Prüfungsklausur zur Vorlesung

Mathematik I für ET, IST, WING

im Sommersemester 2019

Klausur Nr. 001

Name, Vorname	
Einschreibnummer	
Unterschrift	

Mein Ergebnis soll unter obiger Nummer in StudIP veröffentlicht werden: | JA | NEIN |

- Als **Hilfsmittel** ist nur **eine farbige A4-Doppelseite** mit persönlichen und handgeschriebenen **Notizen** zugelassen. Elektronische Geräte, das Skript, eigene Vorlesungsmitschriften oder Bücher dürfen nicht verwendet werden.
- Bitte tragen Sie Ihren **Namen** und Ihre **Einschreibnummer** auf diesem **Deckblatt** ein und **unterschreiben** Sie **bei der Abgabe**. Notieren Sie bitte außerdem Ihre **Initialen** und Ihre **Einschreibnummer auf jedem Lösungsblatt**.
- Bitte verwenden Sie für **jede Aufgabe** nur das **jeweilige Blatt**, wobei Sie auch auf die **Rückseite** schreiben dürfen. Sollte der Platz nicht reichen, so setzen Sie bitte auf einem **Blatt im Anhang** fort.
- Erklären Sie immer durch **kurze Stichworte**, was Sie gerade berechnen bzw. wie Sie argumentieren. **Streichungen** und **Korrekturen** müssen **deutlich erkennbar** sein.
- Bitte schreiben Sie nur mit **blauer** oder **schwarzer Tinte**. Bleistifte und Tintenlöscher sind nicht erlaubt!
- Die Bearbeitungszeit beträgt **180 Minuten**. Es gibt insgesamt 55 Punkte, wobei **50 Punkte** schon **100%** entsprechen.

Viel Erfolg!

A01	2			**A02**	2			**A03**	2		
A04	2			**A05**	3			**A06**	2		
A07	4			**A08**	2			**A09**	3		
A10	5			**A11**	5			**A12**	2		
A13	2			**A14**	3			**A15**	2		
A16	4			**A17**	6			**A18**	4		

Summe ☐ **Einsicht** ☐ **Korrektur** ☐ **Note** ☐

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Seien A und B logische Aussagen. Zeigen Sie, dass die Aussage

$$(A \wedge \neg B) \vee (A \Rightarrow B)$$

eine Tautologie und damit immer wahr ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Zeigen Sie durch vollständige Induktion die Gültigkeit der Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} 2k = n \cdot (n+1).$$

Bemerkung: Sie müssen hier vollständige Induktion benutzen.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Wir betrachten die komplexe Zahl

$$z = \left(\frac{1+\mathtt{i}}{1-\mathtt{i}} \right)^2 .$$

i) Geben Sie den Real- und Imaginärteil von z an.

ii) Geben Sie die Polardarstellung von z an.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Beweisen Sie mit Hilfe der Euler-Formel, dass

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ seien die drei Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

i) Bestimmen Sie die Parameterform der affinen Ebene E, die durch diese drei Punkte aufgespannt wird.

ii) Bestimmen Sie einen Normalenvektor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$, der senkrecht auf E steht und für den $\|\mathbf{n}\| = 1$ gilt. Geben Sie außerdem die entsprechende Hessesche Normalform der Ebene E an.

Aufgabe 6 (2 Punkte)

Seien $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ zwei gegebene Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Beweisen Sie, dass der Vektor $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ immer senkrecht auf $\mathbf{v}$ steht.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Gegeben sei die invertierbare Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix $\mathbf{A}$, z.B. mit Hilfe des Gauß-Jordan-Verfahrens.

ii) Bestimmen Sie die Lösung $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 8 (2 Punkte)

Gegeben seien die beiden orthogonalen Matrizen

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

i) Entscheiden Sie, ob es sich bei den Matrizen **A** und **B** jeweils um eine Dreh- oder eine Spiegelungsmatrix handelt.

ii) Geben Sie jeweils den Drehwinkel bzw. die Spiegelungsachse an.

Hinweis : Ist $\mathbf{S}$ eine Spiegelungsmatrix, so gilt $\mathbf{S} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ für jeden Vektor $\mathbf{x}$ der Spiegelungsachse.

Aufgabe 9 (3 Punkte)

i) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

ii) Was können Sie über die Invertierbarkeit der Matrix $\mathbf{A}$ aussagen?

Aufgabe 10 (5 Punkte)

Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$.

ii) Bestimmen Sie alle Eigenräume von $\mathbf{A}$.

Aufgabe 11 (5 Punkte)

Wir betrachten noch einmal die Matrix $\mathbf{A}$ aus Aufgabe 10.

i) Geben Sie eine orthonormale Basis (ON-Basis) des $\mathbb{R}^3$ an, die nur aus Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ besteht.

ii) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{(3,3)}$, so dass

$$\mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{D}$$

gilt, wobei $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ eine Diagonalmatrix ist.

iii) Geben Sie die Diagonalmatrix $\mathbf{D}$ an.

Bemerkung : Sie dürfen hier natürlich alle Resultate aus Aufgabe 10 verwenden.

Aufgabe 12 (2 Punkte)

Bestimmen Sie für jede der beiden konvergenten Folgen

$$\text{i)} \quad a_n = \frac{(2n+3)\cdot(n-1)}{n^2+n-4}\,, \qquad\qquad \text{ii)} \quad a_n = \sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n}\right)$$

den Grenzwert $a_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe 13 (2 Punkte)

Untersuchen Sie jede der beiden Reihen

$$\text{i)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \cdot k!}{k^k}\,, \qquad \text{ii)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{2}{\sqrt{k}}$$

auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

Aufgabe 14 (3 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden zwei Grenzwerte:

$$\text{i)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}}{x}, \qquad \qquad \text{ii)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(x)-1}{(1-\mathrm{e}^x)^2}$$

Aufgabe 15 (2 Punkte)

Beweisen Sie, dass jedes reelle Polynom der Bauart

$$p(x) = x^3 + \alpha_2 \cdot x^2 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_0$$

mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.

Aufgabe 16 (4 Punkte)

Gegeben sei die gebrochen-rationale Funktion

$$f(x) = \frac{9x-2}{x^2-x-6}.$$

i) Bestimmen Sie die Lücken im Definitionsbereich der Funktion f.

ii) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von f.

iii) Geben Sie eine Stammfunktion von f an.

Aufgabe 17 (6 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x \cdot \sin(x).$$

Berechnen Sie die Taylor-Polynome $T_0(x; x_*)$, $T_2(x; x_*)$ und $T_4(x; x_*)$ jeweils im Entwicklungspunkt $x_* = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 18 (4 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden zwei Integrale:

$$\text{i)} \quad \int x^2 \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \text{ii)} \quad \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \cdot \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$$

Hinweis : Bei i) eignet sich partielle Integration, bei ii) Substitution.

Nachtrag zu Aufgabe ...

Nachtrag zu Aufgabe ...

Nachtrag zu Aufgabe ...

Nachtrag zu Aufgabe ...

Nachtrag zu Aufgabe ...

Nachtrag zu Aufgabe ...