

§ 6. Розв'язування лінійних рівнянь з двома змінними

Означення	Приклади
<p>Лінійним рівнянням з двома змінними x і y називається рівняння виду: $ax+by+c=0$, де x і y — змінні, a, b, c — деякі числа.</p> <p>Розв'язком рівняння з двома змінними називається будь-яка пара чисел $(x; y)$, яка перетворює рівняння на тотожність.</p> <p>Розв'язати рівняння з двома змінними — означає знайти всі пари чисел $(x; y)$, які є його розв'язком.</p>	<p>$3x+4y+5=0$ — лінійне рівняння.</p> <p>$x+2y=5$ — лінійне рівняння.</p> <p>Пара $(1; 2)$ — розв'язок рівняння, тобто при $x=1; y=2$, отримуємо $1+2\cdot 2=5$; $5=5$ — правильна рівність, пара $(2; 1)$ — не є розв'язком, оскільки при $x=2; y=1$ отримуємо $2+2\cdot 1=5$.</p> <p>$4=5$ не є тотожністю, тобто пара $(2; 1)$ не є розв'язком рівняння $x+2y=5$.</p>
<p>Множина точок, координати яких задовільняють рівняння $ax+by+c=0$,</p> <p>називається його графіком.</p> <p>Графіком рівняння $ax+by+c=0$, де a, b, c — деякі числа, є пряма.</p>	<p>1) Якщо коефіцієнт b при y не дорівнює нуллю, то y можна виразити через x:</p> $ax+by+c=0, by=-ax-c,$ $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ — це лінійне рівняння. <p>2) Якщо $b=0$, то $ax+by+c=0$ набуває вигляду:</p> $ax+0y+c=0, ax+c=0, \text{ при } a \neq 0, x=-\frac{c}{a}$ і графіком рівняння буде пряма, паралельна осі ординат, що перетинає вісь абсцис у точці $x=-\frac{c}{a}$. <p>3) При $a=0$ маємо:</p> $0x+by+c=0, by+c=0, y=-\frac{c}{b}$ — це пряма, паралельна осі абсцис, що перетинає вісь ординат в точці $y=-\frac{c}{b}$. <p>4) Якщо $a=0$ і $b=0$, то рівняння набуває вигляду $0x+0y+c=0$, тоді при $c=0$ рівність правильна при всіх x і y, при $c \neq 0$ — неправильна при будь-яких x та y, тобто при $a=b=c=0$ в цьому випадку графіком лінійного рівняння $ax+by+c=0$ є вся координатна площа.</p>

одне підбираєм друге шукам.

x і y має бути в різних зображеннях

* Лінійне рівняння з двома змінними $ax+by=c$
Цієї рівняння мають нескінченно багато розв'язків які утворюють пряму на координатній площині

Свойства лінійних рівнянь

- * Кернича запису: $ax+by=c$ де a, b, c - цілі числа і $a \neq 0$ - не додатковим чином однаково
- * Існує лише розв'язків на фізичну лінію рівняння з однією змін.
- * Геометричний зміст: Всі розв'язки рівняння утворюють пряму на координатній площині

Методи розв'язування

1. Підстановчий метод

Вибираємо значення для однієї змінної і обчислюємо відповідні значення для іншої

Приклад для рівняння $2x+3y=6$

- Якщо $x=0$, то $3y=6$, звідку $y=2$
- Якщо $x=3$, то $3y=0$, звідку $y=0$

Розв'язки: $(0, 2)$ $(3, 0)$ і будь-які інші точки на прямі

Загальний підхід до розв'язування лінійних рівнянь з двома невідомими

Для розв'язування лінійного рівняння виду $ax + by = c$, де є дві невідомі (x та y), потрібно:

1. Виразити одну змінну через іншу, наприклад:
 - Якщо $b \neq 0$, виразимо y через x : $y = (c - ax) / b$
 - Якщо $a \neq 0$, виразимо x через y : $x = (c - by) / a$
2. Записати розв'язок у вигляді формули, що зв'язує x та y
3. Розв'язком буде множина точок (x, y) , які задовольняють цю формулу. Геометрично це пряма на координатній площині.

Особливі випадки:

- Якщо $a = 0$ і $b = 0$, а $c \neq 0$, то рівняння не має розв'язків
- Якщо $a = 0$ і $b = 0$, а $c = 0$, то розв'язком буде вся координатна площа

Висновок

Лінійне рівняння з двома невідомими має безліч розв'язків, які утворюють пряму на координатній площині. Для однозначного визначення конкретного розв'язку потрібна ще одна умова (ще одне рівняння), що приводить до системи лінійних рівнянь.

Графічно розв'язок лінійного рівняння з двома невідомими можна представити як множину точок, що утворюють пряму лінію на координатній площині.

2. Метод через видалення змінної

Видаласямо одну змінну через іншу

Деліть рівняння $2x + 3y = 6$



Видалимо y через x : $3y = 6 - 2x$, звідки $y = (6 - 2x) / 3$

І тепер потрібно знайти y для будь-якого значення x

$y = (6 - 2x) / 3 = 2 - (2/3)x$. Знайдемо декілька точок, що належать цій прямій

Якщо $x = 0$, то $y = 2$

Якщо $x = 3$, то $y = 0$

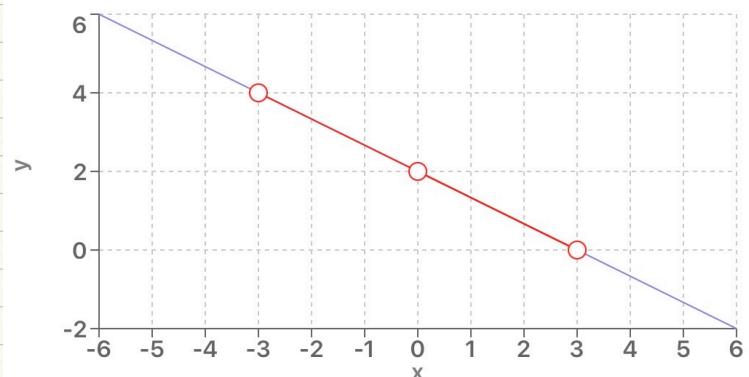
Якщо $x = -3$, то $y = 4$

Пояснення рівняння: $2x + 3y = 6$

Виражено відносно y : $y = (6 - 2x) / 3$

- Лінійне рівняння $2x + 3y = 6$ має нескінченно багато розв'язків.
- Кожна точка на прямій є розв'язком рівняння.
- Наприклад, точки $(0, 2)$ і $(3, 0)$ є розв'язками цього рівняння.
- Щоб знайти y для будь-якого x , використовуйте формулу: $y = (6 - 2x) / 3$

Графік рівняння $2x + 3y = 6$



(0, 2): $x = 0, y = 2$

(3, 0): $x = 3, y = 0$

(-3, 4): $x = -3, y = 4$

Приміра №2

$x - 2y = 4$ Видалимо y через x : $y = (x - 4) / 2$

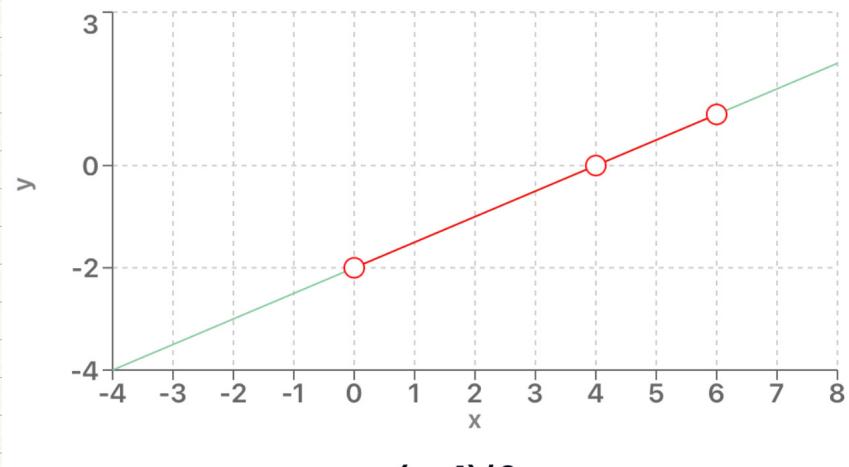
Знайдемо декілька точок разом з ними

Якщо $x = 0$ то $y = -2$

Якщо $x = 4$ то $y = 0$

Якщо $x = 6$ то $y = 1$

Графік рівняння $x - 2y = 4$



(0, -2): $x = 0, y = -2$

(4, 0): $x = 4, y = 0$

(6, 1): $x = 6, y = 1$

Лекція 3

$$5x - 4y = 20 \quad \text{Виразили } y \text{ через } x \quad y = (5x - 20)/4 = 5x/4 - 5$$

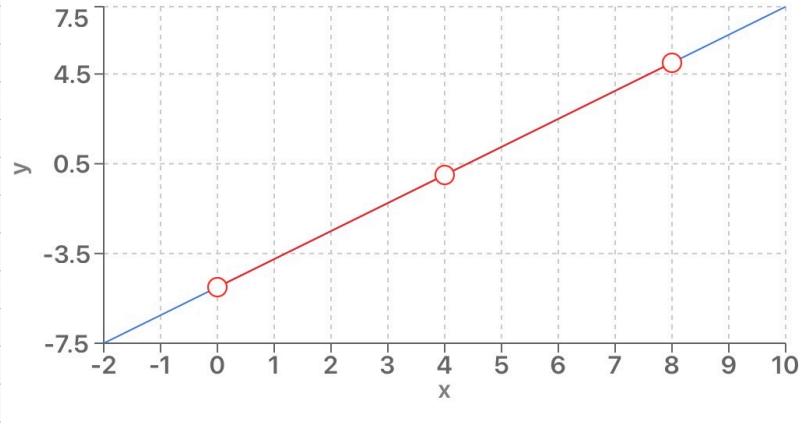
Знайдемо декілька точок побудову:

Якщо $x=0$, то $y = -5$

Якщо $x=4$, то $y = 0$

Якщо $x=8$, то $y=5$

Графік рівняння $5x - 4y = 20$



3. Метод перехоплення



Знайдемо точки перетину прямої з осями

координат: Для лівий осі $2x + 2y = 6$

Перетин з віссю x ($y=0$), $2x = 6$ звідки $x = 3$

Перетин з віссю y ($x=0$), $3y = 6$ звідки $y=2$

Слідчо, прямій проходить через точки $(3, 0)$ і $(0, 2)$.

Індукція утворює

мінімальне рівняння з двома дійністями

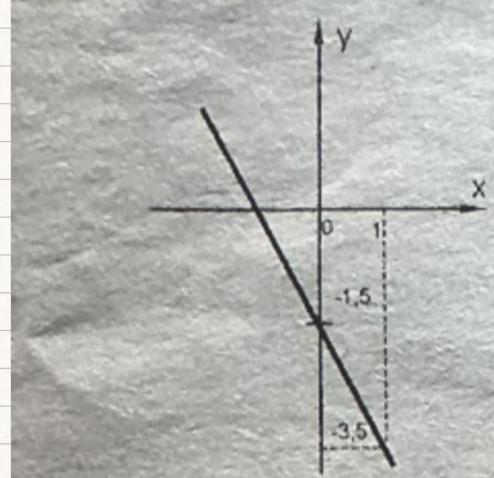
Приклад 1

Побудувати графік рівняння: $4x + 2y + 3 = 0$

Остільки $a \neq 0; b \neq 0; c \neq 0$, то графіком рівняння є прямі, які можна побудувати за допомогою двох точок:

$$x=0; x=1; y = -1,5; \text{ та } y = -3,5$$

Розв'язання.

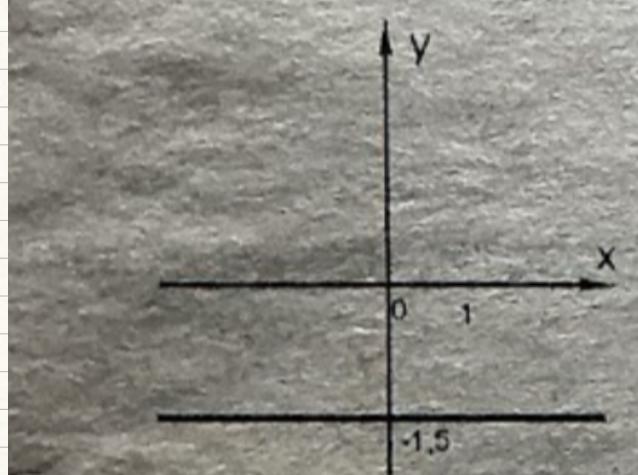


Приклад 2

Побудувати графік рівняння: $0x + 2y + 3 = 0$

Остільки $a=0$; тоді $2y = -3$; $y = -\frac{3}{2}$ - це прямі, паралельні до осі абсцис, що проходять через точку з координатами тими $(0; -\frac{3}{2})$

Розв'язання.

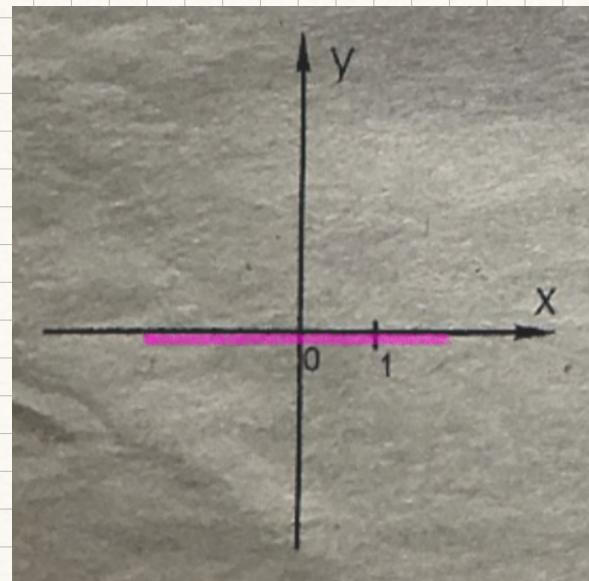


Приклад 3

Побудувати графік рівняння: $x + 0y + 0 = 0$

Оскільки $b=0$ і $c=0$ то $x=0$ - це пряма перпендикулярна осі абсцис, і є віссю ординат.

Це те саме що графік рівняння $x=0$



Який найпопулярніший ресурс для побудови графіків по лінійним рівнянням

Для побудови графіків по лінійним рівнянням одним з найпопулярніших ресурсів є Desmos (desmos.com). Це безкоштовний онлайн-калькулятор та графічний інструмент, який дозволяє легко будувати графіки лінійних рівнянь та виконувати математичні обчислення.

Інші популярні ресурси:

- GeoGebra - потужний математичний інструмент, який поєднує геометрію, алгебру та обчислення
- Wolfram Alpha - обчислювальна платформа знань, яка також візуалізує лінійні рівняння
- Microsoft Excel або Google Таблиці - для простих графіків на основі табличних даних
- Python з бібліотеками matplotlib або plotly - для програмного створення графіків

Desmos особливо популярний завдяки своєму інтуїтивному інтерфейсу, можливості миттєво побачити зміни в графіку при коригуванні рівняння, та хорошій підтримці української мови.

§ 7. Системи лінійних рівнянь з двома змінними

Означення	Приклади
<p>Системою рівнянь називаються два або декілька рівнянь, у яких потрібно знайти всі спільні розв'язки.</p> <p>Рівняння системи записуються стовпчиком і об'єднуються фігурною дужкою.</p> <p>Система рівнянь називається лінійною, якщо всі рівняння, що входять до системи, є лінійними.</p> <p>Систему двох лінійних рівнянь з двома змінними записують у такому вигляді:</p> $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 3y = 9, \\ 3x + 2y = 7. \end{cases}$ <p>Розв'язками такої системи рівнянь є множина упорядкованих пар чисел $(x; y)$.</p> <p>Пара чисел $(3; -1)$ є розв'язком системи</p> $\begin{cases} 2x - 3y = 9, \\ 3x + 2y = 7. \end{cases}$
<p>Розв'язати систему рівнянь — означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.</p> <p>Якщо система має скінченне число розв'язків, то вона називається визначеною.</p> <p>Якщо система має нескінченну множину розв'язків, то система називається невизначеною.</p> <p>Дві системи називаються рівносильними, якщо вони мають однакову множину розв'язків.</p>	
<p>Якщо система із n лінійних рівнянь містить n невідомих, то можливі такі три випадки:</p> <ul style="list-style-type: none"> — система не має розв'язків; — система має тільки один розв'язок; — система має нескінченно багато розв'язків. <p>Система</p> $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$	<p>1) $\begin{cases} 3x - 4y = 15, \\ 6x - 8y = 11. \end{cases}$</p> $\frac{3}{6} = \frac{-4}{-8} \neq \frac{15}{11} \quad \text{розв'язків немає};$ <p>2) $\begin{cases} 3x - 4y = 13, \\ x + y = 9. \end{cases}$</p> $\frac{3}{1} \neq -\frac{4}{1}, \quad \text{єдиний розв'язок } (7; 2);$ <p>3) $\begin{cases} 3x - 4y = 15, \\ 6x - 8y = 30. \end{cases}$</p> $\frac{3}{6} = \frac{-4}{-8} = \frac{15}{30}, \quad \text{універсальний розв'язок } (5; 0).$
<p>Не має розв'язків, якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.</p> <p>Має єдиний розв'язок, якщо $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.</p> <p>Має нескінченну число розв'язків, якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.</p>	

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

Типи систем		Приклади
1) Жодної точки, жодної точки.	$\begin{cases} 0x + 0y = 1, \\ 0x + 0y = 2. \end{cases}$	Система не має розв'язків.
2) Вся площаина, жодної точки.	$\begin{cases} 0x + 0y = 0, \\ 0x + 0y = -1. \end{cases}$	Система не має розв'язків.
3) Вся площаина, вся площаина.	$\begin{cases} 0x + 0y = 0, \\ 0x + 0y = 0. \end{cases}$	Будь-яка пара чисел – розв'язок системи
4) Жодної точки, пряма.	$\begin{cases} 0x + 0y = 6, \\ 2x + 3y = 5. \end{cases}$	Система не має розв'язків.
5) Вся площаина, пряма.	$\begin{cases} 0x + 0y = 0, \\ 2x + 7y = 5. \end{cases}$	Розв'язок системи – координати будь-якої точки прямої.
6) Дві прямі, що перетинаються.	$\begin{cases} x + y = 0, \\ x + 3y = 4. \end{cases}$	Єдиний розв'язок – координати точки перетину прямої.
7) Дві паралельні прямі.	$\begin{cases} x + y = 0, \\ x + y = 1. \end{cases}$	Система не має розв'язків.
8) Дві прямі, які співпадають.	$\begin{cases} x + y = 0, \\ 2x + 2y = 0. \end{cases}$	Координати будь-якої точки прямої є розв'язком системи.

Способи розв'язання систем

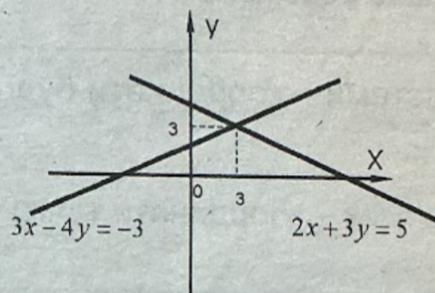
Спосіб підстановки

Розв'язати систему рівнянь:	$\begin{cases} x + 3y = 15, \\ 3x - 4y = 6. \end{cases}$
Розв'язання. Виразимо з першого рівняння змінну $x = 15 - 3y$ і підставимо в друге рівняння, а друге рівняння системи залишимо без змін, отримаємо систему, рівносильну даній.	$\begin{cases} x = 15 - 3y, \\ 3(15 - 3y) - 4y = 6. \end{cases}$
Розв'яжемо друге рівняння системи:	$\begin{aligned} 45 - 9y - 4y &= 6; \\ -13y &= 6 - 45; \\ -13y &= -39; \\ y &= 3. \end{aligned}$
Підставимо отримане значення змінної y в перше рівняння системи:	$\begin{cases} x = 15 - 3 \cdot 3, \\ y = 3. \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6, \\ y = 3. \end{cases}$
Відповідь: $(6; 3)$.	

Графічний спосіб

Для розв'язання системи графічним способом будують графіки всіх рівнянь, які входять в систему. Координати точок перетину є розв'язком цієї системи.

Графічний спосіб є зручним для знайдення числа розв'язків системи (тобто скільки точок перетину графіків, стільки розв'язків має система), але незручний при обчисленні координат точок (тобто значення координат можна отримати лише наближені).



Розв'язати систему рівнянь.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 15, \\ 3x - 4y = -3. \end{cases}$$

Побудуємо графіки обох рівнянь:

1) $2x + 3y = 15$

$3y = 15 - 2x; y = 5 - \frac{2}{3}x$ — це пряма, яка проходить через точки з координатами $(0; 5); (3; 3)$.

2) $3x - 4y = -3$

$4y = 3x + 3, y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$, це пряма, яка проходить через точки з координатами $(-1; 0); (3; 3)$.

3) графіки цих функцій перетинаються в точці з координатами $(3; 3)$.

Відповідь: $(3; 3)$.

Спосіб додавання

Способом додавання зручно розв'язувати системи, у яких коефіцієнти при одній із змінних – протилежні числа.

Розв'язати систему рівнянь.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 15, \\ x - 2y = -3. \end{cases}$$

Розв'язання.

Коефіцієнти при змінній y – протилежні числа, тому додамо почленно обидва рівняння системи:

$2x + 2y + x - 2y = 15 - 3$, спростимо це рівняння: $3x = 12$, отримаємо $x = 4$.

Повернемось в систему $\begin{cases} x = 4, \\ x - 2y = -3. \end{cases}$ Підставимо значення $x = 4$ у друге рівняння системи і розв'яжемо його.

$$\begin{cases} x = 4, \\ 4 - 2y = -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ 2y = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y = 3.5. \end{cases}$$

Відповідь: $(4; 3.5)$.

Метод підстановки для системи лінійних рівнянь

1. Виразити одну змінну через іншу з одного рівняння
2. Підставити отриманий вираз у друге рівняння
3. Розв'язати отримане рівняння з однією змінною
4. Підставити знайдене значення масиву чоб знайти іншу змінну.

Приклад 1

Система з двох змінних

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

1. Виразити y через x з другого рівняння

$$y = x - 1$$

2. Підставити цей вираз у перше рівняння: $2x + (x - 1) = 5$

3. Розв'яжемо отримане рівняння $2x + x - 1 = 5$

$$3x - 1 = 5$$

$$3x = 6; x = 2$$

4. Знайдемо y підставивши $x = 2$

$$y = x - 1 = 2 - 1 = 1$$

В: $x = 2; y = 1$.

Приклад 2.

Система з дробами

$$\begin{cases} x/2 + y/3 = 2 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

1. Виразити x через y з другого рівняння

$$x = y + 3$$

2. Підставити у перше рівняння: $(y + 3)/2 + y/3 = 2$

3. Розв'яжемо рівняння, зведено до спільного знаменника

$$(3(y + 3) + 2y)/6 = 2$$

$$(3y + 9 + 2y)/6 = 2$$

$$(3y + 5 + 2y)/6 = 2$$

$$(5y + 9)/6 = 2$$

$$5y + 9 = 12$$

$$5y = 3; y = 3/5$$

Лінійні варіанти

Система з трьома змінними

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

1. Виразимо z через x та y з першого рівняння: $z = 6 - x - y$

2. Підставимо цей вираз у друге та третьє рівняння:

$$2x - y + (6 - x - y) = 3$$
$$x + 2y - (6 - x - y) = 2$$

3. Спростимо ці рівняння:

$$2x - y + 6 - x - y = 3$$

$$x - 2y + 6 - x - y = 2$$

$$x - 2y = -3$$

$$-2y - y = -4$$

$$x - 2y = -3$$

$$-3y = -4$$

4. Розв'яжемо їх y :

$$-3y = -4; y = 4/3$$

5. Знайдемо x підставивши $y = 4/3$:

$$x - 2(4/3) = -3$$

6. Знайдемо x :

$$z = 6 - x - y = 6 - (-1/3) - 4/3 = 6 + 1/3 - 4/3 = 6 - 3/3 = 5$$

$$x - 8/3 = -3$$

$$x = -3 + 8/3$$

Відповідь: $x = -1/3, y = 4/3, z = 5$

$$x = -3/3 + 8/3$$

$$x = -1/3$$

Тема 4

Система з параметрами

$$\begin{cases} ax + y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

де a - параметр
1. Виразимо y з першого рівняння
 $y = 3 - ax$

2. Підставимо y друге рівняння

$$x + 2(3 - ax) = 5$$

3. Розглянемо випадок x

$$x + 6 - 2ax = 5$$

$$x - 2ax = -1$$

$$x(1 - 2a) = -1$$

$$x = -1/(1 - 2a) \text{ якщо } a \neq 1/2$$

4. Знайдемо y

$$y = 3 - ax = 3 - a \cdot (-1/(1 - 2a)) = 3 + a/(1 - 2a)$$

Відповідь: Якщо $a \neq 1/2$: $x = -1/(1 - 2a)$, $y = 3 + a/(1 - 2a)$
Якщо $a = 1/2$ система не має розв'язків оскільки
рівніння споріднені між собою