

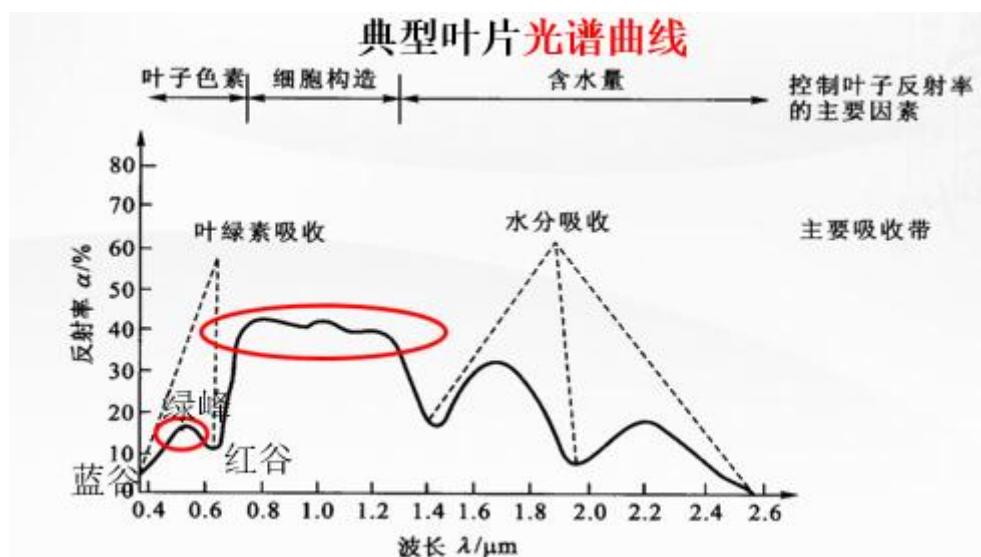
定量遥感：主要关注“有多少？”（How much?），例如，这片森林的叶面积指数（LAI）是多少？那片海域的叶绿素浓度是多少？这块土壤的表层水分含量是多少？其结果是以连续数值形式表达的地球物理生化参数。

广义定量遥感指的是综合利用任何可行的数学、物理或统计方法，从遥感数据中估算或计算出地表参数的所有技术和过程。既包括基于物理机理的严格模型，也包括经验模型和半经验模型。

狭义定量遥感特指基于电磁波辐射传输理论，严格地建立正向物理模型，并通过求解反问题来获取地物参数的技术。其核心特征是“物理机理的严谨性”，必须基于物理模型。

叶片光谱是指单个植物叶片在可见光（VIS, 400–700 nm）、近红外（NIR, 700–1300 nm）和短波红外（SWIR, 1300–2500 nm）波段的反射率、透射率或吸收率特性。它反映叶片的生化成分（如叶绿素、水分、氮含量）和细胞结构（如海绵组织与栅栏组织的排列）。

叶片光谱模型是一种基于物理学、生物学或统计学方法，用于模拟或预测单个叶片尺度的光谱反射率或透射率特征的数学模型。它旨在揭示叶片内部各种生化组分（如叶绿素、水分、蛋白质、纤维素等）和生物物理参数（如叶片厚度、内部结构）如何与入射光相互作用，并最终决定观测到的叶片光谱。

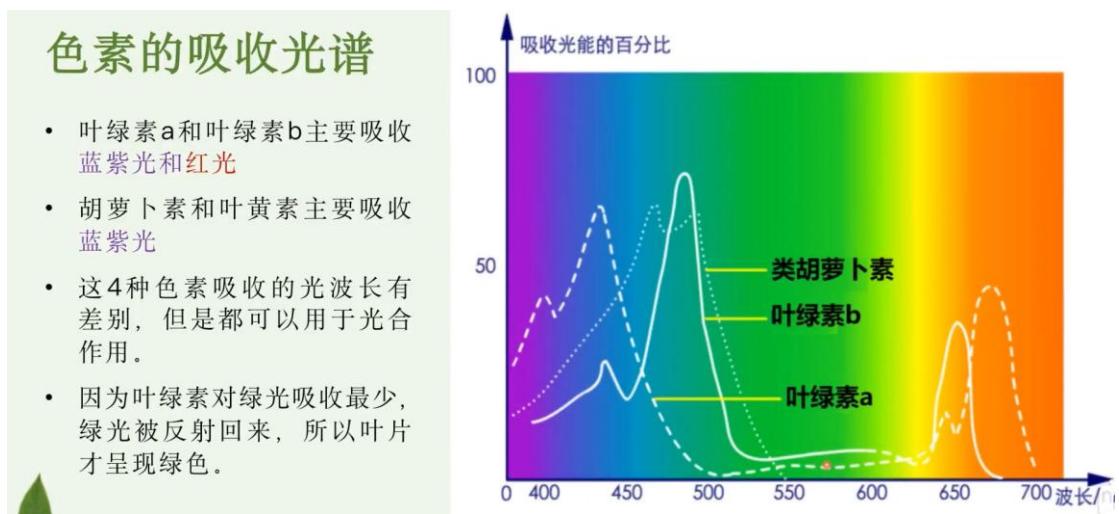


红边效应：植被反射光谱在 680nm-750nm 附近反射率急剧升高的陡坡区域。其位置和形态对叶绿素含量、生物量等非常敏感

现象与成因：健康绿色植被在红光波段由于叶绿素的强烈吸收，反射率很低；在近红外波段，因叶片内部海绵组织的多次散射，反射率很高。在这两个波段之间，反射率急剧上升，形成一个陡峭的斜坡，即为“红边”。

应用：①监测植被胁迫和病虫害（红边蓝移）；②估算叶绿素含量和氮含量；③提高

植被分类精度；④用于高光谱遥感中提取精细的植被生化参数。



叶绿素 a 和叶绿素 b 导致以 $0.45\mu\text{m}$ 和 $0.67\mu\text{m}$ 为中心形成两个强烈的吸收带。

根据叶子的结构可分为结构稀疏（典型的双子叶植物）和结构紧凑（典型的单子叶植物）。

结构紧凑的叶片通常细胞紧密排列在一起，这可以导致更高效的光吸收和较少的近红外散射。

结构稀疏的叶片具有更多层次的排列，这可以增加近红外光反射和散射的机会。随着叶龄增长，背腹性叶子的叶肉间空隙增多

叶子在 $1.4\mu\text{m}$ 、 $1.9\mu\text{m}$ 和 $2.7\mu\text{m}$ 处各有一个吸收谷，这主要是由于叶子的细胞液、细胞膜及吸收水分子所形成的。

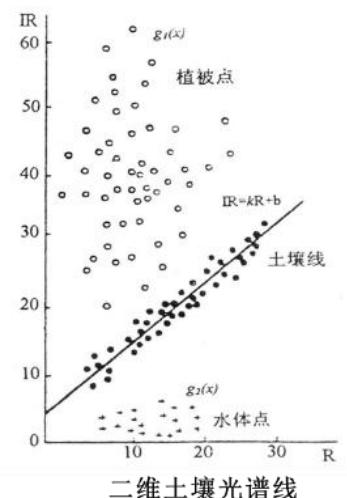
尺度效应：当观测或模型的尺度（空间、时间、光谱）发生变化时，所获得的信息和结果随之发生变化的现象。是遥感数据应用与验证中必须考虑的问题。

冠层光谱是指植物群体（如一片农田、森林）在多个波段的综合光谱信号，由叶片、茎干、土壤背景、阴影及冠层结构（如叶倾角、冠层高度）共同作用形成。它反映植被的宏观特征（如覆盖度、生物量、叶面积指数）。

冠层光谱模型是一种用于模拟或预测在像元尺度上（从几平方米到几平方公里）观察到的植被冠层光谱反射率的数学模型。它综合考虑了冠层结构、各组分的光学属性以及环境因素，并描述了光在冠层内部的复杂传输、散射和相互作用过程。

表 叶片光谱与冠层光谱区别对比

特征	叶片光谱	冠层光谱
观测对象	单个叶片	植被群体（含叶片、茎干、土壤等）
空间尺度	微观 (cm^2 级)	宏观 (m^2 至 km^2 级)
光谱特征	- 受叶片生化成分主导（如550 nm叶绿素吸收谷） - 近红外高反射（因细胞结构）	- 受冠层结构、LAI、背景干扰（如土壤） - 近红外反射率可能因阴影降低
影响因素	叶绿素含量、水分、叶片厚度	植被密度、冠层几何结构、太阳高度角、土壤背景
典型应用	叶片生化参数反演（如氮含量）	植被覆盖度估算、生物量监测、作物长势评估
数据获取	实验室或手持光谱仪	地面辐射计、无人机、卫星遥感



在 X 轴红光(R)与 Y 轴近红外(NIR)波段构成的二维空间中，土壤像元通常呈线性分布，表明其反射率在 R 与 NIR 波段高度正相关，此直线即土壤线。

土壤线的形成受土壤湿度、粗糙度、有机质及植被多次散射等因素影响，其数学表达式为： $\text{NIR} = a \times R + b$ (a 为斜率， b 为截距)。

植被像元分布于土壤线 NIR 侧，植被冠层越浓密 (NIR 反射率越高、R 反射率越低)，离土壤线越远，光合作用活性越强。

土壤反射率的改变对冠层红光和近红光反射率影响较大。

但是土壤反射率对于近红光与红光的比值影响较小。

叶面积指数的改变对冠层红光和近红光反射率影响较大。(叶面积指数大更趋近于植被)

叶面积指数的改变对近红光与红光的比值影响较大。

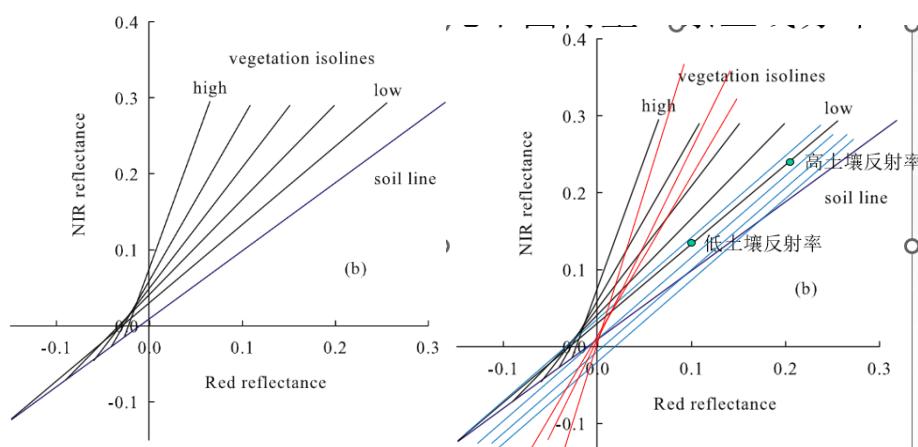
植被指数设计的目的就是为了增强叶面积指数变化的影响，减弱土壤反射率变化的影响。(光谱指数类似)

植被等值线：相同植被盖度的植被像元在红光-近红光平面内呈一条直线分布。

植被指数设计目的：

植被指数等值线接近植被等值线

植被指数代表植被值



植被覆盖度低时：植被等值线倾向于相互平行。

植被覆盖度高时：植被等值线倾向于相交于一点。

植被指数：

定义：植被指数是通过遥感数据提取植被信息的量化参数，利用多光谱数据（如加/减/乘/除等组合运算），生成对植被覆盖度、生理活性和生物量敏感的数值指标。

核心价值：克服单波段分析的局限性，以简洁形式实现植被状态的定性/定量评价

应用背景：广泛应用于农业、生态及全球变化研究，为区域至全球尺度的植被监测提供关键数据支持。

植被指数等值线：在红光-近红外二维平面内，将植被指数值相等的所有点连接起来所形成的闭合曲线。

1. 比值植被指数 (RVI)：

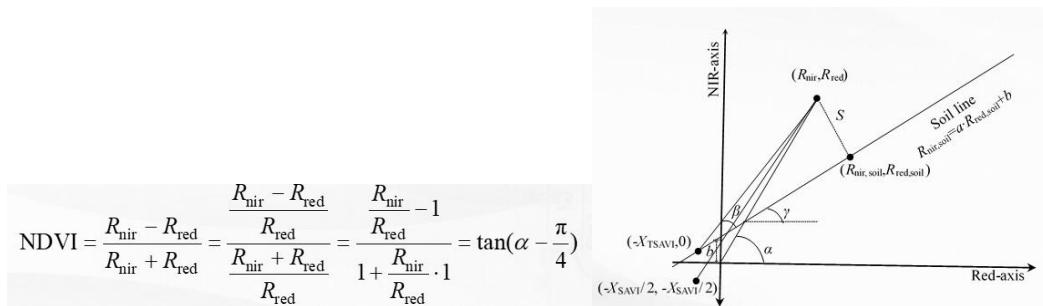
根据可见光红波段 (R) 和近红外波段 (NIR) 对绿色植物的光谱响应的不同，且具有倒转关系。两者的数值比能充分表达两反射率之间的差异

$$RVI = DN_{NIR} / DN_R \quad \text{或} \quad RVI = \rho_{NIR} / \rho_R \quad RVI \text{ 是等值线的斜率}$$

RVI 是绿色植物的一个灵敏指示参数，然而，在高值区域，RVI 过于敏感，微小的噪声（大气影响）会导致 RVI 的剧烈突变；在低值区域，RVI 很不敏感，分辨能力显著下降。

$$NDVI = \frac{D_{NIR} - D_R}{D_{NIR} + D_R} \quad \text{或} \quad NDVI = \frac{\rho_{NIR} - \rho_R}{\rho_{NIR} + \rho_R}$$

NDVI 介于 -1 和 1 之间，负值表示地面覆盖为云、水、雪等，对可见光高反射；0 表示岩石或裸土等，NIR 和 R 近似相等；正值表示有植被覆盖，且随覆盖度增大而增大。



NDVI 的主要用途 1) 可以进行不同植被类型初级生产量的估计；2) 识别不同的生态

- 区；3) 监测地球表面植被的物候类型，常被用来进行区域或全球的植被状态研究；
4) 评价生长期和变干期的长短

NDVI 的局限性：NDVI 对土壤背景的变化较为敏感，实验表明，作物生长初期 NDVI 将过高估计植被覆盖度，而作物生长结束季节，NDVI 值偏低。NDVI 更适用于植被发育中期或中等覆盖度植被检测。

$$SAVI = \left[\frac{\rho_{NIR} - \rho_R}{\rho_{NIR} + \rho_R + L} \right] (1+L)$$

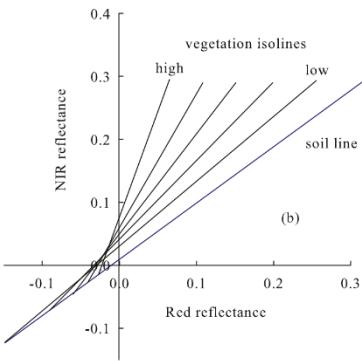
2. 土壤修正植被指数(SAVI) 只能用反射率不能用 DN 值

L 是一个土壤调节系数，是由实际区域条件所决定的常量，用来减小植被指数对不同土壤反射变化的敏感性；在植被指数低时 NDVI 不准确，而 SAVI 修正了对 \tan 的计算点（不是原点而是 $-X_{SAVI}/2, -X_{SAVI}/2$ ）使得其更加准确

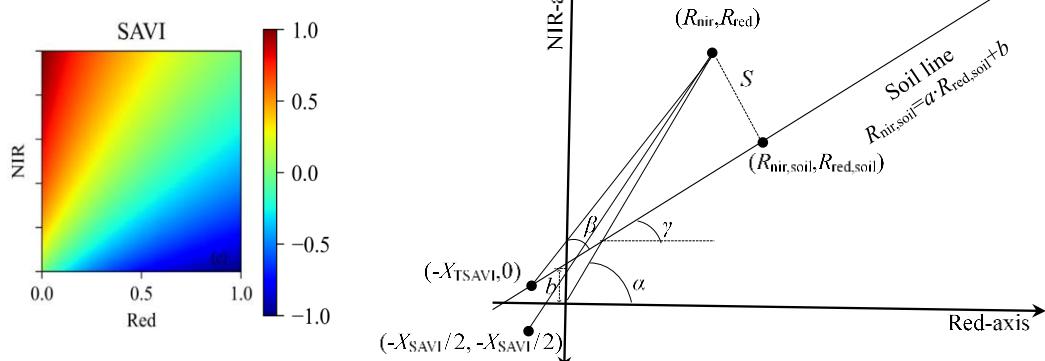
因子 $(1+L)$ 主要是用来保证最后

的 SAVI 值与 NDVI 值一样介于 -1 和 +1 之间。

$$SAVI = \frac{(R_{nir} - R_{red}) \cdot (1 + X_{SAVI})}{R_{nir} + \frac{X_{SAVI}}{2} + R_{red} + \frac{X_{SAVI}}{2}}$$



与 NDVI 相比，SAVI 将收敛点从原点移动到点 $(-X_{SAVI}/2, -X_{SAVI}/2)$ ，乘以 $(1 + X_{SAVI})$ 以保持有界条件。



SAVI 能降低土壤背景的影响，改善植被指数与植被的关系。

“ L ”取值随植被盖度变化的规律是植被盖度越大， L 取值越小。当 $L=0$ 时， $SAVI=NDVI$ 。

SAVI 可以在一定的程度上减弱土壤背景的影响，而不用计算土壤线的参数。

在以往的研究中 SAVI 用于提取植被信息和植被覆盖度、比较不同植被的差异、反演叶绿素和氮含量、分析与叶面积指数之间的相关性并计算叶面积指数、作为遥感分类的基础、监测旱情及修正模型。

$$4.\text{修改型二次土壤调整植被指数}(\text{MSAVI}) \quad \text{MSAVI} = (2\text{NIR} + 1) - \sqrt{(2\text{NIR} + 1)^2 - 8(\text{NIR} - R)/2}$$

MSAVI 不依赖于土壤线，算法很简单，是所有考虑土壤背景影响的植被指数中最简单的一种，因此应用也非常广泛。

MSAVI 主要用于分析植物的长势、荒漠化的研究、草地估产、计算叶面积指数、分析土壤有机质、监测旱情、分析土壤侵蚀。

$$\begin{aligned} \text{MSAVI}_0 &= \frac{\rho_{\text{NIR}} - \rho_{\text{red}}}{\rho_{\text{NIR}} + \rho_{\text{red}} + L_0} (1 + L_0). && \text{迭代法} \\ &\quad \text{L}_1 = 1 - \text{MSAVI}_0, \text{ (土壤调节因子)} \\ \text{MSAVI}_1 &= \frac{\rho_{\text{NIR}} - \rho_{\text{red}}}{\rho_{\text{NIR}} + \rho_{\text{red}} + 1 - \text{MSAVI}_0} (2 - \text{MSAVI}_0). && \text{抵抗土壤噪声:} \\ &\quad \text{MSAVI}_1 > \text{MSAVI}_0 \\ &\quad \text{L}_n = 1 - \text{MSAVI}_{n-1}, \\ \text{MSAVI}_n &= \frac{\rho_{\text{NIR}} - \rho_{\text{red}}}{\rho_{\text{NIR}} + \rho_{\text{red}} + 1 - \text{MSAVI}_{n-1}} (2 - \text{MSAVI}_{n-1}). && \text{抵抗土壤噪声:} \\ &\quad \text{MSAVI}_N = \text{MSAVI}_{N-1} \\ \text{MSAVI}_N &= \frac{\rho_{\text{NIR}} - \rho_{\text{red}}}{\rho_{\text{NIR}} + \rho_{\text{red}} + 1 - \text{MSAVI}_N} (2 - \text{MSAVI}_N). && \text{SAVI} = \left[\frac{\rho_{\text{NIR}} - \rho_{\text{red}}}{\rho_{\text{NIR}} + \rho_{\text{red}} + L} \right] (1 + L) \\ &\quad \text{MSAVI}_N = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, && \text{MSAVI}_2 = \frac{2\rho_{\text{NIR}} + 1 - \sqrt{(2\rho_{\text{NIR}} + 1)^2 - 8(\rho_{\text{NIR}} - \rho_{\text{red}})}}{2} \end{aligned}$$

$$5.\text{转换土壤调整植被指数 (TSAVI)} \quad \text{TSAVI} = \frac{a \cdot (R_{\text{nir}} - a \cdot R_{\text{red}} - b)}{a \cdot R_{\text{nir}} + R_{\text{red}} - a \cdot b + X_{\text{TSAVI}} \cdot (1 + a^2)}$$

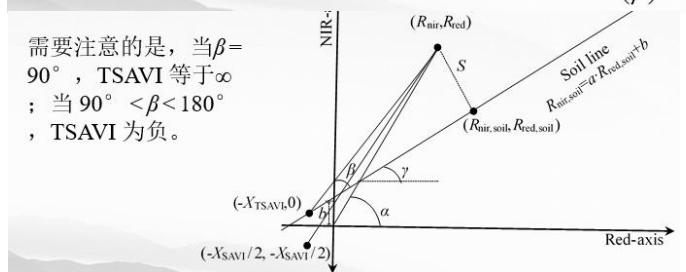
式中，a、b 分别为土壤背景线的斜率和截距。

$$\begin{aligned} \text{TSAVI} &= \frac{a \cdot (R_{\text{nir}} - a \cdot R_{\text{red}} - b)}{a \cdot R_{\text{nir}} + R_{\text{red}} - a \cdot b + X_{\text{TSAVI}} \cdot (1 + a^2)} \\ &= \frac{a \cdot (R_{\text{nir}} - b + a \cdot X_{\text{TSAVI}} - a \cdot R_{\text{red}} - a \cdot X_{\text{TSAVI}})}{R_{\text{red}} + X_{\text{TSAVI}} + a \cdot (R_{\text{nir}} - b + a \cdot X_{\text{TSAVI}})} \\ &= a \cdot \frac{\frac{R_{\text{nir}} - (b + a \cdot X_{\text{TSAVI}})}{R_{\text{red}} - (-X_{\text{TSAVI}})} - a}{1 + a \cdot \frac{R_{\text{nir}} - (b + a \cdot X_{\text{TSAVI}})}{R_{\text{red}} - (-X_{\text{TSAVI}})}} \end{aligned}$$

由于 X_{TSAVI} 为土壤调整因子的负横坐标，假设植被等值线的斜率为 k_v ，根据方程，我们得到

$$\begin{aligned} \text{TSAVI} &= a \cdot \frac{k_v - a}{1 + k_v \cdot a} \\ &= a \cdot \tan(\beta + \gamma - \gamma) \\ &= a \cdot \tan(\beta) \end{aligned}$$

需要注意的是，当 $\beta = 90^\circ$ ，TSAVI 等于 ∞ ；当 $90^\circ < \beta < 180^\circ$ ，TSAVI 为负。



$$6.\text{差值植被指数—DVI} \quad \text{DVI} = R_{\text{nir}} - R_{\text{red}}$$

差值植被指数 (DVI) 又称环境植被指数 (EVI)，被定义为近红外波段与可见光红波段数值之差。

差值植被指数的应用远不如 RVI、NDVI。它对土壤背景的变化极为敏感，有利于对植被生态环境的监测。另外，当植被覆盖浓密 ($\geq 80\%$) 时，它对植被的灵敏度下降，适用于植被发育早—中期，或低—中覆盖度的植被检测。

7. 垂直植被指数 (PVI)

植被等值线到土壤亮度线的距离不同。把植物像元到土壤线的垂直距离定义为垂直植被指数

$$PVI = \frac{|A \times R_{red} + B \times R_{nir} + C|}{\sqrt{A^2 + (B)^2}}$$

PVI 采用点到直线的距离公式计算：

A、B、C 为土壤线参数： $A \cdot \rho_r + B \cdot \rho_n + C = 0$ (ρ_n 和 ρ_r 为土壤在近红光和红光反射率

PVI 表征着在土壤背景上存在的植被的生物量，距离越大，生物量越大。

PVI 的显著特点是较好地滤除了土壤背景的影响，在岩石和土壤光谱特征都变化很大的干旱和半干旱地区，作为首选植被指数。

$$EVI = G \left[\frac{\rho_{NIR} - \rho_R}{\rho_{NIR} + C_1 \rho_R - C_2 \rho_B + L} \right]$$

引入了蓝光波段降低了大气的影响

C_1 : 红光波段的大气纠正因子； C_2 : 蓝光波段的大气纠正因子； L : 冠层背景纠正因子； G : 增益因子。根据经验，参数 $C_1=6.0$, $C_2=7.5$ 和 $L=1.0$, $G=2.5$

在高覆盖度时提高了敏感性。

为何 EVI 可以最大限度地减少因气溶胶变化导致的波动？

9. 双波段增强型植被指数 (EVI2)

EVI 在冰雪覆盖区容易产生异常值（蓝光反射率过高，使分母太小）

$$\begin{aligned} EVI &= G \frac{N - R}{N + C_1 R - C_2 B + L_{EVI}} \\ &\quad \downarrow \quad R = c \times B \quad c = 2.08 \\ EVI2 &= G \frac{N - R}{N + (C_1 - C_2/c)R + L_{EVI}} \end{aligned}$$

NDVI、EVI 及 SAVI 关系：

如果土壤影响小的情况下，SAVI~NDVI；

如果大气影响较小的话，EVI~SAVI；

如果土壤和大气影响均较小的话，EVI~NDVI。

植被指数地形影响分析 反射率地形效应 $\rho' = a \cdot \rho$, 其中 ρ' 地形影响反射率, ρ 真实反射率

$$NDVI = \frac{\rho_{NIR} - \rho_{red}}{\rho_{NIR} + \rho_{red}} = \frac{a \cdot \rho_{NIR} - a \cdot \rho_{red}}{a \cdot \rho_{NIR} + a \cdot \rho_{red}} = \frac{\rho_{NIR} - \rho_{red}}{\rho_{NIR} + \rho_{red}}$$

DVI (消不掉) RVI 可以消掉 SAVI EVI (消不掉)

植被指数尺度变化分析

反射率尺度效应 $\bar{\rho} = \text{mean}(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$

$$VI(\bar{\rho}) = \text{mean}(VI(\rho_1), VI(\rho_2), VI(\rho_3), VI(\rho_4))$$

作业: $\rho_{1,red} = 0.1$, $\rho_{2,red} = 0.15$, $\rho_{3,red} = 0.2$, $\rho_{4,red} = 0.05$, $\rho_{1,NIR} = 0.6$, $\rho_{2,NIR} = 0.65$, $\rho_{3,NIR} = 0.7$, $\rho_{4,NIR} = 0.55$, 分别计算

1. $DVI(\bar{\rho})$ 和 $\text{mean}(DVI(\rho_1), DVI(\rho_2), DVI(\rho_3), DVI(\rho_4))$
2. $NDVI(\bar{\rho})$ 和 $\text{mean}(NDVI(\rho_1), NDVI(\rho_2), NDVI(\rho_3), NDVI(\rho_4))$

光谱指数模型

与叶面积指数的关系: 叶面积越大则光合作用越强, 而光合作用越强, 又使植物群体的叶面积越大, 植物干物质积累越多, 生物量越大。同时, 植物群体的叶面积越大, 植物群体的近红光反射辐射增强

当作物群体 LAI 大于 3 时, 其反射率可达太阳总辐射的 20%;

当正常稻田 LAI 为 4 时的能量透过率为太阳总辐射的 23%或低于 20%;

对草本植物而言, 叶片倾角较大, 光很容易透过冠层直达底部直至土壤。当 LAI 高达 7.5 时, 有 5%的入射光可到达土壤表面。

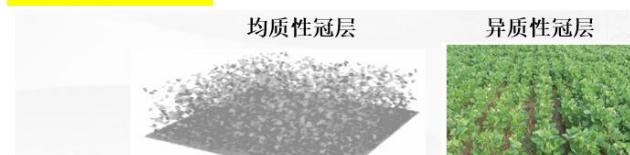
1. 植被指数和叶面积指数的经验关系

$$LAI = LAI_{\max} \frac{VI - VI_{\min}}{VI_{\max} + VI_{\min}}.$$

未饱和: VI 植被指数=NDVI 叶面积指数 LAI

饱和: $VI = VI_{\max} + (VI_{\max} - VI_{\min}) \cdot \exp(-K_{VI} \cdot LAI \cdot \Omega)$

植被冠层均质性



结构特征

叶片和枝条分布均匀, 无明显空隙

叶片和枝条分布不均匀, 存在空隙

植被类型

多见于草地、密集种植的作物田

常见于森林、灌木丛、稀疏植被区

光照透射

光透射较为均匀, 光线穿透率低

光透射不均匀, 存在强烈的光斑效应

真实 LAI

真实LAI是植物冠层中所有叶片的单面表面积与地表面积之比, 是完全包含了所有叶片单面面积的LAI值。

需要实地测量或基于3D结构模型进行计算, 考虑所有叶片的单面面积。

包含叶片重叠、枝干遮挡、非水平叶片倾斜等影响, 反映了冠层的真实结构和总单面叶面积。

优点: 能够准确反映植被的实际叶面积状况;

缺点: 测量复杂、时间成本高、适用范围有限。

有效 LAI

有效LAI是通过遥感等非接触手段测量时, 因无法区分冠层内部结构(如叶片重叠和枝干遮挡)而计算出的表观LAI值, 通常低于真实LAI。

多采用间接测量方法(如LAI-2000、鱼眼相机、激光雷达、遥感影像反演等), 利用冠层穿透率或辐射传输模型估算, 不考虑叶片重叠效应。

未考虑叶片重叠和倾斜角度, 仅反映冠层的表观叶面积密度, 假设叶片随机分布并且不重叠。

优点: 测量快速、覆盖面积大、成本低;

缺点: 会低估LAI值, 尤其是在高密度植被区域, 无法区分叶片和枝干的遮挡。

$$\frac{\text{有效LAI}}{\text{真实LAI}} = \Omega$$

聚集度指数：用于描述叶片在冠层中非随机（聚集）

分布程度的参数。其值影响冠层空隙率分布，是改进辐射传输模型精度的关键。

聚集指数通常 <1 ，因此有效 LAI $<$ 真实 LAI

2. 植被指数和叶绿素含量的关系

叶子生长初期，叶绿素含量与辐射能吸收间几乎直线相关，即叶绿素含量增多，蓝、红波段吸收增强，绿波段反射率降低，近红外反射率增强，植被指数增大；

但当叶绿素含量增加到一定程度后，吸收率近于饱和，反射率变化小，植被指数的差异不明显，因而植物在生长旺季较难区分。

。传感器所测得的反射辐射R可表示为：

$$R = RV \cdot C + RS(1 - C)$$

其中，RV为植被的总反射辐射，RS为土壤的总反射辐射，C为植被覆盖度，则：

$$C1 = (R - RS) / (RV - RS)$$

$$C2 = (\rho - \rho_s) / (\rho_v - \rho_s)$$

式中， ρ 为植被与土壤混合光谱反射率， ρ_v 、 ρ_s 分别为纯植被和纯土壤宽波段反射率。

3. 植被指数和植被覆盖度的关系

植被覆盖度（植土比）：植被冠层的垂直投影面积占总统计面积的百分比，是衡量地表植被覆盖状况、水土保持等的重要指标

4. 植被指数和地表生物量的关系

地表生物量指单位面积内，某一时刻植物活体的干重或鲜重，它是由植物光合作用的

$$VCI = (NDVI - NDVI_{med}) / (NDVI_{max} - NDVI_{min})$$

5. 植被指数和地表生态环境参数的关系

略

第二章

混合像元：像元中存在多于 1 种地物时，称其为“混合像元”。

与此相对应，只包括 1 种地物的像元为“纯像元”(pure pixel)

端元：分解混合像元时，被分解出来的成分称为端元。每个端元通常对应一种地物。

子像元(可约等于端元)：当我们描述混合像元内部某种地物时，也常称其为子像元。子

像元，顾名思义，就是指尺度小于一个像元，而我们又希望予以关注的地物。

混合像元模型

混合像元模型的公式可以表示为，像元反射率是所组成端元的反射率、各端元所占面积比例、以及其它参数的函数，即： $\rho = F(\rho_1, a_1, \rho_2, a_2, \dots, \rho_n, a_n, X)$ 其中 $j=1, \dots, n$ 表示端元序号， ρ 为反射率， a 为面积比例， X 表示其它各种参数（可能不止 1 个）。

只考虑 2 个端元的线型模型

考虑 1 个混合像元中只存在植被和裸土，此时混合像元的反射率为： $\rho = \rho_v a_v + \rho_s a_s$

其中 ρ 为反射率， a 为面积比例，下标 v 代表植被，下标 s 代表裸土。注意 $a_v + a_s = 1$

考虑 3 个端元的线型模型

考虑 1 个混合像元中存在水体、植被和裸土，此时混合像元的反射率为 $\rho = \rho_v a_v + \rho_s a_s + \rho_w a_w$

其中， ρ 为反射率， a 为面积比例，下标 v 代表植被，下标 s 代表裸土，下标 w 代表水体。 $a_v + a_s + a_w = 1$

但由于该式有 2 个未知数， a_v 与 a_s ，仍无法求解。此时，必须引入更多的遥感信息，以构成至少由 2 个非同构方程组成的方程组，才可以求解。

我们可以获取 2 个波段（如红波段和近红外波段）的遥感数据，以构成方程组：

$$\begin{cases} \rho_1 = \rho_{v1} a_v + \rho_{s1} a_s + \rho_{w1} (1 - a_v - a_s) \\ \rho_2 = \rho_{v2} a_v + \rho_{s2} a_s + \rho_{w2} (1 - a_v - a_s) \end{cases}$$

面积不变，
反射率变

上述方程组有 2 个方程，2 个未知数，可以求解出我们所需要的 a_v 、 a_s 、 a_w 。

同样地，我们也可以选取 2 个时相的遥感数据，构成上述方程组，进行求解。只要端元的反射率有不同的变化（以避免方程同构）即可。

考虑 n 个端元的线型模型

$$\rho_i = \sum_{j=1}^n (\rho_{ij} a_j)$$
$$\sum_{j=1}^n a_j = 1$$

其中， ρ 为反射率， a 为面积比例，下标 j 代表第 j 个端元。并有：

$$\rho_i = \sum_{j=1}^n (\rho_{ij} a_j) + e_i$$

如果考虑误差项，则混合像元反射率可以写为：

其中 e_i 为遥感数据的误差项。

表示：

$$|\mathbf{R}| = |\mathbf{P}||\mathbf{a}| + |\mathbf{e}|$$

由此我们可以列出由 m 个波段或时相数据构成的方程组，并用矩阵表示：

其中 $|\mathbf{R}|, |\mathbf{e}|$ 均为 m 行的单列矩阵， $|\mathbf{P}|$ 为 m 行 n 列矩阵， $|\mathbf{a}|$ 为 n 行单列矩阵。

[上式各项具体矩阵表达式如何？](#)

未知数的个数要小于等于独立方程的个数，注意到面积比例和为 1，增加了 1 个方程，则首要的反演条件为： $n \leq m+1$ 其次，端元所占面积比例在所采用的数据集中不能有变化。

反演的精度取决于：像元反射率与端元反射率的精度。其次，遥感数据集的选取也很重要。端元的反射率在不同数据中差别越大，反演越精确。模型中的误差项主要是由于遥感数据误差、混合像元中其它端元的贡献、以及其它随机误差引起的。

稀疏分布林冠球体模型

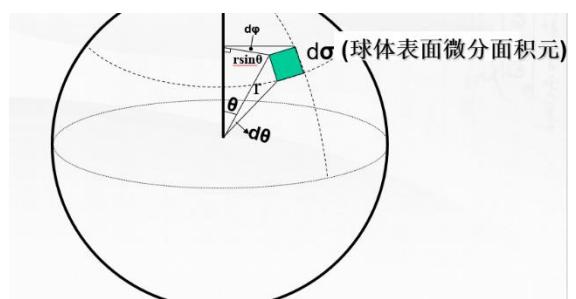
模型用于对森林地区冠层反射率的求算。所谓冠层反射率，指植被上界出射辐射与入射辐射的比值

稀疏分布：森林中树木分布非常稀疏，相互之间没有遮挡，树木阴影没有重叠；

球体树冠：树冠形状为球体。它有固定几何形状，而且数学表达简单。

遮挡和重叠包括照射和视角 2 个方向。

几何光学模型的两地物（树冠、阴影）四分量：光直接照射的树冠、树冠阴影面、直接照射的地面（背景）、阴影遮蔽的地面。



立体角是球坐标系中重要的度量参数之一，

其定义为球面对球心的张角，即： $\Omega = \sigma/r^2$

微分立体角元： $d\Omega = d\sigma/r^2 = d\cos\theta d\varphi = \sin\theta d\theta d\varphi$

立体角单位为球面度 Sr (steradians)。

沿经线边长： $r d\theta$ ；沿纬线边长： $r \sin\theta d\varphi$

因此： $d\sigma = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ $d\Omega = d\sigma/r^2 = \sin\theta d\theta d\varphi$

整个球面对球心所张立体角为 4π ，半球对球心所张立体角为 2π 。

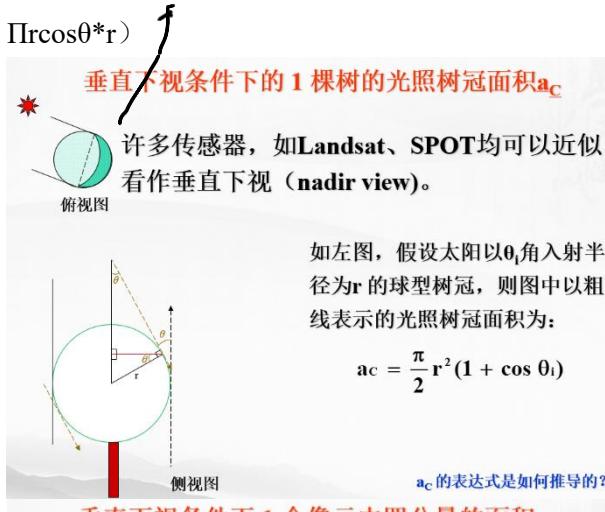
$$\begin{aligned} \int_{2\pi} \mu d\Omega &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \mu \sin\theta d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \mu d\mu \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \mu^2 \Big|_0^1 = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - 0) \\ &= \pi \end{aligned}$$

混合像元，像元（冠层）的反射率为： $R = K_C R_C + K_T R_T + K_G R_G + K_Z R_Z$

K_C 、 K_T 、 K_G 、 K_Z 分别为几何光学模型中的四个分量，即光照树冠、阴影树冠、光照背景、阴影背景在像元中所占面积比例， R_C 、 R_T 、 R_G 、 R_Z 则分别为上述四个分量的反射率（假设均为朗伯反射）。

推导（稀疏分布，无遮挡）重要！

实际上太阳照球体始终照亮 1/2 个球体，只不过我们是垂直下视，所以观测到的应该以俯视图计算，其面积是一个半圆加上半椭圆（长半轴 r ，短半轴 $\cos\theta \cdot r$ 面积为 $\pi r^2 / \cos\theta$ ）



垂直下视条件下 1 个像元中四分量的面积

假设 1 个像元内有 n 棵树，则四分量的面积分别为：

$$\begin{aligned} A_C &= \sum_{j=1}^n (a_C)_j = \frac{\pi}{2} (1 + \cos \theta_i) \sum_{j=1}^n r_j^2 \\ A_T &= \sum_{j=1}^n (a_T)_j = \frac{\pi}{2} (1 - \cos \theta_i) \sum_{j=1}^n r_j^2 \\ A_Z &= \sum_{j=1}^n (a_Z)_j = \pi \sec \theta_i \sum_{j=1}^n r_j^2 \end{aligned}$$

若像元面积为 A ，则光照背景面积为：

$$A_G = A - A_C - A_T - A_Z = A - \pi(1 + \sec \theta_i) \sum_{j=1}^n r_j^2$$

第 j 棵树的树冠半径为 r_j 。

垂直下视条件下的 1 棵树的阴影树冠面积 a_T 和阴影背景面积 a_Z

阴影树冠面积为：

$$a_T = \pi r^2 - a_C = \frac{\pi}{2} r^2 (1 - \cos \theta_i)$$

如左图，假设太阳以 θ_i 角入射半径为 r 的球型树冠，则阴影背景面积即是以粗线表示的面积在水平面上的投影：

$$a_Z = \pi r^2 / \cos \theta_i = \pi r^2 \sec \theta_i$$

注意假设是无遮挡的。
地面投影形状是椭圆。

为了反演方便，将遥感成像的森林进行参数化，引入统计数据，即林区单位面积内树木的平均个数 λ ，以及树冠平均半径 R 。因而存在：

$$\sum_{j=1}^n r_j^2 = \lambda A R^2$$

此时，1 个像元中四分量的面积分别为：

$$A_C = \lambda A \frac{\pi R^2}{2} (1 + \cos \theta_i)$$

$$A_T = \lambda A \frac{\pi R^2}{2} (1 - \cos \theta_i)$$

$$A_Z = \lambda A \pi R^2 \sec \theta_i$$

$$A_G = A - \lambda A \pi R^2 (1 + \sec \theta_i)$$

$m = \lambda \pi R^2$ 为林木平均郁密度，或称覆盖指数

~~A 是像元总面积， λar^2 就是树的总面积，用此式来替换 r_j 的求和，因此前面的式子可又写为：~~

$m = \lambda \pi R^2$ 为林木平均郁密度，或称覆盖指数

将上述 A_C 、 A_T 、 A_Z 、 A_G 四个表达式分别除以像元面积 A ，则光照树冠、阴影树冠、阴影背景、光照背景在像元中所占面积比例分别为：

$$K_C = \lambda \frac{\pi R^2}{2} (1 + \cos \theta_i)$$

$$K_T = \lambda \frac{\pi R^2}{2} (1 - \cos \theta_i)$$

$$K_Z = \lambda \pi R^2 \sec \theta_i$$

$$K_G = 1 - \lambda \pi R^2 (1 + \sec \theta_i)$$

将四分量的面积比例代入前面所述公式：

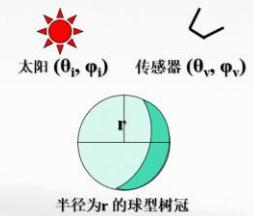
$$\begin{aligned} R &= K_C R_C + K_T R_T + K_G R_G + K_Z R_Z \\ &= \lambda \pi R^2 \left[\frac{1}{2} (1 + \cos \theta_i) R_C + \frac{1}{2} (1 - \cos \theta_i) R_T \right. \\ &\quad \left. + \sec \theta_i R_Z - (1 + \sec \theta_i) R_G \right] + R_G \end{aligned}$$

如果像元以及各分量反射率已知，由上式可以求出森林的郁闭度 $\lambda \pi R^2$ 。

上式表明了“即使像元内部处处是朗伯体，像元整体也可能是非朗伯的”。

任意视角方向下像元中四分量的面积比例

将前面推出的垂直条件下的四分量面积比例公式推广到任意视角，使其具有更加普遍的意义。



如左图，假设太阳入射方向为 $\Omega_i(\theta_i, \phi_i)$ ，传感器观测方向为 $\Omega_v(\theta_v, \phi_v)$ 。

通过旋转坐标系，使传感器方向变为垂直，即可借鉴树冠直视时的公式。

整个区域内共有 λA 棵树，即全部光照树冠面积合计为：

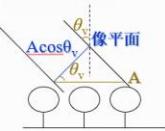
$$\lambda A \frac{\pi R^2}{2} (1 + \cos \Theta)$$

考虑到区域面积投影到视线垂直方向的平面上，也就是传感器像平面上，即像元面积比地面实际面积小，为 $A \cos \theta_v$ 。于是像元内光照树冠面积比例：

$$K_C = \frac{\lambda A \frac{\pi R^2}{2} (1 + \cos \Theta)}{A \cos \theta_v} = \lambda \frac{\pi R^2}{2} (1 + \cos \Theta) \sec \theta_v$$

同理阴影树冠面积比例：

$$K_T = \lambda \frac{\pi R^2}{2} (1 - \cos \Theta) \sec \theta_v$$



旋转坐标系后，太阳的入射角即变为太阳入射方向 Ω_i 与传感器观测方向 Ω_v 的夹角 Θ ，并有：

$$\cos \Theta = \cos \theta_i \cos \theta_v + \sin \theta_i \sin \theta_v \cos(\phi_i - \phi_v)$$

参考直视时平均每个树冠的光照面积和阴影面积分别为：

$$A'c = \frac{\pi R^2}{2} (1 + \cos \theta_i) \quad A'T = \frac{\pi R^2}{2} (1 - \cos \theta_i)$$

我们进而得到任意视角下单个树冠光照和阴影的面积：

$$A'c = \frac{\pi R^2}{2} (1 + \cos \Theta)$$

$$A'T = \frac{\pi R^2}{2} (1 - \cos \Theta)$$

总结

- 模型成立的条件：稀疏分布。
- 几何光学模型假设地表被观测地物（不仅限于树冠）有一定的几何形状。本小节采用球体近似，以简化表达式。
- 模型建立的关键是明确光照树冠、阴影树冠、光照背景、阴影背景等四分量的面积比例。
- 模型中引入了林业调查中所关心的、具有实际统计意义的2个参数， λ 和 R ，使反演成为可能。
- 模型还做了2个假设： R_C 、 R_T 、 R_G 、 R_Z 具有朗伯性质；只考虑直射光，忽略天空散射光

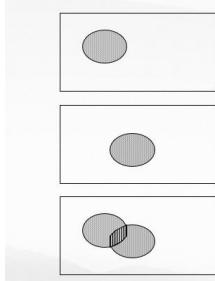
浓密分布条件下的模型

树木之间在太阳方向和视线方向出现相互遮挡，阴影也可能重叠的模型

仍存在四分量，即光照树冠、阴影树冠、光照背景、阴影背景

布尔模型 (Boolean model)

利用概率统计方法推导光照（可记为1）和阴影（可记为0）出现的概率。



只考虑地面。假设每个树冠在地面产生的阴影面积为 a ，在面积为 S 的地面上一共有 n 棵树，则没有阴影（即光照）的地面的比例是多少？这是一个概率问题。

当存在1棵树时，阴影比例为 a/S ，则光照比例为 $1 - a/S$ 。

当存在2棵树时，光照比例是？

引入单位面积内树木的平均个数 λ ，存在 $\lambda = n/S$ ，带入上式，即得到光照点概率为 $e^{-\lambda a}$ ，阴影点概率为 $1 - e^{-\lambda a}$ 。

稀疏表达是浓密表达的一阶展开。

上式中， a 是树冠在水平地面投影面积，它与投射方向 $\Omega(\theta, \phi)$ 有关，即太阳方向不同， a 也不同，应写为 $a(\theta, \phi)$ 。

布尔模型实际上描述了一个间隙概率(gap probability)问题，即在一个离散分布有物体的区域中，要么我们照射(看到)物体(object)，要么我们照射(看到)间隙(gap)，我们照射(看到)间隙的概率等于 $e^{-\lambda a(\theta, \phi)}$ ，其中 $a(\theta, \phi)$ 为沿照射(视角)方向 $\Omega(\theta, \phi)$ 、单个物体水平投影的平均面积， $\lambda a(\theta, \phi)$ 即为所有物体沿方向 $\Omega(\theta, \phi)$ 水平投影面积比例的总和。

存在2棵树时，由于阴影可能重叠，阴影比例不是简单的 $2a/S$ 。我们可以换个角度考虑。

只有1棵树时，光照比例，即地面某点不是阴影的概率是 $1-a/S$ ；2棵树时，满足前后2次投射后同时为光照点的概率即为 $(1-a/S)^2$ ，由此可算出此时阴影点概率为 $1-(1-a/S)^2$ 。

依次类推， n 棵树时，光照点概率为 $(1-a/S)^n$ 。

上式可以写为： $(1-a/S)^n = e^{\ln[(1-a/S)^n]} = e^{n \ln(1-a/S)}$

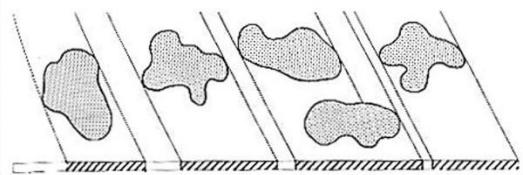
考虑当 x 很小时： $\ln(1+x) \approx x$

浓密条件下 a/S 很小，因此光照点概率可以写为： $e^{-na/S}$

e又出现了！ n趋于无穷？

布尔模型 在浓密分布林冠中的应用

当我们从（传感器）方向 $\Omega(\theta_v, \phi_v)$ 看浓密森林时，若每棵树木在水平背景的平均投影面积为 $a(\theta_v, \phi_v)$ ，则看到背景的概率为 $e^{-\lambda a(\theta_v, \phi_v)}$ ，看到林冠的概率为 $1 - e^{-\lambda a(\theta_v, \phi_v)}$ 。



我们前面对布尔模型推导过程中例举的是照射，但间隙对视角方向同样存在。

将树冠分为光照树冠 K_C 、阴影树冠 K_T ，将背景分为光照背景 K_G 、阴影背景 K_Z ，由此可得四分量面积比例间的关系：

$$K_C + K_T = 1 - e^{-\lambda a(\theta_v, \phi_v)}$$

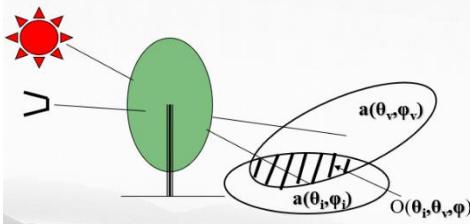
$$K_G + K_Z = e^{-\lambda a(\theta_i, \phi_i)}$$

K_C 、 K_T 、 K_G 、 K_Z 分别为几何光学模型中的四个分量，即光照树冠、阴影树冠、光照背景、阴影背景在像元中所占面积比例。

对于照射过程中的间隙概率问题，如果太阳方向为 $\Omega(\theta_i, \phi_i)$ ，类似地，我们可以得到场景受到光照的概率为 $e^{-\lambda a(\theta_i, \phi_i)}$ ，而场景处于阴影的概率为 $1 - e^{-\lambda a(\theta_i, \phi_i)}$ 。

如果背景被阳光照射的概率事件与背景被传感器看到的概率事件不相关（相互独立），则联合事件的概率就等于两个独立事件概率的乘积，光照背景的比例为 $e^{-\lambda [a(\theta_i, \phi_i) + a(\theta_v, \phi_v)]}$ 。

但是事实上，上述两个概率事件不是相互独立的，同一树冠在照射和视线两个方向上的投影可能有相互重叠。见下图。



光照树冠面积比例 K_C 与阴影树冠面积比例 K_T ：

回忆上一小节，对于球型树冠，在稀疏分布下存在：

$$K_C = \lambda \frac{\pi R^2}{2} (1 + \cos \Theta) \sec \theta_v$$

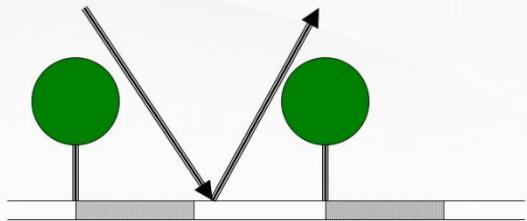
$$K_T = \lambda \frac{\pi R^2}{2} (1 - \cos \Theta) \sec \theta_v$$

对于浓密分布，如果不考虑相邻树冠在对方上产生的阴影或遮挡（由于太阳或传感器天顶角过大，或树冠存在不同高度）， K_C 与 K_T 的具体表达式虽然有变化，它们之间的关系是一样的，即存在：

$$\frac{K_C}{K_C + K_T} = \frac{1}{2} (1 + \cos \Theta) \quad \frac{K_T}{K_C + K_T} = \frac{1}{2} (1 - \cos \Theta)$$

光照背景面积比例 K_G 与阴影背景面积比例 K_Z

背景既被阳光照射，又被传感器看到的概率即为光照背景面积比例。



设 $a(\theta_i, \theta_v, \phi)$ 为相互重叠的面积，则光照背景的比例为：

$$K_G = e^{-\lambda [a(\theta_i, \phi_i) + a(\theta_v, \phi_v) - O(\theta_i, \theta_v, \phi)]}$$

$O(\theta_i, \theta_v, \phi)$ 与两个方向的天顶角、相对方位角($\phi = \phi_i - \phi_v$)有关。其具体表达式与树冠形状有关，而且较为复杂，甚至只能取得近似解，有兴趣者可以查阅相关资料。

进而我们可以得到阴影背景的比例：

$$K_Z = e^{-\lambda a(\theta_i, \phi_i)} - e^{-\lambda [a(\theta_i, \phi_i) + a(\theta_v, \phi_v) - O(\theta_i, \theta_v, \phi)]}$$

K_G 、 K_Z 与树冠形状有关。

球型的表达式如何？

当观测方向与照射方向一致时如何？

树冠面积比例 K_C

光照树冠+阴影树冠=树冠

$$\frac{K_C}{K_C + K_T} = \frac{1}{2} (1 + \cos \Theta)$$

$$K_C = \frac{1}{2} (1 + \cos \Theta) (1 - e^{-\lambda a(\theta_v, \phi_v)})$$

阴影树冠面积比例 K_T

$$\frac{K_T}{K_C + K_T} = \frac{1}{2} (1 - \cos \Theta)$$

$$K_T = \frac{1}{2} (1 - \cos \Theta) (1 - e^{-\lambda a(\theta_v, \phi_v)})$$

土壤二向反射特性

土壤表面粗糙度：通常我们采用粗糙度的概念来描述土壤表面的起伏。描述土壤表面粗糙度有 2 个参数，即高度参数的均方根值与相关系数。

不考虑坡度因素，首先根据土壤表面的平均高度，计算各处的相对高度 $X(x)$ ，形成一维高度廓线（点集）。

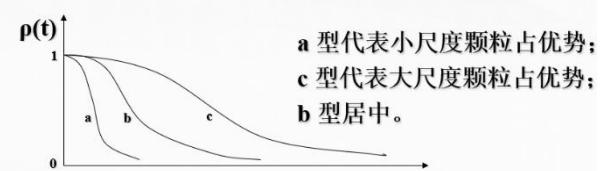


均方根值：

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{\sum_{x=0}^N X^2(x)}{N+1}}$$

相关系数：

$$\rho(t) = \frac{\frac{1}{N+1} \sum_{x=0}^N X(x)X(x+t)}{\frac{1}{N+1} \sum_{x=0}^N X^2(x)}$$



土壤的几何光学模型（感觉不重要）

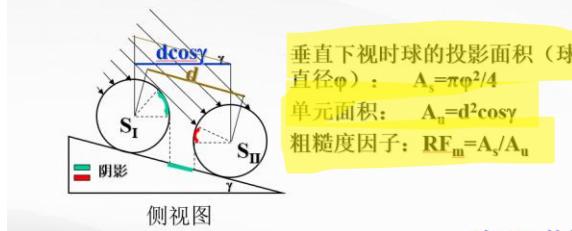
土壤表层可以看成由许多微小颗粒组成，在一定光照条件下，颗粒本身和颗粒之间相互遮蔽，形成一定的阴影区域；同时对于不同太阳入射方向、不同观测方向，视场内的光照区域和阴影区域的面积和比例不同，因而所测量的反射率也就不同。

在几何光学模型中，土壤表层颗粒大小、几何形状及其相对位置都对结果有着重要的影响。颗粒大小决定了截获光线的多少，几何形状和相对位置决定了光影面积在各视向上的分配。

Cierniewski模型

将土壤粗糙表面设想为一些相同尺度的球体，规则地分布在一个斜面上。

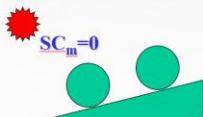
只考虑太阳直射光，并假设传感器垂直下视：



通过对投影平面的分析，可以用一系列三角函数关系和坐标方程来解算 A_{os} 和 A_{as} ，并最终计算阴影系数 SC_m 。

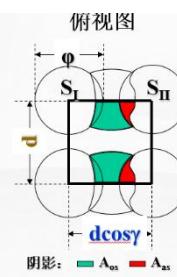
Cierniewski模型的几种考虑：

- 不考虑多次散射过程
- 前向倾斜与后向倾斜



- 稀疏条件（颗粒间距离足够大， $A_{as}=0$ ）与浓密条件
- 传感器的垂直观测与倾斜观测

什么情况下 $SC_m=0, 1$ ？



在面积单元内（左图长方框），为计算总的水平投影阴影面积，我们将其分为两部分。

一部分（左图绿色）包括球体 S_1 上自身的阴影及其在斜坡上的投影所产生的阴影，其水平投影面积定义为 A_{os} 。

另一部分是由于球体 S_1 遮挡，在球体 S_2 上产生的阴影，其水平投影面积定义为 A_{as} 。

$$\text{进而我们可以定义阴影系数: } SC_m = \frac{A_{os} + A_{as}}{A_u}$$

计算出阴影系数 SC_m 后，Cierniewski认为可以一个指数形式来计算同一种类土壤（平滑、干燥）的反射率：

$$\beta_\lambda = a \exp(bSC_m) \quad \text{光照点概率为 } e^{-\lambda_a}, \text{植被}$$

其中常数 a 、 b 与土壤种类有关， a 为正数， b 为负数。

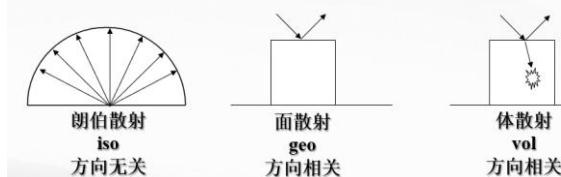
根据实际野外测量计算土壤反射率的顺序是：

- 根据土壤类型，经验判断土壤颗粒平均直径 ϕ
- 利用相机垂直拍照并放大，分析相片，计算所有土壤颗粒面积之和与区域面积的比例，即粗糙度因子 RF_m 。（照片里所有土壤颗粒投影面积之和比照片整个面积。）
- 根据 ϕ 、 RF_m 计算土壤颗粒间距 d
- 根据太阳和传感器方向、斜坡角度、 ϕ 、 d 计算阴影系数 SC_m
- 计算土壤反射率 β_λ ，由于 SC_m 的值与方向有关，所以得到的反射率是二向反射率

b为什么是负数？

Modis 核驱动（他说也是重点）

MODIS核驱动模型的场景由3种类型的地物构成：



可能求每部分占的比例

每一项的 fk/r 即可

为了关注地表方向反射特征，将模型中与方向有关的项和与方向无关的项分开，核驱动模型即可写为：

$$R(\Omega_i, \Omega_v) = f_{iso} + f_{geo}k_{geo}(\Omega_i, \Omega_v) + f_{vol}k_{vol}(\Omega_i, \Omega_v)$$

其中， f 均为与入射方向 Ω_i 、出射方向 Ω_v 无关的项，而 k 为只与方向有关的项。 k 称为核。由于模型的方向特征只与 k ，即核的形式有关，因此称为核驱动。

$$K_{geo}(\theta_i, \theta_v, \phi) = \frac{(\pi - \phi) \cos \phi + \sin \phi \tan \theta_i \tan \theta_v}{2\pi} - \frac{1}{2} [\tan \theta_i + \tan \theta_v + \sqrt{\tan^2 \theta_i + \tan^2 \theta_v - 2 \tan \theta_i \tan \theta_v \cos \phi}]$$

$$K_{vol}(\theta_i, \theta_v, \phi) = \frac{(0.5\pi - g) \cos g + \sin g}{\cos \theta_i + \cos \theta_v} - \frac{\pi}{4}$$

核驱动模型是一种基于物理原理的双向反射分布函数(BRDF)建模方法，用于描述地表在不同观测和光照几何条件下的反射特性。

核心思想：将复杂的地表反射过程分解为几个简单的核函数的线性组合，每个核函数代表不同的散射机制。