Problems (Section 3)

章末問題の手の付け方，略解とかを書きたい．ここに書いてある方法が答えに辿り着く唯一の方法ではない．別解もあると考えられる．

$\boxed{3.1}$ 方位角対称なポテンシャルを Legendre 多項式で展開したときの一般形

$$\Phi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+B_l r^{-(l+1)}\right)P_l(\cos\theta) \tag{3.1}$$

に代入して境界条件から各係数を決定する．Legendre 多項式について成り立つ関係：

$$P_n(0)=(-1)^{n/2}2^{-n}\binom{n}{n/2} \quad \left(n : \text{even}, \binom{\cdot}{\cdot} \text{は二項係数}\right) \tag{3.2}$$

を使えば良い．

$\boxed{3.2}$ (a) (3.1) のように展開して，表面電荷密度による境界条件を考えることで係数を決定する．Legendre 多項式の直交関係式：

$$\int_0^1 \mathrm{d}(\cos\theta)\,P_{l'}(\cos\theta)P_l(\cos\theta)=\frac{2}{2l+1}\delta_{ll'} \tag{3.3}$$

および，Legendre 多項式の基本的な式：

$$P_l(-x)=(-1)^l P_l(x) \tag{3.4}$$

を用いれば良い．

(b) $\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi$ を用いて原点での電場を計算する．$\hat{\boldsymbol{z}}=\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}}-\sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$ を用いると結果を $\hat{\boldsymbol{z}}$ のみで表すことができる．

(c) (2) では $\beta=\pi-\alpha$ として $\beta\to 0$ の極限を考えるとよい．

$\boxed{3.3}$ この問題は議論の余地がある．ちょっと後回しにする．

$\boxed{3.4}$ (a) ポテンシャルを球面調和関数を用いた展開で表す：

$$\Phi(r,\theta,\phi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=l}^{l}\left(A_{lm}r^l+B_{lm}r^{-(l+1)}\right)Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{3.5}$$

$r=a$ の球面上で境界条件から各係数を定める．計算の途中で，

$$V(\phi)=\begin{cases}+V & \text{if} \quad \dfrac{\pi}{n}\cdot 2j\le\phi\le\dfrac{\pi}{n}\cdot(2j+1)\\[2mm] -V & \text{if} \quad \dfrac{\pi}{n}\cdot(2j+1)\le\phi\le\dfrac{\pi}{n}\cdot(2j+2)\end{cases} \quad (\text{for } j=0,1,\cdots,n-1) \tag{3.6}$$

を用いて，積分

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\,V(\phi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi} \tag{3.7}$$

の計算があらわれるが，$m\neq 0$ のときを考えると，

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\,V(\phi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi}=-\frac{\mathrm{i}V}{m}\left[1-\exp\left(-\mathrm{i}\frac{m}{n}\pi\right)\right]^2\sum_{j=0}^{n-1}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{m}{n}2j\pi\right) \tag{3.8}$$

となる．

まず，m/n が整数となるときを考える．

$m = 0, \pm 2n, \pm 4n, \ldots$ のときは $\exp(-\mathrm{i}(m/n)\pi) = 1$ となるので，積分はゼロ．残りとして考えるのは $m = \pm n, \pm 3n, \ldots$ である．このとき，

$$\exp\left(-\mathrm{i}\frac{m}{n}2j\pi\right) = 1 \quad \text{for} \quad j = 0, \ldots, n-1 \tag{3.9}$$

である．

次に，m/n が整数とならない時を考える．

$$\sum_{j=0}^{n-1} \exp\left(-\mathrm{i}\frac{m}{n}2j\pi\right) = \frac{1 - \exp(-\mathrm{i}2m\pi)}{1 - \exp(-\mathrm{i}\frac{2m}{n}\pi)} = 0 \tag{3.10}$$

である（m は整数であるので，分子はゼロ）から，この場合は積分がゼロになる．

これらをまとめて

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, V(\phi) e^{-\mathrm{i}m\phi} = \begin{cases} -\mathrm{i}\dfrac{4Vn}{m} & \text{if} \quad m = \pm n, \pm 3n, \ldots \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.11}$$

と書ける．

(b) (a) の結果を用いて具体的に計算を進めていくだけであるが，Jackson §3.3 eq. (3.36) との比較の時には座標軸の取り方に気をつける必要がある．具体的には，$\cos\theta' = \sin\theta \sin\phi$ とすれば良い．

$\boxed{3.5}$ Jackson eq. (3.70) の式を r, a でそれぞれ微分して，差を考えて $\mathrm{d}\Omega'\, V(\theta', \phi')$ で積分をすれば良い．

$\boxed{3.6}$ ポテンシャルが具体的に計算できるので，Jackson eq. (3.70) を用いて，球面調和関数で展開して，和を考えれば良い．この問題は易しい．

$\boxed{3.7}$ 前問と同じように考えれば良い．

$\boxed{3.8}$ $\log(\csc\theta) = \log(1/\sin\theta)$ を Legendre 多項式で展開する．このときに積分

$$\int \mathrm{d}x\, \log(1 - x^2) = (1 + x)\log(1 + x) - (1 - x)\log(1 - x) - 2x \tag{3.12}$$

を用いる．普通に log 積分をしてしまうと発散してしまうことに注意．この積分は知らないとキビシイかも．

$\boxed{3.9}$ 円筒座標系での Laplace 方程式

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{3.13}$$

を $z = 0, L$ での境界条件に注意して解けば良い．

$\boxed{3.10}$ 前問の結果を用いればよい．(b) での極限を考える時は，

$$I_\nu(z) \sim \frac{1}{\nu!}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu + \mathcal{O}\left(z^{\nu+1}\right) \quad \text{if} \quad z \ll 1 \tag{3.14}$$

を用いると良い．また，三角関数の無限和を求める時は，exp の形にして無限級数として和を求めてその実部・虚部を求めると見通しが良い．また，log の虚部は arg で与えられることに注意．

$\boxed{3.11}$

$\boxed{3.12}$ 円筒座標系で Laplace 方程式を解く．境界条件は

$$V(\rho, z) = V\theta(a - \rho)\delta(z) \tag{3.15}$$

で与えられる．また，公式

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\alpha x} J_0(bx) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}} \tag{3.16}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\alpha x} \big[J_0(bx)\big]^2 = \frac{2}{\pi\sqrt{\alpha^2 + 4b^2}} K\!\left(\frac{2b}{\sqrt{\alpha^2 + 4b^2}}\right) \tag{3.17}$$

を用いる．ここで，$K(k)$ は，第一種完全楕円積分

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}} \tag{3.18}$$

である．

3.13 Jackson eq. (3.125) の Green 関数の表式を用いる．

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\, P_l(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } l = 0 \\ \dfrac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^{k+1}(k+1)!} & \text{if } l = 2k+1; k = 0, 1, \ldots \\ 0 & \text{if } l = 2k; k = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{3.19}$$

に注意．丁寧に計算を進めると problem 3.1 と同じ結果を得る．

3.14 線電荷密度を求めて，それを体積電荷密度で書くと

$$\rho_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{x}) = \frac{3Q}{8\pi d^3} \frac{d^2 - r^2}{r^2} [\delta(\cos\theta - 1) + \delta(\cos\theta + 1)] \tag{3.20}$$

と表すことができる．Jackson eq. (3.125) の Green 関数を用いて球内部のポテンシャルを求めればよい．$r \gtrless d$ で積分の計算が異なるが，丁寧に計算をすれば良い．

3.15

3.16 (a) Bessel の微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 J_\nu(k\rho)}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}J_\nu(k\rho)}{\mathrm{d}\rho} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right) J_\nu(k\rho) = 0 \tag{3.21}$$

から出発して，部分積分，k, k' の入れ替えをして差を考えると，

$$(k^2 - (k')^2) \int_0^\infty \mathrm{d}\rho\, \rho J_\nu(k\rho) J_\nu(k'\rho) = \left[\rho J_\nu(k\rho) \frac{\mathrm{d}J_\nu(k'\rho)}{\mathrm{d}\rho} - \rho J_\nu(k'\rho) \frac{\mathrm{d}J_\nu(k\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right]_{\rho=0}^{\rho=\infty} \tag{3.22}$$

となる．$\rho = 0$ では，$\Re(\nu) > -1$ の時にゼロとなる．$\rho = \infty$ の場合を考える．$\rho = R$ として，$R \to \infty$ を考えることにする．Bessel 関数の漸近形を用いて，

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\rho\, \rho J_\nu(k\rho) J_\nu(k'\rho) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{kk'}} \left[-\frac{\cos[(k+k')R - \nu\pi]}{k+k'} + \frac{\sin[(k-k')R]}{k-k'}\right] \tag{3.23}$$

と書き直すことができる．

さて，デルタ関数は，sinc 関数を用いて

$$\lim_{\epsilon\to 0} \delta_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\sin(x/\epsilon)}{x/\epsilon} \frac{1}{\pi\epsilon} = \delta(x) \tag{3.24}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\cos(x/\epsilon)}{x/\epsilon} \frac{1}{\pi\epsilon} = 0 \tag{3.25}$$

として表すことができることを用いると，

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{kk'}}\left[\frac{\sin[(k-k')R]}{k-k'}\right]=\frac{1}{k}\delta(k-k') \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{kk'}}\frac{\cos[(k+k')R-\nu\pi]}{k+k'}\\ =\frac{1}{\sqrt{kk'}}\delta(k+k')\cos(\nu\pi)=0\quad \text{if}\quad k,k'>0\end{aligned} \tag{3.27}$$

であるから，

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\rho\,\rho J_\nu(k\rho)J_\nu(k'\rho)=\frac{1}{k}\delta(k-k') \tag{3.28}$$

が従う．

(b) 基本的には §3.11 の議論を追えば良い．

(c) (b) の結果を用いるだけ．

(d) Bessel の積分表示

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\,\cos(n\theta-x\sin\theta) \tag{3.29}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\,\cos(n\theta-x\sin\theta) \tag{3.30}$$

Hansen の積分表示

$$J_n(x)=\frac{1}{\mathrm{i}^n\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cos\theta}\cos(n\theta) \tag{3.31}$$

$\boxed{3.17}$ (a) Fourier 展開（・半区間展開）を用いると，

$$\delta(\phi-\phi')=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\phi-\phi')} \tag{3.32}$$

$$\delta(z-z')=\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right) \tag{3.33}$$

と展開できる．

(b) problem 3.16 (a) の結果を用いて，ρ 方向と ϕ 方向について展開をした後，z 方向について Green 関数の満たすべき条件を考える．

$\boxed{3.18}$ (a) 円筒座標系での Laplace 方程式を境界条件

$$\begin{cases}\Phi=0 \quad \text{on} \quad z=0\\ \Phi=V\theta(a-\rho)\quad \text{on}\quad z=L\end{cases} \tag{3.34}$$

で解く．

(b) Bessel 関数，sinh 関数を級数展開して，最低次の寄与を計算する．

(c) (b) と同様．

$\boxed{3.19}$ Gradshteyn & Ryzhik, p.722 eq. (6.666) より

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\,x^{\nu+1}\frac{\sinh(\alpha x)}{\sinh(\pi x)}J_\nu(\beta x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{\nu+1}\sin(n\alpha)K_\nu(n\beta)$$
$$\text{for}\quad |\Re(\alpha)|<1,\Re(\nu)>-1 \tag{3.35}$$

である．

$\boxed{3.20}$ problem 3.17 で考えた Green 関数を用いてポテンシャルを計算することができる.

$\boxed{3.21}$ problem 1.18(b) での結果を用いる.

Gradshteyn & Ryzhik eq. (6.554) より

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} J_0(xy) = \frac{\sin y}{y} \quad \text{for} \quad y > 0 \tag{3.36}$$

である.

(c) で $d \gg R$ のとき，変分法を使って求める方法がわからない...

$\boxed{3.22}$ 二次元の Green 関数を求める問題. $\phi = 0, \beta$ でゼロとなる境界条件に注意して考えれば良い.

$\boxed{3.23}$