ИДЗ №6

Даша Оникова, бпми 2112

февраль 2022

№ 1 Пусть $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ пространство многочленов с действительными коэффициентами от переменной x степени не выше 2. Линейное отображение $\varphi : V \to \mathbb{R}^2$ в базисе $\mathbb{v} = (v_1, v_2, v_3)$ пространства V и базисе $\mathbb{w} = (w_1, w_2)$ пространства $\mathbb{R}^2$ имеет матрицу (назовем ее A).
Найти $\varphi(8 + 3x - x^2)$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ -4 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = -1 - 2x + x^2, \quad v_2 = 3 + 2x - x^2, \; v_3 = -4 - 3x + x^2$$

$$w_1 = (-3, -1), \quad w_2 = (-2, -1)$$

Для того, чтобы найти **координаты** образа данного многочлена в базисе $\mathbb{w}$, необходимо умножить матрицу A (матрицу линейного отображения в данных базисах) на столбец координат данного многочлена в базисе $\mathbb{v}$. (Это работает из-за линейности линейного отображения и из-за линейной независимости w_1, w_2, как векторов базиса $\mathbb{R}^2$). Чтобы найти сам образ данного многочлена необходимо умножить найденные координаты на w_1, w_2 соответственно.

- Сначала найдем координаты $8 + 3x - x^2$ в базисе $\mathbb{v}$. Для этого решим СЛУ с тремя неизвестными (пусть эти неизвестные - x_1, x_2, x_3 - искомые координаты)

$$8 + 3x - x^2 = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 \cdot v_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 8 \\ -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Чтобы решить эту СЛУ, приведем расширенную матрицу коэффициентов к УСВ:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -4 & 8 \\ -2 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Привели к УСВ}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

- Теперь найдем координаты $\varphi(8 + 3x - x^2)$ в базисе $\mathbb{w}$ (пусть искомые координаты - y_1, y_2)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -17 \end{pmatrix}$$

- Последний шаг - посчитать: $\varphi(8+3x-x^2) = y_1 \cdot w_1 + y_2 \cdot w_2$

$$20 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} - 17 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -26 \\ -3 \end{pmatrix}$

№ 2

(а) Доказать, что существует единственное линейное отображение $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, переводящее векторы a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 соответственно в векторы b_1, b_2, b_3, b_4, b_5

(б) Найти базис ядра и базис образа этого линейного отображения. Ответ записать в стандартном базисе.

$$a_1 = (-2, 2, 0, -3, -5),\ a_2 = (-3, 2, -1, -2, -2),\ a_3 = (2, -4, 4, -5, 2),\ a_4 = (-2, 4, 4, 2, -3),$$

$$a_5 = (0, 3, -4, -5, 1).$$

$$b_1 = (-74, 98, -150),\ b_2 = (-48, 66, -90),\ b_3 = (-6, 19, 21),\ b_4 = (16, -21, 33),$$

$$b_5 = (-66, 97, -105).$$

(а) Пусть φ - отображение в базисе $\mathbb{v}$ $\mathbb{R}^5$ и базисе $\mathbb{w}$ $\mathbb{R}^3$. $A \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R})_{3\times 5}$, $\quad A = (x_{ij})$.

Для двух векторных пространств (V, W) и их фиксированных базисов $\mathbb{e}, \mathbb{f}$ отображение $\xi : \alpha \to A(\alpha, \mathbb{e}, \mathbb{f})$ $(\alpha \in \mathrm{Hom}(V, W))$ является биекцией. Значит, существует и отображение $\xi^{-1} : A(\alpha, \mathbb{e}, \mathbb{f}) \to \alpha$, которое также является биекцией, а значит, **единственность матрицы линейного отображения влечет за собой единственность самого линейного отображения**. Тогда, чтобы доказать пункт (а), необходимо доказать, что матрица A - единственная.

Про матрицу A известно, что столбец координат b_i в базисе $\mathbb{w}$ - это матрица A, умноженная на столбец координат a_i в базисе $\mathbb{v}$. В качестве $\mathbb{v}$ и $\mathbb{w}$ выберем стандартные базисы соответствующих пространств. То есть:

$$\begin{pmatrix} -74 \\ 98 \\ -150 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_{11} + 2x_{12} - 3x_{14} - 5x_{15} \\ -2x_{21} + 2x_{22} - 3x_{24} - 5x_{25} \\ -2x_{31} + 2x_{32} - 3x_{34} - 5x_{35} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -48 \\ 66 \\ -90 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_{11} + 2x_{12} - x_{13} - 2x_{14} - 2x_{15} \\ -3x_{21} + 2x_{22} - x_{23} - 2x_{24} - 2x_{25} \\ -3x_{31} + 2x_{32} - x_{33} - 2x_{34} - 2x_{35} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 19 \\ 21 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_{11} - 4x_{12} + 4x_{13} - 5x_{14} + 2x_{15} \\ 2x_{21} - 4x_{22} + 4x_{23} - 5x_{24} + 2x_{25} \\ 2x_{31} - 4x_{32} + 4x_{33} - 5x_{34} + 2x_{35} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}16\\-21\\33\end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix}-2\\4\\4\\2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\4\\4\\2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2x_{11}+4x_{12}+4x_{13}+2x_{14}-3x_{15}\\ -2x_{21}+4x_{22}+4x_{23}+2x_{24}-3x_{25}\\ -2x_{31}+4x_{32}+4x_{33}+2x_{34}-3x_{35}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-66\\97\\-105\end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\-4\\-5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\-4\\-5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x_{12}-4x_{13}-5x_{14}+x_{15}\\ 3x_{12}-4x_{13}-5x_{14}+x_{15}\\ 3x_{12}-4x_{13}-5x_{14}+x_{15}\end{pmatrix}$$

Итак, получилось 15 уравнений с 15-ю неизвестными. Найдем $x_{11},...,x_{35}$, решив СЛУ (напечатаю сразу расширенную матрицу СЛУ. Сама она имеет понятный вид: $k-$я координата вектора b_i равна $k-$той строке из столбца, полученного умножением A на a_i)

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccccc|c}
-2 & 2 & 0 & -3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -74\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & -3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 98\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & -3 & -5 & -150\\
-3 & 2 & -1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -48\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & -1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 66\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & -1 & -2 & -2 & -90\\
2 & -4 & 4 & -5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 4 & -5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 4 & -5 & 2 & 21\\
-2 & 4 & 4 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 4 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -21\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 4 & 2 & -3 & 33\\
0 & 3 & -4 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -66\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -4 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 97\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -4 & -5 & 1 & -105
\end{array}\right) \xrightarrow{\text{Привели к УСВ}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 15\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 21
\end{array}\right)$$

Итак, СЛУ имеет единственное решение, значит и матрица A - единственная. Тогда (по доказанному) и φ единственное

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & 10 & 8 \\ -3 & 1 & -7 & -15 & -9 \\ 3 & 3 & 15 & 15 & 21 \end{pmatrix}$$

(б) – Найдем базис $\mathrm{Ker}\varphi$: Ядро линейного отображения - это все векторы, переходящие в 0. Столбец координат образа вектора в базисе $\mathbb{w}$ (в нашем случае - столбец нулей) - это результат произведение матрицы A на столбец координат вектора в базисе $\mathbb{v}$. Тогда координаты всех векторов из $\mathrm{Ker}\varphi$ в $\mathbb{v}$- это все решения ОСЛУ $Ay = 0$, где $y-$ столбец неизвестных $y_1, ...y_5$.

А **базис** $\mathrm{Ker}\varphi$ **в координатах - ФСР этой ОСЛУ**.

Найдем ФСР по алгоритму поиска ФСР ОСЛУ (приведем матрицу коэффициентов к УСВ, выясним, какие неизвестные являются главными, а какие - нет. Поочередно будем фиксировать свободные перемменные равными $\lambda \neq 0$ и получать при таких значениях какие-то решения данной ОСЛУ. Все эти значения и будут искомой ФСР)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & 10 & 8 \\ -3 & 1 & -7 & -15 & -9 \\ 3 & 3 & 15 & 15 & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Привели к УСВ}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -3y_3 - 5y_4 - 4y_5 \\ y_2 = -2y_3 - 3y_5 \end{cases}$$

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
3	2	-1	0	0
5	0	0	-1	0
4	3	0	0	-1

Строки этой таблички - базис $\mathrm{Ker}\varphi$ в координатах. В стандартном базисе базис $\mathrm{Ker}\varphi$ - векторы k_1, k_2, k_3

$$k_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, k_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, k_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

– Теперь будем искать базис $\mathrm{Im}\varphi$. Найдем векторы (стандартного базиса), которые дополняют k_1, k_2, k_3 до базиса всего $\mathbb{R}^5$. (В стандартном базисе $\mathbb{R}^5$ - 5 векторов, размерность пространства не зависит от выбора базиса $\Rightarrow$ дополнять k_1, k_2, k_3 будут два вектора (стандартного базиса), пусть эти векторы - e_i, e_j). Базис $\mathrm{Im}\varphi - \varphi(e_i), \varphi(e_j)$ (Вообще, $\mathrm{Im}\varphi = \langle \varphi(k_1), \varphi(k_2, \varphi(k_3), \varphi(e_i), \varphi(e_j) \rangle$, но так как k_1, k_2, k_3 - базис ядра, их образы - нулевые векторы)

Чтобы дополнить k_1, k_2, k_3 можно привести матрицу, в строки которой записаны эти векторы к ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк, посмотреть, в каких столбцах не будет ведущих элементов, тогда номера этих столбцов (их будет 2) и будут индексами i, j для e_i, e_j

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Привели к СВ}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-10}{3} & \frac{5}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{10} & -1 \end{pmatrix}$$

Итак, ведущих элементов нет в 4, 5 столбцах, значит, до базиса всего $\mathbb{R}^5$ k_1, k_2, k_3 дополняют e_4, e_5. Остается последний шаг: выяснилось, что базисом $\mathrm{Im}\varphi$ будут векторы $\varphi(e_4), \varphi(e_5)$. Найдем их: Чтобы найти столбец координат $\varphi(e_4)$ в стандартном базисе $\mathbb{R}^3$ надо умножить матрицу A на столбец координат e_4 в стандартном базисе $\mathbb{R}^5$:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -15 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Чтобы найти столбец координат $\varphi(e_5)$ в стандартном базисе $\mathbb{R}^3$ надо умножить матрицу A на столбец координат e_5 в стандартном базисе $\mathbb{R}^5$:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 21 \end{pmatrix}$$

итак, базис $\mathrm{Im}\varphi$ – $\begin{pmatrix} 10 \\ -15 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 21 \end{pmatrix}$

Ответ: (б) базис $\mathrm{Ker}\varphi$ – $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, базис $\mathrm{Im}\varphi$ – $\begin{pmatrix} 10 \\ -15 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 21 \end{pmatrix}$

№ 3 Линейное отображение $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ в паре стандартных базисов имеет матрицу A, Постройить какое-нибудь линейное отображение $\psi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, для которого $\mathrm{Ker}\psi = \mathrm{Im}\varphi$ и $\mathrm{Ker}\varphi = \mathrm{Im}\psi$ и записать его матрицу в паре стандартных базисов.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -3 & 2 \\ 5 & 5 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 5 & -2 & 3 \\ -15 & -4 & -6 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & 9 & -8 \end{pmatrix}$$

Сначала найдем $\mathrm{Ker}\varphi = \mathrm{Im}\psi$. Поскольку ядро линейного отображения - все векторы, обращающиеся в 0, базис ядра линейного отображения ξ (в координатах) - базис пространства решений ОСЛУ $A(\mathbb{e}, \mathbb{f}, \xi)x = 0$ (где $A(\mathbb{e}, \mathbb{f}, \xi)$ - матрица линейного отображения ξ в паре базисов $\mathbb{e}, \mathbb{f}$) , или же ФСР этой ОСЛУ. То есть, базис $\mathrm{Ker}\varphi$ (в координатах) - ФСР ОСЛУ $Ax = 0$

Найдем ФСР по алгоритму поиска ФСР ОСЛУ (приведем матрицу коэффициентов к УСВ, выясним, какие неизвестные являются главными, а какие - нет. Поочередно будем фиксировать свободные перемменные равными $\lambda \neq 0$ и получать при таких значениях какие-то решения данной ОСЛУ. Все эти значения и будут искомой ФСР)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -3 & 2 \\ 5 & 5 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 5 & -2 & 3 \\ -15 & -4 & -6 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & 9 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Привели к УСВ}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -71 & 56 \\ 0 & 1 & 0 & 127 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & 93 & -73 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 71x_4 - 56x_5 \\ x_2 = -127x_4 + 100x_5 \\ x_3 = -93x_4 + 73x_5 \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
71	-127	-93	1	0
-56	100	73	0	1

То есть, базис $\mathrm{Ker}\varphi$ (в стандартном базисе) - векторы $k_1 = 71e_1 - 127e_2 - 93e_3 + e_4 = \begin{pmatrix} 71 \\ -127 \\ -93 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

и $k_2 = -56e_1 + 100e_2 + 73e_3 + e_5 = \begin{pmatrix} -56 \\ 100 \\ 73 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Теперь будем искать базис $\mathrm{Im}\varphi$. Найдем векторы (стандартного базиса), которые дополняют k_1, k_2 до базиса всего $\mathbb{R}^5$. (В стандартном базисе $\mathbb{R}^5$ - 5 векторов, размерность пространства не зависит от выбора базиса $\Rightarrow$ дополнять k_1, k_2 будут три вектора (стандартного базиса), пусть эти векторы - e_i, e_j, e_h). Базис $\mathrm{Im}\varphi - \varphi(e_i), \varphi(e_j), \varphi(e_h)$ (Вообще, $\mathrm{Im}\varphi = \langle \varphi(k_1), \varphi(k_2, \varphi(e_h), \varphi(e_i), \varphi(e_j) \rangle$, но так как k_1, k_2 - базис ядра, их образы - нулевые векторы)

Чтобы дополнить k_1, k_2 можно привести матрицу, в строки которой записаны эти векторы к (улучшенному) ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк, посмотреть, в каких столбцах не будет ведущих элементов, тогда номера этих столбцов (их будет 3) и будут индексами i, j, h для e_i, e_j, e_h

$$\begin{pmatrix} 71 & -127 & -93 & 1 & 0 \\ -56 & 100 & 73 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Привели к УСВ}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{29}{12} & \frac{-25}{3} & \frac{-127}{12} \\ 0 & 1 & \frac{25}{12} & \frac{-14}{3} & \frac{-71}{12} \end{pmatrix}$$

Итак, ведущих элементов нет в 3, 4, 5 столбцах, значит, до базиса всего $\mathbb{R}^5$ k_1, k_2 дополняют e_3, e_4, e_5. Остается последний шаг: выяснилось, что базисом Imφ будут векторы $\varphi(e_3), \varphi(e_4), \varphi(e_5)$. Найдем их: Чтобы найти столбец координат $\varphi(e_3)$ в стандартном базисе $\mathbb{R}^5$ надо умножить матрицу A на столбец координат e_3 в стандартном базисе $\mathbb{R}^5$:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Чтобы найти столбец координат $\varphi(e_4)$ в стандартном базисе $\mathbb{R}^5$ надо умножить матрицу A на столбец координат e_4 в стандартном базисе $\mathbb{R}^5$:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Чтобы найти столбец координат $\varphi(e_5)$ в стандартном базисе $\mathbb{R}^5$ надо умножить матрицу A на столбец координат e_5 в стандартном базисе $\mathbb{R}^5$:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Заметим, что из-за того, что базисы мы рассматриваем стандартные, столбцы координат $i_1 = \varphi(e_3), i_2 = \varphi(e_4), i_3 = \varphi(e_5)$ будут совпадать с самими векторами i_1, i_2, i_3.

Основываясь на том, что линейное отображение однозначно задается образами базисных векторов (для фиксированного базиса), построим ψ

В искомом линейном отображении ψ, Kerψ = Im$\varphi = \langle i_1, i_2, i_3 \rangle$(и i_1, i_2, i_3 - линейно независимы) $\Rightarrow \psi(i_1) = \psi(i_2) = \psi(i_3) = 0$ (тогда $\forall a \in \langle i_1, i_2, i_3 \rangle, a = a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$ $\psi(a) = \psi(a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3) = a_1 \psi(i_1) + a_2 \psi(i_2) + a_3 \psi(i_3) = 0 \Leftrightarrow a \in$ Kerψ)

Что будет базисом Imψ в стандартном базисе? С одной стороны, так как Imψ = Ker$\varphi = \langle k_1, k_2 \rangle$ (и k_1, k_2 - линейно независимы), базис Imψ - k_1, k_2. С другой стороны, базис Imψ можно попытаться найти стандартным алгоритмом: найти, какие векторы стандартного базиса будут дополнять базис Kerψ до базиса всего $\mathbb{R}^5$ и найти их образы. Проделаем это: (базис ядра мы знаем, это i_1, i_2, i_3):

Пусть дополняют эти векторы до базиса всего $\mathbb{R}^5$ векторы стандартного базиса e_i, e_j (их будет ровно 2 из-за того, что размерность вектороного пространства от выбора базиса не меняется). Можно привести матрицу, в строки которой записаны векторы i_1, i_2, i_3 к (улучшенному) ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк, посмотреть, в каких столбцах не будет ведущих элементов, тогда номера этих столбцов (их будет 2) и будут индексами i, j для e_i, e_j

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 5 & -6 & -4 \\ -3 & 1 & -2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Привели к УСВ}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Итак, ведущих элементов нет в 4, 5 столбцах, значит, до базиса всего $\mathbb{R}^5$ i_1, i_2, i_3 дополняют e_4, e_5.

То есть, базис $\mathrm{Im}\psi - \psi(e_4), \psi(e_5)$ То есть: $\begin{cases} \psi(i_1) = 0 \\ \psi(i_2) = 0 \\ \psi(i_3) = 0 \\ \psi(e_4) = k_1 \\ \psi(e_5) = k_2 \end{cases}$ Если мы найдем линейное отображение ψ, для которого будет выполняться эта система, мы найдем искомое отображение, так как:

- Все векторы, лежащие в $\langle i_1, i_2, i_3 \rangle$ будут лежать в $\mathrm{Ker}\psi$ и образы всех векторов из $\langle i_1, i_2, i_3, e_4, e_5 \rangle \setminus \langle i_1, i_2, i_3 \rangle$ не будут нулями (из-за линейной независимости набора i_1, i_2, i_3, e_4, e_5 (как базиса $\mathbb{R}^5$) и линейной независимости и ненулевости k_1, k_2). То есть, $\mathrm{Ker}\psi = \langle i_1, i_2, i_3 \rangle$

- Базис $\mathrm{Im}\psi = k_1, k_2 =$ базису $\mathrm{Ker}\varphi$, значит и $\mathrm{Im}\psi = \mathrm{Ker}\varphi$

Пусть B - матрица ψ в паре стандартных базисов. Тогда $B \cdot i_1 = B \cdot i_2 = B \cdot i_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B \cdot e_4 = k_1, B \cdot e_5 = k_2$.

То есть, B можно найти, решив матричное уравнение $B \cdot \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & e_4 & e_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 71 & -56 \\ 0 & 0 & 0 & -127 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & -93 & 73 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 9 & -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 71 & -56 \\ 0 & 0 & 0 & -127 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & -93 & 73 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -3 & 5 & -6 & -4 \\ -3 & 1 & -2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} \cdot B^T = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 71 & -127 & -93 & 1 & 0 \\ -56 & 100 & 73 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D}$$ Найдем B^T: приведем матрицу вида $(C|D)$ к УСВ:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -2 & -3 & 5 & -6 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & -1 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 71 & -127 & -93 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -56 & 100 & 73 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Привели к УСВ}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -183 & 327 & 239 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 198 & -354 & -259 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 86 & -154 & -113 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 71 & -127 & -93 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -56 & 100 & 73 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

B^T единственная, получилась справа от черты. Тогда $B = \begin{pmatrix} -183 & 198 & 86 & 71 & -56 \\ 327 & -354 & -154 & -127 & 100 \\ 239 & -259 & -113 & -93 & 73 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ответ: матрица ψ в паре стандартных базисов - $\begin{pmatrix} -183 & 198 & 86 & 71 & -56 \\ 327 & -354 & -154 & -127 & 100 \\ 239 & -259 & -113 & -93 & 73 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

№ 4 Линейное отображение $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ имеет в базисах $\mathbb{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ и $\mathbb{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ матрицу A. Найти базисы пространств $\mathbb{R}^5$ и $\mathbb{R}^4$, в которых матрица отображения φ имеет диагональный вид D с единицами и нулями на диагонали. Выпишите эту матрицу и соответствующее матричное разложение $A = C_1 D C_2^{-1}$,где C_1, C_2 - невырожденные матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 15 & 46 & 43 \\ -6 & 15 & -25 & -19 & -5 \\ 3 & -24 & 23 & -4 & -20 \\ -17 & -5 & -5 & 2 & 15 \end{pmatrix}$$

Сначала найдем базис Kerφ. Для этого найдем ФСР ОСЛУ $Ax = 0$ (Это будет базис Kerφ (в координатах), так как ядро линейного отображения - все векторы, переходящие в 0). Найдем ФСР по алгоритму поиска ФСР ОСЛУ (приведем матрицу коэффициентов к УСВ, выясним, какие неизвестные являются главными, а какие - нет. Поочередно будем фиксировать свободные переменные равными $\lambda \neq 0$ и получать при таких значениях какие-то решения данной ОСЛУ. Все эти значения и будут искомой ФСР)

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 15 & 46 & 43 \\ -6 & 15 & -25 & -19 & -5 \\ 3 & -24 & 23 & -4 & -20 \\ -17 & -5 & -5 & 2 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Привели к УСВ}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -77/47 & -120/47 \\ 0 & 1 & 0 & 118/47 & 143/47 \\ 0 & 0 & 1 & 125/47 & 124/47 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{77}{47}x_4 + \frac{120}{47}x_5 \\ x_2 = -\frac{118}{47}x_4 - \frac{143}{47}x_5 \\ x_3 = -\frac{125}{47}x_4 - \frac{124}{47}x_5 \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
77	-118	-125	47	0
120	-143	-124	0	47

Итак, базис Kerφ - векторы

$$k_1 = 77e_1 - 118e_2 - 125e_3 + 47x_4,\ \ k_2 = 120e_1 - 143e_2 - 124e_3 + 47e_5$$

Пусть искомый базис пространства $\mathbb{R}^5 - \mathbb{e}' = (e_1', e_2', e_3', e_4', e_5')$, а искомый базис пространства $\mathbb{R}^4 - \mathbb{f}' = (f_1', f_2', f_3', f_4')$. Пусть векторы $e_4' = k_1,\ e_5' = k_2$. Тогда векторы $e_1', ..e_3'-$ векторы, которые дополняют k_1, k_2 до базиса всего $\mathbb{R}^5\varphi$. Заметим, что это могут быть векторы e_1, e_2, e_3 - их пять и векторы k_1, k_2, e_1, e_2, e_3 - линейно независимы. Проверить линейную независимость можно, рассмотрев линейную комбинацию $x_1k_1 + x_2k_2 + x_3e_1 + x_4e_2 + x_5e_3$, приравняв ее к 0 и найдя все возможные x_i:

$x_1k_1 + x_2k_2 + x_3e_1 + x_4e_2 + x_5e_3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 77x_1e_1 - 118x_1e_2 - 125x_1e_3 + 47x_1e_4 + 120x_2e_1 - 143x_2e_2 - 124x_2e_3 + 47x_1e_5 + x_3e_1 + x_4e_2 + x_5e_3 = 0$

$\Leftrightarrow e_1(77x_1 + 120x_2 + x_3) + e_2(-118x_1 - 143x_2 + x_4) + e_3(-125x_1 - 124e_3 + x_5) +$

$+ e_4 \cdot 47x_1 + e_5 \cdot 47x_2 = 0 \overset{e_1..e_5 \text{ ЛНЗ как базис}}{\Longleftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = 0 \\ x_3 + 77x_1 + 120x_2 = 0 \\ x_4 - 118x_1 - 143x_2 = 0 \\ x_5 - 125x_1 - 124x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0 \Rightarrow$ линейная комбинация этих векторов равна нулю, если только она тривиальна $\Rightarrow k_1, k_2, e_1, e_2, e_3$ - ЛНЗ $\Rightarrow$ это еще один базис $\mathbb{R}^5$

$$e_1' = e_21, \quad e_2' = e_2, \quad e_3' = e_3, \quad e_4' = 77e_1 - 118e_2 - 125e_3 + 47x_4, \quad e_5' = 120e_1 - 143e_2 - 124e_3 + 47e_5$$

Чтобы найти $f_1', f_2', f_3;, f_4'$, найдем $\varphi(e_1'), \varphi(e_2'), \varphi(e_3')$ (в базисе $\mathbb{R}^4$ всего 4 вектора, f_4' - вектор, который дополняет f_1', f_2', f_3') до базиса всего пространства).

$$f_1' = \varphi(e_1') = \varphi(e_1) = \mathbb{f} \cdot A^{(1)} = 7f_1 - 6f_2 + 3f_3 - 17f_4$$
$$f_2' = \varphi(e_2') = \varphi(e_3) = \mathbb{f} \cdot A^{(2)} = 7f_1 + 15f_2 - 24f_3 - 5f_4$$
$$f_3' = \varphi(e_3') = \varphi(e_4) = \mathbb{f} \cdot A^{(3)} = 15f_1 - 25f_2 + 23f_3 - 5f_4$$
$$f_4' = f_4$$

Докажем, что f_4' - это f_4: (поскольку размерность $\mathbb{R}^4$ - 4, остается проверить только линейную независимость f_1', f_2', f_3', f_4): рассмотрим линейную комбинацию этих векторов, равную 0

$x_1f_1' + x_2f_2' + x_3f_3' + x_4f_4 = 0 \Leftrightarrow 7x_1f_1 - 6x_1f_2 + 3x_1f_3 - 17x_1f_4 + 7x_2f_1 + 15x_2f_2 - 24x_2f_3 - 5x_2f_4 +$

$+ 15x_3f_1 - 25x_3f_2 + 23x_3f_3 - 5x_3f_4 + x_4f_4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f_1(7x_1 + 7x_2 + 15x_3) + f_2(-6x_1 + 15x_2 - 25x_3) + f_3(3x_1 - 24x_2 + 23x_3) + f_4(-17x_1 - 5x_2 - 5x_3 + x_4) =$
$0 \overset{f_1..f_5 \text{ ЛНЗ как базис}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 7x_1 + 7x_2 + 15x_3 = 0 \\ -6x_1 + 15x_2 - 25x_3 = 0 \\ 3x_1 - 24x_2 + 23x_3 = 0 \\ -17x_1 - 5x_2 - 5x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$. Решим эту ОСЛУ, приведя ее матрицу к УСВ:
$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 15 & 0 \\ -6 & 15 & -25 & 0 \\ 3 & -24 & 23 & 0 \\ -17 & -5 & -5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Привели к УСВ}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0 \Rightarrow$ эти векторы ЛНЗ и базис $\mathbb{R}^5$

Найдем сам диагональный вид матрицы D - Это блочная матрица размера 4×5, левый верхний квадратный блок в которой - единичная матрица (и высота (равная длине) этого блока - $\dim \mathrm{Im}\varphi = \dim\mathbb{R}^5 - \dim \mathrm{Ker}\varphi = 5 - 2 = 3$)

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$D = C_{\mathbb{f}}^{-1} \cdot A \cdot C_{\mathbb{e}}$, где $C_{\mathbb{f}}$ - матрица перехода от $\mathbb{f}$ к $\mathbb{f}'$, $C_{\mathbb{e}}$ - матрица перехода от $\mathbb{e}$ к $\mathbb{e}'$. Тогда $A = C_{\mathbb{f}} \cdot D \cdot C_{\mathbb{e}}^{-1}$. Значит, искомые матрицы из условия - C_1, C_2 - матрицы $C_{\mathbb{f}}, C_{\mathbb{e}}$ соответственно.

Найдем C_1 - матрицу перехода от $\mathbb{f}$ к $\mathbb{f}'$. В $i-$й столбец матрицы C_1 записаны координаты i-го вектора из базиса $\mathbb{f}'$ в базисе $\mathbb{f}$. То есть,

$$C_1 = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 15 & 0 \\ -6 & 15 & -25 & 0 \\ 3 & -24 & 23 & 0 \\ -17 & -5 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем C_2 - матрицу перехода от $\mathbb{e}$ к $\mathbb{e}'$. В $i-$й столбец матрицы C_2 записаны координаты i-го вектора из базиса $\mathbb{e}'$ в базисе $\mathbb{e}$. То есть,

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 77 & 120 \\ 0 & 1 & 0 & -118 & -143 \\ 0 & 0 & 1 & -125 & -124 \\ 0 & 0 & 0 & 47 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 47 \end{pmatrix}$$

C_1, C_2 - невырожденные, как матрицы перехода от одного базиса к другому.

Ответ:

- новый базис $\mathbb{R}^5 - (e_2, e_3, e_4, e_5, 67e_1 + 69e_3 - 143e_4 + 118e_5)$
- новый базис $\mathbb{R}^4 - (7f_1 + 16f_2 - 24f_3 - 5f_4, 15f_1 - 25f_2 + 23f_3 - 5f_4, 46f_1 - 19f_2 - 4f_3 + 2f_4, 43f_1 - 5f_2 - 20f_3 + 15f_4)$
- $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $C_1 = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 15 & 0 \\ -6 & 15 & -25 & 0 \\ 3 & -24 & 23 & 0 \\ -17 & -5 & -5 & 1 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 77 & 120 \\ 0 & 1 & 0 & -118 & -143 \\ 0 & 0 & 1 & -125 & -124 \\ 0 & 0 & 0 & 47 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 47 \end{pmatrix}$

№ 5 Пусть $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ - пространство многочленов степени не выше 2 от переменной x с действительными коэффициентами. Пусть $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ - базис пространства V^*, двойственный к базису $\mathbb{e} = (e_1, e_2, e_3)$ пространства V , а $\mathbb{f} = (f_1, f_2, f_3)$ - базис пространства V , для которого двойственным является базис (ρ_1, ρ_2, ρ_3) пространства V^*. Рассмотрим линейную функцию $\alpha \in V^*$, имеющую в базисе $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ координаты (-1, 1, 4), и многочлен $h \in V$, имеющий в базисе (f_1, f_2, f_3) координаты (-1, 1, 4). Найдите значение $\alpha(h)$.

$$e_1 = -1 + x^2,\ e_2 = 2 - 3x + 3x^2,\ e_3 = -3 + 9x - 19x^2$$

$$\rho_1(f) = f(1),\ \rho_2(f) = f'(-1),\ \rho_3(f) = \frac{3}{2}\int\limits_0^2 f(x)dx.$$

В этом номере буду использовать обозначение $f \circ x = f(x)$

Рассмотрим $\mathbb{v} = (v_1, v_2, v_3)$, где $v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2$. Это базис V (эти многочлены линейно независимы, тк любая их линейная комбинация $ax^2 + bx + c = 0$ только при $a = b = c = 0$ и в нем три многочлена, а $\dim V = 3$ (хотя бы потому что в базисе $\mathbb{e}$ - три вектора))

Найдем матрицу C - матрицу перехода от $\mathbb{v}$ к $\mathbb{f}$ ($\mathbb{f} = \mathbb{v} \cdot C$): так как базис ($\rho_1, \rho_2, \rho_3$ - двойственен к базису $\mathbb{f}$,

$$\begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\\ \rho_3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}f_1 & f_2 & f_3\end{pmatrix} = E \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\\ \rho_3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{pmatrix} \cdot C = E \underset{\text{перехода от } \mathbb{v} \text{ к } \mathbb{f}}{\overset{C \text{ обратима как матрица}}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\\ \rho_3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{pmatrix} = C^{-1}$$

$$\begin{pmatrix}\rho_1(v_1) & \rho_1(v_2) & \rho_1(v_3)\\ \rho_2(v_1) & \rho_2(v_2) & \rho_2(v_3)\\ \rho_3(v_1) & \rho_3(v_2) & \rho_3(v_3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix} = C^{-1}$$

Найдем C, приведя матрицу вида $(C^{-1}|E)$ к УСВ (слева получится E, справа - $(C^{-1})^{-1} = C$)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{\text{Привели к УСВ}} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 10 & -1 & -3\\ 0 & 1 & 0 & -6 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1\end{array}\right)$$

Теперь можно найти $\mathbb{f}$: в i-й столбец матрицы C записаны координаты f_i в базисе $\mathbb{v}$. То есть,

$$f_1 = 10 - 6x - 3x^2,\ f_2 = -1 + x,\ f_3 = -3 + 2x + x^2$$

Теперь мы можем найти $h = -f_1 + f_2 + 4f_3 = 3x^2 + 6x - 10 + x - 1 - 12 + 8x + 4x^2 = 7x^2 + 15x - 23$
Найдем D - матрицу перехода от $\mathbb{f}$ к $\mathbb{e}$ (то есть $\mathbb{e} = \mathbb{f} \cdot D$). Сделаем это через матрицы перехода к $\mathbb{v}$: пусть матрица перехода от $\mathbb{v}$ к $\mathbb{e} - B$. Тогда:

$$\begin{cases}\mathbb{f} = \mathbb{v} \cdot C\\ \mathbb{e} = \mathbb{v} \cdot B\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mathbb{f} \cdot C^{-1} = \mathbb{v}\\ \mathbb{e} = \mathbb{v} \cdot B\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mathbb{v} = \mathbb{f} \cdot C^{-1}\\ \mathbb{e} = \mathbb{f} \cdot C^{-1} \cdot B\end{cases} \Rightarrow D = C^{-1} \cdot B$$

C^{-1} нам уже известна, осталось найти B. Это несложно: в i-й столбец B записаны координаты e_i в базисе $\mathbb{v}$, то есть $B = \begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ 0 & -3 & 9\\ 1 & 3 & -19\end{pmatrix}$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \\ 1 & 3 & -19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -13 \\ -2 & -9 & 47 \\ 1 & 9 & -58 \end{pmatrix}$$

Найдем и обратную к D, приведя матрицу вида $(D|E)$ к УСВ (слева получится E, справа - D^{-1})

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -13 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -9 & 47 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & -58 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Привели к УСВ}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-33}{7} & \frac{1}{21} & \frac{23}{21} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{23}{7} & \frac{-13}{21} & \frac{-26}{21} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{-2}{21} & \frac{-4}{21} \end{array}\right)$$

теперь найдем $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} = D^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-99\rho_1+\rho_2+23\rho_3}{21} \\ \frac{69\rho_1-13\rho_2-26\rho_3}{21} \\ \frac{9\rho_1-2\rho_2-4\rho_3}{21} \end{pmatrix} = \frac{1}{21} \cdot \begin{pmatrix} -99\rho_1 + \rho_2 + 23\rho_3 \\ 69\rho_1 - 13\rho_2 - 26\rho_3 \\ 9\rho_1 - 2\rho_2 - 4\rho_3 \end{pmatrix}$$

Эту формулу несложно проверить:

$$E = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} = D^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} = D^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} \cdot D = D^{-1}ED = E$$

Теперь найдем α и посчитаем $\alpha(h)$:

$\alpha = \frac{1}{21} \cdot (99\rho_1 - \rho_2 - 23\rho_3 + 69\rho_1 - 13\rho_2 - 26\rho_3 + 36\rho_1 - 8\rho_2 - 16\rho_3) = \frac{1}{21} \cdot (204\rho_1 - 22\rho_2 - 65\rho_3)$

$\alpha(h) = \alpha(7x^2+15x-23) = \frac{1}{21} \cdot (204\rho_1(7x^2+15x-23) - 22\rho_2(7x^2+15x-23) - 65\rho_3(7x^2+15x-23)) =$

$= \frac{1}{21} \cdot (204 \cdot (7 + 15 - 23) - 22(-14 + 15) - 65 \cdot 4) = -\frac{486}{21} = -\frac{162}{7}$

Ответ: $-\frac{162}{7}$