Institut Computational Mathematics
Prof. Dr. Thomas Sonar
Dr. Martina Wirz

Technische Universität Braunschweig

Klausur zur Vorlesung
Mathematik I für Studierende der E-Technik

SoSe 17 18.07.2017

Aufgabe 1 (5 + 4 + 3 Punkte)

(a) Überprüfen Sie die Folgen (a_n) und (b_n) auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

$$a_n = \frac{(-2)^n + 3^n}{2^n + (-3)^n}, \quad b_n = \sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 + 2}.$$

nicht konvergent $\qquad \frac{3n-2}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+2}} = \frac{3}{2}.$

(b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{WK} \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{3n}{5n}\right)^n, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2+5}{9k^2}. \longrightarrow \text{Divergenzkriterium}$$

$\cancel{\sum_{n=1} n \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{3}{5} \sum_{n=1} n \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}}$

(c) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k + 2}{k!}$. $= \sum \frac{(-3)^k}{k!} + 2 \sum \frac{1^k}{k!}$

$= (\exp(-3) - 1) + 2(\exp(1) - 1)$

Aufgabe 2 (2 + 6 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(2k-1)!}$.

(b) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von

$$f(x) = e^{4x} + \frac{1}{3x+5}$$

$e^{4x} = e^4 \cdot e^{4(x-1)} = e^4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k (x-1)^k}{k!}$

im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ und geben Sie den Konvergenzradius an.

$\frac{1}{3x+5} = \frac{1}{3(x-1)+8} = \frac{1}{8} \frac{1}{1-\left(-\frac{3}{8}(x-1)\right)} = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-3}{8}(x-1)\right)^k$

$\left|\frac{-3}{8}(x-1)\right| < 1 \Leftrightarrow |x-1| < \frac{8}{3} \Leftrightarrow \frac{5}{3} < x < \frac{11}{3}$

Aufgabe 3 (5 + 2 + 3 Punkte)

(a) Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{3x}, \quad \lim_{x\to 0} (3x+1)^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\pi - 4e^{-x^2}}{3}. \quad = \pi/3$$

$\frac{\sin(2x)}{3} = 0$

$\lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(3x+1)}{x}} = e^{\frac{3}{3x+1}/1} = e^3$

(b) Bestimmen Sie ein $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{2x-2}}{x-1}, & x \neq 1, \\ a, & x = 1, \end{cases}$$

auch im Punkt $x_0 = 1$ stetig ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - |x|$ nicht auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

$\frac{1 - e^{2x-2}}{x-1} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \frac{-2e^{2x-2}}{1} = -2 = a$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{3x}{x} = 3$

e^{-x^2}

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (1 + 5 + 2 Punkte)
Gegeben sei die Matrix

$$\det\big(A - \lambda E\big) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 1 \wedge \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A.

(b) Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie Matrizen S, D so, dass $D = S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

(c) Was muss für die Matrizen A und S gelten, damit Sie die Diagonalmatrix D bereits durch $S^T AS$ erhalten?

Aufgabe 5 (3 + 3 + 2 + 5 Punkte)
Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ mit $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + a_2x + a_0x^2$ die Basis $\mathscr{B}_1 = \{1 + x, x + x^2, x^2\}$ und $\mathscr{B}_2 = \{2x, x^2, 3x + 1\}$. Weiterhin bezeichne $\mathscr{E} = \{1, x, x^2\}$ die kanonische Basis des $\mathbb{P}_2$.

(a) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathscr{B}_2$ eine Basis von $\mathbb{P}_2$ ist.

(c) Bestimmen Sie die Matrix $\mathscr{M}(f, \mathscr{E}, \mathscr{E})$ an und die Dimension von $\operatorname{Kern} f$.

(d) Geben Sie die Matrixdarstellung von f bezüglich der Basen $\mathscr{B}_1$ und $\mathscr{B}_2$ an. Bestimmen Sie dazu die Matrizen S und R mit $\mathscr{M}(f, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2) = R^{-1}\mathscr{M}(f, \mathscr{E}, \mathscr{E})S$.

Aufgabe 6 (1 + 3 + 6 Punkte)

Durch die Kurve $\boldsymbol{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{c}(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ 4\cos t \\ 4\sin t \end{pmatrix}$, sei ein Draht im Raum parametrisiert.

(a) Skizzieren Sie die Projektion der Kurve in die y-z-Ebene.

(b) Berechnen Sie die Bogenlänge $L(\boldsymbol{c})$ der Kurve.

(c) Der Draht besitze die ortsabhängige Massendichte

$$\rho(x, y, z) = \mathrm{e}^{2x} \cdot \left(\frac{y^2 + z^2}{8} + \frac{x}{3}\right).$$

Berechnen Sie die Gesamtmasse des Drahtes für $0 = a \leq t \leq b = 1$.

Zwischenergebnis: $5\displaystyle\int_0^1 (2 + t)\mathrm{e}^{6t}\,\mathrm{d}t$ ist zu bestimmen.