

शेषफल प्रमेय (Remainder Theorem) : यदि $P(x)$ 1 या 1 से अधिक घात वाला कोई बहुपद (Polynomial) हो तथा a कोई वास्तविक संख्या (Real Number) हो, तो -

I. $P(x)$ को $(x-a)$ से भाग देने पर

$$\text{शेषफल} = P(a)$$

$$[\because x-a=0 \Rightarrow x=a]$$

II. $P(x)$ को $(x+a)$ से भाग देने पर

$$\text{शेषफल} = P(-a)$$

$$[\because x+a=0 \Rightarrow x=-a]$$

III. $P(x)$ को $(ax-b)$ से भाग देने पर

$$\text{शेषफल} = P\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$[\because ax-b=0 \Rightarrow ax=b \therefore x=\frac{b}{a}]$$

IV. $P(x)$ को $(ax+b)$ से भाग देने पर

$$\text{शेषफल} = P\left(-\frac{b}{a}\right) [\because ax+b=0 \therefore x=-\frac{b}{a}]$$

V. $P(x)$ को $(b-ax)$ से भाग देने पर

$$\text{शेषफल} = P\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$[\because b-ax=0 \Rightarrow b=ax \therefore x=\frac{b}{a}]$$

गुणनखण्ड प्रमेय (Factor Theorem) : यदि $P(x)$ 1 या 1 से अधिक घात वाला कोई बहुपद हो तथा a एक वास्तविक संख्या (Real Number) हो तो -

I. $(a-x), P(x)$ का एक गुणनखण्ड होगा,

$$\text{यदि } P(a)=0$$

II. $(a+x), P(x)$ का एक गुणनखण्ड होगा,

$$\text{यदि } P(-a)=0$$

III. $(ax-b), P(x)$ का एक गुणनखण्ड होगा,

$$\text{यदि } P\left(\frac{b}{a}\right)=0$$

IV. $(ax+b), P(x)$ का गुणनखण्ड होगा

$$\text{यदि } P\left(-\frac{b}{a}\right)=0$$

V. $(b-ax), P(x)$ का एक गुणनखण्ड होगा

$$\text{यदि } P\left(\frac{b}{a}\right)=0$$

शेषफल तथा गुणनखण्ड प्रमेय पर आधारित प्रश्न

TYPE - I

1. यदि $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 2$ को $(x-1)$ से भाग दिया जाए तो शेषफल क्या होगा ?

Speedy Solution :-

$$\because x-1=0$$

$$\therefore x=1$$

$$\text{शेषफल} = P(1)$$

$$= (1)^3 - 3 \times (1)^2 + 4 \times 1 + 2$$

$$= 1 - 3 + 4 + 2 = 7 - 3 = 4$$

2. यदि $P(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 4$ को $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ से भाग दिया जाए तो शेषफल ज्ञात करें ?

Speedy Solution :-

$$\because x + \frac{1}{2} = 0$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{शेषफल} = P\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 4$$

$$= -\frac{4}{8} - \frac{3}{4} - \frac{2}{2} - \frac{4}{1} = -\frac{50}{8} = -\frac{25}{4}$$

TYPE - 2

3. यदि $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 4$ और $g(x) = x - 2$ हो, तो क्या $g(x), P(x)$ का गुणनखण्ड है ?

Speedy Solution :-

$$\because x-2=0$$

$$\therefore x=2$$

$$\therefore \text{शेषफल} = P(2)$$

$$= (2)^3 - 3 \times (2)^2 + 4 \times 2 - 4 = 8 - 12 + 8 - 4 = 0$$

$$\therefore \text{गुणनखण्ड प्रमेय से,}$$

$$\therefore g(x) \text{ अर्थात् } (x-2), P(x) \text{ का गुणनखण्ड है।}$$

4. क्या $(x-3)$ बहुपद $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$ का गुणखण्ड है?

Speedy Solution :-

$$\because x-3=0$$

$$\therefore x=3$$

$$\therefore \text{शेषफल} = P(3)$$

$$= (3)^3 - 3 \times (3)^2 + 4 \times 3 - 12 = 27 - 27 + 12 - 12 = 0$$

\therefore गुणखण्ड प्रमेय से,

$(x-3)$, $P(x)$ का गुणखण्ड है।

TYPE - 3

5. K का मान ज्ञात करें यदि $x+3$, $3x^2 + Kx + 6$ का एक गुणखण्ड है ?

Speedy Solution :-

$$\text{माना } P(x) = 3x^2 + Kx + 6$$

$$\because x+3=0$$

$$\therefore x=-3$$

\therefore गुणखण्ड प्रमेय से,

$$P(-3) = 0$$

$$\Rightarrow 3 \times (-3)^2 + K \times (-3) + 6 = 0$$

$$\Rightarrow 27 - 3K + 6 = 0$$

$$\Rightarrow 3K = 33$$

$$\therefore K = \frac{33}{3} = 11$$

6. यदि $x-1$ बहुपद $ax^3 - 4ax + 4a - 1$ का गुणखण्ड है, तो a का मान ज्ञात करें ?

Speedy Solution :-

$$\text{माना } P(x) = ax^3 - 4ax + 4a - 1$$

$\therefore (x-1)$, $P(x)$ का गुणखण्ड है।

\therefore गुणखण्ड प्रमेय से,

$$P(1) = 0 \quad [\because x-1=0 \therefore x=1]$$

$$\Rightarrow a \times (1)^3 - 4a \times 1 + 4a - 1 = 0$$

$$\Rightarrow a - 4a + 4a - 1 = 0$$

$$\Rightarrow -3a + 3 = 0$$

$$\Rightarrow -3a = -3$$

$$\therefore a = \frac{-3}{-3} = 1$$

TYPE - 4

7. यदि $P(x) = x^3 + Kx^2 + hx + 6$ और $(x+1)$ तथा $(x-2)$, $P(x)$ के गुणखण्ड हो, तो h तथा K मान ज्ञात करें ?

Speedy Solution :-

$$\because x+1, P(x) \text{ का गुणखण्ड है।}$$

$$\therefore P(-1) = 0 \quad [\because x+1=0 \therefore x=-1]$$

$$\Rightarrow (-1)^3 + K \times (-1)^2 + h \times (-1) + 6 = 0$$

$$\Rightarrow -1 + K - h + 6 = 0$$

$$\therefore K - h = -5 \quad \dots (i)$$

पुनः $(x-2)$, $P(x)$ का गुणखण्ड है।

$$\therefore P(2) = 0 \quad [\because x-2=0 \therefore x=2]$$

$$\Rightarrow (2)^3 + K \times (2)^2 + h \times 2 + 6 = 0$$

$$\Rightarrow 8 + 4K + 2h + 6 = 0$$

$$\therefore 4K + 2h = -14 \quad \dots (ii)$$

समी. (i) तथा (ii) को हल करने पर,

$$h = 1, K = -4$$

8. यदि बहुपद $x^3 + 10x^2 + ax + b$, $(x-1)$ तथा $(x-2)$ से पूर्णतः विभाजित हो तो a तथा b का मान ज्ञात करें ?

Speedy Solution :-

$$\text{माना } P(x) = x^3 + 10x^2 + ax + b$$

$\therefore (x-1)$, $P(x)$ का गुणखण्ड है।

$$\therefore P(1) = 0 \quad [\because x-1=0 \therefore x=1]$$

$$\Rightarrow (1)^3 + 10 \times (1)^2 + a \times 1 + b = 0$$

$$\Rightarrow 1 + 10 + a + b = 0$$

$$\therefore a + b = -11 \quad \dots (i)$$

पुनः $(x-2)$, $P(x)$ का गुणखण्ड है।

$$\therefore P(2) = 0 \quad [\because x-2=0 \therefore x=2]$$

$$\Rightarrow (2)^3 + 10 \times (2)^2 + a \times 2 + b = 0$$

$$\Rightarrow 8 + 40 + 2a + b = 0$$

$$\therefore 2a + b = -48 \quad \dots (ii)$$

समी. (i) तथा (ii) को हल करने पर,

$$a = -37 \text{ तथा } b = 26$$

9. यदि $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - ax + b$ को $(x-1)$ तथा $(x+1)$ से भाग देने पर शेष क्रमशः 5 तथा 19 बचता हो, तो a तथा b का मान बतायें ?

Speedy Solution :-

$\therefore f(x)$ को $(x-1)$ तथा $(x+1)$ से भाग देने पर 5 तथा 19 शेष बचता है।

$$\therefore f(1) = 5 \quad [\because x-1=0 \therefore x=1]$$

$$\Rightarrow (1)^4 - 2 \times (1)^3 + 3 \times (1)^2 - a \times 1 + b = 5$$

$$\Rightarrow 1-2+3-a+b=5$$

$$\therefore -a+b=3 \quad \dots (i)$$

$$\text{पुनः } f(-1)=19 \quad [\because x+1=0 \quad \therefore x=-1]$$

$$\Rightarrow (-1)^4 - 2 \times (-1)^3 + 3 \times (-1)^2 - a \times (-1) + b = 19$$

$$\Rightarrow 1+2+3+a+b=19$$

$$\therefore a+b=13 \quad \dots (ii)$$

समी० (i) तथा (ii) को हल करने पर

$$a=5 \text{ तथा } b=8$$

10. यदि $(x-2)$ बहुपद $x^3 - 4x^2 + ax + b$ तथा $x^3 - ax^2 + bx + 8$ का गुणनखण्ड हो, तो a तथा b का मान ज्ञात करें ?

Speedy Solution :-

$$\text{माना } P(x) = x^3 - 4x^2 + ax + b$$

$$\text{तथा } g(x) = x^3 - ax^2 + bx + 8$$

$\therefore (x-2), P(x)$ तथा $g(x)$ का गुणनखण्ड है।

$$\therefore P(2)=0 \quad [\because x-2=0 \quad \therefore x=2]$$

$$\Rightarrow 2a+b=8 \quad \dots (i)$$

$$\text{पुनः } g(2)=0$$

$$\Rightarrow 2a-b=8 \quad \dots (ii)$$

समी० (i) तथा (ii) से

$$a=4 \text{ तथा } b=0$$

11. व्यंजक $ax^3 + 3x^2 - 3$ और $2x^3 - 5x + a$ को $x-4$ से भाग दे तो समान शेष बचता है, तो a का मान ज्ञात करें ?

Speedy Solution :-

$$\therefore x-4=0 \quad \therefore x=4$$

$$a \times (4)^3 + 3 \times (4)^2 - 3 = 2 \times (4)^3 - 5 \times 4 + a$$

$$\Rightarrow 64a + 48 - 3 = 128 - 20 + a$$

$$\therefore a=1$$

TYPE - 5

12. यदि $x-5$ तथा $x-K$, $x^2 - 3x - 10$ का गुणनफल हो, तो K का मान ज्ञात करें ?

Speedy Solution :-

प्रश्न से,

$$(x-5)(x-K) = x^2 - 3x - 10$$

$$\Rightarrow x^2 - (5+K)x + 5K = x^2 - 3x - 10$$

$$\therefore 5K = 10 \quad \therefore K = \frac{10}{5} = 2$$

13. यदि $x+K$ बहुपद $x^2 + px + q$ और $x^2 + lx + m$ का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड हो, तो K का मान बतायें ?

Speedy Solution :-

$$\therefore (x+K), x^2 + px + q \text{ का गुणनखण्ड है।}$$

$$\therefore K^2 - pK + q = 0 \quad \dots (i)$$

$$\text{पुनः } (x+K), x^2 + lx + m \text{ का गुणनखण्ड है।}$$

$$\therefore K^2 - lK + m = 0 \quad \dots (ii)$$

समी० (i) - (ii) से

$$(p-l)K = q-m \quad \therefore K = \frac{q-m}{p-l}$$

TYPE - 6

14. यदि समीकरण $x^2 + ax + b = 0$ और $x^2 + bx + a = 0$ का एक मूल उभयनिष्ठ हो, तो $(a+b)$ का मान होगा -

Speedy Solution :-

$$x^2 + ax + b = 0$$

$$x^2 + bx + a = 0$$

माना कि दोनों में उभयनिष्ठ मूल α है, तो

$$\alpha^2 + a\alpha + b = 0$$

$$\alpha^2 + b\alpha + a = 0$$

वज्र गुणनखण्ड विधि से,

$$\frac{\alpha^2}{(\alpha^2 - b^2)} = \frac{\alpha}{(b-a)} = \frac{1}{(b-a)}$$

$$\therefore \alpha^2 = \frac{(a^2 - b^2)}{(b-a)} = \frac{(a+b)(a-b)}{-(a-b)}$$

$$\alpha^2 = -(a+b) \text{ तथा } \alpha = \frac{(b-a)}{(b-a)} = 1$$

$$\therefore a+b = -\alpha^2 = -(1)^2 = -1$$

15. यदि $5x^3 - 5x^2 + 6x + 9$, $(x+3)$ से विभाज्य हो, तो शेषफल है -

Speedy Solution :-

$$\text{माना } p(x) = 5x^3 - 5x^2 + 6x + 9$$

$$\therefore x+3=0$$

$$\therefore x=-3$$

$$\therefore \text{शेषफल} = p(-3)$$

$$= 5 \times (-3)^3 - 5 \times (-3)^2 + 6 \times (-3) + 9$$

$$= -135 - 45 - 18 + 9$$

$$= -198 + 9 = -189$$

PREVIOUS YEAR'S RRB'S QUESTIONS

1. यदि $2x^3 + 4x^2 + 2ax + b$ पूरी तरह $(x^2 - 1)$ से विभाजित हो जाए, तो a और b के मान क्रमशः होंगे -

(A) 1, 3 (B) -1, -4 (C) -1, 4 (D) 1, -2

[R चंडीगढ़ T.C., 2002]

Speedy Solution : (B)

माना $p(x) = 2x^3 + 4x^2 + 2ax + b$

$\therefore x^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 1$

$\therefore x = \sqrt{1} = \pm 1$

$\therefore p(1) = 0$

$\Rightarrow 2 \times (1)^3 + 4 \times (1)^2 + 2a \times 1 + b = 0$

$\Rightarrow 2 + 4 + 2a + b = 0$

$\therefore 2a + b = -6 \quad \dots(i)$

पुनः $p(-1) = 0$

$\Rightarrow 2 \times (-1)^3 + 4 \times (-1)^2 + 2a \times (-1) + b = 0$

$\Rightarrow -2 + 4 - 2a + b = 0$

$\therefore -2a + b = -2 \quad \dots(ii)$

\therefore समी० (i) तथा (ii) से,

$a = -1$ तथा $b = -4$

2. यदि बहुपद $x^4 - 8x^3 + x^2 + 3x - 6$ को $(x + 2)$ से भाग दिया जाए तो शेषफल क्या होगा ?

(A) 45 (B) 50 (C) 48 (D) 72

[RRB कोलकाता Goods Guard, 2002]

Speedy Solution : (D)

माना $p(x) = x^4 - 8x^3 + x^2 + 3x - 6$

$\therefore x + 2 = 0$

$\therefore x = -2$

\therefore शेषफल प्रमेय से,

शेषफल $= p(-2)$

$= (-2)^4 - 8 \times (-2)^3 + (-2)^2 + 3 \times (-2) - 6$

$= 16 + 64 + 4 - 6 - 6 = 72$

3. यदि $4y^3 - 3y^2 + 2y - 1$ को $(y + 2)$ से भाग दिया जाए तो शेषफल क्या बचेगा ?

(A) 43 (B) 47 (C) 41 (D) -49

[RRB राँची Asst. Driver, 2003]

Speedy Solution : (D)

माना $p(x) = 4y^3 - 3y^2 + 2y - 1$

$\therefore y + 2 = 0$

$\therefore y = -2$

\therefore शेषफल $= p(-2)$

$= 4 \times (-2)^3 - 3 \times (-2)^2 + 2 \times (-2) - 1$

$= 4 \times (-8) - 3 \times 4 - 4 - 1 = -32 - 12 - 4 - 1 = -49$

4. यदि $x^3 + 5x^2 + 10k$ में $(x^2 + 2)$ से भाग देने पर शेषफल $-2x$ बचता हो, तो k का मान है -

(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

[RRB भुवनेश्वर T.C., 2003]

Speedy Solution : (C)

माना $p(x) = x^3 + 5x^2 + 10k$

$\therefore x^2 + 2 = 0$

$\therefore x^2 = -2$

\therefore शेषफल प्रमेय से,

शेषफल $= -2x$

$\Rightarrow (-2) \times x + 5 \times (-2) + 10k = -2x$

$\Rightarrow -2x - 10 + 10k = -2x \quad \Rightarrow -2x + 2x - 10 + 10k = 0$

$\Rightarrow -10 + 10k = 0 \quad \Rightarrow 10k = 10$

$\therefore k = \frac{10}{10} = 1$

5. यदि $-24x^4y^4 + 30x^5y^5 - 36x^7y^3$ को $-6x^2y^3$ से भाग दिया जाए तो भागफल होगा -

(A) $4x^2y - 5x^3y^2 + 6x^5$ (B) $4x^2y^3 - 5x^3y^2 - 6x^5$

(C) $4x^2y^3 + 5x^3y^2 - 6x^5$ (D) $-4x^2y^3 + 5x^3y^2 + 6x^5$

[RRB राँची A.S.M., 2003]

Speedy Solution : (A)

$\therefore \frac{-24x^4y^4 + 30x^5y^5 - 36x^7y^3}{-6x^2y^3}$

$= \frac{-6x^2y^3(4x^2y - 5x^3y^2 + 6x^5)}{-6x^2y^3} = 4x^2y - 5x^3y^2 + 6x^5$

6. जब बहुपद $x^3 + 3x^2 - kx + 4$ को $x-2$ से भाग दिया जाता है, तो शेष k बचता है, तो अचर k का मान क्या होगा ?

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10

(RRB अहमदाबाद Diesel Driver., 2004)

Speedy Solution : (C)

$$\text{माना } p(x) = x^3 + 3x^2 - kx + 4$$

$$\therefore x-2=0$$

$$\therefore x=2$$

\therefore शेषफल प्रमेय से,

$$p(2)=k$$

$$\Rightarrow (2)^3 + 3 \times (2)^2 - k \times 2 + 4 = k$$

$$\Rightarrow 8 + 12 - 2k + 4 = k \Rightarrow 24 = k + 2k$$

$$\Rightarrow 3k = 24 \quad \therefore k = \frac{24}{3} = 8$$

7. यदि $(b-2)$, $x^2 + 3qx - 2q$ का गुणक है, तो q का मान होगा -

(A) 2 (B) -2 (C) 1 (D) -1

(RRB बंगलूर A.S.M., 2004)

Speedy Solution : (D)

$$\text{माना } p(x) = x^2 + 3qx - 2q$$

$$\therefore x-2=0$$

$$\therefore x=2$$

\therefore शेषफल प्रमेय से

$$p(2)=0$$

$$\Rightarrow (2)^2 + 3 \times q \times 2 - 2q = 0 \Rightarrow 4 + 6q - 2q = 0$$

$$\Rightarrow 4q = -4 \quad \therefore q = \frac{-4}{4} = -1$$

8. यदि $x^2 + Kx + 12$ का गुणक $x+3$ हो, तो K बराबर है-

(A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) 5

(RRB चंडीगढ़ T.C., 2004)

Speedy Solution : (B)

$$\text{माना } p(x) = x^2 + Kx + 12$$

$$\therefore x+3=0$$

$$\therefore x=-3$$

\therefore शेषफल प्रमेय से,

$$p(-3)=0$$

$$\Rightarrow (-3)^2 + K(-3) + 12 = 0 \Rightarrow 9 - 3K + 12 = 0$$

$$\Rightarrow 21 - 3K = 0 \Rightarrow 3K = 21$$

$$\therefore K = \frac{21}{3} = 7$$

9. यदि $(x^2 - 3x + 2)$, $(x^4 - px^2 + q)$ का गुणखंड हो, तो p तथा q का मान क्या होगा ?

(A) 2, 1 (B) 3, 2 (C) 4, 3 (D) 5, 4

(RRB भोपाल A.S.M., 2001)

Speedy Solution : (D)

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

$$\therefore x-1 \text{ गुणखंड है } f(x) = x^4 - px^2 + q$$

$$\Rightarrow f(1) = 0$$

$$\Rightarrow 1 - p + q = 0 \quad \dots(i)$$

$$\text{पुनः } x-2 \text{ गुणखंड है } f(x) = x^4 - px^2 + q$$

$$\Rightarrow f(2) = 0 \Rightarrow 16 - 4p + q = 0$$

$$\Rightarrow 4p - q = 16 \quad \dots(ii)$$

समी. (i) तथा (ii) को हल करने पर,

$$p = 5 \text{ और } q = 4$$

10. $4y^3 - 3y^2 + 2y - 1$ को $y+2$ से भाग दिया जाए, तो शेषफल क्या बनेगा ?

(A) 43 (B) 47 (C) -41 (D) -49

(RRB अहमदाबाद T.A., 2004)

Speedy Solution : (D)

$$\text{माना } p = 4y^3 - 3y^2 + 2y - 1$$

$$\therefore y+2=0$$

$$\therefore y=-2$$

$$\therefore \text{शेषफल} = p(-2)$$

$$= 4 \times (-2)^3 - 3 \times (-2)^2 + 2 \times (-2) - 1$$

$$= -32 - 12 - 4 - 1 = -49$$

11. यदि $(x+1)$ तथा $(x-2)$ के गुणक हैं $x^3 + ax^2 - bx - 6$ तो 'a' तथा 'b' का मान ज्ञात कीजिए -

$$(A) a = 3, b = 4$$

$$(B) a = 2, b = 5$$

$$(C) a = -2, b = -5$$

$$(D) a = 5, b = 0$$

(RRB अजमेर A.S.M., 2003)

Speedy Solution : (B)

$$(x+1) \text{ तथा } (x-2) \text{ का गुणक } = x^2 - x - 2$$

$$x^2 - x - 2 \mid x^3 + ax^2 - bx - 6$$

$$\underline{x^3 - x^2 - 2x}$$

$$ax^2 + x^2 - bx + 2x - 6$$

$$\underline{3x^2 - 3x - 6}$$

$$\times$$

$$x^2(a+1) = 3x^2$$

$$\Rightarrow a+1=3 \quad \therefore a=2$$

$$\therefore -bx + 2x = -3x$$

$$\Rightarrow -(b-2)x = -3x$$

$$\Rightarrow b-2=3$$

$$\therefore b=5$$