# ИДЗ №5

Даша Оникова, бпми 2112

Январь 2022

**№ 1** Представить матрицу $A$ в виде суммы $r$ матриц ранга 1, где $r = \mathrm{rk}A$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -7 & -1 & 3 & 5 \\ -3 & -32 & -7 & 12 & 17 \\ -22 & -12 & 5 & -6 & -2 \\ 26 & -1 & 16 & 15 & 45 \\ -21 & 0 & -17 & -12 & -41 \end{pmatrix}$$

Для начала найдем $\mathrm{rk}A$.

Элементарные преобразования строк не меняют (строковый) ранг матрицы. При помощи элементарных преобразований строк приведем $A$ к УСВ, чтобы понять, сколько строк в матрице линейно независимы и найти ее ранг.

:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -7 & -1 & 3 & 5 \\ -3 & -32 & -7 & 12 & 17 \\ -22 & -12 & 5 & -6 & -2 \\ 26 & -1 & 16 & 15 & 45 \\ -21 & 0 & -17 & -12 & -41 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Привели к УСВ}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{54}{103} & \frac{91}{103} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{45}{103} & -\frac{93}{103} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{103} & \frac{136}{103} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

В $A'$ три ненулевые строки, (то есть в матрице $A$ - 3 линейно независимые строки), значит $r = \mathrm{rk}A = 3$

Строковый ранг равен столбцовому рангу матрицы (просто рангу матрицы), значит в матрице $A$ - 3 линейно независимых столбца. Обозначим все столбцы $A$ как $v_1, ..v_5$ (векторы из $\mathbb{R}^5$). Заметим, что линейно независимые столбцы образуют базис $\langle v_1, .., v_5 \rangle$.

Выделим этот базис и выразим через него остальные столбцы по алгоритму, чтобы выразить какие-то столбцы матрицы через остальные, и, получив выражения, найти три матрицы ранга 1 (представить данную матрицу в виде суммы матриц, в которых все столбцы будут линейно зависимы):

- Составим матрицу со столбцами $v_1..v_5$ (сделано, это не что иное, как матрица $A$)
- При помощи элементарных преобразований строк приведем матрицу $A$ к УСВ (сделано, получилась матрица $A'$)
- Выберем столбцы, в которых есть ведущие элементы (это столбцы $v_1, v_2, v_3$). Это и есть базис $\langle v_1, .., v_5 \rangle$ (так как эти векторы линейно независимы и остальные векторы выражаются через них)

- В четвертом столбце в первой строке стоит число $\frac{54}{103}$, во второй - $-\frac{45}{103}$, в третьей - $\frac{6}{103}$.
  $\Rightarrow v_4 = \frac{54}{103}v_1 - \frac{45}{103}v_2 + \frac{6}{103}v_3$ (поскольку элементарные преобразования строк матрицы сохраняют линейные зависимости между столбцами)

- В пятом столбце в первой строке стоит число $\frac{91}{103}$, во второй - $-\frac{93}{103}$, в третьей - $\frac{136}{103}$.
  $\Rightarrow v_5 = \frac{91}{103}v_1 - \frac{93}{103}v_2 + \frac{136}{103}v_3$ (поскольку элементарные преобразования строк матрицы сохраняют линейные зависимости между столбцами)

Значит, $A$ представима в виде суммы $A_1, A_2, A_3$, где:

- $A_1 = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 & \frac{54}{103}v_1 & \frac{91}{103}v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -\frac{162}{103} & -\frac{273}{103} \\ -22 & 0 & 0 & -\frac{1188}{103} & -\frac{2002}{103} \\ 26 & 0 & 0 & \frac{1404}{103} & \frac{2366}{103} \\ -21 & 0 & 0 & -\frac{1134}{103} & -\frac{1911}{103} \end{pmatrix}$.
  Так как все столбцы в матрице линейно зависимы, ее ранг равен 1.

- $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & v_2 & 0 & -\frac{45}{103}v_2 & -\frac{93}{103}v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 0 & \frac{315}{103} & \frac{651}{103} \\ 0 & -32 & 0 & \frac{1440}{103} & \frac{2976}{103} \\ 0 & -12 & 0 & \frac{540}{103} & \frac{1116}{103} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{45}{103} & \frac{93}{103} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
  Так как все столбцы в матрице линейно зависимы, ее ранг равен 1.

- $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v_3 & \frac{6}{103}v_3 & \frac{136}{103}v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -\frac{6}{103} & -\frac{136}{103} \\ 0 & 0 & -7 & -\frac{42}{103} & -\frac{952}{103} \\ 0 & 0 & 5 & \frac{30}{103} & \frac{680}{103} \\ 0 & 0 & 16 & \frac{96}{103} & \frac{2176}{103} \\ 0 & 0 & -17 & -\frac{102}{103} & -\frac{2312}{103} \end{pmatrix}$.
  Так как все столбцы в матрице линейно зависимы, ее ранг равен 1.

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -\frac{162}{103} & -\frac{273}{103} \\ -22 & 0 & 0 & -\frac{1188}{103} & -\frac{2002}{103} \\ 26 & 0 & 0 & \frac{1404}{103} & \frac{2366}{103} \\ -21 & 0 & 0 & -\frac{1134}{103} & -\frac{1911}{103} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -7 & 0 & \frac{315}{103} & \frac{651}{103} \\ 0 & -32 & 0 & \frac{1440}{103} & \frac{2976}{103} \\ 0 & -12 & 0 & \frac{540}{103} & \frac{1116}{103} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{45}{103} & \frac{93}{103} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -\frac{6}{103} & -\frac{136}{103} \\ 0 & 0 & -7 & -\frac{42}{103} & -\frac{952}{103} \\ 0 & 0 & 5 & \frac{30}{103} & \frac{680}{103} \\ 0 & 0 & 16 & \frac{96}{103} & \frac{2176}{103} \\ 0 & 0 & -17 & -\frac{102}{103} & -\frac{2312}{103} \end{pmatrix}$$

Проверим, что это действительно так:

$$\begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 & \frac{54}{103}v_1 & \frac{91}{103}v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & v_2 & 0 & -\frac{45}{103}v_2 & -\frac{93}{103}v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & v_3 & \frac{6}{103}v_3 & \frac{136}{103}v_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \frac{54}{103}v_1 - \frac{45}{103}v_3 + \frac{6}{103}v_3 & \frac{91}{103}v_1 - \frac{93}{103} + \frac{136}{103}v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{pmatrix} = A$$

**Ответ:** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -\frac{162}{103} & -\frac{273}{103} \\ -22 & 0 & 0 & -\frac{1188}{103} & -\frac{2002}{103} \\ 26 & 0 & 0 & \frac{1404}{103} & \frac{2366}{103} \\ -21 & 0 & 0 & -\frac{1134}{103} & -\frac{1911}{103} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -7 & 0 & \frac{315}{103} & \frac{651}{103} \\ 0 & -32 & 0 & \frac{1440}{103} & \frac{2976}{103} \\ 0 & -12 & 0 & \frac{540}{103} & \frac{1116}{103} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{45}{103} & \frac{93}{103} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -\frac{6}{103} & -\frac{136}{103} \\ 0 & 0 & -7 & -\frac{42}{103} & -\frac{952}{103} \\ 0 & 0 & 5 & \frac{30}{103} & \frac{680}{103} \\ 0 & 0 & 16 & \frac{96}{103} & \frac{2176}{103} \\ 0 & 0 & -17 & -\frac{102}{103} & -\frac{2312}{103} \end{pmatrix}$

**№ 2** В пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы два базиса: $\mathbb{e} = (e_1, e_2, e_3)$ и $\mathbb{e}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ и вектор $v$.

(а) Доказать, что наборы векторов $\mathbb{e}$ и $\mathbb{e}'$ действительно базисы в $\mathbb{R}^3$

(б) Найти матрицу перехода от базиса $\mathbb{e}$ к базису $\mathbb{e}'$.

(с) Найти координаты вектора $v$ в базисе $\mathbb{e}'$.

---

$$e_1 = (-3, 2, 3),\ e_2 = (3, 1, 1),\ e_3 = (-2, 1, -3),\ e'_1 = (7, -2, -5),\ e'_2 = (-7, 6, 0),\ e'_3 = (2, 5, -4)$$

Координаты $v$ в базисе $\mathbb{e}$ - (3, -1, 4)

Пусть $\mathbb{u} = (u_1, u_2, u_3)$ - стандартный базис в $\mathbb{R}^3, u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (0, 1, 0), u_3 = (0, 0, 1)$. В этом базисе три вектора, значит во всяком базисе $\mathbb{R}^3$ - три вектора. (Так как число векторов в базисе пространства не зависит от выбора базиса). При этом, любой набор из трех линейно независимых векторов будет базисом $\mathbb{R}^3$ (следствие из теоремы о том, что всякую линейно независимую систему векторов какого-то конечномерного пространства можно дополнить до базиса всего пространства)

(а) В обоих данных наборах по три вектора. Чтобы доказать, что они (наборы) являются базисами в $\mathbb{R}^3$ осталось доказать, что в обоих наборах векторы линейно независимы. Это удобно делать через элементарные преобразования строк матриц, в строках которых написаны данные векторы: если в наборе есть вектор, который как-либо линейно выражается через остальные, при попытке привести к УСВ матрицу, он превратится в строку нулей.

– Докажем, что векторы из $\mathbb{e}$ линейно независимы: для этого приведем матрицу $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$ к УСВ элементарными преобразованиями строк: если в УСВ не окажется нулевых строк, в наборе $\mathbb{e}$ не будет линейно зависимых векторов.

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Привели к УСВ}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В матрице нет нулевых строк, значит векторы $e_1, e_2, e_3$ - линейно независимы и являются базисом $\mathbb{R}^3$

– Докажем, что векторы из $\mathbb{e}'$ линейно независимы: для этого приведем матрицу $\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix}$ к УСВ элементарными преобразованиями строк: если в УСВ не окажется нулевых строк, в наборе $\mathbb{e}'$ не будет линейно зависимых векторов.

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & -5 \\ -7 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Привели к УСВ}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В матрице нет нулевых строк, значит векторы $e'_1, e'_2, e'_3$ - линейно независимы и являются базисом $\mathbb{R}^3$

(б) Пусть $C$ - матрица перехода от $\mathbb{e}$ к $\mathbb{e}'$ (искомая). То есть, $(e_1', e_2', e_3') = (e_1, e_2, e_3) \cdot C$

$C_1$ - матрица перехода от $\mathbb{u}$ к $\mathbb{e}$, $C_2$ - матрица перехода от $\mathbb{u}$ к $\mathbb{e}'$.

Чтобы найти $C$, выразим наборы вектороы $\mathbb{e}$ и $\mathbb{e}'$ через векторы стандартного базиса и соответственные матрицы перехода, а затем - выразим $\mathbb{e}'$ через $\mathbb{e}$ и некоторую "комбинацию"матриц $C_1$ и $C_2$. И $C_1$, и $C_2$ обратимы (как матрицы перехода от одного базиса к другому, более, в пункте (а) были рассмотрены транспонированные варианты этих матриц, УСВ которых имеет определитель 1, а значит, сами матрицы не могут иметь определитель 0, операция транспонирования определитель не изменяет)

По определению, $C_1 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ (матрица, столбцы которой - векторы $e_1, e_2, e_3$) При этом, $(e_1, e_2, e_3) = (u_1, u_2, u_3) \cdot C_1$ (1)

По определению, $C_2 = \begin{pmatrix} 7 & -7 & 2 \\ -2 & 6 & 5 \\ -5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ (матрица, столбцы которой - векторы $e_1', e_2', e_3'$) При этом, $(e_1', e_2', e_3') = (u_1, u_2, u_3) \cdot C_2$ (2)

(1) $(e_1, e_2, e_3) = (u_1, u_2, u_3) \cdot C_1 \overset{\text{домножим обе части уравнения}}{\underset{\text{на } C^{-1} \text{ справа}}{\Longleftrightarrow}} (e_1, e_2, e_3) \cdot C_1^{-1} = (u_1, u_2, u_3)$.

Подставим $(e_1, e_2, e_3) \cdot C_1^{-1}$ в (2):

$(e_1', e_2', e_3') = (u_1, u_2, u_3) \cdot C_2 \iff (e_1', e_2', e_3') = (e_1, e_2, e_3) \cdot C_1^{-1} \cdot C_2$. Получается, искомая $C = C_1^{-1} \cdot C_2$.

Найдем $C_1^{-1}$ (она существует по доказанному выше). Для этого приведем левую часть расширенной матрицы вида $(C_1|E)$ к УСВ элементарными преобразованиями строк. Слева получится $E$, а справа - $C_1^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Привели к УСВ}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{41} & \frac{7}{41} & \frac{5}{41} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{41} & \frac{15}{41} & -\frac{1}{41} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{41} & \frac{12}{41} & -\frac{9}{41} \end{array}\right)$$

$C_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{41} & \frac{7}{41} & \frac{5}{41} \\ \frac{9}{41} & \frac{15}{41} & \frac{-1}{41} \\ \frac{-1}{41} & \frac{12}{41} & \frac{-9}{41} \end{pmatrix}$, $\quad C = C_1^{-1} \cdot C_2 = \begin{pmatrix} \frac{-67}{41} & \frac{70}{41} & \frac{7}{41} \\ \frac{38}{41} & \frac{27}{41} & \frac{97}{41} \\ \frac{14}{41} & \frac{79}{41} & \frac{94}{41} \end{pmatrix}$

(с) Нам даны координаты $v$ в базисе $\mathbb{e}$ и известна $C$ - матрица перехода от $\mathbb{e}$ к $\mathbb{e}'$. Пусть искомые координаты (координаты $v$ в $\mathbb{e}'$) - $(v_1, v_2, v_3)$. Найдем их по алгоритму:

- $(e_1', e_2', e_3') = (e_1, e_2, e_3) \cdot C$ - выражение одного базиса через другой
- $v = 3e_1 - e_2 + e_3 = (e_1, e_2, e_3) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ - выражение вектора через координаты в $\mathbb{e}$.
- $v = v_1 \cdot e_1' + v_2 \cdot e_2' + v_3 \cdot e_3' = (e_1', e_2', e_3') \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ - выражение вектора через координаты в $\mathbb{e}'$.

– Получается, что $(e_1, e_2, e_3) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = (e'_1, e'_2, e'_3) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \iff$

$$(e_1, e_2, e_3) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = (e_1, e_2, e_3) \cdot C \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \underset{\text{как базис } \mathbb{R}^3}{\overset{\text{так как } (e_1, e_2, e_3) \text{ линейно независимы}}{\iff}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \underset{\text{перехода от одного базиса к другому}}{\overset{C \text{ обратима как матрица}}{\iff}} C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

– Остается посчитать: чтобы найти $C^{-1}$ риведем левую часть расширенной матрицы вида $(C|E)$ к УСВ элементарными преобразованиями строк. Слева получится $E$, а справа - $C^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{-67}{41} & \frac{70}{41} & \frac{7}{41} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{38}{41} & \frac{27}{41} & \frac{97}{41} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{14}{41} & \frac{79}{41} & \frac{94}{41} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Привели к УСВ}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-125}{123} & \frac{-49}{41} & \frac{161}{123} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-18}{41} & \frac{-52}{41} & \frac{55}{41} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{64}{123} & \frac{51}{41} & \frac{-109}{123} \end{array}\right)$$

– $C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-125}{123} & \frac{-49}{41} & \frac{161}{123} \\ \frac{-18}{41} & \frac{-52}{41} & \frac{55}{41} \\ \frac{64}{123} & \frac{51}{41} & \frac{-109}{123} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{416}{123} \\ \frac{218}{41} \\ \frac{-397}{123} \end{pmatrix}$

**Ответ:** (б): $\begin{pmatrix} \frac{-67}{41} & \frac{70}{41} & \frac{7}{41} \\ \frac{38}{41} & \frac{27}{41} & \frac{97}{41} \\ \frac{14}{41} & \frac{79}{41} & \frac{94}{41} \end{pmatrix}$, (с): $(\frac{416}{123}, \frac{218}{41}, \frac{-397}{123})$

**№ 3** Найте базис и размерность каждого из подпространств $L_1$, $L_2$, $U = L_1 + L_2$, $W = L_1 \cap L_2$ пространства $\mathbb{R}^5$

$L_1 = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, \rangle$

$$a_1 = (-4, 2, 0, -1, 0),\ a_2 = (-3, 4, -4, -5, 2), a_3 = (1, 19, -3, 10, -6), a_4 = (-3, -5, 1, -4, 2)$$

$L_2 = \langle b_1, b_2, b_3, b_4, \rangle$

$$b_1 = (13, -19, 3, -3, 5),\ b_2 = (-5, 9, -1, 2, -2), b_3 = (3, -1, 1, 1, 1),\ b_4 = (-2, 6, -8, -9, 4)$$

Размерность подпространства - число векторов в базисе попространства. Чтобы найти $\dim(L_1)$ и $\dim(L_2)$ нужно просто найти их базисы. Это можно сделать по алгоритму (для этого для каждого подпространства запишем данные векторы в строки матрицы, приведем эту матрицу к СВ при помощи элементарных преобразований строк, выберем все ненулевые строки в СВ. это и будет базис соответствующего подпространства):

- $L_1$:
  - Запишем $a_1, a_2, a_3, a_4$ в строки матрицы $A$ и при помощи элементарных преобразований строк приведем полученную матрицу к СВ.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -4 & -5 & 2 \\ 1 & 19 & -3 & 10 & -6 \\ -3 & -5 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Привели к СВ}} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & -16 & -17 & 8 \\ 0 & 0 & 282 & 429 & -216 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

  При элементарных преобразованиях строк $\langle A_{(1)}, ...A_{(4)} \rangle$ сохраняется ($\langle A_{(1)}, ...A_{(4)} \rangle = \langle A'_{(1)}, ...A'_{(4)} \rangle$). Эта линейная оболочка также будет совпадать с $\langle A'_{(1)}, A'_{(2)}, A'_{(3)} \rangle$ - линейной оболочкой максимальной линейно независимой системы строк $A'$. Получается, векторы, записанные в 1, 2, 3 строки матрицы $A'$ с одной стороны линейно независимы, а с другой - "порождают"$L_1$ (их линейная оболочка совпадает с $L_1$). Таким образом, эти векторы $(p_1, p_2, p_3)$ - базис $L_1$.

$$p_1 = (-4, 2, 0, -1, 0),\ p_2 = (0, 10, -16, -17, 8),\ p_3 = (0, 0, 282, 429, -216)$$

- $L_2$:
  - Запишем $b_1, b_2, b_3, b_4$ в строки матрицы $B$ и при помощи элементарных преобразований строк приведем полученную матрицу к СВ.

$$B = \begin{pmatrix} 13 & -19 & 3 & -3 & 5 \\ -5 & 9 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 6 & -8 & -9 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Привели к СВ}} \begin{pmatrix} 13 & -19 & 3 & -3 & 5 \\ 0 & 22 & 2 & 11 & -1 \\ 0 & 0 & -86 & -121 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B'$$

  При элементарных преобразованиях строк $\langle B_{(1)}, ...B_{(4)} \rangle$ сохраняется ($\langle B_{(1)}, ...B_{(4)} \rangle = \langle B'_{(1)}, ...B'_{(4)} \rangle$). Эта линейная оболочка также будет совпадать с $\langle B'_{(1)}, B'_{(2)}, B'_{(3)} \rangle$ - линейной оболочкой максимальной линейно независимой системы строк $B'$. Получается, векторы, записанные в 1, 2, 3 строки матрицы $B'$ с одной стороны линейно независимы, а с другой - "порождают"$L_2$ (их линейная оболочка совпадает с $L_2$). Таким образом, эти векторы $(q_1, q_2, q_3)$ - базис $L_2$.

$$q_1 = (13, -19, 3, -3, 5),\ \ q_2 = (0, 22, 2, 11, -1),\ \ q_3 = (0, 0, -86, -121, 54)$$

Размерность подпространства $L_1$ - 3, подпространства $L_2$ - 3, базис $L_1$ - $(p_1, p_2, p_3)$ (см выше), базис $L_2$ - $(q_1, q_2, q_3)$

Базис подпространства $U$ можно найти по алгоритму поиска базиса суммы подпространств, заданных линейной оболочкой, так как $L_1 = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle,\ \ L_2 = \langle q_1, q_2, q_3 \rangle$ (привести элементарными преобразованиями строк к СВ матрицу $C$, столбцами которой будут векторы $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$, базисом будут векторы, которым будут соответствовать столбцы с ведущими элементами строк в СВ этой матрицы).

$$C = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 0 & -19 & 22 & 0 \\ 0 & -16 & 282 & 3 & 2 & -86 \\ -1 & -17 & 429 & -3 & 11 & -121 \\ 0 & 8 & -216 & 5 & -1 & 54 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Привели к СВ}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & \frac{-25}{2} & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 282 & -17 & \frac{186}{5} & -86 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-77}{47} & \frac{-385}{47} & \frac{462}{47} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = C'$$

Ведущие элементы строк содержатся в 1, 2, 3, 4 столбцах. Значит, векторы $p_1, p_2, p_3, q_1$ - базис $U$ (получилось, что эти векторы - базис $\langle p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3 \rangle$, а эта линейная оболочка совпадает с $\{p + q | p \in L_1, q \in L_2\} = U$). Размерность подпространства $U$ - 4, базис - $(p_1, p_2, p_3, q_1)$ (см выше)

Базис подпространства $W$ можно найти по алгоритму поиска базиса пересеяения двух подпространств, заданных ОСЛУ (найти ФСР ОСЛУ из уравнений ОСЛУ, соответствующей $L_1$ и ОСЛУ, соответствующей $L_2$). Правда, для этого сначала необходимо предстваить $L_1$ и $L_2$ через ОСЛУ:

- представить $L_1$ как множество решений некоторой ОСЛУ можно по алгоритму (найти ФСР ОСЛУ $Dx = 0$, где $D$ - матрица, строки которой - векторы $p_1, p_2, p_3$ (тк $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle = L_1$), искомой ОСЛУ будет $D'x = 0$, где $D'$ - матрица, строки которой - векторы из найденной ФСР).
  - Найдем ФСР ОСЛУ $Dx = 0$ по алгоритму поиска ФСР (привести матрицу к УСВ, найти свободные переменные, поочередно фиксируя их значения равными $\lambda \neq 0$, а значения остальных свободных переменных - нулями найти базис пространства решений ОСЛУ):

    $$D = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & -16 & -17 & 8 \\ 0 & 0 & 282 & 429 & -216 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Привели к УСВ}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{29}{47} & -\frac{10}{47} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{69}{94} & -\frac{20}{47} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{143}{94} & -\frac{36}{47} \end{pmatrix}$$

    Свободные переменные стоят в 3 и 4 столбцах (переменные $x_4$ и $x_5$).

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|
| -58 | -69 | -143 | 94 | 0 |
| 10 | 20 | 36 | 0 | 47 |

То есть, в ФСР ОСЛУ $Dx = 0$ два вектора - $d_1 = (-258, -69, -143, 94, 0)$ и $d_2 = (10, 10, 36, 0, 47)$

–

$$D' = \begin{pmatrix} -58 & -69 & -143 & 94 & 0 \\ 10 & 20 & 36 & 0 & 47 \end{pmatrix}$$

- представить $L_2$ как множество решений некоторой ОСЛУ можно по алгоритму (найти ФСР ОСЛУ $Fx = 0$, где $F$ - матрица, строки которой - векторы $q_1, q_2, q_3$ (тк $\langle q_1, q_2, q_3 \rangle = L_2$), искомой ОСЛУ будет $F'x = 0$, где $F'$ - матрица, строки которой - векторы из найденной ФСР).

  – Найдем ФСР ОСЛУ $Fx = 0$ по алгоритму поиска ФСР (привести матрицу к УСВ, найти свободные переменные, поочередно фиксируя их значения равными $\lambda \neq 0$, а значения остальных свободных переменных - нулями найти базис пространства решений ОСЛУ):

$$F = \begin{pmatrix} 13 & -19 & 3 & -3 & 5 \\ 0 & 22 & 2 & 11 & -1 \\ 0 & 0 & -86 & -121 & 54 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Привели к УСВ}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{86} & \frac{47}{86} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{16}{43} & \frac{1}{86} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{121}{86} & -\frac{27}{43} \end{pmatrix}$$

  Свободные переменные стоят в 3 и 4 столбцах (переменные $x_4$ и $x_5$).

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | -32 | -121 | 86 | 0 |
| -47 | -1 | 54 | 0 | 86 |

  То есть, в ФСР ОСЛУ $Fx = 0$ два вектора - $f_1 = (1, -32, -121, 86, 0)$ и $f_2 = (-47, -1, 54, 0, 86)$

  –

$$F' = \begin{pmatrix} 1 & -32 & -121 & 86 & 0 \\ -47 & -1 & 54 & 0 & 86 \end{pmatrix}$$

Теперь, чтобы найти базис $W$, остается найти ФСР ОСЛУ $\begin{pmatrix} D' \\ F' \end{pmatrix} x = 0$ (так как все векторы из $W = L_1 \cap L_2$ - решения как ОСЛУ $D'x = 0$ (тк лежат в $L_1$), так и $F'x = 0$ (тк лежат в $L_2$)). Сделаем это по алгоритму посика ФСР (привести матрицу к УСВ, найти свободные переменные, поочередно фиксируя их значения равными $\lambda \neq 0$, а значения остальных свободных переменных - нулями найти базис пространства решений ОСЛУ)

$$\begin{pmatrix} D' \\ F' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -58 & -69 & -143 & 94 & 0 \\ 10 & 20 & 36 & 0 & 47 \\ 1 & -32 & -121 & 86 & 0 \\ -47 & -1 & 54 & 0 & 86 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Привели к УСВ}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{12}{5} & -\frac{49}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{24}{5} & \frac{93}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Свободных переменных две, это $c_4,\ x_5$.

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|
| 12 | -24 | 10 | 5 | 0 |
| 49 | -93 | 25 | 0 | 10 |

Итак, в ФСР ОСЛУ 2 вектора. Это $w_1 = (12, -24, 10, 5, 0),\ w_2 = (49, -93, 25, 0, 10)$. Это базис пространства решений ОСЛУ $\begin{pmatrix} D' \\ F' \end{pmatrix} x = 0$ или базис подпространства $W = L_1 \cap L_2$. Размерность этого подпространства равна 2.

Задача решена. Осталось проверить, что $\dim(L_1) + \dim(L_2) = \dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2) = \dim(U) + \dim(W)$. Это верно $(3 + 3 = 4 + 2 = 6)$.

**Ответ:**

- $\dim(L_1) = 3$, базис $L_1 - (-4, 2, 0, -1, 0),\ (0, 10, -16, -17, 8),\ (0, 0, 282, 429, -216)$
- $\dim(L_2) = 3$, базис $L_2 - (13, -19, 3, -3, 5),\ (0, 22, 2, 11, -1),\ (0, 0, -86, -121, 54)$
- $\dim(U) = 4$, базис $U - (-4, 2, 0, -1, 0),\ (0, 10, -16, -17, 8),\ (0, 0, 282, 429, -216), (13, -19, 3, -3, 5)$
- $\dim(W) = 2$, базис $W - (12, -24, 10, 5, 0),\ (49, -93, 25, 0, 10)$

**№ 4** Пусть $U$ - подпространство в $\mathbb{R}^5$, порождённое векторами $v_1, v_2, v_3, v_4$. Указать базис какого-нибудь подпространства $W \subset \mathbb{R}^5$ , такого что $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$ и $W$ не представимо в виде линейной оболочки одних лишь векторов стандартного базиса пространства $\mathbb{R}^5$.

$$v_1 = (8, -10, 14, 6, -5),\ v_2 = (-13, -2, -14, 5, 4),\ v_3 = (-11, 12, 3, -3, -6),$$
$$v_4 = (-40, 30, -39, -10, 8)$$

Необходимо найти такое подпространство $W$, что в его пересечении с $U$ не будет никаких векторов, кроме нулегого.

Сначала необходимо найти базис подпространства $U$, дополнить его до базиса $\mathbb{R}^5$, чтобы понять, какие векторы будут находиться в $W$. Сначала найдем базис. Это можно сделать по алгоритму поиска какого-нибудь базиса линейной оболочки. (привести матрицу $A$, в строках которой записаны векторы $v_1, v_2, v_3, v_4$ к СВ элементарными пребразованиями строк и выписать ненулевые строки. Они и будут искомым базисом).

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -10 & 14 & 6 & -5 \\ -13 & -2 & -14 & 5 & 4 \\ -11 & 12 & 3 & -3 & -6 \\ -40 & 30 & -39 & -10 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Привели к СВ}} \begin{pmatrix} 8 & -10 & 14 & 6 & -5 \\ 0 & -146 & 70 & 118 & -33 \\ 0 & 0 & 1563 & 280 & -911 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

При элементарных преобразованиях строк $\langle A_{(1)}, ...A_{(4)} \rangle$ сохраняется $(\langle A_{(1)}, ...A_{(4)} \rangle = = \langle A'_{(1)}, ...A'_{(4)} \rangle)$. Эта линейная оболочка также будет совпадать с $\langle A'_{(1)}, A'_{(2)}, A'_{(3)} \rangle$ - линейной оболочкой максимальной линейно независимой системы строк $A'$. Получается, векторы, записанные в 1, 2, 3 строки матрицы $A'$ с одной стороны линейно независимы, а с другой - "порождают"$U$ (их линейная оболочка совпадает с $U$). Таким образом, эти векторы $(a_1, a_2, a_3)$ - базис $U$.

$$a_1 = (8, -10, 14, 6, -5),\ a_2 = (0, -146, 70, 118, -33),\ a_3 = (0, 0, 1563, 280, -911)$$

Теперь дополним базис $U$ до базиса всего пространства. Для этого к нему надо добавиь 2 вектора (пусть эти векторы - $b_1$ и $b_2$), система $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2$ - линейно независима. (получится набор из пяти линейно независимых вектором, он и будет базисом пространства $\mathbb{R}^n$, имеющего размерность 5). Эти векторы будут базисом $W$: во-первых, тогда, из-за линейной независимости, пересечение двух подпространств $(U \cup W)$ будет содержать только нудевой вектор, во-вторых, линейная оболочка этих векторов будет равна всему пространству $\mathbb{R}^5$. Однако стандартным алгоритмом воспользоваться не вуйдет из-за условия "$W$ не представимо в виде линейной оболочки одних лишь векторов стандартного базиса пространства $\mathbb{R}^5$".

Рассмотрим матрицу $B$, в строках которой записаны векторы $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2$ и ее ступенчатый вид - матрицу $B'$.

$$B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Заметим, что первые три строки в этой матрицы уже имеют ступенчатый вид (см выше) $\Rightarrow$ применять элементарные преобразования строк надо только к строкам 4 и 5. При этом, после элементарных преобразований $b_1$ должен иметь вид $(0, 0, 0, x_1, x_2)$, а $b_2 - (0, 0, 0, 0, x_3)$, $x_1, x_3 \neq 0$.

Но сами векторы $b_1, b_2$ одновременно такой вид иметь не могут: тогда их линейная оболочка (иными словами - подпространство $W$) была бы представима в виде линейной оболочки векторов стандартного базиса $e_4, e_5$. Допустим, вектор $b_1$ до элементарных преобразований имел вид $(0, 0, y_1, x_1 + y_2, x_2 + y_3)$, а вектор $b_2$ - имел вид $(0, 0, 0, 0, x_3)$, $y_1 \neq 0$, причем какое-то элементарное преобразование превращало бы $B$ в $B'$. Несложно подобрать и возможные $y_1, y_2, y_3$, и возможное элементарное преобразование: $y_1 = 1563, y_2 = 280, y_3 = -911$, к $B$ применялось бы $Э_1, (4, 3, -1)$. Теперь подберем значения для $x_1, x_2, x_3$. Например: $x_1 = x_3 = 1, x_2 = 0$. Получается, $b_1 = (0, 0, 1563, 281, -911), \quad b_2 = (0, 0, 0, 0, 1)$.

$$B = \begin{pmatrix} 8 & -10 & 14 & 6 & -5 \\ 0 & -146 & 70 & 118 & -33 \\ 0 & 0 & 1563 & 280 & -911 \\ 0 & 0 & 1563 & 281 & -911 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Э_{1(4,3,-1)}} \begin{pmatrix} 8 & -10 & 14 & 6 & -5 \\ 0 & -146 & 70 & 118 & -33 \\ 0 & 0 & 1563 & 280 & -911 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B'$$

Поскольку в $B'$ нет нулевых строк (то есть, в ней все строки линейно независимы и ранг $B' = 5$), а элементарные преобразования строк не меняют ранг матрицы, то есть ранг $B = 5$ и все строки в ней линейно независимы, $\quad U = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle, W = \langle b_1, b_2 \rangle, \quad U \cap W = 0$. Более того, набор векторов $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2$ - это набор из пяти линейно независимых векторов в пространстве размерности 5, то есть это - базис пространства $\mathbb{R}^5 \quad \Rightarrow \mathbb{R}^5 = \langle a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 \rangle \quad \Rightarrow Y \oplus W = \mathbb{R}^5$. При этом, подпространство $W$ невозмжно представить в виде линейной оболочки (двух) векторов из стандартного базиса $\mathbb{R}^5$, так как в подпространстве $W$ присутствуют векторы, у которых три ненулевые координаты в стандартном базисе $\mathbb{R}^5$. (например - вектор $(0, 0, 1563, 281, -910) = (0, 0, 1563, 281, -911) + (0, 0, 0, 0, 1)$)

**Ответ:** базис $W$ - векторы $(0, 0, 1563, 281, -910), \quad (0, 0, 0, 0, 1)$

**№ 5** В пространстве $\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R})$ рассмотрим подпространства $U = \langle v_1, v_2\rangle$ и $W = \langle v_3, v_4\rangle$

(а) Доказать, что $\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R}) = U \oplus W$

(б) Найти проекцию вектора $\xi$ на подпространство $W$ вдоль подпространства $U$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 7 & -11 \\ 14 & 13 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -14 & -3 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} -15 & 4 \\ 3 & -12 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xi = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -2 & 21 \end{pmatrix}$$

(а) Пространство - прямая сумма своих подпространств, если:

- Пересечение этих подпространств содержит единственный элемент - нулевой элемент (в случае этой задачи - квадратную нулевую матрицу размерности 2)
- Пространство - сумма этих подпространств (то есть всякий элемент пространства представим в виде суммы элементов заданных подпространств)

То есть, чтобы доказать, что $\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R}) = U \oplus W$ сначала придется доказать, что $U \cap W = 0$ (здесь $0$ - это $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$). Чтобы доказать это, найдем базисы этих подпространств (нельзя пользоваться матрицами из условия, так как они могут быть линейно зависимы). Если окажется, что базисы линейно независимы, $U \cap W = 0$. Иначе - пересечение подпространств будет содержать больше матриц (каждая матрица из $U$ выражается через базис $U$, ровно как и каждая матрица из $W$ выражается через базис $W$. Если какую-то матрицу из базиса $U$ можно выразить через базис $W$ (какую-то матрицу из базиса $W$ можно выразить через базис $U$), эта матрица (и все матрицы, полученные умножением ее на скаляр) будет лежать в $U \cap W$).

- Найдем базис $U$: базис подпространства - набор линейно независимых обхектов из этого пространства, линейная оболочка которых равна самому подпространству. $\langle v_1, v_2\rangle = U \Rightarrow$ если $v_1, v_2$ - линейно независимы, они являются базисом $U$. Эти матрицы и правда линейно независимы, так как не существует такой нетривиальной линейной комбинации этих матриц, равной нулю (это, в целом, заметно: чтобы в матрице, полученной линейной комбинацией $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ на месте (2, 1) стоял ноль, необходимо, чтобы $\lambda_1 = \lambda_2$. Однако тогда на других позициях в полученной матрице нулей не будет). Итого, $v_1, v_2-$ базис $U$
- Найдем базис $W$: базис подпространства - набор линейно независимых обхектов из этого пространства, линейная оболочка которых равна самому подпространству. $\langle v_3, v_4\rangle = W \Rightarrow$ если $v_3, v_4$ - линейно независимы, они являются базисом $W$. Эти матрицы и правда линейно независимы, так как не существует такой нетривиальной линейной комбинации этих матриц, равной нулю (это, в целом, заметно: чтобы в матрице, полученной линейной комбинацией $\lambda_1 v_3 + \lambda_2 v_4$ на месте (2, 1) стоял ноль, необходимо, чтобы $0.75\lambda_1 = \lambda_2$. Однако тогда на других позициях в полученной матрице нулей не будет). Итого, $v_3, v_4-$ базис $W$
- Проверим линейную независимость базисов: рассмотрим линейную комбинацию $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4$ и приравняем ее к нулю. Найдем все возможные значения $x_1, ..x_4$: если

существует набор, в котором не все переменные равны нулю, $v_1, .., v_4$ - линейно зависимы:

$$x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3+x_4v_4 = x_1\begin{pmatrix} 7 & -11 \\ 14 & 13 \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -14 & -3 \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} -15 & 4 \\ 3 & -12 \end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix} 11 & 2 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 - 15x_3 + 11x_4 = 0 \\ -11x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 14x_1 - 14x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ 13x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$

Решим ОСЛУ: приведем расширенную матрицу коэффициентов к УСВ элементарными преобразованиями строк:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 5 & -15 & 11 & 0 \\ -11 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 14 & -14 & 3 & -4 & 0 \\ 13 & -3 & -12 & -7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Привели к УСВ}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Выходит, что

$$x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

То есть, базисы $U$ и $W$ линейно независимы, значит $U \cap W = 0$

Теперь докажем, что $U + W = \mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R})$

$U + W = \{v | v = u + w, u \in U, w \in W\} = \langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle = \mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R})$ (так как всякий вектор из $U$ и из $W$ выражается через базис соответствующего подпространства). Последнее равенство верно:

- $v_1, v_2, v_3, v_4$ - линейно независимы (доказано выше)
- Существует базис $\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R})$, состоящий из четырех матриц (это единичные матрицы $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$). Значит размерность выбранного пространства матриц - 4
- Количество элементов в базисе не зависит от выбора базиса (вне зависимости от того, рассматриваем мы пространство матриц или векторов)
- Всякую линейно независимую систему векторов (из некоторого конечномерного вектороного пространства) можно дополнить до базиса этого конечномерного вектороного пространства. Так же работает и с матрицами: всякий линейно незасимый набор матриц из конечномерного пространства матриц можно дополнить до базиса этого пространства

Однако в данном случае ничего дополнять не придется: в базисе $\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R})$ должно быть 4 матрицы, эти матрицы - $v_1, v_2, v_3, v_4$

Итого, $U \cap W = 0, U + W = \mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R}) \Rightarrow U \oplus W = \mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R})$

(б) По доказанному $U \oplus W = \mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall v \in \mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R}) \exists!\ u \in U,\ w, \in W :\ u + w = v$. Проекция на подпространство $W$ вдоль $U$ - вектор $w$.

Чтобы найти проекцию $\xi$ на $W$ вдоль $U$, надо найти такую матрицу $w \in W$, что $\exists\ u \in U: \quad \xi = u + w$. (и $u$ и $w$ - единственные)
Так как $u \in U, v_1, v_2$ - базис $U$, $\exists! \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = u$
Так как $w \in W, v_3, v_4$ - базис $W$, $\exists! \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R} : \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = w$
$\Rightarrow \exists! \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R} : \xi = \underbrace{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2}_{u} + \underbrace{\lambda_3 v_3 + \lambda_3 4 v_4}_{w}$. Найдем $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, решив СЛУ, а потом найдем $w$:

$$\xi = \underbrace{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2}_{u} + \underbrace{\lambda_3 v_3 + \lambda_3 4 v_4}_{w} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -2 & 21 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 7 & -11 \\ 14 & 13 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -14 & -3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -15 & 4 \\ 3 & -12 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7\lambda_1 + 5\lambda_2 - 15\lambda_3 + 11\lambda_4 = 7 \\ -11\lambda_1 - 6\lambda_2 + 4\lambda_3 + 2\lambda_4 = 7 \\ 14\lambda_1 - 14\lambda_2 + 3\lambda_3 - 4\lambda_4 = -2 \\ 13\lambda_1 - 3\lambda_2 - 12\lambda_3 - 7\lambda_4 = 21 \end{cases}$$

Приведем к УСВ элементарными преобразованиями строк расширенную матрицу СЛУ:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 5 & -15 & 11 & 7 \\ -11 & -6 & 4 & 2 & 7 \\ 14 & -14 & 3 & -4 & -2 \\ 13 & -3 & -12 & -7 & 21 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Привели к УСВ}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Выходит,

$$\xi = \underbrace{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2}_{u} + \underbrace{\lambda_3 v_3 + \lambda_3 4 v_4}_{w} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = -2 \\ \lambda_4 = -1 \end{cases}$$

Значит, искомая матрица $w = \lambda_3 v_3 + \lambda_3 4 v_4 = -2v_3 - v_4 = -2 \begin{pmatrix} -15 & 4 \\ 3 & -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} 30 - 11 & -8 - 2 \\ -6 + 4 & 24 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -10 \\ -2 & 31 \end{pmatrix}$

**Ответ:** (б) $\begin{pmatrix} 19 & -10 \\ -2 & 31 \end{pmatrix}$