Technische Universität Braunschweig

Decision Support
Institut für Wirtschaftsinformatik

Operations Research

Vorlesung 3
Lineare Programmierung: Simplex-Algorithmus

Wiederholung

- Die drei Schritte im Operations Research
  - Problem, Modell, Lösung

- Typische Problemszenarien
  - Z.B. Transportproblem, Energieflussproblem, Auswahlproblem

- Standardform der linearen Programmierung

- Intuitive Lösungsverfahren
  - Systematisches Durchsuchen und Grafisches Lösen

Heutige Fragestellungen

- Wie können wir (größere) lineare Probleme lösen?
- Ist jedes lineare Programm lösbar?
- Gibt es Ausnahmen und wie erkennen wir sie?

Überblick

1. Simplex-Algorithmus
2. Anwendungsbeispiel zum Simplex-Algorithmus
3. Sonderfälle der linearen Programmierung

Überblick

1. **Simplex-Algorithmus**
2. Anwendungsbeispiel zum Simplex-Algorithmus
3. Sonderfälle der linearen Programmierung

Simplex-Algorithmus (Dantzig, 1947): Idee

- Eine Lösung der m Restriktionen $a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n+m}x_{n+m} = b_i \quad i = 1, \dots, m$ heißt *Basislösung*, falls gilt:
  - n der Variablen $x_1, \dots, x_{n+m}$ sind Null (Nichtbasisvariablen)
  - Jede der verbleibenden m Variablen (Basisvariablen) tritt in nur jeweils einer Gleichung, und zwar mit dem Koeffizienten 1, auf.
- Eine Basislösung heißt *zulässig*, falls alle Basisvariablen (BV) nicht-negativ sind.

Variablennotation

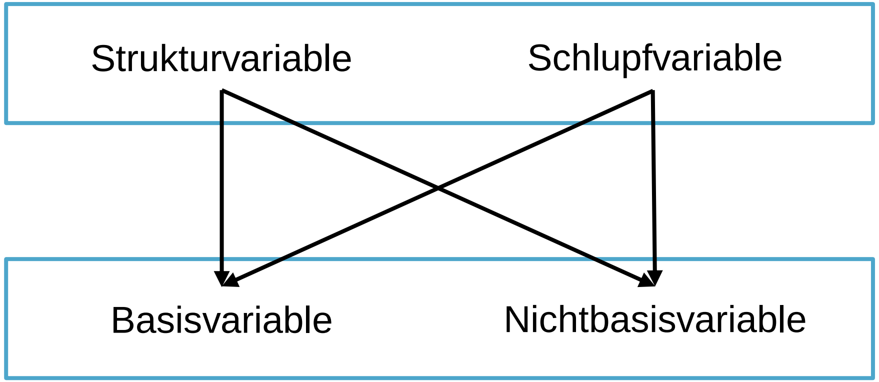
- Strukturvariablen:
  - originale Entscheidungsvariablen
  - Wirken sich auf Zielfunktion aus
- Schlupfvariablen:
  - Repräsentieren Nebenbedingungen
  - Keine Auswirkung auf Zielfunktion

- Basisvariablen einer Lösung:
  - Sind ungleich 0
  - Haben einen einzigen Eintrag in unserem Gleichungssystem
- Nichtbasisvariablen:
  - Sind 0
  - Können in mehreren Gleichungen auftreten

Struktur-, Schlupf-, Basis- und Nichtbasisvariablen

- **Strukturvariable ist Basisvariable:**
  - originale Entscheidungsvariablen
  - I.d.R. ungleich 0 (kommt in der Lösung vor)
- **Strukturvariable ist Nichtbasisvariable:**
  - originale Entscheidungsvariablen
  - Gleich 0 (kommt nicht in der Lösung vor)

- **Schlupfvariable ist Basisvariable:**
  - Repräsentiert Nebenbedingung
  - I.d.R. ungleich 0 (Nebenbedingung bindet nicht)
- **Schlupfvariable ist Nichtbasisvariable:**
  - Repräsentiert Nebenbedingung
  - Gleich 0 (Nebenbedingung bindet)



Simplex-Algorithmus (Dantzig, 1947): Idee

- Eine Lösung der m Restriktionen $a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n+m}x_{n+m} = b_i \quad i = 1, \ldots, m$
  heißt *Basislösung*, falls gilt:

  - n der Variablen $x_1, \ldots, x_{n+m}$ sind Null (Nichtbasisvariablen)

  - Jede der verbleibenden m Variablen (Basisvariablen) tritt in nur jeweils einer Gleichung, und zwar mit dem Koeffizienten 1, auf.

- Eine Basislösung heißt *zulässig*, falls alle Basisvariablen (BV) nicht-negativ sind.

- *Idee des Simplex-Algorithmus*:
  Ausgehend von einer zulässigen Basislösung wird eine neue zulässige Basislösung mit verbessertem Zielfunktionswert konstruiert, bis ein Abbruchkriterium erreicht wird.

Beispiel: Produktionsprogrammplanung

- Eine Unternehmung stellt die Produkte P_1 und P_2 her, die mit einem Gewinn (Deckungsbeitrag) von 3 € bzw. 4 € pro ME verkauft werden können.
- Zur Fertigung der beiden Produkte sind erforderlich

(a) eine Maschine, die (in dem Planungszeitraum) maximal 1200 Std. eingesetzt werden kann

(b) ein Rohstoff, von dem (in dem Planungszeitraum) höchstens 3000 ME zur Verfügung stehen

(c) Arbeitskräfte, die (in dem Planungszeitraum) höchstens 125 Std. eingesetzt werden können

- Für die Herstellung einer ME des Produktes P_1 (bzw. P_2) werden benötigt:

Maschine	3 Std.	(bzw. 2 Std.)
Rohstoff	5 ME	(bzw. 10 ME)
Arbeitskräfte	-	(bzw. 0,5 Std.)

Gesucht: Produktionsprogramm mit maximalem (Gesamt-)Gewinn

Simplex-Algorithmus: Problemformulierung (Produktionsprogrammplanung)

$$\max\ z = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

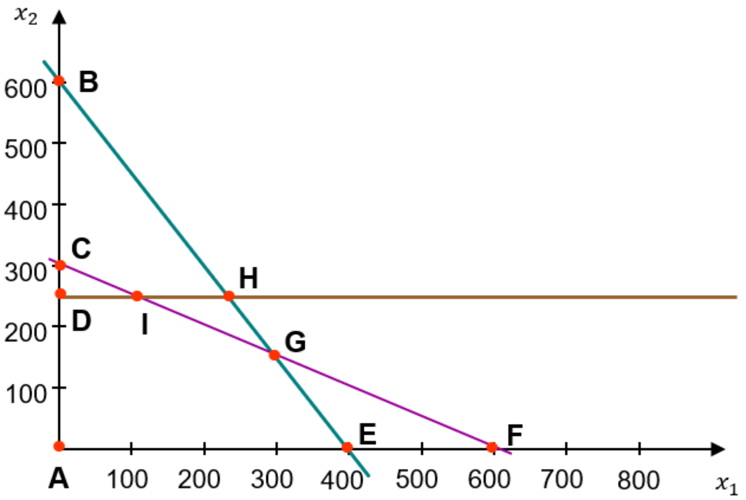
u.d.N.

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1200 \qquad (1)$$

$$5x_1 + 10x_2 + x_4 = 3000 \qquad (2)$$

$$0{,}5x_2 + x_5 = 125 \qquad (3)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$



Zulässige Basislösung:

$x_1 = 0,\ \ x_2 = 0$ Nichtbasisvariablen

$x_3 = 1200,\ \ x_4 = 3000,\ \ x_5 = 125$ Basisvariablen

$z = 0$

Simplex-Algorithmus: Basistausch

Austausch x_5 gegen x_2:

$$(1) - 4 * (3):\ 3x_1 \quad + x_3 \quad - 4x_5 = 700$$

$$(2) - 20 * (3): 5x_1 \quad + x_4 \quad - 20x_5 = 500$$

$$2 * (3): \quad x_2 \quad + 2x_5 = 250 \quad \Rightarrow x_2 = 250 - 2x_5$$

BV: x_2, x_3, x_4

NBV: x_1, x_5

Zielfunktion:

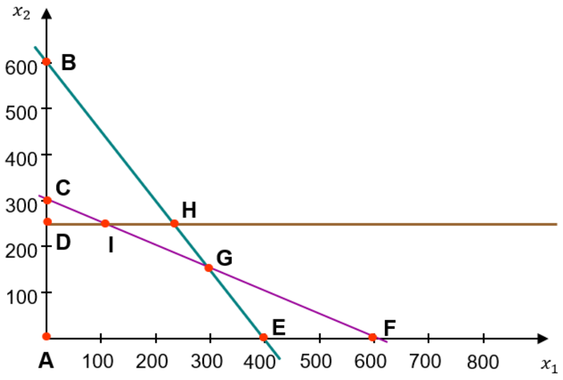
$$\max 3x_1 + 4 * (250 - 2x_5) \Leftrightarrow \max 3x_1 - 8x_5 + 1000$$

Neue zulässige Basislösung:

$x_1 = 0, x_5 = 0$ Nichtbasisvariablen

$x_2 = 250, x_3 = 700, x_4 = 500$ Basisvariablen

$z = 1000$



Simplex-Algorithmus: Basistausch

Ein Austauschschritt wird gewöhnlich im **Simplex-Tableau** durchgeführt. Zur Veranschaulichung liege eine zulässige Basislösung mit

NBV $x_1, \dots, x_n$ und BV $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ vor.

	x_1	x_2	...	x_s	...	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	...	x_{n+r}	...	x_{n+m}	RS
	c_1	c_2	...	c_s	...	c_n	0	0	...	0	...	0	$-z_0$
	a_{11}	a_{12}	...	a_{1s}	...	a_{1n}	1	0	...	0	...	0	b_1
	a_{21}	a_{22}	...	a_{2s}	...	a_{2n}	0	1	...	0	...	0	b_2
	a_{r1}	a_{r2}	...	a_{rs}	...	a_{rn}	0	0	...	1	...	0	b_r
	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{ms}	...	a_{mn}	0	0	...	0	...	1	b_m

Simplex-Algorithmus: Basistausch

Wahl eines Pivotelements, das festlegt, welche Variable in die Basis aufgenommen wird und welche Variable Nichtbasisvariable wird.

	x_1	x_2	...	x_s	...	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	...	x_{n+r}	...	x_{n+m}	RS
	c_1	c_2	...	c_s	...	c_n	0	0	...	0	...	0	$-z_0$
	a_{11}	a_{12}	...	a_{1s}	...	a_{1n}	1	0	...	0	...	0	b_1
	a_{21}	a_{22}	...	a_{2s}	...	a_{2n}	0	1	...	0	...	0	b_2
	a_{r1}	a_{r2}	...	a_{rs}	...	a_{rn}	0	0	...	1	...	0	b_r
	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{ms}	...	a_{mn}	0	0	...	0	...	1	b_m

a_{rs}: „Pivotelement“

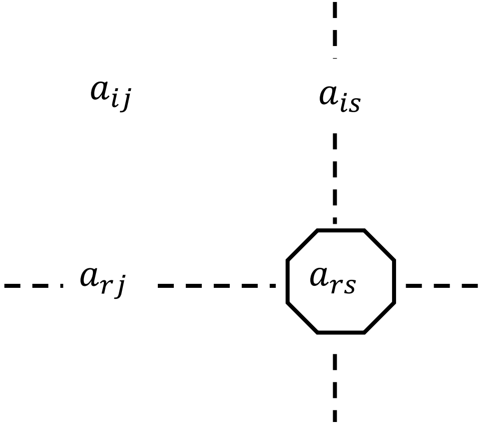
Simplex-Algorithmus: Basistausch

Modifikation der Pivotspalte und -zeile zur Durchführung des Basistausches

	NBV	NBV		BV		NBV	BV	BV		NBV		BV	
	x_1	x_2	...	x_s	...	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	...	x_{n+r}	...	x_{n+m}	RS
	c_1'	c_2'	...	0	...	c_n'	0	0	...	c_{n+r}'	...	0	$-z_0$
	a_{11}'	a_{11}'	...	0	...	a_{1n}'	1	0	...	$a_{1,n+r}'$	...	0	b_1'
	$\frac{a_{r1}}{a_{rs}}$	$\frac{a_{r2}}{a_{rs}}$	...	1	...	$\frac{a_{rn}}{a_{rs}}$	0	0	...	$\frac{1}{a_{rs}}$	...	0	$\frac{b_r}{a_{rs}}$
	a_{m1}'	a_{m2}'	...	0	...	a_{mn}'	0	0	...	$a_{m,n+r}'$	...	1	b_m'

Simplex-Algorithmus: Kreisregel

Transformation der Elemente außerhalb von Pivotspalte und -zeile



$$a_{ij}' = a_{ij} - \frac{a_{is}a_{rj}}{a_{rs}} \; (i \neq r, j \neq s)$$

$$b_i' = b_i - b_r \frac{a_{is}}{a_{rs}} \; (i \neq r)$$

$$c_j' = c_j - c_s \frac{a_{rj}}{a_{rs}} \; (j \neq s)$$

$$-z_i' = -z_0 - b_r \frac{c_s}{a_{rs}}$$

Allgemein gilt für die Elemente außerhalb von Pivotspalte/-zeile:

$$\text{neues Element} = \text{altes Element} - \frac{\text{Pivotzeilenelement * Pivotspaltenelement}}{\text{Pivotelement}}$$

Simplex-Algorithmus: Bestimmung des Pivotelements

Regel I (Auswahl der Pivotspalte s):

Ist der größte Zielfunktionskoeffizient *positiv*, so wähle man die (oder eine) bei diesem Koeffizienten stehende Variable zur Basisvariable.

Regel II (Auswahl der Pivotzeile r):

Man wähle das Pivotelement a_{rs} so, dass $a_{rs} > 0$ und $\min\limits_{i=1,\ldots,m} \left\{ \frac{b_i}{a_{is}} \middle| a_{is} > 0 \right\}$ erfüllt sind.

Abbruch:

- Ist Regel I nicht anwendbar, so ist das Optimum gefunden und das Verfahren terminiert.
- Ist Regel II nicht anwendbar, so existiert keine optimale Lösungen und das Verfahren terminiert.

Simplex-Algorithmus: Bestimmung des Pivotelements

- **Regel I** garantiert eine Verbesserung des Zielfunktionswertes

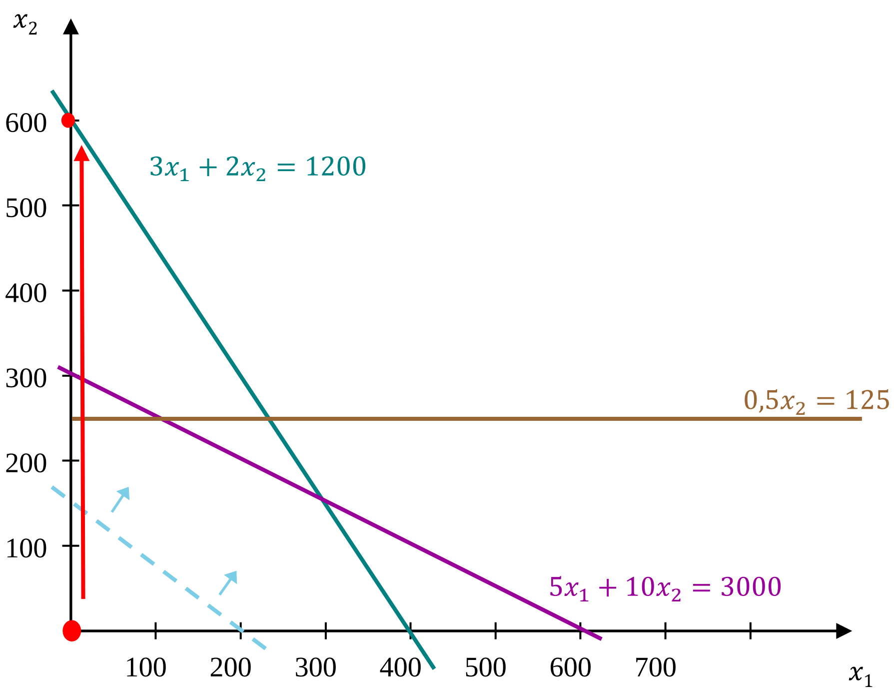
$$z'_0 = z_0 + b_r \frac{c_s}{a_{rs}} \geq z_0 \text{ , da } b_r, c_s, a_{rs} \geq 0$$

- **Regel II** garantiert die Zulässigkeit der neuen Basislösung

$$a_{is} > 0: b'_i = b_i - a_{is} \frac{b_r}{a_{rs}} \geq b_i - a_{is} \frac{b_i}{a_{is}} = 0 \quad \text{, da } \frac{b_r}{a_{rs}} = \min \frac{b_i}{a_{is}}$$

$$a_{is} < 0: b'_i = b_i - a_{is} \frac{b_r}{a_{rs}} \geq b_i \geq 0 \text{ , da } \frac{b_r}{a_{rs}} \geq 0$$

Exkurs: Wahl der „falschen Pivotzeile“



- Auswirkung des Ressourcenverbrauchs bei der Herstellung von x_2 wird ignoriert

- Es werden zu viele Einheiten x_2 hergestellt
- Die Verfügbarkeit von Ressourcen x_4 und x_5 wird überschritten

- Die Strukturvariable x_2 wird Basisvariable
- Die Schlupfvariable x_3 wird Nichtbasisvariable

- Die Variablen x_4 und x_5 nehmen negative Werte an → Negative rechte Seite

- $x_1 = 0, x_3 = 0$: $x_2 = 600, x_4 = -3000$, $x_5 = -175$ → keine zulässige Lösung

Simplex-Algorithmus

Steigung in Richtung x_2

Ressourcenkonsum von x_2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
3	4	0	0	0	0
3	2	1	0	0	1200
5	10	0	1	0	3000
0	0,5	0	0	1	125

- Idee:
  - Nimm verbessernde NBV in Basis auf.
  - Entferne erste limitierende BV: neue NBV.
  - Löse Tableau, erhalte neue Basislösung

Beispiel: Identifikation des Pivotelements (Tableau 1)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
	3	4	0	0	0	0
	3	2	1	0	0	1200
	5	10	0	1	0	3000
Pivotzeile	0	0,5	0	0	1	125

Pivotspalte

Pivotelement

Größter positiver Zielfunktionskoeffizient: 4

1200 / 2 = 600

3000 / 10 = 300

125 / 0,5 = 250

Basiswechsel: $x_2 \rightarrow$ BV
$x_5 \rightarrow$ NBV

Beispiel: Identifikation des Pivotelements (Tableau 2)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
	3	0	0	0	-8	-1000
	3	0	1	0	-4	700
Pivotzeile	5	0	0	1	-20	500
	0	1	0	0	2	250

Pivotspalte

Pivotelement

Größter positiver Zielfunktionskoeffizient: 3

700 / 3 ≈ 233,3

500 / 5 = 100

Basiswechsel: $x_1 \rightarrow$ BV
$x_4 \rightarrow$ NBV

Beispiel: Transformation von Pivotzeile und -spalte

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
	3	0	0	0	-8	-1000
	3	0	1	0	-4	700
	5	0	0	1	-20	500
	0	1	0	0	2	250

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
	0					
	0					
	1	0	0	0,2	-4	100
	0					

Pivotspalte: $a'_{ij} = \begin{cases} 1 & i = r \\ 0 & sonst \end{cases} \quad (i = 1, .., m)$

Pivotzeile: $a'_{ij} = \frac{a_{rj}}{a_{rs}} \quad (j = 1, .., n); \quad b'_i = \frac{b_i}{a_{rs}}$

Beispiel:

$$a'_{22} = \frac{a_{22}}{a_{21}} = \frac{0}{5} = 0$$

$$a'_{23} = \frac{a_{23}}{a_{21}} = \frac{0}{5} = 0$$

$$a'_{24} = \frac{a_{24}}{a_{21}} = \frac{1}{5}$$

$$a'_{25} = \frac{a_{25}}{a_{21}} = \frac{-20}{5} = -4$$

$$b'_2 = \frac{b_2}{a_{21}} = \frac{500}{5} = 100$$

Beispiel: Kreisregel – Zielfunktionszeile

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
3	0	0	0	-8	-1000
3	0	1	0	-4	700
5	0	0	1	-20	500
0	1	0	0	2	250

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
0	0	0	-0,6	4	-1300
0					
1	0	0	0,2	-4	100
0					

Regeln: $c'_j = c_j - c_s \frac{a_{rj}}{a_{rs}} \; (j \neq s)$

$-z'_0 = -z_0 - b_r \frac{c_s}{a_{rs}}$

Beispiel: $c'_2 = c_2 - c_1 \frac{a_{22}}{a_{21}} = 0 - 3 * \frac{0}{5} = 0$

$c'_3 = c_3 - c_1 \frac{a_{23}}{a_{21}} = 0 - 3 * \frac{0}{5} = 0$

$c'_4 = c_4 - c_1 \frac{a_{24}}{a_{21}} = 0 - 3 * \frac{1}{5} = -\frac{3}{5}$

$c'_5 = c_5 - c_1 \frac{a_{25}}{a_{21}} = -8 - 3 * \frac{-20}{5} = 4$

$$-z'_0 = -z_0 - b_2 \frac{c_1}{a_{21}} = -1000 - 500 * \frac{3}{5} = -1300$$

Beispiel: Kreisregel – Zeile 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
	3	0	0	0	-8	-1000
	3	0	1	0	-4	700
	5	0	0	1	-20	500
	0	1	0	0	2	250

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
	0	0	0	-0,6	4	-1300
	0	0	1	-0,6	8	400
	1	0	0	0,2	-4	100
	0					

Regeln: $a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is}a_{rj}}{a_{rs}} \quad (i \neq r, j \neq s)$

$b'_i = b_i - b_r \frac{a_{is}}{a_{rs}} \; (i \neq r)$

Beispiel: $a'_{12} = a_{12} - \frac{a_{11}a_{22}}{a_{21}} = 0 - \frac{3*0}{5} = 0$

$a'_{13} = a_{13} - \frac{a_{11}a_{23}}{a_{21}} = 1 - \frac{3*0}{5} = 1$

$a'_{14} = a_{14} - \frac{a_{11}a_{24}}{a_{21}} = 0 - \frac{3*1}{5} = -\frac{3}{5}$

$a'_{15} = a_{15} - \frac{a_{11}a_{25}}{a_{21}} = -4 - \frac{3*(-20)}{5} = 8$

$b'_1 = b_1 - b_2 \frac{a_{11}}{a_{rs}} = 700 - 500\frac{3}{5} = 400$

Überblick

1. Simplex-Algorithmus
2. **Anwendungsbeispiel zum Simplex-Algorithmus**
3. Sonderfälle der linearen Programmierung

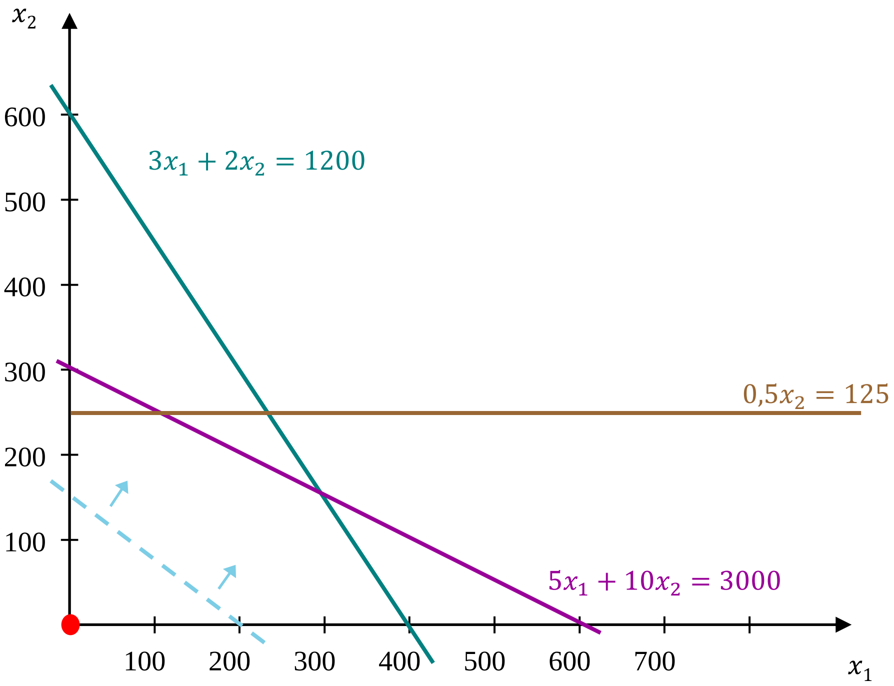
Der Simplexalgorithmus (Wiederholung)

1. Starte mit zulässiger Basislösung
2. Wenn kein positiver Zielfunktionskoeffizient existiert, gehe zu 3.
   sonst Basistausch:
   a) Wähle Pivotspalte **s** (maximaler Zielfunktionskoeffizient)
   b) Wähle Pivotzeile **r** (limitierende Zeile):

$$a_{rs} > 0, \qquad \frac{b_r}{a_{rs}} = \min_{i=1,\dots,m} \left\{ \frac{b_i}{a_{is}} \mid a_{is} > 0 \right\}$$

   a) Aktualisiere Tableau mit Kreisregel
   b) Gehe zu 2.
3. Abbruchkriterium.
4. Lösungsdetails:
   a) (negativer) Zielfunktionswert oben rechts im Tableau
   b) Entscheidung ist Wert b für die zugehörige Basisvariable

Beispiel Produktionsprogrammplanung



Max $\quad z = 3\,x_1 + 4x_2$

u.d.N.

$$
\begin{aligned}
3\,x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1200 \\
5\,x_1 + 10x_2 + x_4 &= 3000 \\
0{,}5x_2 + x_5 &= 125 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Basislösung:

$x_1 = 0, x_2 = 0, z = 0$

Beispiel Produktionsprogrammplanung

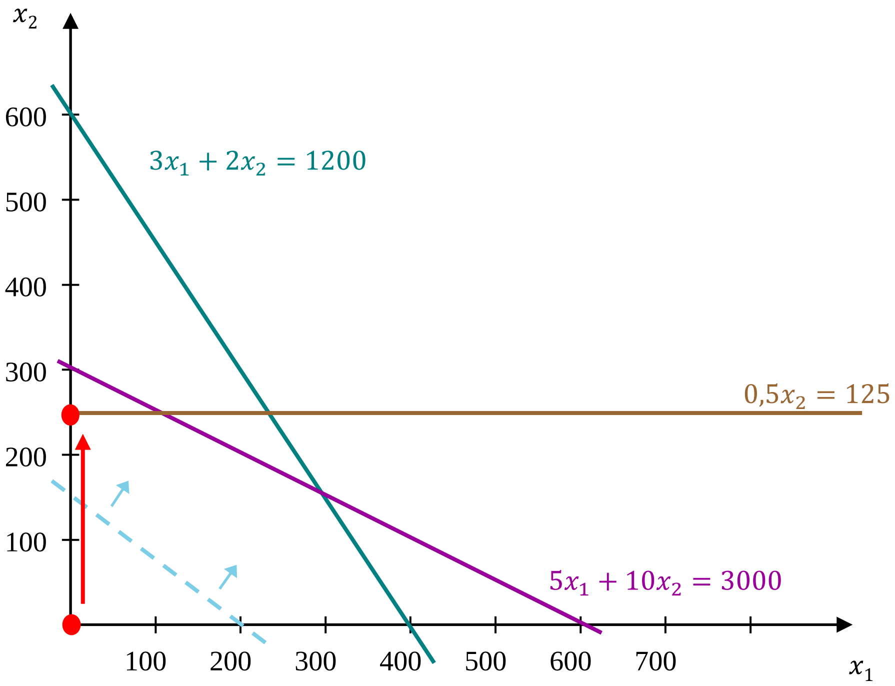
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS		
	3	4	0	0	0	0		
	3	2	1	0	0	1200	600	
	5	10	0	1	0	3000	300	
	0	0,5	0	0	1	125	250	Pivotzeile
		Pivotspalte						

Pivotelement

$x_1 = x_2 = 0$
$x_3 = 1200$
$x_4 = 3000$
$x_5 = 125$
$z = 0$

Basiswechsel: $x_2 \rightarrow$ BV
$x_5 \rightarrow$ NBV

Beispiel Produktionsprogrammplanung



Neue Basislösung:

$x_1 = 0, x_2 = 250, z = 1000$

Beispiel Produktionsprogrammplanung

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS	
	3	0	0	0	-8	-1000	
	3	0	1	0	-4	700	700 / 3
	5	0	0	1	-20	500	500 / 5
	0	1	0	0	2	250	

Pivotzeile

Pivotspalte

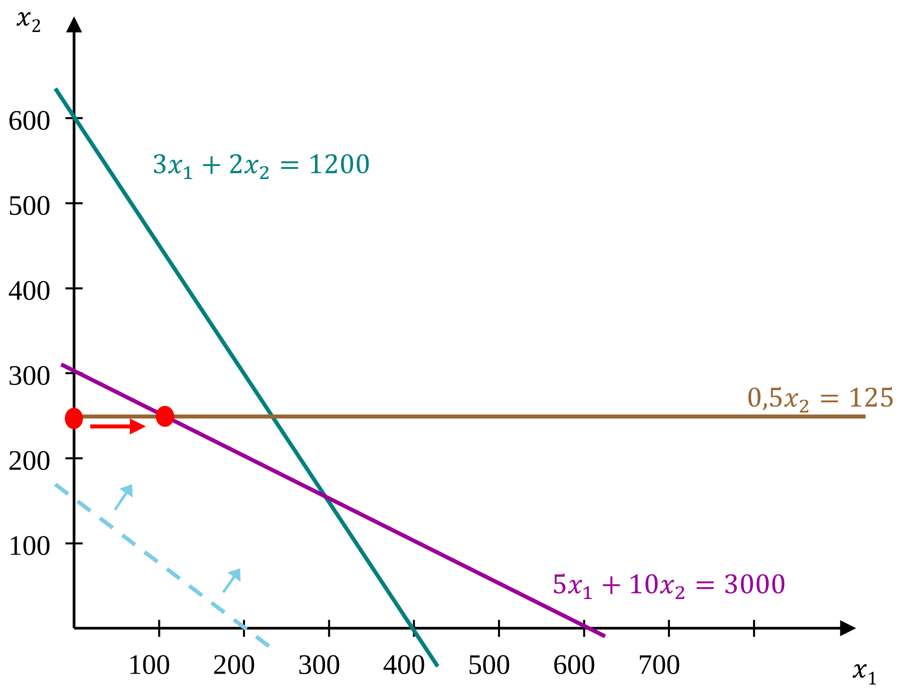
Pivotelement

$$x_1 = x_5 = 0$$
$$x_2 = 250$$
$$x_3 = 700$$
$$x_4 = 500$$
$$z = 1000$$

Basiswechsel: $x_1 \rightarrow$ BV

$x_4 \rightarrow$ NBV

Beispiel Produktionsprogrammplanung



Neue Basislösung:

$x_1 = 100, x_2 = 250, z = 1300$

Beispiel Produktionsprogrammplanung

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS	
	0	0	0	-0,6	4	-1300	
	0	0	1	-0,6	8	400	50
	1	0	0	0,2	-4	100	
	0	1	0	0	2	250	125

Pivotzeile

Pivotspalte

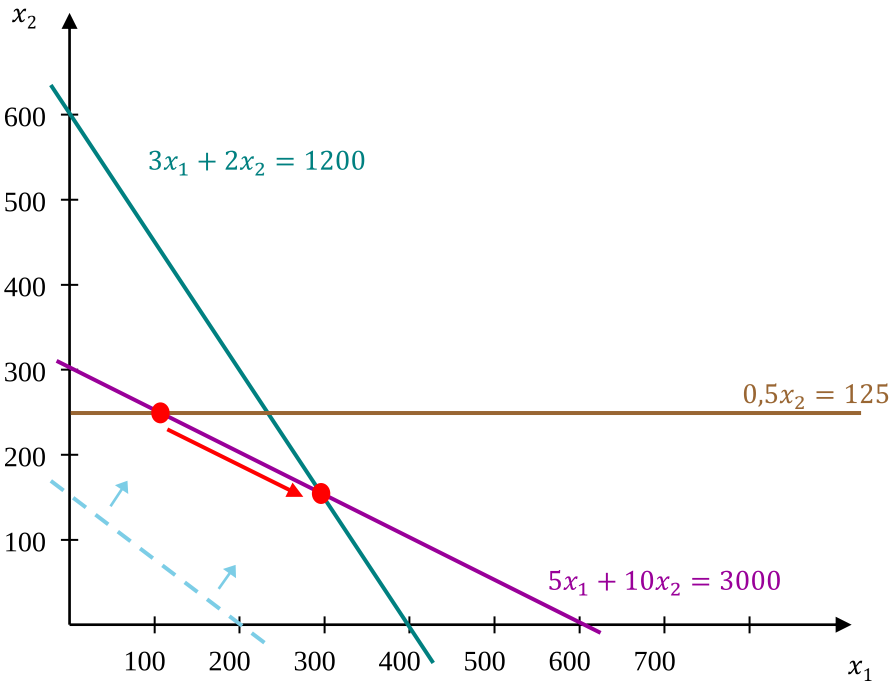
Pivotelement

$$x_4 = x_5 = 0$$
$$x_1 = 100$$
$$x_2 = 250$$
$$x_3 = 400$$
$$z = 1300$$

Basiswechsel: $x_5 \rightarrow$ BV

$x_3 \rightarrow$ NBV

Beispiel Produktionsprogrammplanung



Neue Basislösung:

$x_1 = 300, x_2 = 150, z = 1500$

Beispiel Produktionsprogrammplanung

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
	0	0	-1/2	-3/10	0	-1500
	0	0	1/8	-3/40	1	50
	1	0	1/2	-1/10	0	300
	0	1	-1/4	3/20	0	150

$x_3 = x_4 = 0$
$x_1 = 300$
$x_2 = 150$
$x_5 = 50$
$z = 1500$

Abbruchkriterium: alle ZF-Koeffizienten ≤ 0
(d.h. keine ZF-Wert-Verbesserung mehr möglich)

optimale Lösung: $x_1^* = 300$, $x_2^* = 150$, $z^* = 1500$

Verkürztes Simplextableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
	NBV		BV			
	3	4	0	0	0	0
	3	2	1	0	0	1200
	5	10	0	1	0	3000
	0	0,5	0	0	1	125

$\Leftrightarrow$

		x_1	x_2	RS
		NBV		
	$-z$	3	4	0
BV	x_3	3	2	1200
BV	x_4	5	10	3000
BV	x_5	0	0,5	125

Verkürztes Simplextableau: Bestimmung Pivotelement

NBV: x_1, x_2

	x_1	x_2	RS	
$-z$	3	4	0	
x_3	3	2	1200	600
x_4	5	10	3000	300
x_5	0	0,5	125	250

BV: x_3, x_4, x_5

Pivotelement: 0,5

Basistausch: $x_2 \rightarrow$ BV

$x_5 \rightarrow$ NBV

Verkürztes Simplextableau: Basistausch

- lediglich Darstellung der Nichtbasisvariablen im Tableau
- Anwendung der Transformationsregeln auf die Koeffizienten der Nichtbasisvariablen

<u>Transformationsregeln:</u>

1. Pivotelement $\rightarrow$ Kehrwert
2. Pivotzeile $\rightarrow$ dividieren durch Pivotelement
3. Pivotspalte $\rightarrow$ mit (-1) multiplizieren und durch Pivotelement dividieren
4. übrige Elemente $\rightarrow$ altes Element - $\dfrac{\text{Pivotzeilenelement * Pivotspaltenelement}}{\text{Pivotelement}}$

Verkürztes Simplextableau: Simplexschritt

	x_1	x_2	RS
$-z$	3	4	0
x_3	3	2	1200
x_4	5	10	3000
x_5	0	0,5	125

2.	x_1	x_5	RS
$-z$		-8	
x_3		-4	
x_4		-20	
x_2	0	2	250

<u>Transformationsregeln:</u>

1. Pivotelement $\rightarrow$ Kehrwert
2. Pivotzeile $\rightarrow$ dividieren durch Pivotelement
3. Pivotspalte $\rightarrow$ mit (-1) multiplizieren und durch Pivotelement dividieren

Verkürztes Simplextableau: Simplexschritt

	x_1	x_2	RS
$-z$	3	4	0
x_3	3	2	1200
x_4	5	10	3000
x_5	0	0,5	125

	x_1	x_5	RS
$-z$	3	-8	-1000
x_3	3	-4	700
x_4	5	-20	500
x_2	0	2	250

Transformationsregeln:

4. übrige Elemente $\rightarrow$

altes Element - $\dfrac{\text{Pivotzeilenelement * Pivotspaltenelement}}{\text{Pivotelement}}$

(Analog zur Kreisregel!)

Bsp:

$$c'_1 = 3 - \frac{0*4}{0,5} = 3$$

$$-z'_0 = 0 - \frac{125*4}{0,5} = -1000$$

$$b_1 = 1200 - \frac{125*2}{0,5} = 700$$

Verkürztes Simplextableau: Endtableau

Hinweis: Ein Simplex-Schritt übersprungen

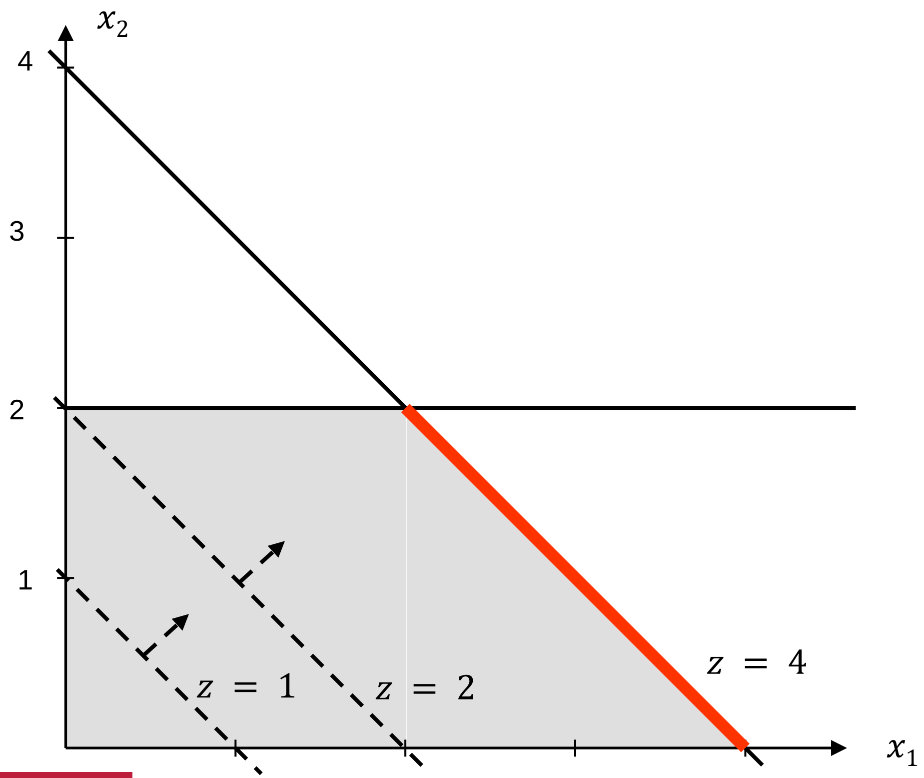
	x_4	x_3	RS
$-z$	-3/10	-1/2	-1500
x_5	-3/40	1/8	50
x_1	-1/10	1/2	300
x_2	3/20	-1/4	150

optimale Lösung: x_1^* = 300, x_2^* = 150, z^* = 1500

Überblick

1. Simplex-Algorithmus
2. Anwendungsbeispiel zum Simplex-Algorithmus
3. **Sonderfälle der linearen Programmierung**

Sonderfall 1: Unendlich viele optimale Lösungen



$$\begin{aligned} \text{max } z &= x_1 + x_2 \\ \text{u.d.N.} \quad x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Optimalwert $z = 4$

Optimale Lösungen:

$$\{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 4, x_2 \leq 2\}$$

Sonderfall 1: Unendlich viele optimale Lösungen

	x_1	x_2	x_3	x_4	RS
$-z$	1	1	0	0	0
x_3	1	1	1	0	4
x_4	0	1	0	1	2
$-z$	1	0	0	-1	-2
x_3	1	0	1	-1	2
x_2	0	1	0	1	2
$-z$	0	0	-1	0	-4
x_1	1	0	1	-1	2
x_2	0	1	0	1	2
$-z$	0	0	-1	0	-4
x_1	1	1	1	0	4
x_4	0	1	0	1	2

max $z = x_1 + x_2$

u.d.N. $x_1 + x_2 \leq 4$

$x_2 \leq 2$

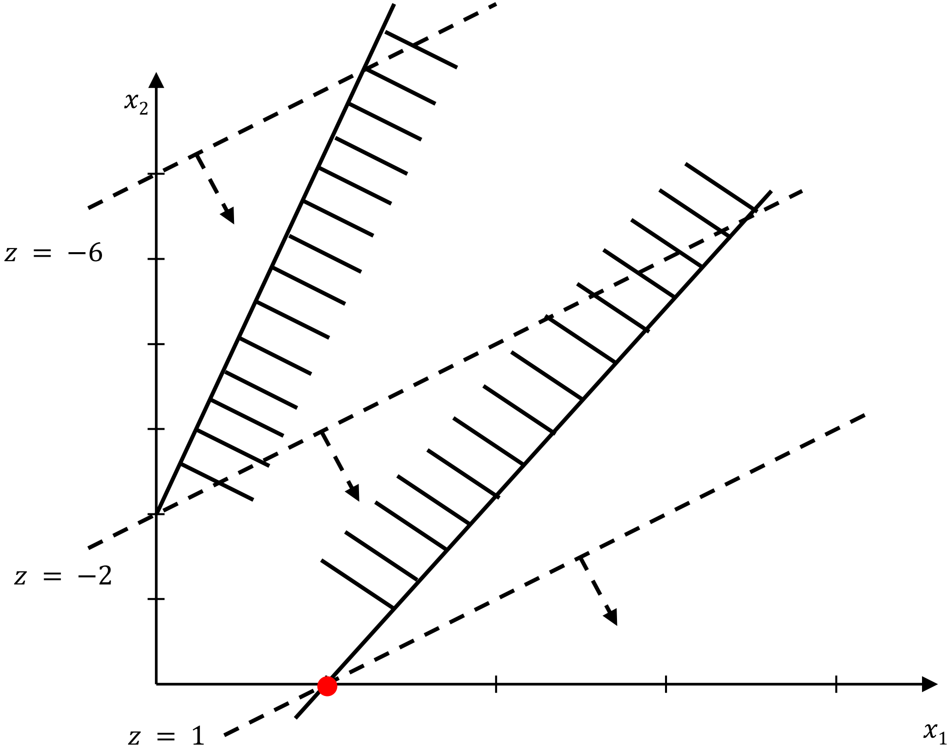
$x_1, x_2 \geq 0$

optimale Lösung:
$x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = x_4 = 0$
$z = 4$

Hinweis: theoretisch würde der Simplex hier terminieren

optimale Lösung:
$x_1 = 4, x_2 = x_3 = 0, x_4 = 2$
$z = 4$

Sonderfall 2: Zulässiger Bereich unbeschränkt



$$\max z = x_1 - 2x_2$$

u.d.N. $\quad x_1 - x_2 \leq 1$

$$-2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Die Menge der zulässigen Lösungen ist unbeschränkt. Die Zielfunktion ist allerdings auf dieser Menge nach oben beschränkt.

$z = 1, x_1 = 1, x_2 = 0$

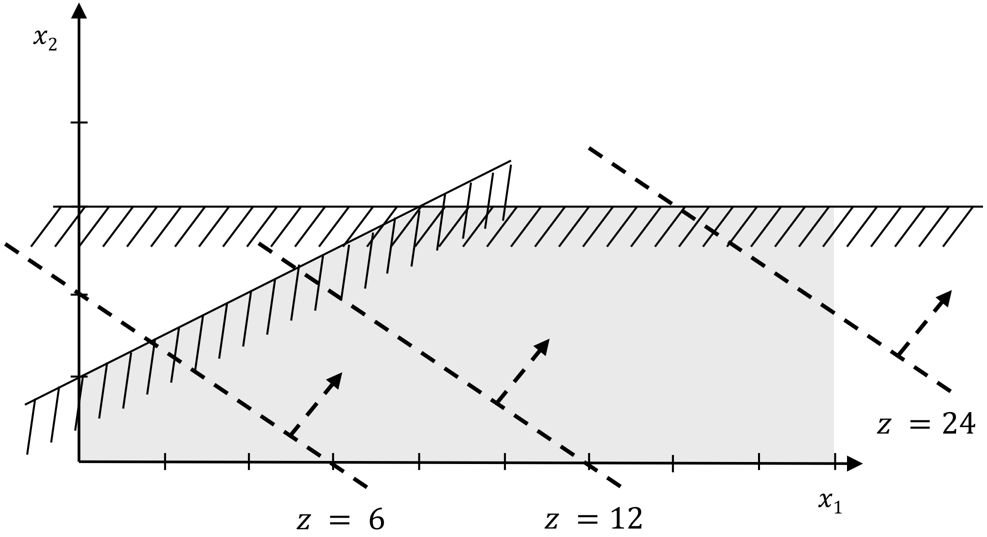
Sonderfall 2: Zulässiger Bereich unbeschränkt

	x_1	x_2	x_3	x_4	RS
$-z$	1	-2	0	0	0
x_3	1	-1	1	0	1
x_4	-2	1	0	1	2
$-z$	0	-1	-1	0	-1
x_1	1	-1	1	0	1
x_4	0	-1	2	1	4

(Primaler) Simplex-Algorithmus

Keine Auffälligkeiten im Tableau!

Sonderfall 3: Keine optimale Lösung



Der zulässige Bereich ist (nach oben) unbeschränkt.

Es existiert keine (optimale) Lösung.

$$\begin{aligned} \max z \;=\; 2x_1 + 3x_2 & \\ x_2 &\leq 3 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Sonderfall 3: Keine optimale Lösung

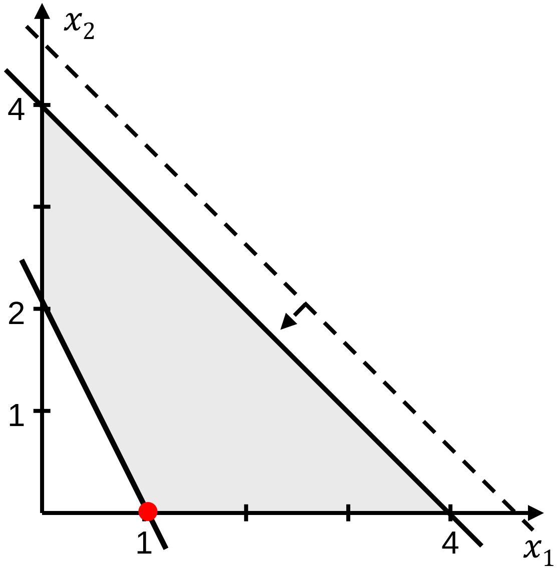
	x_1	x_2	x_3	x_4	RS
$-z$	2	3	0	0	0
x_3	0	1	1	0	3
x_4	-1	2	0	1	2
$-z$	3,5	0	0	-1,5	-3
x_3	0,5	0	1	-0,5	2
x_2	-0,5	1	0	0,5	1
$-z$	0	0	-7	2	-17
x_1	1	0	2	-1	4
x_2	0	1	1	0	3

(Primaler) Simplex-Algorithmus

keine Pivotzeile bestimmbar!

Steht unter einem positiven Zielfunktionskoeffizienten eine „ ≤ 0 - Spalte“, so ist der zulässige Bereich unbeschränkt und das Optimierungsproblem nicht lösbar!

Sonderfall 4: Keine Startlösung bestimmbar



Der zulässige Bereich ist beschränkt und es existiert eine optimale Lösung.

Startecke $(x_1, x_2) = (0{,}0)$ ist nicht im zulässigen Bereich.

$$\begin{aligned} \max\ z &= -2x_1 - 2x_2 \\ \text{u.d.N.}\quad x_1 + x_2 &\leq 4 \\ -2x_1 - 2x_2 &\leq -2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$z = 2, x_1 = 1, x_2 = 0$

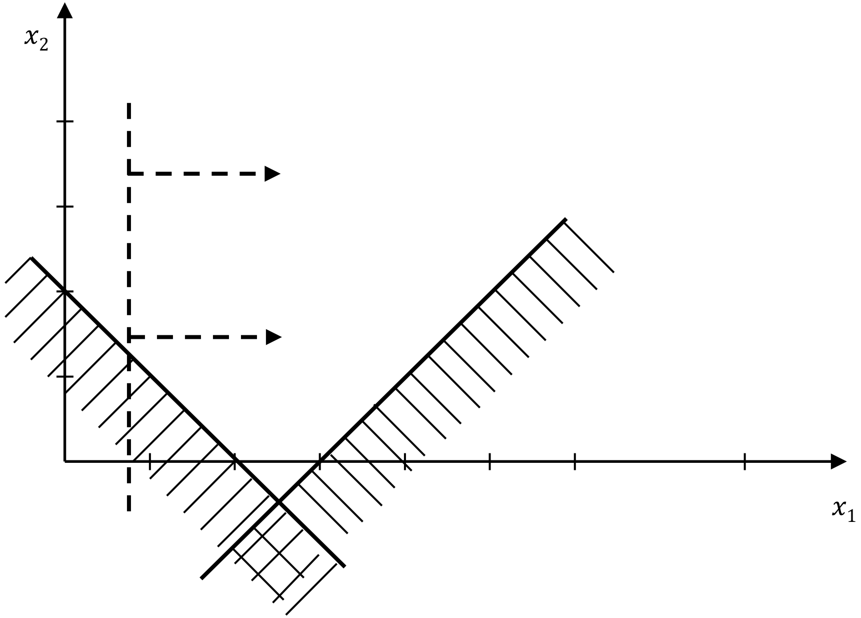
Sonderfall 4: Keine Startlösung bestimmbar

	x_1	x_2	x_3	x_4	RS
$-z$	-2	-2	0	0	0
x_3	1	1	1	0	4
x_4	-2	-1	0	1	-2

Ein $b_i < 0$, somit kein gültiges Simplex-Tableau.

Das Herstellen einer zulässigen Startlösung mithilfe des Dualen Simplex-Verfahren wird in Vorlesung 5 behandelt.

Sonderfall 5: Keine Lösung



Die Menge der zulässigen Lösungen ist leer.
Es existiert keine Lösung.

$$
\begin{array}{lr}
\text{max} & z = x_1 \\
\text{u.d.N.} & -x_1 - x_2 \leq -2 \\
 & x_1 - x_2 \leq 3 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Sonderfall 5: Keine Lösung

	x_1	x_2	x_3	x_4	RS
$-z$	1	1	0	0	0
x_3	-1	-1	1	0	-2
x_4	1	-1	0	1	3

Ein $b_i < 0$, somit kein gültiges Simplex-Tableau.

Anwendung von Dualem Simplex-Verfahren führt auch zu unzulässigem Simplex-Tableau.

Zusammenfassung

- Umwandlung von Standardproblem in ein Gleichungssystem durch Einführung von Schlupfvariablen
- Basislösung und Basisvariablen
- Simplex-Algorithmus
  - Simplex-Tableau
  - Bestimmung von Pivotelement
  - Basistausch
- Sonderfälle