Prof. Eduard A. Jorswieck, Karl-Ludwig Besser, Martin Le 8. Dezember 2022

4. Übung
Signale und Systeme

Aufgabe 15.

Berechnen Sie mittels Integration die Laplace-Transformierten folgender Signale x:

a) $x(t) = a\ \mathbf{1}(t-\tau) \qquad (\tau > 0)$,

b) $x(t) = t\ \mathbf{1}(t)$,

c) $x(t) = \mathrm{e}^{\alpha t} \cos \beta t\ \mathbf{1}(t)$!

Aufgabe 16.

Die Laplace-Transformierte eines Signals x sei durch $X(s)$ gegeben. Man zeige die Gültigkeit folgender Regeln der Laplace-Transformation:

a) $x(at) ∘\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right) \qquad (a > 0,$ Ähnlichkeitssatz),

b) $x(t-\tau) ∘\!\!-\!\!\bullet \mathrm{e}^{-s\tau} X(s) \qquad (\tau > 0,$ Verschiebungssatz)!

c) Aus einer Korrespondenzentabelle der Laplace-Transformation liest man ab:

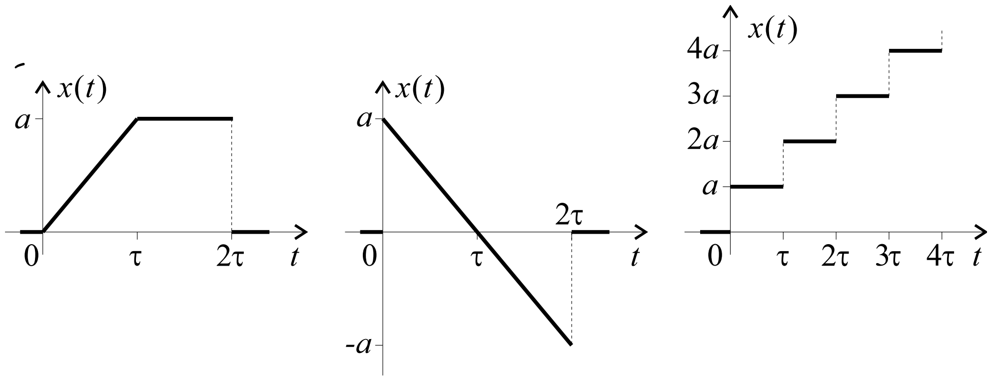
$$\cos^2 t\ \ \mathbf{1}(t) \ ∘\!\!-\!\!\bullet\ \frac{s^2+2}{s(s^2+4)}.$$

Bestimmen Sie die Laplace-Transformierten von

$\alpha)\ \ \cos^2 \omega_0 t\ \ \mathbf{1}(t) \quad (\omega_0 > 0), \qquad \beta)\ \ \cos^2 \omega_0 (t-\tau)\ \mathbf{1}(t-\tau) \quad (\tau > 0)$!

Aufgabe 17.

Mit Hilfe der Korrespondenzen $\mathbf{1}(t) ∘\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$ und $t\,\mathbf{1}(t) ∘\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2}$ bestimme man die Laplace-Transformierten für folgende Signale x:



Teilaufgabe a) Teilaufgabe b) Teilaufgabe c)

Lösungen zu den Übungen

Lösung 15

a) $X(s) = \dfrac{a}{s}\mathrm{e}^{-s\tau} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 0)$

b) $X(s) = \dfrac{1}{s^2} \quad (\mathrm{Re}(s) > 0)$

c) $X(s) = \dfrac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2} \qquad (\mathrm{Re}(s) > \alpha)$

Lösung 16

a) *Hinweis:* Substitution $at = t'$, $t = \frac{t'}{a}$, $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t'}{a}$

b) *Hinweis:* Substitution $t - \tau = t'$, $t = t' + \tau$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}t'$

c) α) $\mathfrak{L}(\cos^2 \omega_0 t) = \dfrac{s^2 + 2{\omega_0}^2}{s\left(s^2 + 4{\omega_0}^2\right)}$

β) $\mathfrak{L}\left(\cos^2 \omega_0(t-\tau)\ \ \mathbf{1}(t-\tau)\right) = \mathrm{e}^{-s\tau}\dfrac{s^2 + 2{\omega_0}^2}{s\left(s^2 + 4{\omega_0}^2\right)}$

Lösung 17

a) $X(s) = \dfrac{a}{\tau s^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-s\tau}\right) - \dfrac{a}{s}\mathrm{e}^{-2s\tau}$

b) $X(s) = \dfrac{a}{s}\left(1 + \mathrm{e}^{-2s\tau}\right) + \dfrac{a}{\tau s^2}\left(e^{-2s\tau} - 1\right)$

c) $X(s) = \dfrac{a}{s} \cdot \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{-s\tau}}$

15.

a.

$$x(t)=a\,1(t-\tau)$$

$$X(s)=\int_0^{+\infty} a1(t-\tau)\,e^{-st}dt=a\int_\tau^{+\infty} e^{-st}dt$$

$$=a\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_\tau^{+\infty}=\frac{a}{s}e^{-s\tau}\qquad Re\{s\}>0$$

b.

$$x(t)=t\,1(t)$$

$$X(s)=\int_0^{+\infty} t1(t)e^{-st}dt=\int_0^{+\infty} t\,de^{-st}\left(-\frac{1}{s}\right)=-\frac{1}{s}\left[te^{-st}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty} e^{-st}dt\right]$$

$$=-\frac{1}{s}\left[-\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{+\infty}\right)\right]=-\frac{1}{s}\left(-\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{s^2}\qquad Re\{s\}>0$$

c.

$$x(t)=e^{\alpha t}\cos\beta t\,1(t)$$

$$X(s)=\int_0^{+\infty} e^{\alpha t}\cos\beta t\,e^{-st}dt=\int_0^{+\infty} e^{(\alpha-s)t}\,\frac{e^{j\beta t}+e^{-j\beta t}}{2}\,dt$$

$Re\{\alpha\}>s$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} e^{(\alpha-s+j\beta)t}dt+\int_0^{+\infty} e^{(\alpha-s-j\beta)t}dt\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha-s+j\beta}+\frac{1}{\alpha-s-j\beta}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha-2s}{(\alpha-s)^2+\beta^2}\right)=\frac{\alpha-s}{(\alpha-s)^2+\beta^2}$$

16、

a. $x(t) \longleftrightarrow X(s)$

$$x(at) \longleftrightarrow \int_0^{+\infty} x(at) e^{-st} dt$$

, sei $at = t' \Leftrightarrow t = \frac{t'}{a}$

$\Rightarrow dt = \frac{dt'}{a}$

$$= \int_0^{+\infty} x(t') e^{-s\frac{t'}{a}} dt' \frac{1}{a}$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} x(t') e^{-\frac{s}{a}t'} dt' \qquad X(s) = \int_0^{+\infty} x(t') e^{-\alpha t'} dt'$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

b.

$$X(s) = \int_0^{+\infty} x(t-\tau) e^{-st} dt = \int_{\tau}^{+\infty} x(t-\tau) e^{-st} dt = e^{-s\tau} X(s)$$

w $e^{-s\tau}$

c.

α.

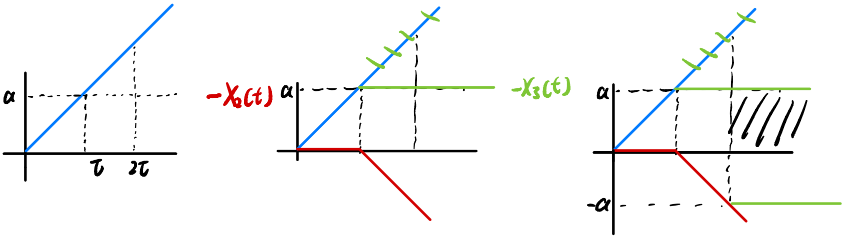
$$\mathcal{L}[\cos^2 \omega_0 t \, 1(t)] = \frac{s^2 + 2\omega_0^2}{s(s^2 + 4\omega_0^2)}$$

β

$$\mathcal{L}[\cos^2 \omega_0 (t-\tau) \, 1(t-\tau)] = \frac{s^2 + 2\omega_0^2}{s(s^2 + 4\omega_0^2)} e^{-s\tau}$$

17.

a.



$$X_1(t) = \frac{\alpha}{\tau} t \, 1(t) \longleftrightarrow \frac{\alpha}{\tau}\frac{1}{s^2}$$

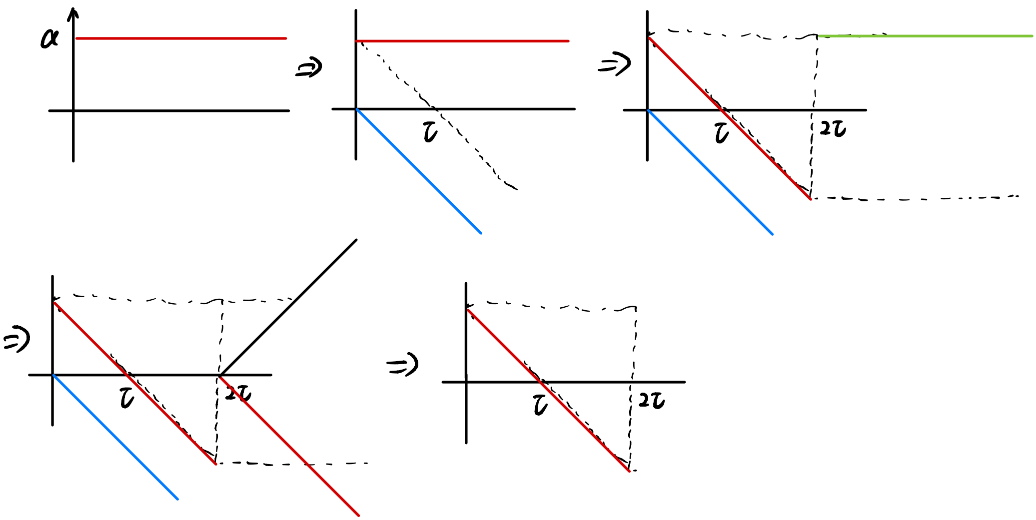
$$X_2(t) = -\frac{\alpha}{\tau}(t-\tau)1(t-\tau) \longleftrightarrow -\frac{\alpha}{\tau}\frac{1}{s^2}e^{-s\tau}$$

$$X_3(t) = -\alpha \, 1(t-2\tau) \longleftrightarrow -\alpha\frac{1}{s}e^{-2s\tau}$$

$$\sum = \frac{\alpha}{\tau}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s\tau}\right) - \frac{\alpha}{s}e^{-2s\tau}$$

$$= \frac{\alpha}{\tau s^2}\left(1-e^{-s\tau}\right) - \frac{\alpha}{s}e^{-2s\tau}$$

b.



$$X_1(t) = \alpha \, 1(t) \longleftrightarrow \frac{\alpha}{s}$$

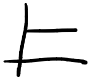
$$X_2(t) = -\frac{\alpha}{\tau} t \, 1(t) \longleftrightarrow -\frac{\alpha}{s^2\tau}$$

$$X_3(t) = \alpha \, 1(t-2\tau) \longleftrightarrow \frac{\alpha}{s}e^{-2s\tau}$$

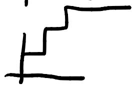
$$X_4(t) = \frac{\alpha}{\tau}(t-2\tau)1(t-2\tau) \longleftrightarrow \frac{\alpha}{s^2\tau}e^{-2s\tau}$$

$$\Rightarrow \sum = \frac{\alpha}{s}\left(1+e^{-2s\tau}\right) + \frac{\alpha}{s^2\tau}\left(e^{-2s\tau}-1\right)$$

C.

$x_1(t) = a\,1(t)$  $\leftrightarrow \frac{a}{s}$

$x_2(t) = a\,1(t-\tau)$  $\leftrightarrow \frac{a}{s}e^{-s\tau}$ $\Rightarrow \frac{a}{s}\frac{1}{1-e^{-s\tau}}$

$x_3(t) = a\,1(t-2\tau)$  $\leftrightarrow \frac{a}{s}e^{-2s\tau}$

$\longrightarrow \frac{a}{s}e^{-3s\tau}$

讲 iby 的 傻逼点了