

Раціональні вирази

Раціональні вирази — це математичні вирази, які складаються з многочленів у чисельнику та знаменнику. Вони мають вигляд дробу, де і чисельник, і знаменник є многочленами. Раціональні вирази використовуються для представлення відношень між двома многочленами.

Види раціональних виразів

1. Прості раціональні вирази: Це вирази, в яких чисельник і знаменник є одночленами або простими многочленами. Наприклад:

$$\frac{x}{2}, \quad \frac{x+1}{x-1}$$

3. Складні раціональні вирази: Це вирази, в яких чисельник і/або знаменник є складнішими многочленами. Наприклад:

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}, \quad \frac{x^3 - 8}{x^2 + 4x + 4}$$

4. Раціональні функції: Це функції, які можна представити у вигляді раціонального виразу. Наприклад:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

Застосування раціональних виразів

1. Алгебра та аналіз: Раціональні вирази

використовуються для розв'язання рівнянь, спрощення виразів, інтегрування та диференціювання.

2. Фізика: Вони застосовуються для моделювання фізичних явищ, таких як рух тіл, електричні кола тощо.

3. Економіка: Раціональні вирази використовуються для моделювання економічних процесів, таких як попит і пропозиція, оптимізація ресурсів.

4. Інженерія: Вони застосовуються для проектування та аналізу систем, таких як механічні конструкції, електричні мережі тощо.

5. Комп'ютерні науки: Раціональні вирази використовуються в алгоритмах обчислень, комп'ютерній графіці та обробці даних.

Раціональні вирази є важливим інструментом у багатьох галузях науки та техніки, допомагаючи аналізувати та розв'язувати різноманітні задачі.

Чи можна вважати раціональні вирази складними дробами?

Раціональні вирази можна представити у вигляді складних дробів, але не всі раціональні вирази є складними дробами.

Визначення:

- **Раціональний вираз** — це вираз у вигляді дробу, чисельник і знаменник якого є многочленами.

Наприклад:

$$\frac{x^2 + 1}{x - 3}$$

- **Складний дріб** — це дріб, у якому чисельник або знаменник (або обидва) є також дробом.

Наприклад:

$$\frac{\frac{1}{x} + 2}{\frac{3}{x^2} - 1}$$

Висновок:

Раціональний вираз **може бути** складним дробом, якщо має у своєму складі інші дроби. Але **не кожен раціональний вираз — складний дріб**.

Наприклад:

- $\frac{x+1}{x-2}$ — раціональний вираз, але не складний дріб.
- $\frac{\frac{1}{x} + 2}{\frac{3}{x^2} - 1}$ — раціональний вираз і складний дріб.

Отже, складні дроби — це підвид раціональних виразів, але не тотожні ім.



§ 1. Раціональні вирази

Дробові раціональні вирази

Розрізняють цілі і дробові раціональні вирази. В цілому виразі немає ділення на змінну. В дробовому виразі є ділення на вираз, в який входить змінна.

Приклади

Правило

Значення змінних, при яких можливі всі математичні дії, записані в раціональному виразі, називаються допустимими значеннями змінних.

Щоб знайти допустимі значення раціонального дробу, треба прирівняти знаменник до нуля, знайти розв'язки отриманого рівняння, і з усіх чисел виключити розв'язки отриманого рівняння.

$\frac{4}{x-8}$ — у цього раціонального дробу при $x=8$ в знаменнику отримуємо $x-8=8-8=0$, тому допустимими значеннями даного дробу є всі числа, крім $x=8$.

Знайти допустимі значення виразу: $\frac{x}{3x-x^2}$:

Прирівняємо знаменник до нуля і розв'яжемо це рівняння: $3x-x^2=0$, винесемо x за дужки $x(3-x)=0$, добуток дорівнює нулю, якщо хоча б один із множників дорівнює нулю, тобто $x=0$, або $3-x=0$.

Допустимими значеннями змінної є всі числа, крім $x=0$ або $x=3$.

Відповідь: x — будь-яке число, крім 0 та 3.

Дії з раціональними дробами

Правило

Приклади

Скорочення дробів

Скоротити дріб — це означає поділити чисельник і знаменник дробу на спільний множник. Ця дія обумовлена основною властивістю дробу.

Для того, щоб скоротити дріб, треба:

- розкласти чисельник і знаменник дробу на множники;
- виділити спільний множник в чисельнику і знаменнику дробу;
- розділити чисельник і знаменник дробу на спільний множник.

Скоротити дріб: $\frac{3x-18x^2}{15x^2-90x^3}$.

- розділємо чисельник і знаменник дробу на множники, для цього винесемо за дужки спільний множник: $\frac{3x(1-6x)}{15x^2(1-6x)}$;
- виберемо спільний множник в чисельнику і знаменнику — це $3x(1-6x)$;
- скоротимо дріб на $3x(1-6x)$.

Відповідь: $\frac{1}{5x}$.

Додавання і віднімання дробів

Сума (різниця) двох дробів з однаковими знаменниками дорівнює дробу з тим самим знаменником і чисельником, який дорівнює сумі (різниці) чисельників вихідних дробів.

$$\frac{3a-4}{a-1} + \frac{7-4a}{a-1} = \frac{3a-4+7-4a}{a-1} = \frac{3-a}{a-1};$$

$$\begin{aligned} \frac{3a-4}{a-1} - \frac{7-4a}{a-1} &= \frac{3a-4-(7-4a)}{a-1} = \\ &= \frac{3a-4-7+4a}{a-1} = \frac{7a-11}{a-1}. \end{aligned}$$

При додаванні (відніманні) двох раціональних дробів з різними знаменниками треба звести дроби до спільного знаменника та виконати додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками.

$$\frac{5}{x-1} + \frac{4}{x+1} = \frac{5(x+1)}{x-1} + \frac{4(x-1)}{x+1} = \frac{5x+5+4x-4}{(x-1)(x+1)} = \frac{9x+1}{x^2-1};$$

$$\frac{1}{c} - \frac{3a}{c^2+3ac} = \frac{1(c+3a)}{c} - \frac{3a}{c(c+3a)} = \frac{c+3a-3a}{c(c+3a)} = \frac{1}{c+3a}.$$

Множення і ділення дробів

Добуток двох раціональних дробів дорівнює дробу, чисельник якого дорівнює добутку чисельників, а знаменник дорівнює добутку знаменників дробів, що помножуються.

Частка від ділення двох раціональних дробів дорівнює добутку дробу, діленого на дріб, обернений дільнику.

$$\frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{4x+1}{x-1} = \frac{(x-1)(4x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{(x-1)4(x+1)}{(x+1)(x-1)} = 4.$$

$$\frac{x}{a^2-4} : \frac{3x^2}{5a-10} = \frac{x(5a-10)}{(a^2-4)3x^2} =$$

$$= \frac{5x(a-2)}{(a-2)(a+2)3x^2} = \frac{5}{3x(a+2)}.$$

Зручніше перед множенням або діленням раціональних дробів розкласти, якщо це можливо, їх чисельники і знаменники на множники.

Піднесення раціональних дробів до степеня

Степінь раціонального дробу дорівнює дробу, у якого чисельник є степенем чисельника, а знаменник – степенем знаменника.

$$\left(\frac{x^2-9}{xy+3y} \right)^3 = \left(\frac{(x-3)(x+3)}{y(x+3)} \right)^3 = \left(\frac{x-3}{y} \right)^3 = \frac{(x-3)^3}{y^3};$$

$$\left(\frac{5ac^2}{3x^3} \right)^4 = \frac{\left(5ac^2 \right)^4}{\left(3x^3 \right)^4} = \frac{5^4 a^4 c^8}{3^4 x^{12}} = \frac{625a^4 c^8}{81x^{12}}.$$

Степінь з цілим показником

Множина цілих чисел (Z) – це множина, що складається з натуральних чисел, числа нуль і чисел протилежних натуральним.

Тому поняття степеня a^n , де n – натуральне число, можна розширити, якщо розглянути випадки $n = 0$ і n – ціле від'ємне число.

| Означення | Приклади |
|---|--|
| Якщо $a \neq 0$ і n – ціле від'ємне число, то $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ | $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125};$ $\left(\frac{1}{5} \right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5} \right)^3} = 5^3 = 125.$ |
| $a^0 = 1$. | $(1,25)^0 = 1; (-17)^0 = 1.$ |

Корисно запам'ятати

0^0 – не визначено.

$0^{-3} = \frac{1}{0^3}$ – не визначено

$$\left(\frac{a}{b} \right)^{-n} = \left(\frac{b}{a} \right)^n, (a \neq 0; b \neq 0)$$

$$\left(\frac{2}{7} \right)^{-3} = \left(\frac{7}{2} \right)^3; \left(\frac{1}{2} \right)^{-3} = \left(\frac{2}{1} \right)^3 = 2^3 = 8$$

Властивості степеня з цілим показником

| | | |
|--|--|---|
| $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ | $5^5 \cdot 5^{-7} = 5^{5-7} = 5^{-2}$ | $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ |
| $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, (a \neq 0)$ | $3^{-7} : 3^5 = 3^{-7-5} = 3^{-12}$ | $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n} (a \neq 0)$ |
| $(a^m)^n = a^{mn}$ | $(3^{-2})^3 = 3^{-6}; (3^2)^{-3} = 3^{-6}$ | $a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m;$ |
| $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ | $(2 \cdot 3)^{-3} = 2^{-3} \cdot 3^{-3}$ | $a^n \cdot b^n = (ab)^n$ |
| $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, (b \neq 0)$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$ | $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n (b \neq 0)$ |

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

1. Виконати дії.

Рекомендація. Подібні завдання краще робити за діями — зменшується можливість помилки!

Розв'язання.

$$\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{x+y} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \right) : \frac{(x+y)^2}{x^2 y^2}.$$

$$1) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy},$$

$$2) \frac{2}{x+y} \cdot \frac{x+y}{xy} = \frac{2(x+y)}{(x+y)xy} = \frac{2}{xy},$$

$$3) \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} = \frac{y^2 + x^2 + 2xy}{x^2 y^2} = \frac{(x+y)^2}{x^2 y^2},$$

$$4) \frac{(x+y)^2}{x^2 y^2} : \frac{(x+y)^2}{x^2 y^2} = 1.$$

Відповідь: 1.

2. Довести тотожність.

$$\frac{a - \frac{x^2}{a}}{x - \frac{a^2}{x}} = -\frac{x}{a}.$$

Доведення.

Спростимо ліву частину рівняння:

$$\frac{a - \frac{x^2}{a}}{x - \frac{a^2}{x}} = \left(a - \frac{x^2}{a} \right) : \left(x - \frac{a^2}{x} \right)$$

Чисельник:

$$1) a - \frac{x^2}{a} = \frac{a^2 - x^2}{a},$$

Знаменник:

$$2) x - \frac{a^2}{x} = \frac{x^2 - a^2}{x},$$

$$3) \frac{a^2 - x^2}{a} : \frac{x^2 - a^2}{x} = \frac{a^2 - x^2}{a} \cdot \frac{x}{x^2 - a^2} = \frac{(a^2 - x^2)x}{-a(a^2 - x^2)} = -\frac{x}{a},$$

тотожність доведена:

$$4) -\frac{x}{a} = -\frac{x}{a}$$

3. Скоротити дріб.

$$\frac{ax + ay - bx - by}{ax - ay - bx + by}$$

Розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники способом групування:

$$\frac{ax + ay - bx - by}{ax - ay - bx + by} = \frac{a(x+y) - b(x+y)}{a(x-y) - b(x-y)} = \frac{(x+y)(a-b)}{(x-y)(a-b)} = \frac{x+y}{x-y}$$

Відповідь: $\frac{x+y}{x-y}$.

4. Скоротити дріб.

$$\frac{a^2b + ab^2}{a^3 + b^3 + 3ab(a+b)}$$

Для того, щоб розкласти на множники, в чисельнику винесемо спільний множник за дужки, а в знаменнику застосуємо формулу суми кубів і винесемо спільний множник за дужки, тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{a^2b + ab^2}{a^3 + b^3 + 3ab(a+b)} &= \frac{ab(a+b)}{(a+b)(a^2 - ab + b^2) + 3ab(a+b)} = \\ &= \frac{ab(a+b)}{(a+b)(a^2 - ab + b^2 + 3ab)} = \frac{ab}{a^2 + 2ab + b^2} = \frac{ab}{(a+b)^2}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{ab}{(a+b)^2}$.

5. Скоротити дріб.

$$\frac{a^2 + 3a + 2}{a^2 + 6a + 5}$$

Для того, щоб розкласти чисельник і знаменник дробу на множники, застосуємо спосіб групування.

$$\text{Для цього подамо } a^2 + 3a + 2 \text{ як } a^2 + a + 2a + 2, \text{ аналогічно подамо знаменник: } a^2 + 6a + 5 = a^2 + a + 5a + 5, \text{ отримаємо:}$$

$$\frac{a^2 + 3a + 2}{a^2 + 6a + 5} = \frac{a^2 + a + 2a + 2}{a^2 + a + 5a + 5} = \frac{a(a+1) + 2(a+1)}{a(a+1) + 5(a+1)} = \frac{(a+1)(a+2)}{(a+1)(a+5)} = \frac{a+2}{a+5}.$$

Відповідь: $\frac{a+2}{a+5}$.

6. Спростити алгебраїчний вираз.

$$\frac{a^6 + 64}{a^4 - 4a^2 + 16} - \frac{a^4 - 16}{a^2 + 4}$$

Застосуємо формулу різниці кубів і різниці квадратів в чисельниках дробів:

$$\begin{aligned} \frac{a^6 + 64}{a^4 - 4a^2 + 16} - \frac{a^4 - 16}{a^2 + 4} &= \frac{(a^2)^3 + 4^3}{a^4 - 4a^2 + 16} - \frac{(a^2)^2 - 4^2}{a^2 + 4} = \\ &= \frac{(a^2 + 4)(a^4 - 4a^2 + 16)}{a^4 - 4a^2 + 16} - \frac{(a^2 - 4)(a^2 + 4)}{a^2 + 4} = \\ &= a^2 + 4 - (a^2 - 4) = a^2 + 4 - a^2 + 4 = 8. \end{aligned}$$

Відповідь: 8.

7. Спростити вираз.

Інколи для перетворення алгебраїчних виразів застосовують спосіб послідовних перетворень або одночасно декількох перетворень. Кажуть: «Спростимо "ланцюжком"». При користуванні цим методом, треба бути дуже уважним.

$$\begin{aligned} & \frac{x^3 + y^3}{x+y} : (x^2 - y^2) + \frac{2y}{x+y} - \frac{xy}{x^2 - y^2}, \\ & \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{x+y} \cdot \frac{1}{(x-y)(x+y)} + \\ & + \frac{2y(x-y) - xy}{(x+y)(x-y)} = \frac{x^2 - xy + y^2}{(x-y)(x+y)} + \frac{2xy - 2y^2 - xy}{(x-y)(x+y)} = \\ & = \frac{x^2 - xy + y^2 + xy - 2y^2}{(x-y)(x+y)} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2} = 1. \end{aligned}$$

Відповідь: 1.

8. Виконати дії

$$\frac{3^{-2} a^{-1} b}{27^{-1} x};$$

Використаємо означення степеня з від'ємним показником:

$$\frac{3^{-2} a^{-1} b}{27^{-1} x} = \frac{27b}{3^2 ax} = \frac{3^3 b}{3^2 ax} = \frac{3b}{ax}.$$

Відповідь: $\frac{3b}{ax}$.

9. Спростити вираз.

$$\left(\frac{2}{3} a^{-2} (b^3)^{-3} \right)^4.$$

$$\left(\frac{2}{3} a^{-2} (b^3)^{-3} \right)^4 = \frac{2^4}{3^4} a^{-8} b^{-36} = \frac{2^4}{3^4 a^8 b^{36}}.$$

Відповідь: $\frac{2^4}{3^4 a^8 b^{36}}$.

10. Подати вираз у вигляді дробу.

Використаємо формулу різниці квадратів і означення степеня з від'ємним показником:

$$(5a^{-1} + b^{-2}) \cdot (5a^{-1} - b^{-2}).$$

$$(5a^{-1} + b^{-2}) \cdot (5a^{-1} - b^{-2}) =$$

$$= (5a^{-1})^2 - (b^{-2})^2 = \left(\frac{5}{a}\right)^2 - \left(\frac{1}{b^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{25}{a^2} - \frac{1}{b^4} = \frac{25b^4 - a^2}{a^2 b^4}.$$

Відповідь: $\frac{25b^4 - a^2}{a^2 b^4}$.

тимдегемизүүлгүүн над раяном. Биргэдэд ий

Доддаваны

3 орнолор заламчилсаны

$$\frac{3}{8} + \frac{2}{3} = \frac{3+2}{8} = \frac{5}{8}; \quad \frac{8}{11} - \frac{3}{11} = \frac{8-3}{11} = \frac{5}{11}.$$

3 түзүүни заламчилсаны

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}; \quad \frac{5}{6} - \frac{1}{8} = \frac{20}{24} - \frac{3}{24} = \frac{17}{24}$$

Многождын

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}; \quad \frac{3}{7} \cdot \frac{14}{9} = \frac{3 \cdot 14}{7 \cdot 9} = \frac{42}{63} = \frac{2}{3}$$

Деление

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{8}; \quad \frac{4}{12} : \frac{14}{3} = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{14} = \frac{21}{168} = \frac{1}{8}$$

Сокращение

$$\frac{12}{18} = \frac{126}{186} = \frac{2}{3}; \quad \frac{24}{36} = \frac{2412}{3612} = \frac{2}{3}$$

Перетворение дробных чисел

$$2\frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{7}{3}; \quad \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4} \text{ (оскүүккөн } 11:4 = 2 \text{ осталса 3)}$$

Порівняння

$\frac{3}{4}$ і $\frac{5}{6}$ приведено до спільного знаменника $\frac{9}{12}$ і $\frac{10}{12}$ тому

$$\frac{3}{4} < \frac{5}{6}$$

1. Спрощення виразів:

- Знайдіть спільний знаменник для всіх дробів у виразі.
- Спростіть чисельник і знаменник, якщо це можливо, шляхом винесення спільних множників.

2. Додавання і віднімання:

- Знайдіть спільний знаменник для дробів.
- Перетворіть кожен дріб так, щоб вони мали спільний знаменник.
- Додайте або відніміть чисельники, залишаючи знаменник незмінним.
- Спростіть отриманий вираз, якщо це можливо.

3. Множення:

- Перемножте чисельники між собою і знаменники між собою.
- Спростіть отриманий вираз, якщо це можливо.

4. Ділення:

- Перетворіть ділення на множення, взявши обернений дріб до діленого.
- Виконайте множення, як описано вище.

1. Спрощення виразу $\frac{x^2 - 4}{x - 2} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$

2. Додавання $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}; \frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} = \frac{x+y}{xy}$ (xy - спільний знаменник)

3. Віднімання $\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}$

Зменшено спільний знаменник x^2

$$\frac{3x}{x^2} - \frac{2}{x^2} = \frac{3x - 2}{x^2}$$



4. Множення $\frac{2}{x} \cdot \frac{3}{y}$

Перемножуємо числових і знаменник

$$\frac{2 \cdot 3}{x \cdot y} = \frac{6}{xy}$$

5. Ділення $\frac{4}{x} : \frac{2}{y}$

Перетворюємо ділення на множення оберненим дробом

$$\frac{4}{x} \cdot \frac{y}{2} = \frac{4y}{2x} = \frac{2y}{x}$$

6. Піднесення до степеня $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}; \quad \left(\frac{x^2}{y^3}\right)^2 = \frac{(x^2)^2}{(y^3)^2} = \frac{x^4}{y^6}$$

$$\left(\frac{2x^3}{3y^2}\right)^3 = \frac{(2x^3)^3}{(3y^2)^3} = \frac{8x^9}{27y^6}; \quad \left(\frac{a^{-2}}{b^{-3}}\right)^2 = \frac{(a^{-2})^2}{(b^{-3})^2} = \frac{a^{-4}}{b^{-6}} = \frac{b^6}{a^4}$$

$$\left(\frac{a^{-1}}{b^{-2}}\right)^2 = \frac{(a^{-1})^2}{(b^{-2})^2} = \frac{a^{-2}}{b^{-4}} = \frac{b^4}{a^2}$$

Rational Expressions Actions

Піднесення до степеня виразу з різними змінними.

$$\left(\frac{x^2 y^3}{z^4}\right)^3 = \frac{(x^2 y^3)^3}{(z^4)^3} = \frac{x^6 y^9}{z^{12}}$$

П.г.с. виразу з шматниками та різм. змінними:

$$\left(\frac{2a^3 b^2}{3c^4 d^5}\right)^2 = \frac{(2a^3 b^2)^2}{(3c^4 d^5)^2} = \frac{4a^6 b^4}{9c^8 d^{10}}$$

П.г.с. виразу з більшим показ.

$$\left(\frac{x^{-1} y^2}{z^{-3} w^4}\right)^2 = \frac{(x^{-1} y^2)^2}{(z^{-3} w^4)^2} = \frac{x^{-2} y^4}{z^{-6} w^8} = \frac{y^4 z^6}{x^2 w^8}$$

П.г.с. виразу із різними змінними та складнішими показниками:

$$\left(\frac{a^2 b^{-3} c^4}{x^{-1} y^2 z^3}\right)^3 = \frac{(a^2 b^{-3} c^4)^3}{(x^{-1} y^2 z^3)^3} = \frac{a^6 b^{-9} c^{12}}{x^{-3} y^6 z^9}$$

2 вид

якщо було б

Складнішій вип. додаван.

$$\frac{x^2y}{z^3} + \frac{ab^2}{c^2} - \frac{mn^3}{p^4}$$

