

Раціональні вирази

Раціональні вирази — це математичні вирази, які складаються з многочленів у чисельнику та знаменнику. Вони мають вигляд дробу, де і чисельник, і знаменник є многочленами. Раціональні вирази використовуються для представлення відношень між двома многочленами.

Види раціональних виразів

1. Прості раціональні вирази: Це вирази, в яких чисельник і знаменник є одночленами або простими многочленами. Наприклад:

$$\frac{x}{2}, \quad \frac{x+1}{x-1}$$

3. Складні раціональні вирази: Це вирази, в яких чисельник і/або знаменник є складнішими многочленами. Наприклад:

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}, \quad \frac{x^3 - 8}{x^2 + 4x + 4}$$

4. Раціональні функції: Це функції, які можна представити у вигляді раціонального виразу. Наприклад:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

Застосування раціональних виразів

1. Алгебра та аналіз: Раціональні вирази використовуються для розв'язання рівнянь, спрощення виразів, інтегрування та диференціювання.

2. Фізика: Вони застосовуються для моделювання фізичних явищ, таких як рух тіл, електричні кола тощо.

3. Економіка: Раціональні вирази використовуються для моделювання економічних процесів, таких як попит і пропозиція, оптимізація ресурсів.

4. Інженерія: Вони застосовуються для проектування та аналізу систем, таких як механічні конструкції, електричні мережі тощо.

5. Комп'ютерні науки: Раціональні вирази використовуються в алгоритмах обчислень, комп'ютерній графіці та обробці даних.

Раціональні вирази є важливим інструментом у багатьох галузях науки та техніки, допомагаючи аналізувати та розв'язувати різноманітні задачі.



§ 1. Раціональні вирази

Дробові раціональні вирази

Розрізняють цілі і дробові раціональні вирази. В цілому виразі немає ділення на змінну. В дробовому виразі є ділення на вираз, в який входить змінна.

Приклади

Правило

Значення змінних, при яких можливі всі математичні дії, записані в раціональному виразі, називаються допустимими значеннями змінних.

Щоб знайти допустимі значення раціонального дробу, треба прирівняти знаменник до нуля, знайти розв'язки отриманого рівняння, і з усіх чисел виключити розв'язки отриманого рівняння.

$\frac{4}{x-8}$ — у цього раціонального дробу при $x=8$ в знаменнику отримуємо $x-8=8-8=0$, тому допустимими значеннями даного дробу є всі числа, крім $x=8$.

Знайти допустимі значення виразу: $\frac{x}{3x-x^2}$:

Прирівняємо знаменник до нуля і розв'яжемо це рівняння: $3x-x^2=0$, винесемо x за дужки $x(3-x)=0$, добуток дорівнює нулю, якщо хоча б один із множників дорівнює нулю, тобто $x=0$, або $3-x=0$.

Допустимими значеннями змінної є всі числа, крім $x=0$ або $x=3$.

Відповідь: x — будь-яке число, крім 0 та 3.

Дії з раціональними дробами

Правило

Приклади

Скорочення дробів

Скоротити дріб — це означає поділити чисельник і знаменник дробу на спільний множник. Ця дія обумовлена основною властивістю дробу.

Для того, щоб скоротити дріб, треба:

- розкласти чисельник і знаменник дробу на множники;
- виділити спільний множник в чисельнику і знаменнику дробу;
- розділити чисельник і знаменник дробу на спільний множник.

Скоротити дріб: $\frac{3x-18x^2}{15x^2-90x^3}$.

- розділємо чисельник і знаменник дробу на множники, для цього винесемо за дужки спільний множник: $\frac{3x(1-6x)}{15x^2(1-6x)}$;
- виберемо спільний множник в чисельнику і знаменнику — це $3x(1-6x)$;
- скоротимо дріб на $3x(1-6x)$.

Відповідь: $\frac{1}{5x}$.

Додавання і віднімання дробів

Сума (різниця) двох дробів з однаковими знаменниками дорівнює дробу з тим самим знаменником і чисельником, який дорівнює сумі (різниці) чисельників вихідних дробів.

$$\frac{3a-4}{a-1} + \frac{7-4a}{a-1} = \frac{3a-4+7-4a}{a-1} = \frac{3-a}{a-1};$$

$$\begin{aligned} \frac{3a-4}{a-1} - \frac{7-4a}{a-1} &= \frac{3a-4-(7-4a)}{a-1} = \\ &= \frac{3a-4-7+4a}{a-1} = \frac{7a-11}{a-1}. \end{aligned}$$

При додаванні (відніманні) двох раціональних дробів з різними знаменниками треба звести дроби до спільного знаменника та виконати додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками.

$$\frac{5}{x-1} + \frac{4}{x+1} = \frac{5(x+1)}{x-1} + \frac{4(x-1)}{x+1} = \frac{5x+5+4x-4}{(x-1)(x+1)} = \frac{9x+1}{x^2-1};$$

$$\frac{1}{c} - \frac{3a}{c^2+3ac} = \frac{1(c+3a)}{c} - \frac{3a}{c(c+3a)} = \frac{c+3a-3a}{c(c+3a)} = \frac{1}{c+3a}.$$

Множення і ділення дробів

Добуток двох раціональних дробів дорівнює дробу, чисельник якого дорівнює добутку чисельників, а знаменник дорівнює добутку знаменників дробів, що помножуються.

$$\frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{4x+1}{x-1} = \frac{(x-1)(4x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{(x-1)4(x+1)}{(x+1)(x-1)} = 4.$$

Частка від ділення двох раціональних дробів дорівнює добутку дробу, діленого на дріб, обернений дільнику.

$$\begin{aligned} \frac{x}{a^2-4} : \frac{3x^2}{5a-10} &= \frac{x(5a-10)}{(a^2-4)3x^2} = \\ &= \frac{5x(a-2)}{(a-2)(a+2)3x^2} = \frac{5}{3x(a+2)}. \end{aligned}$$

Зручніше перед множенням або діленням раціональних дробів розкласти, якщо це можливо, їх чисельники і знаменники на множники.

Піднесення раціональних дробів до степеня

Степінь раціонального дробу дорівнює дробу, у якого чисельник є степенем чисельника, а знаменник – степенем знаменника.

$$\left(\frac{x^2-9}{xy+3y} \right)^3 = \left(\frac{(x-3)(x+3)}{y(x+3)} \right)^3 = \left(\frac{x-3}{y} \right)^3 = \frac{(x-3)^3}{y^3};$$

$$\left(\frac{5ac^2}{3x^3} \right)^4 = \frac{(5ac^2)^4}{(3x^3)^4} = \frac{5^4 a^4 c^8}{3^4 x^{12}} = \frac{625a^4 c^8}{81x^{12}}.$$

Степінь з цілим показником

Множина цілих чисел (Z) – це множина, що складається з натуральних чисел, числа нуль і чисел протилежних натуральним.

Тому поняття степеня a^n , де n – натуральне число, можна розширити, якщо розглянути випадки $n = 0$ і n – ціле від'ємне число.

Означення	Приклади
Якщо $a \neq 0$ і n – ціле від'ємне число, то $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$	$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125};$ $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^3} = 5^3 = 125.$
$a^0 = 1$.	$(1,25)^0 = 1; (-17)^0 = 1.$

Корисно запам'ятати

0^0 – не визначено.	$0^{-3} = \frac{1}{0^3}$ – не визначено
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, $(a \neq 0; b \neq 0)$	$\left(\frac{2}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{7}{2}\right)^3; \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{1}\right)^3 = 2^3 = 8$

Властивості степеня з цілим показником

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$5^5 \cdot 5^{-7} = 5^{5-7} = 5^{-2}$	$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, (a \neq 0)$	$3^{-7} : 3^5 = 3^{-7-5} = 3^{-12}$	$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n} (a \neq 0)$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(3^{-2})^3 = 3^{-6}; (3^2)^{-3} = 3^{-6}$	$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m;$
$(ab)^n = a^n \cdot b^n$	$(2 \cdot 3)^{-3} = 2^{-3} \cdot 3^{-3}$	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, (b \neq 0)$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n (b \neq 0)$

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

1. Виконати дії.

Рекомендація. Подібні завдання краще робити за діями — зменшується можливість помилки!

Розв'язання.

$$\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{x+y} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \right) : \frac{(x+y)^2}{x^2 y^2}.$$

$$1) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy},$$

$$2) \frac{2}{x+y} \cdot \frac{x+y}{xy} = \frac{2(x+y)}{(x+y)xy} = \frac{2}{xy},$$

$$3) \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} = \frac{y^2 + x^2 + 2xy}{x^2 y^2} = \frac{(x+y)^2}{x^2 y^2},$$

$$4) \frac{(x+y)^2}{x^2 y^2} : \frac{(x+y)^2}{x^2 y^2} = 1.$$

Відповідь: 1.

2. Довести тотожність.

$$\frac{a - \frac{x^2}{a}}{x - \frac{a^2}{x}} = -\frac{x}{a}.$$

Доведення.

Спростимо ліву частину рівняння:

$$\frac{a - \frac{x^2}{a}}{x - \frac{a^2}{x}} = \left(a - \frac{x^2}{a} \right) : \left(x - \frac{a^2}{x} \right)$$

Чисельник:

$$1) a - \frac{x^2}{a} = \frac{a^2 - x^2}{a},$$

Знаменник:

$$2) x - \frac{a^2}{x} = \frac{x^2 - a^2}{x},$$

$$3) \frac{a^2 - x^2}{a} : \frac{x^2 - a^2}{x} = \frac{a^2 - x^2}{a} \cdot \frac{x}{x^2 - a^2} = \frac{(a^2 - x^2)x}{-a(a^2 - x^2)} = -\frac{x}{a},$$

тотожність доведена:

$$4) -\frac{x}{a} = -\frac{x}{a}$$

3. Скоротити дріб.

$$\frac{ax + ay - bx - by}{ax - ay - bx + by}$$

Розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники способом групування:

$$\frac{ax + ay - bx - by}{ax - ay - bx + by} = \frac{a(x+y) - b(x+y)}{a(x-y) - b(x-y)} = \frac{(x+y)(a-b)}{(x-y)(a-b)} = \frac{x+y}{x-y}$$

Відповідь: $\frac{x+y}{x-y}$.

4. Скоротити дріб.

$$\frac{a^2b + ab^2}{a^3 + b^3 + 3ab(a+b)}$$

Для того, щоб розкласти на множники, в чисельнику винесемо спільний множник за дужки, а в знаменнику застосуємо формулу суми кубів і винесемо спільний множник за дужки, тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{a^2b + ab^2}{a^3 + b^3 + 3ab(a+b)} &= \frac{ab(a+b)}{(a+b)(a^2 - ab + b^2) + 3ab(a+b)} = \\ &= \frac{ab(a+b)}{(a+b)(a^2 - ab + b^2 + 3ab)} = \frac{ab}{a^2 + 2ab + b^2} = \frac{ab}{(a+b)^2}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{ab}{(a+b)^2}$.

5. Скоротити дріб.

$$\frac{a^2 + 3a + 2}{a^2 + 6a + 5}$$

Для того, щоб розкласти чисельник і знаменник дробу на множники, застосуємо спосіб групування.

$$\text{Для цього подамо } a^2 + 3a + 2 \text{ як } a^2 + a + 2a + 2, \text{ аналогічно подамо знаменник: } a^2 + 6a + 5 = a^2 + a + 5a + 5, \text{ отримаємо:}$$

$$\frac{a^2 + 3a + 2}{a^2 + 6a + 5} = \frac{a^2 + a + 2a + 2}{a^2 + a + 5a + 5} = \frac{a(a+1) + 2(a+1)}{a(a+1) + 5(a+1)} = \frac{(a+1)(a+2)}{(a+1)(a+5)} = \frac{a+2}{a+5}.$$

Відповідь: $\frac{a+2}{a+5}$.

6. Спростити алгебраїчний вираз.

$$\frac{a^6 + 64}{a^4 - 4a^2 + 16} - \frac{a^4 - 16}{a^2 + 4}$$

Застосуємо формулу різниці кубів і різниці квадратів в чисельниках дробів:

$$\begin{aligned} \frac{a^6 + 64}{a^4 - 4a^2 + 16} - \frac{a^4 - 16}{a^2 + 4} &= \frac{(a^2)^3 + 4^3}{a^4 - 4a^2 + 16} - \frac{(a^2)^2 - 4^2}{a^2 + 4} = \\ &= \frac{(a^2 + 4)(a^4 - 4a^2 + 16)}{a^4 - 4a^2 + 16} - \frac{(a^2 - 4)(a^2 + 4)}{a^2 + 4} = \\ &= a^2 + 4 - (a^2 - 4) = a^2 + 4 - a^2 + 4 = 8. \end{aligned}$$

Відповідь: 8.

7. Спростити вираз.

Інколи для перетворення алгебраїчних виразів застосовують спосіб послідовних перетворень або одночасно декількох перетворень. Кажуть: «Спростимо "ланцюжком"». При користуванні цим методом, треба бути дуже уважним.

$$\begin{aligned} & \frac{x^3 + y^3}{x+y} : (x^2 - y^2) + \frac{2y}{x+y} - \frac{xy}{x^2 - y^2}, \\ & \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{x+y} \cdot \frac{1}{(x-y)(x+y)} + \\ & + \frac{2y(x-y) - xy}{(x+y)(x-y)} = \frac{x^2 - xy + y^2}{(x-y)(x+y)} + \frac{2xy - 2y^2 - xy}{(x-y)(x+y)} = \\ & = \frac{x^2 - xy + y^2 + xy - 2y^2}{(x-y)(x+y)} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2} = 1. \end{aligned}$$

Відповідь: 1.

8. Виконати дії

$$\frac{3^{-2} a^{-1} b}{27^{-1} x};$$

Використаємо означення степеня з від'ємним показником:

$$\frac{3^{-2} a^{-1} b}{27^{-1} x} = \frac{27b}{3^2 ax} = \frac{3^3 b}{3^2 ax} = \frac{3b}{ax}.$$

Відповідь: $\frac{3b}{ax}$.

9. Спростити вираз.

$$\left(\frac{2}{3} a^{-2} (b^3)^{-3} \right)^4.$$

$$\left(\frac{2}{3} a^{-2} (b^3)^{-3} \right)^4 = \frac{2^4}{3^4} a^{-8} b^{-36} = \frac{2^4}{3^4 a^8 b^{36}}.$$

Відповідь: $\frac{2^4}{3^4 a^8 b^{36}}$.

10. Подати вираз у вигляді дробу.

Використаємо формулу різниці квадратів і означення степеня з від'ємним показником:

$$(5a^{-1} + b^{-2}) \cdot (5a^{-1} - b^{-2}).$$

$$(5a^{-1} + b^{-2}) \cdot (5a^{-1} - b^{-2}) =$$

$$= (5a^{-1})^2 - (b^{-2})^2 = \left(\frac{5}{a}\right)^2 - \left(\frac{1}{b^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{25}{a^2} - \frac{1}{b^4} = \frac{25b^4 - a^2}{a^2 b^4}.$$

Відповідь: $\frac{25b^4 - a^2}{a^2 b^4}$.