Квадратні корені та дійсні числа

6

§ 2. Квадратні корені. Дійсні числа

Квадратні корені та їх властивості

Означення	Приклади
Квадратним коренем з числа a називають число, квадрат якого дорівнює a.	$x^2 = 25$, $x_1 = 5; x_2 = -5$ — квадратні корені.
Арифметичним квадратним коренем з числа a називається **невід'ємне** число, квадрат якого дорівнює a. Арифметичний квадратний корінь з числа a позначається знаком $\sqrt{a}$; a називається **підкореневим виразом**. Дія, за допомогою якої знаходиться арифметичний квадратний корінь, називається **здобуттям квадратного кореня.** Рівність $\sqrt{a} = b$ є правильною, якщо 1) $b \geq 0$; 2) $b^2 = a$.	$\sqrt{25} = 5$; 5 — арифметичний квадратний корінь. $\sqrt{81} = 9$.
При $a < 0$ $\sqrt{a}$ не має змісту, бо квадрат будь-якого числа невід'ємний.	$\sqrt{-25}$ не має змісту.
При будь-якому a, якщо $\sqrt{a}$ має зміст, правильна рівність: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.	$\left(\sqrt{9}\right)^2 = 9$; $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$.

Властивості арифметичного квадратного кореня	
Якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.	$\sqrt{4 \cdot 1} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{1} = 2 \cdot 1 = 2$; $\sqrt{16 \cdot x} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{x} = 4\sqrt{x}$.
Якщо $a \geq 0$, $b > 0$, то $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.	$\sqrt{\dfrac{36}{16}} = \dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{16}} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$.
Для будь-якого значення a правильна рівність: $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$.	$\sqrt{(-3)^2} = \lvert -3 \rvert = 3$; $\sqrt{4y^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{y^2} = 2\lvert y \rvert$.
Винесення множника з-під знака кореня.	$\sqrt{125} = \sqrt{3 \cdot 25} = 5\sqrt{3}$.
Внесення множника під знак кореня.	$10\sqrt{2} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{200}$.
Рівняння $x = a^2$	
Якщо $a < 0$, то рівняння розв'язків не має; Якщо $a = 0$, то рівняння має один розв'язок $x = 0$;	$x^2 = -25$, розв'язків немає; $x^2 = 0$, $x = 0$;
Якщо $a > 0$, то рівняння має два розв'язки: $x_1 = \sqrt{a}$; $x_2 = -\sqrt{a}$.	$x^2 = 144$; $x_1 = 12; x_2 = -12$; $x^2 = 7$; $x_1 = \sqrt{7}; x_2 = -\sqrt{7}$.

Дійсні числа

Числа, які можна записати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, n — натуральне, називаються **раціональними**. Це всі цілі і дробові числа (додатні і від'ємні). Наприклад $\frac{7}{13}$; $-\frac{3}{10}$. Всі інші числа носять назву **ірраціональних** $\sqrt{5}$, $\sqrt{11}$. Раціональні та ірраціональні числа складають множину **дійсних** чисел.

N — множина натуральних чисел; *Q* — множина раціональних чисел;
Z — множина цілих чисел; *R* — множина дійсних чисел.

Означення	Приклади
Квадратний корінь з раціонального числа може бути:	$\sqrt{64}=8; \sqrt{4}=2;$
а) цілим числом;	
б) десятковим дробом;	$\sqrt{0,36}=0,6; \sqrt{0,0025}=0,05;$
в) нескінченно неперіодичним десятковим дробом або нескінченно періодичним десятковим дробом.	$\sqrt{\frac{16}{49}}=\frac{4}{7}=0,57142857...$ $\sqrt{\frac{81}{121}}=\frac{9}{11}=0,818181...$
У всіх випадках, описаних вище, квадратний корінь є раціональним числом.	
г) нескінченно неперіодичним десятковим дробом (в цьому випадку квадратні корені є ірраціональними числами).	$\sqrt{2}=1,4142...$ $\sqrt{7}=2,645751...$

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

1. Знайти корені.	1) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}$.	2) $\sqrt{x^2-2x+1}$, $x>1$.
Розв'язання.	$\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}=\left\|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right\|=$ $=\sqrt{3}-\sqrt{2},$ оскільки $\sqrt{3}>\sqrt{2}$.	$\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=$ $=\|x-1\|=x-1,$ оскільки $(x-1)>0$, якщо $x>1$.
	Відповідь: $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.	Відповідь: $x-1$.

2. Спростити.	$\sqrt{(3-m)^2}$.
Розв'язання.	$\sqrt{(3-m)^2}=\|3-m\|=\begin{cases}3-m, \text{ якщо } 3-m>0,\ m<3\\ m-3, \text{ якщо } m-3>0,\ m>3\\ 0, \text{ якщо } m-3=0,\ m=3.\end{cases}$
Відповідь: $\begin{cases}3-m, \text{ якщо } m<3\\ m-3, \text{ якщо } m>3\\ 0, \text{ якщо } m=3.\end{cases}$	

3. Розкласти на множники.	1) t^2-36.	2) $9c^2-1$.	3) $x-16$.
Розв'язання.	$t^2-36=(t-6)(t+6)$.	$9c^2-1=(3c-1)(3c+1)$.	$x-16=\left(\sqrt{x}-4\right)\left(\sqrt{x}+4\right)$.
Відповідь:	$(t-6)(t+6)$.	$(3c-1)(3c+1)$.	$\left(\sqrt{x}-4\right)\left(\sqrt{x}+4\right)$.

I – ірраціональні числа
R – дійсні числа (real numbers)
Q – раціональні числа

Ірраціональними числами є різниця між множиною дійсних чис. R та раціо. чис. Q

R \ Q або R − Q; I = R − Q

Ірраціональні = Дійсні − Раціональні

Множина	Символ	Опис	Приклади
Натуральні числа	ℕ	Числа для лічби: 1, 2, 3, ...	1, 2, 3, 42, 100, 1000
Цілі числа	ℤ	Натуральні числа + їх протилежні + нуль	..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...
Раціональні числа	ℚ	Числа, що можна записати як дріб p/q, де p∈ℤ, q∈ℤ, q≠0	1/2, -3/4, 0.25, 0.333..., 2, -5
Ірраціональні числа	I або ℝ\ℚ	Числа, що НЕ можна записати як дріб цілих чисел	√2, π, e, √3, ∛5, φ (золотий перетин)
Дійсні числа	ℝ	Усі раціональні та ірраціональні числа разом	Усі числа на числовій прямій
Комплексні числа	ℂ	Числа виду a + bi, де a,b∈ℝ, $i^2 = -1$	3 + 4i, -2i, 5, 1 + i
Прості числа	P	Натуральні числа > 1, що діляться лише на 1 та себе	2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23
Складені числа	—	Натуральні числа > 1, що НЕ є простими	4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16
Парні числа	2ℤ	Цілі числа, що діляться на 2	..., -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, ...
Непарні числа	2ℤ+1	Цілі числа, що НЕ діляться на 2	..., -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, ...
Додатні дійсні	$ℝ^+$	Дійсні числа більші за нуль	0.1, 1, π, √2, 100, 0.001
Від'ємні дійсні	$ℝ^-$	Дійсні числа менші за нуль	-1, -π, -√2, -100, -0.001

Взаємозв'язки множин

ℕ ⊂ ℤ ⊂ **ℚ** ⊂ ℝ ⊂ **ℂ**

Це означає: натуральні числа є підмножиною цілих, цілі — підмножиною раціональних, раціональні — підмножиною дійсних, а дійсні — підмножиною комплексних чисел.

4. Розкласти на множники.	1) y^2-5.	2) $\sqrt{21}-\sqrt{3}$.	3) $\sqrt{55}-\sqrt{5}$.
Розв'язання.	$y^2-5=\left(y-\sqrt{5}\right)\left(y+\sqrt{5}\right)$.	$\sqrt{21}-\sqrt{3}=\sqrt{3\cdot7}-\sqrt{3}=$ $=\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}-\sqrt{3}=$ $=\sqrt{3}\left(\sqrt{7}-1\right)$.	$\sqrt{55}-\sqrt{5}=\sqrt{11\cdot5}-\sqrt{5}=$ $=\sqrt{11}\cdot\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}(\sqrt{11}-1)$.
Відповідь:	$\left(y-\sqrt{5}\right)\left(y+\sqrt{5}\right)$.	$\sqrt{3}\left(\sqrt{7}-1\right)$.	$\sqrt{5}(\sqrt{11}-1)$.

5. Спростити вираз.	$\sqrt{(x-a)^2+4ax}$.
Розв'язання.	$\sqrt{(x-a)^2+4ax}=\sqrt{\left(x^2-2ax+a^2\right)+4ax}=\sqrt{x^2+2ax+a^2}=$ $=\sqrt{(x+a)^2}=\lvert x+a\rvert$.
Відповідь: $\lvert x+a\rvert$.	
6. Скоротити дріб.	$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.
Розв'язання.	$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}\right)^2-1}=\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$.
Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$.	
7. Порівняти.	$2\sqrt{5}\ ?\ 4\sqrt{2}$.
Розв'язання. Внесемо множник під знак кореня:	$2\sqrt{5}\ ?\ 4\sqrt{2}$; $\sqrt{4\cdot5}\ ?\ \sqrt{16\cdot2}$; $\sqrt{20}<\sqrt{32}$, отже $2\sqrt{5}<4\sqrt{2}$.
Відповідь: $2\sqrt{5}<4\sqrt{2}$.	

8. Розв'язати рівняння.	1) $x^2=36$.	2) $x^2=15$.
Розв'язання.	$x^2=36$; $x_1=6; x_2=-6$.	$x^2=15$; $x_1=\sqrt{15}; x_2=-\sqrt{15}$.
Відповідь:	$6;-6$.	$\sqrt{15};-\sqrt{15}$.

	3) $4x^2=36$.	4) $3x^2=36$.	5) $3\sqrt{x}=18$.
	$4x^2=36$; $x^2=9$ $x_1=3; x_2=-3$.	$3x^2=36$; $x^2=12$; $x=\sqrt{12}; x_2=-\sqrt{12}$; $x_1=\sqrt{4\cdot3}; x_2=-\sqrt{4\cdot3}$; $x_1=2\sqrt{3}; x_2=-2\sqrt{3}$.	$3\sqrt{x}=18$; $\sqrt{x}=6$; $\left(\sqrt{x}\right)^2=6^2$; $x=36$.
Відповідь:	$3;-3$.	$2\sqrt{3};-2\sqrt{3}$.	36.