ĐẠI SỐ (CƠ SỞ)

Tài liệu ôn thi cao học năm 2005

Phiên bản đã chỉnh sửa

TS. Trần Huyên

Ngày 31 tháng 1 năm 2005

Bài 7. Các Bài Toán Xác Định Tính Chất Và Mô Tả Cấu Trúc Của Một Nhóm

Các bài toán dạng này thường có nội dung sau: Cho nhóm X thỏa mãn một số điều kiện cho trước nào đó, kết luận của bài toán yêu cầu chỉ ra rằng, khi đó nhóm X cũng thỏa mãn một số tính chất xác định.

Ví dụ 1 *Cho X là nhóm mà với mọi phần tử $a \in X$ thì $a^2 = e$. Chứng minh rằng khi đó X là nhóm aben.*

Về mặt nguyên tắc, muốn xử lý bài toán xác định một tính chất nào đó của nhóm, chúng ta cần sử dụng các tính chất thông dụng của nhóm, kết hợp với các điều kiện bổ sung của bài toán, phân tích, đánh giá và biến đổi các tính chất đã có tới các tính chất cần có theo đòi hỏi của kết luận bài toán.

Các tính chất thông dụng của một nhóm bao gồm, trước hết là các tiên đề trong định nghĩa nhóm, và các tính chất dẫn xuất từ các tiên đề đó, chẳng hạn như:

- Trong nhóm X luôn có luật giản ước (tức là từ mỗi đẳng thức $ax = ay$ (hay $xa = ya$) đều suy ra được $x = y$!)
- Trong nhóm X, phần tử $a \in X$ là đơn vị của nhóm $X \iff a^2 = a$ (tức a lũy đẳng!)
- Trong nhóm X, nghịch đảo của mỗi phần tử $a \in X$ là duy nhất và $b = a^{-1} \Leftrightarrow ab = e$ hoặc $ba = e$.
- Trong nhóm X, nghịch đảo của một tích bằng tích các nghịch đảo theo thứ tự ngược (tức là $(a_1a_2 \dots a_n)^{-1} = a_n^{-1} \dots a_2^{-1}a_1^{-1}$)
- $\dots$

Quay trở lại ví dụ 1, để chứng minh X là nhóm aben ta cần chỉ ra: $\forall a, b \in X$ thì $ab = ba$.

Để có được tính chất cần thiết này ta sử dụng điều kiện bổ sung của bài toán là $a^2 = e, \forall a \in X$, kết hợp với một số nào đó các tính chất thông dụng đã có trong nhóm, biến đổi để có được các lời giải sau:

- **Lời giải thứ nhất:** Từ điều kiện bài toán, ta có với mọi $a, b \in X$ thì:

$$a^2 = e, b^2 = e \Longrightarrow a^2.b^2 = e.e = e$$

  đồng thời $(ab)^2 = e$. Do đó: $a.a.b.b = ab.ab \quad (= e)$ Thực hiện luật giản ước trái a và luật giản ước phải b ở đẳng thức cuối cùng ta được: $ab = ba$ (đpcm).

- **Lời giải thứ hai:** Từ điều kiện bài toán: $a^2 = e, \forall a \in X \Longrightarrow a = a^{-1}, \forall \in X$.

  Do đó $\forall a, b \in X : ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$, tức ta có đpcm.

Ở đây, chúng tôi chỉ đưa vài lời giải cơ bản, nếu các bạn thực hiện các bước biến đổi hơi khác một chút các bạn sẽ có thêm các lời giải của riêng mình. Các bạn hãy thử sức mình xem!

Ví dụ 2 *Cho X là nhóm có vô hạn phần tử. Chứng minh rằng X chứa vô hạn các nhóm con khác nhau.*

Giải

Vì X có vô hạn phần tử nên $X \neq \{e\}$. Xét cấp các phần tử của X, có hai khả năng duy nhất sau đây:

a) Trong X có một phần tử cấp vô hạn. Khi đó, nhóm con cyclic sinh bởi phần tử a là $< a >$ có vô hạn phần tử; và bản thân $< a >$ chứa vô hạn các nhóm con khác nhau sau đây: $< a >, < a^2 >, \ldots, < a^k >, \ldots$ Đó cũng là các nhóm con của X. Vậy, khi đó X chứa vô hạn nhóm con.

b) Mọi phần tử trong X đều có cấp hữu hạn. Khi đó, xét họ $\mathcal{J}$ tất cả các nhóm con cyclic sinh bởi các phần tử của X, $\mathcal{J} = \{< x >: x \in X\}$. Dễ thấy là $X = \bigcup\limits_{x \in X} < x >$, do đó nếu họ $\mathcal{J}$ chỉ chứa hữu hạn các nhóm con khác nhau thì do:

$$\bigcup_{x \in X} < x > = \bigcup_{< x > \in \mathcal{J}} < x >$$

có số phần tử là hữu hạn, trái với điều kiện đã cho X có vô hạn phần tử. Vậy $\mathcal{J}$ chứa vô hạn các nhóm con khác nhau, tức X chứa vô hạn các nhóm con khác nhau.

Chú ý rằng các tính chất của nhóm là rất phong phú và đa dạng, nó không chỉ được phát biểu cho các phần tử của tập nền, phép toán trong nhóm mà còn được xác định cho những khái niệm dẫn xuất từ nhóm như là nhóm con, ước chuẩn tắc, ...

Đặc biệt trong các nhóm hữu hạn chúng ta có một tính chất quan trọng liên hệ giữa cấp của nhóm và cấp các nhóm con, chính là nội dung của định lý sau:

Định lí 1 (Lagran) *Cho nhóm hữu hạn X, và A ⓐ X. Khi đó, cấp A là ước số của cấp X.*

Định lý này có vài hệ quả cũng thường được sử dụng trong các bài toán xác định tính chất cho các nhóm hữu hạn và mô tả cấu trúc nhóm hữu hạn đó là:

Hệ quả 1 *Cấp của một phần tử a trong nhóm X là ước số của cấp X.*

Hệ quả 2 *Nếu cấp của nhóm X là số nguyên tố thì X là nhóm cyclic.*

Ví dụ 3 *Cho X là nhóm aben cấp 6. Chứng minh rằng X là nhóm cyclic.*

Giải

Để chỉ ra X là nhóm cyclic, ta cần chỉ ra trong X có chứa một phần tử cấp 6.

Vì X cấp 6 nên tồn tại một phần tử $a \in X$ và $a \neq e$. Theo hệ quả 1 của định lý Lagrang thì cấp a chỉ có thể là $2, 3, 6$. Nếu cấp $a = 6$ thì ta có đpcm.

Nếu cấp $a = 2$ thì nhóm thương $X/< a >$ có cấp 3.

Khi đó nếu $\overline{b} \in X_{/<a>}$ mà $\overline{b} \neq < a >$ thì cấp $\overline{b} = 3$.

Do đó, phần tử đại diện $b \in \overline{b}$ phải có cấp 6 hoặc cấp 3. Trường hợp cấp $b = 3$ thì tích ab phải có cấp 6.

Nếu cấp $a = 3$ thì nhóm thương $X_{/<a>}$ có cấp 2.

Khi đó nếu $\overline{b} \in X_{/<a>}$ mà $\overline{b} \neq < a >$ thì cấp $\overline{b} = 2$.

Do đó, phần tử đại diện $b \in \overline{b}$ phải có cấp 6 hay cấp 2. Trường hợp cấp $b = 2$ thì tích ab có cấp 6.

Vậy trong mọi khả năng có thể xảy ra cho cấp phần tử của a, ta đều chỉ ra trong X có chứa một phần tử cấp 6, tức X là cyclic.

$\star$ **Nhận xét:** Trong ví dụ trên ta đã sử dụng sự kiện: Các phần tử đại diện b của lớp ghép $\overline{b}$ trong nhóm thương là bội của cấp $\overline{b}$, điều này có thể chứng minh đơn giản như sau: gọi cấp $b = n$, khi đó $b^n = e \Rightarrow (\overline{b})^n = \overline{b^n} = \overline{e}$. Vậy n là bội của cấp $\overline{b}$.

Ví dụ 4 *Hãy mô tả cấu trúc của các nhóm cấp 6 không đẳng cấu với nhau.*

Xét cấp của các phần tử $x \neq e$ của nhóm X cấp 6. Theo hệ quả 1 của định lý Lagrang có tất cả các khả năng sau:

a) Tồn tại một phần tử a cấp 6. Khi đó X là nhóm cyclic cấp 6 và $X \cong \mathbb{Z}_6$.

b) Không tồn tại một phần tử nào cấp 6; tức X không là nhóm cyclic. Do kết quả của ví dụ 3, ta suy ra X không là nhóm aben (vì nhóm cấp 6 aben là nhóm cyclic!).

   Vì X không aben nên tồn tại một phần tử $a \in X$ mà cấp $a = 3$ (vì nếu mọi phần tử của X mà cấp ≤ 2 thì X lại là nhóm aben!). Khi đó nhóm con sinh bởi a là $< a >$ có chỉ số 2 nên là ước chuẩn tắc của X và nhóm thương $X/ < a >$ có đúng 2 phần tử. Chọn $b \notin < a >$ thì $\overline{b} \in X/ < a >$ và $\overline{b} \neq e$ nên cấp $\overline{b} = 2$, suy ra cấp $b = 2$ (vì cấp $b \neq 6$!). Vậy, nếu tồn tại nhóm X cấp 6 không aben thì $X =< \{a, b\} >$ với cấp $a = 3$, cấp $b = 2$, và gồm 6 phần tử sau:

   $X = \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$ thỏa hệ thức $ba = a^2b$ (Bạn đọc hãy sử dụng tính chất trong nhóm để chứng minh nếu X với 6 phần tử trên là nhóm thì tích ba chỉ có thể là $ba = a^2b$ mà không thể là 1 trong 5 giá trị còn lại!)

   Bây giờ xét nhóm S_3 các phép thế bậc 3, xem như được sinh bởi 2 phần tử $\alpha = (1\ 2\ 3)$ và $\beta = (1\ 2)$ ta có: $S_3 = \{e, \alpha, \alpha^2, \beta, \alpha\beta, \alpha^2\beta\}$ thỏa $\beta\alpha = \alpha^2\beta$. Điều này đảm bảo rằng ánh xạ $\varphi : X \to S_3$ mà $\varphi(e) = e$, $\varphi(a) = \alpha$, $\varphi(a^2) = \alpha^2$, $\varphi(b) = \beta$, $\varphi(ab) = \alpha\beta$ và $\varphi(a^2b) = \alpha^2\beta$ là song ánh bảo toàn các phép toán. Từ đó, X là một nhóm và $X \cong S_3$.

BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng các nhóm có cấp nhỏ hơn 6 đều là nhóm aben.

2. Cho X là nhóm hữu hạn cấp chẵn. Chứng minh số các phần tử cấp 2 trong X là số lẻ.

3. Cho X là nhóm và $x, y \in X$. Ta gọi $x^{-1}y^{-1}xy$ là hoán tử của x và y. Chứng minh rằng:

   a) Nhóm con A của X sinh bởi tập tất cả các hoán tử của mọi cặp $x, y \in X$ là nhóm con chuẩn tắc của X.

   b) Nhóm thương $X/_A$ là aben. Đồng thời nếu $H \lhd X$ thì $X/_H$ aben $\Longleftrightarrow A \subset H$.

4. Cho A là nhóm con của nhóm X và $a \in X$, chứng minh rằng tập $aA = \{ax : x \in A\}$ là nhóm con của X khi và chỉ khi $a \in A$.

5. Mô tả cấu trúc của các nhóm cấp 4 không đẳng cấu với nhau.

6. Môt tả cấu trúc các nhóm cấp 9 không đẳng cấu với nhau.