

Раціональні вирази

Раціональні вирази — це математичні вирази, які складаються з многочленів у чисельнику та знаменнику. Вони мають вигляд дробу, де і чисельник, і знаменник є многочленами. Раціональні вирази використовуються для представлення відношень між двома многочленами.

Види раціональних виразів

1. Прості раціональні вирази: Це вирази, в яких чисельник і знаменник є одночленами або простими многочленами. Наприклад:

$$\frac{x}{2}, \quad \frac{x+1}{x-1}$$

3. Складні раціональні вирази: Це вирази, в яких чисельник і/або знаменник є складнішими многочленами. Наприклад:

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}, \quad \frac{x^3 - 8}{x^2 + 4x + 4}$$

4. Раціональні функції: Це функції, які можна представити у вигляді раціонального виразу. Наприклад:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

Застосування раціональних виразів

1. Алгебра та аналіз: Раціональні вирази

використовуються для розв'язання рівнянь, спрощення виразів, інтегрування та диференціювання.

2. Фізика: Вони застосовуються для моделювання фізичних явищ, таких як рух тіл, електричні кола тощо.

3. Економіка: Раціональні вирази використовуються для моделювання економічних процесів, таких як попит і пропозиція, оптимізація ресурсів.

4. Інженерія: Вони застосовуються для проектування та аналізу систем, таких як механічні конструкції, електричні мережі тощо.

5. Комп'ютерні науки: Раціональні вирази використовуються в алгоритмах обчислень, комп'ютерній графіці та обробці даних.

Раціональні вирази є важливим інструментом у багатьох галузях науки та техніки, допомагаючи аналізувати та розв'язувати різноманітні задачі.

Чи можна вважати раціональні вирази складними дробами?

Раціональні вирази можна представити у вигляді складних дробів, але не всі раціональні вирази є складними дробами.

Визначення:

- **Раціональний вираз** — це вираз у вигляді дробу, чисельник і знаменник якого є многочленами.

Наприклад:

$$\frac{x^2 + 1}{x - 3}$$

- **Складний дріб** — це дріб, у якому чисельник або знаменник (або обидва) є також дробом.

Наприклад:

$$\frac{\frac{1}{x} + 2}{\frac{3}{x^2} - 1}$$

Висновок:

Раціональний вираз **може бути** складним дробом, якщо має у своєму складі інші дроби. Але **не кожен раціональний вираз — складний дріб**.

Наприклад:

- $\frac{x+1}{x-2}$ — раціональний вираз, але не складний дріб.
- $\frac{\frac{1}{x} + 2}{\frac{3}{x^2} - 1}$ — раціональний вираз і складний дріб.

Отже, складні дроби — це підвид раціональних виразів, але не тотожні ім.



§ 1. Раціональні вирази

Дробові раціональні вирази

Розрізняють цілі і дробові раціональні вирази. В цілому виразі немає ділення на змінну. В дробовому виразі є ділення на вираз, в який входить змінна.

Приклади

Правило

Значення змінних, при яких можливі всі математичні дії, записані в раціональному виразі, називаються допустимими значеннями змінних.

Щоб знайти допустимі значення раціонального дробу, треба прирівняти знаменник до нуля, знайти розв'язки отриманого рівняння, і з усіх чисел виключити розв'язки отриманого рівняння.

$\frac{4}{x-8}$ — у цього раціонального дробу при $x=8$ в знаменнику отримуємо $x-8=8-8=0$, тому допустимими значеннями даного дробу є всі числа, крім $x=8$.

Знайти допустимі значення виразу: $\frac{x}{3x-x^2}$:

Прирівняємо знаменник до нуля і розв'яжемо це рівняння: $3x-x^2=0$, винесемо x за дужки $x(3-x)=0$, добуток дорівнює нулю, якщо хоча б один із множників дорівнює нулю, тобто $x=0$, або $3-x=0$.

Допустимими значеннями змінної є всі числа, крім $x=0$ або $x=3$.

Відповідь: x — будь-яке число, крім 0 та 3.

Дії з раціональними дробами

Правило

Приклади

Скорочення дробів

Скоротити дріб — це означає поділити чисельник і знаменник дробу на спільний множник. Ця дія обумовлена основною властивістю дробу.

Для того, щоб скоротити дріб, треба:

- розкласти чисельник і знаменник дробу на множники;
- виділити спільний множник в чисельнику і знаменнику дробу;
- розділити чисельник і знаменник дробу на спільний множник.

Скоротити дріб: $\frac{3x-18x^2}{15x^2-90x^3}$.

- розділємо чисельник і знаменник дробу на множники, для цього винесемо за дужки спільний множник: $\frac{3x(1-6x)}{15x^2(1-6x)}$;
- виберемо спільний множник в чисельнику і знаменнику — це $3x(1-6x)$;
- скоротимо дріб на $3x(1-6x)$.

Відповідь: $\frac{1}{5x}$.

Додавання і віднімання дробів

Сума (різниця) двох дробів з однаковими знаменниками дорівнює дробу з тим самим знаменником і чисельником, який дорівнює сумі (різниці) чисельників вихідних дробів.

$$\frac{3a-4}{a-1} + \frac{7-4a}{a-1} = \frac{3a-4+7-4a}{a-1} = \frac{3-a}{a-1};$$

$$\begin{aligned} \frac{3a-4}{a-1} - \frac{7-4a}{a-1} &= \frac{3a-4-(7-4a)}{a-1} = \\ &= \frac{3a-4-7+4a}{a-1} = \frac{7a-11}{a-1}. \end{aligned}$$

При додаванні (відніманні) двох раціональних дробів з різними знаменниками треба звести дроби до спільного знаменника та виконати додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками.

$$\frac{5}{x-1} + \frac{4}{x+1} = \frac{5(x+1)}{x-1} + \frac{4(x-1)}{x+1} = \frac{5x+5+4x-4}{(x-1)(x+1)} = \frac{9x+1}{x^2-1};$$

$$\frac{1}{c} - \frac{3a}{c^2+3ac} = \frac{1(c+3a)}{c} - \frac{3a}{c(c+3a)} = \frac{c+3a-3a}{c(c+3a)} = \frac{1}{c+3a}.$$

Множення і ділення дробів

Добуток двох раціональних дробів дорівнює дробу, чисельник якого дорівнює добутку чисельників, а знаменник дорівнює добутку знаменників дробів, що помножуються.

Частка від ділення двох раціональних дробів дорівнює добутку дробу, діленого на дріб, обернений дільнику.

$$\frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{4x+1}{x-1} = \frac{(x-1)(4x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{(x-1)4(x+1)}{(x+1)(x-1)} = 4.$$

$$\frac{x}{a^2-4} : \frac{3x^2}{5a-10} = \frac{x(5a-10)}{(a^2-4)3x^2} =$$

$$= \frac{5x(a-2)}{(a-2)(a+2)3x^2} = \frac{5}{3x(a+2)}.$$

Зручніше перед множенням або діленням раціональних дробів розкласти, якщо це можливо, їх чисельники і знаменники на множники.

Піднесення раціональних дробів до степеня

Степінь раціонального дробу дорівнює дробу, у якого чисельник є степенем чисельника, а знаменник – степенем знаменника.

$$\left(\frac{x^2-9}{xy+3y} \right)^3 = \left(\frac{(x-3)(x+3)}{y(x+3)} \right)^3 = \left(\frac{x-3}{y} \right)^3 = \frac{(x-3)^3}{y^3};$$

$$\left(\frac{5ac^2}{3x^3} \right)^4 = \frac{\left(5ac^2 \right)^4}{\left(3x^3 \right)^4} = \frac{5^4 a^4 c^8}{3^4 x^{12}} = \frac{625a^4 c^8}{81x^{12}}.$$

Степінь з цілим показником

Множина цілих чисел (Z) – це множина, що складається з натуральних чисел, числа нуль і чисел протилежних натуральним.

Тому поняття степеня a^n , де n – натуральне число, можна розширити, якщо розглянути випадки $n = 0$ і n – ціле від'ємне число.

Означення	Приклади
Якщо $a \neq 0$ і n – ціле від'ємне число, то $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$	$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125};$ $\left(\frac{1}{5} \right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5} \right)^3} = 5^3 = 125.$
$a^0 = 1$.	$(1,25)^0 = 1; (-17)^0 = 1.$

Корисно запам'ятати

0^0 – не визначено.

$0^{-3} = \frac{1}{0^3}$ – не визначено

$$\left(\frac{a}{b} \right)^{-n} = \left(\frac{b}{a} \right)^n, (a \neq 0; b \neq 0)$$

$$\left(\frac{2}{7} \right)^{-3} = \left(\frac{7}{2} \right)^3; \left(\frac{1}{2} \right)^{-3} = \left(\frac{2}{1} \right)^3 = 2^3 = 8$$

Властивості степеня з цілим показником

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$5^5 \cdot 5^{-7} = 5^{5-7} = 5^{-2}$	$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, (a \neq 0)$	$3^{-7} : 3^5 = 3^{-7-5} = 3^{-12}$	$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n} (a \neq 0)$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(3^{-2})^3 = 3^{-6}; (3^2)^{-3} = 3^{-6}$	$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m;$
$(ab)^n = a^n \cdot b^n$	$(2 \cdot 3)^{-3} = 2^{-3} \cdot 3^{-3}$	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, (b \neq 0)$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n (b \neq 0)$

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

1. Виконати дії.

Рекомендація. Подібні завдання краще робити за діями — зменшується можливість помилки!

Розв'язання.

$$\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{x+y} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \right) : \frac{(x+y)^2}{x^2 y^2}.$$

$$1) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy},$$

$$2) \frac{2}{x+y} \cdot \frac{x+y}{xy} = \frac{2(x+y)}{(x+y)xy} = \frac{2}{xy},$$

$$3) \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} = \frac{y^2 + x^2 + 2xy}{x^2 y^2} = \frac{(x+y)^2}{x^2 y^2},$$

$$4) \frac{(x+y)^2}{x^2 y^2} : \frac{(x+y)^2}{x^2 y^2} = 1.$$

Відповідь: 1.

2. Довести тотожність.

$$\frac{a - \frac{x^2}{a}}{x - \frac{a^2}{x}} = -\frac{x}{a}.$$

Доведення.

Спростимо ліву частину рівняння:

$$\frac{a - \frac{x^2}{a}}{x - \frac{a^2}{x}} = \left(a - \frac{x^2}{a} \right) : \left(x - \frac{a^2}{x} \right)$$

Чисельник:

$$1) a - \frac{x^2}{a} = \frac{a^2 - x^2}{a},$$

Знаменник:

$$2) x - \frac{a^2}{x} = \frac{x^2 - a^2}{x},$$

$$3) \frac{a^2 - x^2}{a} : \frac{x^2 - a^2}{x} = \frac{a^2 - x^2}{a} \cdot \frac{x}{x^2 - a^2} = \frac{(a^2 - x^2)x}{-a(a^2 - x^2)} = -\frac{x}{a},$$

тотожність доведена:

$$4) -\frac{x}{a} = -\frac{x}{a}$$

3. Скоротити дріб.

$$\frac{ax + ay - bx - by}{ax - ay - bx + by}$$

Розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники способом групування:

$$\frac{ax + ay - bx - by}{ax - ay - bx + by} = \frac{a(x+y) - b(x+y)}{a(x-y) - b(x-y)} = \frac{(x+y)(a-b)}{(x-y)(a-b)} = \frac{x+y}{x-y}$$

Відповідь: $\frac{x+y}{x-y}$.

4. Скоротити дріб.

$$\frac{a^2b + ab^2}{a^3 + b^3 + 3ab(a+b)}$$

Для того, щоб розкласти на множники, в чисельнику винесемо спільний множник за дужки, а в знаменнику застосуємо формулу суми кубів і винесемо спільний множник за дужки, тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{a^2b + ab^2}{a^3 + b^3 + 3ab(a+b)} &= \frac{ab(a+b)}{(a+b)(a^2 - ab + b^2) + 3ab(a+b)} = \\ &= \frac{ab(a+b)}{(a+b)(a^2 - ab + b^2 + 3ab)} = \frac{ab}{a^2 + 2ab + b^2} = \frac{ab}{(a+b)^2}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{ab}{(a+b)^2}$.

5. Скоротити дріб.

$$\frac{a^2 + 3a + 2}{a^2 + 6a + 5}$$

Для того, щоб розкласти чисельник і знаменник дробу на множники, застосуємо спосіб групування.

Для цього подамо $a^2 + 3a + 2$ як $a^2 + a + 2a + 2$, аналогічно подамо знаменник: $a^2 + 6a + 5 = a^2 + a + 5a + 5$, отримаємо:

$$\frac{a^2 + 3a + 2}{a^2 + 6a + 5} = \frac{a^2 + a + 2a + 2}{a^2 + a + 5a + 5} = \frac{a(a+1) + 2(a+1)}{a(a+1) + 5(a+1)} = \frac{(a+1)(a+2)}{(a+1)(a+5)} = \frac{a+2}{a+5}.$$

Відповідь: $\frac{a+2}{a+5}$.

6. Спростити алгебраїчний вираз.

$$\frac{a^6 + 64}{a^4 - 4a^2 + 16} - \frac{a^4 - 16}{a^2 + 4}$$

Застосуємо формулу різниці кубів і різниці квадратів в чисельниках дробів:

$$\begin{aligned} \frac{a^6 + 64}{a^4 - 4a^2 + 16} - \frac{a^4 - 16}{a^2 + 4} &= \frac{(a^2)^3 + 4^3}{a^4 - 4a^2 + 16} - \frac{(a^2)^2 - 4^2}{a^2 + 4} = \\ &= \frac{(a^2 + 4)(a^4 - 4a^2 + 16)}{a^4 - 4a^2 + 16} - \frac{(a^2 - 4)(a^2 + 4)}{a^2 + 4} = \\ &= a^2 + 4 - (a^2 - 4) = a^2 + 4 - a^2 + 4 = 8. \end{aligned}$$

Відповідь: 8.

7. Спростити вираз.

Інколи для перетворення алгебраїчних виразів застосовують спосіб послідовних перетворень або одночасно декількох перетворень. Кажуть: «Спростимо "ланцюжком"». При користуванні цим методом, треба бути дуже уважним.

$$\begin{aligned} & \frac{x^3 + y^3}{x+y} : (x^2 - y^2) + \frac{2y}{x+y} - \frac{xy}{x^2 - y^2}, \\ & \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{x+y} \cdot \frac{1}{(x-y)(x+y)} + \\ & + \frac{2y(x-y) - xy}{(x+y)(x-y)} = \frac{x^2 - xy + y^2}{(x-y)(x+y)} + \frac{2xy - 2y^2 - xy}{(x-y)(x+y)} = \\ & = \frac{x^2 - xy + y^2 + xy - 2y^2}{(x-y)(x+y)} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2} = 1. \end{aligned}$$

Відповідь: 1.

8. Виконати дії

$$\frac{3^{-2} a^{-1} b}{27^{-1} x};$$

Використаємо означення степеня з від'ємним показником:

$$\frac{3^{-2} a^{-1} b}{27^{-1} x} = \frac{27b}{3^2 ax} = \frac{3^3 b}{3^2 ax} = \frac{3b}{ax}.$$

Відповідь: $\frac{3b}{ax}$.

9. Спростити вираз.

$$\left(\frac{2}{3} a^{-2} (b^3)^{-3} \right)^4.$$

$$\left(\frac{2}{3} a^{-2} (b^3)^{-3} \right)^4 = \frac{2^4}{3^4} a^{-8} b^{-36} = \frac{2^4}{3^4 a^8 b^{36}}.$$

Відповідь: $\frac{2^4}{3^4 a^8 b^{36}}$.

10. Подати вираз у вигляді дробу.

Використаємо формулу різниці квадратів і означення степеня з від'ємним показником:

$$(5a^{-1} + b^{-2}) \cdot (5a^{-1} - b^{-2}).$$

$$(5a^{-1} + b^{-2}) \cdot (5a^{-1} - b^{-2}) =$$

$$= (5a^{-1})^2 - (b^{-2})^2 = \left(\frac{5}{a}\right)^2 - \left(\frac{1}{b^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{25}{a^2} - \frac{1}{b^4} = \frac{25b^4 - a^2}{a^2 b^4}.$$

Відповідь: $\frac{25b^4 - a^2}{a^2 b^4}$.

тимдемеси үшін нағ разіом. Бұзғадам

Додаваній

3 орнапов зерттешиктер

$$\frac{3}{8} + \frac{2}{3} = \frac{3+2}{8} = \frac{5}{8}; \quad \frac{8}{11} - \frac{3}{11} = \frac{8-3}{11} = \frac{5}{11}.$$

3 жілдемін зерттешиктер

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}; \quad \frac{5}{6} - \frac{1}{8} = \frac{20}{24} - \frac{3}{24} = \frac{17}{24}$$

Множенімінде

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}; \quad \frac{3}{7} \cdot \frac{14}{9} = \frac{3 \cdot 14}{7 \cdot 9} = \frac{42}{63} = \frac{2}{3}$$

Делімінде

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{8}; \quad \frac{4}{12} : \frac{14}{3} = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{14} = \frac{21}{168} = \frac{1}{8}$$

Скороченімінде

$$\frac{12}{18} = \frac{126}{186} = \frac{2}{3}; \quad \frac{24}{36} = \frac{2412}{3612} = \frac{2}{3}$$

Перетвореній шілдесінде

$$2\frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{7}{3}; \quad \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4} \text{ (оскінде } 11:4 = 2 \text{ осмаса } 3)$$

Порівняній

$\frac{3}{4}$ і $\frac{5}{6}$ приблизно до спільного знаменника $\frac{9}{72}$ і $\frac{10}{72}$ нану

$$\frac{3}{4} < \frac{5}{6}$$

1. Спрощення виразів:

- Знайдіть спільний знаменник для всіх дробів у виразі.
- Спростіть чисельник і знаменник, якщо це можливо, шляхом винесення спільних множників.

2. Додавання і віднімання:

- Знайдіть спільний знаменник для дробів.
- Перетворіть кожен дріб так, щоб вони мали спільний знаменник.
- **Додайте або відніміть чисельники, залишаючи знаменник незмінним.**
- Спростіть отриманий вираз, якщо це можливо.

3. Множення:

- Перемножте чисельники між собою і знаменники між собою.
- Спростіть отриманий вираз, якщо це можливо.

4. Ділення:

- Перетворіть ділення на множення, взявши обернений дріб до діленого.
- Виконайте множення, як описано вище.

1. Спрощення виразу $\frac{x^2 - 4}{x - 2} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$

2. Додавання $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}; \frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} = \frac{x+y}{xy}$ (xy - спільний знаменник)

3. Віднімання $\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}$

Зменшено спільний знаменник x^2

$$\frac{3x}{x^2} - \frac{2}{x^2} = \frac{3x - 2}{x^2}$$



4. Множення $\frac{2}{x} \cdot \frac{3}{y}$

Перемножуємо числових і знаменник

$$\frac{2 \cdot 3}{x \cdot y} = \frac{6}{xy}$$

5. Ділення $\frac{4}{x} : \frac{2}{y}$

Перетворюємо ділення на множення оберненим дробом

$$\frac{4}{x} \cdot \frac{y}{2} = \frac{4y}{2x} = \frac{2y}{x}$$

6. Піднесення до степеня $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}; \quad \left(\frac{x^2}{y^3}\right)^2 = \frac{(x^2)^2}{(y^3)^2} = \frac{x^4}{y^6}$$

$$\left(\frac{2x^3}{3y^2}\right)^3 = \frac{(2x^3)^3}{(3y^2)^3} = \frac{8x^9}{27y^6}; \quad \left(\frac{a^{-2}}{b^{-3}}\right)^2 = \frac{(a^{-2})^2}{(b^{-3})^2} = \frac{a^{-4}}{b^{-6}} = \frac{b^6}{a^4}$$

$$\left(\frac{a^{-1}}{b^{-2}}\right)^2 = \frac{(a^{-1})^2}{(b^{-2})^2} = \frac{a^{-2}}{b^{-4}} = \frac{b^4}{a^2}$$

Rational Expressions Actions

Тижнестанція до смененої виразу з різними змінними.

$$\left(\frac{xc^2y^3}{z^4}\right)^3 = \frac{(xc^2y^3)^3}{(z^4)^3} = \frac{x^6y^9}{x^{12}}$$

П.г.с. виразу з мономиками та різм. змінними.

$$\left(\frac{2a^3b^2}{3c^4d^5}\right)^2 = \frac{(2a^3b^2)^2}{(3c^4d^5)^2} = \frac{4a^6b^4}{9c^8d^{10}}$$

П.г.с. виразу з більшими показ.

$$\left(\frac{x^{-1}y^2}{z^{-3}w^4}\right)^2 = \frac{(x^{-1}y^2)^2}{(z^{-3}w^4)^2} = \frac{x^{-2}y^4}{z^{-6}w^8} = \frac{y^4z^6}{x^2w^8}$$

П.г.с. виразу із різними змінними та складнішими показниками:

$$\left(\frac{a^2b^{-3}c^4}{x^{-1}y^2z^3}\right)^3 = \frac{(a^2b^{-3}c^4)^3}{(x^{-1}y^2z^3)^3} = \frac{a^6b^{-9}c^{12}}{x^{-3}y^6z^9};$$

1. Перетисування виразу
3 урах. більших степ.
Більші степ. можна позади.
 $b^{-9} = \frac{1}{b^9}; x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ отримати:

$$\frac{a^6b^{-9}c^{12}}{x^{-3}y^6z^9} = \frac{a^6 \cdot \frac{1}{b^9} \cdot c^{12}}{\frac{1}{x^3} \cdot y^6 \cdot z^9}; \text{ Еквівалентно } \frac{a^6c^{12}}{b^9} \cdot \frac{x^3}{y^6z^9}$$

2. Справдім.9 (Перевірено чи є сміл. мн. в число. і знам. які можна скоротити)

$$\frac{a^6c^{12}x^3}{b^9y^6z^9}$$

* Всі змінні різні мені що скрочую.

Логарифмічно
відповідно

$$\frac{a^6c^{12}x^3}{b^9y^6z^9} \quad (\text{якщо тоді. додат. см.})$$

3. створювати відповід.

$$\frac{a^6c^{12}x^3}{b^9y^6z^9} = a^6b^{-9}c^{12}x^3y^{-6}z^{-9};$$

Оскільки ділене на y^6z^9
еквівалентно множ. на $y^{-6}z^{-9}$

1. Dogовори и соглашения п. б.

$$\frac{x^2y}{z^3} + \frac{ab^2}{c^2} - \frac{mn^3}{p^4}; \quad \text{Чи належе даній многочлену } z^3c^2p^4$$

1) tracing

$$\frac{x^2y}{z^3} \Rightarrow Z^3 \quad \frac{ab^2}{c^2} \Rightarrow C^2 \quad \frac{mn^3}{p^4} \Rightarrow P^4$$

Основні зміщення у газі від проведених змін ($+, -$)
поприємо змінами $H C_3$ для $z^3 C^2 P^4$ буде $C^2 P^4 Z^3$ якщо умовим
що всі зміни позитивні.

2) Типичним єо стільки змоги (справжнє сподівання)
авторитет. впливів)

заряд $\frac{x^2y}{z^3}$ позитивні знаки і зміни знак $(^2P^4)$ будуть оптическими знаками. $(^2P^4)Z^3$

$$\frac{x^2y \cdot c^2p^4}{z^3 \cdot c^2p^4} = \frac{xc^2y c^2p^4}{c^2p^4 z^3}$$

Задача 1. Найти корни полинома p^4z^3

$$\frac{ab^2 \cdot p^4 z^3}{c^2 \cdot p^4 z^3} = \frac{ab^2 p^4 z^3}{c^2 p^4 z^3}$$



3) Діаграма зробіть *щепи* вузлів із стисн. зм. $C^2 P^4 Z^3$

$$\frac{x^2 y c^2 p^u}{c^2 p^u z^3} + \frac{a b^2 p^u z^3}{c^2 p^u z^3} - \frac{m n^3 c^2 z^3}{c^2 p^u z^3}$$

Скоромно мелочи.

$$x^2yc^2p^4 + ab^2p^4z^3 - mn^3c^2z^3$$

$$\frac{x^2 y c^2 p^4 + a b^2 p^4 z^3 - m n^3 c^2 z^3}{c^2 p^4 z^3}$$

Бізнес-рекомендації засновані на позитивному діалогічному стилі.

2. Множення:

$$\frac{x^3y^2}{ab^4} \cdot \frac{m^2n^3}{p^5q^2} = \frac{x^3y^2m^2n^3}{ab^4p^5q^2}$$

3. Множення:

$$\frac{x^4y^5}{a^2b^3} \cdot \frac{m^3n^2}{p^4q^5} = \frac{x^4y^5}{a^2b^3} \cdot \frac{p^4q^5}{m^3n^2} = \frac{x^4y^5p^4q^5}{a^2b^3m^3n^2}$$

4. Числителями операції:

$$\left(\frac{a^2b^3}{x^4y^5} + \frac{m^3n^2}{p^4q^5} \right) \cdot \frac{x^2y^3}{ab^2} ; \quad \begin{array}{l} \text{Спочатку зміні спільн. зн.} \\ \text{для дробів у дужках чоб} \\ \text{вибрати множник множення.} \end{array}$$

Спільний знаменник дробів $\frac{a^2b^3}{x^4y^5}$ та $\frac{m^3n^2}{p^4q^5}$ буде $x^4y^5p^4q^5$

> Добудування до спільного знаменника

$$\frac{a^2b^3}{x^4y^5} = \frac{a^2b^3 \cdot p^4q^5}{x^4y^5 \cdot p^4q^5} = \frac{a^2b^3p^4q^5}{x^4y^5p^4q^5}$$

$$\frac{m^3n^2}{p^4q^5} = \frac{m^3n^2 \cdot x^4y^5}{p^4q^5 \cdot x^4y^5} = \frac{m^3n^2x^4y^5}{x^4y^5p^4q^5}$$

> Додавання дробів і дужок

$$\frac{a^2b^3}{x^4y^5} + \frac{m^3n^2}{p^4q^5} = \frac{a^2b^3p^4q^5 + m^3n^2x^4y^5}{x^4y^5p^4q^5}$$

> Множення на другий дріб

$$\frac{a^2b^3p^4q^5 + m^3n^2x^4y^5}{x^4y^5p^4q^5} \cdot \frac{x^2y^3}{ab^2} = \frac{(a^2b^3p^4q^5 + m^3n^2x^4y^5)}{x^4y^5p^4q^5} \cdot \frac{x^2y^3}{ab^2}$$

$$\frac{(a^2b^3p^4q^5 + m^3n^2x^4y^5)x^2y^3}{x^4y^5p^4q^5ab^2} = \frac{x^2y^3(a^2b^3p^4q^5 + m^3n^2x^4y^5)}{x^4y^5p^4q^5ab^2}$$

> Спростування степені $x^2 : x^4 = \frac{1}{x^2}$; $y^3 : y^5 = \frac{1}{y^2}$

Відповідь: $\frac{a^2b^3p^4q^5 + m^3n^2x^4y^5}{x^2y^2p^4q^5ab^2}$

Сюжет 2

$$\left(\frac{a^2 b^3}{x^4 y^5} + \frac{m^3 n^2}{p^4 q^5} \right) \cdot \frac{x^2 y^3}{ab^2};$$

Розподілення множника на кожен доданок у дужках

$$\frac{a^2 b^3}{x^4 y^5} \cdot \frac{x^2 y^3}{ab^2} + \frac{m^3 n^2}{p^4 q^5} \cdot \frac{x^2 y^3}{ab^2}$$

Однокомпонентний множник добуток виразу

1) $\frac{a^2 b^3}{x^4 y^5} \cdot \frac{x^2 y^3}{ab^2} = \frac{a^2 b^3 \cdot x^2 y^3}{x^4 y^5 \cdot ab^2}$. Супровідний множник

$$a^2 : a = a^1 = a$$

$$b^3 : b = b^1 = b$$

$$x^2 : x^4 = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

$$y^3 : y^5 = y^{-2} = \frac{1}{y^2}$$

2) $\frac{m^3 n^2}{p^4 q^5} \cdot \frac{x^2 y^3}{ab^2} = \frac{m^3 n^2 x^2 y^3}{p^4 q^5 ab^2}$

Відповідь: $\frac{ab}{x^2 y} + \frac{m^3 n^2 x^2 y^3}{p^4 q^5 ab^2}$

2. Піднесення до степеня р. в.

$$\left(\frac{x^2 y^3}{a^4 b^5} \right)^2 \cdot \frac{m^3 n^2}{p^4 q^5}, \quad 1. \text{ Піднес до степеня}$$

$$\left(\frac{x^2 y^3}{a^4 b^5} \right)^2 = \frac{(x^2 y^3)^2}{(a^4 b^5)^2} = \frac{x^4 y^6}{a^8 b^{10}}$$

2. Перемноження дробів $\frac{x^4 y^6}{a^8 b^{10}} \cdot \frac{m^3 n^2}{p^4 q^5}$

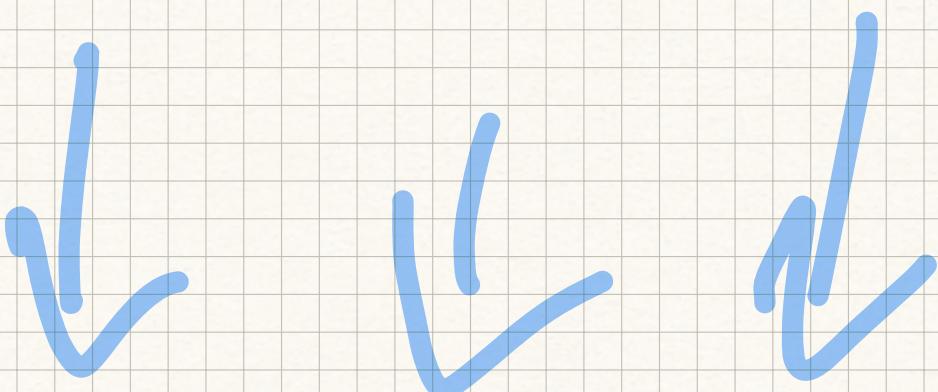
Перемнож чи з. з. з.

$$\frac{x^4 y^6 \cdot m^3 n^2}{a^8 b^{10} \cdot p^4 q^5} = \frac{x^4 y^6 m^3 n^2}{a^8 b^{10} p^4 q^5}; \quad \text{Відповідь: } \frac{x^4 y^6 m^3 n^2}{a^8 b^{10} p^4 q^5}$$

* Дані спаджині приміні спрощення і скороч р. в. при діленні р. в. Дані будуть представл. такі операції як. поділ. на числа різних кв. різм. нубів, нові квадрати, поділ на півцінніх. Інтервальний діапазон в чоти. на обрачн. дробі Систематич. скороч. чисел. множн.

Урахуван обласні діапазон знач ОДЗ

Закріпіться числа і значен



$$1) \frac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 9} : \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 4x + 3}$$

1) Розкладаємо обидві многочлени на множники

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3) \text{ різниця квадратів}$$

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2 \text{ квадрат суми (побуд. квадрат)}$$

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) \text{ розкладання тричленів}$$

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3) \text{ розкладання тричленів}$$

2) Перевірка ділення на множн. нен звір. фракц.

$$\frac{(x - 3)(x + 3)}{(x + 3)^2} \cdot \frac{(x + 1)(x + 3)}{(x - 3)(x + 1)}$$

3) Скорочення схожих множн.

$$\frac{(x - 3)(x + 3)}{(x + 3)^2} \cdot \frac{(x + 1)(x + 3)}{(x - 3)(x + 1)}$$

Відповідь: $\frac{1}{1} = 1$, за умови що $x \neq -3, -1, 3$

$$2) \frac{2x^2 - 8x}{x^2 - 16} : \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 2x - 8}$$

1) Розкладаємо на множники

$$2x^2 - 8x = 2x(x - 4)$$

$$x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4) \text{ різниця квадратів}$$

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$$

$$x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$$

2) Перевірка ділення на множники

$$\frac{2x(x - 4)}{(x - 4)(x + 4)} \cdot \frac{(x - 4)(x + 2)}{(x - 2)(x - 4)}$$

3) Скорочені множини.

$$\frac{2x(x-4)}{(x-4)(x+4)} \cdot \frac{(x-4)(x+2)}{(x-2)(x-4)}$$

Звільнюємо: $\frac{2x(x+2)}{(x+4)(x-2)}$ о.з. $x \neq 0, 2, 4, -2, -4$

3) $\frac{x^3-1}{x^2-1} : \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1} \cdot \frac{x+1}{x^2-x+1}$

1) Розкладаємо обидві множини

$$x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1) \text{ різниця кубів}$$

$$x^2-1 = (x-1)(x+1) \text{ різниця квадратів}$$

$$x^2+x+1$$

2) Підставляємо обидві вирази

$$\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{(x+1)^2}{x^2+x+1} \cdot \frac{x+1}{x^2-x+1}$$

3) Поясните скорочення $\frac{1}{x+1} \cdot (x+1)^2 \cdot \frac{x+1}{x^2-x+1}$

$$\frac{(x+1)^2 \cdot (x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}$$

Звільнюємо: $\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}, x \neq 1, -1$

* Добився результ. складників п. б.

1. розклад множин на множники
2. перетвор зведені на множин.
3. виписати обид. домн. з мах 0,73 окресло
4. скороч множини поєднано
5. передбільши результат міжнародного простих знамен.



$$4) \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 8} : \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x + 4}$$

1) Ділення на множники

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 8} \cdot \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 - 4}$$

2) Розкладаючи членам із знаменниками відповідно до квадратного виразу на множники

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \text{ квадратний член, корінь } x = 2$$

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) \text{ різниця кубів}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2), \text{ де } a = x, b = 2$$

$x^2 + 2x + 4$ не розкладається на лінійні множники
оскільки дискримінант $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 4 - 16 = -12 < 0$

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) \text{ різниця квадратів}$$

$$\frac{(x - 2)^2}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} \cdot \frac{x^2 + 2x + 4}{(x - 2)(x + 2)}$$

3) Скорочені спільні множники

$$\frac{(x - 2)}{1} \cdot \frac{1}{(x + 2)} = \frac{x - 2}{x + 2}$$

4) Перевірка чи об'єднаний вираз виключений коши знакою $\neq 0$

$$x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 ;$$

Осьоже, $x \neq 2, x \neq \pm 2$

Відповідь: $\frac{x - 2}{x + 2} ; x \neq \pm 2$

$$5) \frac{2x^3 + 3x^2 - 2x - 3}{x^4 - x^2} : \frac{2x^2 + 5x + 3}{x^3 + x}$$

1) Перевір гіл на множині.

$$\frac{2x^3 + 3x^2 - 2x - 3}{x^4 - x^2} \cdot \frac{x^3 + x}{2x^2 + 5x + 3}$$

2) Знакомірність ч. і.м.

Споряджено позитивним методом уточнювання обсягу коренів (за методом про пошукації корені)

Перевірюємо множині корені $(\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2})$

$$\text{Для } x = -1; 2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 2(-1) - 3 + 3 + 2 - 3 = 0$$

оригінал
 $x = -1$ - корінь

• Виконуємо ділення многочлена $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$ на $x + 1$

Метод ділення многочленів за "симетричним методом" або метод Тартагла, основою ділення є мінімум многочлену
для $x - \alpha$ якщо $\alpha = -1$

1) Запис коєр-ів многочлена

$$\text{многочлен: } 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$$

коєрів: 2, 3, -2, -3.

$$\text{Дільник } x + 1 = x - (-1) \text{ означає } \alpha = -1$$

2) Виконання симетричного ділення

Стосовно симметриї діленн. $-1 \ 2 \ 3 \ -2 \ -3$

$$\begin{array}{r} -2 \ -1 \ 3 \\ 2 \ 1 \ -3 \ 0 \end{array}$$

Пояснення:

Сума всіх перві коєр: 2

$$1) 2 \cdot (-1) = -2, \text{ що є пасмут коєр. } 3 + (-2) = 1$$

$$2) 1 \cdot (-1) = -1, \text{ що: } -2 + (-1) = -3$$

$$3) -3 \cdot (-1) = 3, \text{ що } -3 + 3 = 0$$

Off
detailed

Останнє число 0 - це залишок. залишок більше ніж 0
що означає, що $x+1$ є дільником многочлена

3) Заміс розумінану

Число розумінану (зміна більше залишку) 2, 1, -3

Не виконується многочлену на один степінь менший, ніж
нормальний $2x^2 + x - 3$

Однак розумінані ділення: $\frac{2x^3 + 3x^2 - 2x - 3}{x + 1} = 2x^2 + x - 3$

4) Перевірка.

Розкладмо $2x^2 + x - 3$: $2x^2 + x - 3 = (2x + 3)(x - 1)$

Перевірка:

$$(x+1)(2x+3)(x-1) = (x+1)(2x^2 + 3x - 2x - 3) = (x+1)(2x^2 + x - 3) = \\ 2x^3 + x^2 - 3x + 2x^2 + x - 3 = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$$

Відповідь: $\frac{2x^3 + 3x^2 - 2x - 3}{x + 1} = 2x^2 + x - 3$ *of dots*

тобто у діленні залишилося відповідь:

$$2x^2 + x - 3 = (2x + 3)(x - 1), \quad x \neq -1$$

Умови ділення на 0
 $x = -1$ - недійсне

Для $x = -1$; $2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 2(-1) - 3 + 3 + 2 - 3 = 0$ отже
 $x = -1$ - недійсне

• Виконуємо зручніше ділення $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$ на $x + 1$

Очищаемо $2x^2 + x - 3$. Перевіримо, чи
може ділитися $2x^2 + x - 3$

$$2x^2 + x - 3 = (2x + 3)(x - 1)$$

$$\begin{array}{r} -1 & 2 & 3 & -2 & -3 \\ & -2 & -1 & 3 \\ \hline & 2 & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

Отже, $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(2x + 3)(x - 1)$

Запишемо перш. дробу $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x - 1)(x + 1)$

Чиселю. другого. дробу $x^3 + x = x(x^2 + 1)$

Знайдіть дрібн. дробу $2x^2 + 5x + 3 = (2x+3)(x+1)$

Вираз має розчленізациі:

$$\frac{(2x+3)(2x+3)(x-1)}{x^2(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x(x^2+1)}{(2x+3)(x+1)}$$

3) Запис результату

Числовий результату (зліва від знаку): 2, 1, -3

Це відповідне множину всіх одиниць числової, які не відносяться до $2x^2 + x - 3$, оскільки

$$\frac{2x^3 + 3x^2 - 2x - 3}{x + 1} = 2x^2 + x - 3$$

4) перевірка:

Розкладаємо $2x^2 + x - 3$

$$2x^2 + x - 3 = (2x+3)(x-1)$$

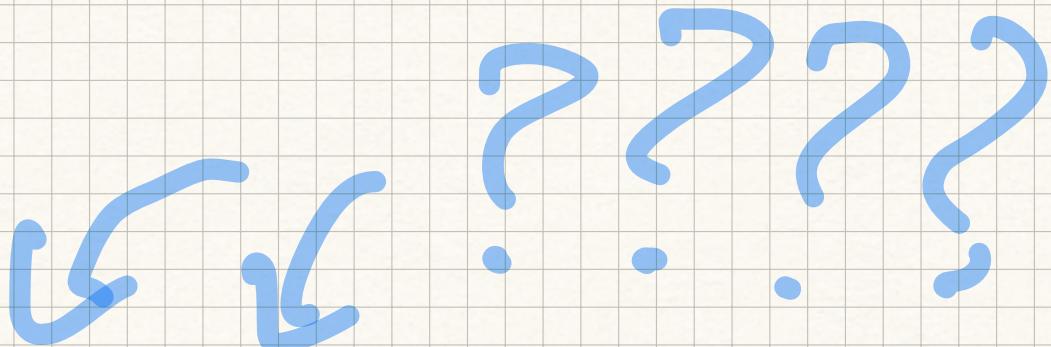
Ітак, результат

$$(x+1)(2x+3)(x-1) = (x+1)(2x^2 + 3x - 2x - 3) = (x+1)(2x^2 + x - 3) =$$

$$2x^3 + x^2 - 3x + 2x^2 + x - 3 = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$$

Результат збігає з наведеною множиною, отже, відповідь вірна до правильності

Відповідь: $\frac{2x^3 + 3x^2 - 2x - 3}{x + 1} = 2x^2 + x - 3$



Крок 3: Скорочення спільних множників

- Скорочуємо $(x + 1)$ (з'являється в чисельнику і знаменнику).
- Скорочуємо $(x - 1)$.
- Скорочуємо $(2x + 3)$.

Після скорочення:

$$\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x(x^2 + 1)}{1} = \frac{x(x^2 + 1)}{x^2}$$

Крок 4: Спрощення виразу

$$\frac{x(x^2 + 1)}{x^2} = \frac{x^3 + x}{x^2} = \frac{x^3}{x^2} + \frac{x}{x^2} = x + \frac{1}{x}$$

Крок 5: Перевірка умов

Знаменники не дорівнюють нулю:

- $x^4 - x^2 = 0 \implies x^2(x^2 - 1) = 0 \implies x = 0, \pm 1.$
- $2x^2 + 5x + 3 = 0 \implies D = 25 - 24 = 1, x = \frac{-5 \pm 1}{4} \implies x = -1, -\frac{3}{2}.$
- $x^3 + x = 0 \implies x(x^2 + 1) = 0 \implies x = 0$ (оскільки $x^2 + 1 \neq 0$).

Отже, $x \neq 0, \pm 1, -\frac{3}{2}$.

Кінцева відповідь:

$$x + \frac{1}{x}, \quad x \neq 0, \pm 1, -\frac{3}{2}$$

$$6) \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 + x^2 - 2x} : \frac{x^2 - 1}{x^3 - x}$$

1) Історема про б'єві множини

$$\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 + x^2 - 2x} \cdot \frac{x^3 - x}{x^2 - 1}$$

2) Факторизація умови членів

$x^4 - 5x^2 + 4$ Це діаграмний вираз, який має

$$u = x^2 \text{ тоді } u^2 - 5u + 4 = (u-4)(u-1) = (x^2-4)(x^2-1)$$

$$\text{Дави } x^2-4 = (x-2)(x+2), x^2-1 = (x-1)(x+1)$$

$$\text{Ось } x^4 - 5x^2 + 4 = (x-2)(x+2)(x-1)(x+1)$$

$$x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = x(x+2)(x-1)$$

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$$

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

Вираз після фракторизації: $\frac{(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)}{x(x+2)(x-1)} \cdot \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}$

$$\frac{(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)}{x(x+2)(x-1)} \cdot \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{(x-2) \cdot 1}{x \cdot 1} \cdot \frac{x \cdot 1}{1} = \frac{x-2}{x} \cdot x = x-2$$

3) Спрощений умови спрощеній вираз $x-2$

4) Історема, після якої знаємо, що $x \neq 0$

$$x^3 + x^2 - 2x = x(x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0, -2, 1$$

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x^3 - x = x(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 1 \quad \text{Ось } x \neq 0, \pm 1, -2$$

Відповідь: $x-2, x \neq 0, \pm 1, -2$

$$y) \frac{3x^3 - 2x^2 - 5x + 2}{x^4 - 16} : \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - 2x}$$

1) Делім дільник на багаточлен $\frac{3x^3 - 2x^2 - 5x + 2}{x^4 - 16} \cdot \frac{x^2 - 2x}{3x^2 - 2x - 1}$

2) Заміните (подстановка) $x = i$.

$3x^3 - 2x^2 - 5x + 2$ перевірте на мономи корені $(\pm 1; \pm 2; \pm \frac{1}{3}; \pm \frac{2}{3})$ за методом розкладання корені

$$x = 1; 3(1)^3 - 2(1)^2 - 5(1) + 2 = 3 - 2 - 5 + 2 = -2 \neq 0$$

$$x = -1; 3(-1)^3 - 2(-1)^2 - 5(-1) + 2 = -3 - 2 + 5 + 2 = 2 \neq 0$$

$$x = 2; 3(2)^3 - 2(2)^2 - 5(2) + 2 = 24 - 8 - 10 + 2 = 8 \neq 0$$

$$x = -2; 3(-2)^3 - 2(-2)^2 - 5(-2) + 2 = -24 - 8 + 10 + 2 = -20 \neq 0$$

$$x = \frac{1}{3}; 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{3}\right) + 2 = \frac{1}{9} - \frac{2}{9} - \frac{5}{3} + 2 = \frac{1 - 2 - 15 + 18}{9} = \frac{2}{9} \neq 0$$

Способом подстановки методом узування обійтися. Перевіримо $x = 1$

$$\begin{array}{r} 1 \ 3 \ -2 \ -5 \ 2 \\ \times \quad 3 \ 1 \ -4 \\ \hline 3 \ 1 \ -4 \ -2 \end{array}$$

Остаточено $3x^2 + x - 4$ залишок -2 , отже, $x = 1$ не є коренем. Потрібно іншій метод, розкладання через узування:

$$3x^3 - 2x^2 - 5x + 2 = (3x^3 - 2x^2) + (-5x + 2) = x^2(3x - 2) - (5x - 2)$$

Це не є простого розкладу, тому використаємо числове поділення або підстановку чи корінь. Способом $x = \frac{2}{3}$.

$$3\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 5\left(\frac{2}{3}\right) + 2 = 3 \cdot \frac{8}{27} - 2 \cdot \frac{4}{9} - \frac{10}{3} + 2 = \frac{8}{9} - \frac{8}{9} - \frac{30}{9} + \frac{18}{9} = \frac{8 - 8 - 30 + 18}{9} = \frac{-12}{9} \neq 0$$