

Подібні доданки і прапорча дужок

Подібні доданки

Означення

Подібними доданками називають доданки, які рівні, або які відрізняються лише коефіцієнтами.

Звести подібні доданки — означає додати їх коефіцієнти, а буквену частину залишити незмінною.

Приклади

$$\begin{aligned} 11a - 2b + 4a - 12a + c - 7b = \\ = (11+4-12)a + (-2-7)b + c = \\ = 3a - 9b + c. \end{aligned}$$

Дужки

Дужки у виразі вводяться для зміни звичайного порядку дій:

- 1) піднесення до степеня (справа наліво);
- 2) множення або ділення (зліва направо);
- 3) додавання або віднімання (зліва направо).

$$\begin{aligned} 13 + (7 - 3)^2 &= 13 + 4^2 = 13 + 16 = 29; \\ (113 + 17) : (123 - 121) &= 130 : 2 = 65; \\ (200 - 28) - (17 + 53) &= 172 - 70 = 102. \end{aligned}$$

Правила розкриття дужок

Якщо перед дужками стоїть знак «+», то дужки опускаються, а знаки доданків у дужках залишаються без змін.

$$\dots + (a + b) = \dots + a + b.$$

Якщо перед дужками стоїть знак «-», то дужки опускаються і знаки доданків змінюються на протилежні.

$$\dots - (a + b) = \dots - a - b.$$

Обчислити значення виразу

$$(2 + (3 \cdot 4)) : (5 - 1) = (2 + 12) : 4 = 14 : 4 = 3.5$$

Розкриття дужок та спрощення виразу

$$3(x + 2) + 4(2x - 1)$$

1) Розкриття дужок

$$3(x + 2) = 3x + 6$$

$$4(2x - 1) = 8x - 4$$



2) Об'єднаємо вирази

$$3x + 6 + 8x - 4 = 11x + 2$$

Розкриття бінарних дужок

$$2(3x + (4-x))$$

1) Розкриття виокремлених дужок

$$2(3x + (4-x)) = 2(3x + 4 - x) = 6x + 8 - 2x = 4x + 8$$

Розкриття дужок з піднесенням до степеня

$$(x+2)^2$$

1) Використання формул квадратів суми

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2) Піднесення знаків

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2$$

3) Способом

$$x^2 + 4x + 4 \quad (5x^2 + 4 ???)$$



Розкриття дужок з множниками мономів

$$(x+3)(x-2) = x(x-2) + 3(x-2) \leftarrow \text{Використ. розпод. } y ??$$

$$2) \text{Розкривати дужки } x^2 - 2x + 3x - 6$$

$$3) \text{Способом } x^2 + x - 6$$

$$(x+3)(x-2) = x(x-2) + 3(x-2) = x^2 - 2x + 3x - 6 = x^2 + x - 6$$

Іноді к додатку - це додатки, які мають одинакові дужкові частини. (коєфіцієнти)

$$3x + 5x = 8x; \quad 4m^2 + 3m^2 = 7m^2$$

$$7a + 2a = 9a; \quad 5xy + 2xy = 7xy$$

$$2a + 5b + 3a = 5a + 5b; \quad 4x^2 + 3xy + 2x^2 = 9x^2 + 3xy;$$

$$4ab + 2a + 5ab = 9ab + 2a$$

Розкритий дужок з подібними доданками

Пр.1 $3(2x + 2y) - 2(x - 3y)$

1) Використовуємо розподільну властивість.

$$3(2x + 2y) - 2(x - 3y) = 6x + 15y - 2x + 6y = \underline{(6x - 2x) + (15y + 6y)} = \underline{4x + 21y}$$

Пр.2

$$5(a+2b) + 2(3a-b) = 5a + 10b + 6a - 2b = (5a+6a) + (10b-2b) = 11a + 8b$$

$$5(a+2b) + 2(3a-b) =$$

$$5a + 10b + 6a - 2b =$$

$$(5a+6a) + (10b-2b) =$$

$$11a + 8b$$



Використання переставової та сполучної властив.

$$4x + 5y + 3x + 2y$$

1) Використов. переставову властивість щоб згрупувати подібні доданки

розділення 2

$$4x + 5y + 3x + 2y = \underline{4x + 3x} + 5y + 2y = (4+3)x + (5+2)y = 10x + 7y$$

Результат сума з подібними доданками

$$(2a+3b)(a-b)$$

$$(2a+3b)(a-b) = 2a(a-b) + 3b(a-b) = 2a^2 - 2ab + 3ab - 3b^2 =$$

$$\underline{2a^2 + (-2ab + 3ab) - 3b^2} = 2a^2 + ab - 3b^2 ;$$

$$(2a+3b)(a-b) =$$

$$2a(a-b) + 3b(a-b) =$$

(позодильна власт.)

$$2a^2 - 2ab + 3ab - 3b^2 =$$

(позодильна власт.)

$$2a^2 + (-2ab + 3ab) - 3b^2 =$$

зупинюю позодиї доданки

$$2a^2 + ab - 3b^2$$

Піднчуд квадратів з позодими доданками

$$(5a+b)^2 - (5a-b)^2 ;$$

Формула піднчуд квадратів

$$(5a+b)^2 - (5a-b)^2 =$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$[(5a+b) + (5a-b)][(5a+b) - (5a-b)] = (10a)(2b) = 20ab$$

Піднчуд до квадрату з використанням скороченого множ

$$\text{Пр.1. } (3x+2y)^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(3x+2y)^2 = \underline{(3x)^2 + 2(3x)(2y) + (2y)^2} = 9x^2 + 12xy + 4y^2$$

Пр.2.

$$2(3x-4y+z) + 5(x+2y-3z) =$$

$$6x - 8y + 2z + 5x + 10y - 15z =$$

$$(6x+5x) + (-8y+10y) + (2z-15z) =$$

$$11x + 2y = 13z$$

Винесення спільного членника за дужки

Пр.1. $12a^2b + 9ab^2 - 3ab = \underline{3ab}(4a + 3b - 1)$

Пр.2. $4x^2y + 6xy^2 - 10xy = \underline{2xy}(2x + 3y - 5)$

Правила розкриття дужок

+ перед дужками не міняє знак в дужках при розкритті

$$+(a+b) = +a+b$$

Пр.1. $+ (3+5) = +3+5 = 3+5 = 8$

$$+(x+y) = +x+y = x+y$$

$$2 + (3+4) = 2+3+4 = 9$$

$$m + (n+p) = m+n+p$$



Правило розкриття дужок з відніманням

- перед дужками значить що при розкритті дужок всі знаки в дужках міняються на противоположні

$$-(a+b) = -a-b$$

$$-(a-b) = -a+b$$

ПР

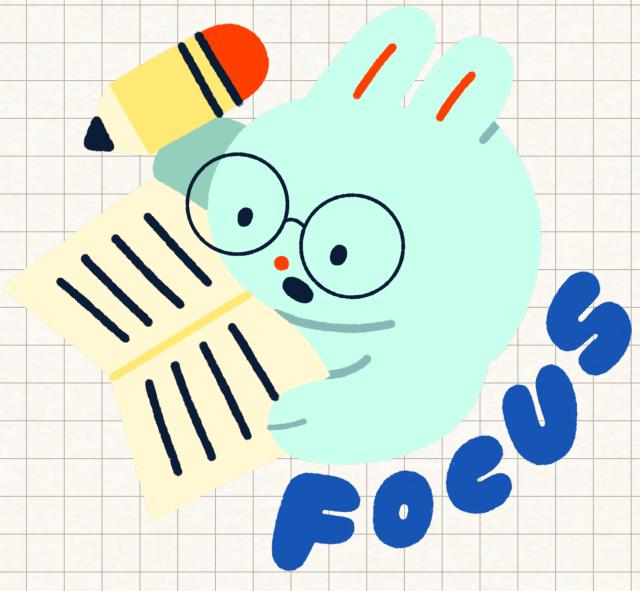
$$-(3+5) = -3-5 = -8$$

$$-(y-2) = -y+2 = -5$$

$$6 - (4+3) = 6-4-3 = -1$$

$$x - (y+z) = x-y-z$$

$$-(x-y-z) = -x+y+z$$



$$-(\beta+2) = -5; \quad 4-(6+8+3) = -13; \quad 3-(4+2-1) = -2$$

Множення одночленів на многочлен

При множенні одночленів на многочлен кожен член многочлена множиться на одночлен

$$a(b+c+d) = ab + ac + ad$$

Пр. 1

$$2(x+3) = 2x+6$$

$$-5(a-b+c) = -5a+5b-5c$$

$$x(y+z-3) = xy+xz-3x$$

$$3a^2(a+2b-c) = 3a^3 + 6a^2b - 3a^2c$$



Множення многочленів на многочлен (орієнтована "кожний з кожним")

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Пр. 1

$$(x+2)(x+3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$$

$$(2x+1)(x-3) = 2x^2 - 6x + x - 3 = 2x^2 - 5x - 3$$

$$(x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 - x^2y + xy^2 + x^2y - x^2y + y^3 = x^3 + y^3$$

Формула скороченого множення

$$\text{Квадрат суми} \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Пр. 1 $(x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

$$(2a+b)^2 = (2a)^2 + 2 \cdot (2a) \cdot b + b^2 = 4a^2 + 4ab + b^2$$

$$\text{Квадрат різниці} \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Пр. $(x-5)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$

$$(3y-2)^2 = (3y)^2 - 2 \cdot (3y) \cdot 2 + 2^2 = 9y^2 - 12y + 4$$

Різниця квадратів $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$(x+3)(x-3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$$

$$(2y+5)(2y-5) = (2y)^2 - 5^2 = 4y^2 - 25$$

Куб суми $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 1 + 3x \cdot 1^2 + 1^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

Куб різниці $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$$(y-2)^3 = y^3 - 3y^2 \cdot 2 + 3y \cdot 2^2 - 2^3 = y^3 - 6y^2 + 12y - 8$$

Сума кубів $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$$x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - x \cdot 2 + 2^2) = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

Різниця кубів $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$$2^3 - y^3 = 3^3 - y^3 = (3-y)(3^2 + 3 \cdot y + y^2) = (3-y)(9 + 3y + y^2)$$

4. Піднесення до степеня

Піднесення виразу в дужках до степеня

Для піднесення виразу в дужках до степеня використовується біном Ньютона або формули скороченого множення.

Формула для біному Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C(n,k) \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Де $C(n,k) = n! / (k! \cdot (n-k)!)$ - це біноміальні коефіцієнти.

Приклади:

- $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$
- $(2a-b)^3 = (2a)^3 - 3(2a)^2b + 3(2a)b^2 - b^3 = 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$

Ділення многочлена на одночлен

При діленні многочлена на одночлен, кожен член многочлена окремо ділиться на одночлен

$$(a+b+c):d = a/d + b/d + c/d$$

Пр. $(6x + 9) : 3 = \frac{6x}{3} + \frac{9}{3} = 2x + 3$;

$$(8a^3 - 4a^2 + 12a) : 4a = \frac{8a^3}{4a} - \frac{4a^2}{4a} + \frac{12a}{4a} = 2a^2 - a + 3$$

Ділення многочлена на многочлен

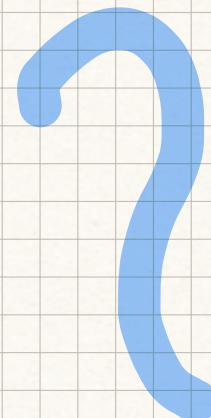
Ділення многочлена на многочлен

Це більш складна операція, яка виконується за допомогою алгоритму ділення многочленів (за методом кута).

Приклад:

Ділення $(x^2 + 5x + 6) \div (x + 2)$:

$$\begin{array}{r} x + 3 \\ x+2) \overline{x^2 + 5x + 6} \\ \quad x^2 + 2x \\ \hline \quad 3x + 6 \\ \quad 3x + 6 \\ \hline \quad 0 \end{array}$$



Отже, $(x^2 + 5x + 6) \div (x + 2) = x + 3$

6. Комбіновані приклади

1. $2[3 - (4 + 2)] = 2[3 - 6] = 2[-3] = -6$
2. $5 - 3[2 - (8 - 3)] = 5 - 3[2 - 5] = 5 - 3[-3] = 5 + 9 = 14$
3. $(2x + 3)^2 - (x - 1)(x + 2) = 4x^2 + 12x + 9 - (x^2 + x - 2) = 4x^2 + 12x + 9 - x^2 - x + 2 = 3x^2 + 11x + 11$
4. $-2[3(x - 1) - 2(x + 4)] = -2[3x - 3 - 2x - 8] = -2[x - 11] = -2x + 22$
5. $(3x^2 - 2x + 5)(x + 1) = 3x^3 + 3x^2 - 2x^2 - 2x + 5x + 5 = 3x^3 + x^2 + 3x + 5$

§ 1. Рівняння. Рівняння з однією змінною.

Вирази та їх перетворення

Рівняння та його розв'язки

Означення	Приклади
Рівняння – це рівність, яка містить змінну.	$3(x-4) = 24$, при $x=12$ $3(12-4) = 24$ $3 \cdot 8 = 24$ $24 = 24$ $x=12$ – розв'язок рівняння.
Розв'язок рівняння – це значення змінної, при якому рівняння перетворюється у правильну рівність.	
Розв'язати рівняння – це означає знайти його розв'язки або довести, що їх немає.	$3(x-4) = 24$, $x=12$.
Рівносильні рівняння – це рівняння, які мають одні і ті самі розв'язки.	$3x = 36$ і $3(x-4) = 24$; їх розв'язок $x=12$.

Деякі властивості рівнянь

У будь-якій частині рівняння можна звести подібні доданки. Якщо з однієї частини рівняння перенести доданки в іншу частину і при цьому змінити знаки доданків на протилежні, отримаємо рівняння, рівносильне даному. При діленні (помноженні) обох частин рівняння на одне і те саме число, відмінне від нуля, отримаємо рівняння, рівносильне даному.	$3x - 4 + 5x = 36$ $3x + 5x = 36 + 4$ $8x = 4 + 36$ $8x = 40$.
	поділимо обидві частини рівняння $8x = 40$ на 8: $x = 5$ — це рівняння рівносильне $8x = 40$, їх розв'язок 5.

9

Лінійне рівняння

Означення	Приклади
Рівняння виду $ax = b$, де x — змінна, a і b — деякі числа, називається лінійним рівнянням.	$4 - 5x = 6 - 2(x+2)$, використовуючи властивості рівняння: $4 - 5x = 6 - 2x - 4$, $-5x + 2x = 6 - 4 - 4$, $-3x = -2$, $x = \frac{-2}{-3}$, $x = \frac{2}{3}$.

Розв'язування лінійних рівнянь

$ax + b = 0$; $ax = -b$.	$5x + 4 = 0$; $5x = -4$.
$a \neq 0$; $x = -\frac{b}{a}$ — єдиний розв'язок.	$x = -\frac{4}{5}$ — розв'язок.
$a = 0$; $0x = -b$ — немає розв'язків.	$0x = -10$ немає розв'язків -10 на 0 поділити неможливо.
$a = 0$; $b = 0$. $0 \cdot x = 0$ — нескінчена множина розв'язків.	$7x = 7x$, $7x - 7x = 0$, $0x = 0$, x — будь-яке число.

Види виразів

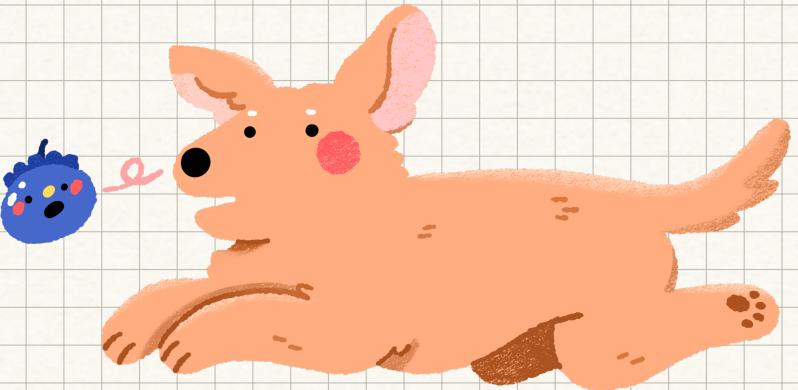
Типи квадратичних рівнянь з одним змінним

1. Лінійні рівняння

$$3x + 5 = 14$$

$$2x - 4 = 9$$

$$x : 4 + 6 = 10$$



2. Квадратичні рівняння

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$3x^2 - 12 = 0$$

$$x^2 - 9 = 0$$

3. Дробово-раціональні рівняння

$$(x+3) : (x-1) = 2$$

$$x : (x+5) = 3:5$$

4. Ірраціональні рівняння

$$\sqrt{x+3} = 5$$

$$\sqrt{2x-1} = x-3$$

5. Показникові рівняння

$$2^x = 8$$

$$3^{x+1} = 27$$

6. Логарифмічні рівняння

$$\log_2(x+3) = 4$$

$$\ln(x) = 2$$

7. Тригонометричні рівняння

$$\sin(x) = \frac{1}{2}$$

$$2\cos(x) + 1 = 0$$



Всі ці рівняння містять тільки одну змінну (x) і вимагають знайдення значення цієї змінної, при якому рівняння перетворюється на відповідь рівності.

Види виразів

Означення	Приклади
Вираз – це правило, що задає сукупність дій, які треба виконувати над значеннями змінних і сталих в певному порядку, щоб отримати значення цього виразу.	$\frac{11}{20} - \frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} - 8^2; 3x - 18y + 6;$ $\frac{11(y-2)}{13y}; (a+b)c - ab.$
Числовий вираз – це вираз, що складається з чисел за допомогою знаків дій та дужок.	$(21-13)^2 - \frac{1}{5}.$
Вираз із змінними – це вираз, що складається із чисел і змінних за допомогою знаків дій і дужок.	$1,5x^2 - (28y - 127) : 3.$
Підставляючи у вираз значення змінних, отримаємо числовий вираз . Знайшовши значення цього числового виразу, отримаємо значення виразу із змінною .	якщо $x = 2; y = 5,5,$ то $1,5x^2 - (28y - 127) : 3 =$ $= 1,5 \cdot 2^2 - (28 \cdot 5,5 - 127) \cdot 3 =$ $= 1,5 \cdot 4 - (154 - 127) \cdot 3 =$ $= 6 - 27 : 3 = 6 - 9 = -3.$

Перетворення виразів

Означення	Приклади
Тотожність – це рівність, справедлива при всіх дозволених значеннях змінних, які входять до неї.	$3a - 4 + 5a = 8a - 4.$
Тотожне перетворення виразу – це заміна одного виразу іншим, тотожно рівним йому.	$3x - 4 = x + 2$ і $2x = 6$ – тотожні рівності.

Відомі тотожності

Означення	Приклади
$a+b=b+a; ab=ba$ переставна властивість.	$17+13=13+17; 5 \cdot 3=3 \cdot 5.$
$(a+b)+c=a+(b+c); (ab)c=a(bc)$ сполучна властивість.	$(17+13)+33=17+(13+33);$ $(2 \cdot 8) \cdot 4=2 \cdot (8 \cdot 4).$
$a(b+c)=ab+ac$ розподільна властивість.	$7 \cdot (11+13)=7 \cdot 11+7 \cdot 13.$

Приклади додаткових властивостей рівнень

1. Властивість рівносильності при додаванні однакових виразів до обох частин

Якщо $a=b$ то $a+c=b+c$

Пр. $x+5=12$ то $x+5+3=12+3$ тобто $x+8=15$

2. Властивість рівносильності при відніманні однакових виразів від обох частин

Якщо $a=b$ то $a-c=b-c$

Пр. Якщо $2x=10$ то $2x-6=10-6$ тобто $2x-6=4$

3. Властивість рівносильності при множенні обох частин на певне число

Якщо $a=b$ і $c \neq 0$, то $a \cdot c = b \cdot c$

Пр. Якщо $x=4$ то $3x=3 \cdot 4$ тобто $3x=21$