Technische Universität Braunschweig

Decision Support
Institut für Wirtschaftsinformatik

Operations Research

Vorlesung 10

Graphen und Netzwerke: Knotenorientiere Rundreisen – Traveling Salesman

Wiederholung

- Neue Art der Modellierung: Graphentheorie
- Minimale Spannbäume
- Kürzeste Wege in Graphen
- Maximale Flüsse in Netzwerken
- Kantenorientiertes Rundreisen

Überblick

1. Traveling Salesman Problem
2. Branch & Bound Verfahren: Zuordnung
3. Historie und Stand der Verfahrensentwicklung

Überblick

1. **Traveling Salesman Problem**
2. Branch & Bound Verfahren: Zuordnung
3. Historie und Stand der Verfahrensentwicklung

Knotenorientierte Rundreisen

- Aufgabenstellungen
  1. Erstellen Sie eine distanzminimale Tour für ein Paketlieferfahrzeug in einer ländlichen Region!
  2. Bestimmen Sie die distanzminimale Führung einer Bohrmaschine durch die Bohrpositionen auf Leiterplatten!

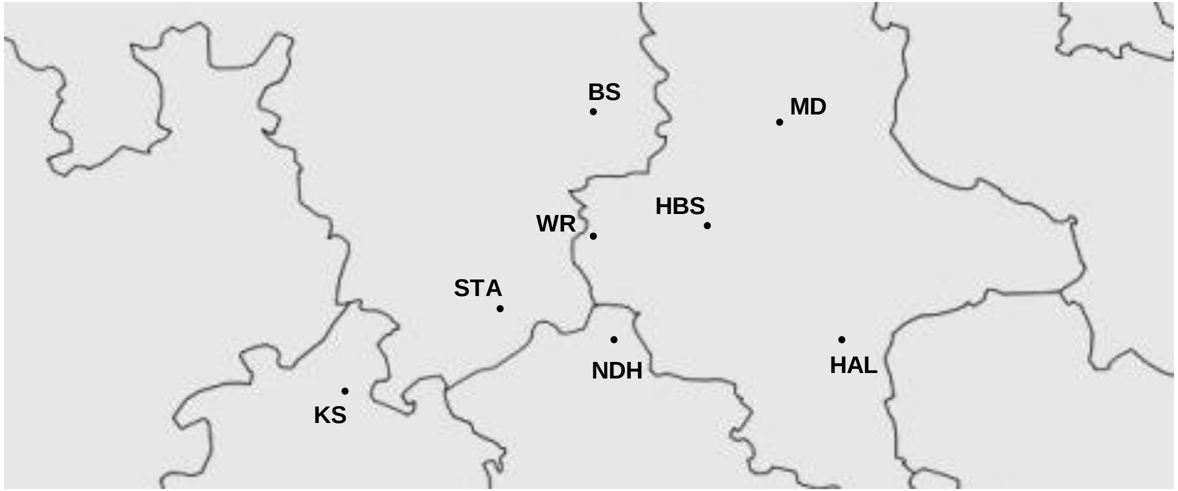
- Beide Aufgabenstellungen fragen nach einer Kosten-, bzw. Distanz-minimalen Rundtour, bei der alle Knoten eines zusammenhängenden Netzwerkes durchlaufen werden müssen.

- Varianten knotenorientierter Rundreisen
  - Rückkehr zum Ausgangsknoten?
  - Wird jeder Knoten genau einmal besucht?

Traveling Salesman Problem (TSP)

- Problem des Handlungsreisenden:
  Ein Handlungsreisender muss nacheinander eine fest vorgegebene Anzahl von Städten jeweils einmal besuchen. Am Ende der Reise muss er wieder zum Ursprungsort zurückkehren.
- Gesucht:
  Die Reihenfolge der Städte, welche die Reiseentfernung minimiert.
- Voraussetzung:
  Vollständiges Netzwerk N mit Knotenmenge V und Distanzmatrix D: $N = (V, D)$.
- Komplexität:
  - N Städte $\Rightarrow$ $(N-1)!$ alternative Traveling Salesman Touren
  - Bsp.: $N = 13$ $\Rightarrow$ ~ $500 * 10^6$ Alternativen
  - Ein Algorithmus mit polynomieller Laufzeit existiert nicht

Mitteldeutschland TSP



Untersuchung Mitteldeutschland: $N = 8 \Rightarrow 5040$ mögliche TSP-Touren

Mitteldeutschland-TSP: Entfernungsmatrix (in km)

c_{ij}	BS	HAL	HBS	KS	MD	NDH	STA	WR
BS	0	131	55	127	77	86	62	51
HAL	131	0	78	172	76	82	103	91
HBS	55	78	0	125	48	47	42	20
KS	127	172	125	0	173	92	83	106
MD	77	76	48	173	0	91	90	67
NDH	86	82	47	92	91	0	30	37
STA	62	103	42	83	90	30	0	23
WR	51	91	20	106	67	37	23	0

Quelle: https://www.luftlinie.org/

Traveling Salesman Problem: Modellformulierung

Das TSP als Zuordnungsproblem

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls Stadt } j \text{ unmittelbar nach Stadt } i \text{ besucht wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Min $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

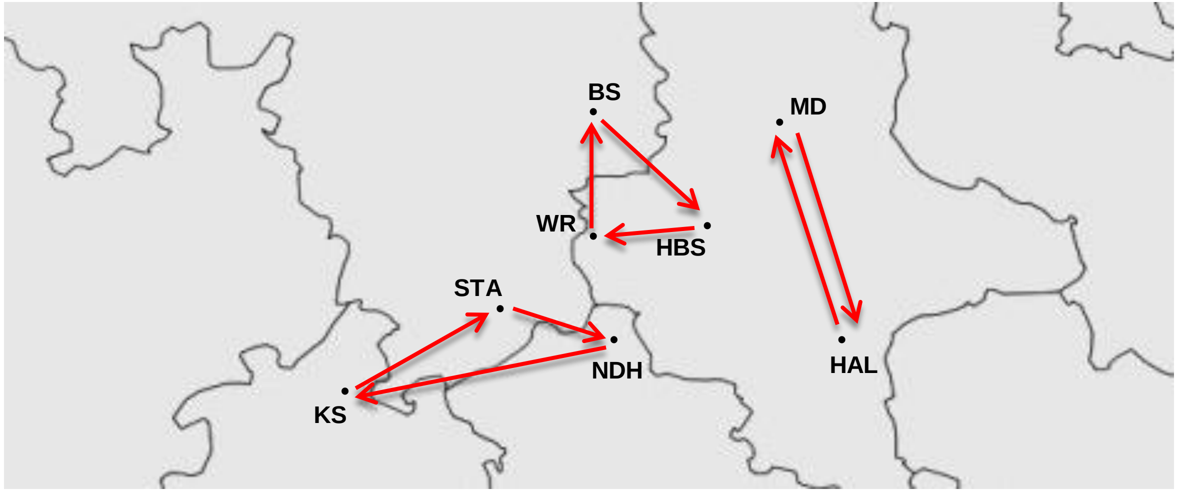
u.d.N. $\displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ij} = 1$ $\quad\forall i$ „jede Stadt wird genau einmal verlassen"

$\displaystyle\sum_{i=1, i\neq j}^{n} x_{ij} = 1$ $\quad\forall j$ „jede Stadt wird genau einmal angesteuert"

$x_{ij} \in \{0,1\}$ $\quad\forall i, j$

Lösung des Zuordnungsproblems

Streckenlänge: 483 [km]



Kurzzyklen entstanden ➔ keine gültige TSP Tour

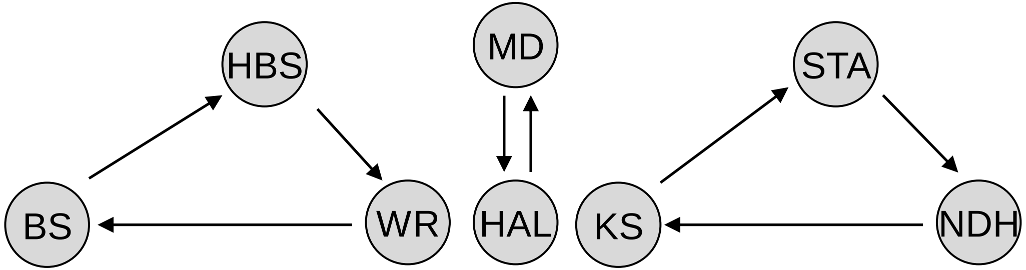
Einführung von Zyklusbedingungen (zur Verhinderung von Kurzzyklen)

- Hier: Bedingungen von Miller-Tucker-Zemlin;
  alternativ: Bedingungen von Dantzig-Fulkerson-Johnson
- Führe für jeden der n Knoten außer i = 1 eine reelle Hilfsvariable u_i ein
  u_i: „Nummer" der Stadt i auf der Rundreise
- Formulierung von $(n - 1) \cdot (n - 2)$ Zyklusbedingungen:

$$u_i - u_j + n * x_{ij} \leq n - 1 \qquad \forall\, i, j = 2, \dots, n \text{ und } i \neq j$$

Beispiel für Wirksamkeit:

8 Knoten, 3 Kurzzyklen:



Die drei Kurzzyklen ζ_1 = (BS-HBS-WR-BS), ζ_2 =(MD-HAL-MD) und ζ_3 =(KS-STA-NDH-KS) seien optimale Lösung des betrachteten Rundreiseproblems ohne Zyklusbedingungen.

Funktionsweise der Zyklusbedingungen nach Miller-Tucker-Zemlin

Idee: Führe eine Hilfsvariable u_i ein, welche für jede Stadt außer dem Start- und Zielort innerhalb der Rundreise den Index der Stadt in der Tour bezeichnet

Diese Variablen müssen nun an die Kantenvariablen x_{ij} gekoppelt werden – dazu wird folgende Restriktion verwendet:

$$u_i - u_j + n \cdot x_{ij} \leq n - 1 \qquad \forall\, i, j = 2, \ldots, n \text{ und } i \neq j$$

Fall 1: $x_{ij} = 0$ → j ist nicht direkter Nachfolger von i

Umformung ergibt: $u_i - u_j \leq n - 1$

Ist wahr für alle möglichen Belegungen von u_i und u_j da wir nur Werte $\leq n$ haben!

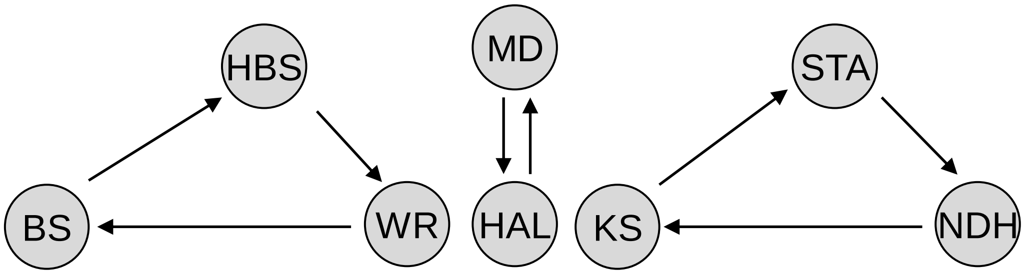
Fall 2: $x_{ij} = 1$ → j ist direkter Nachfolger von i

Umformung ergibt: $u_j \geq u_{i+1}$

→ Der Index jedes Ortes j (außer Start- und Zielort) innerhalb der Tour muss um mindestens 1 größer sein als der seines Vorgängers

→ In Kurzzyklen ist diese Bedingung für mindestens ein x_{ij} verletzt!

Einführung von Zyklusbedingungen (zur Verhinderung von Kurzzyklen)



$x_{BS,HBS} = 1, x_{WR-BS} = 1, x_{HBS,WR} = 1$

$x_{MD,HAL} = 1, x_{HAL,MD} = 1$

$x_{KS,STA} = 1, x_{STA,NDH} = 1, x_{NDH,KS} = 1$

$(n-1) \cdot (n-2) = (8-1) \cdot (8-2) = 7 \cdot 6 = 42$ Zyklusbedingungen

Bsp.: für ζ_1 :

$$u_{BS} - u_{HBS} + 8\, x_{BS,HBS} \leq 7$$

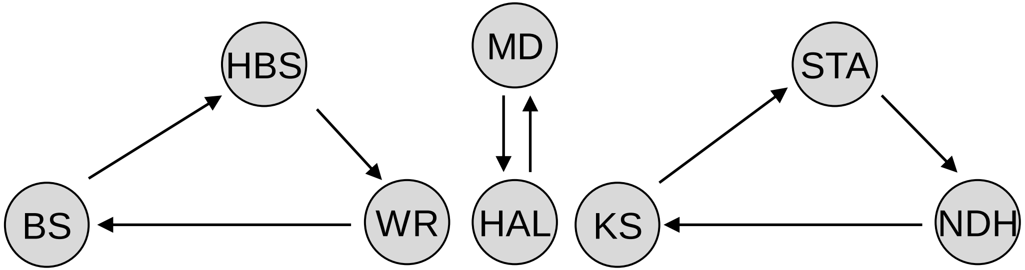
$$u_{HBS} - u_{WR} + 8\, x_{HBS,WR} \leq 7$$

$$u_{WR} - u_{BS} + 8\, x_{WR,BS} \leq 7$$

Für die oben angegebene Lösung ergibt die Addition der Restriktionen: $8 + 8 + 8 \leq 7 + 7 + 7$

→ Die Lösung verletzt die Zyklusbedingungen!

Einführung von Zyklusbedingungen (zur Verhinderung von Kurzzyklen)



$x_{BS,HBS} = 1, x_{WR-BS} = 1, x_{HBS,WR} = 1$

$x_{MD,HAL} = 1, x_{HAL,MD} = 1$

$x_{KS,STA} = 1, x_{STA,NDH} = 1, x_{NDH,KS} = 1$

$(n-1)\cdot(n-2) = (8-1)\cdot(8-2) = 7\cdot 6 = 42$ Zyklusbedingungen

Bsp.: für ζ_1: $u_{BS} - u_{HBS} + 8\, x_{BS-HBS} \leq 7$

$u_{HBS} - u_{WR} + 8\, x_{HBS-WR} \leq 7$

$u_{WR} - u_{BS} + 8\, x_{WR-BS} \leq 7$

für ζ_2: $u_{MD} - u_{HAL} + 8\, x_{MD-HAL} \leq 7$

$u_{HAL} - u_{MD} + 8\, x_{HAL-MD} \leq 7$

für ζ_3: $u_{KS} - u_{STA} + 8\, x_{KS-STA} \leq 7$

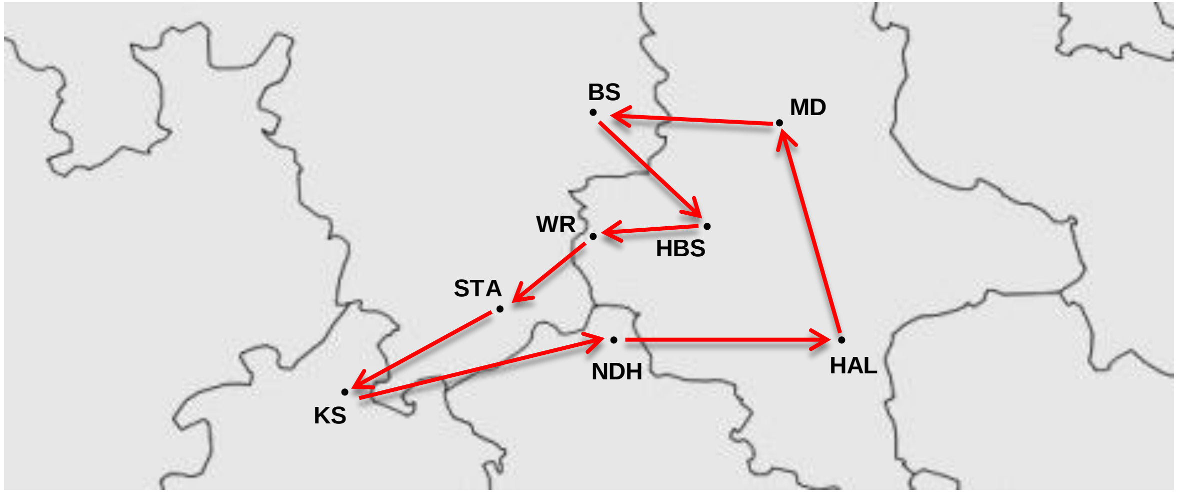
$u_{STA} - u_{NDH} + 8\, x_{STA-NDH} \leq 7$

$u_{NDH} - u_{KS} + 8\, x_{NDH-KS} \leq 7$

Lösung nach Einführung der Kurzzyklusbedingungen

Streckenlänge: 508 [km]

(mit Kurzzyklen: 483 [km])



Aber: Für große Instanzen nicht effizient lösbar!

Untere Schranken für das TSP

- Das Traveling Salesman Problem weist Ähnlichkeiten zu einigen bereits betrachteten einfacheren Problemstellungen auf, für die ein exaktes Lösungsverfahren mit polynomialer Laufzeit angegeben werden kann.
- Diese Problemstellungen können als Relaxation des TSP betrachtet werden, die in Branch and Bound Algorithmen Verwendung finden können.
- Relaxationen vereinfachen das zu lösende Problem und führen daher zu optimistischen Zielfunktionswerten (→Untere Schranken bei Minimierung).
- Untere Schranken für das TSP werden durch eine Relaxationen als Zuordnungsproblem erreicht

Überblick

1. Traveling Salesman Problem
2. **Branch & Bound Verfahren: Zuordnung**
3. Historie und Stand der Verfahrensentwicklung

Branch and Bound: Schritte

- Obere Schranken sind durch die jeweils besten bekannten ganzzahligen Lösungen von Teilproblemen gegeben.
- Untere Schranken werden durch Lösung vereinfachter Probleme gewonnen.
- Im Optimum (min) gilt: „größte untere Schranke = kleinste obere Schranke“.

Drei wesentliche Schritte sind auszugestalten:

a) **Relaxation:** Wie entwerfe ich ein einfacher zu lösendes Problem ?

b) **Separation:** Wie generiere ich die folgenden Teilprobleme?

c) **Auslotung:** In welchem Teilproblem wird das Verfahren fortgesetzt?

Relaxation durch das Zuordnungsproblem

TSP mit Zyklusbedingungen
(Miller-Tucker-Zemlin)

Min $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

u.d.N.

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall i$$

$$\sum_{i=1, i\neq j}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall j$$

$$u_i - u_j + n \cdot x_{ij} \leq n-1 \qquad \forall\, i,j = 2,\dots,n \text{ und } i \neq j$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i,j$$

$$u_i \geq 0 \qquad \forall i$$

Relaxation des TSP
als Zuordnungsproblem

Min $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

u.d.N.

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall i$$

$$\sum_{i=1, i\neq j}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall j$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i,j$$

Separation über Vermeidung von Kurzzyklen

- Die Relaxation über das Zuordnungsproblem lässt Kurzzyklen zu, ist dafür schnell zu berechnen.
- Die Verzweigung vermeidet Kurzzyklen, indem weitere Teilprobleme im Entscheidungsbaum einzelne, in Kurzzyklen involvierte Kanten schrittweise verboten werden.
- Die bestehenden Kurzzyklen sollen so sukzessive zu einer Rundreise vereinigt werden.
- Um den Baum klein zu halten, werden zunächst nur die Kanten der kleinsten Kurzzyklen (gemessen in der Anzahl von Kanten) verboten.

B&B Verfahren am Mitteldeutschland Problem I

- Obere Schranke durch Heuristik
  - → Vorlesung 11
  - Bester Nachfolger mit Startknoten BS
  - Tour BS-WR-HBS-STA-NDH-HAL-MD-KS-BS
  - Länge = 601

- Untere Schranke durch Zuordnungsproblem:
  - drei Kurzzyklen
    - BS-WR-HBS-BS
    - MD-HAL-MD
    - KS-STA-NDH-KS
  - Länge = 487

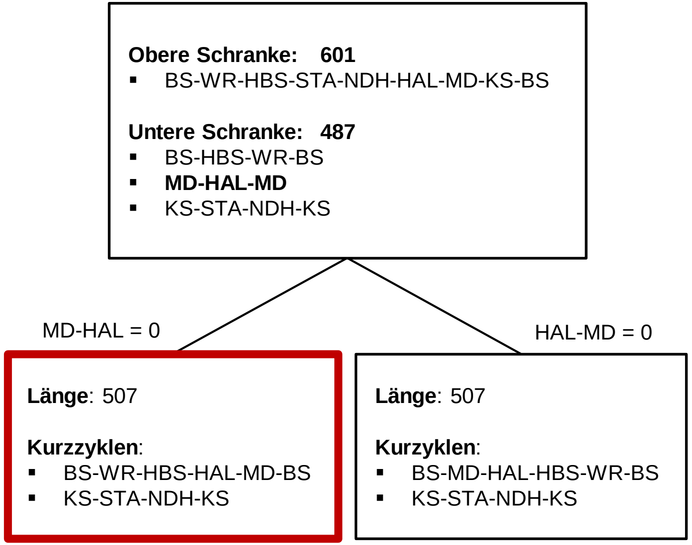
Obere Schranke: 601
- BS-WR-HBS-STA-NDH-HAL-MD-KS-BS

Untere Schranke: 487
- BS-HBS-WR-BS
- MD-HAL-MD
- KS-STA-NDH-KS

B&B Verfahren am Mitteldeutschland Problem II

- **Schritt I:**
  - Auswahl des kürzesten Zyklus: MD-HAL-MD
  - Da noch unbekannt ist, ob man MD-HAL oder HAL-MD zur Erreichung der optimalen Lösung ausschließt, zerlegt man das Gesamtproblem in zwei Teilprobleme
  - Separation bezüglich MD-HAL-MD:
    - MD-HAL = 0
    - HAL-MD = 0

- Da die Distanzmatrix symmetrisch ist, wird hier nur der linke Zweig vorgestellt

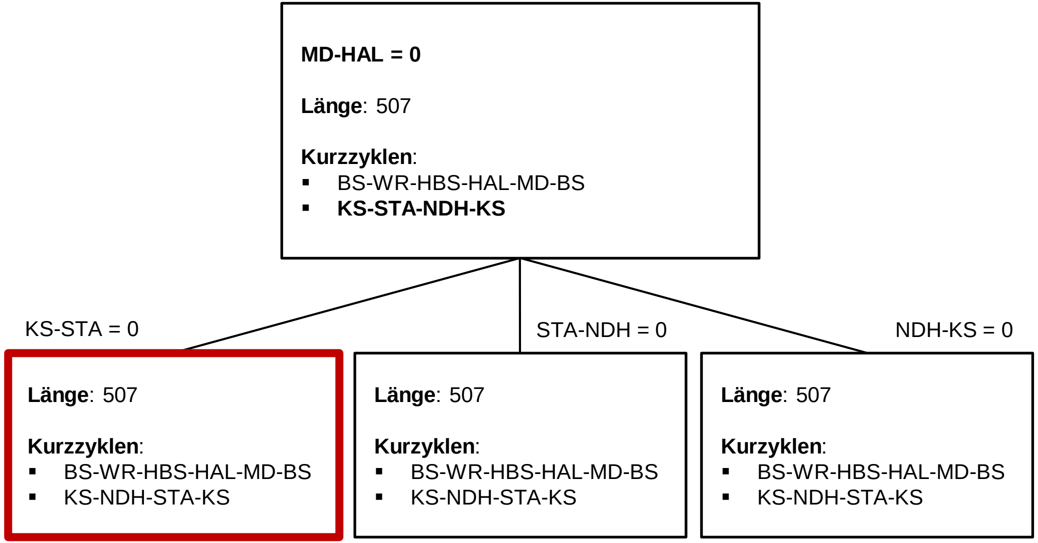


B&B Verfahren am Mitteldeutschland Problem III

- **Schritt II:**
  - Auswahl des kürzesten Zyklus: KS-STA-NDH-KS
  - Separation bezüglich KS-STA-NDH-KS:
    - KS-STA = 0
    - STA-NDH = 0
    - NDH-KS = 0

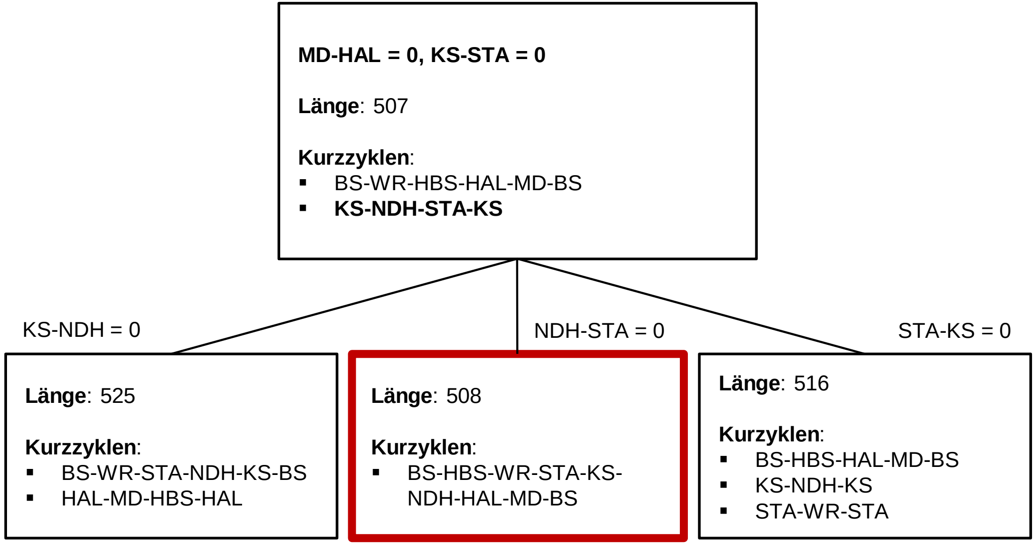
- Da die Distanzmatrix symmetrisch ist, entstehen hier zunächst die kleine Tour in umgekehrter Reihenfolge.

- Wir wählen für den nächsten Schritt beispielhaft den linken Zweig.



B&B Verfahren am Mitteldeutschland Problem IV

- **Schritt III:**
  - Auswahl des kürzesten Zyklus: KS-NDH-STA-KS
  - Separation bezüglich KS-NDH-STA-KS:
    - KS-NDH = 0
    - NDH-STA = 0
    - STA-KS = 0



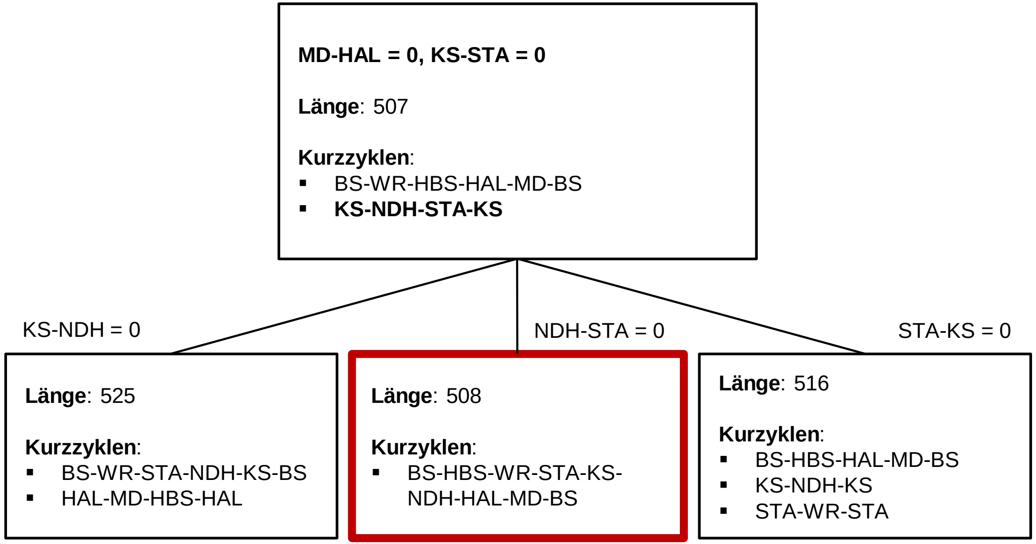
- Neue unzulässige Lösung gefunden:
  - BS-HBS-WR-STA-KS-NDH-HAL-MD-BS
  - Länge = 508
  - Neue obere Schranke

B&B Verfahren am Mitteldeutschland Problem V

- Neue unzulässige Lösung gefunden:
  - BS-HBS-WR-STA-KS-NDH-HAL-MD-BS
  - Länge = 508
  - **Neue obere Schranke**

- Somit sind die anderen Blätter aus Schritt III ausgelotet und müssen nicht weiter betrachtet werden.

- Theoretisch müssten noch die Blätter aus Schritt II weiter separiert werden. Da die optimale Lösung aber bereits bekannt ist, wird an dieser Stelle darauf verzichtet.

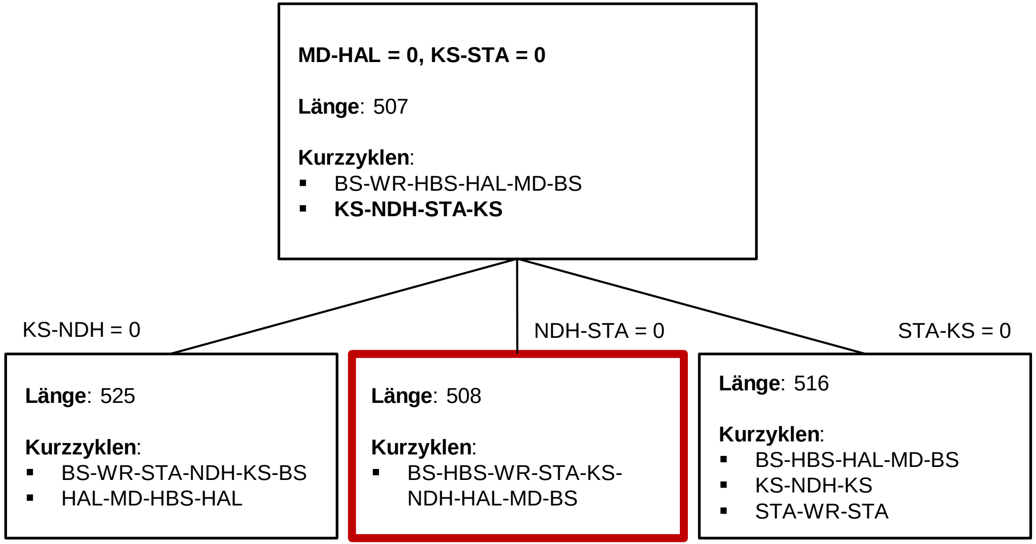


B&B Verfahren am Mitteldeutschland Problem V

- Neue unzulässige Lösung gefunden:
  - BS-HBS-WR-STA-KS-NDH-HAL-MD-BS
  - Länge = 508
  - **Neue obere Schranke**

- Somit sind die anderen Blätter aus Schritt III ausgelotet und müssen nicht weiter betrachtet werden.

- Theoretisch müssten noch die Blätter aus Schritt II weiter separiert werden. Da die optimale Lösung aber bereits bekannt ist, wird an dieser Stelle darauf verzichtet.

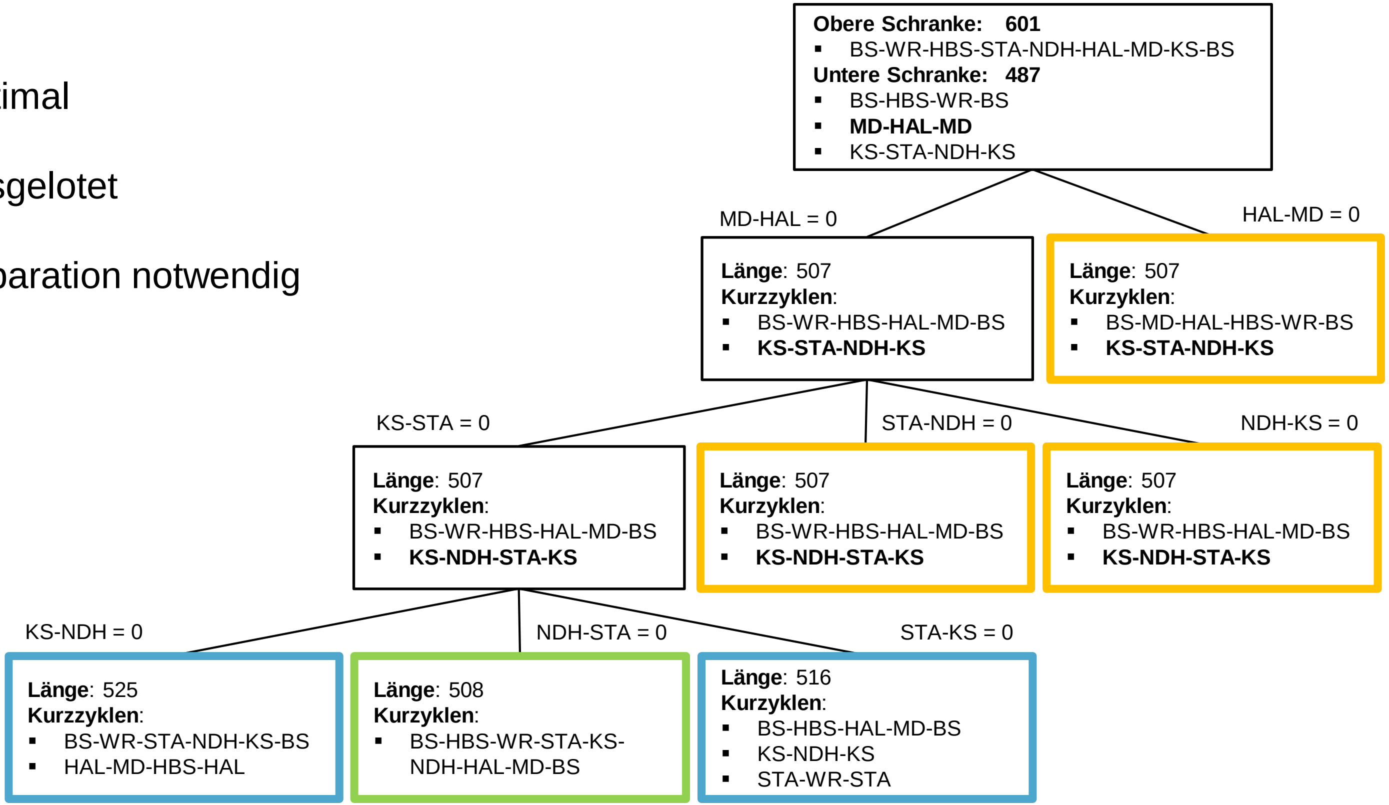


B&B Verfahren am Mitteldeutschland Problem VI

Optimal

Ausgelotet

Separation notwendig



Branch and Bound für TSP: Übersicht des Algorithmus

0. Initialisierung: Obere Schranke $\overline{z} = \infty$ (Alternativ: Bestimmung über Eröffnungsverfahren)
1. Bilde für das als Zuordnungsproblem relaxierte Ausgangsproblem P_0 die Lösung x^0 mit Wert $\underline{z}_0$

   Wenn x^0 keinen Kurzzyklus enthält, so ist x^0 optimal. Knoten 0 ist ausgelotet → Ende

   Setze $\underline{z} = \underline{z}_0$ (untere Schranke) und $\underline{x} = x^0$
2. Wähle einen nicht ausgeloteten Blattknoten k
   Führe eine Separation bezüglich des kleinsten Kurzzyklus in $\underline{x}^k$ durch: Bilde für jede Kante im Kurzzyklus jeweils einen neuen B&B-Knoten i mit Problem P_i durch ein Verbot der Kante (Variable = 0)

   Bilde die Lsg x^i des als Zuordnungsproblem relaxierten TSP mit Wert $\underline{z}_i$

   Wenn P_i unlösbar ist: i ist ausgelotet: Gehe zu 3.

   Wenn x^i keinen Kurzzyklus enthält und $\underline{z}_i \leq \overline{z}$: Setze $\overline{z} = \underline{z}_i$ und $\overline{z} = x^i$

   Wenn x^i keinen Kurzzyklus enthält oder $\underline{z}_i \geq \overline{z}$: i ist ausgelotet: Gehe zu 3.
3. Wenn alle noch nicht alle Blattknoten ausgelotet sind, gehe zu 2.

   Falls $\overline{z} > -\infty$, so ist $\overline{x}$ die optimale Lösung

Resümee zu Branch & Bound Verfahren

- Die Komponenten des Branch & Bound Algorithmus werden problemadäquat ausgestaltet
  → Beispiel TSP
- Zur Erlangung scharfer unterer Schranken im Rahmen der Relaxation wird z.T. ein erheblicher Aufwand getrieben
- Bessere Schranken gewährleisten kleinen Entscheidungsbaum
- Die Separation „repariert" die jeweils aufgefundene Relaxation in Richtung einer zu bildenden Tour
  → Verbot von Kanten
- TSP Problemstellungen von einigen hundert Knoten lösbar
- Weitere Verbesserung über dynamische Generierung zusätzlicher (teils redundanter) Nebenbedingungen
  - Nebenbedingungen „schneiden" Ebenen im konvexen Polyeder des Suchraumes
    → Schnittebenenverfahren (nicht behandelt)

Überblick

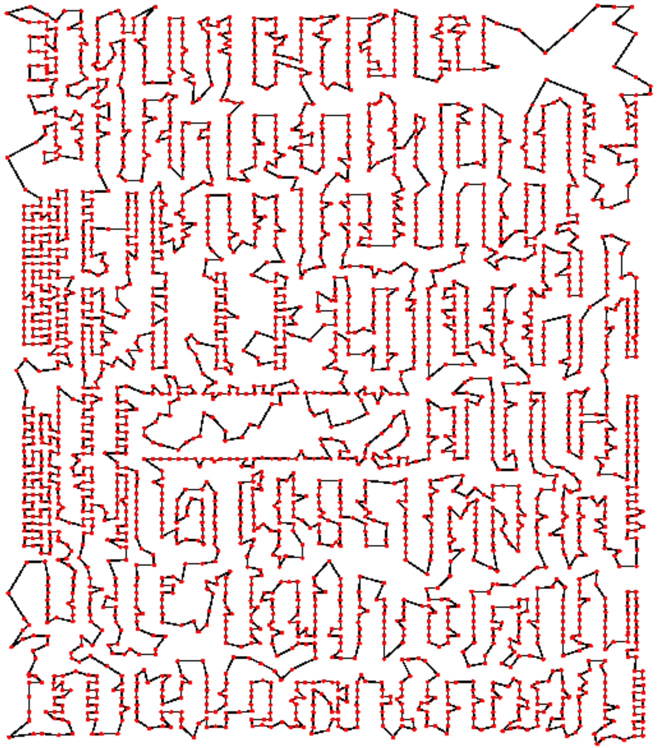
1. Traveling Salesman Problem
2. Branch & Bound Verfahren: Zuordnung
3. **Historie und Stand der Verfahrensentwicklung**

33 Städte TSP durch die USA

- Wettbewerbsausschreibung von Proctor & Gamble 1962
- Gesucht ist eine Tour durch 33 Städte in den USA
- Gewinner:
  Gerald Thompson von der Carnegie Mellon University

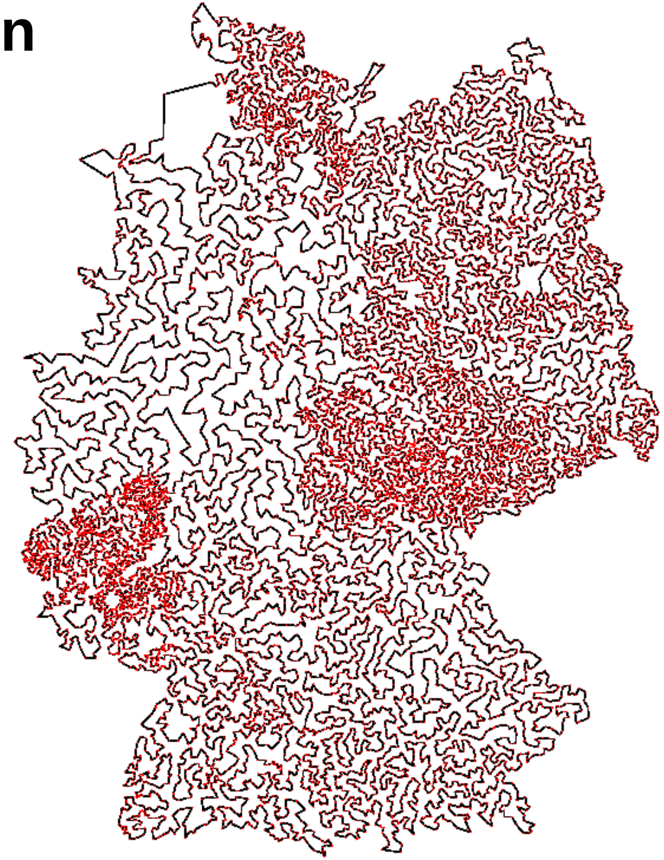
Quelle: http://www.tsp.gatech.edu/

Leiterplattenbestückung mit 3038 Knoten



Deutschland TSP mit 15112 Städten

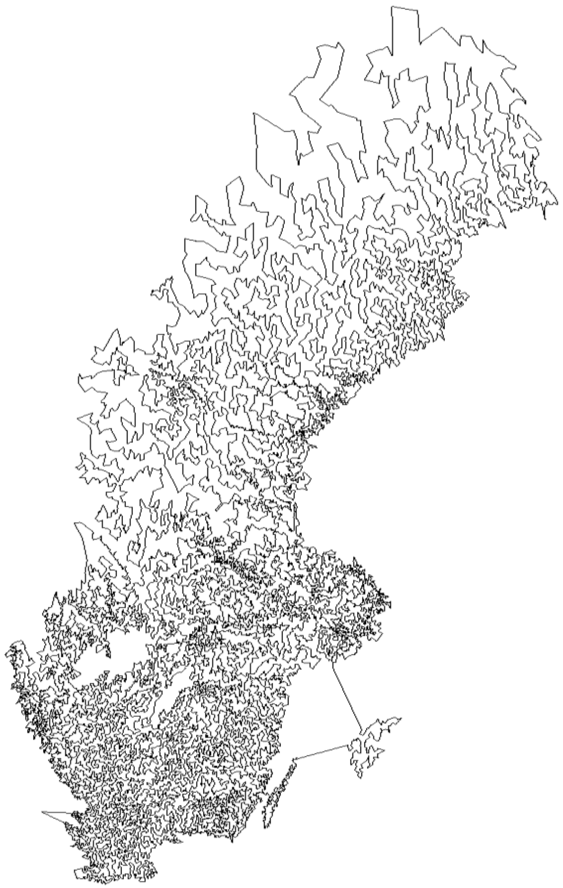
- Applegate, Bixby, Chvátal, und Cook (2001)
- 15 112 Städte
- Länge der optimalen Tour:
  1,573,084 Einheiten (ca. 66,000 km)



Quelle: http://www.tsp.gatech.edu/

Schweden TSP mit 24978 Städten

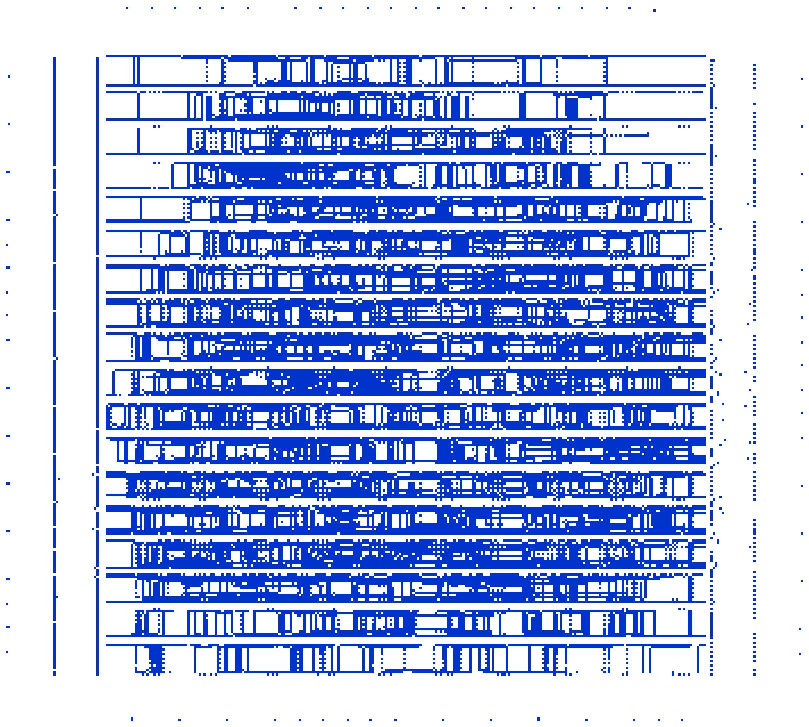
- Applegate, Bixby, Chvátal, und Cook (2004)
- 24 978 Städte
- Länge der optimalen Tour:
  855,597 Einheiten (ca. 72,500 km)



Quelle: http://www.tsp.gatech.edu/

85900 Knoten TSP zur Produktion von Computerchips

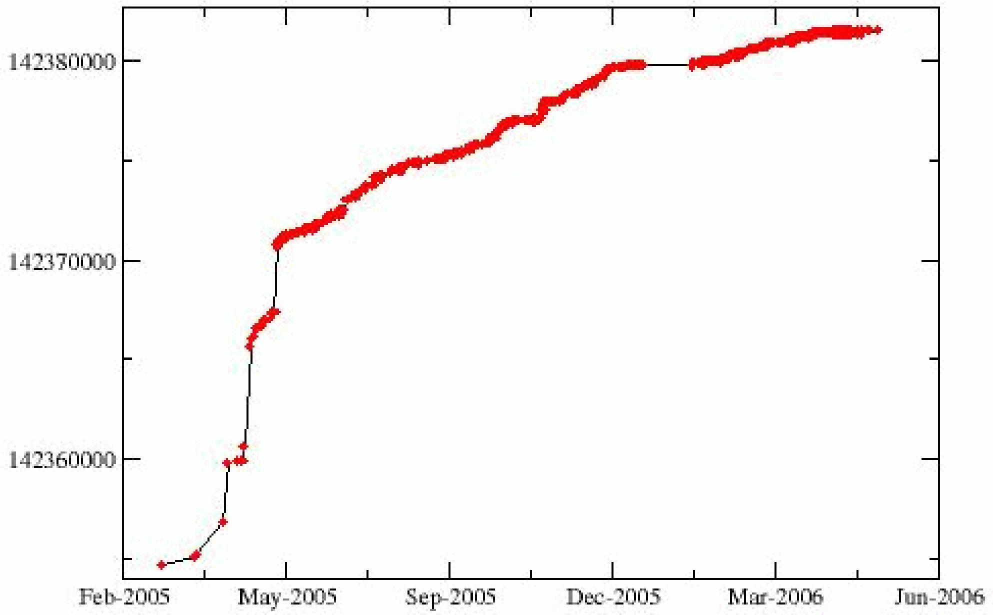
- Applegate, Bixby, Chvátal, und Cook (2006)
- 85 900 Knoten
- Rechenzeit: 136 CPU Jahre
  (skaliert auf 2,4 GHZ)
- Größte bisher gelöste TSP Instanz



Quelle: http://www.tsp.gatech.edu/

85900 Knoten TSP zur Produktion von Computerchips

- Applegate, Bixby, Chvátal, und Cook (2006)
- 85 900 Knoten
- Rechenzeit: 136 CPU Jahre
  (skaliert auf 2,4 GHZ)
- Größte bisher gelöste TSP Instanz



Entwicklung der unteren Schranke im Verlauf der Rechenzeit

Quelle: http://www.tsp.gatech.edu/

Beobachtungen

- Einige Problemstellungen können mit auf Graphen formulierten Methoden effizient gelöst werden.
  - Minimal spannende Bäume, Kürzeste Wege
- Für andere Problemstellungen ermöglicht die Graphentheorie Lösungsmethoden, die eine Alternative zum LP darstellen
  - Dynamisches Losgrößenmodell, Max. Flüsse / Min. Schnitte
- Wieder andere Problemstellungen können durch geschickte Kombination von graphentheoretischen Verfahren gelöst werden.
  - Kantenorientierte Rundreise
- Letztlich gibt es Problemstellungen, für die auch die Graphentheorie keine überzeugenden Verfahren bereitstellt.
  - Knotenorientierte Rundreise

Komplexität von Optimierungsproblemen

- Elementarschritten der Berechnung ←→ Größe der Eingabedaten.
- Der Rechenaufwand $R(n)$ eines Algorithmus zur Lösung eines Optimierungsproblems ist von der (Größen-)Ordnung $f(n)$, wenn er für hinreichend großes n proportional zur Funktion $f(n)$ ist.
- Gilt $R(n) \leq c \cdot f(n)$ mit $c \in IR^{+}$
- Komplexitätsklasse $O(f(n))$ gibt den Rechenaufwand zur Größe n an:
  - falls $f(n)$ Polynom von n: Rechenaufwand polynomial (Klasse P)
  - sonst: Rechenaufwand exponentiell (Klasse NP)

- *Beispiel*: Algorithmus benötigt zur Lösung eines Problems der Größe n genau $2n^2 + 5n + 50$ Elementarschritte

  $\Rightarrow$ Ordnung $f(n) = n^2$ bzw. $O(n^2)$

Beispiel zur Zeit-Komplexitätsfunktion

- Betrachtet werden Problemgrößen von n = {10, 20, … , 60}
- Unterschiedliche Optimierungsprobleme sind beschrieben durch die Komplexitäten n, n^2, n^3, n^5, 2^n
- Der Laufzeitbedarf eines Elementarschrittes beträgt 0.000001 Sekunden

Zeit-Komplexitätsfunktion

	n = 10	n = 20	n = 30	n = 40	n = 50	n = 60
n	.00001 s	.00002 s	.00003 s	.00004 s	.00005 s	.00006 s
n^2	.0001 s	.0004 s	.0009 s	.0016 s	.0025 s	.0036 s
n^3	.001 s	.008 s	.027 s	.064 s	.125 s	.216 s
n^5	.1 s	3.2 s	24.3s	1.7 Minuten	5.2 Minuten	13.0 Minuten
2^n	.001 s	1.0 s	17.9 Minuten	12.7 Tage	35.7 Jahre	386 Jahrhund.

Einsatzgebiete heuristischer Verfahren

1. Effizient lösbare Probleme:
   - Probleme, die mit polynomialem Aufwand lösbar sind, gehören zur Klasse P („effizient lösbar“)
   - *Beispiele:* Kürzeste Wege Probleme, Spannende Bäume, lineare Zuordnungsprobleme, Transportprobleme
2. NP-schwere Probleme:
   - Probleme, für die man bislang keinen Algorithmus kennt, der auch das am schwierigsten zu lösende Problem desselben Typs mit polynomialen Aufwand löst, gehören zur Klasse der NP-schweren Probleme

Optimale Lösung von NP-schweren Problemen

Beispiele: Rucksack-Probleme, Traveling Salesman Probleme, Tourenplanungsprobleme, quadratische Zuordnungsprobleme (Foliensatz 10)

Rucksackproblem: Optimal lösbar bis ca. 100.000 Binärvariablen

Traveling Salesman Problem: Optimal lösbar bis ca. 2.000 Knoten/Städte

Quadratische Zuordnungsproblem: Optimal lösbar bis ca. 20 Maschinen

Zusammenfassung

- Knotenorientierte Rundreisen: Traveling Salesman Problem
  - Gegeben: Vollständiges Netzwerk N mit Knotenmenge V und Distanzmatrix D: $N = (V, D)$
  - Gesucht: Reihenfolge der Städte (als Tour), welche die Reiseentfernung minimiert
  - Es existiert kein Algorithmus mit polynomieller Laufzeit zur Bestimmung einer optimalen Lösung

- TSP als Zuordnungsproblem mit Zyklusbedingungen

- Branch and Bound für das TSP:
  - Relaxation durch Lösung des Zuordnungsproblems
  - Separation über Vermeidung von Kurzzyklen

- Komplexitätstheorie und Einsatzgebiete heuristischer Verfahren