Lösungen Kapitel 1

Lösung Aufgabe 1.1

Beweis (1):

$$(1-a)\cdot\sum_{\nu=0}^{N-1} a^\nu = (a^0 + a^1 + a^2 + \dots + a^{N-1}) - (a^1 + a^2 + a^3 + \dots + a^N) = 1 - a^N \quad \text{q.e.d.}$$

Grenzwert: Falls $|a| < 1$ ist, geht der Term a^N für $N \to \infty$ gegen 0, daher gilt:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a^\nu = \frac{1}{1-a}\ .$$

Konvergenz: Die Reihe konvergiert für $|a| < 1$, wobei a auch komplex sein kann.

Beweis (2):

$$\sum_{\nu=M}^{N-1} a^\nu = \sum_{\nu=0}^{N-1} a^\nu - \sum_{\nu=0}^{M-1} a^\nu = \frac{1-a^N}{1-a} - \frac{1-a^M}{1-a} = \frac{a^M - a^N}{1-a} \quad \text{q.e.d.}$$

Lösung Aufgabe 1.2

a) nicht stabil, kausal, linear, nicht verschiebungsinvariant, nicht gedächnislos

b) stabil, nicht kausal, linear, verschiebungsinvariant, nicht gedächnislos

c) stabil, kausal, nichtlinear, verschiebungsinvariant, gedächnislos

d) stabil, nicht kausal, linear, nicht verschiebungsinvariant, nicht gedächnislos

e) stabil, kausal, nichtlinear, nicht verschiebungsinvariant, gedächnislos

Lösung Aufgabe 1.3

a) Impulsantwort:

$$\begin{aligned} y(n) &= 0, & n<0 \\ y(n) &= h(n) = \epsilon(n)\cdot n!, & \text{sonst} \\ y(0) &= 1 \\ y(1) &= 1 \\ y(2) &= 2 \\ y(3) &= 6 \\ &\vdots \end{aligned}$$

b) Linearität: Betrachte das Eingagngssignal $x(n) = a\cdot\delta(n) + b\cdot\delta(n)$:

$$\begin{aligned} y(n) &= 0, & n<0 \\ y(0) &= a+b \\ y(1) &= a+b \\ y(2) &= 2\cdot(a+b) = 2a+2b \\ y(3) &= 6\cdot(a+b) = 6a+6b \\ &\vdots \end{aligned}$$

Das Ausgangssignal entspricht der Überlagerung der Ausgangssignale der individuellen Eingangssignale und ist daher linear.

c) Zeitinvarianz: Betrachte das Eingangssignal $x(n) = \delta(n-1)$:

$$\begin{aligned} y(n) &= 0, \quad n<0 \\ y(0) &= 0 \\ y(1) &= 1 \\ y(2) &= 2 \\ y(3) &= 6 \\ &\vdots \end{aligned}$$

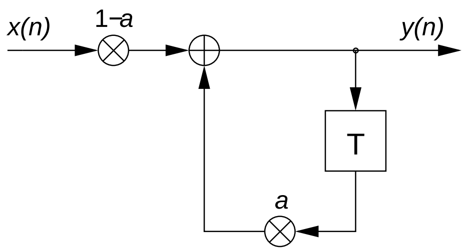
Vergleich mit $h(n)$ zeigt: $y(n) \neq h(n-1)$ $\rightarrow$ nicht verschiebungsinvariant!

Lösung Aufgabe 1.4

a) kausal b) kausal c) nicht kausal d) nicht kausal e) nicht kausal

Lösung Aufgabe 1.5

a) nicht stabil b) stabil c) stabil d) nicht stabil e) stabil f) stabil



Lösung Aufgabe 1.6

Anfangsbedingung: $y(-1) = 0$.

$$\begin{array}{rcll} y(n) & = & 0, & n < 0 \\ y(0) & = & 1-a & \\ y(1) & = & a\cdot(1-a) & \\ y(2) & = & a^2\cdot(1-a) & \\ & \vdots & & \\ y(n) & = & a^n\cdot(1-a), & n \geq 0 \\ y(n) & = & h(n), & n \geq 0 \end{array}$$

Stabilität für $|a| < 1$, denn: $\sum_{\nu=0}^{\infty}|h(n)| = 1 < \infty$ (siehe Aufgabe 1).

Lösung Aufgabe 1.7

$$y(n) = x(n) * y(n) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} x(\nu)\cdot h(n-\nu) = \sum_{\nu=0}^{4} 1\cdot a^{n-\nu}\cdot\epsilon(n-\nu)$$

$$\begin{array}{rcll} y(n) & = & 0, & n < 0 \\ y(0) & = & 1 & \\ y(1) & = & a+1 & \\ y(2) & = & a^2+a+1 & \\ y(3) & = & a^3+a^2+a+1 & \\ y(4) & = & a^4+a^3+a^2+a+1 & \\ y(5) & = & a\cdot y(4) & \\ y(6) & = & a\cdot y(5) & \\ & \vdots & & \end{array}$$

Lösung Aufgabe 1.8

Impulsantwort: $\{\ldots,0,0,\underset{\uparrow}{0},0,0,\ldots\}$ Sprungantwort: $\{\ldots,0,0,\underset{\uparrow}{1},1,1,\ldots\}$

a) nichtlinear b) verschiebungsinvariant c) nicht kausal d) BIBO-stabil

Lösung Aufgabe 1.9

a) periodisch ($T = 2\pi/5$) b) nicht periodisch c) nicht periodisch
d) nicht periodisch e) periodisch ($N = 16$)

Lösung Aufgabe 1.10

a) $h(n) = h_1(n) * [h_2(n) - h_3(n) * h_4(n)]$

b) $h(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{5}{4}\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \frac{5}{2}\epsilon(n-3)$

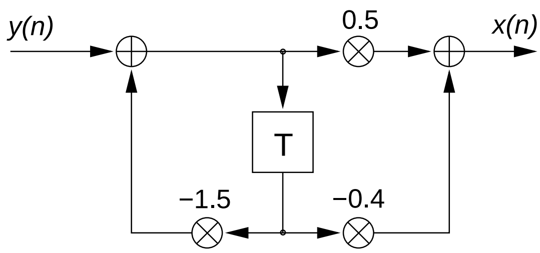
c) $y(n) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \underset{\uparrow}{2}, 4, \frac{25}{4}, \frac{13}{2}, 5, 2, 0, 0, \dots\right\}$

Lösung Aufgabe 1.11

$h(n) = g(n)$

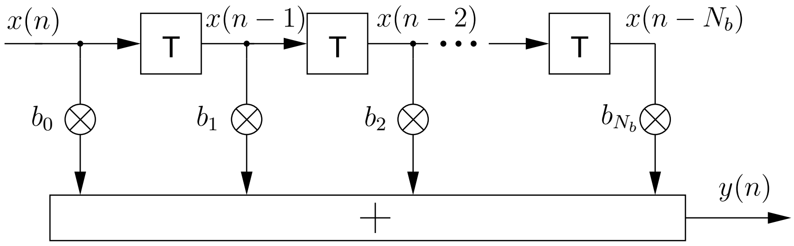
Lösung Aufgabe 1.12

Differenzengleichung des Systems: $x(n) = 0.5\ y(n) - 0.4\,y(n-1) - 1.5\,x(n-1)$.

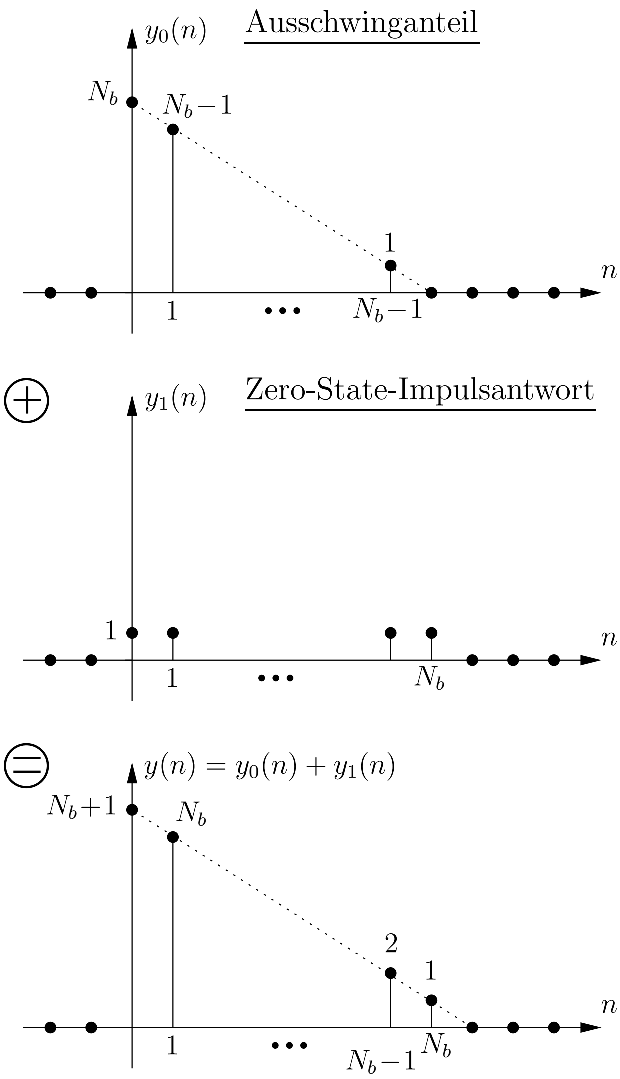


Lösung Aufgabe 1.13

$$y(n) = \underbrace{\sum_{\nu=0}^{N_b} b_\nu \cdot \delta(n-\nu)}_{\text{Faltungsergebnis, wenn alle Speicher mit Nullen vorbelegt sind: Zero-State-Impulsantwort}} + \underbrace{\sum_{\nu=n+1}^{N_b} b_\nu \cdot 1}_{\text{Ausschwinganteil, den man erhält, wenn das FIR-System mit Nullen gespeist wird. } \rightarrow \text{ Danach sind alle Speicher mit Nullen gefüllt!}} \quad , n = 0, 1, 2, \ldots$$



Annahme: $b_0 = b_1 = \cdots = b_{N_b} = 1$:



Lösungen Kapitel 2

Lösung Aufgabe 2.1

$$X(e^{j\Omega}) = \underbrace{\frac{1 - a_1 \cdot \cos(\Omega)}{1 - 2a_1 \cdot \cos(\Omega) + a_1^2}}_{\mathrm{Re}\{X(e^{j\Omega})\}} + j \underbrace{\frac{-a_1 \cdot \sin(\Omega)}{1 - 2a_1 \cdot \cos(\Omega) + a_1^2}}_{\mathrm{Im}\{X(e^{j\Omega})\}}$$

$$|X(e^{j\Omega})| = \sqrt{\mathrm{Re}^2 + \mathrm{Im}^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a_1 \cdot \cos(\Omega) + a_1^2}}$$

$$\Phi(\Omega) = \arctan\left(\frac{-a_1 \cdot \sin(\Omega)}{1 - a_1 \cdot \cos(\Omega)}\right)$$

Plot: siehe Vorlesungsskript S. 81.

Lösung Aufgabe 2.2

Zeitverschiebungssatz: $x(n - n_0) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad X(e^{j\Omega}) \cdot e^{-j\Omega n_0}, \qquad n_0 \in \mathbb{Z}$

Beweis:

$$\begin{aligned}
Y(e^{j\Omega}) &= \textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n - n_0) \cdot e^{-j\Omega n} && \nu = n - n_0 \\
&= \textstyle\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} x(\nu) \cdot e^{-j\Omega(\nu + n_0)} \\
&= e^{-j\Omega n_0} \textstyle\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} x(\nu) \cdot e^{-j\Omega\nu} && \nu \to n \text{ (einfache Umbenennung)} \\
&= e^{-j\Omega n_0} \cdot X(e^{j\Omega}) && \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 2.3

$$h(n) = \frac{\Omega_c}{\pi} \mathrm{si}(\Omega_c \cdot n)$$

$\to$ Der ideale TP ist <u>nicht-kausal</u> und somit praktisch nicht realisierbar!

Stabilität:

$$\frac{1}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\sin(\Omega_c \cdot n)}{n} \right| \to \infty \quad \text{nicht stabil! (}\to\text{beidseitiges Abschneiden der Impulsantwort)}$$

Lösung Aufgabe 2.4

$$h(n) = \delta(n) - h_{\mathrm{TP}}(n) = \delta(n) - \frac{\Omega_c}{\pi}\frac{\sin(\Omega_c \cdot n)}{n} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad H(e^{j\Omega}) = 1 - H_{\mathrm{TP}}(e^{j\Omega}) = H_{\mathrm{HP}}(e^{j\Omega})$$

Einen idealen Hochpass erhält man <u>auch</u> durch Verschiebung des TP-Frequenzgangs um $\Omega_0 = \pi$:

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{HP}}(e^{j\Omega}) &= H_{\mathrm{TP}}(e^{j(\Omega-\pi)}) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad h_{\mathrm{HP}}(n) &&= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{\mathrm{TP}}(e^{j(\Omega-\pi)}) \cdot e^{j\Omega n}\, d\Omega \\ &\text{(Substitution: } \Omega' = \Omega - \pi) &&= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{0} H_{\mathrm{TP}}(e^{j\Omega'}) \cdot e^{j\Omega' n} \cdot e^{j\pi n}\, d\Omega' \\ &\text{(Frequenzverschiebungssatz, Skript S. 72)} &&= h_{\mathrm{TP}}(n) \cdot e^{j\pi n} = h_{\mathrm{TP}}(n) \cdot (-1)^n \end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 2.5

$$y(n) = x(n) - x(n-1)$$

Linearität:

$$y_1(n) = x_1(n) - x_1(n-1), \quad y_2(n) = x_2(n) - x_2(n-1)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}\{a \cdot x_1(n) + b \cdot x_2(n)\} &= a \cdot x_1(n) + b \cdot x_2(n) - [a \cdot x_1(n-1) + b \cdot x_2(n-1)] \\ &= [a \cdot x_1(n) - a \cdot x_1(n-1)] + [b \cdot x_2(n) + b \cdot x_2(n-1)] \\ &= a \cdot y_1(n) + b \cdot y_2(n) \end{aligned}$$

Verschiebungsinvarianz:

$$\mathfrak{T}\{x(n-n_0)\} = x(n-n_0) - x(n-n_0-1) = y(n-n_0)$$

Impulsantwort:

$$h(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$$

Frequenzgang:

$$H(e^{j\Omega}) = 1 - e^{-j\Omega}$$

Amplitudengang:

$$|H(e^{j\Omega})| = 2 \cdot \left|\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)\right|$$

Phasengang:

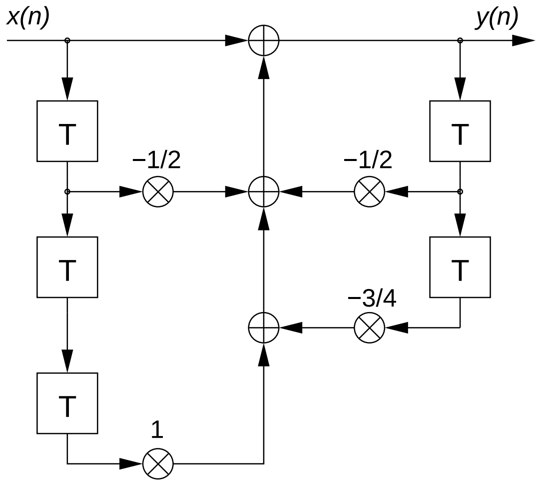
$$\Phi(\Omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{\Omega}{2} \quad \to \text{lineare Phase, Steigung: } \frac{-\pi}{2\pi} = -\frac{1}{2}$$

Verzögerung: 1/2 Abtastwert

Lösung Aufgabe 2.6

a) $H(e^{j\Omega}) = \frac{1+2e^{-j\Omega}+e^{-j2\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$

b) $x(n) - \frac{1}{2}x(n-1) + x(n-3) = y(n) + \frac{1}{2}y(n-1) + \frac{3}{4}y(n-2)$



Lösung Aufgabe 2.7

$$y(n) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \epsilon(n) + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot \epsilon(n)$$

Lösung Aufgabe 2.8

a) $X_1(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j\frac{\Omega}{2}}}{1-a\cdot e^{j\frac{\Omega}{2}}}$

b) $X_2(e^{j\Omega}) = X(e^{-\frac{\Omega}{2}})$

c) $X_3(e^{j\Omega}) = X^2(e^{j\Omega}) \cdot e^{-j\Omega}$

d) $X_4(e^{j\Omega}) = -X(e^{j(\Omega+\frac{j\pi}{2})}) \cdot e^{j2\Omega}$

e) $X_5(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2}\left[X(e^{j(\Omega-0.3\pi)}) + X(e^{j(\Omega+0.3\pi)})\right]$

f) $X_6(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1-2a\cos(\Omega)+a^2}$

Lösung Aufgabe 2.9

a) $H(e^{j\Omega}) = \cos(\frac{\Omega}{2}) \cdot e^{-j\frac{\Omega}{2}}$ $\quad |H(e^{j\Omega})| = |\cos(\frac{\Omega}{2})|$ $\quad \Phi(\Omega) = -\frac{\Omega}{2}, \quad 0 < \Omega < \pi$

b) $H(e^{j\Omega}) = \sin(\frac{\Omega}{2}) \cdot e^{-j\frac{\Omega}{2}} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$ $\quad |H(e^{j\Omega})| = |\sin(\frac{\Omega}{2})|$ $\quad \Phi(\Omega) = -\frac{\Omega}{2} + \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \Omega < \pi$

c) $H(e^{j\Omega}) = \sin(\Omega) \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$ $\quad |H(e^{j\Omega})| = |\sin(\Omega)|$ $\quad \Phi(\Omega) = \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \Omega < \pi$

d) $H(e^{j\Omega}) = \cos(\Omega)$ $\quad |H(e^{j\Omega})| = |\cos(\Omega)|$ $\quad \Phi(\Omega) = \begin{cases} 0, & 0 < \Omega < \frac{\pi}{2} \\ \pi, & \frac{\pi}{2} < \Omega < \pi \end{cases}$

e) $H(e^{j\Omega}) = \cos(\Omega) \cdot e^{-j\Omega}$ $\quad |H(e^{j\Omega})| = |\cos(\Omega)|$ $\quad \Phi(\Omega) = \begin{cases} -\Omega, & 0 < \Omega < \frac{\pi}{2} \\ -\Omega + \pi, & \frac{\pi}{2} < \Omega < \pi \end{cases}$

f) $H(e^{j\Omega}) = \sin(\Omega) \cdot e^{-j\Omega + j\frac{\pi}{2}}$ $\quad |H(e^{j\Omega})| = |\sin(\Omega)|$ $\quad \Phi(\Omega) = -\Omega + \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \Omega < \pi$

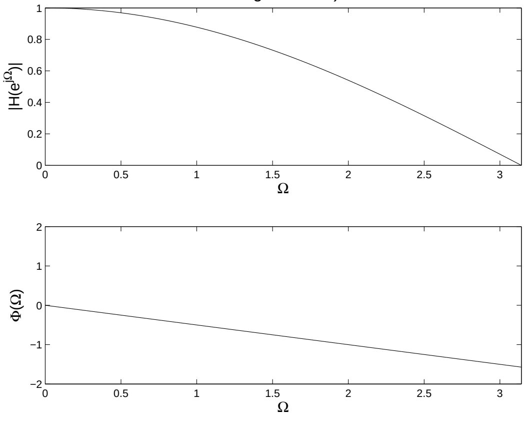
g) $H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{3}\big[1 + 2\cos(\Omega)\big]$ $\quad |H(e^{j\Omega})| = \Big|\frac{1}{3}\big[1 + 2\cos(\Omega)\big]\Big|$

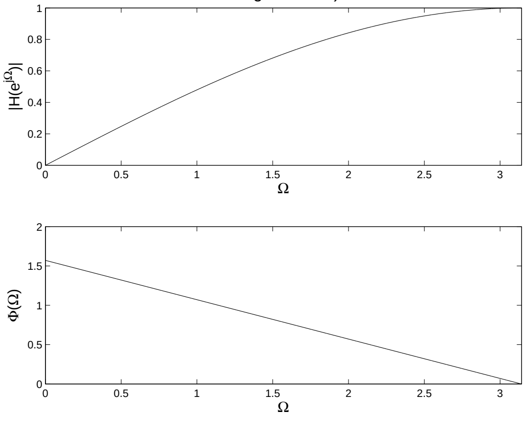
$$\Phi(\Omega) = \begin{cases} -\Omega, & 1 + 2\cos(\Omega) > 0 \\ -\Omega + \pi, & 1 + 2\cos(\Omega) < 0 \end{cases} = \begin{cases} -\Omega, & 0 < \Omega < \frac{2\pi}{3} \\ -\Omega + \pi, & \frac{2\pi}{3} < \Omega < \pi \end{cases}$$

h) $H(e^{j\Omega}) = 2 \cdot \sin(4\Omega) \cdot e^{j(\frac{\pi}{2} - 4\Omega)}$ $\quad |H(e^{j\Omega})| = 2 \cdot |\sin(4\Omega)|$

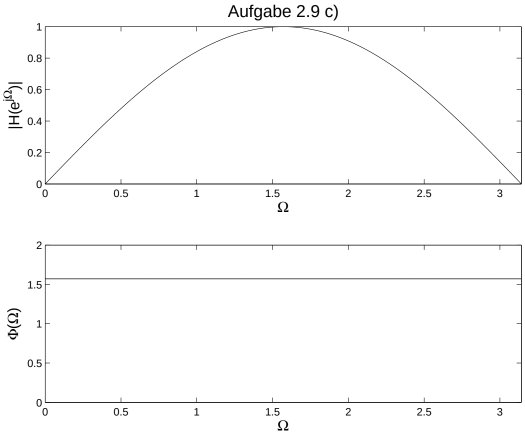
$$\Phi(\Omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 4\Omega, & 0 < \Omega < \frac{\pi}{4} \\ \frac{3\pi}{2} - 4\Omega, & \frac{\pi}{4} < \Omega < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} - 4\Omega\,(+2\pi), & \frac{\pi}{2} < \Omega < \frac{3\pi}{4} \\ \frac{3\pi}{2} - 4\Omega\,(+2\pi), & \frac{3\pi}{4} < \Omega < \pi \end{cases}$$

i) $H(e^{j\Omega}) = e^{j4\Omega}$ $\quad |H(e^{j\Omega})| = 1$ $\quad \Phi(\Omega) = 4\Omega$

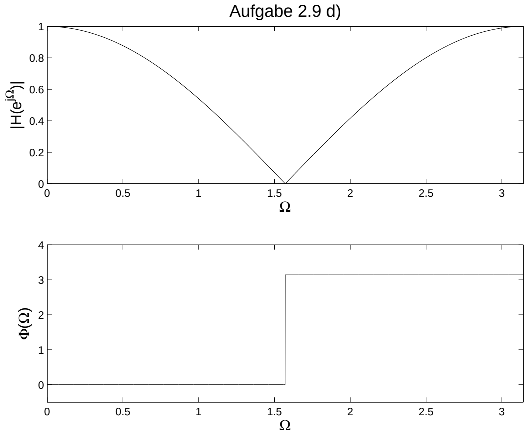




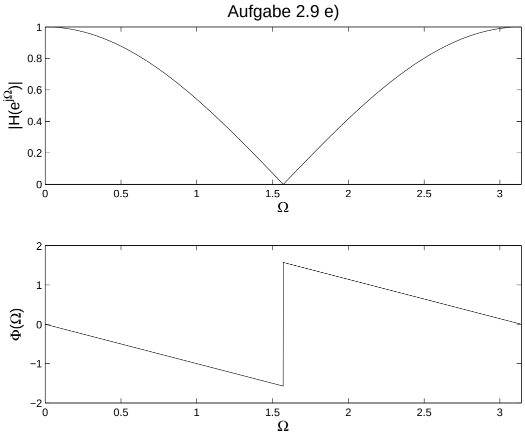
Aufgabe 2.9 c)



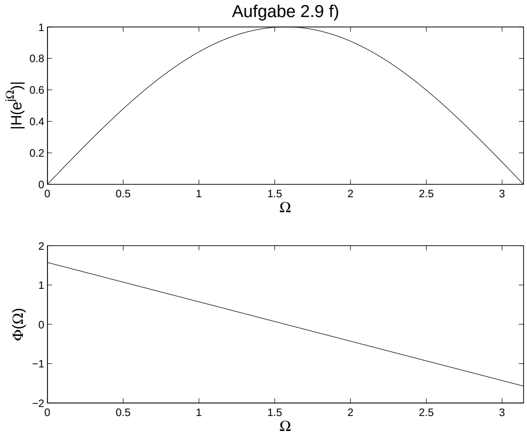
Aufgabe 2.9 d)



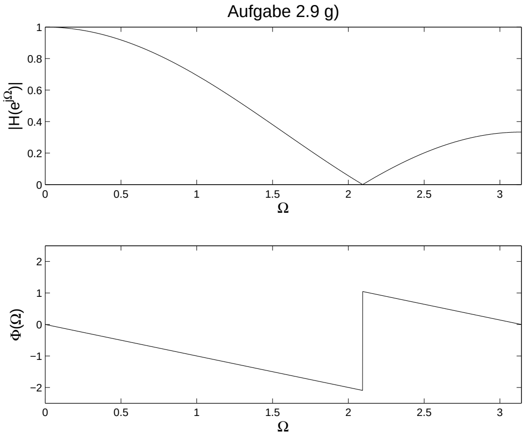
Aufgabe 2.9 e)



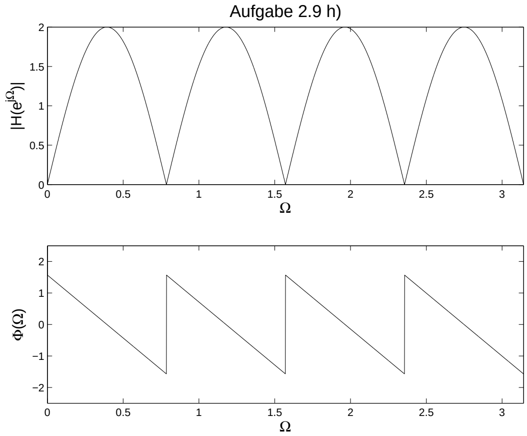
Aufgabe 2.9 f)



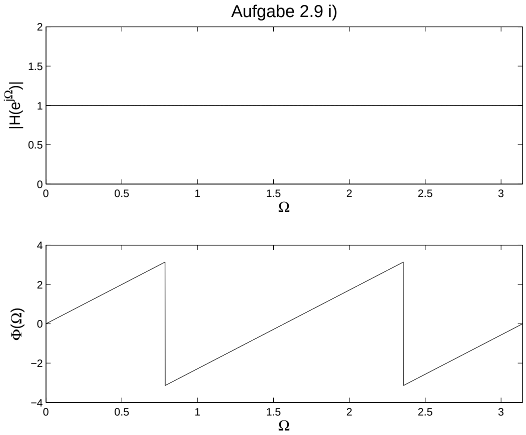
Aufgabe 2.9 g)



Aufgabe 2.9 h)



Aufgabe 2.9 i)

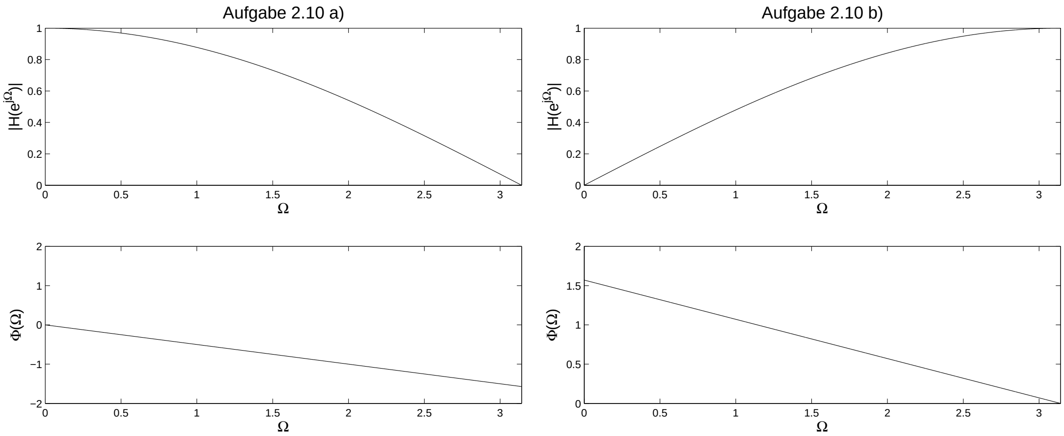


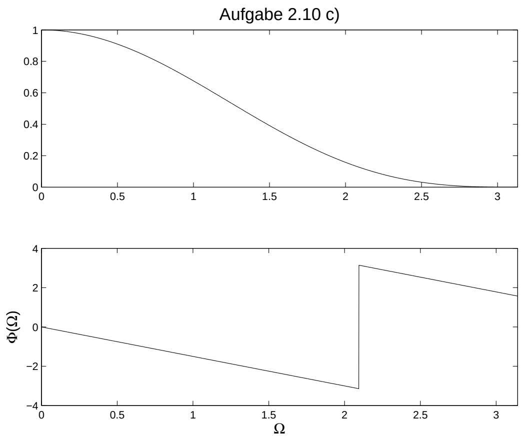
Lösung Aufgabe 2.10

a) $H(e^{j\Omega}) = \cos(\frac{\Omega}{2}) \cdot e^{-j\frac{\Omega}{2}} \qquad |H(e^{j\Omega})| = |\cos(\frac{\Omega}{2})| \qquad \Phi(\Omega) = -\frac{\Omega}{2}, \quad 0 < \Omega < \pi$

b) $H(e^{j\Omega}) = \sin(\frac{\Omega}{2}) \cdot e^{j(\frac{\pi}{2}-\frac{\Omega}{2})} \qquad |H(e^{j\Omega})| = |\sin(\frac{\Omega}{2})| \qquad \Phi(\Omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{\Omega}{2}, \quad 0 < \Omega < \pi$

c) $H(e^{j\Omega}) = \cos^3(\frac{\Omega}{2}) e^{-j\frac{3\Omega}{2}} \qquad |H(e^{j\Omega})| = |\cos^3(\frac{\Omega}{2})| \qquad \Phi(\Omega) = -\frac{3\Omega}{2}, \quad 0 < \Omega < \pi$





Lösung Aufgabe 2.11

$$|H(e^{j\Omega})| = |2\cos\left(\frac{\Omega \cdot M}{2}\right)| \qquad \Phi(\Omega) = \begin{cases} -\frac{\Omega\cdot M}{2}, & \cos\left(\frac{\Omega\cdot M}{2}\right) > 0 \\ \pi - \frac{\Omega\cdot M}{2}, & \cos\left(\frac{\Omega\cdot M}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

Lösung Aufgabe 2.12

a) $b = \pm 0.1$

b) $\Omega_0 = 0.105$

Lösung Aufgabe 2.13

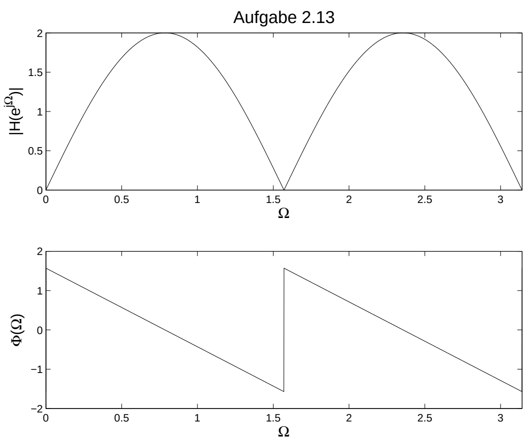
a) $H(\mathrm{e}^{j\Omega}) = 2 \cdot e^{-j2\Omega} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot \sin(2\Omega)$

b) $x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$

$H(e^{j\frac{\pi}{2}n}) = 0, \qquad H(e^{j\frac{\pi}{4}}) = 2, \qquad \Phi(\frac{\pi}{4}) = 0$

$y(n) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$

c) Das Filter sperrt bei der Frequenz $\Omega = \frac{\pi}{2}$.



Lösung Aufgabe 2.14

a)

$$h(n) = \frac{2}{\pi n} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{8}n\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

b)

$$h_1(n) = \frac{2\sin(\frac{\pi}{8}n)}{n\pi}$$

$$H_1(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 2, & |\Omega| \leq \frac{\pi}{8} \\ 0, & \frac{\pi}{8} < |\Omega| < \pi \end{cases}$$

$$\rightarrow h(n) = h_1(n) \cdot \cos(\frac{\pi}{4}n)$$

Lösungen Kapitel 3

Lösung Aufgabe 3.1

a)	$\mathcal{Z}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \epsilon(n)\right\}$	$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$	ROC: $\lvert z\rvert > 1/2$	$\rightarrow$ FT existiert
b)	$\mathcal{Z}\left\{-\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \epsilon(-n-1)\right\}$	$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$	ROC: $\lvert z\rvert < 1/2$	$\rightarrow$ FT existiert nicht
c)	$\mathcal{Z}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \epsilon(-n)\right\}$	$= \frac{1}{1-2z}$	ROC: $\lvert z\rvert < 1/2$	$\rightarrow$ FT existiert nicht
d)	$\mathcal{Z}\left\{\delta(n)\right\}$	$= 1$	ROC: alle z	$\rightarrow$ FT existiert
e)	$\mathcal{Z}\left\{\delta(n-1)\right\}$	$= z^{-1}$	ROC: $\lvert z\rvert > 0$	$\rightarrow$ FT existiert
f)	$\mathcal{Z}\left\{\delta(n+1)\right\}$	$= z$	ROC: $0 \leq \lvert z\rvert < \infty$	$\rightarrow$ FT existiert
g)	$\mathcal{Z}\left\{(\frac{1}{2})^n \cdot [\epsilon(n) - \epsilon(n-10)]\right\}$	$= \frac{z-\frac{1}{2}(2z)^{-9}}{z-\frac{1}{2}}$	ROC: $0 < \lvert z\rvert$	$\rightarrow$ FT existiert

Lösung Aufgabe 3.2

$$X(z) = \frac{z^{-1} - z^{-N-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

Lösung Aufgabe 3.3

a) $x(n) = (-\frac{1}{2})^n \cdot \epsilon(n)$ (FT existiert)

b) $x(n) = -(-\frac{1}{2})^n \cdot \epsilon(-n-1)$ (FT existiert nicht)

c) $x(n) = \left[4 \cdot (-\frac{1}{2})^n - 3 \cdot (-\frac{1}{4})^n\right] \cdot \epsilon(n)$ (FT existiert)

d) $x(n) = (-\frac{1}{2})^n \cdot \epsilon(n)$ (FT existiert)

e) $x(n) = -a \cdot \delta(n) + (a^2 - 1) \cdot a^{-(n+1)} \cdot \epsilon(n)$ (FT existiert falls $|a| > 1$)

Lösung Aufgabe 3.4

a) $H(z) = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ ROC: $|z| > 1$

b) ROC: $|z| > 1$, $y(n)$ rechtsseitig

c) $y(n) = -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \epsilon(n) + \frac{1}{3} \cdot (-1)^n \cdot \epsilon(n)$

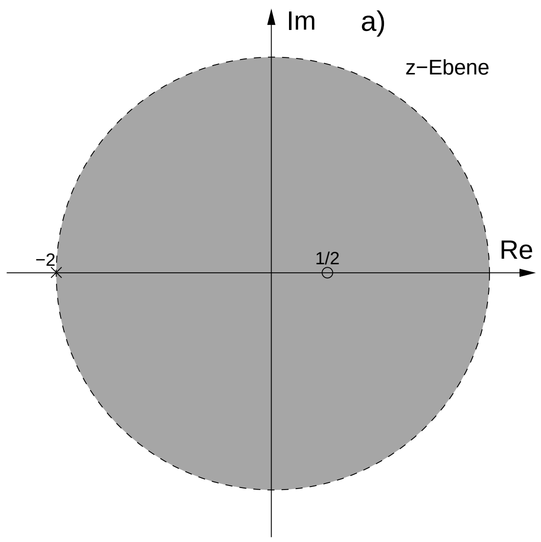
Lösung Aufgabe 3.5

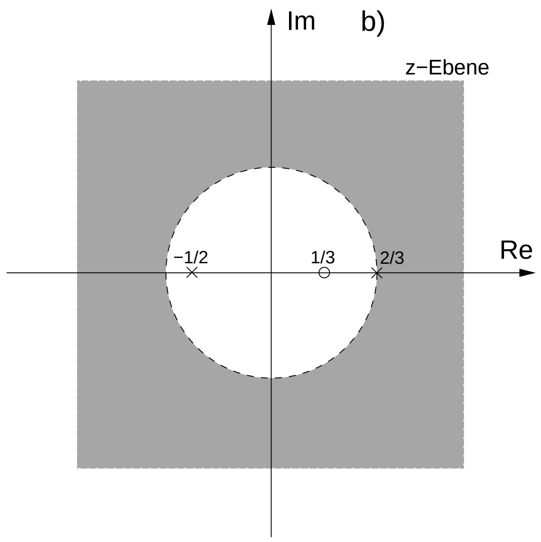
a) $h(n) = -\frac{4}{3} \cdot \delta(n) + \frac{7}{3}(-\frac{3}{4})^n \cdot \epsilon(n)$

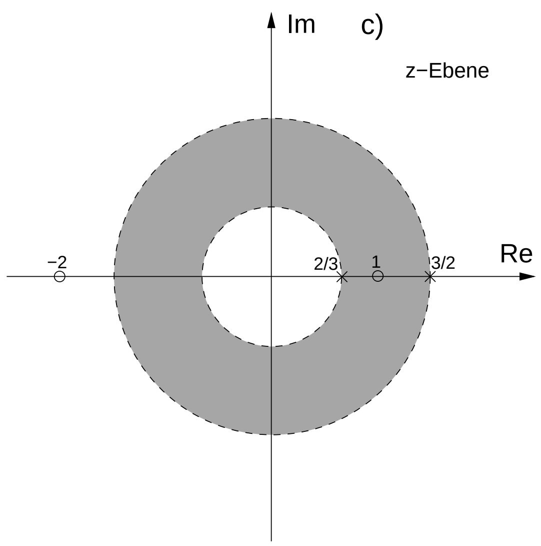
b) $y(n) = -\frac{8}{13} \cdot (\frac{1}{3})^n \cdot \epsilon(n) + \frac{8}{13} \cdot (-\frac{3}{4})^n \cdot \epsilon(n)$

c) Das System ist stabil, da es laut Aufgabenstellung kausal ist und konvergiert im Bereich $|z| > 3/4$, also alle Pole innerhalb des Einheitskreises liegen! Wenn $|z| = 1$ Teil der ROC, dann ist absolute Summierbarkeit gegeben!

Lösung Aufgabe 3.6







Lösung Aufgabe 3.7

a) ROC: $|z| > 1/2$

b) ROC: $1/3 < |z| < 2$

c) ROC: $1/3 < |z|$

Lösung Aufgabe 3.8

a) ROC: $|z| > 2/3$

b) ROC: $|z| > 1/6$

Lösung Aufgabe 3.9

$$\text{a)} \quad H(z) = \tfrac{1}{2}(1 + z^{-1})$$

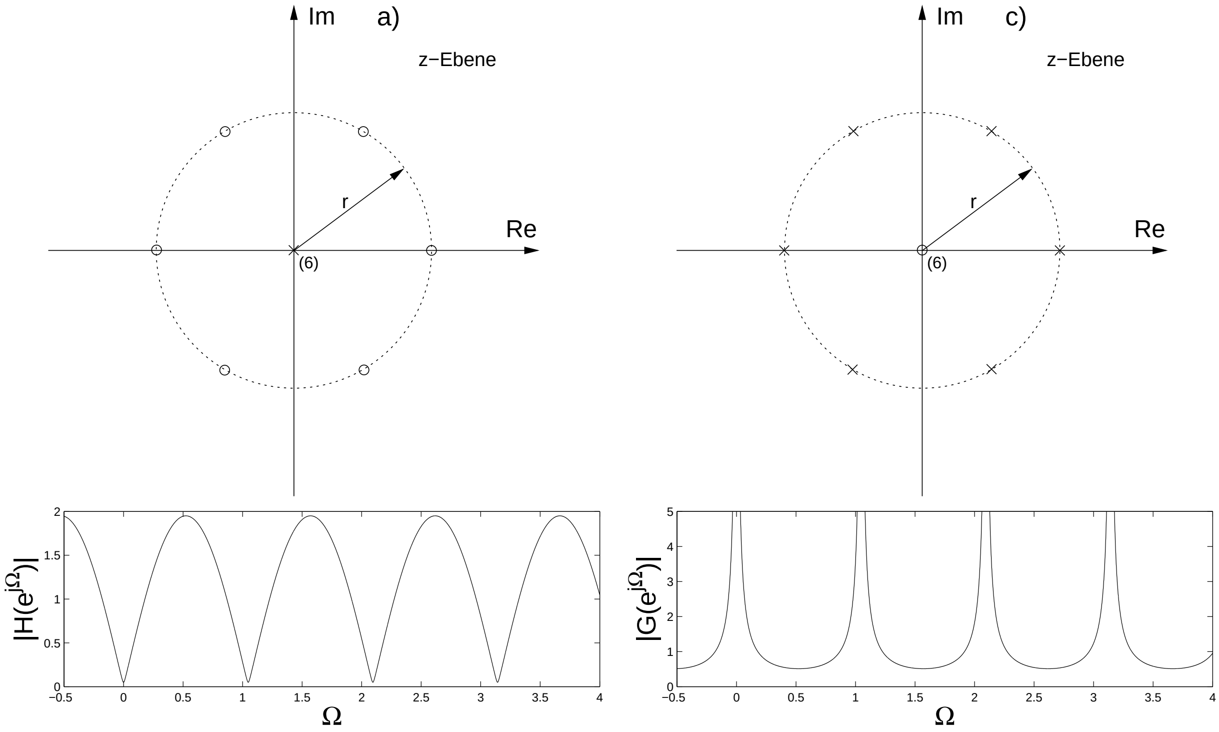
$$\text{b)} \quad H(z) = \tfrac{1}{2}(-1 + z^{-1})$$

$$\text{c)} \quad H(z) = \left[\tfrac{1}{2}(1 + z^{-1})\right]^3$$

Lösung Aufgabe 3.10

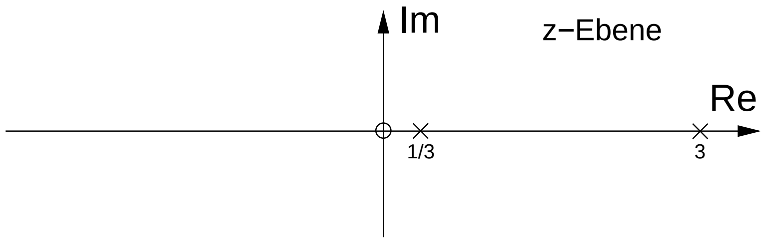
zu a) $z_{0k} = (0.95)^{\frac{1}{6}} \cdot e^{j2\pi k/6}, \quad k = 0, 1. \dots, 5 \qquad r = 0.95^{(1/6)} = 0.9915$

zu c) $G(z) = \frac{z^6}{z^6 - 0.95}$



Lösung Aufgabe 3.11

a) Nullstelle bei $z = 0$, Nullstelle bei $z \to \infty$



b) $h(n) = -\frac{3}{8} \cdot (\frac{1}{8})^n \cdot \epsilon(n) - \frac{1}{8}(3)^{n+1} \cdot \epsilon(-n-1), \quad n \in \mathbb{Z}$

Lösung Aufgabe 3.12

a) $y(n) - \frac{7}{12} \cdot y(n-1) + \frac{1}{12} \cdot y(n-2) = 3 \cdot x(n) - \frac{19}{6} \cdot x(n-1) + \frac{2}{3} \cdot x(n-2)$

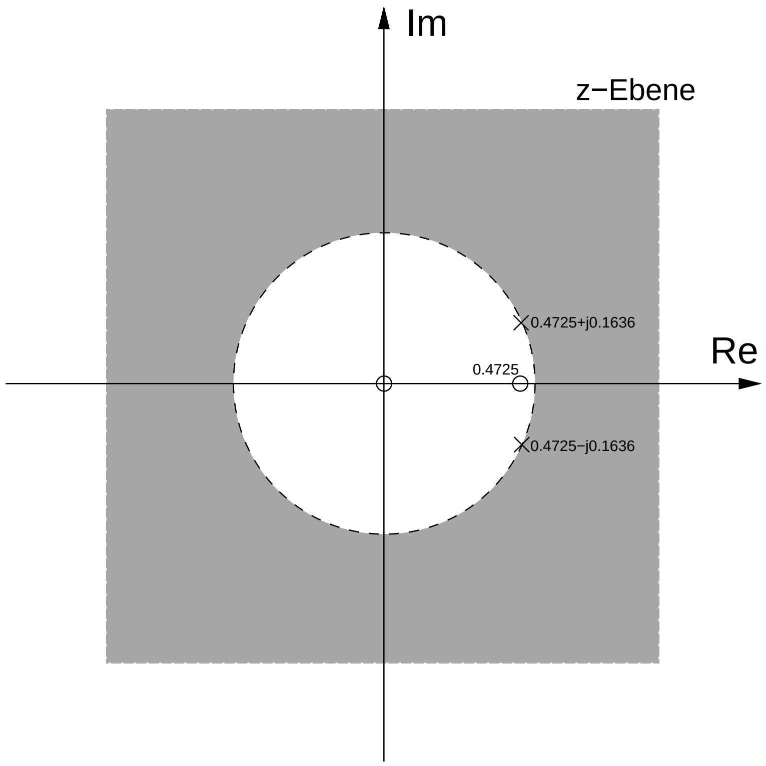
b) $h(n) = (\frac{1}{3})^n \cdot \epsilon(n) - (\frac{1}{3})^{n-1} \cdot \epsilon(n-1) + (\frac{1}{4})^n \cdot \epsilon(n) - (\frac{1}{4})^{n-1} \cdot \epsilon(n-1) + \delta(n)$

c) Das System ist kausal, alle Pole liegen im Einheitskreis $\to$ stabil.

Lösung Aufgabe 3.13

$$X(z) = \frac{z(z - \frac{1}{2}\cos(\frac{1}{3}))}{z^2 - \cos(\frac{1}{3}) \cdot z + \frac{1}{4}}$$

Nullstellen: $z_{01} = 0$ und $z_{02} = \frac{1}{2}\cos(\frac{1}{3}) = 0.4725$ / Pole: $z_{\infty 1,2} = 0.4725 \pm j0.1636$


Im
z−Ebene
0.4725+j0.1636
Re
0.4725
0.4725−j0.1636

Lösung Aufgabe 3.14

$$h(n) = \epsilon(n) \cdot \left[9 \cdot (0.9)^n - 8 \cdot (0.8)^n\right], \quad |z| > 0.9$$

Lösung Aufgabe 3.15

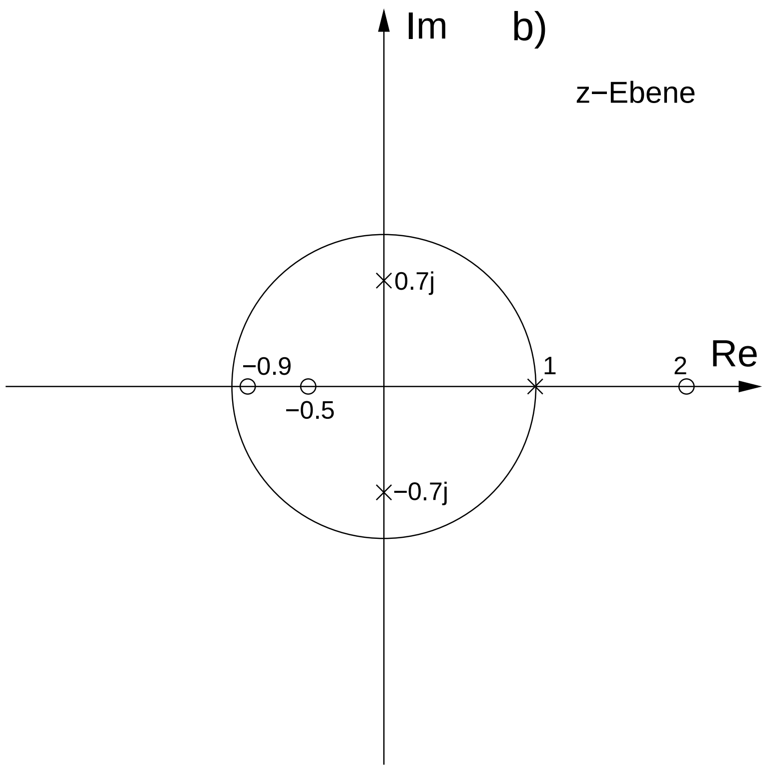
a) Stabil, da Pole $z_{\infty 1,2} = \pm j0.9$ innerhalb des Einheitskreises!

b)
$$H_{\min}(z) = \frac{(1-0.2z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}{(1-j0.9z^{-1})(1+j0.9z^{-1})} \cdot \frac{1}{b_0}$$
$$H_{\mathrm{AP}}(z) = \frac{(1-3z^{-1})(1+3z^{-1})}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})} \cdot b_0$$
$$b_0 = -\frac{1}{9}$$

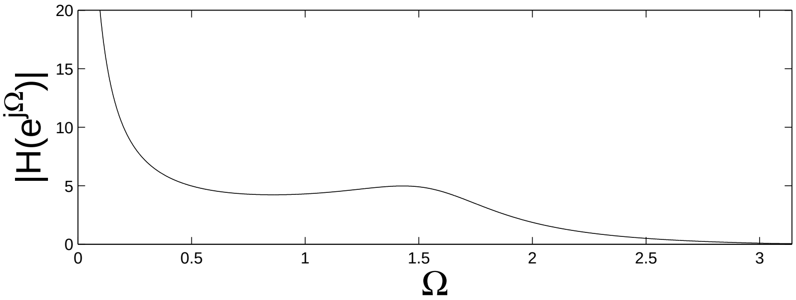
Lösung Aufgabe 3.16

a) $y(n) = y(n-1) - 0.49 \cdot y(n-2) + 0.49 \cdot y(n-3) + x(n) - 0.6 \cdot x(n-1) - 2.35 \cdot x(n-2) - 0.9 \cdot x(n-3)$

b+c) $z_{01} = 2, \quad z_{02} = -\frac{1}{2}, \quad z_{03} = -0.9, \quad z_{\infty 1,2} = \pm 0.7j, \quad z_{\infty 3} = 1$



(Fortsetzung Aufgabe 3.16)



d) Nein, denn 1 Pol liegt auf dem Einheitskreis.

e) Nein, denn eine Nullstelle liegt außerhalb des Einheitskreises.

Lösung Aufgabe 3.17

a) nicht minimalphasig

b) minimalphasig

c) minimalphasig

d) nicht minimalphasig

Lösung Aufgabe 3.18

a) $H_{\min}(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} \cdot 2$

b) $H_{\min}(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{z^{-1}} \cdot 3$

c) $H_{\min}(z) = \frac{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}{(1-\frac{3}{4}z^{-1})(1-\frac{3}{4}z^{-1})} \cdot \frac{9}{4}$

Lösung Aufgabe 3.19

a) Allpass

b) kein Allpass

c) Allpass

d) Allpass mit zusätzlicher Verzögerung

Lösung Aufgabe 3.20

a) $\tau(\Omega) = 5$ Takte Verzögerung

b) $\tau(\Omega) = 1/2$ Takt Verzögerung

Lösungen Kapitel 4

Lösung Aufgabe 4.1

$$H(z) = \frac{0.5}{1 - e^{-(a+jb)T} z^{-1}} + \frac{0.5}{1 - e^{-(a-jb)T} z^{-1}}, \qquad \text{ROC: } |z| > e^{-aT}$$

Lösung Aufgabe 4.2

a)

$$\delta_\mathrm{p} = 0.293, \quad \delta_\mathrm{st} = 0.5, \quad f_\mathrm{p} = 2500, \mathrm{Hz} \qquad \Omega' = \Omega_\mathrm{p}, \quad f_\mathrm{st} = 3441\,\mathrm{Hz}, \quad v = 15708\,\mathrm{s}^{-1}$$

Toleranzschema: vgl. Vorlesungsskript.

b)

$$N = 2$$

c)

$$s_{\infty 1} = 15708 \cdot e^{j3\pi/4}\,\mathrm{s}^{-1}, \quad s_{\infty 2} = 15708 \cdot e^{j5\pi/4}\,\mathrm{s}^{-1}$$

d)

$$H(z) = 0.293 \cdot \frac{(z+1)^2}{(z - 0.414j)(z + 0.414j)}$$

e)

$$H_\mathrm{HP}(z) = 0.293 \cdot \frac{(z-1)^2}{(z - 0.414j)(z + 0.414j)}$$

Lösung Aufgabe 4.3

a)

$$1 - \delta_\mathrm{p} = 0.891, \quad \delta_\mathrm{st} = 0.17783, \quad \omega_\mathrm{p} = 0.1\omega_\mathrm{s}, \quad \omega_\mathrm{st} = 0.15\omega_\mathrm{s}$$

Toleranzschema: vgl. Vorlesungsskript.

b)

$$\omega_\mathrm{c} = 0.112\omega_\mathrm{s}$$

Lösung Aufgabe 4.4

$$\Omega_\mathrm{c} = 0.4\pi$$

Lösung Aufgabe 4.5

a)

$$\Omega_\mathrm{c} = 1.122$$

b)

$$v = 15169\,\mathrm{s}^{-1}$$

Lösung Aufgabe 4.6

$$\omega_\mathrm{c} = 2500\pi$$

Lösung Aufgabe 4.7

$$\omega_\mathrm{c} = 2\pi(2414)\,\mathrm{s}^{-1}$$

Lösung Aufgabe 4.8

$$v = 1369.5\,\mathrm{s}^{-1} \quad \text{(nur exakt eine Lösung)}$$

Lösung Aufgabe 4.9

$$v \cdot T = 1.85, \quad \omega_\mathrm{st} \cdot T = 0.1913\pi \quad \text{Zeichnung des Toleranzschemas: vgl. Vorlesungsskript}$$

Lösung Aufgabe 4.10

a)

$$N = 2$$

b)

$$v = 15793,9\,\mathrm{s}^{-1}$$

Lösung Aufgabe 4.11

$$H_\mathrm{BP}(z) = \frac{0.245(1 - z^{-2})}{1 + 0.509z^{-2}}$$

Lösung Aufgabe 4.12

a)

$$H_\mathrm{HP}(z) = \frac{0.245(1 - z^{-1})}{1 + 0.509z^{-1}}$$

b)

$$H_\mathrm{HP}(z) = 0.753(1 - z^{-1})$$

Lösungen Kapitel 5

Lösung Aufgabe 5.1

a)
$$N_\mathrm{b} \geq 29.7, \quad \beta = 3.3953$$

b)
$$\Omega'_\mathrm{p} = 0.25\pi, \quad \Omega'_\mathrm{st} = 0.4\pi, \quad \delta'_\mathrm{st} = 0.1$$

c)
$$N'_\mathrm{b} = 12$$

d) Vorteile von $F(z)$:

- Geringere Gesamtkomplexität $2(N'_\mathrm{b} + 1) = 26$ MACs pro Sample.
- geringere Verzögerung: $2 \cdot \frac{N_\mathrm{b}}{2} = 12$ Samples.

Nachteil:

- δ_p wird größer! $\quad \approx 6\,\mathrm{dB} \quad \rightarrow \quad \approx 12\,\mathrm{dB}$

Lösung Aufgabe 5.2

a)
$$N = 91, \quad \beta = 3.3953$$

b)
$$\tau = 45$$

c)
$$h_\mathrm{ideal}(n) = \frac{\sin(0.625\pi(n-45)) - \sin(0.3\pi(n-45))}{\pi(n-45)}$$

Lösung Aufgabe 5.3

- Hann-Fenster ($N_\mathrm{b} = 80$)
- Hamming-Fenster ($N_\mathrm{b} = 80$)
- Blackman-Fenster ($N_\mathrm{b} = 120$)

Lösung Aufgabe 5.4

$$N_\mathrm{b} = 181, \quad \beta = 2.655$$

Lösung Aufgabe 5.5

a)

$$N_{\mathrm{b}} = 23, \quad h_{\mathrm{ideal}}(n) = \frac{\sin(\frac{\pi}{3}(n - \frac{23}{2}))}{\pi(n - \frac{23}{2})},\ 0 \leq n \leq 23$$

b)

$$N_{\mathrm{b}} = 48, \quad h(n) = \frac{\sin(\frac{\pi}{3}(n - 24))}{\pi(n - 24)} \cdot \Big[0.54 - 0.46 \cos\big(\frac{2\pi n}{48}\big)\Big],\ 0 \leq n \leq 48$$

Lösung Aufgabe 5.6

$$\{h(n)\} = \{0.0732, 0.4267, 0.4267, 0.0732\}$$

Lösung Aufgabe 5.7

$$h(n) = j\,\frac{\mathrm{si}(\pi(n - 10)) \cos(\pi n)[1 - \cos(\frac{\pi n}{10})]}{2(n - 10)}$$

Lösung Aufgabe 5.8

a)

$$|H(e^{j\Omega})| = 1$$

b)

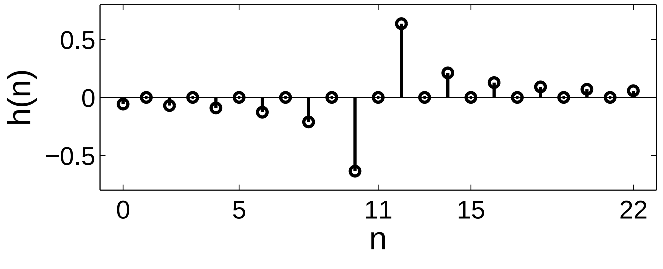
Die Typen III und IV sind möglich!

c)

$$h(n) = \frac{1}{\pi(n - \alpha)}\big[1 - \cos\big(\pi(n - \alpha)\big)\big]$$

d)

$$\text{Für } \alpha \in \mathbb{Z} \text{ kann man schreiben: } h(n) = \frac{1}{\pi(n - \alpha)}[1 - (-1)^{n-\alpha}]$$



Lösungen Kapitel 6

Lösung Aufgabe 6.1

a)

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - c \cdot e^{-j\Omega}}, \quad |c| < 1$$

b+c)

$$\tilde{X}(k) = \frac{1}{1 - c \cdot e^{-j2\pi k/K}} = X(e^{j\Omega})\big|_{\Omega = 2\pi k/K}$$

Lösung Aufgabe 6.2

a)

$$X(k) = 1$$

b)

$$X(k) = W_k^{n_0 k}$$

c)

$$X(k) = \begin{cases} 0, & \text{sonst} \\ \frac{K}{2}, & k = 0, \frac{K}{2} \end{cases}$$

d)

$$X(k) = \begin{cases} \frac{K}{2}, & k = 0 \\ 0, & k = 2, 4, \ldots, K-2 \\ \frac{2}{1 - e^{-j2\pi k/K}}, & k = 1, 3, \ldots, K-1 \end{cases}$$

Lösung Aufgabe 6.3

a)

$$X(e^{j\Omega}) = e^{-j(\Omega - \Omega_0)(K-1)/2} \cdot \frac{\sin((\Omega - \Omega_0)\frac{K}{2})}{\sin((\Omega - \Omega_0)\frac{1}{2})}$$

b)

$$X(k) = e^{-j(\frac{2\pi k}{K} - \Omega_0)(K-1)/2} \cdot \frac{\sin((\frac{2\pi k}{K} - \Omega_0)\frac{K}{2})}{\sin((\frac{2\pi k}{K} - \Omega_0)\frac{1}{2})}$$

c)

$$X(k) = e^{-j\frac{2\pi}{K}(k - k_0)(K-1)/2} \cdot \frac{\sin(\pi(k - k_0))}{\sin(\pi(k - k_0)/K)}$$

Lösung Aufgabe 6.4

Skizzen entsprechend:

a)
$$y_1(n) = 2\delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2) + \cdots + \delta(n-5)$$

b)
$$y_2(n) = x(n)$$

Lösung Aufgabe 6.5

$$y(n) = \frac{(\frac{1}{2})^n}{1-(\frac{1}{2})^{10}}, \quad 0 \le n \le 9$$

Lösung Aufgabe 6.6

$$K_{\min} = 24$$

Da die Folge kürzer ist als die DFT-Länge K=24, müssen zunächst Nullwerte angehängt werden:

$$y(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \le n \le 19 \\ 0, & 20 \le n \le 23 \end{cases}$$

$$\mathrm{DFT}_{24-\mathrm{Punkte}}\{y(n)\}\big|_{k=4} = X(e^{j\Omega})\big|_{\Omega=\frac{12\pi}{36}}$$

Lösung Aufgabe 6.7

a)
$$Y(k) = \mathrm{DFT}\{y(n)\}$$
$$\frac{1}{2}\tilde{Y}(k) + \frac{1}{2}\tilde{Y}(K-k) = X_1(k), \quad k = 0, 1, \ldots, K-1$$
$$\frac{1}{2j}\big(\tilde{Y}(k) - \tilde{Y}(K-k)\big) = X_2(k), \quad k = 0, 1, \ldots, K-1$$

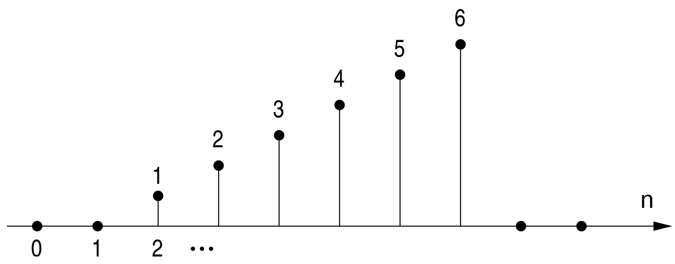
b)
- $2K^2$
- $K^2 + 4K$

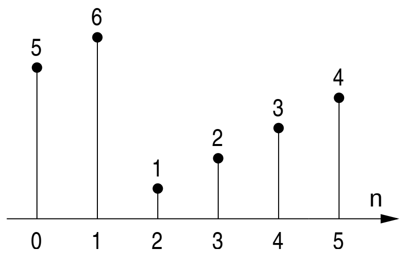
Lösung Aufgabe 6.8

b)

Für $K = 6$:

Für $K = 8$ ergibt sich die lineare Faltung!

a) 



Lösung Aufgabe 6.9

a)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{3} \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) W_4^{kn} = 1 - e^{-j\pi k}, \quad 0 \leq k \leq 3$$

b)

$$H(k) = 1 + 2W_4^k + 4W_4^{2k} + 8W_4^{3k}$$

c)

$$y(n) = (1-4)\delta(n) + (2-8)\delta(n-1) + (4-1)\delta(n-2) + (8-2)\delta(n-3)$$

Lösung Aufgabe 6.10

$$K = 9$$

Lösung Aufgabe 6.11

a)

$$K = 128, \quad L = 48 \text{ Abtastwerte}$$

b)

$$80 \text{ Abtastwerte}$$

c)

$$2K \log_2(K) + 2K - L \text{ komplexe Ops pro } L \text{ Abtastwerte}$$

d)

$$7.35 \text{ MOPS}$$

e)

160 MHz-Variante: maximal 43 Kanäle, 200 MHz-Variante: maximal 54 Kanäle

Lösung Aufgabe 6.12

a)
$$K_{\mathrm{OLA}} = 512, \quad K_{\mathrm{OLS}} = 256$$

b)
$$64\text{mal}$$

c)
$$66\text{mal}$$

d)
$$\text{OLA: } 0.42 \cdot 10^6 \text{ MACs/Sekunde, OLS: } 0.43 \cdot 10^6 \text{ MACs/Sekunde}$$

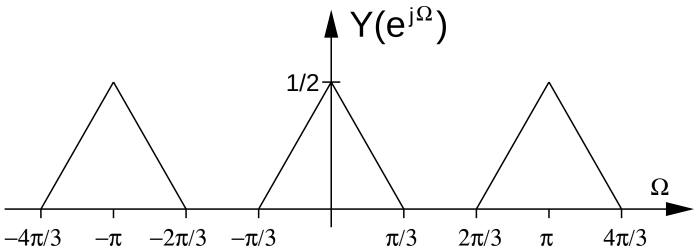
Die Faltung im Zeitbereich ist etwa 3.8 mal aufwändiger.

Lösungen Kapitel 7

Lösung Aufgabe 7.1

a)

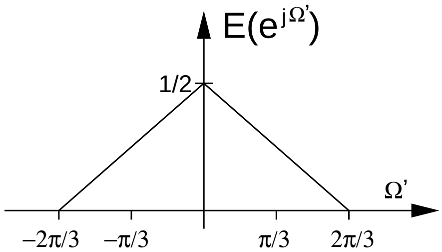
$$y(n) = x(n) \cdot r(n) \text{ mit } r(n) = \frac{1}{2}(1 + e^{j\pi n}), \quad Y(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} X(e^{j(\Omega - \pi\nu)})$$



b) Beweis:

$$\begin{aligned} E(e^{j\Omega'}) &= \textstyle\sum_{n'=-\infty}^{\infty} x(2n') \cdot e^{-j\Omega' n'} \\ &= \textstyle\sum_{n'=-\infty}^{\infty} y(2n') \cdot e^{-j\Omega' n'} \\ &= \textstyle\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} y(\nu) \cdot e^{-j\Omega' \nu/2} \text{ (Ersetzung: } \nu = 2n') \\ &= Y(e^{j\Omega'/2}) \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$

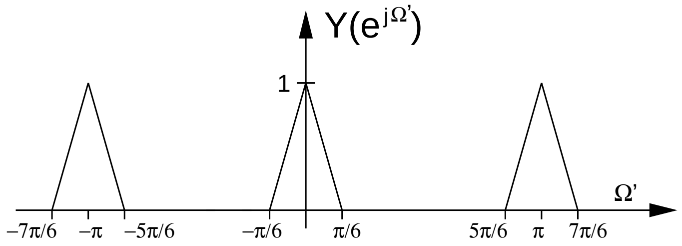
Nein, Expansion und TP-Filterung rekonstruiert das ursprüngliche Signal!



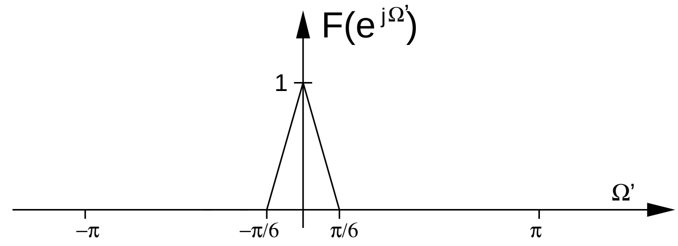
Lösung Aufgabe 7.2

a)
$$Y(e^{j\Omega'}) = X(e^{j2\Omega'})$$

Rekonstruktion von $x(n)$ aus $y(n')$ möglich durch TP-Filterung und Unterabtastung.



b) Ja! Das Signal $x(n)$ ergibt sich bei richtiger Wahl von Ω_c durch einfache Unterabtastung um den Faktor 2.
Bereich: $\pi/6 \leq \Omega'_\mathrm{c} \leq 5\pi/6$



Lösung Aufgabe 7.3

a) *Beweis*:
$$\{x(n)\} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\}$$
$$\text{z.B. } L_1 = L_2 = 2$$
$$\underline{\text{Dezimation zuerst:}}$$
$$\{x_2(n'')\} = \{x_0, x_2, x_4, \ldots\}, \quad \{y_2(n')\} = \{x_0, 0, x_2, 0, x_4, \ldots\}$$
$$\underline{\text{Expansion zuerst:}}$$
$$\{x_1(n'')\} = \{x_0, 0, x_1, 0, x_2, 0, \ldots\}, \quad \{y_1(n')\} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\} = \{x(n)\}$$
$$\Rightarrow y_2(n') \neq y_1(n') \quad \text{q.e.d.}$$

b) *Beweis:*
$$\text{Annahme: } L_1 = i \cdot k, \qquad L_2 = d \cdot k, \qquad i, d \text{ seien teilerfremd.}$$
$$\underline{\text{Dezimation zuerst:}}$$
$$\{x_2(n'')\} = \{x_0, x_{dk}, x_{2dk}, \ldots\}, \quad \{y_2(n')\} = \{x_0, \underbrace{0, \ldots, 0}_{ik-1 \text{ Nullen}}, x_{dk}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{ik-1 \text{ Nullen}}, x_{2dk}, \ldots\}$$

<u>Interpolation zuerst:</u>

$$\{x_1(n'')\} = \{x_0,\ \underbrace{0,\ldots,0}_{ik-1 \text{ Nullen}}, x_1,\ \underbrace{0,\ldots,0}_{ik-1 \text{ Nullen}}, \ldots\}, \quad \{y_1(n')\} = \{\ldots ?$$

Positionen der von Null versch. Werte in $\{x_1(n'')\}: 0, 1\cdot ik, 2\cdot ik, \ldots, d\cdot ik, (d+1)ik, \ldots$

Die Werte sind: $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_d, x_{d+1}, \ldots$

Wenn i und d teilerfremd sind, ergibt sich eine d-fache Dezimation:

$$\{y_1(n')\} = \{x_0,\ \underbrace{0,\ldots,0}_{ik-1 \text{ Nullen}}, x_d,\ \underbrace{0,\ldots,0}_{ik-1 \text{ Nullen}}, x_{2d}, \ldots\}$$

$$\text{mit Index } n' = 0, 1, \ldots, ik-1, \underset{\uparrow}{ik}, ik+1, \ldots$$

(nach d-facher Dezimation wird aus $dik \to ik$)

$\Rightarrow y_2(n') = y_1(n')$ für $k = 1$, d.h. Teilerfremdheit! q.e.d.

Lösung Aufgabe 7.4

a) *Beweis:*

$$\begin{aligned} y(n') = x_1(n') * g(n') &= x(n = L\cdot n') * g(n') \\ &= \textstyle\sum_{\nu=0}^{\infty} g(\nu)\cdot x(L\cdot(n'-\nu)) \end{aligned}$$

System rechts:

$$G(z^L) = g(0)\cdot z^0 + g(1)\cdot z^L + g(2)\cdot z^{2L} + \ldots$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ \quad \{\bar{g}(n)\} = \{g(0),\ \underbrace{0,\ldots,0}_{L-1 \text{ Nullen}}, g(1),\ \underbrace{0,\ldots,0}_{L-1 \text{ Nullen}}, g(2), 0, \ldots\}$$

$$\Rightarrow y_1(n) = \bar{g}(n) * x(n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{g}(\nu)x(n-\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{g}(L\cdot\nu)x(n-\nu L) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g(\nu)x(n-\nu L)$$

Unterabtastung liefert:

$$y(n') = y_1(n = L\cdot n') = \sum_{\nu=0}^{\infty} g(\nu)\cdot x(L\cdot(n'-\nu)) \quad \text{q.e.d.}$$

b) *Beweis:*

$$y_1(n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g(\nu)\cdot x(n-\nu) \qquad (0)$$

$$y(n') = \begin{cases} y_1(n = \frac{n'}{L}), & \text{wenn } \frac{n'}{L} \in \mathbb{Z} \leftarrow \text{Dies ist der Fall, wenn } n' = p\cdot L \text{ ist}, p \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(n') = \begin{cases} y_1(p), & \text{wenn } n' = p\cdot L,\ p \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad (*)$$

System rechts:

$$\Rightarrow x_1(n') = \begin{cases} x(p), & \text{wenn } n' = p\cdot L,\ p \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$G(z^L) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \bar{g}(n')$$

$$\text{dann gilt: } y(n') = \sum_{\nu'=0}^{\infty} \bar{g}(\nu') \cdot x_1(n'-\nu') = \sum_{\nu'=0}^{\infty} \bar{g}(\nu' L) \cdot x_1(n'-\nu' L)$$
$$= \sum_{\nu'=0}^{\infty} g(\nu') \cdot x_1(n'-\nu' L)$$
$$\text{Setze } n' = p \cdot L: \; y(n') = \sum_{\nu'=0}^{\infty} g(\nu') \cdot x_1(L(p-\nu')) = \sum_{\nu'=0}^{\infty} g(\nu') \cdot x(p-\nu') \quad \underbrace{= y_1(p)}_{\text{siehe oben!}(*)(0)}$$
$$\text{Setze: } n' \neq p \cdot L: y(n') = \sum_{\nu'=0}^{\infty} g(\nu') \cdot 0 \quad \underbrace{= 0}_{\text{siehe oben!}(*)} \qquad \text{q.e.d.}$$

Lösung Aufgabe 7.5

a) Polyphasen-Zerlegung:

$$\begin{aligned} H(z) &= \textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2n) z^{-2n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2n+1) z^{-2n-1} \\ &= \textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2n)(z^2)^{-n} + z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2n+1)(z^2)^{-n} \\ &= E_0(z^2) + z^{-1} \cdot E_1(z^2) \end{aligned}$$
$$E_0(z) = \sum_n h(2n) \cdot z^{-n}, \quad E_1(z) = \sum_n h(2n+1) \cdot z^{-n}$$

b) Verallgemeinerung:

$$\begin{aligned} H(z) &= \textstyle\sum_n h(Ln) z^{-Ln} + \sum_n h(Ln+1) z^{-Ln+1} + \cdots + \sum_n h(Ln+L-1) z^{-Ln+L-1} \\ &= \textstyle\sum_{l=0}^{L-1} z^{-l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(Ln+l)\,(z^L)^{-n} \overset{!}{=} \sum_{l=0}^{L-1} z^{-l} E_l(z^L) \end{aligned}$$
$$E_l(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(Ln+l) \cdot z^{-n}$$

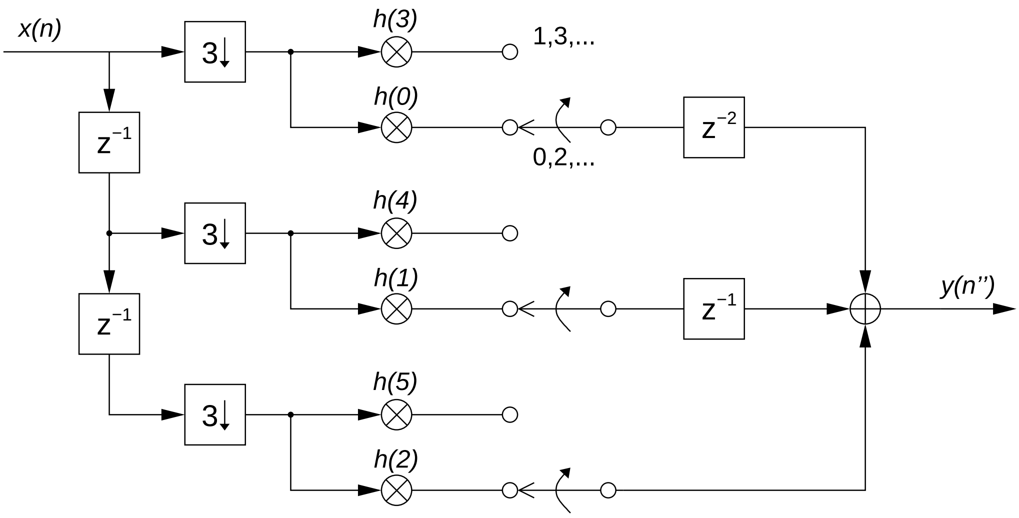
c)
$$E_0(z) = \frac{1}{1-a^2 z^{-1}}, \quad E_1(z) = \frac{a}{1-a^2 z^{-1}}$$

Lösung Aufgabe 7.6

a)
$$L_1 = 2, \quad L_2 = 3, \quad \Omega_c' = \pi/3$$

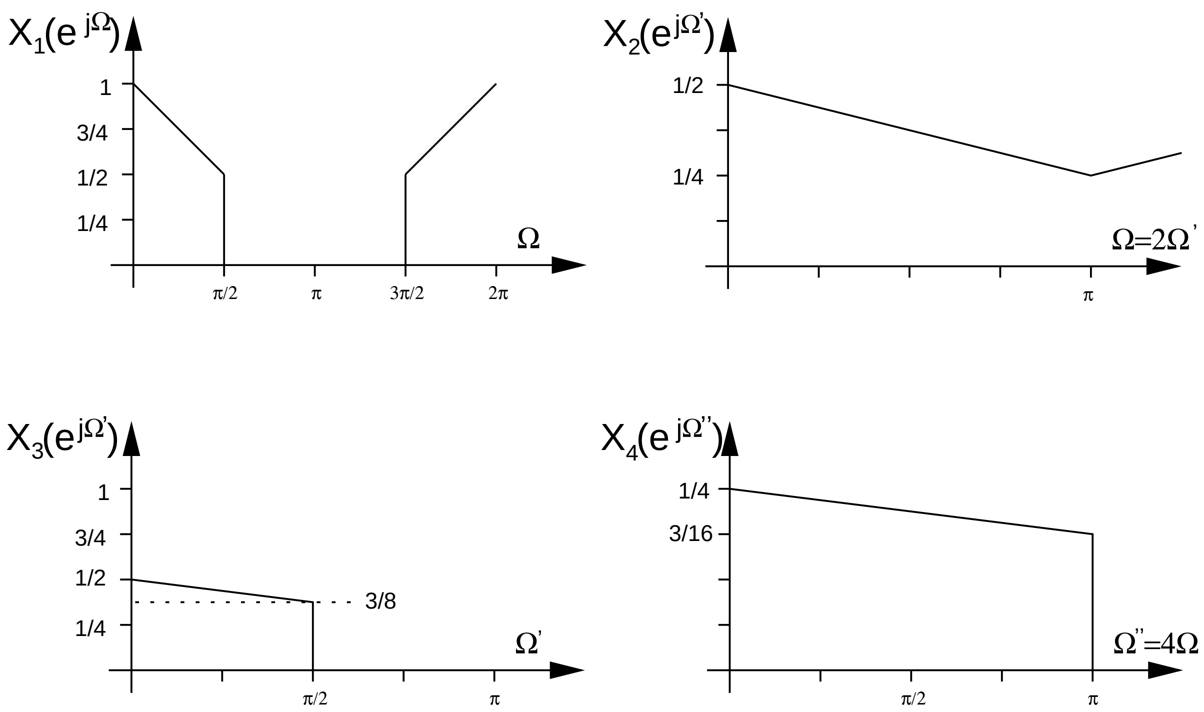
b)
$$h(n') = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{si}\big(\frac{\pi}{3}(n' - \frac{5}{2})\big), \quad 0 \le n' \le 5$$

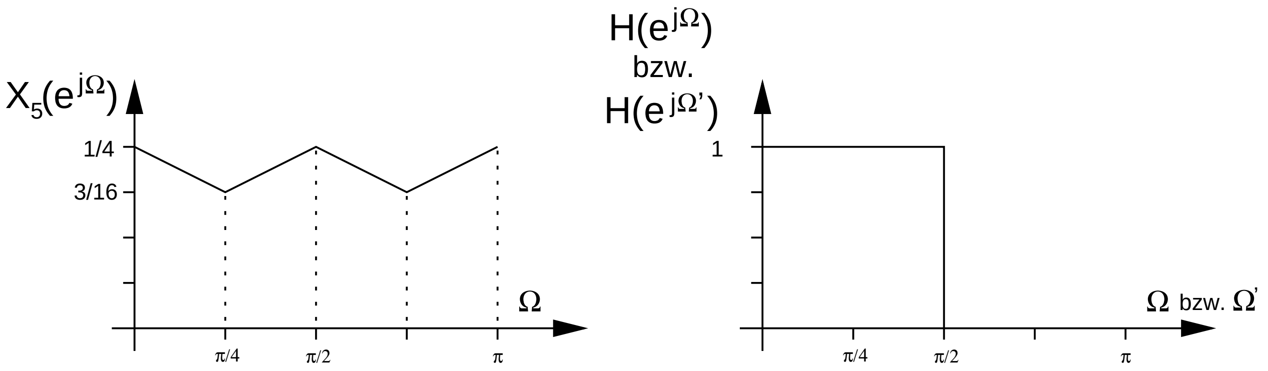
c)
$$h(0), h(1), h(2), h(3), h(4), h(5) \Rightarrow \text{ Koeffizienten aus b)}$$



Lösung Aufgabe 7.7

es gilt: $\Omega''' = \Omega$

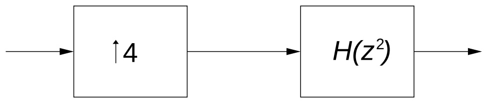




Lösung Aufgabe 7.8

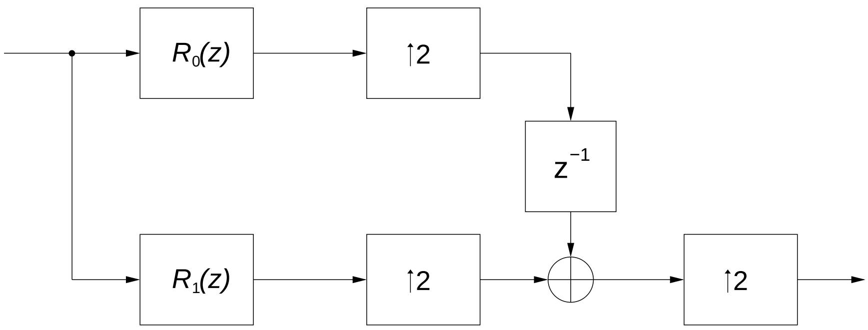
a)

Minimale Anzahl Dezimatoren/Expander:



b)

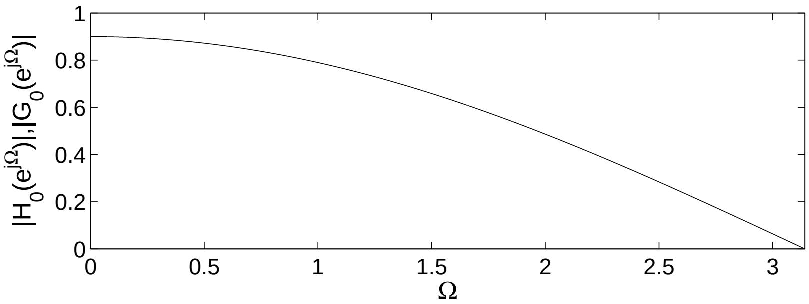
Minimaler Speicheraufwand, minimale Rechenkapazität:



Lösung Aufgabe 7.9

a)

$$h_0(n) = \begin{cases} 0.45, & n = 0,1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \qquad H_0(z) = 0.45(1 + z^{-1})$$

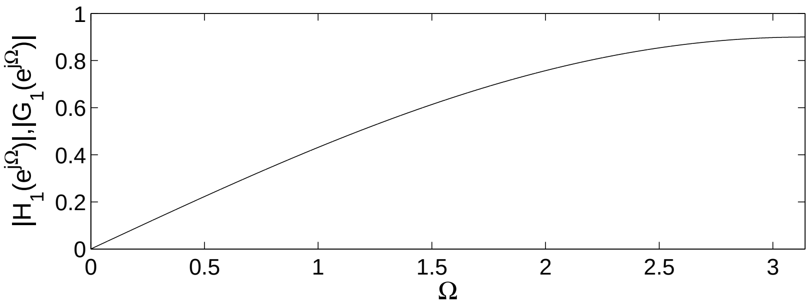


b)

$$\text{wähle: } G_0(z) = H_0(z), \text{bzw. } g_0(n) = h_0(n)$$

$$\text{wähle: } H_1(z) = H_0(-z) = 0.45(1 - z^{-1}) \text{ [HP-TP-Trafo] bzw. } h_1(n) = \begin{cases} 0.45, & n = 0 \\ -0.45, & n = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{wähle: } G_1(z) = H_1(z)$$



c)

Ansatz für perfekte Rekonstruktion mit Skalierungsfaktor α :

$$Y(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega\cdot 1} \cdot \frac{\alpha}{2}\left[|H_0(e^{j\Omega})|^2 + H_1(e^{j\Omega})|^2\right] \cdot X(e^{j\Omega}) \stackrel{!}{=} e^{-j\Omega} \cdot X(e^{j\Omega}) \qquad (1 = N_b!)$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2}\left[|H_0(e^{j\Omega})|^2 + H_1(e^{j\Omega})|^2\right] = \frac{\alpha}{2}\left[0.45^2 \cdot \underbrace{(1 + e^{-j\Omega})(1 + e^{j\Omega})}_{H_0 \cdot H_0^*} + 0.45^2 \cdot (1 - e^{-j\Omega})(1 - e^{j\Omega})\right]$$

$$= 2 \cdot 0.45^2 \alpha \stackrel{!}{=} 1$$

Mit $\alpha = \dfrac{1}{2 \cdot 0.45^2}$ ist die perfekte Rekonstruktion gezeigt!

Wähle also $\sqrt{\alpha} \cdot H_0(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 + z^{-1}) = H_0'(z)$ bzw. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 - z^{-1}) = H_1'(z)$