Technische Universität Braunschweig

1. Übungsblatt

Upload: 18.04.2023.
Deadline: 25.04.2023, 10:00 Uhr (im Abgabeordner bei stud.ip).

Aufgabe 1.1

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$n! \leq n^n.$$

Aufgabe 1.2

Untersuchen Sie die folgenden Teilmengen $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ auf Beschränktheit und bestimmen Sie ggf. Infimum, Supremum, Minimum und Maximum:

(a) $A := (0,1) \cup \{2\}$.

(b) $B := \{x \in \mathbb{R} | x > 0, x^2 - 10x \leq 24\}$.

(c) $C := \{2^{-z} \in \mathbb{R} | z \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 1.3

Untersuchen Sie folgende Mengen auf Endlichkeit, Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit, und geben Sie an, wie viele Elemente die Mengen besitzen:

(a) $A := \left\{(-1)^m + \frac{(-1)^n}{2} \middle| m, n \in \mathbb{N}\right\}$.

(b) $B := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(c) $C := \{2^{-z} \in \mathbb{R} | z \in \mathbb{Z}\}$.

Nun seien E, F zwei Mengen, E sei endlich und $f : E \to F$ sei eine bijektive Abbildung.

(d) Beweisen Sie: F ist endlich und besitzt gleich viele Elemente wie E.

Aufgabe 1.4

Beweisen Sie folgende Aussagen zu den reellen Zahlen, wobei Sie die Ergebnisse aus Satz II. 6 benutzen dürfen:

(a) $\forall a \in \mathbb{R} : a < 0 \Leftrightarrow -a > 0$.

(b) $\forall a, b \in \mathbb{R} : (a > 0 \wedge b < 0) \Rightarrow a \cdot b < 0$.

(c) $\forall a, b > 0\, \forall n \in \mathbb{N} : a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$.