

§ 6. Розв'язування лінійних рівнянь з двома змінними

Означення	Приклади
<p>Лінійним рівнянням з двома змінними x і y називається рівняння виду: $ax+by+c=0$, де x і y — змінні, a, b, c — деякі числа.</p> <p>Розв'язком рівняння з двома змінними називається будь-яка пара чисел $(x; y)$, яка перетворює рівняння на тотожність.</p> <p>Розв'язати рівняння з двома змінними — означає знайти всі пари чисел $(x; y)$, які є його розв'язком.</p>	<p>$3x+4y+5=0$ — лінійне рівняння.</p> <p>$x+2y=5$ — лінійне рівняння.</p> <p>Пара $(1; 2)$ — розв'язок рівняння, тобто при $x=1; y=2$, отримуємо $1+2\cdot 2=5$; $5=5$ — правильна рівність, пара $(2; 1)$ — не є розв'язком, оскільки при $x=2; y=1$ отримуємо $2+2\cdot 1=5$.</p> <p>$4=5$ не є тотожністю, тобто пара $(2; 1)$ не є розв'язком рівняння $x+2y=5$.</p>
<p>Множина точок, координати яких задовільняють рівняння $ax+by+c=0$,</p> <p>називається його графіком.</p> <p>Графіком рівняння $ax+by+c=0$, де a, b, c — деякі числа, є пряма.</p>	<p>1) Якщо коефіцієнт b при y не дорівнює нуллю, то y можна виразити через x:</p> $ax+by+c=0, by=-ax-c,$ $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ — це лінійне рівняння. <p>2) Якщо $b=0$, то $ax+by+c=0$ набуває вигляду:</p> $ax+0y+c=0, ax+c=0, \text{ при } a \neq 0, x=-\frac{c}{a}$ і графіком рівняння буде пряма, паралельна осі ординат, що перетинає вісь абсцис у точці $x=-\frac{c}{a}$. <p>3) При $a=0$ маємо:</p> $0x+by+c=0, by+c=0, y=-\frac{c}{b}$ — це пряма, паралельна осі абсцис, що перетинає вісь ординат в точці $y=-\frac{c}{b}$. <p>4) Якщо $a=0$ і $b=0$, то рівняння набуває вигляду $0x+0y+c=0$, тоді при $c=0$ рівність правильна при всіх x і y, при $c \neq 0$ — неправильна при будь-яких x та y, тобто при $a=b=c=0$ в цьому випадку графіком лінійного рівняння $ax+by+c=0$ є вся координатна площа.</p>

одне підбираєм друге шукам.

x і y має бути в різних зображеннях

- * Лінійне рівняння з двома змінними $ax+by=c$
Цікі рівняння мають нескінченно багато розв'язків які утворюють пряму на координатній площині
- * лінійне р-е утворює пряму, пряму місце на координатній площині.

Особливості лінійних рівнянь

- * Зернина запису: $ax+by=c$ де a, b, c - цілі числа
 $a \neq b$ - не додаванням число однакове
- * Горизонтальні розв'язки належать лінії рівняння з однією змін.
- * Генетичний запис: Всі розв'язки рівняння утворюють пряму на координатній площині

Методи розв'язування

1. Підстановчий метод

Вибираємо значення для однієї змінної і обчислюємо відповідні значення для іншої

$$\text{Наприклад для рівняння } 2x+3y=6$$

- Якщо $x=0$, то $3y=6$, звідки $y=2$
- Якщо $x=3$, то $3y=0$, звідки $y=0$

Розв'язки: $(0, 2)$ $(3, 0)$ і будуть координати точок на прямі.

Загальний підхід до розв'язування лінійних рівнянь з двома невідомими

Для розв'язування лінійного рівняння виду $ax + by = c$, де є дві невідомі (x та y), потрібно:

1. Виразити одну змінну через іншу, наприклад:
 - Якщо $b \neq 0$, виразимо y через x : $y = (c - ax) / b$
 - Якщо $a \neq 0$, виразимо x через y : $x = (c - by) / a$
2. Записати розв'язок у вигляді формули, що зв'язує x та y
3. Розв'язком буде множина точок (x, y) , які задовольняють цю формулу. Геометрично це пряма на координатній площині.

Особливі випадки:

- Якщо $a = 0$ і $b = 0$, а $c \neq 0$, то рівняння не має розв'язків
- Якщо $a = 0$ і $b = 0$, а $c = 0$, то розв'язком буде вся координатна площа

Висновок

Лінійне рівняння з двома невідомими має безліч розв'язків, які утворюють пряму на координатній площині. Для однозначного визначення конкретного розв'язку потрібна ще одна умова (ще одне рівняння), що приводить до системи лінійних рівнянь.

Графічно розв'язок лінійного рівняння з двома невідомими можна представити як множину точок, що утворюють пряму лінію на координатній площині.

2. Метод через видалення змінної

Видаласямо одну змінну через іншу

Деліть рівняння $2x + 3y = 6$



Видалимо y через x : $3y = 6 - 2x$, звідки $y = (6 - 2x) / 3$

І тепер потрібно знайти y для будь-якого значення x

$y = (6 - 2x) / 3 = 2 - (2/3)x$. Знайдемо декілька точок, що належать цій прямій

Якщо $x = 0$, то $y = 2$

Якщо $x = 3$, то $y = 0$

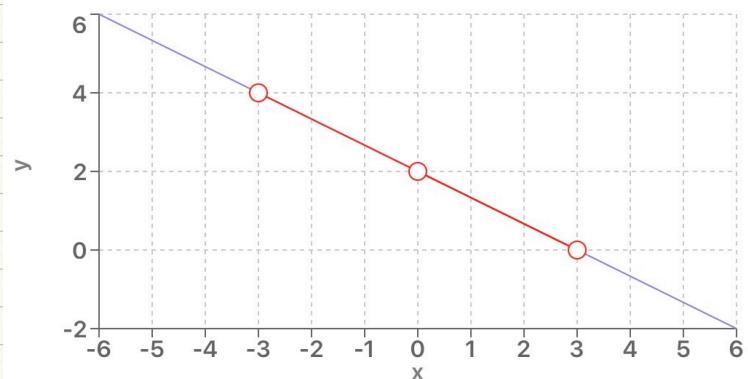
Якщо $x = -3$, то $y = 4$

Пояснення рівняння: $2x + 3y = 6$

Виражено відносно y : $y = (6 - 2x) / 3$

- Лінійне рівняння $2x + 3y = 6$ має нескінченно багато розв'язків.
- Кожна точка на прямій є розв'язком рівняння.
- Наприклад, точки $(0, 2)$ і $(3, 0)$ є розв'язками цього рівняння.
- Щоб знайти y для будь-якого x , використовуйте формулу: $y = (6 - 2x) / 3$

Графік рівняння $2x + 3y = 6$



(0, 2): $x = 0, y = 2$

(3, 0): $x = 3, y = 0$

(-3, 4): $x = -3, y = 4$

Приміра №2

$x - 2y = 4$ Видалимо y через x : $y = (x - 4) / 2$

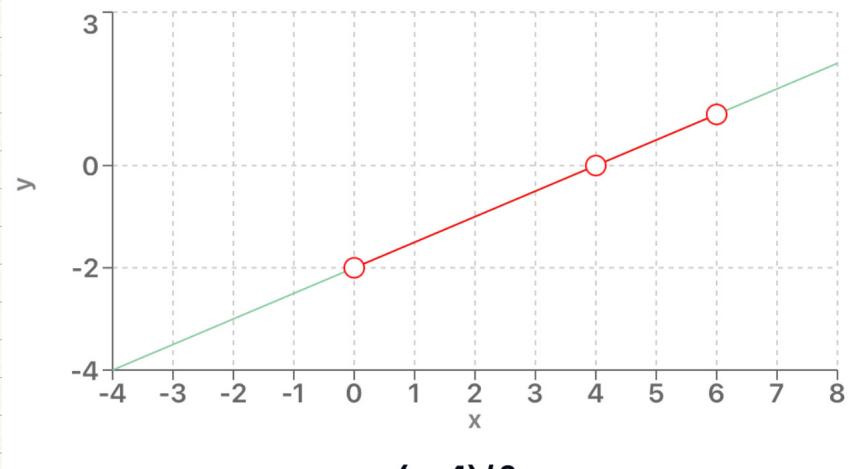
Знайдемо декілька точок разом з ними

Якщо $x = 0$ то $y = -2$

Якщо $x = 4$ то $y = 0$

Якщо $x = 6$ то $y = 1$

Графік рівняння $x - 2y = 4$



(0, -2): $x = 0, y = -2$

(4, 0): $x = 4, y = 0$

(6, 1): $x = 6, y = 1$

Лекція 3

$$5x - 4y = 20 \quad \text{Виразили } y \text{ через } x \quad y = (5x - 20)/4 = 5x/4 - 5$$

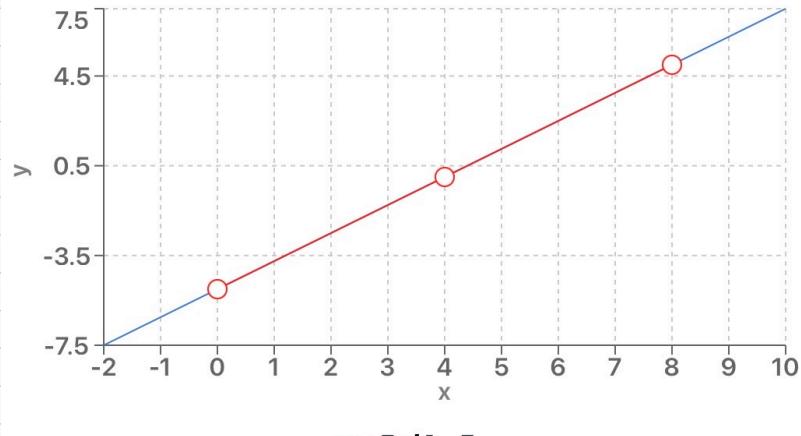
Знайдемо декілька точок побудову:

Якщо $x=0$, то $y = -5$

Якщо $x=4$, то $y = 0$

Якщо $x=8$, то $y=5$

Графік рівняння $5x - 4y = 20$



3. Метод перехоплення

???

Знайдемо точки перетину прямої з осями координат: Для лівий осі $2x + 2y = 6$

Перетин з віссю x ($y=0$), $2x = 6$ звідки $x=3$

Перетин з віссю y ($x=0$), $3y = 6$ звідки $y=2$

Слідє через точки $(3; 0)$ $(0; 2)$ проходить пряма, яка є уявленням рівняння.

Ідея будова уявлення для
линейних рівнянь з двома змінними

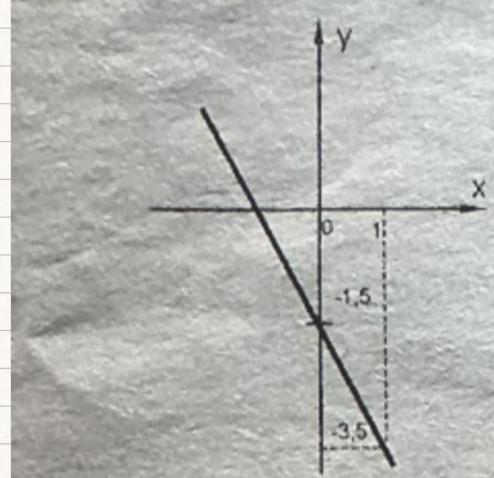
Приклад 1

Побудувати графік рівняння: $4x + 2y + 3 = 0$

Остільки $a \neq 0; b \neq 0; c \neq 0$, то графіком рівняння є прямі, які можна побудувати за допомогою двох точок:

$$x=0; x=1; y = -1,5; \text{ та } y = -3,5$$

Розв'язання.

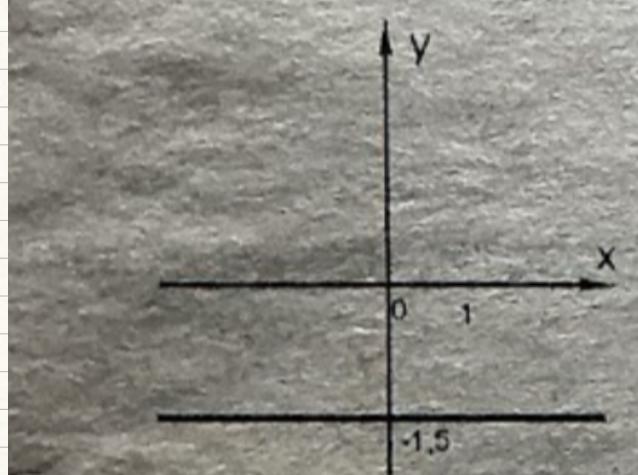


Приклад 2

Побудувати графік рівняння: $0x + 2y + 3 = 0$

Остільки $a=0$; тоді $2y = -3$; $y = -\frac{3}{2}$ - це прямі, паралельні до осі абсцис, що проходять через точку з координатами тими $(0; -\frac{3}{2})$

Розв'язання.

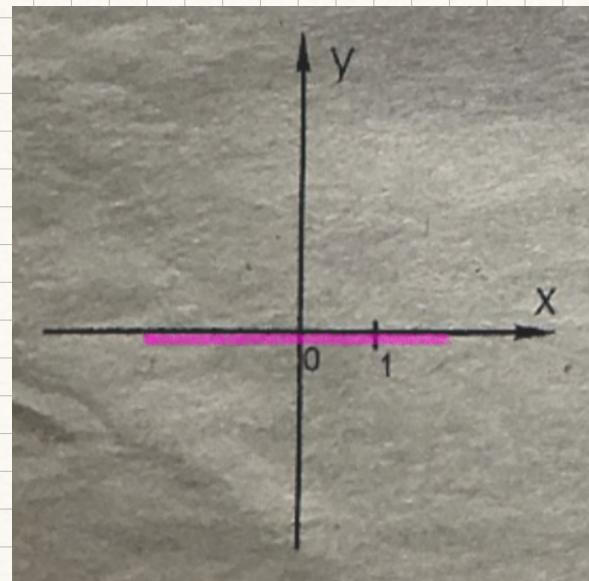


Приклад 3

Побудувати графік рівняння: $x + 0y + 0 = 0$

Оскільки $b=0$ і $c=0$ то $x=0$ - це пряма перпендикулярна осі абсцис, і є віссю ординат.

Це те саме що графік рівняння $x=0$



Який найпопулярніший ресурс для побудови графіків по лінійним рівнянням

Для побудови графіків по лінійним рівнянням одним з найпопулярніших ресурсів є Desmos (desmos.com). Це безкоштовний онлайн-калькулятор та графічний інструмент, який дозволяє легко будувати графіки лінійних рівнянь та виконувати математичні обчислення.

Інші популярні ресурси:

- GeoGebra - потужний математичний інструмент, який поєднує геометрію, алгебру та обчислення
- Wolfram Alpha - обчислювальна платформа знань, яка також візуалізує лінійні рівняння
- Microsoft Excel або Google Таблиці - для простих графіків на основі табличних даних
- Python з бібліотеками matplotlib або plotly - для програмного створення графіків

Desmos особливо популярний завдяки своєму інтуїтивному інтерфейсу, можливості миттєво побачити зміни в графіку при коригуванні рівняння, та хорошій підтримці української мови.

§ 7. Системи лінійних рівнянь з двома змінними

Означення	Приклади
<p>Системою рівнянь називаються два або декілька рівнянь, у яких потрібно знайти всі спільні розв'язки.</p> <p>Рівняння системи записуються стовпчиком і об'єднуються фігурною дужкою.</p> <p>Система рівнянь називається лінійною, якщо всі рівняння, що входять до системи, є лінійними.</p> <p>Систему двох лінійних рівнянь з двома змінними записують у такому вигляді:</p> $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 3y = 9, \\ 3x + 2y = 7. \end{cases}$ <p>Розв'язками такої системи рівнянь є множина упорядкованих пар чисел $(x; y)$.</p> <p>Пара чисел $(3; -1)$ є розв'язком системи</p> $\begin{cases} 2x - 3y = 9, \\ 3x + 2y = 7. \end{cases}$
<p>Розв'язати систему рівнянь — означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.</p> <p>Якщо система має скінченне число розв'язків, то вона називається визначеною.</p> <p>Якщо система має нескінченну множину розв'язків, то система називається невизначеною.</p> <p>Дві системи називаються рівносильними, якщо вони мають однакову множину розв'язків.</p>	
<p>Якщо система із n лінійних рівнянь містить n невідомих, то можливі такі три випадки:</p> <ul style="list-style-type: none"> — система не має розв'язків; — система має тільки один розв'язок; — система має нескінченно багато розв'язків. <p>Система</p> $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$	<p>1) $\begin{cases} 3x - 4y = 15, \\ 6x - 8y = 11. \end{cases}$</p> <p>$\frac{3}{6} = \frac{-4}{-8} \neq \frac{15}{11}$ — розв'язків немає;</p> <p>2) $\begin{cases} 3x - 4y = 13, \\ x + y = 9. \end{cases}$</p> <p>$\frac{3}{1} \neq -\frac{4}{1}$, єдиний розв'язок $(7; 2)$;</p> <p>3) $\begin{cases} 3x - 4y = 15, \\ 6x - 8y = 30. \end{cases}$</p> <p>$\frac{3}{6} = \frac{-4}{-8} = \frac{15}{30}$, нескінченно багато розв'язків.</p>
<p>Не має розв'язків, якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.</p> <p>Має єдиний розв'язок, якщо $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.</p> <p>Має нескінченну число розв'язків, якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.</p>	

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

Типи систем		Приклади
1) Жодної точки, жодної точки.	$\begin{cases} 0x + 0y = 1, \\ 0x + 0y = 2. \end{cases}$	Система не має розв'язків.
2) Вся площаина, жодної точки.	$\begin{cases} 0x + 0y = 0, \\ 0x + 0y = -1. \end{cases}$	Система не має розв'язків.
3) Вся площаина, вся площаина.	$\begin{cases} 0x + 0y = 0, \\ 0x + 0y = 0. \end{cases}$	Будь-яка пара чисел – розв'язок системи
4) Жодної точки, пряма.	$\begin{cases} 0x + 0y = 6, \\ 2x + 3y = 5. \end{cases}$	Система не має розв'язків.
5) Вся площаина, пряма.	$\begin{cases} 0x + 0y = 0, \\ 2x + 7y = 5. \end{cases}$	Розв'язок системи – координати будь-якої точки прямої.
6) Дві прямі, що перетинаються.	$\begin{cases} x + y = 0, \\ x + 3y = 4. \end{cases}$	Єдиний розв'язок – координати точки перетину прямої.
7) Дві паралельні прямі.	$\begin{cases} x + y = 0, \\ x + y = 1. \end{cases}$	Система не має розв'язків.
8) Дві прямі, які співпадають.	$\begin{cases} x + y = 0, \\ 2x + 2y = 0. \end{cases}$	Координати будь-якої точки прямої є розв'язком системи.

Способи розв'язання систем

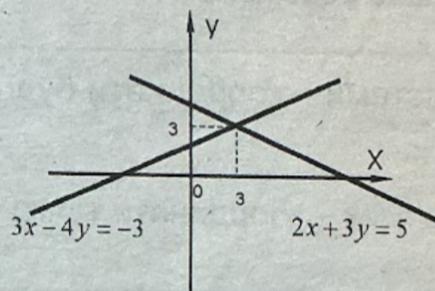
Спосіб підстановки

Розв'язати систему рівнянь:	$\begin{cases} x + 3y = 15, \\ 3x - 4y = 6. \end{cases}$
Розв'язання. Виразимо з першого рівняння змінну $x = 15 - 3y$ і підставимо в друге рівняння, а друге рівняння системи залишимо без змін, отримаємо систему, рівносильну даній.	$\begin{cases} x = 15 - 3y, \\ 3(15 - 3y) - 4y = 6. \end{cases}$
Розв'яжемо друге рівняння системи:	$\begin{aligned} 45 - 9y - 4y &= 6; \\ -13y &= 6 - 45; \\ -13y &= -39; \\ y &= 3. \end{aligned}$
Підставимо отримане значення змінної y в перше рівняння системи:	$\begin{cases} x = 15 - 3 \cdot 3, \\ y = 3. \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6, \\ y = 3. \end{cases}$
Відповідь: $(6; 3)$.	

Графічний спосіб

Для розв'язання системи графічним способом будують графіки всіх рівнянь, які входять в систему. Координати точок перетину є розв'язком цієї системи.

Графічний спосіб є зручним для знайдення числа розв'язків системи (тобто скільки точок перетину графіків, стільки розв'язків має система), але незручний при обчисленні координат точок (тобто значення координат можна отримати лише наближені).



Розв'язати систему рівнянь.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 15, \\ 3x - 4y = -3. \end{cases}$$

Побудуємо графіки обох рівнянь:

1) $2x + 3y = 15$

$3y = 15 - 2x; y = 5 - \frac{2}{3}x$ — це пряма, яка проходить через точки з координатами $(0; 5); (3; 3)$.

2) $3x - 4y = -3$

$4y = 3x + 3, y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$, це пряма, яка проходить через точки з координатами $(-1; 0); (3; 3)$.

3) графіки цих функцій перетинаються в точці з координатами $(3; 3)$.

Відповідь: $(3; 3)$.

Спосіб додавання

Способом додавання зручно розв'язувати системи, у яких коефіцієнти при одній із змінних – протилежні числа.

Розв'язати систему рівнянь.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 15, \\ x - 2y = -3. \end{cases}$$

Розв'язання.

Коефіцієнти при змінній y – протилежні числа, тому додамо почленно обидва рівняння системи:

$2x + 2y + x - 2y = 15 - 3$, спростимо це рівняння: $3x = 12$, отримаємо $x = 4$.

Повернемось в систему $\begin{cases} x = 4, \\ x - 2y = -3. \end{cases}$ Підставимо значення $x = 4$ у друге рівняння системи і розв'яжемо його.

$$\begin{cases} x = 4, \\ 4 - 2y = -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ 2y = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y = 3.5. \end{cases}$$

Відповідь: $(4; 3.5)$.

Графічний / Графічний спосіб / Розв'язання

Метод підстановки для системи лінійних рівнянь

1. Виразити одну змінну через іншу з одного рівняння
2. Підставити отриманий вираз у друге рівняння
3. Розв'язати отримане рівняння з однією змінною
4. Підставити знайдене значення масиву чоб знайти іншу змінну.

Приклад 1

Система з двох змінних

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

1. Виразити y через x з другого рівняння

$$y = x - 1$$

2. Підставити цей вираз у перше рівняння: $2x + (x - 1) = 5$

3. Розв'яжемо отримане рівняння $2x + x - 1 = 5$

$$3x - 1 = 5$$

$$3x = 6; x = 2$$

4. Знайдемо y підставивши $x = 2$

$$y = x - 1 = 2 - 1 = 1$$

В: $x = 2; y = 1$.

Приклад 2.

Система з дробами

$$\begin{cases} x/2 + y/3 = 2 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

1. Виразити x через y з другого рівняння

$$x = y + 3$$

2. Підставити у перше рівняння: $(y + 3)/2 + y/3 = 2$

3. Розв'яжемо рівняння, зведено до спільного знаменника

$$(3(y + 3) + 2y)/6 = 2$$

$$(3y + 9 + 2y)/6 = 2$$

$$(5y + 9)/6 = 2$$

$$5y + 9 = 12$$

$$5y = 3; y = 3/5$$

Тривимій 3

Система з трема змінними

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

1. Виразимо z через x та y з першого рівняння: $z = 6 - x - y$

2. Підставимо цей вираз у друге та третьє рівняння:

$$2x - y + (6 - x - y) = 3$$
$$x + 2y - (6 - x - y) = 2$$

3. Спростимо ці рівняння:

$$2x - y + 6 - x - y = 3$$

$$x - 2y + 6 - x - y = 2$$

$$x - 2y = -3$$

$$-2y - y = -4$$

$$x - 2y = -3$$
$$-3y = -4$$

4. Розв'яжемо їх y :

$$-3y = -4; y = 4/3$$

5. Знайдемо x підставивши $y = 4/3$:

$$x - 2(4/3) = -3$$

6. Знайдемо x :

$$z = 6 - x - y = 6 - (-1/3) - 4/3 = 6 + 1/3 - 4/3 = 6 - 3/3 = 5$$

$$x - 8/3 = -3$$

$$x = -3 + 8/3$$

Відповідь: $x = -1/3, y = 4/3, z = 5$

$$x = -9/3 + 8/3$$

$$x = -1/3$$

Пункт 4

Система з параметрами

$$\begin{cases} ax + y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

де a - параметр
1. Виразимо y з першого рівняння
 $y = 3 - ax$

2. Підставимо y друге рівняння

$$x + 2(3 - ax) = 5$$

3. Розглянемо для x

$$x + 6 - 2ax = 5$$

$$x - 2ax = -1$$

$$x(1 - 2a) = -1$$

$$x = -1/(1 - 2a) \text{ якщо } a \neq 1/2$$

4. Знайдемо y

$$y = 3 - ax = 3 - a \cdot (-1/(1 - 2a)) = 3 + a/(1 - 2a)$$

Відповідь: Якщо $a \neq 1/2$: $x = -1/(1 - 2a)$, $y = 3 + a/(1 - 2a)$
Якщо $a = 1/2$ система не має розв'язків оскільки
рівніння спадають між собою

Графічний метод розв'язання систем лінійних рівнянь

Приклад 1

Розв'язання одного лінійного р-н

Для рівняння виду $ax + b = 0$ графічний метод полягає у побудові графіка функції $y = ax + b$ і знаходженні точок перетину з віссю Ox .

Рівняння: $2x - 4 = 0$

1. Перетворюємо на вигляд $y = 2x - 4$

2. Будуємо графік ф-ї

3. Знаходимо точку перетину з Ox (таки $y = 0$)

4. Ця точка і буде розв'язком рівняння ($x = 2$)

Більш детальний погляд

$2x - 4 = 0$; додаємо 4 до обидвох частин

після чого $2x = 4$

Ділимо обидві частини на 2: $x = 2$

Графічна інтерпретація

Графік показує лінійну ф-ю $y = 2x - 4$

лінія перетинає вісь x при $x = 2$, що є розв'язком

р-н $2x - 4 = 0$

Інтерес з осей:

Графіка перетинає вісь y при $y = -4$ (таки $x = 0$)

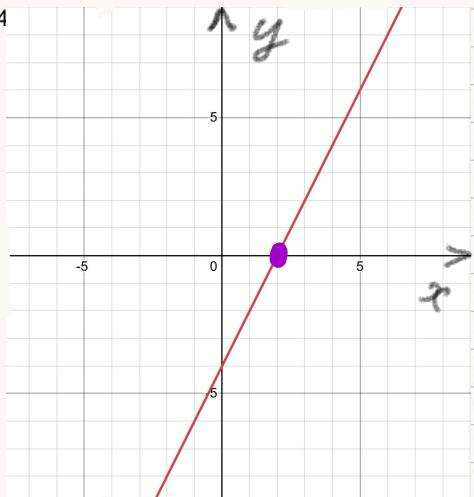
Приклад 1: Розв'язання рівняння $2x - 4 = 0$

Приклад 1: Розв'язання рівняння $2x - 4 = 0$

Рівняння: $2x - 4 = 0$

Функція: $y = 2x - 4$

Розв'язок: $x = 2$



Графічний метод: Знаходимо точку перетину графіка з віссю Ox . В цій точці $y = 0$, і ми отримуємо розв'язок $x = 2$.

Лінія перетинає вісь x при $x=2$ (таки $y=0$)

у) Потоки на прямій

Лінія проходить через точку $(0, -4)$ тому що якщо $x=0, y=2(0)-4=-4$

Лінія проходить через точку $(2, 0)$ тому що якщо $x=2, y=2(2)-4=0$

Графічний метод полягає у зміщеннях точок, де прямі перетинає вісь x , що є розв'язком рівняння $2x - 4 = 0$

Приклад 2

Розв'язання системи двох лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

1. Виразимо y з кожного рівняння:

$$y = 5 - 2x \quad (\text{з першого рівняння})$$

$$y = x - 1 \quad (\text{з другого рівняння})$$

2. Із якої прямої обіх функцій

3. Із якої прямої обіх функцій

4. Найдемо точки перетину і дужуть розв'язок системи

$$(x = 2, y = 1)$$

Перевірка

$$2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$2 - 1 = 1$$

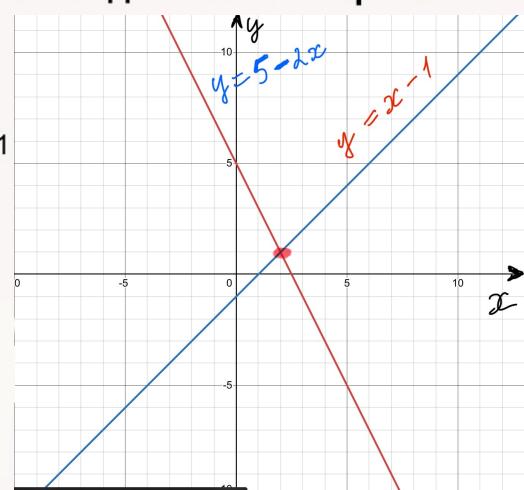
Приклад 2: Система двох лінійних рівнянь

Система рівнянь:

$$2x + y = 5$$

$$x - y = 1$$

Розв'язок: $x = 2, y = 1$



Графічний метод: Знаходимо точку перетину двох прямих.
Координати цієї точки $(2, 1)$ є розв'язком системи.

Приклад 3

Система з нескінченною кількістю розв'язків

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

1. Уявімо, що обидві прямі поблизу збігаються. Це будеться тим, що друге уявлення є пропорційним першому (у випадку друге уявлення отримано множенням першого на 2).

У такому випадку будь-яка точка на прямій $x + y = 3$ є розв'язком системи. Множина точок не замкнена як множину точок $(t, 3-t)$ де t - будь-яке число.

Ці уявіння позначено кількою таких точок:

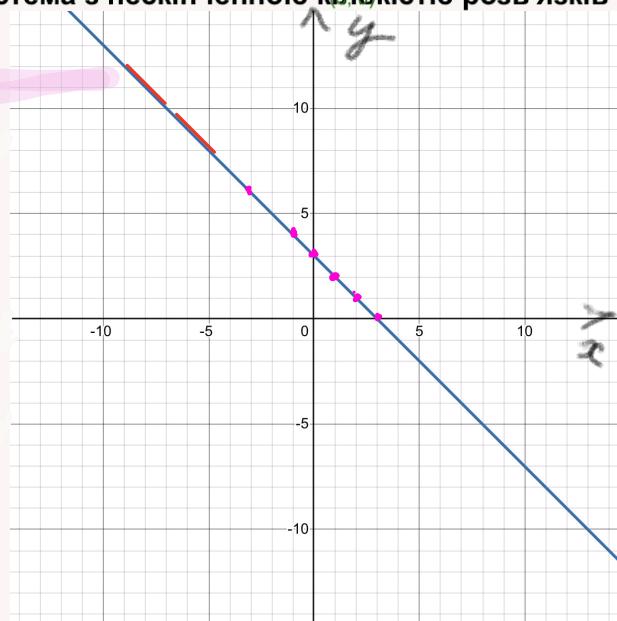
$(-3; 6) (-1; 4) (0; 3) (1, 2) (2, 1) (3, 0)$

Приклад 3: Система з нескінченною кількістю розв'язків

Система рівнянь:

$$x + y = 3$$

$$2x + 2y = 6$$



Графічний метод показує, що прямі збігаються, оскільки друге рівняння отримане множенням першого на 2.

Розв'язок: нескінчenna множина точок виду $(t, 3-t)$.

Дійснод 4

Система єз розв'язків

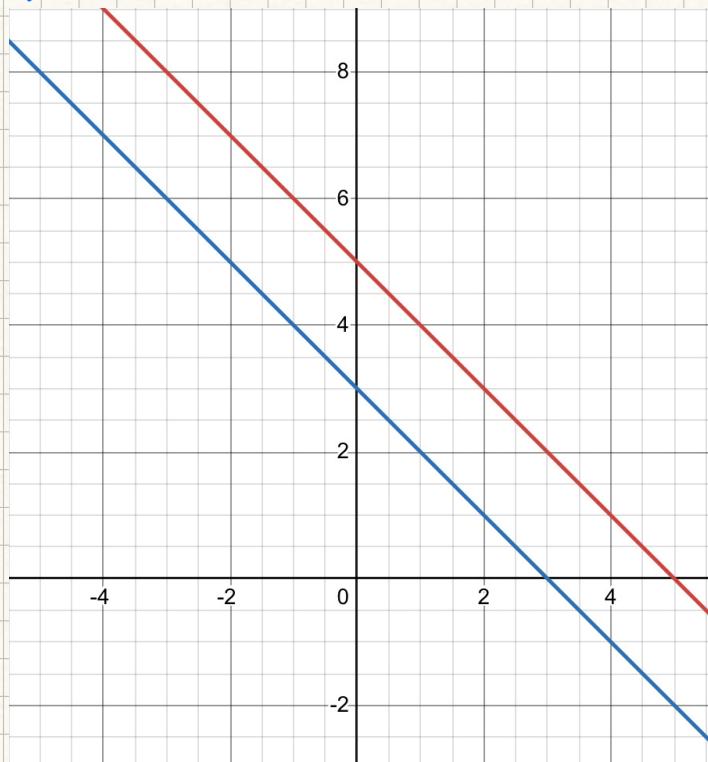
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

1. Ул. у графіку або ліній представ-е перше рівняння $x + y = 3$
2. Четверта лінія представлена другим рівнянням $x + y = 5$

3. Ці прямі паралельні і ніколи не перетинаються
4. Це змічить що система не має жодного розв'язку (суперечності система)
5. Числовими значеннями такі значення x та y які є одночасно задовільняють обидва рівняння

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

*Розв'язку системи не існує
бо у графіки (прямі) рівнянь
не перетинаються*



Рекомендациї

1. Добити перевірки через підстановку
2. Порядок порушень - кількість розв'язків (системи несумісні суперечності)
3. Всі випадки не всі можливі варіанти розв'язків систем лінійних рівнянь

Формула Крамера — це метод розв'язання систем лінійних рівнянь за допомогою визначників.

Для системи n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

...

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

Розв'язок за формулами Крамера має вигляд:

$$x_1 = \Delta_1 / \Delta$$

$$x_2 = \Delta_2 / \Delta$$

...

$$x_n = \Delta_n / \Delta$$

де:

- Δ — визначник матриці коефіцієнтів системи
- Δ_i — визначник матриці, отриманої із заміною i -го стовпця на стовпець вільних членів

Якщо $\Delta \neq 0$, система має єдиний розв'язок.

Якщо $\Delta = 0$ і хоча б один з $\Delta_i \neq 0$, система несумісна (не має розв'язків).

Якщо $\Delta = 0$ і всі $\Delta_i = 0$, система має безліч розв'язків.

Цей метод особливо зручний для розв'язання систем з 2-3 рівняннями, але стає обчислюально складним для більших систем.

Метод додавання у розв'язанні систем лінійних рівнянь

Приклад 1

Система з двох нерівними

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x - 5y = 1 \end{cases}$$

1. Перетворюємо рівняння так, щоб коефіцієнти

при одній із змінних відрізнялися лише

знаками.

$$4x + 6y = 16$$

$$4x - 5y = 1$$

2. Множимо перший вираз на 2:

$$4x + 6y = 16$$

$$4x - 5y = 1$$

$$\underline{11y = 15}$$

3. Записуємо значення y :

$$y = \frac{15}{11}$$

$$11y = 15$$

4. Підставляємо значення y в будь-яке

з біківих рівнян:

$$2x + 3(15/11) = 8$$

$$2x + 51/11 = 8$$

$$2x = 8 - 51/11$$

$$2x = (88 - 51)/11$$

$$2x = 37/11$$

$$x = 37/22$$

Приклад 2

Система з турбома нерівними

$$\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 4 \\ x + 3y - 3z = 3 \end{cases}$$

1. Виключимо змінну x з другого і третього

рівнянь.

* З другого р-н: помножимо перше рівняння на $3/2$ і віднімемо від другого.

* З третього рівняння: помножимо перше р-н на $1/2$ і віднімемо від третього

$$2x + y - z = 5$$

(1)

$$0x - 4/2y + 4/2z = -3/2$$

(2)

$$0x + 5/2y - 5/2z = 1/2$$

(3)

2. Виключимо змінну y з другого рівняння
Підставимо рівняння (2) на $5/y$ і додамо до рівняння (3)

$$0x - \frac{3}{2}y + \frac{7}{2}z = -\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$0x + \frac{5}{2}y - \frac{5}{2}z = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$0x + 0y + 0z = -1 \quad (4)$$

Відповідь: Отримуємо суперечість $0 = -1$, це означає
що система несумісна і не має розв'язків

Пункт 3

Система з подвоєннями які зручні для додавання

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -3x + 5y = 6 \end{cases}$$

1. Після додавання обидва р-ни, оскільки коє-ти при x відризняються лише знаками:

$$\begin{array}{r} 3x + 2y = 7 \\ -3x + 5y = 6 \\ \hline 0x + 7y = 13 \end{array}$$

2. Знайдемо y : $\frac{7}{7}y = 13$
 $y = 13/7$

3. Підставимо y в перше рівняння:

$$\begin{aligned} 3x + 2(13/7) &= 7 \\ 3x + 26/7 &= 7 \\ 3x &= 7 - 26/7 \\ 3x &= (49 - 26)/7 \\ 3x &= 23/7 \\ x &= 23/21 = 23/21 \end{aligned}$$

Відповідь: $x = 23/21$, $y = 13/7$.

* Метод додавання ефективний якщо подвоєннями
при обрії із змінних легко привести до протилежних
знаків.

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

- 1) $\begin{cases} x + y = 4 \\ -x + y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$
 2) $\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ -x - 2y = 8 \end{cases}$
 3) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$
 4) $\begin{cases} -x + y = 2 \\ 4x - 3y = -3 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x - 3y = 28 \\ 9x - y = -6 \end{cases}$
 5) $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 5x - y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} -4x + 12y = 0 \\ 12x + 4y = 160 \end{cases}$
 6) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 2 \\ \frac{1}{5}x - \frac{2}{3}y = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} 0.2x - 0.2y = -1.8 \\ -0.3x + 0.5y = 3.3 \end{cases}$
 7) $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x + 2y = 16 \\ x - 5y = 70 \end{cases}$
 8) $\begin{cases} x + 4y = 8 \\ 3x + 12y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} -3x + 5y = 2 \\ 9x - 15y = 6 \end{cases}$
 9) $\begin{cases} 2x - 6y = 10 \\ -3x + 9y = -15 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 3y = -8 \\ 14x - 21y = 3 \end{cases}$
 10) $\begin{cases} 6x + 4y = 12 \\ 9x + 6y = 18 \end{cases}$ $\begin{cases} 25x - 75y = 100 \\ -10x + 30y = -40 \end{cases}$
 11) $\begin{cases} 8s - 3t = -3 \\ 5s - 2t = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} u - 30v = -5 \\ -3u + 80v = 5 \end{cases}$
 12) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{5}y = 3 \\ \frac{5}{3}x + 2y = 10 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}y = \frac{1}{2} \\ 2x - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \end{cases}$
 13) $\begin{cases} 0.4x + 1.2y = 14 \\ 12x - 5y = 10 \end{cases}$ $\begin{cases} 26x - 10y = -4 \\ -0.6x + 1.2y = 3 \end{cases}$
 14) $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y = 2 \\ -8x + 6y = 10 \end{cases}$ $\begin{cases} -\frac{1}{10}x + \frac{1}{2}y = 4 \\ 2x - 10y = -80 \end{cases}$

1) $\begin{cases} x + y = 4 \\ -x + y = 0 \end{cases}$ 1. Метод підстановки найпростішим.

З другого рівняння $-x + y = 0$ зважи $y = x$

Підставимо у перше рівняння $x + x = 4$

$$2x = 4; x = 2$$

$$y = x = 2$$

2. Метод додавання

Робимо обидва рівняння $(x + y) + (-x + y) = 4 + 0$
 $2y = 4; y = 2$

Підставляємо в будь-яке рівняння

$$x + y = 4; x + 2 = 4; x = 2$$

Відповідь: $x = 2, y = 2$.

* Всіх розв'язків варіанта є зовсім, але дозволене менше кроків

3. Графічний метод - котре рівняння не приймає позитивні, тодіко позитивну - розв'язок системи.

Перетворюємо рівняння у вигляд $y = f(x)$

$$1. x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x$$

$$2. -x + y = 0 \Rightarrow y = x$$

Дан розв'язок узагальнений.

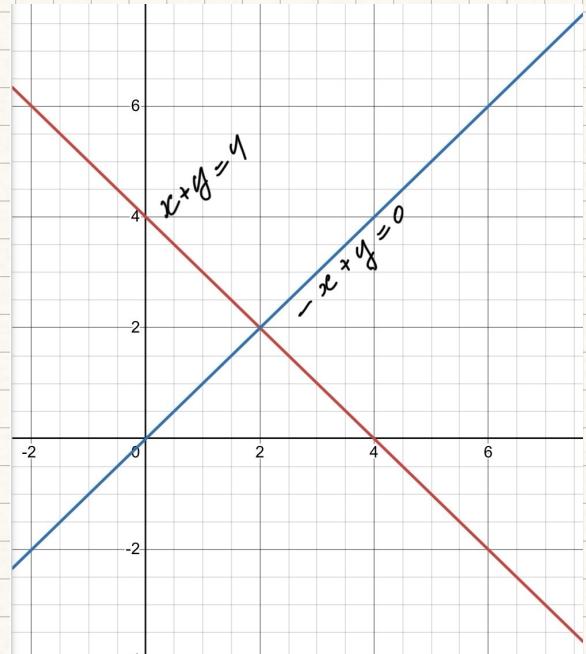
1. Перетворюємо рівн. у вигляд ф-її

$$\bullet x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x \text{ (спадаюча пряма)}$$

$$\bullet -x + y = 0 \Rightarrow y = x \text{ (зростаюча пряма)}$$

Перетин $(2, 2)$ - розв'язок, підставивши
в лів-між дій підекартами

* Візуалізую бачимо відмінно прямих



$$2) \begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$$

1. Метод подстановки

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 9 \\ -3y &= 9 - 2x \\ y &= (2x - 9) / (-3) \end{aligned}$$

Получим уравнение:

$$4x + 3y = 9$$

$$4x + 3 \cdot ((2x - 9) / (-3)) = 9$$

$$4x - (2x - 9) = 9; \quad 4x - 2x + 9 = 9; \quad 2x = 0; \quad x = 0$$

Значимо y : $y = (2 \cdot 0 - 9) / (-3) = -9 / (-3) = 3$

Вывод: $x = 0, y = 3$

2. Метод гаузевания (B1)

$$\begin{array}{rcl} 2x - 3y = 9 & | \cdot 2 & 4x - 6y = 18 \\ 4x + 3y = 9 & | \cdot 1 & \hline 4x + 3y = 9 \\ & & 8x - 3y = 2y \end{array}$$

$$8x - 3y = 2y; \quad 8x = 2y + 3y$$

3 способом решения: $4x + 3y = 9$
 $4x = 9 - 3y$

Приходимо: $8x = 2y + 3y$

$$2 \cdot (9 - 3y) = 2y + 3y$$

$$18 - 6y = 2y + 3y$$

$$-9 = 9y$$

$$y = -9/9 = -1$$

метод 3
 Чему равна?

Однак $y=3$, оскільки: $4x+3y=9$
 $4 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 9$
 $3y = 9; y = 3$

Відповідь: $x=0, y=3$

2. Метод додавання (B2)

$$\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$$

1. Доведемо обидва рів-ни умов скорістю y

$$(2x+4x) + (-3y+3y) = 9+9 \Rightarrow 6x = 18 \Rightarrow x = 3$$

2. Підставимо $x=3$ у перше р-ній для знаходження y :

$$2(3) - 3y = 9 \Rightarrow 6 - 3y = 9 \Rightarrow -3y = 3 \Rightarrow y = -1$$

3. Графічний метод

$$4(3) + 3(-1) = 12 - 3 = 9$$

Відп. $(x, y) = (3; -1)$

3 Графічний метод

1. Знаходження точок для побудови графіків
 Підставимо x умов обмеження y

Перше р-нія $2x - 3y = 9$

$$\text{Якщо } x=0; 2(0) - 3y = 9 \Rightarrow -3y = 9 \Rightarrow y = -3$$

Точка $(0, -3)$

$$\text{Якщо } x=3; 2(3) - 3y = 9 \Rightarrow 6 - 3y = 9 \Rightarrow -3y = 3 \Rightarrow y = -1$$

Точка $(3, -1)$

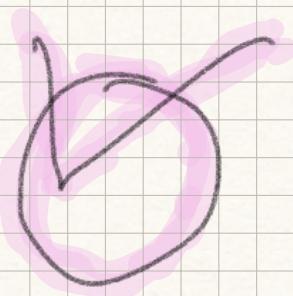
Друге р-нія $4x + 3y = 9$

$$\text{Якщо } x=0; 4(0) + 3y = 9 \Rightarrow 3y = 9 \Rightarrow y = 3$$

Точка $(0, 3)$

$$\text{Якщо } x=3; 4(3) + 3y = 9 \Rightarrow 12 + 3y = 9 \Rightarrow 3y = -3 \Rightarrow y = -1$$

Точка $(3, -1)$

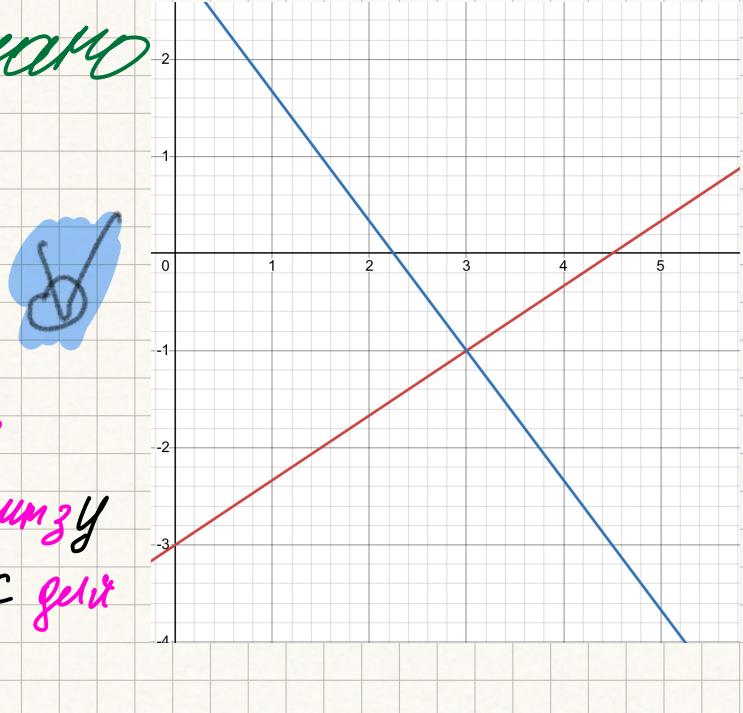


такі точки отримаю

$$2x - 3y = 9 \Rightarrow (0, -3) \text{ і } (3, -1)$$

$$4x + 3y = 9 \Rightarrow (0, 3) \text{ і } (3, -1)$$

* Другі перетини у точ. $y = -1$



* Чому якщо моя система підходить до формул $y = mx + b$ (m - коеф., а b - перетин з y осі) для зручності будемо зручні з веденням

Переваги та недоліки графічного методу

- Переваги:** Метод наочний, допомагає зрозуміти геометричний зміст системи рівнянь. Він корисний для перевірки результатів або для задач із двома змінними.
- Недоліки:** Менш точний, якщо точка перетину лежить між сіткою або потребує детального масштабування. Також він стає складним для систем із трьома чи більше змінними, оскільки їх важко зобразити на двовимірній площині.

* Чутодій махил

Нахил прямої (або кутовий коефіцієнт) — це числовна характеристика, яка описує, наскільки круто пряма піднімається або спускається на координатній площині при зміні значення x . У математиці нахил позначається літерою m і визначається як відношення зміни y (вертикальної координати) до зміни x (горизонтальної координати) між двома точками на прямій. Давайте розберемо це детальніше.

Формула нахилу

Нахил прямої m обчислюється за формулою:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

де:

- (x_1, y_1) і (x_2, y_2) — координати двох точок на прямій,
- $\Delta y = y_2 - y_1$ — зміна значення y ,
- $\Delta x = x_2 - x_1$ — зміна значення x .

Геометричний зміст

- Нахил показує, скільки одиниць y змінюється на кожну одиницю зміни x .
- Якщо $m > 0$, пряма піднімається вгору зліва направо (позитивний нахил).
- Якщо $m < 0$, пряма спускається вниз зліва направо (негативний нахил).
- Якщо $m = 0$, пряма горизонтальна (не змінюється y при зміні x).
- Якщо нахил невизначений (тобто $\Delta x = 0$), пряма вертикальна.

Приклад із нашої системи

Розглянемо перше рівняння з попередньої системи: $2x - 3y = 9$. Спочатку приведемо його до вигляду $y = mx + b$ (де b — перетин із віссю y):

$$2x - 3y = 9 \implies -3y = -2x + 9 \implies y = \frac{2}{3}x - 3$$

Тут:

- Нахил $m = \frac{2}{3}$ (позитивний, пряма піднімається).
- Перетин із віссю y $b = -3$.

Тепер обчислимо нахил, використовуючи дві точки, які ми знайшли раніше: $(0, -3)$ і $(6, 1)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-3)}{6 - 0} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Результат збігається, що підтверджує правильність.

Для другого рівняння $4x + 3y = 9$:

$$4x + 3y = 9 \implies 3y = -4x + 9 \implies y = -\frac{4}{3}x + 3$$

- Нахил $m = -\frac{4}{3}$ (негативний, пряма спускається).
- Перетин із віссю y $b = 3$.

Перевіримо з точками $(0, 3)$ і $(3, -1)$:

$$m = \frac{-1 - 3}{3 - 0} = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}$$

Знову збігається.

Візуалізація нахилу

- Нахил $\frac{2}{3}$ означає, що при збільшенні x на 3 одиниці, y зростає на 2 одиниці.
- Нахил $-\frac{4}{3}$ означає, що при збільшенні x на 3 одиниці, y зменшується на 4 одиниці.

$$4x + 3y = 9 \implies 3y = -4x + 9 \implies y = -\frac{4}{3}x + 3$$

- Нахил $m = -\frac{4}{3}$ (негативний, пряма спускається).
- Перетин із віссю y $b = 3$.

Перевіримо з точками $(0, 3)$ і $(3, -1)$:

$$m = \frac{-1 - 3}{3 - 0} = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}$$

Знову збігається.

Візуалізація нахилу

- Нахил $\frac{2}{3}$ означає, що при збільшенні x на 3 одиниці, y зростає на 2 одиниці.
- Нахил $-\frac{4}{3}$ означає, що при збільшенні x на 3 одиниці, y зменшується на 4 одиниці.

Практичне застосування

Нахил має важливе значення в аналізі:

- У фізиці він може відображати швидкість (зміна відстані до зміни часу).
- У економіці — градієнт кривих попиту чи пропозиції.
- У графіках, як у нашому випадку, він допомагає зрозуміти, як змінюються змінні x і y відносно одної.

Якщо хочете, можу створити графік із позначенням нахилів або розібрати інший приклад! Дайте знати!

3) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ * Метод додавання полягає в тому що густина рівняння до
малого буде зменшуватися, тоді знайдемо одну з змінних у одному з рівняння
або змінну рівняння. Спершу добре коєр-и піді-и змінні
коєрни з змінними зі знаками.

1. Деление на 1 $x + 3y = 5$
 2. Вычитание другого уравнения из 3, чтобы коэффициент y остался -3. Остаток в первом уравнении $+3y$

$$3 \cdot (2x - y) = 3 \cdot 3 \Rightarrow 6x - 3y = 9$$

3. Додаткові рівнення щодо існування:

$$(x+3y) + (6x-3y) = 5+9 \Rightarrow 7x = 14 \Rightarrow x = 2$$

4. Підсумково в перевірку отриманого рівняння
уод зміни у

$$2 + 3y = 5 \Rightarrow 3y = 3 \Rightarrow y = 1$$

Bignorfigs: $x = 2$; $y = 1$

Менюг міжнародки

Метод підстановки полягає у використанні однієї змінної чи кількох

1. Визнач x $x + 3y = 5 \Rightarrow x = 5 - 3y$
 2. Підставимо $x = 5 - 3y$ в друге рівняння:

Bigrad: $x=2$, $y=1$.

Графічний метод

Перше рівняння

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

1. $x=0: 0+3y=5 \Rightarrow 3y=5 \Rightarrow y=\frac{5}{3} \approx 1,67$

2. $y=0: x+3 \cdot 0=5 \Rightarrow x=5$

Точки: $(0; 1,67)$ і $(5; 0)$

Друге рівняння

1. $x=0: 2 \cdot 0 - y = 3 \Rightarrow -y = 3 \Rightarrow y = -3$

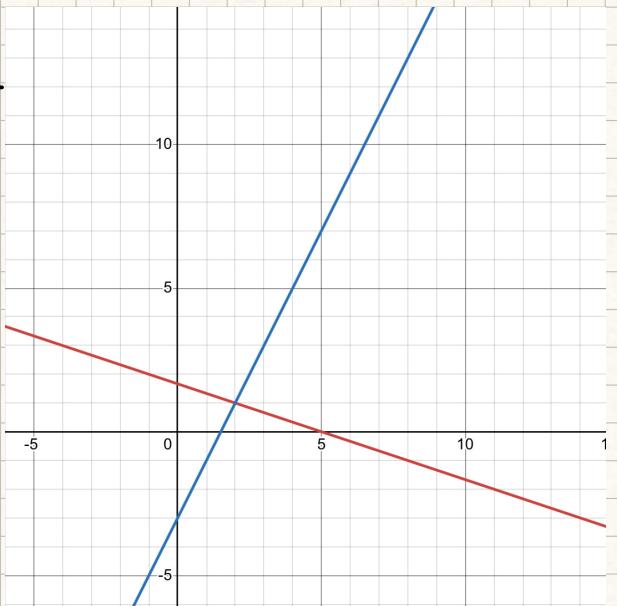
2. $y=0: 2x - 0 = 3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = 1,5$

Точки $(0; -3)$ і $(1,5; 0)$.

Перше р-нр: $2+3 \cdot 1 = 2+3=5$

Друге р-нр: $2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$

Оськільки перетинаються в точці $(2, 1)$



Використання

мінімуму

максимуму

засобами мcb