Technische Universität Braunschweig

Decision Support
Institut für Wirtschaftsinformatik

Operations Research

Vorlesung 11

Heuristiken: Eröffnungsverfahren & Verbesserungsverfahren

Wiederholung

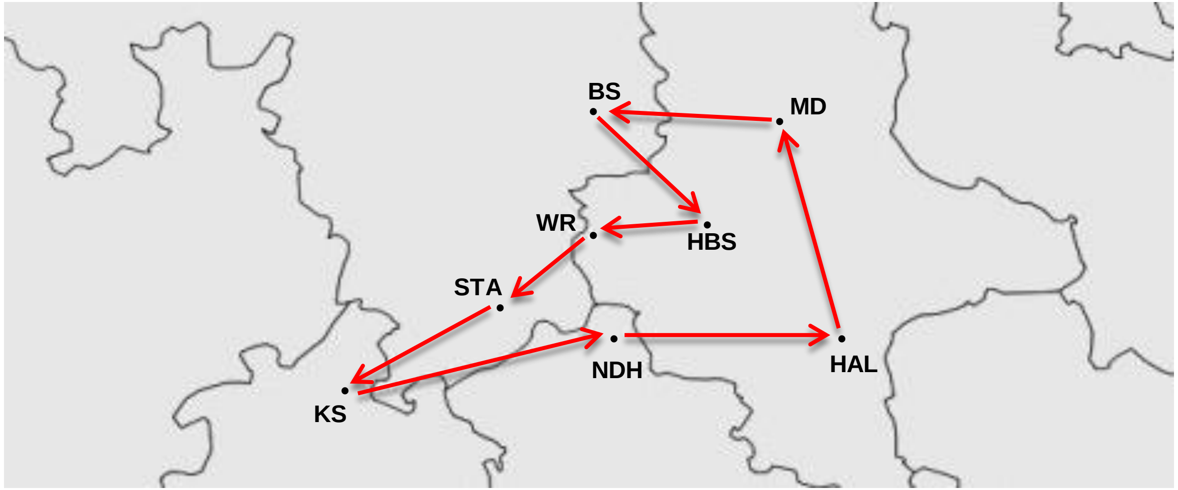
- Knotenorientierte Rundreisen: Traveling Salesman Problem (TSP)
  - Gegeben: Vollständiges Netzwerk N mit Knotenmenge V und Distanzmatrix D: $N = (V, D)$
  - Gesucht: Reihenfolge der Städte (als Tour), welche die Reiseentfernung minimiert
  - Es existiert kein Algorithmus mit polynomieller Laufzeit zur Bestimmung einer optimalen Lösung

- Branch and Bound für das TSP
  - Relaxation durch Lösung des Zuordnungsproblems
  - Separation über Vermeidung von Kurzzyklen

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Wiederholung: Mitteldeutschland TSP

Untersuchung Mitteldeutschland: $N = 8 \Rightarrow 5040$ mögliche TSP-Touren



Optimale TSP-Tour: BS – HBS – WR – STA – KS – NDH – HAL – MD – BS

Streckenlänge: 508 [km]

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Überblick

1. Grundlagen heuristischer Lösungsverfahren
2. Heuristische Lösungsverfahren für das TSP
    1. Unvollständig ausgeführte exakte Verfahren:
        - Unvollständiger B&B
    2. Eröffnungsverfahren:
        - Verfahren des bester Nachfolgers
        - Sukzessive Einbeziehung
    3. Verbesserungsverfahren:
        - 2-opt-Verfahren

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Überblick

1. **Grundlagen heuristischer Lösungsverfahren**
2. Heuristische Lösungsverfahren für das TSP
    1. Unvollständig ausgeführte exakte Verfahren:
        - Unvollständiger B&B
    2. Eröffnungsverfahren:
        - Verfahren des bester Nachfolgers
        - Sukzessive Einbeziehung
    3. Verbesserungsverfahren:
        - 2-opt-Verfahren

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Heuristische Verfahren

Zielsetzung heuristischer Verfahren:

Ermittlung guter zulässiger Lösungen mit vertretbarem Aufwand, allerdings unter Aufgabe der Optimalitätsgarantie

Klassifikation heuristischer Verfahren:

1. Unvollständig ausgeführte exakte Verfahren
2. Eröffnungsverfahren zur Bestimmung einer ersten zulässigen Lösung
3. Verbesserungsfahren zur Verbesserung einer gegebenen zulässigen Lösung
4. Kombinationen aus 1. - 3.

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Überblick

1. Grundlagen heuristischer Lösungsverfahren
2. **Heuristische Lösungsverfahren für das TSP**
    1. **Unvollständig ausgeführte exakte Verfahren:**
        - **Unvollständiger B&B**
    2. Eröffnungsverfahren:
        - Verfahren des bester Nachfolgers
        - Sukzessive Einbeziehung
    3. Verbesserungsverfahren:
        - 2-opt-Verfahren

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Unvollständig ausgeführte exakte Verfahren

Mögliche Eingrenzungsstrategien:

- Abbruch wenn eine zulässige Lösung gefunden wurde
- Abbruch nach maximal ... Rechenoperationen
- Abbruch nach maximal ... Minuten/Stunden
- Unvollständige Untersuchung des Entscheidungsbaums („split and prune“)
  - auf jeder Ebene nur Untersuchung des Teilbaums mit der größten oberen Schranke
  - nur Untersuchung von Teilbäumen, die eine Verbesserungsmöglichkeit von mindestens ...% gegenüber der gegenwärtig besten zulässigen Lösung ermöglichen

$\Rightarrow$ Gefahr der Suboptimalität wird in Kauf genommen, um auch bei großen Problemen, bei denen eine exakte Lösung zu (zeit)aufwändig erscheint, (hoffentlich gute) zulässige Lösungen ermitteln zu können

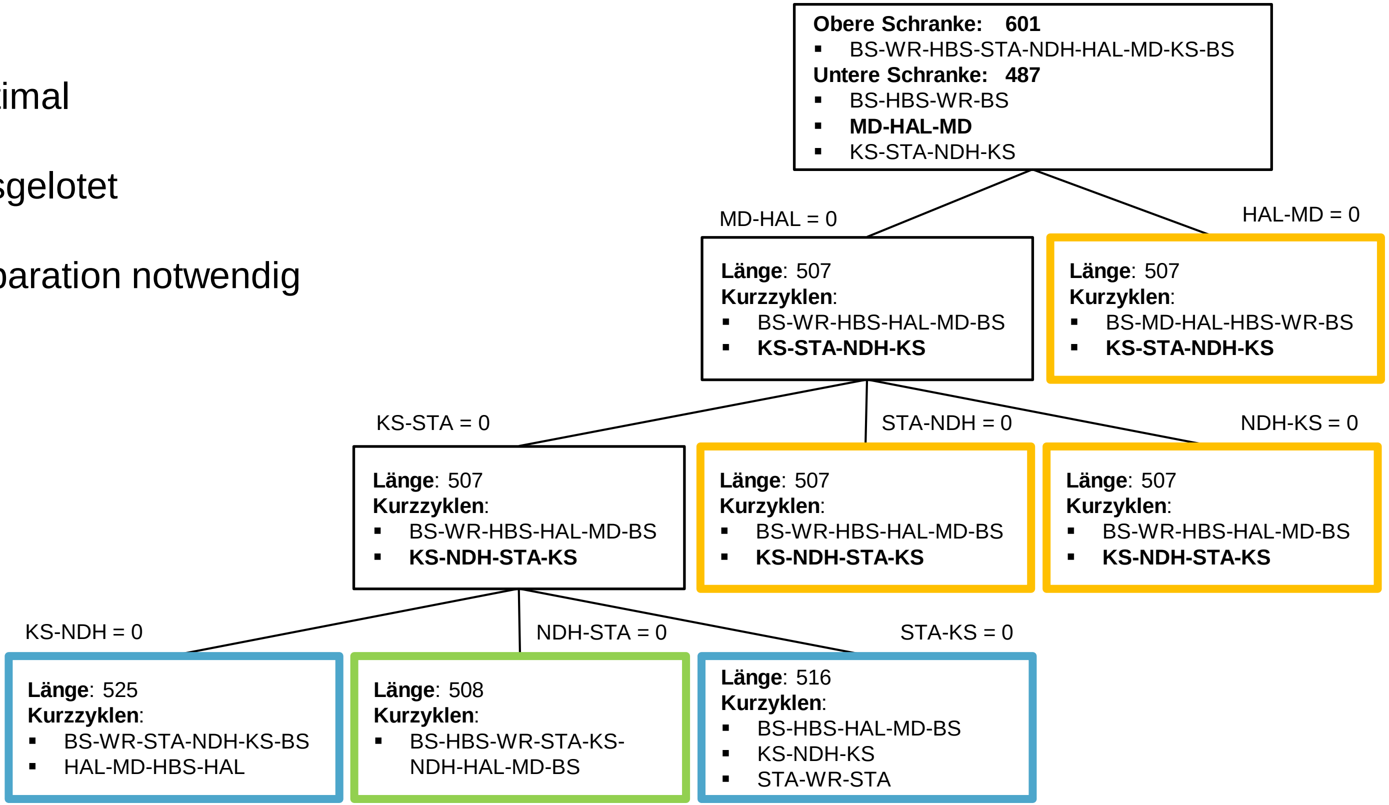
© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

B&B Verfahren am Mitteldeutschland Problem

Optimal

Ausgelotet

Separation notwendig



© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Überblick

1. Grundlagen heuristischer Lösungsverfahren
2. **Heuristische Lösungsverfahren für das TSP**
    1. Unvollständig ausgeführte exakte Verfahren:
        - Unvollständiger B&B
    2. **Eröffnungsverfahren:**
        - **Verfahren des bester Nachfolgers**
        - **Sukzessive Einbeziehung**
    3. Verbesserungsverfahren:
        - 2-opt-Verfahren

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Eröffnungsverfahren

- Myopische Verfahren („greedy“)
  - In jedem Iterationsschritt wird nach einer geringstmöglichen Verschlechterung bzw. größtmöglichen Verbesserung des Zielfunktionswertes getrachtet
  - *Beispiel für das TSP:* Verfahren des besten Nachfolgers (Nearest Neighbor)

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Verfahren des besten Nachfolgers („greedy“)

Initialisierung:

Wähle beliebigen Knoten $V_0 \in V$ als Startknoten.

Iterationen $\boldsymbol{i = 1, 2, \ldots, n-1}$:

Füge denjenigen Knoten V_i zur Rundreise hinzu, der bislang noch nicht in die Rundreise aufgenommen wurde und der vom Knoten V_{i-1} den geringsten Abstand hat. V_i wird Nachfolger von V_{i-1}.

Abbruch:

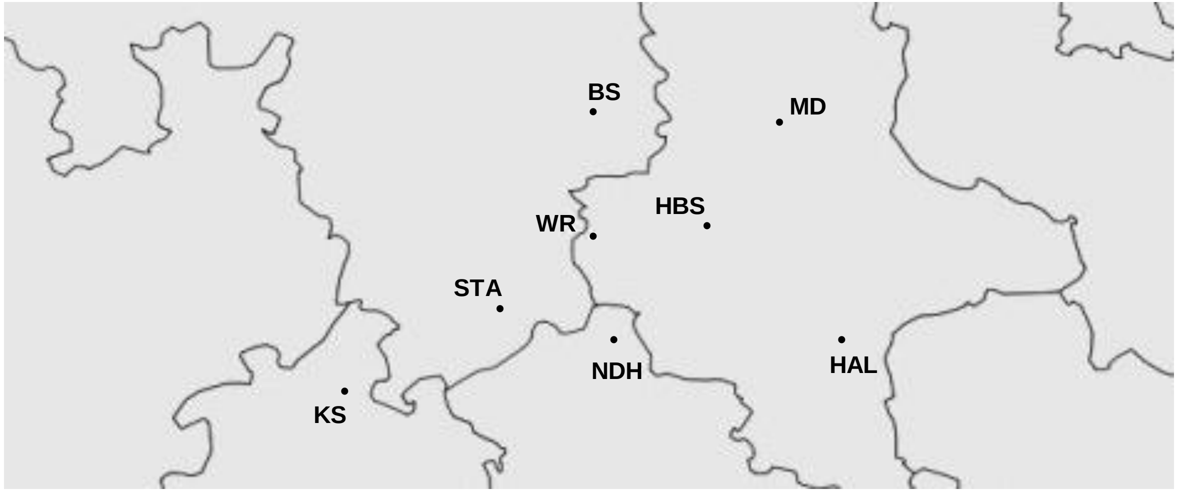
Nach Iteration $i = n - 1$ (alle Knoten in der Rundreise eingeplant)

Kehre zum Startknoten V_0 zurück (Rundreise geschlossen)

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 1: Verfahren des besten Nachfolgers

Startknoten: Braunschweig



© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 1: Initialisierung

c_{ij}	BS	HAL	HBS	KS	MD	NDH	STA	WR
BS	0	131	55	127	77	86	62	51
HAL	131	0	78	172	76	82	103	91
HBS	55	78	0	125	48	47	42	20
KS	127	172	125	0	173	92	83	106
MD	77	76	48	173	0	91	90	67
NDH	86	82	47	92	91	0	30	37
STA	62	103	42	83	90	30	0	23
WR	51	91	20	106	67	37	23	0

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

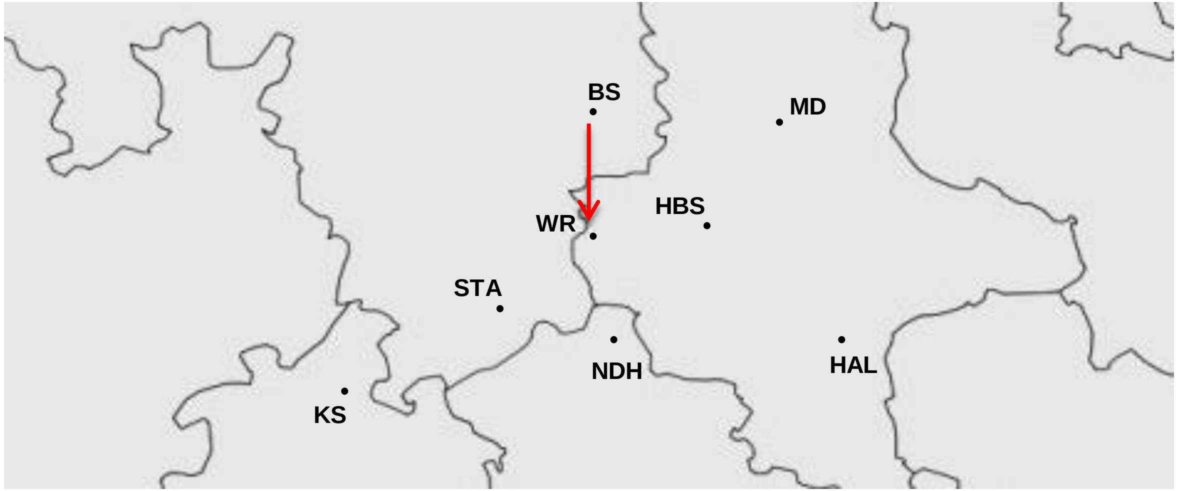
Beispiel 1: Iteration 1

c_{ij}	BS	HAL	HBS	KS	MD	NDH	STA	WR
BS	0	131	55	127	77	86	62	51
HAL	131	0	78	172	76	82	103	91
HBS	55	78	0	125	48	47	42	20
KS	127	172	125	0	173	92	83	106
MD	77	76	48	173	0	91	90	67
NDH	86	82	47	92	91	0	30	37
STA	62	103	42	83	90	30	0	23
WR	51	91	20	106	67	37	23	0

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 1: Braunschweig → Wernigerode

Startknoten: Braunschweig



Weg: BS – WR

Länge: 51 [km]

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

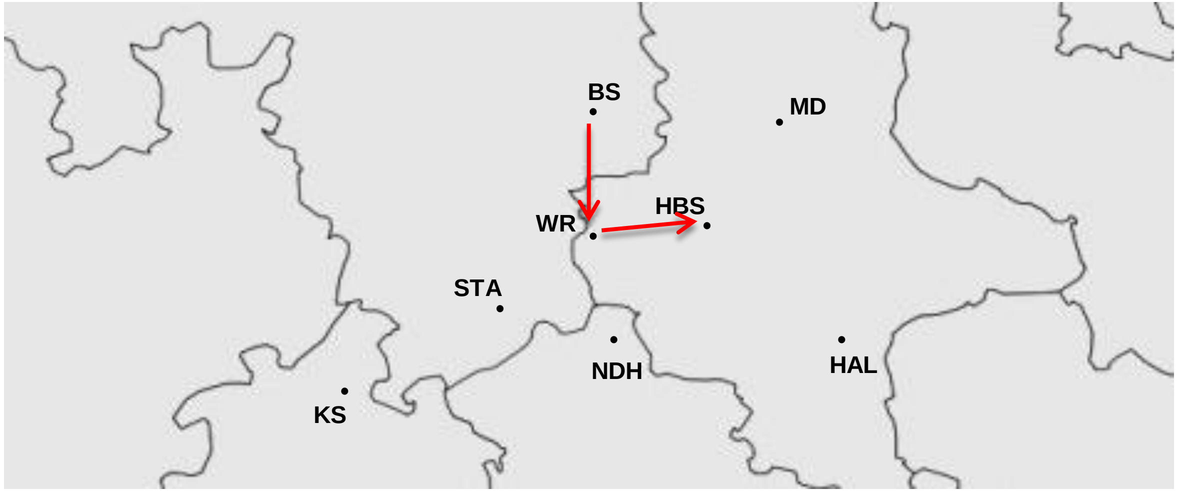
Beispiel 1: Iteration 2

c_{ij}	BS	HAL	HBS	KS	MD	NDH	STA	WR
BS	0	131	55	127	77	86	62	51
HAL	131	0	78	172	76	82	103	91
HBS	55	78	0	125	48	47	42	20
KS	127	172	125	0	173	92	83	106
MD	77	76	48	173	0	91	90	67
NDH	86	82	47	92	91	0	30	37
STA	62	103	42	83	90	30	0	23
WR	51	91	20	106	67	37	23	0

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 1: Wernigerode → Halberstadt

Startknoten: Braunschweig



Weg: BS – WR – HBS

Länge: 51 + 20 = 71 [km]

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

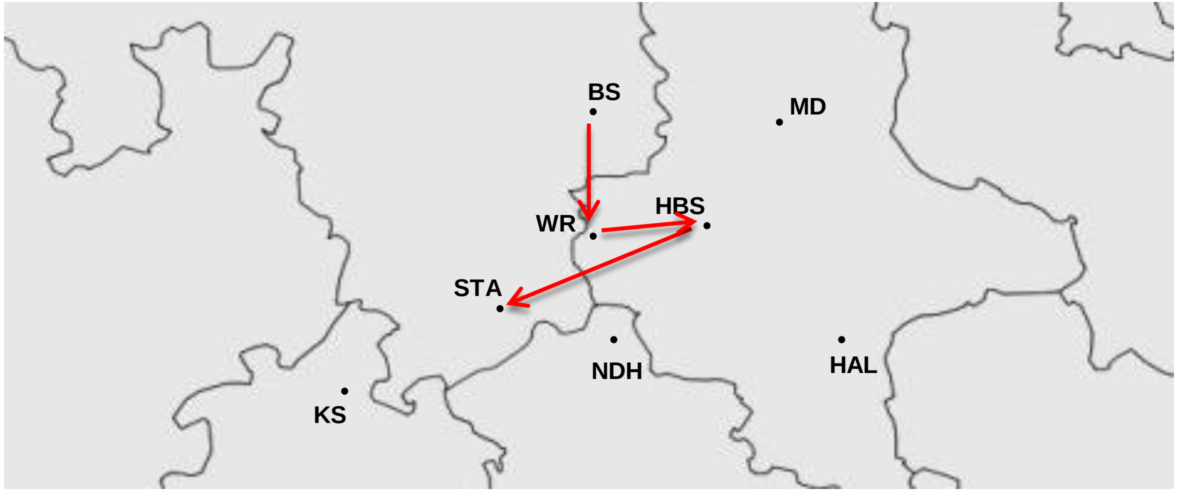
Beispiel 1: Iteration 3

c_{ij}	BS	HAL	HBS	KS	MD	NDH	STA	WR
BS	0	131	55	127	77	86	62	51
HAL	131	0	78	172	76	82	103	91
HBS	55	78	0	125	48	47	42	20
KS	127	172	125	0	173	92	83	106
MD	77	76	48	173	0	91	90	67
NDH	86	82	47	92	91	0	30	37
STA	62	103	42	83	90	30	0	23
WR	51	91	20	106	67	37	23	0

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 1: Halberstadt → St. Andreasberg

Startknoten: Braunschweig



Weg: BS – WR – HBS – STA

Länge: 51 + 20 + 42 = 113 [km]

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

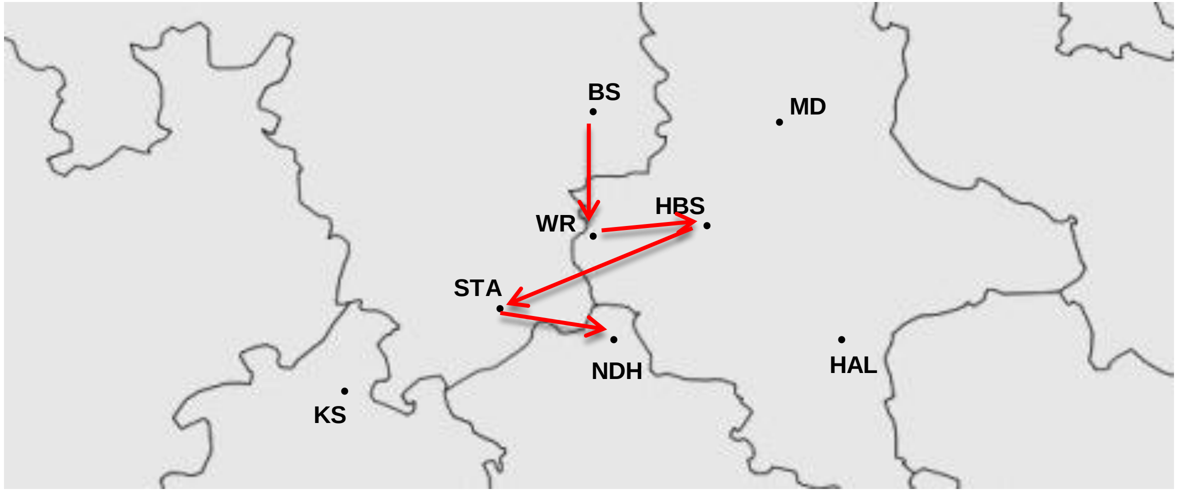
Beispiel 1: Iteration 4

c_{ij}	BS	HAL	HBS	KS	MD	NDH	STA	WR
BS	0	131	55	127	77	86	62	51
HAL	131	0	78	172	76	82	103	91
HBS	55	78	0	125	48	47	42	20
KS	127	172	125	0	173	92	83	106
MD	77	76	48	173	0	91	90	67
NDH	86	82	47	92	91	0	30	37
STA	62	103	42	83	90	30	0	23
WR	51	91	20	106	67	37	23	0

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 1: St. Andreasberg → Nordhausen

Startknoten: Braunschweig



Weg: BS – WR – HBS – STA – NDH

Länge: 51 + 20 + 42 + 30 = 143 [km]

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

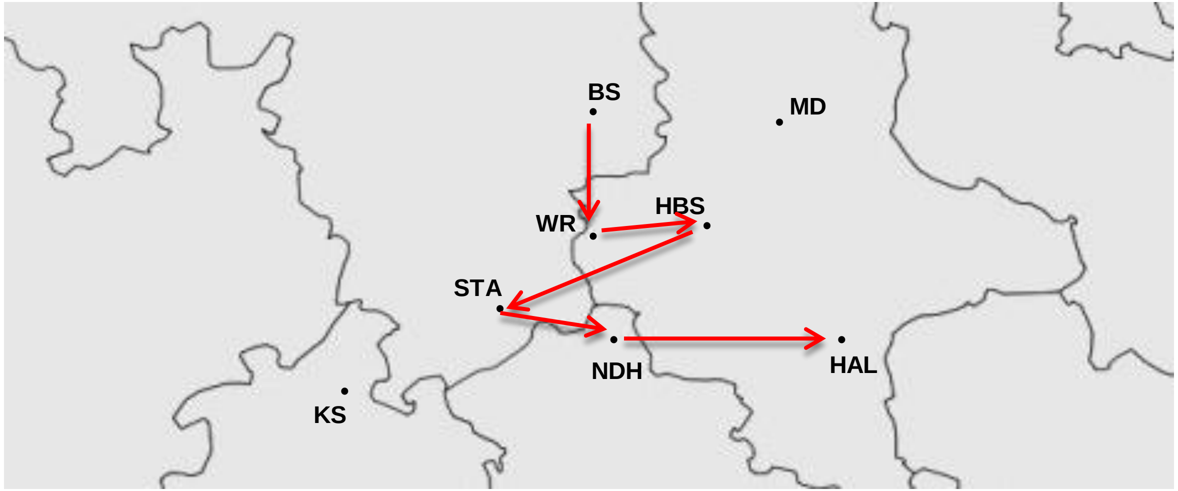
Beispiel 1: Iteration 5

c_{ij}	BS	HAL	HBS	KS	MD	NDH	STA	WR
BS	0	131	55	127	77	86	62	51
HAL	131	0	78	172	76	82	103	91
HBS	55	78	0	125	48	47	42	20
KS	127	172	125	0	173	92	83	106
MD	77	76	48	173	0	91	90	67
NDH	86	82	47	92	91	0	30	37
STA	62	103	42	83	90	30	0	23
WR	51	91	20	106	67	37	23	0

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 1: Nordhausen → Halle

Startknoten: Braunschweig



Weg: BS – WR – HBS – STA – NDH – HAL

Länge: 51 + 20 + 42 + 30 = 143 [km]

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

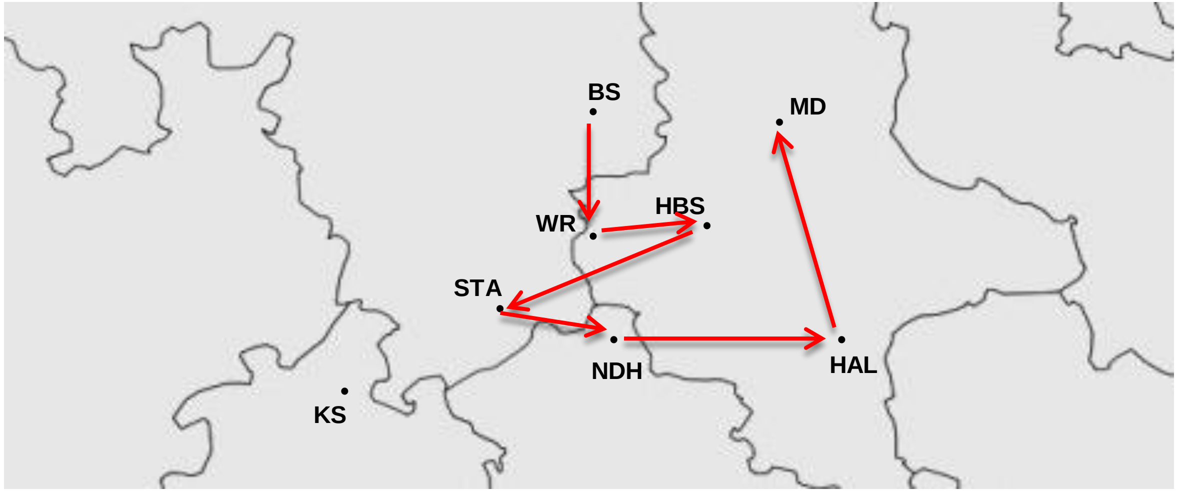
Beispiel 1: Iteration 6

c_{ij}	BS	HAL	HBS	KS	MD	NDH	STA	WR
BS	0	131	55	127	77	86	62	51
HAL	131	0	78	172	76	82	103	91
HBS	55	78	0	125	48	47	42	20
KS	127	172	125	0	173	92	83	106
MD	77	76	48	173	0	91	90	67
NDH	86	82	47	92	91	0	30	37
STA	62	103	42	83	90	30	0	23
WR	51	91	20	106	67	37	23	0

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 1: Halle → Magdeburg

Startknoten: Braunschweig



Weg: BS – WR – HBS – STA – NDH – MD

Länge: 51 + 20 + 42 + 30 + 82 + 76 = 301 [km]

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

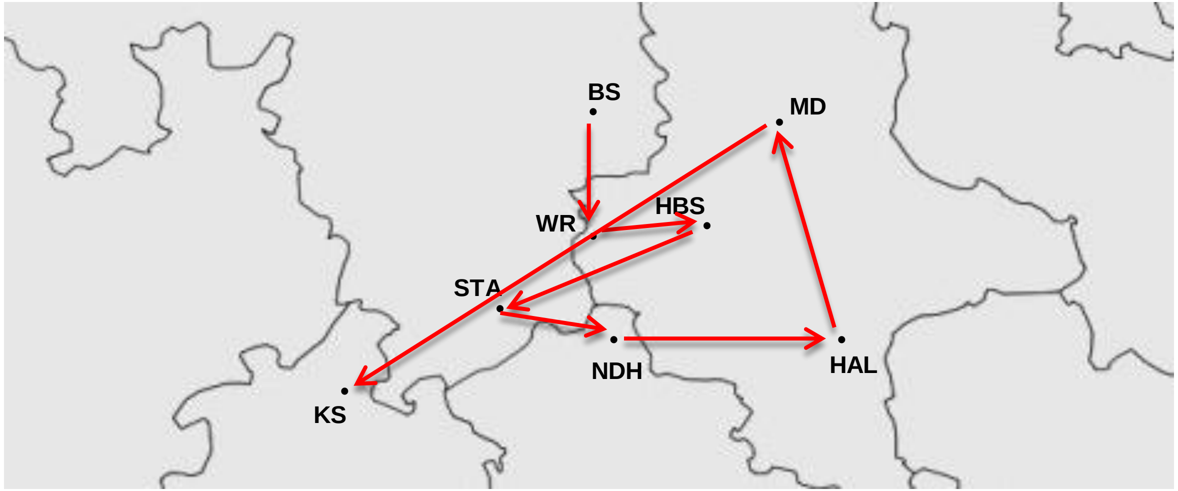
Beispiel 1: Iteration 7

c_{ij}	BS	HAL	HBS	KS	MD	NDH	STA	WR
BS	0	131	55	127	77	86	62	51
HAL	131	0	78	172	76	82	103	91
HBS	55	78	0	125	48	47	42	20
KS	127	172	125	0	173	92	83	106
MD	77	76	48	173	0	91	90	67
NDH	86	82	47	92	91	0	30	37
STA	62	103	42	83	90	30	0	23
WR	51	91	20	106	67	37	23	0

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 1: Magdeburg → Kassel

Startknoten: Braunschweig



Weg: BS – WR – HBS – STA – NDH – MD – KS

Länge: 51 + 20 + 42 + 30 + 82 + 76 + 173 = 474 [km]

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

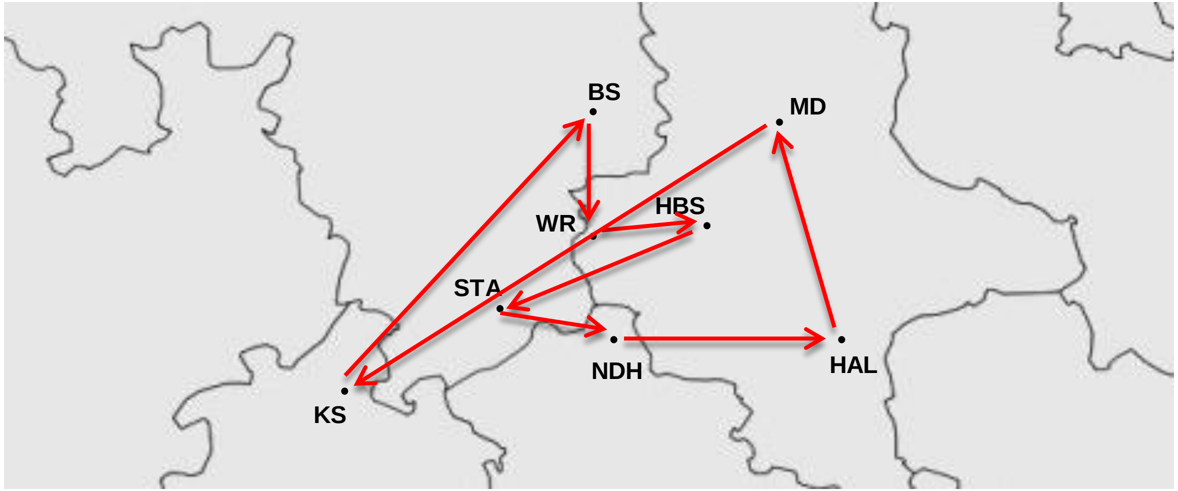
Beispiel 1: Abbruch

c_{ij}	BS	HAL	HBS	KS	MD	NDH	STA	WR
BS	0	131	55	127	77	86	62	51
HAL	131	0	78	172	76	82	103	91
HBS	55	78	0	125	48	47	42	20
KS	127	172	125	0	173	92	83	106
MD	77	76	48	173	0	91	90	67
NDH	86	82	47	92	91	0	30	37
STA	62	103	42	83	90	30	0	23
WR	51	91	20	106	67	37	23	0

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 1: Kassel → Braunschweig

Startknoten: Braunschweig



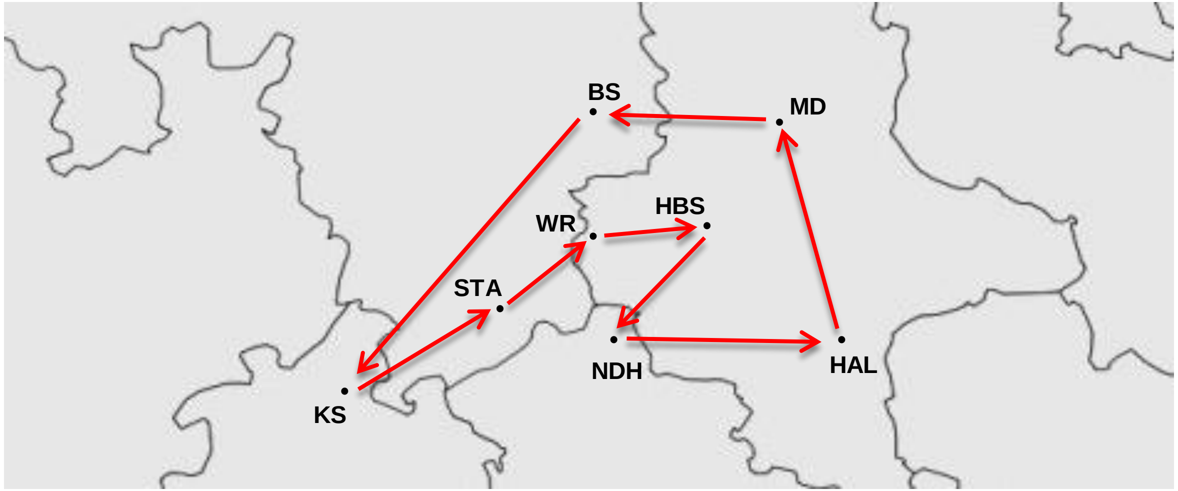
Rundreise: BS – WR – HBS – STA – NDH – MD – KS – BS

Länge: 51 + 20 + 42 + 30 + 82 + 76 + 173 + 127 = 601 [km]

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 2: Verfahren des besten Nachfolgers

Startknoten: Kassel



Rundreise: KS – STA – WR – HBS – NDH – HAL – MD – BS – KS

Länge: 535 [km]

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Eröffnungsverfahren

- Myopische Verfahren („greedy“)
  - In jedem Iterationsschritt wird nach einer geringstmöglichen Verschlechterung bzw. größtmöglichen Verbesserung des Zielfunktionswertes getrachtet
  - *Beispiel für das TSP:* Verfahren des besten Nachfolgers (Nearest Neighbor)

- Vorausschauende Verfahren
  - In jedem Iterationsschritt wird abgeschätzt, welche Auswirkungen sich auf noch folgende Iterationsschritte ergeben
  - *Beispiel für das TSP:* Sukzessive Einbeziehung

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Verfahren der sukzessiven Einbeziehung

Initialisierung:

Wähle Kriterium für die sukzessive Einbeziehung

Iteration 1:

Bestimme zwei Knoten $V_0, V_1 \in V$ als Startknoten und bilde die Subtour $r = [V_0 - V_1 - V_0]$

Iterationen $\boldsymbol{i = 2, 3, \dots, n-1}$:

Bestimme mit dem Kriterium den nächsten Knoten V_i, der noch nicht in der Subtour enthalten ist.

Füge den Knoten V_i an der Stelle mit der geringsten Verschlechterung in die Subtour r ein.

Abbruch:

Nach Iteration $i = n - 1$ (alle Knoten in der Rundreise eingeplant).

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Kriterium für die Auswahl der Folgeknoten V_i

Iterationen $\boldsymbol{i = 2, 3, \ldots, n-1}$:

Wahl des nächsten Knoten V_i, der noch nicht in der Rundreise enthalten ist.

- **Alphanumerisches Einfügen:** Wahl V_i, der nach alphanumerischer Reihenfolge als nächstes kommt
- **Günstigstes Einfügen (cheapest insertion):** Wahl V_i, sodass die Subtour um den geringsten Betrag anwächst
- **Nächstgelegenes Einfügen (nearest insertion):** Wahl V_i, der zu den Knoten der bestehenden Subtour die geringste Distanz aufweist
- **Entferntestes Einfügen (farthest insertion):** Wahl V_i, der am weitesten von den Knoten der bestehenden Subtour entfernt ist
- **Zufälliges Einfügen (random insertion)** – Wahl V_i, der durch eine Zufallswahl bestimmt worden ist

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Kriterium für Erstellung der Starttour $[V_0, V_1, V_2]$

Entweder

- $V_0, V_1 \in V$ als Startknoten vorgegeben

oder

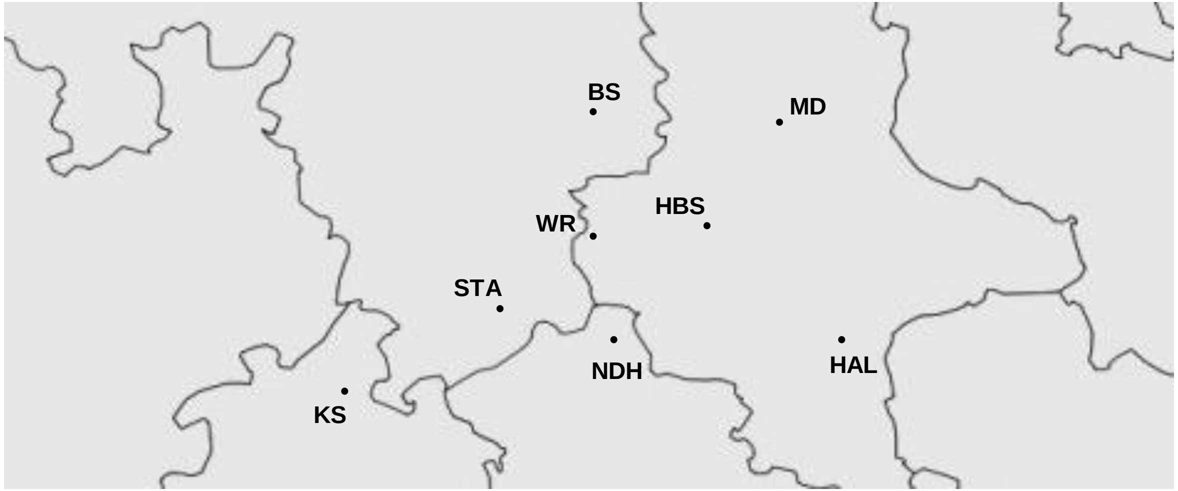
- **Alphanumerisches Einfügen:** Ersten zwei Knoten nach alphanumerischer Reihenfolge
- **Günstigstes Einfügen:** Die zwei Knoten mit minimaler Distanz zueinander
- **Nächstgelegenes Einfügen:** Die zwei Knoten mit minimaler Distanz zueinander
- **Entferntestes Einfügen:** Die zwei Knoten mit maximaler Distanz zueinander
- **Zufälliges Einfügen:** Wahl V_i, der durch eine Zufallswahl bestimmt worden ist

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 3: Verfahren der sukzessiven Einbeziehung

Kriterium: alphanumerisches Einfügen

Startknoten: Braunschweig und Wernigerode



© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 3: Initialisierung (Iteration 1)

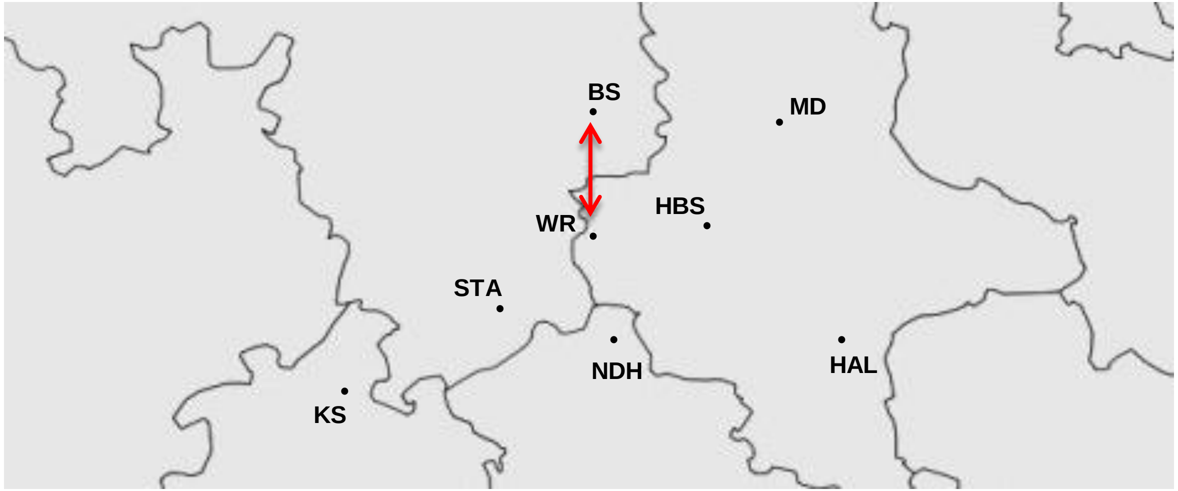
c_{ij}	BS	HAL	HBS	KS	MD	NDH	STA	WR
BS	0	131	55	127	77	86	62	51
HAL	131	0	78	172	76	82	103	91
HBS	55	78	0	125	48	47	42	20
KS	127	172	125	0	173	92	83	106
MD	77	76	48	173	0	91	90	67
NDH	86	82	47	92	91	0	30	37
STA	62	103	42	83	90	30	0	23
WR	51	91	20	106	67	37	23	0

Initialisierung:
Startknoten Braunschweig und Wernigerode
r = [BS – WR – BS]
L = 51 + 51 = 102 [km]

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 3: Nach Initialisierung (Iteration 1)

Rundreise: BS – WR – BS



Länge: 274 [km]

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 3: Iteration 2 – Halle

c_{ij}	BS	WR	HAL
BS	-	51	131
WR	51	-	91
HAL	131	91	-

Bisherige Rundreise:

BS – WR – BS

Länge: 102 [km]

2 Möglichkeiten:

- BS – WR – HAL– BS — Länge: 51 + 91 + 131 = 273 [km]
- BS – HAL – WR – BS — Länge: 131 + 91 + 51 = 273 [km]

Länge identisch aufgrund der Symmetrie der Entfernungsmatrix

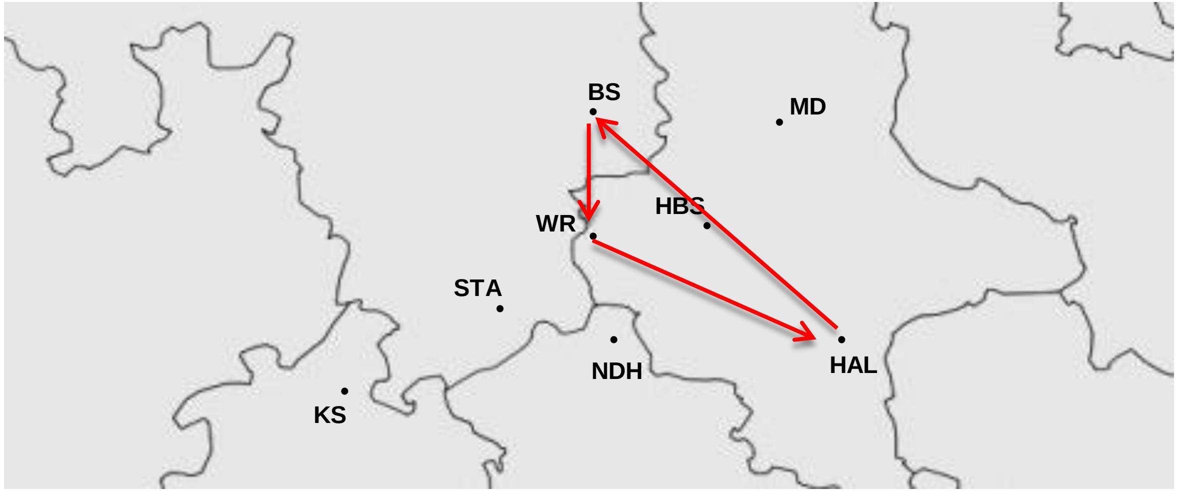
$\Rightarrow$ Auswahl beliebig

Gewählt: BS – WR – HAL – BS

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 3: Nach Iteration 2

Rundreise: BS – WR – HAL – BS



Länge: 274 [km]

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 3: Iteration 3 – Halberstadt

c_{ij}	BS	WR	HAL	HBS
BS	-	51	131	55
WR	51	-	91	20
HAL	131	91	-	78
HBS	55	20	78	-

Bisherige Rundreise:

BS – WR – HAL – BS

Länge: 273 [km]

3 Möglichkeiten:

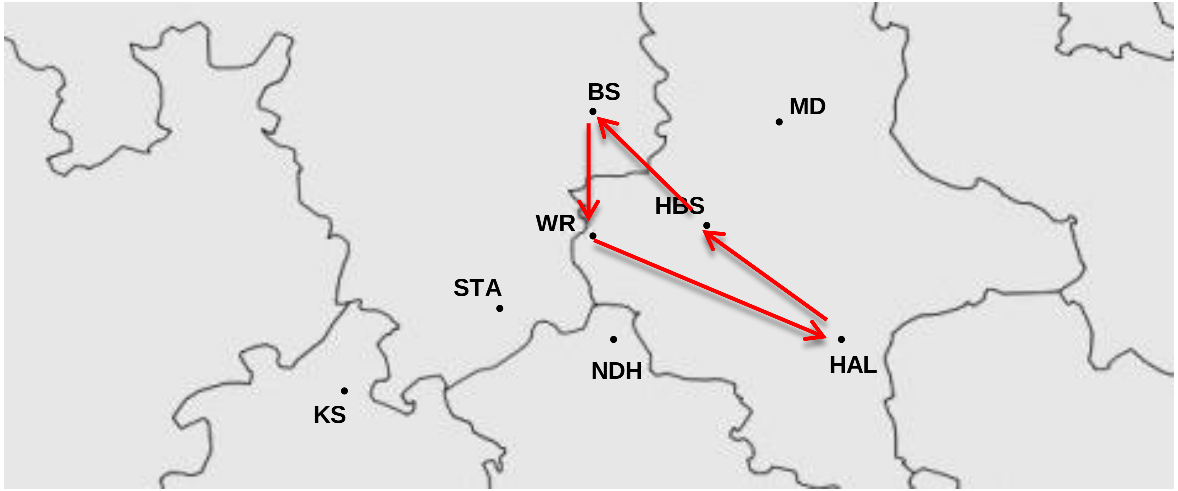
- BS – WR – HAL – HBS – BS   Länge: 51 + 91 + 78 + 55 = 275 [km]
- BS – WR – HBS – HAL – BS   Länge: 51 + 20 + 78 + 131 = 280 [km]
- BS – HBS – WR – HAL – BS   Länge: 55 + 20 + 91 + 131 = 297 [km]

Gewählt: BS – WR – HAL – HBS – BS

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 3: Nach Iteration 3

Rundreise: BS – WR – HAL – HBS – BS



Länge: 275 [km]

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 3: Iteration 4 – Kassel

c_{ij}	BS	WR	HAL	HBS	KS
BS	-	51	131	55	127
WR	51	-	91	20	106
HAL	131	91	-	78	172
HBS	55	20	78	-	125
KS	127	106	172	125	-

Bisherige Rundreise:

BS – WR – HAL – HBS – BS

Länge: 275 [km]

4 Möglichkeiten:

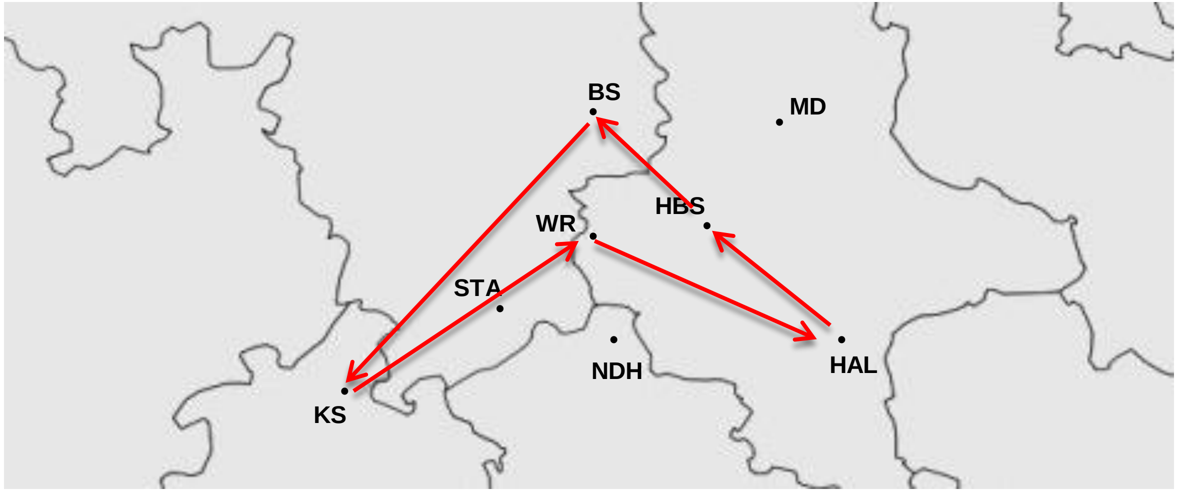
- BS – WR – HAL – HBS – KS – BS   Länge: 51 + 91 + 78+ 125 + 127 = 472 [km]
- BS – WR – HAL – KS – HBS – BS   Länge: 51 + 91 + 172+ 125 + 55 = 494 [km]
- BS – WR – KS – HAL – HBS – BS   Länge: 51 + 106 + 172+ 78 + 55 = 462 [km]
- BS – KS – WR – HAL – HBS – BS   Länge: 127 + 106 + 91+ 78 + 55 = 457 [km]

Gewählt: BS – KS – WR – HAL – HBS – BS

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 3: Nach Iteration 4

Rundreise: BS – KS – WR – HAL – HBS – BS

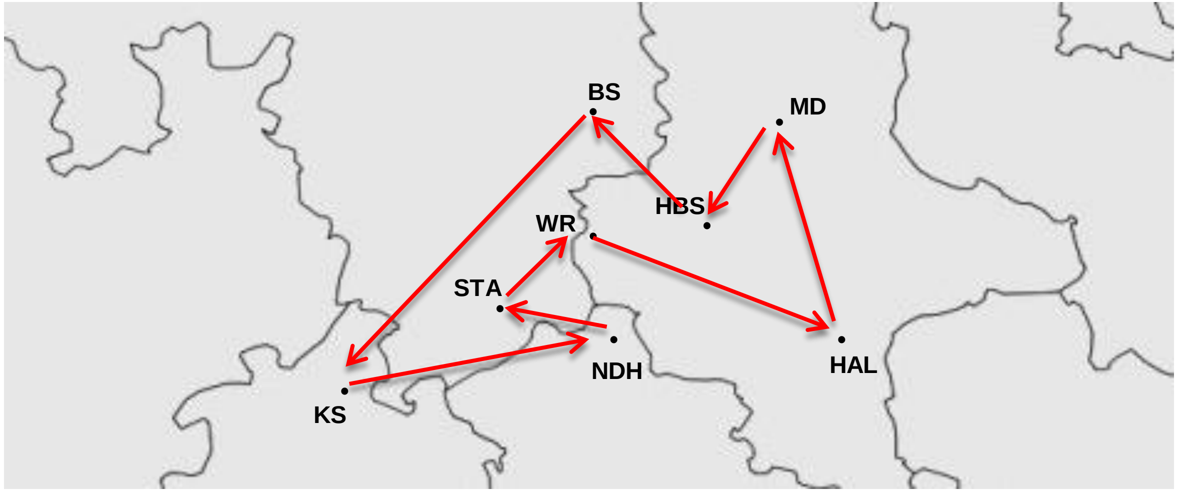


Länge: 457 [km]

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 3: Lösung nach Iteration 7

Rundreise: BS – KS – NDH – STA – WR – HAL – MD – HBS – BS



Länge: 542 [km]

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Verfahren der sukzessiven Einbeziehung

Kriterium: Entferntestes Einfügen

Initialisierung (Iteration 1):

Wähle die beiden Knoten $V_0, V_1 \in V$, deren Abstand maximal ist, und bilde die Subtour $r = [V_0 - V_1 - V_0]$.

Iterationen $\boldsymbol{i = 2, 3, \dots, n-1}$:

Wähle denjenigen Knoten V_i, der noch nicht in der Subtour r enthalten ist und dessen kleinste Entfernung zu einem der Knoten von r am größten ist.

Füge den Knoten V_i so in die Subtour r ein, dass sich die Länge von r möglichst wenig erhöht.

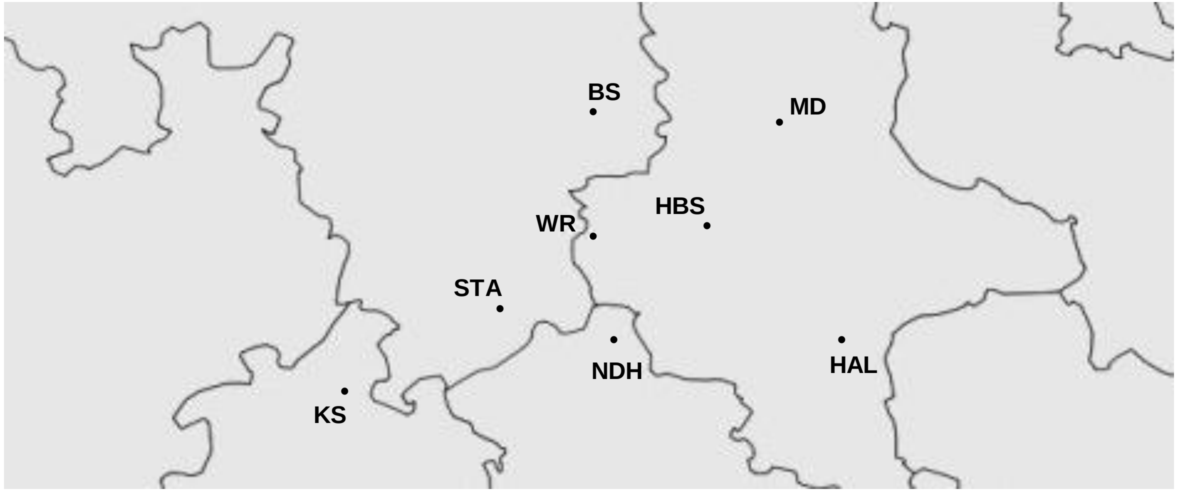
Abbruch:

Nach Iteration $i = n - 1$ (alle Knoten in der Rundreise eingeplant)

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 4: Verfahren der sukzessiven Einbeziehung

Kriterium: entferntestes Einfügen



© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 4: Initialisierung

c_{ij}	BS	HAL	HBS	KS	MD	NDH	STA	WR
BS	0	131	55	127	77	86	62	51
HAL	131	0	78	172	76	82	103	91
HBS	55	78	0	125	48	47	42	20
KS	127	172	125	0	173	92	83	106
MD	77	76	48	173	0	91	90	67
NDH	86	82	47	92	91	0	30	37
STA	62	103	42	83	90	30	0	23
WR	51	91	20	106	67	37	23	0

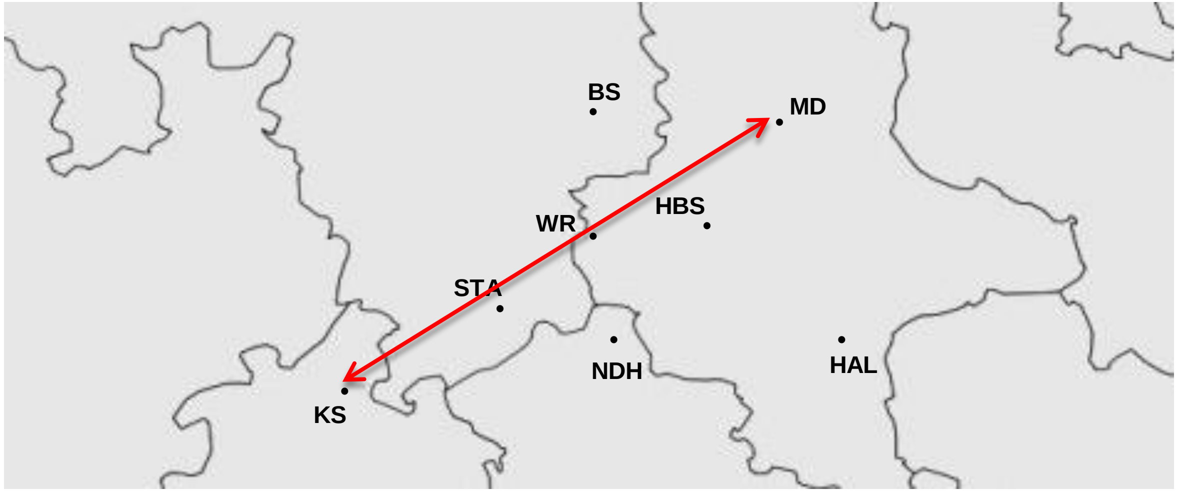
Initialisierung:
Kassel und Magdeburg
r = [KS – MD – KS]
L = 346 [km]

Initialisierung mit maximalen Abstand

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 4: Nach Initialisierung

Rundreise: KS – MD – KS



Länge: 350 [km]

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 2: Iteration 1

c_{ij}	BS	HAL	HBS	KS	MD	NDH	STA	WR
BS	0	131	55	127	77	86	62	51
HAL	131	0	78	172	76	82	103	91
HBS	55	78	0	125	48	47	42	20
KS	127	172	125	0	173	92	83	106
MD	77	76	48	173	0	91	90	67
NDH	86	82	47	92	91	0	30	37
STA	62	103	42	83	90	30	0	23
WR	51	91	20	106	67	37	23	0

Bisher:
r = [KS – MD – KS]
L = 346 [km]

Minimale Abstände
Maximum der minimalen Abstände

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 2: Iteration 2 – NDH (Nordhausen)

2 Möglichkeiten:

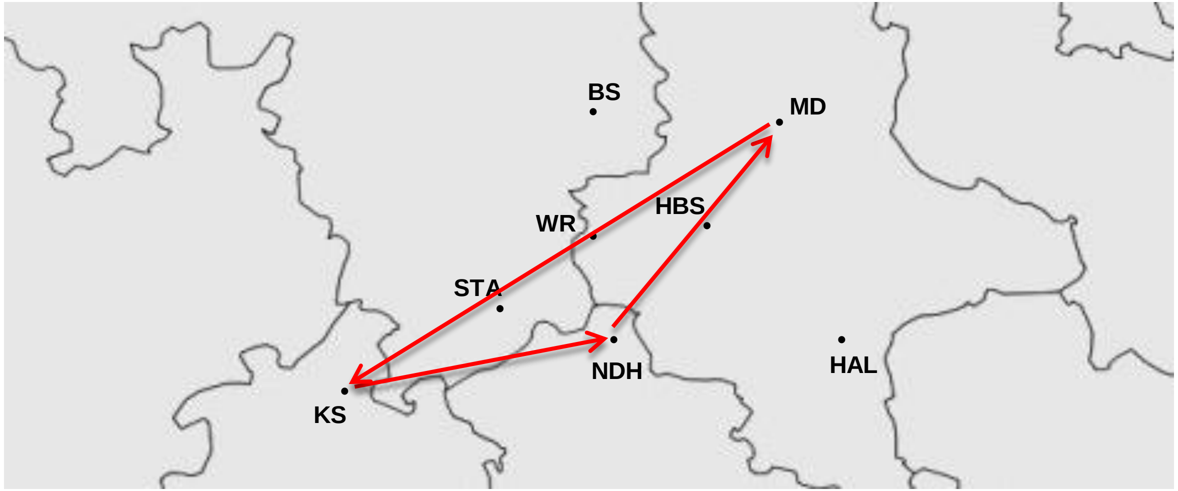
- KS – NDH – MD – KS   Länge: 92 + 91 + 173 = 356 [km]
- KS – MD – NDH – KS   Länge: 173 + 91 + 92 = 356 [km]

Gewählt: KS – NDH – MD – KS

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 2: Nach Iteration 2

Rundreise: KS – NDH – MD – KS



Länge: 356 [km]

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 2: Iteration 3

c_{ij}	BS	HAL	HBS	KS	MD	NDH	STA	WR
BS	0	131	55	127	77	86	62	51
HAL	131	0	78	172	76	82	103	91
HBS	55	78	0	125	48	47	42	20
KS	127	172	125	0	173	92	83	106
MD	77	76	48	173	0	91	90	67
NDH	86	82	47	92	91	0	30	37
STA	62	103	42	83	90	30	0	23
WR	51	91	20	106	67	37	23	0

Bisher:
r = [KS – NDH – MD – KS]
L = 356 [km]

Minimale Abstände Maximum der minimalen Abstände

Technische Universität Braunschweig
© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld
Decision Support
Institut für Wirtschaftsinformatik

Beispiel 2: Iteration 3 – BS (Braunschweig)

3 Möglichkeiten:

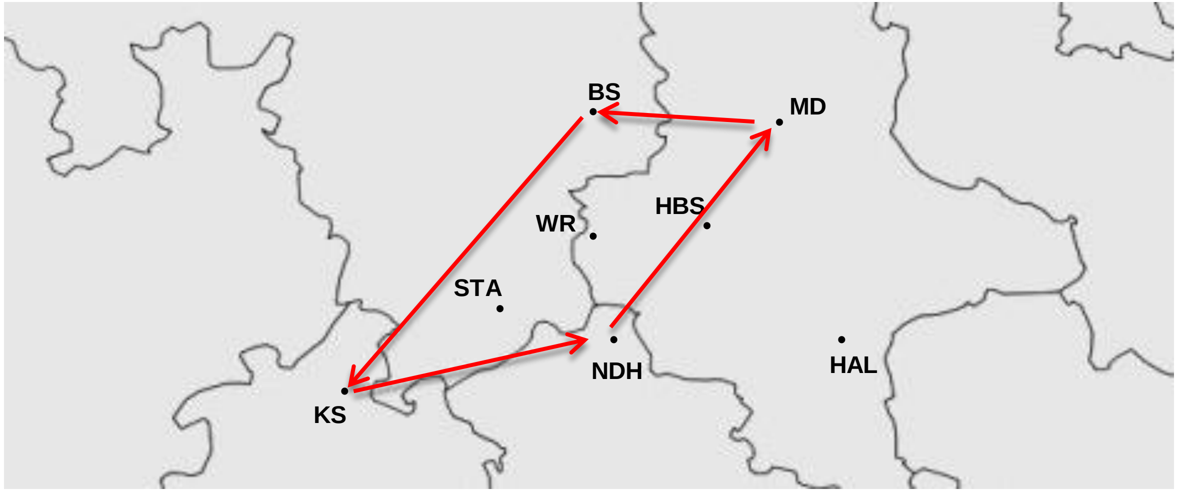
- KS – BS – NDH – MD – KS Länge: 127 + 86 + 91 + 173 = 477 [km]
- KS – NDH – BS – MD – KS Länge: 92 + 86 + 77 + 173 = 428 [km]
- KS – NDH – MD – BS – KS Länge: 92 + 91 + 77 + 127 = 387 [km]

Gewählt: KS – NDH – MD – BS – KS

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 2: Nach Iteration 3

Rundreise: KS – NDH – MD – BS – KS



Länge: 387 [km]

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 2: Iteration 4

c_{ij}	BS	HAL	HBS	KS	MD	NDH	STA	WR
BS	0	131	55	127	77	86	62	51
HAL	131	0	78	172	76	82	103	91
HBS	55	78	0	125	48	47	42	20
KS	127	172	125	0	173	92	83	106
MD	77	76	48	173	0	91	90	67
NDH	86	82	47	92	91	0	30	37
STA	62	103	42	83	90	30	0	23
WR	51	91	20	106	67	37	23	0

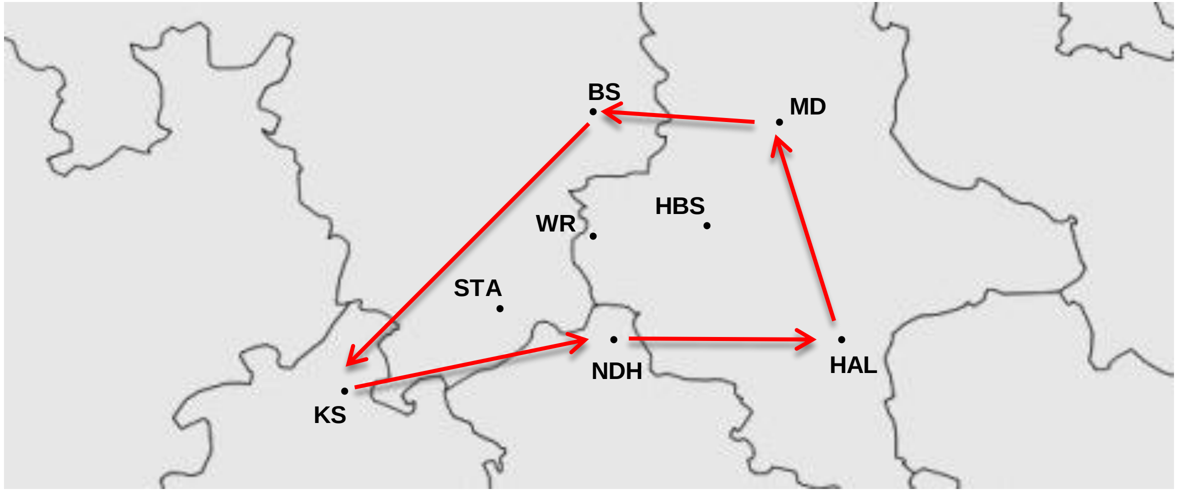
Bisher:
r = [KS– NDH – MD – BS – KS]
L = 387 [km]

Minimale Abstände Maximum der minimalen Abstände

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 2: Nach Iteration 4

Rundreise: KS – NDH – HAL – MD – BS – KS



Länge: 454 [km]

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 2: Iteration 5

c_{ij}	BS	HAL	HBS	KS	MD	NDH	STA	WR
BS	0	131	55	127	77	86	62	51
HAL	131	0	78	172	76	82	103	91
HBS	55	78	0	125	48	47	42	20
KS	127	172	125	0	173	92	83	106
MD	77	76	48	173	0	91	90	67
NDH	86	82	47	92	91	0	30	37
STA	62	103	42	83	90	30	0	23
WR	51	91	20	106	67	37	23	0

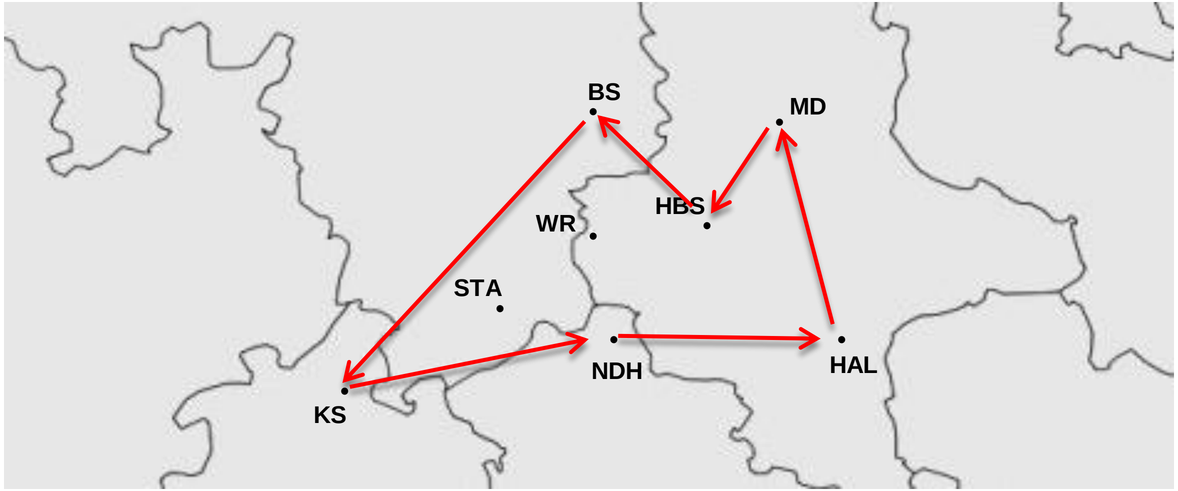
Bisher:
r = [KS – NDH – HAL – MD – BS – KS]
L = 454 [km]

Minimale Abstände   Maximum der minimalen Abstände

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 2: Nach Iteration 5

Rundreise: KS – NDH – HAL – MD – HBS – BS – KS



Länge: 480 [km]

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 2: Iteration 6

c_{ij}	BS	HAL	HBS	KS	MD	NDH	STA	WR
BS	0	131	55	127	77	86	62	51
HAL	131	0	78	172	76	82	103	91
HBS	55	78	0	125	48	47	42	20
KS	127	172	125	0	173	92	83	106
MD	77	76	48	173	0	91	90	67
NDH	86	82	47	92	91	0	30	37
STA	62	103	42	83	90	30	0	23
WR	51	91	20	106	67	37	23	0

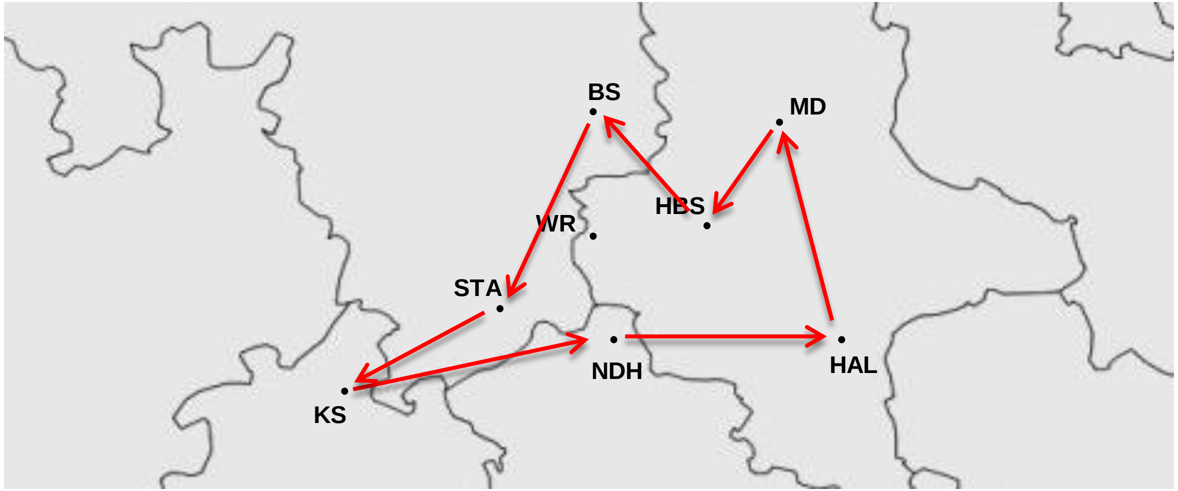
Bisher:
r = [KS – NDH – HAL – MD – HBS – BS – KS]
L = 480 [km]

Minimale Abstände   Maximum der minimalen Abstände

Technische Universität Braunschweig
© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld
Decision Support
Institut für Wirtschaftsinformatik

Beispiel 2: Nach Iteration 6

Rundreise: KS – NDH – HAL – MD – HBS – BS – STA – KS



Länge: 498 [km]

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 2: Iteration 7

c_{ij}	BS	HAL	HBS	KS	MD	NDH	STA	WR
BS	0	131	55	127	77	86	62	51
HAL	131	0	78	172	76	82	103	91
HBS	55	78	0	125	48	47	42	20
KS	127	172	125	0	173	92	83	106
MD	77	76	48	173	0	91	90	67
NDH	86	82	47	92	91	0	30	37
STA	62	103	42	83	90	30	0	23
WR	51	91	20	106	67	37	23	0

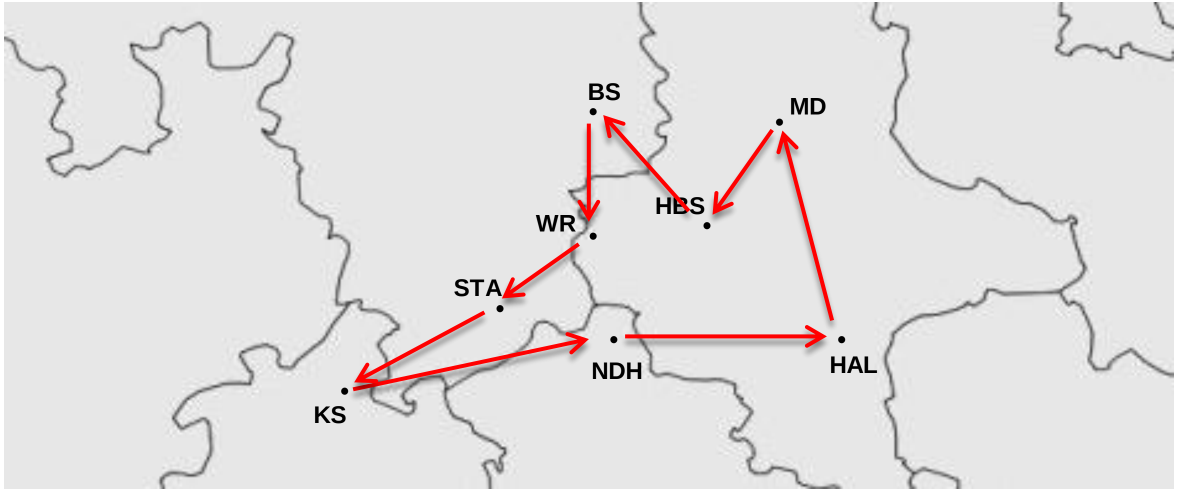
Bisher:
r = [KS – NDH – HAL – MD – HBS – BS – STA – KS]
L = 498 [km]

Minimale Abstände Maximum der minimalen Abstände

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Beispiel 2: Nach Iteration 7

Rundreise: KS – NDH – HAL – MD – HBS – BS – WR – STA – KS



Länge: 510 [km]

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Eröffnungsverfahren für das TSP: Bewertung

Tendenziell gilt:

- Verfahren der sukzessiven Einbeziehung liefert bessere Lösungen als Verfahren des besten Nachfolgers
- Variante 2 der sukzessiven Einbeziehung liefert bessere Ergebnisse als Variante 1, da sie durch die Art der Knotenwahl die wesentliche Struktur der sich entwickelnden Rundreise schon in einem frühen Stadium festlegt

aber:

- Rechenaufwand sukzessive Einbeziehung > Rechenaufwand bester Nachfolger
- Rechenaufwand Variante 2 > Rechenaufwand Variante 1

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Überblick

1. Grundlagen heuristischer Lösungsverfahren
2. **Heuristische Lösungsverfahren für das TSP**
    1. Unvollständig ausgeführte exakte Verfahren:
        - Unvollständiger B&B
    2. Eröffnungsverfahren:
        - Verfahren des bester Nachfolgers
        - Sukzessive Einbeziehung
    3. **Verbesserungsverfahren:**
        - **2-opt-Verfahren**

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Verbesserungsverfahren

- Starten (in der Regel) mit einer zulässigen Ausgangslösung
- In jedem Iterationsschritt wird von der gerade betrachteten Lösung x zu einer Lösung aus der Nachbarschaft $\mathrm{NB}(x)$ fortgeschritten
- $\mathrm{NB}(x)$ enthält sämtliche Lösungen, die sich aus x durch einmalige Anwendung einer Transformationsvorschrift ergeben („Zug“)
- Beispiele möglicher Transformationsvorschriften (Züge)
  - Veränderung einer Lösung an genau einer Stelle
    (z.B. „Kippen eines Bits“ beim Rucksack-Problem Entfernen bzw. Einpacken eines Gutes)
  - Vertauschen von Elementen
  - Verschieben von Elementen

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Verbesserungsverfahren

Strategien zur Untersuchung einer Nachbarschaft

- Reihenfolge: Prüfen einer Lösung zufällig oder systematisch

- Übergang: Welche Nachbarlösung wird ausgewählt, um von ihr aus den nächsten Iterationsschritt durchzuführen?

  First fit:
  Erste verbessernde Nachbarlösung wird ausgewählt

  Best fit:
  Vollständiges Untersuchen der Nachbarschaft,
  Fortsetzung mit bester Nachbarlösung

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Verbesserungsverfahren für das TSP

r-optimale Verfahren

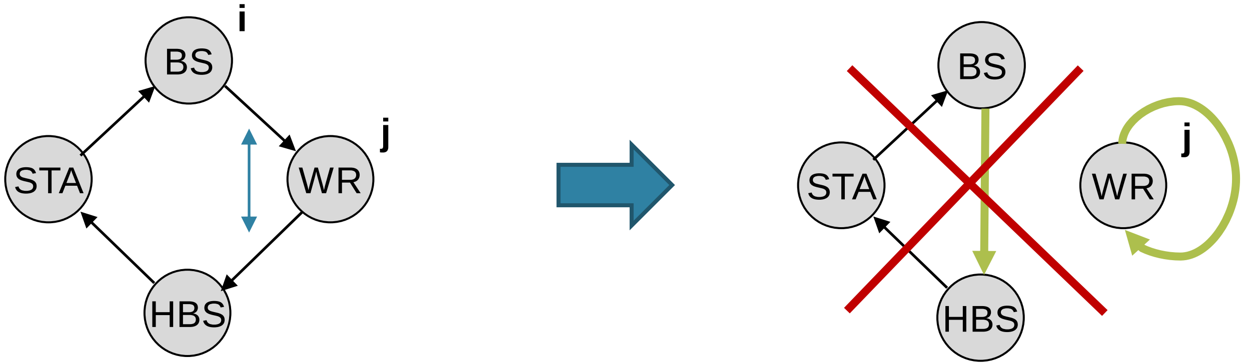
- Ausgangspunkt: zulässige Ausgangslösung
- Versuch der Verbesserung durch Austausch von r in ihr befindlichen Kanten gegen r andere Kanten $(r = 2, 3, \ldots)$

Beispiel: 2-opt-Verfahren

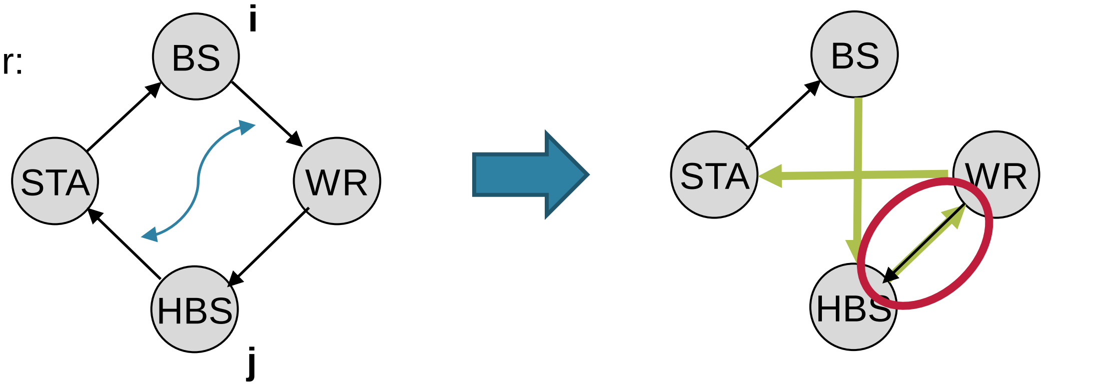
- prüft systematisch alle Vertauschungsmöglichkeiten von jeweils 2 Kanten einer gegebenen Rundreise gegen 2 andere
- ergibt eine Vertauschung eine Verkürzung der Rundreise, so wird diese vorgenommen
- erneuter Beginn der Überprüfung
- Abbruch, sobald durch paarweises Vertauschen keine Verbesserung mehr erzielt werden kann

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

2-opt-Verfahren: Prinzip



Besser:



© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

2-opt: Algorithmische Beschreibung

Voraussetzung 1: vollständiger, ungerichteter Graph G mit Kantenbewertungen c_i

Voraussetzung 2: zulässige Rundreise $[V_1, V_2, \dots, V_n, V_{n+1} = V_1]$

Iteration μ $(\mu = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots)$:

for $i := 1 \text{ to } n-2$ **do**
begin

for $j := i+2 \text{ to } n$ **do**

begin berechne $\Delta := c_{ij} + c_{i+1,j+1} - c_{i,i+1} - c_{j,j+1}$

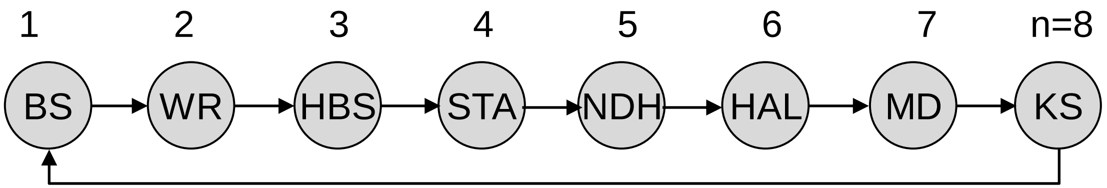
falls $\Delta < 0$, bilde neue Rundreise $[V_1, \dots, V_n, V_1] := [V_1, \dots, V_i, V_j, V_{j-1}, \dots, V_{i+1}, V_{j+1}, \dots, V_n, V_1]$
und setze $\mu = \mu + 1$ und beende Durchlauf

end
end

Ergebnis: eine 2-optimale Rundreise

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

2-opt: Algorithmische Darstellung



Iteration 1

$\underline{i}$ $\overline{i+1}$ = $\underline{1}$ $\overline{2}$

$\underline{j}$ $\overline{j+1}$ = 3 4 4 5 5 6 6 7 7 8

$\underline{i}$ $\overline{i+1}$ = $\underline{2}$ $\overline{3}$

$\underline{j}$ $\overline{j+1}$ = 4 5 5 6 6 7 7 8

$\underline{i}$ $\overline{i+1}$ = $\underline{3}$ $\overline{4}$

$\underline{j}$ $\overline{j+1}$ = 5 6 6 7 7 8

$\underline{i}$ $\overline{i+1}$ = $\underline{4}$ $\overline{5}$

$\underline{j}$ $\overline{j+1}$ = 6 7 7 8

$\underline{i}$ $\overline{i+1}$ = $\underline{5}$ $\overline{6}$

$\underline{j}$ $\overline{j+1}$ = $\underline{7}$ $\overline{8}$

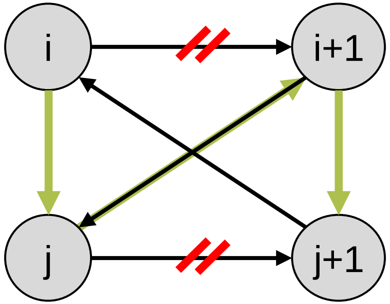
© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

2-opt: Graphische Veranschaulichung

Rundreise $[\, i, i+1, j, j+1, i \,]$

Falls $\Delta = c_{ij} + c_{i+1,j+1} - c_{i,i+1} - c_{j,j+1} < 0$, d.h. $\underbrace{c_{i,i+1} + c_{j,j+1}}_{\text{benutzt}} > \underbrace{c_{ij} + c_{i+1,j+1}}_{\text{nicht benutzt}}$

dann ersetze die Kanten $[\, i, i+1 \,]$ und $[\, j, j+1 \,]$ durch $[\, i, j \,]$ und $[\, i+1, j+1 \,]$



Problem: Orientierung der Kanten einer Teiltour ändert sich!

$\Rightarrow$ Umorientierung der Kante $[\, i+1, j \,]$

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

2-opt: Kreis mit Tauschmöglichkeiten

Möglicher Tausch:

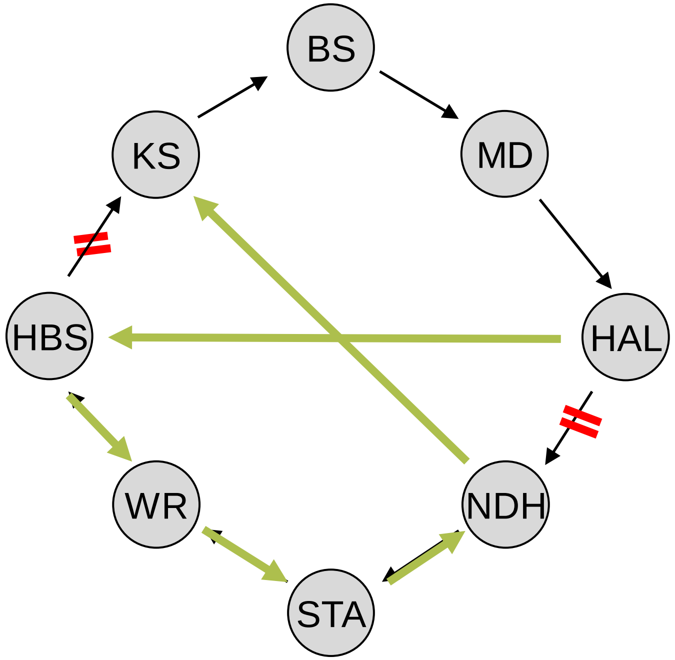
- Entferne Kanten
  - (HAL, NDH)
  - (HBS, KS)
- Füge Kanten hinzu
  - (HAL, HBS)
  - (NDH, KS)

Problem:

- Teiltour [NDH, STA, WR, HBS] falsch orientiert

Lösung:

- Verwende [HBS, WR, STA, NDH]

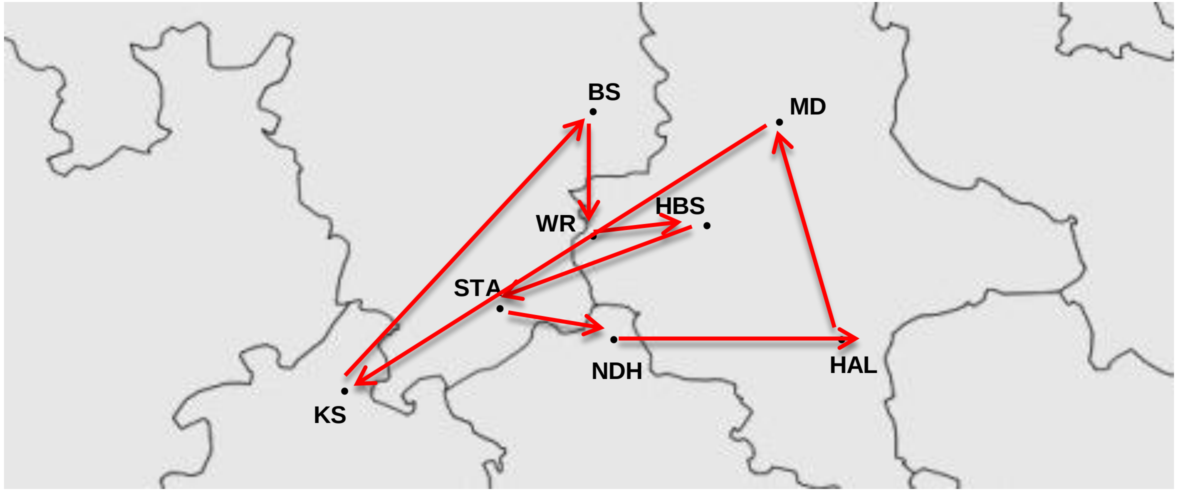


© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

2-opt: Beispiel Mitteldeutschland

Ausgangslösung durch Verfahren des besten Nachfolgers, Startknoten Braunschweig

Rundreise: BS – WR – HBS – STA – NDH – HAL – MD – KS – BS



Länge: 597 [km]

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Iteration $\mu = 1$

Ausgangslösung:

[BS – WR – HBS – STA – NDH – HAL – MD – KS – BS]
Länge = 601

$\mu = 1$:

$$\boxed{i = 1, j = 3: c_{13} + c_{24} - c_{12} - c_{34} = c_{BS,HBS} + c_{WR,STA} - c_{BS,WR} - c_{HBS,STA} = -15 < 0}$$

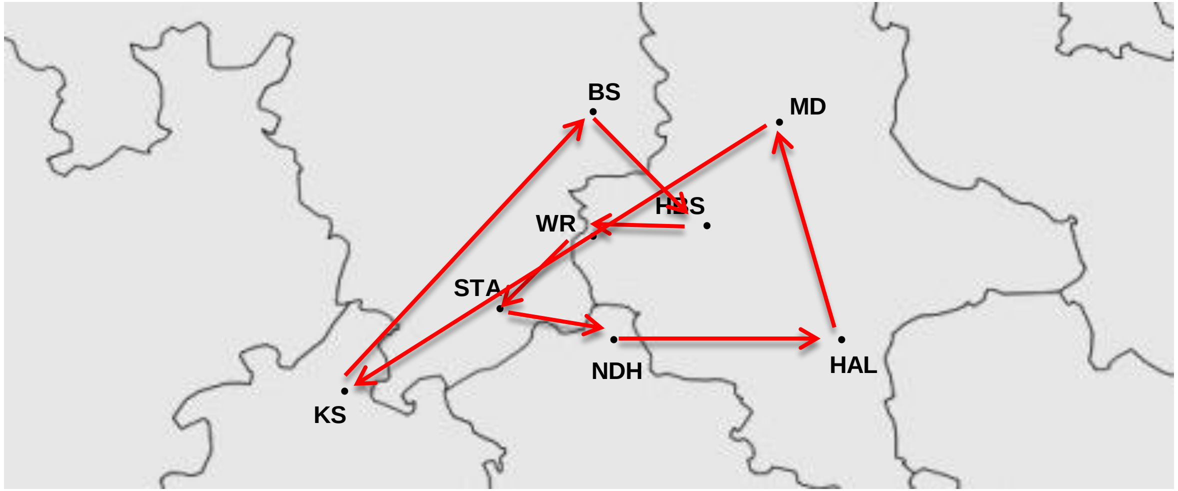
Neue Rundreise:

[BS – HBS – WR– STA – NDH – HAL – MD – KS – BS]
Länge = 601 – 15 = 586

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Nach Iteration $\mu = 1$

Rundreise: BS – HBS – WR– STA – NDH – HAL – MD – KS – BS



Länge: 586 [km]

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Iteration $\mu = 2$

Ausgangslösung:
[BS – HBS – WR– STA – NDH – HAL – MD – KS – BS]
Länge = 586

$\boldsymbol{\mu = 2}$**:**

$$
\begin{array}{l}
i = 1, j = 3: c_{13} + c_{24} - c_{12} - c_{34} = c_{BS,WR} + c_{HBS,STA} - c_{BS,HBS} - c_{WR,STA} = 15 > 0 \\
i = 1, j = 4: c_{14} + c_{25} - c_{12} - c_{45} = c_{BS,STA} + c_{HBS,NDH} - c_{BS,HBS} - c_{STA,NDH} = 24 > 0 \\
i = 1, j = 5: c_{15} + c_{26} - c_{12} - c_{56} = c_{BS,NDH} + c_{HBS,HAL} - c_{BS,HBS} - c_{NDH,HAL} = 27 > 0 \\
i = 1, j = 6: c_{16} + c_{27} - c_{12} - c_{67} = c_{BS,HAL} + c_{HBS,MD} - c_{BS,HBS} - c_{HAL,MD} = 48 > 0 \\
i = 1, j = 7: c_{17} + c_{28} - c_{12} - c_{78} = c_{BS,MD} + c_{HBS,KS} - c_{BS,HBS} - c_{MD,KS} = -26 < 0
\end{array}
$$

Neue Rundreise:

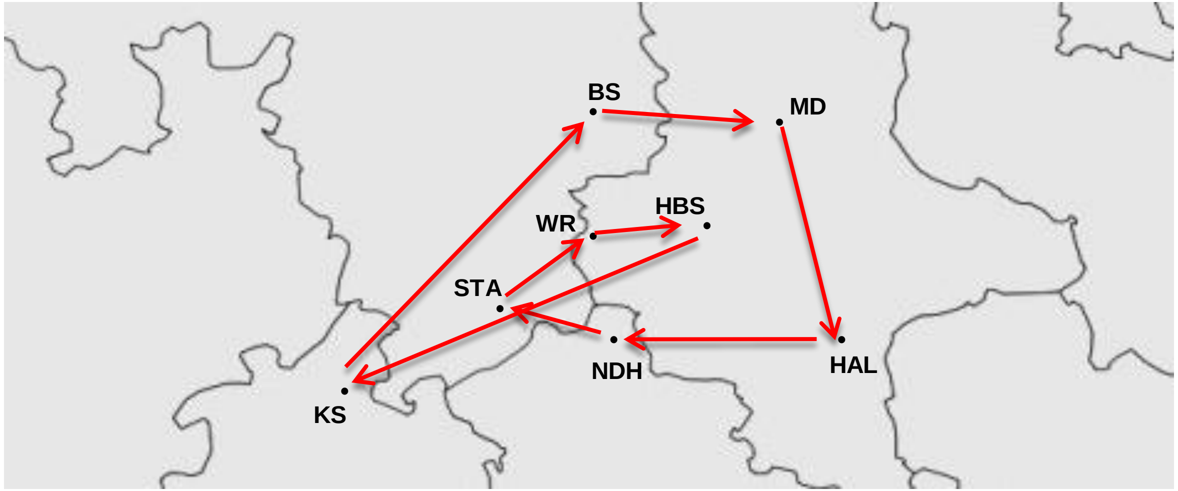
[BS – MD – HAL – NDH – STA – WR – HBS – KS – BS]

Länge = 586 – 26 = 560

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Nach Iteration $\mu = 2$

Rundreise: BS – MD – HAL – NDH – STA – WR – HBS – KS – BS



Länge: 560 [km]

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Iteration $\mu = 3$

Ausgangslösung:
[BS – MD – HAL – NDH – STA – WR – HBS – KS – BS]

Länge = 560

$\boldsymbol{\mu = 3}$**:**

$i = 1, j = 3$: $c_{13} + c_{24} - c_{12} - c_{34} = c_{BS,HAL} + c_{MD,NDH} - c_{BS,MD} - c_{HAL,NDH} = 63 > 0$
$i = 1, j = 4$: $c_{14} + c_{25} - c_{12} - c_{45} = c_{BS,NDH} + c_{MD,STA} - c_{BS,MD} - c_{NDH,STA} = 69 > 0$
$i = 1, j = 5$: $c_{15} + c_{26} - c_{12} - c_{56} = c_{BS,STA} + c_{MD,WR} - c_{BS,MD} - c_{HBS,KS} = 29 > 0$
$i = 1, j = 6$: $c_{16} + c_{27} - c_{12} - c_{67} = c_{BS,WR} + c_{MD,HBS} - c_{BS,MD} - c_{WR,HBS} = 2 > 0$
$i = 1, j = 7$: $c_{17} + c_{28} - c_{12} - c_{78} = c_{BS,HBS} + c_{MD,KS} - c_{BS,MD} - c_{HBS,KS} = 26 > 0$
$i = 1, j = 8$: $c_{18} + c_{21} - c_{12} - c_{81} = c_{BS,KS} + c_{MD,BS} - c_{BS,MD} - c_{KS,BKS} = 0$ (würde die Tour nur umkehren)

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Iteration $\mu = 3$ – Fortsetzung

$i = 2, j = 4$: $c_{24} + c_{35} - c_{23} - c_{45} = c_{MD,NDH} + c_{HAL,STA} - c_{MD,HAL} - c_{NDH,STA} = 88 > 0$

$i = 2, j = 5$: $c_{25} + c_{36} - c_{23} - c_{56} = c_{MD,STA} + c_{HAL,WR} - c_{MD,HAL} - c_{STA,WR} = 82 > 0$

$i = 2, j = 6$: $c_{26} + c_{37} - c_{23} - c_{67} = c_{MD,WR} + c_{HAL,HBS} - c_{MD,HAL} - c_{WR,HBS} = 49 > 0$

$i = 2, j = 7$: $c_{27} + c_{31} - c_{23} - c_{71} = c_{MD,HBS} + c_{HAL,KS} - c_{MD,HAL} - c_{HBS,KS} = 19 > 0$

$i = 2, j = 8$: $c_{28} + c_{31} - c_{23} - c_{81} = c_{MD,KS} + c_{HAL,BS} - c_{MD,HAL} - c_{KS,BS} = 101 > 0$

$i = 3, j = 5$: $c_{35} + c_{46} - c_{34} - c_{56} = c_{HAL,STA} + c_{NDH,WR} - c_{HAL,NDH} - c_{STA,WR} = 35 > 0$

$i = 3, j = 6$: $c_{36} + c_{47} - c_{34} - c_{67} = c_{HAL,WR} + c_{NDH,HBS} - c_{HAL,NDH} - c_{WR,HBS} = 36 > 0$

$i = 3, j = 7$: $c_{37} + c_{41} - c_{34} - c_{71} = c_{HAL,HBS} + c_{NDH,KS} - c_{HAL,NDH} - c_{HBS,KS} = -37 < 0$

Neue Rundreise:

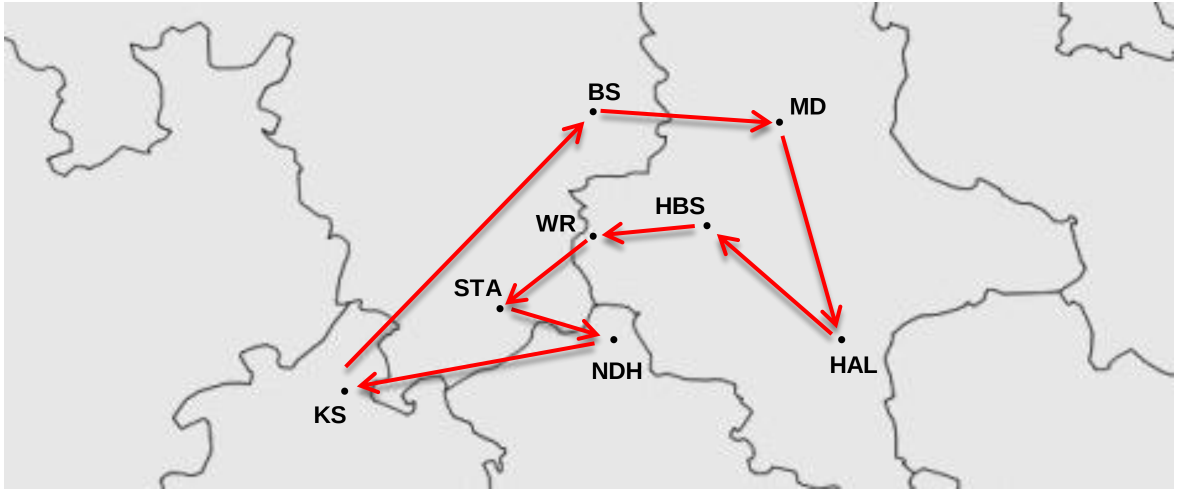
[BS – MD – HAL – HBS – WR – STA – NDH – KS – BS]

Länge = 560 - 37 = 523

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Nach Iteration $\mu = 3$

Rundreise: BS – MD – HAL – HBS – WR – STA – NDH – KS – BS



Länge: 523 [km]

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Iteration $\mu = 4$

Ausgangslösung:
[BS – MD – HAL – HBS –WR – STA– NDH – KS – BS]
Länge = 527

$\boldsymbol{\mu = 4}$**:**

$i = 1, j = 3: c_{13} + c_{24} - c_{12} - c_{34} = c_{BS,HAL} + c_{MD,HBS} - c_{BS,MD} - c_{HAL,HBS} = 24 > 0$

$i = 1, j = 4: c_{14} + c_{25} - c_{12} - c_{45} = c_{BS,HBS} + c_{MD,WR} - c_{BS,MD} - c_{HBS,WR} = 25 > 0$

$i = 1, j = 5: c_{15} + c_{26} - c_{12} - c_{56} = c_{BS,WR} + c_{MD,STA} - c_{BS,MD} - c_{WR,STA} = 41 > 0$

$i = 1, j = 6: c_{16} + c_{27} - c_{12} - c_{67} = c_{BS,STA} + c_{MD,NDH} - c_{BS,MD} - c_{STA,NDH} = 46 > 0$

$i = 1, j = 7: c_{17} + c_{28} - c_{12} - c_{78} = c_{BS,NDH} + c_{MD,KS} - c_{BS,MD} - c_{NDH,KS} = 90 > 0$

$i = 1, j = 8: c_{18} + c_{21} - c_{12} - c_{81} = c_{BS,KS} + c_{BS,MD} - c_{BS,MD} - c_{KS,BS} = 0$

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Iteration $\mu = 4$ – Fortsetzung

$i = 2, j = 4$: $c_{24} + c_{35} - c_{23} - c_{45} = c_{MD,HBS} + c_{HAL,WR} - c_{HBS,WR} - c_{MD,HAL} = 43 > 0$

$i = 2, j = 5$: $c_{25} + c_{36} - c_{23} - c_{56} = c_{MD,WR} + c_{HAL,STA} - c_{MD,HAL} - c_{WR,STA} = 71 > 0$

$i = 2, j = 6$: $c_{26} + c_{37} - c_{23} - c_{67} = c_{MD,STA} + c_{HAL,NDH} - c_{MD,HAL} - c_{STA,NDH} = 66 > 0$

$i = 2, j = 7$: $c_{27} + c_{31} - c_{23} - c_{71} = c_{MD,NDH} + c_{HAL,KS} - c_{MD,HAL} - c_{NDH,KS} = 95 > 0$

$i = 2, j = 8$: $c_{28} + c_{31} - c_{23} - c_{81} = c_{MD,KS} + c_{HAL,BS} - c_{MD,HAL} - c_{KS,BS} = 101 > 0$

$i = 3, j = 5$: $c_{35} + c_{46} - c_{34} - c_{56} = c_{HAL,WR} + c_{HBS,STA} - c_{HAL,HBS} - c_{WR,STA} = 32 > 0$

$i = 3, j = 6$: $c_{36} + c_{47} - c_{34} - c_{67} = c_{HAL,STA} + c_{HBS,NDH} - c_{HAL,HBS} - c_{STA,NDH} = 42 > 0$

$i = 3, j = 7$: $c_{37} + c_{41} - c_{34} - c_{71} = c_{HAL,NDH} + c_{HBS,KS} - c_{HAL,HBS} - c_{NDH,KS} = 37 > 0$

$i = 3, j = 8$: $c_{38} + c_{41} - c_{34} - c_{81} = c_{HAL,KS} + c_{HBS,BS} - c_{HAL,HBS} - c_{KS,BS} = 22 > 0$

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Iteration $\mu = 4$ – Fortsetzung

$i = 4, j = 6: c_{46} + c_{57} - c_{45} - c_{67} = c_{HBS,STA} + c_{WR,NDH} - c_{HBS,WR} - c_{STA,NDH} = 29 > 0$

$i = 4, j = 7: c_{47} + c_{51} - c_{45} - c_{71} = c_{HBS,NDH} + c_{WR,KS} - c_{HBS,WR} - c_{NDH,KS} = 41 > 0$

$i = 4, j = 8: c_{48} + c_{51} - c_{45} - c_{81} = c_{HBS,KS} + c_{WR,BS} - c_{HBS,WR} - c_{KS,BS} = 29 > 0$

$i = 5, j = 7: c_{57} + c_{68} - c_{56} - c_{78} = c_{WR,NDH} + c_{STA,KS} - c_{WR,STA} - c_{NDH,KS} = 5 > 0$

$i = 5, j = 8: c_{58} + c_{61} - c_{56} - c_{81} = c_{WR,KS} + c_{STA,BS} - c_{WR,STA} - c_{KS,BS} = 18 > 0$

$i = 6, j = 8: c_{68} + c_{71} - c_{67} - c_{81} = c_{STA,KS} + c_{NDH,BS} - c_{STA,NDH} - c_{KS,BS} = 12 > 0$

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Lösung nach Iteration $\mu = 4$

Keine Verbesserung mehr möglich, kürzeste 2-optimale Rundreise gefunden

Allerdings eine weitere optimale Lösung, da Δ (i = 1, j = 8) = 0 (umgekehrte Tour)

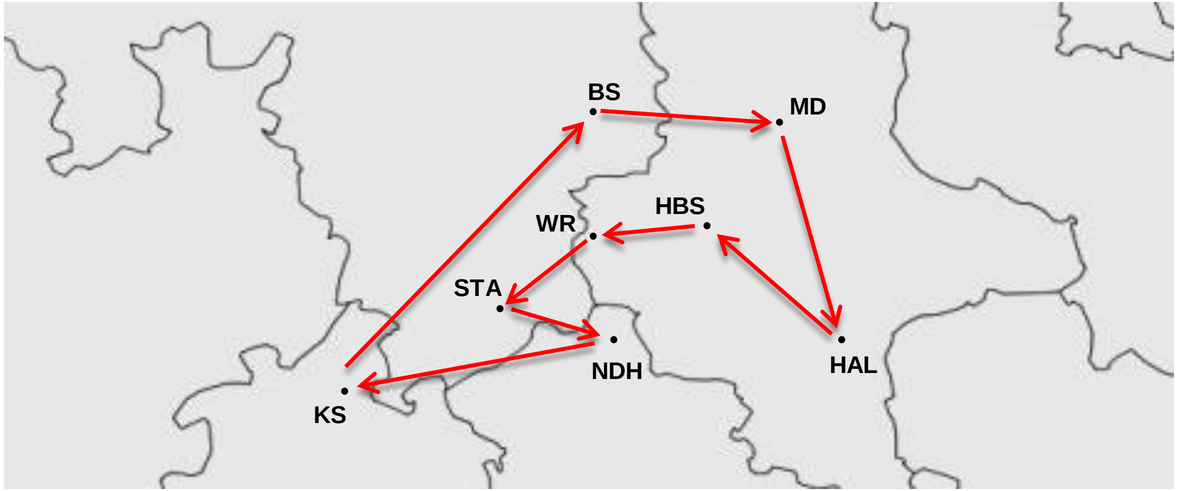
Rundreise nach 2-opt:
[BS – MD – HAL – HBS – WR – STA – NDH – KS – BS]

Länge = 523

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Nach Iteration $\mu = 4$

Rundreise: BS – MD – HAL – HBS – WR – STA – NDH – KS – BS



Länge: 523 [km]

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Vergleich der Lösungen

Verfahren	Spezifikation	Tourlänge	Tour
Zuordnungsproblem	Keine TSP-Tour	483	**BS** – HBS – WR – **BS**, MD – HAL – MD, KS – STA – NDH – KS
Optimale Lösung	z.B. durch B&B oder Zyklenbedingungen	508	**BS** – HBS – WR – STA – KS – NDH – HAL – MD – **BS**
Bester Nachfolger	Startknoten BS	601	**BS** – WR – HBS – STA – NDH – HAL – MD – KS – **BS**
Bester Nachfolger	Startknoten KS	535	KS – STA – WR – HBS – NDH – HAL – MD – **BS** – KS
Sukzessive Einbeziehung	Alphanumerisch mit Start [BS-WR-BS]	542	**BS** – KS – NDH – STA – WR – HAL – MD – HBS – **BS**
Sukzessive Einbeziehung	Entferntestes Einfügen	510	KS – NDH – HAL – MD – HBS – **BS** – WR – STA – KS
2-opt	Mit Startlösung durch Verfahren des besten Nachfolgers mit Startknoten BS	523	**BS** – MD – HAL – HBS – WR – STA – NDH – KS – **BS**
2-opt	Mit Startlösung durch sukzessive Einbeziehung mit entferntestem Einfügen	508	**BS** – MD – HAL – NDH – KS – STA – WR – HBS – **BS**

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld

Zusammenfassung

- Heuristische Verfahren
  - Ermittlung guter zulässiger Lösungen mit vertretbarem Aufwand, allerdings unter Aufgabe der Optimalitätsgarantie

- Heuristische Lösungsverfahren für das TSP
  - Unvollständig ausgeführte exakte Verfahren
    - Unvollständiger B&B
  - Eröffnungsverfahren
    - Verfahren des besten Nachfolgers
    - Sukzessive Einbeziehung
  - Verbesserungsverfahren
    - 2-opt

© Prof. Dr. Dirk C. Mattfeld