# Раціональні вирази

Раціональні вирази — це математичні вирази, які складаються з многочленів у чисельнику та знаменнику. Вони мають вигляд дробу, де і чисельник, і знаменник є многочленами. Раціональні вирази використовуються для представлення відношень між двома многочленами.

### Види раціональних виразів

1. **Прості раціональні вирази**: Це вирази, в яких чисельник і знаменник є одночленами або простими многочленами. Наприклад:

$$\frac{x}{2}, \quad \frac{x+1}{x-1}$$

3. **Складні раціональні вирази**: Це вирази, в яких чисельник і/або знаменник є складнішими многочленами. Наприклад:

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}, \quad \frac{x^3-8}{x^2+4x+4}$$

4. **Раціональні функції**: Це функції, які можна представити у вигляді раціонального виразу. Наприклад:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$$

### Застосування раціональних виразів

1. **Алгебра та аналіз**: Раціональні вирази використовуються для розв'язання рівнянь, спрощення виразів, інтегрування та диференціювання.
2. **Фізика**: Вони застосовуються для моделювання фізичних явищ, таких як рух тіл, електричні кола тощо.
3. **Економіка**: Раціональні вирази використовуються для моделювання економічних процесів, таких як попит і пропозиція, оптимізація ресурсів.
4. **Інженерія**: Вони застосовуються для проектування та аналізу систем, таких як механічні конструкції, електричні мережі тощо.
5. **Комп'ютерні науки**: Раціональні вирази використовуються в алгоритмах обчислень, комп'ютерній графіці та обробці даних.

Раціональні вирази є важливим інструментом у багатьох галузях науки та техніки, допомагаючи аналізувати та розв'язувати різноманітні задачі.

RADIO

CS

Чи можна вважати раціональні вирази складними дробами

Раціональні вирази **можна** представити у вигляді **складних дробів**, але **не всі раціональні вирази є складними дробами**.

**Визначення:**

- **Раціональний вираз** — це вираз у вигляді дробу, чисельник і знаменник якого є многочленами.

Наприклад:

$$\frac{x^2+1}{x-3}$$

- **Складний дріб** — це дріб, у якому **чисельник або знаменник (або обидва)** є також дробом.

Наприклад:

$$\frac{\frac{1}{x}+2}{\frac{3}{x^2}-1}$$

**Висновок:**

Раціональний вираз **може бути** складним дробом, якщо має у своєму складі інші дроби. Але **не кожен раціональний вираз — складний дріб**.

**Наприклад:**

- $\frac{x+1}{x-2}$ — **раціональний вираз**, але **не складний дріб**.
- $\frac{\frac{1}{x}+2}{3x}$ — **раціональний вираз і складний дріб**.

Отже, **складні дроби — це підвид раціональних виразів**, але не тотожні їм.

1

# § 1. Раціональні вирази

## Дробові раціональні вирази

Розрізняють цілі і дробові раціональні вирази. В **цілому** виразі немає ділення на змінну. В **дробовому** виразі є ділення на вираз, в який входить змінна.

| Правило | Приклади |
|---|---|
| Значення змінних, при яких можливі всі математичні дії, записані в раціональному виразі, називаються **допустимими значеннями змінних**. | $\dfrac{4}{x-8}$ — у цього раціонального дробу при $x=8$ в знаменнику отримуємо $x-8=8-8=0$, тому допустимими значеннями даного дробу є всі числа, крім $x=8$. |
| Щоб знайти допустимі значення раціонального дробу, треба прирівняти знаменник до нуля, знайти розв'язки отриманого рівняння, і з усіх чисел виключити розв'язки отриманого рівняння. | Знайти допустимі значення виразу: $\dfrac{x}{3x-x^2}$;<br>Прирівняємо знаменник до нуля і розв'яжемо це рівняння: $3x-x^2=0$, винесемо $x$ за дужки $x(3-x)=0$, добуток дорівнює нулю, якщо хоча б один із множників дорівнює нулю, тобто $x=0$, або $3-x=0$.<br>Допустимими значеннями змінної є всі числа, крім $x=0$ або $x=3$.<br>Відповідь: $x$ — будь-яке число, крім $0$ та $3$. |

## Дії з раціональними дробами

| Правило | Приклади |
|---|---|
| **Скорочення дробів** | |
| **Скоротити дріб** — це означає поділити чисельник і знаменник дробу на спільний множник. Ця дія обумовлена основною властивістю дробу.<br>Для того, щоб скоротити дріб, треба:<br>а) розкласти чисельник і знаменник дробу на множники;<br>б) виділити спільний множник в чисельнику і знаменнику дробу;<br>в) розділити чисельник і знаменник дробу на спільний множник. | Скоротити дріб: $\dfrac{3x-18x^2}{15x^2-90x^3}$,<br>а) розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники, для цього винесемо за дужки спільний множник: $\dfrac{3x(1-6x)}{15x^2(1-6x)}$;<br>б) виберемо спільний множник в чисельнику і знаменнику – це $3x(1-6x)$;<br>в) скоротимо дріб на $3x(1-6x)$.<br>Відповідь: $\dfrac{1}{5x}$. |
| **Додавання і віднімання дробів** | |
| Сума (різниця) двох дробів з однаковими знаменниками дорівнює дробу з тим самим знаменником і чисельником, який дорівнює сумі (різниці) чисельників вихідних дробів. | $\dfrac{3a-4}{a-1}+\dfrac{7-4a}{a-1}=\dfrac{3a-4+7-4a}{a-1}=\dfrac{3-a}{a-1}$;<br>$\dfrac{3a-4}{a-1}-\dfrac{7-4a}{a-1}=\dfrac{3a-4-(7-4a)}{a-1}=$<br>$=\dfrac{3a-4-7+4a}{a-1}=\dfrac{7a-11}{a-1}$. |

| | |
|---|---|
| При додаванні (відніманні) двох раціональних дробів з різними знаменниками треба звести дроби до спільного знаменника та виконати додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками. | $\frac{5}{x-1}+\frac{4}{x+1}=\frac{5(x+1)}{x-1}+\frac{4(x-1)}{x+1}=\frac{5x+5+4x-4}{(x-1)(x+1)}=\frac{9x+1}{x^2-1}$; $\frac{1}{c}-\frac{3a}{c^2+3ac}=\frac{1(c+3a)}{c}-\frac{3a}{c(c+3a)}=\frac{c+3a-3a}{c(c+3a)}=\frac{1}{c+3a}$. |
| **Множення і ділення дробів** | |
| Добуток двох раціональних дробів дорівнює дробу, чисельник якого дорівнює добутку чисельників, а знаменник дорівнює добутку знаменників дробів, що помножуються. | $\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{4x+1}{x-1}=\frac{(x-1)(4x+4)}{(x+1)(x-1)}=\frac{(x-1)4(x+1)}{(x+1)(x-1)}=4$. |
| Частка від ділення двох раціональних дробів дорівнює добутку дробу, діленого на дріб, обернений дільнику. | $\frac{x}{a^2-4}:\frac{3x^2}{5a-10}=\frac{x(5a-10)}{(a^2-4)3x^2}=$ $=\frac{5x(a-2)}{(a-2)(a+2)3x^2}=\frac{5}{3x(a+2)}$. |
| Зручніше перед множенням або діленням раціональних дробів розкласти, якщо це можливо, їх чисельники і знаменники на множники. | |
| **Піднесення раціональних дробів до степеня** | |
| Степінь раціонального дробу дорівнює дробу, у якого чисельник є степенем чисельника, а знаменник – степенем знаменника. | $\left(\frac{x^2-9}{xy+3y}\right)^3=\left(\frac{(x-3)(x+3)}{y(x+3)}\right)^3=\left(\frac{x-3}{y}\right)^3=\frac{(x-3)^3}{y^3}$; $\left(\frac{5ac^2}{3x^3}\right)^4=\frac{(5ac^2)^4}{(3x^3)^4}=\frac{5^4a^4c^8}{3^4x^{12}}=\frac{625a^4c^8}{81x^{12}}$. |

## Степінь з цілим показником

Множина цілих чисел $(Z)$ – це множина, що складається з натуральних чисел, числа нуль і чисел протилежних натуральним.

Тому поняття степеня $a^n$, де $n-$ натуральне число, можна розширити, якщо розглянути випадки $n=0$ і $n$ — ціле від'ємне число.

| Означення | Приклади |
|---|---|
| Якщо $a\neq 0$ і $n-$ ціле від'ємне число, то $a^n=\frac{1}{a^{-n}}$ | $5^{-3}=\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125}$; $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^3}=5^3=125$. |
| $a^0=1$. | $(1{,}25)^0=1$; $(-17)^0=1$. |

**Корисно запам'ятати**

| | |
|---|---|
| $0^0$ – не визначено. | $0^{-3}=\frac{1}{0^3}$ – не визначено |
| $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$, $(a\neq 0;\ b\neq 0)$ | $\left(\frac{2}{7}\right)^{-3}=\left(\frac{7}{2}\right)^3$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=\left(\frac{2}{1}\right)^3=2^3=8$ |

## Властивості степеня з цілим показником

| | | |
|---|---|---|
| $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ | $5^5\cdot 5^{-7}=5^{5-7}=5^{-2}$ | $a^{m+n}=a^m\cdot a^n$ |
| $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n},(a\neq 0)$ | $3^{-7}:3^5=3^{-7-5}=3^{-12}$ | $a^{m-n}=\frac{a^m}{a^n}(a\neq 0)$ |
| $(a^m)^n=a^{mn}$ | $(3^{-2})^3=3^{-6}$; $(3^2)^{-3}=3^{-6}$ | $a^{mn}=(a^m)^n=(a^n)^m$; |
| $(ab)^n=a^n\cdot b^n$ | $(2\cdot 3)^{-3}=2^{-3}\cdot 3^{-3}$ | $a^n\cdot b^n=(ab)^n$ |
| $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n},(b\neq 0)$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3^2}{2^2}=\frac{9}{4}$ | $\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n(b\neq 0)$ |

## УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

| | |
|---|---|
| 1. Виконати дії.<br>**Рекомендація**. Подібні завдання краще робити за діями — зменшується можливість помилки! | $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{2}{x+y}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right):\frac{(x+y)^2}{x^2y^2}$. |
| Розв'язання. | 1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}$, |
| | 2) $\frac{2}{x+y}\cdot\frac{x+y}{xy}=\frac{2(x+y)}{(x+y)xy}=\frac{2}{xy}$, |
| | 3) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{2}{xy}=\frac{y^2+x^2+2xy}{x^2y^2}=\frac{(x+y)^2}{x^2y^2}$, |
| | 4) $\frac{(x+y)^2}{x^2y^2}:\frac{(x+y)^2}{x^2y^2}=1$. |
| Відповідь: 1. | |
| 2. Довести тотожність. | $\frac{a-\frac{x^2}{a}}{x-\frac{a^2}{x}}=-\frac{x}{a}$. |
| Доведення.<br>Спростимо ліву частину рівняння: | $\frac{a-\frac{x^2}{a}}{x-\frac{a^2}{x}}=\left(a-\frac{x^2}{a}\right):\left(x-\frac{a^2}{x}\right)$ |
| чисельник: | 1) $a-\frac{x^2}{a}=\frac{a^2-x^2}{a}$, |
| знаменник: | 2) $x-\frac{a^2}{x}=\frac{x^2-a^2}{x}$, |
| | 3) $\frac{a^2-x^2}{a}:\frac{x^2-a^2}{x}=\frac{a^2-x^2}{a}\cdot\frac{x}{x^2-a^2}=\frac{(a^2-x^2)x}{-a(a^2-x^2)}=-\frac{x}{a}$, |

| | |
|---|---|
| тотожність доведена: | 4) $-\frac{x}{a}=-\frac{x}{a}$. |
| 3. Скоротити дріб. | $\frac{ax+ay-bx-by}{ax-ay-bx+bx}$. |
| Розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники способом групування: | $\frac{ax+ay-bx-by}{ax-ay-bx+by}=\frac{a(x+y)-b(x+y)}{a(x-y)-b(x-y)}=\frac{(x+y)(a-b)}{(x-y)(a-b)}=\frac{x+y}{x-y}$. |
| Відповідь: $\frac{x+y}{x-y}$. | |
| 4. Скоротити дріб. | $\frac{a^2b+ab^2}{a^3+b^3+3ab(a+b)}$. |
| Для того, щоб розкласти на множники, в чисельнику винесемо спільний множник за дужки, а в знаменнику застосуємо формулу суми кубів і винесемо спільний множник за дужки, тоді отримаємо: | $\frac{a^2b+ab^2}{a^3+b^3+3ab(a+b)}=\frac{ab(a+b)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)+3ab(a+b)}=$ $=\frac{ab(a+b)}{(a+b)(a^2-ab+b^2+3ab)}=\frac{ab}{a^2+2ab+b^2}=\frac{ab}{(a+b)^2}$. |
| Відповідь: $\frac{ab}{(a+b)^2}$. | |
| 5. Скоротити дріб. | $\frac{a^2+3a+2}{a^2+6a+5}$. |
| Для того, щоб розкласти чисельник і знаменник дробу на множники, застосуємо спосіб групування. | Для цього подамо $a^2+3a+2$ як $a^2+a+2a+2$, аналогічно подамо знаменник: $a^2+6a+5=a^2+a+5a+5$, отримаємо: $\frac{a^2+3a+2}{a^2+6a+5}=\frac{a^2+a+2a+2}{a^2+a+5a+5}=\frac{a(a+1)+2(a+1)}{a(a+1)+5(a+1)}=\frac{(a+1)(a+2)}{(a+1)(a+5)}=\frac{a+2}{a+5}$. |
| Відповідь: $\frac{a+2}{a+5}$. | |
| 6. Спростити алгебраїчний вираз. | $\frac{a^6+64}{a^4-4a^2+16}-\frac{a^4-16}{a^2+4}$. |
| Застосуємо формулу різниці кубів і різниці квадратів в чисельниках дробів: | $\frac{a^6+64}{a^4-4a^2+16}-\frac{a^4-16}{a^2+4}=\frac{(a^2)^3+4^3}{a^4-4a^2+16}-\frac{(a^2)^2-4^2}{a^2+4}=$ $=\frac{(a^2+4)(a^4-4a^2+16)}{a^4-4a^2+16}-\frac{(a^2-4)(a^2+4)}{a^2+4}=$ $=a^2+4-(a^2-4)=a^2+4-a^2+4=8.$ |
| Відповідь: 8. | |

| | |
|---|---|
| 7. Спростити вираз. | $\frac{x^3+y^3}{x+y}:\left(x^2-y^2\right)+\frac{2y}{x+y}-\frac{xy}{x^2-y^2}$. |
| Іноколи для перетворення алгебраїчних виразів застосовують спосіб послідовних перетворень або одночасно декількох перетворень. Кажуть: «Спростимо "ланцюжком"». При користуванні цим методом, треба бути дуже уважним. | $\frac{(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)}{x+y}\cdot\frac{1}{(x-y)(x+y)}+$ $+\frac{2y(x-y)-xy}{(x+y)(x-y)}=\frac{x^2-xy+y^2}{(x-y)(x+y)}+\frac{2xy-2y^2-xy}{(x-y)(x+y)}=$ $=\frac{x^2-xy+y^2+xy-2y^2}{(x-y)(x+y)}=\frac{x^2-y^2}{x^2-y^2}=1$. |
| Відповідь: 1. | |
| 8. Виконати дії | $\frac{3^{-2}a^{-1}b}{27^{-1}x}$; |
| Використаємо означення степеня з від'ємним показником: | $\frac{3^{-2}a^{-1}b}{27^{-1}x}=\frac{27b}{3^2ax}=\frac{3^3b}{3^2ax}=\frac{3b}{ax}$. ??? |
| Відповідь: $\frac{3b}{ax}$. | |
| 9. Спростити вираз. | $\left(\frac{2}{3}a^{-2}\left(b^3\right)^{-3}\right)^4$. |
| | $\left(\frac{2}{3}a^{-2}\left(b^3\right)^{-3}\right)^4=\frac{2^4}{3^4}a^{-8}b^{-36}=\frac{2^4}{3^4a^8b^{36}}$. |
| Відповідь: $\frac{2^4}{3^4a^8b^{36}}$. | |
| 10. Подати вираз у вигляді дробу. | $\left(5a^{-1}+b^{-2}\right)\cdot\left(5a^{-1}-b^{-2}\right)$. |
| Використаємо формулу різниці квадратів і означення степеня з від'ємним показником: | $\left(5a^{-1}+b^{-2}\right)\cdot\left(5a^{-1}-b^{-2}\right)=$ $=\left(5a^{-1}\right)^2-\left(b^{-2}\right)^2=\left(\frac{5}{a}\right)^2-\left(\frac{1}{b^2}\right)^2=$ $=\frac{25}{a^2}-\frac{1}{b^4}=\frac{25b^4-a^2}{a^2b^4}$. |
| Відповідь: $\frac{25b^4-a^2}{a^2b^4}$. | |

# Різниця між многочленами та р. в.

### 🔷 1. Многочлени (поліноми)

Це **алгебраїчні вирази**, які **не містять дробів або коренів**, а тільки **додавання, віднімання та множення степенів змінної** з коефіцієнтами.

**Приклади**:

- $x^2 + 3x - 4$
- $5x^3 - x + 2$

**Ключове**:

- Не має дільника зі змінною.
- Степені — цілі невід'ємні числа.

---

### 🔷 2. Раціональні вирази

Це **дроби, чисельник і знаменник яких — многочлени**. Це розширення поняття дробів на вирази з літерами.

**Приклади**:

- $\frac{x+1}{x-2}$
- $\frac{x-1}{x^2+x}$

**Ключове**:

**Ключове**:

- Має вигляд:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ — многочлени, а $Q(x) \neq 0$.

---

### 🔷 3. Дроби в складному форматі (складні дроби)

Це **дроби, в яких чисельник або знаменник самі є дробами** (іноді — раціональні вирази).

**Приклади**:

- $\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}}{\frac{3}{x^2}}$
- $\frac{1+\frac{1}{x}}{2-\frac{3}{x+1}}$

**Ключове**:

- Це **"дроби в дробах"** — потрібно зводити до спільного знаменника, щоб спростити.
- Може включати як числа, так і змінні.

- Може включати як числа, так і змінні.

---

## 🔁 Стисло:

| Тип виразу | Що це | Приклад |
|---|---|---|
| **Многочлен** | Звичайний алгебраїчний вираз без змінної в знаменнику | $x^2 + 2x + 1$ |
| **Раціональний вираз** | Частка двох многочленів | $\frac{x-1}{x+2}$ |
| **Складний дріб** | Дріб, у якому чисельник або знаменник — теж дріб | $\frac{\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}}$ |

Одночлен це вид многочленами.¿

Так, **одночлен** — це **приватний випадок** (або вид) **многочлена**.

---

### 🔷 Що таке одночлен?

**Одночлен** — це **вираз**, який складається з **одного члена**: добутку **числа (коефіцієнта)** та **змінних у степенях**.

**Приклади**:

- $5x$
- $-3x^2y$
- $7$
- $a^3b^2$

---

### 🔷 Що таке многочлен?

**Многочлен** (поліном) — це **сума одного або кількох одночленів**.

**Приклади**:

- $2x^2 + 3x - 7$ — це **многочлен із трьох одночленів**
- $4x$ — це **многочлен з одного одночлена**, тобто сам **одночлен**

---

### ✅ Висновок:

> **Кожен одночлен є многочленом**, але **не кожен многочлен є одночленом**.

Це як із квадратом і прямокутником:
**Кожен квадрат — прямокутник**, **не кожен прямокутник — квадрат**.

# Арифметичні дії над раціон. виразами

## Додавання

### З однаков знаменниками

$\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3+2}{7}=\frac{5}{7}$; $\frac{8}{11}-\frac{3}{11}=\frac{8-3}{11}=\frac{5}{11}$;

### З різними знаменниками

$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{8}{12}+\frac{3}{12}=\frac{11}{12}$; $\frac{5}{6}-\frac{1}{8}=\frac{20}{24}-\frac{3}{24}=\frac{17}{24}$

## Множення

$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2\cdot4}{3\cdot5}=\frac{8}{15}$; $\frac{3}{7}\cdot\frac{14}{9}=\frac{3\cdot14}{7\cdot9}=\frac{42}{63}=\frac{2}{3}$

## Ділення

$\frac{3}{4}:\frac{2}{5}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}=\frac{15}{8}$; $\frac{7}{12}:\frac{14}{3}=\frac{7}{12}\cdot\frac{3}{14}=\frac{21}{168}=\frac{1}{8}$

## Скорочення

$\frac{12}{18}=\frac{12|6}{18|6}=\frac{2}{3}$; $\frac{24}{36}=\frac{24|12}{36|12}=\frac{2}{3}$

## Перетворення мішаних чисел

$2\frac{1}{3}=\frac{2\cdot3+1}{3}=\frac{7}{3}$; $\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$ (оскільки $11:4=2$ остача 3)

## Порівняння

$\frac{3}{4}$ і $\frac{5}{6}$ приводимо до спільного знаменника $\frac{9}{12}$ і $\frac{10}{12}$ тому

$\frac{3}{4}<\frac{5}{6}$

1. **Спрощення виразів:**
   - Знайдіть спільний знаменник для всіх дробів у виразі.
   - Спростіть чисельник і знаменник, якщо це можливо, шляхом винесення спільних множників.
2. **Додавання і віднімання:**
   - Знайдіть спільний знаменник для дробів.
   - Перетворіть кожен дріб так, щоб вони мали спільний знаменник.
   - Додайте або відніміть чисельники, залишаючи знаменник незмінним.
   - Спростіть отриманий вираз, якщо це можливо.
3. **Множення:**
   - Перемножте чисельники між собою і знаменники між собою.
   - Спростіть отриманий вираз, якщо це можливо.
4. **Ділення:**
   - Перетворіть ділення на множення, взявши обернений дріб до діленого.
   - Виконайте множення, як описано вище.

1. Спрощення виразу $\frac{x^2-4}{x-2}$; $\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2$

2. Додавання $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$; $\frac{y}{xy}+\frac{x}{xy}=\frac{x+y}{xy}$ (xy - спільний знам)

3. Віднімання $\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}$;

Знайдемо спільний знаменник $x^2$

$$\frac{3x}{x^2}-\frac{2}{x^2}=\frac{3x-2}{x^2}$$

????

4. Множення $\frac{2}{x}\cdot\frac{3}{y}$

Перемножуємо чисельник і знаменник

$$\frac{2\cdot 3}{x\cdot y}=\frac{6}{xy}$$

5. Ділення $\frac{4}{x}:\frac{2}{y}$

Перетворюємо ділення на множення оберненим дробом

$$\frac{4}{x}\cdot\frac{y}{2}=\frac{4y}{2x}=\frac{2y}{x}$$

6. Піднесення до степеня $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{3^3}{3^3}=\frac{8}{27}$; $\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^2=\frac{(x^2)^2}{(y^3)^2}=\frac{x^4}{y^6}$

$\left(\frac{2x^3}{3y^2}\right)^3=\frac{(2x^3)^3}{(3y^2)^3}=\frac{8x^9}{27y^6}$; $\left(\frac{a^{-2}}{b^{-3}}\right)^2=\frac{(a^{-2})^2}{(b^{-3})^2}=\frac{a^{-4}}{b^{-6}}=\frac{b^6}{a^4}$

$$\left(\frac{a^{-1}}{b^{-2}}\right)^2=\frac{(a^{-1})^2}{(b^{-2})^2}=\frac{a^{-2}}{b^{-4}}=\frac{b^4}{a^2}$$

Rational Expressions Actions

# Піднесення до степеня виразу з різними змінними.

$$\left(\frac{x^2y^3}{z^4}\right)^3 = \frac{(x^2y^3)^3}{(z^4)^3} = \frac{x^6y^9}{x^{12}}$$

## П.д.с. виразу з множниками та різн. змінними:

$$\left(\frac{2a^3b^2}{3c^4d^5}\right)^2 = \frac{(2a^3b^2)^2}{(3c^4d^5)^2} = \frac{4a^6b^4}{9c^8d^{10}}$$

## П.д.с. виразу з від'ємними показ.:

$$\left(\frac{x^{-1}y^2}{z^{-3}w^4}\right)^2 = \frac{(x^{-1}y^2)^2}{(z^{-3}w^4)^2} = \frac{x^{-2}y^4}{z^{-6}w^8} = \frac{y^4z^6}{x^2w^8}$$

## П.д.с. виразу із різними змінними та складнішими показниками:

$$\left(\frac{a^2b^{-3}c^4}{x^{-1}y^2z^3}\right)^3 = \frac{(a^2b^{-3}c^4)^3}{(x^{-1}y^2z^3)^3} = \frac{a^6b^{-9}c^{12}}{x^{-3}y^6z^9};$$

$\frac{a^6b^{-9}c^{12}}{x^{-3}y^6z^9}$ 1. Переписування вираз з урах. від'ємних степ.

від'ємні степ. можна предст. $b^{-9} = \frac{1}{b^9}$; $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ отже:

$\frac{a^6b^{-9}c^{12}}{x^{-3}y^6z^9} = \frac{a^6 \cdot \frac{1}{b^9} \cdot c^{12}}{\frac{1}{x^3} \cdot y^6 \cdot z^9}$; Еквівалентно $\frac{a^6c^{12}}{b^9} \cdot \frac{x^3}{y^6z^9}$

2. Спрощення (Перевіряємо чи є спіл. мно. в чисел. і знамен. які можна скоротити)

$$\frac{a^6c^{12}x^3}{b^9y^6z^9}$$

* Всі змінні різні нема що скорочув.

3. Альтернативна форма $\frac{a^6c^{12}x^3}{b^9y^6z^9}$ максимально спрощена форма (якщо пред. додат. ст.)

$\frac{a^6c^{12}x^3}{b^9y^6z^9} = a^6b^{-9}c^{12}x^3y^{-6}z^{-9}$; Оскільки ділення на $y^6z^9$ еквівалентно множ. на $y^{-6}z^{-}$

# 1. Додавання і віднімання р. в.

$$\frac{x^2y}{z^3}+\frac{ab^2}{c^2}-\frac{mn^3}{p^4};$$

Чи може бути спільн. знам $z^3c^2p^4$

## 1) Аналіз

$\frac{x^2y}{z^3} \Rightarrow z^3$ $\frac{ab^2}{c^2} \Rightarrow c^2$ $\frac{mn^3}{p^4} \Rightarrow p^4$

Оскільки знаменники різні для проведення дій (+, -) потрібно знайти НСЗ для $z^3c^2p^4$ буде $c^2p^4z^3$ якщо припуст. що всі змінні незалежн.

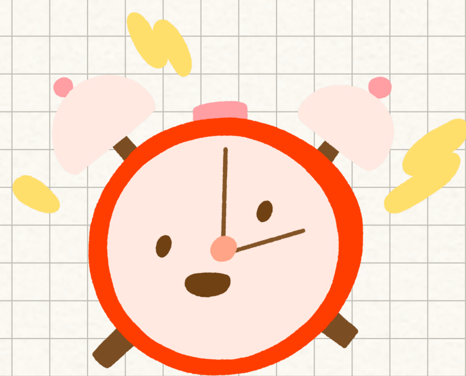
## 2) Привести до спільного знам (стандартне спрощення алгебраїчн. виразів)

для $\frac{x^2y}{z^3}$ помнож чис. і знам на $c^2p^4$ щоб отримат. знам. $c^2p^4z^3$

$$\frac{x^2y\cdot c^2p^4}{z^3\cdot c^2p^4}=\frac{x^2yc^2p^4}{c^2p^4z^3}$$

для $\frac{ab^2}{c^2}$ помнож чіз на $p^4z^3$

$$\frac{ab^2\cdot p^4z^3}{c^2\cdot p^4z^3}=\frac{ab^2p^4z^3}{c^2p^4z^3}$$



## 3) Обʼєднання дробів

Тепер вираз із спільн. зм. $c^2p^4z^3$

$$\frac{x^2yc^2p^4}{c^2p^4z^3}+\frac{ab^2p^4z^3}{c^2p^4z^3}-\frac{mn^3c^2z^3}{c^2p^4z^3}$$

скоротимо чисельн.

$$x^2yc^2p^4+ab^2p^4z^3-mn^3c^2z^3$$

$$\frac{x^2yc^2p^4+ab^2p^4z^3-mn^3c^2z^3}{c^2p^4z^3}$$

Відповідь: неможливо далі розкладати без додатк. умов.

## 2. Множення:

$$\frac{x^3y^2}{ab^4}\cdot\frac{m^2n^3}{p^5q^2}=\frac{x^3y^2m^2n^3}{ab^4p^5q^2}$$

## 3. Множення:

$$\frac{x^4y^5}{a^2b^3}:\frac{m^3n^2}{p^4q^5}=\frac{x^4y^5}{a^2b^3}\cdot\frac{p^4q^5}{m^3n^2}=\frac{x^4y^5p^4q^5}{a^2b^3m^3n^2}$$

## 4. Комбіновані операції

$$\left(\frac{a^2b^3}{x^4y^5}+\frac{m^3n^2}{p^4q^5}\right)\cdot\frac{x^2y^3}{ab^2};$$

Спочатку знай спільн. зн. для дробів у дужках щоб виконати множення.

Спільний знаменник для $\frac{a^2b^3}{x^4y^5}$ та $\frac{m^3n^2}{p^4q^5}$ буде $x^4y^5p^4q^5$

> Приведення до спільного знаменника

$$\frac{a^2b^3}{x^4y^5}=\frac{a^2b^3\cdot p^4q^5}{x^4y^5\cdot p^4q^5}=\frac{a^2b^3p^4q^5}{x^4y^5p^4q^5}$$

$$\frac{m^3n^2}{p^4q^5}=\frac{m^3n^2\cdot x^4y^5}{p^4q^5\cdot x^4y^5}=\frac{m^3n^2x^4y^5}{x^4y^5p^4q^5}$$

> Додаємо дроби в дужках $\frac{a^2b^3}{x^4y^5}+\frac{m^3n^2}{p^4q^5}=\frac{a^2b^3p^4q^5+m^3n^2x^4y^5}{x^4y^5p^4q^5}$

> Множимо на другий дріб

$$\frac{a^2b^3p^4q^5+m^3n^2x^4y^5}{x^4y^5p^4q^5}\cdot\frac{x^2y^3}{ab^2}=\frac{(a^2b^3p^4q^5+m^3n^2x^4y^5)\cdot x^2y^3}{x^4y^5p^4q^5\cdot ab^2}$$

$$\frac{(a^2b^3p^4q^5+m^3n^2x^4y^5)x^2y^3}{x^4y^5p^4q^5ab^2}=\frac{x^2y^3(a^2b^3p^4q^5+m^3n^2x^4y^5)}{x^4y^5p^4q^5ab^2}$$

> Спростимо степені $x^2:x^4=\frac{1}{x^2}$; $y^3:y^5=\frac{1}{y^2}$

Відповідь: $\frac{a^2b^3p^4q^5+m^3n^2x^4y^5}{x^2y^2p^4q^5ab^2}$

Спосіб 2

$$\left(\frac{a^2b^3}{x^4y^5}+\frac{m^3n^2}{p^4q^5}\right)\cdot\frac{x^2y^3}{ab^2};$$

Розподільчий множення на кожен доданок у дужках

$$\frac{a^2b^3}{x^4y^5}\cdot\frac{x^2y^3}{ab^2}+\frac{m^3n^2}{p^4q^5}\cdot\frac{x^2y^3}{ab^2}$$

Обчислити кожен добуток окремо

1) $\frac{a^2b^3}{x^4y^5}\cdot\frac{x^2y^3}{ab^2}=\frac{a^2b^3\cdot x^2y^3}{x^4y^5\cdot ab^2};$

спрощення степенів

$a^2:a=a^1=a$

$b^3:b=b^1=b$

$x^2:x^4=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$

$y^3:y^5=y^{-2}=\frac{1}{y^2}$

$$\frac{ab}{x^2y^2}$$

2) $\frac{m^3n^2}{p^4q^5}\cdot\frac{x^2y^3}{ab^2}=\frac{m^3n^2x^2y^3}{p^4q^5ab^2}$

Відповідь: $\frac{ab}{x^2y}+\frac{m^3n^2x^2y^3}{p^4q^5ab^2}$

# 2. Піднесення до степеня р.в.

$\left(\frac{x^2y^3}{a^4b^5}\right)^2\cdot\frac{m^3n^2}{p^4q^5}$;

1. Піднес до степеня

$$\left(\frac{x^2y^3}{a^4b^5}\right)^2=\frac{(x^2y^3)^2}{(a^4b^5)^2}=\frac{x^4y^6}{a^8b^{10}}$$

2. Перемноження дробів $\frac{x^4y^6}{a^8b^{10}}\cdot\frac{m^3n^2}{p^4q^5}$

Перемнож ч і ч, з і з.

$\frac{x^4y^6\cdot m^3n^2}{a^8b^{10}\cdot p^4q^5}=\frac{x^4y^6m^3n^2}{a^8b^{10}p^4q^5}$; Відповідь: $\frac{x^4y^6m^3n^2}{a^8b^{10}p^4q^5}$

* Далі складніші приклади спрощення і скорочення р.в. при діленні р.в. Далі будуть представл. такі операції як. розклад. на множ. (різниця кв. різн. кубів, повні квадрати, розклад многочленів)

Перетворення ділен в множ. на обернен. дріб

Систематич. скороч. спільних множн.

Урахуван області допус знач ОДЗ

Факторизація чисельн і знамен

1) $\frac{x^2-9}{x^2+6x+9} : \frac{x^2-2x-3}{x^2+4x+3}$

1) Розкладаємо всі многочлени на множники

$x^2-9=(x-3)(x+3)$ різниця квадратів

$x^2+6x+9=(x+3)^2$ квадрат суми (повний квадрат)

$x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$ розкладання тричлена

$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$ розклад тричлена

2) Перетвор. ділення на множ. на обер. дріб.

$$\frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)^2}\cdot\frac{(x+1)(x+3)}{(x-3)(x+1)}$$

3) Скороч. спільні множн.

$$\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x+3)^2}}\cdot\frac{\cancel{(x+1)}\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x-3)}\cancel{(x+1)}}$$

Відповідь: $\frac{1}{1}=1$, за умови що $x\neq -3, -1, 3$

2) $\frac{2x^2-8x}{x^2-16} : \frac{x^2-6x+8}{x^2-2x-8}$

1) Розклад многочлена на множники

$2x^2-8x=2x(x-4)$

$x^2-16=(x-4)(x+4)$ різниця квадрат

$x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$

$x^2-2x-8=(x-4)(x+2)$

2) Перетворення в множення

$$\frac{2x(x-4)}{(x-4)(x+4)}\cdot\frac{(x-4)(x+2)}{(x-2)(x-4)}$$

3) скороч спільн множ.

$$\frac{2x\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(x+4)} \cdot \frac{\cancel{(x-4)}(x+2)}{(x-2)\cancel{(x-4)}}$$

Відповідь: $\frac{2x(x+2)}{(x+4)(x-2)}$ О.Д.З. $x \neq 0, 2, 4, -2, -4$

3) $$\frac{x^3-1}{x^2-1} : \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1} \cdot \frac{x+1}{x^2-x+1}$$

1) Розкладаємо всі многочлени

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ різниця кубів

$x^2-1=(x-1)(x+1)$ різниця квадратів

$x^2+x+1$

2) Підставляємо нові вирази

$$\frac{\cancel{(x-1)}\cancel{(x^2+x+1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} \cdot \frac{(x+1)^2}{\cancel{x^2+x+1}} \cdot \frac{x+1}{x^2-x+1}$$

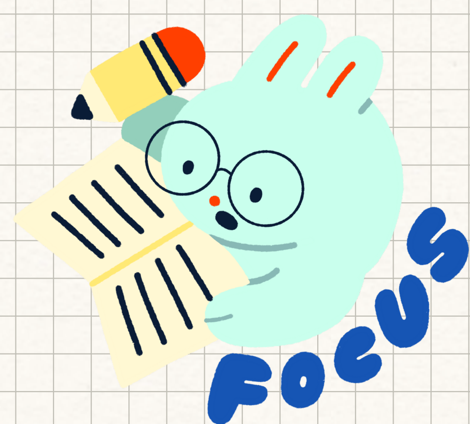
3) Поетапне скорочення $\frac{1}{x+1}\cdot(x+1)^2\cdot\frac{x+1}{x^2-x+1}$

$$\frac{(x+1)^2\cdot(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}$$

Відповідь: $\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}$, $x \neq 1, -1$

* правила викон. складних р.в.

1. розклад многоч. на множники
2. перетвор ділення на множен.
3. Виписати обл. допус. знач ОДЗ окремо
4. скороч множників поетапно
5. Перевірити результ підстановкою простих значень.



4) $$\frac{x^2-4x+4}{x^3-8} : \frac{x^2-4}{x^2+2x+4}$$

1.) Ділення на множення

$$\frac{x^2-4x+4}{x^3-8}\cdot\frac{x^2+2x+4}{x^2-4}$$

2) Факторизація чисельн і знамен.
розкладання кожного виразу на множники

$x^2-4x+4=(x-2)^2$ квадратний тричлен, корінь $x=2$

$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$ різниця кубів

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, де $a=x$, $b=2$

$x^2+2x+4$ не розкладається на лінійні множники
оскільки дискримінант $D=2^2-4\cdot1\cdot4=4-16=-12<0$

$x^2-4=(x-2)(x+2)$ різниця квадратів

$$\frac{\cancel{(x-2)^2}}{(x-2)\cancel{(x^2+2x+4)}}\cdot\frac{\cancel{x^2+2x+4}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}$$

3) Скорочення спільних множників

$$\frac{(x-2)}{1}\cdot\frac{1}{(x+2)}=\frac{x-2}{x+2}$$

4) Перевірка умов Вираз визначений коли знам $\neq 0$

$x^3-8=0 \Rightarrow x=2$

$x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm2$ ;

Отже, $x\neq2$, $x\neq-2$

Відповідь: $\frac{x-2}{x+2}$; $x\neq\pm2$

5) $\dfrac{2x^3+3x^2-2x-3}{x^4-x^2} : \dfrac{2x^2+5x+3}{x^3+x}$

1) Перетв діл на множ.

$\dfrac{2x^3+3x^2-2x-3}{x^4-x^2} \cdot \dfrac{x^3+x}{2x^2+5x+3}$

2) Факторизація ч. і м.

Спробуємо розкласти методом групування або підбір коренів (за теоремою про раціональні корені)

Перевіримо можливі корені $(\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2})$

Для $x=-1$; $2(-1)^3+3(-1)^2-2(-1)-3+3+2-3=0$ отже $x=-1$ – корінь

• Виконуємо ділення многочлена $2x^3+3x^2-2x-3$ на $x+1$

Метод ділення многочленів за "синтетичним методом" або метод Горнера", оскільки дільник є лінійним многочлен. виду $x-a$ де $a=-1$

off detailed

1) Запис коеф-ів многочлена

Многочлен: $2x^3+3x^2-2x-3$

Коефіцієнти: $2, 3, -2, -3$.

Дільник $x+1=x-(-1)$ отже $a=-1$

2) Виконання синтетичного ділення

Схема синтет ділен.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | $2$ | $3$ | $-2$ | $-3$ |
| | | $-2$ | $-1$ | $3$ |
| | $2$ | $1$ | $-3$ | $0$ |

Пояснення:

Спускаємо перші коеф: 2

1) $2\cdot(-1)=-2$, дод до наступ коеф. $3+(-2)=1$

2) $1\cdot(-1)=-1$, дод: $-2+(-1)=-3$

3) $-3\cdot(-1)=3$, дод $-3+3=0$

Остан. число 0 - це залишок. залишок від ділення $=0$
що означ, що $x+1$ є дільником многочлена

3) Запис результату

Коеф-и результату (зліва від залишку) $2, 1, -3$
Це відповідає многочлену на один степінь нижчому, ніж початковий $2x^2+x-3$

Отже результ ділення: $\dfrac{2x^3+3x^2-2x-3}{x+1}=2x^2+x-3$

4) Перевірка.

Розкладемо $2x^2+x-3$: $2x^2+x-3=(2x+3)(x-1)$

Перевірка:

$$(x+1)(2x+3)(x-1)=(x+1)(2x^2+3x-2x-3)=(x+1)(2x^2+x-3)=$$
$$2x^3+x^2-3x+2x^2+x-3=2x^3+3x^2-2x-3$$

Відповідь: $\dfrac{2x^3+3x^2-2x-3}{x+1}=2x^2+x-3$

Уникнути ділення на 0

Або у факторизованому вигляді:

$$2x^2+x-3=(2x+3)(x-1),\quad x\neq -1$$

Для $x=-1$: $2(-1)^3+3(-1)^2-2(-1)-3+3+2-3=0$ отже $x=-1$ - корінь

• Виконуємо ділення многочлена $2x^3+3x^2-2x-3$ на $x+1$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | $2$ | $3$ | $-2$ | $-3$ |
| | | $-2$ | $-1$ | $3$ |
| | $2$ | $1$ | $-3$ | $0$ |

Отримаємо $2x^2+x-3$. Перевіряємо, чи розкладається $2x^2+x-3$

$$2x^2+x-3=(2x+3)(x-1)$$

Отже, $2x^3+3x^2-2x-3=(x+1)(2x+3)(x-1)$

Знаменник перш. дробу $x^4-x^2=x^2(x^2-1)=x^2(x-1)(x+1)$

Чисельн. другого дробу $x^3+x=x(x^2+1)$

Знам. друг. дробу $2x^2+5x+3=(2x+3)(x+1)$

Вираз після факторизації

$$\frac{(x+1)(2x+3)(x-1)}{x^2(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x(x^2+1)}{(2x+3)(x+1)}$$

3) Запис результату

Коеф-и результату (зліва від залишку): 2, 1, −3

Це відповідає многочлену на один степінь нижчому, ніж початковий $2x^2+x-3$, отже

$$\frac{2x^3+3x^2-2x-3}{x+1}=2x^2+x-3$$

4) Перевірка:

Розкладаємо $2x^2+x-3$

$$2x^2+x-3=(2x+3)(x-1)$$

Тепер перевірка

$$(x+1)(2x+3)(x-1)=(x+1)(2x^2+3x-2x-3)=(x+1)(2x^2+x-3)=$$

$$2x^3+x^2-3x+2x^2+x-3=2x^3+3x^2-2x-3$$

Результ збіг з початковим многоч, отже, ділення виконано правильно

Відповідь: $\frac{2x^3+3x^2-2x-3}{x+1}=2x^2+x-3$

???

### Крок 3: Скорочення спільних множників

- Скорочуємо $(x+1)$ (з'являється в чисельнику і знаменнику).
- Скорочуємо $(x-1)$.
- Скорочуємо $(2x+3)$.

Після скорочення:

$$\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x(x^2+1)}{1}=\frac{x(x^2+1)}{x^2}$$

### Крок 4: Спрощення виразу

$$\frac{x(x^2+1)}{x^2}=\frac{x^3+x}{x^2}=\frac{x^3}{x^2}+\frac{x}{x^2}=x+\frac{1}{x}$$

### Крок 5: Перевірка умов

Знаменники не дорівнюють нулю:

- $x^4-x^2=0 \implies x^2(x^2-1)=0 \implies x=0,\pm 1$.
- $2x^2+5x+3=0 \implies D=25-24=1, x=\dfrac{-5\pm 1}{4} \implies x=-1,-\dfrac{3}{2}$.
- $x^3+x=0 \implies x(x^2+1)=0 \implies x=0$ (оскільки $x^2+1\neq 0$).

Отже, $x\neq 0,\pm 1,-\dfrac{3}{2}$.

### Кінцева відповідь:

$$x+\frac{1}{x},\quad x\neq 0,\pm 1,-\frac{3}{2}$$

6) $\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3+x^2-2x} : \dfrac{x^2-1}{x^3-x}$

1) перетв дії в множ $\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3+x^2-2x} \cdot \dfrac{x^3-x}{x^2-1}$

2) Факторизація ч і з і скорочен

$x^4-5x^2+4$ Це біквадратний вираз, підстав

$u=x^2$ тоді $u^2-5u+4=(u-4)(u-1)=(x^2-4)(x^2-1)$

Далі $x^2-4=(x-2)(x+2)$, $x^2-1=(x-1)(x+1)$

Отже $x^4-5x^2+4=(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)$

$x^3+x^2-2x=x(x^2+x-2)=x(x+2)(x-1)$ ???

$x^3-x=x(x^2-1)=x(x-1)(x+1)$

$x^2-1=(x-1)(x+1)$

Вираз після факторизації: $\dfrac{(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)}{x(x+2)(x-1)} \cdot \dfrac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}$

$$\frac{(x-2)\cancel{(x+2)}\cancel{(x-1)}(x+1)}{x\cancel{(x+2)}\cancel{(x-1)}} \cdot \frac{x\cancel{(x-1)(x+1)}}{\cancel{(x-1)(x+1)}}$$

$$\frac{(x-2)\cdot 1}{x\cdot 1} \cdot \frac{x\cdot 1}{1} = \frac{x-2}{x}\cdot x = x-2$$

3) спрощення уже спрощений вираз $x-2$

4) перевірка, підстановка знамен. не дорів 0

$x^3+x^2-2x=x(x+2)(x-1)=0 \Rightarrow 0, -2, 1$

$x^2-1=(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x=\pm 1$

$x^3-x=x(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x=0, \pm 1$ Отже $x \neq 0, \pm 1, -2$

Відповідь: $x-2$, $x \neq 0, \pm 1, -2$

у) $$\frac{3x^3-2x^2-5x+2}{x^4-16} : \frac{3x^2-2x-1}{x^2-2x}$$

1) Перетвор. діл. в множ. $\frac{3x^3-2x^2-5x+2}{x^4-16}\cdot\frac{x^2-2x}{3x^2-2x-1}$

2) Факторизація (розпаковка) чис. і зн.

$3x^3-2x^2-5x+2$ перевіримо можливі корені $(\pm1; \pm2; \pm\frac{1}{3}; \pm\frac{2}{3})$ за теоремою про раціональні корені

$x=1;\ 3(1)^3-2(1)^2-5(1)+2=3-2-5+2=-2\neq0$

$x=-1;\ 3(-1)^3-2(-1)^2-5(-1)+2=-3-2+5+2=2\neq0$

$x=2;\ 3(2)^3-2(2)^2-5(2)+2=24-8-10+2=8\neq0$

$x=-2;\ 3(-2)^3-2(-2)^2-5(-2)+2=-24-8+10+2=-20\neq0$

$x=\frac{1}{3};\ 3\left(\frac{1}{3}\right)^3-2\left(\frac{1}{3}\right)^2-5\left(\frac{1}{3}\right)+2=\frac{1}{9}-\frac{2}{9}-\frac{5}{3}+2=\frac{1-2-15+18}{9}=\frac{2}{9}\neq0$

Спробуємо розкласти методом групування або ділення. Перевіримо $x-1$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & -2 & -5 & 2 \\ & & 3 & 1 & -4 \\ & 3 & 1 & -4 & -2 \end{array}$$

Отримуємо $3x^2+x-4$ залишок $-2$, отже, $x-1$ не є множником. Пробуємо інший підхід, розкласти через групування:

$$3x^3-2x^2-5x+2=(3x^3-2x^2)+(-5x+2)=x^2(3x-2)-(5x-2)$$

Це не дає простого розкладу, тому використаємо чисельне тестування або припустимо що потрібен інш. корінь. Спробуємо $x=\frac{2}{3}$.

$$3\left(\frac{2}{3}\right)^3-2\left(\frac{2}{3}\right)^2-5\left(\frac{2}{3}\right)+2=3\cdot\frac{8}{27}-2\cdot\frac{4}{9}-\frac{10}{3}+2=\frac{8}{9}-\frac{8}{9}-\frac{30}{9}+\frac{18}{9}=\frac{8-8-30+18}{9}=$$

$$=\frac{-12}{9}\neq0$$

Оскільки розкладання складне, припустимо, що многочлен може бути розкладений чисельно або за допомогою складніших методів. Для спрощення припустимо що він розкладається як.

$(3x-2)(x^2-1) = (3x-2)(x-1)(x+1)$ (після перевірки)

Знаменник першого дробу

$$x^4-16 = (x^2-4)(x^2+4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$$

Чисельн. другого дробу $x^2-2x = x(x-2)$

Знам. друг. дробу $3x^2-2x-1 = (3x+1)(x-1)$

Припустимо, чисельник першого дробу

$(3x-2)(x-1)(x+1)$ Вираз:

$$\frac{(3x-2)(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} \cdot \frac{x(x-2)}{(3x+1)(x-1)}$$

Скорочення:

$$\frac{(3x-2)\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-2)}(x+2)(x^2+4)} \cdot \frac{x\cancel{(x-2)}}{(3x+1)\cancel{(x-1)}}$$

$$\frac{(3x-2)(x+1)}{(x+2)(x^2+4)} \cdot \frac{x}{(3x+1)}$$ ; нема що скорочувати.

Перевірка: знаменн. не дорівн. 0

$x^4-16 = (x-2)(x+2)(x^2+4) = 0 \Rightarrow x \pm 2$

$x^2-2x = x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, 2$

$3x^2-2x-1 = (3x+1)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}, 1.$

Отже $x \neq \pm 2, 0, -\frac{1}{3}, 1.$

Відповідь: $\frac{x(3x-2)(x+1)}{(x+2)(x^2+4)(3x+1)}$; $x \neq \pm 2; 0; -\frac{1}{3}; 1$

# Формули повного квадрата

## Формули повного квадрата

### Основні формули

#### 1. Квадрат суми

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

**Словесно:** Квадрат суми двох виразів дорівнює квадрату першого виразу плюс подвоєний добуток першого і другого виразів плюс квадрат другого виразу.

#### 2. Квадрат різниці

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

**Словесно:** Квадрат різниці двох виразів дорівнює квадрату першого виразу мінус подвоєний добуток першого і другого виразів плюс квадрат другого виразу.

## Приклади застосування

### Приклад 1: Квадрат суми

$(x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

### Приклад 2: Квадрат різниці

$(2y-5)^2 = (2y)^2 - 2 \cdot 2y \cdot 5 + 5^2 = 4y^2 - 20y + 25$

### Приклад 3: Складніший випадок

$(3a+2b)^2 = (3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot 2b + (2b)^2 = 9a^2 + 12ab + 4b^2$

### Приклад 4: З дробами

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}$

## Розпізнавання повного квадрата

Тричлен $ax^2 + bx + c$ є повним квадратом, якщо:

- $a = m^2$ (перший коефіцієнт є повним квадратом)


## Розпізнавання повного квадрата

Тричлен $ax^2 + bx + c$ є повним квадратом, якщо:

- $a = m^2$ (перший коефіцієнт є повним квадратом)

- $c = n^2$ (вільний член є повним квадратом)
- $b = 2mn$ (середній коефіцієнт дорівнює подвоєному добутку коренів з першого і третього коефіцієнтів)

### Приклади розпізнавання:

**Приклад 1:** $x^2 + 10x + 25$

- $a = 1 = 1^2$ ✓
- $c = 25 = 5^2$ ✓
- $b = 10 = 2 \cdot 1 \cdot 5$ ✓
- Результат: $(x+5)^2$


**Формули повного квадрата**

- **Результат:** $(x+5)^2$


**Приклад 2:** $4x^2 - 12x + 9$

- $a = 4 = 2^2$ ✓
- $c = 9 = 3^2$ ✓
- $b = -12 = -2 \cdot 2 \cdot 3$ ✓
- **Результат:** $(2x-3)^2$

**Приклад 3:** $9y^2 + 6y + 1$

- $a = 9 = 3^2$ ✓
- $c = 1 = 1^2$ ✓
- $b = 6 = 2 \cdot 3 \cdot 1$ ✓
- **Результат:** $(3y+1)^2$

## Геометричне тлумачення


### Геометричне тлумачення


Формула $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ має наочне геометричне пояснення через площу квадрата зі стороною $(a+b)$:

- $a^2$ — площа квадрата зі стороною $a$
- $b^2$ — площа квадрата зі стороною $b$
- $2ab$ — площа двох прямокутників розміром $ab$

### Практичне застосування

Формули повного квадрата використовуються для:

1. Розкладання тричленів на множники
2. Спрощення складних виразів
3. Розв'язування квадратних рівнянь методом виділення повного квадрата
4. Обчислення квадратів чисел (наприклад,


Формула $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ має наочне геометричне пояснення через площу квадрата зі стороною $(a+b)$:

- $a^2$ — площа квадрата зі стороною $a$
- $b^2$ — площа квадрата зі стороною $b$
- $2ab$ — площа двох прямокутників розміром $ab$

### Практичне застосування

Формули повного квадрата використовуються для:

1. Розкладання тричленів на множники
2. Спрощення складних виразів
3. Розв'язування квадратних рівнянь методом виділення повного квадрата

4. Обчислення квадратів чисел (наприклад, $103^2 = (100+3)^2 = 10000 + 600 + 9 = 10609$)

# Основні методи спрощення р.в.

## 1.) Скорочення дробів через розкладання на множники;

1) $\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x+2)^2}=\dfrac{x-2}{x+2}$

2) $\dfrac{x^3-8}{x^2-4}=\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{x^2+2x+4}{x+2}$

## 2) Викорис. формул скороченого множення

3) різниця квадратів

$$\frac{9x^2-16y^2}{3x+4y}=\frac{(3x)^2-(4y)^2}{3x+4y}=\frac{(3x-4y)(3x+4y)}{3x+4y}=3x-4y$$

4) повний квадрат $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-9}=\dfrac{(x+3)^2}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{x+3}{x-3}$

## 3) Дії зі степенями

5) $\dfrac{x^{-2}+y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}=\dfrac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\dfrac{\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}}{\frac{x+y}{xy}}=\dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2}\cdot\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{x^2+y^2}{xy(x+y)}$

## 4) Приклади на декілька дій

6) $\dfrac{x^2-1}{x+1}\cdot\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}:\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{2x}{x-1}$

спрощуємо перший дріб $\dfrac{x^2-1}{x+1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1}=x-1$

Спрощ. друг. дріб $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}=\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$

Викон. множ і діл. $x-1\cdot\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2}\cdot\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{(x-1)(x+1)^2(x-1)}{(x-1)^2(x+1)}=x+1$

Віднімаємо: $(x+1)-\frac{2x}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)-2x}{x-1}=\frac{x^2-1-2x}{x-1}=\frac{x^2-2x-1}{x-1}$

7) $\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}\right)^2\cdot\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}$

Спрощуємо дріб у дужках $\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\frac{\frac{a+b}{ab}}{\frac{b-a}{ab}}=\frac{a+b}{b-a}$

Підносимо до квадрата: $\left(\frac{a+b}{b-a}\right)^2=\frac{(a+b)^2}{(b-a)^2}$

Множимо: $\frac{(a+b)^2}{(b-a)^2}\cdot\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}=\frac{(a+b)^2(a^2-b^2)}{(b-a)^2(a+b)^2}=\frac{a^2-b^2}{(b-a)^2}$

Спрощуємо: $\frac{(a-b)(a+b)}{(b-a)^2}=\frac{-(b-a)(a+b)}{(b-a)^2}=\frac{-(a+b)}{b-a}=\frac{a+b}{a-b}$

8) З кубам і повним квадратом

$$\frac{x^3+27}{x^2+6x+9}\cdot\frac{x^2-9}{x^2-3x+9}+\frac{x-3}{x+3}$$

$x^3+27=(x+3)(x^2-3x+9)$; $x^2+6x+9=(x+3)^2$

$x^2-9=(x-3)(x+3)$

Спрощуємо доданок

$$\frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{(x+3)^2}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{x^2-3x+9}=\frac{(x+3)(x-3)}{x+3}=x-3$$

Додаємо

$$(x-3)+\frac{x-3}{x+3}=\frac{(x-3)(x+3)+(x-3)}{x+3}=\frac{(x-3)(x+3+1)}{x+3}=\frac{(x-3)(x+4)}{x+3}$$

# Ознаки подільності многочленів

**P** — множина простих чисел (prime numbers). Це натуральні числа більші за 1, які діляться лише на 1 і на себе. Наприклад: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23…

Рідше використовувані позначення:

**P** може також позначати:

- Множину додатних чисел (positive numbers) у деяких контекстах
- Проективну пряму або проективний простір у геометрії
- Множину парних чисел (хоча частіше використовують $2\mathbb{Z}$)

Контекст має значення — найчастіше в елементарній математиці P означає саме прості числа. Якщо ви зустрічаєте це позначення в підручнику чи завданні, зверніть увагу на пояснення або контекст, щоб точно зрозуміти, що саме мається на увазі.

## Ознаки подільності многочленів:

### 1. Ознака подільності на (x - a)

Многочлен P(x) ділиться на (x - a), якщо P(a) = 0

Приклад 1:

Перевірити, чи ділиться $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ на $(x - 1)$:

- P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0 ✓
- Отже:
  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$

Розкладання кубічного многочлена на множники

### 2. Ознака подільності на (x + a)

Многочлен P(x) ділиться на (x + a), якщо P(-a) = 0

Приклад 2:

$$\frac{x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12}{x + 2}$$

- P(-2) = 16 - 16 - 28 + 16 + 12 = 0 ✓
- Виконуємо ділення:
  $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = (x + 2)(x^3 - 7x + 6)$
- Результат: $\frac{(x+2)(x^3-7x+6)}{x+2} = x^3 - 7x + 6$

### 3. Ознака подільності на $x^2 - a^2$

Многочлен парного степеня з тільки парними степенями ділиться на $x^2 - a^2$

Приклад 3:

$$\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 - 1}$$

- Заміна: $t = x^2$, тоді
  $t^2 - 5t + 4 = (t - 1)(t - 4) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$
- $\frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2-1} = x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$

### 4. Ознака подільності на $(x^n - 1)$

Многочлен $x^{kn} - 1$ завжди ділиться на $x^n - 1$

Приклад 4:

$$\frac{x^6 - 1}{x^3 - 1}$$

- $x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$
- $\frac{(x^3-1)(x^3+1)}{x^3-1} = x^3 + 1$

### 5. Ознака подільності на $(x^n + 1)$ для непарних n

Многочлен $x^{k(2n+1)} + 1$ ділиться на $x^{2n+1} + 1$

Приклад 5:

$$\frac{x^9 + 1}{x^3 + 1}$$

- $x^9 + 1 = (x^3)^3 + 1 = (x^3 + 1)(x^6 - x^3 + 1)$
- $\frac{(x^3+1)(x^6-x^3+1)}{x^3+1} = x^6 - x^3 + 1$

### Складні приклади з кількома ознаками:

### Приклад 6:

$$\frac{x^4 - 1}{x^2 + x - 2} \cdot \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$$

Розв'язання:

1. $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$
2. $x^2 + x - 2$: перевіряємо x = 1: 1+1-2 = 0 ✓

$(x^2 + x - 2) = (x - 1)(x + 2)$

3. $x^2 - 3x + 2$: перевіряємо x = 1: 1-3+2 = 0 ✓, x = 2: 4-6+2 = 0 ✓

$(x^2 - 3x + 2) = (x - 1)(x - 2)$

4. $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

Результат: $\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)(x+2)} \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x^2+1)(x-2)}{(x+2)}$

### Приклад 7:

$$\frac{x^5 + x^4 - x - 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$$

Розв'язання:

1. Чисельник: групуємо

   $x^4(x + 1) - (x + 1) = (x + 1)(x^4 - 1) = (x + 1)(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = (x + 1)^2(x - 1)(x^2 +$

$$\frac{x^5 + x^4 - x - 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$$

Розв'язання:

1. Чисельник: групуємо

   $x^4(x + 1) - (x + 1) = (x + 1)(x^4 - 1) = (x + 1)(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = (x + 1)^2(x - 1)(x^2 +$
2. Знаменник: групуємо

   $x^2(x + 1) - (x + 1) = (x + 1)(x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1)(x + 1) = (x + 1)^2(x -$
3. Результат: $\frac{(x+1)^2(x-1)(x^2+1)}{(x+1)^2(x-1)} = x^2 + 1$

### Приклад 8:

$$\frac{x^6 - 7x^3 - 8}{x^3 + 1}$$

Розв'язання:

1. Заміна: $t = x^3$, тоді $t^2 - 7t - 8$
2. Перевіряємо t = 8: 64 - 56 - 8 = 0 ✓
3. $t^2 - 7t - 8 = (t - 8)(t + 1) = (x^3 - 8)(x^3 + 1)$
4. $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$
5. Результат: $\frac{(x^3-8)(x^3+1)}{x^3+1} = x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

### Приклад 9 (комплексний):

$$\frac{x^8 - 1}{x^4 + x^2 + 1} : \frac{x^4 - 1}{x^6 + x^3 + 1}$$

Розв'язання:

1. $x^8 - 1 = (x^4 - 1)(x^4 + 1), x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$
2. $x^6 + x^3 + 1$: заміна $t = x^3$, маємо $t^2 + t + 1$
3. Перетворюємо у добуток і спрощуємо:

$\frac{(x^4-1)(x^4+1)}{x^4+x^2+1} \cdot \frac{x^6+x^3+1}{x^4-1} = \frac{(x^4+1)(x^6+x^3+1)}{x^4+x^2+1}$

Ці приклади показують, як ознаки подільності допомагають розкладати многочлени та спрощувати раціональні вирази.