

Contents

3	Problems (Section 3)	1
3.1	Hints	1

3 Problems (Section 3)

3.1 Hints

章末問題の手の付け方，略解とかを書きたい．別の解答もあると思う．

3.1 方位角対称なポテンシャルを Legendre 多項式で展開したときの一般形

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) \quad (3.1)$$

に代入して境界条件から各係数を決定する．Legendre 多項式について成り立つ関係：

$$P_n(0) = (-1)^{n/2} 2^{-n} \binom{n}{n/2} \quad (n: \text{even}, \binom{\cdot}{\cdot} \text{は二項係数}) \quad (3.2)$$

を使えば良い．

3.2 (a) (3.1) のように展開して，表面電荷密度による境界条件を考えることで係数を決定する．Legendre 多項式の直交関係式：

$$\int_0^1 d(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) P_l(\cos \theta) = \frac{2}{2l+1} \delta_{l'l} \quad (3.3)$$

および，Legendre 多項式の基本的な式：

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x) \quad (3.4)$$

を用いれば良い．

(b) $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$ を用いて原点での電場を計算する． $\hat{z} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}$ を用いると結果を \hat{z} のみで表すことができる．

(c) (2) では $\beta = \pi - \alpha$ として $\beta \rightarrow 0$ の極限を考えるとよい．

3.3 ちょっと後回しにする．

3.4 (a) ポテンシャルを球面調和関数を用いた展開で表す：

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.5)$$

$r = a$ の球面上で境界条件から各係数を定める．計算の途中で，

$$V(\phi) = \begin{cases} +V & \text{if } \frac{\pi}{n} \cdot 2j \leq \phi \leq \frac{\pi}{n} \cdot (2j+1) \\ -V & \text{if } \frac{\pi}{n} \cdot (2j+1) \leq \phi \leq \frac{\pi}{n} \cdot (2j+2) \end{cases} \quad (\text{for } j = 0, 1, \dots, n-1) \quad (3.6)$$

を用いる．また，積分

$$\int_0^{2\pi} d\phi V(\phi) e^{-im\phi} \quad (3.7)$$

の計算があらわれるが，場合わけをして， $m \neq 0$ のときを考えると，

$$\int_0^{2\pi} d\phi V(\phi) e^{-im\phi} = -\frac{iV}{m} \left[1 - \exp\left(-i\frac{m}{n}\pi\right) \right]^2 \sum_{j=0}^{n-1} \exp\left(-i\frac{m}{n}2j\pi\right) \quad (3.8)$$

となる．

まず, m/n が整数となるときを考える. $m = 0, \pm 2n, \pm 4n, \dots$ のときは $\exp(-i(m/n)\pi) = 1$ となるので, 積分はゼロ. 残りとして考えるのは $m = \pm n, \pm 3n, \dots$ である. このとき,

$$\exp\left(-i\frac{m}{n}2j\pi\right) = 1 \quad \text{for } j = 0, \dots, n-1 \quad (3.9)$$

である.

次に, m/n が整数とならない時を考える.

$$\sum_{j=0}^{n-1} \exp\left(-i\frac{m}{n}2j\pi\right) = \frac{1 - \exp(-i2m\pi)}{1 - \exp(-i\frac{2m}{n}\pi)} = 0 \quad (3.10)$$

である (m は整数であるので, 分子はゼロ) から, この場合は積分がゼロになる.

これらをまとめて

$$\int_0^{2\pi} d\phi V(\phi) e^{-im\phi} = \begin{cases} -i\frac{4Vn}{m} & \text{if } m = \pm n, \pm 3n, \dots \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.11)$$

と書ける.

(b) (a) の結果を用いて具体的に計算を進めていくだけであるが, Jackson §3.3 eq. (3.36) との比較の時には座標軸の取り方に気をつける必要がある. 具体的には, $\cos\theta' = \sin\theta\sin\phi$ とすれば良い.

3.5 Jackson eq. (3.70) の式を r, a でそれぞれ微分して, 差を考えて $d\Omega' V(\theta', \phi')$ で積分をすれば良い.

3.6 ポテンシャルが具体的に計算できるので, Jackson eq. (3.70) を用いて, 球面調和関数で展開して, 和を考えれば良い. この問題は易しい.

3.7 前問と同じように考えれば良い.

3.8 $\log(\csc\theta) = \log(1/\sin\theta)$ を Legendre 多項式で展開する. このときに積分

$$\int dx \log(1-x^2) = (1+x)\log(1+x) - (1-x)\log(1-x) - 2x \quad (3.12)$$

を用いる. 普通に \log 積分をしてしまうと発散してしまうことに注意. この積分は知らないとなかなか難しいかも.

3.9 円筒座標系での Laplace 方程式

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.13)$$

を $z = 0, L$ での境界条件に注意して解けば良い.

3.10 前問の結果を用いればよい. (b) での極限を考える時は,

$$I_\nu(z) \sim \frac{1}{\nu!} \left(\frac{z}{2} \right)^\nu + \mathcal{O}(z^{\nu+1}) \quad \text{if } z \ll 1 \quad (3.14)$$

を用いると良い. また, 三角関数の無限和を求める時は, \exp の形にして無限級数として和を求めてその実部・虚部を求めると見通しが良い. また, \log の虚部は \arg で与えられることに注意.

3.11

3.12 円筒座標系で Laplace 方程式を解く. 境界条件は

$$V(\rho, z) = V\theta(a - \rho)\delta(z) \quad (3.15)$$

で与えられる. また, 公式

$$\int_0^\infty dx e^{-\alpha x} J_0(bx) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}} \quad (3.16)$$

$$\int_0^\infty dx e^{-\alpha x} [J_0(bx)]^2 = \frac{2}{\pi\sqrt{\alpha^2 + 4b^2}} K\left(\frac{2b}{\sqrt{\alpha^2 + 4b^2}}\right) \quad (3.17)$$

を用いる. ここで, $K(k)$ は, 第一種完全楕円積分

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (3.18)$$

である.

3.13 Jackson eq. (3.125) の Green 関数の表式を用いる.

$$\int_0^1 dx P_l(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } l = 0 \\ \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^{k+1} (k+1)!} & \text{if } l = 2k+1; k = 0, 1, \dots \\ 0 & \text{if } l = 2k; k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.19)$$

に注意。丁寧に計算を進めると problem 3.1 と同じ結果を得る。

3.14 線電荷密度を求めて、それを体積電荷密度で書くと

$$\rho_c(\mathbf{x}) = \frac{3Q}{8\pi d^3} \frac{d^2 - r^2}{r^2} [\delta(\cos\theta - 1) + \delta(\cos\theta + 1)] \quad (3.20)$$

と表すことができる。Jackson eq. (3.125) の Green 関数を用いて球内部のポテンシャルを求めればよい。 $r \geq d$ で積分の計算が異なるが、丁寧に計算をすれば良い。

3.15

3.16 (a) Bessel の微分方程式

$$\frac{d^2 J_\nu(k\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dJ_\nu(k\rho)}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right) J_\nu(k\rho) = 0 \quad (3.21)$$

から出発して、部分積分、 k, k' の入れ替えをして差を考えると、

$$(k^2 - (k')^2) \int_0^\infty d\rho \rho J_\nu(k\rho) J_\nu(k'\rho) = \left[\rho J_\nu(k\rho) \frac{dJ_\nu(k'\rho)}{d\rho} - \rho J_\nu(k'\rho) \frac{dJ_\nu(k\rho)}{d\rho} \right]_{\rho=0}^{\rho=\infty} \quad (3.22)$$

となる。 $\rho = 0$ では、 $\Re(\nu) > -1$ の時にゼロとなる。 $\rho = \infty$ の場合を考える。 $\rho = R$ として、 $R \rightarrow \infty$ を考えることにする。 Bessel 関数の漸近形を用いて、

$$\int_0^\infty d\rho \rho J_\nu(k\rho) J_\nu(k'\rho) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{k k'}} \left[-\frac{\cos[(k+k')R - \nu\pi]}{k+k'} + \frac{\sin[(k-k')R]}{k-k'} \right] \quad (3.23)$$

と書き直すことができる。

さて、デルタ関数は、 sinc 関数を用いて

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(x/\epsilon)}{x/\epsilon} \frac{1}{\pi\epsilon} = \delta(x) \quad (3.24)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\cos(x/\epsilon)}{x/\epsilon} \frac{1}{\pi\epsilon} = 0 \quad (3.25)$$

として表すことができることに注意すると、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{k k'}} \left[\frac{\sin[(k-k')R]}{k-k'} \right] = \frac{1}{k} \delta(k-k') \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{k k'}} \frac{\cos[(k+k')R - \nu\pi]}{k+k'} \\ = \frac{1}{\sqrt{k k'}} \delta(k+k') \cos(\nu\pi) = 0 \quad \text{if } k, k' > 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

であるから、

$$\int_0^\infty d\rho \rho J_\nu(k\rho) J_\nu(k'\rho) = \frac{1}{k} \delta(k-k') \quad (3.28)$$

が従う。

(b) 基本的には §3.11 の議論を追えば良い。

(c) (b) の結果を用いるだけ。

(d) Bessel の積分表示

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta \cos(n\theta - x \sin\theta) \quad (3.29)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \cos(n\theta - x \sin\theta) \quad (3.30)$$

Hansen の積分表示

$$J_n(x) = \frac{1}{i^n \pi} \int_0^\pi d\theta e^{ix \cos\theta} \cos(n\theta) \quad (3.31)$$

3.17 (a) Fourier 展開 (・半区間展開) を用いると、

$$\delta(\phi - \phi') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi - \phi')} \quad (3.32)$$

$$\delta(z - z') = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right) \quad (3.33)$$

と展開できる.

- (b) problem 3.16 (a) の結果を用いて, ρ 方向と ϕ 方向について展開をした後, z 方向について Green 関数の満たすべき条件を考える.

3.18 (a) 円筒座標系での Laplace 方程式を境界条件

$$\begin{cases} \Phi = 0 & \text{on } z = 0 \\ \Phi = V\theta(a - \rho) & \text{on } z = L \end{cases} \quad (3.34)$$

で解く.

- (b) Bessel 関数, \sinh 関数を級数展開して, 最低次の寄与を計算する.

(c) (b) と同様.

3.19 Gradshteyn & Ryzhik, p.722 eq. (6.666) より

$$\int_0^\infty dx x^{\nu+1} \frac{\sinh(\alpha x)}{\sinh(\pi x)} J_\nu(\beta x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} n^{\nu+1} \sin(n\alpha) K_\nu(n\beta) \quad (\text{for } |\Re(\alpha)| < 1, \Re(\nu) > -1) \quad (3.35)$$

である.

3.20 problem 3.17 で考えた Green 関数を用いてポテンシャルを計算することができる.

3.21 problem 1.18(b) の結果を用いる. また, Gradshteyn & Ryzhik eq. (6.554) より

$$\int_0^1 dx \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} J_0(xy) = \frac{\sin y}{y} \quad \text{for } y > 0 \quad (3.36)$$

である.

- (c) で $d \gg R$ のとき, 変分法を使って求める方法がわからない...

3.22 二次元の Green 関数を求める問題. $\phi = 0, \beta$ でゼロとなる境界条件に注意して考えれば良い.

3.23