ĐẠI SỐ (CƠ SỞ)

Tài liệu ôn thi cao học năm 2005

Phiên bản đã chỉnh sửa

TS Trần Huyên

Ngày 10 tháng 12 năm 2004

Bài 5. Các Bài Tập Liên Quan Đến Đồng Cấu

Để xử lí các bài tập liên quan đến đồng cấu ta cần nắm vững khái niệm đồng cấu và các kết quả cơ bản liên quan tới đồng cấu

Ta nhắc lại khái niệm đồng cấu:

"Cho X, Y là các nhóm. Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là đồng cấu nhóm nếu với mọi $x_1, x_2 \in X$ thì $f(x_1.x_2) = f(x_1).f(x_2)(*)$"

Hiển nhiên là trong các định nghĩa lý thuyết ta luôn ngầm định các phép toán trong nhóm được ký hiệu theo lối nhân, tuy nhiên trong các bài toán thực tế, thì phép toán có thể được kí hiệu khác đi, chẳng hạn theo lối cộng. Bởi vậy, khi kiểm tra một đồng cấu cụ thể cần lưu ý chuyển đổi kí hiệu phép toán trong biểu thức kiểm tra (*) cho phù hợp với thực tế.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng ánh xạ: $exp : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$ mà với mỗi $x \in \mathbb{R}$ thì $exp(x) = e^x$ là một đồng cấu.

Rõ ràng dấu phép toán trong nhóm $(\mathbb{R}, +)$ là phép cộng, còn dấu trong nhóm $(\mathbb{R}, \cdot)$ là phép nhân. Vì vậy, biểu thức đồng cấu lúc đó phải là:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : exp(x_1 + x_2) = exp(x_1).exp(x_2)$$

và việc kiểm tra tính đúng đắn của hệ thức này là không mấy khó khăn nhờ tính chất của hàm số mũ, xin nhường cho độc giả.

Ví dụ 2. Cho X, G_1, G_2 là các nhóm, $G = G_1 \times G_2$ là nhóm tích. Cho $f : X \to G_1$, $g : X \to G_2$ là các ánh xạ.

Ta xác định ánh xạ $h : X \to G = G_1 \times G_2$ mà mỗi $x \in X : h(x) = (f(x), g(x))$

Chứng minh rằng h là đồng cấu khi và chỉ khi f và g là các đồng cấu.

Giải:

Ta có:h là đồng cấu khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned}
\forall x_1, x_2 \in X : h(x_1.x_2) &= h(x_1).h(x_2) \\
&\Leftrightarrow (f(x_1.x_2), g(x_1.x_2)) = (f(x_1), g(x_1))(f(x_1), g(x_2)) \\
&\Leftrightarrow (f(x_1.x_2), g(x_1.x_2)) = (f(x_1).f(x_2)), (g(x_1).g(x_2)) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} f(x_1.x_2) = f(x_1)f(x_2) \\ g(x_1.x_2) = g(x_1)g(x_2) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow f \text{ và } g \text{ là các đồng cấu}
\end{aligned}$$

Ví dụ 3. Cho X, Y là các nhóm cyclic có các phần tử sinh lần lượt là x, y và có cấp m, n tương ứng, tức là:

$$X = < x >_m \ , Y = < y >_n$$

a/ Chứng minh rằng quy tắc φ cho tương ứng mỗi phần tử $x^l \in X$ với phần tử $(y^k)^l$ (trong đó k là số tự nhiên cho trước) là một đồng cấu khi và chỉ khi km là bội của n.

b/ Khi φ là đồng cấu, hãy tính $Ker\varphi$.

***Phân tích ban đầu:* Có thể nhận thấy rằng nếu quy tắc φ là ánh xạ, thì hiển nhiên φ thỏa các yêu cầu về đồng cấu. Vì vậy thực chất của bài toán là: φ là ánh xạ $\Leftrightarrow km \vdots n$. Vì rằng mỗi phần tử của một nhóm cyclic hữu hạn có thể được biểu diễn dưới các lũy thừa khác nhau. Do vậy, để chứng minh φ ánh xạ ta cần chỉ ra φ không phụ thuộc vào các dạng biểu diễn khác nhau của một phần tử.

Giải:

a/
- Nếu φ là đồng cấu, thì theo tính chất đồng cấu biến đơn vị thành đơn vị, ta có:

$$e_Y = \varphi(e_X) = \varphi(x^m) = (y^k)^m = y^{km} \ (**)$$

Vì cấp $y = n$, nên từ (**) suy ra: $km \vdots n$

- Nếu $km \vdots n$, trước hết ta chứng minh φ lá ánh xạ, tức cần chứng minh nếu $x^\alpha = x^\beta$ thì $(y^k)^\alpha = (y^k)^\beta$. Thật vậy:

$$\begin{aligned}
x^\alpha = x^\beta &\Rightarrow x^{\alpha-\beta} = e \\
&\Rightarrow (\alpha - \beta) \vdots m \quad (\text{ do cấp } x = m) \\
&\Rightarrow k(\alpha - \beta) \vdots km \\
&\Rightarrow k(\alpha - \beta) \vdots n \quad (\text{ do } km \vdots n) \\
&\Rightarrow y^{k(\alpha-\beta)} = e(\text{ do cấp của } y = n) \\
&\Rightarrow (y^k)^\alpha = (y^k)^\beta \quad (\text{ đpcm})
\end{aligned}$$

Việc kiểm tra φ là đồng cấu, xin nhường cho độc giả.

b/ Khi φ là đồng cấu thì:

$$\begin{aligned} Ker\varphi &= \left\{x^l \in X : (x^k)^l = e\right\} \\ &= \left\{x^l \in X : kl \,\vdots\, n\right\} \\ &= \left\{x^l : \quad l \,\vdots\, \frac{n}{d}\right\} \text{ với } d = (k,n) \end{aligned}$$

Vậy $Ker\varphi = \left\langle x^{\frac{n}{d}} \right\rangle$ là nhóm con cyclic xinh bởi phần tử $x^{\frac{n}{d}}$, với $d = (k,n)$.
**Nhận xét 1:* Do câu a/, φ là đồng cấu nên $km \,\vdots\, n$. Suy ra $m \,\vdots\, \frac{n}{d}$ và hiển nhiên là $n \,\vdots\, \frac{n}{d}$, vậy $\frac{n}{d}$ là ước chung của m và n. Do vậy, từ câu b/ ta có thể đưa ra một bài toán sau:
"Cho các nhóm cyclic $X =< x >_m, Y =< y >_n$ và t là số nguyên dương mà là ước đồng thời cả m, n. Chứng minh rằng tồn tại một đồng cấu $\varphi : X \to Y$ sao cho $Ker\varphi = \langle x^t \rangle$ là nhóm cyclic sinh bởi x^t ".
Xem như bài tập, độc giả hãy xem xét lại các lời giải của ví dụ trên và hãy tự mình xây dựng thử đồng cấu φ theo yêu cầu!
**Nhận xét 2:* Kết quả của ví dụ 3 giúp cho ta một phương tiện hữu hiệu để xử lí các bài toán tìm số các đồng cấu có thể có giữa các nhóm cyclic cấp m và n. Nếu $\varphi : X \to Y$ với $X =< x >_m .Y =< y >_n$ là đồng cấu mà $\varphi(x) = y^k$, thì do tính chất đồng cấu mà $\forall x^l \in X$ thì $\varphi(x^l) = (y^k)^l$, tức φ có dạng như mô tả trong ví dụ 3. Vậy số các đồng cấu $\varphi : X \to Y$ đó là số tất cả các số nguyên k mà $0 \le k < n$ sao cho $km \,\vdots\, n$

Ví dụ 4. Tìm tất cả các đồng cấu từ nhóm cyclic cấp 6 tới nhóm cyclic cấp 24

Giải:

Cho các nhóm $X =< a >_6$, $Y =< b >_{24}$ là các nhóm cyclic cấp 6 và 24. Nếu $\varphi : X \to Y$ là đồng cấu, thì ắt tồn tại k mà $0 \le k < 24$ sao cho với mọi $a^l \in X$ thì $\varphi(a^l) = (b^k)^l$. Ta biết rằng φ là đồng cấu khi và chỉ khi $6k \,\vdots\, 24$. Vậy số các đồng cấu $\varphi : X \to Y$ bằng số các số nguyên k mà $0 \le k < 24$ thỏa $6k \,\vdots\, 24$. Có 6 số nguyên k như vậy là $k = 0, 4, 8, 12, 16, 20$. Vậy có tất cả 6 đồng cấu khác nhau từ nhóm cyclic cấp 6 tới nhóm cycic cấp 24.
Cụ thể 6 đồng cấu đó là:

$$\begin{aligned} \varphi_1 :&\quad a^l \longmapsto e \\ \varphi_2 :&\quad a^l \longmapsto b^{4l} \\ \varphi_3 :&\quad a^l \longmapsto b^{8l} \\ \varphi_4 :&\quad a^l \longmapsto b^{12l} \\ \varphi_5 :&\quad a^l \longmapsto b^{16l} \\ \varphi_6 :&\quad a^l \longmapsto b^{20l} \end{aligned}$$

Các bài toán tìm số các đồng cấu từ một nhóm tới một nhóm khác là các bài toán khá hấp dẫn và rất đa dạng. Ví dụ 3 chỉ cho ta một phương tiện để xử lí một phạm vi khá hẹp của lớp các bài toán đó. Ví dụ sau cũng thuộc lớp bài toán trên

Ví dụ 5. Tìm tất cả các đồng cấu từ nhóm $(\mathbb{Q},+)$ các số hữu tỉ với phép cộng tới nhóm $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ các số hữu tỉ khác 0 với phép nhân.
***Phân tích ban đầu:* một đồng cấu $\varphi:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}^*$ là hoàn toàn xác định $\Leftrightarrow$ xác định được giá trị $\varphi(1)$. Độc giả hãy thử tự mình lí giải điều nhận xét này! Và do vậy thay cho việc tìm số các đồng cấu φ ta tìm xem có bao nhiêu cách cho $\varphi(1)$ một cách hợp lí.

Giải:

Nếu $\varphi:(\mathbb{Q},+)\to(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ là đồng cấu và $\varphi(1)=a$. Khi đó với mỗi số tự nhiên $n>0$ ta có:

$$a=\varphi(1)=\varphi\underbrace{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}_{n\text{ lần}}=\left[\varphi(\frac{1}{n})\right]^n$$

Vậy với mỗi số tự nhiên $n>0$, ta có:

$$\sqrt[n]{a}=\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\in\mathbb{Q}^*\quad(***)$$

Kết luận cuối cùng chỉ thỏa mãn với giá trị duy nhất $a=1$.
Vậy chỉ có một đồng cấu duy nhất $\varphi:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}^*$ mà $\varphi(1)=1$, đó chính là đồng cấu tầm thường. (bạn đọc có thể tự mình kiểm tra một cách chi tiết khi $\varphi(1)=1$ thì $\forall m\in\mathbb{Z}:\varphi(m)=1^m=1,\forall n>0:\varphi\left(\frac{1}{n}\right)=\sqrt[n]{\varphi(1)}$ và $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)=\sqrt[n]{\varphi(m)}=1$.
***Nhận xét:* Có thể bạn đọc chưa hài lòng lắm với kết luận từ (***) suy ra $a=1$. Chúng ta có thể đưa ra một chứng minh để tham khảo. Ta chứng minh rằng nếu $a\neq 1$ thì tồn tại một số nguyên $n>0$ mà $\sqrt[n]{a}\notin\mathbb{Q}^*$. Nếu $a\neq 1$, ta phân tích tử số và mẫu số của a dưới dạng các nhân tử nguyên tố và được, chẳng hạn:

$$a=\frac{p_1^{n_1}.p_2^{n_2}\ldots p_k^{n_k}}{c_1^{m_1}.c_2^{m_2}\ldots c_l^{m_l}}$$

với các p_i,c_i là các số nguyên tố khác nhau (ta giả thiết phân số là tối giản!).
Đặt $n=max\{n_1,\ldots,n_k,m_1,\ldots,m_l\}$. khi đó nếu $\sqrt[n]{a}\in\mathbb{Q}^*$ là một phân số tối giản có dạng:

$$\sqrt[n]{a}=\frac{q_1^{s_1}.q_2^{s_2}\ldots q_t^{s_t}}{d_1^{\alpha_1}.d_2^{\alpha_2}\ldots d_h^{\alpha_h}},$$

trong đó các q_j,d_j là các nhân tử nguyên tố, thì $\left[\frac{q_1^{s_1}.q_2^{s_2}\ldots q_t^{s_t}}{d_1^{\alpha_1}.d_2^{\alpha_2}\ldots d_h^{\alpha_h}}\right]^n$ cũng là phân số tối giản và ta phải có:

$$\begin{cases} q_1^{s_1n}\ldots q_t^{s_tn} &= p_1^{n_1}\ldots p_k^{n_k} = (\text{tử số phân số tối giản a})\\ d_1^{\alpha_1n}\ldots d_h^{\alpha_hn} &= c_1^{m_1}\ldots c_l^{m_l} = (\text{mẫu số phân số tối giảng a})\end{cases}$$

Tuy nhiên các đẳng thức này không thể xảy ra vì số mũ lũy thừa của các nhân tử nguyên tố vế trái luôn lớn hơn hẳn số mũ lũy thừa các nhân tử nguyên tố vế phải. Vậy $\sqrt[n]{a}\notin\mathbb{Q}^*$

BÀI TẬP

1. Cho X là nhóm Aben. Chứng minh rằng ánh xạ $\varphi : X \to X$ mà $\varphi(x) = x^k$ với k là số nguyên cho trước, là một đồng cấu.

2. Cho X là nhóm. Chứng minh rằng ánh xạ $\varphi : X \to X$ mà $\varphi(x) = x^{-1}$, $\forall x \in X$ là đồng cấu khi và chỉ khi X là nhóm Aben.

3. Cho X là nhóm. Với mỗi phần tử $a \in X$, xác định ánh xạ $f_a : X \to X$ mà $f(x) = axa^{-1}$, $\forall x \in X$.

   (a) Chứng minh rằng f_a là một tự đẳng cấu của X, gọi là tự đẳng cấu trong xác định bởi a.

   (b) Chứng minh rằng tập tất cả các tự đẳng cấu trong f_a với mọi $a \in X$, lập thành nhóm với phép nhân ánh xạ. Kí hiệu nhóm đó là $D(X)$.

   (c) Chứng minh rằng ánh xạ $\varphi : X \to D(X)$, từ nhóm X tới nhóm các tự đẳng cấu trong $D(X)$ mà $\forall a \in X : \varphi(a) = f_a$, là một đồng cấu.

   (d) Tìm $Ker\varphi$ với φ là đồng cấu nói trong câu c.

4. Tìm tất cả các đồng cấu:

   (a) Từ một nhóm cyclic cấp n đến chính nó

   (b) Từ nhóm cyclic cấp 24 đến nhóm cyclic cấp 6.

   (c) Từ nhóm cyclic cấp 8 đến nhóm cyclic cấp 20

5. Cho các nhóm cyclic $X =< x >_m$, $Y =< y >_n$, với $(m, n) = 1$. Chứng minh rằng từ $X \to Y$ chỉ có duy nhất một đồng cấu tầm thường.

6. Tìm tất cả các đồng cấu từ nhóm cộng các số hữu tỉ $(\mathbb{Q}, +)$ tới nhóm cộng các số nguyên $(\mathbb{Z}, +)$.

7. Tìm tất cả các đồng cấu từ nhóm cyclic cấp 6 tới nhóm S_3_nhóm các phép thế bậc 3

[1]

[1] Đánh máy: Nguyễn Ngọc Quyên. Ngày 5/12/2004