1 Elektrisches Feld

Punkte: 20

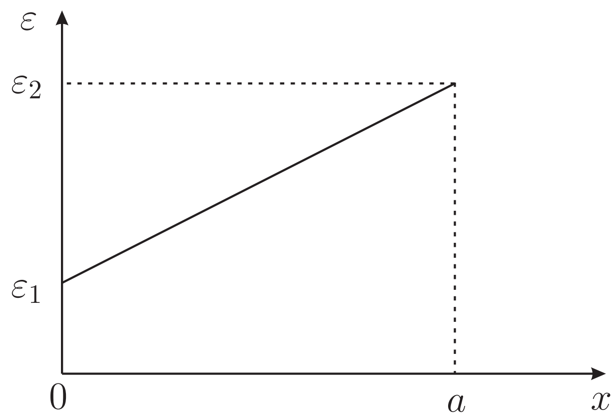
a) linearer Verlauf: $\varepsilon(x) = mx + n$

Steigung: $m = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{a}$ (0,5)

Offset: $n = \varepsilon_1$ (0,5)

$\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{a} x + \varepsilon_1$ (1)

Skizze (1)



$\sum_a 3$

b) $C = \varepsilon \frac{A}{d}$ (1)

$dC_x = \varepsilon(x) \frac{b}{d} dx$ (1)

$C_b = \int\limits_0^a \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{a} x + \varepsilon_1 \right) \frac{b}{d} dx$ (1)

$C_b = \frac{b}{d} \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{a} \frac{x^2}{2} + \varepsilon_1 x \right) \Big|_0^a$ (1)

$C_b = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{ab}{2d}$ (1)

$\sum_b 5$

c) $\sigma = \frac{Q}{A}$ (1)

$Q = C \cdot U$ (1)

$\sigma = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{ab}{2d} \frac{U}{A} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{U}{2d}$ (1) (mittlere Oberflächenladungsdichte)

$\sum_c 3$

d) $D = \varepsilon(x)E$ (1)

$D = \left(\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{a}x + \varepsilon_1\right)\frac{U}{d}$ (1)

$\sum_d 2$

e) Parallelschaltung (1)

$C_{ers} = \sum C_i$ (1)

$\sum_e 2$

f) ein homogenes Feld besitzt an jeder Stelle gleiche Stärke und gleiche Richtung (2)

elektrisches Feld ist homogen $E = \frac{U}{d}$ (1)

$\sum_f 3$

g) Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke stetig $\vec{E}_t$ (1)

Normalkomponente der elektrischen Flussdichte stetig $\vec{D}_n$ (1)

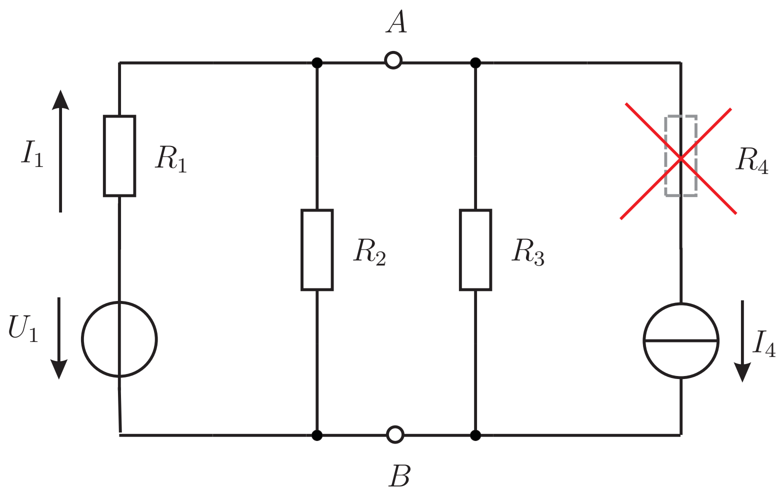
$\sum_g 2$

2 Gleichstromnetzwerk

Punkte: 10

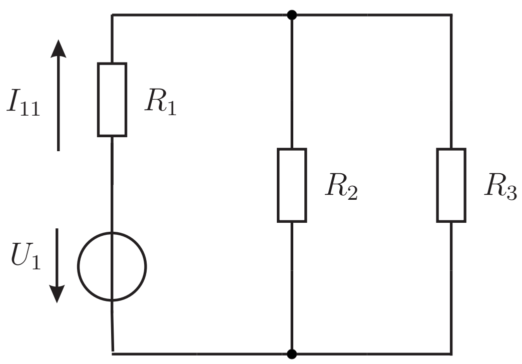
a) Superpositionsprinzip

die Wirkung jeder Quelle getrennt betrachten, danach die Einzelwirkungen zur Gesamtwirkung überlagern. Quellen, deren Wirkung gerade nicht betrachtet wird, durch ihre Innenwiderstände ersetzen.



Wirkung der Spannungsquelle U_1 betrachten (I_4 und R_4 dabei entfallen).

Skizze (Ansatz) 1 Punkt

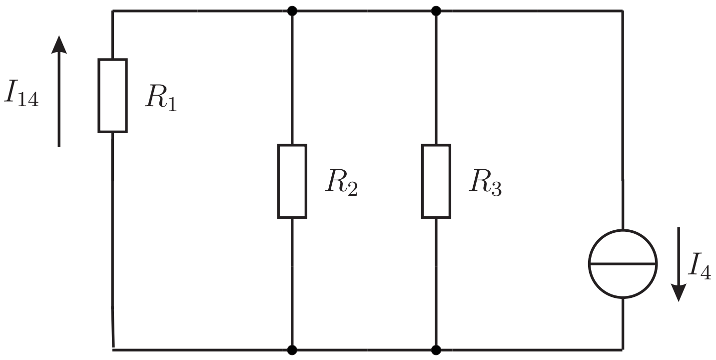


$$I_{11} = \frac{U_1}{R_1 + R_{23}} = \frac{U_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{R_2 + R_3}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3} \cdot U_1$$

Berechnung 1 Punkt

Wirkung der Stromquelle I_1 betrachten (Spannungsquelle U_1 ist dabei ein Kurzschluss, R_4 in der Reihe mit der Stromquelle entfällt).

Skizze (Ansatz) 1 Punkt



Stromteiler:

$$I_{14} = \frac{R_{23}}{R_1 + R_{23}} \cdot I_4 = \frac{\frac{R_2 R_3}{R_2+R_3}}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2+R_3}} \cdot I_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3} \cdot I_4$$

Berechnung 1 Punkt

Superposition:

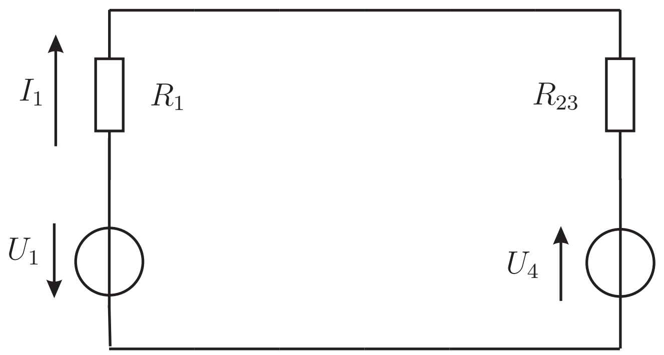
$$I_1 = I_{11} + I_{14} = \frac{R_2 + R_3}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3} \cdot U_1 + \frac{R_2 R_3}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3} \cdot I_4 = \frac{(R_2 + R_3)U_1 + R_2 R_3 I_4}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3}$$

Ergebnis 1 Punkt

$\sum_a 5$

b) Quellentransformation (korrekte Pfeilrichtung). R_4 in der Reihe mit der Stromquelle entfällt.

Skizze (Ansatz) 2 Punkte



$$
\begin{aligned}
R_{23} &= \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \\
U_4 &= R_{23} \cdot I_4 \\
I_1 &= \frac{U_1 + U_4}{R_1 + R_{23}} = \frac{U_1 + R_{23} \cdot I_4}{R_1 + R_{23}} = \frac{U_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} I_4}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{(R_2 + R_3) U_1 + R_2 R_3 I_4}{R_1 (R_2 + R_3) + R_2 R_3}
\end{aligned}
$$

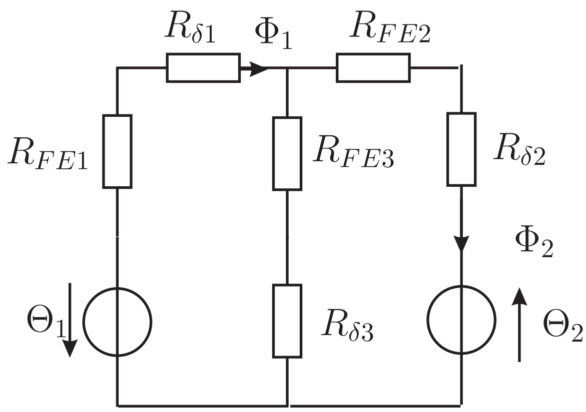
Berechnung und Ergebnis 3 Punkte

$\sum_b 5$

3 Magnetischer Kreis

Punkte: 20

a)



Je Schenkel 1 Punkt = 3 Punkte

$$
\begin{aligned}
R_m = &= \frac{l}{\mu A} \\
R_{fe_1} &= \frac{2 \cdot l/2 + l - \delta_1}{\mu_r \mu_0 a^2} = \frac{2l - \delta_1}{\mu_r \mu_0 a^2} \\
R_{fe_2} &= \frac{3l - \delta_2}{\mu_r \mu_0 a^2} \\
R_{fe_3} &= \frac{l - \delta_3}{\mu_r \mu_0 a^2} \\
R_{\delta_1} &= \frac{\delta_1}{\mu_0 a^2} \\
R_{\delta_2} &= \frac{\delta_2}{\mu_0 a^2} \\
R_{\delta_3} &= \frac{\delta_3}{\mu_0 a^2} \\
\Theta_1 &= N_1 I_1 \\
\Theta_2 &= N_2 I_2
\end{aligned}
$$

Formel Allgemein 1 Punkt, je R_{fe} 1 Punkt, für alle R_δ insgesamt 1 Punkt, je Θ 0.5 Punkte

$\sum_a 9$

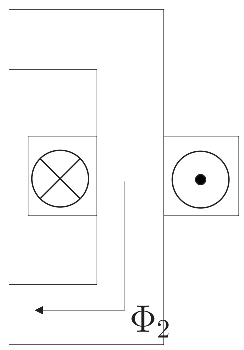
b)

$$
\begin{aligned}
R_{fe_1} &= \frac{2l}{\mu_r\mu_0 a^2} = 2R_{fe} \\
R_{fe_2} &= \frac{3l}{\mu_r\mu_0 a^2} = 3R_{fe} \\
R_{fe_3} &= \frac{l}{\mu_r\mu_0 a^2} = R_{fe}
\end{aligned}
$$

Erste korrekte Anwendung 1 Punkt, jede weitere 0.5 = 2 Punkte

$\sum_b 2$

c)

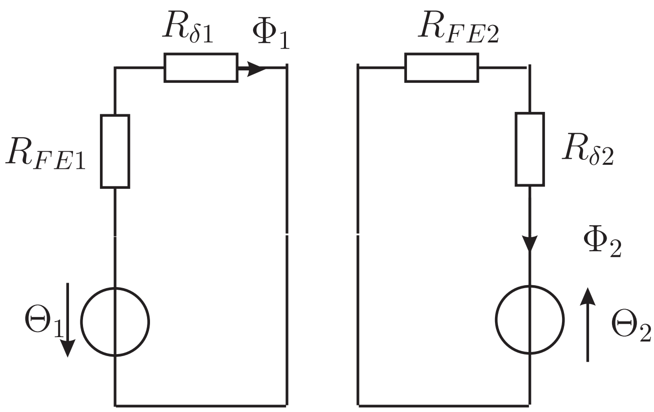


Je Eintrag wenn in sich stimmig 0.5 Punkte = 1 Punkte

$\sum_d 1$

d)

$\Phi_3 = 0 \Rightarrow$



Maschenumläufe:

$$
\begin{aligned}
\Phi_3 = 0 \Rightarrow \Phi_1 = \Phi_2 & \\
\Theta_1 &= \Phi_1(R_{fe_1} + R_{\delta_1} + R_{fe_3} + R_{\delta_3}) - \Phi_2(R_{fe_3} + R_{\delta_3}) \\
&= \Phi_1(2R_{fe} + R_{\delta_1)} \\
\Theta_2 &= \Phi_2(R_{fe_2} + R_{\delta_2}) \\
&= \Phi_2(3R_{fe} + R_{\delta_2}) \\
\text{mit } \Phi_1 = \Phi_2 & \\
\frac{\Theta_1}{2R_{fe} + R_{\delta_1}} &= \frac{\Theta_2}{3R_{fe} + R_{\delta_2}}
\end{aligned}
$$

Je neue Erkenntnis 1 Punkt = 4 Punkte

$$
\begin{aligned}
\text{mit } \Theta_2 = 3\Theta_1 & \\
\frac{1}{2R_{fe} + R_{\delta_1}} &= \frac{3}{3R_{fe} + R_{\delta_2}} \\
\Rightarrow R_{\delta_2} - 3R_{\delta_1} &= 3R_{fe} \\
\text{mit } \delta_2 = 4\delta_1 & \\
\Rightarrow 4R_{\delta_1} - 3R_{\delta_1} &= 3R_{fe} \\
\frac{\delta_1}{\mu_0 a^2} &= \frac{3l}{\mu_0 \mu_r a^2} \\
\Rightarrow \delta_1 &= \frac{3l}{\mu_r} = \frac{0,3}{600} m = 0,5mm \\
\delta_2 &= 4\delta_1 = 2mm
\end{aligned}
$$

Je neue Erkenntnis 1 Punkt = 2 Punkte
allgemeine Lösung δ_1 1 Punkt
Zahlenmäßige Lösung je 0.5 Punkt = 1 Punkt

$\sum_e 8$

4 Komplexe Wechselstromrechnung

Punkte: 30

a) Im Fall von $\underline{U}_A B = 0V$ müssen sowohl der Betrag als auch die Phase der Spannungen an den Klemmen A und B identisch sein. Ansonsten stellt sich eine Spannung $\underline{U}_A B \neq 0V$ Für Phase und Betrag je 1 Punkt

$\sum_a = 2P$

b)

$$\frac{R_1}{R_1 + R_x + j\omega L_x} = \frac{\frac{-j\frac{1}{\omega C_3}R_3}{-j\frac{1}{\omega C_3}+R_3}}{\frac{-j\frac{1}{\omega C_3}R_3}{-j\frac{1}{\omega C_3}+R_3} + R_4}$$

$$\frac{R_1}{R_1 + R_x + j\omega L_x} = \frac{-j\frac{1}{\omega C_3}R_3}{-j\frac{1}{\omega C_3}R_3 + R_4\left(-j\frac{1}{\omega C_3} + R_3\right)}$$

$$\frac{R_1}{R_1 + R_x + j\omega L_x} = \frac{-j\frac{1}{\omega C_3}R_3}{-j\frac{1}{\omega C_3}R_3 - j\frac{R_4}{\omega C_3} + R_3 R_4}$$

$$\frac{R_1}{R_1 + R_x + j\omega L_x} = \frac{-jR_3}{-jR_3 - jR_4 + R_3 R_4 \omega C_3}$$

$$\frac{R_1}{R_1 + R_x + j\omega L_x} = \frac{R_3}{R_3 + R_4 + jR_3 R_4 \omega C_3}$$

$$R_1\left(R_3 + R_4 + jR_3R_4\omega C_3\right) = R_3\left(R_1 + R_x + j\omega L_x\right)$$

$$R_1R_3 + R_1R_4 + jR_1R_3r_4\omega C_3 = R_3R_1 + R_3(R_x + j\omega L_x)$$

$$R_x + j\omega L_x = \frac{R_1R_4}{R_3} + jR_1R_4\omega C_3$$

$$\text{Koeffizientenvergleich} \Rightarrow \underline{R_x = \frac{R_1R_4}{R_3}} \text{ und } \underline{L_x = R_1R_4C_3}$$

Ansatz Spannungsteiler, Weg und Ergebnis je 1P

$\sum_b = 3P$

c)

$$\underline{Z}_x = R_x + j\omega L_x = 1k\Omega + j2\pi\frac{10}{2\pi}10^3\frac{1}{s}0,1\frac{Vs}{A} = 1k\Omega + j1k\Omega \ \color{red}{1\text{P}}$$

$$\underline{Z}_3 = \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega\pi}}\right)^{-1} = \left(\frac{1 + j\omega C_3 R_3}{R_3}\right)^{-1} = \frac{R_3}{1 + j\omega C_3 R_3} = \frac{R_3 - j\omega C_3 R_3^2}{1 + \omega^2 C_3^2 R_3^2}$$

$$= \frac{10^3\frac{V}{A} - j2\pi\frac{10}{2\pi}10^3\frac{1}{s}0,2\cdot 10^{-6}\frac{As}{V}10^6\frac{V}{A}}{1 + 4\pi^2\frac{10^2}{4\pi^2}0,2^2\cdot 10^{-12}\frac{A^2s^2}{V^2}10^6\frac{V}{A}}$$

$$= \frac{10^3\frac{V}{A} - j2\cdot 10^3\frac{V}{A}}{1+4} = \underline{0,2k\Omega - j0,4k\Omega} \ \color{red}{1\text{P}}$$

$$\color{red}{\textstyle\sum_c = 2P}$$

d)

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_V}{R_1 + R_x + j\omega L_x}$$

$$= \frac{\underline{U}_V\left(R_1 + R_2 + j\omega L_x\right)}{\left(R_1 + R_x\right)^2 + \omega^2 L_x^2}$$

$$= \frac{2\cdot 10^3\frac{V}{A}\cdot 10V - j10^3\frac{V}{A}\cdot 10V}{5\cdot 10^6\frac{V^2}{A^2}} = \frac{20\cdot 10^3\frac{V^2}{A}}{5\cdot 10^6\frac{V^2}{A^2}} - j\frac{10\cdot 10^3\frac{V^2}{A}}{5\cdot 10^6\frac{V^2}{A^2}}$$

$$= \underline{4mA - j2mA} \ \color{red}{1\text{P (Ansatz und Ergebnis je 0,5P)}}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_V}{R_3||C_3 + R_4} = \frac{\underline{U}_V}{\underline{Z}_3 + R_4}$$

$$= \frac{\underline{U}_V}{\frac{R_3 - j\omega C_3 R_3^2}{1+\omega^2 C_3^2 R_3^2} + R_4} = \frac{\underline{U}_V\left(1 + \omega^2 C_3^2 R_3^2\right)}{R_3 - j\omega C_3 R_3^2 + R_4\left(1 + \omega^2 C_3^2 R_3^2\right)}$$

$$= \frac{5\underline{U}_V}{R_3 + 5R_4 - j\omega C_3 {R_3}^2} = \frac{5\underline{U}_V}{6R_4 - j\omega C_3 {R_3}^2}$$

$$= \frac{5\underline{U}_V\left(6R_4 + j\omega C_3 {R_3}^2\right)}{36{R_3}^2 + \omega^2 {C_3}^2 {R_3}^4} = \frac{30\underline{U}_V R_4 + j5\underline{U}_V\omega C_3 {R_3}^2}{36{R_3}^2 + \omega^2 {C_3}^2 {R_3}^2}$$

$$= \frac{30\cdot 10V 10^3\frac{V}{A} + j5\cdot 10V 2\pi\frac{10}{2\pi}10^3\frac{1}{s}0,2\cdot 10^{-6}\frac{As}{V}10^6\frac{V^2}{A^2}}{36\cdot 10^6\frac{V^2}{A^2} + 4\pi^2\frac{10^2}{4\pi^2}10^6\frac{1}{s}0,2^2 10^{-6}\frac{A^2s^2}{V^2}10^{12}\frac{V^4}{A^4}}$$

$$= \frac{300\cdot 10^3\frac{V^2}{A} + j100\cdot 10^3\frac{V^2}{A}}{36\cdot 10^6\frac{V^2}{A^2} + 4\cdot 10^6\frac{V^2}{A^2}} = \frac{300\cdot 10^3\frac{V^2}{A} + j100\cdot 10^3\frac{V^2}{A}}{40\cdot 10^6\frac{V^2}{A^2}}$$

$$= \underline{7,5mA + j2,5mA} \ \color{red}{1\text{P}}$$

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 4mA - j2mA + 7,5mA + j2,5mA = \underline{11,5mA + j0,5mA} \text{ 1P}$$

$$\sum_d = 3P$$

e)

$$\underline{U}_{Rx} = \underline{U}_1 = R_1\underline{I}_1 = 1k\Omega\left(4\cdot 10^{-3}A - j2\cdot 10^{-3}A\right) = \underline{4V - j2V} \text{ 2*1P}$$
$$\underline{U}_{Lx} = \underline{X}_{Lx} = j\omega L_x \underline{I}_1$$
$$= j2\pi\frac{10}{2\pi}10^3\frac{1}{s}0,1\frac{Vs}{A}\left(4\cdot 10^{-3}A - j2\cdot 10^{-3}A\right) = \underline{2V + j4V} \text{ 1P}$$
$$\underline{U}_x = U_{Rx} + U_{Lx} = 4V - j2V + 2V + j4V = \underline{6V + j2V} \text{ 1P}$$

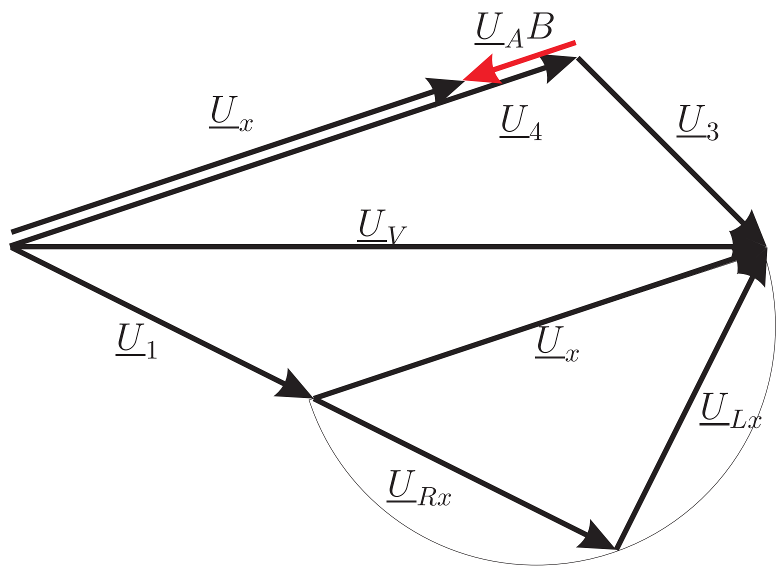
$$\underline{U}_4 = R_4\underline{I}_2 = 10^3\frac{V}{A}\left(7,5\cdot 10^{-3}A + j2,5\cdot 10^{-3}A\right) = \underline{7,5V + j2,5V} \text{ 1P}$$
$$\underline{U}_3 = \underline{U}_V - \underline{U}_4 = 10V - 7,5V - j2,5V = \underline{2,5V - j2,5V} \text{ 1P}$$
$$\underline{U}_A B = \underline{U}_x - \underline{U}_4 = 6V + j2V - 7,5V - j2,5V = \underline{-1,5V - j0,5V} \text{ 1P}$$

$$\sum_e = 7P$$

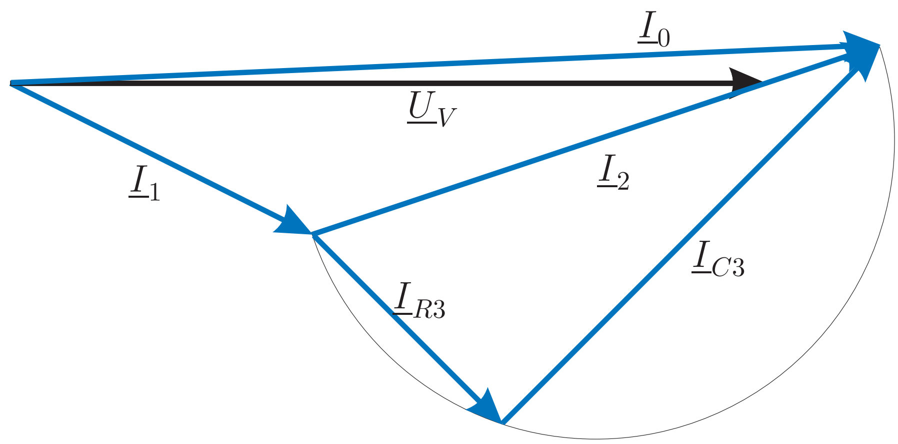
f)

$$\underline{I}_{C3} = \frac{\underline{U}_3}{-j\frac{1}{\omega C_3}} = j\underline{U}_3\omega C_3 = j\left(2,5V - j2,5V\right)2\pi\frac{10}{2\pi}10^3\frac{1}{s}0,2\cdot 10^-6\frac{As}{V} = \underline{5mA + j5mA} \text{ 1P}$$
$$\underline{I}_{R3} = \frac{\underline{U}_3}{R_3} = \frac{2,5V - j2,5V}{10^3\frac{V}{A}} = \underline{2,5mA - j2,5mA} \text{ 1P}$$

$$\sum_f = 2P$$



g)



für jeden richtigen Zeiger 0,5 Punkte, $\sum_g = 6P$

h)

$|\underline{U}_A B| \approx 3,2V$ 0,5P

$|\underline{I}_0| \approx 23,0mA$ 0,5P

$\sum_h = 1P$

i) Kapazitives Verhalten, da der Strom-Zeiger dem Spannungs-Zeiger im Zeigerdiagramm voraus eilt.

$\sum_i = 1P$

j) Veränderter Betrag der speisenden Spannung hat keinen Einfluss auf die Phasenlage, Pfeile werden nur skaliert. 1P, wenn mit Begründung

$\sum_j = 1P$

k)

$$\frac{\underline{S}_{neu}}{\underline{S}} = \frac{\underline{U}_{V,neu}^2 \cdot \underline{Z}}{\underline{U}_V^2 \cdot \underline{Z}} = \frac{0,5^2 \cdot \underline{U}_V^2 \cdot \underline{Z}}{\underline{U}_V^2 \cdot \underline{Z}} = 0,25 = 25\%$$

Die Scheinleistung reduziert sich auf 25%. Da φ konstant bleibt, ändern sich $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ auch nicht. Das heißt, Wirk- und Blindleistung reduzieren sich ebenfalls auf 25%.

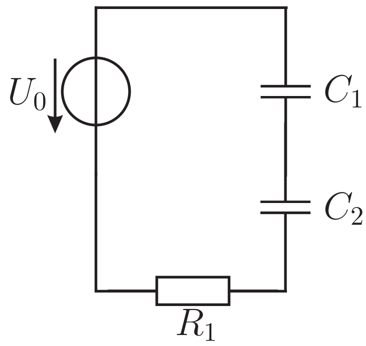
Scheinleistung 1P, Blind- und Wirkleistung 1P

$\sum_k = 2P$

5 Kondensatornetzwerk

Punkte: 20

a)



$C_{G1} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$ (0.5)

$C_{G1} = \frac{2\,\mu\text{F} \cdot 4\,\mu\text{F}}{2\,\mu\text{F} + 4\,\mu\text{F}} = \frac{4}{3}\,\mu\text{F}$ (0.5)

$i_{R1} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ (1)

$I_0 = \frac{U_0}{R_1}$ (0.5) $= \frac{210\ \text{V}}{1\ \text{k}\Omega} = 0.21\ \text{A}$ (0.5)

$\tau = R_1 \cdot C_{G1}$ (0.5) $= 1\ \text{k}\Omega \cdot \frac{4}{3}\ \mu\text{F} = \frac{4}{3}\ \text{ms}$ (0.5)

$\sum_a 4$

b) Der Ladestrom steigt sprunghaft an und fällt dann exponentiell ab. (1)

Die Kondensatorspannungen sind stetig. Sie steigen bis $U_{CG1} = U_0$ an; dann ist der Ladevorgang abgeschlossen. (1)

Der Ladevorgang dauert theoretisch unendlich. (1)

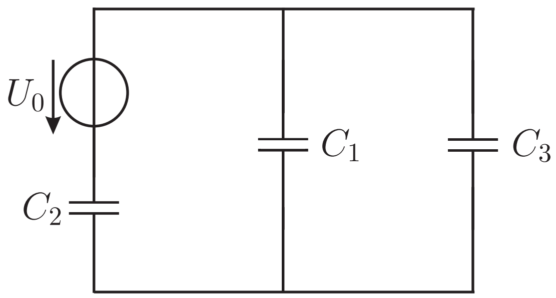
In der Praxis gilt der Ladevorgang ab $t = 5\tau$ abgeschlossen. (1)

$\sum_b 4$

c) Spannungsteiler: $\frac{U_{C1}}{U_0} = \frac{C_{G1}}{C_1}$ (1) $= \frac{4/3\ \mu\text{F}}{2\ \mu\text{F}} = \frac{2}{3}$ (0.5)

$U_{C1} = \frac{2}{3} U_0 = \frac{2}{3} 210\ \text{V} = 140\ \text{V}$ (0.5)

$\sum_c 2$



d) $C_{13} = C_1 + C_3$ (1)

$C_{G2} = \frac{C_2 C_{13}}{C_2 + C_{13}}$ (1)

$\frac{U_{C1}^*}{U_0} = \frac{C_{G2}}{C_{13}}$ (1) $= \frac{1}{C_{13}} \cdot \frac{C_{13} C_2}{C_{13} + C_2} = \frac{C_2}{C_1 + C_2 + C_3}$ (0.5)

$C_3 = C_2 \frac{U_0}{U_{C1}^*} - C_1 - C_2$ (1)

$C_3 = 4\ \mu\mathrm{F} \cdot \frac{210\ \mathrm{V}}{30\ \mathrm{V}} - 2\ \mu\mathrm{F} - 4\ \mu\mathrm{F} = 22\ \mu\mathrm{F}$ (0.5)

$\sum_d 5$

e) $W = \frac{1}{2} C U^2$ (1)

$W^* = \frac{1}{2} C_{G2} U_0^2$ (0.5)

$W = \frac{1}{2} C_{G1} U_0^2$ (0.5)

$\Delta W = \frac{1}{2} \left(C_{G2} - C_{G1} \right) U_0^2$ (0,5)

$C_{G2} = \frac{4\ \mu\mathrm{F} \cdot 24\ \mu\mathrm{F}}{4\ \mu\mathrm{F} + 24\ \mu\mathrm{F}} = \frac{24}{7} \mu\mathrm{F}$ (0,5)

$C_{G_2} - C_{G_1} = \frac{24}{7} \mu\mathrm{F} - \frac{4}{3} \mu\mathrm{F} > 0$ (0,5) $\implies$ $\Delta W > 0$ (0,5)

Energie wird aus der Quelle nachgekladen und in dem zusätzlichen Kondensator gespeichert (1)

$\sum_e 5$