ИДЗ №7, вариант 21

Даша Оникова, бпми 2112

март 2022

№ 1 Найдите нормальный вид и какую-нибудь приводящую к нему невырожденную замену координат (выражение старых координат через новые) для следующей квадратичной формы над $\mathbb{R}$

$$Q(x_1, x_2, x_3) = -25x_1^2 + 21x_2^2 + 77x_3^2 - 20x_1x_2 - 60x_1x_3 - 104x_2x_3.$$

Квадратичная форма Q из условия будет иметь нормальный вид, если $Q(z_1, z_2, z_3) = \varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2 + \varepsilon_3 z_3^2$, причем $\varepsilon_i \in \{\pm 1, 0\}$ (такой базис точно сущетсвует).

Пусть заданная квадратичная форма - в каком-то базисе (e_1, e_2, e_3). Пусть B - матрица (текущего вида) квадратичной формы. Тогда, приведя матрицу вида $(B|E)$ к диагональному виду "симметричным методом Гаусса"получим матрицу вида $(B'|C^T)$, где B' - матрица канонического вида этой квадратичной формы, а C - матрица перехода от базиса (e_1, e_2, e_3) к базису (e_1', e_2', e_3'), в котором, как раз, квадратичная форма имеет канонический вид.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -25 & -10 & -30 & 1 & 0 & 0 \\ -10 & 21 & -52 & 0 & 1 & 0 \\ -30 & -52 & 77 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{часть к диаг. виду}]{\text{приводим левую}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -25 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 49 & -\frac{46}{25} & \frac{8}{5} & 1 \end{array}\right)$$

Отсюда, $C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{46}{25} \\ 0 & 1 & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Получается, что в базисе $(e_1', e_2', e_3') = (e_1, e_2, e_3) \cdot C$ квадратичная форма $Q(y_1, y_2, y_3) = -25y_1^2 + 25y_2^2 + 49y_3^2$ - имеет канонический вид, а форма $Q(\frac{y_1}{5}, \frac{y_2}{5}, \frac{y_3}{7}) = -y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ - нормальный вид.

Осталось выразить x_1, x_2, x_3 через y_1, y_2, y_3 :
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - \frac{2}{5}y_2 - \frac{46}{25}y_3 \\ y_2 + \frac{8}{5}y_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Подходящая замена (для нормального вида) -
$\begin{cases} x_1 = \frac{y_1}{5} - \frac{2}{25}y_2 - \frac{46}{175}y_3 \\ x_2 = \frac{y_2}{5} + \frac{8}{35}y_3. \\ x_3 = \frac{y_3}{7} \end{cases}$. Заметим, что матрица полученной замены - $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{25} & -\frac{46}{25} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{8}{25} \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$ - невырожденная, значит и замена невырожденная

Ответ: Нормальный вид - вид $Q(y_1', y_2', y_3') = -y_1'^2 + y_2'^2 + y_3'^2$, $\begin{cases} x_1 = \frac{y_1'}{5} - \frac{2}{25}y_2' - \frac{46}{175}y_3' \\ x_2 = \frac{y_2'}{5} + \frac{8}{35}y_3'. \\ x_3 = \frac{y_3'}{7} \end{cases}$

№ 2 Определите нормальный вид квадратичной формы $Q(x_1, x_2, x_3)$ в зависимости от параметра b.

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + (b+1)x_2^2 + (b+3)x_3^2 - 10x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2(b+4)x_2x_3$$

Пусть B - матрица этой квадратичной формы, $B = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -4 \\ -5 & b+1 & b+4 \\ -4 & b+4 & b+3 \end{pmatrix}$

Будем делать симметричные элементарные преобразования с матрицей B, чтобы уменьшить число мест с параметром в ней:

$$B \xrightarrow[B_{(2)}-B_{(3)}]{B^{(2)}-B^{(3)}} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -1 & -4 & 1 \\ -4 & 1 & b+3 \end{pmatrix}$$

Заметим, что только третий угловой минор будет зависеть от b. Тогда можно использовать метод Якоби:

- $\delta_1 = 5$
- $\delta_2 = -21$
- $\delta_3 = 5*(-4)*(b+3)+(-1)*1*(-4)+(-4)*(-1)*1-(-4)*(-4)*(-4)-1*1*5-(b+3)*(-1)*(-1) = -21b+4$

Тогда, канонический вид квадратичной формы - $Q(y_1, y_2, y_3) = 5y_1^2 - \frac{21}{5}y_2^2 - \frac{-21b+4}{21}y_3^2$, а нормальный вид этой квадратичной формы - $Q(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - z_2^2 + az_3^2,\ a = \begin{cases} 1, & -\frac{-21b+4}{21} > 0 \\ 0, & -\frac{-21b+4}{21} = 0 \\ -1, & -\frac{-21b+4}{21} < 0 \end{cases}$

$$-\frac{-21b+4}{21} > 0 \Leftrightarrow -21b+4 < 0 \Leftrightarrow b > \frac{4}{21}$$
$$-\frac{-21b+4}{21} = 0 \Leftrightarrow -21b+4 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{4}{21}$$
$$-\frac{-21b+4}{21} < 0 \Leftrightarrow -21b+4 > 0 \Leftrightarrow b < \frac{4}{21}$$

Ответ:

Норм. вид	соотв. b	как Q определена
$Q(q_1, q_2, q_3) = a_1^2 - a_2^2 + a_3^2$	$b > \frac{4}{21}$	неопределенная
$Q(a_1, a_2, a_3) = a_1^2 - a_2^2$	$b = \frac{4}{21}$	неопределенная
$Q(a_1, a_2, a_3) = a_1^2 - a_2^2 - a_3^2$	$b < \frac{21}{4}$	неопределенная

№ 3 В векторном пространстве $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ рассмотрим функцию $Q(f)$.

а) Докажите, что Q является квадратичной формой в V.

б) Существует ли такой базис $\mathbb{e} = (e_1, ..., e_4)$, что квадратичная форма Q в координатах $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_4)$ в этом базисе имеет вид

$$-21x_1^2 + 46x_1x_2 + 40x_1x_3 + 6x_1x_4 - 50x_2^2 - 82x_2x_3 - 48x_2x_4 - 1x_3^2 + 26x_3x_4 - 11x_4^2$$

Если такой базис существует, то предъявите его.

$$Q(f) = \int\limits_0^2 f^2 dx - \int\limits_1^3 f^2 dx$$

а) Квадратичной формой, ассоциированной с билинейной формой β ($V \times V \to F$) называют отображение $V \to F$: (в нашем случае - $\mathbb{R}$) $Q(x) = \beta(x, x)$. Если B - матрица соответствуещей билинейной формы в базисе $\mathbb{e}$ и x имеет координаты $(x_1, ...x_n)$ в базисе $\mathbb{e}$, то $Q(x) = (x_1, ..., x_n) \cdot B \cdot (x_1, ..., x_n)^T$. Чтобы доказать, что данная функция - квадратичная форма, приведем соответствующую ей билинейную форму.

Пусть $f = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (координаты f в базисе V $\mathbb{v} = (x^3, x^2, x, 1)$ - (a, b, c, d)). Обозначим первообразную функции $f^2(x)$ $F(x)$.

$f^2 = (ax^3 + bx^2 + cx + d)^2 = a^2x^6 + b^2x^4 + c^2x^2 + d^2 + 2abx^5 + 2acx^4 + 2adx^3 + 2bcx^3 + 2bdx^2 + 2cdx$

$F(x) = \frac{a^2x^7}{7} + \frac{b^2x^5}{5} + \frac{c^2x^3}{3} + d^2x + \frac{abx^6}{3} + \frac{2acx^5}{5} + \frac{adx^4}{2} + \frac{bcx^4}{2} + \frac{2bdx^3}{3} + cdx^2$ $(+const)$

$F(0) =$ $(const)$

$F(2) = \frac{128a^2}{7} + \frac{32b^2}{5} + \frac{8c^2}{3} + 2d^2 + \frac{64ab}{3} + \frac{64ac}{5} + 8ad + 8bc + \frac{16bd}{3} + 4cd$ $(+const)$

$F(3) = \frac{2187a^2}{7} + \frac{243b^2}{5} + 9c^2 + 3d^2 + 243ab + \frac{486ac}{5} + \frac{81ad}{2} + \frac{81bc}{2} + 18bd + 9cd$ $(+const)$

$F(1) = \frac{a^2}{7} + \frac{b^2}{5} + \frac{c^2}{3} + d^2 + \frac{ab}{3} + \frac{2ac}{5} + \frac{ad}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{2bd}{3} + cd$ $(+const)$

$Q(f) = \int\limits_0^2 f^2 dx - \int\limits_1^3 f^2 dx = F(2) - F(0) - F(3) + F(1) = -294a^2 - 42b^2 - 6c^2 - \frac{664}{3}ab - 84ac - 32ad - 32bc - 12bd - 4cd$

Итак, пусть $f \in V$ в базисе $\mathbb{v}$ имеет координаты (a_1, b_1, c_1, d_1), а $g \in V$ в том же базисе - координаты (a_2, b_2, c_2, d_2).

Рассмотрим отображение $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$, $\beta(f, g) = -294a_1a_2 - 42b_1b_2 - 6c_1c_2 - \frac{664}{6}a_1b_2 - \frac{664}{6}a_2b_1 - 42a_1c_2 - 42a_2c_1 - 16a_1d_2 - 16a_2d_1 - 16b_1c_2 - 16b_2c_1 - 6b_1d_2 - 6b_2d_1 - 2c_1d_2 - 2c_2d_1$.

$\beta(f, g)$ - билинейная форма, так как она линейна по обоим аргументам: Пусть $v_1, v_2 \in V$ в базисе $\mathbb{v}$ имеют координаты (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) соответственно, а $\lambda \in \mathbb{R}$

– $\beta(\lambda v_1 + \lambda v_2, g) = -294(\lambda x_1 + \lambda y_1)a_2 - 42(\lambda x_2 + \lambda y_2)b_2 - 6(\lambda x_3 + \lambda y_3)c_2 - \frac{664}{6}(\lambda x_1 + \lambda y_1)b_2 - \frac{664}{6}a_2(\lambda x_2 + \lambda y_2) - 42(\lambda x_1 + \lambda y_1)c_2 - 42a_2(\lambda x_3 + \lambda y_3) - 16(\lambda x_1 + \lambda y_1)d_2 - 16a_2(\lambda x_4 + \lambda y_4) - 16(\lambda x_2 + \lambda y_2)c_2 - 16b_2(\lambda x_3 + \lambda y_3) - 6(\lambda x_2 + \lambda y_2)d_2 - 6b_2(\lambda x_4 + \lambda y_4) - 2(\lambda x_3 + \lambda y_3)d_2 - 2c_2(\lambda x_4 + \lambda y_4) = -294\lambda x_1a_2 - 294\lambda y_1a_2 - 42\lambda x_2b_2 - 42\lambda y_2b_2 - 6\lambda x_3c_2 - 6\lambda y_3c_2 - \frac{664}{6}\lambda x_1b_2 + -\frac{664}{6}\lambda y_1b_2 - \frac{664}{6}a_2\lambda x_2 + \frac{664}{6}a_2\lambda y_2 - 42\lambda x_1c_2 - 42\lambda y_1c_2 - 42a_2\lambda x_3 - 42a_2\lambda y_3 - 16\lambda x_1d_2 - 16\lambda y_1d_2 - 16a_2\lambda x_4 - 16a_2\lambda y_4 - 16\lambda x_2c_2 - 16\lambda y_2c_2 - 16b_2\lambda x_3 - 16b_2\lambda y_3 - 6\lambda x_2d_2 - 6\lambda y_2d_2 - 6b_2\lambda x_4 - 6b_2\lambda y_4 - 2\lambda x_3d_2 - 2\lambda y_3d_2 - 2c_2\lambda x_4 - 2c_2\lambda y_4 = \lambda\beta(v_1, g) + \lambda\beta(x_2, g)$.

– $\beta(f, \lambda v_1 + \lambda v_2) = -294a_1(\lambda x_1 + \lambda y_1) - 42b_1(\lambda x_2 + \lambda y_2) - 6c_1(\lambda x_3 + \lambda y_3) - \frac{664}{6}a_1(\lambda x_2 + \lambda y_2) - \frac{664}{6}(\lambda x_1 + \lambda y_1)b_1 - 42a_1(\lambda x_3 + \lambda y_3) - 42(\lambda x_1 + \lambda y_1)c_1 - 16a_1(\lambda x_4 + \lambda y_4) - 16(\lambda x_1 + \lambda y_1)d_1 - 16b_1(\lambda x_3 + \lambda y_3) - 16(\lambda x_2 + \lambda y_2)c_1 - 6b_1(\lambda x_4 + \lambda y_4) - 6(\lambda x_2 + \lambda y_2)d_1 - 2c_1(\lambda x_4 + \lambda y_4) - 2(\lambda x_3 + \lambda y_3)d_1 = -294\lambda x_1 a_1 - 294\lambda y_1 a_1 - 42\lambda x_2 b_1 - 42\lambda y_2 b_1 - 6\lambda x_3 c_1 - 6\lambda y_3 c_1 - \frac{664}{6}\lambda x_1 b_1 + -\frac{664}{6}\lambda y_1 b_1 - \frac{664}{6}a_1\lambda x_2 + \frac{664}{6}a_1\lambda y_2 - 42\lambda x_1 c_1 - 42\lambda y_1 c_1 - 42a_1\lambda x_3 - 42a_1\lambda y_3 - 16\lambda x_1 d_1 - 16\lambda y_1 d_1 - 16a_1\lambda x_4 - 16a_1\lambda y_4 - 16\lambda x_2 c_1 - 16\lambda y_2 c_1 - 16b_1\lambda x_3 - 16b_1\lambda y_3 - 6\lambda x_2 d_1 - 6\lambda y_2 d_1 - 6b_1\lambda x_4 - 6b_1\lambda y_4 - 2\lambda x_3 d_1 - 2\lambda y_3 d_1 - 2c_1\lambda x_4 - 2c_1\lambda y_4 = \lambda\beta(f, v_1) + \lambda\beta(f, v_1)$.

$\Rightarrow \beta(f, g)$ - билинейная форма, ей соответствует квадратичная форма $Q'(f) = -294a_1^2 - 42b_1^2 - 6c_1^2 - \frac{664}{3}a_1b_1 - 84a_1c_1 - 32a_1d_1 - 32b_1c_1 - 12b_1d_1 - 4c_1d_1 = Q(f)$ из условия, значит, данная в условии функция - квадратичная форма.

б) Пусть в базисе $\mathbb{v}$ матрица $Q = B$, а в базисе $\mathbb{e}$ (предположим, он существует) матрица $Q - D$

$$B = \begin{pmatrix} -294 & -\frac{332}{3} & -42 & -16 \\ -\frac{332}{3} & -42 & -16 & -6 \\ -42 & -16 & -6 & -2 \\ -16 & -6 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} -21 & 23 & 20 & 3 \\ 23 & -50 & -41 & -24 \\ 20 & -41 & -1 & 13 \\ 3 & -24 & 13 & -11 \end{pmatrix}$$

Вне зависимости от выбора нормального вида, количество переменных, перед которыми коэффицент $+1$, 1, 0 остается неизменным. "симметричным методом Гаусса"приведем матрицы D и B к виду $diag(\varepsilon_1, .., \varepsilon_4), \; \varepsilon_i \in \{\pm 1, 0\}$

$$\begin{pmatrix} -294 & -\frac{332}{3} & -42 & -16 \\ -\frac{332}{3} & -42 & -16 & -6 \\ -42 & -16 & -6 & -2 \\ -16 & -6 & -2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ нормальный вид $Q(\mathbb{x}') = -x_1'^2 - x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2$

$$\begin{pmatrix} -21 & 23 & 20 & 3 \\ 23 & -50 & -41 & -24 \\ 20 & -41 & -1 & 13 \\ 3 & -24 & 13 & -11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ нормальный вид $Q(\mathbb{x}'') = -x_1''^2 - x_2''^2 + x_3''^2 - x_4''^2$. Возникло противоречие: в нормальном виде должно быть 2 знака -, но в нормальном виде, полученном из D получается три. Значит нет подходящего $\mathbb{e}$.

Ответ: б) нет.

№ 4 Определите все значения параметров a и b, при которых билинейная форма $\beta(x,y)$ задает скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$.

$$\beta(x,y) = (-9b+40)x_1y_1 + (3b-12)x_1y_2 + (-3b+14)x_1y_3 + (3b-12)x_2y_1 + 2x_2y_2 + $$
$$+(2b-6)x_2y_3 + (-1.5a+7)x_3y_1 + (2b-6)x_3y_2 + 3x_3y_3$$

Скалярное произведение - отображение $(\cdot,\cdot): \ \mathbb{E}\times\mathbb{E}\to\mathbb{R}$ (где $\mathbb{E}$ - Евклидово пространство, а в нашем случае, $\mathbb{R}^3$), что $(\cdot,\cdot)$ - симметричная билинейная форма, а квадратичная (x,x) - положительно определена.

- Сначала найдем все значения a, b, для которых $\beta(x,y)$ - симметричная билинейная форма. То есть, B - матрица этой билинейной формы - должна быть симметричной.

$$B = \begin{pmatrix} (-9b+40) & (3b-12) & (-3b+14) \\ (3b-12) & 2 & (2b-6) \\ \frac{(-3a+14)}{2} & (2b-6) & 3 \end{pmatrix}$$

Симметричность матрицы B зависит от параметров, а точнее, B - симметрична, если $\frac{-3a+14}{2} = -3b+14 \Leftrightarrow -3a+14 = -6b+28 \Leftrightarrow -3a = -6b+14 \Leftrightarrow a = 2b - \frac{14}{3}$

Получается, чтобы $\beta(x,y)$ задавала скалярное произведение, необходимо, чтобы

$$\beta(x,y) = (-9b+40)x_1y_1 + (3b-12)x_1y_2 + (-3b+14)x_1y_3 + (3b-12)x_2y_1 + 2x_2y_2 +$$
$$+(2b-6)x_2y_3 + (-3b+14)x_3y_1 + (2b-6)x_3y_2 + 3x_3y_3$$

- Теперь посмотрим, при каких b $Q(x)$ - квадратичная форма, ассоциированная с $\beta(x,y)$ - положительно определена. Чтобы она была положительно определена, по критерию Сильвестра необходимо, чтобы $\delta_k > 0 \ \forall k \in \{1,2,3\}$, где $\delta_k -$ k-й угловой минор D - матрицы $Q(x)$.

Запишем D - матрицу $Q(x)$:

$$D = \begin{pmatrix} (-9b+40) & (3b-12) & (-3b+14) \\ (3b-12) & 2 & (2b-6) \\ (-3b+14) & (2b-6) & 3 \end{pmatrix}$$

Посчитаем угловые миноры:

* $\delta_1 = -9b+40$
* $\delta_2 = -18b+80-(3b-12)^2 = -9b^2+54b-64$
* $\delta_3 = (-9b+40)*2*3+(3b-12)*(2b-6)*(-3b+14)+(-3b+14)*(3b-12)*(2b-6)-(-3b+14)*2*(-3b+14)-(2b-6)*(2b-6)*(-9b+40)-3*(3b-12)*(3b-12) = -b^2+6b-8$

Решим систему неравенств относительно b:

$$\begin{cases} -9b+40>0 \\ -9b^2+54b-64>0 \\ -b^2+6b-8>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b<\frac{40}{9} \\ (b-\frac{9-\sqrt{17}}{3})(b-\frac{9+\sqrt{17}}{3})<0 \\ (b-2)(b-4)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b<\frac{40}{9} \\ \frac{9-\sqrt{17}}{3}<b<\frac{9+\sqrt{17}}{3} \\ 2<b<4 \end{cases}$$

$$4 < \sqrt{17} < 5 \Rightarrow \frac{13}{3} < \frac{9+\sqrt{17}}{3} < \frac{14}{3};\ \frac{4}{3} < \frac{9+\sqrt{17}}{3} < \frac{5}{3}$$

В итоге, $2 < b < 4$.

Таким образом, чтобы $\beta(x, y)$ задавала скалярное произведение необходимо, чтобы $\begin{cases} 2 < b < 4 \\ a = 2b - \frac{14}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} 2 < b < 4 \\ -\frac{2}{3} < a < \frac{10}{3} \end{cases}$

Ответ: $b \in (2, 4),\ a \in (-\frac{2}{3}, \frac{10}{3}),\ a = 2b - \frac{14}{3}$

№ 5 Существует ли система из трёх векторов в $\mathbb{R}^3$, матрица Грама которой равна A? Если существует, то предъявите такую систему. Скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$ предполагается стандартным.

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 12 & 87 \\ 12 & 20 & 96 \\ 87 & 96 & 549 \end{pmatrix}$$

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, e_2, e_3)$ - стандартный базис $\mathbb{R}^3$, а искомая система векторов (то есть, система, матрица Грама которой равна A, если она существует) - (v_1, v_2, v_3) с координатами (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3) в базисе $\mathbb{e}$ соответственно.

Симметричными элементарными пребразованиями превратим матрицу $(A|E)$ в матрицу $(D|C^T)$, где D - имеет диагональный вид. Подберем такую систему векторов w_1, w_2, w_3, что полученная матрица D - будет матрицей Грама этой системы векторов (если в D на диагонали будут какие-то отрицательные числа, систему w_1, w_2, w_3 подобрать не выйдет и искомой системы не будет). Затем, получим систему v_1, v_2, v_3: $(v_1, v_2, v_3) = (w_1, w_2, w_3) \cdot C^{-1}$

Проверить корректность этой формулы несложно: пусть есть две системы векторов - $\mathbb{b} = (b_1, ..., b_l)$ и $\mathbb{a} = (a_1, ..., a_l)$, причем $\mathbb{b} = \mathbb{a} \cdot X,\ X \in M_l(\mathbb{R}), X = (x_{ij})$. Пусть G_a и G_b - матрицы Грама систем $\mathbb{a}$ и $\mathbb{b}$. Тогда $G_b = X^T G_a X$. (эти матрицы будут равны поэлементно:
$(b_i, b_j) = (\mathbb{a} \cdot X^{(i)}, \mathbb{a} \cdot X^{(j)}) = (\sum_{k=1}^{l} a_k \cdot x_{ki}, \sum_{t=1}^{l} a_t \cdot x_{tj}) = \sum_{k=1}^{l} (a_k \cdot x_{ki}, \sum_{t=1}^{l} a_t \cdot x_{tj}) =$
$= \sum_{k=1}^{l} \sum_{t=1}^{l} (a_k \cdot x_{ki}, a_t \cdot x_{tj}) = \sum_{k=1}^{l} \sum_{t=1}^{l} x_{ki} \cdot x_{tj} (a_k, a_t) = X_i^T \cdot G_a \cdot X^j = [X^T G_a X]_{(ij)}$

Так как $D = C^T \cdot A \cdot C$, $C-$ верхнетреугольная, $A = (C^{-1})^T \cdot D \cdot C^{-1}$ через систему векторов с матрицей D и матрицу C^{-1} можно выразить систему с матрицей A

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 17 & 12 & 87 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 20 & 96 & 0 & 1 & 0 \\ 87 & 96 & 549 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 17 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{196}{17} & 0 & -\frac{12}{17} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 1 \end{array}\right), D = diag(17, \frac{196}{17}, 0) \Rightarrow \exists v_1, v_2, v_3$$

Теперь найдем систему векторов, матрица Грама которой - матрица D: $w_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{17} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{14}{\sqrt{17}} \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Проверка: $(w_i, w_j) = 0$ при $i \neq j$, $(w_3, w_3) = 0$, $(w_1, w_1) = 17, (w_2, w_2) = \frac{196}{17}$

Теперь найдем искомую систему векторов: $C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{12}{17} & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{12}{17} & \frac{87}{17} \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(v_1, v_2, v_3) = (w_1, w_2, w_3) \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} w_1 & \frac{12}{17} w_1 + w_2 & \frac{87}{17} w_1 + 3w_2 + w_3 \end{pmatrix}$,

$$v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{17} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} \frac{12}{\sqrt{17}} \\ \frac{14}{\sqrt{17}} \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} \frac{87}{\sqrt{17}} \\ \frac{42}{\sqrt{17}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Проверим:

- $(v_1, v_1) = \sqrt{17} \cdot \sqrt{17} = 17$
- $(v_1, v_2) = (v_2, v_1) = \sqrt{17} \cdot \frac{12}{\sqrt{17}} = 12$
- $(v_1, v_3) = (v_3, v_1) = \sqrt{17} \cdot \frac{87}{\sqrt{17}} = 87$
- $(v_2, v_2) = \frac{12 \cdot 12}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{17}} + \frac{196}{17} = \frac{340}{17} = 20$
- $(v_2, v_3) = (v_3, v_2) = \frac{12 \cdot 87}{17} + \frac{42 \cdot 14}{17} = \frac{1632}{17} = 96$
- $(v_3, v_3) = \frac{87^2}{17} + \frac{42^2}{17} = \frac{9333}{17} = 549$

Ответ: да, существует. эта система - векторы v_1, v_2, v_3. $v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{17} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} \frac{12}{\sqrt{17}} \\ \frac{14}{\sqrt{17}} \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} \frac{87}{\sqrt{17}} \\ \frac{42}{\sqrt{17}} \\ 0 \end{pmatrix}$