Technische Universität Braunschweig

Institut für Regelungstechnik

6. Die Maxwell‘schen Gleichungen

Prof. Dr.-Ing. Markus Maurer

Die Maxwell‘schen Gleichungen – Überblick

1. Gauß‘sches Gesetz für elektrische Felder: $$\oiint_{\partial V} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \iiint_V \rho \cdot \mathrm{d}V = Q(V)$$
2. Gauß‘sches Gesetz für Magnetfelder: $$\oiint_V \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$$
3. Ampere‘sches Durchflutungsgesetz: $$\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \iint_A \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} + \iint_A \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$
4. Faraday‘sches Induktionsgesetz: $$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

Anmerkung: Nummerierung der Gleichungen in der Literatur nicht einheitlich!

Vertiefung in:
- Theoretische Elektrotechnik
- Elektromagnetische Felder

Die 1. Maxwell‘sche Gleichung – Zusammenfassung

Gauß‘sches Gesetz für elektrische Felder:

$$\oiint_{\partial V} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \iiint_V \rho \cdot \mathrm{d}V = Q(V)$$

Das $\vec{D}$-Feld bzw. das $\vec{E}$-Feld ist ein Quellenfeld.

Das heißt, die elektrische Ladung ist Quelle des elektrischen Feldes.

Der elektrische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche ∂V eines Volumens V ist gleich der Gesamtladung Q innerhalb des Volumens.

Die 2. Maxwell'sche Gleichung – Zusammenfassung

Gauß'sches Gesetz für Magnetfelder:

$$\oiint_V \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$$

Das $\vec{B}$-Feld ist quellenfrei.

Das heißt, es existieren keine magnetischen Monopole.

Der magnetische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche ∂V eines Volumens V ist gleich Null.

Die 3. Maxwell'sche Gleichung – Zusammenfassung

Das Ampere'sche Durchflutungsgesetz:

$$\boxed{\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \iint_A \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} + \iint_A \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{A}}$$

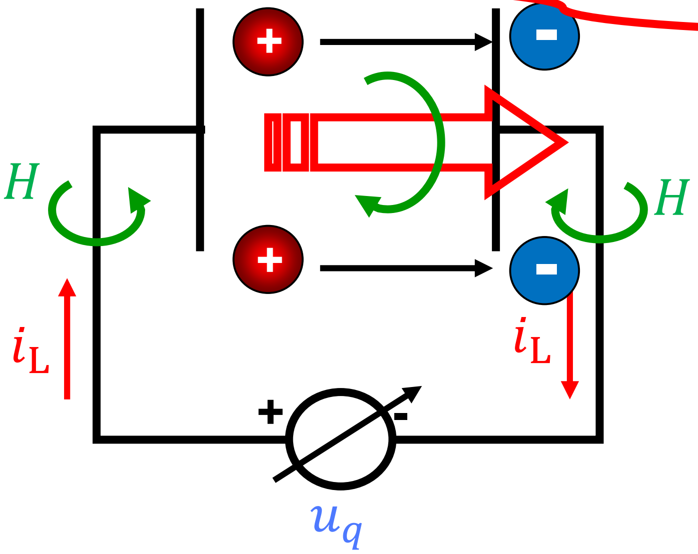
$$\Theta = \sum_i I_i + \sum_k \mathrm{d}Q_k \cdot \frac{1}{\mathrm{d}t}$$

Das Ampere'sche Durchflutungsgesetz definiert die Durchflutung.

Sie besteht aus zwei Beiträgen: Der aufsummierten Stromdichte und der aufsummierten Verschiebungsstromdichte.

Um die Durchflutung zu ermitteln, wird die magnetische Feldstärke auf einem geschlossenen Weg ∂A (Randkurve der Fläche A) integriert.

Die 3. Maxwell'sche Gleichung – Zusammenfassung



Verschiebungsstrom i_V

$$i_V = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

Details nächste Folie

Exkurs: Die 3. Maxwell-Gleichung (1/5) [Vgl. Albach 1 Kap. 2.1 S. 82]

Der Verschiebungsfluss

resultiert aus Ladungen und Oberflächenladungen.

$$\psi = \iint_A \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

Die Einheit des Verschiebungsflusses ist die einer Ladung.

$$[\psi] = \mathrm{As}$$

Exkurs: Die 3. Maxwell-Gleichung (2/5) [Vgl. Albach 1 Kap. 2.1 S. 82]

Die Verschiebungsflussdichte resultiert aus dem elektrischen Feld und Polarisation.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Die Einheit der Verschiebungsflussdichte ist die einer Ladungsdichte.

$$[D] = \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}^2}$$

Exkurs: Die 3. Maxwell-Gleichung (3/5)

[Vgl. Albach 1 Kap. 2.1 S. 82]

Wie können wir die zeitliche Änderung des Verschiebungsflusses interpretieren?

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = ?$$

Die Einheit der Änderung des Verschiebungsflusses entspricht der des Stromes. Was spricht dagegen, den Verschiebungsfluss als Strom zu interpretieren?

$$\left[\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right] = A$$

Exkurs: Die 3. Maxwell-Gleichung (4/5)

[Vgl. Albach 1 Kap. 2.1 S. 82]

Nichts!

Maxwell führte den Verschiebungsstrom ein.

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = i_V$$

Der Begriff bewährt sich:

Ein Verschiebungsstrom erzeugt ebenfalls ein Magnetfeld!

Exkurs: Die 3. Maxwell-Gleichung (5/5) [Vgl. Albach 1 Kap. 2.1 S. 82]

Sowohl die Änderung des elektrischen Feldes am Kondensator als auch die Änderung der Polarisation wird als Verschiebungsstrom aufgefasst.

$$i_V = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \iint_A \dot{\vec{D}} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

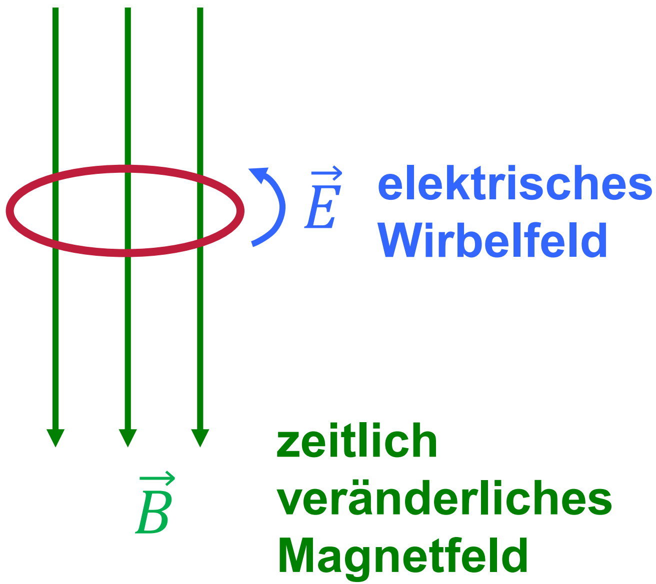
$$= \iint_A \varepsilon_0 \dot{\vec{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{A} + \iint_A \dot{\vec{P}} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

Achtung: Punkte zur Darstellung der zeitlichen Ableitung nicht übersehen!

Die 4. Maxwell‘sche Gleichung – Zusammenfassung

Faraday‘sches Induktionsgesetz:

$$\boxed{\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{A}}$$



Elektromagnetische Welle

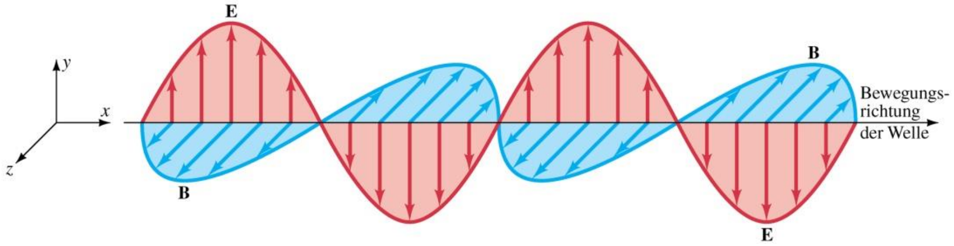
Physikalisch betrachtet handelt es sich bei **elektromagnetischen Wellen** um sich ausbreitende Schwingungen des elektromagnetischen Feldes.

Wobei $\vec{E}$-Feld und $\vec{H}$-Feld senkrecht aufeinander stehen mit dem festen Größenverhältnis

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Elektromagnetische Welle

Die Entstehung elektromagnetischer Wellen erklärt sich aus den Maxwellgleichungen: Die zeitliche Änderung des elektrischen Feldes ist stets mit einer räumlichen Änderung des magnetischen Feldes verknüpft. Ebenso ist wiederum die zeitliche Änderung des magnetischen Feldes mit einer räumlichen Änderung des elektrischen Feldes verknüpft.



aus Giancoli, Physik, S. 1064, Pearson, 2010

$$\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \iint_A \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} + \iint_A \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

Zusammenfassung

- Verschiebungsflussdichte $\vec{D}$ trägt zur Durchflutung bei

- Die vier Maxwell-Gleichungen bilden das Grundgerüst der Theorie des Elektromagnetismus

- Das elektromagnetische Feld:
  Gleichzeitige Wirkung von Magnetfeld und elektrischen Feld

- Elektromagnetische Welle und ihre Beschreibung durch die Maxwell-Gleichungen.

Ausblick: Maxwell‘sche Gleichungen in differentieller Form

Ein sich zeitlich änderndes elektrisches Feld erzeugt ein magnetisches Wirbelfeld

$$\mathrm{rot}\underline{\vec{H}} = \frac{\partial \underline{\vec{D}}}{\partial t} + \vec{J}$$

Ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld erzeugt ein elektrisches Wirbelfeld

$$\mathrm{rot}\underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}$$

Es gibt keine magnetischen Ladungen

$$\mathrm{div}\underline{\vec{B}} = 0$$

Ruhende elektrische Ladungen erzeugen elektrische Felder, deren Feldlinien in den Ladungen beginnen oder enden

$$\mathrm{div}\underline{\vec{D}} = \rho$$

Anmerkung: Ausblick und kein Inhalt der GET Vorlesung