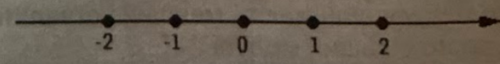
Координати та модуль

Координатна пряма

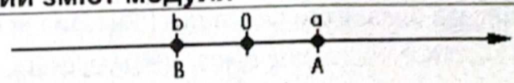
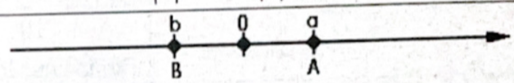
На координатній прямій зображується множина всіх дійсних чисел. 0 – початок координат.	
Числа, які позначені на координатній прямій справа від точки 0, називають додатними, а зліва – від'ємними.	

Модуль числа

Означення	Приклади
Модулем додатного числа називається те саме число.	$\|33\| = 33$.
Модулем від'ємного числа називається протилежне йому число.	$\|-5\| = \|5\|$.
Модуль нуля дорівнює нулю.	$\|0\| = \|0\|$.

$$|a| = \begin{cases} a, a > 0 \\ 0, a = 0 \\ -a, a < 0 \end{cases} = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases} = \begin{cases} a, a > 0 \\ -a, a \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} a, a \geq 0, \\ -a, a \leq 0. \end{cases}$$

Геометричний зміст модуля

На координатній прямій модуль – це відстань від початку координат до точки, що зображує дане число.	 $\|a\| = OA$; $\|b\| = OB$.
Модуль різниці двох чисел a і b — це відстань між двома точками a і b на координатній прямій.	 $\|a-b\| = AB$.

Властивості модуля

Модуль будь-якого числа – невід'ємне число. $\|a\| \geq 0$.	$\|3\| \geq 0$.
Модулі протилежних чисел рівні. $\|-a\| = \|a\|$.	$\|-12\| = \|12\|$.
Величина числа не перевищує величину його модуля. $a \leq \|a\|$.	$4 \leq \|4\|$.
Модуль добутку дорівнює добутку модулів співмножників. $\|a \cdot b\| = \|a\| \cdot \|b\|$; $\|a^n\| = \|a\|^n$; $\|a\|^{2k} = a^{2k}$.	$\|5 \cdot 3\| = \|5\| \cdot \|3\|$.
Модуль дробу дорівнює модулю чисельника, поділеному на модуль знаменника (якщо знаменник не дорівнює нулю). $\left\|\frac{a}{b}\right\| = \frac{\|a\|}{\|b\|}$ $(b \neq 0)$.	$\left\|\frac{2}{3}\right\| = \frac{\|2\|}{\|3\|}$.

Додавання і віднімання

Правила	Приклади
При додаванні двох чисел з однаковими знаками їх модулі додаються, а перед сумою ставиться їхній спільний знак.	$13 + 21 = 34$; $-17 + (-33) = -50$.
При додаванні двох чисел з різними знаками від більшого модуля віднімають менший і ставлять знак того числа, у якого більший модуль.	$-13 + 21 = 8$; $20 - 37 = -17$.
Віднімання двох чисел з різними знаками замінюється додаванням зменшуваного і числа, протилежного від'ємнику.	$28 - 11 = 17$; $19 - (-5) = 19 + 5 = 24$; $-35 + 20 = -15$.

|b| |b|

Додавання і віднімання	
Правила	**Приклади**
При додаванні двох чисел з однаковими знаками їх модулі додаються, а перед сумою ставиться їхній спільний знак.	$13+21=34$; $-17+(-33)=-50$.
При додаванні двох чисел з різними знаками від більшого модуля віднімають менший і ставлять знак того числа, у якого більший модуль.	$-13+21=8$; $20-37=-17$.
Віднімання двох чисел з різними знаками замінюється додаванням зменшуваного і числа, протилежного від'ємнику.	$28-11=17$; $19-(-5)=19+5=24$; $-35+20=-15$.
Множення і ділення	
При множенні двох чисел їх модулі помножують, а знак ставлять за вказаною схемою: $\boxed{+\cdot+=+;\ +\cdot-=-;\ -\cdot-=+;\ -\cdot+=-}$	$7\cdot(-2)=-14$; $-9\cdot(-7)=63$; $-13\cdot5=-65$.
При діленні двох чисел модуль першого числа (діленого) ділять на модуль другого числа (дільника), а знак ставлять за схемою множення.	$-25:(-5)=5$; $-120:3=-40$; $48:(-4)=-12$.

$(+)+(+)=+$ $(-)+(-)=-$ $(-)+(+)=+$ or $-$ $(+)+(-)=+$ or $-$ ***Addition***	$(+)-(+)=+$ or $-$ $(-)-(-)=+$ or $-$ $(-)-(+)=-$ $(+)-(-)=+$ ***Subtraction***
$(+)\times(+)=+$ $(-)\times(-)=+$ $(+)\times(-)=-$ $(-)\times(+)=-$ ***Multiplication***	$(+)\div(+)=+$ $(-)\div(-)=+$ $(-)\div(+)=-$ $(+)\div(-)=-$ ***Division***

Модуль числа — абсолютне значення числа є 0 або додатнім числом.

Геометрично модуль визначений як відстань від нуля на координатній прямій. Відстань це величина додатня. число завжди невід'ємне

Тому модуль визначається так:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{якщо } a \geq 0 \\ -a & \text{якщо } a < 0 \end{cases}$$

$|5| = 5$ $|0| = 0$

$|-3| = 3$

Множення та ділення мод.

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \; (b \neq 0)$$

$$|2 \cdot (-4)| = |2| \cdot |-4| = 2 \cdot 4 = 8$$

$$\left|\frac{-6}{2}\right| = \frac{|-6|}{|2|} = \frac{6}{2} = 3$$

Додавання та нерівність трикутника

Для будьких a, b виконуєт. нерівність

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$|-5+7| = |2| = 2 \leq |-5| + |7| = 12$$

Нерівності з модулями

Нерівності виду $|x|<a; |x|>a$

Розв'язуються за правилами:

$$|x|<a \Rightarrow -a<x<a \ (\text{if } a>0)$$

$$|x|>a \Rightarrow x<-a \text{ OR } x>a \ (\text{if } a>0)$$

Для будь-яких дійсних чисел (або векторів) a і b виконується

$$|a-b| \geq \big||a|-|b|\big|$$

Це називається оберненою нерівністю трикутника

Класична нерівність трикутника

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

Доведення:

Використаємо класичну нерівність трикутника

$$\underline{|a|=|(a-b)+b|} \leq \underline{|a-b|+|b|} \Rightarrow \underline{|a|-|b| \leq |a-b|}$$

Аналогічно:

$$|b| = |(b-a)+a| \le |b-a| + |a| = |a-b| + |a| \Rightarrow |b| - |a| \le |a-b|$$

Отже:

$$|a-b| \ge \max(|a|-|b|, |b|-|a|) = ||a|-|b||$$

Тобто: ????

Приклад 1.

$$|x+1| \le 4$$

$$-4 \le x+1 \le 4 \Rightarrow -5 \le x \le 3$$

Приклад 2

$$|2x-5| > 3$$

$$2x-5 < -3 \text{ OR } 2x-5 > 3$$

$$x < 1 \text{ OR } x > 4$$

Приклад 3

$$|x-3| + |x+2| \text{ for } x \in [-2,3]$$

На проміжку $[-2,3]$

$$|x-3| = 3-x \text{ (cause } x \le 3)$$

$|x-3| = 3-x$ (cause $x \geq -2$)

Then. $|x-3| + |x+2| = (3-x) + (x+2) = 5$

Ось просте доведення нерівності трикутника:

Розглянемо класичну нерівність трикутника: $|a+b| \leq |a| + |b|$

Доведення:

1. Розглянемо два випадки:

   Випадок 1: Якщо a і b мають однакові знаки або хоча б один з них дорівнює нулю.

   В цьому випадку $|a+b| = |a| + |b|$, і нерівність виконується як рівність.

   Випадок 2: Якщо a і b мають різні знаки.

   Без втрати загальності припустимо, що $|a| \geq |b|$ (якщо це не так, просто поміняємо a і b місцями).

   Тоді a+b і a мають однаковий знак, і:

   $|a+b| = |a| - |b|$

   Це означає, що $|a+b| < |a| \leq |a| + |b|$, що і потрібно було довести.

2. Альтернативне доведення через обернену нерівність:

   Для будь-яких величин a і b маємо:

   $|a| = |(a+b) - b| \leq |a+b| + |-b| = |a+b| + |b|$

   Перегрупуємо: $|a| - |b| \leq |a+b|$

   Аналогічно: $|b| - |a| \leq |b+a| = |a+b|$

   Ці дві нерівності означають:

   $-|b| \leq |a+b| - |a| \leq |b|$

   Отже: $|a+b| - |a| \leq |b|$

   І тому: $|a+b| \leq |a| + |b|$

Що і треба було довести.

Доведемо це використовуючи властивості модуля числа.

Спочатку розглянемо визначення модуля числа. Для будь-якого комплексного числа z:

$|z| = \sqrt{(z \cdot \bar{z})}$, де $\bar{z}$ - комплексно спряжене до z.

У випадку дійсних чисел маємо:

$|x| = x$, якщо $x \geq 0$

$|x| = -x$, якщо $x < 0$

Тепер доведемо нерівність трикутника:

1. Піднесемо обидві частини нерівності до квадрату:

   $|a + b|^2 \leq (|a| + |b|)^2$

2. Розкриємо праву частину:

   $(|a| + |b|)^2 = |a|^2 + 2|a| \cdot |b| + |b|^2$

3. Розкриємо ліву частину (для комплексних чисел):

   $|a + b|^2 = (a + b)(\bar{a} + \bar{b}) = |a|^2 + a\bar{b} + \bar{a}b + |b|^2$

4. Для дійсних чисел:

   $|a + b|^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2ab + |b|^2$

5. Порівнюючи ліву і праву частини, нерівність буде виконуватись, якщо:

   $2ab \leq 2|a| \cdot |b|$

6. Перепишемо:

   $ab \leq |a| \cdot |b|$

Це твердження завжди істинне, оскільки:

- Якщо a і b мають однакові знаки, то $ab = |a| \cdot |b|$
- Якщо a і b мають різні знаки, то $ab < 0 < |a| \cdot |b|$

Таким чином, нерівність трикутника доведено.

Геометрична інтерпретація: для будь-яких векторів a і b довжина вектора їхньої суми не перевищує суму довжин цих векторів.