ИДЗ №1

Даша Оникова, бпми 2112, вариант 21

01.10.2021

Подробные вычисления в конце файла

1 $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, B $= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, C $= \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, D $= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

Найти
$tr(B^TB)DAA^T + tr((-3BA^T - 7AB^T)D + D(-5BA^T + 3AB^T))(B+A)(B^T - A^T) - 4C^2 - 4CD - D^2$
Заметим, что:

1. матрица D - симметрическая, $D^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ = D
2. $tr((-3BA^T - 7AB^T)D + D(-5BA^T + 3AB^T)) = tr(-3BA^TD - 7AB^TD + -5DBA^T + 3DAB^T) =$
$= tr(-3BA^TD) - tr(7AB^TD) + tr(-5DBA^T) + tr(3DAB^T) =$
$= -3tr(BA^TD) - 7tr(AB^TD) - 5tr(DBA^T) + 3tr(DAB^T) =$
$= -3tr(DBA^T) - 7tr(DAB^T) - 5tr(DBA^T) + 3tr(DAB^T) = -8tr(DBA^T) - 4tr(DAB^T) =$
$= -8tr((DBA^T)^T)) - 4tr(DAB^T) = -8tr(A(DB)^T) - 4tr(AB^TD) = -8tr(AB^TD^T) - 4tr(AB^TD) =$
$= -8tr(AB^TD) - 4tr(AB^TD) = -12tr(AB^TD)$
3. $tr(B^TB) = tr(BB^T)$
4. $(B+A)(B^T - A^T) = BB^T - BA^T + AB^T - AA^T$

=> искомое выражение примет вид
$tr(BB^T)DAA^T - 12tr(AB^TD)(BB^T - BA^T + AB^T - AA^T) - (4C^2 + 4CD + D^2)$

1. $BB^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 37 \\ 37 & 61 \end{pmatrix}$
2. $tr(BB^T) = 45 + 61 = 106$
3. $AA^T = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 94 & 54 \\ 54 & 43 \end{pmatrix}$
4. $DAA^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 94 & 54 \\ 54 & 43 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 376 & 216 \\ 486 & 387 \end{pmatrix}$
5. $tr(BB^T)DAA^T = 106 \begin{pmatrix} 376 & 216 \\ 486 & 387 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39856 & 22896 \\ 51516 & 41022 \end{pmatrix}$
6. $BA^T = \begin{pmatrix} 25 & -7 \\ 21 & -7 \end{pmatrix}$
7. $AB^T = (BA^T)^T = \begin{pmatrix} 25 & 21 \\ -7 & -7 \end{pmatrix}$
8. $BB^T - BA^T + AB^T - AA^T = \begin{pmatrix} 45 & 37 \\ 37 & 61 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 25 & -7 \\ 21 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 & 21 \\ -7 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 94 & 54 \\ 54 & 43 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -49 & 11 \\ -45 & 18 \end{pmatrix}$

9. $AB^TD = \begin{pmatrix} 25 & 21 \\ -7 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 189 \\ -28 & -63 \end{pmatrix}$

10. $12tr(AB^TD) = 12 \cdot 37 = 444$

11. $12tr(AB^TD)(BB^T - BA^T + AB^T - AA^T) = 444 \begin{pmatrix} -49 & 11 \\ -45 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21756 & 4884 \\ -19980 & 7992 \end{pmatrix}$

12. $tr(BB^T)DAA^T - 12tr(AB^TD)(BB^T - BA^T + AB^T - AA^T) = \begin{pmatrix} 39856 & 22896 \\ 51516 & 41022 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -21756 & 4884 \\ -19980 & 7992 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 61612 & 18012 \\ 71496 & 33030 \end{pmatrix}$

13. $4C^2 = 4 \begin{pmatrix} -21 & -10 \\ 10 & -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -84 & -40 \\ 40 & -100 \end{pmatrix}$

14. $4CD = 4 \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 8 & -45 \\ 20 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & -180 \\ 80 & 0 \end{pmatrix}$

15. $D^2 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 81 \end{pmatrix}$

16. $(4C^2 + 4CD + D^2) = \begin{pmatrix} -36 & -220 \\ 120 & -19 \end{pmatrix}$

17. $tr(BB^T)DAA^T - 12tr(AB^TD)(BB^T - BA^T + AB^T - AA^T) - (4C^2 + 4CD + D^2) =$
$= \begin{pmatrix} 61612 & 18012 \\ 71496 & 33030 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -36 & -220 \\ 120 & -19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61648 & 18232 \\ 71376 & 33049 \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix} 61648 & 18232 \\ 71376 & 33049 \end{pmatrix}$

2 A - симметриечская матрица порядка 4, B - кососимметрическая матрица порядка 4.

$A + B = \begin{pmatrix} 34 & -50 & -56 & -30 \\ -14 & 6 & -60 & 52 \\ -46 & -26 & -42 & -48 \\ 11 & 50 & -52 & 44 \end{pmatrix}$, найти все возможные AB

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$, B $= \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} & b_{24} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 & b_{34} \\ -b_{14} & -b_{24} & -b_{34} & 0 \end{pmatrix}$

Пусть $AB = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}$;

$$A+B=\begin{pmatrix}34 & -50 & -56 & -30\\ -14 & 6 & -60 & 52\\ -46 & -26 & -42 & -48\\ 22 & 50 & -52 & 44\end{pmatrix} => \begin{cases} a_{11}=34\\ a_{12}+b_{12}=-50\\ a_{13}+b_{13}=-56\\ a_{14}+b_{14}=-30\\ a_{12}-b_{12}=-14\\ a_{22}=6\\ a_{23}+b_{23}=-60\\ a_{24}+b_{24}=52\\ a_{13}-b_{13}=-46\\ a_{23}-b_{23}=-26\\ a_{33}=-42\\ a_{34}+b_{34}=-48\\ a_{14}-b_{14}=11\\ a_{24}-b_{24}=50\\ a_{34}-b_{34}=-52\\ a_{44}=44 \end{cases} <=> \begin{cases} a_{11}=34\\ a_{12}=-32\\ a_{13}=-51\\ a_{14}=-4\\ a_{22}=6\\ a_{23}=-43\\ a_{24}=51\\ a_{33}=-42\\ a_{34}=-50\\ a_{44}=44\\ b_{12}=-18\\ b_{13}=-5\\ b_{14}=-26\\ b_{23}=-17\\ b_{24}=1\\ b_{34}=2 \end{cases}$$

$x_{11}=0-a_{12}\cdot b_{12}-a_{13}\cdot b_{13}-a_{14}\cdot b_{14}=-576-255-104=-935$
$x_{12}=a_{11}\cdot b_{12}+0-a_{13}\cdot b_{23}-a_{14}\cdot b_{24}=-612-867+4=-1475$
$x_{13}=a_{11}\cdot b_{13}+a_{12}\cdot b_{23}+0-a_{14}\cdot b_{34}=-170+544+8=382$
$x_{14}=a_{11}\cdot b_{14}+a_{12}\cdot b_{24}+a_{13}\cdot b_{34}+0=-884-32-102=-1018$

$x_{21}=0-a_{22}\cdot b_{12}-a_{23}\cdot b_{13}-a_{24}\cdot b_{14}=108-215+1326=1219$
$x_{22}=a_{12}\cdot b_{12}+0-a_{23}\cdot b_{23}-a_{24}\cdot b_{24}=576-731-51=-206$
$x_{23}=a_{12}\cdot b_{13}+a_{22}\cdot b_{23}+0-a_{24}\cdot b_{34}=160-102-102=-44$
$x_{24}=a_{12}\cdot b_{14}+a_{22}\cdot b_{24}+a_{23}\cdot b_{34}+0=832+6-86=752$

$x_{31}=0-a_{23}\cdot b_{12}-a_{33}\cdot b_{13}-a_{34}\cdot b_{14}=-774-210-1300=-2284$
$x_{32}=a_{13}\cdot b_{12}+0-a_{33}\cdot b_{23}-a_{34}\cdot b_{24}=918-714+50=254$
$x_{33}=a_{13}\cdot b_{13}+a_{23}\cdot b_{23}+0-a_{34}\cdot b_{34}=255+731+100=1086$
$x_{34}=a_{13}\cdot b_{14}+a_{23}\cdot b_{24}+a_{33}\cdot b_{34}+0=1326-43-84=1199$

$x_{41}=0-a_{24}\cdot b_{12}-a_{34}\cdot b_{13}-a_{44}\cdot b_{14}=918-250+1144=1812$
$x_{42}=a_{14}\cdot b_{12}+0-a_{34}\cdot b_{23}-a_{44}\cdot b_{24}=72-850-44=-822$
$x_{43}=a_{14}\cdot b_{13}+a_{24}\cdot b_{23}+0-a_{44}\cdot b_{34}=20-867-88=-935$
$x_{44}=a_{14}\cdot b_{14}+a_{24}\cdot b_{24}+a_{34}\cdot b_{34}+0=104+51-100=55$

$$=> AB=\begin{pmatrix}-935 & -1475 & 382 & -1018\\ 1219 & -206 & -44 & 752\\ -2284 & 254 & 1086 & 1199\\ 1812 & -822 & -935 & 55\end{pmatrix}$$

Ответ: $AB=\begin{pmatrix}-935 & -1475 & 382 & -1018\\ 1219 & -206 & -44 & 752\\ -2284 & 254 & 1086 & 1199\\ 1812 & -822 & -935 & 55\end{pmatrix}$

3 A = CJD

$$C=\begin{pmatrix}1 & 9 & 7\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ J=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1 & -9 & -43\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$DC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

$S = E + A + ... + A^{2021} - ?$

1. $A = CJD = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -9 & -43 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 13 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. $A^n = CJD \cdot CJD \cdot CJD \cdot ... \cdot CJD \cdot CJD = CJ \cdot E \cdot J \cdot E \cdot ... \cdot E \cdot J \cdot D = C \cdot J^n \cdot D, \forall n \in \mathbb{N}$

3. $J^1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $J^3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $J^4 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
   $J^5 = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -10 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $J^6 = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 15 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $J^7 = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -21 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Заметим, что
   $J^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n-1}n & \frac{(-1)^n n(n-1)}{2} \\ 0 & (-1)^n & (-1)^{n-1}n \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$
   Докажем, что эта формула верна $\forall n \in \mathbb{N}$ с помощью математической индукции:

   - Это верно для n = 1: $J^1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
   - пусть это верно для n ($J^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n-1}n & \frac{(-1)^n n(n-1)}{2} \\ 0 & (-1)^n & (-1)^{n-1}n \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$)
   - докажем, что $J^{n+1} = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & (-1)^n(n+1) & \frac{(-1)^{n+1} n(n+1)}{2} \\ 0 & (-1)^{n+1} & (-1)^n(n+1) \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$

     $J^{n+1} = J^n \cdot J = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n-1}n & \frac{(-1)^n n(n-1)}{2} \\ 0 & (-1)^n & (-1)^{n-1}n \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$
     $= \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & (-1)^n(n+1) & \frac{(-1)^{n+1} n(n+1)}{2} \\ 0 & (-1)^{n+1} & (-1)^n(n+1) \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$

   => по принципу математической индукции $J^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n-1}n & \frac{(-1)^n n(n-1)}{2} \\ 0 & (-1)^n & (-1)^{n-1}n \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \forall n \in \mathbb{N}$

4. $S = E + A + ... + A^{2021} | \cdot A$ (справа) <=>
   $SA = A + A^2 + ... + A^{2022}$
   $SA - S = A + A^2 + ...A^{2021} + A^{2022} - E - A + ... + A^{2021}$ <=>
   $S(A - E) = A^{2022} - E$
   проверим, существует ли $(A - E)^{-1}$:

   $A - E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 13 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 13 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
   пусть X = $(A - E)^{-1}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$
   $(A - E)(A - E)^{-1} = E$ => $(A - E)X = E$ <=> $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 13 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

запишем расширенную матрицу уравнения:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 13 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) => \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 13x_3 = 1 \\ -2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_3 = 0 \\ -2y_1 + y_2 + 13y_3 = 0 \\ -2y_2 + y_3 = 1 \\ -2y_3 = 0 \\ -2z_1 + z_2 + 13z_3 = 0 \\ -2z_2 + z_3 = 0 \\ -2z_3 = 1 \end{cases} <=> \begin{cases} x_1 = -0.5 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ y_1 = -0.25 \\ y_2 = -0.5 \\ y_3 = 0 \\ z_1 = -3.375 \\ z_2 = -0.25 \\ z_3 = -0.5 \end{cases} =>$$

$X = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.25 & -3.375 \\ 0 & -0.5 & -0.25 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{pmatrix} = (A-E)^{-1}$ - существует

$S(A-E) = A^{2022} - E| \cdot (A-E)^{-1}$ (справа) $<=> S = (A^{2022} - E)(A-E)^{-1}$

5. $A^{2022} = CJ^{2022}D$

   $$J^{2022} = \begin{pmatrix} 1 & -2022 & 2043231 \\ 0 & 1 & -2022 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   $$CJ^{2022} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2022 & 2043231 \\ 0 & 1 & -2022 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2013 & 2025040 \\ 0 & 1 & -2026 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   $$CJ^{2022}D = \begin{pmatrix} 1 & -2013 & 2025040 \\ 0 & 1 & -2026 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -9 & -43 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2022 & 2016945 \\ 0 & 1 & -2022 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. $A^{2022} - E = \begin{pmatrix} 0 & -2022 & 2016945 \\ 0 & 0 & -2022 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. $(A^{2022} - E)(A-E)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2022 & 2016945 \\ 0 & 0 & -2022 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.5 & -0.25 & -3.375 \\ 0 & -0.5 & -0.25 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1011 & -1007967 \\ 0 & 0 & 1011 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 1011 & -1007967 \\ 0 & 0 & 1011 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4 $S = \begin{pmatrix} 16 & -24 & 8 \\ -24 & -36 & -12 \\ 20 & -30 & 10 \end{pmatrix}$ Показать, что матрица представима в виде $S = uv^T$, u, v $\in \mathbb{R}^3$, найти $tr(S^{2029})$

$S_{(1)} = \begin{pmatrix} 16 & -24 & 8 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
$S_{(2)} = \begin{pmatrix} -24 & 36 & 12 \end{pmatrix} = -12 \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = -12S_{(1)}$
$S_{(3)} = \begin{pmatrix} 20 & -30 & 10 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = 10S_{(1)}$

пусть $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = x$, тогда $S = \begin{pmatrix} 8x \\ -12x \\ 10x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

пусть $u = \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ 10 \end{pmatrix}, v^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} => u = \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ 10 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v^T u = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ 10 \end{pmatrix} = (62)$

$S^{2029} = uv^T \cdot uv^T \cdot ... \cdot uv^T = u \cdot 62^{2028} \cdot v^T = 62^{2028} uv^T = 62^{2028} S$

$tr(S^{2029}) = tr(62^{2028} S) = 62^{2028} tr(S) = 62^{2028} tr(uv^T) = 62^{2028} tr(v^T u) = 62^{2029}$ Ответ: 62^{2029}

5 (а) $\begin{cases} -8x_1 + 6x_2 + 24x_3 - 10x_4 = 6 \\ -6x_1 + x_2 + 18x_3 - 11x_4 = 8 \\ 5x_1 - 9x_2 - 15x_3 + x_4 = 3 \\ -x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 8x_4 = 7 \end{cases}$

расширенная матрица СЛУ: $\left(\begin{array}{cccc|c} -8 & 6 & 24 & -10 & 6 \\ -6 & 1 & 18 & -11 & 8 \\ 5 & -9 & -15 & 1 & 3 \\ -1 & -6 & 3 & -8 & 7 \end{array}\right) -> \left(\begin{array}{cccc|c} -4 & 3 & 12 & -5 & 3 \\ -6 & 1 & 18 & -11 & 8 \\ 5 & -9 & -15 & 1 & 3 \\ -1 & -6 & 3 & -8 & 7 \end{array}\right) ->$

$\left(\begin{array}{cccc|c} -4 & 3 & 12 & -5 & 3 \\ -1 & -8 & 3 & -10 & 11 \\ 1 & -6 & -3 & -4 & 6 \\ -1 & -6 & 3 & -8 & 7 \end{array}\right) -> \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & -3 & -4 & 6 \\ -1 & -8 & 3 & -10 & 11 \\ -4 & 3 & 12 & -5 & 3 \\ -1 & -6 & 3 & -8 & 7 \end{array}\right) -> \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & -3 & -4 & 6 \\ 0 & -14 & 0 & -14 & 17 \\ 0 & -21 & 0 & -21 & 27 \\ 0 & -12 & 0 & -12 & 13 \end{array}\right) ->$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & -3 & -4 & 6 \\ 0 & -14 & 0 & -14 & 17 \\ 0 & -7 & 0 & -7 & 9 \\ 0 & -12 & 0 & -12 & 13 \end{array}\right) -> \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & -3 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 0 & -7 & 9 \\ 0 & -12 & 0 & -12 & 13 \end{array}\right) -> =>$

система не имеет решений

Ответ: нет решений (б) $\begin{cases} -8x_1 + 6x_2 + 24x_3 - 10x_4 = 10 \\ -6x_1 + x_2 + 18x_3 - 11x_4 = 11 \\ 5x_1 - 9x_2 - 15x_3 + x_4 = -1 \\ -x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 8x_4 = 8 \end{cases}$

расширенная матрица СЛУ: $\left(\begin{array}{cccc|c} -8 & 6 & 24 & -10 & 10 \\ -6 & 1 & 18 & -11 & 11 \\ 5 & -9 & -15 & 1 & -1 \\ -1 & -6 & 3 & -8 & 8 \end{array}\right) -> \left(\begin{array}{cccc|c} -4 & 3 & 12 & -5 & 5 \\ -6 & 1 & 18 & -11 & 11 \\ 5 & -9 & -15 & 1 & -1 \\ -1 & -6 & 3 & -8 & 8 \end{array}\right) ->$

$\left(\begin{array}{cccc|c} -4 & 3 & 12 & -5 & 5 \\ -1 & -8 & 3 & -10 & 10 \\ 1 & -6 & -3 & -4 & 4 \\ -1 & -6 & 3 & -8 & 8 \end{array}\right) -> \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & -3 & -4 & 4 \\ -1 & -8 & 3 & -10 & 10 \\ -4 & 3 & 12 & -5 & 5 \\ -1 & -6 & 3 & -8 & 8 \end{array}\right) -> \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & -3 & -4 & 4 \\ 0 & -14 & 0 & -14 & 14 \\ 0 & -21 & 0 & -21 & 21 \\ 0 & -12 & 0 & -12 & 12 \end{array}\right) ->$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & -3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) -> \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & -3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) => \begin{cases} x_1 - 6x_2 + -3x_3 - 4x_4 = 4 \\ -x_2 - x_4 = 1 \end{cases} <=>$

$\begin{cases} x_1 - 6x_2 - 3x_3 3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 = -1 - x_4 \end{cases} <=> \begin{cases} x_1 + 6 + 6x_4 - 3x_3 3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 = -1 - x_4 \end{cases} <=> \begin{cases} x_1 + 2x_4 - 3x_3 3 = -2 \\ x_2 = -1 - x_4 \end{cases} <=>$

$\begin{cases} x_1 = -2 + 3x_3 - 2x_4 \\ x_2 = -1 - x_4 \end{cases} => \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$

Ответ: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$