FDTD para materiales no lineales

Manuel Mayo León

Miriam Gonzalez Atienza

FisyMat

Universidad de Granada

4 de mayo de 2021

Índice

Índice

Introducción

El estudio de la interacción entre las ondas electromagnéticas y la materia suscita un gran interés en una amplia variedad de campos (armamentístico, tecnología de microondas de altas energías, óptica no lineal, etc). La clasificación de los mismos según sus propiedades son:

- **Dispersivo lineal**. La velocidad de una onda viajera varía con su frecuencia a bajas intensidades de los campos **E** y **H**. Este fenómeno es causado por una variabilidad del dieléctrico del material, permitividad o permeabilidad magnética con la frecuencia.
- **No lineal**. La velocidad de una onda viajera varía con la intensidad del campo (a altas intensidades). Este fenómeno es causado por una variabilidad de la permitividad dieléctrica del material o magnética con respecto a la intensidad del campo E local, campo H o el vector de Poynting.
- **Dispersivo no lineal**. La no linealidad del material varía con la frecuencia sinusoidal de la onda electromagnética.

Ecuaciones a resolver

- Relación entre $\vec{D}$ y $\vec{E}$:

$$\vec{D}(t) = \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \vec{E}(t) + \varepsilon_0 \sum_{p=1}^{P} \int_0^t \vec{E}(t-\tau)\chi_p^{(1)}(\tau)d\tau$$

$$+ \varepsilon_0 \vec{E}(t) \sum_{p'=1}^{P'} \left(\int_0^t [\vec{E}(\tau)]^2 \left[\chi_{p'}^{(3)}(t-\tau) + \alpha_{0p'}^{(3)} \delta(t-\tau) \right] d\tau \right),$$

siendo:

$$\begin{cases} \chi_p^{(1)}(t) & = \mathrm{Re}\left(\alpha_p^{\mathrm{L}} e^{-\gamma_p^{\mathrm{L}} t}\right) U(t), \\ \chi_{p'}^{(3)}(t) & = \mathrm{Re}\left(\alpha_{p'}^{\mathrm{NL}} e^{-\gamma_{p'}^{NL}}\right) U(t). \end{cases}$$

Ecuaciones a resolver

- Ecuaciones de Maxwell para medios dispersivos no lineales:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H}(t) & = \dfrac{\partial \vec{D}(t)}{\partial t} + \sigma \vec{E}(t), \\ \nabla \times \vec{E}(t) & = -\mu \dfrac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t}, \end{cases}$$

con:

$$\vec{D}(t) = \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \vec{E}(t) + \varepsilon_0 \sum_{p=1}^{P} \vec{P}_p^{\mathrm{L}}(t)$$

$$+ \varepsilon_0 \vec{E}(t) \sum_{p'=1}^{P'} \left(P_{p'}^{\mathrm{NL}}(t) + \alpha_{0p'}^{(3)} [E(t)]^2 \right),$$

y:

$$\begin{cases} \vec{P}_p^{\mathrm{L}}(t) & \equiv \int_0^t \vec{E}(\tau) \chi_p^{(1)}(t-\tau) d\tau, \\ P_{p'}^{\mathrm{NL}}(t) & \equiv \int_0^t [E(\tau)]^2 \chi_{p'}^{(3)}(t-\tau) d\tau. \end{cases}$$

Formulación general del método

- Discretizamos las expresiones anteriores:

$$\vec{P}_p^L\Big|^n = \sum_{m=0}^{n-1}\left[\vec{E}^{m+1}\left(\psi_{p,0}^{\mathrm{L}}\right)^{n,m} - \left(\vec{E}^{m+1} - \vec{E}^m\right)\left(\psi_{p,1}^{\mathrm{L}}\right)^{n,m}\right],$$

donde:

$$\begin{cases} \left(\psi_{p,0}^{\mathrm{L}}\right)^{n,m} & \equiv \int_{(n-1-m)\Delta t}^{(n-m)\Delta t} \chi_p^{(1)}(\tau)d\tau, \\ \left(\psi_{p,1}^{\mathrm{L}}\right)^{n,m} & \equiv \frac{1}{\Delta t}\int_{(n-1-m)\Delta t}^{(n-m)\Delta t}[(n-m)\Delta t - \tau]\chi_p^{(1)}(\tau)d\tau. \end{cases}$$

Formulación general del método

$$P_p^{\mathrm{NL}}\Big|^n = \sum_{m=0}^{n-1} \left[\begin{array}{l} \left(E^{m+1}\right)^2 \left(\psi_{p,0}^{\mathrm{NL}}\right)^{n,m} - 2E^{m+1}\left(E^{m+1} - E^m\right)\left(\psi_{p,1}^{\mathrm{NL}}\right)^{n,m} + \\ \left(E^{m+1} - E^m\right)^2 \left(\psi_{p,2}^{\mathrm{NL}}\right)^{n,m} \end{array} \right],$$

donde:

$$\begin{cases} \left(\psi_{p,0}^{\mathrm{NL}}\right)^{n,m} & \equiv \int_{(n-1-m)\Delta t}^{(n-m)\Delta t} \chi_p^{(3)}(\tau)d\tau, \\ \left(\psi_{p,1}^{\mathrm{NL}}\right)^{n,m} & \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{(n-1-m)\Delta t}^{(n-m)\Delta t} [(n-m)\Delta t - \tau]\chi_p^{(3)}(\tau)d\tau, \\ \left(\psi_{p,2}^{\mathrm{NL}}\right)^{n,m} & \equiv \frac{1}{(\Delta t)^2} \int_{(n-1-m)\Delta t}^{(n-m)\Delta t} [(n-m)\Delta t - \tau]^2\chi_p^{(3)}(\tau)d\tau. \end{cases}$$

Formulación general del método

- Realizando una serie de manipulaciones con las ecuaciones anteriores, llegamos a las relaciones recursivas:

$$\left(\psi_{p,0}^{\mathrm{L}}\right)^{n+1,m} = \left(\psi_{p,0}^{\mathrm{L}}\right)^{n,m} e^{-\gamma_p^L \Delta t},$$

$$\left(\psi_{p,1}^{\mathrm{L}}\right)^{n+1,m} = \left(\psi_{p,1}^{\mathrm{L}}\right)^{n,m} e^{-\gamma_p^{\mathrm{L}} \Delta t},$$

y también:

$$\left(\psi_{p,0}^{\mathrm{NL}}\right)^{n+1,m} = \left(\psi_{p,0}^{\mathrm{NL}}\right)^{n,m} e^{-\gamma_p^{NL} \Delta t},$$

$$\left(\psi_{p,1}^{\mathrm{NL}}\right)^{n+1,m} = \left(\psi_{p,1}^{\mathrm{NL}}\right)^{n,m} e^{-\gamma_p^{\mathrm{N}L} \Delta t},$$

$$\left(\psi_{p,2}^{\mathrm{NL}}\right)^{n+1,m} = \left(\psi_{p,2}^{\mathrm{NL}}\right)^{n,m} e^{-\gamma_p^{\mathrm{NL}} \Delta t}.$$

Formulación general del método

- Finalmente, sacamos las expresiones recursivas de $\vec{P}_p^L\Big|^{n+1}$ y $\vec{P}_p^{NL}\Big|^{n+1}$:

$$\vec{P}_p^L\Big|^{n+1} = \vec{P}_p^L\Big|^{n} e^{-\gamma_p^{\mathrm{L}}\Delta t} + \vec{E}^{n+1}\left(\psi_{p,0}^{\mathrm{L}}\right)^{n+1,n} - \left(\vec{E}^{n+1} - \vec{E}^{n}\right)\left(\psi_{p,1}^{\mathrm{L}}\right)^{n+1,n},$$

$$P_p^{\mathrm{NL}}\Big|^{n+1} = P_p^{\mathrm{NL}}\Big|^{n} e^{-\gamma_p^{\mathrm{N}}\Delta t} + \left(E^{n+1}\right)^2\left(\psi_{p,0}^{\mathrm{NL}}\right)^{n+1,n} - 2E^{n+1}\left(E^{n+1} - E^{n}\right)\left(\psi_{p,1}^{\mathrm{NL}}\right)^{n+1,n} + \left(E^{n+1} - E^{n}\right)^2\left(\psi_{p,2}^{\mathrm{NL}}\right)^{n+1,n}.$$

Implementación en FDTD para el caso unidimensional

- Para ver cómo se incorpora la formulación anterior en el algoritmo FDTD, consideramos el caso unidimensional de una onda con componentes de campos E_y, H_z propagándose en la dirección x. Usando el algoritmo de Yee, llegamos:

$$\frac{D_y|_i^{n+1} - D_y|_i^n}{\Delta t} = \frac{H_z|_{i+1/2}^{n+1/2} - H_z|_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} - \sigma_i \left(\frac{E_y|_i^{n+1} + E_y|_i^n}{2} \right).$$

Implementación en FDTD para el caso unidimensional

- Usando las expresiones discretas obtenidas de forma general para D_y, llegamos a:

$$\sum_{k=0}^{3} a_k \left(E_y\big|_i^{n+1} \right)^k = 0$$

donde:

$$a_0 = -\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(H_z\big|_{i+1/2}^{n+1/2} - H_z\big|_{i-1/2}^{n+1/2} \right) + \left(\frac{\sigma_i \Delta t}{2} - \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \right) E_y\Big|_i^n$$
$$- \varepsilon_0 \sum_{p=1}^{P} \left[E_y\big|_i^n \left(\psi_{p,1}^{\mathrm{L}}\right)^{n+1,n} + \left(1 - e^{-\gamma_p^{\mathrm{L}} \Delta t}\right) P_p^{\mathrm{L}}\Big|_i^n \right]$$
$$- \varepsilon_0 E_y\big|_i^n \sum_{p'=1}^{P'} \left[\left(E_y\big|_i^n \right)^2 \alpha_{0p'}^{(3)} + P_{p'}^{\mathrm{NL}}\Big|_i^n \right]$$

Implementación en FDTD para el caso unidimensional

$$a_1 = \frac{\sigma_i \Delta t}{2} + \varepsilon_0 \varepsilon_\infty + \varepsilon_0 \sum_{p=1}^{P} \left[\left(\psi_{p,0}^{\mathrm{L}}\right)^{n+1,n} - \left(\psi_{p,1}^{\mathrm{L}}\right)^{n+1,n} \right]$$

$$+ \varepsilon_0 \sum_{p'=1}^{P'} \left[\left(E_y\big|_i^n \right)^2 \left(\psi_{p',2}^{\mathrm{NL}}\right)^{n+1,n} + e^{-\gamma_{p'}^{\mathrm{NL}} \Delta t} P_{p'}^{\mathrm{NL}}\Big|_i^n \right],$$

$$a_2 = 2\varepsilon_0 E_y\big|_i^n \sum_{p'=1}^{P'} \left[\left(\psi_{p',1}^{\mathrm{N}}\right)^{n+1,n} - \left(\psi_{p',2}^{\mathrm{N}}\right)^{n+1,n} \right],$$

$$a_3 = \varepsilon_0 \sum_{p'=1}^{P'} \left[\alpha_{0p'}^{(3)} + \left(\psi_{p',0}^{\mathrm{NL}}\right)^{n+1,n} - 2\left(\psi_{p',1}^{\mathrm{NL}}\right)^{n+1,n} + \left(\psi_{p',2}^{\mathrm{NL}}\right)^{n+1,n} \right]$$

- Ahora, podemos resolver de forma recursiva la ecucación para la actualización del campo usando cualquier técnica numérica (Newton, etc).

Bibliografía

bibliografía:

Allen Taflove and Susan C Hagness.
Computational electromagnetics: the finite-difference time-domain method.
Artech House, 3, 2000.