

## References

- Gradshteyn, I., & Ryzhik, I. 2014, Table of Integrals, Series, and Products (Academic Press), doi:<https://doi.org/10.1016/C2010-0-64839-5>
- Jackson, J. D. 1998, Classical Electrodynamics, 3rd Edition (Wiley)

最終更新日: 2025 年 9 月 17 日

## Contents

3	Problems (Section 3)	1
3.1	Hints	1
3.2	Formulas	3
3.2.1	Legendre 多項式に関するもの	3
3.2.2	associated Legendre 多項式に関するもの	3
3.2.3	Bessel 関数に関するもの	3
3.2.4	積分公式	4
3.2.5	級数展開	4
3.2.6	その他	4
3.3	Answers	5
	Problem 3.1	5
	Problem 3.2	7
	Problem 3.3	11
	Problem 3.4	13
	Problem 3.5	15
	Problem 3.6	16
	Problem 3.7	17
	Problem 3.8	19
	Problem 3.9	21
	Problem 3.10	22
	Problem 3.11	23
	Problem 3.12	24

## 3 Problems (Section 3)

### 3.1 Hints

- 3.1  $z$  軸について対称なポテンシャルを Legendre 多項式で展開したときの一般形に代入して, 境界条件から係数を決定する.
- 3.2 (a): ポテンシャルを展開して, 表面電荷密度による境界条件を考えれば良い. (b):  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  を用いて原点での電場を計算できる. また,  $\hat{z} = \cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}$  を用いると, 結果を  $\hat{z}$  のみで表すことができる. (c): (2) では  $\beta = \pi - \alpha$  として  $\beta \rightarrow 0$  の極限を考えるほうがやりやすい.
- 3.3 (問題の意図を把握していないかもしれないが,) 解くための一つの方法として, まず, 総電荷を  $Q$  として電荷の分布の様子, disk 表面のポテンシャルの条件から決定をする. その後, disk の軸上の点についてポテンシャルを計算することができるので, これを計算したのち, 本文 §3.3 と同じ方法で, 全空間のポテンシャルを計算できる.
- 3.4 (a): ポテンシャルを球面調和関数で展開する. 境界条件は  $r = a$  の球面上で考えれば良い.  $\phi$  の値でポテンシャルを場合分けして考えると見通しが良い. (b): (a) の結果を用いて具体的な計算をするだけ. 本文 §3.3 中の式 (3.36) との比較のときには, 座標軸の取り方に注意をする必要がある. 具体的には  $\cos\theta' = \sin\theta\sin\phi$  である.
- 3.5 本文中の式 (3.70) を  $r, a$  でそれぞれ微分, 差を考えて  $d\Omega' V(\theta', \phi')$  で積分をすればよい.
- 3.6 ポテンシャルが具体的に計算できるので, 本文中の式 (3.70) を使って球面調和関数で展開した後に, 和を考えれば良い.
- 3.7 前問と同じように考えれば良い.
- 3.8  $\log(\csc\theta) = \log(1/\sin\theta)$  を Legendre 多項式で展開する.
- 3.9 円筒座標系での Laplacian は

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.1)$$

である。これを  $z=0, L$  での境界条件に注意して解けばよい。

3.10 前問の結果を用いる。(b)での極限を考えるとときは、漸近形

$$I_\nu(z) \sim \frac{1}{\nu!} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu + \mathcal{O}(z^{\nu+1}) \quad \text{for } z \ll 1 \quad (3.2)$$

を用いるとよい。三角関数の無限和は  $\exp$  での無限級数として考えると見通しが良い。

3.11 あとで

3.12 計算を実行するだけ

3.13 同様。

3.14 線電荷密度を求めてそれを体積電荷密度として書けば良い。

3.15 あとで

3.16 (a) デルタ関数は

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(x/\varepsilon)}{x/\varepsilon} \frac{1}{\pi\varepsilon} = \delta(x) \quad (3.3)$$

とかける。

(b) 基本的には本文 §3.11 の議論と同様にすれば良い。

(c) (b)の結果を用いる。

(d) Bessel の積分表示

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta \cos(n\theta - x \sin \theta) \quad (3.4)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \cos(n\theta - x \sin \theta) \quad (3.5)$$

および Hansen の積分表示

$$J_n(x) = \frac{1}{i^n \pi} \int_0^\pi e^{ix \cos \theta} \cos(n\theta) \quad (3.6)$$

がある。

3.17 (a) Fourier 展開, あるいは Fourier 半区間展開により

$$\delta(\phi - \phi') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi - \phi')} \quad (3.7)$$

$$\delta(z - z') = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right) \quad (3.8)$$

がわかる。

(b) 問題 3.16(a)の結果を用いて  $\rho, \phi$  方向について展開をした後、 $z$  方向について Green 関数の満たすべき条件を考える。

3.18 (a) 円筒関数系での Laplace 方程式を境界条件

$$\begin{cases} \Phi = 0 & \text{on } z = 0 \\ \Phi = V\theta(a - \rho) & \text{on } z = L \end{cases} \quad (3.9)$$

で解く。ただし  $\theta(\cdot)$  は Heaviside の階段関数。

(b) Bessel 関数,  $\sinh$  関数を級数展開して、最低次の寄与を計算する。

(c) (b)と同様に考える。

3.19 Gradshteyn & Ryzhik (2014) の式 (6.666) より

$$\int_0^\infty dx x^{\nu+1} \frac{\sinh(\alpha x)}{\sinh(\pi x)} J_\nu(\beta x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{\nu+1} \sin(n\alpha) K_\nu(n\beta) \quad \text{for } |\Re(\alpha)| < 1, \Re(\nu) > -1 \quad (3.10)$$

が成り立つ。

3.20 問題 3.17 で考えた Green 関数を用いることができる。

3.21 問題 1.18(b)の結果を用いる。また、Gradshteyn & Ryzhik (2014) 式 (6.554) より

$$\int_0^1 dx \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} J_0(xy) = \frac{\sin y}{y} \quad \text{for } y > 0 \quad (3.11)$$

である。

3.22 あとで

3.23

### 3.2 Formulas

#### 3.2.1 Legendre 多項式に関するもの

- Legendre の微分方程式

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_l}{dx} \right] + l(l+1)P_l = 0 \quad (3.12)$$

- 母関数表示

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad (3.13)$$

- 直交関係

$$\int_{-1}^1 dx P_l(x) P_l(x) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll} \quad (3.14)$$

- $[0, 1]$  区間での積分

$$\int_0^1 dx P_l(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } l=0 \\ \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^{k+1} (k+1)!} & \text{if } l=2k+1; k=0, 1, \dots \\ 0 & \text{if } l=2k; k=1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.15)$$

- 漸化関係

$$\frac{dP_{l+1}(x)}{dx} - \frac{dP_{l-1}(x)}{dx} = (2l+1)P_l(x) \quad (3.16)$$

#### 3.2.2 associated Legendre 多項式に関するもの

- 最初の数項の具体的な表式

			$P_3^3(x) = -15(1-x^2)^{3/2}$
		$P_2^2(x) = 2(1-x^2)$	$P_3^2(x) = 15x(1-x^2)$
	$P_1^1(x) = -(1-x^2)^{1/2}$	$P_2^1(x) = -3x(1-x^2)^{1/2}$	$P_3^1(x) = \frac{3}{2}(1-5x^2)(1-x^2)^{1/2}$
$P_0^0(x) = 1$	$P_1^0(x) = x$	$P_2^0(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$	$P_3^0(x) = \frac{1}{2}x(5x^2-3)$
	$P_1^{-1}(x) = \frac{1}{2}(1-x^2)^{1/2}$	$P_2^{-1}(x) = \frac{1}{2}x(1-x^2)^{1/2}$	$P_3^{-1}(x) = -\frac{1}{8}(1-5x^2)(1-x^2)^{1/2}$
		$P_2^{-2}(x) = \frac{1}{8}(1-x^2)$	$P_3^{-2}(x) = \frac{1}{8}x(1-x^2)$
			$P_3^{-3}(x) = \frac{1}{48}(1-x^2)^{3/2}$

#### 3.2.3 Bessel 関数に関するもの

- Bessel の積分表示

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta \cos(n\theta - x \sin \theta) \quad (3.17)$$

- Hansen の積分表示

$$J_n(x) = \frac{1}{i^n \pi} \int_0^\pi d\theta e^{ix \cos \theta} \cos(n\theta) \quad (3.18)$$

- Bessel 関数を含む積分

$$\int_0^\infty dx e^{-\alpha x} J_0(bx) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}} \quad (3.19)$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} [J_0(bx)]^2 = \frac{2}{\pi \sqrt{\alpha^2 + 4b^2}} K\left(\frac{2b}{\sqrt{\alpha^2 + 4b^2}}\right) \quad (3.20)$$

ここで、 $K(k)$  は第一種完全楕円積分

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \quad (3.21)$$

## 3.2.4 積分公式

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x) dx}{\sqrt{1+p^2 \sin^2(x)}} = \frac{1}{p} \arctan(p) \quad (3.22)$$

$$\int dx \log|x^2 - a^2| = x \log|x^2 - a^2| - 2x + a \log \left| \frac{x+a}{x-a} \right| \quad (3.23)$$

## 3.2.5 級数展開

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{for } x^2 \leq 1 \quad (3.24)$$

## 3.2.6 その他

- Dirac のデルタ関数

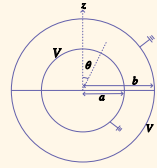
$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\epsilon} \sin\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \quad (3.25)$$

## 3.3 Answers

## Problem 3.1

共通中心を持つ 2 つの球 (それぞれの半径は  $a, b$  で与えられ,  $b > a$  を満たす) があり, それぞれは共通の水平板によって 2 つの半球に分割されている. 内部の球の上側と外側の球の下側のポテンシャルは  $V$  に固定され, その他の半球のポテンシャルはゼロに固定されている.

このとき,  $a \leq r \leq b$  の領域におけるポテンシャルを Legendre 多項式による展開として決定せよ. このとき, 少なくとも  $l = 4$  の項までを含めよ. ここで得られた結果と, よく知られた結果である  $b \rightarrow \infty$  や  $a \rightarrow 0$  の場合と比較せよ.



半径  $a, b$  の球の間の領域のポテンシャルを考える. Legendre 多項式による展開

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) \quad (3.26)$$

を以下の境界条件で考える:

$$\Phi(a, \theta) = \begin{cases} V & \text{if } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{if } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \end{cases}, \quad (3.27)$$

$$\Phi(b, \theta) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ V & \text{if } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad (3.28)$$

(3.27) について,  $P_l(\cos \theta) d(\cos \theta)$  をかけて  $\theta \in [0, \pi]$  で積分をすると,

$$\int_{\cos \theta = -1}^{\cos \theta = 1} \sum_{l=0}^{\infty} (A_l a^l + B_l a^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta) d(\cos \theta) = V \int_{\cos \theta = 1}^{\cos \theta = 0} P_l(\cos \theta) d(\cos \theta) \quad (3.29)$$

である. 左辺の積分変数を  $x$  で書くと,

$$(\text{L.H.S.}) = \int_1^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} (A_l a^l + B_l a^{-(l+1)}) P_l(x) P_l(x) dx \quad (3.30)$$

であり, Legendre 多項式に関する直交関係 (3.14) より, ( $l, l'$  を入れ替えて)

$$A_l a^l + B_l a^{-(l+1)} = \frac{V(2l+1)}{2} \int_0^1 dx P_l(x) \quad (3.31)$$

を得る. 同様に考えて, (3.28) について,

$$A_l b^l + B_l b^{-(l+1)} = (-1)^l \frac{V(2l+1)}{2} \int_0^1 dx P_l(x) \quad (3.32)$$

が成り立つ. ただし,  $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$  に注意せよ.

式 (3.31) と (3.32) より, 係数  $A_l, B_l$  を計算することができて,

$$A_l = \frac{(-1)^l b^{l+1} - a^{l+1}}{b^{2l+1} - a^{2l+1}} \frac{V(2l+1)}{2} \int_0^1 dx P_l(x), \quad (3.33)$$

$$B_l = \frac{b^l - (-1)^l a^l}{b^{2l+1} - a^{2l+1}} a^{l+1} b^{l+1} \frac{V(2l+1)}{2} \int_0^1 dx P_l(x) \quad (3.34)$$

がわかる. したがって, ポテンシャルの正確な形は

$$\Phi(r, \theta) = V \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^l b^{l+1} - a^{l+1}}{b^{2l+1} - a^{2l+1}} r^l + \frac{b^l - (-1)^l a^l}{b^{2l+1} - a^{2l+1}} a^{l+1} b^{l+1} r^{-(l+1)} \right) \times \frac{2l+1}{2} \left( \int_0^1 dx P_l(x) \right) P_l(\cos \theta) \quad (3.35)$$

である. 具体的に  $l = 4$  の項までを書き下せば,

$$\Phi(r, \theta) = V \left[ \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \frac{-(a^2 + b^2)r + a^2 b^2 (a + b) r^{-2}}{b^3 - a^3} P_1(\cos \theta) - \frac{7}{16} \frac{-(a^4 + b^4)r^3 + a^4 b^4 (a^3 + b^3) r^{-4}}{b^7 - a^7} P_3(\cos \theta) + \dots \right] \quad (3.36)$$

となる.

$b \rightarrow \infty$  の極限では  $a/b \rightarrow 0, r/b \rightarrow 0$  として,

$$\begin{aligned}\Phi(r, \theta) &= V \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \left(\int_0^1 dx P_l(x)\right) P_l(\cos \theta) \\ &= V \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (4k+3)(2k-1)!!}{2^{k+2}(k+1)!} \left(\frac{a}{r}\right)^{2k+2} P_{2k+1}(\cos \theta) \right] \quad (3.37)\end{aligned}$$

$$= V \left[ \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \left(\frac{a}{r}\right)^2 P_1(\cos \theta) - \frac{7}{16} \left(\frac{a}{r}\right)^4 P_3(\cos \theta) + \dots \right] \quad (3.38)$$

である. ただし, ここでは  $(-1)!! = 1$  と約束する. これは半径  $a$  の導体球について, 北半球のポテンシャルが  $V$ , 南半球が接地されており, さらに無限遠でのポテンシャルの境界条件が  $V/2$  となる系において, 導体球の外部領域に作るポテンシャルに等しいことがわかる.

$a \rightarrow 0$  の極限では

$$\begin{aligned}\Phi(r, \theta) &= V \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{2l+1}{2} \left(\frac{r}{b}\right)^l \left(\int_0^1 dx P_l(x)\right) P_l(\cos \theta) \\ &= V \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (4k+3)(2k-1)!!}{2^{k+2}(k+1)!} \left(\frac{r}{b}\right)^{2k+1} P_{2k+1}(\cos \theta) \right] \quad (3.39)\end{aligned}$$

$$= V \left[ \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \left(\frac{r}{b}\right) P_1(\cos \theta) + \frac{7}{16} \left(\frac{r}{b}\right)^3 P_3(\cos \theta) \right] \quad (3.40)$$

である. これは, 半径  $b$  の導体球について, 北半球が接地されていて, 南半球のポテンシャルが  $V$  となるような系における, 球内部のポテンシャルに等しいことがわかる.

それぞれの場合について, ポテンシャルを描くと図 1, 2, 3 のようになる<sup>1)</sup>.

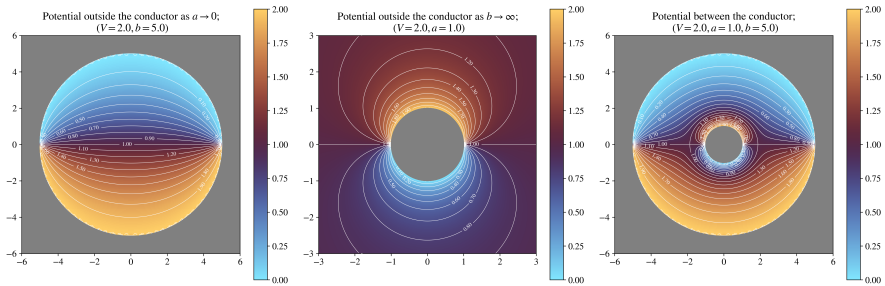


FIGURE 1. —  $a \rightarrow 0$  としたときのポテンシャル      FIGURE 2. —  $b \rightarrow \infty$  としたときのポテンシャル      FIGURE 3. — 一般の場合についてのポテンシャル

1) 描画のときに使用したコードは .ipynb 形式で保存してある.

## Problem 3.2

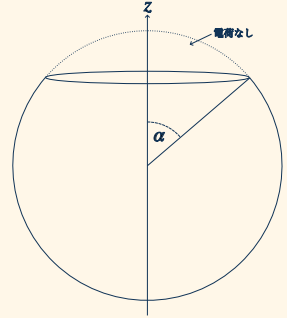
半径  $R$  の球が、角度  $\theta = \alpha$  の円錐によって定まる北極の領域 (球帽, spherical cap) を除いてその表面に一樣な面電荷密度  $Q/(4\pi R^2)$  を持っている。

- (a) 球の内部でのポテンシャルが次のように表されることを示せ。ただし、 $l=0$  に対して  $P_{l-1}(\cos\alpha) = -1$  と約束する。

$$\Phi = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} [P_{l+1}(\cos\alpha) - P_{l-1}(\cos\alpha)] \frac{r^l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta). \quad (3.41)$$

また、外部領域におけるポテンシャルはどのようになるか？

- (b) 原点における電場の大きさとその向きを決定せよ。  
 (c) 北極における球帽が (1) 十分に小さい極限；と (2) 十分に大きく電荷が存在する部分が南極のごく僅かな領域のみになる；これら 2 つの場合について、(a), (b) の結果の極限について議論せよ。



極角  $\theta$  が  $\theta < \alpha$  を満たす部分には電荷が存在せず、その他の部分には一樣な電荷密度  $\sigma_c = Q/(4\pi R^2)$  が存在するような球を考える。

- (a) ポテンシャルを Legendre 多項式で展開して

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos\theta) \quad (3.42)$$

とする。球の内部で  $r \rightarrow 0$  としたときに発散しない条件より  $l=0, 1, \dots$  について  $B_l = 0$  また、球の外部については  $r \rightarrow \infty$  としたときにポテンシャルがゼロに漸近するとして、 $l=0, 1, \dots$  について  $A_l = 0$  である。したがって、球の内外でのポテンシャル  $\Phi_{\text{in}}$  および  $\Phi_{\text{out}}$  は

$$\Phi_{\text{in}}(r, \theta) = \sum_l A_l r^l P_l(\cos\theta), \quad (3.43)$$

$$\Phi_{\text{out}}(r, \theta) = \sum_l B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) \quad (3.44)$$

とかける。ポテンシャルは  $r = R$  の球面上で連続であるから、

$$\sum_l A_l R^l P_l(\cos\theta) = \sum_l B_l R^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) \quad (3.45)$$

であり、 $\{P_l\}_{l=0,1,2,\dots}$  が直交関数系をなすことより  $B_l = A_l R^{2l+1}$  である。

また、電場の接続条件は

$$\sigma = \epsilon_0 \left[ \frac{\partial \Phi_{\text{in}}}{\partial r} \Big|_{r=R} - \frac{\partial \Phi_{\text{out}}}{\partial r} \Big|_{r=R} \right] = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi R^2} & \text{if } \theta \geq \alpha \\ 0 & \text{if } 0 \leq \theta < \alpha \end{cases} \quad (3.46)$$

である。

$$\frac{\partial \Phi_{\text{in}}}{\partial r} \Big|_{r=R} - \frac{\partial \Phi_{\text{out}}}{\partial r} \Big|_{r=R} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l (2l+1) R^{l-1} P_l(\cos\theta) \quad (3.47)$$

に注意すると、 $d(\cos\theta) P_l(\cos\theta)$  をかけて  $\cos\theta = 1$  から  $\cos\theta = -1$  で積分をすると、直交関係より以下が得られる ( $l, l'$  の入れ替えを行った)；

$$A_l = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^{l+1}} \int_{-1}^{\cos\alpha} dx P_l(x). \quad (3.48)$$

Legendre 多項式に関する漸化式 (3.16) より、

$$\int_{-1}^{\cos\alpha} dx P_l(x) = \frac{1}{2l+1} [P_{l+1}(\cos\alpha) - P_{l-1}(\cos\alpha)] \quad (3.49)$$

である ( $P_{l+1}(-1) - P_{l-1}(-1) = 0$  であることに注意せよ)。したがって、

$$A_l = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{2l+1} [P_{l+1}(\cos\alpha) - P_{l-1}(\cos\alpha)] \frac{1}{R^{l+1}} \quad (3.50)$$

であり、球内部のポテンシャルは

$$\Phi_{\text{in}}(r, \theta) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} [P_{l+1}(\cos\alpha) - P_{l-1}(\cos\alpha)] \frac{r^l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta) \quad (3.51)$$

と表される。また、球外部のポテンシャルについては、

$$\Phi_{\text{out}}(r, \theta) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} [P_{l+1}(\cos\alpha) - P_{l-1}(\cos\alpha)] \frac{R^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) \quad (3.52)$$

と表される。

(b) 電場は  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$  で与えられるので、

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial\Phi}{\partial r} \\ &= -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l}{2l+1} [P_{l+1}(\cos\alpha) - P_{l-1}(\cos\alpha)] \frac{r^{l-1}}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta) \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \\ &= -\frac{1}{r} \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} [P_{l+1}(\cos\alpha) - P_{l-1}(\cos\alpha)] \frac{r^l}{R^{l+1}} \frac{dP_l(\cos\theta)}{d\theta} \end{aligned} \quad (3.54)$$

である。原点では  $r=0$  として考えると、 $E_r, E_\theta$  ともに  $l=1$  の項だけが残るので、 $P_2(\cos\alpha) - P_0(\cos\alpha) = -(3/2)\sin^2\alpha$  であることなどに注意すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r=0) &= \frac{Q}{16\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \sin^2\alpha [\cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}] \\ &= \frac{Q}{16\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \sin^2\alpha \hat{z} \end{aligned} \quad (3.55)$$

となる。

(c-1-a)  $\alpha \rightarrow 0$  の極限を考える。

$\cos\alpha \sim 1 - \alpha^2/2$  であるから、 $P_l(\cos\alpha) \sim P_l(1) - (\alpha^2/2)P'_l(1)$  として Taylor 展開できる。 $l=0$  のときは

$$P_1(\cos\alpha) - P_{-1}(\cos\alpha) = \cos\alpha + 1 \sim 2 - \frac{\alpha^2}{2} \quad (3.56)$$

$l \geq 1$  のときは

$$\begin{aligned} P_{l+1}(\cos\alpha) - P_{l-1}(\cos\alpha) &\sim -\frac{\alpha^2}{2} (P'_{l+1}(1) - P'_{l-1}(1)) \\ &= -\frac{\alpha^2}{2} (2l+1)P_l(1) = -\frac{2l+1}{2}\alpha^2 \end{aligned} \quad (3.57)$$

と近似されるので、

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{in}} &\sim \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R} - \frac{\alpha^2}{4} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta) \right] \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R} - \frac{\alpha^2}{4} \frac{1}{|\mathbf{x} - R\hat{z}|} \right] \end{aligned} \quad (3.58)$$

とかける。また、球外部のポテンシャルは

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{out}} &\sim \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} - \frac{\alpha^2}{4} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) \right] \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} - \frac{\alpha^2}{4} \frac{1}{|\mathbf{x} - R\hat{z}|} \right] \end{aligned} \quad (3.59)$$

であるから、球内外のポテンシャルは

$$\Phi \sim \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_{>}} - \frac{\alpha^2}{4} \frac{1}{|\mathbf{x} - R\hat{z}|} \right] \quad (3.60)$$

と統一的に書くことができる。ただし、 $r_{>}$  は  $r$  と  $R$  のうち大きい方である。



(c-1-b) 中心における電場の極限は  $\sin \alpha \sim \alpha$  に注意して

$$\mathbf{E}(r=0) \sim \frac{Q}{16\pi\epsilon_0} \frac{\alpha^2}{R^2} \hat{\mathbf{z}} \quad (3.61)$$

である。

(c-2-a)  $\alpha \rightarrow \pi$  の極限を考えるが、簡単のため  $\beta \equiv \pi - \alpha \rightarrow 0$  の極限を考える。

$$\cos \alpha = \cos(\pi - \beta) \sim -1 + \frac{\beta^2}{2} \quad (3.62)$$

に注意すると、(c-1) と同様にして、

$$P_{l+1}(\cos \alpha) - P_{l-1}(\cos \alpha) \sim (-1)^l \frac{2l+1}{2} \beta^2 \quad \text{for } l=0,1,\dots \quad (3.63)$$

と表せる。したがって、

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{in}} &\sim \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \beta^2 \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{r^l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) \\ &= \frac{Q}{16\pi\epsilon_0} \beta^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{R^{l+1}} P_l(-\cos \theta) \\ &= \frac{Q}{16\pi\epsilon_0} \beta^2 \frac{1}{|\mathbf{x} + R\hat{\mathbf{z}}|} \end{aligned} \quad (3.64)$$

である。球外のポテンシャルも同様に計算することができて、

$$\Phi_{\text{out}} \sim \frac{Q}{16\pi\epsilon_0} \beta^2 \frac{1}{|\mathbf{x} + R\hat{\mathbf{z}}|} \quad (3.65)$$

となる (同じ結果を与える)。

(c-2-b) 原点での電場は  $\sin \alpha = \sin \beta \sim \beta$  に注意して、

$$\mathbf{E}(r=0) \sim \frac{Q}{16\pi\epsilon_0} \frac{\beta^2}{R^2} \hat{\mathbf{z}} \quad (3.66)$$

と計算される。

(c-1) での結果について、これは、半径  $R$  の球表面に総電荷  $Q$  が分布しており、極角  $\alpha$  の部分にはそれに加えて、表面電荷密度  $-\sigma = -Q/(4\pi R^2)$  が分布している状況と一致している。具体的に計算をすると、まず総電荷  $Q$  が一様に分布しているとき、球内部のポテンシャルは簡単な計算により

$$\Phi_{\text{in}}^{(1)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \quad (3.67)$$

であることがわかる。次に、極角  $\alpha$  の範囲については、 $\alpha$  が十分に小さいとき、この部分に存在する電荷は

$$\begin{aligned} \int d\Omega R^2 (-\sigma) &= -2\pi R^2 \sigma \int_0^\alpha d\theta \sin \theta \\ &= -2\pi R^2 \sigma (1 - \cos \alpha) \\ &\sim -2\pi R^2 \sigma \frac{\alpha^2}{2} = -\frac{\alpha^2}{4} Q \end{aligned} \quad (3.68)$$

である。 $\alpha$  が十分に小さいとして、この電荷を点電荷とみなすことにするとこれが作るポテンシャルは

$$\Phi_{\text{in}}^{(2)} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\alpha^2/4}{|\mathbf{x} - R\hat{\mathbf{z}}|} \quad (3.69)$$

となり、 $\Phi_{\text{in}}^{(1)} + \Phi_{\text{in}}^{(2)}$  が (c-1-a) の答えになっていることが確かめられる。 $\Phi_{\text{out}}$  については  $\Phi^{(1)}$  の  $1/R$  を  $1/r$  として考えれば良く、この結果も整合的である。

(a) で考えたポテンシャルを図示すると図 4 のようになる。

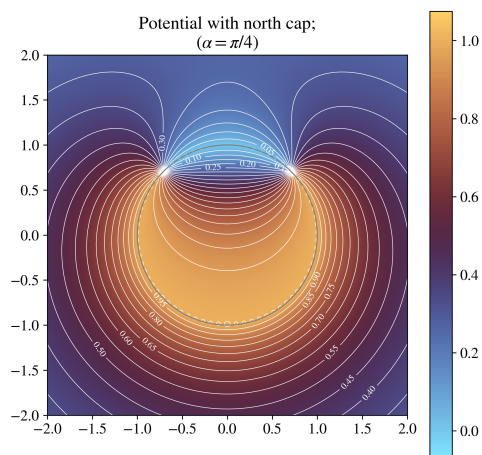


FIGURE 4. —  $\alpha = \pi/4$  としてポテンシャルを描いた様子. ポテンシャルの単位は  $Q/(4\pi\epsilon_0)$  としており, 球 (図中の灰色の実線) の半径を  $R=1$  としている.

## Problem 3.3

薄く、平らで導電性の半径  $R$  の円形のディスクがその中心を  $xy$  平面の原点と一致させて存在しており、そのポテンシャルは  $V$  に保たれている。一定のポテンシャルをもつディスクの電荷密度が  $(R^2 - \rho^2)^{-1/2}$  に比例するとする。ただし、 $\rho$  は原点からはかったディスク上の距離である。このとき、

(a)  $r > R$  におけるポテンシャルが

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{2V}{\pi} \frac{R}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{2l} P_{2l}(\cos \theta) \quad (3.70)$$

で表されることを示せ。

(b)  $r < R$  におけるポテンシャルを決定せよ。

(c) ディスクのキャパシタンス (静電容量) はいくらか?

(a) 空間内の電荷分布は

$$\rho_c(\mathbf{x}) = \frac{a}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} H(R - \rho) \delta(z) \quad (3.71)$$

[ただし  $H(\cdot)$  は Heaviside の step function である] とかけるので、 $a$  を決定する。原点でのポテンシャルは

$$V(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{\rho'} \rho_c(\mathbf{x}') \rho' d\rho' d\phi' dz' = \frac{\pi a}{4\epsilon_0} \quad (3.72)$$

と表されるので、 $V(0) = V$  として、電荷分布は

$$\rho_c(\mathbf{x}) = \frac{4\epsilon_0 V}{\pi} \frac{1}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} H(R - \rho) \delta(z) \quad (3.73)$$

である。これより、 $z$  軸上でのポテンシャルを計算することができて、

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_c(\mathbf{x}')}{\sqrt{(\rho')^2 + z^2}} \rho' d\rho' d\phi' dz' \\ &= \frac{2V}{\pi} \int_0^R \frac{\rho' d\rho'}{\sqrt{((\rho')^2 + z^2)(R^2 - (\rho')^2)}} \\ &= \frac{2V}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{R \sin \theta d\theta}{\sqrt{z^2 + R^2 \sin^2 \theta}} \\ &= \frac{2V}{\pi} \arctan\left(\frac{R}{|z|}\right) \end{aligned} \quad (3.74)$$

と表すことができる [式 (3.22) を利用]。

$R/|z| \leq 1$  とすると、

$$\Phi(z) = \frac{2V}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{R}{|z|}\right)^{2k+1} \quad (3.75)$$

として級数展開することができるので、 $R/r \leq 1$  かつ  $z \geq 0$  の disk 上部では

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{2V}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{2l+1} P_{2l}(\cos \theta) \quad (3.76)$$

と表される。 $z \leq 0$  の disk<sup>2)</sup> 下部では  $z = 0$  面に関してポテンシャルが対称であるとして、

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{2V}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{2l+1} P_{2l}(\cos(\pi - \theta)) \quad (3.77)$$

$$= \frac{2V}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{2l+1} P_{2l}(\cos \theta) \quad (3.78)$$

となる。

2) disk と disc は技術的な文脈では使い分けがあるらしい。disc は CD や DVD などの光学式メディアを指し、disk はフロッピーディスクやハードディスクなどを指すらしい。

(b) 一方  $R/|z| \geq 1$  とすると,  $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$  に注意して,

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \frac{2V}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{|z|}{R}\right) \right] \\ &= V - \frac{2V}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \left(\frac{|z|}{R}\right)^{2l+1}\end{aligned}\quad (3.79)$$

であるから,  $z \geq 0$  では

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \begin{cases} V - \frac{2V}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \left(\frac{r}{R}\right)^{2l+1} P_{2l+1}(\cos\theta) \\ V - \frac{2V}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \left(\frac{r}{R}\right)^{2l+1} P_{2l+1}(\cos(\pi - \theta)) \end{cases} \\ &= V \mp \frac{2V}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \left(\frac{r}{R}\right)^{2l+1} P_{2l+1}(\cos\theta)\end{aligned}\quad (3.80)$$

となる.

(c) 導体上の全電荷は

$$Q \equiv \int_0^R 2\pi\rho d\rho \frac{4\varepsilon_0 V}{\pi} \frac{1}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = 8\varepsilon_0 V R \quad (3.81)$$

であるから, capacitance は  $C = Q/V = 8\varepsilon_0 R$  である.

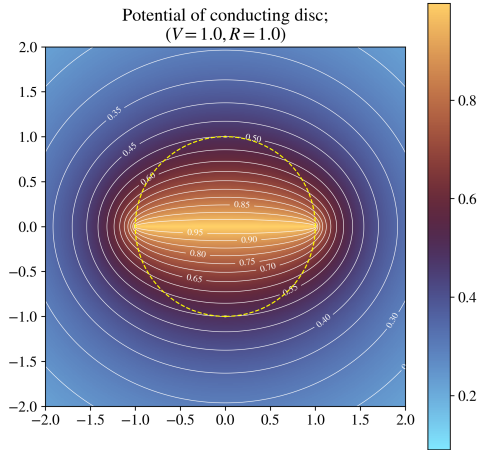


FIGURE 5. —  $V = 1.0$ ,  $R = 1.0$  として等ポテンシャル面を描画した図; ポテンシャルが  $V$  に保たれている disk は  $z$  軸上の  $-1 < x < 1$  の範囲である. また, 図中の黄色破線は  $r = R$  となる球面を表しており, この面を境にしてポテンシャルの表式が変化している.

## Problem 3.4

内径が  $a$  である中空の導体球の表面がいくつかの平板の組によって偶数個の等しい部分に分けられている；平板の交線は  $z$  軸と一致しており，平板は角度  $\phi$  の等しい間隔で分布しているとする。（各部分はりんごをくし切りにしたときの皮のようなもの，あるいは連続する経線の間の地球の表面のようなものである。）これらの各部分のポテンシャルは交互に  $\pm V$  であるとして一定であるとする。

- (a) 球内部のポテンシャルに対する級数展開を一般の  $2n$  個に分けた区間について計算せよ。ただし，どの係数が非ゼロであるかを正確に決定し，非ゼロの結果が得られる場合については，その結果を  $\cos\theta$  についての積分で表示せよ。  
 (b)  $n=1$  の特別な場合（2つの半球）について， $l=3$  までの項を明示せよ。また，座標軸を適当にとることで，3.3 節の (3.36) の結果が得られることを確認せよ。

(a) 球内部でのポテンシャルは，原点での特異性に気をつけると，

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} r^l Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.82)$$

と書くことができる。境界条件は，

$$\Phi(r=a, \theta, \phi) \equiv V(\phi) = \begin{cases} +V & \text{if } \frac{\pi}{n} \cdot 2j \leq \phi \leq \frac{\pi}{n} \cdot (2j+1) \\ -V & \text{if } \frac{\pi}{n} \cdot (2j+1) \leq \phi \leq \frac{\pi}{n} \cdot (2j+2) \end{cases} \quad \text{for } j=0, 1, \dots, n-1 \quad (3.83)$$

である。

$$V(\phi) = \sum_l \sum_m A_{lm} a^l Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.84)$$

に対して，両辺に  $Y_{lm}^*(\theta, \phi)$  をかけて， $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$  で積分を実行すると，球面調和関数の直交性より

$$\begin{aligned} A_{lm} &= \frac{1}{a^l} \int V(\phi) Y_{lm}^*(\theta, \phi) d\Omega \\ &= \frac{1}{a^l} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \int_0^\pi P_l^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} V(\phi) e^{-im\phi} d\phi \end{aligned} \quad (3.85)$$

である。 $\phi$  での積分について，

$$\int_0^{2\pi} V(\phi) e^{-im\phi} d\phi = V \sum_{j=0}^{n-1} \left[ \int_{\frac{\pi}{n} 2j}^{\frac{\pi}{n} (2j+1)} e^{-im\phi} d\phi - \int_{\frac{\pi}{n} (2j+1)}^{\frac{\pi}{n} (2j+2)} e^{-im\phi} d\phi \right] \quad (3.86)$$

となるが， $m=0$  のとき，

$$\int_0^{2\pi} V(\phi) e^{-im\phi} d\phi = 0 \quad (3.87)$$

であり， $m \neq 0$  のときは

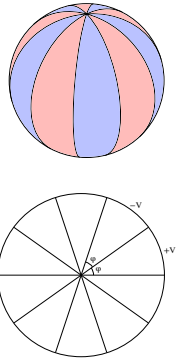
$$\int_0^{2\pi} V(\phi) e^{-im\phi} d\phi = -\frac{iV}{m} (1 - e^{-i\frac{m}{n}\pi})^2 \sum_{j=0}^{n-1} \left( e^{-i\frac{2m}{n}\pi} \right)^j \quad (3.88)$$

となるが， $\exp(-i(m/n)\pi) = 1$  つまり  $m/(2n)$  が整数となるときはゼロとなる。また，

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left( e^{-i\frac{2m}{n}\pi} \right)^j = \frac{1 - e^{-i2m\pi}}{1 - e^{-i\frac{2m}{n}\pi}} \quad (3.89)$$

となるので， $m/n$  が整数となるときには右辺が  $0/0$  の形になるので，non-zero となることが期待される。一方，それ以外の場合では  $m$  が整数であることより分子がゼロになるので，この和はゼロである。以上をまとめると， $m/n = \pm 1, \pm 3, \dots$  の場合のみが non-zero の結果を与えることがわかる。実際，このときは

$$\int_0^{2\pi} V(\phi) e^{-im\phi} d\phi = -\frac{iV}{m} (1 - (-1))^2 \sum_{j=0}^{n-1} 1 = -4iV \frac{n}{m} \quad (3.90)$$



である。以上の結果を踏まえると、球内部でのポテンシャルを (3.82) のように展開したとき、係数  $A_{lm}$  は

$$A_{lm} = \begin{cases} -\frac{4iV}{a^l} \frac{n}{m} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_{-1}^1 P_l^m(\cos\theta) d(\cos\theta) & \text{if } m = \pm n, \pm 3n, \pm 5n, \dots \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.91)$$

(b)  $n=1$  として係数  $A_{lm}$  を  $l=3$  まで計算する。  $m = \pm 1, \pm 3, \dots$  に対して  $A_{lm} \neq 0$  であることに注意する。

$$A_{1,\pm 1} = \frac{iV}{a} \sqrt{\frac{3\pi}{2}}, \quad A_{2,\pm 1} = 0 \\ A_{3,\pm 3} = \frac{iV}{a^3} \sqrt{\frac{35\pi}{256}}, \quad A_{3,\pm 1} = \frac{iV}{a^3} \sqrt{\frac{21\pi}{256}}$$

と計算できるので、ポテンシャルは

$$\Phi(r, \theta, \phi) = V \left[ \frac{3r}{2a} \sin\theta \sin\phi + \left(\frac{r}{a}\right)^3 \left\{ \frac{35}{64} \sin^3\theta \sin(3\phi) + \frac{21}{64} \sin\theta (5\cos^2\theta - 1) \sin\phi \right\} + \dots \right] \quad (3.92)$$

とかける。ここで、 $\cos\theta' = \sin\theta \sin\phi$  とおけば、

$$P_1(\cos\theta') = \sin\theta \sin\phi \quad (3.93)$$

$$P_3(\cos\theta') = -\frac{1}{8} [5\sin^3\theta \sin(3\phi) + 3\sin\theta (5\cos^2\theta - 1) \sin\phi] \quad (3.94)$$

であるから、

$$\Phi(r, \theta') = V \left[ \frac{3}{2} \frac{r}{a} P_1(\cos\theta') - \frac{7}{8} \left(\frac{r}{a}\right)^3 P_3(\cos\theta') + \dots \right] \quad (3.95)$$

となり、これは、教科書本文中の式 (3.36) と一致していることがわかる。図 6 には  $n=3$  の場合の図を描いた。

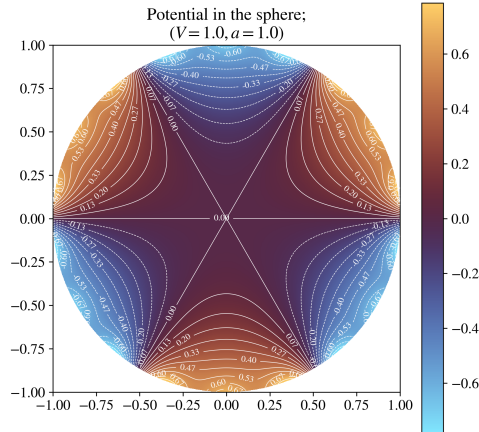


FIGURE 6. — 問題文と同じセットアップを行って、 $n=3$  の場合について、 $l=20$  の項まででポテンシャルを描いた図。球 ( $z=0$  面で切断したときの円) の境界の近くでは有限項で打ち切った事による誤差が見られるが、概ね期待されるポテンシャルの形を得られていることがわかる。

## Problem 3.5

内径が  $a$  である中空の球の表面におけるポテンシャルが  $\Phi = V(\theta, \phi)$  と指定されている。次に示す、球内部におけるポテンシャルの 2 つの表式が等価であることを証明せよ：

(a)

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{a(a^2 - r^2)}{4\pi} \int \frac{V(\theta', \phi')}{(r^2 + a^2 - 2ar\cos\gamma)^{3/2}} d\Omega' \quad (3.96)$$

ただし  $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi - \phi')$  である。

(b)

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} \left(\frac{r}{a}\right)^l Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.97)$$

ただし  $A_{lm} = \int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$  である。

本文中の式 (3.70) より、

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r^l}{a^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.98)$$

である (ただし  $|\mathbf{x}| = r < a = |\mathbf{x}'|$  とした)。このとき、

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = (r^2 + a^2 - 2ar\cos\gamma)^{1/2}$$

である ( $\gamma$  は  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$  のなす角) から、

$$\frac{1}{(r^2 + a^2 - 2ar\cos\gamma)^{1/2}} = 4\pi \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \frac{r^l}{a^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.99)$$

とかける。ここで、(3.99) の両辺を  $r$  について微分すると、

$$\frac{ar\cos\gamma - r^2}{(r^2 + a^2 - 2ar\cos\gamma)^{3/2}} = 4\pi \sum_{l,m} \frac{l}{2l+1} \frac{r^l}{a^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.100)$$

が得られ、同様に (3.99) の両辺を  $a$  について微分すると、

$$\frac{ar\cos\gamma - a^2}{(r^2 + a^2 - 2ar\cos\gamma)^{3/2}} = -4\pi \sum_{l,m} \frac{l+1}{2l+1} \frac{r^l}{a^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.101)$$

が得られる。ここで、(3.100) と (3.101) の差を考えると、

$$\frac{a(a^2 - r^2)}{(r^2 + a^2 - 2ar\cos\gamma)^{3/2}} = 4\pi \sum_{l,m} \left(\frac{r}{a}\right)^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.102)$$

となる。この両辺に  $V(\theta', \phi')$  をかけて、 $d\Omega'$  で積分すると、

$$\frac{a(a^2 - r^2)}{4\pi} \int \frac{V(\theta', \phi') d\Omega'}{(r^2 + a^2 - 2ar\cos\gamma)^{1/2}} = \sum_{l,m} A_{lm} \left(\frac{r}{a}\right)^l Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.103)$$

となる。ただし、

$$A_{lm} = \int d\Omega' V(\theta', \phi') Y_{lm}^*(\theta', \phi') \quad (3.104)$$

である。

## Problem 3.6

2つの点電荷  $+q, -q$  が  $z$  軸上の点  $z = a$  と  $z = -a$  にそれぞれ存在している。

- (a) 球面調和関数と  $r$  の冪による級数展開の形で  $r < a$  および  $r > a$  におけるポテンシャルを決定せよ。  
 (b) 積  $qa \equiv p/2$  を一定に保ちながら  $a \rightarrow 0$  としたときの  $r \neq 0$  におけるポテンシャルを決定せよ。これは、定義より  $z$  軸に沿った双極子およびそのポテンシャルを表している。  
 (c) (b) で考えた双極子が接地された、原点を中心とする半径  $b$  の球殻で取り囲まれているとする。このとき、線形の重ね合わせにより、球殻内部におけるポテンシャルを決定せよ。

(a) 点電荷によるポテンシャルは次のようにかける：

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - a\hat{z}|} - \frac{1}{|\mathbf{x} + a\hat{z}|} \right]. \quad (3.105)$$

本文中の式 (3.70) を利用して書き直すと、

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{\epsilon_0} \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \phi) [Y_{lm}^*(0, 0) - Y_{lm}^*(\pi, 0)] \quad (3.106)$$

となるが、ここで、 $Y_{lm}^*(0, 0) - Y_{lm}^*(\pi, 0) \neq 0$  となるのは  $m = 0$  で  $l$  が奇数のときのみであることに注意すると、

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) &= \frac{q}{\epsilon_0} \sum_{l=1,3,\dots} \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta) \cdot \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \cdot 2 \\ &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \sum_{l=1,3,\dots} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos\theta) \end{aligned} \quad (3.107)$$

と書き直される。ただし、 $r_{>}, r_{<}$  はそれぞれ  $r, a$  の大きい方、小さい方である。

(b)  $a \rightarrow 0$  の極限を考えるので、球外部のポテンシャルを考えることにする [ $r_{<} = a$  および  $r_{>} = r$  である]。このとき、

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \sum_{l=1,3,\dots} \frac{a^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) \quad (3.108)$$

であり、 $qa \equiv p/2$  を一定にして  $a \rightarrow 0$  の極限を考えると、

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos\theta \quad (3.109)$$

となる。

(c) dipole によるポテンシャルとの重ね合わせとして

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) \quad (3.110)$$

と書く。 $r = b$  (grounded sphere) では  $\theta$  の値によらず  $\Phi = 0$  となるので

$$\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b^2} \cos\theta + \sum_l A_l b^l P_l(\cos\theta) = 0 \quad (3.111)$$

である。 $\cos\theta$  についての恒等式と見ると、 $P_l$  の直交性より  $A_1 = -p/(4\pi\epsilon_0 b^3)$  で  $l \neq 1$  に対して  $A_l = 0$  となる。したがって、ポテンシャルは

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{r}{b^3} \right) \cos\theta \quad (3.112)$$

と表される。



## Problem 3.7

3つの点電荷 ( $q, -2q, q$ ) がこの順番で間隔  $a$  をあけて  $z$  軸上に存在している。真ん中の  $-2q$  の電荷を中心とする、接地された半径  $b(>a)$  の導体球殻が存在している。

- (a) 接地された球が存在しないときの、3つの点電荷によるポテンシャルを書き下せ。また、 $qa^2 = Q$  を有限の値としながら  $a \rightarrow 0$  の極限を考えるとときの極限形を求めよ。特に、後半の部分の解については球座標を用いて解答せよ。
- (b) 接地された球の影響により  $r < b$  のポテンシャルは変化するが、これは  $r = b$  の球内部に誘導された表面電荷によるもの、あるいは  $r > b$  に存在する鏡像電荷によるものとみなすことができる。線形の重ね合わせを用いることで、境界条件を満たすようにして、 $r < a$  と  $r > a$  に対する球内部でのポテンシャルを求めよ。また、 $a \rightarrow 0$  の極限で

$$\Phi(r, \theta, \phi) \rightarrow \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r^3} \left(1 - \frac{r^3}{b^3}\right) P_2(\cos\theta) \quad (3.113)$$

となることを示せ。

(a) 3つの点電荷によるポテンシャルは

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - a\hat{\mathbf{z}}|} - \frac{2}{|\mathbf{x}|} + \frac{1}{|\mathbf{x} + a\hat{\mathbf{z}}|} \right] \quad (3.114)$$

とかけるが、これを Problem 3.6 と同様に球面調和関数として展開すると

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta) &= \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0,2,4,\dots}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{a^{l+1}} P_l(\cos\theta) - \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \\ &= \begin{cases} \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0,2,\dots}^{\infty} \frac{r^l}{a^{l+1}} P_l(\cos\theta) - \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} & \text{for } r < a \\ \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=2,4,\dots}^{\infty} \frac{a^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) & \text{for } r > a \end{cases} \end{aligned} \quad (3.115)$$

のように表すことができる。

$qa^2 = Q$  を一定にして  $a \rightarrow \infty$  にするときの極限を考えると、 $r < a$  のときの形を利用して、

$$\Phi \rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} (3\cos^2\theta - 1) \quad (3.116)$$

と表される。

(b)  $a < r(<b)$  でのポテンシャルは線形の重ね合わせとして

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) + \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=2,4,\dots}^{\infty} \frac{a^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) \quad (3.117)$$

と書くことができる。 $r = b$  の球面上でポテンシャルがゼロになるので、 $l$  が 0 あるいは奇数のときは  $A_l = 0$ 、 $l$  が 2 以上の偶数の場合は

$$A_l = -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a^l}{b^{2l+1}} \quad (3.118)$$

である。したがって、 $a < r(<b)$  で

$$\Phi(r, \theta) = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=2,4,\dots}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^l \left(\frac{b^l}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{l+1}}\right) P_l(\cos\theta) \quad (3.119)$$

と表される。一方、 $r < a$  では、

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) + \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=2,4,\dots}^{\infty} \frac{r^l}{a^{l+1}} P_l(\cos\theta) - \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (3.120)$$

と書くことができ、 $r = a$  で  $\Phi$  が連続である条件より

$$\frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=2,4,\dots}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^l \left(\frac{b^l}{a^{l+1}} - \frac{a^l}{b^{l+1}}\right) P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos\theta) + \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{a} P_l(\cos\theta) - \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \quad (3.121)$$

となる。これより、 $A_0$  についての条件は

$$A_0 - \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} = 0, \quad (3.122)$$

$l$  が奇数であるものに対して  $A_l = 0$  であり、 $l$  が 2 以上の偶数であるものに対しては

$$\frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{a}{b}\right)^l \left(\frac{b^l}{a^{l+1}} - \frac{a^l}{b^{l+1}}\right) = A_l a^l + \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \quad (3.123)$$

より

$$A_l = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^l} \left[ \left(\frac{a}{b}\right)^l \left(\frac{b^l}{a^{l+1}} - \frac{a^l}{b^{l+1}}\right) - \frac{1}{a} \right] \quad (3.124)$$

となるので、ポテンシャルは

$$\Phi(r, \theta) = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=2,4,\dots} \left(\frac{b^l}{a^{l+1}} - \frac{a^l}{b^{l+1}}\right) \frac{r^l}{b^l} P_l(\cos\theta) + \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) \quad (3.125)$$

である。

$qa^2 = Q$  を一定にして  $a \rightarrow 0$  とする極限では、 $r > a$  のときを考えれば良く、 $l = 2$  の項だけが残るのでポテンシャルは

$$\Phi(r, \theta) \rightarrow \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{r^2}{b^5}\right) P_2(\cos\theta) \quad (3.126)$$

と表される。なお、 $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$  である。

## Problem 3.8

接地された球内の直径に沿った、一様に帯電しているワイヤーによるポテンシャルの解として得られる (3.136) には混乱させるような側面がある。ワイヤーに十分近い (すなわち、 $\rho = r \sin \theta \ll b$  をみたと) ときにはポテンシャルは一様に帯電したワイヤーのもつポテンシャルに等しくなければならない。すなわち、 $\Phi = (Q/4\pi\epsilon_0 b) \log(b/\rho) + \Phi_0$  の形をもつ必要がある。解 (3.136) では明示的な形でこのふるまいをしない。

- (a) Legendre の微分方程式 (3.10) および、いくつかの部分積分を実行することで  $\log(\csc \theta)$  は球面調和関数によって適切な展開を実行することができ、(3.136) が次の形でも書き表されることを示す：

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} \left[ \log\left(\frac{2b}{r \sin \theta}\right) - 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4j+1}{2j(2j+1)} \left(\frac{r}{b}\right)^{2j} P_{2j}(\cos \theta) \right] \quad (3.127)$$

この表式では、ワイヤーの近くでの振る舞いが明らかである。また、定数項  $\Phi_0 = -Q/(4\pi\epsilon_0 b)$  の解釈を行え。なお、この表式では任意の  $r/b < 1$  に対して、すべての角度で Legendre 多項式は急速に収束する。

- (b) (3.38) の展開式を用いて

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sin \theta/2} + \frac{1}{\cos \theta/2} \right) = 2 \sum_{j=0}^{\infty} P_{2j}(\cos \theta) \quad (3.128)$$

を証明せよ。さらに、球内部表面における面電荷密度の表式 (3.137) が次のようにも表されることを示す：

$$\sigma(\theta) = -\frac{Q}{4\pi b^2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sin \theta/2} + \frac{1}{\cos \theta/2} \right) - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j+1} P_{2j}(\cos \theta) \right]. \quad (3.129)$$

この表式では  $\theta = 0, \pi$  における (可積分な) 特異性が明示的に示される。また、級数は  $\theta \rightarrow 0$  で  $\log(1/\theta)$  の補正項を与える。

なお、(3.136) と (3.137) は以下のとおりであった。

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} \left[ \log\left(\frac{b}{r}\right) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4j+1}{2j(2j+1)} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{b}\right)^{2j} \right\} P_{2j}(\cos \theta) \right] \quad (\text{J - 3.136})$$

$$\sigma(\theta) = -\frac{Q}{4\pi b^2} \left[ 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4j+1}{2j+1} P_{2j}(\cos \theta) \right] \quad (\text{J - 3.137})$$

- (a)  $\log(\csc \theta) = \log(1/\sin \theta)$  を Legendre 多項式で展開して、

$$\log\left(\frac{1}{\sin \theta}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(\cos \theta) \quad (3.130)$$

のように表すことができるとする。このとき、係数  $A_l$  は

$$A_l = \frac{2l+1}{2} \int_0^\pi \log\left(\frac{1}{\sin \theta}\right) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (3.131)$$

と表される。  $\cos \theta = x$  と置き換えて

$$A_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 dx \log\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) P_l(x) \quad (3.132)$$

計算を進める。

$l=0$  の場合は  $P_0(x) = 1$  で、(3.23) を用いて計算ができて

$$A_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx \log \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - \log 2 \quad (3.133)$$

となる。また、 $l \geq 1$  のときについては Legendre の微分方程式 (3.12) の両辺に  $\log(1/\sqrt{1-x^2})$  をかけて  $[-1, 1]$  で積分することで、

$$A_l = -\frac{2l+1}{2l(l+1)} \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_l}{dx} \right] \log\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = \frac{2l+1}{2l(l+1)} [1 + (-1)^l] \quad (3.134)$$

を得る。したがって、 $l = 2j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) の場合のみが non-zero となる。したがって、

$$\log\left(\frac{1}{\sin\theta}\right) = 1 - \log 2 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4j+1}{2j(2j+1)} P_{2j}(\cos\theta) \quad (3.135)$$

と級数展開することができる。これを用いて、(3.136) 式を表示すると、

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} \left[ \log\left(\frac{2b}{r\sin\theta}\right) - 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4j+1}{2j(2j+1)} \left(\frac{r}{b}\right)^{2j} P_{2j}(\cos\theta) \right] \quad (3.136)$$

となる。また、定数項  $\Phi_0 = -Q/(4\pi\epsilon_0 b)$  は導体球の球面上に誘導された電荷によるポテンシャルを表している。

(b) まず、(3.38) 式は、 $\gamma$  を  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$  のなす角として

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos\gamma) \quad (3.137)$$

という式であった。ここで、 $\gamma = \theta$ 、 $|\mathbf{x}| = |\mathbf{x}'| = 1$  とすると、

$$\frac{1}{2\cos\theta/2} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \quad (3.138)$$

が導かれる。 $\gamma = \pi - \theta$  とすると、

$$\frac{1}{2\sin\theta/2} = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l P_l(\cos\theta) \quad (3.139)$$

となるので、2 式 (3.138)、(3.139) の和を考えることで

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sin\theta/2} + \frac{1}{\cos\theta/2} \right) = 2 \sum_{j=0}^{\infty} P_{2j}(\cos\theta) \quad (3.140)$$

が得られる。

また、 $(4j+1)/(2j+1) = 2 - 1/(2j+1)$  であることに注意すれば

$$\sigma(\theta) = -\frac{Q}{4\pi b^2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sin\theta/2} + \frac{1}{\cos\theta/2} \right) - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j+1} P_{2j}(\cos\theta) \right] \quad (3.141)$$

も導かれる。

## Problem 3.9

半径  $b$  の中空の正円柱は  $z$  軸をその軸に持ち、その両端が  $z = 0$  と  $z = L$  に存在する。(両側の) 底面におけるポテンシャルはゼロに保たれており、円筒面におけるポテンシャルは  $V(\phi, z)$  で与えられるとする。円筒座標系において、適切な変数分離の手法を用いることにより、円筒内部の任意の点におけるポテンシャルの級数表示を求めよ。

円筒座標系においてポテンシャルが満たすべき表式は

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.142)$$

である。変数分離によって、これは次の 3 つの方程式に帰着される：

$$\begin{cases} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} - \left( k^2 + \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R = 0 \\ \frac{d^2 Q}{d\phi^2} + \nu^2 Q = 0 \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 Z = 0 \end{cases} \quad (3.143)$$

$Q$  については、 $\phi$  の 1 価性より  $\nu \in \mathbb{Z}$  として  $Q = e^{i\nu\phi}$  であり、 $Z$  については  $z = 0, L$  での境界条件より  $k = n\pi/L$  として、 $Z = \sin(n\pi z/L)$  である。ただし  $n = 1, 2, \dots$  である。また、 $R$  について一般解は

$$R(\rho) = C_{\nu k} I_{\nu}(k\rho) + D_{\nu k} K_{\nu}(k\rho) \quad (3.144)$$

である。ただし、 $I_{\nu}, K_{\nu}$  は第 1 種、第 2 種の変形ベッセル関数 (modified Bessel function of the 1st and 2nd kind) である。原点  $\rho = 0$  で有限の値をとることより、 $D_{\nu k} = 0$  であるから、境界条件を満たす  $\Phi$  は一般に

$$\Phi(\rho, \phi, z) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \sum_{n=1}^{\infty} C_{\nu n} I_{\nu} \left( \frac{n\pi}{L} \rho \right) e^{i\nu\phi} \sin \left( \frac{n\pi}{L} z \right) \quad (3.145)$$

とかける。

## Problem 3.10

問題 3.9 で考えた円筒に対して、その側面が 2 つの全く同じ半円筒から構成されているとする。またそのうちの一つの側面のポテンシャルが  $V$  であり、もう一つの円筒の側面のポテンシャルが  $-V$  であるとする。すなわち、

$$V(\phi, z) = \begin{cases} V & \text{for } -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2} \\ -V & \text{for } \frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad (3.146)$$

である。

- (a) 円筒内部におけるポテンシャルを決定せよ。
- (b)  $L \gg b$  を仮定して、 $z = L/2$  におけるポテンシャルを  $\rho, \phi$  の関数として決定せよ。さらに、問題 2.13 で考えた 2 次元系における問題と比較をせよ。

## Problem 3.11

任意の関数  $f(\rho)$  は、以下に示す同次 (homogeneous) 境界条件に基づいて、 $0 \leq \rho \leq a$  における変形ベッセル=フーリエ級数 (modified Bessel-Fourier series) で表すことができる:

$$\text{At } \rho = 0, \quad \rho J_\nu(k\rho) \frac{dJ_\nu(k\rho)}{d\rho} = 0 \quad (3.147)$$

$$\text{At } \rho = a, \quad \frac{d}{d\rho} \log[J_\nu(k\rho)] = -\frac{\lambda}{a} \quad (\lambda \in \mathbb{R}). \quad (3.148)$$

1つ目の条件は  $\nu$  を制限している。2つ目の条件は固有値  $k = y_{\nu n}/a$  を与えている。ここで  $y_{\nu n}$  は、 $x(dJ_\nu(x)/dx) + \lambda J_\nu(x) = 0$  の  $n$  番目の ( $x$  の) 正の解である。

- (a) 異なる固有値を持つベッセル関数が通常の意味で直交することを示せ。  
 (b) 規格化積分を求め、任意の関数  $f(\rho)$  がこの区間で変形ベッセル=フーリエ級数として次のように与えられることを示せ:

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_\nu\left(\frac{y_{\nu n} \rho}{a}\right). \quad (3.149)$$

ただし、係数  $A_n$  は次の式によって与えられる:

$$A_n = \frac{2}{a^2} \left[ \left( 1 - \frac{\nu^2}{y_{\nu n}^2} \right) J_\nu^2(y_{\nu n}) + \left( \frac{dJ_\nu(y_{\nu n})}{dy_{\nu n}} \right)^2 \right]^{-1} \int_0^a f(\rho) \rho J_\nu\left(\frac{y_{\nu n} \rho}{a}\right) d\rho. \quad (3.150)$$

この表式では  $\lambda$  への依存性は明らかではないが、 $[\cdot]$  の中身について、次のように表すこともできる:

$$\left( 1 - \frac{\nu^2}{y_{\nu n}^2} \right) J_\nu^2(y_{\nu n}) + \left( \frac{dJ_\nu(y_{\nu n})}{dy_{\nu n}} \right)^2 = \left( 1 + \frac{\lambda^2 - \nu^2}{y_{\nu n}^2} \right) J_\nu^2(y_{\nu n}) \quad (3.151)$$

$$= \left( 1 + \frac{y_{\nu n}^2 - \nu^2}{\lambda^2} \right) \left[ \frac{dJ_\nu(y_{\nu n})}{dy_{\nu n}} \right]^2 \quad (3.152)$$

$$= J_\nu^2(y_{\nu n}) - J_{\nu-1}(y_{\nu n}) J_{\nu+1}(y_{\nu n}). \quad (3.153)$$

このとき、 $\lambda \rightarrow \infty$  では (本文中の) (3.96) と (3.97) の結果を再現する。また、 $\lambda = 0$  とすると、また別の単純な表式で表すことができる。

**Problem 3.12**