11. Übungsblatt

Upload: 30.01.2023.
Deadline: 06.02.2023, 13:15 Uhr (im Abgabeordner bei stud.ip).

Aufgabe 11.1

Es seien $N \in \mathbb{N}$, X ein N-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\Phi \in \mathcal{L}(X)$ eine lineare Abbildung. Desweiteren sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von Φ. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist $k \in \mathbb{N}_0$, so ist λ^k ein Eigenwert von Φ^k. Dabei ist $\Phi^k \in \mathcal{L}(X)$ rekursiv definiert durch

$$\Phi^0 := \mathbb{1}_X, \quad \Phi^{j+1} := \Phi \circ \Phi^j.$$

(b) Ist $p = \sum_{k=0}^n \alpha_k z^k \in \Pi$ ein komplexes Polynom, so ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert von

$$p(\Phi) := \sum_{k=0}^n \alpha_k \Phi^k \in \mathcal{L}(X).$$

(c) Ist Φ invertierbar, so ist $1/\lambda$ ein Eigenwert von Φ^{-1}.

Lösung. Im Folgenden sei $\vec{v} \in X \setminus \{\vec{0}\}$ ein Eigenvektor von Φ zum Eigenwert λ, d.h. es gilt $\Phi(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v}$.

(a) [2 Punkte]

Beweis. Das beweisen wir per vollständiger Induktion. Genauer gesagt möchten wir beweisen, dass $\vec{v}$ ein Eigenvektor von Φ^k zum Eigenwert λ^k ist.
(IA) $k = 0$: $\Phi^0(\vec{v}) = \mathbb{1}_X(\vec{v}) = \vec{v} = \lambda^0 \cdot \vec{v}$.
(IV) k: Für ein $k \in \mathbb{N}_0$ gelte $\Phi^k(\vec{v}) = \lambda^k \cdot \vec{v}$.
(IS) $k \to k+1$: Für $k+1$ erhalten wir

$$\Phi^{k+1}(\vec{v}) = \Phi \circ \Phi^k(\vec{v}) = \Phi(\lambda^k \cdot \vec{v}) = \lambda^k \Phi(\vec{v}) = \lambda^k \cdot \lambda \cdot \vec{v} = \lambda^{k+1} \cdot \vec{v}.$$

□

(b) [2 Punkte]

Beweis. Wir nutzen Teilaufgabe (a) und erhalten

$$p(\Phi)(\vec{v}) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \Phi^k(\vec{v}) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \lambda^k \cdot \vec{v} = \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k \lambda^k\right) \cdot \vec{v} = p(\lambda) \cdot \vec{v}.$$

□

(c) [2 Punkte]

Beweis. Ist Φ invertierbar, so sehen wir, dass $\lambda \neq 0$ gelten muss. Wäre $\lambda = 0$, so wäre

$$\operatorname{span}(\{\vec{v}\}) \subseteq \ker(\Phi) \neq \{\vec{0}\},$$

was ein Widerspruch zur Injektivitität von Φ wäre. Wir wissen, dass mit $\Phi \in \mathcal{L}(X)$ auch Φ^{-1} linear sein muss. Daraus folgt

$$\lambda \cdot \Phi^{-1}(\vec{v}) = \Phi^{-1}(\lambda \cdot \vec{v}) = \Phi^{-1}(\Phi(\vec{v})) = \vec{v}.$$

Teilen wir diese Gleichung durch $\lambda \neq 0$, so erhalten wir das gewünschte

$$\Phi^{-1}(\vec{v}) = \frac{1}{\lambda} \cdot \vec{v}.$$

$\square$

Aufgabe 11.2

Berechnen Sie jeweils alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ und $B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$. Geben Sie dann jeweils die Transformationsmatrix an, die A bzw. B in eine Diagonalmatrix überführt, und führen Sie die Basistransformation aus.

$$(i)\ A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2},$$

$$(ii)\ B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ -3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

Lösung. (i) [3 Punkte]
Am schnellsten erhalten wir die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ über das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \det(A) &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -2 \\ \operatorname{Tr}\{A\} &= \lambda_1 + \lambda_2 = 1. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$. Wir erkennen bereits, dass A diagonalisierbar sein muss, da A zwei verschiedene Eigenwerte hat. Die Eigenvektoren erhalten wir dadurch, dass wir den Kern von $A - \lambda_1 \cdot \mathbb{1}$

$$\begin{array}{cc||l} -1 & -4 & \\ 1 & 4 & +(\mathrm{I}) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc||l} -1 & -4 & \cdot(-1) \\ 0 & 0 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc||} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{array} \Rightarrow \ker(A + \mathbb{1}) = \operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

und den Kern von $A - \lambda_2 \cdot \mathbb{1}$

$$\begin{array}{cc||} -4 & -4 \\ 1 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc||l} 1 & 1 & \\ -4 & -4 & +4(\mathrm{I}) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc||} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc||} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{array} \Rightarrow \ker(A - 2 \cdot \mathbb{1}) = \operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

berechnen. Die Eigenvektoren sind demnach

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Da die lineare Abbildung A bereits in Matrix-form gegeben ist, müssen wir die Transformationsmatrix $\Psi \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ von der Standardbasis $\mathcal{E}$ zu der Basis aus Eigenvektoren $S := \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ bestimmen. Es muss also

$$\Psi(\vec{e}_1) = \vec{v}_1, \quad \Psi(\vec{e}_2) = \vec{v}_2$$

gelten. Für diese lineare Abbildung müssen wir nun die Matrix-Darstellung $\mathcal{M}_\mathcal{E}[\Psi]$ bezüglich der Standardbasis finden. Das ist jedoch trivial (man kann es ablesen), denn es ist

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{e}_1) =& \vec{v}_1 = 4 \cdot \vec{e}_1 - \vec{e}_2,\\ \Psi(\vec{e}_2) =& \vec{v}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2.\\ \Rightarrow& \mathcal{M}_\mathcal{E}[\Psi] = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die inverse Matrix erhalten wir am schnellsten durch die transponierte Minoren-Matrix:

$$\mathcal{M}_\mathcal{E}[\Psi]^{-1} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Über die Transformationsformel erhalten wir damit die Matrix-Darstellung von A bezüglich der Eigenbasis S:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_S[A] =& \mathcal{M}_\mathcal{E}[\Psi]^{-1} \cdot \underbrace{\mathcal{M}_\mathcal{E}[A]}_{=A} \cdot \mathcal{M}_\mathcal{E}[\Psi] = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\\ =& \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(ii) [3 Punkte]
Hier müssen wir den längeren Weg gehen, und die Eigenwerte über die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned}\chi_B(\lambda) :=& \det(B - \lambda \mathbb{1}) = \det\left(\begin{pmatrix} 6-\lambda & 0 & 6 \\ -3 & -\lambda & -3 \\ 3 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) = -\det\left(\begin{pmatrix} 0 & 6-\lambda & 6 \\ -\lambda & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right)\\ =& \det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & -3 & -3 \\ 0 & 6-\lambda & 6 \\ 0 & 3 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) = (-\lambda) \cdot ((6-\lambda) \cdot (3-\lambda) - 3 \cdot 6)\\ =& -\lambda \cdot (\lambda^2 - 9\lambda) = -\lambda^2 \cdot (\lambda - 9)\end{aligned}$$

berechnen. Wir erhalten den zweifachen Eigenwert $\lambda_{1,2} = 0$ und den Eigenwert $\lambda_3 = 9$.
$\ker(B - 0 \cdot \mathbb{1})$:

$$\left.\begin{array}{ccc} 6 & 0 & 6 \\ -3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \end{array}\right\| \begin{array}{c} \\ +\frac{1}{2}(\mathrm{I}) \\ -\frac{1}{2}(\mathrm{I}) \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{ccc} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \begin{array}{c} :6 \\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right\| \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$\ker(B - 9 \cdot \mathbb{1})$:

$$\left.\begin{array}{ccc} -3 & 0 & 6 \\ -3 & -9 & -3 \\ 3 & 0 & -6 \end{array}\right\| \begin{array}{c} \\ -(\mathrm{I}) \\ +(\mathrm{I}) \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{ccc} -3 & 0 & 6 \\ 0 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \begin{array}{c} :(-3) \\ :(-9) \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right\| \Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Analog zu (i) können wir die Transformationsmatrix Ψ direkt ablesen:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E}}[\Psi] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse berechnen wir über den Gauß-Algorithmus:

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\| \Rightarrow \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\| \begin{array}{c} \\ \\ +(\mathrm{II}) \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right\| \begin{array}{c} \\ \\ :(3) \end{array}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right\| \begin{array}{c} +\,(\mathrm{III}) \\ \text{-2}(\mathrm{III}) \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right\|$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{E}}[\Psi]^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & -2/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Die Matrixdarstellung von B in der Eigenbasis $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ ist damit

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_S[B] =& \mathcal{M}_{\mathcal{E}}[\Psi]^{-1} \cdot B \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{E}}[\Psi] = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & -2/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ -3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & -2/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 11.3

Beweisen oder widerlegen Sie jeweils, dass die folgenden Matrizen diagonalisierbar sind:

$$(i)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 27-3i & 9 \\ 27+3i & \frac{\pi^2}{6} & -666i \\ 9 & 666i & 42 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3},$$

$$(ii)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 27 & 4i & 76+3i \\ 0 & -2 & 3i+5 & 4 \\ 0 & 0 & 3i & 333 \\ 0 & 0 & 0 & 2\pi i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4},$$

$$(iii)\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}.$$

Lösung. (i) [2 Punkte]

Beweis. Es ist $A = A^*$ selbstadjungiert und somit existiert nach dem Spektralsatz (Satz X.12) eine ONB aus Eigenvektoren von A. A ist also diagonalisierbar. □

(ii) [2 Punkte]

Beweis. Nach GÜ 12.2 sind die Eigenwerte von B gerade $\{1, -2, 3i, 2\pi i\}$ und diese sind paarweise verschieden. Damit ist $B \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ diagonalisierbar. □

(iii)[2 Punkte] C ist nicht diagonalisierbar, wie wir gleich sehen werden.

Beweis. C ist Block-diagonal und somit erhalten wir als charakteristisches Polynom:

$$\begin{aligned}\chi_C(\lambda) &= \det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 4 & 5-\lambda \end{pmatrix}\right) = (1-\lambda)^2 \cdot (2-\lambda) \cdot (5-\lambda).\end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind also $\{1, 2, 5\}$. Man kann zeigen, dass eine Matrix genau dann diagonalisierbar ist, wenn die algebraische Vielfachheit jedes Eigenwertes (also ob es eine 1-fache, 2-fache, ... Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist) gleich seiner geometrischen Vielfachheit (also die Dimension des Eigenraums) ist. In unserem Falle würde das bedeuten, dass 1, als Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2 einen 2-dimensionalen Eigenraum haben müsste. Wir rechnen nach: $\ker(B - 1 \cdot \mathbb{1})$:

$$\begin{array}{cccc|l} 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 4 & 4 & \text{-4(III)}|{:}4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc|} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc|} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \ker(B - \mathbb{1})\text{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right) \Rightarrow \dim(\ker(B - \mathbb{1})) = 1 < 2.$$

Wir sehen, dass dies nicht der Fall ist und könnten direkt schließen, dass C nicht diagonalisierbar ist (vgl. Bemerkungen und Beispiele nach Korollar X.7). Aber auch, wenn wir nichts von algebraischer und geometrischer Vielfachheit wissen, sehen wir, dass auch die anderen beiden Eigenwerte jeweils nur einen (lin unabh.) Eigenvektor besitzen, wegen:
$\ker(B - 2 \cdot \mathbb{1})$:

$$\begin{array}{cccc|l} -1 & 1 & 0 & 0 & {:}(-1) \\ 0 & -1 & 0 & 0 & {:}(-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 4 & 3 & {:}4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc|l} 1 & -1 & 0 & 0 & +(\text{II}) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc|} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc|} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \ker(B - 2 \cdot \mathbb{1}) = \text{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3/4 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right) \Rightarrow \dim(\ker(B - 2 \cdot \mathbb{1})) = 1$$

und

$\ker(B - 5 \cdot \mathbb{1})$:

$$\begin{array}{cccc|l} -4 & 1 & 0 & 0 & :(-4) \\ 0 & -4 & 0 & 0 & :(-4) \\ 0 & 0 & -3 & 0 & :(-3) \\ 0 & 0 & 4 & 0 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc|l} 1 & -1/4 & 0 & 0 & +1/4(II) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -4(III) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc|} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{-1} \end{array}$$

$$\Rightarrow \ker(B - 5 \cdot \mathbb{1}) = \operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right) \Rightarrow \dim(\ker(B - 5 \cdot \mathbb{1})) = 1.$$

Das zeigt aber, dass wir keine Basis von $\mathbb{C}^4$ mittels Eigenvektoren definieren können und damit kann C nicht diagonalisierbar sein. □

Aufgabe 11.4

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ -3 & 3 & -6 \\ 6 & -6 & -15 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

Begründen Sie, dass A diagonalisierbar ist. Berechnen Sie die Eigenwerte von A und eine Orthonormalbasis $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} \subseteq \mathbb{C}^3$ aus Eigenvektoren von A.

Lösung. Auch hier sehen wir, dass $A = A^*$ selbstadjungiert ist. Demnach wissen wir bereits, dass A diagonaliserbar sein muss, und dass wir eine ONB an Eigenvektoren finden können. Das charakterisitische Polynom ist

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) =& \det\left(\begin{pmatrix} 3-\lambda & -3 & 6 \\ -3 & 3-\lambda & -6 \\ 6 & -6 & -15-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ =& (3-\lambda)^2(-15-\lambda) + (-3)\cdot(-6)\cdot 6 + 6\cdot(-3)\cdot(-6) \\ & - (3-\lambda)\cdot(-6)\cdot(-6) - (-3)\cdot(-3)\cdot(-15-\lambda) - 6\cdot(3-\lambda)\cdot 6 \\ =& (9 - 6\lambda + \lambda^2)(-15-\lambda) + 81\lambda + 9\cdot 15 \\ =& \lambda\cdot(2\cdot 81 - 9\lambda - \lambda^2) = -\lambda\cdot(\lambda+18)\cdot(\lambda-9). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind also $\sigma(A) = \{0, 9, -18\}$. Die Eigenvektoren ergeben sich über $\ker(A)$:

$$\begin{array}{ccc|l} 3 & -3 & 6 & \\ -3 & 3 & -6 & +(I) \\ 6 & -6 & -15 & -2(I) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|l} 3 & -3 & 6 & :3 \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -27 & :(-27) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|} 1 & -1 & 2 \\ 0 & \color{red}{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \ker(A) = \operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

$\ker(A - 9 \cdot \mathbb{1})$:

$$\begin{array}{ccc|c} -6 & -3 & 6 & \text{-2(II)} \\ -3 & -6 & -6 & \\ 6 & -6 & -24 & +2\text{(II)} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 0 & 9 & 18 & :9 \\ -3 & -6 & -6 & :(-3) \\ 0 & -18 & -36 & :(-18) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & \\ 1 & 2 & 2 & \text{-2(I)} \\ 0 & 1 & 2 & \text{-(I)} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc|} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \color{red}{-1} \end{array} \quad \Rightarrow \ker(A - 9 \cdot \mathbb{1}) = \operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

$\ker(A + 18 \cdot \mathbb{1})$:

$$\begin{array}{ccc|c} 21 & -3 & 6 & :3 \\ -3 & 21 & -6 & :3 \\ 6 & -6 & 3 & :3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 7 & -1 & 2 & +7\text{(II)} \\ -1 & 7 & -2 & \\ 2 & -2 & 1 & +2\text{(II)} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 0 & 48 & -12 & \text{-4(III)} \\ -1 & 7 & -2 & :(-1) \\ 0 & 12 & -3 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & \\ 1 & -7 & 2 & \\ 0 & 12 & -3 & :12 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 2 & +7\text{(II)} \\ 0 & 1 & -1/4 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & \color{red}{-1} \end{array} \quad \Rightarrow \ker(A + 18 \cdot \mathbb{1}) = \operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/4 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

Wir wissen bereits, dass bei selbstadjungierten Matrizen die Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten orthogonal zueinander sind. Wir müssen die Vektoren also nur noch normieren und erhalten:

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \vec{a}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \; \vec{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$