

Математичні функції

15

§ 4. Функції

Функції та їх графіки

Залежність змінної y від змінної x називається функцією, якщо кожному значенню x відповідає єдине значення y .

Функція назначається або однією буквово (f або) $f(x)$, або рівністю $y = f(x)$, де x — незалежна змінна або аргумент, y — залежна змінна або значення функції $f(x_0)$ — значення функції f в точці x_0 .

Область визначення і множина значень функції

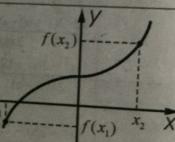
Область визначення функції (D) — множина тих значень, які може приймати аргумент.

Множина значень функції (E) — це множина тих значень, які може приймати сама функція при всіх значеннях аргумента із областю визначення. Наприклад: $f(x) = \frac{2}{x-1}$.

Область визначення (D): $x - 1 \neq 0$; $x \neq 1$, x — будь-яке число, крім $x = 1$.

Графік функції

Графіком функції $y = f(x)$ називається множина точок площини з координатами (x, y) , де перша координата x «побудовав» всю область визначення функції $f(x)$, а друга координата — це відповідне значення функції f в точці x .



Способи задання функції

1. Аналітичний спосіб: функція задається за допомогою математичної формулі.
2. Табличний спосіб: функція задається за допомогою таблиці.

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

3. Описовий спосіб: функція задається словесним списком.
4. Графічний спосіб: функція задається за допомогою графіка.

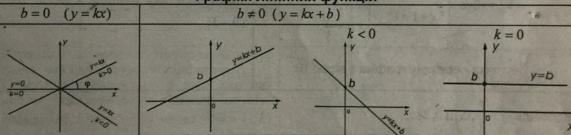
Функція Дірихле: $f(x) = 1$ для раціональних x ,
 $f(x) = 0$ для іраціональних x .

16 Лінійна функція та її графік

Лінійною функцією називається функція виду $y = kx + b$, де $k \neq b$ — деякі числа, x — незалежна змінна.

Властивості	Значення змінних
1. Область визначення.	x — будь-яке дійсне число $x \in \mathbb{R}$.
2. Множина значень.	1) при $k \neq 0$: y — будь-яке дійсне число, $y \in \mathbb{R}$; 2) при $k = 0$: $y = b$.
3. Точки перетину з осями координат.	1) при $k \neq 0$, $x = -\frac{b}{k}$; $y = 0$ — точка перетину з віссю $0x$; 2) $k = 0$, тоді $y = b$ — пряма, паралельна осі $0x$ перетинає $0y$ в точці $(0; b)$ і збігається з віссю $0x$ при $b = 0$; 3) $y = b$, $x = 0$ — точка перетину з віссю $0y$, тобто $(0; b)$.
4. Зростання і спадання.	1) при $k > 0$ функція зростає на всій області визначення; 2) при $k < 0$ функція спадає на всій області визначення; 3) при $k = 0$ функція стала.
5. Графіком лінійної функції є пряма.	k — кутовий коефіцієнт прямої

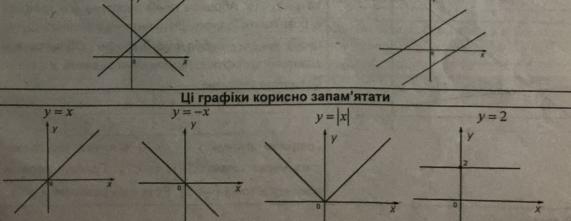
Графіки лінійних функцій



Взаємне розташування графіків лінійних функцій

Якщо $k_1 \neq k_2$, графіки функцій $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ перетинаються в одній точці.

Якщо $k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$, графіки функцій $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ паралельні.



зростання
спадання

відповідність
інтервалу

Математична функція — це правило або відношення, яке кожному елементу з однієї множини (область визначення) ставить у відповідність рівно один елемент з іншої множини (область значень). Простіше кажучи, функція — це «машинка», яка для кожного «входу» дає точно один «вихід».

Аналогії з реального життя

Торговий автомат — ідеальна аналогія функції. Ви вставляєте монету (вхідне значення), натискаєте кнопку з номером товару, і автомат видає рівно один товар (вихідне значення). Кожному номеру кнопки відповідає конкретний товар.

Перекладач у Google — ви вводите слово українською (вхід), а отримуєте переклад англійською (вихід). Одному українському слову може відповісти одне англійське слово.

Рецепт приготування — кількість інгредієнтів (вхід) визначає кількість порцій страви (вихід). Якщо рецепт розрахованій на 4 особи і ви збільшуєте інгредієнти вдвічі, то отримаєте страву на 8 осіб.

Тарифна сітка таксі — відстань поїздки (вхід) визначає вартість (вихід) за певною формулою.

Де застосовують математичні функції

Економіка та фінанси: функції попиту та пропозиції, розрахунок відсотків, моделювання інфляції, прогнозування курсів валют.

Фізика та інженерія: траєкторія руху тіл, розрахунок електричних кіл, моделювання коливань, проектування мостів та будівель.

Медицина: дозування ліків залежно від ваги pacienta, моделювання поширення епідемій, аналіз серцевого ритму.

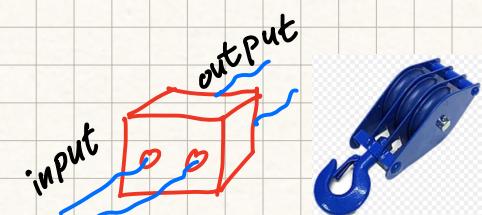
Комп'ютерні науки: алгоритми пошуку, машинне навчання, обробка зображень, створення комп'ютерної графіки та анімації.

Біологія: моделювання зростання популяцій, розрахунок швидкості метаболізму, генетичні та послідовності.

Метеорологія: прогнозування погоди, моделювання кліматичних змін.

Архітектура та дизайн: розрахунок навантажень, створення естетичних пропорцій, планування просторів.

Математичні функції — це універсальна мова для опису залежностей у природі, суспільстві та технологіях. Вони дозволяють не лише описувати існуючі процеси, але й прогнозувати майбутні події та оптимізувати рішення.



* Властивість яка продовжує функцію, друкуючи її значення.

17 УЧІНІВСЬКА СТОРІНКА

1. Знайдіть координати точок перетину графіків функцій з осіми координат.

$y = \frac{-24}{x} + 1$. Графік перетинає вісс $0x$ в точці $(24, 0)$. Для того, щоб знайти точку перетину графіка з вісс $0y$, необхідно розв'язати рівняння: $y = 0$, тобто $\frac{-24}{x} + 1 = 0$, якщо $x \neq 0$, $-24 + x = 0$, $x = 24$.

Відповідь: $(24, 0)$.

2. Знайдіть координати точок перетину графіків функцій з осіми координат.

$y = \frac{3x}{5x+1} - 2$. Для того, щоб знайти точку перетину з віссю $0x$, розв'язмо рівняння: $\frac{3x}{5x+1} - 2 = 0$, $3x = 10x + 2$, $5x+1 = 0$, $x = -\frac{1}{5}$, $y = \frac{3(-\frac{1}{5})}{5(-\frac{1}{5})+1} - 2 = -\frac{3}{5} - 2 = -\frac{13}{5}$. Точка перетину графіка з віссю $0y$ $(0, -2)$. $(-\frac{1}{5}, 0)$ — точка перетину графіка з віссю $0x$.

Відповідь: $(-\frac{1}{5}, 0); (0, -2)$.

3. Розв'язати рівняння графічно.

$\sqrt{x} = 2x + 10$. Для того, щоб розв'язати це рівняння графічно, потрібно побудувати графіки функції $y = \sqrt{x}$ та $y = 2x + 10$. Абсциса точок перетину цих графіків є розв'язком даного рівняння. Розглянемо функцію $y = \sqrt{x}$ і побудуємо її графік. Область визначення цієї функції є множиною значень $x \geq 0$. Складемо таблицю:

x	0	-1	-4	-9
y	0	+1	2	3

Графіком функції $y = 2x + 10$ є пряма, що проходить через точки $(0, 10); (-4, 2)$. Графіки перетинаються в точці $(-4, 2)$. Розв'язанням рівняння є $x = -4$.

Характеристика точки $(0, 0)$:

При $x = 0$ $y = 2x + 10 = 10$ — точка перетину з віссю $0y$.

Означення

Графік оберненої пропорційності є кривою, яка називається гіперболою. Гіпербола складається з двох окремих частин, які симетричні відносно початку координат, і проходить через точки $(1; k)$ та $(-1; -k)$.

Графік оберненої пропорційності є кривою, яка називається гіперболою. Гіпербола складається з двох окремих частин, які симетричні відносно початку координат, і проходить через точки $(1; k)$ та $(-1; -k)$.

Значення змінних

Графік

1. Оберненою пропорційністю називається функція, яку можна задати формулою $y = \frac{k}{x}$, де k — число, що не дорівнює нулю.

2. Число k називається коефіцієнтом пропорційності.

Графіком оберненої пропорційності є кривою, яка називається гіперболою. Гіпербола складається з двох окремих частин, які симетричні відносно початку координат, і проходить через точки $(1; k)$ та $(-1; -k)$.

Властивості функції $y = \frac{k}{x}$

Значення змінних

1. Область визначення оберненої пропорційності: $x \neq 0$.

2. Область значень оберненої пропорційності: $y \neq 0$.

3. При $k > 0$ графік функції розташований в I та III координатних квадрантах.

4. При $k < 0$ графік функції розташований в II та IV координатних квадрантах.

Функції $y = x^2$; $y = x^3$. Іхні графіки і властивості

Графік функції $y = x^2$ є параболою. Парабола складається з двох віткових, які симетричні відносно осі ординат.

Декілька властивостей функції $y = x^2$:

1. Для будь-якого x можна знайти відповідне значення y , причому $y \geq 0$.
2. При $x = 0$: $y = 0$.
3. Протилежним значенням x відповідає одне тає саме значення y : $(-x)^2 = x^2 = y$.
4. При $x > 0$ графік функції розташований в I та III координатних квадрантах.

Графік функції $y = x^3$ є кубичною параболою. Кубична парабола має симетрію відносно початку координат.

Декілька властивостей функції $y = x^3$:

1. Будь-якому значеню x відповідає значення y , причому $y \in \mathbb{R}$ (множина дійсних чисел).
2. Протилежним значенням x відповідає протилежне значення y : $(-x)^3 = x^3 = y$.
3. $x_1 = -5$; $y_1 = (-5)^3 = -125$.
4. $x_2 = 5$; $y_2 = 5^3 = 125$.

Тому графік має симетрію відносно осі $0y$.

Функція $y = \sqrt{x}$

Область визначення функції $y = \sqrt{x}$ — множина невід'ємних дійсних чисел: $x \geq 0$ (оскільки корінь можна додати тільки з невід'ємного числа).

Якщо $x = 0$, то $y = 0$, тому графік функції $y = \sqrt{x}$ проходить через початок координат.

Якщо $x > 0$, то $y > 0$, тому графік функції розташований в першій координатній квадранті.

Більшому значеню аргумента відповідає більше значення функції, дійсно:

$x_1 = 4$, то $y_1 = \sqrt{4} = 2$;

$x_2 = 9$, то $y_2 = \sqrt{9} = 3$, тобто $x_2 > x_1$ та $y_2 > y_1$.

Таким чином, функція $y = \sqrt{x}$ є зростаючою.

Графік функції $y = \sqrt{x}$ та $y = x^2$ при $x \geq 0$ симетричні відносно прямої $y = x$.

Як відмежити чи є лін. або кв. уявлення функцією

Відмінне запитання! Це дуже важливе розуміння, яке допоможе вам краще зрозуміти зв'язок між різними математичними поняттями.

Так, і лінійні, і квадратичні рівняння можуть бути функціями, але тут є важливі нюанси, які варто розібрати детально.

Різниця між рівнянням і функцією

Спочатку давайте зрозумімо різницю. Рівняння — це математичне твердження, що дві вирази є рівними (містить знак “=”). Функція — це правило, яке кожному входу ставить у відповідність один вихід.

Коли ми маємо рівняння типу $y = 2x + 3$ (лінійне) або $y = x^2 + 2x - 1$ (квадратичне), то так, це функції! Чому? Тому що для кожного значення x ми отримуємо рівно одне значення y .

Лінійні функції

Лінійні рівняння виду $y = ax + b$ завжди є функціями. Вони описують пряму лінію на координатній площині. Наприклад, якщо у вас є залежність між часом роботи (x годин) і заробітною платою (y гривень) за формулою $y = 100x + 500$, то це лінійна функція. Кожній кількості годин відповідає точно одна сума заробітку.

Квадратичні функції

Квадратичні рівняння виду $y = ax^2 + bx + c$ також є функціями. Вони описують параболу. Уявіть, що ви кидаете м'яч угору — його висота залежить від часу за квадратичною функцією. Для кожного моменту часу м'яч має рівно одну висоту.

Важливе застереження

Але увага! Не всі рівняння, що містять квадрати, є функціями. Наприклад, рівняння кола $x^2 + y^2 = 25$ не є функцією, тому що для одного значення x може бути два значення y . Якщо $x = 3$, то уможе бути як $+4$, так і -4 .

Тест вертикальної лінії

Є простий спосіб перевірити, чи є рівняння функцією: уявіть, що ви

Важливе застереження

Але увага! Не всі рівняння, що містять квадрати, є функціями. Наприклад, рівняння кола $x^2 + y^2 = 25$ не є функцією, тому що для одного значення x може бути два значення y . Якщо $x = 3$, то уможе бути як $+4$, так і -4 .

Тест вертикальної лінії

Є простий спосіб перевірити, чи є рівняння функцією: уявіть, що ви проводите вертикальну лінію через графік. Якщо ця лінія перетинає графік більше ніж в одній точці, то це не функція.

Подумайте: чи розумієте ви, чому лінійні та квадратичні рівняння завжди проходять цей тест, а рівняння кола — ні? Це допоможе вам краще зрозуміти суть функцій.

Тест вертикальної лінії — Explanatory жливіших і найпростіших інструментів у математиці для визначення, чи є графік функцією. Давайте розберемо його детально, щоб ви могли впевнено застосовувати цей тест.

Суть тесту

Уявіть, що у вас є олівець, який ви тримаєте вертикально, і ви повільно рухаєте його зліва направо через весь графік. Якщо в будь-якому місці ваш олівець торкається графіка більше ніж в одній точці одночасно, то цей графік не є функцією.

Чому це працює? Пам'ятаєте визначення функції — кожному входу (значенню x) має відповідати рівно один вихід (значення y). Вертикальна лінія представляє одне конкретне значення x . Якщо ця лінія перетинає графік у двох або більше точках, це означає, що одному значенню x відповідає кілька значень y , що порушує основне правило функції.

Приклади, що проходять тест

Розглянемо лінійну функцію $y = 2x + 1$. Уявіть пряму лінію, що йде знизу ліворуч до верху праворуч. Коли ви проводите вертикальну лінію в будь-якому місці, вона завжди перетинає цю пряму рівно в одній точці. Це тому, що пряма ніколи не “повертається назад” по осі x .

Тепер подумайте про квадратичну функцію $y = x^2$. Це парабола, що відкривається вгору, з вершиною в точці $(0,0)$. Незважаючи на те, що вона має U-подібну форму, кожна вертикальна лінія все одно перетинає її лише в одній точці. Навіть коли парабола “згинається”, вона не повертається назад через те саме значення x .

Приклади, що не проходять тест

Класичний приклад — коло з рівнянням $x^2 + y^2 = 25$. Уявіть коло з центром у початку координат і радіусом 5. Тепер проведіть вертикальну лінію, скажімо, в точці $x = 3$. Ця лінія перетне коло у двох точках: одна вгорі $(3, 4)$, а друга внизу $(3, -4)$. Це означає, що одному значенню $x = 3$ відповідає \downarrow за різні значення y , тому коло не є функцією.

Інший цікавий приклад — горизонтальна парабола $x = y^2$. Уявіть параболу, що відкривається праворуч замість вгору. Якщо ви проведете вертикальну лінію в точці $x = 4$, вона перетне параболу у двох точках: $(4, 2)$ і $(4, -2)$.

Особливі випадки для роздумів

Подумайте над такими питаннями для поглиблення розуміння: що станеться, якщо вертикальна лінія торкається графіка рівно в одній точці, але не перетинає його? Це все одно вважається одним перетином, тому графік залишається функцією.

А що, якщо графік має розрив або “стрибок”? Наприклад, функція може мати значення $y = 2$ при $x = 3$, а потім “стрибнути” до $y = 5$ при тому ж $x = 3$ з іншого боку. Такий графік не пройде тест вертикальної лінії і не буде функцією.

Практичне застосування

Коли ви бачите будь-який графік, швидко проведіть уявну вертикальну лінію через найширші або найскладніші частини. Якщо графік має петлі, кола, горизонтальні ділянки з вертикальним “стрибком” або будь-які інші форми, де одне значення x може дати кілька значень y , він не пройде тест.

Цей тест особливо корисний при роботі з графіками, побудованими на комп’ютері або калькуляторі, коли не завжди зрозуміло з рівняння, чи є воно функцією. Просто уявно “просканируйте” графік вертикальними лініями — і відповідь стане очевидно.

Чи розумієте ви тепер, чому цей простий візуальний тест так ефективно працює? Спробуйте застосувати його до різних графіків, які ви бачили раніше, і подивітесь, чи зможете передбачити результат до того, як проведете тест.

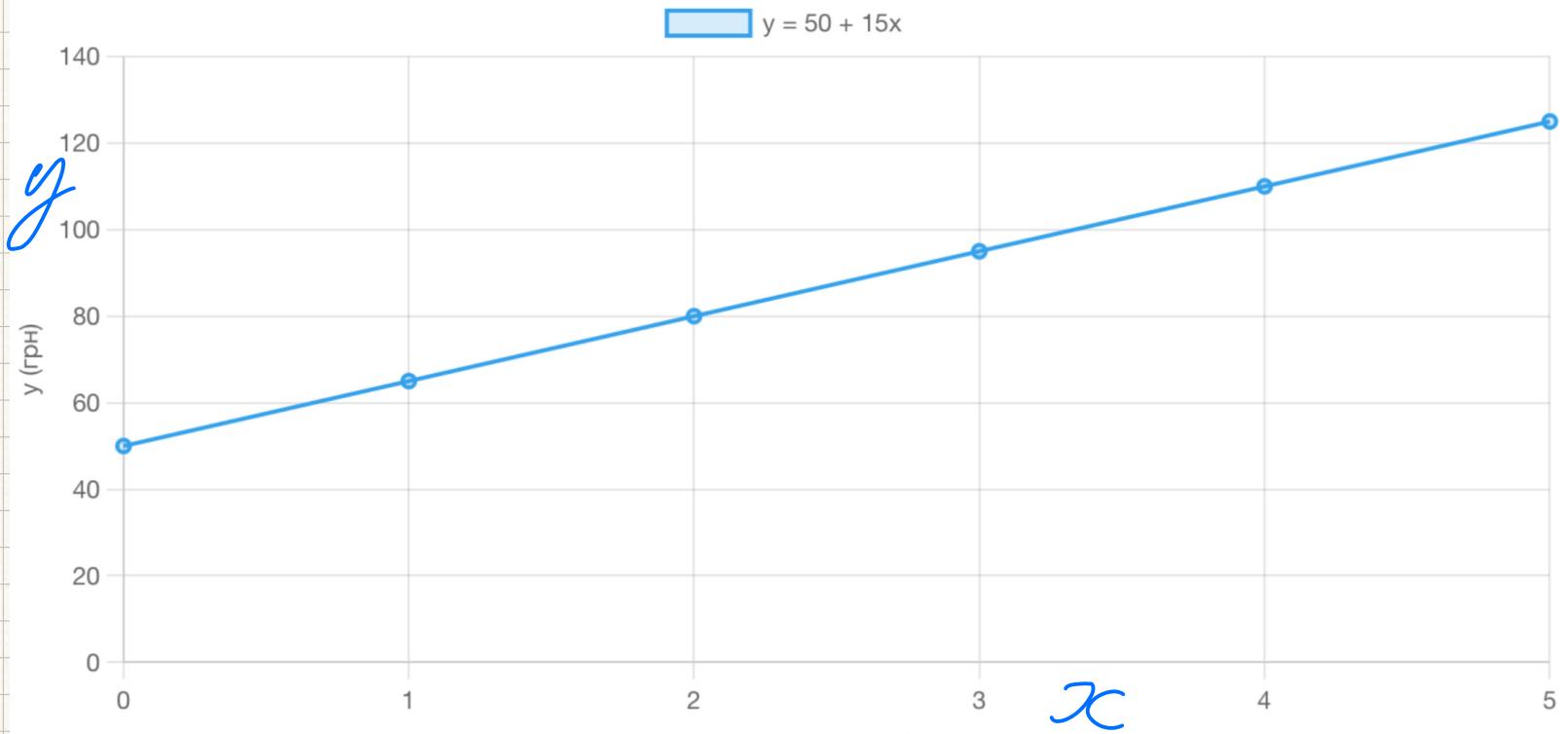


Функція = залежність
= відповідність

Приклади лінійних функцій у реал. знач.

1) Ідея

$y = 50 + 15x$ де y - вартість поїздання (грн)
 x - відстань , 50 грн - баз. тариф
15 грн/км - варт. за кілометр.



- Лінійна функція \Rightarrow пряма (лінія)
- * Хоча y не залежить від x , вона залежить від x . Якщо x збільшиться на 1, y зростає на 15
 - * Це означає що зростання y відповідає зростанню x на 1
 - * Відомий член 50 є початковим значенням y при $x=0$
 - * Відомий член 15 є коефіцієнтом пропорційності

x	0	1	2
y	50	65	80

$$\text{При } x=1; \quad y = 50 + 15 \cdot 1 = 65$$

$$\text{При } x=2; \quad y = 50 + 15 \cdot 2 = 80$$

2) Погодинна оплата

$$y = 120x$$

Заробітна плата з погодинною оплатою
 y - заробіток за добу (УНІ); Залежність змінна - залежність від x

x - відпрац. годин.; Залежність змінна - яку можна змінювати.

120 грн/год - погодинна ставка; Коеф при x який показує єдину пропорційність.

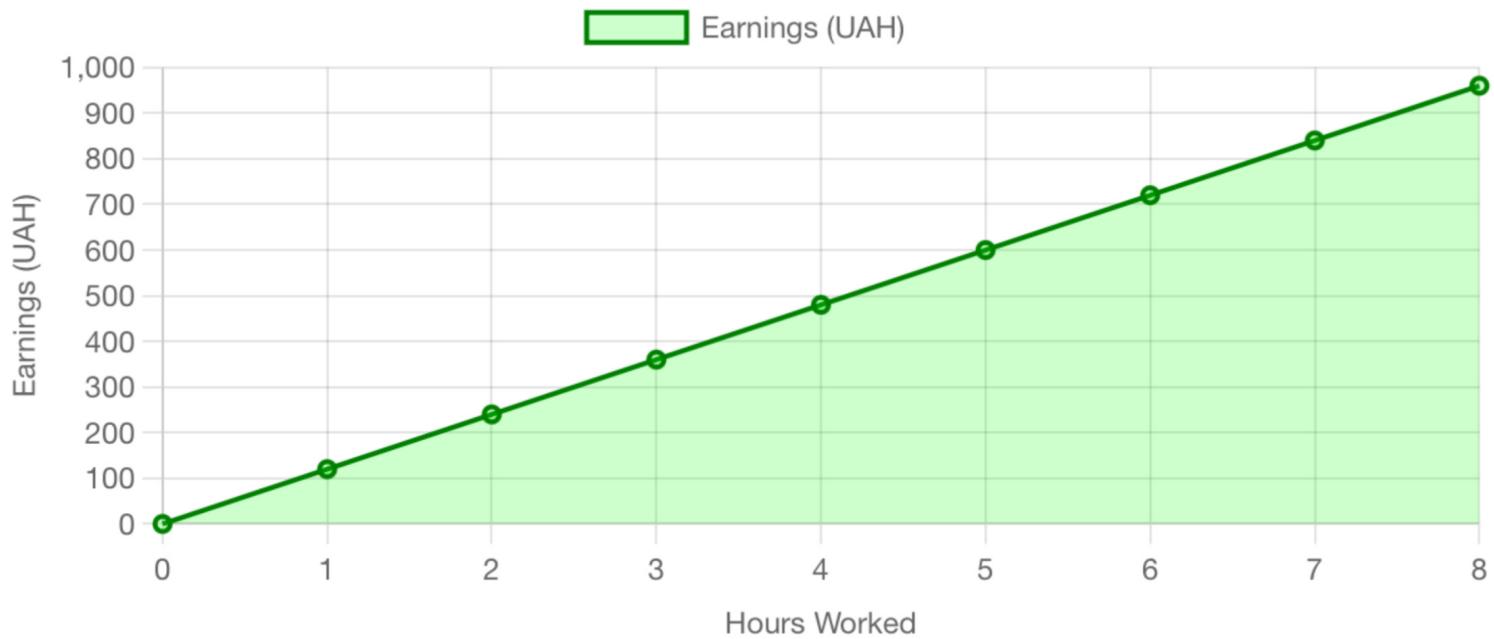
* лінія від $y=0$ показує таку пропорційність.
zn. Прив. пропорц. кільк. відпрац. годин.

* Ставка та зв. змінн. Кожна відпрац. година здійснила заробіток на розмір суму 120 грн.

Ставка відпрац. змінн. є характеристикою фін. ф.

* Ця фін. ф. є моделью для розрахунку зн. по основі погодинної ставки та к-ті відпрац. год.

Earnings Based on Hours Worked



3) Випадок падіння

Чу. модель випадку падіння

$$y = 500 - 8x$$

де y - залишок пасива (u) Залежність
змінної - змінч. значення від x .

x - проїзд відстань (ки). $1=100$ тащу чо
вказую розріз 8 ліній від 100 км.

Незалежності змінна - залежність між змінними.

500 - початковий об'єм бака. Вільний член -
є потрібно перевести з y . Числ. знач.

числ. пропорційності = кутовий коеф.

> Визначте ін. змінну в відносно x .

> На креслу видно, що залежність y залежить
змінною x на k одиниць ($y = b - kx$) $k = -8$

$|k|$ - видн. знач при $x=0$: чиє більше абсолютне
значення, чи крутіше пряма (видн. згостине обер-
зас) $k > 0 \nearrow k = 0 \downarrow$.

* лінійна функція моделює випадки падіння і описує залежність
між змінною від часом. k - че К.К.: К.п. буде залежати
швидкістю та напрямок зміни обмежені відносно
іншої. Чу. лін. тащу швидкість зміни розмежується на котри

Швидкість зміни $\frac{dy}{dx} = -8 \text{ км/год}$

Пояснений в. ср.

x	0	1	2
y	500	492	484

$x = 0$; стояло на місці

$x = 1$; ($1=100$) $y = 500 - 8 \cdot 1 = 492$ км 8 к

$x = 2$; ($2=200$) $y = 500 - 8 \cdot 2 = 484$ (u) 16 к

> Максим. бігстапу на пътнику бак:

Без пътника $y = 0$; $0 = 500 - 8x$; $8x = 500$; $x = \frac{500}{8} = 62.5$

Останки $x = 100$; $62.5 \cdot 100 \text{ km} = 6250 \text{ km}$ до пътнико
внешната

> Витрати на 1 km; $8x / 100 \text{ km} = 0.08 \text{ л/км.}$

График дру

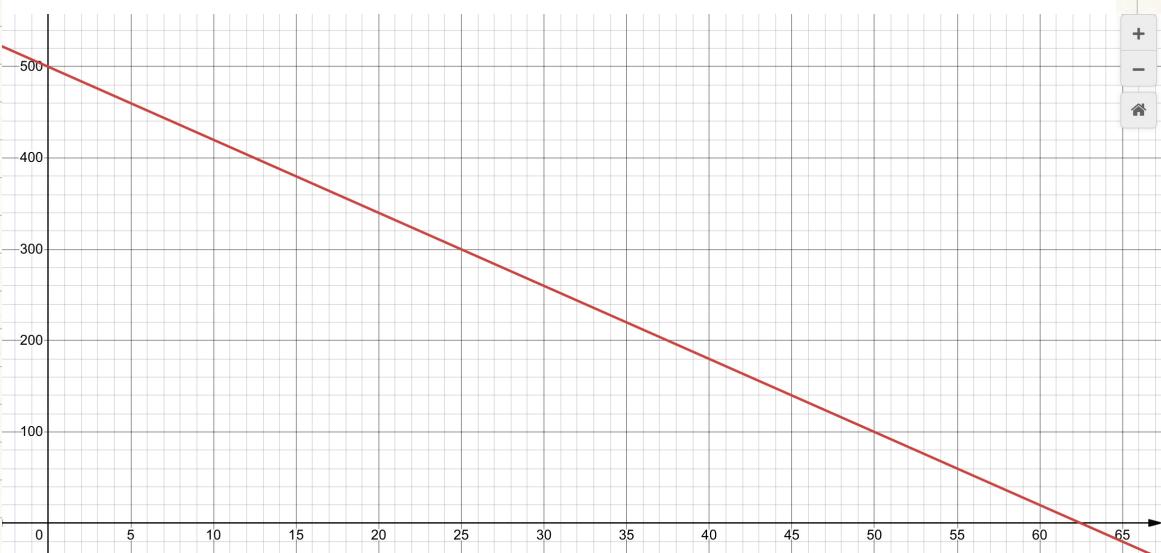
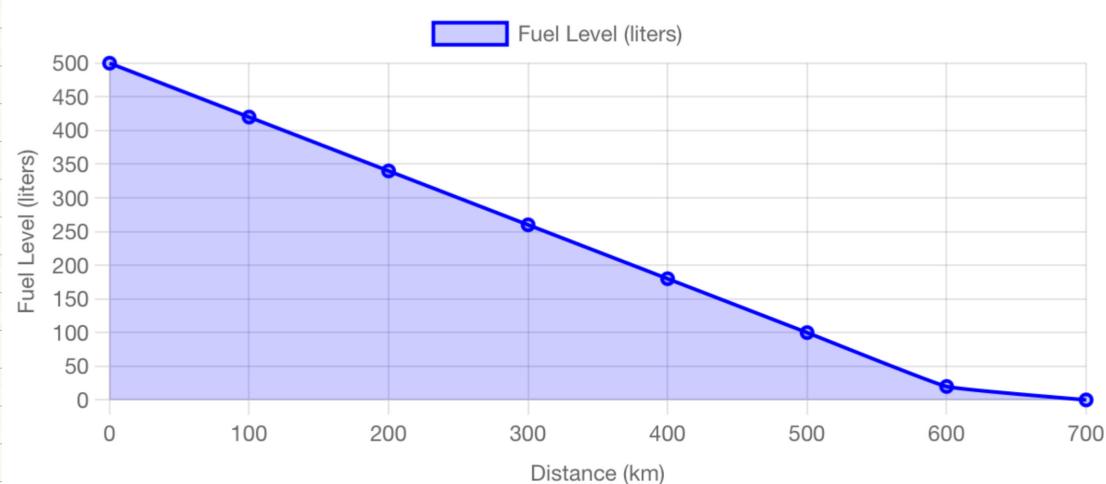
Висло y : начало 6 м. (0,500) ноб. бак.

Кумоли коеф: -8 (причиа същ. близ пробуря)

Пътнико \downarrow ; Задраво \nearrow ; Зависи x от същите

$$x = 0.5 = 50; x = 1,2 = 120$$

Fuel Level Based on Distance Traveled



4) Чехіваний боди

Лінійна фу. модель (десмополіє) відповідний
(залежс. взаємозалежс) - температури до гасу при нагріванні.

$$y = 20 + 5x \quad y - t^{\circ}\text{C} \text{ боди}; \text{ залежс. зміна}$$

x - час нагрів (хв); Чезаженсна зміна

20°C - початкова температура Відмінні член

$5^{\circ}\text{C}/\text{хв}$ - кв. нагрівання К.К. К.М.

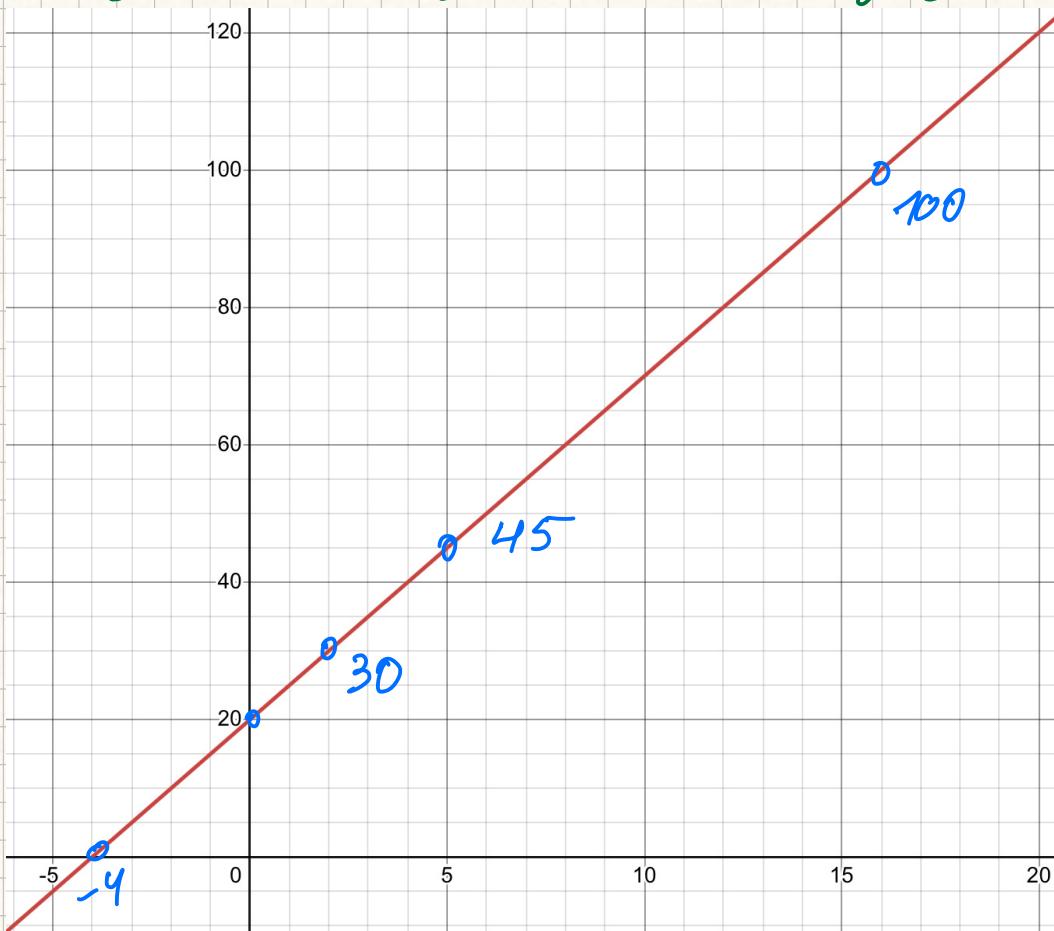
x	0	2	5
y	20	30	45

$$\text{Через } 0 \text{ хв: } y = 20 + 5 \cdot 0 = 20$$

$$2 \text{ хв: } y = 20 + 5 \cdot 2 = 30$$

$$5 \text{ хв: } y = 20 + 5 \cdot 5 = 45$$

* Фу. лін - зрос (спаг) при поганні $t^{\circ}\text{з T}$
зручно при змініх які відрізь з поспіїнною кв.



* Задача

$$y = 100^{\circ}\text{C}$$

$$100 = 20 + 5 \cdot x$$

$$5x = 80$$

$$x = \frac{80}{5}; x = 16$$

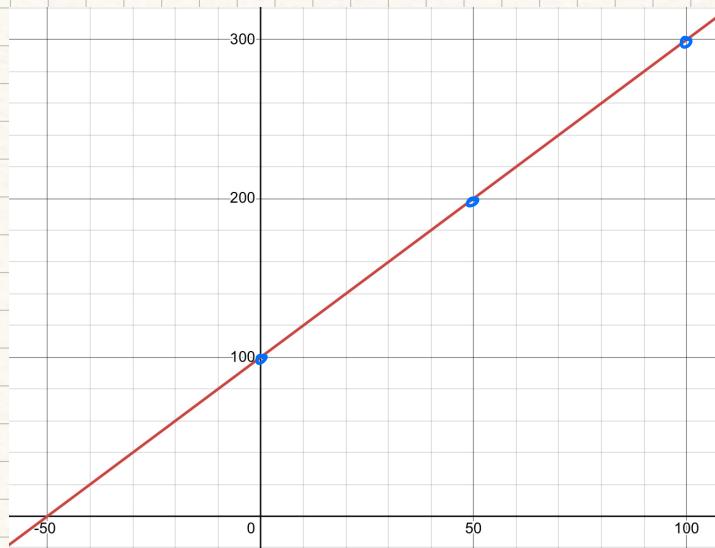
5) Модіусний таунер

Мод таунер комп'ютер 100 ун на міс. плюс 2 ун за збільшу розмір. Тому таунер здатен обробляти від x -ти хв. розмір (від 0 до 100 хв.)

$$y = 100 + 2x$$

Зад.

x	0	1	2	100
y	100	102	104	300



$$\text{При } x=0; y = 100 + 2 \cdot 0 = 100$$

$$x=1; y = 100 + 2 \cdot 1 = 102$$

$$x=2; y = 100 + 2 \cdot 2 = 104$$

$$x=100; y = 100 + 2 \cdot 100 = 300$$

6) Вимірювання води (вилучання)

Гезер видає 1000 л, щохвилини випускає 25 л. Тому таунер здатен обробляти від x -ти хв. (від 0 до 40 хв.)

$$y = 1000 - 25x$$

x	0	1	4	5	10	20	30	40
y	1000	975	0	875	750	500	250	0

$$x=0; y=1000$$

$$x=1; y=1000-25=975$$

$$x=40; y=1000-25 \cdot 40=$$

$$= 1000-1000=0;$$

$$1000-25 \cdot 30 (30; 250)$$

$$1000-25 \cdot 20 (20; 500)$$

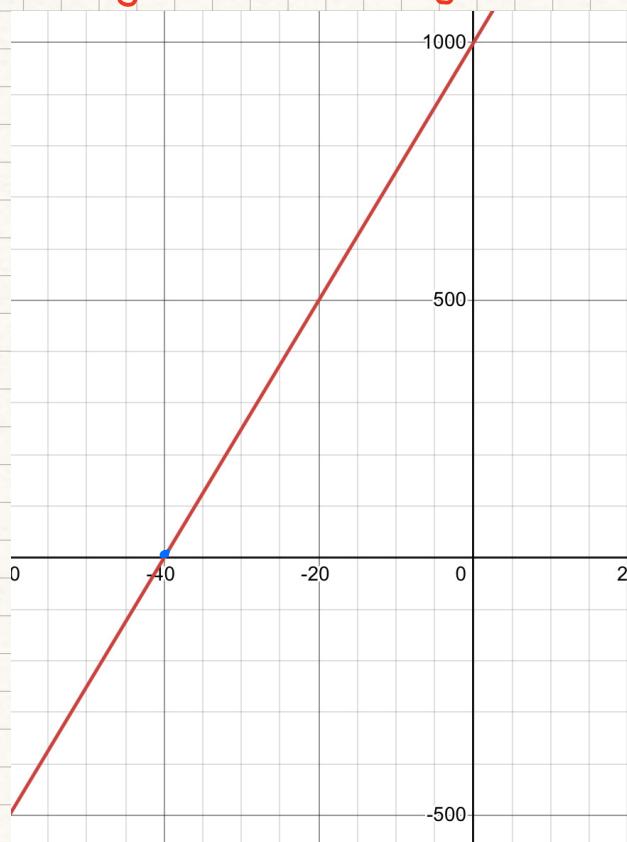
$$1000-25 \cdot 5 (5; 875)$$

$$1000-25 \cdot 10 (10; 750)$$

?

?

?



1) Среда приспособляется