# 3 Problems (Section 3)

## 3.1 Hints

3.1 方位角対称なポテンシャルを Legendre 多項式で展開したときの一般形

$$\Phi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+B_l r^{-(l+1)}\right)P_l(\cos\theta) \tag{3.1}$$

に代入して，境界条件から各係数 $A_l, B_l$ を決定する．また，偶数次の Legendre 多項式について，

$$P_n(0)=(-1)^{n/2}2^{-n}\binom{n}{n/2} \tag{3.2}$$

が成り立つ．

3.2 (a) (3.1) のように展開して，表面電荷密度による境界条件を考えれば良い．また，Legendre 多項式の直交関係式

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\, P_{l'}(x)P_l(x)=\frac{2}{2l+1}\delta_{l'l} \tag{3.3}$$

および負の引数をとる場合の式

$$P_l(-x)=(-1)^l P_l(x) \tag{3.4}$$

を用いれば良い．

(b) $\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi$ を用いて原点での電場を計算できる．また，$\hat{\boldsymbol{z}}=\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}}-\sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$ を用いると，結果を $\hat{\boldsymbol{z}}$ のみで表すことができる．

(c) (2) では $\beta=\pi-\alpha$ として $\beta\to 0$ の極限を考えるほうがやりやすい．

3.3 後で

3.4 (a) ポテンシャルを球面調和関数で展開する．

$$\Phi(r,\theta,\phi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(A_{lm}r^l+B_{lm}r^{-(l+1)}\right)Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{3.5}$$

である．境界条件は $r=a$ の球面上で考えれば良い．$\phi$ の値でポテンシャルを場合分けして考えると見通しが良い．

(b) (a) の結果を用いて具体的な計算をするだけ．本文 §3.3 中の式 (3.36) との比較のときには，座標軸の取り方に注意をする必要がある．具体的には $\cos\theta'=\sin\theta\sin\phi$ である．

3.5 本文中の式 (3.70) を $r,a$ でそれぞれ微分，差を考えて $\mathrm{d}\Omega' V(\theta',\phi')$ で積分をすればよい．

3.6 ポテンシャルが具体的に計算できるので，本文中の式 (3.70) を使って球面調和関数で展開した後に，和を考えれば良い．

3.7 前問と同じように考えれば良い．

3.8 $\log(\csc\theta)=\log(1/\sin\theta)$ を Legendre 多項式で展開する．積分

$$\int \mathrm{d}x\,\log(1-x^2)=(1+x)\log(1+x)-(1-x)\log(1-x)-2x \tag{3.6}$$

を使うと見通しが良い．

3.9 円筒座標系での Laplacian は

$$\nabla^2=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{3.7}$$

である．これを $z=0,L$ での境界条件に注意して解けばよい．

3.10 前問の結果を用いる．(b) での極限を考えるときは，漸近形

$$I_\nu(z)\sim\frac{1}{\nu!}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu+\mathcal{O}(z^{\nu+1}) \quad \text{for} \quad z\ll 1 \tag{3.8}$$

を用いるとよい．三角関数の無限和は exp での無限級数として考えると見通しが良い．

3.11 あとで

3.12 Bessel 関数に関する公式

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-\alpha x}J_0(bx)=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+b^2}} \tag{3.9}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-\alpha x}[J_0(bx)]^2=\frac{2}{\pi\sqrt{\alpha^2+4b^2}}K\left(\frac{2b}{\sqrt{\alpha^2+4b^2}}\right) \tag{3.10}$$

が知られている．ここで，$K(k)$ は第一種完全楕円積分

$$K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \tag{3.11}$$

である．

3.13 Legendre 多項式の積分について

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\,P_l(x)=\begin{cases}1 & \text{if} \quad l=0\\ \dfrac{(-1)^k(2k-1)!!}{2^{k+1}(k+1)!} & \text{if} \quad l=2k+1;\, k=0,1,\ldots\\ 0 & \text{if} \quad l=2k;\, k=1,2,\ldots\end{cases} \tag{3.12}$$

がわかる．

3.14 線電荷密度を求めてそれを体積電荷密度として書けば良い．

3.15 あとで

3.16 (a) デルタ関数は

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin(x/\varepsilon)}{x/\varepsilon}\frac{1}{\pi\varepsilon}=\delta(x) \tag{3.13}$$

とかける．

(b) 基本的には本文 §3.11 の議論と同様にすれば良い．

(c) (b) の結果を用いる．

(d) Bessel の積分表示

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\,\cos(n\theta-x\sin\theta) \tag{3.14}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,\cos(n\theta-x\sin\theta) \tag{3.15}$$

および Hansen の積分表示

$$J_n(x)=\frac{1}{\mathrm{i}^n\pi}\int_0^\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cos\theta}\cos(n\theta) \tag{3.16}$$

がある．

3.17 (a) Fourier 展開，あるいは Fourier 半区間展開により

$$\delta(\phi-\phi')=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\phi-\phi')} \tag{3.17}$$

$$\delta(z-z')=\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right) \tag{3.18}$$

がわかる．

(b) 問題 3.16(a) の結果を用いて $\rho,\phi$ 方向について展開をした後，$z$ 方向について Green 関数の満たすべき条件を考える．

3.18 (a) 円筒関数系での Laplace 方程式を境界条件

$$\begin{cases}\Phi=0 & \text{on} \quad z=0\\ \Phi=V\theta(a-\rho) & \text{on} \quad z=L\end{cases} \tag{3.19}$$

で解く．ただし $\theta(\cdot)$ は Heaviside の階段関数．

(b) Bessel 関数，sinh 関数を級数展開して，最低次の寄与を計算する．

(c) (b) と同様に考える．

3.19 Gradshteyn & Ryzhik (2014) の式 (6.666) より

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\,x^{\nu+1}\frac{\sinh(\alpha x)}{\sinh(\pi x)}J_\nu(\beta x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{\nu+1}\sin(n\alpha)K_\nu(n\beta)$$
$$\text{for} \quad |\Re(\alpha)|<1,\ \Re(\nu)>-1 \tag{3.20}$$

が成り立つ．

3.20 問題 3.17 で考えた Green 関数を用いることができる．

3.21 問題 1.18(b) の結果を用いる．また，Gradshteyn & Ryzhik (2014) 式 (6.554) より

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}J_0(xy)=\frac{\sin y}{y} \quad \text{for} \quad y>0 \tag{3.21}$$

である．

3.22

## 3.2 Answers

## References

Gradshteyn, I., & Ryzhik, I. 2014, Table of Integrals, Series, and Products (Academic Press), doi:https://doi.org/10.1016/C2010-0-64839-5