Für bel. ZV X mit VF F gilt:

$P\{a < X \le b\} = F(b) - F(a)$, denn:

$$F(b) \underset{\text{Def.}}{=} P\{X \le b\} = P(\{X \le a\} \cup \{a < X \le b\}) \overset{\text{Add. von } P}{\underset{\text{3. Kolmogorov-Axiom}}{=}}$$

$$= \underbrace{P\{X \le a\}}_{\underset{\text{Def.}}{=} F(a)} + P\{a < X \le b\} = F(a) + P\{a < X \le b\} \quad \mid -F(a)$$

$\Rightarrow$ Beh.

Satz 7: 1) Seien $X_1, X_2, \dots, X_n$ stoch. unabh. und identisch verteilt (u.i.v) [engl. iid] (independently identically distributed) mit $EX_i = \mu \in \mathbb{R}$, und $\operatorname{Var} X_i = \sigma^2 \in [0, \infty)$, $i = 1, 2, \dots, n$

und sei $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$

Mittelwert der ZVen $X_1, X_2, \dots, X_n$

Dann gilt: (i) $E\overline{X} = \mu$ und (ii) $\operatorname{Var} \overline{X} = \frac{\sigma^2}{n}$

2) Seien $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$, stoch. unabh. $\qquad \sqrt{(-2)^2} = 2$

(normalvert. mit Parametern μ und σ^2)

Sei $\overline{X} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ und $Z := \frac{\overline{X} - E\overline{X}}{\sqrt{\operatorname{Var} \overline{X}}} \overset{(i)1)}{\underset{(ii)}{=}} \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

(Z: Z-Transformation bzw. Standardisierung von $\overline{X}$)

Dann gilt: $Z \sim N(0,1)$ (ist standardnormalvert.)

bzw. $F_Z(z) = \Phi(z)$ für alle $z \in \mathbb{R}$

Beweis: 1) i) $E\overline{X} = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{\text{RR.}}{\underset{(1),(2)}{=}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \overbrace{EX_i}^{=\mu} = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \underline{\underline{\mu}}$

Linearität des E-Wertes

ii) $\operatorname{Var} \overline{X} = \operatorname{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) \underset{\substack{\text{RR}(4) \\ \text{RR}(5)}}{=} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\operatorname{Var} X_i}_{= \sigma^2} = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \underline{\underline{\frac{\sigma^2}{n}}}$ $\square$

$X_1, \dots, X_n$ stoch. unabh.