

Квадратні корені та дійсні числа

6

§ 2. Квадратні корені. Дійсні числа

Квадратні корені та їх властивості

Означення	Приклади
Квадратним коренем з числа a називають число, квадрат якого дорівнює a .	$x^2 = 25$, $x_1 = 5; x_2 = -5$ — квадратні корені.
Арифметичним квадратним коренем з числа a називається невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a . Арифметичний квадратний корінь з числа a позначається знаком \sqrt{a} ; a називається підкореневим виразом. Дія, за допомогою якої знаходиться арифметичний квадратний корінь, називається здобуттям квадратного кореня.	$\sqrt{25} = 5$; 5 — арифметичний квадратний корінь. $\sqrt{81} = 9$.
Рівність $\sqrt{a} = b$ є правильною, якщо 1) $b \geq 0$; 2) $b^2 = a$.	
При $a < 0$ \sqrt{a} не має змісту, бо квадрат будь-якого числа невід'ємний.	$\sqrt{-25}$ не має змісту.
При будь-якому a , якщо \sqrt{a} має зміст, правильна рівність: $(\sqrt{a})^2 = a$.	$(\sqrt{9})^2 = 9$; $(\sqrt{7})^2 = 7$.

Властивості арифметичного квадратного кореня

Якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.	$\sqrt{4 \cdot 1} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{1} = 2 \cdot 1 = 2$; $\sqrt{16 \cdot x} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{x} = 4\sqrt{x}$.
Якщо $a \geq 0$, $b > 0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.	$\sqrt{\frac{36}{16}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{16}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.
Для будь-якого значення a правильна рівність: $\sqrt{a^2} = a $.	$\sqrt{(-3)^2} = -3 = 3$; $\sqrt{4y^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{y^2} = 2 y $.
Внесення множника з-під знака кореня.	$\sqrt{125} = \sqrt{3 \cdot 25} = 5\sqrt{3}$.
Внесення множника під знак кореня.	$10\sqrt{2} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{200}$.

Рівняння $x = a^2$

Якщо $a < 0$, то рівняння розв'язків не має;	$x^2 = -25$, розв'язків немає;
Якщо $a = 0$, то рівняння має один розв'язок $x = 0$;	$x^2 = 0$, $x = 0$;
Якщо $a > 0$, то рівняння має два розв'язки: $x_1 = \sqrt{a}$; $x_2 = -\sqrt{a}$.	$x^2 = 144$; $x_1 = 12; x_2 = -12$; $x^2 = 7$; $x_1 = \sqrt{7}; x_2 = -\sqrt{7}$.

4

Дійсні числа

Числа, які можна записати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, n — натуральне, називаються **раціональними**. Це всі цілі і дробові числа (додатні і від'ємні). Наприклад, $\frac{7}{13}, -\frac{3}{10}$. Всі інші числа носять назву **ірраціональних**, $\sqrt{5}, \sqrt{11}$. Раціональні та ірраціональні числа складають множину дійсних чисел.

N — множина натуральних чисел; Q — множина раціональних чисел;
 Z — множина цілих чисел; R — множина дійсних чисел.

Означення

Квадратний корінь з раціонального числа може бути:

- a) цілим числом;
 б) десятковим дробом;

в) нескінченно неперіодичним десятковим дробом або нескінченно періодичним десятковим дробом.

$$\sqrt{64} = 8; \sqrt{4} = 2;$$

$$\sqrt{0,36} = 0,6; \sqrt{0,0025} = 0,05;$$

$$\sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{4}{7} = 0,57142857\dots$$

$$\sqrt{\frac{81}{121}} = \frac{9}{11} = 0,818181\dots$$

Приклади

У всіх випадках, описаних вище, квадратний корінь є раціональним числом.

г) нескінченно неперіодичним десятковим дробом (в цьому випадку квадратні корені є ірраціональними числами).

$$\sqrt{2} = 1,4142\dots$$

$$\sqrt{7} = 2,645751\dots$$

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

1. Знайти корені.	1) $\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}$.	2) $\sqrt{x^2 - 2x + 1}, x > 1$.
Розв'язання.	$\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{3} - \sqrt{2} =$ $= \sqrt{3} - \sqrt{2},$ оскільки $\sqrt{3} > \sqrt{2}$.	$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} =$ $= x-1 = x-1,$ оскільки $(x-1) > 0$, якщо $x > 1$.
	Відповідь: $\sqrt{3} - \sqrt{2}$.	Відповідь: $x-1$.
2. Спростити.	$\sqrt{(3-m)^2}$.	
Розв'язання.	$\sqrt{(3-m)^2} = 3-m = \begin{cases} 3-m, \text{ якщо } 3-m > 0, m < 3 \\ m-3, \text{ якщо } m-3 > 0, m > 3 \\ 0, \text{ якщо } m-3 = 0, m = 3. \end{cases}$	
Відповідь:	$\begin{cases} 3-m, \text{ якщо } m < 3 \\ m-3, \text{ якщо } m > 3 \\ 0, \text{ якщо } m = 3. \end{cases}$	
3. Розкласти на множники.	1) $t^2 - 36$.	2) $9c^2 - 1$.
Розв'язання.	$t^2 - 36 = (t-6)(t+6)$.	$9c^2 - 1 = (3c-1)(3c+1)$.
Відповідь:	$(t-6)(t+6)$.	$(3c-1)(3c+1)$.
30	$x-16 = (\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)$. $(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)$.	

I - ірраціональні числа

R - дійсні числа (real numbers)

Q - раціональні числа

Ірраціональні числа є різницєю між множиною дійсних чис. R та раціо. чис. Q

$R \setminus Q$ або $R - Q$; $I = R - Q$

Ірраціональні = Дійсні - Раціональні

Множина	Символ	Опис	Приклади
Натуральні числа	\mathbb{N}	Числа для лічби: 1, 2, 3, ...	1, 2, 3, 42, 100, 1000
Цілі числа	\mathbb{Z}	Натуральні числа + їх протилежні + нуль	..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...
Раціональні числа	\mathbb{Q}	Числа, що можна записати як дріб p/q , де $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$	$1/2, -3/4, 0.25, 0.333\ldots, 2, -5$
Ірраціональні числа	I або $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	Числа, що НЕ можна записати як дріб цілих чисел	$\sqrt{2}, \pi, e, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{5}, \varphi$ (золотий перетин)
Дійсні числа	\mathbb{R}	Усі раціональні та ірраціональні числа разом	Усі числа на числовій прямій
Комплексні числа	\mathbb{C}	Числа виду $a + bi$, де $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$	$3 + 4i, -2i, 5, 1 + i$
Прості числа	P	Натуральні числа > 1 , що діляться лише на 1 та себе	2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23
Складені числа	—	Натуральні числа > 1 , що НЕ є простими	4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16
Парні числа	$2\mathbb{Z}$	Цілі числа, що діляться на 2	..., -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, ...
Непарні числа	$2\mathbb{Z} + 1$	Цілі числа, що НЕ діляться на 2	..., -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, ...
Додатні дійсні	\mathbb{R}^+	Дійсні числа більші за нуль	$0.1, 1, \pi, \sqrt{2}, 100, 0.001$
Від'ємні дійсні	\mathbb{R}^-	Дійсні числа менші за нуль	$-1, -\pi, -\sqrt{2}, -100, -0.001$

Взаємозв'язки множин

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Це означає: натуральні числа є підмножиною ціліх, цілі — підмножиною раціональних, раціональні — підмножиною дійсних, а дійсні — підмножиною комплексних чисел.

4. Розклади на множники.	1) $y^2 - 5$.	2) $\sqrt{21} - \sqrt{3}$.	3) $\sqrt{55} - \sqrt{5}$.
Розв'язання.	$y^2 - 5 = (y - \sqrt{5})(y + \sqrt{5})$.	$\sqrt{21} - \sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 7} - \sqrt{3} =$ $= \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} - \sqrt{3} =$ $= \sqrt{3}(\sqrt{7} - 1)$.	$\sqrt{55} - \sqrt{5} = \sqrt{11 \cdot 5} - \sqrt{5} =$ $= \sqrt{11} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}(\sqrt{11} - 1)$.
Відповідь:	$(y - \sqrt{5})(y + \sqrt{5})$.	$\sqrt{3}(\sqrt{7} - 1)$.	$\sqrt{5}(\sqrt{11} - 1)$.
5. Спростити вираз.	$\sqrt{(x-a)^2 + 4ax}$.		
Розв'язання.	$\sqrt{(x-a)^2 + 4ax} = \sqrt{(x^2 - 2ax + a^2) + 4ax} = \sqrt{x^2 + 2ax + a^2} =$ $= \sqrt{(x+a)^2} = x+a $.		
Відповідь:	$ x+a $.		
6. Скоротити дріб.	$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.		
Розв'язання.	$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x})^2 - 1} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$.		
Відповідь:	$\frac{1}{\sqrt{x}+1}$.		
7. Порівняти.	$2\sqrt{5} ? 4\sqrt{2}$.		
Розв'язання.	Внесемо множник під знак кореня: $2\sqrt{5} ? 4\sqrt{2}; \sqrt{4 \cdot 5} ? \sqrt{16 \cdot 2};$ $\sqrt{20} < \sqrt{32}$, отже $2\sqrt{5} < 4\sqrt{2}$.		
Відповідь:	$2\sqrt{5} < 4\sqrt{2}$.		
8. Розв'язати рівняння.	1) $x^2 = 36$.	2) $x^2 = 15$.	
Розв'язання.	$x^2 = 36; x_1 = 6; x_2 = -6$.	$x^2 = 15; x_1 = \sqrt{15}; x_2 = -\sqrt{15}$.	
Відповідь:	6; -6.	$\sqrt{15}; -\sqrt{15}$.	
	3) $4x^2 = 36$.	4) $3x^2 = 36$.	5) $3\sqrt{x} = 18$.
	$4x^2 = 36; x^2 = 9$ $x_1 = 3; x_2 = -3$.	$3x^2 = 36;$ $x^2 = 12;$ $x_1 = \sqrt{12}; x_2 = -\sqrt{12}$; $x_1 = \sqrt{4 \cdot 3}; x_2 = -\sqrt{4 \cdot 3}$; $x_1 = 2\sqrt{3}; x_2 = -2\sqrt{3}$.	$3\sqrt{x} = 18;$ $\sqrt{x} = 6;$ $(\sqrt{x})^2 = 6^2$; $x = 36$.
Відповідь:	3; -3.	$2\sqrt{3}; -2\sqrt{3}$.	36.

Властивості др. кореня

Якщо \sqrt{a} має зміст $a \geq 0$ тоді виконується рівність

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

$$(\sqrt{9})^2 = 9; (\sqrt{4})^2 = 4; (\sqrt{5})^2 = 5; (\sqrt{25})^2 = 25$$

Множення

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6; \quad \sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{5 \cdot 20} = \sqrt{100} = 10$$

Властивість $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ($a \geq 0; b \geq 0$)

$$\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{144} = 12 \text{ ма } \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12$$

$$\sqrt{25 \cdot 4} = \sqrt{100} = 10 \text{ ма } \sqrt{25} \cdot \sqrt{4} = 5 \cdot 2 = 10$$

$$\sqrt{36 \cdot 49} = \sqrt{1464} = 42 \text{ ма } \sqrt{36} \cdot \sqrt{49} = 6 \cdot 7 = 42$$

$$\sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4 \text{ ма } \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\sqrt{32 \cdot 2} = \sqrt{64} = 8; \quad \sqrt{18 \cdot 8} = \sqrt{144} = 12$$

$$\sqrt{45 \cdot 5} = \sqrt{225} = 15; \quad \sqrt{x^2 \cdot y^4} = |x| \cdot y^2 \quad (y \geq 0)$$

Ділення

$$\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{45}{3}} = \sqrt{25} = 5; \quad \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

Властивість $\sqrt{(a/b)} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$ ($a \geq 0, b > 0$)

$$\sqrt{25:9} = \sqrt{25} : \sqrt{9} = 5/3$$

$$\sqrt{64:16} = \sqrt{64} : \sqrt{16} = 8/4 = 2$$

$$\sqrt{100:25} = \sqrt{100} : \sqrt{25} = 10:5 = 2$$

$$\sqrt{81:36} = \sqrt{81} : \sqrt{36} = 9/6 = 3/2 = 1,5$$

Вимірювання множини з-під знака кореня

Ряд вимірювань множ. з-під знака кореня, використовуючи кореня $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, якщо $a \geq 0, b \geq 0$. Числовими підстав буває під коренем у формі з додатним, як один із членів - із негативним степенем, який можна вимістити.

$$1) \sqrt{18}. \text{ Представимо } 18 \text{ як добуток } 18 = 9 \cdot 2, \text{де } 9 \text{ є } 3^2$$

$$\text{тоді } \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$2) \sqrt[3]{54}. \quad 54 = 27 \cdot 2, \text{де } 27 = 3^3$$

$$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$$

$$3) \sqrt{12x^4}. \quad 12 = 4 \cdot 3, \text{де } 4 = 2^2 \text{ а } x^4 = (x^2)^2$$

$$\sqrt{12x^4} = \sqrt{4 \cdot 3 \cdot x^4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{x^4} \cdot \sqrt{3} = 2x^2 \cdot \sqrt{3} = 2x^2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$\sqrt{128} = \sqrt{64 \cdot 2} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

Правило: $\sqrt{(a^2 \cdot b)} = |a| \cdot \sqrt{b}$ (якщо $a \geq 0$)

$$\sqrt{12} = \sqrt{(4 \cdot 3)} = \sqrt{(2^2 \cdot 3)} = 2\sqrt{3}; \quad \sqrt{98} = \sqrt{(49 \cdot 2)} = \sqrt{(7^2 \cdot 2)} = 7\sqrt{2}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{(9 \cdot 2)} = \sqrt{(3^2 \cdot 2)} = 3\sqrt{2}; \quad \sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{10^2 \cdot 2} = 10\sqrt{2}$$

$$\sqrt{50} = \sqrt{(25 \cdot 2)} = \sqrt{(5^2 \cdot 2)} = 5\sqrt{2}; \quad 3\sqrt{28} = 3\sqrt{4 \cdot 7} = 3 \cdot 2\sqrt{7} = 6\sqrt{7}$$

$$\sqrt{75} = \sqrt{(25 \cdot 3)} = \sqrt{(5^2 \cdot 3)} = 5\sqrt{3}$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{4^2 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$$

Винесення множника під знак кореня

Щоб винести множник під знак кореня, використ. туз же висловлене у зверненні малюється: якщо множник стоять перед коренем, чого можна перемесити під корінь, врахувавши степінь кореня.

1) $2\sqrt{5}$. Щоб винести 2 під корінь, представимо 2 як $\sqrt{4}$. тоді:

$$2\sqrt{5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{20}$$

2) $3\sqrt{y}$. $3 = \sqrt{9}$, тому: $3\sqrt{y} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{9 \cdot y} = \sqrt{63}$

3) $x\sqrt{2}$. $x = \sqrt{x^2}$ тому: $x\sqrt{2} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{x^2 \cdot 2} = \sqrt{2x^2}$

4) $2\sqrt[3]{5}$. Розд кубічного кореня: $2 = \sqrt[3]{8}$, оскільки $8 = 2^3$;
 $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{8 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}$

Зauważення:

- При винесенні множника з-під кореня або під корінь важливо враховувати знак множника та область визначення (для квадратного кореня всі значення під коренем мають бути невід'ємними).
- Для вищих коренів (наприклад, кубічного) знак множника менш критичний, оскільки $\sqrt[3]{a}$ визначений для будь-якого a .

Правило: $\sqrt{a^2 \cdot b} = |a| \cdot \sqrt{b}$ (якщо $a \geq 0$)

Правило $a \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$ (якщо $a \geq 0$)

$$4\sqrt{3} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{48}$$

$$y\sqrt{2} = \sqrt{y^2 \cdot 2} = \sqrt{4y \cdot 2} = \sqrt{8y}$$

$$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$$

* Винесення
під коріння
 $x \rightarrow \sqrt{x^2}$

$$5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}$$

$$2\sqrt{4} = \sqrt{2^2 \cdot 4} = \sqrt{4 \cdot 4} = \sqrt{28}$$

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}$$

$$3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45}$$

$$4\sqrt{2} = \sqrt{4^2 \cdot 2} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{32}$$

$$5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}$$

$$6\sqrt{2} = \sqrt{6^2 \cdot 2} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{72}$$

$$y\sqrt{5} = \sqrt{y^2 \cdot 5} = \sqrt{49 \cdot 5} = \sqrt{245}$$

$$2\sqrt{4} = \sqrt{2^2 \cdot 4} = \sqrt{4 \cdot 4} = \sqrt{28}$$

$$10\sqrt{2} = \sqrt{10^2 \cdot 2} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{200}$$

Квадратний корінь
з квадратом числа

$$\sqrt{(-y)^2} = |-y| = y; \quad \sqrt{x^2} = |x|$$

$$\sqrt{(5^2)} = \sqrt{25} = 5 = |5| ; \quad \sqrt{9a^2} = 3|a|$$

$$\sqrt{((-y)^2)} = \sqrt{49} = y = |-y| \quad \sqrt{16b^4} = 4b^2 \quad (b \geq 0)$$

$$\sqrt{(-10)^2} = \sqrt{100} = 10 = |-10|$$

$$\sqrt{25x^2y^2} = 5|x||y| = 5|xy|$$

$$\sqrt{8^2} = \sqrt{64} = 8 = |8|$$

$$\sqrt{-4^2} = \sqrt{16} = 4 = |-4|$$