# 46

# सदिश
## ( VECTOR )

### सदिश की परिभाषा एवं भेद

जिन राशियों (quantities) की माप की जा सकती है, उन्हें भौतिक राशियाँ कहते है। भौतिक राशियाँ दो प्रकार की होती है –

(i) अदिश राशियाँ (ii) सदिश राशियाँ

**अदिश राशियाँ :–** जिन भौतिक राशियों में केवल परिणाम होता है किन्तु संबंधित दिशा नहीं, उन्हें अदिश राशियाँ कहते है।

जैसे – द्रव्यमान, आयतन, लम्बाई, तापक्रम, दबाव, घनत्व, गति, कार्य शक्ति, ऊर्जा इत्यादि सभी अदिश राशियाँ है।

**सदिश राशियाँ :–** जिन भौतिक राशियों में परिणाम के साथ संबंधित दिशा भी होता है, उन्हें सदिश राशि कहते है।

जैसे – बल, वेग, त्वरण, विस्थापन इत्यादि।

**सदिशों का ज्यामितीय निरुपण (Geometrical Representation of Vectors) :–** दिष्ट रेखाखण्ड OP एक सदिश को प्रदर्शित करता है, जिसे $\vec{OP}$ से सूचित करते हैं। O को मूल बिन्दु तथा P को शीर्ष बिन्दु कहते है। यदि $\vec{OP}=\vec{r}$ तो $\vec{r}$, P का स्थिति सदिश (Position vector) कहलाता है।

**सदिश का मापांक (Modulus of vector) :–** सदिश के परिणाम के माप को सदिश मापांक कहते है। सदिश $\vec{a}$ के मापांक को संकेत में $|\vec{a}|$ से सूचित करते हैं।

### सदिश के प्रकार (Types of Vector)

1. **इकाई सदिश (Unit Vector) :** जिस सदिश का परिणाम इकाई हो, उसे इकाई सदिश कहते है।

   यदि $\vec{r}$ इकाई सदिश हो, तो $|\vec{r}|=1$

   $\vec{r}$ के अनुदिश इकाई सदिश को $\hat{r}$ से सूचित करते है।

   $\therefore \hat{r}=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad \Rightarrow \vec{r}=|\vec{r}|\hat{r}$

2. **वास्तविक सदिश (Proper Vector) :** जिस सदिश का परिणाम शून्य न हो, उसे वास्तविक सदिश कहते है।

3. **नियतांक सदिश (Constant Vector) :** उस सदिश को नियतांक सदिश कहते है, जिसमें नियतांक हो।

4. **शून्य सदिश (Null Vector) :** जिस सदिश का परिणाम शून्य हो, तो उसे शून्य सदिश कहते है। इसे संकेत में $\vec{0}$ से सूचित करते है।

5. **समान सदिश (Equal Vector) :** दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ समान सदिश कहलाते है। यदि उनकी दिशाएँ और परिणाम दोनों समान हो।

   $\vec{a}=\vec{b} \quad \Rightarrow |\vec{a}|=|\vec{b}|$

6. **समदिश तथा असमदिश सदिश (Like and unlike Vectors) :** दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ समदिश कहलाते है। यदि उनकी दिशाएँ एक ही हो। यदि सदिश $\vec{b}$ और $\vec{c}$ की दिशाएँ एक न हों, तो उन्हें असमदिश सदिश कहते है।

7. **समरेख सदिश (Collinear Vectors) :** दो या दो से अधिक सदिशों को समरेख सदिश कहते है, जो एक ही रेखा के समान्तर हो, चाहे उनका परिणाम कुछ भी हो।

   Ex :- $\vec{a}$, $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ समरेख सदिश है।

8. **एक तलीय सदिश (Coplanar Vector) :** उन सदिशों को एक तलीय सदिश कहते है। जो एक ही तल में स्थित हो या एक ही तल के समान्तर हो।

9. **ऋणात्मक सदिश (Negative Vector) :** उस सदिश को ऋणात्मक सदिश कहते है, जिसका परिणाम दिये गये सदिश $\vec{a}$ के परिणाम के बराबर हो, किन्तु दिशा सदिश $\vec{a}$ की दिशा के विपरीत हो। इसे $-\vec{a}$ से सूचित करते है।

10. **सदिशों का योग (Addition of Vectors) :** मान लिया कि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दो सदिश है तथा O एक निर्देश बिन्दु है तथा $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{AB}=\vec{b}$

    यदि, $\vec{OB}$ तथा $\vec{C}$ तो $\vec{C}=\vec{a}+\vec{b}$

    $\therefore \vec{OA}+\vec{AB}=\vec{OB}$

11. **सदिश योग के गुण (Properties of vector addition) :–**

    **(i) योग का क्रम विनिमेय नियम (Commutative law) :** सदिश योग, क्रम विनिमेय नियम का पालन करता है, यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो समुच्चय हो, तो $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

    **(ii) साहचर्य नियम (Association law) :** सदिश योग साहचर्य नियम का पालन करता है।

    यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ कोई तीन सदिश हो, तो $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$

    **(iii) योग तत्समक (Additive identity) :** यदि $\vec{a}$ कोई सदिश हो तथा शून्य $\vec{O}$ सदिश हो, तो $\vec{a}+\vec{O}=\vec{a}=\vec{o}+\vec{a}$

    यहाँ $\vec{O}$ को योग तत्समक कहते है।

    **(iv) योग प्रतिकूल (Addition Inverse) :** यदि $\vec{a}$ कोई सदिश हो, तो सदिश $(-\vec{a})$, $\vec{a}$ का योग प्रतिकूल सदिश कहलाता है।

    $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{O}$

12. **अदिश और सदिश का गुणन (Multiplication of vectors by scalars) :** यदि $\vec{a}$ एक सदिश है तथा m एक अदिश है, तो m $\vec{a}$ एक सदिश है, जिसका परिणाम $\vec{a}$ के परिणाम का $|m|$ गुणा है। इसकी दिशा $\vec{a}$ की दिशा में होती है, तो $m>0$ तथा विपरीत दिशा में होती है, तो $m<0$।

    अदिश और सदिश का गुणन साहचर्य और बंटन नियम का पालन करता है –

    (i) $m(n\vec{a})=n(m\vec{a})=(mn)\vec{a}$

    (ii) $(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$ तथा $m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$

13. **दो सदिशों के समांतर होने की शर्त (Condition for two vectors being Parallel) :** दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ समान्तर होंगे।

    यदि $\vec{a}=m\vec{b}$, m एक सदिश है।

14. **कोई दो समरेख सदिश रेखीय आधारित (Linearly dependent)** होते है। यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो सरेखी सदिश हो, तो

$\bar{a} = m\bar{b}$ $\Rightarrow (-1)\bar{a} + m\bar{b} = 0$

$\therefore$ $\bar{a}$ तथा $\bar{b}$ रैखिक आधारित है।

दो रैखिक आधारित सदिश समरेख होते हैं।

15. दो असरेखी सदिश रेखीय Independent होते है -

यदि $\bar{a}$ तथा $\bar{b}$ दो असरेखीय सदिश हो, तथा $x, y$ दो असदिश हो, जिससे $x\bar{a} + y\bar{b} = 0$, तो $x = 0$, $y = 0$

अतः तथा रेखीय Independent है।

दो रेखीय Independent सदिश असरेखीय होते है।

16. इकाई सदिश $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ :

माना कि $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ क्रमशः oX, oY, oZ के अनुदिश इकाई सदिश है। यदि $OA = x, OB = y$ तथा $OC = z$ तो

$\vec{OA} = x\vec{i}, \vec{OB} = y\vec{k}, \vec{OC} = z\vec{k}$

P का निर्देशांक (अंशों के सापेक्ष) $= (x, y, z)$

यदि $\vec{OP} = \vec{r}$ तो, $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ से, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

17. $\vec{r}$ का परिमाण (Modulus of $\vec{r}$):

यदि $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ तो $\vec{r}$ का परिमाण

$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

18. $\vec{r}$ की दिक्-कोज्या (Direction cosines of $\vec{r}$) : OP द्वारा अक्षों के साथ बने कोणों की कोज्या को दिक्-कोज्या कहते हैं। यदि $ox, oy, oz$ के साथ बने कोण क्रमशः $\alpha, \beta, \gamma$ है, जो $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ को OP की दिक्-कोज्या कहते है। इसे संकेत में $l, m, n$ से सूचित करते है।

$l = \cos\alpha, m = \cos\beta, n = \cos\gamma$

$\because \cos\alpha = \frac{x}{r}, \cos\beta = \frac{y}{r}, \cos\gamma = \frac{z}{r}$, तो

$\therefore l = \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $m = \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, तथा

$n = \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

## सदिश पर आधारित प्रश्न

1. यदि P और Q की स्थिति (position vector) क्रमशः $= \vec{i} + 3\vec{j} + 7\vec{k}$ तथा $5\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ हो, तो $\vec{PQ}$ क्या होगा ?

**Speedy Solution :-**

यदि O मूल बिन्दु हो, तो $\vec{PQ} = \vec{i} + 3\vec{j} + 7\vec{k}$, $\vec{OQ} = 5\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$

$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = (5\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}) - (\vec{i} + 3\vec{j} + 7\vec{k}) = 4\vec{i} - \vec{j} + 11\vec{k}$

2. किसी त्रिभुज ABC के शीर्ष क्रमशः $A(1,2,4), B(-2,2,1)$ तथा $C(2,4,2)$ हो, तो त्रिभुज किस प्रकार का होगा ?

**Speedy Solution :-**

मानलिया कि O मूल बिन्दु है।

$\therefore OA = (2,4,2) = \vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$, $OB = (-2,2,1) = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

$OC = (2,4,-3) = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$

$\therefore \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) - (\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}) = -3\vec{i} - 3\vec{k}$

$\therefore |\vec{AB}| = \sqrt{(3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = (2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}) - (-2\vec{i} + 2\vec{j}) + \vec{k} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$

$\therefore |\vec{BC}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$

$\vec{CA} = \vec{OA} - \vec{OC} = (\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}) - (2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}) = -\vec{i} - 2\vec{j} + 7\vec{k}$

$\therefore |\vec{CA}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 7^2} = \sqrt{1+4+49} = \sqrt{54}$

$\therefore AB^2 + BC^2 = 18 + 36 = 54 = CA^2$

$\therefore \Delta ABC$ एक समकोण त्रिभुज है।

3. यदि $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0, |\bar{a}| = 3, |\bar{b}| = 5, |c| = 7$ से सदिश $\bar{a}$ और $\bar{b}$ के बीच का कोण ज्ञात करें ?

**Speedy Solution :-**

$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0$

$\therefore (\bar{a} + \bar{b})^2 = (-\bar{c})^2$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2\bar{a}.\bar{b} = c^2$

$\Rightarrow |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 + 2|\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta = c^2$

जहाँ $\theta$ सदिश $\bar{a}$ और $\bar{b}$ के बीच का कोण है।

$\Rightarrow 3^2 + 5^2 + 2.3.\cos\theta = (7)^2$

$\Rightarrow 9 + 25 + 30\cos\theta = 49$ $\Rightarrow 30\cos\theta = 49 - 34 = 15$

$\therefore \cos\theta = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} = \cos 60°$

$\therefore \theta = 60°$

4. सदिशों $(1,2,-3), (-2,3,4), (3,0,1)$ और $(0,1,-1)$ का योग ज्ञात करें।

**Speedy Solution :-**

मानलिया कि $\bar{a} = (1,2,-3) = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$

$b = (-2,3,4) = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$

$\bar{c} = (0,1,-1) = \vec{j} + \vec{k}$

$\therefore \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d} = 2\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}$

## दो सदिशों का अदिश तथा सदिश गुणनफल

1. दो सदिशों का अदिश गुणन (Scalar or dot Product of two vectors) : दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ का अदिश या बिन्दु गुणन, जिनके बीच का कोण $\theta$ है, एक अदिश राशि है जिसे इस प्रकार परिभाषित करते है।

$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\theta=ab\cos\theta$

(i) यदि $\theta=0$ तो $\vec{a}.\vec{b}=ab\cos\theta=ab$

(ii) यदि $\theta=\frac{\pi}{2}$, तो $\vec{a}.\vec{b}=ab\cos\frac{\pi}{2}=ab.0=0 \Rightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$

(iii) यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ इकाई सदिश हो, तो $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=1$

$\therefore \vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=1.\cos\theta=\cos\theta$

(iv) यदि $\theta=\pi$ तो, $\vec{a}.\vec{b}=ab\cos\pi=ab(-1)=-ab$

(v) एक सदिश का वर्ग (Square of vector) :-

$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 0=a.a.1=a^2$

$\therefore (\vec{a})^2=(\vec{a})^2=\vec{a}.\vec{a}=a^2$

(vi) दो सदिशों के बीच कोण (Angle between two vectors) :-

$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\theta \qquad \therefore \cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

(vii) सदिश $\vec{a}$ का सदिश $\vec{b}$ की दिशा में प्रक्षेप

$=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}=\vec{a}.\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\vec{a}.\hat{b}$ तथा प्रक्षेप की लम्बाई $\left|\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}\right|$

(viii) सदिश $\vec{a}$ का $\vec{b}$ सदिश की दिशा में

प्रक्षेप $=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.\vec{b}=\hat{a}.\vec{b}$

(ix) $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ (क्रमविनिमेय नियम)

(x) $(x\vec{a}).\vec{b}=x(\vec{a}.\vec{b})=\vec{a}.(x\vec{b})$ (साहचर्य नियम)

(xi) $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ (बंटन नियम)

(xii) $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}-\vec{b}.\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=a^2-b^2$

(xiii) $(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})$

$=a^2+\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}+b^2=a^2+2\vec{a}.\vec{b}+b^2$

(xiv) $(\vec{a}-\vec{b})^2=(\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}-\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}$

$=a^2-2\vec{a}.\vec{b}+b^2$

(xv) दो सदिश $a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ तथा $b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ समान्तर होंगे यदि $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$

दोनों सदिश लम्बवत होंगे यदि $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

(xvi) $\vec{i}.\vec{i}=\vec{i}.\vec{j}=\vec{k}.\vec{k}=1$

$\vec{i}.\vec{j}=\vec{j}.\vec{k}=\vec{k}.\vec{j}=\vec{i}.\vec{k}=\vec{k}.\vec{i}=0$

2. दो सदिशों का रज्रगुणन या सदिश गुणन (cross product or vector product of two vectors) : दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ जिनके बीच कोण $\theta$ है, का सदिश गुणन $\vec{a}\times\vec{b}$ वह सदिश है जिसका परिणाम $ab\sin\theta$ है तथा जो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के तल के लम्बवत है।

$\therefore \vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}=ab\sin\theta\,\hat{n}$

जहाँ $\hat{n}$ इकाई सदिश है जिसकी दिशा $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के तल के लम्बवत है।

(i) $|\vec{a}\times\vec{b}|=ab\sin\theta$

(ii) $\vec{a}\times\vec{0}=0$

(iii) यदि $\vec{a}\times\vec{b}=0$, तो सदिश $\vec{a}||\vec{b}$ अथवा या, तो $\vec{a}=\vec{O}$ या $\vec{b}=\vec{O}$

(iv) यदि $\theta=90°$ i.e $\vec{a}\perp\vec{b}$ तो $\vec{a}\times\vec{b}=ab\sin 90°\,\vec{n}=ab\,\vec{n}$

$\therefore |\vec{a}\times\vec{b}||ab\,\vec{n}|=ab$

(v) त्रिभुज का क्षेत्रफल (जिसकी दो आसन्न भुजाएँ $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ है)

$=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$ सदिश क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$

(vi) $\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{b}\times\vec{a}$ (सदिश गुणन क्रमविनिमेय नियम का पालन नहीं करता)

$\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

(vii) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ (सदिश गुणन साहचर्य नियम का पालन नहीं करता है)

(viii) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})\neq\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ (बंटन नियम)

(ix) $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{i}\times\vec{i}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{k}\times\vec{k}=0\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$

$\vec{j}\times\vec{k}=i, \vec{k}\times\vec{i}=\vec{i}$

$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}, \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$

$\vec{i}\times\vec{k}=\vec{i}$

(x) यदि त्रिभुज ABC के शीर्षों के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ हों, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a})$

(xi) यदि $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=0$ तो बिन्दु $A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c})$ एक रैखिक होंगे।

i.e $\Delta ABC$ का सदिश क्षेत्रफल $=0$

(xii) $\vec{a}\times\vec{b}=0 \Rightarrow a=0$ या $b=0$ या $\vec{a}||\vec{b}$

(xiii) यदि $\vec{a}\times\vec{b}=0$ तो $\vec{a}||\vec{b}$

## PREVIOUS YEAR'S RRB'S QUESTIONS

**1.** यदि $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ दो इकाई सदिश जो $\theta$ कोण पर झुके है इस प्रकार है कि $\vec{a}+\vec{b}$ एक इकाई है तब $\theta$ का मान होगा –

(A) $\frac{2\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) इनमें कोई नहीं

(RRB कोलकाता T.A., 2003)

**Speedy Solution : (A)**

दिया गया है –

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|=1$ तब, $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}.\vec{b}$

$\Rightarrow 1=1+1+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \quad \Rightarrow \cos\theta=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\theta=-\frac{1}{2} \Rightarrow \theta=\frac{2\pi}{3}$

**2.** यदि $\vec{a}=2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}, \vec{b}=-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ और $\vec{c}=3\hat{i}+\hat{j}$ तब $\vec{a}+t\vec{b}$ सदिश $\vec{c}$ के लम्बवत है तो t का मान होगा –

(A) 8 (B) 4 (C) 6 (D) 2

(RRB भुवनेश्वर J.E., 2003)

**Speedy Solution : (A)**

$\vec{a}+t\vec{b}\perp\vec{c}\Rightarrow(\vec{a}+t\vec{b}).\vec{c}=0\Rightarrow\vec{a}.\vec{c}+t\vec{b}.\vec{c}=0\Rightarrow t=-\frac{\vec{a}.\vec{c}}{\vec{b}.\vec{c}}$

$\Rightarrow t=\frac{6+2+0}{-3+2+0}=8$

**3.** सदिश $\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ का सदिश $4\hat{i}-4\hat{j}+7\hat{k}$ पर प्रक्षेप होगा –

(A) $\frac{5\sqrt{6}}{10}$ (B) $\frac{19}{9}$ (C) $\frac{9}{19}$ (D) $\frac{\sqrt{6}}{19}$

(RRB सिकन्दराबाद Diesel Driver, 2002)

**Speedy Solution : (B)**

माना $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}, \vec{b}=4\hat{i}-4\hat{j}+7\hat{k}$

तब $\vec{a}$ का $\vec{b}$ पर प्रक्षेप $\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{4+8+7}{\sqrt{16+16+49}}=\frac{19}{9}$

**4.** यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो सदिश है तथा $\theta$ उनके मध्य कोण है तो $\left|\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right|$ का मान होगा –

(A) $\sin\frac{\theta}{2}$ (B) $\sin\theta$ (C) $2\sin\theta$ (D) $\sin2\theta$

(RRB अजमेर Loco Pilot, 2003)

**Speedy Solution : (A)**

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}.\vec{b}\Rightarrow|\vec{a}-\vec{b}|^2=1+1-2|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos\theta$

$\Rightarrow|\vec{a}-\vec{b}|^2=2-2\cos\theta\Rightarrow|\vec{a}-\vec{b}|^2=4\sin^2=\frac{\theta}{2}$

$\Rightarrow\left|\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right|^2=\sin^2\frac{\theta}{2} \quad \Rightarrow\left|\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right|=\sin\frac{\theta}{2}$

**5.** यदि सदिश $\hat{i}-2x\hat{j}-3y\hat{k}$ और $\hat{i}+3x\hat{j}+2y\hat{k}$ परस्पर समकोणीय हो तो बिन्दु $(x, y)$ का बिन्दु पथ होगा –

(A) एक वृत्त (B) एक दीर्घ वृत्त
(C) एक परवलय (D) एक सरल रेखा

(RRB मुम्बई E.S.M., 2004)

**Speedy Solution : (B)**

दिया गया है कि सदिश $\hat{i}-2x\hat{j}-3y\hat{k}$ व $\hat{i}+3x\hat{j}+2y\hat{k}$ समकोणीय है

अतः $(\hat{i}-2x\hat{j}-3y\hat{k}).(\hat{i}+3x\hat{j}+2y\hat{k})=0$

$\Rightarrow 1-6x^2-6y^2=0 \Rightarrow 6x^2+6y^2=1$ जो एक दीर्घ वृत्त है

**6.** माना ABC एक त्रिभुज है। उसके शीर्षों के स्थिति सदिश क्रमशः $7\hat{j}+10\hat{k}$, $-\hat{i}+6\hat{j}+6\hat{k}$ तथा $-4\hat{i}+9\hat{j}+6\hat{k}$ है तो $\Delta ABC$ है –

(A) समद्विबाहु (B) समबाहु (C) समकोण (D) इनमें कोई नही

(RRB राँची Diesel Driver, 2003)

**Speedy Solution : (A)**

$\vec{AB}=-\hat{i}-\hat{j}-4\hat{k}, \vec{BC}=-3\hat{i}+3\hat{j}$ और $\vec{CA}=4\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}$

$\therefore |\vec{AB}|=|\vec{BC}|=3\sqrt{2}$ और $|\vec{CA}|=6$

अतः स्पष्ट है कि, $|\vec{AB}|^2+|\vec{BC}|^2=|\vec{AC}|^2$ अतः त्रिभुज समद्विबाहु त्रिभुज है।

**7.** यदि $|\vec{a}.\vec{b}|=|\vec{a}\times\vec{b}|$ तो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के मध्य कोण होगा –

(A) 0° (B) 180° (C) 135° (D) 45°

(RRB कोलकाता T.A., 2004)

**Speedy Solution : (C)**

$|\vec{a}.\vec{b}|=|\vec{a}\times\vec{b}|\Rightarrow|\vec{a}||\vec{b}||\cos\theta|=|\vec{a}||\vec{b}||\sin\theta|$

$=|\cos\theta|=|\sin\theta|\Rightarrow\theta=45°, 135°$

**8.** यदि $\vec{a}.\vec{b}=0$ और $\vec{a}+\vec{b}$ सदिश $\vec{a}$ के साथ 30° का कोण बनाता है तो –

(A) $|\vec{b}|=2|\vec{a}|$ (B) $|\vec{a}|=2|\vec{b}|$

(C) $|\vec{a}|=\sqrt{3}|\vec{b}|$ (D) इनमें कोई नहीं

(RRB मालदा E.S.M., 2003)

**Speedy Solution : (C)**

$\vec{a}.\vec{b}=0\Rightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$

अतः सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}+\vec{b}$ एक समकोण त्रिभुज में $\Delta PQR$ में से

$\tan30°=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{3}|\vec{b}|$