# Раціональні вирази

Раціональні вирази — це математичні вирази, які складаються з многочленів у чисельнику та знаменнику. Вони мають вигляд дробу, де і чисельник, і знаменник є многочленами. Раціональні вирази використовуються для представлення відношень між двома многочленами.

**Види раціональних виразів**

1. **Прості раціональні вирази**: Це вирази, в яких чисельник і знаменник є одночленами або простими многочленами. Наприклад:

$$\frac{x}{2}, \quad \frac{x+1}{x-1}$$

3. **Складні раціональні вирази**: Це вирази, в яких чисельник і/або знаменник є складнішими многочленами. Наприклад:

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}, \quad \frac{x^3-8}{x^2+4x+4}$$

4. **Раціональні функції**: Це функції, які можна представити у вигляді раціонального виразу. Наприклад:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$$

**Застосування раціональних виразів**

1. **Алгебра та аналіз**: Раціональні вирази використовуються для розв'язання рівнянь, спрощення виразів, інтегрування та диференціювання.
2. **Фізика**: Вони застосовуються для моделювання фізичних явищ, таких як рух тіл, електричні кола тощо.
3. **Економіка**: Раціональні вирази використовуються для моделювання економічних процесів, таких як попит і пропозиція, оптимізація ресурсів.
4. **Інженерія**: Вони застосовуються для проектування та аналізу систем, таких як механічні конструкції, електричні мережі тощо.
5. **Комп'ютерні науки**: Раціональні вирази використовуються в алгоритмах обчислень, комп'ютерній графіці та обробці даних.

Раціональні вирази є важливим інструментом у багатьох галузях науки та техніки, допомагаючи аналізувати та розв'язувати різноманітні задачі.

RADIO

CS

Чи можна вважати раціональні вирази складними дробами

Раціональні вирази **можна** представити у вигляді **складних дробів**, але **не всі раціональні вирази є складними дробами**.

**Визначення:**

- **Раціональний вираз** — це вираз у вигляді дробу, чисельник і знаменник якого є многочленами.

Наприклад:

$$\frac{x^2+1}{x-3}$$

- **Складний дріб** — це дріб, у якому **чисельник або знаменник (або обидва)** є також дробом.

Наприклад:

$$\frac{\frac{1}{x}+2}{\frac{3}{x^2}-1}$$

**Висновок:**

Раціональний вираз **може бути** складним дробом, якщо має у своєму складі інші дроби. Але **не кожен раціональний вираз — складний дріб**.

**Наприклад:**

- $\frac{x+1}{x-2}$ **— раціональний вираз**, але **не складний дріб**.
- $\frac{\frac{1}{x}+2}{3x}$ **— раціональний вираз і складний дріб**.

Отже, **складні дроби — це підвид раціональних виразів**, але не тотожні їм.

1

# § 1. Раціональні вирази

## Дробові раціональні вирази

| Розрізняють цілі і дробові раціональні вирази. В цілому виразі немає ділення на змінну. В дробовому виразі є ділення на вираз, в який входить змінна. | |
|---|---|
| **Правило** | **Приклади** |
| Значення змінних, при яких можливі всі математичні дії, записані в раціональному виразі, називаються **допустимими значеннями змінних**. | $\frac{4}{x-8}$ — у цього раціонального дробу при $x=8$ в знаменнику отримуємо $x-8=8-8=0$, тому допустимими значеннями даного дробу є всі числа, крім $x=8$. |
| Щоб знайти допустимі значення раціонального дробу, треба прирівняти знаменник до нуля, знайти розв'язки отриманого рівняння, і з усіх чисел виключити розв'язки отриманого рівняння. | Знайти допустимі значення виразу: $\frac{x}{3x-x^2}$;<br>Прирівняємо знаменник до нуля і розв'яжемо це рівняння: $3x-x^2=0$, винесемо $x$ за дужки $x(3-x)=0$, добуток дорівнює нулю, якщо хоча б один із множників дорівнює нулю, тобто $x=0$, або $3-x=0$.<br>Допустимими значеннями змінної є всі числа, крім $x=0$ або $x=3$.<br>Відповідь: $x$ — будь-яке число, крім $0$ та $3$. |

## Дії з раціональними дробами

| Правило | Приклади |
|---|---|
| **Скорочення дробів** | |
| **Скоротити дріб** — це означає поділити чисельник і знаменник дробу на спільний множник. Ця дія обумовлена основною властивістю дробу.<br>Для того, щоб скоротити дріб, треба:<br>а) розкласти чисельник і знаменник дробу на множники;<br>б) виділити спільний множник в чисельнику і знаменнику дробу;<br>в) розділити чисельник і знаменник дробу на спільний множник. | Скоротити дріб: $\frac{3x-18x^2}{15x^2-90x^3}$,<br>а) розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники, для цього винесемо за дужки спільний множник: $\frac{3x(1-6x)}{15x^2(1-6x)}$;<br>б) виберемо спільний множник в чисельнику і знаменнику – це $3x(1-6x)$;<br>в) скоротимо дріб на $3x(1-6x)$.<br>Відповідь: $\frac{1}{5x}$. |
| **Додавання і віднімання дробів** | |
| Сума (різниця) двох дробів з однаковими знаменниками дорівнює дробу з тим самим знаменником і чисельником, який дорівнює сумі (різниці) чисельників вихідних дробів. | $\frac{3a-4}{a-1}+\frac{7-4a}{a-1}=\frac{3a-4+7-4a}{a-1}=\frac{3-a}{a-1}$;<br>$\frac{3a-4}{a-1}-\frac{7-4a}{a-1}=\frac{3a-4-(7-4a)}{a-1}=$<br>$=\frac{3a-4-7+4a}{a-1}=\frac{7a-11}{a-1}$. |

| | |
|---|---|
| При додаванні (відніманні) двох раціональних дробів з різними знаменниками треба звести дроби до спільного знаменника та виконати додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками. | $\frac{5}{x-1}+\frac{4}{x+1}=\frac{5(x+1)}{x-1}+\frac{4(x-1)}{x+1}=\frac{5x+5+4x-4}{(x-1)(x+1)}=\frac{9x+1}{x^2-1}$; $\frac{1}{c}-\frac{3a}{c^2+3ac}=\frac{1(c+3a)}{c}-\frac{3a}{c(c+3a)}=\frac{c+3a-3a}{c(c+3a)}=\frac{1}{c+3a}$. |
| **Множення і ділення дробів** | |
| Добуток двох раціональних дробів дорівнює дробу, чисельник якого дорівнює добутку чисельників, а знаменник дорівнює добутку знаменників дробів, що помножуються. | $\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{4x+1}{x-1}=\frac{(x-1)(4x+4)}{(x+1)(x-1)}=\frac{(x-1)4(x+1)}{(x+1)(x-1)}=4.$ |
| Частка від ділення двох раціональних дробів дорівнює добутку дробу, діленого на дріб, обернений дільнику. | $\frac{x}{a^2-4}:\frac{3x^2}{5a-10}=\frac{x(5a-10)}{(a^2-4)3x^2}=$ $=\frac{5x(a-2)}{(a-2)(a+2)3x^2}=\frac{5}{3x(a+2)}.$ |
| Зручніше перед множенням або діленням раціональних дробів розкласти, якщо це можливо, їх чисельники і знаменники на множники. | |
| **Піднесення раціональних дробів до степеня** | |
| Степінь раціонального дробу дорівнює дробу, у якого чисельник є степенем чисельника, а знаменник – степенем знаменника. | $\left(\frac{x^2-9}{xy+3y}\right)^3=\left(\frac{(x-3)(x+3)}{y(x+3)}\right)^3=\left(\frac{x-3}{y}\right)^3=\frac{(x-3)^3}{y^3}$; $\left(\frac{5ac^2}{3x^3}\right)^4=\frac{(5ac^2)^4}{(3x^3)^4}=\frac{5^4a^4c^8}{3^4x^{12}}=\frac{625a^4c^8}{81x^{12}}.$ |

## Степінь з цілим показником

Множина цілих чисел $(Z)$ – це множина, що складається з натуральних чисел, числа нуль і чисел протилежних натуральним.

Тому поняття степеня $a^n$, де $n-$ натуральне число, можна розширити, якщо розглянути випадки $n=0$ і $n$ — ціле від'ємне число.

| Означення | Приклади |
|---|---|
| Якщо $a\neq 0$ і $n-$ ціле від'ємне число, то $a^n=\frac{1}{a^{-n}}$ | $5^{-3}=\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125}$; $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^3}=5^3=125.$ |
| $a^0=1.$ | $(1{,}25)^0=1$; $(-17)^0=1.$ |

**Корисно запам'ятати**

| | |
|---|---|
| $0^0$ – не визначено. | $0^{-3}=\frac{1}{0^3}-$ не визначено |
| $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$, $(a\neq 0;\ b\neq 0)$ | $\left(\frac{2}{7}\right)^{-3}=\left(\frac{7}{2}\right)^3$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=\left(\frac{2}{1}\right)^3=2^3=8$ |

## Властивості степеня з цілим показником

| | | |
|---|---|---|
| $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ | $5^5 \cdot 5^{-7} = 5^{5-7} = 5^{-2}$ | $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ |
| $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, (a \neq 0)$ | $3^{-7} : 3^5 = 3^{-7-5} = 3^{-12}$ | $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n} (a \neq 0)$ |
| $(a^m)^n = a^{mn}$ | $(3^{-2})^3 = 3^{-6};\ (3^2)^{-3} = 3^{-6}$ | $a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m;$ |
| $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ | $(2 \cdot 3)^{-3} = 2^{-3} \cdot 3^{-3}$ | $a^n \cdot b^n = (ab)^n$ |
| $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, (b \neq 0)$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$ | $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n (b \neq 0)$ |

## УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

| | |
|---|---|
| 1. Виконати дії. **Рекомендація**. Подібні завдання краще робити за діями — зменшується можливість помилки! | $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{x+y}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\right) : \frac{(x+y)^2}{x^2y^2}.$ |
| Розв'язання. | 1) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy},$ |
| | 2) $\frac{2}{x+y} \cdot \frac{x+y}{xy} = \frac{2(x+y)}{(x+y)xy} = \frac{2}{xy},$ |
| | 3) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} = \frac{y^2 + x^2 + 2xy}{x^2y^2} = \frac{(x+y)^2}{x^2y^2},$ |
| | 4) $\frac{(x+y)^2}{x^2y^2} : \frac{(x+y)^2}{x^2y^2} = 1.$ |
| Відповідь: 1. | |
| 2. Довести тотожність. | $\frac{a - \frac{x^2}{a}}{x - \frac{a^2}{x}} = -\frac{x}{a}.$ |
| Доведення. Спростимо ліву частину рівняння: | $\frac{a - \frac{x^2}{a}}{x - \frac{a^2}{x}} = \left(a - \frac{x^2}{a}\right) : \left(x - \frac{a^2}{x}\right)$ |
| чисельник: | 1) $a - \frac{x^2}{a} = \frac{a^2 - x^2}{a},$ |
| знаменник: | 2) $x - \frac{a^2}{x} = \frac{x^2 - a^2}{x},$ |
| | 3) $\frac{a^2 - x^2}{a} : \frac{x^2 - a^2}{x} = \frac{a^2 - x^2}{a} \cdot \frac{x}{x^2 - a^2} = \frac{(a^2 - x^2)x}{-a(a^2 - x^2)} = -\frac{x}{a},$ |

| | |
|---|---|
| тотожність доведена: | 4) $-\frac{x}{a}=-\frac{x}{a}$. |
| 3. Скоротити дріб. | $\frac{ax+ay-bx-by}{ax-ay-bx+bx}$. |
| Розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники способом групування: | $\frac{ax+ay-bx-by}{ax-ay-bx+by}=\frac{a(x+y)-b(x+y)}{a(x-y)-b(x-y)}=\frac{(x+y)(a-b)}{(x-y)(a-b)}=\frac{x+y}{x-y}$. |
| Відповідь: $\frac{x+y}{x-y}$. | |
| 4. Скоротити дріб. | $\frac{a^2b+ab^2}{a^3+b^3+3ab(a+b)}$. |
| Для того, щоб розкласти на множники, в чисельнику винесемо спільний множник за дужки, а в знаменнику застосуємо формулу суми кубів і винесемо спільний множник за дужки, тоді отримаємо: | $\frac{a^2b+ab^2}{a^3+b^3+3ab(a+b)}=\frac{ab(a+b)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)+3ab(a+b)}=$ $=\frac{ab(a+b)}{(a+b)(a^2-ab+b^2+3ab)}=\frac{ab}{a^2+2ab+b^2}=\frac{ab}{(a+b)^2}$. |
| Відповідь: $\frac{ab}{(a+b)^2}$. | |
| 5. Скоротити дріб. | $\frac{a^2+3a+2}{a^2+6a+5}$. |
| Для того, щоб розкласти чисельник і знаменник дробу на множники, застосуємо спосіб групування. | Для цього подамо $a^2+3a+2$ як $a^2+a+2a+2$, аналогічно подамо знаменник: $a^2+6a+5=a^2+a+5a+5$, отримаємо: $\frac{a^2+3a+2}{a^2+6a+5}=\frac{a^2+a+2a+2}{a^2+a+5a+5}=\frac{a(a+1)+2(a+1)}{a(a+1)+5(a+1)}=\frac{(a+1)(a+2)}{(a+1)(a+5)}=\frac{a+2}{a+5}$. |
| Відповідь: $\frac{a+2}{a+5}$. | |
| 6. Спростити алгебраїчний вираз. | $\frac{a^6+64}{a^4-4a^2+16}-\frac{a^4-16}{a^2+4}$. |
| Застосуємо формулу різниці кубів і різниці квадратів в чисельниках дробів: | $\frac{a^6+64}{a^4-4a^2+16}-\frac{a^4-16}{a^2+4}=\frac{(a^2)^3+4^3}{a^4-4a^2+16}-\frac{(a^2)^2-4^2}{a^2+4}=$ $=\frac{(a^2+4)(a^4-4a^2+16)}{a^4-4a^2+16}-\frac{(a^2-4)(a^2+4)}{a^2+4}=$ $=a^2+4-(a^2-4)=a^2+4-a^2+4=8$. |
| Відповідь: 8. | |

| | |
|---|---|
| 7. Спростити вираз. | $\frac{x^3+y^3}{x+y}:(x^2-y^2)+\frac{2y}{x+y}-\frac{xy}{x^2-y^2}$. |
| Іноколи для перетворення алгебраїчних виразів застосовують спосіб послідовних перетворень або одночасно декількох перетворень. Кажуть: «Спростимо "ланцюжком"». При користуванні цим методом, треба бути дуже уважним. | $\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x+y}\cdot\frac{1}{(x-y)(x+y)}+$ $+\frac{2y(x-y)-xy}{(x+y)(x-y)}=\frac{x^2-xy+y^2}{(x-y)(x+y)}+\frac{2xy-2y^2-xy}{(x-y)(x+y)}=$ $=\frac{x^2-xy+y^2+xy-2y^2}{(x-y)(x+y)}=\frac{x^2-y^2}{x^2-y^2}=1.$ |
| Відповідь: 1. | |
| 8. Виконати дії | $\frac{3^{-2}a^{-1}b}{27^{-1}x}$; |
| Використаємо означення степеня з від'ємним показником: | $\frac{3^{-2}a^{-1}b}{27^{-1}x}=\frac{27b}{3^2ax}=\frac{3^3b}{3^2ax}=\frac{3b}{ax}$. |
| Відповідь: $\frac{3b}{ax}$. | |
| 9. Спростити вираз. | $\left(\frac{2}{3}a^{-2}(b^3)^{-3}\right)^4$. |
| | $\left(\frac{2}{3}a^{-2}(b^3)^{-3}\right)^4=\frac{2^4}{3^4}a^{-8}b^{-36}=\frac{2^4}{3^4a^8b^{36}}$. |
| Відповідь: $\frac{2^4}{3^4a^8b^{36}}$. | |
| 10. Подати вираз у вигляді дробу. | $(5a^{-1}+b^{-2})\cdot(5a^{-1}-b^{-2})$. |
| Використаємо формулу різниці квадратів і означення степеня з від'ємним показником: | $(5a^{-1}+b^{-2})\cdot(5a^{-1}-b^{-2})=$ $=(5a^{-1})^2-(b^{-2})^2=\left(\frac{5}{a}\right)^2-\left(\frac{1}{b^2}\right)^2=$ $=\frac{25}{a^2}-\frac{1}{b^4}=\frac{25b^4-a^2}{a^2b^4}$. |
| Відповідь: $\frac{25b^4-a^2}{a^2b^4}$. | |

# Арифметичні дії над раціон. виразами

## Додавання

З однаков знаменниками

$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3+2}{7} = \frac{5}{7}$; $\frac{8}{11} - \frac{3}{11} = \frac{8-3}{11} = \frac{5}{11}$

З різними знаменниками

$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$; $\frac{5}{6} - \frac{1}{8} = \frac{20}{24} - \frac{3}{24} = \frac{17}{24}$

## Множення

$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$; $\frac{3}{7} \cdot \frac{14}{9} = \frac{3 \cdot 14}{7 \cdot 9} = \frac{42}{63} = \frac{2}{3}$

## Ділення

$\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$; $\frac{7}{12} : \frac{14}{3} = \frac{7}{12} \cdot \frac{3}{14} = \frac{21}{168} = \frac{1}{8}$

## Скорочення

$\frac{12}{18} = \frac{12\,6}{18\,6} = \frac{2}{3}$; $\frac{24}{36} = \frac{24\,12}{36\,12} = \frac{2}{3}$

## Перетворення мішаних чисел

$2\frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{7}{3}$; $\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$ (оскільки $11 : 4 = 2$ остача 3)

## Порівняння

$\frac{3}{4}$ і $\frac{5}{6}$ приводимо до спільного знаменника $\frac{9}{12}$ і $\frac{10}{12}$ тому

$\frac{3}{4} < \frac{5}{6}$