Technische Universität Braunschweig
Institut für Analysis und Algebra *Wintersemester 2006/2007*
K.-J. Wirths / H. Kubiak *02.03.2007*

Mathematik (Elektrotechnik) — Klausur

Aufgabe 1. Bestimmen Sie das multiplikativ Inverse von $11 \in \mathbb{Z}_{41}$. $\boxed{2\text{ P.}}$

Aufgabe 2. Stellen Sie die Menge aller reellen Zahlen, die die Ungleichungen $\boxed{2\text{ P.}}$

$$1 \leq \left| \frac{7x-5}{-4x+3} \right| < 2$$

erfüllen, als Vereinigung von Intervallen dar.

Aufgabe 3. Durch die Gleichung $\boxed{2\text{ P.}}$

$$\left| \frac{2z-j}{z+3+j} \right| \leq 1$$

ist ein Kreis definiert. Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius dieses Kreises.

Aufgabe 4. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$. Zeigen Sie $\boxed{2\text{ P.}}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + x^{(2^k)}\right) = \ln\left(1 - x^{(2^n)}\right) - \ln(1-x).$$

Aufgabe 5. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion $\boxed{6\text{ P.}}$

$$f(x) = \frac{e^{\frac{-16}{3x}}}{x^2-1}$$

und die Grenzwerte am Rande des Definitionsbereiches. Bestimmen Sie maximale Invervalle strenger Monotonie und die Extremstellen von f. Fertigen Sie eine grobe Skizze des Graphens an. Dabei ist es hilfreich, wenn man zunächst die folgenden reellen Zahlen der Größe nach ordnet:

$$0, 3, -3, 6, -6, 1+\sqrt{13}, 1-\sqrt{13}.$$

Aufgabe 6. Berechnen Sie — wenn möglich — die inverse Matrix von $\boxed{2\text{ P.}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie eine Probe durch.

Aufgabe 7. Es sei

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. $\boxed{1\text{ P.}}$

b) Bestimmen Sie die Matrix M der Abbildung bzgl. der Basis $\mathcal{A}$. $\boxed{2\text{ P.}}$

c) Bestimmen Sie den Kern der Matrix M. $\boxed{1\text{ P.}}$

Aufgabe 8. Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & \frac{7}{2} & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Ist $\vec{x}$ ein Eigenvektor der Matrix A? Wie lautet der zugehörige Eigenwert? $\boxed{1\text{ P.}}$

b) Bestimmen Sie alle anderen Eigenvektoren. Führen Sie eine Probe durch. $\boxed{4\text{ P.}}$

Aufgabe 9. Berechnen Sie $\boxed{2\text{ P.}}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(xe^{x^2} - \frac{7}{6}x^3 - \sin x\right)^7}{x^{35}}.$$

Aufgabe 10. Bestimmen Sie $\boxed{3\text{ P.}}$

$$\int_{-1}^{1} \frac{2x^2 + x - 5}{(x^2+1)(x-2)^2}\,\mathrm{d}x.$$