# ИДЗ №2

Даша Оникова, бпми 2112

15.10.2021

**№ 1** определить число решений системы в зависимости от a и b

$$\begin{cases} ax + 4z = 5 \\ 3x + 9y + bz = -2 \\ 5x + y = 2 \end{cases}$$

Расширенная матрица СЛУ:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 9 & b & -2 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) -> \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 9 & b & -2 \\ a & 0 & 4 & 5 \end{array}\right) -> \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{42}{5} & b & -\frac{16}{5} \\ 0 & -\frac{a}{5} & 4 & 5-\frac{2a}{5} \end{array}\right) ->$$
$$-> \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{42}{5} & b & -\frac{16}{5} \\ 0 & 0 & 4+\frac{ab}{42} & 5-(\frac{2a}{5}+\frac{16a}{42\cdot5}) \end{array}\right) -> \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{42}{5} & b & -\frac{16}{5} \\ 0 & 0 & 4+\frac{ab}{42} & 5-\frac{10a}{21} \end{array}\right)$$

I При $5 - \frac{10a}{21} = 0 <=> a = 10.5$:

(a) Если $4 + \frac{ab}{42} = 0 <=> ab = -168 => b = -16$ - система имеет бесконечно много решений, второе уравнение будет содержать свободную переменную z

(b) Если $b \neq -16$ - система имеет единственное решение (x, y, z) = $(\frac{10}{21}, \frac{-8}{21}, 0)$

II При $a \neq 10.5$

(a) Если $ab = -168$ - не имеет решений, в последней строке все коэффициенты при переменных - 0, а свободный член - не ноль

(b) Если $ab \neq -168$ - система имеет единственное решение, так как свободных переменных нет

Ответ: Если $a = 10.5, b = -16$ - бесконечно много решений, если $ab = -168, a \neq 10.5$ - нет решений, если $a = 10.5, b \neq -16$ или $ab \neq 168, a \neq 10.5$ - единственное решение

**№ 2**

$$X = \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

, Найти все X, если AX = XA

пусть X имеет вид $\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ c & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$. Тогда

$$AX = \begin{pmatrix} 4a & 0 & 4b+6f \\ 3a & 0 & 3b-7f \\ 0 & 0 & 2f \end{pmatrix}$$

$$XA = \begin{pmatrix} 4a & 0 & 6a+2b \\ 4c+3d & 0 & 6c-7d+2e \\ 0 & 0 & 2f \end{pmatrix}$$

При AX = XA, $\begin{cases} 4b+6f = 6a+2b| \cdot 0.5 \\ 3a = 4c+3d \\ 3b-7f = 6c-7d+2e \end{cases} \quad <=> \quad \begin{cases} -3a+b+3f=0 \\ 3a-4c-3d=0 \\ 3b-6c+7d-7f-2e=0 \end{cases}$

Расширенная матрица СЛУ: $\left(\begin{array}{cccccc|c} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -4 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 7 & -2 & -7 & 0 \end{array}\right) -> \left(\begin{array}{cccccc|c} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 7 & -2 & -7 & 0 \end{array}\right) ->$

$\left(\begin{array}{cccccc|c} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 16 & -2 & -16 & 0 \end{array}\right) -> \left(\begin{array}{cccccc|c} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & -1 & -8 & 0 \end{array}\right) ->$

$-> \left(\begin{array}{cccccc|c} -3 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & -1 & -8 & 0 \end{array}\right) -> \left(\begin{array}{cccccc|c} -3 & 0 & 0 & -\frac{23}{3} & 0\frac{4}{3} & \frac{32}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{23}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{23}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & -1 & -8 & 0 \end{array}\right)$

$=> \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{23}{9} \\ -\frac{23}{3} \\ -\frac{8}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d + \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e + \begin{pmatrix} \frac{32}{9} \\ \frac{23}{3} \\ \frac{8}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} f$ => X = $\begin{pmatrix} -\frac{23}{9}d + \frac{4}{9}e + \frac{32}{9}f & 0 & -\frac{23}{3}d + \frac{4}{3}e + \frac{23}{3}f \\ -\frac{8}{3}d + \frac{1}{3}e + \frac{8}{3}f & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$, где $d, e, f \in \mathbb{R}$

Ответ: X = $\begin{pmatrix} -\frac{23}{9}d + \frac{4}{9}e + \frac{32}{9}f & 0 & -\frac{23}{3}d + \frac{4}{3}e + \frac{23}{3}f \\ -\frac{8}{3}d + \frac{1}{3}e + \frac{8}{3}f & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$, где $d, e, f \in \mathbb{R}$

**№ 3** Решить уравнение AX = B,

$$A = \begin{pmatrix} -34 & -11 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 60 & 101 & 7 \\ -10 & -14 & 5 \\ 9 & 11 & -8 \end{pmatrix}$$

$A \in Mat_{3\times4}, B \in Mat_{3\times3} => X \in Mat_{4\times3}$. Пусть $X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix}$,

Расширенная матрица СЛУ: $\left(\begin{array}{cccc|ccc} -34 & -11 & 5 & 2 & 60 & 101 & 7 \\ -2 & 4 & -1 & 1 & -10 & -14 & 5 \\ -3 & -3 & 1 & 2 & 9 & 11 & -8 \end{array}\right) ->$

$\left(\begin{array}{cccc|ccc} -2 & 4 & -1 & 1 & -10 & -14 & 5 \\ -34 & -11 & 5 & 2 & 60 & 101 & 7 \\ -3 & -3 & 1 & 2 & 9 & 11 & -8 \end{array}\right) -> \left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & -4 & 1 & -1 & 10 & 14 & -5 \\ -34 & -11 & 5 & 2 & 60 & 101 & 7 \\ -3 & -3 & 1 & 2 & 9 & 11 & -8 \end{array}\right) ->$

$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & -4 & 1 & -1 & 10 & 14 & -5 \\ 0 & -79 & 22 & -15 & 230 & 339 & -78 \\ -3 & -3 & 1 & 2 & 9 & 11 & -8 \end{array}\right) -> \left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & -4 & 1 & -1 & 10 & 14 & -5 \\ 0 & -79 & 22 & -15 & 230 & 339 & -78 \\ 0 & -9 & 2.5 & 0.5 & 24 & 32 & -15.5 \end{array}\right) ->$

$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & -4 & 1 & -1 & 10 & 14 & -5 \\ 0 & -79 & 22 & -15 & 230 & 339 & -78 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{158} & \frac{349}{158} & -\frac{174}{79} & -\frac{523}{79} & -\frac{1045}{158} \end{array}\right) -> \left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & -4 & 1 & -1 & 10 & 14 & -5 \\ 0 & -79 & 22 & -15 & 230 & 339 & -78 \\ 0 & 0 & -1 & 349 & -348 & -1046 & -1045 \end{array}\right) ->$

$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 0 & -\frac{9}{79} & -\frac{19}{79} & -\frac{130}{79} & -\frac{250}{79} & -\frac{83}{79} \\ 0 & -79 & 22 & -15 & 230 & 339 & -78 \\ 0 & 0 & -1 & 349 & -348 & -1046 & -1045 \end{array}\right) -> \left(\begin{array}{cccc|ccc} 158 & 0 & -9 & -19 & -130 & -250 & -83 \\ 0 & -79 & 22 & -15 & 230 & 339 & -78 \\ 0 & 0 & -1 & 349 & -348 & -1046 & -1045 \end{array}\right) ->$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 158 & 0 & 0 & -3160 & 3002 & 9164 & 9322 \\ 0 & -79 & 0 & 7663 & -7426 & -22673 & -23068 \\ 0 & 0 & -1 & 349 & -348 & -1046 & -1045 \end{array}\right) ->$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -20 & 19 & 58 & 59 \\ 0 & 1 & 0 & -97 & 94 & 287 & 292 \\ 0 & 0 & 1 & -349 & 348 & 1046 & 1045 \end{array}\right)$$

$$=> \begin{cases} x_1 = 19 + 20x_4 \\ x_2 = 94 + 97x_4 \\ x_3 = 348 + 349x_4 \\ y_1 = 58 + 20y_4 \\ y_2 = 287 + 97y_4 \\ y_3 = 1046 + 349y_4 \\ z_1 = 59 + 20z_4 \\ z_2 = 292 + 97z_4 \\ z_3 = 1045 + 349z_4 \end{cases} =>$$

$X = \begin{pmatrix} 19 + 20x_4 & 58 + 20y_4 & 59 + 20z_4 \\ 94 + 97x_4 & 287 + 97y_4 & 292 + 97z_4 \\ 348 + 349x_4 & 1046 + 349y_4 & 1045 + 349z_4 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix}$, $x_4, y_4, z_4 \in \mathbb{R}$ - общее решение матричного уравнения

$X = \begin{pmatrix} 19 & 58 & 59 \\ 94 & 287 & 292 \\ 348 & 1046 & 1045 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $x_4, y_4, z_4 \in \mathbb{R}$ - частное решение, при $x_4 = y_4 = z_4 = 0$

**№ 4** Найти квадратную матрицу P, такую, что PA - УСВ матрицы A.

$$A = \begin{pmatrix} 20 & -3 & -5 & -20 & -36 \\ 12 & -1 & -4 & -12 & -22 \\ 5 & -1 & -1 & -5 & -9 \\ -7 & 1 & 2 & 7 & 13 \end{pmatrix}$$

$PA \in Mat_{4\times 5} => P \in Mat_{4\times 4}$.

Приведем A к УСВ: $\begin{pmatrix} 20 & -3 & -5 & -20 & -36 \\ 12 & -1 & -4 & -12 & -22 \\ 5 & -1 & -1 & -5 & -9 \\ -7 & 1 & 2 & 7 & 13 \end{pmatrix} -> \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 12 & -1 & -4 & -12 & -22 \\ 5 & -1 & -1 & -5 & -9 \\ -7 & 1 & 2 & 7 & 13 \end{pmatrix} ->$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -1 & -5 & -9 \\ -7 & 1 & 2 & 7 & 13 \end{pmatrix} -> \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -1 & -5 & -9 \\ -7 & 1 & 2 & 7 & 13 \end{pmatrix} -> \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -3 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} ->$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} -> \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} -> \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} ->$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} -> \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} -> \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как каждое элементарное преобразование соответствует умножению слева на матрицу элементарного преобразования,

$U_{1,(2,3,1)} \cdot U_{1,(1,2,1)} \cdot U_{1,(3,2,2)} \cdot U_{2,(3,4)} \cdot U_{2,(1,3)} \cdot U_{1,(4,3,2)} \cdot U_{1,(3,4,2)} \cdot U_{1,(4,3,1)} \cdot U_{1,(1,2,-1)} \cdot U_{1,(2,4,1)} \cdot U_{1,(2,3,-1)} \cdot U_{1,(1,3,-4)} \cdot A = PA$, (U - матрицы соответствующих элементарных преобразований, U $\in Mat_4$)

=> P $= U_{1,(2,3,1)} \cdot U_{1,(1,2,1)} \cdot U_{1,(3,2,2)} \cdot U_{2,(3,4)} \cdot U_{2,(1,3)} \cdot U_{1,(4,3,2)} \cdot U_{1,(3,4,2)} \cdot U_{1,(4,3,1)} \cdot U_{1,(1,2,-1)} \cdot U_{1,(2,4,1)} \cdot U_{1,(2,3,-1)} \cdot U_{1,(1,3,-4)} =$

$= U_{1,(2,3,1)} \cdot U_{1,(1,2,1)} \cdot U_{1,(3,2,2)} \cdot U_{2,(3,4)} \cdot U_{2,(1,3)} \cdot U_{1,(4,3,2)} \cdot U_{1,(3,4,2)} \cdot U_{1,(4,3,1)} \cdot U_{1,(1,2,-1)} \cdot U_{1,(2,4,1)} \cdot U_{1,(2,3,-1)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= U_{1,(2,3,1)} \cdot U_{1,(1,2,1)} \cdot U_{1,(3,2,2)} \cdot U_{2,(3,4)} \cdot U_{2,(1,3)} \cdot U_{1,(4,3,2)} \cdot U_{1,(3,4,2)} \cdot U_{1,(4,3,1)} \cdot U_{1,(1,2,-1)} \cdot U_{1,(2,4,1)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= U_{1,(2,3,1)} \cdot U_{1,(1,2,1)} \cdot U_{1,(3,2,2)} \cdot U_{2,(3,4)} \cdot U_{2,(1,3)} \cdot U_{1,(4,3,2)} \cdot U_{1,(3,4,2)} \cdot U_{1,(4,3,1)} \cdot U_{1,(1,2,-1)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= U_{1,(2,3,1)} \cdot U_{1,(1,2,1)} \cdot U_{1,(3,2,2)} \cdot U_{2,(3,4)} \cdot U_{2,(1,3)} \cdot U_{1,(4,3,2)} \cdot U_{1,(3,4,2)} \cdot U_{1,(4,3,1)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= U_{1,(2,3,1)} \cdot U_{1,(1,2,1)} \cdot U_{1,(3,2,2)} \cdot U_{2,(3,4)} \cdot U_{2,(1,3)} \cdot U_{1,(4,3,2)} \cdot U_{1,(3,4,2)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$= U_{1,(2,3,1)} \cdot U_{1,(1,2,1)} \cdot U_{1,(3,2,2)} \cdot U_{2,(3,4)} \cdot U_{2,(1,3)} \cdot U_{1,(4,3,2)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$= U_{1,(2,3,1)} \cdot U_{1,(1,2,1)} \cdot U_{1,(3,2,2)} \cdot U_{2,(3,4)} \cdot U_{2,(1,3)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} =$

$= U_{1,(2,3,1)} \cdot U_{1,(1,2,1)} \cdot U_{1,(3,2,2)} \cdot U_{2,(3,4)} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} =$

$= U_{1,(2,3,1)} \cdot U_{1,(1,2,1)} \cdot U_{1,(3,2,2)} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 1 & -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = U_{1,(2,3,1)} \cdot U_{1,(1,2,1)} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} =$

$= U_{1,(2,3,1)} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

Ответ: P $= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

**№ 5** Выяснить, имеют ли системы $ABC^{-1}x = 0$ и $Dx = 0$ одинаковое множество решений, $x \in \mathbb{R}^4$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -60 & 9 & 19 & 0 \\ -6 & -1 & 0 & 19 \\ -48 & 11 & 19 & -38 \\ -66 & 8 & 19 & 19 \end{pmatrix}$$

- найдем $C^{-1}$. пусть $Y = C^{-1} => CY = E$, $Y, E \in Mat_{4\times 4}$

Пусть $Y = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & w_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & w_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & w_4 \end{pmatrix}$

Расширенная матрица СЛУ: $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) ->$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) -> \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) ->$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) =>$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_2 + x_3 \\ x_2 = -2 + x_3 + x_4 \\ x_3 = -2 + x_4 \\ x_4 = -7 \\ y_1 = y_2 + y_3 \\ y_2 = 1 + y_3 + y_4 \\ y_3 = y_4 \\ y_4 = 1 \\ z_1 = x_2 + z_3 \\ z_2 = z_3 + z_4 \\ z_3 = 1 + z_4 \\ z_4 = 2 \\ w_1 = w_2 + w_3 \\ w_2 = w_3 + w_4 \\ w_3 = w_4 \\ w_4 = 1 \end{cases} <=> \begin{cases} x_1 = -26 \\ x_2 = -18 \\ x_3 = -9 \\ x_4 = -7 \\ y_1 = 4 \\ y_2 = 3 \\ y_3 = 1 \\ y_4 = 1 \\ z_1 = 8 \\ z_2 = 5 \\ z_3 = 3 \\ z_4 = 2 \\ w_1 = 3 \\ w_2 = 2 \\ w_3 = 1 \\ w_4 = 1 \end{cases} => Y = C^{-1} = \begin{pmatrix} -26 & 4 & 8 & 3 \\ -18 & 3 & 5 & 2 \\ -9 & 1 & 3 & 1 \\ -7 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- найдем $ABC^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -26 & 4 & 8 & 3 \\ -18 & 3 & 5 & 2 \\ -9 & 1 & 3 & 1 \\ -7 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -102 & 14 & 31 & 13 \\ -36 & 5 & 11 & 4 \\ -138 & 19 & 42 & 17 \\ 756 & -104 & -230 & -94 \end{pmatrix}$$

- Преобразуем $D$ при помощи элементарных преобразований (приведем $D$ к УСВ):

$$\begin{pmatrix} -60 & 9 & 19 & 0 \\ -6 & -1 & 0 & 19 \\ -48 & 11 & 19 & -38 \\ -66 & 8 & 19 & 19 \end{pmatrix} -> \begin{pmatrix} -66 & 8 & 19 & 19 \\ -6 & -1 & 0 & 19 \\ -48 & 11 & 19 & -38 \\ -66 & 8 & 19 & 19 \end{pmatrix} -> \begin{pmatrix} -66 & 8 & 19 & 19 \\ -66 & 8 & 19 & 19 \\ -48 & 11 & 19 & -38 \\ -6 & -1 & 0 & 19 \end{pmatrix} ->$$

$$\begin{pmatrix}-114 & 19 & 38 & -19\\ -114 & 19 & 38 & -19\\ -48 & 11 & 19 & -38\\ -6 & -1 & 0 & 19\end{pmatrix} -> \begin{pmatrix}-6 & 1 & 2 & -1\\ -6 & 1 & 2 & -1\\ -48 & 11 & 19 & -38\\ -6 & -1 & 0 & 19\end{pmatrix} -> \begin{pmatrix}-6 & 1 & 2 & -1\\ -6 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 19 & 19 & -190\\ -6 & -1 & 0 & 19\end{pmatrix} ->$$

$$\begin{pmatrix}-6 & 1 & 2 & -1\\ -6 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1 & -10\\ -6 & -1 & 0 & 19\end{pmatrix} -> \begin{pmatrix}-6 & 1 & 2 & -1\\ -6 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1 & -10\\ 0 & -2 & -2 & 20\end{pmatrix} -> \begin{pmatrix}-6 & 1 & 2 & -1\\ -6 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1 & -10\\ 0 & 1 & 1 & -10\end{pmatrix}$$

$$-> \begin{pmatrix}-6 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} -> \begin{pmatrix}-6 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} -> \begin{pmatrix}-6 & 0 & 1 & 9\\ 0 & 1 & 1 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

- Преобразуем $ABC^{-1}$ при помощи элементарных преобразований (приведем $ABC^{-1}$ к УСВ):

$$\begin{pmatrix}-102 & 14 & 31 & 13\\ -36 & 5 & 11 & 4\\ -138 & 19 & 42 & 17\\ 756 & -104 & -230 & -94\end{pmatrix} -> \begin{pmatrix}-102 & 14 & 31 & 13\\ -36 & 5 & 11 & 4\\ -36 & 5 & 11 & 4\\ 756 & -104 & -230 & -94\end{pmatrix} ->$$

$$\begin{pmatrix}-36 & 5 & 11 & 4\\ -36 & 5 & 11 & 4\\ -102 & 14 & 31 & 13\\ 756 & -104 & -230 & -94\end{pmatrix} -> \begin{pmatrix}-36 & 5 & 11 & 4\\ -36 & 5 & 11 & 4\\ -102 & 14 & 31 & 13\\ 378 & -52 & -115 & -47\end{pmatrix} ->$$

$$\begin{pmatrix}-36 & 5 & 11 & 4\\ -36 & 5 & 11 & 4\\ -102 & 14 & 31 & 13\\ -30 & 4 & 9 & 5\end{pmatrix} -> \begin{pmatrix}-6 & 1 & 2 & -1\\ -6 & 1 & 2 & -1\\ -102 & 14 & 31 & 13\\ -30 & 4 & 9 & 5\end{pmatrix} -> \begin{pmatrix}-6 & 1 & 2 & -1\\ -6 & 1 & 2 & -1\\ -102 & 14 & 31 & 13\\ 0 & -1 & -1 & 10\end{pmatrix} ->$$

$$\begin{pmatrix}-6 & 1 & 2 & -1\\ -6 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1 & -10\\ -102 & 14 & 31 & 13\end{pmatrix} -> \begin{pmatrix}-6 & 1 & 2 & -1\\ -6 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1 & -10\\ 0 & -3 & -3 & 30\end{pmatrix} -> \begin{pmatrix}-6 & 1 & 2 & -1\\ -6 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1 & -10\\ 0 & 1 & 1 & -10\end{pmatrix} ->$$

$$\begin{pmatrix}-6 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} -> \begin{pmatrix}-6 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} -> \begin{pmatrix}-6 & 0 & 1 & 9\\ 0 & 1 & 1 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Пусть УСВ $ABC^{-1} = Q =$ УСВ $D$.

Расширенная матрица СЛУ $ABC^{-1}x = 0$ - $(ABC^{-1}|0)$. Заметим, что при преобразовании этой матрицы с помощью элементарных преобразований крайний правый столбец остается неизменен, ведь в нем только нули. => При помощи элементарных преобразований можно привести $(ABC^{-1}|0)$ к $(Q|0)$, а значит $ABC^{-1}x = 0$ эквивалентно $Qx = 0$. $Qx = 0$ и $ABC^{-1}x$ имеют одинаковое множество решений

Расширенная матрица СЛУ $Dx = 0$ - $(D|0)$. Заметим, что при преобразовании этой матрицы с помощью элементарных преобразований крайний правый столбец остается неизменен, ведь в нем только нули. => При помощи элементарных преобразований можно привести $(D|0)$ к $(Q|0)$, а значит $Dx = 0$ эквивалентно $Qx = 0$. $Dx = 0$ и $Qx$ имеют одинаковое множество решений

=> $Qx = 0$ эквивалентно $Dx = 0$ и $Qx = 0$ эквивалентно $ABC^{-1}x = 0$. => $Dx = 0$ и $ABC^{-1}x$ имеют одинаковое множество решений. Ответ: да.