## References

Gradshteyn, I., & Ryzhik, I. 2014, Table of Integrals, Series, and Products (Academic Press), doi:https://doi.org/10.1016/C2010-0-64839-5

## 3 Problems (Section 3)

### 3.1 Hints

3.1 方位角対称なポテンシャルを Legendre 多項式で展開したときの一般形

$$\Phi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}(A_l r^l+B_l r^{-(l+1)})P_l(\cos\theta) \tag{3.1}$$

に代入して，境界条件から各係数 $A_l, B_l$ を決定する．

3.2 (a) (3.1) のように展開して，表面電荷密度による境界条件を考えれば良い．また，Legendre 多項式の直交関係式

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\,P_{l'}(x)P_l(x)=\frac{2}{2l+1}\delta_{l'l} \tag{3.2}$$

および負の引数をとる場合の式

$$P_l(-x)=(-1)^l P_l(x) \tag{3.3}$$

を用いれば良い．

(b) $\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi$ を用いて原点での電場を計算できる．また，$\hat{\boldsymbol{z}}=\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}}-\sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$ を用いると，結果を $\hat{\boldsymbol{z}}$ のみで表すことができる．

(c) (2) では $\beta=\pi-\alpha$ として $\beta\to 0$ の極限を考えるほうがやりやすい．

3.3 後で

3.4 (a) ポテンシャルを球面調和関数で展開する．

$$\Phi(r,\theta,\phi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(A_{lm}r^l+B_{lm}r^{-(l+1)})Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{3.4}$$

である．境界条件は $r=a$ の球面上で考えれば良い．$\phi$ の値でポテンシャルを場合分けして考えると見通しが良い．

(b) (a) の結果を用いて具体的な計算をするだけ．本文 §3.3 中の式 (3.36) との比較のときには，座標軸の取り方に注意をする必要がある．具体的には $\cos\theta'=\sin\theta\sin\phi$ である．

3.5 本文中の式 (3.70) を $r,a$ でそれぞれ微分，差を考えて $\mathrm{d}\Omega' V(\theta',\phi')$ で積分をすればよい．

3.6 ポテンシャルが具体的に計算できるので，本文中の式 (3.70) を使って球面調和関数で展開した後に，和を考えれば良い．

3.7 前問と同じように考えれば良い．

3.8 $\log(\csc\theta)=\log(1/\sin\theta)$ を Legendre 多項式で展開する．積分

$$\int\mathrm{d}x\,\log(1-x^2)=(1+x)\log(1+x)-(1-x)\log(1-x)-2x \tag{3.5}$$

を使うと見通しが良い．

3.9 円筒座標系での Laplacian は

$$\nabla^2=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{3.6}$$

である．これを $z=0,L$ での境界条件に注意して解けばよい．

3.10 前問の結果を用いる．(b) での極限を考えるときは，漸近形

$$I_\nu(z)\sim\frac{1}{\nu!}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}+\mathcal{O}(z^{\nu+1})\quad\text{for}\quad z\ll 1 \tag{3.7}$$

を用いるとよい．三角関数の無限和は exp での無限級数として考えると見通しが良い．

3.11 あとで

3.12 Bessel 関数に関する公式

$$\int_0^{\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-\alpha x}J_0(bx)=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+b^2}} \tag{3.8}$$

$$\int_0^{\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-\alpha x}[J_0(bx)]^2=\frac{2}{\pi\sqrt{\alpha^2+4b^2}}K\left(\frac{2b}{\sqrt{\alpha^2+4b^2}}\right) \tag{3.9}$$

が知られている．ここで，$K(k)$ は第一種完全楕円積分

$$K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \tag{3.10}$$

である．

3.13 Legendre 多項式の積分について

$$\int_0^1\mathrm{d}x\,P_l(x)=\begin{cases}1 & \text{if}\quad l=0\\ \dfrac{(-1)^k(2k-1)!!}{2^{k+1}(k+1)!} & \text{if}\quad l=2k+1;\,k=0,1,\ldots\\ 0 & \text{if}\quad l=2k;\,k=1,2,\ldots\end{cases} \tag{3.11}$$

が知られている．

3.14 線電荷密度を求めてそれを体積電荷密度として書けば良い．

3.15 あとで

3.16 (a) デルタ関数は

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin(x/\varepsilon)}{x/\varepsilon}\frac{1}{\pi\varepsilon}=\delta(x) \tag{3.12}$$

とかける．

(b) 基本的には本文 §3.11 の議論と同様にすれば良い．

(c) (b) の結果を用いる．

(d) Bessel の積分表示

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\,\cos(n\theta-x\sin\theta) \tag{3.13}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,\cos(n\theta-x\sin\theta) \tag{3.14}$$

および Hansen の積分表示

$$J_n(x)=\frac{1}{\mathrm{i}^n\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cos\theta}\cos(n\theta) \tag{3.15}$$

がある．

3.17 (a) Fourier 展開，あるいは Fourier 半区間展開により

$$\delta(\phi-\phi')=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\phi-\phi')} \tag{3.16}$$

$$\delta(z-z')=\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right) \tag{3.17}$$

がわかる．

(b) 問題 3.16(a) の結果を用いて $\rho,\phi$ 方向について展開をした後，$z$ 方向についてGreen 関数の満たすべき条件を考える．

3.18 (a) 円筒関数系での Laplace 方程式を境界条件

$$\begin{cases}\Phi=0 & \text{on}\quad z=0\\ \Phi=V\theta(a-\rho) & \text{on}\quad z=L\end{cases} \tag{3.18}$$

で解く．ただし $\theta(\cdot)$ は Heaviside の階段関数．

(b) Bessel 関数，sinh 関数を級数展開して，最低次の寄与を計算する．

(c) (b) と同様に考える．

3.19 Gradshteyn & Ryzhik (2014) の式 (6.666) より

$$\int_0^{\infty}\mathrm{d}x\,x^{\nu+1}\frac{\sinh(\alpha x)}{\sinh(\pi x)}J_\nu(\beta x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{\nu+1}\sin(n\alpha)K_\nu(n\beta)$$
$$\text{for}\quad|\Re(\alpha)|<1,\,\Re(\nu)>-1 \tag{3.19}$$

が成り立つ．

3.20 問題 3.17 で考えた Green 関数を用いることができる．

3.21 問題 1.18(b) の結果を用いる．また，Gradshteyn & Ryzhik (2014) 式 (6.554) より

$$\int_0^1\mathrm{d}x\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}J_0(xy)=\frac{\sin y}{y}\quad\text{for}\quad y>0 \tag{3.20}$$

である．

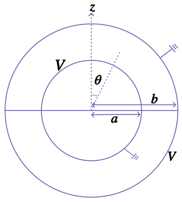
3.22 あとで

3.23

## 3.2 Answers

**3.1**

半径 $a, b$ の球の間の領域のポテンシャルを考える．Legendre 多項式による展開




$$\Phi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+B_l r^{-(l+1)}\right)P_l(\cos\theta) \tag{3.21}$$

を以下の境界条件で考える：

$$\Phi(a,\theta)=\begin{cases}V & \text{if} \quad 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0 & \text{if} \quad \dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\pi\end{cases}, \tag{3.22}$$

$$\Phi(b,\theta)=\begin{cases}0 & \text{if} \quad 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\\ V & \text{if} \quad \dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\pi\end{cases} \tag{3.23}$$

(3.22) について，$P_{l'}(\cos\theta)\,\mathrm{d}(\cos\theta)$ をかけて $\theta\in[0,\pi]$ で積分をすると，

$$\int_{\cos\theta=1}^{\cos\theta=-1}\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l a^l+B_l a^{-(l+1)}\right)P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta)\,\mathrm{d}(\cos\theta) = V\int_{\cos\theta=1}^{\cos\theta=0}P_{l'}(\cos\theta)\,\mathrm{d}(\cos\theta) \tag{3.24}$$

である．左辺の積分変数を $x$ で書くと，

$$(\text{L.H.S.})=\int_1^{-1}\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l a^l+B_l a^{-(l+1)}\right)P_l(x)P_{l'}(x)\,\mathrm{d}x \tag{3.25}$$

であり，Legendre 多項式に関する直交関係 (3.2) より，($l, l'$ を入れ替えて)

$$A_l a^l+B_l a^{-(l+1)}=\frac{V(2l+1)}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x\,P_l(x) \tag{3.26}$$

を得る．同様に考えて，(3.23) について，

$$A_l b^l+B_l b^{-(l+1)}=(-1)^l\frac{V(2l+1)}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x\,P_l(x) \tag{3.27}$$

が成り立つ．ただし，$P_l(-x)=(-1)^l P_l(x)$ に注意せよ．

式 (3.26) と (3.27) より，係数 $A_l, B_l$ を計算することができて，

$$A_l=\frac{(-1)^l b^{l+1}-a^{l+1}}{b^{2l+1}-a^{2l+1}}\frac{V(2l+1)}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x\,P_l(x), \tag{3.28}$$

$$B_l=\frac{b^l-(-1)^l a^l}{b^{2l+1}-a^{2l+1}}a^{l+1}b^{l+1}\frac{V(2l+1)}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x\,P_l(x) \tag{3.29}$$

がわかる．したがって，ポテンシャルの正確な形は

$$\Phi(r,\theta)=V\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^l b^{l+1}-a^{l+1}}{b^{2l+1}-a^{2l+1}}r^l+\frac{b^l-(-1)^l a^l}{b^{2l+1}-a^{2l+1}}a^{l+1}b^{l+1}r^{-(l+1)}\right) \times\frac{2l+1}{2}\left(\int_0^1 \mathrm{d}x\,P_l(x)\right)P_l(\cos\theta) \tag{3.30}$$

である．具体的に $l=4$ の項までを書き下せば，

$$\Phi(r,\theta)=V\left[\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\frac{-(a^2+b^2)r+a^2b^2(a+b)r^{-2}}{b^3-a^3}P_1(\cos\theta) -\frac{7}{16}\frac{-(a^4+b^4)r^3+a^4b^4(a^3+b^3)r^{-4}}{b^7-a^7}P_3(\cos\theta)+\cdots\right] \tag{3.31}$$

となる．

$b\to\infty$ の極限では $a/b\to 0, r/b\to 0$ として，

$$\begin{aligned}\Phi(r,\theta)&=V\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}\left(\int_0^1 \mathrm{d}x\,P_l(x)\right)P_l(\cos\theta)\\ &=V\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(4k+3)(2k-1)!!}{2^{k+2}(k+1)!}\left(\frac{a}{r}\right)^{2k+2}P_{2k+1}(\cos\theta)\right] &(3.32)\\ &=V\left[\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^2P_1(\cos\theta)-\frac{7}{16}\left(\frac{a}{r}\right)^4P_3(\cos\theta)+\cdots\right] &(3.33)\end{aligned}$$

である．ただし，ここでは $(-1)!!=1$ と約束する．これは半径 $a$ の導体球について，北半球のポテンシャルが $V$，南半球が接地されており，さらに無限遠でのポテンシャルの境界条件が $V/2$ となる系において，導体球の外部領域に作るポテンシャルに等しいことがわかる．

$a\to 0$ の極限では

$$\begin{aligned}\Phi(r,\theta)&=V\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{2l+1}{2}\left(\frac{r}{b}\right)^l\left(\int_0^1 \mathrm{d}x\,P_l(x)\right)P_l(\cos\theta)\\ &=V\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(4k+3)(2k-1)!!}{2^{k+2}(k+1)!}\left(\frac{r}{b}\right)^{2k+1}P_{2k+1}(\cos\theta)\right] &(3.34)\\ &=V\left[\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\left(\frac{r}{b}\right)P_1(\cos\theta)+\frac{7}{16}\left(\frac{r}{b}\right)^3P_3(\cos\theta)\right] &(3.35)\end{aligned}$$

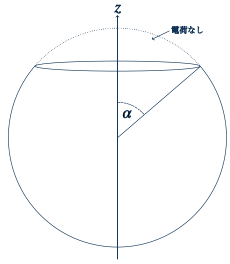
である．これは，半径 $b$ の導体球について，北半球が接地されていて，南半球のポテンシャルが $V$ となるような系における，球内部のポテンシャルに等しいことがわかる．

それぞれの場合について，ポテンシャルを描くと図 1–3 のようになる[1]．

---

**3.2**

極角 $\theta$ が $\theta<\alpha$ を満たす部分には電荷が存在せず，その他の部分には一様な電荷密度 $\sigma_c=Q/(4\pi R^2)$ が存在するような球を考える．




(a) ポテンシャルを Legendre 多項式で展開して

$$\Phi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+B_l r^{-(l+1)}\right)P_l(\cos\theta) \tag{3.36}$$

とする．球の内部で $r\to 0$ としたときに発散しない条件より $l=0,1,\ldots$ について $B_l=0$ また，球の外部については $r\to\infty$ としたときにポテンシャルがゼロに漸近するとして，$l=0,1,\ldots$ について $A_l=0$ である．したがって，球の内外でのポテンシャル $\Phi_{\text{in}}$ および $\Phi_{\text{out}}$ は

$$\Phi_{\text{in}}(r,\theta)=\sum_l A_l r^l P_l(\cos\theta), \tag{3.37}$$

$$\Phi_{\text{out}}(r,\theta)=\sum_l B_l r^{-(l+1)}P_l(\cos\theta) \tag{3.38}$$

とかける．ポテンシャルは $r=R$ の球面上で連続であるから，

$$\sum_l A_l R^l P_l(\cos\theta)=B_l R^{-(l+1)}P_l(\cos\theta) \tag{3.39}$$

であり，$\{P_l\}_{l=0,1,2,\ldots}$ が直交関数系をなすことより $B_l=A_l R^{2l+1}$ である．

また，電場の接続条件は

$$\sigma=\varepsilon_0\left[\left.\frac{\partial\Phi_{\text{in}}}{\partial r}\right|_{r=R}-\left.\frac{\partial\Phi_{\text{out}}}{\partial r}\right|_{r=R}\right]=\begin{cases}\dfrac{Q}{4\pi R^2} & \text{if} \quad \theta\ge\alpha\\ 0 & \text{if} \quad 0\le\theta<\alpha\end{cases} \tag{3.40}$$

である．

$$\left.\frac{\partial\Phi_{\text{in}}}{\partial r}\right|_{r=R}-\left.\frac{\partial\Phi_{\text{out}}}{\partial r}\right|_{r=R}=\sum_{l=0}^{\infty}A_l(2l+1)R^{l-1}P_l(\cos\theta) \tag{3.41}$$

に注意すると，$\mathrm{d}(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta)$ をかけて $\cos\theta=1$ から $\cos\theta=-1$ で積分をすると，直交関係より以下が得られる（$l, l'$ の入れ替えを行った）；

$$A_l=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^{l+1}}\int_{-1}^{\cos\alpha}\mathrm{d}x\,P_l(x). \tag{3.42}$$

Legendre 多項式に関する漸化式

$$\frac{\mathrm{d}P_{l+1}}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}P_{l-1}}{\mathrm{d}x}=(2l+1)P_l \tag{3.43}$$

より，

$$\int_{-1}^{\cos\alpha}\mathrm{d}x\,P_l(x)=\frac{1}{2l+1}\left[P_{l+1}(\cos\alpha)-P_{l-1}(\cos\alpha)\right] \tag{3.44}$$

である（$P_{l+1}(-1)-P_{l-1}(-1)=0$ であることに注意せよ）．したがって，

$$A_l=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2l+1}\left[P_{l+1}(\cos\alpha)-P_{l-1}(\cos\alpha)\right]\frac{1}{R^{l+1}} \tag{3.45}$$

であり，球内部のポテンシャルは

$$\Phi_{\text{in}}(r,\theta)=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\left[P_{l+1}(\cos\alpha)-P_{l-1}(\cos\alpha)\right]\frac{r^l}{R^{l+1}}P_l(\cos\theta) \tag{3.46}$$

と表される．また，球外部のポテンシャルについては，

$$\Phi_{\text{in}}(r,\theta)=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\left[P_{l+1}(\cos\alpha)-P_{l-1}(\cos\alpha)\right]\frac{R^l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta) \tag{3.47}$$

と表される．

(b) 電場は $\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi$ で与えられるので，

---

1) 描画のときに使用したコードは .ipynb 形式で保存してある．

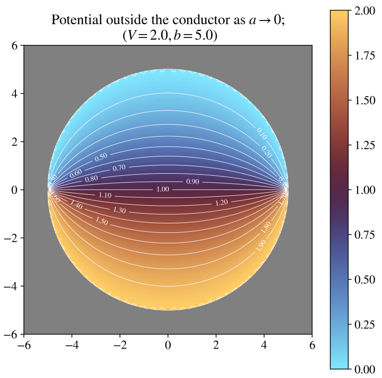



Figure 1. — $a \to 0$ としたとき

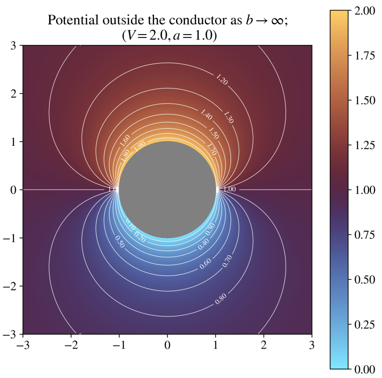



Figure 2. — $b \to \infty$ としたとき

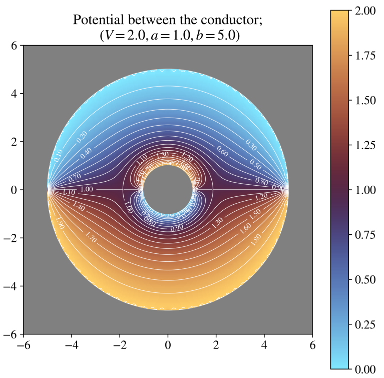



Figure 3. — 一般の場合についてのポテンシャル