

§ 6. Розв'язування лінійних рівнянь з двома змінними

Означення	Приклади
<p>Лінійним рівнянням з двома змінними x і y називається рівняння виду: $ax+by+c=0$, де x і y — змінні, a, b, c — деякі числа.</p> <p>Розв'язком рівняння з двома змінними називається будь-яка пара чисел $(x; y)$, яка перетворює рівняння на тотожність.</p> <p>Розв'язати рівняння з двома змінними — означає знайти всі пари чисел $(x; y)$, які є його розв'язком.</p>	<p>$3x+4y+5=0$ — лінійне рівняння.</p> <p>$x+2y=5$ — лінійне рівняння.</p> <p>Пара $(1; 2)$ — розв'язок рівняння, тобто при $x=1; y=2$, отримуємо $1+2\cdot 2=5$; $5=5$ — правильна рівність, пара $(2; 1)$ — не є розв'язком, оскільки при $x=2; y=1$ отримуємо $2+2\cdot 1=5$.</p> <p>$4=5$ не є тотожністю, тобто пара $(2; 1)$ не є розв'язком рівняння $x+2y=5$.</p>
<p>Множина точок, координати яких задовольняють рівняння $ax+by+c=0$,</p> <p>називається його графіком.</p> <p>Графіком рівняння $ax+by+c=0$, де a, b, c — деякі числа, є пряма.</p>	<p>1) Якщо коефіцієнт b при y не дорівнює нуллю, то y можна виразити через x:</p> $ax+by+c=0, by=-ax-c,$ $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ — це лінійне рівняння. <p>2) Якщо $b=0$, то $ax+by+c=0$ набуває вигляду:</p> $ax+0y+c=0, ax+c=0, \text{ при } a \neq 0, x=-\frac{c}{a}$ і графіком рівняння буде пряма, паралельна осі ординат, що перетинає вісь абсцис у точці $x=-\frac{c}{a}$. <p>3) При $a=0$ маємо:</p> $0x+by+c=0, by+c=0, y=-\frac{c}{b}$ — це пряма, паралельна осі абсцис, що перетинає вісь ординат в точці $y=-\frac{c}{b}$. <p>4) Якщо $a=0$ і $b=0$, то рівняння набуває вигляду $0x+0y+c=0$, тоді при $c=0$ рівність правильна при всіх x і y, при $c \neq 0$ — неправильна при будь-яких x та y, тобто при $a=b=c=0$ в цьому випадку графіком лінійного рівняння $ax+by+c=0$ є вся координатна площа.</p>

одне підбираєм друге шукам.

x і y має бути в різних зображеннях.

* Лінійне рівняння з двома змінними $ax+by=c$
Цієї рівняння мають нескінченно багато розв'язків які утворюють пряму на координатній площині

Свойства лінійних рівнянь

- * Кернича запису: $ax+by=c$ де a, b, c - цілі числа і $a \neq 0$ - не додатковим чином однаково
- * Існує лише розв'язків на фізичну лінію рівняння з однією змін.
- * Геометричний зміст: Всі розв'язки рівняння утворюють пряму на координатній площині

Методи розв'язування

1. Підстановчий метод

Вибираємо значення для однієї змінної і обчислюємо відповідні значення для іншої

Приклад для рівняння $2x+3y=6$

- Якщо $x=0$, то $3y=6$, звідку $y=2$
- Якщо $x=3$, то $3y=0$, звідку $y=0$

Розв'язки: $(0, 2)$ $(3, 0)$ і будь-які інші точки на прямі

Загальний підхід до розв'язування лінійних рівнянь з двома невідомими

Для розв'язування лінійного рівняння виду $ax + by = c$, де є дві невідомі (x та y), потрібно:

1. Виразити одну змінну через іншу, наприклад:
 - Якщо $b \neq 0$, виразимо y через x : $y = (c - ax) / b$
 - Якщо $a \neq 0$, виразимо x через y : $x = (c - by) / a$
2. Записати розв'язок у вигляді формули, що зв'язує x та y
3. Розв'язком буде множина точок (x, y) , які задовольняють цю формулу. Геометрично це пряма на координатній площині.

Особливі випадки:

- Якщо $a = 0$ і $b = 0$, а $c \neq 0$, то рівняння не має розв'язків
- Якщо $a = 0$ і $b = 0$, а $c = 0$, то розв'язком буде вся координатна площа

Висновок

Лінійне рівняння з двома невідомими має безліч розв'язків, які утворюють пряму на координатній площині. Для однозначного визначення конкретного розв'язку потрібна ще одна умова (ще одне рівняння), що приводить до системи лінійних рівнянь.

Графічно розв'язок лінійного рівняння з двома невідомими можна представити як множину точок, що утворюють пряму лінію на координатній площині.

2. Метод через видалення змінної

Видаласямо одну змінну через іншу

Деліть рівняння $2x + 3y = 6$



Видалимо y через x : $3y = 6 - 2x$, звідки $y = (6 - 2x) / 3$

І тепер потрібно знайти y для будь-якого значення x

$y = (6 - 2x) / 3 = 2 - (2/3)x$. Знайдемо декілька точок, що належать цій прямій

Якщо $x = 0$, то $y = 2$

Якщо $x = 3$, то $y = 0$

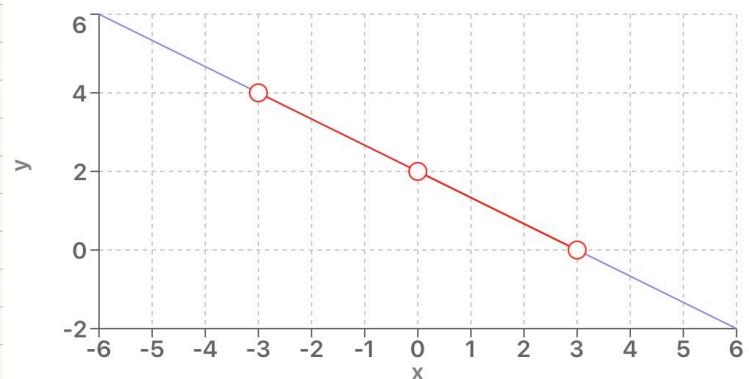
Якщо $x = -3$, то $y = 4$

Пояснення рівняння: $2x + 3y = 6$

Виражено відносно y : $y = (6 - 2x) / 3$

- Лінійне рівняння $2x + 3y = 6$ має нескінченно багато розв'язків.
- Кожна точка на прямій є розв'язком рівняння.
- Наприклад, точки $(0, 2)$ і $(3, 0)$ є розв'язками цього рівняння.
- Щоб знайти y для будь-якого x , використовуйте формулу: $y = (6 - 2x) / 3$

Графік рівняння $2x + 3y = 6$



(0, 2): $x = 0, y = 2$

(3, 0): $x = 3, y = 0$

(-3, 4): $x = -3, y = 4$

Приміра №2

$x - 2y = 4$ Видалимо y через x : $y = (x - 4) / 2$

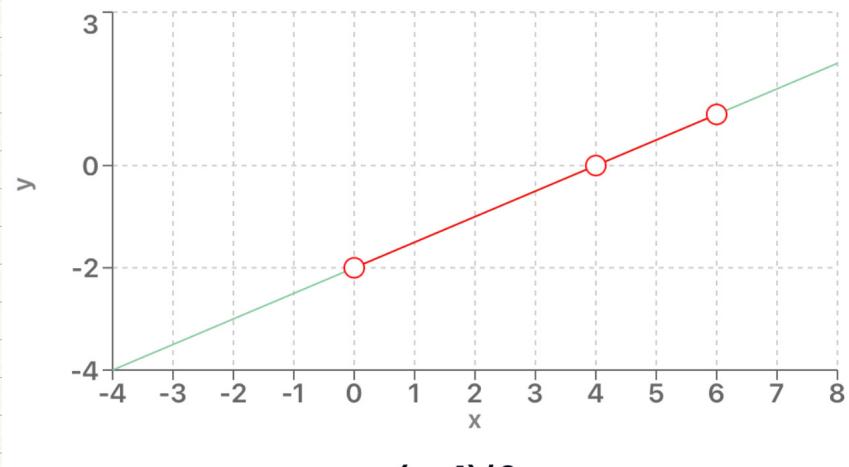
Знайдемо декілька точок разом з ними

Якщо $x = 0$ то $y = -2$

Якщо $x = 4$ то $y = 0$

Якщо $x = 6$ то $y = 1$

Графік рівняння $x - 2y = 4$



(0, -2): $x = 0, y = -2$

(4, 0): $x = 4, y = 0$

(6, 1): $x = 6, y = 1$

Лекція 3

$$5x - 4y = 20 \quad \text{Виразили } y \text{ через } x \quad y = (5x - 20)/4 = 5x/4 - 5$$

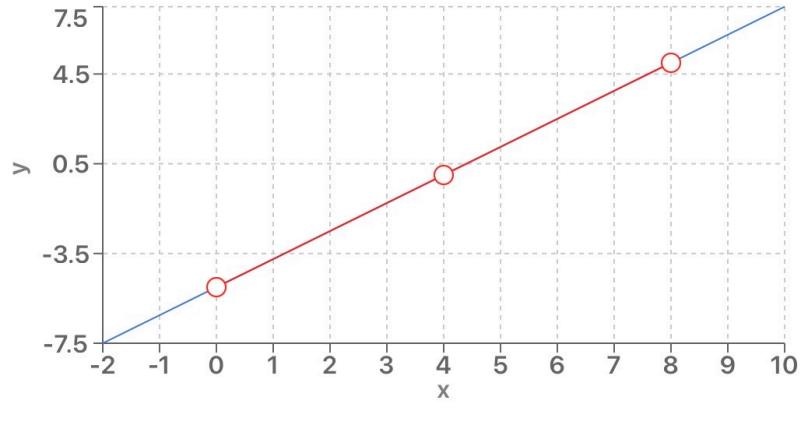
Знайдемо декілька точок побудову:

Якщо $x=0$, то $y = -5$

Якщо $x=4$, то $y = 0$

Якщо $x=8$, то $y=5$

Графік рівняння $5x - 4y = 20$



3. Метод перехоплення



Знайдемо точки перетину прямої з осями

координат: Для лівий осі $2x + 2y = 6$

Перетин з віссю x ($y=0$), $2x = 6$ звідки $x = 3$

Перетин з віссю y ($x=0$), $3y = 6$ звідки $y=2$

Слідчо, прямій проходить через точки $(3, 0)$ і $(0, 2)$.

Індукція утворює

мінімальне рівняння з двома дійністями

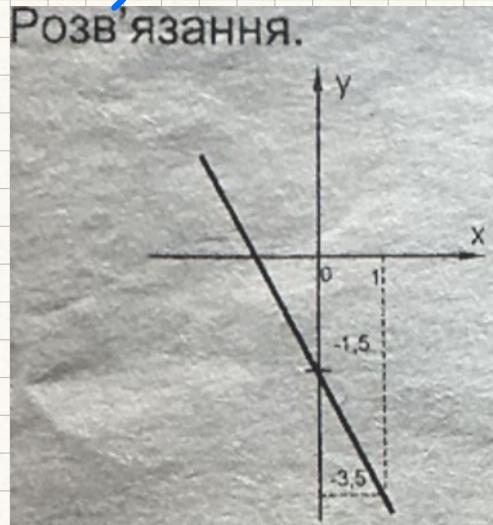
Приклад 1

Побудувати графік рівняння: $4x + 2y + 3 = 0$

Остільки $a \neq 0; b \neq 0; c \neq 0$, то графіком рівняння є прямі, які можна побудувати за допомогою двох точок:

$$x=0; x=1; y = -1,5; \text{ та } y = -3,5$$

Розв'язання.

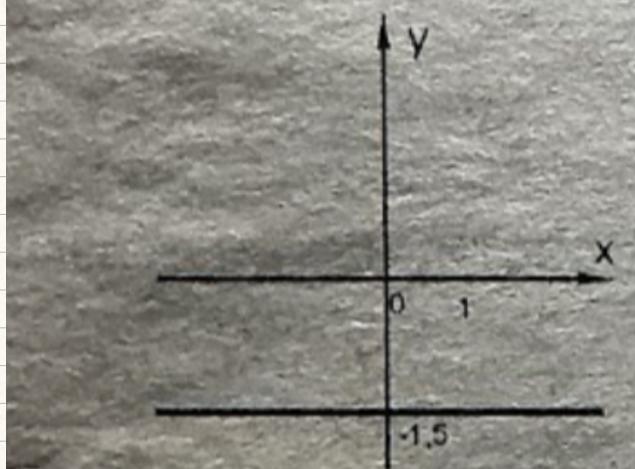


Приклад 2

Побудувати графік рівняння: $0x + 2y + 3 = 0$

Остільки $a=0$; тоді $2y = -3$; $y = -\frac{3}{2}$ - це прямі, паралельні до осі абсцис, що проходять через точку з координатами тими $(0; -\frac{3}{2})$

Розв'язання.



Приклад 3

Побудуванні графіків рівнянь: $x + 0y + 0 = 0$

Оскільки $b=0$ і $c=0$ то $x=0$ - це прямія перпендикулярна осі абсцис, і є бісектрисою ординат.

Це же сане що графік рівняння $x=0$

