

Mathematik (Elektrotechnik) — Nachklausur

Aufgabe 1. Berechnen Sie — wenn möglich — die inverse Matrix von

2 P.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -2 & -13 & -5 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie eine Probe durch.

Aufgabe 2. Es sei

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass \mathcal{A} eine Basis des \mathbb{R}^3 ist.

1 P.

b) Bestimmen Sie die Matrix M der Abbildung bzgl. der Basis \mathcal{A} .

2 P.

c) Bestimmen Sie den Kern der Matrix M .

1 P.

Aufgabe 3. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 3 & -6 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenvektoren von A . Führen Sie eine Probe durch.

4 P.

b) Geben Sie einen Vektor des \mathbb{R}^4 an, der kein Eigenvektor der Matrix A ist.

1 P.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie das multiplikativ Inverse von $32 \in \mathbb{Z}_{53}$.

2 P.

Aufgabe 5. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion

6 P.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{1-x}}$$

und die Grenzwerte am Rande des Definitionsbereiches. Bestimmen Sie maximale Intervalle strenger Monotonie und die Extremstellen von f . Fertigen Sie eine grobe Skizze des Graphen an.

Aufgabe 6. Stellen Sie die Menge aller reellen Zahlen, die die Ungleichungen

2 P.

$$1 < \left| \frac{2-7x}{3x+5} \right| \leq 2$$

erfüllen, als Vereinigung von Intervallen dar.

Aufgabe 7. Bestimmen Sie

3 P.

$$\int_0^1 \frac{x-14}{(x^2+4)(x+1)^2} dx.$$

Aufgabe 8. Durch die Gleichung

2 P.

$$\left| \frac{2z+4j}{z-2j+2} + 1 \right| \leq 1$$

ist ein Kreis definiert. Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius dieses Kreises.

Aufgabe 9. Es sei $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

2 P.

$$\sum_{k=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) = \ln(n+1) - \ln(2n).$$

Aufgabe 10. Berechnen Sie

2 P.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(xe^{-\frac{x}{2}} + 1 - \sin(x) - \cos(x))^5}{(x^3 + x^5)^5}.$$