I. Grundlagen, Konventionen und Notationen

Dieses Kapitel stellt eine Übersicht über in der Mathematik häufig gebrauchte Begriffe, Konventionen und Notationen dar. Der Inhalt wurde schon im vergangenen Wintersemester in der Vorlesung *Lineare Algebra für Elektrotechnik* behandelt und wird hier nur für die Studienanfänger des laufenden Sommersemesters vorgestellt. In der Vorlesung wird dieses Kapitel nicht behandelt, und Leser:innen sind gehalten, sich den Stoff selbst anzueignen.

I.1. Quantoren und Logik

- Eine Aussage im mathematischen Sinne ist ein Wortgebilde, dem man entweder den Wert <u>wahr</u> (w) oder <u>falsch</u> (f) zuordnen kann.
  - „*Es regnet jetzt*“, „*Braunschweig ist die schönste Stadt Deutschlands*“ oder „$1 \cdot 1 = 4$“ sind jeweils Aussagen,
  - „*Grün*“, „*Fünfzehn Mann auf des toten Mannes Kiste -Johoo, johoo, johoo- und 'ne Buddel mit Rum!*“ oder „$15x + 7y$“ sind jeweils keine Aussagen.

  Dabei geht es nur um die prinzipielle Zuordnung von w und f und weder um die praktische Nachprüfbarkeit der Aussage als Fakt noch um deren Objektivität noch um die Frage, ob sie eine Wertung beinhaltet.
- Das Zeichen $=$ bedeutet Gleichheit und ist in seiner Bedeutung evident. Das Zeichen $:=$ bedeutet, dass die linke Seite durch die rechte definiert wird, das Zeichen $=:$ bedeutet, dass die linke Seite durch die rechte (im Sinn einer Namensgebung) abgekürzt wird.

  <u>Beispiel:</u>

  $$a := f(0), \quad f(1) =: b. \tag{I.1}$$

  bedeutet

  $$\text{a wird als Wert der Funktion f bei 0 definiert, der Wert der Funktion f bei 1 wird hingegen mit b bezeichnet.} \tag{I.2}$$

- Das Zeichen $\forall$ bedeutet **für alle** (umgedrehtes A wie <u>A</u>lle).

Beispiel:

$$\forall\, x, y > 0 : \quad x \cdot y > 0 \tag{I.3}$$

bedeutet

$$\textit{Für alle } x > 0 \textit{ und } y > 0 \textit{ gilt } x \cdot y > 0. \tag{I.4}$$

- Das Zeichen $\exists$ bedeutet **es existiert** (umgedrehtes E wie Existiert).

  Beispiel:

$$\forall\, x > 0\ \exists\, y < 0 : \quad x + y \;=\; 0 \tag{I.5}$$

bedeutet

Für jedes x größer Null existiert ein y kleiner Null, so dass $x + y = 0$ gilt. (Das gesuchte y ist natürlich $-x$.) (I.6)

- Man beachte, dass Quantoren im Allgemeinen nicht vertauscht werden dürfen. Dazu betrachten wir folgende Beispiele:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, m \in \mathbb{N} : \quad m > n$$

bedeutet

Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine natürliche Zahl m so, dass m größer als n ist. (Diese Aussage ist wahr). (I.7)

$$\exists\, m \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N} : \quad m > n$$

bedeutet

Es gibt eine natürliche Zahl m, so dass alle natürlichen Zahlen n kleiner sind als m. (Diese Aussage ist falsch). (I.8)

- Das Zeichen $\Rightarrow$ bedeutet **impliziert**.

  Beispiel:

$$A \;\Rightarrow\; B \tag{I.9}$$

bedeutet

Aussage A impliziert Aussage B, d.h.: Ist A wahr, so ist auch B wahr. (I.10)

- Wie oben gesagt, kann eine mathematische Aussage A ein Satz, eine Bedingung oder auch eine Behauptung sein. In jedem Fall ist sie aber wahr oder falsch, $A \in \{w, f\}$.

  Beispiel:

$$A \;:=\; \textit{Es regnet.}\,, \quad B \;:=\; \textit{Die Erde wird nass.} \tag{I.11}$$

Dann gilt die Implikation $A \Rightarrow B$, was gelesen werden muss als

$$(A = w) \quad \Rightarrow \quad (B = w).$$

Dieses Beispiel wirkt etwas künstlich. Darum geben wir ein weiteres Beispiel, in dem die Aussagen von Platzhaltern abhängen:

$$A(x) := \begin{cases} w, \text{ falls } x \geq 5, \\ f, \text{ falls } x < 5, \end{cases} \quad B(y) := \begin{cases} w, \text{ falls } y \geq 7, \\ f, \text{ falls } y < 7, \end{cases} \quad C(z) := \begin{cases} w, \text{ falls } z \geq 33, \\ f, \text{ falls } z < 33, \end{cases}$$

dann gilt die folgende Implikation (s. (I.18)–(I.19)):

$$A(x) \wedge B(y) \;\Rightarrow\; C(x \cdot y). \tag{I.12}$$

- Das Zeichen $\Longleftrightarrow$ bedeutet **ist gleichwertig mit** oder **ist äquivalent zu**, d.h.

$$A \iff B \tag{I.13}$$

bedeutet

A ist genau dann wahr, wenn B wahr ist. (I.14)

- Das Zeichen $\vee$ ist ein logisches **oder**, d.h.

$$A \;\vee\; B \tag{I.15}$$

ist wahr, falls A oder B oder beide wahr sind und falsch, falls A und (gleichzeitig auch) B falsch sind. (I.16)

Beispiel:

$$\{\, x \cdot y = 0 \,\} \iff \big\{\, (x = 0) \;\vee\; (y = 0) \,\big\}. \tag{I.17}$$

- Das Zeichen $\wedge$ ist ein logisches **und**, d.h.

$$A \;\wedge\; B \tag{I.18}$$

ist wahr, falls A und (gleichzeitig auch) B wahr sind und sonst falsch. (I.19)

Beispiel 1:

$$\big\{\, (x = 0) \;\wedge\; (y = 0) \,\big\} \;\Rightarrow\; \{\, x + y = 0 \,\}. \tag{I.20}$$

Beispiel 2:

$$A \iff B \quad \text{ist gleichwertig mit} \quad (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \tag{I.21}$$

d.h. (um die Verwirrung komplett zu machen)

$$\Big(A \iff B\Big) \iff \Big[\big(A \Rightarrow B\big) \wedge \big(B \Rightarrow A\big)\Big]. \tag{I.22}$$

- Die logische **Negation** wird mit $\neg$ bezeichnet, also

$$\neg\, A \tag{I.23}$$

ist wahr, falls A falsch ist und falsch, falls A wahr ist. (I.24)

- Eine wichtige Beobachtung ist die *Kontraposition*, d.h. dass

$$(A \Rightarrow B) \quad \Longleftrightarrow \quad (\neg B \Rightarrow \neg A). \tag{I.25}$$

Dies versteht man intuitiv sofort an folgendem Beispiel:

Es regnet. $\Rightarrow$ *Die Erde wird nass.*

ist gleichwertig mit

Die Erde ist nicht nass. $\Rightarrow$ *Es regnet nicht.* (I.26)

- Es ist nützlich, sich die Werte der Aussagen A, B, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$, $A \vee B$, $A \wedge B$ und $\neg A$, in einer Wertetabelle zu verdeutlichen:

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\neg A$
w	w	w	w	w	w	f
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	f	w
f	f	w	w	f	f	w

(I.27)

Wir sehen, dass $[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [(\neg A) \vee B] \Leftrightarrow [\neg(A \wedge (\neg B))]$ gilt, da die Werte von $A \Rightarrow B$ und $(\neg A) \vee B$ für alle vier möglichen Werte des Paars $(A, B) \in \{(w,w), (w,f), (f,w), (f,f)\}$ übereinstimmen.

- Für logische Verknüpfungen gelten

das Kommutativgesetz: (I.28)

$$\begin{aligned} A \vee B &= B \vee A, \\ A \wedge B &= B \wedge A, \end{aligned}$$

das Assoziativgesetz: (I.29)

$$\begin{aligned} A \vee \big(B \vee C\big) &= \big(A \vee B\big) \vee C, \\ A \wedge \big(B \wedge C\big) &= \big(A \wedge B\big) \wedge C, \end{aligned}$$

das Distributivgesetz: (I.30)

$$\begin{aligned} A \vee \big(B \wedge C\big) &= \big(A \vee B\big) \wedge \big(A \vee C\big), \\ A \wedge \big(B \vee C\big) &= \big(A \wedge B\big) \vee \big(A \wedge C\big). \end{aligned}$$

sowie: (I.31)

$$\begin{aligned} \neg\,(A \vee B) &= (\neg A) \wedge (\neg B), \\ \neg\,(A \wedge B) &= (\neg A) \vee (\neg B). \end{aligned}$$

I.2. Mengen

Mengen sind (endliche, abzählbare oder sogar überabzählbare) Sammlungen mathematischer Objekte.

- $\{1,5,9\}$ ist die Menge, die die Zahlen 1,5 und 9 enthält,
- $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$ enthält alle natürlichen Zahlen, die kleiner als 5 sind (also $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\} = \{1,2,3,4\}$).
- Jedes Element einer Menge wird nur einmal aufgeführt, beispielsweise ist $\{1,5,9,9,5\} = \{1,5,9\}$.
- $x \in M$ heißt x **ist Element der Menge** M.
- $x \notin M$ heißt x **ist nicht in der Menge** M **enthalten**.
- Die **Anzahl der Elemente** einer Menge M wird mit $|M|$ oder auch $\#[M]$ bezeichnet. Beispielsweise ist $|\{1,5,9\}| = 3$.
- $A \subseteq B$ bedeutet, dass die Menge A in der Menge B enthalten ist, also dass A **Teilmenge** von B ist. Umgekehrt heißt $A \supseteq B$, dass die Menge A die Menge B enthält:

$$\big(A \subseteq B\big) \iff \big(B \supseteq A\big) \iff (x \in A \Rightarrow x \in B). \tag{I.32}$$

- $\emptyset = \{\ \}$ ist die leere Menge, die kein Element enthält.
- Gleichheit von Mengen bedeutet elementweise Übereinstimmung,

$$\big(A = B\big) \iff \big(x \in A \iff x \in B\big). \tag{I.33}$$

- $\{x \mid E(x)\}$ und $\{x\}_{E(x)}$ bezeichnen die *Menge aller x, die die Eigenschaft $E(x)$ besitzen.*

  Beispiel:

$$U \;:=\; \{n \mid \exists\, k \in \mathbb{N}:\; n = 2k-1\} \tag{I.34}$$

  ist

$$\textit{die Menge aller } n \textit{, für die es eine natürliche Zahl } k \textit{ gibt, so dass } n = 2k-1 \textit{ gilt}, \tag{I.35}$$

  d.h.

$$U \;=\; \{2k-1 \mid k \in \mathbb{N}\} \;=\; 2\mathbb{N}-1 \tag{I.36}$$

  ist die Menge aller ungeraden Zahlen.

  Die Eigenschaft $E(x)$ kann auch durch eine **Indexmenge** $\mathcal{I}$ charakterisiert sein. Beispiel: Mit $\mathcal{I} := \{1,3,5,7\}$ ist

$$\{x_i \mid i \in \mathcal{I}\} \;=\; \{x_i\}_{i\in\mathcal{I}} \;=\; \{x_1, x_3, x_5, x_7\}. \tag{I.37}$$

- Haben wir mehrere Mengen, etwa A_1, A_2 und A_3, so bildet $M = \{A_1, A_2, A_3\}$ wieder eine Menge – eine Menge von Mengen. Dies kann man so fortsetzen und kommt zu Mengen von Mengen von Mengen u.s.w. Der Übersichtlichkeit halber hat sich deshalb im Sprachgebrauch bewährt, die übergeordnete Menge M als **Familie, System, Kollektion** oder auch **Klasse** zu bezeichnen. Somit ist M *die Familie der Mengen A_1, A_2 und A_3.*

- Die Familie aller Teilmengen einer Menge M bezeichnet man als ihre **Potenzmenge** $\mathfrak{P}(M)$. Dabei zählen auch die leere Menge $\emptyset$ und M selbst als Teilmenge von M. Für $|M| < \infty$ ist $|\mathfrak{P}(M)| = 2^{|\{M\}|}$. (Warum?)
  Beispiel:
  $$M := \{1,2,3\} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{P}(M) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\big\}. \tag{I.38}$$

- Die **Vereinigung**, der **Durchschnitt** und die **Differenz** zweier Mengen A, B werden wie folgt bezeichnet:
  $$\text{Vereinigung:} \quad A \cup B \;=\; \{x \,|\, (x \in A) \vee (x \in B)\}, \tag{I.39}$$
  $$\text{Durchschnitt:} \quad A \cap B \;=\; \{x \,|\, (x \in A) \wedge (x \in B)\}, \tag{I.40}$$
  $$\text{Differenz:} \quad A \setminus B \;=\; \{x \,|\, (x \in A) \wedge (x \notin B)\}. \tag{I.41}$$

- Ist A eine Teilmenge einer **Obermenge** M, d.h. $A \subseteq M$, so bezeichnet
  $$A^c \;:=\; M \setminus A \tag{I.42}$$
  das Komplement von A bezüglich M. (Vorsicht, der Notation A^c für das Komplement sieht man die Grundmenge M, auf die sie sich bezieht nicht mehr an!)
  Beispiel: Seien $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4,5\}$, $M = \{1,2,\ldots,10\}$. Dann sind
  $$A \cup B \;=\; \{1,2,3,4,5\}, \qquad A \cap B = \{3\}, \tag{I.43}$$
  $$A \setminus B \;=\; \{1,2\}, \qquad A^c = \{4,5,6,7,8,9,10\}. \tag{I.44}$$

- Vereinigungen und Durchschnitte können auch über Familien $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ von Mengen A_i gebildet werden, wobei i eine Indexmenge $\mathcal{I}$ durchläuft.
  Beispiel:
  $$\bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i \;:=\; \big\{x \;\big|\; \exists\, i \in \mathcal{I}:\; x \in A_i\big\}, \tag{I.45}$$
  ist
  die Vereinigung der Mengen A_i, d.h. die x, die in (mindestens) einer Menge A_i mit $i \in \mathcal{I}$ enthalten sind; (I.46)
  $$\bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i \;:=\; \big\{x \;\big|\; \forall\, i \in \mathcal{I}:\; x \in A_i\big\}, \tag{I.47}$$
  ist
  der Durchschnitt der Mengen A_i, d.h. die x, die in allen Mengen A_i mit $i \in \mathcal{I}$ enthalten sind. (I.48)

- Für Vereinigung, Durchschnitt und Komplementbildung von Mengen gelten Kommutativ-, Assoziativ-, und Distributionsgesetze, analog zu den entsprechenden Gesetzen für die logischen Verknüpfungen $\vee$, $\wedge$ und $\neg$.

- Sind A und B zwei nichtleere Mengen, so bezeichnet

$$A \times B \;=\; \big\{(a,b) \;\big|\; a \in A\,,\; b \in B\big\} \tag{I.49}$$

das kartesische Produkt von A und B, d.h. die Menge aller Paare (a, b), die sich mit Elementen a aus A und b aus B bilden lässt. (I.50)

Allgemeiner ist

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \big\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \;\big|\; a_1 \in A_1,\; \ldots,\; a_n \in A_n\big\} \tag{I.51}$$

das (n-fache) kartesische Produkt der Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$, d.h. die Menge aller *n-Tupel* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, die sich mit Elementen a_i aus A_i, für $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ bilden lässt. (I.52)

Vorsicht! Oft wird $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ mit $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ verwechselt. Der Unterschied wird aber schon deutlich, wenn man die Zahl der Elemente für $A := A_1 = A_2$ betrachtet:

$$\#\big[A \times A\big] = \big(\#[A]\big)^2, \tag{I.53}$$

$$\#\big[A \cup A\big] = \#[A]. \tag{I.54}$$

- Sind $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Zahlen, so bezeichnen wir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als **Zahlenfolge**. Man beachte auch hier den Unterschied zwischen dem Tupel $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und der Menge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. So ist beispielsweise für die Zahlenfolge $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 1$, die konstant gleich eins ist,

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \;=\; (1, 1, 1, \ldots), \tag{I.55}$$

aber

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \;=\; \{1, 1, 1, \ldots\} \;=\; \{1\}. \tag{I.56}$$

- Häufig wiederkehrende Mengen haben in der Mathematik eine eigene Bezeichnung bekommen. Wir listen die Symbole für die wichtigsten Zahlenmengen auf:

$$\text{die } \textbf{natürlichen Zahlen:} \quad \mathbb{N} \;:=\; \{1, 2, 3, \ldots\}, \tag{I.57}$$

$$\text{die } \textbf{natürlichen Zahlen mit Null:} \quad \mathbb{N}_0 \;:=\; \{0, 1, 2, 3, \ldots\}, \tag{I.58}$$

$$\text{die } \textbf{ganzen Zahlen:} \quad \mathbb{Z} \;:=\; \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}, \tag{I.59}$$

$$\text{die } \textbf{rationalen Zahlen:} \quad \mathbb{Q} \;:=\; \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z},\; q \in \mathbb{N}\right\}, \tag{I.60}$$

$$\text{die } \textbf{reellen Zahlen:} \quad \mathbb{R} \tag{I.61}$$

$$\text{die } \textbf{komplexen Zahlen:} \quad \mathbb{C} \tag{I.62}$$

Die präzise Definition der reellen oder gar der komplexen Zahlen geht über den üblichen Schulstoff hinaus. Wir werden dies in den kommenden Wochen in der Vorlesung behandeln.

- Weiterhin führen wir für $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$ noch die Bezeichnung

$$\mathbb{Z}_m^n \;:=\; \{m, m+1, m+2, \ldots, n\} \tag{I.63}$$

für die natürlichen Zahlen zwischen m und n ein.

I.3. Ordnungsrelationen

Die Zeichen $<, >, \leq, \geq$ haben wir in verschiedenen Beispielen in den vorigen Abschnitten wie selbstverständlich benutzt.

- $a \leq b$ heißt a **ist kleiner als oder gleich** b.
- $a \geq b$ heißt a **ist größer als oder gleich** b.
- $a < b$ heißt a **ist kleiner als** b. Zur Unterscheidung dieser Relation von $a \leq b$ sagt man auch a **ist echt kleiner als** b oder a **ist strikt kleiner als** b.
- $a > b$ heißt a **ist (echt, strikt) größer als** b.
- Offenbar gilt

$$a < b \iff b > a, \tag{I.64}$$

$$a \leq b \iff (a < b) \vee (a = b), \tag{I.65}$$

$$a \geq b \iff (a > b) \vee (a = b). \tag{I.66}$$

Die Ordnungsrelation $<$ lässt sich aber auch auf andere Mengen, als den uns vertrauten Zahlen übertragen. Deshalb ist es zweckmäßig, den Begriff einer geordneten Menge präzise zu definieren.

Definition I.1. Eine Menge $S \neq \emptyset$ heißt **(total) geordnet** bezüglich "$<$" $\;:\Leftrightarrow$

(i) Sind $a, b \in S$, so gilt genau eine der drei Relationen $a < b$, $a = b$ oder $a > b$. (I.67)

(ii) Sind $a, b, c \in S$, und gilt $a < b$ und $b < c$, dann gilt auch $a < c$. (I.68)

Das Symbol "$<$" heißt **Ordnungsrelation** auf S.

Beispiele für total geordnete Mengen sind $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$. Auf den komplexen Zahlen gibt es keine (mit den Verknüpfungen verträgliche) Ordnungsrelation. Ebenso gibt es keine (mit den Verknüpfungen verträgliche) Ordnungsrelation auf den Vektoren in $\mathbb{R}^3$.

Mit Hilfe der Ordnungsrelation kann man **Intervalle** in $\mathbb{R}$ definieren. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und

$a \leq b$. Dann heißen

$$(a\,,\ b) \ := \ \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \tag{I.69}$$

das **offene Intervall** von a nach b,

$$[a\,,\ b] \ := \ \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \tag{I.70}$$

das **abgeschlossene Intervall** von a nach b,

$$[a\,,\ b) \ := \ \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \tag{I.71}$$

das **rechts halboffene Intervall** von a nach b,

$$(a\,,\ b] \ := \ \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \tag{I.72}$$

das **links halboffene Intervall** von a nach b

und insbesondere

$$\mathbb{R}^+ \ := \ \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}, \qquad \mathbb{R}^- \ := \ \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}, \tag{I.73}$$

$$\mathbb{R}_0^+ \ := \ \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}, \qquad \mathbb{R}_0^- \ := \ \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}. \tag{I.74}$$

I.4. Funktionen

Funktionen, auch **Abbildungen** genannt, sind die wichtigsten Objekte der Mathematik. Eine Funktion f ordnet jedem Element x seiner **Definitionsmenge** $\mathcal{D}$ genau ein Element $f(x)$ seiner **Wertemenge** $\mathcal{W}$ zu. Die symbolische Schreibweise dafür ist

$$f \ : \ \mathcal{D} \to \mathcal{W}, \quad x \mapsto f(x). \tag{I.75}$$

Dabei ist die Definitionsmenge zwar voll ausgeschöpft, denn $f(x)$ ist für jedes $x \in \mathcal{D}$ definiert. Für die Wertemenge muss das aber nicht der Fall sein. Sind $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$ und $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{W}$ Teilmengen von $\mathcal{D}$ bzw. $\mathcal{W}$, so bezeichnen wir mit

$$f(\mathcal{D}') \ := \ \big\{ f(x) \in \mathcal{W} \ \big| \ x \in \mathcal{D}' \big\} \tag{I.76}$$

die **Bildmenge** (oder das Bild) von $\mathcal{D}'$ und

$$f^{-1}(\mathcal{W}') \ := \ \big\{ x \in \mathcal{D} \ \big| \ f(x) \in \mathcal{W}' \big\} \tag{I.77}$$

die **Urbildmenge** (oder das Urbild) von $\mathcal{W}'$.

Es kann also $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{W}$ durchaus eine *echte* Teilmenge des Wertebereichs sein. (Wir sollten hier aber erwähnen, dass diese Konvention nicht einheitlich akzeptiert ist. Manche Autoren verlangen, dass für $f : \mathcal{D} \to \mathcal{W}$ auch stets $f(\mathcal{D}) = \mathcal{W}$ gilt, andere fordern noch nicht einmal, dass $f^{-1}(\mathcal{W}) = \mathcal{D}$.)

Definition I.2. Seien $\mathcal{D}, \mathcal{W} \neq \emptyset$ und $f : \mathcal{D} \to \mathcal{W}$ eine Abbildung.

$$f \text{ heißt } \textbf{surjektiv} \quad :\Leftrightarrow \quad f(\mathcal{D}) \ = \ \mathcal{W}, \tag{I.78}$$

$$f \text{ heißt } \textbf{injektiv} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall\, x, x' \in \mathcal{D} : \ \big(f(x) = f(x') \big) \ \Rightarrow \ \big(x = x' \big), \tag{I.79}$$

$$f \text{ heißt } \textbf{bijektiv} \quad :\Leftrightarrow \quad f \text{ ist surjektiv und injektiv.} \tag{I.80}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^x$ ist nicht surjektiv, (wegen $e^x > 0$) aber injektiv (wegen der strengen Monotonie der Exponentialfunktion).
- $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ x \mapsto \sin x$ ist surjektiv aber nicht injektiv.
- $\tan : (-\pi/2\,,\ \pi/2) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tan x$ ist bijektiv.

Definition I.3. Für $g : A \to B$ und $f : g(A) \to C$ ist die **Verkettung** oder **Komposition** oder auch **Hintereinanderschaltung** $f \circ g$ von g und f wie folgt definiert:

$$f \circ g \ : \ A \to C, \quad x \mapsto f\big(g(x)\big). \tag{I.81}$$

Satz I.4. *Seien $g : A \to B$ und $f : B \to C$.*

(i) Sind f und g surjektiv, so ist auch $f \circ g : A \to C$ surjektiv.

(ii) Sind f und g injektiv, so ist auch $f \circ g : A \to C$ injektiv.

(iii) Sind f und g bijektiv, so ist auch $f \circ g : A \to C$ bijektiv.

Beweis.
Zu (*i*): Sei $c \in C$. Weil f surjektiv ist, gibt es ein $b \in B$ mit $f(b) = c$. Weil g surjektiv ist, gibt es ein $a \in A$ mit $g(a) = b$. Also gilt $(f \circ g)(a) = c$.

Zu (ii): Seien $a, a' \in A$ mit $(f \circ g)(a) = (f \circ g)(a')$. Weil f injektiv ist, folgt $g(a) = g(a')$. Weil g injektiv ist, folgt dann auch $a = a'$.

Zu (*iii*): Folgt aus (*i*) und (*ii*). □

Wichtig ist also zu beachten, dass der Definitionsbereich von f mit dem Bildbereich von g übereinstimmt. Man beachte auch die Reihenfolge: obwohl die Komposition $f \circ g$ heißt, wird erst g auf $x \in A$ angewandt und danach f auf das Ergebnis $g(x) \in B$.

Die Bedeutung der Bijektivität liegt darin, dass sie die Existenz und Eindeutigkeit der Umkehrfunktion sichert, wie der folgende Satz zeigt.

Satz I.5. *Seien A, B zwei nichtleere Mengen und $f : A \to B$ eine bijektive Abbildung. Dann gibt es eine eindeutige Abbildung $g : B \to A$ so, dass $g \circ f = \mathbb{1}_A$ und $f \circ g = \mathbb{1}_B$ gelten, d.h. dass*

$$\forall\, x \in A : \quad g[f(x)] = x \quad \textit{und} \quad \forall\, y \in B : \quad f[g(y)] = y \tag{I.82}$$

*gelten. In diesem Fall heißt $g : B \to A$ **Umkehrabbildung zu f**, und wir schreiben $g =: f^{-1}$.*

Beweis. Sei $y \in B$. Weil f surjektiv ist, gibt es ein $x \in A$ so, dass $y = f(x)$, und weil f injektiv ist, ist x das einzige Element in A, für das $y = f(x)$ ist. Also definiert $g(y) := x$ eine Abbildung $g : B \to A$. Diese Abbildung hat die Eigenschaft, dass $f[g(y)] = f(x) = y$ für alle $y \in B$ gilt. Ist umgekehrt $x \in A$ beliebig, so setzen wir $y := f(x)$ und beobachten, dass $f(x) = y = f[g(y)] = f\big(g[f(x)]\big)$ gilt. Aus der Injektivität von f folgt nun jedoch $x = g[f(x)]$. □

Eine wichtige Klasse von Funktionen ist die der charakteristischen Funktionen, auch Indikatorfunktionen genannt. Ist $\mathcal{D}$ eine nichtleere Menge und $A \subseteq \mathcal{D}$ eine Teilmenge, so ist die **charakteristische Funktion** von A gegeben als

$$\mathbb{1}_A \,:\, \mathcal{D} \to \{0,1\}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A. \end{cases} \tag{I.83}$$

Mit anderen Worten: $\mathbb{1}_A[x]$ ist genau dann gleich 1, wenn x in A liegt und anderenfalls gleich 0.

I.5. Beweistechniken

I.5.1. Vollständige Induktion

Eine häufig verwendete Beweistechnik ist die **vollständige Induktion**. Zunächst stellen wir das Verfahren abstrakt vor. Nehmen wir an, wir wollten Aussagen $A(1), A(2), A(3), \ldots$ beweisen. Dann können wir folgende Tatsache verwenden.

Satz I.6. *Gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $A(n_0)$ wahr ist, und gilt die Implikation*

$$A(n) \quad \Rightarrow \quad A(n+1), \tag{I.84}$$

für jedes $n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$, so ist $A(m)$ wahr, für jedes $m \geq n_0$, $m \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wendet man (I.84) $(m - n_0)$-mal an, so erhält man

$$A(n_0) \Rightarrow A(n_0+1) \Rightarrow A(n_0+2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow A(m-1) \Rightarrow A(m). \tag{I.85}$$

□

Der Beweis durch vollständige Induktion wird an einem Beispiel am deutlichsten. Wir wollen für $n \in \mathbb{N}$ die Summe

$$F(n) := 1 + 2 + \cdots + n \tag{I.86}$$

berechnen, und wir haben die Vermutung, dass $F(n) = G(n)$, wobei

$$G(n) := \frac{n(n+1)}{2}. \tag{I.87}$$

Nun gilt es, die Aussage

$$A(n) \;=\; w \quad :\Leftrightarrow \quad F(n) = G(n) \tag{I.88}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen.

- **Induktionsanfang**: Wähle $n_0 := 1$. Dann ist

  $$F(n_0) \;=\; F(1) \;=\; 1 \;=\; \frac{1(1+1)}{2} \;=\; G(1) \;=\; G(n_0), \tag{I.89}$$

  und $A(n_0) = A(1) = w$.

- **Induktionsannahme**: Seien $n \geq 1$ und gelte $A(n) = w$, also $F(n) = G(n)$.
- **Induktionsschritt**: Wir zeigen, dass aus $A(n) = w$ auch $A(n{+}1) = w$ folgt. Dazu beobachten wir, dass unter Verwendung von $F(n) = G(n)$ auch

$$\begin{aligned} F(n+1) \; &= n+1+F(n) \;=\; n+1+G(n) \;=\; n+1+\frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \;=\; G(n+1) \end{aligned} \tag{I.90}$$

  gilt, dass somit also $A(n+1) = w$ richtig ist.

Nach Satz I.6 ist damit $A(n) = w$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

I.5.2. Beweis durch Kontraposition

Neben der vollständigen Induktion ist auch der Beweis durch Kontraposition eine häufig verwendete Methode, die auf (I.25) beruht,

$$(A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; (\neg\, B \Rightarrow \neg\, A). \tag{I.91}$$

Wir illustrieren dies wieder mit einem Beispiel: Seien die Aussagen A und B definiert durch

$$A \;=\; w \;:\Leftrightarrow \qquad \sqrt{2} \in \mathbb{Q}\,, \tag{I.92}$$

$$B \;=\; w \;:\Leftrightarrow \;\; \exists p, q \in \mathbb{N},\; \mathrm{ggT}(p,q) = 1 : \quad 2q^2 \;=\; p^2 \tag{I.93}$$

wobei $\mathrm{ggT}(a,b) \in \mathbb{N}$ den größten gemeinsamen Teiler zweier natürlichen Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ bezeichne.

Ist nun $A = w$, so gibt es Zahlen $p', q' \in \mathbb{N}$ so, dass $\sqrt{2} = \frac{p'}{q'}$ gilt. Enthalten p' und q' einen gemeinsamen ganzzahligen Faktor $r \in \mathbb{N}$, sodass also $p' = pr$ und $q' = qr$ gelten, so können wir r herauskürzen und erhalten $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit teilerfremden p und q, d.h. $\mathrm{ggT}(p,q) = 1$. Damit ist auch $B = w$, und wir erhalten

$$A \Rightarrow B\,. \tag{I.94}$$

Die Aussage B ist jedoch stets falsch, weil dann der Primfaktor 2 in $2q^2$ in ungerader Anzahl und in p^2 in gerader Anzahl auftreten müsste.

$$\{B = f\} \Rightarrow \{\neg\, B = w\} \Rightarrow \{\neg\, A = w\} \Rightarrow \{\sqrt{2} \;\notin\; \mathbb{Q}\}\,. \tag{I.95}$$

Wir bemerken, dass der Beweis durch Kontraposition sehr ähnlich zur Methode des *Widerspruchsbeweises* ist, letzterer beruht auf $[A \Rightarrow B] = (\neg A) \vee B = \neg[A \wedge (\neg B)]$.

I.6. Notationen

Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq n$ und

$$A \;=\; \{a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n\} \tag{I.96}$$

eine Menge von Zahlen. Dann ist das Summenzeichen wie folgt definiert,

$$\sum_{i=m}^{n} a_i \;:=\; a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n. \tag{I.97}$$

Wir bemerken, dass der *Summationsindex* i durch irgend einen anderen Buchstaben außer m oder n ersetzt werden kann,

$$\sum_{i=m}^{n} a_i \;=\; \sum_{k=m}^{n} a_k \;=\; \sum_{j=m}^{n} a_j. \tag{I.98}$$

Für $m > n$ wird $\sum_{i=m}^{n} a_i \;:=\; 0$ definiert.
Mit $\mathcal{I} := \{m, m+1, \ldots, n\}$ und A wird die Summe auch oft noch anders geschrieben:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i \;=\; \sum_{i\in\mathcal{I}} a_i \;=\; \sum_{a\in A} a. \tag{I.99}$$

I.7. Ergänzungen

I.7.1. Äquivalenzrelationen

Häufig lässt sich eine Menge in eine Familie disjunkter Teilmengen zerlegen, deren Elemente jeweils ähnliche Eigenschaften haben. Beispiel:
Wir zerlegen $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z} = A_0 \cup A_1 \cup A_2$, wobei

$$A_0 := 3\mathbb{Z} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \tag{I.100}$$

$$A_1 := 3\mathbb{Z} + 1 = \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, \tag{I.101}$$

$$A_2 := 3\mathbb{Z} + 2 = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}. \tag{I.102}$$

Offensichtlich sind $A_0 \cap A_1 = A_1 \cap A_2 = A_0 \cap A_2 = \emptyset$. Die Elemente in A_j $(j = 0, 1, 2)$ lassen sich dadurch charakterisieren, dass sie einen Rest j beim Teilen durch 3 ergeben.

Wir formalisieren nun diese Überlegungen.

Definition I.7. Sei A eine Menge. Eine Abbildung $R : A \times A \to \{w, f\}$ heißt **Relation auf** A. Für $R(a, b) = w$ schreiben wir auch $a \sim b$.

Definition I.8. Eine Relation $R : A \times A \to \{w, f\}$ auf einer Menge A, mit $R(a, b) = w :\Leftrightarrow a \sim b$ heißt **Äquivalenzrelation**, falls folgende drei Eigenschaften gelten:

$$\textbf{Reflexivität} \quad \forall\, a \in A : \quad a \sim a, \tag{I.103}$$

$$\textbf{Symmetrie} \quad \forall\, a, b \in A : \quad a \sim b \Leftrightarrow b \sim a, \tag{I.104}$$

$$\textbf{Transitivität} \quad \forall\, a, b, c \in A : \quad (a \sim b \wedge b \sim c) \Rightarrow (a \sim c). \tag{I.105}$$

Satz I.9. *Eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A bewirkt eine Zerlegung von A in disjunkte Teilmengen. Dabei sind zwei Elemente aus A genau dann äquivalent, wenn sie derselben Teilmenge angehören.*

Beweis. Zu $a \in A$ definieren wir

$$[a]_\sim := \{x \in A \mid a \sim x\}. \tag{I.106}$$

Wegen $a \in [a]_\sim$ ist $[a]_\sim$ nicht leer. Wir zeigen nun für $a, b \in A$, dass

$$\text{entweder} \quad [a]_\sim \cap [b]_\sim = \emptyset \tag{I.107}$$

$$\text{oder} \quad [a]_\sim = [b]_\sim \tag{I.108}$$

gilt. (Wegen $[a]_\sim \neq \emptyset$ können (I.107) und (I.108) nicht gleichzeitig gelten.)
Sei $[a]_\sim \cap [b]_\sim \neq \emptyset$. Dann gibt es also ein gemeinsames Element $c \in [a]_\sim$, $c \in [b]_\sim$. Damit gelten $a \sim c$ und $c \sim b$, also auch $a \sim b$. Ist nun $x \in [a]_\sim$, dann gilt $x \sim a$ und mit $a \sim b$ auch $x \sim b$, also $x \in [b]_\sim$. Es folgt, dass $[a]_\sim \subseteq [b]_\sim$. Genauso erhält man $[b]_\sim \subseteq [a]_\sim$, also $[a]_\sim = [b]_\sim$. Damit ist (I.107)–(I.108) gezeigt.
Schreiben wir jetzt

$$A = \bigcup_{a \in A} [a]_\sim, \tag{I.109}$$

folgt die Aussage unmittelbar durch Zusammenfassen gleicher $[a]_\sim$. □

Definition I.10. Die Teilmengen $[a]_\sim$ heißen **Äquivalenzklassen**. Die Familie der Äquivalenzklassen bezeichnet man mit

$$A/\sim \qquad (\text{sprich: }''A \text{ modulo } \sim''). \tag{I.110}$$

Liegt a in einer Äquivalenzklasse, so heißt a **Repräsentant der Klasse**.

Bemerkungen und Beispiele.
Sind $A := \mathbb{Z}$ die ganzen Zahlen und $p \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, so sind

$$m \sim n \;:\Leftrightarrow\; \exists\, k \in \mathbb{Z}: \quad m - n \;=\; kp. \tag{I.111}$$

$$\Rightarrow\; \mathbb{Z} \;=\; [0]_\sim \cup [1]_\sim \cup \ldots \cup [p-1]_\sim, \tag{I.112}$$

$$[j]_\sim \;=\; \{kp + j \mid k \in \mathbb{Z}\}. \tag{I.113}$$

$\mathbb{Z}/\sim$ bezeichnet man auch mit $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}_p$ und $[j]_\sim =: [j]_{\bmod p}$.

Definition I.11. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A. Eine Teilmenge $S \subseteq A$ heißt ein **vollständiges Repräsentantensystem zu** $\sim$, falls folgende zwei Eigenschaften gelten:

(i) Jedes Element aus A ist zu einem Element aus S äquivalent.

(ii) Die Elemente aus S sind paarweise nicht äquivalent.

Bemerkungen und Beispiele.

$$A \;:=\; \big\{g \subseteq \mathbb{R}^2 \;\big|\; g \text{ ist eine Gerade}\big\}, \tag{I.114}$$

$$g_1 \sim g_2 :\Leftrightarrow\; g_1 \text{ und } g_2 \text{ sind parallel.}$$

$$\Rightarrow\; S \;=\; \big\{g \in A \;\big|\; g \cap \{\vec{0}\} = \{\vec{0}\}\big\} \tag{I.115}$$

$$\text{ist ein vollständiges Repräsentantensystem.} \tag{I.116}$$

I.7.2. Das griechische Alphabet

Das griechische Alphabet wird in der Mathematik häufig verwendet. Zum Abschluss geben wir noch eine Liste der gebräuchlichsten griechischen Buchstaben:

				KLEIN					
α	alpha	β	beta	γ	gamma	δ	delta	ϵ	epsilon
ε	epsilon	ζ	zeta	η	eta	θ	theta	ϑ	theta
ι	jota	κ	kappa	λ	lambda	μ	mü	ν	nü
ξ	xi	o	o	π	pi	φ	phi	ρ	rho
ϱ	rho	σ	sigma	ς	sigma	τ	tau	υ	upsilon
ϕ	phi	φ	phi	χ	chi	ψ	psi	ω	omega
				GROSS					
Γ	Gamma	Δ	Delta	Θ	Theta	Λ	Lambda	Ξ	Xi
Π	Pi	Σ	Sigma	Υ	Upsilon	Φ	Phi	Ψ	Psi
Ω	Omega								