# Нерівності

**Види ч.н.**

$x > y$ різниця додатня
$x < y$ різниця від'ємна
строгі і не строгі нерівності
$\geq$ не менше / $\leq$ не більше
$>>$ нерівності одного знака
$><$ нерівності різних знаків

**Властив. ч.н.**

$x > y;\ y < x$ схоже на комутативн
$k < p;\ p > k$
$x < y;\ y < z;\ x < z$ транзитивність
$x > y \Rightarrow x + c > y + c$
$k > p \Rightarrow ks > ps;\ s > 0$
$x < y \Rightarrow xk > xk;\ k < 0$
$x > y;\ z > k \Rightarrow x + z > y + k$
$x > y;\ z > k \Rightarrow x \cdot z > y \cdot k$
$x > y;\ z < k \Rightarrow x - z > y - k$
$x > y > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$
$x > y > 0 \Rightarrow x^n < y^n$

1

## § 1. Нерівності

**Види числових нерівностей**

| Означення | Приклади |
|---|---|
| Якщо $a$ менше $b$ або $a$ більше $b$, то записують так $a<b$ або $a>b$. Такий вираз називається нерівністю. | $7<10$; $-8<-5$; $13>4$; $6,3>-10,2$ |
| Число $a$ більше числа $b$, якщо різниця $a-b$ — додатне число, число $a$ менше $b$, якщо різниця $a-b$ — від'ємне число. | $a-b=7,02$, то $a>b$; $a-b=-9,5$, то $a<b$ |
| На координатній прямій більше число зображується точкою, що розташована справа, а менше — точкою, яка лежить зліва. | |
| Знаки $>$, $<$ називаються знаками строгих нерівностей. | $a<b$; $b>a$. |
| Знаки $\geq$, $\leq$ — знаки нестрогих нерівностей. | $a\leq b$; $b\geq a$. |
| $\geq$ — знак більше або дорівнює (не менше). | $5\geq 5$; $-17,5\geq -131,1$. |
| $\leq$ — знак менше або дорівнює (не більше). | $5\leq 5$; $-17,5\leq 0,13$. |
| $a>b$ та $c>d$ — нерівності одного знака. | $15>4,3$; $-9>-17$. |
| $a>b$ та $c<d$ — нерівності протилежних знаків. | $6,2>-8$; $2<10,2$. |

**Властивості числових нерівностей**

| | |
|---|---|
| 1. Якщо $a>b$, то $b<a$; якщо $a<b$, то $b>a$. | $13>5$, то $5<13$; $-12,9<4$, то $4>-12,9$. |
| 2. Якщо $a>b$ та $b>c$, то $a>c$ (властивість транзитивності). | $17>8$; $8>5$, то $17>5$. |
| 3. Якщо $a>b$, то $a+c>b+c$. | $14>9$, то $14+8>9+8$. |
| 4. Якщо $a>b$ та $c$ — додатне число ($c>0$), то $ac>bc$. Ця властивість має такий зміст: якщо обидві частини правильної нерівності помножити на одне й те саме додатне число, то отримаємо правильну нерівність. | $7,2>-5$; $4>0$, то $7,2\cdot 4>-5\cdot 4$, тобто $28,8>-20$. |
| 5. Якщо $a<b$ і $c$ — від'ємне число ($c<0$), то $ac>bc$. Ця властивість має такий зміст: якщо обидві частини правильної нерівності помножити на одне й те саме від'ємне число і змінити знак початкової нерівності на протилежний, то отримаємо правильну нерівність. | $6,9>3,5$; $6,9(-2)$ і $3,5(-2)$; $-2<0$, то $-13,8<-7$. |
| 6. Якщо $a>b$ і $c>d$, то $a+c>b+d$. Якщо почленно скласти дві правильні нерівності одного знака, то отримаємо правильну нерівність. | |
| 7. Якщо $a,b,c,d$ — додатні числа, причому $a>b$ і $c>b$, то $ac>bd$. Якщо почленно перемножити правильні нерівності одного знака, лві і праві частини яких додатні числа, то отримаємо правильну нерівність. | $18>15$; $\frac{3}{8}>\frac{1}{5}$, то $18\cdot\frac{3}{8}>15\cdot\frac{1}{5}$ |
| 8. Якщо $a>b$ і $c<d$, то $a-c>b-d$ | $12>7$; $5<9$; $12-5>7-9$, то $7>-2$. |
| 9. Якщо $a>b>0$, то $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ | $8>4$, то $\frac{1}{8}<\frac{1}{4}$. |
| 10. Якщо $a>b>0$, то для будь-якого натурального числа $n$ виконується нерівність $a^n>b^n$. | $6>5$, то $6^2>5^2$, тобто $36>25$. |

44

2

**Числові проміжки**

| Вид проміжку | Геометричне зображення | Позначення | Записати за допомогою нерівностей |
|---|---|---|---|
| Інтервал | | $(a;b)$ | $a<x<b$ |
| Відрізок | | $[a;b]$ | $a\leq x\leq b$ |
| Півінтервал | | $[a;b)$ | $a\leq x<b$ |
| Півінтервал | | $(a;b]$ | $a<x\leq b$ |
| Промінь | | $[a;+\infty)$ | $x\geq a$ |
| Промінь | | $(-\infty;b]$ | $x\leq b$ |
| Відкритий промінь | | $(a;+\infty)$ | $x>a$ |
| Відкритий промінь | | $(-\infty;b)$ | $x<b$ |

На практиці не завжди використовують терміни «інтервал», «відрізок», «півінтервал», «промінь», а замінюють їх спільною назвою «числовий проміжок».

**Лінійні нерівності**

Означення

**Лінійною** називається нерівність виду $ax>b$ (або, відповідно, $ax<b$, $ax\geq b$, $ax\leq b$), де $a\neq 0$, $b$ — числа.

**Розв'язками нерівності** з однією змінною називається множина таких значень змінної, яка перетворює її на правильну числову нерівність.

1. Якщо $a>0$, то розв'язок нерівності $ax>b$ має вигляд $x>\frac{b}{a}$.
2. Якщо $a<0$, то розв'язок нерівності $ax\geq b$ має вигляд $x\leq\frac{b}{a}$.
3. Якщо $a=0$, то нерівність $ax>b$ набуває вигляду $0x>b$, тобто вона не має розв'язку при $b\geq 0$ і правильна при будь-яких $x$, якщо $b<0$.

**При розв'язуванні нерівностей використовуються такі властивості.**

| | Приклади |
|---|---|
| 1. Якщо з однієї частини нерівності перенести в іншу доданок з протилежним знаком, то утвориться нерівність, рівносильна даній. | $4(y-1)+7\leq 1-3(y+2)$; $4y-4+7\leq 1-3y-6$; $4y+3y\leq 1-6+4-7$. |
| 2. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число, то утвориться нерівність, рівносильна даній. | $7y\leq -8$; $y\leq -\frac{8}{7}$; $\left(-\infty;-1\frac{1}{7}\right]$ |
| 3. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній. | $-3x+8<2x-2$, $-3x-2x<-8-2$, $-5x<-10$, $x>2$. $(2;+\infty)$ |

3

**Оцінка суми, різниці, добутку, частки**

1. $a\leq x\leq b$, $c\leq y\leq d$, $a+c\leq x+y\leq b+d$
2. $a\leq x\leq b$, $c\leq y\leq d$, $a-d\leq x-y\leq b-c$
3. $a\leq x\leq b$, $c\leq y\leq d$, $ac\leq xy\leq bd$ $(a>0)$; $(c>0)$.
4. $a\leq x\leq b$, $c\leq y\leq d$, $\frac{a}{d}\leq\frac{x}{y}\leq\frac{b}{c}$ $(a>0)$; $(c>0)$.

**УЧНІВСЬКА СТОРІНКА**

| 1. Розв'язати нерівність. | 1) $\frac{3z+1}{2}-6z\leq\frac{5z-2}{3}+\frac{7z}{6}$ | 2) $\frac{3x-2}{x-2}>3$. |
|---|---|---|
| Розв'язання. | $(3z+1)\cdot 3-6z\cdot 6\leq(5z-2)\cdot 2+7z$; $9z+3-36z\leq 10z-4+7z$; $9z-36z-10z-7z\leq -4-3$; $-44z\leq -7$; $z\geq\frac{7}{44}$ | $\frac{3x-2}{x-2}-3>0$; $\frac{3x-2-3x+6}{x-2}>0$; $\frac{4}{x-2}>0$. Оскільки чисельник дробу $4>0$, то нерівність $\frac{4}{x-2}>0$ правильна при $x-2>0$; $x>2$. |
| Відповідь: | $\left[\frac{7}{44};+\infty\right)$ | $(2;+\infty)$. |

| 2. Розв'язати нерівність. | 1. $\lvert 1-3x\rvert<2$. | 2. $\lvert 4x-1\rvert>1$. |
|---|---|---|
| Розв'язання. | $-2<1-3x<2$; $-3<-3x<1$; $-\frac{1}{3}<x<1$ | $4x-1<-1$; або $4x-1>1$; $4x>2$; $4x<0$; $x<0$; $(-\infty;0)$; $x>\frac{1}{2}$; $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ |
| Відповідь: | $\left(-\frac{1}{3};1\right)$ | $(-\infty;0)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ |

**Доведення нерівностей**

Довести нерівність можна на підставі правила: якщо $a>b$, то $a-b>0$ і якщо $a<b$, то $a-b<0$.

| 1. Довести нерівність. | $x^2+y^2\geq 2xy$. |
|---|---|
| Доведення. Знайдемо різницю лівої та правої частин нерівності. | $(x^2+y^2)-2xy=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$. $(x-y)^2\geq 0$ при будь-яких $x$ та $y$, значить $x^2+y^2\geq 2xy$ при будь-яких $x$ та $y$. |

Вираз $\frac{a+b}{2}$ називають **середнім арифметичним** чисел $a$ та $b$, а вираз $\sqrt{ab}$ — **середнім геометричним**.

| 2. Довести нерівність. | Середнє арифметичне двох додатних чисел не менше їхнього середнього геометричного. $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$ |
|---|---|
| Доведення. Знайдемо різницю лівої та правої частин нерівності. | $\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}=\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2}$; $\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2}\geq 0$ при будь-яких $x\geq 0$ та $y\geq 0$, тобто, при $x>0$ та $y>0$ $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$, при $x=y$ $\frac{x+y}{2}=\sqrt{xy}$. |

46

Нерівність — це математичний вираз, який показує, що одна величина більша, менша або не дорівнює іншій. Нерівності записуються за допомогою знаків: > (більше), < (менше), ≥ (більше або дорівнює), ≤ (менше або дорівнює), ≠ (не дорівнює).

### Приклади лінійних нерівностей:

Лінійна нерівність — це нерівність, яка містить змінну в першому степені.

1. x + 3 > 7 (розв'язок: x > 4)
2. 2x − 5 ≤ 9 (розв'язок: x ≤ 7)
3. −3x + 1 < 10 (розв'язок: x > -3)
4. 4x ≥ 12 (розв'язок: x ≥ 3)
5. 5 − 2x ≠ 1 (розв'язок: x ≠ 2)

### Рівносильні нерівності:

Рівносильні нерівності — це нерівності, які мають однакові множини розв'язків.

Основні перетворення, які зберігають рівносильність:

- Додавання або віднімання однакового числа з обох частин
- Множення або ділення обох частин на додатне число
- Множення або ділення на від'ємне число зі зміною знака нерівності

Приклад рівносильних нерівностей:

- 2x + 4 > 10
- 2x > 6 (віднімаємо 4 з обох частин)
- x > 3 (ділимо на 2)

Всі три нерівності мають однакову множину розв'язків: x > 3, тому вони рівносильні.

4

## § 2. Системи нерівностей з однією змінною

**Розв'язування систем нерівностей з однією змінною**

| Означення | Приклади |
|---|---|
| Якщо необхідно знайти спільні розв'язки двох чи більше нерівностей з однією змінною, це означає, що треба розв'язати **систему** двох чи більше нерівностей з однією змінною. | $\begin{cases}4x+4\geq 0,\\ 6-4x\geq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}4x\geq -4,\\ -4x\geq -6;\end{cases}$ $\begin{cases}x\geq -1,\\ x\leq\frac{3}{2};\end{cases}$ |
| **Розв'язками системи** називаються такі значення змінної, які є розв'язками всіх нерівностей, що входять до даної системи. | Значення $x\in\left[-1;\frac{3}{2}\right]$ є розв'язком нерівностей $4x+4\geq 0$ та $6-4x\geq 0$. |
| Розв'язати систему нерівностей з однією змінною — означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх немає. | Відповідь: $\left[-1;\frac{3}{2}\right]$. |

**УЧНІВСЬКА СТОРІНКА**

| | |
|---|---|
| 1. Розв'язати систему нерівностей. | $\begin{cases}x-1<2+3x;\\ 5x-7<x+9.\end{cases}$ |
| Розв'язання. | $\begin{cases}-2x<3,\\ 4x<16.\end{cases}$ звідси $\begin{cases}x>-1,5,\\ x<4.\end{cases}$ |
| Відповідь: $(-1,5;4)$. | |
| 2. Розв'язати подвійну нерівність. | $-3<2x-1<3$. |
| Розв'язання. Розв'язанням подвійної нерівності є розв'язування системи двох нерівностей. | $\begin{cases}2x-1>-3,\\ 2x-1<3;\end{cases}$ $\begin{cases}2x>-2,\\ 2x<4;\end{cases}$ $\begin{cases}x>-1,\\ x<2;\end{cases}$ $(-1;2)$ або $-3<2x-1<3$; $-2<2x<4$; $-1<x<2$. $(-1;2)$ |
| Відповідь: $(-1;2)$. | |
| 3. Розв'язати нерівність. | $\frac{5-2y}{2y-7}>0$. |
| Розв'язування цієї нерівності можна звести до розв'язування двох систем. | 1. $\begin{cases}5-2y>0,\\ 2y-7>0;\end{cases}$ $\begin{cases}-2y>-5,\\ 2y>7;\end{cases}$ $\begin{cases}y<2,5,\\ y>3,5;\end{cases}$ Розв'язків немає. 2. $\begin{cases}5-2y<0,\\ 2y-7<0;\end{cases}$ $\begin{cases}-2y<-5,\\ 2y<7;\end{cases}$ $\begin{cases}y>2,5,\\ y<3,5.\end{cases}$ $(2,5;3,5)$ |
| Відповідь: $(2,5;3,5)$. | |

## § 3. Квадратична функція

5

**Квадратний тричлен та його розв'язки** многочлен із 3 членів другого степеня з однією змінною

Вираз $2x^2-5x+3$ є многочленом другого ступеня з однією змінною. Такі многочлени називають **квадратними тричленами**.

| Означення | Приклади |
|---|---|
| **Коренем квадратного тричлена** називається значення змінної, при якому значення цього тричлена дорівнює нулю. Для того, щоб знайти розв'язки квадратного тричлена $ax^2+bx+c$, треба розв'язати квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$. | Знайти розв'язки тричлена: $2x^2-5x+3$. Розв'яжемо рівняння: $2x^2-5x+3=0$; $D=25-24=1$; $x=\frac{5\pm\sqrt{1}}{4}$; $x=\frac{5\pm 1}{4}$; $x_1=1$; $x_2=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$. Тобто квадратний тричлен має два розв'язки: 1 та 1,5. |
| Якщо $x_1$ і $x_2$ — корені квадратного тричлена $ax^2+bx+c$, то $ax^2+bx+c=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$. | $2x^2-5x+3=2(x-1)\cdot(x-1,5)=(x-1)\cdot(2x-3)$, $-2x^2+5x+7=-2\left(x-\frac{7}{2}\right)\cdot(x+1)=(7-2x)\cdot(x+1)$, $-2x^2+5x+7=0$; $2x^2-5x-7=0$, $D=25+56=81=9^2$, $x=\frac{5\pm 9}{4}$; $x_1=-1$, $x_2=\frac{7}{2}$. |
| **Квадратичною функцією** називається функція, яку можна задати формулою $y=ax^2+bx+c$, де $x$ — незалежна змінна, $a,b,c$ — деякі числа, причому $a\neq 0$. | Приклади квадратичної функції: $y=x^2$, $y=-x^2$, $y=x^2+2$, $y=(x-4)^2$. Їх графіки — рівні параболи, тільки по-різному розташовані на координатній площині. |
| Графіки функцій $y=ax^2+bx+c$ та $y=ax^2$ — параболи, їх можна сумістити паралельним перенесенням, оскільки функцію $y=ax^2+bx+c$ можна подати у вигляді $y=a(x+m)^2-n$. | Функцію $y=2x^2-4x+10$ можна записати так: $y=2(x-1)^2+8$. $-\frac{1}{4}x^2-x-1=-\frac{1}{4}(x^2+4x+4)=-\frac{1}{4}(x+2)^2$. |

Отже, графіком функції $y=ax^2+bx+c$ є парабола, яку можна отримати із графіка функції $y=ax^2$ за допомогою двох паралельних перенесень – зсуву вздовж осі $x$ і зсуву вздовж осі $y$. Звідси отримуємо, що графіком функції $y=ax^2+bx+c$ є парабола, вершиною якої є точка $(m;n)$, де $m=-\frac{b}{2a}$, $n=\frac{-b^2+4ac}{4a}$. Віссю симетрії параболи є пряма $x=m$, паралельна осі $y$. При $a>0$ вітки параболи напрямлені вгору, а при $a<0$ – вниз.

1. Функція $y=f(x)$ парна або непарна, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного значення $x$ з області визначення $f(-x)=f(x)$.
2. Якщо графік функції симетричний відносно осі $y$, то функція є **парною**. Якщо графік функції симетричний відносно початку координат, то функція є **непарною**.

6

**Перетворення графіків функцій**

**Побудова графіка функції $y=mf(x)$**

$y=mf(x)$, де $m>0, m\neq 1$, якщо заданий графік функції $y=f(x)$.

Ординати точок графіка функції $y=mf(x)$ утворюються множенням на $m$ відповідних ординат точок графіка функції $y=f(x)$. Таке перетворення графіка функції $y=f(x)$ називається розтягненням від осі $x$ з коефіцієнтом $m$, якщо $m>1$, і стягненням до осі $x$, якщо $0<m<1$.

$y=-f(x)$, якщо заданий графік функції $y=f(x)$.

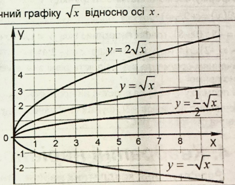
При одному й тому самому значенні $x$ ординати точок графіка функції $y=f(x)$ і функції $y=-f(x)$ відрізняються лише знаком. Тобто графік функції $y=-f(x)$ можна отримати із графіка $y=f(x)$ перетворенням симетрії останнього відносно осі $x$.

$y=mf(x)$, де $m<0, m\neq -1$, якщо заданий графік функції $y=f(x)$.

Оскільки $mf(x)=-\lvert m\rvert f(x)$, то графік функції $y=mf(x)$ можна отримати за допомогою розтягнення (стягнення) графіка функції $y=f(x)$ від осі $x$ з коефіцієнтом $\lvert m\rvert$ і наступним перетворенням симетрії відносно осі $x$.

$y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $y=\frac{1}{2}\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{x}$.

1) Побудуємо графік функції $y=\sqrt{x}$;
2) Збільшимо ординату кожної точки цього графіка в 2 рази, отримаємо $y=2\sqrt{x}$;
3) Якщо ординату кожної точки зменшимо в 2 рази, то отримаємо $y=\frac{1}{2}\sqrt{x}$;
4) $y=-\sqrt{x}$ — симетричний графіку $\sqrt{x}$ відносно осі $x$.

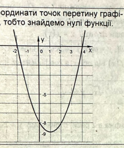



1) Для того, щоб побудувати графік функції $y=f(x)+n$, треба графік функції $y=f(x)$ перенести на $n$ одиниць у напрямку осі $y$ (вгору), якщо $n>0$, або в протилежному напрямку (вниз), якщо $n<0$.
2) Для того, щоб отримати графік функції $y=f(x-m)$, достатньо графік функції $y=f(x)$ перенести на $m$ одиниць в напрямку осі $x$ (вправо), якщо $m>0$, або на $-m$ одиниць в протилежному напрямку (вліво), якщо $m<0$.

7

**УЧНІВСЬКА СТОРІНКА**

**Для того, щоб побудувати графік квадратичної функції, потрібно:**
1) знайти координати вершин параболи і позначити її на координатній площині;
2) побудувати ще декілька точок, що належать параболі;
3) поєднати відмічені точки плавною лінією.

| | |
|---|---|
| Побудувати графік функції. | $y=x^2-2x-8$. |
| Знайдемо координати вершини параболи. | $m=x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2}=1$; $n=y=1^2-2\cdot 1-8=-9$. $(1;-9)$ – вершина параболи. |
| Знайдемо координати точок перетину графіка з віссю $x$, тобто знайдемо нулі функції.  | $x^2-2x-8=0$; $D=1+8=9$, $x=1\pm 3$; $x_1=4$; $x_2=-2$. $(4;0)$ $(-2;0)$ – координати точок перетину з віссю $x$. $x=0$; $y=-8$, $(0;-8)$ – точка перетину графіка з віссю $y$. $x_1=3$; $y_1=3^2-2\cdot 3-8=-5$; $x_2=-1$; $y_2=(-1)^2-2\cdot(-1)-8=-5$; $x=1$ – вісь симетрії. |

**Сформулюємо властивості функції $y=x^2-2x-8$.**

1. $D(y)=(-\infty;+\infty)$; $E(y)=[-9;+\infty)$;
2. Якщо $x=0$, то $y=-8$; $(0;-8)$, графік перетинає вісь $y$ в цій точці.
3. $y>0$, якщо $x\in(-\infty;-2)\cup(4;+\infty)$; $y<0$, якщо $x\in(-2;4)$.
4. Протилежним значенням аргумента відповідають рівні значення функції. Графік функції симетричний відносно прямої $x=1$.
5. Функція спадає на проміжку $(-\infty;1]$ та зростає на проміжку $[1;+\infty)$.
6. Найменшого значення, що дорівнює $-9$, функція набуває при $x=1$.
7. Найбільшого значення функція не має.

## § 4. Квадратні нерівності

**Розв'язування квадратних нерівностей**

| Означення | | Приклади |
|---|---|---|
| Нерівність виду $ax^2+bx+c>0$ $(ax^2+bx+c<0)$, де $a,b,c$ – деякі числа, $a\neq 0$ і $x$ – змінна, називається **квадратною**. | | а) $-3x^2+x-5<0$; б) $x(x+4)\leq 3$, бо $x^2+4x-3\leq 0$. |
| Для розв'язування квадратних нерівностей використовують ескіз графіка функції $y=ax^2+bx+c$, тобто параболу. | $x\in(-\infty;-1]\cup\left[\frac{10}{3};+\infty\right)$. | $3x^2-7x-10\geq 0$; $y=3x^2-7x-10$ графік – парабола, вітки напрямлені вгору, вісь $0x$ перетинає в точках $x_1=-1$; $x_2=\frac{10}{3}$. |

50

**Розв'язування будь-якої квадратної нерівності можна звести до одного з шести випадків таблиці.**

8

| | $D<0$ | $D=0$ | $D>0$ |
|---|---|---|---|
| $a>0$ | $ax^2+bx+c>0$: $x$ – будь-яке число; $(ax^2+bx+c<0)$: розв'язків немає. | $ax^2+bx+c>0$: $x\in(-\infty;x_0)\cup(x_0;+\infty)$; $(ax^2+bx+c<0)$: розв'язків немає. | $ax^2+bx+c>0$: $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$; $(ax^2+bx+c<0)$: $x\in(x_1;x_2)$. |
| $a<0$ | $ax^2+bx+c>0$: розв'язків немає; $(ax^2+bx+c<0)$: $x$ – будь-яке число. | $ax^2+bx+c>0$: розв'язків немає; $(ax^2+bx+c<0)$: $x\in(-\infty;x_0)\cup(x_0;+\infty)$. | $ax^2+bx+c>0$: $x\in(x_1;x_2)$; $(ax^2+bx+c<0)$: $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$. |

Розв'язками нерівності $ax^2+bx+c>0$ є значення $x$, для яких точки параболи розташовані над віссю $0x$.
Розв'язками нерівності $ax^2+bx+c>0$ є значення $x$, для яких точки параболи розташовані під віссю $0x$.

**Алгоритм розв'язування квадратних нерівностей виду $ax^2+bx+c>0$, або $ax^2+bx+c<0$.**

| Розв'язати нерівність | $-3x^2+7x+10\leq 0$. |
|---|---|
| 1) Визначаємо напрямок віток параболи, яка відповідає функції $y=ax^2+bx+c$. 2) Знаходимо корені квадратного тричлена $ax^2+bx+c$ (розв'язуємо рівняння $ax^2+bx+c=0$). 3) Будуємо ескіз графіка функції $y=ax^2+bx+c$. 4) Вибираємо значення змінної, які відповідають розв'язкам нерівності. 5) Записуємо відповідь. | $3x^2-7x-10\leq 0$; 1) $a=-3$; вітки напрямлені вниз. 2) $3x^2-7x-10=0$; $D=169$; $x_1=-1$; $x_2=\frac{10}{3}$. 3) 4) $x\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{10}{3};+\infty\right)$. 5) Відповідь: $(-\infty;-1)\cup\left(\frac{10}{3};+\infty\right)$. |

9

**Розв'язування нерівностей методом інтервалів**

Якщо ліва частина нерівності є добутком, а права частина – 0, тобто $f(x)>0$ $(f(x)<0)$ та $f(x)=(x-a)(x-b)...(x-c)$, де $a,b,c$ – деякі числа, то такі нерівності **розв'язують методом інтервалів**.

| Алгоритм розв'язування нерівностей методом інтервалів | Розв'язати нерівність. $(x+6)(x+1)(x-4)<0$. |
|---|---|
| 1) Знайти область визначення функції $y=f(x)$. 2) Знайти нулі функції $y=f(x)$ $(f(x)=0)$. 3) Нанести нулі на область визначення. 4) Визначити знаки функції $f(x)$ в кожному інтервалі, на які розбивається область визначення нулями функції. 5) Записати відповідь. | 1) ОДЗ: $x\in R$. 2) Нулі функції: $(x+6)(x+1)(x-4)=0$; $x_1=-6$; $x_2=-1$; $x_3=4$. 3) Нанесемо нулі на ОДЗ: Відповідь: $(-\infty;-6)\cup(-1;4)$ |

Якщо всі множники функції $y=f(x)$ виду $(x-a)$, тобто лінійні, то знаки на проміжках із ОДЗ можна переміжати справа наліво з «+» на «–».

**УЧНІВСЬКА СТОРІНКА**

| 1. Розв'язати нерівність. | 1) $2x^2-7x+6>0$. | 2) $-x^2+2x+15<0$. |
|---|---|---|
| Розв'язання. | $2x^2-7x+6=0$, $a>0, D>0$; $D=49-48=1$, $x=\frac{7\pm 1}{4}$; $x_1=\frac{3}{2}$; $x_2=2$ | $-x^2+2x+15=0$, $a<0, D>0$; $x^2-2x-15=0$ $D_1=1+15=16$. За теоремою Вієта: $x_1=-3$; $x_2=5$ |
| Відповідь: | $x\in\left(-\infty;1\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$. | $(-\infty;-3)\cup(5;+\infty)$. |

При розглянутому способі розв'язування нерівності не визначають координати вершин параболи. Важливо лише знати, куди напрямлені вітки параболи – вгору чи вниз, і які абсциси точок її перетину з віссю $x$.

| 2. Розв'язати нерівність. | 1) $x^2-3x+4>0$. | 2) $x^2+2x-48<0$. | 3) $-9x^2+12x-4<0$. |
|---|---|---|---|
| Розв'язання. | $a>0$, $D<0$. $x^2-3x+4=0$, $D=9-16=-7<0$, тобто рівняння не має розв'язків. Покажемо схематично розташування параболи на координатній площині: | $a>0$, $D>0$. $x^2+2x-48=0$, За теоремою Вієта: $x_1=-8$; $x_2=6$. | $a<0$, $D=0$. $-9x^2+12x-4=0$, $9x^2-12x+4=0$, $(3x-2)^2=0$; $x=\frac{2}{3}$. |
| Відповідь: | $x$ – будь-яке число. | $x\in(-8;6)$. | $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$. |

10

| 3. Розв'язати нерівність. | $x(0,2-x)(x+5)<0$. |
|---|---|
| Розв'язання. Множник $(0,2-x)$ представимо у вигляді $(x-a)$: $(0,2x-x)=-(x-0,2)$. | $-x(x-0,2)(x+5)<0$, $x(x-0,2)(x+5)>0$. 1) ОДЗ: $x\in R$. 2) Нулі функції: $x_1=-5$; $x_2=0$; $x_3=0,2$. 3. |
| Відповідь: $(-5;0)\cup(0,2;+\infty)$. | |

| 4. Розв'язати нерівність. Такі нерівності розв'язують методом інтервалів. | $\frac{4-x}{x+8}<0$. |
|---|---|
| Розв'язання. Перетворимо нерівність. Знаки цього дробу співпадають із знаками добутку | 1) ОДЗ: $x\neq -8$, оскільки $x+8\neq 0$, то $x\in(-\infty;-8)\cup(-8;+\infty)$. 2) Нулі: $4-x=0$; $x=4$. $-\frac{x-4}{x+8}<0$, $\frac{x-4}{x+8}>0$, 3) $(x-4)(x+8)>0$. |
| Відповідь: $(-\infty;-8)\cup(4;+\infty)$. | |

| 5. Розв'язати нерівність. | $(x+1)(3-x)(x-2)^2<0$. | |
|---|---|---|
| Розв'язання. Знаки даної нерівності співпадають зі знаками нерівності | $-(x+1)(x-3)(x-2)^2<0$; $(x+1)(x-3)(x-2)^2>0$. $(x+1)(x-3)>0$, | 1) ОДЗ: $x\in R$. 2) Нулі: $x_1=-1$; $x_2=2$; $x_3=3$. 3) |
| Відповідь: $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. | | |

## § 5. Рівняння, які зводяться до квадратних. Системи рівнянь

**Ціле рівняння та його розв'язки**

| Правила | Приклади |
|---|---|
| Рівняння називається **цілим**, якщо у нього ліва і права частини є цілими виразами. | $(3x+7)(3x-7)-5=3x(3x+1)$. |
| Будь-яке рівняння можна замінити рівносильним йому рівнянням, ліва частина якого — многочлен стандартного виду, а права — нуль. | $\left(\frac{x^2}{16}-\frac{x}{8}=\frac{x+1}{3}\right)\Leftrightarrow(3x^2-22x-16=0)$ |
| Якщо рівняння з однією змінною записано у вигляді $P(x)=0$, де $P(x)$ — многочлен стандартного виду, то степінь цього многочлена називають степенем рівняння. | Рівняння $x^2-2x^3+1=0$ є рівнянням третього степеня. |
| Деякі рівняння третього або більш високого степеня легко розв'язати за допомогою розкладання многочлена на множники. | Розв'язати рівняння. $x^3-8x^2-x+8=0$, $x^3(x-8)-(x-8)=0$, $(x-8)(x-1)(x+1)=0$. Рівняння має три розв'язки: $x_1=-8$; $x_2=1$; $x_3=8$. |

# Способи розв'язання різних типів нерівностей

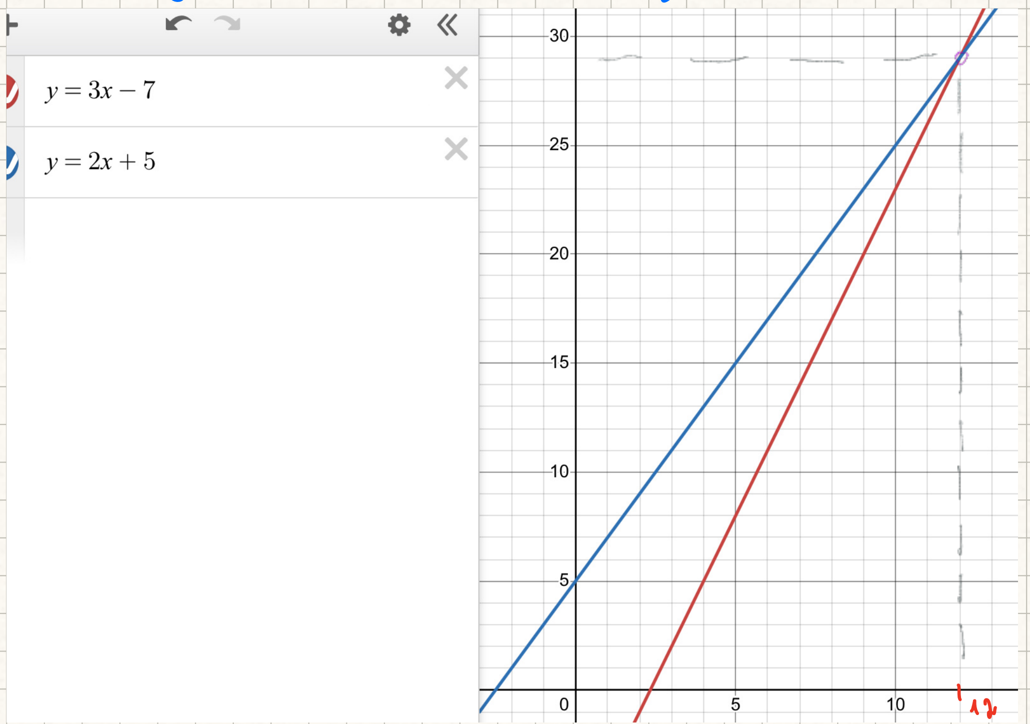
## 1) Лінійні нерівності

Алгебраїчний метод: $3x - 7 \le 2x + 5$

$3x - 2x \le 5 + 7$

$x \le 12$

Графічний метод: Будуємо граф фу $y = 3x - 7$ та $y = 2x + 5$ знаходимо точку перетину та визначаємо області.




## 2) Квадратні нерівності

Метод інтервалів:

$x^2 - 5x + 6 > 0$

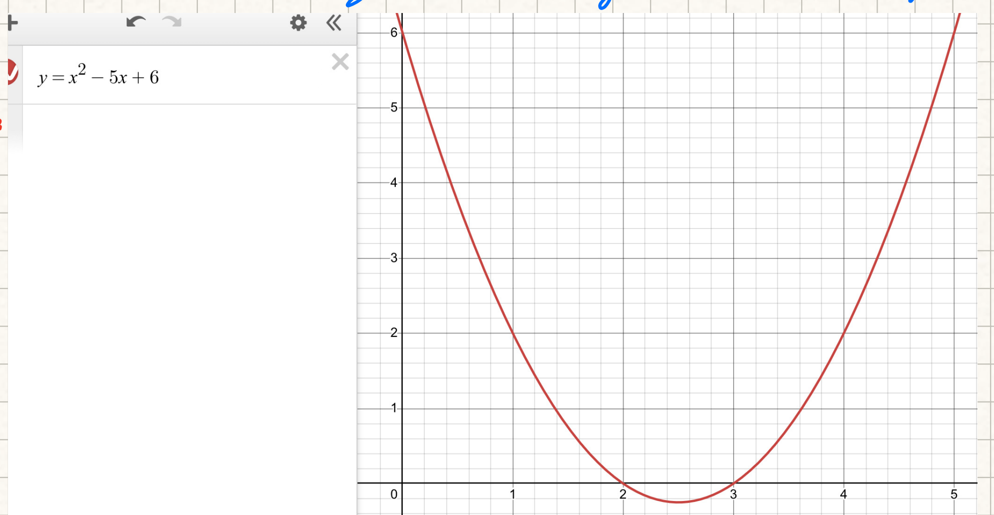
$(x-2)(x-3) > 0$

Нулі: $x = 2$, $x = 3$

Перевіряємо знак на інтервалах $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$

Графічний метод:

Будуємо параболу $y = x^2 - 5x + 6$ та визначаємо, де вона вище осі $x$.




Метод виділення повного квадрата

$x^2 - 4x + 5 > 0$

$(x-2)^2 + 1 > 0$

Завжди виконується, оскільки

$(x-2)^2 \ge 0$

## 3) Дробово-раціональні нерівності

Метод інтервалів: $(x-1)/(x+2) \geq 0$

Критичні точки: $x=1$ (нуль чисельника),
$x=-2$ (нуль знаменника

Розв'язок: $x \in (-\infty; -2) \cup [1; +\infty)$

Зведення до спільного знаменника.

$x/(x-1) > 2$

$x/(x-1) - 2 > 0$

$(x-2(x-1)/(x-1) > 0$

$(x-2x+2)/(x-1) > 0$

$(2-x)/(x-1) > 0$

## 4) Ірраціональні нерівності

Для $\sqrt{F(x)} > g(x)$; якщо $g(x) \geq 0$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$$

Якщо $g(x) < 0$; Приклад: $\sqrt{(x+1)} > x-1$

Розглядаємо два випадки: 1) $x-1<0 \Rightarrow x<1$; потрібно $x \geq -1$

2) $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$; потрібно $x+1 > (x-1)^2$

* Розв'язання ірр. нерівності виду $\sqrt{F(x)} > g(x)$. Такі нерівності вимагають розгляд двох випадків залежно від значення $g(x)$

Якщо $g(x) \geq 0$: Підкореневий вираз $f(x)$ має бути невід'ємним: $f(x) \geq 0$. Обидві частини нерівності можна піднести до квадрату, оскільки вони невід'ємні $f(x) > g^2(x)$

Якщо $g(x) < 0$: Підкореневий вираз $f(x)$ має бути невід'ємним: $f(x) \geq 0$ Нерівність $\sqrt{F(x)} > g(x)$ автоматично виконується, оскільки кв. корінь завжди невід'ємний а $g(x)$ від'ємний.

Для прикладу $\sqrt{x+1} > x-1$

Випадок 1: $x-1<0$ (тобто $x<1$)

Умова: $x+1 \geq 0$ (щоб корінь існував) тобто $x \geq -1$.
Нерівність виконується автоматично оскільки $\sqrt{x+1} \geq 0 > x-1$

Випадок 2: $x-1 \geq 0$ (тобто $x \geq 1$)

Умова: $x+1 > (x-1)^2$ (після піднесення до квадрату.
Розв'язуючи цю нерівність, знаходимо допустимі значення $x$

1. **Загальна форма**:
   Метод розв'язання $\sqrt{f(x)} > g(x)$ передбачає два випадки:
   - $g(x) \geq 0$ (тоді обидві частини можна піднести до квадрату).
   - $g(x) < 0$ (тоді нерівність виконується автоматично, якщо $\sqrt{f(x)}$ існує).
2. **Конкретний приклад**:
   У нерівності $\sqrt{x+1} > x-1$:
   - $f(x) = x+1$, ??
   - $g(x) = x-1$.

????

Її розв'язок повністю відповідає загальному алгоритму:

- **Випадок 1**: $x-1 < 0$ (тобто $x < 1$).
  Умова: $\sqrt{x+1}$ має сенс, тобто $x+1 \geq 0$ ($x \geq -1$).
  Оскільки $\sqrt{x+1} \geq 0$, а права частина $x-1$ від'ємна, нерівність виконується завжди для $x \in [-1, 1)$.
- **Випадок 2**: $x-1 \geq 0$ (тобто $x \geq 1$).
  Тут обидві частини невід'ємні, тому нерівність еквівалентна:
  $x+1 > (x-1)^2$.
  Розв'язуючи це, отримуємо додаткові обмеження на $x$.

## 5) Показникові нерівності

З однаковою основою:

$2^{(x+1)} > 2^3$

$x+1 > 3$

$x > 2$

Зведення до однієї основи:

$4^x < 8^{x-1}$

$2^{2x} < 2^{3(x-1)}$

$2x < 3x - 3$

$x > 3$

Заміна змінної:

$2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 < 0$

$t = 2^x$; $t > 0$

$t^2 - 5t + 4 < 0$

$(t-1)(t-4) < 0$; $1 < t < 4$

$1 < 2^x < 4$

$0 < x < 2$

## 6) Логарифмічні нерівності

З однаковою основою $a > 1$

$\log_2(x+1) > \log_2(x-3)$

$x+1 > x-3$ і $x+1 > 0$, $x-3 > 0$

З основою $0 < a < 1$: $\log_{0,5}(x+2) > \log_{0,5}(x-1)$

$x+2 < x-1$ (знак змінюється)

# 4) Система нерівностей

$$\begin{cases} x^2-4>0 \\ x-1<3 \end{cases}$$

Метод проміжків - розв'яз кожну нерівність окремо та знаходимо перетин розв'язків.

1) Вирішення першої нерівності

$x^2-4>0 \Rightarrow (x-2)(x+2)>0$ Визначення критичних точок де нерівність стає рівністю.

$x^2-4=0$

$x-2=0 \rightarrow x=2$

$x+2=0 \rightarrow x=-2$

Ці точки ділять числову пряму на 3 інтервала $(-\infty;-2)$, $(-2;2)$, $(2;\infty)$

Перевірка кожного інтервалу

Для $x=-3$ $(в\ (-\infty;2))$: $(-3)^2-4=9-4=5>0$ (true)

Для $x=0$ $(в\ (-2;2))$: $0^2-4=-4<0$ (false)

Для $x=3$ $(в\ (2;\infty))$: $3^2-4=9-4=5>0$ (true)

Вираз $x^2-4>0$ є нерівністю при $x<-2$ або $x>2$

2) Вирішення другої нерівності

$x-1<3$ Додати 1 до обох частин $x<3+1$

Спрощення $x<4$

3) Точка перетину 3 першої нерів. $x<-2$ або $x>2$

3 другої нерів. $x<4$

Для $x<-2$: Це задовольняє $x<4$ бо $-2<4$

Для $x>2$: Найбільш задовільно $x<4$ бо $2<x<4$

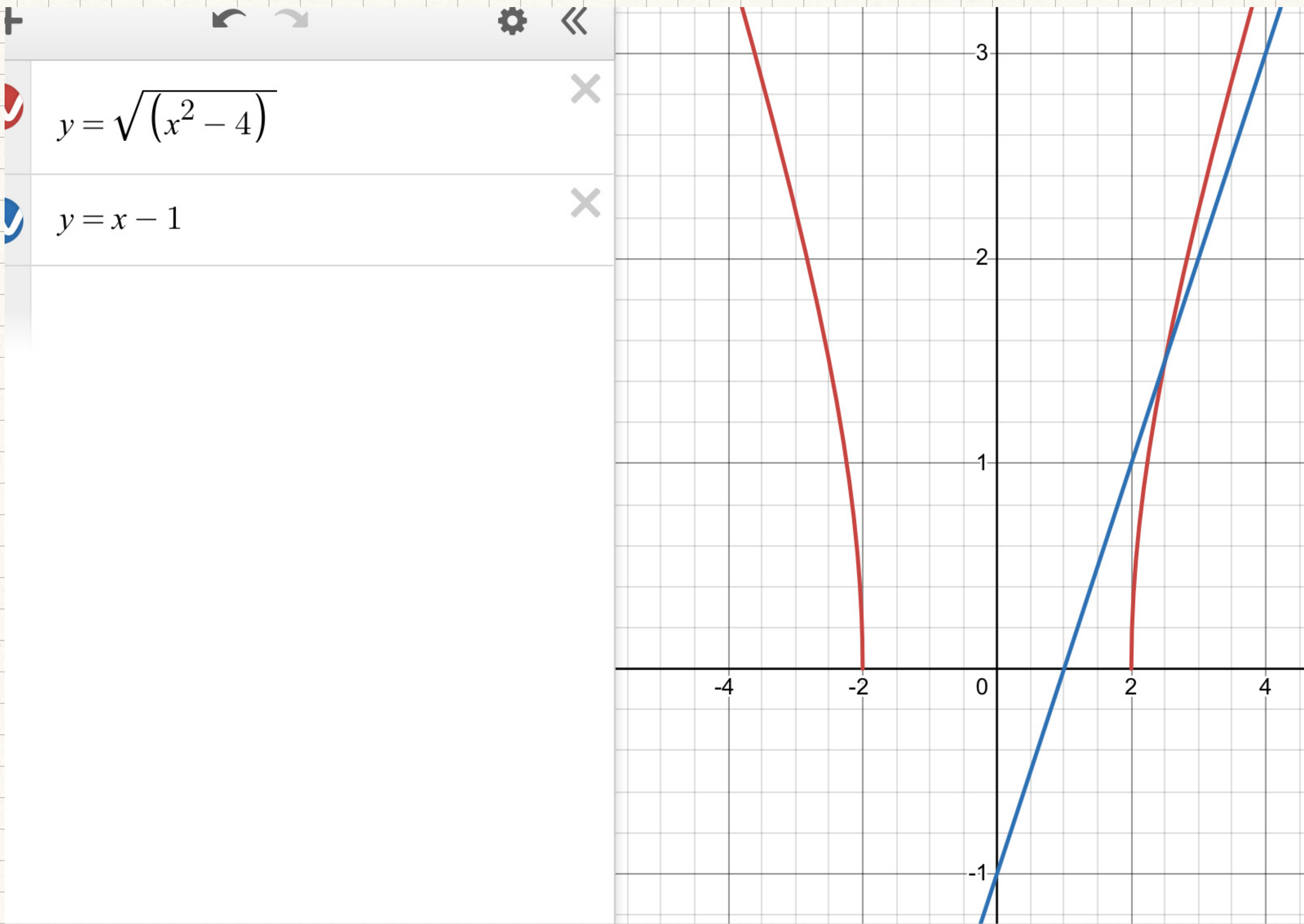
Це комбіноване рішення $x<-2$ або $2<x<4$

Відпов: виріш. системи нерівності $x^2-4>0$ і $x-1<3$ це $x\in(-\infty,-2)\cup(2,4)$

$f_1(x)=\sqrt{(x^2-4)}$ показує межу області

$f_2(x)=x-1$ показує межу області

$$\begin{cases} x^2-4>0 \\ x-1<3 \end{cases}$$




## 8) нерівності з модулем

$|f(x)| > a \ (a > 0) \Rightarrow f(x) > a$ або $f(x) < -a$

$|f(x)| < a \ (a > 0) \Rightarrow -a < f(x) < a$

приклад: $|2x - 3| \leq 5$

$-5 \leq 2x - 3 \leq 5$

$-2 \leq 2x \leq 8$

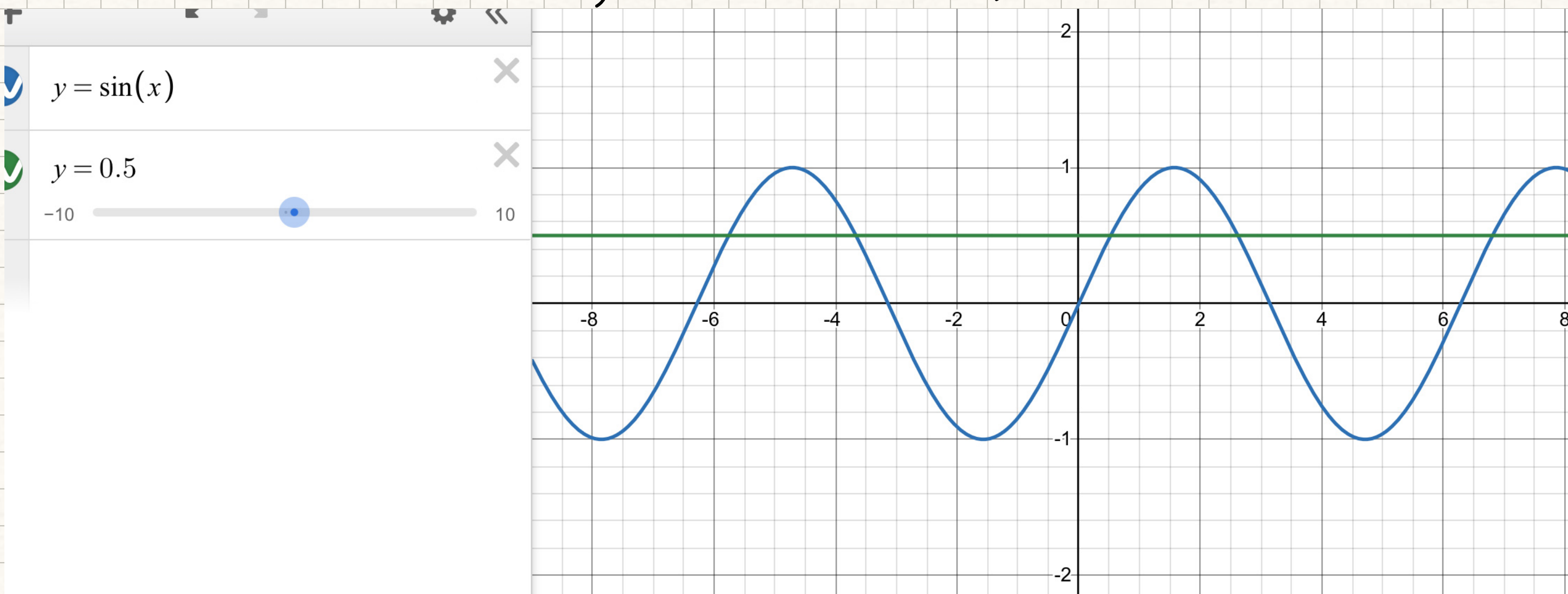
$-1 \leq x \leq 4$

## 9) Тригонометричні нерівності

$\sin x > a$ | На одиничному колі знаходимо дуги, де синус більший за $a$

$$\sin x > 1/2$$

$$x \in (\pi/6 + 2\pi k;\ 5\pi/6 + 2\pi k),\ k \in Z$$



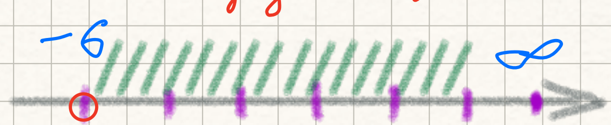

* Кожен метод має свої переваги залежно від конкретного типу, нерівності та її складності > які вибирати метод.

# Простіші приклади вирішення нерівностей

### 1) Лінійні нерівності

$$3x + 5 > 2x - 1$$

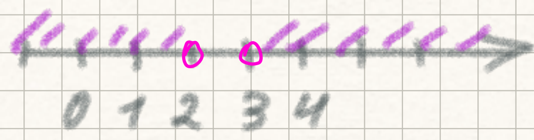
Перенесення доданків $3x - 2x > -1 - 5;\quad x > -6$



# 2) Квадратні нерівності

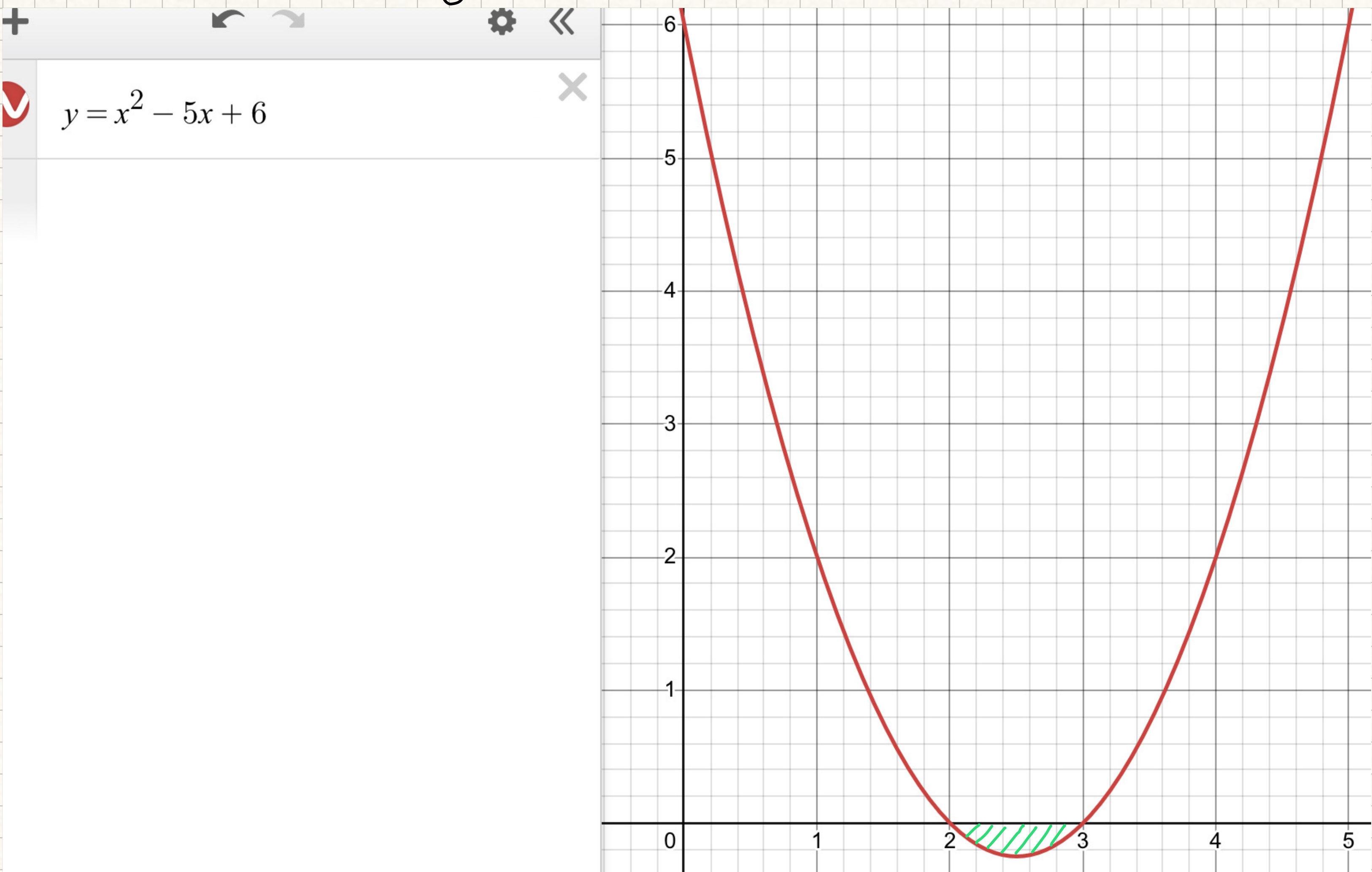
$x^2 - 5x + 6 < 0$ 1) Метод інтервалів, розкладаємо на множники $(x-2)(x-3) < 0$ Знайти корені: $x = 2$, $x = 3$. Побудувати інтервали і визначити знаки

$x \in (2;3)$; $(-\infty;2)$ $(3;\infty)$ ?




```
<-----+-----o-----o-----+----->
            2     3
```

2) Графічний метод (парабола, гілки вгору, нерівність між коренями) $y = x^2 - 5x + 6$



# 3) Раціональні нерівності

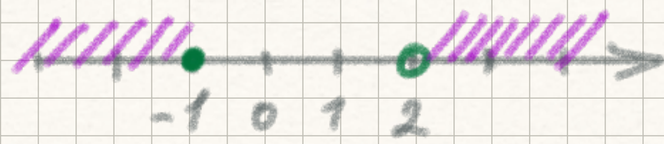
$$\frac{x+1}{x-2} \geq 0$$

## 1) Метод інтервалів

Знайти нулі чисельника та знаменника(?)  $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

Визначення знаків на інтервалах: $x \in [-\infty; -1] \cup (2; +\infty)$




## 2) Аналіз знаків (перевірка кожної області)

1) знайти нулі чис. та знам.

Нулі ч. $x+1=0$ дає $x=-1$

Нулі з. $x-2=0$ дає $x=2$

$$\frac{x+1}{x-2} \geq 0$$

2) Визначити інтервали:

Нулі та точки ділять числову вісь на інтервали: $(-\infty;-1)$; $(-1,2)$; $(2,+\infty)$

3) Визначити знаки на інтервалах:

На кожному інтервалі визначається знак виразу $\frac{x+1}{x-2}$

$(-\infty,-1)$ вираз буде додатним; $(-1,2)$ від'ємний; $(2,+\infty)$ додатний

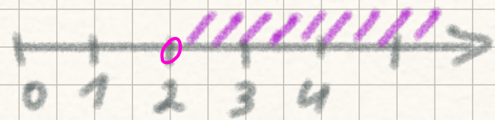
4) Врахування нерівності: Оскільки нерівність нестрога ($\geq$) точки де чис. дорів 0 (тобто $x=-1$) включаються в розв'язок.

Точки де знам. дорівнює нулю (тобто $x=2$) виключають із розв'язку, оскільки на 0 ділити не можна.

* Аналіз знаків допомагає визначити на яких інтервалах нерівність виконується і враховує критичні точки для отримання остаточного розв'язку.

## 4) Степеневі нерівності показникові

$2^{x+1} > 8$ 1) Зведем до однак. основи $2^{x+1} > 2^3$; $x+1>3$; $x>2$



1) Привести обидві сторони до однакових основ (якщо це можливо) $8 = 2^3$. $2^{x+1}>8 \Rightarrow 2^{x+1}>2^3$

2) Порівняння показників: Оскільки основа 2 більше за 1 нерівність показників зберігає напрямок нерівності: $x+1>3$

3) Розв'язати відносно $x$: Віднявши 1 з обох сторін щоб ізолювати $x$:

$x > 3-1$; $x > 2$

В: розв'яз нерівн. є $2^{x+1}>8$ є $x>2$

2) Логарифмування (якщо основи різні)

Якби неможна було виразити через однакові основи

1) Логарифм обох сторін $2^{x+1}>8 \Rightarrow \log(2^{x+1}) > \log(8)$

2) Використ. правило степеня логарифма $\log(a^b) = b\log(a)$; $(x+1)\log(2) > \log(8)$

3) Розв'язок відносно $x$ $x+1 > \frac{\log(8)}{\log(2)}$; $x > \frac{\log(8)}{\log(2)} - 1$

Оскільки $\frac{\log(8)}{\log(2)} = 3$ (тому що $2^3=8$) ми отримаємо: $x > 2$

## 5) Логарифмічні нерівності

$\log_2(x-1) \le 3$ Зведення $x-1 \le 2^3$; $x-1 \le 8$; $x \le 9$

(З урахуванням ОДЗ: $x-1>0 \Rightarrow x>1$)

В: $x \in (1; 9]$

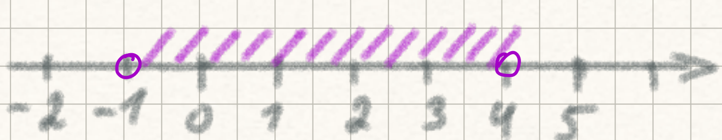
## 6) Нерівності з модулем

(виникає)

$|2x-3| < 5$ 1) За означенням модуля: $-5 < 2x-3 < 5$

$-2 < 2x < 8$

$-1 < x < 4$



# 4) Тригонометричні нерівності

$\sin x \geq \frac{1}{2}$   1) Використання одиничного кола

$$x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$$

## 2) Графічний метод

$\sin x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow y = \sin x$

$y = \frac{1}{2}$

* Ця нерівність порівнює дві функції

$$x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$$

Отак описано графічно

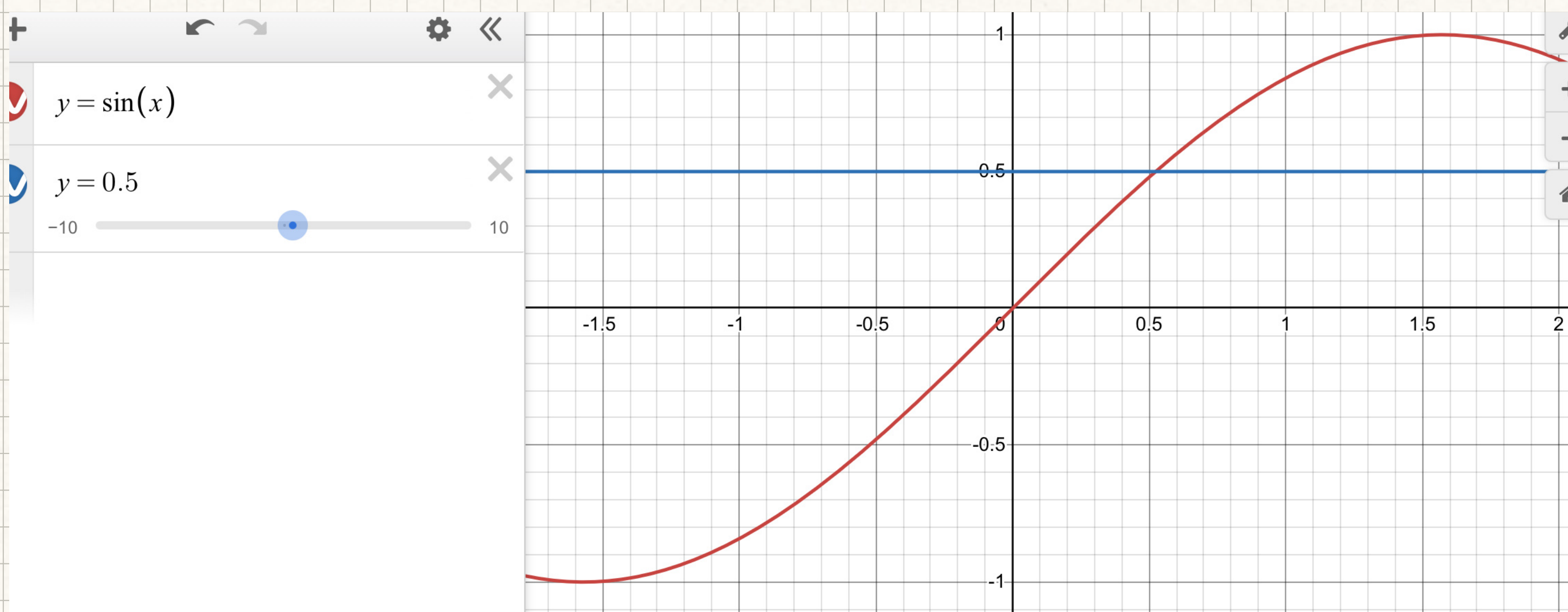
**Analysis of Signs in Solving Inequalities**

Одиничне коло — це коло з радіусом 1, центроване в початку координат (0,0) на координатній площині. Воно є важливим інструментом у тригонометрії, оскільки дозволяє візуалізувати та визначити значення синуса, косинуса та інших тригонометричних функцій для будь-якого кута.

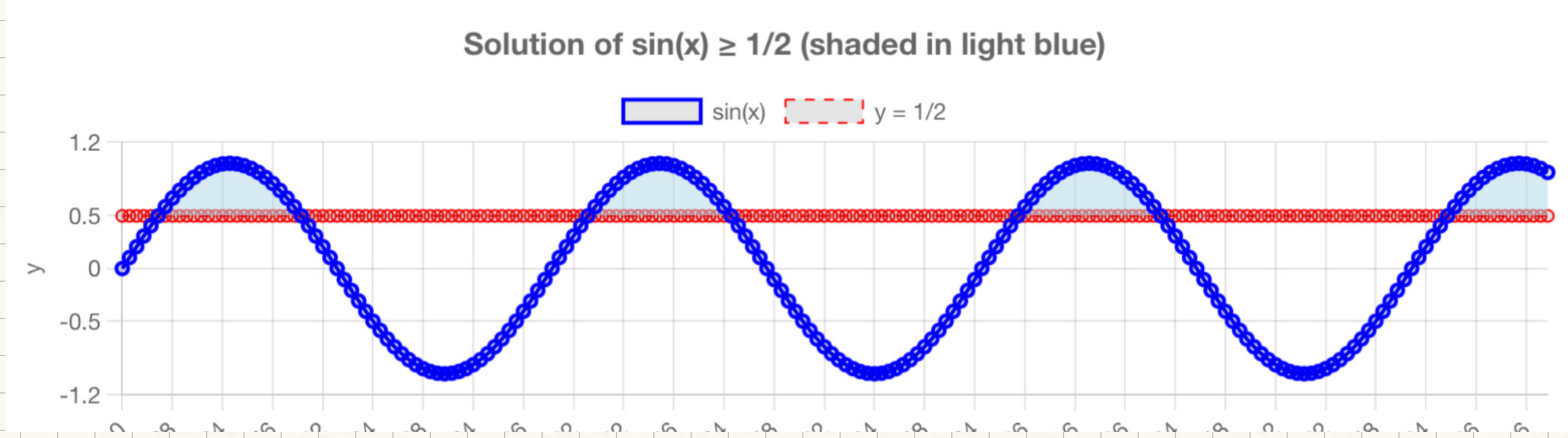
Основні характеристики одиничного кола:

1. **Радіус:** Радіус одиничного кола дорівнює 1.
2. **Координати точок:** Будь-яка точка на одиничному колі може бути представлена як $(\cos\theta, \sin\theta)$, де $\theta$ — це кут, утворений радіусом, що з'єднує початок координат з цією точкою, і позитивним напрямком осі абсцис (віссю $x$).
3. **Тригонометричні функції:**
   - $\sin\theta$ відповідає координаті $y$ точки на одиничному колі.
   - $\cos\theta$ відповідає координаті $x$ точки на одиничному колі.
4. **Періодичність:** Одиничне коло ілюструє періодичність тригонометричних функцій. Кут $\theta$ може бути виміряний у радіанах або градусах, і функції синуса та косинуса повторюються кожні $2\pi$ радіан (або 360 градусів).

Одиничне коло часто використовується для розв'язання тригонометричних рівнянь та нерівностей, а також для аналізу властивостей тригонометричних функцій.




# Graph of sin(x) ≥ 1/2



Для кожного типу нерівності за його особливостями обирають спосіб розв'язання: метод інтервалів (для рац. нерів), графічний (для віддал) графіки або пряма для інтервалів.

Алгебраїчні перетворення (зведення до простіших форми)

# Доведення нерівностей

① **Нерівність:** $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$

Знайти різницю лівої та правої частини нерівності:

$$(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)=\frac{1}{2}[(a^2-2ab+b^2)+$$
$$(b^2-2bc+c^2)+$$
$$(c^2-2ca+a^2)]=$$
$$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

Оскільки $(a-b)^2 \ge 0$, $(b-c)^2 \ge 0$, $(c-a)^2 \ge 0$ при будь-яких $a, b, c$ то $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$

Рівність досягається при $a=b=c$.

② **Нерівність. Для додатних чисел $a, b, c$:**

$$a^3+b^3+c^3 \ge 3abc$$

Доведення: скористаємося тотожністю:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

З попереднього прикладу виходить $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \ge 0$

Оскільки $a, b, c > 0$; то $a+b+c>0$

Тому $a^3+b^3+c^3-3abc \ge 0$ звідси $a^3+b^3+c^3 \ge 3abc$

③ **Нерівність.** $x^2+4y^2 \ge 4xy$ для будь-яких дійсних $x, y$.

Доведення: знайдемо різницю лівої та правої частин.

$$x^2+4y^2-4xy=x^2-4xy+4y^2=(x-2y)^2$$

Оскільки $(x-2y)^2 \ge 0$ при будь-яких $x, y$ то $x^2+4y^2 \ge 4xy$

Рівність досягається при $x = 2y$.

4 Нерівність. Для $a, b > 0$; $(a+b)^2 \geq 4ab$

Доведення. Розкриємо ліву частину: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Знайдемо різницю $(a+b)^2 - 4ab = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

Оскільки $(a-b)^2 \geq 0$ при будь-яких $a, b$, то $(a+b)^2 \geq 4ab$

Рівність досягається при $a = b$.

Усі ці доведення викорис принцип: знаходження різниці лівої та правої частин і зведення її до суми квадратів або добутку невід'ємних виразів.

## Нерівності з дробами