing – $772 + 31 = 803$ (км)

За два дні турист пройшов 27,2 км, причому за другий день він пройшов 70% того, що було пройдено за перший день. Скільки кілометрів пройшов турист у перший день?

(Спосіб 1) Розв'язання

Чекаючи у першій день пройде x км тоді у другий 70% від x . тобто $0,7x$ (км) і за дві дні $27,2$ км.

$$x + 0,7x = 27,2 ; \quad 1,7x = 27,2 ; \quad x = 16$$

Відповідь: у перший день турист пройшов 16 км.

(Спосіб 2) Розв'язання

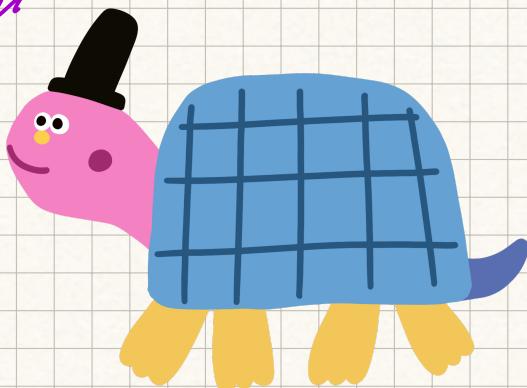
$$\begin{array}{l} \text{I день - ?} \\ \text{II день - ? } 70\% \end{array} \left. \begin{array}{c} \leftarrow \\ \uparrow \end{array} \right\} 27,2 \text{ км} \quad 70\% = 0,7$$

$$\begin{array}{l} \text{I день - } x \text{ км} \\ \text{II день - } 0,7x \text{ км} \end{array} \left. \begin{array}{c} \leftarrow \\ \uparrow \end{array} \right\} 27,2 \text{ км}$$

$$x + 0,7x = 27,2$$

$$x = 16$$

Відповідь: 16 км.



§ 2. Цілі вирази

Степінь з натуральним показником. Одночлени

Означення

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ разів}} \quad n \in N, \quad n \geq 2$$

$$a^1 = a.$$

Приклади

$$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27; \quad (-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25;$$

$$7^1 = 7; \quad 0^n = 0; \quad 1^n = 1; \quad n \in N;$$

$$0^0 \text{ — не визначено.}$$

Властивості степенів

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$	$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad (a \neq 0)$	$\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$	$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n} \quad (a \neq 0)$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(2^5)^3 = 2^{15}$	$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m;$
$(ab)^n = a^n \cdot b^n$	$(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4 = 16 \cdot 81 = 1296$	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad (b \neq 0)$	$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5}$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (b \neq 0)$

Корисні зауваження

Будь-який степінь числа $a > 0$ є число додатне.	$5^{11} > 0; \quad (1,2)^7 > 0.$
При піднесенні від'ємного числа до парного степеня в результаті отримуємо додатне, до непарного степеня — від'ємне.	$(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 3^4 = 81; \quad (-3)^4 > 0$ $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27; \quad (-3)^3 < 0.$
Степені з від'ємними показниками визначені тільки для $a > 0$.	$0^{-3} = \frac{1}{0^3} \text{ — не визначено.} \quad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} > 0.$

Зручні способи обчислювань зі степенями

a) $33^2 = (11 \cdot 3)^2 = 11^2 \cdot 3^2 = 121 \cdot 9 = 1089;$	b) $\frac{7,5^3}{2,5^3} = \left(\frac{7,5}{2,5}\right)^3 = 3^3 = 9;$
б) $4^{2,5} = 4^2 \cdot 4^{\frac{1}{2}} = 16 \cdot \sqrt{4} = 16 \cdot 2 = 32;$	г) $4^3 \cdot \left(1\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^3 = \left(4 \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{2}{7}\right)^3 = 2^3 = 8.$

Логарифмідегі биліктіліктердің анықтама

Множенімінде берілген мүнәсабаттың анықтама

$$a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$$

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^8; \quad x^4 \cdot x^2 = x^6;$$

Діленімінде берілген мүнәсабаттың анықтама

$$a^m : a^n = a^{(m-n)}$$

$$3^4 : 3^4 = 3^3; \quad y^8 : y^3 = y^6$$

Түзілескемінде берілген мүнәсабаттың анықтама

$$(a^m)^n = a^{(m \cdot n)}$$

$$(2^3)^2 = 2^6; \quad (x^4)^3 = x^{12}$$

Візгерілміш показник мүнәсабат

$$a^{(-n)} = 1/a^n$$

$$5^{(-2)} = 1/5^2 = 1/25; \quad x^{(-3)} = 1/x^3$$

Числовий показник мүнәсабат

$$a^0 = 1 \quad y^0 = 1; \quad (2x)^0 = 1$$

Дробовий показник мүнәсабат

$$a^{(m/n)} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$4^{(1/2)} = \sqrt{4} = 2; \quad 8^{(2/3)} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

Решінімінде зі мүнәсабаттың

$$1) 2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$$

$$2) 3^{(x+1)} = 27 \Rightarrow 3^{(x+1)} = 3^3 \Rightarrow x+1 = 3 \Rightarrow x = 2$$

$$3) 4^x \cdot 4^2 = 4^5 \Rightarrow 4^{(x+2)} = 4^5 \Rightarrow x+2 = 5 \Rightarrow x = 3$$

$$4) (1/2)^x = 8 \Rightarrow (1/2)^x = 2^3 \Rightarrow (2^{(-1)})^x = 2^3 \Rightarrow 2^{(-x)} = 2^3 \Rightarrow -x = 3 \Rightarrow x = -3$$

Рівняння зі степенями

Множиня степенів

$$5^{(x-1)} \cdot 5^3 = 125 \Rightarrow 5^{(x-1+3)} = 5^3 \Rightarrow 5^{(x+2)} = 5^3 \Rightarrow x+2=3 \Rightarrow x=1$$

$$3^x \cdot 3^{(x-2)} = 3^4 \Rightarrow 3^{(x+x-2)} = 3^4 \Rightarrow 2x-2=4 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3$$

Ділення степенів

$$y^{(x+1)} : y^{(x-2)} = 49 \Rightarrow y^{((x+1)-(x-2))} = y^2 \Rightarrow y^3 = y^2 \Rightarrow y^3 - y^2 = 0 \quad (\text{рівняння не має розв'язків})$$

$$2^{(2x)} : 2^x = 4 \Rightarrow 2^{(2x-x)} = 2^2 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x=2$$

Дробовий показник

$$x^{(1/2)} = 5 \Rightarrow \sqrt{x} = 5 \Rightarrow x = 25;$$

$$2) x^{(2/3)} = 16 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} = 16 \Rightarrow x^2 = 16^3 \Rightarrow x^2 = 4096 \Rightarrow x = \pm 64$$

(Зверто місцем $x=64$, бо корінь парного степеня єдине дійсне число не існує в області дійсних чисел)



Складніші рівняння зі степенями

$$4^{(x+1)} - 3 \cdot 4^x = 0 \Rightarrow 4^x \cdot 4 - 3 \cdot 4^x = 0 \Rightarrow 4^x(4-3) = 0 \Rightarrow 4^x = 0 \text{ або } 4-3=0 \Rightarrow x \text{ не має розв'язків до } 1+0 \quad (\text{суперечість}), \text{ рівняння не має розв'язків у множині дійсних чисел.}$$

$$2) 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$$

Зробимо заміну $t = 2^x$ можи $2^{2x} = (2^x)^2 = t^2 \Rightarrow t^2 - 9t + 8 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow t^2 - 9t + 8 = 0 \Rightarrow (t-8)(t-1) = 0 \Rightarrow t = 8 \text{ або } t = 1 \Rightarrow$$

$$\underline{2^x = 8 \text{ або } 2^x = 1} \Rightarrow \underline{2^x = 2^3 \text{ або } 2^x = 2^0}$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ або } x = 0$$

$$3) 1/3^{2x} = 9 \Rightarrow (3^{-1})^{2x} = 3^2 \Rightarrow 3^{-2x} = 3^2 \Rightarrow -2x = 2 \Rightarrow x = -1$$

$$4) 5^{x^2-4} = 25 \Rightarrow 5^{x^2-4} = 5^2 \Rightarrow x^2 - 4 = 2 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm \sqrt{6}$$

Одночлени та дії над ними

Означення	Приклади
<p>Одночленом називається добуток чисел, змінних та їх натуральних степенів, а також самі числа, змінні та їх степені.</p> <p>Число 0 називається нульовим одночленом.</p>	$0; 3a^2xy^3; \frac{12}{13}ab^3; m; x^6$ — одночлени.
<p>Степенем одночлена називається сума показників змінних, які входять до одночлена. Якщо одночленом є число, що не дорівнює нулю, то його степінь вважається рівною нулю.</p> <p>Число 0 степеня не має.</p>	$3a^5b^2c^3$ — одночлен десятого степеня ($5 + 2 + 3 = 10$); $5ax^3$ — одночлен четвертого степеня ($1 + 3 = 4$); 7 — одночлен нульового степеня ($7x^0$).
<p>Якщо в запис одночлена входить змінна x в степені $k(x^k)$, то кажуть, що цей одночлен має по x (або відносно x) степінь k.</p>	$5ax^3$ — одночлен третього степеня відносно змінної x .
<p>Одночлен записаний в стандартному виді, якщо його перший множник є числом, коефіцієнтом одночлена, а далі стоять змінні в деяких степенях, які розташовані за алфавітом (латинським або грецьким).</p>	$4a^2b^3y^3; 6a^5b^2c^6; -3xy^3z^4; 4\alpha^2b^3j^3$ — одночлени у стандартному виді.
<p>Одночлени називаються подібними, якщо вони рівні між собою або відрізняються лише своїми коефіцієнтами.</p>	$4a^5b^2; -1; 3a^5b^2; \frac{2}{3}a^5b^2$ — подібні одночлени.

Дії над одночленами

Додавання і віднімання	$3a^3 + ab + b^2 + 5a^3 - 3ab = 8a^3 - 2ab + b^2$.
Множення	$(4a^3b^2c) \cdot (-2a^4bd) = -8a^7b^3cd$.
Піднесення до степеня	$(2x^2y)^3 = 2^3 \cdot (x^2)^3 y^3 = 8x^6y^3$.
Ділення	$\frac{(18a^6b^4c)}{(3a^3b^2c)} = \frac{18a^6b^4c}{3a^3b^2c} = 6a^3b^2$.

Одночленам називається вираз, який є добутком скінченої кількості змінних взятих з певними степенями і числового лічника.

Наприклад $3x^2, -5ab, 7y^5$ — це одночлени.

Розглядали арифмет. дії над одночленами.

түндікшелердің жиынтығынан

**Додавання мономдар дақаралын мисал
пәндердің оңдоғчелерін (однакоғы зерттеудің зерттеудің
степенейдің)**

$$3x^2 + 2x^2 = (3+2)x^2 = 5x^2$$

Віднімание. Аналогично додаванию, віднімание
мономда мисал пәндердің оңдоғчелері.

$$4y^3 - 2y^3 = (4-2)y^3 = 2y^3$$

Множение мономдардың мономдардың
переменномүшкіліктердің
төртіншіндең оңдоғчелерін, а степеней
зерттеудің додаётаса.

$$(3x^2)(2x^3) = 3 \cdot 2 \cdot x^{2+3} = 6x^5$$

Діленінші діленнің мономда мисал оңдоғчелері.
Інші мисталық оңдоғоғы зерттеудің діленнің числовий
множник, а степеней зерттеудің віднімалоттар

$$\frac{10a^4}{2a^2} = \frac{10}{2} \cdot a^{4-2} = 5a^2$$

1. Множение деякіншік оңдоғчелері

$$(4a^2b)(-3ab^3)(2a) = 4 \cdot (-3) \cdot 2 \cdot a^{2+1+1} \cdot b^{1+3} = -24a^4b^4$$

To solve the expression, follow these steps:

1. Multiply the coefficients (numbers)

$$4 \cdot (-3) \cdot 2 = -24$$

2. Multiply the a terms

$$a^2 \cdot a \cdot a = a^{2+1+1} = a^4$$

3. Multiply the b terms

$$b \cdot b^3 = b^{1+3} = b^4$$

4. Combine all the parts:

$$-24 \cdot a^4 \cdot b^4 = -24a^4b^4$$

Final Answer $-24a^4b^4$

2. Ділення одночленів з різними змінними

$$\frac{18x^3y^2}{-6xy} = \frac{18}{-6} \cdot x^{3-1} \cdot y^{2-1} = -3x^2y$$

To simplify the expression $\frac{18x^3y^2}{-6xy}$

1. Divide the coefficients: $\frac{18}{-6} = -3$

2. Subtract the exponents of x : $x^{3-1} = x^2$

3. Subtract the exponents of y : $y^{2-1} = y^1 = y$

4. Combine the results: $-3x^2y$

3. Піднесення одночлена до степеня

$$(2a^2b)^3 = 2^3 \cdot (a^2)^3 \cdot b^3 = 8a^6b^3$$

4. Додавання одночленів з різними змінними:

$$5x^2y + 3x^2y - 2x^2y = (5+3-2)x^2y = 6x^2y$$

5. Визначення ступеня одночлена

Ступінь одночлена – це сума показників

степень усіх змінних які входять до його складу. Якщо одночлен має лише одну змінну (тобто є числом) його ступінь 0.

1. $5x^2y^3$. Змінні x (степ 2) y (степ 3). Ступінь одночл. $2+3=5$

2. $-7a^4b$. Змінні a (ст. 4), b (ст. 1). Ступінь одн. $4+1=5$

3. 10 . Ступінь 0 4. xc^5 Ступінь 5

5. $-2m^2n^3p$. Змінні m (ст 2), n (ст 3), p (ст 1). Ступінь одн. $2+3+1=6$

* Коєфіцієнти (числов. множники) не вимірює ма ступінь одн.
* Якщо змінна зapisана без показника « $у$ » її степ і ступ = 1

Висновок:

- Ступінь змінної \neq ступінь одночлена.
- Ступінь одночлена завжди сума показників усіх змінних (якщо вони є).
- Якщо змінна без степеня (наприклад, x), то її ступінь 1.

Приклад:

- $7a^2b$
 - Ступінь a : **2**
 - Ступінь b : **1**
 - Ступінь одночлена: $2 + 1 = 3$.

Дії над одночленами

1. Обчислити $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^5$

$$-\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^5 = -\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}\right)^5 = -1^3 \cdot 1^5 = -1$$

2. Обчислити $\frac{(-2)^5 \cdot y^2}{14^6} \cdot \frac{26^5 \cdot 2^{10}}{13^4 \cdot 8^4}$

$$\frac{(-2)^5 \cdot y^2}{14^6} \cdot \frac{26^5 \cdot 2^{10}}{13^4 \cdot 8^4} = \frac{(-2)^5 \cdot y^2 \cdot (2 \cdot 13)^5 \cdot 2^{10}}{(2 \cdot 7)^6 \cdot 13^4 \cdot (2^3)^4} \cdot \frac{(-2)^5 \cdot y^2 \cdot 2^5 \cdot 2^{10} \cdot 13^5}{2^6 \cdot y^6 \cdot 13^4 \cdot 2^{12}} = \frac{-2^5 \cdot 4 \cdot 13}{2^6 \cdot y^6 \cdot 13^4} = \frac{-1^5 \cdot 5 \cdot 10 \cdot y^2 \cdot 13^5}{2^6 \cdot y^6 \cdot 13^4} =$$

$$= \frac{-2^2 \cdot 4 \cdot 13}{1 \cdot 1 \cdot 1} = -4 \cdot y \cdot 13 = -364$$

3. Спростити вираз $(4a^2b)^5 (16ab^3)^4 (-2^4a^3b^3)^3$

$$(4a^2b)^5 (16ab^3)^4 (-2^4a^3b^3)^3 = 4^5(a^2)^5 b^5 16^4 a^4 (b^3)^4 (-2^4)^3 (a^3)^3 (b^3)^3 =$$

$$= (2^2)^5 a^{10} b^5 (2^4)^4 a^4 b^{12} (-1)^3 (2^4)^3 a^9 b^{21} = -2^{38} a^{23} b^{38}$$

4. Вимістити пропущені одночлени так щоб отримати потомісність

$$(?)^6 \cdot (?)^6 = -64x^{15}$$

$$-64x^{15} = -2^6 x^2 x^3 = 2^6 (x^2)^6 (-x)^3 = (2x^2)^6 (-x)^3$$

Відповідь: $-64x^{15} = (2x^2) \cdot (-x)^3$ – потомісний

5. Поради, якщо можна, у виразі квадратного одночлена

$$5 \frac{1}{16} c^{40} n^{42}$$

$$\frac{81}{16} (c^{20})^2 (n^{21})^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^2 (c^{20})^2 (n^{21})^2 = \left(\frac{9}{4} c^{20} n^{21}\right)^2 = \underline{\left(2 \frac{1}{4} c^{20} n^{21}\right)^2}$$

Відповідь

6. Поради, якщо можна, у виразі квадрату одночлена

$$-3(a^3)^2 (b^2)^2$$

$= - (3a^3 b^2)^2$ – цей вираз є прописанішим квадратом одночлена.

Відповідь у виразі квадрату одночлена межа можливості

§ 3. Многочлени. Дії з многочленами

Види многочленів

Означення	Приклади
Многочленом називається алгебраїчна сума декількох одночленів.	$5xy^2 - 3yp^3 + 4xy$.
Многочлен, який складається з двох членів, називається двоочленом .	$x^2 + a$; $ax + 3,5c^4$.
Многочлен, який складається з трьох членів, називається тричленом .	$x + 5xy^3 + 6$.
Одночлен вважається окремим випадком многочлена.	$15d^2m^7n + 0$.
Якщо всі члени многочлена записані у стандартному виді і виконане зведення подібних доданків, то отриманий многочлен стандартного виду .	$3a \cdot 5b + 3ab - b = 15ab + 3ab - b = 18ab - b$.

Дії з многочленами

Додавання і віднімання многочленів

При додаванні і відніманні многочленів користуються правилом відкриття дужок.	$(2ab - 5c) + (3a^2b + 3c) = 2ab - 5c + 3a^2b + 3c =$ $= 3a^2b + 2ab - 2c;$ $(2ab - 5c) - (3a^2b + 3c) = 2ab - 5c - 3a^2b - 3c =$ $= -3a^2b + 2ab - 8c.$
---	---

Множення і ділення многочленів

Щоб помножити одночлен на многочлен, кожний член многочлена помножують на одночлен і результати додають.	$6x(x^3 - 2) = 6x \cdot x^3 - 6x \cdot 2 = 6x^4 - 12x$.
Щоб помножити многочлен на многочлен, помножують кожний член першого многочлена на кожний член другого многочлена і отримані результати додають.	$(2a - b) \cdot (3a - 4b) = 6a^2 - 8ab - 3ab + 4b^2 =$ $= 6a^2 - 11ab + 4b^2$.
Щоб поділити многочлен на одночлен, потрібно розділити на цей одночлен кожний член многочлена і отримані частки додати.	$\frac{12a + b}{3} = \frac{12a}{3} + \frac{b}{3} = 4a + \frac{b}{3}$.

Дії над многочленами

1. Додавання многочленів з однаковими подібними членами:

$$(3x^2 + 5x - 8) + (2x^2 - 3x + 4) = 5x^2 + 2x - 3$$

2. Віднімання многочленів. Змінюючи знаки у від'ємника і додаючи: $(4x^3 - 2x^2 + 5x - 1) - (x^3 + 3x^2 - 2x + 6) = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 7$

3. Множення многочленів. Використовуємо дистрибутивний закон:

$$(2x + 3)(x^2 - 4x + 5) = 2x(x^2 - 4x + 5) + 3 \cdot (x^2 - 4x + 5) = 2x^3 - 8x^2 + 10x + 3x^2 - 12x + 15 = \\ = 2x^3 - 5x^2 - 2x + 15$$

4. Індексний до степеня

Використовуючи формули скороченого множення:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(2x - 3)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(-3) + (-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

5. Розкладання на множники

Видинки спільного множника:

$$6x^3 + 12x^2 - 18x = 6x(x^2 + 2x - 3) = 6x(x+3)(x-1)$$

Формули скороченого множення:

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x+3)(x-3)$$

6. Ділення многочленів

Ділення многочленів сходить на ділення чисел "стовпчиком", але з многочленами.

Розділиши $(x^3 + 2x^2 - 5x + 6) : (x - 2)$

1. Порядково відкладаємо членами в порядку спадання степенів

Ділльє: $x^3 + 2x^2 - 5x + 6$

Дільник: $x - 2$

2. Ділимо перший член діленого на перший член дільника

$$x^3 : x = x^2 \quad (\text{у першому члені частки})$$

3. Множимо отриманий член частки на весь дільник

$$x^2 \cdot (x-2) = x^3 - 2x^2$$

4. Відмінаємо отриманий добуток від діленого

$$x^3 + 2x^2 - 5x + 6 - (x^3 - 2x^2) = 4x^2 - 5x + 6$$

5. Повторюємо процес для отриманого залишку

Ділимо перший член залишку на перший член дільника:

$$4x^2 : x = 4x \quad (\text{це другий член частки})$$

6. Множимо на дільник

$$4x \cdot (x-2) = 4x^2 - 8x$$

7. Відмінаємо

$$\underline{4x^2 - 5x + 6} - \underline{4x^2 - 8x} = 3x + 6$$

$$4x^2 - 4x^2 = 0$$

$$-5x + 8x = 3x \quad / \quad 3x + 6$$

8. Знову ділимо перший член на перший член дільника

$$3x : x = 3 \quad (\text{це п'ятий член частки})$$

9. Множимо на дільник

$$3 \cdot (x-2) = 3x - 6$$

10. Відмінаємо

$$3x + 6 - (3x - 6) = 12$$

Залишок 12 все не можна поділити на $x-2$, тому є остаточний залишок.

Відповідь: $(x^3 + 2x^2 - 5x + 6) : (x-2) = x^2 + 4x + 3$ з остаточкою 12

* Методика використання
схеми Еймера для
відчленення

Ділення многочленів

8212

Ділення многочленів можна виконувати за допомогою ділення кутом:

Приклад ділення $(x^3 + 2x^2 - 5x + 6) : (x-2)$:

$$\begin{array}{r} x^2 + 4x + 3 \\ x - 2) x^3 + 2x^2 - 5x + 6 \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ 4x^2 - 5x \\ \underline{4x^2 - 8x} \\ 3x + 6 \\ \underline{3x - 6} \\ 12 \end{array}$$

Отже, $(x^3 + 2x^2 - 5x + 6) : (x-2) = x^2 + 4x + 3$ з остаточкою 12.

ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

Многочлени

$$\begin{aligned}a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \\(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\(a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \\(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\(a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

Властивості степенів

$$\begin{aligned}a^n \cdot a^m &= a^{n+m} \\(a^n)^m &= a^{nm} \\a^n b^n &= (ab)^n \\a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\a^{\frac{n}{m}} &= a^{n-m} \\a^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{a}\end{aligned}$$

Арифметичною прогресією називають послідовність $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, до якого додається одне і те саме число d , яке називають різницею арифметичної прогресії:

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Кожний член арифметичної прогресії, починаючи з другого, дорівнює середньому арифметичному двох сусідніх членів:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Сума перших n членів арифметичної прогресії дорівнює середньому арифметичному першого і n -го членів цієї прогресії, помноженому на їх кількість:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Геометричною прогресією називають послідовність $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне і те саме число q ($q \neq 0, |q| \neq 1$), яке називають знаменником геометричної прогресії.

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, \text{ де } q \neq 0, q \neq 1$$

В геометричній прогресії n -ий член визначається формулою:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

де n - номер члена, b_n - n -ий член, b_1 - перший член, q - знаменник прогресії.

Суму n перших членів геометричної прогресії можна знайти за формулою:

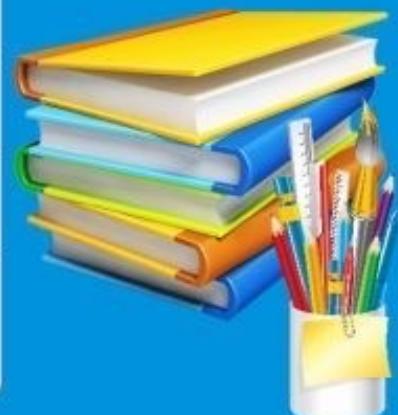
$$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Властивості коренів

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a \cdot b} &= \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \quad (\text{не завжди}) \\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \\ (\sqrt[n]{a})^k &= \sqrt[n]{a^k} \\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[mn]{a} \\ \sqrt[nk]{a^k} &= \sqrt[n]{a}\end{aligned}$$

Закони дій

$$\begin{aligned}a+b &= b+a \\(a+b)+c &= a+(b+c) \\a \cdot b &= b \cdot a \\(a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c) \\a \cdot (b+c) &= a \cdot b + a \cdot c\end{aligned}$$



§ 4. Формули скороченого множення

1

Квадрат суми

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \checkmark$$

2

Квадрат різниці

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3

Різниця квадратів

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

4

Куб суми

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

5

Куб різниці

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

6

Сума кубів

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

7

Різниця кубів

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

§ 5. Розкладання многочлена на множники

Розкладання многочлена на множники — це перетворення алгебраїчної суми одночленів у добуток. Існує три основні способи.

Винесення спільного множника за дужки:

- а) знайти спільний множник;
 б) поділити на нього кожний член многочлена і отриману суму взяти в дужки;
 в) записати добуток спільного множника на отриману суму.

$$18a^5b^2 - 14a^4b^3 = 2a^4b^2(9a - 7b).$$

Якщо при винесенні за дужки спільний множник виносяться зі знаком «мінус», то знаки доданків у дужках змінюються на протилежні.

$$-ay + by + cy = -y(a - b - c).$$

Спосіб групування:

- а) об'єднати члени многочлена в такі групи, які мають спільний множник;
 б) винести цей спільний множник за дужки.

$$\begin{aligned} 2a + bc + 2b + ac &= (2a + 2b) + (bc + ac) = \\ &= 2(a + b) + c(b + a) = (a + b)(2 + c). \end{aligned}$$

Використання формул скороченого множення

Для того, щоб розкласти многочлен на множники, використовують відомі формули.

$$25x^2 - 4y^2 = (5x - 2y)(5x + 2y).$$

$$x^2 + 16xy + 64y^2 = (x + 8y)(x + 8y) = (x + 8y)^2.$$

ОСНОВНІ ЗАКОНИ АЛГЕБРИ

КВАДРАТ СУМИ двох чисел дорівнює квадрату першого числа плюс подвоєний добуток першого числа на друге і плюс квадрат другого числа.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

КВАДРАТ РІЗНИЦІ двох чисел дорівнює квадрату першого числа мінус подвоєний добуток першого числа на друге і плюс квадрат другого числа.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

РІЗНИЦЯ КВАДРАТІВ двох чисел дорівнює добутку суми цих чисел на їх різницю.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

КУБ СУМИ двох чисел дорівнює кубові першого числа плюс потроєний добуток квадрат першого числа на друге, плюс потроєний добуток першого числа на квадрат другого і плюс куб другого числа.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

КУБ РІЗНИЦІ дорівнює кубові першого числа мінус потроєний добуток квадрата першого числа на друге, плюс потроєний добуток першого числа на квадрат другого і мінус куб другого числа.

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

СУМА КУБІВ двох чисел дорівнює добуткові суми цих чисел на неповний квадрат різниці цих чисел.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

РІЗНИЦЯ КУБІВ двох чисел дорівнює добуткові різниці цих чисел на неповний квадрат суми цих чисел.

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

КВАДРАТ СУМИ кількох виразів дорівнює сумі квадратів усіх доданків плюс усі подвоєні добутки кожного виразу на кожний наступний.

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Розкладання многочленів на множники

1. Винесення спільного множника

$$6x^2 + 9x = 3x(2x + 3)$$

2. Різниця квадратів

$$x^2 - 25 = (x+5)(x-5)$$

3. Квадрат суми:

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$$

4. Квадрат різниці:

$$x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$$

5. Сума кубів:

$$x^3 + 27 = (x+3)(x^2 - 3x + 9)$$

6. Різниця кубів:

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

7. Метод узупільнення:

$$\underline{x^3 + x^2 + 2x + 2} = \underline{x^2(x+1)} + \underline{2(x+1)} = (x+1)(x^2 + 2)$$

8. Розкладання квадратного п'ятичленів

$$2x^2 - 4x + 3 = (2x-1)(x-3)$$

9. Застосування додатків скороченого множників та узупільнення:

$$\underline{x^4 - 16} = \underline{(x^2)^2 - 4^2} = \underline{(x^2 + 4)(x^2 - 4)} = \underline{(x^2 + 4)(x+2)(x-2)}$$

10. Метод підбору коренів

$$x^3 - 4x^2 - x + 4 = (x-4)(x^2 + 3x - 1)$$

Методика Розкладання многочленів на множники

1. $9a^2y + 18aby + 9b^2y$

Виділимо спільний множник $9y$ і винесемо його за дужки
і застосуємо формулу квадрата суми членів $a+b$

$$9a^2y + 18aby + 9b^2y = 9y(a^2 + 2ab + b^2) = 9y(a+b)^2$$

2. $a^2(x-y) + (y-x)$

а) Виділимо спільний множник. Для цього змінимо знак виразу
 $(y-x)$ б) Винесемо $(x-y)$ за дужки. в) Застосуємо формулу
різниці квадратів дод (а²-1) [тобто через трансформацію виразів
чи множину робимо такі перетворення]

$$a^2(x-y) + (y-x) = a^2(x-y) - (x-y) = (x-y)(a^2-1) = (x-y)(a+1)(a-1)$$

Відповідь: $(x-y)(a+1)(a-1)$

3. $-36x^4 + 4x^3 - \frac{1}{9}x^2$

а) Виносимо $-x^2$ за дужки

б) Застосуємо формулу квадрата різниці

$$-36x^4 + 4x^3 - \frac{1}{9}x^2 = -x^2(36x^2 - 4x + \frac{1}{9}) = -x^2\left(6x - \frac{1}{3}\right)^2$$

4. $4(a+b)^2 - 9(a-b)^2$

а) Застосовуємо формулу різниці квадратів

б) Спростимо вираз в дужках

$$4(a+b)^2 - 9(a-b)^2 = \underline{(2(a+b))^2 - (3(a-b))^2} = (2(a+b) - 3(a-b))(2(a+b) + 3(a-b)) =$$

$$(2a+2b-3a+3b)(2a+2b+3a-3b) = (5b-a)(5a-b)$$

Відповідь: $(5b-a)(5a-b)$

$$5. 4m^2 - 20mn + 25n^2 - 36$$

а) Застосуємо формулу квадрата різниці

б) Застосуємо формулу різниці квадратів

$$4m^2 - 20mn + 25n^2 - 36 = (4m^2 - 20mn + 25n^2) - 36 = (2m - 5n)^2 - 36 =$$

$$= (2m - 5n)^2 - 6^2 = (2m - 5n - 6)(2m - 5n + 6)$$

Відповідь: $(2m - 5n - 6)(2m - 5n + 6)$

$$6. (3a+5)^3 - 8$$

а) Застосуємо формулу різниці кубів

б) Спростимо вираз в дужках

$$(3a+5)^3 - 8 = (3a+5)^3 - 2^3 = (3a+5-2) \cancel{((3a+5)^2 + 2(3a+5) + 2^2)} =$$

$$= (3a+3) \cancel{(9a^2 + 30a + 25 + 6a + 10 + 4)} = 3(a+1)(9a^2 + 36a + 39)$$

Відповідь: $3(a+1)(9a^2 + 36a + 39)$

Задіймав.

Розмежовані
методами на методичні

аналітична суща
огнівців

переворотні

доступок
огнівців