Poisson-Approximation der Bin(n,p)-Vert.

Es gilt: Falls $X_n \sim Bin(n, p_n)$ mit $n \cdot p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda \in (0,\infty)$, $\left(p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right)$

(grob gesprochen: Für „große n und kleine p")

dann gilt $P\{X_n = k\} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

„grob gesprochen" $P\{X_n = k\} \approx e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$ für $k \in \{0,1,2,\dots\} := \mathbb{N} \cup \{0\}$

„Beweis": $P\{X_n = k\} = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} =$

$$\underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n\cdot n \cdots n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1} \cdot \underbrace{\frac{(np_n)^k}{k!}}_{np_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda} \cdot \underbrace{(1-p_n)^{-k}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1,\ p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lambda}}$$

$\frac{\lambda}{n} \approx p_n$, $\quad n \cdot n \cdots n = n^k$ (1. Analysis)

$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

(„p klein")

Poisson-Vert. mit Parameter $\lambda > 0$ (Vert. der seltenen Ereignissen)

Bsp. X: Anzahl der Tore pro Spiel

Modellwahl: $X \sim Poi(\lambda)$

geschätzt $\lambda \approx 2{,}8$ (in 2015/16)

$P\{X = 0\} \approx \frac{\lambda^0}{0!} e^{-2.8} \approx 0{,}06$

$P\{X = 1\} \approx \frac{\lambda^1}{1!} e^{-2.8} \approx 2.8^1 \cdot e^{-2.8} \approx 0.167$

$P\{X = k\} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$ für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\} := \{0,1,2,\dots\}$

Pers.	1	2	3
zieht	2	3	1
	3	1	2

Bsp. „Wichteln": X: Anzahl der Personen, die ihr eigenes Geschenk ziehen. Modellwahl: $X \sim Poi(\lambda)$

$\lambda \approx n p \approx n \cdot \frac{1}{n} = 1$, $\quad p \approx \frac{1}{n}$

n: Anzahl der Personen

$P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X = 0\} \approx 1 - e^{-1} \cdot \frac{1^0}{0!}$
$= 1 - e^{-1} \approx 0.6321$ ab $n \geq 5$