Contents

3 Problems (Section 3)

3.1 Hints

3.1 方位角対称なポテンシャルを Legendre 多項式で展開したときの一般形

$$\Phi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+B_l r^{-(l+1)}\right)P_l(\cos\theta) \tag{3.1}$$

に代入して，境界条件から各係数 A_l, B_l を決定する．また，偶数次の Legendre 多項式について，

$$P_n(0)=(-1)^{n/2}2^{-n}\begin{pmatrix} n \\ n/2 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

が成り立つ．

3.2 (a) (3.1) のように展開して，表面電荷密度による境界条件を考えれば良い．また，Legendre 多項式の直交関係式

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\, P_{l'}(x)P_l(x)=\frac{2}{2l+1}\delta_{l'l} \tag{3.3}$$

および負の引数をとる場合の式

$$P_l(-x)=(-1)^l P_l(x) \tag{3.4}$$

を用いれば良い．

(b) $\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi$ を用いて原点での電場を計算できる．また，$\hat{\boldsymbol{z}}=\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}}-\sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$ を用いると，結果を $\hat{z}$ のみで表すことができる．

(c) (2) では $\beta=\pi-\alpha$ として $\beta\to 0$ の極限を考えるほうがやりやすい．

3.3 後で

3.4 (a) ポテンシャルを球面調和関数で展開する．

$$\Phi(r,\theta,\phi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(A_{lm}r^l+B_{lm}r^{-(l+1)}\right)Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{3.5}$$

である．境界条件は $r=a$ の球面上で考えれば良い．ϕ の値でポテンシャルを場合分けして考えると見通しが良い．

(b) (a) の結果を用いて具体的な計算をするだけ．本文 §3.3 中式 (3.36) との比較のときには，座標軸の取り方に注意をする必要がある．具体的には $\cos\theta'=\sin\theta\sin\phi$ である．

3.5 本文中の式 (3.70) を r,a でそれぞれ微分，差を考えて $\mathrm{d}\Omega' V(\theta',\phi')$ で積分をすればよい．

3.6 ポテンシャルが具体的に計算できるので，本文中の式 (3.70) を使って球面調和関数で展開した後に，和を考えれば良い．

3.7 前問と同じように考えれば良い．

3.8 $\log(\csc\theta)=\log(1/\sin\theta)$ を Legendre 多項式で展開する．積分

$$\int \mathrm{d}x\,\log(1-x^2)=(1+x)\log(1+x)-(1-x)\log(1-x)-2x \tag{3.6}$$

を使うと見通しが良い．

3.9 円筒座標系での Laplacian は

$$\nabla^2=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{3.7}$$

である．これを $z=0,L$ での境界条件に注意して解けばよい．

3.10 前問の結果を用いる．(b) での極限を考えるときは，漸近形

$$I_\nu(z)\sim\frac{1}{\nu!}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}+\mathcal{O}\left(z^{\nu+1}\right)\quad\text{for}\quad z\ll 1 \tag{3.8}$$

を用いるとよい．三角関数の無限和は exp での無限級数として考えると見通しが良い．

3.11 あとで

3.12 Bessel 関数に関する公式

$$\int_0^{\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-\alpha x}J_0(bx)=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+b^2}} \tag{3.9}$$

$$\int_0^{\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-\alpha x}[J_0(bx)]^2=\frac{2}{\pi\sqrt{\alpha^2+4b^2}}K\left(\frac{2b}{\sqrt{\alpha^2+4b^2}}\right) \tag{3.10}$$

が知られている．ここで，$K(k)$ は第一種完全楕円積分

$$K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \tag{3.11}$$

である．

3.2 Answers