Нерівності

1

§ 1. Нерівності

Види числових нерівностей

Означення	Приклади
Якщо a менше b або a більше b, то записують так: $a<b$ або $a>b$. Такий вираз називається **нерівністю**.	$7<10;\ -8<-5;\ 13>4;\ 6,3>-10,2$
Число a більше числа b, якщо різниця $a-b$ – додатне число, число a менше b, якщо різниця $a-b$ – від'ємне	$a-b=7,02$, то $a>b$; $a-b=-9,5$, то $a<b$.
На координатній прямій більше число зображується точкою, що розташована справа, а менше – точкою, яка лежить зліва.	$a<b$
Знаки >, < називаються знаками строгих нерівностей.	$a<b;\ b>a$.
Знаки ≥, ≤ — знаки нестрогих нерівностей.	$a\le b;\ b\ge a$.
≥ – знак більше або дорівнює (не менше).	$5\ge 5;\ -17,5\ge -131,1$.
≤ — знак менше або дорівнює (не більше).	$5\le 5;\ -17,5\le 0,13$.
$a>b$ та $c>d$ — нерівності одного знака.	$15>4,3;\ -9>-17$.
$a>b$ та $c<d$ – нерівності протилежних знаків.	$6,2>-8;\ 2<10,2$.

Властивості числових нерівностей

1. Якщо $a>b$, то $b<a$; якщо $a<b$, то $b>a$.	$13>5$, то $5<13$; $-12,9<4$, то $4>-12,9$.
2. Якщо $a>b$ та $b>c$, то $a>c$ (властивість транзитивності).	$17>8;\ 8>5$, то $17>5$.
3. Якщо, $a>b$, то $a+c>b+c$.	$14>9$, то $14+8>9+8$.
4. Якщо $a>b$ та c – додатне число ($c>0$), то $ac>bc$. Ця властивість має такий зміст: якщо обидві частини правильної нерівності помножити на одне й те саме додатне число, то отримаємо правильну нерівність.	$7,2>-5;\ 4>0$, то $7,2\cdot 4>-5\cdot 4$, тобто $28,8>-20$.
5. Якщо $a<b$ і c – від'ємне число ($c<0$), то $ac>bc$. Ця властивість має такий зміст: якщо обидві частини правильної нерівності помножити на одне й те саме від'ємне число і змінити знак початкової нерівності на протилежний, то отримаємо правильну нерівність.	$6,9>3,5$; $6,9(-2)$ і $3,5(-2)$; $-2<0$, то $-13,8<-7$.
6. Якщо $a>b$ і $c>d$, то $a+c>b+d$. Якщо почленно скласти дві правильні нерівності одного знака, то отримаємо правильну нерівність.	$+\begin{matrix}7,0>3\\4,3>-7\end{matrix}$ $11,3>-4$; $+\begin{matrix}-1,7<3\\-1,3<0\end{matrix}$ $-2,0<3$
7. Якщо a,b,c,d – додатні числа, причому $a>b$ і $c>b$, то $ac>bd$. Якщо почленно перемножити правильні нерівності одного знака, ліві і праві частини яких додатні числа, то отримаємо правильну нерівність.	$18>15;\ \frac{3}{8}>\frac{1}{5}$, то $18\cdot\frac{3}{8}>15\cdot\frac{1}{5}$; $\frac{18\cdot 3}{8}>\frac{15\cdot 1}{5}$; $6\frac{3}{4}>3$.
8. Якщо $a>b$ і $c<d$, то $a-c>b-d$	$12>7;\ 5<9$; $12-5>7-9$, то $7>-2$.
9. Якщо $a>b>0$, то $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$	$8>4$, то $\frac{1}{8}<\frac{1}{4}$.
10. Якщо $a>b>0$, то для будь-якого натурального числа n виконується нерівність $a^n>b^n$	$6>5$, то, $6^2>5^2$, тобто $36>25$.

44

Види ч.н.

$x>y$ різниця додатня

$x<y$ різниця від'ємна

Строгі і не строгі нерівності

≥ не менше / ≤ не більше

>> нерівності одного знака

>< нерівності різних знаків

Властив. ч.н.

$x>y;\ y<x$ схоже на комутативн

$k<p;\ p>k$

$x<y;\ y<z;\ x<z$ транзитивність

$x>y \Rightarrow x+c>y+c$

$k>p \Rightarrow ks>ps;\ s>0$

$x<y \Rightarrow xk>xk;\ k<0$

$x>y;\ z>k \Rightarrow x+z>y+k$

$x>y;\ z>k \Rightarrow x\cdot z>y\cdot k$

$x>y$ і $z<k \Rightarrow x-z>y-k$

$x>y>0 \Rightarrow \frac{1}{x}<\frac{1}{y}$

$x>y>0 \Rightarrow x^n<y^n$

Нерівність — це математичний вираз, який показує, що одна величина більша, менша або не дорівнює іншій. Нерівності записуються за допомогою знаків: > (більше), < (менше), ≥ (більше або дорівнює), ≤ (менше або дорівнює), ≠ (не дорівнює).

Приклади лінійних нерівностей:

Лінійна нерівність — це нерівність, яка містить змінну в першому степені.

1. x + 3 > 7 (розв'язок: x > 4)
2. 2x − 5 ≤ 9 (розв'язок: x ≤ 7)
3. −3x + 1 < 10 (розв'язок: x > -3)
4. 4x ≥ 12 (розв'язок: x ≥ 3)
5. 5 − 2x ≠ 1 (розв'язок: x ≠ 2)

Рівносильні нерівності:

Рівносильні нерівності — це нерівності, які мають однакові множини розв'язків.

Основні перетворення, які зберігають рівносильність:

- Додавання або віднімання однакового числа з обох частин
- Множення або ділення обох частин на додатне число
- Множення або ділення на від'ємне число зі зміною знака нерівності

Приклад рівносильних нерівностей:

- 2x + 4 > 10
- 2x > 6 (віднімаємо 4 з обох частин)
- x > 3 (ділимо на 2)

Всі три нерівності мають однакову множину розв'язків: x > 3, тому вони рівносильні.

2

Числові проміжки

Вид проміжку	Геометричне зображення	Позначення	Записати за допомогою нерівностей
Інтервал	a b	$(a;b)$	$a<x<b$.
Відрізок	a b	$[a;b]$	$a\le x\le b$.
Півінтервал	a b	$(a;b]$	$a<x\le b$.
Півінтервал	a b	$[a;b)$	$a\le x<b$.
Промінь	a	$[a;+\infty)$	$x\ge a$.
Промінь	b	$(-\infty;b]$	$x\le b$.
Відкритий промінь	a	$(a;+\infty)$	$x>a$.
Відкритий промінь	b	$(-\infty;b)$	$x<b$.

На практиці не завжди використовують терміни «інтервал», «відрізок», «півінтервал», «промінь», а замінюють їх спільною назвою «числовий проміжок».

Лінійні нерівності

Означення

Лінійною називається нерівність виду $ax>b$ (або, відповідно, $ax<b, ax\ge b, ax\le b$), де $a\ne 0$, і $b\ne 0$ – числа.

Розв'язками нерівності з однією змінною називається множина таких значень змінної, яка перетворює її на правильну числову нерівність.

1. Якщо $a>0$, то розв'язок нерівності $ax>b$ має вигляд $x>\frac{b}{a}$.
2. Якщо $a<0$, то розв'язок нерівності $ax\ge b$ має вигляд $x\le\frac{b}{a}$.
3. Якщо $a=0$, то нерівність $ax>b$ набуває вигляду $0x>b$, тобто вона не має розв'язку при $b\ge 0$ і правильна при будь-яких x, якщо $b<0$.

При розв'язуванні нерівностей використовуються такі властивості.

Властивості	Приклади
1. Якщо з однієї частини нерівності перенести в іншу доданок з протилежним знаком, то утвориться нерівність, рівносильна даній.	$4(y-1)+7\le 1-3(y+2);\ 4y-4+7\le 1-3y-6;$ $4y+3y\le 1-6+4-7$.
2. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число, то утвориться нерівність, рівносильна даній.	$7y\le -8;$ $y\le -\frac{8}{7}$. $\left(-\infty;-1\frac{1}{7}\right]$
3. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то отримаємо рівносильну даній нерівність.	$-3x+8<2x-2$, $-3x-2x<-8-2$, $-5x<-10$, $x>2$, $(2;+\infty)$

3

Оцінка суми, різниці, добутку, частки

1. $a\le x\le b$, $c\le y\le d$; $a+c\le x+y\le b+d$.	3. $a\le x\le b$, $c\le y\le d$; $ac\le xy\le bd$.	$(a>0)$; $(c>0)$.
2. $a\le x\le b$, $c\le y\le d$; $a-d\le x-y\le b-c$.	4. $a\le x\le b$, $c\le y\le d$; $\frac{a}{d}\le\frac{x}{y}\le\frac{b}{c}$.	$(a>0)$; $(c>0)$.

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

1. Розв'язати нерівність.	1) $\frac{3z+1}{2}-6z\le\frac{5z-2}{3}+\frac{7z}{2}$.	2) $\frac{3x-2}{x-2}>3$.
Розв'язання.	$\left(\frac{3z+1}{2}-6z\right)\cdot 6\le\left(\frac{5z-2}{3}+\frac{7z}{2}\right)\cdot 6$; $(3z+1)3-36z\le(5z-2)2+21z$; $9z+3-36z\le 10z-4+21z$; $9z-36z-10z-21z\le -4-3$; $-58z\le -7$; $z\ge\frac{7}{58}$	$\frac{3x-2}{x-2}-3>0$; $\frac{3x-2-3x+6}{x-2}>0$; $\frac{4}{x-2}>0$. Оскільки чисельник дробу $4>0$, то нерівність $\frac{4}{x-2}>0$ правильна при $x-2>0; x>2$.
	Відповідь: $\left[\frac{7}{58};+\infty\right)$.	Відповідь: $(2;+\infty)$.
2. Розв'язати нерівність.	1. $\lvert 1-3x\rvert<2$.	2. $\lvert 4x-1\rvert>1$.
Розв'язання.	$-2<1-3x<2$; $-3<-3x<1$; $-\frac{1}{3}<x<1$.	$4x-1<-1$; або $4x-1>1$; $4x>2$; $4x<0$; $x<0$; $(-\infty;0)$. $x>\frac{1}{2}$; $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.
	Відповідь: $\left(-\frac{1}{3};1\right)$.	Відповідь: $(-\infty;0)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Доведення нерівностей

Довести нерівність можна на підставі правила: якщо $a>b$, то $a-b>0$ і якщо $a<b$, то $a-b<0$.

1. Довести нерівність.	$x^2+y^2\ge 2xy$.
Доведення. Знайдемо різницю лівої та правої частин нерівності:	$(x^2+y^2)-2xy=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$. $(x-y)^2\ge 0$ при будь-яких x та y, значить $x^2+y^2\ge 2xy$ при будь-яких x та y.

Вираз $\frac{a+b}{2}$ називають **середнім арифметичним** чисел a та b, а вираз $\sqrt{ab}$ — **середнім геометричним**.

2. Довести нерівність.	Середнє арифметичне двох додатних чисел не менше їхнього середнього геометричного. $\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$.
Доведення. Знайдемо різницю лівої та правої частин нерівності:	$\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}=\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2}$. $\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2}\ge 0$ при будь-яких $x\ge 0$ та $y\ge 0$. тобто, при $x>0$ та $y>0$ $\frac{x+y}{2}>\sqrt{xy}$, при $x=y$ $\frac{x+y}{2}=\sqrt{xy}$.

46

4

§ 2. Системи нерівностей з однією змінною

Розв'язування систем нерівностей з однією змінною

Означення	Приклади
Якщо необхідно знайти спільні розв'язки двох чи більше нерівностей з однією змінною, це означає, що треба розв'язати **систему** двох чи більше нерівностей з однією змінною.	$\begin{cases}4x+4\ge 0,\\6-4x\ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}4x\ge -4,\\-4x\ge -6;\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge -1,\\x\le\frac{3}{2};\end{cases}$
Розв'язками системи називаються такі значення змінної, які є розв'язками одразу всіх нерівностей, що входять до даної системи.	Значення $x\in\left[-1;\frac{3}{2}\right]$ є розв'язком нерівності $4x+4\ge 0$ та $6-4x\ge 0$.
Розв'язати систему нерівностей з однією змінною – означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх немає.	Відповідь: $\left[-1;\frac{3}{2}\right]$.

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

1. Розв'язати систему нерівностей.	$\begin{cases}x-1<2+3x;\\5x-7<x+9.\end{cases}$
Розв'язання.	$\begin{cases}-2x<3;\\4x<16.\end{cases}$, звідси $\begin{cases}x>-1,5,\\x<4.\end{cases}$
Відповідь: $(-1,5;4)$.	
2. Розв'язати подвійну нерівність.	$-3<2x-1<3$.
Розв'язання. Розв'язанням подвійної нерівності є розв'язування системи двох нерівностей.	$\begin{cases}2x-1>-3,\\2x-1<3;\end{cases}$ $\begin{cases}2x>-2,\\2x<4;\end{cases}$ $\begin{cases}x>-1,\\x<2;\end{cases}$ $(-1;2)$ або $-3<2x-1<3$; $-2<2x<4$; $-1<x<2$. $(-1;2)$
Відповідь: $(-1;2)$.	
3. Розв'язати нерівність.	$\frac{5-2y}{2y-7}>0$.
Розв'язування цієї нерівності можна звести до розв'язування двох систем.	1. $\begin{cases}5-2y>0,\\2y-7>0;\end{cases}$ $\begin{cases}-2y>-5,\\2y>7;\end{cases}$ $\begin{cases}y<2,5,\\y>3,5;\end{cases}$ Розв'язків немає. 2. $\begin{cases}5-2y<0,\\2y-7<0;\end{cases}$ $\begin{cases}-2y<-5,\\2y<7;\end{cases}$ $\begin{cases}y>2,5,\\y<3,5.\end{cases}$ $(2,5;3,5)$
Відповідь: $(2,5;3,5)$.	

§ 3. Квадратична функція

5

Квадратний тричлен та його розв'язки

Вираз $2x^2-5x+3$ є многочленом другого ступеня з однією змінною.
Такі многочлени називають **квадратними тричленами**.

Означення	Приклади
Коренем квадратного тричлена називається значення змінної, при якому значення цього тричлена дорівнює нулю. Для того, щоб знайти розв'язки квадратного тричлена ax^2+bx+c, треба розв'язати квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$.	Знайти розв'язки тричлена: $2x^2-5x+3$. Розв'яжемо рівняння: $2x^2-5x+3=0$. $D=25-24=1$. $x=\frac{5\pm\sqrt{1}}{4};x=\frac{5\pm 1}{4};x_1=1;x_2=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$. Тобто квадратний тричлен має два розв'язки: 1 та 1,5.
Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного тричлена ax^2+bx+c, то $ax^2+bx+c=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$.	$2x^2-5x+3=2(x-1)\cdot(x-1,5)=(x-1)\cdot(2x-3)$, $-2x^2+5x+7=-2\left(x-\frac{7}{2}\right)\cdot(x+1)=(7-2x)\cdot(x+1)$, $-2x^2+5x+7=0;\ 2x^2-5x-7=0$, $D=25+56=81=9^2$, $x=\frac{5\pm 9}{4};x_1=-1,x_2=\frac{7}{2}$.
Квадратичною функцією називається функція, яку можна задати формулою $y=ax^2+bx+c$, де x — незалежна змінна, a,b,c — деякі числа, причому $a\ne 0$.	Приклади квадратичної функції: $y=x^2, y=-x^2, y=x^2+2, y=(x-4)^2$. Їх графіки — рівні параболи, тільки по-різному розташовані на координатній площині.
Графіки функцій $y=ax^2+bx+c$ та $y=ax^2$ – параболи, їх можна сумістити паралельним перенесенням, оскільки функцію $y=ax^2+bx+c$ можна подати у вигляді $y=a(x+m)^2-n$.	Функцію $y=2x^2-4x+10$ можна записати так: $y=2(x-1)^2+8$. $-\frac{1}{4}x^2-x-1=-\frac{1}{4}(x^2+4x+4)=$ $=-\frac{1}{4}(x+2)^2$.

Отже, графіком функції $y=ax^2+bx+c$ є парабола, яку можна отримати із графіка функції $y=ax^2$ за допомогою двох паралельних перенесень – зсуву вздовж осі x і зсуву вздовж осі y. Звідси отримуємо, що графіком функції $y=ax^2+bx+c$ є парабола, вершиною якої є точка $(m;n)$, де $m=-\frac{b}{2a}, n=\frac{-b^2+4ac}{4a}$. Віссю симетрії параболи є пряма $x=m$, паралельна осі y. При $a>0$ вітки параболи напрямлені вгору, а при $a<0$ – вниз.

1. Функція $y=f(x)$ парна або непарна, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного значення x з області визначення $f(-x)=f(x)$.
2. Якщо графік функції симетричний відносно осі y, то функція є **парною**. Якщо графік функції симетричний відносно початку координат, то функція є **непарною**.

6

Перетворення графіків функцій

Побудова графіка функції $y=mf(x)$

$y=mf(x)$, де $m>0, m\ne 1$, якщо заданий графік функції $y=f(x)$.

Ординати точок графіка функції $y=mf(x)$ утворюються множенням на m відповідних ординат точок графіка функції $y=f(x)$. Таке перетворення графіка функції $y=f(x)$ називається розтягненням від осі x з коефіцієнтом m, якщо $m>1$, і стягненням до осі x, якщо $0<m<1$.

$y=-f(x)$, якщо заданий графік функції $y=f(x)$.

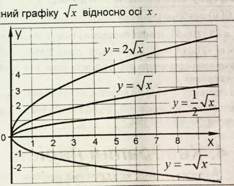
При одному й тому самому значенні x ординати точок графіка функції $y=f(x)$ і функції $y=-f(x)$ відрізняються лише знаком. Тобто графік функції $y=-f(x)$ можна отримати із графіка $y=f(x)$ перетворенням симетрії останнього відносно осі x.

$y=mf(x)$, де $m<0, m\ne -1$, якщо заданий графік функції $y=f(x)$.

Оскільки $mf(x)=-|m|f(x)$, то графік функції $y=mf(x)$ можна отримати за допомогою розтягнення (стягнення) графіка функції $y=f(x)$ від осі x з коефіцієнтом $|m|$ і наступним перетворенням симетрії відносно x.

$$y=\sqrt{x},\ y=2\sqrt{x},\ y=\frac{1}{2}\sqrt{x},\ y=-\sqrt{x}.$$

1) Побудуємо графік функції $y=\sqrt{x}$;
2) Збільшимо ординату кожної точки цього графіка в 2 рази, отримаємо $y=2\sqrt{x}$;
3) Якщо ординату кожної точки зменшимо в 2 рази, то отримаємо $y=\frac{1}{2}\sqrt{x}$;
4) $y=-\sqrt{x}$ — симетричний графіку $\sqrt{x}$ відносно осі x.

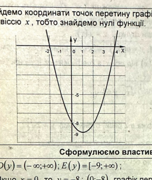


1) Для того, щоб побудувати графік функції $y=f(x)+n$, треба графік функції $y=f(x)$ перенести на n одиниць у напрямку осі y (вгору), якщо $n>0$, або в протилежному напрямку (вниз), якщо $n<0$.
2) Для того, щоб отримати графік функції $y=f(x-m)$, достатньо графік функції $y=f(x)$ перенести на m одиниць в напрямку осі x (вправо), якщо $m>0$, або на $-m$ одиниць в протилежному напрямку (вліво), якщо $m<0$.

7

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

Для того, щоб побудувати графік квадратичної функції, потрібно:
1) знайти координати вершин параболи і позначити її на координатній площині;
2) побудувати ще декілька точок, що належать параболі;
3) поєднати відмічені точки плавною лінією.

Побудувати графік функції.	$y=x^2-2x-8$.
Знайдемо координати вершини параболи.	$m=x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2}=1$; $n=y=1^2-2\cdot 1-8=-9$. $(1;-9)$ – вершина параболи.
Знайдемо координати точок перетину графіка з віссю x, тобто знайдемо нулі функції. 	$x^2-2x-8=0$, $D=1+8=9$, $x=1\pm 3$; $x_1=4; x_2=-2$. $(4;0)$ $(-2;0)$ – координати точок перетину з віссю x. $x=0; y=-8, (0;-8)$ – точка перетину графіка з віссю y. $x_1=3;\ y_1=3^2-2\cdot 3-8=-5$; $x_2=-1;\ y_2=(-1)^2-2\cdot(-1)-8=-5$; $x=1$ – вісь симетрії.

Сформулюємо властивості функції $y=x^2-2x-8$.

1. $D(y)=(-\infty;+\infty); E(y)=[-9;+\infty)$;
2. Якщо $x=0$, то $y=-8$; $(0;-8)$, графік перетинає вісь y в цій точці.
3. $y>0$, якщо $x\in(-\infty;-2)\cup(4;+\infty)$; $y<0$, якщо $x\in(-2;4)$.
4. Протилежним значенням аргумента відповідають рівні значення функції. Графік функції симетричний відносно прямої $x=1$.
5. Функція спадає на проміжку $(-\infty;1]$ та зростає на проміжку $[1;+\infty)$.
6. Найменшого значення, що дорівнює -9, функція набуває при $x=1$.
7. Найбільшого значення функція не має.

§ 4. Квадратні нерівності

Розв'язування квадратних нерівностей

Означення	Приклади
Нерівність виду $ax^2+bx+c>0$ $(ax^2+bx+c<0)$, де a,b,c – деякі числа, $a\ne 0$ і x – змінна, називається **квадратною**.	а) $-3x^2+x-5<0$; б) $x(x+4)\le 3$, бо $x^2+4x-3\le 0$.
Для розв'язування квадратних нерівностей використовують ескіз графіка функції $y=ax^2+bx+c$, тобто параболу. $x\in(-\infty;-1]\cup\left[\frac{10}{3};+\infty\right)$.	$3x^2-7x-10\ge 0$. $y=3x^2-7x-10$ графік – парабола, вітки напрямлені вгору, вісь $0x$ перетинає в точках $x_1=-1; x_2=\frac{10}{3}$.

50

Розв'язування будь-якої квадратної нерівності можна звести до одного з шести випадків таблиці.

8

	$D<0$	$D=0$	$D>0$
$a>0$	$ax^2+bx+c>0$: x – будь-яке число; $(ax^2+bx+c<0)$: розв'язків немає.	$ax^2+bx+c>0$: $x\in(-\infty;x_0)\cup(x_0;+\infty)$; $(ax^2+bx+c<0)$: розв'язків немає.	$ax^2+bx+c>0$: $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$; $(ax^2+bx+c<0)$: $x\in(x_1;x_2)$.
$a<0$	$ax^2+bx+c>0$: розв'язків немає; $(ax^2+bx+c<0)$: x – будь-яке число.	$ax^2+bx+c>0$: розв'язків немає; $(ax^2+bx+c<0)$: $x\in(-\infty;x_0)\cup(x_0;+\infty)$.	$ax^2+bx+c>0$: $x\in(x_1;x_2)$; $(ax^2+bx+c<0)$: $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$.

Розв'язками нерівності $ax^2+bx+c>0$ є значення x, для яких точки параболи розташовані над віссю $0x$.
Розв'язками нерівності $ax^2+bx+c>0$ є значення x, для яких точки параболи розташовані під віссю $0x$.

Алгоритм розв'язування квадратних нерівностей виду $ax^2+bx+c>0$, або $ax^2+bx+c<0$.

Розв'язати нерівність	$-3x^2+7x+10\le 0$.
1) Визначаємо напрямок віток параболи, яка відповідає функції $y=ax^2+bx+c$. 2) Знаходимо корені квадратного тричлена ax^2+bx+c (розв'язуємо рівняння $ax^2+bx+c=0$). 3) Будуємо ескіз графіка функції $y=ax^2+bx+c$. 4) Вибираємо значення змінної, які відповідають розв'язкам нерівності. 5) Записуємо відповідь.	$3x^2-7x-10\le 0$ 1) $a=-3$; вітки напрямлені вниз. 2) $3x^2-7x-10=0$; $D=169$; $x_1=-1;\ x_2=\frac{10}{3}$. 3) 4) $x\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{10}{3};+\infty\right)$. 5) Відповідь: $(-\infty;-1)\cup\left(\frac{10}{3};+\infty\right)$.

9

Розв'язування нерівностей методом інтервалів

Якщо ліва частина нерівності є добутком, а права частина – 0, тобто $f(x)>0$ $(f(x)<0)$ та $f(x)=(x-a)(x-b)\dots(x-c)$, де a,b,c – деякі числа, то такі нерівності **розв'язують методом інтервалів**.

Алгоритм розв'язування нерівностей методом інтервалів	Розв'язати нерівність. $(x+6)(x+1)(x-4)<0$.
1) Знайти область визначення функції $y=f(x)$. 2) Знайти нулі функції $y=f(x)$ $(f(x)=0)$. 3) Нанести нулі на область визначення. 4) Визначити знаки функції $f(x)$ в кожному інтервалі, на які розбивається область визначення нулями функції. 5) Записати відповідь.	1) ОДЗ: $x\in R$. 2) Нулі функції: $(x+6)(x+1)(x-4)=0$; $x_1=-6;\ x_2=-1;\ x_3=4$. 3) Нанесемо нулі на ОДЗ: Відповідь: $(-\infty;-6)\cup(-1;4)$

Якщо всі множники функції $y=f(x)$ виду $(x-a)$, тобто лінійні, то знаки на проміжках із ОДЗ можна переміжати справа наліво з «+» на «−».

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

1. Розв'язати нерівність.	1) $2x^2-7x+6>0$.	2) $-x^2+2x+15<0$.
Розв'язання.	$2x^2-7x+6=0$, $a>0, D>0$ $D=49-48=1$, $x=\frac{7\pm 1}{4};x_1=\frac{3}{2};x_2=2$	$-x^2+2x+15=0$, $a<0, D>0$ $x^2-2x-15=0$ $D_1=1+15=16$. За теоремою Вієта: $x_1=-3; x_2=5$
Відповідь:	$x\in\left(-\infty;1\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$.	$(-\infty;-3)\cup(5;+\infty)$.

При розглянутому способі розв'язування нерівності не визначають координати вершин параболи. Важливо лише знати, куди напрямлені вітки параболи – вгору чи вниз, і які абсциси точок її перетину з віссю x.

2. Розв'язати нерівність.	1) $x^2-3x+4>0$.	2) $x^2+2x-48<0$.	3) $-9x^2+12x-4<0$.
Розв'язання.	$a>0, D<0$. $x^2-3x+4=0$, $D=9-16=-7<0$, тобто рівняння не має розв'язків. Покажемо схематично розташування параболи на координатній площині:	$a>0, D>0$. $x^2+2x-48=0$, За теоремою Вієта: $x_1=-8; x_2=6$.	$a<0, D=0$. $-9x^2+12x-4=0$, $9x^2-12x+4=0$, $(3x-2)^2=0; x=\frac{2}{3}$.
Відповідь:	x – будь-яке число.	$x\in(-8;6)$.	$\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$.

10

3. Розв'язати нерівність.	$x(0,2-x)(x+5)<0$.
Розв'язання. Множник $(0,2-x)$ представимо у вигляді $(x-a)$: $(0,2x-x)=-(x-0,2)$.	$-x(x-0,2)(x+5)<0, x(x-0,2)(x+5)>0$. 1) ОДЗ: $x\in R$. 2) Нулі функції: $x_1=-5; x_2=0; x_3=0,2$. 3.
Відповідь: $(-5;0)\cup(0,2;+\infty)$.	
4. Розв'язати нерівність. Такі нерівності розв'язують методом інтервалів.	$\frac{4-x}{x+8}<0$.
Розв'язання. Перетворимо нерівність. Знаки цього дробу співпадають із знаками добутку	1) ОДЗ: $x\ne -8$, оскільки $x+8\ne 0$, то $x\in(-\infty;-8)\cup(-8;+\infty)$. 2) Нулі: $4-x=0; x=4$. $-\frac{x-4}{x+8}<0, \frac{x-4}{x+8}>0$, 3) $(x-4)(x+8)>0$.
Відповідь: $(-\infty;-8)\cup(4;+\infty)$.	
5. Розв'язати нерівність.	$(x+1)(3-x)(x-2)^2<0$.
Розв'язання. Знаки даної нерівності співпадають зі знаками нерівності	$-(x+1)(x-3)(x-2)^2<0$ $(x+1)(x-3)(x-2)^2>0$. $(x+1)(x-3)>0$, 1) ОДЗ: $x\in R$. 2) Нулі: $x_1=-1; x_2=2; x_3=3$. 3)
Відповідь: $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.	

§ 5. Рівняння, які зводяться до квадратних. Системи рівнянь

Ціле рівняння та його розв'язки

Правила	Приклади
Рівняння називається **цілим**, якщо у нього ліва і права частини є цілими виразами.	$(3x+7)(3x-7)-5=3x(3x+1)$.
Будь-яке рівняння можна замінити рівносильним йому рівнянням, ліва частина якого — многочлен стандартного виду, а права — нуль.	$\left(\frac{x^2}{16}-\frac{x}{8}=\frac{x+1}{3}\right)\Leftrightarrow(3x^2-22x-16=0)$
Якщо рівняння з однією змінною записано у вигляді $P(x)=0$, де $P(x)$ — многочлен стандартного виду, то степінь цього многочлена називають степенем рівняння.	Рівняння $x^2-2x^3+1=0$ є рівнянням третього степеня.
Деякі рівняння третього або більш високого степеня легко розв'язати за допомогою розкладання многочлена на множники.	Розв'язати рівняння. $x^3-8x^2-x+8=0, x^2(x-8)-(x-8)=0$, $(x-8)(x-1)(x+1)=0$. Рівняння має три розв'язки: $x_1=-8; x_2=1; x_3=8$.

Способи розв'язання різних типів нерівностей

1) Лінійні нерівності

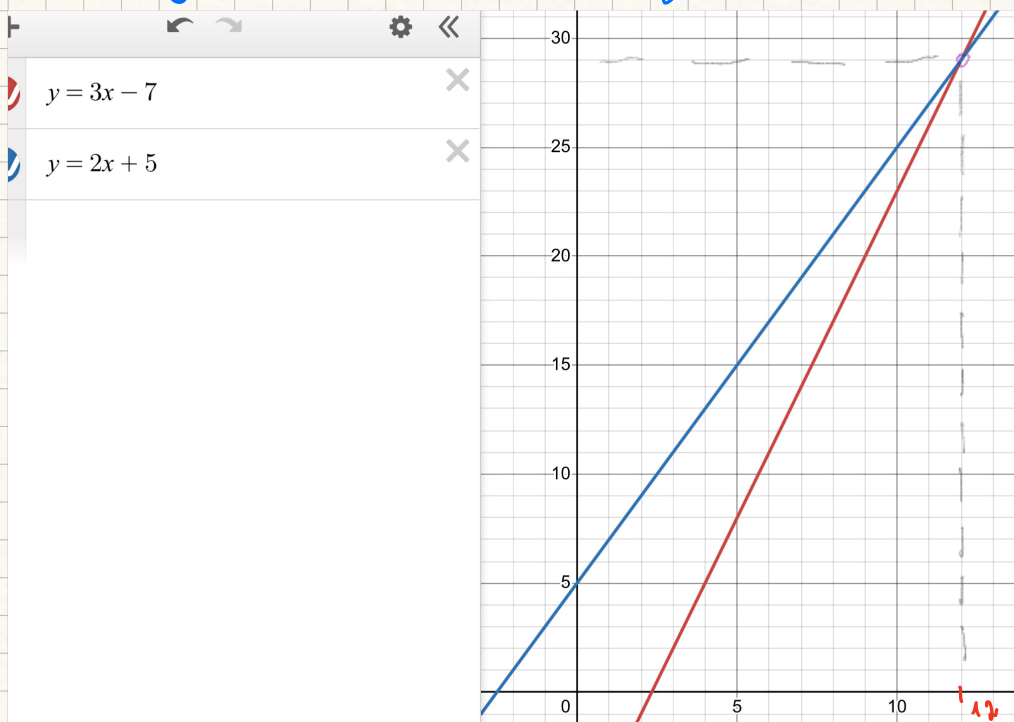
Алгебраїчний метод:

$$3x - 7 \leq 2x + 5$$

$$3x - 2x \leq 5 + 7$$

$$x \leq 12$$

Графічний метод: Будуємо граф фу $y = 3x - 7$ та $y = 2x + 5$ знаходимо точку перетину та визначаємо області.



2) Квадратні нерівності

Метод інтервалів:

$$x^2 - 5x + 6 > 0$$

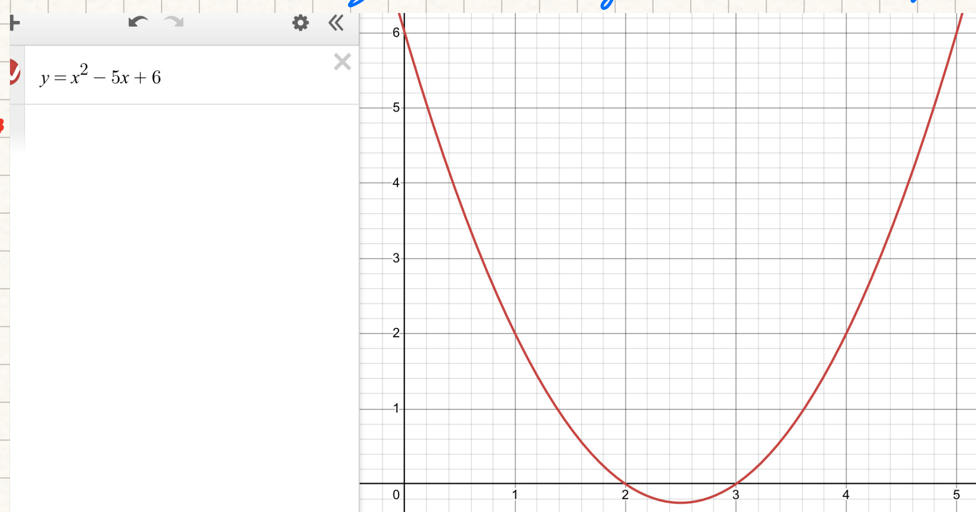
$$(x-2)(x-3) > 0$$

Нулі: $x = 2$, $x = 3$

Перевіряємо знак на інтервалах $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$

Графічний метод:

Будуємо параболу $y = x^2 - 5x + 6$ та визначаємо, де вона вище осі x.



Метод виділення повного квадрата

$$x^2 - 4x + 5 > 0$$

$$(x-2)^2 + 1 > 0$$

Завжди виконується, оскільки

$$(x-2)^2 \geq 0$$

3) Дробово-раціональні нерівності

Метод інтервалів: $(x-1)/(x+2) \ge 0$

Критичні точки: $x=1$ (нуль чисельника),

$x=-2$ (нуль знаменника

Розв'язок: $x \in (-\infty; -2) \cup [1; +\infty)$

Зведення до спільного знаменника.

$x/(x-1) > 2$

$x/(x-1) - 2 > 0$

$(x-2(x-1)/(x-1) > 0$

$(x-2x+2)/(x-1) > 0$

$(2-x)/(x-1) > 0$

4) Ірраціональні нерівності

Для $\sqrt{F(x)} > g(x)$; Якщо $g(x) \ge 0$

$$\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$$

Якщо $g(x) < 0$; Приклад: $\sqrt{(x+1)} > x-1$

Розглядаємо два випадки: 1) $x-1<0 \Rightarrow x<1$; потрібно $x \ge -1$

2) $x-1 \ge 0 \Rightarrow x \ge 1$; потрібно $x+1 > (x-1)^2$

* Розв'язання ірр. нерівності виду $\sqrt{F(x)} > g(x)$. Такі нерівності вимагають розгляд двох випадків залежно від значення $g(x)$

Якщо $g(x) \ge 0$: Підкореневий вираз $f(x)$ має бути невід'ємним: $f(x) \ge 0$. Обидві частини нерівності можна піднести до квадрату, оскільки вони невід'ємні $f(x) > g^2(x)$

Якщо $g(x) < 0$: Підкореневий вираз $f(x)$ має бути невід'ємним: $f(x) \ge 0$ Нерівність $\sqrt{F(x)} > g(x)$ автоматично виконується, оскільки кв. корінь завжди невід'ємний а $g(x)$ від'ємний.

Для прикладу $\sqrt{x+1} > x-1$

Випадок 1: $x-1<0$ (тобто $x<1$)

Умова: $x+1 \geq 0$ (щоб корінь існував) тобто $x \geq -1$.
Нерівність виконується автоматично оскільки $\sqrt{x+1} \geq 0 > x-1$

Випадок 2: $x-1 \geq 0$ (тобто $x \geq 1$)
Умова: $x+1 > (x-1)^2$ (після піднесення до квадрату.
Розв'язуючи цю нерівність, знаходимо допустимі значення x

1. **Загальна форма**:
Метод розв'язання $\sqrt{f(x)} > g(x)$ передбачає два випадки:
   - $g(x) \geq 0$ (тоді обидві частини можна піднести до квадрату).
   - $g(x) < 0$ (тоді нерівність виконується автоматично, якщо $\sqrt{f(x)}$ існує).
2. **Конкретний приклад**:
У нерівності $\sqrt{x+1} > x-1$:
   - $f(x) = x+1$, ??
   - $g(x) = x-1$.

????

Її розв'язок повністю відповідає загальному алгоритму:

- **Випадок 1**: $x-1<0$ (тобто $x<1$).
Умова: $\sqrt{x+1}$ має сенс, тобто $x+1 \geq 0$ ($x \geq -1$).
Оскільки $\sqrt{x+1} \geq 0$, а права частина $x-1$ від'ємна, нерівність виконується завжди для $x \in [-1, 1)$.
- **Випадок 2**: $x-1 \geq 0$ (тобто $x \geq 1$).
Тут обидві частини невід'ємні, тому нерівність еквівалентна:
$x+1 > (x-1)^2$.
Розв'язуючи це, отримуємо додаткові обмеження на x.

5) Показникові нерівності

З однаковою основою:

$2^{(x+1)} > 2^3$
$x+1 > 3$
$x > 2$

Зведення до однієї основи:

$4^x < 8^{x-1}$
$2^{2x} < 2^{3(x-1)}$
$2x < 3x - 3$
$x > 3$

Заміна змінної:

$2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 < 0$
$t = 2^x$; $t > 0$
$t^2 - 5t + 4 < 0$
$(t-1)(t-4) < 0$; $1 < t < 4$
$1 < 2^x < 4$
$0 < x < 2$

6) Логарифмічні нерівності

З однаковою основою $a > 1$

$\log_2(x+1) > \log_2(x-3)$

$x+1 > x-3$ і $x+1>0$, $x-3>0$

З основою $0<a<1$: $\log_{0,5}(x+2) > \log_{0,5}(x-1)$

$x+2 < x-1$ (знак змінюється)

4) Система нерівностей

$$\begin{cases} x^2-4>0 \\ x-1<3 \end{cases}$$

Метод проміжків - розв'яз кожну нерівність окремо та знаходимо перетин розв'язків.

1) Вирішення першої нерівності

$x^2-4>0 \Rightarrow (x-2)(x+2)>0$ Визначення критичних точок де нерівність стане рівністю.

$x^2-4=0$

$x-2=0 \rightarrow x=2$

$x+2=0 \rightarrow x=-2$

Ці точки ділять числову пряму на 3 інтервала $(-\infty;-2), (-2;2), (2;\infty)$

Перевірка кожного інтервалу

Для $x=-3$ (в $(-\infty;2)$): $(-3)^2-4=9-4=5>0$ (true)

Для $x=0$ (в $(-2;2)$): $0^2-4=-4<0$ (false)

Для $x=3$ (в $(2;\infty)$): $3^2-4=9-4=5>0$ (true)

Вираз $x^2-4>0$ є нерівністю при $x<-2$ або $x>2$

2) Вирішення другої нерівності

$x-1<3$ Додати 1 до обох частин $x<3+1$

Спрощення $x<4$

3) Точка перетину 3 першої нерів. $x<-2$ або $x>2$

3 другої нерів. $x<4$

Для $x<-2$: Це задовольняє $x<4$ бо $-2<4$

Для $x>2$: Найбільш задовільно $x<4$ бо $2<x<4$

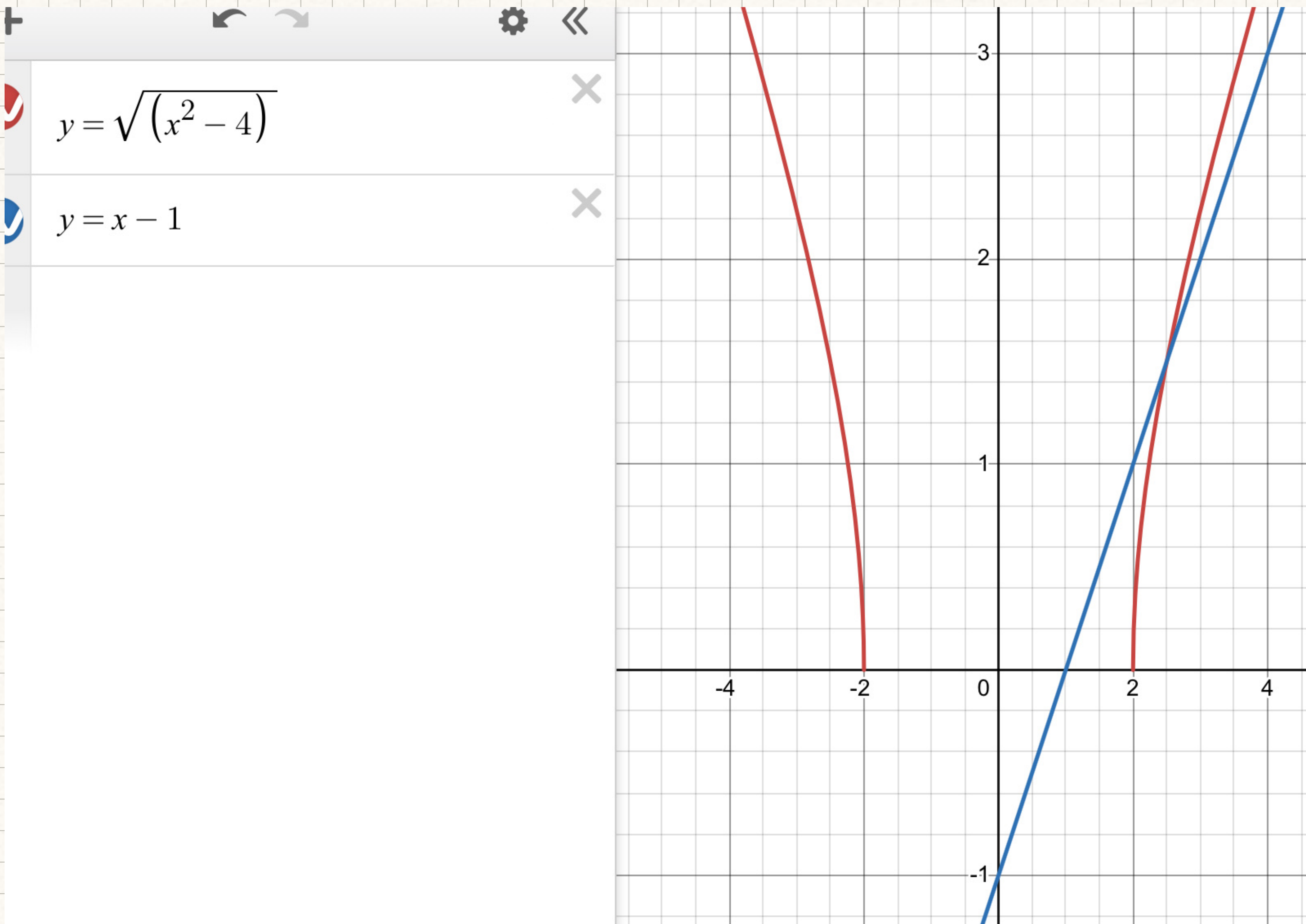
Це комбіноване рішення $x<-2$ або $2<x<4$

Відпов: виріш. системи нерівності $x^2-4>0$ і $x-1<3$ це $x\in(-\infty,-2)\cup(2,4)$

$f_1(x)=\sqrt{(x^2-4)}$ показує межу області

$f_2(x)=x-1$ показує межу області

$$\begin{cases} x^2-4>0 \\ x-1<3 \end{cases}$$



8) нерівності з модулем

$|f(x)| > a \ (a > 0) \Rightarrow f(x) > a$ або $f(x) < -a$

$|f(x)| < a \ (a > 0) \Rightarrow -a < f(x) < a$

приклад: $|2x - 3| \le 5$

$-5 \le 2x - 3 \le 5$

$-2 \le 2x \le 8$

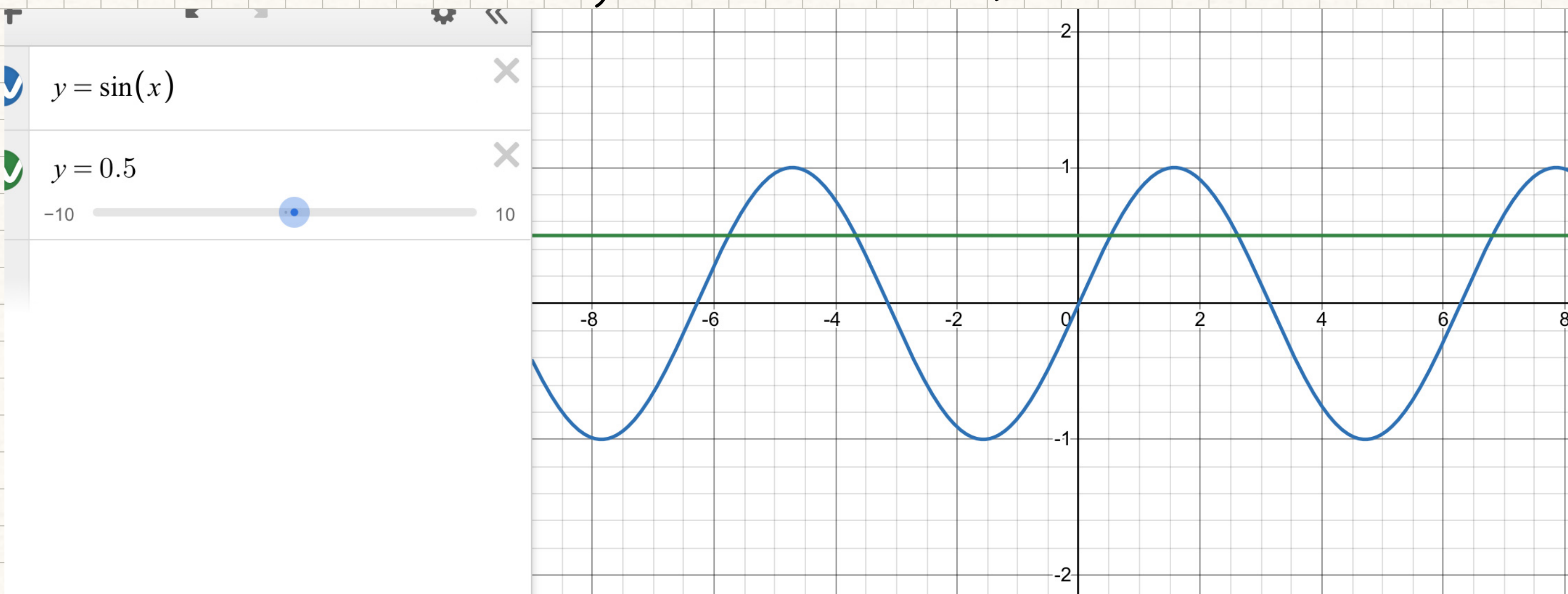
$-1 \le x \le 4$

9) Тригонометричні нерівності

$\sin x > 0$ | На одиничному колі знаходимо дуги, де синус більший за 0

$$\sin x > 1/2$$

$$x \in (\pi/6 + 2\pi k; 5\pi/6 + 2\pi k), \; k \in Z$$



* Кожен метод має свої переваги залежно від конкретного типу нерівності та її складності > які вибирати метод.

Простіші приклади вирішення нерівностей

1) Лінійні нерівності

$$3x + 5 > 2x - 1$$

Перенесення доданків $3x - 2x > -1 - 5$; $x > -6$