Lineare Algebra für Elektrotechnik
Wintersemester 22/23
Prof. Dr. Volker Bach
M.Sc. Jakob Geisler

Klausur
17.02.2023

Name, Vorname	
Matrikelnummer	
Studiengang	
TU E-Mail	

- Füllen Sie das Deckblatt aus und lesen Sie die weiteren Hinweise sorgfältig durch.
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis und ggf. Ihren Lichtbildausweis sichtbar an Ihrem Platz bereit.
- Legen Sie Stifte bereit. Benutzen Sie zur Bearbeitung der Aufgaben keine radierbaren Stifte (Bleistifte, „Frixion"-Stifte, o.Ä.) und keine roten Stifte.
- Schalten Sie Ihr Smartphone, Tablet, Smartwatch, o.Ä. aus und packen Sie es in Ihre Tasche. Verstauen Sie Jacken und Taschen am Rand des Raumes.
- Es dürfen keine Hilfsmittel benutzt oder mitgeführt werden.
- Fangen Sie bitte jede Aufgabe auf einer neuen Seite an und lassen Sie einen ausreichenden Rand (ca. 5cm, d.h. ein Viertel der Breite) für die Korrektur.
- Achten Sie darauf, dass Ihr Lösungsweg nachvollziehbar ist und bewahren Sie Ruhe.
- Nach Allgemeiner Prüfungsordnung führt ein Täuschungsversuch, die Benutzung oder Mitführung nicht zugelassener Hilfsmittel zum Nichtbestehen der Klausur.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 150 Minuten.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	*	Σ
Punkte	/ 6	/ 6	/ 6	/ 6	/ 6	/ 6	/ 6	/ 36
Kürzel								

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 + 1,5 + 1 + 1 + 1,5)

(a) Formulieren Sie den Fundamentalsatz der Algebra.

(b) Berechnen Sie folgende Terme und geben Sie das Ergebnis in der Darstellung $a + ib$ an, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ sein sollen:

$$(i)\ z_1 = (1+i)\cdot(2-3i), \quad (ii)\ z_2 = \frac{i}{3+i}, \quad (iii)\ z_3 = \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

(c) Geben Sie jeweils alle Lösungen der folgenden Gleichungen an:

$$(i)\ z^4 = 1,\ z \in \mathbb{C}, \quad (ii)(z-1)^3 = i,\ z \in \mathbb{C}.$$

(d) Geben Sie jeweils

$$(i)\ z_4 = 2i, \quad (ii)\ z_5 = -1-i$$

in der Polardarstellung $r \cdot e^{i\varphi}$ an, wobei $r \in [0,\infty)$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ seien.

(e) Es sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl. Zeigen Sie

$$(i)\ |z|^2 = \overline{z}\cdot z, \quad (ii)\ \mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}, \quad (iii)\ \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

Aufgabe 2 (1 + 2 + 2 + 1)

(a) Definieren Sie den Begriff der linearen Unabhängigkeit.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass $S := \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \subseteq \mathbb{R}^4$ linear unabhängig ist, wobei

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

X

(c) Sei

$$A = \mathcal{M}[\Phi] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$$

die Matrixdarstellung einer linearen Abbildung $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^4)$. Ist Φ injektiv? Begründen Sie Ihre Aussage.

(d) Für welche Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ definiert $T = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 9 \end{pmatrix}$$

keine Basis?

Aufgabe 3 $(1+2+1+2)$

(a) Formulieren Sie das Unterraumkriterium.

(b) Sei

$$B = \mathcal{M}[\Psi] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -6 \\ 2 & 1 & 0 & 8 \\ 4 & -1 & 2 & 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

die Matrixdarstellung einer linearen Abbildung $\Psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$. Geben Sie jeweils eine Basis des Kerns und des Bildes dieser linearen Abbildung an. ?

(c) Geben Sie alle Lösungen $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ der Gleichung

$$B \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

an.

(d) Es seien X und Y $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\Phi \in \mathcal{L}(X;Y)$ eine lineare Abbildung zwischen diesen Vektorräumen. Beweisen Sie, dass $\ker(\Phi) \subseteq X$ ein Unterraum ist.

Aufgabe 4 (1 + 1 + 3 + 1)

(a) Definieren Sie die Diagonalisierbarkeit einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$.

Nun seien $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \subseteq \mathbb{C}^3$ die Standardbasis und $W = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\} \subseteq \mathbb{C}^3$ eine weitere Basis, definiert durch

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3.$$

Außerdem sei $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ eine lineare Abbildung, die $\Phi(\vec{e}_i) = \vec{w}_i$ für alle $i \in \mathbb{Z}_1^3$ erfüllt.

(b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von Φ bezüglich $\mathcal{E}$.

(c) Geben Sie die Matrixdarstellung von Φ bezüglich $Z = \{\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3\}$ an, indem Sie eine Basistransformation ausführen, wobei

$$\vec{z}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{z}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{z}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3.$$

(d) Begründen Sie, warum $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}[\Phi]$ diagonalisierbar ist. ?

Aufgabe 5 (1 + 2,5 + 2,5)

(a) Definieren Sie, was eine injektive, eine surjektive und eine bijektive Abbildung ist.

(b) Es seien L, M, N drei nichtleere Mengen und $f : L \to M$, $g : M \to N$ zwei Abbildungen. Beweisen Sie: Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.

(c) Beweisen Sie **mittels vollständiger Induktion**, dass

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gilt.

Aufgabe 6 (1 + 2 + 3)

(a) Definieren Sie, was ein Skalarprodukt auf einem $\mathbb{R}$- bzw. auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum ist und geben Sie das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^N$ an, wobei $N \in \mathbb{N}$ beliebig sei.

(b) Es sei

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

eine Matrix und $\langle\cdot|\cdot\rangle_C : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, definiert durch

$$\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle_C = \langle \vec{x}|C\cdot\vec{y}\rangle,$$

wobei $\langle\cdot|\cdot\rangle$ das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ sei. Beweisen Sie, dass $\langle\cdot|\cdot\rangle_C$ ein Skalarprodukt ist.

(c) Es sei $S := \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nutzen Sie das Schmidtsche Orthonormierungsverfahren, um aus S eine Orthonormalbasis bezüglich $\langle\cdot|\cdot\rangle_C$ zu formen.

Bonusaufgabe (Bonuspunkte: 1 + 3 + 2)

Gegeben sei

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}.$$

(a) Begründen Sie ohne Rechnung, dass D diagonalisierbar ist.

(b) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von D.

(c) Geben Sie die Transformationsmatrizen an, die D in eine Diagonalmatrix überführen und führen Sie die Basistransformation aus.