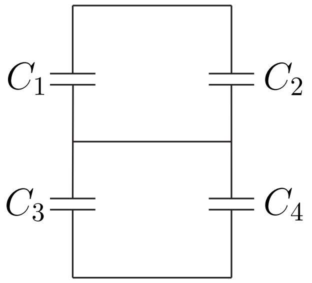
1 Elektrisches Feld

Punkte: 19

a)



$\sum_a 1$

b)
$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d} \ (1)$$
$$C_1 = C_2$$
$$\varepsilon_1 \frac{A_{13}}{d_{12}} = \varepsilon_2 \frac{A_{24}}{d_{12}}$$
$$A_{24} = 2A_{13} \ (1)$$
$$C_1 = C_3$$
$$\varepsilon_1 \frac{A_{13}}{d_{12}} = \varepsilon_3 \frac{A_{13}}{d_{34}}$$
$$d_{34} = \frac{d_{12}}{3} \ (1)$$
$$C_{12} = C_1 + C_2 = 2C_1 \ (1)$$
$$C_{34} = C_3 + C_4 = C_3 + \varepsilon_4 \frac{A_{24}}{d_{34}} = C_1 + \frac{\varepsilon_1}{4} \frac{2A_{13}}{d_{12}/3} = \frac{5}{2} C_1 \ (1)$$
$$C_{Ges} = \frac{C_{12} C_{34}}{C_{12} + C_{34}} = \frac{2C_1 \frac{5}{2} C_1}{2C_1 + \frac{5}{2} C_1} = \frac{10}{9} C_1 \ (1)$$

$\sum_b 6$

c)
$$\sigma = \frac{Q}{A} \ (1)$$
$$Q = C \cdot U \ (1)$$
$$\sigma = \frac{C_{Ges} \cdot U_0}{A} = \frac{10}{9} C_1 \frac{U_0}{(A_{13} + A_{24})} = \frac{10}{9} \frac{\varepsilon_1 A_{13}}{d_{12}} \frac{U_0}{3 \cdot A_{13}} = \frac{10}{27} \frac{\varepsilon_1 U_0}{d_{12}} \ (1)$$

(mittlere Oberflächenladungsdichte)

$\sum_c 3$

d) $$U_1 = U_2 = \frac{C_{34}}{C_{12}+C_{34}}U_0 = \frac{\frac{5}{2}C_1}{2C_1+\frac{5}{2}C_1}U_0 = \frac{5}{9}U_0 \ (1,5)$$

$$U_3 = U_4 = U_0 - U_1 = \frac{4}{9}U_0 \ (0,5)$$

$$U = \int \vec{E}d\vec{s} \quad \text{oder} \quad U = E \cdot d \ (1)$$

$$E_1 = E_2 = \frac{U_1}{d_{12}} = \frac{5}{9}\frac{U_0}{d_{12}} \ (0,5)$$

$$E_3 = E_4 = \frac{U_3}{d_{34}} = \frac{4}{9}\frac{U_0}{d_{12}/3} = \frac{4}{3}\frac{U_0}{d_{12}} \ (0,5)$$

$\sum_d 4$

e) $$W_{ab} = q\int_a^b \vec{E}d\vec{s} \ (1)$$

$$W = W_1 + W_2 = q_0\int_1 \vec{E}_1 d\vec{s} + q_0\int_2 \vec{E}_2 d\vec{s} \ (0,5)$$

$$W_1 = q_0\int_{s_1} E_1 \sin(\alpha) ds \ (0,5)$$

$$W_1 = q_0 E_1 \sin(\alpha)\int_{s_1} ds \ (0,5)$$

$$W_1 = q_0 E_1 \sin(\alpha)\frac{d_{12}}{\sin(\alpha)} = q_0 \cdot E_1 \cdot d_{12} \ (1)$$

$$W_1 = q_0\frac{5}{9}\frac{U_0}{d_{12}}d_{12} = \frac{5}{9}q_0 U_0 (0,5)$$

$$W_2 = \frac{4}{9}q_0 U_0 \ (0,5)$$

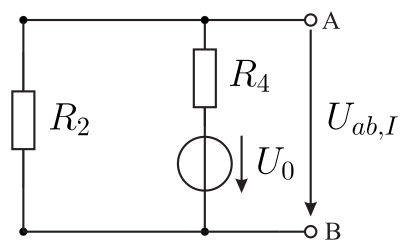
$$W = q_0 \cdot U_0 \ (0,5)$$

$\sum_e 5$

2 Gleichstromnetzwerk

Punkte: 11

a)
I) Wirkung der Spannungsquelle U_0 betrachten. Stromquelle I_0 passivieren.

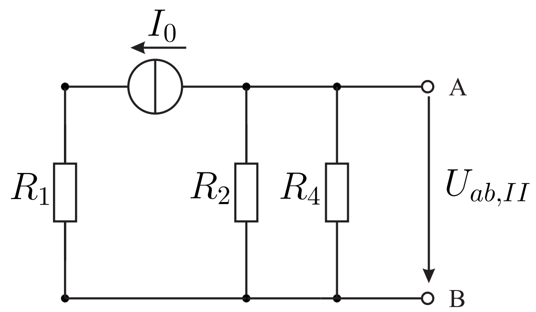


Skizze oder Ansatz (1)

$$U_{ab,I} = \frac{R_2}{R_2 + R_4} U_0$$

Rechnung (1)

II) Wirkung der Stromquelle I_0 betrachten. Spannungsquelle U_0 passivieren.



Skizze oder Ansatz (1)

$$U_{ab,II} = -\frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} I_0$$

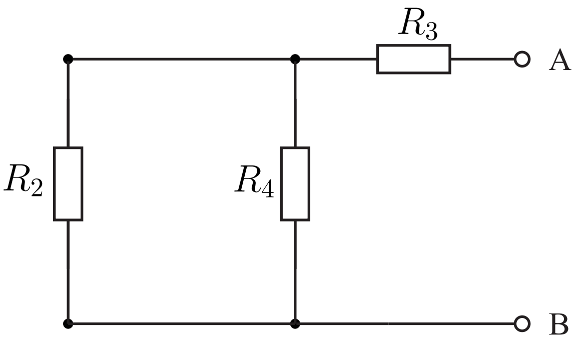
Rechnung (1)

$$U_{ab} = \frac{R_2 U_0 - R_2 R_4 I_0}{R_2 + R_4}$$

Gesamtergebnis (1)

$\sum_a 5$

b)



$$R_i = R_3 + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}$$

$\sum_b 2$

c)

Betriebszustand: Leistungsanpassung 0.5 Punkt
Bedingung $R_i = R_L$ 0.5 Punkt

$$\begin{aligned}
R_i &= R_3 + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = \frac{3R}{2} \\
R_L &= \frac{R_5 R_6 R_x}{R_5 R_6 + R_6 R_x + R_5 R_x} = \frac{16RR_x}{16R + 8R_x} \\
\frac{3R}{2} &= \frac{16RR_x}{16R + 8R_x} \\
\frac{6R + 3R_x}{2} &= 2R_x \\
6R + 3R_x &= 4R_x \\
R_x &= 6R
\end{aligned}$$

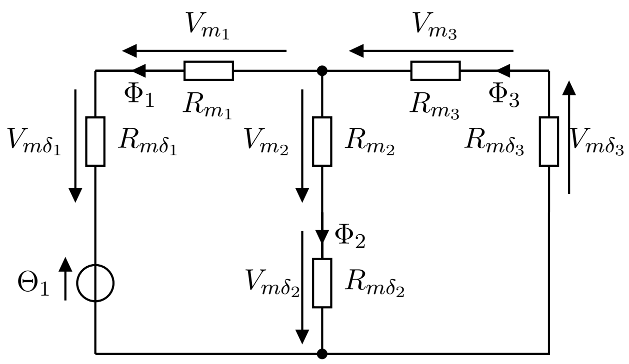
R_L (1 Punkt)
Ergebnis (2 Punkte)

$\sum_c 4$

3 Stationäres Magnetfeld

Punkte: 20

a)



Anmerkung Markus Steimle:
Damit die Pfeilrichtungen mit den nachfolgenden Rechnungen übereinstimmen müssen die Pfeile im mittleren Zweig jeweils gedreht werden: V_m2, Vmd2 und Phi_2 müssen nach oben zeigen.
Alternativ muss bei der unten markierten Stelle bei Phi_2 ein Minus-Zeichen eingefügt werden

Skizze 2 Punkte ...

$$
\begin{aligned}
R_m &= \frac{l}{\mu A} \ (1) \\
R_{m_1} &= R_{m_3} = \frac{3(s-\delta)}{\mu_r \mu_0 A} \ (0.5) \ (= 3R_{m_2}) \\
R_{m_2} &= \frac{(s-\delta)}{\mu_r \mu_0 a^2} \ (0.5) \\
R_{m\delta_2} &= \frac{\delta}{\mu_0 A} \ (0.5) \\
R_{m\delta_1} &= R_{\delta_3} = \frac{3\delta}{\mu_0 A} \ (0.5) \ (= 3R_{m\delta_2}) \\
\Theta_1 &= N_1 I_1 \ (1)
\end{aligned}
$$

$\sum_a 6$

b)

$$
\begin{aligned}
R_{m_2} &\approx \frac{s}{a^2\mu_0\mu_r} = \frac{3\cdot 10^{-1}\,\mathrm{m}}{\frac{1}{16\pi}\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}\cdot 3\cdot 10^3} = 4\cdot 10^7\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Vs}}\,(1)\\
R_{m_1} &= R_{m_3} = 1.2\cdot 10^8\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Vs}}\,(0.5)\\
R_{m\delta_2} &= \frac{10^{-2}\mathrm{m}}{\frac{1}{16\pi}\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}} = 4\cdot 10^9\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Vs}}\,(0.5)\\
R_{m\delta_1} &= R_{m\delta_3} = 3R_{m\delta_2} = 1.2\cdot 10^{10}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Vs}}\,(0.5)\\
\Theta_1 &= N_1\cdot I_1 = 505\cdot 3\,\mathrm{A} = 1515\,\mathrm{A}\,(0.5)
\end{aligned}
$$

$\sum_b 3$

c)

$$
\begin{aligned}
R_{s_2} &= R_{m_2} + R_{m\delta_2}\,(1)\\
R_{s_1} &= R_{s_3} = 3R_{s_2}\\
R_p &= \frac{R_{s_3}\cdot R_{s_2}}{R_{s_3}+R_{s_2}} = \frac{3R_{s_2}^2}{3R_{s_2}+R_{s_2}} = \frac{3R_{s_2}}{4}\,(1)\\
R_{\mathrm{ges}} &= R_p + R_{s_1} = \frac{15}{4}R_{s_2} = \frac{15}{4}(400+4)10^7\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Vs}} = 1.515\cdot 10^{10}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Vs}}\,(1)\\
\Phi_1 &= \frac{\Theta_1}{R_{ges}}\ (1)\\
\Phi_1 &= \frac{1.515\cdot 10^3\,\mathrm{A}}{1.515\cdot 10^{10}\mathrm{A/Vs}} = 1\cdot 10^{-7}\,\mathrm{Vs}\ (1)\\
\Phi_2 &= \frac{R_{s_3}}{R_{s_2}+R_{s_3}}\Phi_1 = \frac{3}{4}\Phi_1 = 7.5\cdot 10^{-8}\,\mathrm{Vs}\ (0.5)\\
\Phi_3 &= \frac{R_{s_2}}{R_{s_2}+R_{s_3}}\Phi_1 = \frac{1}{4}\Phi_1 = 2.5\cdot 10^{-8}\,\mathrm{Vs}\ (0.5)
\end{aligned}
$$

Anmerkung Markus Steimle:
Werden die Pfeile so verwendet wie sie oben eingezeichnet sind, müsste hier bei Phi_2 ein Minus-Zeichen hin.

$\sum_c 6$

d)

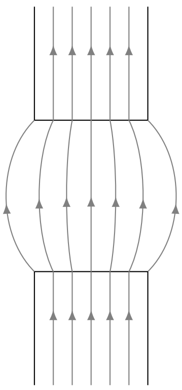
$$\begin{aligned}
N_2 &= 3 \cdot N_1 (\text{gegeben}) \\
\Phi_2 &= \Phi_3 - \Phi_1 \\
\Rightarrow \Phi_3 &= \Phi_1 (1) \\
R_{s_3} &= R_{s_1} \\
\Rightarrow \frac{\Theta_1}{R_{s_1}} &= \frac{\Theta_3}{R_{s_1}} \\
\Rightarrow N_1 \cdot I_1 &= N_2 \cdot I_2 \\
\Rightarrow N_1 \cdot I_1 &= 3N_1 \cdot I_2 \\
\Rightarrow I_2 &= \frac{1}{3} I_1 = 1\,\mathrm{A} (1)
\end{aligned}$$

Anmerkung Markus Steimle:
Wenn oben die Pfeilrichtungen gedreht werden, dann muss hier folgendes stehen: Phi_2 = Phi_1 - Phi_3

Alternativ Begründung: Geometrie ist symmetrisch. Für gleichen Fluss muss also bei reduzierter Windungszahl ein entsprechend höherer Strom fließen.

$\sum_d 2$

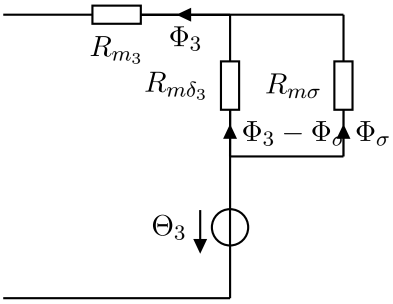
e)



(0.5) Skizze, (0.5) Feldrichtung

$\sum_e 1$

f)



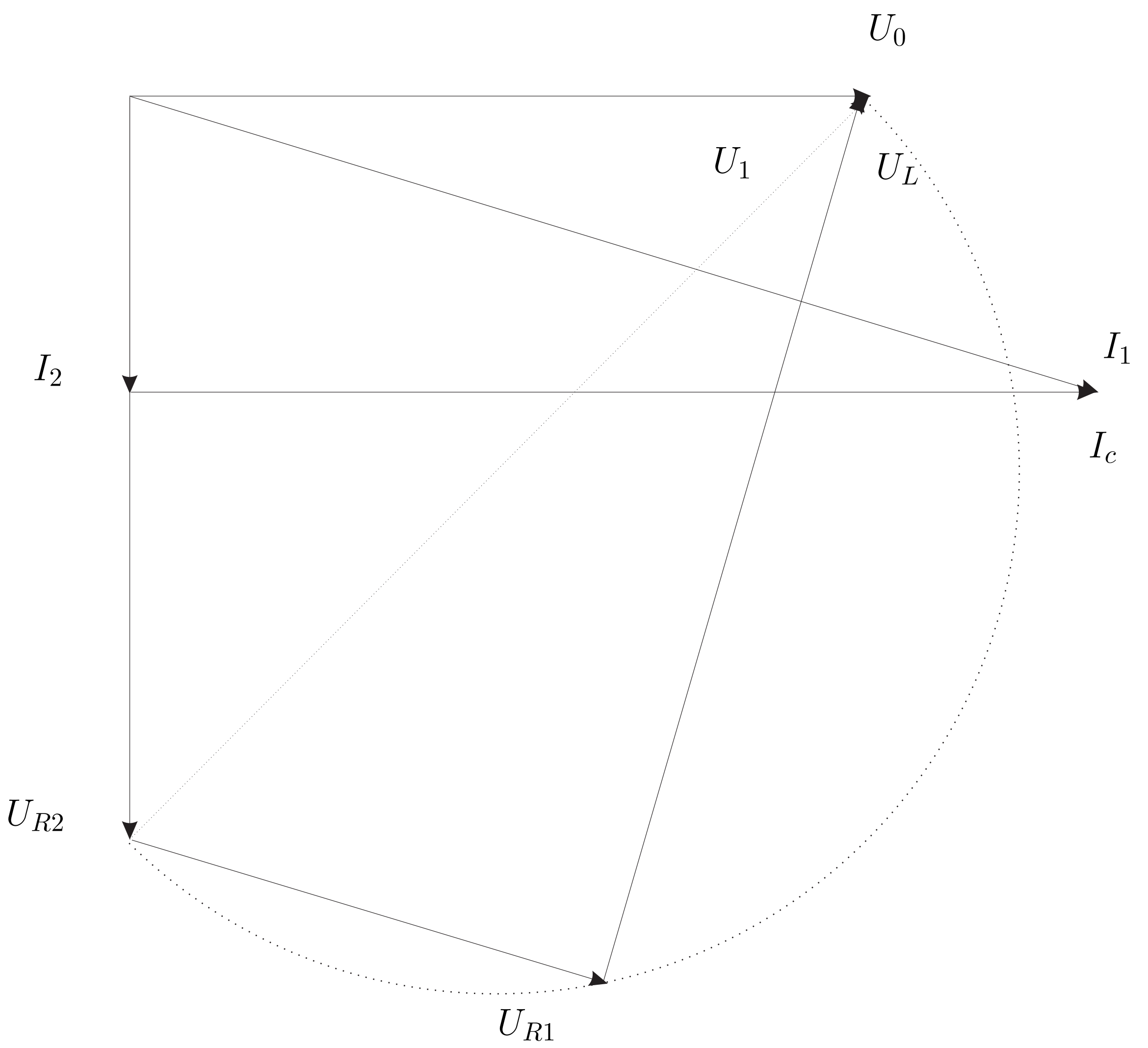
(1) Skizze

$$R_{m\sigma} = \frac{1-\sigma}{\sigma} \cdot R_{m\delta 3} \ (1)$$

$\sum_f 2$

4 Komplexe Wechselstromrechnung

Punkte: 30



a)

1. $\underline{U}_0$ 1 Punkt
2. $|\underline{U}_{R2}| = |\underline{U}_0|$, 90° nacheilend 1,5 Punkt
3. $|\underline{I}_2| = \frac{10V}{25\Omega} = 0,4A$, in Phase zu $\underline{U}_{R2}$ 1,5 Punkt
4. $|\underline{I}_c| = \omega C |\underline{U}_{R2}| = 2\pi \frac{500}{\pi} kHz \cdot 130nF \cdot 10V = 1,3A$, 90° vor $\underline{U}_{R2}$ 1,5 Punkt
5. $|\underline{I}_1| = 1,36A$ durch ablesen 1,5 Punkt
6. U_1 einzeichnen (Hilfspfeil)
7. Thaleskreis über U_1, U_{R1} in Phase mit I_1
8. $\underline{U}_1 = \underline{U}_{R1} + \underline{U}_L$ 2*1 Punkt
9. $|\underline{U}_{R1}| = 6,7V$ 0,5 Punkt
10. $|\underline{U}_L| = 12,5V$ 0,5 Punkt

11. $\phi = 17°$ 1 Punkt

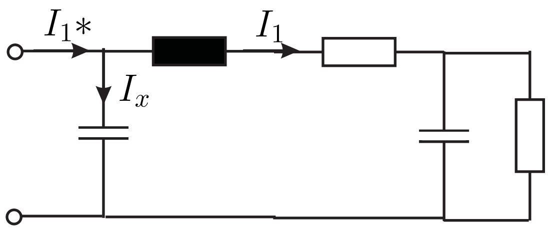
je richtigem Zeiger 1 Punkt, für jeden richtigen Betrag außer U_0 0,5 Punkte, für richtige Phase und richtig abgelesen 1 Punkt

$\sum_a 11$

b) Schaltung zeigt induktives Verhalten, da Strom der Spannung nacheilt → Kapazität zur Blindleistungskompensation Für Antwort und Begründung je 0,5 Punkte

$\sum_b 1$

c) $I_1^* = I_1 + I_x$ 1 Punkt



aus ZD: $|\underline{I}_x| = |\underline{I}_2|$ 1 Punkt

$\omega C_x = \frac{|\underline{I}_x|}{|\underline{U}_0|}$ Ansatz 1 Punkt

$\Rightarrow C_x = \frac{|\underline{I}_2|}{|\underline{U}_0|} \frac{1}{2\pi f} = 0,04\mu F = 40nF$ Allgemeine Lösung 1 Punkt
Ergebnis 1 Punkt

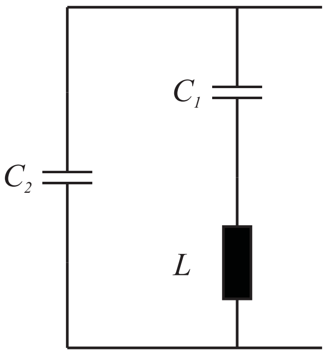
$\sum_c 3$

d) $R = \frac{|\underline{U}_{R1}|}{|\underline{I}_1|} = \frac{10V}{0{,}8A} = 12,5\Omega$ 1,5 Punkte
$\omega L = \frac{|\underline{U}_L|}{|\underline{I}_1|} \Rightarrow L = \frac{|\underline{U}_L|}{|\underline{I}_1|} \frac{1}{2\pi f} = \frac{40V}{0{,}8A} \frac{1}{2\pi \frac{500}{\pi} kHz} = \frac{400}{8} \mu H = 50\mu H$ 1,5 Punkte

Ansatz je 1 Punkt, Lösung je 0,5 Punkte

$\sum_d 3$

e) Ersatzschaltbild:



$\sum_e 1$

f) Reihenschwingkreis aus L und C 1 Punkt
Parallelschwingkreis aus C_x parallel zu L und C 1 Punkt

$\sum_f 2$

g)

$$\underline{Z} = \frac{\frac{1}{j\omega C_x}\left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)}{\frac{1}{j\omega C_x} + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$
$$\underline{Z} = \frac{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}{-\omega^2 LC_x + 1 + \frac{C_x}{C}}$$
$$\underline{Z} = j\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{-\omega^2 LC_x + 1 + \frac{C_x}{C}}$$
$$\underline{Z} = j\frac{\omega^2 LC - 1}{-\omega^3 LC_x C + \omega\left(C_x + C\right)}$$

Ansatz 0,5 Punkte, Weg 1 Punkt, Ergebnis 0,5 Punkte

$\sum_g 2$

h) Maximale Impedanz: Parallelschwingkreis. Die Beträge der Ströme in den beiden Zweigen sind gleich, jedoch sind die Ströme um 180° phasenverschoben, so dass diese sich aufheben. Der für die speisende Quelle sichtbare Strom ist entsprechend null, sprich der komplexe Widerstand maximal. Antwort 0,5 Punkte, Begründung 0,5 Punkte

Minimale Impedanz: Reihenschwingkreis. Die Beträge der Spannungen, die jeweils über Induktivität und Kapazität abfallen, sind gleich, jedoch sind die Spannungen um 180° phasenverschoben, so dass diese sich aufheben. Die über der Schaltung abfallende Gesamtspannung ist entsprechend minimal, das gleiche gilt nach dem komplexen ohmschen Gesetz auch für die Impedanz. Antwort 0,5 Punkte, Begründung 0,5 Punkte

$\sum_h 2$

i) Beim Reihenschwingkreis wird der Zähler zu 0, da dies für die Minimierung des Bruchs und damit des Betrag der Impedanz $|\underline{Z}|$ notwendig ist.

Beim Parallelschwingkreis läuft der Nenner gegen null, da der Betrag der Impedanz $|\underline{Z}|$ so gegen unendlich strebt.

Antwort 0,5 je Punkte, Begründung je 0,5 Punkte

$\sum_i 2$

j) Reihenschwingkreis: Zähler gleich null

$$0 = {\omega_{01}}^2 LC$$
$$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Parallelschwingkreis: Nenner gleich null

$$\begin{aligned}
0 &= -{\omega_{02}}^3 L C_x C + \omega_{02}\left(C_x + C\right)\\
0 &= -{\omega_{02}}^2 L C_x C + C_x + C\\
C_x + C &= {\omega_{02}}^2 L C_x C +\\
C_x + C &= {\omega_{02}}^2 L C_x C +\\
{\omega_{02}}^2 &= \frac{C_x + C}{L C_x C}\\
{\omega_{02}}^2 &= \frac{1}{LC}\frac{C_x + C}{C_x}\\
{\omega_{02}}^2 &= \frac{1}{LC}\left(1 + \frac{C}{C_x}\right)\\
\omega_{02} &= \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 + \frac{C}{C_x}} = \omega_{01}\sqrt{1 + \frac{C}{C_x}}
\end{aligned}$$

Ansatz je 0,5 Punkte, je richtiges Ergebnis 0,5 Punkte

$\sum_j 2$

k) $\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{20\cdot 10^{-3}\frac{Vs}{A}\cdot 80\cdot 10^{-9}\frac{As}{V}}} = \frac{1}{\sqrt{1600\cdot 10^{-12}s^2}} = \frac{1}{40\cdot 10^{-6}}s = 25kHz$

$\omega_{02} = \omega_{01}\sqrt{1 + \frac{C}{C_x}} = \omega_{02}\sqrt{1 + \frac{80nF}{64nF}} = \omega_{02}\sqrt{2,25} = \omega_{02}\cdot 1,5 = 37,5kHz$

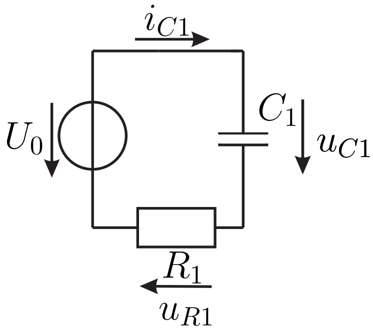
je richtiges Ergebnis 0,5 Punkte

$\sum_k 1$

5 Schaltvorgänge bei Kondensatoren und Spulen **Punkte: 20**

Laden mit Spannungsquelle

a) Skizze: Spannungen (0.5) + Pfeile konsistent mit Rechnung (0.5)



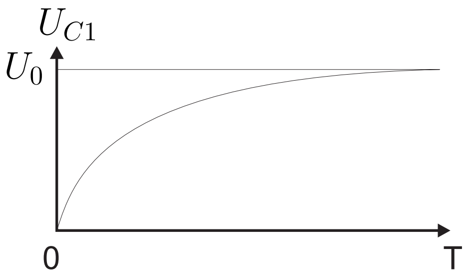
b) $U_0 = u_{C1}(t) + u_{R_1}(t)$ (0.5) $\quad | \; u_{R_1} = i_{C_1}(t) * R_1$ (0.5)
$\Leftrightarrow U_0 = u_{C1}(t) + i_{C_1}(t) * R_1 \quad | \; i_{C_1}(t) = C_1 \frac{du_{C1}}{dt}$ (0.5)
$\Leftrightarrow U_0 = u_{C1}(t) + C_1 \frac{du_{C1}}{dt} * R_1$ (0.5)

c) umstellen/ sortieren
$\Leftrightarrow C_1 R_1 \frac{du_{C1}}{dt} + u_{C1}(t) - U_0 = 0$ (0.5) | normieren
$\Leftrightarrow \frac{du_{C1}}{dt} + \frac{u_{C1}(t)}{C_1 R_1} - \frac{U_0}{C_1 R_1} = 0$ (0.5)

d) DGL lösen:
aus DGL $\frac{dU}{dt} + \frac{1}{b} U - \frac{a}{b} = 0$ und Lösung $U(t) = a(1 - e^{-\frac{t}{b}})$ ergibt sich mit:
$U = u_{C1}$, $a = U_0$ und $b = C_1 R_1$: (0.5)
$u_{C1}(t) = U_0(1 - e^{-\frac{t}{C_1 R_1}})$ (0.5)

e) Startwert: $\lim_{t \to 0} u_{C1}(t) = U_0(1 - e^{-\frac{t=0}{C_1 R_1}}) = U_0(1 - 1) = 0$ (0.5)
Endwert: $\lim_{t \to \infty} u_{C1}(t) = U_0(1 - e^{-\frac{t=\infty}{C_1 R_1}}) = U_0(1 - 0) = U_0$ (0.5)

f) Skizze: (Beschriftung, streng monoton steigend, asymptotisch; Start- und Endwert aus e)) (1)



g) mit $i_{C_1}(t) = C_1 \frac{du_{C1}}{dt}$ muss also $u_{C1}(t)$ nach t abgeleitet und mit C_1 multipliziert werden (0.5):

$i_C(t) = C\frac{I_0R(1-e^{-\frac{t}{\tau}})}{dt}$ (0.5) $\quad i_C(t) = \frac{CI_0R}{dt} + \frac{(-CI_0Re^{-\frac{t}{\tau}})}{dt}$ (0.5) $\quad = \frac{I_0RC}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$ (0.5)

$\sum_{LadevorgangSpannungsquelle} 9$

Energie im Netzwerk

h) $W_{ges1} = \frac{1}{2}CU^2$ (1) mit $U_{C_1} = U_0 = 100\,\mathrm{V}$ (0.5) und $C_1 = 500\,\mu\mathrm{F}$

$W_{ges1} = \frac{1}{2}(100V)^2 500\mu F = \frac{1}{2}10^4 * 5 * 10^2 * V^2 * 10^{-6} * F = 2.5\,\mathrm{Ws}$ (0.5)

$\sum_{EnergieimNetzwerk} 2$

Schwingkreis

i) Ausgangssituation: $U_C(t_0) > 0$ oder $U_C(t_0) < 0$ (U fließt als quadratischer Term in W ein. ($U_C(t_0) > 0$ reicht für die volle Punktzahl). (0.5)

$I_C(t_0) = 0$ (erst nach dem Schließen beginnt sich ein Ausgleichsstrom aufzubauen) (0.5)

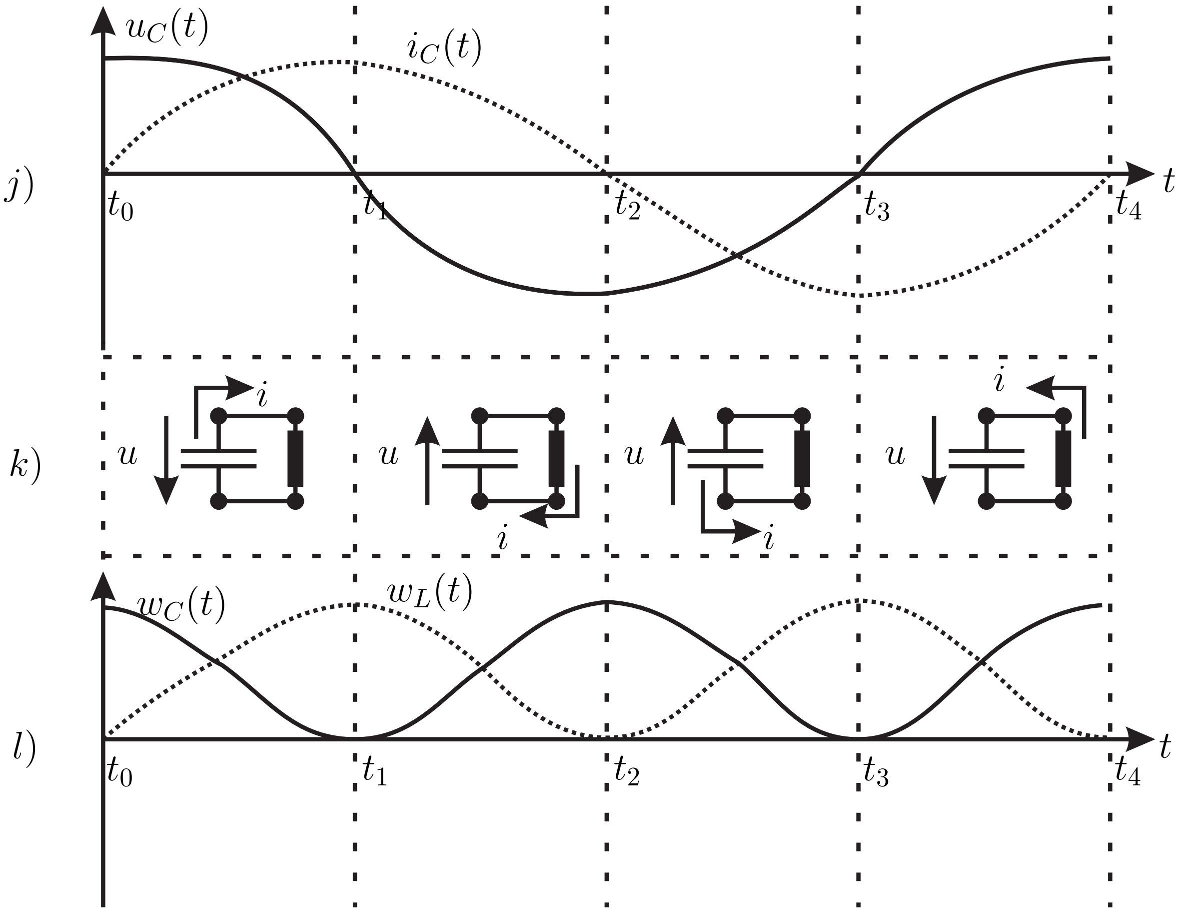
j) Startwerte richtig gezeichnet (0.5)
Verlauf richtig gezeichnet (Kosinus und Sinus) (1)
eine Periode wie gefordert (bis t_4) (0.5)

k) Richtung U $+ + - -$ (passend zu Zeichnung) (1)
Richtung I $- + + -$ ($-$ = invertiert zu positivem U) (1)

l) Startwerte richtig (0.5)
doppelte Frequenz (zu U und I) (0.5)
Gegenläufig (Summe = 1) (0.5)
nur positive Werte (0.5)

m) Energie bleibt im Netzwerk erhalten. (0.5)
t_0, t_2, t_4 gesamte Energie im Kondensator gespeichert (0.5)
t_1, t_3 gesamte Energie in Induktivität gespeichert (0.5)
Zwischen (t_0 und t_1), ..., (t_3 und t_4) Energieverlagerung: in der Mitte der Abschnitte zu 50% in L und C (0.5)

$\sum_{Schwingkreis} 9$


j)
$u_C(t)$
$i_C(t)$
t
t_0 t_1 t_2 t_3 t_4
k)
u
i
l)
$w_C(t)$
$w_L(t)$
t
t_0 t_1 t_2 t_3 t_4