Системи числення

к.т.н., доцент кафедри прикладної математики
Рижа Ірина Андріївна

Про що ця лекція???

- Опишемо поняття систем числення та їх класифікацію.
- Розглянемо основні позиційні системи числення.
- Викладемо особливості переведення чисел з однієї системи числення в іншу.

Поняття системи числення

Система числення

– сукупність методів та правил найменування і позначення чисел.

Щоб визначити число необхідно **знати**:

- тип системи числення;
- алфавіт (множину символів-цифр) системи числення;
- синтаксис – правила, що дозволяють однозначно записати подання числа;
- правила, які дають змогу за значеннями цифр встановити значення числа.

Класифікація систем числення

1. Непозиційні
   - Ієрогліфічні
   - Алфавітні
2. Позиційні
   - Однорідні
   - Неоднорідні
   - Спеціальні

Непозиційні системи числення

Непозиційна система числення

– система числення, в якій значення кожної цифри, яка задає запис числа, не змінюється залежно від місця у цьому записі.

- Будується за принципом **адитивності**, тобто кількісний еквівалент числа визначається як сума цифр, що стоять поруч.

Римська система числення:

I – один	Z – п'ятдесят
V – п'ять	C – сто
X – десять	D – п'ятсот

$$\mathrm{CCCXXIV} = 324$$

Римська система не є повністю непозиційною, так як менша цифра, що йде перед більшою, віднімається від неї, наприклад:

$$\mathrm{IV} = 4, \text{ у той час як: } \mathrm{VI} = 6.$$

Непозиційні системи числення

Ієрогліфічна система числення

– така система числення, в якій кожна цифра подана своїм символом, значком або ієрогліфом.

Алфавітна система числення

– це система числення, в якій буквам (усім або тільки деяким) приписуються числові значення, які, зазвичай, відповідають порядку букв в алфавіті.

Основні недоліки:

- відсутність нуля;
- необхідність використання нескінченної кількості символів;
- складність арифметичних дій із числами.

Позиційні системи числення

Позиційна система числення

– система числення, в якій значення кожної цифри залежить від її місця в послідовності цифр при записі числа.

- Один і той же числовий знак (цифра) при записі числа має різні значення в залежності від того місця (розряду), де він розташований.
- Будується за принципом **адитивності та мультиплікативності**, тобто кількісний еквівалент числа визначається як сума сусідніх цифр зі своїми вагами

Десяткова система числення:

$$130678 = 1{\cdot}10^5 + 3{\cdot}10^4 + 0{\cdot}10^3 + 6{\cdot}10^2 + 7{\cdot}10^1 + 8{\cdot}10^0.$$

Позиційні системи числення

Базис системи числення

– набір різних символів, що використовується для запису чисел в даній системі.

Основа системи числення

– число, яке задає, у скільки разів одиниця наступного розрядку більша за одиницю попереднього.

- Визначає кількість символів у базисі.

Основні переваги:

- використовується певна скінченна кількість різних символів (цифр) для позначення чисел;
- зручність виконання арифметичних операцій із числами.

Неоднорідні позиційні системи

Неоднорідна позиційна система числення

– система числення, в якій основа може набувати різних значень.

- У кожному i-ому розряді кількість допустимих символів може бути різною.

$$A = a_{n-1}p_{n-1}\dots p_2p_1 + a_{n-2}p_{n-2}\dots p_2p_1 + \dots + a_2p_2p_1 + a_1p_1 + a_0$$

p_l, $l = \overline{0, n-1}$ – основа системи числення;
a_i, $i = \overline{0, n-1}$ – цифри i-го розряду числа, які задовольняють нерівності $0 \leqslant a_i \leqslant p_l$.

	1 рік	365 або 366 днів
Система числення часу	1 день	24 години
	1 година	60 хвилин

Однорідні позиційні системи

Однорідна позиційна система числення

– p-розрядна система числення, яка визначається цілим числом $p > 1$ (основою).

- Ваги окремих розрядів є рядом членів геометричної прогресії зі знаменником p.

$$A = a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2} \cdots + \cdots + a_2p^2 + a_1p + a_0 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i,$$

  a_i, $i = \overline{0, n-1}$ – цілі числа (цифри), що задовольняють нерівності $0 \leqslant a_i \leqslant p$.

- Ціле число можна записувати за зменшенням старшинства розрядів зліва направо:

$$A = a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}\dots a_1a_0.$$

Щоб уникнути плутанини при одночасній роботі з декількома системами числення основу системи числення вказуватимемо як нижній індекс p, який записується в десятковій системі:

$$A = (a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}\dots a_1a_0)_p\,.$$

Приклад 1.

$$(123)_{10} = 1{\cdot}10^2 + 2{\cdot}10^1 + 3{\cdot}10^0;$$

$$(173)_8 = 1{\cdot}8^2 + 7{\cdot}8^1 + 3{\cdot}8^0 = 64 + 56 + 3 = (123)_{10}\,;$$

$$(1111011)_2 = 1{\cdot}2^6 + 1{\cdot}2^5 + 1{\cdot}2^4 + 1{\cdot}2^3 + 0{\cdot}2^2 + 1{\cdot}2^1 + 1{\cdot}2^0 = 64 + 32 + 16 + 8 + 2 + 1 = (123)_{10}\,.$$

Властивості позиційних систем числення

- основа систем числення в ній самій завжди записується як 10;
- для запису числа A у p-системі числення потрібно $\left[\log_p A\right] + 1$ цифр, де $[\cdot]$ означає цілу частину числа;
- природний порядок на натуральних числах відповідає лексикографічному порядку на їх представленнях в позиційній системі числення, тому порівнювати їх подання можна **порозрядно**:
$$321 > 312;$$
- легкість виконання арифметичних операцій над числами (додавання, віднімання, множення, ділення й ділення із залишком).

Вибір системи числення

Критерії вибору системи числення

- **надійність** подання чисел при використанні фізичних елементів;
- **економічність** – використання таких систем числення, в яких кількість елементів для подання чисел із деякого діапазону є мінімальною.

Наприклад

$(1 - 999)_{10}$ – 3 розряди по 10 станів = 30 станів;

$(1 - 999)_{10} = (1111100111)_2$ – 10 розрядів по 2 стани = 20 станів;

- Найпоширенішою для подання чисел у пам'яті комп'ютера є **двійкова система** числення.
- Для зображення чисел у цій системі необхідно дві цифри: **0 і 1**, тобто достатньо двох стійких станів фізичних елементів.

Перевід числа з однієї системи числення в іншу

Для переведення чисел із довільної позиційної системи числення з основою p у нову систему числення з основою q, потрібно:

- записати коефіцієнти розкладу, основи степенів і показники степенів у системі зі старою основою p;
- виконати усі дії використовуючи **арифметику нової системи числення** з основою q.

Це правило зручне при переході із системи числення з малою основою до системи із більшою основою.

Приклад 2.

Перевести число $(10001101,101)_2$ в десяткову систему числення.

$$(10001101,101)_2 = 1{\cdot}2^7 + 0{\cdot}2^6 + 0{\cdot}2^5 + 0{\cdot}2^4 + 1{\cdot}2^3 + 1{\cdot}2^2 + 0{\cdot}2^1 + 1{\cdot}2^0 + 1{\cdot}2^{-1} + 0{\cdot}2^{-2} + 1{\cdot}2^{-3} =$$
$$= 128 + 8 + 4 + 1 + 0{,}5 + 0{,}125 = (141{,}625)_{10}\,.$$

Перевід числа з однієї системи числення в іншу

Для переведення чисел із довільної позиційної системи числення з основою p у нову систему числення з основою q з використанням **арифметики старої системи числення** з основою p необхідно:

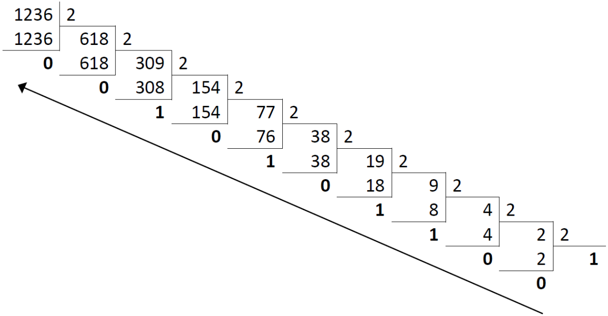
1. для переведення ***цілої частини***:
   - число, записане в системі з основою p, послідовно ділити на основу нової системи числення q, виділяючи залишки від ділення;
   - останню частку та залишки записати у зворотному порядку;
2. для переведення ***дробової частини***:
   - дробову частину число, записаного в системі з основою p, послідовно множити на основу нової системи числення q, виділяючи цілі частини;
   - отримані цілі частини утворювати запис числа у новій системі числення.

Зауваження

Тільки правильні дроби виду $\frac{m}{2^k}$ можуть бути представлені у вигляді скінченого двійкового дробу.

Приклад 3.

Перевести число $(1236)_{10}$ у двійкову систему числення.



$$(1236)_{10} = (10011010100)_2\,;$$

$$(10011010100)_2 = 1{\cdot}2^{10} + 1{\cdot}2^7 + 1{\cdot}2^6 + 1{\cdot}2^4 + 1{\cdot}2^2 = 1024 + 128 + 64 + 16 + 4 = (1236)_{10}\,.$$

Приклад 4.

Перевести число $(0{,}0625)_{10}$ у двійкову систему числення.

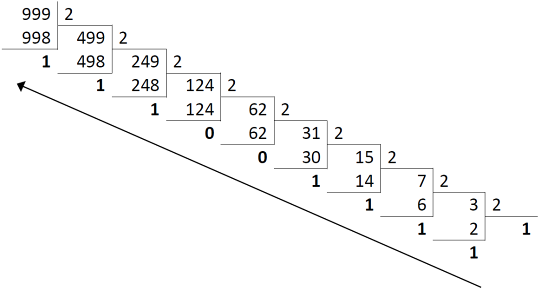
0,	0	6	2	5	$\times 2$
0	1	2	5	0	
0	2	5	0		
0	5	0			
1	0				

$$(0{,}0625)_{10} = (0{,}0001)_2\,;$$

$$(0{,}0001)_2 = 0\cdot 2^{-1} + 0\cdot 2^{-2} + 0\cdot 2^{-3} + 1\cdot 2^{-4} = \frac{1}{16} = (0{,}0625)_{10}\,.$$

Приклад 5.

Перевести число $(999{,}35)_{10}$ у двійкову систему числення.



0,	3	5	×2
0	7	0	
1	4	0	
0	8	0	
1	6	0	
1	2	0	
0	4	0	
0	8	0	

$$(0{,}35)_{10} = (0{,}01011(0011))_2\,;$$

$$(999{,}35)_{10} = (1111100111{,}01011(0011))_2\,.$$

Шістнадцяткова система числення

Шістнадцяткова система числення

– це позиційна система числення з основою **16**.

Цифри шістнадцяткової системи:

- десяткові цифри $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
- латинські букви $\{A, B, C, D, E, F\}$, які відповідно позначають числа від 10_{10} до 15_{10}.

Залежність між двійковою та шістнадцятковою системами:

- **одному** шістнадцятковому розряду відповідає **чотири** двійкових: $16 = 2^4$;
- будь яку **тетраду** (четвірку) двійкових цифр можна записати як шістнадцяткову цифру.

Шістнадцяткова цифра	**Десятковий еквівалент**	**Двійкова тетрада**
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
A	10	1010
B	11	1011
C	12	1100
D	13	1101
E	14	1110
F	15	1111

Перевід числа з однієї системи числення в іншу

З десяткової у шістнадцяткову ($10 \to 16$):

- переведення *цілої частини:*
  1. число, записане в десятковій системі, послідовно ділять на 16, виділяючи залишки від ділення;
  2. остання частка та залишки записують у зворотному порядку;
- переведення *дробової частини:*
  1. дробову частину множать на 16, виділяючи цілі частини;
  2. цілі частини записують у прямому порядку;

Приклад 6.

Перевести з десяткової у шістнадцяткову систему числення число $(1236)_{10}$.

1236	16	
1232	77	16
4	64	**4**
	D=13	

$$(1236)_{10} = (4D4)_{16} = (0100\,1101\,0100)_2\,;$$

$$(4D4)_{16} = 4{\cdot}16^2 + 13{\cdot}16 + 4{\cdot}16^0 = (1236)_{10}\,.$$

Приклад 7.

Перевести з десяткової у шістнадцяткову систему числення число $(1356{,}625)_{10}$.

1356	16	
1344	84	16
C=12	80	**5**
	4	

0,	6	2	5	$\times 16$
A=10	0			

$$(1356{,}625)_{10} = (54C{,}A)_{16}\ .$$

Перевід числа з однієї системи числення в іншу

Із шістнадцяткової у десяткову ($16 \to 10$):

1. записують коефіцієнти розкладу, основи степенів і показники степенів у системі з основою 16;
2. виконують усі дії використовуючи арифметику нової системи числення з основою 10.

Приклад 8.

Перевести із шістнадцяткової у десяткову систему числення числа:

$$(4C5)_{16} \quad \text{та} \quad (5A0F{,}2C)_{16}\,.$$

$$(4C5)_{16} = 4{\cdot}16^2 + 12{\cdot}16^1 + 5{\cdot}16^0 = (1221)_{10}\,;$$

$$(5A0F{,}2C)_{16} = 5{\cdot}16^3 + 10{\cdot}16^2 + 15{\cdot}16^0 + 2{\cdot}16^{-1} + 12{\cdot}16^{-2} =$$
$$= 23055 + \frac{44}{256} = (23055{,}171875)_{10}\,.$$

Перевід числа з однієї системи числення в іншу

Із двійкової у шістнадцяткову $(2 \to 16)$:

1. двійкове число розбивають на групи (тетради) по чотири цифри:
   - при переведенні *цілої частини* розбиття відбувається в напрямку справа наліво від коми;
   - при переведенні *дробової частини* розбиття відбувається в напрямку зліва направо від коми;
   - за необхідності неповні тетради доповнюються нулями;
2. кожну тетраду переводять у шістнадцятковий розряд.

Приклад 9.

Перевести із двійкової у шістнадцяткову систему числення числа:

$$(110000010101)_2\,; \quad (0{,}011111)_2\,; \quad (111110{,}1100111)_2\,.$$

$$(110000010101)_2 = \underbrace{1100}_{C}\,\underbrace{0001}_{1}\,\underbrace{0101}_{5} = (C15)_{16}\,;$$

$$(0{,}011111)_2 = 0,\underbrace{0111}_{7}\,\underbrace{1100}_{C} = 0{,}7C;$$

$$(111110{,}1100111)_2 = \underbrace{0011}_{3}\,\underbrace{1110}_{E},\underbrace{1100}_{C}\,\underbrace{1110}_{E} = (3E,CE)_{16}\,.$$

Перевід числа з однієї системи числення в іншу

Із шістнадцяткової у двійкову $(16 \to 2)$:

- кожну цифру шістнадцяткового числа замінюють на відповідну тетраду двійкових чисел.

Приклад 10.

Перевести із шістнадцяткової у двійкову систему числення числа:

$$(5A0F,2C)_{16} \quad \text{та} \quad (19B,EC)_{16}\,.$$

$$(5A0F,2C)_{16} = 0101\,1010\,0000\,1111,0010\,1100 = (101101000001111,001011)_2\,;$$

$$(19B,EC)_{16} = 0001\,1001\,1011,1110\,1100 = (110011011,111011)_2\,.$$

- Максимальне **дворозрядне число** при шістнадцятковому записі:

$$(FF)_{16} = (255)_{10};$$

- 255 – це максимальне значення одного байта:

$$1\,\text{байт} = 8\,\text{біт};$$

$$1111\,1111_2 = FF_{16}.$$

Зауваження

За допомогою шістнадцяткової системи числення дуже зручно коротко (за допомогою двох цифр-знаків) записувати значення байтів.

Вісімкова система числення

Вісімкова система числення –

це позиційна система числення з основою **8**.

Цифри вісімкової системи:

- десяткові цифри $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Залежність між двійковою та вісімковою системами:

- **одному** вісімковому розряду відповідають **три** двійкових: $8 = 2^3$;
- будь яку **тріаду** (трійку) двійкових цифр можна записати як вісімкову цифру.

Вісімкова цифра	**Десятковий еквівалент**	**Двійкова тріада**
0	0	000
1	1	001
2	2	010
3	3	011
4	4	100
5	5	101
6	6	110
7	7	111

Перевід числа з однієї системи числення в іншу

Із двійкової у вісімкову $(2 \to 8)$:

1. двійкове число розбивають на групи (тріади) по три цифри:
   - при переведенні *цілої частини* розбиття відбувається в напрямку справа наліво від коми;
   - при переведенні *дробової частини* розбиття відбувається в напрямку зліва направо від коми;
   - за необхідності неповні тріади доповнюються нулями;
2. кожну тріаду переводять у вісімковий розряд.

Із вісімкової у двійкову $(8 \to 2)$:

- кожну цифру вісімкового числа замінюють на відповідну тріаду двійкових чисел.

Приклад 11.

Перевести із двійкової у вісімкову систему числення числа:

$$(110000010101)_2\,; \quad (0{,}011111)_2\,; \quad (11110{,}1100111)_2\,.$$

$$(110000010101)_2 = \underbrace{110}_{6}\ \underbrace{000}_{0}\ \underbrace{010}_{2}\ \underbrace{101}_{5} = (6025)_8\,;$$

$$(0{,}011111)_2 = 0,\underbrace{011}_{3}\ \underbrace{111}_{7} = (0{,}37)_8\,;$$

$$(11110{,}1100111)_2 = \underbrace{011}_{3}\,\underbrace{110}_{6}\,,\underbrace{110}_{6}\ \underbrace{011}_{3}\ \underbrace{100}_{4} = (36{,}634)_8\,.$$

Приклад 12.

Перевести із вісімкової у десяткову систему числення число $(672)_8$.

$$(672)_8 = 6 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 = 384 + 56 + 2 = (442)_{10} .$$

Дякую за увагу!

Далі буде...