

Formelsammlung

Signale und Systeme

Wintersemester 2023/2024

Hinweis: Diese Formelsammlung basiert auf der Formelsammlung zum Fach „Systemtheorie“ an der TU Dresden.

Inhaltsverzeichnis

1	Fourier-Transformation	2
1.1	Rechenregeln der Fourier-Transformation	2
1.2	Korrespondenzen der Fourier-Transformation	3
2	Laplace-Transformation	4
2.1	Rechenregeln der Laplace-Transformation	4
2.2	Korrespondenzen der Laplace-Transformation	5

1 Fourier-Transformation

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

1.1 Rechenregeln der Fourier-Transformation

Nr.	$x(t)$	$X(\omega)$	Bemerkungen
1	$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$	$\alpha X_1(\omega) + \beta X_2(\omega)$	Linearität
2	$x(t - \tau)$	$e^{-j\omega\tau} X(\omega)$	Verschiebungssatz (Zeitverschiebung)
3	$x(t)e^{j\omega_0 t}$	$X(\omega - \omega_0)$	Verschiebungssatz (Frequenzverschiebung)
4	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$	Ähnlichkeitssatz ($a \neq 0$)
5	$\dot{x}(t)$	$j\omega X(\omega)$	Differentiationsregel
6	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} X(\omega)$	Integrationsregel *)
7	$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau) d\tau$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$	Faltungssatz (Faltung im Zeitbereich)
8	$x_1(t)x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(u)X_2(\omega - u) du$	Faltungssatz (Faltung im Frequenzber.)
9	Gilt die Korrespondenz $x(t) \circ\bullet X(\omega)$, so gilt auch die Korrespondenz $X(t) \circ\bullet 2\pi x(-\omega)$.		Vertauschungssatz

*) Man überprüfe, ob die Fourier-Transformierte des Integrals auf der linken Seite wirklich existiert!

1.2 Korrespondenzen der Fourier-Transformation

Nr.	$x(t)$	$X(\omega)$
1	$\delta(t)$	1
2	$\mathbf{1}(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
3	$\text{Rect}\left(\frac{t}{2\tau}\right) = \begin{cases} 1 & -\tau \leq t \leq \tau \\ 0 & t < -\tau \vee t > \tau \end{cases}$	$2\tau \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau} = 2\tau \text{si}(\omega\tau)$
4	$\frac{\omega_0}{\pi} \text{si}(\omega_0 t) = \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t}$	$\text{Rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right) = \begin{cases} 1 & -\omega_0 \leq \omega \leq \omega_0 \\ 0 & \omega < -\omega_0 \vee \omega > \omega_0 \end{cases} \quad (\omega_0 \neq 0)$
5	$\begin{cases} e^{-at} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{j\omega + a} \quad (a > 0)$
6	$e^{-a t }$	$\frac{2a}{\omega^2 + a^2} \quad (a > 0)$
7	$\frac{1}{t^2 + a^2}$	$\frac{\pi}{a} e^{-a \omega } \quad (a > 0)$
8	e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \quad (a > 0)$
9	$(1 + a t)e^{-a t }$	$\frac{4a^3}{(\omega^2 + a^2)^2} \quad (a > 0)$
10	$\left(1 + a t + \frac{1}{3}(at)^2\right) e^{-a t }$	$\frac{16a^5}{3(\omega^2 + a^2)^3} \quad (a > 0)$
11	$e^{-a t } \cos(\beta t)$	$\frac{2a(\omega^2 + a^2 + \beta^2)}{(\omega^2 - a^2 - \beta^2)^2 + 4a^2\omega^2} \quad (a > 0)$
12	$e^{-a t } \left(\cos(\beta t) + \frac{a}{\beta} \sin(\beta t) \right)$	$\frac{4a(a^2 + \beta^2)}{((\omega - \beta)^2 + a^2)((\omega + \beta)^2 + a^2)} \quad (a > 0)$
13	$\begin{cases} a \left(1 - \frac{ t }{\tau}\right) & -\tau < t < \tau \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$\frac{4a}{\omega^2\tau} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = a\tau \text{si}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \quad (\tau \neq 0)$
14	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$
15	$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0))$

2 Laplace-Transformation

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} X(s)e^{st} ds$$

2.1 Rechenregeln der Laplace-Transformation

Nr.	$x(t)$	$X(s)$	Bemerkungen
1	$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$	$\alpha X_1(s) + \beta X_2(s)$	Linearität
2	$x(t - \tau) \quad (\tau > 0)$	$e^{-s\tau} X(s)$	Verschiebungssatz
3	$x(at)$	$\frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$	Ähnlichkeitssatz $(a > 0)$
4	$\dot{x}(t)$	$sX(s) - x(+0)$	Differentiationsregel
5	$\int_0^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$	Integrationsregel
6	$e^{-at} x(t)$	$X(s + a)$	Dämpfungssatz
7	$\int_0^t x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau$	$X_1(s) X_2(s)$	Faltungssatz
8	$x(t) = \sum_i \text{Res}_{s=s_i} [X(s)e^{st}]$		Residuenformel,

wobei

$$\text{Res}_{s=s_i} [X(s)e^{st}] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} [X(s)e^{st}(s - s_i)^m]$$

mit s_i : m -facher Pol von $X(s)$

und $X(s)$ rational mit $X(\infty) \rightarrow 0$.

$$u_{(s)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-2s} = \frac{1}{s} (1 - e^{-2s}) = \frac{1}{j\omega} (1 - \cos 2\omega + j \sin 2\omega)$$

$$= \frac{1 - \cos 2\omega + j \sin 2\omega}{j\omega}$$

$$= \frac{1 - 2\cos 2\omega + \cos^2 2\omega + \sin^2 2\omega}{\omega}$$

$$= \frac{2 - 2 \cos 2\omega}{\omega}$$

2.2 Korrespondenzen der Laplace-Transformation

Nr.	$x(t)$	$X(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$t \mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4	$e^{at} \mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s-a}$
5	$t e^{at} \mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{(s-a)^2}$
6	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at} \mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{(s-a)^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$
7	$\cos at \mathbf{1}(t)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
8	$\sin at \mathbf{1}(t)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
9	$\cosh at \mathbf{1}(t)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
10	$\sinh at \mathbf{1}(t)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
11	$e^{at} \cos \beta t \mathbf{1}(t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \beta^2}$
12	$e^{at} \sin \beta t \mathbf{1}(t)$	$\frac{\beta}{(s-a)^2 + \beta^2}$
13	$e^{at} \left(\cos \beta t + \frac{a}{\beta} \sin \beta t \right) \mathbf{1}(t)$	$\frac{s}{(s-a)^2 + \beta^2}$
14	$\cos^2 at \mathbf{1}(t)$	$\frac{s^2 + 2a^2}{s(s^2 + 4a^2)}$
15	$\sin^2 at \mathbf{1}(t)$	$\frac{2a^2}{s(s^2 + 4a^2)}$
16	$\cos(at+b) \mathbf{1}(t)$	$\frac{s \cos b - a \sin b}{s^2 + a^2}$
17	$\sin(at+b) \mathbf{1}(t)$	$\frac{s \sin b + a \cos b}{s^2 + a^2}$
18	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$
19	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s\sqrt{s}}$