1	2	3	4	5	6	Σ

Bitte merken:
Klausur Nr. 95

Prof. Dr. H. Opolka
TU Braunschweig

20.3.2008

Klausur zur Vorlesung "Mathematik I für Studierende der Elektrotechnik"

Name......................................Vorname.................................

Matrikelnummer..................Studiengang.....................................

Hinweise: Name, Vorname, Matrikelnummer und den Studiengang, in dem Sie studieren, eintragen! Hilfsmittel sind nicht erlaubt. Schreibpapier wird zur Verfügung gestellt. Antworten und Lösungen werden bei der Korrektur der Klausur nur dann mit Wertungspunkten versehen, wenn sie ausführlich und ausschließlich mit Methoden oder Resultaten der oben genannten Vorlesung begründet sind. Die Bezeichnungen in den nachfolgenden Klausuraufgaben sind wie in der Vorlesung. Wenn Sie eine Aufgabenstellung nicht verstehen, dann fragen Sie eine aufsichtführende Person. Im Anschluß an die Aufgabenstellungen folgen einige Fragen und Bemerkungen, die als Hilfestellungen gedacht sind und als solche bei der Bearbeitung der Klausuraufgaben verwendet werden können.

Klausuraufgaben (6 Aufgaben)

(1) Bestimmen Sie reelle Zahlen a, b, c mit $a < b < c$, so daß die unendliche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x^2)^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$, für die entweder die Ungleichungen $a < x < b$ oder die Ungleichungen $b < x < c$ erfüllt sind, konvergiert und für alle anderen $x \in \mathbb{R}$ divergiert. Berechnen Sie außerdem im Falle der Konvergenz dieser unendlichen Reihe ihren Wert in Abhängigkeit von x. (3 P)

(2) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:
(a) $\lim_{x\to 0} x\log(x^2)$ (b) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2}$ (c) $\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x^4}$ (3 P)

(3) Zeigen Sie, daß die Funktionen $g : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $g(x) := \sqrt[2]{x^3 e^{3x}\cos(x)}$ und $f : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \log(g(x))$ in allen Punkten $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ differenzierbar sind, und berechnen Sie jeweils die Ableitung von f und g in einem beliebigen Punkt $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. (4 P)

(4) Berechnen Sie die folgenden eigentlichen oder uneigentlichen Integrale:
(a) $\int_0^{\pi} x\sin(x)dx$ (b) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[2]{1-x^2}}dx$ (c) $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$ (6 P)

(5) Berechnen Sie für die folgenden Matrizen $A, B \in Mat(3 \times 3, \mathbb{C})$ jeweils die Eigenwerte sowie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten dieser Eigenwerte. Entscheiden Sie außerdem, welche dieser Matrizen über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad (4\ \mathrm{P})$$

(6) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in Mat(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in Mat(3 \times 3, \mathbb{R})$, so daß $S^t A S =: D$ eine Diagonalmatrix ist.

Bestimmen Sie außerdem den geometrischen Typ der durch die Gleichung $q_D((x_1, x_2, x_3)) = 1$ bestimmten quadratischen Fläche. (4 P)

Fragen und Bemerkungen, die als Hilfestellungen beim Bearbeiten der Klausuraufgaben gedacht sind

Für welche $q \in \mathbb{R}$ konvergiert die unendliche geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ und was ist im Falle der Konvergenz ihr Wert ?

$\lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0$. $\log(e^x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$.

Die algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes λ von $A \in Mat(n \times n, K)$ ist die Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A, und die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes λ von $A \in Mat(n \times n, K)$ ist die Dimension des Eigenraumes zu λ. Wie läßt sich im Fall $K = \mathbb{C}$ die Diagonalisierbarkeit von $A \in Mat(n \times n, K)$ mit Hilfe der algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A charakterisieren ? Aber auch ohne Kenntnis entsprechender Kriterien läßt sich die Frage, ob $A \in Mat(n \times n, K)$ diagonalisierbar ist oder nicht, besonders in den Fällen $n = 2$ oder $n = 3$, oft ziemlich schnell entscheiden.

Für $B \in Mat(n \times n, K)$ ist $q_B(x) := xBx^t$ für alle $x = (x_1, ..., x_n) \in Mat(1 \times n, K)$.

1	2	3	4	5	6	Σ

Prof. Dr. H. Opolka
TU Braunschweig

25.9.2008

Klausur zu meiner Vorlesung
"Mathematik I für Studierende der Elektrotechnik im Wintersemester 2007/2008"
(6 Klausuraufgaben)

Bitte merken: Dieses ist die Klausur mit der Nummer 22

Name.......................................**Vorname**..

Matrikelnummer.........................**Studiengang**.......................................

Hinweise: Name, Vorname, Matrikelnummer und den Studiengang, in dem Sie studieren, eintragen ! Hilfsmittel sind nicht erlaubt. Schreibpapier wird zur Verfügung gestellt. Antworten und Lösungen sind ausführlich und ausschließlich mit Methoden oder Resultaten der oben genannten Vorlesung zu begründen. Die Bezeichnungen in den nachfolgenden Klausuraufgaben sind wie in der Vorlesung; insbesondere bezeichnet i die komplexe Zahl, die in der komplexen Zahlenebene dem Punkt mit den cartesischen Koordinaten $(0,1)$ entspricht, so daß also $i^2 = -1$ gilt. Wenn Sie eine Aufgabenstellung nicht verstehen, dann fragen Sie eine aufsichtführende Person. Im Anschluß an die Aufgabenstellungen folgen einige Bemerkungen, die als Hilfestellungen gedacht sind und als solche bei der Lösung der Klausuraufgaben verwendet werden können.

Klausuraufgaben

(1)(a) Bestimmen Sie alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft $(x+iy)^2 = 1+2i$ (2 P)

(b) Bestimmen Sie alle $(r,t) \in \mathbb{R}^2$ mit den Eigenschaften $r \geq 0$, $0 \leq t < 2\pi$ und $(re^{it})^2 = 1 + i\sqrt[2]{3}$ (2 P)

(2) Bestimmen Sie ein Intervall $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$ und eine Folge von reellen Zahlen $(a_n)_{n=0,1,2,\ldots}$, so daß für alle $x \in \mathbf{I}$ die folgende Gleichung gilt:

$$\tfrac{3}{x^2-x-2} = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Bestimmen Sie außerdem die Zahl a_5. (4 P)

(3) Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die nachfolgend definierten Funktionen differenzierbar sind.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := |\sin(x)|$ (2 P)

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := e^{-1/x^4}$ für alle $x \neq 0$; $f(0) := 0$ (2 P)

(4) Berechnen Sie die folgenden (eigentlichen oder uneigentlichen) Integrale:

(a) $\int_0^4 e^{\sqrt[2]{x}/2} dx$ (2 P) (b) $\int_0^1 x \log(x) dx$ (2 P)

(5) Untersuchen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$ jeweils auf Lösbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls die entsprechende Lösungsmenge:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad (4\text{ P})$$

(6) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in Mat(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in Mat(3 \times 3, \mathbb{R})$, so daß $S^t AS =: D$ eine Diagonalmatrix ist. Bestimmen Sie außerdem den geometrischen Typ der durch die Relation $q_D(x_1, x_2, x_3) = 1$ bestimmten quadratischen Fläche (Quadrik). (4 P)

Bemerkungen, die als Hilfestellungen beim Lösen der Klausuraufgaben gedacht sind

Jede komplexe Zahl z ist von der Form $x + iy$ mit reellen Zahlen x und y, die durch z eindeutig bestimmt sind.

Für welche $q \in \mathbb{R}$ konvergiert die unendliche geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ und was ist im Falle der Konvergenz ihr Wert ?

$\log(e^x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. $\lim_{x \to 0+} x \log(x) = 0$.

Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Für $B \in Mat(n \times n, K)$ ist $q_B(x) := xBx^t$ für alle $x \in Mat(1 \times n, K)$ (oder auch $q_B(x) := x^t Bx$ für alle $x \in Mat(n \times 1, K)$).