物理数学に関するちょっとしたまとめ

Contents

1 Fourier 半区間展開について

1.1 一般の Fourier 展開

区間 $[-\pi, \pi]$ で（区分的に）連続な関数 $f(x)$ の Fourier 級数展開を考える．のちに，これを一般化して，$[-T, T]$ で定義される関数 $f(x)$ についての級数展開も考える．

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big) \tag{1.1}$$

ただし，係数 a_n, b_n は

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, f(x) \cos(nx) & \text{for} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, f(x) \sin(nx) & \text{for} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{1.2}$$

で与えられる．

特別な場合として，$f(x)$ が偶関数のときは $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して $b_n = 0$ であり，

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \mathrm{d}x\, f(x) \cos(nx) \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.3}$$

また，$f(x)$ が奇関数のときは，$n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，$a_n = 0$ であり，

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \mathrm{d}x\, f(x) \sin(nx) \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.4}$$

と書ける．

つぎに，周期が $2T$ として，$[-T, T]$ で定義される $f(x)$ の場合について考えるが，これは $n \to (\pi n)/T$ として考えれば良い．係数を求めるための積分の区間は $-T \to T$ とする．

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{\pi n}{T} x \right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{T} x \right) \right] \tag{1.5}$$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{-T}^{T} \mathrm{d}x\, f(x) \cos\left(\dfrac{\pi n}{T} x \right) \\ b_n = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{-T}^{T} \mathrm{d}x\, f(x) \sin\left(\dfrac{\pi n}{T} x \right) \end{cases} \tag{1.6}$$

1.2 半区間での Fourier 展開

$[0, L]$ で定義された関数 $f(x)$ を Fourier 級数展開することを考える．

1.2.1 奇関数として拡張する場合

$f(x)$ を奇関数として $[-L, L]$ で定義したものを $g(x)$ とする．

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (0 < x < L) \\ -f(-x) & (-L < x < 0) \end{cases} \tag{1.7}$$

のように区間 $[-L, 0]$ について拡張してやれば良い．このようにして定義される $g(x)$ を周期 $2L$ で Fourier 級数展開することで，

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \tag{1.8}$$

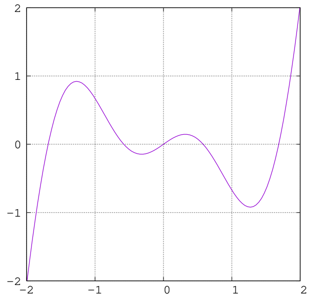

Fig. 1　奇関数の例

ただし，

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \mathrm{d}x\, g(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \tag{1.9}$$

$$= \frac{2}{L} \int_0^L \mathrm{d}x\, f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \tag{1.10}$$

と表すことができる．

1.2.2　偶関数として拡張する場合

$f(x)$ を偶関数として $[-L, L]$ で定義したものを $g(x)$ とする．

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (0 < x < L) \\ f(-x) & (-L < x < 0) \end{cases} \tag{1.11}$$

$g(x)$ を Fourier 展開すると，

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \tag{1.12}$$

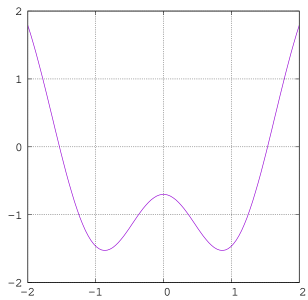

Fig. 2　偶関数の例

ただし，

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \mathrm{d}x\, g(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \tag{1.13}$$

$$= \frac{2}{L} \int_0^L \mathrm{d}x\, f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \tag{1.14}$$

と表すことができる．