

Подібні доданки і прапорча дужок

Подібні доданки

Означення

Подібними доданками називають доданки, які рівні, або які відрізняються лише коефіцієнтами.

Звести подібні доданки — означає додати їх коефіцієнти, а буквену частину залишити незмінною.

Приклади

$$11a - 2b + 4a - 12a + c - 7b = \\ = (11+4-12)a + (-2-7)b + c = \\ = 3a - 9b + c.$$

Дужки

Дужки у вирази вводяться для зміни звичайного порядку дій:

- 1) піднесення до степеня (справа наліво);
- 2) множення або ділення (зліва направо);
- 3) додавання або віднімання (зліва направо).

$$13 + (7 - 3)^2 = 13 + 4^2 = 13 + 16 = 29; \\ (113 + 17) : (123 - 121) = 130 : 2 = 65; \\ (200 - 28) - (17 + 53) = 172 - 70 = 102.$$

Правила розкриття дужок

Якщо перед дужками стоїть знак «+», то дужки опускаються, а знаки доданків у дужках залишаються без змін.

$$\dots + (a + b) = \dots + a + b.$$

Якщо перед дужками стоїть знак «-», то дужки опускаються і знаки доданків змінюються на протилежні.

$$\dots - (a + b) = \dots - a - b.$$

Обчислити значення виразу

$$(2 + (3 \cdot 4)) : (5 - 1) = (2 + 12) : 4 = 14 : 4 = 3.5$$

Розкриття дужок та спрощення виразу

$$3(x + 2) + 4(2x - 1)$$

1) Розкриття дужок

$$3(x + 2) = 3x + 6$$

$$4(2x - 1) = 8x - 4$$

2) Об'єднаємо вирази

$$3x + 6 + 8x - 4 = 11x + 2$$



Розкриття бінарних дужок

$$2(3x + (4-x))$$

1) Розкриття виокремлених дужок

$$2(3x + (4-x)) = 2(3x + 4 - x) = 6x + 8 - 2x = 4x + 8$$

Розкриття дужок з піднесенням до степеня

$$(x+2)^2$$

1) Використання формул квадратів суми

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2) Піднесення знаків

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2$$

3) Способом

$$x^2 + 4x + 4 \quad (5x^2 + 4 ???)$$



Розкриття дужок з множниками мономів

$$(x+3)(x-2) = x(x-2) + 3(x-2) \leftarrow \text{Використ. розпод. } y ??$$

$$2) \text{Розкривати дужки } x^2 - 2x + 3x - 6$$

$$3) \text{Способом } x^2 + x - 6$$

$$(x+3)(x-2) = x(x-2) + 3(x-2) = x^2 - 2x + 3x - 6 = x^2 + x - 6$$

Іноді є додатки - це доданки, які мають окремі
буквенні частини. (коєфіцієнти)

$$3x + 5x = 8x; \quad 4m^2 + 3m^2 = 7m^2$$

$$7a + 2a = 9a; \quad 5xy + 2xy = 7xy$$

$$2a + 5b + 3a = 5a + 5b; \quad 4x^2 + 3xy + 2x^2 = 9x^2 + 3xy;$$

$$4ab + 2a + 5ab = 9ab + 2a$$

Розкритий дужок з подібними доданками

Пр.1 $3(2x + 2y) - 2(x - 3y)$

1) Використовуємо розподільну властивість.

$$3(2x + 2y) - 2(x - 3y) = 6x + 15y - 2x + 6y = \underline{(6x - 2x) + (15y + 6y)} = \underline{4x + 21y}$$

Пр.2

$$5(a+2b) + 2(3a-b) = 5a + 10b + 6a - 2b = (5a+6a) + (10b-2b) = 11a + 8b$$

$$5(a+2b) + 2(3a-b) =$$

$$5a + 10b + 6a - 2b =$$

$$(5a+6a) + (10b-2b) =$$

$$11a + 8b$$



Використання переставової та сполучної властив.

$$4x + 5y + 3x + 2y$$

1) Використов. переставову властивість щоб згрупувати подібні доданки

розділення 2

$$4x + 5y + 3x + 2y = \underline{4x + 3x} + 5y + 2y = (4+3)x + (5+2)y = 10x + 7y$$

Результат сума з подібними доданками

$$(2a+3b)(a-b)$$

$$(2a+3b)(a-b) = 2a(a-b) + 3b(a-b) = 2a^2 - 2ab + 3ab - 3b^2 =$$

$$\underline{2a^2 + (-2ab + 3ab) - 3b^2} = 2a^2 + ab - 3b^2 ;$$

$$(2a+3b)(a-b) =$$

$$2a(a-b) + 3b(a-b) =$$

(позодильна власт.)

$$2a^2 - 2ab + 3ab - 3b^2 =$$

(позодильна власт.)

$$2a^2 + (-2ab + 3ab) - 3b^2 =$$

зупинюю позодиї доданки

$$2a^2 + ab - 3b^2$$

Піднімай квадратів з позодими доданками

$$(5a+b)^2 - (5a-b)^2 ;$$

Формула підніж квадратів

$$(5a+b)^2 - (5a-b)^2 =$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$[(5a+b) + (5a-b)][(5a+b) - (5a-b)] = (10a)(2b) = 20ab$$

Піднісемо до квадрату з використанням скороченого множ

$$\text{Пр.1. } (3x+2y)^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(3x+2y)^2 = \underline{(3x)^2 + 2(3x)(2y) + (2y)^2} = 9x^2 + 12xy + 4y^2$$

Пр.2.

$$2(3x-4y+z) + 5(x+2y-3z) =$$

$$6x - 8y + 2z + 5x + 10y - 15z =$$

$$(6x+5x) + (-8y+10y) + (2z-15z) =$$

$$11x + 2y = 13z$$

Винесення спільного членника за дужки

Пр.1. $12a^2b + 9ab^2 - 3ab = \underline{3ab}(4a + 3b - 1)$

Пр.2. $4x^2y + 6xy^2 - 10xy = \underline{2xy}(2x + 3y - 5)$

Правила розкриття дужок

+ перед дужками не міняє знак в дужках при розкритті

$$+(a+b) = +a+b$$

Пр.1. $+ (3+5) = +3+5 = 3+5 = 8$

$$+(x+y) = +x+y = x+y$$

$$2 + (3+4) = 2+3+4 = 9$$

$$m + (n+p) = m+n+p$$



Правило розкриття дужок з відніманням

- перед дужками значить що при розкритті дужок всі знаки в дужках міняються на противоположні

$$-(a+b) = -a-b$$

$$-(a-b) = -a+b$$

ПР

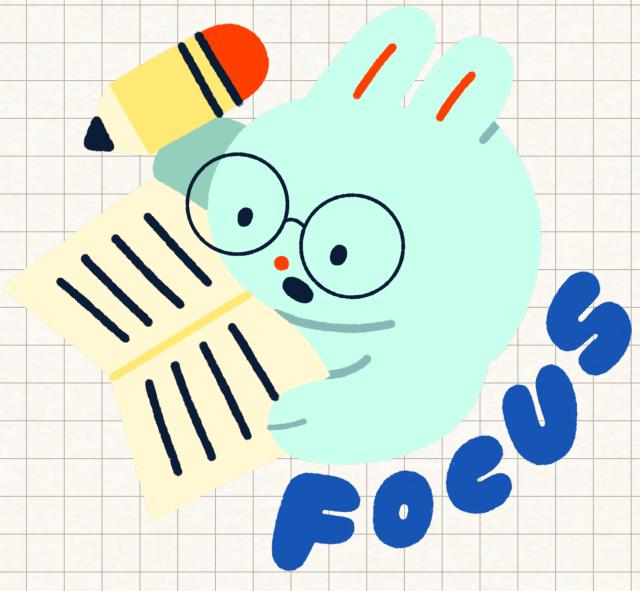
$$-(3+5) = -3-5 = -8$$

$$-(y-2) = -y+2 = -5$$

$$6 - (4+3) = 6-4-3 = -1$$

$$x - (y+z) = x-y-z$$

$$-(x-y-z) = -x+y+z$$



$$-(\beta+2) = -5; \quad 4-(6+8+3) = -13; \quad 3-(4+2-1) = -2$$

Множення одночленів на многочлен

При множенні одночленів на многочлен кожен член многочлена множиться на одночлен

$$a(b+c+d) = ab + ac + ad$$

Пр. 1

$$2(x+3) = 2x+6$$

$$-5(a-b+c) = -5a+5b-5c$$

$$x(y+z-3) = xy+xz-3x$$

$$3a^2(a+2b-c) = 3a^3 + 6a^2b - 3a^2c$$



Множення многочленів на многочлен (орієнтована "кожний з кожним")

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Пр. 1 $(x+2)(x+3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$

$$(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$$

$$(2x+1)(x-3) = 2x^2 - 6x + x - 3 = 2x^2 - 5x - 3$$

$$(x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 - x^2y + xy^2 + x^2y - x^2y + y^3 = x^3 + y^3$$

Формула скороченого множення

Квадрат суми $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Пр. 1 $(x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

$$(2a+b)^2 = (2a)^2 + 2 \cdot (2a) \cdot b + b^2 = 4a^2 + 4ab + b^2$$

Квадрат різниці $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Пр. $(x-5)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$

$$(3y-2)^2 = (3y)^2 - 2 \cdot (3y) \cdot 2 + 2^2 = 9y^2 - 12y + 4$$

Різниця квадратів $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$(x+3)(x-3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$$

$$(2y+5)(2y-5) = (2y)^2 - 5^2 = 4y^2 - 25$$

Куб суми $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 1 + 3x \cdot 1^2 + 1^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

Куб різниці $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$$(y-2)^3 = y^3 - 3y^2 \cdot 2 + 3y \cdot 2^2 - 2^3 = y^3 - 6y^2 + 12y - 8$$

Сума кубів $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$$x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - x \cdot 2 + 2^2) = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

Різниця кубів $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$$2^3 - y^3 = 3^3 - y^3 = (3-y)(3^2 + 3 \cdot y + y^2) = (3-y)(9 + 3y + y^2)$$

4. Піднесення до степеня

Піднесення виразу в дужках до степеня

Для піднесення виразу в дужках до степеня використовується біном Ньютона або формули скороченого множення.

Формула для біному Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C(n,k) \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Де $C(n,k) = n! / (k! \cdot (n-k)!)$ - це біноміальні коефіцієнти.

Приклади:

- $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$
- $(2a-b)^3 = (2a)^3 - 3(2a)^2b + 3(2a)b^2 - b^3 = 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$

Ділення многочлена на одночлен

При діленні многочлена на одночлен, кожен член многочлена окремо ділиться на одночлен

$$(a+b+c):d = a/d + b/d + c/d$$

Пр. $(6x + 9) : 3 = \frac{6x}{3} + \frac{9}{3} = 2x + 3$;

$$(8a^3 - 4a^2 + 12a) : 4a = \frac{8a^3}{4a} - \frac{4a^2}{4a} + \frac{12a}{4a} = 2a^2 - a + 3$$

Ділення многочлена на многочлен

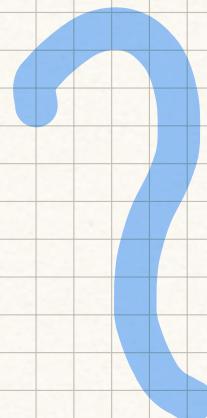
Ділення многочлена на многочлен

Це більш складна операція, яка виконується за допомогою алгоритму ділення многочленів (за методом кута).

Приклад:

Ділення $(x^2 + 5x + 6) \div (x + 2)$:

$$\begin{array}{r} x + 3 \\ \hline x+2) \quad x^2 + 5x + 6 \\ \quad \quad \quad x^2 + 2x \\ \hline \quad \quad \quad 3x + 6 \\ \quad \quad \quad 3x + 6 \\ \hline \quad \quad \quad 0 \end{array}$$



Отже, $(x^2 + 5x + 6) \div (x + 2) = x + 3$

6. Комбіновані приклади

1. $2[3 - (4 + 2)] = 2[3 - 6] = 2[-3] = -6$
2. $5 - 3[2 - (8 - 3)] = 5 - 3[2 - 5] = 5 - 3[-3] = 5 + 9 = 14$
3. $(2x + 3)^2 - (x - 1)(x + 2) = 4x^2 + 12x + 9 - (x^2 + x - 2) = 4x^2 + 12x + 9 - x^2 - x + 2 = 3x^2 + 11x + 11$
4. $-2[3(x - 1) - 2(x + 4)] = -2[3x - 3 - 2x - 8] = -2[x - 11] = -2x + 22$
5. $(3x^2 - 2x + 5)(x + 1) = 3x^3 + 3x^2 - 2x^2 - 2x + 5x + 5 = 3x^3 + x^2 + 3x + 5$

§ 1. Рівняння. Рівняння з однією змінною.

Вирази та їх перетворення

Рівняння та його розв'язки

Означення	Приклади
Рівняння – це рівність, яка містить змінну.	$3(x-4) = 24$, при $x=12$ $3(12-4) = 24$ $3 \cdot 8 = 24$ $24 = 24$ $x=12$ – розв'язок рівняння.
Розв'язок рівняння – це значення змінної, при якому рівняння перетворюється у правильну рівність.	
Розв'язати рівняння – це означає знайти його розв'язки або довести, що їх немає.	$3(x-4) = 24$, $x=12$.
Рівносильні рівняння – це рівняння, які мають одні і ті самі розв'язки.	$3x = 36$ і $3(x-4) = 24$; їх розв'язок $x=12$.

Деякі властивості рівнянь

У будь-якій частині рівняння можна звести подібні доданки. Якщо з однієї частини рівняння перенести доданки в іншу частину і при цьому змінити знаки доданків на протилежні, отримаємо рівняння, рівносильне даному. При діленні (множенні) обох частин рівняння на одне і те саме число, відмінне від нуля, отримаємо рівняння, рівносильне даному.	$3x - 4 + 5x = 36$ $3x + 5x = 36 + 4$ $8x = 4 + 36$ $8x = 40$.
	поділимо обидві частини рівняння $8x = 40$ на 8: $x = 5$ — це рівняння рівносильне $8x = 40$, їх розв'язок 5.

9

Лінійне рівняння

Означення	Приклади
Рівняння виду $ax = b$, де x — змінна, a і b — деякі числа, називається лінійним рівнянням.	$4 - 5x = 6 - 2(x+2)$, використовуючи властивості рівняння: $4 - 5x = 6 - 2x - 4$, $-5x + 2x = 6 - 4 - 4$, $-3x = -2$, $x = \frac{-2}{-3}$, $x = \frac{2}{3}$.

Розв'язування лінійних рівнянь

$ax + b = 0$; $ax = -b$.	$5x + 4 = 0$; $5x = -4$.
$a \neq 0$; $x = -\frac{b}{a}$ — єдиний розв'язок.	$x = -\frac{4}{5}$ — розв'язок.
$a = 0$; $0x = -b$ — немає розв'язків.	$0x = -10$ немає розв'язків -10 на 0 поділити неможливо.
$a = 0$; $b = 0$. $0 \cdot x = 0$ — нескінчена множина розв'язків.	$7x = 7x$, $7x - 7x = 0$, $0x = 0$, x — будь-яке число.

Види виразів

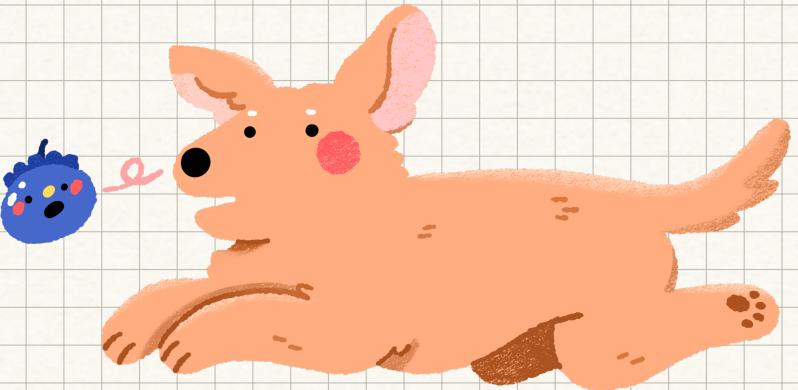
Типи квадратичних рівнянь з одним змінним

1. Лінійні рівняння

$$3x + 5 = 14$$

$$2x - 4 = 9$$

$$x : 4 + 6 = 10$$



2. Квадратичні рівняння

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$3x^2 - 12 = 0$$

$$x^2 - 9 = 0$$

3. Дробово-раціональні рівняння

$$(x+3) : (x-1) = 2$$

$$x : (x+5) = 3:5$$

4. Ірраціональні рівняння

$$\sqrt{x+3} = 5$$

$$\sqrt{2x-1} = x-3$$

5. Показникові рівняння

$$2^x = 8$$

$$3^{x+1} = 27$$

6. Логарифмічні рівняння

$$\log_2(x+3) = 4$$

$$\ln(x) = 2$$

7. Тригонометричні рівняння

$$\sin(x) = \frac{1}{2}$$

$$2\cos(x) + 1 = 0$$



Всі ці рівняння містять тільки одну змінну (x) і вимагають знайдення значення цієї змінної, при якому рівняння перетворюється на відповідь рівності.

Приклади додаткових властивостей рівнень

1. Властивість рівносильності при додаванні однакових виразів до обох частин

Якщо $a=b$ то $a+c=b+c$

Пр. $x+5=12$ то $x+5+3=12+3$ тобто $x+8=15$

2. Властивість рівносильності при відніманні однакових виразів від обох частин

Якщо $a=b$ то $a-c=b-c$

Пр. Якщо $2x=10$ то $2x-6=10-6$ тобто $2x-6=4$

3. Властивість рівносильності при множенні обох частин на нечількове число

Якщо $a=b$ і $c \neq 0$, то $a \cdot c = b \cdot c$

Пр. Якщо $x=7$ то $3x=3 \cdot 7$ тобто $3x=21$

4. Властивість рівносильності при діленні обох частин на нечількове число

Якщо $a=b$ і $c \neq 0$ то $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

Пр. Якщо $4x=20$ то $4x : 4 = 20 : 4$ тобто $x=5$

5. Властивість рівносильності при піднесені до степеня обох частин до степеня.

Якщо $a=b$, $a^n=b^n$ (з урахуванням знака обмежень.)

Пр. Якщо $x=3$, то $x^2=3^2$, тобто $x^2=9$

6. Властивість рівносильності при застосуванні однакових функцій до обох частин

Якщо $a=b$ то $f(a)=f(b)$ (з урахуванням області визначення фу.)

Якщо $x=8$ то $\sqrt{x}=\sqrt{8}$ тобто $\sqrt{x}=2\sqrt{2}$

7. Транзитивність рівностей

Якщо $a=b$ і $b=c$ то $a=c$

Пр. Якщо $x=y$ і $y=5$ то $x=5$



8. Симетричність рівності

Якщо $a=b$, то $b=a$

Пр. Якщо $3x=15$ то $15=3x$

Ці властивості є фундаментальними для розв'язання рівнень та становлення основи алгебраїчних перетворень.

Приклади тотожностей і застосування їх властивостей

Алгебраїчні тотожності

1. Формули скороченого множення:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 - Приклад: $(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 - Приклад: $(2x - 5)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
 - Приклад: $(x + 7)(x - 7) = x^2 - 49$

2. Розклад многочленів:

- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
 - Приклад: $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
 - Приклад: $27y^3 - 1 = 3^3y^3 - 1^3 = (3y - 1)(9y^2 + 3y + 1)$

Тригонометричні тотожності

Тригонометричні тотожності

1. Основні спiввiдношення:

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
 - Застосування: $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = (1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2 = 1/4 + 3/4 = 1$
 - $\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha (\cos\alpha \neq 0)$
 - Приклад: $\operatorname{tg} 45^\circ = \sin 45^\circ / \cos 45^\circ = (\sqrt{2}/2) / (\sqrt{2}/2) = 1$

2. Формули додавання:

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$
 - Приклад: $\sin(\pi/4 + \pi/6) = \sin(\pi/4) \cdot \cos(\pi/6) + \cos(\pi/4) \cdot \sin(\pi/6) = (\sqrt{2}/2) \cdot (\sqrt{3}/2) + (\sqrt{2}/2) \cdot (1/2) = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$
 - Приклад: $\cos(60^\circ + 30^\circ) = \cos 60^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 60^\circ \cdot \sin 30^\circ = (1/2) \cdot (\sqrt{3}/2) - (\sqrt{3}/2) \cdot (1/2) = 0$

Застосування властивостей тотожностей

Застосування властивостей тотожностей

1. Спрощення виразів:

- Вираз: $4x^2 - 9y^2$
- Застосування тотожності: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- Результат: $4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x + 3y)(2x - 3y)$

2. Розв'язування рівнянь:

- Рівняння: $\sin^2 x + \cos^2 x = 2$
- Застосування тотожності: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- Аналіз: $1 = 2$ (суперечність)
- Висновок: рівняння не має розв'язків

3. Обчислення без калькулятора:

- Обчислити: 101×99
- Застосування: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- $a = 100, b = 1: 101 \times 99 = (100 + 1)(100 - 1) = 100^2 - 1^2 = 10000 - 1 = 9999$

4. Доведення:

- Довести: $(a + b)^3 + (a - b)^3 = 2a(3a^2 + b^2)$
- Розкладаємо: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- Сума: $(a + b)^3 + (a - b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = 2a^3 + 6ab^2 = 2a(a^2 + 3b^2)$

Тотожності дозволяють спрощувати вирази, розв'язувати рівняння та доводити математичні твердження ефективно та елегантно.

Види виразів

Означення	Приклади
Вираз – це правило, що задає сукупність дій, які треба виконувати над значеннями змінних і сталих в певному порядку, щоб отримати значення цього виразу.	$\frac{11}{20} - \frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} - 8^2 ; 3x - 18y + 6 ;$ $\frac{11(y-2)}{13y} ; (a+b)c - ab .$
Числовий вираз – це вираз, що складається з чисел за допомогою знаків дій та дужок.	$(21-13)^2 - \frac{1}{5} .$
Вираз із змінними – це вираз, що складається із чисел і змінних за допомогою знаків дій і дужок.	$1,5x^2 - (28y - 127) : 3 .$
Підставляючи у вираз значення змінних, отримаємо числовий вираз . Знайшовши значення цього числового виразу, отримаємо значення виразу із змінною .	якщо $x = 2; y = 5,5 ,$ то $1,5x^2 - (28y - 127) : 3 =$ $= 1,5 \cdot 2^2 - (28 \cdot 5,5 - 127) \cdot 3 =$ $= 1,5 \cdot 4 - (154 - 127) \cdot 3 =$ $= 6 - 27 : 3 = 6 - 9 = -3 .$

Перетворення виразів

Означення	Приклади
Тотожність – це рівність, справедлива при всіх допустимих значеннях змінних, які входять до неї.	$3a - 4 + 5a = 8a - 4 .$
Тотожне перетворення виразу – це заміна одного виразу іншим, тотожно рівним йому.	$3x - 4 = x + 2$ і $2x = 6$ – тотожні рівності.

* Властивості арифметичних дій є тодіжностями використовуючись тодіжностями.

Відомі тотожності

Означення	Приклади
$a + b = b + a ; ab = ba$ переставна властивість.	$17 + 13 = 13 + 17 ; 5 \cdot 3 = 3 \cdot 5 .$
$(a + b) + c = a + (b + c) ; (ab)c = a(bc)$ сполучна властивість.	$(17 + 13) + 33 = 17 + (13 + 33) ;$ $(2 \cdot 8) \cdot 4 = 2 \cdot (8 \cdot 4) .$
$a(b + c) = ab + ac$ розподільна властивість.	$7 \cdot (11 + 13) = 7 \cdot 11 + 7 \cdot 13 .$

1. Формули скороченого множення:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ (різниця квадратів)
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

2. Тотожності з дробами:

- $\frac{(a/b) + (c/b)}{1} = \frac{(a+c)/b}{1}$
- $\frac{(a/b) - (c/b)}{1} = \frac{(a-c)/b}{1}$
- $\frac{(a/b) \cdot (c/d)}{1} = \frac{(ac)/(bd)}{1}$
- $\frac{(a/b) \div (c/d)}{1} = \frac{(a/b) \cdot (d/c)}{1} = \frac{(ad)/(bc)}{1}$

3. Тригонометричні тотожності:

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = 1/\cos^2\alpha$
- $\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = 1/\sin^2\alpha$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

4. Показникові та логарифмічні тотожності:

- $a^{(m+n)} = a^m \cdot a^n$
- $a^{(m-n)} = a^m / a^n$
- $(a^m)^n = a^{(m \cdot n)}$
- $\log_a(bc) = \log_a(b) + \log_a(c)$
- $\log_a(b/c) = \log_a(b) - \log_a(c)$
- $\log_a(b^n) = n \cdot \log_a(b)$

5. Біноміальна формула:

- $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C(n,k) \cdot a^{(n-k)} \cdot b^k$, де $C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Ці тотожності використовуютьс̄  я спрощення алгебраїчних виразів і розв'язування рівнянь.

Тотожність

Тотожність - це рівняння, яке виконується для всіх допустимих значень змінних. Інакше кажучи, ліва і права частини тотожності завжди рівні між собою, незалежно від значень змінних.

Приклади тотожностей:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $2(x + y) = 2x + 2y$

Рівносильність

Рівносильність (еквівалентність) стосується відношення між рівняннями. Два рівняння називаються рівносильними, якщо вони мають однакову множину розв'язків.

Приклад: рівняння $x^2 = 4$ та $|x| = 2$ є рівносильними, оскільки обидва мають розв'язки $x = 2$ або $x = -2$.

Інші важливі поняття

1. Область допустимих значень (ОДЗ) - множина значень змінних, при яких вираз має зміст.
2. Сторонні розв'язки - розв'язки, які з'являються при перетвореннях, але не задовольняють початкове рівняння.
3. Несумісні рівняння - рівняння, які не мають розв'язків.
4. Тотожні рівняння - рівняння, які виконуються при будь-яких значеннях змінних.
5. Параметричні рівняння - рівняння, що містять параметри, від значень яких залежить розв'язок.

Операції, що можуть порушити рівносильність

1. Піднесення обох частин рівняння до парного степеня
2. Логарифмування
3. Множення на вираз із змінною
4. Ділення на вираз із змінною

При виконанні таких перетворень потрібно обов'язково перевіряти отримані розв'язки підстановкою у вихідне рівняння.

Приклади застосування дистрибуційних властивостей

1. Зберігши скороченого множини

Пр. 1. Спростити вираз $(x+3)^2$

$$(x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

Пр. 2. Розкиніть на множники $x^2 - 25$

$$x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x+5)(x-5)$$

Пр. 3. Спростити $(2x-1)^3$

$$(2x-1)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2 \cdot 1 + 3(2x) \cdot 1^2 - 1^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$$

2. Діломістості з дробами

Пр. 1. Спростити $\left(\frac{3}{x}\right) + \left(\frac{5}{x}\right)$

$$\left(\frac{3}{x}\right) + \left(\frac{5}{x}\right) = \frac{3+5}{x} = \frac{8}{x}$$

Пр. 2. Обчислити $\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{9}{4}\right)$

$$\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{9}{4}\right) = \frac{(2 \cdot 9)}{(3 \cdot 4)} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$



3. Дистрибуційні властивості

Пр. 1. Поверти, що $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ при $\alpha = 30^\circ$

$$\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = (1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2 = 1/4 + 3/4 = 1$$

Пр. 2. Обчислити $\sin 45^\circ$ - за формулою $\sin(\alpha + \beta)$

$$\begin{aligned} \sin 45^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \\ &= (\sqrt{2}/2) \cdot (\sqrt{3}/2) + (\sqrt{2}/2) \cdot (1/2) = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4 \end{aligned}$$

4. Показникові та логарифмічні тотожності

Приклад 1: Спростити $2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8 = 256$

Приклад 2: Обчислити $\log_2(16)$ за властивостями логарифмів

$$\log_2(16) = \log_2(2^4) = 4 \cdot \log_2(2) = 4 \cdot 1 = 4$$

Приклад 3: Розв'язати рівняння $\log_3(x) + \log_3(x+3) = 1$

$$\log_3(x) + \log_3(x+3) = 1$$

$$\log_3(x \cdot (x+3)) = 1$$

$$x(x+3) = 3^1$$

$$x^2 + 3x = 3$$

$$x^2 + 3x - 3 = 0$$

$$x = (-3 + \sqrt{21})/2 \text{ або } x = (-3 - \sqrt{21})/2$$

Оскільки $x > 0$ (бо $\log_3(x)$ має бути визначеним), то $x = (-3 + \sqrt{21})/2 \approx 0.79$

5. Біноміальна формула

Приклад: Розкрити вираз $(x + 2)^4$

$$\begin{aligned}(x + 2)^4 &= C(4, 0) \cdot x^4 \cdot 2^0 + C(4, 1) \cdot x^3 \cdot 2^1 + \\&C(4, 2) \cdot x^2 \cdot 2^2 + C(4, 3) \cdot x^1 \cdot 2^3 + C(4, 4) \cdot x^0 \cdot 2^4 \\&= 1 \cdot x^4 \cdot 1 + 4 \cdot x^3 \cdot 2 + 6 \cdot x^2 \cdot 4 + 4 \cdot x \cdot 8 + 1 \cdot 1 \cdot 16 \\&= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16\end{aligned}$$

Практичні застосування

- У фізиці: Формули скороченого множення використовуються для обчислення кінетичної енергії ($\frac{1}{2}mv^2$) та інших фізичних величин.
- У геометрії: Тотожність $a^2 + b^2 = c^2$ застосовується в теоремі Піфагора.
- В інженерії: Тригонометричні тотожності застосовуються у розрахунках електричних кіл змінного струму.
- У комп’ютерних науках: Логарифмічні тотожності використовуються в аналітических алгоритмів для оцінки їхньої складності.

ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

Многочлени

$$\begin{aligned}a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \\(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\(a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \\(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\(a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

Властивості степенів

$$\begin{aligned}a^n \cdot a^m &= a^{n+m} \\(a^n)^m &= a^{nm} \\a^n b^n &= (ab)^n \\a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\\frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m} \\a^{1/n} &= \sqrt[n]{a}\end{aligned}$$

Арифметичною прогресією називають послідовність $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, до якого додається одне й те саме число d , яке називають різницею арифметичної прогресії:

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Кожний член арифметичної прогресії, починаючи з другого, дорівнює середньому арифметичному двох сусідніх членів:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Сума перших n членів арифметичної прогресії дорівнює середньому арифметичному першого і n -го членів цієї прогресії, помноженому на їх кількість:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Геометричною прогресією називають послідовність $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне й те саме число q ($q \neq 0, |q| \neq 1$), яке називають знаменником геометричної прогресії.

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, \text{ де } q \neq 0, q \neq 1$$

В геометричній прогресії n -ий член визначається формулою:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

де n - номер члена, b_n - n -ий член, b_1 - перший член, q - знаменник прогресії.

Суму n перших членів геометричної прогресії можна знайти за формулою:

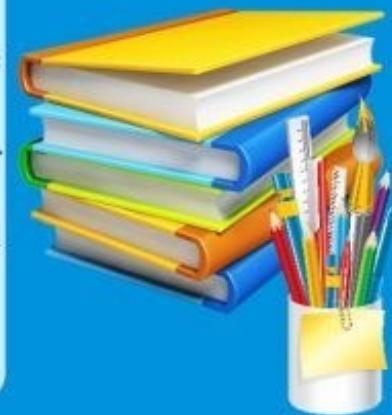
$$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Властивості коренів

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a \cdot b} &= \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \\\sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \\(\sqrt[n]{a})^k &= \sqrt[n]{a^k} \\\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[nm]{a} \\\sqrt[nk]{a^k} &= \sqrt[n]{a}\end{aligned}$$

Закони дій

$$\begin{aligned}a + b &= b + a \\(a + b) + c &= a + (b + c) \\a \cdot b &= b \cdot a \\(a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c) \\a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c\end{aligned}$$



ALGEBRA

PROPERTIES

ARITHMETIC PROPERTIES

ASSOCIATIVE $a(bc) = (ab)c$

COMMUTATIVE $a + b = b + a$ and $ab = ba$

DISTRIBUTIVE $a(b + c) = ab + ac$

ARITHMETIC OPERATIONS EXAMPLES

$$\begin{aligned} ab + ac &= a(b + c) & \frac{a}{b} - \frac{c}{d} &= \frac{ad - bc}{bd} \\ a\left(\frac{b}{c}\right) &= \frac{ab}{c} & \frac{a - b}{c - d} &= \frac{b - a}{d - c} \\ \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) &= \frac{a}{bc} & \frac{a + b}{c} &= \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \\ \frac{a}{c} &= \frac{ac}{bc} & \frac{ab + ac}{a} &= b + c, a \neq 0 \\ \left(\frac{b}{c}\right)^{-1} &= \frac{b}{c} & \left(\frac{a}{b}\right) &= \frac{ad}{bc} \\ \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{ad + bc}{bd} & \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} &= \frac{bc}{ad} \end{aligned}$$

QUADRATIC EQUATION

For the equation $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

RADICAL PROPERTIES

$a, b \geq 0$ for even n

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \text{ if } n \text{ is odd}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|, \text{ if } n \text{ is even}$$

LOGARITHM PROPERTIES

if $y = \log_b x$ then $b^y = x$

$$\log_b b = 1 \text{ and } \log_b 1 = 0$$

$$\log_b b^x = x$$

$$b^{\log_b x} = x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_b(x^r) = r \log_b x$$

$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$$

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$$

EXPONENT PROPERTIES

$$a^n a^m = a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = \frac{1}{a^{m-n}}$$

$$a^0 = 1, a \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\frac{1}{a^{-n}} = a^n$$

$$\frac{a}{a^m} = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = (a^n)^{\frac{1}{m}}$$

PROPERTIES OF INEQUALITIES

If $a < b$ then $a + c < b + c$ and $a - c < b - c$

If $a < b$ and $c > 0$ then $ac < bc$ and $a/c < b/c$

If $a < b$ and $c < 0$ then $ac > bc$ and $a/c > b/c$

PROPERTIES OF COMPLEX NUMBERS

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1$$

$$\sqrt{-a} = i\sqrt{a}, \quad a \geq 0$$

$$(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = a - c + (b - d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$$

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\overline{(a + bi)} = a - bi$$

$$\overline{(a + bi)(a + bi)} = |a + bi|^2$$

$$\frac{1}{(a + bi)} = \frac{(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

COMMON FACTORING EXAMPLES

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$$

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

$$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x + a)^3$$

$$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$$

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$$

$$x^{2n} - a^{2n} = (x^n - a^n)(x^n + a^n)$$

ABSOLUTE VALUE

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{if } a \geq 0 \\ -a, & \text{if } a < 0 \end{cases}$$

$$|a| = |-a|$$

$$|a| \geq 0$$

$$|ab| = |a||b|$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Розв'язання рівнянь

Пр. 3 $x - 2(8 - 5x) = 12x$

розділівася по дужкам

$$3x - 16 + 10x = 12x$$

перенесено додатки і змінило їх знаки на противоположні, зберегло подібні додатки

$$3x - 16 + 10x = 12x$$

$$3x + 10x - 12x = 16$$

$$x = 16$$

Пр. 2. $\frac{2x - 3}{4} + \frac{x + 2}{2} = \frac{3x + 3}{4}$

Розшукано ліву і праву частину на 4 - стійкий знаменник

$$\frac{4(2x - 3)}{4} + \frac{4(x + 2)}{2} = \frac{4(3x + 3)}{4}$$

Порівняно числовими має знаменник

$$2x - 3 + 2(x + 2) = 3x + 3$$

$$2x - 3 + 2x + 4 = 3x + 3$$

$$2x + 2x - 3x = 3 - 4 + 3; \quad x = 2$$

Пр. 3. $\frac{4x - 1}{2} - \frac{6x + 2}{3} = -\frac{1}{6}$

$$3(4x - 1) - 2(6x + 2) = -1$$

$$12x - 3 - 12x - 4 = -1$$

$$-7 = -1 \quad \text{є невідповідь}$$

Відповідь: немає розв'язків

Пр. 4. $3x + 2 + 4(2x - 1) = 11x - 2$

$$3x + 2 + 8x - 4 = 11x - 2$$

$$11x - 2 = 11x - 2$$

$$0 \cdot x = 0$$

Відповідь: будь-яке число.

Автомобіль проїхав за три дні 2299 км, причому за другий день він проїхав на 48 км більше, ніж за перший, а за третій – на 31 км більше, ніж за другий день. Скільки кілометрів проїжджає автомобіль кожного дня?

I спосіб

Чехом за перший день автомобіль проїхав x км, тоді за другий – $(x+48)$ км, а за третій день $(x+48+31) = (x+79)$

Складемо рівняння і розв'яжемо його

$$x + x + 48 + x + 79 = 2299$$

$$3x + 127 = 2299$$

$$3x = 2172; x = 724$$

I день – 724 км

II день – $724 + 48 = 772$ (км)

III день – $772 + 31 = 803$ (км)

Відповідь: разом за 3 дні за умовою – 2299 км.

I – 724 км; II – 772 км; III = 803 км

II спосіб

I \varnothing - ? x км

II \varnothing - ? $(x+48)$ км

III \varnothing - ? $(x+48+31)$ км

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 2299 \text{ км.}$$

$$x + x + 48 + x + 48 + 31 = 2299$$

$$3x = 2172$$

$$x = 724$$

Відповідь: 724 км, 772 км, 803 км;

I \varnothing – 724 км

II \varnothing – $724 + 48 = 772$ (км)

III \varnothing – $772 + 31 = 803$ (км)