

ĐẠI SỐ TUYỂN TÍNH

PGS. TS My Vinh Quang

Ngày 11 tháng 10 năm 2004

Mở Đầu

Trong các kỳ thi tuyển sinh sau đại học, Đại số tuyển tính là môn cơ bản, là môn thi bắt buộc đối với mọi thí sinh thi vào sau đại học ngành toán - cụ thể là các chuyên ngành : PPGD, Đại số, Giải tích, Hình học.

Các bài viết này nhằm cung cấp cho các bạn đọc một cách có hệ thống và chọn lọc các kiến thức và kỹ năng cơ bản nhất của môn học Đại số tuyển tính với mục đích giúp những người dự thi các kỳ tuyển sinh sau đại học ngành toán có được sự chuẩn bị chủ động, tích cực nhất.

Vì là các bài ôn tập với số tiết hạn chế nên các kiến thức trình bày sẽ được chọn lọc và bám sát theo đề cương ôn tập vào sau đại học. Tuy nhiên, để dễ dàng hơn cho bạn đọc thứ tự các vấn đề có thể thay đổi. Cũng chính bởi các lý do trên các bài viết này không thể thay thế một giáo trình Đại số tuyển tính hoàn chỉnh. Bạn đọc quan tâm có thể tham khảo thêm một số sách viết về Đại số tuyển tính, chẳng hạn :

1. Nguyễn Viết Đông - Lê Thị Thiên Hương ...
Toán cao cấp Tập 2 - Nxb Giáo dục 1998
2. Jean - Marie Monier.
Đại số 1 - Nxb Giáo dục 2000
3. Ngô Thúc Lanh
Đại số tuyển tính - Nxb Đại học và Trung học chuyên nghiệp 1970
4. Bùi Tường Trí.
Đại số tuyển tính.
5. My Vinh Quang
Bài tập đại số tuyển tính.

Bài 1: ĐỊNH THỨC

Để hiểu được phần này, người đọc cần phải nắm được khái niệm về ma trận và các phép toán trên ma trận (phép cộng, trừ, nhân hai ma trận). Các khái niệm trên khá đơn giản, người đọc có thể dễ dàng tìm đọc trong các sách đã dẫn ở trên.

1 Định nghĩa định thức

1.1 Định thức cấp 2, 3

- Cho A là ma trận vuông cấp 2 :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

định thức (cấp 2) của A là một số, ký hiệu $\det A$ (hoặc $|A|$) xác định như sau :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1)$$

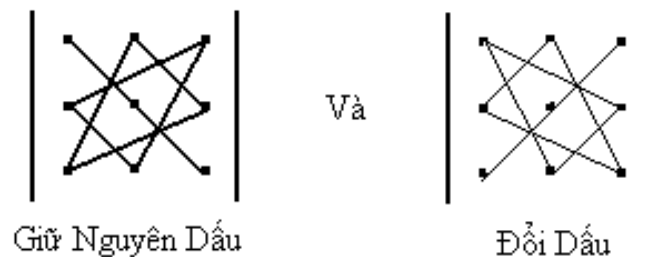
- Cho A là ma trận vuông cấp 3 :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

định thức (cấp 3) của A là một số ký hiệu $\det A$ (hoặc $|A|$), xác định như sau : $\det A =$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \quad (2)$$

Công thức khai triển (2) thường được nhớ theo quy tắc *Sarrus* như sau :



Ví dụ :

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = [(-1)(-2).4 + 2.1.(-1) + 1.0.3] - [3.(-2).(-1) + 1.0.(-1) + 2.1.4] = -8$$

Nếu ta ký hiệu S_n là tập hợp các phép thế bậc n thì các công thức (1) và (2) có thể viết lại như sau :

$$\det A = \sum_{f \in S_2} s(f)a_{1f(1)}a_{2f(2)} \text{ và } \det A = \sum_{f \in S_3} s(f)a_{1f(1)}a_{2f(2)}a_{3f(3)}$$

Từ đó gợi ý cho ta cách định nghĩa định thức cấp n như sau.

1.2 Định thức cấp n

Cho A là ma trận vuông cấp n :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

định thức (cấp n) của ma trận A là một số, ký hiệu $\det A$ (hoặc $|A|$), xác định như sau :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{f \in S_n} s(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)} \quad (3)$$

Chắc chắn là đối với một số bạn đọc, (nhất là bạn đọc không thạo về phép thế) định nghĩa định thức tương đối khó hình dung. Tuy nhiên, rất may là khi làm việc với định thức, (kể cả khi tính định thức) định nghĩa trên hiếm khi được sử dụng mà ta chủ yếu sử dụng các tính chất của định thức. Bởi vậy, bạn đọc nếu chưa có đủ thời gian có thể tạm bỏ qua định nghĩa trên và cần phải nắm vững các tính chất sau của định thức.

2 Các tính chất của định thức

2.1 Tính chất 1

Định thức không thay đổi qua phép chuyển vị, tức là : $\det A^t = \det A$ (A^t : ma trận chuyển vị của ma trận A)

Ví dụ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

Chú ý : Từ tính chất này, một mệnh đề về định thức nếu đúng với dòng thì cũng đúng với cột và ngược lại.

2.2 Tính chất 2

Nếu ta đổi chỗ hai dòng bất kỳ (hoặc 2 cột bất kỳ) của định thức thì định thức đổi dấu.

Ví dụ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

2.3 Tính chất 3

Nếu tất cả các phần tử của một dòng (hoặc một cột) của định thức được nhân với λ thì định thức mới bằng định thức ban đầu nhân với λ .

Ví dụ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

Chú ý : Từ tính chất này ta có nếu A là ma trận vuông cấp n thì $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

2.4 Tính chất 4

Cho A là ma trận vuông cấp n . Giả sử dòng thứ i của ma trận A có thể biểu diễn dưới dạng : $a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$ với $j = 1, 2, \dots, n$. Khi đó ta có :

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1} + a''_{i1} & a'_{i2} + a''_{i2} & \dots & a'_{in} + a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \dots & a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Trong đó các dòng còn lại của 3 định thức ở 2 vế là hoàn toàn như nhau và chính là các dòng còn lại của ma trận A . Tất nhiên ta cũng có kết quả tương tự đối với cột.

Ví dụ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Chú ý : Các tính chất 2, 3, 4 chính là tính đa tuyến tính thay phiên của định thức.

Từ các tính chất trên, dễ dàng suy ra các tính chất sau của định thức :

2.5 Tính chất 5

Định thức sẽ bằng 0 nếu :

1. Có hai dòng (hai cột) bằng nhau hoặc tỉ lệ.
2. Có một dòng (một cột) là tổ hợp tuyến tính của các dòng khác (cột khác).

2.6 Tính chất 6

Định thức sẽ không thay đổi nếu :

1. Nhân một dòng (một cột) với một số bất kỳ rồi cộng vào dòng khác (cột khác).
2. Cộng vào một dòng (một cột) một tổ hợp tuyến tính của các dòng khác (cột khác)

Ví dụ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

(Lý do: nhân dòng một với (-2) cộng vào dòng 2, nhân dòng một với 1 cộng vào dòng 3, nhân dòng một với 3 cộng vào dòng 4).

Để tính định thức, ngoài việc sử dụng các tính chất trên của định thức ta còn rất hay sử dụng *định lý Laplace* dưới đây.

3 Định lý Laplace

3.1 Định thức con và phần bù đại số

Cho A là ma trận vuông cấp n , k là số tự nhiên $1 \leq k \leq n$. Các phần tử nằm trên giao của k dòng bất kỳ, k cột bất kỳ của A làm thành một ma trận vuông cấp k của A . Định thức của ma trận này gọi là một định thức con cấp k của ma trận A .

Đặc biệt, cho trước $1 \leq i, j \leq n$, nếu ta xóa đi dòng i , cột j của A ta sẽ được ma trận con cấp $n-1$ của A , ký hiệu là M_{ij} . Khi đó, $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ được gọi là phần bù đại số của phần tử $(A)_{ij}$. ($(A)_{ij}$ là phần tử nằm ở hàng i , cột j của ma trận A)

3.2 Định lý Laplace

Cho A là ma trận vuông cấp n :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Khi đó ta có :

1. Khai triển định thức theo dòng i

$$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot A_{ik}$$

2. Khai triển định thức theo cột j

$$\det A = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{kj} \cdot A_{kj}$$

Từ *định lý Laplace*, ta có thể chứng minh được 2 tính chất quan trọng sau của định thức :

3.3 Tính chất 1

Nếu A là ma trận tam giác trên, (hoặc tam giác dưới) thì $\det A$ bằng tích của tất cả các phần tử trên đường chéo chính, tức là :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} \dots a_{nn}$$

3.4 Tính chất 2

Nếu A, B là các ma trận vuông cấp n thì $\det(AB) = \det A \det B$

4 Các ví dụ và áp dụng

Nhờ có *định lý Laplace*, để tính một định thức cấp cao (cấp > 3) ta có thể khai triển định thức theo một dòng hoặc một cột bất kỳ để đưa về tính các định thức cấp bé hơn. Cứ như vậy sau một số lần sẽ đưa được về việc tính các định thức cấp 2, 3. Tuy nhiên, trong thực tế nếu làm như vậy thì số lượng phép tính khá lớn. Bởi vậy ta làm như sau thì số lượng phép tính sẽ giảm đi nhiều :

1. Chọn dòng (cột) có nhiều số 0 nhất để khai triển định thức theo dòng (cột) đó.
2. Sử dụng *tính chất 2.6* để biến đổi định thức sao cho dòng đã chọn (cột đã chọn) trở thành dòng (cột) *chỉ có một số khác 0*.
3. Khai triển định thức theo dòng (cột) đó. Khi đó việc tính một định thức cấp n quy về việc tính một định thức cấp $n-1$. Tiếp tục lặp lại quá trình trên cho định thức cấp $n-1$, cuối cùng ta sẽ dẫn về việc tính định thức cấp 2, 3.

Ví dụ 1

Tính

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Ta chọn cột 2 để khai triển nhưng trước khi khai triển, ta biến đổi định thức như sau : nhân dòng 2 với (-2) cộng vào dòng 3. Nhân dòng 2 với (-1) cộng vào dòng 5. Định thức đã cho sẽ bằng (*Tính chất 2.6*)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Khai triển theo cột 2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Để tính định thức cấp 4, ta lại chọn dòng 4 để khai triển, trước khi khai triển ta lại biến đổi định thức như sau : nhân cột 1 với (-1) rồi cộng vào cột 3, nhân cột 1 với 2 rồi cộng vào cột 4. Định thức đã cho sẽ bằng :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{=}{\text{(Khai triển theo dòng 4)}} (-1) \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Ví dụ 2 Giải phương trình

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x-1 & x+2 \\ 0 & 0 & x^2-1 & 0 \\ x & 1 & x & x-2 \\ 0 & 0 & x^5+1 & x^{100} \end{vmatrix} = 0$$

Giải :

$$\begin{aligned} VT & \underset{=}{\text{(Khai triển theo dòng 2)}} (-1)^5 (x^2 - 1) \begin{vmatrix} 1 & x & x+2 \\ x & 1 & x-2 \\ 0 & 0 & x^{100} \end{vmatrix} \\ & \underset{=}{\text{(Khai triển theo dòng 3)}} (1 - x^2) \cdot x^{100} \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = (1 - x^2)^2 \cdot x^{100} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho tương đương với $(1 - x^2)^2 \cdot x^{100} = 0 \iff x = 0, x = \pm 1$

Bài Tập

1. Tính

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix} \text{ trong đó } \alpha, \beta, \gamma, \text{ là các nghiệm của phương trình } :x^3 + px + q = 0$$

2. Giải phương trình :

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 0$$

3. Chứng minh :

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} = 0$$

4. Chứng minh :

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$$