

Математичні дружкі

15

§ 4. Функції

Функції та їх графіки

Залежність змінної y від змінної x називається функцією, якщо кожному значенню x відповідає єдине значення y .

Функція позначається або однією буковою f (або) $f(x)$, або рівністю $y = f(x)$, де x — незалежна змінна або аргумент, y — залежна змінна або значення функції $f(x_0)$ — значення функції f в точці x_0 .

Область визначення і множина значень функції

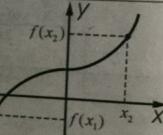
Область визначення функції (D) — множина тих значень, які може приймати аргумент.

Множина значень функції (E) — це множина тих значень, які може приймати сама функція при всіх значеннях аргумента із областю визначення. Наприклад: $f(x) = \frac{2}{x-1}$.

Область визначення (D): $x - 1 \neq 0$; $x \neq 1$, x — будь-яке число, крім $x = 1$.

Графік функції

Графіком функції $y = f(x)$ називається множина точок площини з координатами (x, y) , де перша координата x «побігає» всю область визначення функції $f(x)$, а друга координата — це відповідне значення функції f в точці x .



Способи задання функції

1. Аналітичний спосіб: функція задається за допомогою математичної формулі.

$$y = x^2, y = 5x - 8; y = \frac{10}{x}.$$

2. Таблицяний спосіб: функція задається за допомогою таблиці.

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

3. Описовий спосіб: функція задається словесним списком.

4. Графічний спосіб: функція задається за допомогою графіка.

Функція Дірихле: $f(x) = 1$ для раціональних x , $f(x) = 0$ для ірраціональних x .

16 Лінійна функція та її графік

Лінійною функцією називається функція виду $y = kx + b$, де k і b — деякі числа, x — незалежна змінна.

Властивості

1. Область визначення.

x — будь-яке дійсне число $x \in \mathbb{R}$.

2. Множина значень.

1) при $k \neq 0$: y — будь-яке дійсне число, $y \in \mathbb{R}$;

2) при $k = 0$: $y = b$.

3. Точки перетину з осями координат.

1) при $k \neq 0$, $x = -\frac{b}{k}$; $y = 0$ — точка перетину з віссю $0x$;

2) при $k = 0$, тоді $y = b$ — пряма, паралельна осі $0x$ перетинає $0y$ в точці $(0, b)$ і збігається з віссю $0x$ при $b = 0$;

3) $y = b$, $x = 0$ — точка перетину з віссю $0y$, тобто $(0, b)$.

4. Зростання і спадання.

1) при $k > 0$ функція зростає на всій області визначення;

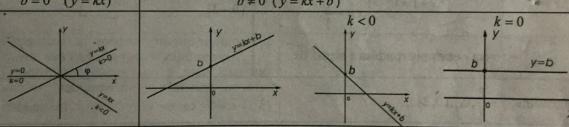
2) при $k < 0$ функція спадає на всій області визначення;

3) при $k = 0$ функція стала.

5. Графіком лінійної функції є пряма.

k — кутовий коефіцієнт прямої

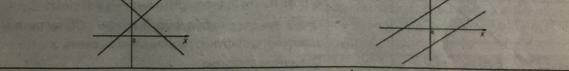
Графіки лінійних функцій



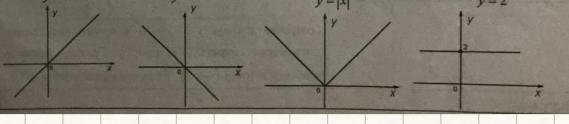
Взаємне розташування графіків лінійних функцій

Якщо $k_1 \neq k_2$, графіки функцій $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ перетинаються в одній точці.

Якщо $k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$, графіки функцій $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ паралельні.



Ці графіки корисно запам'ятати



14 УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

1. Знайти координати точок перетину графіка функції з осями координат.

Розв'язання. Для того, щоб знайти точку перетину графіка з віссю $0x$, необхідно розв'язати рівняння $y = 0$, тобто $\frac{-24}{x} + 1 = 0$, якщо $\begin{cases} x \neq 0, \\ -24 + x = 0, \end{cases}$ тобто $x = 24$.

Графік перетинає вісь $0x$ в точці $(24, 0)$. З віссю $0y$ графік перегинається за $x=0$, якщо $x=0$, $\frac{-24}{x} + 1 = 0$, тобто $x = -24$.

Відповідь: $(24, 0)$; $(-24, 0)$.

2. Знайти координати точок перетину графіка функції з осями координат.

Розв'язання. Для того, щоб знайти точку перетину графіку з віссю $0x$, розв'язуємо рівняння $\frac{3x}{5x+1} - 2 = 0$, $\frac{3x-10x-2}{5x+1} = 0$, $\frac{-7x-2}{5x+1} = 0$, тобто $\begin{cases} x \neq -\frac{1}{5}, \\ -7x-2 = 0, \end{cases}$ тобто $x = -\frac{2}{7}$.

Графік перетинає вісь $0x$ у точці $(-\frac{2}{7}, 0)$. Точка перетину графіка з віссю $0y$ — $(0, -2)$.

Відповідь: $(-\frac{2}{7}, 0)$; $(0, -2)$.

3. Розв'язати рівняння графічно.

Розв'язання. Для того, щоб розв'язати це рівняння графічно, потрібно побудувати графіки функції $y = \sqrt{-x}$ та $y = 2x + 10$. Абсциса точки перетину цих графіків є розв'язком даного рівняння. Розглянемо функцію $y = \sqrt{-x}$ і побудуємо її графік. Область визначення цієї функції є множина значень $x \leq 0$.

Складемо таблицю:

x	0	-1	-4	-9
y	0	+1	2	3

Графіком функції $y = \sqrt{-x}$ є прямі, що проходять через точки $(0, 10)$; $(-4, 2)$. Графік перетинається в точці $(-4, 2)$. Розв'язок рівняння $x = -4$.

4. Пряма пропорційності

Функція $y = kx$ при $k \neq 0$ називається прямою пропорційністю. k — кутовий коефіцієнт.

Ця функція є окремим випадком лінійної функції $y = kx + b$, при $b = 0$. Тому її графіком є пряма, яка проходить через початок координат.

1. Якщо $k > 0$, то графік функції $y = kx$ розташований в I та III координатних кутах.

2. При $k < 0$ графік функції розташований в II та IV координатних кутах.

Характеристика точки $(0,0)$:

$k > 0$

$k < 0$

Означення

Оберненою пропорційністю називається функція, яку можна задати формулою $y = \frac{k}{x}$, де k — число, що не дорівнює нулю.

Число k називається коефіцієнтом пропорційності.

Графіком оберненої пропорційності є крива, яка називається гіперболою. Гіпербола складається з двох окремих частин, які симетричні відносно початку координат, і проходять через точки $(1; k)$ та $(-1; -k)$.

Властивості функції $y = \frac{k}{x}$

Значення змінних

1. Область визначення оберненої пропорційності.

2. Область значень оберненої пропорційності.

3. При $k > 0$ графік функції розташований в I та III координатних квадрантах.

4. При $k < 0$ графік функції розташований в II та IV квадрантах.

Функції $y = x^2$; $y = x^3$. Інші графіки і властивості

Графік функції $y = x^2$ є параболою. Парабола складається з двох віткових, які симетричні відносно початку координат.

Декілька властивостей функції $y = x^2$:

1. Будь-якому x можна знайти відповідне значення y , причому $y \geq 0$.

2. При $x = 0$: $y = 0$.

3. Протилежним значенням x відповідає одне та саме значення y :

$$(-x)^2 = x^2 = y$$

$$x_1 = -5; y_1 = (-5)^2 = 25.$$

$$x_2 = 5; y_2 = 5^2 = 25,$$

тому графік має симетрію відносно осі $0y$.

Графік функції $y = x^3$ є кубичною параболою.

Декілька властивостей функції $y = x^3$:

1. Будь-якому значеню x відповідає значення y , причому $y \in \mathbb{R}$ (множина дійсних чисел) при $x = 0$; $y = 0$, якщо $x > 0$; $y > 0$; якщо $x < 0$, $y < 0$.

2. Протилежним значенням x відповідає протилежне значення y :

$$(-x)^3 = -x^3 = y$$

$$x_1 = -5; y_1 = (-5)^3 = -125.$$

$$x_2 = 5; y_2 = 5^3 = 125,$$

тому графік має симетрію відносно початку координат.

Функція $y = \sqrt{x}$

Область визначення функції $y = \sqrt{x}$ — множина невід'ємних дійсних чисел: $x \geq 0$ (оскільки корінь можна добути тільки з невід'ємного числа).

Якщо $x = 0$, то $y = 0$, тому графік функції $y = \sqrt{x}$ проходить через початок координат.

Якщо $x > 0$, то $y > 0$, тому графік функції розташований в першій координатній квадранті.

Більшому значеню аргумента відповідає більше значення функції, дійсно:

$$x_1 = 4, \text{ тоді } y_1 = \sqrt{4} = 2;$$

$$x_2 = 9, \text{ тоді } y_2 = \sqrt{9} = 3,$$

таким чином, функція $y = \sqrt{x}$ є зростаючою.

Графік функції $y = \sqrt{x}$ та $y = x^2$ при $x \geq 0$ симетричні відносно прямої $y = x$.