§ 6. Розв'язування лінійних рівнянь з двома змінними

Означення	Приклади
Лінійним рівнянням з двома змінними x і y називається рівняння виду: $ax+by+c=0$, де x і y – змінні, a,b,c — деякі числа.	$3x+4y+5=0$ — лінійне рівняння.
Розв'язком рівняння з двома змінними називається будь-яка пара чисел $(x;y)$, яка перетворює рівняння на тотожність. Розв'язати рівняння з двома змінними – означає знайти всі пари чисел $(x;y)$, які є його розв'язком.	$x+2y=5$ — лінійне рівняння. Пара $(1;2)$ — розв'язок рівняння, тобто при $x=1; y=2$, отримуємо $1+2\cdot2=5$; $5=5$ — правильну рівність, пара $(2;1)$ — не є розв'язком, оскільки при $x=2; y=1$ отримуємо $2+2\cdot1=5$. $4=5$ не є тотожністю, тобто пара $(2;1)$ не є розв'язком рівняння $x+2y=5$.
Множина точок, координати яких задовольняють рівняння $ax+by+c=0$, називається його **графіком**. Графіком рівняння $ax+by+c=0$, де a,b,c — деякі числа, є пряма.	1) Якщо коефіцієнт b при y не дорівнює нулю, то y можна виразити через x: $ax+by+c=0, by=-ax+c$, $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ — це лінійне рівняння. 2) Якщо $b=0$, то $ax+by+c=0$ набуває вигляду: $ax+0y+c=0$, $ax+c=0$, при $a\neq0, x=-\frac{c}{a}$ і графіком рівняння буде пряма, паралельна осі ординат, що перетинає вісь абсцис у точці $x=-\frac{c}{a}$. 3) При $a=0$ маємо: $0x+by+c=0, by+c=0$, $y=-\frac{c}{b}$ — це пряма, паралельна осі абсцис, що перетинає вісь ординат в точці $y=-\frac{c}{b}$. 4) Якщо $a=0$ і $b=0$, то рівняння набуває вигляду $0x+0y+c=0$, тоді при $c=0$ рівність правильна при всіх x і y, при $c\neq0$ — неправильна при будь-яких x та y, тобто при $a=b=c=0$ в цьому випадку графіком лінійного рівняння $ax+by+c=0$ є вся координатна площина.

одне підбираєм друге шукаєм.
x і y має бути в різних доданках

* Лінійне рівняння з двома змінними $ax+by=c$
Такі рівняння мають нескінченно багато розв'язків які утворюють пряму на координатній площині

* лінійне р-ня утворює лінію, пряму лінію на координатній прямій.

Особливості лінійних рівнянь

* Формула запису: $ax+by=c$ де a, b, c – деякі числа
a і b – не дорівнюють нулю одночасно

* Безліч розв'язків на відміну від рівняння з однією змін.

* Геометричний зміст: Всі розв'язки рівняння утворюють пряму на координатній площині

Методи розв'язування

1. Табличний метод

Вибираємо значення для однієї змінної і обчислюємо відповідні значення для іншої

Наприклад для рівняння $2x+3y=6$

- Якщо $x=0$, то $3y=6$, звідки $y=2$
- Якщо $x=3$, то $3y=0$, звідки $y=0$

Розв'язки: $(0,2)$ $(3,0)$ і будь-які інші точки на прямій.

Загальний підхід до розв’язування лінійних рівнянь з двома невідомими

Для розв’язування лінійного рівняння виду $ax + by = c$, де є дві невідомі (x та y), потрібно:

1. Виразити одну змінну через іншу, наприклад:
    - Якщо $b \neq 0$, виразимо y через x: $y = (c - ax) / b$
    - Якщо $a \neq 0$, виразимо x через y: $x = (c - by) / a$
2. Записати розв’язок у вигляді формули, що зв’язує x та y
3. Розв’язком буде множина точок (x, y), які задовольняють цю формулу. Геометрично це пряма на координатній площині.

Особливі випадки:

- Якщо $a = 0$ і $b = 0$, а $c \neq 0$, то рівняння не має розв’язків
- Якщо $a = 0$ і $b = 0$, а $c = 0$, то розв’язком буде вся координатна площина

Висновок

Лінійне рівняння з двома невідомими має безліч розв’язків, які утворюють пряму на координатній площині. Для однозначного визначення конкретного розв’язку потрібна ще одна умова (ще одне рівняння), що приводить до системи лінійних рівнянь.

Графічно розв’язок лінійного рівняння з двома невідомими можна представити як множину точок, що утворюють пряму лінію на координатній площині.

2. Метод через вираження змінної

???

Виражаємо одну змінну через іншу

Для рівняння $2x+3y=6$

Виразимо y через x: $3y = 6 - 2x$, звідки $y=(6-2x)/3$

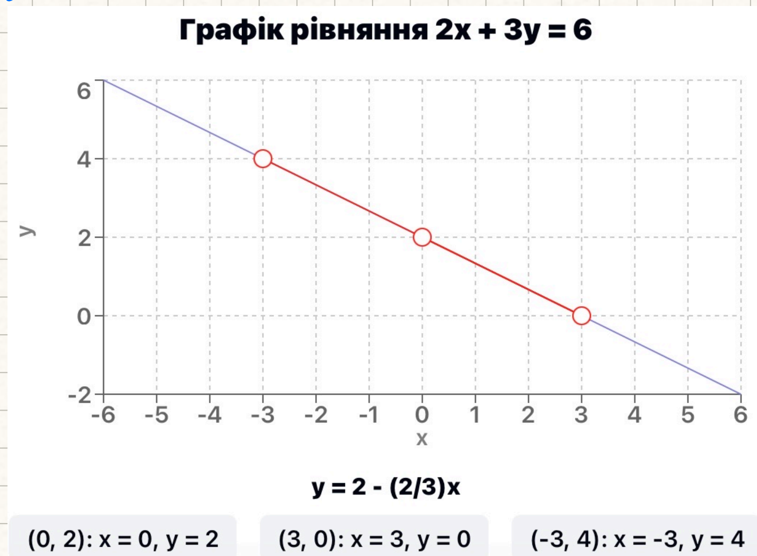
тепер можемо знайти y для будь-якого значення x

$y = (6-2x)/3 = 2 - (2/3)x$. Знайдемо декілька точок що належать цій прямій

Якщо $x = 0$, то $y = 2$

Якщо $x = 3$, то $y = 0$

Якщо $x = -3$, то $y = 4$



Пояснення рівняння: 2x + 3y = 6

Виражено відносно y: y = (6 - 2x) / 3

- Лінійне рівняння 2x + 3y = 6 має нескінченно багато розв'язків.
- Кожна точка на прямій є розв'язком рівняння.
- Наприклад, точки (0, 2) і (3, 0) є розв'язками цього рівняння.
- Щоб знайти y для будь-якого x, використовуйте формулу: y = (6 - 2x) / 3

Приклад №2

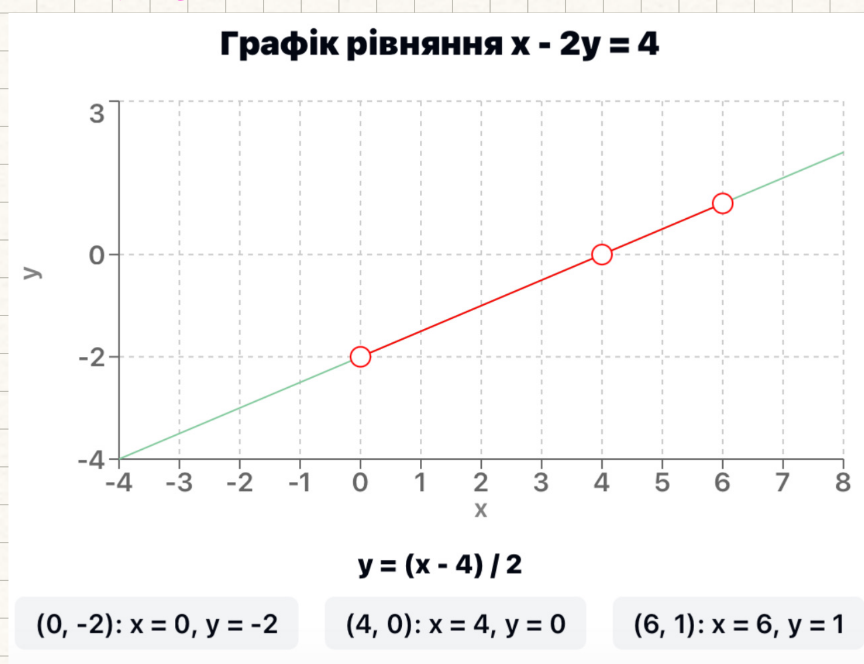
$x - 2y = 4$ Виразимо y через x: $y = (x-4)/2$

Знайдемо декілька точок розв'язку

Якщо $x=0$ то $y = -2$

Якщо $x=4$ то $y=0$

Якщо $x=6$ то $y=1$



Приклад 3

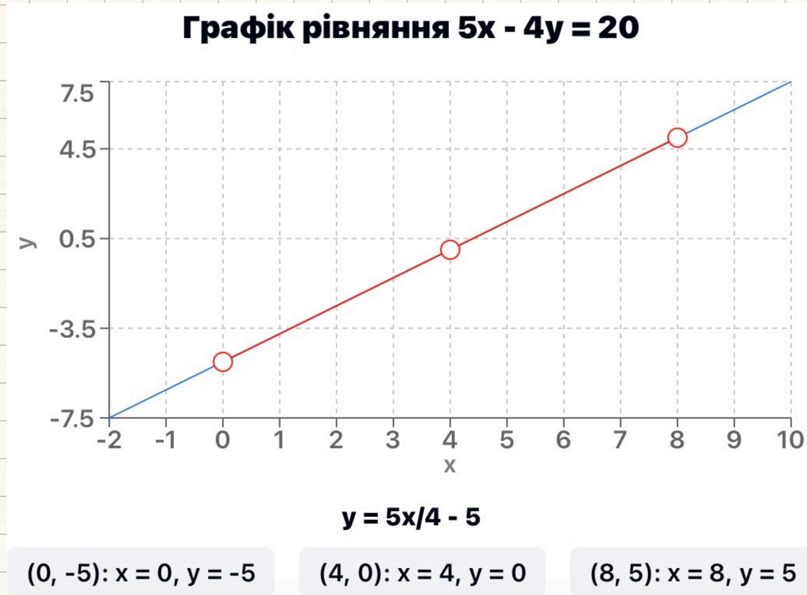
$5x-4y=20$ Виразимо y через x $y=(5x-20)/4=5x/4-5$

Знайдемо декілька точок розв'язку:

Якщо $x=0$, то $y=-5$

Якщо $x=4$, то $y=0$

Якщо $x=8$, то $y=5$



???

3. Метод перехоплень

Знаходимо точки перетину прямої з осями координат: Для рівняння $2x+2y=6$

перетин з віссю x $(y=0)$, $2x=6$ звідки $x=3$

перетин з віссю y $(x=0)$, $3y=6$ звідки $y=2$

Отже через точки $(3;0)$ $(0;2)$ проходить пряма, яка є графіком рівняння.

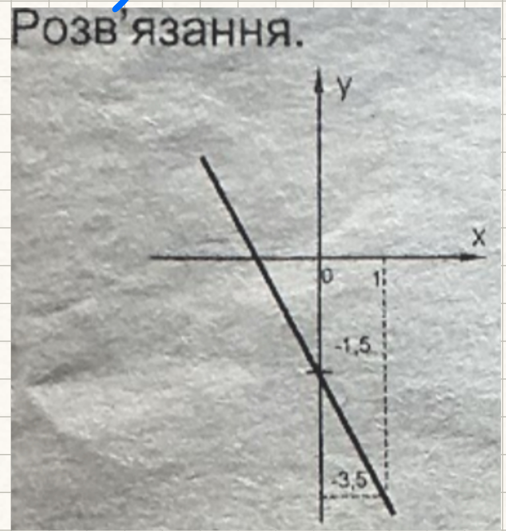
Побудова графіків для лінійних рівнянь з двома змінними

Приклад 1

Побудувати графік рівняння: $4x+2y+3=0$

Оскільки $a\neq0$; $b\neq0$; $c\neq0$, то графіком рівняння є пряма, яку можна побудувати за допомогою двох точок:

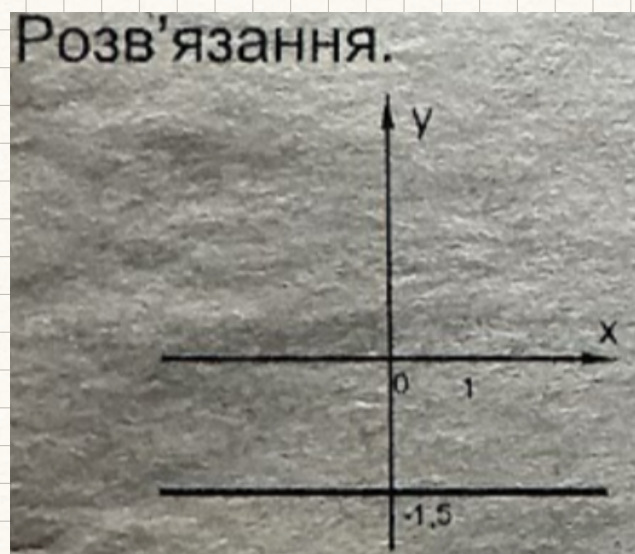
$x=0$; $x=1$; $y=-1{,}5$; та $y=-3{,}5$



Приклад 2

Побудувати графік рівняння: $0x+2y+3=0$

Оскільки $a=0$; то $2y=-3$; $y=-\frac{3}{2}$ – це пряма, паралельна до осі абсцис, що проходить через точку з координатами $(0;\frac{3}{2})$

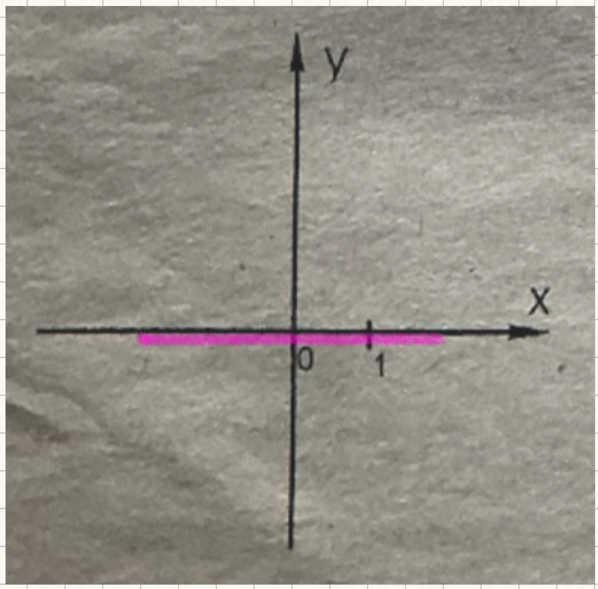


Приклад 3

Побудувати графік рівняння: $x+0y+0=0$

Оскільки $b=0$ і $c=0$ то $x=0$ - це пряма перпендикулярна осі абсцис, і є віссю ординат.

Це те саме що графік рівняння $x=0$



Який найпопулярніший ресурс для побудови графіків по лінійним рівнянням

Для побудови графіків по лінійним рівнянням одним з найпопулярніших ресурсів є Desmos (desmos.com). Це безкоштовний онлайн-калькулятор та графічний інструмент, який дозволяє легко будувати графіки лінійних рівнянь та виконувати математичні обчислення.

Інші популярні ресурси:

- GeoGebra - потужний математичний інструмент, який поєднує геометрію, алгебру та обчислення
- Wolfram Alpha - обчислювальна платформа знань, яка також візуалізує лінійні рівняння
- Microsoft Excel або Google Таблиці - для простих графіків на основі табличних даних
- Python з бібліотеками matplotlib або plotly - для програмного створення графіків

Desmos особливо популярний завдяки своєму інтуїтивному інтерфейсу, можливості миттєво побачити зміни в графіку при коригуванні рівняння, та хорошій підтримці української мови.

§ 7. Системи лінійних рівнянь з двома змінними

<table>
<tr><th>Означення</th><th>Приклади</th></tr>
<tr><td>

Системою рівнянь називаються два або декілька рівнянь, у яких потрібно знайти всі спільні розв'язки.

Рівняння системи записуються стовпчиком і об'єднуються фігурною дужкою.

Система рівнянь називається **лінійною**, якщо всі рівняння, що входять до системи, є лінійними.

Систему двох лінійних рівнянь з двома змінними записують у такому вигляді:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

</td><td>

$$\begin{cases} 2x-3y=9, \\ 3x+2y=7. \end{cases}$$

Розв'язками такої системи рівнянь є множина упорядкованих пар чисел $(x;y)$.

Пара чисел $(3;-1)$ є розв'язком системи

$$\begin{cases} 2x-3y=9, \\ 3x+2y=7. \end{cases}$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Розв'язати систему рівнянь — означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Якщо система має скінченне число розв'язків, то вона називається **визначеною**.

Якщо система має нескінченну множину розв'язків, то система називається **невизначеною**.

Дві системи називаються **рівносильними**, якщо вони мають однакову множину розв'язків .

</td></tr>
<tr><td>

Якщо система із n лінійних рівнянь містить n невідомих, то можливі такі три випадки:

– система не має розв'язків;

– система має тільки один розв'язок;

– система має нескінченно багато розв'язків.

Система $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$

Не має розв'язків, якщо $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$.

Має єдиний розв'язок, якщо $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$.

Має нескінченне число розв'язків, якщо $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$.

</td><td>

1) $\begin{cases} 3x-4y=15, \\ 6x-8y=11. \end{cases}$

$\frac{3}{6}=\frac{-4}{-8}\neq\frac{15}{11}$ — розв'язків немає;

2) $\begin{cases} 3x-4y=13, \\ x+y=9. \end{cases}$

$\frac{3}{1}\neq-\frac{4}{1}$, єдиний розв'язок $(7;2)$;

3) $\begin{cases} 3x-4y=15, \\ 6x-8y=30. \end{cases}$

$\frac{3}{6}=\frac{-4}{-8}=\frac{15}{30}$, нескінченно багато розв'язків.

</td></tr>
</table>

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

Типи систем	Приклади	
1) $\begin{cases}\text{Жодної точки,}\\ \text{жодної точки.}\end{cases}$	$\begin{cases}0x+0y=1,\\0x+0y=2.\end{cases}$	Система не має розв'язків.
2) $\begin{cases}\text{Вся площина,}\\ \text{жодної точки.}\end{cases}$	$\begin{cases}0x+0y=0,\\0x+0y=-1.\end{cases}$	Система не має розв'язків.
3) $\begin{cases}\text{Вся площина,}\\ \text{вся площина.}\end{cases}$	$\begin{cases}0x+0y=0,\\0x+0y=0.\end{cases}$	Будь-яка пара чисел – розв'язок системи
4) $\begin{cases}\text{Жодної точки,}\\ \text{пряма.}\end{cases}$	$\begin{cases}0x+0y=6,\\2x+3y=5.\end{cases}$	Система не має розв'язків.
5) $\begin{cases}\text{Вся площина,}\\ \text{пряма.}\end{cases}$	$\begin{cases}0x+0y=0,\\2x+7y=5.\end{cases}$	Розв'язок системи – координати будь-якої точки прямої.
6) $\begin{cases}\text{Дві прямі, що}\\ \text{перетинаються.}\end{cases}$	$\begin{cases}x+y=0,\\x+3y=4.\end{cases}$	Єдиний розв'язок – координати точки перетину прямої.
7) $\begin{cases}\text{Дві паралельні}\\ \text{прямі.}\end{cases}$	$\begin{cases}x+y=0,\\x+y=1.\end{cases}$	Система не має розв'язків.
8) $\begin{cases}\text{Дві прямі, які}\\ \text{співпадають.}\end{cases}$	$\begin{cases}x+y=0,\\2x+2y=0.\end{cases}$	Координати будь-якої точки прямої є розв'язком системи.

Способи розв'язання систем

Спосіб підстановки

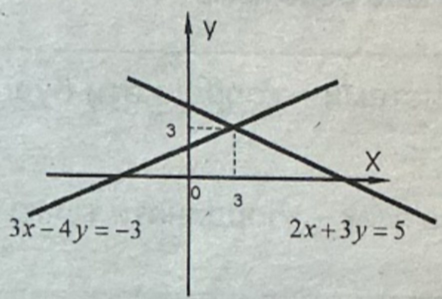
Розв'язати систему рівнянь:	$\begin{cases}x+3y=15,\\3x-4y=6.\end{cases}$
Розв'язання. Виразимо з першого рівняння змінну $x=15-3y$ і підставимо в друге рівняння, а друге рівняння системи залишимо без змін, отримаємо систему, рівносильну даній.	$\begin{cases}x=15-3y,\\3(15-3y)-4y=6.\end{cases}$
Розв'яжемо друге рівняння системи:	$45-9y-4y=6;$ $-13y=6-45;$ $-13y=-39;$ $y=3.$
Підставимо отримане значення змінної y в перше рівняння системи:	$\begin{cases}x=15-3\cdot 3,\\y=3.\end{cases}$ $\begin{cases}x=6,\\y=3.\end{cases}$
Відповідь: $(6;3)$.	

Графічний спосіб

?

Для розв'язання системи графічним способом будують графіки всіх рівнянь, які входять в систему. Координати точок перетину є розв'язком цієї системи.

Графічний спосіб є зручним для знайдення числа розв'язків системи (тобто скільки точок перетину графіків, стільки й розв'язків має система), але незручний при обчисленні координат точок (тобто значення координат можна отримати лише наближені).



Розв'язати систему рівнянь.

$$\begin{cases} 2x+3y=15, \\ 3x-4y=-3. \end{cases}$$

Побудуємо графіки обох рівнянь:

1) $2x+3y=15$

$3y=15-2x;\quad y=5-\dfrac{2}{3}x$ — це пряма, яка проходить через точки з координатами $(0;5)$; $(3;3)$;

2) $3x-4y=-3$

$4y=3x+3,\quad y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4},$ це пряма, яка проходить через точки з координатами $(-1;0)$; $(3;3)$;

3) графіки цих функцій перетинаються в точці з координатами $(3;3)$.

Відповідь: $(3;3)$.

Спосіб додавання

Способом додавання зручно розв'язувати системи, у яких коефіцієнти при одній із змінних – протилежні числа.

Розв'язати систему рівнянь.

$$\begin{cases} 2x+2y=15, \\ x-2y=-3. \end{cases}$$

Розв'язання.

Коефіцієнти при змінній y – протилежні числа, тому додамо почленно обидва рівняння системи:
$2x+2y+x-2y=15-3$, спростимо це рівняння: $3x=12$, отримаємо $x=4$.

Повернемось в систему $\begin{cases} x=4, \\ x-2y=-3. \end{cases}$ Підставимо значення $x=4$ у друге рівняння системи і розв'яжемо його.

$$\begin{cases} x=4, \\ 4-2y=-3; \end{cases}\quad \begin{cases} x=4, \\ 2y=7; \end{cases}\quad \begin{cases} x=4, \\ y=3,5. \end{cases}$$

Відповідь: $(4;3,5)$.

Підстановка / Графічний спосіб / Додавання

Метод підстановки для системи лінійних рівнянь

1. Виразити одну змінну через іншу з одного рівняння
2. Підставити отриманий вираз у друге рівняння
3. Розв'язати отримане рівняння з однією змінною
4. Підставити знайдене значення назад щоб знайти іншу змінну.

Приклад 1

Проста система з двома змінними

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

1. Виразимо y через x з другого рівняння
$y = x - 1$

2. Підставимо цей вираз у перше рівняння: $2x + (x - 1) = 5$
3. Розв'яжемо отримане рівняння $2x + x - 1 = 5$
$3x - 1 = 5$
$3x = 6$; $x = 2$

4. Знайдемо y підставивши $x = 2$
$y = x - 1 = 2 - 1 = 1$

В: $x = 2$; $y = 1$.

Приклад 2.

Система з дробами

$$\begin{cases} x/2 + y/3 = 2 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

1. Виразимо x через y з другого рівняння
$x = y + 3$

2. Підставимо у перше рівняння: $(y+3)/2 + y/3 = 2$
3. Розв'яжемо рівняння, зведемо до спільного знаменника

$$(3(y+3) + 2y)/6 = 2$$

$(3y+9+2y)/6=2$

$(5y+9)/6=2$

$5y+9=12$

$5y=3$; $y=3/5$

Приклад 3

Система з трьома змінними

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x+2y-z=2 \end{cases}$$

1. Виразимо z через x та y з першого рівняння: $z=6-x-y$
2. Підставимо цей вираз у друге та третє рівняння: $2x-y+(6-x-y)=3$

$x+2y-(6-x-y)=2$

3. Спростимо ці рівняння: $2x-y+6-x-y=3$

$x-2y+6-x-y=2$

$x-2y=-3$ | $x-2y=-3$

$-2y-y=-4$ | $-3y=-4$

4. Розв'яжемо для y: $-3y=-4$; $y=4/3$
5. Знайдемо x підставивши $y=4/3$: $x-2(4/3)=-3$

$x-8/3=-3$

$x=-3+8/3$

$x=-9/3+8/3$

$x=-1/3$

6. Знайдемо z:

$z=6-x-y=6-(-1/3)-4/3=6+1/3-4/3=6-3/3=5$

Відповідь: $x=-1/3$, $y=4/3$, $z=5$

Приклад 4
Система з параметрами

$$\begin{cases} ax + y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

де a – параметр

1. Виразимо y з першого рів-ня

$$y = 3 - ax$$

2. Підставимо у друге рівняння

$$x + 2(3 - ax) = 5$$

3. Розв'яжемо для x

$$x + 6 - 2ax = 5$$
$$x - 2ax = -1$$
$$x(1 - 2a) = -1$$
$$x = -1/(1 - 2a)$$ якщо $a \neq 1/2$

4. Знайдемо y

$$y = 3 - ax = 3 - a \cdot (-1/(1 - 2a)) = 3 + a/(1 - 2a)$$

Відповідь: Якщо $a \neq 1/2$: $x = -1/(1-2a)$, $y = 3 + a/(1-2a)$
Якщо $a = 1/2$ система не має розв'язків оскільки рівняння стають несумісними

Графічний метод розв'язання системи лінійних рівнянь

Приклад 1

Розв'язання одного лінійного р-ня

Для рівняння виду $ax+b=0$ графічний метод полягає у побудові графіка функції $y = ax+b$ і знаходження точки перетину з віссю Ox.

Рівняння: $2x-4=0$

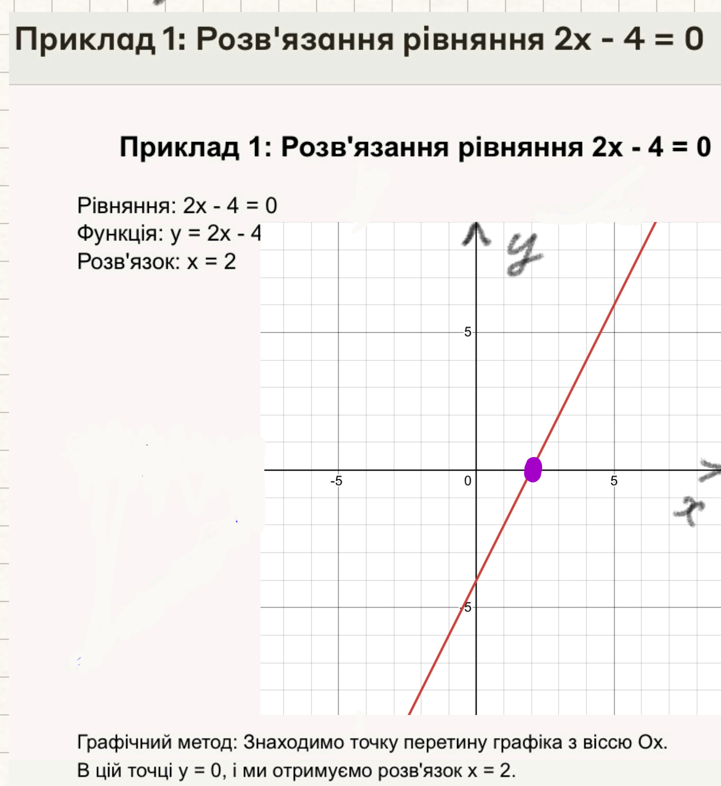
1. Перетворюємо на ф-ю: $y=2x-4$
2. Будуємо графік ф-ї
3. Знаходимо точку перетину з Ox (коли $y=0$)
4. Ця точка і буде розв'язком рівняння ($x=2$)

Більш детальний розбір

1) $2x-4=0$; ~~додаємо 4 до обох частин рівняння $2x=4$~~
Потім ділимо обидві частини на 2: $x=2$

2) Графічна інтерпретація
Графік показує лінійну ф-ю $y=2x=4$
лінія перет вісь x при $x=2$, що є розв'язком рі-ня $2x-4=0$

3) Перетин з осями:
Пряма перетинає вісь y при $y=-4$ (коли $x=0$)



Пряма перетинає вісь x при $x=2$ (коли $y=0$)

4) Точки на прямій

Пряма проходить через точку $(0,-4)$ тому що коли $x=0, y=2(0)-4=-4$

Пряма проходить через точку $(2,0)$ тому що коли $x=2,\ y=2(2)-4=0$

Графічний метод полягає у знаходженні точки, де пряма перетинає вісь x, що є розв'язком рівняння $2x-4=0$

Приклад 2

Розв'язання системи двох лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$$

1. Виражаємо y з кожного рівняння:
   $y=5-2x$ (з першого рівняння)
   $y=x-1$ (з другого рівняння)

2. Будуємо графіки обох функцій
3. Будуємо графіки обох функцій
4. Координати точки перетину і будуть розв'язком системи

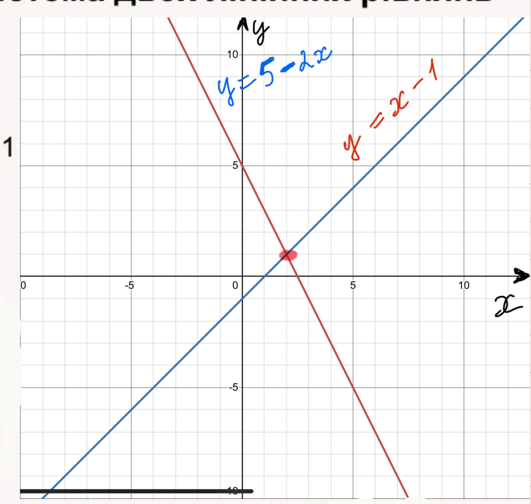
$(x=2,\ y=1)$

Перевірка $2\cdot 2+1=5$

$2-1=1$

Приклад 2: Система двох лінійних рівнянь

Система рівнянь:
2x + y = 5
x - y = 1
Розв'язок: x = 2, y = 1



Графічний метод: Знаходимо точку перетину двох прямих.
Координати цієї точки (2, 1) є розв'язком системи.

Приклад 3

Система з нескінченною кількістю розв'язків

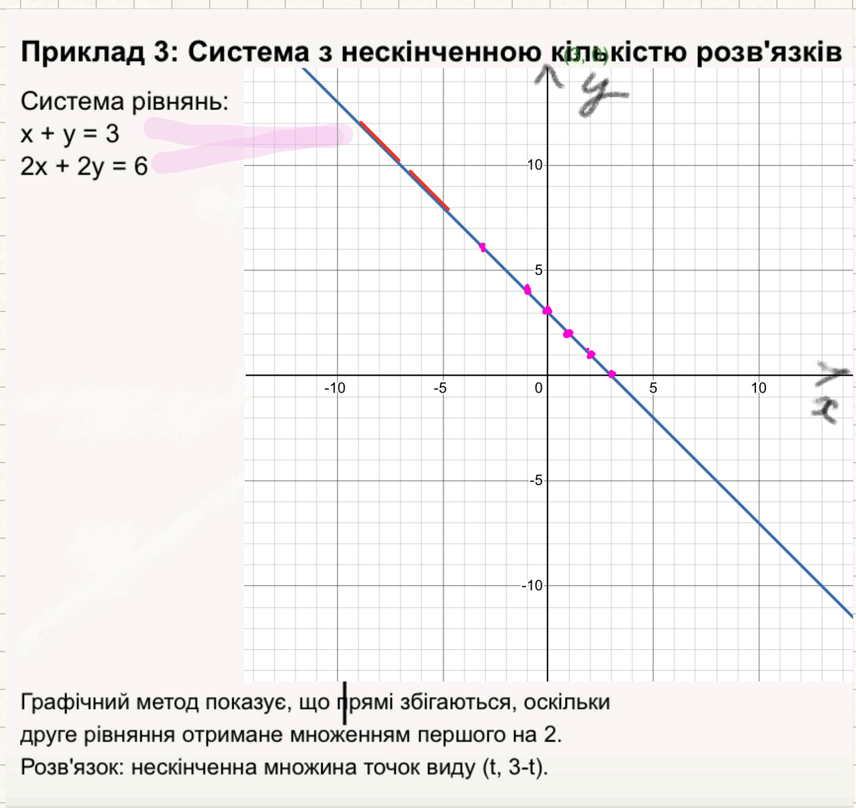
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

1. На графіку видно, що обидві прямі повністю збігаються. Це відбувається коли одне рівняння є пропорційним іншому (у цьому випадку друге рівняння отримано множенням першого на 2)

У такому випадку будь-яка точка на прямій $x + y = 3$ є розв'язком системи. Математично це запишемо як множину точок $(t, 3-t)$ де t - довільне число

На графіку позначено кілька таких точок

$(-3;6)$ $(-1;4)$ $(0;3)$ $(1,2)$ $(2,1)$ $(3,0)$



Приклад 4

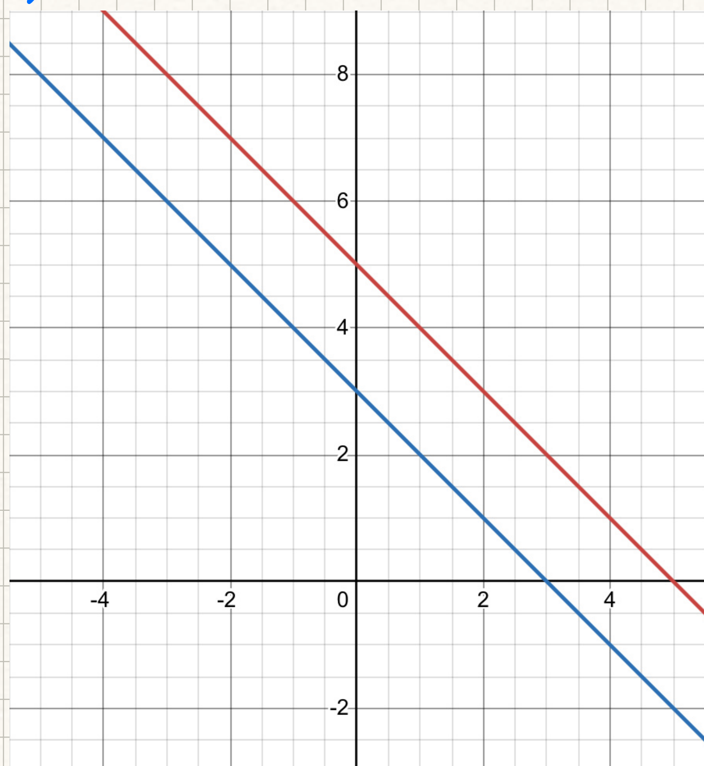
Система без розв'язків

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

1. На графіку синя лінія представляє перше рівняння $x + y = 3$
2. Червона лінія представляє друге рівняння $x + y = 5$
3. Ці прямі паралельні і ніколи не перетнуться
4. Це значить що система не має жодного розв'язку (суперечлива система)
5. Неможливо знайти такі значення x та y які б одночасно задовольняли обидва рівняння

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Розв'язку системи не існує бо графіки (прямі) рівнянь не перетинаються



Рекомендації

1. Робити перевірки через підстановку
2. Прямі паралельні - нема розв'язків (системи несумісні суперечливі)
   Накладаються - нескінченна к-ть розв'язків
3. Всі 4 випадки це всі можливі варіанти розв'яз систем лінійних рівнянь

Формула Крамера — це метод розв'язання систем лінійних рівнянь за допомогою визначників.

Для системи n лінійних рівнянь з n невідомими:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$

...

$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n$

Розв'язок за формулами Крамера має вигляд:

$x_1 = \Delta_1/\Delta$

$x_2 = \Delta_2/\Delta$

...

$x_n = \Delta_n/\Delta$

де:

- Δ — визначник матриці коефіцієнтів системи
- Δ_i — визначник матриці, отриманої із заміною i-го стовпця на стовпець вільних членів

Якщо $\Delta \neq 0$, система має єдиний розв'язок.

Якщо $\Delta = 0$ і хоча б один з $\Delta_i \neq 0$, система несумісна (не має розв'язків).

Якщо $\Delta = 0$ і всі $\Delta_i = 0$, система має безліч розв'язків.

Цей метод особливо зручний для розв'язання систем з 2-3 рівняннями, але стає обчислювально складним для більших систем.

Метод додавання у розв'язанні систем лінійних рівнянь

Приклад 1

Система з двома невідомими

$$\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 4x-5y=1 \end{cases}$$

1. Перетворимо рівняння так, щоб коефіцієнти при одній із змінних відрізнялися лише знаком.

1. Множимо перший вираз на 2:

$$4x+6y=16$$
$$4x-5y=1$$

2. Додамо рівняння щоб виключити x

$$4x+6y=16$$
$$4x-5y=1$$
$$11y=17$$

3. Знаходимо значення y: $y=\frac{17}{11}$

4. Підставляємо значення y в будь-яке з вихідних рівнянь:

$$2x+3(17/11)=8$$
$$2x+51/11=8$$
$$2x=8-51/11$$
$$2x=(88-51)/11$$
$$2x=37/11$$
$$x=37/22$$

Відповідь: $x=37/22$, $y=17/11$

Приклад 2

Система з трьома невідомими

$$\begin{cases} 2x+y-z=5 \\ 3x-2y+2z=4 \\ x+3y-3z=3 \end{cases}$$

1. Виключимо змінну x з другого і третього рівнянь.

* З другого р-ня: помножимо перше рівняння на 3/2 і віднімемо від другого.

* З третього рівняння: помножимо перше р-ня на ½ і віднімемо від третього

$$2x+y-z=5 \quad (1)$$
$$0x-7/2y+7/2z=-3/2 \quad (2)$$
$$0x+5/2y-5/2z=1/2 \quad (3)$$

2. Виключимо змінну y з третього рівняння
Помножимо рівняння (2) на $5/7$ і додамо до рівняння (3)

$$0x - 7/2y + 7/2z = -3/2 \quad (2)$$
$$0x + 5/2y - 5/2z = 1/2 \quad (3)$$
$$0x + 0y + 0z = -1 \quad (4)$$

Відповідь: Отримуємо суперечність $0 = -1$, це означає що система несумісна і не має розв'язків

Приклад 3

Система з коефіцієнтами які зручні для додавання

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -3x + 5y = 6 \end{cases}$$

1. Просто додаємо обидва р-ня, оскільки кое-ти при x відрізняються лише знаком:

$$3x + 2y = 7$$
$$-3x + 5y = 6$$
$$0x + 7y = 13$$

2. Знаходимо y: $7y = 13$, $y = 13/7$

3. Підставляємо y в перше рівняння:

$$3x + 2(13/7) = 7$$
$$3x + 26/7 = 7$$
$$3x = 7 - 26/7$$
$$3x = (49 - 26)/7$$
$$3x = 23/7$$
$$x = 23/21 = 23/21$$

Відповідь: $x = 23/21$, $y = 13/7$.

* Метод додавання ефективний коли коефіцієнти при одній із змінних легко привести до протилежних значень.

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

1) $\begin{cases} x + y = 4 \\ -x + y = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x - y = 3 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ -x - 2y = 8 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} -x + y = 2 \\ 4x - 3y = -3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 4x - 3y = 28 \\ 9x - y = -6 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 5x - y = 2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} -4x + 12y = 0 \\ 12x + 4y = 160 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 2 \\ \frac{1}{5}x - \frac{2}{3}y = 8 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 0.2x - 0.2y = -1.8 \\ -0.3x + 0.5y = 3.3 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 4x + 2y = 16 \\ x - 5y = 70 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x + 4y = 8 \\ 3x + 12y = 2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} -3x + 5y = 2 \\ 9x - 15y = 6 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x - 6y = 10 \\ -3x + 9y = -15 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 2x - 3y = -8 \\ 14x - 21y = 3 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 6x + 4y = 12 \\ 9x + 6y = 18 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 25x - 75y = 100 \\ -10x + 30y = -40 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 8s - 3t = -3 \\ 5s - 2t = -1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} u - 30v = -5 \\ -3u + 80v = 5 \end{cases}$

12) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{5}y = 3 \\ \frac{5}{3}x + 2y = 10 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}y = \frac{1}{2} \\ 2x - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

13) $\begin{cases} 0.4x + 1.2y = 14 \\ 12x - 5y = 10 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 26x - 10y = -4 \\ -0.6x + 1.2y = 3 \end{cases}$

14) $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y = 2 \\ -8x + 6y = 10 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} -\frac{1}{10}x + \frac{1}{2}y = 4 \\ 2x - 10y = -80 \end{cases}$

1) $\begin{cases} x+y=4 \\ -x+y=0 \end{cases}$ 1. Метод підстановки найпростіший для цієї системи

З другого рівняння $-x+y=0$ звідки $y=x$

Підставимо у перше рівняння $x+x=4$

$2x=4$; $x=2$

$y=x=2$

2. Метод алгебр. додавання

Додаємо обидва рівняння $(x+y)+(-x+y)=4+0$

$2y=4$; $y=2$

Підставляємо в будьяке рівняння

$x+y=4$; $x+2=4$; $x=2$

Відповідь: $x=2$, $y=2$.

* Обидва варіанта ефект. але додав потребує менше кроків

3. Графічний метод - кожне рівняння це пряма на площині, точка перетину - розв'язок системи.

Перетворимо рівняння у вигляд $y=f(x)$

1. $x+y=4 \to y=4-x$
2. $-x+y=0 \to y=x$

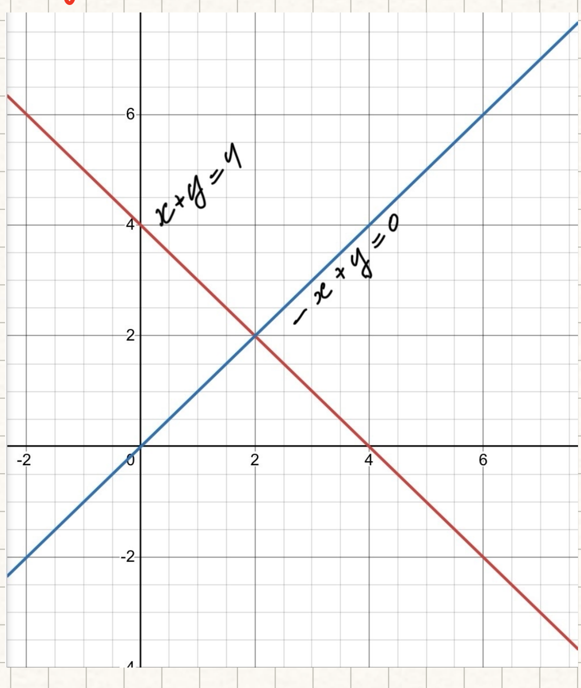
Для розв'яз граф. мет.

1. Перетвор рівн. у вигляд ф-ії

- $x+y=4 \to y=4-x$ (спадаюча пряма)
- $-x+y=0 \to y=x$ (зростаюча пряма)

Перетин $(2,2)$ - розв'язок, підставляємо в рів-ня для перевірки

* Візуально бачимо взаємодію прямих



2) $\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$

1. Метод підстановки

$2x - 3y = 9$

$-3y = 9 - 2x$

$y = (2x - 9)/(-3)$

Підставити у друге рівняння:

$4x + 3y = 9$

$4x + 3 \cdot ((2x - 9)/(-3)) = 9$

$4x - (2x - 9) = 9$; $4x - 2x + 9 = 9$; $2x = 0$; $x = 0$

Знаходимо y: $y = (2 \cdot 0 - 9)/(-3) = -9/(-3) = 3$

Відповідь: $x = 0, y = 3$

2. Метод додавання (В 1)

$2x - 3y = 9 \quad | \cdot 2$

$4x + 3y = 9 \quad | \cdot 1$

$$\begin{array}{r} 4x - 6y = 18 \\ 4x + 3y = 9 \\ \hline 8x - 3y = 27 \end{array}$$

$8x - 3y = 27$; $8x = 27 + 3y$

З другого рівняння: $4x + 3y = 9$

$4x = 9 - 3y$

Прирівнюю: $8x = 27 + 3y$

$2 \cdot (9 - 3y) = 27 + 3y$

$18 - 6y = 27 + 3y$

$-9 = 9y$

$y = -9/9 = -1$

треба 3

(Чому помилка?)

Однак $y = 3$, оскільки: $4x + 3y = 9$

$4 \cdot 0 + 3y = 9$

$3y = 9; \quad y = 3$

Відповідь: $x = 0,\ y = 3$

2. Метод додавання (В2)

$$\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$$

1. Дод. обидва рів-ня щоб скоротити y

$$(2x + 4x) + (-3y + 3y) = 9 + 9 \Rightarrow 6x = 18 \Rightarrow x = 3$$

2. Підставляємо $x = 3$ у перше р-ня для знаходження y:

$$2(3) - 3y = 9 \Rightarrow 6 - 3y = 9 \Rightarrow -3y = 3 \Rightarrow y = -1$$

3. Перевірка (другим рівнянням)

$$4(3) + 3(-1) = 12 - 3 = 9$$

Відп. $(x, y) = (3; -1)$

3 Графічний метод

1. Знаходження точок для побудови графіків

Підбираємо x щоб обчислити y

Перше р-ння $2x - 3y = 9$

Якщо $x = 0$; $2(0) - 3y = 9 \Rightarrow -3y = 9 \Rightarrow y = -3$

Точка $(0, -3)$

Якщо $x = 3$; $2(3) - 3y = 9 \Rightarrow 6 - 3y = 9 \Rightarrow -3y = 3 \Rightarrow y = -1$

Точка $(3, -1)$

Друге р-ння $4x + 3y = 9$

Якщо $x = 0$; $4(0) + 3y = 9 \Rightarrow 3y = 9 \Rightarrow y = 3$

Точка $(0, 3)$

Якщо $x = 3$; $4(3) + 3y = 9 \Rightarrow 12 + 3y = 9 \Rightarrow 3y = -3 \Rightarrow y = -1$

Точка $(3, -1)$

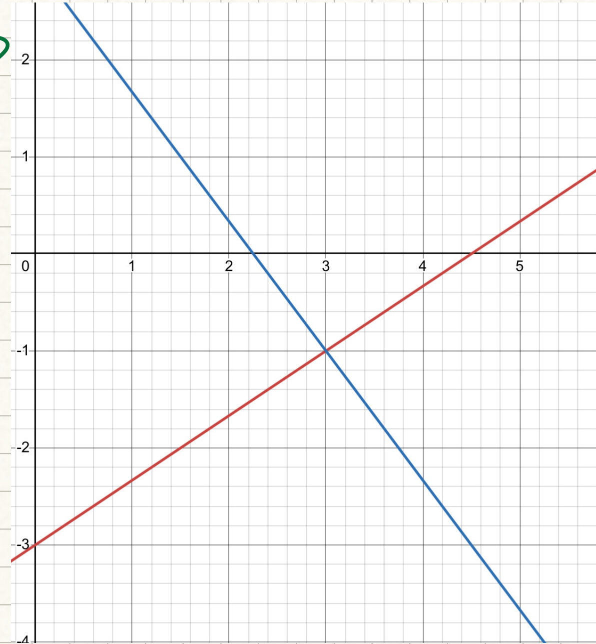
Такі точки отримано

$2x - 3y = 9 \Rightarrow (0,-3)$ і $(3,-1)$

$4x + 3y = 9 \Rightarrow (0,3)$ і $(3,-1)$

* Прямі перетин у точ. $y = -1$

* Кожне р-ня можна привести до вигляду $y = mx + b$ (m - нахил, а b - перетин з y але для зручності використ. зручні x для обчислення y



Переваги та недоліки графічного методу

- **Переваги**: Метод наочний, допомагає зрозуміти геометричний зміст системи рівнянь. Він корисний для перевірки результатів або для задач із двома змінними.
- **Недоліки**: Менш точний, якщо точка перетину лежить між сіткою або потребує детального масштабування. Також він стає складним для систем із трьома чи більше змінними, оскільки їх важко зобразити на двовимірній площині.

* Кутовий нахил

Нахил прямої (або кутовий коефіцієнт) — це числова характеристика, яка описує, наскільки круто пряма піднімається або спускається на координатній площині при зміні значення x. У математиці нахил позначається літерою m і визначається як відношення зміни y (вертикальної координати) до зміни x (горизонтальної координати) між двома точками на прямій. Давайте розберемо це детальніше.

Формула нахилу

Нахил прямої m обчислюється за формулою:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

де:

- (x_1, y_1) і (x_2, y_2) — координати двох точок на прямій,
- $\Delta y = y_2 - y_1$ — зміна значення y,
- $\Delta x = x_2 - x_1$ — зміна значення x.

Геометричний зміст

- Нахил показує, скільки одиниць y змінюється на кожну одиницю зміни x.
- Якщо $m > 0$, пряма піднімається вгору зліва направо (позитивний нахил).
- Якщо $m < 0$, пряма спускається вниз зліва направо (негативний нахил).
- Якщо $m = 0$, пряма горизонтальна (не змінюється y при зміні x).
- Якщо нахил невизначений (тобто $\Delta x = 0$), пряма вертикальна.

Приклад із нашої системи

Розглянемо перше рівняння з попередньої системи: $2x - 3y = 9$. Спочатку приведемо його до вигляду $y = mx + b$ (де b — перетин із віссю y):

$$2x - 3y = 9 \implies -3y = -2x + 9 \implies y = \frac{2}{3}x - 3$$

Тут:

- Нахил $m = \frac{2}{3}$ (позитивний, пряма піднімається).
- Перетин із віссю y $b = -3$.

Тепер обчислимо нахил, використовуючи дві точки, які ми знайшли раніше: $(0, -3)$ і $(6, 1)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-3)}{6 - 0} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Результат збігається, що підтверджує правильність.

Для другого рівняння $4x + 3y = 9$:

$$4x + 3y = 9 \implies 3y = -4x + 9 \implies y = -\frac{4}{3}x + 3$$

- Нахил $m = -\frac{4}{3}$ (негативний, пряма спускається).
- Перетин із віссю y $b = 3$.

Перевіримо з точками $(0, 3)$ і $(3, -1)$:

$$m = \frac{-1 - 3}{3 - 0} = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}$$

Знову збігається.

Візуалізація нахилу

- Нахил $\frac{2}{3}$ означає, що при збільшенні x на 3 одиниці, y зростає на 2 одиниці.
- Нахил $-\frac{4}{3}$ означає, що при збільшенні x на 3 одиниці, y зменшується на 4 одиниці.

$$4x + 3y = 9 \implies 3y = -4x + 9 \implies y = -\frac{4}{3}x + 3$$

- Нахил $m = -\frac{4}{3}$ (негативний, пряма спускається).
- Перетин із віссю y $b = 3$.

Перевіримо з точками $(0, 3)$ і $(3, -1)$:

$$m = \frac{-1 - 3}{3 - 0} = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}$$

Знову збігається.

Візуалізація нахилу

- Нахил $\frac{2}{3}$ означає, що при збільшенні x на 3 одиниці, y зростає на 2 одиниці.
- Нахил $-\frac{4}{3}$ означає, що при збільшенні x на 3 одиниці, y зменшується на 4 одиниці.

Практичне застосування

Нахил має важливе значення в аналізі:

- У фізиці він може відображати швидкість (зміна відстані до зміни часу).
- У економіці — градієнт кривих попиту чи пропозиції.
- У графіках, як у нашому випадку, він допомагає зрозуміти, як змінюються змінні x і y відносно одна одної.

Якщо хочете, можу створити графік із позначенням нахилів або розібрати інший приклад! Дайте знати!