GIẢI TÍCH (CƠ BẢN)

Tài liệu ôn thi cao học năm 2005

Phiên bản đã chỉnh sửa

PGS TS. Lê Hoàn Hóa

Ngày 3 tháng 12 năm 2004

Phép Tính Vi Phân Của Hàm Nhiều Biến (tt)

5 Công thức Taylor

5.1 Đạo hàm riêng bậc cao

Định nghĩa 1 Cho D là tập mở trong $\mathbb{R}^n$, $f\colon D \to \mathbb{R}$. Giả sử đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x), i = 1, 2, \ldots, n$ tồn tại với mọi $x \in D$. Khi đó $\frac{\partial f}{\partial x_i}\colon D \to \mathbb{R}$ biến $x \in D$ thành $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ là hàm số thực theo n biến số thực và được gọi là hàm đạo hàm riêng của f theo biến x_i. Ta có thể đề cập đến đạo hàm riêng của hàm $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ theo biến x_j

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)(x) = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+te_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)}{t} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

và gọi là đạo hàm riêng bậc hai của f theo biến x_i, x_j, theo thứ tự, tại x.

Tổng quát, khi thay đổi thứ tự lấy đạo hàm riêng thì giá trị của đạo hàm sẽ thay đổi.

Thí dụ: Cho

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2>0 \\ 0 & x=y=0 \end{cases}$$

Ta sẽ có: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1$ và $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$.

Thật vậy, ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0 \text{ và } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,y)-f(0,y)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{ty(t^2-y^2)}{t(t^2+y^2)} = -y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x,t)-f(x,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{tx(x^2-t^2)}{t(x^2+t^2)} = x$$

Suy ra

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = -1$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = 1$$

Định lí 1 (Định lý Schwartz) *Nếu các đạo hàm riêng* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ *liên tục tại* x *thì*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

5.2 Công thức Taylor

Cho D là tập mở trong $\mathbb{R}^n$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ và $f \in C^k(D)$ (nghĩa là các đạo hàm riêng hỗn hợp bậc bé thua hay bằng k liên tục). Cho $x \in D$ và $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ sao cho: $x + th \in D, \forall t \in [0,1]$. Khi đó tồn tại $\theta \in (0,1)$ sao cho:

$$\begin{aligned} f(x+h) = f(x) &+ \left(\sum_1^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) f(x) + \frac{1}{2!}\left(\sum_1^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 f(x) + \cdots \\ &+ \frac{1}{(k-1)!}\left(\sum_1^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{k-1} f(x) + \frac{1}{k!}\left(\sum_1^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(x+\theta h) \end{aligned}$$

Số hạng $\frac{1}{k!}\left(\sum_1^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(x+\theta h)$ là dư số Lagrange.

Hoặc là:

$$\begin{aligned} f(x+h) = f(x) &+ \left(\sum_1^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) f(x) + \frac{1}{2!}\left(\sum_1^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 f(x) + \cdots \\ &+ \frac{1}{(k-1)!}\left(\sum_1^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{k-1} f(x) + \frac{1}{k!}\varphi(h) h^k \end{aligned}$$

trong đó số hạng $\frac{1}{k!}\varphi(h)h^k$ là đại lượng vô cùng bé bậc lớn hơn $\|h\|^k$, được gọi là dư số Peano.

Trường hợp $n = 2, h = (s,t)$, ta có công thức:

$$\begin{aligned} f(x+s, y+t) = f(x,y) &+ \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, s + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, t\right] \\ &+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\, s^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\, st + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\, t^2\right] + \cdots \\ &+ \frac{1}{k!}\sum_{i=1}^k C_k^i s^i t^{k-i} \frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^{k-i}} + \mathrm{o}\big(s^2 + t^2\big)^{k/2} \end{aligned}$$

trong đó $\mathrm{o}(s^2+t^2)^{k/2}$ là lượng vô cùng bé bậc lớn hơn $(s^2+t^2)^{k/2}$.

5.3 Tính duy nhất

Cho D là tập hợp mở trong $\mathbb{R}^n$, $0_{\mathbb{R}^n} \in D$ và $f\colon D \to \mathbb{R}$. Giả sử $f \in C^k(D)$ và thỏa mãn

$$f(x) = P(x) + R(x), \forall x \in D$$

trong đó $P(x)$ là đa thức bậc bé thua hay bằng k theo các biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$ và

$$|R(x)| \leqslant q(x)\|x\|^k \text{ với } \lim_{x \to 0_{\mathbb{R}^n}} q(x) = 0$$

Khi đó $P(x)$ chính là khai triển Taylor của f gần $0_{\mathbb{R}^n}$, nghĩa là

$$P(x) = f(0) + \left(\sum_1^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) f(0) + \frac{1}{2}\left(\sum_1^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 f(0) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(\sum_1^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(0)$$

Thí dụ: 1) Cho $f(x,y) = x\sin(x^2 + xy)$ thì $f \in C^k(\mathbb{R}^2)$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Dùng khai triển thành chuỗi Taylor

$$\sin t = \sum_0^\infty (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

ta được

$$f(x,y) = x\sin\left(x^2 + xy\right) = x.\sum_0^\infty (-1)^k \frac{\left(x^2 + xy\right)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Số hạng $(-1)^k \frac{\left(x^2+xy\right)^{2k+1} x}{(2k+1)!}$ là tổng của các đơn thức bậc $(4k+3)$ theo hai biến x, y tương ứng với số hạng $(4k+3)$ trong công thức Taylor của f là:

$$\frac{1}{(4k+3)!}\sum_{i=0}^n C_n^i x^i y^{n-i} \frac{\partial^n f(0,0)}{\partial x^i \partial y^{n-i}} \text{ với } n = 4k+3.$$

Nghĩa là

$$\frac{1}{(4k+3)!}\sum_{i=0}^n C_n^i x^i y^{n-i} \frac{\partial^n f(0,0)}{\partial x^i \partial y^{n-i}} = (-1)^k \frac{x\left(x^2 + xy\right)^{2k+1}}{(2k+1)!}, n = 4k+3.$$

Dùng công thức này ta có thể tính:

i) $\dfrac{\partial^{19} f(0,0)}{\partial x^{16} \partial y^3}$: ứng với $k = 4$, đồng nhất hệ số của số hạng $x^{16}y^3$ ở hai vế:

$$\frac{1}{19!} C_{19}^{16} \frac{\partial^{19} f(0,0)}{\partial x^{16} \partial y^3} = \frac{1}{9!} C_9^6$$

Suy ra:

$$\frac{\partial^{19} f(0,0)}{\partial x^{16} \partial y^3} = \frac{16!}{6!}$$

ii) $\dfrac{\partial^n f(0,0)}{\partial x^i \partial y^{n-i}} = 0$ nếu $n \neq 4k+3$, thí dụ $\dfrac{\partial^{20} f(0,0)}{\partial x^i \partial y^{20-i}} = 0$ với mọi i từ 1 đến 20.

2) Cho $f(x,y) = y^2\cos(x^2+y)$ thì $f \in C^k(\mathbb{R}^2)$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Dùng khai triển thành chuỗi Taylor:

$$\cos t = \sum_0^\infty (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}$$

ta được:

$$f(x,y) = y^2\cos\left(x^2+y\right) = y^2.\sum_0^\infty (-1)^k \frac{\left(x^2+y\right)^{2k}}{(2k)!}$$

Cần khai triển Taylor của f đến bậc 10 ở vế trái trong tổng $y^2\sum_0^\infty (-1)^k \frac{\left(x^2+y\right)^{2k}}{(2k)!}$. Gọi B là tổng các đơn thức bậc bé thua 10, ta được

$$B = y^2\left[1 - \frac{y^2}{2} - x^2y + \left(x^4+y^4\right) + x^2y^3 + \left(\frac{x^4y^2}{2} - \frac{y^6}{6!}\right) - x^2y^5 + \left(\frac{x^8}{4!} + \frac{y^8}{8!}\right)\right]$$

B chính là khai triển Taylor của f đến bậc 10.

Bài tập

1) Cho $P(x,y)$ là đa thức bậc hai theo x, y. Giả sử $P(0,0) = 1, \frac{\partial P}{\partial x}(0,0) = 0, \frac{\partial P}{\partial y}(0,0) = -1, \frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}(0,0) = 2, \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(0,0) = 1, \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(0,0) = 1$. Tính $\frac{\partial P}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}(1,2)$.

2) Khai triển Taylor của $f(x,y) = y^2\sin(x^2 - xy)$ đến bậc 8 trong lân cận của $(0,0)$. Tính $\frac{\partial^8 f(0,0)}{\partial x^2\partial y^6}$ và $\frac{\partial^8 f(0,0)}{\partial x^4\partial y^4}$.

3) Khai triển Taylor của $f(x,y) = e^{xy}\cos y$ đến bậc 4 trong lân cận của $(0,0)$. Tính $\frac{\partial^4 f(0,0)}{\partial x^3\partial y}$ và $\frac{\partial^4 f(0,0)}{\partial x\partial y^3}$.

6 Cực trị địa phương

Định nghĩa 2 Cho D là tập mở trong $\mathbb{R}^n$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ và $x \in D$. Ta nói:

- f đạt *cực đại địa phương* tại x nếu có $r > 0$ sao cho $B(x,r) \subset D$ và $f(x) \geqslant f(y) \quad \forall y \in B(x,r)$.
- f đạt *cực tiểu địa phương* tại x nếu có $r > 0$ sao cho $B(x,r) \subset D$ và $f(x) \leqslant f(y) \quad \forall y \in B(x,r)$.
- f đạt *cực trị địa phương* tại x nếu f đạt cực đại địa phương hay cực tiểu địa phương tại x.

6.1 Điều kiện cần – Điều kiện đủ

6.1.1 Điều kiện cần

Cho D mở trong $\mathbb{R}^n$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ và $x \in D$. Giả sử tồn tại các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. Nếu f đạt cực trị địa phương tại x thì

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

Điểm x tương ứng được gọi là *điểm dừng*.

6.1.2 Điều kiện đủ

Cho D là tập mở trong $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ và $f \in C^2(D)$. Giả sử tại $x_0 \in D$ có $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$. Áp dụng công thức Taylor cho hàm f trong lân cận của x_0, ta có

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 f(x_0) + \varphi(h)(h)^2$$

với $\lim\limits_{h \to 0_{\mathbb{R}^n}} \varphi(h) = 0_{L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$

Đặt A là dạng toàn phương định bởi:

$$A(h) = \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} h_i^2 \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i^2} + 2\sum_{i \neq j} h_i h_j \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Dạng toàn phương $A(h)$ thỏa mãn một trong các tính chất

1. Dạng toàn phương $A(h)$ là xác định dương nghĩa là $A(h) > 0$ với mọi $h \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.
2. Dạng toàn phương $A(h)$ là xác định âm nghĩa là $A(h) < 0$ với mọi $h \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.
3. Dạng toàn phương $A(h)$ là nửa xác định dương hoặc nửa xác định âm nghĩa là $A(h) \geqslant 0$ (hay $A(h) \leqslant 0$) với mọi $h \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ và có một $h_0 \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ sao cho $A(h_0) = 0$.
4. Dạng toàn phương $A(h)$ không xác định, nghĩa là tồn tại $h, h' \in \mathbb{R}^n$ sao cho $A(h) > 0$ và $A(h') < 0$.

Định lí 2 *Cho D là tập mở trong $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ và $f \in C^2(D)$. Giả sử tại $x_0 \in D$: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Đặt A là dạng toàn phương xác định như trên. Khi đó:*

1. *Nếu $A(h)$ là dạng toàn phương xác định dương thì f đạt cực tiểu địa phương tại x_0.*
2. *Nếu $A(h)$ là dạng toàn phương xác định âm thì f đạt cực đại địa phương tại x_0.*
3. *Nếu $A(h)$ là dạng toàn phương nửa xác định âm hay nửa xác định dương thì chưa thể kết luận về cực trị địa phương tại x_0.*
4. *Nếu $A(h)$ là dạng toàn phương không xác định thì f không đạt cực trị địa phương.*

Sau đây là định lý Sylvester về tính xác định âm, dương của dạng toàn phương.

Định lí 3 (Định lý Sylvester về dạng toàn phương) *Cho $A(h)$ là dạng toàn phương xác định như trên, ma trận biểu diễn của $A(h)$ là ma trận bậc $n \times n$ đặt là B:*

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ với } a_{ij} = \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Xem các định thức con trên đường chéo chính

$$\Delta_1 = a_{11}\,,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Khi đó:

1. *Nếu* $\Delta_i > 0, \forall i$ *thì* $A(h)$ *là dạng toàn phương xác định dương.*

2. *Nếu* $(-1)^i \Delta_i > 0$, $\forall i$ *thì* $A(h)$ *là dạng toàn phương xác định âm.*

3. *– Nếu* $\Delta_i \geqslant 0$, $\forall i$ *và có một* i *sao cho* $\Delta_i = 0$ *thì* $A(h)$ *là dạng toàn phương nửa xác định dương.*
   – Nếu $(-1)^i \Delta_i \geqslant 0$, $\forall i$ *và có một* i *sao cho* $\Delta_i = 0$ *thì* $A(h)$ *là dạng toàn phương nửa xác định âm.*

4. *Các trường hợp khác thì* $A(h)$ *là dạng toàn phương không xác định.*

6.2 Thí dụ

Thí dụ: Xét cực trị địa phương của hàm số

$$f(x, y, z) = x^3 + xy + y^2 - 2xz + 2z^2 + 3y - 1$$

Tọa độ điểm dừng là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y - 2z = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y + 3 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = -2x + 4z = 0 \end{cases}$$

Có hai điểm dừng là $M_1(1, -2, \frac{1}{2})$ và $M_2(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{1}{4})$.

Các đạo hàm riêng bậc hai :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -2, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 4, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$$

Tại $M_1(1, -2, \frac{1}{2})$, ta có

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = 6, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 36$$

Vậy A là dạng toàn phương xác định dương. Suy ra f đạt cực tiểu địa phương tại M_1 và $f(M_1) = -\frac{9}{2}$.

Tại $M_2(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{1}{4})$ ta có

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = -3, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7, \Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -36$$

Vậy A là dạng toàn phương không xác định. Suy ra f không đạt cực trị địa phương tại M_2.

Thí dụ: Khảo sát cực trị địa phương của hàm

$$f(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z), 0 < x,y,z < \pi$$

Tọa độ điểm dừng là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \cos x - \cos(x+y+z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \cos y - \cos(x+y+z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \cos z - \cos(x+y+z) = 0 \\ \quad 0 < x,y,z < 0 \end{cases}$$

Điểm dừng duy nhất $M(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Các đạo hàm riêng bậc hai là

$$\frac{\partial^2 f(M)}{\partial x^2} = -2, \frac{\partial^2 f(M)}{\partial y^2} = -2, \frac{\partial^2 f(M)}{\partial z^2} = -2, \frac{\partial^2 f(M)}{\partial x \partial y} = -1, \frac{\partial^2 f(M)}{\partial x \partial z} = -1, \frac{\partial^2 f(M)}{\partial y \partial z} = -1$$

Ma trận biểu diễn của dạng toàn phương

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = -2, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3, \Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

Vậy A là dạng toàn phương xác định âm. Suy ra f đạt cực đại địa phương tại M và $f(M) = 4$.

Thí dụ: Xét cực trị địa phương của hàm

$$f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

Tọa độ điểm dừng là nghiệm của hệ phương trình:

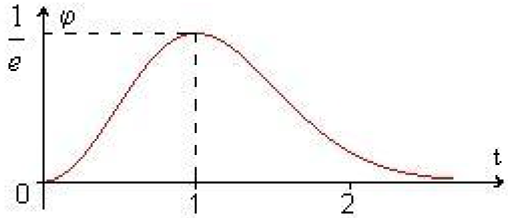
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x\,(1-x^2-y^2)\,e^{-x^2-y^2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y\,(1-x^2-y^2)\,e^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases}$$

Điểm dừng: $M_0(0,0)$ và tất cả các điểm trên đường tròn $(C) x^2+y^2 = 1$

Do $f(x,y) \geqslant 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(0,0) = 0$ nên f đạt cực tiểu địa phương tại M_0.

Đặt $t = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi(t) = t^2 e^{-t^2}$. Đạo hàm $\varphi'(t) = 2t(1-t^2)e^{-t^2}$.

Đồ thị của hàm φ với $t \geqslant 0$:



Đồ thị của hàm f là mặt cong (S) sinh bởi đường cong đồ thị của hàm φ quay quanh trục $O\varphi$. Hàm f đạt cực đại địa phương tại các điểm M trên đường cong (C), $f(M) = \frac{1}{e}$.

Bài tập

1– Xét cực trị địa phương của các hàm số sau:

a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

b) $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - y^2$

c) $f(x, y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y \quad x > 0, y > 0$

d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$

e) $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ với $xyz \neq 0$.

2– Xét cực trị địa phương của hàm ẩn $z = z(x, y)$ suy từ phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xz - xy + 2(x + y + z - 1) = 0$$

HD: Dùng định lý hàm ẩn:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x - z + 2}{2z - x - y + 2}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y - z + 2}{2z - x - y + 2}$$

Tọa độ điểm dừng là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - z + 2 = 0 \\ 2y - z + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - xz - xy + 2(x + y + z - 1) = 0 \\ 2z - x - y + 2 \neq 0 \end{cases}$$

Có hai điểm dừng:

– $M_1(-3 + \sqrt{6}, -3 + \sqrt{6})$ tương ứng với $z = -4 + 2\sqrt{6}$.

– $M_2(-3 - \sqrt{6}, -3 - \sqrt{6})$ tương ứng với $z = -4 - 2\sqrt{6}$.

Đạo hàm riêng bậc hai tại hai điểm dừng:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2}{2z - x - y + 2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{2}{2z - x - y + 2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

Tại M_1: ma trận biểu diễn của dạng toàn phương là

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \Delta_1 = -\frac{1}{2\sqrt{6}}, \Delta_2 = \frac{1}{24}$$

Dạng toàn phương xác định âm, vậy f đạt cực đại địa phương tại M_1 và $z(M_1) = -4 + 2\sqrt{6}$.

Tại M_2: ma trận biểu diễn của dạng toàn phương là

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \Delta_1 = \frac{1}{2\sqrt{6}}, \Delta_2 = \frac{1}{24}$$

Dạng toàn phương xác định dương, vậy z đạt cực tiểu địa phương tại M_2 và $z(M_2) = -4 - 2\sqrt{6}$.

7 Cực trị có điều kiện

Những phát biểu sau đây đúng trong trường hợp tổng quát của hàm f theo $n + p$ biến với p điều kiện. Tuy nhiên ở đây ta chỉ xét đơn giản cho trường hợp ba biến với một điều kiện.

7.1 Định nghĩa

Định nghĩa 3 Cho D là tập mở trong $\mathbb{R}^3$, $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ thuộc lớp $C^2(D)$. Đặt $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/\varphi(x, y, z) = 0\}$. Cho $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$. Ta nói:

- f đạt cực đại địa phương có điều kiện $\varphi(x, y, z) = 0$ tại điểm M_0 nếu tồn tại $r > 0$ sao cho $f(M_0) \geqslant f(M)$ với mọi $M \in S$ và $d(M, M_0) < r$.
- f đạt cực tiểu địa phương có điều kiện $\varphi(x, y, z) = 0$ tại điểm M_0 nếu tồn tại $r > 0$ sao cho $f(M_0) \leqslant f(M)$ với mọi $M \in S$ và $d(M, M_0) < r$.
- f đạt cực trị địa phương có điều kiện $\varphi(x, y, z) = 0$ tại M_0 nếu f đạt cực đại địa phương hoặc cực tiểu địa phương có điều kiện tại M_0.

7.2 Điều kiện cần (Định lý nhân tử Lagrange)

Cho $f, \varphi \in C^1(D)$, $M_0 \in S$ và $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(M_0) \neq 0$. Nếu f đạt cực trị địa phương có điều kiện $\varphi(x, y, z) = 0$ tại M_0 thì có duy nhất số thực λ_0 sao cho x_0, y_0, z_0, λ_0 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, z) = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{I}$$

λ_0 được gọi là nhân tử Lagrange của f tại M_0 với điều kiện $\varphi(x, y, z) = 0$.

Hệ thống (I) được gọi là hệ phương trình tọa độ điểm dừng cho bài toán cực trị có điều kiện. Có thể có nhiều điểm dừng ứng với cùng một giá trị λ_0.

7.3 Điều kiện đủ

Giả sử $f, \varphi \in C^2(D)$ và x_0, y_0, z_0, λ_0 là nghiệm của hệ phương trình (I) và $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Đặt $F(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda_0 \varphi(x, y, z)$

Xét dạng toàn phương:

$$\begin{aligned} A = d^2 f(M_0) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(M_0) dx^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(M_0) dy^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(M_0) dz^2 \\ + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(M_0) dx dy + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}(M_0) dx dz + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}(M_0) dy dz \end{aligned}$$

trong đó dx, dy, dz thỏa mãn

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(M_0) dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(M_0) dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(M_0) dz = 0$$

Khi đó:

i) Nếu A là dạng toàn phương xác định dương thì f đạt cực tiểu địa phương có điều kiện $\varphi(x, y, z) = 0$ tại M_0.

ii) Nếu A là dạng toàn phương xác định âm thì f đạt cực đại địa phương có điều kiện tại M_0.

iii) Nếu A là dạng toàn phương không xác định thì f không đạt cực trị địa phương có điều kiện tại M_0.

iv) Nếu A là dạng toàn phương nửa xác định dương hay nửa xác định âm thì chưa thể kết luận về cực trị địa phương có điều kiện.

7.4 Thí dụ

Thí dụ: Tìm cực trị địa phương của hàm số $f(x, y, z) = x + y + z$ với điều kiện $\varphi(x, y, z) = xyz - a = 0, a > 0$.

Đặt $F(x, y, z) = x + y + x + \lambda(xyz - a)$. Tọa độ điểm dừng và nhân tử Lagrange là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 1 + \lambda yz = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 1 + \lambda xz = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 1 + \lambda xy = 0 \\ \quad xyz - a = 0 \end{cases}$$

Ứng với $\lambda = -\frac{1}{a^{2/3}}$ có điểm dừng $M(a^{1/3}, a^{1/3}, a^{1/3})$. Khi đó:

$$F(x, y, z) = x + y + x - a^{-2/3}(xyz - a)$$

Dạng toàn phương tương ứng:

$$d^2F(M) = a^{-1/3}(dxdy + dydz + dxdz)$$

với điều kiện

$$d\varphi(M) = 0 \Leftrightarrow a^{2/3}(dx + dy + dz) = 0 \text{ hay } dz = -dx - dy$$

Thế vào, ta được:

$$d^2F(M) = 2a^{-1/3}(dx^2 + dxdy + dy^2) \geqslant 0$$

Dạng toàn phương xác định dương. Vậy f đạt cực tiểu địa phương có điều kiện tại M và $f(M) = 3a^{1/3}$.

Vậy: $f(x, y, z) = x + y + z \geqslant 3a^{1/3}$ nếu $xyz = a > 0$.

Thí dụ: Xét cực trị địa phương của hàm $f(x, y, z) = x + y + z$ với điều kiện $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1 = 0$.

Đặt

$$F(x, y, z) = x + y + x + \lambda\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1\right)$$

Tọa độ điểm dừng và nhân tử Lagrange là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 1 - \frac{\lambda}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 1 - \frac{\lambda}{y^2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 1 - \frac{\lambda}{z^2} = 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \end{cases}$$

Ứng với $\lambda = 9$ có điểm dừng $M_1(3,3,3)$, ứng với $\lambda = 1$ có ba điểm dừng $M_2(-1,1,1)$, $M_3(1,-1,1)$, $M_4(1,1,-1)$.

Ứng với $\lambda = 9$ và $M_1(3,3,3)$ ta được:

$$F(x,y,z) = x + y + z + 9\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1\right)$$

có dạng toàn phương:

$$d^2F(M_1) = \frac{2}{3}(dx^2 + dy^2 + dz^2) \geqslant 0$$

Dạng toàn phương xác định dương (dễ dàng nhận biết mà không cần sử dụng thêm điều kiện $d\varphi(M) = 0$). Vậy f đạt cực tiểu địa phương có điều kiện tại M_1 và $f(M_1) = 9$.

Ứng với $\lambda = 1$ và $M_2(-1,1,1)$ ta có:

$$F(x,y,z) = x + y + z + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1\right)$$

có dạng toàn phương:

$$d^2F(M_2) = 2(-dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Sử dụng điều kiện $d\varphi(M_2) = 0$ ta được:

$$d\varphi(M_2) = dx + dy + dz = 0 \text{ hay } dx = -dy - dz$$

Thay vào biểu thức của $d^2F(M_2)$ ta được $d^2F(M_2) = -dydz$. Biểu thức này đổi dấu khi dx, dy biến thiên. Dạng toàn phương không xác định. Vậy f không đạt cực trị địa phương có điều kiện tại M_2. Do biểu thức của f và φ đối xứng theo x, y, z nên tại M_3, M_4 f cũng không đạt cực trị địa phương có điều kiện.

Bài tập

1– Xét cực trị địa phương có điều kiện của hàm số:

a) $f(x,y) = xy$ với điều kiện $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.

b) $f(x,y) = x^2 + 12xy + 2y^2$ nếu $4x^2 + y^2 = 25$.

c) $f(x,y) = x^2 + y^2$ nếu $x^2 - 2x - 4y + y^2 = 0$.

HD: Cả ba bài này có thể dùng phương pháp biểu diễn tham số phương trình điều kiện rồi thế vào biểu thức của f. Thí dụ câu b: $4x^2 + y^2 = 25$ có biểu diễn tham số là

$$x(t) = \frac{5}{2}\cos t, y(t) = 5\sin t \text{ với } t \in [0, 2\pi]$$

Đặt

$$g(t) = f\big(x(t), y(t)\big) = \frac{25}{4}\cos^2 t + 120\sin t\cos t + 50\sin^2 t$$

Hay

$$g(t) = -25.\frac{7}{8}\cos 2t + 60\sin 2t + 25.\frac{9}{8}, t \in [0, 2\pi]$$

Suy ra:

$$\max g = \left[\left(25.\frac{7}{8}\right)^2 + (60)^2\right]^{1/2} + 25.\frac{9}{8}$$
$$\min g = 25.\frac{9}{8} - \left[\left(25.\frac{7}{8}\right)^2 + (60)^2\right]^{1/2}$$

2– Tìm cực trị địa phương có điều kiện của hàm số:

a) $f(x, y, z) = xy^2z^3$ nếu $x + 2y + 3z = a\,(x, y, z, a > 0)$.

b) $f(x, y, z) = x - 2y + 5z$ nếu $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

c) $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ nếu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

d) $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ nếu $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}\,(a > 0)$.
HD: Đổi biến $u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y}$.

Ghi chú: Trong 2 b), c) mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ là tập đóng bị chặn nên f sẽ đạt cực đại, cực tiểu, do đó chỉ cần tìm các điểm dừng, tính giá trị của f tại các điểm dừng. Giá trị lớn nhất là cực đại, bé nhất là cực tiểu địa phương có điều kiện.

8 Giá trị lớn nhất – Giá trị bé nhất

Cho D là tập đóng bị chặn trong $\mathbb{R}^3$, biên ∂D có phương trình $\varphi(x, y, z) = 0$. Cho $f\colon D \to \mathbb{R}$ liên tục. Khi đó f đạt cực đại và cực tiểu trên D nghĩa là có $M_1, M_2 \in D$ sao cho:

$$f(M_1) = \max\{f(x, y, z)/(x, y, z) \in D\}, f(M_2) = \min\{f(x, y, z)/(x, y, z) \in D\}$$

Nếu $M_1 \in D \setminus \partial D$ hoặc $M_2 \in D \setminus \partial D$ thì f đạt cực đại và cực tiểu địa phương tại M_1, M_2. Nếu $M_1 \in \partial D$ thì f đạt cực đại địa phương có điều kiện $\varphi(x, y, z) = 0$ tại M_1. Tương tự nếu $M_2 \in \partial D$ thì f đạt cực tiểu địa phương có điều kiện tại M_2.

Để tìm cực đại, cực tiểu của f trên D ta làm như sau:

– Tìm điểm dừng trong $D \setminus \partial D$ là nghiệm của hệ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 0, \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0$$

– Tìm điểm dừng trên ∂D là nghiệm của hệ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \varphi(x, y, z) = 0$$

– Tính giá trị của f tại tất cả các điểm dừng. Giá trị lớn nhất (bé nhất) của f tại các điểm dừng là cực đại (cực tiểu) của f trên D.

Thí dụ: Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất của hàm số:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y \text{ trên } x^2 + y^2 \leqslant 25$$

Tọa độ điểm dừng trong $x^2 + y^2 < 25$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 12 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 16 = 0 \end{cases}$$

Điểm dừng $M_1(6, -5)$ không thuộc miền $x^2 + y^2 < 25$.

Tọa độ điểm dừng trên biên $\partial D : x^2 + y^2 = 25$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x - 12 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y + 16 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Ứng với $\lambda = 1$, điểm dừng $M_2(3, -4)$, $f(M_2) = -75$.

Ứng với $\lambda = -3$, điểm dừng $M_3(-3, 4)$, $f(M_3) = 125$.

Vậy $\max f = 125$ và $\min f = -75$.

Thí dụ: Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất của hàm số:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + x - y + 2z \text{ trên miền } x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$$

Tọa độ điểm dừng trong miền $x^2 + y^2 + z^2 < 4$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

Điểm dừng $M_1(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$ thuộc miền $x^2 + y^2 + z^2 < 4$.

Tọa độ điểm dừng trên mặt cầu $\varphi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x + 1 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y - 1 + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2z + 2 + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Ứng với $\lambda = \sqrt{6} - 1$ có điểm dừng $M_2(-\frac{1}{2\sqrt{6}}, \frac{1}{2\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$.

Ứng với $\lambda = -\sqrt{6} - 1$ có điểm dừng $M_3(\frac{1}{2\sqrt{6}}, -\frac{1}{2\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

Ta có $f(M_1) = -\frac{3}{2}, f(M_2) = 4 - \frac{3}{\sqrt{6}}, f(M_3) = 4 + \frac{3}{\sqrt{6}}$

Vậy $\max f = 4 + \frac{3}{\sqrt{6}}, \min f = -\frac{3}{2}$.

Bài tập

Tìm cực đại, cực tiểu của f trên miền sau:

1) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - x - y$ trên miền $x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 3$.

2) $f(x,y) = x^2 - xy + z^2$ trên miền $|x| + |y| \leqslant 1$.

3) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - z$ trên miền $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 100$.

4) Tìm hình hộp chữ nhật có đường chéo bằng a cho trước và có thể tích lớn nhất.