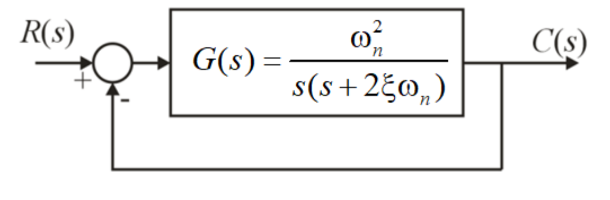
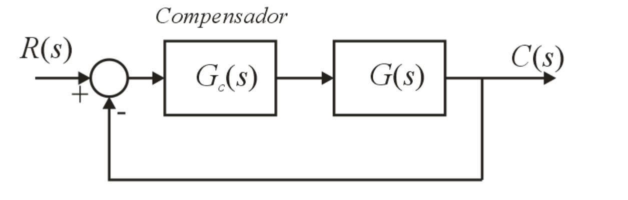
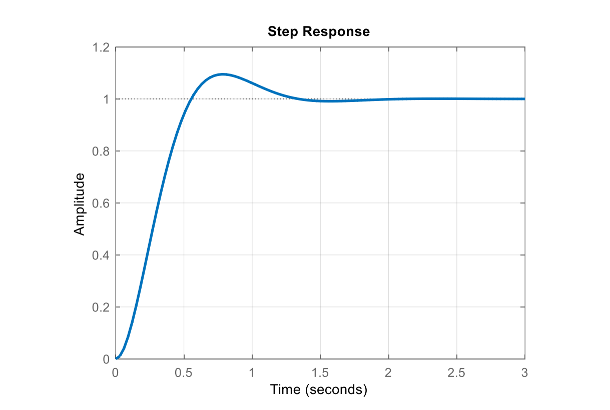
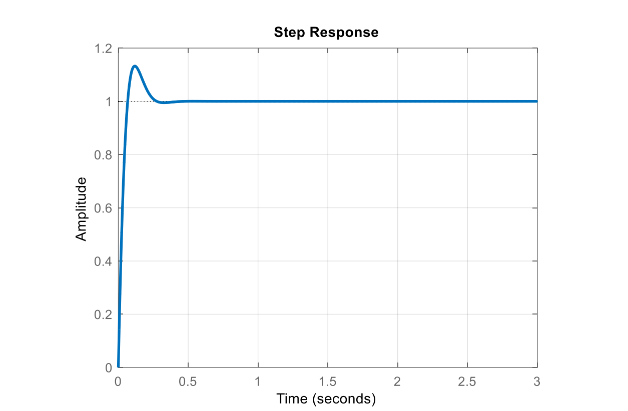
Centro de Energias Alternativas e Renováveis
Departamento de Engenharia Elétrica

Disciplina: Controle I **Data:** _01/11/2020__
Professor: Juan Moises Mauricio Villanueva

Aluno(a): ____ **Mat.:** ______________

AVALIAÇÃO 2 (Parte 3, 2 pontos)

Para o sistema realimentado de controle com ξ=0,6 e ω_n=5 rad/s e com tempo de assentamento de 1,33 s. Considere que um estudante de engenharia de controle, projetou um compensador para diminuir o tempo de assentamento para um terço do valor original, tendo como resultado um compensador dado por $G_c(s) = s + a$

Sistema Realimentado	Sistema Realimentado com Compensador
	
	

a) Determine o valor do coeficiente "a" do compensador, para atender as especificações do projeto.
b) Determine a frequência de amostragem para o sistema realimentado com e sem compensador. Utilize o critério de $\dfrac{\omega_{sampling}}{\omega_d}$. Análise suas respostas.
c) Para o sistema realimentado com compensador, desenvolva a discretização do controlador. Compare os métodos de discretrização: forward (Euler), backward, e Tustin (bilinear)
d) Discretize a planta utilizando o ZoH
e) Para o sistemas discreto, determine a equação característica e determine se o sistema é estável?
f) Determine o valor final do sistema para uma entrada degrau unitário $\lim_{k\to\infty} c(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)C(z)$
g) Realize as simulações em MATLAB para verificar seus resultados

UFPB
Aluna: Mylena Gabriela de Souza Diniz
e-mail: mylena.diniz@cear.ufpb.br
Disciplina: Controle I
Controlador Digital baseado em Projeto LGR (Laplace)

Avaliação 2 (parte 3)

08 de novembro de 2020

PROBLEMA 1

a) A partir dos valores de $\zeta = 0.6$, $\omega_n = 5\ rad/s$ e $T_s = 1.33\ s$ dados na questão, encontramos os pólos do sistema em malha aberta: $T_s = \frac{4}{\sigma}$ logo $\sigma = 3$ e $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 4$

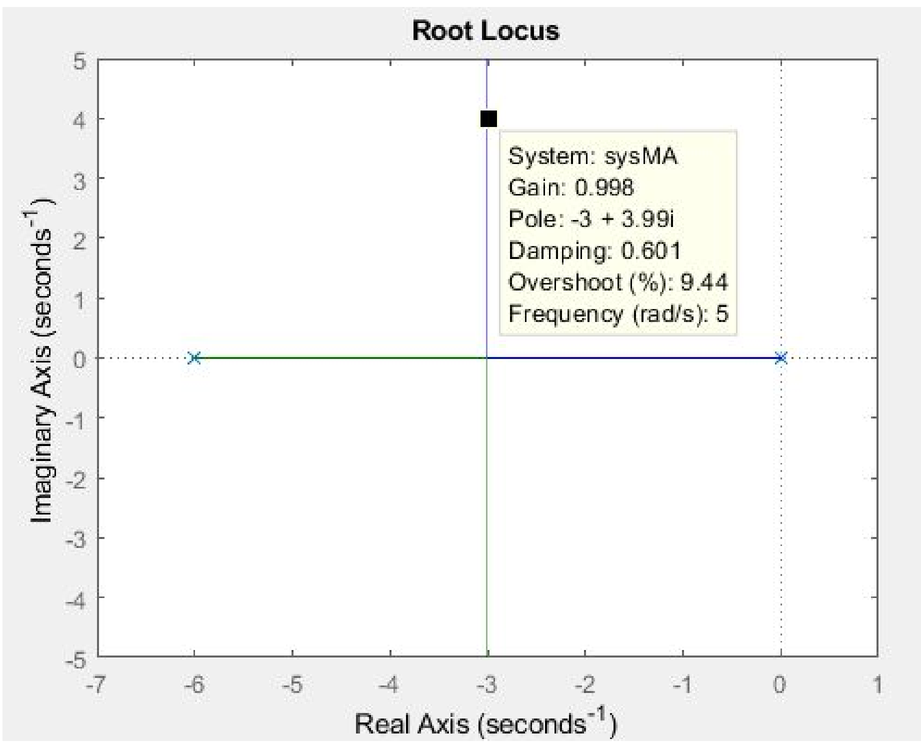


Figura 1 - Localização dos pólos com $\zeta = 0.6$.

O gráfico acima mostra os pólos em malha aberta, assim como também foram apontados os pólos em malha fechada para um $\zeta = 0.6$: $s_1 = -3 + j4$ e $s_2 = -3 - j4$. Para atingir o tempo de assentamento de $T_s = 0.44\ s$ usamos $T_s = \frac{4}{\sigma}$ e obtemos $\sigma = 9$, pode-se considerar que como o tempo caiu para um terço, a componente real do pólo foi triplicada.

A partir disso calculamos ω_d onde $\omega_d = 9 * tg(53.13)$ e $arccos(0.6) = 53,13°$ logo, $\omega_d = 12$

Em seguida, encontra-se o ângulo do zero “a” a ser inserido pelo compensador.

$$\alpha_{zc} - (\theta_1 + \theta_2) = (2 * n + 1) * 180°$$

$$\theta_2 = 180 - 53,13 = 126.87°$$

$$180 - \theta_1 = arctg(\frac{12}{9-6}) = 104.04°$$

$$\alpha_{zc} - (104.04 + 126.87) = 180$$

$$\alpha_{zc} = 230.9 - 180 = 50.9°$$

Para encontrar a parte real do zero, faz-se:

$$\sigma_{zc} - 9 = 12/tg(50.9) = 9.75 \quad \Rightarrow \sigma_{zc} = 9.75 + 9 = 18.75$$

Temos que $a = 18.75$, logo $G_c(s) = s + 18.75$

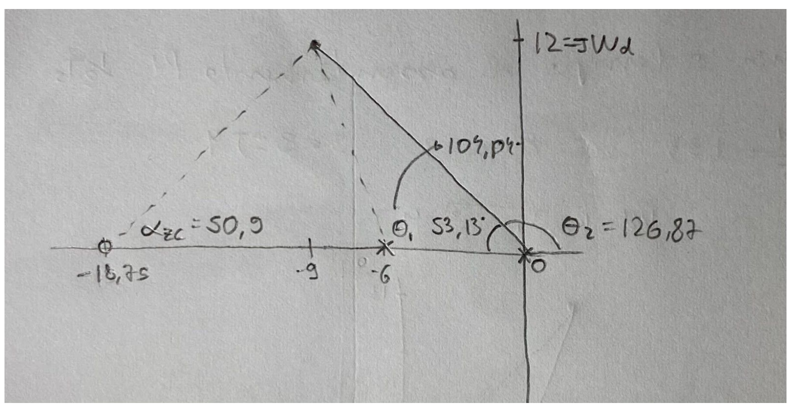


Figura 2 - Determinação do zero do compensador com auxílio dos ângulos no LGR.

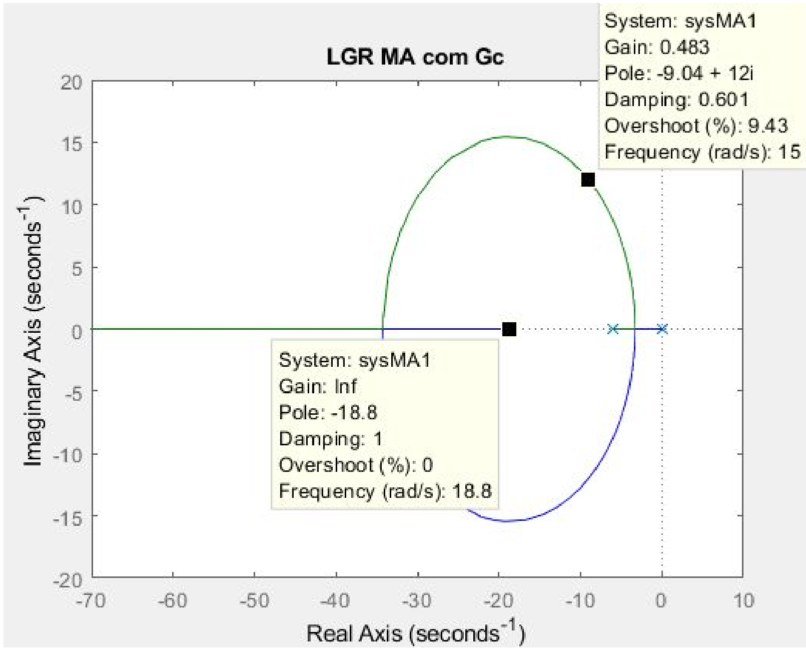


Figura 3 - LGR do sistema com compensador.

b) Para encontrar valores de frequência de amostragem, foi usado o diagrama de bode dos dois sistemas assim como o critério $8 \leq \omega_s/\omega_d \leq 10$.

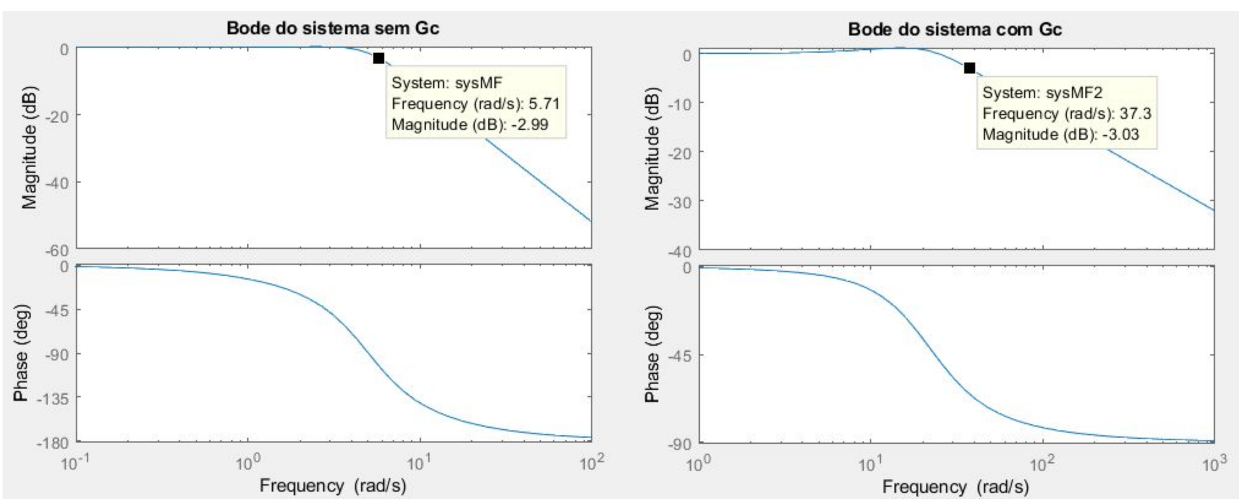


Figura 4 - Diagrama de Bode do sistema sem compensador(esquerda) e com compensador(direita).

A partir do critério ω_s/ω_d temos para o sistema sem compensador, que:

$8 \leq \omega_s/\omega_d \quad \omega_d = 4\ rad/s \quad 32 \leq \omega_s = 2\pi/T_{samp.} \quad T_{samp.} \leq 0.196\ s$

$\omega_s/\omega_d \leq 10 \quad \omega_d = 4\ rad/s \quad \omega_s \leq 40 \quad T_{samp.} \geq 0.157\ s$

pelo diagrama de bode, confirmamos que:

$\omega_s \geq 2 * BW \quad \omega_s \geq 2 * 5.71 = 11.42 \quad \omega_s = 2\pi f_s = 2\pi / T_{samp.} \quad T_{samp.} \leq 2\pi/11.42 = 0.55\ s$

$f_s = \frac{1}{T_{samp}} = \frac{1}{0.17} = 5.88\ Hz$ para o sistema não compensado.

A partir do critério ω_s/ω_d temos para o sistema com compensador, que:

$8 \leq \omega_s/\omega_d \quad \omega_d = 12\ rad/s \quad 96 \leq \omega_s = 2\pi/T_{samp.} \quad T_{samp.} \leq 0.065\ s$

$\omega_s/\omega_d \leq 10 \quad \omega_d = 12\ rad/s \quad \omega_s \leq 120 \quad T_{samp.} \geq 0.052\ s$

pelo diagrama de bode, confirmamos que:

$\omega_s \geq 2 * BW \quad \omega_s \geq 2 * 37.1 = 74.2 \quad \omega_s = 2\pi f_s = 2\pi / T_{samp.} \quad T_{samp.} \leq 2\pi/74.2 = 0.085\ s$

$f_s = \frac{1}{T_{samp}} = \frac{1}{0.06} = 16.667\ Hz$

c) Discretização do controlador em três métodos:

i) Foward Difference (Euler):

Neste caso usa-se:

$$s = \frac{z-1}{T} \qquad T(s) = \frac{25s+25*a}{s^2+31s+25*a}$$

$$T(z) = \frac{25(\frac{z-1}{T})+25*a}{(\frac{z-1}{T})^2+31(\frac{z-1}{T})+25*a} = \frac{25*Tz-25*T+25*a*T^2}{z^2-2z+1+(31z-31)T+25*a*T^2} = \frac{25*Tz-25*T+25*a*T^2}{z^2+(31*T-2)z+25*a*T^2-31*T+1}$$

se $T = 0.06\ s$, respeitando os critérios do item b e $a = 18.75$, como visto no item a:

$$T(z) = \frac{1.5z-0.1875}{z^2-0.14z+0.8275}$$

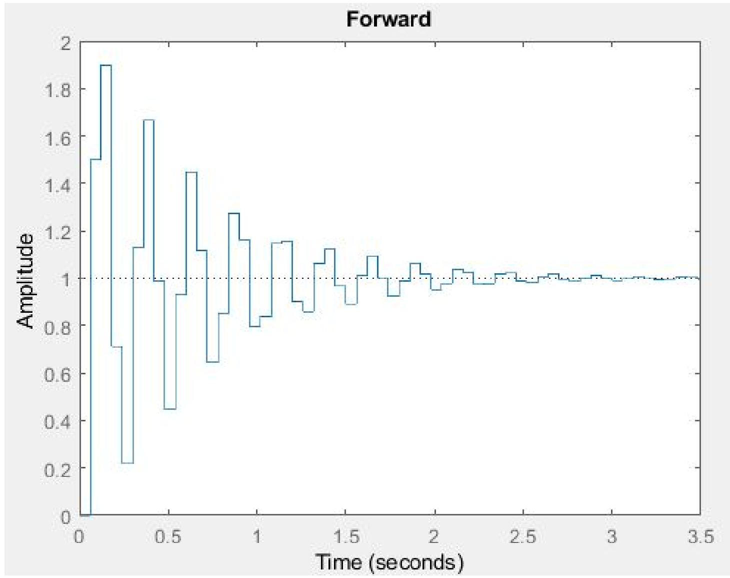


Figura 5 - Resposta ao degrau, aproximação Forward(Euler).

ii) Backward Difference:

Neste caso usa-se:

$s = \frac{z-1}{zT} \qquad T(s) = \frac{25s+25*a}{s^2+31s+25*a}$

$$T(z) = \frac{25(\frac{z-1}{zT})+25*a}{(\frac{z-1}{zT})^2+31(\frac{z-1}{zT})+25*a} = \frac{25*Tz^2-25*Tz+25*a*(Tz)^2}{z^2-2z+1+(31z-31)Tz+25*a*(Tz)^2} = \frac{25*Tz^2-25*Tz+25*a*T^2z^2}{z^2-2z+1+31*Tz^2-31*Tz+25*a*T^2z^2}$$

$$T(z) = \frac{(25*a*T^2+25*T)z^2+25*Tz}{(1+31*T+25*a*T^2)z^2-(2+31*T)z*1}$$

se $T = 0.06\,s$, respeitando os critérios do item b e $a = 18.75$, como visto no item a:

$$T(z) = \frac{3.188z-1.5}{4.458z^2-3.86z+1}$$

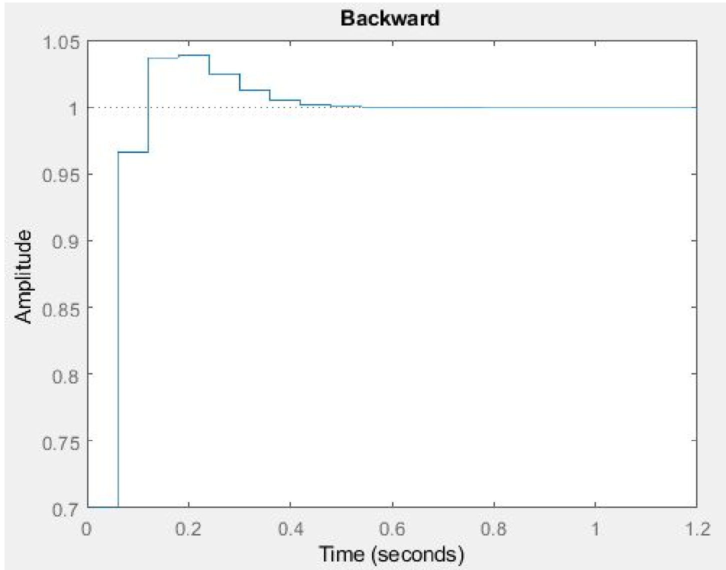


Figura 6 - Resposta ao degrau, aproximação Backward.

iii) Tustin-Bilinear:

Neste caso usa-se:

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \qquad T(s) = \frac{25s+25*a}{s^2+31s+25*a}$$

$$T(z) = \frac{25(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1})+25*a}{(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1})^2+31(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1})+25*a} = \frac{25*2*(z-1)T(z+1)+25*a*T^2(z+1)^2}{4(z-1)^2+31*2(z-1)T(z+1)+25*a*(z+1)^2T^2}$$

$$T(z) = \frac{50*Tz^2-50*T+25*a*T^2z^2+50*a*T^2+25*a*T^2}{4z^2-8z+4+62*Tz^2-62*T+25*a*T^2z^2+50*a*T^2z+25*a*T^2}$$

$$T(z) = \frac{(25*a*T^2+50*T)z^2+50*a*T^2z+25*a*T^2-50*T}{(4+65*T+25*a*T^2)z^2+(50*a*T^2-8)z*(4-62*T+25*}$$

$$T(z) = \frac{(25*a*T^2+50*T)z^2+50*a*T^2z+25*a*T^2-50*T}{(4+65*T+25*a*T^2)z^2+(50*a*T^2-8)z*(4-62*T+25*a*T^2)}$$

se $T = 0.06\ s$, respeitando os critérios do item b e $a = 18.75$, como visto no item a:

$$T(z) = \frac{4.688z^2+3.375z-1.312}{9.408z^2+4.625z+1.967}$$

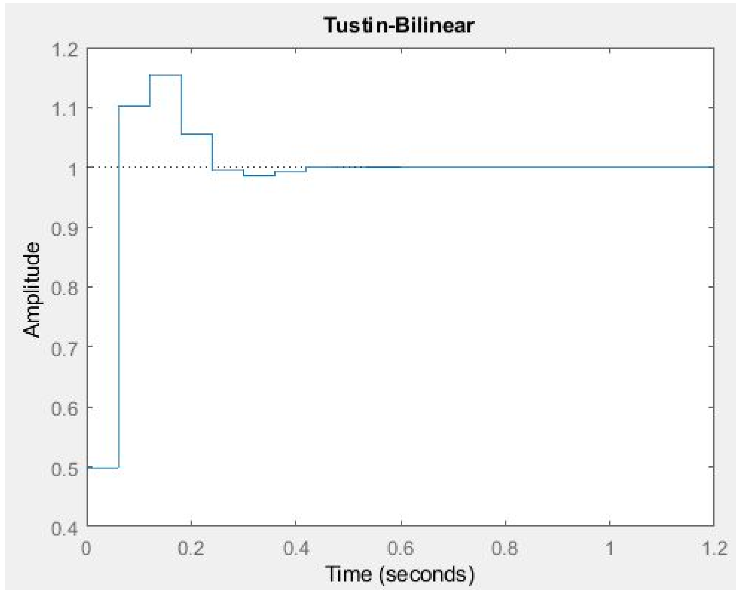


Figura 7 - Resposta ao degrau, aproximação Tustin-Bilinear.

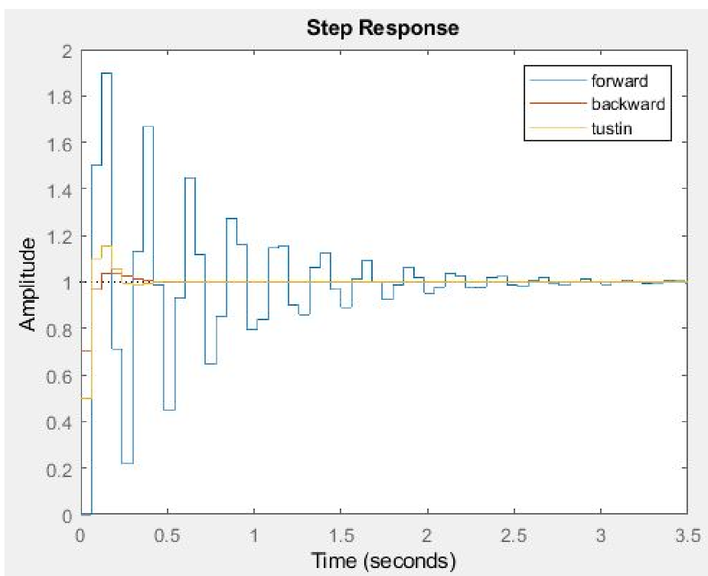


Figura 8 - Comparação entre os três métodos.

A comparação entre esses métodos pode ser feita levando em conta o mapeamento da relação entre o plano-s e plano-z para cada aproximação. Na aproximação Forward(Euler), a região estável do plano-s faz correspondência a todo o círculo unitário e inclui também uma região exterior a esse círculo, ocasionando que dependendo do sistema, a aproximação forward pode gerar um sistema instável no plano-z, como visto no exemplo acima. A aproximação Forward fez com que os pólos se aproximassem mais do eixo imaginário deixando o sistema mais instável, menos amortecido.

Já no método Backward, a região estável do plano-s faz correspondência a um pequeno círculo interno ao círculo unitário, no lado real positivo, provocando que o sistema que é estável no plano-s jamais será instável após esta transformação. Garante estabilidade mas não é completamente compatível. O método Tustin-Bilinear é de certa forma mais complexo, mas permite a compatibilidade entre o lado esquerdo do plano-s e o círculo unitário no plano-z. Como visto acima, a aproximação Backward mostrou um sistema ainda mais estável do que o mesmo apresentado no domínio s, mas como não transformou o sistema de forma precisa, vemos a alteração do tempo de assentamento Ts na resposta ao degrau, o que pode ser prejudicial para o projeto em questão.

O resultado para a aproximação Tustin-Bilinear, como previsto, foi o mais similar ao sistema no domínio s, onde pode-se ver a semelhança entre as respostas ao degrau do sistema antes e depois da discretização.

d) Discretizando a planta com ZoH, dado por $\frac{(1-e^{-sT})}{s}$ teremos:

$$G(s) = \frac{(1-e^{-sT})}{s}\frac{25}{s\,(s+6)} \qquad z = e^{Ts} \qquad G(z) = (1-z^{-1})\, Z\left\{\frac{25}{s^2(s+6)}\right\}$$

$$G(z) = (1-z^{-1})\, Z\left\{\frac{4.167}{s^2} - \frac{0.6944}{s} + \frac{0.6944}{(s+6)}\right\}$$

$$G(z) = (1-z^{-1})\left[\frac{4.167*Tz}{(z-1)^2} - \frac{0.6944z}{(z-1)} + \frac{0.6944z}{(z-e^{-6T})}\right]$$

$$G(z) = \left[\frac{4.167*T(z-e^{-6T})-0.6944(1-e^{-6T})(z-1)}{(z-1)(z-e^{-6T})}\right] \qquad T = 0.17\ s$$

$$G(z) = \frac{0.625(z-0.407)-0.382(z-1)}{z^2-1.407z+0.407}$$

$$G(z) = \frac{0.243z-0.128}{z^2-1.407z+0.407}$$

$T(z) = \frac{0.243z-0.128}{z^2-1.164z+0.535}$ função de transferência da malha fechada.

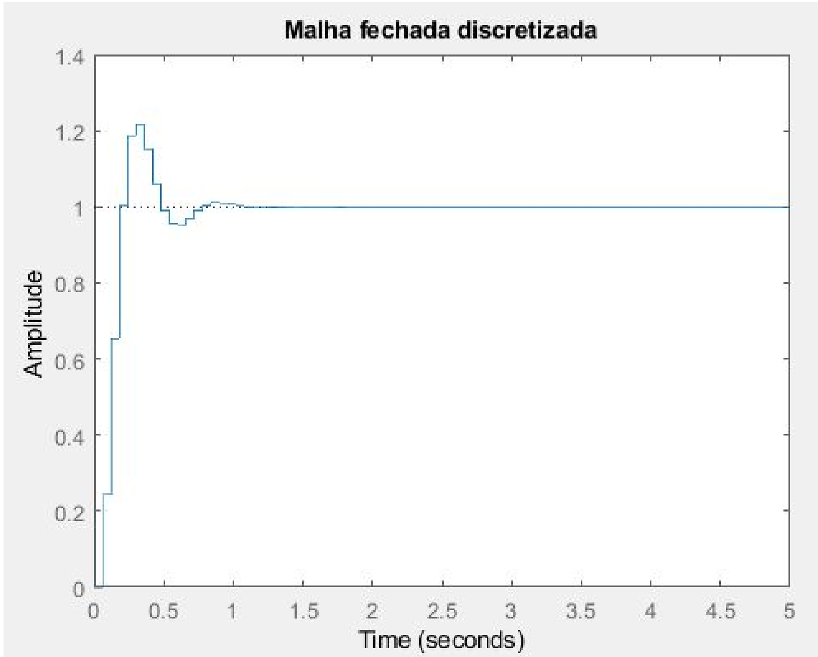


Figura 9 - Resposta ao degrau para o sistema discretizado por ZoH.

e) Para o sistema sem controlador a equação característica é dada por: $1 + G(z) = 0$

$$1 + \frac{0.243z^2+0.128}{z^2-1.407+0.407} = 0 \qquad \Rightarrow \; z^2 - 1.164z + 0.535 = 0$$

Para equação acima, encontramos as raízes: $z_{p1} = 0.582 + j0.443$ e $z_{p2} = 0.582 - j0.443$ que são também pólos do sistema em malha fechada. Como eles se posicionam no interior do círculo unitário no plano-z, pode-se afirmar que o sistema é estável.

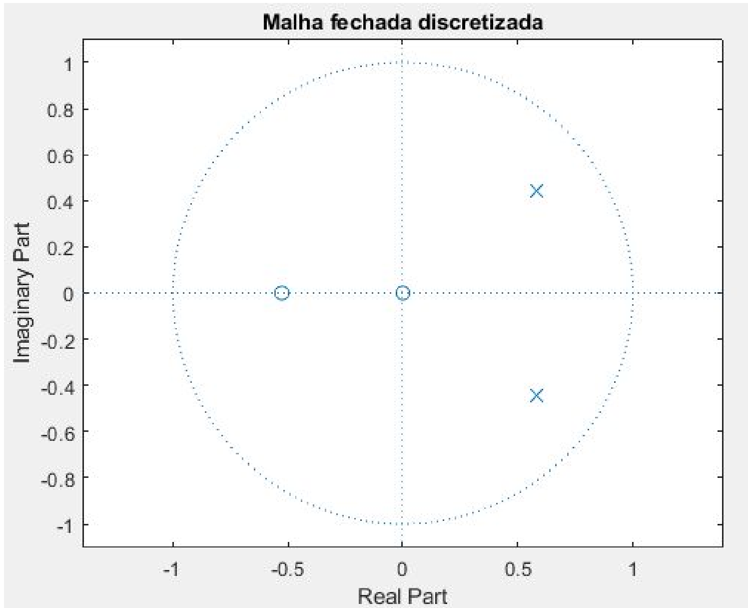


Figura 10 - Pólos e zero do sistema discreto em malha fechada sem adição do compensador.

Já para o sistema com controlador discretizado, foi escolhida a equação característica obtida pela aproximação Tustin-Bilinear, uma vez que a mesma proporcionou um sistema com maior compatibilidade ao sistema apresentado no domínio s, estável de modo que respeitasse o tempo de assentamento requerido pela questão.

$$T(z) = \frac{4.688z^2+3.375z-1.312}{9.408z^2+4.625z+1.967}$$

Assim a equação característica é dada por: $9.408z^2 + 4.625z + 1.967 = 0$ onde suas raízes são: $z_{p1} = 0.246 + j0.386$ e $z_{p2} = 0.246 - j0.386$. Como eles se posicionam no interior do círculo unitário no plano-z, pode-se afirmar que o sistema é estável.

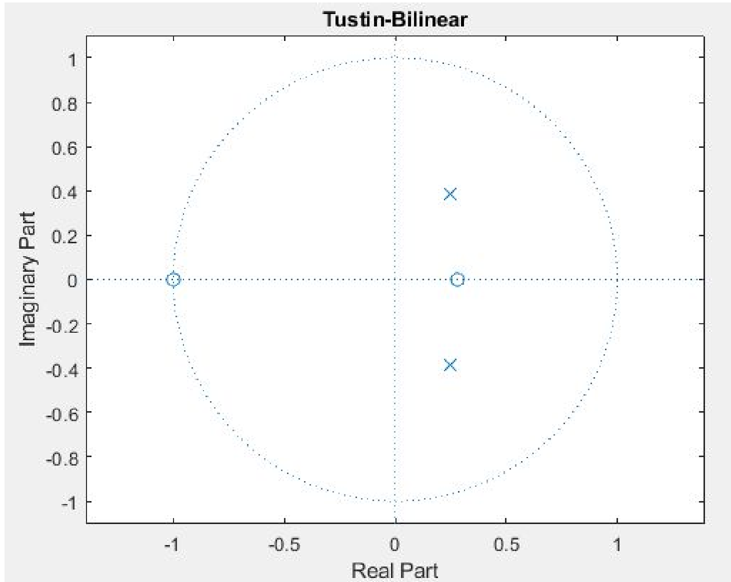


Figura 11 - Pólos e zero do sistema discreto em malha fechada com adição do compensador.

f) Usando o teorema do valor final para sistemas discretos $\lim_{k\to\infty} c(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)C(z)$ podemos determinar o valor final do sistema com uma entrada degrau unitário. Para isso temos que $C(z) = T(z)\frac{z}{z-1}$ onde $\frac{z}{z-1}$ é a transformada z do degrau. Dessa forma, faz-se:

$$\lim_{k\to\infty} c(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z}{z-1}\,\frac{0.243z+0.128}{z^2-1.164z+0.535}$$

$$\lim_{k\to\infty} c(k) = \lim_{z\to 1}\frac{0.243z^2+0.128z}{z^2-1.164z+0.535}$$

$$\lim_{k\to\infty} c(k) = \frac{0.243+0.128}{1-1.164+0.535} = \frac{0.371}{0.371} = 1$$

Provamos que o sistema converge para o valor correto 1, o valor de entrada.

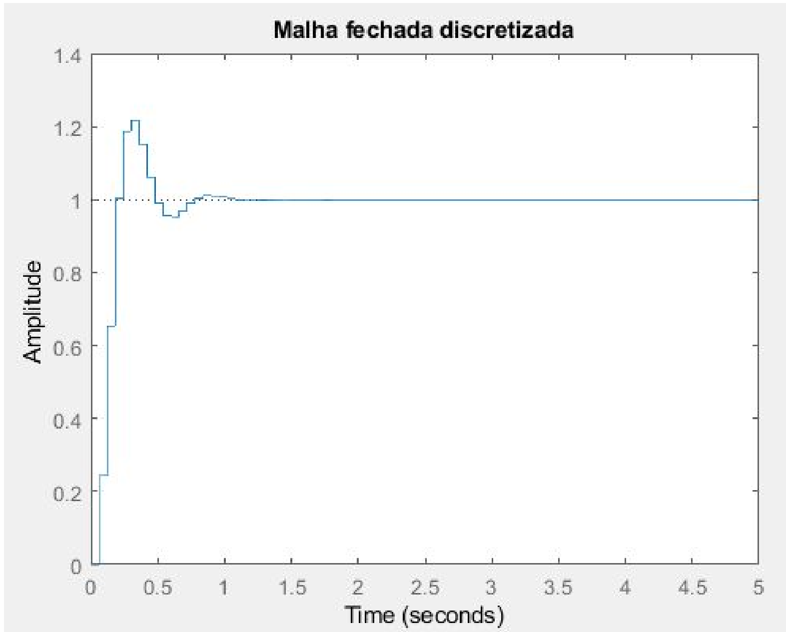


Figura 12 - Resposta ao degrau do sistema discreto em malha fechada sem adição do compensador.

g) A verificação em MATLAB foi feita junto a cada item.