

Математичні функції

15

§ 4. Функції

Функції та їх графіки

Залежність змінної y від змінної x називається функцією, якщо кожному значенню x відповідає єдине значення y .

Функція позначається або однією буковою f (або) $f(x)$, або рівністю $y = f(x)$, де x — незалежна змінна або аргумент, y — залежна змінна або значення функції $f(x_0)$ — значення функції f в точці x_0 .

Область визначення і множина значень функції

Область визначення функції (D) — множина тих значень, які може приймати аргумент.

Множина значень функції (E) — це множина тих значень, які може приймати сама функція при всіх значеннях аргумента із областю визначення. Наприклад: $f(x) = \frac{2}{x-1}$.

Область визначення (D): $x - 1 \neq 0$; $x \neq 1$, x — будь-яке число, крім $x = 1$.

Графік функції

Графіком функції $y = f(x)$ називається множина точок площини з координатами (x, y) , де перша координата x «побігає» всю область визначення функції $f(x)$, а друга координата — це відповідне значення функції f в точці x .

Способи задання функції

1. Аналітичний спосіб: функція задається за допомогою математичної формулі.

$$y = x^2, y = 5x - 8; y = \frac{10}{x}$$

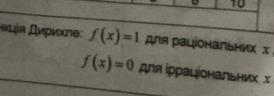
2. Таблицяний спосіб: функція задається за допомогою таблиць.

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

3. Описовий спосіб: функція задається словесним списком.

Функція Дірихле: $f(x) = 1$ для раціональних x , $f(x) = 0$ для іраціональних x .

4. Графічний спосіб: функція задається за допомогою графіка.



Лінійна функція та її графік

Лінійною функцією називається функцію виду $y = kx + b$, де $k \neq b$ — деякі числа, x — незалежна змінна.

Властивості

1. Область визначення: x — будь-яке дійсне число $x \in \mathbb{R}$.

2. Множина значень:

1) при $k \neq 0$: y — будь-яке дійсне число, $y \in \mathbb{R}$;

2) при $k = 0$: $y = b$.

3. Точки перетину з осями координат:

1) при $k \neq 0$, $x = -\frac{b}{k}$; $y = 0$ — точка перетину з віссю $0x$;

2) при $k = 0$, тоді $y = b$ — пряма, паралельна осі $0x$ перетинає $0y$ в точці $(0, b)$ і збігається з віссю $0x$ при $b = 0$;

3) $y = b$, $x = 0$ — точка перетину з віссю $0y$, тобто $(0, b)$.

4. Зростання і спадання:

1) при $k > 0$ функція зростає на всій області визначення;

2) при $k < 0$ функція спадає на всій області визначення;

3) при $k = 0$ функція стала.

5. Графіком лінійної функції є пряма.

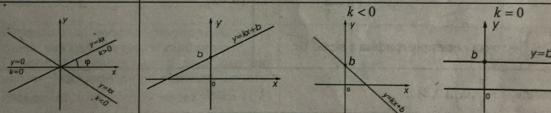
k — кутовий коефіцієнт

прямої

Графіки лінійних функцій

$b = 0$ ($y = kx$)

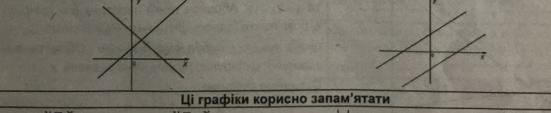
$b \neq 0$ ($y = kx + b$)



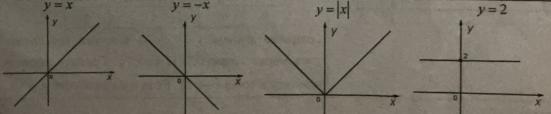
Взаємне розташування графіків лінійних функцій

Якщо $k_1 \neq k_2$, графіки функцій $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ перетинаються в одній точці.

Якщо $k = k_1$, $b_1 \neq b_2$, графіки функцій $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ паралельні.



Ці графіки корисно запам'ятати



↑
зростання
спадання
↑
відєм
i плюс

↑
зростання

↑
спадання

↑
зростання</p

Як відмежити чи є лін. або кв. уявлення функцією

Відмінне запитання! Це дуже важливе розуміння, яке допоможе вам краще зрозуміти зв'язок між різними математичними поняттями.

Так, і лінійні, і квадратичні рівняння можуть бути функціями, але тут є важливі нюанси, які варто розібрати детально.

Різниця між рівнянням і функцією

Спочатку давайте зрозумімо різницю. Рівняння — це математичне твердження, що дві вирази є рівними (містить знак “=”). Функція — це правило, яке кожному входу ставить у відповідність один вихід.

Коли ми маємо рівняння типу $y = 2x + 3$ (лінійне) або $y = x^2 + 2x - 1$ (квадратичне), то так, це функції! Чому? Тому що для кожного значення x ми отримуємо рівно одне значення y .

Лінійні функції

Лінійні рівняння виду $y = ax + b$ завжди є функціями. Вони описують пряму лінію на координатній площині. Наприклад, якщо у вас є залежність між часом роботи (x годин) і заробітною платою (y гривень) за формулою $y = 100x + 500$, то це лінійна функція. Кожній кількості годин відповідає точно одна сума заробітку.

Квадратичні функції

Квадратичні рівняння виду $y = ax^2 + bx + c$ також є функціями. Вони описують параболу. Уявіть, що ви кидаете м'яч угору — його висота залежить від часу за квадратичною функцією. Для кожного моменту часу м'яч має рівно одну висоту.

Важливе застереження

Але увага! Не всі рівняння, що містять квадрати, є функціями. Наприклад, рівняння кола $x^2 + y^2 = 25$ не є функцією, тому що для одного значення x може бути два значення y . Якщо $x = 3$, то уможе бути як $+4$, так і -4 .

Тест вертикальної лінії

Є простий спосіб перевірити, чи є рівняння функцією: уявіть, що ви

Важливе застереження

Але увага! Не всі рівняння, що містять квадрати, є функціями. Наприклад, рівняння кола $x^2 + y^2 = 25$ не є функцією, тому що для одного значення x може бути два значення y . Якщо $x = 3$, то уможе бути як $+4$, так і -4 .

Тест вертикальної лінії

Є простий спосіб перевірити, чи є рівняння функцією: уявіть, що ви проводите вертикальну лінію через графік. Якщо ця лінія перетинає графік більше ніж в одній точці, то це не функція.

Подумайте: чи розумієте ви, чому лінійні та квадратичні рівняння завжди проходять цей тест, а рівняння кола — ні? Це допоможе вам краще зрозуміти суть функцій.

Тест вертикальної лінії — Explanatory жливіших і найпростіших інструментів у математиці для визначення, чи є графік функцією. Давайте розберемо його детально, щоб ви могли впевнено застосовувати цей тест.

Суть тесту

Уявіть, що у вас є олівець, який ви тримаєте вертикально, і ви повільно рухаєте його зліва направо через весь графік. Якщо в будь-якому місці ваш олівець торкається графіка більше ніж в одній точці одночасно, то цей графік не є функцією.

Чому це працює? Пам'ятаєте визначення функції — кожному входу (значенню x) має відповідати рівно один вихід (значення y). Вертикальна лінія представляє одне конкретне значення x . Якщо ця лінія перетинає графік у двох або більше точках, це означає, що одному значенню x відповідає кілька значень y , що порушує основне правило функції.

Приклади, що проходять тест

Розглянемо лінійну функцію $y = 2x + 1$. Уявіть пряму лінію, що йде знизу ліворуч до верху праворуч. Коли ви проводите вертикальну лінію в будь-якому місці, вона завжди перетинає цю пряму рівно в одній точці. Це тому, що пряма ніколи не “повертається назад” по осі x .

Тепер подумайте про квадратичну функцію $y = x^2$. Це парабола, що відкривається вгору, з вершиною в точці $(0,0)$. Незважаючи на те, що вона має U-подібну форму, кожна вертикальна лінія все одно перетинає її лише в одній точці. Навіть коли парабола “згинається”, вона не повертається назад через те саме значення x .

Приклади, що не проходять тест

Класичний приклад — коло з рівнянням $x^2 + y^2 = 25$. Уявіть коло з центром у початку координат і радіусом 5. Тепер проведіть вертикальну лінію, скажімо, в точці $x = 3$. Ця лінія перетне коло у двох точках: одна вгорі $(3, 4)$, а друга внизу $(3, -4)$. Це означає, що одному значенню $x = 3$ відповідає \downarrow за різні значення y , тому коло не є функцією.

Інший цікавий приклад — горизонтальна парабола $x = y^2$. Уявіть параболу, що відкривається праворуч замість вгору. Якщо ви проведете вертикальну лінію в точці $x = 4$, вона перетне параболу у двох точках: $(4, 2)$ і $(4, -2)$.

Особливі випадки для роздумів

Подумайте над такими питаннями для поглиблення розуміння: що станеться, якщо вертикальна лінія торкається графіка рівно в одній точці, але не перетинає його? Це все одно вважається одним перетином, тому графік залишається функцією.

А що, якщо графік має розрив або “стрибок”? Наприклад, функція може мати значення $y = 2$ при $x = 3$, а потім “стрибнути” до $y = 5$ при тому ж $x = 3$ з іншого боку. Такий графік не пройде тест вертикальної лінії і не буде функцією.

Практичне застосування

Коли ви бачите будь-який графік, швидко проведіть уявну вертикальну лінію через найширші або найскладніші частини. Якщо графік має петлі, кола, горизонтальні ділянки з вертикальним “стрибком” або будь-які інші форми, де одне значення x може дати кілька значень y , він не пройде тест.

Цей тест особливо корисний при роботі з графіками, побудованими на комп’ютері або калькуляторі, коли не завжди зрозуміло з рівняння, чи є воно функцією. Просто уявно “просканируйте” графік вертикальними лініями — і відповідь стане очевидно.

Чи розумієте ви тепер, чому цей простий візуальний тест так ефективно працює? Спробуйте застосувати його до різних графіків, які ви бачили раніше, і подивітесь, чи зможете передбачити результат до того, як проведете тест.

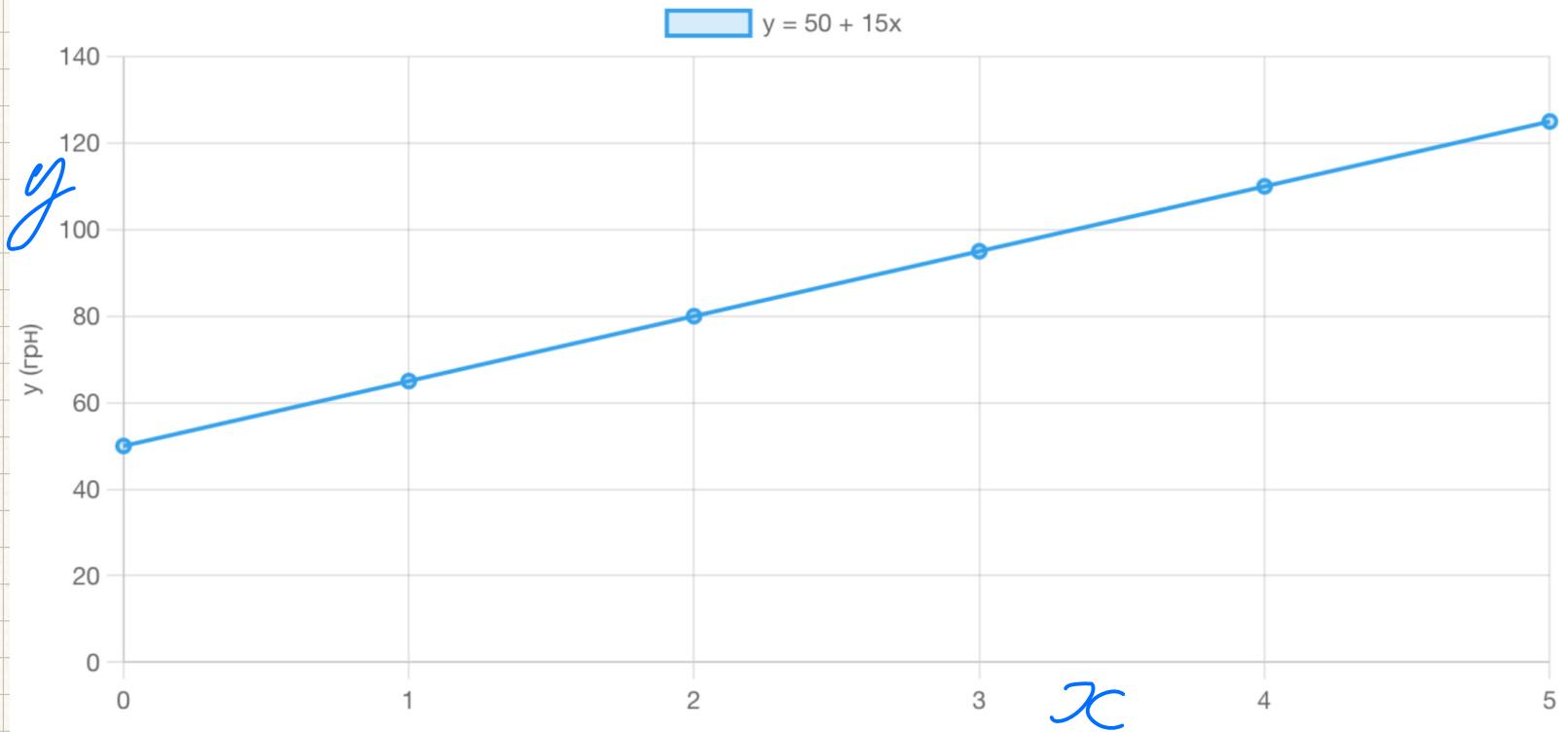


Функція = залежність
= відповідність

Приклади лінійних функцій у реал. знач.

1) Ідея

$y = 50 + 15x$ де y - вартість поїздання (грн)
 x - відстань , 50 грн - баз. тариф
15 грн/км - варт. за кілометр.



- Лінійна функція \Rightarrow пряма (лінія)
- * Хоча y не залежить від x , вона залежить від x . Якщо x зростає на 1, y зростає на 15
 - * Це означає що зростання y відповідає зростанню x на 1
 - * Відомий член 50 є початковим значенням y при $x=0$
 - * Відомий член 15 є коефіцієнтом пропорційності

x	0	1	2
y	50	65	80

$$\text{При } x=1; \quad y = 50 + 15 \cdot 1 = 65$$

$$\text{При } x=2; \quad y = 50 + 15 \cdot 2 = 80$$

2) Погодинна оплата

$$y = 120x$$

Заробітна плата з погодинною оплатою
 y - заробіток за добу (УНІ); Залежність змінна - залежність від x

x - відпрац. годин.; Залежність змінна - яку можна змінювати.

120 грн/год - погодинна ставка; Коеф при x який показує єдину пропорційність.

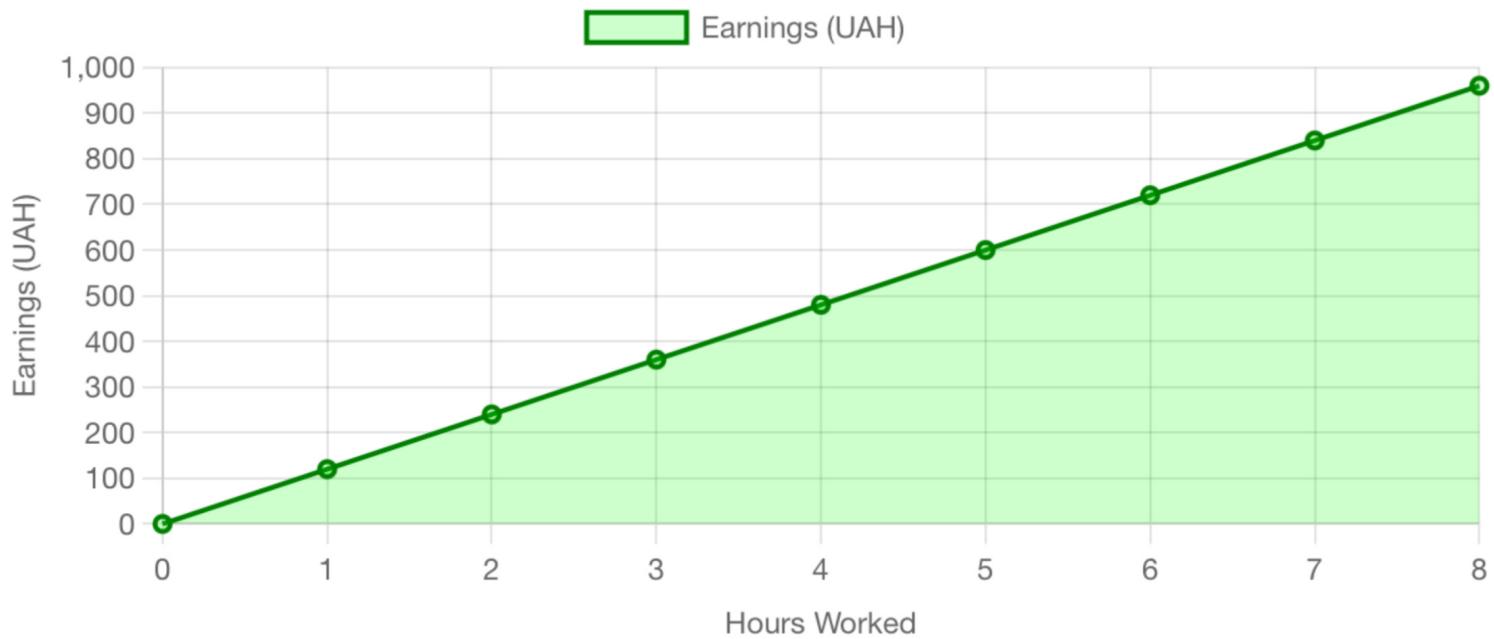
* лінія від $y=0$ показує таку пропорційність.
zn. Прив. пропорц. кільк. відпрац. годин.

* Ставка та зв. змінн. Кожна відпрац. година здійснила заробіток на розмір суму 120 грн.

Ставка відпрац. змінн. є характеристикою фін. ф.

* Ця фін. ф. є моделью для розрахунку зн. по основі погодинної ставки та к-ті відпрац. год.

Earnings Based on Hours Worked



3) Випадок падіння

Чу. модель випадку падіння

$$y = 500 - 8x$$

де y - залишок пасива (u) Залежність
змінної - змінч. значення від x .

x - проїзд відстань (ки). $1=100$ тащу чо
вказую розрів 8 лінурів на 100 км.

Незалежності змінна - залежність між змінними.

500 - початковий об'єм бака. Вільний член -
є потрібно перевести з y . Числ. знач.

числ. пропорційності = кутовий коеф.

> Визначте ін. змінну у відносно x .

> На когану однією з дійсних x значень y
змінюється на k однією ($y = b - kx$) $k = -8$

$|k|$ - віднег. знач при які: чим більше абсолютне
значення, тими крутіше пряма (що вказує зростання об'є-
мів) $k > 0 \nearrow k = 0 \downarrow$.

* лінійна функція моделює випадки падіння і описує залежність
між змінною відстані. k - є К.К. і К.п. видається
швидкістю та напрямок зміни об'єму відстань відносно
іншої. Чу. лін. тащу швидкість зміни розмежує на котри

Швидкість зміни $\frac{\partial y}{\partial x} = -8 \text{ км/ким}$

Пояснений в. ср.

x	0	1	2
y	0	492	484

$x = 0$; стояло на місці

$x = 1$; ($1=100$) $y = 500 - 8 \cdot 1 = 492$ км 8 к

$x = 2$; ($2=200$) $y = 500 - 8 \cdot 2 = 484$ (u) 16 к

> Максим. бігстапу на пътнику бак:

Без пътника $y = 0$; $0 = 500 - 8x$; $8x = 500$; $x = \frac{500}{8} = 62.5$

Останки $x = 100$; $62.5 \cdot 100 \text{ km} = 6250 \text{ km}$ до пътнико
внешната

> Витрати на 1 km; $8x / 100 \text{ km} = 0.08 \text{ л/км.}$

График дру

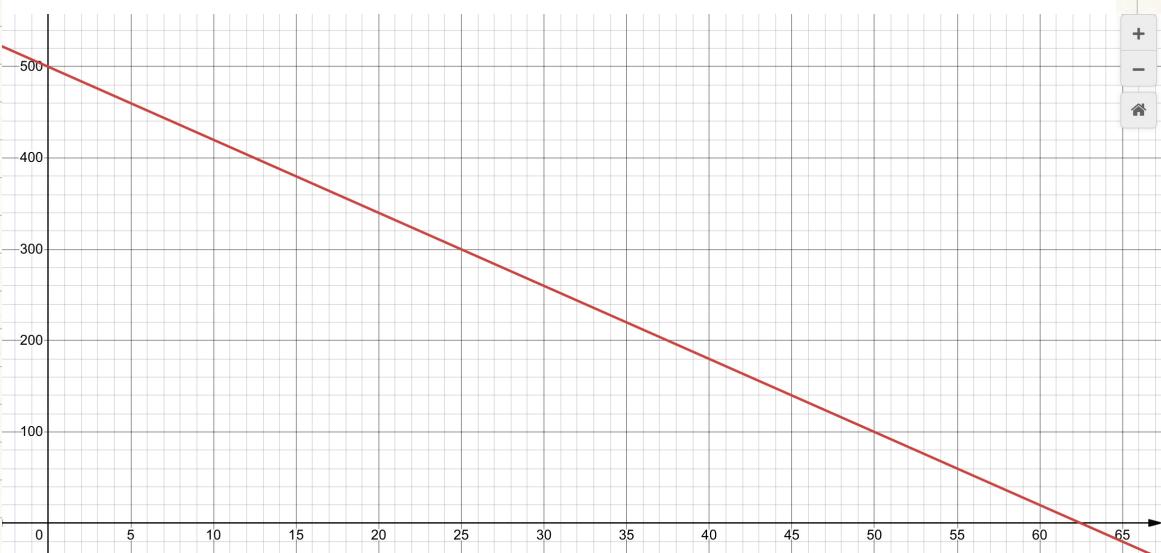
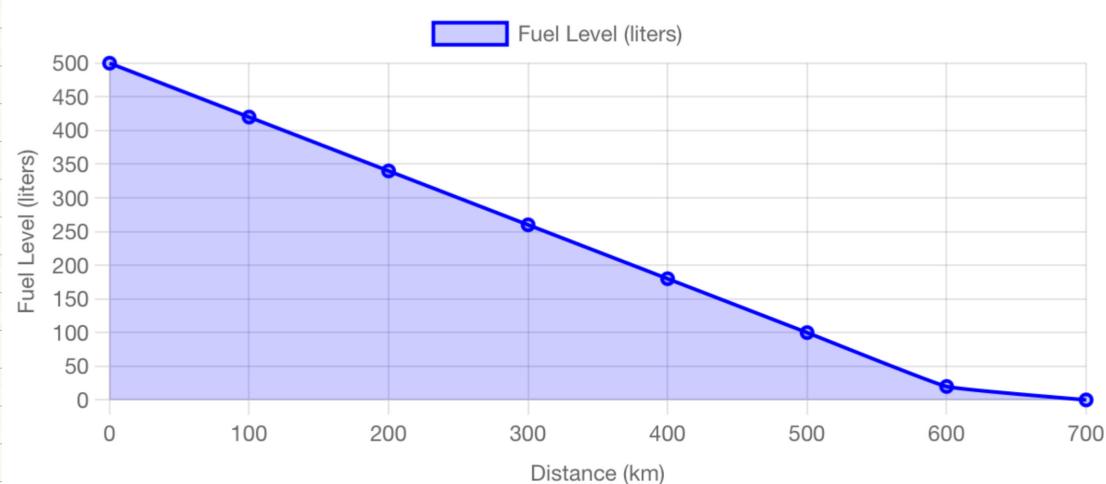
Висло y : начало 6 м. (0,500) ноб. бак.

Кумоли коеф: -8 (причиа същ. близ пробуря)

Пътнико \downarrow ; Задраво \nearrow ; Зависи x от същите

$$x = 0.5 = 50; x = 1,2 = 120$$

Fuel Level Based on Distance Traveled



4) Чоргіваний боди ($y = kx + b$)

Лінійна фу. модель (десмополіє) відповідний
(залежс. взаємозалежс) - температури до гасу при нагріван.

$$y = 20 + 5x \quad y - t^{\circ}\text{C} \text{ боди}; \text{ залежс. зміна}$$

x - час нагрів (хв); Чезалежс. зміна

20°C - початкова температура Відмінні член

$5^{\circ}\text{C}/\text{хв}$ - кв. нагрівания К.К. К.М.

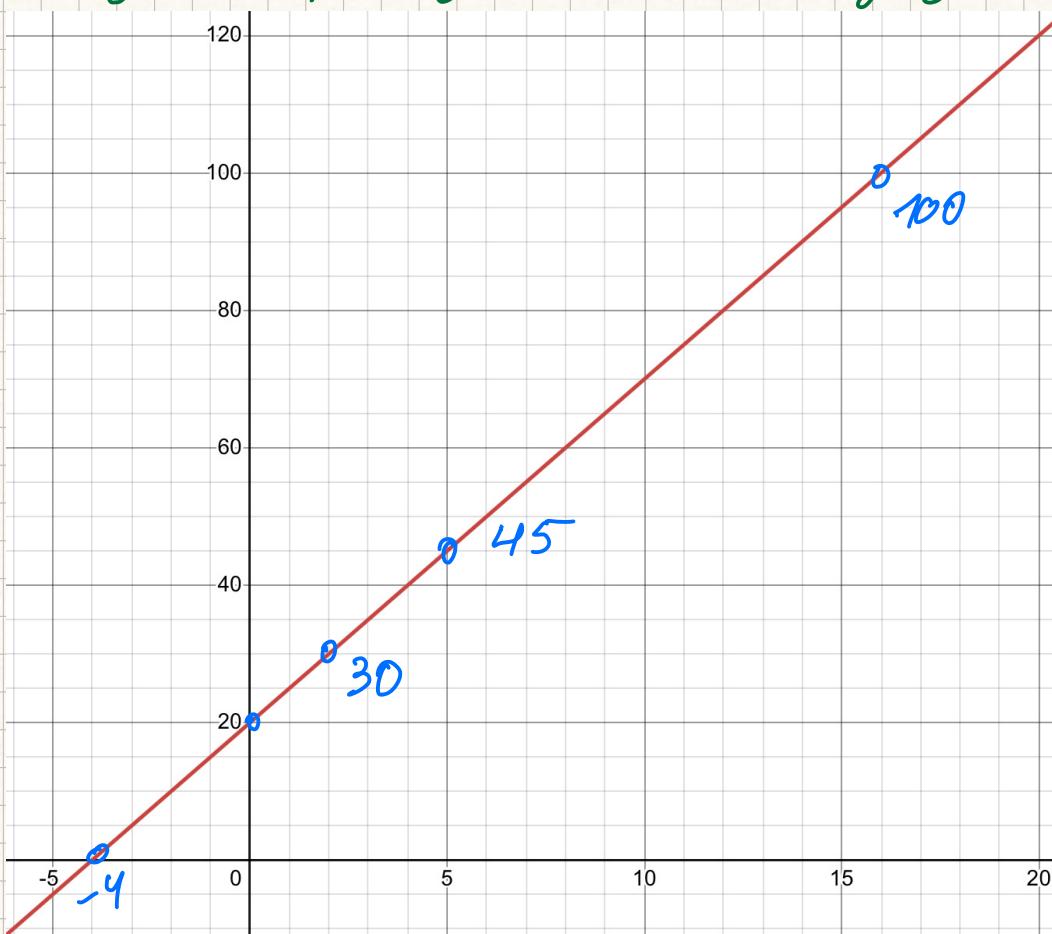
x	0	2	5
y	20	30	45

$$\text{Через } 0 \text{ хв: } y = 20 + 5 \cdot 0 = 20$$

$$2 \text{ хв: } y = 20 + 5 \cdot 2 = 30$$

$$5 \text{ хв: } y = 20 + 5 \cdot 5 = 45$$

* Физ. лін - зрос (спад) прямолінійні t° з T
зручно при змінах які відбуваються послідовно кв.



* Задача

$$y = 100^{\circ}\text{C}$$

$$100 = 20 + 5 \cdot x$$

$$5x = 80$$

$$x = \frac{80}{5}; x = 16$$

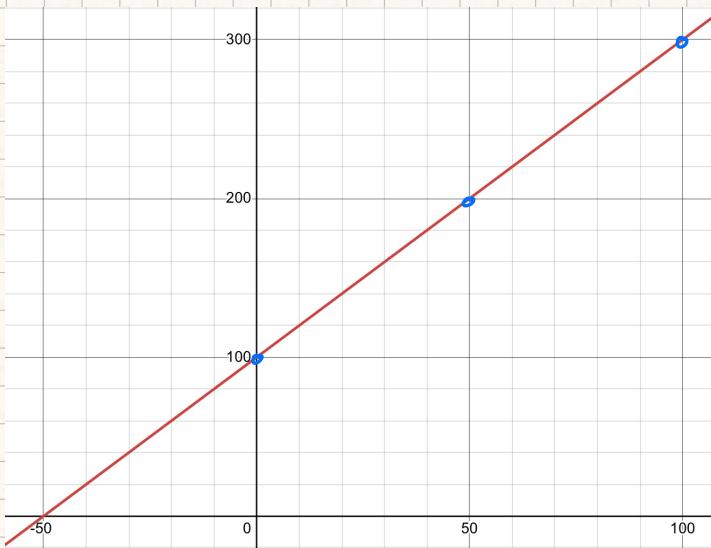
5) Модіусний таунер ($y = kx + b$)

Мод таунер котиже 100 ун на міс. плюс 2 ун за збільшу розмов. Тобуд таунер здієс членісальної функції від x -тих розмов (від 0 до 100 хв.)

$$y = 100 + 2x$$

Дог:

x	0	1	2	100
y	100	102	104	300



$$\text{При } x=0; y = 100 + 2 \cdot 0 = 100$$

$$x=1; y = 100 + 2 \cdot 1 = 102$$

$$x=2; y = 100 + 2 \cdot 2 = 104$$

$$x=100; y = 100 + 2 \cdot 100 = 300$$

6) Вимікаючі боди (впрацю)

$(y = kx + b)$

Гезербууд 1000л, шорвасими вимикає 25л. Тобуд таунер здієс к-ти боди від часу (від 0 до 40 хв)

$$y = 1000 - 25x$$

x	0	1	4	5	10	20	30	40
y	1000	975	0	875	750	500	250	0

$$x=0; y=1000$$

$$x=1; y=1000-25=975$$

$$x=40; y=1000-25 \cdot 40=$$

$$= 1000-1000=0;$$

$$1000-25 \cdot 30 (30; 250)$$

$$1000-25 \cdot 20 (20; 500)$$

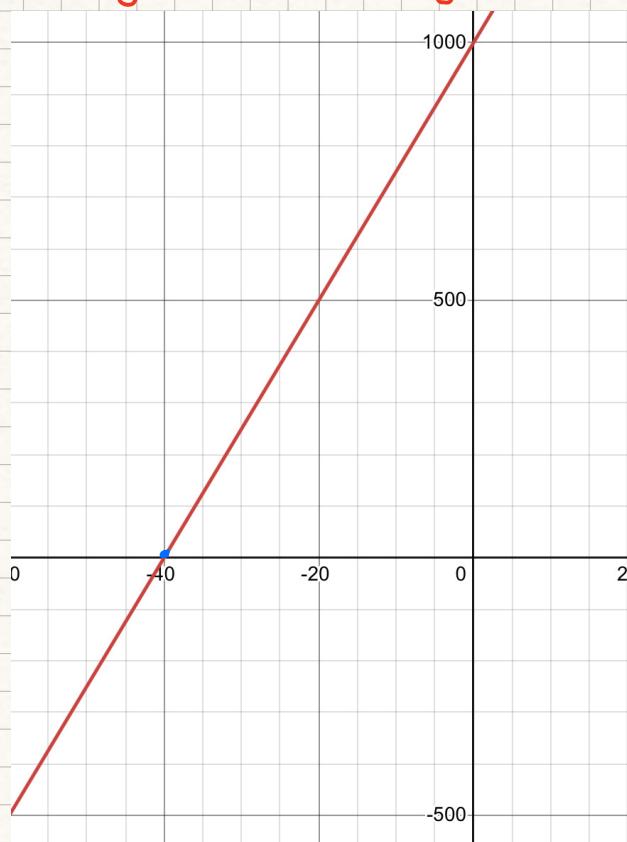
$$1000-25 \cdot 5 (5; 875)$$

$$1000-25 \cdot 10 (10; 750)$$

?

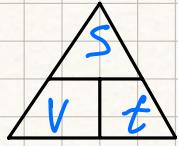
?

?



3) Моделювання велосипедиста ($y = kx + b$)

Велосипедист, шв. 20 км/год. Побудувалим участик залежності пройденої відстані від часу (від 0 до 5 годин)



$s(t) = 20 \cdot t$ лінійна фу. описує рух велосипедиста.

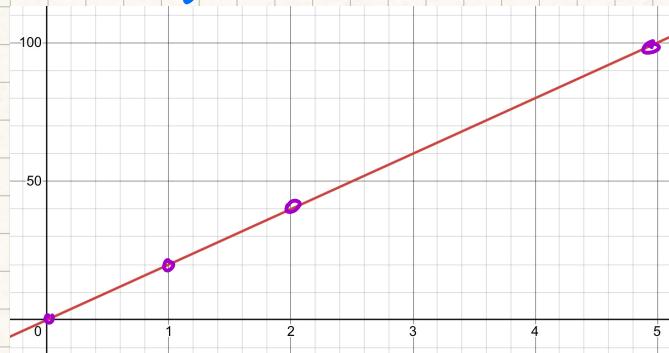
x	0	1	2	5
y	0	20	40	100

При $t = 1$:

$$s(1) = 20 \cdot 1 = 20$$

$$s(2) = 20 \cdot 2 = 40$$

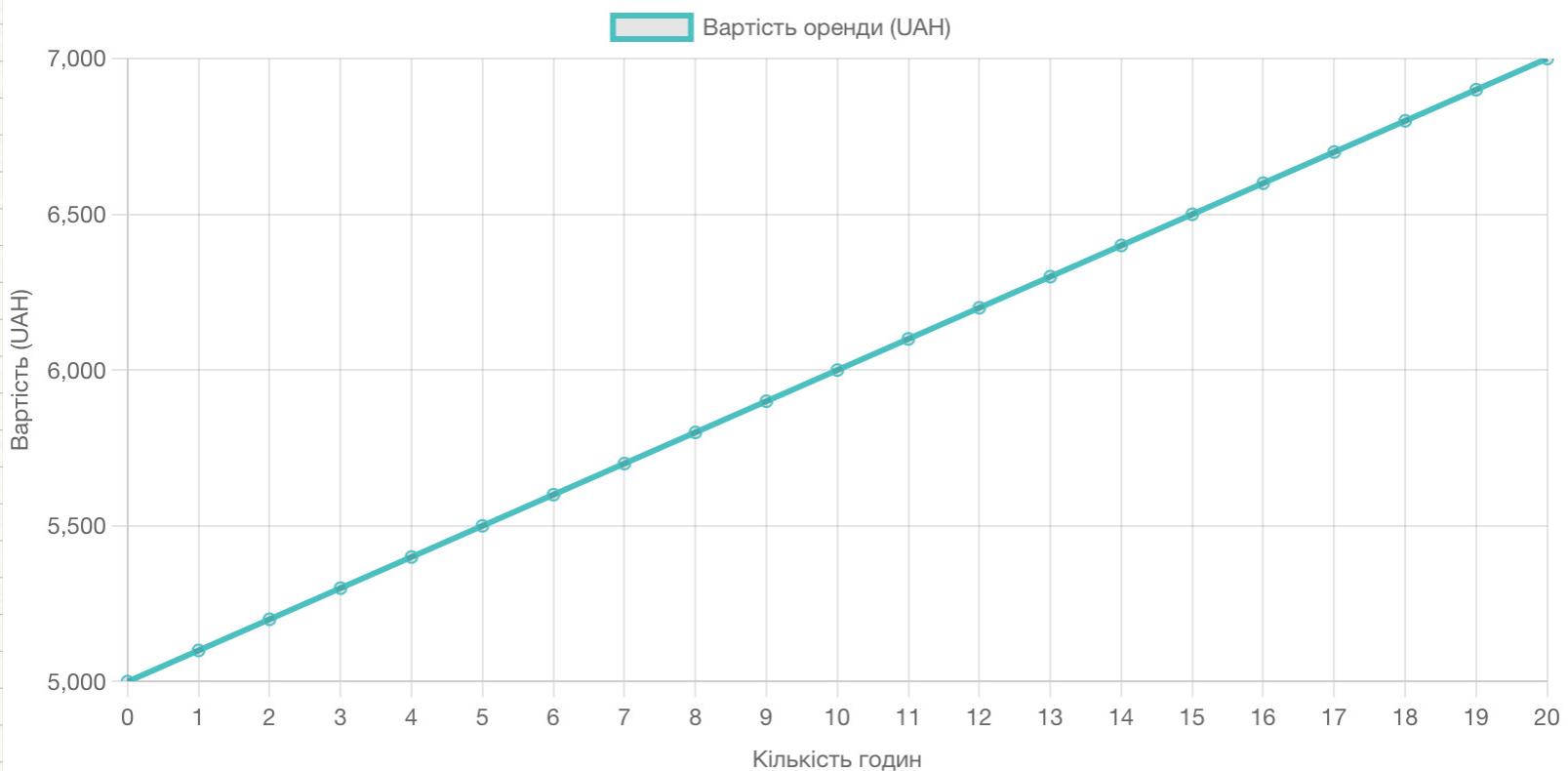
$$s(5) = 20 \cdot 5 = 100$$



8) Оренда пристрій

Оренда 5000 грн фіксована. Плюс 100 грн за кожну годину використання. Побудувалим участик залежності оренди від кількості годин (від 0 до 20)

$$y = 5000 + 20x \quad cost = 5000 + 20 \cdot t$$



9) Бізнес - план кафе

Задача 1: Бізнес-план кафе

Власник кафе планує відкрити новий заклад. Початкові витрати на обладнання становлять 240 000 грн. Щомісячні постійні витрати (оренда, зарплата) — 36 000 грн. Прибуток з одного відвідувача в середньому 45 грн.

Завдання:

1. Складіть функцію загальних витрат $V(t)$ залежно від кількості місяців роботи t
2. Складіть функцію загального доходу $D(n,t)$, якщо щомісяця кафе відвідує n клієнтів
3. Знайдіть функцію прибутку $P(n,t) = D(n,t) - V(t)$
4. Визначте, скільки клієнтів щомісяця потрібно, щоб вийти в нуль через 12 місяців
5. Побудуйте графік залежності місячного прибутку від кількості клієнтів (при $t=12$)
6. Розрахуйте, через скільки місяців окупляться початкові вкладення при 2000 клієнтах на місяць

- > Початкові витрати 240 000 грн
- > Щомісяч постійні вит. 36000 грн
- > Прибуток з одног клієнта - 45 грн.

1) Екв. залишків бінурал $V(t)$

$V(t) = 240000 + 36000 \cdot t$ бінурал сяюг Рис. 2
із початкових та змінчючих

2) Екв. зар. доходу $D(n, t)$

$D(n, t) = 45 \cdot n \cdot t$ змін. зар. залеж. від n та t

3) Екв. прибутку $P(n, t)$

$P(n, t) = D(n, t) - V(t) = 45nt - (240000 + 36000t)$

4) Свід. кот. потрібно змінити, щоб бінур вийшов через 12 міс.

Потрібно n , коли $P(n, 12) = 0$

$$45 \cdot n \cdot 12 = 240000 + 36000 \cdot 12 \Rightarrow 540n =$$

$$240000 + 432000 = 672000 \Rightarrow n = \frac{672000}{540} = \\ = 1244,44$$

Потрібно ≈ 1245 кілограмів на місяць, щоб бінур вийшов через 12 місяців.

5) Граф. залежності між. прибутку від кількості кілограмів при $t=12$.

$$P(n, 12) = 540n - 672000 \quad (y = 540n - 672000)$$

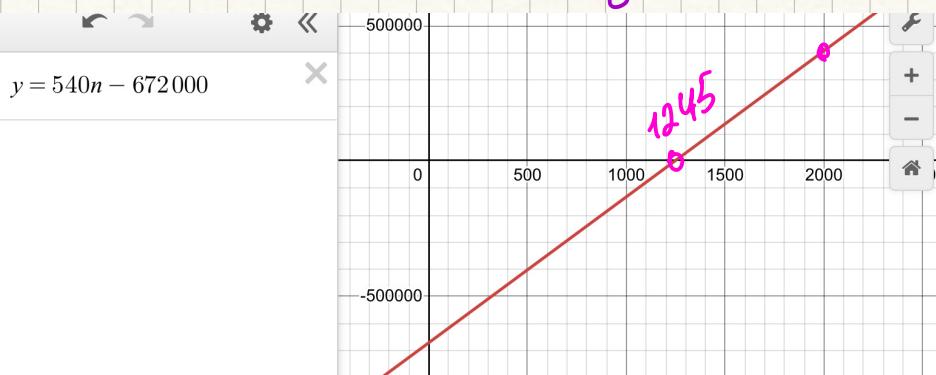


Рис 1

6) Через скільки місяців отримається прибуток при

2000 клієнтах на місяць.

Искажемо t , коли:

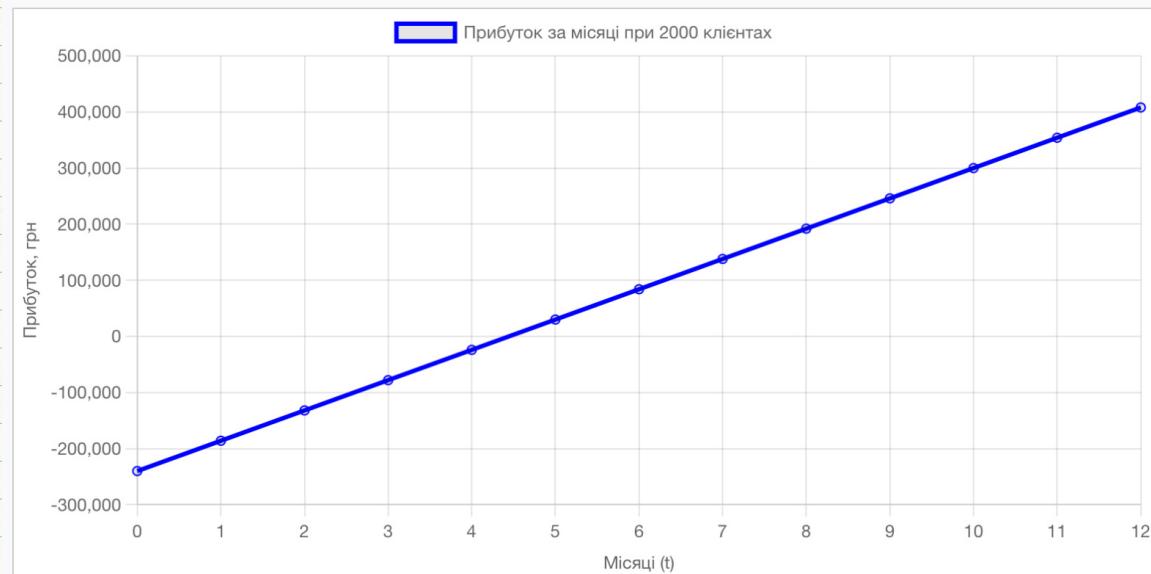
$$P(2000, t) = 45 \cdot 2000 \cdot t - (240000 + 36000 \cdot t) = 0$$

$$80000t - 240000 - 36000t = 0 \Rightarrow$$

$$54000t = 240000 \Rightarrow t = \frac{240000}{54000} = 4.44$$

Прибуток через 4,5 місяці при 2000 клієнтах.

3. Прибуток $P(2000, t)$ залежно від місяців (2000 клієнтів/міс)



Бізнес-план кафе: графіки витрат, доходів і прибутку

1. Загальні витрати $V(t)$



Рис. 2

2. Прибуток $P(n, 12)$ залежно від клієнтів за рік

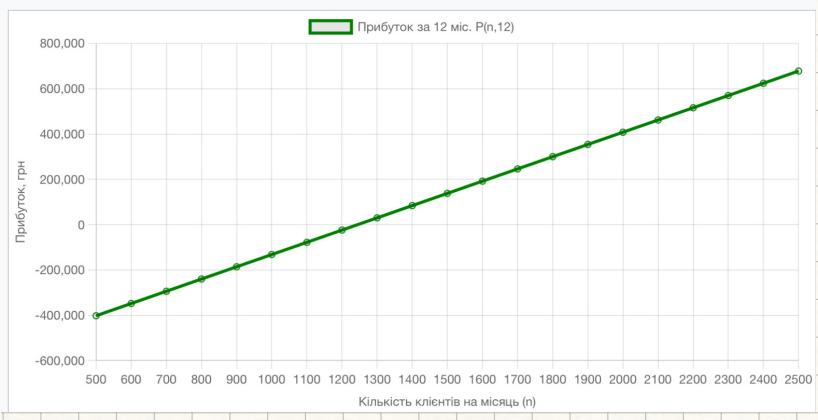


Рис. 1

10) Система водопостачання

Задача 2: Система водопостачання

У селищі встановлюють нову систему водопостачання.

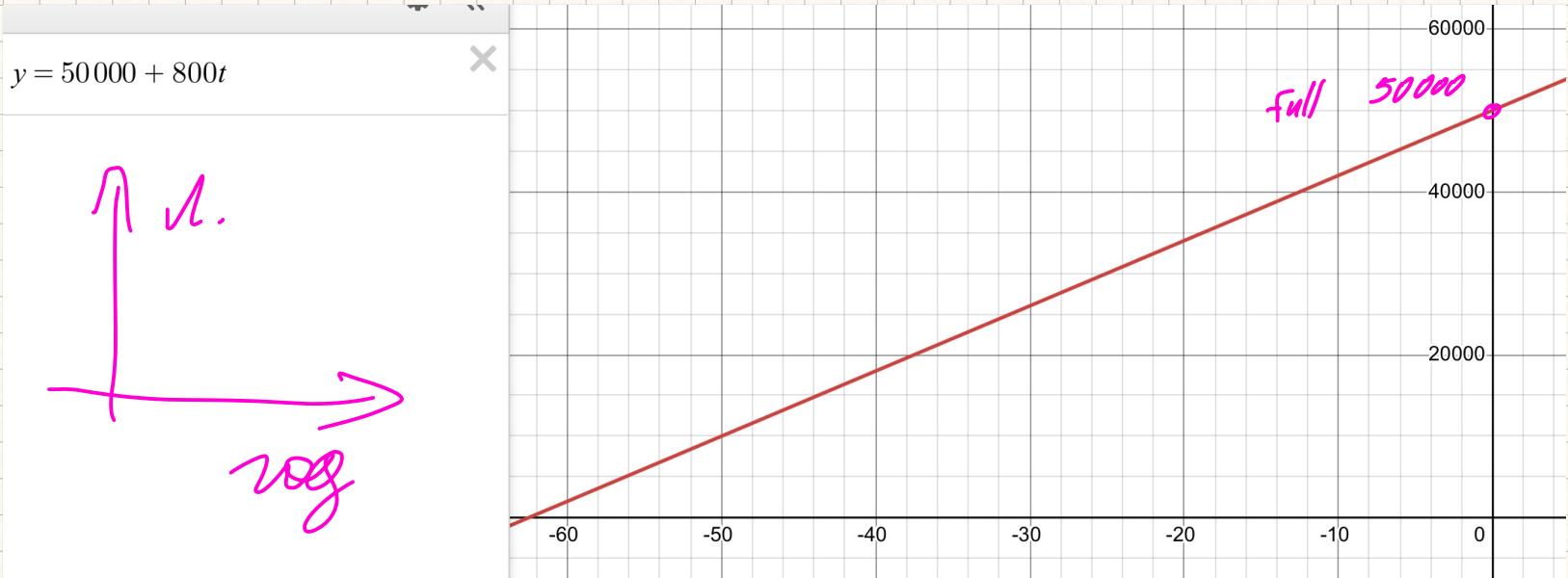
Водонапірна башта містить 50 000 л води. Вночі (з 22:00 до 6:00) башта наповнюється зі швидкістю 800 л/год. Вдень споживання води становить 1200 л/год, але наповнення не припиняється.

Завдання:

1. Складіть функцію кількості води $V_1(t)$ для нічного періоду (t — години після 22:00)
2. Складіть функцію кількості води $V_2(t)$ для денного періоду (t — години після 6:00)
3. Визначте кількість води в башті о 6:00 ранку
4. Знайдіть, о котрій годині дня рівень води буде мінімальним
5. Побудуйте графік зміни рівня води протягом доби
6. Розрахуйте, на скільки потрібно збільшити швидкість наповнення, щоб рівень води ніколи не опускався нижче 20 000 л

1) Функція є функцією періоду ($y = 50000 + 800t$)

$V_1(t) = 50000 + 800t$ час починається з 10:00 PM (from 10:00PM to 6:00AM)
поступовий наповнення за певний період 800 л/год.



$t=0$ в 22:00, $V(0)$ – початковий об'єм в 22:00 в баках.

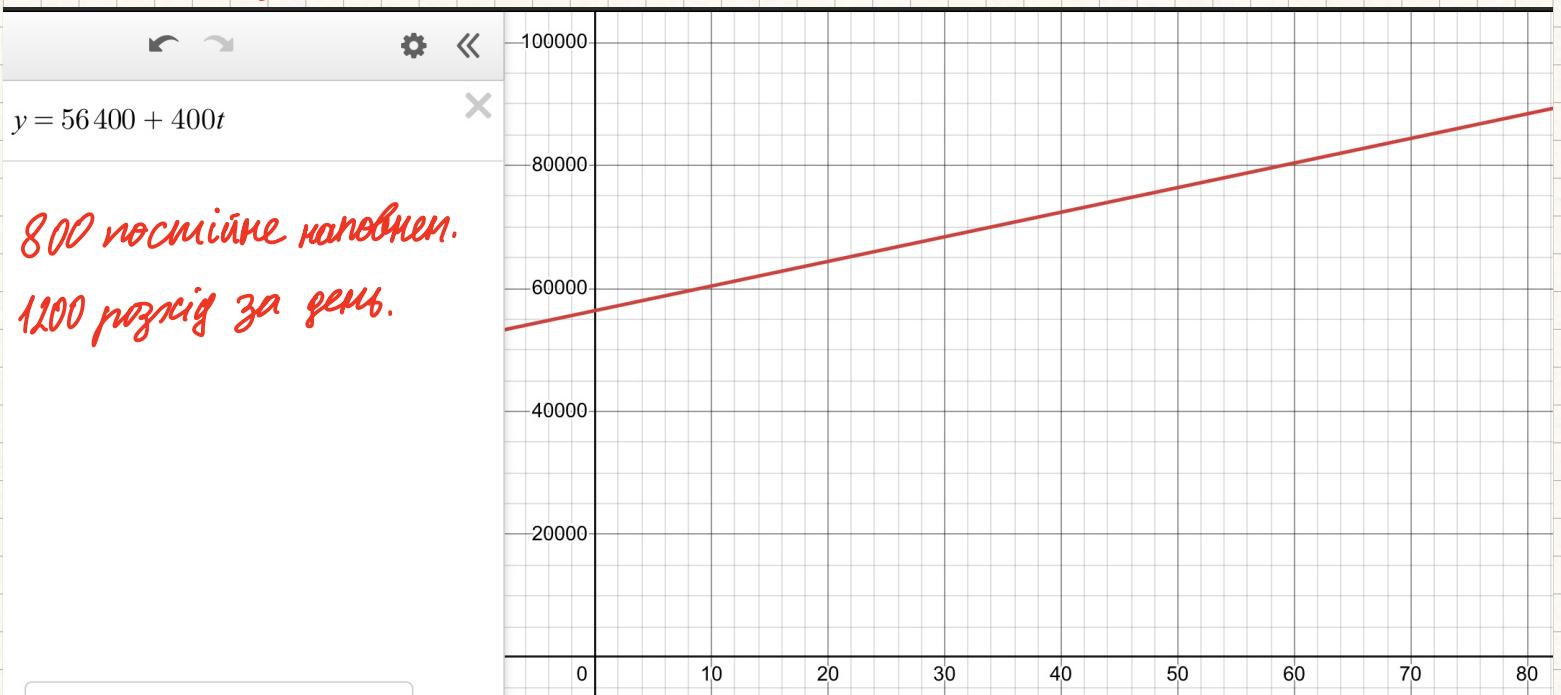
$$V_1(t) = V_0 + 800t \text{ де } t \in [0, 8] \text{ годин.}$$

2) Як х-ти буде функцією періоду

$$V_2(t) = 56400 - 400t \text{ Часовник і витрати води}$$

$$800 - 1200 = -400 \text{ л/год} \cdot 310 \text{ до } 6 \text{ че } 8 \text{ годин.}$$

$$\text{Об'єм з } 6:00\text{AM } 50000 + 800 \cdot 8 = 50000 + 6400 = 56400$$



800 постійне наповнення.

1200 відхід за годину.

* В цих випадках може змінитися функція. такої сист. лінійних рівнянь.
Їні вироблять нові процеси як заповнений та спусковий.

Маємо систему:

- $y = 50000 + 800t$
- $y = 56400 - 400t$

Оскільки обидва вирази рівні y , можемо прирівняти їх:

$$50000 + 800t = 56400 - 400t$$

Перенесемо всі доданки з t на одну сторону, а числа - на іншу:

$$800t + 400t = 56400 - 50000$$

$$1200t = 6400$$

$$t = 6400 \div 1200$$

$$t = 16/3 = 5,33$$

Тепер знайдемо y , підставивши t у будь-яке з рівнянь:

$$y = 50000 + 800 \times (16/3)$$

$$y = 50000 + 12800/3$$

$$y = 50000 + 4266,67$$

$$y = 54266,67$$

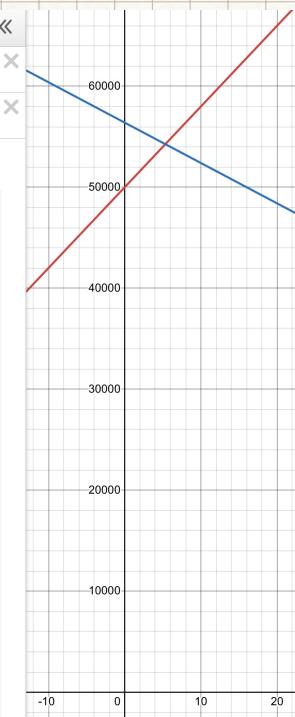
Або точно:

$$y = 50000 + 800 \times 16/3 = 50000 + 12800/3 = 162800/3 \approx 54266,67$$

Відповідь:

- $t = 16/3$ (або приблизно 5,33)

- $y = 162800/3$ (або приблизно 54266,67)



3 6:00 до 22:00 (16 годин) - весь день.

$V_2(t) = V_8 = 1200t$ V_8 = об'єм баками 0 6:00-рек.
де $t \in [0, 16]$ годин.

3) К-ти води 0 6:00 ранку

$V_8 = V_0 + 800 \cdot 8 = V_0 + 6400$ - якщо починаючи із штучні об'єму V_0 . Для безперервної роботи системи потрібно щоб баки не спускалися відно:

$V_8 \geq 1200 \cdot 16 = 19200$ л мінім об'єм 0 6:00, $V_8 = 19200$ л

4) час мінім. тільки рекор

мінім р. в. було 0 22:00 - після першого періоду (перестав -400)

$V_{\min} = V_8 - 1200 \cdot 16 = 19200 - 19200 = 0$ л.

* 6? Зменшивши часу на 1 годину буде 20,000

$$V_2(t) = 20000; 20000 = 56400 - 400t$$

$$400 \cdot t = 56400 - 20000; 400 \cdot t = 36400$$

$$t = \frac{36400}{400}; t = 91 \text{ wog. Tichie 6:00 reprez } 91 \text{ dezi}$$

maximum plus 20,000 L.

Python Functions:

Here are the Python functions for $V_1(t)$ and $V_2(t)$:

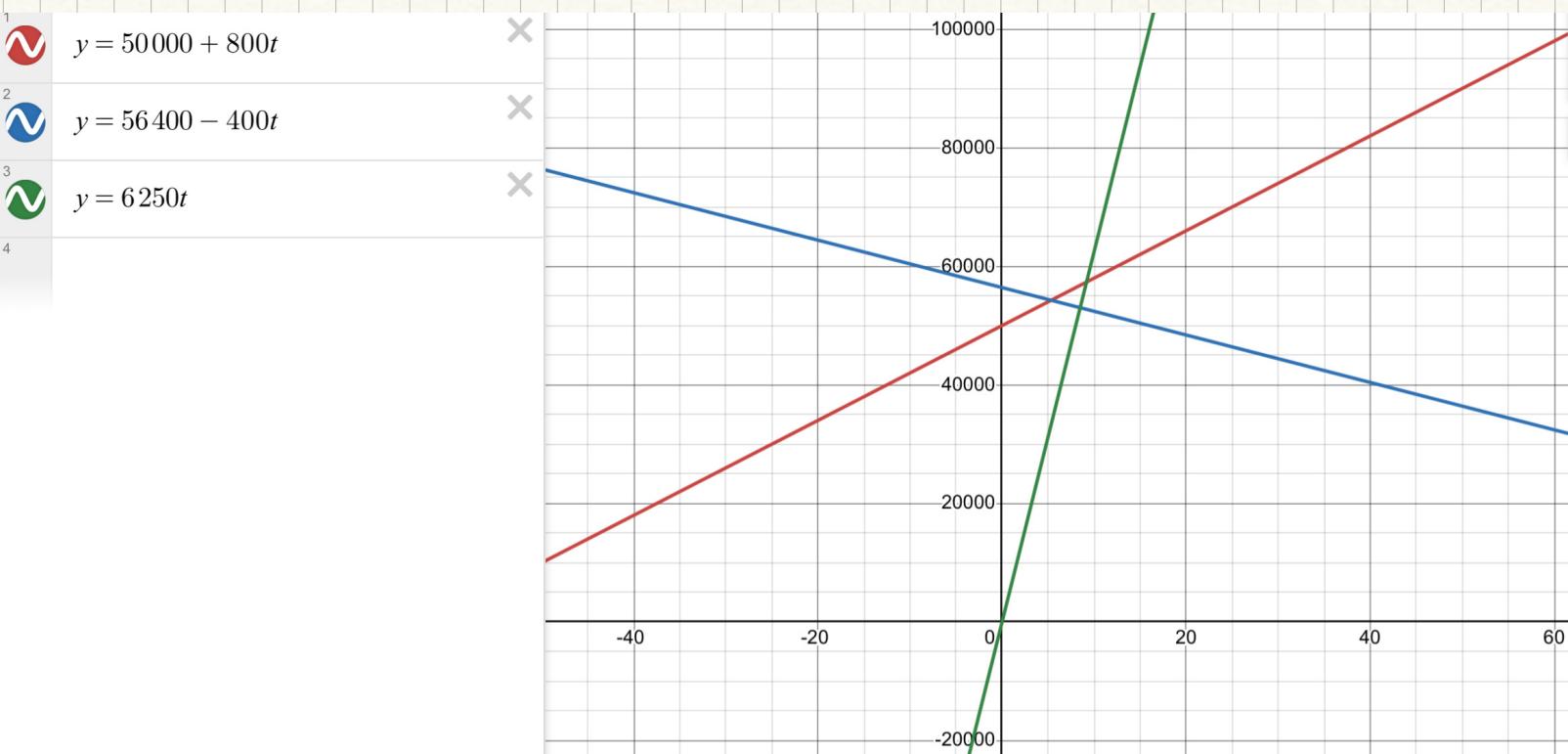
```
def V1(t):
    return 50000 + 800 * t

def V2(t):
    return 56400 - 400 * t
```

You can use these functions to plot the graphs and find the required time. If you need further assistance with plotting or any other calculations, feel free to ask!

Якщо після, яко від інші можуть збут?

5) Графік зміни балансу північного схід



6) Розрахунок необхідн. кільк. маловічний

Щоб рів. ваги підами не опускається нижче 20 000 кг. Деннє спожив = $1200 \cdot 16 = 19200$ кг

Необхідн. маловічн. ваги ≥ 19200 кг

Мінім. кільк. = $19200 : 8 = 2400$ кг/под

В: необх. кільк. мал. 2400 кг/под ; Збільшення: 1600 кг/под (+200%)

<https://codepen.io/telychko-mykola/pen/GgJPvPp>

11) Логістична компанія

Задача 3: Логістична компанія

Логістична компанія розвозить товари двома типами автомобілів.

Великі вантажівки споживають 35 л/100км і перевозять 8 тонн, малі — 12 л/100км і перевозять 2 тонни. Вартість палива 45 грн/л. Водіям великих вантажівок платять 25 грн/км, малих — 15 грн/км.

Завдання:

- Складіть функцію витрат на паливо $F_1(d)$ для великої вантажівки залежно від відстані d
- Складіть функцію витрат на паливо $F_2(d)$ для малої вантажівки
- Додайте витрати на оплату водіїв і отримайте загальні функції витрат $C_1(d)$ та $C_2(d)$
- Визначте собівартість перевезення 1 тонни вантажу на 100 км для кожного типу авто
- Знайдіть, на якій відстані витрати на велику і малу вантажівку (в розрахунку на тонну) стають однаковими
- Побудуйте графік порівняння собівартості перевезення 1 тонни залежно від відстані

Вел. вантажіс - 35 т / 100 км, перевозить 8 тонн

Мал. вантажіс - 12 т / 100 км, перевозить 2 тонни

Зарплату пасажира - 45 грн/т

Оплата багажу пасажирів - 25 грн/км; майданчики - 15 грн/км.

1) Чис. витрат на пасажирський транспорт $F_1(d)$

Час відстань d км $(35/100) \cdot d = 0,35d$ годин

Зарплату пасажира $0,35d \cdot 45$ грн/т

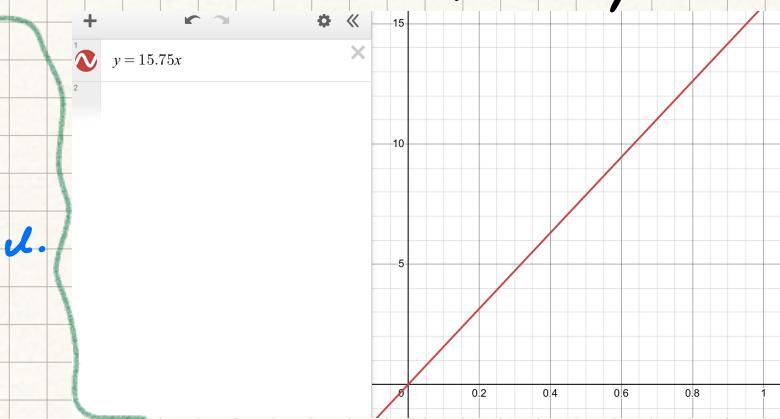
Чис. витрат на пасажирський транспорт $F_1(d) = 15,75d$ грн.

2) Чис. витрат на пасажирський транспорт мал. вантажісів $F_2(d)$

Час відстань d км $(12/100) \cdot d = 0,12d$ т.

Зарплату пасажира $0,12d \cdot 45$ грн/т

Чис. витрат на пасажирський транспорт $F_2(d) = 5,4d$ (у = 5,4x)



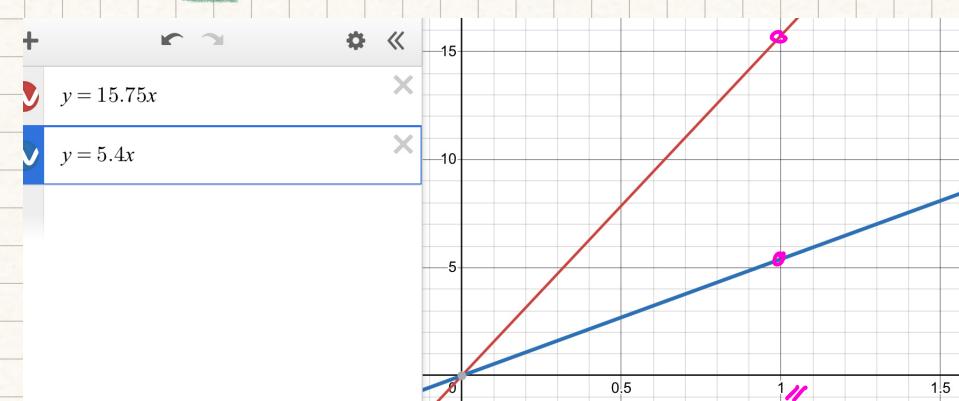
3) Чис. витрат на оплату багажу $C_1(d)$ та $C_2(d)$

$C_1(d)$ - вел. вантажісівська

пасажир = $15,75d$ грн

Оплата багажу = $25d$ грн

$C_1(d) = 15,75d + 25d = 40,75d$ грн.

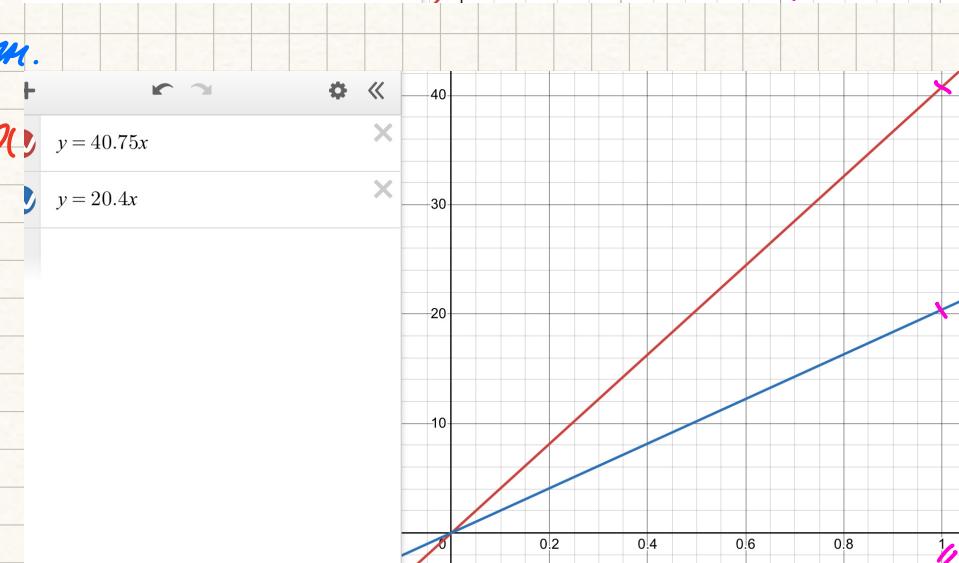


$C_2(d)$ - мал. вантажісівська

пасажир = $5,4d$ грн

Оплата багажу = $15d$ грн

$C_2(d) = 5,4d + 15d = 20,4d$ грн.



$C_1: y = 40,75x$

$C_2: y = 20,4x$

4) Собівартість перевезення 1 тони вантажу на 100 км.

Вант. вант. 8 тонн

Загальна витрати на 100 км: $C_1(100) = 40,45 \cdot 100 = 4045$ грн

Собівартість = $4045 : 8 = 505,375$ грн/тон на 100 км

Мал. вант. 2 т.

Заг. вант. на 100 км: $C_2(100) = 20,4 \cdot 100 = 2040$ грн

Собівартість = $2040 : 2 = 1020$ грн/тон на 100 км.

Чи треба цим будувати чарівки?

5) Відповідь на якій витрати становіть однаковими

Витрати на тонну вантажу:

Вел. вант: $S_1(d) = C_1(d) / 8 = 40,45d / 8 = 5,09345d$

Мал. вант: $S_2(d) = C_2(d) / 2 = 20,4d / 2 = 10,2d$

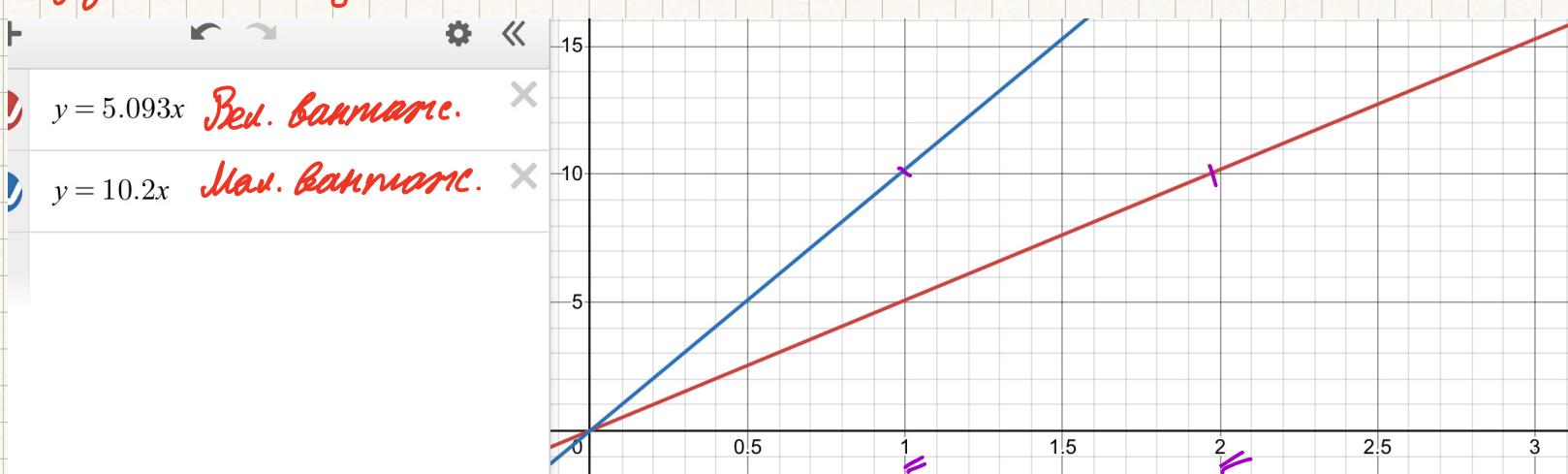
Рівняння для знижування тонні рівності:

$$5,09345d = 10,2d$$

* Це рівняння не має розв'язку для $d > 0$ осцилля

$$5,09345 < 10,2$$

* Витрати на перевезення 1 тон. великого вантажівкою завищилися за витрати малої вантажівки на будь-якій відстані.



6) Графік порівняльної собівартості

Чинні собівартості на тонну:

Вел. фам. $S_1(d) = 5,093 \cdot 15d$ ($y = 5,093 \cdot 15d$)

Мал. фам. $S_2(d) = 10,2d$ ($y = 10,2d$)

Висновки та пояснення

Економічна ефективність: Вел. фам. більш економічна для перевезення вантажів на ділянку відстань.

Собівартість великої вантажівки може бути менша ($5093,38$ проти 1020 грн/т. на 100 км)

Структура витрат:

Вел. фам. пашто - 38,4%, вагіт - 61,3%

Мал. фам. пашто - 26,5%, вагіт - 73,5%

Залежності:

> лінійна залежність: всі ознаки і виняток лінійно залежать від відстані (одн. по тірмаму)

> Ефективність: зменш вантажопотоківість діє зменшує економію на тонну вантажу перевезений однієї тонни.

> Візуальний метод дезбільшості: велика вантажівка завжди вигідніша для перевез однієї тонни.

Практичні рекомендації:

Використовувати великі вантажі. для максим економії.

Мал. фам. дешевіше міле при нестисливості замінити великий авт. низ обслуговувану доступу.

12) Енергозбереження

Задача 4: Енергозбереження

Сім'я вирішила встановити сонячні панелі. Вартість системи 180 000 грн, встановлення 25 000 грн. Система генерує 450 кВт·год/місяць. Тариф на електроенергію 4,50 грн/кВт·год, але щороку зростає на 8%. Без панелей сім'я споживає 520 кВт·год/місяць.

Завдання:

1. Складіть функцію тарифу $T(t)$ залежно від року t після встановлення
2. Обчисліть функцію щомісячної економії $S(t)$ з урахуванням зростання тарифу
3. Знайдіть функцію накопиченої економії $E(t)$ за t років
4. Складіть функцію чистого прибутку $P(t) = E(t) - \text{початкові витрати}$
5. Визначте, через скільки років система окупиться
6. Побудуйте графік накопиченої економії та чистого прибутку протягом 15 років

Варт. систем - 180 000 грн.

Зарпл. встанов - 25 000 грн.

Загальні початкові витрати: 205 000 грн.

Генерація енергії: 450 кВт · год / міс.

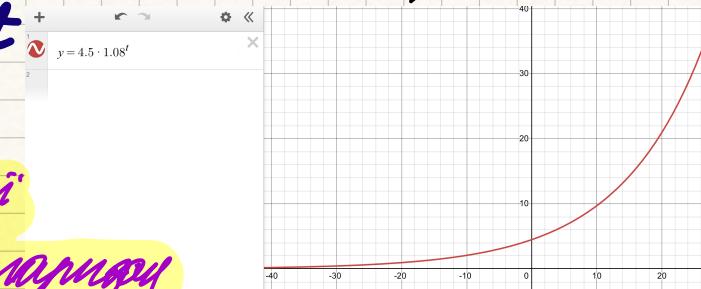
Тариф на енергію: 4,50 грн / кВт · год (зрост. на 8% щорічно)

Споживання без панелей: 520 кВт · год · міс.

1) Число тарифів $T(t)$ залежить від року t після встановлення.

* Після установки зростання майже 8% на рік, тому у експоненціальному фундаментальному $T(t) = 4,50 \cdot 1,08^t$

$$y = 4,50 \cdot 1,08^t$$



2) Число населення економії

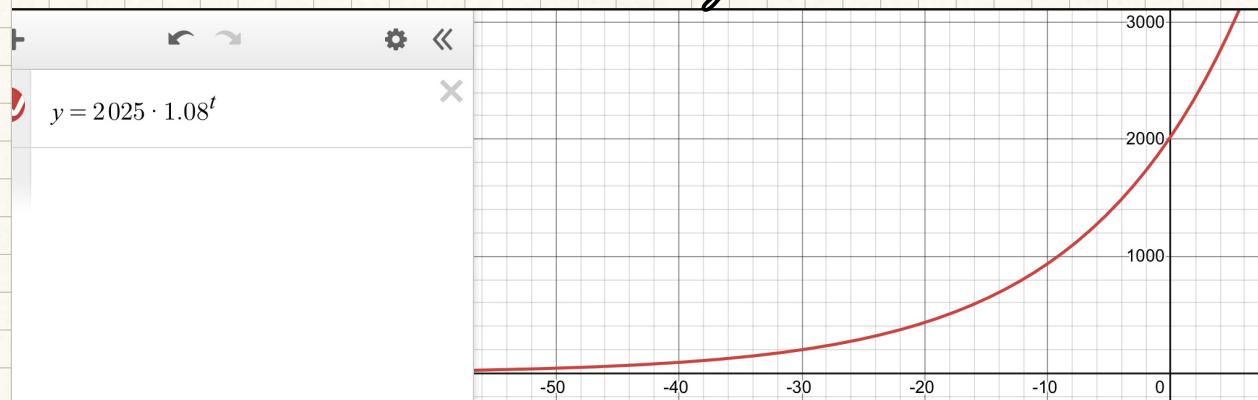
$S(t)$ з урахуванням зростання тарифів

Економія $= (\text{споживання} - \text{генерація}) \cdot \text{Поточні тарифи}$

Число населення син'я І споживає $520 \text{ кВт} \cdot \text{год}/\text{міс}$. але генерує $450 \text{ кВт} \cdot \text{год}/\text{міс}$. Отже зменшене споживання $520 - 450 = 40 \text{ кВт} \cdot \text{год}/\text{міс}$.

$$S(t) = 450 \cdot 4,50 \cdot 1,08^t = 2025 \cdot 1,08^t \text{ кВт} \cdot \text{год}/\text{міс}$$

$$y = 2025 \cdot 1,08^x$$



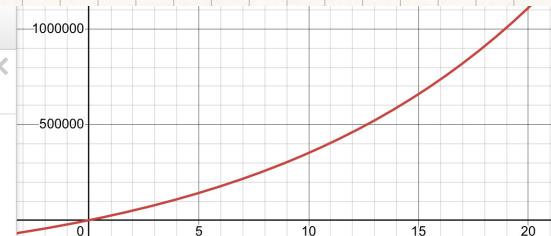
3) Число населення економії $E(t)$ за t років

Улановицька економія - це сума всіх населених економій за t років. Це сума геометричної прогресії

$$E(t) = 12 \cdot S(0) \cdot 1,08^t - 1 / 1,08 - 1$$

$$E(t) = 12 \cdot 2025 \cdot \frac{1,08^2 - 1}{0,08} = 303750 \cdot 1,08^t - 1$$

$$y = 303750 \cdot (1,08^x - 1)$$

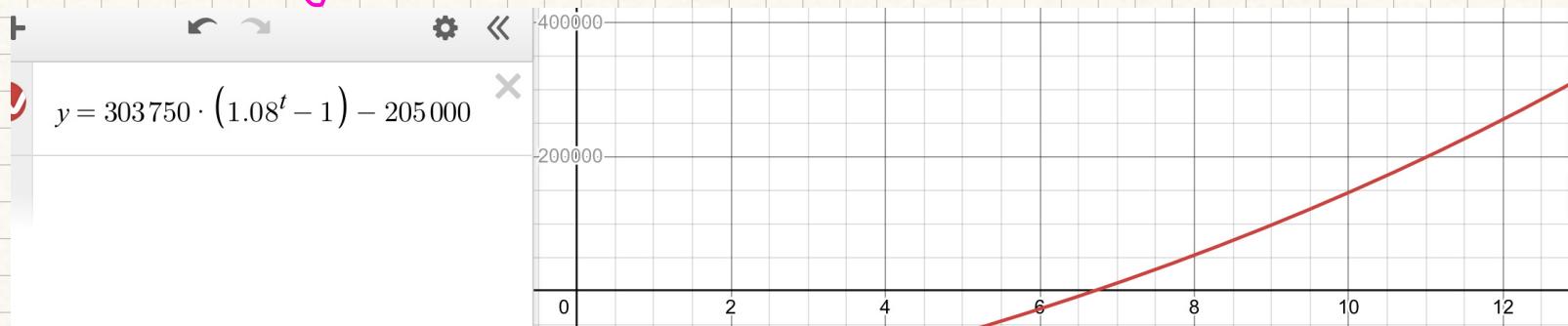


4) Число прибутку $P(t) = E(t) - \text{початкові витрати}$.

Числий прибуток = Числична економія - Початкова інвестиція

$$P(t) = 303750 \cdot (1,08^t - 1) - 205000$$

$$y = 303750 \cdot (1,08^x - 1) - 205000$$



5) Термін отриманості системи система отриманої

часу $P(t) = 0$ Розв'язання:

$$303750 \cdot (1,08^t - 1) - 205000 = 0$$

$$303750 \cdot (1,08^t - 1) = 205000$$

$$1,08^t - 1 = 205000 / 303750 = 0,6749$$

$$1,08^t - 1 = 1,6749$$

$$t = \ln(1,6749) / \ln(1,08) \approx 6,7 \text{ роки}$$

Ці операції представляють розв'язання рівняння для знаходження часу t , необхідного для досягнення певної фінансової мети. Ось пояснення кроків:

1. Початкове рівняння:

$$303750 \cdot [(1,08)^t - 1] - 205000 = 0$$

Це рівняння описує ситуацію, де сума 303750, збільшена на щорічні відсотки (8%), має досягти значення, при якому різниця між накопиченою сумою та початковими витратами 205000 дорівнює нулю.

2. Переносимо константу:

$$303750 \cdot [(1,08)^t - 1] = 205000$$

Ми переносимо 205000 в праву частину рівняння, щоб ізолювати вираз зі змінною t .

3. Ділимо на коефіцієнт:

$$(1,08)^t - 1 = \frac{205000}{303750} \approx 0,6749$$

Ділимо обидві частини на 303750, щоб спростити вираз.

4. Додаємо 1:

$$(1,08)^t \approx 1,6749$$

Додаємо 1 до обох частин, щоб ізолювати показникову функцію.

5. Логарифмуємо обидві частини:

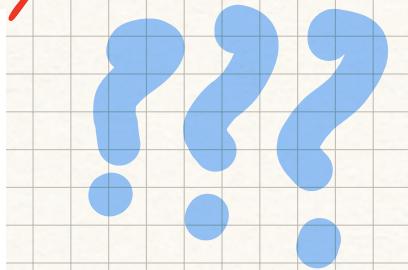
$$t = \frac{\ln(1,6749)}{\ln(1,08)} \approx 6,7 \text{ роки}$$

Для розв'язання рівняння відносно t використовується натуральний логарифм (\ln). Натуральний логарифм — це логарифм з основою e (де $e \approx 2,71828$). Він дозволяє "зняти" показник ступеня, перетворюючи рівняння у лінійне.

Формула: $a^b = c \Rightarrow b = \frac{\ln(c)}{\ln(a)}$

Підсумок:

Час t , необхідний для досягнення цілі, становить приблизно 6,7 року. Це означає, що при щорічному зростанні на 8% сума 303750 збільшиться на 205000 за 6,7 року.



complexity

6) Числові змоччанні за 15 років

Рік	Тариф $T(t)$	Щомісячна економія $S(t)$	Накопичена економія $E(t)$	Чистий прибуток $P(t)$
0	4,50	2 025	0	-205 000
1	4,86	2 187	24 300	-180 700
2	5,25	2 362	50 654	-154 346
3	5,67	2 551	79 306	-125 694
4	6,12	2 755	110 451	-94 549
5	6,61	2 975	144 287	-60 713
6	7,14	3 213	181 030	-23 970
7	7,71	3 470	220 912	15 912
8	8,33	3 748	265 185	60 185
9	8,99	4 048	314 120	109 120
10	9,71	4 372	368 049	163 049
11	10,49	4 722	427 333	222 333
12	11,33	5 100	492 379	287 379
13	12,24	5 508	563 649	358 649
14	13,22	5 949	641 661	436 661
15	14,27	6 425	726 994	521 994

* Від даних у звичайну нонлінійну збудовану функцію

Щоб побудувати графіки на Desmos на основі наданих даних, ми можемо визначити функції, які апроксимують значення для кожного стовпця: $T(t)$ (Тариф), $S(t)$ (Щомісячна економія), $E(t)$ (Накопичена економія) і $P(t)$ (Чистий прибуток). Оскільки дані виглядають як дискретні точки, ми можемо спробувати знайти приблизні лінійні або експоненціальні функції, які б відповідали трендам. Давайте проаналізуємо кожен стовпець і запропонуємо функції.

Аналіз даних

1. $T(t)$ (Тариф): Зростає від 4,50 до 14,27. Схоже на лінійне зростання.
2. $S(t)$ (Щомісячна економія): Зростає від 2,025 до 6,425. Також виглядає як лінійна функція.
3. $E(t)$ (Накопичена економія): Зростає від 0 до 726,994. Це може бути лінійна або квадратична функція (накопичення з часом).
4. $P(t)$ (Чистий прибуток): Починається з -205,000 і зростає до 521,994. Це може бути лінійна або експоненціальна функція з почтковим від'ємним значенням.

Пропоновані функції для Desmos

На основі трендів даних я пропоную наступні функції. Ви можете ввести їх у Desmos і регульювати коефіцієнти для точнішого підходу до даних.

1. $T(t)$ (Тариф):
 - Лінійна апроксимація: $T(t) = 0.67t + 4.5$
 - Пояснення: Зростання приблизно на 0,67 за одиницю t , початок у 4,5.
2. $S(t)$ (Щомісячна економія):
 - Лінійна апроксимація: $S(t) = 0.3t + 2.025$
 - Лінійна апроксимація: $S(t) = 0.3t + 2.025$
 - Пояснення: Зростання приблизно на 0,3 за одиницю t , початок у 2,025.
3. $E(t)$ (Накопичена економія):
 - Квадратична апроксимація (оскільки це накопичення): $E(t) = 32t^2 - 16t$
 - Пояснення: Квадратична функція краще відображає накопичення. Коефіцієнти можна підібрати для точності (наприклад, 32 і -16 — приблизні значення, які можна скоригувати).
4. $P(t)$ (Чистий прибуток):
 - Експоненціальна або лінійна апроксимація: $P(t) = 50000t - 205000$
 - Пояснення: Лінійна функція з початковим значенням -205,000 і ростом приблизно на 50,000 за одиницю t виглядає реалістично. Можна спробувати експоненціальну: $P(t) = -205000 \cdot (1 - 1.3^t)$ для кращого підходу до кривої.

Як ввести в Desmos

1. Відкрійте Desmos (desmos.com/calculator).

2. Уведіть кожну функцію в окремий рядок:

- $y_1 = 0.67x + 4.5$ (для $T(t)$)
- $y_2 = 0.3x + 2.025$ (для $S(t)$)
- $y_3 = 32x^2 - 16x$ (для $E(t)$)
- $y_4 = 50000x - 205000$ (для $P(t)$)

3. Замініть x на t , якщо хочете використовувати t як змінну.

4. Додайте точки даних (наприклад, (0, 4.50), (1, 4.86), ...) для

4. Додайте точки даних (наприклад, (0, 4.50), (1, 4.86), ...) для кожного стовпця, щоб порівнати з функціями. У Desmos натисніть "+" і виберіть "Table", потім введіть значення.

Поради

- Функції є приблизними. Для точнішого графіка виконайте регресійний аналіз (наприклад, у Excel або калькуляторі) або скорегуєте коефіцієнти вручну в Desmos, щоб вони краще відповідали вашим даним.
- Якщо хочете перевірити точність або знайти кращу модель, я можу запропонувати пошук додаткових методів або інструментів.

Спробуйте ці функції і півідомі, якщо потрібно щось скоригувати!

для моделювання та аналізу зв'язку між змінними. Його мета — знайти математичну функцію (наприклад, лінійну, квадратичну або експоненціальну), яка найкраще описує залежність між однією або кількою незалежними змінними (факторами, предикторами) і залежною змінною (результатом). У контексті ваших даних (наприклад, $T(t)$, $S(t)$, $E(t)$, $P(t)$) регресійний аналіз допоможе визначити, як змінюються ці величини залежно від часу t , і побудувати точніші графіки в Desmos.

Основні концепції регресійного аналізу

1. Залежні та незалежні змінні:

- Незалежна змінна (t у вашому випадку) — це фактор, який впливає на результат (час).
- Залежна змінна ($T(t)$, $S(t)$, тощо) — це величина, яку ми хочемо передбачити або пояснити.

2. Типи регресії:

- Лінійна регресія:** Припускає, що залежність між змінними є прямою лінією (наприклад, $y = ax + b$). Підходить для $T(t)$ або $S(t)$, якщо зростання виглядає стабільним.
- Квадратична регресія:** Використовується, коли залежність має параболічну форму (наприклад, $y = ax^2 + bx + c$). Може бути дочеричною для $E(t)$, оскільки це накопичення.
- Експоненціальна регресія:** Застосовується, коли зростання або спад є експоненціальним (наприклад, $y = a \cdot e^{bx}$ або $y = a \cdot (1 + b)^x$). Можливо, підіде для $P(t)$ через переход від негативних до позитивних значень.

3. Метод найменших квадратів:

- Це основний підхід до регресії. Алгоритм мінімізує суму квадратів різниць між фактичними значеннями даних і значеннями,

• Це основний підхід до регресії. Алгоритм мінімізує суму квадратів різниць між фактичними значеннями даних і значеннями, передбаченими моделлю. Наприклад, для лінійної регресії $y = ax + b$ підбираються коефіцієнти a (нахил) і b (перетин із віссю y), щоб найкраще відповідати даним.

4. Коєфіцієнт детермінації (R^2):

- Показує, наскільки добре модель пояснює варіацію даних. Значення від 0 до 1: R^2 близьке до 1 означає, що модель дуже точна.

Як провести регресійний аналіз для ваших даних

1. Збір даних:

- У вас уже є таблиця з параметрами $(t, T(t))$, $(t, S(t))$, $(t, E(t))$, $(t, P(t))$ для t від 0 до 15.

2. Вибір типу моделі:

- Спробуйте лінійну регресію для $T(t)$ і $S(t)$, квадратичну для $E(t)$ і лінійну або експоненціальну для $P(t)$.

3. Обчислення коефіцієнтів:

- Лінійна регресія ($y = ax + b$):

$$\bullet a = \frac{n \sum (t_i y_i) - \sum t_i \sum y_i}{n \sum t_i^2 - (\sum t_i)^2}$$

$$\bullet b = \frac{\sum y_i - a \sum t_i}{n}$$

- Тут n — кількість точок, t_i і y_i — значення t і залежності змінної.

- Для точності краще скористатися програмним забезпеченням (Excel, Python, або онлайн-калькулятором).

4. Приклад для $T(t)$:

4. Приклад для $T(t)$:

- Дані: (0, 4.50), (1, 4.86), (2, 5.25), ..., (15, 14.27).

- Лінійна регресія в Excel або Desmos дасть приблизно $T(t) = 0.67t + 4.5$ (як я пропонував раніше), що узгоджується з трендом.

5. Перевірка та візуалізація:

- У Desmos введіть дані як таблицю і застосуйте регресію (наприклад, натисніть на таблицю і виберіть "Add Regression"). Desmos автоматично підбере найкращу криву.

Практичний приклад у Desmos

- Введіть таблицю з вашими даними (стовпець t і стовпець $T(t)$, $S(t)$, тощо).
- Натисніть на таблицю, виберіть "Regression" і виберіть тип (Linear, Quadratic, Exponential).
- Desmos покаже рівняння (наприклад, $y = 0.67x + 4.5$ для $T(t)$) і R^2 .

Переваги та обмеження

- Переваги:** Дозволяє передбачати значення, знаходити тенденції, спрощувати дані.
- Обмеження:** Модель може бути неточною, якщо дані не відповідають обраній формі (наприклад, є випадкові відхилення). Потрібно перевіряти R^2 і залишки.

Як це стосується ваших даних

Для ваших даних регресійний аналіз допоможе:

- Підтвердити, чи лінійна функція $T(t) = 0.67t + 4.5$ точна.
- Знайти точнішу квадратичну функцію для $E(t)$.
- Знайти точнішу квадратичну функцію для $E(t)$.
- Моделювати переход $P(t)$ від негативних до позитивних значень.

Висновки та погляди на надійність

Економічна ефективність:

Початкові інвестиції 205 000 грн. складають за 6,7 року.
Дохідну прибутковість відносно 15 років чистий
прибуток складає 521 994 грн.

Рентабельність: $R.O.i \text{ за } 15 \text{ років} = 521994 / 205000 = 254,6\%$

Залежності:

- 1) Експанзія зростання маржі на 8% призведе до подвоєння маржі в роках.
- 2) Зростання економік: Чим довше працює система, тим більше зможе зростати економік через зростання маржі.
- 3) Підвищена операція: Зростання маржі викорчує термін змінності порівняно з фіксованими маржами.

Джерелні ускладнення:

Система економічно вигідна при нормальних умовах.
Зростання маржі на 8% призведе до зростання чистого прибутку.

Чим раніше встановлені систему, тим більша загальна економік.

Ризики

Зміна маржі. позитивні може виникнути на розрах.

Інф. небезпека можуть зменшити генерацію.

Регулювання пачеїв з часом (зазвичай 0,5-0,8% на рік)

Основні дру. $T(t) = 4,50 \cdot 1,08^t$ - маржа

Чисті економік $S(t) = 2025 \cdot 1,08^t$

Чистотична економік $E(t) = 303750 \cdot (1,08^t - 1)$

Чистий прибуток $P(t) = 303750 \cdot (1,08^t - 1) - 205000$