Aufgabe: Bilineare Abbildung

Betrachten Sie die bilineare Abbildung

$$s = \frac{2}{T}\,\frac{z-1}{z+1}$$

sowie ihre inverse Abbildung

$$z = \frac{2+T\,s}{2-T\,s}\,.$$

a) Wo werden die Punkte $z = 1$, $z = 0$, $z = j$, $z = -j$ und $z = -1$ auf die s-Ebene abgebildet? Wohin wird der z-Einheitskreis abgebildet?

b) Benennen Sie den Bereich in s, der durch die bilineare Transformation die beste Approximation der inversen z-Transformation erfährt.

Gegeben sei nun die Übertragungsfunktion eines Integrators in s:

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

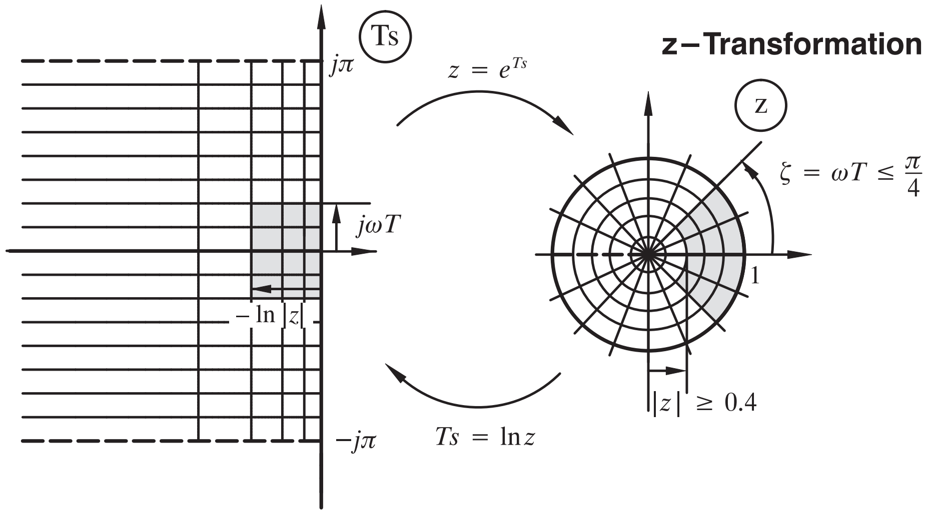
c) Transformieren Sie den Integrator mit der bilinearen Transformation nach z.

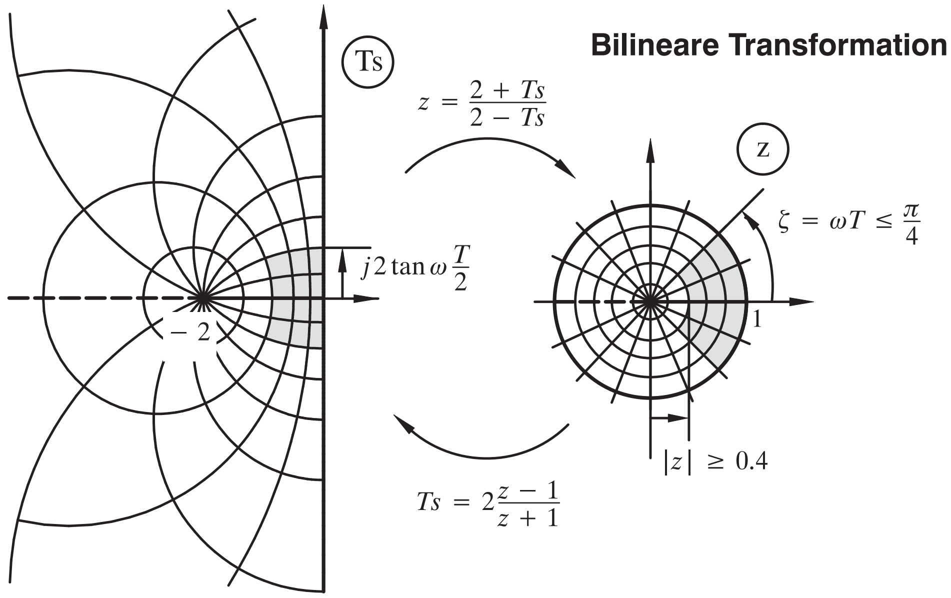
Gegeben sei die folgende Stufenübertragungsfunktion:

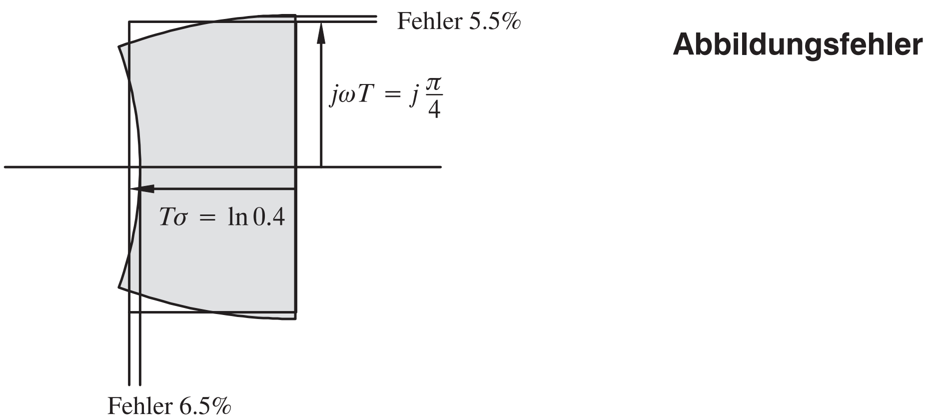
$$(G_H G)_z(z) = r_1 \frac{z - z_{01}}{(z-z_1)(z-z_2)}\,.$$

d) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte. Was lässt sich über Pole und Nullstellen bei Verwendung der bilinearen Transformation feststellen?

Lokale Approximation der $\mathcal{Z}$-Transformation durch eine bilineare Abbildung







a. Pole $z \to s$

$z=1$ $\qquad s=\frac{2}{T}\frac{1-1}{1+1}=0$

$z=0$ $\qquad s=\frac{2}{T}\frac{-1}{1}=-\frac{2}{T}$

$z=-1$ $\qquad s=\frac{2}{T}\frac{-1-1}{-1+1}\to\infty$

$z=j$ $\qquad s=\frac{2}{T}\frac{j-1}{j+1}=\frac{2}{T}\frac{j-1}{j+1}\frac{-j+1}{-j+1}=\frac{2}{T}\frac{1+j+j-1}{1+j-j+1}=\frac{2j}{T}$

$z=-j$ $\qquad s=\frac{2}{T}\frac{-j-1}{-j+1}=\frac{2}{T}\frac{-j-1}{-j+1}\frac{j+1}{j+1}=\frac{-2j}{T}$

除了 $s=0$
其它都与周期T相关
⇒不够精确

b、说出S域中的区域 使得 $\to z$ 最近似

$$s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1},\quad z=e^{sT}$$

$$\Rightarrow s=\frac{2}{T}\frac{e^{sT}-1}{e^{sT}+1}$$

⇒ exakte Lösung 为 $s=0$

⇒ Stabilitätsgrenz wird exakt abgebildet

c、I-Glied 用双线性 从 $s \to z$

$$G(s)=\frac{1}{s}, \qquad s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

$$G(z)=\frac{1}{\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}=\frac{T}{2}\frac{z+1}{z-1}$$

$G(s)=\frac{1}{s}$

$\circ\!\!-\!\!\bullet$

$G(z)=\frac{z}{z-1}$

⇒可见
双线性, 不如
S-T & Z-T
精准

d. $(G_H G)_z(z) = r_1 \frac{z-z_{01}}{(z-z_1)(z-z_2)}$ 求 $(G_H G)(s)$，通过 PN-stelle 运用双线性

$$(G_H G)(s) = r_1 \frac{z-z_{01}}{(z-z_1)(z-z_2)}\Bigg|_{z=\frac{2+Ts}{2-Ts}} = r_1 \frac{\frac{2+Ts}{2-Ts}-z_{01}}{\left(\frac{2+Ts}{2-Ts}-z_1\right)\left(\frac{2+Ts}{2-Ts}-z_2\right)}$$

$\cdot \frac{(2-Ts)^2}{(2-Ts)^2}$

$$= r_1 \frac{[2+Ts-z_{01}(2-Ts)](2-Ts)}{[2+Ts-z_1(2-Ts)][2+Ts-z_2(2-Ts)]}$$

$$= r_1 \frac{[2+Ts-z_{01}\cdot 2+z_{01}Ts](2-Ts)}{[2+Ts-z_1\cdot 2+z_1 Ts][2+Ts-z_2\cdot 2+z_2 Ts]}$$

将 Ts 提出

$$= r_1 \frac{[Ts(1+z_{01})+2(1-z_{01})](2-Ts)}{[Ts(1+z_1)+2(1-z_1)][Ts(1+z_2)+2(1-z_2)]}$$

将 $(1-z)$ 提出

$$= r_1 \frac{(1-z_{01})}{(1-z_1)(1-z_2)} \cdot \frac{\left[Ts\frac{1+z_{01}}{1-z_{01}}+2\right](2-Ts)}{\left[Ts\frac{1+z_1}{1-z_1}+2\right]\left[Ts\frac{1+z_2}{1-z_2}+2\right]}$$

$\cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$

$$= r_1 \underbrace{\frac{1-z_{01}}{(1-z_1)(1-z_2)}}_{V} \cdot \frac{\left[\overbrace{\frac{T}{2}\frac{1+z_{01}}{1-z_{01}}}^{T_{01}}s+1\right]\left[-\overbrace{\frac{T}{2}}^{T_{02}}s+1\right]}{\left[\underbrace{\frac{T}{2}\frac{1+z_1}{1-z_1}}_{T_1}s+1\right]\left[\underbrace{\frac{T}{2}\frac{1+z_2}{1-z_2}}_{T_2}s+1\right]}$$

$$\Rightarrow (G_H G)(s) = V \frac{(T_{01}s+1)(T_{02}s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$$

$\Rightarrow$ 从 $z \to s$ 多出了一个 Nullstelle

$\Rightarrow$ 若 Pole 在 zulässiges Bereich 之内，反变换则越精确