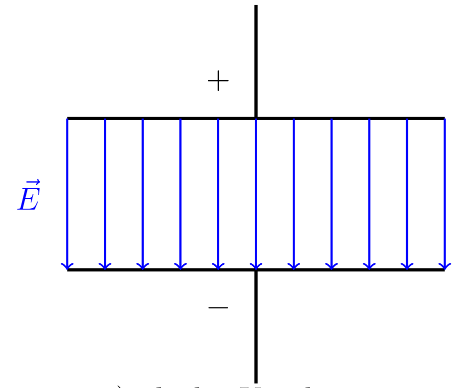
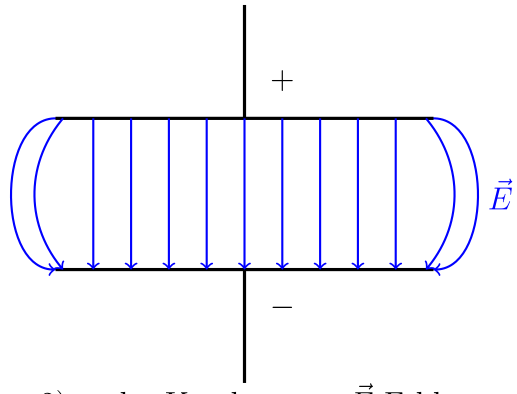
1 Elektrisches Feld

Punkte: 20

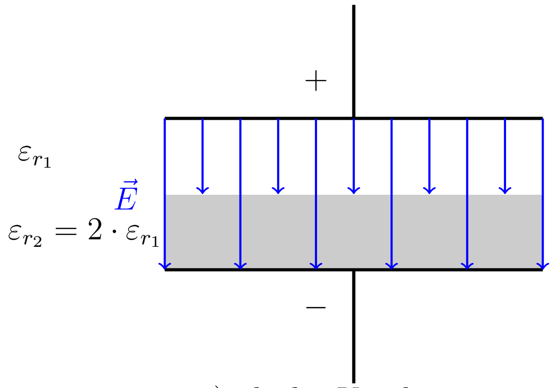
a)



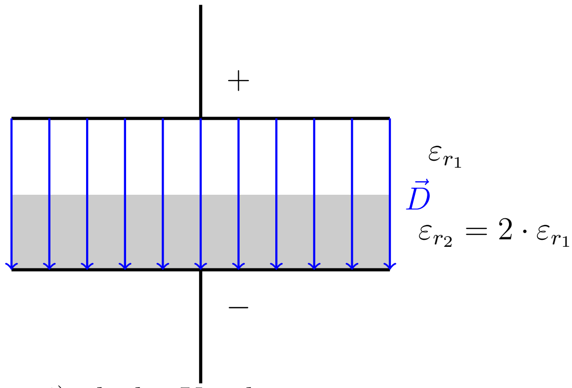
1) idealer Kondensator
$\vec{E}$-Feld (1)



2) realer Kondensator $\vec{E}$-Feld
(Streueffekte müssen sichtbar sein) (1)



3) idealer Kondensator
$\vec{E}$-Feld (1)



4) idealer Kondensator
$\vec{D}$-Feld (1)

$\sum_a 4$

b)

$$E = \frac{U}{d} \; (1) \qquad \left(\text{kurzer Weg ist i. O., sonst über } U = \int \vec{E}\, \mathrm{d}\vec{s} \right)$$

$$\Rightarrow E = \frac{10\,\mathrm{V}}{0{,}01\,\mathrm{m}} = 1000\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \; (0,5)$$

$\sum_b 1,5$

c) Ansatz:

$$\iint \vec{D}\, \mathrm{d}\vec{A} = Q \; (1), \; A \mathrel{\widehat{=}} \text{Fläche einer Kondensatorplatte}$$

hier $\vec{D}$ homogen, $\mathrm{d}\vec{A} \parallel \vec{D}$ (0,5)

$$\Rightarrow D \cdot A = Q$$
$$\Leftrightarrow \epsilon_0 \cdot E \cdot a^2 = Q$$

$$\Rightarrow Q = 9 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 1 \cdot 10^3\,\frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot (2 \cdot 10^{-2}\,\text{m})^2$$
$$= 9 \cdot 4 \cdot 10^{-13}\,\text{A s}$$
$$= 3{,}6\,\text{pC} \ (1)$$

alternativ direkt mit dem Wissen eines Plattenkondensators:

$$Q = C \cdot U \text{ mit } C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{d} \text{ mit } A = a \cdot a \text{ und } \epsilon_r = 1 \text{ (Vakuum)}$$
$$= \epsilon_0 \cdot \frac{a \cdot a}{d} \cdot U$$
$$= 9 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot \frac{2\,\text{cm} \cdot 2\,\text{cm}}{1\,\text{cm}} \cdot 10\,\text{V}$$
$$= 9 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 10\ \text{A s}$$
$$= 360 \cdot 10^{-14}\,\text{A s} = 3{,}6\,\text{pA s}$$

$\sum_c 2,5$

d) Massenträgheit $\vec{F}_t$ (0,5)

Coulombkraft $\vec{F}_{el}$ (0,5)

Kräftegleichgewicht: $\vec{F}_t = -\vec{F}_{el}$ (1)

q

$\vec{F}_t = m \cdot \vec{a}$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\vec{F}_{el} = q \cdot \vec{E}$

(1)

$\sum_d 3$

e)

aus d): $m \cdot a(t) = -e \cdot E$ (ohne Vektoren i.O.)

$$\Leftrightarrow a(t) = -\frac{e \cdot E}{m} \ (1)$$

Integration liefert:

$$v(t) = \frac{-e \cdot E}{m} \cdot t + v_0$$

Stillstand $\widehat{=}\ v(t_s) = 0$

$$\Rightarrow 0 \stackrel{!}{=} \frac{-e \cdot E}{m} \cdot t_s + v_0$$
$$\Leftrightarrow t_s = \frac{v_0 \cdot m}{e \cdot E} \ (1)$$
$$= \frac{1{,}5 \cdot 10^5 \,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 1 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{kg}}{1{,}5 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{A\,s} \cdot 1 \cdot 10^3 \,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}}$$
$$= \frac{10^{-25}}{10^{-16}} \frac{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{V} \cdot \mathrm{s}^2} = 1 \cdot 10^{-9} \frac{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{s}^3}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2} = 1\,\mathrm{ns} \ (1)$$

alternativ:

$$a = -\frac{e \cdot E}{m} = -\frac{1{,}5 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{A\,s} \cdot 1000\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}}{1 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}} = -1{,}5 \cdot 10^{14}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$t_s = \frac{\Delta v}{a} = \frac{0 - v_0}{a} = \frac{-1{,}5 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{-1{,}5 \cdot 10^{14}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 1\,\mathrm{ns}$$

$\sum_e 3$

f)

$$y(t) = -\frac{e \cdot E}{2 \cdot m} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + y_0 \text{ mit } y_0 = 0 \ (1)$$
$$y(t_s) = -\frac{e \cdot E}{2 \cdot m} \cdot t_s^2 + v_0 \cdot t_s$$
$$= -\frac{e \cdot E}{2 \cdot m} \cdot \left(\frac{v_0 \cdot m}{e \cdot E}\right)^2 + \frac{v_0^2 \cdot m}{e \cdot E}$$
$$= -\frac{v_0^2 \cdot m}{2 \cdot e \cdot E} + \frac{v_0^2 \cdot m}{e \cdot E} = \frac{v_0^2 \cdot m}{2 \cdot e \cdot E} \ (1)$$
$$= \frac{\left(1{,}5 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 \cdot 1 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{kg}}{2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{A\,s} \cdot 1 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}}$$
$$= \frac{1,5^2 \cdot 10^{10} \ \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 \cdot 1 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{kg}}{2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-16}\,\frac{\mathrm{As} \cdot \mathrm{V}}{\mathrm{m}}}$$
$$= \frac{1,5 \cdot 10^{10} \ \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 \cdot 1 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{kg}}{2 \cdot 10^{-16}\,\frac{\mathrm{As} \cdot \mathrm{V}}{\mathrm{m}}}$$
$$= 0,75 \cdot \frac{10^{-20}}{10^{-16}} \cdot \frac{\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}}{\mathrm{s}^3 \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{V}} = 7{,}5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m} = 75\,\mathrm{\mu m} \ (1)$$

alternativ:

Energie, die die Ladung zu Beginn besitzt: $W_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2$

Energie, die vom E-Feld aufgebracht wird: $W_{el} = q \cdot E \cdot \Delta s$

Energie, die die Ladung besitzt, muss vom E-Feld abgebaut werden: $W_{kin} = W_{el}$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = q \cdot E \cdot \Delta s \\
&\Rightarrow \Delta s = \frac{1 \cdot m \cdot v_0^2}{2 \cdot q \cdot E} \\
&= \frac{1 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{kg} \cdot 1{,}5 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 1{,}5 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{A\,s} \cdot 1000\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}} \qquad \left(\text{mit } 1\,\mathrm{V} = 1\,\frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}^3}\right) \\
&= \frac{0,1 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3}}{2000}\,\mathrm{m} = 75\,\mathrm{\mu m}
\end{aligned}$$

$\sum_f 3$

g) senkrechter Wurf nach oben (1)

$\sum_g 1$

h)

$$W_{el} = -Q \int_a^b \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{s} \; (1)$$

$E =$ konstant!, E ist homogen, $\mathrm{d}\vec{s} \parallel \vec{E}$

$\Rightarrow$ nur Wegdifferenz ist relevant,

b und a können beliebig gewählt werden, solange $a - b = 75\,\mathrm{\mu m}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow W_{el} &= -1{,}5 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{A\,s} \cdot \underbrace{\left(-7{,}5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}\right)}_{\widehat{=}\ \text{Verschiebung gegen die Feldlinien}} \cdot 1 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \\
&= 1{,}125 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{J} \; (1)
\end{aligned}$$

alternativ:

$$\begin{aligned}
W &= \int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \\
W_{kin} &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{kg} \cdot \left(1{,}5 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 1{,}125 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

$\sum_h 2$

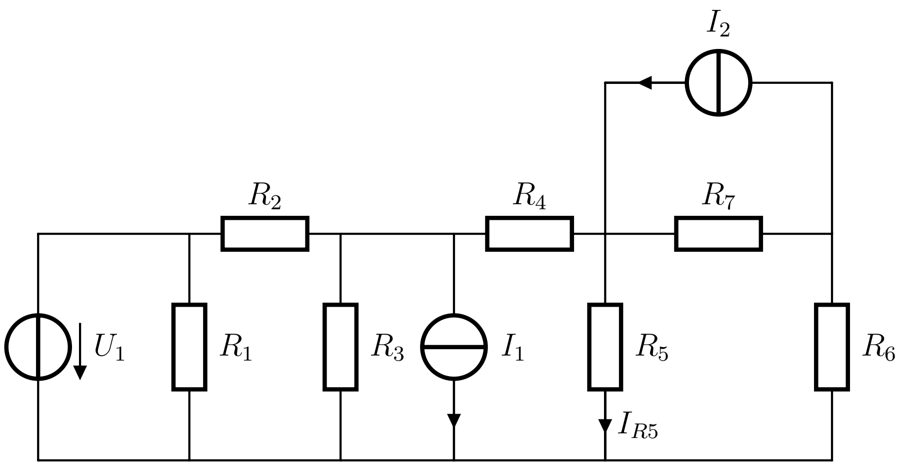
$\sum_{A1} 20$

2 Gleichstromnetzwerk

Punkte: 18

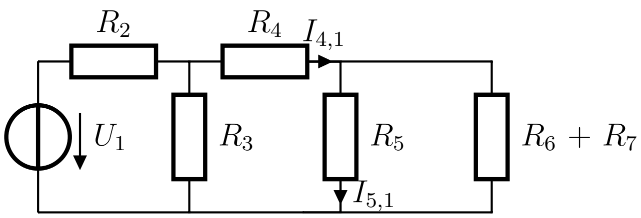
a) Superpositionsprinzip

Die Wirkung jeder Quelle getrennt betrachten, danach die Einzelwirkungen zur Gesamtwirkung überlagern. Quellen, deren Wirkung gerade nicht betrachtet wird, durch ihre Innenwiderstände ersetzen.



Widerstand R_1 fällt für alle Berechnungen weg, da dieser parallel zur Spannungsquelle U_1 geschaltet ist.
Erkenntnis 1 Punkt

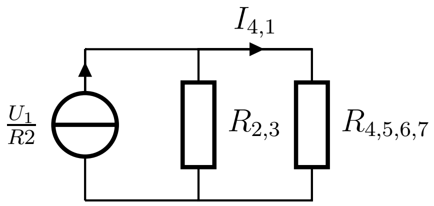
Wirkung der Quelle U_1 auf Netzwerk



Skizze 1 Punkt
$I_{5,1}$ lässt sich durch Stromteiler von $I_{4,1}$ über R_5 und $R_6 + R_7$ berechnen.

$$I_{5,1} = I_{4,1} \cdot \frac{R_6 + R_7}{R_6 + R_7 + R_5}$$

Stromteiler 1 Punkt
Für die Berechnung von $I_{4,1}$ kann U_1 mit R_2 in Stromquelle umgewandelt werden und R_2 mit R_3, sowie R_5, R_6 und R_7 zusammengefasst werden.



Quellentrafo 1 Punkt
Berechnung für $I_{4,1}$ dann über Stromteiler von $\frac{U_2}{R_2}$ und $R_{2,3}$ und $R_{4,5,6,7}$.

$$I_{4,1} = \frac{U_1}{R_2} \cdot \frac{R_{2,3}}{R_{2,3} + R_{4,5,6,7}}$$

$$mit$$

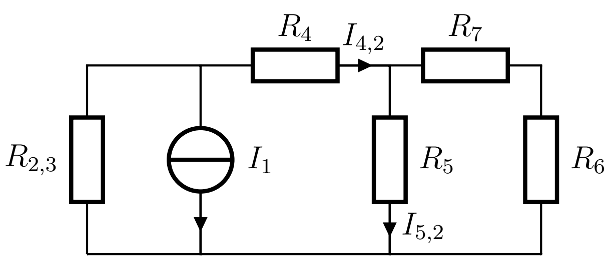
$$R_{4,5,6,7} = R_4 + \frac{R_5(R_6 + R_7)}{R_5 + R_6 + R_7} = \frac{R_4(R_5 + R_6 + R_7) + R_5(R_6 + R_7)}{R_5 + R_6 + R_7}$$

$$und$$

$$R_{2,3} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

Stromteiler 1 Punkt,
Zusammenfassung R_2 und R_3 1 Punkt,
Zusammenfassung R_4, R_5, R_6 und R_7 1 Punkt

Wirkung der Quelle I_1 auf Netzwerk



Skizze 1 Punkt
$I_{5,2}$ lässt sich mit Stromteiler von $I_{4,2}$ über $R_{6,7}$ und R_5 berechnen.

$$I_{5,2} = I_{4,2} \cdot \frac{R_6 + R_7}{R_6 + R_7 + R_5}$$

Stromteiler 1 Punkt

$I_{4,2}$ lässt sich mit Stromteiler von I_1 über $R_{2,3}$ und $R_{4,5,6,7}$

$$I_{4,2} = -I_1 \cdot \frac{R_{2,3}}{R_{2,3} + R_{4,5,6,7}}$$

mit

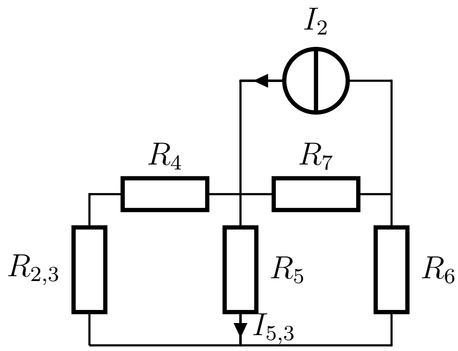
$$R_{4,5,6,7} = R_4 + \frac{R_5(R_6 + R_7)}{R_5 + R_6 + R_7} = \frac{R_4(R_5 + R_6 + R_7) + R_5(R_6 + R_7)}{R_5 + R_6 + R_7}$$

und

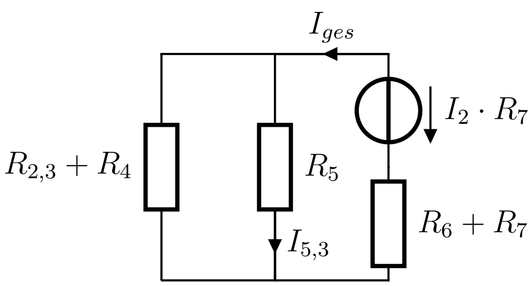
$$R_{2,3} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

Stromteiler 1 Punkt,
Zusammenfassung R_2 und R_3 1 Punkt,
Zusammenfassung R_4, R_5, R_6 und R_7 1 Punkt

Wirkung der Quelle I_2 auf Netzwerk



Skizze 1 Punkt
Quellentransformation von I_2 zu Spannungsquelle mit R_7.



Quellentrafo 1 Punkt
Berechnung von I_{ges} durch Ersatzspannungsquelle und Gesamtwiderstand der Masche.

$$I_{ges} = \frac{I_2 R_7}{R_{ges}}$$

$$R_{ges} = R_6 + R_7 + \frac{R_5(R_4 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3})}{R_4 + R_5 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}$$

Ohmsches Gesetz 1 Punkt, Gesamtwiderstand 1 Punkt

Berechnug von $I_{5,3}$ dann mit Stromteiler von I_{ges} über $R_{2,3} + R_4$ und R_5

$$I_{5,3} = I_{ges} \cdot \frac{R_4 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}{R_4 + R_5 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}$$

Stromteiler 1 Punkt

Superposition

$$I_{5,ges} = I_{5,1} + I_{5,2} + I_{5,3}$$

Gesamtergebnis 1 Punkt

$\sum_a 18$

3 Magnetfeld

Punkte: 16

a)

$$\oint \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{s} = \iint_A \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{A} \;(1)$$

Übergang zu Zylinderkoordinaten:

$$\mathrm{d}\vec{s} = \vec{e}_\varphi r\,\mathrm{d}\varphi \;(0,5)$$

$$\int_0^{2\pi} r\vec{H}\vec{e}_\varphi\,\mathrm{d}\varphi = i \;(0,5)$$

$\vec{H} \parallel \mathrm{d}\vec{\varphi}, \vec{H}$ homogen für konst. r (1)

$$r\vec{H}\vec{e}_\varphi \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = i \;(0,5)$$

$$\vec{H} = \frac{i}{2\pi r}\vec{e}_\varphi \;(0,5)$$

b)

$$\vec{B} = \frac{\mu i}{2\pi r}\vec{e}_\varphi \;(0,5)$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu i_1(t)}{2\pi x}\vec{e}_z \;(0,5)$$

$$\Phi = \iint_A \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{A} \;(0,5)$$

$$\Phi_1 = \int_{x=a}^{a+l}\int_{y=0}^{l} \frac{\mu i_1(t)}{2\pi x}\vec{e}_z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\vec{e}_z \;(0,5)$$

$$= \frac{\mu i_1(t) l}{2\pi}\int_{x=a}^{a+l}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\mu i_1(t) l}{2\pi}[\ln(x)]_a^{a+l}$$

$$= \frac{\mu i_1(t) l}{2\pi}\ln(\frac{a+l}{a}) \;(1)$$

c)

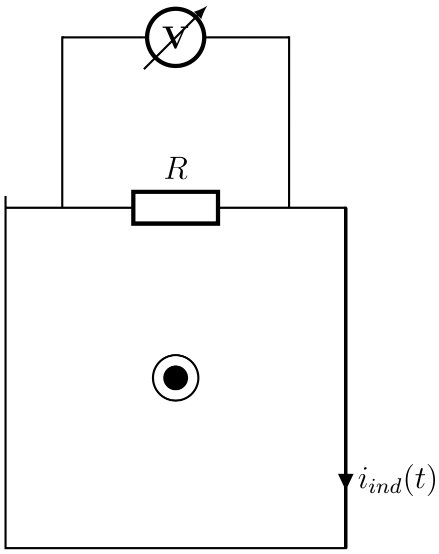
$$\vec{B}_2 = \frac{\mu i_2(t)}{2\pi(a+l+b-x)}\vec{e}_z \ (1)$$

$$\Phi_2 = \frac{\mu i_2(t) l}{2\pi}\int_{x=a}^{a+l} \frac{1}{a+l+b-x}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\mu i_2(t) l}{2\pi}\ln(\frac{b}{l+b}) \ (1)$$

d) Feld des induzierten Stromes wirkt seiner Ursache entgegen. (1)

Zeichnung (1)



e)

$$\Phi_{ges} = \frac{\mu l}{2\pi}(i_1(t)\ln(\frac{a+l}{a}) - i_2(t)\ln(\frac{b}{l+b}))$$

$$u_{ind} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\mu l}{2\pi}(\hat{i}_1\sin(\omega_1 t)\ln(\frac{a+l}{a}) - \hat{i}_2\sin(\omega_2 t)\ln(\frac{b}{l+b}))) \ (1)$$

$$= -\frac{\mu l}{2\pi}(\hat{i}_1\omega_1\cos(\omega_1 t)\ln(\frac{a+l}{a}) - \hat{i}_2\omega_2\cos(\omega_2 t)\ln(\frac{b}{l+b}))) \ (1)$$

f) $P = \frac{u_{ind}^2}{R} \to P \sim N^2$ (1)

g) $\omega_1 = \omega_2$, da gleiche Frequenz benötigt wird. (1)

$\hat{i}_1 = -\hat{i}_2$, da die Magnetfelder um 180 Grad phasenverschoben sein müssen. (1)

4 Komplexe Wechselstromrechnung

Punkte: 30

a) Ansatz 0,5 Punkte und Ergebnis 0,5 Punkte

$$|\underline{Z}_1| = \sqrt{{R_1}^2 + \omega^2 {L_2}^2}$$
$$|\underline{Z}_1| = \sqrt{30^2 \frac{V^2}{A^2} + 4\pi^2 \frac{100^2}{4\pi^2} \frac{1}{s^2} 0,4^2 \frac{V^2 s^2}{A^2}}$$
$$|\underline{Z}_1| = \sqrt{900 \frac{V^2}{A^2} + 1600 \frac{V^2}{A^2}}$$
$$|\underline{Z}_1| = \sqrt{2500}\Omega$$
$$|\underline{Z}_1| = 50\Omega$$

$\sum_a 1$

b) Je Größe: Ansatz 0,5 Punkte und Ergebnis 0,5 Punkte

$$|\underline{I}_1| = \frac{|\underline{U}_0|}{|\underline{Z}_1|} = \frac{100\,\mathrm{V}}{50\,\Omega} = 2\,\mathrm{A}$$
$$|\underline{U}_1| = |\underline{I}_1|\, R_1 = 2\,\mathrm{A} \cdot 30\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = 60\,\mathrm{V}$$
$$|\underline{U}_2| = |\underline{I}_1|\, \omega L_2 = 2\,\mathrm{A} \cdot 2\pi \frac{100}{2\pi} \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 0{,}4\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A}} = 80\,\mathrm{V}$$

$\sum_b 3$

c) Ansatz 0,5 Punkte und Ergebnis 0,5 Punkte

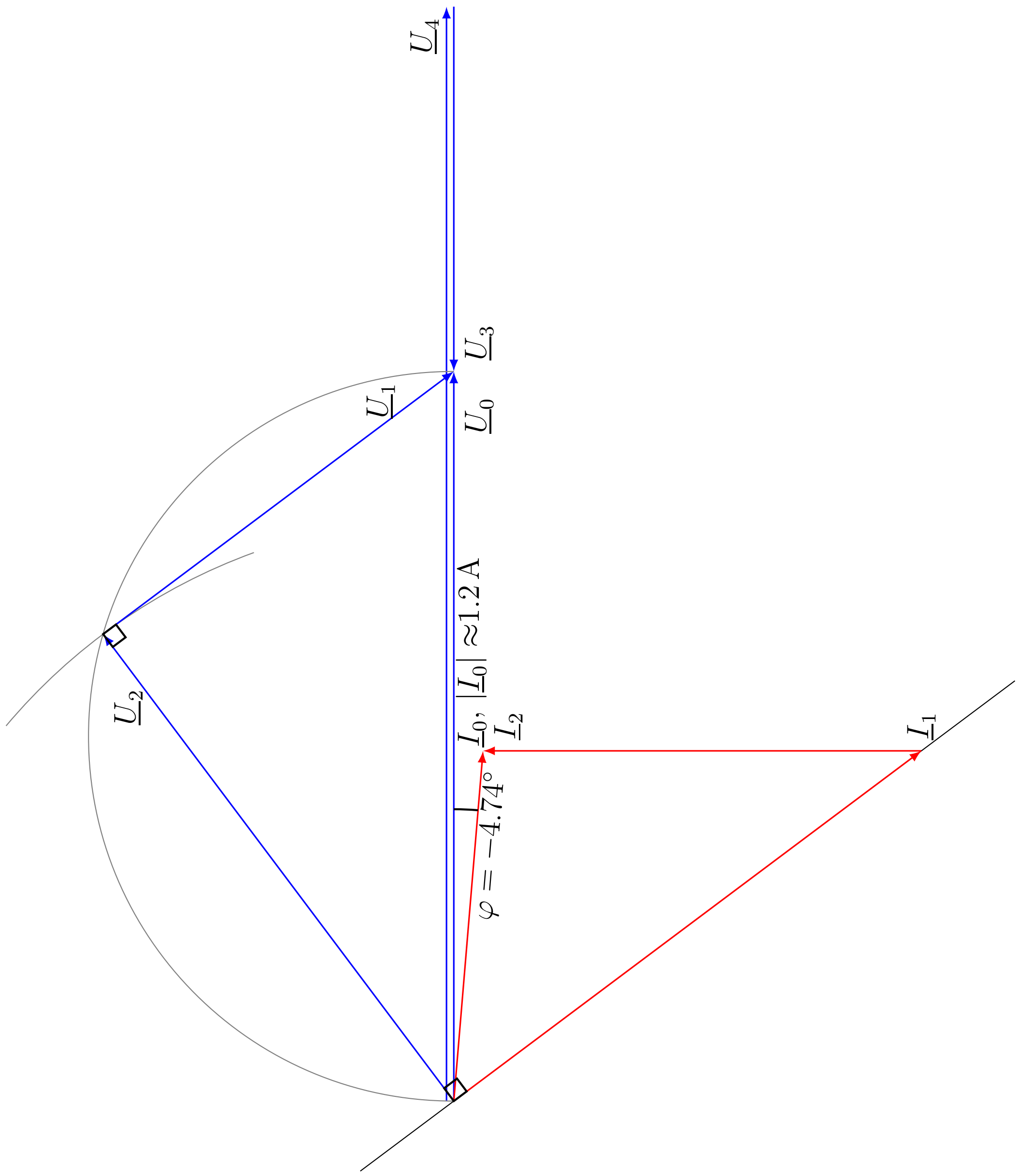
$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_0}{\frac{1}{j\omega C_4} + j\omega L_3} = \frac{j\omega C_4 \underline{U}_0}{1 - \omega^2 L_3 C_4} = j \frac{2\pi \frac{100}{2\pi} \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 10 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V}} \cdot 100\,\mathrm{V}}{1 - 4\pi^2 \frac{100^2}{4\pi^2} \frac{1}{\mathrm{s}^2} \cdot 100 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V}} \frac{1}{3} \frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A}}}$$
$$= j \frac{1\,\mathrm{A}}{1 - \frac{1}{3}} = j1{,}5\,\mathrm{A}$$

$\sum_c 1$

d) Je Größe: Ansatz 0,5 Punkte und Ergebnis 0,5 Punkte

$$\underline{U}_3 = \underline{I}_2 \cdot j\omega L_3 = j1{,}5\,\mathrm{A} \cdot j2\pi \cdot \frac{100}{2\pi} \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot \frac{1}{3} \frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A}} = -50\,\mathrm{V}$$
$$\underline{U}_4 = \underline{I}_2 \cdot \frac{1}{j\omega C_4} = \frac{j1{,}5\,\mathrm{A}}{j2\pi \cdot \frac{100}{2\pi} \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 100 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V}}} = 1{,}5 \cdot 10^2\,\mathrm{V} = 150\,\mathrm{V}$$

$\sum_d 2$



e) 1. $\underline{U}_0$ einzeichnen 0,5 Punkte

2. $\underline{U}_3$ einzeichnen 0,5 Punkte

3. $\underline{U}_4$ einzeichnen 0,5 Punkte

4. Thaleskreis mit $\underline{U}_0$ als Durchmesser

5. Schnittpunkt des Thaleskreis und eines Kreises mit einem Radius $r = 8\,\mathrm{cm}$ um den Ursprung

6. $\underline{U}_2$ einzeichnen von Ursprung zu Schnittpunkt 0,5 Punkte

7. $\underline{U}_1$ einzeichnen von Schnittpunkt zu Spitze von $\underline{U}_0$ 0,5 Punkte

8. Hilfslinie durch den Ursprung 90° hinter $\underline{U}_2$ eilend

9. $\underline{I}_1$ auf Hilfslinie einzeichnen 0,5 Punkte

10. $\underline{I}_2$ von der Spitze von $\underline{I}_1$ senkrecht nach oben einzeichnen 0,5 Punkte
11. $\underline{I}_0$ vom Ursprung zur Spitze von $\underline{I}_1$ einzeichnen einzeichnen 0,5 Punkte
12. $|\underline{I}_0|$ ablesen 0,5 Punkte
13. φ ablesen 0,5 Punkte

$\sum_e 5$

f) 1. Reihenschwingkreis aus L_3 und C_4 Typ 0,5 Punkte, Bauelemente 0,5 Punkte

2. Parallelschwingkreis aus $(R_1,\ L_3)\ ||\ (L_3$ und $C_4)$ Typ 0,5 Punkte, Bauelemente 0,5 Punkte, R_1 kann ggf. vernachlässigt werden.

$\sum_f 2$

g) Je richtiger Lösung und richtiger Begründung 0,5 Punkte

$\omega = 0$	$\lvert\underline{Z}_{AB}\rvert = R_1$	Kondensator sperrt, Spulen leiten, Strom fließt nur über R_1
$\omega = \omega_{01}$	$\lvert\underline{Z}_{AB}\rvert = 0$	Impedanz des Reihenschwingkreises gleich 0 bei Resonanz
$\omega = \omega_{02}$	$\lvert\underline{Z}_{AB}\rvert \to \infty$	Parallelschwingkreis sperrt bei Resonanz
$\omega \to \infty$	$\lvert\underline{Z}_{AB}\rvert \to \infty$	beide Spulen sperren

$\sum_g 4$

h) Ansatz 1 Punkt, Weg 0,5 Punkte, Ergebnis 0,5 Punkte

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_0}(\omega) = \frac{j\omega L_2}{R_1 + j\omega L_2} = \frac{1}{-j\frac{R_1}{\omega L_2} + 1} = \frac{1 + j\frac{R_1}{\omega L_2}}{\frac{{R_1}^2}{\omega^2 {L_2}^2} + 1}$$
$$= \frac{1}{\frac{{R_1}^2}{\omega^2 {L_2}^2} + 1} + j\frac{\frac{R_1}{\omega L_2}}{\frac{{R_1}^2}{\omega^2 {L_2}^2} + 1} = \frac{1}{\frac{{\omega_g}^2}{\omega^2} + 1} + j\frac{\frac{\omega_g}{\omega}}{\frac{{\omega_g}^2}{\omega^2} + 1}$$

$\sum_h 2$

i) Ansatz 1 Punkt, Weg 0,5 Punkte, Ergebnis 0,5 Punkte

$$\frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_0|}(\omega) = \sqrt{\frac{1^2}{\left(\frac{{\omega_g}^2}{\omega^2} + 1\right)^2} + \frac{\left(\frac{\omega_g}{\omega}\right)^2}{\left(\frac{{\omega_g}^2}{\omega^2} + 1\right)^2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{{\omega_g}^2}{\omega^2}}{\left(\frac{{\omega_g}^2}{\omega^2} + 1\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{{\omega_g}^2}{\omega^2} + 1}}$$

$\sum_i 2$

j) Einsetzen 0,5 Punkte, Ergebnis 0,5 Punkte

$$\frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_0|}(\omega = \omega_g) = \frac{1}{\sqrt{\frac{{\omega_g}^2}{{\omega_g}^2} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$$

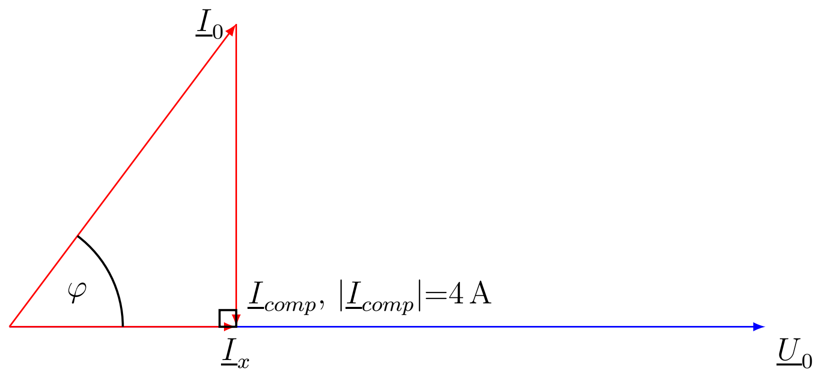
$\sum_j 1$

k) Richtige Antworten je 0,5 Punkte, Begründung je 0,5 Punkte.

φ:	keine	φ nur von der Frequenz abhängig
S, P & Q:	werden um einen Faktor 4 größer	Zeiger skalieren proportional mit $\underline{U}_0$

$\sum_k 2$

l) Zeigerdiagramm 1 Punkt, Verhalten und Begründung je 0,5 Punkte



Die Schaltung zeigt kapazitives Verhalten, da der Stromzeiger vor dem Spannungszeiger läuft.

$\sum_l 2$

m) Je 0,5 Punkte für richtige Antwort und Begründung

Induktivität, da mit dieser einer kapazitiven Wirkung entgegen gewirkt werden kann

$\sum_m 1$

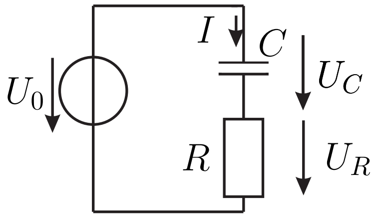
n) Einzeichnen Kompensationszeiger in Zeigerdiagramm und Ablesen von $\left|\underline{I}_{comp}\right|$ 1 Punkt, Ansatz und richtige Berechnung je 0,5 Punkte

$$\left|\underline{I}_{comp}\right| = 4\,\mathrm{A}$$
$$L = \frac{|\underline{U}_0|}{\omega\left|\underline{I}_{comp}\right|} = \frac{100\,\mathrm{V}}{2\pi\frac{100}{2\pi}\,\frac{1}{\mathrm{s}}\cdot 4\,\mathrm{A}} = 0{,}25\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A}} = 250\,\mathrm{mH}$$

$\sum_n 2$

5 Schaltvorgänge bei Kondensatoren **Punkte: 16**

a) Skizzieren Sie die Schaltung zum Zeitpunkt $t = t_0$. (1 Punkt)



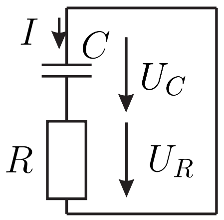
Schaltung mit Spannungsquelle, Kondensator und Widerstand (0,5)
Spannung U_C, U_R oder U_0 oder Pfeil fehlt $\rightarrow$ (-0,5)
(I muss nicht eingezeichnet sein)

b) Bestimmen Sie die Spannung über dem Kondensator und die Spannung über dem Widerstand zum Zeitpunkt $t = t_0$. Begründen Sie kurz Ihr Vorgehen. Ergänzen Sie, falls noch nicht vorhanden, alle für diese Teilaufgabe relevanten Größen in der Skizze aus Teilaufgabe a). (2 Punkte)

$t << t_0 \rightarrow$ Ladevorgang des Kondensators ist abgeschlossen $\rightarrow$ es fließt kein Strom: (0,5)
$U = R \cdot I$ mit $I = 0\,\text{A} \rightarrow U_R = 0\,\text{V}$ (0,5)
Maschengleichung: $U_0 = U_C + U_R$ (0,5) | mit $U_R = 0\,\text{V}$
$U_C = U_0$ (0,5)

Der Schalter S_2 wird zum Zeitpunkt $t_1 > t_0$ geöffnet (S_1 bleibt offen).
Anschließend wird der Schalter S_1 zum Zeitpunkt $t_2 > t_1$ geschlossen (S_2 bleibt offen).
Gehen Sie ohne Einschränkung der Allgemeinheit davon aus, dass $t_2 = 0\,\text{s}$ gilt.

c) Skizzieren Sie die Schaltung zum Zeitpunkt $t = t_2$. Zeichnen Sie alle relevanten Größen ein. (0,5 Punkte) (0,5)



I, U_C oder U_R fehlt $\rightarrow$ (-0,5)

d) Bestimmen Sie die Spannung über dem Kondensator und die Spannung über dem Widerstand zum Zeitpunkt $t = t_2$ direkt nach dem Schließen des Schalters S_1. (1 Punkt)

Maschengleichung: $U_C = -U_R$, mit $U_C = U_0$ (Ladung bleibt erhalten) (0,5) und $U_R = -U_0$ (0,5)

e) Leiten Sie allgemein den Zusammenhang von Strom $i_c(t)$ und Spannung $u_c(t)$ während des Ladens beziehungsweise Entladens ausgehend von der allgemeinen Ladungsgleichung eines Kondensators her. (1,5 Punkte)

Ladungsgleichung eines Kondensators:

$$\begin{aligned}
Q &= C \cdot U \qquad \text{bzw. } q_C = C \cdot u_C \quad (0,5) \\
\mathrm{d}q_C &= C \cdot \mathrm{d}u_C \\
\frac{\mathrm{d}q_C}{\mathrm{d}t} &= C \cdot \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}, \text{ mit } \frac{\mathrm{d}q_C}{\mathrm{d}t} = i_C \qquad (0,5) \\
i_C &= C \cdot \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \qquad (0,5)
\end{aligned}$$

f) Stellen Sie die homogene Differentialgleichung (DGL) erster Ordnung für die Spannung $u_c(t)$ über dem Kondensator für $t \geq 0\,\mathrm{s}$ auf. (2 Punkte)

- Hinweis 1: Stellen Sie die Maschen- und Knotengleichung auf.
- Hinweis 2: Nutzen Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe e).

Maschengleichung aus d):

$$\begin{aligned}
u_C &= -u_R & &\text{mit } i_R = i_C \text{ folgt } u_R = i_C \cdot R \quad (0,5) \\
u_C &= -R \cdot i_C & &\text{mit } i_C = C \cdot \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \text{ (aus e))} \quad (0,5) \\
u_C &= -R \cdot C \cdot \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} & &(0,5) \\
0\,\mathrm{V} &= u_C + R \cdot C \cdot \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \quad (homogeneDGL) & &(0,5)
\end{aligned}$$

g) Lösen Sie die Differentialgleichung (DGL). (3,5 Punkte)

- Hinweis: $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(x) + K$

$$\begin{aligned}
0\,\mathrm{V} &= u_C + R \cdot C \cdot \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}, & &\text{Gleichung von f)} \\
u_C &= -R \cdot C \cdot \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} & &| : u_C \,| : (-R \cdot C) \quad (0,5) \\
\frac{-1}{RC} &= \frac{1}{u_C}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} & &|\mathrm{d}t \quad (0,5) \\
\frac{-1}{RC}\mathrm{d}t &= \frac{1}{u_C}\mathrm{d}u_C & &\Big|\int, \text{ mit Hinweis} \quad (0,5) \\
\frac{-1}{RC}t &= ln(u_C) + K & &|\exp() \quad (0,5) \\
\exp(\frac{-1}{RC}t) &= u_C \cdot \exp(K) & &|\ K_1 = 1/\exp(K) \\
\Leftrightarrow u_C &= K_1 \cdot \exp(\frac{-1}{RC}t) & &(0,5)
\end{aligned}$$

Bestimme K_1 durch Betrachtung von $u_C(t = 0\,\mathrm{s}) = U_0$ (aus Teilaufgabe d))

$$\begin{aligned}
u_C(t = 0\,\mathrm{s}) &= K_1 \cdot \exp(\frac{-1}{RC} \cdot 0) | \exp(0) = 1, u_C(0) = U_0 \text{ Ansatz } (0,5) \\
U_0 &= K_1 \cdot 1 \\
\Leftrightarrow K_1 &= U_0 \qquad (0,5) \\
u_C &= U_0 \cdot \exp(\frac{-1}{RC} t)
\end{aligned}$$

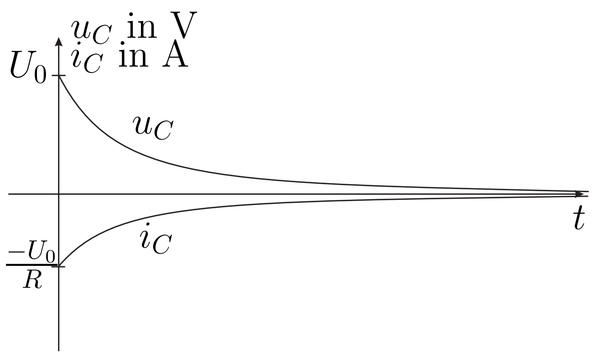
h) Bestimmen Sie den Entladestrom des Kondensators im gegebenen Netzwerk. (1 Punkt)

Ansatz: I = U/R (Achtung: Vorzeichen!)
$i_C(t) = \frac{-u_C(t)}{R}$ (0,5) $= \frac{-U_0}{R} \exp(\frac{-1}{RC} t)$ (0,5)
Alternativ kann $i_C(t) = C \cdot \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ abgeleitet werden.

i) Bestimmen Sie den (betragsmäßig) maximalen Entladestrom und geben Sie dessen Zeitpunkt an. (1 Punkt)

$\lim_{t \to 0\,\mathrm{s}} i_C(t) = \lim_{t \to 0\,\mathrm{s}} \frac{-U_0}{R} \exp(\frac{-1}{RC} t) = \frac{-U_0}{R}$
$\Leftrightarrow i_{C,max} = |\frac{-U_0}{R}| = \frac{U_0}{R}$ (0,5), für $t = 0\,\mathrm{s}$ (0,5)
Der Vollständigkeit halber kann auch noch $t \to \infty$ betrachtet werden:
$\lim_{t \to \infty} i_C(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{-U_0}{R} \exp(\frac{-1}{RC} t) = 0\,\mathrm{A}$

j) Skizzieren Sie den Spannungs- und den Stromverlauf während des Entladevorgangs ($t \geq 0\,\mathrm{s}$). (1,5 Punkte)



Beschriftung (0,5), Werte bei t = 0 s (0,5) und exponentieller Verlauf gegen 0 (0,5)

k) Wann geht man in der Praxis davon aus, dass ein Kondensator vollständig entladen ist. Begründen Sie Ihre Antwort mathematisch. (1 Punkt)

In der Praxis nimmt man an, dass der Entladevorgang nach 5τ ($\tau = RC$) abgeschlossen ist. (0,5)
Mathematische Begründung:
$u_C = U_0 \cdot \exp(\frac{-1}{RC} t)$
Für $t = 5\tau = 5RC$ ergibt sich für den Exponentialterm:

$\exp(\frac{-1}{RC}t) = \exp(\frac{-1}{RC}5RC) = \exp(-5)(\approx 0,0067) \approx 0$ (0,5)
(weniger als 0,67% der Ausgangsspannung sind noch vorhanden)
(Zum Vergleich: $\exp(-4) \approx 0,018$)
Der Entladevorgang kann daher als abgeschlossen angenommen werden.