Подібні доданки і правила дужок

Подібні доданки

Означення	Приклади
Подібними доданками називають доданки, які рівні, або які відрізняються лише коефіцієнтами.	$11a-2b+4a-12a+c-7b=$ $=(11+4-12)a+(-2-7)b+c=$ $=3a-9b+c.$
Звести подібні доданки — означає додати їх коефіцієнти, а буквену частину залишити незмінною.	

Дужки

Дужки у вирази вводяться для зміни звичайного порядку дій:	
1) піднесення до степеня (справа наліво); 2) множення або ділення (зліва направо); 3) додавання або віднімання (зліва направо).	$13+(7-3)^2=13+4^2=13+16=29;$ $(113+17):(123-121)=130:2=65;$ $(200-28)-(17+53)=172-70=102.$

Правила розкриття дужок

Якщо перед дужками стоїть знак «+», то дужки опускаються, а знаки доданків у дужках залишаються без змін.	$\ldots+(a+b)=\ldots+a+b.$
Якщо перед дужками стоїть знак «–», то дужки опускаються і знаки доданків змінюються на протилежні.	$\ldots-(a+b)=\ldots-a-b.$

Обчислити значення виразу

$(2+(3\cdot4):(5-1)=(2+12):4=14:4=3.5$

Розкриття дужок та спрощення виразу

$3(x+2)+4(2x-1)$

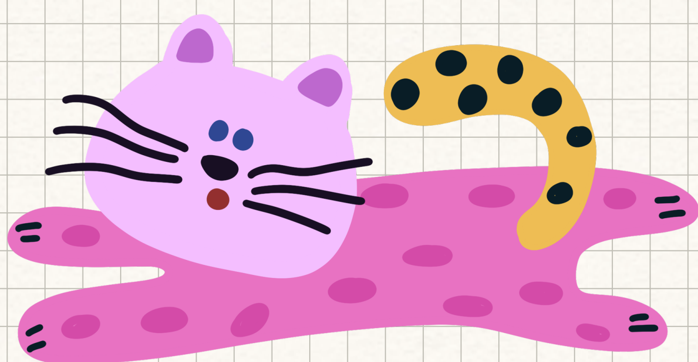
1) Розкриття дужок

$3(x+2)=3x+6$

$4(2x-1)=8x-4$

2) Об'єднаємо вирази

$3x+6+8x-4=11x+2$



Розкриття вкладених дужок

$2(3x+(4-x))$

1) Розкриття внутрішніх дужок

$2(3x+(4-x))=2(3x+4-x)=6x+8-2x=4x+8$

Розкриття дужок з піднесення до степеня

$(x+2)^2$

1) Використаємо формулу квадрата суми

$$(a+b)^2=a^2+b^2=a^2+2ab+b^2$$

2) Підставляємо значення

$x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2$

3) Спростимо

x^2+4x+4 $(5x^2+4???)$

Розкриття дужок з множенням многочленів

$(x+3)(x-2)=x(x-2)+3(x-2)$ ← Використ. розподіл 1) ???

2) Розкриваємо дужки $x^2-2x+3x-6$

3) Спростимо x^2+x-6

$(x+3)(x-2)=x(x-2)+3(x-2)=x^2-2x+3x-6=x^2+x-6$

Подібні доданки – це доданки, які мають однакові буквені частини. (коефіцієнти)

$3x+5x=8x$; $4m^2+3m^2=7m^2$

$7a+2a=9a$; $5xy+2xy=7xy$

$2a+5b+3a=5a+5b$; $7x^2+3xy+2x^2=9x^2+3xy$;

$4ab+2a+5ab=9ab+2a$

Розкриття дужок з подібними доданками

Пр.1 $3(2x+2y)-2(x-3y)$

1) Використовуємо розподільну властивість.

$3(2x+2y)-2(x-3y)=6x+15y-2x+6y=\underbrace{(6x-2x)+(15y+6y)}_{\text{групуємо подіб. доданки}}=\underbrace{4x+21y}_{\text{зводимо подібні дод.}}$

Пр.2

$5(a+2b)+2(3a-b)=5a+10b+6a-2b=(5a+6a)+(10b-2b)=11a+8b$

$5(a+2b)+2(3a-b)=$

$5a+10b+6a-2b=$

$(5a+6a)+(10b-2b)=$

$11a+8b$

Використання переставної та сполучної властив.

$4x+5y+3x+2y$

1) Використов. переставну властивість щоб згрупувати подібні доданки

розподільна ?

$4x+5y+3x+2y=7x+3x+5y+2y=(7+3)x+(5+2)=10x+7y$

Добуток сум з подібними доданками

$(2a+3b)(a-b)$

$(2a+3b)(a-b)=2a(a-b)+3b(a-b)=2a^2-2ab+3ab-3b^2=$

$2a^2+(-2ab+3ab)-3b^2=2a^2+ab-3b^2$;

$(2a+3b)(a-b)=$

$2a(a-b)+3b(a-b)=$ (розподільна власт.)

$2a^2-2ab+3ab-3b^2=$ (розподільна власт.)

$2a^2+(-2ab+3ab)-3b^2=$ групуємо подібні доданки

$2a^2+ab-3b^2$

Різниця квадратів з подібними доданками

$(5a+b)^2-(5a-b)^2;$

Формула різниці квадратів

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$(5a+b)^2-(5a-b)^2=$

$[(5a+b)+(5a-b)][(5a+b)-(5a-b)]=(10a)(2b)=20ab$

Піднесення до квадрату з використанням скороченого множ

Пр.1. $(3x+2y)^2$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(3x+2y)^2=\underline{(3x)^2+2(3x)(2y)+(2y)^2}=9x^2+12xy+4y^2$

Пр.2.

$2(3x-4y+z)+5(x+2y-3z)=$

$6x-8y+2z+5x+10y-15z=$

$(6x+5x)+(-8y+10y)+(2z-15z)=$

$11x+2y=13z$

Винесення спільного множника за дужки

Пр.1. $12a^2b + 9ab^2 - 3ab = 3ab(4a + 3b - 1)$

Пр.2. $4x^2y + 6xy^2 - 10xy = 2xy(2x + 3y - 5)$

Правила розкриття дужок

+ перед дужками не міняє знак в дужках при розкритті

$$+(a+b) = +a+b$$

Пр.1. $+(3+5) = +3+5 = 3+5 = 8$

$+(x+y) = +x+y = x+y$

$2+(3+4) = 2+3+4 = 9$

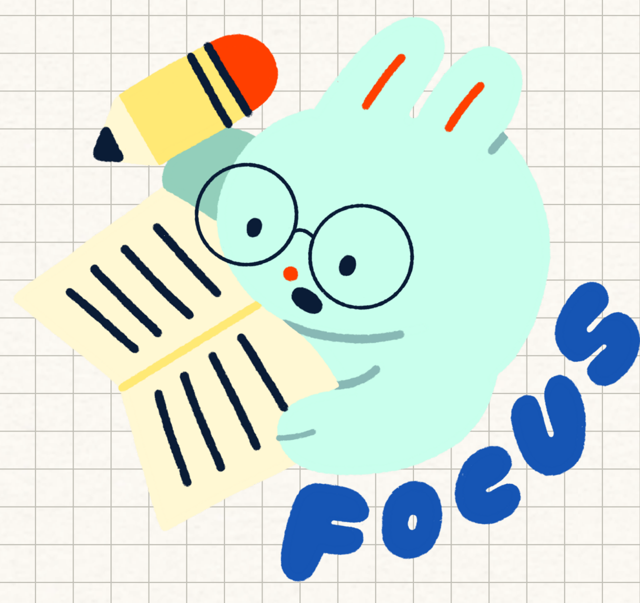
$m+(n+p) = m+n+p$

Правило розкриття дужок з відніманням

− перед дужками значить що при розкритті дужок всі знаки в дужках міняються на протилежні

$$-(a+b) = -a-b$$

$$-(a-b) = -a+b$$



Пр

$-(3+5) = -3-5 = -8$

$-(7-2) = -7+2 = -5$

$6-(4+3) = 6-4-3 = -1$

$x-(y+z) = x-y-z$

$-(x-y-z) = -x+y+z$

$-(3+2)=-5$; $4-(6+8+3)=-13$; $3-(4+2-1)=-2$

Множення одночлена на многочлен

При множенні одночлена на многочлен кожен член многочлена множиться на одночлен

$a(b+c+d)=ab+ac+ad$

Пр.1 $2(x+3)=2x+6$

$-5(a-b+c)=-5a+5b-5c$

$x(y+z-3)=xy+xz-3x$

$3a^2(a+2b-c)=3a^3+6a^2b-3a^2c$

Множення многочлена на многочлен (формула "кожний з кожним")

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

Пр.1 $(x+2)(x+3)=x^2+3x+2x+6=x^2+5x+6$

$(a-b)(a+b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2$

$(2x+1)(x-3)=2x^2-6x+x-3=2x^2-5x-3$

$(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3-x^2y+xy^2+x^2y-x^2y+y^2=x^3+y^3$

Формули скороченого множення

Квадрат суми $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

Пр.1 $(x+3)^2=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2=x^2+6x+9$

$(2a+b)^2=(2a)^2+2\cdot(2a)\cdot b+b^2=4a^2+4ab+b^2$

Квадрат різниці $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

Пр. $(x-5)^2=x^2-2\cdot x\cdot 5+5^2=x^2-10x+25$

$(3y-2)^2=(3y)^2-2\cdot(3y)\cdot 2+2^2=9y^2-12y+4$

Різниця квадратів $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$(x+3)(x-3)=x^2-3^2=x^2-9$

$(2y+5)(2y-5)=(2y)^2-5^2=4y^2-25$

Куб суми $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(x+1)^3=x^3+3x^2\cdot 1+3x\cdot 1^2+1^3=x^3+3x^2+3x+1$

Куб різниці $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$(y-2)^3=y^3-3y^2\cdot 2+3y\cdot 2^2-2^3=y^3-6y^2+12y-8$

Сума кубів $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$x^3+8=x^3+2^3=(x+2)(x^2-x\cdot 2+2^2)=(x+2)(x^2-2x+4)$

Різниця кубів $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$27-y^3=3^3-y^3=(3-y)(3^2+3\cdot y+y^2)=(3-y)(9+3y+y^2)$

4. Піднесення до степеня

Піднесення виразу в дужках до степеня

Для піднесення виразу в дужках до степеня використовується біном Ньютона або формули скороченого множення.

Формула для біному Ньютона:

$(a + b)^n = \Sigma(k=0 \text{ до } n)\ C(n,k) \cdot a^{n-k} \cdot b^k$

Де $C(n,k) = n! / (k! \cdot (n-k)!)$ - це біноміальні коефіцієнти.

Приклади:

- $(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$
- $(2a - b)^3 = (2a)^3 - 3(2a)^2b + 3(2a)b^2 - b^3 = 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$

Ділення многочлена на одночлен

При діленні многочлена на одночлен, кожен член многочлена окремо ділиться на одночлен

$$(a+b+c):d = a/d + b/d + c/d$$

Пр. $(6x+9):3 = \frac{6x}{3} + \frac{9}{3} = 2x+3;$

$$(8a^3 - 4a^2 + 12a):4a = \frac{8a^3}{4a} - \frac{4a^2}{4a} + \frac{12a}{4a} = 2a^2 - a + 3$$

Ділення многочлена на многочлен

Ділення многочлена на многочлен

Це більш складна операція, яка виконується за допомогою алгоритму ділення многочленів (за методом кута).

Приклад:

Ділення $(x^2 + 5x + 6) \div (x + 2)$:

```
          x + 3
        -------
x+2 ) x² + 5x + 6
      x² + 2x
      -------
           3x + 6
           3x + 6
           -------
                0
```

Отже, $(x^2 + 5x + 6) \div (x + 2) = x + 3$

6. Комбіновані приклади

1. $2[3 - (4 + 2)] = 2[3 - 6] = 2[-3] = -6$
2. $5 - 3[2 - (8 - 3)] = 5 - 3[2 - 5] = 5 - 3[-3] = 5 + 9 = 14$
3. $(2x + 3)^2 - (x - 1)(x + 2) = 4x^2 + 12x + 9 - (x^2 + x - 2) = 4x^2 + 12x + 9 - x^2 - x + 2 = 3x^2 + 11x + 11$
4. $-2[3(x - 1) - 2(x + 4)] = -2[3x - 3 - 2x - 8] = -2[x - 11] = -2x + 22$
5. $(3x^2 - 2x + 5)(x + 1) = 3x^3 + 3x^2 - 2x^2 - 2x + 5x + 5 = 3x^3 + x^2 + 3x + 5$

§1 Рівняння

§ 1. Рівняння. Рівняння з однією змінною. Вирази та їх перетворення

Рівняння та його розв'язки

Означення	Приклади
Рівняння – це рівність, яка містить змінну. **Розв'язок рівняння** – це значення змінної, при якому рівняння перетворюється у правильну рівність.	$3(x-4)=24$, при $x=12$ $3(12-4)=24$ $3\cdot 8=24$ $24=24$ $x=12$ – розв'язок рівняння.
Розв'язати рівняння – це означає знайти його розв'язки або довести, що їх немає.	$3(x-4)=24$, $x=12$.
Рівносильні рівняння – це рівняння, які мають одні і ті самі розв'язки.	$3x=36$ і $3(x-4)=24$; їх розв'язок $x=12$.

Деякі властивості рівнянь

У будь-якій частині рівняння можна звести подібні доданки. Якщо з однієї частини рівняння перенести доданки в іншу частину і при цьому змінити знаки доданків на протилежні, отримаємо рівняння, рівносильне даному.	$3x-4+5x=36$ $3x+5x=36+4$ $8x=4+36$ $8x=40$.
При діленні (множенні) обох частин рівняння на одне і те саме число, відмінне від нуля, отримаємо рівняння, рівносильне даному.	поділимо обидві частини рівняння $8x=40$ на 8: $x=5$ — це рівняння рівносильне $8x=40$, їх розв'язок 5.

Лінійне рівняння

Означення	Приклади
Рівняння виду $ax=b$, де x — змінна, a і b — деякі числа, називається **лінійним рівнянням**.	$4-5x=6-2(x+2)$, використовуючи властивості рівнянь: $4-5x=6-2x-4$, $\quad -5x+2x=6-4-4$, $-3x=-2$, $\quad x=\frac{-2}{-3}$, $\quad x=\frac{2}{3}$.

Розв'язування лінійних рівнянь

$ax+b=0$; $ax=-b$.	$5x+4=0$; $5x=-4$.
$a\neq 0$; $x=-\frac{b}{a}$ — єдиний розв'язок.	$x=-\frac{4}{5}$ — розв'язок.
$a=0$; $0x=-b$ — немає розв'язків.	$0x=-10$ немає розв'язків -10 на 0 поділити неможливо.
$a=0$; $b=0$. $0\cdot x=0$ — нескінченна множина розв'язків.	$7x=7x$, $7x-7x=0$, $0x=0$, $\quad x$ — будь-яке число.

Види виразів

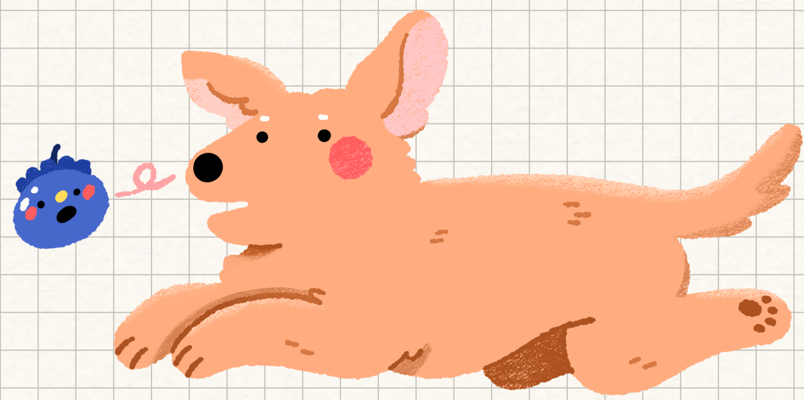
Приклади рівнянь з однією змінною

1. Лінійні рівняння

$3x+5=14$

$2x-y=9$

$x:4+6=10$



2. Квадратні рівняння

$x^2+5x+6=0$

$3x^2-12=0$

$x^2-9=0$

3. Дробово-раціональні рівняння

$(x+3):(x-1)=2$

$x:(x+5)=3:5$

4. Ірраціональні рівняння

$\sqrt{(x+3)}=5$

$\sqrt{(2x-1)}=x-3$

5. Показникові рівняння

$2^x=8$

$3^{x+1}=27$

6. Логарифмічні рівняння

$\log_2(x+3)=4$

$\ln(x)=2$

7. Тригонометричні рівняння

$\sin(x)=\frac{1}{2}$

$2\cos(x)+1=0$

Всі ці рівняння містять тільки одну змінну (x) і вимагають знаходження значення цієї змінної, при якому рівняння перетворюється на вірну рівність.

Приклади базових властивостей рівнянь

1. Властивість рівносильності при додаванні однакових виразів до обох частин

Якщо $a=b$ то $a+c=b+c$

Пр. $x+5=12$ то $x+5+3=12+3$ тобто $x+8=15$

2. Властивість рівносильності при відніманні однакових виразів від обох частин

Якщо $a=b$ то $a-c=b-c$

Пр. Якщо $2x=10$ то $2x-6=10-6$ тобто $2x-6=4$

3. Властивість рівносильності при множенні обох частин на ненульове число

Якщо $a=b$ і $c\neq 0$, то $a\cdot c=b\cdot c$

Пр. Якщо $x=7$ то $3x=3\cdot 7$ тобто $3x=21$

4. Властивість рівносильності при діленні обох частин на ненульове число

Якщо $a=b$ і $c\neq 0$ то $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$

Пр. Якщо $4x=20$ то $4x:4=20:4$ тобто $x=5$

5. Властивість рівносильності при піднесенні обох частин до степеня.

Якщо $a=b$, $a^n=b^n$ (з урахуванням деяких обмежень.)

Пр. Якщо $x=3$, то $x^2=3^2$, тобто $x^2=9$

6. Властивість рівносильності при застосуванні однаков. функції до обох частин

Якщо $a=b$ то $f(a)=f(b)$ (з урахув. області визначення фу.)

Якщо $x=8$ то $\sqrt{x}=\sqrt{8}$ тобто $\sqrt{x}=2\sqrt{2}$

7. Транзитивність рівностей

Якщо $a=b$ і $b=c$ то $a=c$

Пр. Якщо $x=y$ і $y=5$ то $x=5$

8. Симетричність рівності

Якщо $a=b$, то $b=a$

Пр. Якщо $3x=15$ то $15=3x$

Ці властивості є фундаментальними для розв'язання рівнянь та становлять основу алгебраїчних перетворень.

Лінійні рівняння

Це рівняння виду $ax+b=0$; x-змінна; a і b - числа

1. Простий випадок (без вільного члена)

$$3x=6;$$

Розв'язання: поділимо обидві частини на 3

$$x=\frac{6}{3}; \quad x=2; \quad \left[\frac{3}{3}x=\frac{6}{3}=1x=2; \ x=2\right]$$

2. Рівняння з вільним членом

$$2x+5=11$$

Розв'язання: 1. віднімемо 5 від обох частин.

$$2x=11-5$$

$$2x=6$$

2. поділимо на 2: $x=\frac{6}{2}; \ x=3$

Приклади тотожностей і застосування їх властивостей

Алгебраїчні тотожності

1. Формули скороченого множення:
   - $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
     - Приклад: $(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$
   - $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
     - Приклад: $(2x - 5)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$
   - $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
     - Приклад: $(x + 7)(x - 7) = x^2 - 49$
2. Розклад многочленів:
   - $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
     - Приклад: $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
   - $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
     - Приклад: $27y^3 - 1 = 3^3y^3 - 1^3 = (3y - 1)(9y^2 + 3y + 1)$

Тригонометричні тотожності

1. Основні співвідношення:
   - $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
     - Застосування: $\sin^2 30° + \cos^2 30° = (1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2 = 1/4 + 3/4 = 1$
   - $\text{tg}\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$ $(\cos\alpha \neq 0)$
     - Приклад: $\text{tg}45° = \sin 45°/\cos 45° = (\sqrt{2}/2)/(\sqrt{2}/2) = 1$
2. Формули додавання:
   - $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$
     - Приклад: $\sin(\pi/4 + \pi/6) = \sin(\pi/4) \cdot \cos(\pi/6) + \cos(\pi/4) \cdot \sin(\pi/6) =$

       $= (\sqrt{2}/2) \cdot (\sqrt{3}/2) + (\sqrt{2}/2) \cdot (1/2) = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$
   - $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$
     - Приклад: $\cos(60° + 30°) = \cos 60° \cdot \cos 30° - \sin 60° \cdot \sin 30° =$

       $= (1/2) \cdot (\sqrt{3}/2) - (\sqrt{3}/2) \cdot (1/2) = 0$

Застосування властивостей тотожностей

Застосування властивостей тотожностей

1. Спрощення виразів:
   - Вираз: $4x^2 - 9y^2$
   - Застосування тотожності: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
   - Результат: $4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x + 3y)(2x - 3y)$
2. Розв'язування рівнянь:
   - Рівняння: $\sin^2 x + \cos^2 x = 2$
   - Застосування тотожності: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
   - Аналіз: $1 = 2$ (суперечність)
   - Висновок: рівняння не має розв'язків
3. Обчислення без калькулятора:
   - Обчислити: 101×99
   - Застосування: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
   - $a = 100, b = 1$: $101 \times 99 = (100 + 1)(100 - 1) = 100^2 - 1^2 = 10000 - 1 = 9999$
4. Доведення:
   - Довести: $(a + b)^3 + (a - b)^3 = 2a(3a^2 + b^2)$
   - Розкладаємо: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
   - $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
   - Сума: $(a + b)^3 + (a - b)^3 = 2a^3 + 6ab^2 = 2a(a^2 + 3b^2)$

Тотожності дозволяють спрощувати вирази, розв'язувати рівняння та доводити математичні твердження ефективно та елегантно.

Види виразів

Означення	Приклади
Вираз – це правило, що задає сукупність дій, які треба виконувати над значеннями змінних і сталих в певному порядку, щоб отримати значення цього виразу.	$\frac{11}{20}-\frac{1}{2}+1\frac{1}{4}-8^2$; $3x-18y+6$; $\frac{11(y-2)}{13y}$; $(a+b)c-ab$.
Числовий вираз – це вираз, що складається з чисел за допомогою знаків дій та дужок.	$(21-13)^2-\frac{1}{5}$.
Вираз із змінними – це вираз, що складається із чисел і змінних за допомогою знаків дій і дужок.	$1,5x^2-(28y-127):3$.
Підставляючи у вираз значення змінних, отримаємо **числовий вираз**. Знайшовши значення цього числового виразу, отримаємо значення **виразу із змінною**.	якщо $x=2$; $y=5,5$, то $1,5x^2-(28y-127):3=$ $=1,5\cdot 2^2-(28\cdot 5,5-127)\cdot 3=$ $=1,5\cdot 4-(154-127)\cdot 3=$ $=6-27:3=6-9=-3$.

Перетворення виразів

Означення	Приклади
Тотожність – це рівність, справедлива при всіх допустимих значеннях змінних, які входять до неї.	$3a-4+5a=8a-4$.
Тотожне перетворення виразу – це заміна одного виразу іншим, тотожно рівним йому.	$3x-4=x+2$ і $2x=6$ – тотожні рівності.

* Властивості арифметичних дій є тотожностями виражаються тотожностями.

Відомі тотожності

Означення	Приклади
$a+b=b+a$; $ab=ba$ переставна властивість.	$17+13=13+17$; $5\cdot 3=3\cdot 5$.
$(a+b)+c=a+(b+c)$; $(ab)c=a(bc)$ сполучна властивість.	$(17+13)+33=17+(13+33)$; $(2\cdot 8)\cdot 4=2\cdot(8\cdot 4)$.
$a(b+c)=ab+ac$ розподільна властивість.	$7\cdot(11+13)=7\cdot 11+7\cdot 13$.

1. Формули скороченого множення:
    - $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
    - $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
    - $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ (різниця квадратів)
    - $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
    - $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
2. Тотожності з дробами:
    - $(a/b) + (c/b) = (a + c)/b$
    - $(a/b) - (c/b) = (a - c)/b$
    - $(a/b) \cdot (c/d) = (ac)/(bd)$
    - $(a/b) \div (c/d) = (a/b) \cdot (d/c) = (ad)/(bc)$
3. Тригонометричні тотожності:
    - $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
    - $tg^2\alpha + 1 = 1/\cos^2\alpha$
    - $ctg^2\alpha + 1 = 1/\sin^2\alpha$
    - $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$
    - $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$
4. Показникові та логарифмічні тотожності:
    - a^(m+n) = a^m · a^n
    - a^(m-n) = a^m / a^n
    - (a^m)^n = a^(m·n)
    - log_a(bc) = log_a(b) + log_a(c)
    - log_a(b/c) = log_a(b) - log_a(c)
    - log_a(b^n) = n·log_a(b)
5. Біноміальна формула:
    - (a + b)^n = ∑(k=0 до n) C(n,k) · a^(n-k) · b^k, де C(n,k) = n!/(k!(n-k)!)

Ці тотожності використовуються для спрощення алгебраїчних виразів і розв'язування рівнянь.

Тотожність

Тотожність - це рівняння, яке виконується для всіх допустимих значень змінних. Інакше кажучи, ліва і права частини тотожності завжди рівні між собою, незалежно від значень змінних.

Приклади тотожностей:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $2(x + y) = 2x + 2y$

Рівносильність

Рівносильність (еквівалентність) стосується відношення між рівняннями. Два рівняння називаються рівносильними, якщо вони мають однакову множину розв'язків.

Приклад: рівняння $x^2 = 4$ та $|x| = 2$ є рівносильними, оскільки обидва мають розв'язки $x = 2$ або $x = -2$.

Інші важливі поняття

1. Область допустимих значень (ОДЗ) - множина значень змінних, при яких вираз має зміст.
2. Сторонні розв'язки - розв'язки, які з'являються при перетвореннях, але не задовольняють початкове рівняння.
3. Несумісні рівняння - рівняння, які не мають розв'язків.
4. Тотожні рівняння - рівняння, які виконуються при будь-яких значеннях змінних.
5. Параметричні рівняння - рівняння, що містять параметри, від значень яких залежить розв'язок.

Операції, що можуть порушити рівносильність

1. Піднесення обох частин рівняння до парного степеня
2. Логарифмування
3. Множення на вираз із змінною
4. Ділення на вираз із змінною

При виконанні таких перетворень потрібно обов'язково перевіряти отримані розв'язки підстановкою у вихідне рівняння.

Приклади застосування алгебраїчних тотожностей

1. Формули скороченого множення

Пр.1. Спростити вираз $(x+3)^2$

$$(x+3)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

Пр.2. Розкладіть на множники x^2-25

$$x^2-25 = x^2-5^2 = (x+5)(x-5)$$

Пр.3. Спростити $(2x-1)^3$

$$(2x-1)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2\cdot 1 + 3(2x)\cdot 1^2 - 1^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$$

2. Тотожності з дробами

Пр.1. Спростити $\left(\frac{3}{x}\right)+\left(\frac{5}{x}\right)$

$$\left(\frac{3}{x}\right)+\left(\frac{5}{x}\right) = \frac{(3+5)}{x} = \frac{8}{x}$$

Пр.2. Обчислити $\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{9}{4}\right)$

$$\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{(2\cdot 9)}{(3\cdot 4)} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

3. Тригонометричні тотожності

Пр.1. Доведіть що $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ при $a = 30°$

$$\sin^2 30° + \cos^2 30° = (1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2 = 1/4 + 3/4 = 1$$

Пр.2. Обчислити $\sin 75°$ – за формулою $\sin(\alpha+\beta)$

$$\sin 75° = \sin(45°+30°) = \sin 45°\cdot\cos 30° + \cos 45°\cdot \sin 30° =$$
$$(\sqrt{2}/2)\cdot(\sqrt{3}/2) + (\sqrt{2}/2)\cdot(1/2) = (\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$$

4. Показникові та логарифмічні тотожності

Приклад 1: Спростити $2^5 \cdot 2^3$

$$2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8 = 256$$

Приклад 2: Обчислити $\log_2(16)$ за властивостями логарифмів

$$\log_2(16) = \log_2(2^4) = 4 \cdot \log_2(2) = 4 \cdot 1 = 4$$

Приклад 3: Розв'язати рівняння $\log_3(x) + \log_3(x+3) = 1$

$$\log_3(x) + \log_3(x+3) = 1$$
$$\log_3(x \cdot (x+3)) = 1$$
$$x(x+3) = 3^1$$
$$x^2 + 3x = 3$$
$$x^2 + 3x - 3 = 0$$
$$x = (-3 + \sqrt{21})/2 \text{ або } x = (-3 - \sqrt{21})/2$$

Оскільки $x > 0$ (бо $\log_3(x)$ має бути визначеним), то $x = (-3 + \sqrt{21})/2 \approx 0.79$

5. Біноміальна формула

Приклад: Розкрити вираз $(x + 2)^4$

$$(x + 2)^4 = C(4,0) \cdot x^4 \cdot 2^0 + C(4,1) \cdot x^3 \cdot 2^1 + C(4,2) \cdot x^2 \cdot 2^2 + C(4,3) \cdot x^1 \cdot 2^3 + C(4,4) \cdot x^0 \cdot 2^4$$
$$= 1 \cdot x^4 \cdot 1 + 4 \cdot x^3 \cdot 2 + 6 \cdot x^2 \cdot 4 + 4 \cdot x \cdot 8 + 1 \cdot 1 \cdot 16$$
$$= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$$

Практичні застосування

1. **У фізиці:** Формули скороченого множення використовуються для обчислення кінетичної енергії ($\frac{1}{2}mv^2$) та інших фізичних величин.
2. **У геометрії:** Тотожність $a^2 + b^2 = c^2$ застосовується в теоремі Піфагора.
3. **В інженерії:** Тригонометричні тотожності застосовуються у розрахунках електричних кіл змінного струму.
4. **У комп'ютерних науках:** Логарифмічні тотожності використовуються в аналізі алгоритмів для оцінки їхньої складності.

ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

Многочлени

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Властивості степенів

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$a^n b^n = (ab)^n$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

Властивості коренів

$$\sqrt[n]{a\,b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

$$\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$$

Закони дій

$$a+b=b+a$$

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

$$a \cdot b=b \cdot a$$

$$(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$$

$$a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$$

Арифметичною прогресією називають послідовність $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, до якого додається одне й те саме число d, яке називають різницею арифметичної прогресії:

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Кожний член арифметичної прогресії, починаючи з другого, дорівнює середньому арифметичному двох сусідніх членів:

$$a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$$

Сума перших n членів арифметичної прогресії дорівнює середньому арифметичному першого і n-го членів цієї прогресії, помноженому на їх кількість:

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$$

Геометричною прогресією називають послідовність $b_1, b_2, b_3, \ldots, B_n, \ldots$, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне й те саме число q ($q \neq 0$, $|q| \neq 1$), яке називають знаменником геометричної прогресії.

$$b_{n+1}=b_n \cdot q, \text{ де } q \neq 0,\ q \neq 1$$

В геометричної прогресії n-й член визначається формулою:

$$b_n=b_1 \cdot q^{n-1}$$

де n - номер члена, b_n - n-й член, b_1 - перший член, q - знаменник прогресії.

Суму n перших членів геометричної прогресії можна знайти за формулою:

$$S_n=b_1+b_2+\ldots+b_n=b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

ALGEBRA

PROPERTIES

ARITHMETIC PROPERTIES

ASSOCIATIVE $a(bc) = (ab)c$

COMMUTATIVE $a + b = b + a$ and $ab = ba$

DISTRIBUTIVE $a(b + c) = ab + ac$

ARITHMETIC OPERATIONS EXAMPLES

$ab + ac = a(b + c)$

$a\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{ab}{c}$

$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{bc}$

$\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{ac}{b}$

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$

$\frac{a - b}{c - d} = \frac{b - a}{d - c}$

$\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

$\frac{ab + ac}{a} = b + c, a \neq 0$

$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{ad}{bc}$

QUADRATIC EQUATION

For the equation $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EXPONENT PROPERTIES

$a^n a^m = a^{n+m}$

$(a^n)^m = a^{nm}$

$(ab)^n = a^n b^n$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = \frac{1}{a^{m-n}}$

$a^0 = 1, a \neq 0$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$\frac{1}{a^{-n}} = a^n$

$a^{\frac{n}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n = (a^n)^{\frac{1}{m}}$

PROPERTIES OF INEQUALITIES

If $a < b$ then $a + c < b + c$ and $a - c < b - c$

If $a < b$ and $c > 0$ then $ac < bc$ and $a/c < b/c$

If $a < b$ and $c < 0$ then $ac > bc$ and $a/c > b/c$

PROPERTIES OF COMPLEX NUMBERS

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$

$\sqrt{-a} = i\sqrt{a}, \quad a \geq 0$

$(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$

$(a + bi) - (c + di) = a - c + (b - d)i$

$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$

$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$

$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\overline{(a + bi)} = a - bi$

$\overline{(a + bi)}(a + bi) = |a + bi|^2$

$\frac{1}{(a + bi)} = \frac{(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$

RADICAL PROPERTIES

$a, b \geq 0$ for even n

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$\sqrt[n]{a^n} = a$, if n is odd

$\sqrt[n]{a^n} = |a|$, if n is even

LOGARITHM PROPERTIES

if $y = \log_b x$ then $b^y = x$

$\log_b b = 1$ and $\log_b 1 = 0$

$\log_b b^x = x$

$b^{\log_b x} = x$

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

$\log_b(x^r) = r \log_b x$

$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$

$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$

COMMON FACTORING EXAMPLES

$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$

$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$

$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$

$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x + a)^3$

$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$

$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$

$x^{2n} - a^{2n} = (x^n - a^n)(x^n + a^n)$

ABSOLUTE VALUE

$|a| = \begin{cases} a, & \text{if } a \geq 0 \\ -a, & \text{if } a < 0 \end{cases}$

$|a| = |-a|$

$|a| \geq 0$

$|ab| = |a||b|$

$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

$|a + b| \leq |a| + |b|$

Розв'язання рівнянь

Пр.1. $3x - 2(8 - 5x) = 12x$

розкриваємо дужки

$3x - 16 + 10x = 12x$

перенесемо доданки і змінимо їх знаки на протилежні, зведемо подібні доданки

$3x - 16 + 10x = 12x$

$3x + 10x - 12x = 16$

$x = 16$

Пр.2. $\frac{2x-3}{4} + \frac{x+2}{2} = \frac{3x+3}{4}$

Домножимо ліву і праву частину на 4 - спільний знаменник

$\frac{4(2x-3)}{4} + \frac{4(x+2)}{2} = \frac{4(3x+3)}{4}$

Поділимо чисельники на знаменники

$2x - 3 + 2(x+2) = 3x + 3$

$2x - 3 + 2x + 4 = 3x + 3$

$2x + 2x - 3x = 3 - 4 + 3$; $x = 2$

Пр.3. $\frac{4x-1}{2} - \frac{6x+2}{3} = -\frac{1}{6}$

$3(4x - 1) - 2(6x + 2) = -1$

$12x - 3 - 12x - 4 = -1$

$-7 = -1$ є неможливим Відповідь: немає розв'язків

Пр.4. $3x + 2 + 4(2x - 1) = 11x - 2$

$3x + 2 + 8x - 4 = 11x - 2$

$11x - 2 = 11x - 2$

$0 \cdot x = 0$

Відповідь: будь-яке число.

Автомобіль проїхав за три дні 2299 км, причому за другий день він проїхав на 48 км більше, ніж за перший, а за третій – на 31 км більше, ніж за другий день. Скільки кілометрів проїжджав автомобіль кожного дня?

I спосіб

Нехай за перший день автомобіль проїхав x км, тоді за другий – $(x+48)$ км, а за третій день $(x+48+31)=(x+79)$

Складемо рівняння і розв'яж його

$x+x+48+x+79=2299$

$3x+127=2299$

$3x=2172$; $x=724$

I день – 724 км

II день – $724+48=772$ (км)

III день – $772+31=803$ (км)

Відповідь: разом за 3 дні за умовою – 2299 км.

I – 724 км; II – 772 км; III = 803 км

II спосіб

$\left.\begin{array}{l} \text{I д – ? } x \text{ км} \\ \text{II д – ? } (x+48) \text{ км} \\ \text{III д – ? } (x+48+31) \text{ км} \end{array}\right\} 2299 \text{ км.}$

$x+x+48+x+48+31=2299$

$3x=2172$

$x=724$

I д – 724 км

II д – $724+48=772$ (км)

III д – $772+31=803$ (км)

Відповідь: 724 км, 772 км, 803 км;

За два дні турист пройшов 27,2 км, причому за другий день він пройшов 70% того, що було пройдено за перший день. Скільки кілометрів пройшов турист у перший день?

(Спосіб 1) Розв'язання

Нехай у перший день пройдено x км тоді у другий 70% від x. тобто $0,7x$ (км) а за два дні 27,2 км.

$x + 0,7x = 27,2$; $1,7x = 27,2$; $x = 16$

Відповідь: у перший день турист пройшов 16 км.

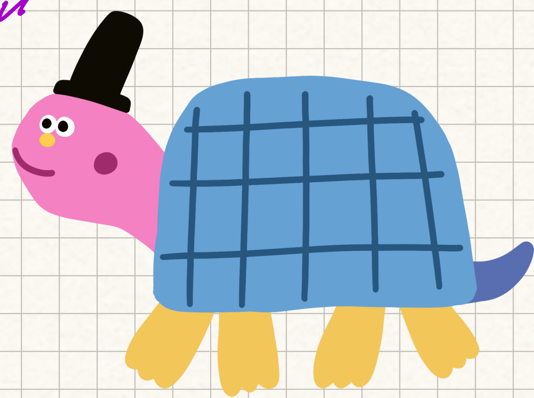
(Спосіб 2) Розв'язання

I день – ?
II день – ? 70%
27,2 км $70\% = 0,7$

I день – x км
II день – $0,7x$ км
27,2 км

$x + 0,7x = 27,2$

$x = 16$



Відповідь: 16 км.

§ 2. Цілі вирази

Степінь з натуральним показником. Одночлени

Означення	Приклади
$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{\text{n разів}}$ $\quad n \in N,\ n \geq 2$ $a^1 = a.$	$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$; $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$; $7^1 = 7$; $0^n = 0$; $1^n = 1$; $n \in N$; 0^0 – не визначено.

Властивості степенів

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$	$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, (a \neq 0)$	$\dfrac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$	$a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n} (a \neq 0)$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(2^5)^3 = 2^{15}$	$a^{mn} = \left(a^m\right)^n = \left(a^n\right)^m$;
$(ab)^n = a^n \cdot b^n$	$(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4 = 16 \cdot 81 = 1296$	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}, (b \neq 0)$	$\left(\dfrac{2}{3}\right)^5 = \dfrac{2^5}{3^5}$	$\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n (b \neq 0)$

Корисні зауваження

Будь-який степінь числа $a > 0$ є число додатне.	$5^{11} > 0$; $(1,2)^7 > 0$.
При піднесенні від'ємного числа до парного степеня в результаті отримуємо додатне, до непарного степеня – від'ємне.	$(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 3^4 = 81$; $(-3)^4 > 0$ $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$; $(-3)^3 < 0$.
Степені з від'ємними показниками визначені тільки для $a > 0$.	$0^{-3} = \dfrac{1}{0^3}$ — не визначено. $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8} > 0$.

Зручні способи обчислювань зі степенями

а) $33^2 = (11 \cdot 3)^2 = 11^2 \cdot 3^2 = 121 \cdot 9 = 1089$;	в) $\dfrac{7,5^3}{2,5^3} = \left(\dfrac{7,5}{2,5}\right)^3 = 3^3 = 9$;
б) $4^{2,5} = 4^2 \cdot 4^{\frac{1}{2}} = 16 \cdot \sqrt{4} = 16 \cdot 2 = 32$;	г) $4^3 \cdot \left(1\dfrac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{2}{7}\right)^3 = \left(4 \cdot \dfrac{7}{4} \cdot \dfrac{2}{7}\right)^3 = 2^3 = 8$.