Technische Universität Braunschweig

Decision Support
Institut für Wirtschaftsinformatik

Operations Research

Vorlesung 7

Lineare Programmierung: Mehrfache Zielsetzung & Modellierungstechniken

Wiederholung

- Die drei Schritte im Operations Research
  - Problem, Modell, Lösung

- Typische Problemszenarien
  - Z.B. Transportproblem, Energieflussproblem, Auswahlproblem

- Lineare Probleme können mit dem Simplex Algorithmus gelöst werden

- Ganzzahlige lineare Probleme können mit dem Branch and Bound Verfahren gelöst werden

Heutige Fragestellungen

- Was passiert, wenn man mehrere Ziele hat und wie kann man das modellieren?
- Wie können große Probleme gelöst werden?
- Wie können komplexere Probleme modelliert werden?

Überblick

1. Mehrzieloptimierung
2. Modellierungstechniken
    1. Personaleinsatzplanung
    2. Dynamische Losgrößenplanung
3. Lösungssoftware zur linearen Programmierung

Überblick

1. **Mehrzieloptimierung**
2. Modellierungstechniken
    1. Personaleinsatzplanung
    2. Dynamische Losgrößenplanung
3. Lösungssoftware zur linearen Programmierung

Optimierung bei mehrfacher Zielsetzung

Zwei Ziele können zueinander **komplementär, konkurrierend** oder **neutral** sein:

Bei zwei **konkurrierenden Zielen** tritt insofern ein Zielkonflikt auf, als mit der Verbesserung des Zielerreichungsgrades eines Zieles sich derjenige des anderen Zieles verschlechtert. Das bedeutet, dass es keine Lösung gibt, die für beide Ziele gleichzeitig ein Optimum darstellt.

Bei zwei **komplementären Zielen** entsteht kein Zielkonflikt. Die Menge der zulässigen Lösungen enthält dann mindestens ein Eckpunkt, der für jedes Ziel ein Optimum darstellt.

Im Falle der **Neutralität** bleibt bei der Veränderung des Zielerreichungsgrades eines Zieles derjenige der übrigen unberührt.

Möglichkeiten zur Lösung von Zielkonflikten

- Lexikographische Ordnung von Zielen
- Zieldominanz
- Zielgewichtung
- Berücksichtigung von Abstandsfunktionen

Lexikographische Ordnung von Zielen

Der Entscheidungsträger ordnet die zu verfolgenden Ziele nach Wichtigkeit:

Ziel A: wichtigstes Ziel

Ziel B: zweitwichtigstes Ziel

Ziel C: drittwichtigstes Ziel, usw.

Weitere Vorgehensweise:

Schritt 1: Optimiere das Problem ausschließlich bzgl. Ziel A. Die optimale Menge sei X_A.

Schritt 2: Optimiere das Problem ausschließlich bzgl. Ziel B, wobei nur X_A als Menge der zulässigen Lösungen betrachtet wird. Die Menge der dabei erhaltenen optimalen Lösung sei X_B.

Schritt 3: Optimiere das Problem ausschließlich bzgl. Ziel C, wobei nun nur X_B als Menge der zulässigen Lösungen betrachtet wird.

Die Vorgehensweise berücksichtigt „untergeordnete" Ziele nur dann, wenn für „übergeordnete" Ziele der Fall mehrerer optimaler Lösungen vorliegt.

Beispiel: Produktionsprogrammplanung (Erweiterung)

Eine Unternehmung stellt die Produkte P_1 und P_2 her, die mit einem Gewinn (Deckungsbeitrag) von 3 € bzw. 4 € pro ME verkauft werden können. Zur Fertigung der beiden Produkte sind erforderlich

(a) eine Maschine, die (in dem Planungszeitraum) maximal 1200 Std. eingesetzt werden kann

(b) ein Rohstoff, von dem (in dem Planungszeitraum) höchstens 3000 ME zur Verfügung stehen

(c) Arbeitskräfte, die (in dem Planungszeitraum) höchstens 125 Std. eingesetzt werden können

Für die Herstellung einer ME des Produktes P_1 (bzw. P_2) werden benötigt:

Maschine	3 Std.	(bzw. 2 Std.)
Rohstoff	5 ME	(bzw. 10 ME)
Arbeitskräfte	-	(bzw. 0,5 Std.)

Gesucht: Produktionsprogramm mit maximalem (Gesamt-)Gewinn *bei höchst möglicher Auslastung der Arbeitskräfte*

Beispiel: Produktionsprogrammplanung: Lösung mittels lexikographischer Ordnung der Ziele

Ziel A: Auslastung der Mitarbeiter wichtigstes Ziel

Ziel B: Maximierung des Deckungsbeitrages zweitwichtigstes Ziel

Schritt 1: Optimiere das Problem ausschließlich bzgl. Ziel A.

Problemformulierung:

$$\begin{array}{lrcrl} \text{Max} & & & 0{,}5x_2 & \\ \text{u.d.N.} & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq 1200 \\ & 5x_1 & + & 10x_2 & \leq 3000 \\ & & & 0{,}5x_2 & \leq 125 \\ & & & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Lösung: $x_1 = 0$; $x_2 = 250$; Auslastung: $125\ (100\%)$

Beispiel: Produktionsprogrammplanung: Lösung mittels lexikographischer Ordnung der Ziele

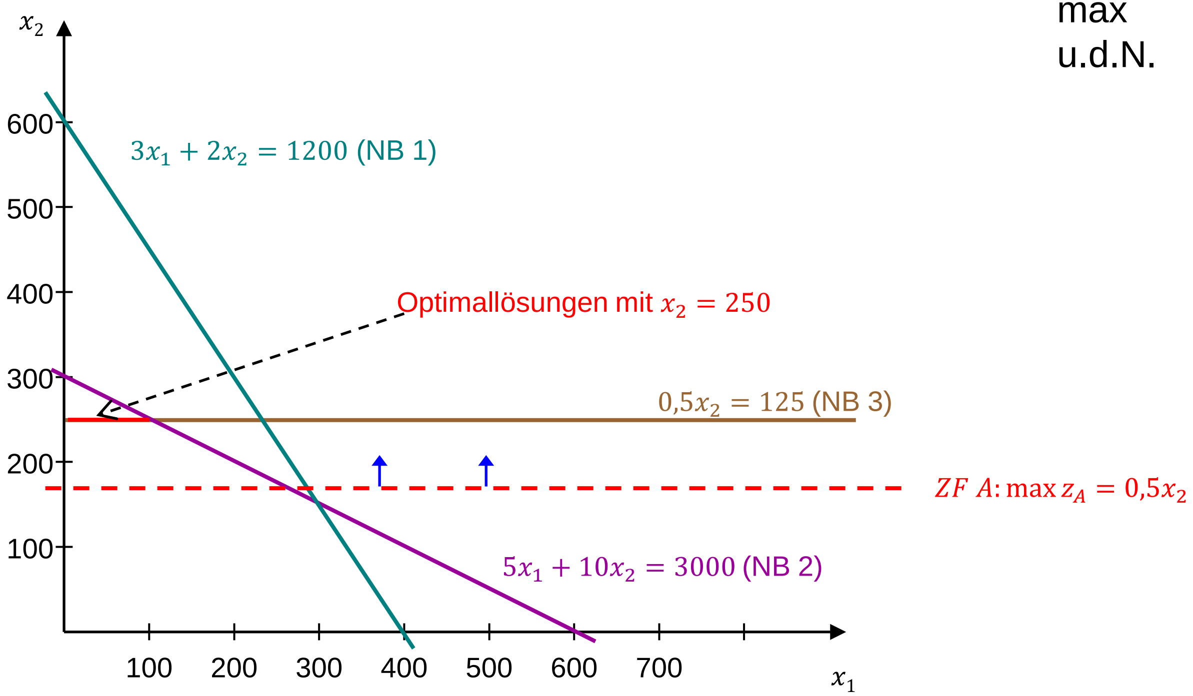
Schritt 2: Optimiere das Problem ausschließlich bzgl. Ziel B mit x_2=250.

Problemformulierung:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{u.d.N.} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 1200 \\ & 5x_1 + 10x_2 \leq 3000 \\ & 0{,}5x_2 \leq 125 \\ & x_1 \geq 0, x_2 = 250 \end{aligned}$$

Lösung: $x_1 = 100$; $x_2 = 250$; Auslastung: $125\ (100\%)$; DB = 1300

Graphische Veranschaulichung
Lexikographische Ordnung – Schritt 1: Ziel A



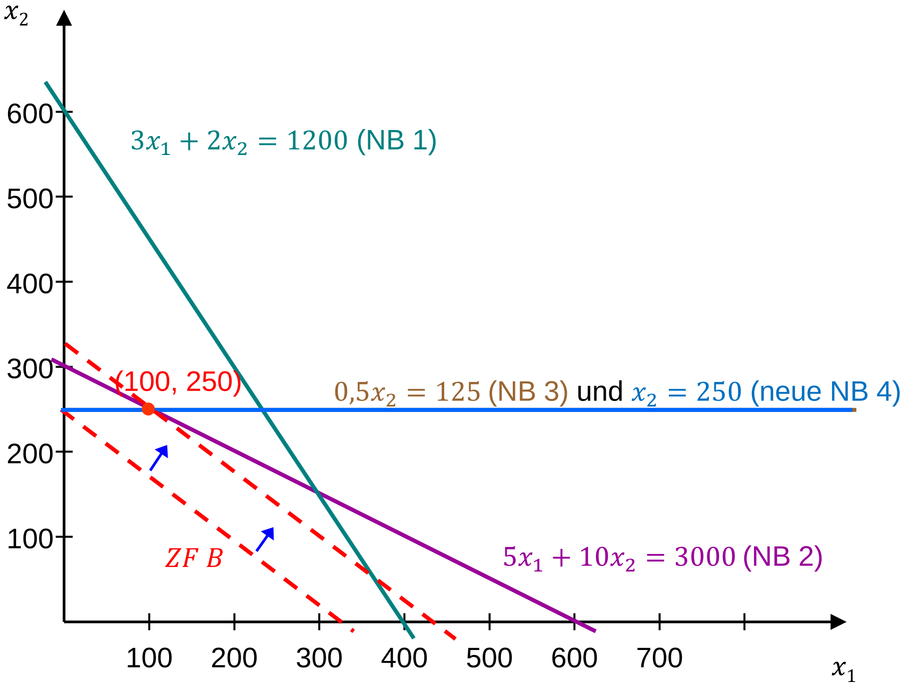
max $\quad z_A = 0{,}5x_2$

u.d.N.

$$3x_1 + 2x_2 \leq 1200$$
$$5x_1 + 10x_2 \leq 3000$$
$$0{,}5x_2 \leq 125$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Technische Universität Braunschweig
Decision Support
Institut für Wirtschaftsinformatik

Graphische Veranschaulichung
Lexikographische Ordnung – Schritt 2: Ziel B



$$
\begin{array}{llrl}
\text{max} & z_B = & 3x_1 + 4x_2 & \\
\text{u.d.N.} & & 3x_1 + 2x_2 & \leq 1200 \\
& & 5x_1 + 10x_2 & \leq 3000 \\
& & 0{,}5x_2 & \leq 125 \\
& & x_1 \geq 0, & x_2 = 250
\end{array}
$$

NB 4 ist eine Gleichheitsbedingung, daher beschränkt sich der zulässige Bereich auf

$$0 \leq x_1 \leq 100$$
$$x_2 = 250$$

Zieldominanz

Eines der zu verfolgenden Ziele (i.a. das dem Entscheidungsträger wichtigste) wird zum **Hauptziel** erklärt und in der Zielfunktion berücksichtigt. Alle übrigen Ziel werden zu **Nebenzielen** erklärt und in Form von $\leq$ - oder $\geq$ - Nebenbedingungen berücksichtigt. Für zu maximierende Nebenziele führt man eine mindestens zu erreichende untere Schranke, für zu minimierende Nebenziele eine höchstens annehmbare obere Schranke ein.

Problem:

durch ungeeignete (ungünstige) Schranken für die Nebenziele wird unter Umständen der Zielerreichungsgrad des Hauptzieles zu sehr beschnitten oder die Menge der zulässigen Lösungen sogar leer.

Beispiel: Produktionsprogrammplanung (Erweiterung) Lösung mittels Zieldominanz

Hauptziel: Maximierung des Deckungsbeitrages

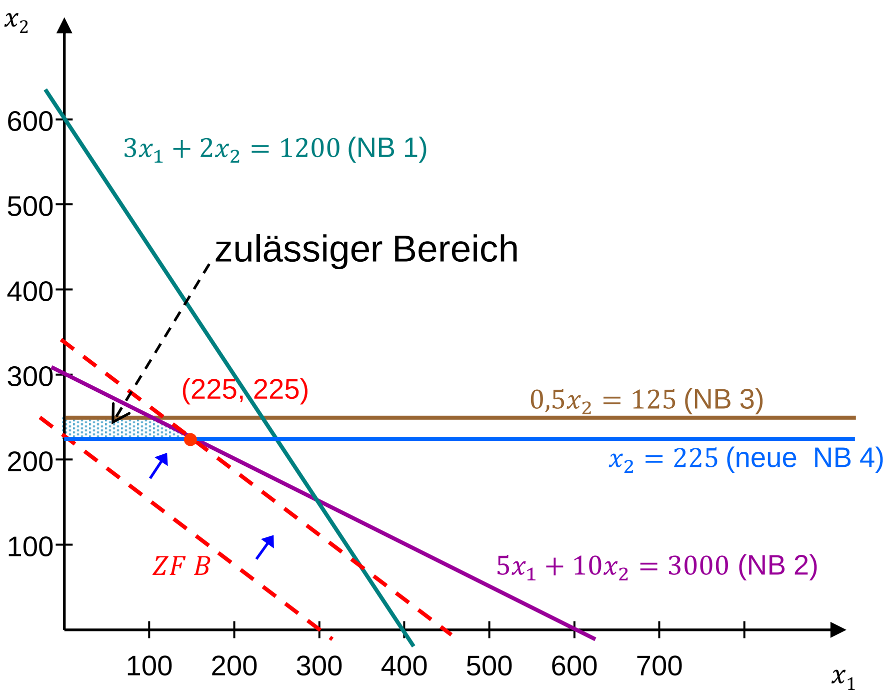
Nebenziel: Auslastung der Mitarbeiter, z.B. größer 90%

Problemformulierung:

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & 3x_1 + 4x_2 \\
\text{u.d.N.} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 1200 \\
& 5x_1 + 10x_2 \leq 3000 \\
& 0{,}5x_2 \leq 125 \\
& 0{,}5x_2 \geq 0{,}9 * 125 = 112{,}5 \text{ (äquivalent: } x_2 \geq 225) \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Lösung: $x_1 = 150$; $x_2 = 225$; Auslastung: $112{,}5$ (90%); DB = 1350

Graphische Veranschaulichung Zieldominanz



max $\quad z_B = 3x_1 + 4x_2$

u.d.N.

$$3x_1 + 2x_2 \leq 1200$$
$$5x_1 + 10x_2 \leq 3000$$
$$0{,}5x_2 \leq 125$$
$$x_2 \geq 225$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

NB 4 ist eine ≥ -Bedingung!
→ zulässiger Bereich
wird sehr klein

Zielgewichtung

Jedes zu berücksichtigende Ziel wird mit einer reellen Zahl gewichtet

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \quad \text{mit} \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

und es wird eine neue (zusammengesetzte) Zielfunktion ermittelt.

Nachteile:

- die Ermittlung der Gewichte ist subjektiv
- die optimale Lösung ist (wie bei einfacher Zielsetzung) ein Eckpunkt des zulässigen Bereichs; nur für spezielle λ_i (parametrische Lösung) sind mehrere Eckpunkte und deren Linearkombinationen optimal.

Beispiel: Produktionsprogrammplanung (Erweiterung) Lösung mittels Zielgewichtung

Gewicht des Ziels Maximierung des Deckungsbeitrages: $\lambda_1 = 4/5$

Gewicht des Ziels Auslastung der Mitarbeiter: $\lambda_2 = 1/5$

Ermittlung der neuen Zielfunktion: $4/5 \cdot (3x_1 + 4x_2) \ + \ 1/5 \cdot (0{,}5x_2) \ = \ 2{,}4x_1 + \ 3{,}3x_2$

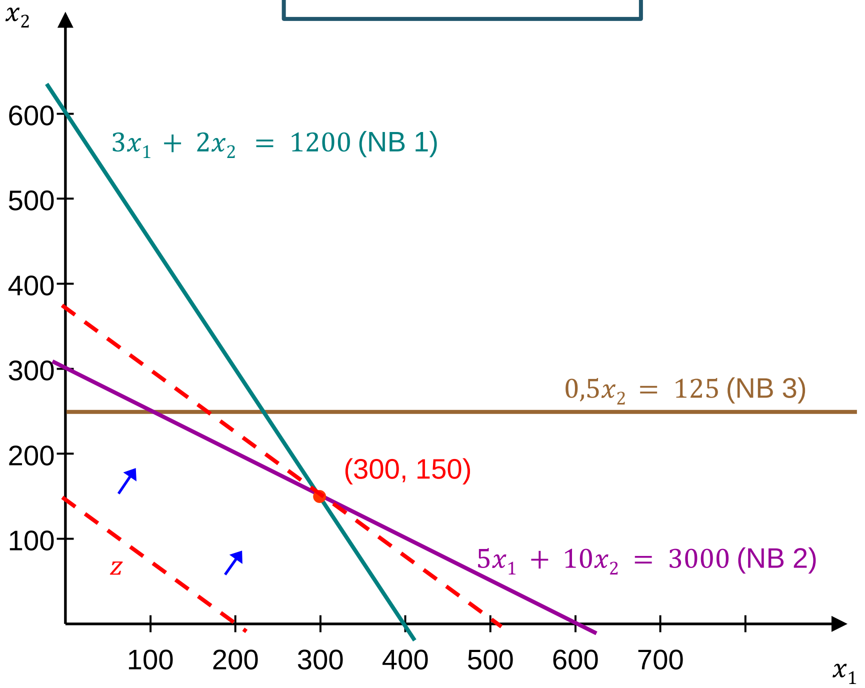
Problemformulierung:

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & 2{,}4\, x_1 + \ 3{,}3\, x_2 \\
\text{u.d.N.} \quad & 3x_1 + \ \ 2x_2 \leq 1200 \\
& 5x_1 + \ 10x_2 \leq 3000 \\
& \qquad\quad 0{,}5x_2 \leq 125 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Lösung: $x_1 = 300$; $x_2 = 150$; Auslastung: $0{,}5 \cdot 150 \ = \ 75\ (60\%)$; DB $= \ 3x_1 + \ 4x_2 = 1500$

Graphische Veranschaulichung Zielgewichtung

$\lambda_1 = 4/5 \qquad \lambda_2 = 1/5$



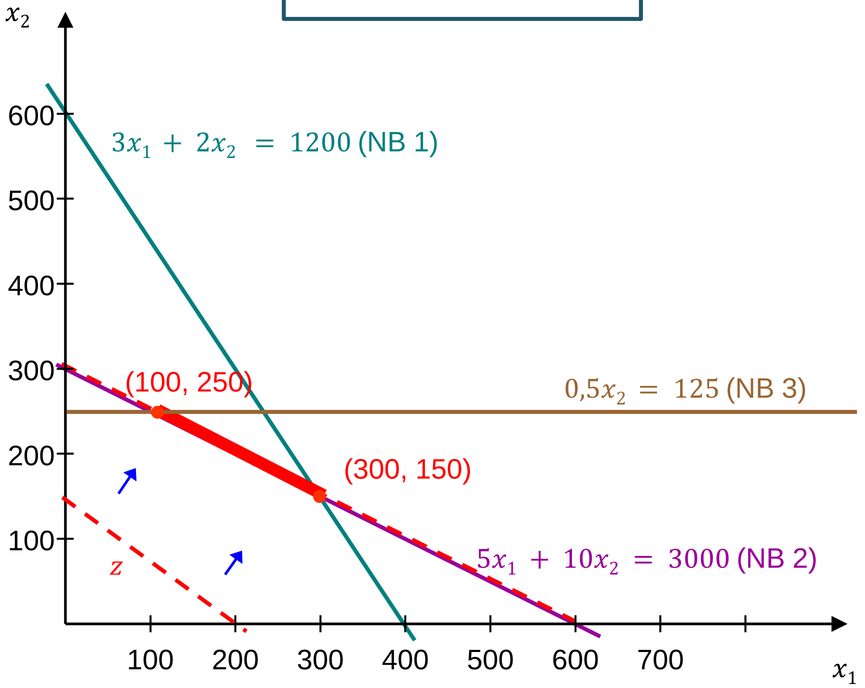
Max $\quad z = 2{,}4x_1 + 3{,}3x_2$

u.d.N.

$$3x_1 + 2x_2 \leq 1200$$
$$5x_1 + 10x_2 \leq 3000$$
$$0{,}5x_2 \leq 125$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Graphische Veranschaulichung Zielgewichtung

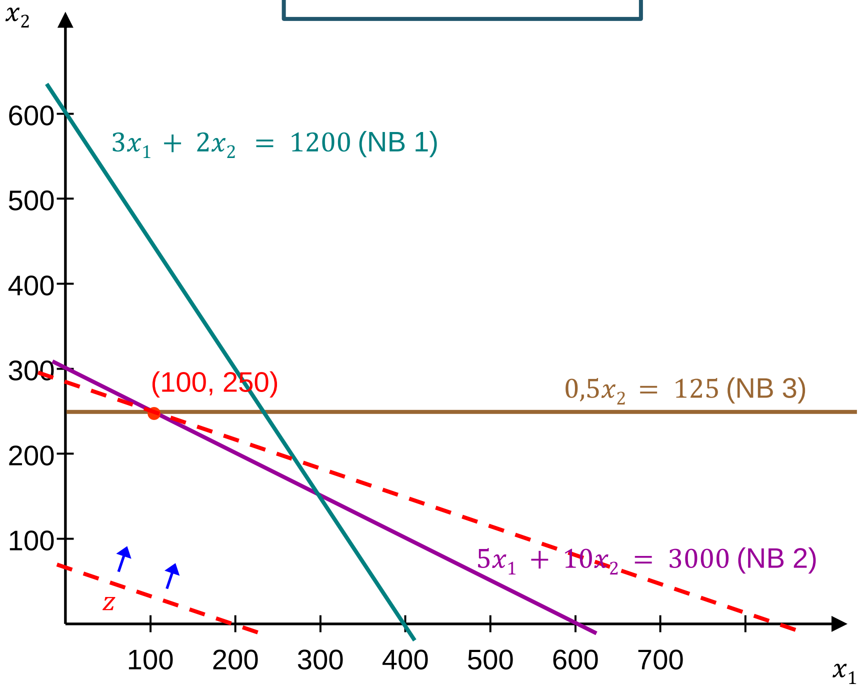
$\lambda_1 = 1/5 \qquad \lambda_2 = 4/5$



$$
\begin{array}{ll}
\text{Max} & z = 0{,}6x_1 + 1{,}2x_2 \\
\text{u.d.N.} & 3x_1 + 2x_2 \leq 1200 \\
& 5x_1 + 10x_2 \leq 3000 \\
& 0{,}5x_2 \leq 125 \\
& x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Graphische Veranschaulichung Zielgewichtung

$\lambda_1 = 1/10 \quad \lambda_2 = 9/10$



Max $\quad z = 0{,}3x_1 + 0{,}85x_2$

u.d.N.

$$3x_1 + 2x_2 \leq 1200$$
$$5x_1 + 10x_2 \leq 3000$$
$$0{,}5x_2 \leq 125$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Berücksichtigung von Abstandsfunktionen

Für jedes zu berücksichtigende Ziel z_i wird zunächst gesondert der optimale Zielfunktionswert z_i^* ermittelt.

Anschließend wird eine Lösung x des gesamten Problems so gesucht, dass ein möglichst geringer „Abstand“ zwischen den z_i^* und den durch x gewährleisteten Zielerreichungsgraden besteht.

Je nach unterstellter Bedeutung der einzelnen Ziele (und zum Zwecke der Normierung ihrer Zielfunktionswerte) können die Abstände zusätzlich mit Parametern λ_i wie bei der Zielgewichtung gewichtet werden.

Eine allgemeine zu minimierende Abstandsfunktion $\Phi(x)$ lautet z.B.:

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot |z_i^* - z_i(x)|$$

Beispiel: Produktionsprogrammplanung: Lösung durch Berücksichtigung von Abstandsfunktionen

Optimaler Zielfunktionswert für Ziel Maximierung des Deckungsbeitrages:

DB_{max}=1500; Gewichtung in Abstandsfunktion mit $\lambda_1 = 0{,}75$

Optimaler Zielfunktionswert für Ziel Auslastung der Mitarbeiter: $\lambda_2 = 0{,}25$

$Auslastung_{max}$=125; Gewichtung in Abstandsfunktion mit

Ermittlung der zu minimierenden Abstandsfunktion:

$$\Phi(x) = 0{,}75\,|1500 - 3x_1 - 4x_2| + 0{,}25\,|125 - 0{,}5x_2| = 1156{,}25 - 2{,}25\,x_1 - 3{,}125\,x_2$$

(Die Betragsstriche können durch Klammern ersetzt werden, da die $z_i(x)$ nicht größer als die z_i^* werden können.)

Beispiel: Produktionsprogrammplanung: Lösung durch Berücksichtigung von Abstandsfunktionen

Problemformulierung:

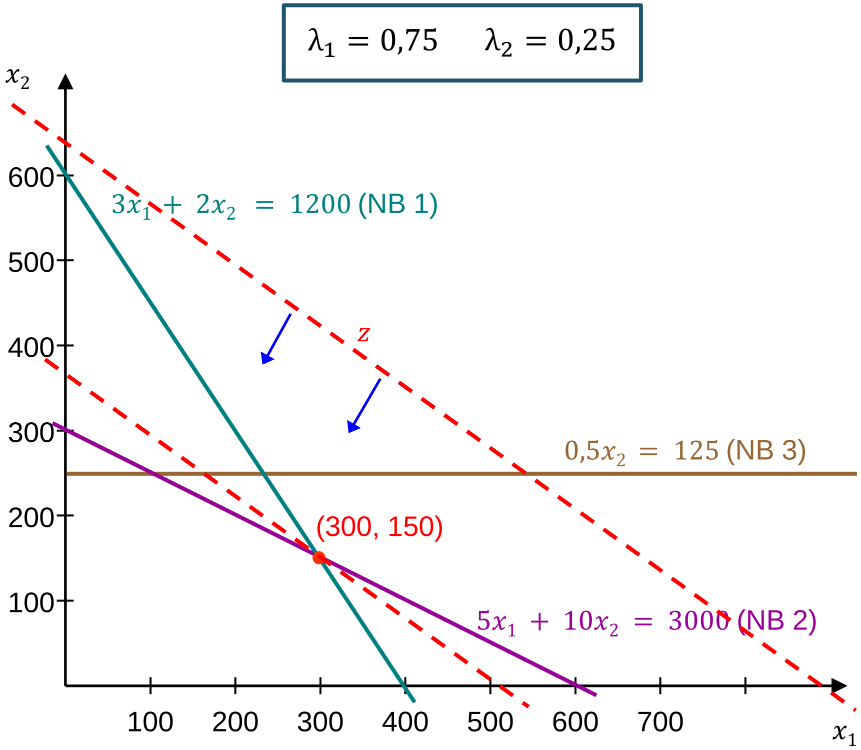
$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & 1156{,}25 - 2{,}25\,x_1 - 3{,}125\,x_2 \\ \text{u.d.N.} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 1200 \\ & 5x_1 + 10x_2 \leq 3000 \\ & 0{,}5x_2 \leq 125 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Alternativ:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 2{,}25\,x_1 + 3{,}125\,x_2 \\ \text{u.d.N.} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 1200 \\ & 5x_1 + 10x_2 \leq 3000 \\ & 0{,}5x_2 \leq 125 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Lösung: $x_1 = 300;\ x_2 = 150$; Auslastung: $0{,}5 \cdot 150 = 75\ (60\%)$; DB $= 3x_1 + 4x_2 = 1500$

Graphische Veranschaulichung Gewichtete Abstandsfunktionen



$$\begin{aligned}
\text{Min } & -2{,}25\,x_1 - 3{,}125\,x_2 \\
\text{u.d.N. } & 3x_1 + 2x_2 \leq 1200 \\
& 5x_1 + 10x_2 \leq 3000 \\
& 0{,}5x_2 \leq 125 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Zusammenfassung Mehrzieloptimierung

- Lexikographische Ordnung von Zielen:
  - Maximiere zuerst A, dann B

- Zieldominanz:
  - Maximiere A, u.d.N dass B ≥ Konstante

- Zielgewichtung:
  - Maximiere $\lambda \cdot A + (1 - \lambda) \cdot B$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$

- Berücksichtigung von Abstandsfunktionen:
  - Maximiere A allein, erhalte höchstmöglichen Wert für A
  - Maximiere B allein, erhalte höchstmöglichen Wert für B
  - Maximiere A und B so, dass wir „möglichst nah“ an den höchstmöglichen Werten bleiben
  - Minimiere Abstand zu den Werten

Überblick

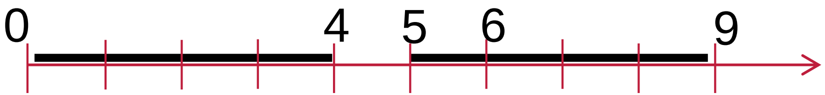
1. Mehrzieloptimierung
2. **Modellierungstechniken**
    1. **Personaleinsatzplanung**
    2. Dynamische Losgrößenplanung
3. Kommerzielle Lösungssoftware zur linearen Programmierung

Personaleinsatzplanung: Problembeschreibung

Die Braunschweiger Verkehrs AG plant die Einrichtung eines Call-Centers. In Marktstudien wurde über den Tagesverlauf folgender Mitarbeiterbedarf ermittelt:

0 - 6 Uhr: 2 Mitarbeiter
6 - 10 Uhr: 8 Mitarbeiter
10 - 12 Uhr: 4 Mitarbeiter
12 - 16 Uhr: 3 Mitarbeiter
16 - 18 Uhr: 6 Mitarbeiter
18 - 22 Uhr: 5 Mitarbeiter
22 - 24 Uhr: 3 Mitarbeiter

Laut Tarifvertrag beträgt die effektive tägliche Arbeitszeit eines Mitarbeiters 8 Stunden, wobei nach 4 Stunden eine einstündige Pause vorgeschrieben ist.



Wie viele Mitarbeiter sind mindestens notwendig, um die Vorgaben der Marktstudie zu erfüllen?

Personaleinsatzplanung: Modellierung 1/2

Entscheidungsvariablen:

x_1 = Anzahl der Mitarbeiter, die um 0 Uhr beginnen

x_2 = Anzahl der Mitarbeiter, die um 1 Uhr beginnen

...

x_{24} = Anzahl der Mitarbeiter, die um 23 Uhr beginnen

Zielfunktion:

minimiere $x_1 + x_2 + \ldots + x_{24}$

Personaleinsatzplanung: Veranschaulichung

Anwesenheit der einzelnen Mitarbeiter:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	$\cdots$	x_{19}	x_{20}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
0 - 1	1										1	1		1	1	1
1 - 2	1	1									1	1	1		1	1
2 - 3	1	1	1								1	1	1	1		1
3 - 4	1	1	1	1								1	1	1	1	
4 - 5		1	1	1	1								1	1	1	1
5 - 6	1		1	1	1	1								1	1	1
6 - 7	1	1		1	1	1	1								1	1
7 - 8	1	1	1		1	1	1	1								1
8 - 9	1	1	1	1		1	1	1	1							
9 - 10		1	1	1	1		1	1	1							
10 - 11			1	1	1	1		1	1							
11 - 12				1	1	1	1		1							
$\vdots$																

Personaleinsatzplanung: Modellierung 2/2

Nebenbedingungen:

zwischen 2 und 3 Uhr: mindestens 2 Mitarbeiter

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_{19} + x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{24} \geq 2$$

zwischen 3 und 4 Uhr: mindestens 2 Mitarbeiter

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 2$$

zwischen 4 und 5 Uhr: mindestens 2 Mitarbeiter

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \geq 2$$

usw.

Nichtnegativitätsbedingungen:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_{24} \geq 0$$

Allgemeines Modell des Personaleinsatzplanungsproblems

$$\min \sum_{j=1}^{24} x_j$$

u.d.N.

$$\sum_{j=1}^{24} a_{ij} x_j \geq b_i \quad \text{für } i = 1..24$$

$$x_j \geq 0 \quad \text{für } j = 1..24$$

Entscheidungsvariablen:

x_j: Anzahl von in Schicht j einzusetzenden Mitarbeitern

Parameter:

b_i: Bedarf an Mitarbeitern in Stunde i

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{wenn Schicht } j \text{ in Stunde } i \text{ arbeitet} \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$$

Personaleinsatzplanung: Relaxiertes Ergebnis

$x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 0{,}5, x_5 = 0{,}5, x_6 = 1{,}5, x_7 = 3{,}5, x_8 = 0{,}5,$
$x_9 = 0, x_{10} = 1, x_{11} = 0, x_{12} = 0, x_{13} = 0, x_{14} = 1{,}25, x_{15} = 1{,}25, x_{16} = 1{,}25,$
$x_{17} = 1{,}25, x_{18} = 1{,}25, x_{19} = 0, x_{20} = 0, x_{21} = 0, x_{22} = 0, x_{23} = 0, x_{24} = 0$

$z = 15{,}75$

In der Realität wegen Nichtganzzahligkeit nicht zulässig

$\Rightarrow$ Einführung von Ganzzahligkeitsbedingungen

$$x_i \in \mathbb{N}_0 \longrightarrow x_i \in \{0,1\}$$

Personaleinsatzplanung: Ganzzahliges Ergebnis

$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 1, x_6 = 1, x_7 = 4, x_8 = 0,$

$x_9 = 0, x_{10} = 0, x_{11} = 0, x_{12} = 0, x_{13} = 0, x_{14} = 0, x_{15} = 2, x_{16} = 2,$

$x_{17} = 2, x_{18} = 1, x_{19} = 0, x_{20} = 0, x_{21} = 0, x_{22} = 0, x_{23} = 0, x_{24} = 0$

$z = 16$

- insgesamt aufgewendete Arbeitsstunden:
  16 * 8 = 128
- insgesamt benötigt:
  2 + 2 + 2 + ... + 3 = 102
- Differenz: 26
- Differenz wird auch als „slack“ oder „surplus“ bezeichnet

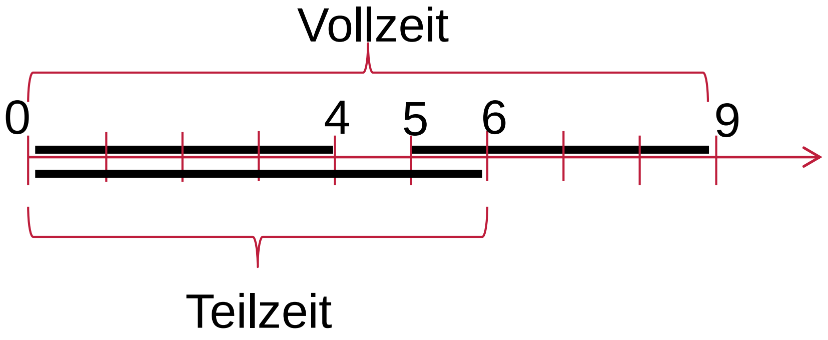
Modellierungstechnik in der Personalplanungsfallstudie

- Kapselung von komplexen Konstrukten in Entscheidungsvariablen
  - Personalplanung: Entscheidungsvariablen entsprechen Schichten, welche zur Bedarfsdeckung zu verschiedenen Zeitpunkten beitragen
  - komplexe Eigenschaften und Beziehungen (z.B. Pausenzeiten) werden in der Entscheidungsvariable „gekapselt“ und müssen daher nicht über Restriktionen modelliert werden

- Weitere Verwendungen dieser Modellierungstechnik:
  - Crew Scheduling:
    - sehr komplexe Regeln für gültige Umläufe von Crew-Basis zu Crew-Basis
      → Kapseln in einer Entscheidungsvariable je möglichem Umlauf
    - Überdeckung aller Flüge mit den Umlaufvariablen

Erweiterung: Teilzeitkräfte

- Was würde passieren, wenn wir statt Vollzeitkräften mit 4+4 Stunden samt Pause Teilzeitkräfte mit 6 Stunden Arbeitszeit beschäftigen würden?



Allgemeines Modell des Personaleinsatzplanungsproblems

$$\min \sum_{j=1}^{24} x_j$$

u.d.N.

$$\sum_{j=1}^{24} a_{ij} x_j \geq b_i \quad \text{für } i = 1 \ldots 24$$

$$x_i \in \mathbb{N}_0 \quad \text{für } j = 1 \ldots 24$$

Entscheidungsvariablen:

x_j: Anzahl von in Schicht j einzusetzenden Mitarbeitern

Parameter:

b_i : Bedarf an Mitarbeitern in Stunde i

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{wenn Schicht } j \text{ in Stunde } i \text{ arbeitet} \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$$

Personaleinsatzplanung: Matrix A^6

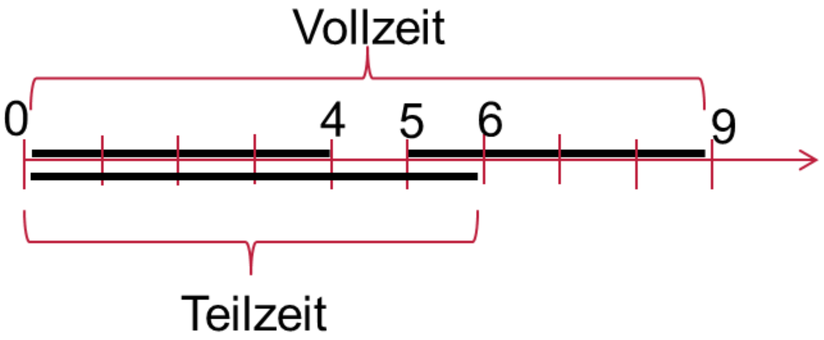
Anwesenheit der einzelnen Mitarbeiter:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	$\cdots$	x_{19}	x_{20}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
0 - 1	1											1	1	1	1	1
1 - 2	1	1											1	1	1	1
2 - 3	1	1	1											1	1	1
3 - 4	1	1	1	1											1	1
4 - 5	1	1	1	1	1											1
5 - 6	1	1	1	1	1	1										
6 - 7		1	1	1	1	1	1									
7 - 8			1	1	1	1	1	1								
8 - 9				1	1	1	1	1	1							
9 - 10					1	1	1	1	1							
10 - 11						1	1	1	1							
11 - 12							1	1	1							
$\vdots$																

Lösung:
- Anzahl Mitarbeiter=18
- Arbeitsstunden= 108

Erweiterung: Teilzeitkräfte

- Was würde passieren, wenn wir **sowohl** Vollzeitkräften mit 4+4 Stunden samt Pause **als auch** Teilzeitkräfte mit 6 Stunden Arbeitszeit beschäftigen würden?



- Optimierung nach Anzahl Mitarbeitern nicht mehr sinnvoll.
  → Optimierung nach Anzahl der Arbeitsstunden.

Neues Modell des Personaleinsatzplanungsproblems

$$\min \sum_{j=1}^{24} 8x_j + 6y_j$$

u.d.N.

$$\sum_{j=1}^{24} a_{ij}^8 x_j + \sum_{j=1}^{24} a_{ij}^6 y_j \geq b_i \quad \text{für } i = 1..24$$

$$x_i, y_i \in \mathbb{N}_0 \text{ für } j = 1..24$$

Lösung:
- Anzahl Mitarbeiter=15
- Arbeitsstunden= 102
- Kein Slack/Surplus

Entscheidungsvariablen:
- x_j: Anzahl von in Schicht j einzusetzenden Vollzeitarbeitern
- y_j: Anzahl von in Schicht j einzusetzenden Teilzeitarbeitern

Parameter:
- b_i: Bedarf an Mitarbeiter in Stunde i
- $a_{ij}^8 = \begin{cases} 1, \text{wenn VZ–Schicht } j \text{ in Stunde } i \text{ arbeitet} \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$
- $a_{ij}^6 = \begin{cases} 1, \text{wenn TZ–Schicht } j \text{ in Stunde } i \text{ arbeitet} \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$

Überblick

1. Mehrzieloptimierung
2. **Modellierungstechniken**
    1. Personaleinsatzplanung
    2. **Dynamische Losgrößenplanung**
3. Kommerzielle Lösungssoftware zur linearen Programmierung

Dynamische Losgrößenplanung: Beispiel

Es liege folgende Bedarfssituation für die nächsten 5 Perioden vor:

t	1	2	3	4	5	6
d_t	40	20	10	30	50	20

- Die Fixkosten F_t bei Produktion in Periode t betragen 50 EUR
- Die Lagerhaltungskosten h_t betragen 1 EUR/(Periode • ME)
- Der Lageranfangsbestand und der Lagerendbestand sollen jeweils 0 ME betragen.
- **Gesucht** ist der kostenminimale Produktionsplan zur Befriedigung der Nachfrage von 170 ME.

Dynamische Losgrößenplanung: Modellierung

Index:

$t = 1, 2, \dots, T$ Perioden

Daten:

d_t: Nachfrage in Periode t

h_t: Lagerhaltungskosten (pro Einheit auf Lager am Ende von Periode t)

F_t: Fixkosten bei Produktion in Periode t

y_0, y_T: Lageranfangs-, Lagerendbestand

Entscheidungsvariablen:

x_t: Produktionsmenge in Periode t

y_t: Lagerbestand am Ende von Periode t

$$z_t = \begin{cases} 1, & \text{falls in Periode t produziert wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Losgrößenplanung: Binden von Variablen

- Entscheidungsvariable x, Hilfsvariablen y und z

- Fortschreibung des Lagerbestandes über Perioden mittels dynamischer Lagerübergangsgleichung:
  $y_t = y_{t-1} + x_t - d_t$

- Setzen von Rüstkosten, falls in t Menge $x_t > 0$ produziert wird
  $x_t \leq Mz_t \Leftrightarrow x_t - Mz_t \leq 0$ $\quad M > 0$ hinreichend groß

  Bemerkung: Für eine (optimale) Lösung x^* gilt:

  (a) im Falle $x_t^* > 0$ ist $z_t^* = 1$ (ansonsten wäre $x_t^* \leq Mz_t^*$ verletzt)

  (b) im Falle $x_t^* = 0$ ist $z_t^* = 0$ wg. (ansonsten wäre x^* suboptimal)

Dynamische Losgrößenplanung: Modell für das Beispiel

min $\sum_{t=1}^{5}(50 \cdot z_t + 1 \cdot y_t)$

u.d.N. $\sum_{t=1}^{5} x_t = 170$

$y_t = y_{t-1} + x_t - d_t$ für $t = 1, \dots, 5;$
mit $d1 = 40, d2 = 20, d3 = 10, d4 = 30, d5 = 50$

$x_t \leq 170 \cdot z_t$ für $t = 1, \dots, 6$

$y_0 = 0$

$y_6 = 0$

$x_t \geq 0$ für $t = 1, \dots, 6$

$y_t \geq 0$ für $t = 1, \dots, 5$

$z_t \in \{0,1\}$ für $t = 1, \dots, 6$

Dynamische Losgrößenplanung: Allgemeines Modell

min $\sum_{t=1}^{T}(F_t z_t + h_t y_t)$

u.d.N. $\sum_{t=1}^{T} x_t = \sum_{t=1}^{T} d_t$

$y_t = y_{t-1} + x_t - d_t$ für $t = 1, \dots, T-1$

$x_t \leq M z_t$ für $t = 1, \dots, T$

$y_0 = 0$

$y_T = 0$

$x_t \geq 0$ für $t = 1, \dots, T$

$y_t \geq 0$ für $t = 1, \dots, T-1$

$z_t \in \{0,1\}$ für $t = 1, \dots, T$

M: große Zahl

Dynamische Losgrößenplanung: Erweiterte Modellierung

Mehrproduktmodell: Einführung von Kapazitätsrestriktionen

Indizes:

$t = 1, 2, \ldots, T$ Perioden

$i = 1, 2, \ldots, n$ Produkte

Daten:

d_{it}: Nachfrage nach Produkt i in Periode t

h_{it}: Lagerhaltungskosten von Produkt i (pro Einheit am Ende von Per. t)

c_{it}: variable Produktionskosten einer Einheit von Produkt i in Periode t

F_{it}: Fixkosten bei Produktion in Periode t

y_{i0}, y_{iT}: Lageranfangs-, Lagerendbestand von Produkt i

a_i: Produktionskoeffizient von Produkt i (in Zeiteinheiten/Stück)

K_t: Maximale Einsatzzeit der Maschine in Periode t (in ZE)

Dynamische Losgrößenplanung: Erweitertes Modell

min $\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n}(F_{it}z_{it} + c_{it}x_{it} + h_{it}y_{it})$

u.d.N.

$\sum_{t=1}^{T} x_{it} = \sum_{t=1}^{T} d_{it}$	für $i = 1, \ldots, n$
$y_{it} = y_{i,t-1} + x_{it} - d_{it}$	für $i = 1, \ldots, n;\ t = 1, \ldots, T-1$
$x_{it} \leq M z_{it}$	für $i = 1, \ldots, n;\ t = 1, \ldots, T$
$\sum_{i=1}^{n} a_i x_{it} \leq K_t$	für $t = 1, \ldots, T$
$y_{i0} = 0$	für $i = 1, \ldots, n$
$y_{iT} = 0$	für $i = 1, \ldots, n$
$x_{it} \geq 0$	für $i = 1, \ldots, n;\ t = 1, \ldots, T$
$y_{it} \geq 0$	für $i = 1, \ldots, n;\ t = 1, \ldots, T-1$
$z_{it} \in \{0,1\}$	für $i = 1, \ldots, n;\ t = 1, \ldots, T$

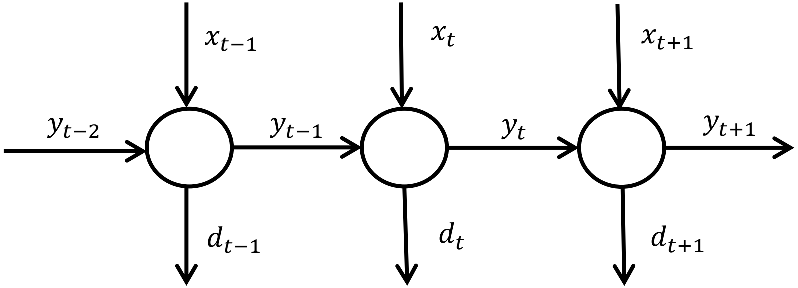
Modellierungstechniken in der Losgrößenfallstudie (I)

- Modellierung von Zustandsübergängen zwischen Perioden durch **Bilanzrestriktionen**
  → für jede Periode muss gelten:

Eingehende Produkte = Ausgehende Produkte

- Lagerung aus Vorperiode $t-1$ + Produktion in t = Lagerung in t + Verkauf in t

$$y_{t-1} + x_t = y_t + d_t$$



Modellierungstechniken in der Losgrößenfallstudie (II)

Modellierung von Fixkosten durch Binden von Produktionsvariablen an binäre Variablen mittels Big-M-Restriktionen:

$$\min F \cdot z$$
$$x \leq M \cdot z$$
$$x \geq 0\,;\, z \in \{0; 1\}$$

→ Wenn $x > 0$ so muss $z = 1$ sein → Fixkosten F fallen an

→ Wenn $x = 0$ so kann $z = 0$ sein → Optimierer wählt $z = 0$, weil so keine Fixkosten

Die Big-M-Technik wird verwendet, um Restriktionen in Abhängigkeit von Binärvariablen zu aktivieren oder zu deaktivieren

Überblick

1. Mehrzieloptimierung
2. Modellierungstechniken
    1. Personaleinsatzplanung
    2. Dynamische Losgrößenplanung
3. **Lösungssoftware zur linearen Programmierung**

Software zur Linearen Programmierung

Softwarepakete zur linearen Programmierung enthalten:

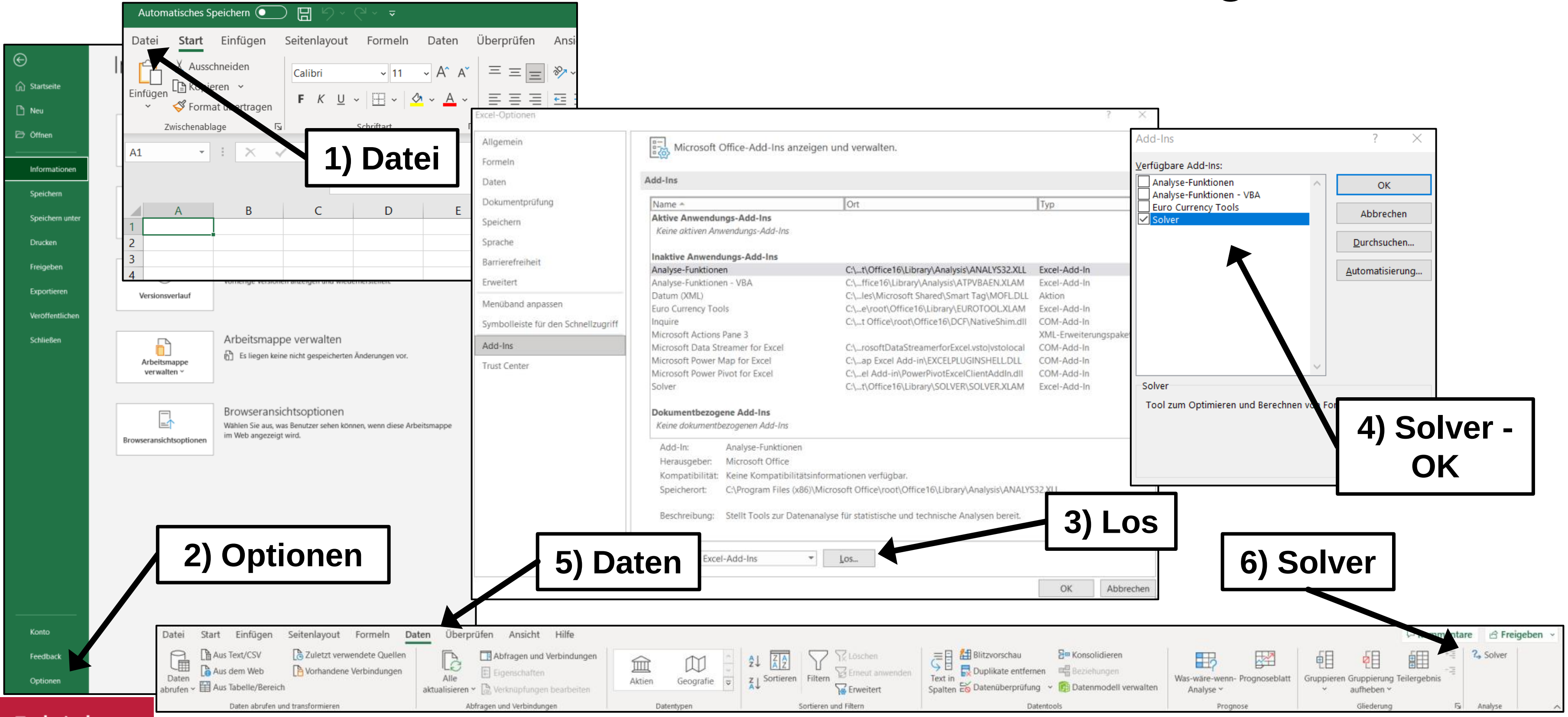
- Weiterentwicklungen des Simplex-Algorithmus
- Innere Punkte Methoden
- …

Beispiele für kommerzielle Lösungssoftware:

- LINDO / LINGO https://www.lindo.com
- CPLEX https://www.ibm.com/de-de/analytics/cplex-optimizer
- Xpress Optimization https://www.fico.com/en/products/fico-xpress-optimization
- GUROBI https://www.gurobi.com/
- AIMMS https://www.aimms.com/

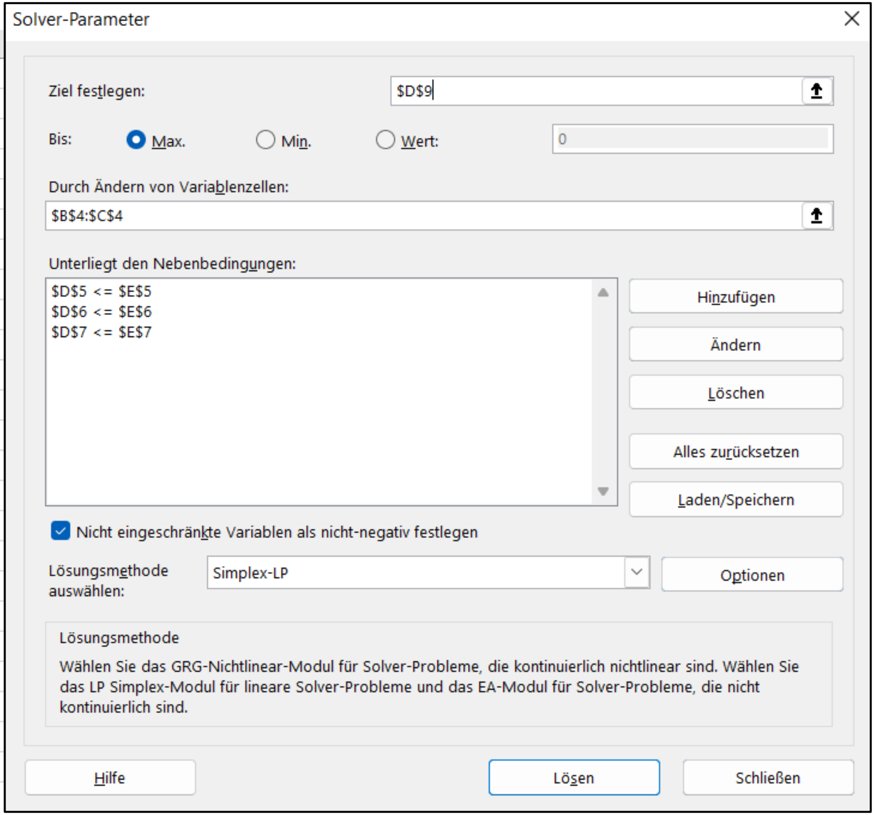
- MS-Excel Solver Add-in für die Bearbeitung kleiner bis mittlerer linearer Programme

MS Office Excel Solver Installation und Verwendung



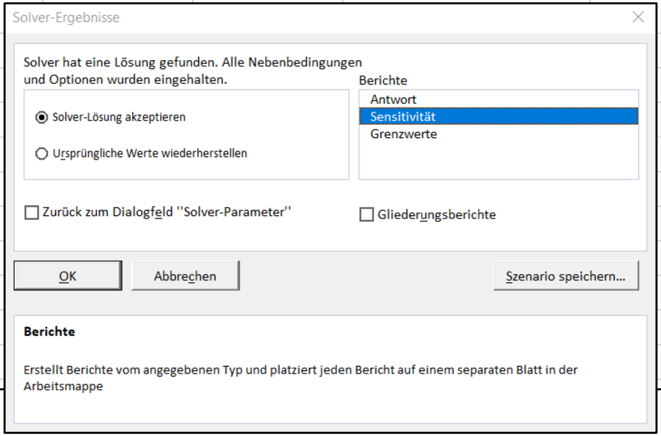
Problemformulierung

	A	B	C	D	E
1					
2		X1	X2	Linke Seite	Rechte Seite
3	ZF Koeffizienten	3	4		
4	Variablen	10	20		
5	Maschinenstunden	3	2	=B5*B4+C5*C4	1200
6	Rohstoffe	5	10	=B6*B4+C6*C4	3000
7	Arbeitskräfte	0	0,5	=C7*C4	125
8					
9	Zielfunktionswert			=B3*B4+C3*C4	



Lösung

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		X1	X1	Linke Seite	Rechte Seite		
3	ZF Koeffizienten	3	4				
4	Variablen	300	150				
5	Maschinenstunden	3	2	1200	1200		
6	Rohstoffe	5	10	3000	3000		
7	Arbeitskräfte	0	0,5	75	125		
8							
9	Zielfunktionswert			1500			
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							



Sensitivitätsanalyse

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Microsoft Excel 16.0 Sensitivitätsbericht**								
2	**Arbeitsblatt: [Mappe1.xlsx]Tabelle1**								
3	**Bericht erstellt: 10.11.2022 17:05:10**								
4									
5									
6	Variablenzellen								
7				**Endgültig**	**Reduziert**	**Ziel**	**Zulässig**	**Zulässig**	
8		**Zelle**	**Name**	**Endwert**	**Kosten**	**Koeffizient**	**Erhöhen**	**Verringern**	
9		B4	Variablen X1	300	0	3	3	1	
10		C4	Variablen X2	150	0	4	2	2	
11									
12	Nebenbedingungen								
13				**Endgültig**	**Schatten**	**Nebenbedingung**	**Zulässig**	**Zulässig**	
14		**Zelle**	**Name**	**Endwert**	**Preis**	**Rechte Seite**	**Erhöhen**	**Verringern**	
15		D5	Maschinenstunden Linke Seite	1200	0,5	1200	600	400	
16		D6	Rohstoffe Linke Seite	3000	0,3	3000	666,6666667	1000	
17		D7	Arbeitskräfte Linke Seite	75	0	125	1E+30	50	
18									
19									
20									
21									
22									