ИДЗ №9, вариант 20

Даша Оникова, бпми 2112

май 2022

Далее во всем ИДЗ стандартный базис $\mathbb{R}^n$ - $\mathbb{e} = (e_1, e_2, .., e_n)$; $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

№ 1 Составьте уравнение прямой в $\mathbb{R}^3$, параллельной плоскости π, проходящей через точку A и пересекающей прямую l_1

$$\pi : -x - 3y - 2z = -1,\ A = (-17, 11, -5),\ l_1 : \begin{cases} x = 3t + 19 \\ y = 4t + 1, \\ z = -3t + 1 \end{cases}$$

Пусть $a = (x_0, y_0, z_0)$ - направляющий вектор искомой прямой l, b - направляющий вектор прямой l_1

Пусть n - нормаль к π, у n координаты - $(-1, -3, -2)$. Поскольку $l || \pi, a \perp n \Rightarrow (a, n) = 0 \Leftrightarrow -x_0 - 3y_0 - 2z_0 = 0$.

Теперь перейдем от параметрического уравнения задания прямой: $\frac{x-19}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-3} \Rightarrow$
$\begin{cases} 4(x-19) = 2(y-1) \\ -3(y-1) = 4(z-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 76 = 2y - 2 \\ -3y + 3 = 4z - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 76 - 2 \\ 3 + 4 = 3y + 4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 74 \\ 3y + 4z = 7 \end{cases}$

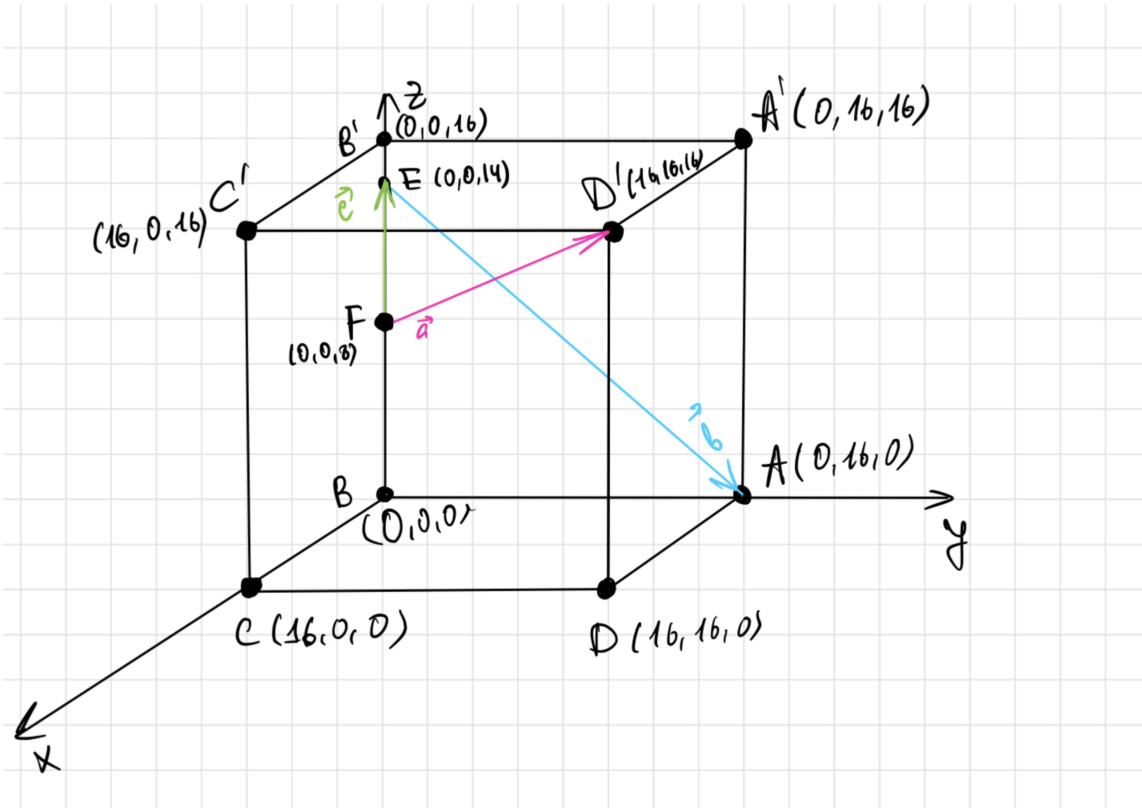
l_1 пересекает $l \Rightarrow \exists (x_1, y_1, z_1)$, удовлетворяющие всем трем уравнениям (уравнениям l_1 и полученному уравнению на x_0, y_0, z_0). Найдем эти координаты и получим координаты точки пересечения l, l_1. Для этого решим СЛУ $\begin{cases} 4x_1 - 2y_1 = 74 \\ 3y_1 + 4z_1 = 7 \\ -x_1 - 3y_1 - 2z_1 = 0 \end{cases}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 0 & 74 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \\ -1 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{левую часть к УСВ}}$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$

Получается, координаты точки пересечения l и l_1 - $(13, -11, 10)$. Теперь мы знаем координаты двух точек на l. найдем $a : x_0 = 13 - (-17) = 13 + 17 = 30, y_0 = -11 - 11 = -22, z_0 = 10 - (-5) = 15$

Отсюда получаем параметрическое уравнение искомой прямой.

Ответ: $l = \begin{pmatrix} -17 \\ 11 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -22 \\ 15 \end{pmatrix} t$

№ 2 Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ со стороной 16. Точка F — середина ребра BB', а точка E лежит на ребре BB', причём $BE : EB' = 7 : 1$. Найдите угол и расстояние между прямыми AE и $D'F$.



Введем систему координат (как показано на рисунке) и найдем координаты вершин куба, а также точек F, E (см. рисунок).

Найдем координаты a - направляющий вектор FD'. Его координаты - $(16, 16, 8)$. Координаты b - направляющего вектора EA - (0, 16, -14). Координаты c - направляющего вектора FE - (0, 0, 2)

$cos(\angle(AE, D'F)) = cos(\angle(a, b)) = \left|\frac{(a,b)}{|a||b|}\right| = \left|\frac{256-112}{\sqrt{256+256+64}\sqrt{256+196}}\right| = \left|\frac{144}{48\sqrt{113}}\right| = \frac{3}{\sqrt{113}} \Rightarrow \angle(a, b) = arccos(\frac{3}{\sqrt{113}})$

Теперь ищем расстояние между прямыми:

$\rho(AE, D'F) = \frac{vol(P(a,b,c))}{vol(P(a,b)} = \frac{(a,b,c)}{[a,b]} = \frac{512}{96\sqrt{26}} = \frac{8\sqrt{26}}{39}$

$[a, b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 16 & 16 & 8 \\ 0 & 16 & -14 \end{vmatrix} = (-352, 224, 256), |[a, b]| = 96\sqrt{26}$

$(a, b, c) = ([a, b], c) = 512$

Ответ: угол - $arccos(\frac{3}{\sqrt{113}})$, расстояние - $\frac{8\sqrt{26}}{39}$

№ 3

а) а) Линейный оператор $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ имеет в стандартном базисе матрицу A. Найдите все собственные значения оператора φ и базисы всех его собственных подпространств. Выясните, является ли φ диагонализуемым. Если является, то выпишите базис, в котором его матрица диагональна, и саму эту матрицу.

б) Тот же вопрос для линейного оператора с матрицей B

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -8 \\ -2 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

а)
- Ищем собственные значения - корни характеристического многочлена $\chi_1(t)$:
  $\chi_1(t) = \begin{vmatrix} -t+3 & 4 & -8 \\ -2 & -t-4 & 3 \\ 2 & 2 & -t-5 \end{vmatrix} = (-t+3)(t+4)(t+5) + 24 + 32 - 16(t+4) - 6(-t+3) - 8(t+5) = -t^3 - 6t^2 - 11t - 6 = -(t+1)(t^2+5t+6) = -(t+1)(t+3)(t+2) = 0$. Получили три собственных значения: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -2$
- Ищем базисы собственных подпространств - ФСР ОСЛУ с матрицей $A - \lambda_i E$.
  * $\lambda_1 = -1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -8 & 0 \\ -2 & -3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{левую часть к УСВ}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. в ФСР один вектор - $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
  * $\lambda_2 = -3$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & -8 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{левую часть к УСВ}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. в ФСР один вектор - $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
  * $\lambda_3 = -2$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & -8 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{левую часть к УСВ}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. в ФСР один вектор - $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- По критерию диагонализуемости, φ - диагонализуем, так как $\chi_1(t)$ разлагается на линейные множители над $\mathbb{R}$ и алгебраическая кратность всякого собственного значения (для всех это 1) равна геометрической (для всех это 1)
- Базисом, в котором φ диагонализуем, будет набор векторов v_1, v_2, v_3 (их три, как и в стандартном базисе $\mathbb{R}^3$ и они линейно независимы, так как у линейного оператора собственные подпространства линейно независимы [факт с лекции]). Несложно восстановить диагоналюный вид матрицы: В базисе v_1, v_2, v_3 это будет матрица $A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

б) – Ищем собственные значения - корни характеристического многочлена $\chi_2(t)$:

$\chi_2(t) = \begin{vmatrix} -t-2 & -1 & 1 \\ -3 & -t-2 & -2 \\ 0 & 2 & -t-4 \end{vmatrix} = (t+2)(-t-4) - 6 + 4(-t-2) - 3(-t-4) = -t^3 - 8t^2 - 21t - 18 = -(t+2)(t^2+6*t+9) = -(t+2)(t+3)^2 = 0$. Получили два собственных значения: $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$

– Ищем базисы собственных подпространств - ФСР ОСЛУ с матрицей $B - \lambda_i E$.

$*$ $\lambda_1 = -2 : \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{левую часть к УСВ}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. в ФСР один вектор - $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$*$ $\lambda_2 = -3 : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{левую часть к УСВ}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. в ФСР один вектор - $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

– По критерию диагонализуемости φ не диагонализуем, так как алгебраическая кратность собственного значения $\lambda_2 = 2$, но его геометрическая кратность равна 1.

Ответ:

а) – Собственное значение - (-1), базис связанного собственного подпространства - $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

– Собственное значение - (-2), базис - $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

– Собственное значение - (-3), базис - $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

– Диагонализуемый, диаг вид матрицы $A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, базис - v_1, v_2, v_3

б) – Собственное значение - (-2), базис - $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

– Собственное значение - (-3), базис $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

– Не диагонализуем

№ 4 Определите канонический вид, к которому квадратичная форма $Q(x)$ приводится ортогональным преобразованием, и найдите это ортогональное преобразование (выражение старых координат через новые).

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 8x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 10x_1x_3 - 2x_2x_3$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 8 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ - матрица квадратичной формы.

[факт с лекции] для $Q(x)$ существует ортонормированный базис, в котором она имеет канонический вид $Q(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2$, a_2, a_2, a_3 определены однозначно с точностью до перестановки.

Рассмотрим самосопряженный линейный оператор $\varphi = \varphi^*$ с матрицей A, найдем его собственные значения - корни характеристического многочлена $\chi(t)$

$\chi(t) = \begin{vmatrix} 2-t & -1 & 5 \\ -1 & 8-t & -1 \\ 5 & -1 & 2-t \end{vmatrix} = (-t+2)(-t+8)(-t+2) + 5 + 5 - 5(-t+8)5 - (-t+2) - (-t+2) =$
$-t^3 + 12t^2 - 9t - 162 = -(t+3)(t^2 - 15t + 54) = -(t+3)(t-6)(t-9) = 0$

Получили три собственных значения: $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9$

Найдем базисы собственных подпространств - ФСР ОСЛУ с матрицей $A - \lambda_i E$:

- $\lambda_1 : \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{левую часть к УСВ}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. в ФСР один вектор - $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\lambda_2 : \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{левую часть к УСВ}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. в ФСР один вектор - $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- λ_3 :
$\left(\begin{array}{ccc|c} -7 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & -7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{левую часть к УСВ}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. в ФСР один вектор - $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Поскольку собственные пространства самосопряженного линейного оператора попарно ортогональны и линейно независимы, векторы v_1, v_2, v_3 - ортогональный базис.

Ортонормируем этот базис: $v_1' = \frac{1}{|v_1|} v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$v_2' = \frac{1}{|v_2|} v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

$v_3' = \frac{1}{|v_3|} v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

В базисе (v_1', v_2', v_3') матрица линейного оператора выглядит как $diag(-3, 6, 9) \Rightarrow$ канонический вид $Q(x') = -3x_1'^2 + 6x_2'^2 + 9x_3'^2$ (так как базис ортонормированный)

Теперь найдем матрицу перехода от исходного (стандартного) базиса к (v_1', v_2', v_3') - матрица B, в столбцы которых записаны эти векторы. Выражение новых координат через старые - $x' = B^{-1}x \Leftrightarrow Bx' = x \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-3*\sqrt{2}*x_1' + 2*\sqrt{3}*x_2' + \sqrt{6}*x_3'}{6} \\ x_2 = \frac{\sqrt{3}*x_2' - \sqrt{6}*x_3'}{3} \\ x_3 = \frac{3*\sqrt{2}*x_1' + 2*\sqrt{3}*x_2' + \sqrt{6}*x_3'}{6} \end{cases}$. - искомая замена

Ответ: $Q(x') = -3x_1^2 + 6x_2^2 + 9x_3^2, \begin{cases} x_1 = \frac{-3*\sqrt{2}*x_1' + 2*\sqrt{3}*x_2' + \sqrt{6}*x_3'}{6} \\ x_2 = \frac{\sqrt{3}*x_2' - \sqrt{6}*x_3'}{3} \\ x_3 = \frac{3*\sqrt{2}*x_1' + 2*\sqrt{3}*x_2' + \sqrt{6}*x_3'}{6} \end{cases}$.

№ 5 Ортогональный линейный оператор $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ имеет в стандартном базисе матрицу A. Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ имеет канонический вид, и выпишите эту матрицу. Укажите ось и угол поворота, определяемого оператором φ.

$$A = \begin{pmatrix} 2/11 & 6/11 & -9/11 \\ -6/11 & -7/11 & -6/11 \\ 9/11 & -6/11 & -2/11 \end{pmatrix}$$

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ есть три варианта матрицы A' канонического вида оператора.

- $A' = diag(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ - не наш случай, так как для этого φ должен быть диагоналищуемым, а A - симметричной.
- Тогда $A' = \begin{pmatrix} \Pi(\alpha) & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$, где $\Pi(\alpha)$ - матрица поворота на некоторый угол α.

Причем, при таком виде матрицы оператор будет иметь единственное собственное знаяение - 1 или -1. Проверим, какой случай наш, проверив, какое из этих чисел - собственные значения φ.

$det(A+E) = \begin{vmatrix} \frac{13}{11} & \frac{6}{11} & \frac{-9}{11} \\ \frac{-6}{11} & \frac{4}{11} & \frac{-6}{11} \\ \frac{9}{11} & \frac{-6}{11} & \frac{9}{11} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ собственное значение - (-1). Найдем базис связанного с ним собственного подпространства: $\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{13}{11} & \frac{6}{11} & \frac{-9}{11} & 0 \\ \frac{-6}{11} & \frac{4}{11} & \frac{-6}{11} & 0 \\ \frac{9}{11} & \frac{-6}{11} & \frac{9}{11} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{левую часть к УСВ}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. в ФСР один вектор - $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Если дополнить v_3' (нормированную версию v_3) до ортонормированного базиса, в этом базисе у φ будет матрица $\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Проверим, что верхний 2×2 блок - матрица поворота на угол α

- Ищем $v_3' = \frac{1}{\sqrt{13}} v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$
- Теперь найдем v_1', v_2' - векторы, дополняющие v_3' до ортогонального базиса.
  - ищем v_1, v_2 - векторы, дополняющие v_3 до ортогонального базиса, то есть, по сути, базис подпространства $\langle v_3 \rangle^\perp$. Так как v_3 - ФСР некой ОСЛУ, $\langle v_3 \rangle^\perp = \{3x_2 + 2x_3\}$. v_1, v_2 - ФСР этой ОСЛУ - векторы $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
  - Заметим, что v_1, v_2 уже ортогональны.
  - Ортонормируем их: $v_1' = v_1$

    $v_2' = \frac{1}{\sqrt{13}} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$

- координаты $\varphi(v_1') = (A')^{(1)} = v_1' cos\alpha + v_1' sin\alpha$
- $v_1,', v_2', v_3'$ - ОНБ $\Rightarrow$
  - $((\varphi(v_1'), v_1') = \cos\alpha(v_1', v_1') + \sin\alpha(e_2, e_1) = 1\cos\alpha + 0\sin\alpha = \cos\alpha$
  - $((\varphi(v_1'), v_2') = \cos\alpha(v_1', v_2') + \sin\alpha(v_2', v_2') = 0\cos\alpha + 1\sin\alpha = \sin\alpha$
- $((\varphi(v_1'), v_1') = \frac{2}{11} = \cos\alpha$
- $(\varphi(v_1'), v_2') = \frac{39}{11\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{11} = \sin\alpha$. заметим, что $\frac{\pi}{2} > \alpha > 0 \Rightarrow \alpha = \arccos(\frac{2}{11})$
- Получается, в базисе v_1', v_2', v_3' $A' = \begin{pmatrix} 2| /11 & -3\sqrt{13}/11 & 0 \\ 3\sqrt{13}/11 & 2/11 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Оператор φ отражает прямую относительно $\langle v_1', v_2' \rangle$ и поворачивает на угол α вокруг $\langle v_3' \rangle$

Ответ:

- искомый базис – $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3/\sqrt{13} \\ 2/\sqrt{13} \end{pmatrix}$
- искомый вид матрицы – $\begin{pmatrix} 2| /11 & -3\sqrt{13}/11 & 0 \\ 3\sqrt{13}/11 & 2/11 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- искомый угол – $\arccos(\frac{2}{11})$
- искомая ось – $\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 3/\sqrt{13} \\ 2/\sqrt{13} \end{pmatrix} \rangle$