1. Responda os itens a seguir:
   (a) Seja $A = p \to (q \to r)$ uma fórmula e v uma valoração tal que $v(A) = F$. Quais os valores possíveis para $v(p)$, $v(q)$ e $v(r)$?
   (b) Seja $A = (p \vee r) \to (q \vee r)$ uma fórmula e v uma interpretação tal que $v(A) = F$. Quais os valores possíveis para $v(p)$, $v(q)$ e $v(r)$?
   (c) Seja $A = p \to (q \to r)$ uma fórmula e v uma valoração tal que $v(A) = T$ e $v(p) = T$. Quais os valores possíveis para $v(q)$ e $v(r)$?
   (d) Seja v uma interpretação tal que $v(p \to q) = T$. O que podemos dizer a respeito do resultado de $v((p \vee r) \to (q \vee r))$?
   (e) Seja v uma interpretação tal que $v(p \to q) = F$. O que podemos dizer a respeito do resultado de $v((p \wedge r) \to (q \wedge r))$ e de $v(r)$?
   (f) Seja $A = (p \vee r) \to (q \vee r)$ uma fórmula e v uma interpretação tal que $v(A) = F$ e $v(p \to q) = T$. Quais os valores possíveis para $v(q)$ e $v(r)$? O que podemos dizer sobre a valoração v?

2. Ache uma fórmula A tal que $atoms(A) = \{p, q, r\}$ de forma que, para toda valoração v, $v(A) = T$ se e somente se $v(p) = v(q) = F$ ou $v(\neg r) = v(p) = T$.

3. Seja $*$ um novo conectivo lógico, de modo que, para quaisquer fórmulas A e B e para qualquer valoração v, $v(A * B)$ é falso se e somente se as fórmulas $v(A) = v(B) = F$ ou $v(A) = v(B) = T$.
   (a) Escreva a tabela verdade para $(p * q)$.
   (b) Escreva a tabela verdade para $((p * p) * (q * q))$.
   (c) Nós definimos as fórmulas da lógica proposicional apenas com os conectivos binários $\wedge, \vee, \to$. Veja que o conectivo $*$ definido acima tem semântica diferente da semântica dos outros conectivos binários mencionados. Quantos conectivos binários com semânticas diferentes podemos definir? Observe que não é necessário que os conectivos binários tenham um nome conhecido.

4. Considere o problema de decidir se uma fórmula da lógica proposicional é verdadeira em uma determinada interpretação.
   (a) Escreva uma definição para a função `truth_value(formula, interpretation)` que retorna o valor-verdade de `formula` em `interpretation`. Ou seja, a função `truth_value` deve retornar `True` quando `formula` é verdadeira na interpretação `interpretation` e deve retornar `False` quando a fórmula `formula` é falsa em `interpretation`.
   (b) Em geral, a interpretação atribui um valor-verdade para cada átomo da fórmula. Uma **interpretação parcial** para uma fórmula é uma interpretação que não especifica um valor-verdade para alguns dos átomos da fórmula. Por exemplo, a interpretação $v = \{(p, F)\}$ é parcial para a fórmula $p \to q$. Veja que mesmo v sendo parcial, podemos descobrir o valor-verdade de $p \to q$ em v, ou seja, $v(p \to q) = T$. Como outro exemplo, seja a valoração $v' = \{(r, F), (q, T)\}$ e $A = (p \vee q) \to r$.

Veja que mesmo que v' não especifique um valor-verdade para p, podemos determinar que $v'(A) = F$. Para um terceiro exemplo, seja $v'' = \{(p, T), (s, F)\}$ e $B = p \to (r \vee s)$. Observe que nesse caso não podemos determinar o valor de $v''(B)$ pois é necessário saber o valor de $v''(r)$. Escreva uma definição para o algoritmo `partial_truth_value(formula, partial_interpretation)` que às vezes consegue descobrir o valor-verdade de `formula` na interpretação parcial `partial_interpretation`. Quando não for possível determinar o valor-verdade, a sua definição deve retornar um valor diferente de `True` e `False`.

5. Seja A uma fórmula e B uma subfórmula de A. A polaridade de B em A pode ser positiva ou negativa, e dizemos que elas são opostas. Definimos a polaridade de B em A, por indução em B, da seguinte maneira:

   - Se $B = A$, então a polaridade de B é positiva;
   - Se $B = (\neg C)$, então a polaridade de B é oposta à de C;
   - Se $B = (C \square D)$ com $\square \in \{\wedge, \vee\}$, então as polaridades de B, C e D são as mesmas;
   - Se $B = (C \to D)$, então B tem a mesma polaridade de D e polaridade oposta à de C.

   Note que em uma mesma fórmula A, uma subfórmula B pode ocorrer mais de uma vez e com polaridades diferentes. Por exemplo, na fórmula $(p \to q) \to (p \to q)$ a subfórmula $(p \to q)$ é negativa por causa da primeira ocorrência e é positiva por conta da segunda ocorrência.

   (a) Apresente uma fórmula que possua pelo menos duas atômicas e possua todos os conectivos $\wedge$, $\vee$, $\to$ e $\neg$ de forma que todas as atômicas tenham apenas polaridade positiva. Indique uma valoração que deixe a sua fórmula verdadeira.

   (b) Apresente uma fórmula que possua pelo menos duas atômicas e possua todos os conectivos $\wedge$, $\vee$, $\to$ e $\neg$ de forma que todas as atômicas tenham apenas polaridade negativa.

6. Especifique um conjunto de fórmulas atômicas que será usado em **todos** os itens da questão. Em seguida, represente o conjunto de sentenças abaixo na linguagem da lógica proposicional podendo usar apenas os conectivos $\wedge$, $\vee$, $\to$ e $\neg$.

   - Se José é adulto e trabalha, então ele não é aposentado.
   - Se José é jovem, ele trabalha ou estuda, mas não ambos.
   - Para José ser aposentado, ele deve ser adulto ou idoso.
   - Se José não é jovem, então ele trabalha somente se é adulto.
   - José está em exatamente uma das seguintes categorias: criança, jovem, adulto e idoso.
   - Para José ser estudante, ele deve estar em exatamente uma das seguintes opções: idoso que é aposentado, adulto que trabalha, jovem e criança.

Questões Extras

7. Construa a tabela-verdade da fórmula $p \vee \neg(q \wedge (r \rightarrow q))$.

8. Mostre que para toda interpretação v e para quaisquer fórmulas A e B, se $v(A \rightarrow (A \rightarrow B)) = T$, então $v(\neg\neg A) = F$ ou $v(\neg B) = F$.

9. Seja $\diamond$ um novo conectivo lógico ternário, de modo que, para quaisquer fórmulas A, B e C e qualquer valoração v, $v(\diamond(A, B, C)) = T$ se e somente se pelos menos duas entre $v(A)$, $v(B)$ e $v(C)$ são verdadeiras.

   (a) Escreva a tabela verdade para $\diamond(p, p, q) \rightarrow \diamond(q \rightarrow p, p, q)$.

   (b) Nós definimos as fórmulas da lógica proposicional apenas com os conectivos binários $\wedge, \vee, \rightarrow$ e o conectivo unário $\neg$. Veja que, como o conectivo ternário $\diamond$ definido acima, podemos definir outros conectivos ternários. Quantos conectivos ternários com semânticas diferentes podemos definir?

10. Represente cada sentença abaixo na linguagem da lógica proposicional usando apenas os conectivos $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\neg$.

    (a) Se estiver chovendo, não irei para casa, caso contrário, irei para casa.

    (b) Se a Angola atingir uma estabilidade, então a Botswana e a Namibia adotarão políticas mais liberais.

    (c) Se o Japão continuar a aumentar a exportação de automóveis, então um dos dois países seguintes sofrerá um declínio econômico: Coréia do Sul ou Tailândia.

    (d) Se a importação de petróleo aumentar ou as reservas nacionais de petróleo esgotarem, então a nação estará falida em breve.

    (e) Se o atendente ou o caixa apertarem o botão do alarme, o cofre fechará automaticamente e a polícia chegará em três minutos.

    (f) Se a produção agrícola declina e a população mundial aumenta, então novas fontes de alimento ficarão disponíveis ou acontecerá uma redistribuição radical de recursos alimentares.

    (g) A reunião deve ocorrer em pelo menos um e em no máximo dois dos seguintes dias: segunda, terça, quarta e quinta.

    (h) Se Maria estiver disponível, José levará Maria para o teatro **somente se** for uma peça de comédia.

11. O Campo Minado, o conhecido jogo de computador, consiste de uma grade retangular de quadrados com minas invisíveis espalhadas entre eles. Qualquer quadrado pode ser sondado pelo jogador, mas ele perde se uma mina for sondada. O jogo indica a presença de minas, revelando, em cada quadrado sondado, o número de minas que são direta ou diagonalmente adjacentes. O objetivo é sondar todos os quadrados sem mina.

(a) Assuma que a posição do canto superior esquerdo da grade é a posição $(1, 1)$ e as outras posições seguem a ordem ilustrada na Figura 1. Seja a fórmula atômica $x_{i,j}$ representando que o quadrado (i, j) tem uma mina, para $i, j \in \{1, 2\}$. Ou seja, são fórmulas atômicas: $x_{1,1}$, $x_{1,2}$, $x_{2,1}$ e $x_{2,2}$. Escreva a afirmação de que exatamente uma mina é adjacente à posição $(1, 1)$ como uma fórmula que envolve as atômicas mencionadas.

(b) Agora escreva a afirmação de que exatamente duas minas são adjacentes à posição $(1, 1)$.

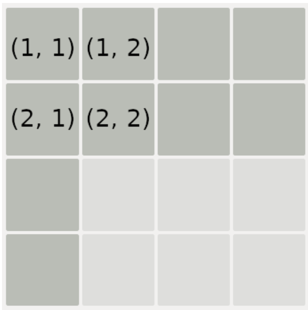

Figura 1: Grade do Campo Minado