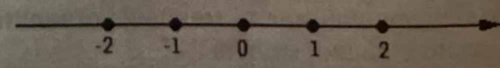
Координати та модуль

Координатна пряма

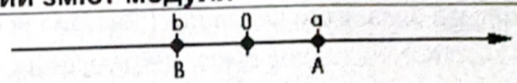
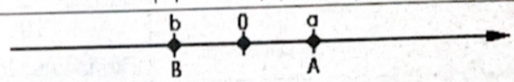
На координатній прямій зображується множина всіх дійсних чисел. 0 – початок координат.	
Числа, які позначені на координатній прямій справа від точки 0, називають додатними, а зліва – від'ємними.	

Модуль числа

Означення	Приклади
Модулем додатного числа називається те саме число.	$\lvert 33\rvert = 33$.
Модулем від'ємного числа називається протилежне йому число.	$\lvert -5\rvert = \lvert 5\rvert$.
Модуль нуля дорівнює нулю.	$\lvert 0\rvert = \lvert 0\rvert$.

$$|a| = \begin{cases} a, a > 0 \\ 0, a = 0 \\ -a, a < 0 \end{cases} = \begin{cases} a, a \ge 0 \\ -a, a < 0 \end{cases} = \begin{cases} a, a > 0 \\ -a, a \le 0 \end{cases} = \begin{cases} a, a \ge 0, \\ -a, a \le 0. \end{cases}$$

Геометричний зміст модуля

На координатній прямій модуль – це відстань від початку координат до точки, що зображує дане число.	 $\lvert a\rvert = OA$; $\lvert b\rvert = OB$.
Модуль різниці двох чисел a і b — це відстань між двома точками a і b на координатній прямій.	 $\lvert a-b\rvert = AB$.

Властивості модуля

Модуль будь-якого числа – невід'ємне число. $\lvert a\rvert \ge 0$.	$\lvert 3\rvert \ge 0$.
Модулі протилежних чисел рівні. $\lvert -a\rvert = \lvert a\rvert$.	$\lvert -12\rvert = \lvert 12\rvert$.
Величина числа не перевищує величину його модуля. $a \le \lvert a\rvert$.	$4 \le \lvert 4\rvert$.
Модуль добутку дорівнює добутку модулів співмножників. $\lvert a\cdot b\rvert = \lvert a\rvert\cdot\lvert b\rvert$; $\lvert a^n\rvert = \lvert a\rvert^n$; $\lvert a\rvert^{2k} = a^{2k}$.	$\lvert 5\cdot 3\rvert = \lvert 5\rvert\cdot\lvert 3\rvert$.
Модуль дробу дорівнює модулю чисельника, поділеному на модуль знаменника (якщо знаменник не дорівнює нулю). $\left\lvert \frac{a}{b}\right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$ $(b \ne 0)$.	$\left\lvert \frac{2}{3}\right\rvert = \frac{\lvert 2\rvert}{\lvert 3\rvert}$.

Додавання і віднімання

Правила	Приклади
При додаванні двох чисел з однаковими знаками їх модулі додаються, а перед сумою ставиться їхній спільний знак.	$13+21=34$; $-17+(-33)=-50$.
При додаванні двох чисел з різними знаками від більшого модуля віднімають менший і ставлять знак того числа, у якого більший модуль.	$-13+21=8$; $20-37=-17$.
Віднімання двох чисел з різними знаками замінюється додаванням зменшуваного і числа, протилежного від'ємнику.	$28-11=17$; $19-(-5)=19+5=24$; $-35+20=-15$.

$|b|$ $|b|$

Правила	Приклади
Додавання і віднімання	
При додаванні двох чисел з однаковими знаками їх модулі додаються, а перед сумою ставиться їхній спільний знак.	$13+21=34$; $-17+(-33)=-50$.
При додаванні двох чисел з різними знаками від більшого модуля віднімають менший і ставлять знак того числа, у якого більший модуль.	$-13+21=8$; $20-37=-17$.
Віднімання двох чисел з різними знаками замінюється додаванням зменшуваного і числа, протилежного від'ємнику.	$28-11=17$; $19-(-5)=19+5=24$; $-35+20=-15$.
Множення і ділення	
При множенні двох чисел їх модулі помножують, а знак ставлять за вказаною схемою: $\boxed{+\cdot+=+;\ +\cdot-=-;\ -\cdot-=+;\ -\cdot+=-}$	$7\cdot(-2)=-14$; $-9\cdot(-7)=63$; $-13\cdot5=-65$.
При діленні двох чисел модуль першого числа (діленого) ділять на модуль другого числа (дільника), а знак ставлять за схемою множення.	$-25:(-5)=5$; $-120:3=-40$; $48:(-4)=-12$.

Addition	Subtraction
$(+)+(+)=+$	$(+)-(+)=+$ or $-$
$(-)+(-)=-$	$(-)-(-)=+$ or $-$
$(-)+(+)=+$ or $-$	$(-)-(+)=-$
$(+)+(-)=+$ or $-$	$(+)-(-)=+$

Multiplication	Division
$(+)\times(+)=+$	$(+)\div(+)=+$
$(-)\times(-)=+$	$(-)\div(-)=+$
$(+)\times(-)=-$	$(-)\div(+)=-$
$(-)\times(+)=-$	$(+)\div(-)=-$

Модуль числа — абсолютне значення числа є 0 або додатнім числом.

Геометрично модуль визначений як відстань від нуля на координатній прямій. Відстань це величина додатня.
число завжди невід'ємне
Тому модуль визначається так:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{якщо } a \geq 0 \\ -a & \text{якщо } a < 0 \end{cases}$$

$|5| = 5$

$|-3| = 3$

$|0| = 0$

Множення та ділення мод.

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \; (b \neq 0)$$

$$|2 \cdot (-4)| = |2| \cdot |-4| = 2 \cdot 4 = 8$$

$$\left|\frac{-6}{2}\right| = \frac{|-6|}{|2|} = \frac{6}{2} = 3$$

Додавання та нерівність трикутника

Для будь-яких a, b виконуєт. нерівність

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$|-5+7| = |2| = 2 \leq |-5| + |7| = 12$$

Нерівності з модулями

Нерівності виду $|x|<a$; $|x|>a$

Розв'язуються за правилами:

$$|x|<a \Rightarrow -a<x<a \ (\text{if } a>0)$$

$$|x|>a \Rightarrow x<-a \text{ OR } x>a \ (\text{if } a>0)$$

Для будь-яких дійсних чисел (або векторів) a і b виконується

$$|a-b| \geq \big||a|-|b|\big|$$

Це називається оберненою нерівністю трикутника

Класична нерівність трикутника

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

Доведення:

Використаємо класичну нерівність трикутника

$$|a|=|(a-b)+b| \leq |a-b|+|b| \Rightarrow |a|-|b| \leq |a-b|$$

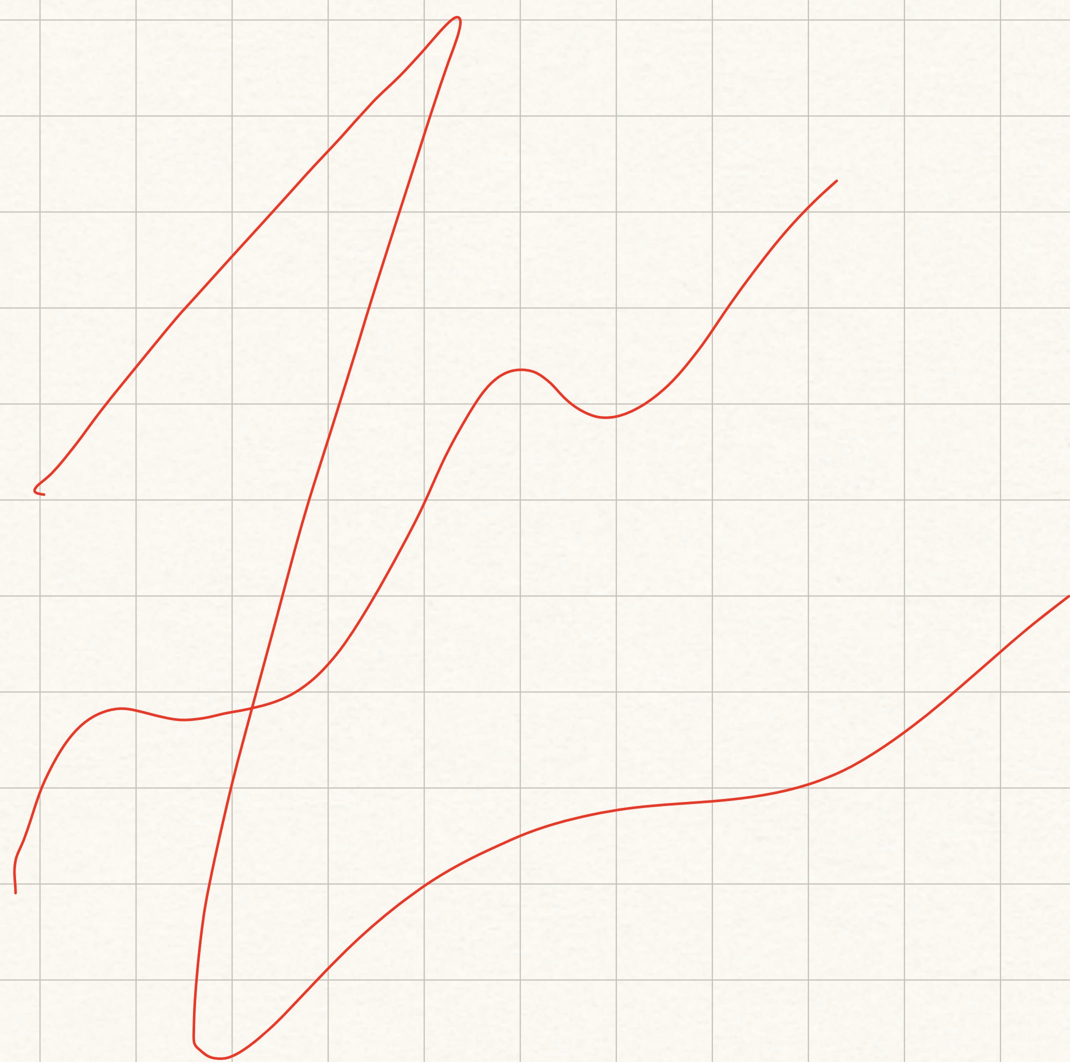
Аналогічно:

$$|b| = |(b-a)+a| \le |b-a| + |a| = |a-b| + |a| \Rightarrow |b| - |a| \le |a-b|$$

Отже:

$$|a-b| \ge \max(|a|-|b|, |b|-|a|) = ||a|-|b||$$

Тобто:



Приклад 1.

$|x+1| \le 4$

$$-4 \le x+1 \le 4 \Rightarrow -5 \le x \le 3$$

Приклад 2

$|2x-5| > 3$

$2x-5 < -3$ OR $2x-5 > 3$

$x < 1$ OR $x > 4$

Приклад 3

$|x-3| + |x+2|$ for $x \in [-2, 3]$

На проміжку $[-2, 3]$

$|x-3| = 3-x$ (cause $x \le 3$)

$|x-3| = 3-x$ (cause $x \ge -2$)

Then. $|x-3| + |x+2| = (3-x) + (x+2) = 5$