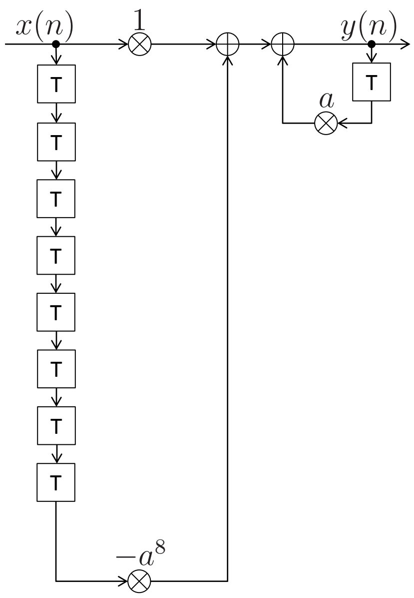
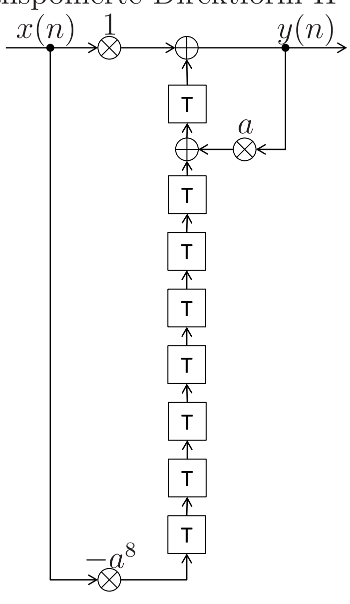
Musterlösung zur Klausur
“Digitale Signalverarbeitung”
vom 23.02.2012

Aufgabe 1

a.) 3 Punkte
Direktform I



Transponierte Direktform II



b.) 1 Punkt
transp. DFII, kanonisch

c.) 1,5 Punkte

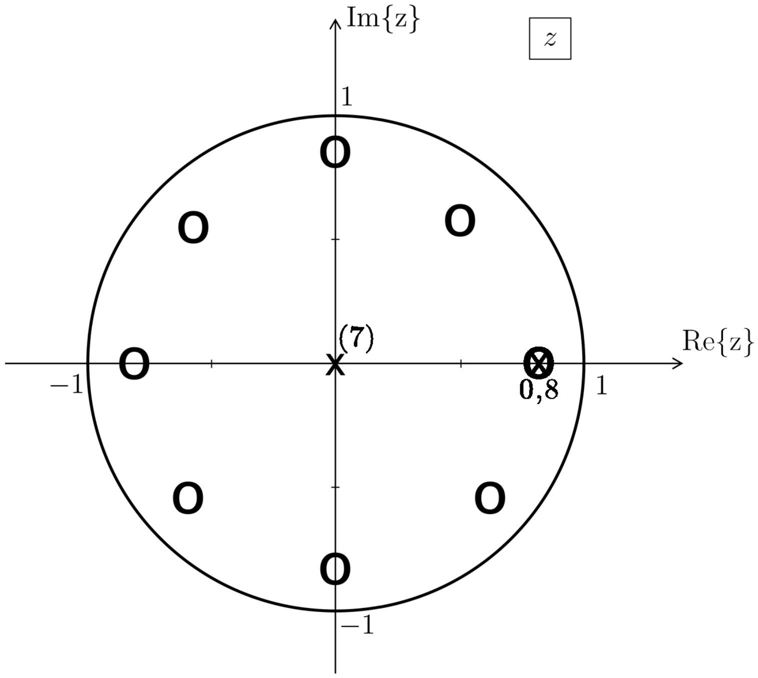
$$y(n) = x(n) - a^8 \cdot x(n-8) + a \cdot y(n-1)$$

d.) 1,5 Punkte

$$H(z) = \frac{1 - a^8 \cdot z^{-8}}{1 - a \cdot z^{-1}}$$

e.) 2 Punkte
Stemplot mit $h(n) = [1; 0,8; 0,64; 0,51; 0,41; 0,33; 0,26; 0,21; 0; 0; 0]$

f.) 2 Punkte



g.) 1 Punkt
Tiefpass; FIR, da Länge der Impulsantwort 8 und nicht ∞

Aufgabe 2

a.) 1 Punkt

$$\delta_p = 1 - 10^{\frac{-2\,\mathrm{dB}}{20\,\mathrm{dB}}} = 0,21$$

$$d_{\mathrm{st}} = -20 \log 0,0316 = 30\,\mathrm{dB}$$

b.) 1,5 Punkte
siehe Skript S. 129

c.) 2 Punkte

$$v = \frac{\omega'}{\tan(\Omega'/2)} = \frac{\Omega_p}{T \cdot \tan(\Omega_p/2)} = \frac{8\,\mathrm{kHz} \cdot 0,15\pi}{\tan(0,15\pi/2)} = 15702,81\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$\omega_c = v \cdot \tan(\Omega_c/2) = 4031,80\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$\omega_p = \Omega_p \cdot f_s \text{ oder } [\omega_p = v \cdot \tan(\Omega_p/2) = 3769,91\,\mathrm{s}^{-1}]$$

$$\omega_{st} = v \cdot \tan(\Omega_{st}/2) = 9622,69\,\mathrm{s}^{-1}$$

d.) 2,5 Punkte

$$|1-\delta_p|^2 \leq \frac{1}{1+(\frac{j\omega_p}{j\omega_c})^{2N}}$$

und

$$|\delta_{st}|^2 \geq \frac{1}{1+(\frac{j\omega_{st}}{j\omega_c})^{2N}}$$

bei Gleichheit:

$$(1/0{,}79)^2 = 1 + (j\omega_p/j\omega_c)^{2N} \text{ bzw. } (1/0{,}0316)^2 = 1 + (j\omega_{st}/j\omega_c)^{2N}$$
$$\log((1/0{,}79)^2 - 1) = 2N\log(j\omega_p/j\omega_c) \text{ bzw. } \log((1/0{,}0316)^2 - 1) = 2N\log(j\omega_{st}/j\omega_c)$$
$$N = \frac{\log((1/0{,}79)^2-1)}{2\log(j\omega_p/j\omega_c)} = 3,77 \text{ bzw. } N = \frac{\log((1/0{,}0316)^2-1)}{2\log(j\omega_{st}/j\omega_c)} = 3,97$$

daraus folgt:

$$N = 4$$

e.) 1 Punkt
ja, monoton fallendes Amplitudenspektrum

f.) 1 Punkt

$$N_b \geq \frac{-10\log(\delta_p \cdot \delta_{st}) - 13}{2,323 \cdot \Delta\Omega} = \frac{-10\log(0,21 \cdot 0,0316) - 13}{2,323 \cdot 0,2\pi} = 6,02$$

daraus folgt:

$$N_b = 7$$

g.) 1 Punkt
IIR:
+ geringe Filterordnung, daher geringeres Delay und weniger komplex
+ monoton fallend / max. flach bei $\omega = 0$
- keine exakte Linearphasigkeit möglich

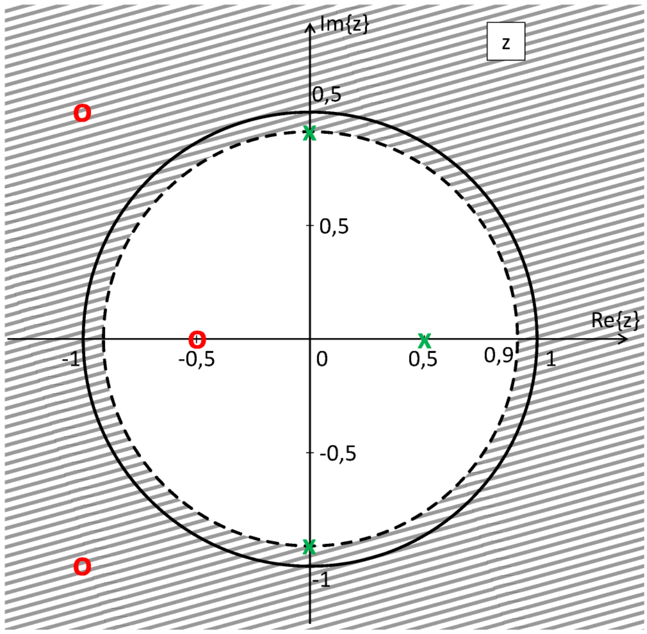
FIR:
+ Linearphasigkeit möglich
- durch Equiripple zwar effizient, aber kein flacher Durchlassbereich

Aufgabe 3

a.) 3 Punkte

$$\frac{(z+0,5)(z+(1+j))(z+(1-j))}{(z-0,5)(z+0,9j)(z-0,9j)};$$
$$z_{0_1} = -0,5; z_{0_{2,3}} = -1 \pm j; z_{\infty_1} = 0,5; z_{\infty_{2,3}} = \pm 0,9j; \mathrm{ROC} = |z| > 0,9$$

b.) 2 Punkte



c.) 1 Punkt
ja, da alle Polstellen innerhalb des Einheitskreises liegen und es sich hier um ein kausales System handelt

d.) 2 Punkte

$$H(z) = \frac{(z+0,5)(z+(1+j))(z+(1-j))}{(z-0,5)(z+0,9j)(z-0,9j)}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+2,5z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3}}{1-0,5z^{-1}+0,81z^{-2}-0,405z^{-3}}$$

Rücktrafo.:

$$y(n) = x(n)+2,5x(n-1)+3x(n-2)+x(n-3)+0,5y(n-1)-0,81y(n-2)+0,405y(n-3)$$

e.) 3 Punkte

$$H_{\text{AP}}(z) = \frac{(z+(1+j))(z+(1-j))}{(z+(0,5+0,5j))(z+(0,5-0,5j))} \cdot b_0$$

mit $b_0 = {}^5\!/\!_4, \text{ROC}_{AP} : |z| > {}^1\!/\!_{\sqrt{2}} = 0,707$

$$H_{\min}(z) = \frac{(z+0,5)(z+(0,5+0,5))(z+(0,5-0,5j))}{(z-0,5)(z+0,9j)(z-0,9j)} \cdot {}^1\!/\!_{b_0}$$

mit $\text{ROC}_{min} : |z| > 0,9$

f.) 1 Punkt
ja, da gilt $0 \leq |z_{0_\mu}| < 1$ und somit $G(z) = {}^1\!/\!_{H_{\min}(z)}$ wieder ein stabiles System ist.

Aufgabe 4

a.) 2 Punkte

$$h(n) = {}^1\!/\!_8 \sum_{\nu=0}^{8-1} \delta(n-\nu)$$

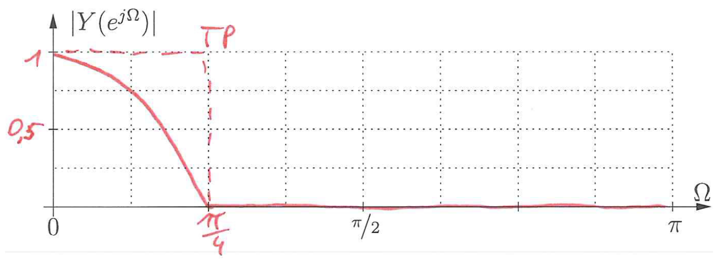
$$H(e^{j\Omega}) = {}^1\!/\!_8 \frac{\sin({}^8\!/\!_2\Omega)}{\sin({}^\Omega\!/\!_2)} \cdot e^{-j\Omega 7/2}$$

$$|H(e^{j0})| = {}^1\!/\!_8 \frac{4\cos(0)}{{}^1\!/\!_2\cos(0)} = 1 \qquad \text{(l'Hôpital!)}$$

$$|H(e^{j\pi/8})| = {}^1\!/\!_8 \frac{\sin({}^\pi\!/\!_2)}{\sin({}^\pi\!/\!_{16})} = 0,64$$

$$|H(e^{j\pi/4})| = {}^1\!/\!_8 \frac{\sin(\pi)}{\sin({}^\pi\!/\!_8)} = 0$$

Für $\Omega > {}^\pi\!/\!_4$ gilt: $|H(e^{j\Omega})| = 0$ (Tiefpass!)



b.) 1 Punkt

$$L_1 \to LP_1 \to LP_2 \to L_2$$

c.) 1,5 Punkte

$$\Omega_{c,1} = {}^\pi\!/\!_6$$

$$\Omega_{c,2} = {}^\pi\!/\!_4$$

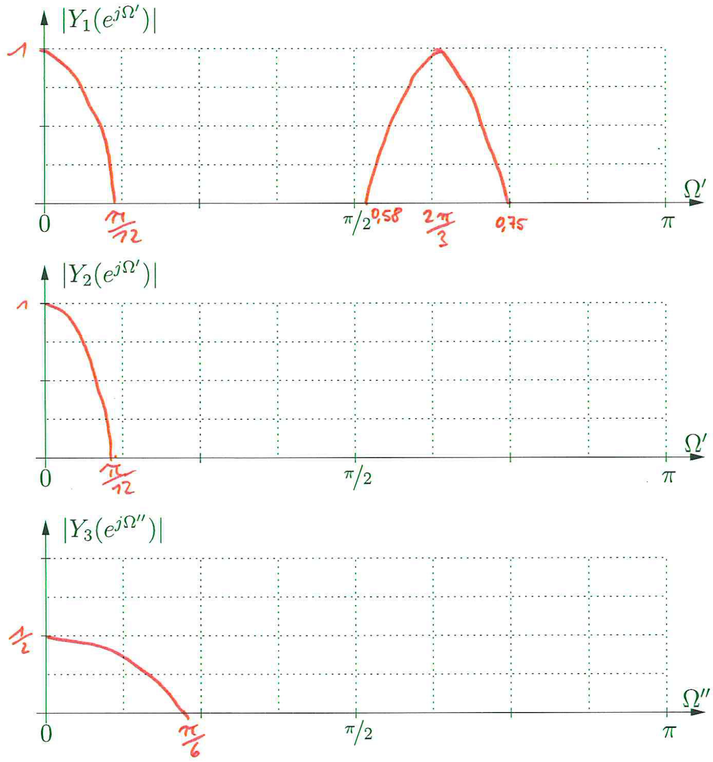
$$L_2 = 4$$

d.) 1 Punkt
nein, nicht teilerfremd!

e.) 1,5 Punkte

$$\overset{Y(e^{j\Omega})}{\to} L_1 = 3 \overset{Y_1(e^{j\Omega'})}{\to} LP_1, \Omega_{c,1} = {}^\pi\!/\!_3 \overset{Y_2(e^{j\Omega'})}{\to} L_2 = 2 \overset{Y_3(e^{j\Omega''})}{\to}$$

f.) 3 Punkte



g.) 3 Punkte
siehe Skript S. 231, aber auf Ausgangsseite anstelle des nichtkausalen z-Blocks im unteren Pfad, ein z^{-1}-Block im oberen Pfad!

h.) 3 Punkte
Typ I Polyphasenzerlegung mit L=2:

$$E_0(z) = \sum_n e_0(n) \cdot z^{-n} = \sum_n h(2n) \cdot z^{-n}$$

$$E_1(z) = \sum_n e_1(n) \cdot z^{-n} = \sum_n h(2n+1) \cdot z^{-n}$$

Typ II Polyphasenzerlegung mit L=3 und N=8:
- oberer Pfad:

$$E_0(z) = \sum_{\ell=0}^{2} z^{-(2-\ell)} \cdot R_{0\ell}(z^3)$$

mit $R_{0\ell}(z^3) = \sum_n e_0((n+1)\cdot 3 - 1 - \ell) \cdot z^{-n} = \sum_n h(6n + 4 - 2\ell)$

$$n = 0, \ell = 0, 1, 2: \quad \mathbf{h(4),\ h(2),\ h(0)}$$

- unterer Pfad:

$$E_1(z) = \sum_{\ell=0}^{2} z^{-(2-\ell)} \cdot R_{1\ell}(z^3)$$

mit $R_{1\ell}(z^3) = \sum_n e_1((n+1)\cdot 3 - 1 - \ell) \cdot z^{-n} = \sum_n h(6n + 5 - 2\ell)$

$$n = 0, \ell = 0, 1, 2: \quad \mathbf{h(5),\ h(3),\ h(1)}$$