

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»



МЕХАНІКО-МАШИНОБУДІВНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра конструювання, технічної естетики і дизайну

Методичні вказівки

для самостійної роботи студентів при виконанні лабораторних робіт із використанням
Mathcad з дисципліни

«Інформаційні системи і технології у інженерії»

для студентів напрямку підготовки
131, 132, 274, 275

Дніпро
2020

Методичні рекомендації для самостійної роботи студентів при виконанні лабораторних робіт із використання Mathcad з дисципліни «Інформаційні системи і технології у інженерії» для студентів напряму підготовки 131, 132, 274, 275 / І.В. Вернер, Т.О. Письменкова, В.Е. Дитюк – Дніпро: НТУ «ДП», 2020. – 69 с.

Упорядники:

І.В. Вернер, ас.

Т.О. Письменкова, канд.пед.наук

В.Е. Дитюк

Затверджено до видання редакційною радою НТУ «ДП» (протокол № 00 від 09.10.2020) за поданням кафедри КТЕД (протокол № 00_від 20.09.2020).

Методичні рекомендації для самостійної роботи при виконанні лабораторних робіт з дисципліни «Інформаційні системи і технології інженерії» для студентів усіх спеціальностей допоможуть студентам у освоєнні методів вирішення інженерних задач у математичному пакеті.

Відповідальний за випуск завідувач кафедри основ конструювання механізмів і машин к.т.н., доц. К.А. Зіборов.

Зміст

Вступ.....	4
Основні поняття, терміни і визначення.....	5
Лабораторна робота № 1. Робота з документом. Текстові регіони...	6
Лабораторна робота № 2. Робота з математичними регіонами. Принципи та правила запису математичних конструкцій. Форматування та редагування математичних регіонів.....	12
Лабораторна робота № 3. Принципи та правила надання розмірності. Засоби символьних обчислень.....	19
Лабораторна робота № 4. Знаходження коренів рівняння в MathCad	23
Лабораторна робота № 5. Дії з матрицями в MathCad.....	30
Лабораторна робота № 6. Знаходження рішень системи лінійних рівнянь в MathCad.....	35
Лабораторна робота № 7. Знаходження рішень системи нелінійних рівнянь в MathCad.....	42
Лабораторна робота № 8. Символьні дії математичного аналізу в MathCad.....	45
Лабораторна робота № 9. Обчислення похідних, часних похідних у задачах геометрії.....	51
Лабораторна робота № 10. Обчислення інтегралів у задачах геометрії та механіки.....	56
Лабораторна робота № 11. Рішення звичайних диференціальних рівнянь в MathCad.....	60
Лабораторна робота № 12. Інтерполяція експериментальних даних в MathCad.....	66
Література.....	69

Вступ

Методичні вказівки складено для студентів напрямку 131, 132, 275, 274 у рамках вивчення дисциплін «Інформаційні системи і технології у інженерії» та «Комп'ютерна техніка та програмування».

Мета даних методичних вказівок – допомогти студентам в опануванні навчального матеріалу та в підготовці до контрольних заходів лабораторного модуля дисципліни «Інформаційні системи і технології у інженерії», вдосконалити здібності студентів, їх пам'ять, логічне мислення, пов'язаних з досягненнями в навчальній діяльності.

Наукові і інженерні розрахунки залишаються однією з найважливіших сфер застосування комп'ютерів. За багато років накопичені великі бібліотеки наукових підпрограм, у першу чергу, мовою FORTRAN, призначених для розв'язку типових завдань (завдання лінійної алгебри, інтегрування, розв'язок диференціальних рівнянь і т.д.). Крім того, є цілий ряд різних математичних пакетів, що реалізують різноманітні чисельні методи та здатні робити аналітичні математичні перетворення. Найбільш відомими сьогодні є наступні пакети: Mathematica (фірма Wolfram Research), Maple (фірма Waterloo Maple Inc), Matlab (фірма The Mathworks), MathCad (фірма Mathsoft/PTC Inc). Перші два фактично є мовами для проведення символічних математичних перетворень.

Пакет Mathcad здобув найбільшої популярності в інженерному середовищі. Реалізований в MathCad підхід запису розрахункових формул у звичній формі дозволяє користувачеві працювати не використовуючи мови програмування. Проте, мова програмування існує, але застосовує його сама система. У міру того, як користувач створює у вікні об'єкти (формули, таблиці, тексти, графіки), система становить програму, яка зберігається в оперативній пам'яті доти, поки не буде записана у файл. Файли, що містять програми MathCad, мають розширення .mcd, *.xmcd.

Характерною рисою пакета є використання звичних стандартних математичних позначень, тобто документ на екрані виглядає так само, як звичайні математичні розрахунки. Для використання пакета не потрібно вивчати будь-яку систему команд, як, наприклад, у випадку пакетів Mathematica або Maple.

Пакет орієнтований у першу чергу на проведення чисельних розрахунків, але має вбудований символічний процесор Maple, що дозволяє виконувати аналітичні перетворення. В останніх версіях передбачена можливість створювати зв'язування документів Mathcad з документами Matlab. На відміну від згаданих вище пакетів, Mathcad є середовищем візуального програмування. Простота освоєння пакета, дружній інтерфейс, відносна невибагливість до можливостей комп'ютера з'явилися головними чинниками того, що саме цей пакет був обраний для навчання студентів чисельним методам.

MathCad – це система, що поєднує текстовий, графічний і формульний редактори з досить широкими обчислювальними можливостями. MathCad є

потужним інструментальним засобом для підготовки статей, монографій, електронних підручників і довідників.

Для роботи в системі користувачеві необхідно ознайомитися з правилами і прийманнями підготовки завдань на обчислення, тобто освоїти вхідну мову системи.

Основні поняття, терміни і визначення

Інтерфейс – у перекладі з англійської мови означає «зовнішній вигляд» програмного продукту (панелі інструментів, головне меню, його робоча область тощо.).

Команда виконує пов'язану з нею дію (і навпаки, кожній дії в MathCad відповідають одна або кілька команд). Команди використовуються для створення об'єктів, для дій над ними і для зміни характеристик.

Панель інструментів – вікно з великою кількістю кнопок, кожна з яких відповідає робочому інструменту або режиму роботи програми.

Сучасна властивість – властивість якого-небудь параметра, використовувана в системі в даний момент.

Властивість «за умовчанням» – властивість якого-небудь параметра, встановлена на етапі розробки програмного продукту. Ця властивість може бути змінена користувачем, після чого вона переходить у розряд поточних.

Оператори – елементи Mathcad, за допомогою яких можна створювати математичні вирази. Це символи арифметичних операцій, знаки обчислення сум, добутків, похідної, інтеграла тощо.

Операнд – число або вираз, на яке діє (з яким працює) оператор.

Перемінна – поименований об'єкт, що має деяке значення, яке може змінюватися по ходу виконання програми.

Системні перемінні – перемінні обумовлені при запуску системою Mathcad які керують роботою системи.

Дискретні аргументи – особливий клас перемінних, що дозволяють задавати діапазон і крок зміни перемінної.

Константи – поименовані об'єкти, що зберігають деякі значення, які не можуть бути змінені.

Ідентифікатори – імена констант, перемінних і інших об'єктів. Складаються із символів латинського і грецького алфавіту, цифр і знака «_».

Масив – має унікальне ім'я сукупність кінцевого числа числових або символьних елементів, упорядкованих деяким чином, і маючі певні адреси.

Індекс – порядковий номер елемента, який є його адресою.

Типи даних – числові константи, звичайні і системні змінні, вектори і матриці, дані файлового типу.

Функція – вираз, згідно з яким проводяться деякі обчислення з аргументами і визначається його числове значення.

Аргументи – перемінні, зазначені в дужках після імені функції, які замінюються при обчисленні функції значеннями з дужок.

Параметри функції – перемінні в правій частині визначення функції, не зазначені в дужках у лівій частині функції, що задаються до визначення.

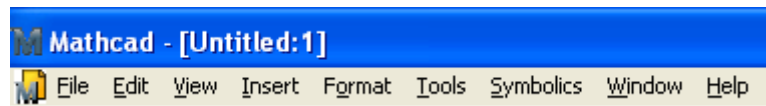
Лабораторна робота № 1

Робота з документом. Текстові регіони

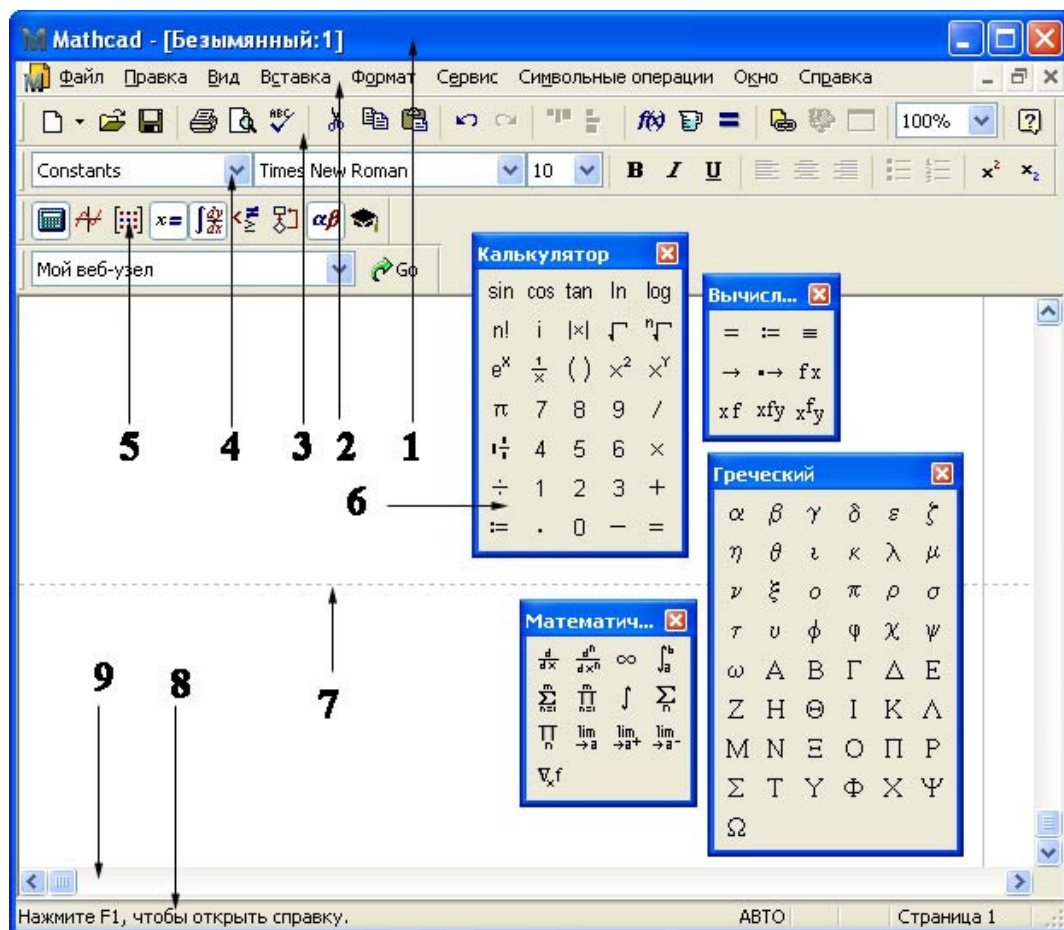
Мета роботи: ознайомитись з програмним середовищем та вивчити інтерфейс програми, засвоїти навички роботи з палітрами, меню, командами і панеллю інструментів. Навчитись формувати текстові регіони, та встановлювати формат паперу документу.

Інтерфейс програми MathCad 14

Робоче середовище MathCad 14 може бути на англійській або російській мові (Рис. 1.1).



а)



б)

Рис. 1.1 – Інтерфейс MathCad 14:

а) – англоязычний інтерфейс головного меню, б) – російський інтерфейс

Інтерфейс MathCad складається з наступних елементів:

- 1 – заголовок вікна програми;
- 2 – головне меню;
- 3 – стандартна панель інструментів;
- 4 – панель форматування;
- 5 – математична панель інструментів;
- 6 – плаваюча палітра;
- 7 – границя сторінки;
- 8 – рядок стану (рядок повідомлень);
- 9 – смуга прокручування.

Падаюче меню

Рядок падаючого меню за умовчанням містить такі пункти:

- ◆ **File** (файл) – меню роботи з файлами: відкриття, збереження, друк, експорт файлів в інші формати та ін.
- ◆ **Edit** (правка) – меню редагування тексту та формул, пошуку та заміни.
- ◆ **View** (вид) – меню дозволяє вмикати палітри та лінійки, змінювати масштаби документу, та відображати регіони.
- ◆ **Insert** (вставка) – меню, що здійснює роботу по створенню об'єктів MathCad та регіонів.
- ◆ **Format** (формат) – меню дозволяє формувати текстові та формульні регіони, працювати зі стилями.
- ◆ **Tools** (сервис) – меню налаштування інтерфейсу програмного середовища, відладки при розрахунках.
- ◆ **Symbolics** (Символьные операции) – меню роботи із символьним процесором при розрахунках.
- ◆ **Window** (окно) – меню забезпечує перемикання між відкритими документами, а також дозволяє різними методами упорядковувати документи на робочому полі.
- ◆ **Help** (справка) – меню містить велику систему гіпертекстових підказок і навчальних посібників, систему он-лайн допомоги, та систему оновлення програми.

Робота з документом

MathCad працює з документами (Sheets), що поєднують опис розв'язуваного завдання з даними, коментарями і результатами обчислень. Документ складається з окремих блоків.

Кожний блок займає у вікні редагування деяку область прямокутної форми. У звичайному стані границі областей невидимі. Щоб зробити блок видимим, необхідно клацнути по ньому мишею. Блок буде виділений чорною рамкою. Для виділення декількох блоків досить установити курсор на вільній


ділянки і простягнути мишею по екрану в напрямку блоків. Блоки будуть виділені чорними пунктирними лініями. Для виділення всіх блоків використовується команда Edit/select All (Редактор/Выделить все).

Блоки не повинні перекриватися. Щоб позбутися перетинання блоків, досить виконати команду Format/separate Regions (Формат/Разделить регионы).

Розташування блоків має принципово важливе значення, тому що визначає послідовність виконуваних дій. Задати потрібне положення блоків можна перетаскуючи їх по екрану або виконуючи звичайні операції редагування через буфер (Cut, Copy, Paste). Крім того, командами Across і Down меню Format/align Region (Формат/Выровнять регионы) можна впорядкувати блоки по горизонталі або вертикалі. Для швидкого виконання цих дій передбачені кнопки на панелі інструментів. Слід пам'ятати, що до виконання операцій із блоками, вони повинні бути виділені.

Команда View/regions (Показать области) виділяє області кольором. По чорній крапці, наявної в кожному блоці в цьому режимі, можна судити про положення блоку на аркуші. Таким чином, у режимі Regions добре видна послідовність виконання блоків.

У системі передбачені автоматичний і ручний режими обчислень. В автоматичному режимі обчислення виконуються відразу після внесення змін. У рядку повідомлень присутнє слово AUTO (авто).

У ручному режимі обчислення виконуються після натискання клавіші F9, або після вибору пунктів Calculate (Пересчитать) і Calculate Worksheet (Пересчитать все) з меню Math (Математика), або після натискання кнопки зі знаком рівності на панелі інструментів .

Перемикання режимів виконується командою Automatic Calculation (Автоматический режим) з меню Math. Галочка ліворуч від назви команди показує, що автоматичний режим включений.

За замовчуванням MathCad виконує тільки ту частину обчислень, яка необхідна для відновлення вікна. Для виконання обчислень у всьому документі передбачена команда Math/calculate Worksheet (Пересчитать все).

Щоб уникнути перерахування результатів на екрані при кожній внесеній зміні, доцільно відключити автоматичний режим і для відновлення результатів явно задавати команду «Перерахувати» одним з наявних способів. Переривання обчислень здійснюється клавішею Esc. Для поновлення обчислень досить натиснути F9.

При обробці документа Mathcad прочитає його двічі, рухаючись щораз з ліва направо і зверху вниз. Під час першого проходу Mathcad виконує всі дії, запропоновані глобальним оператором присвоювання і відображає всі необхідні результати обчислень. При наступному проході виконуються всі інші дії.

Команда Math/optimization призначена для оптимізації обчислень. Якщо цей режим включений, то MathCad намагається виконати аналітичні перетворення з метою спрощення виразів перед застосуванням чисельних

методів. У ряді випадків, обчислення з оптимізацією дозволяють одержати більш точний результат або уникнути переповнення.

Результати обчислень виводяться на екран з кількістю десяткових знаків, що задаються в діалоговому вікні, яке відкривається командою Format/result. У цьому вікні на вкладці Number Format (Формат числа) можна вибрати формат висновку чисел і вказати необхідну кількість десяткових знаків.

Кожний оператор має точку прив'язки. MathCad використовує точки прив'язки, щоб визначити порядок проходження операторів. Щоб побачити точки прив'язки, необхідно виконати команду View/regions (Вид/регионы).


В MathCad вбудований інтерпретатор, який обробляє документи. Блоки, з яких складається документ, проглядаються зліва направо і зверху вниз. Як тільки блок розпізнано, система автоматично запускає внутрішні підпрограми для виконання необхідних дій.

Створення і редагування тексту

Курсор

При переміщенні по документу курсор набуває різних форм залежно від того, у якій області він перебуває, який редактор працює і які дії виконуються.

Маленький червоний хрестик + служить для вказівки місця для нових блоків. Такий вид курсор має тільки на вільному місці екрана, тобто поза блоками.

Для завдання окремих елементів у формулах використовується курсор у вигляді куточка із синіх ліній . Зовнішній вигляд куточка дозволяє судити, що є операндом для наступної операції. Щоб змінити фрагмент формули, до якої буде ставитися дія, що задається, можна скористатися клавішами зі стрілками або пробілом. При створенні багаторівневих формул, щоб записувати символи в потрібному місці, клавішу «пробіл» доводиться використовувати постійно.

У текстових блоках курсор здобуває вид вертикальної червоної риси (рис).

На границі виділених блоків курсор має форму руки (рис). При такій формі курсору виконується переміщення блоків мишею.

Текстові області (региони)

Для створення текстової області можна виконати команду Insert/text region (Вставка/Текстовая область) або надрукувати символ “ (цей символ з'являється при використанні комбінації клавіш Shift+2” у в російській (укр.) латинській розкладці клавіатури). Текстова область з'являється в місці розташування курсору (червоного хрестика), який задає лівий верхній кут текстової області. У текстовому режимі курсор має вигляд вертикальної червоної риси.

Спочатку розмір текстової області визначається довжиною введеного рядка і може бути змінений розтягуванням мишею. При введенні тексту клавішу Enter, як прийнято в текстових редакторах, натискають для створення нового абзацу. При роботі з текстами усередині блоку користуються звичайними прийманнями переміщення курсору і редагування. Крім того, виділивши текстову область, з нею можна працювати як із блоком: переміщати

по екрану, змінювати розміри, копіювати, вирізати, видаляти. Стирання всіх символів у текстовій області приводить до того, що віддаляється вся область.

Коли курсор перебуває в текстовій області, у меню Format (Формат) доступні команди Text (Текст) і Paragraph (Параграф), які дозволяють змінювати параметри шрифту, формувати списки, задавати відступи і правила вирівнювання абзаців. Шрифт і правила форматування абзацу можна задавати для виділеного фрагмента тексту. Крім того, для всієї текстової області можна задати потрібний стиль, вибравши його зі списку доступних стилів або створивши новий за своїм розсудом (команда Format/style (Формат/стиль)). Використання стилів полегшує створення якісно оформленого документа.

Текстові блоки можуть містити будь-які математичні вирази. Причому можна вставляти готові формули через буфер обміну або формувати вирази в процесі набору тексту. Для запису формул слід установити курсор у потрібне місце тексту і дати команду Insert/math region (Вставка/Математическая область): з'явиться поле для введення математичного виразу і зміниться зовнішній вигляд курсору. При заповненні полів введення можна використовувати палітри математичних знаків.

Інший спосіб внесення тексту в документ MathCad – це підготовка його в текстовому редакторі (наприклад Word) і додавання через буфер. При цьому має принципове значення, у яку область додається текст. Якщо курсор перебував у текстовій області, то з доданим текстом можна буде працювати як зі звичайним текстовим коментарем (змінювати шрифт, формувати). Якщо ж у момент вставки курсор мав вигляд червоного хрестика, то буде доданий об'єкт.

Функціональні клавіші

Для зручної роботи з системою зберігається можливість використання функціональних клавіш:

- ◆ F1 – виклик довідкової системи MathCad
- ◆ F3 – видалення
- ◆ F4, Ctrl+V – вставка об'єкту з буферу обміну Windows у поточний документ
- ◆ Alt+F4 – закриття програмного середовища MathCad
- ◆ F5, Ctrl+O – відкриття існуючого документу
- ◆ F6 – збереження поточного документу як копія
- ◆ Ctrl+F6 – послідовне перемикання між відкритими документами
- ◆ F7, Ctrl+N – створення нового документу
- ◆ F9 – вичислити поточний регіон
- ◆ Ctrl+F9 – вичислити поточний документ
- ◆ Esc – переривання розрахунків
- ◆ Ctrl+Shift + A – вставити формулу в текстовий регіон
- ◆ Ctrl+C – копіювання об'єкту в буфер обміну Windows

- ◆ Ctrl+P – виведення поточного документу на друк
- ◆ Ctrl+S – збереження поточного документу
- ◆ Ctrl+X – вирізання об'єкту в буфер обміну
- ◆ Ctrl+Z – відміна останньої дії

Вказівки до виконання роботи

1. Відкрийте MathCad і встановіть мову інтерфейсу програми за допомогою пункту меню «Сервіс» - «параметри» - «мова» («Tools» –«Preferences» – «Language»). Перезапустіть MathCad.
2. Створіть новий документ за допомогою пункту головного меню «File» - «New» (або за допомогою комбінації клавіш Ctrl+N).
3. Встановіть параметри сторінок у документі. Для цього скористайтесь пунктом меню «файл» - «параметри сторінки». Встановіть формат паперу А4, портретну орієнтацію сторінок, поля 10 мм із усіх боків.
4. Для того щоб встановити параметри шрифту за замовчуванням, для введення текстових даних, скористайтесь пунктом меню «Формат» – «стиль». Виберіть «Normal» і натисніть кнопку «Змінити». У вікні, що з'явилося, «Визначення стилю» натисніть кнопку «Шрифт». Встановіть розмір шрифту – 14. Тепер усі текстові області, що вводяться, будуть використовувати цей шрифт і розмір за замовчуванням.
5. В документі створіть 3 текстових регіони та введіть наступне: *«Лабораторна робота 1» «Виконав студент групи ...» «Створення документу та робота з текстовими регіонами».*
6. За допомогою верхнього меню «Вид» активуйте відображення регіонів у документі.
7. Збережіть документ за допомогою будь-якого відомого вам способу з назвою «LP1.mcd».

Контрольні питання

1. Яким чином можна збільшити масштаб відображення зображення на робочому полі документу, щоб розглянути ближче більш дрібні деталі?
2. Як відобразити регіони в документі?
3. Як створити текстовий регіон?
4. Яким чином можливо автоматично розташувати регіони в документі за для уникнення заповзання одного регіону на інший?

Лабораторна робота № 2

Робота з математичними регіонами. Принципи та правила запису математичних конструкцій. Форматування та редагування математичних регіонів.

Мета роботи: *набути навичок роботи з математичними регіонами. Засвоїти правила запису математичних виразів. Навчитись редагувати та формувати математичні вирази.*

Загальні відомості

MathCad можна розглядати як об'єктно-орієнтовану мову програмування дуже високого рівня, призначену для математичних розрахунків. У багатьох випадках розв'язання завдань зводиться до запису алгоритму вхідною мовою, що нагадує загальноприйнятну мову опису математичних і науково-технічних розрахунків. До основних об'єктів вхідної мови системи Mathcad можна віднести: алфавіт, константи, змінні, оператори, функції.

Для завдання шрифту відображення даних що містяться в математичних регіонах необхідно змінити математичний стиль змінної. Для цього необхідно зробити наступні дії:

- клацнути на імені змінної або числі у математичному регіоні;
- вибрати команду меню Format / Equation (Формат / Уравнение);
- в діалоговому вікні Equation Format (Формат уравнений) вибрати стиль формули в списку стилів Style Name;
- якщо потрібно поміняти будь які установки шрифту, що задають стиль, натиснувши кнопку Modify (Изменить);
- натиснути кнопку ОК по завершенню.

Алфавіт

Алфавіт мови становлять: великі і малі латинські букви; великі і малі грецькі букви; цифри від 0 до 9, службові слова і спеціальні символи.

Елементарні конструкції

Із символів алфавіту створюють елементарні конструкції – імена і числа.

Імена можуть мати будь-яку довжину, повинні починатися з букви. В іменах можна використовувати латинські і грецькі букви, цифри, символи підкреслення, знак нескінченності ∞ , відсотка %, \sim , нижні індекси. В імені різняться регістри (великі або малі букви), типи шрифтів, їх розміри і стилі (жирний, курсив). У середині імені можна використовувати символи, що належать тільки одному типу шрифту. Дозволяється в одному імені застосовувати як латинські, так і грецькі букви (точно?). В імені не повинно бути пробілів. Імена повинні бути унікальними.

Десяткові числа можуть бути цілими і дробними. У якості роздільника цілої і дробної частини використовується крапка. Десяткові числа можна задавати в експонентній формі, у вигляді мантиси і порядку. У цьому випадку спочатку вказується мантиса, яка потім множиться на 10 у потрібному ступені.

Передбачена робота з уявними і комплексними числами. При використанні уявних чисел необхідно ввести символ i або j після останньої

цифри (без пробілу). Наприклад $5i$, $1j$. Надлишкова одиниця в числі $1j$ зникне після завершення введення. Комплексні числа задаються в алгебраїчній формі, у вигляді дійсної і уявної частини. Наприклад, $3 - 2.5i$.

Вирази

Вирази складаються з операндів і знаків операцій. Визначені операції відносні і математичні. Нижче приводяться найбільш часто використовуємі операції і вказуються клавіші, які застосовуються для їх введення.

Таблиця 1 – Комбінації клавіш для введення арифметичних операцій

Арифметичні операції	Комбінація клавіш
додавання	+
комплексне сполучення	"
розподіл	/
зведення в ступінь	^
факторіал	!
абсолютна величина	
множення	*
заперечення	-
корінь n-го ступеня	Ctrl+\
добуток	Ctrl+Shift+3
добуток по дискретному аргументу	#
підсумовування по дискретному аргументу	\$
квадратний корінь	\
віднімання	-
підсумовування	Ctrl+Shift+4
Операції відносини:	
більше	>
менше	<
більше або рівно	Ctrl+0
менше або рівно	Ctrl+9
не рівно	Ctrl+3
рівно	Ctrl+=
Операції математичного аналізу:	
диференціювання	?
інтегрування	&
похідна n-го порядку	Ctrl+?

Результатом операцій співвідношення може бути 1, якщо умова виконана, або 0, якщо умова не виконана. Причому, математично значення логічних 1 і 0 збігаються зі значеннями числових констант 1 і 0. Тому можна записати $2*(5>0)$, результатом буде число 2.

Оператори

В MathCad визначені оператори:

- := присвоювання;
- ≡ глобального присвоювання;
- = виводу значень.

Оператор присвоювання використовується для завдання значень змінним: ліворуч від знака операції записується ім'я змінної, а праворуч – число або вираз. Наприклад, $a:=6.75$. Оператор локального присвоювання застосовують для завдання значення змінній до того, як вона буде використана.

Глобальне присвоювання \equiv дозволено використовувати в будь-якому місці документа. У всіх випадках змінна, якій задано значення оператором \equiv , одержує це значення. Оператор глобального присвоювання може бути наприкінці документа, а змінна, до якої він ставиться – на початку. Надалі значення змінної можна змінити оператором локального присвоювання.

Оператор $=$ використовується для виводу на екран значень змінних і результатів обчислення виразів.

Кожний оператор в MathCAD позначає деяку математичну дію у вигляді



символу

. Кожний оператор

діє на одне або два числа (змінну або функцію), які називаються *операндами*. Якщо в момент вставки оператора одного або обох операндів не вистачає, то відсутні операнди будуть відображені у вигляді містазаповнювача. Математичні палітри містять згруповані за змістом математичні оператори:

1. Оператори, що позначають арифметичні дії, називаються арифметичними й уводяться з палітри **Calculator**.

2. Оператори, які вставляються з палітри **Calculus** (Обчислення), називаються обчислювальними операторами (диференціювання, інтегрування, підсумовування, обчислення добутку, межі).

3. Логічні оператори – уводяться з палітри **Boolean**.

4. Матричні оператори – призначені для здійснення різних дій над векторами й матрицями, уводяться з палітри **Matrix**.

5. Оператори виразів – згруповані на панелі **Evaluate** (Evaluation – Вирази) (оператор чисельного виводу $=$, оператор локального присвоювання $:=$, оператор глобального присвоювання \equiv , оператор символічного висновку).

Оператори користувача. Для вставки в документи заздалегідь створених операторів користувача застосовується панель **Evaluate** f_x x^f $x^f y$ $x^f y^f$. Оператор користувача може мати абсолютно будь-яке ім'я.

Константи і змінні

Константи можна задавати в десятковій, двійковій, восьмеричній і шістнадцятірничній системах числення.

Двійкові, восьмеричні і шістнадцятірничні числа можуть бути тільки цілими. Для запису восьмеричних чисел використовуються цифри 0 – 7. За

останньою цифрою числа записується буква o. Ознакою двійкового числа є приписана наприкінці буква b або B.

Для запису шістнадцятиричних чисел використовуються цифри 0 – 9 і букви A – F. Після останньої цифри ставиться буква h або H. Якщо шістнадцятиричне число починається з букви, то перед нею записують цифру 0, щоб відрізнити число від імені.

У системі є визначені постійні (системні змінні):

∞ - 10307 – системна нескінченність (Ctrl+z);

π - 3.142 – число π (Ctrl+p);

e - 2.718 – підстава натурального логарифма;

% - 0.01 – відсоток;

TOL - 0.001 – погрішність чисельних методів;

ORIGIN - 0 – нижня границя індексації масивів;

PRNCOLWIDTH - 8 – число стовпців функції WRITEPRN;

PRNPRECISION - 4 – число десяткових знаків, використовуваних функцією WRITEPRN.

Значення кожної із системних перемінних можна змінити прямо в робочому документі за допомогою оператора присвоювання. Крім того, для завдання змінних TOL, ORIGIN, PRNCOLWIDTH і PRNPRECISION передбачена вкладка Built-In Variables діалогового вікна, що відкривається командою **Math Options**.

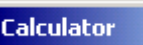

Особливим видом констант є одиниці виміру розмірних величин.

Змінні – це об'єкт, числове значення якого може мінятися по ходу виконання документа.

На відміну від мов програмування система MathCAD не вимагає точного завдання *типів змінних*: цілочисленні, речовинні, комплексні, текстові, логічні. Тип змінної автоматично визначається привласненням їй значенням.

Цілі змінні пояснень не вимагають.

Речовинна змінна може бути набране і як десяткове число з будь-якою кількістю десяткових цифр після крапки $a := 0.456784$, і в експонентній формі, для чого після уведення числа треба надрукувати символ множення й увести 10 у потрібному ступені $b := 456784 \cdot 10^{-6}$.

При уведенні *комплексних* змінних мнима одиниця набирається з палітри  i, або із клавіатури як .

Текстова змінна записується в лапках.

Значенням *логічної* змінної може бути 0 (що відповідає «неправді») або 1 (що відповідає «істині»).

В MathCAD є й *спеціальний тип* змінних, іменованих *ранжируемими* або *циклічними* змінними. У загальному випадку дискретна змінна задається оператором присвоювання виду:

$N0 := N1, N2 \dots NX$

Наступне значення N2 обчислюється як сума початкового N1 і кроку. N2 може бути опущене:

$N0 := N1 \dots NX$

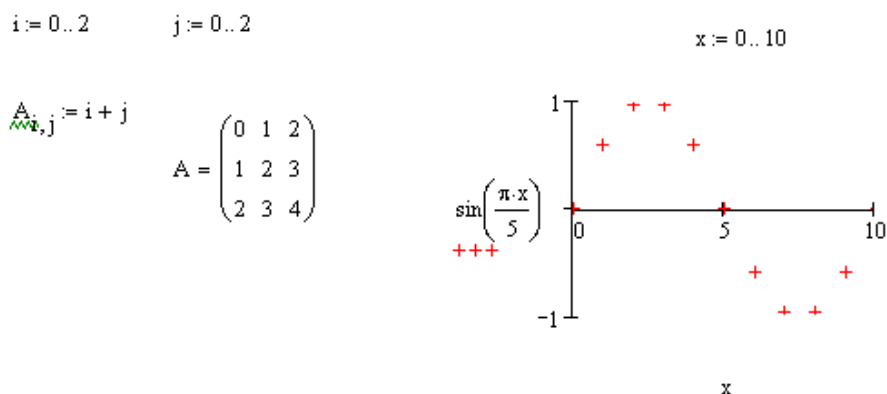
У цьому випадку крок ухвалюється рівним 1, якщо початкове значення менше кінцевого і рівним -1, якщо $N1$ більше NX .

Наприклад: $x := 1, 1.2 \dots 2$

$t := 2 \dots -4$

Змінна x буде мати значення 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2. Для змінної t одержимо: 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4.

Ранжирувана змінна, так само як і масив, зберігає цілий набір значень, але, на відміну від масивів, неможливо одержати доступ до окремого елемента цієї змінної. За допомогою ранжируваних змінних можна задати значення всіх елементів матриці або вивести графік по точкам.



Дискретні змінні використовуються при організації багаторазових обчислень.

Функції. У системі MatCAD розрізняють *убудовані* функції (функції, заздалегідь введені розроблювачем системи) і *користувальницькі* функції (створені користувачем).

Убудовані функції. Вставляються за допомогою команди Insert/Function або набором із клавіатури. При цьому варто пам'ятати, що імена убудованих функцій *чутливі до регістра*, їх варто вводити в точності, як вони наведені в системі. Параметри убудованих функцій пишуться у дужках. Як параметр може бути константа, змінна або математичний вираз, при цьому константа, змінна, вираз повинні бути визначені раніше

$$a := 0.5 \quad x := 2 \quad y := 9$$

$$\sin(1) = 0.841 \quad \sin(a) = 0.479 \quad \sin(\sqrt{x} \cdot e^y) = -0.862$$

Функції користувача. В MathCAD, як і в мовах програмування, є можливість завдання функцій користувача. *Імена функцій* користувача підкорюються тим же правилам, що й імена змінних. Для завдання функції користувача потрібно *ввести ім'я*, а потім у круглих дужках *через кому ввести всі аргументи*. Далі, як звичайно, треба ввести оператор присвоювання й після нього - вираз, що залежить від уведених аргументів. Всі змінні, присутні праворуч у вираз визначення функції, або повинні входити в список аргументів функції, або повинні бути визначені раніше. У противному випадку буде виведено повідомлення про помилку, причому ім'я невизначеної змінної буде виділено червоним кольором

$y := 3$ Визначення функцій

$b := (y - 3)^3 + 1$ $f(x) := \frac{x + y}{x + 1}$ $g(x, y) := x^2 + y^2$ $f1(x) := x^2 \cdot \cos(x + y)$

звертання до функцій

$f(2.78) = 1.529$ $g(5.6, 8.34) = 100.916$

This variable is undefined.

При створенні математичних виразів використовують математичну панель, за допомогою якої вставляються знаки математичних операцій, геометричних функцій тощо (Рис.2.1, Рис.2.2), або вводять інформацію за допомогою клавіатури.

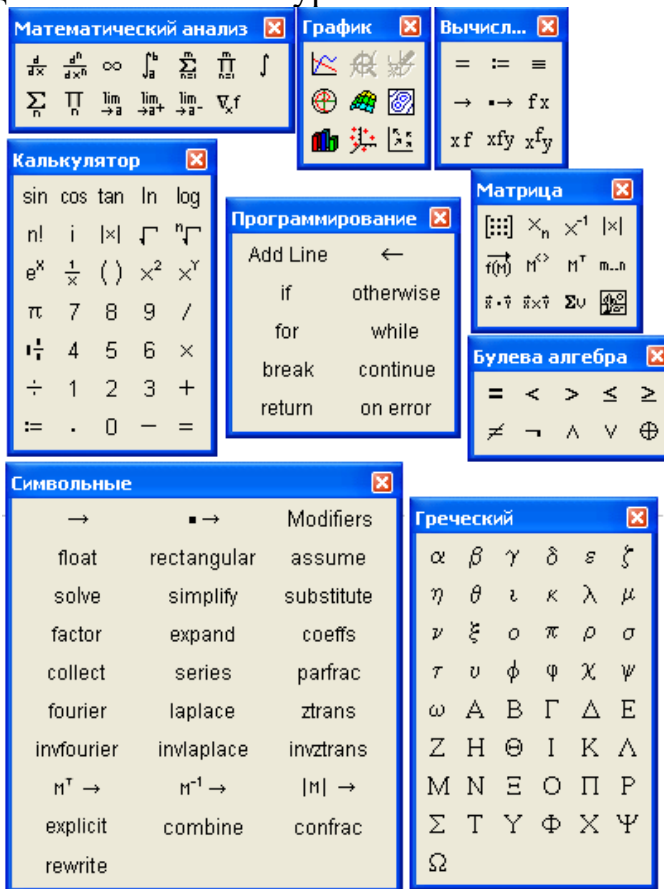


Рис. 2.1 – Розгорнуті пункти математичної панелі інструментів

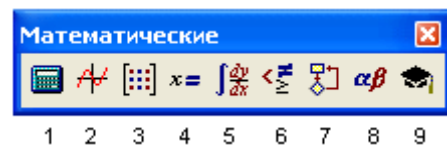


Рис. 2.2 – Математична панель інструментів:

- 1 – калькулятор;
- 2 – графік;
- 3 – матриця;
- 4 – обчислення;
- 5 – математичний аналіз;
- 6 – булева алгебра;
- 7 – програмування;
- 8 – гречечка;
- 9 – символічні.

Керування процесом обчислень.

Після запуску MathCAD перебуває в режимі *автоматичних обчислень*. Це означає, що при внесенні будь-яких змін у документ, всі *видимі в цей момент формульні блоки й графіки перераховуються й будуються заново*. У деяких випадках такий режим роботи може бути *небажаним*, наприклад, якщо в документі є складні обчислення, потрібна обробка більших об'ємів даних або виконуються операції, що займають багато часу. У таких випадках працювати з документом виявляється дуже незручно, і виникає необхідність *заборонити автоматичне обчислення* або всього документа, або для блоків, що містять найбільш складні обчислення.

Для керування режимом автоматичного обчислення для всього документа, необхідно вибрати команду меню **Tools / Calculate** / ☒ **Automatic Calculation**. При відключеному режимі автоматичного обчислення, для того щоб перерахувати всі блоки в документі можна вибрати команду меню **Tools / Calculate** / **Calculate Worksheet** **Ctrl+F9**. Для того щоб перерахувати не весь документ, а лише той блок, у якому перебуває курсор, потрібно вибрати команду меню **Tools / Calculate** / **Calculate Now** **F9** (якщо курсор перебуває у вільному місці робочої області документа, то перелічені будуть всі блоки, які в цей момент видимі на екрані).

Для тимчасового відключення обчислення одного блоку, необхідно скористатися командою контекстного меню **Disable Evaluation**. Після вибору цієї команди MathCAD при прорахунку документа не буде обчислювати даний блок. Для того щоб відновити обчислення «відключеного» блоку, потрібно вибрати команду контекстного меню **Enable Evaluation**.

Перервати обчислення можна клавішею <Esc>. При цьому частина формул, що залишилася буде підсвічена червоним кольором.

Вказівки до виконання роботи

1. Створити документ

2. Записати вираз і поставити знак рівняння

$$\sin(1/4)=0.247$$

$$\log(\tan(180)) = 0.127$$

$$\cos(35) = -0.904$$

$$\cos(90) + \tan\left(\frac{1}{60}\right) + \ln(135) = 4.474$$

3. Обчислити функції використовуючи значення змінних

Присвоїти змінним відповідні значення

$$x:=1.2 \quad y:=55 \quad z:=4$$

Записати вираз і поставити знак рівняння

$$\frac{(x^2 \cdot 250)}{\sqrt[5]{y}} \cdot \ln(z \cdot \pi) = 408.814$$

$$\frac{\sin(x) \cdot \sqrt{\pi + z}}{\cos(y)} = 112.568$$

$$\ln\left(\frac{z}{\cos(x) \cdot \tan(z)}\right) - y = -52.745$$

$$\log(y) \cdot \frac{\log(x)}{\cos(x \cdot y) \cdot \sqrt[5]{z}} = -0.104$$

4. Знайти функцію та вивести її значення у відповідній точці:

Записати функцію використовуючи знак присвоєння (будь-яким відомим способом)

$$f(x,y) := x^2 \cos(x + y)$$

Записати функцію надаючи змінним відповідного значення. Поставити знак рівняння і отримати результат

$$f(1, 1) = -0.416$$

Знайти значення функцій аналогічним способом при $x=0,5$ та $x=1$

$$f(x) := x - \frac{2}{|x-5|}$$

$$f(x) := \ln\left(\frac{x}{\cos(x)}\right) + \sqrt[3]{\sin(x)}$$

Контрольні питання


1. Як створити математичний регіон?
2. Чи можна виключити з розрахунків один з математичних регіонів?
3. Якій вигляд має оператор присвоювання?

Лабораторна робота № 3

Принципи та правила надання розмірності. Засоби символьних обчислень.

Мета роботи: набути навичок роботи з розмірними величинами. Засвоїти способи використання аналітичних обчислень.

Надання розмірності

Система MathCad дозволяє виконувати дії з розмірними величинами. Після числового значення можливо записати умовну позначку розмірності або поставити знак множення, а потім записати або вибрати потрібну розмірність із вікна **Insert Unit**, що відкривається однойменною командою або клацанням по кнопці із зображенням мірного кухля  Unit... Ctrl+U на панелі інструментів. Перевагу варто віддати вибору розмірності із пропонуваного переліку, тому що це виключає помилки уведення.

Над розмірними змінними можна робити будь-які коректні розрахунки

$I := 10 \cdot A$ $U := 12 \cdot V$ $R := \frac{U}{I}$ $R = 1.2 \Omega$. При виконанні обчислень контролюється дотримання розмірностей і якщо виникає невідповідність, то видається повідомлення про помилку.

$$U + I =$$

The units in this expression do not match. (Размерности в этом выражении не совпадают)

Символьні обчислення

При аналітичних обчисленнях результат одержують у нечисловій формі в результаті тотожних перетворень, серед яких більше простими є розкриття дужок.

За допомогою символьного процесора MathCad можливо вирішувати інженерні задачі в аналітичному вигляді й проводити широкий спектр аналітичних перетворень, таких як, спрощення виразів і алгебраїчні

перетворення, алгебраїчні й матричні операції, основні дії математичного аналізу, і т.д.

Символьні обчислення можна виконувати в таких варіантах:

- за допомогою команд меню;
- за допомогою оператора символьного виводу, ключових слів символьного процесора й звичайних формул.

Для символьних обчислень за допомогою команди призначене головне меню Symbolic (Символіка), що поєднує математичні операції. Для реалізації другого підходу застосовуються всі засоби MathCad (наприклад, Calculator, Evaluation, і т.п.).

За допомогою меню Symbolic (Символіка) можна виконувати такі операції:

Symbolic/Evaluate (Символіка/Обчислення) символьне обчислення, у тому числі із плаваючою комою (рис.3,а);

Symbolic/Simplify (Символіка/Спрощення виразу) спрощення виразу;

Symbolic/Expand (Символіка/Розкладання виразу) розкладання виразу на елементарні;

Symbolic/Factor (Символіка/Розкладання на множники) розкладання на множники;

Symbolic/Collect (Символіка/Подібні) приведення подібних;

Symbolic/Polynomial Coefficients (Символіка/Поліноміальні коефіцієнти) виведення коефіцієнтів поліномів;

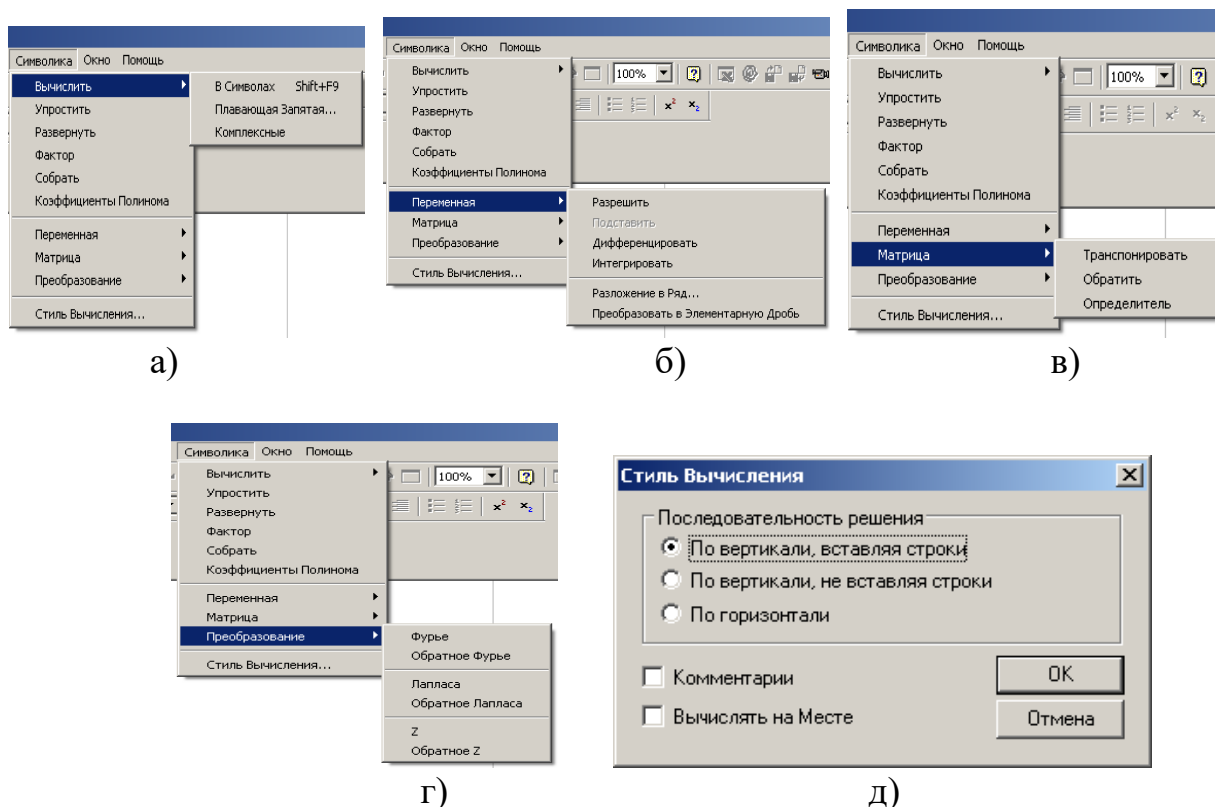


Рисунок 3 – Команди меню Symbolic

Symbolic/Variable(Символіка/Змінна/...) рішення рівняння; підстановка змінних; диференціювання; інтегрування; розкладання в ряди; розкладання на елементарні дроби (рис.3,б));

Symbolic/Matrix(Символіка/Матриці) дії з матрицями (рис.3,в);

Symboli/Transform(Символіка/Інтегральні перетворення) перетворення Фур'є, Лапласа) (рис.3,г).

Послідовність виконання обчислень можна задати з використанням Стилю Обчислень (рис.3, д).

Перший спосіб більше зручний, коли потрібно швидко одержати який-небудь аналітичний результат для однократного використання, не зберігаючи сам хід обчислень. Другий спосіб більше наочний, тому що дозволяє записувати вирази в традиційній математичній формі й зберігати символні обчислення в документах Mathcad. Крім того, аналітичні перетворення, проведені через меню, стосуються тільки одного, виділеного в цей момент, виразу. Відповідно, на них не впливають формули, що перебувають у документі Mathcad вище цього виділеного виразу (наприклад, оператори присвоювання значень яким-небудь змінним). Оператор символного висновку, навпроти, ураховує весь попередній уміст документа й видає результат з його обліком.

Не всі вирази піддаються аналітичним перетворенням. Якщо це так (або в силу того, що задача зовсім не має аналітичного рішення, або вона виявляється занадто складною для символного процесора Mathcad), то як результат виводиться сам вираз.

Завдання:

I. Обчислити надаючи розмірності величинам:

$$- \text{потужність на валу двигуна } P_{\text{дв}} = \frac{T_2 \cdot \pi \cdot n_2}{30\eta}$$

де $\eta = 0,96$ КПД передачі

$T_2 = 285 \text{ Нм}$ – крутячий момент на колесі

$n_2 = 340 \text{ об/хв}$ – частота обертання колеса

$$P_{\text{дв}} = \frac{285 \cdot 3,14 \cdot 340}{30 \cdot 0,96} = 10570 \text{ Вт (для перевірки)}$$

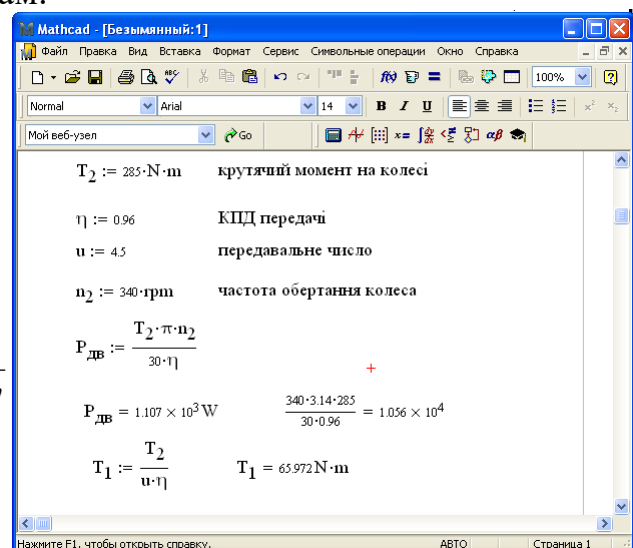
$$- \text{крутячий момент на вхідному валу } T_1 = \frac{T_2}{u\eta}$$

де $T_2 = 285 \text{ Нм}$ – крутячий момент на колесі

$\eta = 0,96$ КПД передачі

$u = 4,5$ - передавальне число

$$T_2 = \frac{285}{4,5 \cdot 0,96} = 66 \text{ Нм (для перевірки)}$$



II. Провести символні розрахунки виразів використовуючи меню Symbolic та оператор символних перетворень

- розкласти вираз на елементарні $\sin(2x)$
- спростити вираз $(x+2y)z - z^2(x-5y) + z$
- розкласти на множники $x^4 - 16$

- привести подібні доданки за різними змінними $(x+2y)z-z^2y(x+5y)+z$
- розкласти на елементарні дроби $(11x^2+9x+1)/(x^2-3x+2)$
- символічно обчислити вираз використовуючи підстановку змінної $\sin(kx^2+bx)$, де $k=ax^2$
- символічно обчислити рівняння x^2+4
- виконати перетворення Фур'є $\cos(x)$
- виконати перетворення Лапласа x^2+4

Вказівки до виконання роботи

I. Обчислення з наданням розмірності величинам:

1. Відкрийте MathCad. Створіть новий документ за допомогою пункту головного меню «File» - «New» (або за допомогою комбінації клавіш Ctrl+N).
2. Провести розрахунки із наданням розмірності використовуваним величинам
3. Присвойте значення із наданням відповідної розмірності, використовуючи команду Insert Unit

4. Уведіть вираз $P_{\text{ов}} = \frac{T_2 \cdot \pi \cdot n_2}{30\eta}$

5. Поставте знак рівняння. Отримаєте результат

II. Символьні розрахунки виразів з використанням меню Symbolic та оператора символічних перетворень:

1. Уведіть вираз $\sin(2x)$.
2. Виділіть вираз $\sin(2x)$ цілком
3. Виберіть у головному меню пункти Symbolics / Expand (Символіка / Розкласти).

Після цього результат розкладання виразу з'явиться трохи нижче у вигляді ще одного рядка

$$2 \sin(x) \cos(x)$$

Символьні перетворення за допомогою символічного оператора:

1. Уведіть вираз $\sin(2x)$.
2. Натисніть кнопку Expand (Розкласти) на панелі Symbolic.
3. Уведіть у містозаповнювач після ключового слова expand, що з'явилося, ім'я змінної x або натисніть клавішу **Del**, щоб просто видалити містозаповнювач.

4. Натисніть клавішу **Enter** або просто клацніть мишею за межами виразу.

$$\sin(2x) \text{ expand, } x \rightarrow 2 \sin(x) \cos(x)$$

Контрольні питання

1. Яким чином можливо задання розмірності при розрахунках?
2. Чи існують жорсткі правила надання розмірності при розрахунках?
3. Яким чином можливо спростити математичний вираз?

Лабораторна робота №4

Знаходження коренів рівняння в MathCad

Ціль роботи: знаходження коренів рівняння в програмі MathCad з використанням вбудованих функцій *root*, *polyroots*, символьного рішення.

Знаходження коренів рівняння, рішення рівнянь і систем рівнянь

Для числового пошуку коренів рівняння в MathCad використовується убудована функція *root*. Вона дозволяє вирішувати рівняння виду $f(x)=0$, де $f(x)$ -рівняння, корені якого необхідно знайти, x - невідома. Використання функції *root* вимагає завдання початкового наближення.

Функція *polyroot* повертає вектор, що має всі корені рівняння, коефіцієнти якого задаються вектором v . Коефіцієнти у вектора v розташовуються в порядку зростання ступенів у рівнянні.

Існує можливість символьного рішення рівняння. Для цього необхідно звернутися до меню Symbolic/Variable/Solve. Корені рівняння виводяться у вигляді вектора.

Можна також знаходити рішення рівняння графічно. Графічне рішення полягає у визначенні за графіком функції, що відповідає лівій частини рівняння, при якій величина аргументу даної функція приймає значення, рівне правій частини рівняння.

Всі методи рішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь можна розділити на дві основні групи: прямі (метод Крамера, метод Гауса, і т.п.) і ітеративні методи. При використанні прямих методів розрахунки можна вести як чисельно, так і символьно. Ітеративні методи застосовуються в чисельних рішеннях.

Для рішення систем лінійних і нелінійних рівнянь використовується "блок рішень", що починається із ключового слова *given* і закінчується викликом функції *find*. Між ними перебувають рівняння. Всім невідомим у рівнянні повинні бути привласнені початкові значення. У рівнянні, для якого необхідно знайти рішення, потрібно використовувати знак логічної рівності $=$ на панелі інструментів Evaluation. Як аргументи у функції повинні бути невідомі, які необхідно знайти.

Рішення системи лінійних рівнянь за допомогою убудованої функції *lsolve(A,b)* повертає вектор рішень b . Матриця A - квадратна невироджена, вектор b - вектор правих частин у системі рівнянь.

За допомогою символьного процесора MathCad можна одержувати аналітичні рішення системи рівнянь, використовуючи оператор *solve*. У цьому випадку система повинна бути занесена у вигляді вектора в лівий маркер оператора. Змінні, значення яких відшукуються, варто вводити через кому в правий маркер оператора *solve*. Відповідь буде повернута у вигляді матриці, у рядках якої будуть записані знайдені значення невідомих системи рівнянь.

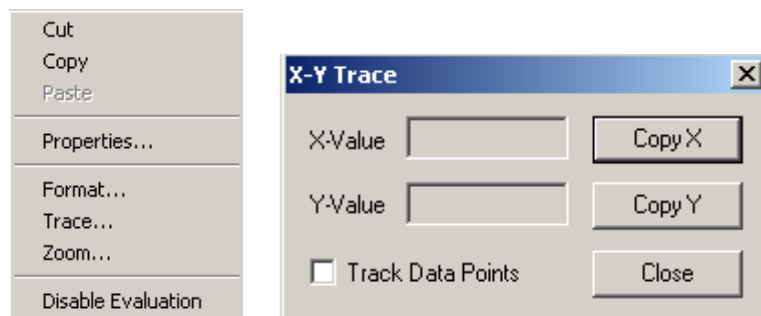
Аналітичні рішення можна також одержати за допомогою "блоку рішень", що починається із ключового слова *given*.

Наближені рішення системи рівнянь можна одержати з використанням вбудованої функції $\text{minerr}(x1, \dots)$. Ця функція подібна по своїй роботі до функції find , однак вона має інші умови для завершення ітеративного процесу пошуку рішень. Функція minerr дозволяє знаходити рішення в тому випадку, коли їх не знаходить функція find .

Вказівки до виконання лабораторної роботи:

I Знаходження коренів рівняння в програмі MathCad з використанням вбудованої функції root

1. Запустити програму MathCad.
2. Записати на робочому аркуші MathCad вид функції $f(x)$, для якої необхідно знайти на заданому інтервалі корінь.
3. Створити цикл із точок інтервалу, на якому визначаються корені, і обчислити в цих точках функцію $f(x)$. Побудувати графік функції $f(x)$ і графік функції $x0=0$ (тобто вісь x).
4. Визначити точки перетинання двох кривих $f(x)$ і $x0$, які будуть наближенням до коренів рівняння.
 - 4.1. Використовувати для визначення на графіку значень коренів у контекстному меню (рис.4.1, а) опцію Trace (рис.4.1, б), встановити прапорець у вікні Track Data Point.
 - 4.2. Підвести курсор миші до точок перетинання кривих, координати точок перетинання кривих, тобто корені, будуть представлені у вікнах X-Value і Y-Value, а на графіку відобразиться вертикальна пряма.
5. Задати для незалежної змінної x початкове наближення, що вибирається як значення точки перетинання кривих $f(x)$ і $x0$. Звернутися до вбудованої в MathCad функції $\text{root}(f(x), x)$ (функція root повертає значення незалежної змінної x , для якої $f(x)$ дорівнює 0) і знайти корінь $x1$.
6. Знайти другий ($x2$) і третій ($x3$) корені рівняння $f(x)=0$ (рівняння третього ступеня має не більше трьох дійсних коренів), задавши для них відповідні початкові значення, як координати точок перетинання кривих $f(x)$ і $x0$ і використавши функцію root .



а)

б)

Рисунок 4.1 – Контекстне меню виклику та діалогове вікно «Trace»

II Знаходження коренів рівняння в програмі MathCad з використанням

вбудованої функції *polyroots*, що повертає вектор, який має всі корені рівняння, коефіцієнти рівняння при цьому задаються вектором.

1. Записати на робочому аркуші MathCad вид функції $f(x)$, для якої необхідно знайти на заданому інтервалі корінь.

2. Записати як вектор v всі коефіцієнти рівняння, розташувати їх у порядку збільшення ступенів.

3. Знайти корінь, звернувшись до вбудованої функції $r := \text{polyroots}(v)$, результат буде отримано щодо трансформованого вектора r .

4. Для інтервалу знаходження кореня й кількості елементів вектора r створити відповідні цикли й обчислити значення функції в точках циклу.

5. Побудувати графік функції в точках циклу, а також у знайдених точках корінь, у яких функція буде мати значення, рівні нулю.

III Знаходження коренів рівняння в програмі MathCad з використанням символьних рішень рівнянь.

1. Увести ліву частину рівняння.

2. Увести знак рівності з використанням панелі керування Evaluation (Вираження) або за допомогою натискання клавіш $\text{Ctrl} + =$.

3. За знаком рівності ввести праву частину рівняння.

4. Виділити змінну, щодо якої вирішується рівняння.

5. Вибрати команду Symbolic/Variable/Solve.

По закінченню рішення корінь рівняння виводяться у вигляді вектора.

IV Знайти наближене рішення з використанням функції $\text{minerr}(x1, \dots)$.

1. Задати наближення послідовно для першого кореня $x := 1$.

2. Увести ключове слово *given* (дане), з якого починається блок рішень.

3. Записати рівняння, використовуючи знак логічної рівності між правою й лівою частинами рівняння.

4. Звернутися до функції $\text{minerr}(x)$. Корінь буде знайдено.

Таблиця 4.1 - Варіанти завдань до лабораторної роботи № 4

№ варіанта	Інтервал знаходження коренів	Рівняння
1	$[-1; 3]$	$x^3 - 2,92x^2 + 1,4355x + 0,791 = 0$
2	$[-2; 3]$	$x^3 - 2,56x^2 - 1,325x + 4,395 = 0$
3	$[-3,5; 2,5]$	$x^3 + 2,84x^2 - 5,606x - 14,766 = 0$
4	$[-2,5; 2,5]$	$x^3 + 1,41x^2 - 5,472x - 7,38 = 0$
5	$[-1,6; 1,1]$	$x^3 + 0,85x^2 - 0,432x + 0,044 = 0$
6	$[-1,6; 1,6]$	$x^3 - 0,12x^2 - 1,478x + 0,192 = 0$
7	$[-1,6; 0,8]$	$x^3 + 0,77x^2 - 0,251x - 0,017 = 0$
8	$[-1,4; 1]$	$x^3 + 0,88x^2 - 0,3999x - 0,0376 = 0$
9	$[-1,4; 2,5]$	$x^3 + 0,78x^2 - 0,827x - 0,1467 = 0$
10	$[-2,6; 1,4]$	$x^3 + 2,28x^2 - 1,9347x - 3,90757 = 0$
11	$[-2,6; 3,2]$	$x^3 - 0,805x^2 - 7x + 2,77 = 0$

№ варіанта	Інтервал знаходження коренів	Рівняння
12	$[-3; 3]$	$x^3 - 0,345x^2 - 5,569x + 3,15 = 0$
13	$[-2; 3,4]$	$x^3 - 3,335x^2 - 1,679x + 8,05 = 0$
14	$[-1; 2,8]$	$x^3 - 2,5x^2 + 0,0099x + 0,517 = 0$
15	$[-1,2; 3]$	$x^3 - 3x^2 + 0,569x + 1,599 = 0$
16	$[-2,5; 2,5]$	$x^3 - 2,2x^2 + 0,82x + 0,23 = 0$
17	$[-1,2; 4,6]$	$x^3 - 5x^2 + 0,903x + 6,77 = 0$
18	$[-1; 7,4]$	$x^3 - 7,5x^2 + 0,499x + 4,12 = 0$
19	$[-1,6; 9]$	$x^3 - 7,8x^2 + 0,899x + 8,1 = 0$
20	$[-3,4; 2]$	$x^3 + 2x^2 - 4,9x - 3,22 = 0$
21	$[-3,4; 1,2]$	$x^3 + 3x^2 - 0,939x - 1,801 = 0$
22	$[-4,6; 3,0]$	$x^3 + 5,3x^2 + 0,6799x - 13,17 = 0$
23	$[-2,4; 8,2]$	$x^3 - 6,2x^2 - 12,999x + 11,1 = 0$
24	$[-3,2; 2,7]$	$x^3 - 0,34x^2 - 4,339x - 0,09 = 0$
25	$[-1; 3]$	$x^3 - 1,5x^2 + 0,129x + 0,07 = 0$
26	$[-1; 3]$	$x^3 - 5,5x^2 + 2,79x + 0,11 = 0$
27	$[-1; 3]$	$x^3 - 5,7x^2 - 6,219x - 2,03 = 0$
28	$[-1; 3]$	$x^3 - 3,78x^2 - 7,459x - 4,13 = 0$
29	$[-1; 3]$	$x^3 - 5x^2 - 9,9119x + 0,01 = 0$
30	$[-1; 3]$	$x^3 - 7x^2 - 1,339x - 7,55 = 0$

Приклад

І Для рівняння $f(x) = x^3 - 0.001 \cdot x^2 - 0.7044x + 0.139$ знайти корені на інтервалі $[-1, 1]$, крок зміни змінної x дорівнює 0.1 .

1 Записати цикл із точок інтервалу $x:=-1, -0.9..1$.

2 Записати функції $f(x) = x^3 - 0.001 \cdot x^2 - 0.7044x + 0.139$ й $x0=0$.

3 Побудувати графіки для цих функцій.

4 Визначити на графіку точки перетинання кривих $f(x) = x^3 - 0.001 \cdot x^2 - 0.7044x + 0.139$ і $x0=0$.

5 Задати як наближення значення точок перетинання $x1, x2, x3$. У прикладі $x1=-0.9, x2=0.2, x3=0.7$.

6 Обчислити значення коренів за допомогою формул: $root(f(x1), x1), root(f(x2), x2), root(f(x3), x3)$. Отримані значення коренів такі: $x1=-0.92, x2=0.21, x3=0.721$ (рис. 4.2).

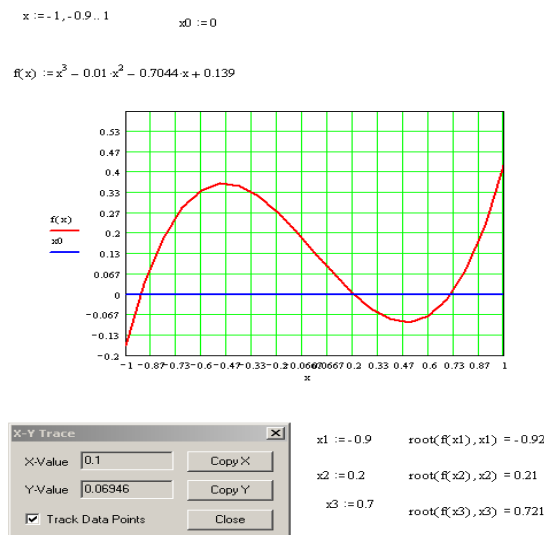


Рисунок 4.2 – Приклад знаходження коренів із використанням функції *root*

II Для рівняння $f(x) = x^3 - 7 \cdot x^2 - 1.339 \cdot x + 7.55$ знайти корені на інтервалі $[-1.1, 7.1]$, крок зміни змінної x дорівнює 0.1.

1. Створити вектор з коефіцієнтів рівняння, використовуючи панель керування Matrix (Матрица) (рис. 4.3) і задавши один стовпець і чотири рядки для коефіцієнтів рівняння.

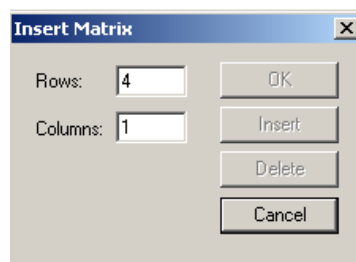


Рисунок 4.3 – Діалогове вікно для визначення параметрів утворення вектора

Вектор з коефіцієнтів рівняння буде мати такий вигляд

$$v := \begin{bmatrix} 7.55 \\ -1.339 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. За допомогою вбудованої функції $r := \text{polyroots}(v)$ знайти корені рівняння й представити їх у вигляді вектора r , транспонованого стосовно r , тобто перетвореного зі стовпця в рядок.

3. Створити цикли для змінної x і кількості знайдених коренів:

$$x := -1.1, -1..7.1$$

$$j = 0, 1..2.$$

4. Побудувати графіки для функції й визначити функцію в точках коренів. У точках коренів значення функції дорівнюють нулю.

5. Визначити значення коренів на графіку (рис. 4.4).

$$f(x) := x^3 - 7 \cdot x^2 - 1.339 \cdot x + 7.55$$

$$v := \begin{bmatrix} 7.55 \\ -1.339 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$r := \text{polyroots}(v)$$

$$r^T = (-1.055 \quad 1.017 \quad 7.038)$$

$$x := -1.1, -1..7.1$$

$$j := 0, 1..2$$

$r_j =$	$f(x) =$
-1.055	-0.778
1.017	0.889
7.038	2.356
	3.629
	4.714
	5.617
	6.345
	6.902
	7.295
	7.53
	7.613
	7.55
	7.347
	7.01
	6.545
	5.958

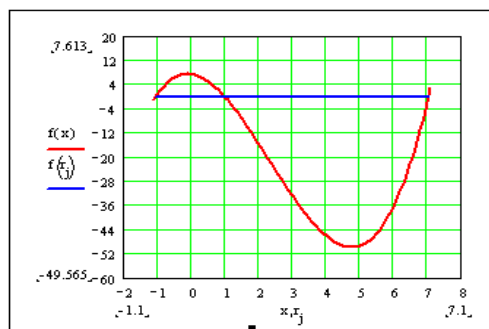


Рисунок 4.4 – Приклад знаходження коренів із використанням функції *polyroots*

III Для рівняння $f(x) = x^3 - 7 \cdot x^2 - 1.339 \cdot x + 7.55$ знайти корені із використанням символьних рішень рівнянь.

1. Записати ліву частину рівняння

$$x^3 - 7 \cdot x^2 - 1.339 \cdot x + 7.55.$$

2. Поставити логічний знак «=» і в правій частині записати 0.

3. Виділити змінну x .

4. Звернутися в головному меню MathCad до команди Symbolic/Variable/Solve.

Знайдені корені рівняння запишуться у вигляді вектора:

$$x^3 - 7 \cdot x^2 - 1.339 \cdot x + 7.55 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1.0170068872772705837 \\ -1.054834726281394243 \\ 7.0378278390041236593 \end{pmatrix}$$

IV Знайти наближене рішення вищеведеного рівняння з використанням функції *minerr*(x_1, \dots)...

1. Задати наближення послідовно для першого кореня $x := 1$.

2. Увести ключове слово *given* (дано), з якого починається блок рішень.

3. Записати рівняння, використовуючи знак логічної рівності між правою й лівою частиною рівняння.

4. Звернутися до функції *minerr*(*x*). Корінь буде знайдено.

5. Аналогічні дії виконати для двох інших коренів рівняння, оскільки рівняння третього ступеня має не більше трьох коренів.

$x := 1$

Given

$$x^3 - 7 \cdot x^2 - 1.339 \cdot x + 7.55 = 0$$

minerr(*x*) = 1.017

Рисунок 4.5 – Приклад знаходження коренів із використанням функції *minerr*

Контрольні питання

1. Які вбудовані функції дозволяють знаходити корені рівняння?
2. Як виконується символічне знаходження коренів рівнянь?
3. Якій оператор необхідно подати перед початком запису системи рівнянь?

Лабораторна робота №5

Дії з матрицями в MathCad

Мета роботи: навчитися виконувати дії з матрицями в програмному середовищі MathCad.

Дії з матрицями

За допомогою убудованих функцій MathCad матриці можна поєднувати, виділяти в них підмасиви, визначати розміри масивів, максимальні, мінімальні значення, знаходити власні числа і вектори. Для матриць певні наступні операції: додавання, добуток, обіг, транспонування, і т.ін.

Створення матриці можливе завдяки запису оператора присвоювання, для введення правої частини потрібно використовувати команду Insert/Matrix або панель інструментів Matrix. У вікні, що розкриється, задати число рядків і стовпців матриці. Вектор є матрицею з одним стовпцем. Увести значення елементів матриці у відповідні місця. Далі можна виконувати всі необхідні операції з матрицями.

Для роботи з елементами матриці використовуються індекси елементів. Нумерація рядків і стовпців матриці починається з нуля (за замовченням). Індекс елемента визначається на панелі інструментів Matrix кнопкою Subscript (рис.2.1), наприклад $M_{n,k}$. Два індекси, які визначають елемент матриці, відділяються комою. Номер стовпця матриці відображається як верхній індекс, що укладений у кутові дужки, для чого використовується кнопка Column на панелі інструментів Matrix, наприклад, $M_{<1>}$.

Для проведення операцій з матрицями використовується меню Symbolic і команда Matrix (рис. 5.1).

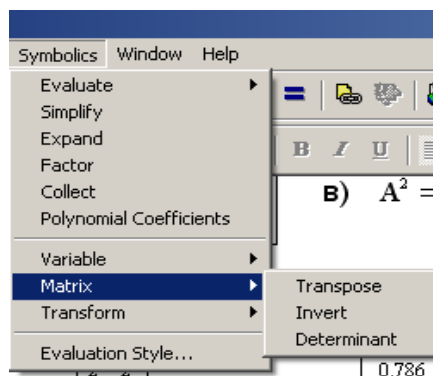


Рисунок 5.1 – Вигляд меню Symbolic для роботи з матрицями в символічному вигляді.

Вказівки до виконання лабораторної роботи:

1. Запустити програму MathCad .

2. Створити в новому документі наступні матриці: $A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ -m & n & k \\ c & b & -a \end{vmatrix}$,

$$B = \begin{vmatrix} b-c \\ m & b \\ n & k \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} n & a \\ m & b \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} a-b \\ -n \\ c+b \end{vmatrix}, \quad M = |b-a \quad c|, \quad K = \begin{vmatrix} n & -a & a+b \\ m & b & n+m \\ c & n & c-b \end{vmatrix} \quad \text{з}$$

коефіцієнтів a, b, c, m, k, n відповідно до варіанта завдання.

3. Виконати дії з матрицями відповідно до варіанта завдання.

4. Знайти ранг матриці A .

5. У символьному вигляді виконати транспонування матриці B , інвертування матриці A .

6. Знайти зворотну матрицю K . Знайти детермінант матриці A .

Таблиця 5.1 - Варіанти завдань до лабораторної роботи № 5

Номер варіанта	Значення елементів матриць	Дії з матрицями
1	2	3
1	$a=1; b=0.5; c=-1; m=2; k=-2.1; n=-0.8$	1) $A+A \cdot M$; 2) $B \cdot C$; 3) M^3 ; 4) $D+m \cdot K$; 5) $A \cdot D+D \cdot M$; 6) $K-2$
2	$a=-2; b=1; c=1.5; m=-3; k=-0.1; n=1.8$	1) $A+B \cdot M$; 2) $M \cdot C$; 3) B^3 ; 4) $C+m \cdot K$; 5) $AB+D \cdot K$ 6) $D-3$
3	$a=-1; b=5; c=1.3; m=0.9; k=0.1; n=-0.5$	1) $A-M$; 2) $B-a \cdot C$ 3) M^{2-B} ; 4) $D-D \cdot K$; 5) $A+7 \cdot D$; 6) $A-2$
4	$a=1; b=0.5; c=1; m=0.2; k=0.27; n=0.7$	1) A^2 ; 2) $B \cdot C+M$; 3) $n \cdot M^2$; 4) $D-K$; 5) $A \cdot B-D \cdot C$; 6) $D-2$
5	$a=3; b=2.1; c=0.91; m=1.2; k=1; n=3$	1) A^2+M ; 2) $B-M$; 3) $b \cdot C-3$; 4) $D+3K$; 5) $A \cdot K-D$; 6) $M-2$
6	$a=4; b=-0.5; c=-1; m=3.2; k=1.1; n=1.8$	1) $A+B \cdot M$; 2) $M \cdot C$; 3) B^3 ; 4) $C+m \cdot K$; 5) $AB+D \cdot K$ 6) $D-3$
7	$a=1; b=2.5; c=0.3; m=1; k=-2.1; n=-0.8$	1) $A-M$; 2) $B-a \cdot C$ 3) M^{2-B} ; 4) $D-D \cdot K$; 5) $A+7 \cdot D$; 6) $A-2$
8	$a=2; b=0.5; c=-1.1; m=2; k=1.9; n=-3.8$	1) A^2 ; 2) $B \cdot C+M$; 3) $n \cdot M^2$; 4) $D-K$; 5) $A \cdot B-D \cdot C$; 6) $D-2$
9	$a=3; b=-2.5; c=4; m=3; k=-2.1; n=0.8$	1) A^2+M ; 2) $B-M$; 3) $b \cdot C-3$; 4) $D+3K$; 5) $A \cdot K-D$; 6) $M-2$
10	$a=3.1; b=1.5; c=2.1; m=3.2; k=1.1; n=-1.6$	1) $A+A \cdot M$; 2) $B \cdot C$; 3) M^3 ; 4) $D+m \cdot K$; 5) $A \cdot D+D \cdot M$; 6) $K-2$
11	$a=-2; b=1; c=1.5; m=-3; k=-0.1; n=1.8$	1) $A+B \cdot M$; 2) $M \cdot C$; 3) B^3 ; 4) $C+m \cdot K$; 5) $AB+D \cdot K$ 6) $D-3$
12	$a=-1; b=5; c=1.3; m=0.9; k=0.1; n=-0.5$	1) $A-M$; 2) $B-a \cdot C$ 3) M^{2-B} ; 4) $D-D \cdot K$; 5) $A+7 \cdot D$; 6) $A-2$

	$k=0.1; n=-0.5$	$D \cdot K; 5) A+7 \cdot D; 6) A-2$
13	$a=1; b=0.5; c=1; m=0.2;$ $k=0.27; n=0.7$	1) A^2 ; 2) $B \cdot C+M$; 3) $n \cdot M^2$; 4) $D \cdot K$; 5) $A \cdot B \cdot D \cdot C$; 6) $D-2$
14	$a=3; b=2.1; c=0.91; m=1.2;$ $k=1; n=3$	1) A^2+M ; 2) $B-M$; 3) $b \cdot C-3$; 4) $D+3K$; 5) $A \cdot K-D$; 6) $M-2$
15	$a=4; b=-0.5; c=-1; m=3.2;$ $k=1.1; n=1.8$	1) $A+B \cdot M$; 2) $M \cdot C$; 3) B^3 ; 4) $C+m \cdot K$; 5) $AB+D \cdot K$ 6) $D-3$
16	$a=1; b=2.5; c=0.3; m=1;$ $k=-2.1; n=-0.8$	1) $A+B \cdot M$; 2) $M \cdot C$; 3) B^3 ; 4) $C+m \cdot K$; 5) $AB+D \cdot K$ 6) $D-3$
17	$a=2; b=0.5; c=-1.1; m=2;$ $k=1.9; n=-3.8$	1) $A-M$; 2) $B-a \cdot C$ 3) $M \cdot 2^{-B}$; 4) $D-$ $D \cdot K$; 5) $A+7 \cdot D$; 6) $A-2$
18	$a=3; b=-2.5; c=4; m=3;$ $k=-2.1; n=0.8$	1) A^2 ; 2) $B \cdot C+M$; 3) $n \cdot M^2$; 4) $D \cdot K$; 5) $A \cdot B \cdot D \cdot C$; 6) $D-2$
19	$a=3.1; b=1.5; c=2.1; m=3.2;$ $k=1.1; n=-1.6$	1) A^2+M ; 2) $B-M$; 3) $b \cdot C-3$; 4) $D+3K$; 5) $A \cdot K-D$; 6) $M-2$
20	$a=1; b=0.5; c=-1; m=2;$ $k=-2.1; n=-0.8$	1) $A+A \cdot M$; 2) $B \cdot C$; 3) M^3 ; 4) $D+m \cdot K$; 5) $A \cdot D+D \cdot M$; 6) $K-2$
21	$a=-2; b=1; c=1.5; m=-3;$ $k=-0.1; n=1.8$	1) $A+B \cdot M$; 2) $M \cdot C$; 3) B^3 ; 4) $C+m \cdot K$; 5) $AB+D \cdot K$ 6) $D-3$
22	$a=-1; b=5; c=1.3; m=0.9;$ $k=0.1; n=-0.5$	1) $A-M$; 2) $B-a \cdot C$ 3) $M \cdot 2^{-B}$; 4) $D-$ $D \cdot K$; 5) $A+7 \cdot D$; 6) $A-2$
23	$a=1; b=0.5; c=1; m=0.2;$ $k=0.27; n=0.7$	1) A^2 ; 2) $B \cdot C+M$; 3) $n \cdot M^2$; 4) $D \cdot K$; 5) $A \cdot B \cdot D \cdot C$; 6) $D-2$
24	$a=3; b=2.1; c=0.91; m=1.2;$ $k=1; n=3$	1) A^2+M ; 2) $B-M$; 3) $b \cdot C-3$; 4) $D+3K$; 5) $A \cdot K-D$; 6) $M-2$
25	$a=4; b=-0.5; c=-1; m=3.2;$ $k=1.1; n=1.8$	1) $A+B \cdot M$; 2) $M \cdot C$; 3) B^3 ; 4) $C+m \cdot K$; 5) $AB+D \cdot K$ 6) $D-3$
26	$a=1; b=2.5; c=0.3; m=1;$ $k=-2.1; n=-0.8$	1) $A+A \cdot M$; 2) $B \cdot C$; 3) M^3 ; 4) $D+m \cdot K$; 5) $A \cdot D+D \cdot M$; 6) $K-2$
27	$a=2; b=0.5; c=-1.1; m=2;$ $k=1.9; n=-3.8$	1) $A+B \cdot M$; 2) $M \cdot C$; 3) B^3 ; 4) $C+m \cdot K$; 5) $AB+D \cdot K$ 6) $D-3$
28	$a=3; b=-2.5; c=4; m=3;$ $k=-2.1; n=0.8$	1) $A-M$; 2) $B-a \cdot C$ 3) $M \cdot 2^{-B}$; 4) $D-$ $D \cdot K$; 5) $A+7 \cdot D$; 6) $A-2$
29	$a=3.1; b=1.5; c=2.1; m=3.2;$ $k=1.1; n=-1.6$	1) A^2 ; 2) $B \cdot C+M$; 3) $n \cdot M^2$; 4) $D \cdot K$; 5) $A \cdot B \cdot D \cdot C$; 6) $D-2$
30	$a=-2; b=1; c=1.5; m=-3;$ $k=-0.1; n=1.8$	1) A^2+M ; 2) $B-M$; 3) $b \cdot C-3$; 4) $D+3K$; 5) $A \cdot K-D$; 6) $M-2$

Приклад

Виконати дії з матрицями, створивши їх із заданих коефіцієнтів $a=1, b=2, c=3, m=4, k=5, n=6$. Матриці мають такий вигляд:



$$M := (c - b \ a)$$

$$A := \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & -c & -a \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} -c & a \\ -b & -c \\ a & b \end{bmatrix} \quad D := \begin{bmatrix} c - b \\ a \\ c - a \end{bmatrix} \quad C := \begin{bmatrix} -c & b \\ a & n \end{bmatrix} \quad K := \begin{bmatrix} m & c & -n \\ n & -b & -m \\ -k & a & c \end{bmatrix}$$

1. Створити матриці.

1.1. Вибрати панель керування Matrix (Матрица).

1.2. Визначити число рядків і стовпців для кожної матриці (рис.5.1).

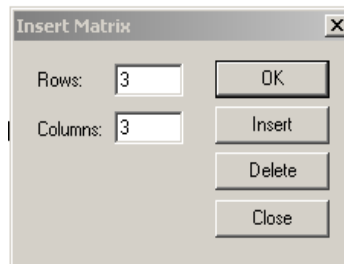


Рисунок 5.1 – Вигляд діалогового вікна для визначення розміру матриці

1.3. Матриці в прикладі мають такі розміри: A - (3x3), B - (3x2), C(2x2), M(1x2), K(3x3).

1.4. Заповнити матриці відповідними параметрами (рис. 5.2).

2 Виконати наступні дії з матрицями:

1) $A+n \cdot K$; 2) $A \cdot B$; 3) A^2 ; 4) $A \cdot D$; 5) $D \cdot M$; 6) $D-1$.

3 Знайти ранг матриці A (ранг матриці -найбільший порядок мінору цієї матриці, що відмінний від нуля): $rank(A)$.

4 У символьному виді виконати транспонування матриці B, тобто замінити місцями рядки й стовпці матриці B.

4.1 Виділити матрицю B.

4.2 Звернутися в головному меню до команди Symbolic / Matrix/Transpose (рис. 5.2).

5 У символьному вигляді виконати інвертування матриці A (тобто знайти матрицю, що буде зворотною до матриці A) .

5.1 Виділити матрицю A.

5.2 Звернутися в головному меню до команди Symbolic/Matrix/Invert (рис. 5.2).

6 У символьному вигляді знайти зворотну матрицю K.

6.1 Виділити матрицю K.

6.2 Звернутися в головному меню до команди Symbolic / Matrix/Invert (рис. 5.2).

7 У символьному вигляді знайти детермінант (визначник) матриці A.

7.1 Виділити матрицю A.

7.2 Звернутися в головному меню до команди Symbolic/ Matrix/Determinant (рис. 5.2).

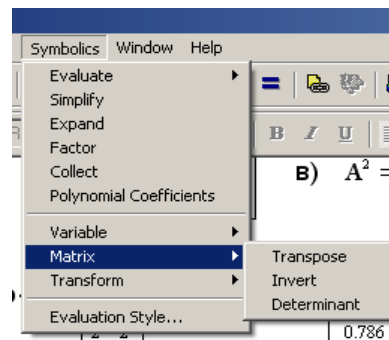


Рисунок 5.2 – Меню Symbolic для роботи з матрицями в символічному вигляді

Задані матриці

$a := 1 \quad b := 2 \quad c := 3 \quad m := 4 \quad k := 5 \quad n := 6 \quad M := (c - b \ a)$

$A := \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & -c & -a \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} -c & a \\ -b & -c \\ a & b \end{bmatrix} \quad D := \begin{bmatrix} c - b \\ a \\ c - a \end{bmatrix} \quad C := \begin{bmatrix} -c & b \\ a & n \end{bmatrix} \quad K := \begin{bmatrix} m & c & -n \\ n & -b & -m \\ -k & a & c \end{bmatrix}$

Знайти

а) $A + n \cdot K = \begin{bmatrix} 25 & 20 & -33 \\ 39 & -11 & -22 \\ -28 & 3 & 17 \end{bmatrix}$ б) $A \cdot B = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -9 & 4 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$ в) $A^2 = \begin{bmatrix} 13 & -5 & 4 \\ 10 & 1 & 9 \\ -9 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

г) $A \cdot D = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix}$ д) $D \cdot M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ е) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -0.357 & 0.5 & -0.071 \\ -0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.786 & -0.5 & 0.357 \end{bmatrix}$

ж) ранг матриці A $\text{rank}(A) = 3$

Обчислити в символічному вигляді

а) транспонування матриці $\begin{bmatrix} -c & a \\ -b & -c \\ a & b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -c & -b & a \\ a & -c & b \end{bmatrix}$

б) інвертування матриці $\begin{bmatrix} -c & b \\ a & n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{-n}{(n \cdot c + a \cdot b)} & \frac{b}{(n \cdot c + a \cdot b)} \\ \frac{a}{(n \cdot c + a \cdot b)} & \frac{c}{(n \cdot c + a \cdot b)} \end{bmatrix}$

в) знайти детермінант матриці $\begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & -c & -a \end{bmatrix} \Rightarrow -a^3 + a \cdot c \cdot b - c^3 + b^3$

г) знайти обернену матрицю $\begin{bmatrix} b & 0 & n & 0 \\ n & 0 & n & c \\ n & 0 & n & 0 \\ n & a & n & b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{(b - n)} & 0 & \frac{-1}{(b - n)} & 0 \\ 0 & \frac{-b}{(a \cdot c)} & \frac{(b - c)}{(a \cdot c)} & \frac{1}{a} \\ \frac{-1}{(b - n)} & 0 & \frac{b}{(n \cdot (b - n))} & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} & \frac{-1}{c} & 0 \end{bmatrix}$

Рисунок 5.3 – Приклад результатів обчислення матриць

Контрольні питання

- 1 Як можна створити матрицю й вектор?
- 2 Які дії виконуються з матрицями?
- 3 Як визначаються елементи матриці?

Лабораторна робота №6

Знаходження рішень системи лінійних рівнянь в MathCad

Мета роботи: знаходження рішень системи лінійних рівнянь у програмі MathCad.

Рішення систем лінійних рівнянь

Система MathCad дозволяє вирішувати систему лінійних рівнянь двома способами – матричним та з використанням вбудованою функції *lsolve*.

Вказівки до виконання лабораторної роботи:

I Знайти рішення системи лінійних рівнянь із використанням функції *soln*.

1 Запустити програму MathCad.

2 Створити матрицю A з коефіцієнтів при невідомих.

3 Створити вектор b з вільних членів.

4 Звернутися до вбудованої програми рішення лінійних рівнянь *soln* і записати $soln_1 := A^{-1} \cdot b$.

5 Одержати рішення лінійного рівняння у векторному вигляді

$$soln_1 = \begin{pmatrix} \vdots \\ \dots \end{pmatrix}.$$

II Знайти рішення системи лінійних рівнянь із використанням так званого «блоку рішень».

1 Задати початкові значення змінним, які є в рівнянні.

2 Увести ключове слово *given* (дано), з якого починається блок рішень.

3 Записати рівняння, використовуючи знак логічної рівності між правою й лівою частиною рівняння з панелі керування Evaluation (Вираження).

4 Увести ключове слово *find* (знайти), яким закінчується блок рішень.

III Знайти рішення вищенаведеної системи рівнянь із використанням функції *lsolve*.

1 Створити матрицю A з коефіцієнтів при невідомих.

2 Створити вектор b з вільних членів.

4 Звернутися до вбудованої програми рішень лінійних рівнянь *lsolve* і записати $lsolve(A, b)$.

5 Одержати результат рішення лінійного рівняння у векторному вигляді

$$lsolve := \begin{pmatrix} \vdots \\ \dots \end{pmatrix}.$$

IV Знайти наближене рішення з використанням функції *minerr*(x1,...)...

1 Задати наближення послідовно для значень змінної x1, x2,... xn.

2 Увести ключове слово *given* (дане), з якого починається блок рішень.

3 Записати систему рівнянь, використовуючи знак логічної рівності між правою й лівою частинами кожного рівняння.

4 Звернутися до функції $\text{minerr}(x_1, x_2, \dots)$. Значення невідомих будуть знайдені.

Таблиця 6.1 - Варіанти завдань до лабораторної роботи № 6

№ варіанта	Коефіцієнти при невідомих				Вільні члени
	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	b_1
	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	b_2
	a_{31}	a_{23}	a_{33}	a_{34}	b_3
	a_{41}	a_{24}	a_{34}	a_{44}	b_4
1	2	3	4	5	6
1	9	5	7	4	0
	4	6	7	8	6
	5	8	6	7	3
	5	6	7	8	7
2	9	6	3	8	3
	4	6	7	4	1
	2	3	5	3	4
	4	8	3	7	2
3	2	3	2	5	3
	5	2	5	7	2
	4	2	7	1	3
	7	5	1	4	2
4	1	4	2	5	8
	4	4	5	3	6
	1	2	6	8	7
	3	7	3	2	9
5	9	6	3	8	3
	4	6	7	4	8
	2	3	5	3	5
	4	8	3	7	9
6	2	4	7	4	2
	4	1	6	2	0
	8	3	6	7	3
	6	3	5	7	1
7	3	3	4	7	3
	2	6	4	6	4
	3	4	5	6	8
	1	9	3	5	2
8	2	1	5	2	1
	5	2	2	6	3
	2	2	1	2	0

№ варіанта	Коефіцієнти при невідомих				Вільні члени
	a ₁₁	a ₁₂	a ₁₃	a ₁₄	B ₁
	a ₂₁	a ₂₂	a ₂₃	a ₂₄	B ₂
	a ₃₁	a ₂₃	a ₃₃	a ₃₄	B ₃
	a ₄₁	a ₂₄	a ₃₄	a ₄₄	B ₄
1	2	3	4	5	6
	1	3	3	1	2
9	7	6	2	7	3
	4	9	5	5	2
	2	3	4	4	0
	1	5	6	6	2
10	3	6	5	2	3
	4	6	3	5	0
	2	3	2	6	4
	2	4	3	6	3
11	0,12	-0,43	0,14	0,64	-0,17
	-0,07	0,34	-0,72	0,32	0,62
	1,18	-0,08	-0,25	0,43	1,12
	1,17	0,53	-0,84	-0,53	1,15
12	0,12	-0,43	0,14	0,64	-0,17
	-0,07	0,34	-0,72	0,32	0,62
	1,18	-0,08	-0,25	0,43	1,12
	1,17	0,53	-0,84	-0,53	1,15
13	3,7	5,6	9,5	2	13
	4	3,36	31,1	1,5	0
	2	7,93	4,2	6,3	4,4
	2	42,7	3,7	6,2	3
14	1,3	1,6	5	2,2	3
	4,4	6,7	13	2,5	0
	2,8	0,73	12	67,8	4
	2	3,4	13	6	3
15	5,3	1,6	5,5	2	3,3
	4,1	6,4	3,9	5	0
	2,1	3,3	2,04	6	4,9
	2	4	3	6	3,1
16	3	6	5	0,2	3
	4	6	8,3	5,3	0
	2	3	2,6	6,1	4,1
	2	4	0,93	6	3,8
17	3	6	5	2	34,7
	4	6	3,6	5	0
	2	3,4	2	6	4,2
	2	44,7	3	6	3

№ варіанта	Коефіцієнти при невідомих				Вільні члени
	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	B_1
	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	B_2
	a_{31}	a_{23}	a_{33}	a_{34}	B_3
	a_{41}	a_{24}	a_{34}	a_{44}	B_4
1	2	3	4	5	6
18	3	6	5,1	0,2	4
	4	6	3,4	5,34	3
	2	3	2,7	6,7	4
	2	4	3,3	6	7
19	23	6	5	2,5	1,3
	4	6	3	5,2	0,78
	12	3	2	6,11	4,2
	12	4	3	6,78	3,76
20	1	5	5	2,3	3
	8	2	3,4	2,5	0
	6	3	0,2	6	4
	2	4	3	5	3
21	3	6	1,25	2	3
	2	5	3,3	8,2	2
	5	2	1,2	2	4
	2	4	1,3	9	2
22	1	6	5,9	2	3
	7	6,6	3	5	0
	3	3,3	2,1	6	2
	2	4,8	3	6	8
23	3	16	5	12	3
	0,4	6	13	5	0
	2	3	2	6	14
	0,2	4	3	16	3
24	1,3	16	1,5	2,22	3,2
	5	8	3,4	5,55	1,3
	3	3,3	2,2	6,77	4
	2	4,9	3,6	6,88	3
25	3	6	15	2	3
	4	6	3	5	0,4
	2	3	12	6	14
	2	4	3	6	0,3
26	3,3	7,6	5,5	2	3
	5,4	7	13	5	0
	9,2	4	2	6	4
	3,2	4	3	6	3
27	3	6	5	2	3

№ варіанта	Коефіцієнти при невідомих				Вільні члени
	a ₁₁	a ₁₂	a ₁₃	a ₁₄	B ₁
	a ₂₁	a ₂₂	a ₂₃	a ₂₄	B ₂
	a ₃₁	a ₂₃	a ₃₃	a ₃₄	B ₃
	a ₄₁	a ₂₄	a ₃₄	a ₄₄	B ₄
1	2	3	4	5	6
	0,44	9	3	5	0
	2	2	2	6	4
	0,67	5	3	6	3
28	3,35	3	5,3	2	3
	4,22	6,7	3,5	5	0
	2,8	3,8	2,9	6	4
	2,34	4	3,44	6	3
29	3	6	5,23	2	3
	4	6	11	5	0
	2	3	18	6	4
	2	4	13	6	3
30	13,4	6,33	5,1	2,11	3,33
	4,66	6,1	3,33	5,44	0,11
	2,22	6	2,55	6,33	4,44
	2,98	8	3,78	6,11	3,33

Приклад

I Знайти рішення системи рівнянь із використанням функції *soln*

$$\begin{cases} 2 \cdot x - y + 2 \cdot z = 1 \\ 2 \cdot x - y + 3 \cdot z = 1 \\ 5 \cdot x - y + 4 \cdot z = -3. \end{cases}$$

1 Створити матрицю A

$$A := \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

2 Створити вектор b

$$b := \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{vmatrix}.$$

3 Знайти рішення системи, використовуючи функцію *soln*

$$soln_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{vmatrix}.$$

4 Результат рішення

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{soln}_1 := \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} \quad \text{soln}_1 = \begin{bmatrix} -1.333 \\ -3.667 \\ 0 \end{bmatrix}$$

II Знайти рішення вищенаведеної системи рівнянь із використанням так званого «блоку рішень»

1 Задати початкові значення змінним, які присутні в рівнянні

$$x=0; y=0; z=0.$$

2 Увести ключове слово *given* (дане), з якого починається блок рішень.

3 Записати рівняння, використовуючи знак логічної рівності між правою й лівою частинами рівняння з панелі керування Evaluation (Выражения).

$$\begin{cases} 2 \cdot x - y + 2 \cdot z = 1 \\ 2 \cdot x - y + 3 \cdot z = 1 \\ 5 \cdot x - y + 4 \cdot z = -3. \end{cases}$$

4 Увести ключове слово *find* (знайти), яким закінчується блок рішень.

$$\text{find}(x,y,z) =$$

5 Результат рішення

$$x := 0 \quad y := 0 \quad z := 0$$

$$\text{given}$$

$$2 \cdot x - y + 2 \cdot z = 1$$

$$2 \cdot x - y + 3 \cdot z = 1$$

$$5 \cdot x - y + 4 \cdot z = -3$$

$$\text{find}(x,y,z) = \begin{bmatrix} -1.333 \\ -3.667 \\ 0 \end{bmatrix}$$

III Знайти рішення вищенаведеної системи рівнянь із використанням функції *lsolve*.

1 Створити матрицю A

$$A := \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

2 Створити вектор b

$$b := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

3 Знайти рішення системи, використовуючи функцію *lsolve*:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{lsolve}(A, b) = \begin{pmatrix} -1.333 \\ -3.667 \\ 0 \end{pmatrix}$$

IV Знайти рішення вищенаведеної системи рівнянь із використанням функції *minerr* (*x, y, z*).

1 Задати початкові умови для невідомих, наприклад, $x=1, y=1, z=1$.

2 Увести ключове слово *given* (дано), з якого починається блок рішень.

3 Записати рівняння, використовуючи знак логічної рівності між правою й лівою частиною рівняння з панелі.

4 Звернутися до функції *minerr* (*x, y, z*). Рішення системи рівнянь буде знайдено.

$$\begin{aligned} x &:= 1 & z &:= 1 & y &:= 1 \\ &\text{given} \\ 2 \cdot x - y + 2 \cdot z &= 1 \\ 2 \cdot x - y + 3 \cdot z &= 1 \\ 5 \cdot x - y + 4 \cdot z &= -3 \end{aligned}$$

$$\text{minerr}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -1.333 \\ -3.667 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Контрольні питання

1 Які вбудовані функції дозволяють знайти рішення системи лінійних рівнянь?

2 У якому вигляді представляються результати рішення системи лінійних рівнянь?

Лабораторна робота №7

Знаходження рішень системи нелінійних рівнянь в MathCad

Мета роботи: знаходження рішень системи нелінійних рівнянь у програмі MathCad.

Рішення систем нелінійних рівнянь

При рішенні систем нелінійних рівнянь використовується спеціальний обчислювальний блок, що відкривається службовим словом – директивою *Given*. У блоці використовується одна з наступних двох функцій:

- *Find*(v_1, v_2, \dots, v_n) – повертає значення однієї або ряду змінних для точного рішення;

- *Minerr*(v_1, v_2, \dots, v_n) – повертає значення однієї або ряду змінних для наближеного рішення.

Між цими функціями існують принципові розходження. Перша функція використовується, коли рішення реально існує (хоча й не є аналітичним). Друга функція намагається знайти максимальне наближення навіть до неіснуючого рішення шляхом мінімізації середньоквадратичної погрішності рішення.

Вказівки до виконання лабораторної роботи:

I Знайти рішення системи нелінійних рівнянь із використанням так званого "блоку рішень".

1 Задати початкові значення змінним, які є в рівнянні.

2 Увести ключове слово *given* (дано), з якого починається блок рішень.

3 Записати рівняння, використовуючи знак логічної рівності між правою й лівою частинами рівняння з панелі керування.

4 Увести ключове слово *find* (знайти), яким закінчується блок рішень.

II. Знайти наближене рішення з використанням функції *minerr*(x_1, \dots).

1 Задати наближення послідовно для значень змінної x_1, x_2, \dots, x_n .

2 Увести ключове слово *given* (дано), з якого починається блок рішень.

3 Записати систему рівнянь, використовуючи знак логічної рівності між правою й лівою частинами кожного рівняння.

4 Звернутися до функції *minerr*(x_1, x_2, \dots). Значення невідомих буде знайдено.

Таблиця 7.1 - Варіанти завдання до лабораторної роботи №7

№ варіанта	Система рівнянь	№ варіанта	Система рівнянь
1	2	3	4
1	$\begin{cases} 2x^2 + 5y^2 = 3 \\ 5x + 9y = 3 \end{cases}$	2	$\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 4 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 5x^2 + 2y^2 = 4 \\ 2x + 7y = 1 \end{cases}$	4	$\begin{cases} 4x^2 + 5y^2 = 3 \\ 5x + 3y = 1 \end{cases}$

№ варіанта	Система рівнянь	№ варіанта	Система рівнянь
1	2	3	4
5	$\begin{cases} 5x^2 + 6y^2 = 3 \\ 7x + 3y = 1 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 3x^2 + 5y^2 = 3 \\ 5x + 7y = 2 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 7x^2 + 6y^2 = 3 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 5x^2 + 6y^2 = 3 \\ 3x + 7y = 2 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 2 \\ 2x + 7y = 3 \end{cases}$	10	$\begin{cases} 5x^2 + y^2 = 3 \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 5 \\ 7x + y = 4 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 8x^2 + 6y^2 = 4 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 4x^2 + 3y^2 = 7 \\ 8x + 2y = 6 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 9 \\ 6x + 3y = 7 \end{cases}$
15	$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 3 \\ 5x + 4y = 7 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 9 \\ x + y = 3 \end{cases}$
17	$\begin{cases} 2x^2 + 7y^2 = 5 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 6x^2 + 7y^2 = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$
19	$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 5 \\ 7x + 3y = 6 \end{cases}$	20	$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 4 \\ 8x + 7y = 5 \end{cases}$
21	$\begin{cases} 4x^2 + 2y^2 = 7 \\ 9x + y = 6 \end{cases}$	22	$\begin{cases} 5x^2 + 3y^2 = 6 \\ x + 4y = 3 \end{cases}$
23	$\begin{cases} 9x^2 + 7y^2 = 3 \\ 5x + y = 4 \end{cases}$	24	$\begin{cases} 6x^2 + y^2 = 4 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$
25	$\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 7 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases}$	26	$\begin{cases} 2x^2 + 9y^2 = 5 \\ x + 6y = 7 \end{cases}$
27	$\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 9 \\ 9x + y = 3 \end{cases}$	28	$\begin{cases} 5x^2 + y^2 = 1 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$
29	$\begin{cases} 3x^2 + 8y^2 = 7 \\ 6x + 5y = 4 \end{cases}$	30	$\begin{cases} 5x^2 + 9y^2 = 3 \\ 2x + 8y = 4 \end{cases}$

Приклад

Знайти рішення системи нелінійних рівнянь із використанням так званого «блоку рішень».

1 Задати початкові значення змінним, які є в рівнянні
 $x=1; y=1$.

2 Увести ключове слово *given* (дано), з якого починається блок рішень.

3 Записати рівняння, використовуючи знак логічної рівності між правою й лівою частиною рівняння з панелі керування

$$\begin{cases} 2x^2 + 5y^2 = 3 \\ 5x + 9y = 3 \end{cases}$$

4 Увести ключове слово *find* (знайти), яким закінчується блок рішень.

find(x,y) =

5 Результат рішення

x := 1

y := 1

Given

$$2 \cdot x^2 + 5 \cdot y^2 = 3$$

$$5 \cdot x + 9 \cdot y = 3$$

$$\text{Find}(x, y) = \begin{bmatrix} -0.609 \\ 0.672 \end{bmatrix}$$

II Знайти наближене рішення з використанням функції *minerr*(x1,...)...

1 Задати наближення послідовно для значень змінної x=1, y=1.

2 Увести ключове слово *given* (дано), з якого починається блок рішень.

3 Записати систему рівнянь, використовуючи знак логічної рівності між правою й лівою частиною кожного рівняння.

4 Звернеться до функції *minerr*(x,y.). Значення невідомих буде знайдено.

x := 1

y := 1

given

$$2 \cdot x^2 + 5 \cdot y^2 = 3$$

$$5 \cdot x + 9 \cdot y = 3$$

$$\text{minerr}(x, y) = \begin{pmatrix} -0.609 \\ 0.672 \end{pmatrix}$$

Контрольні питання

1 Які вбудовані функції дозволяють знайти рішення системи нелінійних рівнянь?

2 У якому вигляді представляються результати рішення системи нелінійних рівнянь?

3 Чи потрібно задавати початкові наближення при рішенні системи нелінійних рівнянь?

Лабораторна робота № 8

Символьні дії математичного аналізу в MathCad

Мета роботи: визначення інтегралів і похідних у програмі MathCad з використанням символьних операцій.

Обчислення похідних і інтегралів

Аналогічно більшості інших найбільш важливих математичних операцій, в MathCad існує чисельне й символьне диференціювання. Символьний метод має переваги в тім, що результат можна одержати у вигляді функції, яку можна буде використовувати в подальших розрахунках. Чисельний же підхід має переваги в деяких специфічних задачах. MathCad дозволяє обчислювати як звичайну похідну, так і похідні більш високих порядків, а також частки похідні (рис.8.1).

Оператор простого диференціювання на панелі Calculus для обчислення першої похідної має два маркери, принцип заповнення яких наступний: у верхній вводиться функція, у нижній – змінна, по якій обчислюється похідна.



Рисунок 8.1 – Вигляд діалогового вікна для обчислення похідних і інтегралів

Результат може бути представлений у символьному вигляді, якщо використовувати оператор символьного виводу \rightarrow , а потім звернутися до символьного процесора Symbolic/Evaluate (Символика/Вычислить в символах) (рис. 8.2).

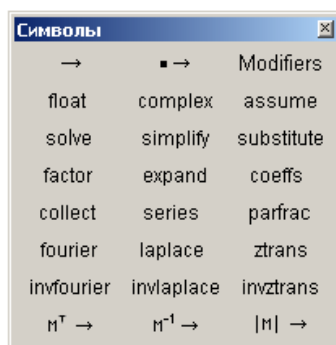


Рисунок 8.2 – Вигляд меню символьного процесора Symbolic для символьних обчислень

При символічному диференціюванні можна оперувати з функціями декількох змінних. Оператор диференціювання може з'єднуватися з будь-яким обчислювальним або символічним оператором. Особливо корисним є оператор *Simplify*, тому що вираз похідної видається в неспрощеному вигляді. Для спрощення відповіді варто використовувати оператори *Collect* (Приводить подібные), *Factor* (Раскладывает выражения на множители) і *Expand* (Раскрывает скобки).

Щоб одержати чисельне значення похідної в потрібній точці виходячи з результатів символічного розрахунку, потрібно зробити наступне:

1. Знайти функцію похідної, використовуючи оператор символічного виводу (\rightarrow).
2. Привласнити змінній відповідне числове значення.
3. Скопіювати отриманий вираз для похідної й обчислити його символічно.

Панель Calculus (Вычисления) містить два оператори інтегрування. Перший, Indefinite Integral (Неопределенный интеграл), дозволяє визначити вид функції, що інтегрується. Оператор невизначеного інтеграла містить два маркери, які заповнюються відповідно до прийнятого в математиці подання: у лівий уводиться функція (або ім'я функції), під знак диференціала - змінна інтегрування.

Найчастіше результат інтегрування являє собою громіздкий вираз. У цьому випадку його варто спрощувати. Найбільш універсальний інструмент, що для цього використовується - оператор *Simplify* (Упростить). Однак іноді вираз можна спростити (оператор *Collect*), розклавши по ступенях (оператор *Expand*) або привівши дріб до загального знаменника (оператор *Factor*). Щоб задіяти потрібний символічний оператор, варто виділити вираз інтеграла й нажати відповідну кнопку на панелі Symbolic (Символьные). Застосувати до результату інтегрування можна й відразу кілька символічних операторів.

Знаходження певного інтегралу виконується подібно тому як обчислюється невизначений інтеграл. Для інтегрування необхідно звернутися на панелі Символьні до функції *simplify*. Увести оператор інтегрування. У відповідних місцях заповнити ім'я першої змінної й границі інтегрування. Якщо необхідно обчислити кратні інтеграли, то на місці введення функції під інтегралом ввести ще один оператор інтегрування, границі інтегрування й підінтегральну функцію. Аналогічно виконується інтегрування по декількох змінним.

Можна визначити інтеграл у символічному вигляді, наприклад,

$$\int_a^b x dx \rightarrow \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2.$$

Для числового інтегрування MathCad пропонує скористатися убудованими програмами обчислення інтегралів (рис. 8.3). Для того, щоб звернутися до наближеного розрахунку, необхідно в контекстному меню вибрати один з методів інтегрування.



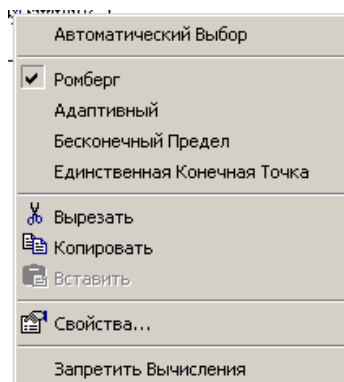


Рисунок 8.3 – Вид контекстного меню з убудованими програмами для числового інтегрування

Вказівки до виконання лабораторної роботи:

1 Запустити програму MathCad.

2 Записати на робочому аркуші відповідно до номера варіанта формули для визначення невизначених інтегралів, визначених інтегралів, похідних першого порядку. Від похідних першого порядку визначити похідні другого, третього порядків.

3 Застосувати послідовно до кожної функції команди меню Symbolic/Simplify, відзначивши послідовно кожну з функцій.

Таблиця 8.1 - Варіанти завдання до лабораторної роботи №8

Номер варіанта	Невизначені інтеграли	Певні інтеграли	Похідні
1	2	3	4
1	$\int \frac{x^4 - 3 \cdot x^2 + 5 \cdot \sqrt[3]{x} - 7 \cdot x + 6}{\sqrt[3]{x}} dx$	$\int_0^{\pi} \sin(x) dx$	$\frac{d}{dx} [(x+1)^2 \cdot (x-2)^3]$
2	$\int \left[\frac{(1 + \sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} \right] dx$	$\int_0^1 e^{k \cdot x} dx$	$\frac{d}{dx} (\sin(x) + \cos(x) + \tan(x))$
3	$\int \cos(4 \cdot x)^5 \cdot \sin(4 \cdot x) dx$	$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$	$\frac{d}{dx} (e^x + \ln(x) - a \sin(x) + \sqrt[3]{x})$
4	$\int \frac{x^2}{(4 \cdot x^3 + 9)^4} dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2} dx$	$\frac{d}{dx} (2^x \cdot \sin(x) + e^{3 \cdot x})$

5	$\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$	$\int_1^2 \frac{1}{x \cdot (1+x^4)} dx$	$\frac{d}{dx} \left(\frac{10}{\tan(x)} + 5 \cdot \ln(x) + 6 \cdot \arccos(x) + 2 \cdot \sqrt[4]{x} \right)$
6	$\int \frac{1}{\sin(x)^2 \cdot \cos(x)^2} dx$	$\int_3^{10} \frac{1}{(x-1) \cdot \sqrt{x+6}} dx$	$\frac{d}{dx} \left(\sin(x^2) + \tan(x) \right)$
7	$\int \frac{1}{1 + \sin(x)} dx$	$\int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x)^3} dx$	$\frac{d}{dx} \left[e^{(\tan(x))^2} \right]$
8	$\int \cos(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x} dx$	$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$	$\frac{d}{dx} \left[\frac{\sqrt[4]{\ln(\sin(x)+2)}}{(\tan(x))^3} \right]$
9	$\int \frac{1}{\cos(x)^2} dx$	$\int_0^1 \ln(x) dx$	$\frac{d}{dx} (2^x \cdot \sin(x) + e^{3x})$
10	$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2} dx$	$\int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$	$\frac{d}{dx} \left(\frac{10}{\tan(x)} + 5 \cdot \ln(x) + 6 \cdot \arccos(x) + 2 \cdot \sqrt[4]{x} \right)$
11	$\int \frac{1}{\sin(x) \cdot \cos(x)} dx$	$\int_0^1 e^x dx$	$\frac{d}{dx} \left(\sin(x^2) + \tan(x) \right)$
12	$\int \frac{x+3}{x^2+2} dx$	$\int_0^{2\pi} 4 \cdot a^2 \cdot (1 - \cos(\phi))^2 d\phi$	$\frac{d}{dx} \left[e^{(\tan(x))^2} \right]$
13	$\int \frac{\cos(x)}{5 + \sin(x)^2} dx$	$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$	$\frac{d}{dx} \left(\frac{10}{\tan(x)} + 5 \cdot \ln(x) + 6 \cdot \arccos(x) + 2 \cdot \sqrt[4]{x} \right)$
14	$\int \frac{1}{\sqrt{7-8 \cdot x^2}} dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2} dx$	$\frac{d}{dx} \left(\sin(x^2) + \tan(x) \right)$
15	$\int \frac{\sin(2 \cdot x)}{\sqrt{5-3 \cdot \sin(x)^4}} dx$	$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$	$\frac{d}{dx} \left[e^{(\tan(x))^2} \right]$
16	$\int \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2 - a^2}} dx$	$\int_0^1 \ln(x) dx$	$\frac{d}{dx} \left[\frac{\sqrt[4]{\ln(\sin(x)+2)}}{(\tan(x))^3} \right]$

17	$\int \frac{1}{\sin(x)^4 \cdot \cos(x)^2} dx$	$\int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$	$\frac{d}{dx} (e^x + \ln(x) - \arcsin(x) + \sqrt[3]{x})$
18	$\int \ln(x)^2 dx$	$\int_0^1 e^x dx$	$\frac{d}{dx} (2^x \cdot \sin(x) + e^{3x})$
19	$\int \frac{1}{x^2 - 9x + 25} dx$	$\int_0^{2\pi} 4 \cdot a^2 \cdot (1 - \cos(\phi))^2 d\phi$	$\frac{d}{dx} \left(\frac{10}{\tan(x)} + 5 \cdot \ln(x) + 6 \cdot \arccos(x) + 2 \cdot \sqrt[4]{x} \right)$
20	$\int \frac{3 \cdot x + 4}{x^2 + 7x + 14} dx$	$\int_0^1 e^{k \cdot x} dx$	$\frac{d}{dx} (\sin(x^2) + \tan(x))$
21	$\int \frac{1}{(3 \cdot x^2 + x + 7)^2} dx$	$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$	$\frac{d}{dx} [e^{(\tan(x))^2}]$
22	$\int \frac{x^2 + x - 1}{x^3 \cdot (x-2)^2} dx$	$\int_0^\pi \sin(x) dx$	$\frac{d}{dx} \left[\frac{\sqrt[4]{\ln(\sin(x) + 2)}}{(\tan(x))^3} \right]$
23	$\int \frac{x^4 + 5 \cdot x^3 - 7 \cdot x^2 + 5}{x^3 - x^2 + 5 \cdot x - 5} dx$	$\int_0^1 e^{k \cdot x} dx$	$\frac{d}{dx} [(x+1)^2 \cdot (x-2)^3]$
24	$\int \frac{1}{1-x^4} dx$	$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$	$\frac{d}{dx} (\sin(x) + \cos(x) + \tan(x))$
25	$\int \sin\left(\frac{3 \cdot x}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2} dx$	$\frac{d}{dx} (e^x + \ln(x) - \arcsin(x) + \sqrt[3]{x})$
26	$\int \sin(2 \cdot x) \cdot \cos(5 \cdot x) \cdot \sin(9 \cdot x) dx$	$\int_1^2 \frac{1}{x \cdot (1+x^4)} dx$	$\frac{d}{dx} (2^x \cdot \sin(x) + e^{3x})$
27	$\int \sin(x)^4 \cdot \cos(x)^3 dx$	$\int_3^{10} \frac{1}{(x-1) \cdot \sqrt{x+6}} dx$	$\frac{d}{dx} \left(\frac{10}{\tan(x)} + 5 \cdot \ln(x) + 6 \cdot \arccos(x) + 2 \cdot \sqrt[4]{x} \right)$
28	$\int \sin(x)^2 \cdot \cos(x)^5 dx$	$\int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^3} dx$	$\frac{d}{dx} (\sin(x^2) + \tan(x))$
29	$\int \frac{\sin(x)^5}{\cos(x)^4} dx$	$\int_0^1 \ln(x) dx$	$\frac{d}{dx} [e^{(\tan(x))^2}]$

30	$\int \cos(x)^6 dx$	$\int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$	$\frac{d}{dx} \left[\frac{\sqrt[4]{\ln(\sin(x)+2)}}{(\tan(x))^3} \right]$
----	---------------------	---	--

Приклади

1 Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{1}{(x^2-10)\sqrt{x^2-10}} dx$.

Результат $\frac{-1}{10} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-10}};$

2 Знайти визначений інтеграл $\int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Результат $\frac{1}{8} \cdot \pi^2$.

3 Знайти похідні першого порядку $\frac{d}{dx} 2^x \cdot \sin(x)$.

Результат $2^x \cdot \ln(2) \cdot \sin(x) + 2^x \cdot \cos(x)$.

4 Знайти похідні високого порядку $\frac{d^4}{dx^4} \left(\frac{x^3}{x^2-4} \right)$.

Результат $96 \cdot x \cdot \frac{(x^4+40 \cdot x^2+80)}{(x^2-4)^5}$

$$\int_a^b x^5 dx \text{ simplify } \rightarrow \frac{1}{6} \cdot b^6 - \frac{1}{6} \cdot a^6$$

$$\frac{d^4}{dx^4} (a \cdot x^8 - b \cdot x^6) \text{ simplify } \rightarrow 1680 \cdot a \cdot x^4 - 360 \cdot b \cdot x^2$$

Контрольні питання

- 1 Як знайти в символьному вигляді визначені та невизначені інтеграли?
- 2 Чи можна застосовувати символьні операції до інтегралів по області, до тривимірних інтегралів, до контурних інтегралів?
- 3 Чи можна в символьному вигляді знайти похідні високих порядків?

Лабораторна робота №9

Обчислення похідних, часних похідних у задачах геометрії

Мета роботи: навчитися обчислювати похідні в задачах геометрії й знаходити часні похідні високого порядку у програмі MathCad.

Вказівки до виконання лабораторної роботи:

I Скласти рівняння дотичній і нормалі до лінії, що задана рівнянням $y(x)=f(x)$ у точці $M(x_0, y_0)$.

1. Задати значення x_0 і y_0 у точці M .

2. Записати рівняння лінії $y(x)$.

3. Визначити похідну від функції $y(x) \frac{d}{dx} y(x) \rightarrow$, використавши панель обчислень і панель символів. Привласнити значення похідної функції $yy(x) := \frac{d}{dx} y(x)$.

4. Записати рівняння дотичної у вигляді

$$\text{tang}(x) := yy(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0,$$

5. Аналогічно записати рівняння нормалі $\text{norm}(x) := \frac{-1}{yy(x_0)} \cdot (x - x_0) + y_0$

6. Побудувати графіки дотичної і нормалі.

7 Відформатувати графіки.

II Виконати числове й символне обчислення часних похідних вищого порядку від функції трьох змінних.

1 Записати функцію, від якої будуть обчислюватися похідні другого порядку.

2 Звернутися до панелі обчислень і вибрати оператор диференціювання.

3 У відповідному місці заповнення оператора записати функцію, змінну для диференціювання й порядок диференціювання.

4 Нажати правою кнопкою миші на знак оператора диференціювання й у контекстному меню вибрати View Derivative As (Показати производную как), установити прапорець Partial Derivative (Частная производная).

5 Відзначити оператор диференціювання й звернутися до панелі Символика/Вычислить/В символах.

6 Задати числові значення для змінних, від яких обчислюється похідна.

7 Обчислити числові значення похідних.

Таблиця 9.1 - Варіанти завдань до лабораторної роботи №9

Номер варіанта	Функція $f(x)$ для визначення дотичної і нормалі	Точка M (x_0, y_0) для визначення дотичної і нормалі	Функція $f(x, y, z)$ для обчислення частної похідної	Точка $M(x_0, y_0, z_0)$ для числового обчислення частної похідної
1	2	3	4	5
1	$x^2 - 3x + 5$	(2,3)	$x^2 - 3x^3 y - 4y^2 + 2 y - z^3$	(0,1,2)
2	$x^2 + 2x + 6$	(-1,1)	$z^2 e^{x^*x + y^*y}$	(0,0,0)
3	$x^3 - 3x^2$	(3,1)	$x \cos(y) + yz^4$	(1,0,0)
4	$0.5x - \sin(x)$	(0, $\pi/3$)	$z \ln(x^2 - y^2)$	(3,1,3)
5	$(x-5)e^x$	(4,0)	$z \sin(xy) + z^2$	(1,1,1)
6	$1 - 1 - (x-2)^{4/5}$	(2,1)	$x^2 + 2y^2 - 3xy - 4z^2$	(0,0,0)
7	$x^5 + 5x - 6$	(0,-1)	$zx \cdot \ln(y) + xy^2z$	(0,2,1)
8	$(x^3 + 4)/x^2$	(2,3)	$y(x - z \cos(x))$	(0,0,0)
9	$\sqrt[3]{1-x^3}$	(0,1)	$\sin(x)(\cos(z) + \cos(y))$	(1,0,0)
10	$\sin^2(x)$	(0.5,0.5)	$x^4 yz + \sin(y)$	(2,1,0)
11	$x^2 - 0.5x^4$	(0,0)	$(x - y^2)(z^3 - x)$	(1,1,1)
12	$x^3 - 3x^2$	(0, $\pi/3$)	$x^2 - 3x^3 y - 4y^2 + 2 y - z^3$	(0,1,2)
13	$0.5x - \sin(x)$	(4,0)	$z^2 e^{x^*x + y^*y}$	(0,0,0)
14	$(x-5)e^x$	(2,1)	$x \cos(y) + yz^4$	(1,1,1)
15	$1 - 1 - (x-2)^{4/5}$	(2,1)	$z \ln(x^2 - y^2)$	(3,1,3)
16	$x^5 + 5x - 6$	(0,-1)	$z \sin(xy) + z^2$	(1,1,1)
17	$0.5x - \sin(x)$	(0, $\pi/3$)	$x^2 + 2y^2 - 3xy - 4z^2$	(0,0,0)
18	$(x-5)e^x$	(4,0)	$zx \cdot \ln(y) + xy^2z$	(0,2,1)

1	2	3	4	5
19	$1-1-(x-2)^{4/5}$	(2,1)	$y(x-z\cos(x))$	(0,0,0)
20	x^5+5x-6	(0,-1)	$\sin(x)(\cos(z)+\cos(y))$	(1,0,0)
21	$(x^3+4)/x^2$	(2,3)	$zx \cdot \ln(y)+xy^2z$	(0,2,1)
22	x^3-3x^2	(3,1)	$y(x-z\cos(x))$	(0,0,0)
23	$0.5x-\sin(x)$	$(0, \pi/3)$	$\sin(x)(\cos(z)+\cos(y))$	(1,0,0)
24	$(x-5)e^x$	(4,0)	$x^4yz+\sin(y)$	(2,1,0)
25	$1-1-(x-2)^{4/5}$	(2,1)	$(x-y^2)*(z^3-x)$	(1,1,1)
26	x^5+5x-6	(0,-1)	$x^2-3x^3y-4y^2+2y-z^3$	(0,1,2)
27	$(x^3+4)/x^2$	(2,3)	z^2e^{x*y+y}	(0,0,0)
28	$\sqrt[3]{1-x^3}$	(0,1)	$x\cos(y)+yz^4$	(1,0,0)
29	$\sin^2(x)$	(0.5,0.5)	$z\ln(x^2-y^2)$	(3,1,3)
30	$x^2-0.5x^4$	(0,0)	$z\sin(xy)+z^2$	(1,1,1)

Приклад

I Скласти рівняння дотичної і нормалі до лінії, що задана рівнянням $y(x)=x^4-3x^3+4x^2-5x+1$ у точці $M(0,1)$.

1 Задати значення x_0 і y_0 у точці M : $x_0:=0$, $y_0:=1$.

2 Записати рівняння лінії $y(x):=x^4-3x^3+4x^2-5x+1$.

3 Визначити похідну від функції $y(x) \xrightarrow{\frac{d}{dx}} y'(x)$, використавши панель обчислень і панель символів. Привласнити значення похідної функції $yy(x):=\frac{d}{dx}y(x)$.

4 Записати рівняння дотичної у вигляді

$$\text{tang}(x) := yy(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0,$$

$$\text{tang}(x) \rightarrow -5 \cdot x + 1.$$

5 Аналогічно записати рівняння нормалі

$$\text{norm}(x) := \frac{-1}{yy(x_0)} \cdot (x - x_0) + y_0$$

$$\text{norm}(x) \rightarrow \frac{1}{5} \cdot x + 1$$

6 Побудувати графіки дотичної і нормалі.

7 Відформатувати графіки.

$$\begin{aligned} x0 &:= 0 & y0 &:= 1 \\ y(x) &:= x^4 - 3 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 1 & \frac{d}{dx} y(x) &\rightarrow 4 \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 5 \\ yy(x) &:= \frac{d}{dx} y(x) \\ \text{tang}(x) &:= yy(x0) \cdot (x - x0) + y0 & \text{tang}(x) &\rightarrow -5 \cdot x + 1 \\ \text{norm}(x) &:= \frac{-1}{yy(x0)} \cdot (x - x0) + y0 & \text{norm}(x) &\rightarrow \frac{1}{5} \cdot x + 1 \end{aligned}$$

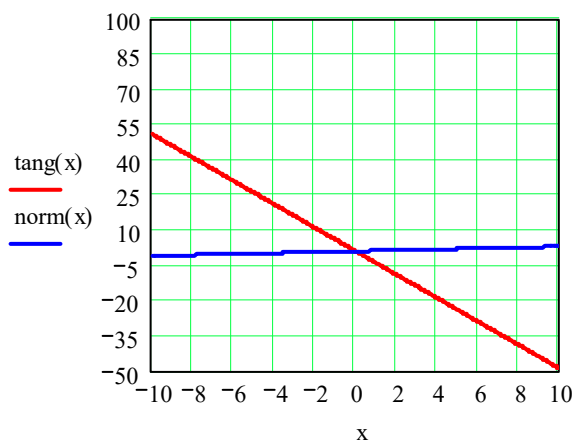


Рисунок 9.1 – Графік дотичній і нормалі

II Записати функцію, від якої будуть обчислюватися похідні другого порядку

$$f(x, y, z) := x^2 e^x + z - y \cdot z$$

2 Звернутися до панелі обчислень і вибрати оператор диференціювання

$$\frac{d}{dx}$$

3 У відповідні місця заповнення оператора записати функцію, змінну для диференціювання й порядок диференціювання.

4 Нажати правою кнопкою миші на знак оператора диференціювання й у контекстному меню вибрати View Derivative As (Показати производную как), установити прапорець Partial Derivative (Частная производная) (рис.9.2):



$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (x^2 e^x + z - y \cdot z), \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} (x^2 e^x + z - y \cdot z), \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} (x^2 e^x + z - y \cdot z)$$

5 Відзначити оператор диференціювання й звернутися до панелі Символика/Вычислить/В символах.

6 Задати числові значення для змінних, від яких обчислюється похідна $x:=1, y:=1, z:=1$.

7 Обчислити числові значення похідних.

$$f(x, y, z) := x^2 e^x + z - y \cdot z$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (x^2 e^x + z - y \cdot z) \quad 2 \cdot \exp(x) + 4 \cdot x \cdot \exp(x) + x^2 \cdot \exp(x)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (x^2 e^x + z - y \cdot z) \quad 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (x^2 e^x + z - y \cdot z) \quad 0$$

$$px2 := 2 \cdot \exp(x) + 4 \cdot x \cdot \exp(x) + x^2 \cdot \exp(x) := 1$$

$$y := 1$$

$$z := 1$$

$$px2 := 2 \cdot \exp(x) + 4 \cdot x \cdot \exp(x) + x^2 \cdot \exp(x)$$

$$px2 = 19.028$$

$$py2 := 0$$

$$py2 = 0$$

$$pz2 := 0$$

$$pz2 = 0$$

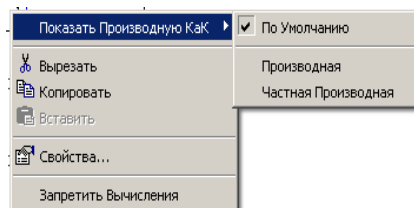


Рисунок 9.2 - Діалогове вікно Показати похідну

Контрольні питання

- 1 Як знайти дотичну до будь-якої кривої в MathCad?
- 2 Як знайти нормаль до будь-якої кривої в MathCad?
- 3 Як виконати символічні обчислення часних похідних високого порядку?
- 4 Як виконати числові обчислення часних похідних високого порядку?

Лабораторна робота №10

Обчислення інтегралів у задачах геометрії та механіки

Мета роботи: навчитися обчислювати інтеграли у задачах геометрії та механіки в програмі MathCad.

Вказівки до виконання лабораторної роботи:

I Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої заданими лініями.

1 Записати рівняння кривих, які обмежують площу плоскої фігури.

2 Знайти точки їхнього перетинання, для того щоб використовувати їх у двократному інтегруванні.

3 Звернутися на панелі Символи до функції *simplify*.

4 Увести оператор інтегрування. У відповідних місцях заповнити ім'я першої змінної й границі інтегрування.

5 На місці уведення функції під інтегралом ввести ще один оператор інтегрування, границі інтегрування й підінтегральну функцію

$$S = \iint_D dx dy$$

II Обчислити координати центру ваги пластини.

1 Записати рівняння кривих, які описують область D пластини.

2 Знайти точки їхнього перетинання, для того щоб використати їх у двократному інтегруванні.

3 Знайти площу S однорідної пластинки через подвійний інтеграл.

3.1 Звернутися на панелі Символи до функції *simplify*.

3.2 Увести оператор інтегрування. У відповідних місцях заповнити ім'я першої змінної й границі інтегрування.

3.3 На місці уведення функції під інтегралом ввести ще один оператор інтегрування, границі інтегрування й підінтегральну функцію

$$S = \iint_D dx dy$$

4 Знайти аналогічно статичні моменти M_x і M_y пластини щодо осей Ox і Oy як подвійні інтеграли

$$M_x = \iint_D y dx dy \quad M_y = \iint_D x dx dy$$

5 Визначити координати центра ваги як відношення підінтегральної функції, що визначає статичні моменти пластини щодо осей Ox і Oy

$$x = \frac{M_y}{S}, \quad y = \frac{M_x}{S}.$$

Таблиця 10.1 - Варіанти завдання до лабораторної роботи №10

Номер варіанта	Функції для обчислення площі фігури	Функції для обчислення координат центра ваги фігури
1	2	3
1	$x=y$ $2^{-2}y$; $x+y=0$	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$
2	$y=2-x$; $y^2=4x+4$	$y=x^2$; $y=2x^2$; $x=1$; $x=2$
3	$y^2=4x-4$; $y^2=2x$ (зовні параболі)	$y^2=x$; $x^2=y$
4	$3y^2=25x$; $5x^2=9y$	$y=\sqrt{2x-x^2}$; $y=0$
5	$y^2+2y-3x+1=0$; $3x-3y-7=0$	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$; $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$
6	$y=4x-4x^2$; $y=x$ $2^{-5}x$	$x^2+y^2=1$; $x+y=1$
7	$x=4-y^2$; $x+2y-4=0$	$x^2+y^2=4$; $x+y=2$
8	$y^2=4(x-1)$; $x^2+y^2=4$ (зовні параболі)	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$; $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$
9	$x=y$ $2^{-2}y$; $x+y=0$	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$; $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$
10	$y=2-x$; $y^2=4x+4$	$x^2+y^2=1$; $x+y=1$
11	$y^2+2y-3x+1=0$; $3x-3y-7=0$	$x^2+y^2=4$; $x+y=2$
12	$y=4x-4x^2$; $y=x$ $2^{-5}x$	$y^2=x$; $x^2=y$
13	$x=4-y^2$; $x+2y-4=0$	$y=\sqrt{2x-x^2}$; $y=0$
14	$x=y$ $2^{-2}y$; $x+y=0$	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$
15	$y=2-x$; $y^2=4x+4$	$y=x^2$; $y=2x^2$; $x=1$; $x=2$
16	$y^2+2y-3x+1=0$; $3x-3y-7=0$	$x^2+y^2=1$; $x+y=1$
17	$y=4x-4x^2$; $y=x$ $2^{-5}x$	$x^2+y^2=4$; $x+y=2$
18	$x=4-y^2$; $x+2y-4=0$	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$; $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$
19	$x=y$ $2^{-2}y$; $x+y=0$	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$; $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$
20	$y=2-x$; $y^2=4x+4$	$x^2+y^2=1$; $x+y=1$
21	$y^2=4(x-1)$; $x^2+y^2=4$ (зовні параболі)	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$
22	$y=2-x$; $y^2=4x+4$	$y=x^2$; $y=2x^2$; $x=1$; $x=2$
23	$y^2=4x-4$; $y^2=2x$ (зовні параболі)	

Номер варіанта	Функції для обчислення площі фігури	Функції для обчислення координат центра ваги фігури
1	2	3
	параболи)	$y^2=x; x^2=y$
24	$x=y^2-2y; x+y=0$	$y=\sqrt{2x-x^2}; y=0$
25	$y=2-x; y^2=4x+4$	$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1; \frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$
26	$3y^2=25x; 5x^2=9y$	$x^2+y^2=1; x+y=1$
27	$x=y^2-2y; x+y=0$	$x^2+y^2=4; x+y=2$
28	$y^2+2y-3x+1=0; 3x-3y-7=0$	$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1; \frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$
29	$y=4-x-4x^2; y=x^2-5x$	$y=x^2; y=2x^2; x=1; x=2$
30	$x=4-y^2; x+2y-4=0$	$y^2=x; x^2=y$

Приклад

I Обчислити площу фігури, що обмежена лініями $x=4-y-y^2$ і $x+y=6$.

1 Знайти координати точок перетинання заданих ліній, для чого необхідно вирішити систему рівнянь (однієї з вбудованих функцій MathCad, графічно або вирішити систему рівнянь).

$$\begin{aligned} x &= 4 - y - y^2 \\ x + y &= 6. \end{aligned}$$

У результаті будуть отримані точки перетинання A(4;2) і B(3;3).

2 Записати формулу для обчислення площі через кратний інтеграл і використати на панелі Символи функцію *simplify*

$$\int_2^3 \int_{6-y}^{4-y-y^2} 1 \, dx \, dy \, \text{simplify} \rightarrow \frac{1}{6}$$

II Обчислити координати центра ваги пластини, що обмежена кривими $y^2=4x+4$ і $y^2=-2x+4$.

$$\begin{aligned} &\text{Площа} \\ &2 \cdot \int_0^2 \int_{\frac{(y^2-4)}{2}}^{\frac{(4-y^2)}{2}} 1 \, dx \, dy \, \text{simplify} \rightarrow \end{aligned}$$

Статичні моменти щодо осей Oх і Oу

$$2 \cdot \int_0^2 \int_{\frac{(y^2-4)}{4}}^{\frac{(4-y^2)}{2}} x \, dx \, dy \text{ simplify } \rightarrow \frac{16}{5}$$

$$2 \cdot \int_0^2 \int_{\frac{(y^2-4)}{4}}^{\frac{(4-y^2)}{2}} y \, dx \, dy \text{ simplify } \rightarrow 6$$

Координати центра ваги

$$x := \frac{1}{8} \frac{16}{5} \quad x = 0.4$$

$$y := \frac{6}{8} \quad y = 0.75$$

Контрольні питання

- 1 Які геометричні характеристики можна обчислити з використанням інтегралів?
- 2 Як обчислити центр ваги через інтеграли?

Лабораторна робота №11

Рішення звичайних диференціальних рівнянь в MathCad

Мета роботи: навчитися знаходити рішення звичайних диференціальних рівнянь з використанням вбудованих функцій і блокової структури.

Обчислення звичайних диференціальних рівнянь

Диференціальні рівняння - це рівняння, у яких невідомими є функції однієї або декількох змінних. Ці рівняння мають співвідношення між функціями, які необхідно знайти, і їхніми похідними. Якщо в рівнянні присутні похідні по одній змінній, то це є звичайні диференціальні рівняння (ЗДР). Знайти рішення диференціального рівняння (або проінтегрувати його) - це значить визначити невідому функцію на заданому інтервалі зміни її змінної. Диференціальне рівняння має одне рішення, разом з рівнянням задані початкові умови.

За допомогою MathCad можна знайти рішення задач Коші, для яких задані початкові умови, і функції, які необхідно відшукати, тобто задані значення цієї функції в початковій точці інтервалу інтегрування рівняння. У більшості випадків диференціальне рівняння першого порядку можна записати в стандартній формі (формі Коші):

$$y'(t) = f(y(t), t), \quad (1)$$

і тільки з такою формою рівняння може працювати обчислювальний процесор MathCad. Разом з рівнянням (1) необхідно задати початкові умови – значення функції $y(t_0)$ у деякій точці t_0 . Таким чином, необхідно знайти функцію $y(t)$ на інтервалі $[t_0, t]$.

Для числового інтегрування в MathCad є можливість використовувати блок *Given/Odesolve* або убудовані функції. Обчислювальний блок *Given/Odesolve*, що реалізує рішення одного звичайного диференціального рівняння методом Рунге -Кутта, складається із трьох частин:

ключевое слово *Given*;

диференціальне рівняння й початкова умова, які записані за допомогою логічних операторів, причому початкова умова повинна записуватися у формі

$$y(t_0)=b;$$

Odesolve(t,t1) – убудована функція для рішення ЗДР щодо змінної t на інтервалі $[t_0, t]$.

Для рішення ЗДР можна використовувати також убудовані функції *rkfixed*, *Pkadapt*, *Bestoer*.

Вказівки до виконання лабораторної роботи:

I Знайти рішення звичайного диференціального рівняння $y'=f(x,y)$ з використанням «блоку рішень».

1. Увести ключове слово *given* (дано), з якого починається блок рішень.
2. Записати рівняння, використовуючи знак логічної рівності між правою й лівою частинами рівняння з панелі керування Evaluation (Выражения).
3. Задати початкові значення змінної, котра є в рівнянні.
4. Увести ключове слово *Odesolve*, яким закінчується блок рішень, тобто привласнити функції, щодо якої вирішується рівняння, значення *Odesolve* з параметрами інтервалу інтегрування.
5. Визначити значення знайденої функції в точках інтервалу, для чого створити відповідний цикл.
6. Побудувати й відформатувати графік знайденої функції в точках інтервалу.

II Знайти рішення звичайного диференційного рівняння з використанням вбудованої функції *rkfixed*.

1. Задати початкові значення змінної, котра є в рівнянні.
2. Записати рівняння, використовуючи знак логічної рівності між правою й лівою частинами рівняння з панелі керування Evaluation (Выражения).
3. Задати кількість кроків інтегрування рівняння на інтервалі.
4. Привласнити функції, щодо якої вирішується рівняння, значення *rkfixed* з параметрами: функція, інтервал інтегрування, кількість кроків на інтервалі інтегрування, оператор диференціального рівняння.
5. Визначити значення знайденої функції в точках інтервалу, для чого створити відповідний цикл.
6. Побудувати й відформатувати графік знайденої функції в точках інтервалу.

Таблиця 11.1 - Варіанти завдання до лабораторної роботи №11

Номер варіанта	Рівняння $f(x,y)$	Початкові умови	Інтервал знаходження рішення	Крок зміни
1	2	3	5	5
1	$\frac{y}{\cos(x) \cdot \ln(y)}$	$y(1)=1$	$[1,10]$	1
2	$\text{tg}(x)\text{t}(y)$	$y(0)=0$	$[0,5]$	0.5
3	$\frac{y}{1+x^2}$	$y(1)=1$	$[1,7]$	
4	$-\frac{e^y + x}{y}$	$y(1)=1$	$[1, 5]$	0.25
5	$\cos(x-2y) - \cos(x+2y)$	$y(0)=\pi/4$	$[0,4\pi]$	$\pi/2$
6	$2e^{-x}\cos(x)-y$	$y(0)=0$	$[0;3,5]$	0,1
7	$e-2y\cos(x)-y$	$y(0)=0$	$[0;1]$	0,05

Номер варіанта	Рівняння $f(x,y)$	Початкові умови	Інтервал знаходження рішення	Крок зміни
1	2	3	5	5
8	$\ln x+2,5x\sin(x) $	$y(0)=2,5$	$[1;3,5]$	0,2
9	$e^{3y}\sin(x)+y$	$y(0)=0$	$[0;1,5]$	0,1
10	$x^2\ln(x+y^2)$	$y(0)=3,5$	$[1,2;2,4]$	0,08
11	$\sqrt{x^2 + y\cos(x) }$	$y(0)=3,6$	$[4,1;6,7]$	0,1
12	$\sin(x)+\cos(y^2)$	$y(0)=2,2$	$[0,8;3,2]$	0,1
13	$e^{-2x}\sin(x+y)$	$y(0)=16,2$	$[4,8;6,4]$	0,1
14	$0,7y+x\cdot\ln(x+y)$	$y(0)=2,5$	$[12,4;14,1]$	0,08
15	$0,5x+ye(x-y)$	$y(0)=3,1$	$[8,5;9,7]$	0,05
16	$x^2+y\cos(x)$	$y(0)=1,4$	$[0;2,3]$	0,1
17	y^2-e^{xy}	$y(0)=1,7$	$[2,4;3,5]$	0,05
18	$xy-e(x-y)$	$y(0)=2,8$	$[1,6;3,1]$	0,1
19	$\sin(xy)-e^{2x}$	$y(0)=5,7$	$[14,5;16,3]$	0,05
20	$\sqrt{x^2 + e^{-xy}}$	$y(0)=1,6$	$[5,2;6,8]$	0,1
21	$y/\ln(y)$	$y(2)=1$	$[2;5]$	0,25
22	$e(x+y)-e(x-y)$	$y(0)=0$	$[0;2,5]$	0,1
23	$-\sqrt{\frac{1+\cos(2x)}{1+\sin(y)}}$	$y(\pi/4)=0$	$[\pi/4, 3\pi]$	$\pi/8$
24	$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y}$	$y(1)=0$	$[1;4]$	0.3
25	$\sin(3x)-y\cdot\text{tg}(3x)$	$y(0)=1/3$	$[0,4]$	0,25
26	$\cos(x-4y)-\cos(x+4y)$	$y(0)=\pi/4$	$[0,4\pi]$	$\pi/2$
27	$2e^{-x}\cos(x)y$	$y(0)=0$	$[0;3,5]$	0,1
28	$e^{-2y}\cos(x)+y$	$y(0)=0$	$[0;1]$	0,05
29	$\ln x+\sin(x) $	$y(0)=2,5$	$[1,5;3,5]$	0,2
30	$ey+2\sin(x)$	$y(0)=0$	$[0;1,5]$	0,1

Приклад

І Знайти рішення звичайного диференціального рівняння

$\frac{d}{dx}y(x) = \cos(x) + \frac{1}{y(x)}$ на інтервалі $[0,100]$. Функція має такі початкові умови:

$y(0)=1$.

1 Увести ключове слово *Given*.

2 Записати, використовуючи логічний знак рівності наступний вираз:



$$\frac{d}{dx} y(x) = \cos(x) + \frac{1}{y(x)}.$$

3 Початкову умову записати в такий спосіб, використовуючи логічний знак рівності:

$$y(0)=1.$$

4 Обчислити числове рішення задачі через використання функції *Odesolve*:

$$y:=\text{Odesolve}(t,100).$$

5 Створити цикл $t:=0,..10$ для визначення точок інтервалу $t:=0,..10$.

6 Побудувати графік функції в точках інтервалу й отформатувати його.

$$\begin{aligned} &\text{Given} \\ &y(0) = 1 \quad \frac{d}{dx} y(x) = \cos(x) + \frac{1}{y(x)} \\ &y := \text{Odesolve}(x, 100) \end{aligned}$$

$$y(5) = 2.302$$

$$y(35) = 8.011$$

$$x := 0..100$$

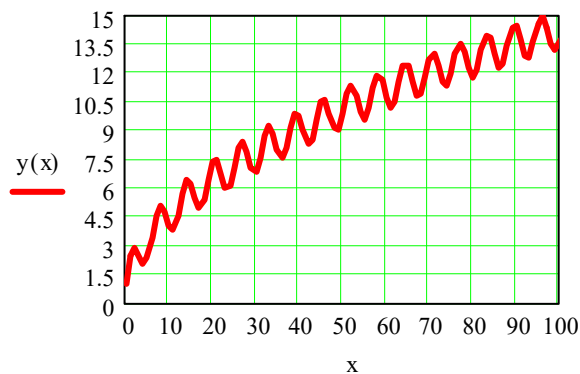


Рисунок 8.1 – Графік функції

II Знайти для вищенаведеної задачі рішення з використанням убудованої функції *rkfixed*.

1. Задати початкову умову

$$v(0):=0.1.$$

2. Створити функцію $D(x, y) := \cos(x) + \frac{1}{y(x)}.$

3. Указати кількість кроків інтегрування $K:=100$.

4. Обчислити числове рішення задачі з використанням функції *rkfixed*.
Знак рівності вибирається на панелі Логіка (Логические).

$$y=\text{rkfixed}(y, x1, x2, K, D).$$

5. Створити цикл $x:=0,..100$ для визначення крапок інтервалу
 $x:=0,..100$.

6. Побудувати графік функції в точках інтервалу й отформатувати його.

$y_0 := 1$

$K := 100$

$$D(x, y) := \cos(x) + \frac{1}{y(x)}$$

$$x1 := 0 \quad x2 := 100$$

$$y(x) = rkfixed(y_0, x1, x2, K, D)$$

Примітка: результати рішення диференційного рівняння двома підходами повинні збігатися. Можна також використовувати для рішення диференційні рівняння наступні вбудовані функції: *Bulstoer*, *Rkadapt*. Вони мають такі ж параметри як і функція *rkfixed*, але результати видають із різною точністю:

$$y(x) = \text{Bulstoer}(y_0, x1, x2, K, D),$$

$$y(x) = \text{Rkadapt}(y_0, x1, x2, K, D)$$

Контрольні питання

1. Які вбудовані функції дозволяють знайти рішення звичайних диференційних рівнянь?

2. Чи потрібно обов'язково задавати початкові умови для рішення звичайних диференційних рівнянь?

3. Як впливає на результат кількість точок розбивки інтервалу інтегрування звичайних диференційних рівнянь?

Лабораторна робота №12

Інтерполяція експериментальних даних в MathCad

Мета роботи: побудувати за допомогою засобів MathCad графік функції, що щонайкраще відображає експериментальну залежність і яка представлена даними, які наведені в таблиці.

Вказівки до виконання лабораторної роботи:

1. Набрати таблицю, що відповідає варіанту.
2. Здійснити лінійну інтерполяцію, для чого необхідно виконати наступні дії:
 - 2.1. Увести вектори даних x і y .
 - 2.2. Визначити функцію $linterp(x, y, t)$.
 - 2.3. Обчислити значення цієї функції в точках, які вибрати самостійно.
3. Побудувати графік функції.
4. Здійснити сплайн-інтерполяцію, використовуючи функцію $interp(s, x, y, t)$, для чого необхідно виконати наступні дії:
 - 4.1. Увести вектори даних x і y .
 - 4.2. Увести функцію $cspline(x, y)$, що визначає перший аргумент функції $interp(s, x, y, t)$, як векторну величину значень коефіцієнтів кубічного сплайна.
 - 4.3. Визначити функцію $interp(s, x, y, t)$.
 - 4.4. Обчислити значення цієї функції в точках, які задати такими ж, як і для лінійної інтерполяції.
5. Побудувати графік функції.
6. Виконати порівняльний аналіз отриманих різними підходами інтерполяційних графіків і значень функції в однакових точках.

Таблиця 12.1 - Варіанти завдання до лабораторної роботи № 12

Номер варіанта	Аргументи й значення	Дані						
1	2	3						
1	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	35,6	38,7	39,4	40,8	43,3	42,9	41,8
2	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	135,2	138,7	139,9	141,6	140,1	142,5	141,8
3	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	9,7	10,3	10,8	10,2	11,9	11,4	11,4
4	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	14,5	16,2	16,5	17,2	19,8	17,7	17,5
5	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	32,8	30,2	21,7	27,8	27,5	27,2	27,9
6	x	1	2	3	4	5	6	7

Номер варіанта	Аргументи й значення	Дані						
1	2	3						
	y	36,3	38,5	39,7	39,1	39,0	38,7	40,0
7	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	52,7	56,5	60,7	54,8	70,4	68,1	67,8
8	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	11,12	10,6	11,31	11,02	12,0	12,73	11,12
9	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	1,8	2,9	2,0	3,6	3,8	3,9	4,1
10	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	9,8	10,1	10,3	11,9	10,9	11,8	12,1
11	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	4,7	4,6	4,6	5,3	5,3	5,5	5,6
12	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	2,12	1,28	1,71	1,6	1,11	1,18	1,02
13	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	2,46	2,38	2,79	2,63	2,86	3,46	4,32
14	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	51,4	54,9	57,4	57,7	58,9	64,3	67,8
15	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	17,7	19,5	19,4	20,6	20,8	22,5	23,6
16	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	45,0	47,3	48,8	47,1	45,4	45,8	46,1
17	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	14,6	13,6	12,0	18,7	19,8	20,1	21,5
18	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	36,1	33,6	32,9	36,9	33,2	36,9	38,3
19	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	39,4	41,8	43,3	42,9	41,8	41,4	42,6
20	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	15,6	14,0	12,7	17,8	20,1	21,5	22,8
21	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	18,87	16,0	19,32	19,6	18,02	20,88	21,55
23	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	15,6	15,3	17,7	19,9	20,0	19,7	25,5
24	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	24,8	27,2	22,2	30,4	35,6	38,7	39,4
25	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	37,7	42,8	40,5	41,3	40,2	48,9	47,1
26	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	17,8	21,6	20,9	24,8	21,2	20,2	30,2
27	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	4,5	5,1	5,5	5,0	6,1	6,0	6,1

Номер варіанта	Аргументи й значення	Дані						
1	2	3						
28	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	62,0	66,1	63,6	66,3	71,2	70,8	72,5
29	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	24,8	27,3	28,4	35,0	39,1	40,5	37,3
30	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	3,1	3,5	3,7	3,8	4,9	4,1	4,3

Приклад

Побудувати графік експериментально заданої функції

x	0	1	2	3	4	5	6
y	4,1	2,4	3	4,3	3,6	5,2	5,9

і визначити її значення для $x=2.4$ і $x=7$.

1. Створити вектори для змінних x и y .

$$x := (0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6)^T,$$

$$y := (4.1 \ 2.4 \ 3 \ 4.3 \ 3.6 \ 5.2 \ 5.9)^T.$$

2. Визначити функцію лінійної інтерполяції $linterp(x,y,t)$.

$$A(t) := linterp(x,y,t).$$

3. Побудувати графік функції.

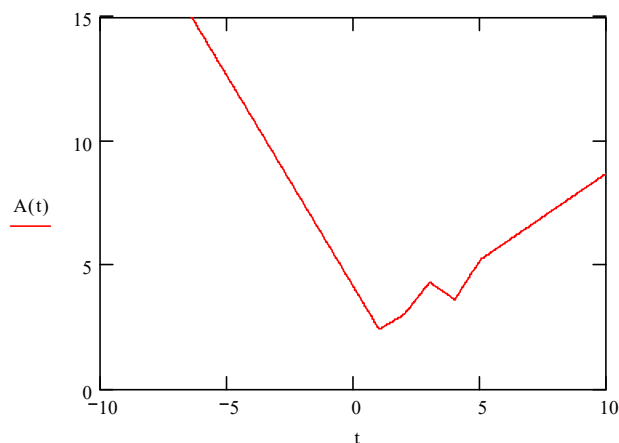


Рисунок 12.1 - Графік функції лінійної інтерполяції

4. Обчислити значення функції в точках $x=2.4$ і $x=7$.

5. Визначити функцію сплайн-інтерполяції $interp(s,x,y,t)$, для чого необхідно виконати наступні дії:

5.1. Увести вектори даних x и y .

5.2. Увести функцію $cspline(x,y)$, що визначає перший аргумент функції $interp(s,x,y,t)$.

```
x := (0 1 2 3 4 5 6)^T,
y := (4.1 2.4 3 4.3 3.6 5.2 5.9)^T
```

```
s := cspline (x, y)
```

```
A(t) := interp(s, x, y, t)
```

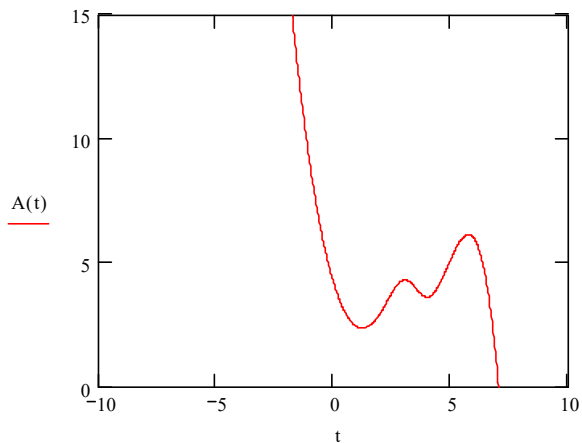


Рисунок 12.2 - Графік функції сплайн-інтерполяції

6. Провести порівняльний аналіз результатів, які отримані при різних типах інтерполяції.

Контрольні питання

1. Опишіть особливості застосування лінійної інтерполяції.
2. Опишіть особливості застосування сплайн-інтерполяції.

Література

1. Письменкова Т.О. Інформаційні системи і технології у інженерії: Навч. посібник / Т.О. Письменкова, А.О. Логінова, С.О. Федоряченко, О.В. Федоскіна, І.В. Вернер; Дніпро: Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», 2019. – 227 с.

2. Швачич Геннадій Григорович. Лінійна алгебра в розрахунках середовища Mathcad: Підручник для студ. екон. спец. / Національна металургійна академія України; Дніпропетровська академія управління, бізнесу та права. Кафедра інформатики та математичних методів в економіці. — Д., 2000. — 236 с.

3. Швачич Геннадій Григорович. Лінійна алгебра в розрахунках середовища Mathcad: Підручник для студ. екон. спец. / Національна металургійна академія України; Дніпропетровська академія управління, бізнесу та права. Кафедра інформатики та математичних методів в економіці. — Д., 2000. — 236 с.