

द्विघात समीकरण : चर राशि (Variable Quantity) पर आधारित वह समीकरण जिसमें एक पद 2 घात (Power) का हो तथा 2 से अधिक घात का कोई पद न हो, द्विघात समीकरण (Quadratic Equation) कहलाता है।

अर्थात् $ax^2 + bx + c = 0$ जहाँ $a \neq 0$ के रूप में लिखा गया समीकरण द्विघात समीकरण कहलाता है।

जैसे - $x^2 - 10x + 24 = 0$ एक द्विघात समीकरण है।

द्विघात समीकरण के मूल

प्रत्येक द्विघात समीकरण के दो मूल (roots) होते हैं, जिसे α तथा β द्वारा निरूपित किया जाता है।

अतः यदि एक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में हो, तो

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ होता है।}$$

$$\text{जहाँ } \alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{तथा } \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ होता है।}$$

Note: $b^2 - 4ac$ को विवेचक (discriminant) कहा जाता है। जिसे प्रायः 'D' द्वारा सूचित किया जाता है।

अर्थात् $D = b^2 - 4ac$

विवेचक के मान पर ही मूलों की प्रकृति निर्भर होती है।

स्थिति I: जब $b^2 - 4ac > 0$ तो मूल घनात्मक एवं असमान होते हैं।

स्थिति II: जब $b^2 - 4ac = 0$ तो मूल घनात्मक एवं समान होते हैं।

स्थिति III: जब $b^2 - 4ac < 0$ तो मूल अवास्तविक होते हैं।

द्विघात समीकरण के मूलों का योग तथा गुणनफल

यदि द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के दो मूल (roots) α तथा β हो, तो

I. मूलों का योगफल $(\alpha + \beta) = \frac{-b}{a}$

II. मूलों का गुणनफल $(\alpha \times \beta) = \frac{c}{a}$ होता है।

ज्ञात मूलों से द्विघात समीकरण बनाना

यदि α तथा β दिए गए द्विघात समीकरण के मूल हो, तो द्विघात समीकरण,

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \text{ होता है।}$$

द्विघात समीकरण का गुणनखंड निकालना

यदि $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α तथा β हो, तो $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$ होगा।

द्विघात समीकरण पर आधारित प्रश्न

TYPE - 1

1. समीकरण $x^2 + 2x - 35 = 0$ में x का मान बतायें ?

Speedy Solution :-

$$x^2 - 2x - 35 = 0 \text{ में}$$

$$a = 1, b = -2, c = -35$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-35)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 140}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{2 \pm 12}{2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{2 + 12}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$\beta = \frac{2 - 12}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

$$\therefore x = (7, -5)$$

2. द्विघात समीकरण $8x^2 - 22x - 21 = 0$ को हल करें ?

Speedy Solution :-

$$\therefore 8x^2 - 22x - 21 = 0 \text{ में,}$$

$$a = 8, b = -22, c = -21$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-22) \pm \sqrt{(-22)^2 - 4 \times 8 \times (-21)}}{2 \times 8}$$

$$= \frac{22 \pm \sqrt{484 + 672}}{16} = \frac{22 \pm \sqrt{1156}}{16} = \frac{22 \pm 34}{16}$$

$$\therefore \alpha = \frac{22 + 34}{16} = \frac{56}{16} = \frac{7}{2} \text{ तथा}$$

$$\beta = \frac{22 - 34}{16} = \frac{-12}{16} = \frac{-3}{4}$$

$$\therefore x = \left(\frac{7}{2}, \frac{-3}{4} \right)$$

TYPE - 2

3. समीकरण $2x^2 + 7x - 15 = 0$ में मूलों का योग $(\alpha + \beta)$ का मान क्या होगा ?

Speedy Solution :-

$$2x^2 + 7x - 15 = 0 \text{ में,}$$

$$a = 2, b = 7, c = -15$$

$$\therefore \text{मूलों का योगफल } (\alpha + \beta) = \frac{-b}{a} = \frac{-7}{2}$$

4. समीकरण $3 - 17x + 6x^2 = 0$ में मूलों का गुणनफल का मान क्या होगा ?

Speedy Solution :-

$$3 - 17x + 6x^2 = 0$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 17x + 3 = 0 \quad (\text{यहाँ } a = 6, b = -17, c = 3)$$

$$\therefore \text{मूलों का गुणनफल} = \frac{c}{a} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

5. वह द्विघात समीकरण ज्ञात करें, जिनके मूल क्रमशः 3 तथा -3 हैं ?

Speedy Solution :-

यदि $\alpha = 3$ तथा $\beta = -3$ हो, तो

द्विघात समीकरण

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha \times \beta = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \{3 + (-3)\}x + 3 \times (-3) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - (3 - 3)x - 9 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 9 = 0$$

TYPE - 3

6. समीकरण $4x^2 - 16x + 15$ का गुणनखण्ड ज्ञात करें ?

Speedy Solution :-

$$\therefore 4x^2 - 16x + 15 \text{ का संगत समीकरण } 4x^2 - 16x + 15 = 0 \text{ में}$$

$$a = 4, b = -16, c = 15$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \times 4 \times 15}}{2 \times 4}$$

$$= \frac{16 \pm \sqrt{256 - 240}}{8} = \frac{16 \pm \sqrt{16}}{8} = \frac{16 \pm 4}{8}$$

$$\therefore \alpha = \frac{16 + 4}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

$$\beta = \frac{16 - 4}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

$$\therefore 4x^2 - 16x + 15 = 4 \left(\left(x - \frac{5}{2} \right) \left(x - \frac{3}{2} \right) \right)$$

$$= 4 \frac{(2x - 5)}{2} \times \frac{(2x - 3)}{2} = (2x - 5)(2x - 3)$$

7. R पर $9x^2 + 1$ का गुणनखण्ड निकाले, यदि संभव हो -

Speedy Solution :-

$$\therefore 9x^2 + 1 \text{ का संगत समीकरण } 9x^2 + 1 = 0 \text{ है।}$$

$$\text{यहाँ } a = 9, b = 0, c = 1$$

$$\therefore \text{विवेचक } D = b^2 - 4ac$$

$$= (0)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 0 - 36 < 0$$

\therefore संगत समीकरण का वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में मूल नहीं है।

\therefore वास्तविक गुणनखण्ड नहीं निकला जा सकता है।

TYPE - 4

8. K के किन मानों के लिए $3x^2 + Kx + 2 = 0$ के मूल वास्तविक होंगे ?

Speedy Solution :-

$$3x^2 + Kx + 2 = 0 \text{ में}$$

$$a = 3, b = K, c = 2$$

$$\therefore D = b^2 - 4ac$$

$$= K^2 - 4 \times 3 \times 2 = K^2 - 24$$

$$\therefore \text{मूल वास्तविक होंगे, यदि } D \geq 0$$

$$\text{अर्थात् } K^2 - 24 \geq 0$$

$$\Rightarrow K^2 \geq 24$$

$$\Rightarrow K \geq \sqrt{24}$$

$$\therefore K \geq 2\sqrt{6}$$

अर्थात् मूल वास्तविक होंगे, यदि K, $2\sqrt{6}$ से बड़ा हो या $-2\sqrt{6}$ से कम।

9. K के किन मानों के लिए समीकरण

$$x^2 + 7(3 + 2K) - 2x(1 + 3K) = 0 \text{ के मूल बराबर हैं ?}$$

Speedy Solution :-

$$\therefore x^2 + 7(3 + 2K) - 2x(1 + 3K) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2(1 + 3K)x + 7(3 + 2K) = 0$$

$$\text{यहाँ } a = 1, b = -2(1 + 3K), c = 7(3 + 2K)$$

\therefore मूल बराबर होंगे, यदि

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$\Rightarrow \{-2(1 + 3K)\}^2 - 4 \times 1 \times 7(3 + 2K) = 0$$

$$\Rightarrow 4(1+3K)^2 - 4(21+14K) = 0$$

$$\Rightarrow 4\{(1+3K)^2 - (21+14K)\} = 0$$

$$\Rightarrow (1+3K)^2 - (21+14K) = 0$$

$$\Rightarrow 1+6K+9K^2 - 21-14K = 0$$

$$\Rightarrow 9K^2 - 8K - 20 = 0$$

$$\Rightarrow 9K^2 - 18K + 10K - 20 = 0$$

$$\Rightarrow 9K(K-2) + 10(K-2) = 0$$

$$\Rightarrow (K-2)(9K+10) = 0$$

$$\therefore K = 2 \text{ या } \frac{-10}{9}$$

$$\therefore K = 2, \frac{-10}{9}$$

TYPE - 5

10. यदि द्विघात समीकरण $Px^2 - 5x + q = 0$ के मूलों के योगफल और गुणफल दोनों ही 10 हो, तो p तथा q का मान ज्ञात करें ?

Speedy Solution :-

$$\therefore \text{समीकरण } Px^2 - 5x + q = 0 \text{ में,}$$

$$a = P, b = -5, c = q$$

$$\therefore \text{मूलों का योगफल } (\alpha + \beta) = \frac{-b}{a}$$

$$\Rightarrow 10 = \frac{-(-5)}{P}$$

$$\therefore P = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\text{पुनः मूलों का गुणफल } (\alpha \times \beta) = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow 10 = \frac{q}{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore q = 10 \times \frac{1}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

11. यदि द्विघात समीकरण $x^2 + Px + 5 = 0$ के एक मूल 2 हो, तो दूसरा मूल तथा P का मान बतायें ?

Speedy Solution :-

$$\text{समीकरण } x^2 + Px + 5 = 0 \text{ में}$$

$$a = 1, b = P, c = 5$$

$$\text{माना } \alpha = 2$$

$$\therefore \alpha \times \beta = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow 2 \times \beta = \frac{5}{1}$$

$$\therefore \beta = \frac{5}{2}$$

$$\text{पुनः } \alpha + \beta = \frac{-b}{a}$$

$$\Rightarrow \left(2 + \frac{5}{2}\right) = \frac{-P}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{2} = \frac{-P}{1}$$

$$\therefore P = \frac{-9}{2}$$

$$\therefore \text{दूसरा मूल} = \frac{5}{2} \text{ तथा } P = \frac{-9}{2}$$

TYPE - 6

12. यदि α, β समीकरण $7x^2 + 2 = 11x$ के मूल हो, तो $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ का मान निकालें ?

Speedy Solution :-

$$\therefore 7x^2 + 2 = 11x$$

$$\Rightarrow 7x^2 - 11x + 2 = 0$$

$$\text{यहाँ } a = 7, b = -11, c = 2$$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-11)}{7} = \frac{11}{7}$$

$$\text{तथा } \alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{2}{7}$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha \beta} = \frac{\frac{11}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{11 \times 7}{2 \times 7} = \frac{11}{2}$$

13. यदि α, β समीकरण $4x^2 - 7x + 3 = 0$ के मूल हो, तो $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ का मान बतायें ?

Speedy Solution :-

$$\therefore 4x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$\text{यहाँ } a = 4, b = -7, c = 3$$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-7)}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\text{तथा } \alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{7}{4}\right)^2 - 2 \times \frac{3}{4}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\frac{49}{16} - \frac{6}{4}}{\frac{9}{16}} = \frac{\frac{49-24}{16}}{\frac{9}{16}} = \frac{25}{16} \div \frac{9}{16} = \frac{25}{16} \times \frac{16}{9} = \frac{25}{9}$$

14. यदि α, β समीकरण $3x^2 + 4 = 7x$ के मूल हों, तो $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ का मान ज्ञात करें ?

Speedy Solution :-

$$\therefore 3x^2 + 4 = 7x$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 7x + 4 = 0$$

$$\text{यहाँ } a = 3, b = -7, c = 4$$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-7)}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\text{तथा } \alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{\left(\frac{7}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{4}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{49}{9} - \frac{8}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{49 - 24}{9}}{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{25}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{25}{12}$$

TYPE - 7

15. समीकरण $x^2 + 6x - 27 > 0$ में x को मान निम्न में से कौन संतुष्ट करता है ?

- (A) $x > 9$ या $x > 3$ (B) $x < 9$ या $x < 3$
(C) $x < -9$ या $x < 3$ (D) $x - 3 < x < 3$
(E) इनमें से कोई नहीं

Speedy Solution :-

$$\therefore x^2 + 6x - 27 > 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 9x - 3x - 27 > 0$$

$$\Rightarrow x(x + 9) - 3(x + 9) > 0$$

$$\Rightarrow (x + 9)(x - 3) > 0$$

अतः x का मान -9 और 3 के बीच में नहीं होगा।

अर्थात् $x < -9$ या $x > 3$

Note : स्मरणीय तथ्य

- I. यदि $(x - \alpha)(x - \beta) > 0$ हो, तो x का मान α तथा β के बीच में नहीं होता है।

- II. यदि $(x - \alpha)(x - \beta) < 0$ हो, तो x का मान α तथा β के बीच में होता है।

16. x का कौन-सा मान समीकरण $x^2 - 3x + 2 > 0$ तथा $x^2 - 3x - 4 \leq 0$ को संतुष्ट करता है ?

- (A) $-1 \leq x < 1$ तथा $2 < x \leq 4$ (B) $-2 \leq x < 3$ तथा $3 < x \leq 4$
(C) $-4 \leq x < 4$ तथा $1 < x \leq 6$ (D) $x > 3$ तथा $x > 5$
(E) इनमें से कोई नहीं

Speedy Solution :-

$$\therefore x^2 - 3x + 2 > 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x - 2) > 0$$

$$\Rightarrow x < 1, x > 2 \quad \dots (i)$$

$$\text{पुनः } x^2 - 3x - 4 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x + 1)(x - 4) \leq 0$$

$$\Rightarrow -1 \leq x \leq 4 \quad \dots (ii)$$

अब (i) तथा (ii) को मिलाने पर,

$$-1 \leq x \leq 1 \text{ और } -2 < x \leq 4$$

TYPE - 8

17. दो लगातार घन पूर्णाकों के वर्गों का योग 221 है, तो संख्याएँ ज्ञात करें ?

Speedy Solution :-

माना संख्याएँ क्रमशः x तथा $x + 1$ हैं।

प्रश्न से,

$$(x)^2 + (x + 1)^2 = 221$$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 = 221$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2x - 220 = 0$$

$$\Rightarrow 2(x^2 + x - 110) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 110 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 11x - 10x - 110 = 0$$

$$\Rightarrow x(x + 11) - 10(x + 11) = 0$$

$$\Rightarrow (x + 11)(x - 10) = 0$$

$$\therefore x = 10, -11$$

अतः अभीष्ट संख्या = 10 और -11

18. दो संख्याओं का योगफल 15 है और उनके व्युत्क्रमों का योगफल $\frac{3}{10}$ है, तो संख्याएँ बताये ?

Speedy Solution :-

माना पहली संख्या = x

\therefore दूसरी संख्या = $15 - x$

प्रश्नानुसार,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{15 - x} = \frac{3}{10} \quad \Rightarrow \frac{15 - x + x}{x(15 - x)} = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow 150 = 45x - 3x^2 \quad \Rightarrow 3x^2 - 45x + 150 = 0$$

$$\Rightarrow 3(x^2 - 15x + 50) = 0 \quad \Rightarrow x^2 - 15x + 50 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x - 5x + 50 = 0 \quad \Rightarrow x(x - 10) - 5(x - 10) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 10)(x - 5) = 0 \quad \therefore x = 5, 10$$

\therefore अभीष्ट संख्याएँ = 5, 10

19. दो लगातार विषम संख्याओं का गुणनफल 35 है, तो उनमें छोटी संख्या कितनी है ?

Speedy Solution :-

मान लिया कि छोटी संख्या x एवं बड़ी संख्या $x+2$ है।

$$\therefore x(x+2) = 35$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 35 = 0 \quad \Rightarrow x^2 + 7x - 5x - 35 = 0$$

$$\Rightarrow x(x+7) - 5(x+7) = 0 \quad \Rightarrow (x-5)(x+7) = 0$$

$$\therefore x = 5, -7 \text{ (ऋणात्मक संख्या अमान्य है)}$$

$$\therefore \text{छोटी विषम संख्या} = 5 \text{ होगा।}$$

TYPE - 9

20. 'k' के किन मानों के लिए $2x^2 - kx + 1 = 0$ के मूल बराबर होंगे ?

Speedy Solution :-

मूल बराबर होंगे, यदि $D = 0$

$$\text{अतः } (-k)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 0$$

$$\Rightarrow k^2 - 8 = 0 \Rightarrow k^2 = 8 \Rightarrow k = \pm 2\sqrt{2}$$

21. यदि α एवं β समीकरण $2x^2 + 3x - 1 = 0$ के मूल हों, तो $\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta$ का मान क्या होगा ?

Speedy Solution :-

यहाँ $a = 2, b = 3, c = -1$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-3}{2} \text{ तथा } \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-1}{2}$$

$$\text{अब, } \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta$$

$$= \left(\frac{-3}{2}\right)^2 - \left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{9}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11}{4}$$

22. $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \dots \infty$ का मान ज्ञात करें ?

Speedy Solution :-

$$\text{माना } x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \dots \infty$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{2 + x}$$

दोनों ओर वर्ग करने पर,

$$x^2 = 2 + x \quad \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \quad \Rightarrow x = 2 \text{ या } x = -1$$

परन्तु, $x = -1$ संभव नहीं है। अतः $x = 2$

23. $\frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \dots \infty}}}}$ का मान ज्ञात करें ?

$$\frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \dots \infty}}}}$$

Speedy Solution :-

$$\text{माना } \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \dots \infty}}}} = x \quad \text{तो } x = \frac{1}{4 + x}$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x = 1 \quad \Rightarrow x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$$

24. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 120$ के द्विघात गुणखण्ड क्या होगा ?

Speedy Solution :-

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 120$$

$$\Rightarrow (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 120$$

अब $x^2 + 5x = y$ रखने पर,

$$(y+4)(y+6) = 120$$

$$\Rightarrow y^2 + 10y + 24 = 120 \quad \Rightarrow y^2 + 10y - 96 = 0$$

$$\Rightarrow (y+16)(y-6) = 0 \quad \Rightarrow y = -16 \text{ या } y = 6$$

अब $x^2 + 5x = -16$ या $x^2 + 5x = 6$

$$\Rightarrow x^2 + 5x + 16 = 0 \text{ या } x^2 + 5x - 6 = 0 \text{ द्विघात समीकरण है।}$$

TYPE - 10

25. यदि $9^x - 4 \times 3^{x+2} + 3^5 = 0$ में x का मान क्या होगा ?

Speedy Solution :-

$$9^x - 4 \times 3^{x+2} + 3^5 = 0$$

$$\Rightarrow 3^{2x} - 4 \times 3^x \cdot 3^2 + 3^5 = 0$$

अब $3^x = y$ रखने पर, $3^{2x} = y^2$

$$\Rightarrow y^2 - 36y + 243 = 0 \quad \Rightarrow (y-27)(y-9) = 0$$

$$\therefore y = 27 \text{ तथा } 9$$

$$\text{पुनः } 3^x = 3^3 \text{ तथा } 3^x = 3^2$$

$$\therefore x = 3 \text{ तथा } x = 2$$

26. समीकरण $x^{2/3} + x^{1/3} - 2 = 0$ में x का मान क्या होगा ?

Speedy Solution :-

$$x^{2/3} + x^{1/3} - 2 = 0$$

अब $x^{1/3} = y$ रखने पर,

$$\text{तब } y^2 = y^2 \quad \Rightarrow x = -8, 1 \quad \Rightarrow x^{1/3} = -2$$

$$x = (-2)^3 = -8 \quad \Rightarrow x^{1/3} = 1 \quad \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow y^2 + y - 2 = 0 \quad \Rightarrow (y+2)(y-1) = 0 \quad \therefore y = -2, 1$$

PREVIOUS YEAR'S RRB'S QUESTIONS

1. यदि α तथा β समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल हैं, तो

$\frac{1}{a\alpha + b} + \frac{1}{a\beta + b}$ का मान है -

- (A) $\frac{a}{bc}$ (B) $\frac{c}{ab}$ (C) $\frac{bc}{a}$ (D) $\frac{b}{ac}$

(RRB कोलकाता Goods Guard, 2002)

Speedy Solution : (D)

$$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \text{ तथा } \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{a\alpha + b} + \frac{1}{a\beta + b} &= \frac{a\beta + b + a\alpha + b}{(a\alpha + b)(a\beta + b)} \\ &= \frac{a(\alpha + \beta) + 2b}{a^2\alpha\beta + ab\alpha + ab\beta + b^2} \\ &= \frac{a(\alpha + \beta) + 2b}{a^2\alpha\beta + ab(\alpha + \beta) + b^2} \\ &= \frac{a\left(-\frac{b}{a}\right) + 2b}{a^2\left(\frac{c}{a}\right) + ab\left(-\frac{b}{a}\right) + b^2} \\ &= \frac{-b + 2b}{ac - b^2 + b^2} = \frac{b}{ac} \end{aligned}$$

2. समीकरण $x^2 + 2x + 2 = 0$ के मूल क्या हैं ?

- (A) +1, -1 (B) +2, -2
(C) +3, -2 (D) कोई वास्तविक मूल नहीं है।

(RRB अहमदाबाद Diesel Driver, 2004)

Speedy Solution : (D)

$$\therefore x^2 + 2x + 2 = 0 \text{ में}$$

$$a = 1, b = 2, c = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} \end{aligned}$$

अतः कोई वास्तविक मूल नहीं है।

3. K के किस मान के लिए समीकरण $x^2 + 2(K-4)x + 2K = 0$ के मूल बराबर हैं ?

- (A) 6, 4 (B) 12, 2 (C) 8, 2 (D) 4, 8

(RRB कोलकाता Goods Guard, 2002)

Speedy Solution : (C)

\therefore समीकरण के मूल बराबर हैं।

$$\therefore b^2 = 4ac$$

$$\Rightarrow [2(K-4)]^2 = 4 \cdot 1 \cdot 2K \Rightarrow [4(K^2 - 8K + 16)] = 8K$$

$$\Rightarrow 4K^2 - 32K + 64 = 8K \Rightarrow 4K^2 - 32K - 8K + 64 = 0$$

$$\Rightarrow 4K^2 - 40K + 64 = 0 \Rightarrow K^2 - 10K + 16 = 0$$

$$\Rightarrow K^2 - 8K - 2K + 16 = 0 \Rightarrow K(K-8) - 2(K-8) = 0$$

$$\Rightarrow (K-2)(K-8) = 0 \therefore K = 2 \text{ या } 8$$

4. यदि $(p+q)^2 + 2(p+q) = 15$ एवं $pq = 4$ है। तो p और q का मान है -

- (A) -1, -4 (B) -1, 4 (C) 1, -4 (D) 1, 4

(RRB कोलकाता Goods Guard, 2002)

Speedy Solution : (A)

$$\therefore (p+q)^2 + 2(p+q) = 15$$

$$\text{माना } p+q = x$$

$$\text{तो } x^2 + 2x = 15$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x - 3x - 15 = 0$$

$$\Rightarrow x(x+5) - 3(x+5) = 0 \Rightarrow (x+5)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -5 \text{ या } 3 \Rightarrow p+q = -5 \text{ या } 3$$

$$\therefore (p+q)^2 = (p-q)^2 + 4pq$$

$$\Rightarrow (-5)^2 = (p-q)^2 + 4 \cdot 4 \Rightarrow 25 = (p-q)^2 + 16$$

$$\Rightarrow 25 - 16 = (p-q)^2 \therefore p-q = \sqrt{9} = \pm 3$$

$$\text{अब यदि } p+q = -5 \text{ तथा } p-q = -3 \text{ हो,}$$

$$\text{तो } p = -4 \text{ तथा } q = -1$$

5. यदि $x^2 - 3x + 2 = 0$ के मूल α, β हैं, तो $(\alpha+1), (\beta+1)$ मूल वाला समीकरण है -

$$(A) x^2 - 5x - 6 = 0 (B) x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$(C) x^2 + 5x + 6 = 0 (D) x^2 - 5x + 6 = 0$$

(RRB इलाहाबाद A.S.M., 2002)

Speedy Solution : (D)

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \text{ में}$$

$$a = 1, b = -3, c = 2$$

$$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{1} = 3$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\therefore (\alpha+1), (\beta+1)$$

$$\Rightarrow x^2 - \{(\alpha+1) + (\beta+1)\}x + (\alpha+1)(\beta+1) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - (\alpha + \beta + 2)x + \alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - (3+2)x + 2+3+1=0$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

6. यदि $x^2 - 5x - 24 = 0$ हो, तो x का मान क्या होगा -

- (A) +8, -3 (B) +8, +3 (C) -8, -3 (D) -8, +3

(RRB राँची A.S.M., 2003)

Speedy Solution : (A)

$$\therefore x^2 - 5x - 24 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 3x - 24 = 0 \Rightarrow x(x-8) + 3(x-8) = 0$$

$$\Rightarrow (x-8)(x+3) = 0 \therefore x = 8 \text{ या } -3$$

7. समीकरण $2x^2 - 4x + 5 = 0$ के मूल हैं -

- (A) काल्पनिक (B) वास्तविक अपरिमेय
(C) वास्तविक परिमेय (D) समान

(RRB भोपाल/मुम्बई C.C., 2003)

Speedy Solution : (A)

$$\therefore 2x^2 - 4x + 5 = 0 \text{ में}$$

$$a = 2, b = -4, c = 5$$

$$\therefore D = b^2 - 4ac$$

$$= (-4)^2 - 4 \times 2 \times 5 = 16 - 40 = -24$$

$$\therefore D < 0$$

\therefore मूल काल्पनिक होंगे।

8. यदि $x^2 + x + 1 = 0$ समीकरण के मूल α, β हो, तो $(\alpha^4 + \beta^4)$ का मान है -

- (A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 2

(RRB कोलकाता/भुवनेश्वर T.C., 2003)

Speedy Solution : (C)

$$\therefore x^2 + x + 1 = 0 \text{ में}$$

$$a = 1, b = 1, c = 1$$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -1$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = 1$$

$$\therefore (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$$

$$\Rightarrow (-1)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2 \times 1 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 1 - 2 = -1$$

$$\text{पुनः } (\alpha^2 + \beta^2)^2 = \alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2$$

$$\Rightarrow (-1)^2 = \alpha^4 + \beta^4 + 2 \times (1)^2 \Rightarrow 1 = \alpha^4 + \beta^4 + 2$$

$$\therefore \alpha^4 + \beta^4 = 1 - 2 = -1$$

9. यदि समीकरण $x^2 - 6kx + 5 = 0$ का एक मूल 5 हो, तो k का मान है -

- (A) 2 (B) 1 (C) -1 (D) $-\frac{1}{2}$

(RRB गोरखपुर E.S.M., 2003)

Speedy Solution : (B)

$$\therefore \text{समी. } x^2 - 6kx + 5 = 0 \text{ में}$$

$$x = 5 \text{ दिया हुआ है।}$$

$$\therefore x \text{ का मान रखने पर}$$

$$(5)^2 - 6k \times 5 + 5 = 0$$

$$\Rightarrow 25 - 30k + 5 = 0$$

$$\Rightarrow 30 - 30k = 0$$

$$\Rightarrow 30 = 30k$$

$$\therefore k = \frac{30}{30} = 1$$

10. 'p' के किस मान के लिए द्विघात समीकरण $4x^2 - 2(p+1)x + p+4 = 0$ के मूल बराबर होंगे -

- (A) 5 (B) 3 (C) 4 (D) 12

(RRB राँची A.S.M., 2002)

Speedy Solution : (A)

$$\therefore 4x^2 - 2(p+1)x + p+4 = 0 \text{ के मूल बराबर होंगे यदि}$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$\Rightarrow \{2(p+1)\}^2 - 4 \times 4 \times (p+4) = 0$$

$$\Rightarrow 4(p+1)^2 - 16(p+4) = 0 \Rightarrow 4\{(p+1)^2 - 4(p+4)\} = 0$$

$$\Rightarrow (p+1)^2 - 4p - 16 = 0 \Rightarrow p^2 + 2p + 1 - 4p - 16 = 0$$

$$\Rightarrow p^2 - 2p - 15 = 0 \Rightarrow p^2 - 5p + 3p - 15 = 0$$

$$\Rightarrow p(p-5) + 3(p-5) = 0 \Rightarrow (p+3)(p-5) = 0$$

$$\therefore p = -3 \text{ या } 5$$

$$\therefore p \text{ का } -3 \text{ अग्रह्य है।}$$

$$\therefore p = 5$$

11. यदि समीकरण $x^2 - 5x + 6 = 0$ के मूल α तथा β हैं, तो $\alpha^2 + \beta^2$ का मान ज्ञात करें -

- (A) 12 (B) 13 (C) 20 (D) 10

(RRB राँची Asst. Driver, 2003)

Speedy Solution : (B)

$$\therefore x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ में}$$

$$a = 1, b = -5, c = 6$$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-5)}{1} = 5$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{6}{1} = 6$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (5)^2 - 2 \times 6 = 25 - 12 = 13$$

12. यदि $px^2 + qx + r = 0$ के मूलों के योग उसके गुणनफल के बराबर है, तो कौन-सा सही है -

- (A) $p+q=0$ (B) $q+r=0$ (C) $p+r=0$ (D) $p+q+r=0$

(RRB कोलकाता Asst. Driver, 2002)

Speedy Solution : (B)

$$px^2 + qx + r = 0 \text{ में}$$

$$a = p, b = q, c = r$$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{-q}{p}$$

$$\alpha\beta = \frac{r}{p}$$

प्रश्नानुसार,

$$\alpha + \beta = \alpha\beta$$

$$\Rightarrow \frac{-q}{p} = \frac{r}{p}$$

$$\Rightarrow -q = r$$

$$\Rightarrow 0 = r + q \Rightarrow p(q+r) = 0$$

$$\therefore q+r = 0$$

13. समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α, β हो, तो $\alpha^2 + \beta^2$ का मान क्या है ?

(A) $\frac{b^2 - 2ac}{a^2}$ (B) $\frac{b^2 + 2ac}{a^2}$ (C) $\frac{a^2}{b^2 - 2ac}$ (D) $\frac{a^2}{b^2 + 2ac}$

(RRB भुवनेश्वर A.S.M., 2002)

Speedy Solution : (A)

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2 \times \frac{c}{a} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

14. यदि α, β किसी समीकरण $(x-a)(x-b) = c$ के मूल हो, तो समीकरण $(x-\alpha)(x-\beta) + c = 0$ के मूल होंगे -

(A) a, c (B) b, c (C) a, b (D) $a+c, b+c$

(RRB चण्डीगढ़ T.C., 2002)

Speedy Solution : (C)

$$\therefore (x-a)(x-b) = c$$

$$x^2 - (a+b)x + (ab-c) = 0 \quad \dots(i)$$

यदि α, β समीकरण (i) के मूल हो, तो -

$$\alpha + \beta = (a+b) \quad \dots(ii)$$

$$\alpha\beta = (ab-c) \quad \dots(iii)$$

दिया गया समीकरण

$$(x-\alpha)(x-\beta) + c = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta + c = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - (a+b)x + (ab-c) + c = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - (a+b)x + ab = 0 \Rightarrow (x-a)(x-b) = 0$$

$$\therefore x = a \text{ तथा } b$$

15. द्विघात समीकरण जिसके मूलों का योगफल -2 है और मूलों का गुणफल -4 है, तो समीकरण ज्ञात करें ?

(A) $x^2 - 2x + 6 = 0$ (B) $x^2 - 2x - 4 = 0$

(C) $x^2 + 2x - 4 = 0$

(D) $x^2 + 5x + 6 = 0$

(RRB चण्डीगढ़ T.C., 2005)

Speedy Solution : (C)

द्विघात समीकरण

$$x^2 - (\text{मूलों का योगफल})x + \text{मूलों का गुणफल} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - (-2)x + (-4) = 0 \therefore x^2 + 2x - 4 = 0$$

16. समीकरण $x^2 - 19x + 10 = 0$ के दो मूल हैं, इन दो मूलों का योग है-

(A) $\frac{10}{19}$ (B) $\frac{19}{10}$ (C) 19 (D) -19

(RRB अजमेर Diesel Mach., 2004)

Speedy Solution : (C)

$$x^2 - 19x + 10 = 0$$

$$\therefore ax^2 + bx + c = 0$$

द्विघात समीकरण में मूलों का योगफल $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ होता है।

$$\text{यहाँ } a = 1, b = -19, c = 10$$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{-(-19)}{1} = 19$$

अतः दो मूलों का योग = 19

17. यदि समीकरण $x^2 + ax + b = 0$ और $x^2 + bx + a = 0$ का एक मूल उभयनिष्ठ (Common) हो, तो $(a+b)$ का मान होगा -

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) -1 (D) 2

(RRB जम्मू A.S.M., 2004)

Speedy Solution : (C)

$$x^2 + ax + b = 0$$

$$x^2 + bx + a = 0$$

माना कि दोनों में उभयनिष्ठ (common) मूल α है, तो

$$\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \quad \dots(i)$$

$$\alpha^2 + b\alpha + a = 0 \quad \dots(ii)$$

वज्र गुणनखण्ड विधि से,

$$\frac{\alpha^2}{(\alpha^2 - b^2)} = \frac{\alpha}{(b-a)} = \frac{1}{(b-a)}$$

$$\therefore \alpha^2 = \frac{(a^2 - b^2)}{(b-a)} = \frac{(a+b)(a-b)}{-(a-b)}$$

$$\alpha^2 = -(a+b) \text{ तथा}$$

$$\alpha = \frac{(b-a)}{(b-a)} = 1$$

$$a+b = -\alpha^2 = -(1)^2 = -1$$