I. Подпространства. Опр.

$U, W \in V$ — подпространства. $\dim U = m$, $\dim W = n$.

① $U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$

② $\dim U + \dim W = \dim(U+W) + \dim(U \cap W)$

③ $U_1 \dots U_k \subseteq V$ — подпр-ва. $U_1 + \dots + U_k = \{u_1 + \dots + u_k \mid u_i \in U_i\}$

$\dim(U_1 + \dots + U_k) \le \dim U_1 + \dots + \dim U_k$

④ $U_1 \dots U_k$ — ЛНЗ $\Leftrightarrow$ $[u_1 + \dots + u_k = 0 \Leftrightarrow u_1 = \dots = u_k = 0, \forall u_i \in U_i]$

⑤ $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k \Leftrightarrow \begin{cases} V = U_1 + \dots + U_k \\ U_1 \dots U_k \text{ — ЛНЗ} \end{cases}$

⑥ $V = U_1 \oplus U_2 \Leftrightarrow \begin{cases} V = U_1 + U_2 \\ U_1 \cap U_2 = \{0\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \dim V = \dim U_1 + \dim U_2 \\ U_1 \cap U_2 = \{0\} \end{array}$

⑦ Пусть $V = U \oplus W$. Тогда $\forall x \in V \; \exists!\, u \in U, w \in W$: $x = u + w$, причем u — проекция на U вдоль W, w — проекция на W вдоль U.

⑧ Пусть $(e_1 \dots e_n)$; $(e_1' \dots e_n')$ — базисы V, причем $(e_1' \dots e_n') = (e_1 \dots e_n) \cdot C \in M_n^{\circ}(F)$; C — матрица перехода. В i-м столбце C к-ты e_i' в базисе $(e_1 \dots e_n)$

⑨ Пусть $(x_1 \dots x_n)^T$ — к-ты в $(e_1 \dots e_n)$; $(y_1 \dots y_n)^T$ — к-ты в $(e_1' \dots e_n')$. Тогда: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Док-ва:

V — век. пространство над полем F.

① Пусть $U, W \subseteq V$ — подпространства. Утверждение: $\dim U + \dim W = \dim(U+W) + \dim(U \cap W)$

Выберем $a_1 \dots a_k$ — базис $U \cap W$; $b_1, \dots, b_{q-k} = b$ — ЛНЗ векторы, доп. a до базиса W ($a \cup b$ — базис W); $c = c_1, \dots, c_{r-k}$ — ЛНЗ векторы, доп. a до базиса U ($a \cup c$ — базис U) $\left[\begin{array}{l} \dim U = r \\ \dim W = q \end{array} \quad \dim U \cap W = k \right]$

Док. что $a \cup b \cup c$ — базис в $U + W$: пусть $v = u + w \in V$ — произв. вектор

1) $v \in \langle a \cup b \cup c \rangle$: очев, так $u \in \langle b \cup c \rangle$, $w \in \langle a \cup b \rangle$.

2) $\langle a \cup b \cup c \rangle$ — ЛНЗ.

Пусть $\underbrace{x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k}_{\in U \cap W}$, $\underbrace{y = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{q-k} b_{q-k}}_{\in W}$; $\underbrace{z = \gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_{r-k} c_{r-k}}_{U}$. Пусть $x + y + z = 0 \Leftrightarrow z = -x - y$. $-x - y \in W$, но $z \in U \Rightarrow$

$z \in U \cap W$.

Тогда $z = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = \gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_{r-k} c_{r-k} \Leftrightarrow \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k - \gamma_1 c_1 \dots - \gamma_{r-k} c_{r-k} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = \gamma_1 = \dots = \gamma_{r-k} = 0$ (из-за того, что $a \cup c$ — базис U и, как следствие, ЛНЗ век.)

Тогда $z = 0$. получаем: $x + y = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{q-k} b_{q-k} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = \beta_1 = \dots = \beta_{q-k}$ (т.к. $a \cup c$ — базис W)

$\Rightarrow x + y + z = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = \beta_1 = \dots = \beta_{q-k} = \gamma_1 = \dots = \gamma_{r-k} = 0 \Rightarrow a \cup b \cup c$ — базис в $U + W$.

Получили: $\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = k + q - k + r - k + k = q + r = \dim U + \dim W$ ∎

② Теорема об эквивалентных условиях, определяющих набор ЛНЗ подпространств век. пространства

Усл. эквивалентны ($U_1 \dots U_k \subset V$ — подпр.)

① $U_1 \dots U_k$ — ЛНЗ

② $\forall v \in U_1 + \dots + U_k \; \exists!\, (u_1 \dots u_k)$: $u_i \in U_i$: $v = u_1 + \dots + u_k$.

③ e_i — базис $U_i \Rightarrow e_1 \sqcup \dots \sqcup e_k$ — базис V

④ $\dim(U_1 + \dots + U_k) = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$

⑤ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ $U_i \cap \hat{U}_i = \{0\}$, где $\hat{U}_i = (U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k)$

Док-во: ① $\Rightarrow$ ②: $\{$пусть $v = u_1 + \dots + u_k = u_1' + \dots + u_k' \Rightarrow (u_1 - u_1') + (u_2 - u_2') + \dots + (u_k - u_k') = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = u_1' \\ \vdots \\ u_k = u_k' \end{cases}$

② $\Rightarrow$ ③ $\forall v \in U = U_1 + \dots + U_k$ $\exists!\, u_1 \dots u_k$: $v = u_1 + \dots + u_k$. $\forall u_i$ $\exists!$ набор к-т в $e_i \Rightarrow \forall v$ $\exists!$ набор к-т в $e_1 \sqcup \dots \sqcup e_k \Rightarrow$ базис

③ $\Rightarrow$ ④ $e_1 \dots e_k$ — базисы $U_1 \dots U_k \Rightarrow \dim U_1 = |e_1|, \dots, \dim U_k = |e_k|$. С другой ст. $\dim(U_1 + \dots + U_k) = |e_1 \sqcup \dots \sqcup e_k| = |e_1| + \dots + |e_k|$

④ $\Rightarrow$ ⑤ $\dim(U_i \cap \hat{U}_i) = \dim(U_i) + \dim(\hat{U}_i) - \dim(U_i + \hat{U}_i) = \dim U_i + \underbrace{\dim(U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k)}_{= \dim U_1 + \dots + \dim U_{i-1} + \dim U_{i+1} + \dots + \dim U_k} - \underbrace{\dim(U_1 + \dots + U_k)}_{= \dim U_1 + \dots + \dim U_k} = 0 \Rightarrow U_i \cap \hat{U}_i = \{0\}$

⑤ $\Rightarrow$ ① $u_i \in U_i$

$u_1 + \dots + u_k = 0 \Leftrightarrow \underbrace{u_i}_{\in U_i} = \underbrace{-u_1 - \dots - u_{i-1} - u_{i+1} - \dots - u_k}_{\in \hat{U}_i} \Rightarrow u_i = 0 \; \forall i \Rightarrow$ ЛНЗ.

II Линейные отображения. Опр.

⑩ Отображение $\varphi: V \to W$ — линейное, если $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in F$; $v_1, v_2 \in V$ $\varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \varphi(v_1) + \lambda_2 \varphi(v_2)$. Свойства: $\varphi(0) = 0$; $\varphi(-v) = -\varphi(v)$

⑪ $\varphi: V \to W$ — изоморфизм $\Leftrightarrow$ φ — линейное отображение + биекция. Пространства изоморфны, если между ними $\exists$ изоморфизм

⑫ Отн. изоморфности — отн. эквивалентности, т.е. $\underset{\text{рефлексивн.}}{V \simeq V}$; $\underset{\text{симметричн.}}{V \simeq W \Leftrightarrow W \simeq V}$; $\underset{\text{транзитивность}}{V \simeq W, W \simeq U \Rightarrow V \simeq U}$; φ-изом-м $\Rightarrow \varphi^{-1}$-изом-м; φ, ψ-изом-мы $\Rightarrow \varphi \circ \psi$-изом-м.

⑬ $\dim V < \infty$, $\dim W < \infty$; $W \simeq V \Leftrightarrow \dim W = \dim V$.

⑭ $A(\varphi, e, f)$ — матрица л.о. φ из V с базисом e в W с базисом f; $A^{(i)} = \varphi(e_i)$ в к-тах в f, т.е. $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (f_1 \dots f_m) A(\varphi, e, f)$

⑮ Пусть в базисе e пр-ва V у v к-ты $x_1 \dots x_n$; в базисе f пр-ва W у $\varphi(v)$ к-ты $y_1 \dots y_m$. Тогда: $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A(\varphi, e, f) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

⑯ e', e — базисы V. $e' = e \cdot C$. f, f' — базисы W, $f' = f \cdot D$.

Тогда: $A(\varphi, e', f') = D^{-1} A(\varphi, e, f) C$

⑰ Пусть φ, ψ — линейные отобр. из V в W. Тогда $(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v)$.

$A(\varphi + \psi, e, f) = A(\varphi, e, f) + A(\psi, e, f)$

$\lambda \in F$. $(\lambda\varphi)(v) = \lambda\varphi(v)$; $A(\lambda\varphi, e, f) = \lambda A(\varphi, e, f)$

⑱ $\underset{\text{базис } e}{\overset{\dim = n}{\varphi: V \to W}}$ — л.о.; $\underset{\text{базис } f}{\overset{\dim = m \; \dim = k}{\psi: W \to U}}$ — л.о. $\psi \circ \varphi: V \to U$ $[V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\psi} U]$ — лин. отобр $(\psi \circ \varphi)(v) = \psi(\varphi(v))$. базис h

$A(\psi \circ \varphi, e, h) = \underset{k \times m}{A(\psi, f, h)} \cdot \underset{m \times n}{A(\varphi, e, f)}$ ($k \times n$)

⑲ $\operatorname{Ker} \varphi = \{v \mid \varphi(v) = 0\}$ — подпр-во в V; $\operatorname{Im} \varphi = \{\varphi(v) \mid v \in V\}$ — подпр-во в W. $\varphi: V \to W$

⑳ $\varphi: V \to W$ — инъективно $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$

$\varphi: V \to W$ — сюръективно $\Leftrightarrow \operatorname{Im} \varphi = W$.

㉑ • Утв: базис $\operatorname{Ker} \varphi$ = ФСР реш. $Ax = 0 \to \dim \operatorname{Ker} \varphi = \dim V - \underbrace{\operatorname{rk} A}_{\text{число столбцов в } A} \Rightarrow \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim V - (\dim V - \operatorname{rk} A) = \operatorname{rk} A$.

㉒ Пусть $e_1 \dots e_k$ — базис $\operatorname{Ker} \varphi$; $e_{k+1} \dots e_r$ — дополняют его до базиса V. Тогда $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$ — базис $\operatorname{Im} \varphi$

㉓ $\dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim V$

㉔ $\exists$ базисы в V и W такие, что в них матр. л.о. им. вид:

$$\begin{array}{c|c} & \overbrace{\qquad}^{\operatorname{rk}\varphi} \; \overbrace{\qquad}^{\dim V - \operatorname{rk}\varphi} \\ \begin{array}{c} \operatorname{rk}\varphi \\ \dim W - \operatorname{rk}\varphi \end{array} & \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) \end{array} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Док-ва.

① Свойства отн. изоморфности на всех вект. пр-вах:

① $\varphi: V \to W$ — изом-м $\Rightarrow \varphi^{-1}: W \to V$ — изом-м. Очев, что φ^{-1} — биекция, т.к. φ — биекция.

φ — линейно: пусть $w_1, w_2 \in W \Rightarrow \varphi^{-1}(w_1 + w_2) = \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(w_1)) + \varphi(\varphi^{-1}(w_2))) = \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(w_1) + \varphi^{-1}(w_2))) = \varphi^{-1}(w_1) + \varphi^{-1}(w_2)$

Пусть $\lambda \in F$. Тогда: $\varphi^{-1}(\lambda w) = \varphi^{-1}(\lambda \varphi(\varphi^{-1}(w))) = \lambda \varphi^{-1}(w)$.

② φ, ψ-изом-мы $\Rightarrow \varphi \circ \psi$-изом-м. $\varphi \circ \psi$ — биекция как композиция биекций.

Линейность: $(\varphi \circ \psi)(w_1 + w_2) = \varphi(\psi(w_1 + w_2)) = \varphi(\psi(w_1) + \psi(w_2)) = \varphi(\psi(w_1)) + \varphi(\psi(w_2)) = (\varphi \circ \psi)(w_1) + \varphi \circ \psi(w_2)$.

$\varphi \circ \psi(\lambda w) = \varphi(\psi(\lambda w)) = \varphi(\lambda \psi(w)) = \lambda \varphi(\psi(w)) = \lambda(\varphi \circ \psi)(w)$.

③ φ-изом-м $\Rightarrow$ φ-отн. эквивалентности на мн-ве пр-в над фикс. полем F: ① Рефлексивность $V \simeq V$ — есть изом-м Id.

② Симметричность: $V \simeq W \Rightarrow \exists$ изом-м $\varphi: V \to W \Rightarrow \exists$ изом-м $\varphi^{-1}: W \to V \Rightarrow W \simeq V$.

③ Транзитивность: $V \simeq W$, $W \simeq U$, $\varphi: V \to W$-изом-м; $\psi: W \to U$-изом-м $\Rightarrow \psi \circ \varphi: V \to U$-изом-м $\Rightarrow V \simeq U$.

② $V \simeq W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$.

Лемма 1: $\dim W = n \Rightarrow W \simeq F^n$. Пусть $e_1 \dots e_n$ — базис $W \Rightarrow \exists$ изоморфизм: $\varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Лемма 2: $\varphi: V \xrightarrow{\sim} W$ — изом-м, $e_1 \dots e_n$ — базис $V \Rightarrow \varphi(e_1) \dots \varphi(e_n)$ — базис W. ① Пусть $w \in W$; $\varphi^{-1}(w) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

$\varphi(\varphi^{-1}(w)) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) \Rightarrow$

$w \in \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle \; \forall w \in W$.

Теперь док. лин. незав. $\varphi(e_1)\ldots\varphi(e_n)$: $\alpha_1\varphi(e_1)+\ldots+\alpha_n\varphi(e_n)=0 \Leftrightarrow \varphi(\alpha_1 e_1+\ldots+\alpha_n e_n)=0 \Leftrightarrow \alpha_1 e_1+\ldots+\alpha_n e_n=\varphi^{-1}(0)=0 \Leftrightarrow \alpha_1=\ldots=\alpha_n=0 \Rightarrow \varphi(e_1)\ldots\varphi(e_n)$ – ЛНЗ.

$\Rightarrow \varphi(e_1)\ldots\varphi(e_n)$ – базис W

Док-во ①: $V\simeq W \Rightarrow \dim W=\dim V$: $V\simeq W \Rightarrow \varphi(e_1),\ldots,\varphi(e_n)$, где $e_1\ldots e_n$ – базис V – базис $W \Rightarrow \dim V=\dim W=n$.

$\dim V=\dim W \Rightarrow V\simeq W$: Пусть $\dim V=\dim W=n \Rightarrow V\simeq F^n$; $W\simeq F^n \Leftrightarrow V\simeq F^n, F^n\simeq W \Rightarrow V\simeq W$.

③ Пусть V – вект. пр-во с базисом $e_1\ldots e_n$, W – вект. пр-во [оба над полем F]

① Если $\varphi: V\to W$ – л.о. $\Rightarrow \varphi$ – однозначно определяется $\varphi(e_1),\ldots,\varphi(e_n)$.

$v\in V=\underbrace{x_1e_1+\ldots+x_ne_n}_{\text{набор к-т. единств.}} \Rightarrow \varphi(v)=\varphi(x_1e_1+\ldots+x_ne_n)=x_1\varphi(e_1)+\ldots+x_n\varphi(e_n)$

② $\forall w_1\ldots w_n\in W\ \exists!\ \varphi: \varphi(e_1)=w_1,\ldots\varphi(e_n)=w_n$.

Существование: $\varphi(v)=\varphi(x_1e_1+\ldots+x_ne_n)=x_1w_1+\ldots+x_nw_n \Rightarrow \varphi$ – л.о.

Единственность: следует из ①.

④ Если $x_1\ldots x_n$ – к-ты $v\in V$ в базисе $e_1\ldots e_n$; $y_1\ldots y_m$ – к-ты $\varphi(v)\in W$ в $f_1\ldots f_m$; $\varphi: V\to W$ – л.о.; $A=A(\varphi,e,f)$, то $\underbrace{\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}}_{m\times1}=\overset{\in Mat_{m\times n}(F)}{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}}_{n\times1}$

$v=x_1e_1+\ldots+x_ne_n \Rightarrow \varphi(v)=x_1\varphi(e_1)+\ldots+x_n\varphi(e_n)=(\varphi(e_1)\ldots\varphi(e_n))\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=(f_1\ldots f_m)\cdot A(\varphi,e,f)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

С другой стороны, $\varphi(v)=y_1f_1+\ldots+y_mf_m=(f_1\ldots f_m)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}$

Получаем: $(f_1\ldots f_m)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}=(f_1\ldots f_m)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \Leftrightarrow (f_1\ldots f_m)\left(\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}-A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right)=0 \underset{f_1\ldots f_m\text{ – базис}}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$. чтд

⑤ Если e', e – базисы V; $e'=eC\in M_n^0(F)$; f, f' – базисы W; $f'=fD\in M_m^0(F)$; $\varphi: V\to W$ – л.о. $A=A(\varphi,e,f)$, $A'=A(\varphi,e',f')$, то $A'=D^{-1}AC$.

① Если $f'=f\cdot D$, то $f=f'\cdot D^{-1}$.

② $(e'_1\ldots e'_n)=(e_1\ldots e_n)C \Rightarrow (\varphi(e'_1),\ldots,\varphi(e'_n))=(\varphi(e_1),\ldots,\varphi(e_n))\cdot C$

③ $(\varphi(e_1),\ldots,\varphi(e_n))=(f_1\ldots f_m)\cdot A=(f'_1\ldots f'_m)\cdot D^{-1}\cdot A$

$\Rightarrow (\varphi(e'_1),\ldots\varphi(e'_n))=(\varphi(e_1),\ldots,\varphi(e_n))C=(f'_1,\ldots,f'_m)\cdot\underbrace{D^{-1}AC}_{A'} \Rightarrow A'=D^{-1}AC$

⑥ $\underbrace{Hom(V,W)}_{\text{пространство всех лин. отобр-й из } V \text{ в } W}\simeq Mat_{m\times n}(F)$ при фиксированных $\overset{e,f}{\vphantom{x}}$ $V[\dim V=n, \underbrace{e_1\ldots e_n}_{e}\text{ – базис } V]$; $W[\dim W=m, \underbrace{f_1\ldots f_m}_{f}\text{ – базис } W]$, т.е. отобр. $\varphi\to A(\varphi,e,f)$ – изоморфизм при фикс. e и f.

① Линейность: 1) $\varphi,\psi\in Hom(V,W)$; $A(\varphi+\psi,e,f)=A(\varphi,e,f)+A(\psi,e,f)$: $(f_1\ldots f_m)A(\varphi+\psi,e,f)=((\varphi+\psi)(e_1),\ldots,(\varphi+\psi)(e_n))=(\varphi(e_1),\ldots,\varphi(e_n))+(\psi(e_1),\ldots\psi(e_n))=(f_1\ldots f_m)A_\varphi+(f_1\ldots f_m)A_\psi$

2) $\varphi\in Hom(V,W)$, $\lambda\in F$; $A(\lambda\varphi,e,f)=\lambda A(\varphi,e,f)$: $(f_1\ldots f_m)A_{\lambda\varphi}=((\lambda\varphi)(e_1),\ldots(\lambda\varphi)(e_n))=\lambda(\varphi(e_1),\ldots,\varphi(e_n))=\lambda(f_1\ldots f_m)A_\varphi$.

② Биективность: $A(\varphi,e,f)^{(j)}=\varphi(e_j)$ в базисе f. φ определяется однозначно образами базисных векторов $\Rightarrow \exists$ биекция.

⑦ $\varphi: V\to W$ – л.о.; $e=(e_1\ldots e_n)$ – базис V; $f=(f_1\ldots f_m)$ – базис W; $\underbrace{A_\varphi}_{m\times n}=A(\varphi,e,f)$
$\psi: W\to U$ – л.о. $h=(h_1\ldots h_k)$ – базис U; $\underbrace{A_\psi}_{k\times m}=A(\psi,f,h)$.

$\psi\circ\varphi$ $V\to U$; $A_{\psi\circ\varphi}=A(\psi\circ\varphi,e,h)$
$V\xrightarrow{\varphi}W\xrightarrow{\psi}U$.

Утв: $\underbrace{A_{\psi\circ\varphi}}_{k\times n}=\underbrace{A_\psi}_{k\times m}\cdot\underbrace{A_\varphi}_{m\times n}$.

По опр: $(\varphi(e_1),\ldots,\varphi(e_n))=(f_1\ldots f_m)\cdot A_\varphi$; $(\psi(f_1),\ldots,\psi(f_m))=(h_1\ldots h_k)A_\psi$; $(\psi(\varphi(e_1)),\ldots,\psi(\varphi(e_n)))=(h_1\ldots h_k)A_{\psi\circ\varphi}$

↓ применим ψ:

$(\psi(\varphi(e_1)),\ldots,\psi(\varphi(e_n)))=(\psi(f_1),\ldots,\psi(f_m))A_\varphi = (h_1,\ldots,h_k)A_\psi\cdot A_\varphi \Rightarrow A_\psi\cdot A_\varphi=A_{\psi\circ\varphi}$.

⑧ $\varphi: V\to W$
1) $\operatorname{Ker}\varphi$ – подпространство V: 1) $\varphi(0)=0 \Rightarrow 0\in\operatorname{Ker}\varphi$
2) $\alpha,\beta\in F$, $x,y\in\operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow \varphi(\alpha x+\beta y)=\alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y)=0 \Rightarrow \alpha x+\beta y\in\operatorname{Ker}\varphi$
2) $\operatorname{Im}\varphi$ – подпространство W: 1) $\varphi(0)=0 \Rightarrow 0\in\operatorname{Im}\varphi$
2) $\alpha,\beta\in F$, $x,y\in\operatorname{Im}\varphi \Rightarrow \exists\ x': \varphi(x')=x,\ y': \varphi(y')=y \Rightarrow \alpha x+\beta y=\alpha\varphi(x')+\beta\varphi(y')=\varphi(\alpha x')+\varphi(\beta y')=\varphi(\underbrace{\alpha x'+\beta y'}_{\in V \text{ т.к. } V\text{-пр-во}}) \Rightarrow \alpha x+\beta y\in\operatorname{Im}\varphi$.

⑨ $\varphi: V\to W$
$A=A(\varphi,e,f) \Rightarrow \operatorname{rk}A=\dim\operatorname{Im}\varphi$.

Лемма: $U\subseteq V$ – подпр-во; $u_1\ldots u_k$ – базис U. $\varphi(U)=\langle\varphi(u_1),\ldots,\varphi(u_k)\rangle$. Видим: $\dim\varphi(U)\le\dim U$ и $\dim\operatorname{Im}\varphi\le\dim V$

пусть $u\in U$; $u=x_1u_1+\ldots+x_ku_k \Rightarrow \varphi(u)=x_1\varphi(u_1)+\ldots+x_k\varphi(u_k)\in\langle\varphi(u_1),\ldots,\varphi(u_k)\rangle\ \forall u$.

Док-во теоремы: ($e_1\ldots e_n$ – базис V, $f_1\ldots f_m$ – базис W)

По лемме $\operatorname{Im}\varphi=\langle\varphi(e_1),\ldots,\varphi(e_n)\rangle$. Тогда $\dim\operatorname{Im}\varphi=\operatorname{rk}\{\varphi(e_1),\ldots,\varphi(e_n)\}$. По опр $A(\varphi,e,f)$ $A^{(i)}=\varphi(e_i)$ в базисе $f_1\ldots f_m \Rightarrow$
$\lambda_1\varphi(e_1)+\ldots+\lambda_n\varphi(e_n)=0 \Leftrightarrow \lambda_1A^{(1)}+\ldots+\lambda_nA^{(n)}=0 \Rightarrow \operatorname{rk}\{\varphi(e_1),\ldots,\varphi(e_n)\}=\operatorname{rk}(A^{(1)},\ldots,A^{(n)})=\operatorname{rk}A \Rightarrow \dim\operatorname{Im}\varphi=\operatorname{rk}A$

⑩ $\varphi: V\to W$
Если $(e_1\ldots e_k)$ – базис $\ker\varphi$, $(e_{k+1},\ldots e_n)$ – векторн. ком. дополнит $(e_1\ldots e_k)$ до базиса всего V, то $(\varphi(e_{k+1}),\ldots,\varphi(e_n))$ – базис $\operatorname{Im}\varphi$.

1) $\operatorname{Im}\varphi=\langle\varphi(e_1),\ldots,\varphi(e_n)\rangle=\langle\varphi(e_{k+1}),\ldots,\varphi(e_n)\rangle$ (т.к. $\varphi(e_1)=\ldots=\varphi(e_k)=0$ – базис ядра)

2) $\varphi(e_1),\ldots,\varphi(e_n)$ – ЛНЗ: $\lambda_{k+1}\varphi(e_{k+1})+\ldots+\lambda_n\varphi(e_n)=0 \Leftrightarrow \varphi(\lambda_{k+1}e_{k+1})+\ldots+\varphi(\lambda_ne_n)=0 \Leftrightarrow \varphi(\lambda_{k+1}e_{k+1}+\ldots+\lambda_ne_n)=0 \Rightarrow \lambda_{k+1}e_{k+1}+\ldots+\lambda_ne_n\in\operatorname{Ker}\varphi$
$\Rightarrow \lambda_{k+1}e_{k+1}+\ldots+\lambda_ne_n=\beta_1e_1+\ldots+\beta_ke_k \Leftrightarrow \lambda_{k+1}e_{k+1}+\ldots+\lambda_ne_n-\beta_1e_1-\ldots-\beta_ke_k=0 \Leftrightarrow \lambda_{k+1}=\ldots=\lambda_n=\beta_1=\ldots=\beta_k=0$ [т.к. $e_1\ldots e_n$ – базис]
$\Rightarrow \varphi(e_1)\ldots\varphi(e_n)$ – ЛНЗ и базис $\operatorname{Im}\varphi$.

⑪ $\varphi: V\to W$ – л.о., $\dim V=n$, $e_1\ldots e_n$ – базис V, $\dim W=m$, $f_1\ldots f_m$ – базис W.

1) $\dim\operatorname{Ker}\varphi+\dim\operatorname{Im}\varphi=\dim V$:

Если $(e_1\ldots e_k)$ – базис $\ker\varphi$, $(e_{k+1},\ldots e_n)$ – векторн. ком. дополнит $(e_1\ldots e_k)$ до базиса всего V, то $(\varphi(e_{k+1}),\ldots,\varphi(e_n))$ – базис $\operatorname{Im}\varphi$.
Тогда $\dim\operatorname{Ker}\varphi=k$, $\dim\operatorname{Im}\varphi=n-k$; $\dim V=n \Rightarrow k+n-k=n \Rightarrow \dim\operatorname{Ker}\varphi+\dim\operatorname{Im}\varphi=\dim V$.

2) $\exists$ $\mathbb{t}$ – базис V и $\mathbb{p}$ – базис W, в ком. матрица л.о. им. вид $\left(\begin{array}{c|c}E&0\\ \hline 0&0\end{array}\right)$, причем $E\in M_{\operatorname{rk}\varphi}$

Возьмем $t_1\ldots t_k$ – базис $\operatorname{Ker}\varphi$, $t_{k+1},\ldots,t_n$ – доп. базис $\ker\varphi$ до базиса V. Тогда искомый $\mathbb{t}=(t_{k+1},\ldots,t_n,t_1,\ldots t_k)$

Знаем, что $\varphi(t_{k+1}),\ldots,\varphi(t_n)$ – базис $\operatorname{Im}\varphi$. Пусть $p_1=\varphi(t_{k+1}),\ldots,p_{n-k}=\varphi(t_n)$. Дополним до базиса W их векторами $p_{n-k+1},\ldots,p_n$

Искомый $\mathbb{p}=(p_1,\ldots,p_n)$.

Проверим: $\varphi(t_1)=\ldots=\varphi(t_k)=0$, так как это базис ядра. Получаем, в $A(\varphi,\mathbb{t},\mathbb{p})$ последние k столбцов – нулевые.
$\varphi(t_{k+1})=p_1,\ldots,\varphi(t_n)=p_{n-k} \Rightarrow$ в координатах $\varphi(t_{k+1})=(1,0,\ldots,0)$,
$\ldots$
$\varphi(t_n)=(0,\ldots0,1,\underbrace{0,\ldots0}_{k\text{ нулей}})$

Ну и первые $n-k$ столбцов $A(\varphi,\mathbb{t},\mathbb{p}):=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\0&0&\cdots&1\\ \vdots&&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}}_{\operatorname{rk}\varphi}=\begin{pmatrix}E\\ \hline 0\end{pmatrix}$, причем $E\in M_{n-k}(F)$, $n-k=\operatorname{rk}\varphi=\dim\operatorname{Im}\varphi$.

Получили нужную матрицу:
$$\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0&0&\cdots&0\\0&0&\ddots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

III. Линейные функции. Линейные, билинейные, квадратичные формы. Опр-я:

25 Линейная ф-я φ на вект. пр V — это (лин.) отображение $\varphi: V \to F$ (поле).

26 $V^* = \mathrm{Hom}(V, F)$ — сопряженное к V. $\dim V^* = \dim V$ (т.к. $V^* \simeq \mathrm{Mat}_{1\times n}(F) \simeq V$)

27 Базис V^* $(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n)$ — двойственный к $e_1 \dots e_n$ — базису V, если $\varepsilon_i(e_j) = 1 \Leftrightarrow i = j$; а при $i \neq j$ $\varepsilon_i(e_j) = 0$ $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1 \dots e_n) = E$

28 отображ-е $\beta: V \times V \to F = \beta(v, w)$ — билинейная форма, если она линейна по обоим аргументам

29 Матрица билин. формы β в базисе $e_1 \dots e_n$ пр-ва V наз-ся $B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$, $B_{ij} = \beta(e_i, e_j)$

30 Пусть $x = (x_1 \dots x_n)$ в базисе $e_1 \dots e_n$, $y = y_1 \dots y_n$ в — " — $\Rightarrow \beta(x, y) = (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

31 Пусть $e_1' \dots e_n'$ — новый базис V, $(e_1' \dots e_n') = (e_1 \dots e_n) \cdot C$. Тогда $B' = C^T B C$

32 β — симметр. $\Leftrightarrow \beta(x, y) = \beta(y, x) \Leftrightarrow B = B^T$

33 Квадратичная форма $Q(x)$, ассоциированная с билин. ф. β — отображение $Q: V \to F$; $Q(x) = \beta(x, x) = (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} (b_{ij} + b_{ji}) x_i x_j$

34 $\exists$ биекция между мн-вом симметр. билин. форм (над пр-вом V над полем F, в F $1+1 \neq 0$) и мн-вом асс. с ними кв. форм

35 Симметризация билин. формы β — б.ф. $\sigma(x, y) = \frac{1}{2}(\beta(x, y) + \beta(y, x))$

36 Поляризация кв. формы Q — симметр. б.ф. $\beta(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y))$

37 Матрица квадр. формы — матрица ассоц. с ней симметр. билин. формы (поляризации) в том же базисе

38 Канонический вид кв. формы — кв. форма им. канон. вид, если ее матр. диагональна

39 Симметричные элемент. преобразования кв. матрицы — примени одинаковых элем. преобр. и к строкам и к столбцам

$\hat{Э}_i = Э_i \,\&\, Э_i' = Э_i' \,\&\, Э_i$ (к стр, к ст.)

40 $\delta_i(B)$, где $B \in M_n(F)$ — определитель левого верхнего $i \times i$ блока B.

41 Метод Якоби определения канон. вида квадр. формы: ⓘ Пусть Q — кв. форма, $B = B(Q, e)$ — ее матрица. $[\forall_k\ \delta_k \neq 0]$

1) $\exists!$ базис $e_1' \dots e_n'$, в ком матрица кв. ф. Q — диагональна, причем $e' = e \cdot C$, где C — ВУТ

2) Матр. будет им. вид $\mathrm{diag}(\delta_1, \delta_2/\delta_1, \dots, \delta_n/\delta_{n-1})$

42 Нормальный вид кв. формы — канон. вид, в ком. $B(Q, e) = \mathrm{diag}(\varepsilon_i)$, $\varepsilon_i \in \{0, \pm 1\}$

43 Индексы инерции: i_+ — полож. и.и — # плюсов в норм. виде

i_- — отр. и.и. — # минусов — " —

44 Закон инерции кв. формы — i_+ и i_- не зависят от выбора базиса, в ком. Q им. норм. вид

45	$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$	$i_+ = n$	положит. опред
46	$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_t^2$	$i_+ \le n,\ i_- = 0$	неотриц. опред
47	$Q(x) = -x_1^2 - \dots - x_n^2$	$i_- = n$	отриц. опред
	$Q(x) = -x_1^2 - \dots - x_t^2$	$i_- \le n,\ i_+ = 0$	неположит. опред
	$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_t^2 - x_{t+1}^2 - \dots - x_s^2$	хаос	неопред

48 i_+ = # сохранений знака у угловых миноров

i_- = # смен знака у угл. миноров

49 Критерий Сильвестра: $Q(x) > 0 \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}$ $\delta_i > 0$

50 $Q(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_k > 0 & \forall k \vdots 2 \\ \delta_k < 0 & \forall k \not\vdots 2 \end{cases}$

Док-ва

① Всякий базис пространства V^* — двойств. к некот. базису пр-ва V

Рассмотрим $(e_1 \dots e_n)$ — базис V и двойств. к нему $(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n)$ — базис V^*. Пусть $(\varepsilon_1' \dots \varepsilon_n')$ — иной базис V^*, причем $\begin{pmatrix} \varepsilon_1' \\ \vdots \\ \varepsilon_n' \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$

Тогда в V $\exists$ базис $e' = (e_1' \dots e_n')$, к ком. двойств. ε', причем $(e_1' \dots e_n') = (e_1 \dots e_n) \cdot C^{-1}$:

Проверим.

$$E = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1 \dots e_n) \Leftrightarrow C = C \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1 \dots e_n) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1' \\ \vdots \\ \varepsilon_n' \end{pmatrix} (e_1 \dots e_n) \Leftrightarrow E = \begin{pmatrix} \varepsilon_1' \\ \vdots \\ \varepsilon_n' \end{pmatrix} \underbrace{(e_1 \dots e_n) C^{-1}}_{(e_1' \dots e_n')}$$

$\to \in M_n^0(F)$, т.к. $\varepsilon, \varepsilon'$ — базисы

. Более того, $e_1' \dots e_n'$ — единств.

② Если $\beta(x, y)$ — б.ф., $B(\beta, e)$ — матрица β, то $\beta(x, y) = (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Распишем: $\beta(x, y) = \beta(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, y) = x_1 \beta(e_1, y) + \dots + x_n \beta(e_n, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \beta(e_i, e_j)$

$$(x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \beta(e_i, e_1) \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \beta(e_i, e_n) \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \beta(e_i, e_j)$$

побед

③ 1) б.ф β однозначно определяется матрицей $B \in M_n(F)$

$\forall x, y$ $\beta(x, y) = (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow \beta$ одн. опр-ся B

2) $\forall B \in M_n(F)$ $\exists!$ б.ф. β : $B(\beta, e) = B$.

Существование: определим $\beta(e_i, e_j) = (0 \dots 0\ \underset{i}{1}\ 0 \dots 0) B \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_j$. Это т.ч. бф (проверить легко)

Единственность: верно, т.к. $\beta(x, y) = (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

④ $B = B(\beta, e)$; $B' = B(\beta, e')$, $e' = e \cdot C \in M_n^0(F) \Rightarrow B' = C^T B C$

$$\beta(x, y) = (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$$

$$\left(C \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \right)^T B \cdot C \cdot \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = (x_1' \dots x_n') C^T B C \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

⑤ билинейная форма β симметр. в базисе $e \Leftrightarrow$ в этом базисе ее матрица симметрична.

- $\beta(e_i, e_j) = \beta(e_j, e_i) \Rightarrow B = B^T$
- $\beta(x, y) = (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (y_1 \dots y_n) B^T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \beta(y, x)$

⑥ $\exists$ биекция между $Q: V \to F$ и симм. б. ф. $\beta: V \times V \to F$, т.е. отобр $\varphi: \beta \to Q$ – биекция. ($1+1=2\neq 0$)

Сюръекция. Пусть $Q = Q_\beta$ для некот. кв. формы на V. тогда положим $\sigma(x,y) = \frac{1}{2}(\beta(x,y) + \beta(y,x))$ – симм. б. ф, причем ($Q(x) = \beta(x,x)$)
$\sigma(x,x) = \beta(x,x)$

Инъекция: пусть β – симм. б. ф. над $V \Rightarrow$

$$Q_\beta(x+y) = \beta(x+y, x+y) = \underbrace{\beta(x,x)}_{Q_\beta(x)} + 2\beta(x,y) + \underbrace{\beta(y,y)}_{Q_\beta(y)} \Leftrightarrow \beta(x,y) = \frac{1}{2}(Q_\beta(x+y) - Q_\beta(x) - Q_\beta(y))$$

⑦ Канонический вид – такой, в кот $\underbrace{B(Q,e)}_{\text{автоматически симметрична}} = diag(\dots)$

I. Если $B^{(1)} = B_{c1} = 0$ – переходим к правой нижней подматрице B^+
II. Если $b_{11} \neq 0$: Делаем $\hat{Э}_1(2,1,-\frac{b_{21}}{b_{11}}), \dots, \hat{Э}(n,1,-\frac{b_{n1}}{b_{11}}) \Rightarrow$ матр. примет вид $*$: $\left(\begin{array}{c|c} b_{11} & 0 \dots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & B^+ \\ 0 & \end{array}\right) \Rightarrow$
III. Если $b_{11} = 0$:
1) Если $\exists\, b_{ii} \neq 0$: Делаем $\hat{Э}_2(1,i)$, переходим к II
2) Если $\forall i\ b_{ii} = 0$: Находим такой j, что $b_{1j} \neq 0$; Делаем $\hat{Э}_1(1,j,1)$; получаем $b_{11} = 2b_{1j} \Rightarrow$ идем в II. (иначе см. I)

Таким образом, получим $*$. Тогда переходим B^+ и работаем до победного

$\Rightarrow$ Сматываемся в диагональный вид. Причем: $\hat{Э}_i = Э_i$ & $Э_i'$ $= \underbrace{U_k U_{k-1} \dots U_1}_{C^T} B \underbrace{U_1^T \dots U_{k-1}^T U_k^T}_{C} = B'$ ← канон!

умножение на элем матрицу; умножение на транспон. элем. матрицу

Замечание: Если |||но применить преобр. строк к E, получим C^T.

⑧ Метод Якоби опр. канон. вида:
1) $\exists!$ базис, в котором матрица B' диагональна и $B' = C^T B C$, где C – ВУТ $+\ \delta_i \neq 0\ \forall i$
2) $B' = diag(\delta_1, \dots, \delta_n/\delta_{n-1})$, причем $\forall i\ \delta_i \neq 0$

Док-во: 1) Из симм. Гаусса следует, что эл. преобр 1 типа, где матрицы – ВУТ, т.к. $i<j$ $\begin{pmatrix} 1 & \ddots & \lambda \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

• Если мы никогда не попали в $b_{ii} = 0$ – все ок, т.к только

ВУТ · ВУТ = ВУТ :)
$ВУТ^{-1} = ВУТ$

Доказали существование

• Иначе $\exists\ \delta_t = 0$ – ☹. (на каком-то шаге матрица $\begin{pmatrix} b_{11} \dots b_{kk} & 0 \\ 0 & 0\ * \end{pmatrix}$

2) С помощью Гаусса мы привели матрицу B к виду $diag(b_1 \dots b_n)$.
Док, что это $diag(\delta_1, \dots, \delta_n/\delta_{n-1})$:

Лемма: $C \in M_n(F)$, C-ВУТ, $T \in M_n^0(F)$. Тогда: $\delta_k(T) = \delta_k(C^T T) = \delta_k(T C)$
(проверка в лоб + $\det ВУТ = 1$)

По лемме получаем, что $\forall k\ \delta_k(B) = \delta_k(B') = b_1 \cdot \dots \cdot b_k \Rightarrow b_k = \frac{\delta_k}{b_1 \dots b_{k-1}} = \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}}$ (положим $\delta_0 = 1$)
$\Rightarrow$ 2) доказано.

3) Единственность базиса: Пусть $\exists$ 2 базиса; в первом $B' = C^T B C \Rightarrow B = C^{-T} B' C^{-1}$
во втором $B' = D^T B D$

$$C^{-T} B C^{-1} = D^{-T} B D^{-1} \Leftrightarrow D^T C^{-T} B C^{-1} = B D^{-1} \Leftrightarrow \underbrace{\underbrace{D^T C^{-T}}_{НУТ}}_{нижнетреуг} B = \underbrace{\underbrace{B D^{-1} C}_{ВУТ}}_{верхнетреуг} \Rightarrow D^{-1} C\text{-диаг.} \Rightarrow C = D = E.$$
$\Rightarrow$ е-единств. базис.

⑨ $\forall\ Q(x)\ \exists$ базис с норм. видом.
Док-во: из метода Якоби имеем канон. вид. $(diag(b_1 \dots b_n))$ делаем замену $x_{old\,i} = \begin{cases} \frac{x_{new\,i}}{\sqrt{|b_i|}} & b_i \neq 0 \\ x_{new\,i} & \end{cases}$
в новых к-тах норм вид

⑪ Закон инерции: положит / отриц. индексы инерции не зависят от базиса, в кот. Q принимает норм. вид.

Пусть в базисе $(e_1 \dots e_n)$ Q принимает норм. вид $Q(x) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{r+s}^2$, а в базисе $(f_1 \dots f_n)$ – норм. вид $Q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{q+p}^2$

Пусть $p \neq s$ (без огр. общ. пусть $s > p$). Пусть $L_1 = \langle e_1 \dots e_s \rangle$; $L_2 = \langle f_{p+1} \dots f_n \rangle$. Тогда: $L_1 \subseteq V$; $L_2 \subseteq V$;

$L_1 + L_2 \subseteq V$; $\dim(L_1 + L_2) \leq n$
$\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2) \geq s + n - p - n = s - p > 0 \Rightarrow \exists v: v \in (L_1 \cap L_2), v \neq 0 \Rightarrow$
$\left.\begin{array}{l} v = x_1 e_1 + \dots + x_s e_s + 0 e_{s+1} + \dots + 0 e_n \Rightarrow Q(v) > 0 \\ v = 0 f_1 + \dots + 0 f_p + y_1 f_{p+1} + \dots + y_q f_{p+q} + 0 \Rightarrow Q(v) \leq 0 \end{array}\right)$ ☹

⑫ $i_+ = \#$ сохр. знака, $i_- = \#$ смен знака. Факт: нормализация не меняет знаки
Если $Q(x) = \delta_1 x_1^2 + \dots + \delta_n/\delta_{n-1} x_n^2$, то знак$(\delta_i/\delta_{i-1})$ соотв. смене знака / сохр. знака. Число $\pm$ при выборе базиса не меняется $\Rightarrow$ ☒

⑬ $Q(x) > 0 \Leftrightarrow$ все миноры > 0. ($\Leftarrow$) 1) $\delta_1 > 0$ т.е. созднак сохр-ся при x_1^2 2) дальше нет смен знака т.е. $i_- = 0$, $i_+ = n$ ($\Rightarrow$) $Q > 0 \Rightarrow \exists\ C \in M_n^0(F)$: $\underset{\det C}{C^T} B \underset{\det C}{C} = E$. $\Rightarrow \delta_n > 0$. То же и для B_k-подматр. и ограничений формы на $\langle e_1 \dots e_k \rangle$
$Q(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_k < 0 & \text{при } k \not\vdots 2 \\ \delta_k > 0 & \text{при } k \vdots 2 \end{cases}$ $Q < 0 \Leftrightarrow -Q > 0 \Leftrightarrow \det(B_k) > 0\ \forall k \Leftrightarrow (-1)^k \delta_k > 0$

IV. Евклидовы пространства. опр.

(51) Евклидово пр-во — пр-во над $\mathbb{R}$, над кот. задано скалярное произв $(\cdot,\cdot)$ — симметричная билинейная форма, причем асс. с ней кв. форма >0

(52) Пусть $v \in \mathbb{E} \Rightarrow |v| = \sqrt{(v,v)} \geq 0$

(53) Нерав-во Коши–Буняковского: $\forall x,y \in E \ |(x,y)| \leq |x||y|$;
$|(x,y)| = |x|\cdot|y| \Leftrightarrow x,y$ — пропорциональны

(54) $x,y \neq 0 \Rightarrow \cos\angle(x,y) = \dfrac{(x,y)}{|x||y|}$

(55) $G(a_1..a_k) = (g_{ij}),\ g_{ij} = (a_i,a_j)$

(56) Пусть $G := G(\overbrace{a_1..a_k}^{\in \mathbb{E}})$. Тогда $\det G \geq 0$. $\det G > 0 \Leftrightarrow a_1..a_k$ — ЛНЗ.

(57) Ортогональная система: с-ма $(v_1..v_k)$, если $(v_i,v_j)=0 \Leftrightarrow i \neq j$

(58) Ортонорм. система — ортог. система но $(v_i,v_i)=1$
Базис $(e_1..e_n)$ — ортог/ортонорм $\Leftrightarrow (e_1..e_n)$ — ортог/ортон.

(59) Если $e_1..e_n$ — ортог. базис, то $\forall v = \dfrac{(v,e_1)}{(e_1,e_1)}e_1 + .. + \dfrac{(v,e_n)}{(e_n,e_n)}e_n$
Если $e_1..e_n$ — ортонорм. базис, то $v = (v,e_1)e_1 + .. + (v,e_n)e_n$

(60) Если $e_1...e_n$ — ортонорм. базис e, то всякий $(f_1..f_n)$ — другой ортонорм. базис $\mathbb{E}$ выражается как $(e_1..e_n)\cdot C$, $C^T\cdot C = E$

(61) $C \in M_n^{\circ}(F)$, $C: C^TC = E = CC^T$ — ортог. матрица

(62) Метод орт-и Г-Ш: из системы $f_1..f_m$ хотим ортогон. с-му $e_1..e_m$.
$e_1 = f_1$; $e_2 = f_2 - \frac{(f_2,e_1)}{(e_1,e_1)}f_1$, ..., $e_i = f_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1}\frac{(f_i,e_j)}{(e_j,e_j)}e_j$

(63) Ортогональное доп-е $S^\perp$ подпр-ва $S \subseteq \mathbb{E}$ — мн-во $\{\overset{\in \mathbb{E}}{v} \mid (v,w)=0\ \forall w \in S\}$

(64) $\dim S^\perp = \dim \mathbb{E} - \dim S$.

(65) $S \oplus S^\perp = \mathbb{E}$; $(S^\perp)^\perp = S$.

орт. проекция — $pr_S v = ort_{S^\perp} v$
орт. сост. — $ort_S v = pr_{S^\perp} v$

(66-67) $\forall v \ \exists!\, x,y: \ v = x+y,\ x \in S,\ y \in S^\perp$

(68) $(e_1..e_n)$ — ортог. базис $S \subseteq \mathbb{E} \Rightarrow pr_S v = \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{(v,e_i)}{(e_i,e_i)}e_i$

(69) Пусть $S \subseteq \mathbb{E} = \mathbb{R}^n$, $(e_1..e_n)$ — базис S. Тогда
$pr_S v = A(A^TA)^{-1}A^T\cdot v$, где $A = (e_1..e_n)$, $A \in Mat_{m\times n}$
в $\mathbb{R}^n$ проще:

(70) $x,y \in \mathbb{E},\ (x,y)=0 \Rightarrow |x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$

(71) $\rho(x,y) = |x-y|$

(72) $\rho(a,b) + \rho(b,c) \geq \rho(a,c)$

(73) $\rho(v,S) = |ort_S v|$, $pr_S v$ — ближайший вектор из S к v

(74) псевдорешение несовместной СЛУ $\overset{Ax=b}{—}$ x_0, если $\rho(Ax_0,b) \to \min$

(75) $(\rho(v,S))^2 = \dfrac{\det(G(e_1...e_n,v))}{\det G(e_1...e_n))}$, где $e_1..e_n$ — базис S

(76) $P(a_1...a_k)$ — k-мерный пар-д, натянутый на $a_1...a_k$; $P(a_1..a_k) = \{x_1a_1 + .. + x_ka_k\}_{0 \leq x_i \leq 1}$
высота h k-мерного пар-да — $|ort_{\langle a_1..a_{k-1}\rangle} a_k|$
$vol\, P(a_1..a_k) = |a_1|$, если $k=1$ и $= vol\, P(a_1..a_{k-1})\cdot h$

(77) В n-мерном Евклидовом пр-ве $(vol\, P(a_1..a_k))^2 = \det G(a_1..a_k)$

(78) пусть $(a_1..a_n) = (e_1...e_n)\cdot A$, где $(e_1..e_n)$ — ОНБ $\Rightarrow (vol\, P(a_1..a_n)) = |\det A|$

(79) Два базиса в евклидовом пр-ве одинаково ориентир., если $\det$ матрицы перехода >0

(80) Пусть $(e_1...e_n)$ — положительно ориентир. базис в $\mathbb{E}$;
$(a_1...a_n) = (e_1...e_n)\cdot A$. $Vol(a_1...a_n) = \det A$.

(81) 1) $Vol(a_1...a_n)$ — линейно по каждому арг-ту
2) Меняет знак при перестановке двух любых арг-тов
3) $Vol(a_1...a_n) > 0 \Leftrightarrow a_1..a_n$ — ПОБ в $\mathbb{E}$; $<0 \Leftrightarrow$ ООБ; $=0 \Leftrightarrow$ ЛЗ.

Доказательства:

① Нерав-во Коши–Буняковского: $|(x,y)| \leq |x|\cdot|y|$. 1) Пусть они — ЛЗ $\Rightarrow x = \lambda y \Rightarrow (x,y) = (x,\lambda x) = \lambda(x,x) = \lambda|x|^2 = |x||y|$
2) Они ЛНЗ $\Rightarrow x,y$ — базис некоторого пр-ва с $\dim = 2$. Скалярное произведение — положит. опр. кв. форма с матрицей
$\begin{pmatrix} (x,x) & (x,y) \\ (y,x) & (y,y) \end{pmatrix}$, ее $\det > 0$ по критерию Сильвестра $\Longrightarrow |x|^2|y|^2 - (x,y)^2 > 0 \Leftrightarrow |x||y| > (x,y)$.

② Пусть $G = G(a_1...a_k)$. Тогда 1) $\det G \geq 0$
2) $\det G > 0 \Leftrightarrow a_1..a_k$ — ЛНЗ.
Если $a_1..a_k$ — ЛНЗ $\Rightarrow G$ — матрица кв. ф. $(\cdot,\cdot)$ в базисе $a_1..a_k \Rightarrow$ по критерию Сильвестра $\det G > 0$.
Если $a_1..a_k$ — ЛЗ $\Rightarrow \exists\, \alpha_1..\alpha_k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $\alpha_1a_1 + .. + \alpha_ka_k = 0$. Поочередно скалярно домножим на $v_i, i=1..k$
Получаем: $\forall i \ \ \alpha_1(v_1,v_i) + .. + \alpha_k(v_k,v_i) = 0$, т.е. строки G — ЛЗ $\Rightarrow \det G = 0$.

③ $\mathbb{E}$-евкл. пр-во $\Rightarrow \exists\, (e_1'...e_n')$ — Ортог. базис и $(e_1''...e_n'')$ — ОНБ.
1) Приводим $(\cdot,\cdot)$ к норм. виду. из-за положит. опр-ти матрица $\rightsquigarrow E$. Базис для норм. вида — $(e_1''..e_n'')$
2) Из-за неизменности индексов инерции, в канон. виде не будет нулей и отр. чисел на диагонали $\Rightarrow$ базис для канон. вида — $(e_1'...e_n')$.
Всякую ортогональную (ортонормированную) систему можно дополнить до ОБ/ОНБ.
Можно дополнить до базиса и провести ортогонализацию. изначальные векторы останутся нетронутыми

④ Пусть $e_1..e_n$ — ОНБ. $(e_1'..e_n') = (e_1...e_n)\cdot C$. C — ортогональна $\Leftrightarrow e_1'...e_n'$ — ОНБ
(Воспринимаем $G(e_1...e_n)$ как матрицу кв. формы.)
$G(e_1'...e_n') = C^TG(e_1...e_n)C = C^TEC = C^TC$
$e_1'...e_n'$ — ОНБ $\Leftrightarrow G(e_1...e_n) = E = C^TC$.

⑤ $S \subseteq E_{(\dim E = n)}$ 1) $\dim S^\perp = n - \dim S$
2) $S^\perp \oplus S = \mathbb{E}$
3) $(S^\perp)^\perp = S$.

① Пусть $e_1..e_k$ — базис S. дополним до базиса E. т.е. $e_1...e_n$
$x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$. $x \in S^\perp \Leftrightarrow (e_i,x) = 0\ \forall i \in \{1,...,k\} \Leftrightarrow (e_i,e_1)x_1 + ... + (e_i,e_n)x_n = 0\ \forall i \in \{1,..,k\}$
Получаем ОСЛУ $\begin{cases} (e_1,e_1)x_1 + ... + (e_1,e_n)x_n = 0 \\ \vdots \\ (e_k,e_1)x_1 + ... + (e_k,e_n)x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow Ax = 0$, где $A = \boxed{G(e_1...e_k)}\boxed{\ \cdots\ }$
Так как $e_1...e_k$ — ЛНЗ $\Rightarrow \det G > 0 \Rightarrow rk A$
$\Rightarrow \dim S^\perp = n - rk\, G = n - k = n - \dim S$.

② $S \oplus S^\perp = E \Leftrightarrow \begin{cases} \dim S + \dim S^\perp = \dim \mathbb{E} \to \text{см ①} \\ S \cap S^\perp = \{0\} \to x \in S^\perp \cap S \Rightarrow (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0. \end{cases}$

③ $(S^\perp)^\perp \supseteq S$, т.к. по опр. каждый вектор из S ортог. векторам из $S^\perp$. Но $\dim(S^\perp)^\perp = n - \dim S^\perp = n - (n - \dim S) = \dim S \Rightarrow S = (S^\perp)^\perp$

⑥ $v \in \mathbb{E}$ ① Если $e_1...e_n$ — ортогональный базис. Тогда $v = \frac{(e_1,v)}{(e_1,e_1)}e_1 + ... + \frac{(e_n,v)}{(e_n,e_n)}e_n$
$v = \lambda_1e_1 + ... + \lambda_ne_n$
$(v,e_i) = \lambda_1(e_1,e_i) + ... + \lambda_n(e_i,e_n) = \lambda_i(e_i,e_i)$ из-за ортогональности базиса. $\Rightarrow \lambda_i = \frac{(v,e_i)}{(e_i,e_i)}$.
② Базис — ортонорм $\Rightarrow (e_i,e_i) = 1 \Rightarrow \lambda_i = (e_i,v)$.
③ Ортогональная пр-я на подпр-во: $(e_1...e_k)$ — ортог. базис $S \Rightarrow pr_S v = \sum\limits_{i=1}^{k}\frac{(e_i,v)}{(e_i,e_i)}e_i$
Пусть $\underbrace{e_1...e_k}_{\text{орт.б. } S}\ \underbrace{e_{k+1}...e_n}_{\text{орт.б. } S^\perp}$ — ортог. базис $\mathbb{E} \Rightarrow v = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(v,e_i)}{(e_i,e_i)}e_i = \underbrace{\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{(v,e_i)}{(e_i,e_i)}e_i}_{pr_S v} + \underbrace{\sum\limits_{i=k+1}^{n}\frac{(v,e_i)}{(e_i,e_i)}}_{ort_S v.}$
④ $e_1...e_k$ — ортонорм $\Rightarrow (e_i,e_i) = 1$.

⑦ Если $a_1...a_k$ — базис $S \subseteq \mathbb{E}$ и $A = (a_1...a_k)$, то $pr_S v = A(A^TA)^{-1}A^Tv$
① $\det A^TA \neq 0$, т.к. это $G(a_1...a_k)$ и $\det > 0$.
② Пусть $pr_S v = \alpha_1a_1 + ... + \alpha_ka_k \Longrightarrow pr_S v = A\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_k\end{pmatrix}$. $ort_S v \in S^\perp \Rightarrow A^T\cdot ort_S v = 0$.

$$A(A^T\cdot A)^{-1}A^Tv = A(A^TA)^{-1}A^T(ort_S v + pr_S v) = A(A^TA)^{-1}A^T pr_S v + A(A^TA)^{-1}\underbrace{A^T ort_S}_{0} = \underbrace{A(A^TA)^{-1}A^T\cdot A}_{E}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_k\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_k\end{pmatrix} = pr_S v.$$

8 Теорема Пифагора: $|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$, если $(x,y)=0$

$|x+y| = (x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 + \dots + (x_n+y_n)^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 + y_1^2 + \dots + y_n^2 + 2\overbrace{(x_1y_1 + \dots + x_ny_n)}^{(x,y)} = |x|^2 + |y|^2$

Нер-во Δ-ка: $\rho(a,b) + \rho(b,c) \geq \rho(a,c)$. Пусть $x = a-b$, $y = b-c \Rightarrow \rho(a,b) = |a-b| = |x|$ $\rho(a,c) = |a-c| = |x+y|$

$\rho(b,c) = |y|$

$\Rightarrow$ доказываем $|x+y| \leq |x| + |y|$ • Если $(x,y)=0 \Rightarrow |x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$

• Если $(x,y) \neq 0 \Rightarrow (|x|+|y|)^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2\overset{\neq 0}{(x,y)} > |x+y|^2$.

9 $\rho(v,S) = |\underbrace{ort_S v}_{y}|$, причем $\underbrace{pr_S v}_{x}$ - ближайший к v вектор из S. Пусть $x' \in S \neq x$

$\rho(v, x+x')^2 = |v - x - x'|^2 = |y - x'|^2 = |y|^2 + |x'|^2 > |y|^2 = \rho(v,S)$

10 Пусть $\underset{\in Mat_{m\times n}}{A}x = b$ - несовместная СЛУ. Хотим найти x_0: $\underset{\rho(A x_0, b)}{|Ax_0 - b|} \to \min$

Пусть $S = \langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle$ – подпр-во. $c = pr_S b$. Тогда:

1) x_0 - псевдореш. $Ax_0 = b \Leftrightarrow x_0$ - реш. $Ax = c$ 2) $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ – ЛНЗ $\Rightarrow \exists!$ псевдореш, причем $x_0 = (A^TA)^{-1}A^Tb$

1) пусть $x \in \mathbb{R}^n$, тогда $Ax = x_1A^{(1)} + \dots + x_nA^{(n)} \in S$.

Тогда $S = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} \Rightarrow \min(\rho(Ax,b)) = \rho(S,b) = ort_S b = \rho(c,b)$

2) $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ - базис $\Rightarrow$ $\exists!$ представление c как лин. комб $A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \Rightarrow x_0$ - единств.

$Ax_0 = c \Leftrightarrow x_0 = A^{-1}c = A^{-1} \cdot (A(A^TA)^{-1}A^Tb) = (A^TA)^{-1}A^Tb$

11 $\rho(v,S)^2 \overset{?}{,}$ где $S = \langle \underbrace{a_1 \dots a_k}_{ЛНЗ} \rangle = \dfrac{\det G(a_1 \dots a_k, v)}{\underbrace{\det G(a_1 \dots a_k)}_{\neq 0}}$. $v \in S \Rightarrow \rho = 0$ и $\det G(a_1 \dots a_k v) = 0 \to$ ok

$v \notin S$. Ищем $e_1 \dots e_k, w$ [ортогонализуем $a_1 \dots a_k, v$]; элементы.

$\dfrac{\det G(a_1 \dots a_k, v)}{\det G(a_1 \dots a_k)} \overset{\text{т.к. Г-Ш}}{=} \dfrac{\det G(e_1 \dots e_k, w)}{\det (e_1 \dots e_k)} = \dfrac{(e_1,e_1) \cdot \dots \cdot (e_n,e_n) \cdot (w,w)}{(e_1,e_1) \cdot \dots \cdot (e_n,e_n)} = (w,w) = |w|^2 = \rho(v,S)^2$

потому что ортогонально и $v = w + \dots$? Гш-кого ?

12 ① $vol(P(a_1 \dots a_k))^2 = \det G(a_1 \dots a_k)$ Индукция по k: $k=1 \Rightarrow |a_1|^2 = \det G(a_1) = vol P(a_1)$

Пусть верно для $\leq k$. Док для $k+1$: $vol(P(a_1 \dots a_{k+1}))^2 = \underset{\det G(a_1 \dots a_k)}{vol(P(a_1 \dots a_k))^2} \cdot \underset{\frac{\det G(a_1 \dots a_{k+1})}{\det G(a_1 \dots a_k)}}{(ort_{\langle a_1 \dots a_k \rangle} a_{k+1})^2}$ ☒

② Если $e_1 \dots e_k$ – ОНБ, $(a_1 \dots a_k) = (e_1 \dots e_k) \cdot A$, то $vol(P(a_1 \dots a_k)) = \det A$

$G(a_1 \dots a_k) = A^T \underbrace{G(e_1 \dots e_k)}_{E} A = A^TA \Rightarrow \underset{(vol\, P(a_1 \dots a_k))^2}{\det(G(a_1 \dots a_k))} = \det A^2 \Rightarrow vol(P(a_1 \dots a_k)) = \det A$

я каллиграфически заебалась.... КАХУУУЙ

как же я надеялась, что последний интграл в моей жизни будет на егэ .....

V. Аналит. Линейные многообразия. опр.

(82) Если $[a,b]=v$, то $(v,x)=Vol(a,b,x)$

(83) i,j,k – ПООБ. $[a,b]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

(84) $(a,b,c)=([a,b],c)=Vol(a,b,c)$

(85) $(a,b,c)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$, где $\alpha_x,\alpha_y,\alpha_z$ – к-ты в ПООБ

(86) $(a,b,c)=0 \Leftrightarrow a,b,c$ – компланарны

(87) $[a,b]=0 \Leftrightarrow a,b$ – коллин-ны

(88) ① $[a,b]\perp\langle a,b\rangle$ ③ $Vol(a,b,[a,b])\geq 0$
② $|[a,b]|=vol\,P(a,b)$

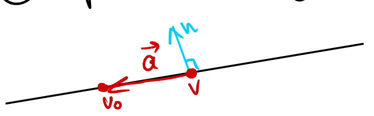
(89) Линейное многообразие в $\mathbb{R}^n$ – мн-во реш-й совместной СЛУ. $Ax=b$. (L)
Если S – пространство реш-й $Ax=0$, x_0 – частное решение $Ax=b \Rightarrow L=S+x_0$

(90) $L_1=v_1+S_1$; $L_2=v_2+S_2$. $L_1=L_2 \Leftrightarrow \begin{cases} S_1=S_2 \\ v_1-v_2\in S \end{cases}$

S – напр. подпр-во.
$\dim S$ – размерность L

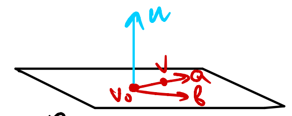
(91) Через любые $k+1$ точек в пространстве проходит пл-ть размера $\leq k$, причем если не проходит пл-ть размерности $<k$, то проходит единств. размера k

(92) Прямая в $\mathbb{R}^2$: ① $ax+by+c=0$ (a,b – к-ты нормали n)



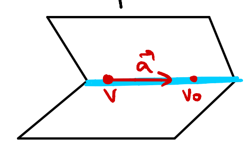
② векторное ур-е: $(v-v_0,n)=0$
③ Параметрическое: $l=v_0+a\cdot t$

(93) Плоскость в $\mathbb{R}^3$: ① $Ax+By+Cz=D$ (A,B,C – к-ты нормали)
② $(v-v_0,n)=0$
③ Параметрич: $\pi=v_0+at+bp$



(94) Решаем уравн-е $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0$

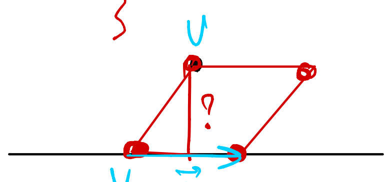
(95) Прямая в $\mathbb{R}^3$ ① $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=D_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z=D_2 \end{cases}$ ③ $l=v_0+at$
② $[v-v_0,a]=0$



(96) $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}=\dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}$

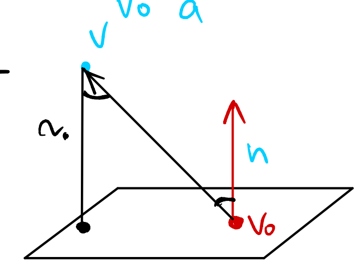
(97) 1) $\parallel$-ны
2) совпадают
3) $\cap$
4) скрещиваются

$[a_1,a_2]=0$ $(a_1,a_2,v_2-v_1)=0$

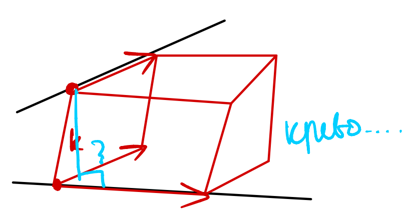


(98) $\rho(v,l)=\dfrac{|[v-v_0,a]|}{|a|}$

(99) $\rho(v,\pi)=\dfrac{|(v-v_0,n)|}{|n|}$



(100) $\rho(l_1,l_2)=\dfrac{(l_1,l_2,k)}{[l_1,l_2]}$



Док-ва.

① Теор: $\exists!\, v$: $(v,x)=Vol(a,b,x)$ для выбранных a,b,x.
Если $e_1e_2e_3$ – ПООБ, то $v=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\ldots$ (разлож. по 1 строке)

Лемма: $(v,x)=(v',x)\ \forall x\in\mathbb{E} \Rightarrow v=v'$
$(v,x)=(v',x) \Leftrightarrow (v,x)-(v',x)=0 \Leftrightarrow (v-v',x)=0\ \forall x \Rightarrow (v-v')\in\mathbb{E}^\perp$. Но $\dim\mathbb{E}^\perp=0 \Rightarrow v-v'=0$

Теорема: 1) единств-ть следует из леммы.
2) Покажем, что такой v подходит:
$(\ldots)$: $(v,x)=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}x_1-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}x_2+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}x_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}=Vol(a,b,c)$

② Векторы колл-ны $\Leftrightarrow [a,b]=0$.
$(\Rightarrow)$ a,b – колл-ны $\Rightarrow$ они ЛЗ $\Rightarrow$ $(a,b,x)=0\ \forall x=([a,b],\underbrace{x}_{\text{любой}})=0 \Rightarrow [a,b]=0$
$(\Leftarrow)$ произв$=0 \Rightarrow$ они колл: $[a,b]=0 \Rightarrow ([a,b],x)=0\ \forall x \Rightarrow a,b$ – Л.З $\Rightarrow$ колл.

③ ① $[a,b]\perp\langle a,b\rangle$. $0=(a,b,a)=([a,b],a)$
$=(b,a,b)=([a,b],b)$
② $|[a,b]|=vol\,P(a,b)$
1) Если $[a,b]=0$, то a,b – кол-ны $\Rightarrow vol\,P(a,b)=0$
2) Если $[a,b]\neq 0$:
$0\leq|[a,b]|^2=([a,b],[a,b])=([a,b],a,b)=Vol([a,b],a,b)=vol\,P([a,b],a,b)\overset{①}{=}|[a,b]|\cdot vol\,P(a,b)$
Сократим на $|[a,b]|^2\neq 0 \Rightarrow$ ок.
③ $Vol([a,b],a,b)\geq 0$

④ ① Векторное произв-е антикоммутативно: $[a,b]=-[b,a]=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$
$=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ противоположн.
② Билинейность (просто расписать определители, лол) или: через смешанные

⑤ Непустое $L\subseteq\mathbb{R}^n$ – многообр $\Leftrightarrow L=v_0+\underbrace{S}_{\text{подпространство}}$
$\Rightarrow$ L – мн-во решений несовм. СЛУ $Ax=b$
Возьмем S как мн-во решений $Ax=0$
x_0 = частное решение. Тогда $L=v_0+S$ – $\underbrace{\text{факт про мн-во реш-й СЛУ}}_{\text{лемма}}$

$\Leftarrow$ S – мн-во р-й ОСЛУ $Ax=0 \Rightarrow L$ – мн-во р-й СЛУ $Ax=Av_0$
$\Rightarrow$ лин. многообр. по опр.

⑥ L_1, L_2 – л.м. $\underset{v_1+S_1}{L_1} = \underset{v_2+S_2}{L_2} \Leftrightarrow \begin{cases} S_1 = S_2 \\ v_1 - v_2 \in S_1 \end{cases}$

$\Leftarrow$ $L_1 = v_1 + S_1 = v_1 + S_2 = v_2 + \underbrace{v_1 - v_2}_{\in S} + S = v_2 + S$

$\Rightarrow$ $v_1 + S_1 = L_1 = L_2 = v_2 + S_2$

$v_1 + \underset{\in S_1}{0} \in v_2 + S_2$

$v_1 - v_2 \in S_2$. Аналогично: $v_1 - v_2 \in S_1$.

$v \in S_1 \Rightarrow v + v_1 \in L_1 = L_2 = v_2 + S_2$

$v + \underbrace{v_1 - v_2}_{\in S_2 \text{ по док}} \in S_2 \Rightarrow v \in S_2 \ \forall v \in S_1 \Rightarrow S_1 \subseteq S_2$, аналогично $S_2 \subseteq S_1$.

⑦ Через всякие $k+1$ точки в $\mathbb{R}^n$ проходит плоскость размерности $\leq k$, более того, если через них не проходит плоскость размерности $< k$, то проходит единств. разм. $= k$.

① Пусть точки – $v_0, \ldots, v_k$. Тогда через них проходит пл-ть $v_0 + \langle v_1 - v_0, \ldots, v_k - v_0 \rangle = P$, $\dim P \leq k$

$$\left[\begin{array}{l} v_0 = v_0 + 0(v_1 - v_0) + \ldots + 0(v_k - v_0) \\ \underset{i \neq 0}{v_i} = v_0 + 0(v_1 - v_0) + \ldots + v_i - v_0 + \ldots + 0 \cdot (v_k - v_0) \end{array} \right]$$

② $\dim P = k \Rightarrow v_1 - v_0, \ldots, v_k - v_0$ – ЛНЗ. Пусть $P' = v_0' + S$ – другая пл-ть, содержащая $v_1 \ldots v_k \Rightarrow v_1 - v_0, \ldots, v_k - v_0 \in S$

Но тогда $S = \langle v_1 - v_0, \ldots, v_k - v_0 \rangle \Rightarrow P = P'$

VI Линейные операторы

опр

(101) Линейный оператор – линейное отобр. $\varphi: V \to V$

(102) Матрица линейного оператора – матрица, в j столбце которой координаты $\varphi(e_j)$

(103) Пусть в базисе $e_1 \ldots e_n$ у v к-ты $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ – к-ты его образа в том же базисе. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ матрица л.о.

(104) $A = A(\varphi, e)$

$e' = e \cdot C$, $A' = A(\varphi, e')$

$A' = C^{-1} A C$

(105) Матрицы A', A – подобные, если $\exists\, C \in M_n^0(F)$: $A' = C^{-1} A C$

(106) φ-инвариантное подпространство – такое U: $\varphi(U) \subset U$

(107) Если $e_1 \ldots e_k$ – φ-инв подпр-во с базисом $e_1 \ldots e_k$, $e_{k+1} \ldots e_n$ – дополнение базиса, $A(\varphi, e) = \begin{array}{c} \\ k \\ n-k \end{array}\!\!\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\!\!\begin{array}{c} n-k \\ \\ \end{array}$

(108) Если $V = U_2 \oplus U_1$, то $A(\varphi, e) = \begin{pmatrix} \bullet & 0 \\ 0 & \blacksquare \end{pmatrix}$

базис $e_1 \ldots e_k$ — базис $e_{k+1}, \ldots, e_n$

(109) Собственный вектор v л.о. φ: $v \in V$: $\varphi(v) = \underset{\in F}{\lambda} v$

(110) Собств. значение: $\lambda \in F$: $\exists v \in V$: $\varphi(v) = \lambda v$

(111) $\operatorname{Spec} \varphi$ – множество всех С/З φ

(112) Диагонализуемый л.о. – такой л.о. φ, что $\exists$ базис, в ком $A(\varphi, e)$ диагональна

(113) φ-диагонализуем $\Leftrightarrow$ в V есть базис из собств. векторов

(114) Собственное подпространство л.о. φ – такое $V_\lambda \subseteq V$, что $V_\lambda = \{v \mid \varphi(v) = \lambda v, \lambda \in \operatorname{Spec}\ldots$

(115) $\chi(t) = (-1)^n \det(A - tE)$ – характеристический многочлен. корни – С/З

$= (-1)^n \det(\varphi - t\,\mathrm{Id})$

(116) $\lambda \in \operatorname{Spec} \varphi \Leftrightarrow \chi(\lambda) = 0$

(117) алгебраическая кратность – кратность λ как корня $\chi(t)$

(118) геометрическая кратность – $\dim V_\lambda$

(119) $g_\lambda \leq a_\lambda$ $\forall \lambda \in \operatorname{Spec} \varphi$

(120) φ-диагонализуем $\Leftrightarrow$ выполнены ① и ②

① $\chi_\varphi(t)$ раскладывается на лин. множители

② $\forall \lambda \in \operatorname{Spec} \varphi$ $a_\lambda = g_\lambda$

Док-ва:

① Условия эквивалентны:

1) $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$

2) $\operatorname{Im} \varphi = V$

3) φ – обратимый ($\varphi: V \leftrightarrows V$)

4) $\det \varphi \neq 0$

$1 \Leftrightarrow 2$: $\dim V = \dim \operatorname{Im} \varphi + \dim \operatorname{Ker} \varphi$ [$\dim V = 0 + \dim \operatorname{Im} \varphi$; $\dim V = \operatorname{Im} \operatorname{Ker} \varphi + \dim V$]

$1 \& 2 \Leftrightarrow 3$: φ-инъект. $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$; φ-сюръект $\Leftrightarrow \operatorname{Im} \varphi = V$ $\Big\} \to \varphi$-биективно $\Rightarrow$ изоморф-м

$2 \Leftrightarrow 4$: $\operatorname{rk} \varphi = \dim \operatorname{Im} V = \dim V \Rightarrow \det \varphi \neq 0$.

② φ-диагонализуем $\Leftrightarrow$ есть базис из собств. векторов

возьмем $A = \operatorname{diag}(\lambda_1 \ldots \lambda_n)$, где $\lambda_i \in \operatorname{Spec} \varphi$. Тогда $A(\varphi, e) = A \Leftrightarrow \varphi(e_1), \ldots \varphi(e_n) = \lambda e_1, \ldots \lambda e_n \Leftrightarrow e_1 \ldots e_n$ – с/в

③ $\chi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \operatorname{Spec} \varphi$.

Факты:
- $\lambda \in \operatorname{Spec} \varphi \Leftrightarrow V_\lambda(\varphi) \neq \{0\}$ (по опр)
- $V_\lambda(\varphi)$ – φ-инвариантно, причем ограничение оператора φ на $V_\lambda = \lambda \cdot \mathrm{id}$.
- $\forall \lambda \in F$ $V_\lambda(\varphi) = \operatorname{ker}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id})$

$\{v \mid \lambda v = \varphi(v)\} \overset{"}{=\!=\!=} \{v \mid (\varphi - \lambda \mathrm{id})(v) = \varphi(\lambda) - \lambda v = 0 \Leftrightarrow \varphi(\lambda) = \lambda v\}$

Д-во: $\lambda \in \operatorname{Spec} \varphi \Leftrightarrow V_\lambda(\varphi) \neq \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{ker}((\varphi - \lambda \mathrm{id}) = 0 \Leftrightarrow \det(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}) = 0$

$$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda, & \ldots, & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^n \left(\lambda^n + \underset{-\operatorname{tr} A}{\underset{\shortparallel}{c_{n-1}}} \lambda^{n-1} + \ldots + \underset{(-1)^n \det \varphi}{\underset{\shortparallel}{c_0}} \right)$$

$\Rightarrow \lambda \in \operatorname{Spec} \varphi \Leftrightarrow \chi(\lambda) = 0$

④ $\forall \lambda \in \operatorname{Spec} \varphi$ $g_\lambda \leq a_\lambda$

Пусть $\lambda \in \operatorname{Spec} \varphi$, $g = g_\lambda$, $(\underbrace{e_1 \ldots e_g}_{g})$ – базис $V_\lambda(\varphi)$, $(e_1, \ldots, e_g, e_{g+1}, \ldots, e_n)$ – базис V.

$$A(\varphi, e) = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda \end{matrix}}^{g} & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

м.к. с-мы $e_1 \ldots e_g$

$$\chi_\varphi(t) = \det(A - tE) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda - t & & 0 \\ 0 & \ddots & \lambda - t \end{matrix} & B \\ \hline 0 & C - tE \end{array} \right) = \det(\operatorname{diag}(\underbrace{\lambda - t, \ldots, \lambda - t}_{g})) \cdot \det(C - tE)$$

$$= (\lambda - t)^g \cdot \underbrace{\det(C - tE)}_{\text{многочлен}} \ \vdots\ (\lambda - t)^g \Rightarrow a_\lambda \geq g_\lambda$$

5 $\lambda_1 \dots \lambda_s \in \operatorname{Spec}\varphi$; $\lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i \neq j \Rightarrow V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_s}$ – ЛНЗ.

Индукция: верно для $s=1$

Пусть верно для $<s$.

Тогда: Пусть $\exists v_1 \dots v_s$, $v_i \in V_{\lambda_i}$: $\overbrace{v_1 + \dots + v_{s-1}}^{\neq 0 \text{ по предп.}} + v_s = 0 \Rightarrow \varphi(v_1 + \dots + v_s) = \varphi(v_1) + \dots + \varphi(v_s) = 0 \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_s v_s = 0 \ \Big| - \lambda_s \cdot (v_1 + \dots + v_s)$

$(\lambda_1 - \lambda_s) v_1 + \dots + (\lambda_1 - \lambda_{s-1}) v_{s-1} = 0$

$\Rightarrow v_1 \dots v_s$ – ЛЗ $\Rightarrow$ противоречит предп.

6 φ – л.о., $\dim V = n$,

Корни $\chi(t)$ – $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – различные числа $\Rightarrow \varphi$ – диагонализуем.

$\lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i \neq j \Rightarrow V_{\lambda_i}, V_{\lambda_j}$ – ЛНЗ $\forall i \neq j$, причем $\dim V_{\lambda_i} = 1$.

Пусть $e_i \in V_{\lambda_i} \setminus \{0\} \Rightarrow e_1 \dots e_n$ – ЛНЗ $\Rightarrow$ базис в V. При этом, e_i – с/в $\Rightarrow \exists$ базис из с/в.

7 φ – диагонализуем $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \operatorname{Spec}\varphi$ $a_\lambda = g_\lambda$

1) уже имеем $a_\lambda \geq g_\lambda$.

2) Док. φ – диагонализуем $\Rightarrow \forall \lambda \in \operatorname{Spec}\varphi$ $a_\lambda \leq g_\lambda$.

$\Rightarrow \varphi$ – диагонализуем $\Rightarrow \chi(t)$ разлагается на лин. множители $(t-\lambda_1)^{d_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_k)^{d_k}$, а $A(\varphi, e) = \operatorname{diag}(\underbrace{\lambda_1 \dots \lambda_1}_{d_1 \text{ раз}}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{d_2 \text{ раз}}, \underbrace{\lambda_k \dots \lambda_k}_{d_k \text{ раз}})$

$= \operatorname{diag}(\mu_1 \dots \mu_n)$

с точностью до перестановки.

Тогда $V_{\lambda_j} \supseteq \{e_i \mid \mu_i = \lambda_j\}$. И тогда $\underbrace{\dim V_{\lambda_j}}_{= g_{\lambda_j}} \geq \underbrace{d_j}_{= a_{\lambda_j}}$, $g_{\lambda_j} \geq a_{\lambda_j}$

8 $F = \mathbb{R} \Rightarrow \exists$ $\underbrace{\text{одномерное}}_{①}$ / $\underbrace{\text{двумерное}}_{②}$ φ-инв. подпр-во

① $\chi_\varphi(t)$ имеет корни $\Rightarrow \exists$ с/в $\Rightarrow \exists \langle \text{с/в} \rangle$ – одном. φ-инв. подпр.

② нет корней. Тогда возьмем комплексный корень $\chi(t) = \lambda + i\mu$, $\mu \neq 0$. Фиксируем базис $e_1 \dots e_n$ и $A = A(\varphi, e)$

Для с/з $\lambda + \mu i$ $\exists$ комплексн. с/в: $A(u + vi) = (u+vi)(\lambda+\mu i) \Leftrightarrow \underbrace{\lambda u - \mu v}_{Au} + \underbrace{(u\mu + \lambda v)}_{Av} i$, $A(u+vi) = Au + Avi$ $\Big|$ $\to$ в $\mathbb{R}$ векторы u, v порождают φ-инв пр-во размерности ≤ 2, ск-таки

наверное док-ть: $\dim U = 2$. Но вообще и так 2-мерн / одномерн.

VII Линейные отображения и операторы в Евклидовых пространствах определения.

$\mathbb{E}$ – евкл. пр-во, $\dim \mathbb{E} = n$. $\mathbb{E}'$ – евкл. пр-во, $\dim \mathbb{E}' = m$. $\varphi: \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$

121 Линейное отображение $\underset{\varphi^*}{\psi}$ сопряженное к φ – $\underbrace{(x, \varphi(y))'}_{\text{ск-произв в } \mathbb{E}'} = (\psi(x), y)$

122 $\varphi: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ – лин. оператор $\Rightarrow \exists! \varphi^*: (\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y))$.

123 Самосопряженный л.о: $(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y))$

124 Т О каноническом виде самосопряженного φ: $\varphi = \varphi^* \Rightarrow$ в $\mathbb{E}$ $\exists$ базис из собств. векторов φ, в частн. φ-диагонализуем над $\mathbb{R}$ и $\chi_\varphi(t)$ разл-на лин. мн.

125 $\lambda_1 \dots \lambda_k$ – с/з. $\varphi = \varphi^*$. $\lambda_j \neq \lambda_i$ $\forall i \neq j$. Тогда $\mathbb{E}_{\lambda_i}(\varphi) \perp \mathbb{E}_{\lambda_j}(\varphi)$ $\forall i \neq j$

126 $Q(x)$ – квадратичная форма $\mathbb{E} \to \mathbb{R}$. $\Rightarrow \exists$ базис $e_1 \dots e_n$, в ком $Q(x)$ принимает канон. вид $Q(x) = \lambda_1 e_1^2 + \dots + \lambda_n e_n^2$, причем $\lambda_1 \dots \lambda_n$ определены однозначно

127 φ – ортогональный, если φ сохраняет скалярное произведение. $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$

128 Т о пяти эквивалентных условиях, опр. ортогональный φ: ① φ-ортогональный

② $|\varphi(x)| = |x|$

③ $\exists \varphi^{-1}$; $\varphi^{-1} = \varphi^*$; $\varphi^* \varphi = \varphi \varphi^* = id$

④ $\forall$ ортонорм. базиса матрица л.о. ортогональна

⑤ $e_1 \dots e_n$ – ортонорм $\Rightarrow \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ – ортонорм.

129 Т о канонич. виде ортогонального л.о.

Если φ – ортогональный оператор, то $\exists$ ортонорм. базис, в ком. матрица φ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \Pi(\alpha_1) & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & \Pi(\alpha_k) & & 0 \\ & & & \pm 1 & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & \pm 1 \end{pmatrix} \qquad \Pi(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

130 Если $\dim \mathbb{E} = 3 \Rightarrow$ канон. вид ортог. φ может выглядеть тремя способами:

$\to \operatorname{diag}(\pm 1 \pm 1 \pm 1)$

$\to \operatorname{diag}(\Pi(\alpha), 1)$

$\to \operatorname{diag}(\Pi(\alpha), -1)$

131 $\exists$ ортонормир. базисы $(e_1 \dots e_n) = e$ в $\mathbb{E}$ и $f_1 \dots f_m$ в $\mathbb{E}'$, т.что матрица лин. отобр $A(\varphi, e, f) = \left(\begin{array}{cc|c} \sigma_1 & 0 & \\ 0 & \sigma_r & 0 \\ \hline & 0 & 0 \end{array}\right)$, причем набор $\sigma_1 \dots \sigma_r$ опр-н однозначно.

132 $\forall A \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ $\exists$ ортог. матрицы V, U: $A = U \Sigma V^T$, $\Sigma = \left(\begin{array}{c|c} \sigma_1 \ \ddots \ \sigma_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$. Более того, $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ опр. однозначно

133 Пусть $A \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $A = U \Sigma V^T$ – SVD, $\operatorname{rk} A = r$. Для $\forall s = 1, \dots, r-1$ пусть $\Sigma_s = \left(\begin{array}{c|c} \sigma_1 \ \ddots \ \sigma_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \min \underbrace{\|A - B\|}_{\text{норма Фробениуса}} \ \forall B$ ранга S достигается при $B = U \Sigma_s V^T$

$\|A\| = \sqrt{\operatorname{tr}(A^T A)}$

Док-ва

это все еще не учтены...

① Сопряженное к л.о. φ л.о. — φ^*: $(\varphi(x), y)' = (x, \varphi(y))$ $\forall \varphi$ φ^* $\exists$ и единственно. ①

Пусть $\varphi^* = \varphi$.

② . Если e - базис $\mathbb{E}$ и f - базис $\mathbb{E}'$; $G = G(e)$ - матрица Грама, $G' = G(f)$ - матрица Грама | $A_\varphi = A(\varphi, e, f)$, $A_\psi = A(\psi, f, e)$ | $\underset{n\times m}{A_\psi} = \underset{n\times n}{G^{-1}} \underset{n\times m}{A_\varphi^T} \underset{m\times m}{G'}$. А если ортонорм. базис $A_\psi = A_\varphi^T$

$x \in \mathbb{E}$. $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

$y \in \mathbb{E}'$. $y = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m$

скал. произв. в столб.

$$S = x_1 e_1 A_\varphi^T G' \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} + \dots + x_n e_n [\dots] = \sum_i^n \sum_j^m x_i y_j [A_\varphi^T G']_{ji} = \dots$$

$$(\varphi(x), y)' = \Big(\underbrace{A_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{к-ты } \varphi(x)}\Big)^T \cdot G' \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n) A_\varphi^T G' \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$(x, \psi(y)) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T \cdot G \cdot A_\psi \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

$W = \Sigma \dots$

равно поэлементно, т.к. $\forall B \in Mat_{m\times n}$ $b_{ij} = (0 \dots \overset{j}{1} \dots 0)\, B \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} i$

То есть выразим $A_\psi = G^{-1} A_\varphi^T G'$

Теперь базисы - ортонормированные $\Rightarrow G^{-1} = G' = E$

② $U \subseteq \mathbb{E}$ - φ-инвариантное подпространство, опр $\varphi = \varphi^*$. Тогда $U^\perp$ — тоже φ-инв. подпространство

Хотим: $\varphi(U) \subseteq U \Rightarrow \varphi(U^\perp) \subseteq U^\perp$. $x \in U$, $y \in U^\perp$ $\quad (\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)) \overset{\text{из-за инв-ти}}{=\!=} 0 \Rightarrow \varphi(y) \perp x \Rightarrow \varphi(U^\perp) \subseteq U^\perp$

вот бы все док-ва такие.

③ $\varphi = \varphi^* \Rightarrow \exists\, v : \varphi(v) = \lambda v$.

Выберем ортонорм. базис в $\mathbb{E}$ - e. $A_\varphi = A(\varphi, e)$; $A_{\varphi^*} = A(\varphi^*, e) \Rightarrow \varphi = \varphi^* \Leftrightarrow A_\varphi = A_\varphi^T$ ★

$\mathbb{E}$ - над $\mathbb{R} \Rightarrow \exists$ $\underbrace{\text{одномерное}}_{\text{все ок}}$ / $\underbrace{\text{двумерное}}$ φ-инв. подпр-во

обозначим его U и ограничим на нем φ: (будет оператор ψ) он тоже с/с; $A_\psi = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ (симм. т.к. ★)

$\chi(t) = t^2 - ta - tc + ac - b^2$. . $D = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0 \Rightarrow \exists$ корень $\in \mathbb{C}$ $\Rightarrow \exists$ с/в $\Rightarrow$ ок

④ $\varphi = \varphi^* \Leftrightarrow \exists$ ортонорм. базис из с/в. В частности, φ диагонализуем над $\mathbb{R}$ и $\chi(t)$ разл. на лин. множ.

Индукция по n: $n = 1 \to$ все ок

$< n$ - все ок.

Тогда берем с/в для φ $\overset{cl}{\Rightarrow}$ $U = \langle \|e\| \rangle$ - φ-инв $\Rightarrow$ все ок

(7,8) $\exists$ ортонормир. базис $(e_1 \dots e_n) = e$ в $\mathbb{E}$ и $f_1 \dots f_m$ в $\mathbb{E}'$, т.что матрица лин. отобр $A(\varphi, e, f) = \left(\begin{array}{cc|c} \sigma_1 & 0 & \\ 0 & \sigma_r & 0 \\ \hline & 0 & 0 \end{array}\right)$, причем набор $\sigma_1 \dots \sigma_r$ опр-и однозначно.

Теор. о сингулярных базисах $\exists$ ортонорм. базисы $e = (e_1, \dots, e_n)$ в $\mathbb{E}$ и $f = (f_1, \dots, f_m)$ в $\mathbb{E}'$, т.что

$$A(\varphi, e, f) = \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & 0 & \\ & \sigma_2 & & 0 \\ 0 & & \sigma_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right), \text{ где } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$$

(Иными словами, $\varphi(e_i) = \sigma_i \cdot f_i$ при $i \leq r$ и $\varphi(e_i) = 0$ при $i > r$)

Более того, числа $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ определены однозначно.

Д-во. Пусть $\varphi^*: \mathbb{E}' \to \mathbb{E}$ - сопряжённое к φ лин. отобр.

Положим $\psi := \varphi^* \varphi$ — это лин. опер-р на $\mathbb{E}$

$\forall x, y \in \mathbb{E}$ имеем $(x, \psi(y)) = (x, \varphi^*\varphi(y)) = (\varphi(x), \varphi(y))'$

В частн., $(x, \psi(y)) = (\psi(x), y) \Rightarrow \psi = \psi^*$ (т.е. ψ самосопряжён)

$\Rightarrow \exists$ ортонорм. базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ в $\mathbb{E}$, т.что $A(\psi, e) = diag(s_1, \dots, s_n)$

$\forall i = 1, \dots, n$ имеем $(e_i, \psi(e_i)) = (\varphi(e_i), \varphi(e_i))' \geq 0$

$(e_i, s_i e_i) = s_i \underbrace{(e_i, e_i)}_{=1} = s_i$ $\quad \Big\}\, s_i \geq 0$

Переставляя векторы в e, добьёмся $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n$.

Пусть $k \in \{1, \dots, n\}$ таково, что $s_k > 0$, но $s_{k+1} = 0$

$\forall i \geq k+1$ $(\varphi(e_i), \varphi(e_i))' = 0 \Rightarrow \varphi(e_i) = 0 \Rightarrow e_i \in \operatorname{Ker} \varphi$

$\forall i = 1, \dots, k$ положим $\sigma_i = \sqrt{s_i}$ и $f_i := \frac{1}{\sigma_i} \varphi(e_i)$.

Тогда $\forall i, j \in \{1, \dots, k\}$ имеем $(f_i, f_j)' = \left(\frac{1}{\sigma_i}\varphi(e_i), \frac{1}{\sigma_j}\varphi(e_j)\right)' =$
$= \frac{1}{\sigma_i \sigma_j}(\varphi(e_i), \varphi(e_j))' = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j}(e_i, \psi(e_j)) = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j}(e_i, \sigma_j^2 e_j) =$
$= \frac{\sigma_j}{\sigma_i}(e_i, e_j) = \delta_{ij} \Rightarrow (f_1, \dots, f_k)$ - ортонормир. система в $\mathbb{E}'$. Дополним её до ортонорм. базиса f в $\mathbb{E}'$ $\Rightarrow$

по построению имеем $A(\varphi, e, f) = \left(\begin{array}{cc|c} \sigma_1 & 0 & \\ 0 & \sigma_k & 0 \\ \hline 0 & & 0 \end{array}\right)$, откуда $k = r$

Единственность для $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ следует из того, что $\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2$ - все ненул. собств. значения лин. опер-ра $\psi = \varphi^*\varphi$

■