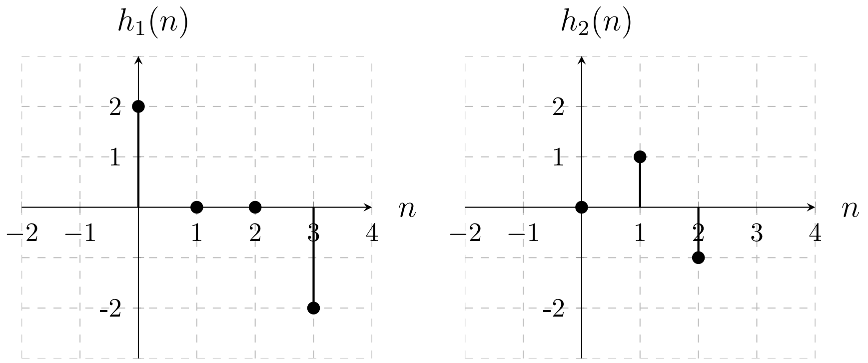
Musterlösung zur Klausur
"Digitale Signalverarbeitung"
vom 11.08.2015

Aufgabe 1: Übertragungsfunktionen und Analyse eines LTI-Systems

(11 Punkte gesamt)

a) (2 Punkte)



$h_1(n)$: Ja, Typ IV, $N_b = 3$ ungerade, ungerade Filterkoeffizientensymmetrie
$h_2(n)$: Ja, Typ IV, $N_b = 1$ ungerade, ungerade Filterkoeffizientensymmetrie

b) (1 Punkt)

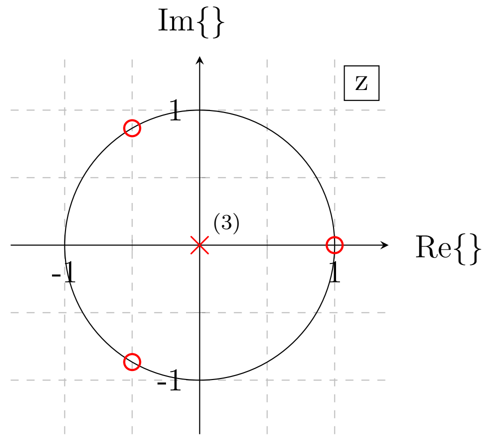
$$h_1(n) = 2 \cdot \delta(n) - 2 \cdot \delta(n-3)$$
$$H_1(z) = 2 \cdot z^0 - 2 \cdot z^{-3}$$

c) (1 Punkt)

$$\begin{aligned} H_1(z) &= 2 - 2 \cdot z^{-3} \\ &= \frac{2z^3 - 2}{z^3} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 3-fache Polstelle $z_{\infty,k+1} = 0$, $k = 0{,}1{,}2$
Nullstellen:

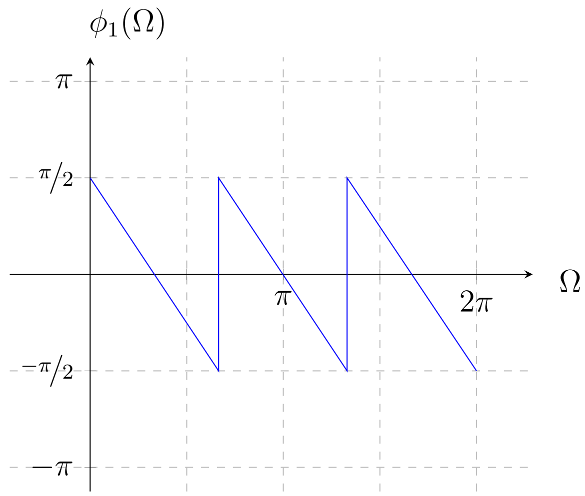
$$\begin{aligned} 2z^3 - 2 &= 0 \qquad | +2 \; | : 2 \\ z^3 &= 1 \qquad | \sqrt[3]{\ } \\ z_{0,k+1} &= 1 \cdot e^{j2\pi\frac{k}{3}},\; k = 0{,}1{,}2 \end{aligned}$$



d) (2 Punkte)

$$
\begin{aligned}
H_1(e^{j\Omega}) &= 2 - 2e^{-j3\Omega} \\
&= 2\left(1 - e^{-j3\Omega}\right) \qquad \big| \cdot e^{-j\frac{3}{2}\Omega} e^{j\frac{3}{2}\Omega} \\
&= 2\left(e^{j\frac{3}{2}\Omega} - e^{-j\frac{3}{2}\Omega}\right) \cdot e^{-j\frac{3}{2}\Omega} \\
&= 4j \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\Omega\right) \cdot e^{-j\frac{3}{2}\Omega} \\
&= 4 \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\Omega\right) \cdot e^{-j\frac{3}{2}\Omega} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \\
&= 4 \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\Omega\right) \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\Omega\right)}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \phi_1(\Omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\Omega$



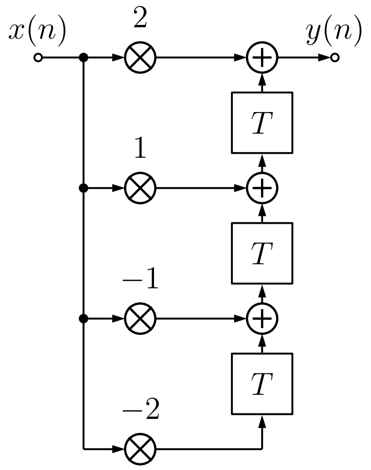
e) (1 Punkt)

$$
\begin{aligned}
h(n) &= h_1(n) + h_2(n) \\
&= 2 \cdot \delta(n) + \delta(n-1) - \delta(n-2) - 2 \cdot \delta(n-3)
\end{aligned}
$$

f) (1 Punkt)
Ja, Typ IV, $N_b = 3$, ungerade Filterkoeffizientensymmetrie

g) (1 Punkt)
$y(n) = 2 \cdot x(n) + x(n-1) - x(n-2) - 2 \cdot x(n-3)$

h) (2 Punkte)



Aufgabe 2: Inverse z-Transformation

(11 Punkte gesamt)

a) (2 Punkte)

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{(z^2-0.9z)(z+0.9)}{z(z+0.5)(z-0.5)} \\ &= \frac{(z-0.9)(z+0.9)}{(z+0.5)(z-0.5)} \end{aligned}$$

Polstellen:

$$\begin{aligned} z_{\infty,1} &= 0.5 \\ z_{\infty,2} &= -0.5 \end{aligned}$$

ROC 1: $|z| > 0.5$
ROC 2: $|z| < 0.5$

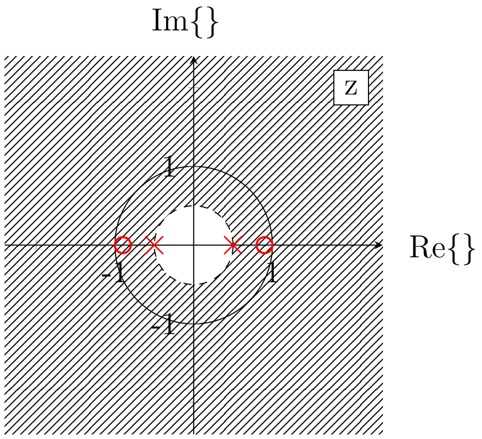
b) (5 Punkte)

$$\begin{aligned} P &= 2 \\ \nu_p &= 1 \\ H(z) &= R_0 + R_{1,1}\frac{z}{(z-z_{\infty,1})^1} + R_{2,1}\frac{z}{(z-z_{\infty,2})^1} \\ R_0 = H(0) &= \frac{(0-0.9)(0+0.9)}{(0+0.5)(0-0.5)} = \frac{-0.81}{-0.25} = 3.24 \\ R_{1,1} &= \lim_{z\to z_{\infty,1}} \left\{(z-0.5)\frac{z^2-0.81}{(z-0.5)(z+0.5)z}\right\}_{z=0.5} = \frac{0.25-0.81}{0.5} = -1.12 \\ R_{2,1} &= \lim_{z\to z_{\infty,2}} \left\{(z+0.5)\frac{z^2-0.81}{(z-0.5)(z+0.5)z}\right\}_{z=-0.5} = \frac{0.25-0.81}{0.5} = -1.12 \\ H(z) &= 3.24 - 1.12\frac{z}{(z-0.5)} - 1.12\frac{z}{(z+0.5)} \\ h(n) &= 3.24\cdot\delta(n) - 1.12\cdot(0.5)^n\cdot\epsilon(n) - 1.12\cdot(-0.5)^n\cdot\epsilon(n) \end{aligned}$$

c) (3 Punkte)
Nullstellen:

$$\begin{aligned} z_{0,1} &= 0.9 \\ z_{0,2} &= -0.9 \end{aligned}$$

ROC: $|z| > 0.5$



d) (1 Punkt)
Bandpass

Aufgabe 3: Systemanalyse

(15 Punkte gesamt)

a) (2 Punkte)
Beides Tiefpässe.

b) (2 Punkte)
Ja, da jeweils das rechtsseitiges Konvergenzgebiet den Einheitskreis umfasst.

c) (2 Punkte)
H1: Chebyshev Type I, da N-fache NST bei $z = -1$ (schließt Chebyshev II und Cauer aus) und Polstellen die für nicht monotonen Durchlassbereich (schließt Butterworth aus) sorgen.

H2: Chebyshev Type II, da Polstellen für monotonen Durchlassbereich sorgen (schließt Cauer und Chebyshev Type I aus). Butterworth ausgeschlossen, da keine N-fache NST bei $z = -1$.

d) (1 Punkt)
$N_0 = 3$

e) (1 Punkt)

$$H_1(z) = z^{3-3} \cdot b_0 \frac{(z+1)^3}{(z - 0.77+j0.5)(z - 0.82)(z + 0.77+j0.5)} \tag{1}$$

$$\tag{2}$$

f) (2 Punkte)
$z^{3-3} = 1$, daher 0 Koeffizienten
b_0 ist 1 Koeffizient
Zählergrad=3 (wegen $N_b = 3$), daher 3 Koeffizienten $(b_1 z^1 + b_2 z^2 + b_3 z^3)$
Nennergrad=3 (wegen $N_a = 3$), daher 3 Koeffizienten $(a_1 z^1 + a_2 z^2 + a_3 z^3)$
$\rightarrow$ 7 Koeffizienten

g) (1 Punkt)
Chebyshev Typ I und Cauer, da nicht monoton im Durchlassbereich.

h) (1 Punkt)
IIR: Unendliche Impulsantwort (Infinite Impulse Response)!

i) (1 Punkt)
Addierer: 7
Multiplikatoren: 8
Speicherelemente: 7

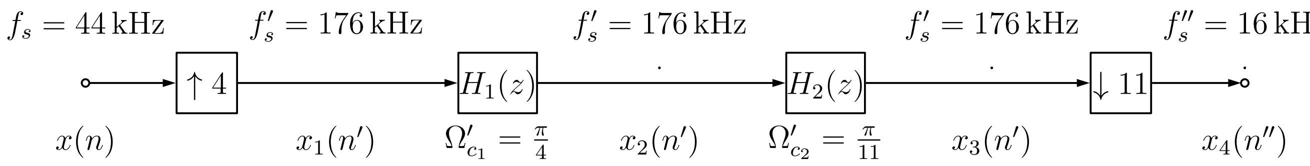
j) (2 Punkte) Direktform II, da sie kanonisch ist. # Speicherelemente: 4

Aufgabe 4: Abtastratenwandlung & Filterdesign

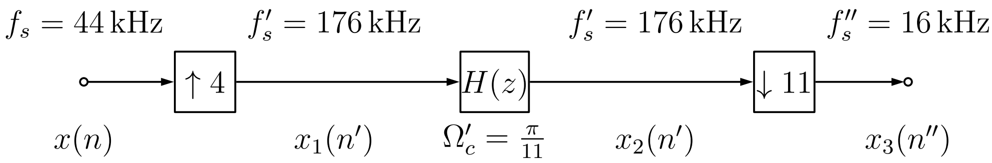
(13 Punkte gesamt)

a) (1 Punkt)
$r = \frac{p}{q} = \frac{4}{11}$

b) (3 Punkte)



c) (1 Punkt)



$H(z)$ stellt einen Tiefpass mit Grenzfrequenz $\Omega'_c = \frac{\pi}{11}$ dar.

d) (2 Punkte)

$$\begin{aligned}
54\,\mathrm{dB} &= -20\log\delta_{\mathrm{st}} \\
\Rightarrow \delta_{\mathrm{st}} &= 10^{\frac{54\,\mathrm{dB}}{-20\,\mathrm{dB}}} = 0.002 \\
d &= -20\log\left(\min\{\delta_{\mathrm{p}},\delta_{\mathrm{st}}\}\right) = -20\log(0.002) = 54\,\mathrm{dB} \\
\Rightarrow \beta &= 0.1102\cdot\left(\frac{54\,\mathrm{dB}}{\mathrm{dB}} - 8.7\right) = 4.9921 \\
\delta_{\mathrm{p}} &= 0.1 \\
\Rightarrow R_p &= 20\log(1+\delta_{\mathrm{p}}) - 20\log(1-\delta_{\mathrm{p}}) = 1.7430\mathrm{dB}
\end{aligned}$$

e) (1 Punkt)
$\beta \approx 5 \Rightarrow$ Hamming window

f) (1 Punkt)
Blackman, weil eine Sperrdämpfung von min. 54 dB gefordert ist.

g) (2 Punkte)

$$\begin{aligned}
N_b &= \frac{54 - 7.95}{2.29 \cdot \Delta\Omega} \\
22 &= \frac{46.05}{2.29 \cdot \Delta\Omega} \\
50.38 &= \frac{46.05}{\Delta\Omega} \\
\Rightarrow \Delta\Omega &= \frac{46.05}{50.38} \approx 0.914 \approx 0.291\pi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\Omega &= \Omega_{\mathrm{st}} - \Omega_{\mathrm{p}} \\
\Rightarrow \Omega_{\mathrm{st}} &= 0.291\pi + \frac{\pi}{6} \approx 1.4378 \approx 0.4577\pi
\end{aligned}$$

h) (2 Punkte)