物理数学に関するちょっとしたまとめ

Contents

1　Fourier 半区間展開について

1.1　一般の Fourier 展開

区間 $[-\pi, \pi]$ で（区分的に）連続な関数 $f(x)$ の Fourier 級数展開を考える．のちに，これを一般化して，$[-T, T]$ で定義される関数 $f(x)$ についての級数展開も考える．

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right) \tag{1.1}$$

ただし，係数 a_n, b_n は

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, f(x)\cos(nx) \quad \text{for} \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, f(x)\sin(nx) \quad \text{for} \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \tag{1.2}$$

で与えられる．

特別な場合として，$f(x)$ が偶関数のときは $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して $b_n = 0$ であり，

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{d}x\, f(x)\cos(nx) \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{1.3}$$

また，$f(x)$ が奇関数のときは，$n = 0, 1, 2, \dots$ に対して，$a_n = 0$ であり，

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{d}x\, f(x)\sin(nx) \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{1.4}$$

と書ける．

つぎに，周期が $2T$ として，$[-T, T]$ で定義される $f(x)$ の場合について考えるが，これは $n \to (\pi n)/T$ として考えれば良い．係数を求めるための積分の区間は $-T \to T$ とする．

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{\pi n}{T}x\right) + b_n\sin\left(\frac{\pi n}{T}x\right)\right] \tag{1.5}$$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T}^{T} \mathrm{d}x\, f(x)\cos\left(\frac{\pi n}{T}x\right) \\ b_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T}^{T} \mathrm{d}x\, f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{T}x\right) \end{cases} \tag{1.6}$$

1.2　半区間での Fourier 展開

$[0, L]$ で定義された関数 $f(x)$ を Fourier 級数展開することを考える．

1.2.1　奇関数として拡張する場合

$f(x)$ を奇関数として $[-L, L]$ で定義したものを $g(x)$ とする．

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (0 < x < L) \\ -f(-x) & (-L < x < 0) \end{cases} \tag{1.7}$$

のように区間 $[-L, 0]$ について拡張してやれば良い．このようにして定義される $g(x)$ を周期 $2L$ で Fourier 級数展開することで，

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \tag{1.8}$$

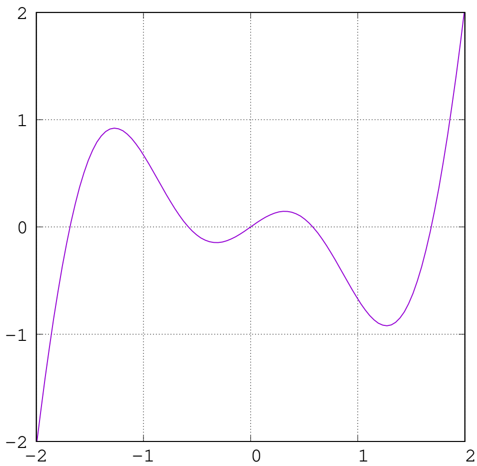

Fig. 1 奇関数の例

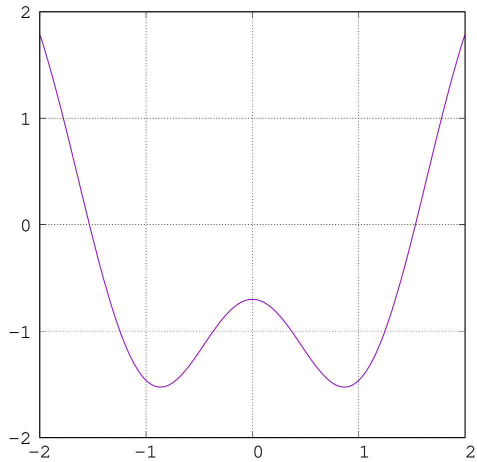

Fig. 2 偶関数の例

ただし，

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \mathrm{d}x\, g(x)\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \tag{1.9}$$

$$= \frac{2}{L}\int_0^L \mathrm{d}x\, f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \tag{1.10}$$

と表すことができる．

1.2.2 偶関数として拡張する場合

$f(x)$ を偶関数として $[-L, L]$ で定義したものを $g(x)$ とする．

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (0 < x < L) \\ f(-x) & (-L < x < 0) \end{cases} \tag{1.11}$$

$g(x)$ を Fourier 展開すると，

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \tag{1.12}$$

ただし，

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L \mathrm{d}x\, g(x)\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \tag{1.13}$$

$$= \frac{2}{L}\int_0^L \mathrm{d}x\, f(x)\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \tag{1.14}$$

と表すことができる．

2 Bessel 関数

2.1 Bessel 関数，Neumann 関数の導入

Bessel の微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 u(z)}{\mathrm{d}z^2} + \frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}u(z)}{\mathrm{d}z} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)u(z) = 0 \tag{2.1}$$

を考える．いま，確定特異点 $z = 0$ 周りの解を Frobenius の方法で級数の形で解（のひとつ）を求めると，

$$u(z) = J_\nu(z) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu + m + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m} \tag{2.2}$$

を得る．これを，次数 ν の Bessel の関数または第一種円筒関数 (Bessel functions of the first kind) という．ν を $-\nu$ に置き換えても，同じ Bessel の微分方程式 (2.1) を与えるから

$$u(z) = J_{-\nu}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-\nu + m + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m} \tag{2.3}$$

も解（のひとつ）である．ν が 0 以上の整数でない時は J_ν と $J_{-\nu}$ は線型独立な解であるから，一般解はこれらの線型結合で表すことができる．しかし，いま，ν を 0 以上の整数とすると，

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) \tag{2.4}$$

なる関係が成り立ち，もはや J_n と J_{-n} は独立ではないので，J_ν に線型独立な解を探す必要がある．このような解として

$$Y_\nu(z) = \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)} \tag{2.5}$$

を採用する．これを次数 ν の第二種円筒関数 (Bessel functions of the second kind) または Neumann の関数という．

従って，Bessel の微分方程式 (2.1) の一般解は線型独立な特解 J_ν と Y_ν（とくに，$\nu \notin \mathbf{Z}_{\geq 0}$ のときは J_{-n} でもよい）の線形結合で表すことができる．

2.2　Bessel 関数の母関数表示

Bessel 関数の母関数が

$$g(x,t) \equiv \exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n \tag{2.6}$$

で表されることを示す．

Proof.　$g(x,t)$ を t について Laurent 展開して，

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n t^n \tag{2.7}$$

のように表されるとする．このとき，留数定理より

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] \frac{\mathrm{d}t}{t^{n+1}} \tag{2.8}$$

である．ただし，積分曲線は原点を中心とする円であるとした．

$t = 2u/z$ と積分変数を変換し，さらに Taylor 展開をすると，

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \oint_C \frac{1}{u^{n+m-s+1}}\, \mathrm{d}u \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \delta_{n+m,s} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n} \end{aligned} \tag{2.9}$$

従って，$A_n = J_n$ となるので，母関数表示を得ることができた．　▣

2.3 円筒関数の基本関係

第 1 種 Bessel 関数

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m} \tag{2.10}$$

に対して，簡単な計算により

$$\left.\begin{aligned} 2J_\nu'(z) &= J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) \\ \frac{2\nu}{z} J_\nu(z) &= J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

が得られる．(2.11) を一般化して，J を ν, z の関数と見て $f(z,\nu)$ と表すことにして，

$$\left.\begin{aligned} f(z,\nu-1) + f(z,\nu+1) &= \frac{2\nu}{z} f(z,\nu) \\ f(x,\nu-1) - f(z,\nu+1) &= 2\frac{\partial}{\partial z} f(z,\nu) \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

を満たす f を変数 z，次数 ν の円筒関数と言うこともある．

また，(2.11) を組み合わせることで

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^\nu J_\nu(z)\right] &= z^\nu J_{\nu-1}(z) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu} J_\nu(z)\right] &= -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z) \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

が得られる．