ĐẠI SỐ (CƠ SỞ)

TS Trần Huyên

Ngày 11 tháng 10 năm 2004

Mở Đầu

Độc giả thân mến, các bạn đang tham gia chuyên đề **"Đại số cơ sở"** của **Khoa Toán - Tin ĐHSP Tp. HCM**. Chuyên đề của chúng tôi xây dựng, trước hết nhằm trợ giúp các ứng viên Thạc sĩ tương lai về chuyên ngành đại số hệ thống lại các kiến thức cơ sở, các kỹ thuật cơ bản, rèn luyện kỹ năng giải toán để có thể vững vàng vượt qua kỳ thi tuyển sinh cao học của **ĐHSP Tp. HCM**, trở thành học viên Cao học ngành Đại số của trường. Chuyên đề bám sát các nội dung đề ra trong chương trình tuyển sinh, không chỉ giúp các học viên có thể vững tâm đối diện với kỳ thi tuyển mà còn giúp cho học viên một khả năng, phương pháp tự học, tự đào tạo mình. Để học viên dễ theo dõi, tiếp thu các nội dung sẽ được biên soạn dưới dạng các bài giảng với ngôn ngữ đơn giản và dễ hiểu nhất, mỗi bài giảng độ hai tiết cho mỗi tuần. Chuyên đề đề sẽ được dàn dựng với thời lượng chừng 40 tiết, liên tục được cập nhật cho tới ngày các bạn có thể tham gia đợt ôn tập tập trung trước khi bước vào kỳ thi tuyển, dịp tháng $05-2005$. Để chuyên đề càng ngày càng được triển khai một cách hữu ích, hiệu quả hơn, chúng tôi luôn luôn sẵn sàng đón nhận các góp ý, yêu cầu của các bạn. Chúng tôi cũng sẵn sàng trao đổi, giải đáp các thắc mắc của các bạn, hầu mong chuyên đề sẽ là người bạn tâm giao của độc giả trong hành trình phấn đấu khoa học của mình.

Các bài tập kiểm tra nhóm

Nhóm là một khái niệm cơ bản của Đại số, và là một trong những nội dung không thể vắng bóng trong các đề thi tuyển sinh chuyên ngành **Đại số cơ sở**. Vì vậy bạn phải nắm vững kỹ năng kiểm tra một tập X cho trước với một phép toán nào đó trên X lập thành một nhóm. Dĩ nhiên bạn phải năm vững khái niệm nhóm để theo đó mà từng bước kiểm tra tập X đã cho và phép toán đã cho có thỏa mãn tất cả các điều kiện cần có cho một nhóm hay không?

Theo chương trình Đại số đại cương ta có ba định nghĩa nhóm, tương đương với nhau như sau :

1 Định nghĩa 1

Nhóm là một tập hợp $X \neq \varnothing$, trên đó đã xác định được một phép toán hai ngôi thỏa các điều kiện :

1. N_1 : (Điều kiện kết hợp) : $\forall x, y, z \in X$ thì $(xy)z = x(yz)$.
2. N_2 : (Điều kiện đơn vị) : $\exists e \in X$, $\forall x \in X$ thì $\begin{cases} ex &= x \\ xe &= x \end{cases}$

3. N_3 : (Điều kiện khả nghịch) $\forall x \in X, \exists x^{-1} \in X$ sao cho $\begin{cases} x^{-1}x &= e \\ xx^{-1} &= e \end{cases}$

2 Định nghĩa 2

Nhóm là nửa nhóm X, có đơn vị trái e và mọi $x \in X$ đều có nghịch đảo trái x' (tức $x'x = e$)

Như vậy so với *định nghĩa 1*, thì *định nghĩa 2* tiết kiệm hơn; ở điều kiện N_2 chỉ cần kiểm tra $ex = x$ và ở điều kiện N_3 chỉ phải kiểm tra $x^{-1}x = e$.

Một dạng đối ngẫu của *định nghĩa 2* và có thể xem như là *định nghĩa 2'* là : Nhóm là nửa nhóm X, có đơn vị phải e và $\forall x \in X$ đều có nghịch đảo phải x' (tức $xx' = e$)

3 Định nghĩa 3

Nhóm là nửa nhóm X mà các phương trình $ax = b$ và $xa = b$ là giải được (tức có nghiệm) trong X với mọi $a, b \in X$

Để kiểm tra một tập cho trước X và một phép toán cho trên X là nhóm, tùy trường hợp cụ thể mà ta lựa chọn định nghĩa nào trong các định nghĩa nêu trên để áp dụng cho phù hợp.

4 Ví dụ

4.1 Ví dụ 1

Cho tập hợp $X = Z \times Z = \{(k_1, k_2) : k_1,\ k_2 \in Z\}$ xác định trên X phép toán sau :

$$(k_1, k_2).(l_1, l_2) = (k_1 + l_1, k_2 + (-1)^{k_1} l_2)$$

Chứng minh rằng X với phép toán trên là nhóm. *Giải :*

1. **Cách 1 :** (Nếu sử dụng định nghĩa 1, ta lần lượt kiểm tra từng bước như sau:)

   - $X = Z \times Z \neq \varnothing$ vì $Z \neq \varnothing$.
   - Dễ dàng thấy là nếu $(k_1, k_2), (l_1, l_2)$ là cặp số nguyên thì $(k_1 + l_1, k_2 + (-1)^{k_1} l_2)$ cũng là một cặp số nguyên nên phép toán trên X là phép toán hai ngôi.
   - $\forall (k_1, k_2), (l_1, l_2), (t_1, t_2) \in X$ ta có :$[(k_1, k_2)(l_1, l_2)](t_1, t_2)$

     $$= (k_1 + l_1, k_2 + (-1)^{k_1} l_2)(t_1, t_2) = (k_1 + l_1 + t_1, k_2 + (-1)^{k_1} l_2 + (-1)^{k_1 + l_1} t_2) \quad (1)$$

     Mặt khác : $(k_1, k_2)[(l_1, l_2)(t_1, t_2)]$

     $$= (k_1, k_2)(l_1 + t_1, l_2 + (-1)^{l_1} t_2) = (k_1 + l_1 + t_1, k_2 + (-1)^{k_1} l_2 + (-1)^{k_1 + l_1} t_2 \quad (2)$$

     So sánh (1) vào (2) ta có điều kiện kết hợp.

   - Tồn tại $(0, 0) \in X$ mà với mọi $(k_1, k_2) \in X$ thì

     $$(0, 0)(k_1, k_2) = (0 + k_1, 0 + (-1)^0 k_2) = (k_1, k_2)$$

     và

     $$(k_1, k_2)(0, 0) = (k_1 + 0, k_2 + (-1)^{k_1}.0) = (k_1, k_2)$$

     Vậy $(0, 0)$ là đơn vị trong X.

- $\forall (k_1, k_2) \in X, \exists (-k_1, (-1)^{k_1+1} k_2) \in X$ mà
$$(-k_1, (-1)^{k_1+1}k_2)(k_1, k_2) = (-k_1 + k_1, (-1)^{k_1+1}k_2 + (-1)^{-k_1}k_2) = (0, 0)$$
$$(k_1, k_2)(-k_1, (-1)^{k_1+1}k_2) = (k_1 - k_1, k_2 + (-1)^{2k_1+1}k_2) = (0, 0)$$
tức
$$(k_1, k_2)^{-1} = (-k_1, (-1)^{k_1+1}k_2)$$
Vậy X là một nhóm.

- **Nhận xét :** Như vậy để kiểm tra một nhóm theo *định nghĩa 1*, ta đã làm theo đúng các yêu cầu của định nghĩa là kiểm tra tập $X \neq \varnothing$, kiểm tra phép toán cho trên X thật sự là phép toán hai ngôi (hai phần tử bất kỳ của tập hợp X phải có tích là một phần tử thuộc X!) và ba tiên đề N_1, N_2, N_3. Dĩ nhiên, trong các bước đó, nếu có bước nào mà các đòi hỏi được thỏa mãn một cách hiển nhiên thì ta có thể bỏ qua. Chẳng hạn ở ví dụ trên nếu xem bước 1, bước 2 là hiển nhiên thỏa mãn thì vẫn có thể chấp nhận được. Tuy nhiên trong một số trường hợp cần kiểm tra một cách cẩn trọng, tránh sự sai sót.

2. **Cách 2 :** Nếu sử dụng *định nghĩa 2* thì trong lời giải trên chỉ cần bỏ đi hai đẳng thức kiểm tra đơn vị phải, kiểm tra nghịch đảo phải (hoặc bỏ đi hai đẳng thức kiểm tra đơn vị trái, kiểm tra nghịch đảo trái).

3. **Cách 3 :** (Nếu sử dụng *định nghĩa 3*) Trước hết hết ta kiểm tra $X \neq \varnothing$, phép toán trên X thật sự là phép toán hai ngôi, kiểm tra điều kiện kết hợp của phép toán (Điều này là như cách 1). Tiếp theo ta kiểm tra các phương trình $ax = b$ và $xa = b$ là có nghiệm trong X. Cho $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2) \in X$ và $x = (x_1, x_2)$.

   - $ax = b \iff (a_1, a_2)(x_1, x_2) = (b_1, b_2)$
   $\iff (a_1 + x_1, a_2 + (-1)^{a_1}x_2) = (b_1, b_2)$
   $\iff \begin{cases} a_1 + x_1 = b_1 \\ a_2 + (-1)^{a_1}x_2 = b_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = b_1 - a_1 \in Z \\ x_2 = (-1)^{a_1}(b_2 - a_2) \in Z \end{cases}$
   Vậy phương trình $ax = b$ có nghiệm nghĩa là $x = (b_1 - a_1, (-1)^{a_1}(b_2 - a_2)) \in X$
   - Tương tự : $xa = b \iff (x_1, x_2)(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$
   $\iff (x_1 + a_1, x_2 + (-1)^{x_1}a_2) = (b_1, b_2)$
   $\iff \begin{cases} x_1 + a_1 = b_1 \\ x_2 + (-1)^{x_1}a_2 = b_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = b_1 - a_1 \in Z \\ x_2 = b_2 - (-1)^{b_1 - a_1}a_2 \in Z \end{cases}$
   tức phương trình $xa = b$ có nghiệm là : $x = (b_1 - a_1, b_2 - (-1)^{b_1-a_1}a_2) \in X$
   Vậy tập X với phép toán đã cho lập thành nhóm.
   - **Nhận xét :** Để tìm được phần tử đơn vị $(0, 0)$ hay nghịch đảo $(k_1, k_2)^{-1} = (-k_1, (-1)^{k_1+1}k_2)$ ở cách 1, ta sử dụng việc giải các phương trình đưa ra ở cách 3 với $b = a$ khi tìm đơn vị e hay với $b = e = (0, 0)$ khi tìm a^{-1}.

4.2 Ví dụ 2

Cho $X = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : ac \neq 0 \right\}$
Chứng minh rằng X là nhóm đối với phép nhân ma trận.

Giải :

1. **Cách 1 :** (Nếu sử dụng định nghĩa 1)

   - Hiển nhiên là $X \neq \varnothing$
   - $\forall \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \in X$ thì
     $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 & b \\ 0 & c_1c_2 \end{bmatrix} \in X (a_1a_2c_1c_2 \neq 0)$
     Vậy phép nhân ma trận là phép toán hai ngôi trên X.
   - Theo đại số tuyến tính, phép nhân các ma trận có tính chất kết hợp.
   - Đơn vị là $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in X$
   - $\forall \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in X$ do $ac \neq 0$ theo đại số tuyến tính ta có :

     $$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ac} \begin{bmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{bmatrix} \in X$$

     Vậy X là một nhóm.
   - **Nhận xét :** Trong ví dụ trên, tập các ma trận và phép nhân ma trận là các đối tượng mà chuyên ngành ĐSTT đã nghiên cứu, vì vậy để kiểm tra một số điều kiện nào đó mà bản chất là các kết quả đã biết ở chuyên ngành này, ta không cần lặp lại các kiểm tra chi tiết mà chỉ cần nhắc rằng theo chuyên ngành đó (hay kết quả nào đó) ta có được điều muốn kiểm tra. Chẳng hạn tính chất kết hợp của phép nhân ma trận, đơn vị hay nghịch đảo của một ma trận không suy biến ở ví dụ trên. Tuy nhiên trong trường hợp đơn vị hay nghịch đảo, cần phải chỉ ra, phần tử đang nói tới phải thuộc tập X đã cho.

2. **Cách 2 :** (nếu sử dụng định nghĩa 3) :
   Trước hết ta kiểm tra $X \neq \varnothing$, phép nhân ma trận là phép toán 2 ngôi trên X, tính kết hợp của phép nhân ma trận trên X (như đã làm ở cách 1). Tiếp theo cho

   $$a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{bmatrix} \in X$$

   ta cần chỉ ra các phương trình $ax = b$ và $xa = b$ đều có nghiệm trong X. Gọi $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_3 \end{bmatrix}$.

   - $ax = b \iff \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} a_1x_1 & a_1x_2 + a_2x_3 \\ 0 & a_3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{bmatrix}$

   $$\iff \begin{cases} a_1x_1 & & = b_1 \\ a_3x_3 & & = b_3 \\ a_1x_2 & +a_2x_3 & = b_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_1} \ (a_1 \neq 0) \\ x_3 = \dfrac{b_3}{a_3} \ (a_3 \neq 0) \\ x_2 = \dfrac{b_2a_3 - a_2b_3}{a_1a_3} \ (a_1a_3 \neq 0) \end{cases}$$

Vậy nghiệm $x = \begin{bmatrix} \dfrac{b_1}{a_1} & \dfrac{b_2a_3 - a_2b_3}{a_1a_3} \\ 0 & \dfrac{b_3}{a_3} \end{bmatrix} \in X$

- Tương tự chứng minh phương trình $xa = b$ có nghiệm. Vậy X là nhóm.
- **Nhận xét :** Thật ra cách 2 này khá dài dòng, chúng tôi đưa ra nhằm để các bạn làm quen nhiều hơn với *định nghĩa 3*, và muốn khẳng định điều rằng, mỗi bài toán đều có thể có nhiều lời giải khác nhau nếu ta ta biết huy động và vận dụng kiến thức đã biết một cách hợp lý, năng động.

4.3 Ví dụ 3

Cho tập số $M = \{-1, 1\}$. Chứng minh rằng M lập thành nhóm với phép nhân thông thường các số.

Giải :

1. **Cách 1 :**
   - Hiển nhiên $M \neq \varnothing$
   - Xét bảng nhân của M :

↱ ·	-1	1
-1	1	-1
1	-1	1

     Kết quả của một tích bất kỳ hai phần tử của M lại thuộc M nên phép nhân các số trên M là phép toán 2 ngôi.
   - Phép nhân các số (nói riêng trên M) có tính kết hợp.
   - Đơn vị là $1 \in M$
   - Dễ thấy nếu $x \in M$ thì $x^{-1} = x \in M$
     Vậy M là nhóm
2. **Cách 2 :** Ta biểu diễn M dưới dạng sau :

   $$M = \{x \in R : |x| = 1\}$$

   - Hiển nhiên $M \neq \varnothing$
   - $\forall x, y \in M$ thì $|x| = |y| = 1$ nên $|xy| = |x|.|y| = 1$, do đó $xy \in M$, tức phép nhân các số trên M là phép toán hai ngôi.
   - Phép nhân các số có tính chất kết hợp
   - Đơn vị là $1 \in M$
   - $\forall x \in M$ thì $|x| = 1$ nên $|x^{-1}| = \dfrac{1}{|x|} = 1$ do đó $x^{-1} \in M$ Vậy M là nhóm.
3. **Cách 3 :** Ta biểu diễn $M = \{x \in R : x^2 = 1\}$ hay $M = \{(-1)^n : n \in Z\}$ và tiến hành kiểm tra các điều kiện như trên.
4. **Cách 4 :** Các bạn có thể sử dụng *định nghĩa 3* với lưu ý là :

   $$1.M = M = M.1$$

   $$(-1).M = M = M.(-1)$$

- **Nhận xét :** Mỗi tập hợp có thể được biểu diễn dưới các dạng khác nhau. Và với mỗi cách biểu diễn, chúng ta có thể có những cách xử lý khác nhau để có được các lời giải không giống nhau. Ví dụ này muốn các bạn khi nhìn nhận một vấn đề phải biết xem xét ở những góc độ khác nhau để thấy được các cách tiếp cận khác nhau giải quyết vấn đề đó.

4.4 Ví dụ 4

Chứng minh rằng một nửa nhóm hữu hạn X có luật giản ước hai phía là nhóm.

Giải :

1. **Cách 1 :** (Nếu sử dụng định nghĩa 3). Điều kiện về các phương trình $ax = b$ và $xa = b$ giải được trong X của *định nghĩa 3* là tương đương với đòi hỏi $aX = X = Xa, \forall a \in X$. Gải sử rằng $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Khi đó $\forall a \in X$ thì $aX = \{ax_1, ax_2, ..., ax_n\} \subset X$ đồng thời do X có luật giản ước nên n tích trong aX là đôi một khác nhau (nếu $ax_i = ax_j$ thì $x_i = x_j$) nên $|aX| = |X|$ suy ra $aX = X$. Một cách tương tự có thể chứng minh $Xa = X$. Vậy X là nhóm.

2. **Cách 2 :** Các bạn có thể sử dụng *định nghĩa 1* (hay *định nghĩa 2* với chú ý rằng do $X \neq \varnothing$ nên $\exists a \in X$ và do X hữu hạn nên có $m > n > 0$ và $a^m = a^n$. Đơn vị của X khi đó là $e = a^{m-n}$ (hãy tự chứng minh). Với mọi $x \in X$, ắt tồn tại $k > l > 0$ mà $x^k = x^l$ và $x^{-1} = x^{k-l-1}$ (hãy tự chứng minh). Lưu ý trong chứng minh luôn luôn có ý thức sử dụng luật giản ước.

   - **Nhận xét :** Đây là một ví dụ tương đối khó. Việc sử dụng dạng tương đương cho sự tồn tại nghiệm các phương trình $ax = b$, $xa = b$ là hoàn toàn có quyền chấp nhận, không cần phải chứng minh. Thật ra đó là dạng phát biểu khác của các điều kiện trên theo ngôn ngữ tập hợp.

   Cách thứ 2 chúng tôi chỉ đưa ra các cách tìm đơn vị và nghịch đảo, việc hoàn thiện chứng minh dành cho độc giả để tự khám phá lấy chính mình, thử khơi dậy bản năng khéo léo của mình.

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho $X = Z \times Z = \{(k_1, k_2) : k_1, k_2 \in Z\}$ Trên X xác định phép toán sau :

   $$(k_1, k_2)(l_1, l_2) = (k_1 + (-1)^{k_2} l_1, k_2 + l_2)$$

   Chứng minh X với phép toán trên là nhóm.

2. Cho $X = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} : ac \neq 0 \right\}$. Chứng minh X với phép nhân ma trận lập thành một nhóm. Nhóm X có giao hoán không?

3. Cho tập các số phức $D = \{1, i, -1, -i\}$. Chứng minh rằng D là nhóm với phép nhân thông thường các số.

4. Cho tập $X \neq \varnothing$ và $\Phi(X)$ là tập các song ánh của X lên X. Chứng minh $\Phi(X)$ là nhóm đối với phép nhân ánh xạ.

5. Cho ${M_n}^*$ là tập hợp các ma trận cấp n không suy biến. Chứng minh ${M_n}^*$ là nhóm với phép nhân ma trận.

6. Ta gọi ma trận vuông $A = (a_{ij})$ cấp n có dạng tam giác nếu $a_{ij} = 0$ khi $i > j$. Chứng minh rằng tập các ma trận vuông cấp n không suy biến có dạng tam giác lập thành nhóm với phép nhân ma trận.