ĐẠI SỐ (CƠ SỞ)

Tài liệu ôn thi cao học năm 2005

Phiên bản đã chỉnh sửa

TS Trần Huyên

Ngày 28 tháng 10 năm 2004

Các bài tập kiểm tra nhóm con

Một dạng khác của kỹ năng kiểm tra nhóm là kỹ năng kiểm tra nhóm con. Muốn kiểm tra nhóm con ta cần nắm vững ba tiêu chuẩn thông thường về nhóm con như sau.

1 Tiêu chuẩn 1

Một tập con $A \neq \emptyset$ trong nhóm X là nhóm con của X (viết $A \mathrel{\underline{\subset\mathrm{n}}} X$ hoặc $A \leqslant X$) nếu

- $\forall x, y \in A$ thì $xy \in A$;
- $e \in A$;
- $\forall x \in A$ thì $x^{-1} \in A$.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng $M_n^1 = \{A : \det A = 1\}$ (gồm các ma trận vuông cấp n, định thức bằng 1) là nhóm con của nhóm M_n^* (nhóm nhân các ma trận cấp n không suy biến)

Bài giải: Ta chứng minh $M_n^1 \mathrel{\underline{\subset\mathrm{n}}} M_n^*$ theo tiêu chuẩn 1. Trước hết hiển nhiên $M_n^1 \neq \emptyset$, đồng thời ta có

- $\forall X, Y \in M_n^1$ thì $\det X = \det Y = 1$ do đó $\det X.Y = \det X. \det Y = 1.1 = 1$ nghĩa là $X.Y \in M_n^1$.
- Ma trận đơn vị $E \in M_n^1$ (vì $\det E = 1$).
- $\forall X \in M_n^1$ thì $\det X = 1$ nên $\det X^{-1} = \dfrac{1}{\det X} = 1$, do đó $X^{-1} \in M_n^1$.

Vậy M_n^1 thỏa cả ba điều kiện của tiêu chuẩn 1 nên $M_n^1 \mathrel{\underline{\subset\mathrm{n}}} M_n^*$.

2 Tiêu chuẩn 2

Được suy ra từ tiêu chuẩn 1 nhưng bỏ đi đòi hỏi $e \in A$ (vì đòi hỏi này chỉ là hệ quả của hai đòi hỏi còn lại). Như vậy, nếu áp dụng tiêu chuẩn 2 để xử lí Ví dụ 1 thì trong lời giải ta loại bỏ đòi hỏi $E \in M_n^1$.

Ví dụ 2: Cho trước số nguyên m. Chứng minh rằng

$$m\mathbb{Z} = \{mz : z \in \mathbb{Z}\} \subseteq_{\text{n}} (\mathbb{Z}, +)$$

Bài giải: Ta kiểm tra $m\mathbb{Z} \subseteq_{\text{n}} (\mathbb{Z}, +)$ theo tiêu chuẩn 2. Trước hết, hiển nhiên $m\mathbb{Z} \neq \emptyset$ và ta có:

- $\forall\, mz_1, mz_2 \in m\mathbb{Z} : mz_1 + mz_2 = m(z_1 + z_2) \in m\mathbb{Z}$.
- $\forall\, mz \in m\mathbb{Z} : -(mz) = m(-z) \in m\mathbb{Z}$.

Vậy $m\mathbb{Z}$ thỏa cả hai đòi hỏi của tiêu chuẩn 2 nên $m\mathbb{Z} \subseteq_{\text{n}} (\mathbb{Z}, +)$.

Nhận xét: Thông thường trong lý thuyết ta ngầm định phép toán trong nhóm là nhân và ký hiệu phần tử nghịch đảo là $(\cdot)^{-1}$. Tuy nhiên khi phép toán trong nhóm là cộng thì tất cả các dấu nhân trong các biểu thức đều đổi sang dấu cộng và phần tử nghịch đảo đổi thành phần tử đối và viết là $-(\cdot)$.

3 Tiêu chuẩn 3

Một tập hợp con $A \neq \emptyset$ trong nhóm X là nhóm con của X nếu $\forall\, x, y \in A$ thì $xy^{-1} \in A$. Nếu áp dụng tiêu chuẩn 3 này để xử lý Ví dụ 1 ta chỉ cần kiểm tra:

$$\begin{aligned}\forall\, X, Y \in M_n^1 &\Rightarrow \det X = \det Y = 1\\ &\Rightarrow \det(XY^{-1}) = \frac{\det X}{\det Y} = \frac{1}{1} = 1\\ &\Rightarrow XY^{-1} \in M_n^1\end{aligned}$$

Nếu áp dụng tiêu chuẩn 3 cho ví dụ 2, ta chỉ cần kiểm tra

$$\forall\, mz_1, mz_2 \in m\mathbb{Z} \Rightarrow mz_1 - mz_2 = m(z_1 - z_2) \in m\mathbb{Z}$$

Nhận xét: Trong ba tiêu chuẩn nêu trên, các lời giải sử dụng tiêu chuẩn 3 có vẻ ngắn gọn hơn cả. Tuy nhiên nếu trong lời giải bắt buộc phải tính phần tử nghịch đảo thì để tránh sự rườm rà ta nên dùng tiêu chuẩn 2 vì thực chất việc dùng tiêu chuẩn 3 lúc đó các bước tính toán cũng dài ngang với dùng tiêu chuẩn 2.

Ví dụ 3: Cho tập hợp các ma trận cấp hai

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a \neq 0 \right\}$$

Chứng minh $K \subseteq_{\text{n}} M_2^*$ (M_2^* là nhóm nhân các ma trận cấp hai không suy biến).

Bài giải: (Vì nếu dùng tiêu chuẩn 3, ta cũng phải tính trước các phần tử nghịch đảo, do vậy ta dùng tiêu chuẩn 2) Trước hết $K \neq \emptyset$ (hiển nhiên). Và đồng thời:

- $\forall \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in K$ ta có: $a \neq 0, b \neq 0$ nên

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac & ad+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in K$$

  vì $ac \neq 0$

- $\forall \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in K$ thì $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a & -b/a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in K$ vì $\frac{1}{a} \neq 0$.

Vậy theo tiêu chuẩn 2: $K \Subset M_2^*$

Đến đây, chúng tôi đã cùng độc giả ôn lại ba tiêu chuẩn thông dụng để kiểm tra một tập hợp $A \neq \emptyset$ trong nhóm X cho trước có là nhóm con của nhóm X không? Tùy theo từng bài tập cụ thể mà chúng ta lựa chọn hợp lý một trong các tiêu chuẩn đó để áp dụng giải quyết bài tập đã cho.

Khi đặt vấn đề ở đầu mục chúng tôi có nói rằng kỹ năng kiểm tra nhóm con là một dạng khác của kiểm tra nhóm. Nguyên do phần lớn các bài tập về kiểm tra nhóm, tập A đã cho cùng với phép toán chỉ là bộ phận của một trong những nhóm khá quen biết và do vậy thay vì kiểm tra nhóm theo định nghĩa ta chỉ cần kiểm tra theo tiêu chuẩn nhóm con đương nhiên là đơn giản hơn.

Ví dụ 4: Cho X là tập hợp tất cả các căn phức bậc n của đơn vị. Chứng minh rằng X cùng với phép nhân thông thường các số phức lập thành nhóm.

Bài giải: Hiển nhiên $X \neq \emptyset$ cùng với phép toán nhân trên nó chỉ là một bộ phận của nhóm nhân $\mathbb{C}^*$ các số phức khác 0. Vậy để chứng minh X là nhóm ta cần kiểm tra rằng $X \Subset (\mathbb{C}^*, .)$. Ta biểu diễn

$$X = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$$

và áp dụng tiêu chuẩn 3:

$$\begin{aligned} \forall z_1, z_2 \in X \Rightarrow z_1^n &= z_2^n = 1 \\ &\Rightarrow (z_1.z_2^{-1})^n = \frac{z_1^n}{z_2^n} = \frac{1}{1} = 1 \\ &\Rightarrow z_1.z_2^{-1} \in X \end{aligned}$$

Vậy $X \Subset (\mathbb{C}^*)$, tức là X là nhóm.

Nhận xét: Mỗi tập hợp X cho trước có thể có một số cách biểu diễn khác nhau, tương đương nhau và do vậy có thể cho chúng ta những lời giải khác nhau. Chẳng hạn trong Ví dụ 4, ta còn có thể biểu diễn:

$$X = \{z = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} : k \in \mathbb{Z}\}$$

nhờ vào công thức lấy căn phức bậc n của đơn vị. Khi đó lời giải dựa theo sự biểu diễn mới này là:

$$\forall z_1 = \cos\frac{2k_1\pi}{n} + i\sin\frac{2k_1\pi}{n}, z_2 = \cos\frac{2k_2\pi}{n} + i\sin\frac{2k_2\pi}{n} \in X$$

thì

$$z_1 z_2^{-1} = \cos\frac{2(k_1-k_2)\pi}{n} + i\sin\frac{2(k_1-k_2)\pi}{n} \in X$$

(Dĩ nhiên nếu độc giả có biết dạng Ơle của một số phức thì lời giải trên đây sẽ còn được viết ngắn gọn hơn!)

Ví dụ 5: Cho tập hợp các số phức $\mathbb{Z}(\sqrt{-3}) = \{a + b\sqrt{-3} : a, b \in \mathbb{Z}\}$. Chứng minh rằng $\mathbb{Z}(\sqrt{-3})$ là một nhóm với phép cộng thông thường các số phức.

Bài giải: Hiển nhiên $\mathbb{Z}(\sqrt{-3}) \neq \emptyset$ và cùng với phép cộng nói trên là một bộ phận của nhóm cộng $\mathbb{C}$ các số phức. Vậy ta chỉ cần kiểm tra $\mathbb{Z}(\sqrt{-3}) \subset_n (\mathbb{C}, +)$ theo tiêu chuẩn 3: với mọi $a_1 + b_1\sqrt{-3}, a_2 + b_2\sqrt{-3} \in \mathbb{Z}(\sqrt{-3})$ thì

$$(a_1 + b_1\sqrt{-3}) - (a_2 + b_2\sqrt{-3}) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\sqrt{-3} \in \mathbb{Z}(\sqrt{-3})$$

Đến đây hiển nhiên một câu hỏi đặt ra là những nhóm như thế nào được gọi là quen biết. Đó chính là những nhóm được ngiên cứu trong những chuyên ngành trước đây một cách khá kỹ lưỡngvà gần như trở thành thông dụng. Chẳng hạn đó là các nhóm $(\mathbb{C}, +); (\mathbb{C}^*, .)$ các số phức; các nhóm $(M_{m\times n}, +)$ các ma trận cấp $m \times n$ với phép công ma trận; $(M_n^*, .)$ các ma trận vuông cấp n không suy biến; nhóm nhân các song ánh $S(X)$ từ tập $X \neq \emptyset$ vào chính nó; nhóm công các đa thức hệ số thực. Khi tiếp cận một bài toán kiểm tra nhóm, điều đầu tiên phải xem xét là tập hợp cho trước cùng phép toán có là bộ phận của một nhóm quen biết nào không, từ đó mà lựa chọn hợp lý phương thức kiểm tra: theo định nghĩa hay theo tiêu chuẩn nhóm con.

Bài tập làm thêm

1. Cho tập hợp các ma trận

$$K_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} : b \neq 0 \right\} \text{ và } K_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

   Chứng minh rằng các tập hợp trên đều là nhóm với phép nhân ma trận.

2. Chứng minh rằng tập hợp $M_n^{\pm 1}$ gồm các ma trận vuông cấp n có định thức bằng 1 hay -1 là nhóm với phép nhân ma trận.

3. Cho tập hợp các số thực $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \left\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 \neq 0\right\}$. Chứng minh $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ là nhóm với phép nhân các số thực.

4. Cho $\mathbb{Q}(\sqrt{-2}) = \{a + b\sqrt{-2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Chứng minh rằng $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ là nhóm với phép cộng các số phức.

5. Chứng minh rằng tập hợp các số phức có môđun bằng một, là nhóm với phép nhân các số phức.

6. Gọi X_n là tập hợp các căn phức bậc n của đơn vị. Chứng minh $X = \bigcup\limits_{n:\,2}^{\infty} X_n$ là nhóm với phép nhân số phức.