Musterlösung DSV WS 16/17

A1

a) $y(n) = \frac{1}{4}\left(x(n) + 2\,x(n-1) + x(n-2)\right)$ 1P

b) $Y(e^{j\Omega}) = \frac{1}{4}\left(1 + 2\cdot e^{-j\Omega} + e^{-2j\Omega}\right)\cdot X(e^{j\Omega})$ 1P

c) $H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{4}\left(1 + 2e^{-j\Omega} + e^{-2j\Omega}\right)$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + e^{-j\Omega}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\cdot\left(1 + e^{-j\Omega}\right)\right)^2 \cdot \overbrace{\left(e^{j\frac{\Omega}{2}}\right)^2\cdot\left(e^{-j\frac{\Omega}{2}}\right)^2}^{=1}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\Omega}{2}} + e^{-j\frac{\Omega}{2}}\right)\right)^2 \cdot e^{-j\Omega}$$

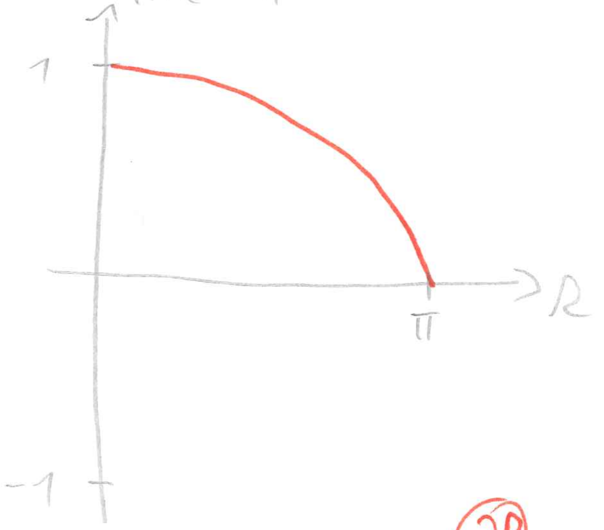
$$= \underbrace{\cos^2\left(\frac{\Omega}{2}\right)} \cdot e^{-j\Omega} \quad \left(= \underbrace{\frac{1}{2}\left(\cos(\Omega) + 1\right)} \cdot e^{-j\Omega}\right)$$

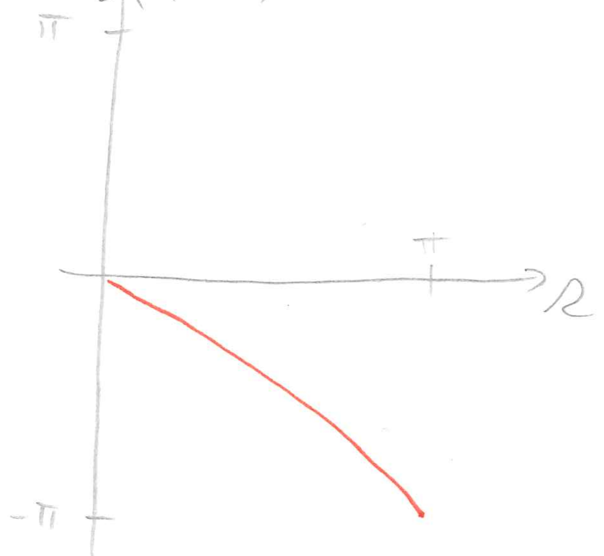
$=$

$\phi(\Omega) = -\Omega$ 3P

$|H(e^{j\Omega})| = \cos^2\left(\frac{\Omega}{2}\right)$

d)





2P

e)

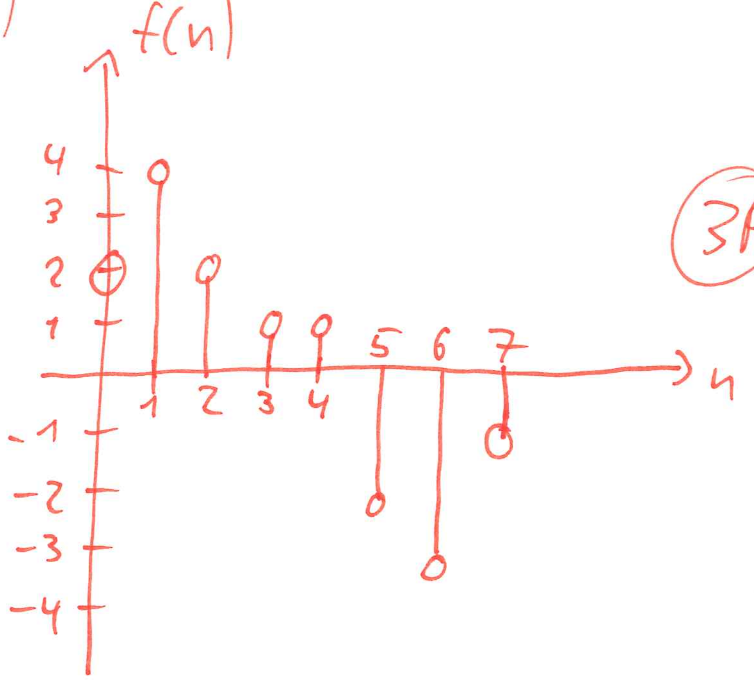
(2P)

f) NST bei $\Omega_0 = \pi$ weil $\cos^2\left(\frac{\Omega_0}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ (2P)

g) $N_g = 6$

$N_h = 3$ $\qquad N_{LF} = N_g + N_h - 1 = 8$

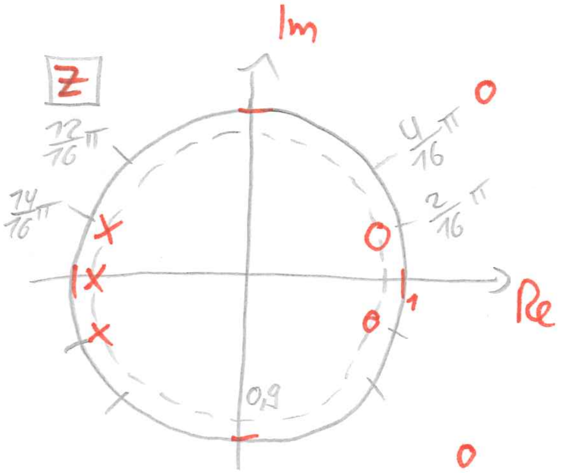
h)



(3P)

Aufgabe 2

a)



(2P)

b) Hochpass (1P)

c)

$$P_{OUT}(z) = \left(z - \frac{3}{2}\cdot e^{j\frac{4}{16}\pi}\right)\left(z - \frac{3}{2}\cdot e^{-j\frac{4}{16}\pi}\right)$$

$$\downarrow$$

$$P'_{OUT}(z) = \left(z - \frac{2}{3}\cdot e^{-j\frac{4}{16}\pi}\right)\left(z - \frac{2}{3}\cdot e^{j\frac{4}{16}\pi}\right)$$

$$\boxed{H_{AP}(z) = \frac{P_{OUT}(z)}{P'_{out}(z)}}$$

$$P_{Rest}(z) = \left(z - \frac{9}{10}\cdot e^{j\frac{2\pi}{16}}\right)\left(z - \frac{9}{10}\cdot e^{-j\frac{2\pi}{16}}\right)$$

$$Q(z) = \left(z - \frac{9}{10}\cdot e^{j\frac{14\pi}{16}}\right)\left(z - \frac{9}{10}\cdot e^{-j\frac{14\pi}{16}}\right)\left(z - \frac{9}{10}\cdot e^{-j\pi}\right)$$

$$\boxed{H_{min}(z) = \frac{P'_{OUT}(z)\cdot P_{Rest}(z)}{Q(z)}}$$

(3P)

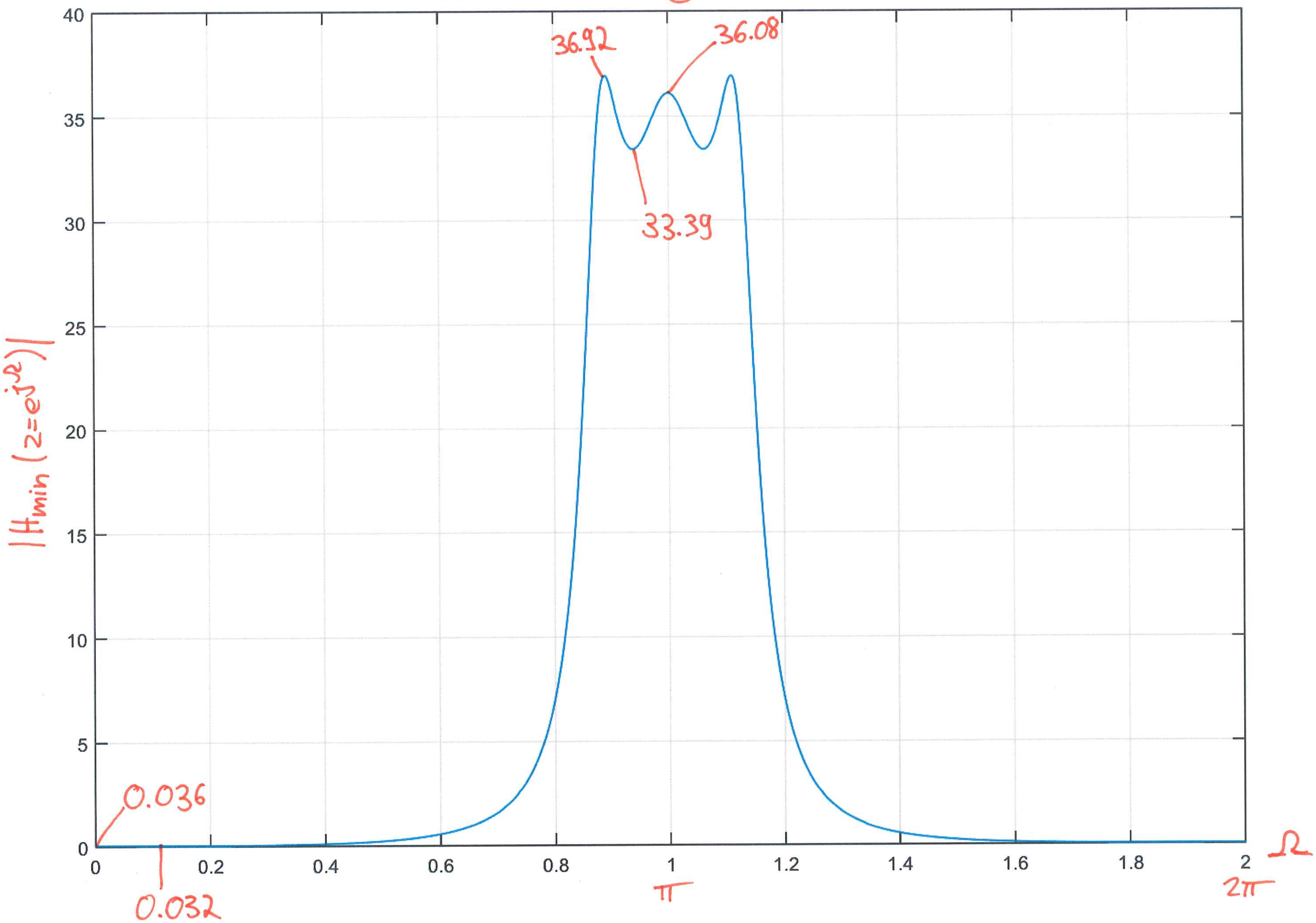
d)

$$|H_{AP}(\underbrace{z = e^{j0}}_{z=1})| = \left|\frac{\left(1 - \frac{3}{2}\cdot e^{j\frac{4\pi}{16}}\right)\left(1 - \frac{3}{2}\cdot e^{-j\frac{4\pi}{16}}\right)}{\left(1 - \frac{2}{3}\cdot e^{-j\frac{4\pi}{16}}\right)\left(1 - \frac{2}{3}\cdot e^{j\frac{4\pi}{16}}\right)}\right| = \frac{9}{4} = \frac{1}{\beta}$$

$$\beta = \frac{4}{9}$$

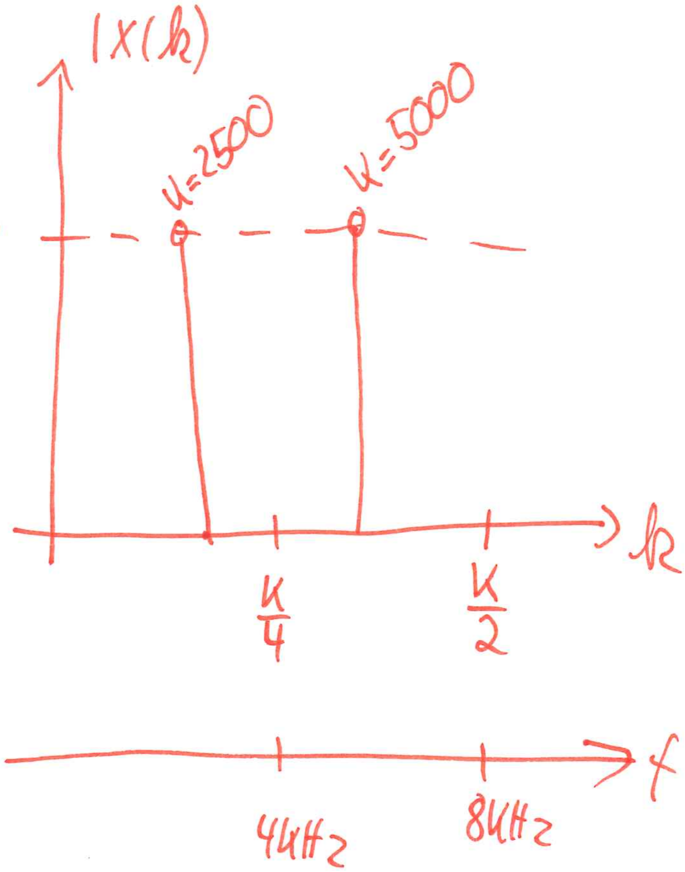
(1P)

Aufgabe 2e) 4P



Aufgabe 3

a)



b) Nein, da jeweils mindestens eine Periode beider Schwing. im Signalausschnitt $\{x(n_0), \ldots, x(n_0+K)\}$ enthalten sind.

1P

c) $$\sum_{n=n_0}^{n_0+K-1} |x(n)|^2 = 16000 = \frac{1}{K}\cdot\sum_{k=0}^{K-1}|X(k)|^2 \qquad K = 16000$$

⇒ nur für $k_1 = 2500$, $k_2 = 5000$, $k_3 = 11000$ und $k_4 = 13500$ ist $X(k)$ von Null verschieden. Für die genannten k sind die Amplituden gleich

$$\Rightarrow (16000)^2 = 4\cdot|X(k=k_1=k_2=k_3=k_4)|^2 \quad |:4 \ |\sqrt{\ }$$

$$|X(k=k_1=\ldots)| = 8000$$

$\boxed{k_3 / k_4 \text{ sind gespiegelt}}$

2P

d) $\frac{4\pi}{N} = \Delta\Omega = \frac{1}{10}\pi \Rightarrow N = 4\pi \cdot \frac{10}{\pi} = 40$

$N_b = N - 1 = 39$ (1P)

e) $d_{St}^{min} = -21\,dB$ (1P)

f) $h(n) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(n-19{,}5)\right)}{\pi(n-19{,}5)} & \text{für } n = 0, \ldots, N_b = 39 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ (1P)

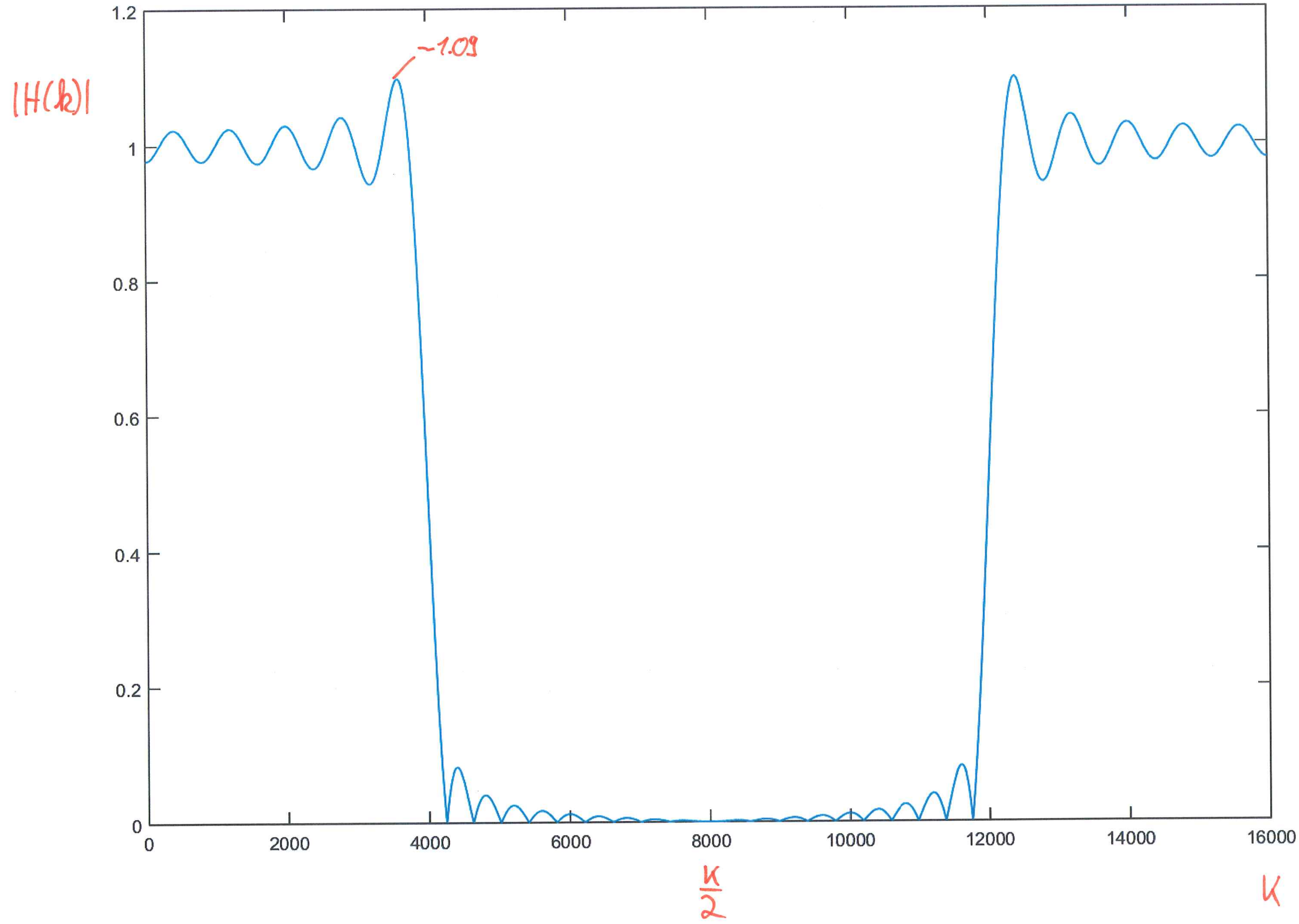
h) 1.09 (~9% Überschwingen "Gibbs") (1P)

i) Typ II FIR-Filter, weil N_b ungerade und $h(n)$ symmetrisch

$\Rightarrow$ NST bei $\Omega = \pi$ und somit bei $k = \frac{N}{2}$

(2P)

Aufgabe 3g (2P)



Aufgabe 4: Abtastratenwandlung

(11 Punkte)

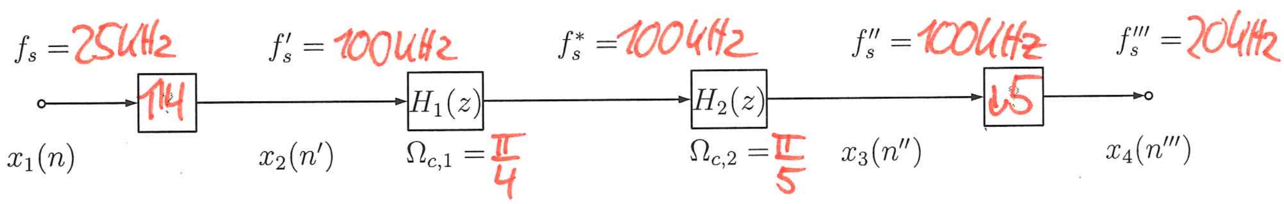
Auf Ihrem Speichermedium stehen Ihnen noch 76.800.000 Bit zur Verfügung. Sie möchten ein Audiosignal der Länge 4 Minuten mit einer Auflösung von 16 Bit pro Abtastwert speichern.

1P a) Wie lautet die maximale Abtastrate f_s''', mit der Sie den Zielspeicher komplett ausnutzen können? $f_s''' = \frac{76\,800\,000\,\text{Bit}}{4\,\text{min} \cdot 60\,\frac{\text{s}}{\text{min}} \cdot 16\,\frac{\text{Bit}}{\text{Abtastwert}}} = 20.000\,\text{Hz}$

Von einem Freund erhalten Sie ein Audiosignal $x_1(n)$ der Länge 4 Minuten, aufgelöst mit 16 Bit pro Abtastwert und einer Abtastrate von $f_s = 25000$ Hz. Sie entscheiden sich für eine Abtastratenwandlung, um es speichern zu können und nehmen einen möglichen Qualitätsverlust in Kauf.

1P b) Wie lautet das entsprechende teilerfremde Abtastratenverhältnis $r = \frac{p}{q}$ für die Abtastratenwandlung? $r = \frac{p}{q} = \frac{20\,\text{kHz}}{25\,\text{kHz}} = \frac{4}{5}$

3P c) Vervollständigen Sie das nachfolgende Blockschaltbild, um die gewünschte Abtastratenwandlung zu erreichen. Beschriften Sie alle Signale, Abtastraten, Blöcke und ggfs. benötigte Grenzfrequenzen. Nutzen Sie alle gezeigten Blöcke und achten Sie auf die korrekte Verwendung von gestrichenen Größen nach einem Wechsel der Abtastrate! Die Filter $H_1(z)$ und $H_2(z)$ sind als ideal anzunehmen. Geben Sie für beide Filter die entsprechenden Grenzfrequenzen $\Omega_{c,1}$ bzw. $\Omega_{c,2}$ an.



3P d) Zeichnen Sie die Betragsspektren $|X_2(e^{j\Omega'})|$, $|X_3(e^{j\Omega''})|$, $|X_4(e^{j\Omega'''})|$ in die dafür vorgesehenen Diagramme ein. Achten Sie auf eine korrekte Kennzeichnung der Amplitudenwerte.

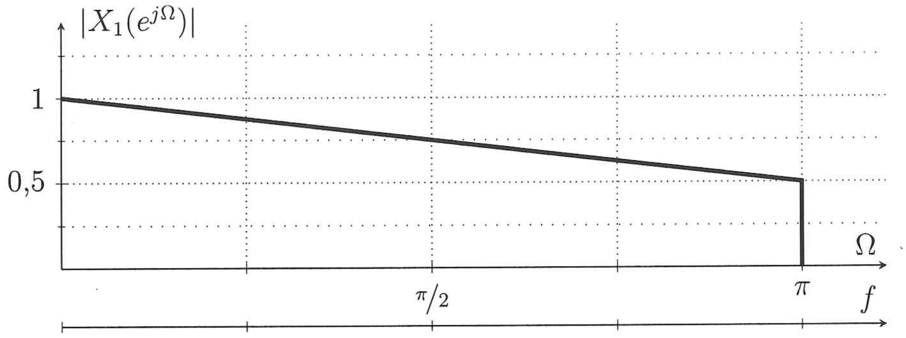
1P e) Die beiden idealen Filter $H_1(z)$ und $H_2(z)$ können zu *einem* Filter $H(z)$ zusammengefasst werden. Welche Spezifikation hat dieses Filter? $\Omega_c = \min\{\Omega_{c,1}, \Omega_{c,2}\} = \frac{\pi}{5}$

1P f) Geben Sie den Frequenzbereich an, in dem sich durch die Abtastratenwandlung ein Qualitätsverlust ergeben hat.

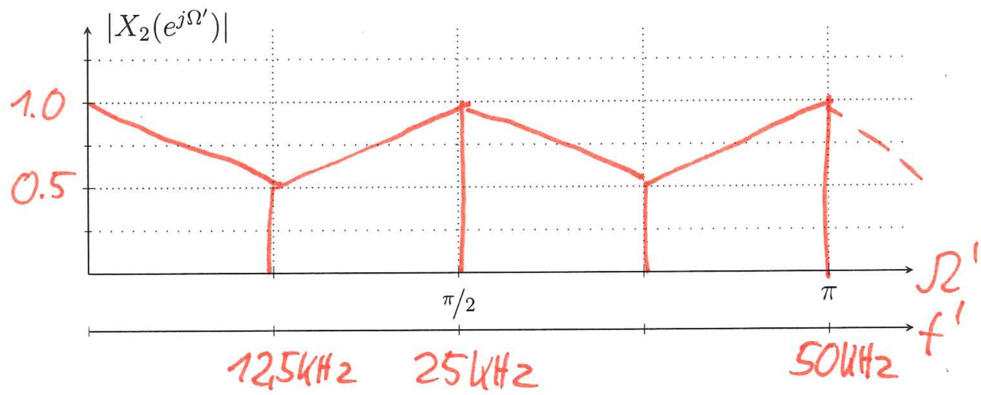
FIR: • hohe Qualität
• Komplexität und Verzögerung egal

1P g) Welcher Filtertyp (FIR oder IIR) bietet sich in diesem konkreten Anwendungsfall für die Realisierung des Tiefpasses an? Begründen Sie Ihre Antwort!

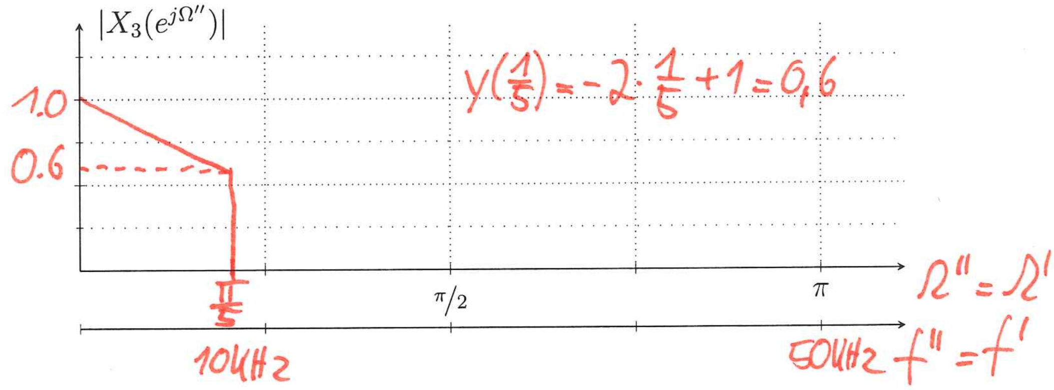
$10\,\text{kHz} < f \leq 12{,}5\,\text{kHz}$


$|X_1(e^{j\Omega})|$
1
0,5
Ω
$\pi/2$
π
f

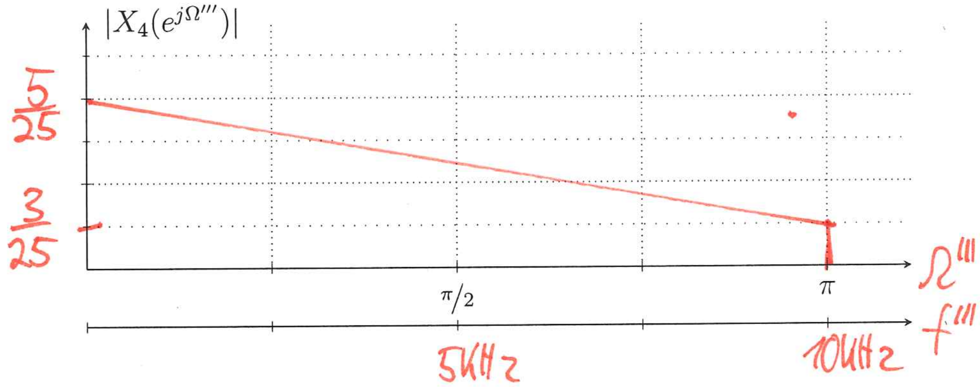
❶


$|X_2(e^{j\Omega'})|$
1.0
0.5
$\pi/2$
π
Ω'
f'
12,5kHz
25kHz
50kHz

❷


$|X_3(e^{j\Omega''})|$
$y(\frac{1}{5}) = -2 \cdot \frac{1}{5} + 1 = 0{,}6$
1.0
0.6
$\frac{\pi}{5}$
$\pi/2$
π
$\Omega'' = \Omega'$
10kHz
50kHz
$f'' = f'$

❸


$|X_4(e^{j\Omega'''})|$
$\frac{5}{25}$
$\frac{3}{25}$
$\pi/2$
π
Ω'''
5kHz
10kHz
f'''