Technische Universität Braunschweig

2. Übungsblatt

Upload: 25.04.2023.
Deadline: 02.05.2023, 10:00 Uhr (im Abgabeordner bei stud.ip).

Aufgabe 2.1

(a) Geben Sie die Definition einer konvergenten Zahlenfolge an.

(b) Sei $0 < q < 1$. Zeigen Sie, dass $q^n \to 0$, $n \to \infty$.

(c) Beweisen Sie: $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a genau dann, wenn

$$\exists\, C > 0\, \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geq n_0 : |a_n - a| \leq C \cdot \varepsilon.$$

Aufgabe 2.2

Untersuchen Sie die Zahlenfolgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (d_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}, (c_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und Häufungspunkte.

(a) $a_n := \frac{3n^2-2}{2n^3+4n+5} \in \mathbb{R}$.

(b) $b_n := e^{n\pi i^n} \in \mathbb{C}$.

(c) $c_n := \frac{(2i)^{3n}+2^{n+1}-2^{-n}}{2^{3n}+2^{2n+1}} \in \mathbb{C}$.

(d) $d_n := \frac{n^5}{2^n} \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2.3

Untersuchen Sie die Zahlenfolgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(c_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ auf Beschränktheit, Monotonie, Häufungspunkte sowie Limes superior und Limes inferior. Begründen Sie, ob die Folgen konvergieren und ggf. gegen welchen Grenzwert.

(a) $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \in \mathbb{R}$.

(b) $\mathbb{R} \ni b_n := \begin{cases} \frac{n^2}{2n^2+n+1}, & n \in 3\mathbb{N}, \\ -\frac{n^2}{2n^2+n+1}, & n \in 3\mathbb{N}+1, \\ 0, & n \in 3\mathbb{N}+2. \end{cases}$

(c) $c_n := -\frac{n}{n+1} \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2.4

(a) Es seien $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}, (\beta_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ zwei rationale Zahlenfolgen, mit $\alpha_1 = 1, \beta_1 = 2$ und

$$(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}) := \begin{cases} (\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}, \beta_n), & \text{falls } (\frac{\alpha_n+\beta_n}{2})^2 < 2, \\ (\alpha_n, \frac{\alpha_n+\beta_n}{2}), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}, (\beta_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen sind, die nicht konvergieren.

(b) Beweisen Sie den Einschließungssatz: Seien $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}, (c_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ Zahlenfolgen so, dass $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und sowohl $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ als auch $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ konvergieren. Dann konvergiert auch $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ gegen a.