

References

gradshteyn2014 Gradshteyn, I., & Ryzhik, I. 2014, Table of Integrals, Series, and Products (Academic Press), doi:<https://doi.org/10.1016/C2010-0-64839-5>

最終更新日: 2025 年 9 月 8 日

3 Problems (Section 3)

3.1 Hints

- 3.1 z 軸について対称なポテンシャルを Legendre 多項式で展開したときの一般形に代入して, 境界条件から係数を決定する.
- 3.2 (a): ポテンシャルを展開して, 表面電荷密度による境界条件を考えれば良い.
(b): $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ を用いて原点での電場を計算できる. また, $\hat{z} = \cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}$ を用いると, 結果を \hat{z} のみで表すことができる. (c): (2) では $\beta = \pi - \alpha$ として $\beta \rightarrow 0$ の極限を考えるほうがやりやすい.
- 3.3 (問題の意図を把握していないかもしれないが,) 解くための一つの方法として, まず, 総電荷を Q として電荷の分布の様子を, disk 表面のポテンシャルの条件から決定をする. その後, disk の軸上の点についてポテンシャルを計算することができるので, これを計算したのち, 本文 §3.3 と同じ方法で, 全空間のポテンシャルを計算できる.
- 3.4 (a): ポテンシャルを球面調和関数で展開する. 境界条件は $r = a$ の球面上で考えれば良い. ϕ の値でポテンシャルを場合分けして考えると見通しが良い. (b): (a) の結果を用いて具体的な計算をするだけ. 本文 §3.3 中の式 (3.36) との比較のときには, 座標軸の取り方に注意をする必要がある. 具体的には $\cos\theta' = \sin\theta\sin\phi$ である.
- 3.5 本文中の式 (3.70) を r, a でそれぞれ微分, 差を考えて $d\Omega' V(\theta', \phi')$ で積分をすればよい.
- 3.6 ポテンシャルが具体的に計算できるので, 本文中の式 (3.70) を使って球面調和関数で展開した後に, 和を考えれば良い.
- 3.7 前問と同じように考えれば良い.
- 3.8 $\log(\csc\theta) = \log(1/\sin\theta)$ を Legendre 多項式で展開する.
- 3.9 円筒座標系での Laplacian は

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.1)$$

である. これを $z = 0, L$ での境界条件に注意して解けばよい.

- 3.10 前問の結果を用いる. (b) での極限を考えるときは, 漸近形

$$I_\nu(z) \sim \frac{1}{\nu!} \left(\frac{z}{2} \right)^\nu + \mathcal{O}(z^{\nu+1}) \quad \text{for } z \ll 1 \quad (3.2)$$

を用いるとよい. 三角関数の無限和は \exp での無限級数として考えると見通しが良い.

- 3.11 あとで
- 3.12 計算を実行するだけ
- 3.13 同様.
- 3.14 線電荷密度を求めてそれを体積電荷密度として書けば良い.
- 3.15 あとで
- 3.16 (a) デルタ関数は

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(x/\varepsilon)}{x/\varepsilon} \frac{1}{\pi\varepsilon} = \delta(x) \quad (3.3)$$

とかける.

- (b) 基本的には本文 §3.11 の議論と同様にすれば良い.
- (c) (b) の結果を用いる.
- (d) Bessel の積分表示

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta \cos(n\theta - x \sin\theta) \quad (3.4)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \cos(n\theta - x \sin\theta) \quad (3.5)$$

および Hansen の積分表示

$$J_n(x) = \frac{1}{i^n \pi} \int_0^\pi e^{iz \cos\theta} \cos(n\theta) \quad (3.6)$$

がある.

- 3.17 (a) Fourier 展開, あるいは Fourier 半区間展開により

$$\delta(\phi - \phi') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi - \phi')} \quad (3.7)$$

$$\delta(z - z') = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right) \quad (3.8)$$

がわかる.

- (b) 問題 3.16(a) の結果を用いて ρ, ϕ 方向について展開をした後, z 方向について Green 関数の満たすべき条件を考える.

- 3.18 (a) 円筒関数系での Laplace 方程式を境界条件

$$\begin{cases} \phi = 0 & \text{on } z = 0 \\ \phi = V\theta(a - \rho) & \text{on } z = L \end{cases} \quad (3.9)$$

で解く. ただし $\theta(\cdot)$ は Heaviside の階段関数.

- (b) Bessel 関数, \sinh 関数を級数展開して, 最低次の寄与を計算する.

- (c) (b) と同様を考える.

- 3.19 Gradshteyn & Ryzhik (2014) の式 (6.666) より

$$\int_0^\infty dx x^{\nu+1} \frac{\sinh(\alpha x)}{\sinh(\pi x)} J_\nu(\beta x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{\nu+1} \sin(n\alpha) K_\nu(n\beta) \quad \text{for } |\Re(\alpha)| < 1, \Re(\nu) > -1 \quad (3.10)$$

が成り立つ.

- 3.20 問題 3.17 で考えた Green 関数を用いることができる.

- 3.21 問題 1.18(b) の結果を用いる. また, Gradshteyn & Ryzhik (2014) 式 (6.554) より

$$\int_0^1 dx \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} J_0(xy) = \frac{\sin y}{y} \quad \text{for } y > 0 \quad (3.11)$$

である.

- 3.22 あとで
- 3.23

3.2 Formulas

3.2.1 Legendre 多項式に関するもの

- 母関数表示

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad (3.12)$$

- 直交関係

$$\int_{-1}^1 dx P_l(x) P_l(x) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll} \quad (3.13)$$

- $[0, 1]$ 区間の積分

$$\int_0^1 dx P_l(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } l=0 \\ \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^{k+1} (k+1)!} & \text{if } l=2k+1; k=0, 1, \dots \\ 0 & \text{if } l=2k; k=1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.14)$$

- 漸化関係

$$\frac{dP_{l+1}(x)}{dx} - \frac{dP_{l-1}(x)}{dx} = (2l+1)P_l(x) \quad (3.15)$$

3.2.2 associated Legendre 多項式に関するもの

- 最初の数項の具体的な表式

$$\begin{aligned} P_0^0(x) &= 1 \\ \begin{cases} P_1^{-1}(x) = \frac{1}{2}(1-x^2)^{1/2} \\ P_1^0(x) = x \\ P_1^1(x) = -(1-x^2)^{1/2} \end{cases} \\ \begin{cases} P_2^{-2}(x) = \frac{1}{8}(1-x^2) \\ P_2^{-1}(x) = \frac{1}{2}x(1-x^2)^{1/2} \\ P_2^0(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1) \\ P_2^1(x) = -3x(1-x^2)^{1/2} \\ P_2^2(x) = 2(1-x^2) \end{cases} \\ \begin{cases} P_3^{-3}(x) = \frac{1}{48}(1-x^2)^{3/2} \\ P_3^{-2}(x) = \frac{1}{8}x(1-x^2) \\ P_3^{-1}(x) = -\frac{1}{8}(1-5x^2)(1-x^2)^{1/2} \\ P_3^0(x) = \frac{1}{2}x(5x^2-3) \\ P_3^1(x) = \frac{3}{2}(1-5x^2)(1-x^2)^{1/2} \\ P_3^2(x) = 15x(1-x^2) \\ P_3^3(x) = -15(1-x^2)^{3/2} \end{cases} \end{aligned}$$

3.2.3 Bessel 関数に関するもの

- Bessel の積分表示

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta \cos(n\theta - x \sin \theta) \quad (3.16)$$

- Hansen の積分表示

$$J_n(x) = \frac{1}{i^n \pi} \int_0^\pi d\theta e^{ix \cos \theta} \cos(n\theta) \quad (3.17)$$

- Bessel 関数を含む積分

$$\int_0^\infty dx e^{-\alpha x} J_0(bx) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}} \quad (3.18)$$

$$\int_0^\infty e^{\alpha x} [J_0(bx)]^2 = \frac{2}{\pi \sqrt{\alpha^2 + 4b^2}} K\left(\frac{2b}{\sqrt{\alpha^2 + 4b^2}}\right) \quad (3.19)$$

ここで, $K(k)$ は第一種完全楕円積分

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \quad (3.20)$$

3.2.4 積分公式

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x) dx}{\sqrt{1+p^2 \sin^2(x)}} = \frac{1}{p} \arctan(p) \quad (3.21)$$

$$\int dx \log |x^2 - a^2| = x \log |x^2 - a^2| - 2x + a \log \left| \frac{x+a}{x-a} \right| \quad (3.22)$$

$$(3.23)$$

3.2.5 級数展開

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{for } x^2 \leq 1 \quad (3.24)$$

3.2.6 その他

- Dirac のデルタ関数

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \varepsilon} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (3.25)$$

3.3 Answers

3.1

半径 a, b の球の間の領域のポテンシャルを考え
る。Legendre 多項式による展開

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) \quad (3.26)$$

を以下の境界条件で考える：

$$\Phi(a, \theta) = \begin{cases} V & \text{if } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{if } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \end{cases}, \quad (3.27) \quad \text{eq:prob3-1_bc1}$$

$$\Phi(b, \theta) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ V & \text{if } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad (3.28) \quad \text{eq:prob3-1_bc2}$$

(3.27) について、 $P_l(\cos \theta) d(\cos \theta)$ をかけて $\theta \in [0, \pi]$ で積分をすると、

$$\int_{\cos \theta = -1}^{\cos \theta = 1} \sum_{l=0}^{\infty} (A_l a^l + B_l a^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta) d(\cos \theta) = V \int_{\cos \theta = 1}^{\cos \theta = 0} P_l(\cos \theta) d(\cos \theta) \quad (3.29)$$

である。左辺の積分変数を x で書くと、

$$(\text{L.H.S.}) = \int_{-1}^1 \sum_{l=0}^{\infty} (A_l a^l + B_l a^{-(l+1)}) P_l(x) P_l(x) dx \quad (3.30)$$

であり、Legendre 多項式に関する直交関係 (3.13) より、 (l, l') を入れ替えて

$$A_l a^l + B_l a^{-(l+1)} = \frac{V(2l+1)}{2} \int_0^1 dx P_l(x) \quad (3.31) \quad \text{eq:prob3-1_3}$$

を得る。同様に考えて、(3.28) について、

$$A_l b^l + B_l b^{-(l+1)} = (-1)^l \frac{V(2l+1)}{2} \int_0^1 dx P_l(x) \quad (3.32) \quad \text{eq:prob3-1_4}$$

が成り立つ。ただし、 $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$ に注意せよ。

式 (3.31) と (3.32) より、係数 A_l, B_l を計算することができて、

$$A_l = \frac{(-1)^l b^{l+1} - a^{l+1}}{b^{2l+1} - a^{2l+1}} \frac{V(2l+1)}{2} \int_0^1 dx P_l(x), \quad (3.33)$$

$$B_l = \frac{b^l - (-1)^l a^l}{b^{2l+1} - a^{2l+1}} a^{l+1} b^{l+1} \frac{V(2l+1)}{2} \int_0^1 dx P_l(x) \quad (3.34)$$

がわかる。したがって、ポテンシャルの正確な形は

$$\Phi(r, \theta) = V \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^l b^{l+1} - a^{l+1}}{b^{2l+1} - a^{2l+1}} r^l + \frac{b^l - (-1)^l a^l}{b^{2l+1} - a^{2l+1}} a^{l+1} b^{l+1} r^{-(l+1)} \right) \times \frac{2l+1}{2} \left(\int_0^1 dx P_l(x) \right) P_l(\cos \theta) \quad (3.35)$$

である。具体的に $l=4$ の項までを書き下せば、

$$\Phi(r, \theta) = V \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \frac{-(a^2 + b^2)r + a^2 b^2(a+b)r^{-2}}{b^3 - a^3} P_1(\cos \theta) - \frac{7}{16} \frac{-(a^4 + b^4)r^3 + a^4 b^4(a^3 + b^3)r^{-4}}{b^7 - a^7} P_3(\cos \theta) + \dots \right] \quad (3.36)$$

となる。

$b \rightarrow \infty$ の極限では $a/b \rightarrow 0, r/b \rightarrow 0$ として、

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta) &= V \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} \left(\int_0^1 dx P_l(x) \right) P_l(\cos \theta) \\ &= V \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (4k+3)(2k-1)!!}{2^{k+2}(k+1)!} \left(\frac{a}{r} \right)^{2k+2} P_{2k+1}(\cos \theta) \right] \quad (3.37) \\ &= V \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \left(\frac{a}{r} \right)^2 P_1(\cos \theta) - \frac{7}{16} \left(\frac{a}{r} \right)^4 P_3(\cos \theta) + \dots \right] \quad (3.38) \end{aligned}$$

である。ただし、ここでは $(-1)!! = 1$ と約束する。これは半径 a の導体球について、北半球のポテンシャルが V 、南半球が接地されており、さらに無限遠でのポテンシャルの境界条件が $V/2$ となる系において、導体球の外部領域に作るポテンシャルに等しいことがわかる。

$a \rightarrow 0$ の極限では

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta) &= V \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{2l+1}{2} \left(\frac{r}{b} \right)^l \left(\int_0^1 dx P_l(x) \right) P_l(\cos \theta) \\ &= V \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (4k+3)(2k-1)!!}{2^{k+2}(k+1)!} \left(\frac{r}{b} \right)^{2k+1} P_{2k+1}(\cos \theta) \right] \quad (3.39) \end{aligned}$$

$$= V \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \left(\frac{r}{b} \right) P_1(\cos \theta) + \frac{7}{16} \left(\frac{r}{b} \right)^3 P_3(\cos \theta) \right] \quad (3.40)$$

である。これは、半径 b の導体球について、北半球が接地されていて、南半球のポテンシャルが V となるような系における、球内部のポテンシャルに等しいことがわかる。それぞれの場合について、ポテンシャルを描くと図 1, 2, 3 のようになる¹⁾。

3.2

極角 θ が $\theta < \alpha$ を満たす部分には電荷が存在せず、その他の部分には一様な電荷密度 $\sigma_c = Q/(4\pi R^2)$ が存在するような球を考える。

(a) ポテンシャルを Legendre 多項式で展開して

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) \quad (3.41)$$

とする。球の内部で $r \rightarrow 0$ としたときに発散しない条件より $l=0, 1, \dots$ について $B_l = 0$ また、球の外部的には $r \rightarrow \infty$ としたときにポテンシャルがゼロに漸近すると、 $l=0, 1, \dots$ について $A_l = 0$ である。したがって、球の内外でのポテンシャル Φ_{in} および Φ_{out} は

$$\Phi_{\text{in}}(r, \theta) = \sum_l A_l r^l P_l(\cos \theta), \quad (3.42)$$

$$\Phi_{\text{out}}(r, \theta) = \sum_l B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \quad (3.43)$$

とかける。ポテンシャルは $r=R$ の球面上で連続であるから、

$$\sum_l A_l R^l P_l(\cos \theta) = \sum_l B_l R^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \quad (3.44)$$

であり、 $\{P_l\}_{l=0,1,2,\dots}$ が直交関数系をなすことより $B_l = A_l R^{2l+1}$ である。また、電場の接続条件は

$$\epsilon_0 \left[\frac{\partial \Phi_{\text{in}}}{\partial r} \Big|_{r=R} - \frac{\partial \Phi_{\text{out}}}{\partial r} \Big|_{r=R} \right] = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi R^2} & \text{if } \theta \geq \alpha \\ 0 & \text{if } 0 \leq \theta < \alpha \end{cases} \quad (3.45)$$

である。

$$\frac{\partial \Phi_{\text{in}}}{\partial r} \Big|_{r=R} - \frac{\partial \Phi_{\text{out}}}{\partial r} \Big|_{r=R} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l (2l+1) R^{l-1} P_l(\cos \theta) \quad (3.46)$$

に注意すると、 $d(\cos \theta) P_l(\cos \theta)$ をかけて $\cos \theta = 1$ から $\cos \theta = -1$ で積分をすると、直交関係より以下が得られる (l, l' の入れ替えを行った)；

$$A_l = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^{l+1}} \int_{-1}^{\cos \alpha} dx P_l(x). \quad (3.47)$$

Legendre 多項式に関する漸化式 (3.15) より、

$$\int_{-1}^{\cos \alpha} dx P_l(x) = \frac{1}{2l+1} [P_{l+1}(\cos \alpha) - P_{l-1}(\cos \alpha)] \quad (3.48)$$

である ($P_{l+1}(-1) - P_{l-1}(-1) = 0$ であることに注意せよ)。したがって、

$$A_l = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{2l+1} [P_{l+1}(\cos \alpha) - P_{l-1}(\cos \alpha)] \frac{1}{R^{l+1}} \quad (3.49)$$

であり、球内部のポテンシャルは

$$\Phi_{\text{in}}(r, \theta) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} [P_{l+1}(\cos \alpha) - P_{l-1}(\cos \alpha)] \frac{r^l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad (3.50)$$

と表される。また、球外部のポテンシャルについては、

$$\Phi_{\text{out}}(r, \theta) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} [P_{l+1}(\cos \alpha) - P_{l-1}(\cos \alpha)] \frac{R^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad (3.51)$$

と表される。

(b) 電場は $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$ で与えられるので、

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ &= -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l}{2l+1} [P_{l+1}(\cos \alpha) - P_{l-1}(\cos \alpha)] \frac{r^{l-1}}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad (3.52) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\theta} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \\ &= -\frac{1}{r} \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} [P_{l+1}(\cos \alpha) - P_{l-1}(\cos \alpha)] \frac{r^l}{R^{l+1}} \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} \quad (3.53) \end{aligned}$$

1) 描画のときに使用したコードは .ipynb 形式で保存してある。

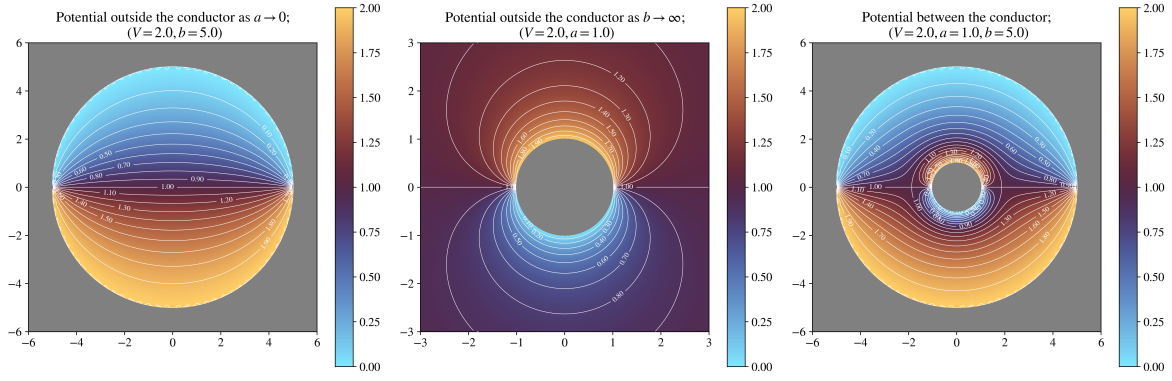
FIGURE 1. — $a \rightarrow 0$ としたとき

fig:3-1_1

FIGURE 2. — $b \rightarrow \infty$ としたとき

fig:3-1_2

— 一般の場合についてのポテンシャル

fig:3-1_all

である。原点では $r = 0$ として考えると、 E_r, E_θ ともに $l = 1$ の項だけが残るので、 $P_2(\cos \alpha) - P_0(\cos \alpha) = -(3/2)\sin^2 \alpha$ であることなどに注意すると、

$$\begin{aligned} E(r=0) &= \frac{Q}{16\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \sin^2 \alpha [\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}] \\ &= \frac{Q}{16\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \sin^2 \alpha \hat{z} \end{aligned} \quad (3.54)$$

となる。

(c-1-a) $\alpha \rightarrow 0$ の極限を考える。

$\cos \alpha \sim 1 - \alpha^2/2$ であるから、 $P_l(\cos \alpha) \sim P_l(1) - (\alpha^2/2)P'_l(1)$ として Taylor 展開できる。 $l = 0$ のときは

$$P_1(\cos \alpha) - P_{-1}(\cos \alpha) = \cos \alpha + 1 \sim 2 - \frac{\alpha^2}{2} \quad (3.55)$$

$l \geq 1$ のときは

$$\begin{aligned} P_{l+1}(\cos \alpha) - P_{l-1}(\cos \alpha) &\sim -\frac{\alpha^2}{2} (P'_{l+1}(1) - P'_{l-1}(1)) \\ &= -\frac{\alpha^2}{2} (2l+1)P_l(1) = -\frac{2l+1}{2} \alpha^2 \end{aligned} \quad (3.56)$$

と近似されるので、

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{in}} &\sim \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R} - \frac{\alpha^2}{4} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) \right] \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R} - \frac{\alpha^2}{4} \frac{1}{|\mathbf{x} - R\hat{z}|} \right] \end{aligned} \quad (3.57)$$

とかける。また、球外部のポテンシャルは

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{out}} &\sim \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{\alpha^2}{4} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \right] \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{\alpha^2}{4} \frac{1}{|\mathbf{x} - R\hat{z}|} \right] \end{aligned} \quad (3.58)$$

であるから、球内外のポテンシャルは

$$\Phi \sim \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{\alpha^2}{4} \frac{1}{|\mathbf{x} - R\hat{z}|} \right] \quad (3.59)$$

と統一的に書くことができる。ただし、 $r_>$ は r と R のうち大きい方である。

(c-1-b) 中心における電場の極限は $\sin \alpha \sim \alpha$ に注意して

$$E(r=0) \sim \frac{Q}{16\pi\epsilon_0} \frac{\alpha^2}{R^2} \hat{z} \quad (3.60)$$

である。

(c-2-a) $\alpha \rightarrow \pi$ の極限を考えるが、簡単のため $\beta \equiv \pi - \alpha \rightarrow 0$ の極限を考える。

$$\cos \alpha = \cos(\pi - \beta) \sim -1 + \frac{\beta^2}{2} \quad (3.61)$$

に注意すると、(c-1) と同様にして、

$$P_{l+1}(\cos \alpha) - P_{l-1}(\cos \alpha) \sim (-1)^l \frac{2l+1}{2} \beta^2 \quad \text{for } l = 0, 1, \dots \quad (3.62)$$

と表せる。したがって、

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{in}} &\sim \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \beta^2 \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{r^l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) \\ &= \frac{Q}{16\pi\epsilon_0} \beta^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{R^{l+1}} P_l(-\cos \theta) \\ &= \frac{Q}{16\pi\epsilon_0} \beta^2 \frac{1}{|\mathbf{x} + R\hat{z}|} \end{aligned} \quad (3.63)$$

である。球外のポテンシャルも同様に計算することができて、

$$\Phi_{\text{out}} \sim \frac{Q}{16\pi\epsilon_0} \beta^2 \frac{1}{|\mathbf{x} + R\hat{z}|} \quad (3.64)$$

となる (同じ結果を与える)。

(c-2-b) 原点での電場は $\sin \alpha = \sin \beta \sim \beta$ に注意して、

$$E(r=0) \sim \frac{Q}{16\pi\epsilon_0} \frac{\beta^2}{R^2} \hat{z} \quad (3.65)$$

と計算される。

(c-1) での結果について、これは、半径 R の球表面に総電荷 Q が分布しており、極角 α の部分にはそれに加えて、表面電荷密度 $-\sigma = -Q/(4\pi R^2)$ が分布している状況と一致している。具体的に計算をすると、まず総電荷 Q が一様に分布しているとき、球内部のポテンシャルは簡単な計算により

$$\Phi_{\text{in}}^{(1)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \quad (3.66)$$

であることがわかる。次に、極角 α の範囲については、 α が十分に小さいとき、この部分に存在する電荷は

$$\begin{aligned} \int d\Omega R^2 (-\sigma) &= -2\pi R^2 \sigma \int_0^\alpha d\theta \sin \theta \\ &= -2\pi R^2 \sigma (1 - \cos \alpha) \\ &\sim -2\pi R^2 \sigma \frac{\alpha^2}{2} = -\frac{\alpha^2}{4} Q \end{aligned} \quad (3.67)$$

である。 α が十分に小さいとして、この電荷を点電荷とみなすことにするとこれが作るポテンシャルは

$$\Phi_{\text{in}}^{(2)} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\alpha^2/4}{|\mathbf{x} - R\hat{z}|} \quad (3.68)$$

となり、 $\Phi_{\text{in}}^{(1)} + \Phi_{\text{in}}^{(2)}$ が (c-1-a) の答えになっていることが確かめられる。 Φ_{out} については $\Phi_{\text{in}}^{(1)}$ の $1/R$ を $1/r$ として考えれば良く、この結果も整合的である。

(a) で考えたポテンシャルを図示すると図 4 のようになる。

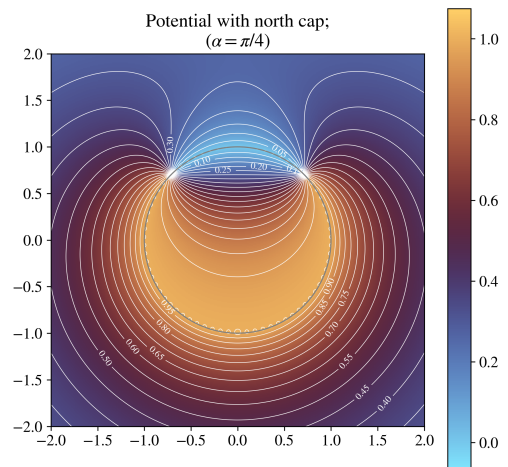


FIGURE 4. — $\alpha = \pi/4$ としてポテンシャルを描いた様子。ポテンシャルの単位は $Q/(4\pi\epsilon_0)$ としており、球 (図中の灰色の実線) の半径を $R = 1$ としている。

fig:3-2_normal

3.3

(a) 空間内の電荷分布は

$$\rho_c(\mathbf{x}) = \frac{a}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} H(R - \rho) \delta(z) \quad (3.69)$$

[ただし $H(\cdot)$ は Heaviside の step function である] とかけるので, a を決定する.
原点でのポテンシャルは

$$V(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{\rho'} \rho_c(\mathbf{x}') \rho' d\rho' dz' = \frac{\pi a}{4\epsilon_0} \quad (3.70)$$

と表されるので, $V(0) = V$ として, 電荷分布は

$$\rho_c(\mathbf{x}) = \frac{4\epsilon_0 V}{\pi} \frac{1}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} H(R - \rho) \delta(z) \quad (3.71)$$

である. これより, z 軸上でのポテンシャルを計算することができて,

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_c(\mathbf{x}')}{\sqrt{(\rho')^2 + z^2}} \rho' d\rho' dz' \\ &= \frac{2V}{\pi} \int_0^R \frac{\rho' d\rho'}{\sqrt{((\rho')^2 + z^2)(R^2 - (\rho')^2)}} \\ &= \frac{2V}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{R \sin\theta d\theta}{\sqrt{z^2 + R^2 \sin^2\theta}} \\ &= \frac{2V}{\pi} \arctan\left(\frac{R}{|z|}\right) \end{aligned} \quad (3.72)$$

と表すことができる [式 (3.21) を利用].

 $R/|z| \leq 1$ とすると,

$$\Phi(z) = \frac{2V}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{R}{|z|}\right)^{2k+1} \quad (3.73)$$

として級数展開することができるので, $R/r \leq 1$ かつ $z \geq 0$ の disk 上部では

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{2V}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{2l+1} P_{2l}(\cos\theta) \quad (3.74)$$

と表される. $z \leq 0$ の disk²⁾ 下部では $z = 0$ 面に関してポテンシャルが対称であるとして,

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{2V}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{2l+1} P_{2l}(\cos(\pi - \theta)) \quad (3.75)$$

$$= \frac{2V}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{2l+1} P_{2l}(\cos\theta) \quad (3.76)$$

となる.

(b) 一方 $R/|z| \geq 1$ とすると, $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$ に注意して,

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{2V}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{|z|}{R}\right) \right] \\ &= V - \frac{2V}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \left(\frac{|z|}{R}\right)^{2l+1} \end{aligned} \quad (3.77)$$

であるから, $z \geq 0$ では

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) &= \begin{cases} V - \frac{2V}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \left(\frac{r}{R}\right)^{2l+1} P_{2l+1}(\cos\theta) \\ V - \frac{2V}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \left(\frac{r}{R}\right)^{2l+1} P_{2l+1}(\cos(\pi - \theta)) \end{cases} \\ &= V \mp \frac{2V}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \left(\frac{r}{R}\right)^{2l+1} P_{2l+1}(\cos\theta) \end{aligned} \quad (3.78)$$

となる.

(c) 導体上の全電荷は

$$Q \equiv \int_0^R 2\pi\rho d\rho \frac{4\epsilon_0 V}{\pi} \frac{1}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = 8\epsilon_0 V R \quad (3.79)$$

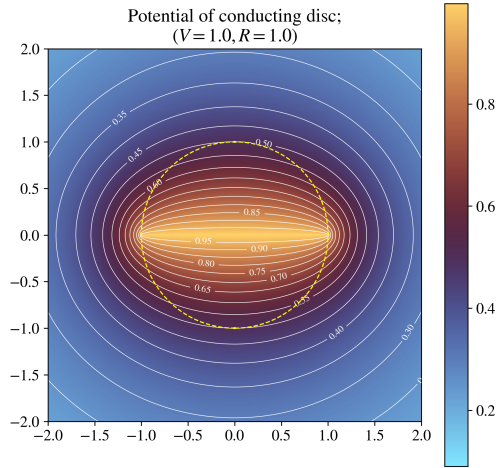
であるから, capacitance は $C = Q/V = 8\epsilon_0 R$ である.

FIGURE 5. — $V = 1.0$, $R = 1.0$ として等ポテンシャル面を描画した図; ポテンシャルが V に保たれている disk は z 軸上の $-1 < x < 1$ の範囲である. また, 図中の黄色破線は $r = R$ となる球面を表しており, この面を境にしてポテンシャルの表式が変化している.

fig:3-3_normal_w_

3.4

(a) 球内部でのポテンシャルは, 原点での特異性に気をつける,

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} r^l Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.80)$$

と書くことができる. 境界条件は,

$$\begin{aligned} \Phi(r=a, \theta, \phi) &\equiv V(\phi) \\ &= \begin{cases} +V & \text{if } \frac{\pi}{n} \cdot 2j \leq \phi \leq \frac{\pi}{n} \cdot (2j+1) \\ -V & \text{if } \frac{\pi}{n} \cdot (2j+1) \leq \phi \leq \frac{\pi}{n} \cdot (2j+2) \end{cases} \\ &\quad \text{for } j = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (3.81)$$

である.

$$V(\phi) = \sum_l \sum_m A_{lm} a^l Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.82)$$

に対して, 両辺に $Y_{lm'}^*(\theta, \phi)$ をかけて, $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ で積分を実行すると, 球面調和関数の直交性より

$$\begin{aligned} A_{lm} &= \frac{1}{a^l} \int V(\phi) Y_{lm}^*(\theta, \phi) d\Omega \\ &= \frac{1}{a^l} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \int_0^\pi P_l^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} V(\phi) e^{-im\phi} d\phi \end{aligned} \quad (3.83)$$

である. ϕ での積分について,

$$\int_0^{2\pi} V(\phi) e^{-im\phi} d\phi = V \sum_{j=0}^{n-1} \left[\int_{\frac{\pi}{n} 2j}^{\frac{\pi}{n} (2j+1)} e^{-im\phi} d\phi - \int_{\frac{\pi}{n} (2j+1)}^{\frac{\pi}{n} (2j+2)} e^{-im\phi} d\phi \right] \quad (3.84)$$

となるが, $m=0$ のときは,

$$\int_0^{2\pi} V(\phi) e^{-im\phi} d\phi = 0 \quad (3.85)$$

であり, $m \neq 0$ のときは

$$\int_0^{2\pi} V(\phi) e^{-im\phi} d\phi = -\frac{iV}{m} (1 - e^{-i\frac{m}{n}\pi})^2 \sum_{j=0}^{n-1} \left(e^{-i\frac{2m}{n}\pi} \right)^j \quad (3.86)$$

となるが, $\exp(-i(m/n)\pi) = 1$ つまり $m/(2n)$ が整数となるときはゼロとなる. また,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left(e^{-i\frac{2m}{n}\pi} \right)^j = \frac{1 - e^{-i2m\pi}}{1 - e^{-i\frac{2m}{n}\pi}} \quad (3.87)$$

となるので, m/n が整数となるときには右辺が $0/0$ の形になるので, non-zero となることが期待される. 一方, それ以外の場合では m が整数であることより分子がゼロになるので, この和はゼロである. 以上をまとめると, $m/n = \pm 1, \pm 3, \dots$ の場合のみが non-zero の結果を与えることがわかる. 実際, このときは

$$\int_0^{2\pi} V(\phi) e^{-im\phi} d\phi = -\frac{iV}{m} (1 - (-1))^2 \sum_{j=0}^{n-1} 1 = -4iV \frac{n}{m} \quad (3.88)$$

2) disk と disc は技術的な文脈では使い分けがあるらしい. disc は CD や DVD などの光学式メディアを指し, disk はフロッピーディスクやハードディスクなどを指すらしい.

である。以上の結果を踏まえると、球内部でのポテンシャルを (3.80) のように展開したとき、係数 A_{lm} は

$$A_{lm} = \begin{cases} -\frac{4iV}{a^l} \frac{n}{m} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_{-1}^1 P_l^m(\cos\theta) d(\cos\theta) & \text{if } m = \pm n, \pm 3n, \pm 5n, \dots \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.89)$$

(b) $n=1$ として係数 A_{lm} を $l=3$ まで計算する。 $m = \pm 1, \pm 3, \dots$ に対して $A_{lm} \neq 0$ であることに注意する。

$$A_{1,\pm 1} = \frac{iV}{a} \sqrt{\frac{3\pi}{2}}, \quad A_{2,\pm 1} = 0$$

$$A_{3,\pm 3} = \frac{iV}{a^3} \sqrt{\frac{35\pi}{256}}, \quad A_{3,\pm 1} = \frac{iV}{a^3} \sqrt{\frac{21\pi}{256}}$$

と計算できるので、ポテンシャルは

$$\Phi(r, \theta, \phi) = V \left[\frac{3r}{2a} \sin\theta \sin\phi + \left(\frac{r}{a}\right)^3 \left\{ \frac{35}{64} \sin^3\theta \sin(3\phi) + \frac{21}{64} \sin\theta (5\cos^2\theta - 1) \sin\phi \right\} + \dots \right] \quad (3.90)$$

とかける。ここで、 $\cos\theta' = \sin\theta \sin\phi$ とおけば、

$$P_1(\cos\theta') = \sin\theta \sin\phi \quad (3.91)$$

$$P_3(\cos\theta') = -\frac{1}{8} [5\sin^3\theta \sin(3\phi) + 3\sin\theta (5\cos^2\theta - 1) \sin\phi] \quad (3.92)$$

であるから、

$$\Phi(r, \theta') = V \left[\frac{3}{2} \frac{r}{a} P_1(\cos\theta') - \frac{7}{8} \left(\frac{r}{a}\right)^3 P_3(\cos\theta') + \dots \right] \quad (3.93)$$

となり、これは、教科書本文中の式 (3.36) と一致していることがわかる。