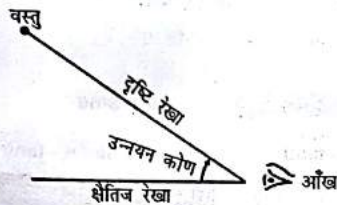
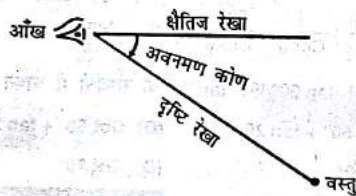


Important Term

1. **उन्नयन कोण (Angle of Elevation)** : जब कोई वस्तु नीचे से देखी जाती है तो देखने वाले की आँख से वस्तु को मिलाने वाली रेखा और क्षैतिज रेखा के बीच बना कोण, उन्नयन कोण कहलाता है।



2. **अवनमन कोण (Angle of Depression)** : जब कोई वस्तु ऊपर से देखी जाती है तो देखने वाले की आँख से वस्तु को मिलाने वाली रेखा और क्षैतिज रेखा के बीच जो कोण बनता है उसे अवनमन कोण कहते हैं।



लम्ब, आधार तथा कर्ण के बीच संबंध

- I. लम्ब - आधार = $\tan \theta$
 II. लम्ब - कर्ण = $\sin \theta$
 III. आधार - कर्ण = $\cos \theta$

महत्वपूर्ण त्रिकोणमितीय मान

| कोण | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° |
|-----|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|------------|
| sin | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| cos | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| tan | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | ∞ |

Important Theorem

1. एक मीनार के शिखर और जड़ से एक उर्ध्वाधर स्तम्भ के शिखर के अवनमन कोण क्रमशः α और β है। यदि स्तम्भ की ऊँचाई h हो, तो

मीनार की ऊँचाई होगी -
$$\frac{h \sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

2. किसी झील के जल की ऊपरी सतह से h मी. ऊँचाई पर एक दर्शक बादल का उन्नयन कोण θ एवं बादल के प्रतिबिम्ब का अवनमन कोण ϕ पाता है, तो दर्शक से बादल की दूरी होगी -

$$\frac{2h \cos \phi}{\sin(\phi - \theta)}$$

3. समतल भूमि पर खड़ी मीनार पूरब की ओर झुकी हुई। मीनार के पश्चिम की ओर दो स्थान उसके आधार से a और b की दूरी पर हैं ($b > a$)। यदि इन दोनों स्थानों से मीनार की चोटी के उन्नयन कोण α और β है तथा मीनार क्षैतिज के साथ θ कोण बनाती हो, तो

$$\cot \theta = \frac{b \cot \alpha \cdot a \cot \beta}{b - a} \text{ होगा।}$$

4. एक नियत बिन्दु से टीले के शीर्ष का उन्नयन कोण θ है। ϕ के कोण पर टीले के शीर्ष की ओर K दूरी तय करने के उपरान्त यह पता चलता है कि टीले के शीर्ष का उन्नयन कोण α हो गया है। तो टीले की ऊँचाई होगी -

$$= \frac{K(\cos \phi - \sin \phi \cdot \cot \alpha)}{\cot \theta - \cot \alpha}$$

5. क्षैतिज धरातल पर एक मीनार खड़ा है और उसके ऊपर h ऊँचाई का झंडा खड़ा है। धरातल के किसी बिंदु पर मीनार तथा झंडा क्रमशः α और β कोण बनाता है, तो मीनार की ऊँचाई होगी -

$$h \sin \alpha \cdot \operatorname{cosec} \beta \cdot \cos(\alpha + \beta)$$

6. किसी झील के तल से h ऊँचाई पर स्थित एक बिंदु A से बादल का उन्नयन कोण α है और उसी स्थान A से झील में उसी बादल का अवनमन कोण β हो, तो बादल की ऊँचाई होगी -

$$\frac{h \sin(\alpha + \beta)}{\sin(\beta + \alpha)}$$

ऊँचाई और दूरी के प्रश्नों को हल करने की विधि

- I. प्रश्न को बार-बार पढ़कर सही चित्र अंकित करें
 II. दिए गए कोणों एवं दूरियों अंकित करें।
 III. चित्र में समकोण त्रिभुजों को पहचानें और उनमें त्रिकोणमितीय अनुपात के आधार पर ज्ञात और अज्ञात भुजाएँ और कोणों में समीकरण प्राप्त करें।
 IV. समीकरण को हल कर अज्ञात दूरी या कोण को ज्ञात करें।

ऊँचाई और दूरी पर आधारित प्रश्न

TYPE - 1

1. एक मीनार के आधार से 20 मी. दूरी पर स्थित भूमि के एक बिन्दु से मीनार की चोटी का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात करें ?

Speedy Solution :-

यहाँ मीनार = AB और, C, भूमि पर का बिन्दु है।

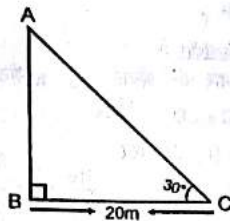
∴ ΔABC में,

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{20}$$

$$\therefore AB = \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{20 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$= \frac{20\sqrt{3}}{3} = \frac{20 \times 1.732}{3} = 11.55 \text{ m}$$



2. उस पतंग की डोरी की लम्बाई मालूम करो जो क्षैतिज तल के साथ 30° का कोण बनाती है। पृथ्वी से पतंग की ऊँचाई 75 m है। (यह कल्पना करो कि डोरी में ढील नहीं है।)

Speedy Solution :-

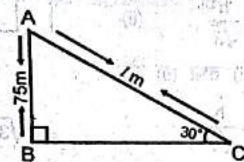
माना डोरी की लम्बाई AC = l मीटर

∴ ΔABC में,

$$\sin 30^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{75}{l}$$

$$\therefore l = 75 \times 2 = 150 \text{ मीटर}$$



TYPE - 2

3. नदी के किनारे एक आदमी खड़ा है। दूसरे किनारे पर ठीक उसके सामने एक वृक्ष है, जिसका शिखर उस स्थान से 60° कोण बनाता है। जब वह आदमी पीछे की ओर 16 मीटर हट जाता है तो वृक्ष 45° का कोण बनाता है। वृक्ष की ऊँचाई निकाले ?

Speedy Solution :-

माना वृक्ष की ऊँचाई AB = h मीटर

तथा नदी की चौड़ाई BC = x मीटर

∴ ΔABC में,

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

$$\therefore x = \frac{h}{\sqrt{3}} \quad \dots (i)$$

पुनः ΔABD में,

$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{BD}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{h}{x+16}$$

$$\therefore x = h - 16 \quad \dots (ii)$$

समी० (i) तथा (ii) से,

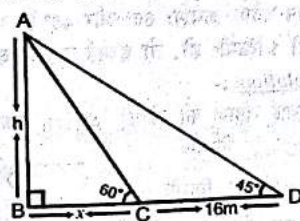
$$\frac{h}{\sqrt{3}} = h - 16$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{3}h - 16\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x + 16 = h$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{3}(h - 16)$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}h - h = 16\sqrt{3}$$



$$\Rightarrow h(\sqrt{3} - 1) = 16\sqrt{3}$$

$$\therefore h = \frac{16\sqrt{3}}{(\sqrt{3} - 1)} \times \frac{(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} + 1)} = \frac{48 + 16\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{2(24 + 8\sqrt{3})}{2} = 24 + 8\sqrt{3} = 8(3 + \sqrt{3}) \text{ मीटर}$$

4. भूमि के किसी बिन्दु से मीनार की चोटी का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ओर 30 मीटर जाने पर चोटी का उन्नयन कोण 60° हो जाता है। तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात करें ?

Speedy Solution :-

माना मीनार की ऊँचाई

AB = h मीटर तथा BD = x मीटर

∴ ΔADB में,

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{BD}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

$$\therefore x = \frac{h}{\sqrt{3}} \quad \dots (i)$$

पुनः ΔABC में,

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x+30}$$

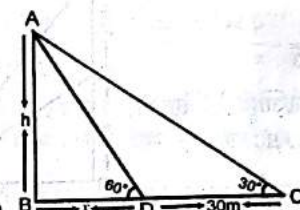
$$\therefore x = \sqrt{3}h - 30 \quad \dots (ii)$$

समी० (i) तथा (ii) से,

$$\frac{h}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}h - 30$$

$$\Rightarrow h = 3h - 30\sqrt{3}$$

$$\therefore h = \frac{30\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3} \text{ मीटर}$$



TYPE - 3

5. 20 मीटर ऊँची मीनार पर झंडा गड़ा है। जमीन पर स्थित एक बिन्दु से झंडे के पाद और शीर्ष के उन्नयन कोण क्रमशः 45° तथा 60° है, तो झंडे की खम्हे की लम्बाई ज्ञात करें ?

Speedy Solution :-

माना झंडे की खम्हे की लम्बाई AB = x मीटर

∴ ΔDBC में,

$$\tan 45^\circ = \frac{DB}{BC}$$

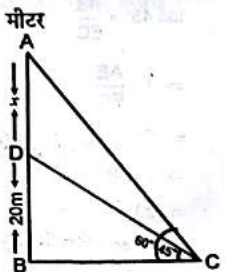
$$\Rightarrow 1 = \frac{20}{BC}$$

$$\therefore BC = 20$$

पुनः ΔABC में,

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x+20}{20}$$



$$\Rightarrow \sqrt{3} \times 20 = x + 20 \quad \Rightarrow 20\sqrt{3} = x + 20$$

$$\therefore x = 20\sqrt{3} - 20 = 20(\sqrt{3} - 1)$$

$$= 20(1.732 - 1) = 20 \times 0.732 = 14.640 \text{ मीटर}$$

6. मीनार पर 10 मीटर लम्बा एक झंडा खड़ा है। जमीन पर स्थित एक बिन्दु से झंडे के पाद और शीर्ष के उन्नयन कोण क्रमशः 30° और 60° है, तो मीनार की ऊँचाई निकाले ?

Speedy Solution :-

माना मीनार की ऊँचाई $DB = h$ मीटर तथा $BC = x$ मीटर

$\therefore \triangle DBC$ में,

$$\tan 30^\circ = \frac{DB}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x}$$

$$\therefore x = \sqrt{3}h \quad \dots(i)$$

पुनः $\triangle ABC$ में,

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{10+h}{\sqrt{3}h}$$

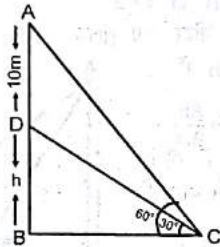
$$\Rightarrow 3h = 10 + h$$

$$\Rightarrow 2h = 10$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \times \sqrt{3}h = 10 + h$$

$$\Rightarrow 3h - h = 10$$

$$\therefore h = \frac{10}{2} = 5$$



TYPE - 4

7. एक ही क्षैतिज तल पर एक वृक्ष और 40 मीटर लम्बी एक मीनार है। मीनार की चोटी से वृक्ष के पाद और शीर्ष के अवनयन कोण क्रमशः 60° और 45° है, तो वृक्ष की ऊँचाई और दोनों के बीच की दूरी निकालें ?

Speedy Solution :-

माना वृक्ष की ऊँचाई $CD = x$ मीटर तथा $BD = y$ मीटर

$\therefore \triangle ABD$ में,

$$\tan 60^\circ = \frac{40}{y} \quad \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{40}{y}$$

$$\therefore y = \frac{40}{\sqrt{3}} = \frac{40}{1.732} = 23 \text{ मीटर (लगभग)}$$

पुनः $\triangle AEC$ में,

$$\tan 45^\circ = \frac{AE}{EC}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{AE}{EC}$$

$$\Rightarrow EC = AE$$

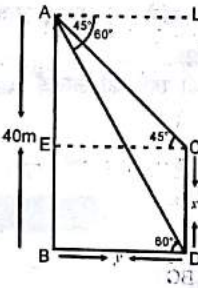
$$\Rightarrow y = 40 - x$$

$$\Rightarrow 23 = 40 - x$$

$$\therefore x = 40 - 23 = 17 \text{ मीटर (लगभग)}$$

$$\therefore \text{वृक्ष की ऊँचाई} = 17 \text{ मीटर (लगभग) तथा}$$

$$\text{वृक्ष और मीनार की बीच की दूरी} = 23 \text{ मीटर (लगभग)}$$



8. एक मीनार की चोटी से, एक 7 मीटर ऊँचे भवन के शिखर और आधार के अवनयन कोण क्रमशः 45° और 60° है, तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात करें ?

Speedy Solution :-

माना मीनार की ऊँचाई $AB = h$ मीटर

तथा $BC = ED = x$ मीटर

$$\therefore AE = (h - 7) \text{ मीटर}$$

$\therefore \triangle AED$ में,

$$\tan 45^\circ = \frac{AE}{ED}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{h-7}{x}$$

$$\therefore x = h - 7 \quad \dots(i)$$

पुनः $\triangle ABC$ में

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

$$\therefore x = \frac{h}{\sqrt{3}} \quad \dots(ii)$$

समी. (i) तथा (ii) से,

$$h - 7 = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

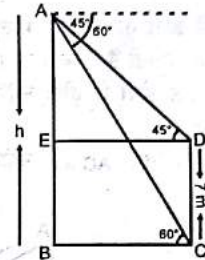
$$\Rightarrow \sqrt{3}h - 7\sqrt{3} = h$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}h - h = 7\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h(\sqrt{3} - 1) = 7\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h = \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{7\sqrt{3}}{(\sqrt{3} - 1)} \times \frac{(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} + 1)}$$

$$= \frac{21 + 7\sqrt{3}}{2} = \frac{21 + 7 \times 1.73}{2} = 16.56 \text{ मीटर}$$



TYPE - 5

9. एक हवाई जहाज से ठीक दाएँ और बाएँ नदी में दो जहाजों के अवनयन कोण क्रमशः 60° और 45° है। यदि दोनों जहाजों के बीच की दूरी 1 किमी हो, तो हवाई जहाज की ऊँचाई ज्ञात करें ?

Speedy Solution :-

माना हवाई जहाज की ऊँचाई $AB = h$ किमी

तथा $BD = x$ किमी

$$\therefore BC = (1 - x) \text{ किमी}$$

$\therefore \triangle ABC$ में

$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{h}{1-x}$$

$$\Rightarrow 1 - x = h$$

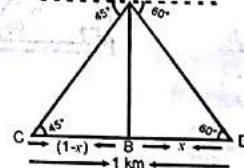
$$\therefore x = 1 - h \quad \dots(i)$$

पुनः $\triangle ABD$ में,

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{BD}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

$$\therefore x = \frac{h}{\sqrt{3}} \quad \dots(ii)$$



समी० (i) तथा (ii) से,

$$1 - h = \frac{h}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3} - \sqrt{3}h = h$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}h + h = \sqrt{3} \Rightarrow h(\sqrt{3} + 1) = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3} + 1)} \times \frac{(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} - 1)} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore h = \frac{3 - 1.732}{2} = \frac{1.268}{2} = 0.634 \text{ किमी} = 634 \text{ मीटर}$$

10. एक मीटर की चोटी पर बैठा हुआ आदमी पाता है कि उसके ठीक दाएँ और बाएँ जमीन पर दो वस्तुओं के अवनमन कोण क्रमशः 45° और 60° हैं। यदि मीनार की ऊँचाई 100 मीटर हो, तो दोनों वस्तुओं के बीच की दूरी निकाले ?

Speedy Solution :-

माना दोनों वस्तुओं के बीच की दूरी $AB = AQ + QB$

$\therefore \triangle PQA$ में,

$$\tan 45^\circ = \frac{PQ}{AQ}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{100}{AQ}$$

$\therefore AQ = 100$ मीटर

पुनः $\triangle PBQ$ में,

$$\tan 60^\circ = \frac{PQ}{BQ}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{100}{QB} \therefore QB = \frac{100}{\sqrt{3}} = \frac{100\sqrt{3}}{3} = 57.7 \text{ मीटर (लगभग)}$$

$$\therefore \text{वस्तुओं की बीच की दूरी } AB = AQ + QB = (100 + 57.7) \text{ मीटर} = 157.7 \text{ मीटर}$$

TYPE - 6

11. क्षैतिज तल पर स्थित किसी वस्तु का एक वृक्ष के शीर्ष से अवनमन कोण 60° है। 20 मीटर नीचे उतरने पर अवनमन कोण 30° हो जाता है। वृक्ष के पाद से वस्तु की दूरी और वृक्ष की ऊँचाई निकाले ?

Speedy Solution :-

माना वृक्ष के पाद से वस्तु की दूरी $BC = x$ मीटर

तथा वृक्ष की ऊँचाई $AB = y$ मीटर

$$\therefore BD = (y - 20) \text{ मीटर}$$

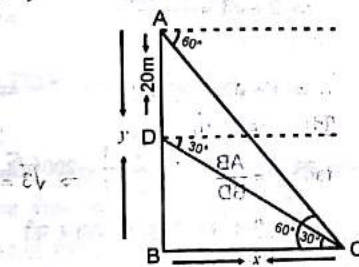
$\therefore \triangle ABC$ में,

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{y}{x}$$

$$\therefore y = \sqrt{3}x \quad \dots (i)$$

पुनः $\triangle DBC$ में,



$$\tan 30^\circ = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{y - 20}{x} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{3}} = y - 20$$

$$\therefore y = \frac{x}{\sqrt{3}} + 20 \quad \dots (ii)$$

समी० (i) तथा (ii) से,

$$\sqrt{3}x = \frac{x}{\sqrt{3}} + 20 \Rightarrow \sqrt{3}x - \frac{x}{\sqrt{3}} = 20 \Rightarrow \frac{3x - x}{\sqrt{3}} = 20$$

$$\Rightarrow 2x = 20\sqrt{3} \therefore x = \frac{20\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

$$\text{पुनः } y = \sqrt{3}x = \sqrt{3} \times 10\sqrt{3} = 10 \times 3 = 30 \text{ मीटर}$$

$$\therefore \text{दूरी } = x = 10\sqrt{3} \text{ मीटर} = 10 \times 1.732 = 17.32 \text{ मीटर}$$

तथा ऊँचाई $y = 30$ मीटर

12. भूमि के किसी बिन्दु से एक पतंग की तनी हुई डोरी की लम्बाई 85 मीटर है। यदि डोरी भूमि तल के साथ कोण θ इस प्रकार बनाए

कि $\tan \theta = \frac{15}{8}$ हो, तो पतंग कितनी ऊँचाई पर उड़ रही है ?

Speedy Solution :-

माना पतंग की ऊँचाई $AB = h$ मीटर

$\therefore \triangle ABC$ में,

$$\sin \theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{AB}{85} \quad \dots (i)$$

प्रश्न से,

$$\tan \theta = \frac{15}{8} = \frac{\text{ल.}}{\text{आ.}}$$

$$\text{कर्ण} = \sqrt{(\text{ल.})^2 + (\text{आ.})^2} = \sqrt{(15)^2 + (8)^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\text{ल.}}{\text{कर्ण}} = \frac{15}{17} \quad \dots (ii)$$

$$\frac{AB}{85} = \frac{15}{17}$$

$$\therefore AB = \frac{15 \times 85}{17} = 75 \text{ मीटर}$$

पतंग की ऊँचाई $AB = 75$ मीटर

13. हवा के झोंके से एक पेड़ का ऊपरी भाग टूटकर $2\sqrt{3}$ की दूरी पर 60° के कोण पर जमीन को छूता है, तो पेड़ की पहली ऊँचाई निकालें ?

Speedy Solution :-

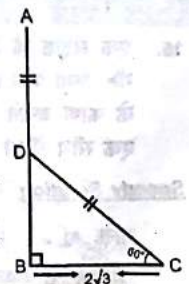
माना पेड़ की पहली ऊँचाई $AB = BD + DC$

$\therefore \triangle DBC$ में,

$$\tan 60^\circ = \frac{BD}{BC}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{BD}{2\sqrt{3}}$$

$$\therefore BD = \sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 6 \text{ मीटर}$$



पुनः $\triangle DBC$ में,

$$\cos 60^\circ = \frac{BC}{DC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{DC} \therefore DC = 2 \times 2\sqrt{3}$$

$$= 4 \times 1.732 = 6.928 \text{ मी} \approx 7 \text{ मीटर (लगभग)}$$

पेड़ की पहली ऊँचाई $AB = BD + DC$

$$= (6 + 7) \text{ मीटर} = 13 \text{ मीटर (लगभग)}$$

TYPE - 7

14. किसी एक बिन्दु से एक टावर का उन्नयन कोण का tangent, $\frac{5}{12}$

है। उस बिन्दु से 240 मीटर टावर की ओर बढ़ने पर यह मान $\frac{3}{4}$ हो जाता है। तो टावर की लम्बाई बतायें ?

Speedy Solution :-

माना टावर की ऊँचाई $OT = h$ मी., P बिन्दु से टावर का उन्नयन कोण का tangent, $\frac{5}{12}$ अर्थात् $\tan \theta = \frac{5}{12}$ यदि Q बिन्दु से टावर पर उन्नयन कोण α बन रहा हो, तो -

प्रश्न से,

$$\tan \alpha = \frac{3}{4}$$

अब $\triangle POT$ में,

$$\tan \theta = \frac{h}{OP} = \frac{h}{240 + x}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{12} = \frac{h}{240 + x}$$

पुनः $\triangle QOT$ में,

$$\tan \alpha = \frac{h}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{h}{x}$$

समी. (i) तथा (ii) से,

$$240 + \frac{4}{3}h = \frac{12}{5}h \Rightarrow 240 = \frac{12}{5}h - \frac{4}{3}h$$

$$\Rightarrow 240 = \frac{36h - 20h}{15} = \frac{16h}{15} \therefore h = \frac{240}{16} \times 15 = 225 \text{ मी.}$$

15. एक सड़क के किसी बिन्दु से सड़क के दोनों किनारे स्थित एक 6 मी. लम्बा पोल तथा एक अज्ञात लम्बाई का पेड़ क्रमशः 30° तथा 60° के कोण बनाते हैं। पेड़ की लम्बाई बतायें यदि बिन्दु पेड़ तथा पोल एक सीध में हो तथा पेड़ और पोल के बीच की दूरी 20 मीटर हो।

Speedy Solution :-

माना $AL = x$ मी.

$\therefore AO = (20 - x)$ मी.

$\triangle ALP$ में,

$$\tan 30^\circ = \frac{6}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6}{x}$$

$$\therefore x = 6\sqrt{3}$$

$$\therefore AO = 20 - x = 20 - 6\sqrt{3}$$

पुनः $\triangle OAT$ में,

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{AO} = \frac{h}{20 - 6\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{20 - 6\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow (20 - 6\sqrt{3})\sqrt{3} = h$$

$$\therefore h = 20\sqrt{3} - 18 \text{ मीटर}$$

16. एक झील से 200 मीटर ऊँचे किसी बिन्दु से एक हवाई जहाज का उन्नयन कोण 45° है और पानी में उनकी परछाई का अवनमन कोण 75° है, तो झील की सतह से हवाई जहाज की ऊँचाई कितनी होगी ?

Speedy Solution :-

माना कि BP झील का तल (सतह) है। झील के तल से 200 मी. ऊँचे एक बिन्दु A के जहाज C का उन्नयन कोण 45° है। जहाज C का झील में परछाई (प्रतिबिम्ब) का अवनमन कोण A से 75° है।

प्रश्न से,

$$AB = 200 \text{ मी.} = DP$$

$$\angle CAD = 45^\circ$$

$$\angle IAD = 75^\circ$$

$$PC = PI$$

[\therefore वस्तु की दूरी = प्रतिबिम्ब की दूरी]

माना कि $CD = x$ मी., तो

$$PC = PI = (x + 200) \text{ मी.}$$

$$\text{समकोण } \triangle ADC \text{ में, } \tan 45^\circ = \frac{CD}{AD}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{x}{AD} \therefore AD = x \quad \dots (i)$$

$$\text{समकोण } \triangle ADI \text{ में, } \tan 75^\circ = \frac{DI}{AD} = \frac{IP + PD}{x} = \frac{x + 200 + 200}{x}$$

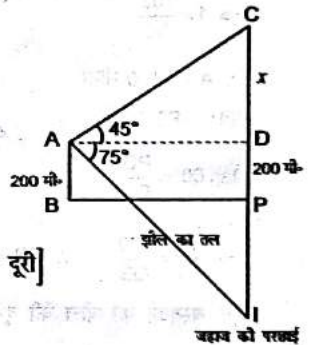
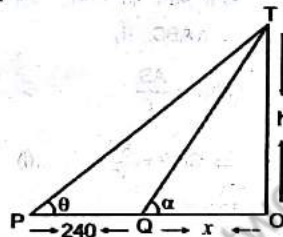
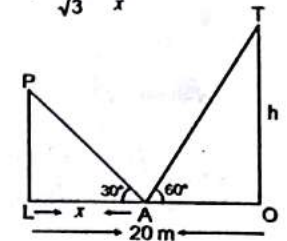
$$\Rightarrow 2 + \sqrt{3} = \frac{x + 400}{x} \Rightarrow 2x + \sqrt{3}x = x + 400$$

$$\Rightarrow x + \sqrt{3}x = 400 \Rightarrow x(\sqrt{3} + 1) = 400$$

$$\Rightarrow x = \frac{400}{\sqrt{3} + 1} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = 200(\sqrt{3} - 1) = (200\sqrt{3} - 200) \text{ मी.}$$

अतः झील की सतह से जहाज की

$$\text{ऊँचाई } PC = x + PD = (200\sqrt{3} - 200 + 220) \text{ मी.} = 200\sqrt{3} \text{ मी.}$$



PREVIOUS YEAR'S RRB'S QUESTIONS

1. एक सीधे खम्भे की परछाई उसकी ऊँचाई से $\sqrt{3}$ गुणा है। खम्भे का उन्नतांश कोण होगा -

(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) कोई नहीं

Speedy Solution : (A)

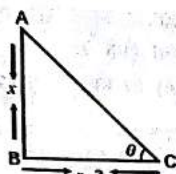
माना खम्भे का उन्नतांश कोण = θ

अतः खम्भे की परछाई = $x\sqrt{3}$

$$\tan \theta = \frac{\text{लम्बा}}{\text{आधार}}$$

$$\tan \theta = \frac{x}{x\sqrt{3}}$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ \therefore \theta = 30^\circ$$



2. एक व्यक्ति ऊर्ध्व निरीक्षण टॉवर से देखता है कि एक कार समान गति से टॉवर की तरफ आ रही है। यदि वह 30° से 45° डिप्रेशन कोण को बदलने में 12 मिनट लेती है, तो कितनी जल्दी वह कार निरीक्षण टॉवर पर पहुँच जाएगी ?

(A) 16 मिनट 23 सेकेण्ड (B) 18 मिनट 5 सेकेण्ड
(C) 14 मिनट 35 सेकेण्ड (D) 15 मिनट 49 सेकेण्ड

(RRB गोरखपुर ASM, 2002)

Speedy Solution : (A)

चूँकि $AQ = PQ \cot 30^\circ$

तथा $BQ = PQ \cot 45^\circ = PQ$ $[\because \cot 45^\circ = 1]$

\therefore 12 मिनट में तय की गई दूरी

$AB = AQ - BQ$

$= PQ(\cot 30^\circ - \cot 45^\circ) = PQ(\sqrt{3} - 1)$

AB दूरी तय करता है

$= 12$ मिनट में

\therefore BQ दूरी तय करेगा

$= \frac{12}{AB} \times BQ$ मिनट में

$= \frac{12 \times BQ}{PQ(\sqrt{3} - 1)}$ क्योंकि $BQ = PQ$

$= \frac{12(\sqrt{3} - 1)}{3 - 1} = 6 \times 2.732 = 16.392$ मिनट

$= 16$ मिनट 23 सेकेण्ड

3. 15 मीटर लम्बा एक खम्भा दीवार के सहारे जमीन के 60° कोण पर टिका हुआ है, तो खम्भा दीवार की किस ऊँचाई पर पहुँचेगा ?

(A) 10 मीटर (B) 12.99 मीटर (C) 9 मीटर (D) 11.50 मीटर

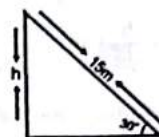
(RRB कोलकाता, भुवनेश्वर T.A., 2002)

Speedy Solution : (B)

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{15}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{15}$$

$$h = \frac{15 \times \sqrt{3}}{2} = 12.99 \text{ मीटर}$$

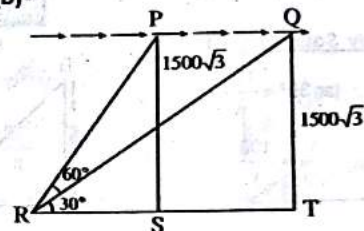


4. एक जेट प्लेन का उत्थापन कोण जमीन पर एक बिन्दु P से 60° है। 15 सेकेण्ड की उड़ान के बाद जेट प्लेट का उत्थापन कोण 30° हो जाता है। यदि जेट प्लेन $1500\sqrt{3}$ मीटर की समान ऊँचाई पर उड़ रहा है, तो जेट प्लेन की गति ज्ञात कीजिए -

(A) 34.64 मी/सेकेण्ड (B) 44.36 मी/सेकेण्ड
(C) 36.44 मी/सेकेण्ड (D) इनमें से कोई नहीं

(RRB गैरी ASM, 2002)

Speedy Solution : (D)



$$PS = QT = 1500\sqrt{3}$$

$$\text{या, } \sqrt{3} = \frac{1500\sqrt{3}}{RS}$$

$$\therefore RS = 1500 \text{ मीटर}$$

$$\text{पुनः } \tan 30^\circ = \frac{1500\sqrt{3}}{RT}$$

$$\text{या, } 1500 + ST = 4500$$

$$\therefore ST = 3000 \text{ मी.}$$

$$\text{अर्थात् 15 सेकेण्ड में चली गयी दूरी} = 3000 \text{ मी.}$$

$$\therefore \text{चाल} = \frac{3000}{15} = 200 \text{ मी/से.}$$

5. जब सूर्य का उन्नयन कोण 60° से 45° हो, जाता है तो एक मीनार की छाया 10 मीटर बढ़ जाती है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात करें -

(A) 15 मीटर (B) $15\sqrt{3}$ मीटर
(C) $15 + 5\sqrt{3}$ मीटर (D) $15 - 15\sqrt{3}$ मीटर

(RRB चेन्नई TC & CC, 2002)

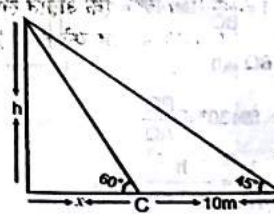
Speedy Solution : (C)

$$\therefore \tan 45^\circ = \frac{h}{x+10}$$

$$\text{या, } 1 = \frac{h}{x+10}$$

$$\therefore h = x + 10 \quad (i)$$

$$\text{पुनः } \tan 60^\circ = \frac{h}{x}$$



$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

∴ समी० (i) से,

$$h = \frac{h}{\sqrt{3}} + 10$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}h = h + 10\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h(\sqrt{3} - 1) = 10\sqrt{3}$$

$$\therefore h = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$= \frac{10\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{2} = 5\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1) = 15 + 5\sqrt{3}$$

6. एक समतल मैदान पर बिन्दु P से एक टॉवर के शीर्ष के एलिवेशन का कोण 30° है। यदि टॉवर की ऊँचाई 100 मीटर है, तो बिन्दु P की टॉवर के पैरों से लगभग दूरी होगा -

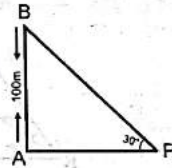
(A) 200 मीटर (B) 173 मीटर (C) 156 मीटर (D) 149 मीटर

(RRB गोरखपुर ASM, 2002)

Speedy Solution : (B)

$$\therefore \tan 30^\circ = \frac{100}{x}$$

$$\text{या, } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{100}{x}$$



$$\therefore x = 100\sqrt{3} = 100 \times 1.73 = 173 \text{ मीटर}$$

7. प्रकाश स्तम्भ के शीर्ष से दो जहाजों का अवनमन कोण पूर्व की तरफ 45° व 30° है। यदि जहाज 100 मीटर पृथक् हो, तो प्रकाश स्तम्भ की ऊँचाई कितनी है ?

(A) $\frac{50}{\sqrt{3} + 1}$ मीटर

(B) $\frac{50}{\sqrt{3} - 1}$ मीटर

(C) $50(\sqrt{3} - 1)$ मीटर

(D) $50(\sqrt{3} + 1)$ मीटर

(RRB कोलकाता, भुवनेश्वर T.C., 2003)

Speedy Solution : (D)

माना प्रकाश स्तम्भ PQ के शिखर P से A और B दो जहाजों के अवनमन कोण क्रमशः 30° तथा 45° है।

$$\therefore \angle SPA = \angle PAQ = 30^\circ$$

$$\text{तथा } \angle SPB = \angle PBQ = 45^\circ \text{ (एकान्तरकोण)}$$

समकोण $\triangle PBQ$ में

$$\tan 45^\circ = \frac{PQ}{BQ}$$

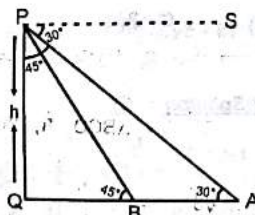
$$\Rightarrow 1 = \frac{h}{BQ} (\tan 45^\circ = 1)$$

$$\therefore BQ = h$$

$$\text{पुनः } \tan 30^\circ = \frac{PQ}{AQ}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{100 + h}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}h = 100 + h$$



$$\Rightarrow \sqrt{3}h - h = 100$$

$$\Rightarrow h = \frac{100}{\sqrt{3} - 1}$$

$$\Rightarrow h = \frac{100 \times (\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}$$

$$\Rightarrow h = \frac{100 \times (\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3})^2 - 1}$$

$$\Rightarrow h = \frac{100 \times (\sqrt{3} + 1)}{3 - 1}$$

$$\Rightarrow h = \frac{100 \times (\sqrt{3} + 1)}{2}$$

$$\therefore h = 50(\sqrt{3} + 1)$$

8. एक पतंग भूमि से 75 मीटर की ऊँचाई पर उड़ रही है। वह क्षैतिज से 60° पर आनत डोरी से बंधी है। डोरी की लम्बाई सन्निकट मीटर तक क्या होगी ?

(A) 87 मीटर (B) 260 मीटर (C) 98 मीटर (D) 69 मीटर

(RRB अहमदाबाद D.D., 2004)

Speedy Solution : (A)

$\triangle ABC$ में,

$$\sin 60^\circ = \frac{75}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{75}{AC}$$

$$\therefore AC = \frac{75 \times 2}{\sqrt{3}} = 25\sqrt{3} \times 2 = 50\sqrt{3} \text{ मीटर}$$

$$= 50 \times 1.732 = 86.600 \text{ मीटर} = 86.6 = 87 \text{ मीटर (लगभग)}$$

9. 10 मीटर तथा 15 मीटर ऊँचे दो खम्भे भू-सतह पर अवस्थित हैं। यदि उनके बीच की दूरी 12 मीटर है, तो उनके शीर्ष के बीच की दूरी होगी -

(A) 12 मीटर (B) 12.5 मीटर (C) 13 मीटर (D) 13.5 मीटर

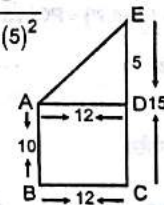
(RRB चण्डीगढ़ E.S.M., 2004)

Speedy Solution : (C)

$$\text{अभीष्ट दूरी} = \sqrt{(12)^2 + (5)^2}$$

$$= \sqrt{144 + 25}$$

$$= \sqrt{169} = 13 \text{ मीटर}$$



10. एक हवाई जहाज से ठीक दायें और बायें सड़क के दो लगातार मील के पत्थरों का अवनमन कोण 60° तथा 45° है। तो हवाई जहाज की ऊँचाई क्या होगी -

(A) 0.634 मील (B) 634 मील (C) 124 मील (D) 234 मील

(RRB कोलकाता A.S.M., 1998)

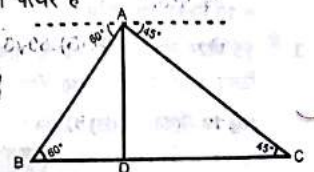
Speedy Solution : (A)

माना कि B एवं C मील के दो पत्थर हैं

तथा DC = 1 मील

$\triangle ADC$ में,

$$\tan 45^\circ = \frac{AD}{DC}$$



$$\Rightarrow 1 = \frac{AD}{DC}$$

$$\therefore AD = DC$$

पुनः $\triangle ABD$ में,

$$\tan 60^\circ = \frac{AD}{BD}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{1-x}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{3} - \sqrt{3}x$$

$$\Rightarrow x + \sqrt{3}x = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x(1 + \sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{1.732}{2.732} = 0.634 \text{ मील}$$

11. एक उर्ध्वाधर दीवार के सहारे 26 मीटर लम्बी सीढ़ी टिकी हुई है। यदि दीवार के पाद से सीढ़ी का पाद 10 मीटर की दूरी पर हो, तो जमीन से सीढ़ी के बाहरी किनारे की दूरी क्या होगी -

(A) 22 (B) 24 (C) 30 (D) 30

(RRB भौकेशनल, 2000)

Speedy Solution : (B)

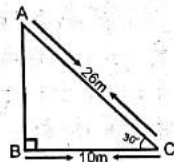
माना AB दीवार तथा AC सीढ़ी है।

$$\therefore AB^2 = AC^2 - BC^2$$

$$= (26)^2 - (10)^2$$

$$= 676 - 100 = 576$$

$$\therefore AB = \sqrt{576} = 24 \text{ मीटर}$$



12. नदी के 15 मीटर ऊँचे पुल से किसी नाव का अवनमन कोण 30° है। यदि नाव 6 किमी. प्रति घंटा की गति से चल रही है, तब नाव का नदी के पुल के ठीक नीचे पहुँचने में लगा समय क्या होगा ?

(A) 15.59 सेकेण्ड

(B) 14 सेकेण्ड

(C) 13 सेकेण्ड

(D) 12 सेकेण्ड

(RRB गोरखपुर A.S.M., 2002)

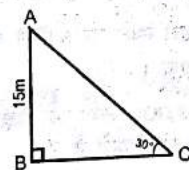
Speedy Solution : (A)

$\therefore \triangle ABC$ में,

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{15}{BC}$$

$$\therefore BC = 15\sqrt{3}$$



$$\therefore \text{अभीष्ट समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} = \frac{15\sqrt{3}}{6 \times \frac{5}{18}} = \frac{15\sqrt{3}}{5} \times 3$$

$$= 9\sqrt{3} = 9 \times 1.732 = 15.59 \text{ सेकेण्ड}$$

13. जब सूर्य क्षैतिज से 30° ऊपर हो, तो 50 मीटर ऊँचे भवन द्वारा डाली गई परछाई की लम्बाई क्या होगा -

(A) $25\sqrt{3}$ मीटर (B) $50\sqrt{3}$ मीटर (C) 50 मीटर (D) 25 मीटर

(RRB गोरखपुर Deasel Asstt., 2003)

Speedy Solution : (B)

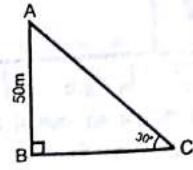
माना कि AB भवन है जिसकी परछाई BC है।

$\therefore \triangle ABC$ में,

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{50}{BC}$$

$$\therefore BC = 50\sqrt{3} \text{ मीटर}$$



14. एक मीनार क्षैतिज तल पर स्थित एक बिन्दु P पर α कोण बनाती है, उस बिन्दु से h मीटर ठीक ऊपर एक बिन्दु Q से मीनार की जड़ का अवनमन कोण β है, तो मीनार की ऊँचाई क्या है ?

(A) $h \cot \beta \tan \alpha$

(B) $h \tan \beta \cot \alpha$

(C) $h \sin \beta \cos \alpha$

(D) $h \cos \beta \sin \alpha$

(RRB कोलकाता A.S.M., 2004)

Speedy Solution : (A)

मान लिया कि AB मीनार है, जो क्षैतिज तल पर स्थित बिन्दु P पर $\angle APB = \alpha$ बनाती है, $PQ = h$ मीटर है। Q से मीनार की जड़ का अवनमन कोण β है।

$$\therefore \angle APB = \alpha$$

समकोण $\triangle QBP$ में,

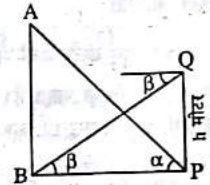
$$\cot \beta = \frac{BP}{PQ} = \frac{BP}{h}$$

$$\therefore BP = h \cot \beta \text{ मी.}$$

समकोण $\triangle ABP$ में

$$\tan \alpha = \frac{AB}{BP} = \frac{AB}{h \cot \beta}$$

$$\therefore AB = h \cot \beta \tan \alpha \text{ मी.}$$



15. सड़क के दूसरे किनारे पर एक खम्भा सामने की मकान के एक खिड़की से समकोण बनाता है। यदि खिड़की का उन्नयन कोण खम्भे के आधार से 60° है और सड़क की चौड़ाई 30 मी. हो, तो खिड़की की ऊँचाई कितनी है?

(A) 22 (B) 24 (C) $30\sqrt{3}$ (D) 30

(RRB भोपाल T.C., 2004)

Speedy Solution : (C)

मान लिया कि AB खम्भा तथा CD खिड़की की ऊँचाई है।

$$\angle ACB = 90^\circ, \angle CBD = 60^\circ$$

$$\therefore \angle ABC = 30^\circ$$

मान लिया कि खिड़की की ऊँचाई h है।

$$\therefore \text{समकोण } \triangle BCD \text{ में, } \tan 60^\circ = \frac{CD}{BD} = \frac{h}{30}$$

$$\therefore \sqrt{3} = \frac{h}{30}$$

$$\therefore h = 30\sqrt{3} \text{ मी.}$$

अतः खिड़की की ऊँचाई $= 30\sqrt{3}$ मी.

