Чекова А.М.

АЛГЕБРА

7–11 класи

+ ПОДАРУНОК

Чекова А.М.

ГЕОМЕТРІЯ

7–11 класи

Науково-методичний центр

АЛГЕБРА
І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ В ТАБЛИЦЯХ
7-11 КЛАСИ

Навчальний посібник

2005

Узгоджено з програмою Міністерства освіти та науки України

УДК 373.167.1:512+512 (075.3)
ББК 22.14 я 721
Р 62

Алгебра і початки аналізу в таблицях. 7–11 класи. Навч. посібник .
Науково-методичний центр™, 2003. – 248 с.

Посібник містить основні теоретичні питання курсу алгебри і початків аналізу 7–11 класу відповідно до чинної програми з математики.

Матеріал посібника подано у довідковій формі, найчастіше у вигляді таблиць, що допоможе учням наочно побачити правила та їх ілюстрації, краще зрозуміти алгоритми.

В рубриці «Учнівська сторінка» розглянуті розв'язання типових задач кожної теми, що допоможе учням краще засвоїти вивчений матеріал, навчить їх правильно і коротко записувати умови і розв'язання завдань.

Буде корисною для учнів і рубрика «Сторінка абітурієнта» (10–11 класи). З її допомогою старшокласники зможуть розв'язувати складні завдання і краще підготуватися до вступу у вищі навчальні заклади.

Посібник призначений для учнів 7–11 класів, учителів, абітурієнтів.

Навчальне видання
IV вікова група

Алгебра і початки аналізу в таблицях
7–11 класи

Редактор Дудник Н.В.
Коректор Пахорукова М.А.
Комп'ютерна верстка Мажитова Р.Р.
Дизайн обкладинки Терлецький О.В.

Підписано до друку 9.10.2003 р. Формат 60x90/8.
Папір офсет. Друк офсет.

м. Харків 61085 а/с 2825
тел. (057) 761-17-65

ISBN 966-8542-06-1

КРАЇНА МРІЙ

Це вже потрібно знати

§ 1. Рівняння. Рівняння з однією змінною. Вирази та їх перетворення

§ 2. Цілі вирази

§ 3. Многочлени. Дії з многочленами

§ 4. Формули скороченого множення

§ 5. Розкладання многочлена на множники

§ 6. Розв'язування лінійних рівнянь з двома змінними

§ 7. Системи лінійних рівнянь з двома змінними

7 КЛАС

Це вже потрібно знати

Множини чисел

Означення	Приклади
N — множина натуральних чисел (що вживаються при лічбі).	$1, 2, 3 \ldots 28$.
Z — множина цілих чисел (нуль, натуральні числа і протилежні їм від'ємні числа).	$-23, 0, 17$.
Q — множина раціональних чисел (які можна подати у вигляді $\frac{m}{n}$, де m – ціле, n – натуральне число).	$-10;\ 25;\ 1\frac{1}{3};\ 2;\ 7{,}5;\ 13$.

Основні арифметичні дії

Дії	Властивості		
	Переставна	Сполучна	Розподільна
Додавання: $a+b=c$ (a, b — доданки; c — сума).	$a+b=b+a$	$a+(b+c)=(a+b)+c$	—
Віднімання: $a-b=c$ (a — зменшуване, b — від'ємник, c — різниця).	$a-b=-(b-a)$	$a-(b-c)=a-b+c$ $(a-b)-c=a-b-c$	—
Множення: $a \cdot b=c$ (a, b — співмножники, c — добуток).	$a \cdot b=b \cdot a$	$(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$	$(a+b) \cdot c=ac+bc$; $(a-b) \cdot c=ac-bc$.
Ділення: $a:b=c$ (a — ділене; b — дільник; c — частка).	$\frac{a}{b}=\frac{1}{\frac{b}{a}}$.	ділення числа на добуток: $c:(ab)=(c:a):b=(c:b):a$; ділення добутку на число: $(ab):c=(a:c)b=(b:c)a$.	ділення суми (різниці) на число: $\frac{(a \pm b)}{c}=\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$.

Властивості 0 та 1

$a+0=a$; $a-0=a$; $0-a=-a$; $a+(-a)=0$; $a-a=0$; (a та $-a$ протилежні числа). $a \cdot \frac{1}{a}=1$; (a та $\frac{1}{a}$ — обернені).	$ab=0$, якщо $a=0$, або $b=0$, або $a=b=0$; $\frac{a}{b}=0$ тільки при $a=0, b \neq 0$.

Вважають, що 0 ділиться на будь-яке число, але ділити на нуль не можна!

Ознаки подільності

Ознаки	Приклади
На **2** — діляться числа, остання цифра яких: $0, 2, 4, 6, 8$ — це парні числа, їх записують $n = 2k, k$ — натуральне. Непарні числа не діляться на 2. Їх записують: $n = 2k+1, k$ — ціле невід'ємне.	$258 : 2$, оскільки $8 : 2$; $344 : 2$, оскільки $4 : 2$.
На **3** — діляться числа, сума цифр яких ділиться на 3.	$456 : 3$; $4+5+6=15$; $15 : 3$.
На **4** — діляться числа, число з двох останніх цифр якого ділиться на 4.	$123\underbrace{16} : 4$; $(16 : 4)$.
На **5** — діляться числа, остання цифра яких 0 або 5.	$105 : 5$; $30 : 5$.
На **8** — діляться числа, у яких число, виражене трьома останніми цифрами даного числа, ділиться на 8.	$-1\underbrace{256} : 8$; $(256 : 8)$.
На **9** — діляться числа, сума цифр у запису яких ділиться на 9.	$351 : 9$; $3+5+1=9$, $(9 : 9)$.
На **11** — діляться числа, суми цифр на парних і непарних місцях яких дають різницю, яка ділиться на 11.	$1727 : 11$, оскільки $7+7=14$; $1+2=3$; $14-3=11$; $(11 : 11)$.

Прості і складені числа

Означення	Приклади
Прості числа діляться лише самі на себе і на 1, тобто мають лише два дільники.	17, $(17 : 1$ і $17 : 17)$.
Складені числа мають більше ніж два дільники.	18, $(18 : 1; 18 : 2, 18 : 3, 18 : 6, 18 : 9, 18 : 18)$. 18 має шість дільників: 1, 2, 3, 6, 9, 18
1 – не є ні простим, ні складеним числом.	

Звичайні дроби

Правила	Приклади
Основна властивість дробу	
Значення дробу не зміниться, якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на одне і те саме число (вираз), яке не дорівнює нулю.	$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$; $\frac{22}{33} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \ldots$; $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.
Скоротити дріб — означає поділити чисельник і знаменник дробу на спільний дільник.	$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$; $\frac{21}{28} = \frac{3}{4}$. 7 — спільний дільник чисел 21 і 28.
Порівняння дробів	
З двох дробів з однаковими знаменниками більший той дріб, чисельник якого більший.	$\frac{2}{17} < \frac{11}{17}$, оскільки $2 < 11$.
Якщо знаменники різні, то треба дроби звести до спільного знаменника і порівняти їх як дроби з рівними знаменниками.	$\frac{2}{7}$ і $\frac{3}{8}$; $\frac{2}{7} = \frac{16}{56}$; $\frac{3}{8} = \frac{21}{56}$; $\frac{16}{56} < \frac{21}{56}$, тобто $\frac{2}{7} < \frac{3}{8}$.
З двох дробів з рівними чисельниками той дріб більший, у якого знаменник менший.	$\frac{13}{17} < \frac{13}{15}$, оскільки $15 < 17$.

Додавання і віднімання	
Якщо знаменники рівні, то чисельники додаються (віднімаються), а знаменник зберігається.	$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{b}=\frac{a\pm c}{b}$.
Якщо знаменники різні, то спочатку дроби зводять до спільного знаменника і додають (віднімають) їх як дроби з рівними знаменниками.	$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{cb}{db}=\frac{ad\pm cb}{bd}$.
При додаванні (відніманні) мішаних чисел можна додати (відняти) їх цілі і дробові частини.	$3\frac{1}{8}+2\frac{5}{6}=3+2+\frac{1}{8}+\frac{5}{6}=5+\frac{3+20}{24}=5\frac{23}{24}$.
Множення дробів	
При множенні дробів помножують чисельники і знаменники.	$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.
При множенні мішаних чисел їх спочатку перетворюють у неправильні дроби, а потім помножують їх.	$2\frac{2}{15}\cdot 7\frac{3}{8}=\frac{32}{15}\cdot\frac{59}{8}=\frac{\cancel{32}^{4}\cdot 59}{15\cdot \cancel{8}_{1}}=$ $=\frac{236}{15}=16\frac{6}{15}=16\frac{2}{5}=16,4$.
Якщо в добутку один із множників – ціле число, то його подають у вигляді дробу із знаменником 1.	$\frac{1}{3}\cdot 4\cdot 2,7\cdot 3\frac{1}{7}=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{27}{10}\cdot\frac{22}{7}=\frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot 11}{1\cdot 1\cdot 5\cdot 7}=$ $=\frac{36\cdot 11}{35}=\frac{396}{35}=11\frac{11}{35}$.
Ділення дробів	
При діленні двох дробів ділення замінюють множенням першого дробу на обернений другий дріб. $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$.	$3\frac{3}{5}:2\frac{1}{4}=\frac{18}{5}:\frac{9}{4}=\frac{{}^{2}\cancel{18}}{5}\cdot\frac{4}{\cancel{9}_{1}}=\frac{2\cdot 4}{5\cdot 1}=\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}=1,6$.
Піднесення дробу до степеня	
При піднесенні дробу до степеня підносять чисельник і знаменник цього дробу до даного степеня.	$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$; $\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$.
При піднесенні мішаного числа до степеня спочатку перетворюють його у неправильний дріб, а потім підносять до степеня.	$\left(1\frac{3}{4}\right)^2=\left(\frac{12}{16}\right)^2=\frac{144}{256}=\frac{9}{16}$.

Пропорції

Пропорція — це рівність двох відношень. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ або $a:b=c:d$ $(a,b,c,d\neq 0)$

Члени пропорції: a,d — крайні члени, b,c — середні члени.

Властивості	Приклади
Основна властивість пропорції: добуток крайніх членів пропорції дорівнює добутку її середніх членів.	$ad=bc$.
Кожний член пропорції є четвертим пропорційним членом по відношенню до трьох інших.	$a=\frac{bc}{d}$; $b=\frac{ad}{c}$; $c=\frac{ad}{b}$; $d=\frac{bc}{a}$.

Відсотки

Відсоток – це сота частина деякого числа (яке береться за одиницю). 1% від числа a – це $\frac{1}{100}a$.

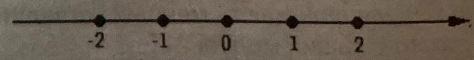
Знаходження відсотка від числа	
$p\%$ від числа $a = \frac{p}{100}a$.	Знайти 15% від 180. Розв'язання: $\frac{15}{100}\cdot 180 = \frac{15\cdot 180}{100} = 27$. Відповідь: 27.

Знаходження числа за його відсотком	
Якщо $p\%$ від будь-якого числа дорівнює b, то все число дорівнює: $b : \frac{p}{100} = \frac{b\cdot 100}{p}$.	Знайти число, 22% якого дорівнює 33. Розв'язання. Шукане число — x — це розв'язок рівняння: $\frac{22}{100} : x = 33$; $x = 33 : \frac{22}{100}$; $x = \frac{33\cdot 100}{22}$; $x = 150$. Відповідь: 150.

Знаходження відсоткового відношення двох чисел	
Число a складає від числа b $\frac{a}{b}\cdot 100\%$.	Скільки відсотків складає число 24 від числа 120? Розв'язання. Шукане число відсотків — x. $\frac{x}{100}\cdot 120 = 24$; $x = \frac{24\cdot 100}{120}$; $x = 20(\%)$. Відповідь: 20%.

Зміна числа, що виражена у відсотках	
Число a збільшилось на $p\%$: $a + \frac{p\%}{100\%}a = a(1 + \frac{p\%}{100\%})$; Число a зменшилось на $p\%$: $a - \frac{p\%}{100\%}a = a\left(1 - \frac{p\%}{100\%}\right)$.	Вартість товару $a = 120$ грн збільшилась на 5%. Нова вартість товару: $120 + \frac{5}{100}\cdot 120 = 120\left(1 + \frac{1}{20}\right) = \frac{120\cdot 21}{20} = 126$ (грн). Відповідь: 126 грн.

Координатна пряма

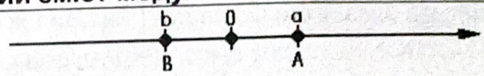
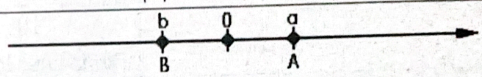
На координатній прямій зображується множина всіх дійсних чисел. 0 – початок координат.	
Числа, які позначені на координатній прямій справа від точки 0, називають додатними, а зліва – від'ємними.	

Модуль числа

Означення	Приклади
Модулем додатного числа називається те саме число.	$\lvert 33\rvert = 33$.
Модулем від'ємного числа називається протилежне йому число.	$\lvert -5\rvert = \lvert 5\rvert$.
Модуль нуля дорівнює нулю.	$\lvert 0\rvert = \lvert 0\rvert$.

$$|a| = \begin{cases} a, a>0 \\ 0, a=0 \\ -a, a<0 \end{cases} = \begin{cases} a, a\ge 0 \\ -a, a<0 \end{cases} = \begin{cases} a, a>0 \\ -a, a\le 0 \end{cases} = \begin{cases} a, a\ge 0, \\ -a, a\le 0. \end{cases}$$

Геометричний зміст модуля

На координатній прямій модуль – це відстань від початку координат до точки, що зображує дане число.	 $\lvert a\rvert = OA$; $\lvert b\rvert = OB$.
Модуль різниці двох чисел a і b — це відстань між двома точками a і b на координатній прямій.	 $\lvert a-b\rvert = AB$.

Властивості модуля

Модуль будь-якого числа – невід'ємне число. $\lvert a\rvert \ge 0$.	$\lvert 3\rvert \ge 0$.
Модулі протилежних чисел рівні. $\lvert -a\rvert = \lvert a\rvert$.	$\lvert -12\rvert = \lvert 12\rvert$.
Величина числа не перевищує величину його модуля. $a \le \lvert a\rvert$.	$4 \le \lvert 4\rvert$.
Модуль добутку дорівнює добутку модулів співмножників. $\lvert a\cdot b\rvert = \lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert$; $\lvert a^n\rvert = \lvert a\rvert^n$; $\lvert a\rvert^{2k} = a^{2k}$.	$\lvert 5\cdot 3\rvert = \lvert 5\rvert \cdot \lvert 3\rvert$.
Модуль дробу дорівнює модулю чисельника, поділеному на модуль знаменника (якщо знаменник не дорівнює нулю). $\left\lvert \frac{a}{b}\right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$ $(b \ne 0)$.	$\left\lvert \frac{2}{3}\right\rvert = \frac{\lvert 2\rvert}{\lvert 3\rvert}$.

Додавання і віднімання

Правила	Приклади
При додаванні двох чисел з однаковими знаками їх модулі додаються, а перед сумою ставиться їхній спільний знак.	$13+21=34$; $-17+(-33)=-50$.
При додаванні двох чисел з різними знаками від більшого модуля віднімають менший і ставлять знак того числа, у якого більший модуль.	$-13+21=8$; $20-37=-17$.
Віднімання двох чисел з різними знаками замінюється додаванням зменшуваного і числа, протилежного від'ємнику.	$28-11=17$; $19-(-5)=19+5=24$; $-35+20=-15$.

Множення і ділення

При множенні двох чисел їх модулі помножують, а знак ставлять за вказаною схемою: $\boxed{+\cdot+=+;\ +\cdot-=-;\ -\cdot-=+;\ -\cdot+=-}$	$7\cdot(-2)=-14$; $-9\cdot(-7)=63$; $-13\cdot 5=-65$.
При діленні двох чисел модуль першого числа (діленого) ділять на модуль другого числа (дільника), а знак ставлять за схемою множення.	$-25:(-5)=5$; $-120:3=-40$; $48:(-4)=-12$.

Подібні доданки

Означення	Приклади
Подібними доданками називають доданки, які рівні, або які відрізняються лише коефіцієнтами.	$11a-2b+4a-12a+c-7b=$ $=(11+4-12)a+(-2-7)b+c=$ $=3a-9b+c.$
Звести подібні доданки — означає додати їх коефіцієнти, а буквену частину залишити незмінною.	

Дужки

Дужки у вирази вводяться для зміни звичайного порядку дій:	
1) піднесення до степеня (справа наліво); 2) множення або ділення (зліва направо); 3) додавання або віднімання (зліва направо).	$13+(7-3)^2=13+4^2=13+16=29;$ $(113+17):(123-121)=130:2=65;$ $(200-28)-(17+53)=172-70=102.$
Правила розкриття дужок	
Якщо перед дужками стоїть знак «+», то дужки опускаються, а знаки доданків у дужках залишаються без змін.	$\ldots+(a+b)=\ldots+a+b.$
Якщо перед дужками стоїть знак «–», то дужки опускаються і знаки доданків змінюються на протилежні.	$\ldots-(a+b)=\ldots-a-b.$

§ 1. Рівняння. Рівняння з однією змінною. Вирази та їх перетворення

Рівняння та його розв'язки

Означення	Приклади
Рівняння – це рівність, яка містить змінну. **Розв'язок рівняння** – це значення змінної, при якому рівняння перетворюється у правильну рівність.	$3(x-4)=24$, при $x=12$ $3(12-4)=24$ $3\cdot 8=24$ $24=24$ $x=12$ – розв'язок рівняння.
Розв'язати рівняння – це означає знайти його розв'язки або довести, що їх немає.	$3(x-4)=24$, $x=12$.
Рівносильні рівняння – це рівняння, які мають одні і ті самі розв'язки.	$3x=36$ і $3(x-4)=24$; їх розв'язок $x=12$.

Деякі властивості рівнянь

У будь-якій частині рівняння можна звести подібні доданки. Якщо з однієї частини рівняння перенести доданки в іншу частину і при цьому змінити знаки доданків на протилежні, отримаємо рівняння, рівносильне даному.	$3x-4+5x=36$ $3x+5x=36+4$ $8x=4+36$ $8x=40$.
При діленні (множенні) обох частин рівняння на одне і те саме число, відмінне від нуля, отримаємо рівняння, рівносильне даному.	поділимо обидві частини рівняння $8x=40$ на 8: $x=5$ — це рівняння рівносильне $8x=40$, їх розв'язок 5.

Лінійне рівняння

Означення	Приклади
Рівняння виду $ax=b$, де x— змінна, a і b— деякі числа, називається **лінійним рівнянням**.	$4-5x=6-2(x+2)$, використовуючи властивості рівнянь: $4-5x=6-2x-4$, $-5x+2x=6-4-4$, $-3x=-2$, $x=\frac{-2}{-3}$, $x=\frac{2}{3}$.
Розв'язування лінійних рівнянь	
$ax+b=0$; $ax=-b$.	$5x+4=0$; $5x=-4$.
$a\neq 0$; $x=-\frac{b}{a}$ — єдиний розв'язок.	$x=-\frac{4}{5}$ — розв'язок.
$a=0$; $0x=-b$ — немає розв'язків.	$0x=-10$ немає розв'язків -10 на 0 поділити неможливо.
$a=0$; $b=0$. $0\cdot x=0$ — нескінченна множина розв'язків.	$7x=7x$, $7x-7x=0$, $0x=0$, x — будь-яке число.

Види виразів

Означення	Приклади
Вираз – це правило, що задає сукупність дій, які треба виконувати над значеннями змінних і сталих в певному порядку, щоб отримати значення цього виразу.	$\frac{11}{20}-\frac{1}{2}+1\frac{1}{4}-8^2$; $3x-18y+6$; $\frac{11(y-2)}{13y}$; $(a+b)c-ab$.
Числовий вираз – це вираз, що складається з чисел за допомогою знаків дій та дужок.	$(21-13)^2-\frac{1}{5}$.
Вираз із змінними – це вираз, що складається із чисел і змінних за допомогою знаків дій і дужок.	$1{,}5x^2-(28y-127):3$.
Підставляючи у вираз значення змінних, отримаємо **числовий вираз**. Знайшовши значення цього числового виразу, отримаємо значення **виразу із змінною**.	якщо $x=2$; $y=5{,}5$, то $1{,}5x^2-(28y-127):3=$ $=1{,}5\cdot 2^2-(28\cdot 5{,}5-127)\cdot 3=$ $=1{,}5\cdot 4-(154-127)\cdot 3=$ $=6-27:3=6-9=-3$.

Перетворення виразів

Означення	Приклади
Тотожність – це рівність, справедлива при всіх допустимих значеннях змінних, які входять до неї.	$3a-4+5a=8a-4$.
Тотожне перетворення виразу – це заміна одного виразу іншим, тотожно рівним йому.	$3x-4=x+2$ і $2x=6$ – тотожні рівності.

Відомі тотожності

Означення	Приклади
$a+b=b+a$; $ab=ba$ переставна властивість.	$17+13=13+17$; $5\cdot3=3\cdot5$.
$(a+b)+c=a+(b+c)$; $(ab)c=a(bc)$ сполучна властивість.	$(17+13)+33=17+(13+33)$; $(2\cdot8)\cdot4=2\cdot(8\cdot4)$.
$a(b+c)=ab+ac$ розподільна властивість.	$7\cdot(11+13)=7\cdot11+7\cdot13$.

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

1. Розв'язати рівняння.		$3x-2(8-5x)=12x$.
Розв'язання. Розкриємо дужки. Перенесемо доданки і змінимо їх знаки на протилежні, зведемо подібні доданки.		$3x-16+10x=12x$; $3x+10x-12x=16$; $x=16$.
Відповідь: 16.		
2. Розв'язати рівняння.		$\frac{2x-3}{4}+\frac{x+2}{2}=\frac{3x+3}{4}$.
Розв'язання. Домножимо ліву і праву частини на 4 – спільний знаменник: Виконаємо вже відомі перетворення, а саме поділимо чисельники на знаменники:		$\frac{4\cdot(2x-3)}{4}+\frac{4\cdot(x+2)}{2}=\frac{4\cdot(3x+3)}{4}$; $2x-3+2(x+2)=3x+3$; $2x-3+2x+4=3x+3$; $2x+2x-3x=3-4+3$; $x=2$.
Відповідь: 2.		
3. Розв'язати рівняння.	1. $\frac{4x-1}{2}-\frac{6x+2}{3}=-\frac{1}{6}$.	2. $3x+2+4(2x-1)=11x-2$.
Розв'язання.	$3(4x-1)-2(6x+2)=-1$; $12x-3-12x-4=-1$; $-7=-1$, що неможливо	$3x+2+8x-4=11x-2$; $11x-2=11x-2$; $0\cdot x=0$.
	Відповідь: немає розв'язків.	Відповідь: будь-яке число.
4. Розв'язати задачу.	Автомобіль проїхав за три дні 2299 км, причому за другий день він проїхав на 48 км більше, ніж за перший, а за третій – на 31 км більше, ніж за другий день. Скільки кілометрів проїжджав автомобіль кожного дня?	
Розв'язання. **І спосіб.**	Нехай за перший день автомобіль проїхав x км, тоді за другий – $(x+48)$ км, а за третій день $(x+48+31)=(x+79)$ км. Разом за три дні за умовою – 2299 км.	
Складемо рівняння і розв'яжемо його:	$x+x+48+x+79=2299$; $3x+127=2299$; $3x=2172$; $x=724$. За перший день автомобіль проїхав 724 км, за другий день $-724+48=772$ (км), за третій день $-772+31=803$ (км).	
Відповідь: 724 км, 772 км, 803 км.		

Спосіб оформлення задачі таблицею		
Розв'язання. **II спосіб.**	І день – ? x км ІІ день – ? $(x+48)$ км ІІІ день – ? $(x+48+31)$ км	2299 км.
	$x+x+48+x+48+31=2299$, $3x=2172$; $x=724$.	І день – 724 км; ІІ день – $724+48=772$ (км); ІІІ день – $772+31=803$ (км).

Відповідь: 724 км, 772 км, 803 км.

5. Розв'язати задачу.	За два дні турист пройшов $27{,}2$ км, причому за другий день він пройшов 70% того, що було пройдено за перший день. Скільки кілометрів пройшов турист у перший день?
Розв'язання. **І спосіб.** Складемо рівняння і розв'яжемо його:	Нехай у перший день пройдено x км, тоді у другий 70% від x, тобто $0{,}7x$ (км), а за два дні $27{,}2$ км. $x+0{,}7x=27{,}2$; $1{,}7x=27{,}2$; $x=16$. У перший день турист пройшов 16 км.
Відповідь: 16 км.	
Розв'язання. **II спосіб.** Складемо рівняння і розв'яжемо його:	І день – ? ІІ день – ? 70% } $27{,}2$ км. $70\%=0{,}7$
	І день – x км ІІ день – $0{,}7x$ км } $27{,}2$ км. $x+0{,}7x=27{,}2$; $x=16$.
Відповідь: 16 км.	

§ 2. Цілі вирази

Степінь з натуральним показником. Одночлени

Означення	Приклади
$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots a}_{\text{n разів}}$ $n\in N$, $n\geq 2$ $a^1=a$.	$3^3=3\cdot3\cdot3=27$; $(-5)^2=(-5)\cdot(-5)=25$; $7^1=7$; $0^n=0$; $1^n=1$; $n\in N$; 0^0 – не визначено.

Властивості степенів

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$	$2^5\cdot2^3=2^{5+3}=2^8$	$a^{m+n}=a^m\cdot a^n$
$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}, (a\neq0)$	$\frac{2^5}{2^3}=2^{5-3}=2^2=4$	$a^{m-n}=\frac{a^m}{a^n}(a\neq0)$
$(a^m)^n=a^{mn}$	$(2^5)^3=2^{15}$	$a^{mn}=(a^m)^n=(a^n)^m$;
$(ab)^n=a^n\cdot b^n$	$(2\cdot3)^4=2^4\cdot3^4=16\cdot81=1296$	$a^n\cdot b^n=(ab)^n$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}, (b\neq0)$	$\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{2^5}{3^5}$	$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n(b\neq0)$

Корисні зауваження	
Будь-який степінь числа $a>0$ є число додатне.	$5^{11}>0$; $(1,2)^7>0$.
При піднесенні від'ємного числа до парного степеня в результаті отримуємо додатне, до непарного степеня – від'ємне.	$(-3)^4=(-3)(-3)(-3)(-3)=3^4=81$; $(-3)^4>0$ $(-3)^3=(-3)(-3)(-3)=-27$; $(-3)^3<0$.
Степені з від'ємними показниками визначені тільки для $a>0$.	$0^{-3}=\frac{1}{0^3}$ — не визначено. $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}>0$.

Зручні способи обчислювань зі степенями	
а) $33^2=(11\cdot 3)^2=11^2\cdot 3^2=121\cdot 9=1089$;	в) $\frac{7,5^3}{2,5^3}=\left(\frac{7,5}{2,5}\right)^3=3^3=9$;
б) $4^{2,5}=4^2\cdot 4^{\frac{1}{2}}=16\cdot\sqrt{4}=16\cdot 2=32$;	г) $4^3\cdot\left(1\frac{3}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^3=\left(4\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{2}{7}\right)^3=2^3=8$.

Одночлени та дії над ними

Означення	Приклади
Одночленом називається добуток чисел, змінних та їх натуральних степенів, а також самі числа, змінні та їх степені. Число 0 називається нульовим одночленом.	$0; 3a^2xy^3; \frac{12}{13}ab^3; m; x^6$ — одночлени.
Степенем одночлена називається сума показників змінних, які входять до одночлена. Якщо одночленом є число, що не дорівнює нулю, то його степінь вважається рівною нулю. Число 0 степеня не має.	$3a^5b^2c^3$ — одночлен десятого степеня (5 + 2 + 3 = 10); $5ax^3$ — одночлен четвертого степеня (1 + 3) = 4; 7 — одночлен нульового степеня $(7x^0)$.
Якщо в запис одночлена входить змінна x в степені $k(x^k)$, то кажуть, що цей одночлен має по x (або відносно x) степінь k.	$5ax^3$ — одночлен третього степеня відносно змінної x.
Одночлен записаний в **стандартному виді**, якщо його перший множник є числом, коефіцієнтом одночлена, а далі стоять змінні в деяких степенях, які розташовані за алфавітом (латинським або грецьким).	$4a^2b^3y^3$; $6a^5b^2c^6; -3xy^3z^4; 4\alpha^2b^3j^3$ — одночлени у стандартному виді.
Одночлени називаються подібними, якщо вони рівні між собою або відрізняються лише своїми коефіцієнтами.	$4a^5b^2; -1; 3a^5b^2; \frac{2}{3}a^5b^2$ – подібні одночлени.
Дії над одночленами	
Додавання і віднімання	$3a^3+ab+b^2+5a^3-3ab=8a^3-2ab+b^2$.
Множення	$(4a^3b^2c)\cdot(-2a^4bd)=-8a^7b^3cd$.
Піднесення до степеня	$(2x^2y)^3=2^3\cdot(x^2)^3y^3=8x^6y^3$.
Ділення	$\frac{(18a^6b^4c)}{(3a^3b^2c)}=\frac{18a^6b^4c}{3a^3b^2c}=6a^3b^2$.

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

1. Обчислити.	$\left(-\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^5$.
Розв'язання.	$-\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^5\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^5=-\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\right)^5=-1^3\cdot1^5=-1$.
Відповідь: -1.	
2. Обчислити.	$\frac{(-2)^5\cdot7^7}{14^6}\cdot\frac{26^5\cdot2^{10}}{13^4\cdot8^4}$.
Розв'язання.	$\frac{(-2)^5\cdot7^7\cdot(2\cdot13)^5\cdot2^{10}}{(2\cdot7)^6\cdot13^4\cdot(2^3)^4}=\frac{(-2)^5\cdot7^7\cdot2^5\cdot2^{10}\cdot13^5}{2^6\cdot7^6\cdot13^4\cdot2^{12}}=\frac{-2^{5+5+10}\cdot7^7\cdot13^5}{2^{6+12}\cdot7^6\cdot13^4}=\frac{-2^{20}\cdot7^7\cdot13^5}{2^{18}\cdot7^6\cdot13^4}=$ $=\frac{-2^2\cdot7\cdot13}{1\cdot1\cdot1}=-4\cdot7\cdot13=-364.$
Відповідь: -364.	
3. Спростити вираз.	$(4a^2b)^5(16ab^3)^4(-2^4a^3b^7)^3$.
Розв'язання.	$(4a^2b)^5(16ab^3)^4(-2^4a^3b^7)^3=$ $=4^5(a^2)^5b^5 16^4a^4(b^3)^4(-2^4)^3(a^3)^3(b^7)^3=$ $=(2^2)^5a^{10}b^5(2^4)^4a^4b^{12}(-1)^3(2^4)^3a^9b^{21}=-2^{38}a^{23}b^{38}$.
Відповідь: $-2^{38}a^{23}b^{38}$.	
4. Вписати пропущені одночлени так, щоб отримати тотожність.	$(?)^6\cdot(?)^6=-64x^{15}$.
Розв'язання.	$-64x^{15}=-2^6x^{12}x^3=2^6(x^2)^6(-x)^3=(2x^2)^6(-x)^3$.
Відповідь: $-64x^{15}=(2x^2)^6\cdot(-x)^3$ – тотожність.	
5. Подати, якщо можливо, у вигляді квадрата одночлена.	$5\frac{1}{16}c^{40}n^{42}$.
Розв'язання.	$\frac{81}{16}\left(c^{20}\right)^2\left(n^{21}\right)^2=\left(\frac{9}{4}\right)^2\left(c^{20}\right)^2\left(n^{21}\right)^2=\left(\frac{9}{4}c^{20}n^{21}\right)^2=\left(2\frac{1}{4}c^{20}n^{21}\right)^2$.
Відповідь: $\left(2\frac{1}{4}c^{20}n^{21}\right)^2$.	
6. Подати, якщо можливо, у вигляді квадрата одночлена.	$-9a^6b^{14}$.
Розв'язання.	$-3^2\left(a^3\right)^2\left(b^7\right)^2=-\left(3a^3b^7\right)^2$ – цей вираз є протилежним квадрату одночлена.
Відповідь: подати у вигляді квадрата одночлена неможливо.	

§ 3. Многочлени. Дії з многочленами

Види многочленів

Означення	Приклади
Многочленом називається алгебраїчна сума декількох одночленів.	$5xy^2-3yp^3+4xy$.
Многочлен, який складається з двох членів, називається **двочленом**.	x^2+a; $ax+3{,}5c^4$.
Многочлен, який складається з трьох членів, називається **тричленом**.	$x+5xy^3+6$.
Одночлен вважається окремим випадком многочлена.	$15d^2m^7n+0$.
Якщо всі члени многочлена записані у стандартному виді і виконане зведення подібних доданків, то отриманий многочлен **стандартного виду**.	$3a\cdot 5b+3ab-b=15ab+3ab-b=18ab-b$.

Дії з многочленами

Додавання і віднімання многочленів	
При додаванні і відніманні многочленів користуються правилом відкриття дужок.	$(2ab-5c)+(3a^2b+3c)=2ab-5c+3a^2b+3c=$ $=3a^2b+2ab-2c$; $(2ab-5c)-(3a^2b+3c)=2ab-5c-3a^2b-3c=$ $=-3a^2b+2ab-8c$.
Множення і ділення многочленів	
Щоб помножити одночлен на многочлен, кожний член многочлена помножують на одночлен і результати додають.	$6x(x^3-2)=6x\cdot x^3-6x\cdot 2=6x^4-12x$.
Щоб помножити многочлен на многочлен, помножують кожний член першого многочлена на кожний член другого многочлена і отримані результати додають.	$(2a-b)\cdot(3a-4b)=6a^2-8ab-3ab+4b^2=$ $=6a^2-11ab+4b^2$.
Щоб поділити многочлен на одночлен, потрібно розділити на цей одночлен кожний член многочлена і отримані частки додати.	$\frac{12a+b}{3}=\frac{12a}{3}+\frac{b}{3}=4a+\frac{b}{3}$.

§ 4. Формули скороченого множення

1	**Квадрат суми** $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
2	**Квадрат різниці** $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
3	**Різниця квадратів** $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
4	**Куб суми** $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
5	**Куб різниці** $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
6	**Сума кубів** $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
7	**Різниця кубів** $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

§ 5. Розкладання многочлена на множники

Розкладання многочлена на множники — це перетворення алгебраїчної суми одночленів у добуток. Існує три основні способи.

Винесення спільного множника за дужки:	
а) знайти спільний множник; б) поділити на нього кожний член многочлена і отриману суму взяти в дужки; в) записати добуток спільного множника на отриману суму.	$18a^5b^2-14a^4b^3=2a^4b^2(9a-7b)$.
Якщо при винесенні за дужки спільний множник виноситься зі знаком «мінус», то знаки доданків у дужках змінюються на протилежні.	$-ay+by+cy=-y(a-b-c)$.
Спосіб групування:	
а) об'єднати члени многочлена в такі групи, які мають спільний множник; б) винести цей спільний множник за дужки.	$2a+bc+2b+ac=(2a+2b)+(bc+ac)=$ $=2(a+b)+c(b+a)=(a+b)(2+c)$.
Використання формул скороченого множення	
Для того, щоб розкласти многочлен на множники, використовують відомі формули.	$25x^2-4y^2=(5x-2y)(5x+2y)$. $x^2+16xy+64y^2=(x+8y)(x+8y)=(x+8y)^2$.

винесене групування

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

Розкласти многочлен на множники

1) $9a^2y+18aby+9b^2y$.	
Розв'язання. 1. Виділимо спільний множник $9y$ і винесемо його за дужки. 2. Застосуємо формулу квадрата суми чисел a і b.	$9a^2y+18aby+9b^2y=9y\left(a^2+2ab+b^2\right)=$ $=9y(a+b)^2$.
Відповідь: $9y(a+b)^2$.	

2) $a^2(x-y)+(y-x)$.	
Розв'язання. 1. Виділимо спільний множник. Для цього змінимо знак виразу $(y-x)$. 2. Винесемо $(x-y)$ за дужки. 3. Застосуємо формулу різниці квадратів для $\left(a^2-1\right)$.	$a^2(x-y)+(y-x)=a^2(x-y)-(x-y)=$ $=(x-y)\left(a^2-1\right)=(x-y)(a+1)(a-1)$.
Відповідь: $(x-y)(a+1)(a-1)$.	

3) $-36x^4+4x^3-\frac{1}{9}x^2$.	
Розв'язання. 1. Винесемо $-x^2$ за дужки. 2. Застосуємо формулу квадрата різниці.	$-36x^4+4x^3-\frac{1}{9}x^2=-x^2\left(36x^2-4x+\frac{1}{9}\right)=-x^2\left(6x-\frac{1}{3}\right)^2$.
Відповідь: $-x^2\left(6x-\frac{1}{3}\right)^2$.	

4) $4(a+b)^2-9(a-b)^2$.	
Розв'язання. 1. Застосуємо формулу різниці квадратів. 2. Спростимо вираз в дужках.	$4(a+b)^2-9(a-b)^2=(2(a+b))^2-(3(a-b))^2=$ $=(2(a+b)-3(a-b))(2(a+b)+3(a-b))=$ $=(2a+2b-3a+3b)(2a+2b+3a-3b)=(5b-a)(5a-b)$.
Відповідь: $(5b-a)(5a-b)$.	

5) $4m^2-20mn+25n^2-36$.	
Розв'язання. 1. Застосуємо формулу квадрата різниці. 2. Застосуємо формулу різниці квадратів.	$4m^2-20mn+25n^2-36=$ $=\left(4m^2-20mn+25n^2\right)-36=(2m-5n)^2-36=$ $=(2m-5n)^2-6^2=(2m-5n-6)(2m-5n+6)$.
Відповідь: $(2m-5n-6)(2m-5n+6)$.	

6) $(3a+5)^3-8$.	
Розв'язання. 1. Застосуємо формулу різниці кубів. 2. Спростимо вираз в дужках.	$(3a+5)^3-8=(3a+5)^3-2^3=$ $=(3a+5-2)\left((3a+5)^2+2(3a+5)+2^2\right)=$ $=(3a+3)\left(9a^2+30a+25+6a+10+4\right)=$ $=3(a+1)\left(9a^2+36a+39\right)$.
Відповідь: $3(a+1)\left(9a^2+36a+39\right)$.	

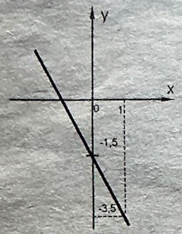
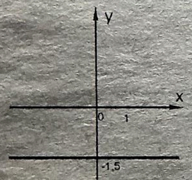
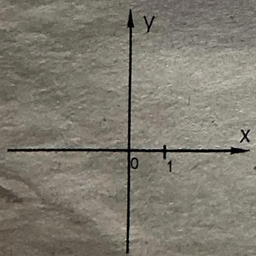
АЛГЕБРА

§ 6. Розв'язування лінійних рівнянь з двома змінними

Означення	Приклади
Лінійним рівнянням з двома змінними x і y називається рівняння виду: $ax+by+c=0$, де x і y – змінні, a,b,c — деякі числа.	$3x+4y+5=0$ — лінійне рівняння.
Розв'язком рівняння з двома змінними називається будь-яка пара чисел $(x;y)$, яка перетворює рівняння на тотожність. Розв'язати рівняння з двома змінними – означає знайти всі пари чисел $(x;y)$, які є його розв'язком.	$x+2y=5$ — лінійне рівняння. Пара $(1;2)$ — розв'язок рівняння, тобто при $x=1; y=2$, отримуємо $1+2\cdot2=5;\quad 5=5$ — правильну рівність, пара $(2;1)$ — не є розв'язком, оскільки при $x=2; y=1$ отримуємо $2+2\cdot1=5$. $4=5$ не є тотожністю, тобто пара $(2;1)$ не є розв'язком рівняння $x+2y=5$.
Множина точок, координати яких задовольняють рівняння $ax+by+c=0$, називається його **графіком**. Графіком рівняння $ax+by+c=0$, де a,b,c — деякі числа, є пряма.	1) Якщо коефіцієнт b при y не дорівнює нулю, то y можна виразити через x: $ax+by+c=0$, $by=-ax+c$, $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ — це лінійне рівняння. 2) Якщо $b=0$, то $ax+by+c=0$ набуває вигляду: $ax+0y+c=0$, $ax+c=0$, при $a\neq0, x=-\frac{c}{a}$ і графіком рівняння буде пряма, паралельна осі ординат, що перетинає вісь абсцис у точці $x=-\frac{c}{a}$. 3) При $a=0$ маємо: $0x+by+c=0, by+c=0$, $y=-\frac{c}{b}$ — це пряма, паралельна осі абсцис, що перетинає вісь ординат в точці $y=-\frac{c}{b}$. 4) Якщо $a=0$ і $b=0$, то рівняння набуває вигляду $0x+0y+c=0$, тоді при $c=0$ рівність правильна при всіх x і y, при $c\neq0$ — неправильна при будь-яких x та y, тобто при $a=b=c=0$ в цьому випадку графіком лінійного рівняння $ax+by+c=0$ є вся координатна площина.

одне підбираєм друге шукаєм.
х і у має бути в різних доданках

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

1. Побудувати графік рівняння.	$4x+2y+3=0$.
Розв'язання. 	Оскільки $a \neq 0; b \neq 0, c \neq 0$, то графіком рівняння є пряма, яку можна побудувати за допомогою двох точок: $x=0$, $x=1$, $y=-1,5$; та $y=-3,5$.
2. Побудувати графік рівняння.	$0x+2y+3=0$.
Розв'язання. 	Оскільки $a=0$, то $2y=-3$, $y=-\frac{3}{2}$ — це пряма, паралельна осі абсцис, що проходить через точку з координатами $\left(0;-\frac{3}{2}\right)$.
3. Побудувати графік рівняння.	$x+0y+0=0$.
Розв'язання. 	Оскільки $b=0$ і $c=0$, то $x=0$ — це пряма, перпендикулярна осі абсцис, і є віссю ординат.

ГРАФІК

§ 7. Системи лінійних рівнянь з двома змінними

<table>
<tr><th>Означення</th><th>Приклади</th></tr>
<tr><td>

Системою рівнянь називаються два або декілька рівнянь, у яких потрібно знайти всі спільні розв'язки.

Рівняння системи записуються стовпчиком і об'єднуються фігурною дужкою.

Система рівнянь називається **лінійною**, якщо всі рівняння, що входять до системи, є лінійними.

Систему двох лінійних рівнянь з двома змінними записують у такому вигляді:

$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

</td><td>

$\begin{cases} 2x - 3y = 9, \\ 3x + 2y = 7. \end{cases}$

Розв'язками такої системи рівнянь є множина упорядкованих пар чисел $(x; y)$.

Пара чисел $(3;-1)$ є розв'язком системи

$\begin{cases} 2x - 3y = 9, \\ 3x + 2y = 7. \end{cases}$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Розв'язати систему рівнянь — означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Якщо система має скінченне число розв'язків, то вона називається **визначеною**.

Якщо система має нескінченну множину розв'язків, то система називається **невизначеною**.

Дві системи називаються **рівносильними**, якщо вони мають однакову множину розв'язків .

</td></tr>
<tr><td>

Якщо система із n лінійних рівнянь містить n невідомих, то можливі такі три випадки:

– система не має розв'язків;
– система має тільки один розв'язок;
– система має нескінченно багато розв'язків.

Система $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$

Не має розв'язків, якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.

Має єдиний розв'язок, якщо $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

Має нескінченне число розв'язків, якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

</td><td>

1) $\begin{cases} 3x - 4y = 15, \\ 6x - 8y = 11. \end{cases}$

$\frac{3}{6} = \frac{-4}{-8} \neq \frac{15}{11}$ — розв'язків немає;

2) $\begin{cases} 3x - 4y = 13, \\ x + y = 9. \end{cases}$

$\frac{3}{1} \neq -\frac{4}{1}$, єдиний розв'язок $(7;2)$;

3) $\begin{cases} 3x - 4y = 15, \\ 6x - 8y = 30. \end{cases}$

$\frac{3}{6} = \frac{-4}{-8} = \frac{15}{30}$, нескінченно багато розв'язків.

</td></tr>
</table>

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

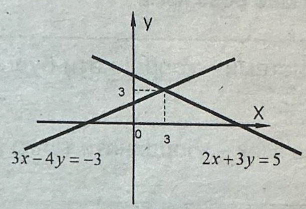
Типи систем	Приклади	
1) $\begin{cases}\text{Жодної точки,}\\ \text{жодної точки.}\end{cases}$	$\begin{cases}0x+0y=1,\\ 0x+0y=2.\end{cases}$	Система не має розв'язків.
2) $\begin{cases}\text{Вся площина,}\\ \text{жодної точки.}\end{cases}$	$\begin{cases}0x+0y=0,\\ 0x+0y=-1.\end{cases}$	Система не має розв'язків.
3) $\begin{cases}\text{Вся площина,}\\ \text{вся площина.}\end{cases}$	$\begin{cases}0x+0y=0,\\ 0x+0y=0.\end{cases}$	Будь-яка пара чисел – розв'язок системи
4) $\begin{cases}\text{Жодної точки,}\\ \text{пряма.}\end{cases}$	$\begin{cases}0x+0y=6,\\ 2x+3y=5.\end{cases}$	Система не має розв'язків.
5) $\begin{cases}\text{Вся площина,}\\ \text{пряма.}\end{cases}$	$\begin{cases}0x+0y=0,\\ 2x+7y=5.\end{cases}$	Розв'язок системи – координати будь-якої точки прямої.
6) $\begin{cases}\text{Дві прямі, що}\\ \text{перетинаються.}\end{cases}$	$\begin{cases}x+y=0,\\ x+3y=4.\end{cases}$	Єдиний розв'язок – координати точки перетину прямої.
7) $\begin{cases}\text{Дві паралельні}\\ \text{прямі.}\end{cases}$	$\begin{cases}x+y=0,\\ x+y=1.\end{cases}$	Система не має розв'язків.
8) $\begin{cases}\text{Дві прямі, які}\\ \text{співпадають.}\end{cases}$	$\begin{cases}x+y=0,\\ 2x+2y=0.\end{cases}$	Координати будь-якої точки прямої є розв'язком системи.

Способи розв'язання систем	
Спосіб підстановки	
Розв'язати систему рівнянь:	$\begin{cases}x+3y=15,\\ 3x-4y=6.\end{cases}$
Розв'язання. Виразимо з першого рівняння змінну $x=15-3y$ і підставимо в друге рівняння, а друге рівняння системи залишимо без змін, отримаємо систему, рівносильну даній.	$\begin{cases}x=15-3y,\\ 3(15-3y)-4y=6.\end{cases}$
Розв'яжемо друге рівняння системи:	$45-9y-4y=6;$ $-13y=6-45;$ $-13y=-39;$ $y=3.$
Підставимо отримане значення змінної y в перше рівняння системи:	$\begin{cases}x=15-3\cdot 3,\\ y=3.\end{cases}$ $\begin{cases}x=6,\\ y=3.\end{cases}$
Відповідь: $(6;3)$.	

Графічний спосіб

Для розв'язання системи графічним способом будують графіки всіх рівнянь, які входять в систему. Координати точок перетину є розв'язком цієї системи.

Графічний спосіб є зручним для знайдення числа розв'язків системи (тобто скільки точок перетину графіків, стільки й розв'язків має система), але незручний при обчисленні координат точок (тобто значення координат можна отримати лише наближені).



Розв'язати систему рівнянь.

$$\begin{cases} 2x+3y=15, \\ 3x-4y=-3. \end{cases}$$

Побудуємо графіки обох рівнянь:

1) $2x+3y=15$

$3y=15-2x;\quad y=5-\frac{2}{3}x$ — це пряма, яка проходить через точки з координатами $(0;5)$; $(3;3)$;

2) $3x-4y=-3$

$4y=3x+3,\quad y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}$, це пряма, яка проходить через точки з координатами $(-1;0)$; $(3;3)$;

3) графіки цих функцій перетинаються в точці з координатами $(3;3)$.

Відповідь: $(3;3)$.

Спосіб додавання

Способом додавання зручно розв'язувати системи, у яких коефіцієнти при одній із змінних – протилежні числа.

Розв'язати систему рівнянь.

$$\begin{cases} 2x+2y=15, \\ x-2y=-3. \end{cases}$$

Розв'язання.

Коефіцієнти при змінній y – протилежні числа, тому додамо почленно обидва рівняння системи:

$2x+2y+x-2y=15-3$, спростимо це рівняння: $3x=12$, отримаємо $x=4$.

Повернемось в систему $\begin{cases} x=4, \\ x-2y=-3. \end{cases}$ Підставимо значення $x=4$ у друге рівняння системи і розв'яжемо його.

$$\begin{cases} x=4, \\ 4-2y=-3; \end{cases}\quad \begin{cases} x=4, \\ 2y=7; \end{cases}\quad \begin{cases} x=4, \\ y=3,5. \end{cases}$$

Відповідь: $(4;3,5)$.

.

.

.

8 клас.

1. Раціональні вирази
2. Квадратні корені. Дійсні числа
3. Квадратні рівняння
4. Функції

.
.
.

1

§ 1. Раціональні вирази

Дробові раціональні вирази

Розрізняють цілі і дробові раціональні вирази. В **цілому** виразі немає ділення на змінну. В **дробовому** виразі є ділення на вираз, в який входить змінна.	
Правило	**Приклади**
Значення змінних, при яких можливі всі математичні дії, записані в раціональному виразі, називаються **допустимими значеннями змінних**.	$\frac{4}{x-8}$ — у цього раціонального дробу при $x=8$ в знаменнику отримуємо $x-8=8-8=0$, тому допустимими значеннями даного дробу є всі числа, крім $x=8$.
Щоб знайти допустимі значення раціонального дробу, треба прирівняти знаменник до нуля, знайти розв'язки отриманого рівняння, і з усіх чисел виключити розв'язки отриманого рівняння.	Знайти допустимі значення виразу: $\frac{x}{3x-x^2}$; Прирівняємо знаменник до нуля і розв'яжемо це рівняння: $3x-x^2=0$, винесемо x за дужки $x(3-x)=0$, добуток дорівнює нулю, якщо хоча б один із множників дорівнює нулю, тобто $x=0$, або $3-x=0$. Допустимими значеннями змінної є всі числа, крім $x=0$ або $x=3$. Відповідь: x — будь-яке число, крім 0 та 3.

Дії з раціональними дробами

Правило	**Приклади**
Скорочення дробів	
Скоротити дріб — це означає поділити чисельник і знаменник дробу на спільний множник. Ця дія обумовлена основною властивістю дробу. Для того, щоб скоротити дріб, треба: а) розкласти чисельник і знаменник дробу на множники; б) виділити спільний множник в чисельнику і знаменнику дробу; в) розділити чисельник і знаменник дробу на спільний множник.	Скоротити дріб: $\frac{3x-18x^2}{15x^2-90x^3}$, а) розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники, для цього винесемо за дужки спільний множник: $\frac{3x(1-6x)}{15x^2(1-6x)}$; б) виберемо спільний множник в чисельнику і знаменнику – це $3x(1-6x)$; в) скоротимо дріб на $3x(1-6x)$. Відповідь: $\frac{1}{5x}$.
Додавання і віднімання дробів	
Сума (різниця) двох дробів з однаковими знаменниками дорівнює дробу з тим самим знаменником і чисельником, який дорівнює сумі (різниці) чисельників вихідних дробів.	$\frac{3a-4}{a-1}+\frac{7-4a}{a-1}=\frac{3a-4+7-4a}{a-1}=\frac{3-a}{a-1}$; $\frac{3a-4}{a-1}-\frac{7-4a}{a-1}=\frac{3a-4-(7-4a)}{a-1}=$ $=\frac{3a-4-7+4a}{a-1}=\frac{7a-11}{a-1}$.

2

При додаванні (відніманні) двох раціональних дробів з різними знаменниками треба звести дроби до спільного знаменника та виконати додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками.	$\frac{5}{x-1}+\frac{4}{x+1}=\frac{5(x+1)}{x-1}+\frac{4(x-1)}{x+1}=\frac{5x+5+4x-4}{(x-1)(x+1)}=\frac{9x+1}{x^2-1}$; $\frac{1}{c}-\frac{3a}{c^2+3ac}=\frac{1(c+3a)}{c}-\frac{3a}{c(c+3a)}=\frac{c+3a-3a}{c(c+3a)}=\frac{1}{c+3a}$.
Множення і ділення дробів	
Добуток двох раціональних дробів дорівнює дробу, чисельник якого дорівнює добутку чисельників, а знаменник дорівнює добутку знаменників дробів, що помножуються.	$\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{4x+1}{x-1}=\frac{(x-1)(4x+4)}{(x+1)(x-1)}=\frac{(x-1)4(x+1)}{(x+1)(x-1)}=4$.
Частка від ділення двох раціональних дробів дорівнює добутку дробу, діленого на дріб, обернений дільнику.	$\frac{x}{a^2-4}:\frac{3x^2}{5a-10}=\frac{x(5a-10)}{(a^2-4)3x^2}=$ $=\frac{5x(a-2)}{(a-2)(a+2)3x^2}=\frac{5}{3x(a+2)}$.
Зручніше перед множенням або діленням раціональних дробів розкласти, якщо це можливо, їх чисельники і знаменники на множники.	
Піднесення раціональних дробів до степеня	
Степінь раціонального дробу дорівнює дробу, у якого чисельник є степенем чисельника, а знаменник – степенем знаменника.	$\left(\frac{x^2-9}{xy+3y}\right)^3=\left(\frac{(x-3)(x+3)}{y(x+3)}\right)^3=\left(\frac{x-3}{y}\right)^3=\frac{(x-3)^3}{y^3}$; $\left(\frac{5ac^2}{3x^3}\right)^4=\frac{(5ac^2)^4}{(3x^3)^4}=\frac{5^4a^4c^8}{3^4x^{12}}=\frac{625a^4c^8}{81x^{12}}$.

Степінь з цілим показником

Множина цілих чисел (Z) – це множина, що складається з натуральних чисел, числа нуль і чисел протилежних натуральним.

Тому поняття степеня a^n, де $n-$ натуральне число, можна розширити, якщо розглянути випадки $n=0$ і n — ціле від'ємне число.

Означення	Приклади
Якщо $a\neq 0$ і $n-$ ціле від'ємне число, то $a^n=\frac{1}{a^{-n}}$	$5^{-3}=\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125}$; $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^3}=5^3=125$.
$a^0=1$.	$(1{,}25)^0=1$; $(-17)^0=1$.

Корисно запам'ятати

0^0 – не визначено.	$0^{-3}=\frac{1}{0^3}$ – не визначено
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$, $(a\neq 0;\ b\neq 0)$	$\left(\frac{2}{7}\right)^{-3}=\left(\frac{7}{2}\right)^3$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=\left(\frac{2}{1}\right)^3=2^3=8$

3

Властивості степеня з цілим показником

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$5^5 \cdot 5^{-7} = 5^{5-7} = 5^{-2}$	$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, (a \neq 0)$	$3^{-7} : 3^5 = 3^{-7-5} = 3^{-12}$	$a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n} (a \neq 0)$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(3^{-2})^3 = 3^{-6}$; $(3^2)^{-3} = 3^{-6}$	$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$;
$(ab)^n = a^n \cdot b^n$	$(2 \cdot 3)^{-3} = 2^{-3} \cdot 3^{-3}$	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}, (b \neq 0)$	$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{3^2}{2^2} = \dfrac{9}{4}$	$\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n (b \neq 0)$

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

1. Виконати дії. **Рекомендація**. Подібні завдання краще робити за діями — зменшується можливість помилки!	$\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{2}{x+y}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\right):\dfrac{(x+y)^2}{x^2y^2}$.
Розв'язання.	1) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{x+y}{xy}$,
	2) $\dfrac{2}{x+y}\cdot\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{2(x+y)}{(x+y)xy}=\dfrac{2}{xy}$,
	3) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{2}{xy}=\dfrac{y^2+x^2+2xy}{x^2y^2}=\dfrac{(x+y)^2}{x^2y^2}$,
	4) $\dfrac{(x+y)^2}{x^2y^2}:\dfrac{(x+y)^2}{x^2y^2}=1$.
Відповідь: 1.	
2. Довести тотожність.	$\dfrac{a-\dfrac{x^2}{a}}{x-\dfrac{a^2}{x}}=-\dfrac{x}{a}$.
Доведення. Спростимо ліву частину рівняння:	$\dfrac{a-\dfrac{x^2}{a}}{x-\dfrac{a^2}{x}}=\left(a-\dfrac{x^2}{a}\right):\left(x-\dfrac{a^2}{x}\right)$
чисельник:	1) $a-\dfrac{x^2}{a}=\dfrac{a^2-x^2}{a}$,
знаменник:	2) $x-\dfrac{a^2}{x}=\dfrac{x^2-a^2}{x}$,
	3) $\dfrac{a^2-x^2}{a}:\dfrac{x^2-a^2}{x}=\dfrac{a^2-x^2}{a}\cdot\dfrac{x}{x^2-a^2}=\dfrac{(a^2-x^2)x}{-a(a^2-x^2)}=-\dfrac{x}{a}$,

4

тотожність доведена:	4) $-\frac{-x}{a}=-\frac{x}{a}$.
3. Скоротити дріб.	$\frac{ax+ay-bx-by}{ax-ay-bx+bx}$.
Розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники способом групування:	$\frac{ax+ay-bx-by}{ax-ay-bx+by}=\frac{a(x+y)-b(x+y)}{a(x-y)-b(x-y)}=\frac{(x+y)(a-b)}{(x-y)(a-b)}=\frac{x+y}{x-y}$.
Відповідь: $\frac{x+y}{x-y}$.	
4. Скоротити дріб.	$\frac{a^2b+ab^2}{a^3+b^3+3ab(a+b)}$.
Для того, щоб розкласти на множники, в чисельнику винесемо спільний множник за дужки, а в знаменнику застосуємо формулу суми кубів і винесемо спільний множник за дужки, тоді отримаємо:	$\frac{a^2b+ab^2}{a^3+b^3+3ab(a+b)}=\frac{ab(a+b)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)+3ab(a+b)}=$ $=\frac{ab(a+b)}{(a+b)(a^2-ab+b^2+3ab)}=\frac{ab}{a^2+2ab+b^2}=\frac{ab}{(a+b)^2}$.
Відповідь: $\frac{ab}{(a+b)^2}$.	
5. Скоротити дріб.	$\frac{a^2+3a+2}{a^2+6a+5}$.
Для того, щоб розкласти чисельник і знаменник дробу на множники, застосуємо спосіб групування.	Для цього подамо a^2+3a+2 як $a^2+a+2a+2$, аналогічно подамо знаменник: $a^2+6a+5=a^2+a+5a+5$, отримаємо: $\frac{a^2+3a+2}{a^2+6a+5}=\frac{a^2+a+2a+2}{a^2+a+5a+5}=\frac{a(a+1)+2(a+1)}{a(a+1)+5(a+1)}=\frac{(a+1)(a+2)}{(a+1)(a+5)}=\frac{a+2}{a+5}$.
Відповідь: $\frac{a+2}{a+5}$.	
6. Спростити алгебраїчний вираз.	$\frac{a^6+64}{a^4-4a^2+16}-\frac{a^4-16}{a^2+4}$.
Застосуємо формулу різниці кубів і різниці квадратів в чисельниках дробів:	$\frac{a^6+64}{a^4-4a^2+16}-\frac{a^4-16}{a^2+4}=\frac{(a^2)^3+4^3}{a^4-4a^2+16}-\frac{(a^2)^2-4^2}{a^2+4}=$ $=\frac{(a^2+4)(a^4-4a^2+16)}{a^4-4a^2+16}-\frac{(a^2-4)(a^2+4)}{a^2+4}=$ $=a^2+4-(a^2-4)=a^2+4-a^2+4=8$.
Відповідь: 8.	

5

7. Спростити вираз.	$\frac{x^3+y^3}{x+y}:(x^2-y^2)+\frac{2y}{x+y}-\frac{xy}{x^2-y^2}$.
Іноколи для перетворення алгебраїчних виразів застосовують спосіб послідовних перетворень або одночасно декількох перетворень. Кажуть: «Спростимо "ланцюжком"». При користуванні цим методом, треба бути дуже уважним.	$\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x+y}\cdot\frac{1}{(x-y)(x+y)}+$ $+\frac{2y(x-y)-xy}{(x+y)(x-y)}=\frac{x^2-xy+y^2}{(x-y)(x+y)}+\frac{2xy-2y^2-xy}{(x-y)(x+y)}=$ $=\frac{x^2-xy+y^2+xy-2y^2}{(x-y)(x+y)}=\frac{x^2-y^2}{x^2-y^2}=1.$
Відповідь: 1.	
8. Виконати дії	$\frac{3^{-2}a^{-1}b}{27^{-1}x}$;
Використаємо означення степеня з від'ємним показником:	$\frac{3^{-2}a^{-1}b}{27^{-1}x}=\frac{27b}{3^2ax}=\frac{3^3b}{3^2ax}=\frac{3b}{ax}$.
Відповідь: $\frac{3b}{ax}$.	
9. Спростити вираз.	$\left(\frac{2}{3}a^{-2}(b^3)^{-3}\right)^4$.
	$\left(\frac{2}{3}a^{-2}(b^3)^{-3}\right)^4=\frac{2^4}{3^4}a^{-8}b^{-36}=\frac{2^4}{3^4a^8b^{36}}$.
Відповідь: $\frac{2^4}{3^4a^8b^{36}}$.	
10. Подати вираз у вигляді дробу.	$(5a^{-1}+b^{-2})\cdot(5a^{-1}-b^{-2})$.
Використаємо формулу різниці квадратів і означення степеня з від'ємним показником:	$(5a^{-1}+b^{-2})\cdot(5a^{-1}-b^{-2})=$ $=(5a^{-1})^2-(b^{-2})^2=\left(\frac{5}{a}\right)^2-\left(\frac{1}{b^2}\right)^2=$ $=\frac{25}{a^2}-\frac{1}{b^4}=\frac{25b^4-a^2}{a^2b^4}$.
Відповідь: $\frac{25b^4-a^2}{a^2b^4}$.	

6

§ 2. Квадратні корені. Дійсні числа

Квадратні корені та їх властивості

Означення	Приклади
Квадратним коренем з числа a називають число, квадрат якого дорівнює a.	$x^2 = 25$, $x_1 = 5; x_2 = -5$ — квадратні корені.
Арифметичним квадратним коренем з числа a називається **невід'ємне** число, квадрат якого дорівнює a. Арифметичний квадратний корінь з числа a позначається знаком $\sqrt{a}$; a називається **підкореневим виразом**. Дія, за допомогою якої знаходиться арифметичний квадратний корінь, називається **здобуттям квадратного кореня**. Рівність $\sqrt{a} = b$ є правильною, якщо 1) $b \ge 0$; 2) $b^2 = a$.	$\sqrt{25} = 5$; 5 — арифметичний квадратний корінь. $\sqrt{81} = 9$.
При $a < 0$ $\sqrt{a}$ не має змісту, бо квадрат будь-якого числа невід'ємний.	$\sqrt{-25}$ не має змісту.
При будь-якому a, якщо $\sqrt{a}$ має зміст, правильна рівність: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.	$\left(\sqrt{9}\right)^2 = 9$; $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$.

Властивості арифметичного квадратного кореня	
Якщо $a \ge 0$, $b \ge 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.	$\sqrt{4 \cdot 1} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{1} = 2 \cdot 1 = 2$; $\sqrt{16 \cdot x} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{x} = 4\sqrt{x}$.
Якщо $a \ge 0$, $b > 0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.	$\sqrt{\frac{36}{16}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{16}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.
Для будь-якого значення a правильна рівність: $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$.	$\sqrt{(-3)^2} = \lvert -3 \rvert = 3$; $\sqrt{4y^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{y^2} = 2\lvert y \rvert$.
Винесення множника з-під знака кореня.	$\sqrt{125} = \sqrt{3 \cdot 25} = 5\sqrt{3}$.
Внесення множника під знак кореня.	$10\sqrt{2} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{200}$.
Рівняння $x = a^2$	
Якщо $a < 0$, то рівняння розв'язків не має; Якщо $a = 0$, то рівняння має один розв'язок $x = 0$;	$x^2 = -25$, розв'язків немає; $x^2 = 0$, $x = 0$;
Якщо $a > 0$, то рівняння має два розв'язки: $x_1 = \sqrt{a}$; $x_2 = -\sqrt{a}$.	$x^2 = 144$; $x_1 = 12; x_2 = -12$; $x^2 = 7$; $x_1 = \sqrt{7}; x_2 = -\sqrt{7}$.

4

Дійсні числа

Числа, які можна записати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, n — натуральне, називаються **раціональними**. Це всі цілі і дробові числа (додатні і від'ємні). Наприклад, $\frac{7}{13}$; $-\frac{3}{10}$. Всі інші числа носять назву **ірраціональних** $\sqrt{5}, \sqrt{11}$. Раціональні та ірраціональні числа складають множину **дійсних** чисел.
N — множина натуральних чисел; ***Q*** — множина раціональних чисел; ***Z*** — множина цілих чисел; ***R*** — множина дійсних чисел.

Означення	Приклади
Квадратний корінь з раціонального числа може бути:	
а) цілим числом;	$\sqrt{64}=8; \sqrt{4}=2;$
б) десятковим дробом;	$\sqrt{0,36}=0,6; \sqrt{0,0025}=0,05;$
в) нескінченно неперіодичним десятковим дробом або нескінченно періодичним десятковим дробом.	$\sqrt{\frac{16}{49}}=\frac{4}{7}=0,57142857...$ $\sqrt{\frac{81}{121}}=\frac{9}{11}=0,818181...$
У всіх випадках, описаних вище, квадратний корінь є раціональним числом.	
г) нескінченно неперіодичним десятковим дробом (в цьому випадку квадратні корені є ірраціональними числами).	$\sqrt{2}=1,4142...$ $\sqrt{7}=2,645751...$

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

1. Знайти корені.	1) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}$.	2) $\sqrt{x^2-2x+1}$, $x>1$.
Розв'язання.	$\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}=\left\|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right\|=$ $=\sqrt{3}-\sqrt{2},$ оскільки $\sqrt{3}>\sqrt{2}$.	$\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=$ $=\|x-1\|=x-1,$ оскільки $(x-1)>0$, якщо $x>1$.
	Відповідь: $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.	Відповідь: $x-1$.

2. Спростити.	$\sqrt{(3-m)^2}$.
Розв'язання.	$\sqrt{(3-m)^2}=\|3-m\|=\begin{cases}3-m, \text{ якщо } 3-m>0, \ m<3\\ m-3, \text{ якщо } m-3>0, \ m>3\\ 0, \text{ якщо } \ m-3=0, \ m=3.\end{cases}$
Відповідь: $\begin{cases}3-m, \text{ якщо } m<3\\ m-3, \text{ якщо } m>3\\ 0, \text{ якщо } m=3.\end{cases}$	

3. Розкласти на множники.	1) t^2-36.	2) $9c^2-1$.	3) $x-16$.
Розв'язання.	$t^2-36=(t-6)(t+6)$.	$9c^2-1=(3c-1)(3c+1)$.	$x-16=\left(\sqrt{x}-4\right)\left(\sqrt{x}+4\right)$.
Відповідь:	$(t-6)(t+6)$.	$(3c-1)(3c+1)$.	$\left(\sqrt{x}-4\right)\left(\sqrt{x}+4\right)$.

8

4. Розкласти на множники.	1) y^2-5.	2) $\sqrt{21}-\sqrt{3}$.	3) $\sqrt{55}-\sqrt{5}$.
Розв'язання.	$y^2-5=\left(y-\sqrt{5}\right)\left(y+\sqrt{5}\right)$.	$\sqrt{21}-\sqrt{3}=\sqrt{3\cdot7}-\sqrt{3}=$ $=\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}-\sqrt{3}=$ $=\sqrt{3}\left(\sqrt{7}-1\right)$.	$\sqrt{55}-\sqrt{5}=\sqrt{11\cdot5}-\sqrt{5}=$ $=\sqrt{11}\cdot\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}(\sqrt{11}-1)$.
Відповідь:	$\left(y-\sqrt{5}\right)\left(y+\sqrt{5}\right)$.	$\sqrt{3}\left(\sqrt{7}-1\right)$.	$\sqrt{5}(\sqrt{11}-1)$.

5. Спростити вираз.	$\sqrt{(x-a)^2+4ax}$.
Розв'язання.	$\sqrt{(x-a)^2+4ax}=\sqrt{\left(x^2-2ax+a^2\right)+4ax}=\sqrt{x^2+2ax+a^2}=$ $=\sqrt{(x+a)^2}=\lvert x+a\rvert$.
Відповідь: $\lvert x+a\rvert$.	
6. Скоротити дріб.	$\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.
Розв'язання.	$\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}\right)^2-1}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$.
Відповідь: $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$.	
7. Порівняти.	$2\sqrt{5}\ ?\ 4\sqrt{2}$.
Розв'язання. Внесемо множник під знак кореня:	$2\sqrt{5}\ ?\ 4\sqrt{2}$; $\sqrt{4\cdot5}\ ?\ \sqrt{16\cdot2}$; $\sqrt{20}<\sqrt{32}$, отже $2\sqrt{5}<4\sqrt{2}$.
Відповідь: $2\sqrt{5}<4\sqrt{2}$.	

8. Розв'язати рівняння.	1) $x^2=36$.	2) $x^2=15$.
Розв'язання.	$x^2=36$; $x_1=6; x_2=-6$.	$x^2=15$; $x_1=\sqrt{15}; x_2=-\sqrt{15}$.
Відповідь:	$6;-6$.	$\sqrt{15};-\sqrt{15}$.

	3) $4x^2=36$.	4) $3x^2=36$.	5) $3\sqrt{x}=18$.
	$4x^2=36$; $x^2=9$ $x_1=3; x_2=-3$.	$3x^2=36$; $x^2=12$; $x=\sqrt{12}; x_2=-\sqrt{12}$; $x_1=\sqrt{4\cdot3}; x_2=-\sqrt{4\cdot3}$; $x_1=2\sqrt{3}; x_2=-2\sqrt{3}$.	$3\sqrt{x}=18$; $\sqrt{x}=6$; $\left(\sqrt{x}\right)^2=6^2$; $x=36$.
Відповідь:	$3;-3$.	$2\sqrt{3};-2\sqrt{3}$.	36.

§ 3. Квадратні рівняння. Розв'язування задач за допомогою квадратних рівнянь

Квадратні рівняння

Означення	Приклади
Рівняння виду $ax^2+bx+c=0$, де x – змінна; a, b, c — деякі числа, причому $a\neq 0$, називають **квадратним рівнянням**; a – перший коефіцієнт, b – другий, c – вільний член.	$2x^2+3x-1=0;$ $x^2-2x+4=0.$
Якщо в цьому рівнянні хоча б один з коефіцієнтів дорівнює нулю, то дане рівняння називають **неповним квадратним рівнянням**. Неповні квадратні рівняння бувають трьох видів: 1) $ax^2=0$; 2) $ax^2+bx=0$; 3) $ax^2+c=0$.	
1) $ax^2=0$ при $b=0$, $c=0$; $x^2=0;$ $x=0$ рівняння має тільки один розв'язок.	$5x^2=0;$ $x=0.$ Відповідь: 0.
2) При $c=0$, $ax^2+bx=0$; $x(ax+b)=0;$ $x_1=0$ або $(ax+b)=0;\ x_2=-\frac{b}{a}$ рівняння завжди має два розв'язки.	$4x^2+3x=0;$ $x(4x+3)=0;$ $x=0$ або $4x+3=0;$ $x=-\frac{3}{4}.$ Відповідь: $0, -\frac{3}{4}$.
3) При $b=0$, $ax^2+c=0$; $x^2=-\frac{c}{a},$ оскільки $c\neq 0$, то $-\frac{c}{a}\neq 0$, тоді: а) якщо $-\frac{c}{a}>0$, то рівняння має два розв'язки $x_1=-\sqrt{-\frac{c}{a}};\ x_2=\sqrt{-\frac{c}{a}};$ б) якщо $-\frac{c}{a}<0$, то рівняння не має розв'язків.	$9x^2-4=0;$ $x^2=\frac{4}{9};$ $x_1=\frac{2}{3};\ x_2=-\frac{2}{3}.$ Відповідь: $\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}$. $16x^2+9=0;$ $x^2=-\frac{9}{16}$ немає розв'язків. Відповідь: немає розв'язків.
Якщо $a=1$, то квадратне рівняння називають **зведеним**.	$x^2-x+30=0.$

10

Повні квадратні рівняння $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0,$ розв'язуємо за формулою: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, де $D=b^2-4ac$ називають **дискримінантом** даного квадратного рівняння.	
Якщо $D<0$, то рівняння не має дійсних розв'язків.	$2x^2+5x+6=0;$ $D=25-48=-23;$ $D<0$, отже, рівняння не має дійсних розв'язків.
Якщо $D=0$, то рівняння має два однакові розв'язки: $x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$.	$4x^2+4x+1=0;$ $D=16-16=0,\ D=0,$ отже, рівняння має два однакові розв'язки: $x_1=x_2=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}.$ Відповідь: $-0,5$.
Якщо $D>0$, то рівняння має два різні розв'язки: $x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a};x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$.	$2x^2+3x+1=0;$ $D=9-8=1;$ $x_1=\frac{-3+1}{4}=-\frac{1}{2};\ x_2\frac{-3-1}{4}=-1.$ Відповідь: $-0,5$; -1.
Для квадратного рівняння $ax^2+2kx+c=0$, другий коефіцієнт якого є парне число, формулу розв'язків зручно записати так: $x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}$, де $D_1=k^2-ac$.	$3x^2+8x-3=0;$ $D_1=16+9=25;$ $x_1=\frac{-4+5}{3}=\frac{1}{3};\ x_2=\frac{-4-5}{3}=-3.$ Відповідь: $\frac{1}{3},-3.$
Теорема Вієта. $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0,\ x_1\ x_2=\frac{c}{a},\ x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ у зведеному квадратному рівнянні $x^2+bx+c=0$ $x_1+x_2=-b;\ x_1\cdot x_2=c$	$x^2-5x+6=0;$ $x_1+x_2=5;$ $x_1\cdot x_2=6;$ $x_1=3;\ x_2=2.$ Відповідь: 2; 3.
Рівняння виду $ax^4+bx^2+c=0$, де $a\neq 0,\ b\neq 0$ називається **біквадратним** рівнянням.	$2x^4+3x^2+4=0$.
Формула розкладу квадратного тричлена на множники: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.	$2x^2-x-3=2(x-x_1)(x-x_2);$ $2x^2-x-3=0;$ $x_1=1,5;\ x_2=-1.$ $2x^2-x-3=2(x-1,5)(x+1).$

11

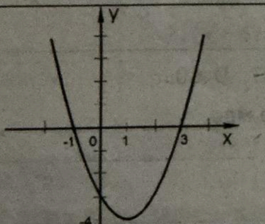
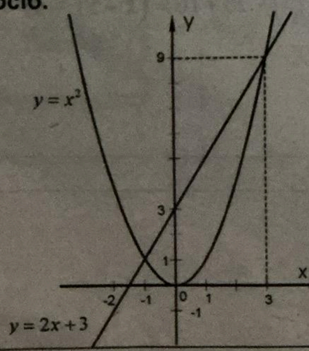
1. Знайти всі розв'язки рівняння.	1) $11x^2-99=0$.	2) $x^2-4x=0$.	3) $4x^2-3x-1=0$.
Розв'язання.	Перетворимо дане рівняння. Знайдемо невідомий множник. $11x^2=99$; $x^2=99:11$; $x^2=9$; $x_1=\sqrt{9}$; $x_2=-\sqrt{9}$; $x_1=3$; $x_2=-3$.	Винесемо спільний множник за дужки. $x(x-4)=0$ $x=0$; або $x-4=0$; $x=4$.	$D=(-3)^2-4\cdot4\cdot(-1)=9+16=25$, $D>0$, отже, рівняння має два різні розв'язки: $x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{25}}{8}$; $x_2=\frac{-(-3)-\sqrt{25}}{8}$; $x_1=\frac{3+5}{8}$; $x_2=\frac{3-5}{8}$; $x_1=1$; $x_2=-\frac{1}{4}$;
Відповідь:	-3; 3.	0, 4.	$-\frac{1}{4}$; 1.

2. Знайти всі розв'язки рівняння.	1) $x^2+7x+10=0$;	2) $\frac{1}{4}x^2-3x+9=0$.
Розв'язання. **І спосіб.**	$D=7^2-4\cdot1\cdot10=49-40=9$, $D>0$, отже, рівняння має два різні розв'язки: $x_1=\frac{-7+\sqrt{9}}{2}$; $x_2=\frac{-7-\sqrt{9}}{2}$; $x_1=\frac{-7+3}{2}$; $x_2=\frac{-7-3}{2}$; $x_1=-2$; $x_2=-5$	$D=(-3)^2-4\cdot\frac{1}{4}\cdot9=9-9=0$, $D=0$, отже, рівняння має два однакові розв'язки: $x_1=x_2=\frac{3}{\frac{1}{2}}=6$;
ІІ спосіб.	За теоремою Вієта: $\begin{cases}x_1+x_2=-7; & x_1=-2;\\ x_1\cdot x_2=10; & x_2=-5;\end{cases}$	За формулою скороченого множення маємо: $\frac{1}{4}x^2-3x+9=(\frac{1}{2}x-3)^2$, отже, маємо рівняння: $(\frac{1}{2}x-3)^2=0$; $\frac{1}{2}x-3=0$; $\frac{1}{2}x=3$; $x=3:\frac{1}{2}$; $x=6$.
Відповідь:	-2; -5.	6.

3. Розкласти квадратний тричлен на множники.	1) $y^2-3y+2=(y-y_1)(y-y_2)$.	2) $4x^2-19x+12=4(x-x_1)(x-x_2)$.
Розв'язання.	$y^2-3y+2=0$; За теоремою Вієта: $y_1=2$; $y_2=1$, отже $y^2-3y+2=(y-2)(y-1)$.	$4x^2-19x+12=0$; $D=(-19)^2-4\cdot4\cdot12=361-192=169$; $x_1=\frac{-(-19)+\sqrt{169}}{2\cdot4}$; $x_2=\frac{-(-19)-\sqrt{169}}{2\cdot4}$; $x_1=\frac{19+13}{8}$; $x_2=\frac{19-13}{8}$; $x_1=4$; $x_2=\frac{3}{4}$; $4x^2-19x+12=4(x-4)\left(x-\frac{3}{4}\right)=(x-4)(4x-3)$.
Відповідь:	$(y-2)(y-1)$.	$(x-4)(4x-3)$.

12

4. Скоротити дріб.	1) $\frac{x^2-7x-8}{x+1}$.	2) $\frac{2x^2+x-6}{2x^2-3x}$.
Розв'язання.	Розкладемо чисельник на множники: $x^2-7x-8=(x-x_1)(x-x_2)$; $x^2-7x-8=0$. За теоремою Вієта: $x_1=8;\ x_2=-1$; $x^2-7x-8=(x-8)(x+1)$, тоді: $\frac{x^2-7x-8}{x+1}=$ $=\frac{(x-8)(x+1)}{x+1}=x-8.$	Розкладемо чисельник на множники: $2x^2+x-6=2(x-x_1)(x-x_2)$; $2x^2+x-6=0$; $D=1-4\cdot2\cdot(-6)=1+48=49$; $x_1=\frac{-1+\sqrt{49}}{2\cdot2}$; $x_2=\frac{-1-\sqrt{49}}{2\cdot2}$; $x_1=\frac{-1+7}{4}$; $x_2=\frac{-1-7}{4}$; $x_1=\frac{3}{2}$; $x_2=-2$, тобто $2x^2+x-6=2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+2)=(2x-3)(x+2)$; тоді: $\frac{2x^2+x-6}{2x^2-3x}=\frac{(2x-3)(x+2)}{x(2x-3)}=\frac{x+2}{x}$.
Відповідь:	$x-8$.	$\frac{x+2}{x}$.

5. Розв'язати графічно квадратне рівняння (двома способами).	$x^2-2x-3=0$.
І спосіб. Побудуємо графік функції	Розв'язками цього рівняння будуть абсциси точок перетину графіка функції $y=x^2-2x-3$ з віссю $0x$. $y=x^2-2x-3$ – парабола. Область визначення функції: всі числа.
Знайдемо координати вершини параболи:	$x_0=-\frac{b}{2a}$; $x_0=-\frac{-2}{2}=1$;
	$y_0=1^2-2\cdot1-3=-4$; $(1;\ -4)$ – вершина параболи. $a=1>0$, вітки параболи направлені вгору. Абсциси точок, в яких парабола перетинає вісь $0x$, є розв'язками рівняння $x_1=-1;\ x_2=3$;
ІІ спосіб. 	Розв'язками цього рівняння будуть абсциси точок перетину графіків функцій: $y=x^2$ та $y=2x+3$. Побудуємо графіки функцій: $y=x^2$– парабола; $y=2x+3$– пряма. x: 0, -2 y: 3, -1 Графіки перетинаються в точках $(-1;\ 1)$ та $(3;9)$, а абсциси цих точок і будуть розв'язками рівняння. $x_1=-1$; $x_2=3$.
Відповідь: -1; 3.	

13

6. Розв'язати рівняння.	$(x^2+3)^2-14(x^2+3)+24=0$.
Розв'язання. Введемо нову змінну: тоді отримаємо рівняння: за теоремою Вієта маємо: спростимо:	$y=x^2+3$, $y^2-14y+24=0$; $y_1=12;\ y_2=2$, отримаємо: $x^2+3=12;\ x^2+3=2$, $x^2=9;\ \ x^2=-1$ — немає розв'язків. $x_1=\sqrt{9};\ x_2=-\sqrt{9}$; $x_1=3 \quad x_2=-3$.
Відповідь: $-3;\ 3$.	

7. Розв'язати рівняння.	$\dfrac{2}{1-x}+\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{2x}{1-x^2}$.	
Розв'язання. Запишемо у вигляді: зведемо до спільного знаменника спростимо:	$\dfrac{2}{1-x}+\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{2x}{1-x^2}=0$; $\dfrac{2(1+x)+x(1-x)-2x}{1-x^2}=0$; $\dfrac{2+2x+x-x^2-2x}{1-x^2}=0$; $\dfrac{-x^2+x+2}{1-x^2}=0$; $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}=0$;	дріб дорівнює нулю, коли чисельник — нуль, а знаменник відмінний від нуля. Маємо: $\begin{cases} x^2-x-2=0, \\ x^2-1\neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x\neq 1 \\ x\neq -1 \end{array}\right. \end{cases}$ $x=-1$ — сторонній розв'язок.
Відповідь: 2.		

8. Знайти всі розв'язки рівняння.	$2x^2+3x+12=0$.
Розв'язання.	$D=3^2-4\cdot 2\cdot 12=9-96=-87,\ D<0$, отже, рівняння розв'язків не має.
Відповідь: немає розв'язків.	

10. Розв'язати рівняння виділенням квадрата двочлена.	$x^2-10x+16=0$.
Розв'язання. Виділимо квадрат двочлена:	$x^2-10x+16=(x^2-2\cdot 5x+25)-25+16=(x-5)^2-9$; $(x-5)^2-9=0;\ \ (x-5)^2=9$; $x_1-5=3; \quad x_2-5=-3$; $x_1=8; \quad x_2=2$.
Відповідь: $8;\ 2$.	

14

9. Розв'язати задачу.	Із міста А до міста В вирушив пішохід. Відстань АВ дорівнює 10 км. Через 30 хв після нього з міста А до міста В вирушив велосипедист, швидкість якого на 6 км більше швидкості пішохода. Велосипедист, обігнавши пішохода і дійшовши до міста В, повернувся знову до міста А в той самий час, коли пішохід прийшов до міста В. Визначити швидкість пішохода.
Розв'язання.	Нехай пішохід рухався зі швидкістю x км/год, тоді відстань в 10 км він пройшов за $\frac{10}{x}$ год. Велосипедист їхав зі швидкістю $(x+6)$ км/год і проїхав відстань 20 км від А до В і назад за $\frac{20}{x+6}$ год. За умовою задачі, пішохід вийшов на 30 хв раніше, тобто він витратив на проходження шляху на $\frac{1}{2}$ год. більше, ніж велосипедист. Складемо рівняння $\frac{10}{x}-\frac{20}{x+6}=\frac{1}{2};$ $\frac{10}{x}-\frac{20}{x+6}-\frac{1}{2}=0;$ $\frac{10\cdot 2(x+6)-20\cdot 2x-x(x+6)}{2x(x+6)}=0;\ \frac{20x+120-40x-x^2-6x}{2x(x+6)}=0;$ $\frac{-x^2-26x+120}{2x(x+6)}=0;\ \frac{x^2+26x-120}{-2x(x+6)}=0;$ $\begin{cases} x^2+26x-120=0, \\ -2x(x+6)\neq 0; \end{cases}\quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=4; \\ x=-30, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x\neq 0; \\ x\neq -6 \end{array}\right. \end{cases}$ $x=-30$ не задовольняє умову задачі (швидкість не може бути від'ємною) отже, швидкість пішохода 4 км/год.
Відповідь: 4 км/год.	

Для розв'язання цієї задачі можна скласти рівняння за допомогою такої таблиці:

	Відстань, км	Швидкість, км/год	Час, год.
Пішохід	10	x	$\frac{10}{x}$
Велосипедист	20	$x+6$	$\frac{20}{x+6}$

15

§ 4. Функції

Функції та їх графіки

Залежність змінної y від змінної x називається **функцією**, якщо кожному значенню x відповідає єдине значення y.

Функція позначається або однією буквою f (або) $f(x)$, або рівністю $y = f(x)$, де x – незалежна змінна або аргумент, y – залежна змінна або значення функції $f(x_0)$ – значення функції f в точці x_0.

Область визначення і множина значень функції

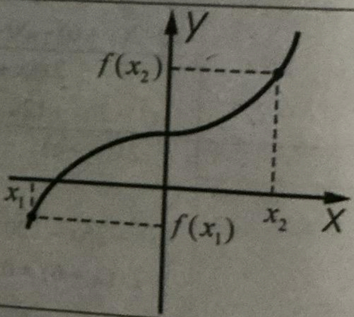
Область визначення функції (D) – множина тих значень, які може приймати аргумент.

Множина значень функції (E) – це множина тих значень, які може приймати сама функція при всіх значеннях аргумента із області визначення. Наприклад: $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$.

Область визначення (0.0): $x-1 \neq 0$; $x \neq 1$, x — будь-яке число, крім $x = 1$.

Графік функції

Графіком функції $y = f(x)$ називається множина точок площини з координатами $(x; y)$, де перша координата x «пробігає» всю область визначення функції $f(x)$, а друга координата — це відповідне значення функції f в точці x.



Способи задання функції

1. **Аналітичний спосіб:** функція задається за допомогою математичної формули.

$y = x^2$; $y = 5x - 8$; $y = \dfrac{10}{x}$.

2. **Табличний спосіб:** функція задається за допомогою таблиці.

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

3. **Описовий спосіб:** функція задається сло-весним описом.

4. **Графічний спосіб:** функція задається за допомогою графіка.

Функція Дирихле: $f(x) = 1$ для раціональних x,
$f(x) = 0$ для ірраціональних x.

16

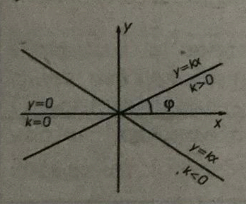
Лінійна функція та її графік

Лінійною функцією називають функцію виду $y = kx + b$, де k і b — деякі числа, x — незалежна змінна.

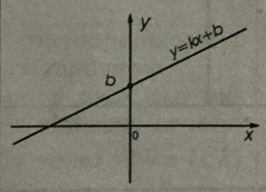
Властивості	Значення змінних
1. Область визначення.	x — будь-яке дійсне число $x \in R$.
2. Множина значень.	1) при $k \neq 0$; y — будь-яке дійсне число, $y \in R$; 2) при $k = 0$; $y = b$.
3. Точки перетину з осями координат.	1) при $k \neq 0$, $x = -\frac{b}{k}$; $y = 0$ — точка перетину з віссю $0x$; 2) $k = 0$, тоді $y = b$ — пряма, паралельна осі $0x$ перетинає $0y$ в точці $(0;b)$ і збігається з віссю $0x$ при $b = 0$; 3) $y = b$, $x = 0$ — точка перетину з віссю $0y$, тобто $(0;b)$.
4. Зростання і спадання.	1) при $k > 0$ функція зростає на всій області визначення; 2) при $k < 0$ функція спадає на всій області визначення; 3) при $k = 0$ функція стала.
5. Графіком лінійної функції є пряма. k — кутовий коефіцієнт прямої	1) при $b = 0$ ($y = kx$) — пряма, що проходить через початок координат. 2) при $b \neq 0$ ($y = kx + b$) — пряма, що не проходить через початок координат (яку отримали з прямої $y = kx$ за допомогою паралельного перенесення вздовж осі $0y$ на b одиниць).

Графіки лінійних функцій

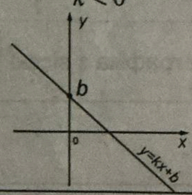
$b = 0$ $(y = kx)$



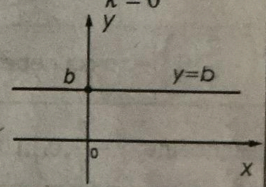
$b \neq 0$ $(y = kx + b)$



$k < 0$

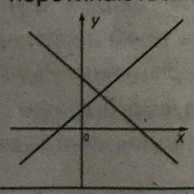


$k = 0$

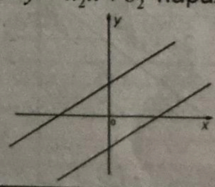


Взаємне розташування графіків лінійних функцій

Якщо $k_1 \neq k_2$, графіки функцій $y = k_1x + b_1$ та $y = k_2x + b_2$ перетинаються в одній точці.

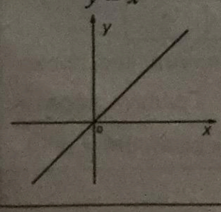


Якщо $k = k_2$, $b_1 \neq b_2$, графіки функцій $y = k_1x + b_1$ та $y = k_2x + b_2$ паралельні.

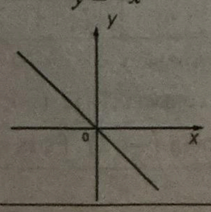


Ці графіки корисно запам'ятати

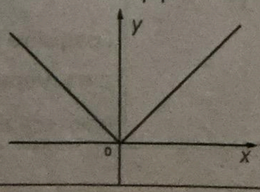
$y = x$



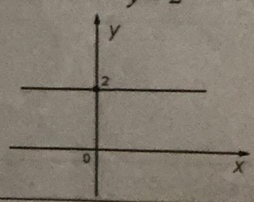
$y = -x$



$y = |x|$



$y = 2$



11

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

1. Знайти координати точок перетину графіків функцій з осями координат. $y=\frac{-24}{x}+1$.

Розв'язання.

Для того, щоб знайти точку перетину графіка з віссю $0x$, необхідно розв'язати рівняння: $y=0$, тобто $\frac{-24}{x}+1=0$; $\frac{-24+x}{x}=0$, якщо $\begin{cases} x\neq 0, \\ -24+x=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\neq 0, \\ x=24. \end{cases}$

Графік перетинає вісь $0x$ в точці $(24;0)$.

З віссю $0y$ графік перетинається за умови, що абсциса точки перетину $x=0$, але область визначення цієї функції виключає це значення, тому графік даної функції не перетинає вісь $0y$.

Відповідь: $(24;0)$.

2. Знайти координати точок перетину графіків функцій з осями координат. $y=\frac{3x}{5x+1}-2$.

Розв'язання.

Для того, щоб знайти точку перетину з віссю $0x$, розв'яжемо рівняння: $\frac{3x}{5x+1}-2=0$; $\frac{3x-10x-2}{5x+1}=0$;

$\frac{-7x-2}{5x+1}=0$, тобто $\begin{cases} -7x-2=0; \\ 5x+1\neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{-2}{7}; \\ x\neq -\frac{1}{5}. \end{cases}$

$\left(-\frac{2}{7};0\right)$ – точка перетину графіка з віссю $0x$.

Для того, щоб знайти точку перетину графіка з віссю $0y$, треба знайти значення функції y при $x=0$.

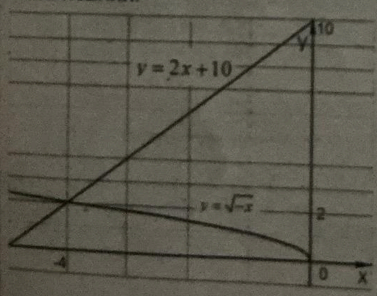
При $x=0$ $y=\frac{3\cdot 0}{5\cdot 0+1}-2=\frac{0}{1}-2=-2.$

Точка перетину графіка з віссю $0y$: $(0;-2)$.

Відповідь: $\left(-\frac{2}{7};0\right)$;$(0;2)$.

3. Розв'язати рівняння графічно. $\sqrt{-x}=2x+10$.

Розв'язання.



Для того, щоб розв'язати це рівняння графічно, потрібно побудувати графіки функції $y=\sqrt{-x}$ та $y=2x+10$. Абсциса точки перетину цих графіків є розв'язком даного рівняння. Розглянемо функцію $y=\sqrt{-x}$ і побудуємо її графік. Областю визначення цієї функції є множина значень $x\leq 0$.

Складемо таблицю:

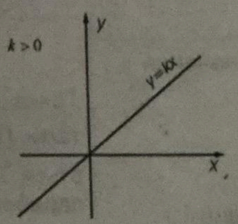
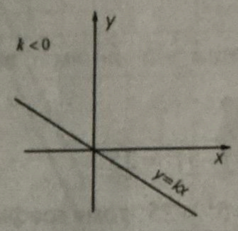
x	0	–1	–4	–9
y	0	+1	2	3

Графіком функції $y=2x+10$ є пряма, що проходить через точки $(0;10)$; $(-4;2)$. Графіки перетинаються в точці $(-4;2)$. Розв'язок рівняння $x=-4$.

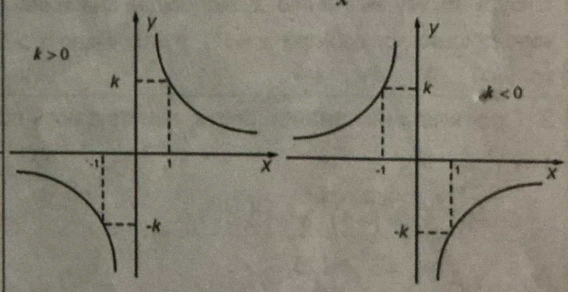
Відповідь: –4.

18

Пряма пропорційність

Функція $y = kx$ при $k \neq 0$ називається **прямою пропорційністю**. k — кутовий коефіцієнт. Ця функція є окремим випадком лінійної функції $y = kx + b$, при $b = 0$. Тому її графіком є пряма, яка проходить через початок координат.	
1. Якщо $k > 0$, то графік функції $y = kx$ розташований в I і III координатних кутах.	2. При $k < 0$ графік функції розташований в II і IV координатних кутах.
Характерна точка $(0;0)$.	
	

Обернена пропорційність

Означення	Графіки
Оберненою пропорційністю називається функція, яку можна задати формулою $y = \frac{k}{x}$, де k — число, що не дорівнює нулю. Число k називається **коефіцієнтом пропорційності.**	графік $y = \frac{k}{x}$ 
Графіком оберненої пропорційності є крива, яка називається **гіперболою**. Гіпербола складається з двох окремих частин, які симетричні відносно початку координат, і проходить через точки $(1;k)$ та $(-1;-k)$.	
Властивості функції $y = \frac{k}{x}$	**Значення змінних**
1. Область визначення оберненої пропорційності:	x — будь-яке число, крім нуля ($x \neq 0$)
2. Область значень оберненої пропорційності:	y — будь-яке число, крім нуля ($y \neq 0$).
3. При $k > 0$ графік функції розташований в I та III координатних чвертях.	Якщо $k > 0$, то $x > 0$ відповідає $y > 0$; $x < 0$ відповідає $y < 0$;
4. При $k < 0$ графік функції розташований в II та IV чвертях.	Якщо $k < 0$, то $x > 0$ відповідає $y < 0$; $x < 0$ відповідає $y > 0$.

13

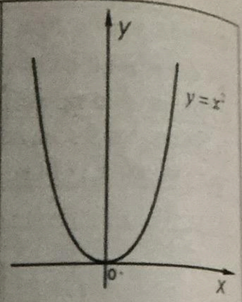
Функції $y = x^2$; $y = x^3$. Їхні графіки і властивості

Графік функції $y = x^2$ є параболою. **Парабола** складається з двох віток, які симетричні відносно осі ординат.

Деякі властивості функції $y = x^2$

1. Будь-якому x можна знайти відповідне значення y, причому $y \geq 0$,
при $x = 0$; $y = 0$.

2. Протилежним значенням x відповідає одне й те саме значення y:
$(-x)^2 = x^2 = y$
$x_1 = -5$; $y_1 = (-5)^2 = 25$.
$x_2 = 5$; $y_2 = 5^2 = 25$, тому графік має симетрію відносно осі $0y$.



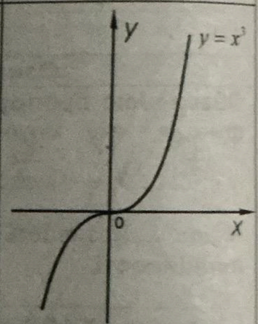
Точка з координатами $(0;0)$ називається вершиною параболи.

Графіком функції $y = x^3$ є **кубічна парабола**. Кубічна парабола має симетрію відносно початку координат.

Деякі властивості функції $y = x^3$

1. Будь-якому значенню x відповідає значення y, причому $y \in R$ (множині дійсних чисел) при $x = 0$; $y = 0$; якщо $x > 0$, то $y > 0$; якщо $x < 0$, то $y < 0$.

2. Протилежним значенням x відповідають протилежні значення y:
$(-x)^3 = -x^3$
$x_1 = -5$; $y_1 = (-5)^3 = -125$.
$x_2 = 5$; $y_2 = 5^3 = 125$,
тому графік має симетрію **відносно початку координат.**



Графік розташований в I і III координатних кутах.

Функція $y = \sqrt{x}$

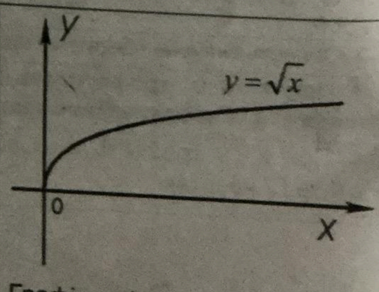
Область визначення функції $y = \sqrt{x}$ – множина невід'ємних дійсних чисел: $x \geq 0$ (оскільки корінь можна добути тільки з невід'ємного числа).

Якщо $x = 0$, то $y = 0$, тому графік функції $y = \sqrt{x}$ проходить через **початок координат**.

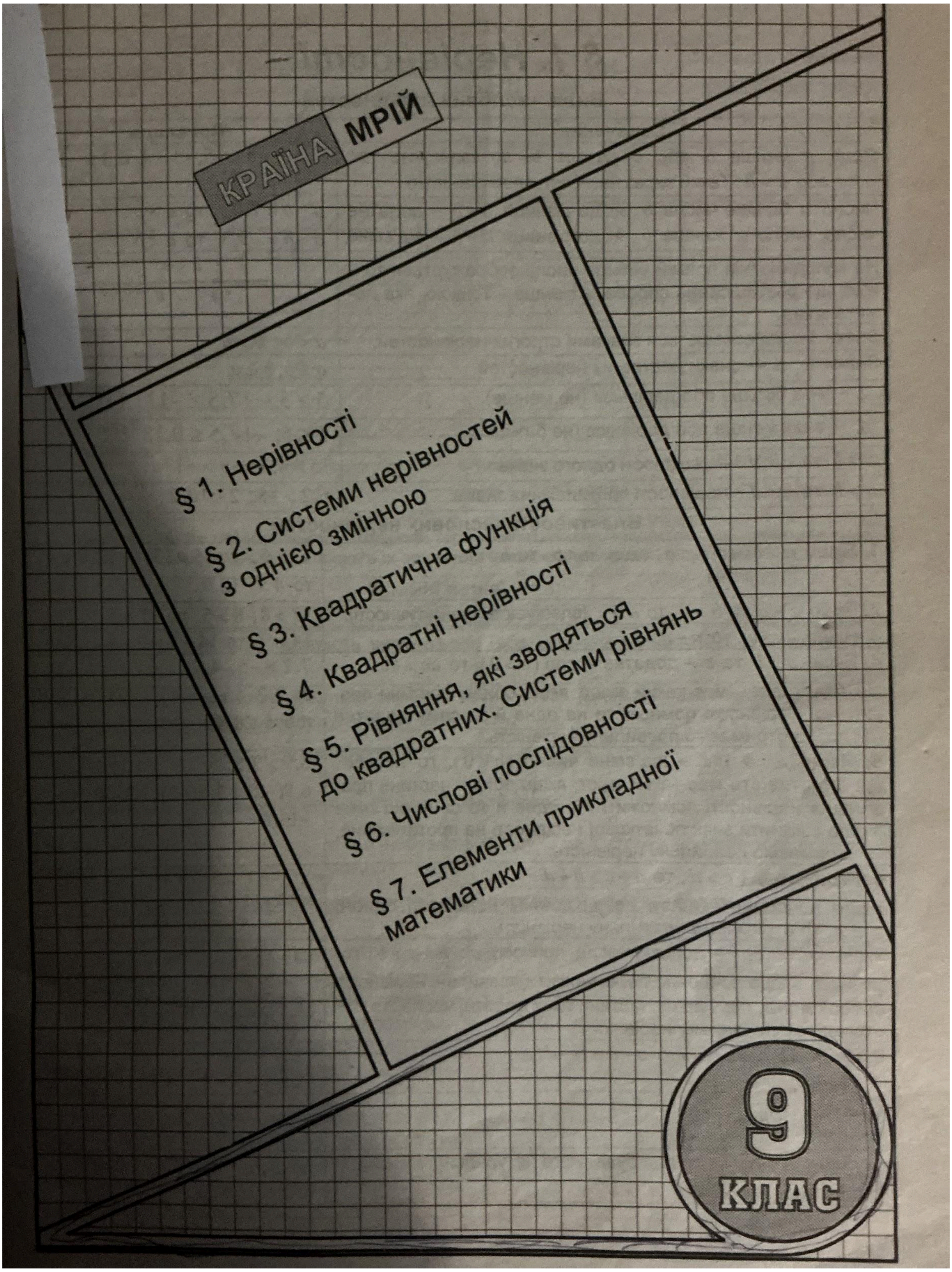
Якщо $x > 0$, то $y > 0$, тому графік функції розташований **в першій координатній чверті**.

Більшому значенню аргумента відповідає більше значення функції, дійсно:
$x_1 = 4$, то $y_1 = \sqrt{4} = 2$;
$x_2 = 9$, то $y_2 = \sqrt{9} = 3$, тобто $x_2 > x_1$ та $y_2 > y_1$.

Таким чином, функція $y = \sqrt{x}$ **є зростаючою.**



Графіки функцій $y = \sqrt{x}$ та $y = x^2$ при $x \geq 0$ симетричні **відносно прямої** $y = x$.

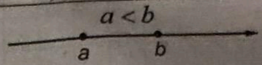

КРАЇНА МРІЙ
§ 1. Нерівності
§ 2. Системи нерівностей з однією змінною
§ 3. Квадратична функція
§ 4. Квадратні нерівності
§ 5. Рівняння, які зводяться до квадратних. Системи рівнянь
§ 6. Числові послідовності
§ 7. Елементи прикладної математики
9
КЛАС

ю

1

§ 1. Нерівності

Види числових нерівностей

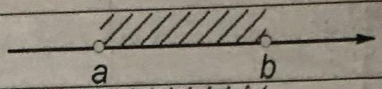
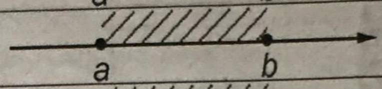
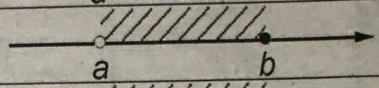
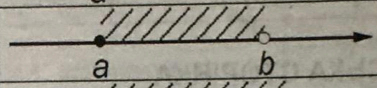
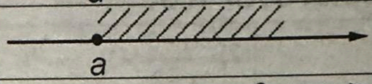
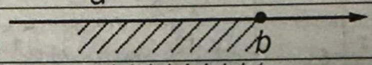
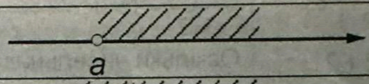
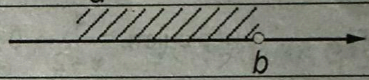
Означення	Приклади
Якщо a менше b або a більше b, то записують так: $a<b$ або $a>b$. Такий вираз називається **нерівністю**.	$7<10;\ -8<-5;\ 13>4;\ 6,3>-10,2$
Число a більше числа b, якщо різниця $a-b$ – додатне число, число a менше b, якщо різниця $a-b$ – від'ємне	$a-b=7,02$, то $a>b$; $a-b=-9,5$, то $a<b$.
На координатній прямій більше число зображується точкою, що розташована справа, а менше – точкою, яка лежить зліва.	
Знаки >, < називаються знаками строгих нерівностей.	$a<b$; $b>a$.
Знаки ≥, ≤ — знаки нестрогих нерівностей.	$a\le b; b\ge a.$
≥ – знак більше або дорівнює (не менше).	$5\ge5; -17,5\ge-131,1.$
≤ — знак менше або дорівнює (не більше).	$5\le5; -17,5\le0,13.$
$a>b$ та $c>d$ — нерівності одного знака.	$15>4,3$; $-9>-17$.
$a>b$ та $c<d$ – нерівності протилежних знаків.	$6,2>-8$; $2<10,2$.

Властивості числових нерівностей

1. Якщо $a>b$, то $b<a$; якщо $a<b$, то $b>a$.	$13>5$, то $5<13$; $-12,9<4$, то $4>-12,9$.
2. Якщо $a>b$ та $b>c$, то $a>c$ (властивість транзитивності).	$17>8$; $8>5$, то $17>5$.
3. Якщо, $a>b$, то $a+c>b+c$.	$14>9$, то $14+8>9+8$.
4. Якщо $a>b$ та c – додатне число ($c>0$), то $ac>bc$. Ця властивість має такий зміст: якщо обидві частини правильної нерівності помножити на одне й те саме додатне число, то отримаємо правильну нерівність.	$7,2>-5$; $4>0$, то $7,2\cdot4>-5\cdot4$, тобто $28,8>-20$.
5. Якщо $a<b$ і c – від'ємне число ($c<0$), то $ac>bc$. Ця властивість має такий зміст: якщо обидві частини правильної нерівності помножити на одне й те саме від'ємне число і змінити знак початкової нерівності на протилежний, то отримаємо правильну нерівність.	$6,9>3,5$; $6,9(-2)$ і $3,5(-2)$; $-2<0$, то $-13,8<-7$.
6. Якщо $a>b$ і $c>d$, то $a+c>b+d$. Якщо почленно скласти дві правильні нерівності одного знака, то отримаємо правильну нерівність.	$+\begin{array}{r}7,0>3\\ 4,3>-7\\ \hline 11,3>-4\end{array}$; $+\begin{array}{r}-1,7<3\\ -1,3<0\\ \hline -2,0<3\end{array}$
7. Якщо a,b,c,d – додатні числа, причому $a>b$ і $c>b$, то $ac>bd$. Якщо почленно перемножити правильні нерівності одного знака, ліві і праві частини яких додатні числа, то отримаємо правильну нерівність.	$18>15$; $\frac{3}{8}>\frac{1}{5}$, то $18\cdot\frac{3}{8}>15\cdot\frac{1}{5}$; $\frac{18\cdot3}{8}>\frac{15\cdot1}{5}$; $6\frac{3}{4}>3$.
8. Якщо $a>b$ і $c<d$, то $a-c>b-d$	$12>7$; $5<9$; $12-5>7-9$, то $7>-2$.
9. Якщо $a>b>0$, то $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$	$8>4$, то $\frac{1}{8}<\frac{1}{4}$.
10. Якщо $a>b>0$, то для будь-якого натурального числа n виконується нерівність $a^n>b^n$	$6>5$, то, $6^2>5^2$, тобто $36>25$.

2

Числові проміжки

Вид проміжку	Геометричне зображення	Позначення	Записати за допомогою нерівностей
Інтервал		$(a;b)$	$a<x<b$.
Відрізок		$[a;b]$	$a\le x\le b$.
Півінтервал		$(a;b]$	$a<x\le b$.
Півінтервал		$[a;b)$	$a\le x<b$.
Промінь		$[a;+\infty)$	$x\ge a$.
Промінь		$(-\infty;b]$	$x\le b$.
Відкритий промінь		$(a;+\infty)$	$x>a$.
Відкритий промінь		$(-\infty;b)$	$x<b$.

На практиці не завжди використовують терміни «інтервал», «відрізок», «півінтервал», «промінь», а замінюють їх спільною назвою «числовий проміжок».

Лінійні нерівності

Означення

Лінійною називається нерівність виду $ax>b$ (або, відповідно, $ax<b, ax\ge b, ax\le b$), де $a\ne0$, і $b\ne0$ – числа.

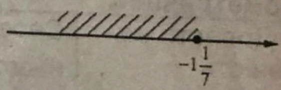
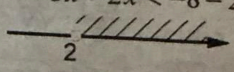
Розв'язками нерівності з однією змінною називається множина таких значень змінної, яка перетворює її на правильну числову нерівність.

1. Якщо $a>0$, то розв'язок нерівності $ax>b$ має вигляд $x>\frac{b}{a}$.

2. Якщо $a<0$, то розв'язок нерівності $ax\ge b$ має вигляд $x\le\frac{b}{a}$.

3. Якщо $a=0$, то нерівність $ax>b$ набуває вигляду $0x>b$, тобто вона не має розв'язку при $b\ge0$ і правильна при будь-яких x, якщо $b<0$.

При розв'язуванні нерівностей використовуються такі властивості.

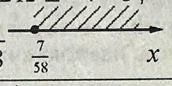
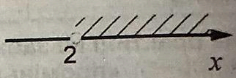
Властивості	Приклади
1. Якщо з однієї частини нерівності перенести в іншу доданок з протилежним знаком, то утвориться нерівність, рівносильна даній.	$4(y-1)+7\le1-3(y+2); 4y-4+7\le1-3y-6;$ $4y+3y\le1-6+4-7.$
2. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число, то утвориться нерівність, рівносильна даній.	$7y\le-8;$ $y\le-\frac{8}{7}.$ $\left(-\infty;-1\frac{1}{7}\right].$ 
3. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то отримаємо рівносильну даній нерівність.	$-3x+8<2x-2,\ -3x-2x<-8-2,$ $-5x<-10,$ $x>2,$  $(2;+\infty)$

3

Оцінка суми, різниці, добутку, частки

1. $\dfrac{\begin{matrix} a \le x \le b \\ \downarrow \quad \downarrow \\ c \le y \le d \end{matrix}}{a+c \le x+y \le b+d}$.	3. $\dfrac{\begin{matrix} a \le x \le b \\ \downarrow \quad \downarrow \\ c \le y \le d \end{matrix}}{ac \le xy \le bd}$.	$(a>0)$; $(c>0)$.
2. $\dfrac{\begin{matrix} a \le x \le b \\ \times \\ c \le y \le d \end{matrix}}{a-d \le x-y \le b-c}$.	4. $\dfrac{\begin{matrix} a \le x \le b \\ \times \\ c \le y \le d \end{matrix}}{\frac{a}{d} \le \frac{x}{y} \le \frac{b}{c}}$.	$(a>0)$; $(c>0)$.

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

1. Розв'язати нерівність.	1) $\frac{3z+1}{2}-6z \le \frac{5z-2}{3}+\frac{7z}{2}$.	2) $\frac{3x-2}{x-2}>3$.
Розв'язання.	$\left(\frac{3z+1}{2}-6z\right)\cdot 6 \le \left(\frac{5z-2}{3}+\frac{7z}{2}\right)\cdot 6$; $(3z+1)3-36z \le (5z-2)2+21z$; $9z+3-36z \le 10z-4+21z$; $9z-36z-10z-21z \le -4-3$; $-58z \le -7$; $z \ge \frac{7}{58}$ 	$\frac{3x-2}{x-2}-3>0$; $\frac{3x-2-3x+6}{x-2}>0$; $\frac{4}{x-2}>0$. Оскільки чисельник дробу $4>0$, то нерівність $\frac{4}{x-2}>0$ правильна при $x-2>0; x>2$. 
	Відповідь: $\left(\frac{7}{58};+\infty\right)$.	Відповідь: $(2;+\infty)$.
2. Розв'язати нерівність.	1. $\lvert 1-3x\rvert<2$.	2. $\lvert 4x-1\rvert>1$.
Розв'язання.	$-2<1-3x<2$; $-3<-3x<1$; $-\frac{1}{3}<x<1$.	$4x-1<-1$; або $4x-1>1$; $4x>2$ $4x<0$; $x<0$; $(-\infty;0)$. $x>\frac{1}{2}$; $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.
	Відповідь: $\left(-\frac{1}{3};1\right)$.	Відповідь: $(-\infty;0)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Доведення нерівностей

Довести нерівність можна на підставі правила: якщо $a>b$, то $a-b>0$ і якщо $a<b$, то $a-b<0$.

1. Довести нерівність.	$x^2+y^2 \ge 2xy$.
Доведення. Знайдемо різницю лівої та правої частин нерівності:	$(x^2+y^2)-2xy=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$. $(x-y)^2 \ge 0$ при будь-яких x та y, значить $x^2+y^2 \ge 2xy$ при будь-яких x та y.

Вираз $\frac{a+b}{2}$ називають **середнім арифметичним** чисел a та b, а вираз $\sqrt{ab}$ — **середнім геометричним**.

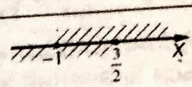
2. Довести нерівність.	Середнє арифметичне двох додатних чисел не менше їхнього середнього геометричного. $\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$.
Доведення. Знайдемо різницю лівої та правої частин нерівності:	$\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}=\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2}$. $\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2} \ge 0$ при будь-яких $x \ge 0$ та $y \ge 0$, тобто, при $x>0$ та $y>0$ $\frac{x+y}{2}>\sqrt{xy}$, при $x=y$ $\frac{x+y}{2}=\sqrt{xy}$.

Ю

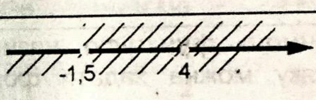
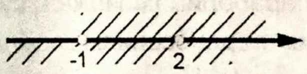
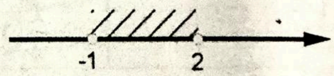
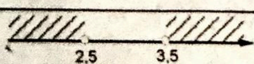
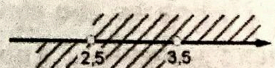
4

§ 2. Системи нерівностей з однією змінною

Розв'язування систем нерівностей з однією змінною

Означення	Приклади
Якщо необхідно знайти спільні розв'язки двох чи більше нерівностей з однією змінною, це означає, що треба розв'язати **систему** двох чи більше нерівностей з однією змінною.	$\begin{cases} 4x+4\ge 0, \\ 6-4x\ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 4x\ge -4, \\ -4x\ge -6; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge -1, \\ x\le \frac{3}{2}; \end{cases}$  Значення $x\in\left[-1;\frac{3}{2}\right]$ є розв'язком нерівності $4x+4\ge 0$ та $6-4x\ge 0$. Відповідь: $\left[-1;\frac{3}{2}\right]$.
Розв'язками системи називаються такі значення змінної, які є розв'язками одразу всіх нерівностей, що входять до даної системи.	
Розв'язати систему нерівностей з однією змінною – означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх немає.	

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

1. Розв'язати систему нерівностей.	$\begin{cases} x-1<2+3x; \\ 5x-7<x+9. \end{cases}$
Розв'язання.	$\begin{cases} -2x<3; \\ 4x<16. \end{cases}$, звідси $\begin{cases} x>-1,5, \\ x<4. \end{cases}$ 
Відповідь: $(-1,5;4)$.	
2. Розв'язати подвійну нерівність.	$-3<2x-1<3.$
Розв'язання. Розв'язанням подвійної нерівності є розв'язування системи двох нерівностей.	$\begin{cases} 2x-1>-3, \\ 2x-1<3; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x>-2, \\ 2x<4; \end{cases}$ $\begin{cases} x>-1, \\ x<2; \end{cases}$  $(-1;2)$ або $-3<2x-1<3;$ $-2<2x<4;$ $-1<x<2.$  $(-1;2)$
Відповідь: $(-1;2)$.	
3. Розв'язати нерівність.	$\frac{5-2y}{2y-7}>0.$
Розв'язування цієї нерівності можна звести до розв'язування двох систем.	1. $\begin{cases} 5-2y>0, \\ 2y-7>0; \end{cases}$ $\begin{cases} -2y>-5, \\ 2y>7; \end{cases}$ $\begin{cases} y<2,5, \\ y>3,5; \end{cases}$  Розв'язків немає. 2. $\begin{cases} 5-2y<0, \\ 2y-7<0; \end{cases}$ $\begin{cases} -2y<-5, \\ 2y<7; \end{cases}$ $\begin{cases} y>2,5, \\ y<3,5. \end{cases}$  $(2,5;3,5)$
Відповідь: $(2,5;3,5)$.	

§ 3. Квадратична функція

5

Квадратний тричлен та його розв'язки

Вираз $2x^2-5x+3$ є многочленом другого ступеня з однією змінною.
Такі многочлени називають **квадратними тричленами**.

Означення	Приклади
Коренем квадратного тричлена називається значення змінної, при якому значення цього тричлена дорівнює нулю. Для того, щоб знайти розв'язки квадратного тричлена ax^2+bx+c, треба розв'язати квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$.	Знайти розв'язки тричлена: $2x^2-5x+3$ Розв'яжемо рівняння: $2x^2-5x+3=0$ $D=25-24=1$ $x=\frac{5\pm\sqrt{1}}{4}; x=\frac{5\pm1}{4}; x_1=1; x_2=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$. Тобто квадратний тричлен має два розв'язки: 1та 1,5.
Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного тричлена ax^2+bx+c, то $ax^2+bx+c=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$.	$2x^2-5x+3=2(x-1)\cdot(x-1{,}5)=(x-1)\cdot(2x-3)$, $-2x^2+5x+7=-2\left(x-\frac{7}{2}\right)\cdot(x+1)=(7-2x)\cdot(x+1)$, $-2x^2+5x+7=0;\ 2x^2-5x-7=0$, $D=25+56=81=9^2$ $x=\frac{5\pm9}{4}; x_1=-1, x_2=\frac{7}{2}$.
Квадратичною функцією називається функція, яку можна задати формулою $y=ax^2+bx+c$, де x — незалежна змінна, a,b,c — деякі числа, причому $a\neq0$.	Приклади квадратичної функції: $y=x^2, y=-x^2, y=x^2+2, y=(x-4)^2$. Їх графіки — рівні параболи, тільки по-різному розташовані на координатній площині.
Графіки функцій $y=ax^2+bx+c$ та $y=ax^2$ – параболи, їх можна сумістити паралельним перенесенням, оскільки функцію $y=ax^2+bx+c$ можна подати у вигляді $y=a(x+m)^2-n$.	Функцію $y=2x^2-4x+10$ можна записати так: $y=2(x-1)^2+8$. $-\frac{1}{4}x^2-x-1=-\frac{1}{4}\left(x^2+4x+4\right)=$ $=-\frac{1}{4}(x+2)^2$.

Отже, графіком функції $y=ax^2+bx+c$ є парабола, яку можна отримати із графіка функції $y=ax^2$ за допомогою двох паралельних перенесень – зсуву вздовж осі x і зсуву вздовж осі y. Звідси отримуємо, що графіком функції $y=ax^2+bx+c$ є парабола, вершиною якої є точка $(m;n)$, де $m=-\frac{b}{2a}, n=\frac{-b^2+4ac}{4a}$. Віссю симетрії параболи є пряма $x=m$, паралельна осі y. При $a>0$ вітки параболи напрямлені вгору, а при $a<0$ – вниз.

1. Функція $y=f(x)$ парна або непарна, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного значення x з області визначення $f(-x)=f(x)$.
2. Якщо графік функції симетричний відносно осі y, то функція є **парною**. Якщо графік функції симетричний відносно початку координат, то функція є **непарною**.

6

Перетворення графіків функцій

Побудова графіка функції $y = mf(x)$

$y = mf(x)$, де $m > 0, m \neq 1$, якщо заданий графік функції $y = f(x)$.

Ординати точок графіка функції $y = mf(x)$ утворюються множенням на m відповідних ординат точок графіка функції $y = f(x)$. Таке перетворення графіка функції $y = f(x)$ називається розтягненням від осі x з коефіцієнтом m, якщо $m > 1$, і стягненням до осі x, якщо $0 < m < 1$.

$y = -f(x)$, якщо заданий графік функції $y = f(x)$.

При одному й тому самому значенні x ординати точок графіка функції $y = f(x)$ і функції $y = -f(x)$ відрізняються лише знаком. Тобто графік функції $y = -f(x)$ можна отримати із графіка $y = f(x)$ перетворенням симетрії останнього відносно осі x.

$y = mf(x)$, де $m < 0, m \neq -1$, якщо заданий графік функції $y = f(x)$.

Оскільки $mf(x) = -|m| f(x)$, то графік функції $y = mf(x)$ можна отримати за допомогою розтягнення (стягнення) графіка функції $y = f(x)$ від осі x з коефіцієнтом $|m|$ і наступним перетворенням симетрії відносно x.

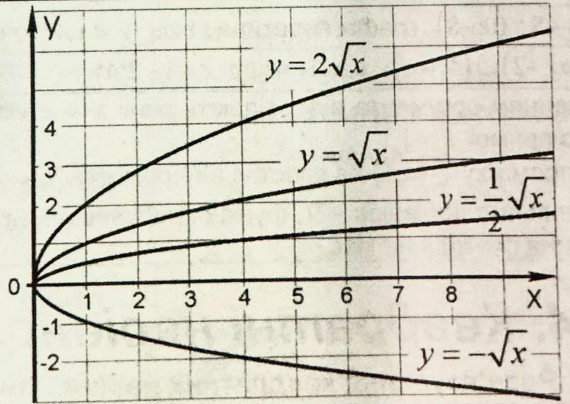
$$y = \sqrt{x}, \ y = 2\sqrt{x}, \ y = \frac{1}{2}\sqrt{x}, \ y = -\sqrt{x}.$$

1) Побудуємо графік функції $y = \sqrt{x}$;

2) Збільшимо ординату кожної точки цього графіка в 2 рази, отримаємо $y = 2\sqrt{x}$;

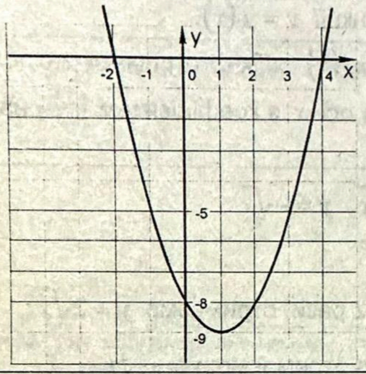
3) Якщо ординату кожної точки зменшимо в 2 рази, то отримаємо $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$;

4) $y = -\sqrt{x}$ — симетричний графіку $\sqrt{x}$ відносно осі x.



1) Для того, щоб побудувати графік функції $y = f(x) + n$, треба графік функції $y = f(x)$ перенести на n одиниць у напрямку осі y (вгору), якщо $n > 0$, або в протилежному напрямку (вниз), якщо $n < 0$.

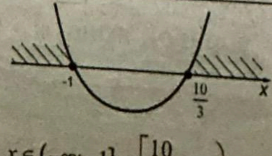
2) Для того, щоб отримати графік функції $y = f(x - m)$, достатньо графік функції $y = f(x)$ перенести на m одиниць в напрямку осі x (вправо), якщо $m > 0$, або на $-m$ одиниць в протилежному напрямку (вліво), якщо $m < 0$.

Для того, щоб побудувати графік квадратичної функції, потрібно:	
1) знайти координати вершин параболи і позначити її на координатній площині; 2) побудувати ще декілька точок, що належать параболі; 3) поєднати відмічені точки плавною лінією.	
Побудувати графік функції.	$y = x^2 - 2x - 8$.
Знайдемо координати вершини параболи.	$m = x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1$; $n = y = 1^2 - 2\cdot 1 - 8 = -9$. $(1;-9)$ – вершина параболи.
Знайдемо координати точок перетину графіка з віссю x, тобто знайдемо нулі функції.  	$x^2 - 2x - 8 = 0$ $D = 1 + 8 = 9$, $x = 1 \pm 3$; $x_1 = 4; x_2 = -2$. $(4;0)$ $(-2;0)$ – координати точок перетину з віссю x. $x = 0; y = -8, (0;-8)$ – точка перетину графіка з віссю y. $x_1 = 3;\ y_1 = 3^2 - 2\cdot 3 - 8 = -5$ $x_2 = -1;\ y_2 = (-1)^2 - 2\cdot(-1) - 8 = -5$ $x = 1$ – вісь симетрії.

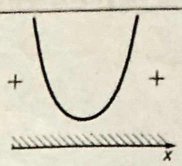
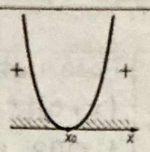
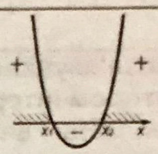
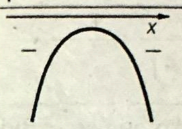
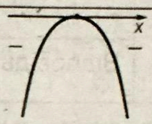
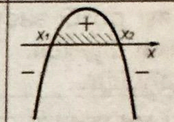
Сформулюємо властивості функції $y = x^2 - 2x - 8$.
1. $D(y) = (-\infty;+\infty)$; $E(y) = [-9;+\infty)$; 2. Якщо $x = 0$, то $y = -8$; $(0;-8)$, графік перетинає вісь y в цій точці. 3. $y > 0$, якщо $x \in (-\infty;-2) \cup (4;+\infty)$; $y < 0$, якщо $x \in (-2;4)$.
4. Протилежним значенням аргумента відповідають рівні значення функції. Графік функції симетричний відносно прямої $x = 1$. 5. Функція спадає на проміжку $(-\infty;1]$ та зростає на проміжку $[1;+\infty)$. 6. Найменшого значення, що дорівнює -9, функція набуває при $x = 1$. 7. Найбільшого значення функція не має.

§ 4. Квадратні нерівності

Розв'язування квадратних нерівностей

Означення		**Приклади**
Нерівність виду $ax^2 + bx + c > 0$ $(ax^2 + bx + c < 0)$, де a, b, c – деякі числа, $a \neq 0$ і x – змінна, називається **квадратною**.		а) $-3x^2 + x - 5 < 0$; б) $x(x+4) \leq 3$, бо $x^2 + 4x - 3 \leq 0$.
Для розв'язування квадратних нерівностей використовують ескіз графіка функції $y = ax^2 + bx + c$, тобто параболу.	 $x \in (-\infty;-1] \cup \left[\frac{10}{3};+\infty\right)$.	$3x^2 - 7x - 10 \geq 0$ $y = 3x^2 - 7x - 10$ графік – парабола, вітки напрямлені вгору, вісь $0x$ перетинає в точках $x_1 = -1; x_2 = \frac{10}{3}$.

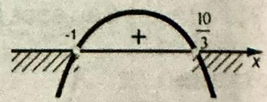
Розв'язування будь-якої квадратної нерівності можна звести до одного з шести випадків таблиці.

	$D<0$	$D=0$	$D>0$
8 $a>0$	 $ax^2+bx+c>0$: x – будь-яке число; $(ax^2+bx+c<0)$: розв'язків немає.	 $ax^2+bx+c>0$: $x\in(-\infty;x_0)\cup(x_0;+\infty)$; $(ax^2+bx+c<0)$: розв'язків немає.	 $ax^2+bx+c>0$: $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$; $(ax^2+bx+c<0)$: $x\in(x_1;x_2)$.
$a<0$	 $ax^2+bx+c>0$: розв'язків немає; $(ax^2+bx+c<0)$: x – будь-яке число.	 $ax^2+bx+c>0$: розв'язків немає; $(ax^2+bx+c<0)$: $x\in(-\infty;x_0)\cup(x_0;+\infty)$.	 $ax^2+bx+c>0$: $x\in(x_1;x_2)$; $(ax^2+bx+c<0)$: $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$.

Розв'язками нерівності $ax^2+bx+c>0$ є значення x, для яких точки параболи розташовані над віссю $0x$.

Розв'язками нерівності $ax^2+bx+c>0$ є значення x, для яких точки параболи розташовані під віссю $0x$.

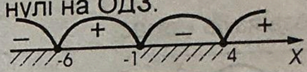
Алгоритм розв'язування квадратних нерівностей виду $ax^2+bx+c>0$, або $ax^2+bx+c<0$.

Розв'язати нерівність	$-3x^2+7x+10\le 0$.
1) Визначаємо напрямок віток параболи, яка відповідає функції $y=ax^2+bx+c$. 2) Знаходимо корені квадратного тричлена ax^2+bx+c (розв'язуємо рівняння $ax^2+bx+c=0$). 3) Будуємо ескіз графіка функції $y=ax^2+bx+c$. 4) Вибираємо значення змінної, які відповідають розв'язкам нерівності. 5) Записуємо відповідь.	$3x^2-7x-10\le 0$ 1) $a=-3$; вітки напрямлені вниз. 2) $3x^2-7x-10=0$; $D=169$; $x_1=-1$; $x_2=\frac{10}{3}$. 3)  4) $x\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{10}{3};+\infty\right)$. 5) Відповідь: $(-\infty;-1)\cup\left(\frac{10}{3};+\infty\right)$.

Ю.

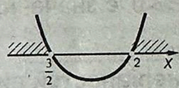
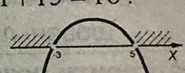
Розв'язування нерівностей методом інтервалів

Якщо ліва частина нерівності є добутком, а права частина – 0, тобто $f(x)>0\ (f(x)<0)$ та $f(x)=(x-a)(x-b)...(x-c)$, де a,b,c – деякі числа, то такі нерівності **розв'язують методом інтервалів.**

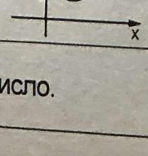
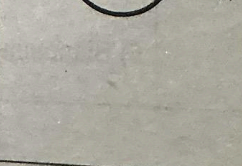
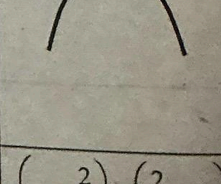
Алгоритм розв'язування нерівностей методом інтервалів	Розв'язати нерівність. $(x+6)(x+1)(x-4)<0$.
1) Знайти область визначення функції $y=f(x)$. 2) Знайти нулі функції $y=f(x)$ $(f(x)=0)$. 3) Нанести нулі на область визначення. 4) Визначити знаки функції $f(x)$ в кожному інтервалі, на які розбивається область визначення нулями функції. 5) Записати відповідь.	1) ОДЗ: $x\in R$. 2) Нулі функції: $(x+6)(x+1)(x-4)=0$; $x_1=-6;\quad x_2=-1;\quad x_3=4$. 3) Нанесемо нулі на ОДЗ:  Відповідь: $(-\infty;-6)\cup(-1;4)$

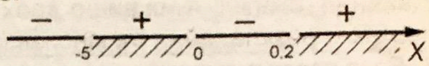
Якщо всі множники функції $y=f(x)$ виду $(x-a)$, тобто лінійні, то знаки на проміжках із ОДЗ можна переміжати справа наліво з «+» на «–».

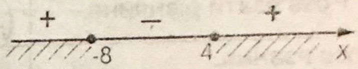
УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

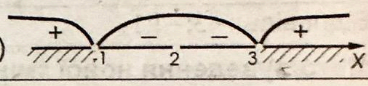
1. Розв'язати нерівність.	1) $2x^2-7x+6>0$.	2) $-x^2+2x+15<0$.
Розв'язання.	$2x^2-7x+6=0$, $a>0, D>0$ $D=49-48=1$, $x=\frac{7\pm1}{4}; x_1=\frac{3}{2}; x_2=2$  	$-x^2+2x+15=0$, $a<0, D>0$ $x^2-2x-15=0$ $D_1=1+15=16$. За теоремою Вієта: $x_1=-3; x_2=5$ 
Відповідь:	$x\in\left(-\infty;1\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$.	$(-\infty;-3)\cup(5;+\infty)$.

При розглянутому способі розв'язування нерівності не визначають координати вершин параболи. Важливо лише знати, куди напрямлені вітки параболи – вгору чи вниз, і які абсциси точок її перетину з віссю x.

2. Розв'язати нерівність.	1) $x^2-3x+4>0$.	2) $x^2+2x-48<0$.	3) $-9x^2+12x-4<0$.
Розв'язання.	$a>0,\ D<0$. $x^2-3x+4=0$, $D=9-16=-7<0$, тобто рівняння не має розв'язків. Покажемо схематично розташування параболи на координатній площині:  	$a>0,\ D>0$. $x^2+2x-48=0$, За теоремою Вієта: $x_1=-8; x_2=6$.  	$a<0,\ D=0$. $-9x^2+12x-4=0$, $9x^2-12x+4=0$, $(3x-2)^2=0; x=\frac{2}{3}$. 
Відповідь:	x – будь-яке число.	$x\in(-8;6)$.	$\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$.

3. Розв'язати нерівність. 10	$x(0,2-x)(x+5)<0$.
Розв'язання. Множник $(0,2-x)$ представимо у вигляді $(x-a)$: $(0,2x-x)=-(x-0,2)$.	$-x(x-0,2)(x+5)<0$, $x(x-0,2)(x+5)>0$. 1) ОДЗ: $x\in R$. 2) Нулі функції: $x_1=-5; x_2=0; x_3=0,2$. 3. 
Відповідь: $(-5;0)\cup(0,2;+\infty)$.	

4. Розв'язати нерівність. Такі нерівності розв'язують методом інтервалів.	$\dfrac{4-x}{x+8}<0$.
Розв'язання. Перетворимо нерівність. Знаки цього дробу співпадають із знаками добутку	1) ОДЗ: $x\neq-8$, оскільки $x+8\neq0$, то $x\in(-\infty;-8)\cup(-8;+\infty)$. 2) Нулі: $4-x=0$; $x=4$. $-\dfrac{x-4}{x+8}<0$, $\dfrac{x-4}{x+8}>0$,  3) $(x-4)(x+8)>0$.
Відповідь: $(-\infty;-8)\cup(4;+\infty)$.	

5. Розв'язати нерівність.	$(x+1)(3-x)(x-2)^2<0$.	
Розв'язання. Знаки даної нерівності співпадають зі знаками нерівності	$-(x+1)(x-3)(x-2)^2<0$ $(x+1)(x-3)(x-2)^2>0$. $(x+1)(x-3)>0$,	1) ОДЗ: $x\in R$. 2) Нулі: $x_1=-1; x_2=2; x_3=3$. 3) 
Відповідь: $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.		

§ 5. Рівняння, які зводяться до квадратних. Системи рівнянь

Ціле рівняння та його розв'язки

Правила	Приклади
Рівняння називається **цілим**, якщо у нього ліва і права частини є цілими виразами.	$(3x+7)(3x-7)-5=3x(3x+1)$.
Будь-яке рівняння можна замінити рівносильним йому рівнянням, ліва частина якого — многочлен стандартного виду, а права — нуль.	$\left(\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{x}{8}=\dfrac{x+1}{3}\right)\Leftrightarrow(3x^2-22x-16=0)$
Якщо рівняння з однією змінною записано у вигляді $P(x)=0$, де $P(x)$ — многочлен стандартного виду, то степінь цього многочлена називають степенем рівняння.	Рівняння $x^2-2x^3+1=0$ є рівнянням третього степеня.
Деякі рівняння третього або більш високого степеня легко розв'язати за допомогою розкладання многочлена на множники.	Розв'язати рівняння. $x^3-8x^2-x+8=0$, $x^3(x-8)-(x-8)=0$, $(x-8)(x-1)(x+1)=0$. Рівняння має три розв'язки: $x_1=-8; x_2=1; x_3=8$.

11

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

Розв'язування рівнянь за допомогою розкладання на множники і введення допоміжної змінної

Рівняння, степінь яких вище двох, іноді розв'язуються уведенням деякої змінної або за допомогою розкладання на множники.

1. Розв'язати рівняння.	$16x^3 - 32x^2 - x + 2 = 0$.	
Розв'язання. Розкладемо ліву частину рівняння на множники.	$(16x^3 - 32x^2) - (x - 2) = 0$; $16x^2(x-2) - (x-2) = 0$; $(x-2)(16x^2 - 1) = 0$; $(x-2)(4x-1)(4x+1) = 0$,	$x - 2 = 0$ або $4x - 1 = 0$ або $4x + 1 = 0$; $x = 2$ або $4x = 1$; або $4x = -1$; $x = \frac{1}{4}$; $x = -\frac{1}{4}$.
Відповідь: $-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; 2$.		

2. Розв'язати рівняння.	$(x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 2) = 3$.
Розв'язання. Позначимо $x^2 + 2x$ через y: Тоді рівняння зведеться до рівняння зі змінною y:	$x^2 + 2x = y$; $y(y-2) = 3$; $y^2 - 2y - 3 = 0$, за теоремою Вієта: $y_1 = -1, y_2 = 3$. Звідси $x^2 + 2x = -1$, або $x^2 + 2x = 3$ $x^2 + 2x + 1 = 0$, або $x^2 + 2x - 3 = 0$ $(x+1)^2 = 0$, $x = -1$; $x_1 = -3; x_2 = 1$ (за теоремою Вієта).
Відповідь: $-3; -1; 1$.	

Метод уведення нової змінної дозволяє легко розв'язувати рівняння четвертого степеня, які мають вид $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Рівняння виду $ax^4 + bx^2 + c = 0$, де $a \neq 0$, що є квадратними відносно x^2, називають **біквадратними** рівняннями.

3. Розв'язати біквадратне рівняння.	$4x \;\; - 5x^2 + 1 = 0$.
Розв'язання. Введемо нову змінну, позначивши x^2 через y: Отримаємо квадратне рівняння із змінною y:	$x^2 = y$. $4y^2 - 5y + 1 = 0$. Розв'язавши його, знайдемо, що $y_1 = \frac{1}{2}$ і $y_2 = 2$. Отже, $x^2 = \frac{1}{2}$ або $x^2 = 2$, тоді $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$, $x_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ і $x_3 = \sqrt{2}$; $x_4 = -\sqrt{2}$.
Відповідь: $-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}$.	

4. Розв'язати біквадратне рівняння.	$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.
Розв'язання. За теоремою Вієта.	Нехай $x^2 = y$, отримаємо $y^2 - 3y - 4 = 0$. $y_1 = -1; y_2 = 4$, тоді $x^2 = -1$ — розв'язків немає, $x^2 = 4; x_1 = -2; x_2 = 2$.
Відповідь: $-2; 2$.	

12

Системи рівнянь з двома змінними

Розв'язком системи рівнянь з двома змінними є пара значень змінних, які перетворюють кожне рівняння системи у правильну числову рівність. Систему рівнянь можна розв'язати трьома способами.

1. Графічний спосіб. **2.Спосіб підстановки.** **3.Спосіб додавання.**

1. Розв'язати систему рівнянь способом підстановки.

1) $\begin{cases} xy + y^2 = -2, \\ x - 2y = 7. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y = 1, \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{6}. \end{cases}$

Розв'язання.

1)

$$\begin{cases} (7+2y)y + y^2 = -2, \\ x = 7+2y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y^2 + 7y + y^2 = -2, \\ x = 7+2y. \end{cases}$$

$3y^2 + 7y + 2 = 0$,

$D = 49 - 24 = 25 = 5^2$,

$y = \frac{-7 \pm 5}{3}$; $y_1 = -4$; $y_2 = -\frac{2}{3}$.

$x_1 = 2 \cdot (-4) + 7 = -1$,

$x_2 = 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 7 = 5\frac{2}{3}$.

2)

$$\begin{cases} x = 1+y, \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{1+y} = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Підставимо виражене значення x у друге рівняння системи

$$\frac{1^{\backslash 6(1+y)}}{y} - \frac{1^{\backslash 6y}}{1+y} = \frac{1^{\backslash y(1+y)}}{6};$$

ОДЗ: $y \neq 0$; $y \neq -1$

$6y + 6 - 6y = y(1+y)$; $y(1+y) - 6 = 0$;

$y^2 + y - 6 = 0$. $D = 1 + 24 = 25 = 5^2$;

$y = \frac{-1 \pm 5}{2}$;

$y_1 = -3$; $y_2 = 2$;

$x = 1 + y$;

$x_1 = -2$; $x_2 = 3$

Відповідь: 1) $(-1; -4)$; $\left(5\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$. 2) $(-2; -3)$; $(3; 2)$.

2. Розв'язати систему рівнянь способом додавання.

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 14, \\ x^2 + 2y^2 = 18. \end{cases}$$

$2x^2 = 32$,

$x^2 = 16$,

$x_1 = -4$,

$x_2 = 4$.

Знаходимо y: $(-4)^2 - 2y^2 = 14; -2y^2 = -2$;

$y^2 = 1$;

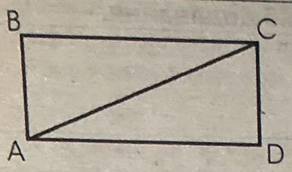
$y_1 = -1$; $y_2 = +1$.

Відповідь: $(-4; -\sqrt{2})$; $(4; \sqrt{2})$.

3. Розв'язати задачу. 13

Діагональ прямокутника дорівнює 10 см, а його периметр дорівнює 28 см. Знайти сторони прямокутника.

Розв'язання.



Нехай $AB = x$ см, $BC = y$ см. Периметр дорівнює $2(x+y)$ см, а за умовою 28 см. Отримаємо перше рівняння системи: $2(x+y)=28$ або $(x+y)=14$. $AC=10$ см за умовою, тоді за теоремою Піфагора: $x^2+y^2=10^2$ — отримаємо друге рівняння системи.

Маємо систему: $\begin{cases} x+y=14, \\ x^2+y^2=100; \end{cases}$

$\begin{cases} x=14-y, \\ (14-y)^2+y^2=100; \end{cases}$

Підставимо виражене значення x у друге рівняння:

$196-28y+y^2+y^2-100=0; 2y^2-28y+96=0$

або $y^2-14y+48=0$

$D=49-48=1;$

$y=7\pm1;$

$y_1=8; y_2=6;$

$x=14-y;$

$x_1=14-8=6; x_2=14-6=8.$

Відповідь: 6 см і 8 см.

4. Розв'язати задачу.

Із пункта M в пункт N, відстань між якими дорівнює 18 км, одночасно вийшли двоє туристів. Один з них прибув у пункт N на 54 хв пізніше, ніж другий. Знайти швидкість кожного туриста, якщо відомо, що швидкість одного з них на 1 км/год менша, ніж швидкість другого.

Розв'язання.

Нехай швидкість одного з них x км/год, а другого — y км/год, оскільки швидкість одного з них на 1 км/год менша, то отримаємо перше рівняння: $y-x=1$. Другий турист прибув до пункту N на 54 хв пізніше, — отримаємо друге рівняння: $\frac{18}{x}-\frac{18}{y}=\frac{9}{10}$, оскільки $\frac{54}{60}$ год $=\frac{9}{10}$ год

Розв'язавши систему: $\begin{cases} y-x=1, \\ \frac{18}{x}-\frac{18}{y}=\frac{9}{10}, \end{cases}$

отримаємо: $y=5$ км/год, а $x=4$ км/год.

Відповідь: 5 км/год та 4 км/год.

Ю.вввввв вв

14

§ 6. Числові послідовності

Арифметична прогресія

Означення	Приклади
Числова послідовність задана, якщо будь-якому натуральному числу n поставлене у відповідність деяке число a_n.	3; 10; 11; 13; 16; 20;... 4; 7; 10; 13; 16;...
Послідовність задають за допомогою формули n-го члена, тоді неважко обчислити будь-який його член.	Послідовність (a_n) задана формулою $a_n = n^3, n \in N$, 1; 8; 27; 64;...
Послідовності бувають **скінченні і нескінченні.** Послідовність (a_n) називається **зростаючою** (**спадною**), якщо для будь-якого номера n правдива нерівність: $a_{n+1} > a_n$ $(a_{n+1} < a_n)$, a_n — **попередній** член, a_{n+1} — **наступний** член послідовності.	2; 4; 6; 8; 10; 12;... — зростаюча. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; ...$ — спадна.
Числова послідовність (a_n), кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, до якого додане одне і те саме число, називається **арифметичною прогресією**. Це число позначають буквою d і називають **різницею арифметичної прогресії.**	1; 3; 5; 7; 9 — арифметична прогресія $a_1 = 1; d = 2$. 30; 25; 20; 15; 10; 5;... $a_1 = 30; d = -5$.
Перші члени арифметичної прогресії будуть: $a_1; a_1 + d; a_1 + 2d; a_1 + 3d; ...$	$-50; -40; -30; -20; ...$ $a_1 = -50; d = 10$.
Формула n-го члена арифметичної прогресії: $\boxed{a_n = a_1 + d(n-1)}, n \in N$.	$a_6 = -50 + 10(6-1) = -50 + 10 \cdot 5 = 0; a_6 = 0$.
Для арифметичної прогресії кожний її член, починаючи з другого, дорівнює середньому арифметичному сусідніх з ним членів, тобто: $\boxed{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}$, де $n \geq 2, n \in N$. Сума двох членів скінченної арифметичної прогресії, рівновіддалених від її кінців, дорівнює сумі крайніх членів. Формула суми перших n членів арифметичної прогресії: $\boxed{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n}$, або $\boxed{S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n}, n \in N$.	4;7;10;13;16;... $a_1 = 4; d = 3$. $S_5 = \frac{4+16}{2} \cdot 5 = 50$ або $S_5 = \frac{2 \cdot 4 + 3(5-1)}{2} \cdot 5 = 50$.

A

15

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

Розв'язування задач

1. Написати 4 перших члени послідовності, заданою формулою n-го члена. Знайти a_8.

Розв'язання.

а) $a_n = 2n-1$;

$a_1 = 1; a_2 = 3; a_3 = 5; a_4 = 7; a_8 = 15$;

б) $a_n = (-1)^{n+1}$

$a_1 = -1; a_2 = -1; a_3 = 1; a_4 = -1; a_8 = -1$;

в) $a_n = \frac{n}{2^n}$;

$a_1 = \frac{1}{2}; a_2 = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}; a_3 = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}; a_4 = \frac{4}{2^4} = \frac{1}{4}; a_8 = \frac{8}{2^8} = \frac{1}{32}$.

Відповідь: а) $1, 3, 5, 7 ... a_8 = 15$; б) $1; -1; 1; -1; ... a_8 = 1$; в) $\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{8}; \frac{1}{4}; ... a_8 = \frac{1}{32}$

2. Знайти 16-й член арифметичної прогресії (a_n), в якій перший член дорівнює 5, різниця дорівнює 2.

Розв'язання.

$a_n = a_1 + d(n-1); n = 16; a_1 = 5; d = 2; a_{16} = 5 + 2(16-1); a_{16} = 35$. Відповідь: 35.

3. Знайти перший член арифметичної прогресії (a_n), в якій $a_{27} = 291, d = 11$.

Розв'язання.

$a_n = a_1 + d(n-1); a_1 = a_n - d(n-1); n = 27; a_{27} = 291; d = 11$;

$a_1 = 291 - 11(27-1); a_1 = 291 - 286; a_1 = 5$. Відповідь: 5.

4. Знайти різницю арифметичної прогресії (a_n), в якій $a_1 = 28; a_{21} = -52$.

Розв'язання.

$a_n = a_1 + d(n-1); d(n-1) = a_n - a_1; d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$;

$n = 21, a_{21} = -52; a_1 = 28; d = \frac{-52-28}{21-1} = \frac{-80}{20} = -4$. Відповідь: –4.

5. Знайти номер члена арифметичної прогресії (a_n), який дорівнює 46, якщо $a_1 = 32, d = 0,4$.

Розв'язання.

$a_n = a_1 + d(n-1); n-1 = \frac{a_n - a_1}{d}; n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$.

$a_n = 46, a_1 = 32; d = 0,4; n = \frac{46-32}{0,4} + 1 = \frac{14}{0,4} + 1 = 35 + 1 = 36$. Відповідь: 36.

6. Знайти перший член і різницю арифметичної прогресії (a_n), якщо: $\begin{cases} a_5 + a_1 = 24 \\ a_9 + a_3 = 54. \end{cases}$

Розв'язання.

$a_n = a_1 + d(n-1)$;

$a_5 = a_1 + 4d$,

$a_9 = a_1 + 8d$, отже, $a_5 + a_1 = 2a_1 + 4d$

$a_3 = a_1 + 2d$ $\quad a_9 + a_3 = 2a_1 + 10d$,

отримаємо систему: $\begin{cases} 2a_1 + 4d = 24, \\ 2a_1 + 10d = 54; \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 + 2d = 12, \\ a_1 + 5d = 27; \end{cases}$ $\begin{cases} 3d = 15, \\ a_1 = 12 - 2d; \end{cases}$ $\begin{cases} d = 5, \\ a_1 = 2. \end{cases}$ Відповідь: $a = 2;\ d = 5$.

16

7. Знайти x, якщо $1+4+7+...+x=51$.	
Розв'язання. $1+4+7+...+x=51$; $1+4+7+...$— зростаюча арифметична прогресія (a_n), де $d=3; a_1=1$. У нашому рівнянні $a_n=x$, $S_n=51$. $a_n=a_1+d(n-1)$, $x=1+3(n-1)$; $x=3n-2$.	$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$; Підставляємо відомі значення: $51=\frac{1+x}{2}\cdot n$; $102=(1+x)n$; $n=\frac{102}{1+x}$ $x=3\cdot\frac{102}{1+x}-2$; $x+x^2=306-2-2x, x\neq -1$. $x^2+3x-304=0$ $x_1=16; x_2=-19$ – не задовольняють умову задачі, $a_n>0$. Отже, $a_n=16$. Відповідь: 16.

Геометрична прогресія. Розв'язування комбінованих задач

Числова послідовність (b_n), кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне й те саме число, називається **геометричною прогресією**. Це число позначають q і називають **знаменником геометричної прогресії**.	$\frac{1}{3}$; 1; 3; 9; 27;... 2; 4; 8; 16; 32; 64;... $b_1=2$, $q=2$. 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$;... $b_1=1$, $q=\frac{1}{2}$.
Першими членами геометричної прогресії будуть: b_1; b_1q; b_1q^2; b_1q^3;... Формула n-го члена геометричної прогресії: $\boxed{b_n=b_1q^{n-1},}$ $n\in N$.	$\frac{1}{16}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; 1; 2; 4;... $b_1=\frac{1}{16}$; $q=2$; $b_{10}=\frac{1}{16}\cdot 2^{10-1}=\frac{1}{16}\cdot 2^9=32$.
Послідовність (b_n) є геометричною прогресією тоді і тільки тоді, коли кожний її член, починаючи з другого, дорівнює середньому геометричному сусідніх з ним членів, тобто: $b_n^2=b_{n-1}\cdot b_{n+1}$, $n\geq 2$, $n\in N$	3, 9, 27, 81, 243;... ${b_3}^2=b_2\cdot b_4$ тобто $27^2=9\cdot 81$ $729=729$
Формула суми n перших членів геометричної прогресії: $S_n=\frac{b_nq-b_1}{q-1}$ або $S_n=\frac{b_1-b_nq}{1-q}$ $S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$, $\boxed{S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q},}$ $n\in N$, $q\neq 1$ $n\in N$, $q\neq 1$	1) $3, 9, 27, 81, 243,...$ $q=3$ $S_4=\frac{b_4q-b_1}{q-1}$; $S_4=\frac{81\cdot 3-3}{3-1}=\frac{240}{2}=120$ 2) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16};...$ $q=\frac{1}{2}$ $S_5=\frac{b_1(1-q^5)}{1-q}$; $S_5=\frac{1\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1-\frac{1}{32}}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{31}{32}}{\frac{1}{2}}=$ $=\frac{31\cdot 2}{32}=\frac{31}{16}=1\frac{15}{16}$.
Якщо (b_n) – нескінченно спадна геометрична прогресія $(\lvert q\rvert<1)$, то її сума обчислюється за формулою: $\boxed{S=\frac{b_1}{1-q}}$	$\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$;... $b_1=\frac{1}{2}$; $q=\frac{1}{2}$ $S=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1$.

1 У

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

Розв'язування задач

1. Знайти знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо:

а) $b_4 = 20,\ b_5 = 30$.

Розв'язання. $q = \frac{b_{n+1}}{b_n};\ q = \frac{b_5}{b_4};\ q = \frac{30}{20};\ q = \frac{3}{2}$.

Відповідь: $\frac{3}{2}$.

б) $b_{442} = 25,\ b_{441} = 30$.

Розв'язання. $q = \frac{b_{n+1}}{b_n};\ q = \frac{b_{442}}{b_{441}}.\ q = \frac{25}{30} = \frac{5}{6},\ q = \frac{5}{6}$.

Відповідь: $q = \frac{5}{6}$.

2. Обчислити п'ятий член геометричної прогресії (b_n).

а) $2;\ 6;\ 18;\ldots$

Розв'язання. $2;\ 6;\ 18;\ldots\quad b_1 = 2,\ q = 3;$

$b_5 = b_1 \cdot q^{5-1} = b_1 q^4;$

$b_5 = 2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162$.

Відповідь: 162.

б) $5\frac{1}{3};\ 3\frac{1}{5};\ 1\frac{23}{25};\ldots$

Розв'язання. $b_1 = 5\frac{1}{3};\ q = 3\frac{1}{5} : 5\frac{1}{3} = \frac{16}{5} : \frac{16}{3} = \frac{16}{5} \cdot \frac{3}{16} = \frac{3}{5};\ q = \frac{3}{5};$

$b_5 = b_1 \cdot q^4;\ b_5 = 5\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{16}{3} \cdot \frac{81}{625} = \frac{16 \cdot 27}{625} = \frac{432}{625}$.

Відповідь: $\frac{432}{625}$.

3. Знайти перший член геометричної прогресії (b_n), в якій:

а) $b_6 = 486,\ q = 3$.

Розв'язання. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1};$

$b_1 = \frac{b_n}{q^{n-1}};\ b_1 = \frac{b_6}{q^5};\ b_1 = \frac{486}{3^5} = \frac{486}{243} = 2$.

Відповідь: 2.

б) $b_9 = \frac{4}{9};\ q = -\frac{1}{3}$.

Розв'язання. $b_1 = \frac{b_9}{q^8};\ b_1 = \frac{\frac{4}{9}}{\left(-\frac{1}{3}\right)^8} = \frac{\frac{4}{9}}{\left(\frac{1}{3}\right)^8} = \frac{4 \cdot 3^8}{3^2} = 4 \cdot 3^6 = 4 \cdot 729 = 2916$.

Відповідь: 2916.

4. Знайти суму членів геометричної прогресії (b_n), в якій: $b_1 = 1,\ q = \frac{2}{3},\ n = 4$.

Розв'язання. $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q};\ S_4 = \frac{b_1(1-q^4)}{1-q};\ S_4 \frac{1\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^4\right)}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1-\frac{16}{81}}{\frac{1}{3}} = \frac{65}{81} : \frac{1}{3} = \frac{65}{81} \cdot \frac{3}{1} = \frac{65}{27} = 2\frac{11}{27}$.

Відповідь: $2\frac{11}{27}$.

5. Знайти суму n членів геометричної прогресії (b_n), в якій:

а) $b_1 = 3,\ b_8 = 384,\ n = 8$

Розв'язання. $b_8 = b_1 \cdot q^7;$

$q^7 = \frac{b_8}{b_1};\ q^7 = \frac{384}{3};\ q^7 = 128;\ q = 2$

$S_8 = \frac{b_8 \cdot q - b_1}{q-1};\ S_8 = \frac{384 \cdot 2 - 3}{2-1} = \frac{765}{1} = 765$.

Відповідь: $2;\ 765$.

б) $b_1 = 8,\ b_6 = \frac{1}{4},\ n = 7$.

Розв'язання. $b_6 = b_1 q^5;\ q^5 = \frac{b_6}{b_1};\ q^5 = \frac{\frac{1}{4}}{8} = \frac{1}{32};\ q = \frac{1}{2};$

$S_7 = \frac{b_1(1-q^7)}{1-q};\ S_7 = \frac{8 \cdot \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8 \cdot \left(1-\frac{1}{128}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{8 \cdot 127 \cdot 2}{128} = \frac{2^4 \cdot 127}{2^7} = \frac{127}{2^3} = \frac{127}{8} = 15\frac{7}{8}$.

Відповідь: $\frac{1}{2};\ 15\frac{7}{8}$.

6. Визначити перший і останній члени геометричної прогресії, в якій: $S_{11}=2047,\ q=2,\ n=11$.
18 Розв'язання. $S_{11}=\dfrac{b_1\left(q^{11}-1\right)}{q-1}$; $b_1=\dfrac{S_{11}(q-1)}{q^{11}-1}$; $b_1=\dfrac{2047(2-1)}{2^{11}-1}=\dfrac{2047}{2048-1}=\dfrac{2047}{2047}=1$ $b_1=1;\ b_{11}=b_1\cdot q^{10};\ b_{11}=1\cdot 2^{10}=1024.$
Відповідь: 1; 1024.
7. Між числами 27 и 729 розмістити два числа, які б утворили разом з даними геометричну прогресію.
Розв'язання. $b_1;\ b_2;\ b_3;\ b_4;\ldots\quad b_1=27;\ b_4=729;\ b_4=b_1\cdot q^3;\ q^3=\dfrac{729}{27}=27;\ q=3$ $b_2=27\cdot 3=81;\ b_3=81\cdot 3=243.$
Відповідь: 81, 243.
8. Написати геометричну прогресію $\left(b_n\right)$, в якій $b_5-b_1=15,\ b_4-b_2=6$.
Розв'язання. 1. $\begin{cases} b_5-b_1=15, \\ b_4-b_2=6; \end{cases}$ 2. $\begin{cases} b_1q^4-b_1=15, \\ b_1q^3-b_1q=6; \end{cases}$ 3. $\begin{cases} b_1\left(q^4-1\right)=15, \\ b_1q\left(q^2-1\right)=6; \end{cases}$ 4. $\begin{cases} b_1=\dfrac{15}{q^4-1}, \\ \dfrac{15q}{q^4-1}\left(q^2-1\right)=6; \end{cases}$ 5. $\begin{cases} b_1=\dfrac{15}{q_4-1}, \\ \dfrac{15q\left(q^2-1\right)}{\left(q^2-1\right)\left(q^2+1\right)}=6; \end{cases}$ 6. $\begin{cases} b_1=\dfrac{15}{q^4-1} \\ \dfrac{5q}{q^2+1}=2; \end{cases}$ 7. $\begin{cases} b_1=\dfrac{15}{q^4-1}, \\ 5q=2\left(q^2+1\right); \end{cases}$ 8. $\begin{cases} b_1=\dfrac{15}{q^4-1}, \\ 2q^2-5q+2=0; \end{cases}$ 9. $\begin{cases} b_1=\dfrac{15}{q^4-1}, \\ q=2; \end{cases}$ 10. $\begin{cases} b_1=1, \\ q=2; \end{cases}$ 11. $\begin{cases} b_1=\dfrac{15}{q^4-1}, \\ q=\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ 12. $\begin{cases} b_1=-16, \\ q=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$ $-16;\ -8;\ -4;\ -2;\ -1;\ldots$ $1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 16;\ 32;\ldots$
Відповідь: $-16;\ -8;\ -4;\ -2;\ -1;\ldots\quad 1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 16;\ 32;\ldots$.
9. Сума перших трьох членів арифметичної прогресії дорівнює 12. Якщо до третього члена додати 2, то дані числа утворять геометричну прогресію. Знайти ці числа.
Розв'язання. $\div a_1;\ a_2;\ a_3;\ldots$ $\div\div a_1;\ a_2;\ a_3+2;\ldots$ $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=12, \\ a_2^2=a_1\left(a_3+2\right); \end{cases}$ $\begin{cases} a_1+a_1+d+a_1+2d=12, \\ a_2^2=a_1\left(a_3+2\right); \end{cases}$ $\begin{cases} 3a_1+3d=12, \\ a_2^2=a_1\left(a_3+2\right); \end{cases}$ $\begin{cases} a_1+d=4, \\ a_2^2=a_1\left(a_3+2\right); \end{cases}$ $\begin{cases} a_2=4, \\ 16=\left(a_2-d\right)\left(a_2+d+2\right); \end{cases}$ $\begin{cases} a_2=4, \\ 16=(4-d)(6+d); \end{cases}$ $\begin{cases} a_2=4, \\ d^2+2d-8=0; \end{cases}$ $\begin{cases} a_2=4, \\ d=-4; \end{cases}$ $\begin{cases} a_2=4, \\ d=2; \end{cases}$ $a_1=8;\quad a_1=2;$ $a_3=0;\quad a_3=6;$ 8; 4; 0;...або 2; 4; 6;...
Відповідь: 8; 4; 0 або 2; 4; 6.

В

§ 7. Елементи прикладної математики

19

Математичне моделювання

Математичними методами розв'язують не тільки абстрактні математичні задачі, а й багато прикладних задач. **Прикладними задачами** в математиці називають задачі, умови яких містять нематематичні поняття. Розв'язуючи прикладну задачу математичними методами, спочатку створюють її **математичну модель**.

Задача 1. Скільки дошок потрібно, щоб настелити підлогу в кімнаті довжиною $7,5$ м і шириною 5 м, якщо довжина дошки 6 м, а ширина $0,25$ м?

Розв'язання. Поверхня підлоги має форму прямокутника. Щоб знайти площу прямокутника, потрібно його довжину помножити на ширину: $7,5\cdot 5=37,5$ (м^2); оскільки дошка також має форму прямокутника, то її площа: $6\cdot 0,25=1,5$ (м^2). Для того, щоб дізнатись, скільки треба дошок, треба: $37,5:1,5=25$ (дошок).

Відповідь: 25 дошок.

Дана задача прикладна, оскільки в ній говориться про поверхню підлоги – нематематичне поняття. Розв'язуючи задачу, ми замінили її іншою: замість поверхні підлоги розглядали прямокутник. Задача про знаходження площі прямокутника – модель даної прикладної задачі.

Задача 2. 30%-ий розчин борної кислоти змішали з 15%-им і отримали 450 г 20%-го розчину. Скільки грамів кожного розчину було узято?

Розв'язання. Нехай x г взяли 30%-го розчину, а y г – 15%-го. Тоді маса суміші буде $0,3x+0,15y$, а це $(450\cdot 0,2)$ г.

Отримаємо систему:

$$\begin{cases} x+y=450, \\ 0,3x+0,15y=450\cdot 0,2 \end{cases}$$

Нехай $x=450-y$, тоді

$$0,3x+0,15y=450\cdot 0,2;$$
$$0,3(450-y)+0,15y=90;$$
$$135-0,3y+0,15y=90;$$
$$0,15y=45; \quad y=300.$$

Отже, 15%-го розчину було 300 г, а 30%-го: $450-300=150$ (г).
Відповідь: 150 г, 300 г.

Ця задача також прикладна, оскільки розчин борної кислоти – нематематичне поняття. Система рівнянь – математична модель даної задачі.

Моделлю називають спеціально створений об'єкт, який відображує властивості досліджуваного об'єкта. Зменшені моделі літака, автомобіля, будівлі – приклади фізичних моделей. Математичні моделі створюють, використовуючи математичні поняття і відношення: геометричні фігури, числа, вирази тощо. Математичними моделями здебільшого бувають функції, рівняння, нерівності, їх системи.

Розв'язування прикладної задачі математичними методами здійснюється в три етапи:
1) створення математичної моделі даної задачі;
2) розв'язування відповідної математичної задачі;
3) аналіз відповіді.

Схематично ці етапи можна зобразити так: $A\to B\to C\to D$;
A – дана прикладна задача,
B – її математична модель,
C – відповідь для моделі,
D – відповідь для даної прикладної задачі A.

Щоб створити відповідну модель, треба знати не тільки математику, а й ту галузь науки чи виробництва, з якою пов'язана дана прикладна задача. Якщо модель складено неправильно, неправильними будуть і розв'язання задачі, і відповідь. Важливим є також останній етап розв'язування прикладної задачі. Відповідь C може бути точною для задачі B, відповідь для прикладної задачі A майже завжди може бути тільки наближеною. Тому її слід записувати відповідно до правил наближених обчислень.

Наближені обчислення

Означення	Приклади
При округленні десяткового дробу до якогось розряду всі наступні за цим розрядом цифри **замінюють нулями**, а якщо вони стоять після коми, то їх відкидають. Якщо перша наступна за цим розрядом цифра більше або дорівнює п'яти, то останню цифру **збільшують на 1**. Якщо ж перша наступна за цим розрядом цифра менше 5, то **останню цифру, що залишилась, не змінюють.**	Округлити число $\alpha = 2471,05624$ з точністю до: а) десятків; б) одиниць; в) десятих; г) сотих; д) тисячних. Розв'язання. а) $\alpha \approx 2470$; б) $\alpha \approx 2471$; в) $\alpha \approx 2471,1$; г) $\alpha \approx 2471,06$; д) $\alpha \approx 2471,056$. Всі знайдені значення в прикладі називаються наближеними значеннями числа $\alpha = 2471,05624$.
Наближені значення з'являються не тільки при округленні чисел, частіше вони виникають при різних вимірюваннях (довжин, мас, температур та ін). Нехай a – наближене значення числа α. Тоді модуль різниці точного і наближеного значення чисел α і a, тобто $\lvert\alpha - a\rvert$, називається **абсолютною похибкою** наближеного значення числа α, а відношення абсолютної похибки до модуля наближеного значення називається **відносною похибкою** наближеного значення. Відносну похибку зазвичай виражають у відсотках. Якщо точне значення величини невідоме, то невідома й абсолютна похибка її наближеного значення. В такому випадку вказують **межу абсолютної похибки** – число, якого не перевищує абсолютна похибка.	Зваживши деталь, маса якої дорівнює $54,12705$ г, на вагах з ціною поділки шкали $0,1$ г, одержали наближене значення маси $54,1$ г. Знайти абсолютну і відносну похибку цього наближеного значення. Розв'язання. Абсолютна похибка дорівнює $54,12705 - 54,1 = 0,02705$, відносна похибка дорівнює $\frac{0,02705}{54,1} \cdot 100\% = 0,05\%$. Якщо $x = 4,273 \pm 0,002$, тобто $4,271 < x < 4,275$, то межа абсолютної похибки дорівнює $0,002$.
Наближені значення можна записувати і без меж. При цьому домовились записувати їх так, щоб усі їх цифри, крім останньої, були правильні, а решта (сумнівні) відрізнялись від правильних не більш як на одиницю.	Наприклад, коли пишуть $x = 6,428$ м, то розуміють, що $x = 6,428 \pm 0,001$ м. Якщо $y = 3,247 \pm 0,002$ кг, то говорити $y = 3,247$ кг не прийнято, такий результат бажано округлити: $y = 3,25$ кг.

Правильною цифрою наближеного значення називають цифру будь-якого розряду, якщо абсолютна похибка не перевищує одиниці цього розряду. 21	В таблиці щільності речовин зазначено, що наближене значення щільності кисню ρ (в кг/м^3) дорівнює $1{,}429$. У записі $1{,}429$ всі цифри правильні. Значить, абсолютна похибка менше або дорівнює $0{,}001$. 1) $y = 73 \pm 1$; $72 \le y < 74$; 2) $\rho = 1{,}429 \pm 0{,}001$; $1{,}428 < \rho < 1{,}430$ 3) $y = 6{,}5 \pm 0{,}1$; $6{,}5 - 0{,}1 \le y \le 6{,}5 + 0{,}1$; $6{,}4 \le y \le 6{,}6$
Нагадаємо, що **десятковими знаками числа** називають усі його цифри, що стоять праворуч від десяткової коми.	У наближеному значенні $0{,}02085$ п'ять десяткових знаків і чотири – значущі цифри: 2; 0; 8; 5.
Значущими цифрами числа називають усі його цифри, крім нулів зліва і нулів справа, які стоять на місцях цифр, замінених при округленні.	
При додаванні і відніманні наближених значень в результаті слід залишати стільки десяткових знаків, скільки їх має компонент дії з найменшою кількістю десяткових знаків.	1) $4{,}24 + 1{,}5 = 5{,}7$; $4{,}24 - 1{,}5 = 2{,}7$. 2) $x \approx 17{,}2$; $y \approx 8{,}407$; $x + y = 17{,}24 + 8{,}407 = 25{,}607$; $x + y \approx 25{,}6$. 3) $x \approx 6{,}784$; $y \approx 4{,}91$; $x - y \approx 1{,}874$; $x - y \approx 1{,}87$.
При множенні наближених значень у результаті слід зберігати стільки значущих цифр, скільки їх має множник з найменшою кількістю значущих цифр. Подібним правилом користуються і при діленні наближених значень.	Перемножимо (поділимо) дані наближені значення. 1) $\begin{array}{r} 8{,}23 \\ \times 1{,}5 \\ \hline 4115 \\ 823 \\ \hline 12{,}345 \approx 12{,}3 \end{array}$ Відповідь: $\approx 12{,}3$. 2) $x \approx 563{,}2$; $y \approx 32$; $x : y \approx 17{,}6$; Відповідь: $x : y \approx 18$.

Складні відсотки

Поняття складного відсотка зустрічається при збільшенні (зменшенні) числа на $p\%$ десяткість разів (щороку, щомісячно, щоденно) без вилучення приросту, тобто кожен рік нараховується відсоток з урахуванням нарощеної величини.

Обчислювати складні відсотки зручно за допомогою таблиці, якщо увести коефіцієнт збільшення (зменшення) – k.

	1 – й рік	2 – й рік	3 – й рік	…	n – й рік
	Щорічне збільшення на $p\%$ $\left(k = 1 + \frac{p}{100}\right)$				
Було	a	ka	k^2a		
Приросло за рік	$\frac{p}{100} \cdot a$	$\frac{p}{100} \cdot ka$	$\frac{p}{100} \cdot k^2a$		
Стало	$a + \frac{p}{100} \cdot a =$ $= \left(1 + \frac{p}{100}\right)a = ka$	$ka + \frac{p}{100} \cdot ka =$ $= \left(1 + \frac{p}{100}\right)ka = k^2a$	$k^2a + \frac{p}{100} \cdot k^2a =$ $= \left(1 + \frac{p}{100}\right)k^2a = k^3a$	…	$k^n a$

22

Щорічне зменшення на $p\%$ $(k = 1 - \frac{p}{100})$					
Було	a	ka	k^2a		
Зменшилось за рік	$\frac{p}{100} \cdot a$	$\frac{p}{100} \cdot ka$	$\frac{p}{100} \cdot k^2a$		
Стало	$a - \frac{p}{100} \cdot a =$ $= (1 - \frac{p}{100})a = ka$	$ka - \frac{p}{100} \cdot ka =$ $= (1 - \frac{p}{100})ka = k^2a$	$k^2 - \frac{p}{100} \cdot k^2a =$ $= \left(1 - \frac{p}{100}\right)k^2a = k^3a$	…	k^na

Початковий вклад у банк склав 300 грн. За рік начислюється 3% річних. Знайти суму вкладу через 5 років.	
Розв'язання.	$S = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$, $a = 300;$ $p = 3;$ $n = 5.$ $S = 300\left(1 + \frac{3}{100}\right)^5 = 300(1{,}03)^5 \approx 300 \cdot 1{,}159 \approx 348(грн).$
Відповідь: ≈ 348 грн.	

Відсоткові розрахунки

Означення	Приклади
<u>Процент</u> – це одна сота частина цілого. $1\% = 0{,}01;$ $25\% = 0{,}25;$ $50\% = 0{,}5;$ $100\% = 1.$ Часто доводиться розв'язувати задачі на відсотки бухгалтерам і працівникам банків. Вкладений в Ощадбанк початковий капітал A_0 під $p\%$ річних через n років перетвориться в нарощений капітал. $A_n = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)n.$	Із цукрових буряків при переробці отримують 16% цукру. Скільки треба узяти цукрових буряків, щоб отримати 48 ц цукру? $48 : 0{,}16 = 300$ (ц) або $\frac{48}{16} \cdot 100 = 300$ (ц).
Ця формула складних відсотків застосовується не тільки у фінансових операціях, нею користуються для означення кількості населення країни або міста, зростання поголів'я тварин та при вирішенні інших питаннь.	Із 35 учнів класу на уроці присутні 28. Знайти відсоток присутності. $28 : 35 \cdot 100 = \frac{28 \cdot 100}{35} = \frac{4 \cdot 100}{5} = 80\%.$ Відповідь: 80%.
Подібні до поняття відсотка проміле і проба. **Проміле** – це одна тисячна $\left(1^0/_{00} - 0{,}001\right).$ **Пробами** характеризують сплави дорогоцінних металів. Так, золото 875-ї проби – це сплав, в 1000 г якого міститься 875 г чистого золота.	Латунь – сплав 60% міді і 40% цинку. Скільки міді та цинку треба сплавити, щоб отримати 500 г латуні? 1) $500 \cdot 0{,}6 = 300$ г (міді); 2) $500 \cdot 0{,}4 = 200$ г (цинку).

КРАЇНА МРІЙ

§ 1. Тригонометричні функції та їх властивості

§ 2. Тригонометричні рівняння

§ 3. Тригонометричні нерівності

§ 4. Степенева функція. Ірраціональні рівняння та нерівності

§ 5. Показникова функція. Показникові рівняння та нерівності

§ 6. Логарифмічна функція. Логарифмічні рівняння та нерівності

10 КЛАС