мдз-2

Ошилова Д.

1. **(12 баллов)**. Найдите скелетное разложение вида $C\widehat{A}^{-1}R$ матрицы $m \times n$ с элементами:

$$a_{ij} = \underbrace{\frac{i}{j}}_{x_{ij}} + \underbrace{\frac{j}{i}}_{y_{ij}}. \Rightarrow A = X + Y.$$

Нумерация индексов начинается с 1.

ненулевой минор

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 2+\frac{1}{2} \\ 2+\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}} & \dots & n+\frac{1}{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m+\frac{1}{m} & \dots & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} \\ 2 & & & \\ \vdots & & \ddots & \frac{m}{n} \\ m & & & \frac{m}{n} \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{m} & & \dots & \frac{n}{m} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix} (1 \dots 1/n) \Rightarrow \operatorname{rk}(X) = 1. \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} (1 \dots n) \Rightarrow \operatorname{rk}(Y) = 1.$$

$A = X + Y \Rightarrow \operatorname{rk}(A) \leq 2$

Но! в A $\exists$ ненулевой минор $\begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2}+2 \\ \frac{1}{2}+2 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \operatorname{rk}(A) = 2.$

$$\text{Тогда } \exists\ C\hat{A}^{-1}R = \left[A^{(1)}\ A^{(2)}\right] \cdot \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \end{bmatrix}, \text{ или } C\hat{A}^{-1}R = \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \vdots & \vdots \\ m+\frac{1}{m} & \frac{m}{2}+\frac{2}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8/9 & 10/9 \\ 10/9 & -8/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \dots & n+\frac{1}{n} \\ \frac{5}{2} & \dots & \frac{n}{2}+\frac{2}{n} \end{bmatrix}$$

2. **(15 баллов)**. Пусть $S, S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^n$, а $S^\perp, S_1^\perp, S_2^\perp$ – их ортогональные дополнения.

(a) Покажите, что $\operatorname{dist}(S_1, S_2) = \operatorname{dist}(S_1^\perp, S_2^\perp)$.

(b) Найдите $\operatorname{dist}(S, S^\perp)$.

$\exists$ P_1, P_2, P – ортопроекторы на S_1, S_2, S соотв.

$\Rightarrow I - P_1$ – ор-р на S_1 и т.д.

a) $\operatorname{dist}(S_1, S_2) = \|P_1 - P_2\|_2$; $\operatorname{dist}(S_1^\perp, S_2^\perp) = \|(I - P_1) - (I - P_2)\|_2 = \|P_2 - P_1\|_2 = \|P_1 - P_2\|_2$ ■

b) $\operatorname{dist}(S, S^\perp) = \|P - (I - P)\|_2 = \|2P - I\|_2 = \sqrt{\lambda_1((2P - I)^*(2P - I))} =$

$(2P - I)^*(2P - I) = (2P^* - \overset{I}{I^*})(2P - I) = 4P^*P - 2P - 2P^* + I = 4P^2 - 4P + I = 4P - 4P + I = I$

старшее собств. знач.

т.к. P – ортопроектор.

$= \sqrt{\lambda_1(I)} = 1.$

Отв: 1.

3. **(15 баллов)**. Пусть $U = [\underset{\in\mathbb{C}^{m\times r}}{U_r}\ \underset{\in\mathbb{C}^{m\times(m-r)}}{U_r^\perp}] \in \mathbb{C}^{m\times m}$ – матрица левых сингулярных векторов матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ранга r. Покажите, что $\ker(A^*) = \operatorname{Im}(U_r^\perp)$ и запишите ортопроектор на $\ker(A^*)$.

$\exists A = U\Sigma V^*$ – full svd (A)

$\Rightarrow A^* = V\Sigma^* U^*$

$\cdot)$ Док, что $\operatorname{Im}(U_r^\perp) \subseteq \ker(A^*)$:

$\triangleright$ $x \in \operatorname{Im}(U_r^\perp) \Rightarrow \exists\, \underset{\in\mathbb{C}^{(m-r)\times 1}}{t}: U_r^\perp t = x$. При этом x также можно представить как $\left[\underbrace{[\text{что угодно}}_{r}\ U_r^\perp]\cdot\begin{bmatrix}0\\t\end{bmatrix}\right]$ гнусно! (можем взять и U_r.)

Тогда: $A^* x = V\Sigma^* U^* \underset{\in\mathbb{C}^{m\times(m-r)}}{U}\begin{bmatrix}0\\t\end{bmatrix} = V\cdot\begin{bmatrix}\Sigma_r^* & 0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_r^*\\U_r^{\perp *}\end{bmatrix}[U_r\ U_r^\perp]\begin{bmatrix}0\\t\end{bmatrix} = V\cdot\begin{bmatrix}\Sigma_r^* & 0\\0&0\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}I&0\\0&I\end{bmatrix}}_{I.}\begin{bmatrix}0\\t\end{bmatrix} = 0.$

$\Rightarrow x \in \ker(A^*)$. $\blacksquare$

$\cdot)$ Док, что $\ker(A^*) \subseteq \operatorname{Im}(U_r^\perp)$

$\triangleright$ $x \in \ker(A^*) \Rightarrow A^* x = V\Sigma^* U^* x = 0$

представим так V:

$$[V_r\ V_r^\perp]\begin{bmatrix}\Sigma_r^* & 0\\0&0\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}U_r^*\\U_r^{\perp *}\end{bmatrix}x}_{\text{вектор } t} = [V_r\Sigma_r^*\ \ 0]\cdot t. \quad \exists t = (t_1 \dots t_m)^t$$

$V_r\Sigma_r^* = (v_1\cdot\bar\sigma_1, \dots, v_r\bar\sigma_r)$ ← строки V_r.

Тогда рав-во прим. вид:

$$[v_1\bar\sigma_1 \dots v_r\bar\sigma_r\ \underset{m-r\text{ шт.}}{0}]\begin{bmatrix}t_1\\ \vdots\\ t_m\end{bmatrix} = 0 \iff v\bar\sigma_1\cdot t_1 + \dots + v\bar\sigma_r t_r = 0.$$

Вспомним, что V – унитарная $\Rightarrow VV^* = V^*V = I \Rightarrow$ строки V сист. ОНБ $\Rightarrow v\bar\sigma_1 t_1 + \dots + v\bar\sigma_r t_r = 0 \iff \bar\sigma_1 t_1 = \dots = \bar\sigma_r t_r = 0$. При этом, $\sigma_i \neq 0$ при $i < r$ – из-за ранга.

$$\Rightarrow t_1 = \dots = t_r = 0. \Rightarrow \begin{bmatrix}0\\0\\t_{r+1}\\ \vdots\\ t_m\end{bmatrix} = [U_r\ U_r^\perp]x \iff x = U_r^\perp\cdot w. \Rightarrow x \in \operatorname{Im}(U_r^\perp). \ \blacksquare$$

Итог: $\ker(A^*) = \operatorname{Im}(U_r^\perp)$.

Ортопроектор на $\ker(A^*)$: $\exists P$ - ортопроектор на $\operatorname{Im}(A) \Rightarrow P$-op-p на $\operatorname{Im}(U_r)$

$\Rightarrow I - P$ – op-p на $\operatorname{Im}(U_r^\perp) = \ker(A^*)$

Итого: $I - P$.

4. **(18 баллов)**. Вычислите $\frac{\partial f}{\partial x}$ для следующих функционалов, где $x \in \mathbb{R}^n$. Считайте все возникающие матрицы и векторы действительными.

(a) $f(x) = \|Ax - b\|_2^2$;

(b) $f(x) = \ln(x^\top x)$, $x \neq 0$.

a) $f(x) = \|Ax - b\|_2^2$

$\langle Ax - b, Ax - b \rangle = f(x)$

$$\|A(x+h) - b\|_2^2 = \langle \underbrace{A(x+h) - b}_{Ax + Ah - b}, \underbrace{A(x+h) - b}_{-\,\text{"}\,-} \rangle = \langle Ax, Ax \rangle + 2\langle Ax, Ah \rangle + \langle Ah, Ah \rangle - 2\langle Ax, b \rangle - 2\langle Ah, b \rangle + \langle b, b \rangle$$

$$= f(x) + \underbrace{\langle 2(Ax - b), Ah \rangle}_{2(x^T A^T - b^T) \cdot Ah} + \langle Ah, Ah \rangle = f(x) + 2(x^T A^T - b^T)Ah + \bar{o}(\|h\|_2^2) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2A^T(Ax - b)$$

b) $f(x) = \ln(x^T x) = \ln(\langle x, x \rangle)$

$\exists\, g(x) = \langle x, x \rangle$; $w(x) = \ln(x)$. $\Rightarrow f(x) = w(g(x)) = (w \circ g)(x)$; $df(x)[dx] = d(w \circ g(x))[dx] = dw(g(x))[dg(x)[dx]]$

① $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{x}$

② $dg[dx]$: $g(x+h) = \langle x+h, x+h \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, h \rangle + \langle h, h \rangle = f(x) + 2x^T h + \bar{o}(\|h\|_2^2)$

$\Rightarrow dg[dx] = 2x^T dx$

$df(x)[dx] = \frac{1}{x^T x} \cdot 2x^T dx \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2\frac{x}{\|x\|_2^2}$

5. **(20 баллов)**. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – симметричная матрица. Пусть $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $p < n$. **Указание:** при использовании правил дифференцирования необходимо указывать, на какое конкретно правило вы ссылаетесь.

(a) Найдите дифференциал $f(X) = X^\top AX$.

(b) Найдите дифференциал $g(X) = (X^\top X)^{-1}$. Напомним, что для квадратной обратимой Y справедливо $d(Y^{-1})[H] = -Y^{-1}HY^{-1}$.

(c) Найдите $\frac{\partial w(X)}{\partial X}$, где $w(X) = \mathrm{Tr}(f(X)g(X))$. Считайте, что производная считается в точке X с ортонормированными столбцами.

a) $f(x+dx) = f(x) + df(x)[dx] + \bar{o}(\|dx\|_F)$ – опр.

$f(x+dx) - f(x) = (x+dx)^T A(x+dx) - x^T A x = \cancel{x^T A x} + \underbrace{x^T A dx + dx^T A x}_{df(x)} + dx^T A dx - \cancel{x^T A x} =$

б) $d((x^T x)^{-1}) = d((x^T x)^{-1})[d(x^T x)] = -(x^T x^{-1}) d(x^T x)(x^T x)^{-1} = -(x^T x)^{-1}(dx^T x + x^T dx)(x^T x)^{-1} =$

диффф. композиции — диффф. произв.

$= -(x^T x)^{-1}((dx)^T x + x^T dx)(x^T x)^{-1}$ $= dg(x)$

c) $dw(x)[H] = d\,tr(f(x)g(x))[d(f(x)g(x))[H]] = tr(d(f(x)g(x)[H])) = tr(df(x)[H]g(x) + f(x)dg(x)[H]) =$

диффф. композ-и — линейность — диффф произв.

$= tr((H^T A X + X^T A H)g(x) - X^T A X(X^T X)^{-1}(H^T X + X^T H)(X^T X)^{-1}) =$

По усл. в X столбцы - ОНБ $\Rightarrow$ $X^T X = I$

$= tr(H^T A X + X^T A H)) - tr(X^T A X\ (H^T X + X^T H))$ $\overset{\text{линейн.}}{=}$ $tr(H^T A^T X + X^T A H) - tr(X^T A X H^T X + X^T A X X^T H) =$

$= 2tr(X^T A H) - tr(X^T A H^T X) - tr(X^T A X X^T H) = 2tr(X^T A H) - tr(H^T X X^T A X) - tr(X^T A X X^T H) =$

$= 2tr(X^T A H) - tr(X^T A^T X X^T H) - tr(X^T A X X^T H) = 2tr(X^T A(I - XX^T)H) \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = 2(I - xx^T)A^T X.$

6. **(20 баллов)**. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – симметричная невырожденная матрица.

(a) Найдите матрицу M, такую что

$$\text{vec}(\overset{n\times n}{AX} + \overset{n\times n}{XA}) = M\,\text{vec}(X) \Rightarrow X \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

и укажите ее размер.

① $\text{vec}(AX + XA) = \text{vec}(AX) + \text{vec}(XA)$ (линейн)

$\text{vec}(X) = (X^{(1)} .. X^{(n)})^T \in \mathbb{R}^{n^2}$

$I \otimes A$ – блочно-диагональная, с A-на диаг., $\in \mathbb{R}^{n^2\times n^2}$ $\Big| \Rightarrow (I \otimes A)\,\text{vec}(X) = (AX^{(1)} \dots AX^{(n)})^T = \text{vec}(AX)$.

$$A \otimes I = \begin{pmatrix} a_{11} I & \dots & a_{1n} I \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} I & & a_{nn} I \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2\times n^2};$$

$$A \otimes I = \left(\begin{matrix} [a_{11} I \dots a_{1n} I] \begin{bmatrix} X^{(1)} \\ \vdots \\ X^{(n)} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ [a_{n1} I \dots a_{nn} I] \begin{bmatrix} X^{(1)} \\ \vdots \\ X^{(n)} \end{bmatrix} \end{matrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} X^{(1)} + \dots + a_{1n} X^{(n)} \\ \vdots \\ a_{n1} X^{(1)} \dots a_{nn} X^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XA^{(1)} \\ \vdots \\ XA^{(n)} \end{pmatrix} = \text{vec}(XA)$$

$$\Rightarrow \text{vec}(AX) + \text{vec}(XA) = (I \otimes A)\,\text{vec}(X) + (A \otimes I)\,\text{vec}(X) = \underbrace{(\overbrace{I \otimes A}^{\mathbb{R}^{n^2\times n^2}} + \overbrace{A \otimes I}^{\mathbb{R}^{n^2\times n^2}})}_{M \in \mathbb{R}^{n^2\times n^2}}\,\text{vec}\,X$$

(c) Покажите, что решение $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ матричного уравнения

$$AX + XA = B, \Rightarrow vec(XA + AX) = vec(B)$$

$$M\,vec(X) = vec(B)$$

существует и единственно для любой $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Благодаря комментарию лектора знаем, что A – положит. опр $\Rightarrow \lambda_i > 0$.

$\Rightarrow$ СЛУ. един. реш $\Leftrightarrow$ M - невыр.

$\exists$ $A = S\Lambda S^{-1}$ - собств. разл. $\det(A) = \det(S\Lambda S^{-1}) = \det(S)\cdot\det(\Lambda)\cdot\det(S^{-1}) = \det(\Lambda) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$

Докажем, что $\det(I\otimes\Lambda + \Lambda\otimes I) \neq 0$:

$$\overset{\shortparallel}{(\lambda_1+\lambda_i)} \cdot \ldots \cdot (\lambda_n+\lambda_n) \neq 0 \text{ т.к. } \lambda_i > 0 \ \forall i$$