Musterlösung zur Klausur
“Digitale Signalverarbeitung”
vom 14.02.2013

Aufgabe 1: Analyse eines LSI-Systems

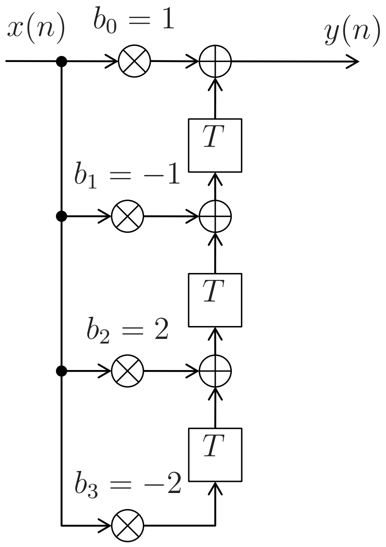
(16 Punkte)

a.) 2 Punkte
$y(n) = x(n) - x(n-1) + 2x(n-2) - 2x(n-3)$

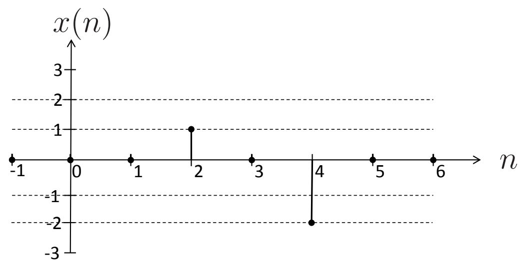
b.) 1 Punkt
$h(n) = \delta(n) - \delta(n-1) + 2\delta(n-2) - 2\delta(n-3)$

c.) 1 Punkt
$Y(z) = X(z)[1 - z^{-1} + 2z^{-2} - 2z^{-3}]$
$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 - z^{-1} + 2z^{-2} - 2z^{-3}$

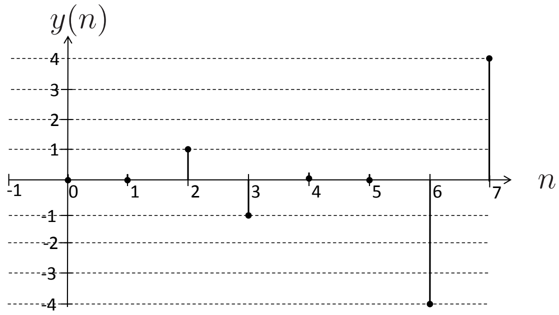
d.) 2 Punkte



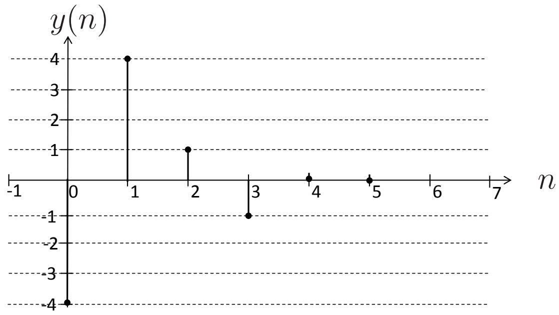
e.) 2 Punkte



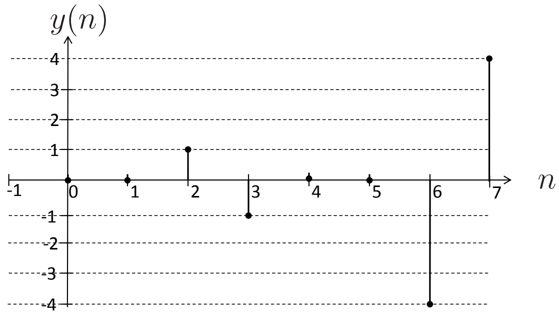
f.) 2 Punkt



g.) 2 Punkt



h.) 2 Punkte



Aufgabe 2: Filterentwurf eines zeitdiskreten IIR-Filters

(11 Punkte)

a.) 3 Punkte

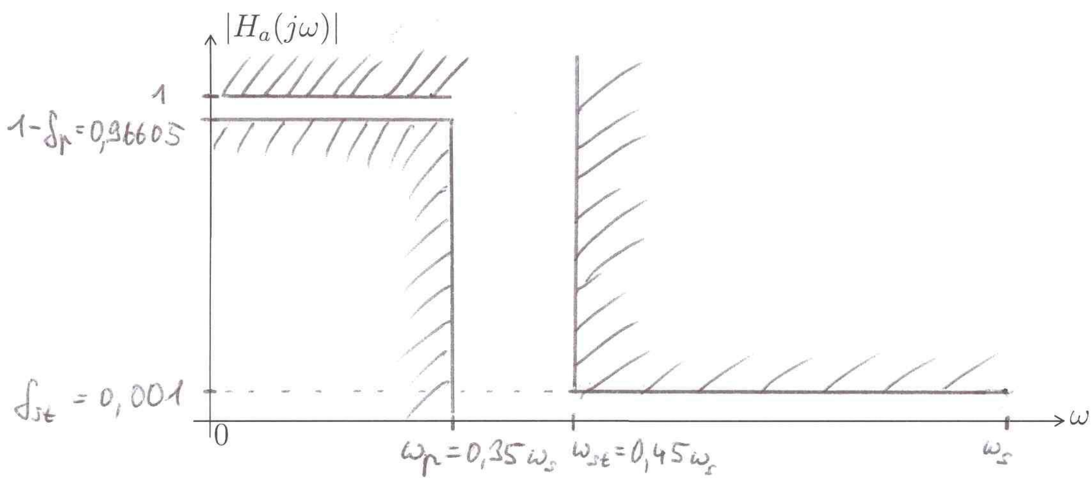
$\delta_p = 1 - 10^{-R_p/20\,\mathrm{dB}} = 1 - 10^{-0,3/20} = 0,03395$

$1 - \delta_p = 0,96605$

$\delta_{st} = 10^{-d_{st}/20\,\mathrm{dB}} = 10^{-60/20} = 0,001$

$\Omega_p = 2\pi^{\omega_p}/_{\omega_s} = 0,7\pi \Rightarrow \omega_p = 0,35\omega_s$

$\Omega_{st} = 2\pi^{\omega_{st}}/_{\omega_s} = 0,9\pi \Rightarrow \omega_{st} = 0,45\omega_s$



b.) 3 Punkte

$\omega_p = 0,35\omega_s; \omega_{st} = 0,45\omega_s; N = ?; \omega_c = ?$

Exakte Erfüllung der Spezifikation an den Grenzen des Übergangsbereichs:

$$\left| \begin{array}{c} |H_a(j\omega_p)|^2 = \dfrac{1}{1+\left(\frac{0,35\omega_s}{\omega_c}\right)^{2N}} = (1-\delta_p)^2 = 0,93325 \\ |H_a(j\omega_{st})|^2 = \dfrac{1}{1+\left(\frac{0,45\omega_s}{\omega_c}\right)^{2N}} = (\delta_{st})^2 = 10^{-6} \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{c} \left(\frac{0,35\omega_s}{\omega_c}\right)^{N} = 0,26744 \\ \left(\frac{0,45\omega_s}{\omega_c}\right)^{N} = 999,99950 \end{array} \right|$$

$\Rightarrow \left(\frac{0,35}{0,45}\right)^N \geq \frac{0,26744}{999,99950}$

$\Rightarrow N \cdot \log\left(\frac{0,35}{0,45}\right) \geq \log\left(\frac{0,26744}{999,99950}\right)$

$\Rightarrow N \geq \frac{-3,57278}{-0,10914} = 32,74$

$\Rightarrow N = 33$

c.) Einsetzen von N führt zu ω_c:

$\left(\frac{0{,}35\omega_s}{\omega_c}\right)^N = 0,26744$

$\Rightarrow \omega_c = \dfrac{0,35\omega_s}{\sqrt[33]{0,26744}} = 0,36427\omega_s$

d.) 3 dB

e.)

$$|H_a(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + a^2 \cdot V_N^2(\frac{j\omega}{j\omega_c})}; \quad \omega = 0,35\omega_s$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{(1-\delta_p)^2} - 1} = \sqrt{\frac{1}{0,93325} - 1} = 0,26744$$

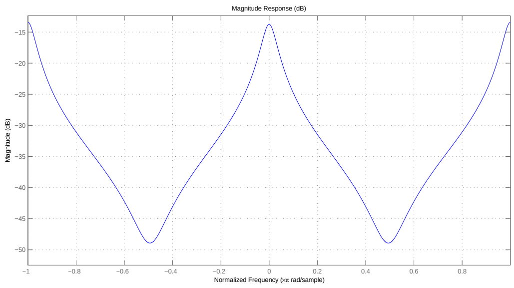
$$\begin{aligned} V_N(\frac{j\omega}{j\omega_c}) &= \cos\left(N \cdot \arccos\left(\frac{j\omega}{j\omega_c}\right)\right), \quad \left|\frac{j\omega}{j\omega_c}\right| \leq 1 \\ &= \cos\left(33 \cdot \arccos\left(\frac{0,35\omega_s}{0,36427\omega_s}\right)\right) \\ &= \cos(33 \cdot 0,28808) \\ &= -0,98764 \end{aligned}$$

$$|H_a(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + 0,07152 \cdot 0,97543} = 0,93718 \overset{\checkmark}{\geq} (1-\delta_p)^2 = 0,93325$$

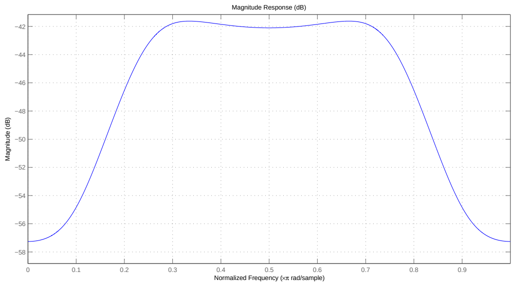
Aufgabe 3: Pol–Nullstellen–Diagramme und Analyse eines LTI–Systems

(9,5 Punkte)

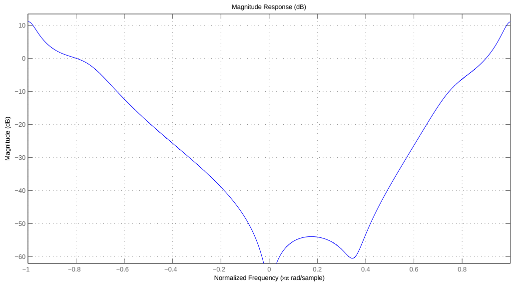
a.) 1.5 Punkte
I: Bandsperre



II: Bandpass



III: Hochpass



b.) 1,5 Punkte
I: reellwertige Impulsantwort; nur komplex konjugierte Pol- und Nullstellenpaare
II: reellwertige Impulsantwort; nur komplex konjugierte Pol- und Nullstellenpaare
III: komplexwertige Impulsantwort; zwei nicht komplex konjugierte Nullstellen

c.) 1,5 Punkte
I: rechtseitig; ROC ausserhalb Pol mit größtem Abstand zum Ursprung
II: linksseitig; ROC innerhalb Pol mit kleinstem Abstand zum Ursprung
III: rechtseitig; ROC ausserhalb Pol mit größtem Abstand zum Ursprung

d.) 1,5 Punkte
I: instabil
II: stabil
III: stabil

e.) 1,5 Punkte
I: FT existiert nicht; EK nicht Teil der ROC
II: FT existiert; EK Teil der ROC
III: FT existiert, EK Teil der ROC

f.) 1,5 Punkt

$$H(z) = b_0 \frac{(z-0,95)(z-(0,5+j))(z-(1+2j))}{(z+0,9)(z-(-0,5+0,5j))(z-(-0,5-0,5j))}$$

g.) 2 Punkte

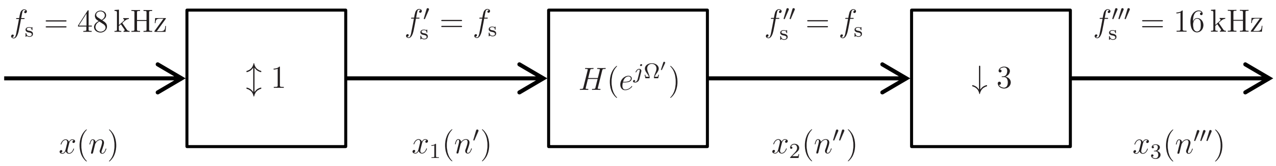
$$H_{\mathrm{min}}(z) = b_0 \frac{(z-0,95)(z-(0,4+0,8j))(z-(0,2+0,4j))}{(z+0,9)(z-(-0,5+0,5j))(z-(-0,5-0,5j))}$$

$$H_{\mathrm{AP}}(z) = \frac{(z-(0,5+j))(z-(1+2j))}{(z-(0,4+0,8j))(z-(0,2+0,4j))}$$

Aufgabe 4: Abtastratenwandlung eines Audiosignals

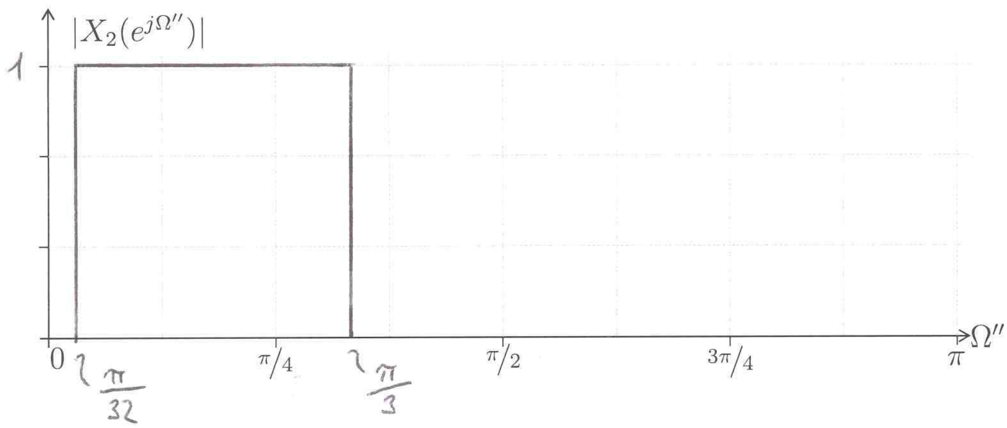
(12 Punkte)

a.) 2,5 Punkte

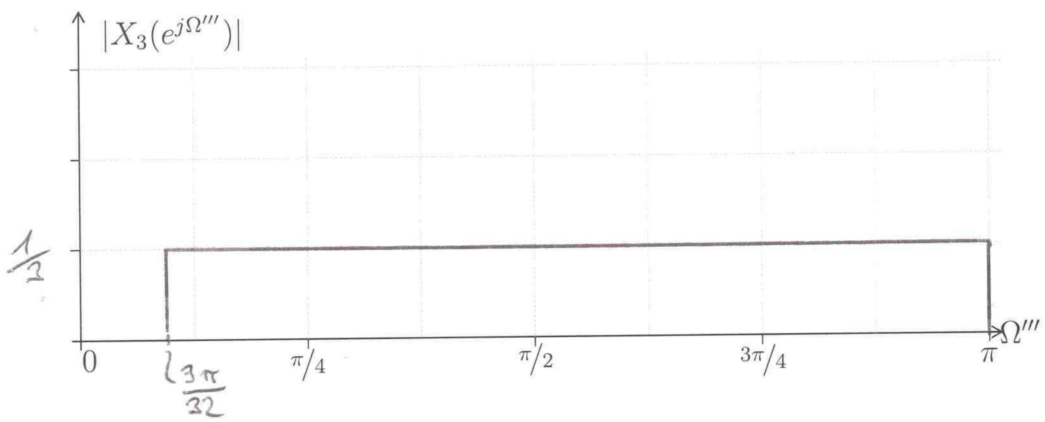


$$L_{\text{up}} = 1, \quad L_{\text{down}} = 3, \quad \Omega'_c = \pi/3$$

b.) 1,5 Punkte



c.) 1,5 Punkte

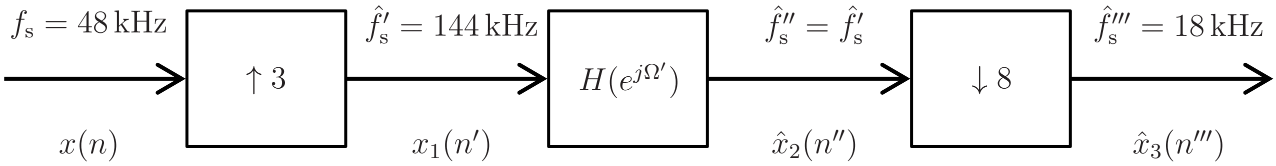


d.) 1 Punkt
ja, TP beschneidet Signal oberhalb von 8 kHz.

e.) 1 Punkt
$$\hat{R} = \frac{3\pi/8}{\pi} = \frac{3}{8} = \frac{\hat{L}_{\text{up}}}{\hat{L}_{\text{down}}}$$

f.) 1 Punkt
$\hat{f}_s''' = 18\,\text{kHz}$

g.) 3 Punkte



$$\hat{L}_{\text{up}} = 3, \quad \hat{L}_{\text{down}} = 8, \quad \hat{\Omega}_\text{c}' = \pi/8$$

h.) 2,5 Punkte