Technische Universität Braunschweig

Decision Support
Institut für Wirtschaftsinformatik

Operations Research

Vorlesung 2
Einführung in Operations Research II

Start der Übungen in dieser Woche

- Übungsblätter werden in StudIP hochgeladen
  - Wöchentlich passend zur Vorlesung
- 8 Termine für die kleinen Übungen
  - Wöchentlich
  - Präsenz und Online-Übungen
  - Betreuung durch unsere Hiwis
  - Unterstützung beim Rechnen der Aufgaben
  - Keine Anmeldung erforderlich

- Alle Informationen in StudIP

Die drei Schritte im Operations Research

- **Problemdefinition:**
  - Was ist das Ziel?
  - Worüber können wir entscheiden?
  - Was müssen wir berücksichtigen?

- **Mathematisches Modell:**
  - Zielfunktion
  - Entscheidungsvariablen
  - Nebenbedingungen

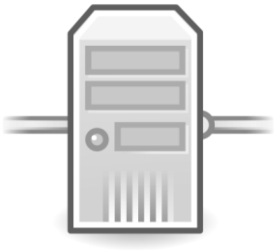
- **Lösung des Modelles:**
  - Exakt (wenn möglich)
  - Gezieltes „Raten“: Heuristiken

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{u.d.N.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \; (i = 1, \dots, m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \; (j = 1, \dots, n)$$

$$x_{ij} \geq 0 \; (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$



Überblick

1. Typische Problemszenarien im Operations Research
2. Standardproblem der Linearen Optimierung

Technische Universität Braunschweig
Decision Support
Institut für Wirtschaftsinformatik

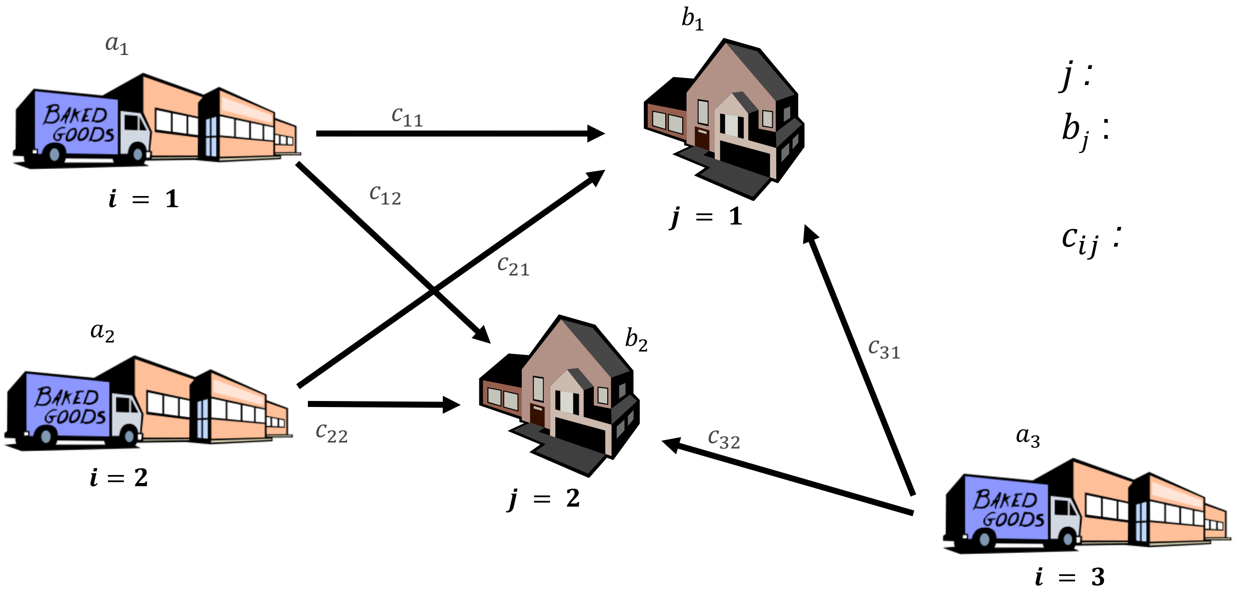
Überblick

1. **Typische Problemszenarien im Operations Research**
2. Standardproblem der Linearen Optimierung

Transportproblem: Beschreibung

- Ein Produkt wird an verschiedenen Orten in jeweils unterschiedlichen Mengen gelagert
- Eine Anzahl bekannter Verbraucher hat einen jeweils unterschiedlichen Bedarf an dem Produkt
- Die jeweilig angebotenen Mengen sowie die jeweiligen Bedarfe der Kunden sind bekannt
- Die Summe der Bedarfe ist gleich der Summe der angebotenen Mengen
- Der Bedarf jedes Kunden kann und muss befriedigt werden
- Die Transportkosten sind proportional zur transportierten Menge
- Die Summe der gesamten Transportkosten ist zu minimieren
- Negative Transportmengen (Rücktransporte) sind ausgeschlossen

Transportproblem: Visualisierung



i : Lager

a_i : gelagerte Menge

j : Kunde

b_j : Bedarf in Mengeneinheiten

c_{ij} : Transportkosten / ME von i nach j

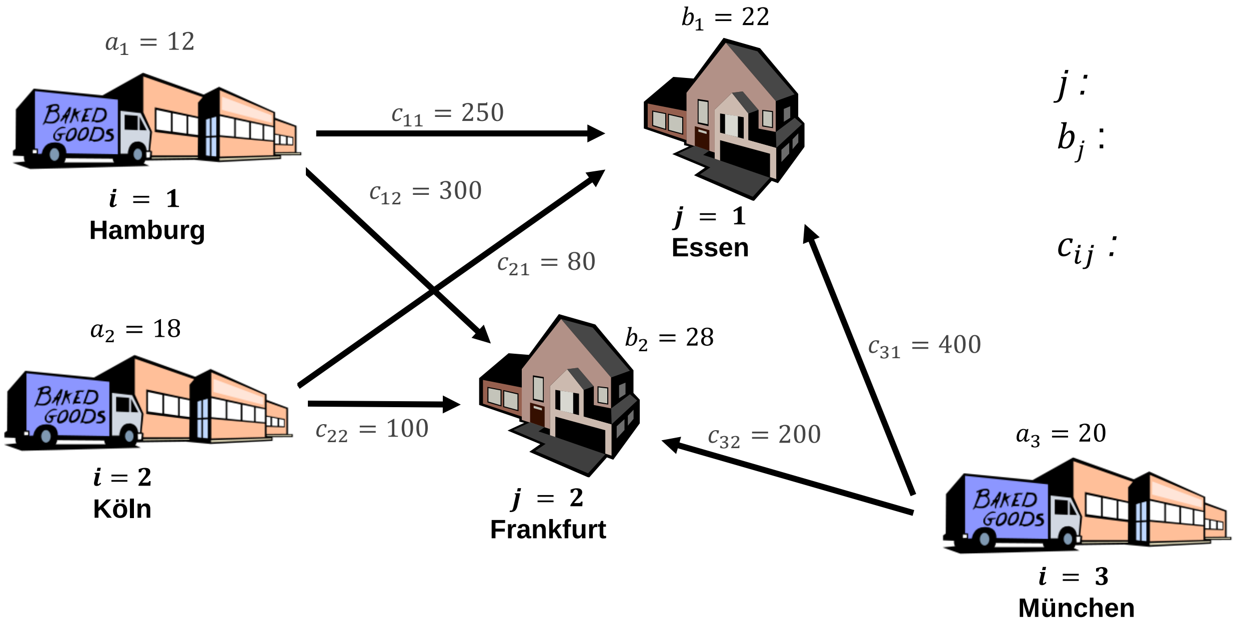
Transportproblem: Daten

Eine Traktorenfabrik hat $m = 3$ Niederlassungen $i = 1, 2, 3$.
Von diesen 3 Niederlassungen beziehen $n = 2$ Großhändler $j = 1, 2$ ihre Traktoren.
Transportkosten sind in EUR je Stück angegeben.

Fabrik / Händler	1 (Hamburg)	2 (Köln)	3 (München)	Bedarf der Händler
1 (Essen)	250	80	400	22
2 (Frankfurt)	300	100	200	28
Lagerbestand	12	18	20	50

Gesucht: Transportplan mit möglichst geringen Transportkosten

Transportproblem: Visualisierung

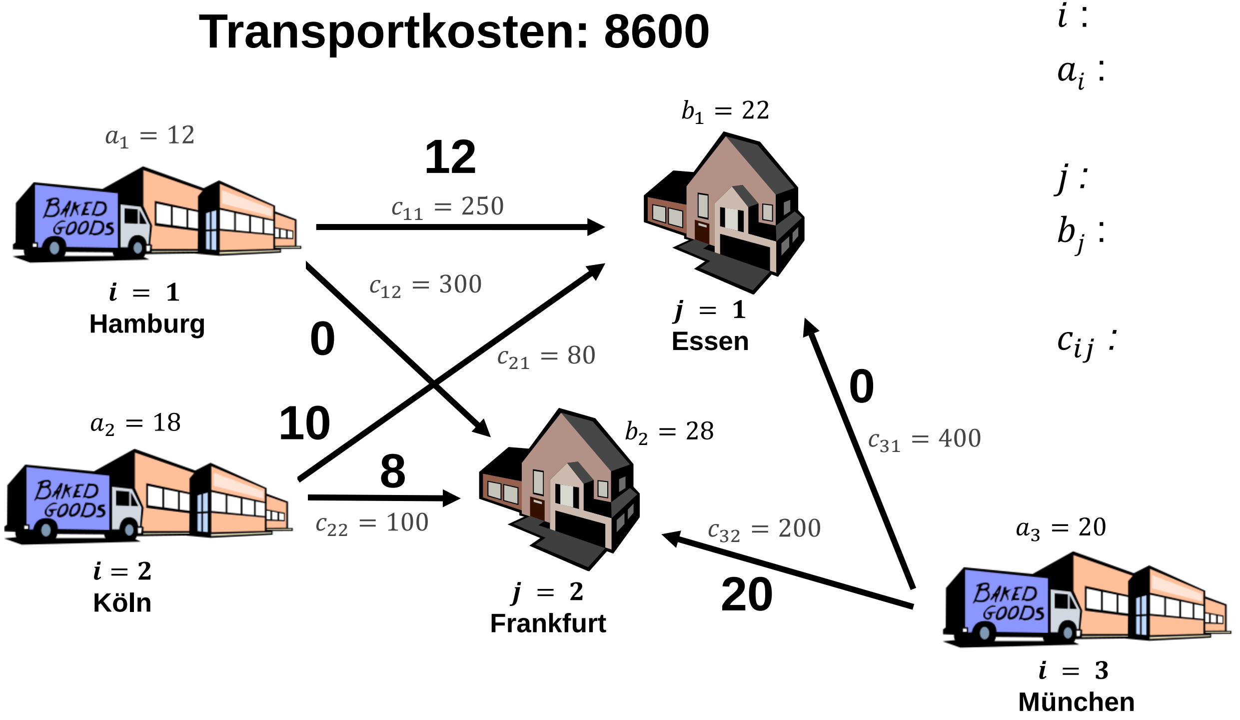


i : Lager
a_i : gelagerte Menge

j : Kunde
b_j : Bedarf in Mengeneinheiten

c_{ij} : Transportkosten / ME von i nach j

Transportproblem: Visualisierung der Lösung



i : Lager

a_i : gelagerte Menge

j : Kunde

b_j : Bedarf in Mengeneinheiten

c_{ij} : Transportkosten / ME von i nach j

Transportproblem: Modellierung

Transportmenge von i nach j: x_{ij}

Nichtnegativitätsbedingungen: $x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,2,3;\ j = 1,2)$

Nebenbedingungen:

$$\left.\begin{array}{lllr} x_{11} + x_{12} & & & = 12 \\ & x_{21} + x_{22} & & = 18 \\ & & x_{31} + x_{32} & = 20 \end{array}\right\} \text{Transport von Niederlassung}$$

$$\left.\begin{array}{lllr} x_{11} & + x_{21} & + x_{31} & = 22 \\ \quad x_{12} & \quad + x_{22} & \quad + x_{32} & = 28 \end{array}\right\} \text{Transport zum Händler}$$

Zielfunktion:

$$z = 250x_{11} + 80x_{21} + 400x_{31} + 300x_{12} + 100x_{22} + 200x_{32} \ \text{minimal}$$

Transportproblem: Allgemeines Modell

Formulierung als LP-Problem:

Min $$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

u.d.N. $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \; (i = 1, \dots, m)$$

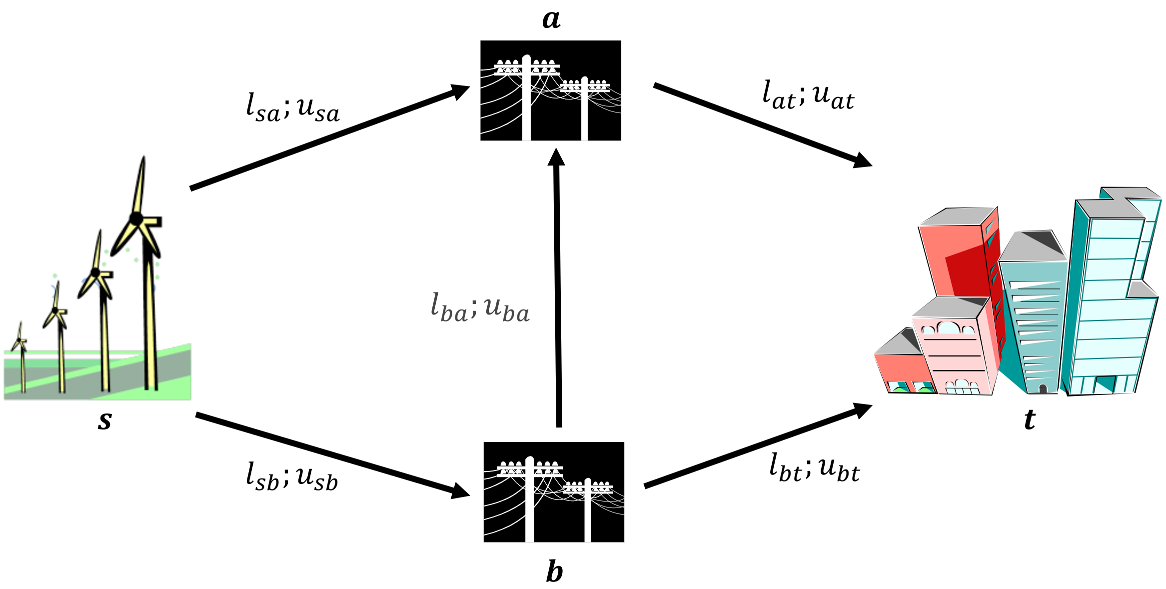
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \; (j = 1, \dots, n)$$

$$x_{ij} \geq 0 \; (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$

Energieflussproblem: Beschreibung

- In einer Windkraftanlage wird Strom produziert
- Der Strom soll über ein Leitungsnetz zur nächsten Stadt geleitet werden, wo er verbraucht wird
- Die maximalen und minimalen Kapazitäten der Netzleitungen sind jeweils bekannt
- Der Stromfluss durch das Netzwerk ist zu maximieren
- Der Stromfluss sei lediglich durch die Netzkapazität restringiert

Energieflussproblem: Visualisierung



s, a, b, t :	Knoten im Netzwerk
u_{ij}:	max. Kapazität der Leitung von i nach j
l_{ij}:	min. Kapazität der Leitung von i nach j

Energieflussproblem: Daten

Ein Stromnetzwerk besteht aus einem Kraftwerk s, einem Verbraucher t und 2 Umspannwerken a, b.

$(l_{ij}; u_{ij})$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{s}$	(0, 0)	(1, 4)	(1, 5)	(0, 0)
$\boldsymbol{a}$	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(2, 5)
$\boldsymbol{b}$	(0, 0)	(2, 5)	(0, 0)	(2, 7)
$\boldsymbol{t}$	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)

Gesucht: Kantenflüsse mit maximalem Gesamtfluss

Energieflussproblem: Modellierung

Fluss auf Kante (i, j): x_{ij}

Gesamtfluss (von s *nach* t*):* z

Kapazitätsbedingungen: $l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ $(i, j$ aus $\{s, a, b, t\}$ $)$

Knotenbedingung (für Knoten a *und* b*):*

$$x_{sa} + x_{ba} - x_{at} = 0$$

$$x_{sb} - x_{ba} - x_{bt} = 0$$

Flusserhaltungsbedingungen:

$$x_{sa} + x_{sb} = z$$

$$x_{at} + x_{bt} = z$$

Zielfunktion: maximiere z

Energieflussproblem: Allgemeines Modell

Formulierung als LP-Problem:

Max z

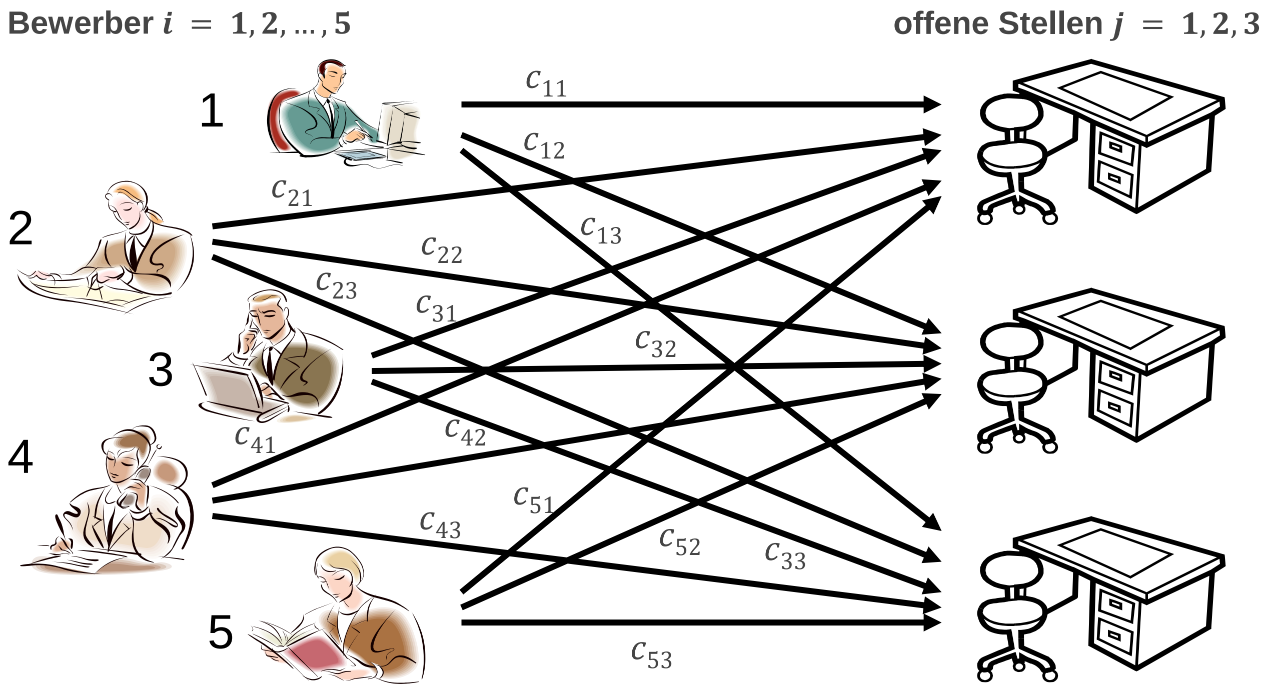
u.d.N.
$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \begin{Bmatrix} z, & i = s \\ -z, & i = t \\ 0, & sonst \end{Bmatrix}$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \qquad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, m)$$

Auswahlproblem: Beschreibung

- Eine Anzahl von Bewerbern bewirbt sich bei einem Unternehmen
- Das Unternehmen hat eine bestimmte Anzahl freier Stellen
- Die freien Stellen sind mit jeweils unterschiedlichen Anforderungen verbunden
- Für jeden Bewerber liegt jeweils eine Schätzung der Einarbeitungskosten für jede freie Stelle vor
- Jede Stelle ist zu besetzen.
- Die Summe der Einarbeitungskosten bei der Stellenbesetzung ist zu minimieren

Auswahlproblem: Visualisierung



c_{ij}: Einarbeitungskosten von Bewerber i auf Stelle j

Auswahlproblem: Modellierung

Zuordnungsvariablen:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, falls\ Bewerber\ i\ auf\ Stelle\ j\ eingestellt\ wird \\ 0, \quad sonst \end{cases}$$

Bewerberrestriktionen (Beispiel Bewerber 1):

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1$$

Stellenrestriktion (Beispiel Stelle 1):

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1$$

Auswahlproblem: Allgemeines Modell

Formulierung als LP-Problem:

Min $$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

u.d.N. $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \qquad (i = 1, \dots, m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad (j = 1, \dots, n)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$

Beobachtungen

- Jedes Modell hat eine Zielfunktion
- Die ZF wird minimiert oder maximiert
- Modelliert werden ZF relevante Eigenschaften
- Variablen bilden den Lösungsraum ab
- Variablen sind kontinuierlich oder ganzzahlig
- Nebenbedingungen/Restriktionen beschränken den Lösungsraum
- Nebenbedingungen/Restriktionen sind immer (Un-)Gleichungen

Aufgaben:

1. Formulieren eines generischen Modells
2. Entwicklung eines generischen Lösungsverfahrens

1

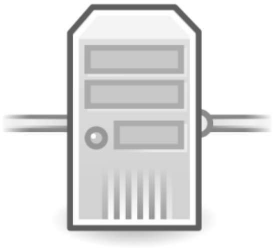
$$\min \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{u.d.N.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \; (i = 1, \dots, m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \; (j = 1, \dots, n)$$

$$x_{ij} \geq 0 \; (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$

2



Überblick

1. Typische Problemszenarien im Operations Research
2. **Standardproblem der Linearen Optimierung**

Standardproblem der linearen Programmierung

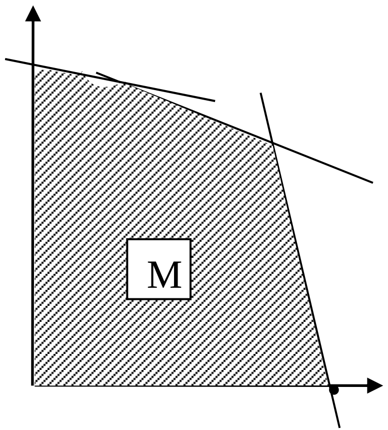
Alternative Sprechweise: Standard*formulierung* der linearen Programmierung

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\text{Max} & z = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \\
\text{u.d.N.} & a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\
 & \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
 & a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n \leq b_m \\
 & x_1, \ldots, x_n \geq 0
\end{array}
\right\}
\qquad
\begin{array}{ll}
\text{Max} & z = c^T x \\
\text{u.d.N.} & Ax \leq b \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

mit $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Standardproblem der linearen Programmierung

- Zielfunktion (ZF):= $c^T x$
- Zulässiger Bereich (M):= $\{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b; x \geq 0\}$
- Zulässige Lösung: $= x \in M$
- Optimale Lösung: $= x^* \in M$,mit $z(x^*) = \max_{x \epsilon M} z(x)$
- M ist als Schnittmenge konvexer Mengen konvex
- $M^* \in M$ (Menge der optimalen Lösungen) ist konvex und enthält im Falle $M^* \neq \emptyset$ mindestens einen Eckpunkt (Extrempunkt)
- Bei der Suche nach der optimalen Lösung kann man sich auf die Menge der Eckpunkte konzentrieren



Beispiel: Produktionsprogrammplanung

- Eine Unternehmung stellt die Produkte P_1 und P_2 her, die mit einem Gewinn (Deckungsbeitrag) von 3 € bzw. 4 € pro ME verkauft werden können.

- Zur Fertigung der beiden Produkte sind erforderlich

(a) eine Maschine, die (in dem Planungszeitraum) maximal 1200 Std. eingesetzt werden kann
(b) ein Rohstoff, von dem (in dem Planungszeitraum) höchstens 3000 ME zur Verfügung stehen
(c) Arbeitskräfte, die (in dem Planungszeitraum) höchstens 125 Std. eingesetzt werden können

- Für die Herstellung einer ME des Produktes P_1 (bzw. P_2) werden benötigt:

Maschine	3 Std.	(bzw. 2 Std.)
Rohstoff	5 ME	(bzw. 10 ME)
Arbeitskräfte	-	(bzw. 0,5 Std.)

Gesucht: Produktionsprogramm mit maximalem (Gesamt-)Gewinn

Produktionsprogrammplanung: Modellierung

Entscheidungsvariablen:

x_1 Produktionsmenge des Produktes P_1

x_2 Produktionsmenge des Produktes P_2

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Nebenbedingungen:

$3x_1 + 2x_2 \leq 1200$ (Maschinenkapazitätsbeschränkung)

$5x_1 + 10x_2 \leq 3000$ (Rohstoffmengenbeschränkung)

$0{,}5x_2 \leq 125$ (Arbeitszeitbeschränkung)

Zielfunktion:

$z = 3x_1 + 4x_2$ maximal

Grafische Lösung (Produktionsprogrammplanung)

Max

$z = 3x_1 + 4x_2$

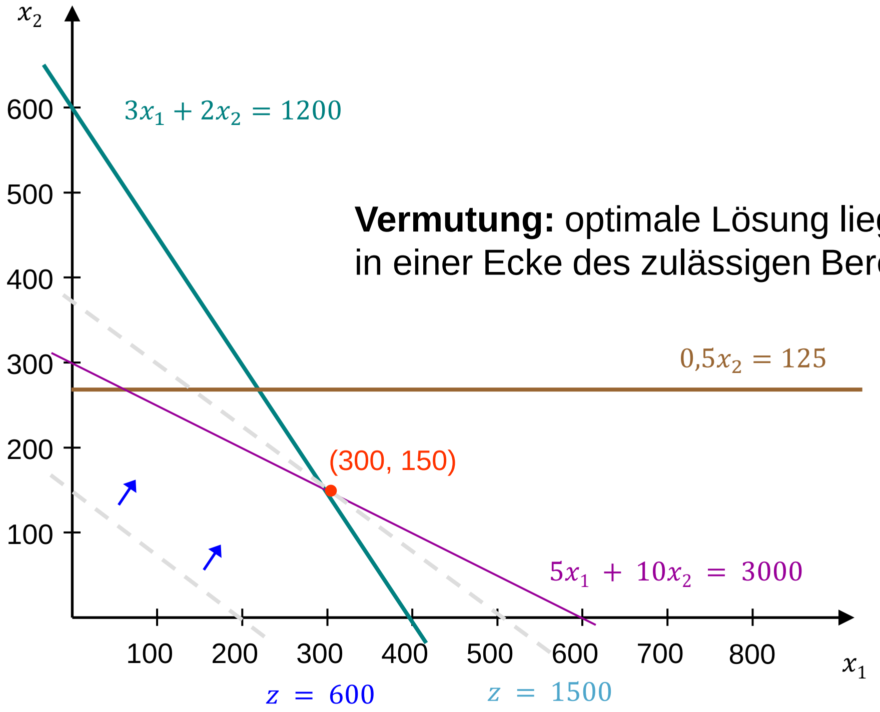
u.d.N.

$3x_1 + 2x_2 \leq 1200$

$5x_1 + 10x_2 \leq 3000$

$0{,}5x_2 \leq 125$

$x_1, x_2 \geq 0$



Vermutung: optimale Lösung liegt immer in einer Ecke des zulässigen Bereichs

Optimale Lösung:

$x_1 = 300, x_2 = 150, z = 1500$

Rechnerische Lösung (Produktionsprogrammplanung)

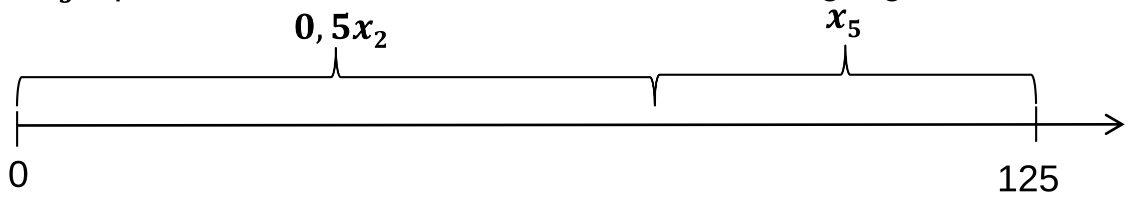
- Idee: Umformulierung des Problems in (Geraden-)Gleichungen durch Einführung von Schlupfvariablen
  $\Rightarrow n\ (= 2)$ Strukturvariablen und $m\ (= 3)$ Schlupfvariablen

- Beispiel: Schlupfvariable für Nebenbedingung 3: $\mathbf{0,5x_2 \leq 125}$

- Nebenbedingung ist eine Ungleichung
- Unser Verfahren benötigt eine Gleichung
- Künstliches Hinzufügen einer Variable $\boldsymbol{x_5}$

- $\mathbf{0,5x_2 + x_5 = 125}$

- Schlupfvariable $\boldsymbol{x_5}$ repräsentiert den „Rest“ von der Nebenbedingungs-Ressource



Rechnerische Lösung (Produktionsprogrammplanung)

- **Idee:** Berechnung und Bewertung aller Geradenschnittpunkte
- Umformulierung des Problems in (Geraden-)Gleichungen durch Einführung von Schlupfvariablen
  $\Rightarrow\ n\ (= 2)$ Strukturvariablen und $m\ (= 3)$ Schlupfvariablen

$$\begin{array}{llll}
\text{max} & z = 3\,x_1 + 4\,x_2 + 0\,x_3 + 0\,x_4 + 0\,x_5 & & \\
\text{u.d.N.} & 3\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 & = 1200 & (1) \\
& 5\,x_1 + 10\,x_2 + x_4 & = 3000 & (2) \\
& 0{,}5\,x_2 + x_5 & = 125 & (3) \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 & &
\end{array}$$

Zulässige Lösung (Geradenschnittpunkt):

$x_1 = 0, x_2 = 0$ Strukturvariablen

$x_3 = 1200, x_4 = 3000, x_5 = 125$ Schlupfvariablen

$z = 0$

Rechnerische Lösung (Produktionsprogrammplanung)

Einfacher Lösungsansatz: n der Variablen $x_1, x_2, \dots, x_{n+m}$ Null setzen und das verbleibende Gleichungssystem lösen

$x_1 = 0, x_2 = 0$: $x_3 = 1200$, $x_4 = 3000, x_5 = 125$ (A)

$x_1 = 0, x_3 = 0$: $x_2 = 600$, $x_4 = -3000, x_5 = -175$ (B)

$x_1 = 0, x_4 = 0$: $x_2 = 300$, $x_3 = 600, x_5 = -25$ (C)

$x_1 = 0, x_5 = 0$: $x_2 = 250$, $x_3 = 700, x_4 = 500$ (D)

$x_2 = 0, x_3 = 0$: $x_1 = 400$, $x_4 = 1000, x_5 = 125$ (E)

$x_2 = 0, x_4 = 0$: $x_1 = 600$, $x_3 = -600, x_5 = 125$ (F)

$x_2 = 0, x_5 = 0$: $Gleichungssystem\ nicht\ lösbar\ (a^1, a^3, a^4\ linear\ abhängig)$

$x_3 = 0, x_4 = 0$: $x_1 = 300$, $x_2 = 150, x_5 = 50$ (G)

$x_3 = 0, x_5 = 0$: $x_1 = 233{,}33, x_2 = 250, x_4 = -666{,}66$ (H)

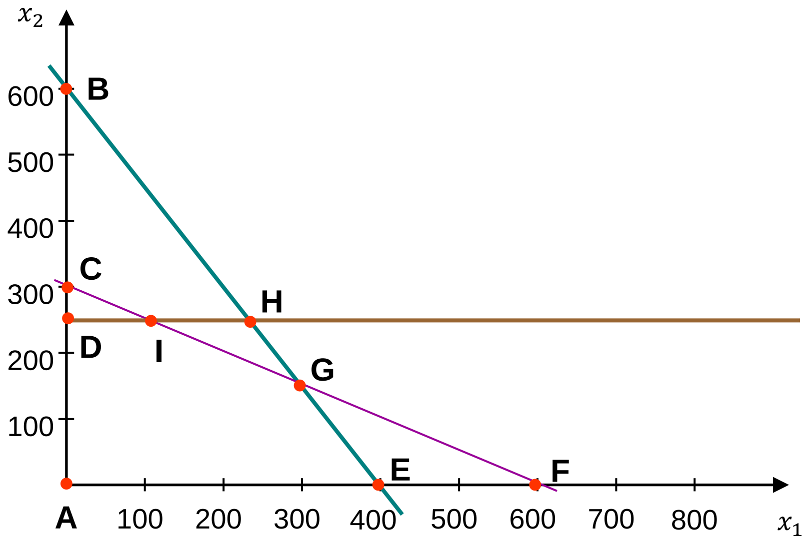
$x_4 = 0, x_5 = 0$: $x_1 = 100, x_2 = 250, x_3 = 400$ (I)

- Nachteil: Sehr hoher Rechenaufwand

  Hier $\binom{n+m}{m} = \binom{5}{3}$ = 10 Gleichungssysteme zu lösen.

Rechnerische Lösung (Produktionsprogrammplanung)

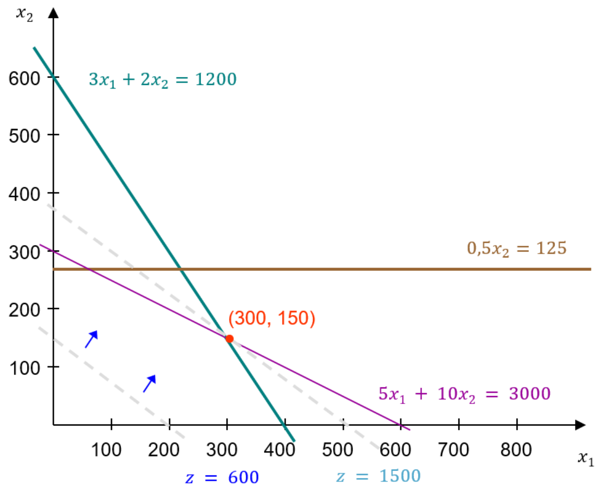
Grafische Repräsentation:

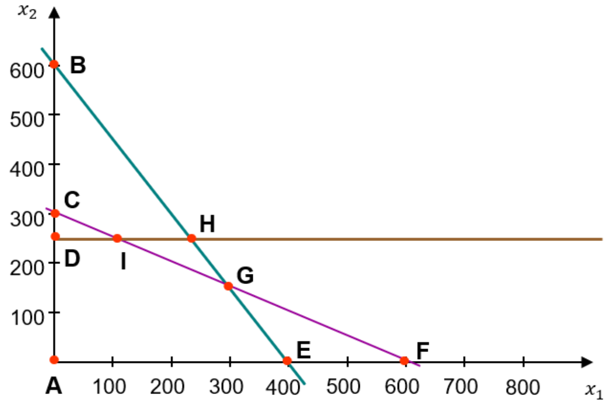


Gefundene Schnittpunkte müssen auf Zulässigkeit geprüft werden (Einsetzen in Nebenbedingungen).

Ausblick

- Problem: Produktionsplanung
- Modell: Standardproblem der Linearen Optimierung
- Verfahren: Simplex-Algorithmus





$$
\begin{array}{llrrrrrrl}
\text{max} & z = & 3\,x_1 + & 4\,x_2 + & 0\,x_3 + & 0\,x_4 + & 0\,x_5 & & \\
\text{u.d.N.} & & 3\,x_1 + & 2\,x_2 + & x_3 & & & = & 1200 \\
& & 5\,x_1 + & 10\,x_2 + & & x_4 & & = & 3000 \\
& & & 0{,}5\,x_2 + & & & x_5 & = & 125 \\
& & \multicolumn{7}{l}{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0}
\end{array}
$$

Zusammenfassung

- Die drei Schritte im Operations Research
  - Problem, Modell, Lösung
- Typische Problemszenarien
  - Z.B. Transportproblem, Energieflussproblem, Auswahlproblem
- Standardform der linearen Programmierung
- Intuitive Lösungsverfahren
  - Systematisches Durchsuchen und Grafisches Lösen