Aufgabe 2: Beobachter mit Polvorgabe

Die allgemeine Form eines Systems mit aufgeschaltetem Beobachter ist in folgender Abbildung dargestellt:

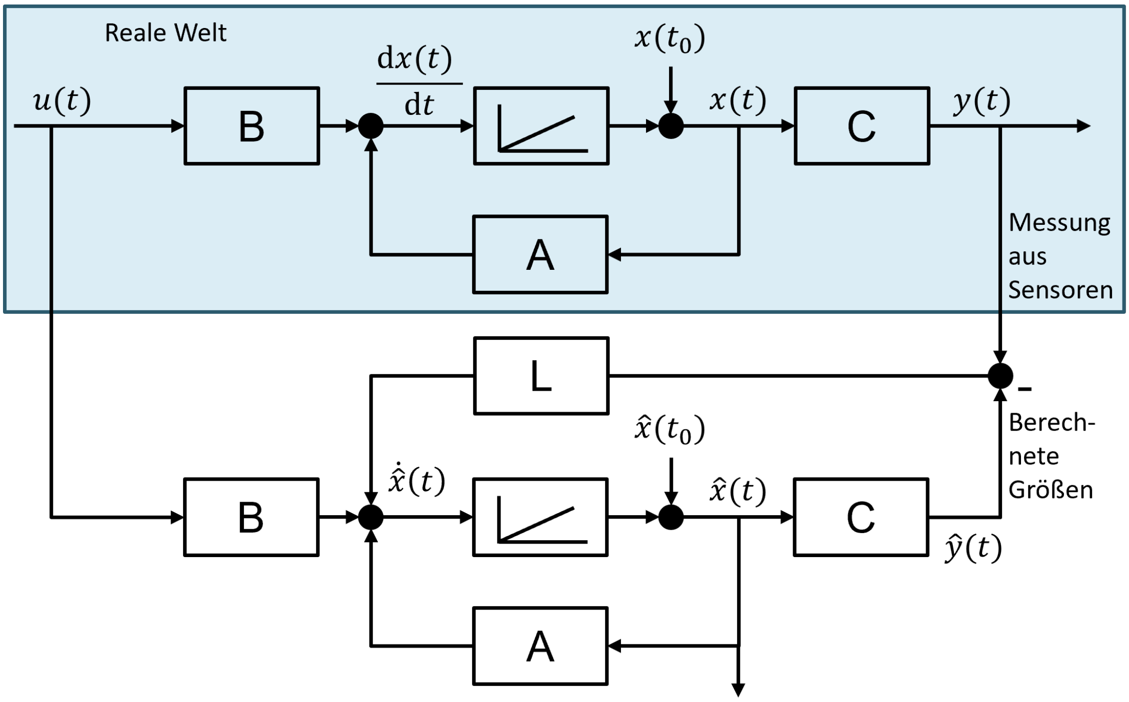


Bild 2.1: Regelkreis mit Zustandsbeobachter zur Beobachtung des Schwimmwinkels

Im Folgenden sei ein Beobachter für den beispielhaften Anwendungsfall der Beobachtung des Schwimmwinkels (z. B. für die Nutzung in einem Fahrerassistenzsystem) zu entwerfen. Die Querdynamik des Fahrzeugs wird durch folgendes Zustandsgleichungssystem beschrieben:

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi}_{\mathrm{v}} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{c_{\alpha\mathrm{v}} l_{\mathrm{v}}^2 + c_{\alpha\mathrm{h}} l_{\mathrm{h}}^2}{I_z v} & -\frac{c_{\alpha\mathrm{v}} l_{\mathrm{v}} - c_{\alpha\mathrm{h}} l_{\mathrm{h}}}{I_z} \\ -1 - \frac{c_{\alpha\mathrm{v}} l_{\mathrm{v}} - c_{\alpha\mathrm{h}} l_{\mathrm{h}}}{m v^2} & -\frac{c_{\alpha\mathrm{v}} + c_{\alpha\mathrm{h}}}{m v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{\mathrm{v}} \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{c_{\alpha\mathrm{v}} l_{\mathrm{v}}}{I_z} \\ \frac{c_{\alpha\mathrm{v}}}{m} \end{pmatrix} \lambda. \tag{2.1}$$

Es gilt $\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, d.h. nur die Gierrate kann gemessen werden.

a) Überprüfen Sie, ob das System vollständig beobachtbar ist. Berechnen Sie dazu die Beobachtbarkeitsmatrix.

b) Geben Sie an, wie die Matrix $\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix}^T$ durch Polvorgabe zu bestimmen ist. Nutzen Sie als Motivation die Betrachtung eines theoretischen Systems, welches den Fehler $\underline{e} = \underline{x} - \underline{\tilde{x}}$ zwischen dem wahren und dem beobachteten Zustandsvektor selbst als Zustand auffasst.

c) Diskutieren Sie, wie sich die Polvorgabe auf die Dynamik des Beobachters auswirkt und welche Herausforderungen bei der praktischen Umsetzung auftreten können.

a) System beobachbar

$$\operatorname{rang} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{c}} \\ \underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{A}} \\ \vdots \\ \underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{A}}^{n-1} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{Q}}_B} \overset{!}{=} n$$

$$\begin{pmatrix}\dot{\psi}_{\mathrm{v}}\\ \dot{\beta}\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{c_{\alpha\mathrm{v}} l_{\mathrm{v}}^2 + c_{\alpha\mathrm{h}} l_{\mathrm{h}}^2}{I_z v} & -\frac{c_{\alpha\mathrm{v}} l_{\mathrm{v}} - c_{\alpha\mathrm{h}} l_{\mathrm{h}}}{I_z} \\ -1-\frac{c_{\alpha\mathrm{v}} l_{\mathrm{v}} - c_{\alpha\mathrm{h}} l_{\mathrm{h}}}{m v^2} & -\frac{c_{\alpha\mathrm{v}}+c_{\alpha\mathrm{h}}}{mv}\end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \begin{pmatrix}\psi_{\mathrm{v}}\\ \beta\end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{c_{\alpha\mathrm{v}} l_{\mathrm{v}}}{I_z}\\ \frac{c_{\alpha\mathrm{v}}}{m}\end{pmatrix}}_{\underline{B}} \lambda.$$

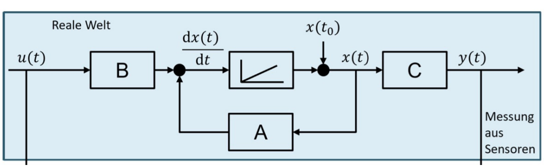
$\underline{\underline{c}} = (1 \;\; 0)$

$$\underline{\underline{Q}}_B = \begin{bmatrix} (1 & 0) \\ (1 \;\; 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$$

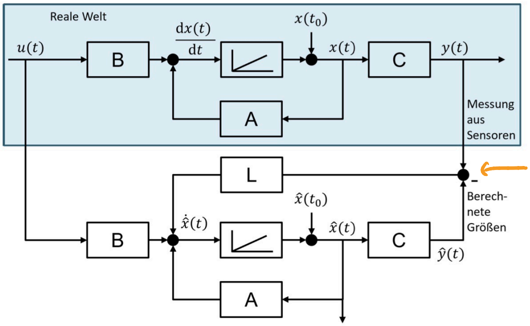
$\det \underline{\underline{Q}}_B = a_{12} \neq 0 \quad \Rightarrow$ hat voll rang $\Rightarrow$ beobachbar

b) 用 Fehler $\underline{e} = \underline{x} - \hat{\underline{x}}$ 确定 $\underline{L} = (l_1 \;\; l_2)^T$

$\underline{e} = \underline{x} - \hat{\underline{x}} \iff \dot{\underline{e}} = \dot{\underline{x}} - \dot{\hat{\underline{x}}}$ 因为要确定 Zustandsregler 上的变量



$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$



$\leftarrow y-\hat{y}$

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B\,u(t) + L\left[y(t) - \hat{y}(t)\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{\underline{B}}\,\underline{u} \\ \dot{\hat{\underline{x}}} = \underline{\underline{A}}\,\hat{\underline{x}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{u} + \underline{\underline{L}}\left[\underline{y} - \hat{\underline{y}}\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{\underline{e}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{\underline{B}}\,\underline{u} - \underline{\underline{A}}\,\hat{\underline{x}} - \underline{\underline{B}}\,\underline{u} - \underline{\underline{L}}\,\underline{y} + \underline{\underline{L}}\,\hat{\underline{y}}$$

$$= \underline{\underline{A}}\underbrace{(\underline{x} - \hat{\underline{x}})}_{\underline{e}} - \underline{\underline{L}}\left[\underline{y} - \hat{\underline{y}}\right] \leftarrow \boxed{\begin{cases} \underline{y} = \underline{\underline{C}}\,\underline{x} \\ \hat{\underline{y}} = \underline{\underline{C}}\,\hat{\underline{x}} \end{cases}}$$

$$= \underline{\underline{A}}\,\underline{e} - \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{e}$$

$$= \underbrace{(\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{C}})}_{:= \tilde{\underline{\underline{A}}}}\,\underline{e}$$

$$\dot{\underline{e}} = \tilde{\underline{\underline{A}}}\,\underline{e}$$ 与 Ü1,b 一致, 利用Systemmatrix 的 Pole 确定变量

$$s\underline{E} = \tilde{\underline{\underline{A}}}\,\underline{E} \quad \Leftrightarrow \quad \det\left[s\underline{\underline{I}} - \tilde{\underline{\underline{A}}}\right]\underline{E} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \det\left[\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\det\left[\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 & 0 \\ l_2 & 0 \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} s-a_{11}+l_1 & -a_{12} \\ -a_{21}+l_2 & s-a_{22} \end{bmatrix} = 0$$

$$(s-a_{11}+l_1)(s-a_{22}) + a_{12}(l_2-a_{21}) = 0$$

$$s^2 - sa_{22} - sa_{11} + a_{11}a_{22} + sl_1 - a_{22}l_1 + a_{12}l_2 - a_{12}a_{21} = 0$$

$$s^2 + s(l_1 - a_{22} - a_{11}) + \underline{\underline{a_{11}a_{22} - a_{22}l_1 + a_{12}l_2 - a_{12}a_{21}}} = 0$$

Pole von Systemmatrix : s_1, s_2

$$(s-s_1)(s-s_2) = 0$$

$$s^2 - s(s_1+s_2) + \underline{\underline{s_1 s_2}} = 0$$

$$\begin{cases} -s_1 - s_2 = l_1 - a_{11} - a_{22} \\ s_1 s_2 = a_{11}a_{22} - a_{22}l_1 + a_{12}l_2 - a_{12}a_{21} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 = a_{11} + a_{22} - s_1 - s_2 \\ l_2 = \dfrac{s_1 s_2 - a_{11}a_{22} + a_{22}l_1 + a_{12}a_{21}}{a_{12}} \end{cases}$$

d) Herausforderung

- Modellunsicherheit: reales System $= \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}$
  - $+$ Störung
  - $+$ inkonsistenter Anfangswert

- Dynamisch: sehr viel schneller als Systemdynamik