Technische Universität Braunschweig

Netzwerke

1. Einführung und Grundlagen

Vadim Issakov

Sommersemester 2024

Einführung - Formalia

- **Vorlesung:** Dienstag 13:15 – 15:45 Uhr, SN 23.1
  Prof. V. Issakov

- **Übung:** Donnerstag 11:30 – 13:00 Uhr, SN 23.1
  Dr. A. Kuligk

- **Kleine Übung:** Termine: Mo. 11:30 – 13:00 Uhr, Mo. 13:15 – 14:45 Uhr, Mo. 15:00 – 16:30 Uhr, Fr. 9:45 – 11:15 Uhr, Beginn: 13.05. Anmeldung in Stud.IP ab dem 22.04.

- **Sprechstunde:** wird noch bekannt gegeben

Einführung - Formalia

- **Upload der Folien und Aufgabenstellungen in Stud.IP**
- Prüfungsleistung: Klausur, 150 Minuten
  Plus-Klausur:
  - Freiwillige Hausaufgaben
    Insgesamt max. 15 zusätzliche Punkte bei der Klausur (pro Hausaufgabe max. 5 Punkte)
  - Anrechnung bei Klausur im SoSe 24 und WiSe 24/25
- **Studienleistung**:
  - Regelmäßige Teilnahme an den kleinen Übungen (insg. 8 Termine, Anwesenheit an mindestens 6 von 8)
- Anmeldung zur Prüfungsleistung!

Einführung - Formalia

Modul Netzwerke

Prüfungsleistung

(Anmeldung in TUconnect)

Studienleistung

(wird bekannt gegeben)

Einführung - Literatur

- Davies, Artice M., *Linear Circuit Analysis*
- Desoer, Charles A., Kuh, Ernest S., *Basic Circuit Theory*, McGraw-Hill Inc 1969
- Schmidt, , Lorenz-Peter, Schaller, Gerd, Martius, Siegfried, *Grundlagen Elektrotechnik. Netzwerke*, 2. Aufl. Pearson Studium, 2014
- Unbehauen, R., *Grundlagen der Elektrotechnik 1*, Springer-Verlag

Einführung – Inhalt der Vorlesung

Themen der Vorlesung unter anderem:

- Bauelemente; ideale und reale Quellen; Ersatzquellen; Innenwiderstand
- Superpositionsverfahren; Kirchhoffsche Gleichungen
- Graphentheorie; Quellenverschiebung
- Knotenpotential- und Maschenimpedanzverfahren; modifiziertes Knotenpotentialverfahren
- Gesteuerte Quellen
- Nichtlineare Bauelemente; DC-Arbeitspunkt; Groß- und Kleinsignal
- Operationsverstärker; Grundschaltungen OPAMPs
- Netzwerke erster und höherer Ordnung im Zeitbereich
- Laplace-Transformation
- Stabilität und Passivität eines Netzwerks
- Zweitore; Reziprozität, Netzwerktheoreme
- Transformator

- **Motivation**
- Grundlagen (Schreibweise, elementare ideale Bauelemente, Zählpfeilkonvention)
- Ideale und reale Quellen
- Superpositionsverfahren
- Topologische Grundbegriffe
- Kirchhoffsche Gleichungen
- Netzwerkeigenschaften, lineare, zeitinvariante Zweipole

Motivation

Link zur Einstimmung auf die Vorlesung:

https://www.youtube.com/watch?v=SwPGxwBZw6I

1. Einführung und Grundlagen

- Motivation
- **Grundlagen** (Schreibweise, elementare ideale Bauelemente, Zählpfeilkonventionen)
- Ideale und reale Quellen
- Superpositionsverfahren
- Topologische Grundbegriffe
- Kirchhoffsche Gleichungen
- Netzwerkeigenschaften, lineare, zeitinvariante Zweipole

Schreibweise

- Zeitabhängige Größen:

  $u(t), i(t)$ (kleine Buchstaben)

- Phasoren oder Gleichstrom-/spannungsgrößen:

  U, I (große Buchstaben)

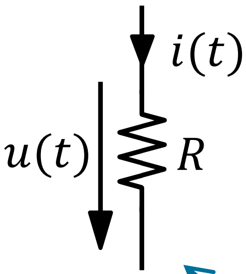
- Vektor: $\underline{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

- Matrix: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

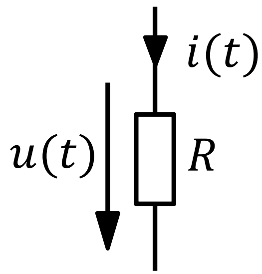
Grundlagen - Elementare ideale Bauelemente

Linearer, zeitinvarianter Widerstand R

<u>Symbol</u>



oder



In der Vorlesung verwendet

<u>Gleichung</u>

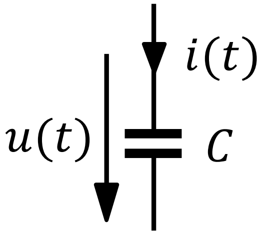
$$u(t) = R \cdot i(t)$$

Gleichung im Bereich der komplexen Wechselstromrechnung (KWR):

$$U = R \cdot I$$

Lineare, zeitinvariante Kapazität C

<u>Symbol</u>



<u>Gleichung</u>

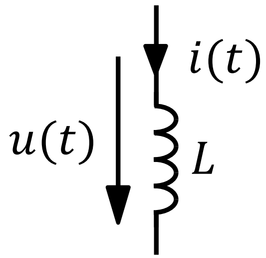
$$i(t) = C \cdot \frac{d}{dt} u(t)$$

Gleichung im Bereich der KWR:

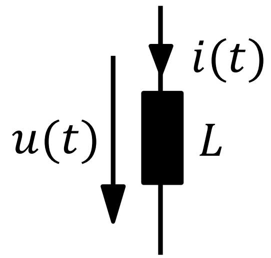
$$I = j\omega C U$$

Lineare, zeitinvariante Induktivität L

Symbol



oder



In der Vorlesung verwendet

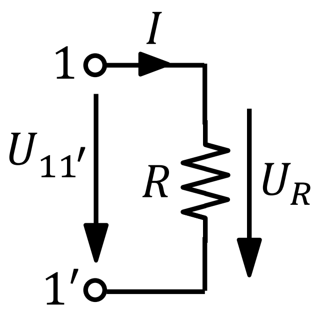
Gleichung

$$u(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i(t)$$

Gleichung im Bereich der KWR: $U = j\omega L I$

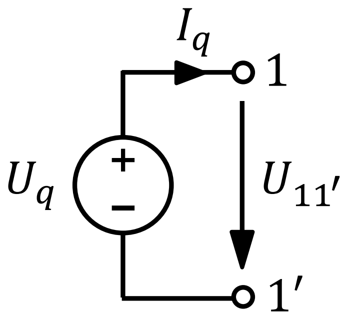
Grundlagen - Zählpfeilkonventionen

Verbraucherzählpfeilsystem



Richtung von Strom- und
Spannungszählpfeil gleich

Generatorzählpfeilsystem



Richtung von Strom- und Spannungs-
zählpfeil entgegengesetzt

Technische Stromflussrichtung entspricht der des Verbraucherzählpfeilsystems.

Beachte: Elektronenfluss dann entgegengesetzt Stromfluss

In der Vorlesung wird das Verbraucherzählpfeilsystem verwendet.

1. Einführung und Grundlagen

- Motivation
- Grundlagen (Schreibweise, elementare ideale Bauelemente, Zählpfeilkonventionen)
- **Ideale und reale Quellen**
- Superpositionsverfahren
- Topologische Grundbegriffe
- Kirchhoffsche Gleichungen
- Netzwerkeigenschaften, lineare, zeitinvariante Zweipole

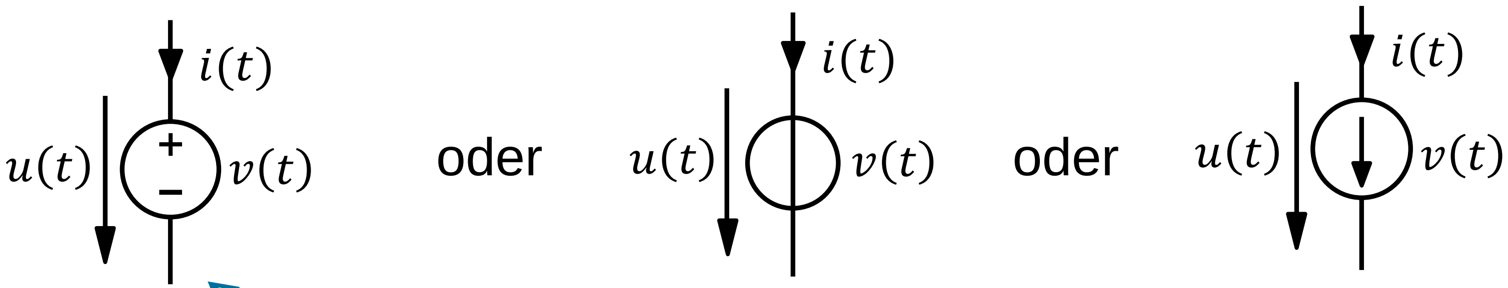
Ideale und reale Quellen

- Quellen stellen Strom und Spannung zur Verfügung
- Ideale Quellen legen eines von beidem fest
  - Stromquelle: Strom
  - Spannungsquelle: Spannung
- In der Realität nicht erfüllbar
- Für die Betrachtung elektronischer Netzwerke trotzdem notwendig

Ideale und reale Quellen

Ideale Spannungsquelle

Symbol



In der Vorlesung verwendet

Gleichung

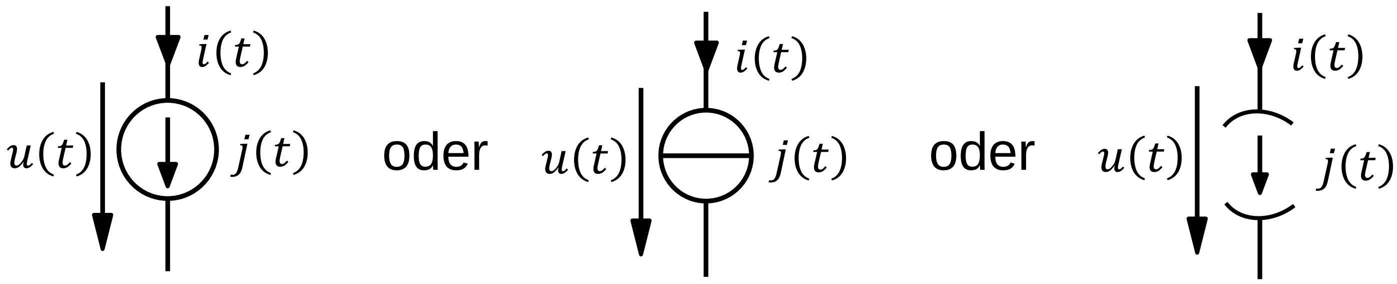
$u(t) = v(t)$

$v(t)$: bekannt und vorgegeben

$i(t)$: ergibt sich aus äußerer Beschaltung

Ideale Stromquelle

Symbol



In der Vorlesung verwendet

Gleichung

$i(t) = j(t)$

$j(t)$: bekannt und vorgegeben

$u(t)$: ergibt sich aus äußerer Beschaltung

Ideale und reale Quellen

	Ideale Quelle	Reale Quelle
Stromquelle	R_q ist ∞ groß gelieferter Strom unabhän-gig von R_L	Zusammensetzung aus idealer Stromquelle und parallel geschal-tetem $R_q < \infty$
Spannungsquelle	$R_q = 0$ abgegebene Spannung unabhängig von R_L	Zusammensetzung aus idealer Spannungsquelle und in Reihe geschaltetem $R_q > 0$

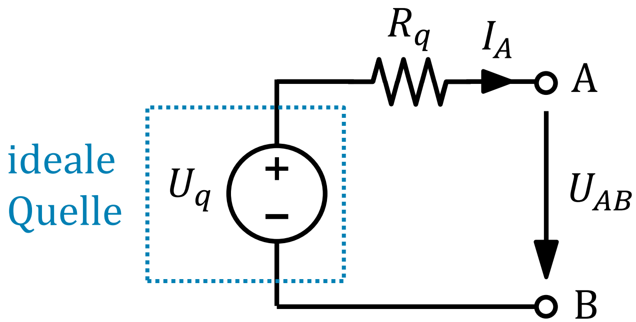
R_q: Innenwiderstand

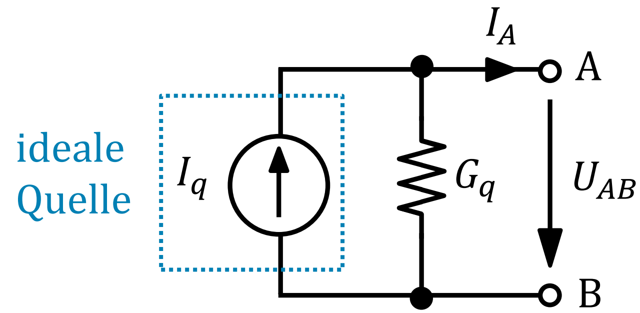
R_L: Lastwiderstand (Last)

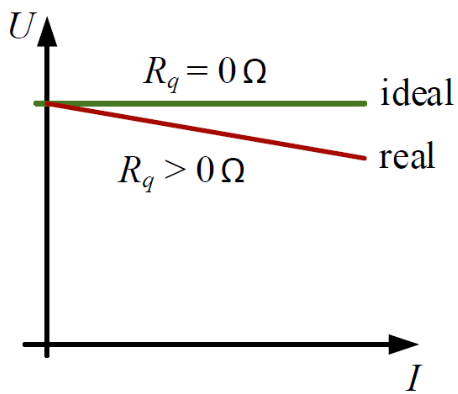
Zur Berechnung eines Innenwiderstandes können Stromquellen durch einen Leerlauf (offene Klemme) und Spannungsquellen durch einen Kurzschluss ersetzt werden.

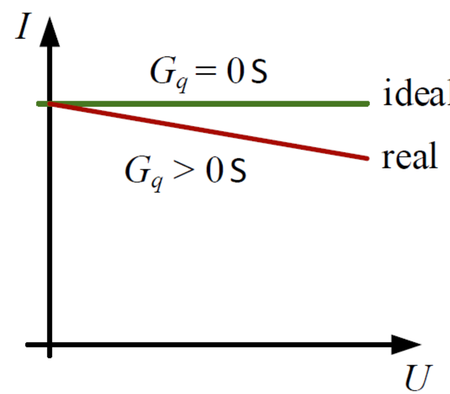
Reale Spannungs- und Stromquelle

Es gilt $G_q = \frac{1}{R_q}$





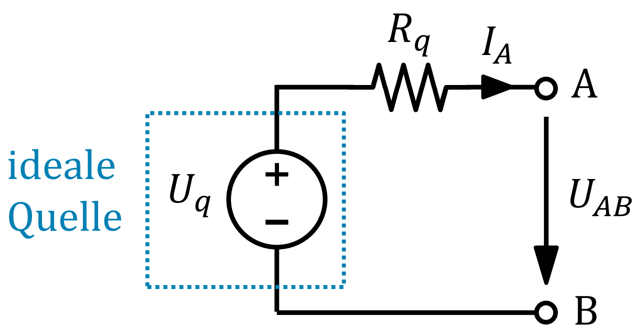


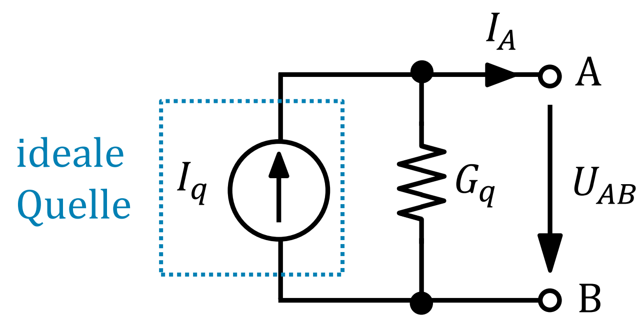


- Reale Spannungsquelle: R_q möglichst klein (⇒ Leitwert groß)
- Reale Stromquelle: R_q möglichst hoch (⇒ Leitwert klein)

Reale Spannungs- und Stromquelle

Es gilt $G_q = \frac{1}{R_q}$





$$U_{AB} = U_q - R_q I_A$$

$$\Rightarrow I_A = \frac{U_q - U_{AB}}{R_q} = \frac{U_q}{R_q} - \frac{U_{AB}}{R_q}$$

$$= \underbrace{G_q U_q}_{=:I_q} - G_q U_{AB}$$

$$I_A = I_q - G_q U_{AB}$$

$$\Rightarrow U_{AB} = \frac{I_q - I_A}{G_q} = \frac{I_q}{G_q} - \frac{I_A}{G_q}$$

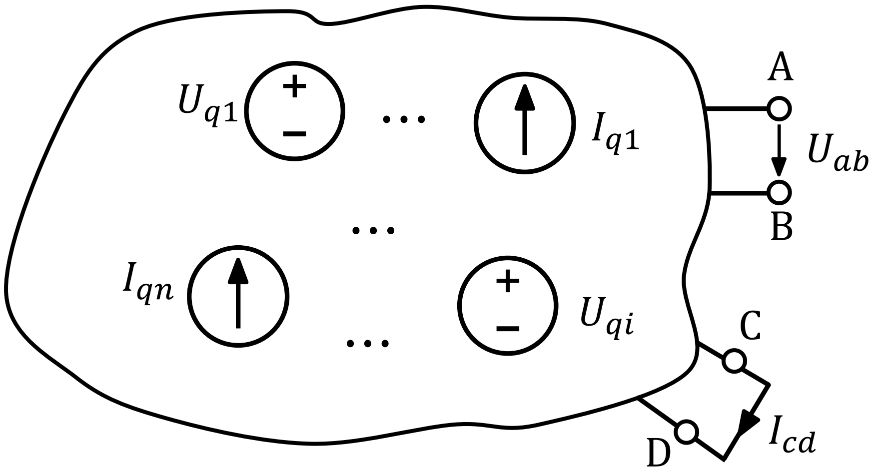
$$= \underbrace{R_q I_q}_{=:U_q} - R_q I_A$$

- Reale Strom- und Spannungsquellen ineinander umrechenbar

1. Einführung und Grundlagen

- Motivation
- Grundlagen (Schreibweise, elementare ideale Bauelemente, Zählpfeilkonventionen)
- Ideale und reale Quellen
- **Superpositionsverfahren**
- Topologische Grundbegriffe
- Kirchhoffsche Gleichungen
- Netzwerkeigenschaften, lineare, zeitinvariante Zweipole

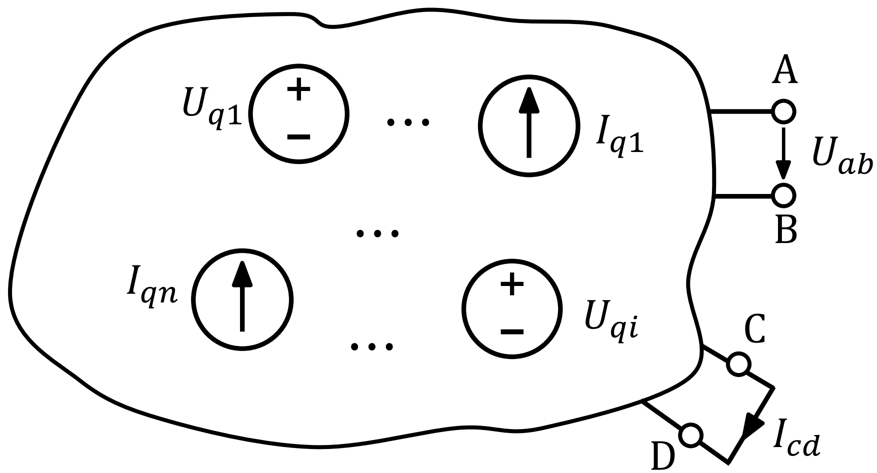
Superpositionsverfahren



Superpositionsverfahren (Überlagerungsverfahren):

- Die Gesamtwirkung ist die Summe (Superposition) der Einzelwirkungen des Netzwerks.
- vereinfacht die Analyse linearer Netzwerke mit mehreren Quellen
- ergibt sich aus der Linearität eines Netzwerks

Superpositionsverfahren



$$U_{ab} = a_1 U_{q1} + a_2 U_{q2} + \cdots + a_n U_{qn} + Z_1 I_{q1} + Z_2 I_{q2} + \cdots + Z_i I_{qi}$$

$$I_{cd} = Y_1 U_{q1} + Y_2 U_{q2} + \cdots + Y_n U_{qn} + b_1 I_{q1} + b_2 I_{q2} + \cdots + b_i I_{qi}$$

a_i Spannungsverstärkung von U_{qi} nach U_{ab}

Z_i Transimpedanz zwischen I_{qi} nach U_{ab}

Y_i Transadmittanz zwischen U_{qi} nach I_{cd}

b_i Stromverstärkung von I_{qi} nach I_{cd}

Superpositionsverfahren

Zweigspannung $U_z \Leftarrow$ Wirkung von drei Quellspannungen U_{q1}, U_{q2}, U_{q3}

$$U_z = a_1 U_{q1} + a_2 U_{q2} + a_3 U_{q3}$$

a_1, a_2, a_3: vom Netzwerk abhängende Spannungsverstärkungen

Die Zweigspannung U_z ergibt sich aus drei voneinander unabhängigen Anteilen

$$U_{z1} = a_1 U_{q1} \quad , \quad U_{z2} = a_2 U_{q2} \quad \text{und} \quad U_{z3} = a_3 U_{q3}$$

für die gilt

$$U_z = U_{z1} + U_{z2} + U_{z3}$$

U_{z1}, U_{z2}, U_{z3}: unabhängig voneinander, einzeln bestimmt

Die Gesamtwirkung ist die Summe (Superposition) der Einzelwirkungen.

Interpretation – Schlussfolgerung:

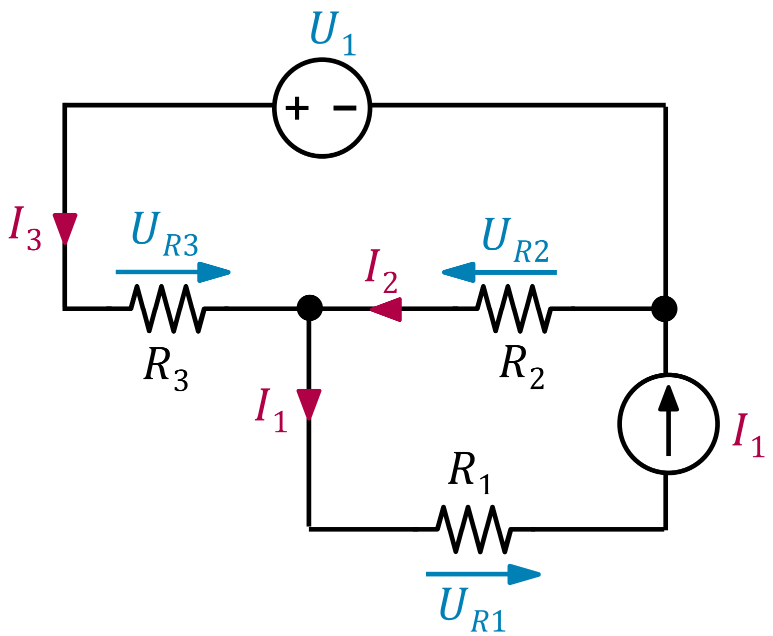
- *Da sich die Gesamtwirkung durch die lineare Überlagerung (Superposition) der Einzelwirkungen ergibt, können die Einzelwirkungen unabhängig voneinander bestimmt werden.*
- Die Lösung der Teilprobleme ist dabei in der Regel einfacher oder übersichtlicher als die direkte Lösung des Gesamt-problems.

Vorgehensweise beim Superpositionsverfahren:

1. Alle (ungesteuerten) Quellen = 0
   - Spannungsquelle → Kurzschluss ($R_q = 0\ \Omega$).
   - Stromquelle → Leerlauf ($G_q = 0\ S$).
2. Teilwirkungen der Quellen bestimmen
   - Eine Quelle ≠ 0, die anderen = 0.
   - Die Teilwirkung ergibt sich für die Anregung des Netzwerks mit dieser einen aktuell betrachteten Quelle.
3. Gesamtwirkung = Summe der Teilwirkungen.

Beispiel 1: Bestimmung der Spannung U_{R2}

a) Ohne Superposition



$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$U_{R2} = U_{R3} - U_1 = R_3 \cdot I_3 - U_1$$
$$= R_3 \cdot (I_1 - I_2) - U_1$$

$$\Leftrightarrow R_2 \cdot I_2 = R_3 \cdot (I_1 - I_2) - U_1$$

$$\Leftrightarrow I_2 \cdot (R_2 + R_3) = I_1 \cdot R_3 - U_1$$

$$\Leftrightarrow I_2 = \frac{I_1 \cdot R_3 - U_1}{(R_2 + R_3)}$$

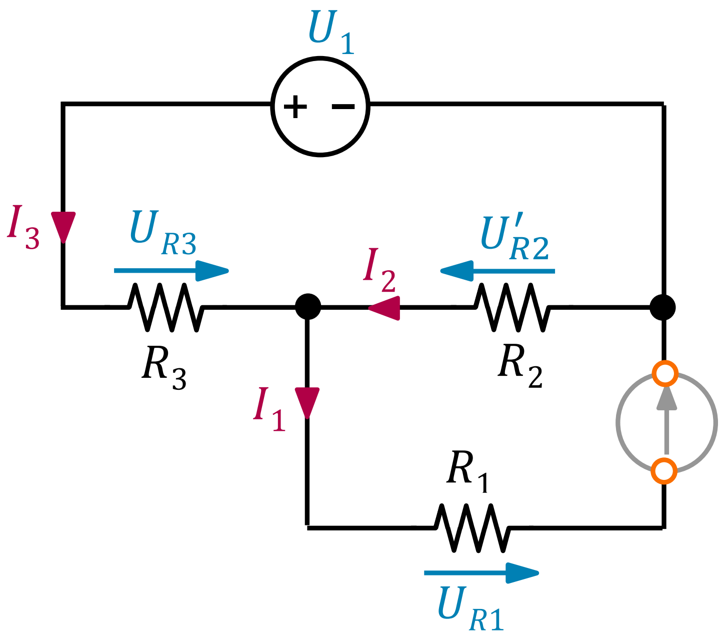
Daraus ergibt sich für U_{R2}:

$$U_{R2} = R_2 \cdot I_2 = \frac{I_1 \cdot R_2 \cdot R_3 - U_1 \cdot R_2}{(R_2 + R_3)}$$

Beispiel 1: Bestimmung der Spannung U_{R2}

b) Mit Superposition

i) $U_1 \neq 0, I_1 = 0$



$I_1 = 0\ \mathrm{A}$

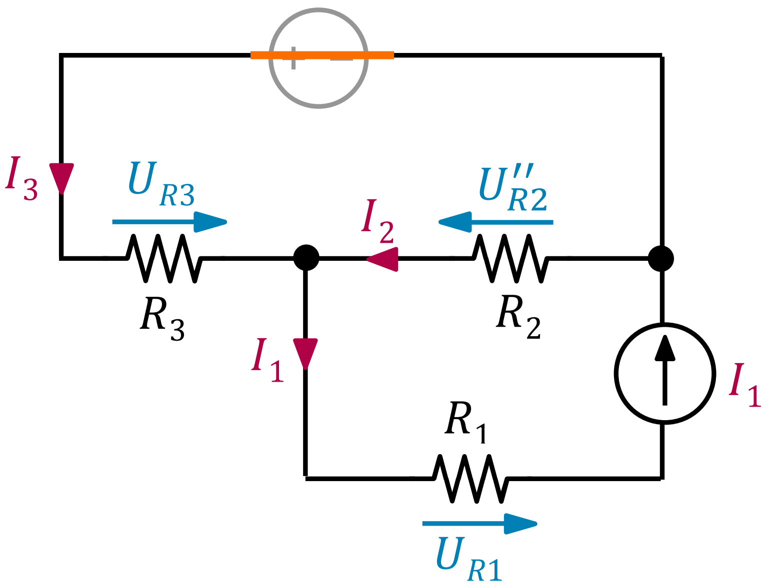
$I_2 = -I_3$ (Spannungsteiler anwendbar)

$$\Rightarrow U'_{R2} = -U_1 \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

Beispiel 1: Bestimmung der Spannung U_{R2}

b) Mit Superposition

ii) $U_1 = 0, I_1 \neq 0$



$$U''_{R2} = R_2 I_2 = R_2 I_1 \cdot \frac{R_3}{(R_2 + R_3)}$$ (Stromteiler)

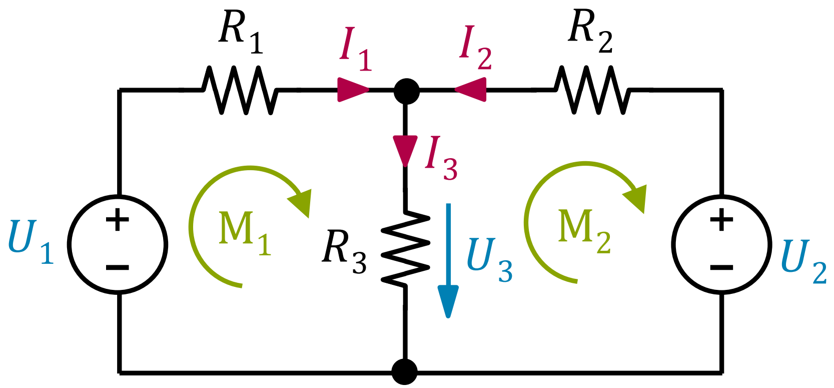
iii) Superposition

$$U_{R2} = U'_{R2} + U''_{R2}$$

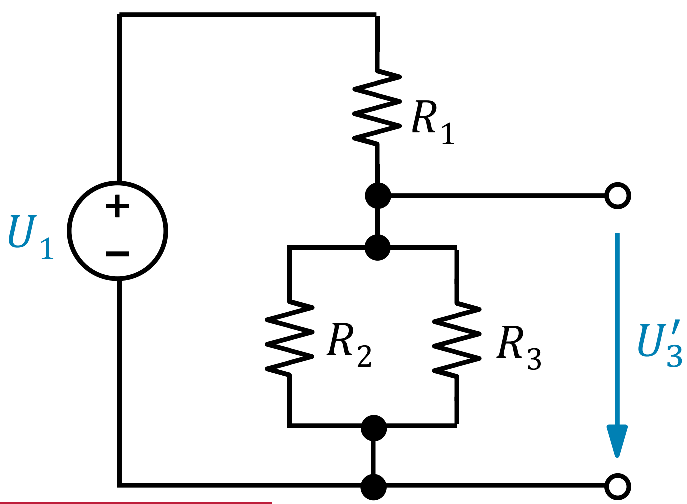
$$= -U_1 \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} + I_1 \cdot R_2 \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3}$$

$$= \frac{R_2}{R_2 + R_3}(-U_1 + R_3 \cdot I_1)$$

Beispiel 2: Bestimmung der Spannung U_3 mit Superposition



1) $U_1 \neq 0, U_2 = 0$

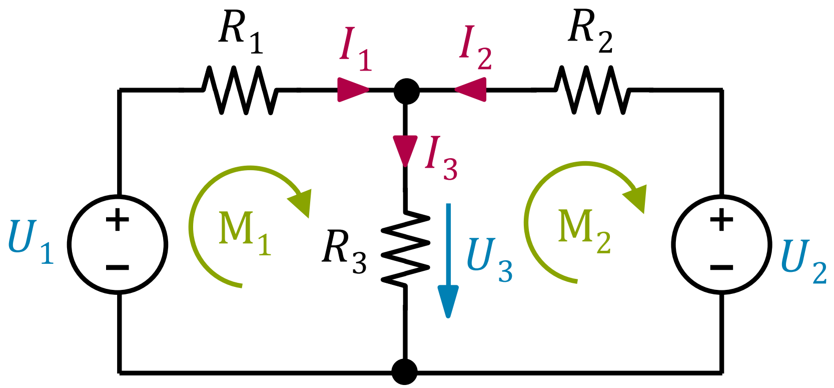


$$U_3' = \frac{\frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}} U_1$$

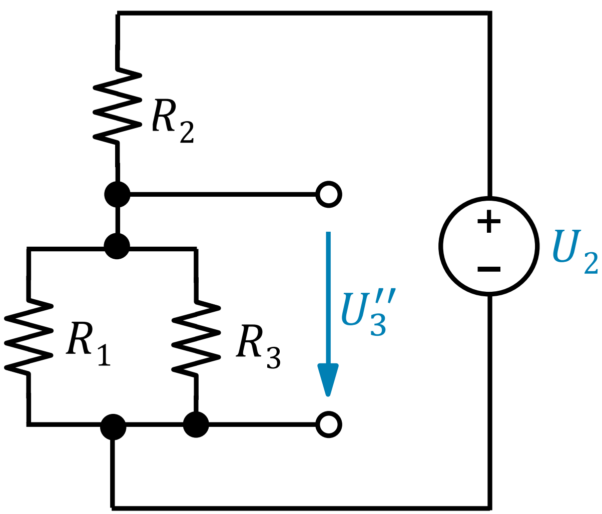
$$= \frac{R_2 \cdot R_3 \cdot U_1}{R_1 \cdot (R_2 + R_3) + R_2 \cdot R_3}$$

Superpositionsverfahren

Beispiel 2: Bestimmung der Spannung U_3 mit Superposition



2) $U_1 = 0, U_2 \neq 0$



$$U_3'' = \frac{R_1 \cdot R_3 \cdot U_2}{R_1 \cdot R_2 + R_3(R_1 + R_2)}$$

3) Superposition

$$U_3 = U_3' + U_3'' = \frac{R_1 \cdot R_3 \cdot U_2 + R_2 \cdot R_3 \cdot U_1}{R_1 \cdot R_2 + R_3(R_1 + R_2)}$$

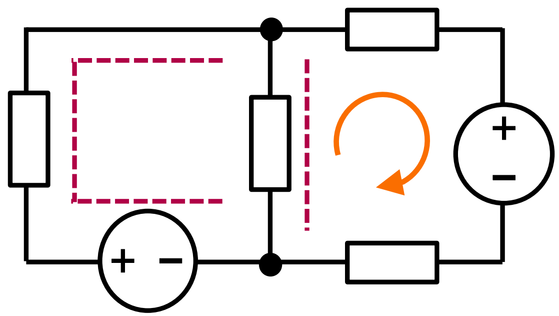
Zusammenfassung:

- Vereinfachung der Analyse **linearer** Netzwerke im **eingeschwungenen Zustand**
- Betrachtung immer nur einer der unabhängigen anregenden Quellen
- Lösung durch Überlagerung (Addition der Teilergebnisse)
- **Achtung:** Superposition nur bei Größen, deren Ursache und Wirkung in einem linearen Zusammenhang stehen
- Superposition nicht anwendbar bei nichtlinearen Größen (z.B. Leistung)

1. Einführung und Grundlagen

- Motivation
- Grundlagen (Schreibweise, elementare ideale Bauelemente, Zählpfeilkonventionen)
- Ideale und reale Quellen
- Superpositionsverfahren
- **Topologische Grundbegriffe**
- Kirchhoffsche Gleichungen
- Netzwerkeigenschaften, lineare, zeitinvariante Zweipole

Netzwerk



- Knoten: Verknüpfungspunkte im Netzwerk

- Zweige: Verbindung zwischen 2 Knoten durch Zweipole

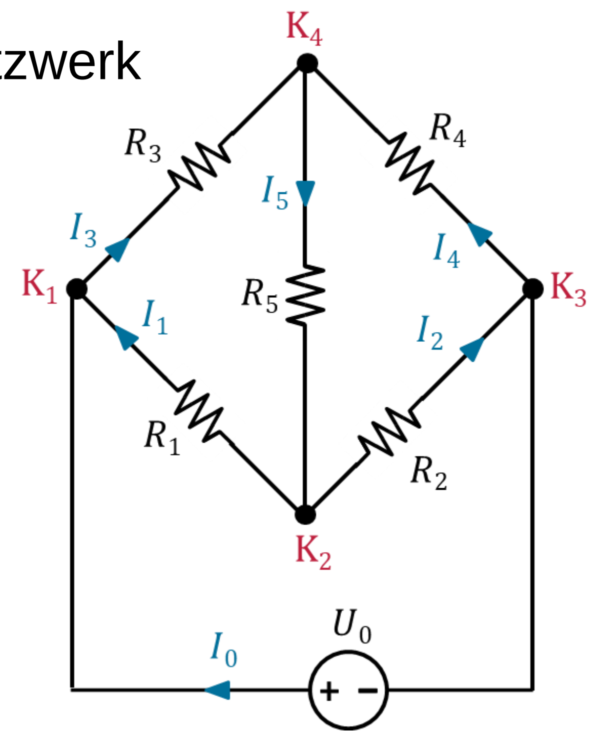
- Maschen: Geschlossene Wege im Netzwerk
  kein Zweig / Knoten wird mehrfach durchlaufen

Ziel: Berechnung, Zusammenfassung und Vereinfachung von Netzwerken

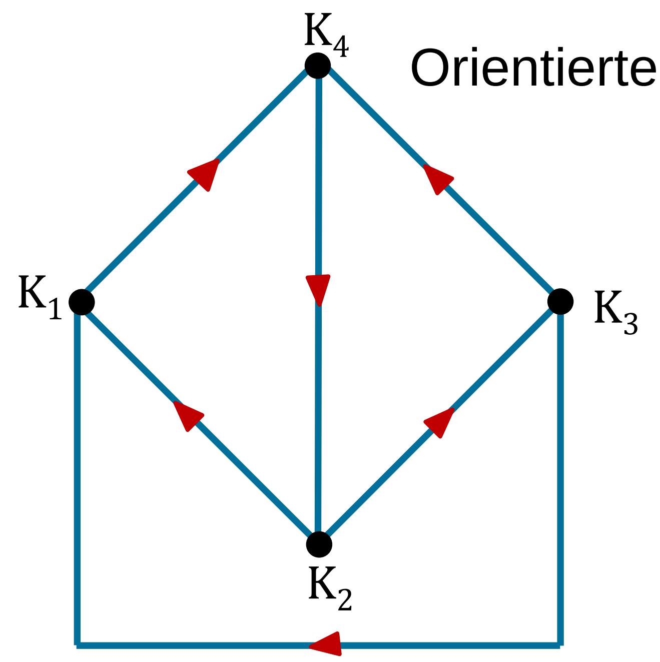
Topologische Grundbegriffe

Beispiel: Netzwerk und zugehöriger orientierter Graph

Netzwerk



Orientierter Graph



- 5 passive Netzwerkelemente, 1 Quelle
- 4 Knoten, 6 Zweige

- vereinfachte symbolische Darstellung
- topologische Struktur des Netzwerks
- Darstellung von Zweigen durch Linien
- Richtung der Zweige ≙ Richtung des Stroms (Fehlervermeidung!)
- keine Netzwerkelemente

Graph:

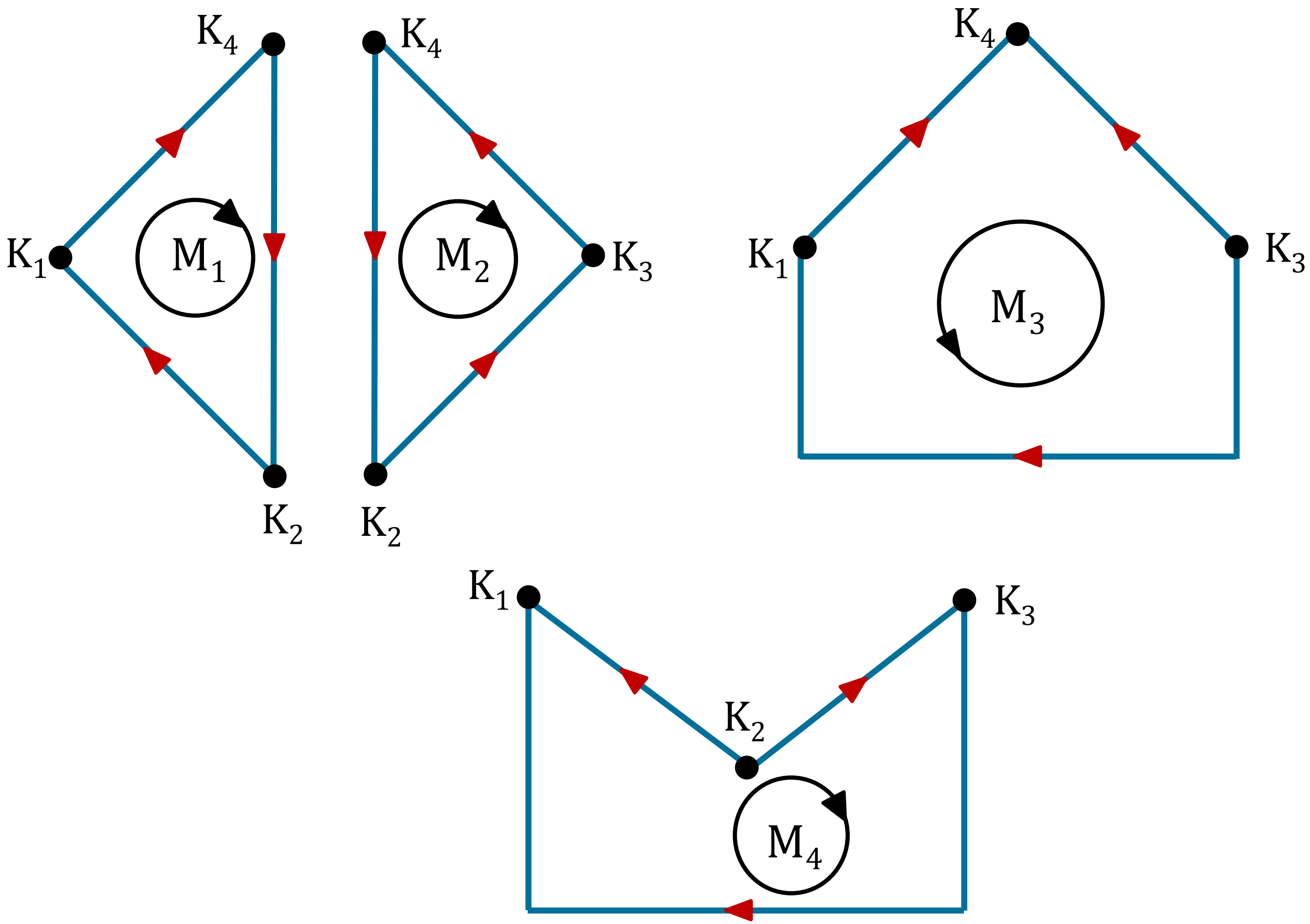
- zusammenhängend, besteht aus Zweigen und Knoten
- Von jedem Knoten des Graphen zu jedem anderen Knoten des Graphen besteht ein Weg, der nur Zweige und Knoten des Graphen enthält.

Masche:

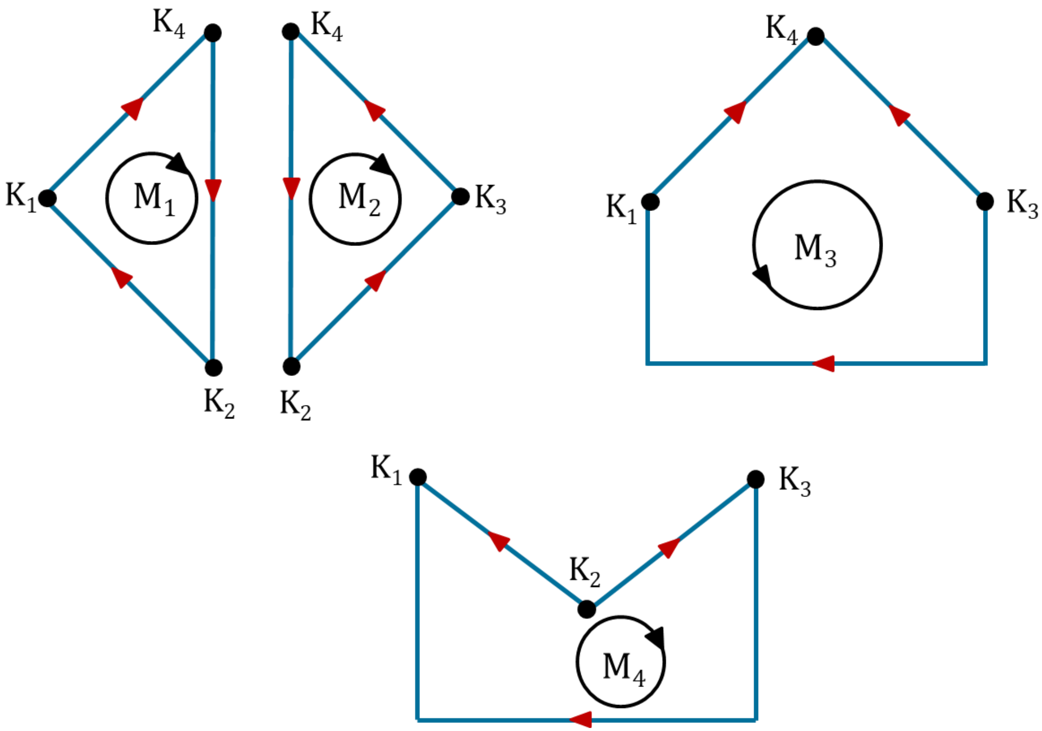
- geschlossene Folge von Zweigen und Knoten eines Graphen
- Jeder Knoten ist mit zwei benachbarten Zweigen verbunden.

Topologische Grundbegriffe

Beispiel: 4 verschiedene Maschen des Netzwerks



Linear unabhängige Maschengleichungen



Eine Anzahl von Maschen ist linear unabhängig, wenn jede Masche mindestens einen Zweig enthält, der in den anderen nicht enthalten ist.

→ Nur 3 der 4 Maschen sind linear unabhängig.

Anzahl linear unabhängiger Maschengleichungen eines zusammenhängenden Netzwerks: $\boldsymbol{m = z - k + 1}$

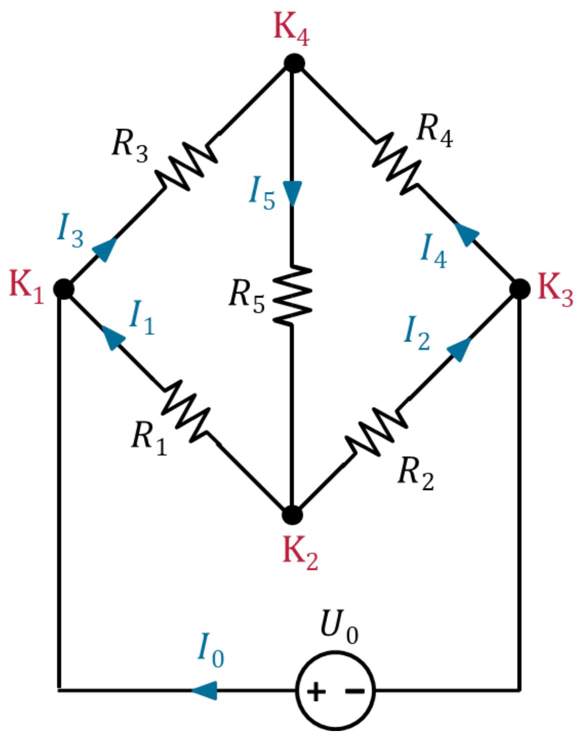
z: Anzahl der Zweige

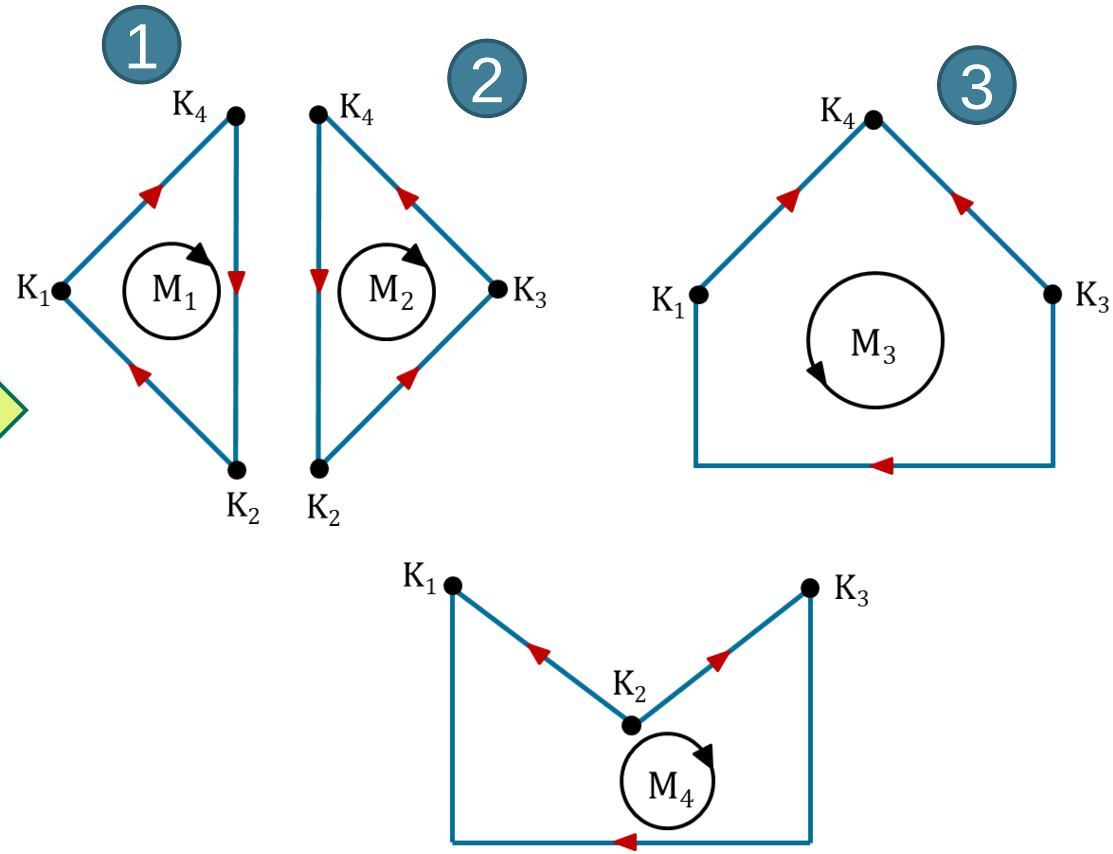
k: Anzahl der Knoten

Die Maschengleichungen für alle anderen Maschen sind zwangsläufig erfüllt.

Topologische Grundbegriffe

Beispiel 1: Anzahl linear unabhängiger Maschengleichungen

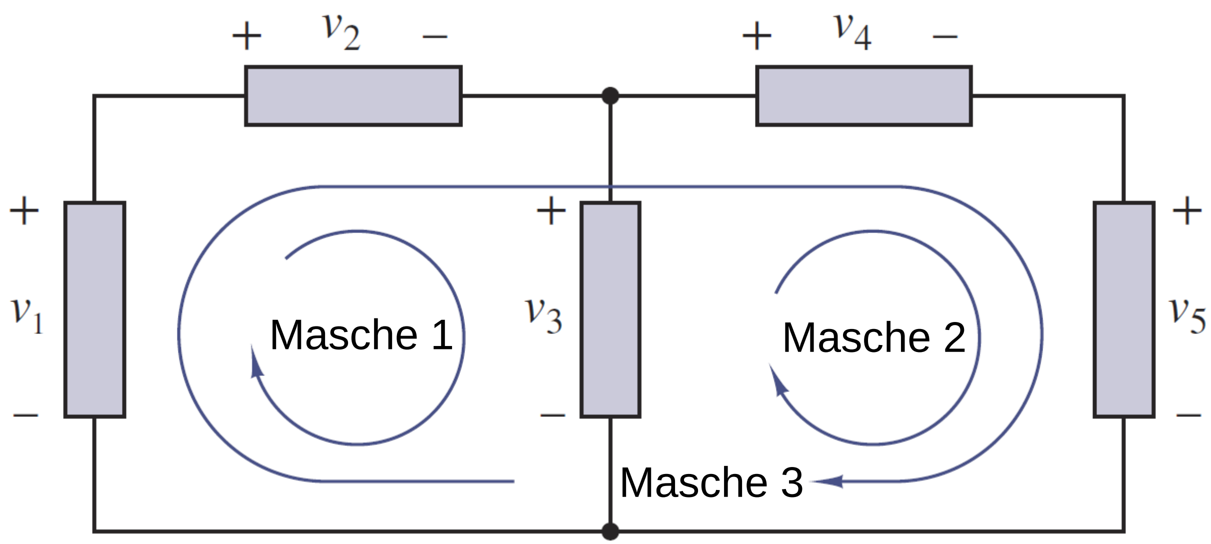




- Knoten $k = 4$,
- Zweige $z = 6$

$$m = z - k + 1 = 3$$

Beispiel 2: Anzahl linear unabhängiger Maschengleichungen



- Knoten $k = 2$,
- Zweige $z = 3$

$m = z - k + 1 = 2$

Masche 1: $-v_1 + v_2 + v_3 = 0$ (1)
Masche 2: $-v_3 + v_4 + v_5 = 0$ (2)
Masche 3: $-v_1 + v_2 + v_4 + v_5 = 0$ (3)

Gl. (3) ist eine lineare Kombination der Gleichungen (1) und (2)!

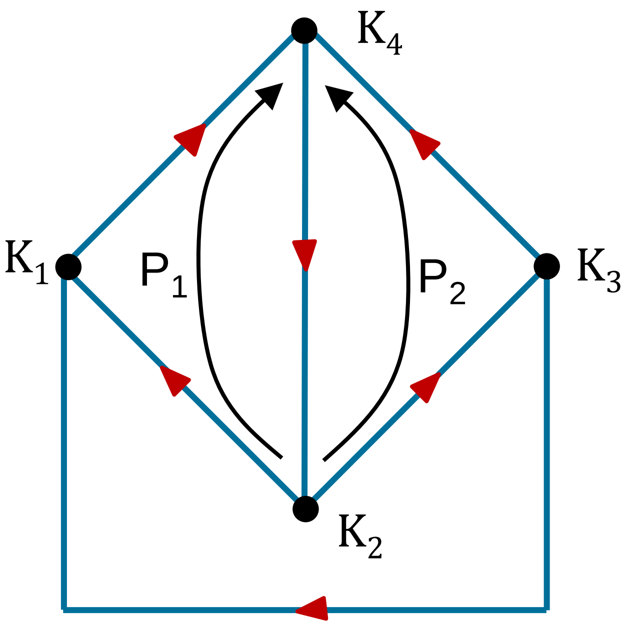
Beinhaltet also keine neue „brauchbare“ Information.

Masche 3 = Masche 1 + Masche 2

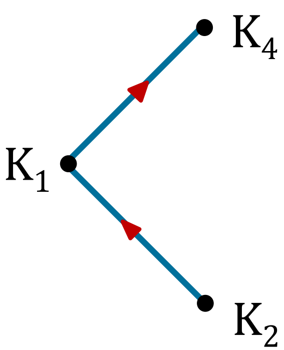
Definition: Pfad

Ein Pfad ist ein Graph, bei dem genau zwei Knoten (Endknoten genannt) den Grad 1 haben und aus dem durch Hinzufügen eines Zweiges, der die anderen Zweige nicht schneidet, zwischen den Endknoten eine Masche entsteht.

Graph mit zwei Beispielpfaden P_1 und P_2



Pfad P_1



Topologische Grundbegriffe

Baum:

- zusammenhängender Teilgraph eines Graphen
- enthält alle Knoten des Graphen, aber keine Maschen

Verbindungszweige:

- Zweige eines Graphen, die keine Baumzweige sind

Gewählter Baum und zugehörige Maschen

Wahl eines Baumes

→ Festlegung der linear unabhängigen Maschen (Anzahl: $m = z - k + 1$)

→ Jedem Verbindungszweig ist linear unabhängige Masche zugeordnet

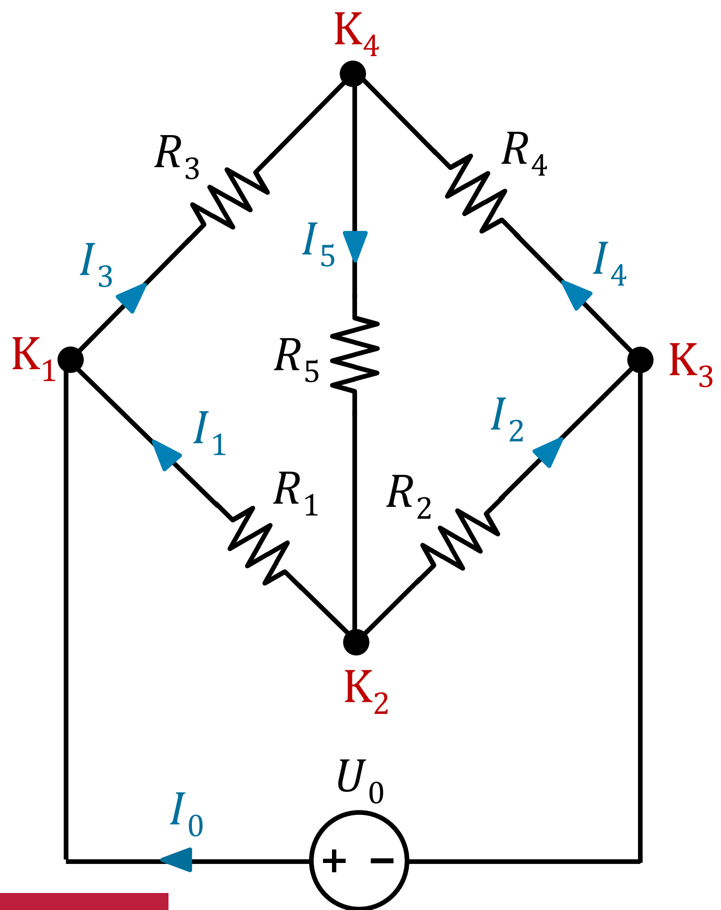
→ Masche wird vom Verbindungszweig ausgehend über die Baumzweige geschlossen

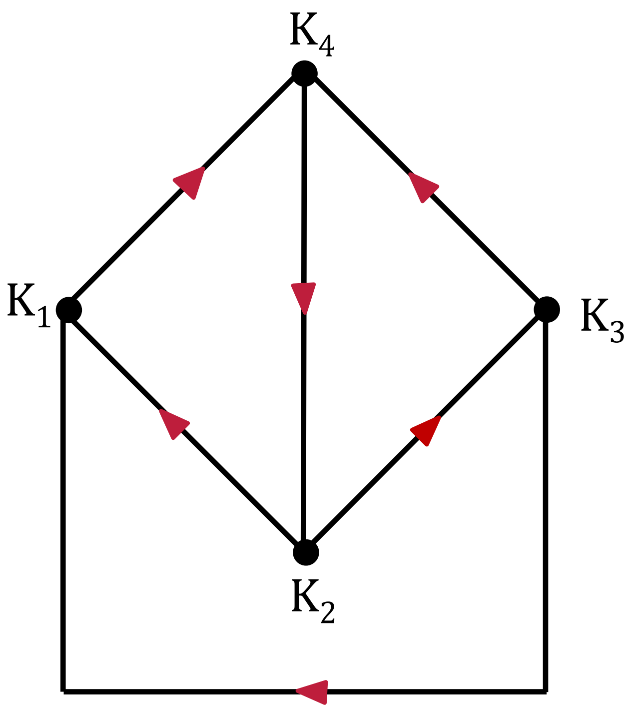
Topologische Grundbegriffe

Beispiel:

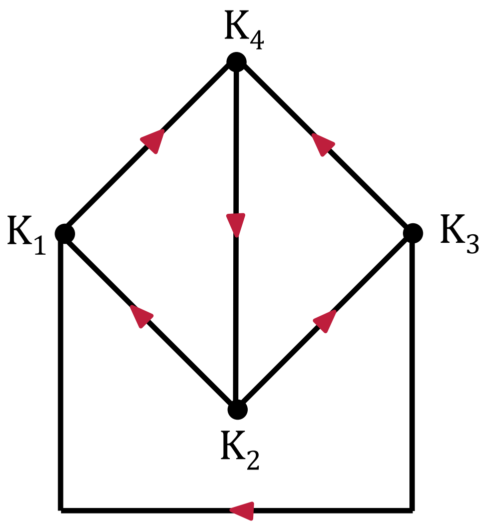
Netzwerk: $z = 6$ Zweige, $k = 4$ Knoten, Graph zusammenhängend

$\Rightarrow m = 6 - 4 + 1 = 3$ linear unabhängige Maschen

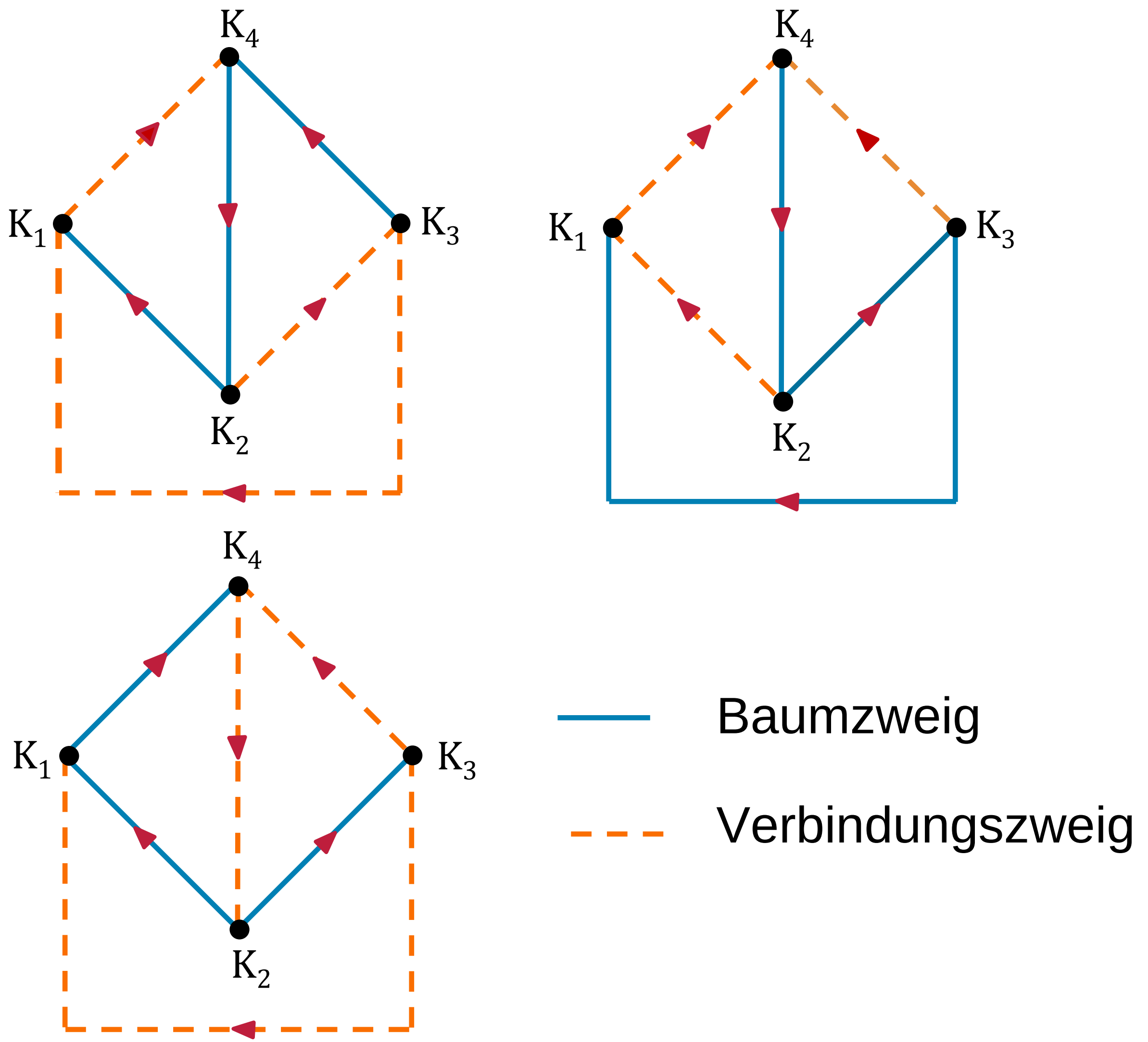




Beispiel: Orientierter Graph und drei beispielhafte Bäume



Orientierter Graph



Topologische Grundbegriffe – Teil 2

Gegeben: orientierter Graph mit Baum

Fundamentalmasche:

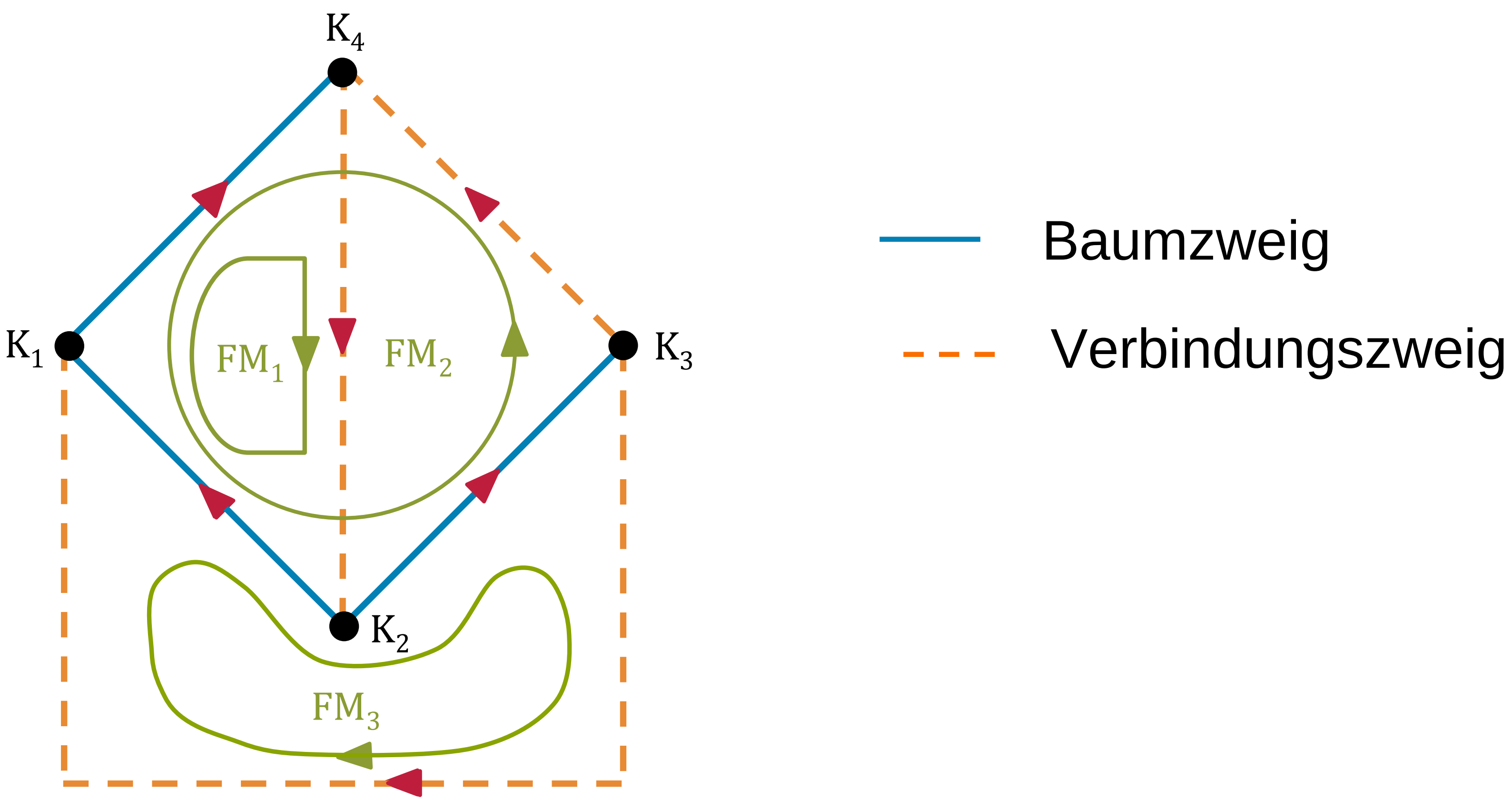
Masche, die aus nur **einem** Verbindungszweig und beliebig vielen Baum-zweigen besteht.

Orientierung der Fundamentalmaschen:

Bei den Fundamentalmaschengleichungen werden die Verbindungszweig-spannungen positiv gezählt.

(Richtung Fundamentalmasche = Richtung Verbindungszweig)

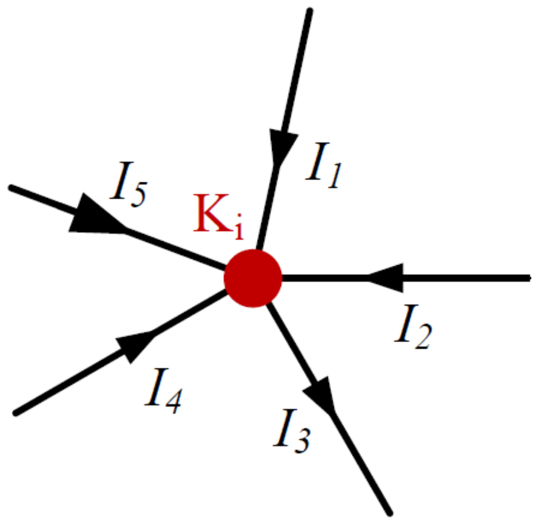
Beispiel: Orientierter Graph mit Fundamentalmaschen (FM)



1. Einführung und Grundlagen

- Motivation
- Grundlagen (Schreibweise, elementare ideale Bauelemente, Zählpfeilkonventionen)
- Ideale und reale Quellen
- Superpositionsverfahren
- Topologische Grundbegriffe
- **Kirchhoffsche Gleichungen**
- Netzwerkeigenschaften, lineare, zeitinvariante Zweipole

Kirchhoffsche Knotengleichung (Kirchhoff's Current Law, KCL)



keine Ladungsspeicherung in Knoten K_i

⇒ zufließende Ladung muss wieder abfließen

(Ladungserhaltung)

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} I_k = 0}$$

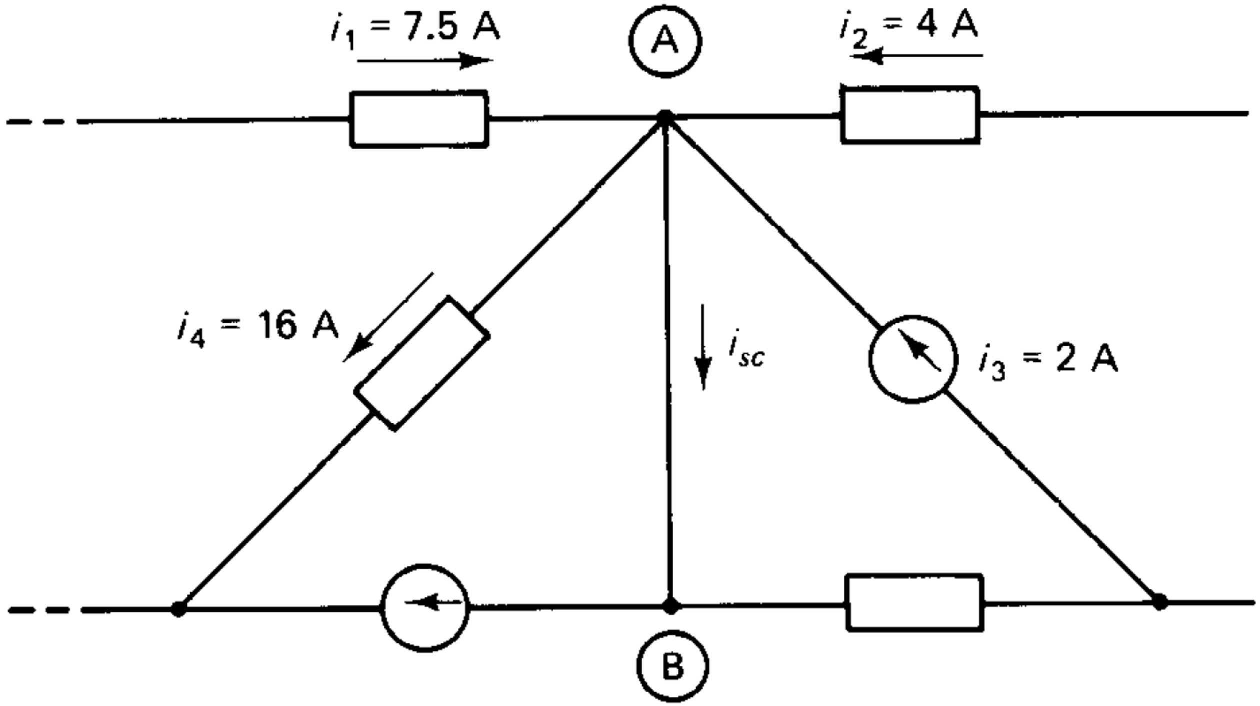
Die algebraische Summe aller Ströme, die in einen Knoten fließen, ist null.

Definition: Strom aus → dem Knoten wird mit „+“ Vorzeichen versehen

Strom in ← den Knoten wird mit „-“ Vorzeichen versehen

Kirchhoffsche Knotengleichung (Kirchhoff's Current Law, KCL)

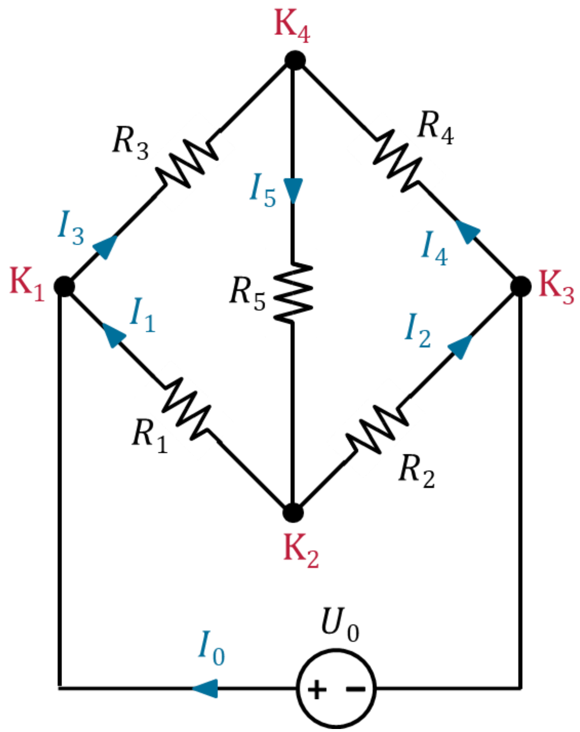
Beispiel 1: Strom bei einem Kurzschluss



$$-i_1 - i_2 - i_3 + i_{sc} + i_4 = 0$$

$$\boxed{i_{sc} = -2{,}5\ \mathrm{A}}$$

Beispiel 2: Aufstellen der Knotengleichungen



$$
\begin{array}{l|cccccccl}
 & Z_0 & Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 & Z_5 & & \\
K_1 & -I_0 & -I_1 & & +I_3 & & & = 0 & (1) \\
K_2 & & I_1 & +I_2 & & & -I_5 & = 0 & (2) \\
K_3 & I_0 & & -I_2 & & +I_4 & & = 0 & (3) \\
K_4 & & & & -I_3 & -I_4 & +I_5 & = 0 & (4)
\end{array}
$$

Die Addition der Gleichungen (1) bis (3) liefert die (negative) Gleichung (4), d.h. keine neue Information durch Gl. (4). Die vier Gleichungen sind linear abhängig. Jede Kombination von drei der vier Gleichungen sind linear unabhängig.

Kirchhoffsche Knotengleichung (Kirchhoff's Current Law, KCL)

Anzahl linear unabhängiger Knotengleichungen eines zusammenhängenden Netzwerks: $\boldsymbol{p = k - 1}$

k: Anzahl der Knoten

Die Knotengleichung für den k-ten Knoten ist zwangsläufig erfüllt.

Annahme: Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes $\underline{E}$ außerhalb der Bauelemente:

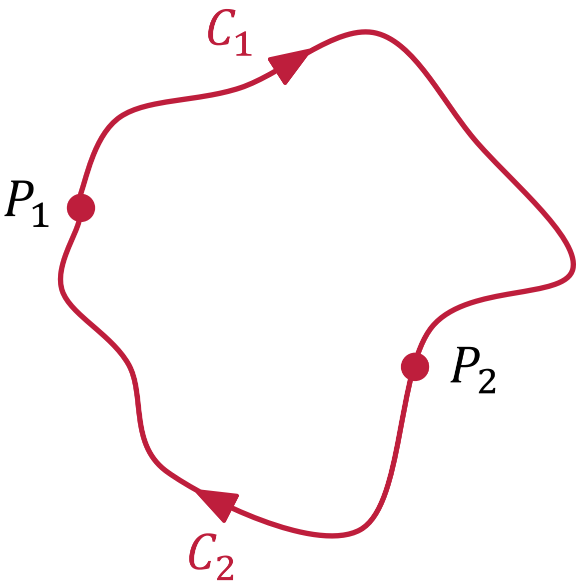
$$\oint_{(C)} \underline{E} \cdot d\underline{r} = 0$$

statisches Feld!

C: beliebige geschlossene Kurve, die die Bauelemente nicht schneidet

Spannung zwischen zwei Punkten außerhalb der Bauelemente: $u_{1,2} = \phi(P_1) - \phi(P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \underline{E} \cdot d\underline{r}$

$$\boxed{\varphi(\underline{r}) = -\int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}} \underline{E} \cdot d\underline{s}}$$



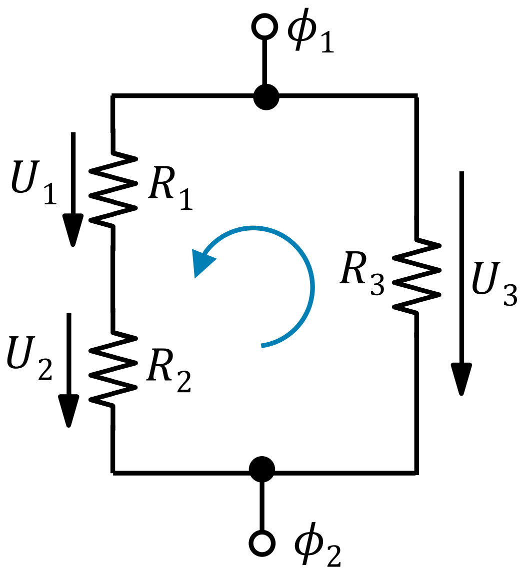
$$\oint_{C} \underline{E} \cdot \mathrm{d}\underline{r} = 0 = \int_{C_1} \underline{E} \cdot \mathrm{d}\underline{r} + \int_{C_2} \underline{E} \cdot \mathrm{d}\underline{r}$$

$$\underbrace{\int_{P_1}^{P_2} \underline{E} \cdot \mathrm{d}\underline{r}}_{\text{Weg } C_1} = -\underbrace{\int_{P_2}^{P_1} \underline{E} \cdot \mathrm{d}\underline{r}}_{\text{Weg } C_2} \Rightarrow \underbrace{\int_{P_1}^{P_2} \underline{E} \cdot \mathrm{d}\underline{r}}_{\text{Weg } C_1} = \underbrace{\int_{P_1}^{P_2} \underline{E} \cdot \mathrm{d}\underline{r}}_{\text{Weg } C_2}$$

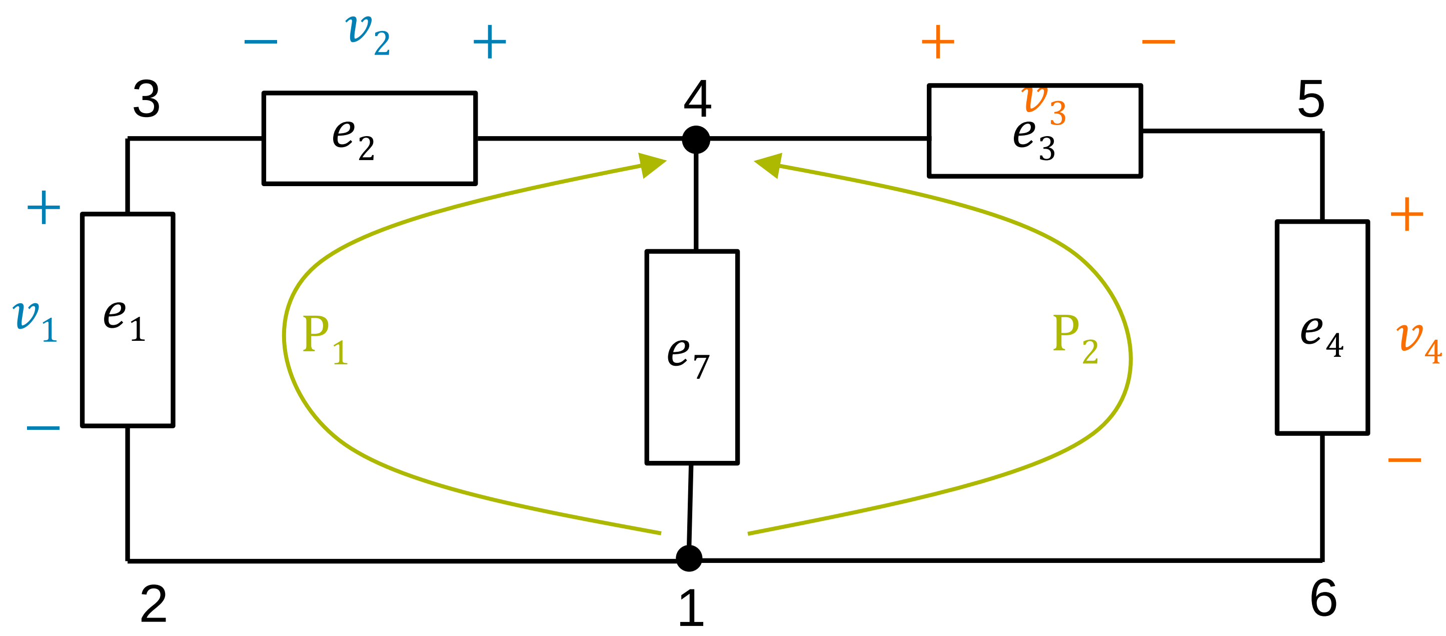
Zur Erinnerung: Spannung ist die Differenz der elektrischen Potentiale in zwei Punkten.

Die abfallende Spannung zwischen zwei Punkten ist also wegunabhängig:

$$U_1 + U_2 = \phi_1 - \phi_2 = U_3 \quad \rightarrow \quad U_1 + U_2 - U_3 = 0$$



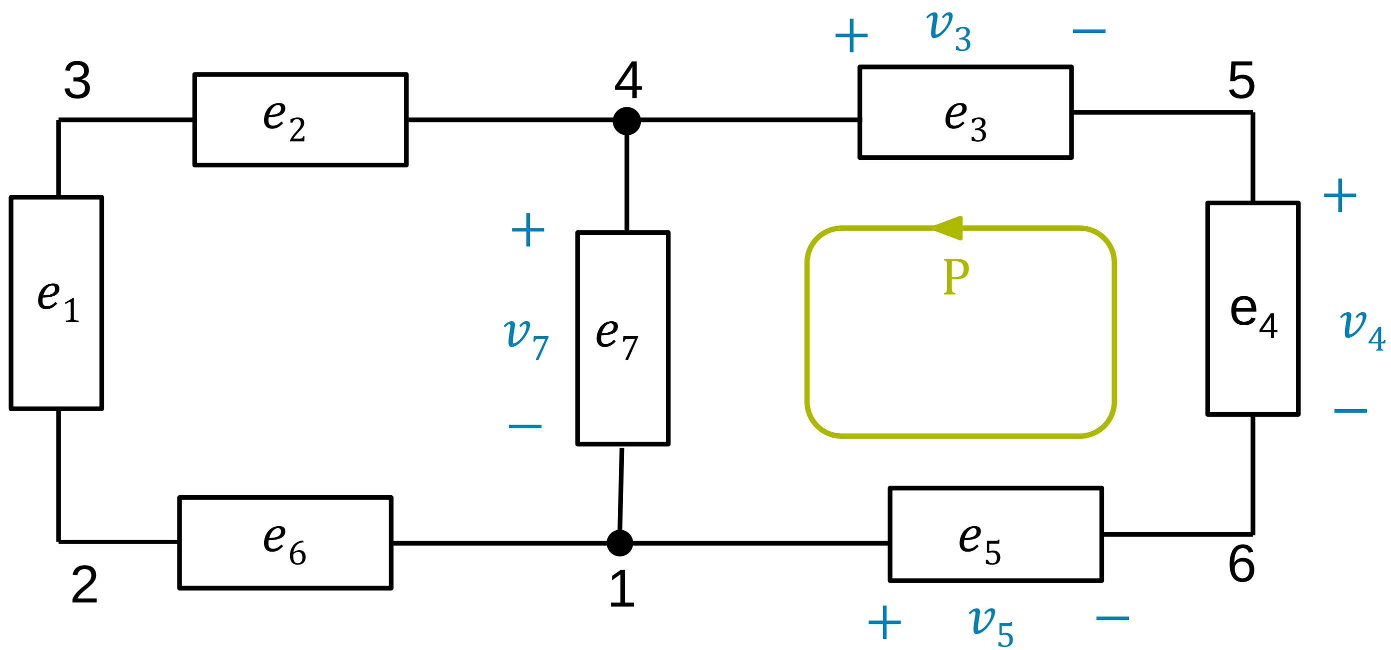
Kirchhoffsche Maschengleichung (Kirchhoff‘s Voltage Law, KVL)



Bei zwei Pfaden P_1 und P_2 mit gleichen Anfangs- und Endknoten gilt:
Die Summe der Spannungen von P_1 und P_2 ist gleich.

$$v_1 + v_2 = v_3 + v_4$$

Kirchhoffsche Maschengleichung (Kirchhoff‘s Voltage Law, KVL)



Relativ zur Umlaufrichtung von Masche P:

- Gleiche Richtung: Addition
- Entgegengesetzte Richtung: Subtraktion

$$-v_4 - v_3 + v_7 + v_5 = 0$$

Kirchhoffsche Maschengleichung (Kirchhoff‘s Voltage Law, KVL)

Die algebraische Summe aller Spannungen innerhalb eines geschlossenen Weges (Masche) in einem Netzwerk ist null.

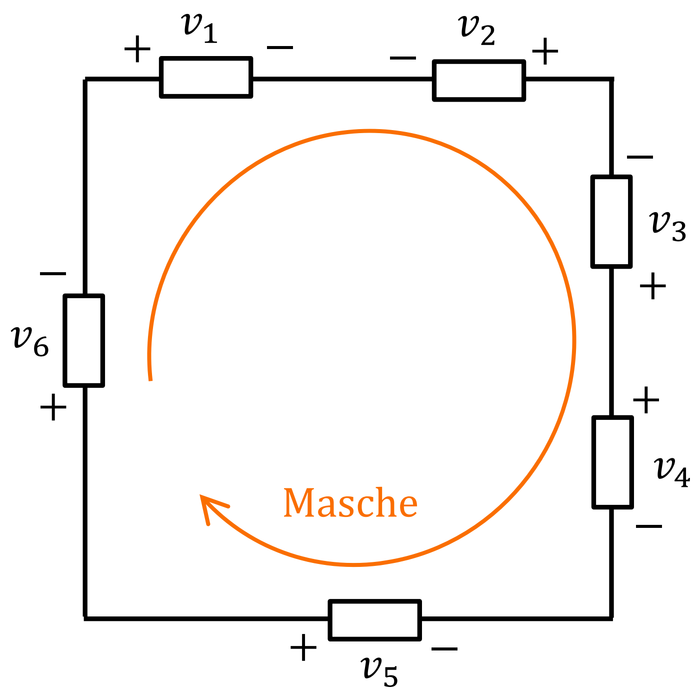
Die Kirchhoffsche Maschengleichung folgt aus der Annahme der Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} V_k = 0}$$

Definition: Wenn die Wegrichtung von „+“ zu „-“ die Spannung wird addiert

Wenn die Wegrichtung von „-“ zu „+“ die Spannung wird substrahiert

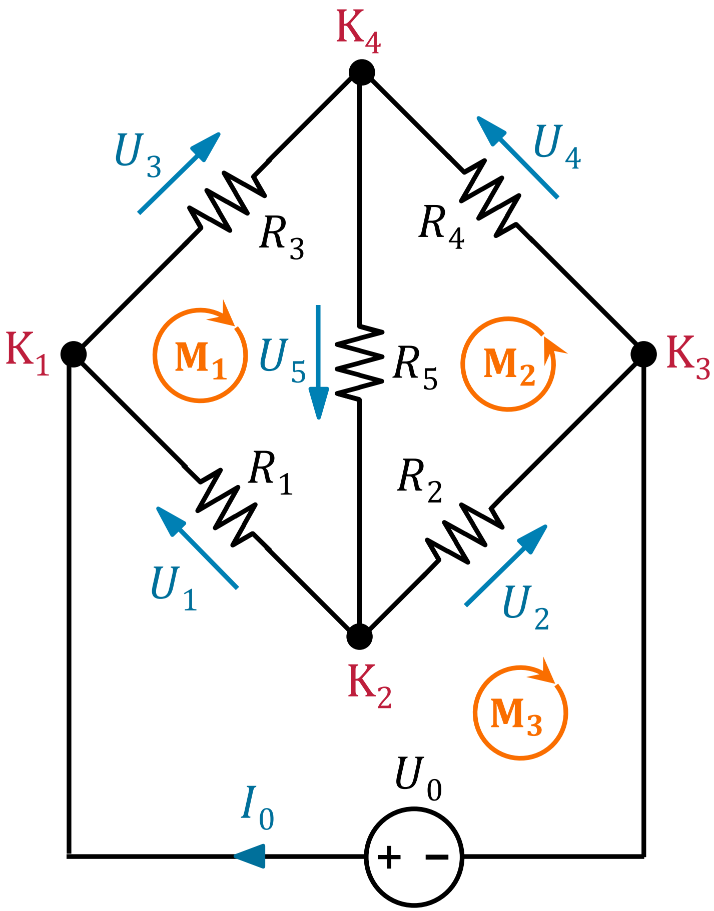
Beispiel 1: Maschengleichung



$$\boxed{v_1 - v_2 - v_3 + v_4 - v_5 + v_6 = 0}$$

Kirchhoffsche Maschengleichung (Kirchhoff‘s Voltage Law, KVL)

Beispiel 2: Aufstellen von linear unabhängigen Maschengleichungen



$$z = 6, k = 4 \;\Rightarrow m = z - k + 1 = 3$$

linear unabhängige Maschengleichungen

	Z_0	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	
Masche M_1		$+U_1$		$+U_3$		$+U_5$	$= 0$
Masche M_2			$+U_2$		$+U_4$	$+U_5$	$= 0$
Masche M_3	$-U_0$	$-U_1$	$+U_2$				$= 0$

1. Einführung und Grundlagen

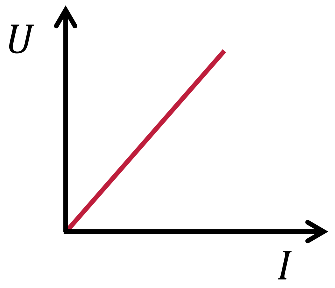
- Motivation
- Grundlagen (Schreibweise, elementare ideale Bauelemente, Zählpfeilkonventionen)
- Ideale und reale Quellen
- Superpositionsverfahren
- Topologische Grundbegriffe
- Kirchhoffsche Gleichungen
- **Netzwerkeigenschaften, lineare, zeitinvariante Zweipole**

Linearer, zeitinvarianter Zweipol

- Die Gleichung im Zeitbereich, die dem Zweipol zugeordnet ist, ist entweder
  - eine lineare, homogene, algebraische Gleichung mit konstanten (zeitunabhängigen) Koeffizienten oder
  - eine lineare, homogene gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten (zeitunabhängigen) Koeffizienten.
- Beispiele: idealer Widerstand, ideale Kapazität, ideale Induktivität

Linearer Zweipol

- Voraussetzung für Linearitätsnachweis eines Zweipols: Spannungen U_1, U_2 bei den Strömen I_1, I_2 bekannt
- Bei linearem Zweipol folgt aus beliebiger Linearkombination von Strömen
$$I = a \cdot I_1 + b \cdot I_2$$
dieselbe Linearkombination von Spannungen
$$U = a \cdot U_1 + b \cdot U_2$$



Beispiel: Widerstand als linearer Zweipol

- Linearer Zusammenhang zwischen Strom und Spannung.
- Beschreibung durch lineare Funktion: $U = RI$ (Ohmsches Gesetz), R zeitinvariant, nicht abhängig von U, I.
- Spannungen für die Ströme I_1, I_2: $U_1 = RI_1, \quad U_2 = RI_2$
- Linearkombination von Strömen: $I = aI_1 + bI_2$
- Berechnung der Spannung: $U = RI = R(aI_1 + bI_2) = aU_1 + bU_2$
- $\Rightarrow$ Widerstände sind lineare Zweipole

Drei wichtige Netzwerkeigenschaften

Definitionen

Netzwerk heißt

kausal, wenn seine Ausgabewerte nur von den aktuellen und vergangenen Eingabewerten abhängen.

(Die Wirkung im Netzwerk tritt nie vor der Ursache auf.)

zeitinvariant, wenn sein Verhalten zu jeder Zeit bei gleicher Eingabe identisch ist.

(Alle Bauelemente des Netzwerks ändern sich zeitlich nicht. Das Netzwerk reagiert auf eine Erregung unabhängig vom Zeitpunkt der Erregung immer gleich.)

linear, wenn es durch eine lineare Abbildung beschrieben werden kann.

(Eingangs- und Ausgangsgrößen sind durch lineare Netzwerk-differentialgleichungen verknüpft. Das Netzwerk besteht nur aus linearen Bauelementen oder idealen festen Quellen.)