Теор д/з 5

N1.

$$Z_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\-7&0&1\end{pmatrix}\qquad A_1=Z_1A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-12\end{pmatrix}$$

$$L=Z_1^{-1}Z_2^{-1}=(Z_2Z_1)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\1&-2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&1&0\\7&2&1\end{pmatrix}.$$

$$Z_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}\qquad A_2=Z_2Z_1A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&0\end{pmatrix}=U.$$

Проверим: $\cancel{A}=LU=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&1&0\\7&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=A$

по ① из лекции: у A: $\det A\neq 0$ $\exists$ LU разл $\Leftrightarrow$ A - строго-регулярна.

~~det A ≠ ...~~

В нашем случае: $\det A=0 \Rightarrow$ не нужна строгая регулярность

N2 A-строго-регулярная (положит. опр-сть)

а) Знаем, что дополнение по Шуру строго-регулярной - строго регулярное. При этом, $\delta_k=\frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k}\cdot\delta_{k-1}\neq 0$ (δ_i - i-й угловой минор для дополнения по Шуру), $\delta_0=1$

$$\delta_k=\frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k}\delta_{k-1}=\frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k}\cdot\frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}\cdot\delta_{k-2}=\ldots=\frac{\Delta_k}{\Delta_2}\cdot\delta_1=\frac{\Delta_k}{\Delta_2}\cdot\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\cdot 1=\frac{\Delta_k}{\Delta_1}.$$

При этом, $\Delta_i>0\ \forall k \Rightarrow \delta_k>0. \Rightarrow$ дополнение по Шуру положит. опр

D - симметр.

CC^T - симметр.

~~$D-\frac{1}{a}CC^T=(D)-\frac{1}{a}(C^TC)^T \ldots = D$~~

$$\left(D-\frac{1}{a}CC^T\right)^T=D^T-\frac{1}{a}C^TC=D-\frac{1}{a}(C^TC)^T=D-\frac{1}{a}CC^T.$$

в) $G(A)=$  (нумерация столбцов слева направо)

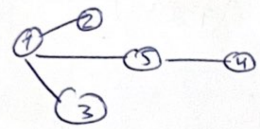
с) $$S_1=D-\frac{1}{a}CC^T=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&5&0&0\\0&0&1&3\\0&0&3&4\end{pmatrix}-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\2&4&0&2\\0&0&0&0\\1&2&0&1\end{pmatrix}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}15/4&-1/2&0&-1/4\\-1/2&4&0&-1/2\\0&0&1&3\\-1/4&-1/2&3&15/4\end{pmatrix}\\ \begin{array}{cccc}②&③&④&⑤\end{array}\end{array}$$

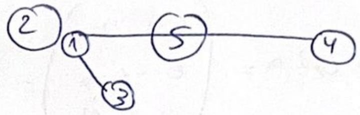
$$S_2=\begin{pmatrix}4&0&-1/2\\0&1&3\\-1/2&3&15/4\end{pmatrix}-\frac{4}{15}\begin{pmatrix}1/4&0&1/8\\0&0&0\\1/8&0&1/16\end{pmatrix}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}4-\frac{1}{15}&0&-\frac{1}{2}-\frac{1}{30}\\0&1&3\\-\frac{1}{2}-\frac{1}{30}&3&\frac{15}{4}-\frac{1}{60}\end{pmatrix}\\ \begin{array}{ccc}③&④&⑤\end{array}\end{array}$$

$\Rightarrow$ дальше ничего не нужн.

изменения ребра жирным

d) Алго: выбираем вершину с наим. степенью; присваиваем новый номер, исключаем ее, продолжаем

①  мин. ст.: ② → ①



мин. ст.: ③ → ②

③ 1 — 5 — 4

мин степень у ① → ②

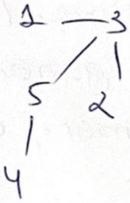
мин. ст.:

④ $v_4 \to 4$

⑤ — ④

Итого: $(1,2,3,4,5) \to (2,3,1,4,5)$

$$PAP^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



— новый граф.

ребер ост.

e) values = [4, 1, 2, 1, ~~5~~ 1, 4, 2, 5, 1, 3, 1, 3, 4]   rows = [0, 4, 6, 8, 1, 0, 1, 3]

cols = [0, 1, 2, 4, 0, 1, 0, 2, 3, 4, 0, 3, 4]

N3. $r_{k+1} = b - Ax_{k+1} = b - A(x_k + \tau_k r_k) = b - Ax_k - \tau_k A r_k = r_k - \tau_k A r_k =$

$(I - \tau_k A) r_k.$

$\|b - Ax_{k+1}\|_2^2 = \|r_k - \tau_k A r_k\|_2^2 = \langle r_k, r_k \rangle + \tau_k^2 \langle Ar_k, Ar_k \rangle - 2\tau_k \langle r_k, Ar_k \rangle$

$$\frac{\partial J}{\partial \tau_k} = 2\tau_k \langle Ar_k, Ar_k \rangle - 2\langle r_k, Ar_k \rangle = 0$$

$$\tau_k = \frac{\langle r_k, Ar_k \rangle}{\langle Ar_k, Ar_k \rangle}$$

в) $A = A^T > 0$

$r_{k+1} = b - Ax_{k+1} = \min\limits_{\tau_k} [b - A(x_k + \tau_k r_k)] \le b - Ax_k - tAr_k = r_k - tAr_k = (I - tA) r_k \ \forall t$

$\Rightarrow \|r_{k+1}\|_2^2 = \|(I - tA) r_k\|_2^2 \le \|I - tA\|_2^2 \cdot \|r_k\|_2^2 = \left[t = \underset{t = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}}{\arg\min} \|I - tA\|_2 - \text{с/з } A\right] = \frac{\text{cond}(A) - 1}{\text{cond}(A) + 1} \|r_k\|_2^2$

Аналогично: $\|r_k\|_2^2 \le \frac{\text{cond}(A) - 1}{\text{cond}(A) + 1} \|r_{k-1}\|_2^2$ и т.д. $\Rightarrow \|r_{k+1}\|_2^2 \le \left(\frac{\text{cond}\,A - 1}{\text{cond}\,A + 1}\right)^k \|b\|_2^2$

*) Из леммы знаем соотн. и хотим 2 часть неравенства

$$\frac{\|e_k\|_2}{\|e_0\|_2} \le 2\left(\frac{\sqrt{\operatorname{cond} A}-1}{\sqrt{\operatorname{cond} A}+1}\right)^k \le \varepsilon \Rightarrow k\ln\left(\frac{\sqrt{\operatorname{cond} A}-1}{\sqrt{\operatorname{cond} A}+1}\right) \geqslant \ln\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow$$

$$k \geqslant \ln\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\ln\left(\frac{\sqrt{\operatorname{cond} A}-1}{\sqrt{\operatorname{cond} A}+1}\right)\right)^{-1} = \ln\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(-\ln\left(1+\underbrace{\frac{2}{\sqrt{\operatorname{cond} A}-1}}_{\downarrow\, 0}\right)\right)^{-1} \xrightarrow[\operatorname{cond} A\to\infty]{} -\frac{2}{\sqrt{\operatorname{cond} A}-1}$$

$$= \left(\ln(2/\varepsilon)\left(-\tfrac{1}{2}(\sqrt{\operatorname{cond} A}-1)\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\operatorname{cond} A}-1\right)\ln 2\varepsilon^{-1}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\operatorname{cond} A}\,\ln(2\varepsilon^{-1}) - \frac{1}{2}(2\varepsilon^{-1}) \le \frac{1}{2}\operatorname{cond} A\ln(2\varepsilon^{-1})+1 \text{ при } \varepsilon\in(0,1)$$