Zentraler Grenzwertsatz (ZGWS)
Central Limit Theorem (CLT)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ uiv mit $EX_i = \underset{\in\mathbb{R}}{\mu}$ und $\operatorname{Var} X_i = \sigma^2 \in (0,\infty)$, $i = 1, 2, \ldots, n$
und sei $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ und $Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

Dann gilt: $F_Z(z) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(z)$ für alle $z \in \mathbb{R}$

Grob gesprochen gilt für große n: $F_Z(z) \approx \Phi(z)$ für alle $z \in \mathbb{R}$.

Schließende Statistik

Schätzen

Situation: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Stichprobe

Modellwahl: $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim P_\vartheta$, wobei ϑ Parameter der W-Vert. P_ϑ (z.B. $\vartheta = (\mu, \sigma^2)$) oder $\vartheta = \lambda$ oder $\vartheta = p$) und i.a. unbekannt ist.

(Punkt-)Schätzer: aus einer SP $x_1, \ldots, x_n$ berechneter Schätzwert für den Parameter ϑ

Bsp.e: Stichprobenmittelwert $\overline{X}$, empirische Varianz S^2

Momentenschätzer: Das k-te Moment $E(X^k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ wird hier durch das k-te empirische Moment
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k =: \overline{x^k}$ geschätzt.

($k=1$: erstes emp. Moment bzw. Mittelwert $\overline{X}$)

Bsp Momentenschätzer für die Varianz der ZV X:

$$\overline{x^2} - \overline{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2\right) = \frac{n-1}{n} \cdot S^2$$

$$EX^2 - (EX)^2 \overset{RR(3)?}{=} \operatorname{Var} X$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \left[\underbrace{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2\right)}_{= S_x^2 = S^2}\right] < S^2$$

RR: Rechenregel (→ VL 7.12.)