# VII. Differentiation

In diesem Kapitel wollen wir den Begriff der Ableitung für reelle Funktionen einer reellen Variablen diskutieren. Der allgemeine Fall einer vektorwertigen Funktion wird später noch ausführlich behandelt.

## VII.1. Differenzierbare Funktionen

**Definition VII.1.** Seien $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.

(i) $f$ ist **bei** $x_0 \in U$ **differenzierbar** $:\Leftrightarrow$

$$f'(x_0) \;:=\; \lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right\} \;\in\; \mathbb{R} \tag{VII.1}$$

existiert. In diesem Fall heißt $f'(x_0)$ **Ableitung von** $f$ **bei** $x_0$, und wir schreiben auch

$$f'(x_0) \;=:\; \frac{df(x_0)}{dx} \;=:\; \left( \frac{d}{dx} f \right)(x_0). \tag{VII.2}$$

Der Quotient $\big(f(x) - f(x_0)\big)/(x - x_0)$, für $x \neq x_0$ heißt **Differenzenquotient**.

(ii) $f$ ist auf $U$ differenzierbar $:\Leftrightarrow$

$$\forall\, x_0 \in U : \quad f \text{ ist bei } x_0 \text{ differenzierbar.} \tag{VII.3}$$

**Lemma VII.2.** *Seien $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann gilt folgende Äquivalenz:*

$$\Big[ f \text{ ist bei } x_0 \in U \text{ differenzierbar} \Big] \;\Leftrightarrow \\ \Big\{ \exists\, c \in \mathbb{R}\; \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, |x - x_0| \leq \delta : \\ \Big| f(x) - \big(f(x_0) + c \cdot (x - x_0)\big) \Big| \;\leq\; \varepsilon \cdot |x - x_0| \Big\}. \tag{VII.4}$$

*In diesem Fall ist $c = f'(x_0)$.*

*Beweis.* Analog zum Beweis von Satz VI.6 (Äquivalenz von Stetigkeit und Folgenstetigkeit). $\square$

**Bemerkungen und Beispiele.**

- Glg. (VII.4) sagt, dass $f(x_0) + f'(x) \cdot (x - x_0)$ die beste lineare Approximation für $f(x)$ in einer Umgebung von $x_0$ ist.

  Die Gleichung lässt sich auch schreiben als

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x) - \big(f(x_0) + c \cdot (x - x_0)\big)}{x - x_0} \right| = 0.$$

**Lemma VII.3.** *Seien $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ bei $x_0 \in U$ differenzierbar. Dann ist $f$ in $x_0 \in U$ stetig.*

*Beweis.* Sei $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $U \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$, $n \to \infty$. Dann ist

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \big\{ f(x_n) \big\} \;&=\; \lim_{n\to\infty} \left\{ \left( \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \right) \cdot (x_n - x_0) \;+\; f(x_0) \right\} \\ &=\; \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \right\} \cdot \lim_{n\to\infty} \big\{ x_n - x_0 \big\} \;+\; f(x_0) \\ &=\; f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) \;=\; f(x_0). \end{aligned} \tag{VII.5}$$

□

**Satz VII.4.** *Seien $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f, g : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei $x_0 \in U$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind $f + \alpha g$, $f \cdot g : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei $x_0$, und es gelten*

*(i) die **Linearität**, d.h. es gilt*

$$\big(f + \alpha g\big)'(x_0) \;=\; f'(x_0) + \alpha g'(x_0), \tag{VII.6}$$

*(ii) die **Produktregel**,*

$$(f \cdot g)'(x_0) \;=\; f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) g'(x_0), \tag{VII.7}$$

*(ii) und, für $g(x_0) \neq 0$, die **Quotientenregel***

$$\left( \frac{f}{g} \right)'(x_0) \;=\; \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g(x_0)^2}. \tag{VII.8}$$

*Beweis.* Gleichung (VII.6) folgt aus

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} \left\{ \frac{(f + \alpha g)(x) - (f + \alpha g)(x_0)}{x - x_0} \right\} \;&=\; \lim_{x\to x_0} \left\{ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right\} + \alpha \lim_{x\to x_0} \left\{ \left( \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right\} \right. \\ &=\; f'(x_0) + \alpha g'(x_0). \end{aligned} \tag{VII.9}$$

Für den Beweis von (VII.7) benutzen wir die Stetigkeit von $f$ und $g$ bei $x_0$, nach Lemma VII.3. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \right\} \qquad \text{(VII.10)} \\
&= \lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{f(x)[g(x) - g(x_0)] + [f(x) - f(x_0)]g(x_0)}{x - x_0} \right\} \\
&= \lim_{x \to x_0} \{f(x)\} \cdot \lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right\} + \lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right\} \cdot g(x_0) \\
&= f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0).
\end{aligned}$$

Für $g(x_0) \neq 0$ ist

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{1}{(x - x_0)} \left( \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} \right) \right\} \qquad \text{(VII.11)} \\
&= \lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} \right\} = \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2},
\end{aligned}$$

was mit Hilfe der Produktregel über $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ sofort die Quotientenregel (VII.8) impliziert. ☐

**Satz VII.5** (Kettenregel)**.** *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}$ offen, $g : U \to V$ differenzierbar bei $x_0 \in U$ und $f : V \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei $g(x_0) \in V$. Dann ist $[f \circ g] : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei $x_0 \in U$, und es gilt*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big) \cdot g'(x_0). \qquad \text{(VII.12)}$$

*Beweis.* (*Beweisidee*) Da $g$ bei $x_0$ differenzierbar ist, ist $g$ in $x_0$ auch stetig, und mit $x_n \to x_0$ konvergiert auch $g(x_n) \to g(x_0)$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(x_0)\big)}{x - x_0} \right\} \qquad \text{(VII.13)} \\
&= \lim_{x \to x_0} \left\{ \left( \frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(x_0)\big)}{g(x) - g(x_0)} \right) \cdot \left( \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \right\} \\
&= \lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(x_0)\big)}{g(x) - g(x_0)} \right\} \cdot \lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right\} = f'\big(g(x_0)\big) \cdot g'(x_0).
\end{aligned}$$

Leider bereitet das Dividieren durch $g(x) - g(x_0)$ Schwierigkeiten, weil wir a priori nicht wissen, dass $g(x) - g(x_0) \neq 0$ gilt. Der volle Beweis ist daher formal etwas aufwändiger (aber ohne echte zusätzliche Schwierigkeiten). ☐

**Bemerkungen und Beispiele.**

- Seien $U := \mathbb{R}$ und $f_n(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$f_n'(x) = n\, x^{n-1}. \qquad \text{(VII.14)}$$

Um dies einzusehen, betrachten wir zunächst $n = 0, 1$. $f_0(x) - f_0(x_0) = 1 - 1 = 0$, für alle $x, x_0 \in \mathbb{R}$, also gilt

$$f_0' \;=\; 0 \quad \big(= 0 \cdot x^{-1}\big). \tag{VII.15}$$

Weiterhin ist

$$\lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0} \right\} \;=\; \lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{x - x_0}{x - x_0} \right\} \;=\; 1, \tag{VII.16}$$

also

$$f_1'(x) \;=\; 1 \quad \big(= 1 \cdot x^0\big). \tag{VII.17}$$

Gelte nun (VII.14) für alle $n \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}$. Dann ist nach der Produktregel

$$\begin{aligned} f_{N+1}'(x) \;&= (f_1 \cdot f_N)'(x) \;=\; f_1'(x) \cdot f_N(x) + f_1(x) \cdot f_N'(x) \\ &= 1 \cdot x^N + x \cdot N \cdot x^{N-1} \;=\; (N+1) \cdot x^N. \end{aligned} \tag{VII.18}$$

Somit folgt (VII.14) für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch Induktion.

- Seien $U := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f_n(x) = x^n, n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt wiederum

$$f_n'(x) \;=\; n\, x^{n-1}. \tag{VII.19}$$

Für $n < 0$ folgt dies aus der Quotientenregel,

$$\begin{aligned} f_n'(x) \;&=\; \Big(\frac{f_0}{f_{-n}}\Big)'(x) \;=\; \frac{1}{f_{-n}(x)^2} \Big( f_0'(x) \cdot f_{-n}(x) \;-\; f_0(x) \cdot f_{-n}'(x) \Big) \\ &= \frac{1}{x^{-2n}} \cdot \Big( 0 \;-\; 1 \cdot (-n) \cdot x^{-n-1} \Big) \;=\; n \cdot x^{n-1}. \end{aligned} \tag{VII.20}$$

- Sei $U = \mathbb{R}$, dann gilt

$$\big(e^x\big)' \;=\; e^x. \tag{VII.21}$$

Für $x \neq x_0$ ist nämlich

$$\frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} - e^{x_0} \;=\; e^{x_0} \Bigg( \frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} \;-\; 1 \Bigg) \;=\; e^{x_0} \Big( \frac{e^{x-x_0} - 1 - (x - x_0)}{x - x_0} \Big) \tag{VII.22}$$

und

$$\begin{aligned} \big| e^{x-x_0} - 1 - (x - x_0) \big| \;&\leq\; \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x - x_0|^k}{k!} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x - x_0|^{n+2}}{(n+2)!} \\ &\leq |x - x_0|^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x - x_0|^n}{n!} \;=\; |x - x_0|^2 \cdot e^{|x - x_0|}. \end{aligned} \tag{VII.23}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \left| \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} - e^{x_0} \right| \;&= e^{x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \left| \frac{e^{x-x_0} - 1 - (x - x_0)}{x - x_0} \right| \\ &\leq e^{x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \Big\{ |x - x_0| \cdot e^{|x - x_0|} \Big\} \;=\; 0. \end{aligned} \tag{VII.24}$$

# VII.2. Minima, Maxima und Mittelwertsatz

**Definition VII.6.** Seien $X \subseteq \mathbb{K}$ eine Menge und $f : X \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion auf $X$.

(i) Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt **lokales Minimum** von $f$ $:\Leftrightarrow$

$$\exists \delta > 0\ \forall x \in B_{\mathbb{K}}(x_0, \delta) \cap X : \qquad f(x) \ \geq \ f(x_0). \tag{VII.25}$$

(ii) Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt **globales Minimum** von $f$ $:\Leftrightarrow$

$$\forall x \in X : \qquad f(x) \ \geq \ f(x_0). \tag{VII.26}$$

(iii) Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt **lokales Maximum** von $f$ $:\Leftrightarrow$

$$\exists \delta > 0\ \forall x \in B_{\mathbb{K}}(x_0, \delta) \cap X : \qquad f(x) \ \leq \ f(x_0). \tag{VII.27}$$

(iv) Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt **globales Maximum** von $f$ $:\Leftrightarrow$

$$\forall x \in X : \qquad f(x) \ \leq \ f(x_0). \tag{VII.28}$$

**Satz VII.7.** *Seien $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0$ ein I.P. von $X$ und $f$ bei $x_0 \in X$ differenzierbar. Dann gilt:*

$$\Big[x_0 \text{ ist ein lokales Maximum oder Minimum}\Big] \ \Rightarrow \ \Big[f'(x_0) \ = \ 0\Big]. \tag{VII.29}$$

*Beweis.* Wir beweisen (VII.29) nur im Fall, dass $x_0$ ein lokales Minimum ist (die Behandlung des Falls eines lokalen Maximums ist analog). Es gibt also ein $\delta' > 0$ so, dass

$$\forall\, x \in (x_0 - \delta', x_0 + \delta') \cap X : \quad f(x) \ \geq \ f(x_0). \tag{VII.30}$$

Weil $x_0 \in X$ ein I.P. ist, können wir durch Wahl eines genügend kleinen $0 < \delta \leq \delta'$ erreichen, dass $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq X$ und daher sogar

$$\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : \quad f(x) \ \geq \ f(x_0) \tag{VII.31}$$

gilt. Für $n \in \mathbb{N}$ seien nun $x_n^{(\pm)} := x_0 \pm \frac{\delta}{2n}$ definiert, sodass $(x_n^{(\pm)})_{n=1}^\infty \in [(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}]^{\mathbb{N}}$ zwei Folgen in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ sind, die beide gegen $x_0$ konvergieren. Somit sind einerseits

$$f'(x_0) \ = \ \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{f(x_n^{(+)}) - f(x_0)}{x_n^{(+)} - x_0} \right\} \ = \ \lim_{n\to\infty} \left\{ \underbrace{\frac{2n}{\delta}}_{>0} \cdot \underbrace{\big[f(x_n^{(+)}) - f(x_0)\big]}_{\geq 0} \right\} \ \geq \ 0 \tag{VII.32}$$

und andererseits

$$f'(x_0) \ = \ \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{f(x_n^{(-)}) - f(x_0)}{x_n^{(-)} - x_0} \right\} \ = \ \lim_{n\to\infty} \left\{ \underbrace{\frac{-2n}{\delta}}_{<0} \cdot \underbrace{\big[f(x_n^{(-)}) - f(x_0)\big]}_{\geq 0} \right\} \ \leq \ 0, \tag{VII.33}$$

was zusammen $f'(x_0) = 0$ ergibt. ∎

Eine Anwendung dieses Satzes ist der nun folgende Mittelwertsatz.

**Satz VII.8** (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)**.** *Seien* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig auf* $[a,b]$ *und differenzierbar auf* $(a,b)$. *Dann gibt es einen Punkt* $x_0 \in (a,b)$, *so dass*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \;=\; f'(x_0). \tag{VII.34}$$

*Beweis.* Wir setzen $g : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$\forall\, x \in [a,b] : \quad g(x) \;:=\; \frac{f(b) - f(a)}{b-a} x \;-\; f(x). \tag{VII.35}$$

Dann ist auch $g$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf $(a,b)$.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Ist $g(x) \equiv c$ konstant auf $[a,b]$, so gilt

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} - f'(x) \;=\; g'(x) \;=\; 0, \tag{VII.36}$$

sogar für alle $x \in (a,b)$. (In diesem Fall ist nämlich der Graph von $f$ eine Gerade.)

2. Sei $g$ nicht konstant auf $[a,b]$. Weil $[a,b]$ kompakt und $g$ stetig auf $[a,b]$ sind, nimmt $g$ in $[a,b]$ sein Minimum und Maximum an, d.h. es gibt $x_{\min}, x_{\max} \in [a,b]$, so dass

$$g(x_{\min}) \;=\; \inf\big\{g([a,b])\big\}, \quad g(x_{\max}) \;=\; \sup\big\{g([a,b])\big\}, \tag{VII.37}$$

und weil $g$ nicht konstant ist, gilt

$$g(x_{\min}) \;<\; g(x_{\max}). \tag{VII.38}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} g(a) &= \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot a \;-\; f(a) \;=\; \frac{f(b)a \;-\; bf(a)}{b-a} \\ &= \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot b \;-\; f(b) \;=\; g(b). \end{aligned} \tag{VII.39}$$

Daher muss

$$\text{entweder:} \qquad x_{\max} \in (a,b) \qquad \text{und} \quad g\big(x_{\min}\big) \;=\; g(a) \;=\; g(b) \;<\; g\big(x_{\max}\big) \tag{VII.40}$$

$$\text{oder:} \qquad x_{\min} \in (a,b) \qquad \text{und} \quad g\big(x_{\min}\big) \;<\; g(a) \;=\; g(b) \;=\; g\big(x_{\max}\big) \tag{VII.41}$$

$$\text{oder (sogar):} \qquad x_{\min}, x_{\max} \in (a,b) \quad \text{und} \quad g\big(x_{\min}\big) \;<\; g(a) \;=\; g(b) \;<\; g\big(x_{\max}\big) \tag{VII.42}$$

gelten.

Gilt etwa (VII.41), so ist $x_{\min}$ ein innerer Punkt von $(a,b)$ und ein lokales Minimum von $g$ und deshalb nach Satz VII.7

$$0 = g'\big(x_{\min}\big) \;=\; \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'\big(x_{\min}\big), \tag{VII.43}$$

und $x_{\min}$ ist der gesuchte Punkt in (VII.34). Analog beweist man (VII.34) für (VII.40) und (VII.42). □

**Definition VII.9.** Seien $U \subseteq \mathbb{R}$ und $f : U \to \mathbb{R}$.

$$f \text{ heißt } \left\{ \begin{array}{lll} \textbf{monoton} & \textbf{steigend} & \\ \textbf{streng} & \textbf{monoton} & \textbf{steigend} \\ \textbf{monoton} & \textbf{fallend} & \\ \textbf{streng} & \textbf{monoton} & \textbf{fallend} \end{array} \right\} \text{ in } U$$

$$:\Leftrightarrow \; \forall\, x, x' \in U,\; x < x' : \quad \left\{ \begin{array}{lcl} f(x) & \leq & f(x') \\ f(x) & < & f(x') \\ f(x) & \geq & f(x') \\ f(x) & > & f(x') \end{array} \right. . \tag{VII.44}$$

**Satz VII.10.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar in $(a,b)$. Dann gelten*

$$\left( \forall\, x \in (a,b) : \;\; f'(x) \left\{ \begin{array}{c} \geq \\ > \\ \leq \\ < \\ = \end{array} \right\} 0 \right) \;\; \Rightarrow \;\; \left( f \;\, \textit{ist} \left\{ \begin{array}{c} \textit{monoton steigend} \\ \textit{streng monoton steigend} \\ \textit{monoton fallend} \\ \textit{streng monoton fallend} \\ \textit{konstant} \end{array} \right\} \textit{in } [a,b] \right). \tag{VII.45}$$

*Beweis.* Seien $x, x' \in [a,b]$ und $x < x'$. Dann ist die Einschränkung von $f$ auf $[x, x']$ auch stetig auf $[x, x']$ und differenzierbar auf $(x, x')$. Nach dem Mittelwertsatz VII.5 gibt es also einen Punkt $x_0 \in (x, x')$, so dass

$$f(x') - f(x) \;=\; (x' - x) \cdot f'(x_0). \tag{VII.46}$$

Somit ist wegen $x' - x > 0$

$$\left( f'(x_0) \left\{ \begin{array}{c} > \\ < \\ = \end{array} \right\} 0 \right) \quad \Rightarrow \quad \left( f(x) \left\{ \begin{array}{c} < \\ > \\ = \end{array} \right\} f(x') \right). \tag{VII.47}$$

□

**Bemerkungen und Beispiele.**

- Die Umkehrung "$\Leftarrow$" gilt in (VII.45) im Allgemeinen nicht. So ist beispielsweise $f(x) := x^3$ auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton steigend, aber $f'(0) = 0$.
- Es gilt aber eine etwas schwächere Aussage als Umkehrung von (VII.45), nämlich

$$\left( f \text{ ist} \left\{ \begin{matrix} \text{monoton steigend} \\ \text{monoton fallend} \\ \text{konstant} \end{matrix} \right\} \text{in } [a,b] \right) \quad \Rightarrow \quad \left( \forall\, x \in (a,b): \ f'(x) \left\{ \begin{matrix} \geq \\ \leq \\ = \end{matrix} \right\} 0 \right). \tag{VII.48}$$

## VII.3. Höhere Ableitungen und der Satz von Taylor

**Definition VII.11.** Seien $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und $n \in \mathbb{N}$.

(i) $f$ ist **bei $\mathbf{x_0} \in \mathbf{U}$ n-mal differenzierbar**.

:$\Leftrightarrow$ Es gibt ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in (x_0 - \delta\, ,\, x_0 + \delta)$:

$$\begin{aligned} &f \text{ ist differenzierbar bei } x \text{ und } f'(x) := \tfrac{df}{dx}\,(x), \\ &f'(x) \text{ ist differenzierbar bei } x \text{ und } f''(x) := \tfrac{d}{dx}\,[f'](x), \\ &f''(x) \text{ ist differenzierbar bei } x \text{ und } f'''(x) := \tfrac{d}{dx}\,[f''](x), \\ &\qquad\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ &f^{(n-2)}(x) \text{ ist differenzierbar bei } x \text{ und } f^{(n-1)}(x) := \tfrac{d}{dx}\,[f^{(n-2)}](x), \\ &f^{(n-1)}(x) \text{ ist differenzierbar bei } x_0 \text{ und } f^{(n)}(x_0) := \tfrac{d}{dx}\,[f^{(n-1)}](x_0). \end{aligned} \tag{VII.49}$$

Wir schreiben die k. Ableitung auch als

$$\frac{d^k f}{dx^k}\,(x) \ := \ f^{(k)}(x). \tag{VII.50}$$

(ii) $f$ ist **auf U n-mal differenzierbar.**

:$\Leftrightarrow$

$$\forall\, x_0 \in U : \quad f \text{ ist bei } x_0 \text{ n-mal differenzierbar.} \tag{VII.51}$$

**Satz VII.12** (Taylor)**.** *Seien $a, b, x_0 \in \mathbb{R}$ mit $a < x_0 < b$, $n \in \mathbb{N}$, und $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ auf $(a,b)$ $(n+1)$-mal differenzierbar. Dann gibt es zu jedem $x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$ ein $x' \in (x, x_0)$ [falls $x < x_0$] bzw. $x' \in (x_0, x)$ [falls $x > x_0$], sodass*

$$f(x) \ = \ T_n[f, x_0; x] \ + \ R_{n+1}[f, x_0; x], \tag{VII.52}$$

*wobei*

$$T_n[f, x_0; x] \ := \ \sum_{k=0}^{n} \left\{ \frac{(x-x_0)^k}{k!}\, f^{(k)}(x_0) \right\} \tag{VII.53}$$

$$= f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}\, f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}\, f^{(n)}(x_0)$$

*das* ***Taylorpolynom*** **n.** ***Ordnung*** *und*

$$R_{n+1}[f, x_0; x] \;:=\; \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(x') \tag{VII.54}$$

*das* ***Taylorsches Restglied*** $(\mathbf{n+1})$*.* ***Ordnung*** *sind.*

*Beweis.* Wir können $x > x_0$ annehmen, der Beweis für $x < x_0$ ist analog. Für alle $t \in [x_0, x]$ setzen wir

$$p(t) \;:=\; \sum_{k=0}^{n} \left\{ \frac{(t-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \right\}, \tag{VII.55}$$

$$\lambda \;:=\; \frac{(n+1)!}{(x-x_0)^{n+1}} \big( f(x) - p(x) \big) \tag{VII.56}$$

und

$$g(t) \;:=\; f(t) - p(t) - \frac{\lambda}{(n+1)!}\,(t-x_0)^{n+1}. \tag{VII.57}$$

Beachte, dass für $\ell = 0, 1, 2, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} \frac{d^\ell p(t)}{dt^\ell} \;&=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\; \frac{d^\ell\big[(t-x_0)^k\big]}{dt^\ell} \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot k \cdot \frac{d^{\ell-1}\big[(t-x_0)^{k-1}\big]}{dt^{\ell-1}} \\ &=\; \ldots \;=\; \sum_{k=\ell}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-\ell)!}\,(t-x_0)^{k-\ell}. \end{aligned} \tag{VII.58}$$

Somit ist

$$g^{(\ell)}(t) \;=\; f^{(\ell)}(t) \;-\; \sum_{m=0}^{n-\ell} \frac{f^{(m+\ell)}(x_0)}{m!}\,(t-x_0)^m \;-\; \frac{\lambda (t-x_0)^{n+1-\ell}}{(n+1-\ell)!}. \tag{VII.59}$$

Insbesondere sind

$$g(x_0) \;=\; f(x_0) - \frac{f(x_0)}{0!} + 0 - 0 \;=\; 0, \tag{VII.60}$$

$$g^{(1)}(x_0) \;=\; f'(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!} + 0 - 0 \;=\; 0, \tag{VII.61}$$

$$\vdots$$

$$g^{(n)}(x_0) \;=\; f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0) \;=\; 0 \tag{VII.62}$$

und

$$g^{(n+1)}(t) \;=\; f^{(n+1)}(t) - \lambda. \tag{VII.63}$$

Nach Wahl von $\lambda$ in (VII.56) folgt außerdem $g(x) = 0$, also

$$g(x_0) \;=\; g(x) \;=\; 0. \tag{VII.64}$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $x_1 \in (x_0, x)$, so dass $g'(x_1) = 0$. Also gilt

$$g'(x_0) \;=\; g'(x_1) \;=\; 0, \tag{VII.65}$$

und der Mittelwertsatz impliziert abermals die Existenz eines $x_2 \in (x_0, x_1)$ mit $g''(x_2) = 0$, also

$$g''(x_0) \;=\; g''(x_2) \;=\; 0, \tag{VII.66}$$

und damit wieder $g'''(x_3) = 0$ für ein gewisses $x_3 \in (x_0, x_2)$ u.s.w. Schließlich erhalten wir ein $x_{n+1} \in (x_0, x_n) \subseteq (x_0, x_{n-1}) \subseteq \ldots \subseteq (x_0, x)$ mit

$$0 \;=\; g^{(n+1)}\big(x_{n+1}\big) \;=\; f^{(n+1)}\big(x_{n+1}\big) - \lambda, \tag{VII.67}$$

also

$$f(x) \;=\; p(x) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}\big(x_{n+1}\big), \tag{VII.68}$$

und $x_{n+1} \in (x_0, x)$ ist der gesuchte Punkt $x'$. $\square$

**Bemerkungen und Beispiele.**

- Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt mit $f(x) := e^x$

  $$f^{(n+1)}(x) \;=\; f^{(n)}(x) \;=\; \ldots \;= f'(x) \;=\; f(x) \;=\; e^x, \tag{VII.69}$$

  und insbesondere

  $$f(0) \;=\; f'(0) \;=\; f''(0) \;=\; f^{(n)}(0) \;=\; 1. \tag{VII.70}$$

  Also ist

  $$\forall\, x \in \mathbb{R}: \quad \left| e^x - \left\{ 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \right\} \right| \;\leq\; \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{|x|}, \tag{VII.71}$$

  denn für $x' \in (-x, x)$ ist $e^{x'} \leq e^{|x|}$.

- Für $x = 1$ und $n = 10$ erhält man

  $$\left| e - \left\{ 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{10!} \right\} \right| \;=\; \big| e - (2,718281801) \big| \;\leq\; \frac{e}{11!} \;\leq\; e \cdot 0,000002505, \tag{VII.72}$$

  also

  $$2,71827 \;\leq\; \frac{2,718281801}{1,000002505} \;\leq\; e \;\leq\; \frac{2,718281801}{0,999997495} \;\leq\; 2,71829. \tag{VII.73}$$

- Sei folgende Aufgabe gestellt: *Berechne* $\sin(\frac{1}{10})$ *mit einer Genauigkeit von mindestens* $10^{-6}$.

Dazu wenden wir Satz VII.12 von Taylor auf $f(x) = \sin(x)$ mit $a = -\infty$, $b = \infty$ und $x_0 := 0$ an und berechnen die Ableitungen von $f$,

$$f^{(0)}(x) \;=\; \sin(x), \quad f^{(1)}(x) \;=\; \cos(x), \quad f^{(2)}(x) \;=\; -\sin(x), \quad f^{(3)}(x) \;=\; -\cos(x), \tag{VII.74}$$

u.s.w. Insbesondere sind dann

$$f^{(0)}(0) \;=\; 0, \quad f^{(1)}(0) \;=\; 1, \quad f^{(2)}(0) \;=\; 0, \quad f^{(3)}(0) \;=\; -1, \; \ldots \tag{VII.75}$$

und wir erhalten

$$T_6[\sin, 0; x] \;=\; 0 + \frac{1}{1!}x + 0 + \frac{-1}{3!}x^3 + 0 + \frac{1}{5!}x^5 + 0 \;=\; x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \tag{VII.76}$$

sowie

$$R_7[\sin, 0; x] \;=\; \frac{-\cos(x')}{7!}x^7. \tag{VII.77}$$

Wegen $|\cos(x')| \leq 1$ ist nach dem Satz VII.12 von Taylor dann für alle $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$,

$$\left|\sin(x) - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\right| \;=\; |R_7[\sin, 0; x]| \;\leq\; \frac{|x|^7}{7!} \;=\; \frac{|x|^7}{5040}. \tag{VII.78}$$

Wählen wir $x = \frac{1}{10}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &\left|\sin(\tfrac{1}{10}) - \big(0,1 - 0,0001\bar{6} + 0,00000008\bar{3}\big)\right| \\ &\quad = \left|\sin(\tfrac{1}{10}) - (0,09983341\bar{6})\right| \;\leq\; \frac{10^{-7}}{5000} \;=\; 2\cdot 10^{-11}, \end{aligned} \tag{VII.79}$$

d.h. mit nur drei Termen approximieren wir die Sinusfuktion von $\frac{1}{10}$ sogar mit einer Genauigkeit von $2 \cdot 10^{-11}$!

- Setzen wir in (VII.53) $n = \infty$, so erhalten wir $f(x)$ *formal* aus einer Potenzreihe um $x_0$, der Taylorreihe,

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k. \tag{VII.80}$$

Für viele Funktionen kann man die Konvergenz dieser Reihe durch Abschätzung der Taylorschen Restglieder in beliebig hoher Ordnung gewinnen. Aus (VII.71) sieht man, dass dies z.B. für $f(x) = e^x$ gelingt, und in der Tat ist die $e^x$ definierende Potenzreihe V.6 gerade die Taylorreihe um $x_0 = 0$.

- Es gibt aber auch viele Funktionen, für die (VII.80) falsch ist. Betrachten wir z.B.

$$f(x) \;:=\; \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases} \tag{VII.81}$$

so ist $f(x) > 0$, für $x \neq 0$, aber

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_0 : \quad f^{(n)}(0) \;=\; 0, \tag{VII.82}$$

d.h. die Taylorreihe von $f$ um $x_0 = 0$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \equiv 0, \tag{VII.83}$$

verschwindet identisch. Damit konvergiert die Taylorreihe von $f$ zwar, hat jedoch mit der Funktion $f$ nichts zu tun!

- Eine Anwendung der Taylorschen Formel (VII.52) ist die Kurvendiskussion.

  Ist $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so verschwindet zwar bei lokalem Maximum oder Minimum die Ableitung $f'$, es ist aber noch nicht klar, wie man entscheiden kann, ob es sich auch wirklich um ein Maximum oder Minimum handelt. Dies lässt sich erst bei Betrachtung der höheren Ableitungen sagen; Darüber gibt Satz VII.13 Auskunft.

**Satz VII.13.** *Seien $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, und $f : U \to \mathbb{R}$ eine auf $U$ $n$-mal differenzierbare Abbildung. Sei weiterhin $x_0 \in U$, und gelte*

$$f'(x_0) \;=\; f''(x_0) \;=\; \ldots \;= f^{(n-1)}(x_0) \;=\; 0,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0, \tag{VII.84}$$

*und sei $f^{(n)}$ stetig in $x_0$. Dann liegt folgende Situation lokal bei $x_0$ vor:*

- *Ist $n$ gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$, so ist $x_0$ ein lokales Minimum;*
- *Ist $n$ gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$, so ist $x_0$ ein lokales Maximum;*
- *Ist $n$ ungerade, so ist $x_0$ ein Wendepunkt von $f$.*

*Beweis.* Wir zeigen nur, dass für gerades $n = 2k \geq 2$, also $k \in \mathbb{N}$ und $f^{(2k)}(x_0) > 0$ ein lokales Minimum vorliegt. Seien $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ und $0 < \delta \ll 1$. Nach dem Satz von Taylor gibt es ein $x'$ mit $|x' - x_0| \leq |x - x_0|$, so dass

$$\begin{aligned} f(x) \;&= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^{2k-1}}{(2k-1)!}\, f^{(2k-1)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{2k}}{(2k)!}\, f^{(2k)}(x') \\ &= f(x_0) + \frac{(x - x_0)^{2k}}{(2k)!}\, f^{(2k)}(x'). \end{aligned} \tag{VII.85}$$

Da $f^{(2k)}$ in $x_0$ stetig ist, gibt es ein $\delta' > 0$, so dass

$$\forall\, |x' - x_0| < \delta' : \quad \big|f^{(2k)}(x') - f^{(2k)}(x_0)\big| \;\leq\; \frac{1}{2}\, f^{(2k)}(x_0), \tag{VII.86}$$

für $|x' - x_0| < \delta'$ also

$$f^{(2k)}(x') \;\geq\; f^{(2k)}(x_0) - \big|f^{(2k)}(x) - f^{(2k)}(x_0)\big| \;\geq\; \frac{1}{2}\, f^{(2k)}(x_0) > 0. \tag{VII.87}$$

Somit gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x' - x_0| < \min\{\delta, \delta'\}$ auch

$$f(x) \;\geq\; f(x_0) + \frac{(x - x_0)^{2k}}{(2k)!}\, \frac{f^{(2k)}(x_0)}{2} \;\geq\; f(x_0). \tag{VII.88}$$

□

# VII.4. Ergänzungen

## VII.4.1. Beweis der Kettenregel

*Beweis.* (Beweis von Satz VII.5) Sei $\alpha > 0$. Dann gibt es gemäß Lemma VII.2 ein $\beta > 0$, so dass, für alle $y \in V$ mit $|y - g(x_0)| \leq \beta$ auch

$$\Big| f(y) - \big\{ f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(y - g(x_0)) \big\} \Big| \;\leq\; \alpha_i |y - g(x_0)| \tag{VII.89}$$

gilt. Wir setzen $\gamma := \min\{\beta, \alpha, 1\} > 0$. Weiterhin gibt es zu $\gamma > 0$ ein $\eta > 0$, so dass, für alle $x \in U$ mit $|x - x_0| \leq \eta$ auch

$$\Big| g(x) - \big\{ g(x_0) + g'(x_0) \cdot (x - x_0) \big\} \Big| \;\leq\; \gamma |x - x_0| \tag{VII.90}$$

gilt. Wir setzen

$$\kappa \;:=\; \min \Big\{ \eta, \frac{\gamma}{|g'(x_0)| + \gamma} \Big\} > 0. \tag{VII.91}$$

Dann gilt für alle $|x - x_0| \leq \kappa$:

$$\Big| g(x) - g(x_0) \Big| \;\leq\; \Big( |g'(x_0)| + \beta \Big) |x - x_0| \;\leq\; \gamma, \tag{VII.92}$$

also auch

$$\begin{aligned} &\Big| f[g(x)] - \big\{ f[g(x_0)] + f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0) \cdot (x - x_0) \big\} \Big| \\ &\qquad \leq \Big| f[g(x)] - \big\{ f[g(x_0)] + f'[g(x_0)] \cdot (g(x_0) - g(x_0)) \big\} \Big| \\ &\qquad\quad + \;\Big| f'[g(x_0)] \Big| \cdot \Big| g(x) - \big\{ g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) \big\} \Big|, \end{aligned} \tag{VII.93}$$

und somit

$$\begin{aligned} &\Big| f[g(x)] - \big\{ f[g(x_0)] + f'(g(x_0)] g'(x_0)(x - x_0) \big\} \Big| \\ &\qquad \leq \alpha |g(x) - g(x_0)| \;+\; \gamma |x - x_0| \;\leq\; \Big[ \alpha |g'(x_0)| \;+\; \alpha\gamma + \gamma \Big] \cdot |x - x_0| \\ &\qquad \leq \alpha \Big( |g'(x_0)| + 2 \Big) \cdot |x - x_0|, \end{aligned} \tag{VII.94}$$

da $\gamma \leq \min\{1, \alpha\}$.

Für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ wählen wir $\alpha := \varepsilon \cdot \big( |g'(x_0)| + 2 \big)^{-1}$ und anschließend $\beta, \gamma, \eta$, und $\kappa =: \delta > 0$, wie in (VII.89)–(VII.91). Somit gilt für alle $|x - x_0| \leq \delta$:

$$\Big| f[g(x)] - \big\{ f[g(x_0)] + f'[(g(x_0)] \cdot g'(x_0) \cdot (x - x_0) \big\} \Big| \;\leq\; \varepsilon \cdot |x - x_0|. \tag{VII.95}$$

$\square$

## VII.4.2. Zwischenwertsatz für die Ableitung

Für eine differenzierbare Funktion $f$ ist die Ableitung $f'$ im Allgemeinen nicht stetig, es gilt aber die folgende Aussage:

**Lemma VII.14.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf $(a,b)$. Seien $x, x' \in (a,b)$ mit $x < x'$, und $f'(x) < f'(x')$. Dann gibt es für jedes $f'(x) < \lambda < f'(x')$ ein $x < t < x'$, so dass $f'(t) = \lambda$.*

*Beweis.* Wir setzen

$$\forall\, x < t < x' : \quad g(t) := f(t) - \lambda \cdot t, \tag{VII.96}$$

so dass,

$$g'(x) \;=\; f'(x) - \lambda < 0, \quad g'(x') \;=\; f'(x') - \lambda > 0. \tag{VII.97}$$

Daher gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\forall\, t \in (x, x+\delta) : \qquad g(x) > g(t), \tag{VII.98}$$

$$\forall\, t \in (x'-\delta, x') : \qquad g(t) < g(x'). \tag{VII.99}$$

Somit muss $g$ in $(x, x')$ ein lokales Minimum haben, d.h.

$$\exists\, t \in (x, x') : \quad 0 \;=\; g'(t) \;=\; f'(x) - \lambda. \tag{VII.100}$$

□

## VII.4.3. $0/0$ und $\infty/\infty$ – Der Satz von L'Hospital

**Satz VII.15** (L'Hospital). *Seien $U \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in U$ ein innerer Punkt und $f, g : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei $x_0 \in U$. Seien weiterhin*

$$f(x_0) = g(x_0) = 0, \quad \forall\, 0 < |x - x_0| \le \delta : \; g(x) \neq 0 \tag{VII.101}$$

*für ein gewisses $\delta > 0$, und $g'(x_0) \neq 0$. Dann lässt sich $f(x)/g(x)$ stetig in $x_0$ fortsetzen mit*

$$\lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\} \;=\; \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \tag{VII.102}$$

*Beweis.* Für jedes $\alpha > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $0 < |x - x_0| \le \delta$

$$|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| \;\le \alpha |x - x_0|, \tag{VII.103}$$

$$|g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x - x_0)| \;\le \alpha |x - x_0|. \tag{VII.104}$$

Ist $0 < \alpha \le \frac{1}{2}|g'(x_0)|$, so gilt auch insbesondere

$$|g(x)| \;\ge\; \big(|g'(x_0)| - \alpha\big)|x - x_0| \;\ge\; \frac{g'(x_0)}{2}\,|x - x_0| \;>\; 0, \tag{VII.105}$$

für alle $0 < |x - x_0| \leq \delta$. Damit erhalten wir

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\right| = \left|\frac{\big(f'(x_0) + \alpha_f(x)\big)(x - x_0)}{\big(g'(x_0) + \alpha_g(x)\big)(x - x_0)} - \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\right|, \tag{VII.106}$$

wobei $|\alpha_f(x)|,\ |\alpha_g(x)| \leq \alpha$ sind. Also ist, für alle $0 < |x - x_0| \leq \delta$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\right| &= \left|\frac{f'(x_0) + \alpha_f(x)}{g'(x_0) + \alpha_g(x)} - \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\right| \\
&= \frac{1}{|g'(x_0)| \cdot |g'(x_0) + \alpha_g(x)|} \cdot \big|\alpha_f(x) \cdot g'(x_0) - \alpha_g(x) \cdot f'(x_0)\big| \\
&\leq \frac{2\alpha}{|g'(x_0)|^2} \big(|g'(x_0)| + |f'(x_0)|\big).
\end{aligned} \tag{VII.107}$$

Ist nun $\varepsilon < 0$ vorgegeben, so wählen wir

$$\alpha := \frac{|g'(x_0)|^2}{2\big(|g'(x_0)| + |f'(x_0)|\big)} \cdot \min\{\varepsilon, 1\} > 0, \tag{VII.108}$$

und beobachten, dass $\alpha \leq |g'(x_0)|/2$. Also ist,

$$\forall\, 0 < |x - x_0| \leq \delta : \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\right| \leq \varepsilon \tag{VII.109}$$

und somit

$$\lim_{x \to x_0} \left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \tag{VII.110}$$

$\square$