Определение (Матрицы)

1. Сумма двух матриц $A+B=(a_{ij}+b_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \dots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$

Умножение на скаляр: $\lambda A=(\lambda a_{ij})=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$

2. Транспонированная матрица:

$$A=(a_{ij}) \quad A \in Mat_{m\times n} \quad A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat_{n\times m}$$

3. Произведение двух матриц. ▷ Частный случай – строка × столбец

$$(x_1,\dots,x_n)\times\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n$$

▷ Матрица × столбец: $A\in Mat_{m\times n}$, $B\in Mat_{n\times p}$. $AB=C\in Mat_{m\times p}$

<u>условие согласованности</u>

$c_{ij}=A_{(i)}\cdot B^{(j)}$

4. Диагональная матрица.

Матрица $A\in M_n$ – диагональная, если все её эл-ты вне главной диагонали равны нулю ($a_{ij}=0$ при $i\neq j$)

Лемма: $A\cdot B \ \forall B\in Mat_{n\times m}=\begin{pmatrix} a_1 B_{(1)} \\ a_2 B_{(2)} \\ \dots \\ a_n B_{(n)} \end{pmatrix} \rightarrow \in Mat_{n\times m}$

$\cancel{A}\cdot CA \ \forall C\in Mat_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_1C^{(1)} & a_2C^{(2)} & a_3C^{(3)} & \dots & a_nC^{(n)} \end{pmatrix} \rightarrow \in Mat_{m\times n}$

5. Единичная матрица. Матрица $E=E_n=diag(1,1,\dots,1)$ – единичная матрица порядка n.

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства $A=AE=EA \ \forall A\in M_n$; $AE=A \ \forall A\in Mat_{p\times n}$; $EA=A \ \forall A\in Mat_{n\times p}$

6. Следом матрицы $A\in M_n$ наз-ся число $tr(A)=a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}$ – сумма эл-тов на его гл. диаг.

Св-ва: $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$; $tr(\lambda A)=\lambda\, tr(A)$; $tr(A^T)=tr(A)$

7. След произведения двух матриц: $tr(AB)=tr(BA) \ \forall A\in Mat_{m\times n}$ $\forall B\in Mat_{n\times m}$

Коллоквиум по линалу. #1 Док-ва

Матрицы 1.1 Дистрибутивность (левая) произведение матриц по отн. к сложению: $\underbrace{A(B+C)}_{x} = \underbrace{AB+AC}_{y}$, где $A \in Mat_{m\times n}$, $B, C \in Mat_{n\times p}$ => $X, Y \in Mat_{n\times p}$

$$x_{ij} = A_{(i)} \cdot (B+C)^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} + a_{ik} \cdot b_{kj} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot c_{kj} = A_{(i)} \cdot B^{(j)} + A_{(i)} \cdot C^{(j)} = y_{ij}$$

правая дистрибутивность: $\underbrace{(B+C)A}_{x} = \underbrace{BA+CA}_{y}$. $A \in Mat_{n\times p}$, $B, C \in Mat_{m\times n}$

$$x_{ij} = (B+C)_{(i)} \cdot A^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} (b_{ik} + c_{ik}) a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (b_{ik} \cdot a_{kj} + c_{ik} \cdot a_{kj}) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (b_{ik} \cdot a_{kj}) + \sum_{k=1}^{n} (c_{ik} \cdot a_{kj}) = B_{(i)} \cdot A^{(j)} + C_{(i)} \cdot A^{(j)} = y_{ij}$$

1.2 Ассоциативность произведение матриц: $\underbrace{A \overbrace{(B \cdot C)}^{u}}_{X \in Mat_{p\times q}} = \underbrace{\overbrace{(A \cdot B)}^{v} \cdot C}_{Y \in Mat_{p\times q}}$ $m\times n$ $n\times p$ $p\times q$ $u \in Mat_{n\times q}$, $v \in Mat_{m\times p}$

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot u_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{l=1}^{p} b_{kl} \cdot c_{lj}\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kl} \cdot c_{lj} = \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kl} \cdot c_{lj} =$$
$$\sum_{l=1}^{p} c_{lj} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kl} = \sum_{l=1}^{p} c_{lj} \cdot v_{il} = \sum_{l=1}^{p} v_{il} \cdot c_{lj} = y_{ij}$$

1.3 Некоммутативность произведения матриц. Можно привести пример:
пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ => $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.4 Транспонирование произведение двух матриц: $\underbrace{(AB)^T}_{x} = \underbrace{B^T \cdot A^T}_{y}$;

$A \in Mat_{m\times n}$
$B \in Mat_{n\times p}$
$AB \in Mat_{m\times p}$
$x \in Mat_{p\times m}$;
$B^T \in Mat_{p\times n}$
$A^T \in Mat_{n\times m}$
$y \in Mat_{p\times m}$

$$x_{ij} = \underbrace{A_{(j)} \cdot B^{(i)}}_{(AB)_{ji} =} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \cdot b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} \cdot a_{jk} = B^T_{(i)} \cdot (A^T)^{(j)} = y_{ij}$$

1.5. Умножение на диагональную матрицу слева и справа
Пусть $A = diag(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $A \in Mat_{n\times n}$.

↳ Пусть $B \in Mat_{n\times p}$, => $\underset{n\times p}{AB} = \begin{pmatrix} a_1 B_{(1)} \\ a_2 B_{(2)} \\ a_3 B_{(3)} \\ \ldots \end{pmatrix}$, $(AB)_{ij} = (0 \ldots a_i\, 0 \ldots 0) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \ldots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_i \cdot b_{ij}$

↳ Пусть $B \in Mat_{p\times n}$ => $BA = (a_1 B^{(1)}\ a_2 B^{(2)} \ldots a_n B^{(n)})$ $B_{(i)}$ - i-тая строка $B_i = (b_{i1}, b_{i2}, \ldots b_{ip})$

$$(BA)_{ij} = (b_{i1}\, b_{i2} \ldots b_{in}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_j \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b_{ij} a_j = a_j b_{ij} \quad . \quad B^{(j)} = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \ldots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

1.6 След произведение двух матриц. $\underset{m\times n\ n\times m}{tr(AB)} = \underset{n\times m\ m\times n}{tr(BA)}$. Пусть $AB = X \in Mat_{m}$, $BA = Y \in Mat_{n}$

$$tr(X) = \sum_{i=1}^{m} x_{ii} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} b_{ji}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (b_{ji} \cdot a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} y_{jj} = tr(Y)$$

СЛУ. Определения.

(8) Совместная СЛУ - та, у которой $\exists$ хотя бы 1 реш. е. несовместн-та, у которой решений нет.

(9) Эквивалентные системы - такие ~~дв~~ системы от одних и тех же неизвестных, которые имеют одинаковые мн-ва решений

(10) Расширенная матрица СЛУ - матрица коэффициентов при переменных СЛУ, к которой справа приписали столбец свободных коэф-тов.

Иными словами, для СЛУ $\begin{cases} a_{11}x_1 \; a_{12}x_2 \, .. \, a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 \; a_{22}x_2 \, .. \, a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 \; a_{m2}x_2 \, .. \, a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ расширенной матрицей будет $(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

(11) Элементарные преобразован расш матриц СЛУ

$Э_1(i, j, \lambda)$ - к i-~~ой~~й строке прибавить j-ю, умноженную на λ. $a_{ik} \mapsto a_{ik} + \lambda a_{jk}$ $\forall k = 1, .., n$; $b_i \mapsto b_i + b_j \cdot \lambda$

$Э_2(i, j)$ - переставить строки i и j местами

$Э_3(i, \lambda)$ - умножить i-ю строку на λ (покомпонентно), $\lambda \neq 0$!

над расш матр.

(12) Ступенчатый вид матрицы ▷ Строка $(a_1 \ldots a_n)$ - нулевая, если $a_1 = a_2 = .. = a_n = 0$. ▷ ведущий эл-т строки - первый ненулевой ее эл-т. ▷ Матрица $M \in Mat_{m \times n}$ имеет ступенч. вид, если
① номера ведущих эл-тов ее ненулевых строк строго ↗.
② Нулевые строки стоят в конце

(13) Улучш. ст. вид - матрица им. обычный ступенчатый вид
- все ведущие эл-ты ненулевых строк = 1
- в одном столбце с ведущим эл-том стоят только нули

(14) (Т) О виде, к которому можно привести матрицу с пом. элемент преобр. строк: 1) Всякую матрицу с пом. элементарных преобразований можно привести к ~~улучшенному~~ ступенч. виду
2) Всякую ступенч. матрицу - к УСВ.
=> всякую матрицу можно с помощью элемент. преобр. привести к УСВ.

(15) Общее решение совместной системы - выражение главных неизв. через свободные

(16) Кол-во решений системы с действ. коэф-тами: → 0 (несовместная)
→ 1
→ беск-много

(17) СЛУ наз-ся однородной, если все ее правые части = 0. Очевидно: всякая однородная СЛУ имеет нулевое решение => или 0 решений, или бесконечно много

(18) Св-во ОСЛУ, у которой мн-во число неизв. > числа ур-й: Всякая ОСЛУ, у которой число ур-й больше числа неизвестных имеет бесконечно много (ненулевых) решений.

(19) Связь между мн-вом решений совместной СЛУ и соотв. ей ОСЛУ:

Если $Ax=b$ - совместная СЛУ, x_0 - частное реш-е $Ax=b$, $S\subset\mathbb{R}^n$ - мн-во реш-й $Ax=0$, $L\subset\mathbb{R}^n$ - мн-во реш-й $Ax=b$. Тогда: $\underbrace{x_0+S}_{=\{x_0+v \mid v\in S\}}=L$

Иными словами, мн-во решений совместной СЛУ - это мн-во соотв. ей ОСЛУ (если к каждому эл-ту прибавить частное реш.) частное решение совместной СЛУ.

(20) Обратная матрица. $B\in M_n$ - обратная к A, если $AB=BA=E$.

Доказательства

2.1 Эквивалентность СЛУ, получаемых друг из друга путем эл. преобр.:

Лемма: эл. преобр. СЛУ не меняют мн-во решений

Пусть мы получили СЛУ ★★ из СЛУ ★ с пом. элем-преобр.

1) всякое решение СЛУ ★ яв-ся реш. СЛУ ★★ - потому что каждое тождество обращает все ур-е в тождества
2) ★ получаем из ★★ с пом. элементарных преобр (А тогда + тождество и т.д.)

★ → ★★	★★ → ★
$Э_1(i,j,\lambda)$	$Э_1(i,j,-\lambda)$
$Э_2(i,j)$	$Э_2(i,j)$
$Э_3(i,\lambda)$	$Э_3(i,\frac{1}{\lambda})$ (так $\lambda\neq0$)

Тогда 1) всякое реш. ★ яв-ся реш. ★★
2) всякое реш. ★★ яв-ся реш. ★
=> мн-ва реш. совпадают.

2.2 Т О приведении матрицы к ступенчатому виду
1) всякую матрицу с пом. эл. преобр. можно привести к СВ
2) всякую ступенчатую матрицу - к УСВ.

$\Longrightarrow$ всякую матрицу с пом. эл. преобр. строк можно привести к УСВ.

Алгоритм приведения к СВ:

① Ищем первый ненулевой столбец (пусть это столбец j) ② Перестановкой строк добиваемся того, что $a_{1j}\neq0$ ③ Затем зануляем эл-ты в j-м столбце (начиная со второй строки), нп. $Э_1(2,1,-\frac{a_{2j}}{a_{1j}})\ \dots\ Э_1(m,1,-\frac{a_{mj}}{a_{1j}})$

Алгоритм для приведения матрицы к УСВ:

① Пусть ведущие эл-ты - $a_{1j_1}, a_{2j_2}, a_{3j_3}, \dots, a_{rj_r}$. Выполнить $Э_3(1,\frac{1}{a_{1j_1}})\ \dots\ Э_3(r,\frac{1}{a_{rj_r}})$ (чтобы они стали $=1$) Затем - выполняем $Э_1(r-1,r,-a_{r-1,j_r})$, .. $Э_1(1,r,-a_{1j_r})$ - и все эл-ты над ведущими станут равны 0.

=> Матрица им. УСВ.

2.3 Реализация элем-преобр. с пом. умн. на подх. матрицу.

Всякое элементарное преобразование строк - умножение слева на подх. элем-матрицу.

$Э_1(i,j,\lambda): A \mapsto U_1(i,j,\lambda)A$.

$$U_1(i,j,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$ — на диаг. стоят единицы, на ij месте — λ.

Как проверить: $U_1(i,j,\lambda) = E + \lambda \underbrace{E_{ij}}_{\text{матр. единица}}$

$U_1(i j \lambda)A = EA + \lambda \underbrace{E_{ij}A} = A + X$, где X — матрица, полная нулей, кроме i строки, на которой окажется j-я строка матр. A, умн. на λ.

• $Э_2(i,j): A \mapsto U_2(i,j)A$

Как проверить:

$$U_2(i,j) = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ — на диагонали (кроме ii и jj мест) единицы, везде нолики. На месте ij и месте ji стоят единички.

$U_2(i j)A = (E - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji})A =$

$= A - X_1 - X_2 + X_3 + X_4$

(как мы знаем, умножение на матр. ед. E_{ij} (слева) — матрица, полная нулей, кроме i-й строки, где стоит j-я строка матр. A. Ну тогда $A - X_1 - X_2 + X_3 + X_4 =$

$$\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(m)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

матрица, в кот. строки i и j поменяли местами.

• $Э_3(i,\lambda): A \mapsto U_3(i,\lambda)$

Как проверить:

$$U_3(i,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$ Вне диагонали нули, на диаг. — единицы, на ii месте λ.

$U_3(i,\lambda)A = EA + (\lambda-1)E_{ii}A =$

$$A + \lambda E_{ii}A - E_{ii}A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(m)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda A_{(i)} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ \lambda A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(m)} \end{pmatrix}$$

Элементарные преобразования столбцов — умножение на соотв. матр. справа.

2.4 Метод Гаусса решения СЛУ. Пусть есть расш. матрица СЛУ — $(A|b)$.
(прямой ход метода Гаусса)

▷ Выполняем элементарные преобр. строк, приводим A к ступенч. виду.

↳ Если родилась строка вида $0 \dots 0 | b_i$, $b_i \neq 0$ — система несовместна

↳ Иначе приводим A к УСВ (обр. ход метода Гаусса). Неизв. x_{j1}, x_{j2}, x_{jr} — главные, остальные — свободные (j_i — столбцы с ведущими эл-тами)

↳ Если все неизв. — главные $\mapsto$ единств. реш.

↳ Если есть хотя бы 1 своб. неизвестное $\mapsto$ беск. много решений

Перенеся в каждом ур. свободные неизв. в правую часть получим общее решен. Подставив какое-то число — частное решение.

2.5 Связь между мн-вом решений СЛУ и мн-вом решений соотв. ей ОСЛУ. Если мн-во реш. ОСЛУ $Ax=0$ $= S$

СЛУ $Ax=b$ $= L$. Частное решение $Ax=b$ – x_0,

то $\;=\; + x_0 = \{x_0+v \mid v\in S\}$.

1. $\forall u \in L$ (u-реш-е $Ax=b$), $x_0+v=u \Leftrightarrow u-x_0=v$

$Av = A(u-x_0) = Au - Ax_0 = b-b=0 \Rightarrow v\in S \Rightarrow L \subseteq x_0+S.$

2. $v \in S$, $v=u-x_0 \Leftrightarrow u=x_0+v$

$Au = \underbrace{Av}_{=0} + \underbrace{Ax_0}_{=b} = b+0=b \Rightarrow u\in L \Rightarrow x_0+S \subseteq L$

$$\begin{array}{c} L\subseteq x_0+S \\ x_0+S\subseteq L \\ \hline \Downarrow \\ x_0+S=L \end{array}$$

2.6 Общий метод решения матричных ур-й

тип 1: $AX=B$. X-неизв. матрица

$m\times n \;\; n\times p \;\; m\times p$

$$AX=B \Leftrightarrow \begin{cases} AX^{(1)}=B^{(1)} \\ AX^{(2)}=B^{(1)} \\ \dots \\ AX^{(p)}=B^{(p)} \end{cases} \xrightarrow{\text{приводим}} \text{A к УСВ и получ } (A'|B'') \quad \begin{cases} A'X^{(1)}=B'^{(1)} \\ A'X^{(2)}=B'^{(2)} \\ \dots \\ A'X^{(p)}=B'^{(p)} \end{cases}$$

– выписав ответ (общ. реш.)

тип 2. $XA=B \Leftrightarrow (XA)^T=B^T \Leftrightarrow A^TX^T=B^T$. При $X^T=Y$ решить (как описано выше) $A^TY=B^T$, потом транспонировать решение и получим X.

2.7. Вычисление обратной матрицы при пом. элем. преобр.

✓ Если $\exists A^{-1}$ – она единственная. Если $B=A^{-1}$ и $B'=A^{-1}$, то

$B = B\underbrace{(AB')}_{=E} = \underbrace{(BA)}_{=E}B' = B'.$

✓ Если $AB=E$ для неком. $B\in M_n$, то $B=A^{-1}$.

(Это доказывается с пом. определителя)

$AB=E \Rightarrow \det(AB)=1 \Leftrightarrow \det A\cdot\det(B)=1 \Rightarrow \det A\neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}.$

$BA = EBA = A^{-1}\underbrace{AB}_{E}A = A^{-1}A=E.$

$\Longrightarrow$ Можно найти A^{-1} как реш-е матричного ур-е $AX=E$.

Если система несовместна – A^{-1} не $\exists$.

Перестановки. Определения

(21) Перестановки множества $\{1, 2, .., n\}$.

Перестановкой на множестве $\{1, 2, .., n\}$ называем (подстановкой) всякое биективное отображение множества $\{1, 2, .., n\}$ в себя. $\sigma: \{1, 2, .., n\} \to \{1, 2, .., n\}$.

S_n – мн-во всех перестановок на $\{1, 2, .., n\}$. Запись: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & .. & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & .. & \sigma(n) \end{pmatrix}$

(22) Инверсия в перестановке: Пара $\{i, j\}$ (неупорядоченная) образует инверсию в σ, если $i - j$ и $\sigma(i) - \sigma(j)$ им. разный знак.

Знак перест. $\sigma = sgn(\sigma) = (-1)^{\#\text{инверсий в } \sigma}$. Если $sgn(\sigma) = 1$, σ - четная. Иначе – нечетная.

(23) Произведение двух перестановок. Произведением (композицией) двух перестановок $\sigma, \rho \in S_n$ явл-ся $\sigma\rho$ такая, что $(\sigma\rho)(x) = \sigma(\rho(x))$.

(24) Тождественная перестановка и ее свойства:

$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & .. & n \\ 1 & 2 & .. & n \end{pmatrix}$ – тождественная. Св-ва: $\forall \sigma \in S_n \ id \cdot \sigma = \sigma \cdot id = \sigma$.
$sgn(id) = 1$.

Обратная перестановка и ее свойства:

$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & .. & \sigma(n) \\ 1 & 2 & .. & n \end{pmatrix}$ – обратная к σ. Свойства: $\sigma \cdot \sigma^{-1} = id$
$\sigma^{-1} \cdot \sigma = id$.

(25) (Т) О знаке произведения двух перестановок. Т. $\sigma, \rho \in S_n \Rightarrow sgn(\sigma\rho) =$
$= sgn\sigma \cdot sgn\rho$

(26) Транспозиция. $i, j \in \{1, 2, .., n\}$. $i \neq j$. $\tau_{ij} \in S_n$ – транспозиция, если
$\tau_{ij}(i) = j$; $\tau_{ij}(k) = k \ \forall k \neq i, k \neq j$
$\tau_{ij}(j) = i$

Замечание: τ - транспозиция. $\tau^2 = id$
$\tau^{-1} = \tau$

Лемма: $sgn(\tau) = -1$.

Доказательства

3.1. – Ассоциативность произведения перестановок. $\sigma, \rho, \tau \in S_n$.
$\sigma(\tau\rho) = (\sigma\tau)\rho$. $\forall i \in \{1, .., n\}$: $\sigma(\tau\rho)(i) = \sigma(\tau(\rho(i)))$
$(\sigma\tau)\rho(i) = \sigma(\tau(\rho(i)))$. $\Rightarrow$ они равны.

3.2. Некоммутативность произведения перестановок: Ну, можно привести пример таких σ, ρ, что $\sigma\rho \neq \rho\sigma$:

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\sigma\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\rho\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3,3. Теорема о знаке произведения двух перестановок: $sgn(\sigma\rho) = sgn\sigma \cdot sgn\rho$.
$\sigma, \rho \in S_n$

Пусть для каждой пары i,j $i<j$

$\alpha(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i,j\} \text{ образует инверсию в } \rho \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$\beta(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{\rho(i), \rho(j)\} \text{ обр. инверсию в } \sigma \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

$\gamma(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i,j\} \text{ обр. инверсию в } \sigma\rho \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & \dots & n \\ \rho & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ & \rho(1) & \rho(2) & \dots & \rho(n) \\ \sigma & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ & \sigma\rho(1) & \sigma\rho(2) & \dots & \sigma\rho(n) \end{array}$$

Число инверсий в ρ равно $\sum_{1\le i<j\le n} \alpha_{ij}$

Число инверсий в $\boxed{\sigma \text{ равно } \sum_{1\le i<j\le n} \beta_{ij}}$; Число инверсий в $\sigma\rho$ $\sum_{1\le i<j\le n} \gamma_{ij}$

! так как когда i,j пробегает все неупорядоченные пары в $\{1,2,\dots n\}$, $\rho(i), \rho(j)$ про тоже их пробегает.

$\alpha(i,j)$	$\beta(i,j)$	γ_{ij}
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

вроде так

Как $\gamma(i,j)$ завис от $\alpha(i,j)$ и $\beta(ij)$: $\longrightarrow$

$\Rightarrow \gamma_{ij} \equiv \alpha_{ij} + \beta_{ij} \pmod 2$

$sgn(\sigma\rho) = (-1)^{\sum \gamma_{ij}} = (-1)^{\sum \beta(ij) + \sum \alpha_{ij}} = (-1)^{\sum \beta_{ij}} \cdot (-1)^{\sum \alpha_{ij}} = sgn\sigma \cdot sgn\rho$

3,4 Знак обратной перестановки. $\sigma \in S_n \Rightarrow sgn\sigma = sgn(\sigma^{-1})$.

Док-во: $\sigma \cdot \sigma^{-1} = id$. $sgn(\sigma\sigma^{-1}) = sgn(id) \Rightarrow sgn\,\sigma^{-1} = sgn\sigma$.

3,5 Знак транспозиции. Лемма: $\tau \in S_n$ - транспозиц. $sgn(\tau) = -1$. Док-во: $\tau = \tau_{ij}$, $i<j$ (общность такое не ограничивает).

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Считаем инверсии: 0 штук для пар $\{k,s\}$, $k<i$, $s>k$, $s\le n$

0 штук для пар $\{k,s\}$, $j\le k\le n$, $s>k$, $s\le n$.

Эл-т с i-м индексом образует $j-i$ инверсии. далее все эл-ты от $i+1$ до $j-1$ включительно – 1 инверсию. Итого: $(j-i) + (j-1-i-1+1) =$
$= j-i+j-i-1 = 2(j-i)-1$ инверсию. ← это нечетное число

$\Rightarrow sgn\,\tau = -1$

Определители. Определения.

(27) Определителем матрицы $A \in M_n$ — число $\det A = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \, a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \dots a_{n\sigma_n}$

(28) Определитель второго порядка: $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Определитель третьего порядка:

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}$$

(29) Поведение определителя при разложении строки (столбца) в сумму двух. Если $A_{(i)} = A^1_{(i)} + A^2_{(i)}$, то

$$\det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A^1_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A^2_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}.$$

Если $A^{(j)} = A_1^{(j)} + A_2^{(j)}$, то $\det A = \det(A^{(1)} \dots A_1^{(j)} \dots A^{(n)}) + \det(A^{(1)} \dots A_2^{(j)} \dots A^{(n)})$

(30) При перестановке 2х строк/столбцов у опр. меняется знак

(31) При прибавлении к ~~другой~~ строке/столбцу строки/столбца, умноженной на скаляр, определитель не изменится

(32) Верхнетреугольная матрица — такая матрица, у которой $a_{ij}=0$ при $i>j$

Нижнетреугольная матрица — такая, у которой $a_{ij}=0$ при $i<j$

(33) Определитель верхне(нижне)треугольной матрицы = произведению элементов на ее главной диагонали

(34) Определитель диагональной матрицы = произв. элементов на ее главной диагонали (т.к. она верхнетреугольная)

~~Определит~~ $\det E = 1$

(35) Матрица с углом нулей: $A = \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline 0 & R \end{array}\right)$ или $A = \left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline Q & R \end{array}\right)$, $P \in M_k$, $R \in M_{n-k}$

$\det A = \det P \det R$.

(36) Определитель произведения 2х матриц: $A, B \in M_n \Rightarrow \det(AB) = \det A \det B$

(37) Дополнительный минор к эл-ту a_{ij} квадратной матрицы $A \in M_n$ — определитель ~~из~~ матрицы $\overline{M}_{ij}$, полученной из A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца

(38) Алгебраическим дополнением к a_{ij} наз-ся число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \overline{M}_{ij}$

(39) Разложение определителя по строке/столбцу. При любом фиксированном i $\det A = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{ij} A_{in} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ ← по строке

Для любого фиксированного $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\det A = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

(40) Лемма о фальшивом разложении определителя | сумма произв. эл-тов строки/столбца на чужие алг. дополн. = 0

При любых $i,k \in \{1,2,..,n\}$ $i \neq k$, $\Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0$

При любых $j,k \in \{1,2,..,n\}$, $j \neq k \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = 0$

(41) Невырожденная матрица - матрица, у которой $\det \neq 0$. Иначе - вырожденная

(42) Присоединённая к A наз-ся матрица $\hat{A} = (A_{ij})^T$ - транспонированная матрица, составленная из алгебр. дополнений

(43) Критерий обратимости кв. матриц: если $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ она обратима (им. обратную)

(44) Явная формула для обр. матрицы: $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\hat{A}$

(45) $A, B \in M_n$, AB - обратима $\Leftrightarrow$ A, B обратимы. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(46) Формулы Крамера. Пусть есть СЛУ $Ax=b$ (*), $A \in M_n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

$\forall i \in \{1,2,..,n\}$ $A_i = (A^{(1)}, A^{(2)} .. A^{(i-1)}\ b\ A^{(i+1)} .. A^{(n)})$

(!) Если $\det A \neq 0$, то (*) им. единств. реш. Формула: $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$

Доказательства

4.1 Определитель транспонированной матрицы: $\det A^T = \det A$.

Пусть $B = A^T$. $\det B = \cancel{\det} \sum\limits_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\, b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} .. b_{n\sigma(n)} =$

$= \sum\limits_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\, a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} .. a_{\sigma(n)n} = \sum\limits_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)^{-1}} a_{2\sigma(2)^{-1}} .. a_{n\sigma(n)^{-1}} =$ при $\sigma^{-1} = \rho \in S_n$

$\sum\limits_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}\rho\, a_{1\rho(1)} .. a_{n\rho(n)} = \det A$

4.2 Поведение определителя при умножении ~~на~~ строки (столбца) на скаляр.

Если все эл-ты одной строки/столбца умножаются на λ, то и определитель умножается на λ. Док-во: Тк $\det A = \det A^T$, можно доказать только для строк. $A_{(i)} \to \lambda A_{(i)} \Leftrightarrow a_{ij} \mapsto \lambda a_{ij}$ $\forall j \in \{1,2,..,n\}$. В det каждое слагаемое умножается на λ хотя бы 1 раз, так как в каждом слагаемом присутствует эл-т $\exists$ i-й строки. Более того, оно умножается на λ не более 1го раза, тк в одном слагаемом не могут содержаться 2 эл-та из одной строки (по опр. определителя)

4.3 Поведение определителя при разложении строки/столбца в Σ двух

Докажем только для строк, так как $\det A = \det A^T$.

док, что

$$\det A = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A^1_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A^2_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}, \text{ если } A_{(i)} = A^1_{(i)} + A^2_{(i)}$$

Пусть $A^1_{(i)} = (a'_{i1} .. a'_{in})$; $A^2_{(i)} = (a''_{i1} .. a''_{in})$. Тогда $\det A = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\, a_{1\sigma 1} \cdot .. \cdot a_{i\sigma(i)} \cdot .. \cdot a_{n\sigma(n)} =$

$= \sum\limits_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\, a_{1\sigma(1)} \cdot .. (a'_{i\sigma(i)} + a''_{i\sigma(i)}) \cdot .. \cdot a_{n\sigma(n)} = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\, a_{1\sigma(1)} \cdot .. \cdot a'_{i\sigma(i)} \cdot .. \cdot a_{n\sigma(n)} + \sum\limits_{\sigma \in S(n)} \operatorname{sgn}\sigma\, a_{1\sigma(1)} \cdot .. \cdot a''_{i\sigma(i)} \cdot a_{n\sigma(n)} = \det A_1 + \det A_2$

4.4 Определитель матрицы со строкой (столбцом) нулей. Если в определителе есть две одинаковых строки (столбца) $\det A = 0$. Докажем только для строк (тк $\det A = \det A^T$). 1) При перестановке 2х одинаковых строк $\det A$ не изменится (по опр определителя) 2) При перестановке 2х строк $\det A$ меняет знак $\Rightarrow$

$\det A = -\det A \Leftrightarrow \det A = 0$.

4.5 Поведение определителя при прибавлении к строке (столбцу) другой, умноженной на скаляр. Докажем только для строк (тк $\det A = \det A^T$).

$$A \to A' = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} + A_{(j)}\cdot\lambda \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}. \qquad |A'| = \det\begin{pmatrix} \cdots \\ A_{(i)} \\ \cdots \\ A_{(j)} \\ \cdots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \lambda A_{(j)} \\ \cdots \\ A_{(j)} \\ \cdots \end{pmatrix} = \det A + \lambda \det\begin{pmatrix} A_{(j)} \\ \cdots \\ A_{(j)} \\ \cdots \end{pmatrix} = \det A + \lambda\cdot 0 = \det A.$$

4.6 Поведение определителя при перестановке 2х строк (столбцов). Докажем только для строк, тк $\det A = \det A^T$. (При перемене строк местами $\det \to -\det$.)

Пусть A' - матрица A, в которой строки i, j поменены местами. Тогда

$A' = U_{2(i,j)} A$, где U_2 - матрица 2-го элем. преобр.

$\Rightarrow \det A' = \det U_{2(i,j)} \cdot \det A$. $\det U_{2(i,j)} =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

В этой матрице есть единственная комбинация из n эл-тов из разных строк и столбцов, неравная нулю.

Тогда, $\det U_{2(i,j)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma_1} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} =$

$= 0 + 0 + \ldots + \operatorname{sgn}(\rho) \cdot a_{1\rho(1)} \cdot a_{2\rho(2)} \cdots a_{n\rho(n)} + 0 + \ldots 0 =$

$= \operatorname{sgn}\rho \cdot a_{1\rho(1)} \cdot a_{2\rho(2)} \cdots a_{n\rho(n)}$, где ρ - транспозиция $= \tau_{ij}$. $a_{1\rho(1)} \cdots a_{n\rho(n)} = 1$.

5. $\operatorname{sgn} \tau_{ij} = -1 \Rightarrow \operatorname{sgn}\rho \cdot a_{1\rho(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\rho(n)} = -1 \Rightarrow \det A = \det A \cdot (-1) = -\det A$.

4.7 Определитель верхне (нижне) треугольной матрицы. Докажем только для строк.

$$\det\left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline 0 & R \end{array}\right) = 0; \quad \det\left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline Q & R \end{array}\right) = 0.$$

Элементарными преобразованиями приведем матр. к $(P|Q)$ к ~~виду~~ ~~$P+Q$~~ $(P'|Q')$, где P' - ступ. вид P. $\det A$ и $\det P$ умн. на 1 и тот же скаляр $\alpha \neq 0$.

Приведем $(O|R)$ к $(O\ R')$, где R' - ступ. вид R. $\det A$ и $\det R$ умн. на 1 и тот же скаляр $\beta \neq 0$. $\left(\begin{array}{c|c} P' & Q \\ \hline 0 & R' \end{array}\right)$ - верхнетреуголн $\Rightarrow$

$$\det\left(\begin{array}{c|c} P' & Q' \\ \hline 0 & R' \end{array}\right) = \det P' \cdot \det R'$$

4.7. Определитель верхне (нижне) треугольной матрицы. $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

Док только для строк. Выделим слагаемые отличные от нуля.

$a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \neq 0 \Rightarrow a_{n\sigma(n)} \neq 0 \Rightarrow \sigma(n) = n$

$a_{(n-1)\sigma(n-1)} \neq 0 \Rightarrow \sigma(n-1) \ldots$ — занято

$\sigma(n-1) = n-1$

и тд

$\Rightarrow \sigma(k) = k \;\; \forall k \in \{1..n\} \Rightarrow \sigma = id$ — единственное ненулевое слагаемое возможное

$\Rightarrow sgn(id) = 1 \Rightarrow \det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

4.8. Матрица с углом нулей

$A = \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline 0 & R \end{array}\right)$ или $A = \left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline Q & R \end{array}\right) \Rightarrow \det A = \det P \cdot \det R$.

Докажем только для этой A. (тк $\det A = \det A^T$) 1) Элементарными преобр. прив $(P|Q)$ к виду $(P'|Q')$, где P' — ~~\(\exists\)~~ СВ P. $\det A$ и $\det P$ умн на $\alpha \neq 0$ 2) Эл. преобр. прив $(0|R) \to (0|R')$, где R' — ступ-вид R. $\det A$ и $\det R$ умн на $\beta \neq 0$ Итого: $\left(\begin{array}{c|c} P' & Q' \\ \hline 0 & R' \end{array}\right)$ — верхнетреуг. матр.

$\det\left(\begin{array}{c|c} P' & Q' \\ \hline 0 & R' \end{array}\right) = \det P' \det R' = \alpha\beta \det A = \alpha\beta \det P \cdot \det R \Rightarrow \det A = \det P \det R$.

4.9 Определитель произведения двух матриц = произведению определителей 2х матриц. $A, B \in M_n \Rightarrow \det(AB) = \det A \det B$.

Заметим, что при применении элементарного преобразования к матрице A, $A \to A' = UA$ (U — матр. эл. преобр.)

При применении этих же эл. преобр к AB получаем $AB \to UAB = A'B$.

То есть, неважно, что делать сначала: преобразовывать A, или умн. A на B. Пусть $A \mapsto A''$ — УСВ A. С пом. тех же элем. преобр. $AB \mapsto A''B$. $\det A$ и $\det AB$ умножаются на один и тот же скаляр: $\det A'' = \alpha \det A$

$\det A''B = \alpha \det AB$

▷ Если в A'' последняя строка состоит из нулей: Посл. строка матр. $A''B = A''_{(n)} \cdot B = (0..0) \Rightarrow \det A''B = \alpha \det AB = 0 = \det A'' \det B$.

▷ иначе: $= E$ (тк это кв. матрица) $\Rightarrow \det A''B = \det B = 1 \cdot \det B = \det A'' \cdot \det B$.

Итого: $\alpha \det AB = \det A''B = \det A'' \det B = \det A \det B \Rightarrow \det AB = \det A \det B$.

4.10 Разложение определителя по строке (столбцу.) Лемма:

Пусть $a_{ik} = 0$ при всех $k \neq j$. Тогда $\det A = a_{ij} \cdot A_{ij}$. Поймем, как выглядит A: Совершив $i-1$ действие перемещения строк сделаем i-ю строку первой. Совершив еще $i-1$ действие — сделаем j-й столбец первым. Матрица примет вид

$\left(\begin{array}{c|c|c} P & u & Q \\ 0..0 & a_{ij} & 0..0 \\ R & v & S \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{c|c|c} a_{ij} & 0..0 & 0..0 \\ \hline u & P & Q \\ v & R & S \end{array}\right) = A''$

A'' — матрица с углом нулей. Тогда, $\det A'' = \det(a_{ij}) \cdot \overline{M_{ij}} = ~~\det~~ a_{ij} \cdot \overline{M_{ij}}$. Причем при получении из. A A'', было сделано $i+j-2$ эл-преобр. 2го типа. $\det A = (-1)^{i+j-2} \det A'' = (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{M_{ij}} = a_{ij} A_{ij}$

Теорема $\forall$ фиксированном $i \in \{1,2,..,n\}$ $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + .. + a_{in}A_{in} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$

$\forall$ фикс. $j \in \{1,2,..,n\}$ $\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + .. + A_{nj}\cdot a_{nj} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$

В силу того, что $\det A = \det A^T$ докажем для строк:

Итак, $A = \begin{pmatrix} \cdots \\ A(i) \\ \cdots \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cdots \\ a_{i1}\ 0 .. 0 \\ \cdots \end{pmatrix}}_{B_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} \cdots \\ 0\ a_{i2} .. 0 \\ \cdots \end{pmatrix}}_{B_2} + .. + \underbrace{\begin{pmatrix} \cdots \\ 0\ 0 .. a_{in} \\ \cdots \end{pmatrix}}_{B_n} \Rightarrow \det A = \det B_1 + \det B_2 + .. + \det B_n$

(по ⊙ О разложении строки на сумму двух)

По лемме $\det B_1 = a_{i1}\cdot A_{i1}$, $\det B_2 = a_{i2}\cdot A_{i2}, .., \det B_n = a_{in}A_{in}$

$\Rightarrow \det A = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ чтд.

4.11 Лемма о фальшивом разложении определителя. 1) $\forall\, i,k \in \{1,2,..,n\}: i \neq k: \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0$

Докажем только для строк т.к. $\det A = \det A^T$ 2) $\forall\, j,k \in \{1,2,..,n\}: j \neq k$ $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = 0$

Пусть $B \in M_n$ - матрица, полученная из A заменой i-й строки на k-ю.

$B = \begin{pmatrix} \cdots \\ A(i) \\ \cdots \\ A(i) \\ \cdots \end{pmatrix}$. $\det B = 0$. Разложим $\det B$ по k-й строке: $\det B = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{kj}B_{kj} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}$

4.12 Единственность обратной матрицы. Пусть $A \in M_n$. $B = A^{-1}$ - обратная к A, ~~если $A^{-1}\cdot A = A \cdot A^{-1} = E$~~ если $AB = BA = E$.

Лемма если $\exists A^{-1}$, она единственна. Пусть $B = C = A^{-1}$. $B, C \in M_n$

$B = BE = BAC = EC = C$.

4.13 Определитель A^{-1}. Если $\exists A^{-1}$, $\det A \neq 0$. $AA^{-1} = E \Rightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = \det E$

$\Rightarrow \underset{\neq 0}{\det A} \cdot \underset{\neq 0}{\det A^{-1}} = 1$

5 4.14 Критерий обратимости квадратной матрицы: A обратима $\Leftrightarrow \exists A^{-1} \Leftrightarrow$

A невырождена $\Leftrightarrow \det A \neq 0$. $A^{-1} = \hat{A}\cdot\frac{1}{\det A}$. $\hat{A}$ - присоединенная матрица - транспонир. матрица, сост. из алг. дополнений.

Пусть $\det A \neq 0$. покажем, что $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\hat{A} \Leftrightarrow \det A \cdot A^{-1} = \hat{A}$.

для этого надо показать, что $A\hat{A} = \hat{A}A = \det A \cdot E$

Пусть $X = A\hat{A}$. $x_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot[\hat{A}]_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} \det A & \text{при } i=j \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

$Y = \hat{A}A$. $y_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} [\hat{A}]_{ik}\cdot a_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{n} A_{ki}a_{kj} = \begin{cases} \det A & \text{при } i=j \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

$\Rightarrow X = Y = E\cdot\det A$.

4.15 Матрица, обратная к произведению двух матриц.

Если $A, B \in M_n$ и AB обратима $\Leftrightarrow A, B$ обратимы, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

$\det AB \neq 0$; $\det AB = \det A \det B \Rightarrow \begin{matrix} \det A \neq 0 \\ \det B \neq 0 \end{matrix}$.

~~AB~~ $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = E \Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

4.16 Формулы Крамера.

Пусть есть СЛУ ★ $Ax=b$, $A \in M_n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ $A_i = (A^{(1)}, \dots A^{(i-1)}, b, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)})$

Тогда (если $\det A \neq 0$) Слу имеет единств. решен. Формула: $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$

$\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow$ ★ $\Leftrightarrow Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1} b$ - единств. решен.

$$b = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \dots + x_n (A^{n})$$

$$\det A_i = \det(A^{(1)}, \dots, b, \dots A^{(n)}) = \det(A^{(1)}, \dots, x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \dots + x_n A^{(n)}, \dots A^{(n)}) =$$

(2) одинаковые столбцы

$$= \det(A^{(1)}, \dots A^{(i-1)}, x_1 A^{(1)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)}) + \det(A^{(1)}, \dots A^{(i-1)}, x_2 A^{(2)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)}) +$$

(1) вынесли скаляр

$$\dots + \det(A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, x_i A^{(i)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)}) + \dots + \det(A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, x_n A^{(n)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)}) =$$

$= 0 + 0 + \dots + 0 + x_i \det A + 0 + \dots + 0 = x_i \det A$. Отсюда $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$.

Комплексные числа. Определения

(47) Поле - это множество F, на котором заданы 2 операции - сложение ($(a,b) \to a+b$) и умножение ($(a,b) \to ab$). Причем $\forall a,b,c \in F$ выполнены условия:

абелева группа по сложению

1) $a+b=b+a$ - коммутативность сложения
2) $(a+b)+c = a+(b+c)$ - ассоциативность сложения
3) $\exists\, 0 \in F : 0+a = a+0 = a$ - нулевой элемент. нулевой элемент - элемент, нейтральный по сложению
4) $\exists\, (-a) \in F : a+(-a) = (-a)+a = 0$.
5) $a(b+c) = ab+ac$ - дистрибутивность произведения по отн. к сложению
6) $ab=ba$ - коммутативность умножения
7) $(ab)c = a(bc)$ - ассоциативность умножения
8) $\exists\, 1 \in F \setminus \{0\} : 1a = a1$ (единица
9) Если $a \neq 0$ $\exists\, a^{-1} \in F : aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ - обратный эл-т.

(48) Алгебраическая форма комплексного числа. Сложение, умножение, ~~вычитание~~ деление. Алгебраическая форма $z \in \mathbb{C}$ - представление числа z в виде $a+bi$, где $a,b \in \mathbb{R}$. a - действительная часть числа. b - мнимая часть. i - мнимая единица.
$a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$

Сложение: $(a_1+b_1 i)+(a_2+b_2 i) = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$

Умножение: $(a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i) = (a_1a_2 + b_1 i a_2 + b_2 i a_1 + i^2 \cdot b_1 b_2) = (a_1 a_2 - b_1 \cdot b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

Деление: $\dfrac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i} = \dfrac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{a_1^2 - b_1^2 i^2} = \dfrac{a_1a_2+b_1b_2}{a_1^2+b_1^2} + \dfrac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_1^2+b_1^2} i$

(49) Комплексное сопряжение: число $\bar{z} = a-bi$ - комплексно сопряженное к числу $z = a+bi$
$z \to \bar{z}$ - комплексное сопряжение. ↳ $\bar{\bar{z}} = z$
↳ $\overline{z+w} = \bar{z}+\bar{w}$ ↳ $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.

(50) Геометрическая модель комплексных чисел. Числу $z = a+bi$ соотв. вектор (точка) на плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами a,b. Сумме $z+w$ соотв. сумма соотв. векторов. Сопряжение $z \to \bar{z}$ - отражение z относительно действительной оси.

(51) Модуль комплексного числа. $\underbrace{|z| = \sqrt{a^2+b^2}}_{\text{длина соотв. вектора}}$ - модуль $z \in \mathbb{C}$, $z = a+bi$

св-ва: ∨ $|z| \geq 0$. Если $|z| = 0$, то $z = 0$ и наоборот.
∨ нер-во треугольника: $|w+z| \leq |w| + |z|$.
∨ $z\bar{z} = |z|^2$
∨ $|zw| = |z||w|$.

(52) Аргумент комплексного числа. Аргументом числа $z = a+bi$, $z \in \mathbb{C}$ наз-ся число φ, $\varphi \in \mathbb{R}$: $\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. φ - угол между Ox и соотв. вектором

(53) Тригонометрическая форма комплексного числа - представление z в виде $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Если $z_1 = |z_1|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z_2 = |z_2|(\cos v + i\sin v)$, то $z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi+v) + i\sin(\varphi+v))$

При $z_2 \neq 0$ $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi-v) + i\sin(\varphi-v))$

(54) Формула Муавра. Пусть $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

(55) Извлечение корней из комплексных чисел. Пусть $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$
Корень степени n из числа z наз-ся всякое $w \in \mathbb{C}$ такое, что $w^n = z$

$\sqrt[n]{z} = \underbrace{\{w_0, w_1, \dots, w_{n-1}\}}$, где $w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k + \varphi}{n}\right)$

эти числа лежат в вершинах правильного n-угольника с вершиной в начале координат.

(56) Основная теорема алгебры комплексных чисел. Всякий многочлен степени ≥ 1 с комплексными коэф-тами им. комплексный корень.

~~Отступление про многочлены (57) Теорема Безу. Если один два многочлена~~
~~Многочлен $f(x)$ делится на $g(x) \neq 0$, если $\exists\, h \in F(x)$, что~~

Доказательства

5.1. Построение поля комплексных чисел. Необходимо построить поле $\mathbb{C}$.
Неформально, $\mathbb{C}$ - наим. поле, такое, что $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$; $\exists\, i \in \mathbb{C} : i^2 = -1$.
Формальная конструкция поля $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.
$\triangleright$ $(a_1;b_1) + (a_2;b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$. $\triangleright$ $(a_1, b_1)\cdot(a_2;b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_1 + a_2b_1)$
Неформально: каждой паре соотв. число $z = a + bi$. $(a,b) \Leftrightarrow a + bi$;
$(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$; $(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$

Проверка аксиом: (1) $a_1 + b_1i + a_2 + b_2i = a_2 + b_2i + a_1 + b_1i$ - верно
(2) $(a_1 + b_1i + a_2 + b_2i) + a_3 + b_3i = a_1 + b_1i + (a_2 + b_2i + a_3 + b_3i)$ - верно
(3) $\exists\, 0 \in \mathbb{C}$: $0 = 0 + 0i = (0,0)$ (4) $-(a,b) = (-a,-b)$. $(-a,-b) + (a,b) = 0$
(5) Дистрибутивность: $(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i + a_3 + b_3i) = a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3) + a_1(b_2 + b_3)i + (a_3 + a_2)b_1i = a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3 + a_1b_2i + a_1b_3i + a_2b_1i + a_3b_1i = (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i)$
(6) Коммутативность умножения: $(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = a_1a_2 - b_1b_2 + a_1b_2i + a_2b_1i = (a_2 + b_2i)(a_1 + b_1i) = a_2a_1 - b_2b_1 + a_1b_2i + a_2b_1i$
(7) Ассоциативность умножения. $((a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i))(a_3 + b_3i) = ~~(a_1a_2 - b_1b_2 + a_1b_2i + a_2b_1i)~~$
$= (a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)i)(a_3 + b_3i) = a_1a_2a_3 - b_1b_2a_3 - a_1a_2b_3 + b_1b_2b_3 +$
$+ (a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - b_1b_2b_3 + a_1a_2b_3)i =$
$(a_1 + b_1i)((a_2 + b_2i)(a_3 + b_3i))$ = тому же самому (нетрудно расписать)
(8) $1 \in \mathbb{C}$; $1 = (1,0) = 1 + 0i$ (9) $(a,b) \neq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \neq 0$. $(a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$.
$(a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)(a,b) = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}, \frac{ab}{a^2+b^2} - \frac{ab}{a^2+b^2}\right) = (1,0)$.
$\Rightarrow \mathbb{C}$ - поле.

Проверка „неформальных" свойств - (1) $a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (a,0) \in \mathbb{C}$.
(2) $(a+b) \Leftrightarrow (a,0) + (b,0) = (a+b, 0)$
$\Rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. (3) $a, b \Leftrightarrow (a,0)(b,0) \Leftrightarrow (ab, 0)$
(4) $i = (0,1)$
$i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$

5.2 Свойства комплексного сопряжения: для суммы и для произведения.
Комплексно сопряженное к числу $z=a+bi$ - число $\bar z = a-bi$.
Комплексное сопряжение - это превращение z в $\bar z$.

▷ $\bar{\bar z} = z$. $\bar{\bar z} = \overline{\overline{a+bi}} = \overline{a-bi} = a-(-bi) = a+bi = z$.

▷ $\overline{z_1+z_2} = \bar z_1+\bar z_2$. $\overline{z_1+z_2} = \cancel{\overline{a_1+b_1i}+\overline{a_2+b_2i} = \overline{a_1-b_1i}+\overline{a_2-b_2i}} =$

$= \overline{a_1+a_2+(b_1+b_2)i} = a_1+a_2-b_1i-b_2i = a_1-b_1i+a_2-b_2i = \bar z_1+\bar z_2$.

▷ $\overline{z\cdot w} = \bar z\cdot\bar w$. $\overline{z\cdot w} = \overline{a_1a_2-b_1b_2+(a_2b_1+a_1b_2)i} = a_1a_2-b_1b_2-a_1b_2i-a_2b_1i =$

$=(a_1-b_1i)(a_2-b_2i) = \bar z\cdot\bar w$.

5.3. Св-ва модуля комплексного числа: ① $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. $\exists\, a^2+b^2\geq 0$, $|z|\geq 0$
При $|z|=0$ $a=b=0 \Rightarrow z=0$

② Неравенство Δ-ка: $|z+w|\leq |z|+|w|$. ▷

Сравним $|z+w|$ и $|z|+|w|$: $|z+w| = \sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$

$\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2} \vee \sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2} \quad |\uparrow^2$

$(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2 \vee a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2+2\sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)}$

$\cancel{a_1^2}+\cancel{2}a_1a_2+\cancel{a_2^2}+\cancel{b_1^2}+\cancel{2}b_1b_2+\cancel{b_2^2} \vee \cancel{a_1^2}+\cancel{a_2^2}+\cancel{b_1^2}+\cancel{b_2^2}+\cancel{2}\sqrt{(a_1a_2)^2+(b_1b_2)^2+(b_1a_2)^2+(b_2a_1)^2}$

$a_1a_2+b_1b_2 \vee \sqrt{(a_1a_2)^2+(a_1b_2)^2+(a_2b_1)^2+(b_1b_2)^2}$

$\cancel{(a_1a_2)^2}+2a_1b_1a_2b_2 \vee \cancel{(a_1a_2)^2}+\cancel{(b_1b_2)^2}+(a_1b_2)^2+(a_2b_1)^2$

$0 \vee (a_1b_2-a_2b_1)^2$. Тк $(a_1b_2-a_2b_1)\geq 0 \Rightarrow |w+z|\leq |z|+|w|$.

③ Модуль произв-я: $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$

Док-во: ① Заметим свойство ③.① - $z\bar z = |z|$. $z\bar z = (a+bi)(a-bi) = a^2-b^2i^2 = a^2+b^2$

② $|z\cdot w|^2 = zw\cdot\overline{zw} = z\cdot\bar z\cdot w\cdot\bar w = |z|^2|w|^2 \Rightarrow |zw|^2 = |z|^2|w|^2$.

5.4. Умножение, деление, возведение в степень комплекс. чисел в триг. форме. Ф-ла Муавра.

① $z_1 = |z_1|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $z_2 = |z_2|(\cos\gamma+i\sin\gamma)$.

$z_1z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi+\gamma)+i\sin(\varphi+\gamma))$. Док-во: $z_1z_2 = |z_1|(\cos\varphi+i\sin\varphi)|z_2|(\cos\gamma+i\sin\gamma) =$

$= |z_1||z_2|(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\gamma+i\sin\gamma) = |z_1||z_2|((\cos\varphi\cdot\cos\gamma-\sin\varphi\cdot\sin\gamma)+i(\cos\gamma\sin\varphi+\cos\varphi\sin\gamma))$

$= |z_1||z_2|(\cos(\varphi+\gamma)+i\sin(\varphi+\gamma))$.

② $z_2\neq 0$. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi-\gamma)+i\sin(\varphi-\gamma))$.

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{|z_2|(\cos\gamma+i\sin\gamma)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot\frac{(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\ \ -i\sin\ \ )}{\cos^2\ \ -i^2\sin^2\ \ } =$

$= \frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot\frac{(\cos\varphi\cdot\cos\gamma+\sin\varphi\sin\gamma)+i(\cos\ \ \cdot\sin\varphi-\cos\varphi\sin\gamma)}{\cos^2\gamma+\sin^2\gamma} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot\frac{\cos(\varphi-\gamma)+i\sin(\varphi-\gamma)}{1}$.

③ Ф-ла Муавра. $z^n = |z|^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$. По сути, следствие из умн-я.

$z^n = \underbrace{z\cdot z\cdot\ldots\cdot z}_{n\text{ раз}} = \underbrace{|z||z|\cdot\ldots|z|}_{n\text{ раз}}(\cos(\underbrace{\varphi+\varphi+\ldots+\varphi}_{n\text{ раз}})+i\sin(\underbrace{\varphi+\varphi+\ldots+\varphi}_{n\text{ раз}})) =$

$= |z|^n(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi))$

5.5 Извлечение корней из комплексных чисел. Извлечение корня n-й степени ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) из числа $z \Leftrightarrow$ нахождение ~~числа~~ всех чисел w, таких, что $w^n = z$. $w = \sqrt[n]{z} \Rightarrow w^n = z \Rightarrow |w|^n = |z|$

При $z = 0$: $\sqrt[n]{z} = 0 \Rightarrow w = 0$. $\Rightarrow \sqrt[n]{0} = \{0\}$.

При $z \neq 0$: Пусть $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; $w = |w|(\cos\gamma + i\sin\gamma)$.

$\Rightarrow w^n = |w|^n(\cos(n\gamma) + i\sin(n\gamma))$.

$$z = w^n \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |w|^n \\ \cos(n\gamma) + i\sin(n\gamma) = \cos\varphi + i\sin\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |w|^n \\ \cos(n\gamma) = \cos\varphi \\ \sin(n\gamma) = \sin\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |w|^n \\ n\gamma = \varphi + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |z| = w^n \\ \gamma = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(с точностью до $2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$ выйдет n разл. знач. при $k = 0, 1, \dots, n-1$.

$$\sqrt[n]{z} = \underbrace{\{w_0, w_1, \dots, w_{n-1}\}}_{\text{вершины прав. } n\text{-уг с центром в начале коорд}}, \text{ где } w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k + \varphi}{n}\right)$$

И еще 2 определения.

57 Теорема Безу

→ Деление многочленов без остатка: $f(x) \in F[x]$ делится на $g(x) \in F[x] \Leftrightarrow \exists\, h \in F[x]: f(x) = h \cdot g$

→ деление с остатком: $g \neq 0 \Rightarrow \forall f(x) \in F[x]\ \exists!\, q, r \in F[x]$: $f(x) = q \cdot g + r$. либо $\deg r < \deg(g)$, либо $r = 0$

Частный случай: $g = x - c$, $c \in F$. $f(x) = q(x)(x-c) + r(x)$, где $\left[\begin{array}{l} r(x) = 0 \\ \deg r(x) < \deg(x - c) = 1 \end{array}\right.$

Теорема Безу: $r = f(c)$.

Следствие: эл-т $c \in F$ яв-ся корнем многочлена $f(x) \in F[x] \Leftrightarrow f(x)$ делится на $x - c$.

58 Кратность корня многочлена. Кратность корня $c \in F$ многочлена $f(x)$ наиб-ее такое $k \in \mathbb{Z}$: $f(x)$ делится на $(x-c)^k$ (без ост)

Векторные пространства. Определения

(59) Векторное пространство. Фиксируем поле F. Например, можно считать, что $F=\mathbb{R}$ или $F=\mathbb{C}$. Векторным пространством над F (линейным), если на V задали 2 операции: - сложение : $V\times V \to V: (x,y)\to x+y$
- умножение на скаляр : $F\times V$, $(\alpha\in F, x\in V)\to \alpha x$.
а также $\forall x,y,z\in V$ и $\alpha,\beta\in F$ вып-ся аксиомы векторного пространства:

1. $x+y=y+x$ - коммутативность сложения
2. $(x+y)+z=x+(y+z)$. -
3. $\exists \vec{0}\in V$: $x+\vec{0}=\vec{0}+x=x$ (нулевой эл-т - эл-т, нейтральный по сложению)
4. $\exists -x$: $x+(-x)=-x+x=\vec{0}$ (противоп. эл-т.
5. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ - дистрибутивность умножения на скаляр по отн. к сложению
6. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ - ~~дистрибутивность умножения~~
7. $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$ - ассоциативность умн. на скаляр
8. $1\cdot x=x$

(60) Подпространство векторного пространства. Пусть V - вект. прост. над F. Опр: $U\subseteq V$ - подпространство в V, если $\vec{0}\in U$; $x,y\in U \Rightarrow x+y\in U$
$x\in U\Rightarrow \alpha x\in U$.

(61) Линейная комбинация конечного набора векторов пространства. V - вект. пространство над F. $v_1\ldots v_k\in V$ - набор векторов. Линейная комбинация - всякое выражение векторов вида $\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_k v_k$, где $\alpha_i\in F$

(62) Линейная оболочка подмножества векторного пространства. $S\subseteq V$ - подмн-во векторного пространства. Линейная оболочка S - подмн-во всех векторов из V, представимых в виде линейной комбинации векторов из конечного набора S. Обозначение: $\langle S\rangle$

(63) Общие конструкции подпространств в подпространстве F^n.
▷ $U\subseteq F^n$ - мн-во векторов, тогда $\langle U\rangle$ - подпространство в F^n
▷ Мн-во решений любой ОСЛУ $Ax=0$ ($A\in Mat_{m\times n}(F)$, $x\in F^n$) яв-ся подпростр. в F^n.
Любое подпространство в F^n можно задать любым из этих способов

(64) Линейная зависимость конечного набора векторов.
Векторы $v_1,\ldots,v_n\in V$ - линейно зависимы, если $\exists$ их нетривиальная линейная комбинация, равная $\vec{0}$ (т.е. $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\neq 0$; $\alpha_1v_1+\ldots+\alpha_nv_n=\vec{0}$)

(65) Векторы $v_1\ldots v_n\in V$ - линейно независимы, если $\nexists$ нетривиальных лин. комб, равных $\vec{0}$ (т.е. $\alpha v_1+\ldots+\alpha_nv_n=\vec{0}\Rightarrow \alpha_1,\ldots,\alpha_n=0$)

Мн-во $S\subseteq V$ (конечное или нет?) - линейно зависимо, если в нем $\exists$ конечное линейно зависимое подмножество и линейно независимо, если всякое его конечное подмножество линейно независимо.

(66) Критерий линейной зависимости конечного набора векторов.

Пусть $v_1, \dots, v_n \in V$, $i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow$ эквивалентны условия

1) $\exists (\alpha_1, \dots \alpha_n) \in F^n$, такой, что $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}$ и $\alpha_i \neq 0$

2) $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$

$\Rightarrow$ векторы $v_1 \dots v_n$ линейно зависимы $\Leftrightarrow \exists i \in \{1, \dots, n\} : v_i \in \langle v_1, \dots v_{i-1}, v_{i+1}, \dots v_n \rangle$

(67) Основная лемма о линейной зависимости.

Пусть 2 системы векторов $v_1, \dots, v_m$ и $w_1, \dots, w_n$, причем $m < n$ и $w_i \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$. Тогда $w_1 \dots w_n$ - линейно зависимы.

(68) Базис векторного пространства

Подмн-во $S \subseteq V$ наз-ся базисом V, если $\to$ S - линейно независимо, $\to \langle S \rangle = V$

(69) Конечномерные и бесконечномерные векторные пространства

Векторное пространство конечномерно, если в нем есть конечный базис.

Векторное пространство бесконечномерно, если в нем нет конечного базиса

(70) Размерность конечномерного векторного пространства

Размерность конечномерного вект. пространства - кол-во эл-тов в (любом) его базисе. $\underline{\dim V}$

(71) Характеризация базисов конечномерного векторного пространства - в терминах единственности линейного выражения.

Пусть $\dim V < \infty$, $e_1, \dots, e_n \in \langle V \rangle$

$e_1, \dots, e_n$ - базис $V \Leftrightarrow \forall v \in V$ представим в виде $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n, \alpha \in F$ в единственном виде

(72) Лемма о добавлении вектора к конечной линейно независимой строке

Пусть $v, v_1, \dots, v_m \in V$ и $v_1, \dots v_m$ - линейно независимы. Тогда или $v, v_1, \dots, v_m$ - линейно независимы, или $v \in \langle v_1, \dots v_m \rangle$

(73) Утверждение о размерности подпространства конечномерного векторного пространства:

Пусть $U \subseteq V$ - подпрост-во конечномерно. Тогда $\dim U \leq \dim V$, $\dim U = \dim V \Leftrightarrow U = V$

(74) Фундаментальная система решений однородной сист. лу

$Ax = 0$ - ОСЛУ. $A \in Mat_{m \times n}(F)$, $V = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n$. $S \subseteq F^n$ - мн-во решений.

S - подпрост. в F^n

Фундаментальной системой решений для ОСЛУ наз-ся любой базис пространства ее решений. У одной ОСЛУ может быть много разных ФСР

Доказательства

6.1 Понятие векторного пространства. 6 простейших следствий из аксиом

Фиксируем поле F. Мн-во V наз-ся векторным пространством над F, если на V заданы операции – сложение $V \times V \to V: (a,b) \to a+b$.

– умножение на скаляр: $F \times V \to V, (\alpha \in F, v \in V) \to \alpha v$

а также $\forall a,b,c \in V$ и $\alpha, \beta \in F$ вып-ся 8 св-в.

1) $a+b=b+a$
2) $(a+b)+c=a+(b+c)$
3) $\exists \vec{0} \in V: \vec{0}+a=a+\vec{0}=a$.
4) $\exists (-a) \in V: -a+a=a+(-a)=\vec{0}$.
5) $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$.
6) $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$
7) $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$
8) $1 \cdot x = x$

Простейшие следствия из аксиом: ① $\vec{0} \in V$ – единственный.
Пусть есть 2 нуля – $\vec{0}$ и $\vec{0}'$.

$\Rightarrow \vec{0}'+\vec{0}=\vec{0}'=\vec{0}$.

② Эл-т $(-x)$ для $x \in V$ – единственный. : Пусть к $x \in V$ обратным $(-x)$ и $(-x)'$.
Тогда, $(-x)'=(-x)'+\vec{0}=(-x)'+(-x)+x=\vec{0}+(-x)=(-x)$

③ $\alpha \cdot \vec{0}=\vec{0}$. $\quad \vec{0}=\vec{0}+\vec{0} \Leftrightarrow \alpha\vec{0}=\alpha\vec{0}+\alpha\vec{0} \Leftrightarrow \alpha\vec{0}-\alpha\vec{0}=\alpha\vec{0}+\alpha\vec{0}-\alpha\vec{0} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \vec{0}=\vec{0}+\alpha\vec{0} \Leftrightarrow \vec{0}=\alpha\vec{0}$

④ $\alpha(-x)=-(\alpha x)$. $\quad x+(-x)=\vec{0} \Leftrightarrow \alpha x+\alpha(-x)=\alpha\cdot\vec{0} \Leftrightarrow \alpha x+\alpha(-x)=\vec{0} \Leftrightarrow$
$\alpha(-x)=(-\alpha x)$.

⑤ $0 \cdot x=\vec{0}$. $\quad 0\cdot x=(0+0)x \Leftrightarrow 0x+0x=0x$
$0x+0x-0x-0x=0x-0x-0x$
$\vec{0}=-0x$
$0x=-0x=-0x$
$0x=\vec{0}$. чтд

⑥ $(-1)\cdot x=-x$
$-1+1=0$
$-1\cdot x+x=\vec{0} \quad |+(-x)$
$-1\cdot x+\vec{0}=(-x)$
$-1\cdot x=-x$.

6.2. Утв-е о том, что множество решений ОСЛУ яв-ся подпространством в соотв. вект. простр.

Предложение: мн-во р-й $Ax=0$, $A=Mat_{m\times n}(F)$, $x \in F^n$ – подпространство в F^n

Док-во: Пусть S – мн-во решений $Ax=0$.

1) $\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \in S$.

2) $x \in S, y \in S$, $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$. $\begin{cases}Ax=\vec{0}\\ Ay=\vec{0}\end{cases} \Rightarrow Ax+Ay=\vec{0} \Rightarrow$
$A(x+y)=\vec{0} \Rightarrow x+y \in S$.

3) $x \in S, \alpha \in F$. $\quad Ax=\vec{0} \Rightarrow \alpha Ax=\vec{0} \Rightarrow A(\alpha x)=\vec{0} \Rightarrow \alpha x \in S$.

6.3. Утверждение о том, что линейная оболочка произвольного подмножества лин. прост. - подпространство.

Линейная оболочка - это множество всех векторов пространства, представимых в виде линейной комбинации конечного набора векторов из S, где $S \subseteq V$. Док. что $\langle S \rangle$ - подпростр в V.

а) При $S = \varnothing$ $\langle S \rangle = \langle \varnothing \rangle = \{\vec{0}\}. \Rightarrow \vec{0} \in \langle S \rangle$.

При $S \neq \varnothing \Rightarrow \exists v \in S \Rightarrow \left.\begin{matrix} 0 \cdot v \in S \\ 0v = \vec{0} \end{matrix}\right| \Rightarrow \vec{0} \in S$.

б) Пусть $\left.\begin{matrix} v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m \\ w = \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_m w_m \end{matrix}\right| \begin{matrix} \alpha, \beta \in F. \quad v, w \in \langle S \rangle. \\ v_i, w_i \in S. \end{matrix}$

$v + w = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m + \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_n w_n$

При $v_i = w_j$, $\alpha_i v_i + \beta_j w_j = v_i \underbrace{(\alpha_i + \beta_i)}_{\in F}$ $\Big| \Rightarrow v + w \in S$.

~~$\Rightarrow \alpha_1 v_1 +$~~

в) Пусть $\beta \in F$, $v \in \langle S \rangle$, $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$

$\beta v = \underbrace{\beta \alpha_1}_{\in F} v_1 + \ldots + \beta \alpha_n v_n \quad \Big| \Rightarrow \beta v \in \langle S \rangle$.

$\Rightarrow \langle S \rangle$ - подпростр.

6.4 Критерий линейной зависимости конечной системы векторов $v_1 \ldots v_n \in V$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

$\Rightarrow$ Эквивалентны условия: 1) $\exists (\alpha_1 \ldots \alpha_n) \in F^n : \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = \vec{0}$ и $\alpha_i \neq 0$
$(\Leftrightarrow)$ 2) $v_i \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots v_n \rangle$.

Док-во: $\alpha_i \neq 0$. $-\alpha v_i = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \alpha_n v_n$

$$v_i = -\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 + \ldots + \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} v_{i-1} + \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} v_{i+1} + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha_i} v_n\right) \in \langle v_1 \ldots \overset{v_{i-1}, v_{i+1}}{\vee} v_n \rangle$$

$v_i \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots v_n \rangle \Rightarrow v_i = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \beta_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \beta_n v_n$

$\vec{0} \quad \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_{i-1} v_{i-1} \underbrace{-1}_{\neq 0} \cdot v_i + \beta_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \beta_n v_n$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} (1) \Rightarrow (2) \\ (2) \Rightarrow (1) \end{matrix}\right| \Rightarrow (1) \Leftrightarrow (2)$

6.5 Основная лемма о линейной зависимости

Если есть 2 системы векторов: $v_1 \ldots v_m$ и $w_1 \ldots w_n$, $m < n$.

Если $w_i \in \langle v_1 \ldots v_m \rangle$ $\forall i \in \{1, n\}$. $\Rightarrow w_1 \ldots w_n$ и $v_1 \ldots v_m$ - линейно зависим.

док-во: $\forall i$ $w_i = \alpha_{1i} v_1 + \alpha_{2i} v_2 + \ldots + \alpha_{mi} v_m = (v_1, \ldots, v_m) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \ldots \\ \alpha_{mi} \end{pmatrix}$

$$(w_1 \ldots w_n) = (v_1, \ldots, v_m) \cdot A, \text{ где } A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

$m < n \Rightarrow Ax=0$ имм. ненулевое решение $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} \in F^n$

$\Rightarrow (w_1 \dots w_n) \cdot z = (v_1 \dots v_m) \cdot \underbrace{A \cdot z}_{=\vec{0} \text{ тк это реш. ОСЛУ}} = \vec{0}$

$\Rightarrow w_1 \cdot z_1 + w_2 \cdot z_2 + \dots + w_n \cdot z_n = \vec{0}$. $z \neq 0 \Rightarrow w_1 \dots w_n$ линейно зависимы.

6.6 Независимость числа векторов в базисе от выбора базиса.

V-конечномерное векторное пространство. Тогда все базисы в V содержат одинаковое кол-во эл-тов

V конечномерно $\Rightarrow \exists$ конечный базис $e_1 \dots e_n$

Пусть S - другой базис, $S \subseteq V$. $\langle e_1 \dots e_n \rangle = V$ (по опр. базиса) $\Rightarrow$

$\forall v \in S$ $v \in V \Leftrightarrow v \in \langle e_1 \dots e_n \rangle$. $\Rightarrow$ любые $n+1$ векторов из S линейно зависимы по ост-Т о линейной зависимости. Однако S-базис.

Тогда S-линейно независимо. $\Rightarrow |S| \leq n$.

Пусть $S = \{e_1', \dots, e_m'\}$. $m \leq n$. Тогда $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ $\underset{\in V}{e_i} \in \langle e_1', \dots e_m' \rangle$ $\overset{\shortparallel}{V}$.

$\Rightarrow m \geq n \Rightarrow m = n$.

6.7 Характеризация базисов конечномерного векторного пространства в терминах единственности линейного выражения векторов

V-конечномерное простр-во (над F) $\dim V < \infty$. $e_1 \dots e_n \in V$

Т $e_1 \dots e_n$ - базис $\Leftrightarrow \forall v \in V$ единственным образом представим в виде $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $x_i \in F$.

$\triangleright$ $e_1 \dots e_n$ - базис $\Rightarrow \forall v \in V$ представим единств. образом в виде $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

Пусть есть 2 способа: $\begin{cases} v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \\ v = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \end{cases}$ $\Rightarrow v - v = (x_1 - y_1) e_1 + \dots + (x_n - y_n) e = 0$

$x_i, y_i \in F$

$\Rightarrow e_1 \dots e_n$ - базис $\Leftrightarrow e_1 \dots e_n$ - ЛНЗ. Тогда $(x_i - y_i) = 0$ $\forall i \in \{1, \dots n\}$.

$\Rightarrow x_i = y_i$

$\Rightarrow$ представление единственно.

$\triangleleft$ представл. единственно $\Rightarrow e_1 \dots e_n$ - базис.

$\forall v \in V$ $\in \langle e_1 \dots e_n \rangle \Rightarrow$ (V) $\langle e_1 \dots e_n \rangle = V$. $\Rightarrow e_1 \dots e_n$ - базис

(V) $\langle e_1 \dots e_n \rangle$ - ЛНЗ:

$\vec{0} \in V$ (по аксиомам векторного пр-ва)

$\exists!$ представл. $\vec{0} = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$. $\Rightarrow e_1 \dots e_n$ - ЛНЗ

однако $\vec{0} = 0 \cdot e_1 + \dots + 0 \cdot e_n$

6.8 Существование подмножества конечной системы векторов, явл-ся базисом ее оболочки

V - вект. прост. над F. Если $w, v_1, \dots, v_m \in V$ и $w \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle \Rightarrow$ $\langle w, v_1, \dots, v_m \rangle = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$

Предл: из любой конечной системы векторов $S \subseteq V$ можно выбрать подсистему, кот. явл-ся базисом в $\langle S \rangle$.

Пусть $S = \{v_1 \dots v_m\}$. Докажем при помощи мат. индукции по m

При $m = 1$ $S = \{v_1\}$. При $v_1 = \vec{0}$ базис $S = \varnothing$.

Иначе: S - линейно независимо. $\langle v_1 \rangle = v_1$,

Пусть $S = \{v_1 \dots v_{m-1}\}$ - базис. Докажем для $\{v_1, \dots v_m\}$

1) Если $v_1 \dots v_m$ - ЛНЗ $\Rightarrow$ ~~S-л~~ это базис в $\langle S \rangle$.

Иначе: $\exists i : v_i \in \langle S \setminus \{v_i\} \rangle$. Пусть $S' = S \setminus \{v_i\}. \Rightarrow \langle S' \rangle = \langle S \rangle$.

$|S| = m - 1 < m \Rightarrow$ в S' можно выбрать базис для $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$.

6.9 Дополнение линейно независимой с-мы векторов до базиса конечномерного пространства

$\dim V < \infty$. Любую линейно независимую систему векторов в V можно дополнить до базиса всего V.

Пусть $v_1 \dots v_m$ - данная линейно независимая система

$\dim V < 0 \Rightarrow$ в V есть конечный базис $e_1 \dots e_n$

Рассм. систему $v_1 \dots v_m, e_1 \dots e_n$. Пройдемся по этим векторам слева направо и выбросим те, которые линейно выражаются через предыдущие (и получим S'). При этом, 1) линейная оболочка $\langle v_1 \dots v_m, e_1 \dots e_n \rangle = V$ - сохранится.

2) $v_1 \dots v_m$ остануться в системе

3) ~~В новой Новая система~~ - ~~ЛНЗ~~. В новой системе никакой вектор не выр-ся через предыдущие.

~~$\Rightarrow \langle S' \rangle$~~ ~~из~~ 1) $\Rightarrow \langle S' \rangle = V$

Док, что $\langle S' \rangle$ - ЛНЗ: Пусть $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \beta_1 e_{i_1} + \dots + \beta_t e_{i_t} = \vec{0}$.

$v_1 \dots v_n$ - линейно независимы. Пусть $\exists k: \beta_k \neq 0$. (смотрел: таких нечетным 2). Выберем max $k: \beta_k \neq 0$. Тогда e_{i_k} линейно выражается через что-то предыдущее, противоречие. (потому что e_{i_k} выр-ся через остальные, т.е предыдущие)

$\Rightarrow S'$ - ЛНЗ $\Rightarrow$ базис $V = S'$.

6.10 Лемма о добавлении вектора к конечной линейно-независимой системе. Пусть $v_1 \dots v_m \in V$, - линейно независимая система.

Тогда ~~[illegible]~~ или $w \in \langle v_1 \dots v_m \rangle$, или $w, v_1, \dots, v_m$ - ЛНЗ.

Пусть $w, v_1, \dots, v_m$ - ~~ЛНЗ~~ линейно зависимы. Тогда $\exists$ $\beta, \alpha_1 \dots \alpha_m \neq 0$, $\beta w + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \vec{0}$.

При $\beta = 0$ $\alpha_1 \dots \alpha_m = 0 \Rightarrow \beta \neq 0$. Тогда по критерию линейной зав-ти: $w \in \langle v_1, \dots v_m \rangle$.

т.к $v_1 \dots v_m$ - ЛНЗ.

6.11 Утверждение о размерности подпространства конечномерного векторного пространства.

Пусть $U \subseteq V$ — конечномерное ~~векторное~~ в.п. Тогда $\dim U \le \dim V$. Причём $\dim U = \dim V \Leftrightarrow U = V$.

Пусть $\dim V = n$. Если $U = \{\vec{0}\}$, то $\dim U = 0$. Утв-верно.

Иначе: Построим в U конечн. базис. Выберем $\forall v_1 \in U \setminus \{\vec{0}\}$.

Если $U = \langle v_1 \rangle$ — конец. Иначе: выберем $\forall v_2 \in U \setminus \{\vec{0}\}$.

Если $U = \langle v_1 v_2 \rangle$ — конец. Иначе: выберем $\forall v_3 \in U \setminus \{\vec{0}\}$. и т.д.

По лемме векторы $v_1, v_2, v_3, \dots$ — лин. независимы (т.к. мы добавляем новые векторы, не лежащие в $\langle U \rangle$)

Т.к. $\dim V = n$ то послед. лин. незав-ых процесс закончится не позднее шага n. Полученная сист. — базис в U.

Если $\dim U = n \Rightarrow v_1 \dots v_n$ обр. базис в V тоже $\Rightarrow U = V$.

6.12 Метод построения фундаментальной системы решений для ОСЛУ

① $(A|\vec{0}) \longrightarrow (A'|\vec{0})$. $A \in Mat_{m \times n}$
УСВ

② Пусть в A' r ненулевых строк. тогда r главных неизвестных и $n-r$ свободных.

Пусть $x_1, \dots x_r$ — главн. неизв, $x_{r+1}, \dots, x_n$ — свободные.

Коэф-ты (при свободных неизв.) в 1ой строке — $-c_{11}, -c_{12}, \dots -c_{1n-r}$
во 2ой — $-c_{21}, -c_{22}, \dots -c_{2n-r}$
…
в r-ной — $-c_{r1}, -c_{r2} \dots -c_{r,n-r}$

Тогда общее реш-е ОСЛУ выглядит как
$$x_1 = c_{11}x_{r+1} + c_{12}x_{r+2} + \dots + c_{1n-r}x_n$$
$$\dots$$
$$x_r = c_{r1}x_{r+1} + \dots + c_{r,n-r}x_n$$

Пусть $u_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \dots \\ c_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \dots \\ c_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dots$, $u_{n-r} = \begin{pmatrix} c_{1n-r} \\ c_{2n-r} \\ \dots \\ c_{r n-r} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$u_1, \dots, u_{n-r} \in S$. лин-во реш-й $u_1, \dots, u_{n-r}$ — ФСР для ОСЛУ.

Док-во: ① Линейная нез-ть. Пусть $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{n-r}u_{n-r} = \vec{0}$. Заметим, что $\forall k \in \{1, \dots, n-r\}$ координата вектора $\sum$ об $u_k = \alpha_k$.

$\Rightarrow$ чтобы $\alpha_1 u_k + \dots + \alpha_{n-r}u_{n-r} = \vec{0}$, необх., чтобы $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-r} = 0$

$\Rightarrow$ С-ма — ЛНЗ.

② $\langle S \rangle = v_1 \dots v_{n-r}$. $v_1, \dots, v_{n-r} \in S \Rightarrow \langle v_1, \dots, v_{n-r} \rangle \subseteq S$
Докажем обратное включение.

Пусть u - произвольный вектор, $u \in S$. Тогда:

$$u = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-r} \end{pmatrix}$$ для некот. $\alpha_1, \dots \alpha_{n-r} \in F$. Рассмотрим новый

вектор. $v = u - \alpha_1 u_1 - \dots - \alpha_{n-r} u_{n-r}$. Тогда $v \in S$ - решен ОСЛУ.

Имеем: $v = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \to$ значен своб. неизв.

Тк $x_{r+1} = \dots = x_n = 0$, тогда $x_1 = \dots = x_r = 0$ (по формулам для общего решения.

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{n-r} u_{n-r}$

$\Rightarrow S \subseteq \langle u_1 \dots u_{n-r} \rangle$.