ИДЗ №4

Даша Оникова, бпми 2112

05.12.2021

1 Для матрицы A найти все значения $x \in \mathbb{C}$, для которых $A - xE$ - необратима.

$$A = \begin{pmatrix} -13+14i & -4+5i \\ 24-30i & 7-11i \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$$

$xE = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, A - xE = \begin{pmatrix} -13+14i-x & -4+5i \\ 24-30i & 7-11i-x \end{pmatrix}$

Если матрица $A - xE$ необратима, то ее определитель равен 0.

$\begin{vmatrix} -13+14i-x & -4+5i \\ 24-30i & 7-11i-x \end{vmatrix} = (-13+14i-x)(7-11i-x) - (24-30i)(-4+5i) =$

$= -91+98i-7x+143i-154i^2+11ix+13x-14ix+x^2-(-96+150+240i) =$

$= 9+i+6x-3ix+x^2 = x^2+x(6-3i)+9+i$

Решим уравнение $x^2+x(6-3i)+9+i=0$

$D = (6-3i)^2 - 4(9+i) = 36-9-36i-36-4i = -9-40i$

- вычислим $\sqrt{-9-40i}$, то есть найдем все комплексные числа w: $w^2 = -9-40i$.

  пусть $w = a+bi \Rightarrow w^2 = a^2-b^2+2abi,\ a,b \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2=-9 \\ 2ab=-40 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2-\frac{400}{a^2}=-9| \cdot a^2 \\ b=\frac{-20}{a} \\ a,b \neq 0 \end{cases} \iff$

  $\begin{cases} a^2+9a^2-400=0 \\ b=\frac{-20}{a} \\ a,b\neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a^2=-25 \\ a^2=16 \end{array}\right. \\ b=\frac{-20}{a} \\ a,b\neq 0 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4 \\ b=-5 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-4 \\ b=5 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow w = \pm 4 \mp 5i$

$x = \frac{3i-6\pm\sqrt{-9-40i}}{2} \iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3i-6+4-5i}{2} \\ x = \dfrac{3i-6-4+5i}{2} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x=-1-i \\ x=-5+4i \end{array}\right.$

Ответ: $x=-1-i, x=-5+4i$

2 Пусть $z = -\frac{121}{2}+\frac{121\sqrt{3}}{2}i$. $\sqrt[4]{z}$–?

$|z| = \sqrt{\frac{121^2}{4}+\frac{3\cdot 121^2}{4}} = \frac{\sqrt{4\cdot 121^2}}{2} = 121$. Пусть ϕ - $arg(z)$.

$\cos\phi = \frac{-121}{2\cdot 121} = \frac{-1}{2}$
$\sin\phi = \frac{121\sqrt{3}}{121\cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \phi = \frac{2\pi}{3}$

Найти корень 4 степени из числа z $\iff$ найти все такие комплексные числа $w : w^4 = z$. Пусть

$arg(w) = \alpha$. Получится ровно 4 значения w, для каждого из которых $|w|^4 = |z|$ и $\alpha = \frac{\phi}{4} + \frac{2\pi k}{4}$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ (для каждого значения - свой k)

1. k = 0
   $|w| = \sqrt[4]{121} = \sqrt{11}$,

   $\alpha = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$

   $=> w = \sqrt{11}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = \frac{\sqrt{33}}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}i$
2. k = 1
   $|w| = \sqrt[4]{121} = \sqrt{11}$,

   $\alpha = \frac{2\pi}{12} + \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$

   $=> w = \sqrt{11}(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -\frac{\sqrt{11}}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}i$
3. k = 2
   $|w| = \sqrt[4]{121} = \sqrt{11}$,

   $\alpha = \frac{2\pi}{12} + \frac{4\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$

   $=> w = \sqrt{11}(\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) = -\frac{\sqrt{33}}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}i$
4. k = 3
   $|w| = \sqrt[4]{121} = \sqrt{11}$,

   $\alpha = \frac{2\pi}{12} + \frac{6\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{3}$

   $=> w = \sqrt{11}(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{\sqrt{11}}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}i$

Ответ: $\frac{\sqrt{33}}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}i, -\frac{\sqrt{11}}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}i, -\frac{\sqrt{33}}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}i, \frac{\sqrt{11}}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}i$

3 Доказать, что векторы v_1, v_2, v_3 линейно независимы при всех значениях параметра a, и для каждого значения a дополнить эти векторы до базиса всего пространства $\mathbb{R}^5$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ -54 \\ 31 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ \frac{59}{2} \\ -\frac{35}{2} \\ a \\ \frac{21}{2} \end{pmatrix}$$

Допустим, они линейно зависимы. Тогда существует их нетривиальная линейная комбинация $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0 \ \ , x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. При этом, заметим, что векторы v_1 и v_2 линейно независимы (любая их нетривиальная линейная комбинация не равна нулю: В равной нулю их линейной комбинации коэффициент при v_1 должен быть равен 0, так как на четвертом месте в v_1 стоит 1, а в v_2 - 0. Но тогда и коэффициент при v_2 должен быть равен нулю)

Тогда, в их нетривиальной комбинации (сущетсвующей по предположению) $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0$, $x_3 \neq 0$. $=> v_3 = -\frac{x_1}{x_3}v_1 - \frac{x_2}{x_3}v_2$. Пусть $-\frac{x_1}{x_3} = y_1, -\frac{x_2}{x_3} = y_2$. То есть, СЛУ $\begin{cases} -y_1 + 9y_2 = -5 \\ 5y_1 - 54y_2 = \frac{59}{2} \\ -4y_1 + 31y_2 = -\frac{35}{2} \\ y_1 - 10y_2 = \frac{21}{2} \end{cases}$ - совместна Расширенная матрица СЛУ: $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 9 & -5 \\ 5 & -54 & \frac{59}{2} \\ -4 & 31 & -\frac{35}{2} \\ 1 & -10 & \frac{21}{2} \end{array}\right) \ -> \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 9 & -5 \\ 0 & -9 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$ => система несовместна. Тогда и v_1, v_2, v_3 - линейно независимы при любых а.

Теперь дополним эту систему векторов до базиса $\mathbb{R}^5$. Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} -1 & 9 & -5 \\ 5 & -54 & \frac{59}{2} \\ -4 & 31 & -\frac{35}{2} \\ 1 & 0 & a \\ 1 & -10 & \frac{21}{2} \end{pmatrix}$

(вместо столбцов - данные векторы), приведем матрицу A^T к ступенчатому виду при помощи элементарных преобразований строк (вычисления в конце файла)

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -4 & 1 & 1 \\ 9 & -54 & 31 & 0 & -10 \\ -5 & \frac{59}{2} & -\frac{35}{2} & a & \frac{12}{2} \end{pmatrix} -> \begin{pmatrix} -1 & 5 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -5 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2a-1 & 10 \end{pmatrix}$$

Заметим, что вне зависимости от параметра а в матрице A^T - три ненулевые строки (а в матрице A - три ненулевых столбца). Дополним систему до базиса $\mathbb{R}^5$ в соответствии с алгоритмом:

- При $a = \frac{1}{2}$ в A^T нет ведущих элементов в 3 и 4 столбцах => систему можно дополнить векторами $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- При $a \neq \frac{1}{2}$ в A^T нет ведущих элементов в 3 и 4 столбцах => систему можно дополнить векторами $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4 Подпространство $U \subseteq \mathbb{R}^5$ задано как $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

$$v_1 \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 20 \\ 31 \\ 21 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ -11 \\ -13 \\ -7 \end{pmatrix}$$

(а) Выбрать среди данных векторов базис подпространства U

Это можно сделать при помощи выделения базиса из системы векторов: приведем матрицу $A \in Mat_{5\times 4}$, у которой каждый столбец - это вектор из условия к улучшенному ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк, затем выпишем все v_i, такие, что в i-том столбце полученной матрицы стоит ведущий элемент, это и будет базис U.

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 20 & 6 \\ -4 & -1 & 31 & -11 \\ 0 & -2 & 21 & -11 \\ -3 & 1 & 18 & -13 \\ -3 & 0 & 18 & -7 \end{pmatrix} \quad -> \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{89}{21} \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{23}{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ненулевые строки (строки 1 - 3) имеют ведущие элементы в 1, 2, 3 столбцах. Значит, $v1, v2, v3$ - базис в U

(б) Найти среди векторов u_1, u_2 те, что лежат в U, найти их выражение через найденный базис

U.

$$u_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -14 \\ -1 \\ 7 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

сли вектор u_i лежит в U, то он является линейной комбинацией векторов базиса, а значит, существует единственное решение СЛУ $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = v_i$.

– Рассмотрим расширенную матрицу вида $(v_1 v_2 v_3 | u_1)$, попробуем найти (при наличии) коэффициенты при v_1, v_2, v_3, при которых $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = u_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 1 & 20 & -1 \\ -4 & -1 & 31 & -4 \\ 0 & -2 & 21 & -4 \\ -3 & 1 & 18 & 1 \\ -3 & 0 & 18 & -1 \end{array}\right) \quad -> \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 1 & 20 & -1 \\ 0 & \frac{-3}{2} & 21 & \frac{-7}{2} \\ 0 & 0 & -7 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & \frac{21}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \text{ - система несовместна}$$

$=>$ u_1 выразить через базис U невозможно (дальше преобразовывать матрицу смысла нет)

– Рассмотрим расширенную матрицу вида $(v_1 v_2 v_3 | u_2)$, попробуем найти (при наличии) коэффициенты при v_1, v_2, v_3, при которых $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = u_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 1 & 20 & -14 \\ -4 & -1 & 31 & -1 \\ 0 & -2 & 21 & 7 \\ -3 & 1 & 18 & -5 \\ -3 & 0 & 18 & -3 \end{array}\right) \quad -> \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 1 & 20 & -14 \\ 0 & \frac{-3}{2} & 21 & 6 \\ 0 & 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

Тогда $\begin{cases} -8x_1 = -x_2 - 20x_3 - 14 \\ -1.5x_2 = 6 - 21x_3 \\ -7x_3 = -1 \end{cases} \quad <=> \begin{cases} x_1 = \frac{13}{7} \\ x_2 = -2 \\ x_3 = \frac{1}{7} \end{cases} \quad => \frac{13}{7}v_1 - 2v_2 + \frac{1}{7}v_3 = u_2$

5 Найти базис и размерность подпространства $U \subseteq R^5$, являющегося решением ОСЛУ

$$\begin{cases} -x_1 + 7x_2 - 10x_4 + 13x_5 = 0 \\ -3x_1 + 17x_2 + x_3 - 27x_4 + 28x_5 = 0 \\ 2x_1 + 19x_2 + 4x_3 - 28x_4 + 35x_5 = 0 \\ 4x_1 + 13x_2 + 2x_3 - 14x_4 + 31x_5 = 0 \end{cases}$$

Базисом подпространства U будет ФСР данной ОСЛУ. Размерностью U - число векторов в базисе. Найдем ФСР: для этого сначала приведем матрицу ОСЛУ к УСВ:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 & -10 & 13 \\ -3 & 17 & 1 & -27 & 28 \\ 2 & 19 & 4 & -28 & 35 \\ 4 & 13 & 2 & -14 & 31 \end{pmatrix} \quad -> \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{10}{7} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{60}{49} & \frac{15}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{93}{49} & -\frac{17}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

Ведущих элементов нет в 4 и 5 столбцах (то есть, свободные переменные - x_4, x_5) Поочередно зафиксируем значение какой-то свободной переменной равным $\lambda \neq 0$ (в матрице получились дроби, это неприятно, а умножение на скаляр базис не меняет), а другой - 0 и найдем главные переменные.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-70	60	93	49	0
-14	-15	17	0	7

Итого, базис подпространства U - векторы $v_1 = \begin{pmatrix} -70 \\ 60 \\ 93 \\ 49 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -14 \\ -15 \\ 17 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\dim U = 2$