Institut für Regelungstechnik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr.-Ing. M. Maurer
Prof. Dr.-Ing. W. Schumacher

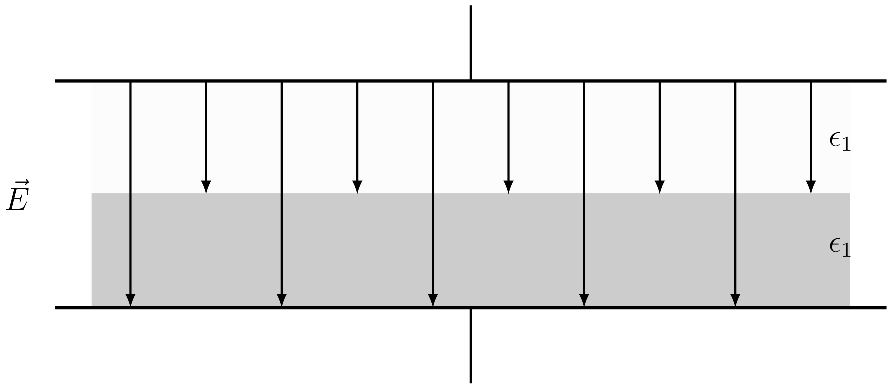
Hans-Sommer-Str. 66
38106 Braunschweig
Tel. (0531) 391-3840

Grundlagen der Elektrotechnik

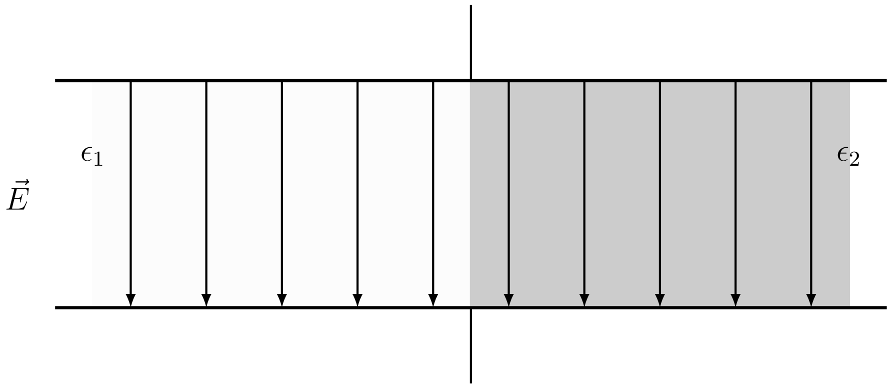
Lösungsvorschlag zu den Klausuraufgaben H’19

1 Elektrisches Feld **Punkte: 21**

a) Verlauf der Feldlinien:
Feldlinie durch Bereich einer Permeabilität: Parallelschaltung
Feldlinie durch Bereiche unterschiedlicher Permeabilitäten: Reihenschaltung (1)



Reihenschaltung

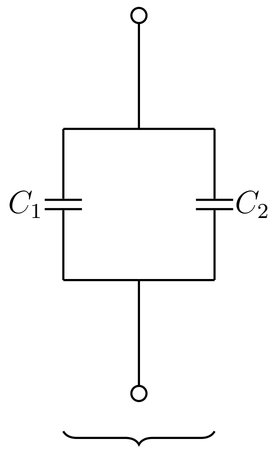


Parallelschaltung

(1)

$\sum_{a)} 2$

b)



Parallelschaltung

Zeichnung (1)
Bezeichnung: Parallelschaltung (1)

$\sum_{b)} 2$

c)

$$Q = \oiint_A \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{A}\ (1)$$

$\sum_{c)} 1$

d)

An Enden des Zylinders $\vec{D} \perp \mathrm{d}\vec{A} \Rightarrow \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0 \Rightarrow$ Nur Mantelfläche liefert Beitrag (1)

$$Q_z = \iint\limits_{A-Mantel} \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{A} \ (0.5)$$

$$\mathrm{d}\vec{A} = r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\vec{e_r} \ (0.5)$$

Bei konstantem Radius ist $\vec{D}$ in den einzelnen Dielektrika konstant (0.5)

$R_1 \leq r \leq R_2$

$$\Psi_1 = \int_{z=0}^{L}\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} D_1\vec{e_r} r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\vec{e_r}$$

$$= LrD_1\frac{\pi}{2} \ (0.5)$$

$$\Psi_2 = \int_{z=0}^{L}\int_{\phi=\frac{\pi}{2}}^{2\pi} D_2\vec{e_r} r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\vec{e_r}$$

$$= LrD_2\frac{3\pi}{2} \ (0.5)$$

$$Q_z = \Psi_1 + \Psi_2 = Lr\frac{\pi}{2}\left(D_1 + 3D_2\right) \ (0.5)$$

$\sum_{d)} 4$

e)

E_t und D_n sind stetig (1)

$\sum_{e)} 1$

f)

$$E_n = 0$$

$$E_1 = E_2 = E_{12} \ (1)$$

$$\begin{aligned} Q_z &= Lr\frac{\pi}{2}\left(D_1 + 3D_2\right) \\ &= Lr\frac{\pi}{2}\left(\epsilon_0\epsilon_1 E_{12} + 3\epsilon_0\epsilon_2 E_{12}\right) \\ &= Lr\frac{\pi}{2}\left(\epsilon_0 \cdot 3\epsilon_2 E_{12} + 3\epsilon_0\epsilon_2 E_{12}\right) \\ &= 3 \cdot Lr\pi\epsilon_0\epsilon_2 E_{12} \ (1) \end{aligned}$$

$$E_{12} = \frac{Q_z}{3 \cdot Lr\pi\epsilon_0\epsilon_2} \ (1)$$

$\sum_{f)} 3$

g)

$$U = \int \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{s}\,(0.5)$$
$$\mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{d}\vec{r}$$
$$\vec{E} \parallel \mathrm{d}\vec{r}$$
$$U = \int_{r=R_1}^{R_2} E_{12}\,\mathrm{d}r\,(0.5)$$
$$= \int_{r=R_1}^{R_2} \frac{Q_z}{3\pi r L\epsilon_0\epsilon_2}\,\mathrm{d}r$$
$$= \frac{Q_z}{3\pi L\epsilon_0\epsilon_2}\ln(\frac{R_2}{R_1})\,(1)$$

$\sum_{g)} 2$

h)

$$C_{ges} = \frac{Q_z}{U}\,(0.5)$$
$$= \frac{3\pi L\epsilon_0\epsilon_2}{\left(\ln(\frac{R_2}{R_1})\right)}\,(0.5)$$

$\sum_{h)} 1$

i)

$$C \overset{!}{=} \acute{C}$$
$$\frac{3\pi L\epsilon_0\epsilon_2}{\left(\ln(\frac{R_2}{R_1})\right)} \overset{!}{=} \frac{2\cdot 3\pi L\epsilon_0\acute{\epsilon}_2}{\left(\ln(\frac{R_2}{R_1})\right)}\,(1)$$
$$\epsilon_2 = 2\acute{\epsilon}_2$$
$$\acute{\epsilon}_2 = \frac{1}{2}\epsilon_2\,(0.5)$$
$$\acute{\epsilon}_1 = \frac{1}{2}\epsilon_1\,(0.5)$$

$\sum_{i)} 2$

$\sum_{A1} 18$

2 Gleichstromnetzwerk

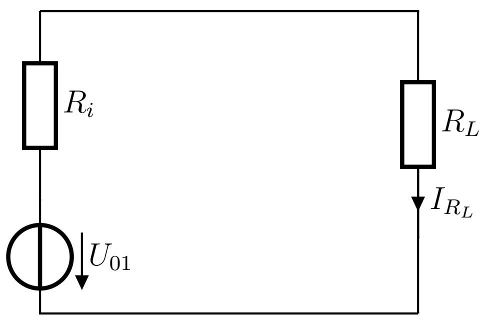
Punkte: 16

a) $\Rightarrow$ Innenwiderstand (0.5)

$$R_i = \frac{U_{01}}{I_K} = 0{,}4\,\Omega \ (0.5)$$

$\sum_{a)} 1$

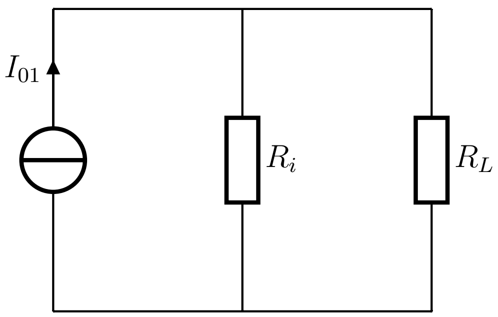
b)



(0.5)

$\sum_{b)} 0.5$

c)



(0.5)

$\sum_{c)} 0.5$

d)

$$
\begin{aligned}
I_{R_L} &= \frac{U_{01}}{R_i + R_L} = \frac{10\,\mathrm{V}}{0{,}4\,\Omega + 0{,}6\,\Omega} = 10\,\mathrm{A}\ \textcolor{red}{(0.5)} \\
P_L &= {I_{R_L}}^2 \cdot R_L = (10\,\mathrm{A})^2 \cdot 600\,\mathrm{m\Omega} = 60\,\mathrm{W}\ \textcolor{red}{(0.5)} \\
\eta &= \frac{P_L}{P_{ges}} \cdot 100\%\ \textcolor{red}{(0.5)}\ \text{mit:} \\
P_{ges} &= {I_{R_L}}^2 \cdot R_{ges} = 100\,\mathrm{W} \\
\eta &= 60\%\ \textcolor{red}{(0.5)}
\end{aligned}
$$

$\sum_{d)} 2$

e) $\Rightarrow$ Spannungsteiler (0.5)

$\sum_{e)} 0.5$

f)

$$
\begin{aligned}
U_{\mathrm{CD}} &\stackrel{!}{=} \frac{1}{3} \cdot U_{\mathrm{AB}} \\
U_{\mathrm{CD}} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}\ \textcolor{red}{(0.5)} \\
R_2 &= \frac{1}{3} \cdot (R_1 + R_2) \\
\Rightarrow R_1 &= 2R_2\ \textcolor{red}{(0.5)}
\end{aligned}
$$

$\sum_{f)} 1$

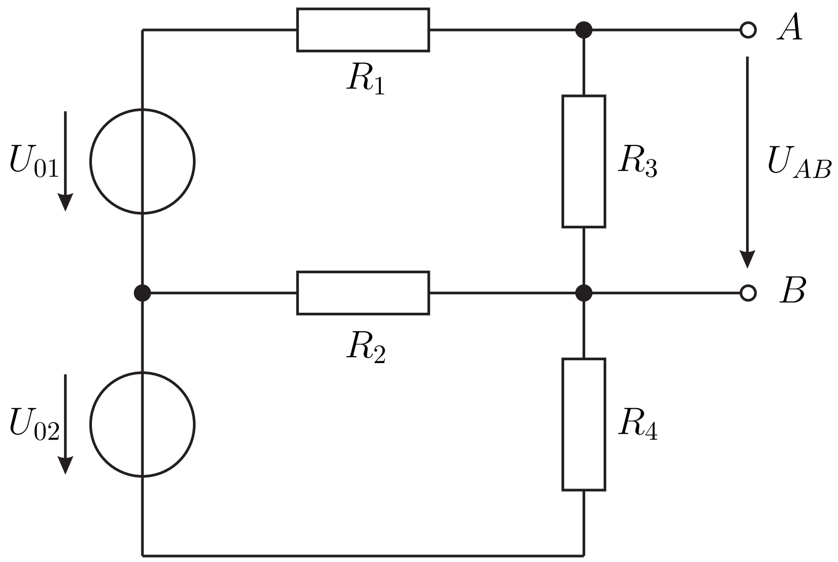
g)

$$
R_i = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{100\,\Omega \cdot 100\,\Omega}{100\,\Omega + 100\,\Omega} = 50\,\Omega\ \textcolor{red}{(1)}
$$

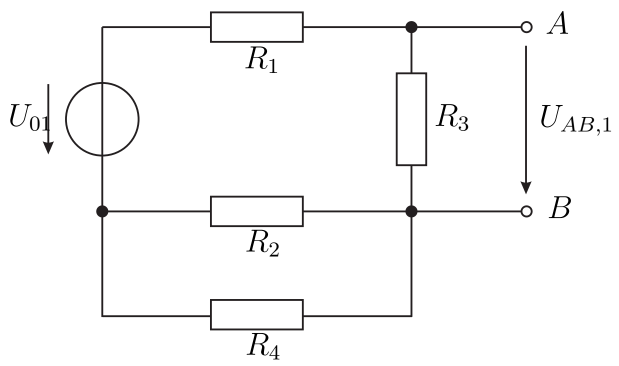
$\sum_{g)} 1$

h) $\Rightarrow$ R_5 sowie S_1 müssen im Folgenden nicht betrachtet werden. (0.5)
Nach der Quellentransformation von I_{02} ergibt sich das aus Seminarübung 3.1 bekannte Netzwerk:[1]

[1] Alternativ kann das Netzwerk auch ohne die Quellentransformation von I_{02} zu U_{02} gelöst werden. Die entsprechende Teillösung für die Spannung $U_{AB,2}$ ist in Klammern gegeben.



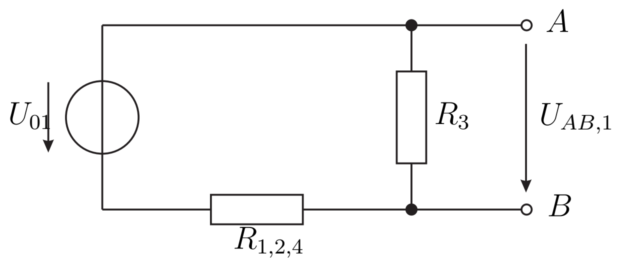
U_{02} $\rightarrow$ Kurzschluss, da U_{02} ideale Spannungsquelle ohne Innenwiderstand



(0.5)

Fasse R_1, R_2 und R_4 zusammen:

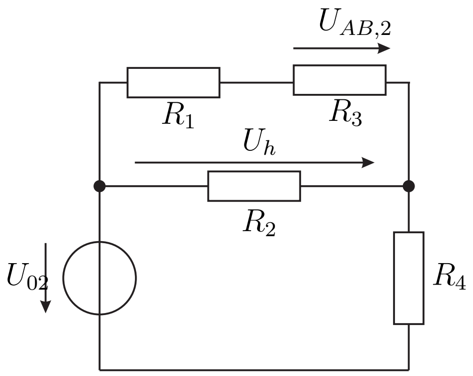
$R_{1,2,4} = \frac{R_1 \cdot (R_2+R_4)+R_2 \cdot R_4}{R_2+R_4}$ (0.5)



Spannungsteiler:

$U_{AB,1} = U_{01} \frac{R_3}{R_3+R_1+\frac{R_2 R_4}{R_2+R_4}} = \frac{U_{01} \cdot R_3 \cdot (R_2+R_4)}{R_1 \cdot R_2+R_1 \cdot R_4+R_2 \cdot R_3+R_3 \cdot R_4+R_2 \cdot R_4} = \frac{U_{01} \cdot R_3 \cdot (R_2+R_4)}{N}$ (1)

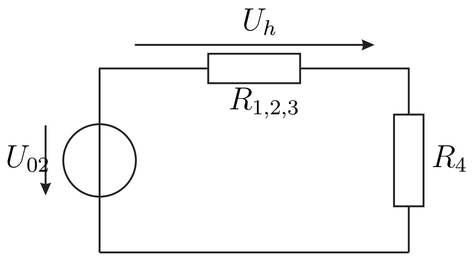
$U_{01} \quad \rightarrow \quad$ Kurzschluss



(0.5)

Fasse R_1, R_2 und R_3 zusammen:

$R_{1,2,3} = \frac{R_2(R_1+R_3)}{R_1+R_2+R_3}$



Für Erkennen der Spannungsteiler: (0.5)

1. Spannungsteiler:

$U_h = U_{02}\frac{R_{1,2,3}}{R_4+R_{1,2,3}}$

2. Spannungsteiler:

$$U_{AB,2} = U_h\frac{R_3}{R_1+R_3}$$
$$= U_{02}\frac{R_{1,2,3}}{R_4+R_{1,2,3}}\frac{R_3}{R_1+R_3}$$
$$= U_{02}\frac{R_3\,\frac{R_2(R_1+R_3)}{R_1+R_2+R_3}}{(R_1+R_3)(R_4+\frac{R_2(R_1+R_3)}{R_1+R_2+R_3})}$$
$$= U_{02}\frac{R_2\,R_3}{R_4(R_1+R_2+R_3)+R_2(R_1+R_3)}$$

$U_{AB,2} = \frac{U_{02}R_2R_3}{N}$ (1)

$(= \frac{R_2R_3R_4\cdot I_{02}}{N})$

Superpositionsprinzip: $U_{AB} = U_{AB,1} + U_{AB,2}$

$U_{AB} = \frac{U_{01}R_3(R_2+R_4)+U_{02}R_2R_3}{N}$ (0.5)

$\sum_{h)} 5$

i)

$$P_L = \frac{U_L^2}{R_L}$$
$$U_L = U_0 \cdot \frac{R_L}{(R_i + R_L)} \ (0.5)$$

damit:

$$P_L = \frac{U_0^2 \cdot \frac{R_L^2}{(R_i+R_L)^2}}{R_L} = U_0^2 \cdot \frac{R_L}{(R_i + R_L)^2} \ (0.5)$$

$\Rightarrow$ Für Maximum 1. Ableitung $\stackrel{!}{=} 0$ (0.5)

Hier: Quotientenregel

$$g(R_L) = U_0^2 \cdot R_L \longmapsto g'(R_L) = U_0^2$$
$$h(R_L) = (R_L + R_i)^2 \longmapsto h'(R_L) = 2(R_L + R_i)$$

$$P'(R_L)_L = \frac{U_0^2 \cdot (R_L + R_i)^2 - U_0^2 \cdot R_L \cdot 2(R_L + R_i)}{(R_L + R_i)^2 \cdot (R_L + R_i)^2} \stackrel{!}{=} 0 \ (1)$$

$\Rightarrow$ Gleichung $\stackrel{!}{=} 0$ wenn Zähler $\stackrel{!}{=} 0$

Somit:

$$U_0^2 \cdot (R_L + R_i)^2 - U_0^2 \cdot R_L \cdot 2(R_L + R_i) \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Leftrightarrow (R_L + R_i)^2 = 2R_L(R_L + R_i)$$
$$\Leftrightarrow R_L + R_i = 2R_L$$
$$\Leftrightarrow R_i = R_L \ (0.5)$$

Überprüfen ob auch wirklich ein Maximum gefunden wurde:

$$P''(R_L)_L = \frac{2U_0^2 R_L - 4U_0^2 R_i}{(R_i + R_L)^4} \ (1) \qquad \text{bei } R_i = R_L:$$
$$\Rightarrow -\frac{2U_0^2 R_L}{(2R_L)^4} < 0 \ (0.5)$$

$\Rightarrow$ Damit wurde das Maximum gefunden.

□

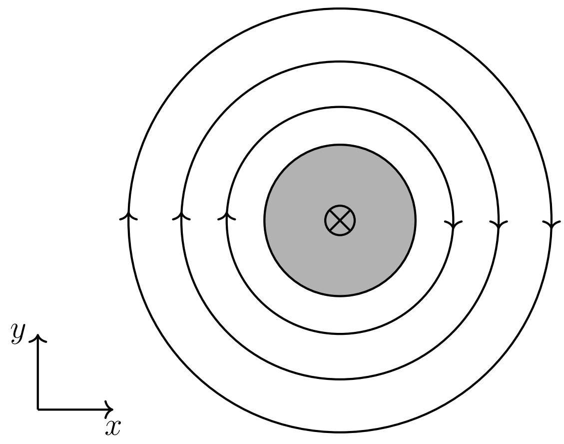
$\sum_{i)} 4.5$

$\sum_{A2} 16$

3 Magnetfeld

Punkte: 16

a)



(1)

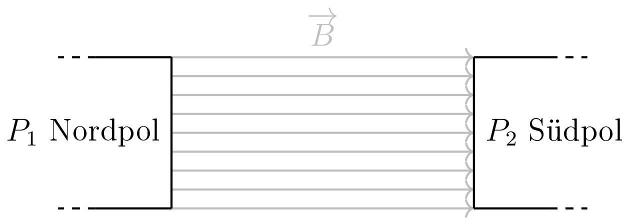
$\sum_{a)} 1$

b)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_L} &= q\left(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}\right) \quad (0.5)\\ &= I\left(\overrightarrow{s} \times \overrightarrow{B}\right) \quad (0.5)\end{aligned}$$

$\sum_{b)} 1$

c)



- Magnetfeldlinien korrekt eingetragen plus Begründung (Rechte-Hand-Regel oder Berechnung über Kreuzprodukt) (0.5)
- Zusätzlich magnetische Pole korrekt zugeordnet (0.5)

$\sum_{c)} 1$

d) Zunächst wird die Gewichtskraft bestimmt, die auf die Waagschale W_1 wirkt:

$$\overrightarrow{F_g} = m \cdot \overrightarrow{g} = m \cdot g \cdot (-\overrightarrow{e_y}) \ (0.5)$$

Nun wird die Lorentzkraft berechnet, die auf den Leiter L_1 wirkt:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_L} &= I_1 \cdot \left(\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{B}\right) \\ &= I_1 \cdot s_1 \cdot B \cdot (-\overrightarrow{e_z} \times \overrightarrow{e_x}) \\ &= I_1 \cdot s_1 \cdot B \cdot (-\overrightarrow{e_y}), \text{ da } -\overrightarrow{e_z} \perp \overrightarrow{e_x} \ (0.5)\end{aligned}$$

Kräftegleichgewicht herstellen und nach I_1 auflösen:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_L} &= \overrightarrow{F_g} \ (0.5) \\ \Leftrightarrow I_1 \cdot s_1 \cdot B \cdot (-\overrightarrow{e_y}) &= m \cdot g \cdot (-\overrightarrow{e_y}) \ \mid : (-\overrightarrow{e_y}) \\ \Leftrightarrow I_1 \cdot s_1 \cdot B &= m \cdot g \mid : s_1 \ : B \\ \Leftrightarrow I_1 &= \frac{m \cdot g}{s_1 \cdot B} \ (0.5)\end{aligned}$$

Werte einsetzen und ausrechnen:

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{m \cdot g}{s_1 \cdot B} \\ &= \frac{0{,}1\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{0{,}1\,\mathrm{m} \cdot 0{,}1\,\mathrm{T}} \\ &= \frac{1\,\mathrm{N}}{0{,}01\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}}} \\ &= 100\,\mathrm{A} \ (0.5)\end{aligned}$$

$\sum_{d)} 2.5$

e)
- Eine Verdopplung des Gewichts in der Waagschale m führt zu einer Verdopplung der benötigten Stromstärke.
- Eine Halbierung der magnetischen Flussdichte B führt zu einer Verdopplung der benötigten Stromstärke.
- Eine Verdopplung der Länge des Drahtes innerhalb des Magnetfelds s_1 führt zu einer Halbierung der benötigten Stromstärke.

- 2 von 3 korrekt (0.5)
- 3. auch korrekt (0.5)

$\sum_{e)} 1$

f)

$$\overrightarrow{F_L'} = I_1' \cdot \left(\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{B}\right)$$
$$= I_1' \cdot s_1 \cdot B \cdot \sin(60°) \cdot (-\overrightarrow{e_y})$$

Bewertung: Sinus verwendet (0.5), zusätzlich Gradzahl korrekt (0.5)

$$= I_1' \cdot s_1 \cdot B \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot (-\overrightarrow{e_y})$$

Gleichsetzen

$$\overrightarrow{F_l} = \overrightarrow{F_l'} \ (0.5)$$
$$\Leftrightarrow I_1 \cdot s_1 \cdot B \cdot (-\overrightarrow{e_y}) = I_1' \cdot s_1 \cdot B \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot (-\overrightarrow{e_y})$$
$$\Leftrightarrow I_1 = I_1' \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot I_1 = I_1'$$

Die benötigte Stromstärke nimmt um den Faktor $\frac{2}{\sqrt{3}}$ zu: $I_1' = 200\frac{1}{\sqrt{3}}$ A (0.5).

$\sum_{f)} 2$

g) Die Kraft wirkt nun nicht mehr in negative y-Richtung, sondern um 30 Grad gedreht, im rechten Winkel zu den ebenfalls gedrehten Magnetfeldlinien (0.5). Der nach unten, in negative y-Richtung gerichtete Anteil der Kraft ist $F \cdot \cos(30°) = F \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (0.5). Daher nimmt die benötigte Stromstärke um den Faktor $\frac{2}{\sqrt{3}}$ zu: $I_1'' = 200\frac{1}{\sqrt{3}}$ A (0.5).

$\sum_{g)} 1.5$

h)

$$\Phi(t) = \iint_A \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{A}, \text{ Magnetfeld } \overrightarrow{B} \text{ ist homogen}$$
$$= \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{A} \ (0.5)$$
$$= B \cdot a \cdot b \cdot \cos(\omega \cdot t) \ (0.5)$$

Alternativ: Die effektive Fläche von A gegenüber B beträgt $\hat{A} = A \cdot \cos(\omega \cdot t)$. Da die Vektoren der effektiven Fläche $\hat{A}$ und des Magnetfelds B per Definition in die gleiche Richtung zeigen gilt ebenfalls $\Phi(t) = B \cdot a \cdot b \cdot \cos(\omega \cdot t)$.

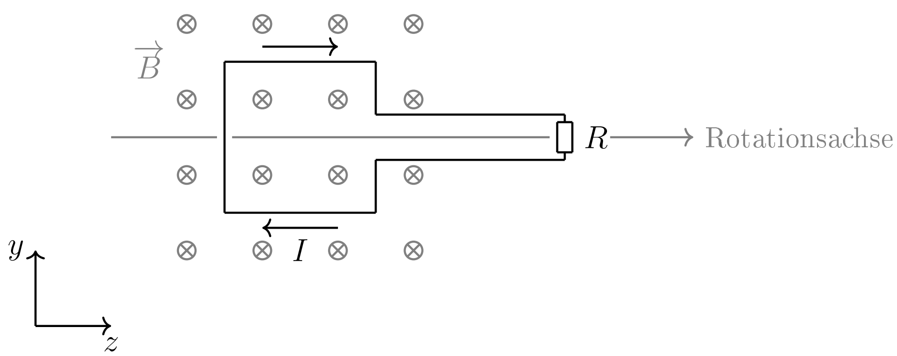
$\sum_{h)} 1$

i)

$$
\begin{aligned}
u_{\text{ind}}(t) &= -N\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t}, \text{ mit } N = 1 \\
&= -\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} \; (0.5) \\
&= -\frac{\mathrm{d}B \cdot a \cdot b \cdot \cos(\omega \cdot t)}{\mathrm{d}t} \; (0.5) \\
&= -\left(B \cdot a \cdot b \cdot \frac{\mathrm{d}\cos(\omega \cdot t)}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= -\left(B \cdot a \cdot b \cdot (-\sin(\omega \cdot t)) \cdot \omega\right) \\
&= B \cdot a \cdot b \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \omega \; (0.5)
\end{aligned}
$$

$\sum_{i)} 1.5$

j) Nach der Lenz'schen Regel wird durch eine Änderung des magnetischen Flusses durch eine Leiterschleife eine Spannung induziert, sodass der dadurch fließende Strom ein Magnetfeld erzeugt, welches der Änderung des magnetischen Flusses entgegenwirkt. (1)



(0.5)

$\sum_{j)} 1.5$

k)

$$
\begin{aligned}
\sin(\omega \cdot t) &= \sin\left(2\pi \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 1{,}25\,\mathrm{s}\right) = \sin(2{,}5\pi) = 1 \; (0.5) \\
u_{\mathrm{ind}}(t) &= B \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \omega \\
u_{\mathrm{ind}}(1,25\,\mathrm{s}) &= 0{,}1\,\mathrm{T} \cdot 0{,}05\,\mathrm{m} \cdot 0{,}07\,\mathrm{m} \cdot 2\pi \frac{1}{\mathrm{s}} \\
&= 0{,}0007\pi\,\mathrm{V} \; (0.5) \\
i_{\mathrm{ind}}(1,25\,\mathrm{s}) &= \frac{u_{\mathrm{ind}}(1,25\,\mathrm{s})}{R} \\
&= \frac{0{,}0007\pi\,\mathrm{V}}{0{,}035\pi\,\Omega} \; (0.5) \\
&= 0{,}02\mathrm{A} = 20\,\mathrm{mA} \; (0.5)
\end{aligned}
$$

$\sum_{k)} 2$

$\sum_{A3} 16$

4 Komplexe Wechselstromrechnung

Punkte: 31

a)
- Lineares System (0.5)
  (lineare Bauteile, beschrieben durch lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten)
- Eingeschwungener Zustand (0.5)
- Konzentrierte Parameter
  (im Vergleich zu verteilten Parametern in der Hochfrequenztechnik)

$\sum_{a)} 1$

b) Amplitude $\hat{u}$ und Phasenverschiebungswinkel φ_0 aus dem Diagramm ablesen:

$\varphi_0 = -\frac{3\pi}{4}$ (0.5) $\hat{u} = 10\,\mathrm{V}$ (0.5)

Effektivwert U berechnen:

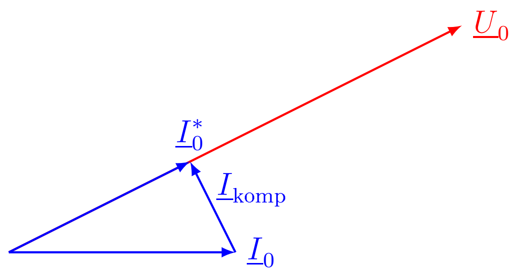
$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \hat{u}\ (0.5) = \frac{10}{\sqrt{2}}\,\mathrm{V}$$

Trigonometrische Form von $\underline{U}$ berechnen:

$$\begin{aligned}\underline{U} &= U \cdot \cos(\varphi_0) + \mathrm{j} \cdot U \cdot \sin(\varphi_0) \\ &= \frac{10\,\mathrm{V}}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{j}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (-5 - \mathrm{j}5)\,\mathrm{V}\ (0.5)\end{aligned}$$

$\sum_{b)} 2$

c) Ein induktives oder kapazitives Bauteil wird der eigentlichen Schaltung parallel geschaltet, sodass der Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung kompensiert wird. (1)



(1)

$\sum_{c)} 2$

d)

$$\frac{S_{\text{neu}}}{S_{\text{alt}}} = \frac{U_{\text{neu}} \cdot I_{\text{neu}}}{U_{\text{alt}} \cdot I_{\text{alt}}} \,(0.5) = \frac{U_{\text{neu}} \cdot \frac{U_{\text{neu}}}{Z}}{U_{\text{alt}} \cdot \frac{U_{\text{alt}}}{Z}} \,(0.5) = \frac{2U_{\text{alt}} \cdot \frac{2U_{\text{alt}}}{Z}}{U_{\text{alt}} \cdot \frac{U_{\text{alt}}}{Z}} \,(0.5) = 4 \,(0.5)$$

Nein, da die Gesamtimpedanz frequenzabhängig sein kann bzw. ist (0.5) und keine Informationen über die Zusammensetzung des Netzwerks zur Verfügung stehen (0.5) .

$\sum_{d)} 3$

e) Ansatz 0,5 Punkte und Ergebnis 0,5 Punkte

$$L_x \widehat{=} (L_1 \& L_2) || (L_3 \& L_4)$$

$$L_x = \frac{(L_1 + L_2) * (L_3 + L_4)}{L_1 + L_2 + L_3 + L_4} \,(0.5)$$

$$= \frac{8\,\text{mH} \cdot 16\,\text{mH}}{4\,\text{mH} + 4\,\text{mH} + 8\,\text{mH} + 8\,\text{mH}} = \frac{128\,\text{mH}}{24\,\text{mH}} = \frac{16}{3}\text{mH} = 5{,}333\,333\,\text{mH} \,(0.5)$$

Ansatz 0,5 Punkte und Ergebnis 0,5 Punkte

$$C_x \widehat{=} (C_1 \& C_2) || (C_3 \& C_4)$$

$$C_x = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} + \frac{C_3 \cdot C_4}{C_3 + C_4} \,(0.5)$$

$$= \frac{200\,\mu\text{F} \cdot 200\,\mu\text{F}}{200\,\mu\text{F} + 200\,\mu\text{F}} + \frac{100\,\mu\text{F} \cdot 100\,\mu\text{F}}{100\,\mu\text{F} + 100\,\mu\text{F}} = 100\,\mu\text{F} + 50\,\mu\text{F} = 150\,\mu\text{F} \,(0.5)$$

$\sum_{e)} 2$

f)

$$\underline{I}_4 = \frac{\underline{U}_{Lx}}{\text{j}\omega L_x} \,(0.5)$$

$$= \frac{2\,\text{V} + \text{j}2\,\text{V}}{\text{j}1000\,\text{s}^{-1} 4 \cdot 10^{-3} \text{V}\,\text{s}\,\text{A}^{-1}} = 0{,}5\,\text{A} - \text{j}0{,}5\,\text{A} \,(0.5)$$

$$\underline{U}_{R2} = \underline{I}_4 \cdot R_2 \,(0.5)$$

$$= (0{,}5\,\text{A} - \text{j}0{,}5\,\text{A})\, 5\,\text{V}\,\text{A}^{-1} = 2{,}5\,\text{V} - \text{j}2{,}5\,\text{V} \,(0.5)$$

$\sum_{f)} 2$

g)

$$\underline{U}_{Cx} = \underline{U}_{R2} + \underline{U}_{Lx} \,(0.5)$$

$$= 2{,}5\,\text{V} - \text{j}2{,}5\,\text{V} + 2\,\text{V} + \text{j}2\,\text{V} = 4{,}5\,\text{V} - \text{j}0{,}5\,\text{V} \,(0.5)$$

$$\underline{I}_3 = \underline{U}_{Cx} \text{j}\omega C_x \,(0.5)$$

$$= (4{,}5\,\text{V} - \text{j}0{,}5\,\text{V}) \cdot \text{j}1000\,\text{s}^{-1} 200 \cdot 10^{-6}\,\text{A}\,\text{s}\,\text{V}^{-1} = 0{,}1\,\text{A} + \text{j}0{,}9\,\text{A} \,(0.5)$$

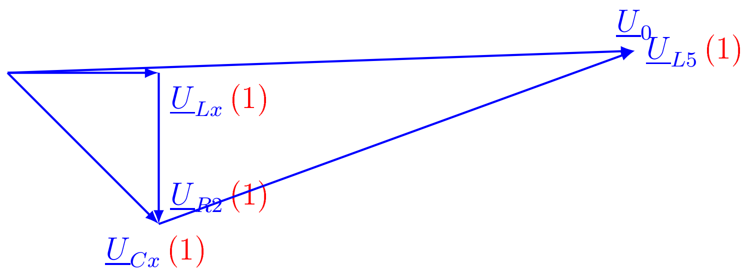
$\sum_{g)} 2$

h)

$$\begin{aligned}\underline{I}_2 &= \underline{I}_3 + \underline{I}_4 \; (0.5)\\ &= 0{,}1\,\mathrm{A} + \mathrm{j}0{,}9\,\mathrm{A} + 0{,}5\,\mathrm{A} - \mathrm{j}0{,}5\,\mathrm{A} = 0{,}6\,\mathrm{A} + \mathrm{j}0{,}4\,\mathrm{A} \; (0.5)\\ \underline{U}_{L5} &= \underline{I}_2 \cdot \mathrm{j}\omega L_5 \; (0.5)\\ &= (0{,}6\,\mathrm{A} + \mathrm{j}0{,}4\,\mathrm{A}) \cdot \mathrm{j}1000\,\mathrm{s}^{-1} 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{V\,s\,A}^{-1} = -2\,\mathrm{V} + \mathrm{j}3\,\mathrm{V} \; (0.5)\end{aligned}$$

$\sum_{h)} 2$

i) Je richtigem Pfeil (bei erkennbarem Lösungsversuch) 1 Punkt, 0,5 Punkte Abzug bei falscher Länger, Winkel oder Zusammenhang



$\sum_{i)} 4$

j)
- $\omega = 0$: $|\underline{Z}_{AB}| = R_1 || R_2 = \frac{4\cdot 4}{4+4}\,\Omega = 2\,\Omega$ (0.5)
- $\omega \to \infty$: $|\underline{Z}_{AB}| = R_1 = 4\,\Omega$ (0.5)

$\sum_{j)} 1$

k)
- $\omega_{0,1}$: Parallelschwingkreis (0.5)
- $\omega_{0,2}$: Reihenschwingkreis (0.5)

$\sum_{k)} 1$

l)
- Reihenschwingkreis: L_5, L_x und C_x (0.5)
- Parallelschwingkreis: L_x und C_x (0.5)

$\sum_{l)} 1$

m)

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{AB} &= \mathrm{j}\omega L_5 + \frac{\mathrm{j}\omega L_x \left(-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C_x}\right)}{\mathrm{j}\omega L_x - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C_x}} \; (1) = \mathrm{j}\omega L_5 + \mathrm{j}\frac{\omega L_x \left(\frac{-1}{\omega C_x}\right)}{\omega L_x - \frac{1}{\omega C_x}}\\ &= \mathrm{j}\left(\omega L_5 + \frac{-\omega L_x}{\omega^2 L_x C_x - 1}\right) = \mathrm{j}\frac{\omega L_5 \left(\omega^2 L_x C_x - 1\right) - \omega L_x}{\omega^2 L_x C_x - 1} \; (0.5)\\ &= \mathrm{j}\frac{\omega^3 L_x L_5 C_x - \omega(L_x + L_5)}{\omega^2 L_x C_x - 1} \; (0.5)\end{aligned}$$

$\sum_{m)} 2$

n) 1. Kreisfrequenz $\omega_{0,1}$ (Parallelschwingkreis): Nenner = 0

$$0 = \omega_{0,1}^2 L_x C_x - 1 \;(0.5)$$
$$\omega_{0,1} = \frac{1}{\sqrt{L_x C_x}} \;(0.5)$$

2. Kreisfrequenz $\omega_{0,2}$ (Reihenschwingkreis): Zähler = 0

$$0 = \omega_{0,2}^3 L_x C_x L_5 - \omega_{0,2} L_x - \omega_{0,2} L_5 \;(0.5)$$
$$0 = \omega_{0,2}^2 L_x C_x L_5 - L_x - L_5$$
$$\omega_{0,2}^2 = \frac{L_5 + L_x}{L_5 L_x C_x}$$
$$\omega_{0,2} = \sqrt{\frac{L_5 + L_x}{L_5 L_x C_x}} \;(0.5) \; = \sqrt{1 + \frac{L_x}{L_5}} \cdot \omega_{0,1}$$

$\sum_{n)} 2$

$\sum_{A4} 27$

5 Schaltvorgänge bei Kondensatoren

Punkte: 19

a) $u_{C_1}(t) = u_{C_2}(t) + u_{R_2}(t)$ (0.5)

$\sum_{a)} 0.5$

b) mit a) und $u(t) = \frac{1}{C}\int i_c(t)\mathrm{d}t$ (0.5)
$\frac{1}{C_1}\int -i(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{C_2}\int i(t)\mathrm{d}t + i(t)\cdot R_2$ (1.5) $//\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$
$-\frac{1}{C_1}i(t) = \frac{1}{C_2}i(t) + R_2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ (0.5)
$0 = (\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2})i(t) + R_2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$
$0 = \frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2})i(t) + \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ (0.5) (homogene DGL)

$\sum_{b)} 3$

c) Ansatz: $i(t)$ und $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ in homogene DGL einsetzen: (0.5)
$i(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})\cdot t}, \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = i(t)' = I_0(-\frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}))\cdot e^{-\frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})\cdot t}$
$\Rightarrow 0 = \frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2})I_0 \cdot e^{-\frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})\cdot t} + I_0(-\frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}))\cdot e^{-\frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})\cdot t}$
$0 = \frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2})I_0 \cdot e^{-\frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})\cdot t} - \frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2})I_0 \cdot e^{-\frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})\cdot t}$
$0 = (\frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2})I_0 - \frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2})I_0)e^{-\frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})\cdot t} = 0 \blacksquare$ (0.5)
$\Rightarrow i(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})\cdot t}$ ist somit eine Lösung der homogenen DGL.

$\sum_{c)} 1$

d) $u_{C1}(t=0) = U_0$, (0.5) da das Netzwerk vor dem Schalten von S_2 im eingeschwungenen Zustand und damit C_1 vollständig geladen ist sowie die Spannung sich an einer Kapazität nicht sprunghaft ändert. (0.5)

$u_{C2}(t=0) = 0\text{V}$, (0.5) da C_2 laut Aufgabenstellung vor dem Schalten von S_2 vollständig entladen ist sowie sich die Spannung am Kondensator C_2 nicht sprunghaft ändert. (0.5)

$u_{R1}(t=0) = 0\text{V}$, da kein geschlossener Stromkreis vorliegt und deshalb kein Strom fließt. (0.5)

$u_{R2}(t=0) = u_{C1}(t=0) = U_0$, (0.5) da nur der Widerstand R_2 den Strom in der Masche begrenzt. (0.5)

$\sum_{d)} 3.5$

e) Gesucht ist I_0. Betrachte $t = 0$
$i(t=0) = I_0 \cdot e^{-\frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})\cdot t} = I_0$
Direkt nach dem Schalten wird der Strom $i(t=0) = I_0$ nur durch den Widerstand R_2 begrenzt. (0.5)
$\Rightarrow i(t) = I_0 = \frac{U_R(t=0)}{R_2} = \frac{U_0}{R_2}$ (0.5)

$\sum_{e)} 1$

f) $u_{C1}(t) = -\frac{1}{C_1}\int i(t)\mathrm{d}t$

$u_{C1}(t) = -\frac{1}{C_1}\int I_0 \cdot e^{-\frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})\cdot t}\mathrm{d}t$ (0.5)

$u_{C1}(t) = -\frac{1}{C_1}I_0\frac{1}{-\frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})} \cdot e^{-\frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})\cdot t} + K$

$u_{C1}(t) = -\frac{1}{C_1}I_0\frac{-R_2}{(\frac{C_1+C_2}{C_1\cdot C_2})} \cdot e^{-\frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})\cdot t} + K$

$u_{C1}(t) = -\frac{1}{C_1}I_0(-R_2)\frac{C_1\cdot C_2}{C_1+C_2} \cdot e^{-\frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})\cdot t} + K$

$u_{C1}(t) = I_0 \cdot R_2\frac{C_2}{C_1+C_2} \cdot e^{-\frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})\cdot t} + K$ (0.5)

mit $u_{C1}(t=0) = U_0 \Rightarrow U_0 = I_0 \cdot R_2\frac{C_2}{C_1+C_2} \cdot e^{-\frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})\cdot(t=0)} + K$ (0.5) $//exp(0) = 1$

$U_0 = I_0 \cdot R_2\frac{C_2}{C_1+C_2} + K$

$K = U_0 - I_0 \cdot R_2\frac{C_2}{C_1+C_2} = U_0 - U_0\frac{C_2}{C_1+C_2} = U_0(1 - \frac{C_2}{C_1+C_2})$

$\Rightarrow u_{C1}(t) = I_0 \cdot R_2\frac{C_2}{C_1+C_2} \cdot e^{-\frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})\cdot t} + U_0 - I_0 \cdot R_2\frac{C_2}{C_1+C_2}$ (0.5)

$u_{C1}(t) = U_0\frac{C_2}{C_1+C_2} \cdot e^{-\frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})\cdot t} + U_0(1 - \frac{C_2}{C_1+C_2})$

$\sum_{f)} 2$

g) Wie f):

$u_{C2}(t) = \frac{1}{C_2}\int I_0 \cdot e^{-\frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})\cdot t}\mathrm{d}t$ (Ansatz) (0.5)

$u_{C2}(t) = \frac{1}{C_2}I_0 \cdot (-R_2)\frac{C_1\cdot C_2}{C_1+C_2} \cdot e^{-\frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})\cdot t} + K$

$u_{C2}(t) = I_0 \cdot (-R_2)\frac{C_1}{C_1+C_2} \cdot e^{-\frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})\cdot t} + K$

mit $u_{C2}(t=0) = 0\mathrm{V} = -I_0 \cdot R_2\frac{C_1}{C_1+C_2} \cdot e^{-\frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})\cdot(t=0)} + K$ $//exp(0) = 1$

$\Leftrightarrow K = I_0 \cdot R_2\frac{C_1}{C_1+C_2} = U_0\frac{C_1}{C_1+C_2}$

$\Rightarrow u_{C2}(t) = I_0 \cdot R_2\frac{C_1}{C_1+C_2} - I_0 \cdot R_2\frac{C_1}{C_1+C_2} \cdot e^{-\frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})\cdot t}$ (0.5)

$\Rightarrow u_{C2}(t) = U_0\frac{C_1}{C_1+C_2} - U_0\frac{C_1}{C_1+C_2} \cdot e^{-\frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})\cdot t}$

$\sum_{g)} 1$

h) $i(t)$:

$\lim_{t\to\infty} i(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})\cdot t} = 0\mathrm{V}$ mit $\lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0$ (0.5)

$u_{C1}(t)$:

$\lim_{t\to\infty} u_{C1}(t) = I_0 \cdot R_2\frac{C_2}{C_1+C_2} \cdot e^{-\frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})\cdot t} + U_0 - I_0 \cdot R_2\frac{C_2}{C_1+C_2}$ mit $\lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0$

$= U_0 - I_0 \cdot R_2\frac{C_2}{C_1+C_2} = U_0 - U_0\frac{C_2}{C_1+C_2} = U_0(1 - \frac{C_2}{C_1+C_2})$ (0.5)

$= U_0(1 - \frac{C_2}{2\cdot C_2+C_2}) = \frac{2}{3}U_0$ (0.5)

$u_{C2}(t)$:

$\lim_{t\to\infty} u_{C2}(t) = I_0 \cdot R_2\frac{C_1}{C_1+C_2} - I_0 \cdot R_2\frac{C_1}{C_1+C_2} \cdot e^{-\frac{1}{R_2}(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})\cdot t}$ mit $\lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0$

$= I_0 \cdot R_2\frac{C_1}{C_1+C_2}$ (0.5)

$= I_0 \cdot R_2\frac{2\cdot C_2}{2\cdot C_2+C_2} = U_0\frac{2}{3}$ (0.5)

$u_{R2}(t)$:

$\lim_{t\to\infty} u_{R2}(t) = 0$, da kein Strom fließt ($\lim_{t\to\infty} i(t) = 0\mathrm{V}$) (0.5)

$\sum_{h)} 3$

i) Qualitative Zeichnung auf nächster Seite.
Je Spannungsverlauf $u_{C_1}(t)$ (0.5), $u_{C_2}(t)$ (0.5) und $u_{R2}(t)$ (0.5):
Startwert, Grenzwert, Form e-Funktion
Achsenbeschriftung (Zeit, Spannung) (0.5), U_0 (0.5)
Grenzwert $\frac{2}{3}U_0$ (0.5)

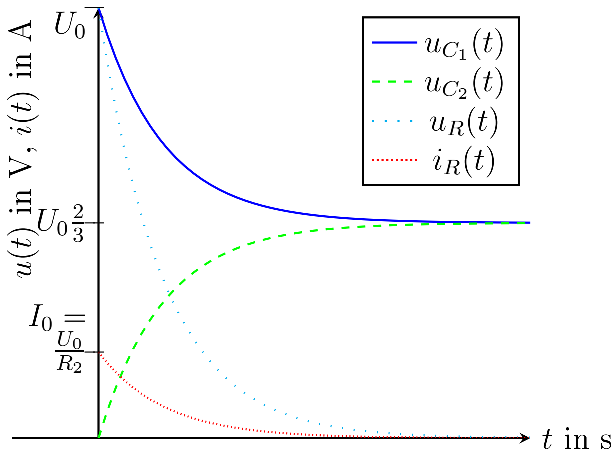
$$\sum_{i)} 3$$

j) Qualitative Zeichnung auf nächster Seite. Achsenbeschriftung, $I_0 (= U_0/R_2)$, e-Funktion, Grenzwert je -0,5 Punkte (1)

$$\sum_{j)} 1$$

$$\sum_{A5} 19$$

Qualitative Zeichnung:



6 Maxwell'sche Gleichungen

Punkte: 4

Nennen Sie die Formeln der vier Maxwell'schen Gleichungen in integraler Darstellung, wie aus der Vorlesung bekannt.

Gauß'sches Gesetz für elektrische Felder: $\oiint_A \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \iiint_V \rho \cdot \mathrm{d}V = Q(V)$ (1)

Gauß'sches Gesetz für Magnetfelder: $\oiint_A \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$ (1)

Faraday'sches Induktionsgesetz: $\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$ (1)

Ampere'sches Durchflutungsgesetz: $\oint_s \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} + \iint_A \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$ (1)

Hinweis: Volle Punkte auch bei $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ statt $\frac{\partial}{\partial t}$