F06

1/1

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG
INSTITUT *COMPUTATIONAL MATHEMATICS*
Prof. Dr. R. Hempel, T. Scharlau

Wintersemester 2005/2006
11. 2. 2006

Klausur zur Vorlesung
„Mathematik I für Studierende der Elektrotechnik"

Aufgabe 1. Gegeben seien $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 4 & 18 & 34 \\ 6 & 27 & 51 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

Untersuchen Sie, für welche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ das Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbar ist und berechnen Sie gegebenenfalls die Lösungsmenge. $\boxed{7}$

Aufgabe 2. Berechnen Sie folgende Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln(1-\cos x)}{\ln x}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+7n+1} - \sqrt{n^2+1})$.

$\boxed{4+4+3}$

Aufgabe 3.
a) Zeigen Sie mit der Teleskop-Methode, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{64n^2 + 16n - 15}$$

konvergiert. Berechnen Sie den Wert der Reihe. Welche Aussagen machen Quotienten- und Wurzelkriterium über das Konvergenzverhalten dieser Reihe?

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius sowie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n.$$

$\boxed{8+2}$

Aufgabe 4. Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen

a) $f_1(x) = \ln\ln(x^2)$ b) $f_2(x) = (\sin x)^{\cos x}$ c) $f_3(x) = \ln\tan x - \dfrac{\cos(2x)}{\sin^2(2x)}$.

$\boxed{3+4+6}$

http://pfg-et.

Aufgabe 5. Wir betrachten die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \end{bmatrix}.$$

a) Geben Sie die Koordinatenmatrix $A(f, E, E)$ an, wobei E die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$ bezeichnet. Bestimmen Sie die Dimensionen von Bild$f$ und Kern$f$ sowie jeweils eine Basis von Bild$f$ und Kern$f$.
b) Gegeben seien die Basen $\mathfrak{B}, \mathfrak{D}$ des $\mathbb{R}^3$

$$\mathfrak{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$$

$$\mathfrak{D} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}.$$

Bestimmen Sie die Matrizen $\mathbf{S}$ und $\mathbf{C}$, für die

$$\mathbf{A}(f, \mathfrak{B}, \mathfrak{D}) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}(f, E, E)\mathbf{C}$$

gilt.[1] Berechnen Sie die Determinante der Matrix $\mathbf{S}$. Berechnen Sie $\mathbf{A}(f, \mathfrak{B}, \mathfrak{D})$.
c) Sei der Vektor $\mathbf{x}$ bezüglich der kanonischen Basis gegeben durch

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Geben Sie die Koordinaten des Vektors bezüglich der Basen $\mathfrak{B}, \mathfrak{D}$ an und bestimmen Sie die Matrix $\mathbf{G}$ des Koordinatenwechsels von der Basis $\mathfrak{B}$ zur Basis $\mathfrak{D}$. 7+7+4

Aufgabe 6.
a) Berechnen Sie mit Hilfe partieller Integration:

$$\int \cos(3x) \cos x \, dx.$$

b) Berechnen Sie mit Hilfe einer geeigneten Substitution:

$$\int \sqrt{2x+3} \, dx.$$

c) Führen Sie für den Integranden eine Partialbruchzerlegung durch und berechnen Sie das Integral:

$$\int \frac{3x + 11}{x^2 - 8x + 15} dx.$$

3+3+5

[1] **Hinweis:** Wie in der großen Übung bezeichnet $\mathbf{A}(f, \mathfrak{B}, \mathfrak{D})$ die Koordinatenmatrix der Abbildung f bezüglich der Basen $\mathfrak{B}$ des Urbildraums und $\mathfrak{D}$ des Bildraums.