Technische Universität Braunschweig

Decision Support
Institut für Wirtschaftsinformatik

Operations Research

Vorlesung 4
Lineare Programmierung: Sensitivitätsanalyse

Wiederholung

- Die drei Schritte im Operations Research
  - Problem, Modell, Lösung

- Typische Problemszenarien
  - z.B. Transportproblem, Energieflussproblem, Auswahlproblem

- Simplex-Algorithmus zum Lösen von Linearen Problemen

- Sonderfälle

Heutige Fragestellungen

- Was passiert, wenn man die Rahmenbedingungen vom Problem (leicht) ändert?
- Bleibt die allgemeine Struktur der Lösung gleich?
- Wie kann man Engpässe von Nebenbedingungen erkennen?
- Welche ökonomischen Auswirkungen gibt es?

Überblick

1. Ökonomische Interpretation

2. Sensitivitätsanalyse

Überblick

1. **Ökonomische Interpretation**

2. Sensitivitätsanalyse

Ökonomische Interpretationen

1. Kann die Lösungsqualität durch Hinzugabe einer Einheit einer Ressource verbessert werden?

2. Wie viel lohnt es sich für eine weitere Einheit einer Ressource zu bezahlen?

Standardproblem der linearen Optimierung

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Max} & z = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \\ \text{u.d.N.} & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ & x_1, \ldots, x_n \geq 0\end{array}\right\} \qquad \begin{array}{lrcl}\text{Max} & z & = & c^T x \\ \text{u.d.N.} & Ax & \leq & b \\ & x & \geq & 0\end{array}$$

Beispiel Produktionsprogrammplanung:

$$\begin{array}{lrcl}\text{Max} & z & = & 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \text{u.d.N.} & 3x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 1200 \quad (1) \\ & 5x_1 + 10x_2 + x_4 & = & 3000 \quad (2) \\ & 0.5x_2 + x_5 & = & 125 \quad (3)\end{array}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

Beispiel Produktionsprogrammplanung

Starttableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
$-z$	3	4	0	0	0	0
x_3	3	2	1	0	0	1200
x_4	5	10	0	1	0	3000
x_5	0	0.5	0	0	1	125

Endtableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
$-z$	0	0	-1/2	-3/10	0	-1500
x_5	0	0	1/8	-3/40	1	50
x_1	1	0	1/2	-1/10	0	300
x_2	0	1	-1/4	3/20	0	150

Ökonomische Interpretation der Schlupfvariablen

$x_5^* = 50$

$\Rightarrow$ zugehörig zu Nebenbedingung (3)

$0.5x_2 + x_5 = 125$

$0.5 \cdot 150 + 50 = 125$ ✓

d.h. NB (3) ist mit Schlupf 50 erfüllt.

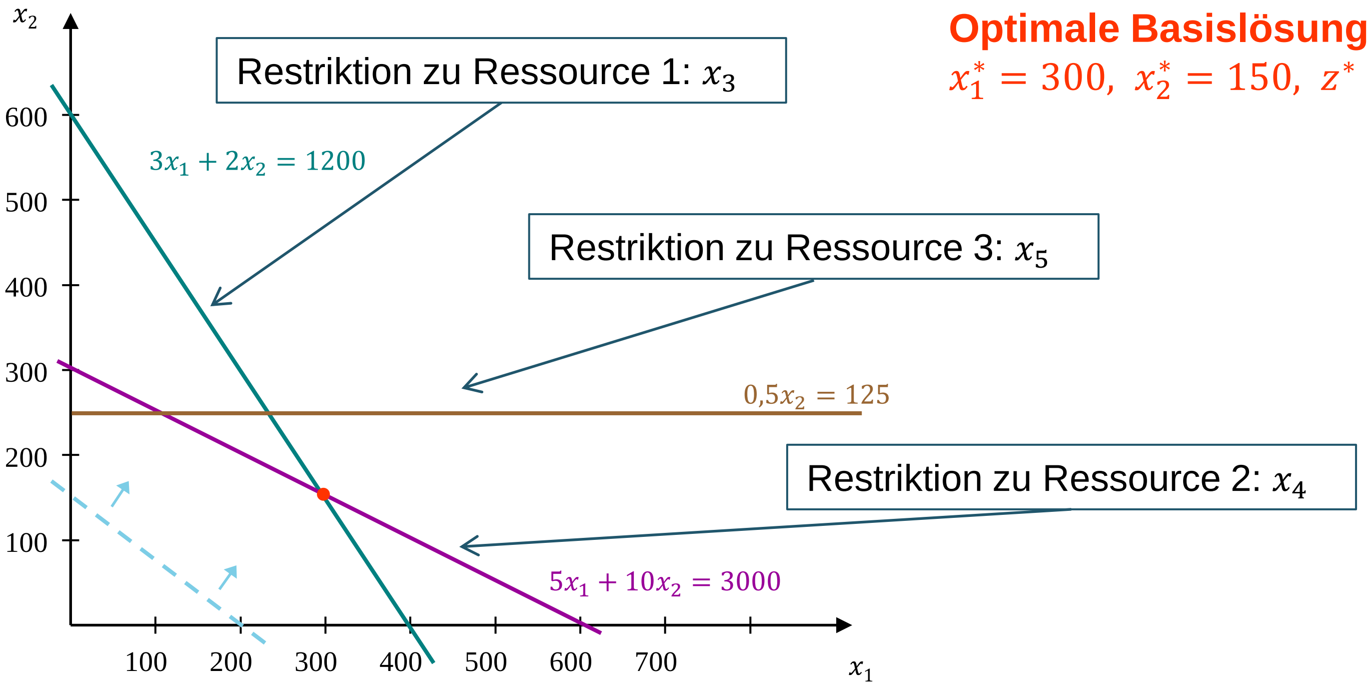
$\Rightarrow$ **kein Engpass**

$x_3^* = x_4^* = 0$

$\Rightarrow$ Nebenbedingungen (1) und (2) sind ohne Schlupf erfüllt.
Ihr Schnittpunkt definiert die zugehörige (optimale) Ecke.

$\Rightarrow$ **Engpass**

Beispiel Produktionsprogrammplanung



Optimale Basislösung:

$x_1^* = 300,\ x_2^* = 150,\ z^* = 1500$

Beispiel Produktionsprogrammplanung

Endtableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
$-z$	0	0	-1/2	-3/10	0	-1500
x_5	0	0	1/8	-3/40	1	50
x_1	1	0	1/2	-1/10	0	300
x_2	0	1	-1/4	3/20	0	150

Ökonomische Interpretationen

Welche ZF-Verbesserung ließe sich durch Beseitigung der beiden Engpässe erzielen?

Zielfunktionszeile im Endtableau:

$$\left.\begin{array}{l} p_3 = 1/2 \\ p_4 = 3/10 \\ p_5 = 0 \end{array}\right\} \text{„Schattenpreise“ oder „Opportunitätskosten“}$$

Um diesen Betrag würde der Zielfunktionswert steigen, wenn von dem entsprechenden Engpass eine Mengeneinheit mehr verfügbar wäre.

Insbesondere gilt für Nichtengpassfaktoren eine maximale Zahlungsbereitschaft von 0 für eine zusätzliche Mengeneinheit (da bereits gewisse Mengen ungenutzt sind)

Opportunitätskosten / Schattenpreise

max $3x_1 + 4x_2$

u.d.N.
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1200 \quad \text{(I)}$$
$$5x_1 + 10x_2 + x_4 = 3000 \quad \text{(II)}$$
$$0{,}5x_2 + x_5 = 125 \quad \text{(III)}$$
$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

Lösung:

$x_1^* = 300,\ x_2^* = 150,\ x_3^* = 0,\ x_4^* = 0,\ x_5^* = 50$

$c_1^* = c_2^* = 0,\ |c_3^*| = 0.5, |c_4^*| = 0.3,\ |c_5^*| = 0$

$z^* = 1500$

Änderung	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	ZF
(I) $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1201$	300,5	149,75	0	0	50,125	1500,5
(I) $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1199$	299,5	150,25	0	0	49,875	1499,5
(II) $5x_1 + 10x_2 + x_4 = 3001$	299,9	150,15	0	0	49,925	1500,3
(II) $5x_1 + 10x_2 + x_4 = 2999$	300,1	149,85	0	0	50,075	1499,7
(III) $0{,}5x_2 + x_5 = 126$	300	150	0	0	51	1500
(III) $0{,}5x_2 + x_5 = 124$	300	150	0	0	49	1500

Struktur-, Schlupf-, Basis- und Nichtbasisvariablen

Schlupfvariable ist Nichtbasisvariable: Die zugehörige Nebenbedingung stellt einen Engpass dar (die Restriktion bindet). Der Zielfunktionskoeffizient gibt als Schattenpreis den Zielfunktionsbeitrag einer zusätzlichen Einheit der rechten Seite an.

Schlupfvariable ist Basisvariable:
Die zugehörige Nebenbedingung bindet nicht, der Betrag der nicht genutzten rechten Seite ist Wert der Variablen.

Strukturvariable ist Basisvariable:
Der Wert der Variablen kann in der rechten Seite abgelesen werden.

Strukturvariable ist Nichtbasisvariable:
Die Variable trägt den Wert 0.
(Nicht im Beispiel vorhanden)

	x_4	x_3	RS
$-z$	-3/10	-1/2	-1500
x_5	-3/40	1/8	50
x_1	-1/10	1/2	300
x_2	3/20	-1/4	150

Ökonomische Interpretation

- Ressource 3 steht ausreichend zur Verfügung
  $\Rightarrow$ Schattenpreis = 0

- Ressourcen 1 und 2 sind knapp
  $\Rightarrow$ Schattenpreise = maximale Zielfunktionserhöhung

- Jedoch: Marginale Betrachtung
  $\Rightarrow$ **Sensitivitätsanalyse**

Überblick

1. Ökonomische Interpretation

2. **Sensitivitätsanalyse**

Berücksichtigung unsicherer Erwartungen

Bislang *deterministische* Erwartungen bezüglich

- Preise, Kosten → Deckungsbeiträge
- Absatzmengen
- Ressourcenverfügbarkeit

Möglichkeiten zur Berücksichtigung von Unsicherheiten:

- **Szenarioanalyse**
  Untersuchung möglicher Entscheidungen / Entwicklungen unter alternativen Rahmenbedingungen

- **Parametrische Optimierung**
  Untersuchung von Veränderungen der Eingangsdaten proportional zu einem reell-wertigen Parameter, wobei sich die optimale Lösung ändern kann

- **Sensitivitätsanalyse**
  Untersuchung, in welchen Bereichen sich die optimale Lösung nicht ändert

Sensitivitätsanalyse

Testen der optimalen Lösung eines linearen Optimierungsproblems auf Reaktionen gegenüber (kleinen) Veränderungen der Ausgangsdaten

Zwei Fragestellungen:

1. Verhalten der Optimallösung auf Variation eines Koeffizienten des Restriktionenvektors (Vektor b)

2. Verhalten der Optimallösung auf Variation eines Koeffizienten der Zielfunktion (Vektor c)

Sensitivitätsanalyse – Restriktionen

1. Fragestellung:

In welchem Bereich $[b_k - \underline{\lambda}_k, b_k + \overline{\lambda}_k]$ kann eine Beschränkung b_k $(1 \leq k \leq m)$ bei Konstanz aller übrigen Parameter variiert werden, ohne dass die aktuelle optimale Basislösung die Optimalitätseigenschaften verliert, d.h. ohne dass ein Basistausch erforderlich wird?

Antwort:

Die Variation der rechten Seite beeinflusst die Schlupfvariable der *k*-ten Nebenbedingung, x_{n+k}. Ist sie Basisvariable (*1. Fall*), so könnte sie durch Variation von b_k diese Eigenschaft verlieren, ist sie Nichtbasisvariable (*2. Fall*), so könnte sie dadurch Basisvariable werden.

Verminderung / Erhöhung einer Restriktion

- **Zu veränderte Variable x_{n+k}^* ist Basisvariable**
  - Basisvariable ist durch einen Einheitsvektor gekennzeichnet.
  - Der dazugehörige Wert b_{n+k}^* auf der RS hat einen nicht-negativen Wert.
  - Vermindern wir diesen Wert, darf dieser nicht negativ werden, um die Zulässigkeit der Lösung zu behalten.
  - Erhöhen wir diesen Wert, bleibt die Zulässigkeit erhalten.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
$-z$	0	0	-1/2	-3/10	0	-1500
x_5	0	0	1/8	-3/40	1	50
x_1	1	0	1/2	-1/10	0	300
x_2	0	1	-1/4	3/20	0	150

- **Zu verändernde Variable x_{n+k}^* ist Nichtbasisvariable**
  - Nichtbasisvariable stellt einen Engpass dar und hat den Wert 0.
  - Veränderung des ursprünglichen Wertes b_{n+k} hat somit direkten Einfluss auf die Werte der Basisvariablen.
  - Die Werte in der Spalte der Nichtbasisvariable geben den Einfluss auf die Basisvariablen bei einer Veränderung pro 1 Mengeneinheit an.
  - Über den Quotienten aus b_i^* und $a_{i(n+k)}^*$ bestimmen wir die maximale Verminderung / Erhöhung von b_{n+k}, damit weiterhin $x_i^* \geq 0$ gilt.

1. Fall: $\boldsymbol{x_{n+k}^*}$ ist Basisvariable

Es gilt:

$\underline{\lambda}_k = x_{n+k}^*$ und $\overline{\lambda}_k = \infty$

Begründung:

Das Senken von b_{n+k} um $\underline{\lambda}_k$ ist Gleichzusetzen mit der Forderung x_{n+k}^* um diesen Wert zu senken. Dies ist ohne Basistausch nur bis zu dem Wert $x_{n+k}^* = 0$ möglich.

Das Erhöhen von b_{n+k} um $\overline{\lambda}_k$ ist Gleichzusetzen mit der Forderung x_{n+k}^* um diesen Wert zu erhöhen. Dies führt niemals zu einem Basistausch.

1. Fall: x^*_{n+k} ist BV – Ökonomische Interpretation

→ *k* ist keine bindende Restriktion (keine Engpassrestriktion)

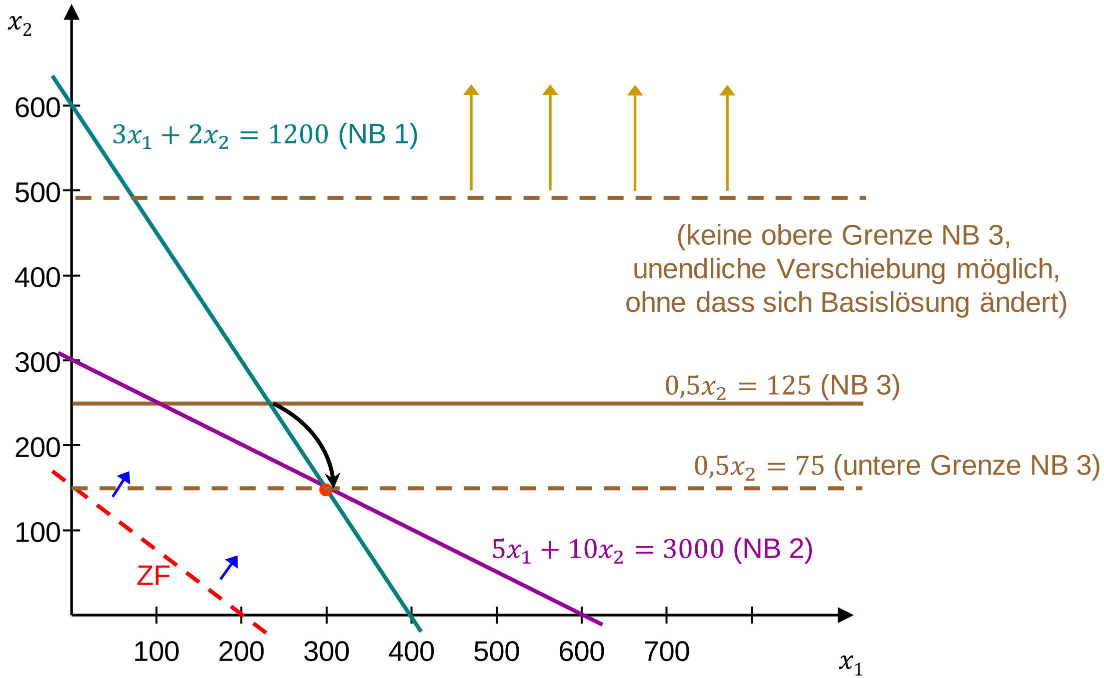
Wir die Kapazität von *k* erhöht, so passiert nichts: *k* ist auch weiterhin kein Engpass.

Restriktion *k* wird zum Engpass, sobald b_k um mehr als $\underline{\lambda}_k$ gesenkt wird. Dann tritt (mindestens eine) der folgenden Situationen ein:

- eine der bisherigen Engpassrestriktionen ist nicht mehr bindend
- ein bisher produziertes Produkt wird nicht mehr hergestellt

1. Fall: x^*_{n+k} ist BV – Graphische Veranschaulichung

Beispiel für den **1. Fall: x^*_5 ist Basisvariable**



Merke:

Wenn eine Schlupfvariable x^*_{n+k} in der optimalen Lösung Basisvariable ist, so bedeutet es, dass die Restriktion *k* nicht bindend ist. Das heißt, dass sie keinen Engpass darstellt.

2. Fall: x^*_{n+k} ist Nichtbasisvariable

a^*_{ij} und b^*_i sind die aktuellen Koeffizienten im Optimaltableau.

Es gilt:

$$\underline{\lambda}_k = \begin{cases} \infty & \text{falls alle } a^*_{i(n+k)} \leq 0 \\ \min\{\frac{b^*_i}{a^*_{i(n+k)}} \mid i = 1,\ldots,m \quad \text{mit} \quad a^*_{i(n+k)} > 0\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Begründung:

Soll b_{n+k} um Δ gesenkt werden, verändern sich die Werte der bisherigen Basisvariablen, um den Wert $\left|a^*_{i(n+k)} \cdot \Delta\right|$, bei positivem $a^*_{i(n+k)}$ wird der Wert kleiner, bei negativem $a^*_{i(n+k)}$ größer. Damit die aktuelle Basislösung zulässig und somit optimal bleibt, müssen alles Basisvariablen größer oder gleich 0 bleiben. Somit muss $b^*_i - \left|a^*_{i(n+k)} \cdot \Delta\right| \geq 0$ für alle i mit $a^*_{i(n+k)} > 0$ gelten und folglich $b^*_i / a^*_{i(n+k)} \geq \Delta$. Die Basisvariable mit minimalem $b^*_i / a^*_{i(n+k)}$ bestimmt also den Wert von $\underline{\lambda}_k$.

Sind alle $a^*_{i(n+k)} \leq 0$, so bleibt die Lösung bei beliebiger Reduktion von b_k zulässig.

2. Fall: x^*_{n+k} ist Nichtbasisvariable (Fortsetzung)

a^*_{ij} und b^*_i sind die aktuellen Koeffizienten im Optimaltableau.

Es gilt:

$$\bar{\lambda}_k = \begin{cases} \infty & \text{falls alle } a^*_{i(n+k)} \geq 0 \\ \min\{-\frac{b^*_i}{a^*_{i(n+k)}} \mid i = 1,\dots,m \quad \text{mit} \quad a^*_{i(n+k)} < 0\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Begründung:
Soll b_{n+k} um Δ erhöht werden, verändern sich die Werte der bisherigen Basisvariablen, um den Wert $|a^*_{i(n+k)} \cdot \Delta|$, bei positivem $a^*_{i(n+k)}$ wird der Wert größer, bei negativem $a^*_{i(n+k)}$ kleiner. Damit die aktuelle Basislösung zulässig und somit optimal bleibt, müssen alles Basisvariablen größer oder gleich 0 bleiben. Somit muss $b^*_i + |a^*_{i(n+k)} \cdot \Delta| \geq 0$ für alle i mit $a^*_{i(n+k)} < 0$ gelten und folglich $-b^*_i / a^*_{i(n+k)} \geq \Delta$. Die Basisvariable mit minimalem $-b^*_i / a^*_{i(n+k)}$ bestimmt also den Wert von $\bar{\lambda}_k$.

Sind alle $a^*_{i(n+k)} \geq 0$, so bleibt die Lösung bei beliebiger Erhöhung von b_k zulässig.

2. Fall: $\boldsymbol{x^*_{n+k}}$ ist NBV – Ökonomische Interpretation

→ *k* ist eine bindende Restriktion (Engpassrestriktion)

$\overline{\lambda}_k$ ist der Wert, um den die Kapazität maximal erhöht werden kann, damit *k* Engpassrestriktion und die Kombination von überhaupt hergestellten Produkten gleich bleibt. Steigt die Kapazität weiter, so tritt (mindestens eine) der folgenden Situationen ein:

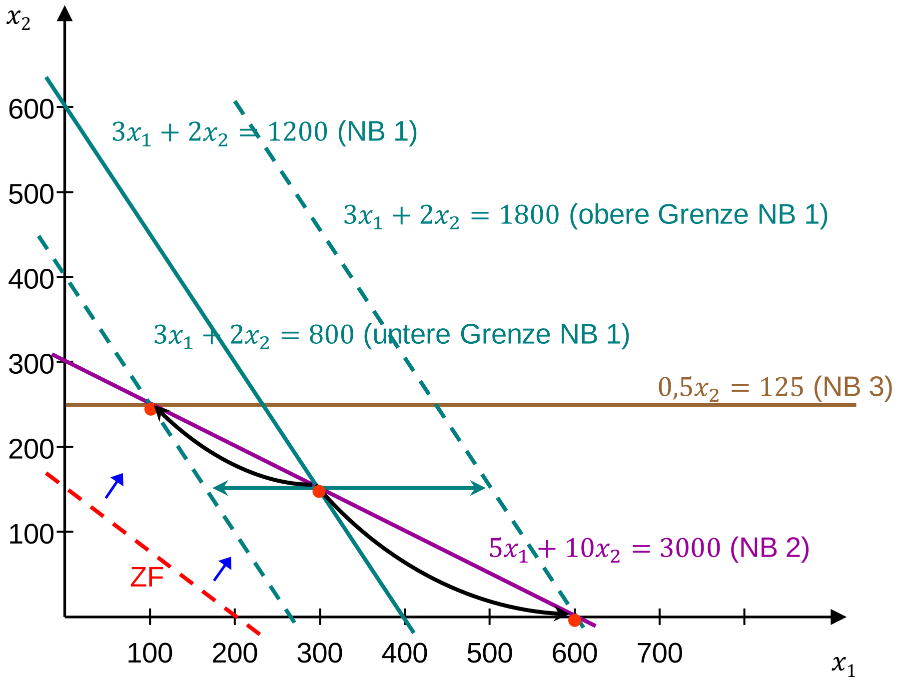
- *k* ist keine Engpassrestriktion mehr
- die Kombination von überhaupt produzierten Produkten ändert sich

$\underline{\lambda}_k$ ist der Wert, um den Kapazität maximal gesenkt werden kann, damit die bisher bindenden Restriktionen und die Kombination von überhaupt hergestellten Produkten gleich bleiben. Sinkt die Kapazität weiter, bleibt zwar *k* eine Engpassrestriktion, aber (mindestens eine) der folgenden Situationen tritt ein:

- eine bisher bindende Restriktion (außer *k*) wird von einer anderen abgelöst
- die Kombination von überhaupt hergestellten Produkten ändert sich

2. Fall: x^*_{n+k} ist NBV – Graphische Veranschaulichung

Beispiel für den **2. Fall: x^*_3 ist Nichtbasisvariable**



Merke:

Wenn eine Schlupfvariable x^*_{n+k} in der optimalen Lösung Nichtbasisvariable ist, so bedeutet es, dass die Restriktion *k* bindend ist. Das heißt, dass sie einen Engpass darstellt.

Restriktionen – Zusammenfassung

a_{ij}^* und b_i^* sind die aktuellen Koeffizienten im Optimaltableau.

1. Fall: $\boldsymbol{x_{n+k}^*}$ ist Basisvariable

$\underline{\lambda}_k = x_{n+k}^*$ und $\overline{\lambda}_k = \infty$

2. Fall: $\boldsymbol{x_{n+k}^*}$ ist Nichtbasisvariable

$$\underline{\lambda}_k = \begin{cases} \infty & \text{falls alle } a_{i(n+k)}^* \leq 0 \\ \min\{\frac{b_i^*}{a_{i(n+k)}^*} \mid i = 1, \ldots, m \quad \text{mit} \quad a_{i(n+k)}^* > 0\} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\overline{\lambda}_k = \begin{cases} \infty & \text{falls alle } a_{i(n+k)}^* \geq 0 \\ \min\{-\frac{b_i^*}{a_{i(n+k)}^*} \mid i = 1, \ldots, m \quad \text{mit} \quad a_{i(n+k)}^* < 0\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Restriktionen – Beispiel Produktionsprogrammplanung

Endtableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
$-z$	0	0	-1/2	-3/10	0	-1500
x_5	0	0	1/8	-3/40	1	50
x_1	1	0	1/2	-1/10	0	300
x_2	0	1	-1/4	3/20	0	150

Sensitivität bzgl. Restriktion 1: x_3^* ist Nichtbasisvariable

$$\underline{\lambda}_1 = \min \left\{\frac{50}{1/8}; \frac{300}{1/2}\right\} = \min \{400; 600\} = 400; \quad \bar{\lambda}_1 = 150 \cdot 4 = 600$$

Sensitivität bzgl. Restriktion 2: x_4^* ist Nichtbasisvariable

$$\underline{\lambda}_2 = 150 \cdot \frac{20}{3} = 1000; \quad \bar{\lambda}_2 = \min \left\{\frac{50}{\frac{3}{40}}; \frac{300}{\frac{1}{10}}\right\} = \min \{666{,}67; 3000\} = 666{,}67$$

Sensitivität bzgl. Restriktion 3: x_5^* ist Basisvariable

$$\underline{\lambda}_3 = 50; \quad \bar{\lambda}_3 = \infty$$

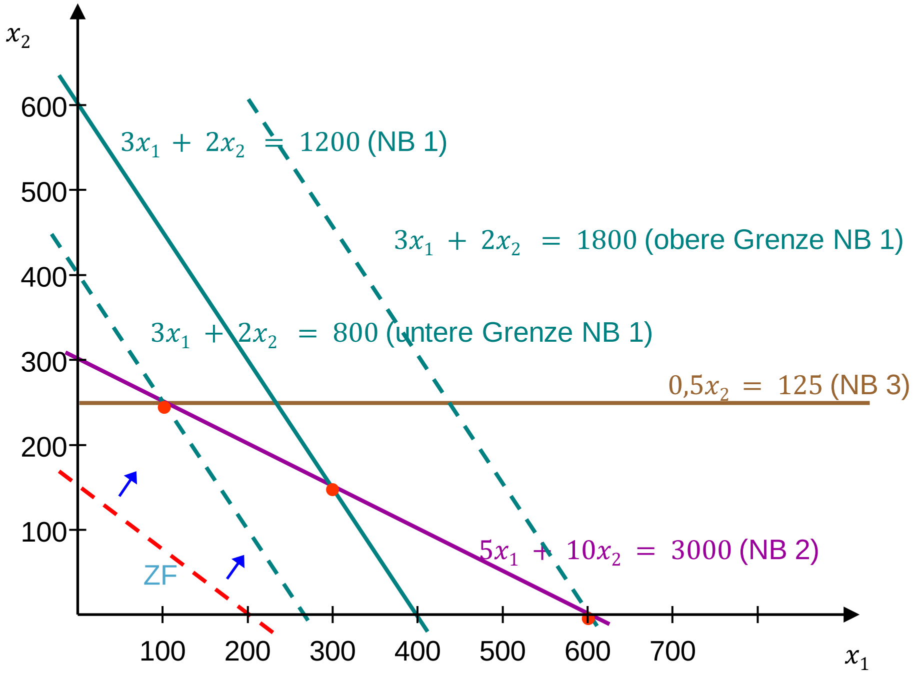
Restriktionen – Beispiel Produktionsprogrammplanung

Ergebnis der Sensitivitätsanalyse bzgl. der Restriktionen

	Untere Grenze	Ausgangswert	Obere Grenze
b_1	800	1200	1800
x_1^*	100	300	600
x_2^*	250	150	0
z^*	1300	1500	1800
b_2	2000	3000	3666.67
x_1^*	400	300	233.33
x_2^*	0	150	250
z^*	1200	1500	1700
b_3	75	125	∞
x_1^*	300	300	300
x_2^*	150	150	150
z^*	1500	1500	1500

Restriktionen – Beispiel Produktionsprogrammplanung

Ergebnis der Sensitivitätsanalyse bzgl. der Restriktion 1



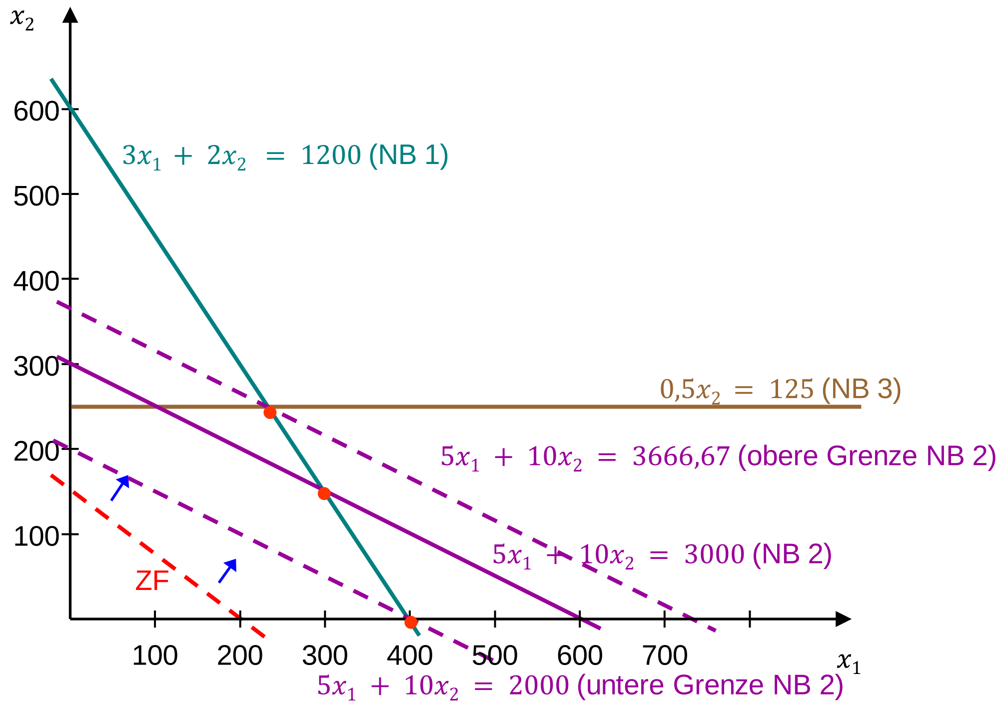
Restriktionen – Beispiel Produktionsprogrammplanung

Ergebnis der Sensitivitätsanalyse bzgl. der Restriktionen

	Untere Grenze	Ausgangswert	Obere Grenze
b_1	800	1200	1800
x_1^*	100	300	600
x_2^*	250	150	0
z^*	1300	1500	1800
b_2	2000	3000	3666.67
x_1^*	400	300	233.33
x_2^*	0	150	250
z^*	1200	1500	1700
b_3	75	125	∞
x_1^*	300	300	300
x_2^*	150	150	150
z^*	1500	1500	1500

Restriktionen – Beispiel Produktionsprogrammplanung

Ergebnis der Sensitivitätsanalyse bzgl. der Restriktion 2



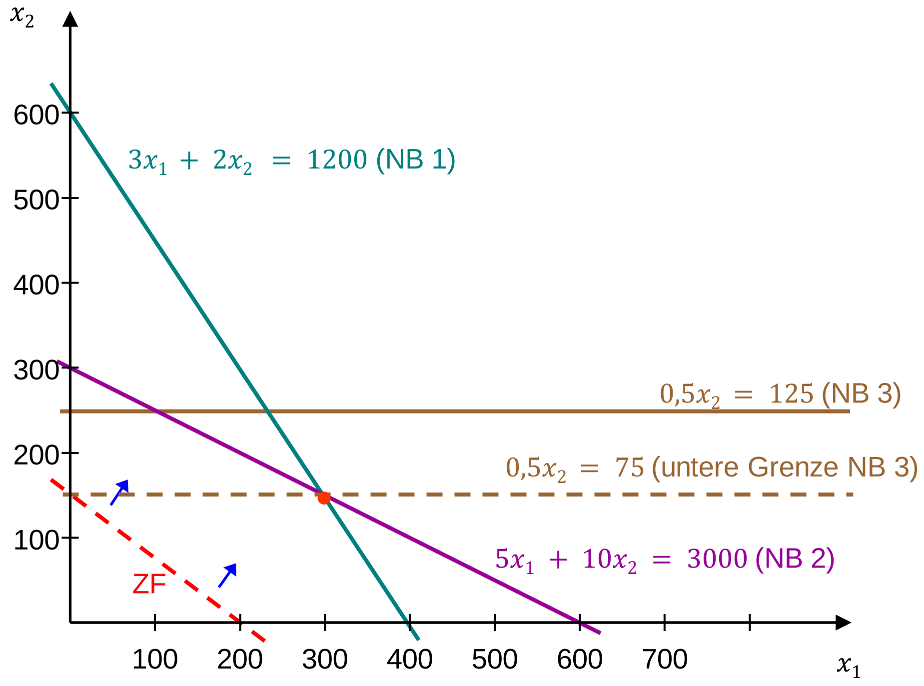
Restriktionen – Beispiel Produktionsprogrammplanung

Ergebnis der Sensitivitätsanalyse bzgl. der Restriktionen

	Untere Grenze	Ausgangswert	Obere Grenze
b_1	800	1200	1800
x_1^*	100	300	600
x_2^*	250	150	0
z^*	1300	1500	1800
b_2	2000	3000	3666.67
x_1^*	400	300	233.33
x_2^*	0	150	250
z^*	1200	1500	1700
b_3	75	125	∞
x_1^*	300	300	300
x_2^*	150	150	150
z^*	1500	1500	1500

Restriktionen – Beispiel Produktionsprogrammplanung

Ergebnis der Sensitivitätsanalyse bzgl. der Restriktion 3



Sensitivitätsanalyse – Zielfunktionskoeffizienten

2. Fragestellung:

In welchem Bereich $[c_h - \underline{\mu}_h, c_h + \overline{\mu}_h]$ kann ein Zielfunktionskoeffizient einer Strukturvariablen c_h $(1 \leq h \leq n)$ bei Konstanz aller übrigen Parameter variiert werden, ohne dass die aktuelle optimale Basislösung die Optimalitätseigenschaften verliert?

Antwort:

Die Variation eines Zielfunktionskoeffizienten c_h hat analog zu den Aussagen bei Fall 1 Auswirkung auf die Eigenschaft der Variablen x_h. Auch hier lassen sich die beiden oben genannten Fälle unterscheiden.

Verminderung / Erhöhung eines Zielfunktionskoffizienten

- **Zu veränderte Variable x_h^* ist Basisvariable**
  - Basisvariable ist durch einen Einheitsvektor gekennzeichnet.
  - Sie hat im Tableau einen Zielfunktionskoeffizenten $c_h = 0$.
  - Vermindern / erhöhen wir c_h um $\underline{\mu}_h$ bzw. $\overline{\mu}_h$ Einheiten, so erhalten wir einen Wert $c_h^* \neq 0$.
  - Es muss die 0 im Zielfunktionskoeffizienten c_h^* wieder hergestellt werden.
  - Wir addieren / subtrahieren dazu das Vielfache der Zeile, die eine 1 in der Spalte h aufweist.
  - Kein c_j^* einer Nichtbasisvariablen j darf einen positiven Wert annehmen, sonst Basistausch!
  - Über den Quotienten aus c_j^* und a_{ij}^* bestimmen wir die maximale Verminderung / Erhöhung von c_h.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
$-z$	0	0	-1/2	-3/10	0	-1500
x_5	0	0	1/8	-3/40	1	50
x_1	1	0	1/2	-1/10	0	300
x_2	0	1	-1/4	3/20	0	150

- **Zu verändernde Variable x_h^* ist Nichtbasisvariable**
  - Das dazu gehörige c_h^* hat einen nicht-positiven Wert.
  - Vermindern wir diesen, bleibt sie Nichtbasisvariable.
  - Erhöhen wir den Wert, darf c_h^* nicht positiv werden um einen Basistausch zu vermeiden.

1. Fall: x_h^* ist Basisvariable

a_{ij}^* und c_j^* sind die aktuellen Koeffizienten im Optimaltableau, $a_{\sigma(h)}^T$ bezeichnet den Zeilenvektor, in der die Basisvariable x_h^* steht.

Es gilt:

$$\underline{\mu}_h = \begin{cases} \infty & \text{falls alle } a_{\sigma(h),j}^* \leq 0 \text{ mit } j \neq h \\ \min \ \{-\frac{c_j^*}{a_{\sigma(h),j}^*} \mid \text{alle Spalten } j \neq h \text{ mit } a_{\sigma(h),j}^* > 0\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Begründung:

Soll der Zielfunktionskoeffizient einer Basisvariablen x_h^* um Δ gesenkt werden, so entspricht dies einer Eintragung von $-\Delta$ für x_h^* in der ZF-Zeile des Optimaltableaus. Wenn x_h^* Basisvariable bleiben und ein neues Optimaltableau erzeugt werden soll, so muss durch Addition des Δ-fachen der Zeile $\sigma(h)$ zu der ZF-Zeile wieder der Eintrag 0 hergestellt werden. Dabei dürfen die ZF-Koeffizienten der Nichtbasisvariablen nicht positiv werden, d.h. es muss $c_j^* + a_{\sigma(h),j}^* \cdot \Delta \leq 0$ für alle $j = 1, \dots, n$ gelten. Für negative $a_{\sigma(h),j}^*$ ist diese Ungleichung stets erfüllt. Daher bleibt zu fordern: $\Delta \leq -c_j^* / a_{\sigma(h),j}^*$ für alle $j = 1, \dots, n$ mit $a_{\sigma(h),j}^* > 0$.

1. Fall: x_h^* ist Basisvariable (Fortsetzung)

a_{ij}^* und c_j^* sind die aktuellen Koeffizienten im Optimaltableau, $a_{\sigma(h)}^T$ bezeichnet den Zeilenvektor, in der die Basisvariable x_h^* steht.

Es gilt:

$$\overline{\mu}_h = \begin{cases} \infty & \text{falls alle } a_{\sigma(h),j}^* \geq 0 \text{ mit } j \neq h \\ \min \ \left\{ \frac{c_j^*}{a_{\sigma(h),j}^*} \mid \text{alle Spalten } j \neq h \text{ mit } a_{\sigma(h),j}^* < 0 \right\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Begründung:

Soll der Zielfunktionskoeffizient einer Basisvariablen x_h^* um Δ erhöht werden, so entspricht dies einer Eintragung von Δ für x_h^* in der ZF-Zeile des Optimaltableaus. Wenn x_h^* Basisvariable bleiben und ein neues Optimaltableau erzeugt werden soll, so muss durch Subtraktion des Δ-fachen der Zeile $\sigma(h)$ zu der ZF-Zeile wieder der Eintrag 0 hergestellt werden. Dabei dürfen die ZF-Koeffizienten der Nichtbasisvariablen nicht positiv werden, d.h. es muss $c_j^* - a_{\sigma(h),j}^* \cdot \Delta \leq 0$ für alle $j = 1, \dots, n$ gelten. Für positive $a_{\sigma(h),j}^*$ ist diese Ungleichung stets erfüllt. Daher bleibt zu fordern: $\Delta \leq c_j^* / a_{\sigma(h),j}^*$ für alle $j = 1, \dots, n$ mit $a_{\sigma(h),j}^* > 0$

1. Fall: x_h^* ist BV – Ökonomische Interpretation

→ Produkt *h* wird in der Optimallösung produziert

Steigt der Zielfunktionskoeffizient um mehr als $\overline{\mu}_h$, so kommt es zu einem Basiswechsel. Dabei kann man zwei Situationen unterscheiden (können auch gleichzeitig auftreten):

- es wird so viel von Produkt h produziert, dass ein anderes Produkt komplett verdrängt wird und eine bisher bindende Restriktion keinen Engpass mehr bildet
- durch die Mehrproduktion von Produkt h (und die geringer Produktion eines anderen Produktes) ändert sich die Kombination der bindenden Restriktionen, d.h. der Engpassressourcen

Sinkt der Zielfunktionskoeffizient um mehr als $\underline{\mu}_h$, so kommt es zu einem Basiswechsel. Dabei kann man zwei Situationen unterscheiden:

- h wird gar nicht mehr produziert und eine bisher bindende Restriktion bildet keinen Engpass mehr
- es wird weniger von Produkt h produziert, dadurch (und durch die Mehrproduktion eines anderen Produktes) ändert sich die Kombination der bindenden Restriktionen

2. Fall: x_h^* ist Nichtbasisvariable

c_j^* sind die zugehörigen aktuellen ZF-Koeffizienten im Endtableau.

Es gilt:

$\underline{\mu}_h = \infty$ und $\overline{\mu}_h = -c_j^*$

Begründung:

$\underline{\mu}_h$ über alle Grenzen wachsen zu lassen bedeutet, die Variable x_h^* in dem hier betrachteten Maximierungsproblem mit einer betragsmäßig beliebig großen, negativen Zahl zu bewerten. Damit bleibt die Variable natürlich stets Nichtbasisvariable.

Eine Vergrößerung von $\overline{\mu}_h$ über $-c_j^*$ hinaus würde zur „Nichtoptimalität“ des Endtableaus (ZF-Koeffizient größer 0) an dieser Stelle führen und damit zu einem unerwünschten Basiswechsel.

2. Fall: x_h^* ist NBV – Ökonomische Interpretation

→ Produkt *h* wird nicht in der Optimallösung produziert

Sinkt der Deckungsbeitrag eines Produktes, welches ohnehin nicht produziert wird, so wird es auch weiterhin nicht produziert.

Eine Steigerung des Deckungsbeitrags um mehr als $\overline{\mu}_h$ hat zur Folge, dass das Produkt h, welches bisher nicht produziert wurde, anschließend produziert wird. Weiterhin tritt mindestens eine der folgenden Situationen ein:

- ein bisher produziertes Produkt wird nicht mehr produziert
- zu den bisherigen Engpassressourcen kommt eine weitere hinzu

Zusammenfassung – Zielfunktionskoeffizienten

a_{ij}^* und c_j^* sind die aktuellen Koeffizienten im Optimaltableau, $a_{\sigma(h)}^T$ bezeichnet den Zeilenvektor, in der die Basisvariable x_h^* steht.

1. Fall: x_h^* ist Basisvariable

$$\underline{\mu}_h = \begin{cases} \infty & \text{falls alle } a_{\sigma(h),j}^* \leq 0 \text{ mit } j \neq h \\ \min \; \{-\frac{c_j^*}{a_{\sigma(h),j}^*} \mid \text{alle Spalten } j \neq h \text{ mit } a_{\sigma(h),j}^* > 0\} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\overline{\mu}_h = \begin{cases} \infty & \text{falls alle } a_{\sigma(h),j}^* \geq 0 \text{ mit } j \neq h \\ \min \; \{\frac{c_j^*}{a_{\sigma(h),j}^*} \mid \text{alle Spalten } j \neq h \text{ mit } a_{\sigma(h),j}^* < 0\} & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Fall: x_h^* ist Nichtbasisvariable

$\underline{\mu}_h = \infty$ und $\overline{\mu}_h = -c_j^*$

Beispiel Produktionsprogrammplanung

Endtableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
$-z$	0	0	-1/2	-3/10	0	-1500
x_5	0	0	1/8	-3/40	1	50
x_1	1	0	1/2	-1/10	0	300
x_2	0	1	-1/4	3/20	0	150

Sensitivität bzgl. Zielfunktionskoeffizient 1: x_1^* ist Basisvariable

$$\underline{\mu}_1 = -\frac{-1/2}{1/2} = 1\,; \quad \overline{\mu}_1 = \frac{-3/10}{-1/10} = 3$$

Sensitivität bzgl. Zielfunktionskoeffizient 2: x_2^* ist Basisvariable

$$\underline{\mu}_2 = -\frac{-3/10}{3/20} = 2\,; \quad \overline{\mu}_2 = \frac{-1/2}{-1/4} = 2$$

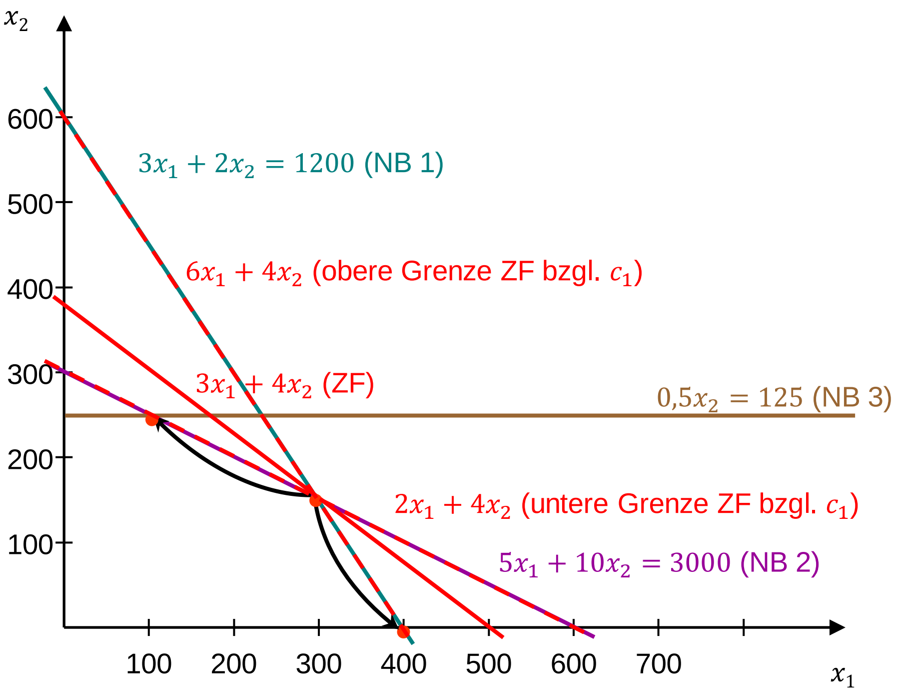
Beispiel Produktionsprogrammplanung

Ergebnis der Sensitivitätsanalyse bzgl. der Zielfunktionskoeffizienten

	Untere Grenze	Ausgangswert	Obere Grenze
c_1	2	3	6
x_1^*	300	300	300
x_2^*	150	150	150
z^*	1200	1500	2400
c_2	2	4	6
x_1^*	300	300	300
x_2^*	150	150	150
z^*	1200	1500	1800

Beispiel Produktionsprogrammplanung

Ergebnis der Sensitivitätsanalyse bzgl. Zielfunktionskoeffizient 1



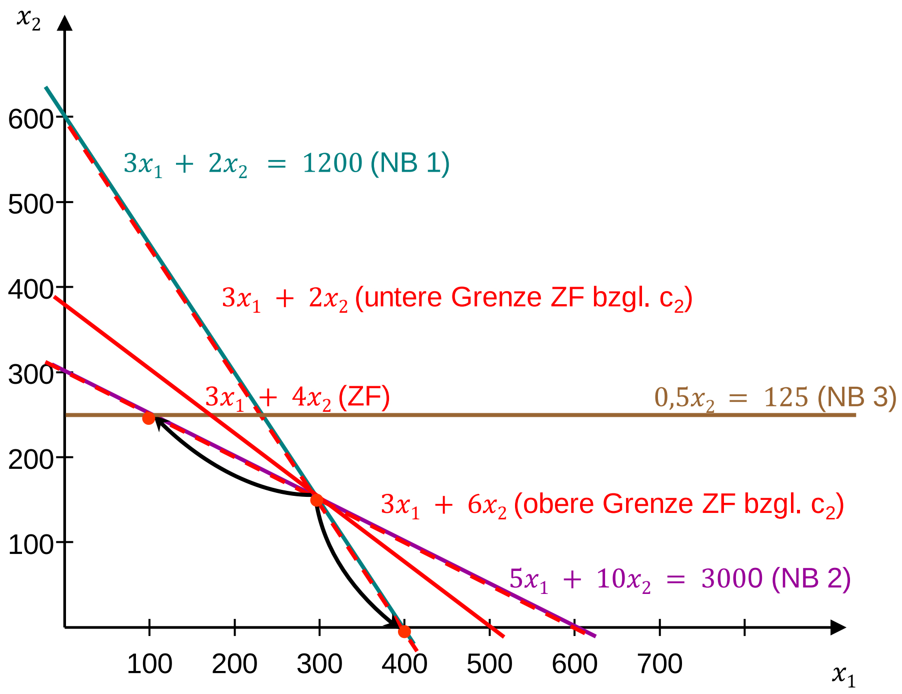
Beispiel Produktionsprogrammplanung

Ergebnis der Sensitivitätsanalyse bzgl. der Zielfunktionskoeffizienten

	Untere Grenze	Ausgangswert	Obere Grenze
c_1	2	3	6
x_1^*	300	300	300
x_2^*	150	150	150
z^*	1200	1500	2400
c_2	2	4	6
x_1^*	300	300	300
x_2^*	150	150	150
z^*	1200	1500	1800

Beispiel Produktionsprogrammplanung

Ergebnis der Sensitivitätsanalyse bzgl. Zielfunktionskoeffizient 2



Zusammenfassung

- Ökonomische Interpretation der Lösung
  - Engpässe
  - Schattenpreise

- Sensitivitätsanalyse
  - Marginale Betrachtung von Änderungen
  - Veränderung einer Variable mit gleichzeitigem Gleichhalten aller anderen Variablen
  - Variation des Restriktionsvektors möglich
  - Variation des Zielfunktionsvektors möglich
  - Abhängig davon, ob Variable BV oder NBV ist