ИДЗ №8, вариант 20

Даша Оникова, бпми 2112

апрель 2022

Далее во всем ИДЗ стандартный базис $\mathbb{R}^n$ - $\mathbb{e} = (e_1, e_2, .., e_n)$; $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

№ 1 Дополните вектор $v = \frac{1}{13}(4, 5, 8, -8)$ до ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^4$

Сначала дополним v до какого-то базиса в $\mathbb{R}^4$. Это можно сделать по алгоритму дополниения линейно независимой системы векторов до базиса всего подпространства (алгоритм такой: записать все векторы из данной системы в строки матрицы, привести матрицу к СВ элементарными преобразованиями строк, дополнять данную систему до базиса будут все векторы e_i стандартного базиса, где i - номера столбцов без ведущих элементов в полученном СВ). В нашем случае все проще: так как вектор один, приводить к СВ ничего не придется, ответом будут просто векторы (e_2, e_3, e_4)

Итак, система векторов (v, e_2, e_3, e_4) - базис $\mathbb{R}^4$

Теперь ортогонализуем эту систему методом Грама-Шмидта (а чтобы сохранить вектор v, возьмем его первым, тогда метод Грама-Шмидта его не тронет), получится базис $\mathbb{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$:

- $f_1 = v = (\frac{4}{13}, \frac{5}{13}, \frac{8}{13}, -\frac{8}{13})$
- $f_2 = e_2 - \frac{(e_2,f_1)}{(f_1,f_1)} f_1 = e_2 - \frac{5}{13} f_1 = (-\frac{20}{169}, \frac{144}{169}, -\frac{40}{169}, \frac{40}{169})$
  - $(e_2, f_1) = \frac{5}{13}$
  - $(f_1, f_1) = \frac{16}{169} + \frac{25}{169} + \frac{64}{169} + \frac{64}{169} = 1$
- $f_3 = e_3 - \frac{(e_3,f_1)}{(f_1,f_1)} f_1 - \frac{(e_3,f_2)}{(f_2,f_2)} f_2 = e_3 - \frac{8}{13} f_1 + \frac{40 \cdot 169}{144 \cdot 169} f_2 = e_3 - \frac{8}{13} f_1 + \frac{5}{18} f_2 = (-\frac{2}{9}, 0, \frac{5}{9}, \frac{4}{9})$
  - $(e_3, f_1) = \frac{8}{13}$
  - $(e_3, f_2) = -\frac{40}{169}$
  - $(f_2, f_2) = \frac{400 + 144^2 + 1600 + 1600}{169^2} = \frac{144}{169}$
- $f_4 = e_4 - \frac{(e_4,f_1)}{(f_1,f_1)} f_1 - \frac{(e_4,f_2)}{(f_2,f_2)} f_2 - \frac{(e_4,f_3)}{(f_3,f_3)} f_3 = e_4 + \frac{8}{13} f_1 - \frac{5}{18} f_2 - \frac{4}{5} f_3 = (\frac{2}{5}, 0, 0, \frac{1}{5})$
  - $(e_4, f_1) = -\frac{8}{13}$
  - $(e_4, f_2) = \frac{40}{169}$
  - $(e_4, f_3) = \frac{4}{9}$

- $(f_3, f_3) = \frac{4+0+25+16}{81} = \frac{45}{81} = \frac{5}{9}$

Теперь ортнормируем полученный базис, заметим, что v не изменится, тк $|v| = 1$. Получитчя базис $\mathbb{f}' = (f_1' = v, f_2', f_3', f_4')$, он и будет искомым

- $f_1' = v$
- $f_2' = \frac{1}{\sqrt{(f_2,f_2)}} f_2 = \frac{13}{12} f_2 = (-\frac{5}{39}, \frac{12}{13}, -\frac{10}{39}, \frac{10}{39})$
- $f_3' = \frac{1}{\sqrt{(f_3,f_3)}} f_3 = \frac{3}{\sqrt{5}} f_3 = (-\frac{2}{3\sqrt{5}}, 0, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3\sqrt{5}})$
- $f_4' = \frac{1}{\sqrt{(f_4,f_4)}} f_4 = \sqrt{5} \cdot f_4 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{5}})$
  - $(f_4, f_4) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

Ответ: Искомый базис - $v, (-\frac{5}{39}, \frac{12}{13}, -\frac{10}{39}, \frac{10}{39}), (-\frac{2}{3\sqrt{5}}, 0, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3\sqrt{5}}), (\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{5}})$

№2 Подпространство U евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ задано системой уравнений ($\star$). Для вектора v найдите его проекцию на U, его ортогональную составляющую относительно U и расстояние от него до U.

$$\star : \begin{cases} -x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 4x_2 - 4x_3 - x_4 = 0. \end{cases} \qquad v = (5, 3, -5, 5)^T$$

Так как $\mathbb{R}^4$ - евклидово пространство, а U - его подпространство, то $\forall v \in \mathbb{R}^4\ \exists!\ u \in U, u' \in U^{\perp} v:\ u + u' = v$, причем $u = pr_U v = ort_{U^{\perp}} v, u' = ort_U v = pr_{U^{\perp}},\ \rho(v, U) = |ort_U v|$

Подпространство $U^{\perp}$ будет порождаться ОСЛУ с матрицей, строки которой - векторы из базиса U. Эти векторы - векторы из ФСР ОСЛУ $\star$. То есть, базис $U^{\perp}$ - векторы, записанные в строках матрицы коэффициентов ОСЛУ $\star$. Это векторы $w_1 = (-1, -3, -3, 1)^T$ и $w_2 = (-1, -4, -4, -1)^T$. Пусть матрица $W = (w_1, w_2)$

По формуле ортогональной проекции вектора на подпространство в $\mathbb{R}^n$, заданное своим базисом, $pr_{U^{\perp}} v = W(W^T W)^{-1} W^T v$

$$\Rightarrow pr_{U^{\perp}} v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = ort_U v = u'; \quad u + u' = v \Leftrightarrow u = v - u' = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = pr_U v$$

$\rho(v, U) = |ort_U v| = \sqrt{(u', u')} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Ответ: $pr_U v = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, ort_U v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \rho(U, v) = \sqrt{2}$

№3 В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ даны два подпространства $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ и $W = \langle w_1, w_2 \rangle$. Найдите вектор $v \in \mathbb{R}^4$, для которого $pr_U v = (-20, 30, 20, -30)$ и $ort_W v = (-12, 36, -14, -42)$.

$$u_1 = (-3, -1, 3, 1), u_2 = (2, 4, -2, -4), w_1 = (3, 1, -3, 1), w_2 = (-6, -2, 0, 0).$$

Сначала найдем базис $U^{\perp}$, через него выразим $ort_U v$, через базис W выразим $pr_W v$:

- Подпространство $U^{\perp}$ будет порождаться ОСЛУ с матрицей, строки которой - векторы из базиса U. То есть, чтобы найти базис $U^{\perp}$ надо найти ФСР ОСЛУ $\begin{cases} -3x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Привели к УСВ}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_4 \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	1	0
0	1	0	1

Тогда базис $U^{\perp} = u'_1 = (1, 0, 1, 0), u'_2 = (0, 1, 0, 1)$

- $ort_U v = au'_1 + bu'_2 = v - pr_U v$

- $pr_W v = cw_1 + dw_2 = v - ort_W v$

$$\Rightarrow v = pr_U v + ort_U v = pr_W v + ort_W v = \begin{pmatrix} -20 \\ 30 \\ 20 \\ -30 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 36 \\ -14 \\ -42 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Теперь найдем a, b, c, d, решив СЛУ:

$$\begin{cases} -20 + a = -12 + 3c - 6d \\ 30 + b = 36 + c - 2d \\ 20 + a = -14 - 3c \\ -30 + b = -42 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 3c + 6d = 8 \\ b - c + 2d = 6 \\ a + 3c = -34 \\ b - c = -12 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -34 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Привели к УСВ}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -40 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} a = -40 \\ b = -10 \\ c = 2 \\ d = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v = \begin{pmatrix} -20 - 40 \\ 30 - 10 \\ 20 - 40 \\ -30 - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60 \\ 20 \\ -20 \\ -40 \end{pmatrix}$$

Ответ: $v = \begin{pmatrix} -60 \\ 20 \\ -20 \\ -40 \end{pmatrix}$

№ 4 В пространстве $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, снабжённом структурой евклидова пространства относительно некоторого (неизвестного) скалярного произведения, объём параллелепипеда, натянутого на векторы a_1, a_2, a_3 равен 5. Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы b_1, b_2, b_3

$$a_1 = -4 + 2x + 4x^2, a_2 = 12 - 4x - 13x^2, a_3 = -4 + 4x + 2x^2,$$
$$b_1 = -4 + 5x - 2x^2, 12 - 19x + 2x^2, b_3 = -4 + 6x.$$

Рассмотрим *естественный* базис V - $\mathbb{f} = (f_1, f_2, f_3) = (1, x, x^2)$. В этом базисе

$$a_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ -13 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} b_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} b_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ -19 \\ 2 \end{pmatrix} b_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

По формуле для объёма k-мерного параллелепипеда (натянутого на векторы $c_1, ..c_k$) в n-мерном евклидовом пространстве, $volP(c_1, .., c_k)^2 = detG(c_1, .., c_k)$ (определитель матрицы Грама системы векторов, на которые он натянут)

$\Rightarrow detG(a_1, a_2, a_3) = 25$

Теперь найдем такую матрицу A, что $(a_1, a_2, a_3)A = (b_1, b_2, b_3)$. $A \in M_3(\mathbb{R}), A = \{x_{ij}\}$

Для этого придется решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} -4 & 12 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \\ 4 & -13 & 2 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -4 & 12 & -4 \\ 5 & -19 & 6 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Приведем левую часть матрицы $(a_1\ a_2\ a_3 | b_1\ b_2\ b_3)$ к УСВ, тогда, если у уравнения есть решение, получим $(E|A)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 12 & -4 & -4 & 12 & -4 \\ 2 & -4 & 4 & 5 & -19 & 6 \\ 4 & -13 & 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Привели к УСВ}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-9}{16} & \frac{19}{16} & \frac{-3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{64} & \frac{-37}{64} & \frac{5}{32} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{97}{64} & \frac{-379}{64} & \frac{59}{32} \end{array}\right)$$

При этом, если выполняется $(b_1, b_2, b_3) = (a_1, a_2, a_3)A$, то верно равенство $G(b_1, b_2, b_3) = A^T G(a_1, a_2, a_3)A$

$det(A^T G(a_1, a_2, a_3)A) = det(A^T)detG(a_1, a_2, a_3)detA = (detA)^2 * 25 = \frac{25}{32^2}$

Тогда $volP(b_1, b_2, b_3)^2 = detG(b_1, b_2, b_3) = \frac{25}{32^2} \Leftrightarrow volP(b_1, b_2, b_3) = \frac{5}{32}$

Ответ: $\frac{5}{32}$

№ 5 Пусть L — трёхмерная плоскость в $\mathbb{R}^5$, проходящая через точки v_0, v_1, v_2, v_3. Найдите в L точку, ближайшую к точке v и расстояние от неё до v.

$$v_0 = (-1, -5, -3, -5, -8), v_1 = (9, 0, -2, -6, -15), v_2 = (-1, 2, -2, -4, -3),$$
$$v_3 = (-1, -4, -8, -12, -7), v = (9, 6, -4, -4, 6),$$

Заметим, что L - подпространство $\mathbb{R}^5$ размерности 3, а $\mathbb{R}$ - евклидово пространство. Рассмотрим векторы $u_1 = v_1 - v_0$, $u_2 = v_2 - v_0$, $u_3 = v_3 - v_0$ (все координаты - в стандартном базисе $\mathbb{R}^5$. Заметим, что они все лежат в L, так как точки v_0, v_1, v_2, v_3 лежат в L

$$u_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Теперь рассмотрим матрицу $A = (u_1, u_2, u_3)$ и посмотрим на ее ранг:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & -7 \\ -7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Ее ранг равен трем, и в ней всего три столбца, значит ее столбцы линейно независимы $\Rightarrow$ три вектора u_1, u_2, u_3 - линйено независимы, а значит - являются базисом трехмерной L.

Теперь найдем $a = ort_L(v - v_0)$ и $b = pr_L(v - v_0)$. Искомая точка - конец вектора b, искомое расстояние - $|a|$. При этом, $a + b = v - v_0$. Найдем b по формуле для процекции. Получится, что $b = A(A^TA)^{-1}A^T(v - v_0)$

$$v - v_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ -1 \\ 1 \\ 14 \end{pmatrix}, \ b = A(A^TA)^{-1}A^T(v - v_0) = \begin{pmatrix} \frac{20360}{6789} \\ \frac{659303}{42997} \\ \frac{2078}{2263} \\ \frac{-161539}{257982} \\ \frac{2031455}{257982} \end{pmatrix} \Rightarrow a = (v - v_0) - b = \begin{pmatrix} \frac{47530}{6789} \\ \frac{-186336}{42997} \\ \frac{-4341}{2263} \\ \frac{419521}{257982} \\ \frac{1580293}{257982} \end{pmatrix}$$

$$|a| = \sqrt{(a, a)} = \sqrt{(\frac{47530}{6789})^2 + (-\frac{186336}{42997})^2 + (-\frac{4341}{2263})^2 + (\frac{419521}{257982})^2 + (\frac{1580293}{257982})^2} = \sqrt{\frac{28801721}{257982}}$$

Искомая точка - конец вектора b - точка $b + v_0 = \begin{pmatrix} \frac{13571}{6789} \\ \frac{444318}{42997} \\ \frac{-4711}{2263} \\ \frac{-1451449}{257982} \\ \frac{-32401}{257982} \end{pmatrix}$

Ответ: расстояние - $\sqrt{\frac{28801721}{257982}}$, точка - $\begin{pmatrix} \frac{13571}{6789} \\ \frac{444318}{42997} \\ \frac{-4711}{2263} \\ \frac{-1451449}{257982} \\ \frac{-32401}{257982} \end{pmatrix}$