Квадратні корені та дійсні числа

6

§ 2. Квадратні корені. Дійсні числа

Квадратні корені та їх властивості

Означення	Приклади
Квадратним коренем з числа a називають число, квадрат якого дорівнює a.	$x^2 = 25$, $x_1 = 5; x_2 = -5$ — квадратні корені.
Арифметичним квадратним коренем з числа a називається **невід'ємне** число, квадрат якого дорівнює a. Арифметичний квадратний корінь з числа a позначається знаком $\sqrt{a}$; a називається **підкореневим виразом**. Дія, за допомогою якої знаходиться арифметичний квадратний корінь, називається **здобуттям квадратного кореня.** Рівність $\sqrt{a} = b$ є правильною, якщо 1) $b \ge 0$; 2) $b^2 = a$.	$\sqrt{25} = 5$; 5 — арифметичний квадратний корінь. $\sqrt{81} = 9$.
При $a < 0$ $\sqrt{a}$ не має змісту, бо квадрат будь-якого числа невід'ємний.	$\sqrt{-25}$ не має змісту.
При будь-якому a, якщо $\sqrt{a}$ має зміст, правильна рівність: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.	$\left(\sqrt{9}\right)^2 = 9$; $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$.

Властивості арифметичного квадратного кореня	
Якщо $a \ge 0$, $b \ge 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.	$\sqrt{4 \cdot 1} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{1} = 2 \cdot 1 = 2$; $\sqrt{16 \cdot x} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{x} = 4\sqrt{x}$.
Якщо $a \ge 0$, $b > 0$, то $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.	$\sqrt{\dfrac{36}{16}} = \dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{16}} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$.
Для будь-якого значення a правильна рівність: $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$.	$\sqrt{(-3)^2} = \lvert -3 \rvert = 3$; $\sqrt{4y^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{y^2} = 2\lvert y \rvert$.
Винесення множника з-під знака кореня.	$\sqrt{125} = \sqrt{3 \cdot 25} = 5\sqrt{3}$.
Внесення множника під знак кореня.	$10\sqrt{2} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{200}$.

Рівняння $x = a^2$	
Якщо $a < 0$, то рівняння розв'язків не має; Якщо $a = 0$, то рівняння має один розв'язок $x = 0$;	$x^2 = -25$, розв'язків немає; $x^2 = 0$, $x = 0$;
Якщо $a > 0$, то рівняння має два розв'язки: $x_1 = \sqrt{a}$; $x_2 = -\sqrt{a}$.	$x^2 = 144$; $x_1 = 12; x_2 = -12$; $x^2 = 7$; $x_1 = \sqrt{7}; x_2 = -\sqrt{7}$.

Дійсні числа

Числа, які можна записати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, n — натуральне, називаються **раціональними**. Це всі цілі і дробові числа (додатні і від'ємні). Наприклад, $\frac{7}{13}$; $-\frac{3}{10}$. Всі інші числа носять назву **ірраціональних** $\sqrt{5}, \sqrt{11}$. Раціональні та ірраціональні числа складають множину **дійсних** чисел.

N — множина натуральних чисел; ***Q*** — множина раціональних чисел;
Z — множина цілих чисел; ***R*** — множина дійсних чисел.

Означення	**Приклади**
Квадратний корінь з раціонального числа може бути:	$\sqrt{64} = 8; \sqrt{4} = 2;$
а) цілим числом;	
б) десятковим дробом;	$\sqrt{0,36} = 0,6; \sqrt{0,0025} = 0,05;$
в) нескінченно неперіодичним десятковим дробом або нескінченно періодичним десятковим дробом.	$\sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{4}{7} = 0,57142857...$ $\sqrt{\frac{81}{121}} = \frac{9}{11} = 0,818181...$
У всіх випадках, описаних вище, квадратний корінь є раціональним числом.	
г) нескінченно неперіодичним десятковим дробом (в цьому випадку квадратні корені є ірраціональними числами).	$\sqrt{2} = 1,4142...$ $\sqrt{7} = 2,645751...$

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

1. Знайти корені.	1) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}$.	2) $\sqrt{x^2-2x+1}$, $x>1$.
Розв'язання.	$\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2} = \left\|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right\| =$ $= \sqrt{3}-\sqrt{2},$ оскільки $\sqrt{3} > \sqrt{2}$.	$\sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{(x-1)^2} =$ $= \|x-1\| = x-1,$ оскільки $(x-1) > 0$, якщо $x > 1$.
	Відповідь: $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.	Відповідь: $x-1$.

2. Спростити.	$\sqrt{(3-m)^2}$.
Розв'язання.	$\sqrt{(3-m)^2} = \|3-m\| = \begin{cases} 3-m, \text{ якщо } 3-m>0,\ m<3 \\ m-3, \text{ якщо } m-3>0,\ m>3 \\ 0, \text{ якщо } m-3=0,\ m=3. \end{cases}$
Відповідь: $\begin{cases} 3-m, \text{ якщо } m<3 \\ m-3, \text{ якщо } m>3 \\ 0, \text{ якщо } m=3. \end{cases}$	

3. Розкласти на множники.	1) t^2-36.	2) $9c^2-1$.	3) $x-16$.
Розв'язання.	$t^2-36=(t-6)(t+6)$.	$9c^2-1=(3c-1)(3c+1)$.	$x-16=\left(\sqrt{x}-4\right)\left(\sqrt{x}+4\right)$.
Відповідь:	$(t-6)(t+6)$.	$(3c-1)(3c+1)$.	$\left(\sqrt{x}-4\right)\left(\sqrt{x}+4\right)$.

I - ірраціональні числа
R - дійсні числа (real numbers)
Q - раціональні числа

Ірраціональними числами є різниця між множиною дійсних чис. R та раціо. чис. Q

R \ Q або R - Q; I = R - Q

Ірраціональні = Дійсні - Раціональні

Множина	Символ	Опис	Приклади
Натуральні числа	ℕ	Числа для лічби: 1, 2, 3, ...	1, 2, 3, 42, 100, 1000
Цілі числа	ℤ	Натуральні числа + їх протилежні + нуль	..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...
Раціональні числа	ℚ	Числа, що можна записати як дріб p/q, де p∈ℤ, q∈ℤ, q≠0	1/2, -3/4, 0.25, 0.333..., 2, -5
Ірраціональні числа	I або ℝ\ℚ	Числа, що НЕ можна записати як дріб цілих чисел	√2, π, e, √3, ∛5, φ (золотий перетин)
Дійсні числа	ℝ	Усі раціональні та ірраціональні числа разом	Усі числа на числовій прямій
Комплексні числа	ℂ	Числа виду a + bi, де a,b∈ℝ, $i^2 = -1$	3 + 4i, -2i, 5, 1 + i
Прості числа	P	Натуральні числа > 1, що діляться лише на 1 та себе	2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23
Складені числа	—	Натуральні числа > 1, що НЕ є простими	4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16
Парні числа	2ℤ	Цілі числа, що діляться на 2	..., -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, ...
Непарні числа	2ℤ+1	Цілі числа, що НЕ діляться на 2	..., -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, ...
Додатні дійсні	$ℝ^+$	Дійсні числа більші за нуль	0.1, 1, π, √2, 100, 0.001
Від'ємні дійсні	$ℝ^-$	Дійсні числа менші за нуль	-1, -π, -√2, -100, -0.001

Взаємозв'язки множин

ℕ ⊂ ℤ ⊂ **ℚ** ⊂ ℝ ⊂ **ℂ**

Це означає: натуральні числа є підмножиною цілих, цілі — підмножиною раціональних, раціональні — підмножиною дійсних, а дійсні — підмножиною комплексних чисел.

4. Розкласти на множники.	1) y^2-5.	2) $\sqrt{21}-\sqrt{3}$.	3) $\sqrt{55}-\sqrt{5}$.
Розв'язання.	$y^2-5=\left(y-\sqrt{5}\right)\left(y+\sqrt{5}\right)$.	$\sqrt{21}-\sqrt{3}=\sqrt{3\cdot 7}-\sqrt{3}=$ $=\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}-\sqrt{3}=$ $=\sqrt{3}\left(\sqrt{7}-1\right)$.	$\sqrt{55}-\sqrt{5}=\sqrt{11\cdot 5}-\sqrt{5}=$ $=\sqrt{11}\cdot\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}(\sqrt{11}-1)$.
Відповідь:	$\left(y-\sqrt{5}\right)\left(y+\sqrt{5}\right)$.	$\sqrt{3}\left(\sqrt{7}-1\right)$.	$\sqrt{5}(\sqrt{11}-1)$.

5. Спростити вираз.	$\sqrt{(x-a)^2+4ax}$.
Розв'язання.	$\sqrt{(x-a)^2+4ax}=\sqrt{\left(x^2-2ax+a^2\right)+4ax}=\sqrt{x^2+2ax+a^2}=$ $=\sqrt{(x+a)^2}=\lvert x+a\rvert$.
Відповідь: $\lvert x+a\rvert$.	

6. Скоротити дріб.	$\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.
Розв'язання.	$\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}\right)^2-1}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$.
Відповідь: $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$.	

7. Порівняти.	$2\sqrt{5}\ ?\ 4\sqrt{2}$.
Розв'язання. Внесемо множник під знак кореня:	$2\sqrt{5}\ ?\ 4\sqrt{2}$; $\sqrt{4\cdot 5}\ ?\ \sqrt{16\cdot 2}$; $\sqrt{20}<\sqrt{32}$, отже $2\sqrt{5}<4\sqrt{2}$.
Відповідь: $2\sqrt{5}<4\sqrt{2}$.	

8. Розв'язати рівняння.	1) $x^2=36$.	2) $x^2=15$.
Розв'язання.	$x^2=36$; $x_1=6; x_2=-6$.	$x^2=15$; $x_1=\sqrt{15}; x_2=-\sqrt{15}$.
Відповідь:	$6;-6$.	$\sqrt{15};-\sqrt{15}$.

	3) $4x^2=36$.	4) $3x^2=36$.	5) $3\sqrt{x}=18$.
	$4x^2=36$; $x^2=9$ $x_1=3; x_2=-3$.	$3x^2=36$; $x^2=12$; $x=\sqrt{12}; x_2=-\sqrt{12}$; $x_1=\sqrt{4\cdot 3}; x_2=-\sqrt{4\cdot 3}$; $x_1=2\sqrt{3}; x_2=-2\sqrt{3}$.	$3\sqrt{x}=18$; $\sqrt{x}=6$; $\left(\sqrt{x}\right)^2=6^2$; $x=36$.
Відповідь:	$3;-3$.	$2\sqrt{3};-2\sqrt{3}$.	36.

Властивості ар. кореня

Якщо $\sqrt{a}$ має зміст $a \geq 0$ тоді правильна рівність

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

$(\sqrt{9})^2 = 9$; $(\sqrt{7})^2 = 7$; $(\sqrt{5})^2 = 5$; $(\sqrt{25})^2 = 25$

Множення

$\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$; $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{5 \cdot 20} = \sqrt{100} = 10$

Властивість $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ $(a \geq 0; b \geq 0)$

$\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{144} = 12$ та $\sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12$

$\sqrt{25 \cdot 4} = \sqrt{100} = 10$ та $\sqrt{25} \cdot \sqrt{4} = 5 \cdot 2 = 10$

$\sqrt{36 \cdot 49} = \sqrt{1764} = 42$ та $\sqrt{36} \cdot \sqrt{49} = 6 \cdot 7 = 42$

$\sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$ та $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 2 \cdot 2 = 4$

$\sqrt{32 \cdot 2} = \sqrt{64} = 8$; $\sqrt{18 \cdot 8} = \sqrt{144} = 12$

$\sqrt{45 \cdot 5} = \sqrt{225} = 15$; $\sqrt{x^2 \cdot y^4} = |x| \cdot y^2$ $(y \geq 0)$

Ділення

$\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5$; $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5$

Властивість $\sqrt{(a/b)} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$ $(a \geq 0, b > 0)$

$\sqrt{25:9} = \sqrt{25} : \sqrt{9} = 5/3$

$\sqrt{64:16} = \sqrt{64} : \sqrt{16} = 8/4 = 2$

$\sqrt{100/25} = \sqrt{100} : \sqrt{25} = 10:5 = 2$

$\sqrt{81:36} = \sqrt{81} : \sqrt{36} = 9/6 = 3/2 = 1{,}5$

Винесення множника з-під знака кореня

Для винесення множ. з-під знака кореня, використ власти. кореня $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, якщо $a\geq 0, b\geq 0$. Намагаємося представ вираз під коренем у вигляді добутку, де один із множн-ів є повним степенем, який можна винести.

1) $\sqrt{18}$. Представимо 18 як добуток $18=9\cdot 2$, де 9 це 3^2

тоді $\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

2) $\sqrt[3]{54}$. $54=27\cdot 2$, де $27=3^3$

$\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{27\cdot 2}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{2}=3\sqrt[3]{2}$

3) $\sqrt{12x^4}$. $12=4\cdot 3$, де $4=2^2$ а $x^4=(x^2)^2$

$\sqrt{12x^4}=\sqrt{4\cdot 3\cdot x^4}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{x^4}\cdot\sqrt{3}=2x^2\cdot\sqrt{3}=2x^2\sqrt{3}$

$\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

$\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

$\sqrt{50}=\sqrt{25\cdot 2}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

$\sqrt{72}=\sqrt{36\cdot 2}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

$\sqrt{128}=\sqrt{64\cdot 2}=\sqrt{64}\cdot\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

Правило: $\sqrt{(a^2\cdot b)}=|a|\cdot\sqrt{b}$ (якщо $a\geq 0$)

$\sqrt{12}=\sqrt{(4\cdot 3)}=\sqrt{(2^2\cdot 3)}=2\sqrt{3}$;

$\sqrt{18}=\sqrt{(9\cdot 2)}=\sqrt{(3^2\cdot 2)}=3\sqrt{2}$;

$\sqrt{50}=\sqrt{(25\cdot 2)}=\sqrt{(5^2\cdot 2)}=5\sqrt{2}$;

$\sqrt{75}=\sqrt{(25\cdot 3)}=\sqrt{(5^2\cdot 3)}=5\sqrt{3}$

$\sqrt{32}=\sqrt{16\cdot 2}=\sqrt{4^2\cdot 2}=4\sqrt{2}$

$\sqrt{98}=\sqrt{(49\cdot 2)}=\sqrt{(7^2\cdot 2)}=7\sqrt{2}$

$\sqrt{200}=\sqrt{100\cdot 2}=\sqrt{10^2\cdot 2}=10\sqrt{2}$

$3\sqrt{28}=3\sqrt{4\cdot 7}=3\cdot 2\sqrt{7}=6\sqrt{7}$

Внесення множника під знак кореня

Щоб внести множник під знак кореня, використ. ту ж властивість у зворотному напрямку: якщо множник стоїть перед коренем, його можна перенести під корінь, врахувавши степінь кореня.

1) $2\sqrt{5}$. Щоб внести 2 під корінь, представимо 2 як $\sqrt{4}$, тоді:
$2\sqrt{5}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{4\cdot5}=\sqrt{20}$

2) $3\sqrt{7}$. $3=\sqrt{9}$, тому: $3\sqrt{7}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{7}=\sqrt{9\cdot7}=\sqrt{63}$

3) $x\sqrt{2}$. $x=\sqrt{x^2}$ тому: $x\sqrt{2}=\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{x^2\cdot2}=\sqrt{2x^2}$

4) $2\sqrt[3]{5}$. Для кубічного кореня: $2=\sqrt[3]{8}$, оскільки $8=2^3$;
$2\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{8\cdot5}=\sqrt[3]{40}$

Зауваження:

- **При винесенні множника з-під кореня або під корінь важливо враховувати знак множника та область визначення (для квадратного кореня всі значення під коренем мають бути невід'ємними).**
- **Для вищих коренів (наприклад, кубічного) знак множника менш критичний, оскільки $\sqrt[3]{a}$ визначений для будь-якого a.**

Правило: $\sqrt{(a^2\cdot b)}=|a|\cdot\sqrt{b}$ (якщо $a\geq0$)

Правило $a\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a^2\cdot b}$ (якщо $a\geq0$)

$4\sqrt{3}=\sqrt{4^2\cdot3}=\sqrt{16\cdot3}=\sqrt{48}$

$7\sqrt{2}=\sqrt{7^2\cdot2}=\sqrt{49\cdot2}=\sqrt{98}$

$3\sqrt{2}=\sqrt{3^2\cdot2}=\sqrt{9\cdot2}=\sqrt{18}$

* Внесення під козирьок
$x\to\sqrt{x^2}$

$5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}$

$2\sqrt{7} = \sqrt{2^2 \cdot 7} = \sqrt{4 \cdot 7} = \sqrt{28}$

$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}$

$3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45}$

$4\sqrt{2} = \sqrt{4^2 \cdot 2} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{32}$

$5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}$

$6\sqrt{2} = \sqrt{6^2 \cdot 2} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{72}$

$7\sqrt{5} = \sqrt{7^2 \cdot 5} = \sqrt{49 \cdot 5} = \sqrt{245}$

$2\sqrt{7} = \sqrt{2^2 \cdot 7} = \sqrt{4 \cdot 7} = \sqrt{28}$

$10\sqrt{2} = \sqrt{10^2 \cdot 2} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{200}$

Квадратний корінь з квадрата числа

$\sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7$; $\sqrt{x^2} = |x|$

$\sqrt{(5^2)} = \sqrt{25} = 5 = |5|$; $\sqrt{9a^2} = 3|a|$

$\sqrt{((-7)^2)} = \sqrt{49} = 7 = |-7|$ $\sqrt{16b^4} = 4b^2 \quad (b \geq 0)$

$\sqrt{(-10)^2} = \sqrt{100} = 10 = |-10|$ $\sqrt{25x^2y^2} = 5|x||y| = 5|xy|$

$\sqrt{8^2} = \sqrt{64} = 8 = |8|$

$\sqrt{-4^2} = \sqrt{16} = 4 = |-4|$ $\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = |\sqrt{3}-\sqrt{2}| = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

Квадратні рівняння

9

§ 3. Квадратні рівняння. Розв'язування задач за допомогою квадратних рівнянь

Квадратні рівняння

Означення	Приклади
Рівняння виду $ax^2+bx+c=0$, де x – змінна; a, b, c — деякі числа, причому $a \neq 0$, називають **квадратним рівнянням**; a – перший коефіцієнт, b – другий, c – вільний член.	$2x^2+3x-1=0$; $x^2-2x+4=0$.
Якщо в цьому рівнянні хоча б один з коефіцієнтів дорівнює нулю, то дане рівняння називають **неповним квадратним рівнянням**. Неповні квадратні рівняння бувають трьох видів: 1) $ax^2=0$; 2) $ax^2+bx=0$; 3) $ax^2+c=0$.	
1) $ax^2=0$ при $b=0$, $c=0$; $x^2=0$; $x=0$ рівняння має тільки один розв'язок.	$5x^2=0$; $x=0$. Відповідь: 0.
2) При $c=0$, $ax^2+bx=0$; $x(ax+b)=0$; $x_1=0$ або $(ax+b)=0; x_2=-\frac{b}{a}$ рівняння завжди має два розв'язки.	$4x^2+3x=0$; $x(4x+3)=0$; $x=0$ або $4x+3=0$; $x=-\frac{3}{4}$. Відповідь: $0, -\frac{3}{4}$.
3) При $b=0$, $ax^2+c=0$; $x^2=-\frac{c}{a}$, оскільки $c \neq 0$, то $-\frac{c}{a} \neq 0$, тоді: а) якщо $-\frac{c}{a}>0$, то рівняння має два розв'язки $x_1=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$; $x_2=\sqrt{-\frac{c}{a}}$; б) якщо $-\frac{c}{a}<0$, то рівняння не має розв'язків.	$9x^2-4=0$; $x^2=\frac{4}{9}$; $x_1=\frac{2}{3}$; $x_2=-\frac{2}{3}$. Відповідь: $\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}$. $16x^2+9=0$; $x^2=-\frac{9}{16}$ немає розв'язків. Відповідь: немає розв'язків.
Якщо $a=1$, то квадратне рівняння називають **зведеним**.	$x^2-x+30=0$.

Повні квадратні рівняння $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$, розв'язуємо за формулою:

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, де $D=b^2-4ac$ називають **дискримінантом** даного квадратного рівняння.

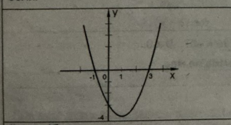
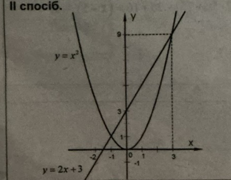
Якщо $D<0$, то рівняння не має дійсних розв'язків.	$2x^2+5x+6=0$; $D=25-48=-23$; $D<0$, отже, рівняння не має дійсних розв'язків.
Якщо $D=0$, то рівняння має два однакові розв'язки: $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$.	$4x^2+4x+1=0$; $D=16-16=0,\ D=0$, отже, рівняння має два однакові розв'язки: $x_1=x_2=-\dfrac{4}{8}=-\dfrac{1}{2}$. Відповідь: $-0{,}5$.
Якщо $D>0$, то рівняння має два різні розв'язки: $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$; $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$.	$2x^2+3x+1=0$; $D=9-8=1$; $x_1=\dfrac{-3+1}{4}=-\dfrac{1}{2}$; $x_2=\dfrac{-3-1}{4}=-1$. Відповідь: $-0{,}5$; -1.
Для квадратного рівняння $ax^2+2kx+c=0$, другий коефіцієнт якого є парне число, формулу розв'язків зручно записати так: $x_{1,2}=\dfrac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}$, де $D_1=k^2-ac$.	$3x^2+8x-3=0$; $D_1=16+9=25$; $x_1=\dfrac{-4+5}{3}=\dfrac{1}{3}$; $x_2=\dfrac{-4-5}{3}=-3$. Відповідь: $\dfrac{1}{3}$, -3.
Теорема Вієта. $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0,\ x_1x_2=\dfrac{c}{a},\ x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$; у зведеному квадратному рівнянні $x^2+bx+c=0$: $x_1+x_2=-b;\ x_1\cdot x_2=c$	$x^2-5x+6=0$; $x_1+x_2=5$; $x_1\cdot x_2=6$; $x_1=3;\ x_2=2$. Відповідь: 2; 3.
Рівняння виду $ax^4+bx^2+c=0$, де $a\neq 0,\ b\neq 0$ називається **біквадратним** рівнянням.	$2x^4+3x^2+4=0$.
Формула розкладу квадратного тричлена на множники: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.	$2x^2-x-3=2(x-x_1)(x-x_2)$; $2x^2-x-3=0$; $x_1=1{,}5;\ x_2=-1$. $2x^2-x-3=2(x-1{,}5)(x+1)$.

1. Знайти всі розв'язки рівняння.	1) $11x^2-99=0$.	2) $x^2-4x=0$.	3) $4x^2-3x-1=0$.
Розв'язання.	Перетворимо дане рівняння. Знайдемо невідомий множник. $11x^2=99$; $x^2=99:11$; $x^2=9$; $x_1=\sqrt{9};\ x_2=-\sqrt{9}$; $x_1=3;\ x_2=-3$.	Винесемо спільний множник за дужки. $x(x-4)=0$; $x=0$; або $x-4=0$; $x=4$.	$D=(-3)^2-4\cdot4\cdot(-1)=9+16=25,\ D>0$, отже, рівняння має два різні розв'язки. $x_1=\dfrac{-(-3)+\sqrt{25}}{8}$; $x_2=\dfrac{-(-3)-\sqrt{25}}{8}$; $x_1=\dfrac{3+5}{8}$; $x_2=\dfrac{3-5}{8}$; $x_1=1;\ x_2=-\dfrac{1}{4}$;
Відповідь:	-3; 3.	0, 4.	$-\dfrac{1}{4}$; 1.

2. Знайти всі розв'язки рівняння.	1) $x^2+7x+10=0$;	2) $\dfrac{1}{4}x^2-3x+9=0$.
Розв'язання. I спосіб.	$D=7^2-4\cdot1\cdot10=49-40=9$, $D>0$, отже, рівняння має два різні розв'язки: $x_1=\dfrac{-7+\sqrt{9}}{2}$; $x_2=\dfrac{-7-\sqrt{9}}{2}$; $x_1=\dfrac{-7+3}{2}$; $x_2=\dfrac{-7-3}{2}$; $x_1=-2$; $x_2=-5$	$D=(-3)^2-4\cdot\dfrac{1}{4}\cdot9=9-9=0$, $D=0$, отже, рівняння має два однакові розв'язки: $x_1=x_2=\dfrac{3}{\frac{1}{2}}=6$;
II спосіб.	За теоремою Вієта: $\begin{cases}x_1+x_2=-7;\\x_1\cdot x_2=10;\end{cases}$ $x_1=-2$; $x_2=-5$;	За формулою скороченого множення маємо: $\dfrac{1}{4}x^2-3x+9=(\dfrac{1}{2}x-3)^2$, отже, маємо рівняння: $(\dfrac{1}{2}x-3)^2=0;\ \dfrac{1}{2}x-3=0;\ \dfrac{1}{2}x=3;\ x=3:\dfrac{1}{2};\ x=6$.
Відповідь:	-2; -5.	6.

3. Розкласти квадратний тричлен на множники.	1) $y^2-3y+2=(y-y_1)(y-y_2)$.	2) $4x^2-19x+12=4(x-x_1)(x-x_2)$.
Розв'язання.	$y^2-3y+2=0$; За теоремою Вієта: $y_1=2;\ y_2=1$, отже $y^2-3y+2=(y-2)(y-1)$.	$4x^2-19x+12=0$; $D=(-19)^2-4\cdot4\cdot12=361-192=169$; $x_1=\dfrac{-(-19)+\sqrt{169}}{2\cdot4}$; $x_2=\dfrac{-(-19)-\sqrt{169}}{2\cdot4}$; $x_1=\dfrac{19+13}{8}$; $x_2=\dfrac{19-13}{8}$; $x_1=4$; $x_2=\dfrac{3}{4}$; $4x^2-19x+12=4(x-4)\left(x-\dfrac{3}{4}\right)=(x-4)(4x-3)$.
Відповідь:	$(y-2)(y-1)$.	$(x-4)(4x-3)$.

4. Скоротити дріб.	1) $\dfrac{x^2-7x-8}{x+1}$.	2) $\dfrac{2x^2+x-6}{2x^2-3x}$.
Розв'язання.	Розкладемо чисельник на множники: $x^2-7x-8=(x-x_1)(x-x_2)$; $x^2-7x-8=0$. За теоремою Вієта: $x_1=8;\ x_2=-1$; $x^2-7x-8=(x-8)(x+1)$, тоді: $\dfrac{x^2-7x-8}{x+1}=\dfrac{(x-8)(x+1)}{x+1}=x-8$.	Розкладемо чисельник на множники: $2x^2+x-6=2(x-x_1)(x-x_2)$; $2x^2+x-6=0$; $D=1-4\cdot2\cdot(-6)=1+48=49$; $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{49}}{2\cdot2}$; $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{49}}{2\cdot2}$; $x_1=\dfrac{-1+7}{4}$; $x_2=\dfrac{-1-7}{4}$; $x_1=\dfrac{3}{2}$; $x_2=-2$, тобто $2x^2+x-6=2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(x+2)=(2x-3)(x+2)$; тоді: $\dfrac{2x^2+x-6}{2x^2-3x}=\dfrac{(2x-3)(x+2)}{x(2x-3)}=\dfrac{x+2}{x}$.
Відповідь:	$x-8$.	$\dfrac{x+2}{x}$.

5. Розв'язати графічно квадратне рівняння (двома способами).	$x^2-2x-3=0$.
I спосіб. Побудуємо графік функції	Розв'язками цього рівняння будуть абсциси точок перетину графіка функції $y=x^2-2x-3$ з віссю $0x$. $y=x^2-2x-3$ – парабола. Область визначення функції: всі числа.
Знайдемо координати вершини параболи:	$x_0=-\dfrac{b}{2a}$; $x_0=-\dfrac{-2}{2}=1$;
	$y_0=1^2-2\cdot1-3=-4$; $(1;\ -4)$ – вершина параболи. $a=1>0$, вітки параболи направлені вгору. Абсциси точок, в яких парабола перетинає вісь $0x$, є розв'язками рівняння $x_1=-1;\ x_2=3$;
II спосіб. 	Розв'язками цього рівняння будуть абсциси точок перетину графіків функцій: $y=x^2$ та $y=2x+3$. Побудуємо графіки функцій: $y=x^2$ – парабола; $y=2x+3$ – пряма. Графіки перетинаються в точках $(-1;\ 1)$ та $(3;9)$, а абсциси цих точок і будуть розв'язками рівняння. $x_1=-1;\ x_2=3$.
Відповідь: -1; 3.	

x	0	-2
y	3	-1

6. Розв'язати рівняння.	$(x^2+3)^2-14(x^2+3)+24=0$.
Розв'язання. Введемо нову змінну: тоді отримаємо рівняння: за теоремою Вієта маємо: спростимо:	$y=x^2+3$, $y^2-14y+24=0$; $y_1=12;\ y_2=2$, отримаємо: $x^2+3=12;\ x^2+3=2$, $x^2=9;\ x^2=-1$ — немає розв'язків. $x_1=\sqrt{9};\ x_2=-\sqrt{9}$; $x_1=3\quad x_2=-3$.
Відповідь: -3; 3.	

7. Розв'язати рівняння.	$\dfrac{2}{1-x}+\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{2x}{1-x^2}$.	
Розв'язання. Запишемо у вигляді: зведемо до спільного знаменника спростимо:	$\dfrac{2}{1-x}+\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{2x}{1-x^2}=0$; $\dfrac{2(1+x)+x(1-x)-2x}{1-x^2}=0$; $\dfrac{2+2x+x-x^2-2x}{1-x^2}=0$; $\dfrac{-x^2+x+2}{1-x^2}=0$; $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}=0$;	дріб дорівнює нулю, коли чисельник — нуль, а знаменник відмінний від нуля. Маємо: $\begin{cases}x^2-x-2=0,\\x^2-1\neq0;\end{cases}$ $\left[\begin{cases}x=2\\x=-1\end{cases}\right.$ $\left[\begin{cases}x\neq1\\x\neq-1\end{cases}\right.$ $x=-1$ — сторонній розв'язок.
Відповідь: 2.		

8. Знайти всі розв'язки рівняння.	$2x^2+3x+12=0$.
Розв'язання.	$D=3^2-4\cdot2\cdot12=9-96=-87,\ D<0$, отже, рівняння розв'язків не має.
Відповідь: немає розв'язків.	
10. Розв'язати рівняння виділенням квадрата двочлена.	$x^2-10x+16=0$.
Розв'язання. Виділимо квадрат двочлена:	$x^2-10x+16=(x^2-2\cdot5x+25)-25+16=(x-5)^2-9$; $(x-5)^2-9=0;\ (x-5)^2=9$; $x_1-5=3;\quad x_2-5=-3$; $x_1=8;\quad x_2=2$.
Відповідь: 8; 2.	

???

9. Розв'язати задачу.	Із міста А до міста В вирушив пішохід. Відстань АВ дорівнює 10 км. Через 30 хв після нього з міста А до міста В вирушив велосипедист, швидкість якого на 6 км більше швидкості пішохода. Велосипедист, обігнавши пішохода і дійшовши до міста В, повернувся знову до міста А в той самий час, коли пішохід прийшов до міста В. Визначити швидкість пішохода.
Розв'язання.	Нехай пішохід рухався зі швидкістю x км/год, тоді відстань в 10 км він пройшов за $\dfrac{10}{x}$ год. Велосипедист їхав зі швидкістю $(x+6)$ км/год і проїхав відстань 20 км від А до В і назад за $\dfrac{20}{x+6}$ год. За умовою задачі, пішохід вийшов на 30 хв раніше, тобто він витратив на проходження шляху на $\dfrac{1}{2}$ год. більше, ніж велосипедист. Складемо рівняння $\dfrac{10}{x}-\dfrac{20}{x+6}=\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{10}{x}-\dfrac{20}{x+6}-\dfrac{1}{2}=0$; $\dfrac{10\cdot2(x+6)-20\cdot2x-x(x+6)}{2x(x+6)}=0$; $\dfrac{20x+120-40x-x^2-6x}{2x(x+6)}=0$; $\dfrac{-x^2-26x+120}{2x(x+6)}=0$; $\dfrac{x^2+26x-120}{-2x(x+6)}=0$; $\begin{cases}x^2+26x-120=0,\\-2x(x+6)\neq0;\end{cases}$ $\left[\begin{cases}x=4;\\x=-30,\end{cases}\right.$ $\left[\begin{cases}x\neq0;\\x\neq-6\end{cases}\right.$ $x=-30$ не задовольняє умову задачі (швидкість не може бути від'ємною) отже, швидкість пішохода 4 км/год.
Відповідь: 4 км/год.	

Для розв'язання цієї задачі можна скласти рівняння за допомогою такої таблиці:

	Відстань, км	Швидкість, км/год	Час, год.
Пішохід	10	x	$\dfrac{10}{x}$
Велосипедист	20	$x+6$	$\dfrac{20}{x+6}$

Різниця між лінійними та квадратними рівняннями

1. **Визначення та форма**:
   - **Лінійне рівняння**: Має вигляд $ax + b = 0$, де $a \neq 0$. Це рівняння першого степеня, де змінна x має степінь 1. Графічно зображається прямою лінією.
   - **Квадратне рівняння**: Має вигляд $ax^2 + bx + c = 0$, де $a \neq 0$. Це рівняння другого степеня, де змінна x підноситься до квадрата. Графічно зображається параболою.
2. **Кількість коренів**:
   - Лінійне рівняння: Завжди має **один корінь** ($x = -\frac{b}{a}$), якщо $a \neq 0$.
   - Квадратне рівняння: Може мати **два, один або жодного дійсного кореня**, залежно від дискримінанта ($D = b^2 - 4ac$):
     - $D > 0$: два дійсних корені.
     - $D = 0$: один дійсний корінь.
     - $D < 0$: немає дійсних коренів (лише комплексні).
3. **Складність розв'язання**:
   - Лінійне рівняння: Розв'язується просто перенесенням членів і діленням: $x = \frac{-b}{a}$.
   - Квадратне рівняння: Вимагає складніших методів, наприклад, формули $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, факторизації або методу виділення повного квадрата.
4. **Графічна інтерпретація**:
   - Лінійне рівняння: Пряма лінія, яка перетинає вісь x в одній точці (за винятком випадку, коли пряма паралельна осі).
   - Квадратне р приклади з фізики нелінійні функції ти вісь x у двох, одній або ж

   - Квадратне рівняння: Парабола, яка може перетинати вісь x у двох, одній або жодній точці.

Використання в реальному житті

1. **Лінійні рівняння**: Використовуються для моделювання ситуацій із постійною швидкістю змін, пропорційних залежностей або лінійних зв'язків.
   - **Фінанси**: Розрахунок простих відсотків, витрат або доходів. Наприклад, якщо щомісячна оренда становить 5000 грн плюс 200 грн за комунальні послуги на людину, то для x осіб витрати будуть $5000 + 200x = y$.
   - **Транспорт**: Обчислення відстані за формулою $s = vt$, де v — швидкість, t — час.
   - **Торгівля**: Визначення точки беззбитковості, коли витрати дорівнюють доходам ($ax = b$).
   - **Приклад**: Якщо ви купуєте квитки за 100 грн кожен, а бюджет 1000 грн, то $100x = 1000$, звідки $x = 10$ квитків.
2. **Квадратні рівняння**: Використовуються для моделювання ситуацій із нелінійними залежностями, де є максимуми, мінімуми або криволінійні траєкторії.
   - **Фізика**: Опис руху тіл, наприклад, траєкторії снаряда. Висота снаряда описується рівнянням $h(t) = -4.9t^2 + v_0t + h_0$, де t — час, v_0 — початкова швидкість, h_0 — початкова висота. Корені рівняння показують, коли снаряд торкнеться землі.
   - **Економіка**: Аналіз прибутку або витрат, де залежність нелінійна. Наприклад, прибуток від продажу x одиниць товару може бути $P(x) = -x^2 + 200x - 1000$, де максимум прибутку визначається вершиною параболи.
   - **Інженерія**: Розрахунок площі або форми об'єктів, наприклад, площі круга, що залежить від радіуса квадратично ($S = \pi r^2$).
   - **Оптика**: Визначення фокусної відстані параболічного дзеркала.
приклади з фізики нелінійні функції
   - **Приклад**: Якщо камінь кинуто вертикально вгору зі швидкістю 20
   - **Оптика**: Визначення фокусної відстані параболічного дзеркала.
   - **Приклад**: Якщо камінь кинуто вертикально вгору зі швидкістю 20 м/с, висота описується рівнянням $h(t) = -4.9t^2 + 20t$. Час падіння визначається розв'язанням $-4.9t^2 + 20t = 0$, звідки $t \approx 4.08$ секунди.

Короткий висновок

- **Лінійні рівняння** прості, мають один розв'язок і моделюють прямі залежності (наприклад, витрати, відстань).
- **Квадратні рівняння** складніші, можуть мати до двох розв'язків і описують нелінійні процеси (наприклад, рух, прибуток, оптика). Обидва типи рівнянь широко застосовуються в науці, економіці, інженерії та повсякденному житті для аналізу та прогнозування.

Дискримінант це вираз, це допоміжний вираз для квадратних рівнянь.

Дискримінант у математиці — це вираз $D = b^2 - 4ac$, який обчислюється для квадратного рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Він визначає кількість і тип коренів рівняння:

- **$D > 0$: два різні дійсні корені.**
- **$D = 0$: один дійсний корінь (кратності 2).**
- **$D < 0$: немає дійсних коренів, лише два комплексні корені.**

Дискримінант використовується при розв'язанні квадратних рівнянь через формулу $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ та для аналізу поведінки квадратичної функції.

Дискримінант — це математичний вираз, який використовується для визначення природи коренів квадратного рівняння та інших алгебраїчних рівнянь.

Для квадратного рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$ (де $a \neq 0$) дискримінант обчислюється за формулою:

$D = b^2 - 4ac$

Значення дискримінанта дає важливу інформацію про корені рівняння:

- Якщо $D > 0$ — рівняння має два різні дійсні корені
- Якщо $D = 0$ — рівняння має один подвійний дійсний корінь
- Якщо $D < 0$ — рівняння не має дійсних коренів (має два комплексні корені)

Дискримінант також використовується в інших областях математики, наприклад, для кубічних рівнянь, квадратичних форм, і в теорії чисел. В загальному сенсі дискримінант допомагає "розрізняти" або "дискримінувати" між різними типами розв'язків алгебраїчних рівнянь.

Функції, корені — нові знайомі.

Коли застосовують дискримінант?

Дискримінант використовується для:

1. **Визначення кількості та типу коренів** квадратного рівняння:
   - Якщо $D > 0$, рівняння має **два різних дійсних корені**.
   - Якщо $D = 0$, рівняння має **один дійсний корінь** (або два однакових корені, кратності 2).
   - Якщо $D < 0$, рівняння не має дійсних коренів, але має **два комплексних корені**.
2. **Розв'язання рівняння**: Корені квадратного рівняння обчислюються за формулою:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

   Дискримінант ($\sqrt{D}$) визначає, чи будуть корені дійсними чи комплексними.

3. **Аналізу поведінки функції**: Для квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ дискримінант показує, чи перетинає парабола вісь x:
   - $D > 0$: парабола перетинає вісь x у двох точках.
   - $D = 0$: парабола дотикається до осі x в одній точці.
   - $D < 0$: парабола не перетинає вісь x.

Приклади:

1. Для рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$:
   - $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$.
   - $D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$.
   - $D > 0$: два дійсних корені ($x = 2$, $x = 3$).
2. Для рівняння $x^2 + 2x + 5 = 0$:
   - $a = 1$, $b = 2$, $c = 5$.
   - $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16$.
   - $D < 0$: немає дійсних коренів, є комплексні.
3. Для рівняння $x^2 - 6x + 9 = 0$:
   - $a = 1$, $b = -6$, $c = 9$.
   - $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$.
   - $D = 0$: один корінь ($x = 3$).

Висновок

Дискримінант застосовують, коли потрібно визначити кількість і тип коренів квадратного рівняння або проаналізувати поведінку квадратичної функції. Він є ключовим елементом при розв'язанні рівнянь через формулу коренів або для оцінки можливості розв'язку в дійсних числах.

Якщо ви мали на увазі "дискримінацію" в іншому контексті (наприклад, соціальному), уточніть, і я надам відповідь!

Основні типи квадратних рівнянь

1) Повне кв. рів. ($a, b, c \neq 0$) $2x^2+5x+3=0$

Ха-ка: Має квадратний, лінійний та вільний член

Розв'язується через дискримінант $D=b^2-4ac$

2) Неповне кв. рів. (без. лін. чл. $b=0$) $3x^2-12=0$

3) Неповне кв. рів. (без вільного члена, $c=0$) $x^2+4x=0$

Ха-ка: можна винести x за дужк: $x(x+4)=0$

Розв'язки: $x=0$ або $x=-4$

4) Рівняння з одним коренем (дискримінант $D=0$)

$x^2-6x+9=0$

Ха-ка: $D=(-6)^2-4\cdot1\cdot9=36-36=0$. Має один корінь (кратності) $x=3$.

5) Рівняння з двома дійсними коренями (дискримінант $D>0$)

$x^2-5x+6=0$

Ха-ка: $D=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=25-24=1$;

Корені: $x_1=2$; $x_2=3$.

6) Рівняння без дійсних коренів (дискримінант $D<0$)

$x^2+2x+5=0$

Ха-ка: $D=2^2-4\cdot1\cdot5=4-20=-16$.

Корені комплексні: $x=-1\pm2i$

7) Рівняння з раціональним коефіцієнтами

$\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x-2=0$

Ха-ка. Коеф. и. дробові але рівнян. розв. аналогічно до цілочис через дискримінант.

8) Рівняння з параметрами:

$x^2 + kx + 4 = 0$

Ха-ка: розв залежс від параметра k. Напрік для $k=4$
$D = 16 - 16 = 0$. один корінь.

Теорема Вієта і її застосування

Для квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ (де $a \neq 0$) якщо x_1 і x_2 — його корені, то:

Сума коренів: $x_1 + x_2 = -b/a$

Добуток коренів $x_1 \cdot x_2 = c/a$

Практичне застосування

1. Перевірити правильність знайдених коренів
2. Знаходити один корінь, якщо відомий інший
3 Складати квадратні рівняння за відомими коренями

Наприклад є корені $x_1 = 1/3$ і $x_2 = -2$

Сума: $1/3 + (-2) = 1/3 - 2 = -5/3$

Добуток: $(1/3) \cdot (-2) = -2/3$

Рівняння: $x^2 - (-5/3)x + (-2/3) = 0$ тобто

$$x^2 + (5/3)x - 2/3 = 0$$

1) Приклади з коренями

1) $x^2-5x+6=0$ Тут $a=1$; $b=-5$; $c=6$

За теоремою Вієта: $x_1+x_2=-(-5)/1=5$

$x_1\cdot x_2=6/1=6$

Знаходимо корені: $x_1=2$; $x_2=3$

Перевірка: $2+3=5$; $2\cdot 3=6$

2) $2x^2-7x+3=0$ Тут $a=2$; $b=-7$; $c=3$

За т. Вієта: $x_1+x_2=-(-7)/2=7/2=3{,}5$

$x_1\cdot x_2=3/2=1{,}5$

Знаходимо корені: $x_1=3$; $x_2=1/2$

Перевірка: $3+1/2=7/2$; $3\cdot 1/2=3/2$

2) Приклади з дробовими коефіцієнтами

3) $(1/2)x^2-(3/2)x+1=0$

Тут $a=1/2$; $b=-3/2$; $c=1$.

За т. Вієта: $x_1+x_2=-(-3/2)/(1/2)=(3/2)\cdot 2=3$

$x_1\cdot x_2=1/(1/2)=2$

Знаходимо корені: $x_1=2$; $x_2=1$

Перевірка: $2+1=3$; $2\cdot 1=2$

4) $(2/3)x^2+(1/3)x-1=0$

Тут $a=2/3$; $b=1/3$; $c=-1$

За т. Вієта: $x_1+x_2=-(1/3)/(2/3)=-(1/3)\cdot(3/2)=-1/2$

$x_1\cdot x_2=(-1)/(2/3)=-1\cdot(3/2)=-3/2$

3) Приклади з відємними коеф-ми

5) $x^2+4x-12=0$ Тут $a=1$; $b=4$; $c=-12$

За т. Вієта $x_1+x_2=-4/1=-4$

$x_1\cdot x_2=-12/1=-12$

Корені: $x_1=2$; $x_2=-6$

Перевірка: $2+(-6)=-4$; $2\cdot(-6)=-12$

6) $-3x^2+12x-9=0$ Тут $a=-3$; $b=12$; $c=-9$

За т. Вієта: $x_1+x_2=-12/(-3)=4$

$x_1\cdot x_2=(-9)/(-3)=3$

Корені: $x_1=3$; $x_2=1$

Перевірка: $3+1=4$; $3\cdot 1=3$

7) $(3/4)x^2-(5/6)x+(1/8)=0$ Тут $a=3/4$; $b=-5/6$; $c=1/8$

За т. Вієта:

$x_1+x_2=-(-5/6)/(3/4)=(5/6)\cdot(4/3)=20/18=10/9$

$x_1\cdot x_2=(1/8)/(3/4)=(1/8)\cdot(4/3)=4/24=1/6$

8) $(1/3)x^2+(2/5)x-(4/15)=0$

Тут $a=1/3$; $b=2/5$; $c=-4/15$

За т. Вієта: $x_1+x_2=-(2/5)/(1/3)=-(2/5)\cdot 3=-6/5$

$x_1\cdot x_2=(-4/15)/(1/3)=(-4/15)\cdot 3=-12/15=-4/5$

4) Приклад з десятковими дробами

9) $0{,}5x^2 - 1{,}2x + 0{,}7 = 0$ тут $a = 0{,}5$; $b = -1{,}2$; $c = 0{,}7$

За т. Вієта $x_1 + x_2 = -(-1{,}2)/0{,}5 = 1{,}2/0{,}5 = 2{,}4$

$x_1 \cdot x_2 = 0{,}7/0{,}5 = 1{,}4$

10) $1{,}5x^2 + 0{,}9x - 2{,}4 = 0$ тут $a = 1{,}5$; $b = 0{,}9$; $c = -2{,}4$

За т. Вієта: $x_1 + x_2 = -0{,}9/1{,}5 = -0{,}6$

$x_1 \cdot x_2 = -2{,}4/1{,}5 = -1{,}6$

5) Складання рівнянь за відомими коренями

11) Скласти рів. з коренями $x_1 = 2/3$; $x_2 = -1/4$

Сума: $2/3 + (-1/4) = 8/12 - 3/12 = 5/12$

Добуток: $(2/3) \cdot (-1/4) = -2/12 = -1/6$

Рівняння: $x^2 - (5/12)x + (-1/6) = 0$

або помножимо на 12: $12x^2 - 5x - 2 = 0$

12) Скласти рів. з коренями $x_1 = \sqrt{3}$ і $x_2 = -\sqrt{3}$

Сума: $\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$

Добуток: $\sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3}) = -3$

Рів: $x^2 - 0 \cdot x + (-3) = 0$, тобто $x^2 - 3 = 0$

6) Знаходження одного кореня через інший

13) У рів. $2x^2 - 9x + c = 0$ один корінь дорівнює 3. Знайти другий корінь і коеф c. За т. Вієта $x_1 + x_2 = 9/2 = 4{,}5$

Якщо $x_1 = 3$, то $x_2 = 4{,}5 - 3 = 1{,}5$. Знаходимо c:

$x_1 \cdot x_2 = c/2$; $3 \cdot 1{,}5 = c/2$; $4{,}5 = c/2$; $c = 9$

Біквадратні рівняння

?? Це вид квадратних рівнянь

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad \text{де} \quad a \neq 0$$

1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ Розв. познач $t = x^2$ тоді рівняння набуває вигляду $t^2 - 5t + 4 = 0$. За т. Вієта

$\begin{cases} t_1 + t_2 = 5 \\ t_1 \cdot t_2 = 4 \end{cases}$ Знаходимо корені $t_1 = 4$; $t_2 = 1$

Повертаємось до змінної x:

При $t_1 = 4$: $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

При $t_2 = 1$: $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

Відповідь: $x \in \{-2; -1; 1; 2\}$

2) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ Розв. $t = x^2$; тоді: $t^2 - 13t + 36 = 0$

За т. Вієта: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 13 \\ t_1 \cdot t_2 = 36 \end{cases}$ Знаходимо корені $t_1 = 9$; $t_2 = 4$

Повертаємось до змінної x:

При $t_1 = 9$: $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

При $t_2 = 4$: $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Відповідь: $x \in \{-3; -2; 2; 3\}$

3) $2x^4 - 9x^2 + 4 = 0$ Роз. $t = x^2$ тоді

$2t^2 - 9t + 4 = 0$. За т. Вієта $\begin{cases} t_1 + t_2 = 9/2 \\ t_1 \cdot t_2 = 2 \end{cases}$

знах. корені $t_1 = 4$; $t_2 = 1/2$

При $t_1 = 4$: $x^2 = 4 \Rightarrow x \pm 2$

При $t_2 = 1/2$: $x^2 = 1/2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2}/2$

Відповідь: $x \in \{-2; -\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2; 2\}$

Розкладання квадратного тричлена на множники

Квад. трич. ax^2+bx+c розкладається за формулою $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ де x_1 і x_2 – корені рівняння $ax^2+bx+c=0$

1) $x^2-7x+12$ Роз. Знайдемо корені $x^2-7x+12=0$

За т. Вієта: $\begin{cases} x_1+x_2=7 \\ x_1\cdot x_2=12 \end{cases}$ Корені: $x_1=3$; $x_2=4$

Розкладання $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$

2) $2x^2-8x+6$ Знах корені рів $2x^2-8x+6=0$ скоротимо

$x^2-4x+3=0$. За т. Вієта $\begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_1\cdot x_2=3 \end{cases}$

Корені: $x_1=1$; $x_2=3$

Розкладання: $2x^2-8x+6=2(x-1)(x-3)$

3) x^2+6x+9 Знах кор. $x^2+6x+9=0$

За т. Вієта $\begin{cases} x_1+x_2=-6 \\ x_1\cdot x_2=9 \end{cases}$ Корені: $x_1=x_2=-3$ (подв. кор)

Розкладання: $x^2+6x+9=(x+3)^2$

4) $3x^2-5x-2$ Знах. кор. $3x^2-5x-2=0$

за т. Вієта $\begin{cases} x_1+x_2=5/3 \\ x_1\cdot x_2=-2/3 \end{cases}$ Корені: $x_1=2$, $x_2=-1/3$

Розклад: $3x^2-5x-2=3(x-2)(x+1/3)=(x-2)(3x+1)$

Застосування. т. Вієта

Для квад. рів. $ax^2+bx+c=0$ з коренями x_1 і x_2

$$\begin{cases} x_1+x_2=-b/a \\ x_1\cdot x_2=c/a \end{cases}$$

* Ця теорема (система) дозволяє швидко підбирати корені квадрат. рів. коли коеф. цілі числа.

Основні принципи вибору методу:

Дискримінант використовуй, коли:

- Рівняння складно розкласти на множники (наприклад, $2x^2 - 7x + 3 = 0$)
- Коефіцієнти великі або дробові
- Потрібні точні значення коренів з радикалами

Теорему Вієта використовуй, коли:

- Потрібно перевірити розв'язок
- Треба знайти параметр за відомими властивостями коренів
- Складаєш рівняння за відомими коренями

Розкладання на множники найкраще для:

- Простих коефіцієнтів (особливо цілих)
- Коли легко помітити корені "на око"
- Рівнянь виду x^2 - (сума коренів)x + (добуток коренів) = 0

Завжди починай зі спрощення рівняння - винеси спільні множники, скороти коефіцієнти, приведи до стандартного вигляду!

1. Скорочення та спрощення

Приклад 1: Скорочення спільного множника

Рівняння: $2x^2 - 8x = 0$

Розв'язання:

- Виносимо спільний множник: $2x(x - 4) = 0$
- Отримуємо: $x = 0$ або $x - 4 = 0$
- **Відповідь:** $x_1 = 0, x_2 = 4$

Приклад 2: Скорочення коефіцієнтів

Рівняння: $6x^2 - 12x + 6 = 0$

Розв'язання:

- Ділимо всі коефіцієнти на 6: $x^2 - 2x + 1 = 0$
- Розкладаємо: $(x - 1)^2 = 0$
- **Відповідь:** $x = 1$ (подвійний корінь)

2. Розкладання на множники

Приклад 3: Класичне розкладання

Рівняння: $x^2 - 5x + 6 = 0$

Розв'язання:

- Шукаємо два числа, що дають добуток 6 і суму -5
- Це числа -2 і -3: $(-2) \times (-3) = 6$, $(-2) + (-3) = -5$
- Розкладаємо: $(x - 2)(x - 3) = 0$
- **Відповідь:** $x_1 = 2, x_2 = 3$

Приклад 4: Різниця квадратів

Рівняння: $x^2 - 16 = 0$

Розв'язання:

- Застосовуємо формулу $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $x^2 - 4^2 = (x - 4)(x + 4) = 0$
- **Відповідь:** $x_1 = 4, x_2 = -4$

Розв'язання:

- Застосовуємо формулу $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $x^2 - 4^2 = (x - 4)(x + 4) = 0$
- **Відповідь:** $x_1 = 4, x_2 = -4$

3. Операції з коренями

Приклад 5: Ірраціональні корені

Рівняння: $x^2 - 2x - 2 = 0$

Розв'язання через дискримінант:

- $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-2) = 4 + 8 = 12$
- $x = (2 \pm \sqrt{12})/2 = (2 \pm 2\sqrt{3})/2 = 1 \pm \sqrt{3}$
- **Відповідь:** $x_1 = 1 + \sqrt{3}, x_2 = 1 - \sqrt{3}$

Приклад 6: Спрощення коренів

Рівняння: $x^2 - 6x + 8 = 0$

Розв'язання:

- $D = 36 - 32 = 4$
- $x = (6 \pm \sqrt{4})/2 = (6 \pm 2)/2$
- **Відповідь:** $x_1 = 4, x_2 = 2$

4. Приклади з дробами

Приклад 7: Дробові коефіцієнти

Рівняння: $(1/2)x^2 - (3/2)x + 1 = 0$

Розв'язання:

- Множимо на 2: $x^2 - 3x + 2 = 0$
- Розкладаємо: $(x - 1)(x - 2) = 0$
- **Відповідь:** $x_1 = 1, x_2 = 2$

Приклад 8: Складні дроби

Рівняння: $(x^2 - 1)/(x + 1) = 2$

Розв'язання:

- Помножуємо на $(x + 1)$: $x^2 - 1 = 2(x + 1)$
- Спрощуємо: $x^2 - 1 = 2x + 2$
- Переносимо: $x^2 - 2x - 3 = 0$
- Розкладаємо: $(x - 3)(x + 1) = 0$
- **Відповідь:** $x_1 = 3, x_2 = -1$ (перевіряємо ОДЗ: $x \neq -1$)
- **Остаточна відповідь:** $x = 3$

5. Коли використовувати дискримінант

Використовуй дискримінант, коли:

- Рівняння не розкладається на множники легко
- Коефіцієнти великі або дробові
- Потрібно знайти точні значення коренів
- Треба визначити кількість коренів

Формула: $D = b^2 - 4ac$

- $D > 0$: два різні корені
- $D = 0$: один корінь (подвійний)
- $D < 0$: немає дійсних коренів

Приклад 9: Використання дискримінанта

Рівняння: $3x^2 - 7x + 2 = 0$

Розв'язання:

- $D = (-7)^2 - 4(3)(2) = 49 - 24 = 25$
- $x = (7 \pm \sqrt{25})/6 = (7 \pm 5)/6$
- **Відповідь:** $x_1 = 2, x_2 = 1/3$

6. Коли використовувати теорему Вієта

Використовуй теорему Вієта, коли:

- Треба перевірити правильність коренів
- Знаєш корені і треба скласти рівняння
- Треба знайти суму або добуток коренів без розв'язування

Теорема Вієта для рівняння $ax^2 + bx + c = 0$:

Теорема Вієта для рівняння $ax^2 + bx + c = 0$:

- $x_1 + x_2 = -b/a$
- $x_1 \times x_2 = c/a$

Приклад 10: Застосування теореми Вієта

Рівняння: $x^2 - 7x + 12 = 0$

Перевірка:

- Корені: $x_1 = 3, x_2 = 4$
- Сума: $3 + 4 = 7 = -(-7)/1$ ✓
- Добуток: $3 \times 4 = 12 = 12/1$ ✓

Приклад 11: Знаходження параметра

Завдання: При якому значенні k рівняння $x^2 - 5x + k = 0$ має корені, сума квадратів яких дорівнює 13?

Розв'язання:

- За теоремою Вієта: $x_1 + x_2 = 5$, $x_1 \times x_2 = k$
- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 25 - 2k = 13$
- Звідси: $k = 6$

7. Комбіновані приклади

Приклад 12: Дробове рівняння з параметром

Рівняння: $(2x - 1)/(x - 1) = (x + 1)/(x - 2)$

Розв'язання:

- Перехресне множення: $(2x - 1)(x - 2) = (x + 1)(x - 1)$
- Розкриваємо: $2x^2 - 4x - x + 2 = x^2 - 1$
- Спрощуємо: $2x^2 - 5x + 2 = x^2 - 1$
- Отримуємо: $x^2 - 5x + 3 = 0$
- $D = 25 - 12 = 13$
- $x = (5 \pm \sqrt{13})/2$
- **Відповідь:** $x_1 = (5 + \sqrt{13})/2, x_2 = (5 - \sqrt{13})/2$

Підсумок методів

Підсумок методів

1. **Розкладання на множники** - найшвидший метод для простих рівнянь
2. **Дискримінант** - універсальний метод для всіх квадратних рівнянь
3. **Теорема Вієта** - для перевірки та задач з параметрами
4. **Скорочення** - завжди спрощуй рівняння перед розв'язанням

Графічний метод розв'язання квадратних рівнянь полягає у побудові квадратичної функції та знаходженні точок перетину з віссю x (або з інш. фу)

1) Метод перетину з віссю x

Рівняння $ax^2+bx+c=0$ розв'язується побудовою графіка фу. $y=ax^2+bx+c$. Корені рівняння це абсциси точок перетину параболи з віссю X.

2) Метод перетину двох графіків

Р-ня можна перепис як рівність двох фу і знайти точки їх перетину.

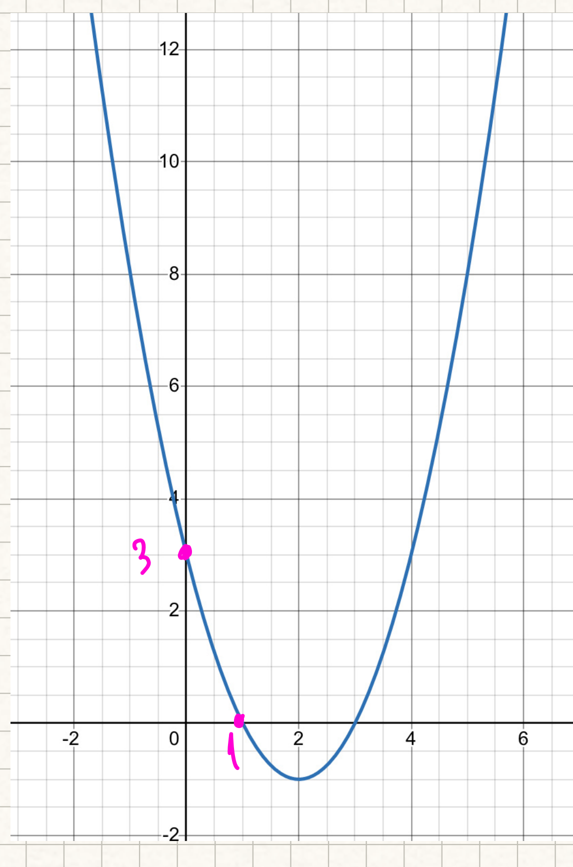
1) $x^2-4x+3=0$ Буд. граф. фу $y=x^2-4x+3$

Вершина параболи $x_0=-b/2a=4/2=2$

$y_0=4-8+3=-1$

Точки для побудови: $(0,3),(1,0),(2,-1),(3,0),(4,3)$

Корені $x_1=1,\ x_2=3$



Квадратне рівняння має вигляд y = ax² + bx + c, де a ≠ 0. Воно дає параболу через властивості квадратичної функції.

Ось чому це відбувається:

Квадратний член x² є головною причиною. Коли ми підносимо x до квадрата:

- При x = 0 маємо y = c
- При x = 1 та x = -1 отримуємо однакові значення y (через x² = (-x)²)
- При x = 2 та x = -2 знову однакові значення y
- І так далі

Ця симетрія відносно вертикальної осі створює характерну U-подібну (або перевернуту U-подібну) форму параболи.

Математично це пояснюється тим, що швидкість зміни функції (похідна) сама змінюється лінійно: f'(x) = 2ax + b. Це означає, що крива постійно "згинається" в одному напрямку.

Фізично параболи зустрічаються в природі саме через квадратичні залежності - траєкторія кинутого тіла, форма дзеркал телескопів, арки мостів. Це пов'язано з тим, що багато фізичних процесів підкоряються законам, що містять квадрати величин (закон всесвітнього тяжіння, кінетична енергія тощо).

Коефіцієнт a визначає, чи парабола відкрита вгору (a > 0) чи вниз (a < 0), а також її "ширину". Коефіцієнти b і c зсувають параболу по горизонталі та вертикалі відповідно.

2) $x^2 - 2x - 3 = 0$ Можемо розв'яз як перетин

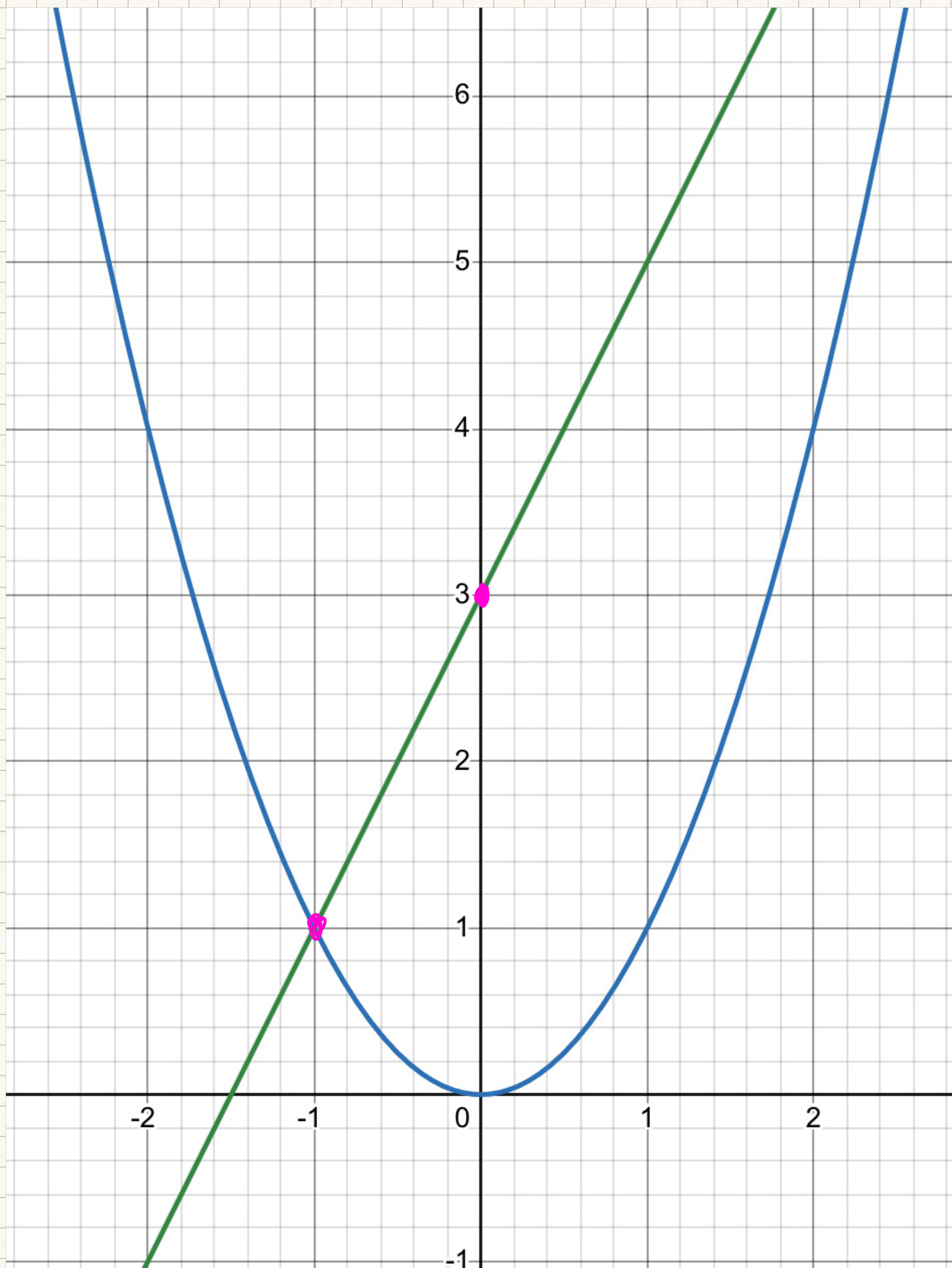
$y = x^2$ і $y = 2x + 3$

Графік $y = x^2$ – стандартна парабола

Графік $y = 2x + 3$ – пряма лінія

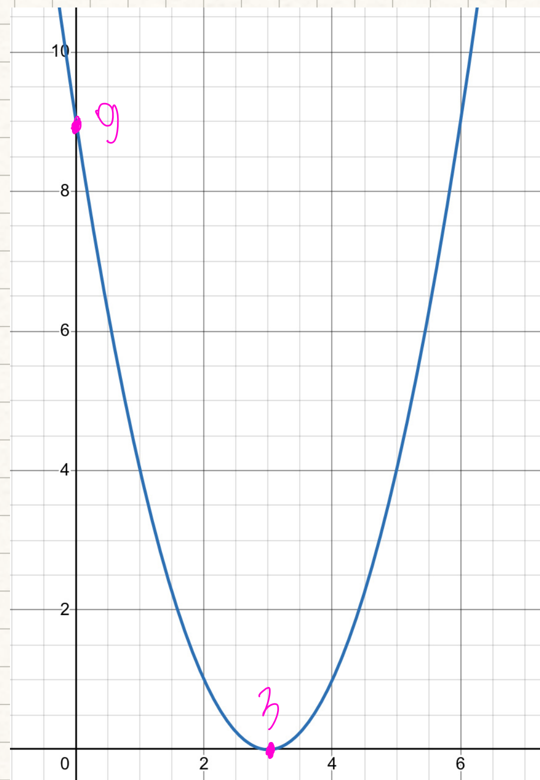
Точки перетину дають корені рівняння

Корені $x_1 = -1$; $x_2 = 3$



3) $x^2-6x+9=0$ Графік $y=x^2-6x+9$

Вершина $(3;0)$; Парабола торкається осі x в одній точці; Єдиний корінь: $x=3$ (кратності 2)



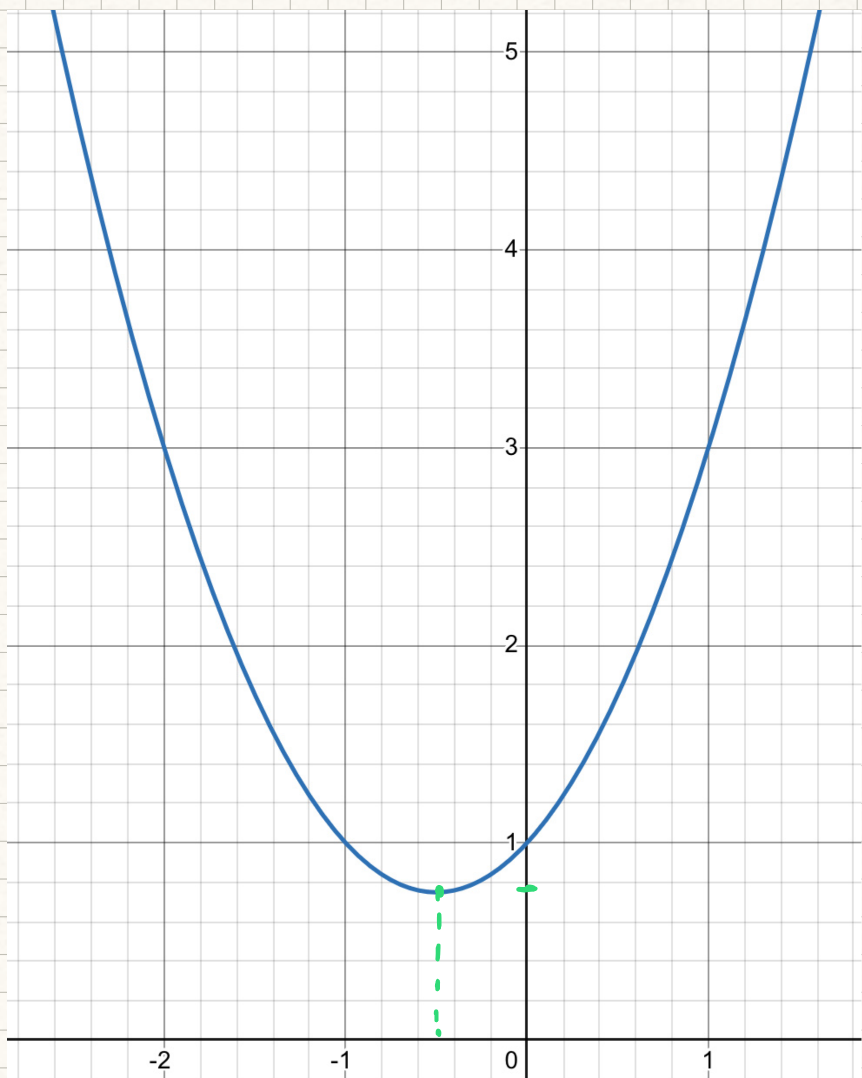
4) $x^2+x+1=0$

Графік $y=x^2+x+1$

Вершина $(-0,5;\ 0,75)$

парабола не перетинає вісь x

Р-ня не має дійсних коренів



Переваги та недоліки:

Переваги:

- Наочність
- Можливість оцінити кількість коренів
- Допомагає зрозуміти поведінку функції

Недоліки:

- Неточність (залежить від масштабу та точності побудови)
- Складність при ірраціональних коренях
- Потребує навичок побудови графіків

Графічний метод особливо корисний для розуміння властивостей квадратичних функцій та як допоміжний інструмент разом з алгебраїчними методами.