Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz von ZVen

1) $E(aX+b) = a \cdot EX + b$ (Linearität des Erwartungswertes

(z.B. X: Temp. °C → °F: $a = \frac{9}{5} = 1{,}8$, $b = 32$)

2) $E(X+Y) = EX + EY$ (Lin. d. E-Wertes)

3) $\operatorname{Var} X = EX^2 - (EX)^2$ (Def.: $\operatorname{Var} X := E(X-EX)^2$

4) $\operatorname{Var}(aX+b) = a^2 \cdot \operatorname{Var} X$

(wdh. Kap. 1: $s^2_{ax+b} = a^2 \cdot s_x^2$)

5) Falls X und Y stoch. unabh. ZVen sind, so gilt:

$\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var} X + \operatorname{Var} Y$

(Allg. gilt für bel. ZVen X, Y: $\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var} X + \operatorname{Var} Y + 2E(X-EX)(Y-EY)$)

(siehe auch Binomische Formeln: $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

Bsp. $X \sim Bin(n,p)$, d.h. $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ mit $X_i \sim Bin(1,p)$, $i = 1, \dots, n$

und $X_1, X_2, \dots, X_n$ stoch. unabh.

$$EX = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \underset{2)}{=} \underbrace{EX_1}_{=p} + \underbrace{EX_2}_{=p} + \dots + \underbrace{EX_n}_{=p} = n \cdot p$$

$$\operatorname{Var} X = \operatorname{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \underset{5)}{=} \underbrace{\operatorname{Var} X_1}_{=p(1-p)} + \operatorname{Var} X_2 + \dots + \underbrace{\operatorname{Var} X_n}_{=p(1-p)} = np(1-p)$$

z.B. $n = 100$, $p = \frac{1}{2}$: $EX = 100 \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{50}}$ $\sqrt{\operatorname{Var} X} = \sqrt{100 \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})} = \sqrt{25} = \underline{\underline{5}}$

$n = 120$, $p = \frac{1}{6}$ $EX = 120 \cdot \frac{1}{6} = 20$ $\sqrt{\operatorname{Var} X} = \sqrt{120 \cdot \frac{1}{6}(1-\frac{1}{6})} = \sqrt{\frac{100}{6}} = \sqrt{\frac{50}{3}}$

$= \frac{5}{3}\sqrt{3} \approx 4{,}08$