Отв Тдз 3.

1. **(15 баллов)**. Вложите блочно-теплицеву матрицу с теплицевыми блоками

$$\begin{array}{c} T_0 \\ \\ T_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} T_{-1} \\ \\ T_0 \end{array}$$

в $B \in \mathbb{R}^{9\times 9}$ – блочный циркулянт с циркулянтными блоками и найдите собственное разложение B.

Факт: теплицеву матрицу $n\times n$ можно вложить в циркулянт размера не меньше $(2n-1)\times(2n-1)$
Блоки $2\times 2 \Rightarrow$ циркулянт 3×3.
Вложим каждый блок по отдельности

Если Теплицева матрица имеет вид $\begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} \\ t_1 & t_0 \end{pmatrix}$, то циркулянт имеет вид $\begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & t_1 \\ t_1 & t_0 & t_{-1} \\ t_{-1} & t_1 & t_0 \end{pmatrix}$

Обозначим циркулянт для T_i C_i: $C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ получаем блочно-теплицеву матрицу $\begin{pmatrix} C_0 & C_1 \\ C_{-1} & C_0 \end{pmatrix}$ - из блоков 2×2 и влож. в циркулянт 3×3.

$B = \begin{pmatrix} C_0 & C_{-1} & C_1 \\ C_1 & C_0 & C_{-1} \\ C_{-1} & C_1 & C_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{9\times 9}$. Найдем собств. разложение B: $B = (F_3 \otimes F_3)^{-1} \operatorname{diag}((F_3\otimes F_3)b)(F_3 \otimes F_3)$, где b - первый столбец из B

$(F_3 \otimes F_3)b = Fb = \begin{pmatrix} F_3 & F_3 & F_3 \\ F_3 & w_3 F_3 & w_3^2 F_3 \\ F_3 & w_3^2 F_3 & w_3^4 F_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = F^{(2)} + F^{(4)} + F^{(9)}$, где $F^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ w_3 \\ w_3^2 \\ 1 \\ w_3 \\ w_3^2 \\ 1 \\ w_3 \\ w_3^2 \end{pmatrix}$, $F^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ w_3 \\ w_3 \\ w_3 \\ w_3^2 \\ w_3^2 \\ w_3^2 \end{pmatrix}$, $F^{(9)} = \begin{pmatrix} 1 \\ w_3^2 \\ w_3 \\ w_3^2 \\ w_3 \\ 1 \\ w_3 \\ 1 \\ w_3^2 \end{pmatrix}$

$\operatorname{diag}((F_3\otimes F_3)b) = \operatorname{diag}(3, 1+w_3+w_3^2, 1+w_3+w_3^2, 1+w_3+w_3^2, 3w_3, 1+w_3+w_3^2, 1+w_3+w_3^2, 1+w_3+w_3^2, 3w_3^2)$ - с/з B.

$F_3^{-1} = \frac{1}{n} F_3^* = \frac{1}{n} \overline{F_3}$
$\overline{w_3} = w_3^{-1}$

$F_3^{-1} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w_3^{-1} & w_3^{-2} \\ 1 & w_3^{-2} & w_3^{-4} \end{pmatrix}$; $(F_3 \otimes F_3)^{-1} = F_3^{-1} \otimes F_3^{-1} = \frac{1}{n^2} \begin{pmatrix} \overline{F_3} & \overline{F_3} & \overline{F_3} \\ \overline{F_3} & w_3^{-1}\overline{F_3} & w_3^{-2}\overline{F_3} \\ \overline{F_3} & w_3^{-2}\overline{F_3} & w_3^{-4}\overline{F_3} \end{pmatrix}$ - с/з векторы B, запис. в столбцы

2. **(15 баллов)**. Сколько уровней алгоритма Штрассена надо сделать, чтобы число операций с плавающей точкой в нем стало в 10 раза меньше (асимптотически), чем для наивного умножения? Считайте, что рассматриваются достаточно большие действительные квадратные матрицы порядка 2^q, $q \in \mathbb{N}$.

Наивное умножение $\quad Naive = 2^q = 2^{3q+1} + O(2^{2q})$ - операций

Через рекуррентные соотношения для алг. Штрассена: $\quad M(n) = 7M(\frac{n}{2})$ - умн.
$A(n) = 7A(\frac{n}{2}) + 18(\frac{n}{2})^2$ - сл.

Теперь посчитаем число оставшихся вычислений алг. Штрассена и наивным способом:

$$M(2^q) = 7M(2^{q-1}) = 7^2 M(2^{q-2}) = \ldots = 7^N M(^{q-N}) \Rightarrow 7^N 2^{3(q-N)}$$

$$A(2^q) = 7A(2^{q-1}) + 18 \cdot 2^{q-2} = \ldots = 7(7A(2^{q-2}) + 18 \cdot 2^{(q-4)}) + 18 \cdot 2^{2q-1} = 7^N A(2^{q-N}) + 18 \sum_{k=1}^{N} 7^{k-1} \cdot 2^{2(q-k)} = 7^N (2^{3(q-N)} - 2^{2(q-N)}) + 18 \sum_{k=1}^{N} 7^{k-1} \cdot 2^{2(q-k)} =$$

$$= 7^N (2^{3(q-N)} - 2^{2(q-N)}) + 2^{2q} \sum_{k=1}^{N} 7^{k-1} \cdot 2^{-2k} = 7^N (2^{3(q-N)} - 2^{2(q-N)}) + 2^{q-2}(-\frac{4}{3})(1 - (\frac{7}{4})^N)) = -\frac{1}{3} \cdot 2^{2q} + \frac{1}{3} \cdot 7^N \cdot 2^{2(q-N)} + 7^N (2^{3(q-N)} - 2^{2(q-N)}) =$$

$$= 7^N 2^{3(q-N)} - 7^N \cdot 2^{2(q-N)} - 6 \cdot 2^{2q} = 7^N \cdot 2^{3(q-N)} + O(2^{2q}).$$

Имеем: $\quad 7^N \cdot 2^{3(q-N)+1} + O(2^{2q}) = Shtrassen$

$$\frac{Shtrassen}{Naive} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{7^N 2^{3(q-N)+1}}{2^{3q+1}} = 7^N \cdot 2^{-3N} \le \frac{1}{10} \Rightarrow \left(\frac{7}{8}\right)^N \le 1/10 \Rightarrow N \approx 18.$$ Итого: 18

3. **(15 баллов)**. Проверьте наличие прямой и обратной устойчивости алгоритма $y = x - 2(u^\top x)u$ вычисления $y = H(u)x$, где $u, x \in \mathbb{R}^n$, $\|u\|_2 = 1$, $H(u)$ – матрица Хаусхолдера.

$$y = x - 2(u^T x)u$$

$y = H(u)x$. Проверим прямую устойчивость: $\|y - \tilde{y}\| = \|x - 2\sum_{i=1}^{n} u_i x_i) \cdot u - (1+\varepsilon)\left(x - 2\left(\sum_{i=1}^{n} u_i x_i (1+\varepsilon)^{n+2-i}\right) u (1+\varepsilon)^{n+1}\right)\| =$

$= \|x \cdot \varepsilon - 2\left(\sum_{i=1}^{n} u_i x_i\right)u + 2\left(\sum_{i=1}^{n} u_i x_i\right)u + 2\left(\sum_{i=1}^{n} u_i x_i (1+\varepsilon)^{n+2-i}\right)u(1+\varepsilon)^{n+2}\| = \|\varepsilon x - 2\left(\sum_{i=1}^{n} u_i x_i - \sum_{i=1}^{n} u_i x_i (1+\varepsilon)^{2n+4-i}\right)u\| = \|\varepsilon x - 2\left(\sum u_i x_i (1-(1+\varepsilon)^{2n+n-i}\right)\| \cdot \|u\| \le$

$\le \|\varepsilon x\| + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} |u_i||x_i| \cdot |\varepsilon(2n+n-i) + O(\varepsilon^2 m)| \cdot \|u\| \le \varepsilon_m \|x\| + (2n+4)\varepsilon m \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i||x_i|\right)\|u\| + \bar{o}(\varepsilon m^2)$.

$$\frac{\|y - \tilde{y}\|}{\|y\|} \le \varepsilon_m \frac{\|x\| + (2n+n)|u|^T |x| \, \|u\|}{\|x - 2(u^T x)u\|} + \bar{o}(\varepsilon_m^2) = O(\varepsilon_m) \Rightarrow$$ Есть пр устойчивос

Обратная устойчивость: $\exists \tilde{x} : \tilde{f}(x) = f(\tilde{x})$ $\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} = O(\varepsilon_m)$. Хотим найти такие $\tilde{x}$ и $\tilde{u}$, что

$f l(x - 2(u^T x)u) = (1+\varepsilon)\left(x - 2\sum_{i=1}^{n} u_i x_i (1+\varepsilon)^{n+2-i}\right) u (1+\varepsilon)^{n+1}\right) = (1+\varepsilon)x - (1+\varepsilon)2\left(\sum_{i=1}^{n} u_i x_i (1+\varepsilon)^{n+2-i}\right)u(1+\varepsilon)^{n+1} = \tilde{x} - 2\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \tilde{u}_i (1+\varepsilon)^{n+2-i}\right) \cdot u(1+\varepsilon)^{n+1}$ – невозможно

возмутить правильно векторы $\Rightarrow$ нет обратной устойчивости

4. **(15 баллов)**. Пусть $f(x) = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – невырожденная матрица, $x \in \mathbb{R}^n$. Докажите, что

$$\sup_{x\neq 0} \operatorname{cond}(f,x) = \operatorname{cond}(A).$$

Здесь в определениях чисел обусловленности используется вторая матричная и векторная нормы.

$$cond(f,x) = \frac{\|df(x)\|}{\|f(x)\|}\|x\|.$$

$df(x) = A.$

$cond_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2.$

$\|A^{-1}\|_2 = \|\Sigma^{-1}\|_2 = 1/\sigma_n.$

$$\sup_{x\neq 0} cond(f,x) = \sup_{x\neq 0} \frac{\|A\|_2\|x\|_2}{\|Ax\|_2} = \sup_{x\neq 0}\frac{\sigma_1\|x\|_2}{\|Ax\|_2} = \sigma_1 \sup_{x\neq 0}\frac{\|x\|_2}{\|\Sigma V^T x\|_2} = \sigma_1\|A^{-1}\|.$$

Хотим найти $x: \dfrac{\|x\|_2}{\|\Sigma V^T x\|_2} = \dfrac{1}{\sigma_n}$

$x = \alpha_1 v_1 + .. + \alpha_n v_n$, где v_i - ортонорм. базис матрицы V. $\Sigma V^T x = (\sigma_1\langle v_1,x\rangle, \sigma_2\langle v_2,x\rangle, .., \sigma_n\langle v_n,x\rangle)^T$

$$\|\Sigma V^T x\|_2^2 = (\sigma_1\alpha_1)^2 + .. + (\sigma_n\alpha_n)^2$$

$$\|x\|_2^2 = \alpha_1 + .. + \alpha_n$$

$\dfrac{\alpha_1^2 + .. + \alpha_n^2}{\sigma_1^2\alpha_1^2 + .. + \alpha_n^2\sigma_n^2} = \dfrac{1}{\sigma_n^2}$ $\quad \sigma_n^2\alpha_1^2 + .. + \sigma_n^2\alpha_n^2 = \sigma_1^2\alpha_1^2 + .. + \alpha_n^2\sigma_n^2 \Longrightarrow (\sigma_1^2 - \sigma_n^2)\alpha_1^2 + .. + (\sigma_{n-1}^2 - \sigma_n^2)\alpha_{n-1}^2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = .. = \alpha_{n-1} = 0$, если $\sigma_1 \neq \sigma_n, \dots \sigma_{n-1} \neq \sigma_n$, иначе:

$\dfrac{\alpha_1^2 + .. + \alpha_n^2}{\sigma_1^2\alpha_1^2 + .. + \sigma_n^2\alpha_n^2} = \dfrac{1}{\sigma_n^2}$ $\quad$ Получаем: $\dfrac{\|x\|_2}{\|Ax\|_2} = \dfrac{|\alpha_n|}{\sigma_n|\alpha_n|} = \dfrac{1}{\sigma_n}$, где $x = \alpha_n v_n$

5. **(20 баллов)**. С помощью матричной экспоненты найдите, при каком начальном условии y_0 решение системы дифференциальных уравнений $y(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = Ay, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \qquad \text{с матрицей} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

будет удовлетворять $y(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$. **Замечание:** В этой задаче может пригодиться разложение в ряд Тейлора гиперболических функций.

$y(t) = e^{At} y_0$ – решение этой системы.

$y(1) = e^{A} y_0 = (1\ 0\ 0)^T$, $A^0 = I$, $A^1 = A$, $A^2 = I$.

$$e^{At} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2} + A^3 \frac{t^3}{6} + .. = I + \begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ 0 & t & 0 \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & t^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & t^2/2 \end{pmatrix} + \ldots =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + t^2/2 + t^4/4 + .. & 0 & t + t^3/6 + t^5/5! + .. \\ 0 & 1 + t + \frac{t^2}{2!} + .. & 0 \\ t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + .. & 0 & 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + .. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(t) & 0 & sh(t) \\ 0 & e^t & 0 \\ sh(t) & 0 & ch(t) \end{pmatrix}$$

$$y(1) = e^A y_0 = \begin{pmatrix} ch 1 & 0 & sh 1 \\ 0 & e & 0 \\ sh 1 & 0 & ch 1 \end{pmatrix} y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Итог:
$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{ch 1}{ch_1^2 - sh_1^2} = -ch 1 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = \dfrac{-sh 1}{ch^2 1 - sh^2 1} \end{cases}$$

6. **(20 баллов)**. Пусть у $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n > 1$, все ведущие подматрицы невырождены. Покажите, что матрица $D - \frac{1}{a}bc^\top$ (см. обозначения в лекции 13) также удовлетворяет этому свойству.

$$A=\begin{pmatrix} a & c^T \\ b & D\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ a^{-1}b & I_{n-1}\end{pmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{pmatrix} a & c^T\\ 0 & D-a^{-1}bc^T\end{pmatrix}}_{C}$$

$\det(A) = \det(B)\cdot\det(C) = \det B\cdot a\det(D-\frac{1}{a}bc^T) = a\det(\overbrace{D-\frac{1}{a}bc^T}^{K}) \neq 0 \Rightarrow K$ - полного ранга

$K = D - \frac{1}{a}bc^T$. δ_i - i-й угловой минор K.

$K_{11} = a_{22} - \frac{1}{a_{11}}\cdot a_{21}\cdot a_{12} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \neq 0 = \delta_1$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{k_{11}} & I_{n-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_{11} & c_2^T \\ 0 & k_2\end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & \frac{1}{\delta_1}b_2 & I_{n-2} & \end{pmatrix} \Rightarrow A = B_1B_2\underbrace{\begin{pmatrix} a & & c' \\ 0 & k_{11} & c_2^T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & k_2\end{pmatrix}}_{T}$$

B_1, B_2 - верхние унитреугольные

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & & \\ \vdots & \vdots & & \end{pmatrix} \quad c^T,\ c,\ D$$

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}-\frac{1}{a_{11}}a_{21}a_{12} & a_{23}-\frac{1}{a_{11}}a_{21}a_{13} \\ 0 & & \\ \vdots & b_2 & D_2 \\ 0 & & \end{pmatrix} \quad c,\ \leftarrow c_2^T$$

$\Delta_2 = k_{11}a_1 = \delta_1\Delta_1$

$\Delta_3 = (k_2)_{11}\cdot k_{11}a_{11} = (k_2)_{11}\cdot\Delta_3$ т.к. сохранили угловые миноры и $\det D_2$ 3×3 верхн. - произведение эл-тов на диагонали

$K_2 = D_2 - \frac{1}{k_{11}}b_2c_2^T \qquad (k_2)_{11} = k_{22} - \frac{1}{k_{11}}k_{21}k_{12} = \frac{1}{k_{11}}\delta_2 = \frac{\delta_2}{\delta_1} \Rightarrow \delta_2 \neq 0$ Аналогично продолжая получим на i-м шаге

$(k_i)_{11} = \frac{\delta_i}{\delta_{i-1}} \quad \Delta_{i+1} = (k_i)_{11}(k_{i-1})_{11}\cdot\ldots\cdot k_{11}a_{11} = (k_i)_{11}\Delta_i \Rightarrow \delta_i = (k_i)_{11}\delta_{i-1} = \frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_i}\delta_{i-1} \neq 0$ и K-строго регулярная.