Institut für Nachrichtentechnik

# Prüfung

# Digitale Signalverarbeitung

14.7.2009

Name : ______________________

Vorname : ______________________

Matrikelnummer : ______________________

Studiengang : ______________________

Klausurnummer : ______________________

| Aufgabe | Punkte | |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| $\Sigma$ | | |
| Note | | |

# Aufgabe 1: Analyse eines zeitdiskreten Filters

(11 Punkte)

Gegeben sei die Übertragungsfunktion $H(z)$ eines kausalen zeitdiskreten Filters:

$$H(z) = (1 - 0.5z^{-1})(1 + 6z^{-1} + 9z^{-2})$$

a) Handelt es sich bei diesem Filter um ein FIR-Filter oder um ein IIR-Filter? Begründen Sie Ihre Aussage!

b) Geben Sie die Differenzengleichung an, durch die das Filter beschrieben werden kann.

c) Zeichnen Sie das Blockschaltbild des Filters in Direktform II.

d) Skizzieren Sie das Pol-Nullstellen-Diagramm des Filters und geben Sie die genaue Lage <u>aller</u> Pol- und Nullstellen an.

e) Führen Sie eine Zerlegung von $H(z)$ in ein minimalphasiges Filter mit der Übertragungsfunktion $H_{\text{min}}(z)$ und ein Allpassfilter mit der Übertragungsfunktion $H_{\text{AP}}(z)$ durch, so dass gilt: $H(z) = H_{\text{AP}}(z) \cdot H_{\text{min}}(z)$.

# Aufgabe 2: Zeitdiskreter Filterentwurf

(19 Punkte)

Es soll ein zeitdiskretes Tiefpassfilter gemäß folgender Spezifikation entworfen werden:

$$\delta_p = 0.08, \quad \delta_{st} = 0.05, \quad \Omega_p = 0.2\pi, \quad \Omega_{st} = 0.6\pi, \quad \Omega_c = \frac{\Omega_{st}+\Omega_p}{2}, \quad f_s = \frac{1}{T} = 5\,\mathrm{kHz}$$

Betrachten Sie für die Teilaufgaben a) bis c) den Entwurf eines FIR-Filters.

a) Skizzieren Sie das Toleranzschema im zeitdiskreten Bereich und tragen Sie alle relevanten Größen einschließlich deren Zahlenwerte darin ein.

b) Berechnen Sie die Sperrdämpfung $d_{st}$ und die Welligkeit im Durchlassbereich *(passband ripple)* $R_p$.

c) Geben Sie die minimale Filterordnung $N_b$ für einen Filterentwurf mittels des Kaiser-Fensters an.

Betrachten Sie für die nachfolgenden Teilaufgaben d) bis g) einen IIR-Filterentwurf.

d) Berechnen Sie die Sperrdämpfung $d_{st}$ und die Welligkeit im Durchlassbereich *(passband ripple)* $R_p$.

e) Bestimmen Sie $\omega_{st}$, $\omega_p$ und $\omega_c$ mittels der bilinearen Transformation. Nehmen Sie hierbei $\omega' = \frac{\Omega'}{T} = \frac{\Omega_p}{T}$ an.

f) Skizzieren Sie das Toleranzschema im zeitkontinuierlichen Bereich und tragen Sie alle relevanten Größen einschließlich deren Zahlenwerte darin ein.

g) Bestimmen Sie die minimale Filterordnung $N$ für den Butterworth-Filterentwurf.

Die nachfolgenden Teilaufgaben h) und i) beziehen sich sowohl auf den FIR-Filterentwurf aus den Teilaufgaben a) bis c) als auch auf den IIR-Filterentwurf aus Teilaufgaben d) bis g).

h) Welches der beiden Filter (FIR oder IIR) würden Sie verwenden, wenn als zusätzliche Randbedingung beim Filterentwurf eine kurze Verzögerungszeit des Filters im Vordergrund steht? Begründen Sie Ihre Aussage!

i) Welches der beiden Filter (FIR oder IIR) würden Sie verwenden, wenn das zu entwerfende Filter eine frequenzunabhängige Verzögerung aufweisen soll? Begründen Sie Ihre Aussage!

# Aufgabe 3: DFT und zeitdiskrete Faltung

(10 Punkte)

Gegeben seien die zeitdiskreten Signale $x_1(n)$ und $x_2(n)$:

$$x_1(n) = -\epsilon(n) + 2n \cdot \epsilon(n) - (2n-1) \cdot \epsilon(n-3) + \delta(n-3)$$

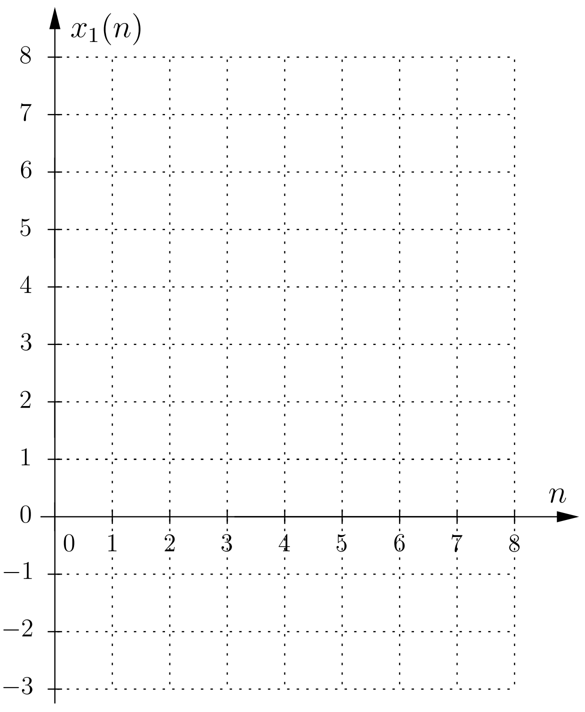
und

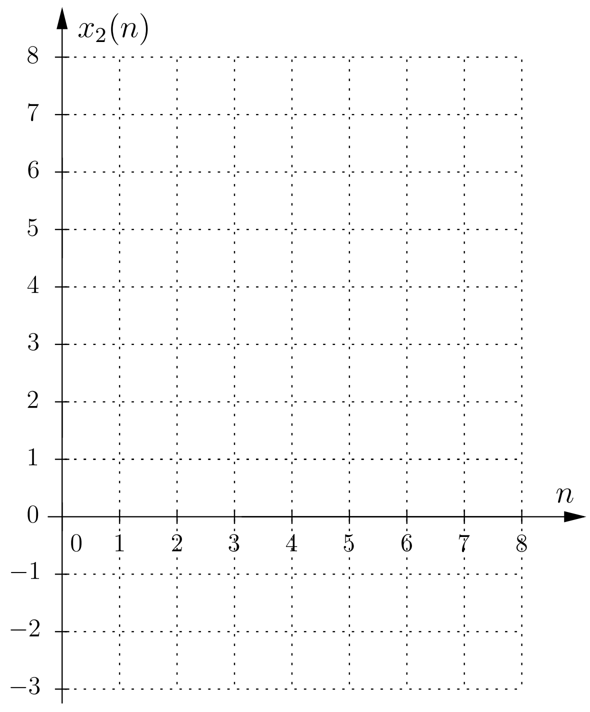
$$x_2(n) = \begin{cases} 1-2n, & n = 0,1 \\ 2, & n = 4 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

mit

$$\epsilon(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

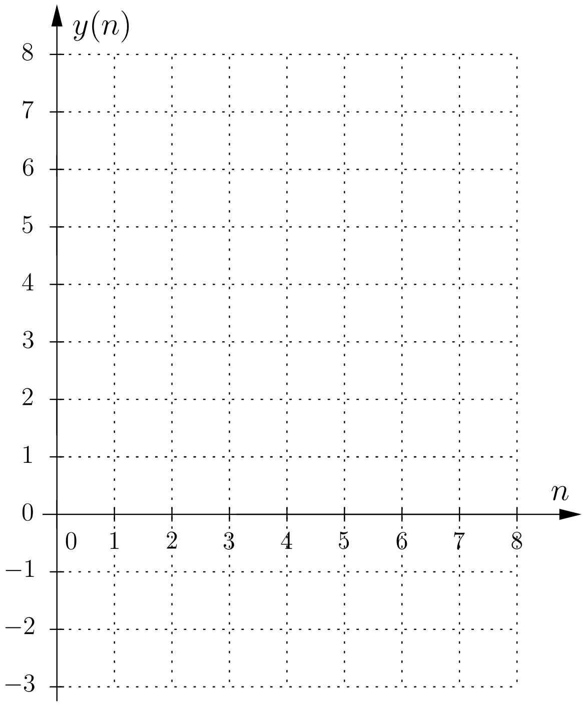
a) Skizzieren Sie die beiden Signale $x_1(n)$ und $x_2(n)$ für $n = 0, 1, 2, \ldots, 8$ in die beiden nachfolgenden Diagramme. Tragen Sie dabei auch die jeweiligen Amplitudenwerte in das Diagramm ein!



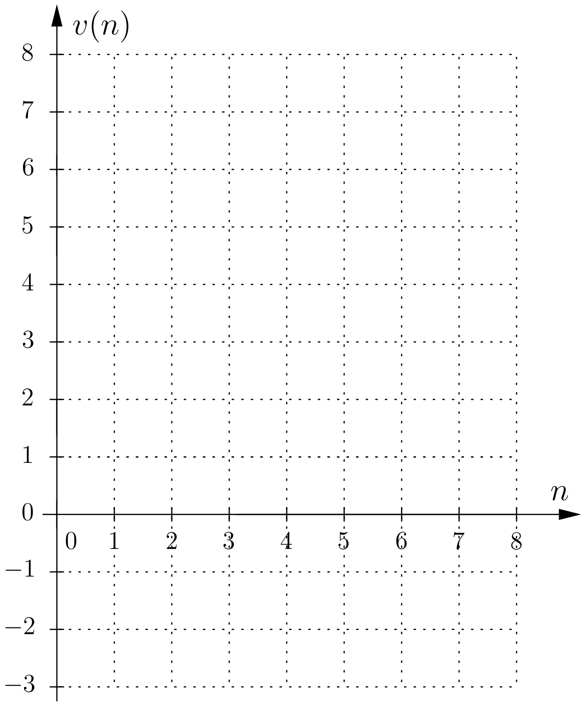




*(Fortsetzung der Aufgabe auf der nächsten Seite)*

b) Tragen Sie das Ergebnis der zeitdiskreten Faltung $y(n) = x_1(n) * x_2(n)$ für $n = 0, 1, 2, \ldots, 7$ in das nachfolgende Diagramm ein. Tragen Sie dabei auch die jeweiligen Amplitudenwerte in das Diagramm ein!




c) Die beiden Signale $x_1(n)$ und $x_2(n)$ werden nun jeweils mittels einer DFT der Länge $K = 5$ in den Frequenzbereich transformiert, dort multipliziert und anschließend mittels einer IDFT der Länge 5 zurücktransformiert. Tragen Sie das Ergebnis $v(n)$ der IDFT für $n = 0, 1, 2, 3, 4$ in das nachfolgende Diagramm ein und geben Sie die jeweiligen Amplitudenwerte an.




*(Fortsetzung der Aufgabe auf der nächsten Seite)*

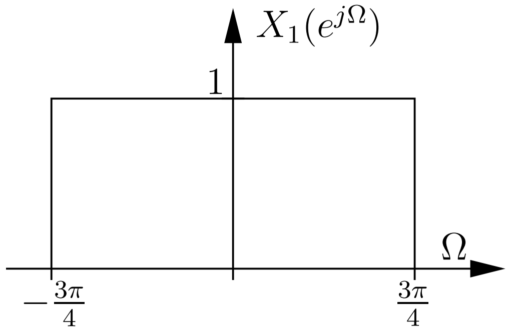
d) Wie bezeichnet man die in Teilaufgabe b) und in Teilaufgabe c) durchgeführten Faltungen? Geben Sie die in Teilaufgabe c) zu verwendende minimale DFT-Länge $K_{\min}$ an, bei der gilt:

$$v(n)\Big|_{K=K_{\min}} = y(n) \quad .$$

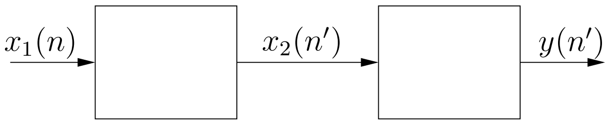
# Aufgabe 4: Multiratensignalverarbeitung

(10 Punkte)

Ein zeitdiskretes Signal $x_1(n)$ habe die Abtastfrequenz $f_s = 15\,\text{kHz}$ und nachfolgend dargestellte Fourier-Transformierte:



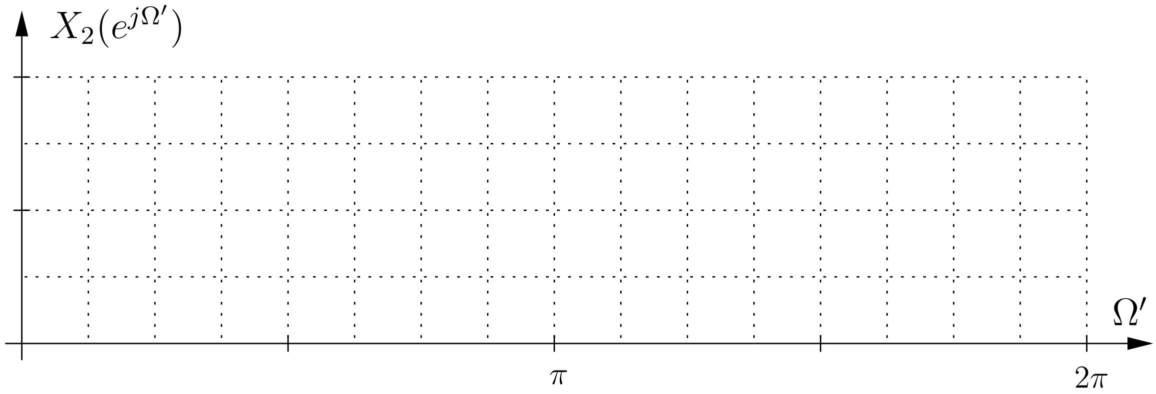

a) Vervollständigen Sie nachfolgendes Blockschaltbild, um das Signal $x(n)$ mit der Abtastfrequenz $f_s = 15\,\text{kHz}$ in ein Signal $y(n')$ der Abtastfrequenz $f_s' = 60\,\text{kHz}$ zu wandeln. Das erforderliche Tiefpassfilter habe hierbei die Übertragungsfunktion $H(z)$ und ist als ideal anzunehmen.

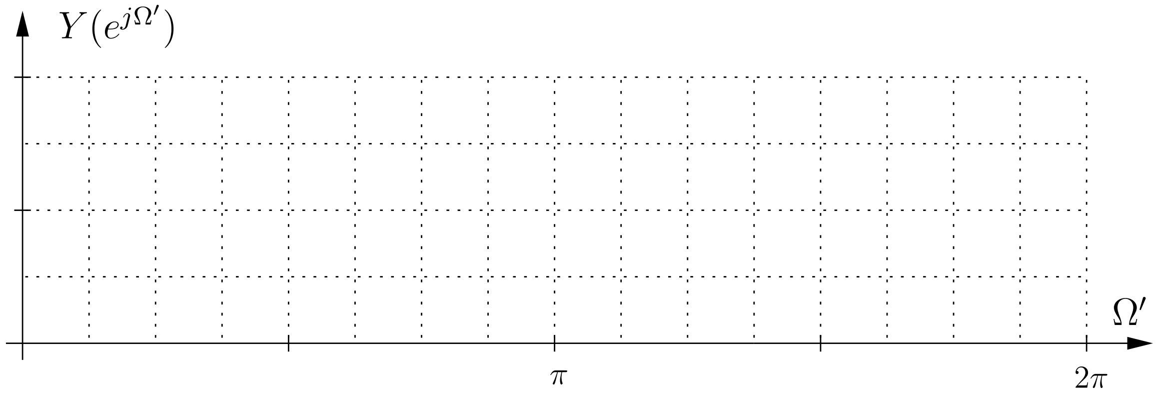



b) Bestimmen Sie die normierte Grenzfrequenz $\Omega_g'$ des Tiefpassfilters mit der Übertragungsfunktion $H(z)$ für $z = r \cdot e^{j\Omega'}$. Gehen Sie hierbei von einem idealen Tiefpassfilter aus!

(Fortsetzung der Aufgabe auf der nächsten Seite)

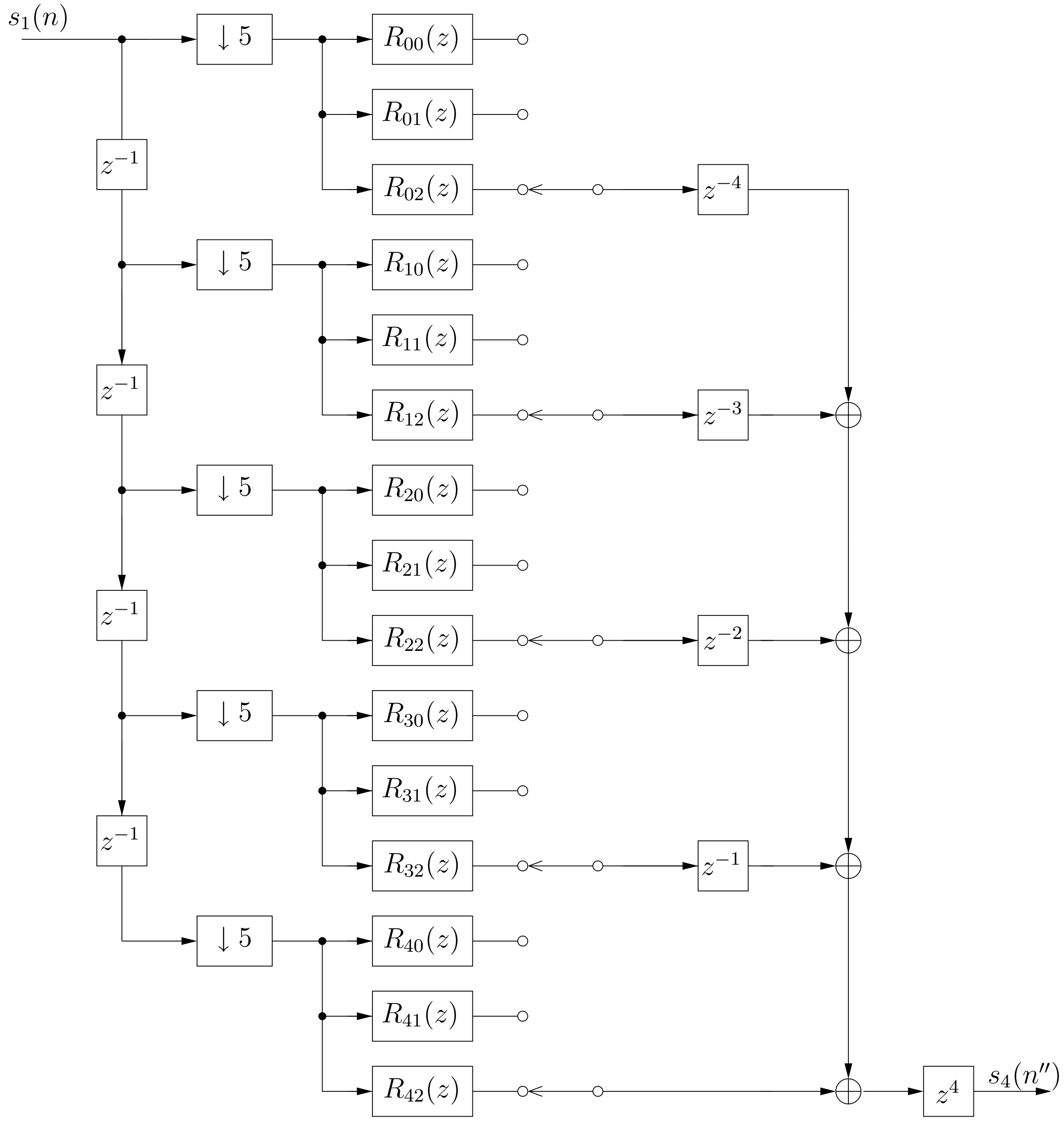
c) Skizzieren Sie die Fouriertransformierten $X_2(e^{j\Omega'})$ und $Y(e^{j\Omega'})$ der Signale $x_2(n')$ und $y(n')$ im Bereich $0 \leq \Omega' \leq 2\pi$ in die beiden folgenden Diagramme. Ergänzen Sie die Beschriftung der Frequenzachse in geeigneter Weise.



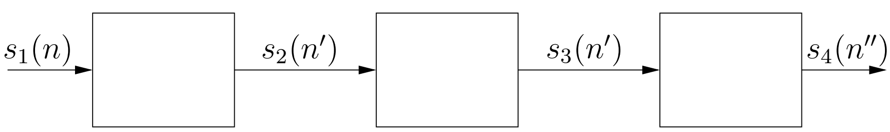




*(Fortsetzung der Aufgabe auf der nächsten Seite)*

Betrachten Sie nun die nachfolgend dargestellte Polyphasendarstellung zur gebrochen-rationalen Abtastratenwandlung:




d) Vervollständigen Sie das folgende Blockschaltbild, um mit <u>einem</u> Dezimator, <u>einem</u> Expander sowie <u>einem</u> Tiefpassfilter mit der Übertragungsfunktion $G(z)$ die oben in Polyphasenstruktur dargestellte Abtastratenwandlung vereinfacht darzustellen.




e) Welchen entscheidenden Vorteil hat die oben dargestellte Polyphasendarstellung gegenüber der Struktur aus Teilaufgabe d)?