Institut Computational Mathematics
Prof. Dr. Thomas Sonar
Dr. Philipp Öffner

Technische Universität Braunschweig

Klausur zur Vorlesung
Mathematik I für Studierende der E-Technik

WS 17/18 09.02.2018

Aufgabe 1 (8+6 Punkte)

(a) Die Folge $(a_n)_n$ positiver Zahlen sei rekursiv definiert durch $a_0 := 1$ und $a_{n+1} := \sqrt{2018 \cdot a_n}$ für alle $n \geq 1$.

(i) Zeigen Sie per Induktion, dass die Folge nach oben beschränkt ist (Hinweis: Obere Schranke 2018).

(ii) Untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

(b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{2n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\mathrm{e}^n}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!+(n+1)!}{(n+2)!+(n+3)!}.$$

Aufgabe 2 (4+6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} ax+b, & x < 0, \\ \mathrm{e}^{-x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Funktionen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{1+x}, \quad \lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}.$$

Aufgabe 3 (6+8 Punkte)

(a) Geben Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen und das Konvergenzintervall an:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}}.$$

(b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von

$$\int \frac{x^2-4}{x^3-3x^2-x+3}\,\mathrm{d}x, \qquad \int x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 4 (2+2+2+2 Punkte)
Widerlegen oder zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $(x_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$ so, dass $(f(x_n))_n$ konvergiert. Dann konvergiert auch $(x_n)_n$.

(b) Für $A,\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt: Aus A, B symmetrisch folgt, dass auch AB symmetrisch ist.

(c) Es sei $(a_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$. Dann ist $(a_n)_n$ konvergent. (Hinweis: $a_n = \sum_{k=1}^n b_k$)

(d) Es sei $(a_n)_n$ eine gegen a konvergente Folge reeller Zahlen. Es gelte $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $a > 0$.

Aufgabe 5 (6+4 Punkte)

Durch die Kurve $\boldsymbol{c} : [0, a] \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{c}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t}\cos t \\ \mathrm{e}^{-2t}\sin t \\ \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}$ sei ein Draht im Raum parametrisiert.

(a) Berechnen Sie die Bogenlänge $L(\boldsymbol{c})$ der Kurve. Was gilt für die Länge, wenn a gegen Unendlich strebt?

(b) Der Draht besitze die ortsabhängige Massendichte

$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{3}\left(\frac{z}{x^2 + y^2} - \ln z\right).$$

Berechnen Sie die Gesamtmasse des Drahtes für $0 \le t \le a = 2$.

Zwischenergebnis: $\int_0^2 \left(1 + 2t\mathrm{e}^{-2t}\right)\, dt$ ist zu bestimmen.

Aufgabe 6 (3+6 Punkte)

Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2y + z \\ x + z \\ x + 2y + 3z \end{pmatrix}$ sowie die Basen $\mathscr{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ und $\mathscr{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ des $\mathbb{R}^3$. Weiterhin bezeichne $\mathscr{E}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie die Matrix $\mathscr{M}(f, \mathscr{E}, \mathscr{E})$ und die Dimension von $\operatorname{Kern} f$.

(b) Geben Sie die Matrixdarstellung $\mathscr{M}(f, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ von f bezüglich der Basen $\mathscr{B}_1$ und $\mathscr{B}_2$ an. Bestimmen Sie dazu die Matrizen S und R mit $\mathscr{M}(f, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2) = R^{-1}\mathscr{M}(f, \mathscr{E}, \mathscr{E})S$.

Aufgabe 7 (4+8 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ eine Drehung im $\mathbb{R}^3$ beschreibt.

(b) Berechnen Sie die Drehachse und den Drehwinkel θ.
Zwischenergebnis: Die Drehachse ist ein Vielfaches von $(2, 1, 1)^T$.

Aufgabe 8 (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. Ist die Matrix diagonalisierbar?

Aufgabe 9 (Bonusaufgabe) (6 Punkte)
Berechnen Sie die Taylor-Reihe von $f(x) = x\mathrm{e}^x$ im Punkt $x_0 = 1$. Wie groß ist ihr Konvergenzradius?

Viel Erfolg!