

Раціональні вирази

Раціональні вирази — це математичні вирази, які складаються з многочленів у чисельнику та знаменнику. Вони мають вигляд дробу, де і чисельник, і знаменник є многочленами. Раціональні вирази використовуються для представлення відношень між двома многочленами.

Види раціональних виразів

1. Прості раціональні вирази: Це вирази, в яких чисельник і знаменник є одночленами або простими многочленами. Наприклад:

$$\frac{x}{2}, \quad \frac{x+1}{x-1}$$

3. Складні раціональні вирази: Це вирази, в яких чисельник і/або знаменник є складнішими многочленами. Наприклад:

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}, \quad \frac{x^3 - 8}{x^2 + 4x + 4}$$

4. Раціональні функції: Це функції, які можна представити у вигляді раціонального виразу. Наприклад:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

Застосування раціональних виразів

1. Алгебра та аналіз: Раціональні вирази

використовуються для розв'язання рівнянь, спрощення виразів, інтегрування та диференціювання.

2. Фізика: Вони застосовуються для моделювання фізичних явищ, таких як рух тіл, електричні кола тощо.

3. Економіка: Раціональні вирази використовуються для моделювання економічних процесів, таких як попит і пропозиція, оптимізація ресурсів.

4. Інженерія: Вони застосовуються для проектування та аналізу систем, таких як механічні конструкції, електричні мережі тощо.

5. Комп'ютерні науки: Раціональні вирази використовуються в алгоритмах обчислень, комп'ютерній графіці та обробці даних.

Раціональні вирази є важливим інструментом у багатьох галузях науки та техніки, допомагаючи аналізувати та розв'язувати різноманітні задачі.

Чи можна вважати раціональні вирази складними дробами?

Раціональні вирази можна представити у вигляді складних дробів, але не всі раціональні вирази є складними дробами.

Визначення:

- **Раціональний вираз** — це вираз у вигляді дробу, чисельник і знаменник якого є многочленами.

Наприклад:

$$\frac{x^2 + 1}{x - 3}$$

- **Складний дріб** — це дріб, у якому чисельник або знаменник (або обидва) є також дробом.

Наприклад:

$$\frac{\frac{1}{x} + 2}{\frac{3}{x^2} - 1}$$

Висновок:

Раціональний вираз **може бути** складним дробом, якщо має у своєму складі інші дроби. Але **не кожен раціональний вираз — складний дріб**.

Наприклад:

- $\frac{x+1}{x-2}$ — раціональний вираз, але не складний дріб.
- $\frac{\frac{1}{x} + 2}{\frac{3}{x^2} - 1}$ — раціональний вираз і складний дріб.

Отже, складні дроби — це підвид раціональних виразів, але не тотожні ім.



§ 1. Раціональні вирази

Дробові раціональні вирази

Розрізняють цілі і дробові раціональні вирази. В цілому виразі немає ділення на змінну. В дробовому виразі є ділення на вираз, в який входить змінна.

Приклади

Правило

Значення змінних, при яких можливі всі математичні дії, записані в раціональному виразі, називаються допустимими значеннями змінних.

Щоб знайти допустимі значення раціонального дробу, треба прирівняти знаменник до нуля, знайти розв'язки отриманого рівняння, і з усіх чисел виключити розв'язки отриманого рівняння.

$\frac{4}{x-8}$ — у цього раціонального дробу при $x=8$ в знаменнику отримуємо $x-8=8-8=0$, тому допустимими значеннями даного дробу є всі числа, крім $x=8$.

Знайти допустимі значення виразу: $\frac{x}{3x-x^2}$:

Прирівняємо знаменник до нуля і розв'яжемо це рівняння: $3x-x^2=0$, винесемо x за дужки $x(3-x)=0$, добуток дорівнює нулю, якщо хоча б один із множників дорівнює нулю, тобто $x=0$, або $3-x=0$.

Допустимими значеннями змінної є всі числа, крім $x=0$ або $x=3$.

Відповідь: x — будь-яке число, крім 0 та 3.

Дії з раціональними дробами

Правило

Приклади

Скорочення дробів

Скоротити дріб — це означає поділити чисельник і знаменник дробу на спільний множник. Ця дія обумовлена основною властивістю дробу.

Для того, щоб скоротити дріб, треба:

- розкласти чисельник і знаменник дробу на множники;
- виділити спільний множник в чисельнику і знаменнику дробу;
- розділити чисельник і знаменник дробу на спільний множник.

Скоротити дріб: $\frac{3x-18x^2}{15x^2-90x^3}$.

- розділємо чисельник і знаменник дробу на множники, для цього винесемо за дужки спільний множник: $\frac{3x(1-6x)}{15x^2(1-6x)}$;
- виберемо спільний множник в чисельнику і знаменнику — це $3x(1-6x)$;
- скоротимо дріб на $3x(1-6x)$.

Відповідь: $\frac{1}{5x}$.

Додавання і віднімання дробів

Сума (різниця) двох дробів з однаковими знаменниками дорівнює дробу з тим самим знаменником і чисельником, який дорівнює сумі (різниці) чисельників вихідних дробів.

$$\frac{3a-4}{a-1} + \frac{7-4a}{a-1} = \frac{3a-4+7-4a}{a-1} = \frac{3-a}{a-1};$$

$$\begin{aligned} \frac{3a-4}{a-1} - \frac{7-4a}{a-1} &= \frac{3a-4-(7-4a)}{a-1} = \\ &= \frac{3a-4-7+4a}{a-1} = \frac{7a-11}{a-1}. \end{aligned}$$

При додаванні (відніманні) двох раціональних дробів з різними знаменниками треба звести дроби до спільного знаменника та виконати додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками.

$$\frac{5}{x-1} + \frac{4}{x+1} = \frac{5(x+1)}{x-1} + \frac{4(x-1)}{x+1} = \frac{5x+5+4x-4}{(x-1)(x+1)} = \frac{9x+1}{x^2-1};$$

$$\frac{1}{c} - \frac{3a}{c^2+3ac} = \frac{1(c+3a)}{c} - \frac{3a}{c(c+3a)} = \frac{c+3a-3a}{c(c+3a)} = \frac{1}{c+3a}.$$

Множення і ділення дробів

Добуток двох раціональних дробів дорівнює дробу, чисельник якого дорівнює добутку чисельників, а знаменник дорівнює добутку знаменників дробів, що помножуються.

Частка від ділення двох раціональних дробів дорівнює добутку дробу, діленого на дріб, обернений дільнику.

$$\frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{4x+1}{x-1} = \frac{(x-1)(4x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{(x-1)4(x+1)}{(x+1)(x-1)} = 4.$$

$$\frac{x}{a^2-4} : \frac{3x^2}{5a-10} = \frac{x(5a-10)}{(a^2-4)3x^2} =$$

$$= \frac{5x(a-2)}{(a-2)(a+2)3x^2} = \frac{5}{3x(a+2)}.$$

Зручніше перед множенням або діленням раціональних дробів розкласти, якщо це можливо, їх чисельники і знаменники на множники.

Піднесення раціональних дробів до степеня

Степінь раціонального дробу дорівнює дробу, у якого чисельник є степенем чисельника, а знаменник – степенем знаменника.

$$\left(\frac{x^2-9}{xy+3y} \right)^3 = \left(\frac{(x-3)(x+3)}{y(x+3)} \right)^3 = \left(\frac{x-3}{y} \right)^3 = \frac{(x-3)^3}{y^3};$$

$$\left(\frac{5ac^2}{3x^3} \right)^4 = \frac{\left(5ac^2 \right)^4}{\left(3x^3 \right)^4} = \frac{5^4 a^4 c^8}{3^4 x^{12}} = \frac{625a^4 c^8}{81x^{12}}.$$

Степінь з цілим показником

Множина цілих чисел (Z) – це множина, що складається з натуральних чисел, числа нуль і чисел протилежних натуральним.

Тому поняття степеня a^n , де n – натуральне число, можна розширити, якщо розглянути випадки $n = 0$ і n – ціле від'ємне число.

Означення	Приклади
Якщо $a \neq 0$ і n – ціле від'ємне число, то $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$	$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125};$ $\left(\frac{1}{5} \right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5} \right)^3} = 5^3 = 125.$
$a^0 = 1$.	$(1,25)^0 = 1; (-17)^0 = 1.$

Корисно запам'ятати

0^0 – не визначено.

$0^{-3} = \frac{1}{0^3}$ – не визначено

$$\left(\frac{a}{b} \right)^{-n} = \left(\frac{b}{a} \right)^n, (a \neq 0; b \neq 0)$$

$$\left(\frac{2}{7} \right)^{-3} = \left(\frac{7}{2} \right)^3; \left(\frac{1}{2} \right)^{-3} = \left(\frac{2}{1} \right)^3 = 2^3 = 8$$

Властивості степеня з цілим показником

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$5^5 \cdot 5^{-7} = 5^{5-7} = 5^{-2}$	$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, (a \neq 0)$	$3^{-7} : 3^5 = 3^{-7-5} = 3^{-12}$	$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n} (a \neq 0)$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(3^{-2})^3 = 3^{-6}; (3^2)^{-3} = 3^{-6}$	$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m;$
$(ab)^n = a^n \cdot b^n$	$(2 \cdot 3)^{-3} = 2^{-3} \cdot 3^{-3}$	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, (b \neq 0)$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n (b \neq 0)$

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

1. Виконати дії.

Рекомендація. Подібні завдання краще робити за діями — зменшується можливість помилки!

Розв'язання.

$$\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{x+y} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \right) : \frac{(x+y)^2}{x^2 y^2}.$$

$$1) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy},$$

$$2) \frac{2}{x+y} \cdot \frac{x+y}{xy} = \frac{2(x+y)}{(x+y)xy} = \frac{2}{xy},$$

$$3) \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} = \frac{y^2 + x^2 + 2xy}{x^2 y^2} = \frac{(x+y)^2}{x^2 y^2},$$

$$4) \frac{(x+y)^2}{x^2 y^2} : \frac{(x+y)^2}{x^2 y^2} = 1.$$

Відповідь: 1.

2. Довести тотожність.

$$\frac{a - \frac{x^2}{a}}{x - \frac{a^2}{x}} = -\frac{x}{a}.$$

Доведення.

Спростимо ліву частину рівняння:

$$\frac{a - \frac{x^2}{a}}{x - \frac{a^2}{x}} = \left(a - \frac{x^2}{a} \right) : \left(x - \frac{a^2}{x} \right)$$

Чисельник:

$$1) a - \frac{x^2}{a} = \frac{a^2 - x^2}{a},$$

Знаменник:

$$2) x - \frac{a^2}{x} = \frac{x^2 - a^2}{x},$$

$$3) \frac{a^2 - x^2}{a} : \frac{x^2 - a^2}{x} = \frac{a^2 - x^2}{a} \cdot \frac{x}{x^2 - a^2} = \frac{(a^2 - x^2)x}{-a(a^2 - x^2)} = -\frac{x}{a},$$

тотожність доведена:

$$4) -\frac{x}{a} = -\frac{x}{a}$$

3. Скоротити дріб.

$$\frac{ax + ay - bx - by}{ax - ay - bx + by}$$

Розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники способом групування:

$$\frac{ax + ay - bx - by}{ax - ay - bx + by} = \frac{a(x+y) - b(x+y)}{a(x-y) - b(x-y)} = \frac{(x+y)(a-b)}{(x-y)(a-b)} = \frac{x+y}{x-y}$$

Відповідь: $\frac{x+y}{x-y}$.

4. Скоротити дріб.

$$\frac{a^2b + ab^2}{a^3 + b^3 + 3ab(a+b)}$$

Для того, щоб розкласти на множники, в чисельнику винесемо спільний множник за дужки, а в знаменнику застосуємо формулу суми кубів і винесемо спільний множник за дужки, тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{a^2b + ab^2}{a^3 + b^3 + 3ab(a+b)} &= \frac{ab(a+b)}{(a+b)(a^2 - ab + b^2) + 3ab(a+b)} = \\ &= \frac{ab(a+b)}{(a+b)(a^2 - ab + b^2 + 3ab)} = \frac{ab}{a^2 + 2ab + b^2} = \frac{ab}{(a+b)^2}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{ab}{(a+b)^2}$.

5. Скоротити дріб.

$$\frac{a^2 + 3a + 2}{a^2 + 6a + 5}$$

Для того, щоб розкласти чисельник і знаменник дробу на множники, застосуємо спосіб групування.

$$\text{Для цього подамо } a^2 + 3a + 2 \text{ як } a^2 + a + 2a + 2, \text{ аналогічно подамо знаменник: } a^2 + 6a + 5 = a^2 + a + 5a + 5, \text{ отримаємо:}$$

$$\frac{a^2 + 3a + 2}{a^2 + 6a + 5} = \frac{a^2 + a + 2a + 2}{a^2 + a + 5a + 5} = \frac{a(a+1) + 2(a+1)}{a(a+1) + 5(a+1)} = \frac{(a+1)(a+2)}{(a+1)(a+5)} = \frac{a+2}{a+5}.$$

Відповідь: $\frac{a+2}{a+5}$.

6. Спростити алгебраїчний вираз.

$$\frac{a^6 + 64}{a^4 - 4a^2 + 16} - \frac{a^4 - 16}{a^2 + 4}$$

Застосуємо формулу різниці кубів і різниці квадратів в чисельниках дробів:

$$\begin{aligned} \frac{a^6 + 64}{a^4 - 4a^2 + 16} - \frac{a^4 - 16}{a^2 + 4} &= \frac{(a^2)^3 + 4^3}{a^4 - 4a^2 + 16} - \frac{(a^2)^2 - 4^2}{a^2 + 4} = \\ &= \frac{(a^2 + 4)(a^4 - 4a^2 + 16)}{a^4 - 4a^2 + 16} - \frac{(a^2 - 4)(a^2 + 4)}{a^2 + 4} = \\ &= a^2 + 4 - (a^2 - 4) = a^2 + 4 - a^2 + 4 = 8. \end{aligned}$$

Відповідь: 8.

7. Спростити вираз.

Інколи для перетворення алгебраїчних виразів застосовують спосіб послідовних перетворень або одночасно декількох перетворень. Кажуть: «Спростимо "ланцюжком"». При користуванні цим методом, треба бути дуже уважним.

$$\begin{aligned} & \frac{x^3 + y^3}{x+y} : (x^2 - y^2) + \frac{2y}{x+y} - \frac{xy}{x^2 - y^2}, \\ & \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{x+y} \cdot \frac{1}{(x-y)(x+y)} + \\ & + \frac{2y(x-y) - xy}{(x+y)(x-y)} = \frac{x^2 - xy + y^2}{(x-y)(x+y)} + \frac{2xy - 2y^2 - xy}{(x-y)(x+y)} = \\ & = \frac{x^2 - xy + y^2 + xy - 2y^2}{(x-y)(x+y)} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2} = 1. \end{aligned}$$

Відповідь: 1.

8. Виконати дії

$$\frac{3^{-2} a^{-1} b}{27^{-1} x};$$

Використаємо означення степеня з від'ємним показником:

$$\frac{3^{-2} a^{-1} b}{27^{-1} x} = \frac{27b}{3^2 ax} = \frac{3^3 b}{3^2 ax} = \frac{3b}{ax}.$$

Відповідь: $\frac{3b}{ax}$.

9. Спростити вираз.

$$\left(\frac{2}{3} a^{-2} (b^3)^{-3} \right)^4.$$

$$\left(\frac{2}{3} a^{-2} (b^3)^{-3} \right)^4 = \frac{2^4}{3^4} a^{-8} b^{-36} = \frac{2^4}{3^4 a^8 b^{36}}.$$

Відповідь: $\frac{2^4}{3^4 a^8 b^{36}}$.

10. Подати вираз у вигляді дробу.

Використаємо формулу різниці квадратів і означення степеня з від'ємним показником:

$$(5a^{-1} + b^{-2}) \cdot (5a^{-1} - b^{-2}).$$

$$(5a^{-1} + b^{-2}) \cdot (5a^{-1} - b^{-2}) =$$

$$= (5a^{-1})^2 - (b^{-2})^2 = \left(\frac{5}{a}\right)^2 - \left(\frac{1}{b^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{25}{a^2} - \frac{1}{b^4} = \frac{25b^4 - a^2}{a^2 b^4}.$$

Відповідь: $\frac{25b^4 - a^2}{a^2 b^4}$.

тимдемеси үшін нағ разіом. Бұзғадам

Додаваній

3 орнапов зерттешиктер

$$\frac{3}{8} + \frac{2}{3} = \frac{3+2}{8} = \frac{5}{8}; \quad \frac{8}{11} - \frac{3}{11} = \frac{8-3}{11} = \frac{5}{11}.$$

3 жілдемін зерттешиктер

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}; \quad \frac{5}{6} - \frac{1}{8} = \frac{20}{24} - \frac{3}{24} = \frac{17}{24}$$

Множенімінде

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}; \quad \frac{3}{7} \cdot \frac{14}{9} = \frac{3 \cdot 14}{7 \cdot 9} = \frac{42}{63} = \frac{2}{3}$$

Діленімінде

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{8}; \quad \frac{4}{12} : \frac{14}{3} = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{14} = \frac{21}{168} = \frac{1}{8}$$

Скороченімінде

$$\frac{12}{18} = \frac{126}{186} = \frac{2}{3}; \quad \frac{24}{36} = \frac{2412}{3612} = \frac{2}{3}$$

Перетвореній шілдесінде

$$2\frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{7}{3}; \quad \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4} \text{ (оскінде } 11:4 = 2 \text{ осмаса } 3)$$

Порівняній

$\frac{3}{4}$ і $\frac{5}{6}$ приблизно до спільного знаменника $\frac{9}{72}$ і $\frac{10}{72}$ нану

$$\frac{3}{4} < \frac{5}{6}$$

1. Спрощення виразів:

- Знайдіть спільний знаменник для всіх дробів у виразі.
- Спростіть чисельник і знаменник, якщо це можливо, шляхом винесення спільних множників.

2. Додавання і віднімання:

- Знайдіть спільний знаменник для дробів.
- Перетворіть кожен дріб так, щоб вони мали спільний знаменник.
- **Додайте або відніміть чисельники, залишаючи знаменник незмінним.**
- Спростіть отриманий вираз, якщо це можливо.

3. Множення:

- Перемножте чисельники між собою і знаменники між собою.
- Спростіть отриманий вираз, якщо це можливо.

4. Ділення:

- Перетворіть ділення на множення, взявши обернений дріб до діленого.
- Виконайте множення, як описано вище.

1. Спрощення виразу $\frac{x^2 - 4}{x - 2} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$

2. Додавання $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}; \frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} = \frac{x+y}{xy}$ (xy - спільний знаменник)

3. Віднімання $\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}$

Зменшено спільний знаменник x^2

$$\frac{3x}{x^2} - \frac{2}{x^2} = \frac{3x - 2}{x^2}$$



4. Множення $\frac{2}{x} \cdot \frac{3}{y}$

Перемножуємо числових і знаменник

$$\frac{2 \cdot 3}{x \cdot y} = \frac{6}{xy}$$

5. Ділення $\frac{4}{x} : \frac{2}{y}$

Перетворюємо ділення на множення оберненим дробом

$$\frac{4}{x} \cdot \frac{y}{2} = \frac{4y}{2x} = \frac{2y}{x}$$

6. Піднесення до степеня $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}; \quad \left(\frac{x^2}{y^3}\right)^2 = \frac{(x^2)^2}{(y^3)^2} = \frac{x^4}{y^6}$$

$$\left(\frac{2x^3}{3y^2}\right)^3 = \frac{(2x^3)^3}{(3y^2)^3} = \frac{8x^9}{27y^6}; \quad \left(\frac{a^{-2}}{b^{-3}}\right)^2 = \frac{(a^{-2})^2}{(b^{-3})^2} = \frac{a^{-4}}{b^{-6}} = \frac{b^6}{a^4}$$

$$\left(\frac{a^{-1}}{b^{-2}}\right)^2 = \frac{(a^{-1})^2}{(b^{-2})^2} = \frac{a^{-2}}{b^{-4}} = \frac{b^4}{a^2}$$

Rational Expressions Actions

Тижнестанція до смененої виразу з різними змінними.

$$\left(\frac{xc^2y^3}{z^4}\right)^3 = \frac{(xc^2y^3)^3}{(z^4)^3} = \frac{x^6y^9}{x^{12}}$$

П.г.с. виразу з мономиками та різм. змінними.

$$\left(\frac{2a^3b^2}{3c^4d^5}\right)^2 = \frac{(2a^3b^2)^2}{(3c^4d^5)^2} = \frac{4a^6b^4}{9c^8d^{10}}$$

П.г.с. виразу з більшими показ.

$$\left(\frac{x^{-1}y^2}{z^{-3}w^4}\right)^2 = \frac{(x^{-1}y^2)^2}{(z^{-3}w^4)^2} = \frac{x^{-2}y^4}{z^{-6}w^8} = \frac{y^4z^6}{x^2w^8}$$

П.г.с. виразу із різними змінними та складнішими показниками:

$$\left(\frac{a^2b^{-3}c^4}{x^{-1}y^2z^3}\right)^3 = \frac{(a^2b^{-3}c^4)^3}{(x^{-1}y^2z^3)^3} = \frac{a^6b^{-9}c^{12}}{x^{-3}y^6z^9};$$

1. Перетисування виразу
3 урах. більших степ.
Більші степ. можна позади.
 $b^{-9} = \frac{1}{b^9}; x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ отримати:

$$\frac{a^6b^{-9}c^{12}}{x^{-3}y^6z^9} = \frac{a^6 \cdot \frac{1}{b^9} \cdot c^{12}}{\frac{1}{x^3} \cdot y^6 \cdot z^9}; \text{ Еквівалентно } \frac{a^6c^{12}}{b^9} \cdot \frac{x^3}{y^6z^9}$$

2. Справдім.9 (Перевірено чи є сміл. мн. в число. і знам. які можна скоротити)

$$\frac{a^6c^{12}x^3}{b^9y^6z^9}$$

* Всі змінні різні мені що скрочую.

Логарифмічно
відповідно

$$\frac{a^6c^{12}x^3}{b^9y^6z^9} \quad (\text{якщо тоді. додат. см.})$$

3. створення математичного доказу

$$\frac{a^6c^{12}x^3}{b^9y^6z^9} = a^6b^{-9}c^{12}x^3y^{-6}z^{-9};$$

Доказуємо ділення на y^6z^9
еквівалентно ділення на $y^{-6}z^{-9}$

1. Додавання і віднімання р. б.

$$\frac{x^2y}{z^3} + \frac{ab^2}{c^2} - \frac{mn^3}{p^4}; \quad \text{Чи може бути спільн. знам. } z^3 c^2 p^4$$

1) ділення

$$\frac{x^2y}{z^3} \Rightarrow z^3 \quad \frac{ab^2}{c^2} \Rightarrow c^2 \quad \frac{mn^3}{p^4} \Rightarrow p^4$$

Основним засобом розв'язання цих задач є ділення на спільні множники. Але спільні множники можуть бути зменшенню, тому їх треба використати.

2) Дужевення до спільного знаменника (спільне ділення)

для $\frac{x^2y}{z^3}$ пам'ятте чис. і знаменник $c^2 p^4$ щоб отримати знам. $c^2 p^4 z^3$

$$\frac{x^2y \cdot c^2 p^4}{z^3 \cdot c^2 p^4} = \frac{x^2 y c^2 p^4}{c^2 p^4 z^3}$$

для $\frac{ab^2}{c^2}$ пам'ятте чис. і знаменник $p^4 z^3$ щоб отримати знам. $c^2 p^4 z^3$

$$\frac{ab^2 \cdot p^4 z^3}{c^2 \cdot p^4 z^3} = \frac{ab^2 p^4 z^3}{c^2 p^4 z^3}$$



3) Об'єднання дробів

Потерп вираз із спільн. зн. $c^2 p^4 z^3$

$$\frac{x^2 y c^2 p^4}{c^2 p^4 z^3} + \frac{ab^2 p^4 z^3}{c^2 p^4 z^3} - \frac{mn^3 c^2 z^3}{c^2 p^4 z^3}$$

Скорочення чисел.

$$x^2 y c^2 p^4 + ab^2 p^4 z^3 - mn^3 c^2 z^3$$

$$\frac{x^2 y c^2 p^4 + ab^2 p^4 z^3 - mn^3 c^2 z^3}{c^2 p^4 z^3}$$

Відповідь: не можна бо всі розкидані без доданків.

2. Множення:

$$\frac{x^3y^2}{ab^4} \cdot \frac{m^2n^3}{p^5q^2} = \frac{x^3y^2m^2n^3}{ab^4p^5q^2}$$

3. Множення:

$$\frac{x^4y^5}{a^2b^3} \cdot \frac{m^3n^2}{p^4q^5} = \frac{x^4y^5}{a^2b^3} \cdot \frac{p^4q^5}{m^3n^2} = \frac{x^4y^5p^4q^5}{a^2b^3m^3n^2}$$

4. Числителями операції:

$$\left(\frac{a^2b^3}{x^4y^5} + \frac{m^3n^2}{p^4q^5} \right) \cdot \frac{x^2y^3}{ab^2} ;$$

Спочатку зміні спільн. зн.
для дробів у дужках чоб виконати множення.

Спільний знаменник дробів $\frac{a^2b^3}{x^4y^5}$ та $\frac{m^3n^2}{p^4q^5}$ буде $x^4y^5p^4q^5$

> Добудування до спільного знаменника

$$\frac{a^2b^3}{x^4y^5} = \frac{a^2b^3 \cdot p^4q^5}{x^4y^5 \cdot p^4q^5} = \frac{a^2b^3p^4q^5}{x^4y^5p^4q^5}$$

$$\frac{m^3n^2}{p^4q^5} = \frac{m^3n^2 \cdot x^4y^5}{p^4q^5 \cdot x^4y^5} = \frac{m^3n^2x^4y^5}{x^4y^5p^4q^5}$$

> Додавання дробів і дужок

$$\frac{a^2b^3}{x^4y^5} + \frac{m^3n^2}{p^4q^5} = \frac{a^2b^3p^4q^5 + m^3n^2x^4y^5}{x^4y^5p^4q^5}$$

> Множення на другий дріб

$$\frac{a^2b^3p^4q^5 + m^3n^2x^4y^5}{x^4y^5p^4q^5} \cdot \frac{x^2y^3}{ab^2} = \frac{(a^2b^3p^4q^5 + m^3n^2x^4y^5)}{x^4y^5p^4q^5} \cdot \frac{x^2y^3}{ab^2}$$

$$\frac{(a^2b^3p^4q^5 + m^3n^2x^4y^5)x^2y^3}{x^4y^5p^4q^5ab^2} = \frac{x^2y^3(a^2b^3p^4q^5 + m^3n^2x^4y^5)}{x^4y^5p^4q^5ab^2}$$

> Спростування степені $x^2 : x^4 = \frac{1}{x^2}$; $y^3 : y^5 = \frac{1}{y^2}$

Відповідь: $\frac{a^2b^3p^4q^5 + m^3n^2x^4y^5}{x^2y^2p^4q^5ab^2}$

Сюжет 2

$$\left(\frac{a^2 b^3}{x^4 y^5} + \frac{m^3 n^2}{p^4 q^5} \right) \cdot \frac{x^2 y^3}{ab^2};$$

Розподілення множника на кожен доданок у дужках

$$\frac{a^2 b^3}{x^4 y^5} \cdot \frac{x^2 y^3}{ab^2} + \frac{m^3 n^2}{p^4 q^5} \cdot \frac{x^2 y^3}{ab^2}$$

Однокомпонентний множник добуток виразу

1) $\frac{a^2 b^3}{x^4 y^5} \cdot \frac{x^2 y^3}{ab^2} = \frac{a^2 b^3 \cdot x^2 y^3}{x^4 y^5 \cdot ab^2}$. Супровідний множник

$$a^2 : a = a^1 = a$$

$$b^3 : b = b^1 = b$$

$$x^2 : x^4 = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

$$y^3 : y^5 = y^{-2} = \frac{1}{y^2}$$

2) $\frac{m^3 n^2}{p^4 q^5} \cdot \frac{x^2 y^3}{ab^2} = \frac{m^3 n^2 x^2 y^3}{p^4 q^5 ab^2}$

Відповідь: $\frac{ab}{x^2 y} + \frac{m^3 n^2 x^2 y^3}{p^4 q^5 ab^2}$

2. Піднесення до степеня р. в.

$$\left(\frac{x^2 y^3}{a^4 b^5} \right)^2 \cdot \frac{m^3 n^2}{p^4 q^5}, \quad 1. \text{ Піднес до степеня}$$

$$\left(\frac{x^2 y^3}{a^4 b^5} \right)^2 = \frac{(x^2 y^3)^2}{(a^4 b^5)^2} = \frac{x^4 y^6}{a^8 b^{10}}$$

2. Перемноження дробів $\frac{x^4 y^6}{a^8 b^{10}} \cdot \frac{m^3 n^2}{p^4 q^5}$

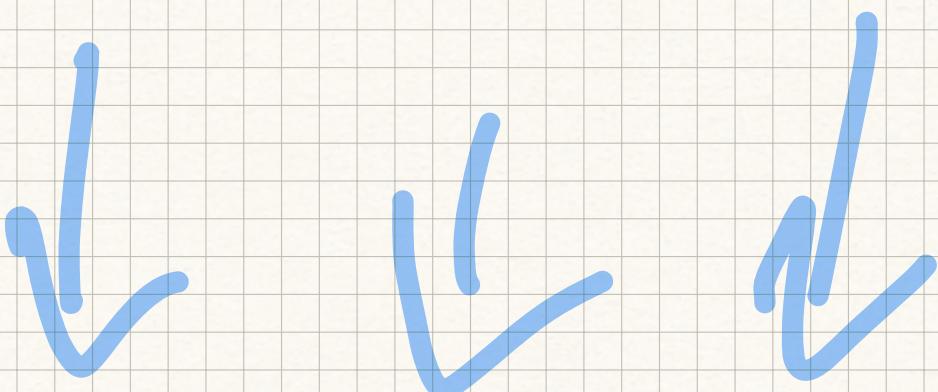
Перемнож чи з. з. з.

$$\frac{x^4 y^6 \cdot m^3 n^2}{a^8 b^{10} \cdot p^4 q^5} = \frac{x^4 y^6 m^3 n^2}{a^8 b^{10} p^4 q^5}; \quad \text{Відповідь: } \frac{x^4 y^6 m^3 n^2}{a^8 b^{10} p^4 q^5}$$

* Дані спаджині приміні спрощення і скороч р. в. при діленні р. в. Дані будуть представл. такі операції як. поділ. на числа різних кв. різм. нубів, нові квадрати, поділ на півцінніх. Інтервальний діапазон в чоти. на обрачн. дробі Систематич. скороч. чисел. множн.

Урахуван обласні діапазон знач ОДЗ

Закріпіться числа і значен



$$1) \frac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 9} : \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 4x + 3}$$

1) Розкладаємо обидві многочлени на множники

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3) \text{ різниця квадратів}$$

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2 \text{ квадрат суми (побуд. квадрат)}$$

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) \text{ розкладання тричленів}$$

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3) \text{ розкладання тричленів}$$

2) Перевірка ділення на множн. на обр. фрд.

$$\frac{(x - 3)(x + 3)}{(x + 3)^2} \cdot \frac{(x + 1)(x + 3)}{(x - 3)(x + 1)}$$

3) Скорочення схожих множн.

$$\frac{(x - 3)(x + 3)}{(x + 3)^2} \cdot \frac{(x + 1)(x + 3)}{(x - 3)(x + 1)}$$

Відповідь: $\frac{1}{1} = 1$, за умови якщо $x \neq -3, -1, 3$

$$2) \frac{2x^2 - 8x}{x^2 - 16} : \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 2x - 8}$$

1) Розкладаємо на множники

$$2x^2 - 8x = 2x(x - 4)$$

$$x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4) \text{ різниця квадратів}$$

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$$

$$x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$$

2) Перевірка ділення на множники

$$\frac{2x(x - 4)}{(x - 4)(x + 4)} \cdot \frac{(x - 4)(x + 2)}{(x - 2)(x - 4)}$$

3) Скорочені множини.

$$\frac{2x(x-4)}{(x-4)(x+4)} \cdot \frac{(x-4)(x+2)}{(x-2)(x-4)}$$

Звільнюємо: $\frac{2x(x+2)}{(x+4)(x-2)}$ о.з. $x \neq 0, 2, 4, -2, -4$

3) $\frac{x^3-1}{x^2-1} : \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1} \cdot \frac{x+1}{x^2-x+1}$

1) Розкладаємо обидві множини

$$x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1) \text{ різниця кубів}$$

$$x^2-1 = (x-1)(x+1) \text{ різниця квадратів}$$

$$x^2+x+1$$

2) Підставляємо обидві вирази

$$\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{(x+1)^2}{x^2+x+1} \cdot \frac{x+1}{x^2-x+1}$$

3) Постановимо скорочення $\frac{1}{x+1} \cdot (x+1)^2 \cdot \frac{x+1}{x^2-x+1}$

$$\frac{(x+1)^2 \cdot (x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}$$

Звільнюємо: $\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}, x \neq 1, -1$

* Добився результату. складніше п. б.

1. розклад множин на множники
2. перетворюємо зведені на множини.
3. виписаним обидвом змінам 0,73 окресло
4. скорочуємо множини постійно
5. передбільши результат міжнародного простих змачень.



$$4) \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 8} : \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x + 4}$$

1) Ділення на множники

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 8} \cdot \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 - 4}$$

2) Розкладаючи членам із знаменниками
розв'язанням квадратного виразу на множники

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \text{ квадратний член, корінь } x = 2$$

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) \text{ різниця кубів}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2), \text{ де } a = x, b = 2$$

$x^2 + 2x + 4$ не розкладається на лінійні множники
оскільки дискримінант $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 4 - 16 = -12 < 0$

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) \text{ різниця квадратів}$$

$$\frac{(x - 2)^2}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} \cdot \frac{x^2 + 2x + 4}{(x - 2)(x + 2)}$$

3) Скорочені спільні множники

$$\frac{(x - 2)}{1} \cdot \frac{1}{(x + 2)} = \frac{x - 2}{x + 2}$$

4) Перевірка чи об'єднаний вираз виключений коши знакою $\neq 0$

$$x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 ;$$

Осьоже, $x \neq 2, x \neq \pm 2$

Відповідь: $\frac{x - 2}{x + 2} ; x \neq \pm 2$

$$5) \frac{2x^3 + 3x^2 - 2x - 3}{x^4 - x^2} : \frac{2x^2 + 5x + 3}{x^3 + x}$$

1) Перевір гіл на множині.

$$\frac{2x^3 + 3x^2 - 2x - 3}{x^4 - x^2} \cdot \frac{x^3 + x}{2x^2 + 5x + 3}$$

2) Знакомірність ч. і.м.

Споряджено позитивним методом уточнювання обсягу коренів (за методом про пошукації корені)

Перевірюємо множині корені $(\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2})$

$$\text{Для } x = -1; 2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 2(-1) - 3 + 3 + 2 - 3 = 0$$

оригінал
 $x = -1$ - корінь

• Виконуємо ділення многочлена $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$ на $x + 1$

Метод ділення многочленів за "симетричним методом" або метод Тартагла, основою ділення є мінімум многочлену
для $x - \alpha$ якщо $\alpha = -1$

1) Запис коєр-ів многочлена

$$\text{многочлен: } 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$$

коєрів: 2, 3, -2, -3.

$$\text{Дільник } x + 1 = x - (-1) \text{ означає } \alpha = -1$$

2) Виконання симетричного ділення

Стосовно симметриї діленн. $-1 \ 2 \ 3 \ -2 \ -3$

$$\begin{array}{r} -2 \ -1 \ 3 \\ 2 \ 1 \ -3 \ 0 \end{array}$$

Пояснення:

Сума всіх перві коєр: 2

$$1) 2 \cdot (-1) = -2, \text{ що є пасмут коєр. } 3 + (-2) = 1$$

$$2) 1 \cdot (-1) = -1, \text{ що: } -2 + (-1) = -3$$

$$3) -3 \cdot (-1) = 3, \text{ що } -3 + 3 = 0$$

Off
detailed

Останнє число 0 - це залишок. залишок більше ніж 0
що означає, що $x+1$ є дільником многочлена

3) Заміс розумінану

Число розумінану (зміна більше залишку) 2, 1, -3

Не відповідає многочлену на один спосіб критично, тим
найджеральні $2x^2 + x - 3$

Однак розумінані ділення: $\frac{2x^3 + 3x^2 - 2x - 3}{x + 1} = 2x^2 + x - 3$

4) перевірка.

Розмножимо $2x^2 + x - 3$: $2x^2 + x - 3 = (2x + 3)(x - 1)$

Перевірка:

$$(x+1)(2x+3)(x-1) = (x+1)(2x^2 + 3x - 2x - 3) = (x+1)(2x^2 + x - 3) = \\ 2x^3 + x^2 - 3x + 2x^2 + x - 3 = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$$

Відповідь: $\frac{2x^3 + 3x^2 - 2x - 3}{x + 1} = 2x^2 + x - 3$ *of dots*

тобто є дільником розв'язання буде:

$$2x^2 + x - 3 = (2x + 3)(x - 1), \quad x \neq -1$$

Умови ділення на 0
 $x = -1$ - не відповідає

Для $x = -1$; $2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 2(-1) - 3 + 3 + 2 - 3 = 0$ отже
 $x = -1$ - не відповідає

• Виконуємо зручніше ділення $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$ на $x + 1$

Очищимо $2x^2 + x - 3$. Перевіримо, чи
може діленіся $2x^2 + x - 3$

$$2x^2 + x - 3 = (2x + 3)(x - 1)$$

$$\begin{array}{r} -1 & 2 & 3 & -2 & -3 \\ & -2 & -1 & 3 \\ & 2 & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

Отже, $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(2x + 3)(x - 1)$

Запишемо перш. дробу $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x - 1)(x + 1)$

Чиселю. другого. дробу $x^3 + x = x(x^2 + 1)$

Знайдіть дрібн. дробу $2x^2 + 5x + 3 = (2x+3)(x+1)$

Вираз має розчленізациі:

$$\frac{(2x+3)(2x+3)(x-1)}{x^2(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x(x^2+1)}{(2x+3)(x+1)}$$

3) Запис результату

Числовий результату (зліва від знаку): 2, 1, -3

Це відповідне множину всіх одиниць числової, які не відносяться до $2x^2 + x - 3$, оскільки

$$\frac{2x^3 + 3x^2 - 2x - 3}{x + 1} = 2x^2 + x - 3$$

4) перевірка:

Розкладаємо $2x^2 + x - 3$

$$2x^2 + x - 3 = (2x+3)(x-1)$$

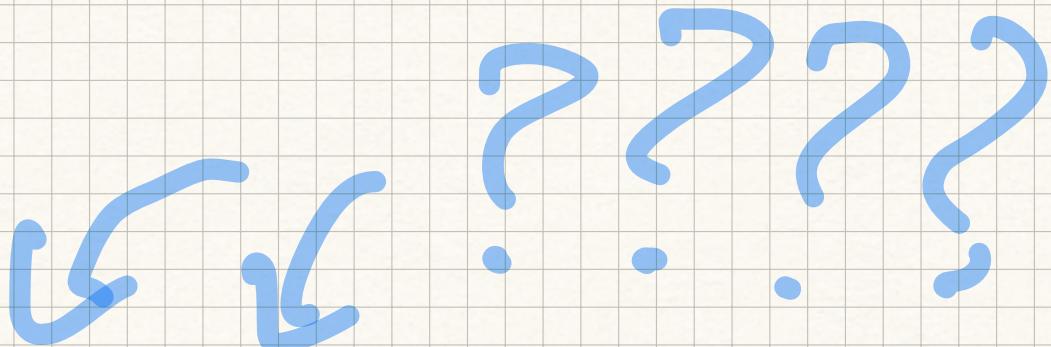
Ітак, результат

$$(x+1)(2x+3)(x-1) = (x+1)(2x^2 + 3x - 2x - 3) = (x+1)(2x^2 + x - 3) =$$

$$2x^3 + x^2 - 3x + 2x^2 + x - 3 = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$$

Результат збігає з наведеною множиною, отже, відповідь вірна до правильності

Відповідь: $\frac{2x^3 + 3x^2 - 2x - 3}{x + 1} = 2x^2 + x - 3$



Крок 3: Скорочення спільних множників

- Скорочуємо $(x + 1)$ (з'являється в чисельнику і знаменнику).
- Скорочуємо $(x - 1)$.
- Скорочуємо $(2x + 3)$.

Після скорочення:

$$\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x(x^2 + 1)}{1} = \frac{x(x^2 + 1)}{x^2}$$

Крок 4: Спрощення виразу

$$\frac{x(x^2 + 1)}{x^2} = \frac{x^3 + x}{x^2} = \frac{x^3}{x^2} + \frac{x}{x^2} = x + \frac{1}{x}$$

Крок 5: Перевірка умов

Знаменники не дорівнюють нулю:

- $x^4 - x^2 = 0 \implies x^2(x^2 - 1) = 0 \implies x = 0, \pm 1.$
- $2x^2 + 5x + 3 = 0 \implies D = 25 - 24 = 1, x = \frac{-5 \pm 1}{4} \implies x = -1, -\frac{3}{2}.$
- $x^3 + x = 0 \implies x(x^2 + 1) = 0 \implies x = 0$ (оскільки $x^2 + 1 \neq 0$).

Отже, $x \neq 0, \pm 1, -\frac{3}{2}$.

Кінцева відповідь:

$$x + \frac{1}{x}, \quad x \neq 0, \pm 1, -\frac{3}{2}$$