INSTITUT COMPUTATIONAL MATHEMATICS
Prof. Dr. Thomas Sonar
Dr. Martina Wirz

Technische Universität Braunschweig

Klausur zur Vorlesung
Mathematik I für Studierende der E-Technik

WS 12/13 25.02.2013

Aufgabe 1 (4 + 3 + 3 Punkte)

(a) Überprüfen Sie die Folgen (a_n) und (b_n) auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

$$a_n = \frac{7n^2+3}{2+5n+11n^2}, \quad b_n = \sqrt{n-\sqrt{n}} - \sqrt{n+\sqrt{n}}.$$

(b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{\sqrt[n]{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{n-3}{7n}\right)^n.$$

(c) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!x^k}{(2k)!}$.

Aufgabe 2 (5 + 2 + 3 Punkte)

(a) Berechnen Sie mithilfe der Regel von L'Hospital folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x\to 0} (2x+1)^{\frac{1}{x}}.$$

(b) Bestimmen Sie ein $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\mathrm{e}^x}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0, \end{cases}$$

auch im Punkt $x_0 = 0$ stetig ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = |x+1|$ im Punkt $x_0 = -1$ nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 3 (3 + 7 Punkte)

(a) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k+3}{4^k}$.

(b) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von

$$f(x) = \frac{1}{2+3x} + \mathrm{e}^{3x}$$

im Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ und geben Sie den Konvergenzradius an.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (1 + 3 + 6 Punkte)

Durch die Kurve $\boldsymbol{c} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{c}(t) = \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 3\sin t \\ 4t \end{pmatrix}$, sei ein Draht im Raum parametrisiert.

(a) Skizzieren Sie die Projektion der Kurve in die x-y-Ebene, und nennen Sie die geometrische Form, die der Draht im Raum beschreibt.

(b) Berechnen Sie die Bogenlänge $L(\boldsymbol{c})$ der Kurve.

(c) Der Draht besitze die ortsabhängige Massendichte

$$\rho(x,y,z) = \left(\frac{x^2+y^2}{9} + \frac{z}{4}\right) \mathrm{e}^z.$$

Berechnen Sie die Gesamtmasse des Drahtes für $0 = a \le t \le b = 1$.
Zwischenergebnis: $5\int_0^1 (1+t)\mathrm{e}^{4t}\,\mathrm{d}t$ ist zu bestimmen.

Aufgabe 5 (3 + 5 + 2 Punkte)

Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ y+z \\ x+y \end{pmatrix}$ sowie die Basen $\mathscr{B}_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ und $\mathscr{B}_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ des $\mathbb{R}^3$. Weiterhin bezeichne $\mathscr{E}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie die Matrix $\mathscr{M}(f,\mathscr{E},\mathscr{E})$ an und die Dimension von $\mathrm{Kern} f$. Geben Sie außerdem eine Basis des Kerns von f an.

(b) Geben Sie die Matrixdarstellung von f bezüglich der Basen $\mathscr{B}_1$ und $\mathscr{B}_2$ an. Bestimmen Sie dazu die Matrizen S und R mit $\mathscr{M}(f,\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2) = R^{-1}\mathscr{M}(f,\mathscr{E},\mathscr{E})S$.

(c) Sei $\boldsymbol{v}_{\mathscr{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_1}$ der Koordinatenvektor von $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ zur Basis $\mathscr{B}_1$. Bestimmen Sie $\boldsymbol{v}_{\mathscr{E}}$, und berechnen Sie den Vektor $f(\boldsymbol{v})_{\mathscr{B}_2}$, d.h. den Bildvektor $f(\boldsymbol{v})$ zur Basis $\mathscr{B}_2$.

Aufgabe 6 (1 + 8 + 1 Punkte)
Transformieren Sie die Quadrik

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1, & \frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{7}{10} = 0$$

in Haupachsenlage, indem Sie folgende Punkte bearbeiten:

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix A die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = 5$ besitzt.

(b) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation, so dass die Quadrik bezüglich der neuen Koordinaten Normalform besitzt, und geben Sie die entsprechende Normalform an.

(c) Bestimmen Sie den Typ der Quadrik.