ĐẠI SỐ (CƠ SỞ)

Tài liệu ôn thi cao học năm 2005

Phiên bản đã chỉnh sửa

TS Trần Huyên

Ngày 30 tháng 12 năm 2004

Bài 6. Các Bài Tập Về Nhóm Đẳng Cấu

Theo định nghĩa, nhóm X là đẳng cấu với nhóm Y (và viết $X \cong Y$) nếu tồn tại một ánh xạ đẳng cấu $f : X \to Y$. Để chỉ ra X đẳng cấu với Y theo ánh xạ f, ta viết $X \overset{f}{\cong} Y$.

Quan hệ đẳng cấu trong lớp các nhóm là quan hệ tương đương, vì

- Với mọi nhóm X: $X \overset{1_X}{\cong} X$
- Nếu $X \overset{f}{\cong} Y$ thì $Y \overset{f^{-1}}{\cong} X$
- Nếu $X \overset{f}{\cong} Y$ và $Y \overset{g}{\cong} Z$ thì $X \overset{gf}{\cong} Z$

Như vậy, để chứng tỏ hai nhóm X, Y là đẳng cấu với nhau ta có thể thiết lập một ánh xạ đẳng cấu từ X tới Y hay từ Y tới X hoặc có thể thiết lập các ánh xạ đẳng cấu từ X, Y tới một nhóm thứ ba.

Ví dụ 1: Cho tập hợp các ma trận cấp hai sau

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Chứng minh rằng A là nhóm với phép nhân ma trận.

b) Chứng minh rằng $A \cong (\mathbb{R}^+, \cdot)$ trong đó $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ là nhóm nhân các số thực dương.

Giải

a) Để chứng minh A là nhóm với phép nhân ma trận ta chỉ cần chứng minh $A \subset_{\text{n}} (M_2^*, \cdot)$, trong đó $(M_2^*, \cdot)$ là nhóm nhân các ma trận cấp hai không suy biến. Xin dành việc kiểm tra chi tiết cho bạn đọc.

b) Để chứng minh $A \cong (\mathbb{R}^+, \cdot)$ ta xây dựng ánh xạ:

$$f : \mathbb{R}^+ \to A \text{ mà } \forall a \in \mathbb{R}^+ \text{ thì } f(a) = \begin{bmatrix} 1 & \ln a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dễ thấy f là đồng cấu vì $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ ta có

$$\begin{aligned} f(a.b) &= \begin{bmatrix} 1 & \ln ab \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \ln a + \ln b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \ln a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \ln b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = f(a)f(b) \end{aligned}$$

Tính

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \left\{ a \in \mathbb{R}^+ : f(a) = \begin{bmatrix} 1 & \ln a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ a \in \mathbb{R}^+ : \ln a = 0 \right\} = \{1\} \end{aligned}$$

Vậy f đơn cấu.
Hiển nhiên f toàn ánh vì với mọi $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in A$, tồn tại $a = e^x \in \mathbb{R}^+$ mà $f(a) = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Vậy f là đẳng cấu: $A \cong (\mathbb{R}^+, \cdot)$.
Nhận xét 1: Chúng ta đã khá quen biết với ánh xạ đẳng cấu $\ln : (\mathbb{R}^+, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$, từ nhóm nhân các số thực dương tới nhóm cộng các số thực, đồng thời từ phép nhân trong A: $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ta dễ phát hiện ra: $A \cong (\mathbb{R}, +)$. Vì vậy ta có thể chứng minh $A \cong (\mathbb{R}^+, \cdot)$ thông qua hai đẳng cấu này và thật ra ánh xạ đẳng cấu xây dựng ở trên là sự kết hợp hai ánh xạ nói trên.
Nhận xét 2: Nếu chúng ta nhớ rằng, một ánh xạ song ánh f từ một nhóm X tới tập Y có trang bị phép toán hai ngôi mà f bảo toàn các phép toán thì khi đó Y cũng là một nhóm. Và do vậy trong bài toán trên, kết quả câu (a) có thể được suy trực tiếp từ câu (b) mà không cần phải kiểm tra độc lập.
Ví dụ 2: Cho nhóm X và A, B là các nhóm con chuẩn tắc của X thỏa $A.B = X$ và $A \cap B = \{e\}$. Chứng minh:

a) $\forall a \in A, \forall b \in B : ab = ba$

b) $X \cong A \times B$

Giải

a) Ta có $\forall a \in A, \forall b \in B$ thì

$$\begin{aligned} aba^{-1}b^{-1} &= (aba^{-1})b^{-1} \in B \text{ vì } B \lhd X \\ aba^{-1}b^{-1} &= a(ba^{-1}b^{-1}) \in A \text{ vì } A \lhd X \end{aligned}$$

Như vậy: $aba^{-1}b^{-1} \in A \cap B = \{e\}$ tức là $aba^{-1}b^{-1} = e \Leftrightarrow ab = ba$.
b) Để chứng minh $X \cong A \times B$ (tích trực tiếp của A và B) ta xây dựng ánh xạ $f : A \times B \to X$ mà với mọi $(a, b) \in A \times B$ thì $f(a, b) = ab$.

• Ta kiểm tra f là đồng cấu: $\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$ thì

$$\begin{aligned} f[(a_1, b_1), (a_2, b_2)] = f(a_1a_2, b_1b_2) = a_1(a_2b_1)b_2 &= (a_1b_1)(a_2b_2) \\ &= f(a_1, b_1).f(a_2, b_2) \quad (\text{ vì } a_2b_1 = b_1a_2 \text{ theo (a)}) \end{aligned}$$

• Tính

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f = \{(a, b) : ab = e\} &= \{(a, b) : a = b^{-1} \in A \cap B\} \\ &= \{(a, b) : a = b^{-1} = e\} = \{(e, e)\}. \end{aligned}$$

Vậy f đơn cấu.

• Tính toàn ánh của f được suy ra từ $X = A.B$. Thật vậy, với mọi $x \in X$, $\exists a \in A, b \in B$ sao cho $x = ab$ nên tồn tại $(a, b) \in A \times B$ mà $f(a, b) = x$.

Nhận xét 1: Để ý rằng tính chuẩn tắc của hai nhóm con A, B ở đây chỉ được dùng để chứng minh cho tính chất giao hoán của hai phần tử $a \in A, b \in B$ tức là $ab = ba$, phục vụ cho việc kiểm tra $f : A \times B \to X$ là đồng cấu. Bởi vậy, một biến dạng của ví dụ 2 là: Cho A, B là các nhóm con của X thỏa $A.B = X$, $A \cap B = \{e\}$ và $\forall a \in A, \forall b \in B : ab = ba$. Chứng minh rằng $X \cong A \times B$.

Nhận xét 2: Trong đẳng cấu $X \cong A \times B$ ở nhận xét 1 sẽ cho ta $A \lhd X$ và $B \lhd X$. Như vậy với các giả thiết $A.B = X$ và $A \cap B = \{e\}$ của hai nhóm con A, B cho trước, hai giả thiết còn lại là $A, B \lhd X$ và $\forall a \in A, \forall b \in B$ thì $ab = ba$ là tương đương nhau. Bạn hãy thử chứng minh trực tiếp sự tương đương này được không?

Ví dụ 3: Cho X là nhóm cộng giao hoán và $E(X)$ là tập hợp tất cả các tự đồng cấu của X. Xác định trên $E(X)$ phép cộng $\forall f, g \in E(X)$ thì $f+g : X \to X$ mà $\forall x \in X$ $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$. Chứng minh rằng

a) $E(X)$ là nhóm cộng giao hoán với phép cộng trên

b) $E(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ với $\mathbb{Q}$ là nhóm cộng các số hữu tỷ.

Giải

a) Để kiểm tra $E(X)$ là nhóm cộng giao hoán ta lần lượt kiểm tra:

- Phép cộng trên $E(X)$ là phép toán hai ngôi, nói cách khác nếu $f, g : X \to X$ là đồng cấu thì $f + g$ là đồng cấu tức là: $\forall x_1, x_2 \in X : (f+g)(x_1 + x_2) \stackrel{?}{=} (f+g)(x) + (f+g)(y)$.
- Phép cộng trên $E(X)$ là kết hợp, giao hoán.
- Phần tử $0 \in E(X)$ là ánh xạ $\theta : X \to X$ mà $\theta(X) = 0$.
- $\forall x \in E(X)$ thì $(-f) : X \to X$ mà $(-f)(x) = -f(x)$ là đồng cấu và là đối của f.

Tất cả các tính toán chi tiết để hoàn tất các nội dung kiểm tra trên không mấy khó khăn xin nhường cho độc giả.
b) Để chứng minh $E(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ ta thiết lập ánh xạ $\varphi : E(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$ mà $\forall f \in E(\mathbb{Q})$ thì $\varphi(f) = f(1)$.
Dễ thấy φ là đồng cấu vì $\forall f, g \in E(\mathbb{Q})$ thì $\varphi(f+g) = (f+g)(1) = f(1)+g(1) = \varphi(f)+\varphi(g)$. Ta chứng minh φ là song ánh, tức là $\forall q \in \mathbb{Q}$ thì tồn tại và duy nhất đồng cấu $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mà $f(1) = q$. Đồng cấu f đó được xác định bởi công thức:

$$\forall \ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \text{ thì } f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n}.q$$

Bạn đọc dễ dàng kiểm tra đây là một đồng cấu và $f(1) = q$. Nếu có một đồng cấu $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mà $g(1) = q$ thì $\forall n \neq 0$: $n.g(\frac{1}{n}) = g(n.\frac{1}{n}) = g(1) = q$. Suy ra $g(\frac{1}{n}) = \frac{q}{n}$ và do đó $\forall \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$: $g(\frac{m}{n}) = m.g(\frac{1}{n}) = m.\frac{q}{n} = \frac{m}{n}.q = f(\frac{m}{n})$. Vậy $f = g$.
Do vậy, φ là đẳng cấu.
Ngoài cách thiết lập các đẳng cấu trực tiếp giữa hai nhóm đôi khi để chứng minh hai nhóm đẳng cấu với nhau trong trường hợp một nhóm được biểu diễn dưới dạng một nhóm thương ta có thể áp dụng định lý Nơte về toàn cấu nhóm. Ta nhắc lại định lý đó:

Định lý (Nơte) *Cho $f : X \to Y$ là toàn cấu. Khi đó tồn tại và duy nhất đẳng cấu $\tilde{f} : {}^{X}/_{\operatorname{Ker} f} \to Y$ sao cho $f = \tilde{f}.p$ trong đó $p : X \to {}^{X}/_{\operatorname{Ker} f}$ là đồng cấu chiếu.*

Sử dụng định lý này nếu ta muốn chứng minh đẳng cấu nhóm thương ${}^{X}/_{A} \cong Y$, ta chỉ cần thiết lập toàn cấu $f : X \to Y$ sao cho $\operatorname{Ker} f = A$ và từ định lý ta có đẳng cấu $\tilde{f} : {}^{X}/_{A} \cong Y$.
Ví dụ 4: Chứng minh rằng mọi nhóm cyclic hữu hạn cấp n là đẳng cấu với nhau.
Phân tích: Trong các nhóm cyclic cấp n có nhóm $\mathbb{Z}_n = {}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}$. Để chứng minh các nhóm cyclic cấp n đều đẳng cấu với nhau, ta chỉ cần chứng minh chúng đều đẳng cấu với $\mathbb{Z}_n$. Vậy lấy bất kỳ nhóm cyclic cấp n: $\langle a \rangle_n$ ta phải chứng minh $\mathbb{Z}_n \cong \langle a \rangle_n$.

Giải

Cho nhóm cycilc cấp n: $\langle a \rangle_n$. Ta xây dựng ánh xạ $f : \mathbb{Z} \to \langle a_n \rangle_n$ mà $\forall m \in \mathbb{Z}$ thì $f(m) = a^m$. Dễ thấy f là đồng cấu vì $\forall m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ ta có

$$f(m_1 + m_2) = a^{m_1 + m_2} = a^{m_1}.a^{m_2} = f(m_1).f(m_2)$$

Hiển nhiên f là toàn ánh. Vậy f toàn cấu. Đồng thời

$$\operatorname{Ker} f = \{m : a^m = e\} = \{m : n | m\} = n\mathbb{Z}$$

Vậy theo định lý Nơte, tồn tại đẳng cấu

$$\tilde{f} : {}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}} \cong \langle a \rangle_n$$

Vậy mọi nhóm cyclic cấp n đều đẳng cấu với $\mathbb{Z}_n$ và do vậy chúng đẳng cấu với nhau.
Ví dụ 5: Trong nhóm nhân $\mathbb{C}^*$ các số phức khác 0, xét tập hợp H gồm tất cả các số phức nằm trên trục thực và trục ảo. Chứng minh rằng $H \Subset \mathbb{C}^*$, đồng thời có đẳng cấu: ${}^{\mathbb{C}^*}/_{H} \cong D$ trong đó D là nhóm nhân các số phức có môđun bằng 1.

Giải

Ta biểu diễn các số phức thuộc H dưới dạng lượng giác và được:

$$H = \left\{ r\left(\cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2}\right) : r \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Hiển nhiên $H \neq \emptyset$ và ta kiểm tra $H \lhd \mathbb{C}^*$, theo tiêu chuẩn thứ ba: với mọi $z_1 = r_1\left(\cos\frac{k_1\pi}{2} + i\sin\frac{k_1\pi}{2}\right)$, $z_2 = r_2\left(\cos\frac{k_2\pi}{2} + i\sin\frac{k_2\pi}{2}\right)$ thuộc H, ta có

$$z_1.z_2^{-1} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos\frac{(k_1-k_2)\pi}{2} + i\sin\frac{(k_1-k_2)\pi}{2}\right) \in H$$

Vậy $H \lhd \mathbb{C}^*$.

Để chứng minh ${}^{\mathbb{C}^*}/_{H} \cong D$ ta thiết lập ánh xạ $f : \mathbb{C}^* \to D$ mà $f[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = \cos 4\varphi + i\sin 4\varphi$ với $\forall\, z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in \mathbb{C}^*$. Độc giả có thể dễ dàng kiểm tra f là đồng cấu và toàn ánh!

Đồng thời

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} f &= \{r(\cos\varphi + i\sin\varphi) : (\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi) = 1\} \\
&= \{r(\cos\varphi + i\sin\varphi) : 4\varphi = 2k\pi\} \\
&= \{r(\cos\varphi + i\sin\varphi) : \varphi = \frac{k\pi}{2}\} = H
\end{aligned}$$

Vậy, theo định lý Nơte, tồn tại đẳng cấu

$$\tilde{f} : {}^{\mathbb{C}^*}/_{H} \cong D$$

Nhận xét: Mấu chốt của lời giải này là việc biểu diễn H dưới dạng lượng giác, điều đó có được nhờ nhận xét các phần tử thuộc H đều nằm trên hai trục có argument là bội nguyên của $\pi/2$. Việc xây dựng đồng cấu $f : \mathbb{C}^* \to D$ mà $\operatorname{Ker} f = H$, do cách biểu diễn H mà thỏa hai đòi hỏi: chuyển mỗi phần tử tới phần tử có mođun bằng 1 (bằng cách chia phần tử đó cho chính môđun của nó) và chuyển mỗi phần tử có argument $k\pi/2$ thành phần tử có argument $k2\pi$ (bằng cách nhân argument lên 4 lần); từ đó cho ta ánh xạ cần tìm.

Bài tập

1) Chứng minh rằng mọi nhóm cyclic vô hạn đẳng cấu với nhau.

2) Cho X là nhóm Aben hữu hạn cấp $m.n$ với $(m,n) = 1$. Đặt $A = \{x \in X : x^m = e\}$, $B = \{x \in X : x^n = e\}$. Chứng minh rằng $X \cong A \times B$.

3) Cho $\mathbb{C}^*$ là nhóm nhân các số phức khác 0, $\mathbb{R}^*$ là nhóm nhân các số thực khác 0, D là nhóm nhân các số phức có môđun bằng 1. Chứng minh rằng ${}^{\mathbb{C}^*}/_{\mathbb{R}^*} \cong D$.

4) Cho $E(X)$ là nhóm cộng các đồng cấu của nhóm cộng giao hoán X (xem ví dụ 3). Chứng minh rằng $E(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

5) Cho M_n^* và M_n^1 là tập các ma trận vuông cấp n không suy biến và tập các ma trận có định thức bằng 1. Chứng minh rằng ${}^{M_n^*}/_{M_n^1} \cong (\mathbb{R}^*, \cdot)$.

6) Cho $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$ là đẳng cấu nhóm. Chứng minh rằng tồn tại phần tử $a \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) = a^x, \forall x \in \mathbb{R}$.