Tài liệu ôn thi cao học năm 2005
Môn: Giải tích cơ bản

GV: PGS.TS. Lê Hoàn Hóa
Đánh máy: NTV
Phiên bản: 2.0 đã chỉnh sửa ngày 19 tháng 10 năm 2004

HÀM SỐ THỰC THEO MỘT BIẾN SỐ THỰC

1 Giới hạn liên tục

Định nghĩa 1.1 *Cho $I \subset \mathbb{R}$, điểm $x_0 \in \mathbb{R}$ được gọi là* điểm giới hạn *(hay điểm tụ) của I nếu với mọi $\delta > 0, I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \backslash \{x_0\} \neq 0$. Cho $f : I \to \mathbb{R}$ và x_0 là điểm giới hạn của I. Ta nói:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon, \exists \delta > 0 : \forall x \in I, 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty\ (-\infty) \Longleftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : \forall x \in I, 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > A\ (f(x) < A)$$

Định nghĩa 1.2 *Cho $f : I \to \mathbb{R}$ và $x_0 \in I$. Ta nói:*

$$f \text{ liên tục tại } x_0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in I, |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Nếu x_0 là điểm giới hạn của I thì:

$$f \text{ liên tục tại } x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Nếu f liên tục tại mọi $x \in I$, ta nói f liên tục trên I.

$$f \text{ liên tục trên } I \Longleftrightarrow \forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x' \in I, |x - x'| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon$$

Ta nói:

$$f \text{ liên tục đều trên } I \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in I, |x - x'| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon$$

Hàm số liên tục trên một đoạn:
Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục. Khi đó:

i) f liên tục đều trên $[a, b]$.

ii) f đạt cực đại, cực tiểu trên $[a, b]$.

Đặt $m = \min\{f(x), x \in [a, b]\}$, $M = \max\{f(x), x \in [a, b]\}$. Khi đó $f([a, b]) = [m, M]$ (nghĩa là f đạt mọi giá trị trung gian giữa m, M).

2 Sự khả vi

Định nghĩa 2.1 *Cho $f : I \to \mathbb{R}$ và $x_0 \in I$. Ta nói f khả vi tại x_0 nếu $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$ tồn tại hữu hạn. Khi đó đặt*

$$f'(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} \text{ gọi là đạo hàm của } f \text{ tại } x_0$$

Nếu f khả vi tại mọi $x \in I$, ta nói f khả vi trên I.

Định lí 2.1 (Cauchy) *Cho $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b). Giả sử $f'(x) \neq 0$ trên (a, b). Khi đó, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho:*

$$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)]$$

Trường hợp $g(x) = x$, ta có công thức Lagrange

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Quy tắc Lôpitan: Cho $x_0 \in \mathbb{R}$ hoặc $x_0 = \pm\infty$, f, g khả vi trong lân cận của x_0. Giả sử g và g' khác không và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ hoặc $-\infty$.

Khi đó: Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$ (A có thể là hữu hạn hoặc vô hạn).

Công thức đạo hàm dưới dấu tích phân:
Cho f liên tục, u, v khả vi. Đặt

$$F(x) = \int\limits_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt$$

Khi đó: F khả vi và $F'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$.

3 Vô cùng bé - Vô cùng lớn

Hàm f được gọi là lượng vô cùng bé khi $x \to x_0$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Cho f, g là hai lượng vô cùng bé khi $x \to x_0$. Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k$

- Nếu $k = 1$, ta nói f, g là hai lượng vô cùng bé tương đương.

- Nếu $k \neq 0$, k hữu hạn, ta nói f, g là hai lượng vô cùng bé cùng bậc.

- Nếu $k = +\infty$ hoặc $-\infty$, ta nói g là lượng vô cùng bé bậc lớn hơn f.

- Nếu $k = 0$, ta nói f là lượng vô cùng bé bậc lớn hơn g.

Bậc của vô cùng bé: Cho f là lượng vô cùng bé khi $x \to x_0$. Giả sử tồn tại $k > 0$ sao cho $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^k}$ tồn tại hữu hạn và khác 0, số $k > 0$, nếu có sẽ duy nhất, được gọi là bậc của vô cùng bé f khi $x \to x_0$.

Hàm f được gọi là vô cùng lớn khi $x \to x_0$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ hoặc $-\infty$. Nếu f là vô cùng lớn khi $x \to x_0$ thì $\dfrac{1}{f}$ là vô cùng bé khi $x \to x_0$.

Cho f, g là vô cùng lớn khi $x \to x_0$. Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k$.

- Nếu $k = 1$, ta nói f, g là hai lượng vô cùng lớn tương đương.
- Nếu $k \neq 0$ và hữu hạn, ta nói f, g là hai lượng vô cùng lớn cùng bậc.
- Nếu $k = 0$, ta nói g là lượng vô cùng lớn bậc lớn hơn f.
- Nếu $k = +\infty$ hoặc $-\infty$, ta nói f là lượng vô cùng lớn bậc lớn hơn g.

Cho f là vô cùng lớn khi $x \to x_0$. Bậc của vô cùng lớn f là số $k > 0$ (nếu có sẽ duy nhất) sao cho $\lim\limits_{x \to x_0} (x-x_0)^k f(x)$ tồn tại hữu hạn và khác không.

4 Công thức Taylor

Cho $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ có đạo hàm bậc $(n+1)$. Với $x_0, x \in (a, b)$, tồn tại $\theta \in (0, 1)$ sao cho:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x-x_0)\right)$$

$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x-x_0)\right)$ là dư số Lagrange.
Hoặc:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left(|x-x_0|^n\right)$$

$R_n(x) = o\left(|x-x_0|^n\right)$ là lượng vô cùng bé bậc lớn hơn n, được gọi là dư số Peano. Nếu $x_0 = 0$ ta được công thức Maclaurin:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$$

. Công thức Maclaurin của hàm sơ cấp

a) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + R_n(x),\ R_n(x) = \dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$ hoặc $R_n(x) = o(x^n)$.

b) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n},\ R_{2n} = (-1)^n \cos\theta x . \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ hoặc $R_{2n} = o(x^{2n})$.

c) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1},\ R_{2n+1} = (-1)^{n+1} \cos\theta x . \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$ hoặc $R_{2n+1} = o(x^{2n+1})$.

d) $(1+x)^\alpha = 1 + \dfrac{\alpha x}{1!} + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n,\ (x>-1).$

$R_n = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}(1+\theta x)^{\alpha-n+1}.x^{n+1}$ hoặc $R_n = o(x^n)$.

e) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n),\ x>-1$

f) $\text{arctg}x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n})$

5 Các giới hạn cơ bản

1. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\text{tg}t}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\text{arctg}t}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\text{arcsin}t}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t}$
2. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(1+t)^a-1}{t} = a.$
3. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos t}{t^2} = \dfrac{1}{2}.$
4. $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^p}{e^t} = 0 \quad \forall p.$
5. $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\ln^p t}{t^\alpha} = 0,\ \alpha>0, \forall p.$

Thí dụ:

Tính các giới hạn sau:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(1+t)^{1/m}-1}{(1+t)^{1/n}-1} = \dfrac{n}{m}.$
2. $$\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\ldots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}} = \lim_{t\to 0}\frac{\left[1-(1+t)^{1/2}\right].\left[1-(1+t)^{1/3}\right]\ldots\left[1-(1+t)^{1/n}\right]}{(-t)^{n-1}}$$
$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{3}\ldots\frac{1}{n} = \frac{1}{n!}$$
3. $I = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[n]{1+5^x}-(1+x)}$

   Đặt $t^5 = 1+5x$ hay $x = \frac{t^5-1}{5}$

   Suy ra : $\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)} = -\dfrac{(t^5-1)^2}{5(t^5-t+4)} = -\dfrac{(t^5-1)^2}{5(t-1)^2(t^3+2t^2+3t-4)}$

   Vậy $I = -\frac{5}{2}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\big[\ln(e^x-1)-\ln x\big] = 1$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\text{cotg}\,x\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2x} = 0$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt{\cos x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^2}{4}}{x^2}=\dfrac{1}{12}$

   (dùng $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$, $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(1+t)^\alpha-1}{t}=\alpha$)

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}2\sin\left(\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right).\cos\left(\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)=0$

   Tính $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}$

   Đặt $y=u^v\Rightarrow\ln y=v\ln u$.

   Sau đó tính $\lim\limits_{x\to x_0}v\ln u$

   Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}v\ln u=a$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}u^v=e^a$

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{3x+4}$

   Đặt $y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{3x+4}\Rightarrow\ln y=(3x+4)\ln\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)$

   $\Rightarrow\ln y=(3x+4)\ln\left(1+\dfrac{5}{x-3}\right)$

   Vậy $\lim\limits_{x\to\infty}\ln y=\lim\limits_{x\to\infty}(3x+4).\dfrac{5}{x-3}=15$

   Suy ra $\lim\limits_{x\to\infty}y=e^{15}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

    Đặt $y=\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

    $\Rightarrow\ln y=\dfrac{1}{\sin x}\ln\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)=\dfrac{1}{\sin x}\ln\left(1+\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{1+\sin x}\right)$

    (dùng $\ln(1+t)\sim t$)

    $\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\ln y=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin x(1+\sin x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\cos x}-1}{1+\sin x}=0$

    Vậy $\lim\limits_{x\to 0}y=1$

Chứng minh các lượng vô cùng bé sau tương đương khi $x\to 0$:

1. $f(x)=x\sin^2 x$, $g(x)=x^2\sin x$

   $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin^2 x}{x^2\sin x}=1$

2. $f(x) = e^{2x} - e^x$, $g(x) = \sin 2x - x$

   $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - e^x}{\sin 2x - x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2e^{2x} - e^x}{2\cos 2x - 1} = 1$

So sánh các vô cùng bé khi $x \to 0$

1. $f(x) = 1 - \cos^3 x$, $g(x) = x \sin x$

   $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos^3 x}{x \sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x^2} = \dfrac{3}{2}$

   (thay $\sin t \sim t$)

   Vậy f, g là vô cùng bé cùng bậc.

2. $f(x) = \cos x - \cos 2x$, $g(x) = x^{\frac{3}{2}}$

   $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos 2x}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\cos x - 1) + (1 - \cos 2x)}{x^{\frac{3}{2}}} = 0$

   Vậy f là vô cùng bé bậc lớn hơn g.

Tìm bậc của các vô cùng bé sau khi $x \to 0$

1. $f(x) = \sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}$

   $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^k} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{x^k} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}{x^k} = -\dfrac{1}{12}$ nếu $k = 2$

   Vậy f là vô cùng bé bậc 2.

2. $f(x) = x \sin x - \sin^2 x$

   Ta có: $f(x) = \sin x(x - \sin x) \sim x\left(\dfrac{x^3}{3!}\right) = \dfrac{x^4}{3!}$ (dùng khai triển Taylor)

   Vậy f là vô cùng bé bậc 4.

3. Tìm bậc của vô cùng lớn $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$ khi $x \to +\infty$

   $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}} = \sqrt{x^{\frac{1}{2}}(1 + x^{\frac{-1}{2}})} = x^{\frac{1}{4}}\sqrt{1 + x^{\frac{-1}{2}}}$

   Vậy f là vô cùng lớn bậc $\dfrac{1}{4}$

   Lưu ý. Để tìm bậc của vô cùng lớn khi $x \to +\infty$, ta tìm số $k > 0$ sao cho $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x^k}$ tồn tại hữu hạn và khác không.

4. Tìm lượng tương đương của $f(x) = x[\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}]$ khi $x \to +\infty$

   Dùng $(1+t)^{\alpha}) - 1 \sim \alpha t$ khi $t \to 0$, ta có

   $f(x) = x^2\left[\left(1 + \left(1 + \dfrac{1}{x^4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2}\right] \sim x^2\left[\left(2 + \dfrac{1}{2x^4}\right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2}\right]$

$$\sim x^2\sqrt{2}\left[\left(1+\frac{1}{4x^4}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]\sim\frac{x^2\sqrt{2}}{8x^4}$$

Vậy f là vô cùng bé tương đương với $g(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{8x^2}$ khi $x\to+\infty$

5. Cho n là số tự nhiên, $f_0, f_1, \ldots, f_n$ là các đa thức sao cho

   $f_n(x)e^{nx}+f_{n-1}(x)e^{(n-1)x}+\cdots+f_0(x)=0$

   với mọi x lớn bất kỳ.

   Chứng minh $f_0, f_1, \ldots, f_n$ đồng nhất bằng 0.

   Giả sử f_n không đồng nhất triệt tiêu

   $f_n(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_0, \quad a_k\neq 0$

   Chia hai vế cho x^ke^{nx}, cho $x\to\infty$, áp dụng $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^p}{e^{ax}}=0$ với $a>0$, $\forall p$, ta được $a_k=0$.

   Mâu thuẫn.

   Vậy $f_n\equiv 0$. Tương tự cho $f_{n-1}, \ldots, f_1$ đồng nhất triệt tiêu.

   Khi đó, $f_0(x)=0$ với mọi x lớn bất kỳ. Vậy $f_0\equiv 0$.

6. Cho n là số tự nhiên, $f_0, f_1, \ldots, f_n$ là các đa thức sao cho

   $f_n(x)(\ln x)^n+f_{n-1}(x)(\ln x)^{n-1}+\cdots+f_0(x)=0$

   với mọi $x>0$.

   Chứng minh $f_0, f_1, \ldots, f_n$ đồng nhất triệt tiêu.

   Đặt $x=e^y$ và viết biểu thức vế trái dưới dạng

   $g_k(y)e^{ky}+g_{n-1}(y)e^{(k-1)y}+\cdots+g_0(y)=0$

   với mọi y, trong đó k là số tự nhiên.

   Làm tương tự như bài (5), ta có $g_k, \ldots, g_0$ đồng nhất triệt tiêu. Vậy $f_0, f_1, \ldots, f_n$ đồng nhất triệt tiêu.

6 Bài tập

1. Tính các giới hạn sau

   (a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg} x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty}x[\ln(x+a)-\ln x]$

   (c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x\ln x}$

   (d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}$

   (e) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

   (f) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$

2. Tính các giới hạn sau bằng thay các vô cùng bé tương đương.

   Các lượng vô cùng bé sau tương đương khi $t \to 0$:

   $t \sim \sin t \sim \operatorname{tg} t \sim \operatorname{arctg} t \sim \arcsin t \sim \ln(1+t) \sim (e^t - 1)$

   $(1-\cos t) \sim \dfrac{t^2}{2}$

   $(1+t)^\alpha \sim 1 + \alpha t$

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x\sin x)}{\operatorname{tg}^2 x}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 3x}{\ln^2(1-2x)}$

   (c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^\pm} \dfrac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{\pi}-\sqrt{2x}}$

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{\ln(1+x^2)}$

3. Dùng công thức Taylor tính các giới hạn sau:

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$

   Hướng dẫn:

   $\sin x.\ln(\cos x) = \sin x.\ln[1+(\cos x - 1)] \sim \sin x.(\cos x - 1)$

   $\sim \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \ldots\right)\left(-\dfrac{x^2}{2} - \ldots\right) \sim -\dfrac{x^3}{2}$

   $1-(\cos x)^{\sin x} = 1 - e^{\sin x.\ln(\cos x)} \sim 1 - e^{-\frac{x^3}{2}} \sim \dfrac{x^3}{2}$

   Vậy $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3} = \dfrac{1}{2}$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^x - 1}{\sin^2 x}$

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e-(1+x)^{\frac{1}{2}}}{x}$

4. Dùng quy tắc L'Hopital tính các giới hạn sau

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{1+2\ln(\sin x)}$

   (d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$

5. Dùng quy tắc L'Hopital khử các dạng vô định

(a) $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln x . \ln(x-1)$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1} \right)$

(c) $\lim\limits_{x \to 0^+} (1+x)^{\ln x}$

(d) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{\dfrac{1}{x^2}}$

(e) $\lim\limits_{x \to 0^+} (x)^{\sin x}$

(f) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\pi - 2x)^{\cos x}$

Hướng dẫn: Đặt $x = \dfrac{\pi}{2} + t$