GIẢI TÍCH CƠ BẢN
(ÔN THI THẠC SĨ TOÁN HỌC)
GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ VÀ HÀM SỐ

PGS. TS Lê Hoàn Hóa

Ngày 11 tháng 10 năm 2004

1 Giới hạn của dãy số

1.1 Định nghĩa

Cho $(x_n)_n$ là dãy số thực. Ta nói :

- Dãy $(x_n)_n$ *hội tụ về* x (x hữu hạn) khi $n \to \infty$, ký hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ hay $\lim x_n = x$ nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên $n_0 \in N$ sao cho với mọi $n \geq n_0$ thì $|x_n - x| < \epsilon$.

$$\lim x_n = x \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in N : \forall n \geq n_0 \Longrightarrow |x_n - x| < \epsilon \Longleftrightarrow \lim |x_n - x| = 0$$

- Dãy $(x_n)_n$ tiến ra $+\infty$ (theo tứ tự $-\infty$) nếu với mọi $A \in R$, tồn tại $n_0 \in N$ sao cho với mọi $n \geq n_0$ thì $x_n > A$ (theo thứ tự $x_n < A$).

- Dãy $(x_n)_n$ phân kỳ nếu *không có* $\lim x_n$ hoặc $\lim x_n = +\infty$ hoặc $\lim x_n = -\infty$.
  Như vậy với một dãy $(x_n)_n$ chỉ có hai trường hợp : hoặc $(x_n)_n$ hội tụ hoặc $(x_n)_n$ phân kỳ.

1.2 Định lý cơ bản

1. Nếu$(x_n)_n$ là dãy tăng, bị chặn trên và $a = \sup\{x_n\}$ thì $\lim x_n = a$. Nếu $(x_n)_n$ là dãy giảm, bị chặn dưới và $b = \inf\{x_n\}$ thì $\lim x_n = b$.

2. Giới hạn kẹp : Giả sử : $a_n \leq x_n \leq b_n, \forall n \geq n_0$ và $\lim a_n = \lim b_n = a$. Khi đó $\lim x_n = a$.

3. Tiêu chuẩn *Cauchy* :

$$(x_n)_n \text{ hội tụ } \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in N : \forall n \geq n_0, \forall p \in N \Longrightarrow |x_{n+p} - x_n| < \epsilon$$

1.3 Các giới hạn cơ bản

1. $\lim \dfrac{1}{n^\alpha} = 0, \forall \alpha > 0$

2. $\lim q^n = 0, \forall q, |q| < 1$

3. $\lim \sqrt[n]{a} = 1, \ \forall a > 0$

4. $\lim \sqrt[n]{n^p} = 1, \forall p \geq 0$

5. $\lim \dfrac{n^p}{(1+a)^n} = 0, \forall a > 0, \forall p$

6. $\lim \dfrac{n^p}{e^n} = 0, \forall p$

7. $\lim(1 + \dfrac{1}{n})^n = e$

8. $\lim(1 - \dfrac{1}{n})^n = e^{-1}$

9. $\lim \dfrac{\ln^p n}{n^\alpha} = 0, \forall \alpha > 0, \forall p$

10. $\lim \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$

1.4 Ví dụ

1.4.1 Ví dụ 1

Với $a > 0$, cho $x_n = (1 + \dfrac{a}{n})^n$, $y_n = (1 + \dfrac{a}{n})^{n+1}$, $n \in N$.

1. Chứng minh : $(x_n)_n$ là dãy tăng, $(y_n)_n$ là dãy giảm.

2. Chứng minh :$(x_n)_n$,$(y_n)_n$ hội tụ và $\lim x_n = \lim y_n$. Đặt $\lim x_n = \lim y_n = e^a$

Giải :

1. Trước tiên ta chứng minh : Với $\alpha \geq -1$, $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha, \forall n \in N$.
Bất đẳng thức đúng với $n = 1$. Giả sử đúng đến n.
Khi đó, do $1 + \alpha \geq 0$:
$$(1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)^n(1+\alpha) \geq (1+n\alpha)(1+\alpha) = 1 + (n+1)\alpha + \alpha^2 \geq 1 + (n+1)\alpha$$
Ta có, với mọi $n \in N$:
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(1+\dfrac{a}{n+1})^{n+1}}{(1+\dfrac{a}{n})^n} = (1+\frac{a}{n+1})(\frac{1+\dfrac{a}{n+1}}{1+\dfrac{a}{n}})^n = (1+\frac{a}{n+1})(1-\frac{a}{(n+1)(n+a)})^n$$
$$\geq (1+\frac{a}{n+1})[1-\frac{na}{(n+1)(n+a)}] = 1 + \frac{a^2}{(n+1)^2(n+a)} > 1$$
Vậy $(x_n)_n$ là dãy tăng.
Tương tự :
$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{(1+\dfrac{a}{n})^{n+1}}{(1+\dfrac{a}{n+1})^{n+2}} = (1+\frac{a}{n+1})^{-1}[1+\frac{a}{n(n+1+a)}]^{n+1}$$
$$\geq (1-\frac{a}{n+1+a})(1+\frac{(n+1)a}{n(n+1+a)}) \geq 1 + \frac{(n+1)a}{n(n+1+a)^2} > 1$$
Vậy $(y_n)_n$ là dãy giảm.

2. Ta có :

$$(1+a) = x_1 \le x_2 \le ... \le x_n \le y_n \le ... \le y_1 = (1+a)^2$$

Vậy $(x_n)_n$ là dãy tăng, bị chặn trên ; $(y_n)_n$ là dãy giảm, bị chặn dưới, chúng hội tụ. Đặt $\lim x_n = \lim y_n = \lim(1+\frac{a}{n})^n = e^a$

1.4.2 Ví dụ 2

Cho $(x_n)_n$ định bởi : $x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, $\forall n \in N$. Chứng minh $(x_n)_n$ là dãy tăng, bị chặn trên. Tính $\lim x_n$

Giải :

Ta có : $x_n \ge 0$, $\forall n$ và

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{2+x_n} - x_n = \frac{2 + x_n - {x_n}^2}{\sqrt{2+x_n} + x_n}$$

Tam thức bậc hai $2 + x_n - {x_n}^2 \ge 0 \Longleftrightarrow -2 \le x_n \le 2$, $\forall n$.
Bằng quy nạp, ta có : $x_1 = \sqrt{2} < 2$. Giả sử $x_n \le 2$. Khi đó : $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} \le 2$
Vậy $(x_n)_n$ là dãy tăng, bị chặn trên nên $(x_n)_n$ hội tụ.
Đặt $x = \lim x_n$.
Từ đẳng thức $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}, \forall n \in N$, cho $n \to \infty$, ta có : $x = \sqrt{2+x}$ hay $x^2 - x - 2 = 0$
Vậy $x = 2$.

1.4.3 Ví dụ 3

$$\lim \frac{3^{n+1} + 2^n}{3^n + 2^n} = \lim \frac{3^{n+1}[1 + ({}^2/_3)^{n+1}]}{3^n[1 + ({}^2/_3)^n]} = 3$$

1.4.4 Ví dụ 4

Tính $\lim \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$, $a, b, c > 0$.
Giả sử $a = \max\{a, b, c\}$. Ta có :

$$a \le \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = a\sqrt[n]{1 + (\frac{b}{a})^n + (\frac{c}{a})^n} \le a\sqrt[n]{3}$$

Vậy $\lim \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = \max\{a, b, c\}$

1.4.5 Ví dụ 5

Tính $\lim \sqrt[n]{n^2 2^n + 3^n}$
Do $\lim \frac{n^2}{({}^3/_2)^n} = 0$ nên có $n_0 \in N$ sao cho $\frac{n^2}{({}^3/_2)^n} < 1$, $\forall n \ge n_0$.
Với $n \ge n_0$, ta có :

$$3 \le \sqrt[n]{n^2 2^n + 3^n} = 3\sqrt[n]{1 + \frac{n^2}{({}^3/_2)^n}} \le 3\sqrt[n]{2}$$

Do định lý giới hạn kẹp $\lim \sqrt[n]{n^2 2^n + 3^n} = 3$

1.4.6 Ví dụ 6

Tính $\lim \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

$$0 \leq |\sin(\pi\sqrt{n^2+1})| = |\sin\pi(\sqrt{n^2+1}-n)| = |\sin(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n})| \leq \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

Vậy $\lim \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = 0$

BÀI TẬP

Tính các giới hạn sau

1. $\lim(\sqrt{n^2+5}-\sqrt{n^2+3})$
2. $\lim \dfrac{n\sin n}{n^2+1}$
3. $\lim \dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$, $\forall a,b>0$
4. $\lim nq^n$, $|q|<1$
5. $\lim \dfrac{2^n}{n!}$(HD: $\dfrac{2^n}{n!} = \dfrac{2.2...2.2}{1.2....(n-1).n} \leq \dfrac{4}{n}$)
6. $\lim \dfrac{n^2}{n!}$
7. Chứng minh : $1^2+2^2+...+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   Tính $\dfrac{1^2+2^2+...+n^2}{n^3}$
8. Tính $\lim n(\sqrt[n]{e}-1)$
   HD : Dùng thí dụ (1) có bất đẳng thức : $(1+\dfrac{1}{n})^n < e < (1-\dfrac{1}{n-1})^n$, $\forall n$
9. Cho $(x_n)_n$ định bởi : $x_1 = \sqrt{a}$, $x_{n+1} = \sqrt{a+x_n}$, $\forall n (a>0)$
   Xét tính đơn điệu của $(x_n)_n$ và tính $\lim x_n$ (nếu có).
10. Tính $\lim \dfrac{n}{2^{\sqrt{n}}}$
    HD : $\dfrac{n}{2^{\sqrt{n}}} = \exp[-\sqrt{n}\ln 2(1-\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}\ln 2})]$
    Do $\lim \dfrac{lnn}{\sqrt{n}\ln 2} = 0$ nên $\lim(\ln n - \sqrt{n}\ln 2) = -\infty$. Suy ra với mọi $A>0$, có $n_0 \in N$ sao cho với $n \geq n_0$ thì $\dfrac{n}{2^{\sqrt{n}}} \leq e^{-A}$. Vậy $\lim \dfrac{n}{2^{\sqrt{n}}} = 0$