Technische Universität Braunschweig

3. Übungsblatt

Upload: 02.05.2023.
Deadline: 09.05.2023, 10:00 Uhr (im Abgabeordner bei stud.ip).

Aufgabe 3.1

Geben Sie Beispiele von Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ an, mit

$$a_n \to \infty, \quad b_n \to 0, \quad \text{für } n \to \infty,$$

so dass

(a) $a_n \cdot b_n \to \infty$,

(b) $a_n \cdot b_n \to -\infty$,

(c) $a_n \cdot b_n \to c \in \mathbb{R}$,

(d) $a_n \cdot b_n$ beschränkt ist, aber nicht konvergiert.

Aufgabe 3.2

Untersuchen Sie die folgenden Reihen $(s_m)_{m=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und berechnen Sie ggf. den Grenzwert.

(a) $s_m = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{5}{3^{k+1}}$.

(b) $s_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{-k^2+1}{10k^2+3k+2}$.

(c) $s_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)}$.

(d) $s_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{3^{2k-1}5^{-k+2}}{2^{k+3}}$.

Aufgabe 3.3

Untersuchen Sie die folgenden Reihen $(s_m)_{m=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $s_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$.

(b) $s_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{4^k}$.

(c) $s_m = \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \frac{1}{3k^2+2k+1}$.

(d) $s_m = \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \frac{1}{k}$.

Aufgabe 3.4

Seien $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ und $s_m := \sum_{n=1}^m a_n$. Bestimmen Sie Umordnungen $(b_n)_{n=1}^\infty, (c_n)_{n=1}^\infty$, $b_n = a_{\sigma(n)}$, $c_n = a_{\tau(n)}$ von $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ so, dass $(u_m)_{m=1}^\infty$ und $(v_m)_{m=1}^\infty$, mit $u_m := \sum_{n=1}^m b_n$ und $v_m = \sum_{n=1}^m c_n$, konvergieren mit

$$\lim_{m\to\infty}\{u_m\} = -1, \quad \lim_{m\to\infty}\{v_m\} = 2.$$