Подібні доданки і правила дужок

Подібні доданки

Означення	Приклади
Подібними доданками називають доданки, які рівні, або які відрізняються лише коефіцієнтами.	$11a-2b+4a-12a+c-7b=$ $=(11+4-12)a+(-2-7)b+c=$ $=3a-9b+c.$
Звести подібні доданки — означає додати їх коефіцієнти, а буквену частину залишити незмінною.	

Дужки

Дужки у вирази вводяться для зміни звичайного порядку дій:	
1) піднесення до степеня (справа наліво); 2) множення або ділення (зліва направо); 3) додавання або віднімання (зліва направо).	$13+(7-3)^2=13+4^2=13+16=29;$ $(113+17):(123-121)=130:2=65;$ $(200-28)-(17+53)=172-70=102.$

Правила розкриття дужок

Якщо перед дужками стоїть знак «+», то дужки опускаються, а знаки доданків у дужках залишаються без змін.	$\ldots+(a+b)=\ldots+a+b.$
Якщо перед дужками стоїть знак «−», то дужки опускаються і знаки доданків змінюються на протилежні.	$\ldots-(a+b)=\ldots-a-b.$

Обчислити значення виразу

$(2+(3\cdot4):(5-1)=(2+12):4=14:4=3.5$

Розкриття дужок та спрощення виразу

$3(x+2)+4(2x-1)$

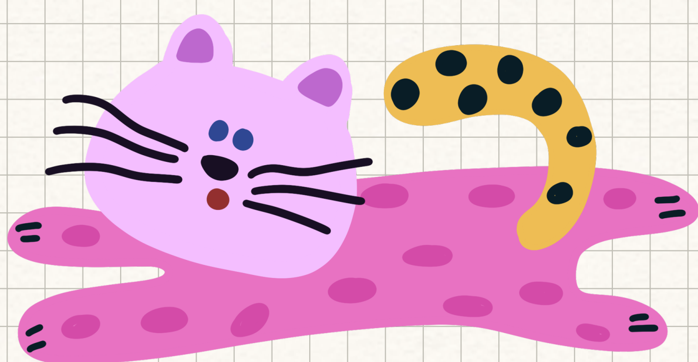
1) Розкриття дужок

$3(x+2)=3x+6$

$4(2x-1)=8x-4$

2) Об'єднаємо вирази

$3x+6+8x-4=11x+2$



Розкриття вкладених дужок

$2(3x+(4-x))$

1) Розкриття внутрішніх дужок

$2(3x+(4-x))=2(3x+4-x)=6x+8-2x=4x+8$

Розкриття дужок з піднесення до степеня

$(x+2)^2$

1) Використаємо формулу квадрата суми

$$(a+b)^2=a^2+b^2=a^2+2ab+b^2$$

2) Підставляємо значення

$x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2$

3) Спростимо

x^2+4x+4 $(5x^2+4???)$

Розкриття дужок з множенням многочленів

$(x+3)(x-2)=x(x-2)+3(x-2)$ ← Використ. розподіл 1) ???

2) Розкриваємо дужки $x^2-2x+3x-6$

3) Спростимо x^2+x-6

$(x+3)(x-2)=x(x-2)+3(x-2)=x^2-2x+3x-6=x^2+x-6$

Подібні доданки – це доданки, які мають однакові буквені частини. (коефіцієнти)

$3x+5x=8x$; $4m^2+3m^2=7m^2$

$7a+2a=9a$; $5xy+2xy=7xy$

$2a+5b+3a=5a+5b$; $7x^2+3xy+2x^2=9x^2+3xy$;

$4ab+2a+5ab=9ab+2a$

Розкриття дужок з подібними доданками

Пр.1 $3(2x+2y)-2(x-3y)$

1) Використовуємо розподільну властивість.

$$3(2x+2y)-2(x-3y)=6x+15y-2x+6y=\underbrace{(6x-2x)+(15y+6y)}_{\text{згрупуємо подіб. доданки}}=\underbrace{4x+21y}_{\text{зводимо подібні дод.}}$$

Пр.2

$$5(a+2b)+2(3a-b)=5a+10b+6a-2b=(5a+6a)+(10b-2b)=11a+8b$$

$5(a+2b)+2(3a-b)=$

$5a+10b+6a-2b=$

$(5a+6a)+(10b-2b)=$

$11a+8b$

Використання переставної та сполучної властив.

$4x+5y+3x+2y$

1) Використов. переставну властивість щоб згрупувати подібні доданки

розподільна ?

$$4x+5y+3x+2y=7x+3x+5y+2y=(7+3)x+(5+2)=10x+7y$$

Добуток сум з подібними доданками

$(2a+3b)(a-b)$

$$(2a+3b)(a-b)=2a(a-b)+3b(a-b)=2a^2-2ab+3ab-3b^2=$$

$$2a^2+(-2ab+3ab)-3b^2=2a^2+ab-3b^2;$$

$(2a+3b)(a-b)=$

$2a(a-b)+3b(a-b)=$ (розподільна власт.)

$2a^2-2ab+3ab-3b^2=$ (розподільна власт.)

$2a^2+(-2ab+3ab)-3b^2=$ групуємо подібні доданки

$2a^2+ab-3b^2$

Різниця квадратів з подібними доданками

$(5a+b)^2-(5a-b)^2;$

Формула різниці квадратів

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$(5a+b)^2-(5a-b)^2=$

$[(5a+b)+(5a-b)][(5a+b)-(5a-b)]=(10a)(2b)=20ab$

Піднесення до квадрату з використанням скороченого множ

Пр.1. $(3x+2y)^2$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(3x+2y)^2=\underline{(3x)^2+2(3x)(2y)+(2y)^2}=9x^2+12xy+4y^2$

Пр. 2.

$2(3x-4y+z)+5(x+2y-3z)=$

$6x-8y+2z+5x+10y-15z=$

$(6x+5x)+(-8y+10y)+(2z-15z)=$

$11x+2y=13z$

Винесення спільного множника за дужки

Пр.1. $12a^2b + 9ab^2 - \underline{3ab} = \underline{3ab}(4a + 3b - 1)$

Пр.2. $4x^2y + 6xy^2 - 10xy = \underline{2xy}(2x + 3y - 5)$

Правила розкриття дужок

+ перед дужками не міняє знак в дужках при розкритті

$+(a+b) = +a+b$

Пр.1. $+(3+5) = +3+5 = 3+5 = 8$

$+(x+y) = +x+y = x+y$

$2+(3+4) = 2+3+4 = 9$

$m+(n+p) = m+n+p$

Правило розкриття дужок з відніманням

− перед дужками значить що при розкритті дужок всі знаки в дужках міняються на протилежні

$-(a+b) = -a-b$

$-(a-b) = -a+b$

Пр

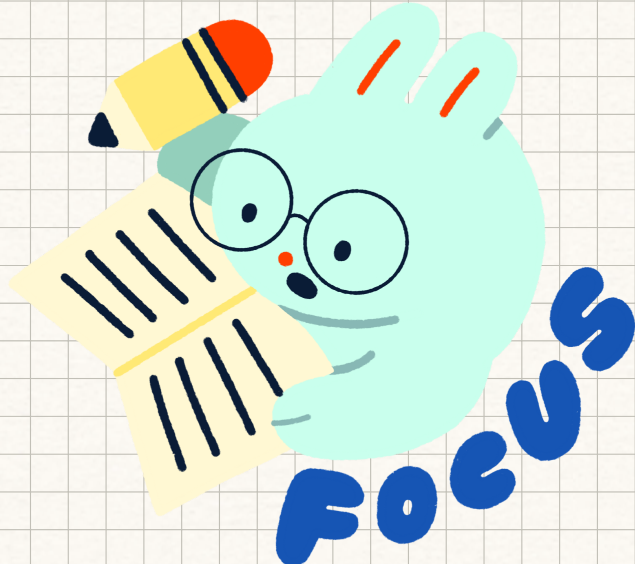
$-(3+5) = -3-5 = -8$

$-(7-2) = -7+2 = -5$

$6-(4+3) = 6-4-3 = -1$

$x-(y+z) = x-y-z$

$-(x-y-z) = -x+y+z$



$-(3+2)=-5$; $4-(6+8+3)=-13$; $3-(4+2-1)=-2$

Множення одночлена на многочлен

При множенні одночлена на многочлен кожен член многочлена множиться на одночлен

$$a(b+c+d)=ab+ac+ad$$

Пр.1

$$2(x+3)=2x+6$$

$$-5(a-b+c)=-5a+5b-5c$$

$$x(y+z-3)=xy+xz-3x$$

$$3a^2(a+2b-c)=3a^3+6a^2b-3a^2c$$

Множення многочлена на многочлен (формула "кожний з кожним")

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

Пр.1 $(x+2)(x+3)=x^2+3x+2x+6=x^2+5x+6$

$$(a-b)(a+b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2$$

$$(2x+1)(x-3)=2x^2-6x+x-3=2x^2-5x-3$$

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3-x^2y+xy^2+x^2y-x^2y+y^3=x^3+y^3$$

Формули скороченого множення

Квадрат суми $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

Пр.1 $(x+3)^2=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2=x^2+6x+9$

$$(2a+b)^2=(2a)^2+2\cdot(2a)\cdot b+b^2=4a^2+4ab+b^2$$

Квадрат різниці $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

Пр. $(x-5)^2=x^2-2\cdot x\cdot 5+5^2=x^2-10x+25$

$$(3y-2)^2=(3y)^2-2\cdot(3y)\cdot 2+2^2=9y^2-12y+4$$

Різниця квадратів $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$(x+3)(x-3)=x^2-3^2=x^2-9$

$(2y+5)(2y-5)=(2y)^2-5^2=4y^2-25$

Куб суми $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(x+1)^3=x^3+3x^2\cdot 1+3x\cdot 1^2+1^3=x^3+3x^2+3x+1$

Куб різниці $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$(y-2)^3=y^3-3y^2\cdot 2+3y\cdot 2^2-2^3=y^3-6y^2+12y-8$

Сума кубів $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$x^3+8=x^3+2^3=(x+2)(x^2-x\cdot 2+2^2)=(x+2)(x^2-2x+4)$

Різниця кубів $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$27-y^3=3^3-y^3=(3-y)(3^2+3\cdot y+y^2)=(3-y)(9+3y+y^2)$

4. Піднесення до степеня

Піднесення виразу в дужках до степеня

Для піднесення виразу в дужках до степеня використовується біном Ньютона або формули скороченого множення.

Формула для біному Ньютона:

$(a + b)^n = \Sigma(k=0 \text{ до } n)\ C(n,k) \cdot a^{n-k} \cdot b^k$

Де $C(n,k) = n! / (k! \cdot (n-k)!)$ - це біноміальні коефіцієнти.

Приклади:

- $(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$
- $(2a - b)^3 = (2a)^3 - 3(2a)^2b + 3(2a)b^2 - b^3 = 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$

Ділення многочлена на одночлен

При діленні многочлена на одночлен, кожен член многочлена окремо ділиться на одночлен

$$(a+b+c):d = a/d + b/d + c/d$$

Пр. $(6x+9):3 = \frac{6x}{3} + \frac{9}{3} = 2x+3;$

$$(8a^3 - 4a^2 + 12a):4a = \frac{8a^3}{4a} - \frac{4a^2}{4a} + \frac{12a}{4a} = 2a^2 - a + 3$$

Ділення многочлена на многочлен

Ділення многочлена на многочлен

Це більш складна операція, яка виконується за допомогою алгоритму ділення многочленів (за методом кута).

Приклад:

Ділення $(x^2 + 5x + 6) \div (x + 2)$:

```
         x + 3
       -------
x+2 ) x² + 5x + 6
      x² + 2x
      -------
           3x + 6
           3x + 6
           -------
                0
```

Отже, $(x^2 + 5x + 6) \div (x + 2) = x + 3$

6. Комбіновані приклади

1. $2[3 - (4 + 2)] = 2[3 - 6] = 2[-3] = -6$
2. $5 - 3[2 - (8 - 3)] = 5 - 3[2 - 5] = 5 - 3[-3] = 5 + 9 = 14$
3. $(2x + 3)^2 - (x - 1)(x + 2) = 4x^2 + 12x + 9 - (x^2 + x - 2) = 4x^2 + 12x + 9 - x^2 - x + 2 = 3x^2 + 11x + 11$
4. $-2[3(x - 1) - 2(x + 4)] = -2[3x - 3 - 2x - 8] = -2[x - 11] = -2x + 22$
5. $(3x^2 - 2x + 5)(x + 1) = 3x^3 + 3x^2 - 2x^2 - 2x + 5x + 5 = 3x^3 + x^2 + 3x + 5$

§1 Рівняння

§ 1. Рівняння. Рівняння з однією змінною. Вирази та їх перетворення

Рівняння та його розв'язки

Означення	Приклади
Рівняння – це рівність, яка містить змінну. **Розв'язок рівняння** – це значення змінної, при якому рівняння перетворюється у правильну рівність.	$3(x-4)=24$, при $x=12$ $3(12-4)=24$ $3\cdot 8=24$ $24=24$ $x=12$ – розв'язок рівняння.
Розв'язати рівняння – це означає знайти його розв'язки або довести, що їх немає.	$3(x-4)=24$, $x=12$.
Рівносильні рівняння – це рівняння, які мають одні і ті самі розв'язки.	$3x=36$ і $3(x-4)=24$; їх розв'язок $x=12$.

Деякі властивості рівнянь

У будь-якій частині рівняння можна звести подібні доданки. Якщо з однієї частини рівняння перенести доданки в іншу частину і при цьому змінити знаки доданків на протилежні, отримаємо рівняння, рівносильне даному.	$3x-4+5x=36$ $3x+5x=36+4$ $8x=4+36$ $8x=40$.
При діленні (множенні) обох частин рівняння на одне і те саме число, відмінне від нуля, отримаємо рівняння, рівносильне даному.	поділимо обидві частини рівняння $8x=40$ на 8: $x=5$ — це рівняння рівносильне $8x=40$, їх розв'язок 5.

Лінійне рівняння

Означення	Приклади
Рівняння виду $ax=b$, де x— змінна, a і b— деякі числа, називається **лінійним рівнянням**.	$4-5x=6-2(x+2)$, використовуючи властивості рівнянь: $4-5x=6-2x-4$, $-5x+2x=6-4-4$, $-3x=-2$, $x=\frac{-2}{-3}$, $x=\frac{2}{3}$.

Розв'язування лінійних рівнянь

$ax+b=0$; $ax=-b$.	$5x+4=0$; $5x=-4$.
$a\neq 0$; $x=-\frac{b}{a}$ — єдиний розв'язок.	$x=-\frac{4}{5}$ — розв'язок.
$a=0$; $0x=-b$ — немає розв'язків.	$0x=-10$ немає розв'язків -10 на 0 поділити неможливо.
$a=0$; $b=0$. $0\cdot x=0$ — нескінченна множина розв'язків.	$7x=7x$, $7x-7x=0$, $0x=0$, x — будь-яке число.

Види виразів

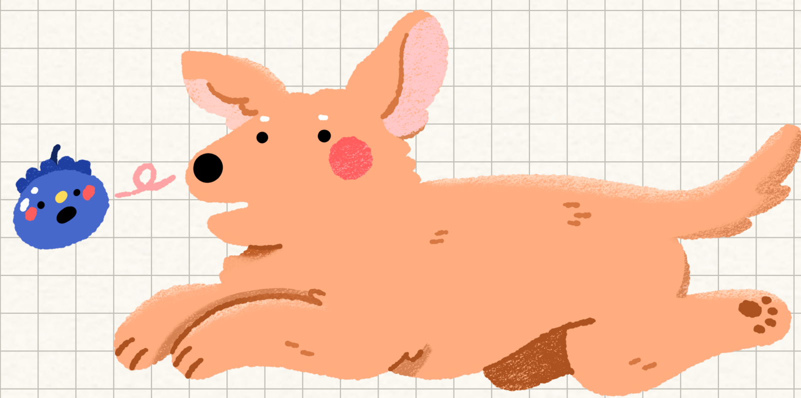
Приклади рівнянь з однією змінною

1. Лінійні рівняння

$3x + 5 = 14$

$2x - y = 9$

$x : 4 + 6 = 10$



2. Квадратні рівняння

$x^2 + 5x + 6 = 0$

$3x^2 - 12 = 0$

$x^2 - 9 = 0$

3. Дробово-раціональні рівняння

$(x+3) : (x-1) = 2$

$x : (x+5) = 3:5$

4. Ірраціональні рівняння

$\sqrt{(x+3)} = 5$

$\sqrt{(2x-1)} = x - 3$

5. Показникові рівняння

$2^x = 8$

$3^{x+1} = 27$

6. Логарифмічні рівняння

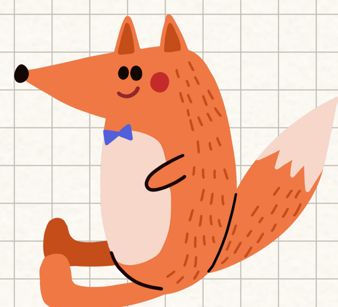
$\log_2(x+3) = 4$

$\ln(x) = 2$

7. Тригонометричні рівняння

$\sin(x) = \frac{1}{2}$

$2\cos(x) + 1 = 0$



Всі ці рівняння містять тільки одну змінну (x) і вимагають знаходження значення цієї змінної, при якому рівняння перетворюється на вірну рівність.

Приклади базових властивостей рівнянь

1. Властивість рівносильності при додаванні однакових виразів до обох частин

Якщо $a=b$ то $a+c=b+c$

Пр. $x+5=12$ то $x+5+3=12+3$ тобто $x+8=15$

2. Властивість рівносильності при відніманні однакових виразів від обох частин

Якщо $a=b$ то $a-c=b-c$

Пр. Якщо $2x=10$ то $2x-6=10-6$ тобто $2x-6=4$

3. Властивість рівносильності при множенні обох частин на ненульове число

Якщо $a=b$ і $c\neq 0$, то $a\cdot c=b\cdot c$

Пр. Якщо $x=7$ то $3x=3\cdot 7$ тобто $3x=21$

4. Властивість рівносильності при діленні обох частин на ненульове число

Якщо $a=b$ і $c\neq 0$ то $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$

Пр. Якщо $4x=20$ то $4x:4=20:4$ тобто $x=5$

5. Властивість рівносильності при піднесенні обох частин до степеня.

Якщо $a=b$, $a^n=b^n$ (з урахуванням деяких обмежень.)

Пр. Якщо $x=3$, то $x^2=3^2$, тобто $x^2=9$

6. Властивість рівносильності при застосуванні однаков. функції до обох частин

Якщо $a=b$ то $f(a)=f(b)$ (з урахув. області визначення ф-ї.)

Якщо $x=8$ то $\sqrt{x}=\sqrt{8}$ тобто $\sqrt{x}=2\sqrt{2}$

7. Транзитивність рівностей

Якщо $a=b$ і $b=c$ то $a=c$

Пр. Якщо $x=y$ і $y=5$ то $x=5$

8. Симетричність рівності

Якщо $a=b$, то $b=a$

Пр. Якщо $3x=15$ то $15=3x$

Ці властивості є фундаментальними для розв'язання рівнянь та становлять основу алгебраїчних перетворень.

Приклади тотожностей і застосування їх властивостей

Алгебраїчні тотожності

1. Формули скороченого множення:
   - $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
     - Приклад: $(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$
   - $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
     - Приклад: $(2x - 5)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$
   - $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
     - Приклад: $(x + 7)(x - 7) = x^2 - 49$
2. Розклад многочленів:
   - $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
     - Приклад: $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
   - $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
     - Приклад: $27y^3 - 1 = 3^3y^3 - 1^3 = (3y - 1)(9y^2 + 3y + 1)$

Тригонометричні тотожності

Тригонометричні тотожності

1. Основні співвідношення:
    - $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
        - Застосування: $\sin^2 30° + \cos^2 30° = (1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2 = 1/4 + 3/4 = 1$
    - $\mathrm{tg}\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$ ($\cos\alpha \neq 0$)
        - Приклад: $\mathrm{tg}45° = \sin45°/\cos45° = (\sqrt{2}/2)/(\sqrt{2}/2) = 1$
2. Формули додавання:
    - $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$
        - Приклад: $\sin(\pi/4 + \pi/6) = \sin(\pi/4)\cdot\cos(\pi/6) + \cos(\pi/4)\cdot\sin(\pi/6) =$

          $= (\sqrt{2}/2)\cdot(\sqrt{3}/2) + (\sqrt{2}/2)\cdot(1/2) = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$
    - $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$
        - Приклад: $\cos(60° + 30°) = \cos60°\cdot\cos30° - \sin60°\cdot\sin30° =$

          $= (1/2)\cdot(\sqrt{3}/2) - (\sqrt{3}/2)\cdot(1/2) = 0$

Застосування властивостей тотожностей

Застосування властивостей тотожностей

1. Спрощення виразів:
    - Вираз: $4x^2 - 9y^2$
    - Застосування тотожності: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
    - Результат: $4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x + 3y)(2x - 3y)$
2. Розв’язування рівнянь:
    - Рівняння: $\sin^2 x + \cos^2 x = 2$
    - Застосування тотожності: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
    - Аналіз: $1 = 2$ (суперечність)
    - Висновок: рівняння не має розв’язків
3. Обчислення без калькулятора:
    - Обчислити: 101×99
    - Застосування: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
    - $a = 100, b = 1$: $101 \times 99 = (100 + 1)(100 - 1) = 100^2 - 1^2 = 10000 - 1 = 9999$
4. Доведення:
    - Довести: $(a + b)^3 + (a - b)^3 = 2a(3a^2 + b^2)$
    - Розкладаємо: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
    - $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
    - Сума: $(a + b)^3 + (a - b)^3 = 2a^3 + 6ab^2 = 2a(a^2 + 3b^2)$

Тотожності дозволяють спрощувати вирази, розв’язувати рівняння та доводити математичні твердження ефективно та елегантно.

Види виразів

Означення	Приклади
Вираз – це правило, що задає сукупність дій, які треба виконувати над значеннями змінних і сталих в певному порядку, щоб отримати значення цього виразу.	$\frac{11}{20}-\frac{1}{2}+1\frac{1}{4}-8^2$; $3x-18y+6$; $\frac{11(y-2)}{13y}$; $(a+b)c-ab$.
Числовий вираз – це вираз, що складається з чисел за допомогою знаків дій та дужок.	$(21-13)^2-\frac{1}{5}$.
Вираз із змінними – це вираз, що складається із чисел і змінних за допомогою знаків дій і дужок.	$1,5x^2-(28y-127):3$.
Підставляючи у вираз значення змінних, отримаємо **числовий вираз**. Знайшовши значення цього числового виразу, отримаємо значення **виразу із змінною**.	якщо $x=2$; $y=5,5$, то $1,5x^2-(28y-127):3=$ $=1,5\cdot 2^2-(28\cdot 5,5-127)\cdot 3=$ $=1,5\cdot 4-(154-127)\cdot 3=$ $=6-27:3=6-9=-3$.

Перетворення виразів

Означення	Приклади
Тотожність – це рівність, справедлива при всіх допустимих значеннях змінних, які входять до неї.	$3a-4+5a=8a-4$.
Тотожне перетворення виразу – це заміна одного виразу іншим, тотожно рівним йому.	$3x-4=x+2$ і $2x=6$ – тотожні рівності.

Відомі тотожності

Означення	Приклади
$a+b=b+a$; $ab=ba$ переставна властивість.	$17+13=13+17$; $5\cdot 3=3\cdot 5$.
$(a+b)+c=a+(b+c)$; $(ab)c=a(bc)$ сполучна властивість.	$(17+13)+33=17+(13+33)$; $(2\cdot 8)\cdot 4=2\cdot(8\cdot 4)$.
$a(b+c)=ab+ac$ розподільна властивість.	$7\cdot(11+13)=7\cdot 11+7\cdot 13$.