Problems (Section 3)

章末問題の手の付け方，略解とかを書きたい．別の解答もあると思う．

$\boxed{3.1}$ 方位角対称なポテンシャルを Legendre 多項式で展開したときの一般形

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right) P_l(\cos\theta) \tag{3.1}$$

に代入して境界条件から各係数を決定する．Legendre 多項式について成り立つ関係：

$$P_n(0) = (-1)^{n/2} 2^{-n} \binom{n}{n/2} \quad \left(n \text{ : even}, \binom{\cdot}{\cdot} \text{は二項係数}\right) \tag{3.2}$$

を使えば良い．

$\boxed{3.2}$ (a) (3.1) のように展開して，表面電荷密度による境界条件を考えることで係数を決定する．Legendre 多項式の直交関係式：

$$\int_0^1 \mathrm{d}(\cos\theta)\, P_{l'}(\cos\theta) P_l(\cos\theta) = \frac{2}{2l+1} \delta_{l'l} \tag{3.3}$$

および，Legendre 多項式の基本的な式：

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x) \tag{3.4}$$

を用いれば良い．

(b) $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$ を用いて原点での電場を計算する．$\hat{\boldsymbol{z}} = \cos\theta \hat{\boldsymbol{r}} - \sin\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$ を用いると結果を $\hat{\boldsymbol{z}}$ のみで表すことができる．

(c) (2) では $\beta = \pi - \alpha$ として $\beta \to 0$ の極限を考えるとよい．

$\boxed{3.3}$ ちょっと後回しにする．

$\boxed{3.4}$ (a) ポテンシャルを球面調和関数を用いた展開で表す：

$$\Phi(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=l}^{l} \left(A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)} \right) Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{3.5}$$

$r = a$ の球面上で境界条件から各係数を定める．計算の途中で，

$$V(\phi) = \begin{cases} +V & \text{if} \quad \dfrac{\pi}{n} \cdot 2j \le \phi \le \dfrac{\pi}{n} \cdot (2j+1) \\ -V & \text{if} \quad \dfrac{\pi}{n} \cdot (2j+1) \le \phi \le \dfrac{\pi}{n} \cdot (2j+2) \end{cases} \quad (\text{for } j = 0, 1, \cdots, n-1) \tag{3.6}$$

を用いる．また，積分

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, V(\phi) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi} \tag{3.7}$$

の計算があらわれるが，場合わけをして，$m \neq 0$ のときを考えると，

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, V(\phi) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi} = -\frac{\mathrm{i}V}{m} \left[1 - \exp\left(-\mathrm{i}\frac{m}{n}\pi \right) \right]^2 \sum_{j=0}^{n-1} \exp\left(-\mathrm{i}\frac{m}{n} 2j\pi \right) \tag{3.8}$$

となる．

まず，m/n が整数となるときを考える．$m = 0, \pm 2n, \pm 4n, \dots$ のときは $\exp(-\mathrm{i}(m/n)\pi) = 1$ となるので，積分はゼロ．残りとして考えるのは $m = \pm n, \pm 3n, \dots$ である．このとき，

$$\exp\left(-\mathrm{i}\frac{m}{n} 2j\pi \right) = 1 \quad \text{for} \quad j = 0, \dots, n-1 \tag{3.9}$$

である．

次に，m/n が整数とならない時を考える．

$$\sum_{j=0}^{n-1} \exp\left(-\mathrm{i}\frac{m}{n} 2j\pi \right) = \frac{1 - \exp(-\mathrm{i}2m\pi)}{1 - \exp\left(-\mathrm{i}\frac{2m}{n}\pi \right)} = 0 \tag{3.10}$$

である（m は整数であるので，分子はゼロ）から，この場合は積分がゼロになる．

これらをまとめて

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, V(\phi) e^{-\mathrm{i}m\phi} = \begin{cases} -\mathrm{i}\dfrac{4Vn}{m} & \text{if} \quad m = \pm n, \pm 3n, \dots \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.11}$$

と書ける．

(b) (a) の結果を用いて具体的に計算を進めていくだけであるが，Jackson §3.3 eq. (3.36) との比較の時には座標軸の取り方に気をつける必要がある．具体的には，$\cos\theta' = \sin\theta \sin\phi$ とすれば良い．

$\boxed{3.5}$ Jackson eq. (3.70) の式を r, a でそれぞれ微分して，差を考えて $\mathrm{d}\Omega'\, V(\theta', \phi')$ で積分をすれば良い．

$\boxed{3.6}$ ポテンシャルが具体的に計算できるので，Jackson eq. (3.70) を用いて，球面調和関数で展開して，和を考えれば良い．この問題は易しい．

$\boxed{3.7}$ 前問と同じように考えれば良い．

$\boxed{3.8}$ $\log(\csc\theta) = \log(1/\sin\theta)$ を Legendre 多項式で展開する．このときに積分

$$\int \mathrm{d}x\ \log(1 - x^2) = (1 + x)\log(1 + x) - (1 - x)\log(1 - x) - 2x \tag{3.12}$$

を用いる．普通に log 積分をしてしまうと発散してしまうことに注意．この積分は知らないと難しいかも．

$\boxed{3.9}$ 円筒座標系での Laplace 方程式

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{3.13}$$

を $z = 0, L$ での境界条件に注意して解けば良い．

$\boxed{3.10}$ 前問の結果を用いればよい．(b) での極限を考える時は，

$$I_\nu(z) \sim \frac{1}{\nu!}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu + \mathcal{O}\left(z^{\nu+1}\right) \quad \text{if} \quad z \ll 1 \tag{3.14}$$

を用いると良い．また，三角関数の無限和を求める時は，exp の形にして無限級数として和を求めてその実部・虚部を求めると見通しが良い．また，log の虚部は arg で与えられることに注意．

$\boxed{3.11}$

$\boxed{3.12}$ 円筒座標系で Laplace 方程式を解く．境界条件は

$$V(\rho, z) = V\theta(a - \rho)\delta(z) \tag{3.15}$$

で与えられる．また，公式

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\alpha x} J_0(bx) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}} \tag{3.16}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\alpha x} \left[J_0(bx)\right]^2 = \frac{2}{\pi\sqrt{\alpha^2 + 4b^2}} K\left(\frac{2b}{\sqrt{\alpha^2 + 4b^2}}\right) \tag{3.17}$$

を用いる．ここで，$K(k)$ は，第一種完全楕円積分

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}} \tag{3.18}$$

である．

$\boxed{3.13}$ Jackson eq. (3.125) の Green 関数の表式を用いる．

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\, P_l(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{if } l = 0 \\ \dfrac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^{k+1}(k+1)!} \quad \text{if } l = 2k + 1; k = 0, 1, \dots \\ 0 \quad \text{if } l = 2k; k = 1, 2, \dots \end{cases} \tag{3.19}$$

に注意．丁寧に計算を進めると problem 3.1 と同じ結果を得る．

3.14 線電荷密度を求めて，それを体積電荷密度で書くと

$$\rho_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{x}) = \frac{3Q}{8\pi d^3}\frac{d^2 - r^2}{r^2}[\delta(\cos\theta - 1) + \delta(\cos\theta + 1)] \tag{3.20}$$

と表すことができる．Jackson eq. (3.125) の Green 関数を用いて球内部のポテンシャルを求めればよい．$r \gtrless d$ で積分の計算が異なるが，丁寧に計算をすれば良い．

3.15

3.16 (a) Bessel の微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 J_\nu(k\rho)}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}J_\nu(k\rho)}{\mathrm{d}\rho} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)J_\nu(k\rho) = 0 \tag{3.21}$$

から出発して，部分積分，k, k' の入れ替えをして差を考えると，

$$(k^2 - (k')^2)\int_0^\infty \mathrm{d}\rho\, \rho J_\nu(k\rho)J_\nu(k'\rho) = \left[\rho J_\nu(k\rho)\frac{\mathrm{d}J_\nu(k'\rho)}{\mathrm{d}\rho} - \rho J_\nu(k'\rho)\frac{\mathrm{d}J_\nu(k\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right]_{\rho=0}^{\rho=\infty} \tag{3.22}$$

となる．$\rho = 0$ では，$\Re(\nu) > -1$ の時にゼロとなる．$\rho = \infty$ の場合を考える．$\rho = R$ として，$R \to \infty$ を考えることにする．Bessel 関数の漸近形を用いて，

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\rho\, \rho J_\nu(k\rho)J_\nu(k'\rho) = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{kk'}}\left[-\frac{\cos[(k+k')R - \nu\pi]}{k+k'} + \frac{\sin\left[(k-k')R\right]}{k-k'}\right] \tag{3.23}$$

と書き直すことができる．

さて，デルタ関数は，sinc 関数を用いて

$$\lim_{\epsilon\to 0}\delta_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\sin(x/\epsilon)}{x/\epsilon}\frac{1}{\pi\epsilon} = \delta(x) \tag{3.24}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\cos(x/\epsilon)}{x/\epsilon}\frac{1}{\pi\epsilon} = 0 \tag{3.25}$$

として表すことができることに注意すると，

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{kk'}}\left[\frac{\sin\left[(k-k')R\right]}{k-k'}\right] = \frac{1}{k}\delta(k-k') \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{kk'}}\frac{\cos\left[(k+k')R - \nu\pi\right]}{k+k'} \\ = \frac{1}{\sqrt{kk'}}\delta(k+k')\cos(\nu\pi) = 0 \quad \text{if} \quad k, k' > 0\end{aligned} \tag{3.27}$$

であるから，

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\rho\, \rho J_\nu(k\rho)J_\nu(k'\rho) = \frac{1}{k}\delta(k-k') \tag{3.28}$$

が従う．

(b) 基本的には §3.11 の議論を追えば良い．

(c) (b) の結果を用いるだけ．

(d) Bessel の積分表示

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \cos(n\theta - x\sin\theta) \tag{3.29}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, \cos(n\theta - x\sin\theta) \tag{3.30}$$

Hansen の積分表示

$$J_n(x) = \frac{1}{\mathrm{i}^n\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cos\theta}\cos(n\theta) \tag{3.31}$$

$\boxed{3.17}$ (a) Fourier 展開（・半区間展開）を用いると，

$$\delta(\phi - \phi') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\phi-\phi')} \tag{3.32}$$

$$\delta(z - z') = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right) \tag{3.33}$$

と展開できる．

(b) problem 3.16 (a) の結果を用いて，ρ 方向と ϕ 方向について展開をした後，z 方向について Green 関数の満たすべき条件を考える．

$\boxed{3.18}$ (a) 円筒座標系での Laplace 方程式を境界条件

$$\begin{cases} \Phi = 0 & \text{on } z = 0 \\ \Phi = V\theta(a - \rho) & \text{on } z = L \end{cases} \tag{3.34}$$

で解く．

(b) Bessel 関数，sinh 関数を級数展開して，最低次の寄与を計算する．

(c) (b) と同様.

$\boxed{3.19}$ Gradshteyn & Ryzhik, p.722 eq. (6.666) より

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^{\nu+1} \frac{\sinh(\alpha x)}{\sinh(\pi x)} J_\nu(\beta x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{\nu+1} \sin(n\alpha) K_\nu(n\beta) \quad (\text{for } |\Re(\alpha)| < 1, \Re(\nu) > -1) \tag{3.35}$$

である．

$\boxed{3.20}$ problem 3.17 で考えた Green 関数を用いてポテンシャルを計算することができる．

$\boxed{3.21}$ problem 1.18(b) での結果を用いる．また，Gradshteyn & Ryzhik eq. (6.554) より

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} J_0(xy) = \frac{\sin y}{y} \quad \text{for} \quad y > 0 \tag{3.36}$$

である．

(c) で $d \gg R$ のとき，変分法を使って求める方法がわからない...

$\boxed{3.22}$ 二次元の Green 関数を求める問題．$\phi = 0, \beta$ でゼロとなる境界条件に注意して考えれば良い．

$\boxed{3.23}$