ĐẠI SỐ (CƠ SỞ)

Tài liệu ôn thi cao học năm 2005

Phiên bản đã chỉnh sửa

TS Trần Huyên

Ngày 23 tháng 11 năm 2004

Bài 4. Các Bài Toán Kiểm Tra Nhóm Con Chuẩn Tắc

Một nhóm con A của nhóm X được gọi là nhóm con chuẩn tắc (hay ước chuẩn tắc) của X, nếu A thỏa thêm điều kiện:

$$\forall x \in X, \quad \forall a \in A \quad \text{thì} \quad xax^{-1} \in A \quad (*)$$

$$(\text{ hoặc } x^{-1}ax \in A)$$

Điều kiện $(*)$ được gọi là điều kiện chuẩn tắc
Vậy : $A \lhd X$ nếu $A \Subset X$ và A thỏa điều kiện chuẩn tắc.
Và để kiểm tra $A \lhd X$ thì ta phải kiểm tra :

- A là nhóm con của X và sau đó tiếp tục
- Kiểm tra A thỏa điều kiện chuẩn tắc.

Ví dụ 1. Cho nhóm

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : ac \neq 0 \right\} \text{ và } A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : c \neq 0 \right\}$$

Chứng minh rằng : $A \lhd X$

GIẢI:

Hiển nhiên là $A \neq \varnothing$. Trước hết ta chứng minh $A \Subset X$.
Thật vậy:

- $\forall \begin{bmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \in A : \begin{bmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b_2 + b_1c_2 \\ 0 & c_1c_2 \end{bmatrix}$

  với $c_1c_2 \neq 0$, nên $\begin{bmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \in A$.

- $\forall \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in A$ thì $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & c \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -b/c \\ 0 & 1/c \end{bmatrix} \in A$

Theo tiêu chuẩn 2 về nhóm con ta có $A \underset{\text{n}}{\subset} X$
Tiếp tục kiểm tra điều kiện chuẩn tắc:

- $\forall \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in X, \forall \begin{bmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \in A$ thì:

  $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/a & -b/ac \\ 0 & 1/c \end{bmatrix} =$

  $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \in A$

(với $x = \dfrac{-b}{c} + \dfrac{ab_1 + bc_2}{c}$, tuy nhiên ở đây có thể ta không cần tính cụ thể x, vì đòi hỏi một ma trận thuộc A chỉ cần có số 1 ở góc trên bên trái và $c_1 \neq 0$).
Vậy: $A \lhd X$

Ví dụ 2. Cho nhóm $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(k_1, k_2) : k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\}$ với phép toán hai ngôi:

$$(k_1, k_2)(l_1, l_2) = (k_1 + l_1, k_2 + (-1)^{k_1} l_2)$$

(đã kiểm tra X là nhóm trong ví dụ 1.§1)
Chứng minh rằng nhóm con A sinh bởi phần tử $a = (0, 1)$ là nhóm con chuẩn tắc của X.
Phân tích ban đầu: Trong bài toán này giả thiết đã cho A là nhóm con $< a >$. Vì vậy chỉ còn phải kiểm tra A thoả điều kiện chuẩn tắc. Tuy nhiên muốn làm điều đó thì phải biết được dạng tổng quát phần tử của A, tức trước hết phải mô tả tường minh các phần tử của A.

GIẢI:

Ta có: $A =< a >= \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$ với $a = (0, 1)$
Trước hết ta chỉ ra $(0, 1)^n = (0, n)$ khi $n > 0$ theo qui nạp.
Thật vậy:
Với $n = 1$ thì $(0, 1)^1 = (0, 1)$
Giả sử $(0, 1)^{n-1} = (0, n - 1)$ với $n \geq 2$
Khi đó: $(0, 1)^n = (0, n - 1)(0, 1) = (0 + 0, n - 1 + (-1)^0 1) = (0, n)$
Vậy: $(0, 1)^n = (0, n)$ với mọi $n > 0$
Với $n < 0$ thì $-n > 0$ nên:
$(0, 1)^n = [(0, 1)^{-n}]^{-1} = (0, -n)^{-1} = (0, (-1)^{0+1}(-n)) = (0, n)$
Cuối cùng: $(0, 1)^0 = (0, 0)$.
Vậy: $A = \{(0, 1)^n : n \in \mathbb{Z}\} = \{(0, n) : n \in \mathbb{Z}\}$
Bây giờ ta kiểm tra A thỏa điều kiện chuẩn tắc:
$\forall (k_1, k_2) \in X, \quad \forall (0, n) \in A$:

$(k_1, k_2)(0, n)(k_1, k_2)^{-1} = (k_1, k_2)(0, n)(-k_1, (-1)^{k_1+1}k_2) = (0, m) \in A$
(với $m = (-1)^{k_1}n$; tuy nhiên giá trị m có thể không phải tính cụ thể vì đòi hỏi phần tử thuộc A chỉ cần thành phần đầu bằng 0 là đủ !)
Kết luận: $A \lhd X$

Ví dụ 3. Cho nhóm X như ví dụ 2, và cho tập

$$B = \{(n, 0) : n \in \mathbb{Z}\} \subset X$$

Chứng minh rằng B là nhóm con không chuẩn tắc của X.

GIẢI:

Để kiểm tra $B \Subset X$, ta có thể dùng tiêu chuẩn 2

- $\forall (n, 0), (m, 0) \in B$ ta có:
  $(n, 0)(m, 0) = (n + m, 0) \in B$
- $\forall (n, 0) \in B : (n, 0)^{-1} = (-n, 0) \in B$

Vậy $B \Subset X$ Để chỉ ra B không thỏa điều kiện chuẩn tắc ta chỉ ra tồn tại các phần tử $(1, 1) \in X$ và $(1, 0) \in B$ mà:
$(1, 1)(1, 0)(1, 1)^{-1} = (1 + 1, 1)(-1, 1) = (1, 1 + (-1)^2 1) = (1, 2) \notin B$
Vậy : B là nhóm con không chuẩn tắc của X.

Khái niệm nhóm con chuẩn tắc còn có thể được định nghĩa nhờ vào các lớp ghép trái và lớp ghép phải
Ta nhắc lại các khái niệm lớp ghép theo nhóm con để dùng cho các ví dụ tiếp theo.
Cho nhóm X, $A \Subset X$ và $x \in X$. Khi đó:
- Lớp ghép trái $xA = \{xa : a \in A\}$
- Lớp ghép phải $Ax = \{ax : a \in A\}$.
Về mối quan hệ giữa các lớp ghép theo nhóm con ta có vài kết quả cần ghi nhớ để sử dụng:

- Nếu $y \in xA$ thì $yA = xA$.
- Hai lớp ghép xA và yA thì hoặc $xA \cap yA = \varnothing$ hoặc $xA \equiv yA$.

Khái niệm nhóm con chuẩn tắc định nghĩa trên cơ sở các lớp ghép là :
" Nhóm con $A \Subset X$ là nhóm con chuẩn tắc của X nếu với mọi $x \in X$ thì $xA = Ax$".
Hiển nhiên là định nghĩa mới này hoàn toàn tương đương với định nghĩa ban đầu, độc giả có thể xem các chứng minh trong các tài liệu về đại số đại cương, ở đây ta chỉ nhắc lại để sử dụng.

Ví dụ 4. Cho nhóm X và các nhóm con chuẩn tắc của X là A, B. Chứng minh $AB = BA$ và $AB \lhd X$

GIẢI:

Ta có $AB = \{ab : a \in A, b \in B\} = \bigcup_{a \in A} \{ab : b \in B\} = \bigcup_{a \in A} aB = \bigcup_{a \in A} Ba = \bigcup_{a \in A} \{ba : b \in B\} = BA$
Để chứng minh $AB \lhd X$, truớc hết ta cần chỉ ra $AB \Subset X$

Hiển nhiên $AB \neq \varnothing$ và để kiểm tra $AB \Subset X$ ta dùng tiêu chuẩn 3:
$\forall a_1 b_1, a_2 b_2 \in AB$ thì

$$(a_1b_1)(a_2b_2)^{-1} = a_1(b_1b_2^{-1})a_2^{-1} = a_1a_2^{-1}b \in AB$$

(do $b_1b_2^{-1}a_2^{-1} \in Ba_2^{-1} = a_2^{-1}B$ nên $\exists b \in B$ mà $b_1b_2^{-1}a_2^{-1} = a_2^{-1}b$).
Cuối cùng với $\forall x \in X$:

$$x(AB) = (xA)B = (Ax)B = A(xB) = A(Bx) = (AB)x$$

Vậy: $AB \lhd X$

Nhận xét 1: Để chứng minh $AB = BA$ và $AB \Subset$ ta chỉ cần sử dụng tính chuẩn tắc của một nhóm con B (hoặc A) là đủ.

Nhận xét 2: Ví dụ này hoàn toàn có thể giải bằng định nghĩa ban đầu, tuy nhiên định nghĩa mới giúp ta tiết kiệm ngôn ngữ trình bày hơn.

Ví dụ 5. Cho nhóm X và $A \Subset X$ sao cho tập thương

$$X/_A = \{xA : x \in X\}$$

chỉ gồm có hai lớp ghép trái. Chứng minh rằng $A \lhd X$.

GIẢI:

Theo giả thiết của bài toán ta có:

$$X = A \cup (X \setminus A)$$

trong đó lớp ghép trái $X \setminus A = xA$ với bất kì $x \notin A$.
Ta chứng minh A thỏa điều kiện chuẩn tắc:
- Nếu $x \in A$ và $a \in A$ thì hiển nhiên $xax^{-1} \in A$
- Nếu $x \notin A$ và $a \in A$ mà $xax^{-1} \notin A$, tức $xax^{-1} \in x \setminus A$

Suy ra: $ax^{-1} \in A$, do đó $x^{-1} \in A$ và $x \in A$.
Điều vô lí này chứng tỏ $xax^{-1} \in A$.
Vậy $\forall x \in X, \forall a \in A : xax^{-1} \in A$, tức $A \lhd X$

BÀI TẬP

1. Trong nhóm $X = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : ac \neq 0 \right\}$, chứng minh các bộ phận

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a \neq 0 \right\} \text{ và } C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}$$

là các nhóm con chuẩn tắc.

2. Cho nhóm X. Ta gọi tâm của nhóm X là

$$C(X) = \{a \in X : ax = xa, \forall x \in X\}$$

Chứng minh $C(X) \lhd X$.

3. Trong nhóm nhân M_n^* _ các ma trận vuông cấp n không suy biến, chứng minh rằng các bộ phận sau là các nhóm con chuẩn tắc:
   (a) $M_n^1 = \{A \in M_n^* : detA = 1\}$
   (b) $M_n^{\pm 1} = \{A \in M_n^* : detA^2 = 1\}$
   (c) $M_n^+ = \{A \in M_n^* : detA > 0\}$

4. Cho X là nhóm và $x, y \in X$. Hoán tử của x và y là $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. Gọi A là nhóm con của X được sinh bởi tập tất cả các hoán tử $[x, y]$ với mọi cặp $x, y \in X$. Chứng minh $A \lhd X$.

5. Cho X là nhóm, $A \lhd X$ và $B \underline{\subset}_{n} X$. Chứng minh $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$ là một nhóm con của X.

6. Trong nhóm S_4 _ các phép thế bậc 4 cho tập

$$K = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

trong đó e là phép thế đồng nhất. Chứng minh rằng $K \lhd S_4$