Institut für Nachrichtentechnik

Prüfung

Digitale Signalverarbeitung

12.03.2015

Name : ______________________

Vorname : ______________________

Matrikelnummer : ______________________

Studiengang : ______________________

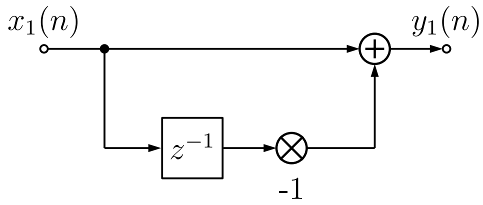
Klausurnummer : ______________________

Aufgabe	Punkte	
1	/14	
2	/11	
3	/14	
4	/11	
Σ	/50	
Note		

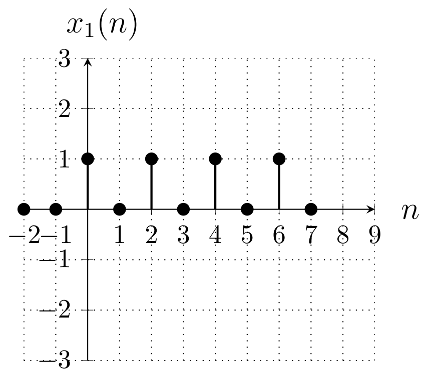
Aufgabe 1: Übertragungsfunktionen, Faltung und Analyse eines LTI-Systems

(14 Punkte)

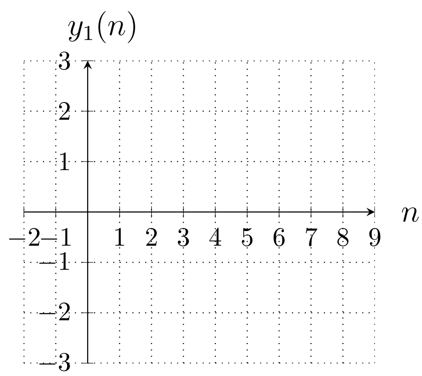
Gegeben sei das System $H_1(z)$ mit dem Eingangssignal $x_1(n)$ und dem Ausgangssignal $y_1(n)$, gemäß dem nachfolgend dargestellten Blockschaltbild:



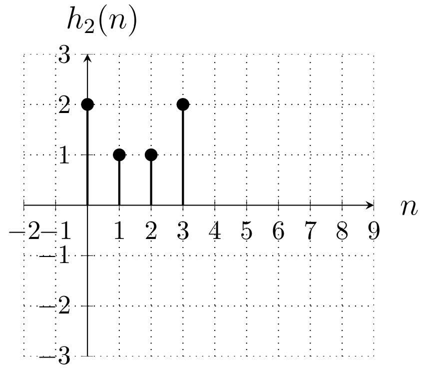
Das Eingangssignal $x_1(n)$ des Systems $H_1(z)$ sei wie folgt gegeben:



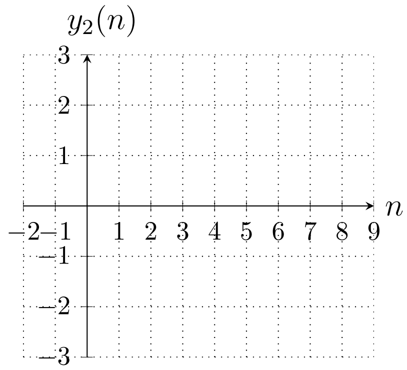
a) Bestimmen Sie das Ausgangssignal $y_1(n)$ für $0 \leq n \leq 5$ und skizzieren es in folgendes Diagramm:



Zusätzlich gegeben sei nun folgende Impulsantwort $h_2(n)$:



b) Berechnen Sie das Ergebnis $y_2(n)$ der linearen Faltung von $y_1(n)$ mit $h_2(n)$ und skizzieren Sie es in folgendes Diagramm:



c) Handelt es sich bei dem gegebenen Filter $h_2(n)$ um ein linearphasiges Filter? Begründen Sie Ihre Antwort!

d) Beschreibt das gegebene Filter $h_2(n)$ einen Hochpass? Begründen Sie Ihre Antwort!

e) Zeichnen Sie ein Blockdiagramm des FIR-Filters, das $h_2(n)$ beschreibt, in Transponierter Direktform II.

f) Berechnen Sie die z-Transformierte $H_2(z)$.

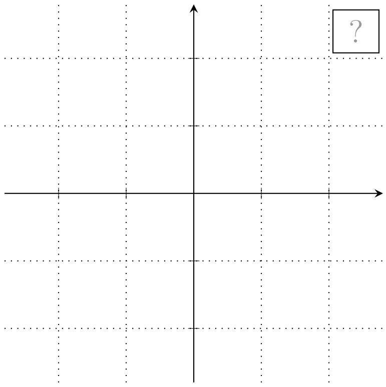
Interpretieren Sie nun das Faltungsergebnis $y_2(n)$ als Impulsantwort $h_3(n)$ eines LTI-Systems.

g) Welche Filtercharakteristik hat das beschriebene Filter $h_3(n)$ (Hochpass, Tiefpass, Bandpass, Bandsperre)? Begründen Sie Ihre Antwort!

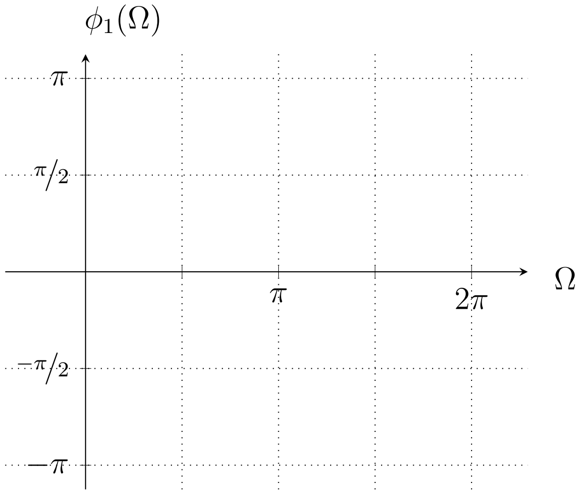
h) Geben Sie die Filterordnung N_b des Filters $h_3(n)$ an.

i) Berechnen Sie nun die Transferfunktion $H_1(z)$, die das System aus dem gegebenen Blockschaltbild beschreibt.

j) Zeichnen Sie die Pol- und Nullstellen von $H_1(z)$ in das untenstehende Diagramm ein. Achten Sie auf eine vollständige Beschriftung des Diagramms!



k) Bestimmen Sie den Phasengang $\phi_1(\Omega)$ von $H_1(e^{j\Omega})$ und skizzieren Sie diesen in das nachfolgende Diagramm.



Aufgabe 2: Zerlegung eines LTI-Systems

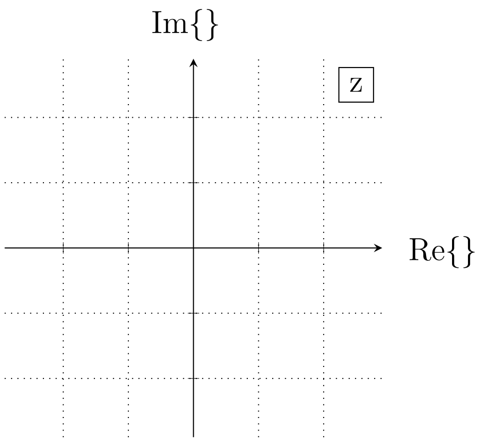
(11 Punkte)

Gegeben sei ein kausales LTI-System mit der Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{(6 - 2z^{-2})(3 - 27z^{-2})}{(1 + 0{,}9801z^{-2})}$$

a) Berechnen Sie alle Pol- und Nullstellen des Systems und geben Sie $H(z)$ in faktorisierter Form an.

b) Tragen Sie alle Pol- und Nullstellen des Systems in das nachfolgende Diagramm ein und schraffieren Sie das Konvergenzgebiet (ROC). Geben Sie auch die Lage der Pol- und Nullstellen, sowie das ROC, exakt an!



c) Handelt es sich um ein stabiles System? Begründen Sie Ihre Antwort!

d) Führen Sie eine Zerlegung des Systems in ein minimalphasiges System $H_{\min}(z)$ und ein Allpass-System $H_{\mathrm{AP}}(z)$ durch, so dass $H(z) = H_{\min}(z) \cdot H_{\mathrm{AP}}(z)$ und $|H_{\mathrm{AP}}(z)| = 1$ gilt. Geben Sie $H_{\min}(z)$ und $H_{\mathrm{AP}}(z)$ an!

e) Ist das System $H_{\min}(z)$ invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3: Filterentwurf

(14 Punkte)

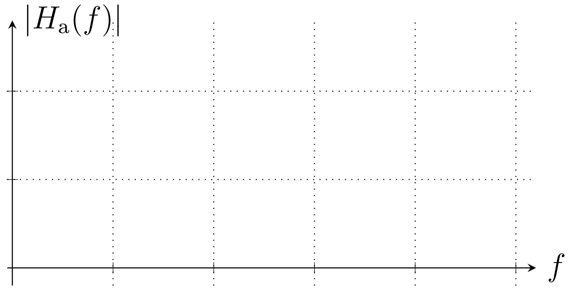
Es soll ein zeitdiskretes IIR-Filter nach dem Butterworth-Entwurf mit folgenden Eigenschaften entworfen werden:

$$\Omega_\mathrm{p} = 0{,}25\pi \qquad \Omega_\mathrm{st} = 0{,}4\pi \qquad 1 - \delta_\mathrm{p} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \qquad d_\mathrm{st} = 12\ \mathrm{dB} \qquad f_\mathrm{s} = 16000\mathrm{Hz}.$$

Zum Entwurf des Filters soll nun die zeitdiskrete Spezifikation mittels der bilinearen Transformation mit $\Omega' = \Omega_\mathrm{st}$ und $\omega' = \omega_\mathrm{st} = \frac{\Omega_\mathrm{st}}{T} = \Omega_\mathrm{st} \cdot f_\mathrm{s}$ in den analogen Bereich transformiert werden.

a) Bestimmen Sie hierfür den Parameter v der bilinearen Transformation und die zeitkontinuierlichen Kreisfrequenzen für die Durchlassbereichsgrenze ω_p, die Grenzfrequenz ω_c, die Sperrbereichsgrenze ω_st und den linearen Wert δ_st!

b) Vervollständigen Sie das untenstehende Toleranzschema im analogen Bereich mit allen notwendigen Parametern und Sperrbereichen der Filterspezifikation.



c) Bestimmen Sie die notwendige ganzzahlige Filterordnung N exakt.

d) Bestimmen Sie die Grenzfrequenz f_c des Filters für den Wert der Filterordnung N aus Aufgabenteil c).

e) Geben Sie die Lage aller Pole in der s-Ebene sowie der z-Ebene für das analoge, zugrundeliegende Filter an.

f) Geben Sie die Lage aller Nullstellen in der z-Ebene an.

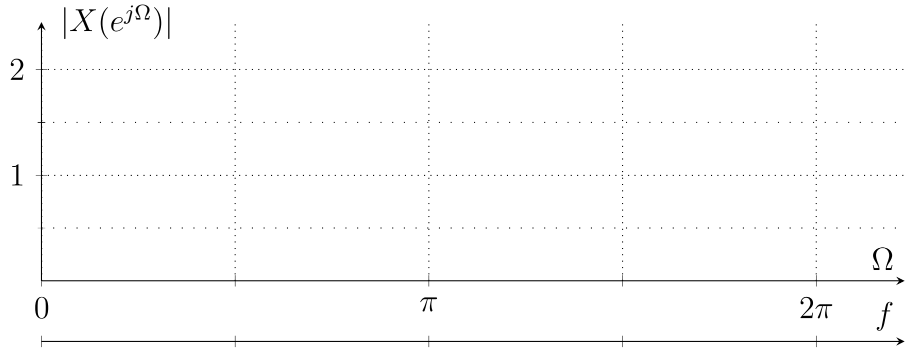
Aufgabe 4: Abtastratenwandlung

(11 Punkte)

Für ein Audiosystem soll ein reellwertiges Signal mit einer Abtastrate von $f_s = 9{,}6\,\text{kHz}$ auf $f_s'' = 16\,\text{kHz}$ umgewandelt werden.
Das Amplitudenspektrum des Signals ist im Intervall $0 \leq \Omega \leq \pi$ durch folgende Funktion gegeben:

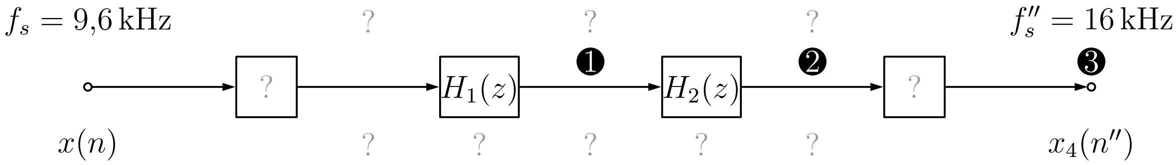
$$|X(e^{j\Omega})| = \begin{cases} \frac{4\Omega}{\pi} & \text{für } 0 \leq \Omega \leq \frac{\pi}{2} \\ 2 & \text{für } \frac{\pi}{2} < \Omega \leq \frac{3\pi}{4} \\ 0 & \text{für } \frac{3\pi}{4} < \Omega \leq \pi. \end{cases}$$

a) Zeichnen Sie $|X(e^{j\Omega})|$ in das folgende Diagramm ein. Geben Sie entscheidende Frequenzen mit Zahlenwerten an und nutzen dabei eine doppelte Frequenzachse mit der normierten Kreisfrequenz Ω und der Frequenz f. Achten Sie auf eine vollständige Achsenbeschriftung!



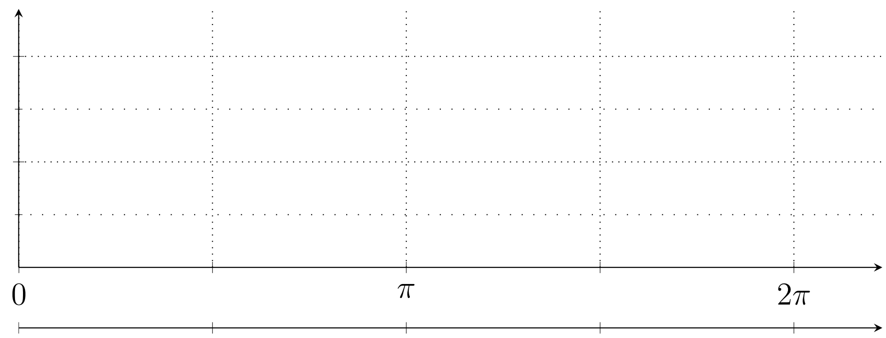
b) Bestimmen Sie das benötigte, teilerfremde Abtastratenverhältnis $r = \frac{p}{q}$.

c) Vervollständigen Sie das nachfolgende Blockschaltbild, um die gewünschte Abtastratenwandlung zu erreichen. Beschriften Sie alle Signale, Abtastraten, Blöcke und ggfs. benötigte Grenzfrequenzen. Nutzen Sie alle gezeigten Blöcke und achten Sie auf die korrekte Verwendung von gestrichenen Größen nach einem Wechsel der Abtastrate!

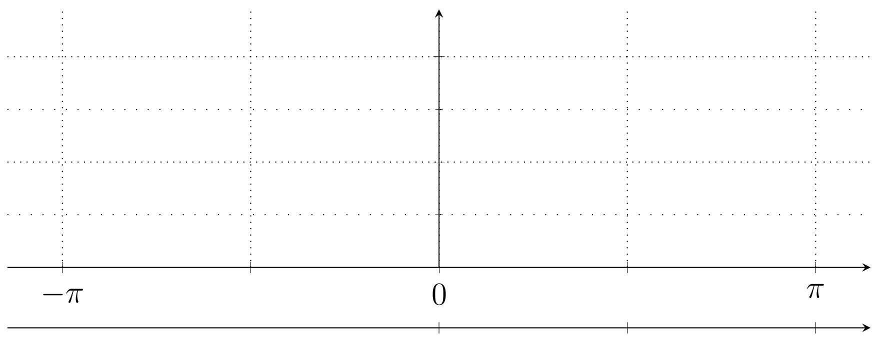


d) Zeichnen Sie die Betragsspektren der Signale an den markierten Stellen (❶, ❷ und ❸) aus Aufgabenteil c) in die folgenden Diagramme ein. Geben Sie entscheidende Frequenzen mit Zahlenwerten an und nutzen dabei eine doppelte Frequenzachse mit der normierten Kreisfrequenz Ω und der Frequenz f. Achten Sie auf ggfs. gestrichene Bezeichner und auf eine vollständige Achsenbeschriftung!

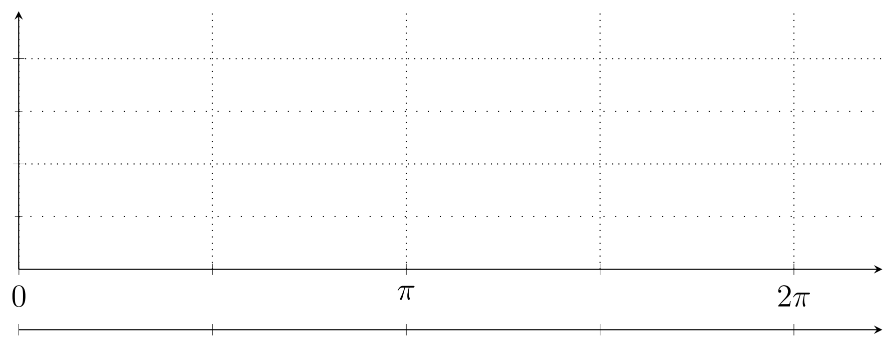
❶



❷



❸



e) Das gegebene Blockschaltbild aus Aufgabenteil c) kann durch Zusammenfassen der beiden Interpolationsfilter $H_1(z)$ und $H_2(z)$ zu $H(z)$ vereinfacht werden. Was für ein Filter stellt $H(z)$ dar? Geben Sie alle wichtigen Parameter an!

f) Bei welcher minimalen Grenzfrequenz können die Interpolationsfilter $H_1(z)$ und $H_2(z)$ betrieben werden, ohne dass das Signal beschädigt wird?

g) Die Impulsantwort des zusammengefassten Filters $H(z)$ hat die Länge N. Wie lang ist die Impulsantwort eines Teilfilters in einer effizienten Polyphasenrealisierung?