



Technische  
Universität  
Braunschweig



# Informatik für Ingenieure – VL 8

## **Letztes Mal:**

Latches und Flip Flops

Einführung zu Endlich Automaten

## **Heute:**

Endlich Automaten

Frequenzteiler, Zähler

Synchrone Schaltungen

Teile des heutigen Vortrags basiert auf der Vorlesungen von  
Prof. H Michalik (TU Braunschweig)  
Prof. M. Luisier (ETH Zurich)

# Antriebssteuerung eines einfachen Aufzuges

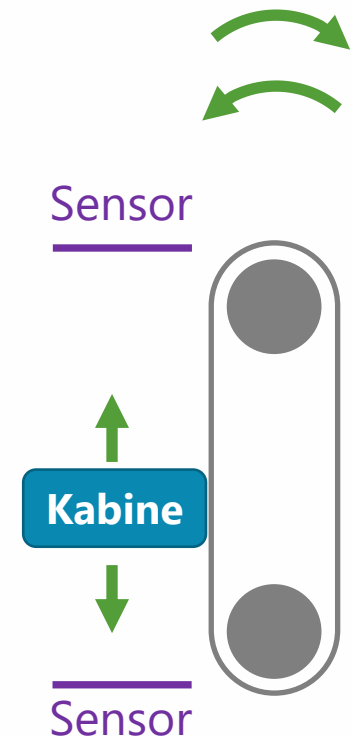
8.3

Es sei die Steuerung für den Antrieb eines Aufzuges zu entwerfen. Der Aufzug pendelt zwischen zwei Stockwerken (Paternosterprinzip).

Die Synchronisation des Antriebes mit dem Einsteigevorgang und Tür öffnen sei hier der Einfachheit halber nicht berücksichtigt.

Die Steuerung habe jeweils zwei Eingänge und zwei Ausgänge:

Eingänge	$x_1$ Stockwerkkontakt oben	} = "1" für Kabine hat Stockwerk erreicht
	$x_0$ Stockwerkkontakt unten	
Ausgänge	$y_0$ Antrieb	"0" entspricht aus
		"1" entspricht an
	$y_1$ Antriebsrichtung	"0" entspricht nach unten
		"1" entspricht nach oben



# Beschreibung von Antriebssteuerung

$y_0$  - Antrieb  
 $y_1$  - Richtung

8.4

vollständige Funktionstabelle, (die Indizes  $n$ ,  $n+1$  kennzeichnen den zeitlichen Zustandsablauf)

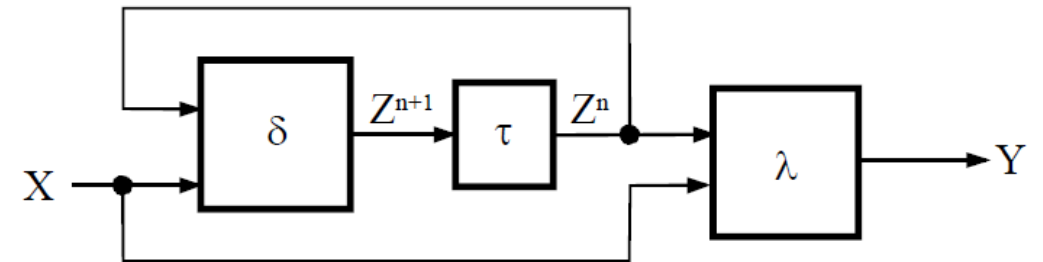
Ein- gänge		Zu- stand	Folge- zustand	Aus- gänge		Bewegungszustand
$x_1$	$x_0$	$z_0^n$	$z_0^{n+1}$	$y_1$	$y_0$	
0	0	0	0	0	1	Fahrt nach unten
0	1	0	1	1	1	unten angekommen, Antrieb umgeschaltet auf Fahrt nach oben
1	0	0	0	0	1	Fahrt nach unten, gerade oben losgefahren
1	1	0	-	-	0	Fehler: Aufzug angehalten
0	0	1	1	1	1	Fahrt nach oben
0	1	1	1	1	1	Fahrt nach oben, gerade unten losgefahren
1	0	1	0	0	1	oben angekommen, Antrieb umgeschaltet auf Fahrt nach unten
1	1	1	-	-	0	Fehler: Aufzug angehalten

# Antriebssteuerung Implementierung

8.5

Die Steuerung lässt sich also ganz allgemein mit zwei folgenden kombinatorischen Logikelementen realisieren:

1. Ausgabefunktion:  $Y = \lambda(X, Z^n)$
2. Zustandsfunktion:  $Z^{n+1} = \delta(X, Z^n)$



Es ergibt sich eine Struktur aus zwei Schaltnetzen wobei das Schaltnetz für die Zustandsfortschaltung  $\delta$  die Rückkopplung aufweist.

Um hier sicher zu stellen, dass die Zustände auch zeitlich voneinander getrennt wechseln ist eine Zeitverzögerung ( $\tau$ ) in die Rückkopplung eingebaut.

Ohne die Zeitverzögerung wäre die Zustandswechselzeit gleich der Durchlaufzeit durch das Schaltnetz  $\delta$  (könnte aber minimal = 0 sein).

# Was Sind Automaten?

8.6

Ein Automat beschreibt ein System das:

- auf seinen Eingang reagiert

- einen Ausgang produziert, der von dem Eingangssignal und von dem momentanen Zustand des Systems abhängt

In einem endlichen Automaten (auch finite state machine' (FSM) benannt), sind die Menge der möglichen Eingabezeichen (Eingabealphabet), der möglichen Ausgabezeichen (Ausgabealphabet) und der intern gespeicherten Zustände

**endlich**, d.h. nur vorprogrammierte Lagen werden anerkannt

**Schaltwerke** (Schaltungen mit einer Rückkopplung)  
sind typische Beispiele von endlichen Automaten

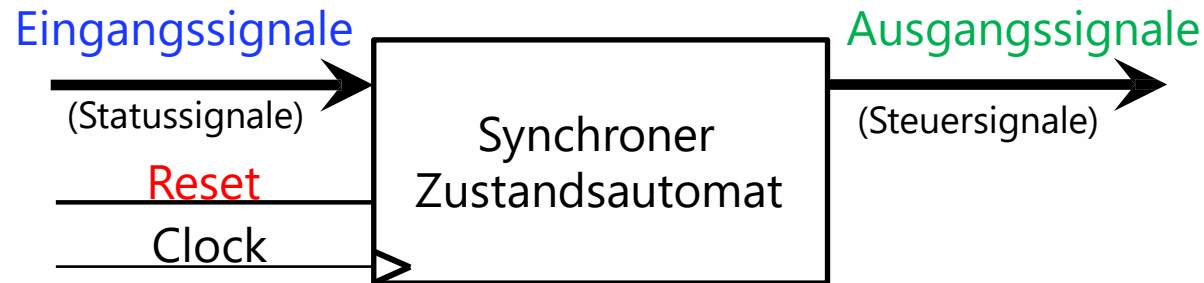
# Typen von Schaltwerke

8.7

## Synchrone Automaten:

Alle Speicherelemente (Flipflops), die die internen Zustände speichern, besitzen den gleichen Takteingang

Interne Zustandsänderungen laufen synchron mit dem gemeinsamen Taktsignal



## Asynchrone Automaten: (hier nicht betrachtet)

Sie haben kein gemeinsames Taktsignal

Zustandsänderungen werden durch Änderungen der Eingangssignale initiiert

# Formale Beschreibung von Automaten

8.8

Ein endlicher Automat wird durch ein **6-Tupel** charakterisiert:

$X = (x_1, x_2, \dots, x_e)$	Eingabealphabet mit $e$ Eingängen $x_i$ , die durch binäre Eingangsvariablen 0,1 repräsentiert werden
$Y = (y_1, y_2, \dots, y_b)$	Ausgabealphabet mit $b$ Ausgängen $y_i$ , die als Bits mit Wert 0,1 dargestellt werden
$Z = (z_1, z_2, \dots, z_m)$	Zustandsmenge mit $m$ inneren Zustandsvariablen $z_i$ , die einen Wert $\{0,1\}$ haben können
$Z_0 \in Z$	Anfangszustand
$f_{c1}: (X_n, Z_n) \rightarrow Z_{n+1}$	Zustands-, Übergangsfunktion
$f_{c1}: (X_n, Z_n) \rightarrow Y_n$	Ausgabe-, Ausgangsfunktion

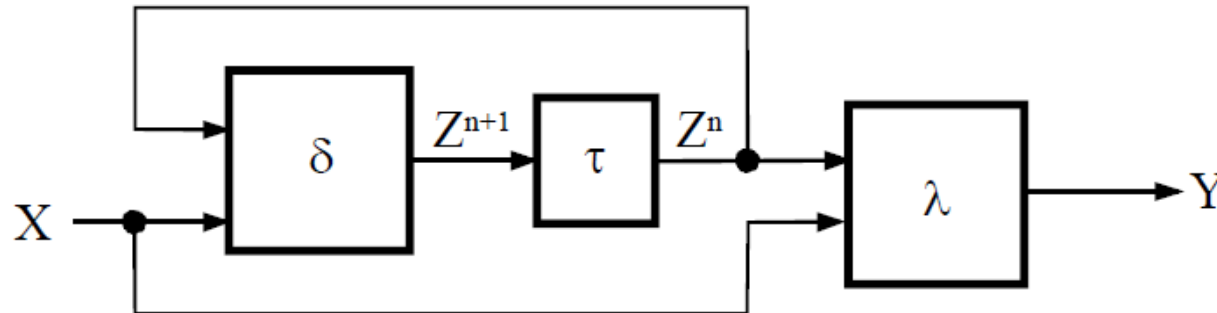


# Mealy Automat

8.9

Der **Mealy-Automat** ist durch seine Eingänge, Ausgänge, Zustände sowie den beiden Schaltnetzen  $\lambda$  für die Erzeugung der Ausgänge und  $\delta$  für die Erzeugung der Folgezustände als „**Automatenfunktion A**“ vollständig definiert:

$$A_{\text{mealy}} = [X, Y, Z, \lambda, \delta]$$



# Mealy Schaltnetz

$y_0$ - Antrieb  
 $y_1$ - Richtung

8.10

Beispiel: Antriebssteuerung eines einfachen Aufzuges

Für unser Beispiel ergibt sich für das Schaltnetz  $\delta$  zur Fortschaltung:

$z_0^{n+1}$   $x_1x_0$ : 00 01 11 10

$z_0$ :

0	0	1	X	0
1	1	1	X	0

$$z_0^{n+1} = x_0 \vee (\bar{x}_1 \wedge z_0)$$

Für das Schaltnetz  $\lambda$  zur Erzeugung der Ausgänge ergibt sich:

$$y_0 = \overline{x_0 \wedge x_1}$$

$$y_1 = x_0 \vee (\bar{x}_1 \wedge z_0)$$

da der Antrieb nur aus sein soll ( $y_0=0$ ), wenn  $x_1$  und  $x_0$  beide „1“ sind (Fehlerfall). Die Antriebsrichtung  $y_1$  entspricht logisch dem Zustand  $z_0^{n+1}$ .

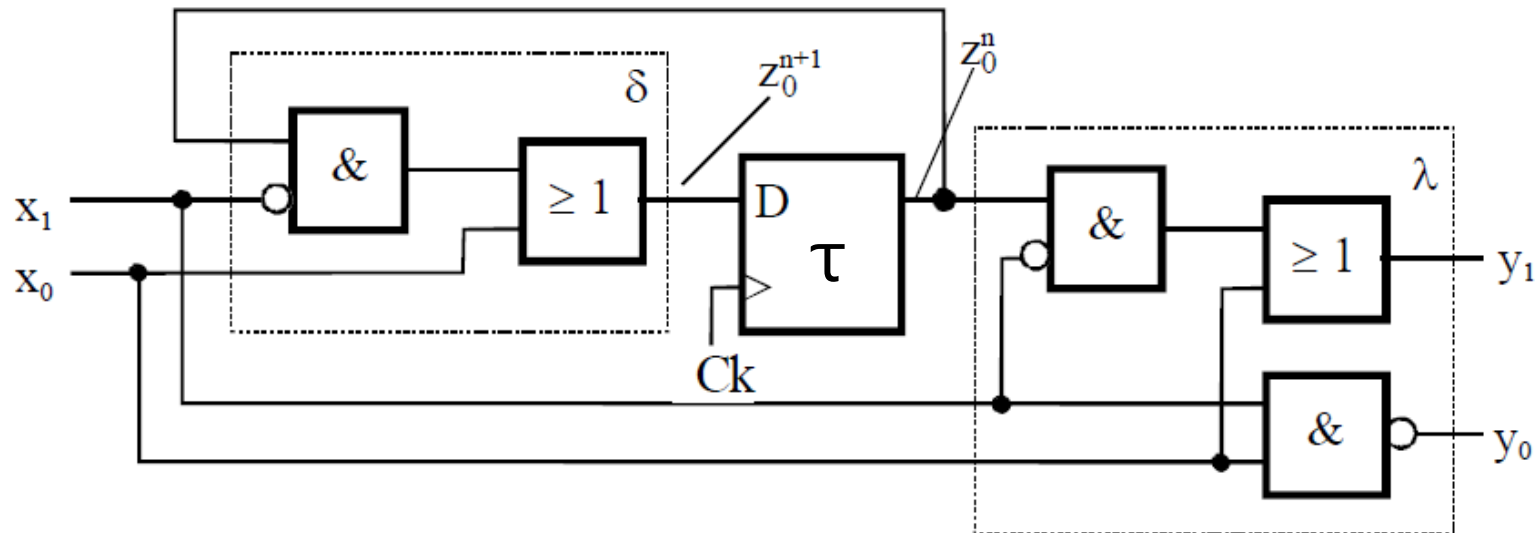
# Mealy Schaltbild

$y_0$  - Antrieb  
 $y_1$  - Richtung

8.11

Beispiel: Antriebssteuerung eines einfachen Aufzuges

Für unser Beispiel ergibt sich damit das folgende Schaltbild eines Mealy-Automaten:



Die Verzögerung  $\tau$  kann zum Beispiel mit einem flankengesteuerten D-Flipflop realisiert werden.

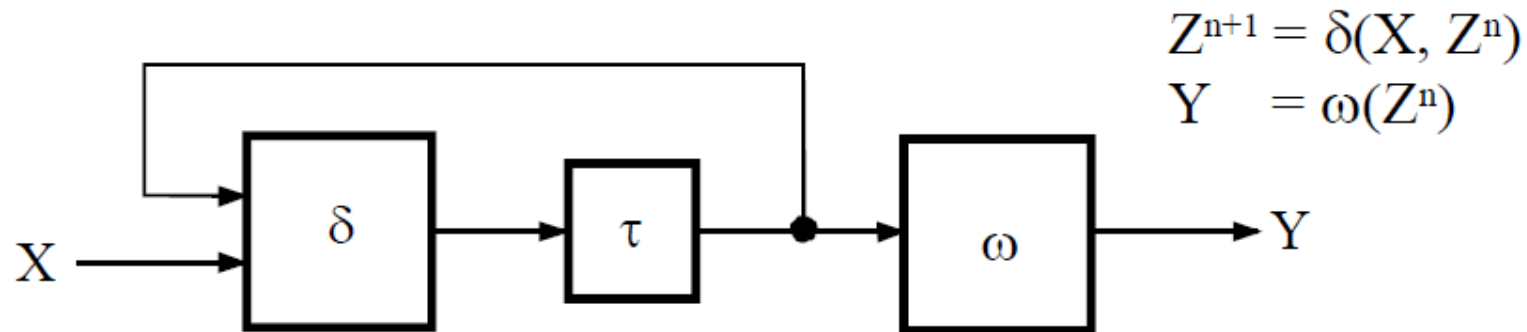
# Moore Automat

8.12

Beim Moore Automaten basiert die Ausgangsfunktion nur auf dem aktuellen Zustand  $Z^n$ .

Moore und Mealy Automaten können ineinander überführt werden, da der Eingangsvektor  $X$  durch das Netz  $\delta$  im Zustandsvektor  $Z$  enthalten ist. Die Ausganstransformation (hier  $\omega$ ) muss somit entsprechend gegenüber dem Mealy Automaten angepasst werden.

$$A_{\text{Moore}} = A[X, Y, Z, \delta, \omega]$$

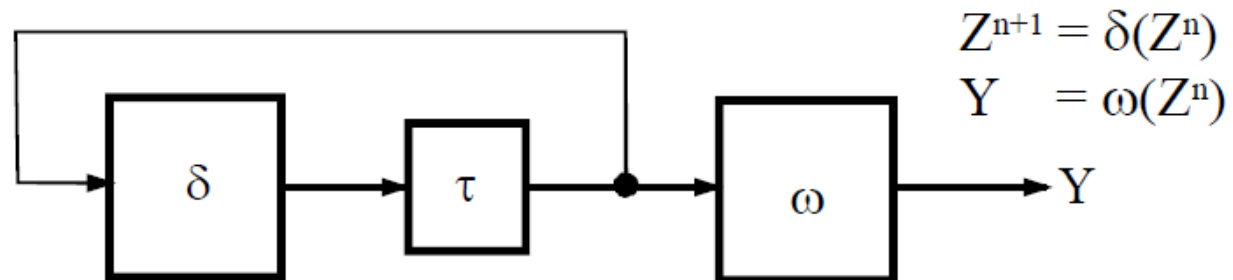


# Autonomer Automat

8.13

Beim autonomen Automaten gibt es keine Eingangssignale.

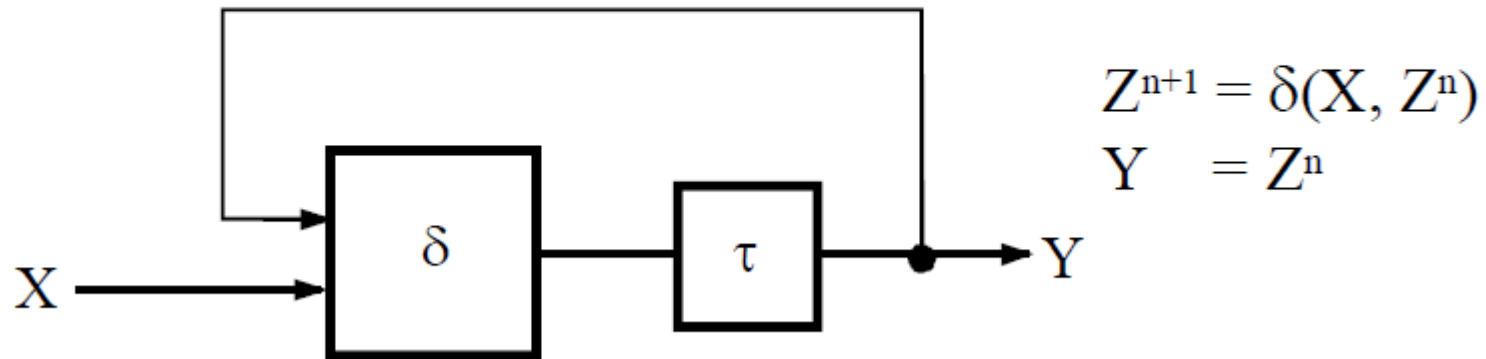
$$A_{\text{Aut}} = A[Y, Z, \delta, \omega]$$



# Medwedjew Automat

8.14

$$A_{\text{Med}} = A[X, Y, Z, \delta]$$



Es gibt verschiedene, **äquivalente** Beschreibungsmöglichkeiten für die Funktion eines endlichen Automaten:

- Ausgangs- und Zustandsfunktion
- Automatentabellen (oder Zustandsfolgetabellen)
- Zustandsdiagramme oder Zustandsgraphen
- Karnaugh-Diagramme (wenn Minimierung nötig)

Aus einem **Zustandsdiagramm** kann zuerst eine **Automatentabellen** konstruiert werden. Wenn diese vorhanden ist, kann ein **Karnaugh-Diagramm** für jede innere Zustandsvariable und für jeden Ausgang aufgesetzt werden. Damit werden die Gleichungen der **Ausgangs- und Zustandsfunktion** minimiert. Am Ende wird ein Schaltwerk erzeugt

# Automatentabelle Beschreibung

8.16

In der **Automatentabelle** sind die Zustandsübergangsfunktion und die Ausgabefunktion vollständig dargestellt, z. B. Mealy-Automat,  $m$  Zustände,  $n$  Eingänge:

**e**: Anzahl Eingangsvariablen    **m**: Anzahl Zustandsvariablen     $\rightarrow 2^{e+m}$  Kombinationen

			2 <sup>e</sup> Spalte				
			x <sub>0</sub>	0	<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div>&lt;/</div></div>		



# Aufzugssteuerung Automatentabelle

8.17

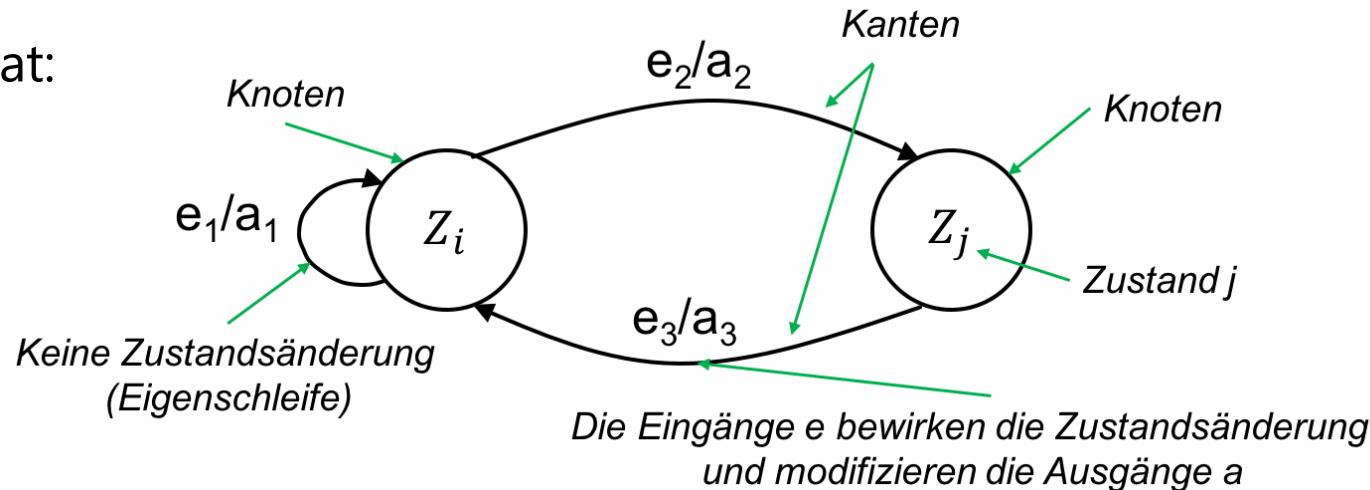
Zustand	$Z_0$	$X_0$	0	1	0	1
		$X_1$	0	0	1	1
$Z_0$	0		$Z^{n+1} = (0)$ $Y = (0,1)$	$Z^{n+1} = (1)$ $Y = (1,1)$	$Z^{n+1} = (0)$ $Y = (0,1)$	$Z^{n+1} = (-)$ $Y = (-,0)$
$Z_1$	1		$Z^{n+1} = (1)$ $Y = (1,1)$	$Z^{n+1} = (1)$ $Y = (1,1)$	$Z^{n+1} = (0)$ $Y = (0,1)$	$Z^{n+1} = (-)$ $Y = (-,0)$

# Zustandsdiagramm

8.18

Ein Zustandsdiagramm (oder *Zustandsgraph*, *Automatengraph*, *state graph*, *state transition diagram*) ist eine graphische (äquivalente) Darstellung der Folgezustandstabelle, die aus Knoten und gerichteten Kanten besteht.

Mealy-Automat:

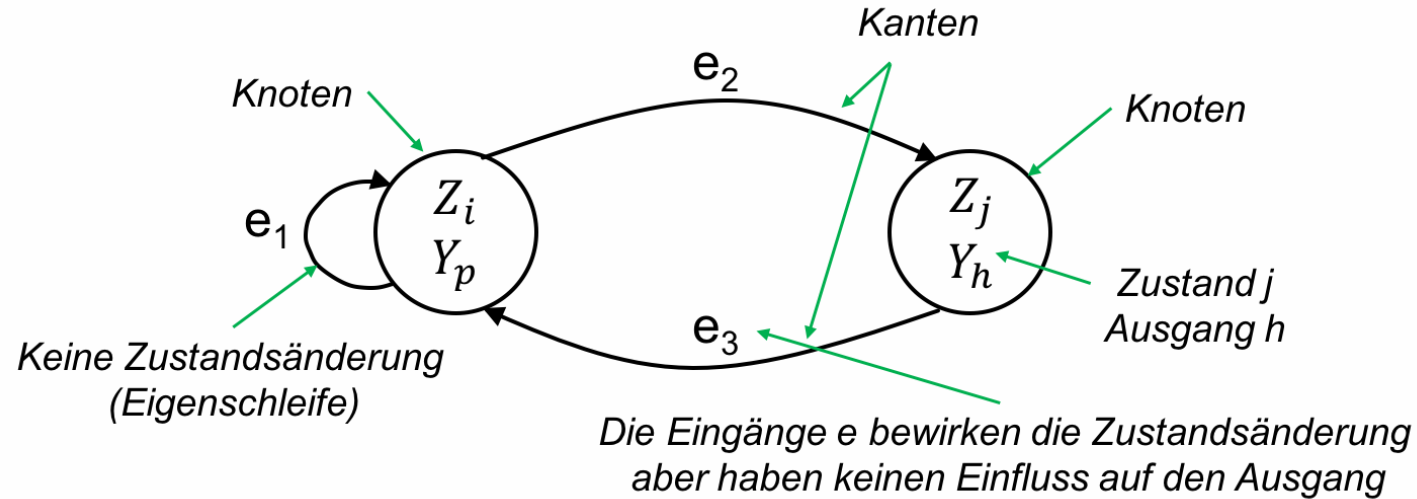


Die **Knoten** (Kreise) bezeichnen die internen Zustände, die **Kanten** den Übergang zwischen zwei Zuständen. Die Eingangskombination  $e$ , die die Zustandsänderung bewirkt, und der Ausgang  $a$  werden an der jeweiligen Kante vermerkt.

# Zustandsdiagramm

8.19

Moore-Automat:



Bei **Moore-Automaten** bezeichnen die **Knoten** sowohl die internen Zustände wie die Ausgänge, die nur von  $Z_n$  abhängen

Um einen Automaten zu entwerfen sollte zuerst ein **Zustandsdiagramm** erzeugt werden, dann die entsprechende **Folgezustandstabelle**,  $\lambda/\delta$  und daraus ein **Schaltwerk**.

Wenn das Schaltwerk eines Automaten vorgegeben ist, wird die Reihenfolge vertauscht: zuerst  $fc_1/fc_2$ , dann die Folgezustandstabelle und schlussendlich das Zustandsdiagramm

# State Diagramm der Aufzugssteuerung

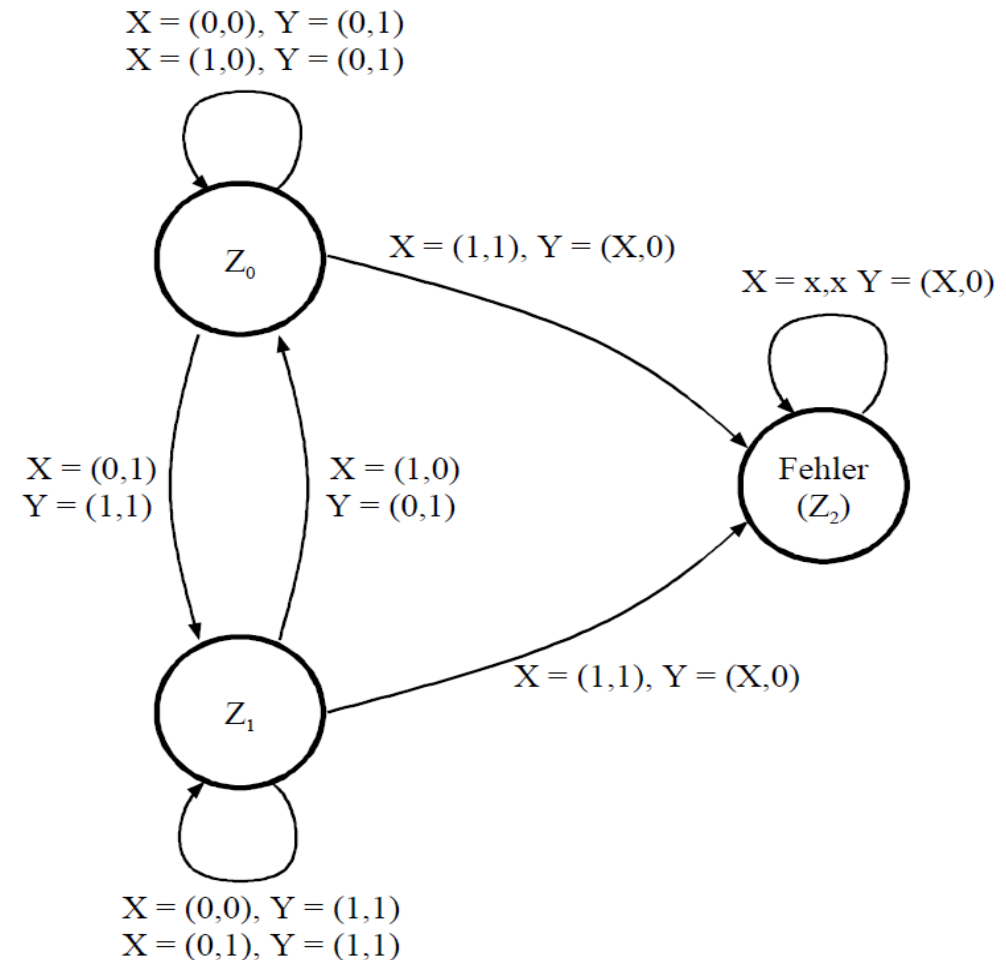
$y_0$  - Antrieb  
 $y_1$  - Richtung

8.20

$$X = (x_1, x_0) \quad Y = (y_1, y_0)$$

Ist es Mealy oder Moore?

Mealy, weil der Ausgang vom Zustand **und** dem Eingang abhängt



# Beschreibungsformen für Automaten

8.21

Wir wollen im folgenden die Automaten hauptsächlich durch Zustands-graphen erfassen. Diese Darstellung ist sehr kompakt, lässt aber auf den ersten Blick nicht klar werden, ob alle Zustandsänderungen erfasst sind oder ob die Änderungen widerspruchsfrei sind.

Es muss daher der Graph auf Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit geprüft werden:

## **Vollständigkeit:**

Der Zustandsgraph muss alle Eingangsbelegungen  $X_i$  in den wegführenden Kanten oder in den Eigenschleifen in jedem Knoten enthalten. Dabei werden wie bei den Schaltnetzen nicht relevante Belegungen mit "don't cares" versehen.

## **Widerspruchsfreiheit:**

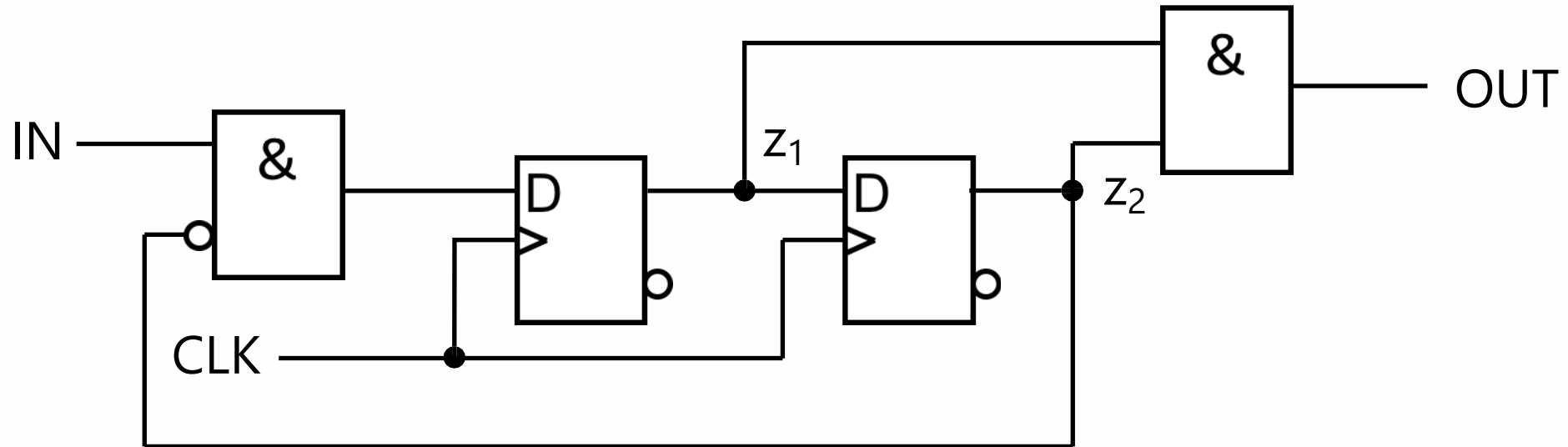
Der Graph ist nicht widerspruchsfrei, wenn zwei wegführende Kanten oder die Eigenschleife gleiche Belegungen  $X$  enthalten.

# Analyse eines Automaten: Schaltwerk

8.22

Ein Schaltwerk ist vorgegeben und sollte mit der folgenden Vorgehensweise analysiert werden:  
Bestimmung der Ausgabe- und Zustandfunktion

Beispiel:



# Analyse eines Automaten: Schaltwerk

8.23

Automatendaten:

Eingabealphabet:  $X=IN$

Ausgabealphabet:  $Y=OUT$

Zustandsmenge:  $Z=(z_1, z_2)$

Fragen:

Automatentyp:

Anzahl Zustände:

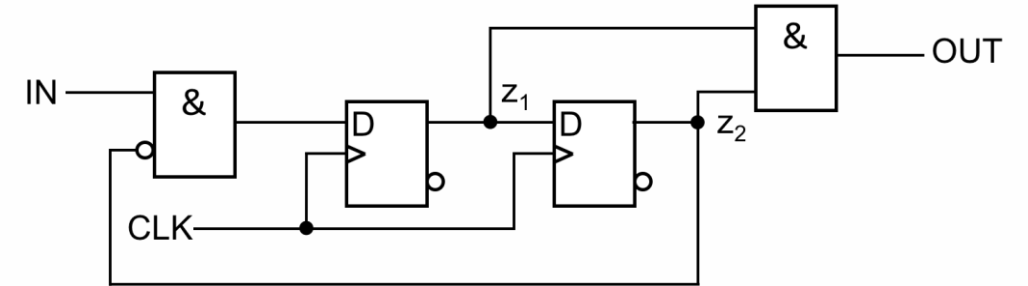
Ausgabefunktion  $\lambda$ :

$$Y_n =$$

Zustandfunktion  $\delta$ :

$$z_{1,n+1} =$$

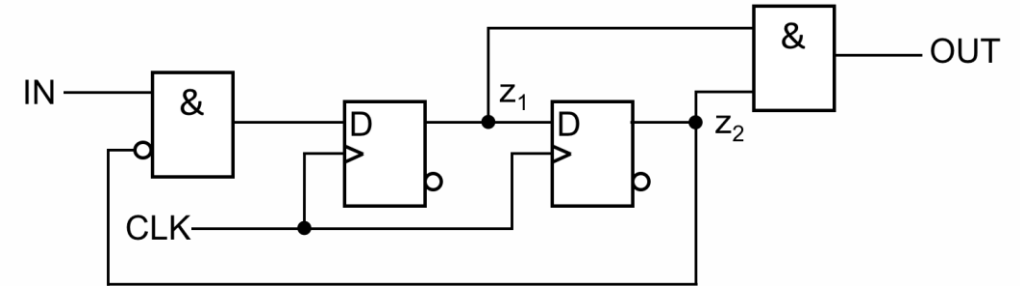
$$z_{2,n+1} =$$



Zustandsmenge:  $Z=(z_1,z_2)$

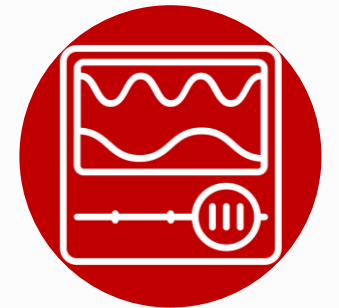
## Ausgabefunktion $\lambda$ :

$$z_{2,n+1} = z_{1,n}$$





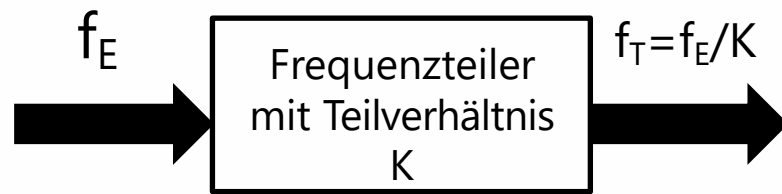
# Frequenzteiler



# Warum Frequenzteiler?

8.26

Frequenzteiler sind elektronische Bauelemente, die eine Eingangsfrequenz in einem bestimmten ganzzahligen Teilverhältnis verringern. Die Schaltungen dazu werden digitaltechnisch realisiert, z.B. mit Flipflops



$f_E$ : Eingangsfrequenz

$f_T$ : Geteilte Ausgangsfrequenz

$K$ : Teilverhältnis

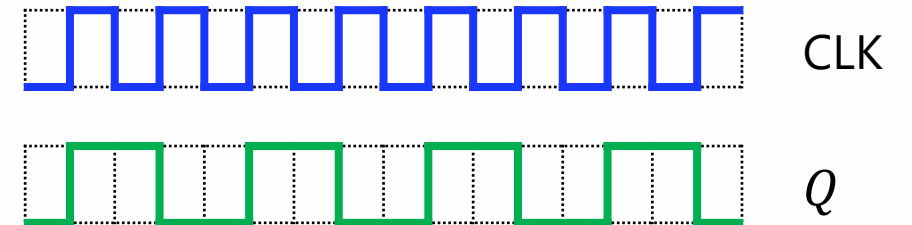
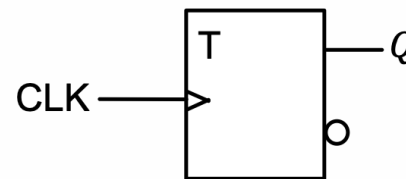
**Frequenzteiler** werden häufig dazu verwendet, zeitgenaue Taktgeber zu bauen, wobei ein niederfrequenter Takt aus einem präzisen höherfrequenten Takt abgeleitet wird. Als Referenztaktgeber für **Sekundentakte** werden sehr oft Quarzoszillatoren ( $f_E = 215 \text{ Hz}$ ) oder sogar das Standard 50-Hz Wechselstromnetz benutzt.

# Flipflops als Frequenzteiler

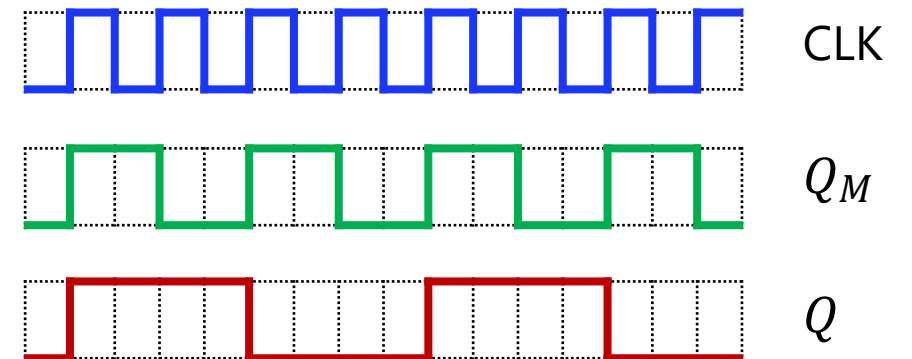
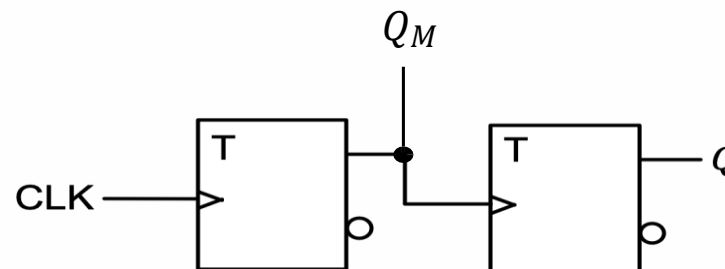
8.27

Flipflops können verwendet werden, um die Periode  $T$  eines sich wiederholenden Taktsignals (Clock) zu reduzieren. **T-Flipflops** mit einem einzigen Eingang sind als **Frequenzteiler** sehr geeignet. **JK-Flipflops** mit  $J=K=1$  auch.

**Frequenzreduktion  
um einen Faktor 2**



**Frequenzreduktion  
um einen Faktor 4**

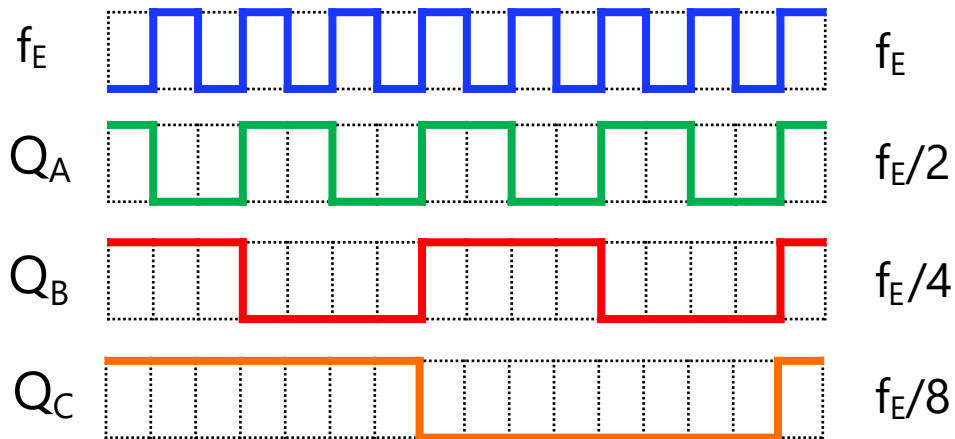
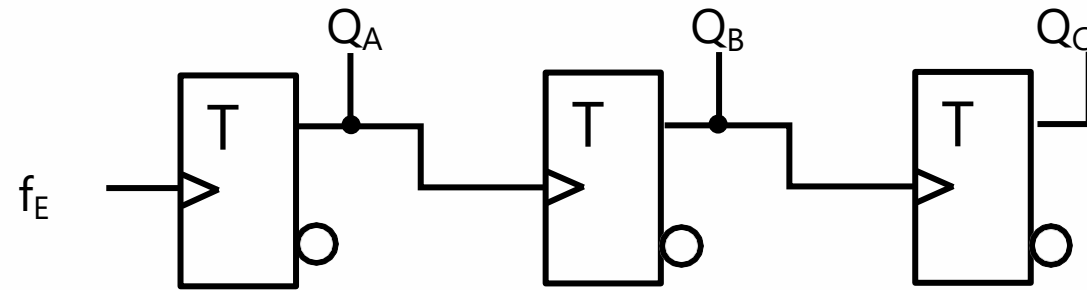


# Allgemeiner Frequenzteiler mit T-Flipflops

8.28

In den meisten Anwendungen werden  **$n$  T-Flipflops** kaskadiert, um eine beliebige Frequenzreduktion von  **$2^n$**  zu erhalten

**Frequenzreduktion  
um einen Faktor 8**

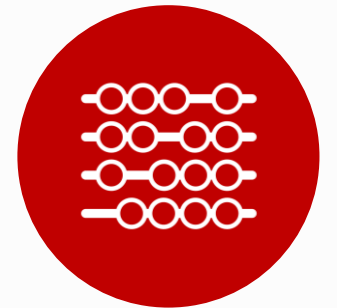


**Mögliche Teilverhältnisse:**

$$f_T = f_E / 2^n$$

Mit  $f_E$ : Eingangsfrequenz,  $f_T$ : geteilte Frequenz und  $n$ : Anzahl der Flipflops

# Zähler

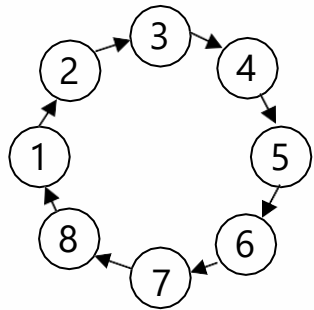


# Was heisst zählen?

8.30

Zählen ist im allgemeinen Sinn das Addieren (Vorwärtszählen) oder Subtrahieren (Rückwärtszählen) einer fortlaufenden 1 bis der Zählvorgang beendet ist. Zähler unterscheidet man nach dem zu verwendeten Code und nach der Zählrichtung.

3-Bit Dualzähler

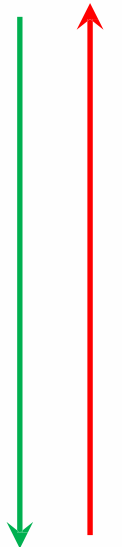


Zustandsgraph  
Vorwärtszähler

**Stelle I** kippt bei jedem Zustandswechsel,  
**Stelle II** bei jedem 2. Zustandswechsel,  
**Stelle III** bei jedem 4. Zustandswechsel

<i>Zustands-Nr</i>	<i>Dualzahl</i>	<i>III</i>	<i>II</i>	<i>I</i>
<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>2</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>2</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>
<b>4</b>	<b>3</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
<b>5</b>	<b>4</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>6</b>	<b>5</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>
<b>7</b>	<b>6</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>0</b>
<b>8</b>	<b>7</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>

Rückwärts



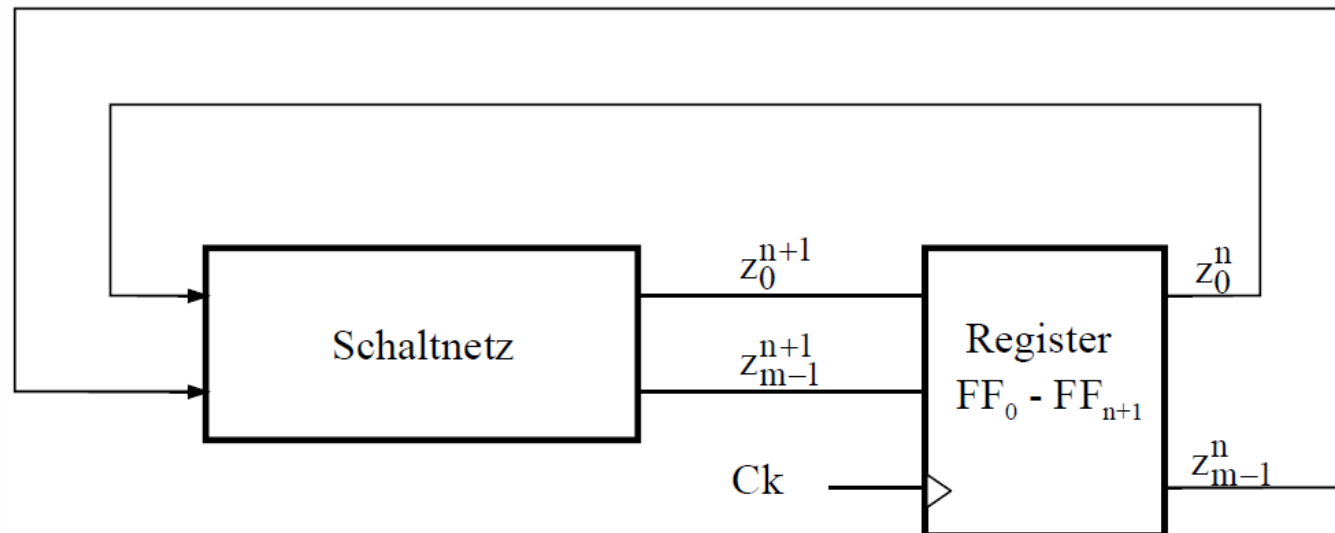
Vorwärts

Zähler können als autonome Automaten mit rückgekoppelten Schaltnetzen realisiert werden.

Als Register bezeichnet man eine Reihe von Flipflops mit gemeinsamen Takt zur Speicherung eines binären Zustandsvektors.

Dabei ergibt sich der Folgezustand aus dem vorhergehenden Zustand:  $Z^{n+1} = \delta(Z)^n$ .

Je nach Schaltnetzrealisierung können damit unterschiedliche Zählstrukturen aufgebaut werden.



Mit einem Binärzähler können  $2^n$  verschiedene Zustände generiert werden, wobei die Ausgangskombination des Folgezustands jeweils um 1 inkrementiert wird (siehe Tabelle). Andere Zähler können andere Zählcodes realisieren, bei denen die Zustandsanzahl auch kleiner als  $2^n$  sein kann.

Für die Funktionsbeschreibung eines Zählers kann die Übergangs- oder Flusstabelle aufgestellt werden. Dargestellt werden die Zustände mit ihren zugehörigen Folgezuständen. In der Tabelle ist als Beispiel die Übergangstabelle eines vorwärts-zählenden Binärzählers angegeben.

Zustand	Zustandsvariable				Folgezustand	Zustandsvariable			
	$z_{m-1}^n$	...	$z_1^n$	$z_0^n$		$z_{m-1}^{n+1}$	...	$z_1^{n+1}$	$z_0^{n+1}$
$Z_0$	0	...	0	0	$Z_1$	0	...	0	1
$Z_1$	0	...	0	1	$Z_2$	0	...	1	0
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$Z_{2^n-2}$	1	...	1	0	$Z_{2^n-1}$	1	...	1	1
$Z_{2^n-1}$	1	...	1	1	$Z_0$	0	...	0	0



Aus dieser Zustandsübergangstabelle kann man direkt die Bool'schen Gleichungen des Schaltnetzes ablesen. Bei einem  $n$ -stelligen Binär-Zähler enthält die Flusstabelle  $2^n$  verschiedene Eingangs-kombinationen.

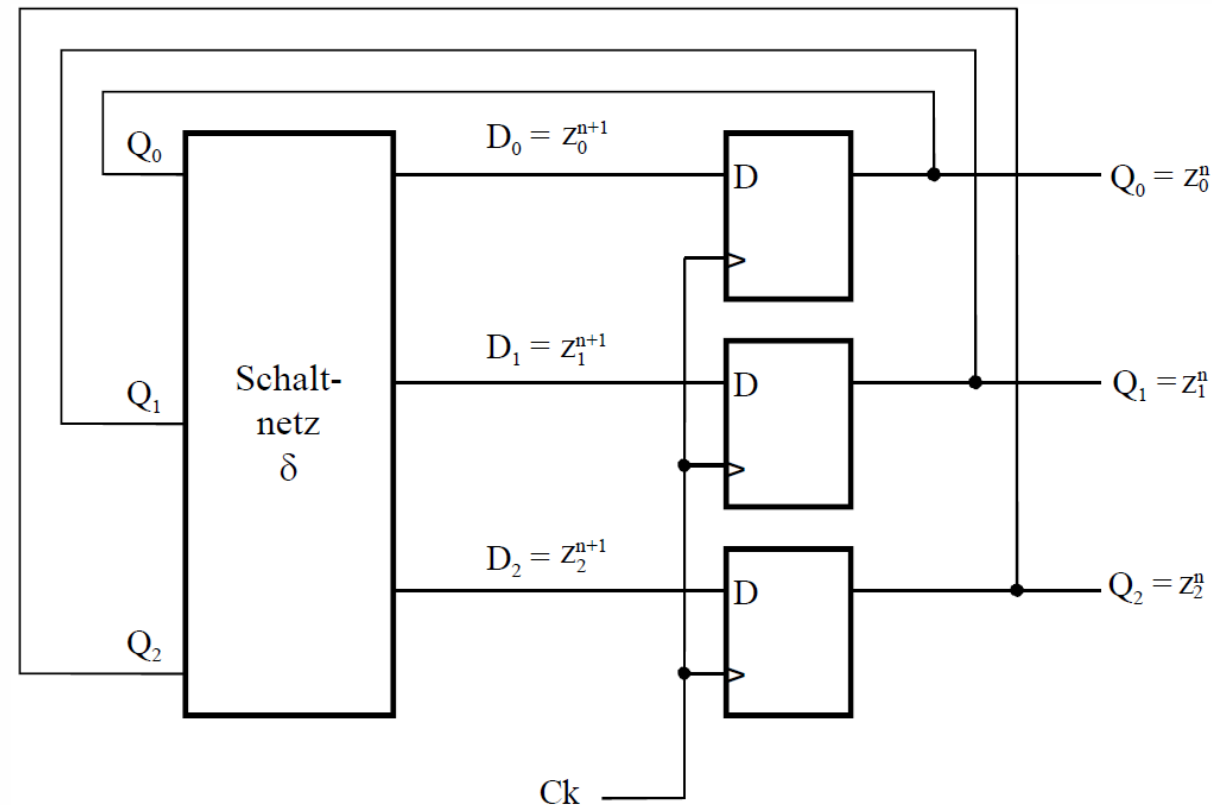
Pro Spalte in der Flusstabelle ergeben sich  $\frac{1}{2} \cdot 2^n$  zu realisierende Einsen; das bedeutet, dass bei  $n$  Spalten  $n \cdot 2^{n-1}$  UND-Schaltungen mit je  $n$  Eingängen und  $n$  ODER-Schaltungen mit je  $2^{n-1}$  Eingängen für die Realisierung notwendig sind (Realisierung in disjunktiver Normalform).

Für die tatsächliche Realisierung wird die Logik natürlich optimiert und es wird nach regelmäßigen Strukturen gesucht. Dies soll am Beispiel eines 3-Bit-binär Zählers (Modulo-8-Zähler) hier demonstriert werden.

# Vorwärtszählender 3-Bit Binärzähler

8.34

Das Bild 3-24 zeigt das Schaltwerk eines 3-Bit-Zählers mit dem Rückkoppelschaltnetz  $\delta$  und dem 3-Bit Register aus D-Flipflops.



# Vorwärtszählender 3-Bit Binärzähler

8.35

Hier soll nun das Rückkoppelschaltnetz hergeleitet. Dazu stellt man zweckmäßigerweise die zugehörige Flusstabelle auf:

Zustand	$Q_2$ $z_2^n$	$Q_1$ $z_1^n$	$Q_0$ $z_0^n$	Folge- zustand	$D_2$ $z_2^{n+1}$	$D_1$ $z_1^{n+1}$	$D_0$ $z_0^{n+1}$
$Z_0^n$	0	0	0	$Z_0^{n+1}$	0	0	1
$Z_1^n$	0	0	1	$Z_1^{n+1}$	0	1	0
$Z_2^n$	0	1	0	$Z_2^{n+1}$	0	1	1
$Z_3^n$	0	1	1	$Z_3^{n+1}$	1	0	0
$Z_4^n$	1	0	0	$Z_4^{n+1}$	1	0	1
$Z_5^n$	1	0	1	$Z_5^{n+1}$	1	1	0
$Z_6^n$	1	1	0	$Z_6^{n+1}$	1	1	1
$Z_7^n$	1	1	1	$Z_7^{n+1}$	0	0	0

# Vorwärtszählender 3-Bit Binärzähler

8.36

Der Zustand  $Z^n$  aus der Zustandstabelle  $(z_2^n, z_1^n, z_0^n)$  ist dabei das was im als Ausgang ( $Q_2, Q_1, Q_0$ ) sichtbar ist und der Folgezustand  $Z^{n+1} = (z_2^{n+1}, z_1^{n+1}, z_0^{n+1})$  liegt am Ausgang des Schaltnetzes an den D-Eingängen ( $D_2, D_1, D_0$ ) der Flipflops an.

Dieser Folgezustand wird mit dem nächsten Takt am Clk-Eingang in die Flipflops übernommen und ist dann der aktuelle Zustand  $Z^n$ .

Die notwendigen logischen Gleichungen können also direkt aus der Tabelle abgelesen werden:

$$D_0 = \bar{Q}_2\bar{Q}_1\bar{Q}_0 \vee \bar{Q}_2Q_1\bar{Q}_0 \vee Q_2\bar{Q}_1\bar{Q}_0 \vee Q_2Q_1\bar{Q}_0$$

$$D_1 = \bar{Q}_2\bar{Q}_1Q_0 \vee \bar{Q}_2Q_1\bar{Q}_0 \vee Q_2\bar{Q}_1Q_0 \vee Q_2Q_1\bar{Q}_0$$

$$D_2 = \bar{Q}_2Q_1Q_0 \vee Q_2\bar{Q}_1\bar{Q}_0 \vee Q_2\bar{Q}_1Q_0 \vee Q_2Q_1\bar{Q}_0$$

# Karnaugh-Veith Minimierung

8.37

Die Minimierung ergibt:

$D_0$ :

$Q_0$ \ $Q_2Q_1$	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1				

$$D_0 = \bar{Q}_0$$

$D_1$ :

$Q_0$ \ $Q_2Q_1$	00	01	11	10
0		1	1	
1	1			1

$$D_1 = \bar{Q}_0Q_1 \vee Q_0\bar{Q}_1 = Q_0 \oplus Q_1$$

$D_2$ :

$Q_0$ \ $Q_2Q_1$	00	01	11	10
0			1	1
1		1		1

$$D_2 = Q_2\bar{Q}_0 \vee Q_2\bar{Q}_1 \vee \bar{Q}_2Q_1Q_0$$

# Alternative Implementierung

8.38

Diese logischen Gleichungen könnte man so implementieren allerdings lässt sich  $D_2$  noch systematisieren:

$$\begin{aligned} D_2 &= Q_2 \bar{Q}_0 \vee Q_2 \bar{Q}_1 \vee \bar{Q}_2 Q_1 Q_0 \\ &= Q_2 \wedge (\bar{Q}_0 \vee \bar{Q}_1) \vee (\bar{Q}_2 \wedge Q_1 \wedge Q_0) \quad (\text{Satz von DeMorgan}) \\ &= Q_2 \wedge (\overline{Q_0 \wedge Q_1}) \vee \bar{Q}_2 \wedge (Q_1 \wedge Q_0) \\ &= Q_2 \oplus (Q_0 \wedge Q_1) \end{aligned}$$

Somit kann man  $D_2$  und  $D_1$  als XOR-Verknüpfung mit sich selbst und dem jeweils niederwertigeren Bit auffassen und  $D_0$  ergibt sich als XOR-Verknüpfung mit 1. Es ergibt sich:

Und als mögliche Erweiterung:

$$D_0 = Q_0 \oplus 1$$

$$D_1 = Q_1 \oplus Q_0$$

$$D_2 = Q_2 \oplus (Q_0 Q_1)$$

$$D_3 = Q_3 \oplus (Q_0 Q_1 Q_2)$$

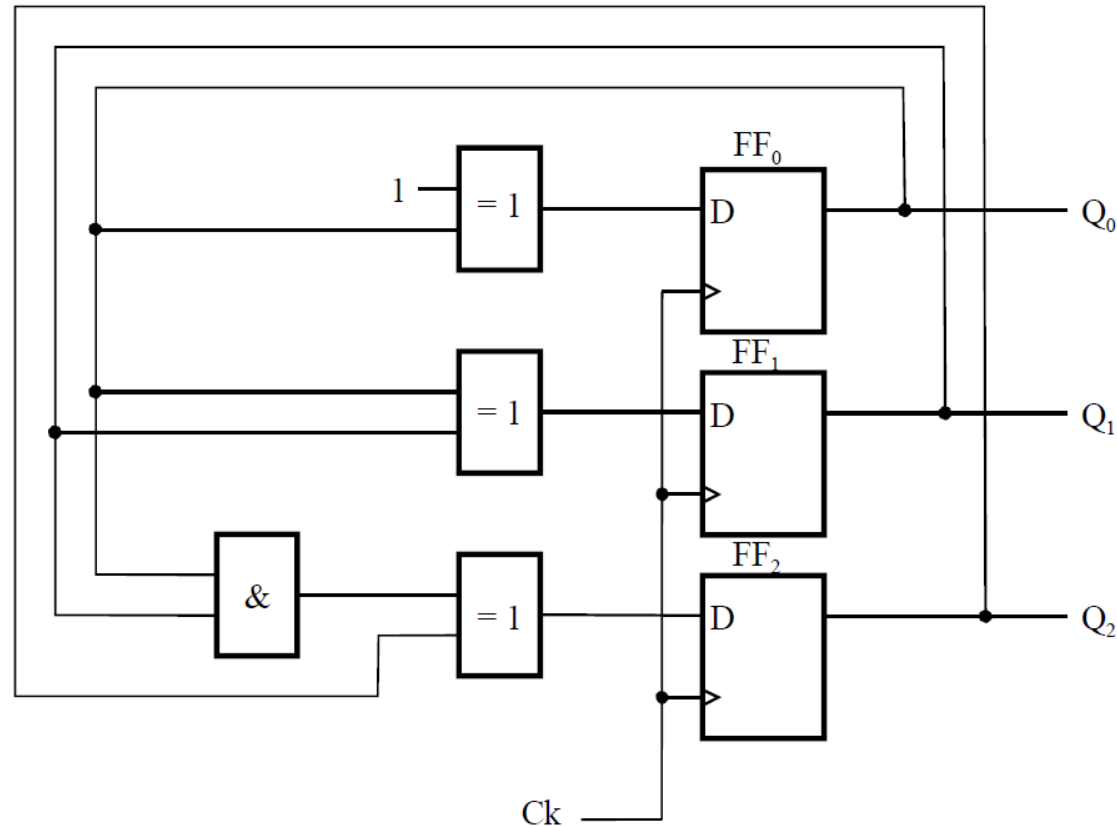
$$D_4 = Q_4 \oplus (Q_0 Q_1 Q_2 Q_3)$$

usw.

# Vorwärtszählender mit D-FF

8.39

Mit den aufgestellten Gleichungen kann jetzt das Schaltnetz für den vorwärtszählenden 3-Bit Binärzähler vervollständigt werden:

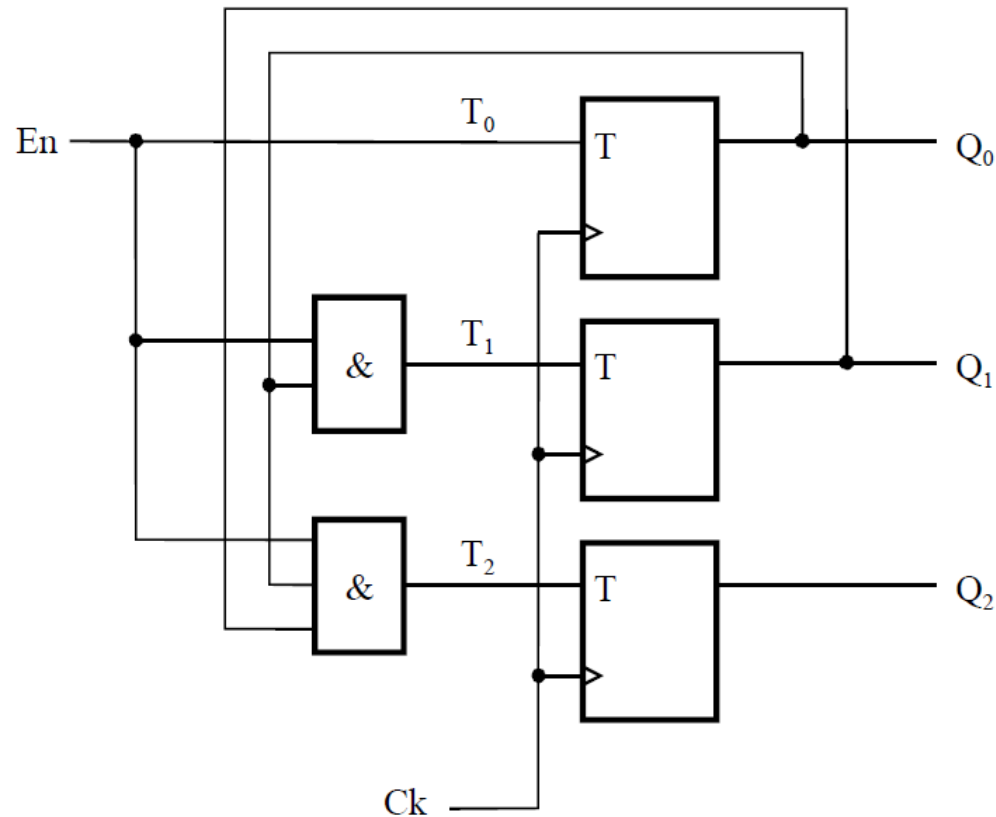


# Vorwärtszähler mit T-FF

8.40

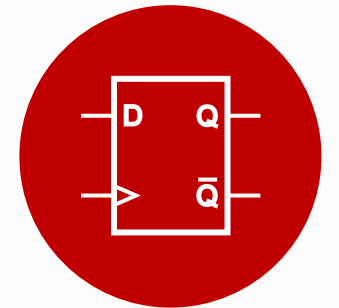
Ein D-Flipflop mit XOR-Gatter, bei dem ein Eingang des XOR-Gatter am Ausgang des Flipflops angeschlossen ist, ergibt ein Toggle-Flipflop.

Hier ist der Zähler ergänzt mit einen Eingabeeingang En (Enable = Zählfreigabe)





# Synchrone Schaltungen

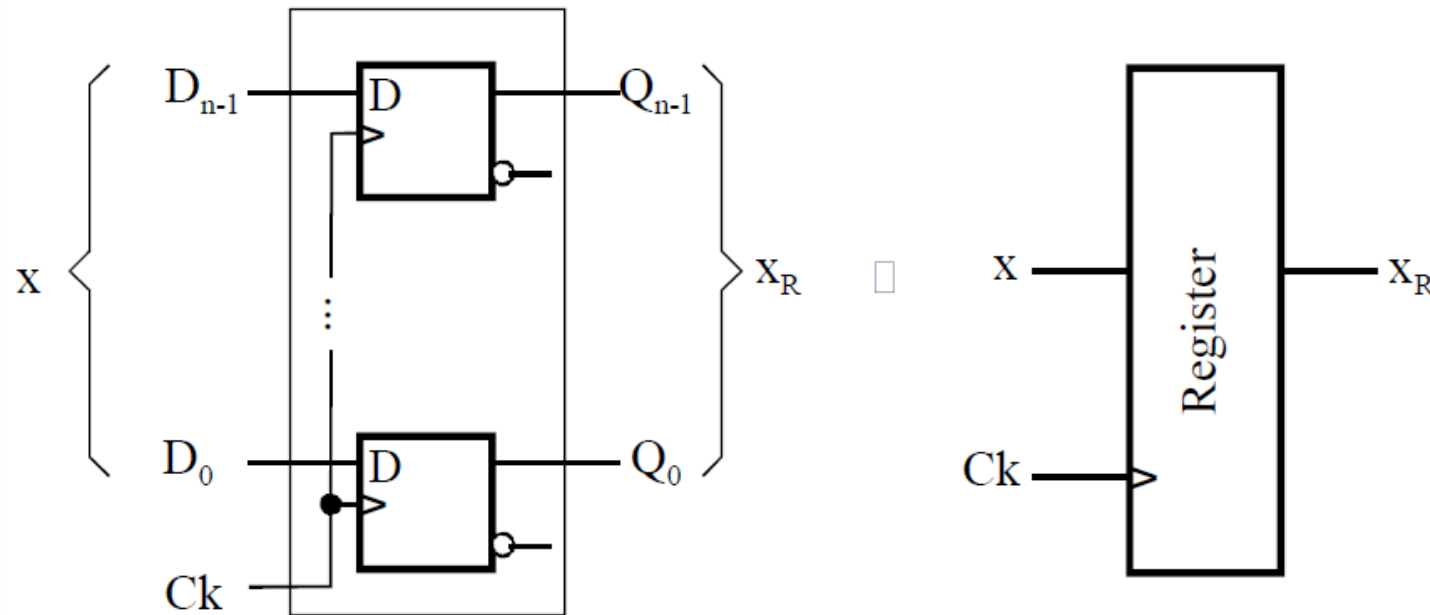


# Register

8.42

Die Systemflipflops lassen sich auch als Speicher für mehrere Variablen verwenden. Ein Eingangsvektor  $X$  mit  $n$  Variablen ( $x_{n-1} \dots x_0$ ) lässt sich dann in einem sogenannten Register aus z.B. D-Flipflops speichern.

Der Registerausgang  $X_R$  ändert sich nur mit jeder positiven Taktflanke auf den dann gültigen Eingangswert  $X$ , zwischen den Taktflanken ist der Ausgang stabil.

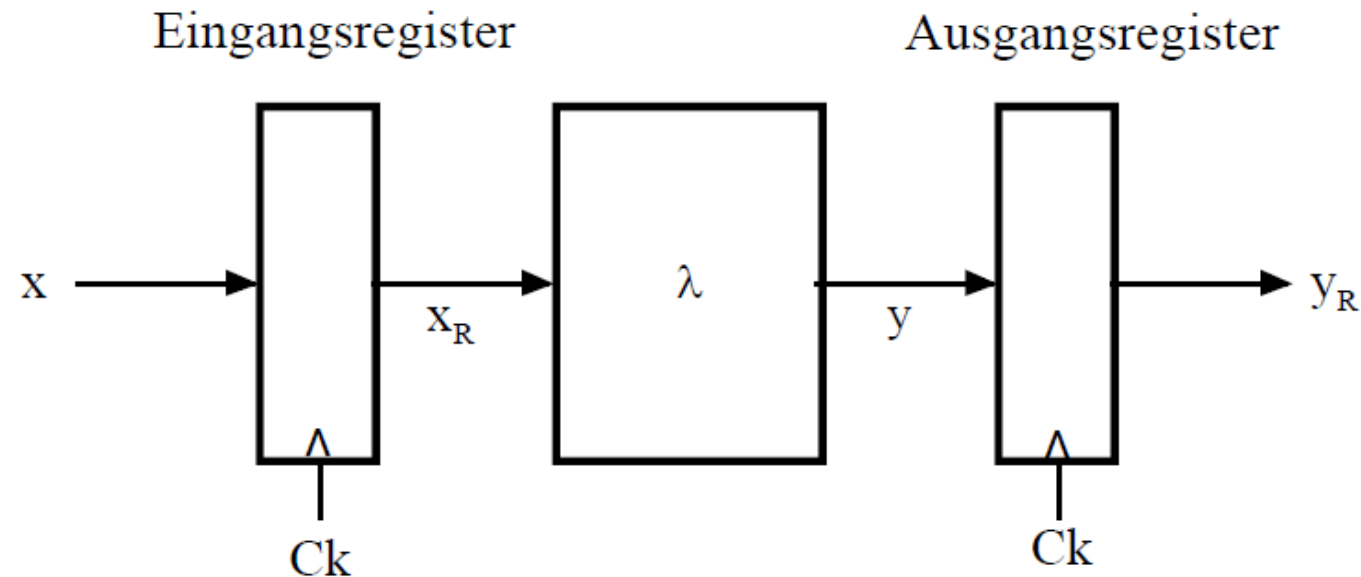


# Register

8.43

Diese "Registrierung" von Signalen kann zu der in Kap. 2 angesprochenen Vermeidung von Auswirkungen durch Hazards in einem System verwendet werden.

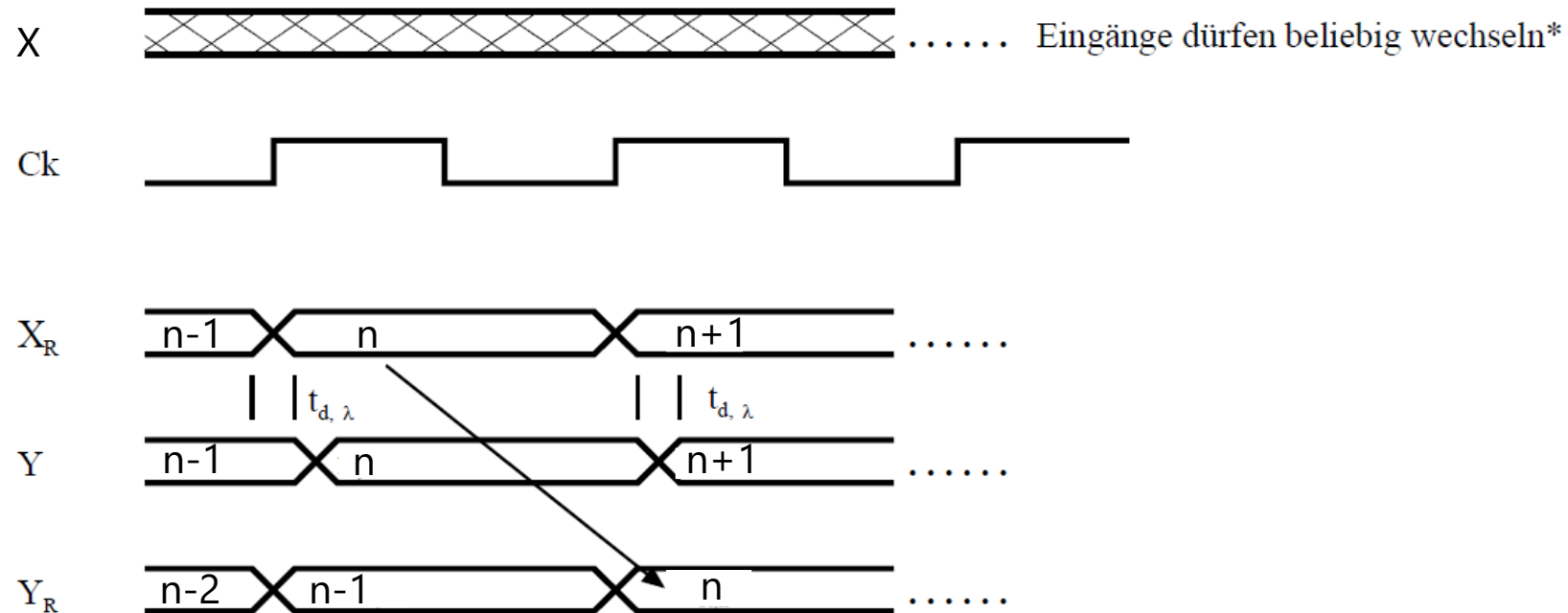
Wie im Bild dargestellt lassen sich sowohl Eingangs- wie auch Ausgangssignale auf den Takt synchronisieren und somit Funktions-/Strukturhazards in ihren Auswirkungen vermeiden.



# Register

8.44

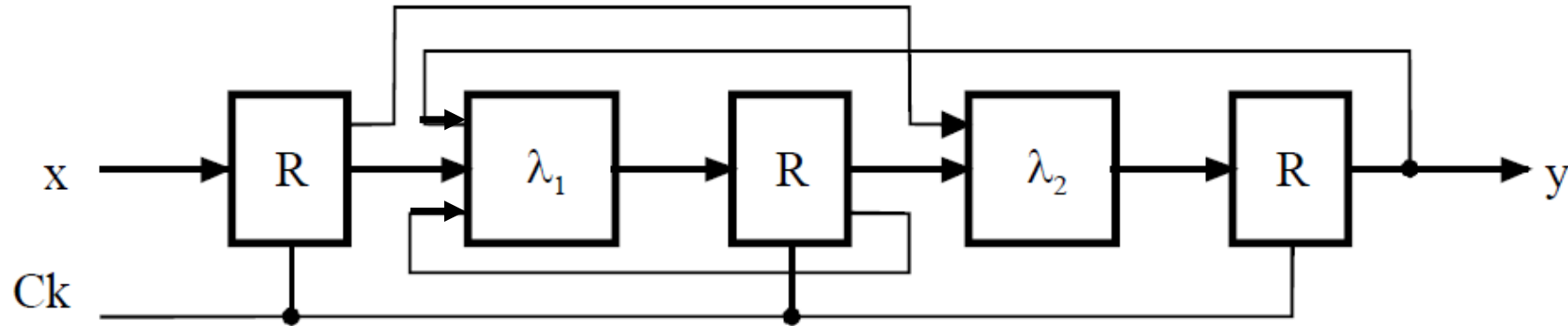
Der Ausgang  $X_R$  des Eingangsregisters ändert sich nur mit jeder positiven Taktflanke auf den dann gültigen Eingangswert  $X$ , zwischen den Taktflanken ist der Ausgang stabil. Das gleiche gilt auch für das Ausgangsregister  $Y$ , das sich um eine Taktperiode verzögert gegenüber dem Eingangssignal ändert.



# Register-Transfer-Logik

8.45

Taktsynchrone Systeme dürfen rückgekoppelt werden. Ein vollsynchronisiertes System aus Schaltnetzen / Schaltwerken wird dann als sog. **Register-Transfer-Logik** bezeichnet, wobei sich das Ausgangssignal mit jeder Registerstufe um eine Taktperiode verzögert:

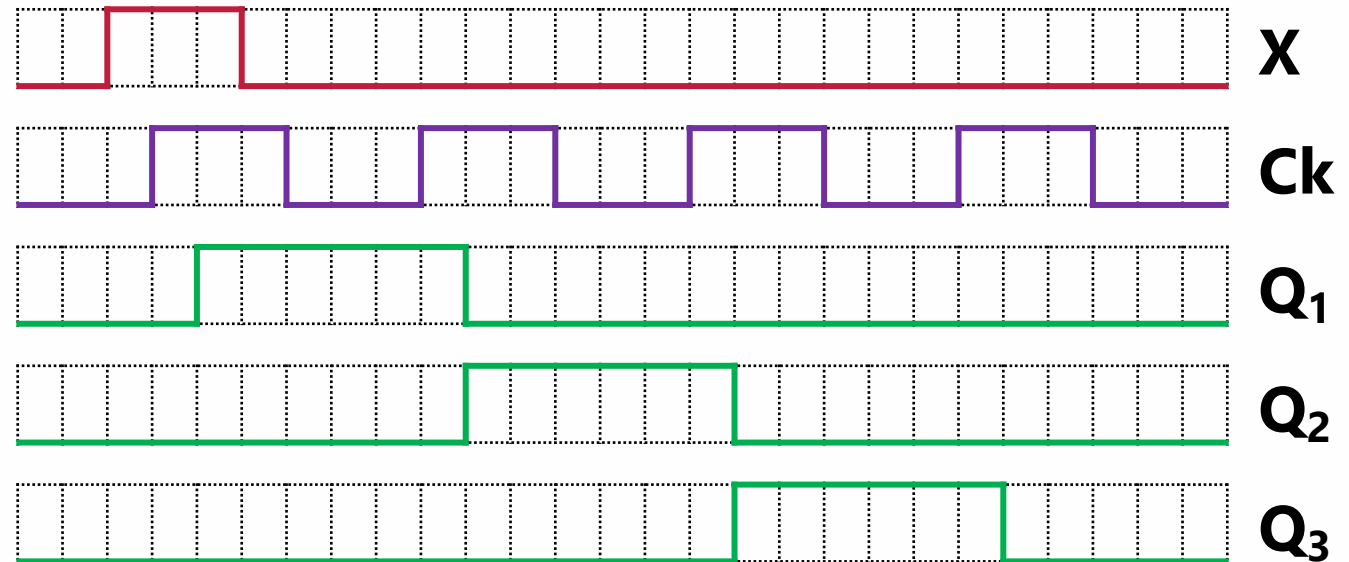
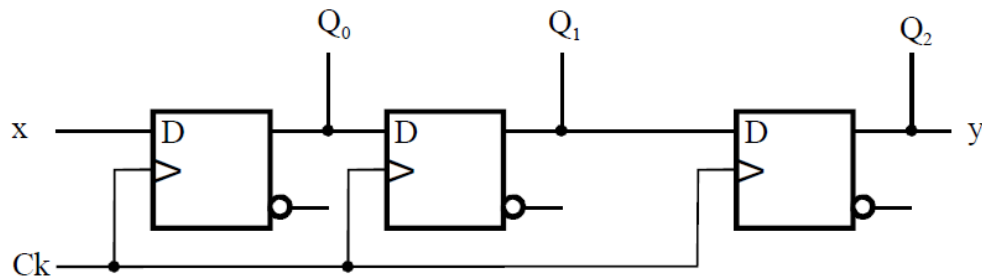


Bedingung hierfür ist, dass die Verzögerungszeiten durch die Schaltnetze kleiner sind als die Taktperiode.

# Schieberegister

8.46

Eine Kette von  $n$  Flipflops kann daher als digitale Verzögerungseinheit um  $n-1$  Takte verwendet werden



Annahme: Flipflop hat 1 Zeiteinheit Verzögerung

# Konfigurierbare Register

8.47

Mit entsprechenden Schaltnetzen an Ein-/Ausgängen der Flip-Flops können aus einem einfachen Schieberegister auch parallel ladbare und parallel auslesbare Schieberegister oder andere Abwandlungen realisiert werden.

Das Bild zeigt ein Schieberegister mit parallelen ( $P_x$ ) und seriellen ( $S_x$ ) Ein-/Ausgängen, das z. B. zur Umwandlung eines seriellen (bit für bit) Datenstroms in parallele Datenworte von  $n$  bits und umgekehrt genutzt werden kann.

