Technische Universität Braunschweig

3. Netzwerkanalyse im Frequenzbereich

Vadim Issakov

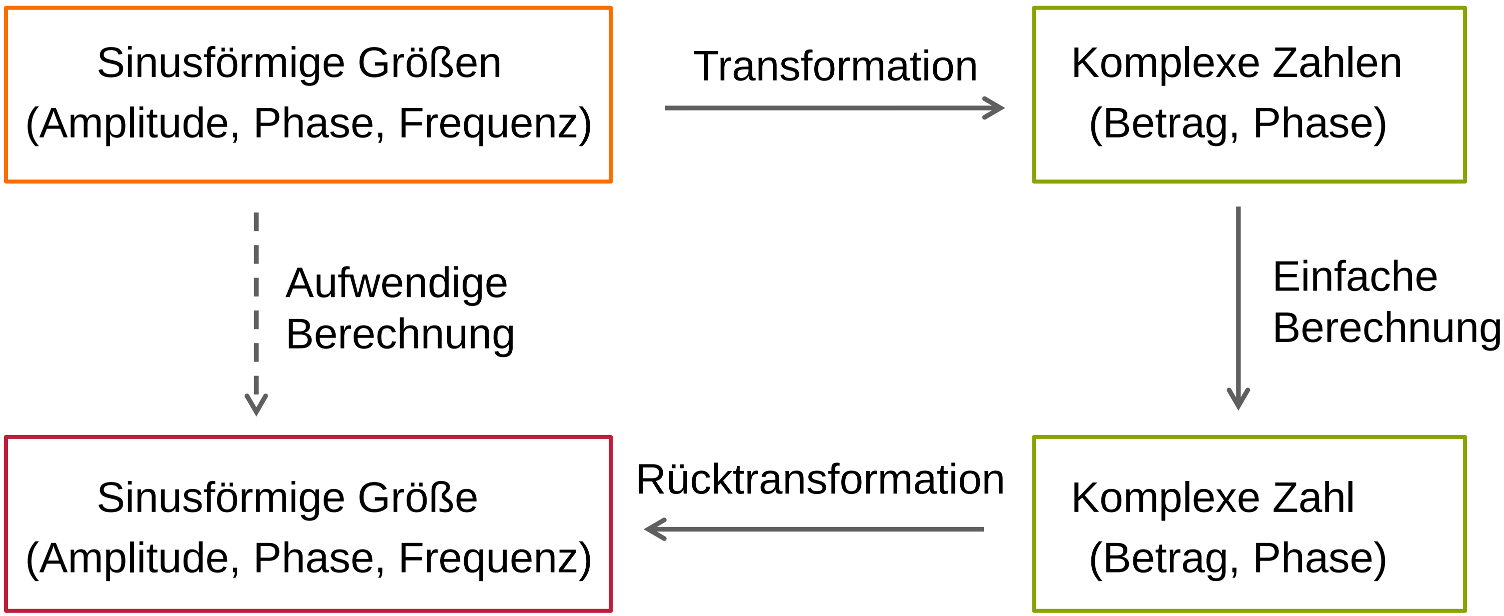
Sommersemester 2024

Netzwerkanalyse im Frequenzbereich

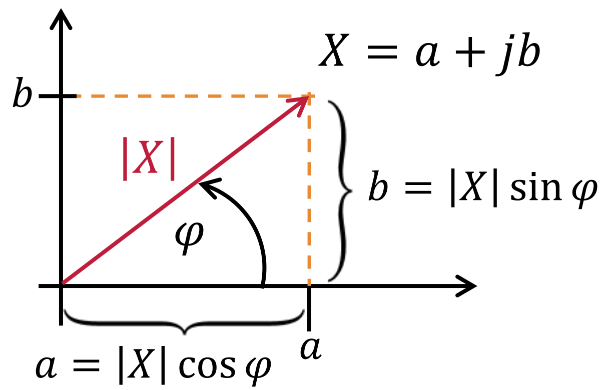
- Anregung mit harmonischen Quellen (Sinus- oder Cosinusform)
- Eingeschwungener Zustand
- Berechnung mit komplexer Wechselstromrechnung
  - Frequenzgang aufstellen
  - Darstellung durch Zeiger (Phasoren) (komplexe Größen)
- Berechnung leichter als im Zeitbereich

- Harmonische Anregung: Alle festen Quellen erzeugen Spannungen oder Ströme der Form
  $u_q(t) = U_0 \cos\left(\omega t + \varphi_q\right)$ beziehungsweise $i_q(t) = I_0 \cos\left(\omega t + \varphi_q\right)$
- Alle Spannungen und Ströme des Netzwerks haben sinus- oder cosinusförmigen Verlauf. Kreisfrequenz ω bleibt gleich. Amplitude und Phasenwinkel ändern sich

Prinzip der komplexen Wechselstromrechnung



Darstellung einer komplexen Größe



Phasor (Zeiger)

Phase (Phasenwinkel)

$$X = a + jb = \underbrace{|X| \cos\varphi}_{a=\Re\{X\}} + j\,\underbrace{|X| \sin\varphi}_{b=\Im\{X\}} = |X| e^{j\varphi}$$

Eulersche Formel

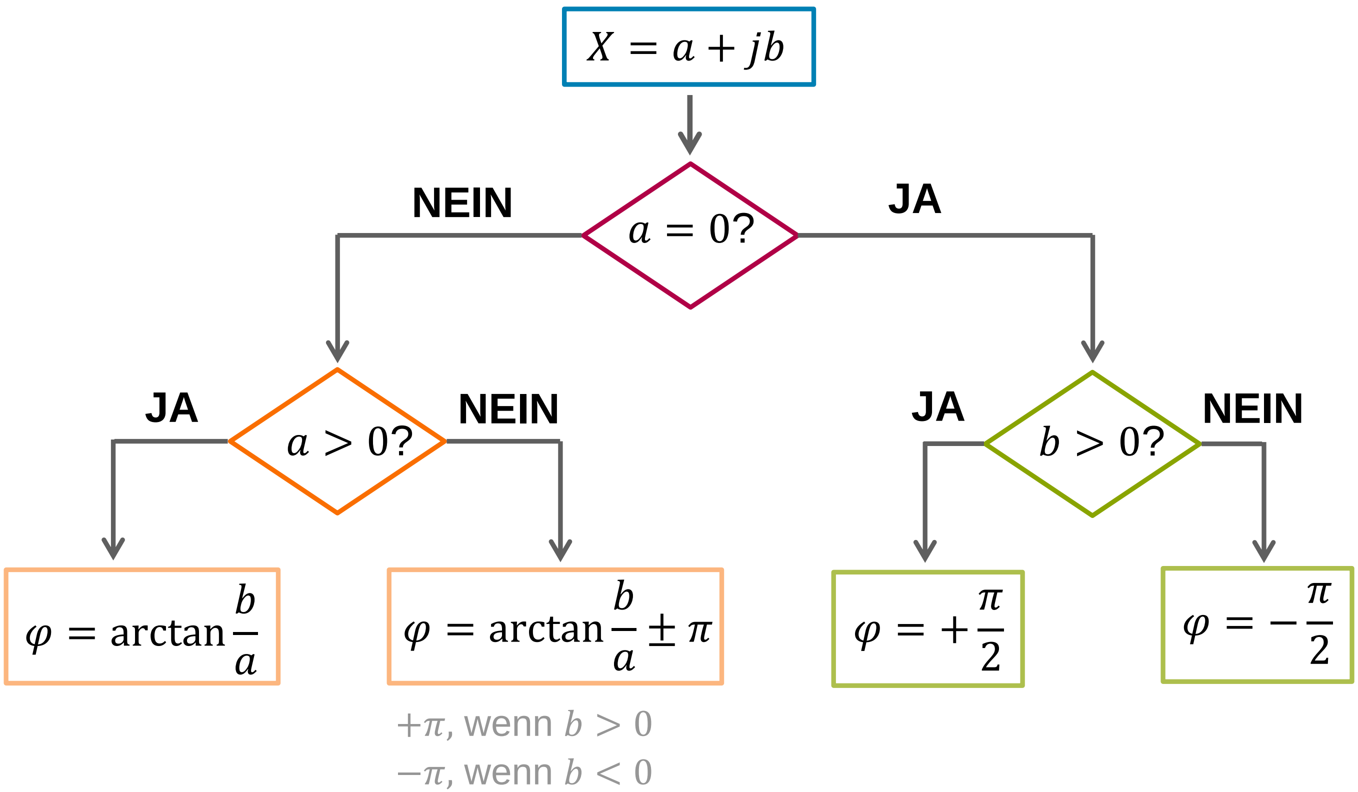
Betrag von X: $|X| = \sqrt{(\Re\{X\})^2 + (\Im\{X\})^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Bei der Bestimmung des Phasenwinkels φ ist Vorsicht geboten, da der Hauptwert des Arcustangens nur zwischen $+\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ definiert ist.

Darstellung einer komplexen Größe

Vorgehen zum Bestimmen der Phase φ des Phasors $X = a + jb$ bei Verwendung des Hauptwertes des Arcustangens

$a = \Re\{X\}$
$b = \Im\{X\}$



Ansatz der komplexen Wechselstromrechnung:

$$u(t) = \Re\{Ue^{-j\omega t}\}, \qquad i(t) = \Re\{Ie^{-j\omega t}\}$$

Phasor (Zeiger)

Dieser Ansatz führt typischerweise zu einer eindeutigen Lösung aller Netzwerkgleichungen für Quellen der Form $v(t) = \Re\{Ve^{j\omega t}\}$ oder $i(t) = \Re\{Ie^{j\omega t}\}$ mit fester Frequenz ω

Induktivitäten und Kapazitäten im Frequenzbereich

$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

Ohne Beweis:

$$\Re\{U_L e^{j\omega t}\} = L\frac{d}{dt}\Re\{I_L e^{j\omega t}\} = L\,\Re\left\{\frac{d}{dt} I_L e^{j\omega t}\right\} = L\,\Re\{I_L\, j\omega\, e^{j\omega t}\}$$

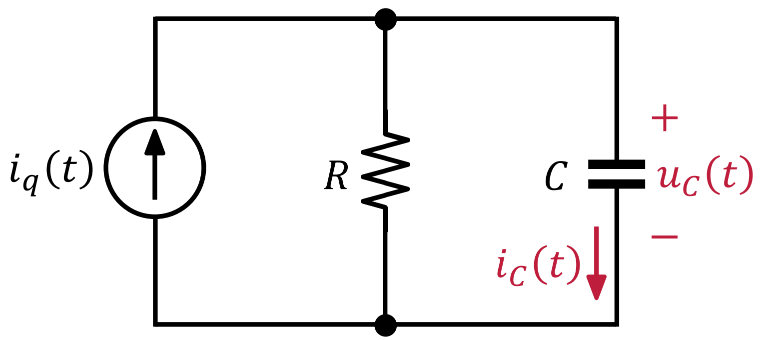
$$\boxed{U_L = j\omega L I_L}$$

Analog bei Kapazitäten

$$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}$$

$$\Re\{I_C e^{j\omega t}\} = C\frac{d}{dt}\Re\{U_C e^{j\omega t}\} = C\,\Re\left\{\frac{d}{dt} u_C e^{j\omega t}\right\} = C\,\Re\{U_C\, j\omega\, e^{j\omega t}\}$$

$$\boxed{I_C = j\omega C U_C}$$



Netzwerk mit $R > 0$, $C > 0$ und $i_q(t) = I_0 \cos(\omega_0 t)$.
Das Netzwerk sei im eingeschwungenen Zustand.

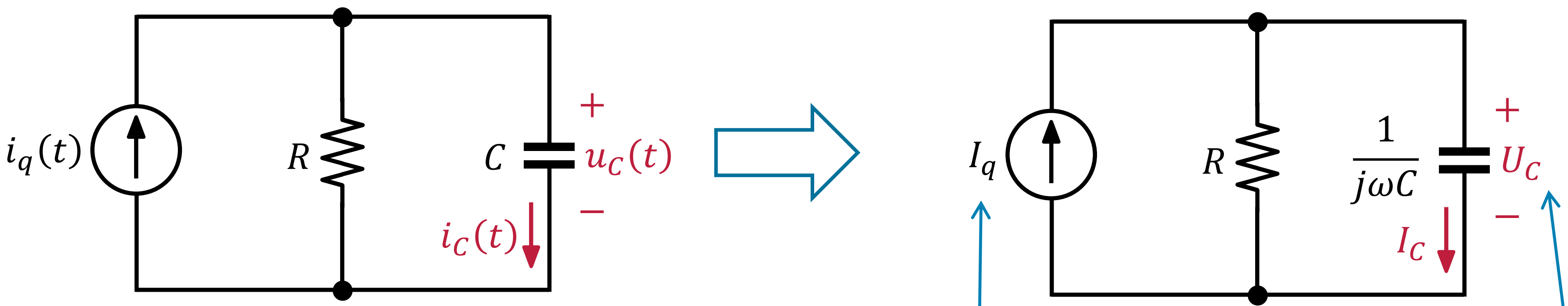
Stellen Sie $u_C(t)$ mittels reeller Cosinusfunktionen und Phasenwinkel dar, wobei für die arctan-Funktion der Hauptwert benutzt werden soll:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arctan \leq \frac{\pi}{2}$$

Netzwerkanalyse im Frequenzbereich

Zeitbereich

Frequenzbereich



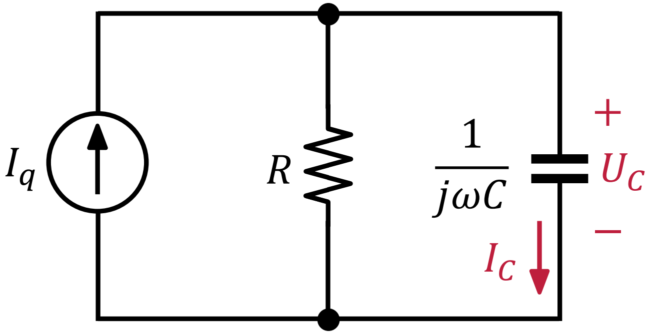
Phasor (Zeiger): $I_0 e^{j0}$

Phasor

$$i_q(t) = I_0\, cos(\omega_0 t)$$

$$i_q(t) = \underbrace{I_0}_{|I_q|} \cos(\omega_0 t + 0) \overset{\text{Euler}}{=} \Re\{I_0 e^{j(\omega_0 t + 0)}\} = \Re\left\{\underbrace{I_0 e^{j0}}_{= I_q \text{ (Phasor)}}\, e^{j\omega_0 t}\right\} = \Re\{I_0 e^{j\omega_0 t}\}$$

Komplexe Wechselstromrechnung



Aufstellen des Frequenzgangs:

Stromteiler

$$U_C = \frac{1}{j\omega C} I_C = \frac{1}{j\omega C} \frac{j\omega C}{j\omega C + \frac{1}{R}} I_q = \underbrace{\frac{R}{j\omega CR + 1}}_{= H(j\omega)} I_q$$

Frequenzgang

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{U_C}{I_q} = \frac{R}{j\omega CR + 1}$$

Definition Frequenzgang:

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{\text{Ausgangssignal}}{\text{Eingangssignal}}}$$

Harmonische Quelle $i_q(t) = I_0\, cos(\omega_0 t)$

Phase von $H(j\omega_0)$

$$u_C(t) = \Re\{U_C e^{j\omega_0 t}\} = \Re\left\{\underbrace{\frac{R}{j\omega_0 CR + 1}}_{= H(j\omega_0)} I_q e^{j\omega_0 t}\right\} = \Re\left\{\underbrace{\sqrt{\frac{R^2}{1 + (\omega_0 CR)^2}}}_{= |H(j\omega_0)|} e^{j\varphi} |I_q| e^{j\cdot 0} e^{j\omega_0 t}\right\}$$

$$= \Re\{|H(j\omega_0)| e^{j\varphi} I_0 e^{j\omega_0 t}\} = \Re\{I_0 |H(j\omega_0)| e^{j(\omega_0 t + \varphi)}\} = I_0 |H(j\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

mit $|H(j\omega_0)| = \sqrt{\frac{R^2}{1 + (\omega_0 CR)^2}}$ und $\varphi = \underbrace{\arctan\frac{0}{R}}_{=0} - \arctan\frac{\omega_0 CR}{1} = -\arctan\frac{\omega_0 CR}{1}$

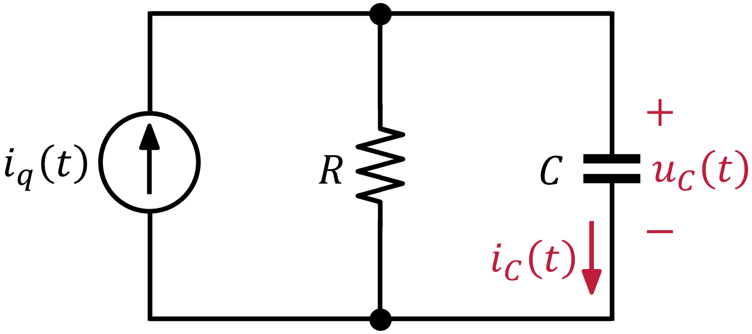
Betrag und Phase beim Frequenzgang

$$H(j\omega_0) = \frac{P(j\omega_0)}{Q(j\omega_0)} = \frac{|P(j\omega_0)| e^{j\varphi_P}}{|Q(j\omega_0)| e^{j\varphi_Q}} = \frac{\sqrt{(\Re\{P(j\omega_0)\})^2 + (\Im\{P(j\omega_0)\})^2}}{\sqrt{(\Re\{Q(j\omega_0)\})^2 + (\Im\{Q(j\omega_0)\})^2}} e^{j(\varphi_P - \varphi_Q)} = |H(j\omega_0)| e^{j\varphi}$$

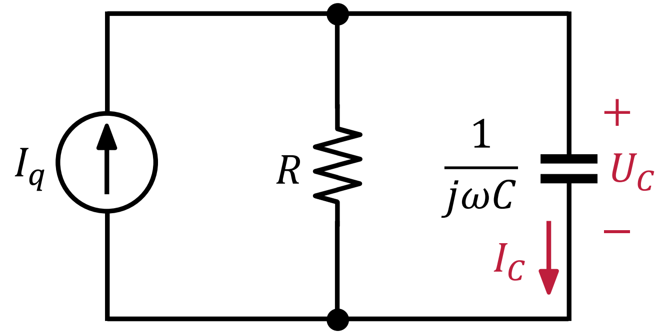
mit $\varphi = \varphi_P - \varphi_Q$

Anregung mit harmonischen Quellen $i_q(t) = I_0 \cos(\omega_0 t)$

Zeitbereich



Frequenzbereich



Für $t \to \infty$ ergibt sich nach Aufstellen und Lösen der DGL (vgl. Zeitbereich, S. 34)

$$u_C(t) = \Re\left\{ I_0 \underbrace{\frac{R}{j\omega_0 CR + 1}}_{= H(j\omega_0)} e^{j\omega_0 t} \right\}$$

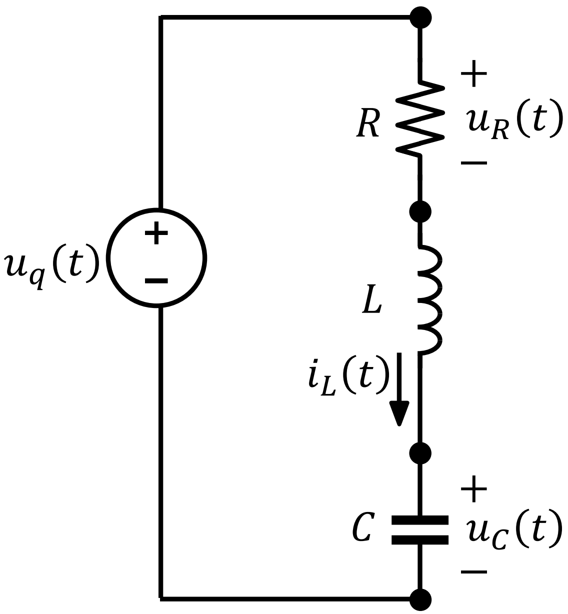
$$H(j\omega) = \frac{U_C}{I_q} = \frac{R}{j\omega CR + 1}$$

$$\Rightarrow U_C = \underbrace{\frac{R}{j\omega CR + 1}}_{H(j\omega)} I_q$$

$$u_C(t) = \Re\{H(j\omega_0) I_0 e^{j\omega_0 t}\} = \Re\{|H(j\omega_0)| I_0 e^{j(\omega_0 t + \varphi)}\} = I_0 |H(j\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

mit $|H(j\omega_0)| = \sqrt{\frac{R^2}{1+(\omega_0 CR)^2}}$ und $\varphi = -\arctan\frac{\omega_0 CR}{1}$

Netzwerk zweiter Ordnung

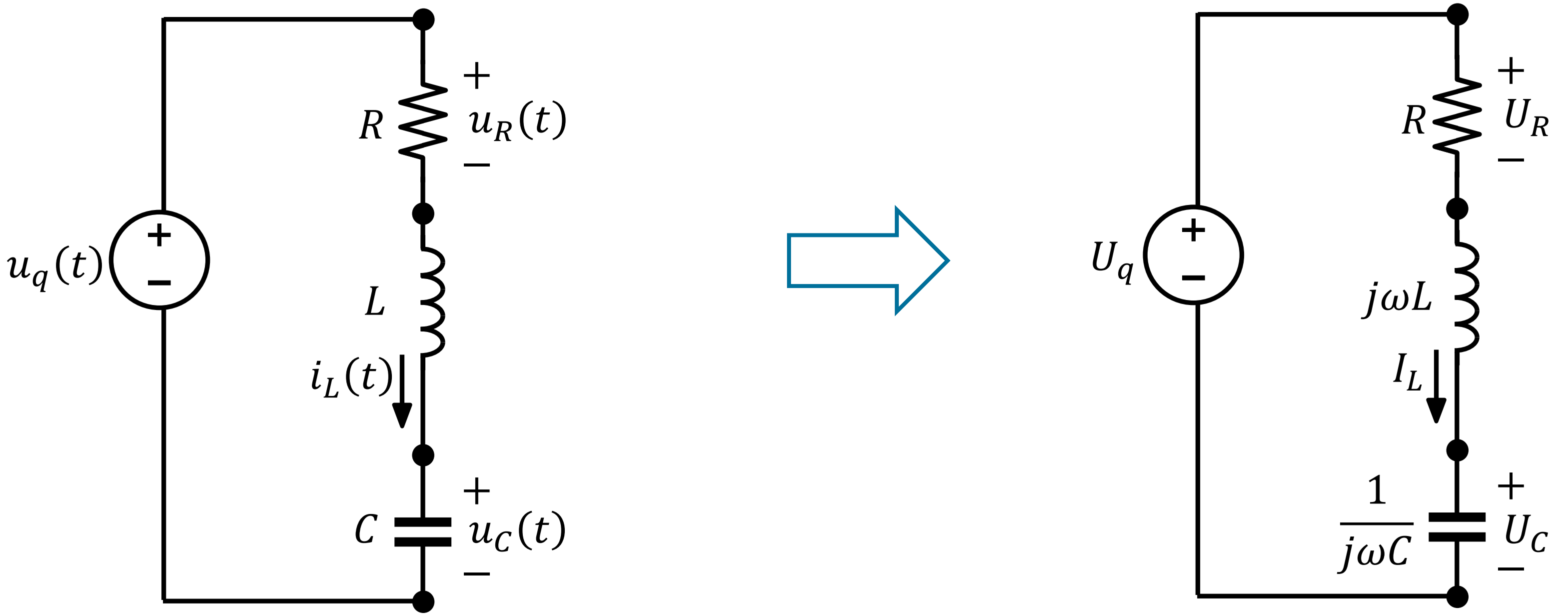


Netzwerk mit $R > 0, L > 0, C > 0$ und $u_q(t) = U_0 \cos(\omega_0 t)$.

Es gelte: $1 < \omega_0^2 LC$

Das Netzwerk sei im eingeschwungenen Zustand.

- Bestimmen Sie $H(j\omega) = \frac{I_L}{U_q}$.
- Bestimmen Sie die Polstellen von $H(j\omega)$. Für welches R kommt es zu einer Resonanz?
- Stellen Sie $i_L(t)$ mittels reeller Cosinusfunktionen und Phasenwinkel dar, wobei für die arctan-Funktion der Hauptwert verwendet werden soll: $\frac{\pi}{2} \leq \arctan \leq \frac{\pi}{2}$
- Bestimmen Sie die Resonanzfrequenz.

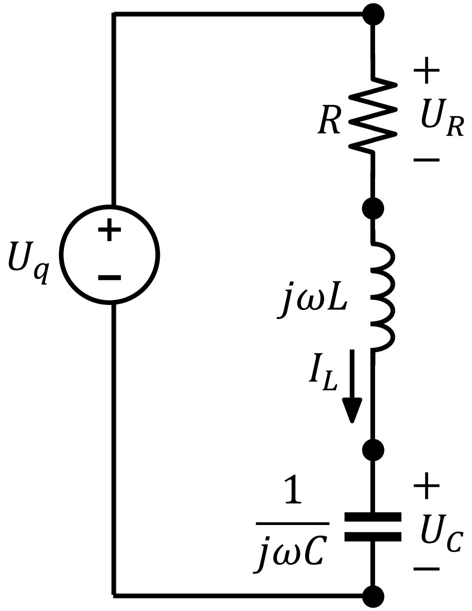


Frequenzgang:

$$H(j\omega) = \frac{I_L}{U_q} = \frac{1}{j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega C}{(j\omega)^2 LC + j\omega CR + 1}$$

Netzwerk zweiter Ordnung

Bestimmung der Pole



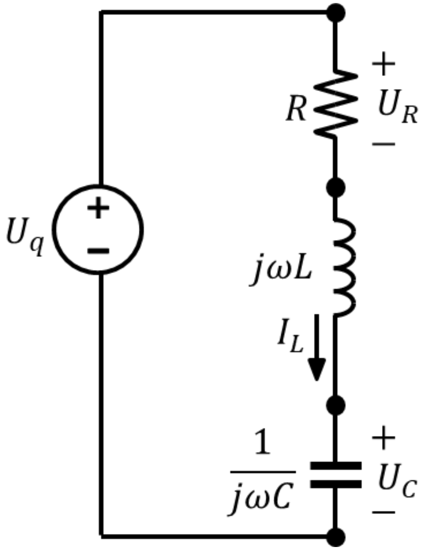
$$H(j\omega) = \frac{I_L}{U_q} = \frac{j\omega C}{(j\omega)^2 LC + j\omega CR + 1}$$

Polstellen: $s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$

Pole werden komplex und es kommt zu einer Resonanz, falls:

$$\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC} \Rightarrow R^2 < \frac{4L}{C} \Rightarrow \boxed{R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

- Polstellen des Frequenzgangs ≙ natürliche Frequenzen des Netzwerks
- Netzwerk hat zwei natürliche Frequenzen
- Netzwerk ist asymptotisch stabil (Realteil $s_{1,2} < 0$)



$$\boxed{H(j\omega) = \frac{I_L}{U_q} = \frac{j\omega C}{(j\omega)^2 LC + j\omega CR + 1}}$$

$$i_L(t) = \Re\{I_L e^{j\omega_0 t}\} = \Re\{H(j\omega_0) U_q e^{j\omega_0 t}\}$$

$$= \Re\{|H(j\omega_0)| U_0 e^{j(\omega_0 t + \varphi)}\}$$

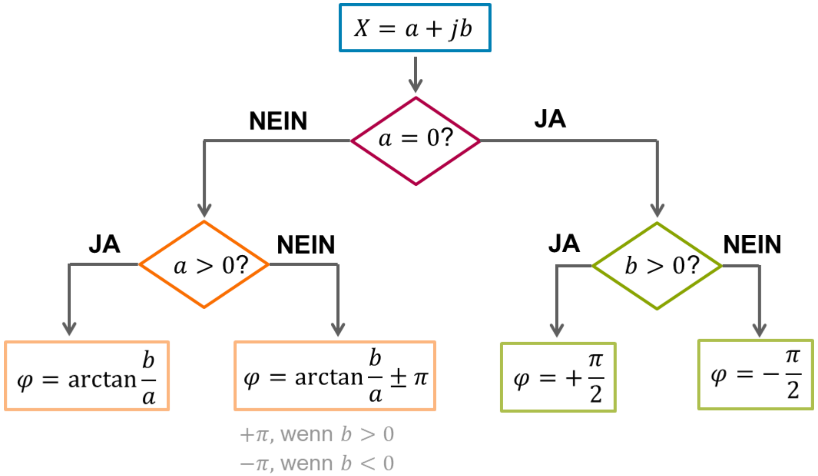
$$= U_0\ |H(j\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

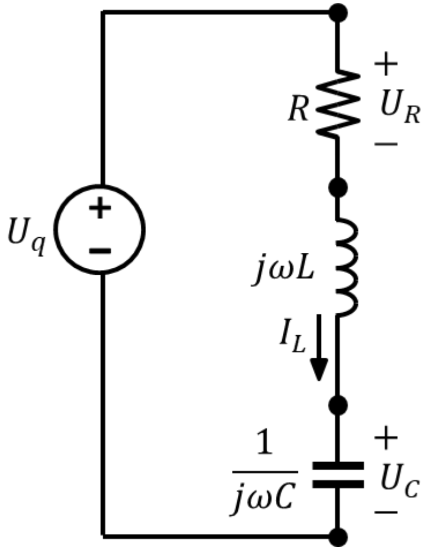
mit

$$|H(j\omega_0)| = \frac{\omega_0 C}{\sqrt{\left(1 - \omega_0^2 LC\right)^2 + \omega_0^2 C^2 R^2}}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega_0 CR}{1 - \omega_0^2 LC} - \pi$$

$1 < \omega_0^2 LC$





$$|H(j\omega)| = \frac{\omega C}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}}$$

Bei Resonanzfrequenz hat $|H(j\omega)|$ lokales Maximum

$$\Rightarrow \frac{d|H(j\omega)|}{d\omega} = 0$$

$$\frac{d|H(j\omega)|}{d\omega} = \frac{C\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2} - \frac{\omega C}{2}\left(\left(1-\omega^2 LC\right)^2 + \omega^2 C^2 R^2\right)^{-1/2}\left(2\left(1-\omega^2 LC\right)(-2\omega LC) + 2\omega C^2 R^2\right)}{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2} = 0$$

$$\Rightarrow \left(1-\omega^2 LC\right)^2 + \omega^2 C^2 R^2 = \omega\left(-2\omega LC + 2\omega^3 L^2 C^2 + \omega C^2 R^2\right)$$

$$\Rightarrow 1 = \omega^4 L^2 C^2 \quad \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Netzwerkanalyse im Frequenzbereich

- Einfache Berechnung (weniger aufwendig als im Zeitbereich)
- Voraussetzung: eingeschwungener Zustand
- Voraussetzung: harmonische Anregung
- Transienter Vorgang kann nicht berechnet warden
- Nur bei linearen, zeitinvarianten Netzwerken
- Superposition möglich

Anhang

Anhang

- A und B seien komplexe Größen, ω: Kreisfrequenz.
  Unter diesen Bedingungen impliziert $\Re\{Ae^{j\omega t}\} = \Re\{Be^{j\omega t}\}$ für alle t, dass $A = B$ ist.
- Beweis:
  Annahme: $\Re\{Ae^{j\omega t}\} = \Re\{Be^{j\omega t}\}$ für alle t.
  Zu zeigen ist, dass die komplexen Größen A und B gleich sind.
  - Darstellung von A und B in kartesischen Koordinaten: $A = A_r + jA_i, B = B_r + jB_i$
  - Definition einer komplexen Größe: Wenn sowohl die Realteile zweier komplexer Größen als auch die Imaginärteile zweier komplexer Größen gleich sind, dann sind die komplexen Größen gleich.
  - Zu zeigen ist also, dass sowohl die Real- als auch die Imaginärteile von A und B übereinstimmen.

Anhang

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{j\omega t} = 1 \Rightarrow \Re\{A\} = \Re\{B\}$$

$$\Leftrightarrow \Re\{A_r + jA_i\} = \Re\{B_r + jB_i\}$$

$\Rightarrow A_r = B_r$ Die Realteile von A und B stimmen überein.

$$t = \frac{\pi}{2\omega} \quad \Rightarrow \quad \Re\left\{Ae^{j\omega\pi/(2\omega)}\right\} = \Re\left\{Be^{j\omega\pi/(2\omega)}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \Re\left\{Ae^{j\pi/2}\right\} = \Re\left\{Be^{j\pi/2}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \Re\{jA\} = \Re\{jB\}$$

$$\Leftrightarrow \Re\{j(A_r + jA_i)\} = \Re\{j(B_r + jB_i)\}$$

$\Rightarrow A_i = B_i$ Die Imaginärteile von A und B stimmen überein.

Da $A_r = B_r$ und $A_i = B_i$, ist $A = B$ (Definition einer komplexen Größe).