мгз-2
Осипова Д.

1. **(12 баллов)**. Найдите скелетное разложение вида $C\widehat{A}^{-1}R$ матрицы $m\times n$ с элементами:

$$a_{ij} = \underbrace{\frac{i}{j}}_{x_{ij}} + \underbrace{\frac{j}{i}}_{y_{ij}}. \Rightarrow A = X+Y.$$

Нумерация индексов начинается с 1.

ненулевой минор

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 2+\frac{1}{2} \\ 2+\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}} & \ldots & n+\frac{1}{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m+\frac{1}{m} & \ldots & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \ldots & \frac{1}{n} \\ 2 & & & \\ \vdots & & \ddots & \frac{m}{n} \\ m & & & \frac{m}{n} \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \frac{1}{m} & & \ldots & \frac{n}{m} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1/n \end{pmatrix} \Rightarrow rk(X) = 1. \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \end{pmatrix} \Rightarrow rk(Y) = 1.$$

$A = X+Y, \Rightarrow rk(A) \leq 2$

Но! в A $\exists$ ненулевой минор $\begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2}+2 \\ \frac{1}{2}+2 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow rk(A) = 2$.

Тогда $\exists$ $C\hat{A}^{-1}R = \left[A^{(1)}\ A^{(2)}\right] \cdot \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \end{bmatrix}$, или $C\hat{A}^{-1}R = \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \vdots & \vdots \\ m+\frac{1}{m} & \frac{m}{2}+\frac{2}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8/9 & 10/9 \\ 10/9 & -8/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \ldots & n+\frac{1}{n} \\ \frac{5}{2} & \ldots & \frac{n}{2}+\frac{2}{n} \end{bmatrix}$

2. **(15 баллов)**. Пусть $S, S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^n$, а $S^\perp, S_1^\perp, S_2^\perp$ – их ортогональные дополнения.

(a) Покажите, что $\mathrm{dist}(S_1, S_2) = \mathrm{dist}(S_1^\perp, S_2^\perp)$.

(b) Найдите $\mathrm{dist}(S, S^\perp)$.

$\exists$ P_1, P_2, P – ортопроекторы на S_1, S_2, S соотв.

$\Rightarrow I - P_1$ – ор-р на S_1 и тд.

a) $\mathrm{dist}(S_1,S_2) = \|P_1 - P_2\|_2$; $\mathrm{dist}(S_1^\perp, S_2^\perp) = \|(I-P_1)-(I-P_2)\|_2 = \|P_2 - P_1\|_2 = \|P_1-P_2\|_2$

b) $\mathrm{dist}(S,S^\perp) = \|P-(I-P)\|_2 = \|2P - I\|_2 = \sqrt{\lambda_1\left((2P-I)^*(2P-I)\right)} \circleddash$

свойство собств. знач.

I

$(2P-I)^*(2P-I) = (2P^* - I^*)(2P-I) = 4P^*P - 2P - 2P^* + I = 4P^2 - 4P + I = 4P - 4P + I = I$

так P – ортопроектор.

$\circleddash \sqrt{\lambda_1(I)} = 1.$

Отв: 1.

3. **(15 баллов)**. Пусть $U = [\underbrace{U_r}_{\in \mathbb{C}^{m\times r}}\ \underbrace{U_r^\perp}_{\in \mathbb{C}^{m\times(m-r)}}] \in \mathbb{C}^{m\times m}$ – матрица левых сингулярных векторов матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ранга r. Покажите, что $\ker(A^*) = \operatorname{Im}(U_r^\perp)$ и запишите ортопроектор на $\ker(A^*)$.

$\exists\ A = U\Sigma V^*$ – full svd (A)

$\Rightarrow A^* = V\Sigma^* U^*$

$\cdot$) Док, что $\operatorname{Im}(U_r^\perp) \subseteq \ker(A^*)$:

$\triangleright$ $x \in \operatorname{Im}(U_r^\perp) \Rightarrow \exists\ t \in \mathbb{C}^{(m-r)\times 1}$: $U_r^\perp t = x$. При этом x также можно представить как "$\left[\underbrace{\left[\begin{matrix}\text{что}\\ \text{угодно}\end{matrix}\right]}_{r}\ U_r^\perp\right] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$".] и нулей!

можем взять и U_r.

Тогда: $A^* x = V\Sigma^* U^* U \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = V \cdot \begin{bmatrix} \Sigma_r^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_r^* \\ U_r^{\perp *} \end{bmatrix} [U_r\ U_r^\perp] \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = V \cdot \begin{bmatrix} \Sigma_r^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{I.} \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = 0.$

$\Rightarrow x \in \ker(A^*)$. $\blacksquare$

$\cdot$) Док, что $\ker(A^*) \subseteq \operatorname{Im}(U_r^\perp)$

$\triangleright$ $x \in \ker(A^*) \Rightarrow A^* x = V\Sigma^* U^* x = 0$

представим так V:

$$[V_r\ V_r^\perp] \begin{bmatrix} \Sigma_r^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} U_r^* \\ U_r^{\perp *} \end{bmatrix} x}_{\text{вектор } t} = [V_r \Sigma_r^*\ \ 0] \cdot t. \qquad \exists\ t = (t_1 \dots t_m)^t$$

$$V_r \Sigma_r^* = (\underbrace{v_1 \cdot \bar\sigma_1, \dots, v_r \bar\sigma_r}_{\text{строки } V_r.})$$

Тогда рав-во прим. вид:

$$[v_1\bar\sigma_1\ \dots\ v_r\bar\sigma_r\ \underset{m-r\text{ шт.}}{0}] \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow v\bar\sigma_1 \cdot t_1 + \dots + v\bar\sigma_r t_m = 0.$$

Вспомним, что V – унитарная $\Rightarrow VV^* = V^*V = I \Rightarrow$ строки V сост. ОНБ $\Rightarrow$ $v\bar\sigma_1 t_1 + \dots + v\bar\sigma_r t_r = 0 \Leftrightarrow \bar\sigma_1 t_1 = \dots = \bar\sigma_r t_r = 0$. При этом, $\sigma_i \neq 0$ при $i < r$ – из-за ранга.

$$\Rightarrow t_1 = \dots = t_r = 0. \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t_{r+1} \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix} = [U_r\ U_r^\perp]\, x \Leftrightarrow x = U_r^\perp \cdot w. \Rightarrow x \in \operatorname{Im}(U_r^\perp). \ \blacksquare$$

Итог: $\ker(A^*) = \operatorname{Im}(U_r^\perp)$.

Ортопроектор на $\ker(A^*)$: $\exists\ P$ - ортопроектор на $\operatorname{Im}(A) \Rightarrow P$ - ор-р на $\operatorname{Im}(U_r)$

$\Rightarrow I - P$ – ор-р на $\operatorname{Im}(U_r^\perp) = \ker(A^*)$

Итого: $I - P$.

4. **(18 баллов)**. Вычислите $\frac{\partial f}{\partial x}$ для следующих функционалов, где $x \in \mathbb{R}^n$. Считайте все возникающие матрицы и векторы действительными.

(a) $f(x) = \|Ax - b\|_2^2$;

(b) $f(x) = \ln(x^\top x)$, $x \neq 0$.

a) $f(x) = \|Ax - b\|_2^2$

$\langle Ax - b, Ax - b \rangle = f(x)$

$$\|A(x+h) - b\|_2^2 = \langle \underbrace{A(x+h) - b}_{Ax + Ah - b}, \underbrace{A(x+h) - b}_{-\text{u}-} \rangle = \langle Ax, Ax \rangle + 2\langle Ax, Ah \rangle + \langle Ah, Ah \rangle - 2\langle Ax, b \rangle - 2\langle Ah, b \rangle + \langle b, b \rangle$$

$$= f(x) + \underbrace{\langle 2(Ax - b), Ah \rangle}_{2(x^T A^T - b^T)\cdot Ah} + \langle Ah, Ah \rangle = f(x) + 2(x^T A^T - b^T)Ah + \bar{o}(\|h\|_2^2) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2A^T(Ax - b)$$

b) $f(x) = \ln(x^T x) = \ln(\langle x, x \rangle)$

$\exists\, g(x) = \langle x, x \rangle$; $w(x) = \ln(x)$. $\Rightarrow f(x) = w(g(x)) = (w \circ g)(x)$; $df(x)[dx] = d(w \circ g(x))[dx] = dw(g(x))[dg(x)[dx]]$

① $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{x}$

② $dg[dx]$: $g(x+h) = \langle x+h, x+h \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, h \rangle + \langle h, h \rangle = f(x) + 2x^T h + \bar{o}(\|h\|_2^2)$

$\Rightarrow dg[dx] = 2x^T dx$

$df(x)[dx] = \frac{1}{x^T x} \cdot 2x^T dx \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2\frac{x}{\|x\|_2^2}$

5. **(20 баллов)**. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – симметричная матрица. Пусть $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $p < n$. **Указание:** при использовании правил дифференцирования необходимо указывать, на какое конкретно правило вы ссылаетесь.

(a) Найдите дифференциал $f(X) = X^\top AX$.

(b) Найдите дифференциал $g(X) = (X^\top X)^{-1}$. Напомним, что для квадратной обратимой Y справедливо $d(Y^{-1})[H] = -Y^{-1}HY^{-1}$.

(c) Найдите $\frac{\partial w(X)}{\partial X}$, где $w(X) = \mathrm{Tr}(f(X)g(X))$. Считайте, что производная считается в точке X с ортонормированными столбцами.

a) $f(x+dx) = f(x) + df(x)[dx] + \bar{o}(\|dx\|_F)$ – опр.

$f(x+dx) - f(x) = (x+dx)^T A(x+dx) - x^TAx = \cancel{x^TAx} + \underbrace{x^TAdx + dx^TAx}_{df(x)} + dx^TAdx - \cancel{x^TAx} =$

б) $d((x^Tx)^{-1}) \underset{\text{дифф. композиции}}{=} d((x^Tx)^{-1})[d(x^Tx)] = -(x^Tx^{-1})d(x^Tx)(x^Tx)^{-1} \underset{\text{дифф. произв}}{=} -(x^Tx)^{-1}(dx^Tx + x^Tdx)(x^Tx)^{-1} =$

$= -(x^Tx)^{-1}((dx)^Tx + x^Tdx)(x^Tx)^{-1} = dg(x)$

c) $dw(x)[H] \underset{\text{дифф. композ-и}}{=} d\,tr(f(x)g(x))[d(f(x)g(x))[H]] \underset{\text{линейность}}{=} tr(d(f(x)g(x)[H])) \underset{\text{дифф произв}}{=} tr(df(x)[H]g(x) + f(x)dg(x)[H]) =$

$= tr((H^TAX + X^TAH)g(x) - X^TAX(X^TX)^{-1}(H^TX + X^TH)(X^TX)^{-1}) =$

По усл. в X столбцы - ОНБ $\Rightarrow$ $X^TX = I$

$= tr(H^TAX + X^TAH) - tr(X^TAX(H^TX + X^TH)) \overset{\text{симметр}}{=} tr(H^TA^TX + X^TAH) - tr(X^TAXH^TX + X^TAXX^TH) =$

$= 2tr(X^TAH) - tr(X^TAH^TX) - tr(X^TAXX^TH) = 2tr(X^TAH) - tr(H^TXX^TAX) - tr(X^TAXX^TH) =$

$= 2tr(X^TAH) - tr(X^TA^TXX^TH) - tr(X^TAXX^TH) = 2tr(X^TA(I - XX^T)H) \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = 2(I - XX^T)A^TX.$

6. **(20 баллов)**. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – симметричная невырожденная матрица.

(a) Найдите матрицу M, такую что

$$\mathrm{vec}(\overset{n\times n}{AX} + \overset{n\times n}{XA}) = M\,\mathrm{vec}(X) \Rightarrow X \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

и укажите ее размер.

$$\mathrm{vec}(AX + XA) = \mathrm{vec}(AX) + \mathrm{vec}(XA)$$ (линейно)

$\mathrm{vec}(X) = (X^{(1)} \dots X^{(n)})^T \in \mathbb{R}^{n^2}$

$I \otimes A$ – блочно-диагональное, с A-на диаг. $\in \mathbb{R}^{n^2\times n^2}$ $\Big| \Rightarrow (I\otimes A)\,\mathrm{vec}(X) = (AX^{(1)} \dots AX^{(n)})^T = \mathrm{vec}(AX)$.

$$A \otimes I = \begin{pmatrix} a_{11}I & \dots & a_{1n}I \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}I & & a_{nn}I \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2\times n^2};$$

$$A\otimes I = \begin{pmatrix} [a_{11}I \dots a_{1n}I]\begin{bmatrix} X^{(1)} \\ \vdots \\ X^{(n)}\end{bmatrix} \\ \vdots \\ [a_{n1}I \dots a_{nn}I]\begin{bmatrix} X^{(1)} \\ \vdots \\ X^{(n)}\end{bmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}X^{(1)} + \dots + a_{1n}X^{(n)} \\ \vdots \\ a_{n1}X^{(1)} \dots a_{nn}X^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XA^{(1)} \\ \vdots \\ XA^{(n)} \end{pmatrix} = \mathrm{vec}(XA)$$

$$\Rightarrow \mathrm{vec}(AX) + \mathrm{vec}(XA) = (I\otimes A)\,\mathrm{vec}(X) + (A\otimes I)\,\mathrm{vec}(X) = \underbrace{(\overbrace{I\otimes A}^{\mathbb{R}^{n^2\times n^2}} + \overbrace{A\otimes I}^{\mathbb{R}^{n^2\times n^2}})}_{M \in \mathbb{R}^{n^2\times n^2}}\mathrm{vec}\,X$$

и укажите ее размер.

b) Пусть $A = S\Lambda S^{-1}$ – собственное разложение A. Выразите собственные векторы и собственные значения матрицы M через S и Λ. **Подсказка:** вам поможет тождество $I = SS^{-1}$ и правила Кронекерова произведения.

Помним: $(AB)\otimes(CD) = (A\otimes C)(B\otimes D)$

Найдем собств. разл. $M = (I\otimes A + A\otimes I) = (SS^{-1})\otimes(S\Lambda S^{-1}) + (S\Lambda S^{-1})\otimes(SS^{-1}) = (S\otimes S)(S^{-1}\otimes[\Lambda S^{-1}]) + (S\otimes S)([\Lambda S^{-1}]\otimes S^{-1}) =$

$= (S\otimes S)\otimes((IS^{-1})\otimes(\Lambda S^{-1}) + (\Lambda S^{-1})\otimes(IS^{-1})) = (S\otimes S)((I\otimes\Lambda)(S^{-1}\otimes S^{-1}) + (\Lambda\otimes I)(S^{-1}\otimes S^{-1})) =$

$= (S\otimes S)(\underbrace{I\otimes\Lambda + \Lambda\otimes I})(S^{-1}\otimes S^{-1})$

$$I\otimes\Lambda+\Lambda\otimes I = \begin{pmatrix} 1\cdot\Lambda & 0\cdot\Lambda & \dots & 0\cdot\Lambda \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0\cdot\Lambda & 0\cdot\Lambda & & 1\cdot\Lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 I & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0\ I & & \dots & \lambda_n I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\dots\lambda_n & & 0 \\ & \lambda_1\dots\lambda_n & \\ 0 & & \ddots\ \lambda_1\dots\lambda_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1\dots\lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2\dots\lambda_2 & \\ 0 & & \ddots\ \lambda_n\dots\lambda_n \end{pmatrix}$$

– диаг. матр. Знаем, что $(S\otimes S)^{-1} = S^{-1}\otimes S^{-1}$ ⇒ нашли собств. разл.:

$(S\otimes S)\cdot diag(2\lambda_1, \lambda_1+\lambda_2, \dots \lambda_1+\lambda_n, \lambda_2+\lambda_1, 2\lambda_2, \dots, \lambda_2+\lambda_n, \lambda_n+\lambda_1, \lambda_n+\lambda_2, \dots, 2\lambda_n)(S^{-1}\otimes S^{-1})$ – собств. разл.

Собств. векторы-столбцы $S\otimes S$. Пусть $S = \{s_{ij}\}$; $(s_{1i} \dots s_{ni})$ – i-й с.век. A. ⇒ $(S\otimes S) = \begin{pmatrix} s_{11}S & \dots & s_{1n}S \\ \vdots & & \\ s_{n1}S & \dots & s_{nn}S \end{pmatrix}$

Пусть $s'_{11}, \dots s'_{1n}, \dots, s'_{n1} \dots s'_{nn}$ – собств. век. матр. M, $\lambda'_{11}, \dots \lambda'_{nn}$ – собств. знач. матр. M.

$$s'_{ij} = \begin{pmatrix} s_{1i}S^{(j)} \\ \vdots \\ s_{ni}S^{(j)} \end{pmatrix} = S^{(i)}\otimes S^{(j)} \quad ; \quad \lambda'_{ij} = \lambda_i + \lambda_j$$

(c) Покажите, что решение $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ матричного уравнения

$$AX + XA = B, \Rightarrow \mathrm{vec}(XA + AX) = \mathrm{vec}(B)$$

$$M\,\mathrm{vec}(X) = \mathrm{vec}(B)$$

существует и единственно для любой $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Благодаря комментарию лектора знаем, что A – положит. опр $\Rightarrow \lambda_i > 0$.

$\Rightarrow$ СЛУ. един. реш $\Leftrightarrow$ M - невыр.

$\exists$ $A = S\Lambda S^{-1}$ - собств. разл. $\det(A) = \det(S\Lambda S^{-1}) = \det(S)\cdot\det(\Lambda)\cdot\det(S^{-1}) = \det(\Lambda) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$

Докажем, что $\det(I \otimes \Lambda + \Lambda \otimes I) \neq 0$:

$$= (\lambda_1 + \lambda_i) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n + \lambda_n) \neq 0 \text{ т.к. } \lambda_i > 0 \ \forall i$$