Prof. Dr. H. Opolka
TU Braunschweig

31.1.2004

Klausur zur Vorlesung
"Mathematik I für Studierende der Elektrotechnik"

Name **Vorname** **Matrikelnummer**

Hinweise: Name, Vorname und Matrikelnummer eintragen! Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner erlaubt. Schreibpapier wird zur Verfügung gestellt. Antworten und Lösungen werden bei der Korrektur der Klausur nur dann mit Wertungspunkten versehen, wenn sie ausführlich und ausschließlich mit Methoden oder Resultaten der oben genannten Vorlesung begründet sind. Die Bezeichnungen in den nachfolgenden Klausuraufgaben sind wie in der Vorlesung. (**R** bezeichnet die Menge aller reellen und **C** die Menge aller komplexen Zahlen.) Wenn Sie eine Aufgabenstellung nicht verstehen, dann fragen Sie eine aufsichtführende Person.

Klausuraufgaben

(1) Beweisen Sie, daß die unendliche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{3^n} z^n$ für alle $z \in \mathbf{C}$ mit der Eigenschaft $|z| < 3$ absolut konvergiert, und berechnen Sie im Fall der Konvergenz ihren Wert in Abhängigkeit von z. (3 P)

(2) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen jeweils auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit und bestimmen Sie jeweils die entsprechenden Ableitungen an allen Stellen, an denen die Funktionen differenzierbar sind:

(a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) := \frac{\exp(x^2)-1}{x}$, falls $x \neq 0$; $f(0) := 1$. (3 P)

(b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) := x^2 \cos(\frac{1}{x})$, falls $x \neq 0$; $f(0) := 0$. (3 P)

(3) Bestimmen Sie für die nachfolgend definierten Funktionen jeweils eine Stammfunktion:

(a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) := \frac{1}{x^2+2x+5}$ (2 P)

(b) $f : (2, \infty) \to \mathbf{R}, \quad f(x) := \frac{1}{x^2-4}$ (2 P)

(4) Berechnen Sie die folgenden (eigentlichen oder uneigentlichen) Integrale:

(a) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+2x}}$ (1 P) (b) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^4}$ (1 P) (c) $\int_0^1 \log(x)dx$ (1P)

(5) Untersuchen Sie das folgende lineare Gleichungssystem auf Lösbarkeit und bestimmen Sie im Falle der Lösbarkeit die entsprechende Lösungsmenge

$$\begin{aligned} x_1 + \phantom{x_2 + {}} 4x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= 4 \end{aligned} \qquad \text{(3 P)}$$

(6) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in Mat(3 \times 3, \mathbf{R}).$$

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in Mat(3\times 3, \mathbf{R})$, so daß $S^t AS = D$ eine Diagonalmatrix ist. Bestimmen Sie außerdem den geometrischen Typ der quadratischen Fläche, die durch die Gleichung $q_D(x_1, x_2, x_3) = 1$ bestimmt wird. (Dabei bezeichnet q_D die durch D definierte quadratische Form.) (5 P)