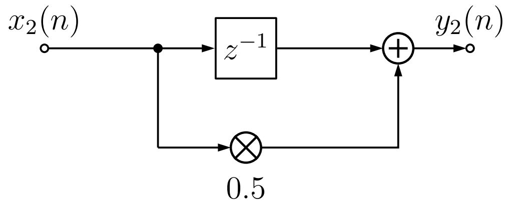
Musterlösung zur Klausur
"Digitale Signalverarbeitung"
vom 16.03.2016

Aufgabe 1: Übertragungsfunktionen und Analyse von LTI-Systemen

(12 Punkte gesamt)

a) (1 Punkte)
$H_2(z)$:



b) (1 Punkte)

$$y_2(n) = \frac{1}{2}x_2(n) + x_2(n-1)$$

c) (1 Punkt)

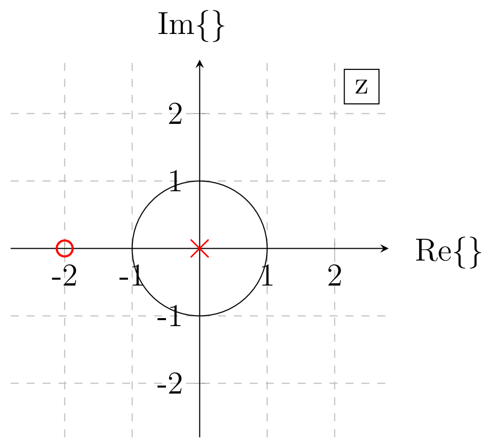
$$h_2(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \delta(n-1)$$

d) (1 Punkt)

$$H_2(z) = \frac{Y_2(z)}{X_2(z)} = 0.5 + z^{-1}$$

e) (2 Punkte)

$$\begin{aligned} H_2(z) &= 0.5 + z^{-1} \\ &= 0.5 + z^{-1} \cdot \frac{z}{z} \\ &= \frac{0.5z + 1}{z} \\ \Rightarrow z_\infty &= 0 \\ z_0 &= -2 \end{aligned}$$



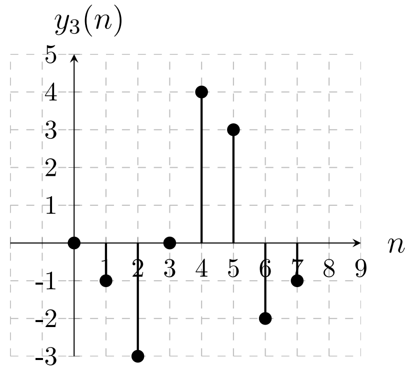
f) (2 Punkte)

$$\begin{aligned}
H_2(e^{j\Omega}) &= |H_2(e^{j\Omega})| \cdot e^{j\varphi_2(\Omega)} \\
&= 0.5 + e^{-j\Omega} \\
&= 0.5 + \cos(-\Omega) + j\sin(-\Omega) \\
\Rightarrow |H_2(e^{j\Omega})| &= \sqrt{0.5^2 + \cos(-\Omega) + \cos^2(-\Omega) + \sin^2(-\Omega)} \\
&= \sqrt{1.25 + \cos(-\Omega)} \\
\Rightarrow \varphi_2(\Omega) &= \tan^{-1} \frac{\sin(-\Omega)}{0.5 + \cos(-\Omega)}
\end{aligned}$$

g) (1 Punkt)
$h_2(n)$: Ja, linear Typ IV, $N_b = 3$ ungerade, ungerade Filterkoeffizientensymmetrie, kein Tiefpass weil $H(e^{j\Omega=0}) = 0$.

h) (1 Punkt)
$N_{h_3} + N_{x_3} - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$

i) (2 Punkt)



Aufgabe 2: Inverse z-Transformation

(12 Punkte gesamt)

a) (3 Punkte)
Polstellen:

$$z_{\infty,1} = \frac{1}{4}$$
$$z_{\infty,2} = -\frac{1}{4}$$

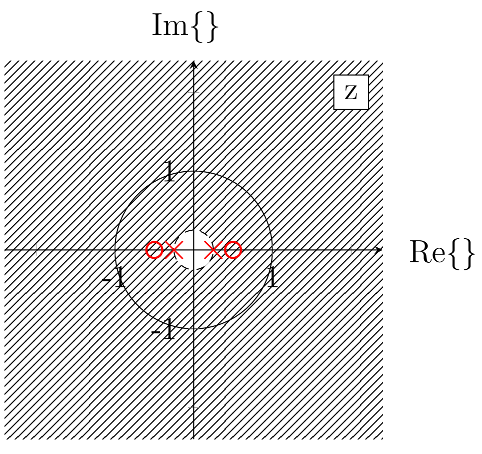
Nullstellen:

$$z_{0,1} = \frac{1}{2}$$
$$z_{0,2} = -\frac{1}{2}$$

ROC 1: $|z| > \frac{1}{4}$
ROC 2: $|z| < \frac{1}{4}$

$$H(z) = \frac{(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{2})}{(z - \frac{1}{4})(z + \frac{1}{4})}$$

b) (2 Punkte)
ROC: $|z| > \frac{1}{4}$



c) (2 Punkte)
$H(z)$ ist minimalphasig, da alle Nullstellen und Polstellen innerhalb des Einheitskreises liegen.
Wegen $H(z) = H_{\min}(z) \cdot H_{\mathrm{AP}}(z)$ und $H(z) = H_{\min}(z)$ folgt $H_{\mathrm{AP}}(z) = 1$.

d) (5 Punkte)

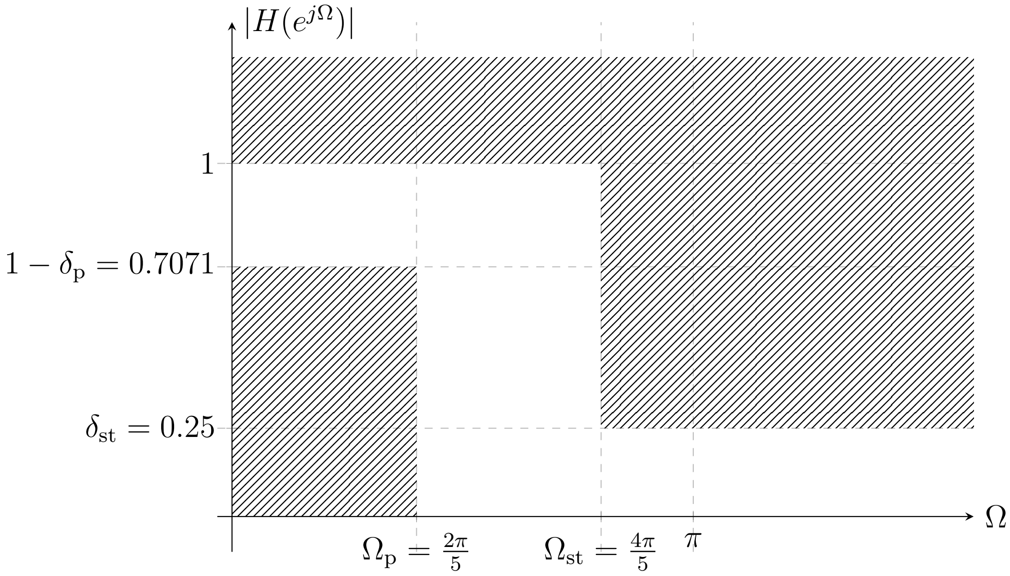
$$
\begin{aligned}
P &= 2 \\
\nu_p &= 1 \\
H(z) &= R_0 + R_{1,1}\frac{z}{(z - z_{\infty,1})^1} + R_{2,1}\frac{z}{(z - z_{\infty,2})^1} \\
R_0 = H(0) &= \frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}} = \frac{-\frac{4}{16}}{-\frac{1}{16}} = 4 \\
R_{1,1} &= \lim_{z\to z_{\infty,1}} \left\{(z-\frac{1}{4})\frac{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{2})}{(z-\frac{1}{4})(z+\frac{1}{4})z}\right\}_{z=\frac{1}{4}} = \frac{-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{2}{16}} = -\frac{3}{2} \\
R_{2,1} &= \lim_{z\to z_{\infty,2}} \left\{(z+\frac{1}{4})\frac{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{2})}{(z-\frac{1}{4})(z+\frac{1}{4})z}\right\}_{z=-\frac{1}{4}} = -\frac{3}{2} \\
\Rightarrow H(z) &= 4 + (-\frac{3}{2})\cdot\frac{z}{z-\frac{1}{4}} + (-\frac{3}{2})\cdot\frac{z}{z+\frac{1}{4}} \\
h(n) &= 4\cdot\delta(n) + \left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n\cdot\epsilon(n) + \left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^n\cdot\epsilon(n)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3: IIR-Filterdesign

(12 Punkte gesamt)

a) (1 Punkt)
Tiefpass

b) (2 Punkt)



c) (3 Punkte)

$$\begin{aligned}\omega' = \omega_{\mathrm{p}} &= \Omega_{\mathrm{p}} \cdot f_{\mathrm{s}} = 12566.37\\ \Rightarrow v &= \frac{\omega_{\mathrm{p}}}{\tan\frac{\Omega_{\mathrm{st}}}{2}} = 17296.13\\ \omega_{\mathrm{st}} &= v \cdot \tan\frac{\Omega_{\mathrm{st}}}{2} = 53232.00\end{aligned}$$

d) (2 Punkt)
Durchlassbereich:

$$\begin{aligned}|H_a(j\omega_{\mathrm{p}})|^2 &= \frac{1}{1+(\frac{j\omega_{\mathrm{p}}}{j\omega_{\mathrm{c}}})^{2N}} \geq (1-\delta_{\mathrm{p}})^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}\\ \Rightarrow \left(\frac{\omega_{\mathrm{p}}}{\omega_{\mathrm{c}}}\right)^{2N} &= 1\end{aligned}$$

Da $\omega_{\mathrm{p}} = \omega_{\mathrm{c}}$, unabhängig von Filterordnung N für $1-\delta_{\mathrm{p}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Sperrbereich:

$$
\begin{aligned}
|H_a(j\omega_{\mathrm{st}})|^2 = \frac{1}{1+(\frac{j\omega_{\mathrm{st}}}{j\omega_{\mathrm{p}}})^{2N}} &\leq \delta_{\mathrm{st}}^2 = 0.06 \\
\Rightarrow \frac{1}{1+(4.236)^{2N}} &\leq 0.06 \\
\Leftrightarrow 1+(4.236)^{2N} &\geq 15.87 \\
17.94^N &\geq 14.87 \\
\Rightarrow \text{Erfüllt für alle } N > 0, \text{also } N = 1.
\end{aligned}
$$

Nullstelle bei $z = -1$ ist 1. Ordnung.

e) (2 Punkt)
Durch billineare Transformation gilt $d^*_{\mathrm{st}} \neq d_{\mathrm{st}}$.

$$
\begin{aligned}
|H_a(j\omega_{\mathrm{st}})|^2 &= \frac{1}{1+(\frac{\omega_{\mathrm{st}}}{\omega_{\mathrm{c}}})^2} = \frac{1}{1+4.24^2} = \frac{1}{18.94} = 0.0528 \\
|Ha(j\omega_{\mathrm{st}})| &= \sqrt{0.0528} = 0.23 \\
d^*_{\mathrm{st}} &= 20\log_{10}\left(|H_a(j\omega_{\mathrm{st}})|\right) = 20\log_{10}(0.23) = 12.77\,\mathrm{dB}
\end{aligned}
$$

f) (1 Punkte)
$|H_a(j\omega)|^2$ kann nur im Unendlichen ($j\omega \rightarrow \infty$) gegen Null streben. In z-Ebene liegt die Nullstelle bei $z_0 = -1$.

g) (1 Punkt)
Länge der Impulsantwort ist unendlich, da IIR.

Aufgabe 4: Abtastratenwandlung

(14 Punkte gesamt)

a) (1 Punkt)
$f_\mathrm{s} = \frac{92{,}160{,}000\,\mathrm{Bit}}{16\,\mathrm{Bit}\cdot 180\,\mathrm{s}} = 32\,\mathrm{kHz}$

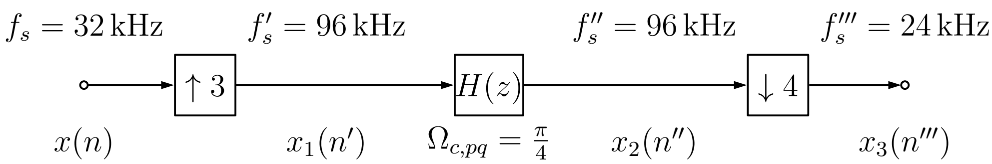
b) (1 Punkt)
$f_\mathrm{max} = 12\,\mathrm{kHz} = (\frac{3}{8} \cdot 32\,\mathrm{kHz})$
$r = \frac{24\,\mathrm{kHz}}{32\,\mathrm{kHz}} = \frac{3}{4}$

c) (1 Punkt)
$\Omega_{c,p} = \frac{\pi}{3}$

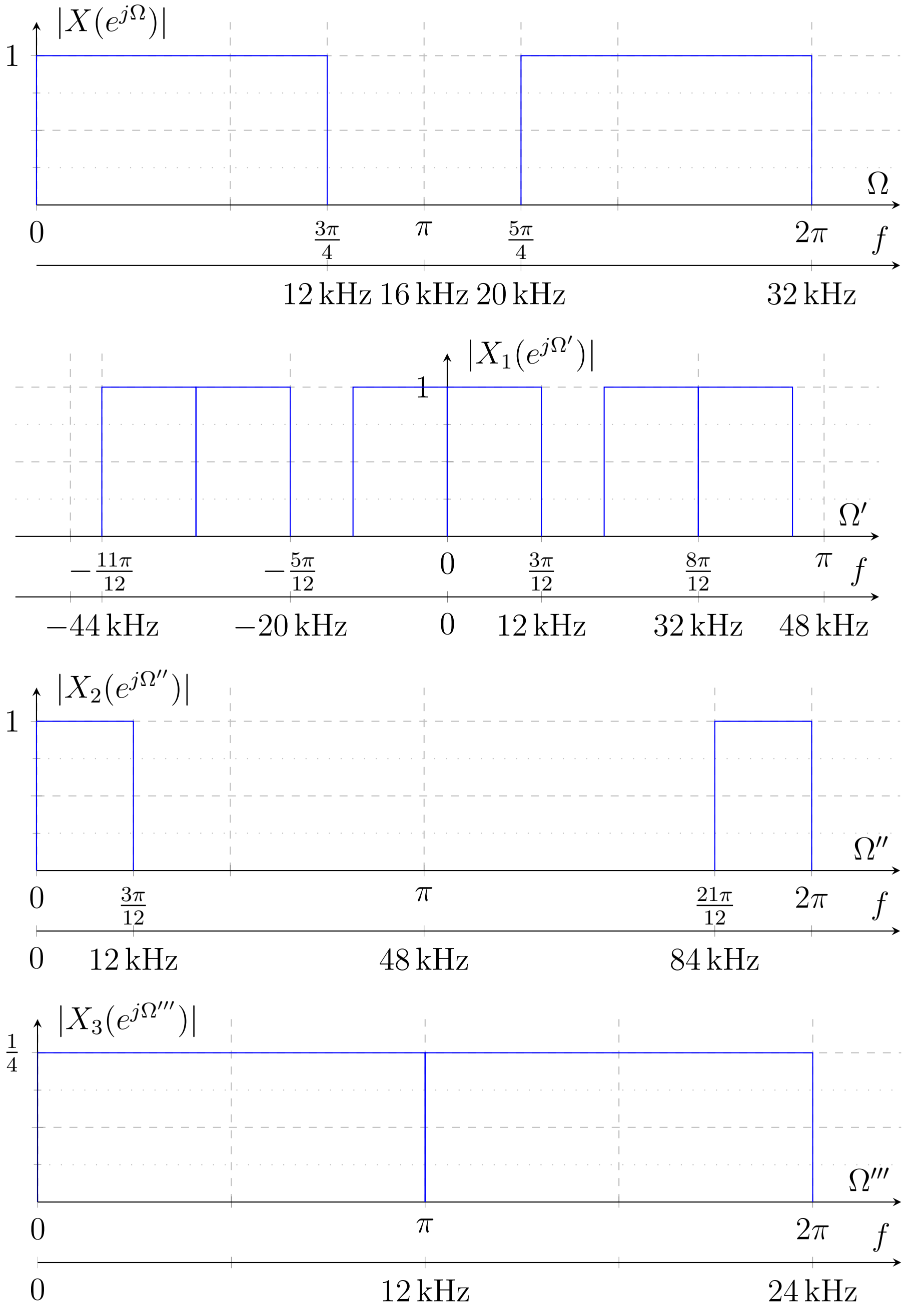
d) (1 Punkt)
$\Omega_{c,q} = \frac{\pi}{4}$

e) (1 Punkt)
$\Omega_{c,pq} = \min\{\Omega_{c,p}, \Omega_{c,q}\} = \frac{\pi}{4}$

f) (1 Punkt)



g) (4 Punkte)



h) (2 Punkte)
$\alpha = 4$