ИДЗ №3

Даша Оникова, бпми 2112

15.10.2021

№ 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^{-1} - ?$$

Пусть $A^{-1} = X, => AX = A \cdot A^{-1} = E, \quad X, E \in Mat_4$

Пусть $X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & w_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & w_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & w_4 \end{pmatrix}$

Расширенная матрица СЛУ: $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) ->$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) -> \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) ->$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) -> \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -3 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) ->$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -3 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 1 & -1.5 & 6 \end{array}\right) -> \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -3 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -3 & 12 \end{array}\right)$$

$$=> \begin{cases} x_1 = 2x_2 + x_3 + 1 \\ x_2 = x_3 - x_4 + 1 \\ x_3 = 0.5x_4 - 1.5 \\ x_4 = 1 \\ y_1 = 2y_2 + y_3 \\ y_2 = y_3 - y_4 \\ y_3 = 0.5y_4 \\ y_4 = 2 \\ z_1 = 2z_2 + z_3 \\ z_2 = z_3 - z_4 \\ z_3 = 0.5z_4 + 0.5 \\ z_4 = -3 \\ w_1 = 2w_2 + w_3 \\ w_2 = w_3 - w_4 + 1 \\ w_3 = 0.5w_4 - 2 \\ w_4 = 12 \end{cases} <=> \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = 1 \\ y_1 = -1 \\ y_2 = -1 \\ y_3 = 1 \\ y_4 = 2 \\ z_1 = 3 \\ z_2 = 2 \\ z_3 = -1 \\ z_4 = -3 \\ w_1 = -10 \\ w_2 = -7 \\ w_3 = 4 \\ w_4 = 12 \end{cases} => X = A^{-1} = X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 & -10 \\ -1 & -1 & 2 & -7 \\ -1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 12 \end{pmatrix}$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 & -10 \\ -1 & -1 & 2 & -7 \\ -1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 12 \end{pmatrix}$

№ 2 Решить уравнение относительно перестановки X:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 6 & 3 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}^{14} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 5 & 1 & 3 & 7 & 2 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \right)^{152} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 7 & 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Пусть $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 6 & 3 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 5 & 1 & 3 & 7 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

- Разложим σ_1 в произведение независимых циклов:

  $\sigma_1 = (1\ \ 2)(3\ \ 4\ \ 6\ \ 8\ \ 5)(7)$

- Найдем σ_1^{14} :

  Заметим, что $\sigma_1^k = id$, если k - НОК длин независимых циклов в σ_1. НОК(2, 5, 1) $= 10 =>$ $\sigma_1^{10} = id => \sigma_1^{14} = \sigma_1^{10} \cdot \sigma_1^4 = id \cdot \sigma_1^4 = \sigma_1^4$

  $\sigma_1^4 = ((1\ \ 2)(3\ \ 4\ \ 6\ \ 8\ \ 5)(7))^4 = (1\ \ 2)^4(3\ \ 4\ \ 6\ \ 8\ \ 5)^4(7)^4 = id \cdot (3\ \ 4\ \ 6\ \ 8\ \ 5)^4 \cdot id = id \cdot (3\ \ 4\ \ 6\ \ 8\ \ 5)^5 \cdot (3\ \ 4\ \ 6\ \ 8\ \ 5)^{-1} \cdot id = id \cdot id \cdot (3\ \ 4\ \ 6\ \ 8\ \ 5)^{-1} \cdot id =$

  $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 8 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

- Найдем σ_2^{-1} :

  $\sigma_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 5 & 1 & 3 & 7 & 2 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 & 1 & 3 & 7 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 5 & 2 & 3 & 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

- Найдем $\sigma_3 = \sigma_1^{14} \cdot \sigma_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 8 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 5 & 2 & 3 & 1 & 6 & 8 \end{pmatrix} =$

  $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 2 & 5 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

- Разложим σ_3 в произведение независимых циклов:

  $\sigma_3 = (1\ \ 3\ \ 8\ \ 6)(2\ \ 7\ \ 4)(5)$

- Найдем σ_3^{152}: Заметим, что НОК длин независимых циклов в $\sigma_3 = 12 \Rightarrow \sigma_3^{12} = id \Rightarrow \sigma_3^{12\cdot 12} = id^{12} = id$

  $=> \sigma_3^{152} = \sigma_3^{144} \cdot \sigma_3^8 = id \cdot \sigma_3^8 = \sigma_3^8 = ((1\ \ 3\ \ 8\ \ 6)(2\ \ 7\ \ 4)(5))^8 = (1\ \ 3\ \ 8\ \ 6)^8(2\ \ 7\ \ 4)^8(5)^8 =$

  $= id \cdot (2\ \ 7\ \ 4)^6 \cdot (2\ \ 7\ \ 4)^2 \cdot id = id \cdot id \cdot (2\ \ 7\ \ 4)^2 \cdot id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 7 & 5 & 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

- Найдем $(\sigma_3^{152})^{-1}$

  $(\sigma_3^{152})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 7 & 5 & 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 & 5 & 6 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

- Уравнение примет вид $\sigma_3^{152} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 7 & 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ Домножим (слева) обе части на $(\sigma_3^{152})^{-1}$:

  $(\sigma_3^{152})^{-1} \cdot \sigma_3^{152} \cdot X = (\sigma_3^{152})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 7 & 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} <=> X = (\sigma_3^{152})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 7 & 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

  $=> X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 7 & 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 4 & 7 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 4 & 7 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

№ 3 Определить четность перестановки:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & 97 & 98 & ... & 334 & 335 & ... & 536 \\ 440 & 441 & ... & 536 & 203 & ... & 439 & 1 & ... & 202 \end{pmatrix}$$

в первой строке перестановки σ инверсий нет $=>$ четность перестановки зависит только от количества инверсий во второй строке.

Число 440 образует инверсию с числами 203 - 439 и числами 1 - 202. Всего их 439 - 1 + 1 = 439. Числа 440 - 536 стоят в порядке возрастания, каждое из них образует 439 инверсий (сислами 1 - 439). $=>$ Всего таких чисел - 536 - 440 + 1 = 97, вместе они образуют $97 \cdot 439 = 42583$ инверсии.

Посчитаем, сколько еще инверсий (помимо указанных выше) образуют числа 203 - 439.
Число 203 образует инверсии с числами 1 - 202. Всего их 202 - 1 + 1 = 202. Так как все числа 203 - 439 стоят в порядке возрастания, каждое из них образует 202 инверсии (с числами 1 - 202, инверсии с предыдущими числами уже посчитаны). Всего таких чисел - 439 - 202 + 1 = 238 $=>$ всего инверсий $238 \cdot 202 = 48076$

Посчитаем, сколько еще инверсий (помимо указанных выше) образуют числа 1 - 202.
Так как все числа 203 - 439 стоят в порядке возрастания, каждое из них образует 0 инверсий с последующими (а инверсии с предыдущими уже посчитаны)

$=>$ всего инверсий в перестановке 42583 + 48076 = 90659 инверсий. Это нечетное число $=>$ данная перестановка нечетная.

Ответ: нечетная

№ 4

$$\begin{vmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 3 & x & 0 & 4 \\ 6 & 9 & 0 & 0 & 5 & 7 \\ x & 2 & 0 & x & x & 3 \\ 0 & 6 & 6 & 8 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 6 & 4 & 6 \end{vmatrix} -?$$

$$\begin{vmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 3 & x & 0 & 4 \\ 6 & 9 & 0 & 0 & 5 & 7 \\ x & 2 & 0 & x & x & 3 \\ 0 & 6 & 6 & 8 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 6 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & x & -1 & 4 \\ 6 & 9 & 0 & 0 & 5 & 7 \\ x & 2 & 0 & x & x & 3 \\ 0 & 6 & 6 & 8 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 6 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & x & -1 & 4 \\ 6 & 9 & 0 & -6 & -1 & 7 \\ x & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 6 & 8 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 6 & 4 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -x \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & x & -1 & 4 \\ 6 & 0 & -6 & -1 & 7 \\ x & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 8 & 3 & 8 \\ 0 & 5 & 6 & 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & x & 4 \\ 6 & 9 & 0 & -6 & 7 \\ x & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 6 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

- $$\begin{vmatrix} 0 & 3 & x & -1 & 4 \\ 6 & 0 & -6 & -1 & 7 \\ x & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 8 & 3 & 8 \\ 0 & 5 & 6 & 4 & 6 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 3 & x & -1 & 4 \\ 0 & -6 & -1 & 7 \\ 6 & 8 & 3 & 8 \\ 5 & 6 & 4 & 6 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & x & -1 \\ 6 & 0 & -6 & -1 \\ 0 & 6 & 8 & 3 \\ 0 & 5 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

$$> \begin{vmatrix} 3 & x & -1 & 4 \\ 0 & -6 & -1 & 7 \\ 6 & 8 & 3 & 8 \\ 5 & 6 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & x & -1 & 4 \\ 0 & -6 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & 6 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & x & -1 & 4 \\ 0 & -6 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \begin{vmatrix} x & -1 & 4 \\ -6 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 3 & x & 4 \\ 0 & -6 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 4 \\ -6 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 \cdot x + (-1) \cdot 7 \cdot 2 + (-6) \cdot (-1) \cdot 4 - (-1) \cdot 2 \cdot 4 - (-1) \cdot (-6) \cdot 2 - (-1) \cdot 7 \cdot x =$$

$$= -2x - 14 + 24 + 8 - 12 + 7x = 5x + 6$$

$$\begin{vmatrix} 3 & x & 4 \\ 0 & -6 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -6 \cdot 3 \cdot 2 + 7 \cdot x \cdot 1 + 0 - (-6) \cdot 1 \cdot 4 - 2 \cdot 7 \cdot 3 - 0 = -36 + 7x + 24 - 42 =$$

$$= 7x - 77 + 24 = 7x - 54$$

$$=> \begin{vmatrix} 3 & x & -1 & 4 \\ 0 & -6 & -1 & 7 \\ 6 & 8 & 3 & 8 \\ 5 & 6 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -2 \cdot (5x + 6) - 7 \cdot (7x - 54) = -10x - 12 - 49x + 378 = 366 - 59x$$

$$> \begin{vmatrix} 0 & 3 & x & -1 \\ 6 & 0 & -6 & -1 \\ 0 & 6 & 8 & 3 \\ 0 & 5 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & x & -1 \\ 6 & 8 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -6(3 \cdot 8 \cdot 4 + 3 \cdot x \cdot 5 + 6 \cdot 6 \cdot (-1) - 5 \cdot 8 \cdot (-1) - 6 \cdot x \cdot 4 - 6 \cdot 3 \cdot 3) =$$

$$= -6(96 + 15x - 36 + 40 - 24x - 54) = -6 \cdot (46 - 9x) = 54x - 276$$

$$=> \begin{vmatrix} 0 & 3 & x & -1 & 4 \\ 6 & 0 & -6 & -1 & 7 \\ x & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 8 & 3 & 8 \\ 0 & 5 & 6 & 4 & 6 \end{vmatrix} = x(366-59x)+3(54x-276) = 366x - 59x^2 + 162x - 828 = -59x^2 + 528x - 828$$

- $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & x & 4 \\ 6 & 9 & 0 & -6 & 7 \\ x & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 6 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 6 & 6 \end{vmatrix} = -6 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & x & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & 6 & 8 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 6 \end{vmatrix} + x \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & x & 4 \\ 9 & 0 & -6 & 7 \\ 6 & 6 & 8 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$> \begin{vmatrix} 0 & 3 & x & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & 6 & 8 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 6 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & x & 4 \\ 6 & 8 & 8 \\ 5 & 6 & 6 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & x \\ 6 & 6 & 8 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & x & 4 \\ 6 & 8 & 8 \\ 5 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot6\cdot8+8\cdot x\cdot5+6\cdot6\cdot4-5\cdot8\cdot4-6\cdot x\cdot6-8\cdot6\cdot3 = 144+40x+144-160-36x-144 = 4x-16$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & x \\ 6 & 6 & 8 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0+3\cdot8\cdot2+6\cdot5\cdot x-x\cdot2\cdot6-0-3\cdot6\cdot6 = 48+30x-12x-108 = 18x-60$$

$$=> \begin{vmatrix} 0 & 3 & x & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & 6 & 8 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 6 \end{vmatrix} = -2(4x-16)+3(18-60x) = -8x+32+54x-180 = 46x-148$$

$$> \begin{vmatrix} 0 & 3 & x & 4 \\ 9 & 0 & -6 & 7 \\ 6 & 6 & 8 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & x & 4 \\ 9 & 0 & -6 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & x & 4 \\ 9 & 0 & -6 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ -10 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-10) \cdot \begin{vmatrix} 3 & x & 4 \\ 0 & -6 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & x & 4 \\ 9 & -6 & 7 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & x & 4 \\ 0 & -6 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-6)\cdot2+0+7\cdot x\cdot1-1\cdot(-6)\cdot4-0-2\cdot7\cdot3 = -36+7x+24-42 = 7x-54$$

$$\begin{vmatrix} 0 & x & 4 \\ 9 & -6 & 7 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0+7\cdot x\cdot4+9\cdot2\cdot4-4\cdot(-6)\cdot4-0-x\cdot9\cdot2 = 28x+72+96-18x = 10x+168$$

$$=> \begin{vmatrix} 0 & 3 & x & 4 \\ 9 & 0 & -6 & 7 \\ 6 & 6 & 8 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 10(7x-54)+2(10x+168) = 70x-540+20x+336 = 90x-204$$

$$=> \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & x & 4 \\ 6 & 9 & 0 & -6 & 7 \\ x & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 6 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 6 & 6 \end{vmatrix} = -6(46x-148)+x(90x-204) = -276x+888+90x^2-204x = 90x^2 - 480x + 888$$

$$=> \begin{vmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 3 & x & 0 & 4 \\ 6 & 9 & 0 & 0 & 5 & 7 \\ x & 2 & 0 & x & x & 3 \\ 0 & 6 & 6 & 8 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 6 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -x(-59x^2+528x-828)+90x^2-480x+888 = 59x^3-528x^2+828x+90x^2-480x+888 = 59x^3-438x^2-348x+888$$

Ответ: $59x^3-438x^2-348x+888$

№ 5 Найти коэффициент при x^5 в:

$$\begin{vmatrix} 5 & x & 6 & 1 & 6 & 10 & 1 \\ x & 3 & 10 & 2 & 6 & 5 & x \\ 6 & 10 & 9 & 8 & 8 & x & 4 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & x & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 8 & x & 8 & 6 & 7 \\ 10 & 5 & x & 4 & 6 & 8 & 2 \\ 1 & x & 4 & 6 & 7 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & x & 6 & 1 & 6 & 10 & 1 \\ x & 3 & 10 & 2 & 6 & 5 & x \\ 6 & 10 & 9 & 8 & 8 & x & 4 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & x & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 8 & x & 8 & 6 & 7 \\ 10 & 5 & x & 4 & 6 & 8 & 2 \\ 1 & x & 4 & 6 & 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & -5 & -1 & 8 & -3 \\ x & 3 & 10 & 2 & 6 & 5 & x \\ 6 & 10 & 9 & 8 & 8 & x & 4 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & x & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 8 & x & 8 & 6 & 7 \\ 10 & 5 & x & 4 & 6 & 8 & 2 \\ 1 & x & 4 & 6 & 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & -5 & -1 & 8 & -3 \\ 0 & 3 & 10 & 2 & 6 & 5 & x \\ 2 & 10 & 9 & 8 & 8 & x & 4 \\ -5 & 2 & 8 & 3 & x & 4 & 6 \\ -1 & 6 & 8 & x & 8 & 6 & 7 \\ 8 & 5 & x & 4 & 6 & 8 & 2 \\ -3 & x & 4 & 6 & 7 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Рассмотрим все такие перестановки σ, для которых в произведении $a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot ... \cdot a_{7\sigma(7)}$, где a_{ij} - элемент данной матрицы, встречается x^5. Заметим, что все эти произведения будут входить в данный определитель (по определению, определитель матрицы А $= (a_{ij})$ порядка n - $\Sigma_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot ... \cdot a_{n\sigma(n)}$)

Всего в полученной матрице 6 переменных x, все в степени 1 и с коэффициентом 1. Чтобы в $a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot ... \cdot a_{7\sigma(7)}$ присутствовало x^5, в него должно входить ровно 5 переменных x, те ровно 5 элементов из набора $a_{27}, a_{36}, a_{45}, a_{54}, a_{63}, a_{72}$. Причем перестановок σ, для которых такое будет возможно, ровно $C_6^5 = \frac{6!}{5!(6-5)!} = 6$. Рассмотрим их:

1) Пусть в произведении для этой перестановки участвуют $a_{36}, a_{45}, a_{54}, a_{63}, a_{72}$ => в нем не может участвовать a_{27} => участвует a_{17} => $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & -5 & -1 & 8 & -3 \\ 0 & 3 & 10 & 2 & 6 & 5 & x \\ 2 & 10 & 9 & 8 & 8 & x & 4 \\ -5 & 2 & 8 & 3 & x & 4 & 6 \\ -1 & 6 & 8 & x & 8 & 6 & 7 \\ 8 & 5 & x & 4 & 6 & 8 & 2 \\ -3 & x & 4 & 6 & 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot ... \cdot a_{7\sigma(7)} \text{ для данной перестановки} = 0 \text{ тк } a_{21} = 0$$

2) Пусть в произведении для этой перестановки участвуют $a_{27}, a_{45}, a_{54}, a_{63}, a_{72}$ => в нем не может участвовать a_{36} => участвует a_{16} => $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & -5 & -1 & 8 & -3 \\ 0 & 3 & 10 & 2 & 6 & 5 & x \\ 2 & 10 & 9 & 8 & 8 & x & 4 \\ -5 & 2 & 8 & 3 & x & 4 & 6 \\ -1 & 6 & 8 & x & 8 & 6 & 7 \\ 8 & 5 & x & 4 & 6 & 8 & 2 \\ -3 & x & 4 & 6 & 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{7\sigma(7)} \text{ для данной перестановки} = 2 \cdot 8 \cdot x^5 = 16x^5$$

Число инверсий в этой перестановке - $5 + 5 + 0 + 3 + 2 + 1 + 0 = 16 => \text{sgn}(\sigma) = 1$

3) Пусть в произведении для этой перестановки участвуют $a_{27}, a_{36}, a_{54}, a_{63}, a_{72} =>$ в нем не может участвовать $a_{45} =>$ участвует $a_{15} => \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & -5 & -1 & 8 & -3 \\ 0 & 3 & 10 & 2 & 6 & 5 & x \\ 2 & 10 & 9 & 8 & 8 & x & 4 \\ -5 & 2 & 8 & 3 & x & 4 & 6 \\ -1 & 6 & 8 & x & 8 & 6 & 7 \\ 8 & 5 & x & 4 & 6 & 8 & 2 \\ -3 & x & 4 & 6 & 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{7\sigma(7)} \text{ для данной перестановки} = (-1) \cdot (-5) \cdot x^5 = 5x^5$$

Число инверсий в этой перестановке - $4 + 5 + 4 + 0 + 2 + 1 + 0 = 16 => \text{sgn}(\sigma) = 1$

4) Пусть в произведении для этой перестановки участвуют $a_{27}, a_{36}, a_{45}, a_{63}, a_{72} =>$ в нем не может участвовать $a_{54} =>$ участвует $a_{14} => \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & -5 & -1 & 8 & -3 \\ 0 & 3 & 10 & 2 & 6 & 5 & x \\ 2 & 10 & 9 & 8 & 8 & x & 4 \\ -5 & 2 & 8 & 3 & x & 4 & 6 \\ -1 & 6 & 8 & x & 8 & 6 & 7 \\ 8 & 5 & x & 4 & 6 & 8 & 2 \\ -3 & x & 4 & 6 & 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{7\sigma(7)} \text{ для данной перестановки} = (-1) \cdot (-5) \cdot x^5 = 5x^5$$

Число инверсий в этой перестановке - $3 + 5 + 4 + 3 + 0 + 1 + 0 = 16 => \text{sgn}(\sigma) = 1$

5) Пусть в произведении для этой перестановки участвуют $a_{27}, a_{36}, a_{45}, a_{54}, a_{72} =>$ в нем не может участвовать $a_{63} =>$ участвует $a_{13} => \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & -5 & -1 & 8 & -3 \\ 0 & 3 & 10 & 2 & 6 & 5 & x \\ 2 & 10 & 9 & 8 & 8 & x & 4 \\ -5 & 2 & 8 & 3 & x & 4 & 6 \\ -1 & 6 & 8 & x & 8 & 6 & 7 \\ 8 & 5 & x & 4 & 6 & 8 & 2 \\ -3 & x & 4 & 6 & 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{7\sigma(7)} \text{ для данной перестановки} = 2 \cdot 8 \cdot x^5 = 16x^5$$

Число инверсий в этой перестановке - $2 + 5 + 4 + 3 + 2 + 0 + 0 = 16 => \text{sgn}(\sigma) = 1$

6) Пусть в произведении для этой перестановки участвуют $a_{27}, a_{36}, a_{45}, a_{54}, a_{63} =>$ в нем не может участвовать $a_{72} =>$ участвует $a_{12} => \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & -5 & -1 & 8 & -3 \\ 0 & 3 & 10 & 2 & 6 & 5 & x \\ 2 & 10 & 9 & 8 & 8 & x & 4 \\ -5 & 2 & 8 & 3 & x & 4 & 6 \\ -1 & 6 & 8 & x & 8 & 6 & 7 \\ 8 & 5 & x & 4 & 6 & 8 & 2 \\ -3 & x & 4 & 6 & 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{7\sigma(7)} \text{ для данной перестановки} = 0$$

=> Сумма всех произведений, в которых есть $x^5 = 16x^5 + 5x^5 + 5x^5 + 16x^5 = 42x^5$ => коэффициент при $x^5 = 42$

Ответ: 42