III. Endliche, abzählbare und überabzählbare Mengen

Wir haben schon einige Mengen in den Kapiteln I und II kennengelernt, etwa die Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$. Jede dieser Zahlenmengen enthält unendlich viele Elemente,

$$|\mathbb{N}| \;=\; |\mathbb{Z}| \;=\; |\mathbb{Q}| \;=\; |\mathbb{R}| \;=\; \infty. \tag{III.1}$$

Um mengentheoretische Unterschiede zwischen ihnen auszumachen, müssen wir unsere bisherigen Begriffe über Mengen verfeinern.

III.1. Abzählbare Mengen

Definition III.1. Zwei Mengen A, B heißen **gleichmächtig**

$$:\Leftrightarrow \quad \exists\, f : A \to B : \quad f \text{ ist bijektiv.} \tag{III.2}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Jede N-elementige Menge, $\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ ist gleichmächtig zu $\{1, 2, \ldots, N\}$, denn

$$f : \{1, 2, \ldots, N\} \to \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}, \quad k \mapsto a_k, \tag{III.3}$$

  ist eine Bijektion.
- $\mathbb{N}$ ist gleichmächtig zu $\mathbb{Z}$, denn

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad k \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } k = 1, \\ \frac{1}{2}\, k, & \text{falls } k \text{ gerade } \wedge\ k \geq 2, \\ -\frac{1}{2}\,(k-1), & \text{falls } k \text{ ungerade } \wedge\ k \geq 2, \end{cases} \tag{III.4}$$

  ist eine Bijektion,

$$f(1) = 0, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = -1, \quad f(4) = 2, \quad f(5) = -2, \quad \ldots \tag{III.5}$$

Definition III.2. Eine Menge A heißt **abzählbar** $:\Leftrightarrow$

$$(a) \quad A \text{ ist } \textbf{endlich}, \text{ d.h. } |A| \in \mathbb{N} \ (:\Leftrightarrow |A| < \infty) \text{ oder} \tag{III.6}$$

$$(b) \quad A \text{ ist } \textbf{unendlich}, \ |A| = \infty, \text{ und } A \text{ ist gleichmächtig zu } \mathbb{N} \tag{III.7}$$

Ist A nicht abzählbar, so heißt A **überabzählbar**.

Lemma III.3. *Seien A eine abzählbare Menge und $B \subseteq A$. Dann ist B abzählbar.*

Satz III.4. *$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar.*

Beweis. Wir zeichnen die Elemente $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in eine Tabelle und definieren eine Abbildung $J : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, indem wir den Pfeilen folgen,

$$
\begin{array}{ccccc}
J(1) := (1,1) & \rightarrow & J(2) := (1,2) & & J(6) := (1,3) \quad \dots \\
 & \swarrow & & \nearrow & \\
J(3) := (2,1) & & J(5) := (2,2) & & \\
\downarrow & \nearrow & & & \\
J(4) := (3,1) & & & &
\end{array} \tag{III.8}
$$

Die Bijektivität von J ist offensichtlich. $\square$

Satz III.5. *$\mathbb{Q}$ ist abzählbar.*

Beweis. Wir führen den Beweis für $\mathbb{Q}_+$. Jedes Element $q \in \mathbb{Q}_+$ lässt sich eineindeutig durch $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ als

$$
q = \frac{m}{n} \tag{III.9}
$$

darstellen, wenn man voraussetzt, dass m und n teilerfremd sind (d.h. man kann m/n nicht kürzen). Also ist

$$
J : \mathbb{Q}_+ \to A := \big\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \;\big|\; m, n \text{ teilerfremd}\big\}, \qquad \frac{m}{n} \longmapsto (m, n), \tag{III.10}
$$

eine Bijektion. Nach Satz III.4 ist $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und nach Lemma III.3 somit auch $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar. Also ist $\mathbb{Q}_+$ abzählbar. $\square$

III.2. Dezimaldarstellung von Zahlen

Definition III.6. Eine **Folge (in A)** ist eine Abbildung

$$
a : \mathbb{N} \to A, \quad n \longmapsto a_n, \tag{III.11}
$$

wobei $A \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge ist. Statt (III.11) schreibt man auch $a_1, a_2, a_3, \dots$ oder $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Die Menge aller Folgen in A bezeichnet man mit $A^{\mathbb{N}}$.

Wir wollen nun die Dezimaldarstellung von Zahlen zwischen 0 und 1 genauer untersuchen.

Definition III.7. Eine Folge $a : \mathbb{N} \to \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ heißt **Dezimaldarstellung** der Zahl $0, a_1 a_2 a_3 \dots$

$$
:\Leftrightarrow \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, k \in \mathbb{N},\ k > n : \quad a_k < 9. \tag{III.12}
$$

Die Menge der Dezimaldarstellungen bezeichnen wir mit $\mathcal{D}$.

Die Bedingung (III.12) schließt Zahlen mit Periode 9, wie z.B.

$$x \;=\; 0,1729999\ldots \tag{III.13}$$

aus, denn diese ist ja bereits durch

$$0,173000\ldots$$

dezimal dargestellt, und wir möchten, dass die Dezimaldarstellung eindeutig ist, siehe auch Abschnitt III.3.3.

Lemma III.8. *Die Menge der Dezimaldarstellungen* $\mathcal{D}$ *und die Menge* $[0,1) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \le x < 1\}$ *sind gleichmächtig.*

Satz III.9. $\mathcal{D}$ *ist nicht abzählbar.*

Beweis. Nehmen wir an,

$$\mathcal{D} \;=\; \big\{ \big(a_n^{(1)}\big)_{n\in\mathbb{N}}, \big(a_n^{(2)}\big)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots \big\} \tag{III.14}$$

wäre eine Abzählung. Definiere nun eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$b_n \;:=\; \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad a_n^{(n)} \in \{5,6,7,8,9\}, \\ 7, & \text{falls} \quad a_n^{(n)} \in \{0,1,2,3,4\}, \end{cases} \tag{III.15}$$

so dass

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad b_n \;\neq\; a_n^{(n)}. \tag{III.16}$$

Offenbar wäre

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}, \tag{III.17}$$

da alle b_n verschieden von 9 sind. Andererseits impliziert aber (III.16), dass

$$\forall\, k \in \mathbb{N}: \quad (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\neq\; \big(a_n^{(k)}\big)_{n\in\mathbb{N}}, \tag{III.18}$$

also

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin \big\{ \big(a_n^{(1)}\big)_{n\in\mathbb{N}}, \big(a_n^{(2)}\big)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots \big\} \;=\; \mathcal{D}, \tag{III.19}$$

was in Widerspruch zu (III.17) steht. □

Satz III.10. $\mathbb{R}$ *ist überabzählbar.*

Beweis. Wäre $\mathbb{R}$ abzählbar, so wäre auch $[0,1) \subseteq \mathbb{R}$ als Teilmenge abzählbar. $[0,1)$ ist aber gleichmächtig zur überabzählbaren Menge $\mathcal{D}$ der Dezimaldarstellungen und somit selbst überabzählbar. Also kann $\mathbb{R}$ nicht abzählbar sein. □

III.3. Ergänzungen

III.3.1. Teilmengen abzählbarer Mengen sind abzählbar

Beweis. Ist $|B|$ endlich, so gilt die Behauptung automatisch. Wir können also o.B.d.A. voraussetzen, dass B und somit auch $A \supseteq B$ unendlich sind,

$$|B| \ = \ |A| \ = \ \infty. \tag{III.20}$$

Da A abzählbar ist, gibt es eine Bijektion

$$x : \mathbb{N} \to A, \quad n \mapsto x_n, \tag{III.21}$$

und

$$A \ = \ \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}. \tag{III.22}$$

Da $B \subseteq A$, gibt es eine Zahl $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass

$$x_1 \notin B, \ x_2 \notin B, , \ldots, \ x_{n_1 - 1} \notin B, \ x_{n_1} \in B. \tag{III.23}$$

Weiterhin gibt es eine Zahl $n_2 \in \mathbb{N}, n_2 > n_1$, so dass

$$x_{n_1+1} \notin B, \ldots, \ x_{n_2-1} \notin B, \ x_{n_2} \in B. \tag{III.24}$$

Führen wir dieses Verfahren so fort, erhalten wir eine Abbildung

$$y : \mathbb{N} \to B, \quad j \mapsto y_j := x_{n_j}, \tag{III.25}$$

wobei $n_j \in \mathbb{N}, j \leq n_j < n_{j+1}$. Weil $x : \mathbb{N} \to A$ eine Bijektion ist, gilt $x_m \neq x_n$ falls $m < n$.

Insbesondere ist für $i < j$ auch $n_i < n_j$ und somit $x_{n_i} \neq x_{n_j}$,

$$i < j \ \Rightarrow \ n_i < n_j \ \Rightarrow \ y_2 = x_{n_i} \neq x_{n_j} = y_i. \tag{III.26}$$

Also ist y injektiv. Ist nun $b \in B \subseteq A$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$b \ = \ x_n. \tag{III.27}$$

Mit der oben beschriebenen Prozedur erhält man dann $n = n_j$, für ein gewisses $j \in \mathbb{N}$, $j \leq n$ (nach endlich vielen Schritten, das ist hier der Punkt!), also

$$b \ = \ x_{n_j} \ = \ y_j. \tag{III.28}$$

Somit ist y auch surjektiv und damit bijektiv $\square$

III.3.2. Abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen sind abzählbar

Satz III.11. *Jede Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist abzählbar.*

Beweis. Seien die Mengen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ gegeben als

$$A_j \;=\; \{x_{j,1}, x_{j,2}, x_{j,3}, \ldots\}. \tag{III.29}$$

Dann ist

$$A \;:=\; \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \;=\; \{x_{j,k} \,|\, \exists\,(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x_{j,k} \in A_j\}. \tag{III.30}$$

Wie im Beweis von Satz III.5 folgern wir nun, dass A gleichmächtig zu einer Teilmenge von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und somit abzählbar ist. $\square$

III.3.3. Beweis der Gleichmächtigkeit der reellen Zahlen und der Dezimaldarstellungen (Lemma III.8)

Beweis. Seien $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{D}$ eine Dezimaldarstellung und, für $N \in \mathbb{N}$,

$$q_N \;:=\; \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot 10^{-n} \;\in\; \mathbb{Q} \;\subseteq\; \mathbb{R}. \tag{III.31}$$

Offensichtlich gilt immer $q_N < 1$, deshalb ist die Menge

$$A \;:=\; \{q_1, q_2, q_3, \ldots\} \subseteq \mathbb{R} \tag{III.32}$$

nach oben beschränkt und hat ein Supremum $\sup A \in [0,1]$. Wegen (III.12) gilt sogar $q_N \leq 1 - 10^{-\tilde{n}}$, für ein gewisses $\tilde{n} \in \mathbb{N}$, und daher

$$\sup A \in [0,1). \tag{III.33}$$

Wir erhalten somit eine Abbildung

$$J : \mathcal{D} \to [0,1), \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto \sup A. \tag{III.34}$$

Seien nun $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \neq (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Wir zeigen, dass dann auch $\sup A \neq \sup B$, wobei $B = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ und $p_N = \sum_{n=1}^{N} b_n \cdot 10^{-n}$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so dass

$$a_1 = b_1, \;\; a_2 = b_2, \;\ldots,\; a_{m-1} = b_{m-1}, \;\; a_m \leq b_m - 1 \tag{III.35}$$

(oder umgekehrt, dann vertausche man die Rollen von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$).

Weiterhin gibt es nach (III.12) ein $\tilde{n} \geq m + 1$ mit

$$a_{\tilde{n}} \;\leq\; 8. \tag{III.36}$$

Bilden wir nun q_N, für $N \geq \tilde{n}$, so gilt

$$
\begin{aligned}
q_N &= \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot 10^{-n} = \sum_{n=1}^{m-1} b_n \cdot 10^{-n} + \sum_{n=m}^{\tilde{n}-1} a_n \cdot 10^{-n} + \underbrace{\sum_{n=\tilde{n}}^{N} a_n \cdot 10^{-n}}_{\leq 9 \cdot 10^{-\tilde{n}}} \\
&\leq \sum_{n=1}^{m-1} b_n \cdot 10^{-n} a_m \cdot 10^{-m} + \underbrace{\sum_{n=m+1}^{\tilde{n}} 9 \cdot 10^{-\tilde{n}}}_{=10^{-m}-10^{-\tilde{n}}}, \qquad \text{(III.37)}
\end{aligned}
$$

und andererseits, für $N \geq m$,

$$
p_N := \sum_{n=1}^{N} b_n \cdot 10^{-n} \geq \sum_{n=1}^{m-1} b_n \cdot 10^{-n} + b_m \cdot 10^{-m}. \qquad \text{(III.38)}
$$

Mit

$$
A := \{q_1, q_2, q_3, \ldots\}, \quad B := \{p_1, p_2, p_3, \ldots\} \qquad \text{(III.39)}
$$

und

$$
q_1 \leq q_2 \leq q_3 \leq \ldots, \quad p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \ldots \qquad \text{(III.40)}
$$

erhalten wir dann

$$
\forall k \in \mathbb{N}: \qquad \sup A = \sup\{q_k, q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots\} \qquad \text{(III.41)}
$$

$$
\forall \ell \in \mathbb{N}: \qquad \sup B = \sup\{q_\ell, q_{\ell+1}, q_{\ell+2}, \ldots\}. \qquad \text{(III.42)}
$$

Also ist

$$
\begin{aligned}
\sup A &= \sup\{q_{\tilde{n}}, q_{\tilde{n}+1}, q_{\tilde{n}+2}, \ldots\} \\
&\leq \sum_{n=1}^{m-1} b_n \cdot 10^{-n} + (a_m + 1) \cdot 10^{-m} - 10^{-\tilde{n}} \\
&\leq \sum_{n=1}^{m-1} b_n \cdot 10^{-n} + b_m \cdot 10^{-m} - 10^{-\tilde{n}} \\
&\leq \sup\{p_m, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots\} - 10^{-\tilde{n}} \\
&= \sup B - 10^{-\tilde{n}} < \sup B. \qquad \text{(III.43)}
\end{aligned}
$$

Insbesondere ist

$$
J\big[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\big] = \sup A < \sup B = J\big[(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\big], \qquad \text{(III.44)}
$$

und somit J *injektiv.*

Um die Surjektivität zu zeigen, wählen wir eine Zahl $x_0 \in [0,1)$ und bestimmen die natürliche Zahl $a_1 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ so, dass

$$
0 \leq x_1 := x_0 - a_1 \cdot 10^{-1} < 10^{-1}. \qquad \text{(III.45)}
$$

Anschließend wählen wir $a_2 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ so, dass

$$0 \;\leq\; x_2 \;:=\; x_1 - a_2 \cdot 10^{-2} \;<\; 10^{-2} \tag{III.46}$$

und allgemein $a_k \in \{0, \ldots, 9\}$ so, dass

$$0 \;\leq\; x_k \;:=\; x_{k-1} - a_k \cdot 10^{-k} \;<\; 10^{-k}, \tag{III.47}$$

für vorher gewählte $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1} \in \{0, \ldots, 9\}$. Auf diese Weise erhalten wir eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}$. Bilden wir wieder

$$q_N \;:=\; \sum_{n=1}^{N} a_n 10^{-n}, \qquad A \;:=\; \{q_1, q_2, \ldots\}, \tag{III.48}$$

so ist mit (III.45)-(III.47), für alle $N, k \in \mathbb{N}$

$$q_N \;\leq\; x_0 \;<\; q_N + 10^{-N} \;\leq\; q_{N+k} + 10^{-N}. \tag{III.49}$$

Also gilt, für alle $N \in \mathbb{N}$,

$$\sup A \;\leq\; x_0 \;<\; \sup\{q_N, q_{N+1}, \ldots\} + 10^{-N} \;=\; \sup A + 10^{-N}. \tag{III.50}$$

Aus

$$\forall\, N \in \mathbb{N} : \quad \sup A \;\leq\; x_0 \;<\; \sup A + 10^{-N} \tag{III.51}$$

folgt aber

$$x_0 \;=\; \sup A \;=\; J\big[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\big], \tag{III.52}$$

und J ist auch *surjektiv* und somit bijektiv. $\square$