

# Математичні функції

15

## § 4. Функції

### Функції та їх графіки

Залежність змінної  $y$  від змінної  $x$  називається функцією, якщо кожному значенню  $x$  відповідає єдине значення  $y$ .

Функція назначається або однією буквово ( $f$  або)  $f(x)$ , або рівністю  $y = f(x)$ , де  $x$  — незалежна змінна або аргумент,  $y$  — залежна змінна або значення функції  $f(x_0)$  — значення функції  $f$  в точці  $x_0$ .

#### Область визначення і множина значень функції

Область визначення функції ( $D$ ) — множина тих значень, які може приймати аргумент.

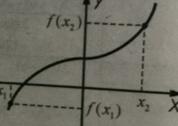
Множина значень функції ( $E$ ) — це множина тих значень, які може приймати сама функція

при всіх значеннях аргумента із областю визначення. Наприклад:  $f(x) = \frac{2}{x-1}$ .

Область визначення ( $D$ ):  $x - 1 \neq 0; x \neq 1$ ,  $x$  — будь-яке число, крім  $x = 1$ .

#### Графік функції

Графіком функції  $y = f(x)$  називається множина точок площини з координатами  $(x, y)$ , де перша координата  $x$  «побігає» всю область визначення функції  $f(x)$ , а друга координата — це відповідне значення функції  $f$  в точці  $x$ .



#### Способи задання функції

1. Аналітичний спосіб: функція задається за допомогою математичної формулі.

$$y = x^2, y = 5x - 8; y = \frac{10}{x}$$

2. Табличний спосіб: функція задається за допомогою таблиці.

$x$	1	2	3	4	5
$y$	2	4	6	8	10

3. Описовий спосіб: функція задається словесним списком.

Функція Діофанта:  $f(x) = 1$  для раціональних  $x$ ,  $f(x) = 0$  для ірраціональних  $x$ .

4. Графічний спосіб: функція задається за допомогою графіка.

Лінійна функція та її графік

Лінійною функцією називається функція виду  $y = kx + b$ , де  $k \neq b$  — деякі числа,  $x$  — незалежна змінна.

#### Властивості

1. Область визначення:  $x$  — будь-яке дійсне число  $x \in \mathbb{R}$ .

2. Множина значень:

1) при  $k \neq 0$ ;  $y$  — будь-яке дійсне число,  $y \in \mathbb{R}$ ;

2) при  $k = 0$ ;  $y = b$ .

3. Точки перетину з осями координат:

1) при  $k \neq 0$ ,  $x = -\frac{b}{k}$ ;  $y = 0$  — точка перетину з віссю  $0x$ ;

2) при  $k = 0$ , тоді  $y = b$  — пряма, паралельна осі  $0x$  перетинає  $0y$  в точці  $(0, b)$  і збігається з віссю  $0x$  при  $b = 0$ ;

3)  $y = b$ ,  $x = 0$  — точка перетину з віссю  $0y$ , тобто  $(0, b)$ .

4. Зростання і спадання:

1) при  $k > 0$  функція зростає на всій області визначення;

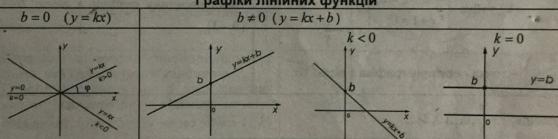
2) при  $k < 0$  функція спадає на всій області визначення;

3) при  $k = 0$  функція стала.

5. Графіком лінійної функції є пряма.

$k$  — кутовий коефіцієнт прямої

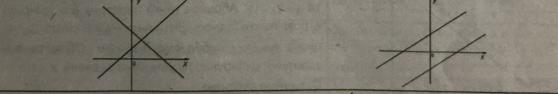
#### Графіки лінійних функцій



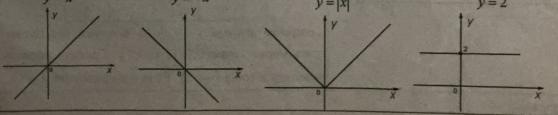
#### Взаємне розташування графіків лінійних функцій

Якщо  $k_1 \neq k_2$ , графіки функцій  $y = k_1x + b_1$  та  $y = k_2x + b_2$  перетинаються в одній точці.

Якщо  $k_1 = k_2$ ,  $b_1 \neq b_2$ , графіки функцій  $y = k_1x + b_1$  та  $y = k_2x + b_2$  паралельні.



#### Ці графіки корисно запам'ятати



## 14 УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

1. Знайти координати точок перетину графіка функції з осями координат.

$$y = \frac{-24}{x} + 1$$

Графік перетинає віссі  $0x$  в точці  $(24, 0)$ .

З вісі  $0y$  графік перегинається за  $x=0$ .

Для того, щоб знайти точку перетину графіка з віссю  $0x$ , необхідно розв'язати рівняння:  $y = 0$ ,

тобто  $\frac{-24}{x} + 1 = 0$ ;  $\frac{-24}{x} = -1$ , якщо  $x \neq 0$ ,

$-24 = -x$ ;  $x = 24$ .

Відповідь:  $(24, 0)$ .

2. Знайти координати точок перетину графіка функції з осями координат.

$$y = \frac{3x}{5x+1} - 2$$

Для того, щоб знайти точку перетину графіку з віссю  $0y$ , треба знайти значення функції у при  $x = 0$ .

При  $x = 0$   $y = \frac{3 \cdot 0}{5 \cdot 0 + 1} - 2 = \frac{0}{1} - 2 = -2$ .

Точка перетину графіка з віссю  $0y$  —  $(0, -2)$ .

Відповідь:  $(0, -2)$ .

3. Розв'язати рівняння графічно.

$$\sqrt{-x} = 2x + 10$$

Для того, щоб розв'язати це рівняння графічно, потрібно побудувати графіки функції  $y = \sqrt{-x}$  та  $y = 2x + 10$ .

Графік функції  $y = \sqrt{-x}$  є півколою, що проходить через точку  $(0, 10)$ .

Графік функції  $y = 2x + 10$  є прямою, що проходить через точку  $(0, 10)$  та  $(-4, 2)$ .

Відповідь:  $-4$ .

4.  $\dots$

#### Пряма пропорційність

Функція  $y = kx$  при  $k \neq 0$  називається прямою пропорційністю.  $k$  — кутовий коефіцієнт.

Ця функція є окремим випадком лінійної функції  $y = kx + b$ , при  $b = 0$ . Тому її графіком є пряма, яка проходить через початок координат.

1. Якщо  $k > 0$ , то графік функції  $y = kx$  розташований в I та III координатних кутах.

2. При  $k < 0$  графік функції розташований в II та IV координатних кутах.

Характеристика точки  $(0, 0)$ :

— пряма пропорційності проходить через початок координат;

— пряма пропорційності має кутовий коефіцієнт  $k$ .

Графіком оберненої пропорційності є крива, яка називається гіперболою.

Гіпербола складається з двох окремих частин, які симетричні відносно початку координат, і проходять через точки  $(1; k)$  та  $(-1; -k)$ .

Властивості функції  $y = \frac{k}{x}$

Значення змінних

1. Область визначення оберненої пропорційності:  $x$  — будь-яке число, крім нуля ( $x \neq 0$ ).

2. Область значень оберненої пропорційності:  $y$  — будь-яке число, крім нуля ( $y \neq 0$ ).

3. При  $k > 0$  графік функції розташований в I та III координатних квадрантах.

Якщо  $k > 0$ , то  $x > 0$  відповідає  $y > 0$ ;

$x < 0$  відповідає  $y < 0$ ;

4. При  $k < 0$  графік функції розташований в II та IV квадрантах.

Якщо  $k < 0$ , то  $x > 0$  відповідає  $y < 0$ ;

$x < 0$  відповідає  $y > 0$ .

Графік функції  $y = x^2$ ;  $y = x^3$ . Іхні графіки і властивості

Графік функції  $y = x^2$  є параболою. Парабола складається з двох

віток, які симетричні відносно осі ординат.

Декілька властивостей функції  $y = x^2$ :

1. Будь-якому  $x$  можна знайти відповідне значення  $y$ , причому  $y \geq 0$ .

При  $x = 0$ :  $y = 0$ .

2. Протилежним значенням  $x$  відповідає одне тає саме значення  $y$ :

$$(-x)^2 = x^2$$

$x_1 = 5$ ;  $y_1 = (-5)^2 = 25$ .

$x_2 = -5$ ;  $y_2 = 5^2 = 25$ , тому графік має симетрію відносно осі  $0y$ .

Графік функції  $y = x^3$  є кубичною параболою. Кубична парабола має симетрію відносно початку координат.

Декілька властивостей функції  $y = x^3$ :

1. Будь-якому значенiu  $x$  відповідає значенiu  $y$ , причому  $y \in \mathbb{R}$  (множині дійсних чисел) при  $x = 0$ ;  $y = 0$ , якщо  $x > 0$ , то  $y > 0$ ; якщо  $x < 0$ , то  $y < 0$ .

2. Протилежним значенium  $x$  відповідає протилежне значенiu  $y$ :

$$(-x)^3 = -x^3$$

$x_1 = -5$ ;  $y_1 = (-5)^3 = -125$ .

$x_2 = 5$ ;  $y_2 = 5^3 = 125$ , тому графік має симетрію відносно початку координат.

Функція  $y = \sqrt{x}$

Область визначення функції  $y = \sqrt{x}$  — множина невід'ємних дійсних чисел:  $x \geq 0$  (оскільки корінь можна додати тільки з невід'ємного числа).

Якщо  $x = 0$ , то  $y = 0$ , тому графік функції  $y = \sqrt{x}$  проходить через початок координат.

Якщо  $x > 0$ , то  $y > 0$ , тому графік функції розташований в першій координатній квадранті.

Більшому значенiu аргумента відповідає більше значенiu функції, дійсно:

$x_1 = 4$ , то  $y_1 = \sqrt{4} = 2$ ;

$x_2 = 9$ , то  $y_2 = \sqrt{9} = 3$ , тобто  $x_2 > x_1$  та  $y_2 > y_1$ .

Таким чином, функція  $y = \sqrt{x}$  є зростаючою.

Графік функції  $y = \sqrt{x}$  та  $y = x^2$  при  $x \geq 0$  симетричні відносно прямої  $y = x$ .

Математична функція — це правило або відношення, яке кожному елементу з однієї множини (область визначення) ставить у відповідність рівно один елемент з іншої множини (область значень). Простіше кажучи, функція — це «машин», яка для кожного «входу» дає точно один «вихід».

#### Аналогії з реального життя

Торговий автомат — ідеальна аналогія функції. Ви вставляєте монету (вхідне значення), натискаєте кнопку з номером товару, і монету видає рівно один товар (вихідне значення). Кожному номеру кнопки відповідає конкретний товар.

Перекладач у Google — ви вводите слово українською (вхід), а отримуєте переклад англійською (вихід). Одному українському слову може відповісти одне англійське слово.

Рецепт приготування — кількість інгредієнтів (вхід) визначає кількість порцій страви (вихід). Якщо рецепт розраховані на 4 особи і в збільшувати інгредієнти вдвічі, то отримаєте страву на 8 осіб.

Тарифна сітка таксі — відстань поїздки (вхід) визначає вартість поїздки (вихід). Математична функція — це машинне значення функції  $y = f(x)$ .

Фізика та інженерія: траєкторія руху тіл, розрахунок електричних кіл, моделювання коливань, проектування мостів та будівель.

Медицина: дозування ліків залежно від ваги пацієнта, моделювання поширення епідемій, аналіз серцевого ритму.

Комп'ютерні науки: алгоритми пошуку, машинне навчання, обробка зображень, створення комп'ютерної графіки та анімації.

Біологія: моделювання зростання популяцій, розрахунок швидкості метаболізму, генетичні дослідження.

Метеорологія: прогнозування погоди, моделювання кліматичних змін.

Архітектура та дизайн: розрахунок навантажень, створення естетичних пропорцій, планування просторів.

Математичні функції — це універсальна мова для опису залежностей у природі, суспільстві та технологіях. Вони дозволяють не лише описувати існуючі процеси, але й прогнозувати майбутні події та оптимізувати рішення.

# Як вимінити чи є лін. або кв. рівняння функцією

Відмінне запитання! Це дуже важливе розуміння, яке допоможе вам краще зрозуміти зв'язок між різними математичними поняттями.

Так, і лінійні, і квадратичні рівняння можуть бути функціями, але тут є важливі нюанси, які варто розібрати детально.

## Різниця між рівнянням і функцією

Спочатку давайте зрозумімо різницю. Рівняння — це математичне твердження, що дві вирази є рівними (містить знак “=”). Функція — це правило, яке кожному входу ставить у відповідність один вихід.

Коли ми маємо рівняння типу  $y = 2x + 3$  (лінійне) або  $y = x^2 + 2x - 1$  (квадратичне), то так, це функції! Чому? Тому що для кожного значення  $x$  ми отримуємо рівно одне значення  $y$ .

## Лінійні функції

Лінійні рівняння виду  $y = ax + b$  завжди є функціями. Вони описують пряму лінію на координатній площині. Наприклад, якщо у вас є залежність між часом роботи ( $x$  годин) і заробітною платою ( $y$  гривень) за формулою  $y = 100x + 500$ , то це лінійна функція. Кожній кількості годин відповідає точно одна сума заробітку.

## Квадратичні функції

Квадратичні рівняння виду  $y = ax^2 + bx + c$  також є функціями. Вони описують параболу. Уявіть, що ви кидаете м'яч угору — його висота залежить від часу за квадратичною функцією. Для кожного моменту часу м'яч має рівно одну висоту.

## Важливе застереження

Але увага! Не всі рівняння, що містять квадрати, є функціями. Наприклад, рівняння кола  $x^2 + y^2 = 25$  не є функцією, тому що для одного значення  $x$  може бути два значення  $y$ . Якщо  $x = 3$ , то уможе бути як  $+4$ , так і  $-4$ .

## Тест вертикальної лінії

Є простий спосіб перевірити, чи є рівняння функцією: уявіть, що ви

## Важливе застереження

Але увага! Не всі рівняння, що містять квадрати, є функціями. Наприклад, рівняння кола  $x^2 + y^2 = 25$  не є функцією, тому що для одного значення  $x$  може бути два значення  $y$ . Якщо  $x = 3$ , то уможе бути як  $+4$ , так і  $-4$ .

## Тест вертикальної лінії

Є простий спосіб перевірити, чи є рівняння функцією: уявіть, що ви проводите вертикальну лінію через графік. Якщо ця лінія перетинає графік більше ніж в одній точці, то це не функція.

Подумайте: чи розумієте ви, чому лінійні та квадратичні рівняння завжди проходять цей тест, а рівняння кола — ні? Це допоможе вам краще зрозуміти суть функцій.

Тест вертикальної лінії — Explanatory жливіших і найпростіших інструментів у математиці для визначення, чи є графік функцією. Давайте розберемо його детально, щоб ви могли впевнено застосовувати цей тест.

## Суть тесту

Уявіть, що у вас є олівець, який ви тримаєте вертикально, і ви повільно рухаєте його зліва направо через весь графік. Якщо в будь-якому місці ваш олівець торкається графіка більше ніж в одній точці одночасно, то цей графік не є функцією.

Чому це працює? Пам'ятаєте визначення функції — кожному входу (значенню  $x$ ) має відповідати рівно один вихід (значення  $y$ ). Вертикальна лінія представляє одне конкретне значення  $x$ . Якщо ця лінія перетинає графік у двох або більше точках, це означає, що одному значенню  $x$  відповідає кілька значень  $y$ , що порушує основне правило функції.

## Приклади, що проходять тест

Розглянемо лінійну функцію  $y = 2x + 1$ . Уявіть пряму лінію, що йде знизу ліворуч до верху праворуч. Коли ви проводите вертикальну лінію в будь-якому місці, вона завжди перетинає цю пряму рівно в одній точці. Це тому, що пряма ніколи не “повертається назад” по осі  $x$ .

Тепер подумайте про квадратичну функцію  $y = x^2$ . Це парабола, що відкривається вгору, з вершиною в точці  $(0,0)$ . Незважаючи на те, що вона має U-подібну форму, кожна вертикальна лінія все одно перетинає її лише в одній точці. Навіть коли парабола “згинається”, вона не повертається назад через те саме значення  $x$ .

## Приклади, що не проходять тест

Класичний приклад — коло з рівнянням  $x^2 + y^2 = 25$ . Уявіть коло з центром у початку координат і радіусом 5. Тепер проведіть вертикальну лінію, скажімо, в точці  $x = 3$ . Ця лінія перетне коло у двох точках: одна вгорі  $(3, 4)$ , а друга внизу  $(3, -4)$ . Це означає, що одному значенню  $x = 3$  відповідає  $\downarrow$  за різні значення  $y$ , тому коло не є функцією.

Інший цікавий приклад — горизонтальна парабола  $x = y^2$ . Уявіть параболу, що відкривається праворуч замість вгору. Якщо ви проведете вертикальну лінію в точці  $x = 4$ , вона перетне параболу у двох точках:  $(4, 2)$  і  $(4, -2)$ .

## Особливі випадки для роздумів

Подумайте над такими питаннями для поглиблення розуміння: що станеться, якщо вертикальна лінія торкається графіка рівно в одній точці, але не перетинає його? Це все одно вважається одним перетином, тому графік залишається функцією.

А що, якщо графік має розрив або “стрибок”? Наприклад, функція може мати значення  $y = 2$  при  $x = 3$ , а потім “стрибнути” до  $y = 5$  при тому ж  $x = 3$  з іншого боку. Такий графік не пройде тест вертикальної лінії і не буде функцією.

## Практичне застосування

Коли ви бачите будь-який графік, швидко проведіть уявну вертикальну лінію через найширші або найскладніші частини. Якщо графік має петлі, кола, горизонтальні ділянки з вертикальним “стрибком” або будь-які інші форми, де одне значення  $x$  може дати кілька значень  $y$ , він не пройде тест.

Цей тест особливо корисний при роботі з графіками, побудованими на комп’ютері або калькуляторі, коли не завжди зрозуміло з рівняння, чи є воно функцією. Просто уявно “просканируйте” графік вертикальними лініями — і відповідь стане очевидно.

Чи розумієте ви тепер, чому цей простий візуальний тест так ефективно працює? Спробуйте застосувати його до різних графіків, які ви бачили раніше, і подивітесь, чи зможете передбачити результат до того, як проведете тест.

