

# Математичні функції

15

## § 4. Функції

### Функції та їх графіки

Залежність змінної  $y$  від змінної  $x$  називається функцією, якщо кожному значенню  $x$  відповідає єдине значення  $y$ .

Функція позначається або однією буковою  $f$  (або)  $f(x)$ , або рівністю  $y = f(x)$ , де  $x$  — незалежна змінна або аргумент,  $y$  — залежна змінна або значення функції  $f(x_0)$  — значення функції  $f$  в точці  $x_0$ .

#### Область визначення і множина значень функції

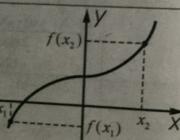
Область визначення функції ( $D$ ) — множина тих значень, які може приймати аргумент.

Множина значень функції ( $E$ ) — це множина тих значень, які може приймати сама функція при всіх значеннях аргумента із областю визначення. Наприклад:  $f(x) = \frac{2}{x-1}$ .

Область визначення ( $D$ ):  $x-1 \neq 0$ ;  $x \neq 1$ ,  $x$  — будь-яке число, крім  $x=1$ .

#### Графік функції

Графіком функції  $y=f(x)$  називається множина точок площини з координатами  $(x, y)$ , де перша координата  $x$  «побудовав» всю область визначення функції  $f(x)$ , а друга координата — це відповідне значення функції  $f$  в точці  $x$ .



#### Способи задання функції

1. Аналітичний спосіб: функція задається за допомогою математичної формулі.

$$y = x^2, y = 5x - 8; y = \frac{10}{x}$$

2. Табличний спосіб: функція задається за допомогою таблиці.

$x$	1	2	3	4	5
$y$	2	4	6	8	10

3. Описовий спосіб: функція задається словесним списком.

Функція  $f(x) = 1$  для раціональних  $x$ ,  $f(x) = 0$  для ірраціональних  $x$ .

4. Графічний спосіб: функція задається за допомогою графіка.

Лінійна функція та її графік

Лінійною функцією називається функція виду  $y = kx + b$ , де  $k \neq b$  — деякі числа,  $x$  — незалежна змінна.

#### Властивості

1. Область визначення:  $x$  — будь-яке дійсне число  $x \in \mathbb{R}$ .

2. Множина значень:

1) при  $k \neq 0$ :  $y$  — будь-яке дійсне число,  $y \in \mathbb{R}$ ;

2) при  $k = 0$ :  $y = b$ .

3. Точки перетину з осями координат:

1) при  $k \neq 0$ ,  $x = -\frac{b}{k}$ ;  $y = 0$  — точка перетину з віссю  $0x$ ;

2) при  $k = 0$ , тоді  $y = b$  — пряма, паралельна осі  $0x$  перетинає  $0y$  в точці  $(0, b)$  і збігається з віссю  $0x$  при  $b = 0$ ;

3)  $y = b$ ,  $x = 0$  — точка перетину з віссю  $0y$ , тобто  $(0, b)$ .

4. Зростання і спадання:

1) при  $k > 0$  функція зростає на всій області визначення;

2) при  $k < 0$  функція спадає на всій області визначення;

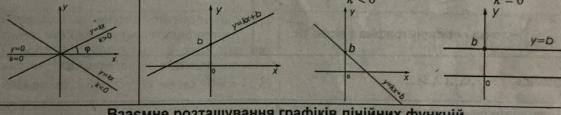
3) при  $k = 0$  функція стала.

5. Графіком лінійної функції є пряма.

$k$  — кутовий коефіцієнт

прямої

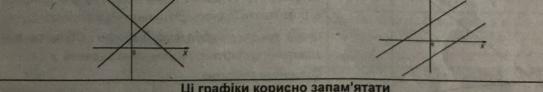
#### Графіки лінійних функцій



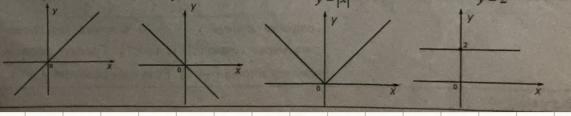
#### Взаємне розташування графіків лінійних функцій

Якщо  $k_1 \neq k_2$ , графіки функцій  $y = k_1x + b_1$  і  $y = k_2x + b_2$  перетинаються в одній точці.

Якщо  $k_1 = k_2$ ,  $b_1 \neq b_2$ , графіки функцій  $y = k_1x + b_1$  і  $y = k_2x + b_2$  паралельні.



#### Ці графіки корисно запам'ятати



зростання  
спадання

вінчев  
i оберн

Математична функція — це правило або відношення, яке кожному елементу з однієї множини (область визначення) ставить у відповідність рівно один елемент з іншої множини (область значень). Простіше кажучи, функція — це «машіна», яка для кожного «входу» дає точно один «вихід».

#### Аналогії з реального життя

Торговий автомат — ідеальна аналогія функції. Ви вставляєте монету (вхідне значення), натискаєте кнопку з номером товару, і автомат видає рівно один товар (виходе значення). Кожному номеру кнопки відповідає конкретний товар.

Перекладач у Google — ви вводите слово українською (вхід), а отримуєте переклад англійською (вихід). Одному українському слову може відповісти одне англійське слово.

Рецепт приготування — кількість інгредієнтів (вхід) визначає кількість порцій страви (вихід). Якщо рецепт розраховані на 4 особи і ви збільшуєте інгредієнти вдвічі, то отримаєте страву на 8 осіб.

Тарифна сітка таксі — відстань поїздки (вхід) визначає вартість (вихід) за певною формулою.

#### Де застосовують математичні функції

Економіка та фінанси: функції попиту та пропозиції, розрахунок відсотків, моделювання інфляції, прогнозування курсів валют.

Фізика та інженерія: траєкторія руху тіл, розрахунок електричних кіл, моделювання коливань, проектування мостів та будівель.

Медицина: дозування ліків залежно від ваги pacienta, моделювання поширення епідемій, аналіз серцевого ритму.

Комп'ютерні науки: алгоритми пошуку, машинне навчання, обробка зображень, створення комп'ютерної графіки та анімації.

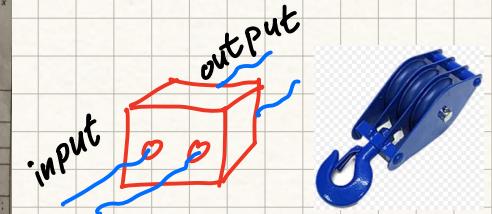
Біологія: моделювання зростання популяцій, розрахунок швидкості метаболізму, генетичні та послідження.

Метеорологія: прогнозування погоди, моделювання кліматичних

змін.

Архітектура та дизайн: розрахунок навантажень, створення естетичних пропорцій, планування просторів.

Математичні функції — це універсальна мова для опису залежностей у природі, суспільстві та технологіях. Вони дозволяють не лише описувати існуючі процеси, але й прогнозувати майбутні події та оптимізувати рішення.



\* Властивість яка продовжує функцію, обернена пропорційність.

18

#### УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

1. Знайдіть координати точок перетину графіків функцій з осіми координат.

$$y = \frac{-24}{x} + 1.$$

Графік перетинає вісь  $0x$  в точці  $(24, 0)$ . Для того, щоб знайти точку перетину графіка з віссю  $0y$ , необхідно розв'язати рівняння:  $y = 0$ , тобто  $\frac{-24}{x} + 1 = 0$ ;  $\frac{-24}{x} = -1$ ;  $x = 24$ .

Відповідь:  $(24, 0)$ .

2. Знайдіть координати точок перетину графіків функцій з осіми координат.

$$y = \frac{3x}{5x+1} - 2.$$

Для того, щоб знайти точку перетину з віссю  $0x$ , розв'язмо рівняння:  $\frac{3x}{5x+1} - 2 = 0$ ;  $\frac{3x-10x-2}{5x+1} = 0$ ;  $-7x-2 = 0$ , тобто  $\frac{-7x-2}{5x+1} = 0$ ;  $x = -\frac{2}{7}$ .

$$\text{При } x = 0 \quad y = \frac{3 \cdot 0}{5 \cdot 0 + 1} - 2 = \frac{0}{1} - 2 = -2.$$

Точка перетину графіка з віссю  $0y$   $(0, -2)$ .

Відповідь:  $(-\frac{2}{7}, 0)$ ;  $(0, -2)$ .

3. Розв'язати рівняння графічно.

$$\sqrt{x} = 2x + 10.$$

Для того, щоб розв'язати це рівняння графічно потрібно побудувати графік функції  $y = \sqrt{x}$  та  $y = 2x + 10$ . Абсциса точок перетину цих графіків є розв'язком даного рівняння. Розглянемо функцію  $y = \sqrt{x}$  і побудуємо її графік. Область визначення цієї функції є множиною значень  $x \geq 0$ . Складемо таблицю:

$x$	$0$	$-1$	$-4$	$-9$
$y$	$0$	$+1$	$2$	$3$

Графіком функції  $y = 2x + 10$  є пряма, що проходить через точки  $(0, 10)$ ;  $(-4, 2)$ . Графіки перетинаються в точці  $(-4, 2)$ . Розв'язок рівняння  $x = -4$ .

40

#### Пряма пропорційність

Функція  $y = kx$  при  $k \neq 0$  називається прямою пропорційністю.  $k$  — кутовий коефіцієнт.

Ця функція є скремпом лінійної функції  $y = kx + b$ , при  $b = 0$ . Тому її графіком є пряма, яка проходить через початок координат.

1. Якщо  $k > 0$ , то графік функції  $y = kx$  розташований в I та III координатних кутах.

2. При  $k < 0$  графік функції розташований в II та IV координатних кутах.

Характеристика точки  $(0, 0)$ :



#### Обернена пропорційність

Означення

Оберненою пропорційністю називається функція, яку можна задати формулою  $y = \frac{k}{x}$  де  $k$  — число, що не дорівнює нулю.

Число  $k$  називається коефіцієнтом пропорційності.

Графіком оберненої пропорційності є крива, яку називають гіперболою.

Гіпербола складається з двох окремих частин, які симетричні відносно початку координат, проходить через точки  $(1; k)$  та  $(-1; -k)$ .

Значення змінних

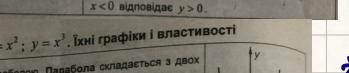
$x$  — будь-яке число, крім нуля ( $x \neq 0$ ).

$y$  — будь-яке число, крім нуля ( $y \neq 0$ ).

Якщо  $k > 0$ , то  $x > 0$  відповідає  $y > 0$ ;  $x < 0$  відповідає  $y < 0$ .

Якщо  $k < 0$ , то  $x < 0$  відповідає  $y > 0$ ;  $x > 0$  відповідає  $y < 0$ .

Графік функції  $y = \frac{k}{x}$



Діяльність функції  $y = x^2$

1. Будь-якому значенню  $x$  відповідає значення  $y$ , причому  $y \in \mathbb{R}$  (множина дійсних чисел) при  $x = 0$ ;  $y = 0$ ; якщо  $x > 0$ , то  $y > 0$ ; якщо  $x < 0$ , то  $y < 0$ .

2. Протилежним значенням  $x$  відповідає протилежне значення  $y$ :

$$(-x)^2 = x^2$$

$$x_1 = -5; y_1 = (-5)^2 = 25$$

$$x_2 = 5; y_2 = 5^2 = 25,$$

тому графік має симетрію відносно початку координат.

Функція  $y = \sqrt{x}$

Область визначення функції  $y = \sqrt{x}$  — множина неіз'ємних дійсних чисел:  $x \geq 0$  (оскільки корінь можна діяти тільки з неіз'ємного числа).

Якщо  $x = 0$ , то  $y = 0$ , тому графік функції  $y = \sqrt{x}$  проходить через початок координат.

Якщо  $x > 0$ , то  $y > 0$ , тому графік функції розташований в першій координатній квадранті.

Більшому значенню аргумента відповідає більше значення функції, дійсно:

$$x_1 = 4, \text{ тоді } y_1 = \sqrt{4} = 2;$$

$$x_2 = 9, \text{ тоді } y_2 = \sqrt{9} = 3,$$

таким чином, функція  $y = \sqrt{x}$  є зростаючою.

Графік функції  $y = \sqrt{x}$  та  $y = x^2$  при  $x \geq 0$  симетричні відносно прямої  $y = x$ .

# Як відмежити чи є лін. або кв. уявлення функцією

Відмінне запитання! Це дуже важливе розуміння, яке допоможе вам краще зрозуміти зв'язок між різними математичними поняттями.

Так, і лінійні, і квадратичні рівняння можуть бути функціями, але тут є важливі нюанси, які варто розібрати детально.

## Різниця між рівнянням і функцією

Спочатку давайте зрозумімо різницю. Рівняння — це математичне твердження, що дві вирази є рівними (містить знак “=”). Функція — це правило, яке кожному входу ставить у відповідність один вихід.

Коли ми маємо рівняння типу  $y = 2x + 3$  (лінійне) або  $y = x^2 + 2x - 1$  (квадратичне), то так, це функції! Чому? Тому що для кожного значення  $x$  ми отримуємо рівно одне значення  $y$ .

## Лінійні функції

Лінійні рівняння виду  $y = ax + b$  завжди є функціями. Вони описують пряму лінію на координатній площині. Наприклад, якщо у вас є залежність між часом роботи ( $x$  годин) і заробітною платою ( $y$  гривень) за формулою  $y = 100x + 500$ , то це лінійна функція. Кожній кількості годин відповідає точно одна сума заробітку.

## Квадратичні функції

Квадратичні рівняння виду  $y = ax^2 + bx + c$  також є функціями. Вони описують параболу. Уявіть, що ви кидаєте м'яч угору — його висота залежить від часу за квадратичною функцією. Для кожного моменту часу м'яч має рівно одну висоту.

## Важливе застереження

Але увага! Не всі рівняння, що містять квадрати, є функціями. Наприклад, рівняння кола  $x^2 + y^2 = 25$  не є функцією, тому що для одного значення  $x$  може бути два значення  $y$ . Якщо  $x = 3$ , то уможе бути як  $+4$ , так і  $-4$ .

## Тест вертикальної лінії

Є простий спосіб перевірити, чи є рівняння функцією: уявіть, що ви

## Важливе застереження

Але увага! Не всі рівняння, що містять квадрати, є функціями. Наприклад, рівняння кола  $x^2 + y^2 = 25$  не є функцією, тому що для одного значення  $x$  може бути два значення  $y$ . Якщо  $x = 3$ , то уможе бути як  $+4$ , так і  $-4$ .

## Тест вертикальної лінії

Є простий спосіб перевірити, чи є рівняння функцією: уявіть, що ви проводите вертикальну лінію через графік. Якщо ця лінія перетинає графік більше ніж в одній точці, то це не функція.

Подумайте: чи розумієте ви, чому лінійні та квадратичні рівняння завжди проходять цей тест, а рівняння кола — ні? Це допоможе вам краще зрозуміти суть функцій.

Тест вертикальної лінії — Explanatory жливіших і найпростіших інструментів у математиці для визначення, чи є графік функцією. Давайте розберемо його детально, щоб ви могли впевнено застосовувати цей тест.

## Суть тесту

Уявіть, що у вас є олівець, який ви тримаєте вертикально, і ви повільно рухаєте його зліва направо через весь графік. Якщо в будь-якому місці ваш олівець торкається графіка більше ніж в одній точці одночасно, то цей графік не є функцією.

Чому це працює? Пам'ятаєте визначення функції — кожному входу (значенню  $x$ ) має відповідати рівно один вихід (значення  $y$ ). Вертикальна лінія представляє одне конкретне значення  $x$ . Якщо ця лінія перетинає графік у двох або більше точках, це означає, що одному значенню  $x$  відповідає кілька значень  $y$ , що порушує основне правило функції.

## Приклади, що проходять тест

Розглянемо лінійну функцію  $y = 2x + 1$ . Уявіть пряму лінію, що йде знизу ліворуч до верху праворуч. Коли ви проводите вертикальну лінію в будь-якому місці, вона завжди перетинає цю пряму рівно в одній точці. Це тому, що пряма ніколи не “повертається назад” по осі  $x$ .

Тепер подумайте про квадратичну функцію  $y = x^2$ . Це парабола, що відкривається вгору, з вершиною в точці  $(0,0)$ . Незважаючи на те, що вона має U-подібну форму, кожна вертикальна лінія все одно перетинає її лише в одній точці. Навіть коли парабола “згинається”, вона не повертається назад через те саме значення  $x$ .

## Приклади, що не проходять тест

Класичний приклад — коло з рівнянням  $x^2 + y^2 = 25$ . Уявіть коло з центром у початку координат і радіусом 5. Тепер проведіть вертикальну лінію, скажімо, в точці  $x = 3$ . Ця лінія перетне коло у двох точках: одна вгорі  $(3, 4)$ , а друга внизу  $(3, -4)$ . Це означає, що одному значенню  $x = 3$  відповідає  $\downarrow$  за різні значення  $y$ , тому коло не є функцією.

Інший цікавий приклад — горизонтальна парабола  $x = y^2$ . Уявіть параболу, що відкривається праворуч замість вгору. Якщо ви проведете вертикальну лінію в точці  $x = 4$ , вона перетне параболу у двох точках:  $(4, 2)$  і  $(4, -2)$ .

## Особливі випадки для роздумів

Подумайте над такими питаннями для поглиблення розуміння: що станеться, якщо вертикальна лінія торкається графіка рівно в одній точці, але не перетинає його? Це все одно вважається одним перетином, тому графік залишається функцією.

А що, якщо графік має розрив або “стрибок”? Наприклад, функція може мати значення  $y = 2$  при  $x = 3$ , а потім “стрибнути” до  $y = 5$  при тому ж  $x = 3$  з іншого боку. Такий графік не пройде тест вертикальної лінії і не буде функцією.

## Практичне застосування

Коли ви бачите будь-який графік, швидко проведіть уявну вертикальну лінію через найширші або найскладніші частини. Якщо графік має петлі, кола, горизонтальні ділянки з вертикальним “стрибком” або будь-які інші форми, де одне значення  $x$  може дати кілька значень  $y$ , він не пройде тест.

Цей тест особливо корисний при роботі з графіками, побудованими на комп’ютері або калькуляторі, коли не завжди зрозуміло з рівняння, чи є воно функцією. Просто уявно “просканируйте” графік вертикальними лініями — і відповідь стане очевидно.

Чи розумієте ви тепер, чому цей простий візуальний тест так ефективно працює? Спробуйте застосувати його до різних графіків, які ви бачили раніше, і подивітесь, чи зможете передбачити результат до того, як проведете тест.

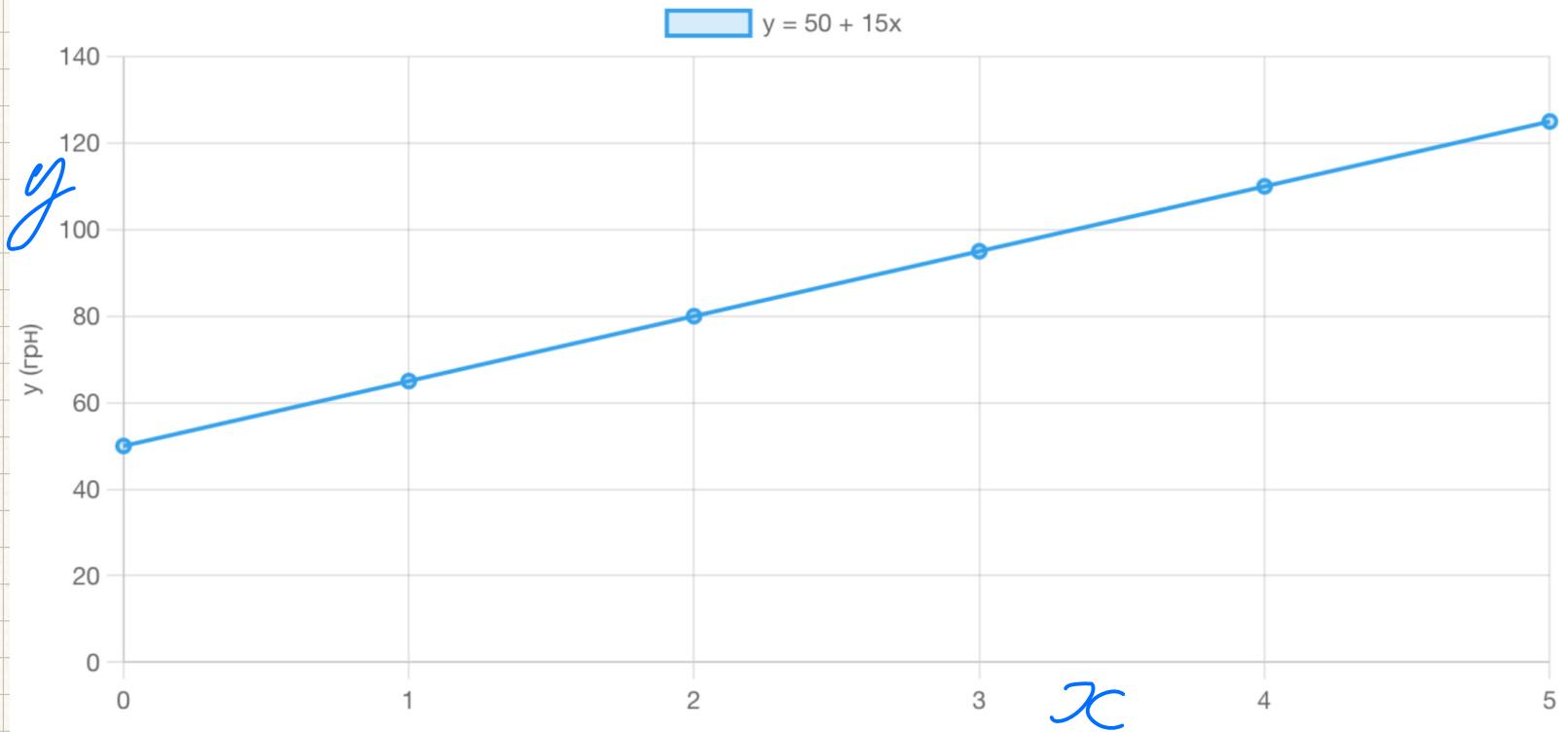


Функція = залежність  
= відповідність

Приклади лінійних функцій у реал. знач.

### 1) Ідея

$y = 50 + 15x$  де  $y$  - вартість поїздання ( грн )  
 $x$  - відстань , 50 грн - баз. тариф  
15 грн/км - варт. за кілометр.



- Лінійна функція  $\Rightarrow$  пряма ( лінія )
- \* Хоча  $y$  не залежить від  $x$ , вона залежить від  $x$ . Якщо  $x$  збільшиться на 1,  $y$  зростає на 15
  - \* Це означає що зростання  $y$  відповідає зростанню  $x$  на 1
  - \* Відомий член 50 є початковим значенням  $y$  при  $x=0$
  - \* Відомий член 15 є коефіцієнтом пропорційності

$x$	0	1	2
$y$	50	65	80

$$\text{При } x=1; \quad y = 50 + 15 \cdot 1 = 65$$

$$\text{При } x=2; \quad y = 50 + 15 \cdot 2 = 80$$

## 2) Погодинна оплата

$$y = 120x$$

Заробітна плата з погодинною оплатою  
 $y$  - заробіток за добу (УНІ); Залежність змінна - залежність від  $x$

$x$  - відпрац. годин.; Залежність змінна - яку можна змінювати.

120 грн/год - погодинна ставка; Коеф при  $x$  який показує єдину пропорційність.

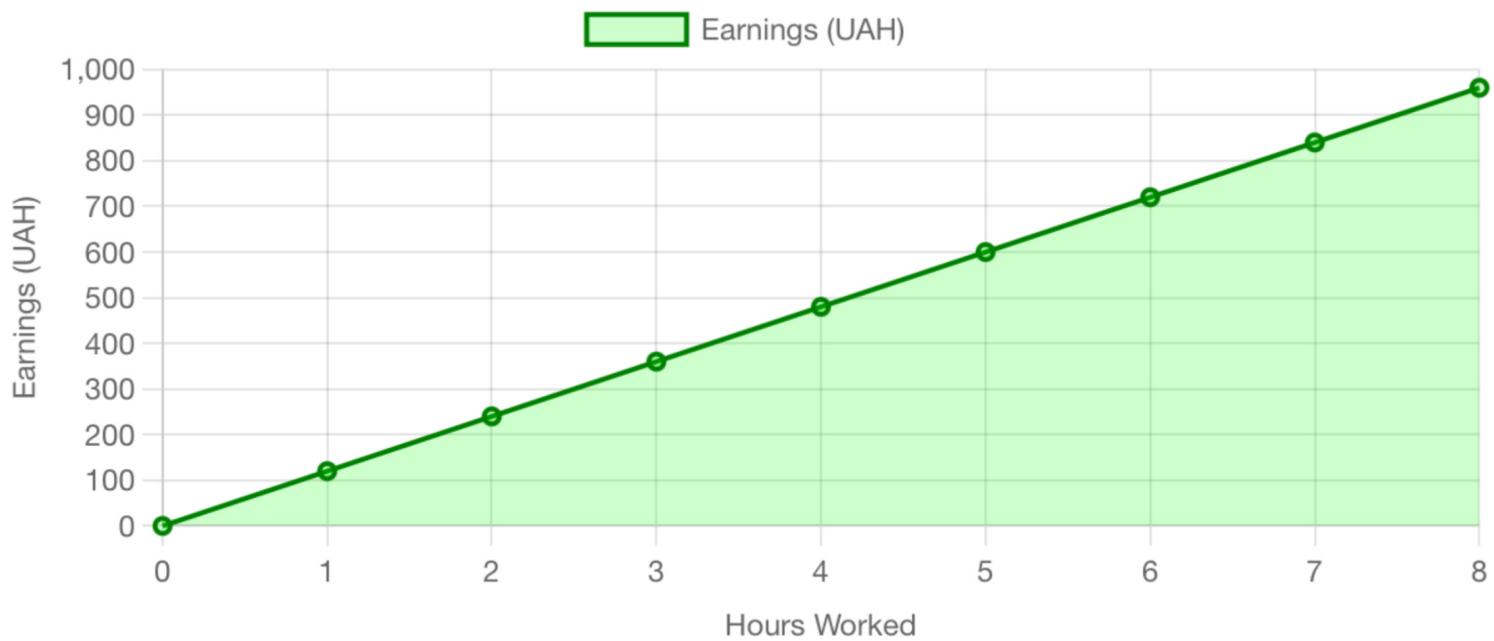
\* лінія від  $y=0$  показує таку пропорційність.  
zn. Прив. пропорц. кільк. відпрац. годин.

\* Ставка та зв. змінн. Кожна відпрац. година збільшує заробіток на відповідну суму 120 грн.

Ставка відпрац. змінн. є характеристикою фін. фр.

\* Ця фін. фр. є моделью для розрахунку зн. по основі погодинної ставки та к-ті відпрац. год.

Earnings Based on Hours Worked



### 3) Випадок падіння

Чу. модель випадку падіння

$$y = 500 - 8x$$

де  $y$  - залишок пасива (u) Залежність  
змінної - змінч. значення від  $x$ .

$x$  - проїзд відстань (ки).  $1=100$  тащу чо  
вказую розріз 8 ліній від 100 км.

Незалежності змінна - залежність між змінними.

500 - початковий об'єм бака. Від'ємні числа -  
є можливі перевищує з  $y$ . Число. нулев.

число. пропорційності = кутовий коеф.

> Визначте н. змінн у відносно  $x$ .

> На креслі відмінно залежність  $x$  залежність  $y$   
змінюється на  $k$  однаково ( $y = b - kx$ )  $k = -8$

$|k|$  - відмінн. показ прикрай: чим більше абсолютне  
значення, тими крутіше пряма (що вказує зростання або падіння)  $k > 0 \nearrow k = 0 \downarrow$ .

\* лінійна функція моделює випадки падіння і описує залежність  
між змінною відстані.  $k$  - є К.К. і К.п. видається  
швидкістю та напрямок зміни об'єм відстаню  
іншої. Чу. лін. тащу швидкість зміни розмежує на котри

Швидкість зміни  $\frac{\partial y}{\partial x} = -8 \text{ км}$

Пояснений д. фр.

$x$	0	1	2
$y$	0	492	484

$x = 0$ ; стояло на місці

$x = 1$ ; ( $1=100$ )  $y = 500 - 8 \cdot 1 = 492$  км 8 к

$x = 2$ ; ( $2=200$ )  $y = 500 - 8 \cdot 2 = 484$  (u) 16 к

> Максим. бігстапи на пътнищу бака:

Без падиво  $y = 0$ ;  $0 = 500 - 8x$ ;  $8x = 500$ ;  $x = \frac{500}{8} = 62.5$

Оскільки  $x = 100$ ;  $62.5 \cdot 100 \text{ km} = 6250 \text{ km}$  до підкію  
баку

> Витрати на 1 км;  $8x / 100 \text{ km} = 0.08 \text{ л/км.}$

## График дії

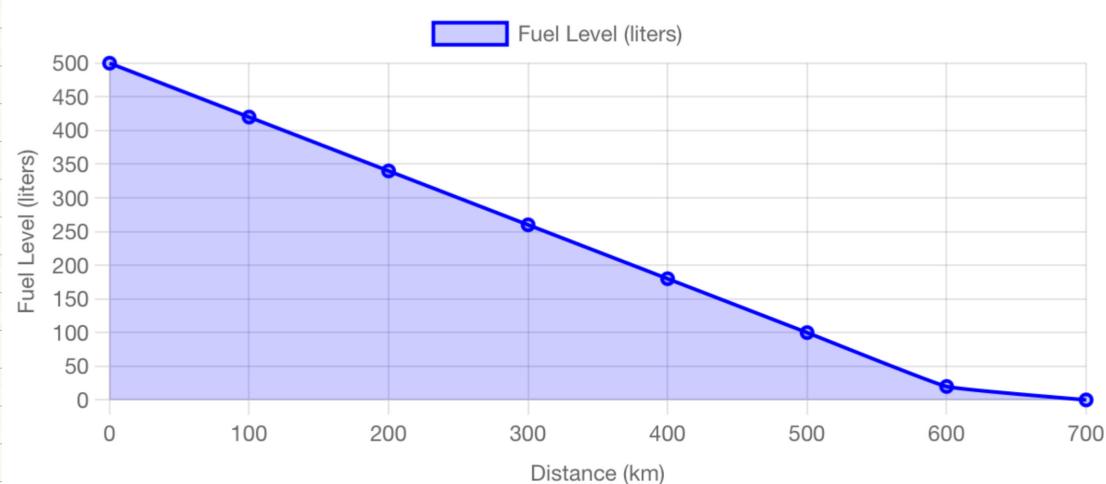
Висло  $y$ : перший вів. (0, 500) ноб. бак.

Кутовий коеф:  $-8$  (причиною є відсутність пробурж.)

Істинно  $\downarrow$ ; Зігнано  $\nearrow$ ; Залеж  $y$  від  $x$  від  $x$  км

$$x = 0.5 = 50; x = 1,2 = 120$$

Fuel Level Based on Distance Traveled



## 4) Чоргіваний боди ( $y = kx + b$ )

Лінійна фу. модель (десмополіє) відповідний  
(залежс. взаємозалежс.) - температури до гасу при нагріванні.

$$y = 20 + 5x \quad y - t^{\circ}\text{C} \text{ боди}; \text{ залежс. зміни}$$

$x$  - час нагрів (хв); Чезалежс. зміни

$20^{\circ}\text{C}$  - початкова температура Відмінні член

$5^{\circ}\text{C}/\text{хв}$  - кв. нагріваний К.К. К.М.

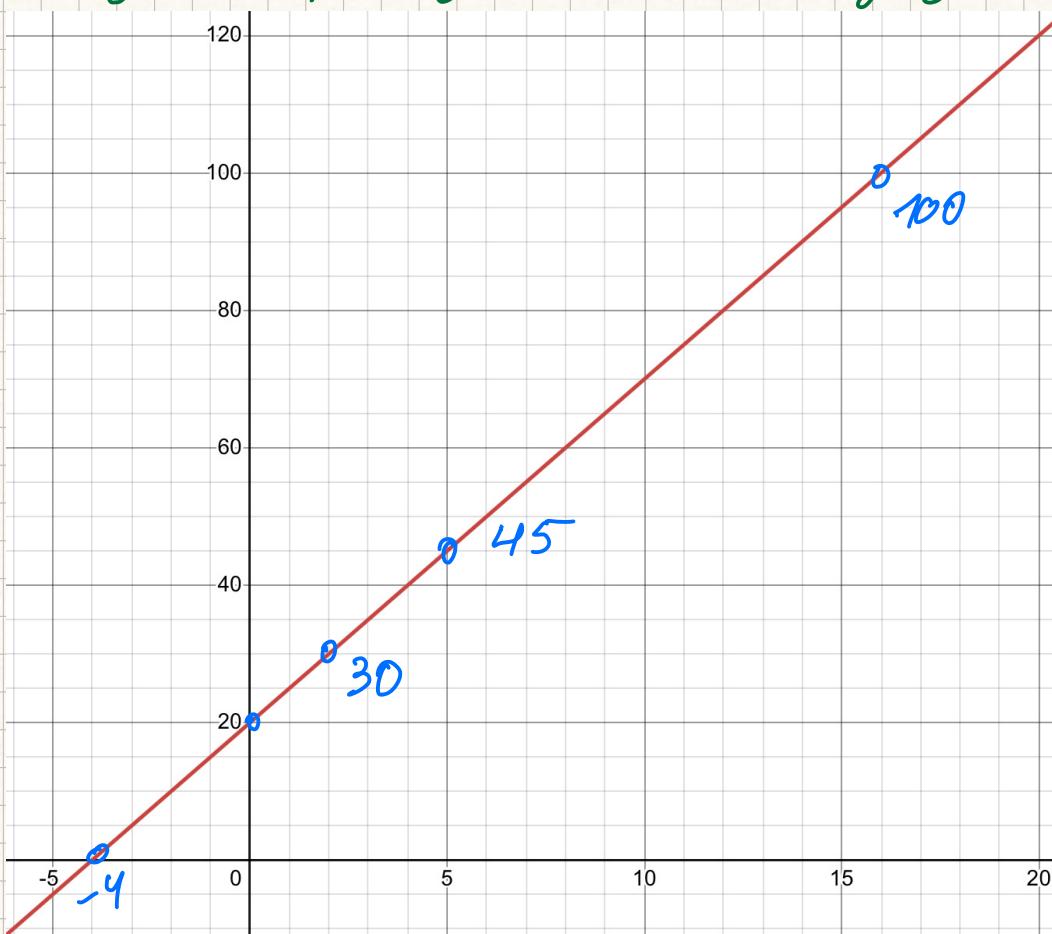
$x$	0	2	5
$y$	20	30	45

$$\text{Через } 0 \text{ хв: } y = 20 + 5 \cdot 0 = 20$$

$$2 \text{ хв: } y = 20 + 5 \cdot 2 = 30$$

$$5 \text{ хв: } y = 20 + 5 \cdot 5 = 45$$

\* Физ. лін - зрос (спад) прямолінійно  $t^{\circ}$  з  $T$   
зручно при змінах які відбуваються поспільство кв.



\* Задача

$$y = 100^{\circ}\text{C}$$

$$100 = 20 + 5 \cdot x$$

$$5x = 80$$

$$x = \frac{80}{5}; x = 16$$

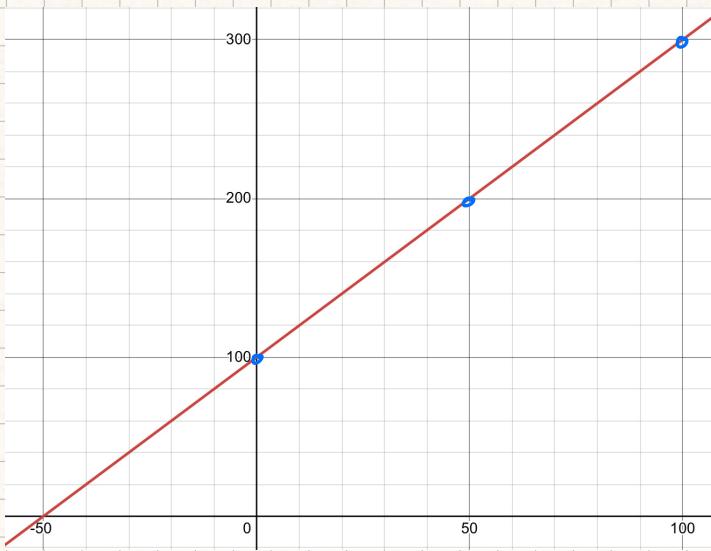
## 5) Модіусний таунер ( $y = kx + b$ )

Мод таунер котиже 100 ун на міс. плюс 2 ун за збільшу розмов. Тобуд таунер здієс членісальної функції від  $x$ -тих розмов (від 0 до 100 хв.)

$$y = 100 + 2x$$

Дог:

$x$	0	1	2	100
$y$	100	102	104	300



$$\text{При } x=0; y = 100 + 2 \cdot 0 = 100$$

$$x=1; y = 100 + 2 \cdot 1 = 102$$

$$x=2; y = 100 + 2 \cdot 2 = 104$$

$$x=100; y = 100 + 2 \cdot 100 = 300$$

## 6) Вимікаючі боди (впрацю)

$$(y = kx + b)$$

Гезербууд 1000л, шорвасими вимикає 25л. Тобуд таунер здієс  $x$ -ти боди від часу (від 0 до 40 хв)

$$y = 1000 - 25x$$

$x$	0	1	4	5	10	20	30	40
$y$	1000	975	0	875	750	500	250	0

$$x=0; y = 1000$$

$$x=1; y = 1000 - 25 = 975$$

$$x=40; y = 1000 - 25 \cdot 40 = \\ = 1000 - 1000 = 0;$$

$$1000 - 25 \cdot 30 (30; 250)$$

$$1000 - 25 \cdot 20 (20; 500)$$

$$1000 - 25 \cdot 5 (5; 875)$$

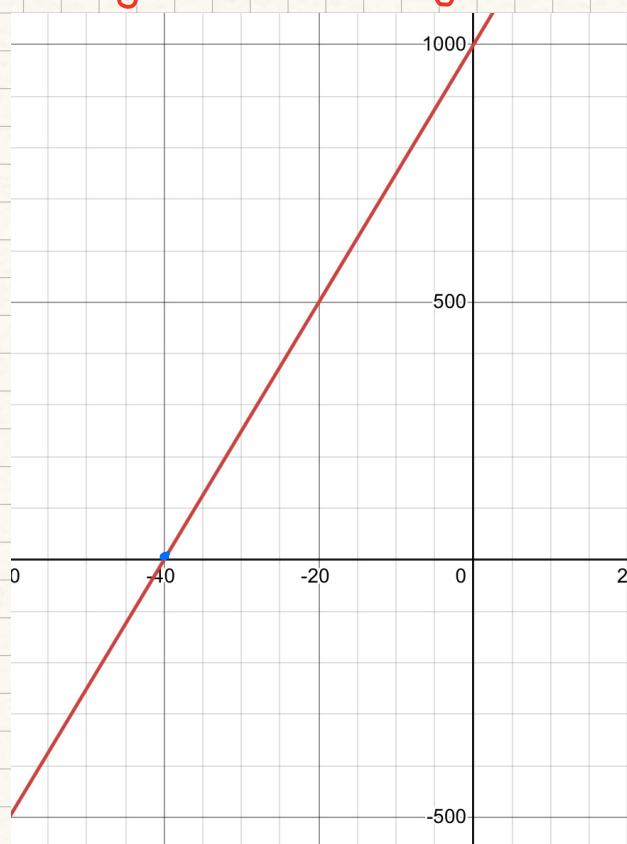
$$1000 - 25 \cdot 10 (10; 750)$$

?

?

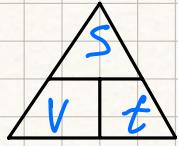
?

?



### 3) Моделювання велосипедиста ( $y = kx + b$ )

Велосипедист, шв. 20 км/год. Побудувалим уявіть залежності пройденої відстані від часу (від 0 до 5 годин)



$s(t) = 20 \cdot t$  лінійна фу. описує рух велосипедиста.

x	0	1	2	5
y	0	20	40	100

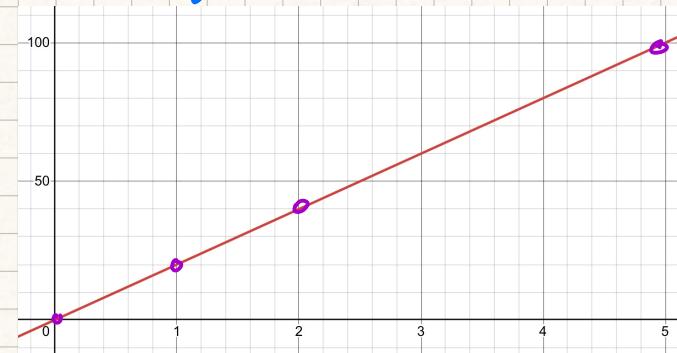
При  $t = 1$ :

$$s(1) = 20 \cdot 1 = 20$$

$$s(2) = 20 \cdot 2 = 40$$

$$s(5) = 20 \cdot 5 = 100$$

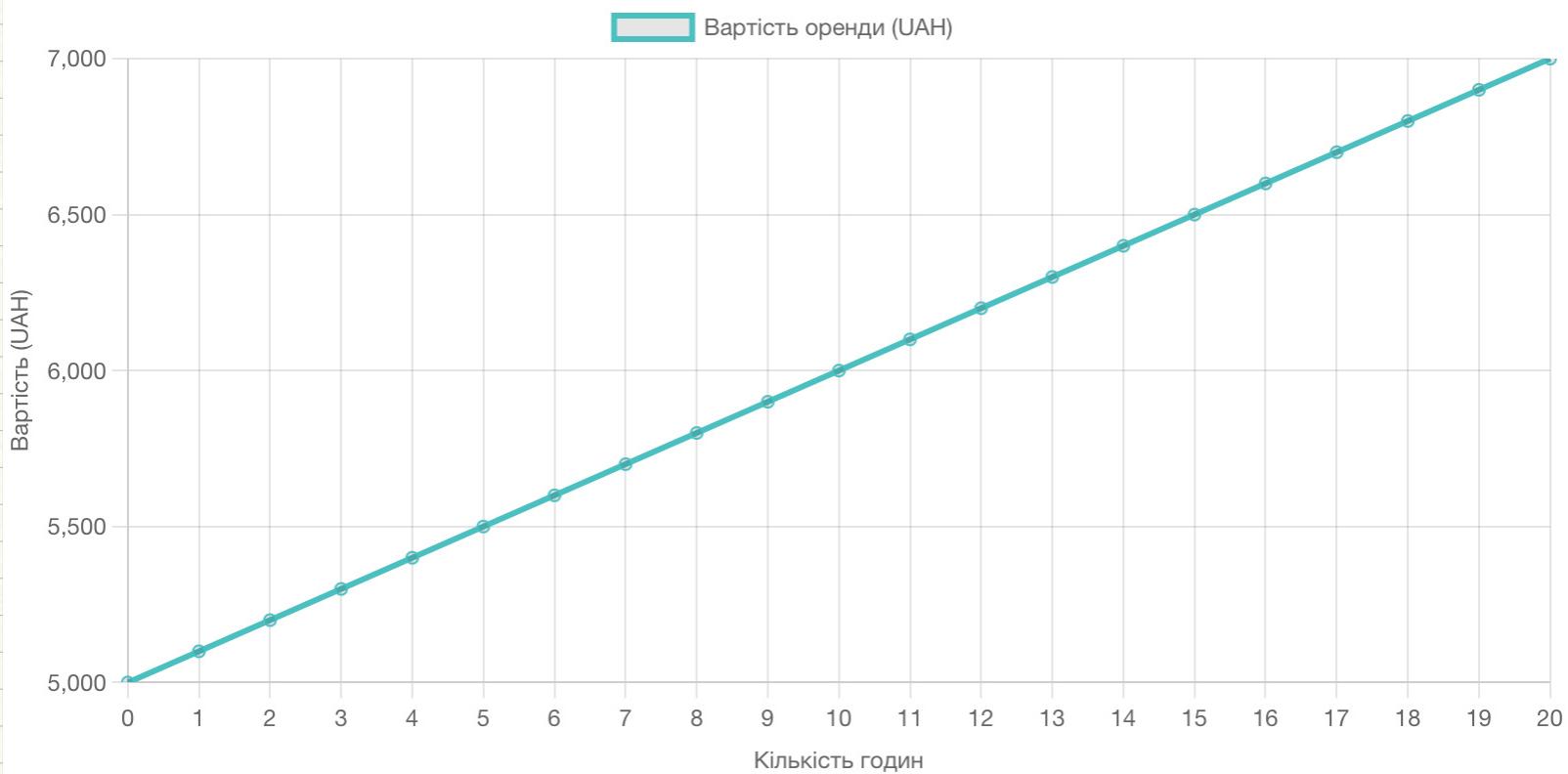
$$y = 20x$$



### 8) Оренда пристрій

Оренда 5000 грн фіксована. Нарост 100 грн за кожну годину використання. Побудуйте залежність оренди від кількості годин (від 0 до 20)

$$y = 5000 + 20x \quad cost = 5000 + 20 \cdot t$$



## 9) Бізнес - план кафе

### Задача 1: Бізнес-план кафе

Власник кафе планує відкрити новий заклад. Початкові витрати на обладнання становлять 240 000 грн. Щомісячні постійні витрати (оренда, зарплата) — 36 000 грн. Прибуток з одного відвідувача в середньому 45 грн.

Завдання:

1. Складіть функцію загальних витрат  $V(t)$  залежно від кількості місяців роботи  $t$
2. Складіть функцію загального доходу  $D(n,t)$ , якщо щомісяця кафе відвідує  $n$  клієнтів
3. Знайдіть функцію прибутку  $P(n,t) = D(n,t) - V(t)$
4. Визначте, скільки клієнтів щомісяця потрібно, щоб вийти в нуль через 12 місяців
5. Побудуйте графік залежності місячного прибутку від кількості клієнтів (при  $t=12$ )
6. Розрахуйте, через скільки місяців окупляться початкові вкладення при 2000 клієнтах на місяць

- > Початкові витрати 240 000 грн
- > Щомісяч постійні вит. 36 000 грн
- > Прибуток з одног клієнта - 45 грн.

1) Екв. залишків фунтарів  $V(t)$

$V(t) = 240000 + 36000 \cdot t$  фунтами сяюг Рис. 2  
із початкових та залісувальних

2) Екв. зар. земс.  $D(n, t)$

$D(n, t) = 45 \cdot n \cdot t$  змін. земс. га на  $n$  км.

3) Екв. прибутку  $P(n, t)$

$P(n, t) = D(n, t) - V(t) = 45nt - (240000 + 36000t)$

4) Скільк. км. потрібно залісити, щоб фунти були через 12 міс.

Потрібно  $n$ , коли  $P(n, 12) = 0$

$$45 \cdot n \cdot 12 = 240000 + 36000 \cdot 12 \Rightarrow 540n =$$

$$240000 + 432000 = 672000 \Rightarrow n = \frac{672000}{540} = \\ = 1244,44$$

Потрібно ~1245 кілометрів на місяць, щоб викиди були через 12 місяців.

5) Граф. залежності між. прибутку від кількості кущів при  $t=12$ .

$$P(n, 12) = 540n - 672000 \quad (y = 540n - 672000)$$

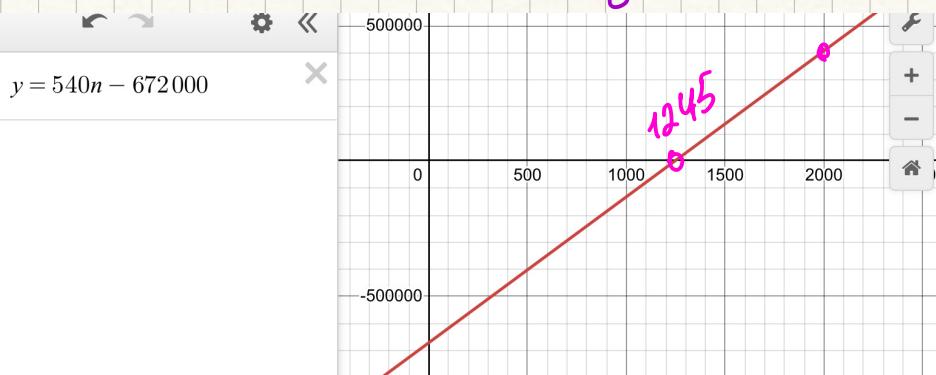


Рис. 1

↑ фунтами.

→ кущів

6) Через скільки місяців отримається прибуток при

2000 клієнтах на місяць.

Искажемо  $t$ , коли:

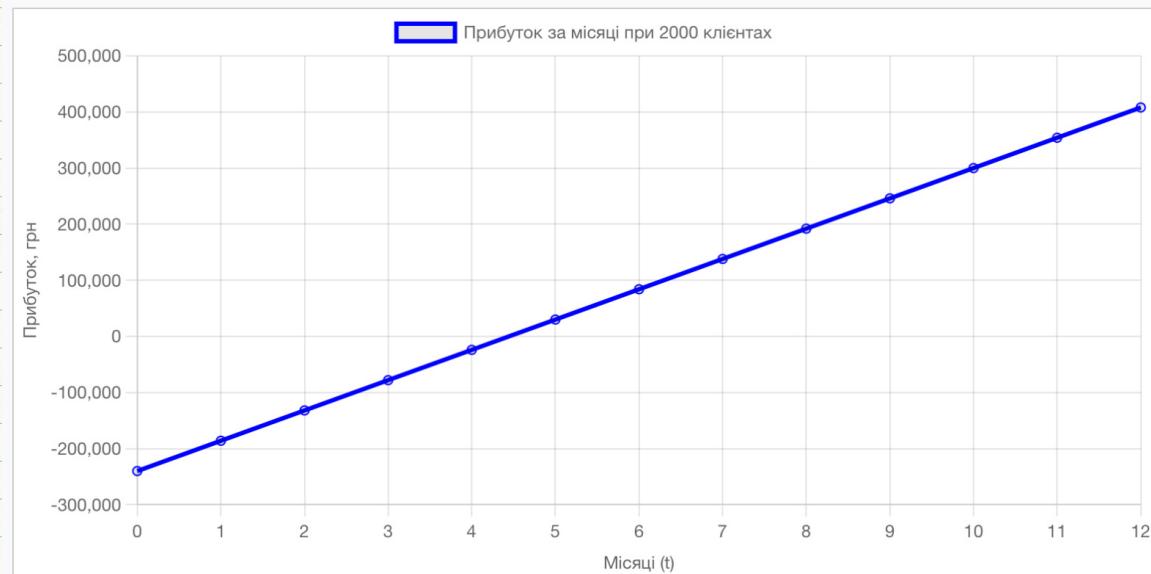
$$P(2000, t) = 45 \cdot 2000 \cdot t - (240000 + 36000 \cdot t) = 0$$

$$80000t - 240000 - 36000t = 0 \Rightarrow$$

$$54000t = 240000 \Rightarrow t = \frac{240000}{54000} = 4.44$$

Прибуток через 4,5 місяці при 2000 клієнтах.

### 3. Прибуток $P(2000, t)$ залежно від місяців (2000 клієнтів/міс)



### Бізнес-план кафе: графіки витрат, доходів і прибутку

#### 1. Загальні витрати $V(t)$



Рис. 2

#### 2. Прибуток $P(n, 12)$ залежно від клієнтів за рік

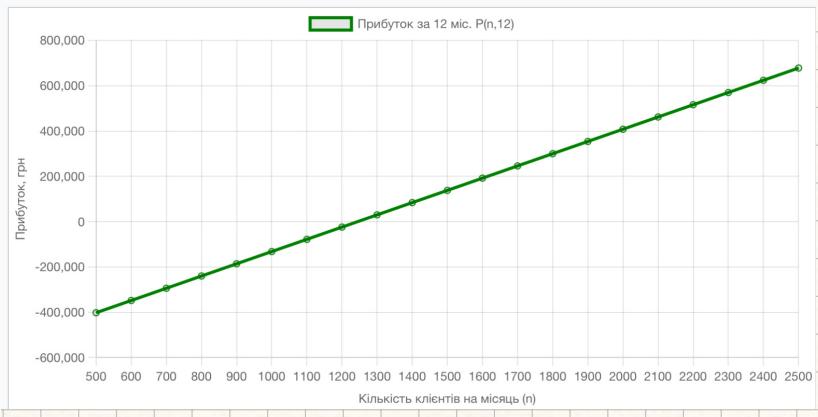


Рис.1

## 10) Система водопостачання

### Задача 2: Система водопостачання

У селищі встановлюють нову систему водопостачання.

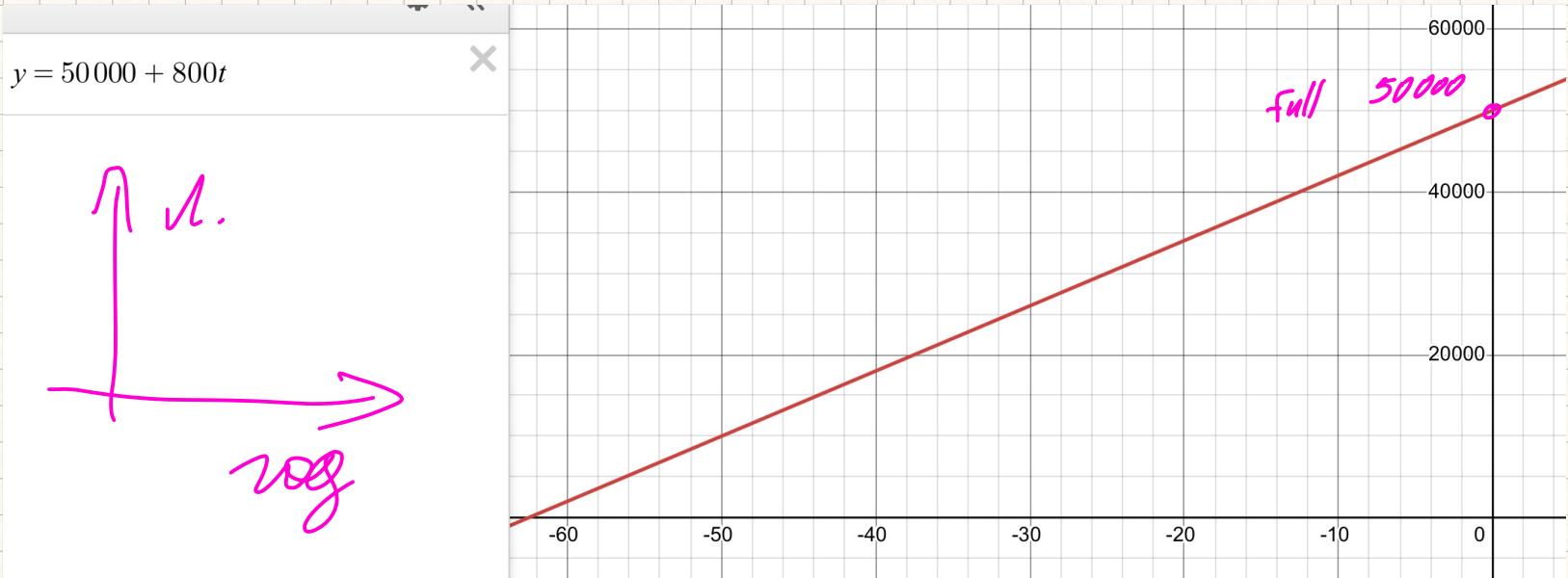
Водонапірна башта містить 50 000 л води. Вночі (з 22:00 до 6:00) башта наповнюється зі швидкістю 800 л/год. Вдень споживання води становить 1200 л/год, але наповнення не припиняється.

Завдання:

1. Складіть функцію кількості води  $V_1(t)$  для нічного періоду ( $t$  — години після 22:00)
2. Складіть функцію кількості води  $V_2(t)$  для денного періоду ( $t$  — години після 6:00)
3. Визначте кількість води в башті о 6:00 ранку
4. Знайдіть, о котрій годині дня рівень води буде мінімальним
5. Побудуйте графік зміни рівня води протягом доби
6. Розрахуйте, на скільки потрібно збільшити швидкість наповнення, щоб рівень води ніколи не опускався нижче 20 000 л

1) Функція є функцією періоду ( $y = 50000 + 800t$ )

$V_1(t) = 50000 + 800t$  час починається з 10:00 PM (from 10:00PM to 6:00AM)  
поступовий наповнення за певний період 800 л/год.



$t=0$  в 22:00,  $V(0)$  – початковий об'єм в 22:00 в баках.

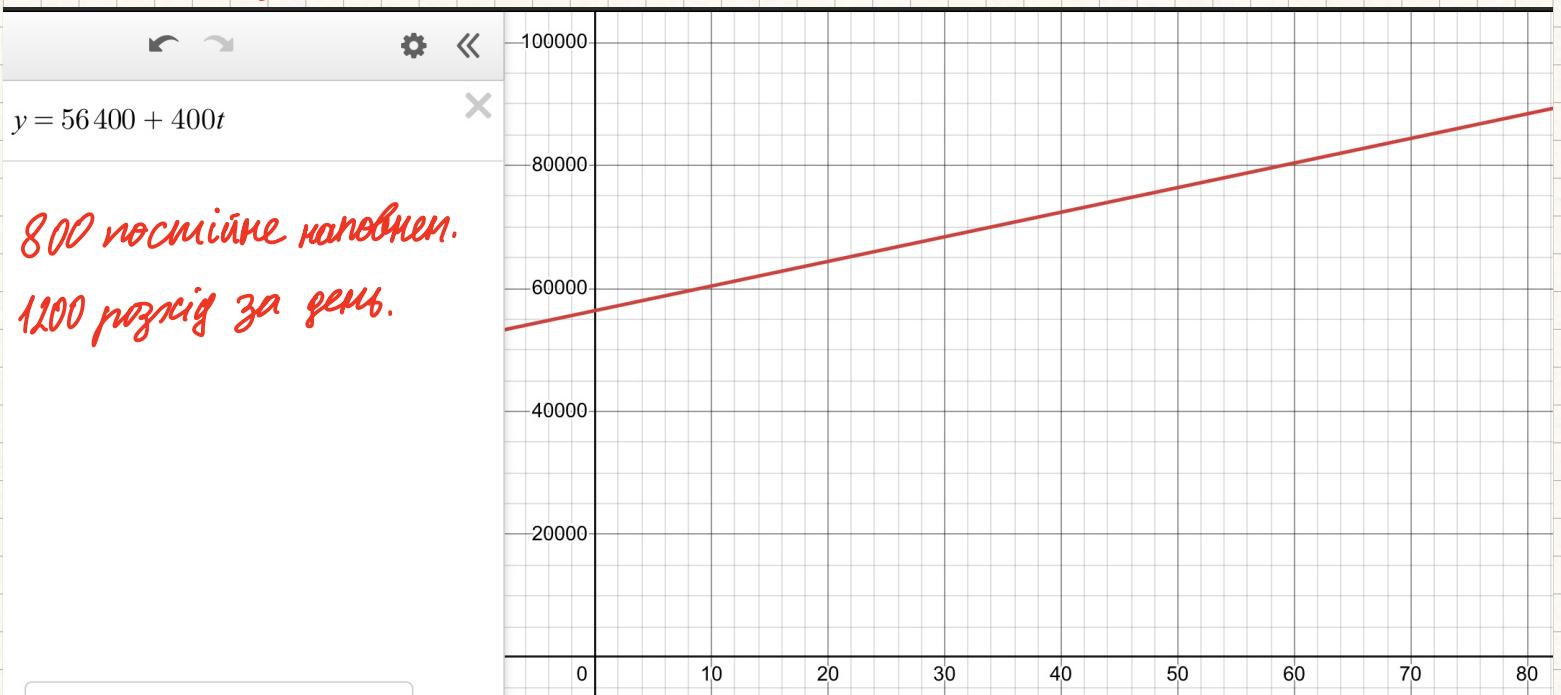
$$V_1(t) = V_0 + 800t \text{ де } t \in [0, 8] \text{ годин.}$$

2) Як х-ти баки є функцією періоду

$$V_2(t) = 56400 - 400t \text{ Часовник і витрати баку}$$

$$800 - 1200 = -400 \text{ л/год} \cdot 3 \text{ год} = 6 \text{ годин.}$$

$$\text{Об'єм з 6:00AM } 50000 + 800 \cdot 8 = 50000 + 6400 = 56400$$



800 постійне наповнення.

1200 витрати за годину.

\* В цих випадках може змінитися функція. такої сист. лінійних рівнянь.  
Їні вироблять нові процеси як заповнений та спусковий.

Маємо систему:

- $y = 50000 + 800t$
- $y = 56400 - 400t$

Оскільки обидва вирази рівні  $y$ , можемо прирівняти їх:

$$50000 + 800t = 56400 - 400t$$

Перенесемо всі доданки з  $t$  на одну сторону, а числа - на іншу:

$$800t + 400t = 56400 - 50000$$

$$1200t = 6400$$

$$t = 6400 \div 1200$$

$$t = 16/3 = 5,33$$

Тепер знайдемо  $y$ , підставивши  $t$  у будь-яке з рівнянь:

$$y = 50000 + 800 \times (16/3)$$

$$y = 50000 + 12800/3$$

$$y = 50000 + 4266,67$$

$$y = 54266,67$$

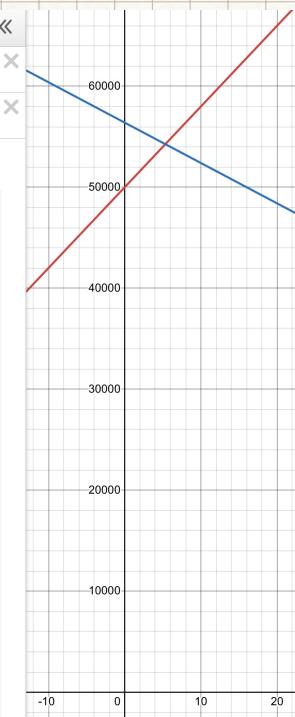
Або точно:

$$y = 50000 + 800 \times 16/3 = 50000 + 12800/3 = 162800/3 \approx 54266,67$$

Відповідь:

- $t = 16/3$  (або приблизно 5,33)

- $y = 162800/3$  (або приблизно 54266,67)



3 6:00 до 22:00 (16 годин) - весь день.

$V_2(t) = V_8 = 1200t$   $V_8$  = об'єм баками 0 6:00-рек.  
де  $t \in [0, 16]$  годин.

3) К-ти води 0 6:00 ранку

$V_8 = V_0 + 800 \cdot 8 = V_0 + 6400$  - якщо починаючи із штучні об'єму  $V_0$ . Для безперервної роботи системи потрібно щоб баки не спускалися відно:

$V_8 \geq 1200 \cdot 16 = 19200$  л мінім об'єм 0 6:00,  $V_8 = 19200$  л

4) час мінім. тільки рекор

мінім р. в. було 0 22:00 - після першого періоду (перестав -400)

$V_{\min} = V_8 - 1200 \cdot 16 = 19200 - 19200 = 0$  л.

\* 6? Зменшивши часу на 1 годину буде 20,000

$$V_2(t) = 20000; 20000 = 56400 - 400t$$

$$400 \cdot t = 56400 - 20000; 400 \cdot t = 36400$$

$$t = \frac{36400}{400}; t = 91 \text{ wog. Tichie 6:00 reprez } 91 \text{ dezer}$$

maximum plus 20,000 L.

#### Python Functions:

Here are the Python functions for  $V_1(t)$  and  $V_2(t)$ :

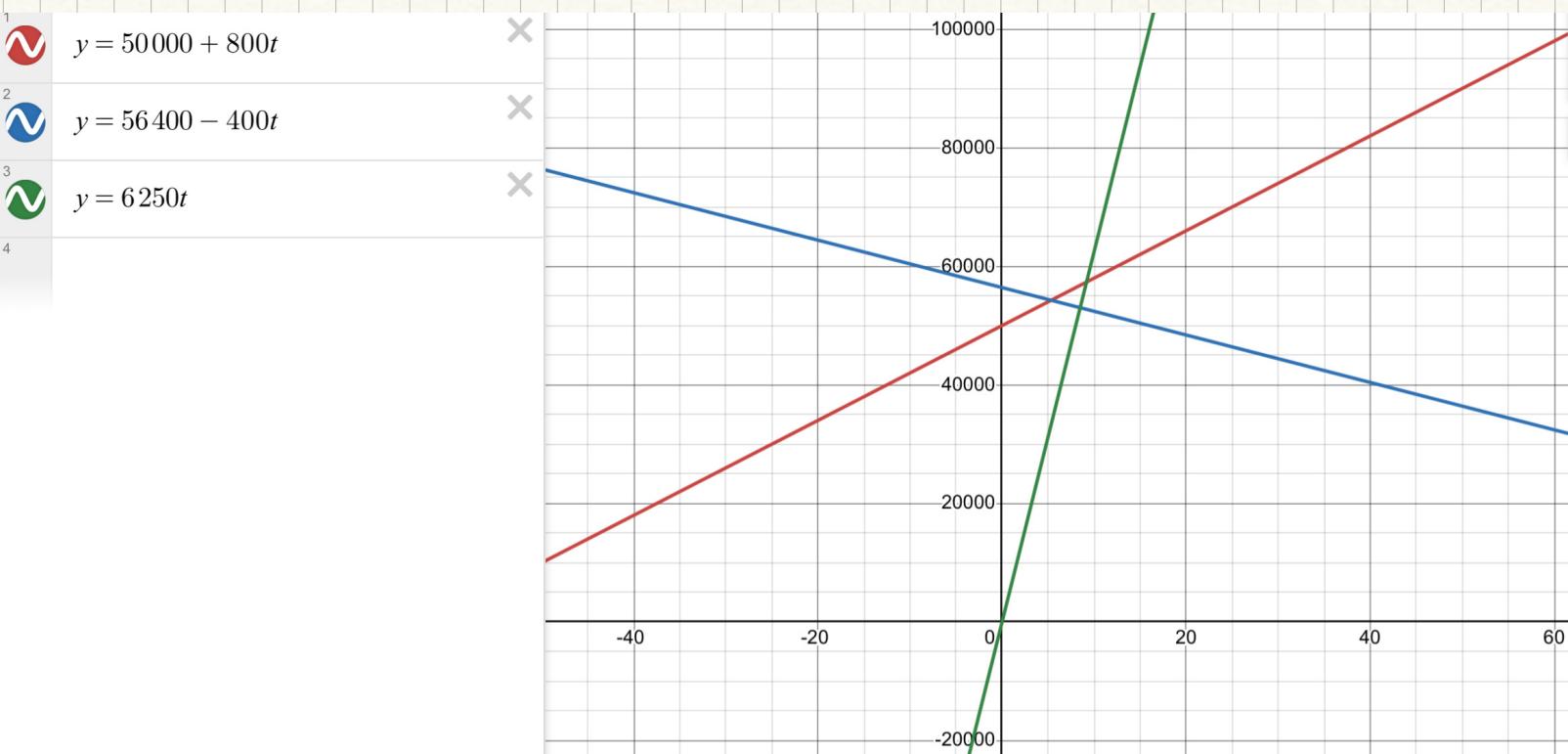
```
def V1(t):
    return 50000 + 800 * t

def V2(t):
    return 56400 - 400 * t
```

You can use these functions to plot the graphs and find the required time. If you need further assistance with plotting or any other calculations, feel free to ask!

Якщо після, яко від інші можуть збуту?

5) Графік зміни балансу північного схід



## 6) Розрахунок необхідн. кільк. маловічний

Щоб рів. ваги підами не опускається нижче 20 000 кг. Деннє спожив =  $1200 \cdot 16 = 19200$  кг

Необхідн. маловічн. ваги  $\geq 19200$  кг

Мінім. кільк. =  $19200 : 8 = 2400$  кг/под

В: необх. кільк. мал. 2400 кг/под ; Збільшення: 1600 кг/под (+200%)

<https://codepen.io/telychko-mykola/pen/GgJPvPp>

## 11) Логістична компанія

### Задача 3: Логістична компанія

Логістична компанія розвозить товари двома типами автомобілів.

Великі вантажівки споживають 35 л/100км і перевозять 8 тонн, малі — 12 л/100км і перевозять 2 тонни. Вартість палива 45 грн/л. Водіям великих вантажівок платять 25 грн/км, малих — 15 грн/км.

Завдання:

- Складіть функцію витрат на паливо  $F_1(d)$  для великої вантажівки залежно від відстані  $d$
- Складіть функцію витрат на паливо  $F_2(d)$  для малої вантажівки
- Додайте витрати на оплату водіїв і отримайте загальні функції витрат  $C_1(d)$  та  $C_2(d)$
- Визначте собівартість перевезення 1 тонни вантажу на 100 км для кожного типу авто
- Знайдіть, на якій відстані витрати на велику і малу вантажівку (в розрахунку на тонну) стають однаковими
- Побудуйте графік порівняння собівартості перевезення 1 тонни залежно від відстані

Вел. вантажіс - 35 т / 100 км, перевозить 8 тонн

Мал. вантажіс - 12 т / 100 км, перевозить 2 тонни

Зарплату пасажира - 45 грн/т

Оплата багажу пасажирів - 25 грн/км; майданчики - 15 грн/км.

1) Чис. витрат на пасажирський транспорт  $F_1(d)$

Час відстань  $d$  км  $(35/100) \cdot d = 0,35d$  годин

Зарплату пасажира  $0,35d \cdot 45$  грн/т

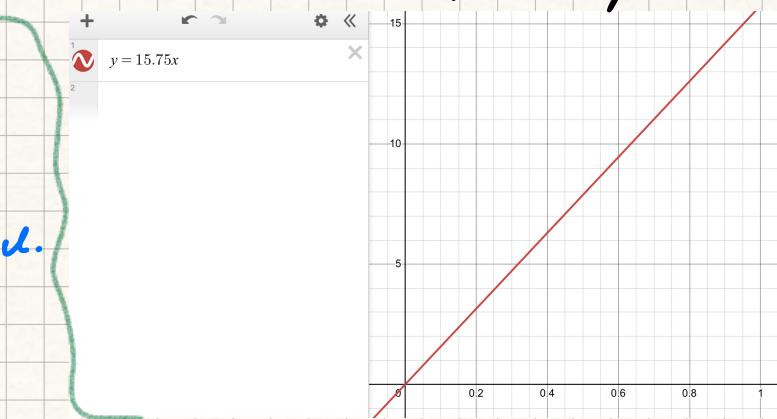
Чис. витрат на пасажирський транспорт  $F_1(d) = 15,75d$  грн.

2) Чис. витрат на пасажирський транспорт мал. вантажісів  $F_2(d)$

Час відстань  $d$  км  $(12/100) \cdot d = 0,12d$  т.

Зарплату пасажира  $0,12d \cdot 45$  грн/т

Чис. витрат на пасажирський транспорт  $F_2(d) = 5,4d$  (у = 5,4x)



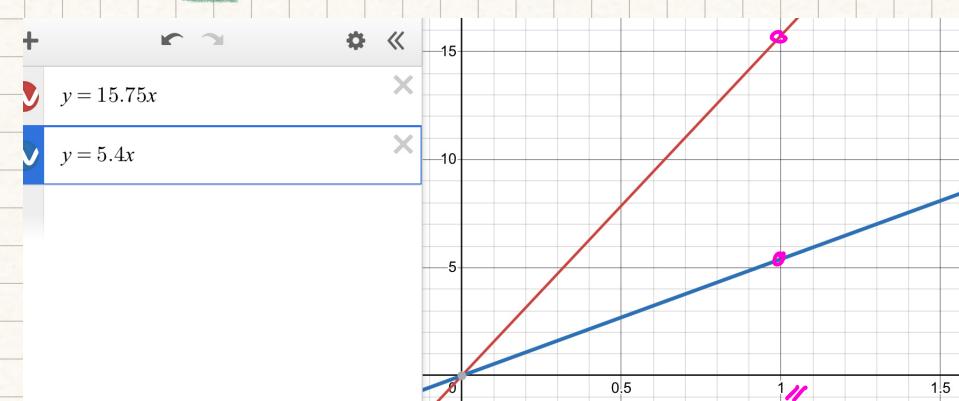
3) Чис. витрат на оплату багажу  $C_1(d)$  та  $C_2(d)$

$C_1(d)$  - вел. вантажісівська

пасажир =  $15,75d$  грн

Оплата багажу =  $25d$  грн

$C_1(d) = 15,75d + 25d = 40,75d$  грн.

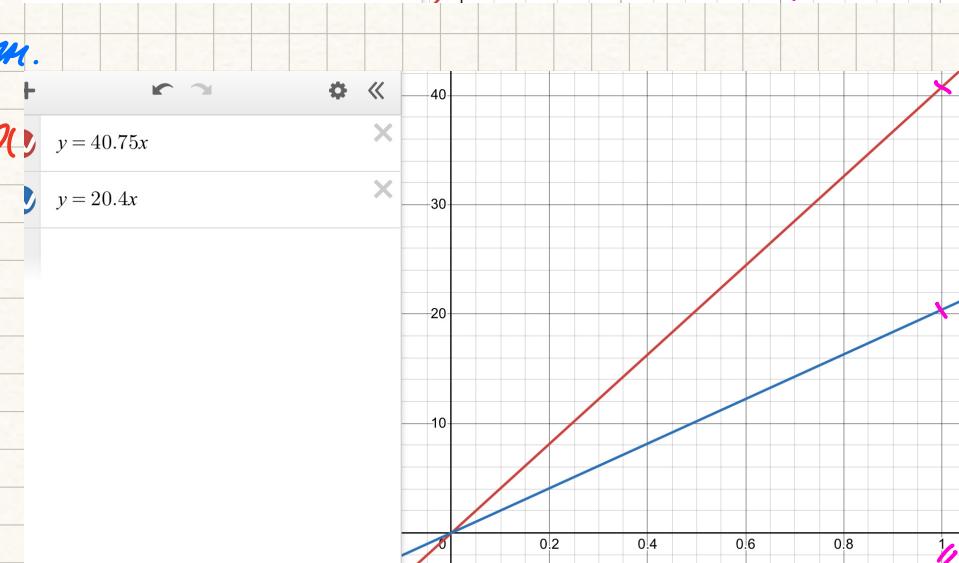


$C_2(d)$  - мал. вантажісівська

пасажир =  $5,4d$  грн

Оплата багажу =  $15d$  грн

$C_2(d) = 5,4d + 15d = 20,4d$  грн.



$C_1: y = 40,75x$

$C_2: y = 20,4x$

4) Собівартість перевезення 1 тони вантажу на 100 км.

Вант. вант. 8 тонн

Загальна витрати на 100 км:  $C_1(100) = 40,45 \cdot 100 = 4045$  грн

Собівартість =  $4045 : 8 = 505,375$  грн/тон на 100 км

Мал. вант. 2 т.

Заг. вант. на 100 км:  $C_2(100) = 20,4 \cdot 100 = 2040$  грн

Собівартість =  $2040 : 2 = 1020$  грн/тон на 100 км.

Чи треба цим будувати чарівки?

5) Відповідь на якій витрати становіть однаковими

Витрати на тонну вантажу:

Вел. вант:  $S_1(d) = C_1(d) / 8 = 40,45d / 8 = 5,09345d$

Мал. вант:  $S_2(d) = C_2(d) / 2 = 20,4d / 2 = 10,2d$

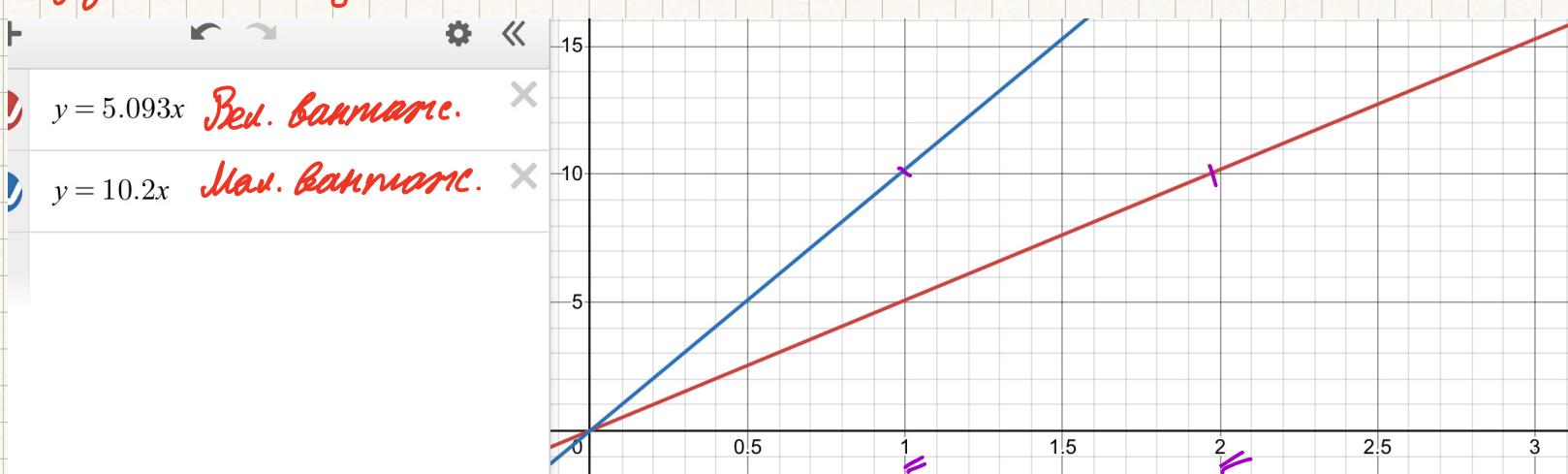
Рівняння для знижування тонні рівності:

$$5,09345d = 10,2d$$

\* Це рівняння не має розв'язку для  $d > 0$  осцилля

$$5,09345 < 10,2$$

\* Витрати на перевезення 1 тон. великого вантажівкою завищилися за витрати малої вантажівки на будь-якій дістанції.



## 6) Графік порівняльної собівартості

Чинні собівартості на тонну:

Вел. фам.  $S_1(d) = 5,093 \cdot 15d$  ( $y = 5,093 \cdot 15d$ )

Мал. фам.  $S_2(d) = 10,2d$  ( $y = 10,2d$ )

Висновки та пояснення

Економічна ефективність: Вел. фам. більш економічна для перевезення вантажів на ділянку відстань.

Собівартість великої вантажівки може бути менша ( $5093,38$  проти  $1020$  грн/т. на  $100$  км)

Структура витрат:

Вел. фам. пашто - 38,4%, вагіт - 61,3%

Мал. фам. пашто - 26,5%, вагіт - 73,5%

Залежності:

> лінійна залежність: всі ознаки і виняток лінійно залежать від відстані (одн. по тірмаму)

> Ефективність: зменш вантажопотоківість діє зменшує економію на тонну вантажу перевезений однієї тонни.

> Візуальний метод обробленості: велика вантажівка завжди вигідніша для перевез однієї тонни.

Практичні рекомендації:

Використовувати великі вантажі. для максим економії.

Мал. фам. дешевіше міле при нестисливості замінити великий авт. низ обслуговувану доступу.

## 12) Енергозбереження

### Задача 4: Енергозбереження

Сім'я вирішила встановити сонячні панелі. Вартість системи 180 000 грн, встановлення 25 000 грн. Система генерує 450 кВт·год/місяць. Тариф на електроенергію 4,50 грн/кВт·год, але щороку зростає на 8%. Без панелей сім'я споживає 520 кВт·год/місяць.

Завдання:

1. Складіть функцію тарифу  $T(t)$  залежно від року  $t$  після встановлення
2. Обчисліть функцію щомісячної економії  $S(t)$  з урахуванням зростання тарифу
3. Знайдіть функцію накопиченої економії  $E(t)$  за  $t$  років
4. Складіть функцію чистого прибутку  $P(t) = E(t) - \text{початкові витрати}$
5. Визначте, через скільки років система окупиться
6. Побудуйте графік накопиченої економії та чистого прибутку протягом 15 років