

EXEMPLOS DO MÉTODO DE DEDUÇÃO NATURAL

Vamos acompanhar exemplos de como podemos elaborar estratégias para montar uma sequência de demonstração e provar que um argumento é válido a partir da aplicação do método de dedução natural. (Capítulo 2 do Livro)

Exemplos com regras básicas, derivadas e de equivalência

$P \rightarrow (Q \wedge R), P \vdash P \wedge Q$

$(P \wedge Q) \rightarrow (R \wedge S), \neg\neg P, Q \vdash S$

$P \vee (Q \wedge R), (P \vee Q) \rightarrow S \vdash P \vee S$

$A \rightarrow (B \vee C), \neg B, \neg C \vdash \neg A$

$B \leftrightarrow A, (B \wedge C) \rightarrow (E \vee Q), (B \wedge A) \rightarrow C, \neg E, B \vdash Q$

Exemplos com regras hipotéticas PC e RAA:

$P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P$

$(P \vee R) \rightarrow (D \wedge \neg C) \vdash R \rightarrow (\neg C \vee E)$

$(P \wedge Q) \rightarrow \neg R, R \vee (S \wedge T), P \leftrightarrow Q \vdash P \rightarrow S$

Exemplos com regras hipotéticas PC e RAA aninhadas:

$Q \rightarrow R \vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$

$P \rightarrow Q \vdash \neg P \vee Q$

$P \rightarrow Q, R \rightarrow S \vdash (P \vee R) \rightarrow (Q \vee S)$

$\neg(P \wedge Q) \vdash \neg P \vee \neg Q$

REGRAS BÁSICAS

Inclusão de Operadores	Exclusão de Operadores
<p>Redução ao absurdo (raa) - $\neg I$</p> $\frac{\begin{array}{c} P \\ \dots \\ Q \wedge \neg Q \end{array}}{\neg P}$	<p>Dupla negação (dn) - $\neg E$</p> $\frac{\neg \neg P}{P}$
<p>Prova condicional (pc) - $\rightarrow I$</p> $\frac{\begin{array}{c} P \\ \dots \\ Q \end{array}}{P \rightarrow Q}$	<p>Modus Ponens (mp) - $\rightarrow E$</p> $\frac{P \quad P \rightarrow Q}{Q}$
<p>Conjunção(cj) - $\wedge I$</p> $\frac{P \quad Q}{P \wedge Q}$	<p>Simplificação(sp) - $\wedge E$</p> $\frac{P \wedge Q}{P} \quad \frac{P \wedge Q}{Q}$
<p>Adição(ad) - $\vee I$</p> $\frac{P}{P \vee Q} \quad \frac{P}{Q \vee P}$	<p>Eliminação da disjunção - $\vee E$</p> $\frac{P \vee Q \quad P \rightarrow R \quad Q \rightarrow R}{R}$
<p>Introdução da equivalência - $\leftrightarrow I$</p> $\frac{P \rightarrow Q \quad Q \rightarrow P}{P \leftrightarrow Q}$	<p>Eliminação da equivalência - $\leftrightarrow E$</p> $\frac{P \leftrightarrow Q}{P \rightarrow Q} \quad \frac{P \leftrightarrow Q}{Q \rightarrow P}$

REGRAS DE EQUIVALÊNCIA

Expressão	Equivale a	Nome (Abreviação) da Regra
$P \vee Q$	$Q \vee P$	Comutatividade (com)
$P \wedge Q$	$Q \wedge P$	
$(P \vee Q) \vee R$	$P \vee (Q \vee R)$	Associatividade (ass)
$(P \wedge Q) \wedge R$	$P \wedge (Q \wedge R)$	
$\neg(P \vee Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$	De Morgan (dmor)
$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$	
$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$	Condicional (cond)
P	$\neg(\neg P)$	Dupla negação (dn)
$P \rightarrow Q$	$\neg Q \rightarrow \neg P$	Contraposição (cont)
P	$P \wedge P$	Auto-referência (auto)
$P \vee P$	P	Auto-referência (auto)
$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	Distributividade (dist)
$P \vee (Q \wedge R)$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	Distributividade (dist)

REGRAS DERIVADAS

Modus Tollens (mt)

$P \rightarrow Q \quad \neg Q$

$\neg P$

Silogismo Disjuntivo (sd)

$P \vee Q \quad \neg P$

Q

Exportação (exp)

$(P \wedge Q) \rightarrow R$

$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

Silogismo Hipotético (sh)

$P \rightarrow Q \quad Q \rightarrow R$

$P \rightarrow R$

Dilema Construtivo (dc)

$P \vee Q \quad P \rightarrow R \quad Q \rightarrow S$

$R \vee S$

Inconsistência (inc)

$P \quad \neg P$

Q

$$P \rightarrow (Q \wedge R), P \vdash P \wedge Q$$

1. $P \rightarrow Q \wedge R$	hip.
2. P	hip.
3. $Q \wedge R$	1,2, mp
4. Q	3, sp
5. $P \wedge Q$	2,4, cj

$$(P \wedge Q) \rightarrow (R \wedge S), \neg\neg P, Q \vdash S$$

1. $(P \wedge Q) \rightarrow (R \wedge S)$	hip.
2. $\neg\neg P$	hip
3. Q	hip
4. P	2, dn
5. $P \wedge Q$	3,4, cj
6. $R \wedge S$	1,5, mp
7. S	6, sp

$$P \vee (Q \wedge R), (P \vee Q) \rightarrow S \vdash P \vee S$$

1. $P \vee (Q \wedge R)$	hip.
2. $(P \vee Q) \rightarrow S$	hip
3. $(P \vee Q) \wedge (P \vee S)$	1, dist
4. $P \vee Q$	3, sp
5. S	2,4, mp
6. $P \vee S$	1,5, mp

$$A \rightarrow (B \vee C), \neg B, \neg C \vdash \neg A$$

1. $A \rightarrow (B \vee X)$	hip.
2. $\neg B$	hip
3. $\neg X$	hip.
4. $\neg B \wedge \neg X$	2,3, cj
5. $\neg(B \vee X)$	4, demor
6. $\neg A$	1,5, mt

$B \leftrightarrow A, (B \wedge C) \rightarrow (E \vee Q), (B \wedge A) \rightarrow C, \neg E, B \vdash Q$

1. $B \leftrightarrow A$	hip.
2. $(B \wedge X) \rightarrow (E \vee Q)$	hip
3. $(B \wedge A) \rightarrow X$	hip.
4. $\neg E$	hip.
5. B	hip.
6. $B \rightarrow A$	1, $E \leftrightarrow$
7. A	5,6,mp
8. $B \wedge A$	5,7,cj
9. X	3,8,mp
10. $B \wedge X$	5,9, cj
11. $E \vee Q$	2,10, mp
12. Q	4,11, sd

$$P \rightarrow Q, \neg Q \mid\!\!\!-\neg P$$

1.	$P \rightarrow Q$	hip.
2.	$\neg Q$	hip.
3.	$\mid P$	hip-raa
4.	$\mid Q$	1,3, mp
5.	$\mid Q \wedge \neg Q$	2,4, cj
6.	$\neg P$	3-5, raa

$$(P \vee R) \rightarrow (D \wedge \neg C) \mid\!\!\!- R \rightarrow (\neg C \vee E)$$

1.	$(P \vee R) \rightarrow (D \wedge \neg C)$	hip.
2.	$\mid R$	hip-pc
3.	$\mid P \vee R$	2,ad
4.	$\mid D \wedge \neg C$	1,3, mp
5.	$\mid \neg C$	4, sp
6.	$\mid \neg C \vee E$	5, ad
7.	$R \rightarrow (\neg C \vee E)$	2-6, pc

$(P \wedge Q) \rightarrow \neg R, R \vee (S \wedge T), P \leftrightarrow Q \vdash P \rightarrow S$

1.	$(P \wedge Q) \rightarrow \neg R$	hip.
2.	$R \vee (S \wedge T)$	hip
3.	$P \leftrightarrow Q$	hip.
4.	P	hip-pc
5.	$P \rightarrow Q$	3, $E \leftrightarrow$
6.	Q	4,5, mp
7.	$P \wedge Q$	4,6, cj
8.	$\neg R$	1,7, mp
9.	$S \wedge T$	2,8, sd
10.	S	9, sp
11.	$P \rightarrow S$	4-10, pc

$$Q \rightarrow R \vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$$

1.	$Q \rightarrow R$	hip.
2.	$P \rightarrow Q$	hip-pc
3.	P	hip-pc
4.	Q	2,3, mp
5.	R	1,4, mp
6.	$P \rightarrow R$	3-5, pc
7.	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$	2-6, pc

$$P \rightarrow Q \mid \text{---} \neg P \vee Q$$

1.	$P \rightarrow Q$	hip.
2.	$\neg(\neg P \vee Q)$	hip-raa
3.	P	hip-raa
4.	Q	1,3, mp
5.	$\neg P \vee Q$	4, ad
6.	$(\neg P \vee Q) \wedge \neg(\neg P \vee Q)$	2,5, cj
7.	$\neg P$	3-6, raa
8.	$\neg P \vee Q$	7, ad
9.	$(\neg P \vee Q) \wedge \neg(\neg P \vee Q)$	2,8, cj
10.	$\neg\neg(\neg P \vee Q)$	2-9, raa
11.	$\neg P \vee Q$	3-6, pc

$P \rightarrow Q, R \rightarrow S \mid \text{---} (P \vee R) \rightarrow (Q \vee S)$

1.	$P \rightarrow Q$	hip.
2.	$R \rightarrow S$	hip
3.	$P \vee R$	hip-pc
4.	P	hip-pc
5.	Q	1,4, mp
6.	$Q \vee S$	5, ad
7.	$P \rightarrow Q \vee S$	4-6, pc
8.	R	hip-pc
9.	S	2,8, mp
10.	$Q \vee S$	9, ad
11.	$R \rightarrow Q \vee S$	8-10, pc
12.	$Q \vee S$	3,7,11, $E\vee$
13.	$(P \vee R) \rightarrow (Q \vee S)$	3-12, pc

$$\neg(P \wedge Q) \vdash \neg P \vee \neg Q$$

1.	$\neg(P \wedge Q)$	hip.
2.	$\neg(\neg P \vee \neg Q)$	hip-raa
3.	$\neg P$	hip-raa
4.	$\neg P \vee \neg Q$	3, ad
5.	$(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q)$	2,4, cj
6.	$\neg\neg P$	3-5, raa
7.	P	6, dn
8.	$\neg Q$	hip-raa
9.	$\neg P \vee \neg Q$	8, ad
10.	$(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q)$	2,9, cj
11.	$\neg\neg Q$	8-10, raa
12.	Q	11, dn
13.	$P \wedge Q$	7,12, cj
14.	$(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$	1,13, cj
15.	$\neg\neg(\neg P \vee \neg Q)$	2-14, raa
16.	$\neg P \vee \neg Q$	15, dn