Technische Universität Braunschweig

2. Berechnung der Netzwerkantwort im Zeitbereich

Vadim Issakov

Sommersemester 2024

Vorgehen bei der Berechnung im Zeitbereich

Differentialgleichung aufstellen

- Linear unabhängige Knotengleichungen
- Linear unabhängige Maschengleichungen
- Zweiggleichungen

Differentialgleichung (DGL) lösen

Die allgemeine Lösung einer inhomogenen DGL setzt sich zusammen aus

- der Lösung der homogenen DGL und
- einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

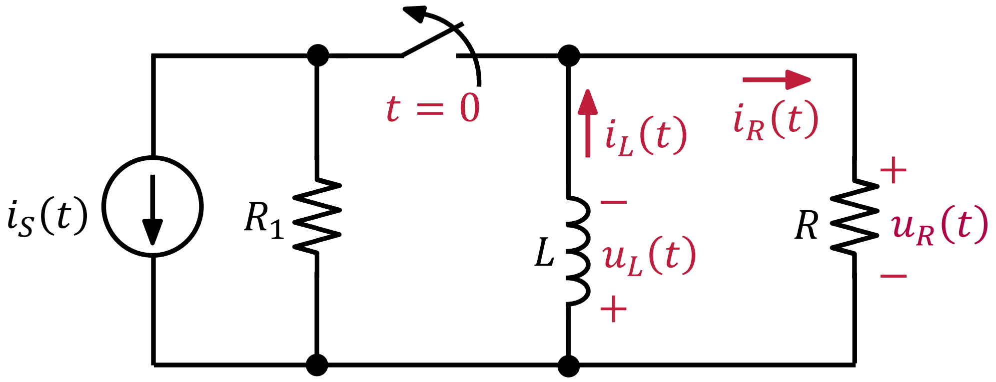
A) Netzwerk 1. Ordnung ohne Quelle nach Schalten

- **Netzwerk erster Ordnung mit Gleichstrom- oder Gleich-spannungsanregung vor dem Schalten und ohne Anregung (Zero Input) nach dem Schalten**
  - Beispiel: RL-Netzwerk
  - Stetiger Anfangswert
  - Netzwerk vor dem Schalten
  - Netzwerk nach dem Schalten
    - Aufstellen der Differentialgleichung (DGL)
    - Lösung der Differentialgleichung
    - Eingeschwungener Zustand

RL-Netzwerk ohne Quelle nach Schalten

RL-Netzwerk mit

$R > 0, R_1 > 0, L > 0,\ i_S(t) = I_0 = konst.$



Es gelte $i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+)$
(stetiger Anfangswert)

Für $t < 0$ ist der Schalter geschlossen ("lange Zeit") und das Netzwerk im eingeschwungenen Zustand (Erklärung später)

Bestimme zuerst $i_L(t)$. Bestimme dann $u_R(t)$ mit Hilfe von $i_L(t)$.

Stetiger Anfangswert

Schaltzeitpunkt bei $t = 0$

$$\boxed{i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+)}$$ (Stetiger Anfangswert)

Zeitpunkt direkt **vor** Schalten

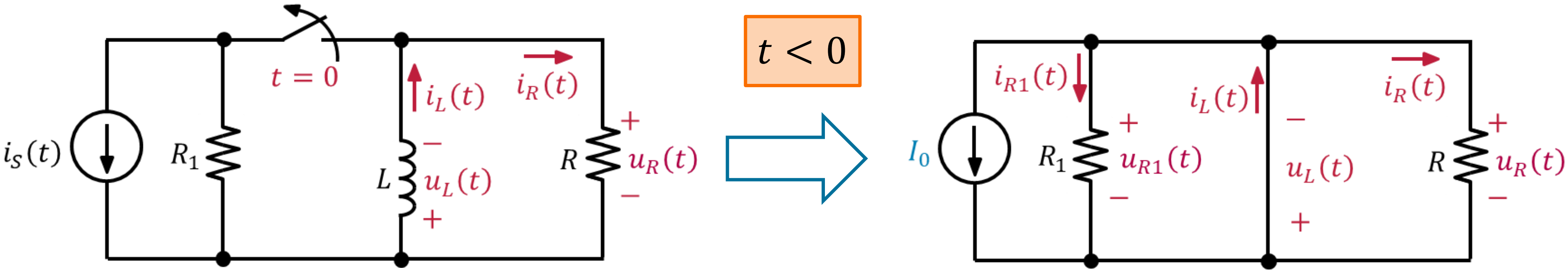
Zeitpunkt direkt **nach** Schalten

$i_L(0^-)$: Grenzwert von $i_L(t)$ für $t \to 0$ von links (negative Zeit)
$i_L(0^+)$: Grenzwert von $i_L(t)$ für $t \to 0$ von rechts (positive Zeit)

Allgemein: Schaltzeitpunkt bei $t = t_S$

- Ersetze 0 durch t_S

Netzwerk für $t < 0$



Netzwerk im eingeschwungenen Zustand und $i_S(t) = I_0 = konst.$ ist Gleichstromquelle

$\Rightarrow$ Alle Ströme und Spannungen sind konstant, bis Schalter geöffnet wird.

$\Rightarrow \boxed{u_L\,(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt} = 0}$ da $i_L(t)$ konstant

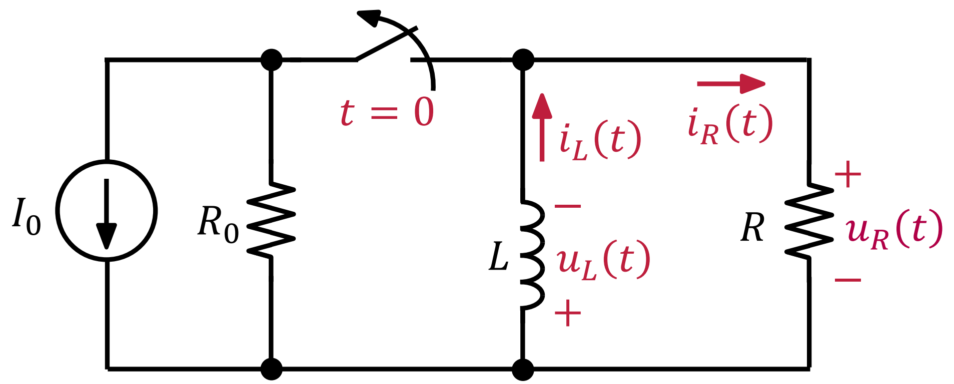
$\Rightarrow$ Induktivität $\rightarrow$ Kurzschluss, da $u_L(t) = 0$

- Mit $u_R(t) = -u_L(t) = 0$ und $u_R(t) = Ri_R(t), R > 0$ folgt $i_R(t) = 0$
- Mit $u_{R1}(t) = -u_L(t) = 0$ und $u_{R1}(t) = R_1 i_{R1}(t), R_1 > 0$ folgt $i_{R1}(t) = 0$

$\Rightarrow$ Kein Strom in Zweigen mit R_1 oder R

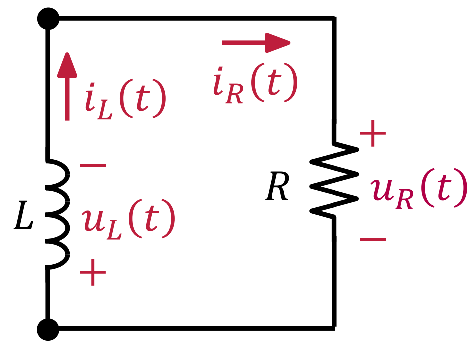
$\Rightarrow \boxed{i_L(t) = I_0, i_R(t) = 0, u_R(t) = 0}$

Netzwerk für $t > 0$



$t > 0$

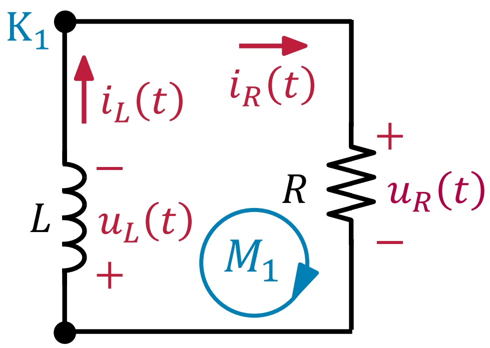
Netzwerk für $t > 0$



Technische Universität Braunschweig

DGL aufstellen

$t > 0$



M_1: $\quad u_L(t) + u_R(t) = 0 \qquad (1)$

K_1: $\quad i_R(t) = i_L(t) \qquad (2)$

Zweiggleichungen:

$$u_R(t) = R i_R(t) \qquad (3)$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \qquad (4)$$

$$(4) \Rightarrow \frac{di_L(t)}{dt} = \frac{1}{L} u_L(t) \overset{(1)}{=} -\frac{1}{L} u_R(t) \overset{(3)}{=} -\frac{R}{L} i_R(t) \overset{(2)}{=} -\frac{R}{L} i_L(t)$$

(5) $$\boxed{\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R}{L} i_L(t)}$$

Homogene gewöhnliche DGL erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten (R, L: konstant)

Lösung der homogenen DGL 1. Ordnung

erste Ordnung

$t > 0$

(5)
$$\boxed{\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R}{L} i_L(t)}$$

Lösung von Gleichung (5):

- Separation der Variablen:
  - Multiplikation beider Seiten mit dt
  - Division durch $i_L(t)$

$$\Rightarrow \frac{di_L(t)}{i_L(t)} = -\frac{R}{L} dt$$

Integration beider Seiten der Gleichung

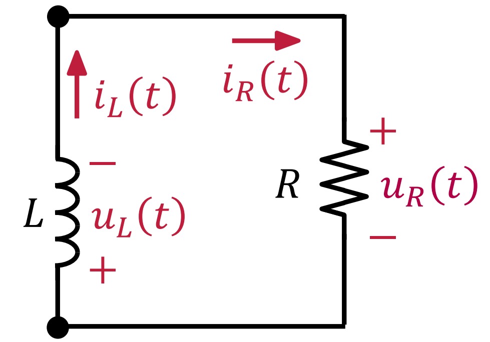
$$\Rightarrow \int_{i_L(0^+)}^{i_L(t)} \frac{di_L(t')}{i_L(t')} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt'$$

$i_L(0^+)$: Strom am Zeitpunkt 0^+

Lösung der homogenen DGL 1. Ordnung

$\boxed{t > 0}$

$$\Rightarrow \int_{i_L(0^+)}^{i_L(t)} \frac{di_L(t')}{i_L(t')} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt'$$



$$\Rightarrow \ln i_L(t) - \ln i_L(0^+) = -\frac{R}{L}(t-0)$$

$$\Rightarrow \ln \frac{i_L(t)}{i_L(0^+)} = -\frac{R}{L}t$$

natürliche Frequenz

$$\Rightarrow i_L\ (t) = i_L(0^+)e^{\boxed{-(R/L)}t}$$

Anfangswert wird übernommen

Da $i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+)$

und $i_L(0^-) = I_0$ folgt $i_L(0^+) = I_0$

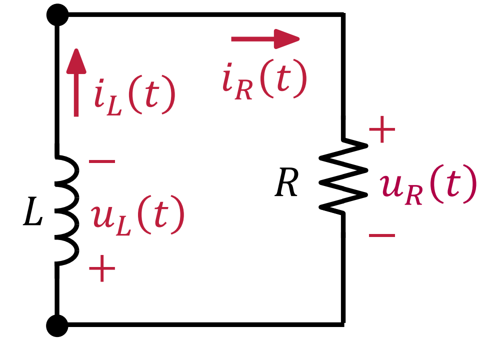
$$\Rightarrow \boxed{i_L(t) = I_0 e^{-(R/L)t}}$$

I_0 Anfangswert des Stroms durch die Induktivität

Entladekurve der Induktivität

$t > 0$

$$\boxed{i_L(t) = I_0 e^{-(R/L)t}} \quad \textbf{(6)}$$

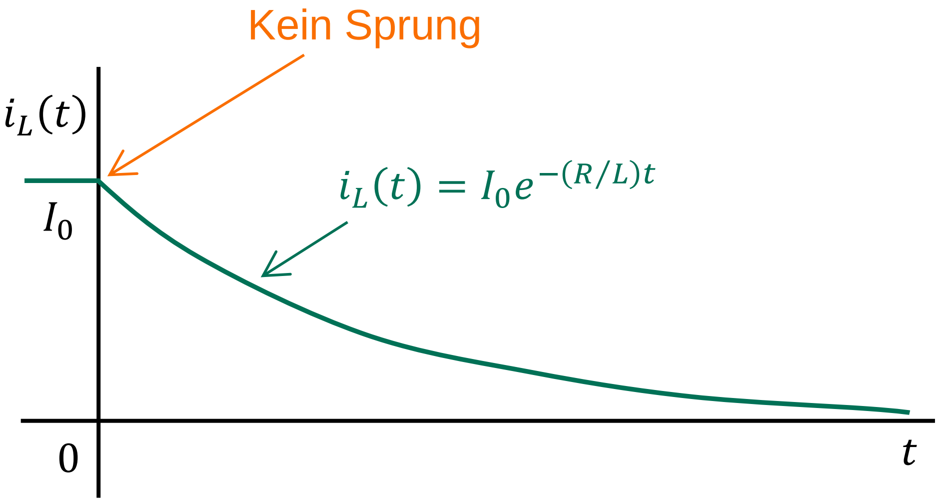


Für $t < 0$ gilt: $i_L(t) = I_0 \Rightarrow i_L(0^-) = I_0$

$i_L(0^+) = I_0$ ($t = 0^+$ in Gl.(6))

$i_L(t)$ ist für $t \geq 0$ definiert, da $i_L(t)$ bei $t = 0$ stetig ist (**kein** Sprung).

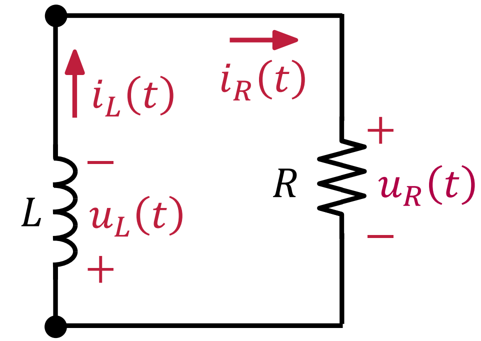
$$i_L(t) = \begin{cases} I_0, & t < 0 \\ I_0 e^{-(R/L)t}, & t \geq 0 \end{cases}$$



$i_R(t)$ und $u_R(t)$ nach dem Schalten

$t > 0$

$$\boxed{i_L(t) = I_0 e^{-(R/L)t}}$$



Da $i_R(t) = i_L(t) = i_L(0^+)e^{-(R/L)t}$ für $t > 0$

Anfangswert $i_L(0^-) = I_0 = i_L(0^+)$ wird übernommen

$\Rightarrow i_R(t) = I_0 e^{-(R/L)t}$ für $t > 0$ **(7)**

$$\boxed{u_R(t) = R i_R(t) = I_0 R e^{-(R/L)t} \text{ für } t > 0} \quad \textbf{(8)}$$

Für $t < 0$ gilt: $i_R(t) = 0 \Rightarrow i_R(0^-) = 0$

$u_R(t) = 0 \Rightarrow u_R(0^-) = 0$

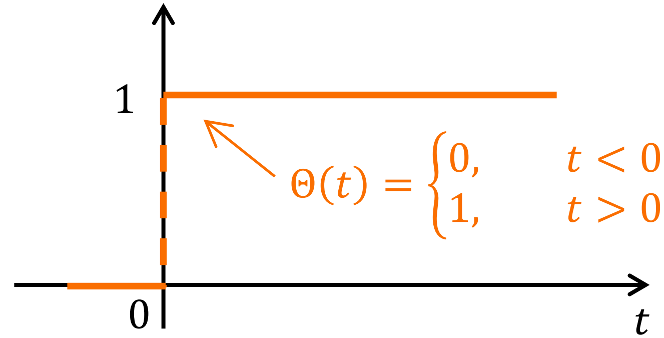
$i_R(0^+) = I_0$ ($t = 0^+$ in Gl.(7))

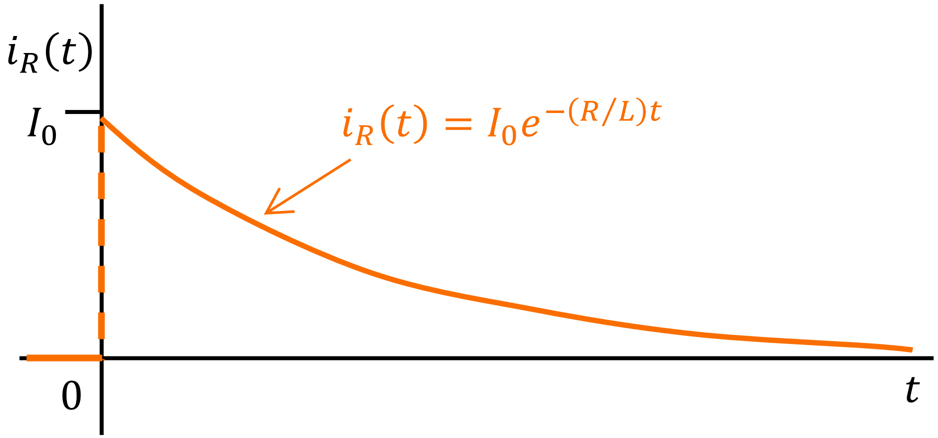
$u_R(0^+) = I_0 R$ ($t = 0^+$ in Gl.(8))

$i_R(t)$ und $u_R(t)$

$$\boxed{i_R(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ I_0 e^{-(R/L)t}, & t > 0 \end{cases} = I_0 e^{-(R/L)t}\Theta(t)}$$

Sprungfunktion





$$u_R(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ I_0 R e^{-(R/L)t}, & t > 0 \end{cases} = I_0 R e^{-(R/L)t}\Theta(t)$$

Verlustleistung im Widerstand

$\boxed{t > 0}$

$$u_R(t) = Ri_R(t)$$

$$p(t) = u_R(t)i_R(t), \qquad p(t) = Ri_R^2(t), \qquad p(t) = \frac{u_R^2(t)}{R}$$

$$i_R(t) = I_0 e^{-(R/L)t}$$

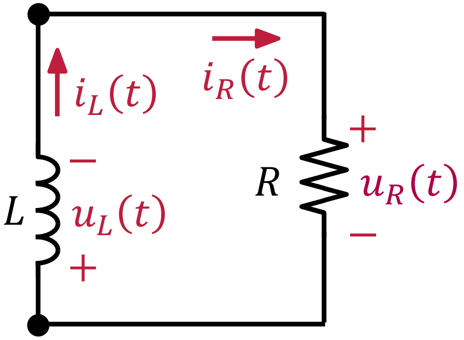
$$u_R(t) = I_0 R e^{-(R/L)t}$$

$$\boxed{p(t) = I_0^2 e^{-2(R/L)t}}$$

$$w(t) = \int_0^t p(t)dt' = \int_0^t I_0^2 R e^{-2\,(R/L)t'} dt'$$

$$= \frac{1}{2(R/L)} I_0^2 R\left(1 - e^{-2(R/L)t}\right)$$

$$= \frac{1}{2} L I_0^2 \left(1 - e^{-2(R/L)t}\right), \qquad t \geq 0.$$



Nach unendlich langer Zeit ist die Verlustleistung im Widerstand annähernd die gespeicherte Energie in der Induktivität

Zeitkonstante des Netzwerks

$$i_L(t) = I_0 \boxed{e^{-(R/L)t}} \quad t \geq 0 \qquad\qquad u_R(t) = I_0 R \boxed{e^{-(R/L)t}} \quad t > 0$$

Der Koeffizient bei t – hier R/L – bestimmt, mit welcher Rate $i_L(t)$ oder $u_R(t)$ gegen null geht.

Das Reziproke der Rate ist die Zeitkonstante des Netzwerks.

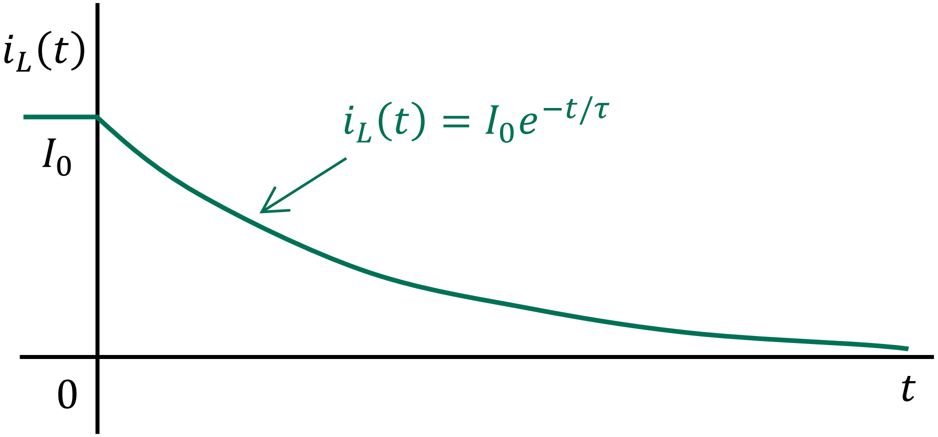
Zeitkonstante τ des *RL*-Netzwerkes: $\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$ $\boxed{\omega = \frac{1}{\tau} = \frac{R}{L}}$

$$\boxed{i_L(t) = I_0 e^{-t/\tau}}$$

$$\boxed{u_R(t) = I_0 R e^{-t/\tau}}$$

$$\boxed{p(t) = {I_0}^2 R e^{-2t/\tau}}$$

$$\boxed{w(t) = \frac{1}{2} L {I_0}^2 \left(1 - e^{-2t/\tau}\right)}$$



Eingeschwungener Zustand

$e^{-t/\tau}$ für t als Vielfache von τ:

t	$e^{-t/\tau}$	t	$e^{-t/\tau}$
τ	3.6788×10^{-1}	6τ	2.4788×10^{-3}
2τ	1.3534×10^{-1}	7τ	9.1188×10^{-4}
3τ	4.9787×10^{-2}	8τ	3.3546×10^{-4}
4τ	1.8316×10^{-2}	9τ	1.2341×10^{-4}
5τ	6.7379×10^{-3}	10τ	4.5400×10^{-5}

- Für $\boldsymbol{t = 5\tau}$ ist Strom < 1% vom Anfangswert I_0.
  Für $t > 5\tau$ haben alle Ströme und Spannungen nahezu Ihre Endwerte erreicht.
- Netzwerke mit nur einer Zeitkonstanten
  - 1% Genauigkeit ausreichend
  - “Lange Zeit” bedeutet: $t > 5\tau$.
  - haben nur eine natürliche Frequenz
  - Bezeichnung als Netzwerke erster Ordnung

Eingeschwungener Zustand

$e^{-t/\tau}$ für t als Vielfache von τ:

t	$e^{-t/\tau}$	t	$e^{-t/\tau}$
τ	3.6788×10^{-1}	6τ	2.4788×10^{-3}
2τ	1.3534×10^{-1}	7τ	9.1188×10^{-4}
3τ	4.9787×10^{-2}	8τ	3.3546×10^{-4}
4τ	1.8316×10^{-2}	9τ	1.2341×10^{-4}
5τ	6.7379×10^{-3}	10τ	4.5400×10^{-5}

Antwort im eingeschwungenen Zustand (steady-state response):

Zustand, der nach langer Zeit erreicht wird
(hier: Wenn nach Schalten $t > 5\tau$, ist Abweichung vom Endwert < 1%
≈ eingeschwungener Zustand)

“lange Zeit” = Zeit, bis zum Erreichen des eingeschwungenen Zustands

Graphische Bestimmung der Zeitkonstanten

Graphische Bestimmung von τ mit Plot von der Antwort des Stroms:

Berechne die Tangente bei $t = 0^+$:

$di_L(t)/dt$ bei 0^+(Annahme: Strom ändert sich kontinuierlich)

$$i_L(t) = I_0 e^{-(R/L)t}$$

Bei $t = \tau$ ist $i_L(t) = I_0 e^{-1} \approx 0{,}368\, I_0$

$$\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R}{L} I_0 e^{-(R/L)t}$$

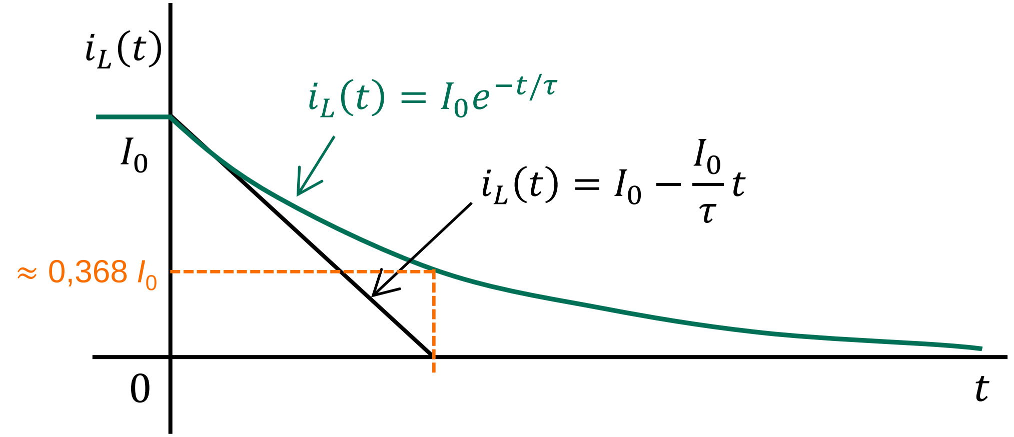
Reminder: $\tau = \frac{L}{R}$

$$\left.\frac{di_L(t)}{dt}\right|_{t=0^+} = -\frac{R}{L} I_0 = -\frac{I_0}{\tau}$$

Wenn beim Schalten ($t = 0$) $i_L = I_0$ ist und mit einer konstanten Rate I_0/τ abnimmt, ergibt sich:

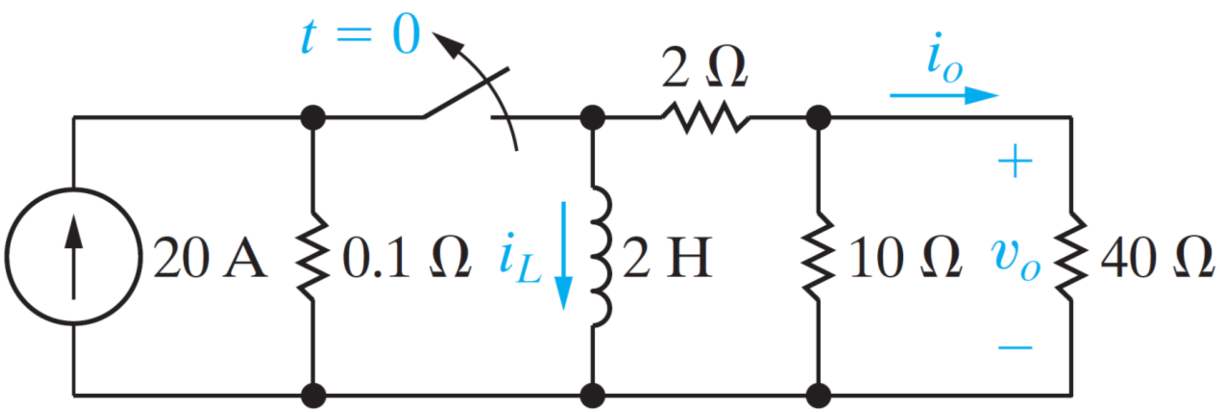
$$i_L(t) \approx I_0 - \frac{I_0}{\tau} t$$

i_L erreicht seinen Endwert 0 in τ Sekunden.



RL-Netzwerk ohne Quelle nach Schalten - Beispiel

Der Schalter war lange Zeit geschlossen. Im Zeitpunkt $t = 0$ wurde der Schalter geöffnet. Berechne: a) $i_L(t)$ für $t \geq 0$; b) $i_o(t)$ für $t \geq 0^+$; c) $v_o(t)$ für $t \geq 0^+$; d) wieviel Prozent der in der Induktivität gespeicherten Energie wurde im 10Ω Widerstand verheizt.



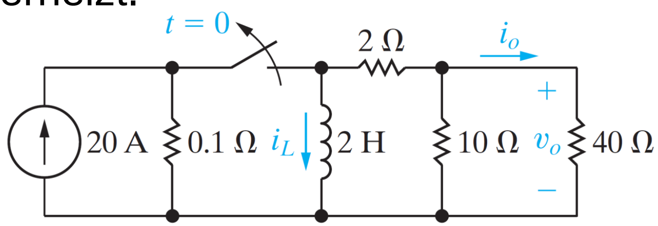
a) $i_L(0^+) = 20\text{ A}$ $\qquad$ $R_{\text{eq}} = \big(2 + (40 \parallel 10)\big)\Omega = 10\ \Omega$

$$\tau = \frac{L}{R_{\text{eq}}} = \frac{2}{10}\text{s} = 0.2\text{ s}$$

$$\boxed{i_L(t) = 20\mathrm{e}^{-5t/\mathrm{s}}\text{ A}, \qquad t \geq 0}$$

RL-Netzwerk ohne Quelle nach Schalten - Beispiel

Der Schalter war lange Zeit geschlossen. Im Zeitpunkt $t = 0$ wurde der Schalter geöffnet. Berechne: a) $i_L(t)$ für $t \geq 0$; b) $i_o(t)$ für $t \geq 0^+$; c) $v_o(t)$ für $t \geq 0^+$; d) wieviel Prozent der in der Induktivität gespeicherten Energie wurde im 10Ω Widerstand verheizt.



b) $$i_o = -i_L \frac{10}{10+40} = -\left(20\mathrm{e}^{-5t/\mathrm{s}}\right)\frac{1}{5}\,\mathrm{A} = -4e^{-5t/\mathrm{s}}\mathrm{A} \quad t \geq 0^+$$

c) $$v_o = i_o 40\ \Omega = -160\ \mathrm{e}^{-5t/\mathrm{s}}\ \mathrm{V}, \qquad t \geq 0^+$$

d) $$p_{10\Omega}(t) = \frac{v_o^2}{10\ \Omega} = 2560\ e^{-10t/\mathrm{s}}\ \mathrm{W}, \qquad t \geq 0^+$$

$$w_{10\Omega}(t) = \int_0^\infty 2560\ e^{-10t/\mathrm{s}}\ \mathrm{W\,d}t = 256\ \mathrm{J}$$

$$w(0) = \frac{1}{2}Li^2(0) = \frac{1}{2}(2)(400)\ \mathrm{J} = 400\ \mathrm{J}$$

$$\frac{256}{400}(100) = 64\%$$

B) Netzwerk 1. Ordnung mit Quelle nach Schalten

- **Netzwerk erster Ordnung mit Gleichstrom- oder Gleichspannungsanregung vor dem Schalten und mit Anregung durch eine Strom- oder Spannungsquelle nach dem Schalten**
  - Beispiel: RC-Netzwerk
  - Netzwerk vor dem Schalten
  - Netzwerk nach dem Schalten
    - Aufstellen der Differentialgleichung (DGL)
    - Lösung der Differentialgleichung
    - Eingeschwungener Zustand

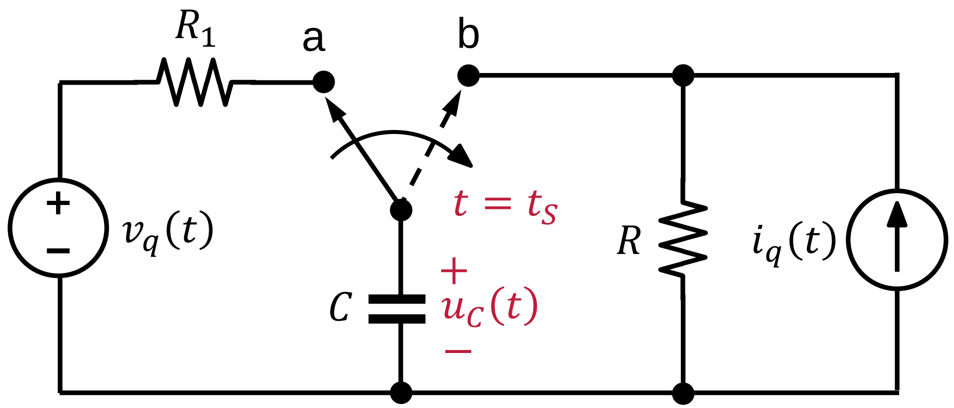
RC-Netzwerk mit Quelle nach Schalten

RC-Netzwerk mit

$R > 0, R_1 > 0, C > 0,$

Spannungsquelle $v_q(t) = V_0 = konst.,$

Stromquelle $i_q(t)$.

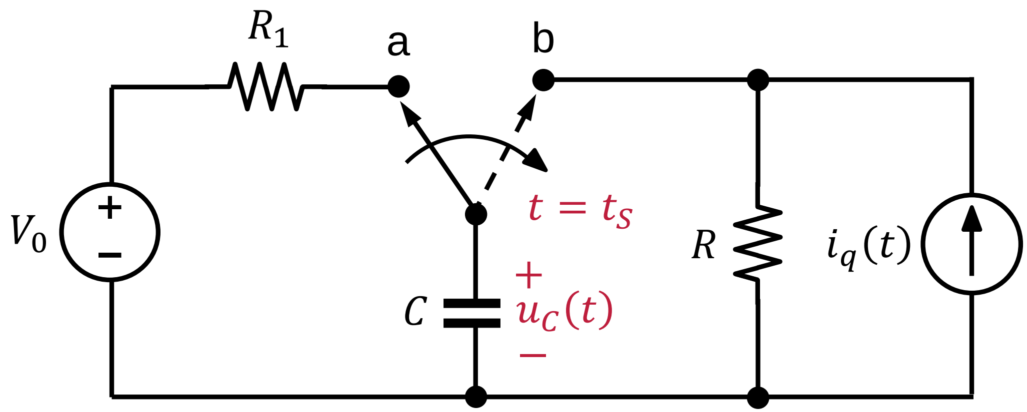


Es gelte $u_C(t_S^-) = u_C(t_S) = u_C\left(t_S^+\right)$

Für $t < t_S$ sei das Netzwerk im eingeschwungenen Zustand.

Bestimme $u_C(t)$.

RC-Netzwerk mit Quelle nach Schalten



Für $t < t_S$: Schalter auf Stellung a, Netzwerk im eingeschwungenen Zustand und $v_q(t) = V_0 = konst.$ ist Gleichspannungsquelle

⇒ Alle Ströme und Spannungen sind konstant, bis Schalter auf Stellung b wechselt

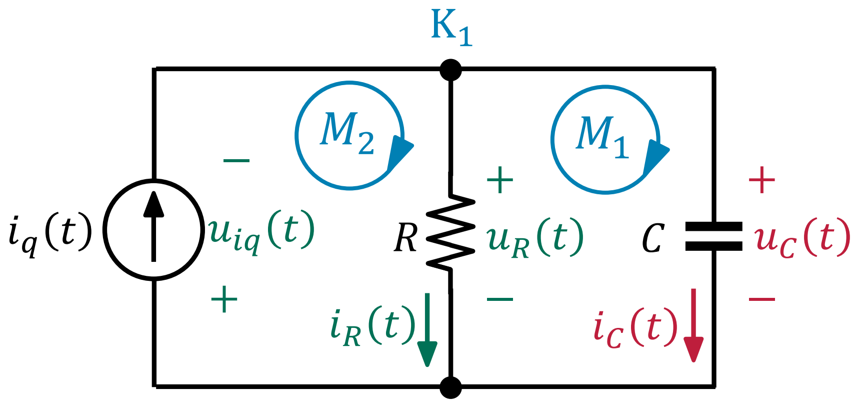
⇒ $\boxed{i_C\ (t) = C\frac{du_C(t)}{dt} = 0}$ da $u_C(t)$ konstant

⇒ Kapazität → Leerlauf, da $i_L(t) = 0$

⇒ $\boxed{u_C(t) = V_0}$

DGL aufstellen

$t > t_S$



K_1: $i_q(t) = i_R(t) + i_C(t)$ (1)

M_1: $u_C(t) = u_R(t)$ (2)

M_2: $u_R(t) = -u_{iq}(t)$

Zweiggleichungen für R und C:

$$u_R(t) = Ri_R(t) \qquad (3)$$

$$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} \qquad (4)$$

$$(4) \Rightarrow \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{1}{C}i_C(t) \overset{(1)}{=} \frac{1}{C}\left(i_q(t) - i_R(t)\right) \overset{(3)}{=} \frac{1}{C}i_q(t) - \frac{1}{CR}u_R(t) \overset{(2)}{=} \frac{1}{C}i_q(t) - \frac{1}{CR}u_C(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{du_C(t)}{dt} = -\frac{u_C(t)}{RC} + \frac{i_q(t)}{C}} \qquad \textbf{(5)}$$

Inhomogene gewöhnliche DGL erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Lösung der inhomogenen DGL - 1

$$\boxed{\frac{du_C(t)}{dt} = -\frac{u_C(t)}{RC} + \frac{i_q(t)}{C}} \qquad \textbf{(5)}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL setzt sich zusammen aus

- der Lösung der homogenen DGL ($i_q(t) = 0$) und
- einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL

$$\boxed{u_C(t) = u_{C,h}(t) + u_{C,p}(t)}$$

Lösung der homogenen DGL

Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL

Lösung der inhomogenen DGL - 2

1. Schritt: Lösung der homogenen DGL

$$\frac{du_C(t)}{dt} = -\frac{u_C(t)}{RC}$$

Separation der Variablen, Integration

$$\int_{u_{C,h}(t_S^+)}^{u_{C,h}(t)} \frac{du_{C,h}(t')}{u_{C,h}(t')} = -\frac{1}{RC}\int_{t_S}^{t} dt'$$

$$\ln u_{C,h}(t) - \ln u_{C,h}\left(t_S^+\right) = -\frac{1}{RC}(t - t_S) \quad \Rightarrow \ln\frac{u_{C,h}(t)}{u_{C,h}\left(t_S^+\right)} = -\frac{1}{RC}(t - t_S)$$

wird später bestimmt

(6) $$u_{C,h}(t) = \underbrace{\overbrace{u_{C,h}\left(t_S^+\right)}e^{t_S/RC}}_{\text{Konstante } K_h}\; e^{-t/RC}$$

$$\boxed{u_{C,h}(t) = K_h e^{-t/RC}, \qquad t > t_S}$$

Lösung der inhomogenen DGL – 3

2. Schritt: Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL

Verwende die **Methode der Variation der Konstanten**

$$\boxed{u_{C,h}(t) = K_h e^{-t/RC}, \qquad t > t_S}$$

Homogene Lösung

Ersetze die Konstante K_h der homogenen Lösung durch eine zeitabhängige Funktion $K_p(t)$

(= Variation der Konstanten)

(7) $$\boxed{u_{C,p}(t) = K_p(t) e^{-t/RC}, \qquad t > t_S}$$

Ersetze in der inhomogenen DGL (Gl. (5)) $u_C(t)$ durch $u_{C,p}(t)$

$$\frac{du_{C,p}(t)}{dt} = -\frac{u_{C,p}(t)}{RC} + \frac{i_q(t)}{C}$$

Setze in diese Gleichung für $u_{C,p}(t)$ jeweils die rechte Seite von Gl. (7) ein

(8) $$\frac{d}{dt}\left(K_p(t) e^{-t/RC}\right) = -\frac{1}{RC}\left(K_p(t) e^{-t/RC}\right) + \frac{i_q(t)}{C}$$

2. Schritt: Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL

(8) $$\frac{d}{dt}\left(K_p(t)e^{-t/RC}\right) = -\frac{1}{RC}\left(K_p(t)e^{-t/RC}\right) + \frac{i_q(t)}{C}$$

Differentiation der linken Seite von Gl. (7):

$$e^{-t/RC}\,\frac{dK_p(t)}{dt} + K_p(t)\left(-\frac{1}{RC}e^{-t/RC}\right) = -\frac{1}{RC}\left(K_p(t)e^{-t/RC}\right) + \frac{i_q(t)}{C}$$

$$\Rightarrow e^{-t/RC}\,\frac{dK_p(t)}{dt} = \frac{i_q(t)}{C}$$

$$\Rightarrow \frac{dK_p(t)}{dt} = \frac{i_q(t)}{C}e^{t/RC}$$

Integration, um $K_p(t)$ zu erhalten

$$\int_{t'_S}^{t} \frac{dK_p(t')}{dt'}dt' = \int_{t_S}^{t} \frac{i_q(t')}{C}e^{t'/RC}dt'$$

$$K_p(t) - K_p\left(t_S^+\right) = \int_{t_S}^{t} \frac{i_q(t')}{C}e^{t'/RC}dt'$$

Lösung der inhomogenen DGL – 5

2. Schritt: Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL

$$\textbf{(9)} \quad K_p(t) = \int_{t_S}^{t} \frac{i_q(t')}{C} e^{t'/RC} dt' + K_p\left(t_S^+\right)$$

Setze Gl. (9) in Gl. (7) ein:

$$\boxed{\textbf{(7)} \quad u_{C,p}(t) = K_p(t) e^{-t/RC}, \qquad t > t_S}$$

$$\Rightarrow u_{C,p}\,(t) = \left(\int_{t_S}^{t} \frac{i_q(t')}{C} e^{t'/RC} dt' + K_p\left(t_S^+\right) \right) e^{-t/RC}$$

$$\Rightarrow u_{C,p}\,(t) = \int_{t_S}^{t} \frac{i_q(t')}{C} e^{-(t-t')/RC} dt' + K_p\left(t_S^+\right) e^{-t/RC}$$

Lösung der inhomogenen DGL - 6

2. Schritt: Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL

$$u_{C,p}(t) = \int_{t_S}^{t} \frac{i_q(t')}{C} e^{-(t-t')/RC} dt' + K_p(t_S^+) e^{-t/RC}$$

Gesucht ist eine partikuläre Lösung.

Wahl: $u_{C,p}(t_S) = 0$ als Anfangswert.

Die Bedingung $u_{C,p}(t_S) = 0$ wird nur erfüllt, wenn $K_p(t_S^+) = 0$ ist.

$$\Rightarrow u_{C,p}(t) = \int_{t_S}^{t} \frac{i_q(t')}{C} e^{-(t-t')/RC} dt', \qquad t > t_S$$

Lösungen der inhomogenen DGL - 7

Noch nicht bestimmt ist $u_{C,h}(t_S)$ von Gl. (6)

$$u_C(t_S) = u_{C,h}(t_S) + u_{C,p}(t_S) = u_{C,h}(t_S), \text{ da } u_{C,p}(t_S) = 0$$

V_0 Anfangswert der Spannung, die über der Kapazität abfällt

$$u_C(t_S^-) = u_C(t_S) = u_C\left(t_S^+\right) = V_0 \qquad \text{(Stetigkeit)}$$

Allgemeine Lösung von Gl. (5):

$$u_C(t) = u_{C,h}(t) + u_{C,p}(t)$$

$$= V_0\, e^{-(t-t_S)/RC} + \int_{t_S}^{t} \frac{i_q(t')}{C} e^{-(t-t')/RC} dt', \qquad t > t_S$$

$u_C(t)$ für $t > t_S$ mit Gleichstromanregung

Stromquelle sei Gleichstromquelle: $i_q(t) = I_0 = konst.$

$$u_C(t) = V_0 e^{-(t-t_S)/RC} + \int_{t_S}^{t} \frac{i_q(t')}{C} e^{-(t-t')/RC} dt', \qquad t > t_S$$

Setze I_0 für $i_q(t)$ ein

$$u_C(t) = V_0 e^{-(t-t_S)/RC} + \int_{t_S}^{t} \frac{I_0}{C} e^{-(t-t')/RC} dt', \qquad t > t_S$$

Integration ergibt:

$$u_C(t) = V_0 e^{-(t-t_S)/RC} + \frac{I_0}{C} RC e^{-(t-t')/RC} \Big|_{t'=t_S}^{t'=t}, \qquad t > t_S$$

$$u_C(t) = V_0 e^{-(t-t_S)/RC} + I_0 R\left(1 - e^{-(t-t_S)/RC}\right), \qquad t > t_S$$

Eingeschwungener Zustand für $t \geq t_S$:

$$\lim_{t\to\infty} u_C(t) = I_0 R \qquad \text{da} \qquad \lim_{t\to\infty} e^{-(t-t_S)/RC} = 0$$

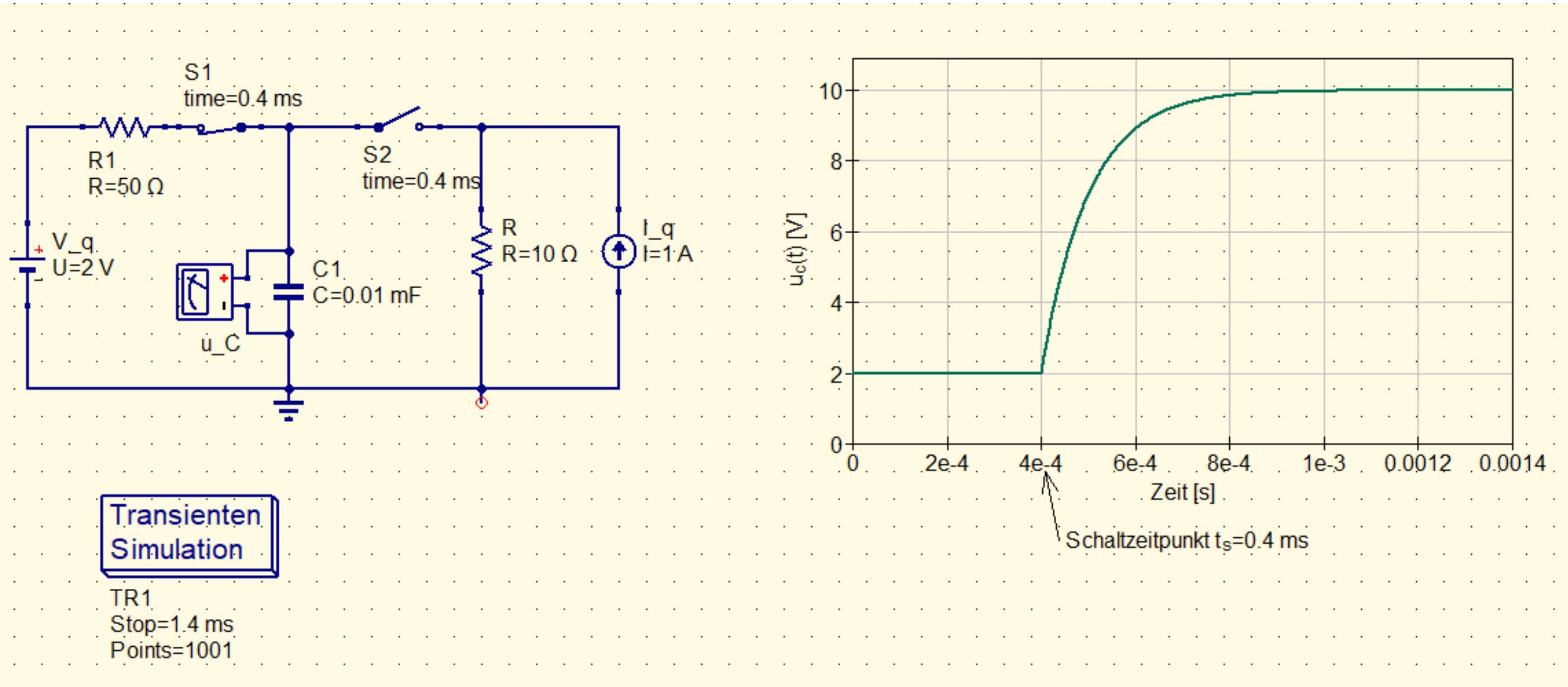
$u_C(t)$ mit $v_q(t) = 2$ V für $t < 0$ und $i_q(t) = 1$ A für $t > t_S$

$v_q(t) = V_0 = 2\ \mathrm{V}, \quad i_q(t) = I_0 = 1\ \mathrm{A}$

Für $t < t_S$: $u_C(t) = V_0 = 2\ \mathrm{V}$

Für $t \geq t_S$: $u_C(t) = V_0 e^{-(t-t_S)/RC} + I_0 R\left(1 - e^{-(t-t_S)/RC}\right)$

Eingeschwungener Zustand: $\lim_{t\to\infty} u_C(t) = I_0 R = 10\Omega \cdot 1\mathrm{A} = 10\ \mathrm{V}$



$u_C(t)$ für $t > t_S = 0$ bei harmonischer Anregung ($i_q(t) = I_0\cos(\omega t)$)

$$u_C(t) = V_0 e^{-(t-t_S)/RC} + \int_{t_S}^{t} \frac{i_q(t')}{C} e^{-(t-t')/RC} dt', \qquad t > t_S$$

Setze $I_0\cos(\omega t)$ für $i_q(t)$ ein und setze $t_S = 0$

$$u_C(t) = V_0 e^{-t/RC} + \int_0^t \frac{1}{C} I_0 \cos(\omega t)\, e^{-(t-t')/RC} dt', \qquad t > 0$$

Nach der Eulerschen Formel gilt: $\cos(\omega t) = \Re\{e^{j\omega t}\}$

$$u_C(t) = V_0 e^{-t/RC} + \Re\left\{\int_0^t \frac{I_0}{C} e^{-j\omega t'} e^{-(t-t')/RC}\, dt'\right\}, \qquad t > 0$$

Integration ergibt:

$$u_C(t) = V_0 e^{-t/RC} + \Re\left\{\frac{I_0}{C} \frac{1}{j\omega + \frac{1}{RC}} e^{j\omega t' - (t-t')/RC}\Big|_{t'=0}^{t'=t}\right\}, \qquad t > 0$$

$$u_C(t) = V_0 e^{-t/RC} + \Re\left\{I_0 \frac{R}{j\omega CR + 1}\left(e^{j\omega t} - e^{-t/RC}\right)\right\}, \qquad t > 0$$

Eingeschwungener Zustand:

$$\lim_{t\to\infty} u_C(t) = \Re\left\{I_0 \frac{R}{j\omega CR + 1} e^{j\omega t}\right\} \qquad \text{da} \qquad \lim_{t\to\infty} e^{-t/RC} = 0$$

Lösung unter Verwendung der Cosinus-Darstellung

$$u_C(t) = V_0 e^{-t/RC} + \Re\left\{I_0 \ \frac{R}{j\omega CR + 1}\left(e^{j\omega t} - e^{-t/RC}\right)\right\}, \qquad t \geq 0$$

Um die Darstellung in cos-Form zu erhalten, verwende nochmals die Eulersche Formel

$$u_C(t) = V_0 e^{-t/RC} + I_0 \sqrt{\frac{R^2}{1 + (\omega CR)^2}}\left(\cos(\omega t + \varphi) - e^{-t/RC}\right), \qquad t \geq 0$$

mit $\varphi = -\arctan\dfrac{\omega CR}{1}$

Eingeschwungener Zustand:

$$\lim_{t\to\infty} u_C(t) = I_0 \sqrt{\frac{R}{1 + (\omega CR)^2}}\cos(\omega t + \varphi) \qquad \text{da} \qquad \lim_{t\to\infty} e^{-t/RC} = 0$$

Eingeschwungener Zustand und asymptotische Stabilität

- Der eingeschwungene Zustand stellt sich nur ein, wenn der Zero-Input (alle Quellen $= 0$) für $t \to \infty$ null ist.
- Wenn der Zero-Input für $t \to \infty$ null ist, ist ein Netzwerk asymptotisch stabil.
- Dies ist nur der Fall, wenn der Realteil aller natürlichen Frequenzen < 0 ist.
- Es gibt auch <u>nicht</u> asymptotisch stabile Netzwerke! Beispiel: Oszillator

Anfangswert

Natürliche Frequenz

Quelle

$$u_C(t) = \underbrace{V_0 e^{-\frac{1}{RC}(t-t_S)}}_{\text{Zero-Input}} + \int_{t_S}^{t} \frac{i_q(t')}{C} e^{-(t-t')/RC} dt', \qquad t > t_S$$

Die allgemeine Lösung sieht nicht immer so aus!

Zeitkonstante $\tau = RC$

Netzwerke höherer Ordnung

- Die Anzahl der in einem Netzwerk vorkommenden reaktiven Elemente (Induktiviäten, Kapazitäten) legt die maximale Ordnung eines Netzwerks fest.
- Ordnung eines Netzwerks nie $>$ als die Anzahl der reaktiven Elemente!
- Netzwerke mit einer Ordnung > 1 haben mehr als ein reaktives Element.
- Ordnung $\geq$ max. Anzahl unterschiedlicher Zeitkonstanten oder natürlicher Frequenzen.
- Vielfachheiten einer Zeitkonstante oder natürlichen Frequenz sind möglich
- Netzwerke höherer Ordnung sind nur mit einem größeren zeitlichen Aufwand im Zeitbereich lösbar.
- Leichter ist die Lösung mit Hilfe des Frequenzbereichs (eingeschwungener Zustand) oder Laplacebereichs.