XII. Maßtheoretische Grundbegriffe

XII.1. Ringe und Figuren

Definition XII.1. *Sei Ω eine Menge und $\mathfrak{P}(\Omega) := \{A : A \subseteq \Omega\}$ ihre Potenzmenge. Ein Mengensystem $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt* ***Ring*** $:\Leftrightarrow$

$$\emptyset \in \mathfrak{R}, \tag{XII.1}$$

$$A, B \in \mathfrak{R} \quad \Rightarrow \quad A \setminus B \in \mathfrak{R}, \tag{XII.2}$$

$$A, B \in \mathfrak{R} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathfrak{R}. \tag{XII.3}$$

Wir bemerken, dass aus (XII.2) mit $A, B \in \mathfrak{R}$ auch

$$\begin{aligned} A \cap B &= \big\{\omega \in A \big| \omega \in B\big\} = \big\{\omega \in A \big| \, \omega \notin (A \setminus B)\big\} \\ &= A \setminus (A \setminus B) \in \mathfrak{R}. \end{aligned} \tag{XII.4}$$

Damit folgt, dass ein Ring mit endlich vielen Mengen auch deren Vereinigung und Durchschnitt enthält,

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{R} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{j=1}^{n} A_j \, , \, \bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathfrak{R}. \tag{XII.5}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- *Die leere Menge bildet einen Ring, $\mathfrak{R} = \{\emptyset\}$.*
- *Ebenso erhält man einen Ring, wenn man noch die volle Menge hinzufügt, $\mathfrak{R}' = \{\emptyset, \Omega\}$.*
- *Natürlich ist die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ selbst ein Ring.*
- *Für das nächste Beispiel erinnern wir an die Halbordnung $\leq$ auf $\mathbb{R}^d$, die für $a, b \in \mathbb{R}^d$ gegeben ist durch*

$$a \leq b \;:\Leftrightarrow\; a_1 \leq b_1, \; a_2 \leq b_2, \ldots, a_d \leq b_d. \tag{XII.6}$$

Definition XII.2. *Sei $\Omega = \mathbb{R}^d$ und $d \geq 1$. Für $a, b \in \mathbb{R}^d$ mit $a \leq b$ heißt*

$$[a\,,\,b) \;:=\; [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_d, b_d) \tag{XII.7}$$

(nach rechts halboffener) ***Quader****. Die Menge aller Quader bezeichnen wir mit $\mathfrak{Q}_d$. Die Vereinigung endlich vieler Quader sammeln wir im System der* ***Figuren****,*

$$\mathfrak{F}_d \;:=\; \big\{ q_1 \cup \cdots \cup q_N \;\big|\; q_1, q_2, \ldots, q_N \in \mathfrak{Q}_d,\; N < \infty \big\}. \tag{XII.8}$$

Lemma XII.3. *$\mathfrak{F}_d$ ist ein Ring.*

Mit einer Partition analog zur Konstruktion der Quader q_ξ in (XII.33) kann man zeigen, dass sich jede Figur als endliche Vereinigung *disjunkter* Quader schreiben lässt.

Lemma XII.4.

$$\mathfrak{F}_d \;=\; \big\{ q_1 \cup \cdots \cup q_N \;\big|\; q_1, q_2, \ldots, q_N \in \mathfrak{Q}_d,\; N < \infty, \quad \forall\, i < j : \quad q_i \cap q_j = \emptyset \big\}, \tag{XII.9}$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Wir kommen nun zum Begriff des (Raum-)Inhalts.

Definition XII.5. *Sei $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Ring. Eine Abbildung $\mu : \mathfrak{R} \to \mathbb{R}_0^+$ heißt* ***(endlicher) Inhalt*** *(auf $\mathfrak{R}$) :⇔*

(i)
$$\mu(\emptyset) \;=\; 0.$$

(ii) Sind $A_1, A_2, \ldots, A_N \in \mathfrak{R}$ paarweise disjunkt, so ist μ ***additiv****,*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{N} A_i \Big) \;=\; \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i). \tag{XII.10}$$

Im Allgemeinen bezeichnet man Abbildungen $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty] = \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$, die (i) und (ii) erfüllen, als Inhalte. Ein endlicher Inhalt ist dann ein solcher, bei dem $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathfrak{R}$ gilt. Wir betrachten hier nur endliche Inhalte, deshalb ignorieren wir in dieser Vorlesung den Unterschied, aber in den Ergänzungen wird zwischen Inhalten und endlichen Inhalten unterschieden.

Das wichtigste Beispiel für Definition XII.5 in unserem Zusammenhang ist das übliche, $d-$dimensionale Volumen: Für $a, b \in \mathbb{R}^d$, mit $a \leq b$, ist $[a, b) \in \mathfrak{Q}_d$ ein Quader mit Volumen

$$\mu_d\big(\,[a, b)\, \big) \;:=\; \prod_{\nu=1}^{d} (b_\nu - a_\nu). \tag{XII.11}$$

Sind weiterhin $q_1, q_2, \ldots, q_N \in \mathfrak{Q}_d$ paarweise disjunkte Quader, so setzen wir

$$\mu_d\Big(\bigcup_{i=1}^{N} q_i \Big) \;=\; \sum_{i=1}^{N} \mu_d(q_i). \tag{XII.12}$$

Nach Lemma XII.4 ist jede Figur darstellbar als eine endliche Vereinigung disjunkter Quader, und insofern lässt sich jeder Figur durch (XII.12) ein Volumen zuordnen.

Lemma XII.6. *μ_d ist ein (endlicher) Inhalt auf $\mathfrak{F}_d$.*

XII.2. Sigma-Algebren und Maße

Wir beginnen diesen Abschnitt mit der Einführung einer Vorstufe von Maßen - den Prämaßen.

Definition XII.7. *Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Ring. Eine Abbildung $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$ heißt* ***Prämaß*** *(auf $\mathfrak{R}$) :⇔*

(i) 前测度 $\mu(\emptyset) \; = \; 0.$

(ii) Die Abbildung μ ist ***Sigma-additiv****, d. h., ist $(A_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{R}^{\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathfrak{R}$, so dass auch ihre Vereinigung in $\mathfrak{R}$ liegt, $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathfrak{R}$, so gilt*

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big) \; = \; \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n). \tag{XII.13}$$

Gibt es außerdem eine Folge $(A_n)_{n=1}^\infty$ in $\mathfrak{R}$ mit $\mu(A_n) < \infty$, für alle $n \in \mathbb{N}$, und $A_n \nearrow \Omega$, d.h. $A_n \subseteq A_{n+1}$ und $\bigcup_{n=1}^\infty A_n = \Omega$, so heißt das Prämaß μ ***Sigma-endlich****.*

Wir sehen, dass jedes Prämaß auf $\mathfrak{R}$ auch einen Inhalt auf $\mathfrak{R}$ definiert. Der folgende Satz gibt eine notwendige Bedingung für die Umkehrung.

Lemma XII.8. *Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Ring und $\mu : \mathfrak{R} \to \mathbb{R}_0^+$ ein Inhalt. Dann gilt folgende Äquivalenz:*

$$\mu \text{ ist ein Prämaß auf } \mathfrak{R} \tag{XII.14}$$

$$\Leftrightarrow \; \mu \text{ ist } \emptyset\textbf{-stetig} \tag{XII.15}$$

$$:\Leftrightarrow \; \forall (A_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{R}^{\mathbb{N}}, \; A_n \searrow \emptyset : \quad \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \; = \; 0,$$

wobei $A_n \searrow \emptyset$ bedeutet, dass $A_n \supseteq A_{n+1}$ und $\bigcap_{n=1}^\infty A_n = \emptyset$.

Satz XII.9. *μ_d ist ein Prämaß auf $\mathfrak{F}_d$.*

Die entscheidende Einsicht, die den Grundbaustein der Maßtheorie darstellt, ist, dass der Begriff des Mengenrings (hier: die Figuren $\mathfrak{F}_1$) nicht flexibel genug ist und durch den der Sigma-Algebra ersetzt werden muss.

Definition XII.10. *Sei Ω eine Menge und $\mathfrak{P}(\Omega) := \{A : \; A \subseteq \Omega\}$ ihre Potenzmenge. Ein Mengensystem $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt* ***Sigma-Algebra*** *(über Ω) :⇔*

$$\Omega \; \in \mathfrak{A}, \tag{XII.16}$$

$$A \; \in \; \mathfrak{A} \quad \Rightarrow \quad A^c \; := \; \Omega \setminus A \; \in \; \mathfrak{A}, \tag{XII.17}$$

$$(A_n)_{n=1}^\infty \; \subseteq \; \mathfrak{A} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n=1}^\infty A_n \; \in \; \mathfrak{A}. \tag{XII.18}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- *Wir bemerken, dass $\mathfrak{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ die kleinstmögliche und $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ die größtmögliche Sigma-Algebra über Ω sind. Der Ausganspunkt der Maßtheorie ist jedoch die Erkenntnis, dass für $\Omega = \mathbb{R}^d$ der Ring der Figuren $\mathfrak{F}_d$ zu klein und die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ zu groß sind.*
- *Weiterhin bemerken wir, dass jede Sigma-Algebra $\mathfrak{A}$ auch ein Ring ist.*

Lemma XII.11. *Jeder (endliche, abzählbare oder auch überabzählbare) Durchschnitt von Sigma-Algebren ist wieder eine Sigma-Algebra.*

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Nachprüfen der Eigenschaften (XII.16)–(XII.18). □

Ist nun $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein System von Teilmengen von Ω, so setzen wir

$$\mathfrak{A}(\mathcal{E}) := \bigcap \Big\{ \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega) \;\Big|\; \mathcal{E} \subseteq \mathfrak{A}\,, \ \ \mathfrak{A} \text{ ist eine Sigma-Algebra} \Big\}. \tag{XII.19}$$

Nach Lemma XII.11 ist $\mathfrak{A}(\mathcal{E})$ wieder eine Sigma-Algebra, und nach Konstruktion ist sie die kleinste Sigma-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält.

Definition XII.12.

(i) Zu $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt $\mathfrak{A}(\mathcal{E})$ ***die von $\mathcal{E}$ erzeugte Sigma-Algebra****.*

(ii) Für $\Omega = \mathbb{R}^d$ heißt die von den Quadern $\mathfrak{Q}_d$ bzw. den Figuren $\mathfrak{F}_d$ erzeugte Sigma-Algebra die Sigma-Algebra der ***Borelmengen****,*

$$\mathfrak{B}_d := \mathfrak{A}(\mathfrak{Q}_d) = \mathfrak{A}(\mathfrak{F}_d). \tag{XII.20}$$

Wir bemerken, dass, wenn $\widehat{\mathfrak{A}}$ bereits eine Sigma-Algebra ist, die von $\widehat{\mathfrak{A}}$ erzeugte Sigma-Algebra mit $\widehat{\mathfrak{A}}$ übereinstimmt. Insbesondere ist

$$\mathfrak{A}\big(\mathfrak{A}(\mathcal{E})\big) = \mathfrak{A}(\mathcal{E}), \tag{XII.21}$$

für jedes $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$.

Satz XII.13. *Seien $\mathcal{O}_d \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^d)$ die offenen, $\mathcal{C}_d \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^d)$ die abgeschlossenen und $\mathcal{K}_d \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^d)$ die kompakten Mengen in $\mathbb{R}^d$. Die von ihnen erzeugten Sigma-Algebren stimmen alle mit den Borelmengen überein,*

$$\mathfrak{B}_d = \mathfrak{A}(\mathcal{O}_d) = \mathfrak{A}(\mathcal{C}_d) = \mathfrak{A}(\mathcal{K}_d). \tag{XII.22}$$

Definition XII.14. *Sei Ω eine Menge und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ eine Sigma-Algebra. Eine Abbildung $\mu : \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ heißt* ***Maß*** *(auf $\mathfrak{A}$):⇔*

(i) $$\mu(\emptyset) = 0.$$

(ii) Die Abbildung μ ist σ-additiv, d. h., ist $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathfrak{A}$, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{XII.23}$$

*Gibt es außerdem eine Folge $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathfrak{A}$ mit $\mu(A_n) < \infty$, für alle $n \in \mathbb{N}$, und $A_n \nearrow \Omega$, d.h. $A_n \subseteq A_{n+1}$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$, so heißt das Maß μ **Sigma-endlich**.*

Ein Maß ist also ein Prämaß auf einer Sigma-Algebra. Wir kommen nun zum Hauptresultat dieses Kapitels.

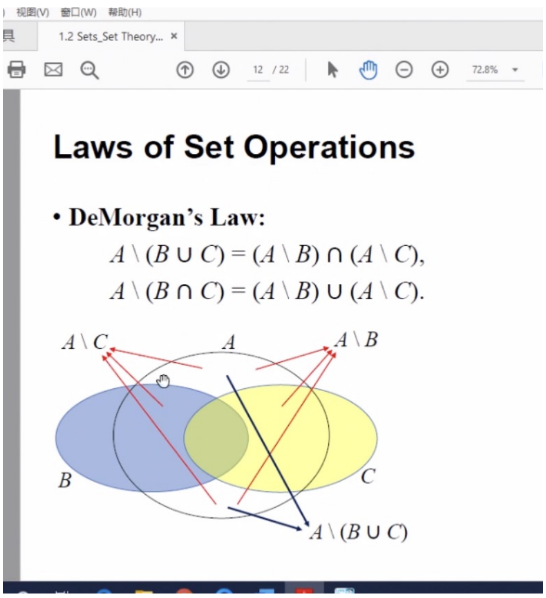
Satz XII.15. *Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Ring und $\mu : \mathfrak{R} \to \mathbb{R}_0^+$ ein Sigma-endliches Prämaß auf $\mathfrak{R}$. Dann besitzt μ eine eindeutige Fortsetzung zu einem Sigma-endlichen Maß $\tilde{\mu} : \mathfrak{A}(\mathfrak{R}) \to [0, \infty]$, d.h. $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$, für alle $A \in \mathfrak{R}$.*

Korollar XII.16. *Das auf den Figuren $\mathfrak{F}_d$ definierte Prämaß μ_d hat eine eindeutige Fortsetzung zu einem Sigma-endlichen Maß auf $\mathfrak{B}_d$, das **Lebesgue-Borel-Maß**, das wir abermals mit μ_d bezeichnen.*

Definition XII.17. *Sind Ω eine Menge und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ eine Sigma-Algebra, so bezeichnet man das Paar $(\Omega, \mathfrak{A})$ als **Messraum** oder **messbaren Raum**, und die Mengen in $\mathfrak{A}$ heißen **messbar**. Ist weiterhin $\mu : \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ ein Maß, so bezeichnet man das Tripel $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ als **Maßraum**.*

Insbesondere ist nach Korollar XII.16 das Tripel $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d, \mu_d)$ ein Maßraum.

Wir bemerken noch, dass sich das sogenannte *Lebesgue-Maß* vom Lebesgue-Borel-Maß in einem wichtigen Punkt unterscheidet: Ist $A \in \mathfrak{B}_d$ eine messbare Menge mit Maß Null, $\mu_d(A) = 0$, so gilt wegen der Monotonie des (in den Ergänzungen eingeführten) äußeren Maßes auch $\mu_d^*(A') = 0$, für jede Teilmenge $A' \subseteq A$. Trotzdem muss A' nicht notwendig messbar sein, und obwohl 0 ein natürlicher Kandidat für $\mu_d(A')$ ist, wäre dann $\mu_d(A')$ nicht definiert. Die Beseitigung dieses Nachteils führt auf das *Lebesgue-Maß*. Wir verzichten aber hier darauf, da es die Einführung neuer Begriffe erforderlich macht. Vielmehr ignorieren wir im Folgenden diesen Unterschied und sprechen vom *Lebesgue-Maß*, obwohl wir stets das *Lebesgue-Borel-Maß* meinen.



狄摩根律

并集的补集 = 补集的交集

XII.3. Ergänzungen

XII.3.1. Ringe und Figuren

Definition XII.18. *Sei Ω eine Menge und $\mathfrak{P}(\Omega) := \{A : A \subseteq \Omega\}$ ihre Potenzmenge. Ein Mengensystem $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt* ***Ring*** $:\Leftrightarrow$

$$\emptyset \in \mathfrak{R}, \tag{XII.24}$$

$$A, B \in \mathfrak{R} \quad \Rightarrow \quad A \setminus B \in \mathfrak{R}, \tag{XII.25}$$

$$A, B \in \mathfrak{R} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathfrak{R}. \tag{XII.26}$$

Wir bemerken, dass aus (XII.25) mit $A, B \in \mathfrak{R}$ auch

$$\begin{aligned} A \cap B &= \big\{\omega \in A \big| \omega \in B\big\} = \big\{\omega \in A \big| \, \omega \notin (A \setminus B)\big\} \\ &= A \setminus (A \setminus B) \in \mathfrak{R}. \end{aligned} \tag{XII.27}$$

Damit folgt, dass ein Ring mit endlich vielen Mengen auch deren Vereinigung und Durchschnitt enthält,

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{R} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{j=1}^{n} A_j \, , \, \bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathfrak{R}. \tag{XII.28}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- *Die leere Menge bildet einen Ring, $\mathfrak{R} = \{\emptyset\}$.*
- *Ebenso erhält man einen Ring, wenn man noch die volle Menge hinzufügt, $\mathfrak{R}' = \{\emptyset, \Omega\}$.*
- *Natürlich ist die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ selbst ein Ring.*
- *Für das nächste Beispiel erinnern wir an die Halbordnung $\leq$ auf $\mathbb{R}^d$, die für $a, b \in \mathbb{R}^d$ gegeben ist durch*

$$a \leq b \;:\Leftrightarrow\; a_1 \leq b_1, \; a_2 \leq b_2, \ldots, a_d \leq b_d. \tag{XII.29}$$

Definition XII.19. *Sei $\Omega = \mathbb{R}^d$ und $d \geq 1$. Für $a, b \in \mathbb{R}^d$ mit $a \leq b$ heißt*

$$[a \, , \, b) := [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_d, b_d) \tag{XII.30}$$

(nach rechts halboffener) ***Quader****. Die Menge aller Quader bezeichnen wir mit $\mathfrak{Q}_d$. Die Vereinigung endlich vieler Quader sammeln wir im System der* ***Figuren****,*

$$\mathfrak{F}_d := \big\{q_1 \cup \cdots \cup q_N \;\big|\; q_1, q_2, \ldots, q_N \in \mathfrak{Q}_d, \; N < \infty\big\}. \tag{XII.31}$$

Lemma XII.20. *$\mathfrak{F}_d$ ist ein Ring.*

Beweis. Offensichtlich gelten (XII.24) und (XII.26) trivialerweise, und die einzig nachzuweisende Eigenschaft ist (XII.25).
Dazu zeigen wir zunächst, dass die Differenz zweier Quader eine Figur ist. Seien $a, b, a', b' \in \mathbb{R}^d$ mit $a \leq b$ und $a' \leq b'$. Wir zeigen, dass $[a,b) \setminus [a',b') \in \mathfrak{F}_d$. Dazu ordnen wir die Koordinaten $a_\nu, b_\nu, a'_\nu, b'_\nu$ nach der Größe, d. h., für alle $\nu = 1, 2, \ldots, d$, definieren wir $-\infty < x_\nu^{(1)} < \ldots < x_\nu^{(k_\nu)} < \infty$, durch $\{x_\nu^{(1)}, \ldots, x_\nu^{(4)}\} = \{a_\nu, b_\nu, a'_\nu, b'_\nu\}$, wobei $1 \leq k_\nu \leq 4$, je nachdem, wie viele Koordinaten doppelt auftreten. Anschließend setzen wir

$$\mathcal{K} \ := \ \{1, \ldots, k_1 - 1\} \times \{1, \ldots, k_2 - 1\} \times \cdots \times \{1, \ldots, k_d - 1\} \tag{XII.32}$$

und, für $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathcal{K}$,

$$q_\xi \ := \ [x_1^{(\xi_1)}, x_1^{(\xi_1+1)}) \times [x_2^{(\xi_2)}, x_2^{(\xi_2+1)}) \times \cdots \times [x_1^{(\xi_d)}, x_1^{(\xi_d+1)}). \tag{XII.33}$$

Für $\xi \neq \xi'$ gilt offensichtlich $q_\xi \cap q_{\xi'} = \emptyset$. Außerdem sind

$$[a,b) \ = \bigcup_{\xi \in \mathcal{K}:\ q_\xi \cap [a,b) \neq \emptyset} q_\xi, \qquad [a',b') \ = \bigcup_{\xi \in \mathcal{K}:\ q_\xi \cap [a',b') \neq \emptyset} q_\xi, \tag{XII.34}$$

und insbesondere ist die Differenz der Quader $[a,b)$ und $[a',b')$ eine Figur,

$$[a,b) \setminus [a',b') \ = \bigcup_{\xi \in \mathcal{K}:\ q_\xi \cap ([a,b) \setminus [a',b')) \neq \emptyset} q_\xi \ \in \ \mathfrak{F}_d. \tag{XII.35}$$

Seien nun $\check{H} \in \mathfrak{F}_d$ eine Figur und $\hat{q}_1, \ldots, \hat{q}_M \in \mathfrak{Q}_d$ so, dass $\check{H} = \bigcup_{i=1}^M \hat{q}_i$.
Sei weiterhin $q \in \mathfrak{Q}_d$. Nach (XII.35) und (XII.26) ist dann

$$\check{H} \setminus q \ = \ \Big(\bigcup_{i=1}^M \hat{q}_i \Big) \setminus q \ = \ \bigcup_{i=1}^M \big(\hat{q}_i \setminus q \big) \ \in \ \mathfrak{F}_d, \tag{XII.36}$$

d.h., die Differenz einer Figur und eines Quaders ist eine Figur. Sind nun $f \in \mathfrak{F}_d$ eine Figur und $q_1, \ldots, q_N \in \mathfrak{Q}_d$ so, dass $f = \bigcup_{j=1}^N q_j$, dann ist nach (XII.36) auch

$$\check{H} \setminus f \ = \ \check{H} \setminus \Big(\bigcup_{j=1}^N q_j \Big) \ = \ \big(\cdots (\check{H} \setminus q_1) \setminus q_2 \big) \setminus \cdots \setminus q_N \ \in \ \mathfrak{F}_d. \tag{XII.37}$$

□

Mit einer Partition analog zur Konstruktion der Quader q_ξ in (XII.33) kann man zeigen, dass sich jede Figur als endliche Vereinigung *disjunkter* Quader schreiben lässt.

Lemma XII.21.

$$\mathfrak{F}_d \ = \ \big\{ q_1 \cup \cdots \cup q_N \ \big| \ q_1, q_2, \ldots, q_N \in \mathfrak{Q}_d, \ N < \infty, \quad \forall\, i < j: \quad q_i \cap q_j = \emptyset \big\}, \tag{XII.38}$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Wir kommen nun zum Begriff des (Raum-)Inhalts.

Definition XII.22. *Sei $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Ring. Eine Abbildung $\mu : \mathfrak{R} \to \mathbb{R}_0^+$ heißt **Inhalt** (auf $\mathfrak{R}$) :⇔*

(i) $$\mu(\emptyset) \; = \; 0.$$

*(ii) Sind $A_1, A_2, \ldots, A_N \in \mathfrak{R}$ paarweise disjunkt, so ist μ **additiv**,*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\Big) \; = \; \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i). \tag{XII.39}$$

Das wichtigste Beispiel für Definition XII.22 in unserem Zusammenhang ist das übliche, $d-$dimensionale Volumen: Für $a, b \in \mathbb{R}^d$, mit $a \leq b$, ist $[a, b) \in \mathfrak{Q}_d$ ein Quader mit Volumen

$$\mu_d\big(\, [a, b) \, \big) \; := \; \prod_{\nu=1}^{d} (b_\nu - a_\nu). \tag{XII.40}$$

Sind weiterhin $q_1, q_2, \ldots, q_N \in \mathfrak{Q}_d$ paarweise disjunkte Quader, so setzen wir

$$\mu_d\Big(\bigcup_{i=1}^{N} q_i\Big) \; = \; \sum_{i=1}^{N} \mu_d(q_i). \tag{XII.41}$$

Nach Lemma XII.21 ist jede Figur darstellbar in eine endliche Vereinigung disjunkter Quader, und insofern lässt sich jeder Figur durch (XII.41) ein Volumen zuordnen.

Lemma XII.23. *μ_d ist ein Inhalt auf $\mathfrak{F}_d$.*

Beweis. Definition XII.22(i) und (ii) gelten trivialerweise, falls die Wohldefiniertheit von $\mu_d : \mathfrak{F}_d \to [0, \infty]$ gesichert ist. Dazu ist zu bemerken, dass die Zerlegung einer Figur in disjunkte Quader keineswegs eindeutig ist. Sind $q_1, \ldots, q_M \in \mathfrak{Q}_d$ und $\hat{q}_1, \ldots, \hat{q}_N \in \mathfrak{Q}_d$ jeweils paarweise disjunkt, ergeben aber in der Vereinigung dieselbe Menge,

$$\bigcup_{i=1}^{M} q_i \; = \; \bigcup_{j=1}^{N} \hat{q}_j, \tag{XII.42}$$

so bleibt zu zeigen, dass auch die zugeordneten Volumina gleich sind,

$$\sum_{i=1}^{M} \mu_d(q_i) \; = \; \mu_d\Big(\bigcup_{i=1}^{M} q_i\Big) \; = \; \mu_d\Big(\bigcup_{j=1}^{N} \hat{q}_j\Big) \; = \; \sum_{j=1}^{N} \mu_d(\hat{q}_j). \tag{XII.43}$$

Dafür bemerken wir, dass $\tilde{q}_{ij} := q_i \cap \hat{q}_j \in \mathfrak{Q}_d$ eine Familie disjunkter Quader definiert, und dass

$$q_i \; = \; \bigcup_{j=1}^{N} \tilde{q}_{ij} \quad \text{und} \quad \hat{q}_j \; = \; \bigcup_{i=1}^{M} \tilde{q}_{ij} \tag{XII.44}$$

für alle $i = 1, \ldots, M$ und alle $j = 1, \ldots, N$ gilt. Also ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{M} \mu_d(q_i) &= \sum_{i=1}^{M} \mu_d\Big(\bigcup_{j=1}^{N} \tilde{q}_{ij}\Big) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} \mu_d(\tilde{q}_{ij}) \\ &= \sum_{j=1}^{N} \mu_d\Big(\bigcup_{i=1}^{M} \tilde{q}_{ij}\Big) = \sum_{j=1}^{N} \mu_d(\hat{q}_j), \end{aligned} \tag{XII.45}$$

und μ_d ist auf den Figuren wohldefiniert. □

XII.3.2. Prämaße 前测度

Definition XII.24. *Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Ring. Eine Abbildung $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$ heißt **Prämaß** (auf $\mathfrak{R}$) :⇔*

(i) $$\mu(\emptyset) = 0.$$

*(ii) Die Abbildung μ ist **Sigma-additiv**, d. h., ist $(A_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{R}^{\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathfrak{R}$, so dass auch ihre Vereinigung in $\mathfrak{R}$ liegt, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R}$, so gilt*

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{XII.46}$$

*Gibt es außerdem eine Folge $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathfrak{R}$ mit $\mu(A_n) < \infty$, für alle $n \in \mathbb{N}$, und $A_n \nearrow \Omega$, d.h. $A_n \subseteq A_{n+1}$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$, so heißt das Prämaß μ **Sigma-endlich**.*

Wir sehen, dass jedes Prämaß auf $\mathfrak{R}$ auch einen Inhalt auf $\mathfrak{R}$ definiert. Der folgende Satz gibt eine notwendige Bedingung für die Umkehrung.

Lemma XII.25. *Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Ring und $\mu : \mathfrak{R} \to \mathbb{R}_0^+$ ein Inhalt. Dann gilt folgende Äquivalenz:*

$$\mu \text{ ist ein Prämaß auf } \mathfrak{R} \tag{XII.47}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu \text{ ist } \emptyset\textbf{-stetig} \tag{XII.48}$$

$$:\Leftrightarrow \quad \forall (A_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{R}^{\mathbb{N}},\ A_n \searrow \emptyset : \quad \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0,$$

wobei $A_n \searrow \emptyset$ bedeutet, dass $A_n \supseteq A_{n+1}$ und $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.

Beweis.
(i): Sei $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathfrak{R}$ mit $B_n \searrow \emptyset$, d.h. $B_n \supseteq B_{n+1}$ und $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$. Bilden wir $A_n := B_n \setminus B_{n+1}$, so ist $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathfrak{R}$, und B_1 lässt sich als disjunkte Vereinigung für alle $N \in \mathbb{N}$ wie folgt darstellen,

$$B_1 = \bigcup_{n=1}^{N} A_n \cup B_{N+1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{XII.49}$$

Weil μ ein Prämaß ist, folgt daraus, dass

$$\mu(B_1) \ = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{N} A_n \Big) \ + \ \mu(B_{N+1}) \ = \ \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) \ + \ \mu(B_{N+1}) \ \text{ und} \tag{XII.50}$$

$$\mu(B_1) \ = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Big) \ + \ \mu(B_{N+1}) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{XII.51}$$

Insbesondere ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ konvergent, und deshalb muss

$$\mu(B_{N+1}) \ = \ \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(A_n) \ \to \ 0 \tag{XII.52}$$

konvergieren, für $N \to \infty$.

(ii): Sei $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathfrak{R}$, so dass auch $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R}$. Setzen wir $\widetilde{B}_N := \bigcup_{n=1}^{N} A_n$ und $B_N := \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n$, so sind $\widetilde{B}_N$ und B_N disjunkt und $A = \widetilde{B}_N \cup B_N$. Offensichtlich sind $\widetilde{B}_N \in \mathfrak{R}$ und somit auch $B_N = A \setminus \widetilde{B}_N \in \mathfrak{R}$. Da μ ein endlicher Inhalt ist, sind

$$\mu(A)\, , \ \mu(B_N)\, , \ \mu(\widetilde{B}_N) \ < \ \infty \tag{XII.53}$$

endlich, und die Disjunktheit von $\widetilde{B}_N$ und B_N impliziert, dass $\mu(A) = \mu(\widetilde{B}_N) + \mu(B_N)$ bzw.

$$\forall\, N \in \mathbb{N} : \qquad \mu(B_N) \ = \ \mu(A) \ - \ \mu(\widetilde{B}_N). \tag{XII.54}$$

Außerdem impliziert die Disjunktheit der Mengen A_n, dass $B_N \searrow \emptyset$, für $N \to \infty$, denn zu jedem $x \in A$ gibt es genau ein $n(x) \in \mathbb{N}$, so dass $x \in A_{n(x)}$, und somit ist $x \notin B_N$, für alle $N > n(x)$. Aus der $\emptyset$-Stetigkeit und (XII.54) folgt deshalb

$$\begin{aligned} 0 \ &= \ \lim_{N\to\infty} \mu(B_N) \ = \ \lim_{N\to\infty} \mu(A \setminus \widetilde{B}_N) \\ &= \mu(A) \ - \ \lim_{N\to\infty} \mu(\widetilde{B}_N) \ = \ \mu(A) \ - \ \lim_{N\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{N} A_n \Big) \\ &= \mu(A) \ - \ \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) \ = \ \mu(A) \ - \ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n), \end{aligned} \tag{XII.55}$$

was gerade die Sigma-Additivität ergibt. □

In dem nun folgenden Satz verwenden wir noch folgende elementare Identität,

Lemma XII.26. *Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Ring, $\mu : \mathfrak{R} \to [0,\infty]$ ein Inhalt und $A, B \in \mathfrak{R}$. Dann gilt*

$$\mu(A \cup B) \ + \ \mu(A \cap B) \ = \ \mu(A) \ + \ \mu(B). \tag{XII.56}$$

Beweis. Wir beobachten, dass in

$$A \cup B \;=\; A \cup (B \setminus A) \quad \text{und} \quad B \;=\; (A \cap B) \cup (B \setminus A) \tag{XII.57}$$

auf den rechten Seiten jeweils zwei disjunkte Mengen vereinigt sind. Aus der Additivität des Inhalts folgt damit

$$\mu(A \cup B) - \mu(A) \;=\; \mu(B \setminus A) \;=\; \mu(B) - \mu(A \cap B), \tag{XII.58}$$

woraus sich sofort Glg. (XII.56) ergibt. □

Satz XII.27. *μ_d ist ein Prämaß auf $\mathfrak{F}_d$.*

Beweis. Da wir in Lemma XII.23 bereits gezeigt haben, dass μ_d einen (offensichtlich endlichen) Inhalt auf $\mathfrak{F}_d$ definiert, bleibt nach Lemma XII.25 nur die $\emptyset$-Stetigkeit von μ_d zu zeigen. Sei dazu $(A_n)_{n=1}^\infty$ eine monoton fallende Folge in $\mathfrak{F}_d$, d.h. $A_n \supseteq A_{n+1}$. Es reicht zu zeigen, dass

$$\delta \;:=\; \lim_{n\to\infty} \mu_d(A_n) \;=\; \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu_d(A_n) \;>\; 0, \tag{XII.59}$$

die Aussage

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \;\neq\; \emptyset \tag{XII.60}$$

impliziert, wobei wir o. B. d. A. $\delta \leq 1$ annehmen können. Wir fixieren nun $n \in \mathbb{N}$ und wählen nichtleere, disjunkte Quader $q^{(1)}, \ldots, q^{(L)}$ in $\mathfrak{Q}_d$ so, dass

$$A_n \;=\; \bigcup_{\ell=1}^{L} q^{(\ell)}, \tag{XII.61}$$

wobei $q^{(\ell)} = x^{(\ell)} + [-\varepsilon^{(\ell)}\,,\,\varepsilon^{(\ell)})$, für geeignete $x^{(\ell)} \in \mathbb{R}^d$ und $\varepsilon^{(\ell)} \in (\mathbb{R}^+)^d$. Anschließend definieren wir etwas kleinere Quader

$$\hat{q}^{(\ell)} \;:=\; x^{(\ell)} \;+\; \left(1 - \frac{\delta\, 2^{-n-1-\ell}}{1 + \mu_d(q^{(\ell)})}\right)^{1/d} \big[-\varepsilon^{(\ell)}\,,\,\varepsilon^{(\ell)}\big) \;\in\; \mathfrak{Q}_d \tag{XII.62}$$

und setzen

$$B_n \;:=\; \bigcup_{\ell=1}^{L} \hat{q}^{(\ell)}. \tag{XII.63}$$

Wir beobachten, dass der Abschluss von B_n kompakt ist und dass

$$\overline{B_n} \;=\; \bigcup_{\ell=1}^{L} \overline{\hat{q}^{(\ell)}} \;\subseteq\; A_n. \tag{XII.64}$$

Weiterhin beobachten wir, dass

$$\begin{aligned}\mu_d(A_n) \;-\; \mu_d(B_n) \;&=\; \sum_{\ell=1}^{L} \left\{ \mu_d(q^{(\ell)}) \;-\; \left(1 - \frac{\delta\, 2^{-n-1-\ell}}{1+\mu_d(q^{(\ell)})}\right)\mu_d(q^{(\ell)}) \right\} \\ &=\; \sum_{\ell=1}^{L} \delta\, 2^{-n-1-\ell} \left(\frac{\mu_d(q^{(\ell)})}{1+\mu_d(q^{(\ell)})} \right) \\ &\le\; \sum_{\ell=1}^{L} \delta\, 2^{-n-1-\ell} \;\le\; \delta\, 2^{-n-1}. \end{aligned} \tag{XII.65}$$

Im nächsten Schritt definieren wir mit Hilfe der Mengen $B_n \in \mathfrak{F}_d$ eine weitere Folge $(C_N)_{N=1}^{\infty}$ von Figuren in $\mathfrak{F}_d$ durch

$$C_N \;:=\; \bigcap_{n=1}^{N} B_n \;=\; C_{N-1} \cap B_N. \tag{XII.66}$$

Daraus ergibt sich mit (XII.56), dass

$$\mu_d(C_N) \;=\; \mu_d(C_{N-1} \cap B_N) \;=\; \mu_d(C_{N-1}) + \mu_d(B_N) \;-\; \mu_d(C_{N-1} \cup B_N). \tag{XII.67}$$

Nun ist $C_{N-1} \subseteq B_{N-1} \subseteq A_{N-1}$ und auch $B_N \subseteq A_N \subseteq A_{N-1}$, also $C_{N-1} \cup B_N \subseteq A_{N-1}$. Setzen wir dies und (XII.65) in (XII.67) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\mu_d(C_N) \;&\ge \mu_d(C_{N-1}) + \mu_d(B_N) \;-\; \mu_d(A_{N-1}) \\ &\ge \mu_d(C_{N-1}) + \mu_d(A_N) \;-\; \mu_d(A_{N-1}) \;-\; \delta\, 2^{-N-1}, \end{aligned} \tag{XII.68}$$

woraus wir schließen, dass

$$\begin{aligned}&\mu_d(C_N) - \mu_d(A_N) \\ &\qquad \ge \mu_d(C_{N-1}) \;-\; \mu_d(A_{N-1}) \;-\; \delta\, 2^{-(N-1)-2} \\ &\qquad \ge \mu_d(C_{N-2}) \;-\; \mu_d(A_{N-2}) \;-\; \delta\left(2^{-(N-1)-2} \;+\; 2^{-(N-2)-2}\right) \\ &\qquad \cdots \;\ge\; \mu_d(C_1) \;-\; \mu_d(A_1) \;-\; \delta \sum_{\ell=1}^{N-1} 2^{-2-\ell} \\ &\qquad = \mu_d(B_1) \;-\; \mu_d(A_1) \;-\; \delta \sum_{\ell=1}^{N-1} 2^{-2-\ell} \\ &\qquad \ge\; -\,\delta \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{-2-\ell} \;=\; -\,\delta\, 2^{-1}, \end{aligned} \tag{XII.69}$$

da $C_1 = B_1$. Wegen $\mu_d(A_N) \ge \delta$ impliziert dies, dass

$$\forall\, N \in \mathbb{N}: \qquad \mu_d(C_N) \;\ge\; \frac{\delta}{2} \;>\; 0. \tag{XII.70}$$

was wiederum zur Folge hat, dass $C_N \neq \emptyset$, für alle $N \in \mathbb{N}$.

Schließlich stellen wir fest, dass $(\overline{C_N})_{N=1}^{\infty}$ eine monotone Folge nichtleerer, kompakter Mengen ist, $\overline{C_N} \supseteq \overline{C_{N+1}} \neq \emptyset$, was nach dem Satz von Heine-Borel impliziert, dass auch der Durchschnitt aller $\overline{C_N}$ nichtleer ist. Mit $\overline{C_n} \subseteq \overline{B_n} \subseteq A_n$ folgt also

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{C_n} \neq \emptyset. \tag{XII.71}$$

□

XII.3.3. Sigma-Algebren

Die entscheidende Einsicht, die den Grundbaustein der Maßtheorie darstellt, ist, dass der Begriff des Mengenrings (hier: die Figuren $\mathfrak{F}_1$) nicht flexibel genug ist und durch den der Sigma-Algebra ersetzt werden muss.

Definition XII.28. *Sei Ω eine Menge und $\mathfrak{P}(\Omega) := \{A : A \subseteq \Omega\}$ ihre Potenzmenge. Ein Mengensystem $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt* ***Sigma-Algebra*** *(über Ω) $:\Leftrightarrow$*

$$\Omega \in \mathfrak{A}, \tag{XII.72}$$

$$A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^c := \Omega \setminus A \in \mathfrak{A}, \tag{XII.73}$$

$$(A_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}. \tag{XII.74}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- *Wir bemerken, dass $\mathfrak{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ die kleinstmögliche und $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ die größtmögliche Sigma-Algebra über Ω sind. Der Ausganspunkt der Maßtheorie ist jedoch die Erkenntnis, dass für $\Omega = \mathbb{R}^d$ der Ring der Figuren $\mathfrak{F}_d$ zu klein und die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ zu groß sind.*
- *Weiterhin bemerken wir, dass jede Sigma-Algebra $\mathfrak{A}$ auch ein Ring ist. Denn mit $\Omega \in \mathfrak{A}$ ist auch $\emptyset = \Omega^c \in \mathfrak{A}$; für $A, B \in \mathfrak{A}$ setzen wir $A_1 := A$, $A_2 := B$ und $A_n := \emptyset$, für alle $n \geq 2$. Dann ist $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathfrak{A}$, und deshalb ist auch $A \cup B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{A}$. Schließlich sind mit $A, B \in \mathfrak{A}$ auch $A^c, B^c \in \mathfrak{A}$. Dann ist auch $A^c \cup B \in \mathfrak{A}$ und somit auch*

$$A \setminus B = A \cap B^c = \left[A^c \cup B\right]^c \in \mathfrak{A}. \tag{XII.75}$$

Lemma XII.29. *Jeder (endliche, abzählbare oder auch überabzählbare) Durchschnitt von Sigma-Algebren ist wieder eine Sigma-Algebra.*

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Nachprüfen der Eigenschaften (XII.72)–(XII.74). □

Ist nun $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein System von Teilmengen von Ω, so setzen wir

$$\mathfrak{A}(\mathcal{E}) := \bigcap \Big\{ \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega) \;\Big|\; \mathcal{E} \subseteq \mathfrak{A}\,, \;\; \mathfrak{A} \text{ ist eine Sigma-Algebra} \Big\}. \tag{XII.76}$$

Nach Lemma XII.29 ist $\mathfrak{A}(\mathcal{E})$ wieder eine Sigma-Algebra, und nach Konstruktion ist sie die kleinste Sigma-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält.

Definition XII.30.

(i) Zu $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt $\mathfrak{A}(\mathcal{E})$ ***die von $\mathcal{E}$ erzeugte Sigma-Algebra****.*

(ii) Für $\Omega = \mathbb{R}^d$ heißt die von den Quadern $\mathfrak{Q}_d$ bzw. den Figuren $\mathfrak{F}_d$ erzeugte Sigma-Algebra die Sigma-Algebra der ***Borelmengen****,*

$$\mathfrak{B}_d := \mathfrak{A}(\mathfrak{Q}_d) = \mathfrak{A}(\mathfrak{F}_d). \tag{XII.77}$$

Wir bemerken, dass, wenn $\widehat{\mathfrak{A}}$ bereits eine Sigma-Algebra ist, die von $\widehat{\mathfrak{A}}$ erzeugte Sigma-Algebra mit $\widehat{\mathfrak{A}}$ übereinstimmt. Insbesondere ist

$$\mathfrak{A}\big(\mathfrak{A}(\mathcal{E})\big) = \mathfrak{A}(\mathcal{E}), \tag{XII.78}$$

für jedes $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$.

Satz XII.31. *Seien $\mathcal{O}_d \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^d)$ die offenen, $\mathcal{C}_d \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^d)$ die abgeschlossenen und $\mathcal{K}_d \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^d)$ die kompakten Mengen in $\mathbb{R}^d$. Die von ihnen erzeugten Sigma-Algebren stimmen alle mit den Borelmengen überein,*

$$\mathfrak{B}_d = \mathfrak{A}(\mathcal{O}_d) = \mathfrak{A}(\mathcal{C}_d) = \mathfrak{A}(\mathcal{K}_d). \tag{XII.79}$$

Beweis. In $\mathbb{R}^d$ ist eine Menge genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist; das ist die Aussage des Satzes von Heine-Borel. Also ist $\mathcal{K}_d \subseteq \mathcal{C}_d$, und deshalb auch $\mathfrak{A}(\mathcal{K}_d) \subseteq \mathfrak{A}(\mathcal{C}_d)$. Sind umgekehrt $A \in \mathcal{C}_d$ eine abgeschlossene Menge und $\bar{B}_r \in \mathcal{K}_d$ die abgeschlossene Kugel in $\mathbb{R}^d$ um den Ursprung und mit Radius $r \in \mathbb{R}^+$, so sind auch $A_n := A \cap \bar{B}_n \in \mathcal{K}_d$, für alle $n \in \mathbb{N}$, und

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}(\mathcal{K}_d). \tag{XII.80}$$

Also ist $\mathcal{C}_d \subseteq \mathfrak{A}(\mathcal{K}_d)$, und somit gilt nach (XII.78))

$$\mathfrak{A}(\mathcal{K}_d) \subseteq \mathfrak{A}(\mathcal{C}_d) \subseteq \mathfrak{A}\big(\mathfrak{A}(\mathcal{K}_d)\big) \subseteq \mathfrak{A}(\mathcal{K}_d). \tag{XII.81}$$

Also ist $\mathfrak{A}(\mathcal{K}_d) = \mathfrak{A}(\mathcal{C}_d)$.

Ist $A \in \mathcal{C}_d$ abgeschlossen, so ist $A^c \in \mathcal{O}_d$ offen. Weil $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_d)$ mit A^c auch dessen Komplement A enthält, folgt also, dass $\mathcal{C}_d \subseteq \mathfrak{A}(\mathcal{O}_d)$, was nach (XII.78) wiederum $\mathfrak{A}(\mathcal{C}_d) \subseteq \mathfrak{A}(\mathcal{O}_d)$ nach sich zieht. Dasselbe Argument liefert aber auch $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_d) \subseteq \mathfrak{A}(\mathcal{C}_d)$, und somit erhalten wir

$$\mathfrak{A}(\mathcal{K}_d) = \mathfrak{A}(\mathcal{C}_d) = \mathfrak{A}(\mathcal{O}_d). \tag{XII.82}$$

Wir zeigen nun noch, dass $\mathfrak{B}_d = \mathfrak{A}(\mathcal{O}_d)$. Seien dazu $a, b \in \mathbb{R}^d$ mit $a < b$, d.h. $a_1 < b_1, \ldots, a_d < b_d$. Zu $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$A_n := \left(a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2n}\ ,\ b_1\right) \times \cdots \times \left(a_d + \frac{b_d - a_d}{2n}\ ,\ b_d\right). \tag{XII.83}$$

Dann ist $A_n \in \mathcal{O}_d$, für alle $n \in \mathbb{N}$, und

$$[a\ ,\ b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_d). \tag{XII.84}$$

Also ist $\mathfrak{Q}_d \subseteq \mathfrak{A}(\mathcal{O}_d)$, woraus abermals mit (XII.78) auch $\mathfrak{A}(\mathfrak{Q}_d) \subseteq \mathfrak{A}(\mathcal{O}_d)$ folgt.

Um die umgekehrte Inklusion $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_d) \subseteq \mathfrak{A}(\mathfrak{Q}_d)$ zu beweisen, betrachten wir eine offene Menge $A \in \mathcal{O}_d$. Da jeder Punkt $x \in A$ ein innerer Punkt ist, gibt es ein $r(x) > 0$, so dass $B_{r(x)}(x) \subseteq A$. Wir wählen nun $\rho(x) \in \mathbb{Q}^+$ so, dass $(2d)^{-1} r(x) < \rho(x) < d^{-1} r(x)$ und dann einen Punkt $y(x) \in \mathbb{Q}^d$, mit $\|y(x) - x\| < (4d)^{-1} r(x)$. Definieren wir nun noch $\varepsilon(x) \in \mathbb{Q}^d$ durch $\varepsilon_\nu(x) := \rho(x)$, für alle $\nu = 1, \ldots, d$, so beobachten wir dass $|x_\nu - y_\nu(x)| < \varepsilon_\nu(x)$ und somit dass

$$x \in \big[y(x) - \varepsilon(x)\ ,\ y(x) + \varepsilon(x)\big) \subseteq B_{r(x)}(x) \subseteq A \tag{XII.85}$$

Insbesondere ist

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} \big[y(x) - \varepsilon(x)\ ,\ y(x) + \varepsilon(x)\big) \subseteq A, \tag{XII.86}$$

also

$$A = \bigcup_{x \in A} \big[y(x) - \varepsilon(x)\ ,\ y(x) + \varepsilon(x)\big). \tag{XII.87}$$

Die Vereinigung auf der rechten Seite in (XII.87) ist abzählbar, denn die Menge der Quader $[y(x) - \varepsilon(x)\ ,\ y(x) + \varepsilon(x)) \in \mathfrak{Q}_d$ ist mit $y(x), \varepsilon(x) \in \mathbb{Q}^d$ abzählbar. Es folgt also, dass $\mathcal{O}_d \subseteq \mathfrak{A}(\mathfrak{Q}_d)$ und somit auch $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_d) \subseteq \mathfrak{A}(\mathfrak{Q}_d) = \mathfrak{B}_d$. ☐

XII.3.4. Das äußere Maß

Wir führen nun den auf Caratheodory zurückgehenden Begriff des äußeren Maßes ein.

Definition XII.32. *Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Ring und $\mu : \mathfrak{R} \to \mathbb{R}_0^+$ ein Prämaß auf $\mathfrak{R}$. Für $Q \in \mathfrak{P}(\Omega)$ sei*

$$\mathfrak{U}(Q) := \left\{ (A_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{R} \ \middle|\ Q \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}, \tag{XII.88}$$

*wobei $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{R}$ eine Folge in $\mathfrak{R}$ bezeichne. Das **äußere Maß** (bezüglich μ) ist die Abbildung $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to [0, \infty]$, die durch $\mu^*(Q) := \infty$, falls $\mathfrak{U}(Q) = \emptyset$, und*

$$\mu^*(Q) := \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \ \middle|\ (A_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{U}(Q) \right\}, \tag{XII.89}$$

falls $\mathfrak{U}(Q) \neq \emptyset$, definiert ist.

Lemma XII.33. *Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Ring und $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$ ein Prämaß auf $\mathfrak{R}$. Das zugehörige äußere Maß besitzt folgende Eigenschaften:*

$$\mu^* \ \geq \ 0, \qquad \mu^*(\emptyset) \ = \ 0, \tag{XII.90}$$

$$Q_1 \subseteq Q_2 \quad \Rightarrow \quad \mu^*(Q_1) \leq \mu^*(Q_2), \tag{XII.91}$$

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \Big) \ \leq \ \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Q_n). \tag{XII.92}$$

Ist $A \in \mathfrak{R}$, so gelten weiterhin noch

$$\forall\, Q \in \mathfrak{P}(\Omega): \ \mu^*(Q) \ = \mu^*(Q \cap A) \ + \ \mu^*(Q \setminus A), \tag{XII.93}$$

$$\mu^*(A) \ = \mu(A). \tag{XII.94}$$

Beweis.
Glg. (XII.90): Die Nichtnegativität von μ^* ist offensichtlich. Mit $A_n := \emptyset$ ist $(A_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{U}(\emptyset)$ und deshalb $0 \leq \mu^*(\emptyset) \leq 0$.

Glg. (XII.91): Mit $Q_1 \subseteq Q_2$ ist $\mathfrak{U}(Q_1) \supseteq \mathfrak{U}(Q_2)$ und daher $\mu^*(Q_1) \leq \mu^*(Q_2)$.

Glg. (XII.92): Seien $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathfrak{P}(\Omega)$ und $Q := \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$. Sei weiterhin $\varepsilon > 0$. Wir können für alle $n \in \mathbb{N}$ annehmen, dass $\mathfrak{U}(Q_n) \neq \emptyset$, denn anderenfalls ist die rechte Seite in (XII.92) unendlich, und (XII.92) ist somit gültig. Nach Definition von μ^* gibt dann es zu jedem $Q_n \in \mathfrak{P}(\Omega)$ eine Folge $(A_{n,m})_{m=1}^{\infty} \in \mathfrak{U}(Q_n)$, so dass

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \qquad \mu^*(Q_n) \ \geq \ \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_{n,m}) \ - \ \varepsilon\, 2^{-n}. \tag{XII.95}$$

Da $Q_n \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{n,m}$, ist auch $Q \subseteq \bigcup_{m,n=1}^{\infty} A_{n,m}$, d.h., die (abzählbare) Doppelfolge überdeckt Q also $(A_{n,m})_{m,n=1}^{\infty} \in \mathfrak{U}(Q)$. Somit ist

$$\mu^*(Q) \ \leq \ \sum_{m,n=1}^{\infty} \mu(A_{n,m}) \ \leq \ \sum_{n=1}^{\infty} \big\{ \mu^*(Q_n) + \varepsilon 2^{-n} \big\} \ = \ \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Q_n). \tag{XII.96}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, impliziert dies (XII.92).

Glg. (XII.93): Seien $Q \in \mathfrak{P}(\Omega)$ und $A \in \mathfrak{R}$. Setzen wir $Q_1 := Q \cap A$, $Q_2 := Q \setminus A$ und $Q_3 := Q_4 := \cdots := \emptyset$, so folgt aus (XII.90) und (XII.92), dass

$$\mu^*(Q) \ \leq \ \mu^*(Q \cap A) \ + \ \mu^*(Q \setminus A). \tag{XII.97}$$

Es verbleibt also die umgekehrte Ungleichung zu zeigen. Dazu können wir wieder $\mathfrak{U}(Q) \neq \emptyset$ annehmen, denn anderenfalls gilt $\mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A) \leq \infty = \mu^*(Q)$ trivialerweise. Ist also $(A_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{U}(Q)$, dann beobachten wir zunächst, dass $\mu(A_n) = \mu(A_n \cap A) + \mu(A_n \setminus A)$, weil μ ein Inhalt ist. Addieren wir diese Gleichungen, so erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap A) \ + \ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus A) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{XII.98}$$

Außerdem sind $(A_n \cap A)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{U}(Q \cap A)$ und $(A_n \setminus A)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{U}(Q \setminus A)$, daher sind

$$\mu^*(Q \cap A) \ \leq \ \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n \cap A) \ \text{ und } \ \mu^*(Q \setminus A) \ \leq \ \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n \setminus A), \tag{XII.99}$$

woraus mit (XII.98)

$$\mu^*(Q \cap A) \ + \ \mu^*(Q \setminus A) \ \leq \ \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) \tag{XII.100}$$

für alle $(A_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{U}(Q)$ folgt. Also gilt auch

$$\mu^*(Q \cap A) \ + \ \mu^*(Q \setminus A) \ \leq \ \inf_{(A_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{U}(Q)} \left\{ \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) \right\} \ = \ \mu^*(Q). \tag{XII.101}$$

Glg. (XII.94): Mit $A_1 := A$ und $A_2 := A_3 := \cdots := \emptyset$ ist $(A_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{U}(A)$, und deshalb ist

$$\mu^*(A) \ \leq \ \mu(A). \tag{XII.102}$$

Um die umgekehrte Ungleichung zu beweisen, verwenden wir, dass μ auf $\mathfrak{R}$ ein Prämaß und somit $\emptyset$-stetig ist. Wir wissen bereits, dass $\mathfrak{U}(A) \ni (A, \emptyset, \emptyset, \ldots)$ nicht leer ist. Seien also $(A_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{U}(A)$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Wir setzen $B_N := A \setminus \big(\bigcup_{n=1}^N A_n\big) \in \mathfrak{R}$ und beobachten, dass

$$\mu(A) \ = \ \mu\Big(A \cap \bigcup_{n=1}^N A_n\Big) \ + \ \mu(B_N) \ \leq \ \sum_{n=1}^N \mu(A_n) \ + \ \mu(B_N). \tag{XII.103}$$

Mit $N \to \infty$ ergibt dies insbesondere

$$\mu(A) \ \leq \ \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) \ + \ \limsup_{N \to \infty} \mu(B_N). \tag{XII.104}$$

Nun bemerken wir, dass $B_N \searrow \emptyset$, da $A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. Weil μ $\emptyset$-stetig ist, folgt damit, dass $\limsup_{N\to\infty} \mu(B_N) = \lim_{N\to\infty} \mu(B_N) = 0$, und wir haben

$$\mu(A) \ \leq \ \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n), \tag{XII.105}$$

für alle $(A_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{U}(A)$, was $\mu(A) \leq \mu^*(A)$ nach sich zieht. □

外测度

Satz XII.34 (Caratheodory)**.** *Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Ring, $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$ ein Prämaß auf $\mathfrak{R}$ und $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ das zugehörige äußere Maß. Dann ist*

$$\mathfrak{A}^* \ := \ \Big\{ A \in \mathfrak{P}(\Omega) \ \Big| \ \forall\, Q \in \mathfrak{P}(\Omega) : \ \ \mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A) \Big\} \tag{XII.106}$$

eine Sigma-Algebra, die $\mathfrak{R}$ umfasst, also

$$\mathfrak{R} \ \subseteq \ \mathfrak{A}(\mathfrak{R}) \ \subseteq \ \mathfrak{A}^* \ \subseteq \ \mathfrak{P}(\Omega). \tag{XII.107}$$

Beweis. Es ist nur zu zeigen, dass $\mathfrak{A}^*$ eine Sigma-Algebra ist, denn nach (XII.93) ist $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{A}^*$. Weiterhin ist trivialerweise $\Omega \in \mathfrak{A}^*$, und auch die Implikation $A \in \mathfrak{A}^* \Rightarrow A^c \in \mathfrak{A}^*$ gilt trivial, wenn wir $Q \setminus A = Q \cap A^c$ beachten. Es ist also nur nachzuweisen, dass $\mathfrak{A}^*$ unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist. Dazu betrachten wir zunächst $A, B \in \mathfrak{A}^*$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mu^*(Q) &= \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \cap A^c) \\ &= \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*(Q \cap A^c \cap B) \\ &\quad + \mu^*(Q \cap A \cap B^c) + \mu^*(Q \cap A^c \cap B^c) \\ &= \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*(Q \cap A^c \cap B) \\ &\quad + \mu^*(Q \cap A \cap B^c) + \mu^*(Q \cap [A \cup B]^c). \end{aligned} \tag{XII.108}$$

Ersetzen wir in diese Identität Q durch $Q \cap [A \cup B]$, so fällt der letzte Term heraus, und die anderen drei bleiben unverändert,

$$\begin{aligned} \mu^*(Q \cap [A \cup B]) &= \mu^*(Q \cap [A \cup B] \cap A \cap B) + \mu^*(Q \cap [A \cup B] \cap A^c \cap B) \\ &\quad + \mu^*(Q \cap [A \cup B] \cap A \cap B^c) \\ &= \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*(Q \cap A^c \cap B) + \mu^*(Q \cap A \cap B^c). \end{aligned} \tag{XII.109}$$

Ersetzen wir die ersten 3 Terme auf der rechten Seite von (XII.108) durch die linke Seite von (XII.109), so erhalten wir

$$\mu^*(Q) \; = \; \mu^*(Q \cap [A \cup B]) + \mu^*(Q \cap [A \cup B]^c), \tag{XII.110}$$

also $A \cup B \in \mathfrak{A}^*$. Sind nun $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}^*$ disjunkt, so sind $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \cap A_2^c = A_1$ und $A_1^c \cap A_2 = A_2$, und aus (XII.109) folgt dann außerdem, dass

$$\mu^*(Q \cap [A_1 \cup A_2]) \; = \; \mu^*(Q \cap A_1) + \mu^*(Q \cap A_2). \tag{XII.111}$$

Durch Induktion übertragen sich (XII.110) und (XII.111) sofort auf endlich viele Mengen:
Ist $(A_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathfrak{A}^*$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen und

$$B_N \; := \; \bigcup_{n=1}^N A_n \quad \text{sowie} \quad A \; := \; \bigcup_{n=1}^\infty A_n, \tag{XII.112}$$

so folgt, dass $B_N \in \mathfrak{A}^*$ und

$$\mu^*(Q \cap B_N) \; = \; \sum_{n=1}^N \mu^*(Q \cap A_n). \tag{XII.113}$$

Wegen $B_N \subseteq A$ ist $Q \setminus B_N \supseteq Q \setminus A$ und daher $\mu^*(Q \setminus B_N) \geq \mu^*(Q \setminus A)$, was mit (XII.113) und $B_N \in \mathfrak{A}^*$ zusammen

$$\mu^*(Q) \; = \; \mu^*(Q \cap B_N) + \mu^*(Q \setminus B_N) \; \geq \; \sum_{n=1}^N \mu^*(Q \cap A_n) + \mu^*(Q \setminus A) \tag{XII.114}$$

ergibt. Im Limes $N \to \infty$ erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} \mu^*(Q) \;&\geq\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Q \cap A_n) \,+\, \mu^*(Q \setminus A) \\ &\geq \mu^*(Q \cap A) \,+\, \mu^*(Q \setminus A) \;\geq\; \mu^*(Q), \end{aligned} \tag{XII.115}$$

wobei wir zusätzlich (XII.92) verwenden. Also muss tatsächlich Gleichheit überall in (XII.115) gelten, und es folgt, dass $A \in \mathfrak{A}^*$. □

XII.3.5. Maße

Definition XII.35. *Sei Ω eine Menge und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ eine Sigma-Algebra. Eine Abbildung $\mu : \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ heißt* ***Maß*** *(auf $\mathfrak{A}$):$\Leftrightarrow$*

(i) $$\mu(\emptyset) \;=\; 0.$$

(ii) Die Abbildung μ ist σ-additiv, d. h., ist $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathfrak{A}$, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{XII.116}$$

Gibt es außerdem eine Folge $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathfrak{A}$ mit $\mu(A_n) < \infty$, für alle $n \in \mathbb{N}$, und $A_n \nearrow \Omega$, d.h. $A_n \subseteq A_{n+1}$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$, so heißt das Maß μ ***Sigma-endlich****.*

Ein Maß ist also ein Prämaß auf einer Sigma-Algebra. Wir kommen nun zum Hauptresultat dieses Kapitels.

Satz XII.36. *Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Ring und $\mu : \mathfrak{R} \to \mathbb{R}_0^+$ ein Prämaß auf $\mathfrak{R}$. Dann definiert die Restriktion des äußeren Maßes $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ eine Fortsetzung von μ zu einem Maß $\tilde{\mu} := \mu^*\big|_{\mathfrak{A}(\mathfrak{R})} : \mathfrak{A}(\mathfrak{R}) \to [0, \infty]$, so dass also $\tilde{\mu}\big|_{\mathfrak{R}} = \mu$. Ist das Prämaß μ Sigma-endlich, so ist $\tilde{\mu}$ die einzige Fortsetzung von μ zu einem Maß auf $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$.*

Beweis. Wie bereits in (XII.90) bemerkt, gilt $\mu^*(\emptyset) = 0$. Um zu zeigen, dass die Restriktion von μ^* auf $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ ein Maß definiert, brauchen wir also nur die Sigma-Additivität von μ^* auf $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ nachzuweisen. Dazu beobachten wir, dass $\mathfrak{A}(\mathfrak{R}) \subseteq \mathfrak{A}^*$, nach Satz XII.34. Die Sigma-Additivität von μ^* erhalten wir aus (XII.115) sogar auf $\mathfrak{A}^*$, indem wir $Q := A$ setzen,

$$\mu^*(A) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap A_n) \,+\, \mu^*(A \setminus A) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n). \tag{XII.117}$$

Zum Beweis der Eindeutigkeit der Fortsetzung von μ würden wir noch die Begriffe der *Dynkin-Systeme* bzw. der *monotonen Klassen* benötigen. Aus Zeitmangel verzichten wir auf diese Konstruktion und verweisen den interessierten Leser auf die Bücher von Bauer[1] und von Lieb und Loss[2]. □

[1] *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie*, 3. Auflage, de Gruyter 1978.
[2] *Analysis*, AMS Publications, 1997

Korollar XII.37. *Das auf den Figuren $\mathfrak{F}_d$ definierte Prämaß μ_d hat eine eindeutige Fortsetzung zu einem Sigma-endlichen Maß auf $\mathfrak{B}_d$, das **Lebesgue-Borel-Maß**, das wir abermals mit μ_d bezeichnen.*

Wir bemerken, dass jedes Maß $\hat{\mu}$ auf $\mathbb{R}^d$ auch den Wert $\hat{\mu}(\mathbb{R}^d)$ festlegen muss, da $\mathbb{R}^d$ nach (XII.72) Element einer jeden Sigma-Algebra über $\mathbb{R}^d$ ist. Für das Lebesgue-Borel-Maß muss $\mu_d(\mathbb{R}^d) = \infty$ sein, da $\mu_d(\mathbb{R}^d) \geq \mu_d\big([-L, L]^d\big) = 2^d L^d$, für jedes $L > 0$.

Damit ist klar, dass die Zulässigkeit des Wertes "∞" für Maße $\mu : \mathfrak{A} \to [0, \infty] = \overline{\mathbb{R}_0^+} = \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ eine unabdingbare Forderung ist.

Definition XII.38. *Sind Ω eine Menge und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ eine Sigma-Algebra, so bezeichnet man das Paar $(\Omega, \mathfrak{A})$ als **Messraum** oder **messbaren Raum**, und die Mengen in $\mathfrak{A}$ heißen **messbar**. Ist weiterhin $\mu : \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ ein Maß, so bezeichnet man das Tripel $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ als **Maßraum**.*

Insbesondere ist nach Korollar XII.37 das Tripel $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d, \mu_d)$ ein Maßraum.

Wir bemerken noch, dass sich das sogenannte *Lebesgue-Maß* vom Lebesgue-Borel-Maß in einem wichtigen Punkt unterscheidet: Ist $A \in \mathfrak{B}_d$ eine messbare Menge mit Maß Null, $\mu_d(A) = 0$, so gilt wegen der Monotonie des äußeren Maßes auch $\mu_d^*(A') = 0$, für jede Teilmenge $A' \subseteq A$. Trotzdem muss A' nicht notwendig messbar sein, und obwohl 0 ein natürlicher Kandidat für $\mu_d(A')$ ist, wäre dann $\mu_d(A')$ nicht definiert. Diesen Nachteil kann man noch beseitigen, indem man zu den Borelmengen noch die Mengen in $\mathfrak{A}^*$ mit äusserem Maß Null hinzufügt. Genauer gesagt definieren wir die **Nullmengen** durch

$$\mathfrak{N}_d \;:=\; \Big\{ A \in \mathfrak{A}^*(\mathfrak{F}_d) \;\Big|\; \mu_d^*(A) = 0 \Big\} \tag{XII.118}$$

und anschließend die Sigma-Algebra der **Lebesgue-messbaren Mengen** durch

$$\mathfrak{L}_d \;:=\; \mathfrak{A}(\mathfrak{B}_d \cup \mathfrak{N}_d). \tag{XII.119}$$

Da $\mathfrak{L}_d \subseteq \mathfrak{A}^*(\mathfrak{F}_d)$, kann man sich leicht überzeugen, dass das Lebesgue-Borel-Maß auf $\mathfrak{B}_d$ in eindeutiger Weise zum **Lebesgue-Maß** auf $\mathfrak{L}_d$ fortgesetzt werden kann. Wir ignorieren im Folgenden diesen Unterschied und sprechen vom *Lebesgue-Maß*, obwohl wir stets das *Lebesgue-Borel-Maß* meinen.

Schließlich stellt sich die Frage, ob $\mathfrak{A}^* \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ eine echte Teilmenge darstellt. Die Antwort auf diese Frage hängt von Ω, dem Ring $\mathfrak{R}$ und dem darauf definierten Inhalt μ ab. Ist etwa Ω abzählbar, und enthält $\mathfrak{R}$ die Elemente von Ω als einelementige Mengen, so ist sofort $\mathfrak{A}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{P}(\Omega)$ und somit auch $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{P}(\Omega)$. Für den Ring $\mathfrak{F}_d$ der Figuren mit Prämaß μ_d gilt allerdings

$$\mathfrak{A}^*(\mathfrak{F}_d) \;\neq\; \mathfrak{P}(\mathbb{R}^d). \tag{XII.120}$$

Die Konstruktion von Mengen in $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^d) \setminus \mathfrak{A}^*(\mathfrak{F}_d)$ ist allerdings anspruchsvoll, unintuitiv und führt auf alle möglichen (scheinbar) paradoxe Sachverhalte. Eine interessante Diskussion dieser Mengen findet man bei Oxtoby[3].

[3] *Maß und Kategorie* Springer-Verlag, 1982.

Satz XII.39. *Das Lebesgue-Maß $\mu_d : \mathcal{B}_d \to [0, \infty]$ besitzt die Eigenschaften der* ***äußeren Regularität*** *und der* ***inneren Regularität****, d.h. für jedes $A \in \mathcal{B}_d$ gilt*

$$\begin{aligned} \mu_d(A) &= \inf\left\{\mu_d(U) \,\middle|\, U \supseteq A,\ U \text{ ist offen}\right\} && \text{(XII.121)} \\ &= \sup\left\{\mu_d(C) \,\middle|\, C \subseteq A,\ C \text{ ist kompakt}\right\}. && \text{(XII.122)} \end{aligned}$$

Beweis. Wir zeigen nur (XII.121)), bemerken aber zuvor, dass $\mathbb{R}^d \supseteq A$ offen und $\emptyset \subseteq A$ abgeschlossen sind. Für $\mu_d(A) = \infty$ gilt (XII.121) trivialerweise, sei also $\mu_d(A) < \infty$. Da $\mu_d = \mu^*|_{\mathcal{L}_d}$, wobei μ^* das zum Ring $\mathfrak{F}_d$ der Figuren gehörige äußere Maß notiert, gibt es gemäß (XII.106) zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge $(A_n)_{n=1}^\infty$ in $\mathfrak{F}_d$, so dass

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty A_n \quad \text{und} \quad \mu_d(A) \geq \left(\sum_{n=1}^\infty \mu_d(A_n)\right) - \varepsilon. \qquad \text{(XII.123)}$$

Jedes A_n ist aber die Vereinigung endlich vieler halboffener und paarweise disjunkter Quader. Daher gibt es Folgen $(a_k)_{k=1}^\infty, (b_k)_{k=1}^\infty$ in $\mathbb{R}^d$, mit $a_k < b_k$, so dass

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty [a_k, b_k) \quad \text{und} \quad \mu_d(A) \geq \left(\sum_{k=1}^\infty \mu_d\big([a_k, b_k)\big)\right) - \varepsilon. \qquad \text{(XII.124)}$$

Wählen wir nun $c_k < a_k$ so, dass

$$\mu_d\big((c_k, b_k)\big) \leq \mu_d\big([a_k, b_k]\big) + \varepsilon \cdot 2^{-k}, \qquad \text{(XII.125)}$$

so ist

$$U := \bigcup_{k=1}^\infty (c_k, b_k) \supseteq \bigcup_{k=1}^\infty [a_k, b_k) \supseteq A \qquad \text{(XII.126)}$$

offen und

$$\begin{aligned} \mu_d(A) &\geq \left(\sum_{k=1}^\infty \left\{\mu_d\big((c_k, b_k)\big) - \varepsilon \cdot 2^{-k}\right\}\right) - \varepsilon \\ &= \left(\sum_{k=1}^\infty \mu_d\big((c_k, b_k)\big)\right) - 2\varepsilon \geq \mu_d(U) - 2\varepsilon. && \text{(XII.127)} \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt daraus (XII.121). $\square$