

Lehrbuch zur Lehrveranstaltung

Wechselströme und Netzwerke

Prof. Dr.–Ing. habil. Dipl.–Math. B. Meinerzhagen

BST — Institut für
Elektronische Bauelemente
und Schaltungstechnik

Technische Universität Braunschweig

Braunschweig, Juli 2020

Nachdruck und Weitergabe außerhalb
der TU-Braunschweig verboten

Vorwort

Das vorliegende Lehrbuch zur Vorlesung „Wechselströme und Netzwerke“ soll den Hörern der Vorlesung das Kopieren von Formeln und Abbildungen ersparen, damit mehr Zeit für die Konzentration auf die gedankliche Darlegung des Gegenstandes der Vorlesung zur Verfügung steht. Das Lehrbuch sollte jedoch auf keinen Fall die eigene Vorlesungsmitschrift vollständig ersetzen.

Herrn Dr.–Ing. C. D. Nguyen und Herrn Dr.–Ing. R. Kamitz möchte ich für ihre wertvollen Hinweise und ihre redaktionelle Hilfe danken. Herrn A. R. Razani danke ich für seinen unermüdlichen Einsatz bei der Erstellung des Manuskriptes in TeX.

Braunschweig, im April 2009

Prof. B. Meinerzhagen

Inhaltsverzeichnis

Literatur zur Vorlesung	7
1 Einführende Bemerkungen	9
2 Die Kirchhoffschen Gesetze	19
3 Definitionen und Sätze zur Graphentheorie	23
4 <i>MGL</i> und <i>SGL</i>	35
4.1 Systematische Bestimmung von maximalen Mengen linearer, unabhängiger <i>MGL</i> und <i>SGL</i>	35
4.2 Besonderheiten bei Zweipolnetzwerken	53
5 Lineare zeitinvariante Netzwerkmodelle	57
5.1 Einführende Beispiele	61
5.2 Das allgemeine Verhalten	75
5.3 Asymptotische Stabilität und die Darstellung der Antwort im Eingeschwun- genen Zustand	83
5.4 Harmonisch eingeschwungener Zustand und Frequenzgang	89
5.5 Bestimmung der Darstellung der Antwort im eingeschwungenen Zustand . . .	96
5.6 Darstellung der Antwort aus dem Ruhezustand heraus	106
5.7 Faltungsprodukt und Systemverhalten	113
6 Lineare algebraische Netzwerkgleichungssysteme	121
6.1 Das Tableau der Netzwerkgleichungen	122
6.2 Das Schnittmengenadmittanz- und das Knotenadmittanzverfahren	130
6.2.1 Das Schnittmengenadmittanzverfahren	130
6.2.2 Das Knotenadmittanzverfahren	136
6.3 Das Maschenimpedanzverfahren	139
6.4 Die Quellenverschiebung	142
6.4.1 Die Spannungsquellenverschiebung	142
6.4.2 Die Stromquellenverschiebung	150

6.5	Eindeutige Lösbarkeit von Widerstandsnetzwerken mit festen Quellen	155
6.6	Lösung allgemeiner algebraischer Netzwerkmodelle	156
6.7	Das modifizierte Knotenadmittanzverfahren (Modified Nodal Approach)	158
7	Kleinsignalanalyse nichtlinearer, zeitinvarianter Schaltungen	163
7.1	Kleinsignalersatzschaltbilder aktiver Bauelemente	169
7.2	Der Operationsverstärker	175
8	Effektive Berechnung mit der Laplacetransformation	179
8.1	Die Laplacetransformation gewöhnlicher Funktionen	180
8.2	Das allgemeine transiente Verhalten linearer, zeitinvarianter Netzwerkmodelle	215
9	Netzwerktheoreme und Vierpole (Zweitore)	249
9.1	Netzwerktheoreme	249
9.2	Vierpole (Zweitore)	259
10	Distributionen	277
10.1	Motivation der Netzwerkanalyse auf der Basis der Stoßantwort	277
10.2	Grundbegriffe der Distributionstheorie	281
10.3	Laplacetransformation und Faltung von elementaren Distributionen	294
10.4	Das verallgemeinerte Anfangswertproblem erster Ordnung und seine Lösung .	313
11	Passivität und absolute Stabilität	319
11.1	Passive Netzwerkmodelle	319
11.2	Absolut stabile Zweitornetzwerkmodelle	335

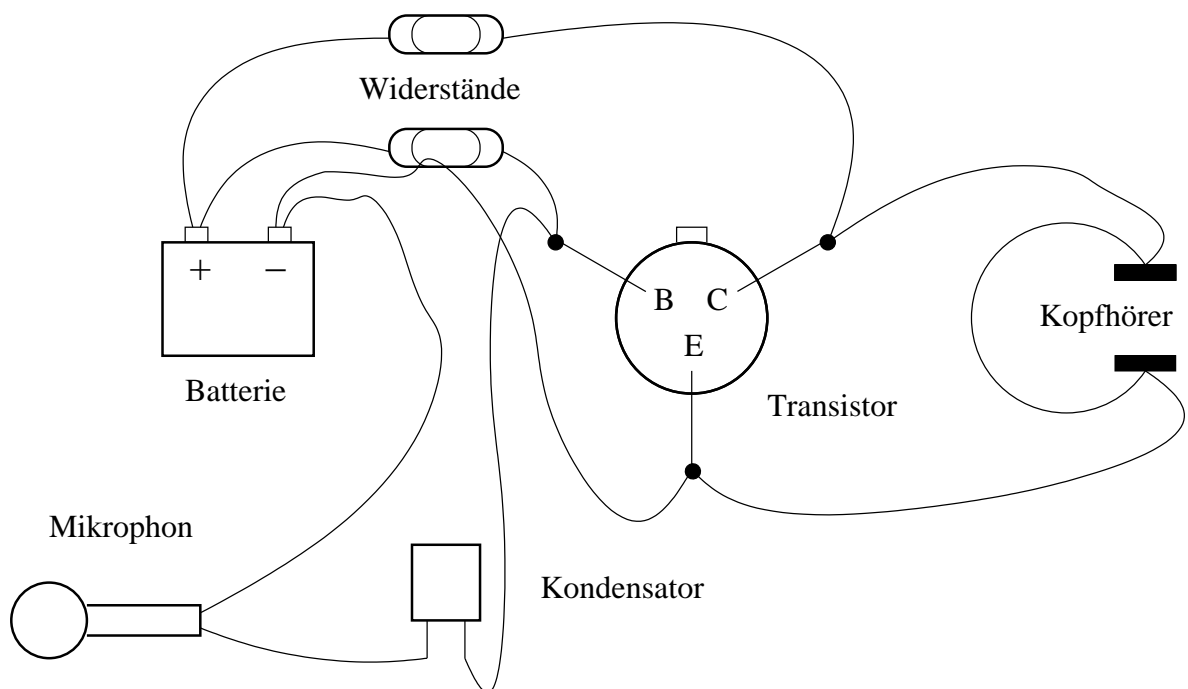
Literatur zur Vorlesung

- [1] Desoer, Charles A.; Kuh, Ernest S.
„*Basic Circuit Theory*“
McGraw-Hill Inc., 1969,
ISBN-Nr.: 0-07-085183-2
- [2] H. Wolf
„*Lineare Systeme und Netzwerke*“
Springer Verlag,
ISBN-Nr.: 3-540-15026-9
- [3] R. Paul
„*Elektrotechnik – Grundlagenlehrbuch Band II: Netzwerke*“
Springer Verlag,
ISBN-Nr.: 3-540-13634-7
- [4] Unbehauen, Rolf
„*Grundlagen der Elektrotechnik 1*“
Springer Verlag,
ISBN-Nr.: 3-540-58162-6
- [5] Unbehauen, Rolf
„*Systemtheorie*“
R. Oldenbourg, 1971
ISBN-Nr.: 3-486-38452-X
- [6] Zadeh, Lofti A.; Desoer, Charles A.
„*Linear System Theory: The State System Approach*“
McGraw-Hill Inc., 1963130
- [7] Schüßler, Hans Wilhelm
„*Netzwerke, Signale und Systeme*“
Band 1 und 2, Springer Verlag, 1981
ISBN-Nr.: 3-540-53791-03
- [8] N. Fliege
„*Systemtheorie*“
Teubner Verlag, 1991
ISBN-Nr.: 3-519-06140-6

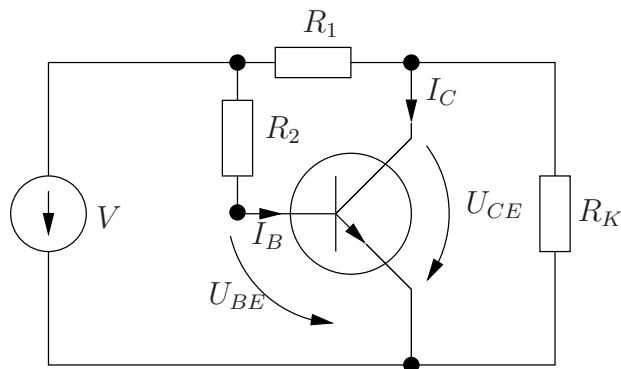
Kapitel 1

Einführende Bemerkungen zur modellmäßigen Beschreibung von elektronischen Netzwerken

Beispiel für ein reales Netzwerk (Mikrophonverstärker):



Netzwerkmodell zur Bestimmung des stationären Arbeitspunktes:



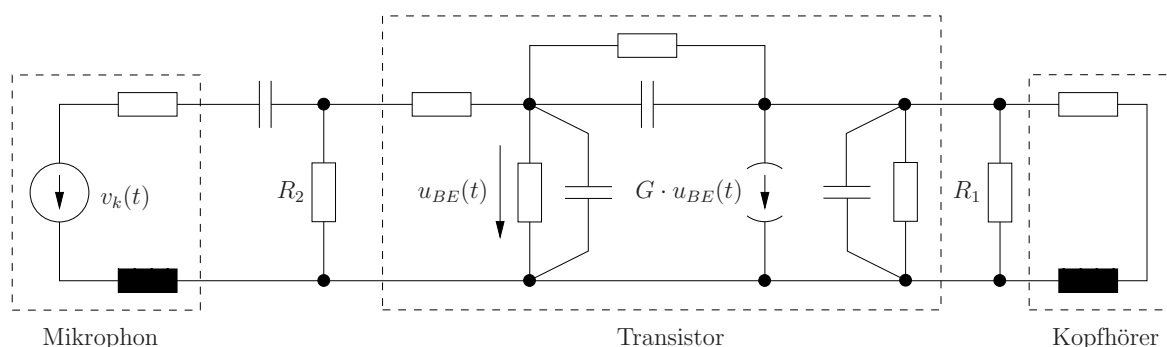
$V \triangleq$ zeitunabhängige
Batteriespannung

$$I_B = f(U_{BE}, U_{CE})$$

$$I_C = f(U_{BE}, U_{CE})$$

Nichtlineare, zeitunabhängige
Beschreibung des Transistors.

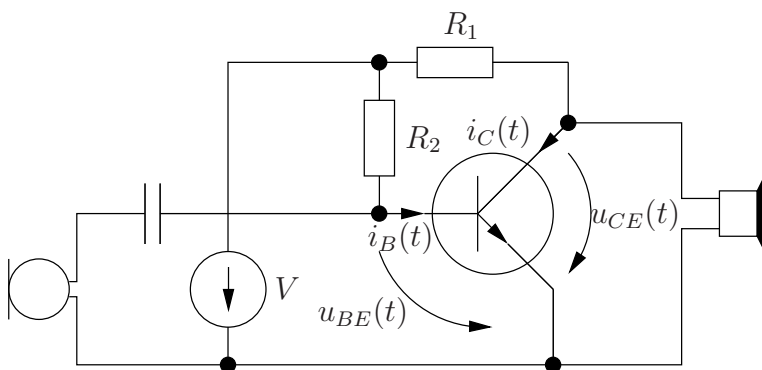
Netzwerkmodell zur Bestimmung des transienten Kleinsignalverhaltens



(Transistorersatzschaltbild bestehend aus idealen, linearen, zeitinvarianten Zweipolen; $v_k(t)$, $u_{BE}(t)$ beschreiben kleine Schwankungen um einen stationären Arbeitspunkt)

Dies ist das in dieser Vorlesung typischerweise betrachtete Modellniveau.

Netzwerkmodell zur Bestimmung des transienten Großsignalverhaltens



Die Bauelemente werden im Großsignalbereich durch Beziehungen dargestellt, wie sie unten exemplarisch für den Transistor zu sehen sind:

$$i_B(t) = \tilde{f}(u_{BE}(t), u_{CE}(t), \frac{d}{dt}u_{BE}(t), \frac{d}{dt}u_{CE}(t))$$

$$i_C(t) = \tilde{f}(u_{BE}(t), u_{CE}(t), \frac{d}{dt}u_{BE}(t), \frac{d}{dt}u_{CE}(t))$$

(nichtlineare, zeitabhängige Beschreibung des Transistors)

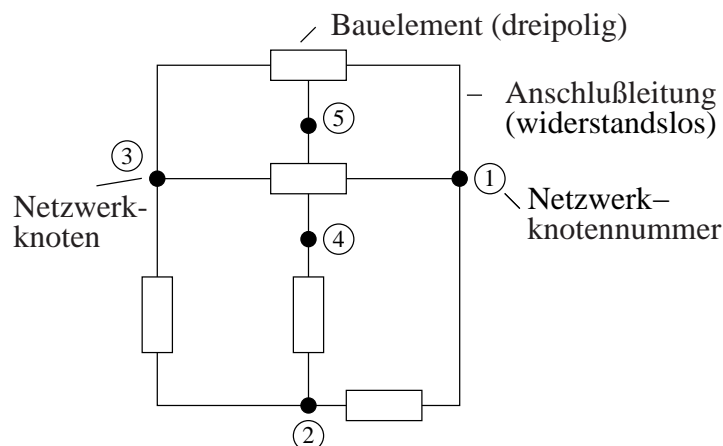
Dieses Modellniveau macht typischerweise die Anwendung der numerischen Schaltkreissimulation erforderlich. SPICE, ELDO etc. sind bekannte CAD-Programme in diesem Zusammenhang. (→ Vorlesung „Numerische Bauelement- und Schaltkreissimulation“ im 6. Semester.)

Definition 1.1 (Erste fundamentale Näherung)

Netzwerke in der Netzwerktheorie sind Modelle, die das Verhalten von realen, elektrischen Netzwerken oder Systemen (z.B. IC's, gedruckte Schaltungen, Verbundnetze der EVU's) für einen bestimmten Zweck und mit einer bestimmten Genauigkeit beschreiben.

Diese Netzwerkmodelle bestehen aus wenigen Typen von idealisierten Bauelementen mit zwei und mehr Klemmen (Polen). Das elektrische Verhalten dieser Bauelemente wird durch Gleichungen beschrieben, die typischerweise, (und auf diese typischen Fälle wollen wir uns hier zunächst aus Gründen der Vereinfachung beschränken), außer vorgegebenen Parametern nur die Spannungen zwischen den Bauelementklemmen und die Klemmenströme (sowie deren zeitlichen Ableitungen und zeitlichen Integrale) beinhalten. Die Bauelementklemmen sind über widerstandslose Verbindungsleitungen mit den Netzwerkknuten verbunden. Die Netzwerkknuten stellen die Verbindung zwischen den Bauelementen her.

Beispiel 1.1



Zur Nomenklatur:

Kleinbuchstaben bezeichnen Signale (Spannungen und Ströme) im Zeitbereich – Beispiele: $u(t)$, $i(t)$, $v(t)$, $j(t)$, $e(t)$, $a(t)$, $x(t)$.

Die entsprechenden Großbuchstaben bezeichnen die zeitlichen Mittelwerte der obigen Zeitfunktionen, falls diese existieren – Beispiele: U , I , V , J , E , A .

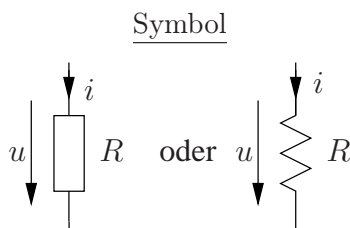
Bei zeitunabhängigen Signalen (z.B.: Gleichstromnetzwerke) gilt also z.B. $v(t) = V$.

Werden die Kleinbuchstaben ohne das Zeitargument benutzt (z.B. u), so werden damit sowohl die Zeitfunktionen (z.B. $u(t)$) als auch die entsprechenden Größen im Gleichstromfall (z.B. U) bezeichnet. In diesem Fall ist u als Platzhalter zu verstehen und die durch Kleinbuchstaben ohne Argument gegebene Relation soll sowohl für Zeitfunktionen als auch für zeitunabhängige

Signale, Spannungen und Ströme im Gleichstromfall gelten. Dies ist meist bei rein algebraischen Beziehungen eine sinnvolle Abkürzung und die Ersetzungsmöglichkeiten werden später auf Zeiger, Fourier-Transformierte und Laplace-Transformierte ausgedehnt werden.

Fünf elementare, ideale Zweipolmodelle (Bauelementemodelle):

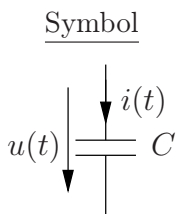
- linearer, zeitinvarianter Widerstand R



Gleichung

$$u = R \cdot i \quad (1.1)$$

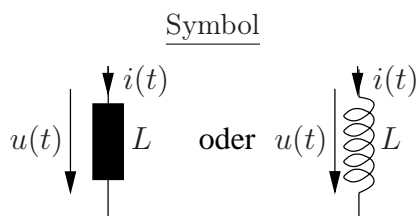
- lineare, zeitinvariante Kapazität C



Gleichung

$$i(t) = C \cdot \frac{d}{dt} u(t) \quad (1.2)$$

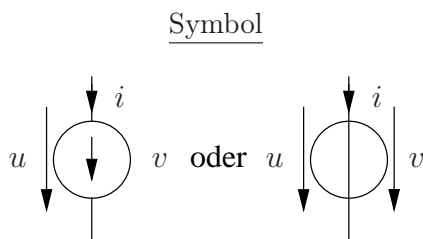
- lineare, zeitinvariante Induktivität L



Gleichung

$$u(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i(t) \quad (1.3)$$

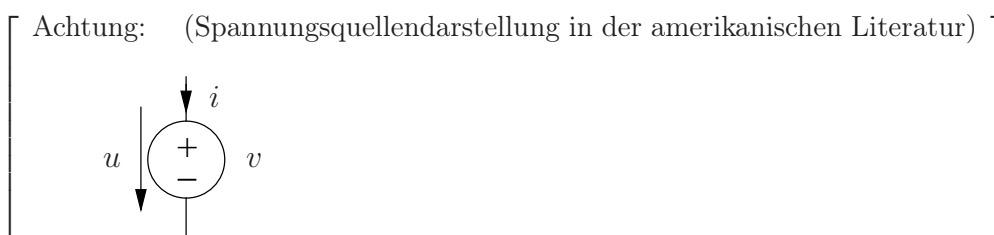
- ideale Spannungsquelle



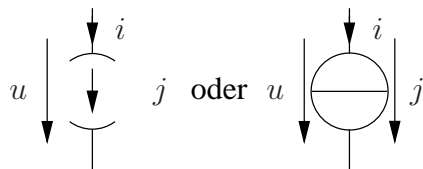
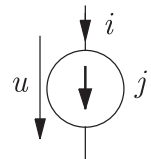
Gleichung

$$u = v \quad , \quad (1.4)$$

v ist bekannt und vorgegeben. i ist nicht durch die ideale Spannungsquelle bestimmt, sondern ergibt sich aus der äußeren Beschaltung.



- ideale Stromquelle

<u>Symbol</u>	<u>Gleichung</u>
	$i = j, \quad (1.5)$ j ist bekannt und vorgegeben. u ist nicht durch die ideale Stromquelle bestimmt, sondern ergibt sich aus der äußeren Beschaltung.
<p>Achtung: (Stromquellendarstellung in der amerikanischen Literatur. Kann leicht mit der Spannungsquellendarstellung verwechselt werden)</p> 	

Merke:



Definition 1.2 (Zweite fundamentale Näherung)

Es wird angenommen, dass für das Strömungsfeld \vec{J} in den Anschlussleitungen, Knoten und Bauelementpolen des Netzwerkmodells

$$\oint_{(F)} \vec{J} \cdot d\vec{f} = 0 \quad (1.6)$$

immer gilt. Dabei ist \vec{J} die Leitungsstromdichte und F eine beliebige geschlossene Hüllfläche, die die Bauelemente nicht schneidet. Ferner wird für das elektrische Feld \vec{E} außerhalb der Bauelemente beim Netzwerkmodell immer

$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (1.7)$$

angenommen. Dabei ist C eine beliebige geschlossene Kurve, die die Bauelemente nicht schneidet.

Merke: (1.6),(1.7) sind in realen Netzwerken nur im zeitunabhängigen Fall richtig oder näherungsweise gültig für sehr niedrige Frequenzen. (\rightarrow Feldtheorievorlesung)

Konsequenzen aus Definition 1.2:

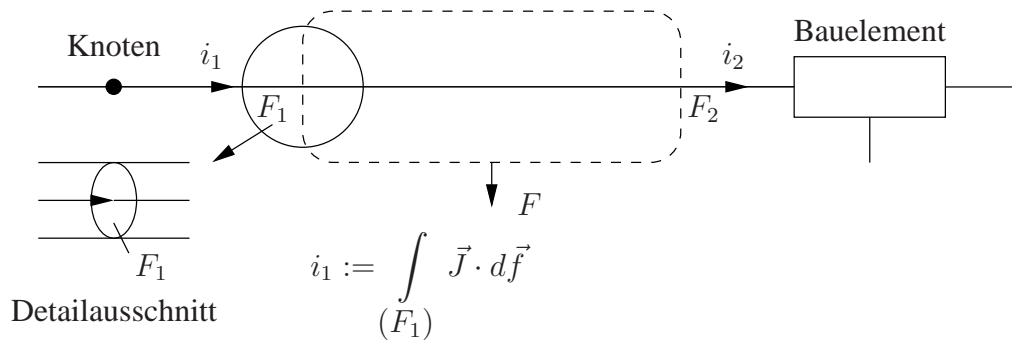
- A) Die Spannung zwischen zwei Punkten außerhalb der Bauelemente lässt sich widerspruchsfrei definieren.

$$u_{1,2} = \int_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

C: Kurve zwischen zwei Raumpunkten 1 und 2, die kein Bauelement schneidet. Raumpunkt 1 ist dabei der Anfangspunkt der Kurve C und Raumpunkt 2 der Endpunkt.

Aufgrund von (1.7) ergibt sich für alle Kurven C mit dieser Eigenschaft das gleiche Kurvenintegral.

- B) In einer Anschlussleitung fließt zwischen dem Netzwirkknoten und der Bauelementklemme überall der gleiche Strom.

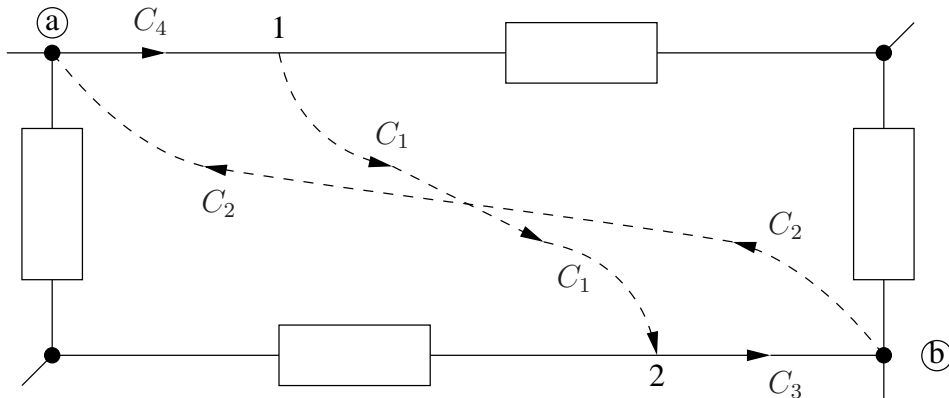


Die Orientierung von i_1 ist durch die Orientierung von F_1 gegeben!

$$0 = \oint_{(F)} \vec{J} \cdot d\vec{f} = - \int_{(F_1)} \vec{J} \cdot d\vec{f} + \int_{(F_2)} \vec{J} \cdot d\vec{f} \Rightarrow i_1 = i_2 \quad (1.8)$$

Man kann also von dem Strom in einem Anschlussdraht sprechen.

- C) Die Spannung zwischen zwei beliebigen Punkten auf den Anschlussleitungen stimmt immer mit einer Spannung zwischen zwei geeignet gewählten Netzwirkknoten überein.



C führt entlang $1 \rightarrow 2 \rightarrow \textcircled{b} \rightarrow \textcircled{a} \rightarrow 1 \Rightarrow C = C_1 + C_3 + C_2 + C_4$

$$0 = \oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \underbrace{\int_{(C_1)} \vec{E} \cdot d\vec{r}}_{:= u_{12}} + \int_{(C_3)} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \underbrace{\int_{(C_2)} \vec{E} \cdot d\vec{r}}_{:= u_{ba} = -u_{ab}} + \int_{(C_4)} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (1.9)$$

Da die Anschlussdrähte widerstandslos sein sollen, gilt: $\vec{E} = 0$ entlang aller Anschlussdrähte. Daher gilt:

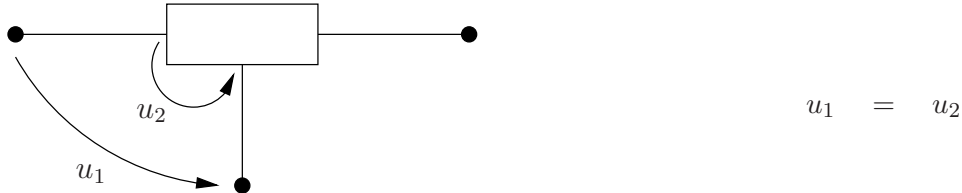
$$\int_{(C_3)} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_{(C_4)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

Es folgt also

$$u_{12} = u_{ab} \quad (1.10)$$

Bemerkung 1.1

Um die Ströme durch alle Anschlussleitungen und die Spannungen zwischen allen Anschlussleitungen zu beschreiben, genügt es, pro Anschlussleitung eine Stromvariable und pro Knotenpaar eine Knotenpaarspannungsvariable einzuführen. Insbesondere lassen sich die Spannungen zwischen den Bauelementklemmen immer durch Knotenpaarspannungen beschreiben.

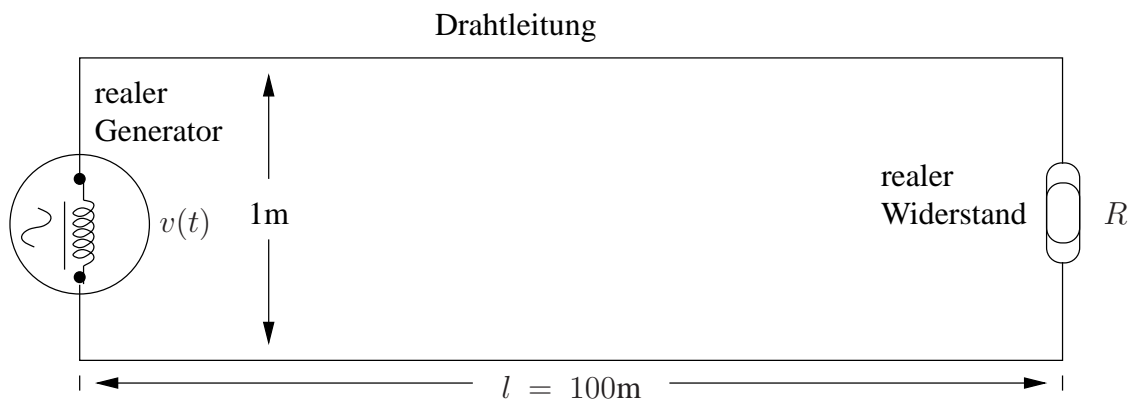


Da (1.6) und (1.7) nur für sehr niedrige Frequenzen näherungsweise gültig sind, gibt es auch nur für sehr niedrige Frequenzen eine einfache Zuordnung zwischen den Elementen eines realen Netzwerks und dessen Netzwerkmodell.

Beispiel 1.2

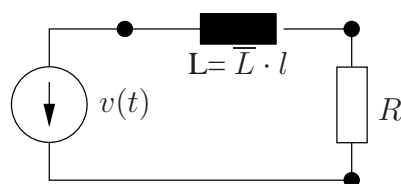
Sinusförmig erregte nahezu verlustlose Paralleldrahtleitung mit ohmschem Abschluss

Reales Netzwerk:

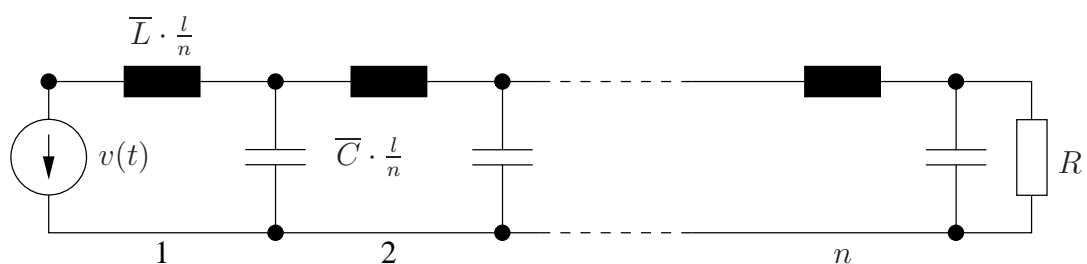


$$v(t) = \hat{v} \cos 2\pi f t \quad , \quad R = 1\Omega$$

Netzwerkmodell: $f \lesssim 50 \text{ Hz}$



Netzwerkmodell: $50 \text{ Hz} \lesssim f \lesssim 10 \text{ MHz}$



Es muss gelten: $\frac{l}{n} \ll \lambda = \frac{c}{f}$, $c \hat{=}$ Lichtgeschwindigkeit
 (→ Feldtheorievorlesung, Leitungstheorievorlesung, Leitungsgleichungen)

⇒ Das Netzwerkmodell eines realen Netzwerks ist abhängig vom betrachteten Frequenzbereich.

(Das Netzwerkmodell ergibt sich aus den Leitungsgleichungen (partielle Differentialgleichungen in Ort und Zeit) nach Einführung einer Ortsdiskretisierung. Dies ist ein typisches Beispiel für die Einführung von Netzwerkgleichungen! Daher steckt die Geometrieinformation des realen Netzwerks in den Parametern des Netzwerkmodells, z. B. $\bar{L} \cdot \frac{l}{n}$)

Bemerkung 1.2

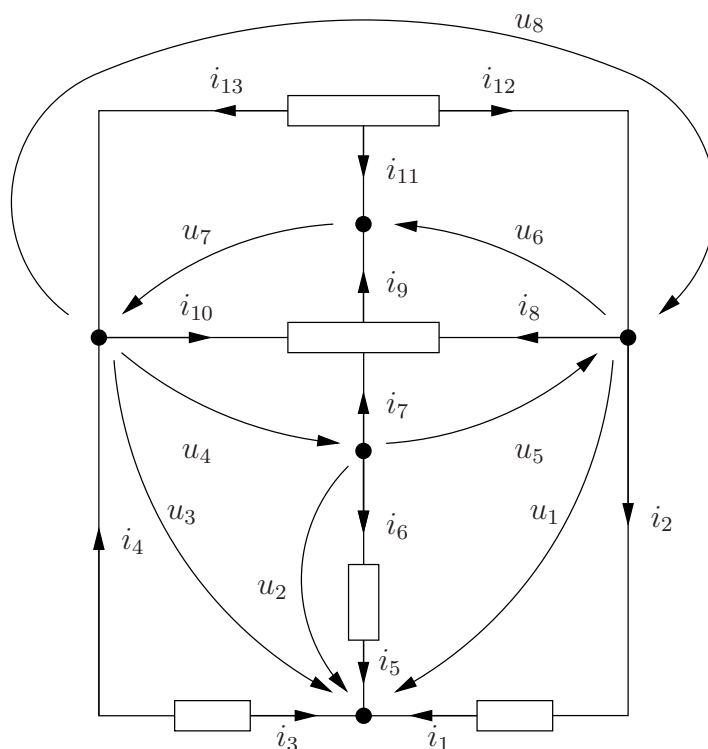
Die Frage, welches Netzwerkmodell zur Beschreibung eines realen Netzwerks für einen gegebenen Zweck hinreichend genau ist, ist nicht Gegenstand der Netzwerktheorie, sondern u.a. Gegenstand der Feldtheorie (→ Feldtheorievorlesung, Leitungstheorievorlesung) und der Theorie der elektronischen Bauelemente (→ Bauelementvorlesungen). Die Netzwerktheorie setzt das Netzwerkmodell als gegeben voraus!

Bemerkung 1.3 (Spannungs- und Stromvariablen)

In einem Netzwerkmodell sollten mindestens so viele Strom- und Spannungsvariablen eingeführt werden wie in den Gleichungen, die die Bauelemente des Netzwerks beschreiben, vorkommen. Führt man andererseits für jede Anschlussleitung eine Stromvariable und für jedes Knotenpaar eine Spannungsvariable ein, so ist dies sicherlich ein hinreichend großer Variablensatz zur Beschreibung der Netzwerkprobleme. (Es kann jedoch auch nützlich sein, noch mehr Spannungsvariablen einzuführen → Zweipolnetzwerke)

Beispiel 1.3

(Netzwerkmodell mit Strom- und Spannungsvariablen)



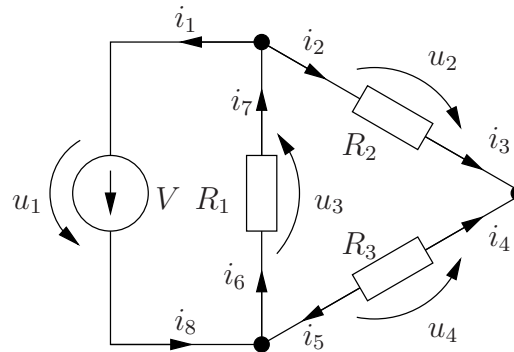
Bemerkung 1.4

Die Netzwerkaufgabe wird als gelöst betrachtet, wenn $i_1(t), \dots, i_{13}(t)$ und $u_1(t), \dots, u_8(t)$ bestimmt sind.

Aufgrund der Bauelementgleichungen allein ist die Netzwerkaufgabe nicht lösbar!

Beispiel 1.4

(Gleichstromnetzwerk)



12 Variable; aber nur vier Bauelementgleichungen.

Es kommen aufgrund von (1.6) und (1.7) noch weitere Gleichungen hinzu, die im nächsten Kapitel behandelt werden.

Kapitel 2

Die Kirchhoffschen Gesetze

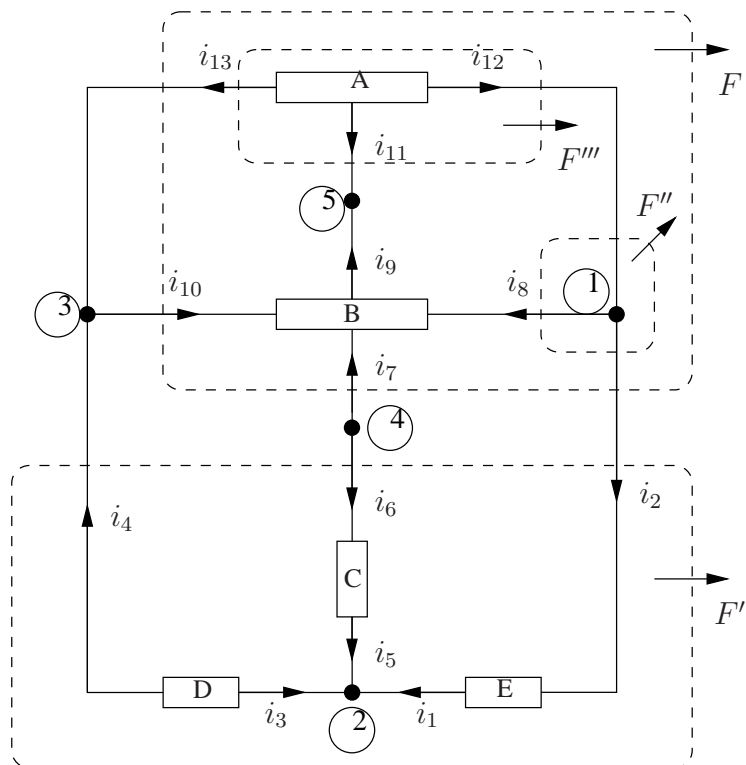
Satz 2.1 (Kirchhoffsche Schnittmengengleichung) (SGL)

Für jede Hüllfläche F , die nur Verbindungsleitungen schneidet und damit das Netzwerkmodell in zwei Teile aufteilt, gilt: Die Summe aller aus der Hüllfläche herausfließenden Verbindungsleitungsströme verschwindet.

Beweis: Nach (1.6) gilt:

$$0 = \oint \vec{J} \cdot d\vec{f} = \sum \text{ aller aus } F \text{ herausfließenden Verbindungsleitungsströme}$$

Beispiel 2.1



Es gilt:

$$\oint_F \vec{J} \cdot d\vec{f} = i_{13} - i_{10} - i_7 + i_2 = 0 \quad (2.1)$$

$$\oint_{F'} \vec{J} \cdot d\vec{f} = i_4 - i_6 - i_2 = 0 \quad (2.2)$$

Bemerkung 2.1

Da man um jeden Netzknoten leicht eine Hüllfläche legen kann, die nur Verbindungsleitungen schneidet, ist die Kirchhoffsche Knotenregel ein Spezialfall von Satz 2.1.

Kirchhoffsche Knotenregel (Knotengleichung):

Die Summe aller aus einem Netzknoten herausfließenden (hineinfließenden) Verbindungsleitungsströme verschwindet!

Für Knoten 1 gilt:

$$\oint_{F''} \vec{J} \cdot d\vec{f} = i_8 + i_2 - i_{12} = 0 \quad (2.3)$$

Ebenso gilt für Knoten 5:

$$-i_9 - i_{11} = 0 \quad (2.4)$$

Bemerkung 2.2

Ebenso kann man um jedes Bauelement eine Hüllfläche legen, die keine Knoten oder weiteren Bauelemente enthält und nur Verbindungsleitungen schneidet. Somit erhält man für Bauelement A analog zu oben

$$\oint_{F'''} \vec{J} \cdot d\vec{f} = i_{11} + i_{12} + i_{13} = 0 \quad (2.5)$$

und für B ebenso

$$i_9 - i_{10} - i_7 - i_8 = 0 \quad (2.6)$$

Es gilt also allgemein: Die Summe aller aus einem Bauelement herausfließenden Ströme verschwindet.

Addiert man nun die Gleichungen (2.3)-(2.6) so erhält man

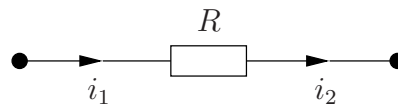
$$\begin{aligned} i_8 - i_{12} + i_2 - i_9 - i_{11} + i_{11} + i_{12} + i_{13} + i_9 - i_{10} - i_7 - i_8 &= 0 \\ \Rightarrow i_2 + i_{13} - i_7 - i_{10} &= 0 \quad \text{entspricht (2.1)} \end{aligned}$$

Die Gleichungen (2.1) und (2.2)–(2.6) sind also linear abhängig. D.h. Lösungen der Gleichungen (2.2)–(2.6) lösen auch (2.1)!

Merke: Die Hinzunahme von Gleichung (2.1) zum System (2.2)–(2.6) ergibt also keine zusätzliche Einschränkung des Lösungsraums von (2.2)–(2.6). D.h. (2.1) enthält keine zusätzliche Information über die Lösung. Diese würde sich nur ergeben, wenn Gleichung (2.1) linear unabhängig von den Gleichungen (2.2)–(2.6) wäre!

Bemerkung 2.3

Bei zweipoligen Bauelementen

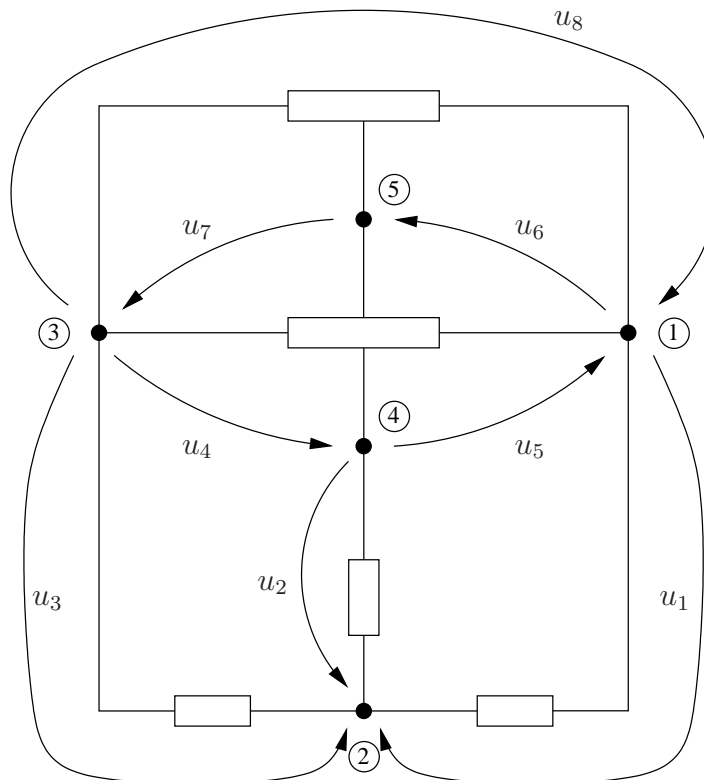


gilt wegen Bemerkung 2.2 immer $i_1 = i_2$. D.h. die Ströme in den beiden Verbindungsleitungen können von vornherein als gleich angenommen werden.

Satz 2.2 (Kirchhoffsche Maschengleichung) (MGL)

Die Summe aller Spannungen entlang eines geschlossenen Weges (einer Masche) C im Netzwerkmodell, der ganz außerhalb der Bauelemente liegt, verschwindet.

Beweis: Folgt sofort aus Gleichung (1.7)

Beispiel 2.2

Aus Satz 2.2 folgen die Maschengleichungen

$$u_7 + u_4 + u_5 + u_6 = 0 \quad (2.7)$$

$$u_2 - u_1 - u_5 = 0 \quad (2.8)$$

$$u_6 + u_7 + u_4 + u_2 - u_1 = 0 \quad (2.9)$$

Dabei ergibt sich (2.9) als Summe von (2.7) und (2.8). Die Gleichungen (2.7)–(2.9) sind also wieder linear abhängig!

Zusammenfassung

Aufgrund der Zusammenschaltung der Bauelemente in einem Netzwerkmodell ergeben sich über die Kirchhoffschen SGL und MGL lineare, homogene ($u_l = 0$, $i_l = 0$, $l = 1, 2, \dots$ löst alle SGL und MGL) Gleichungen für die an den Bauelementen anliegenden Spannungen und die aus ihnen heraus- und hineinfließenden Ströme.

Die Menge aller SGL ist genau wie die Menge aller MGL linear abhängig. Für die Ermittlung der Lösungsräume der MGL und SGL ist es aber nötig, zu wissen, wie viele linear unabhängige MGL und SGL es maximal gibt und wie man einen solchen Satz unabhängiger Gleichungen konstruktiv ermitteln kann.

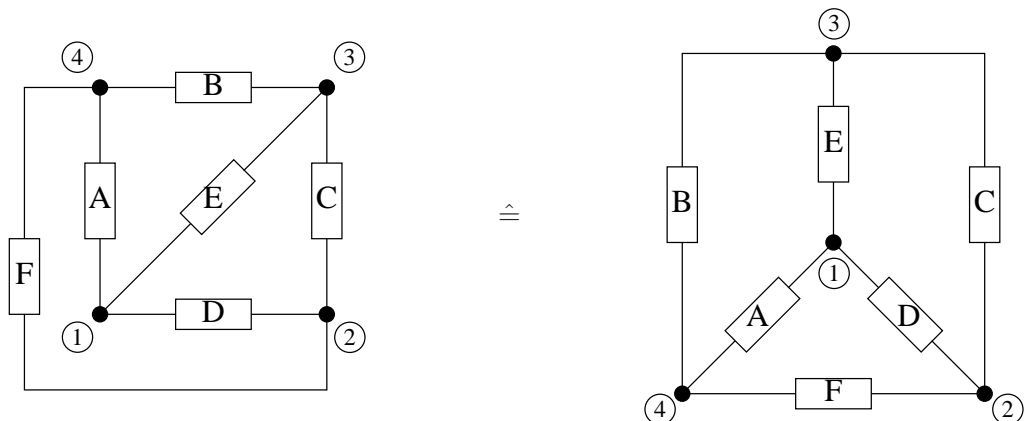
Um diese Aufgabe anzugehen, sind Grundkenntnisse der Graphentheorie notwendig.

Kapitel 3

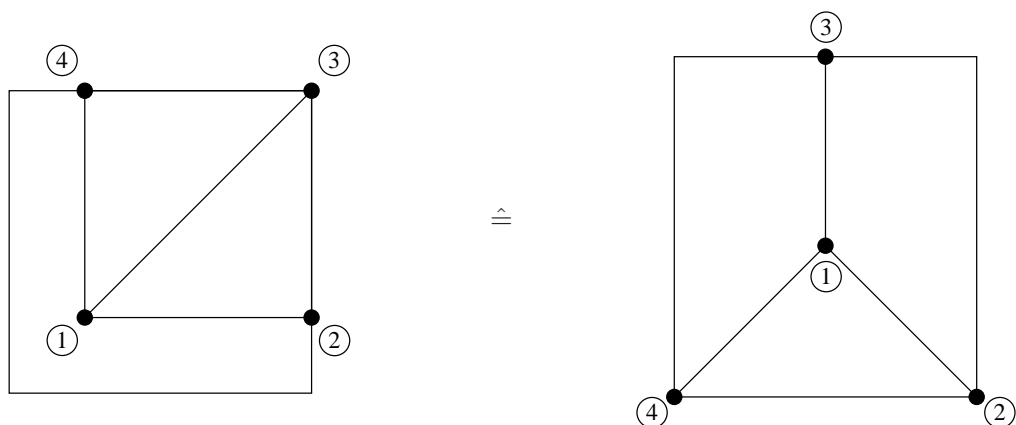
Definitionen und Sätze zur Graphentheorie

Motivation

Die elektrischen Eigenschaften eines Netzwerkmodells sind invariant gegen Änderungen der Netzwerkgeometrie, solange keine bestehenden Verbindungen unterbrochen oder neue aufgebaut werden.



Ein Graph ist ebenfalls nur über den Zusammenhang seiner Knoten und Zweige bestimmt und nicht darüber, wie er geometrisch repräsentiert wird.



Definition 3.1

Ein **geometrischer Graph** $G(V, E)$ ist eine endliche nichtleere Menge V von Punkten im \mathbb{R}^3 zusammen mit einer Menge E von glatten Kurven endlicher Länge, die entweder bereits doppel-punktfrei sind oder durch Entfernen höchstens eines Punktes doppelpunktfrei werden. Kurven auf die die letztere Bedingung zutrifft, sind geschlossen und werden Schlingen genannt. Für Kurven aus E gilt:

1. Schlingen enthalten genau einen Punkt. Alle anderen Kurven aus E enthalten genau zwei unterschiedliche Punkte aus V . Diese Punkte sind die Endpunkte dieser anderen Kurven.
2. Die Kurven aus E haben entweder keine gemeinsamen Punkte oder schneiden sich nur an ihren Endpunkten aus V .

Definition 3.2

Die Kurven aus E heißen **Zweige**. Ein **offener Zweig** ist ein Zweig ohne seine(n) Endpunkt(e).

Definition 3.3

Die Punkte heißen **Knoten**. Ein isolierter Knoten ist ein Knoten, der nicht Endpunkt eines Zweiges ist!



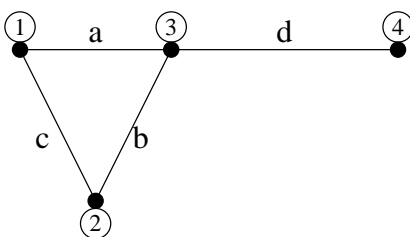
isolierter Knoten

Definition 3.4

Ein Knoten und ein Zweig heißen miteinander **inzident**, wenn der Knoten ein Endpunkt des Zweiges ist.

Definition 3.5

Der **Grad** eines Knotens ist gleich der Anzahl derjenigen Zweige, die mit diesem Knoten inzident sind. Schlingen werden dabei doppelt gezählt.



Knoten ③ ist inzident mit den Zweigen a,b,d.

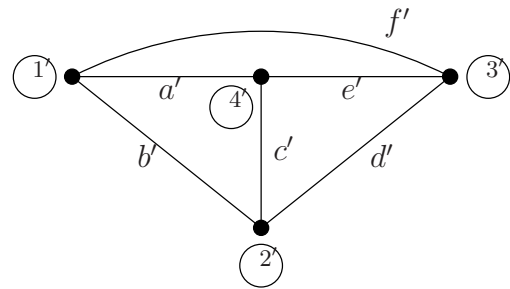
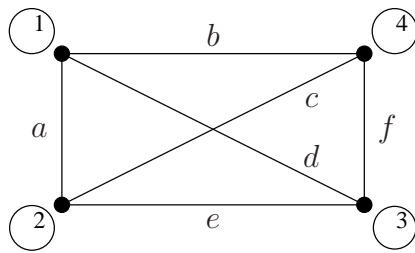
Knoten ③ hat den Grad 3.

Knoten ④ hat den Grad 1.

Definition 3.6

Zwei geometrische Graphen $G(V, E)$ und $G'(V', E')$ sind **isomorph** (im Sinne der Graphentheorie), wenn es eine umkehrbar eindeutige Abbildung g von V auf V' und eine umkehrbar eindeutige Abbildung f von E auf E' so gibt, dass die Inzidenzbeziehungen zwischen den Knoten und Zweigen erhalten bleiben. (D.h.

$$\begin{array}{ccc}
 K \in V & \text{ist inzident mit} & Z \in E \\
 & \Updownarrow & \\
 g(K) \in V' & \text{ist inzident mit} & f(Z) \in E' \quad)
 \end{array}$$

Beispiel 3.1

z.B.

Abbildung g :

Knoten	
1	4'
2	1'
3	2'
4	3'

Abbildung f :

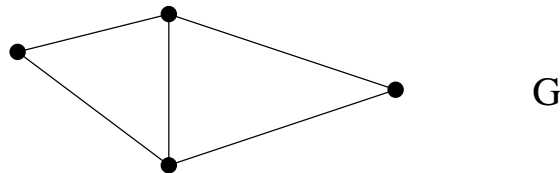
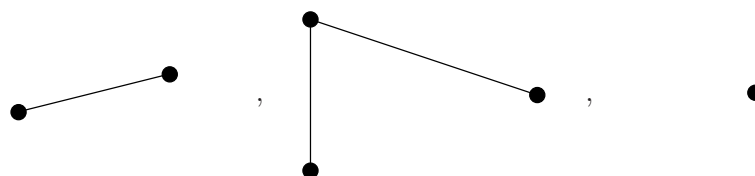
Zweige	
a	a'
b	e'
c	f'
d	c'
e	b'
f	d'

1 inzident mit a, b, d	\Leftrightarrow	$g(1) = 4'$ inzident mit $a', e', c' = f(a), f(b), f(d)$
2 inzident mit a, c, e	\Leftrightarrow	$g(2) = 1'$ inzident mit $a', f', b' = f(a), f(c), f(e)$
3 inzident mit e, d, f	\Leftrightarrow	$g(3) = 2'$ inzident mit $b', c', d' = f(e), f(d), f(f)$
4 inzident mit c, f, b	\Leftrightarrow	$g(4) = 3'$ inzident mit $f', d', e' = f(c), f(f), f(b)$

Die geometrischen Graphen G und G' sind also nur zwei geometrisch unterschiedliche Repräsentanten ein und desselben (abstrakten) Graphen. Im Sinne der Graphentheorie sind G und G' also nicht unterscheidbar.

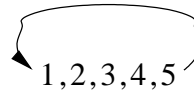
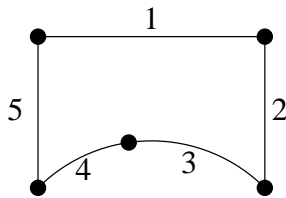
Definition 3.7

Ein Graph $G'(V', E')$ ist ein **Teilgraph** des Graphen $G(V, E)$, falls $V' \subset V$ und $E' \subset E$. (Da G' ein Graph ist, enthält V' alle Endpunkte der Zweige aus E')

**G**mögliche G' :

Definition 3.8

Eine **Masche** ist ein Graph, bei dem jeder Knoten den Grad 2 hat und dessen Zweige sich zyklisch so anordnen lassen, dass für je zwei (im Sinne der Anordnung) benachbarte Zweige ein gemeinsamer Knoten existiert, mit dem diese Zweige inzident sind.



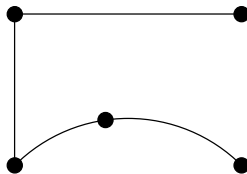
zyklische Anordnung

Zweig 1 und 5 sind im Sinne der Anordnung benachbart!

Beachte: Eine Schlinge ist also eine Masche.

Definition 3.9

Ein **Pfad** ist ein Graph, bei dem genau zwei Knoten (Endknoten genannt) den Grad 1 haben und aus dem durch Hinzufügen eines Zweiges (der die anderen Zweige nicht schneidet) zwischen den Endknoten eine Masche entsteht.

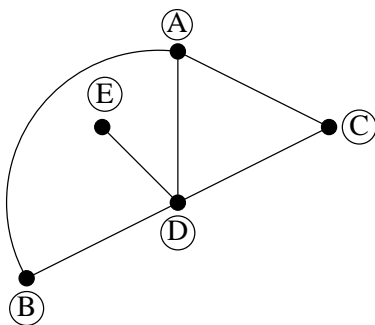


mögliche Pfade

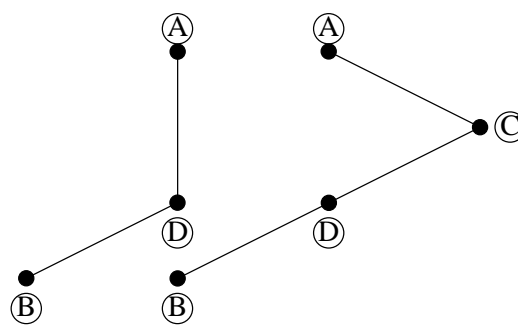
Beachte: Eine Schlinge ist **kein** Pfad.

Definition 3.10

Ein Graph ist **zusammenhängend**, wenn er entweder nur aus einem Knoten und den damit inzidenten Schlingen besteht oder es zu jedem seiner Knotenpaare einen Teilgraphen gibt, der ein Pfad ist und das Knotenpaar als Endknoten hat.



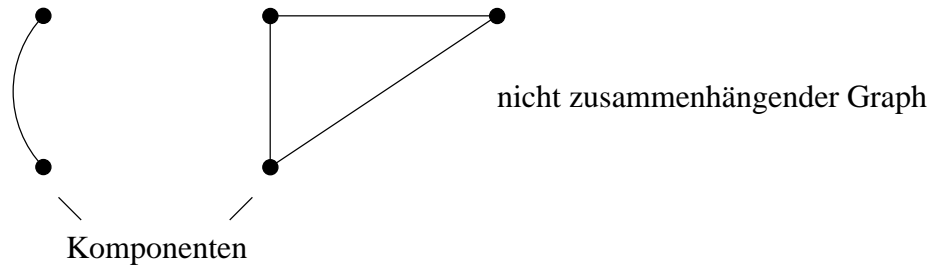
Graph



Pfade zwischen A und B

Definition 3.11

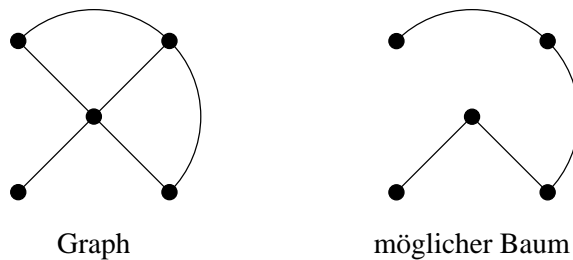
Die größten zusammenhängenden Teilgraphen eines nicht zusammenhängenden Graphen heißen dessen **Komponenten** (Zusammenhangskomponenten).

Vorschrift zur Konstruktion der Komponenten

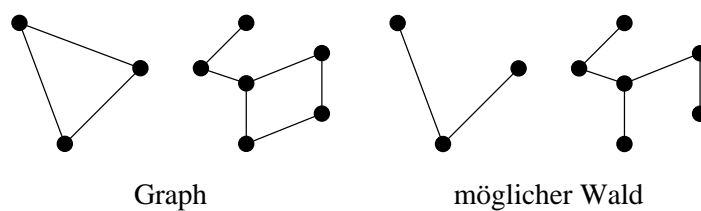
- Wähle einen Knoten aus.
- Bestimme alle Pfade, die Teilgraphen sind und bei denen einer der Endknoten mit dem ausgewählten Knoten übereinstimmt. Alle Zweige und Knoten dieser Pfade bilden, zusammen mit den zu diesen Knoten inzidenten Schlingen, die zu dem ausgewählten Knoten gehörige Komponente des Graphen.

Definition 3.12

Ein Teilgraph eines zusammenhängenden Graphen G heißt **Baum**, wenn er zusammenhängend ist, alle Knoten aus G , aber keine Maschen enthält.

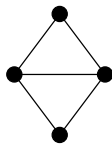
**Definition 3.13**

Es sei für jede Zusammenhangskomponente eines nicht zusammenhängenden Graphen genau ein Baum gegeben. Die Vereinigung dieser Bäume wird **Wald** genannt.

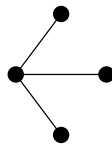


Definition 3.14

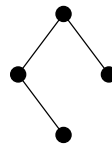
Ein Baum, bei dem alle Knoten bis auf genau einen den Grad 1 haben, wird **Busch** genannt.



Graph



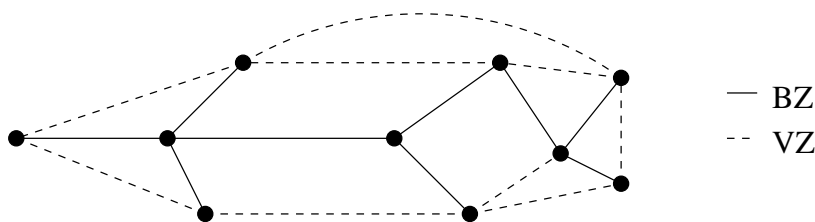
Busch



Baum, aber kein Busch

Definition 3.15

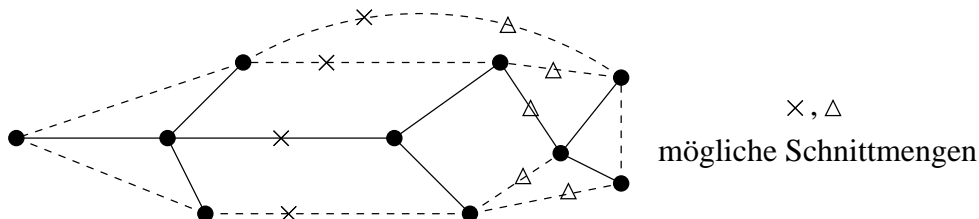
Es sei ein zusammenhängender Graph und ein Baum darin gegeben. Die Zweige des Graphen, die nicht Baumzweige sind, heißen **Verbindungszweige**.



⇒ Eine Schlinge ist immer Verbindungszweig.

Definition 3.16

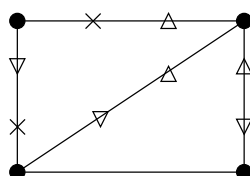
Eine **Schnittmenge** ist eine Menge von offenen Zweigen eines Graphen mit der Eigenschaft, dass die Entfernung (das Zerschneiden) aller Zweige dieser Menge notwendig und hinreichend ist, um die Anzahl der Zusammenhangskomponenten um genau 1 zu erhöhen.



⇒ Eine Schlinge kommt in keiner Schnittmenge vor!

Definition 3.17

Sei ein Graph und darin eine Menge von Maschen bzw. Schnittmengen gegeben. Diese Mengen heißen **unabhängig**, wenn es für die darin enthaltenen Maschen oder Schnittmengen eine Reihenfolge so gibt, dass jede Masche bzw. Schnittmenge einen Zweig enthält, der in den vorhergehenden Maschen bzw. Schnittmengen nicht enthalten ist.



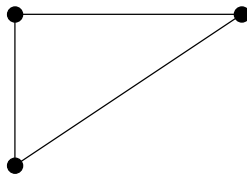
$\times \hat{=} SM1$
 $\triangle \hat{=} SM2$
 $\nabla \hat{=} SM3$

$\{SM1, SM2\}$ ist unabhängig.

$\{SM1, SM2, SM3\}$ ist nicht unabhängig, da $SM3 \subseteq (SM1 \cup SM2)$

Definition 3.18

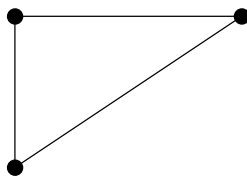
Der **Rang** eines Graphen mit k Knoten und s Komponenten ist $p = k - s$.



$$p = 5 - 2 = 3$$

Definition 3.19

Die **erste Bettische Zahl** m eines Graphen mit z Zweigen, k Knoten und s Komponenten ist $m = z - k + s = z - p$.



$$m = 4 - 3 = 1$$

Satz 3.1

Sei ein zusammenhängender Graph G gegeben. Ein Teilgraph B dieses Graphen ist genau dann ein Baum, wenn er alle Knoten von G , aber keine Schlingen enthält und es für jedes Knotenpaar von B genau einen Pfad gibt, der Teilgraph von B ist, und dessen Endknoten mit dem Knotenpaar übereinstimmen.

Beweis:

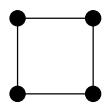
a) „ \Rightarrow “

Annahme: Die Voraussetzung ist zwar erfüllt, aber der Teilgraph ist kein Baum

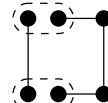
\Rightarrow der Teilgraph enthält eine Masche

\Rightarrow zwischen mindestens einem Knotenpaar des Teilgraphen B gibt es mindestens zwei Pfade oder B enthält eine Schlinge

\Rightarrow dies stimmt nicht mit der Voraussetzung überein. \nexists



Masche



Pfade

a) „ \Leftarrow “

Annahme: Der Teilgraph ist zwar ein Baum, aber die Voraussetzung ist falsch.

\Rightarrow (eine der Alternativen 1) - 3))

1) Es gibt eine Schlinge in B

$\Rightarrow B$ ist kein Baum nach Definition 3.12 \nexists

2) Es gibt ein Knotenpaar im Baum, zwischen dem es keinen Pfad gibt, der Teilgraph des Baumes ist

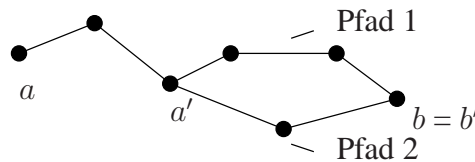
\Rightarrow der Teilgraph ist kein Baum, da er nicht zusammenhängend ist. \nexists

3) Es gibt für mindestens ein Knotenpaar a, b verschiedene Pfade, die das Knotenpaar verbinden. Bestimme a' als ersten Knoten, auf dem die Pfade auf dem Weg von a

nach b auseinanderstreben und b' als ersten Knoten, an dem sich die Pfade danach wieder vereinigen

\Rightarrow Die beiden unterschiedlichen Pfade bilden aufgrund der Konstruktion eine Masche zwischen a' und b'

\Rightarrow der Teilgraph ist kein Baum. \nexists



Satz 3.2

Jeder zusammenhängende Graph enthält mindestens einen Teilgraphen, der ein Baum ist.

Beweisskizze:

Die Anzahl aller unterschiedlicher Teilgraphen, die Maschen sind, ist endlich, da ein Graph nur endlich viele unterschiedliche Zweige hat und eine Masche auch nur aus endlich vielen, unterschiedlichen Zweigen besteht. Man greife eine Masche heraus und entferne einen ihrer offenen Zweige. Dadurch wird die Masche zerstört, aber der Zusammenhang des ursprünglichen Graphen geht nicht verloren. Man setze dieses Verfahren fort, bis es keine Maschen mehr gibt. Der danach entstandene Graph ist ein zusammenhängender Teilgraph des ursprünglichen Graphen, der alle Knoten enthält, aber keine Maschen. Das ist der gesuchte Baum.

Satz 3.3

Ein Baum mit k Knoten hat $k - 1$ Zweige.

Vor dem Beweis des Satzes 3.3 wird ein Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 3.1

Jeder Baum mit $k > 1$ Knoten enthält einen Knoten vom Grad 1.

Beweis:

Annahme: Die Behauptung ist falsch.

\Rightarrow Da es für $k > 1$ keinen Knoten vom Grad 0 geben kann, denn ein Baum ist ja zusammenhängend, müssen alle Knoten des Baumes einen Grad ≥ 2 haben.

Wähle einen beliebigen Knoten und folge einem der mit diesem Knoten inzidenten Zweige bis zum nächsten Knoten.

Nach Annahme muss dieser Knoten mit mindestens einem vom vorhergehenden Zweig unterschiedlichen Zweig inzident sein. Folge diesem neuen Zweig bis zum nächsten Knoten.

Dieser Schritt lässt sich nach Annahme beliebig oft wiederholen. Würde dabei ein bereits berührter Knoten wieder berührt, so ergäbe sich sofort ein Widerspruch, da man dann

im Baum eine Masche gefunden hätte. Man muss also dabei eine ständig wachsende Menge unterschiedlicher Knoten durchlaufen.

⇒ da die Anzahl der Knoten im Baum endlich ist, ergibt sich daraus ein Widerspruch!

Beweis zu Satz 3.3: (vollständige Induktion in k)

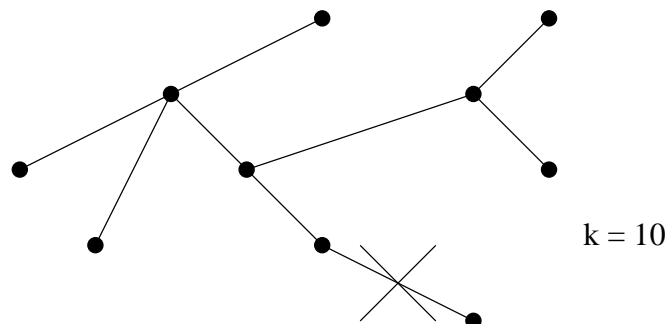
Induktionsanfang:



Die Behauptung ist offensichtlich richtig für $k = 1$ und $k = 2$.

Induktionsschritt: Annahme: der Satz sei bewiesen für $k \geq 2$

Sei ein Baum mit $k + 1$ Knoten gegeben. Einer der nach Hilfssatz 3.1 existierenden Knoten vom Grad 1 wird zusammen mit dem, mit ihm inzidenten offenen Zweig entfernt. Der verbleibende Graph ist weiterhin zusammenhängend! Denn hätte einer der Pfade, der die anderen Knoten des Baumes verbindet, den entfernten Knoten und Zweig enthalten, so gäbe es in diesem Pfad drei Knoten von Grad 1, was unmöglich ist. Ferner enthält der verbleibende Graph nach Konstruktion auch keine Maschen, ist also selbst ein Baum. Er hat also nach Voraussetzung k Knoten und damit $k - 1$ Zweige. Somit hat der ursprüngliche Baum k Zweige.



Zum Induktionsschritt von Satz 3.3.

Satz 3.4

Es sei ein Baum in einem zusammenhängenden Graphen gegeben. Jedem Baumzweig (BZ) lässt sich eindeutig eine Schnittmenge zuordnen, die außer diesem BZ nur Verbindungszweige (VZ) enthält. Diese Schnittmengen heißen Fundamentalschnittmengen (FS).

Zur Konstruktion der Schnittmenge:

Durch Heraustrennen eines offenen BZ zerfällt der Baum in genau zwei Zusammenhangskomponenten.

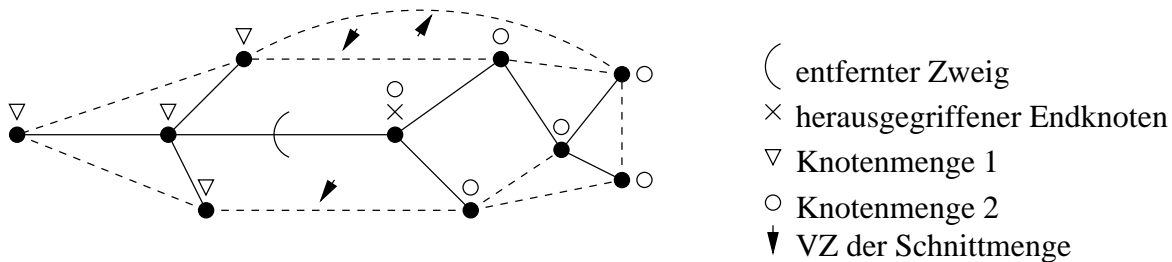
Beachte:

Sei einer der Endknoten des BZ herausgegriffen. Jeder andere Knoten des Baumes lässt sich von diesem Knoten durch einen eindeutig bestimmten Pfad erreichen. Dabei lassen sich die Knoten in zwei Mengen aufteilen, je nachdem ob der Pfad den herausgetrennten BZ enthält oder nicht. (Der herausgegriffene Knoten gehört zur letzteren Menge.) Diese Mengen hängen nicht von der Wahl des Endknotens des herausgetrennten BZ ab!

Die so bestimmten Mengen sind die Knotenmengen der Zusammenhangskomponenten.

Die diesem BZ zugeordneten VZ sind diejenigen, die in jeder der beiden Zusammenhangskomponenten mit je einem Knoten inzident sind.

Nach Konstruktion bildet der BZ mit diesen VZ eine Schnittmenge.



Satz 3.5

Sei ein Baum in einem zusammenhängenden Graphen gegeben. Jedem VZ lässt sich eindeutig eine Masche zuordnen, die außer diesem VZ keine oder nur BZ enthält. Diese Maschen heißen Fundamentalmaschen (FM).

Zur Konstruktion der Masche:

Ist ein VZ eine Schlinge, so besteht die Fundamentalmasche nur aus dieser Schlinge. Ist der VZ keine Schlinge, lassen sich die Endknoten des VZ durch genau einen Pfad, der Teilgraph des Baumes ist, verbinden. Zusammen mit dem VZ entsteht aus diesem Pfad die Masche mit den angegebenen Eigenschaften.

Man beachte die Dualität der Aussagen in den Sätzen 3.4 und 3.5!
(Vertausche $VZ \leftrightarrow BZ$ und Schnittmenge \leftrightarrow Masche)

Satz 3.6

Sei ein Baum in einem zusammenhängenden Graphen gegeben. Sei ferner ein BZ und ein VZ herausgegriffen. Es gilt: Der BZ ist in der dem VZ zugeordneten FM (VZ-FM) \Leftrightarrow Der VZ ist in der dem BZ zugeordneten FS (BZ-FS).

Beweis:

„ \Rightarrow “ Voraussetzung: BZ in VZ-FM

Entfernt man den BZ aus der FM, so entsteht ein Pfad zwischen den Endknoten des BZ, der nur aus weiteren BZ und dem VZ besteht. Daher verbindet der VZ die bei Entfernen des BZ entstehenden Baumzusammenhangskomponenten. Daher muss der VZ in der BZ-FS liegen.

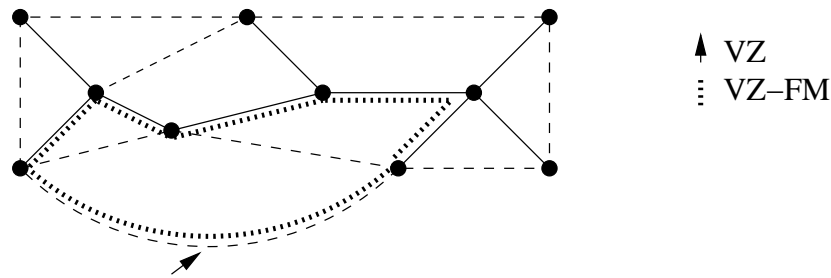
„ \Leftarrow “ Voraussetzung: VZ in BZ-FS

Annahme: der BZ liegt nicht im VZ-FM

\Rightarrow Es gibt einen Pfad aus anderen BZ, der die Endknoten des VZ verbindet. Damit liegen die beiden Endknoten in genau einer, der bei Entfernen des BZ entstehenden Baumzusammenhangskomponenten.

\Rightarrow Der VZ liegt nicht im BZ-FS.

\Rightarrow Dies widerspricht der Voraussetzung.



Der VZ liegt in allen BZ-FS derjenigen BZ, die in der VZ-FM liegen!

Satz 3.7

Ein zusammenhängender Graph mit k Knoten enthält mindestens $k - 1$ unabhängige Schnittmengen.

Beweis:

Man wähle einen Baum. Dieser hat $k - 1$ Zweige. Die nach Satz 3.4 zugeordnete FS haben die gewünschte Eigenschaft, da in ihnen jeweils nur genau ein BZ enthalten ist.

Satz 3.8

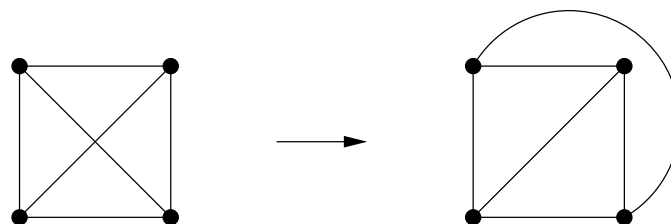
Ein zusammenhängender Graph mit k Knoten und z Zweigen enthält mindestens $z - k + 1$ unabhängige Maschen.

Beweis:

Man wähle einen Baum. Es gibt $k - 1$ BZ und $z - k + 1$ VZ. Die nach Satz 3.5 den VZ zugeordneten FM haben die gewünschte Eigenschaft, da in ihnen jeweils nur ein VZ enthalten ist.

Definition 3.20

Ein zusammenhängender Graph heißt **planar**, wenn es einen dazu isomorphen Graphen gibt, der sich in der Ebene so zeichnen lässt, dass sich die Zweige außer an ihren Endpunkten nicht schneiden.



Satz 3.9

Sei G ein nicht zusammenhängender Graph mit s Komponenten, k Knoten und z Zweigen, dann gibt es in diesem Graphen mindestens $k - s$ unabhängige Schnittmengen und $z - k + s$ unabhängige Maschen.

Beweis:

Man wende die Sätze 3.7 und 3.8 auf die s Zusammenhangskomponenten an. Die FS und FM der einzelnen Zusammenhangskomponenten sind untereinander unabhängig,

da sie keine gemeinsamen Zweige enthalten. Seien k_1, \dots, k_s die Knotenanzahlen und z_1, \dots, z_s die Zweiganzahlen der Komponenten. Dann gibt es insgesamt

$$\sum_{i=1}^s (k_i - 1) = k - s \quad \text{unabhängige Schnittmengen}$$

und

$$\sum_{i=1}^s (z_i - k_i + 1) = z - k + s \quad \text{unabhängige Maschen.}$$

Vereinbarung:

Wenn in Zukunft bei einem nicht zusammenhängenden Graphen von seinem Baum gesprochen wird, so ist der entsprechende Wald gemeint.

Kapitel 4

MGL und SGL

4.1 Systematische Bestimmung von maximalen Mengen linearer unabhängiger MGL und SGL und Darstellung ihrer Lösungsräume

Mathematische Voraussetzungen

Satz M 1 (ohne Beweis)

Sei \underline{A} eine beliebige Matrix. Es gilt: Die maximale Anzahl von linear unabhängigen Zeilenvektoren ist gleich der maximalen Anzahl von linear unabhängigen Spaltenvektoren. Diese Anzahl heißt Rang der Matrix \underline{A} .

Satz M 2 (ohne Beweis)

Sei $\underline{A}\vec{x} = 0$ ein homogenes lineares Gleichungssystem und $\vec{x} = (x_1, \dots, x_z)^t$ ein z -dimensionaler Vektor. Die Menge $L_{\underline{A}}$ der Vektoren \vec{x} , die das Gleichungssystem lösen, bildet einen Vektorraum, den sogenannten Lösungsraum. Es gilt:

$$\dim L_{\underline{A}} + \text{Rang}(\underline{A}) = z$$

Satz M 3

$$\underline{A} = \underline{B} \underline{C} \Rightarrow \text{Rang}(\underline{A}) \leq \text{Rang}(\underline{C}) \text{ und } \text{Rang}(\underline{A}) \leq \text{Rang}(\underline{B})$$

Beweis:

M 3 lässt sich leicht beweisen, wenn folgender Hilfssatz bewiesen ist:

Seien $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} = X_1$ und $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\} = X_2$ zwei Vektormengen und es gebe Zahlen $\gamma_{j,l}$ mit

$$\vec{a}_l = \sum_{j=1}^m \gamma_{j,l} \vec{b}_j \text{ für alle } l = 1, \dots, n \quad (4.1)$$

Dann gilt:

Maximale Anzahl von linearen unabhängigen Vektoren in X_1
 \leq Maximale Anzahl von linearen unabhängigen Vektoren in X_2

Beweis:

Sei eine beliebige Anzahl von Vektoren aus X_1 und ein maximaler Satz von linearen unabhängigen Vektoren aus X_2 gegeben. O.B.D.A. seien diese Mengen gegeben über

$$\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_f\} \subseteq X_1 \text{ und } \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r\} \subseteq X_2$$

mit $f \leq n$ und $r \leq m$. Da $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r\}$ ein maximaler Satz linearer unabhängiger Vektoren ist, sind $\vec{b}_{r+1}, \dots, \vec{b}_m$ durch Linearkombinationen von $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r$ darstellbar. Aufgrund von (4.1) gibt es daher Zahlen $\beta_{j,l}$ mit

$$\vec{a}_l = \sum_{j=1}^r \beta_{j,l} \vec{b}_j \text{ für alle } l = 1, \dots, f$$

Man betrachte das Gleichungssystem mit den Unbekannten $\alpha_1, \dots, \alpha_f$:

$$0 = \sum_{l=1}^f \alpha_l \vec{a}_l = \sum_{l=1}^f \sum_{j=1}^r \alpha_l \beta_{j,l} \vec{b}_j = \sum_{j=1}^r \left(\sum_{l=1}^f \alpha_l \beta_{j,l} \right) \vec{b}_j \quad \begin{matrix} \iff \\ \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r \text{ sind l.u.} \end{matrix} \sum_{l=1}^f \alpha_l \beta_{j,l} = 0 \text{ für } j = 1, \dots, r$$

$$\iff \underline{B} \vec{\alpha} = 0 \text{ mit } \underline{B} = (\beta_{j,l}) \text{ und } \vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_f)^t$$

Nach Satz M 2 gilt:

$$\text{Rang } \underline{B} + \text{Dim } L_{\underline{B}} = f \\ (\leq r)$$

Aus der Annahme $f > r \Rightarrow \text{Dim } L_{\underline{B}} \geq 1 \Rightarrow$ Es gibt ein $\vec{\alpha} \neq 0$ mit $\underline{B} \vec{\alpha} = 0 \Rightarrow$ Es gibt $\alpha_1, \dots, \alpha_f$, die nicht alle gleich 0 sind, mit $\sum_{l=1}^f \alpha_l \vec{a}_l = 0 \Rightarrow \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_f\}$ ist eine lineare abhängige Menge
 \Rightarrow Behauptung

Setzt man X_1 gleich der Menge der Spaltenvektoren von \underline{A} und X_2 gleich der Menge der Spaltenvektoren von \underline{B} , so ergibt sich die Behauptung des Hilfssatzes sofort aus $\underline{A} = \underline{B} \underline{C}$. Aus dem Hilfssatz folgt somit nun unmittelbar

$$\text{Rang } \underline{A} \leq \text{Rang } \underline{B}$$

Betrachtet man ferner

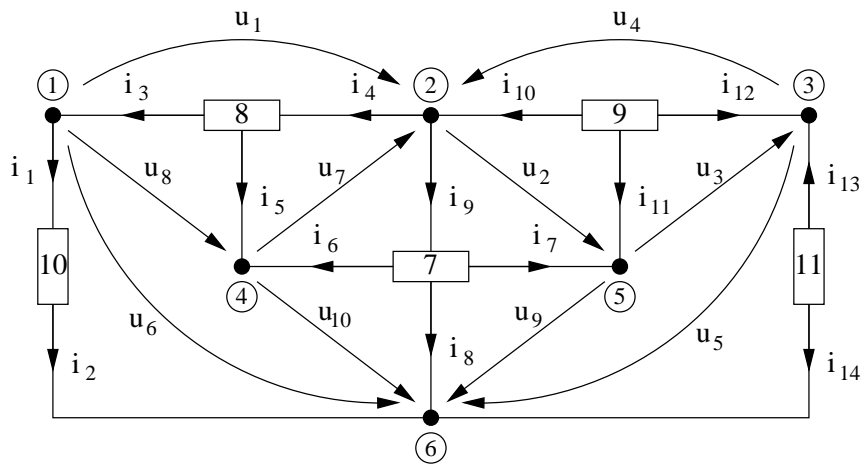
$$\underline{A} = \underline{B} \underline{C} \Rightarrow \underline{A}^t = (\underline{B} \underline{C})^t = \underline{C}^t \underline{B}^t$$

$$\Rightarrow \text{Rang } \underline{A} = \text{Rang } \underline{A}^t \leq \text{Rang } \underline{C}^t = \text{Rang } \underline{C}$$

so ist Satz M 3 vollständig bewiesen.

Es sei ein beliebiges Multipolnetzwerk gegeben. Ferner sei eine hinreichende Anzahl von Knotenpaarspannungen mit Orientierung als Spannungsvariablen und in jeder Verbindungsleitung eine Stromvariable mit Orientierung eingeführt.

Netzwerkmodell

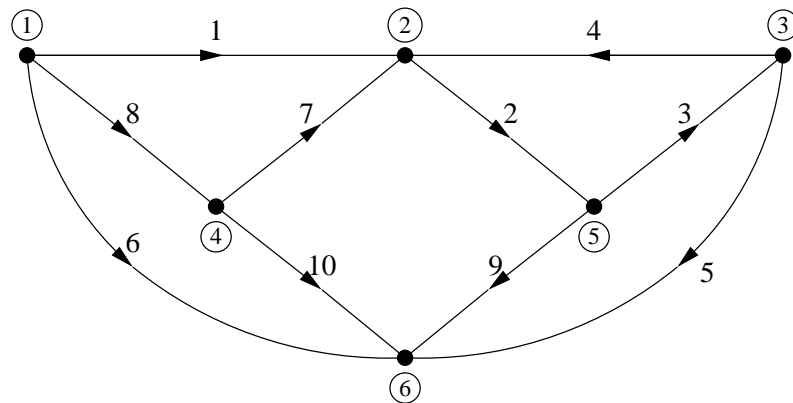


Die Anzahl der eingeführten Knotenpaarspannungen ist hinreichend, wenn sich jede Polpaarspannung eines beliebigen Bauelements als (\pm) Summe der eingeführten Spannungsvariablen ausdrücken lässt.

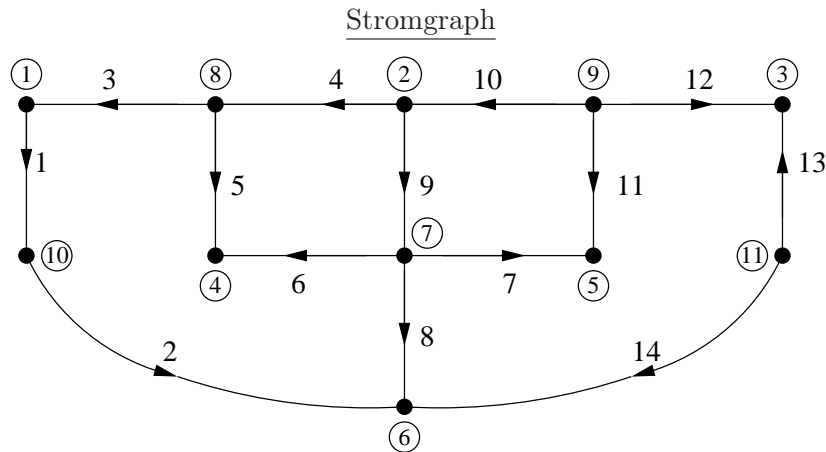
Dem Netzwerk wird nun je ein Spannungs- und ein Stromgraph zugeordnet. Beides sind orientierte Graphen.

Der Spannungsgraph enthält für jeden Netzwerkknoten einen Knoten. Und für jede eingeführte Knotenpaarspannung einen Zweig, der wie die Spannung orientiert ist.

Spannungsgraph



Der Stromgraph enthält für jeden Netzwerkknoten und jedes Bauelement einen Knoten und für jede Verbindungsleitungsstromvariable einen Zweig, der wie die Stromvariable orientiert ist.



Den Schnittmengen im Stromgraphen und den Maschen im Spannungsgraphen sind jetzt die entsprechenden *SGL* und *MGL* im Netzwerkmodell zugeordnet. Sei ferner jeweils ein Baum in beiden Graphen gegeben, so entsprechen den zugeordneten *FS* beim Stromgraphen entsprechende Fundamentalschnittmengengleichungen (*FSGL*) im Netzwerkmodell und den zugeordneten *FM* beim Spannungsgraphen entsprechende Fundamentalmaschengleichungen (*FMGL*) im Netzwerkmodell. In diesem Sinne stellen diese Graphen die *MGL* und *SGL* des Netzwerkmodells graphisch dar.

Beispiele

Der Masche 4,2,9,5 im Spannungsgraphen entspricht die Maschengleichung

$$u_4 + u_2 + u_9 - u_5 = 0$$

im Netzwerkmodell.

Die Schnittmenge 4,6,8,14 im Stromgraphen entspricht die Schnittmengengleichung

$$i_4 + i_6 + i_8 + i_{14} = 0$$

im Netzwerkmodell. Die Gleichung könnte aber auch lauten

$$-i_4 - i_6 - i_8 - i_{14} = 0$$

Dies entspricht einem Wechsel der Orientierung in der der Schnittmenge zugeordneten Hüllfläche. Diese Orientierung ist also noch offen.

Sei der Baum 1,3,4,6,8,9,10,11,12,13 im Stromgraphen gegeben. Die dem Zweig 10 zugeordnete *FS* besteht aus den Zweigen 10,7,14. Die entsprechende *FSGL* lautet

$$i_{10} - i_7 + i_{14} = 0$$

Bemerkung 4.1

Wie an den Beispielen zu sehen ist, ist bei einem gegebenen, orientierten geometrischen Graphen die Zuordnung von Schnittmengen zu *SGL* und Maschen zu *MGL* rein formal möglich. Man muss dazu nicht wissen, ob es sich um einen Strom- oder Spannungsgraphen handelt. Letzteres ist nur wichtig, wenn man die *SGL* und *MGL* den entsprechenden Gleichungen in einem Netzwerkmodell zuordnen will. Wir werden ab jetzt bei einem beliebig orientierten Graphen von *SGL* und *MGL* sprechen, ohne zu beachten, ob es sich bei diesem Graphen um einen Spannungs- oder Stromgraphen eines Netzwerkmodells handelt.

Bemerkung 4.2 : (Orientierung und Numerierungskonvention)

Sei ein beliebig orientierter Graph und darin ein beliebiger Baum gegeben. Der Graph habe z Zweige, k Knoten und s Komponenten. Es wird angenommen, dass die Baumzweige von $1, \dots, k-s$ durchnummeriert sind und die Verbindungszweige von $k-s+1, \dots, z$. Ferner wird jedem Zweig l formal eine Spannungs- und Stromvariable u_l, i_l mit der entsprechenden Orientierung zugeordnet. Diese werden von den entsprechenden, möglicherweise anders nummerierten, Variablen im Netzwerkmodell (falls vorhanden) nur dann unterschieden, wenn es notwendig ist. Ferner soll die Orientierung der FM und FS so gewählt werden, dass bei den $FMGL$ die VZ-Spannungen und bei den $FSGL$ die BZ-Ströme positiv gezählt werden. Die $(FM, FMGL)$ erhalten die Nummer des zugeordneten $VZ_{ges.}$ abzüglich $k-s$. Sie sind also von $1, \dots, z-k+s$ nummeriert. Die $(FS, FSGL)$ sind wie die zugehörigen BZ nummeriert.

Definition 4.1 : Fundamentalschnittmengeninzidenzmatrix $\underline{\underline{FS}}$

Es seien die Voraussetzungen von Bemerkung 4.2 gegeben.

$$\underline{\underline{FS}} := (FS_{l,m}), \quad 1 \leq l \leq k-s, \quad 1 \leq m \leq z$$

$$FS_{l,m} := \begin{cases} 1 & m \leq k-s, \quad l = m \text{ (BZ}_m \text{ gehört zu } FS_l) \\ 0 & m \leq k-s, \quad l \neq m \text{ (BZ}_m \text{ gehört nicht zu } FS_l) \\ 0 & m > k-s, \quad \text{VZ}_m \text{ gehört nicht zu } FS_l \\ 1/-1 & m > k-s, \quad \text{VZ}_m \text{ gehört zu } FS_l \text{ mit im Sinne der } FS_l \\ & \text{gleichsinniger/ungleichsinniger Orientierung} \\ & \text{zum } BZ_l \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{FS}} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \underline{\underline{MFS}} \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \end{array}} \right\} \begin{array}{l} k-s \\ \text{Zeilen} \end{array} \\ &= \left(\begin{array}{c|c} k-s & z-k+s \\ \text{Spalten} & \text{Spalten} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Satz 4.1

Ein Graph mit k Knoten und s Komponenten enthält mindestens $k-s$ linear unabhängige Schnittmengengleichungen.

Beweis:

Man greife einen Baum des Graphen heraus und folge den Konventionen von Bemerkung 4.2. Dann lassen sich die $FSGL$ in der Form schreiben

$$\underline{\underline{FS}} \vec{I} = 0 \quad \text{mit} \quad \vec{I} = (i_1, \dots, i_z)^t$$

Da $\text{Rang}(\underline{\underline{FS}}) = k-s$, ist der Satz 4.1 bewiesen.

Satz 4.2

Sei ein Multipolnetzwerkmodell mit den entsprechend eingeführten Stromvariablen gegeben. Der zugehörige Stromgraph habe k Knoten und s Komponenten. Dann enthält das Netzwerkmodell mindestens $k - s$ linear unabhängige Schnittmengengleichungen.

Beweis:

Da die *SGL* des Stromgraphen den *SGL* des Netzwerkmodells entsprechen ergibt sich der Beweis aus Satz 4.1

Definition 4.2 Fundamentalmascheninzidenzmatrix $\underline{\underline{FM}}$

Es seien die Voraussetzungen von Bemerkung 4.2 gegeben.

$$\underline{\underline{FM}} := (FM_{l,m}), \quad 1 \leq l \leq z - k + s, \quad 1 \leq m \leq z$$

$$FM_{l,m} := \begin{cases} 0 & m \leq k - s, \text{ BZ}_m \text{ gehört } \underline{\text{nicht}} \text{ zu } FM_l \\ 1/-1 & m \leq k - s, \text{ BZ}_m \text{ gehört zu } FM_l \text{ mit im Sinne der } FM_l \\ & \text{gleichsinniger/ungleichsinniger Orientierung} \\ & \text{zum } VZ_{k-s+l} \\ 1 & m > k - s, \quad m = k - s + l \quad (VZ_m \text{ gehört zu } FM_l) \\ 0 & m > k - s, \quad m \neq k - s + l \quad (VZ_m \text{ gehört nicht zu } FM_l) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{FM}} &= \left(\begin{array}{c|ccc} & & 1 & & 0 \\ & \underline{\underline{SFM}} & & \ddots & \\ & & 0 & & 1 \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{c|ccc} & & 1 & & 0 \\ & \underline{\underline{SFM}} & & \ddots & \\ & & 0 & & 1 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} z - k + s \\ \text{Zeilen} \end{array} \\ &= \left(\begin{array}{c|c} k - s & z - k + s \\ \text{Spalten} & \text{Spalten} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Satz 4.3

Ein Graph mit k Knoten, s Komponenten und z Zweigen enthält mindestens $z - k + s$ linear unabhängige Maschengleichungen.

Beweis:

Man greife einen Baum heraus und folge den Konventionen aus Bemerkung 4.2. Dann lassen sich die *FMGL* schreiben

$$\underline{\underline{FM}} \vec{U} = 0 \quad \text{mit} \quad \vec{U} = (u_1, \dots, u_z)^t$$

Da $\text{Rang}(\underline{\underline{FM}}) = z - k + s$, ist der Satz 4.3 bewiesen.

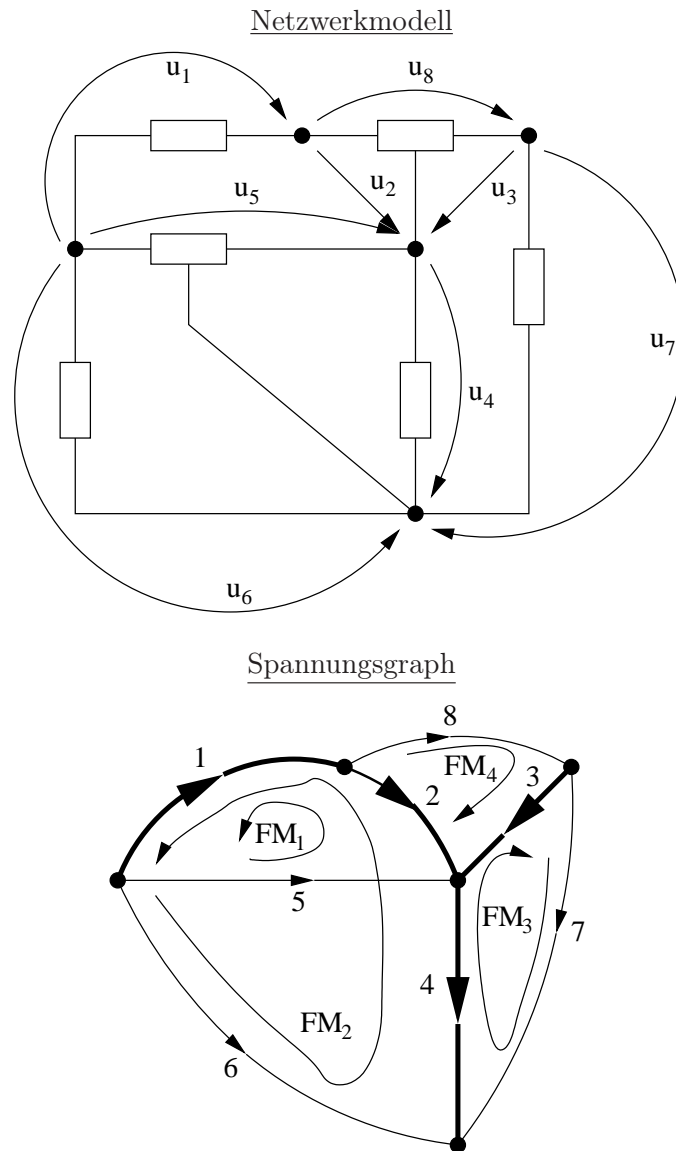
Satz 4.4

Sei ein Multipolnetzwerkmodell mit den entsprechend eingeführten Spannungsvariablen gegeben. Der zugehörige Spannungsgraph hat k Knoten, s Komponenten und z Zweige. Dann enthält das Netzwerkmodell mindestens $z - k + s$ linear unabhängige Maschengleichungen.

Beweis:

Da die *MGL* des Spannungsgraphen den *MGL* des Netzwerkmodells entsprechen, ergibt sich der Beweis aus Satz 4.3.

Beispiel zu den Sätzen 4.3 und 4.4:

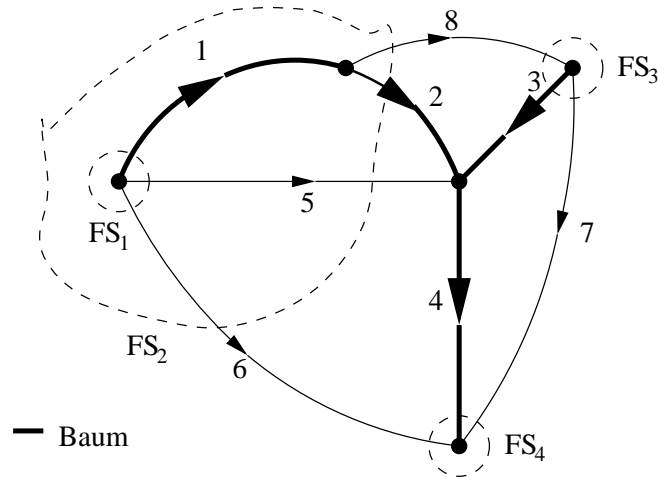


Fundamentalmascheninzidenzmatrix: 4 Zeilen, 8 Spalten

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \underline{\underline{SFM}} & \underline{\underline{1}} \end{array} \right]$$

Fundamentalschnittmengeninzidenzmatrix zum gleichen Graphen:

(Die zu dieser Matrix gehörenden Gleichungen entsprechen keinen Netzwerkgleichungen im gegebenen Netzwerk!)



$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & & & & \\ \hline & & & & \end{array} \right] \begin{array}{c} \text{MFS} \\ \\ \\ \end{array}$$

Hier gilt: $\text{MFS} = -\text{SFM}^t$!

Diese Beziehung gilt aber auch allgemein, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 4.5

Sei ein beliebiger orientierter Graph und darin ein Baum gegeben und die Numerierung nach Bemerkung 4.2 durchgeführt. Sei

$$\text{FS} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & 1 & & & \end{array} \right) \begin{array}{c} \text{MFS} \\ \\ \end{array} \quad \text{und} \quad \text{FM} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{array} \right) \begin{array}{c} \text{SFM} \\ \\ \end{array}$$

dann gilt:

$$\text{MFS} = -\text{SFM}^t$$

Beweis:

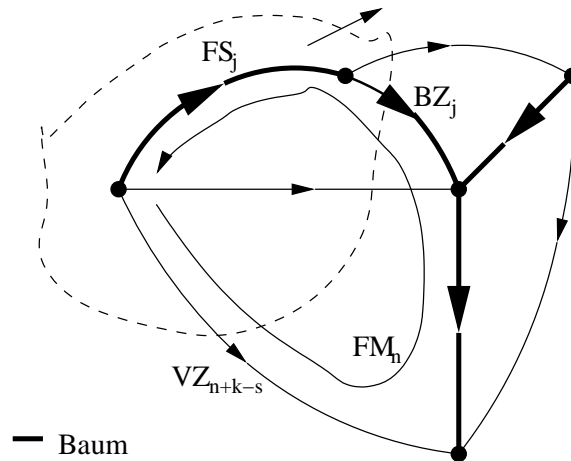
$$\begin{aligned} \text{MFS} &= (\text{MFS}_{j,n}) \quad 1 \leq j \leq k-s, 1 \leq n \leq z-k+s \\ \text{SFM} &= (\text{SFM}_{n,j}) \end{aligned}$$

$$\text{MFS}_{j,n} = +1/-1 \text{ oder } 0 \text{ sonst} \iff$$

VZ_{n+k-s} gehört zur FS_j gleichsinnig/ungleichsinnig orientiert zum BZ_j im Sinne der Schnittmenge $\xLeftrightarrow{\text{Satz 3.6}} BZ_j$ gehört zur FM_n ungleichsinnig/gleichsinnig orientiert zum VZ_{n+k-s} im Sinne der Masche

$$\iff \text{SFM}_{n,j} = -1/+1 \text{ oder } 0 \text{ sonst}$$

Erklärung zum Vorzeichenwechsel



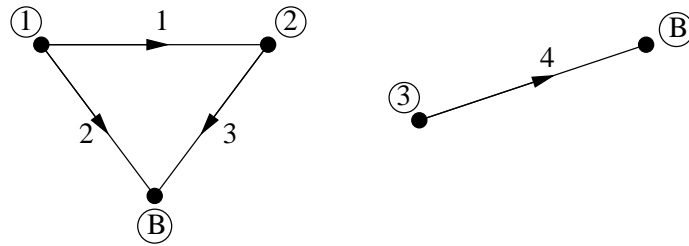
BZ_j ungleichsinnig orientiert zu $FM_n \iff VZ_{n+k-s}$ gleichsinnig orientiert zur FS_j .

Definition 4.3 (Knoten-zweig-inzidenzmatrix \underline{KG})

Es sei ein orientierter Graph mit k Knoten z Zweigen und s Komponenten gegeben. Für jede Zusammenhangskomponente sei ein Bezugsknoten gewählt. Alle anderen Knoten seien von $1, \dots, k-s$ durchnummeriert. Die Zweige seien von $1, \dots, z$ nummeriert.

$$\underline{KG} = (KG_{l,m}) \quad 1 \leq l \leq k-s, 1 \leq m \leq z$$

$$KG_{l,m} := \begin{cases} 0 & \text{Zweig } m \text{ ist eine Schlinge oder er ist nicht mit Knoten } l \text{ inzident} \\ 1/-1 & \text{Zweig } m \text{ ist keine Schlinge und er ist mit Knoten } l \text{ inzident und} \\ & \text{[vom Knoten } l \text{ weg / zum Knoten } l \text{ hin] orientiert} \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{KG}$$

Die Knotengleichungen der Knoten, die nicht Bezugsknoten sind, lassen sich wie folgt darstellen:

$$\underline{KG} \vec{I} = 0$$

Satz 4.6

Seien die Voraussetzungen von Definition 4.3 gegeben. Sei ferner über den z -dimensionalen Vektor \vec{b} eine beliebige SGL gegeben

$$\vec{b}^t \vec{I} = 0 \quad \vec{I} = (i_1, \dots, i_z)^t.$$

Beh.: Dann gibt es einen $(k - s)$ -dimensionalen Vektor \vec{c} , so dass

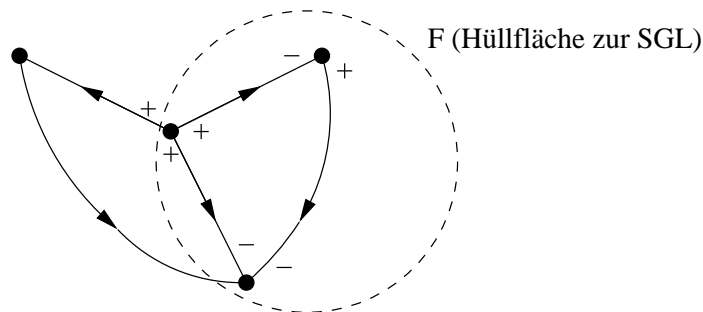
$$\vec{b}^t = \vec{c}^t \underline{\underline{K}}G$$

$$\left(\Longleftrightarrow \vec{b}^t \vec{I} = \vec{c}^t \underline{\underline{K}}G \vec{I} \quad \text{für alle} \quad \vec{I} \right)$$

(D.h. insbesondere, dass jede SGL sich durch Linearkombination von KGL darstellen lässt.)

Beweis:

Sei die zur SGL zugehörige Hüllfläche gegeben. Sei ferner die Orientierung der Hüllfläche so gewählt, dass alle herausfließenden Ströme positiv gezählt werden. Die herausgegriffene SGL ergibt sich dann als Summe aller KGL derjenigen Knoten, die in der Hüllfläche liegen, wenn bei diesen Knoten alle aus den Knoten fließenden Ströme positiv gezählt werden. Denn ist ein Zweig nicht in der Schnittmenge, aber mit einem Knoten innerhalb der Hüllfläche inzident, so muss er noch mit einem weiteren Knoten innerhalb der Hüllfläche inzident sein. Da dieser Zweig bzgl. dieser beiden Knoten unterschiedlich orientiert ist, hebt sich der Betrag des entsprechenden Zweigstromes bei der Summation der KGL heraus. Übrig bleiben bei der Summation also nur Zweigbeträge von Schnittmengen zweigen und diese gehen mit der richtigen Orientierung ein.



Summiert man ferner die KGL einer Zusammenhangskomponente, so müssen sich diese zu Null ergänzen, da jetzt jeder Zweigbetrag einmal positiv und einmal negativ zur Gesamtsumme beiträgt. Die Summe aller aus dem Bezugsknoten herausfließenden Ströme muss sich also durch die negative Summe aller aus den anderen Knoten der Zusammenhangskomponente herausfließenden Ströme darstellen lassen.

Insgesamt ergibt sich daraus die Behauptung: Die SGL muss sich also durch lineare Überlagerung der KGL derjenigen Knoten, die **nicht** Bezugsknoten sind, darstellen lassen.

Satz 4.7

Es sei ein beliebiger orientierter Graph mit k Knoten und s Komponenten gegeben. Ferner seien die Numerierungskonvention von Bemerkung 4.2 und Definition 4.3 beachtet, so dass $\underline{\underline{FS}}$ und $\underline{\underline{KG}}$ wohldefiniert sind. Es gilt:

- 1) Die maximale Anzahl von linear unabhängiger Schnittmengengleichungen ist $k - s$.
(Mit Satz M 2 folgt hieraus:
Die Schnittmengengleichungen haben einen $(z - k + s)$ -dimensionalen Lösungsraum.)
- 2) $\text{Rang } \underline{\underline{KG}} = k - s$
- 3) $\underline{\underline{FS}} = \underline{\underline{FB}} \underline{\underline{KG}}$ und $\underline{\underline{FB}}^{-1}$ existiert.

Beweis:

- zu 1) Es sei ein beliebiges System von SGL gegeben. Dieses lässt sich mittels einer Matrix $\underline{\underline{S}}$ in der Form

$$\underline{\underline{S}} \vec{I} = 0$$

schreiben. Aufgrund von Satz 4.6 gibt es eine Matrix $\underline{\underline{B}}$, so dass gilt

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{KG}}$$

Die Zeilenvektoren von $\underline{\underline{S}}$ lassen sich also darstellen als Linearkombination der $k - s$ Zeilenvektoren von $\underline{\underline{KG}}$. Daher folgt nach Satz M 3

$$\text{Rang } (\underline{\underline{S}}) \leq \text{Rang } (\underline{\underline{KG}}) \leq k - s \quad (*)$$

und damit aufgrund von Satz 4.1 die Behauptung.

- zu 2) Greift man speziell die $FSGL$ heraus, so gibt es nach 1) insbesondere eine $(k-s) \times (k-s)$ Matrix $\underline{\underline{FB}}$ mit

$$\underline{\underline{FS}} = \underline{\underline{FB}} \underline{\underline{KG}} \quad (**)$$

Analog zu (*) und mit Satz 4.1 gilt somit

$$k - s = \text{Rang } (\underline{\underline{FS}}) \leq \text{Rang } (\underline{\underline{KG}}) \leq k - s$$

und damit 2).

Weiterhin ergibt sich wiederum nach Satz M 3

$$k - s = \text{Rang } (\underline{\underline{FS}}) \leq \text{Rang } (\underline{\underline{FB}}^t) = \text{Rang } (\underline{\underline{FB}}) .$$

Daher ist $\underline{\underline{FB}}$ invertierbar! Daraus folgt 3).

Satz 4.8

Seien die Voraussetzungen und Konventionen von Bemerkung 4.2 gegeben.
Sei $\vec{I} = (i_1, \dots, i_z)^t$ der Vektor der Zweigströme wie gehabt, dann gilt:

$$\vec{I} \text{ erfüllt alle SGL} \iff \vec{I} = \underline{\underline{FM}}^t \vec{\overset{\circ}{I}}$$

$\vec{\overset{\circ}{I}}$ kann interpretiert werden als der Vektor der VZ-Ströme

$$\vec{\overset{\circ}{I}}^t = (i_{k-s+1}, \dots, i_z)$$

Beweis:

„ \Rightarrow “ Wenn \vec{I} alle SGL erfüllt, dann auch die FSGL. Diese Gleichungen erlauben die Darstellung der BZ-Ströme durch VZ-Stöme. Also eine Darstellung der Form

$$\vec{I} = (A_{m,l}) \vec{\overset{\circ}{I}} \quad 1 \leq m \leq z, 1 \leq l \leq z - k + s$$

mit

$$A_{m,l} = \begin{cases} 0 & , \quad m \leq k - s \text{ und der } VZ_{l+k-s} \text{ gehört} \\ & \text{nicht zur } FS_m \xLeftrightarrow{\text{Satz 3.6}} m \leq k - s \text{ und} \\ & \text{der } BZ_m \text{ gehört nicht zur } FM_l \\ \\ 1/-1 & , \quad m \leq k - s \text{ und der } VZ_{l+k-s} \text{ gehört} \\ & \text{zur } FS_m \text{ ungleichsinnig/gleichsinnig} \\ & \text{orientiert zum } BZ_m \text{ im Sinne der} \\ & \text{Schnittmenge} \xLeftrightarrow{\text{Satz 3.6}} m \leq k - s \text{ und} \\ & \text{der } BZ_m \text{ gehört zur } FM_l \text{ gleich-} \\ & \text{sinnig/ungleichsinnig orientiert zum} \\ & \text{VZ}_{l+k-s} \text{ im Sinne der Masche} \\ \\ 0 & , \quad m > k - s \text{ und } l + k - s \neq m \\ \\ 1 & , \quad m > k - s \text{ und } l + k - s = m \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A_{m,l}) = \underline{\underline{FM}}^t$$

Interpretation:

Die $z - k + s$ VZ-Ströme können als Kreisströme aufgefasst werden, die entlang der zugeordneten FM fließen, da die BZ -Ströme der Überlagerung dieser Kreisströme entsprechen.

„ \Leftarrow “ Sei $\vec{I} = \underline{\underline{FM}}^t \vec{\overset{\circ}{I}}$ mit $\vec{\overset{\circ}{I}}$ beliebiger $(z - k + s)$ -dimensionaler Vektor wegen

$$\underline{\underline{FM}} = \left(\underline{\underline{SFM}} \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & 1 \end{array} \right. \right) \Bigg\} z - k + s$$

entspricht $\vec{\overset{\circ}{I}}$ dem Vektor der VZ-Ströme.

Anschaulich:

Jeder Kreisstrom erfüllt alle *SGL*. Daher erfüllt \vec{I} als Überlagerung von Kreisströmen alle *SGL*.

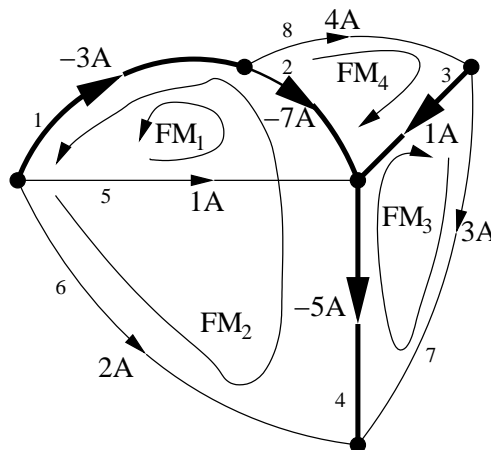
Formal:

$$\begin{aligned}
 \underline{FS} \vec{I} &= \underline{FS} \underline{FM}^t \vec{I} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \underline{MFS} \end{array} \right) \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{SFM}^t \\ \hline 1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{z-k+s \text{ Spalten}} \vec{I} \\
 &= \left(\underline{SFM}^t + \underline{MFS} \right) \vec{I} \stackrel{\text{Satz 4.5}}{=} \left(-\underline{MFS} + \underline{MFS} \right) \vec{I} = 0
 \end{aligned}$$

\Rightarrow Alle FSGL werden durch \vec{I} gelöst.

Sei nun eine *SGL* durch \vec{I} nicht gelöst. Dann muss diese linear unabhängig von der *FSGL* sein. Dies widerspricht Satz 4.7. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Beispiel: Lösung der SGL durch Vorgabe der VZ-Kreisströme



$$\vec{I}^t = (1, 2, 3, 4) \text{ A} \Rightarrow \vec{I}^t = (-3, -7, 1, -5, 1, 2, 3, 4) \text{ A}$$

durch Überlagerung der
Kreisströme in den BZ

Verifiziere: Alle *KGL* und *SGL* sind erfüllt!

Satz 4.9

Seien die Voraussetzungen und Konventionen von Bemerkung 4.2 und Definition 4.3 gegeben. Sei $\vec{U}^t = (u_1, \dots, u_z)$ der Vektor aller Zweigspannungen, dann gilt:

A) Die maximale Anzahl von linear unabhängigen MGL ist $z - k + s$.

B) \vec{U} löst alle MGL $\Leftrightarrow \vec{U} = \underline{\underline{KG}}^t \vec{\dot{U}}$.

$\vec{\dot{U}}^t := (\dot{u}_1, \dots, \dot{u}_{k-s})$ Vektor der Knotenpotentiale.

C) \vec{U} löst alle MGL $\Leftrightarrow \vec{U} = \underline{\underline{FS}}^t \vec{\otimes U}$.

$\vec{\otimes U}^t := (u_1, \dots, u_{k-s})$ Vektor der BZ-Spannungen.

Beweis:

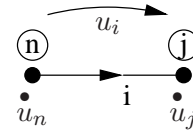
Sei $\vec{U} = \underline{\underline{KG}}^t \vec{\dot{U}}$ mit $\vec{\dot{U}}^t := (\dot{u}_1, \dots, \dot{u}_{k-s})$ und sei $1 \leq i \leq z$, dann folgt wegen

$$KG_{m,i} := \begin{cases} 0 & \text{Zweig } i \text{ ist eine Schlinge oder er ist nicht mit Knoten } m \text{ inzident} \\ 1/-1 & \text{Zweig } i \text{ ist keine Schlinge und er ist mit Knoten } m \text{ inzident und} \\ & \text{[vom Knoten } m \text{ weg/ zum Knoten } m \text{ hin] orientiert} \end{cases}$$

die Beziehung

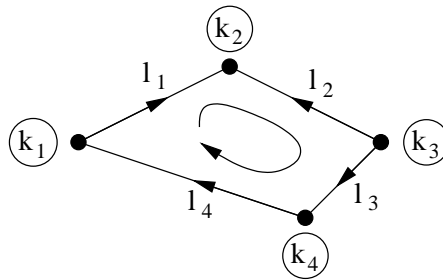
$$u_i = \dot{u}_n - \dot{u}_j$$

\longleftrightarrow



wenn man vereinbart, dass \dot{u}_n oder \dot{u}_j gleich Null sind, falls n oder j der Bezugsknoten ist.

Sei nun eine beliebige MGL gegeben.



Dann gilt:

$$u_{l_1} - u_{l_2} + u_{l_3} + u_{l_4} = \dot{u}_{k_1} - \dot{u}_{k_2} - (\dot{u}_{k_3} - \dot{u}_{k_2}) + \dot{u}_{k_3} - \dot{u}_{k_4} + \dot{u}_{k_4} - \dot{u}_{k_1} = 0$$

Durch den Ansatz $\vec{U} = \underline{\underline{KG}}^t \vec{\dot{U}}$ werden für beliebiges $\vec{\dot{U}}$ alle MGL erfüllt. Da nach Satz 4.7 $\text{Rang } \underline{\underline{KG}} = k - s$ wird durch $\underline{\underline{KG}}^t \vec{\dot{U}}$ bei beliebigen $(k - s)$ -dimensionalen

Vektoren \vec{U} ein $(k-s)$ -dimensionaler Teilraum des Lösungsraumes aller MGL aufgespannt.

Seien nun durch $\underline{MGL} \vec{U} = 0$ alle MGL gegeben. Dann gilt mit Satz M 2:

$$\underbrace{\text{Rang}(\underline{MGL})}_{\geq z-k+s \text{ (Satz 4.3)}} + \underbrace{\text{Dimension (Lösungsraum der MGL)}}_{\geq k-s \text{ nach oben}} = z$$

\Rightarrow A) und Dimension (Lösungsraum der MGL) = $k-s$

Der Lösungsraum wird also durch $\underline{KG}^t \vec{U}$ bereits vollständig aufgespannt. Damit ist auch B) vollständig gezeigt.

zu C) Sei nun $\vec{U} = \underline{FS}^t \vec{\vec{U}}$ mit $\vec{\vec{U}}$ beliebiger $(k-s)$ -dimensionaler Vektor. Im vorigen Satz wurde gezeigt: $\underline{FS} \underline{FM}^t = 0$. Daher gilt auch:

$$\underline{FM} \vec{U} = \underline{FM} \underline{FS}^t \vec{\vec{U}} = (\underline{FS} \underline{FM}^t)^t \vec{\vec{U}} = 0$$

D.h. dieser Ansatz löst die FMGL und damit alle MGL, denn sonst würde sich ein Widerspruch zu A) ergeben.

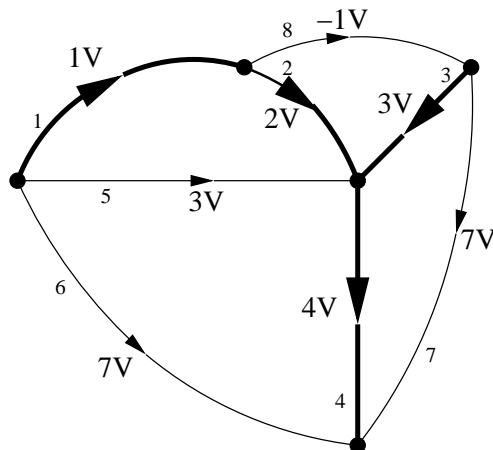
Da $\text{Rang}(\underline{FS}^t) = k-s$, wird durch $\underline{FS}^t \vec{\vec{U}}$ bei beliebigem $\vec{\vec{U}}$ der $(k-s)$ -dimensionale Lösungsraum aller MGL durch diesen Ansatz vollständig aufgespannt. Damit ist auch C) gezeigt.

Interpretationen

Wegen $\underline{FS} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ & \ddots & \underline{MFS} \\ 0 & 1 & \end{array} \right)$ kann $\vec{\vec{U}}$ mit dem Vektor der BZ-Spannungen identifiziert werden.

Da insbesondere die FMGL durch den Ansatz $\vec{U} = \underline{FS}^t \vec{\vec{U}}$ gelöst werden, entsprechen die Verbindungszweigspannungen der vorzeichenrichtigen Summation aller BZ-Spannungen derjenigen BZ, die im Baupfad zwischen den Endknoten der Verbindungszweige liegen.

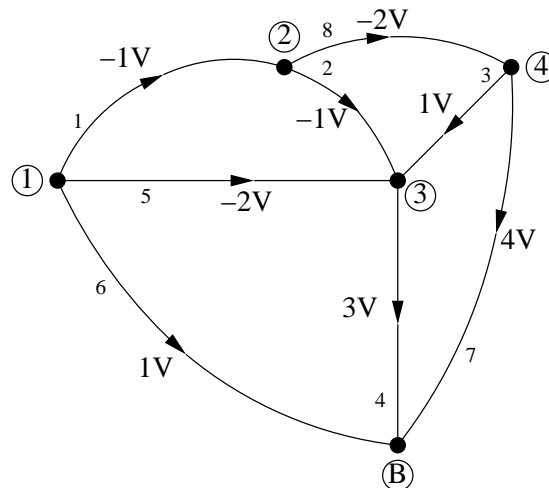
Beispiel zur Lösung der MGL durch Vorgabe der BZ-Spannungen:



$$\vec{U}^t = \underbrace{(1, 2, 3, 4)}_{\text{Vektor der BZ-SP}} V \Rightarrow (\text{über FMGL die VZ-SP}) \vec{U}^t = (1, 2, 3, 4, 3, 7, 7, -1)V$$

Verifiziere: Alle MGL sind erfüllt!

Beispiel zur Lösung der MGL durch Vorgabe der Knotenpotentiale:



Sei $\vec{U}^t = (1, 2, 3, 4)V$ vorgegebener Vektor der Knotenpotentiale. \Rightarrow Aus den Differenzen der Endknotenpotentiale ergeben sich alle Zweigspannungen zu

$$\vec{U}^t = (-1, -1, 1, 3, -2, 1, 4, -2)V$$

Verifiziere: Alle MGL sind erfüllt!

Zusammenfassung

I) Äquivalente Möglichkeiten zur systematischen Berücksichtigung der Schnittmengengleichungen

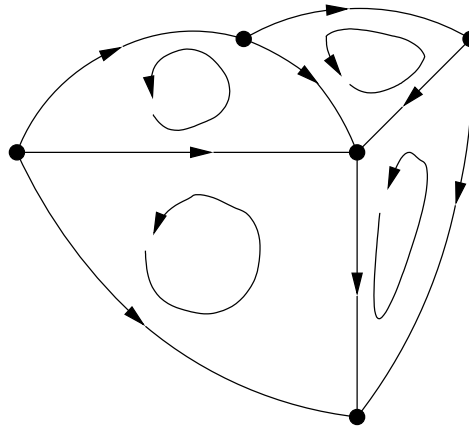
1. Aufstellen von $k - s$ linear unabhängigen Knotengleichungen
2. Aufstellen von $k - s$ linear unabhängigen FSGL
3. Ausdrücken der Zweigströme durch $z - k + s$ Kreisströme entlang der Fundamentalmaschen

II Äquivalente Möglichkeiten zur systematischen Berücksichtigung der Maschengleichungen

1. Aufstellen von $z - k + s$ linear unabhängigen FMGL
2. Ausdrücken der Zweigspannungen durch $k - s$ Baumzweigspannungen
3. Ausdrücken der Zweigspannungen durch $k - s$ Knotenpotentiale

Bemerkung 4.3 Zusätzliche Möglichkeiten bei planaren Graphen

A) Berücksichtigung der Maschengleichungen



Die Fenstermaschengleichungen sind linear unabhängig.

B) Berücksichtigung der Schnittmengengleichungen

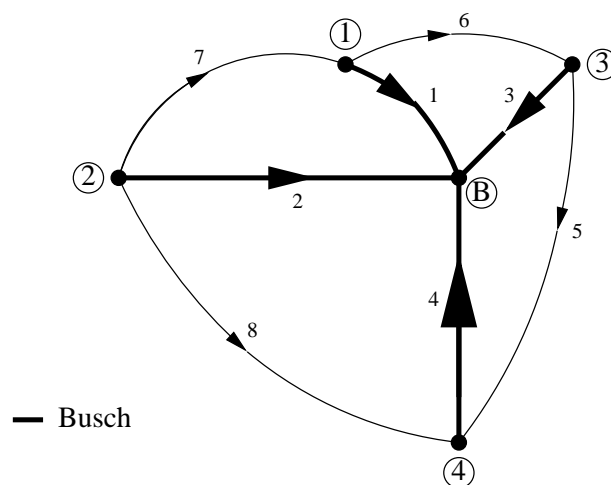
Ausdrücken der Zweigströme durch die entlang der Fenstermaschen fließenden Kreissströme.

Da beide Verfahren nur bei planaren Graphen angewendet werden können, wird auf einen Beweis verzichtet.

- Übung: Finde Graphen, bei denen die Methoden A) und B) nicht Sonderfälle der in der Zusammenfassung beschriebenen, allgemein gültigen Verfahren sind.

Bemerkung 4.4

I)1. und I)2. können identisch sein, wenn der Graph einen entsprechenden Busch enthält.

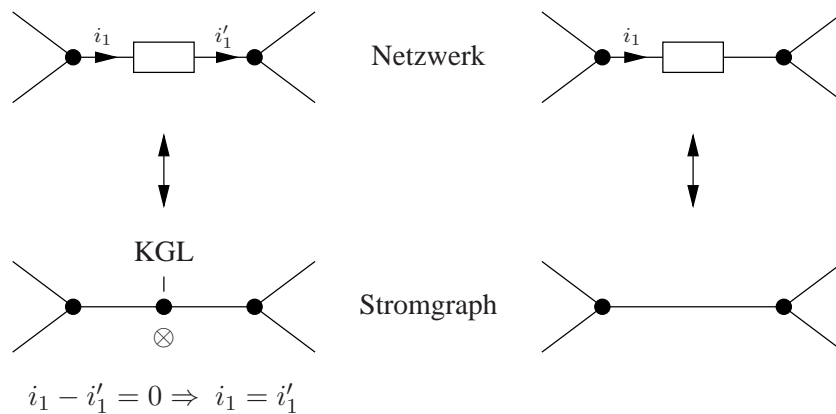


In diesem Fall sind II)2. und II)3. ebenfalls identisch.

Gilt dies noch wenn \textcircled{B} und $\textcircled{4}$ vertauscht werden?

Bemerkung 4.5 Zur Willkür bei der Wahl des Spannungs- und Stromgraphen

A) Stromgraph



k Knoten, z Zweige, s Komponenten

$k - s$ linear unabhängige SGL

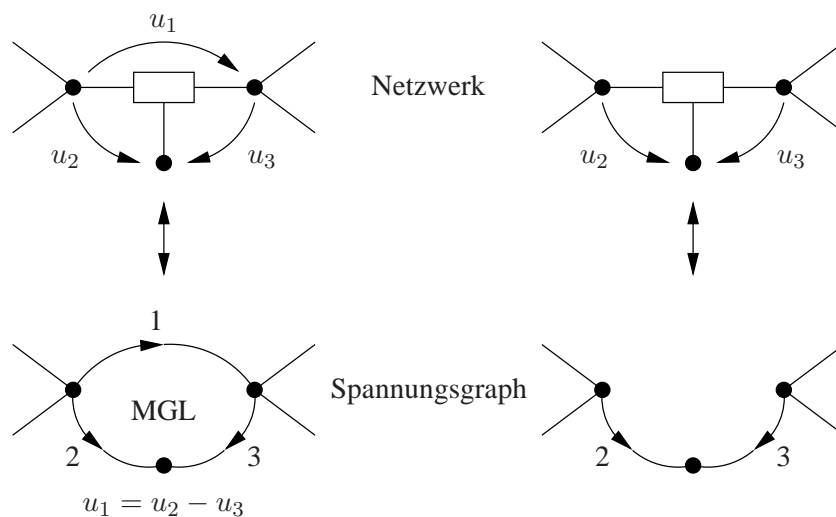
$$m = z - k + s$$

Die Dimensionen des Lösungsraumes der Schnittmengengleichungen ist in beiden Fällen gleich!

Fazit:

Identifiziert man eine KGL (hier \otimes), um damit eine der Stromvariablen (hier i'_1) aus allen anderen SGL zu eliminieren, so ist dies gleichbedeutend mit der Elimination des Knotens \otimes und des zu i'_1 zugehörigen Zweiges im Stromgraphen. Die Dimension des Lösungsraumes der SGL ändert sich dadurch nicht!

B) Spannungsgraph



k Knoten, z Zweige, s Komponenten

$z - k + s$ linear unabhängige MGL

$$p = k - s$$

Die Dimension p des Lösungsraumes der Maschengleichungen ändert sich nicht!

$k-1$ Knoten, $z-1$ Zweige, s Komponenten

$k-1-s$ linear unabhängige SGL

$$= (z-1) - (k-1) + s$$

k Knoten, $z-1$ Zweige, s Komponenten

$(z-1) - k + s$ linear unabhängige MGL

$$= k - s$$

Fazit:

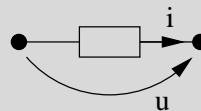
Identifiziert man eine *MGL*, um eine der Spannungsvariablen in allen anderen *MGL* zu eliminieren, so ist dies gleichbedeutend mit der Elimination des zu der Spannungsvariablen zugehörigen Zweiges aus dem Spannungsgraphen. Die Dimension des Lösungsraumes der *MGL* bleibt dabei gleich!

4.2 Besonderheiten bei Zweipolnetzwerken

Bei Zweipolnetzwerken ist es möglich, jedem Zweipol genau eine Spannungs- und eine Stromvariable zuzuordnen. Die Ströme in den beiden Zweipolanschlussleitungen werden also als gleich angenommen, so dass im Stromgraphen keine Knoten für die Zweipole berücksichtigt werden müssen. Ferner sollen die Strom- und Spannungsvariablen bei jedem Zweipol die gleiche Richtung haben. D.h. es soll das Verbraucherzählpfeilsystem gegeben sein:

Definition 4.4

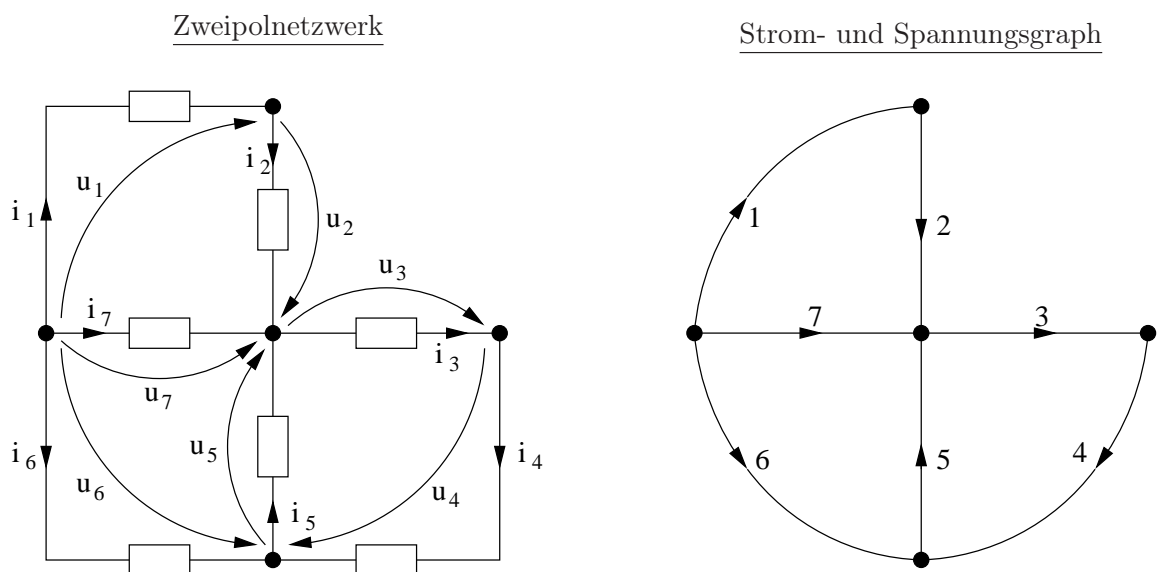
Verbraucherzählpfeilsystem bei Zweipolen



Es gilt:

$$u(t) \cdot i(t) > 0 \Leftrightarrow \text{Der Zweipol } \underline{\text{verbraucht}} \text{ Leistung zum Zeitpunkt } t$$

Folgt man diesen Vereinbarungen, die in Zukunft bei Zweipolnetzwerken immer vorausgesetzt werden sollen, so sind bei Zweipolnetzwerken die Strom- und Spannungsgraphen isomorph (gleich). Jedem Zweipol entspricht genau ein Zweig in diesem Graphen.



Im weiteren werden bei Zweipolnetzwerken die Strom- und Spannungsgraphen nicht mehr unterschieden. Wir sprechen vom Graphen des Zweipolnetzwerkes!

Satz 4.10 (Tellegensches Theorem)

Es sei ein Zweipolnetzwerk mit z Zweipolen gegeben. Der zugehörige Graph hat ebenfalls z Zweige. Sei $\vec{U} := (u_1, \dots, u_z)^t$ ein Satz von Zweigspannungen, der alle *MGL* und $\vec{I} := (i_1, \dots, i_z)^t$ ein Satz von Zweigströmen, der alle *SGL* erfüllt, dann gilt:

$$\vec{U}^t \vec{I} = \sum_{l=1}^z u_l i_l = 0$$

(Beachte: Für diese Behauptung wird nichts über den Zusammenhang zwischen \vec{U} und \vec{I} vorausgesetzt.)

Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^z u_l i_l &= \vec{U}^t \vec{I} \\ &\stackrel{\vec{U} \text{ erfüllt } MGL}{\downarrow} \stackrel{=}{=} (\widetilde{FS}^t \vec{U}^{\otimes})^t \vec{I} \\ &= \vec{U}^{\otimes t} \underbrace{(\widetilde{FS} \vec{I})}_{=0} = 0 \\ &\quad \vec{I} \text{ erfüllt } SGL \end{aligned}$$

Alternativ:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^z u_l i_l &= \vec{U}^t \vec{I} \\ &\stackrel{\vec{I} \text{ erfüllt } SGL}{\downarrow} \stackrel{=}{=} \vec{U}^t (\widetilde{FM}^t \vec{I}^{\otimes}) \\ &= \underbrace{(\widetilde{FM} \vec{U})^t}_{=0} \vec{I}^{\otimes} = 0 \\ &\quad \vec{U} \text{ erfüllt } MGL \end{aligned}$$

Interpretation

Die am Zweipol l zum Zeitpunkt t verbrauchte Leistung ist $u_l(t) i_l(t)$.

Die gesamte im Zweipolnetzwerk zum Zeitpunkt t verbrauchte Leistung ist daher:

$$P_{ges}(t) = \sum_{l=1}^z u_l(t) i_l(t) = 0$$

Aufgrund des Tellegenschen Theorems verschwindet diese Gesamtleistung für jeden Zeitpunkt t .

Anders ausgedrückt:

Die zum Zeitpunkt t in den Quellen erzeugte elektrische Leistung wird zum gleichen Zeitpunkt in den anderen Zweipolen des Zweipolnetzwerks verbraucht.

Beachte: Dies ist eine Eigenschaft, die ausschließlich auf der Gültigkeit der *MGL* und *SGL* beruht.

Bemerkung 4.6

Bisher haben wir u und i stillschweigend als reell vorausgesetzt. Keiner der Sätze im Kapitel 4 beruht jedoch auf dieser Voraussetzung. D.h. u, i können auch komplex oder komplexe Funktionen einer Veränderlichen sein. Alle Sätze bleiben auch im letzteren Fall gültig.

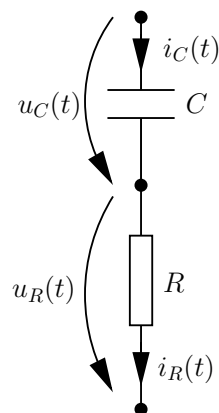
Kapitel 5

Einführende Bemerkungen zu linearen, zeitinvarianten Netzwerkmodellen im Zeitbereich

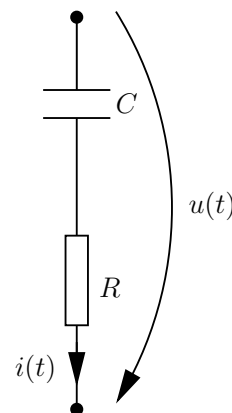
Im weiteren Verlauf der Vorlesung werden nur Netzwerkmodelle betrachtet, für die es eine Darstellung gibt, bei der dieses Netzwerkmodell aus elementaren, idealen Zweipolmodellen zusammengesetzt ist und jedem elementaren Zweipol ein Zweig im Graphen zugeordnet werden kann. Strom- und Spannungsgraph sind bei dieser Darstellung also identisch und dem Zweipol können also jeweils eine Strom- und eine Spannungsvariable entsprechend Def. 4.4 zugeordnet werden. Beispiele für solche elementaren, idealen Zweipolmodelle sind die unter (1.1) – (1.5) eingeführten Zweipole. Wir beschränken uns also im weiteren Verlauf der Vorlesung auf Zweipolnetzwerkmodelle.

Zur Konvention der Festlegung der einzuführenden Strom- und Spannungsvariablen:

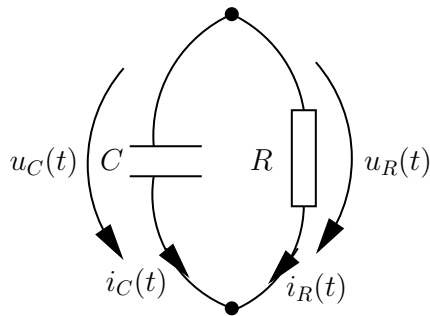
Es spart oft Arbeit, auch nicht elementare Zweipole zu betrachten und nur für diese Variablen einzuführen. Um die Willkür bei der Festlegung der einzuführenden Strom- und Spannungsvariablen bei den Zweipolnetzwerkmodellen zu vermindern und die Zuordnung eines Graphen (siehe Kap. 4) zum Netzwerkmodell zu erleichtern, werden die einzuführenden Variablen durch die graphische Darstellung des Netzwerkmodells angedeutet.



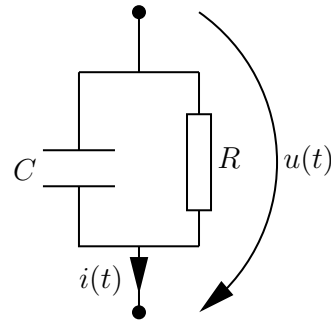
In der Reihenschaltung werden R und C als separate Zweipole betrachtet. Der zugehörige Graph hat zwei Zweige.



Die Reihenschaltung von R und C wird als ein gemeinsamer Zweipol betrachtet. Der zugehörige Graph hat einen Zweig. Dies ist kein elementarer Zweipol.



In der Parallelschaltung werden R und C als separate Zweipole betrachtet. Der zugehörige Graph hat zwei Zweige.



Die Parallelschaltung von R und C wird als ein gemeinsamer Zweipol betrachtet. Der zugehörige Graph hat einen Zweig. Dies ist wiederum kein elementarer Zweipol.

Definition 5.1 Linearer, zeitinvarianter Zweipol

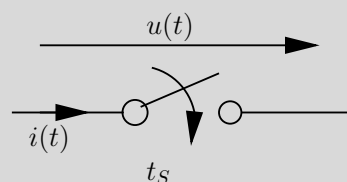
Ein Zweipol ist linear und zeitinvariant, wenn die diesem Zweipol im Zeitbereich zugeordnete Netzwerkgleichung eine lineare, homogene, algebraische Gleichung oder eine lineare, homogene gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten (zeitunabhängigen) Koeffizienten ist. Die unbekannten Zeitfunktionen in diesen Gleichungen sind Strom- oder Spannungsvariablen des Netzwerkmodells, in dem sich der Zweipol befindet. Beispiele für solche Zweipole sind der ideale Widerstand, die ideale Kapazität und die ideale Induktivität (siehe (1.1)–(1.3)).

Definition 5.2 Lineares, zeitinvariantes Netzwerkmodell

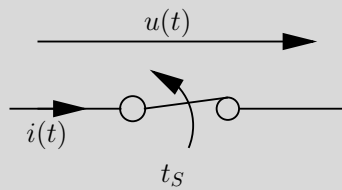
Ein Zweipolnetzwerkmodell wird als linear und zeitinvariant bezeichnet, wenn es aus Zweipolen zusammengesetzt ist, die entweder linear und zeitinvariant oder ideale (ungesteuerte) Spannungs- oder Stromquellen (siehe (1.4) und (1.5)) sind.

Reale, physikalische Netzwerke sind nur unter bestimmten Voraussetzungen linear und zeitinvariant. Daher ist es sinnvoll, auch zeitvariante Zweipolmodelle einzuführen. Wichtige Zeitvariante Zweipole sind die idealen Schalter:

Definition 5.3 Idealer Schließer



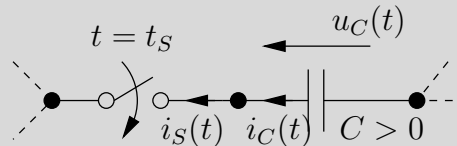
Der ideale Schließer entspricht für $t < t_S$ einer idealen Stromquelle mit verschwindendem Urstrom $j(t) = i(t) = 0$ und für $t > t_S$ einer idealen Spannungsquelle mit verschwindender Urspannung $v(t) = u(t) = 0$.

Definition 5.4 Idealer Öffner

Der ideale Öffner entspricht für $t < t_S$ einer idealen Spannungsquelle mit verschwindender Urspannung $v(t) = u(t) = 0$ und für $t > t_S$ einer idealen Stromquelle mit verschwindendem Urstrom $j(t) = i(t) = 0$.

Bemerkung 5.1

- a) Anfangswertvorgabe durch Anschließen einer vorher leerlaufenden Kapazität.

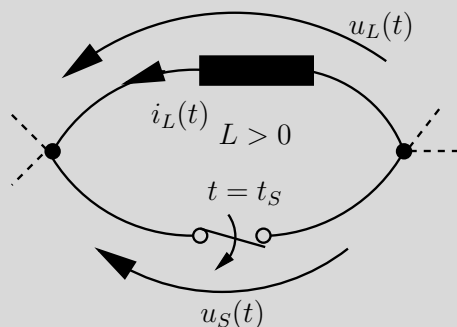


Für $t < t_S$ gilt:

$$0 = i_S(t) = i_C(t) = C \frac{d}{dt} u_C(t) \Rightarrow u_C(t) = u_C(t_S^-) = \text{konst.}$$

Ist $u_C(t) = u_C(t_S^-)$ einmal eingestellt, so bleibt es bei offenem Schalter erhalten und wird beim Schalten dem Netzwerk als Anfangswert zum Zeitpunkt t_S vorgegeben.

- b) Anfangswertvorgabe durch Anschließen einer vorher kurzgeschlossenen Induktivität.



Für $t < t_S$ gilt:

$$0 = u_S(t) = u_L(t) = L \frac{d}{dt} i_L(t) \Rightarrow i_L(t) = i_L(t_S^-) = \text{konst.}$$

Ist $i_L(t) = i_L(t_S^-)$ einmal eingestellt, so bleibt es bei geschlossenem Schalter erhalten und wird beim Schalten dem Netzwerk als Anfangswert zum Zeitpunkt t_S vorgegeben.

Definition 5.5 (Stückweise stetige Funktionen)

- A) Eine Zeitfunktion $f(t)$ heißt im Intervall (a, b) (dabei seien $a = -\infty$ und $b = +\infty$ zugelassen) stückweise stetig, falls $f(t)$ bis auf endlich viele Stellen $a < t_v < b, v = 1, \dots, l$ stetig ist und für $t_v, v = 1, \dots, l$ die links und rechtsseitigen Grenzwerte also

$$f(t_v^-) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} f(t_v + h), v = 1, \dots, l$$

und

$$f(t_v^+) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} f(t_v + h), v = 1, \dots, l$$

existieren. Ist a oder b eine endliche reelle Zahl, so wird weiterhin gefordert, dass der Grenzwert $f(a^+)$ oder $f(b^-)$ existiert.

- B) Zwei auf (a, b) stückweise stetige Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ heißen gleich

$$f(t) = g(t),$$

wenn sie für alle t außer den Unstetigkeitsstellen von $f(t)$ und $g(t)$ gleich sind.

- C) Sind α, β reelle Zahlen aus (a, b) mit $\alpha < \beta$ (dabei sei für reelles a oder reelles b auch $\alpha = a$ oder $\beta = b$ zugelassen), so gilt mit $t_0 := -\infty, t_{l+1} := \infty$, falls für natürliche Zahlen v_1, v_2 ($v_1 = v_2$ ist zugelassen) mit $1 \leq v_1 \leq v_2 \leq l, t_{v_1-1}, t_{v_2+1} \notin (\alpha, \beta), t_{v_1}, t_{v_2} \in (\alpha, \beta)$ erfüllt ist:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt := \int_{\alpha}^{t_{v_1}} f(t) dt + \sum_{k=v_1}^{v_2-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t) dt + \int_{t_{v_2}}^{\beta} f(t) dt$$

\uparrow
 (verschwindet für $v_1 = v_2$)

Die einzelnen Integrale auf der rechten Seite in obiger Definition können als Integrale über stetige Funktionen auf einem kompakten Intervall aufgefasst werden, da $f(t)$ an den Integralgrenzen durch die existierenden rechtsseitigen (untere Grenze) und linksseitigen (obere Grenze) Grenzwerte stetig ergänzt werden kann. Dies trifft auch zu, falls keines der t_v in (α, β) liegt und/oder $\alpha = a$ oder $\beta = b$ gilt. Somit kann man also das Integral über eine stückweise stetige Funktion auf das klassische Riemannsche Integral über eine auf einem kompakten Intervall stetige Funktion zurückführen. Mit den zusätzlichen Definitionen

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = 0 \quad \text{für } \alpha = \beta$$

und

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = - \int_{\beta}^{\alpha} f(t) dt \quad \text{für } \alpha > \beta$$

ist somit das Integral über eine stückweise stetige Funktion vollständig erklärt.

Definition 5.6 (Differenzierbarkeit)

Eine auf einem offenen Intervall (a, b) ($a = -\infty, b = \infty$ seien wieder zugelassen) definierte Funktion $f(t)$ heißt differenzierbar, wenn es eine auf dem gleichen Intervall definierte, stückweise stetige Funktion $g(t)$ so gibt, dass

$$f(t) = \int_{t_0}^t g(t') dt' + f(t_0) \quad (5.1)$$

gilt für alle t und t_0 , die im Intervall (a, b) liegen.

$$\frac{d}{dt} f(t) = f^{(1)}(t) := g(t) \quad (5.2)$$

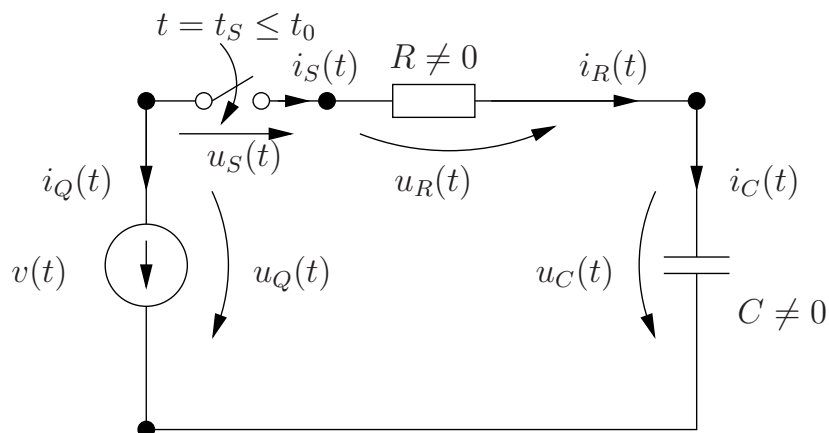
wird als Ableitung von $f(t)$ bezeichnet, wobei $f^{(1)}(t)$ durch $f(t)$ überall bis auf die Unstetigkeitsstellen von $g(t)$ eindeutig festgelegt ist. Für $n > 1$ heißt $f(t)$ n -fach differenzierbar, falls die $(n-1)$ -te Ableitung von $f(t)$ existiert und stetig ist und $f^{(n-1)}(t)$ wiederum differenzierbar im gerade festgelegten Sinne ist. Ferner sei festgelegt, dass die 1-fache Differenzierbarkeit der gerade festgelegten Differenzierbarkeit entsprechen soll und dass die 0-fache Differenzierbarkeit der stückweisen Stetigkeit entsprechen soll.

Diese Definition einer differenzierbaren Funktion $f(t)$ impliziert mit Definition 5.5 C),

dass für ein endliches a oder b der linksseitige Grenzwert für $t = b$ oder der rechtsseitige Grenzwert für $t = a$ für $f(t)$ existiert und gilt

$$f(b^-) = \int_{t_0}^b g(t) dt + f(t_0)$$

$$f(a^+) = \int_{t_0}^a g(t) dt + f(t_0)$$

5.1 Einführende Beispiele**Beispiel 5.1**

Für das Netzwerkmodell nach dem Schließen des Schalters zum Zeitpunkt $t = t_S$ gelten die folgenden Netzwerkgleichungen für $t > t_S$. Es wird dabei vorausgesetzt, dass $v(t)$ für $t \geq t_Q, t_Q < t_S$ bekannt und stückweise stetig ist.

(R, C verhalten sich wie in (1.1) und (1.2) in Kapitel 1 definiert.)

Aufgrund der *KGL*en gilt: $i_S(t) = i_R(t) = i_C(t) = -i_Q(t)$

Aufgrund der *MGL* gilt: $u_Q(t) = u_S(t) + u_R(t) + u_C(t)$

Die durch die Zweipole induzierten Zweigggleichungen lauten:

$$\begin{aligned} u_R(t) &= R i_R(t) \quad ; \quad i_C(t) = C \frac{d}{dt} u_C(t) \quad ; \quad u_Q(t) = v(t) \quad ; \quad u_S(t) = 0 \\ \Rightarrow v(t) &= RC \frac{d}{dt} u_C(t) + u_C(t) \\ &\quad \Updownarrow \\ \frac{d}{dt} u_C(t) &= -\frac{1}{RC} u_C(t) + \frac{1}{RC} v(t) \end{aligned} \quad (5.3)$$

(5.3) ist für stückweise stetiges $v(t)$ im Sinne von Def. 5.5 B) und Def. 5.6 zu verstehen. (5.3) ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die, wie weiter unten gezeigt wird, bei Vorgabe eines beliebigen Zielanfangswertes u_{C,t_0} zu einem beliebigen Zeitpunkt $t_0 \geq t_S$ immer eindeutig für $t > t_S$ lösbar ist. Die zugehörige Lösung $u_C(t)$ erfüllt dann die Anfangsbedingung

$$u_C(t_0^+) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} u_C(t_0 + h) = u_{C,t_0}. \quad (5.4)$$

Inbesondere kann (5.3) speziell für $t_0 = t_S$ für folgenden Zielanfangswert gelöst werden:

$$u_{C,t_S} = u_C(t_S^-) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} u_C(t_S + h) \quad (5.5)$$

Dies ist der Wert der Kapazitätsspannung vor dem Schließen des Schalters. Die zugehörige Lösung $u_C(t)$ erfüllt also

$$u_C(t_S^+) = u_C(t_S^-). \quad (5.6)$$

In diesem Falle gibt es also immer eine Lösung, für die $u_C(t)$ für $t = t_S$ stetig ist.

Ist $u_C(t)$ bestimmt, so ergeben sich alle anderen Variablen für $t > t_S$ als Linearkombination von $v(t)$ und $u_C(t)$ mit konstanten Koeffizienten:

$$\left. \begin{aligned} i_S(t) &= \frac{1}{R} v(t) - \frac{1}{R} u_C(t) \\ i_R(t) &= \frac{1}{R} v(t) - \frac{1}{R} u_C(t) \\ i_C(t) &= \frac{1}{R} v(t) - \frac{1}{R} u_C(t) \\ i_Q(t) &= -\frac{1}{R} v(t) + \frac{1}{R} u_C(t) \\ u_S(t) &= 0 \\ u_R(t) &= v(t) - u_C(t) \\ u_Q(t) &= v(t) \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Dies ergibt sich mit (5.3) direkt aus den *KGL*en *MGL*en und *ZGL*en von Beispiel 5.1.

Merke: Alle anderen Variablen des Netzwerkmodells lassen sich aus der Lösungsvariablen der Differentialgleichung (5.3) $u_C(t)$ und der vorgegebenen Quellenfunktion $v(t)$ über Ausdrücke der Form

$$A v(t) + B u_C(t) \quad (5.8)$$

mit Konstanten A, B beschreiben.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (5.3) setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung ($v(t) \equiv 0$) und einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

$$u_C(t) = u_{C,h}(t) + u_{C,p}(t) \quad (5.9)$$

Die allgemeine Lösung der homogenen, linearen Differentialgleichung (5.3) erster Ordnung mit konstanten (zeitinvarianten) Koeffizienten lautet

$$u_{C,h}(t) = K_h e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (5.10)$$

Das zeitliche Verhalten dieser homogenen Lösung wird durch die Konstante $-\frac{1}{RC}$, die die Dimension einer Frequenz hat, weitgehend bestimmt. Daher erhält $-\frac{1}{RC}$ einen besonderen Namen und wird als natürliche Frequenz bezeichnet.

Die Methode der Variation der Konstanten liefert eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (5.3). Diese beruht auf folgendem Ansatz, wobei $K_p(t)$ für $t > t_S$ als differenzierbar vorausgesetzt wird:

$$u_{C,p}(t) = K_p(t) e^{-\frac{t}{RC}} \quad (5.11)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung (5.3) liefert:

$$\left(\frac{d}{dt} K_p(t) \right) e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{1}{RC} K_p(t) e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{1}{RC} K_p(t) e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{RC} v(t)$$

Multiplikation mit $e^{+\frac{t}{RC}}$ und Integration von t_0 bis t_1 mit $t_1 > t_S$ und $t_0 \geq t_S$ auf beiden Seiten liefert (siehe Def. 5.6 B)):

$$K_p(t_1) = K_p(t_0^+) + \int_{t_0}^{t_1} e^{\frac{t}{RC}} \frac{1}{RC} v(t) dt \quad (5.12)$$

$K_p(t_0^+)$ kann noch willkürlich zu 0 gewählt werden, wodurch $u_{C,p}(t)$ die Anfangsbedingung $u_{C,p}(t_0^+) = 0$ erfüllt. Benennt man in (5.12) nun noch t_1 in t und t in t' um, so lautet die allgemeine Lösung von (5.3):

$$u_C(t) = K_h e^{-\frac{t}{RC}} + \int_{t_0}^t e^{\frac{t'-t}{RC}} \frac{1}{RC} v(t') dt' \quad (5.13)$$

Wählt man $K_h = u_{C,t_0} e^{\frac{t_0}{RC}}$, so erfüllt (5.13) für $t > t_S$ die Differentialgleichung (5.3) und die Anfangsbedingung:

$$u_C(t_0^+) = u_{C,t_0} \quad (5.14)$$

Die Lösung (5.13) lautet in diesem Fall für $t > t_S$:

$$u_C(t) = u_{C,t_0} e^{\frac{(t_0-t)}{RC}} + \int_{t_0}^t e^{\frac{t'-t}{RC}} \frac{1}{RC} v(t') dt'. \quad (5.15)$$

Wählt man speziell $t_0 = t_S$ und $u_{C,t_S} = u_C(t_S^-)$, so erfüllt (5.13) wiederum (5.3) für $t > t_S$ und ferner die Anfangsbedingung:

$$u_C(t_S^+) = u_C(t_S^-). \quad (5.16)$$

(5.13) lautet in diesem Spezialfall für $t > t_S$:

$$u_C(t) = u_C(t_S^-) e^{\frac{(t_S-t)}{RC}} + \int_{t_S}^t e^{\frac{t'-t}{RC}} \frac{1}{RC} v(t') dt' \quad (5.17)$$

$u_C(t)$ kann im vorliegenden Fall also, wie bereits bemerkt, für $t = t_S$ als stetig angenommen werden! Die restlichen Spannungen und Ströme des Netzwerkes ergeben sich aus (5.15) bzw. (5.17) über (5.7).

Aus (5.17) ergibt sich somit z.B. für $i_C(t)$:

$$i_C(t) = +\frac{1}{R}v(t) - \frac{1}{R}u_C(t_S^-)e^{\frac{(t_S-t)}{RC}} - \frac{1}{R^2C} \int_{t_S}^t e^{\frac{-(t-t')}{RC}} v(t') dt', \quad t > t_S \quad (5.18)$$

Aus (5.15) ergibt sich für $i_C(t)$:

$$i_C(t) = +\frac{1}{R}v(t) - \frac{1}{R}u_{C,t_0}e^{\frac{(t_0-t)}{RC}} - \frac{1}{R^2C} \int_{t_0}^t e^{\frac{-(t-t')}{RC}} v(t') dt', \quad t > t_S \quad (5.19)$$

Man erkennt, dass die Reaktion der Netzwerkvariablen $i_C(t)$ auf die Anregung durch die Ursprungsspannung $v(t)$ aus zwei Teilen besteht. Legt man z.B. (5.19) zugrunde, so gilt:

$$\left. \begin{aligned} i_C(t) &= i_{C,zi}(t) + i_{C,zs}(t) \\ i_{C,zi}(t) &= -\frac{1}{R}u_{C,t_0}e^{\frac{t_0-t}{RC}} \\ i_{C,zs}(t) &= \frac{1}{R}v(t) - \frac{1}{R^2C} \int_{t_0}^t e^{\frac{-(t-t')}{RC}} v(t') dt' \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

Der erste Anteil $i_{C,zi}(t)$ beschreibt den Strom $i_C(t)$ bereits vollständig falls die Erregung $v(t)$ verschwindet, ($v(t) \equiv 0$, zi $\hat{=}$ zero input). Der zweite Anteil $i_{C,zs}(t)$ beschreibt den Strom vollständig, falls der Zielfangswert u_{C,t_0} verschwindet ($u_{C,t_0} = 0$, zs $\hat{=}$ zero state). Beide Anteile können unabhängig voneinander berechnet werden und ergeben summiert die Lösung des allgemeinen Anfangswertproblems. Beim vorliegenden Beispiel ist bei festem t_0 der Zielfangswert u_{C,t_0} frei wählbar und es gilt $u_{C,t_0} = u_C(t_0^+)$ für die zugehörige Lösung (5.15). Jedem u_{C,t_0} ist also genau eine Lösung des Anfangswertproblems und jeder solchen Lösung ist genau ein Zielfangswert zugeordnet. Insofern darf u_{C,t_0} auch als Anfangszustand x_{t_0} („initial state“) bezeichnet werden. Das Netzwerk aus Beispiel 5.1 hat also genau einen frei wählbaren Anfangszustand, dessen Festlegung zum Zeitpunkt t_0 die Lösung eindeutig

bestimmt. Die Anzahl der zu einem Zeitpunkt t_0 frei wählbaren Anfangszustände eines Netzwerkmodells wird auch oft als die Anzahl der Freiheitsgrade eines Netzwerkmodells oder als dessen Ordnung bezeichnet.

Beide Terme ($i_{C,zs}$ und $i_{C,zi}$) sind bezüglich des Zeitverhaltens weitgehend von der Exponentialfunktion e^{At} mit der natürlichen Frequenz $A = -\frac{1}{RC}$ bestimmt.

Ferner ist der „zero input response“ $i_{C,zi}(t)$ linear abhängig von dem Anfangswert bzw. Anfangszustand u_{C,t_0} und hängt nicht von der erregenden Spannung $v(t)$ ab. Der „zero state response“ $i_{C,zs}(t)$ hängt andererseits linear von der erregenden Ursprungsspannung $v(t)$ ab und nicht von u_{C,t_0} .

Der oben skizzierte Sachverhalt, dass die allgemeine Lösung sich aus zwei gewöhnlichen Funktionen zusammensetzt, die sich unabhängig voneinander als Lösung des Anfangswertproblems zweiter Art unter der Annahme verschwindender Anfangswerte ($i_{zs}(t)$) und verschwindender Erregung ($i_{zi}(t)$) berechnen lassen und zusammen die allgemeine Lösung ergeben, lässt sich **nicht** auf allgemeine Netzwerkmodelle verallgemeinern. Dies wird bereits durch Beispiel 5.2 klar werden. Um zu einer möglichst weitreichenden Verallgemeinerung zu kommen, wird später eine spezielle „zero state“ Antwort, nämlich die Antwort aus dem Ruhezustand heraus, formuliert werden (siehe dazu Satz 5.5). Unter welchen Umständen der oben formulierte Sachverhalt verallgemeinert werden kann, ist Gegenstand von Bemerkung 5.20.

Die Lösung des Netzwerkmodells aus Beispiel 5.1 kann also auf die Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten zurückgeführt werden. Nach eindeutiger Lösung der Differentialgleichung durch Vorgabe eines beliebigen Zielanfangswertes (Anfangszustandes) für $t = t_0 \geq t_S$ können dann alle Lösungsfunktionen des Netzwerkmodells einfach als Linearkombination der Lösungsfunktion der Differentialgleichung und der Quellenfunktion (siehe (5.7)) berechnet werden. Dies zeigt eine Grundstruktur auf, die für alle Netzwerkmodelle, die aus elementaren Zweipolen zusammengesetzt sind, gilt. Um diese Grundstruktur jedoch streng formulieren zu können, sind noch einige einleitende Definitionen notwendig.

Definition 5.7 (Differenzierbare Variablen des Netzwerkmodells und zustandsreduzierende algebraische Gleichungen)

Ein Netzwerkmodell bestehend aus elementaren Zweipolen sei für $t > t_S$ gegeben. Die Netzwerkvariablen (Zweigspannungen oder Zweigströme), für die es eine Zweipolgleichung (Zweiggleichung) gibt, in der die Netzwerkvariable als erste Ableitung vorkommt, seien als differenzierbare Netzwerkvariablen bezeichnet, da man diese Netzwerkvariablen als differenzierbar voraussetzen muss, falls man bei Aufstellen der Netzwerkgleichungen im Zeitbereich den Bereich der gewöhnlichen Funktionen nicht verlassen will. Diese Netzwerkvariablen seien in dem Vektor $\vec{x}_A(t)$ zusammengefasst. Die Anzahl dieser Variablen (Dimension von $\vec{x}_A(t)$) sei mit n_A bezeichnet.

Seien ferner alle Ursprünge der Spannungsquellen und alle Urströme der Stromquellen, die für die Lösung der Netzwerkgleichungen als vorgegeben betrachtet werden können, durch $e_k(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$ ($= v(t)$ bzw. $= j(t)$) repräsentiert. Eine zustandsreduzierende algebraische Gleichung ist jede aus den Netzwerkgleichungen für $t > t_S$ resultierende Gleichung der folgenden Form:

$$\vec{\alpha}^t \vec{x}_A(t) = \sum_{k=1}^{n_Q} \vec{\beta}_k^t \begin{pmatrix} e_k(t) \\ \vdots \\ e_k^{(r_k)}(t) \end{pmatrix}$$

Dabei sind $\vec{\alpha}$, $\vec{\alpha} \neq 0$, $\vec{\beta}_k$, $1 \leq k \leq n_Q$ reelle, zeitunabhängige Vektoren und r_k , $1 \leq k \leq n_Q$ sind positive ganze Zahlen. $\vec{\alpha}$ hat die Dimension n_A und die $\vec{\beta}_k$ haben die Dimension $r_k + 1$. Zwei algebraische Gleichungen der oben angegebenen Form sind linear unabhängig, wenn die entsprechenden $\vec{\alpha}$ Vektoren linear unabhängig sind. Für jedes lineare, zeitinvariante Netzwerkmodell sei die maximale Anzahl von linear unabhängigen, aus den Gleichungen des Netzwerkmodells resultierenden, zustandsreduzierenden algebraischen Gleichungen mit n_R bezeichnet. n_R ist eine natürliche Zahl oder Null.

Einfache Beispiele für zustandsreduzierende algebraische Gleichungen sind Maschengleichungen von Maschen, die aus Zweigen bestehen, die entweder Spannungsquellen mit vorgegebenen Urspannungen oder lineare, zeitinvariante Kapazitäten sind, bzw. Schnittmengengleichungen von Schnittmengen, die aus Zweigen bestehen, die entweder Stromquellen mit vorgegebenen Urströmen oder lineare, zeitinvariante Induktivitäten sind.

Aufgrund von Bemerkung 5.1 ist klar, dass für ein Netzwerkmodell, bei dem die differenzierbaren Netzwerkvariablen jeweils Ströme durch Induktivitäten oder Spannungen an Kapazitäten sind, den differenzierbaren Netzwerkvariablen $\vec{x}_A(t)$ durch Schaltvorgänge bei $t = t_S$ Zielanfangswerte $\vec{x}_{A,t_S} = \vec{x}_A(t_S^-)$ vorgegeben werden können. In Beispiel 5.1 gilt $x_A(t) := u_C(t)$ und bei beliebiger Vorgabe eines Zielanfangswertes $x_{A,t_S} = u_{C,t_S} = u_C(t_S^-)$ gibt es eine eindeutige Lösung des Netzwerkproblems mit $x_A(t_S^+) = x_A(t_S^-)$ (siehe (5.17)). Gibt man ferner beim Beispiel 5.1 bei einem beliebigen Zeitpunkt $t_0 \geq t_S$ einen beliebigen Zielanfangswert $u_{C,t_0} = x_{A,t_0}$ vor, so gibt es dazu nach (5.15) wiederum eine eindeutige Lösung des Netzwerkproblems mit $x_A(t_0^+) = x_{A,t_0}$. Will man die Lösung (5.15) beim Einschalten durch die vorgegebene Kapazitätsspannung $u_C(t_S^-) = x_A(t_S^-)$ erzeugen, so muss zwischen $u_C(t_S^-)$ und u_{C,t_0} der folgende Zusammenhang gelten,

$$u_C(t_S^-) = x_A(t_S^-) = \underset{u_{C,t_0}}{x_{A,t_0}} e^{\frac{(t_0-t_S)}{RC}} + \int_{t_0}^{t_S} e^{\frac{(t'-t_S)}{RC}} \frac{1}{RC} v(t') dt' \quad (5.21)$$

wie aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt.

Die beiden Lösungsdarstellungen (5.17), (5.18) für die Angangswertvorgabe zum Zeitpunkt $t = t_S$ durch $u_C(t_S^-)$ und (5.15), (5.19) für die Angangswertvorgabe zum Zeitpunkt $t_0 > t_S$ durch u_{C,t_0} beschreiben für beliebiges $u_C(t_S^-)$ und u_{C,t_0} somit die gleiche Lösungsmenge.

Diese Betrachtungen legen nun nahe, für ein allgemeines Netzwerkmodell die folgenden beiden Anfangswertprobleme zu untersuchen.

Definition 5.8 (Anfangswertprobleme erster und zweiter Art)

Es sei ein Netzwerkmodell aus elementaren Zweipolen gegeben, das zum Zeitpunkt $t = t_S$ durch Schließen und Öffnen von Schaltern erzeugt wird.

Anfangswertproblem erster Art (Anfangswerte werden per Schaltungszwang zum Schaltzeitpunkt t_S quasi physikalisch vorgegeben)

Analog zu Bemerkung 5.1 sei angenommen, dass für $\vec{x}_A(t)$ Anfangswerte vor dem Schalten $\vec{x}_A(t_S^-) = \vec{x}_{A,t_S}$ vorgegeben werden können. Gesucht werden die Bedingungen an die Differenzierbarkeitsordnung der Quellenfunktionen und an den Wertebereich von $\vec{x}_A(t_S^-)$, die die eindeutige Existenz einer zumindest stückweise stetigen Lösung der Netzwerkgleichungen für $t > t_S$ sichern, wobei für diese Lösung die folgenden zusätzlichen Bedingungen gelten müssen: Für diese Lösung muss $\vec{x}_A(t)$ für $t > t_S$ differenzierbar sein und es muss

$$\vec{x}_A(t_S^-) = \vec{x}_A(t_S^+) = \vec{x}_A(t_S) \quad (5.22)$$

also der stetige Übergang der differenzierbaren Netzwerkvariablen zum Schaltzeitpunkt gelten.

Anfangswertproblem zweiter Art (Anfangswerte werden mathematisch zum Zeitpunkt t_0 als Zielvorstellung vorgegeben)

Für einen beliebigen aber festgehaltenen Zeitpunkt $t_0 \geq t_S$ seien Zielanfangswerte \vec{x}_{A,t_0} für $\vec{x}_A(t)$ vorgegeben. Gesucht sind die Bedingungen an die Differenzierbarkeitsordnung der Quellenfunktionen und den Wertebereich von \vec{x}_{A,t_0} , die die eindeutige Existenz einer zumindest stückweise stetigen Lösung der Netzwerkgleichungen für $t > t_S$ sichern, wobei für diese Lösung die folgenden zusätzlichen Bedingungen gelten müssen: Für diese Lösung muss $\vec{x}_A(t)$ für $t > t_S$ differenzierbar sein und es muss

$$\vec{x}_A(t_0^+) = \vec{x}_{A,t_0} \quad (5.23)$$

gelten.

Das Anfangswertproblem zweiter Art ist allgemeiner und aus seiner Lösung für $t_0 = t_S$ ergibt sich sofort auch die Lösung für das Anfangswertproblem erster Art, falls $\vec{x}_{A,t_S} = \vec{x}_A(t_S^-)$.

Zielanfangswerte \vec{x}_{A,t_0} , für die es trotz beliebig glatter Quellenfunktionen keine Lösung des Anfangswertproblems zweiter Art gibt, werden auch als inkonsistente Anfangswerte bezeichnet.

Für das Netzwerkproblem aus Beispiel 5.1 sind beide Anfangswertprobleme für beliebige Zielanfangswerte $x_A(t_S^-)$ bzw. x_{A,t_0} und stückweise stetiges $v(t)$ lösbar.

Bemerkung 5.2 (Zur technischen Bedeutung des Anfangswertproblems erster Art)

Es sei zur Vereinfachung angenommen, dass $\vec{x}_A(t)$ aus Kapazitätsspannungen und Induktivitätsströmen besteht. Die gespeicherte Energie ist bei der Kapazität $\frac{1}{2}Cu^2(t)$ und bei der Induktivität $\frac{1}{2}Li^2(t)$. Springt $\vec{x}_A(t)$ beim Schalten ($t = t_S$), so springt die gespeicherte Energie bei $t = t_S$ und die elektrische Leistung, die mit dieser Änderung der gespeicherten Energie verbunden ist, wird bei $t = t_S$ unendlich groß sein. Kommt man diesen Verhältnissen beim Schalten in der Praxis auch nur nahe, so führt dies meist zur Zerstörung des Netzwerks. Unter allen Lösungen der Netzwerkgleichungen für $t > t_S$ sind also diejenigen, für die $\vec{x}_A(t)$ für $t = t_S$ stetig ist – also die Lösungen des Anfangswertproblems 1. Art –, die aus schaltungstechnischer Sicht angestrebt werden. Die Stetigkeit von $\vec{x}_A(t)$ beim Schalten ist daher insbesondere bei Schaltungen der Leistungselektronik das oberste Ziel der Schaltungsauslegung!

Im Beispiel 5.1 ließ sich die Lösung des Netzwerkproblems auf eine Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten zurückführen. Im allgemeinen Fall kann man jedes Netzwerkproblem auf ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten zurückführen. Um dies weiter zu systematisieren, erfolgt nun eine letzte Definition.

Definition 5.9 (Zustandsraummodell n -ter Ordnung mit mehreren Ein- und Ausgangsfunktionen)

Es seien n_Q Eingangsfunktionen $e_i(t)$, $1 \leq i \leq n_Q$ in einem offenen Intervall (a, b) auf der reellen Achse vorgegeben. Die $e_i(t)$ seien \overline{k}_i -fach differenzierbar, $\overline{k}_i \geq 0$. Basis des Zustandsraummodells ist ein Differentialgleichungssystem 1-ter Ordnung mit der Dimension n , das auf dem Intervall (a, b) formuliert ist:

$$\vec{x}^{(1)}(t) = \underline{\underline{A}}\vec{x}(t) + \sum_{i=1}^{n_Q} \sum_{j=0}^{\overline{k}_i} \vec{B}_{i,j} e_i^{(j)}(t) \quad (5.24)$$

$\vec{x}^{(1)}(t), e_i^{(j)}(t)$ sind abkürzende Schreibweisen für die erste bzw. die j -te Ableitung von $\vec{x}(t)$ bzw. $e_i(t)$. $\vec{x}(t)$ ist der n -dimensionale Vektor der Zustandsfunktionen. Die $\vec{B}_{i,j}$ sind zeitunabhängige n -dimensionale, reelle Vektoren und $\underline{\underline{A}}$ ist eine zeitunabhängige, reelle $n \times n$ Matrix. Das Differentialgleichungssystem hat bei Vorgabe eines beliebigen n -dimensionalen Vektors \vec{x}_{t_0} zu einem beliebigen Zeitpunkt t_0 im Intervall (a, b) ($t_0 = a$ ist zusätzlich zugelassen) genau eine differenzierbare Lösung $\vec{x}(t)$ mit $\vec{x}(t_0^+) = \vec{x}_{t_0}$. Dies wird später noch mit Hilfe der Laplacetransformation in Satz 8.2 ausführlich gezeigt werden. \vec{x}_{t_0} wird Anfangszustandsvektor genannt. Jeder Lösung $\vec{x}(t)$ des Differentialgleichungssystems werden l_z Ausgangsfunktionen $a_k(t)$, $1 \leq k \leq l_z$ folgendermaßen zugeordnet:

$$a_k(t) = \vec{C}_k^t \vec{x}(t) + \sum_{i=1}^{n_Q} \sum_{j=0}^{\overline{k}_i} E_{k,i,j} e_i^{(j)}(t), 1 \leq k \leq l_z \quad (5.25)$$

Dabei sind die \vec{C}_k^t reelle, zeitunabhängige, n -dimensionale Vektoren und die $E_{k,i,j}$ zeitunabhängige, reelle Zahlen. Das Zustandsraummodell heißt eigentlich, falls $\overline{k}_i = 0$ gilt, für alle i mit $1 \leq i \leq n_Q$. Gilt darüber hinaus noch $E_{k,i,0} = 0$ für $1 \leq k \leq l_z$, $1 \leq i \leq n_Q$, so heißt das Zustandsraummodell strikt.

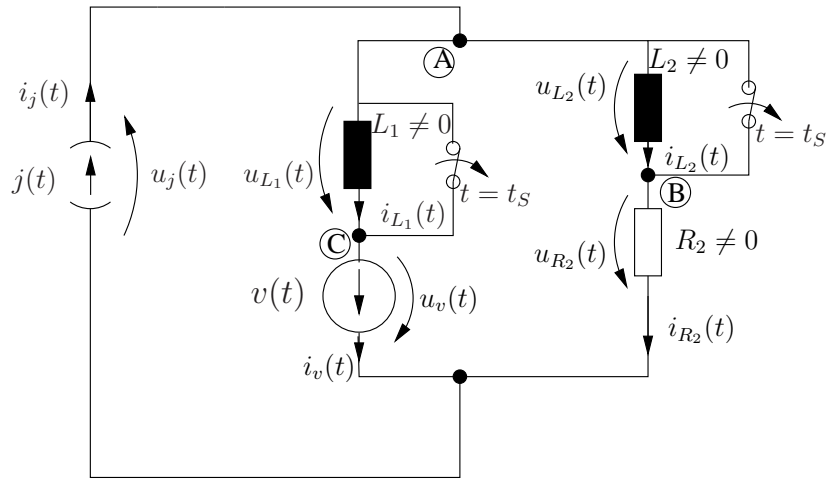
Beispiel 5.1 lässt sich also auf ein eigentliches Zustandsraummodell 1-ter Ordnung im Intervall (t_S, ∞) zurückführen und es gilt für dieses Beispiel:

$$n = 1, A = -\frac{1}{RC}, n_Q = 1, \overline{k}_1 = 0, B_{1,0} = \frac{1}{RC}, x(t) = u_C(t), e_1(t) = v(t) \quad (5.26)$$

Die Ausgangsfunktionen sind die verschiedenen Netzwerkvariablen von Beispiel 5.1. Also gilt $l_z = 8$. Setzt man z.B. $a_1(t) = i_C(t)$, so gilt: $C_1 = -\frac{1}{R}$, $E_{1,1,0} = \frac{1}{R}$. Die Lösung von Beispiel 5.1 lässt sich also auf die Lösungen eines Zustandsraummodells erster Ordnung zurückführen.

Im Beispiel 5.1 gilt $n_A = n$ und es muss nicht zwischen den Zielanfangswerten \vec{x}_{A,t_0} und dem Anfangszustandsvektor \vec{x}_{t_0} unterschieden werden. Dass dies nicht immer so ist, zeigt das nächste Beispiel:

Beispiel 5.2



L_1, L_2 sind lineare, zeitinvariante Induktivitäten, bei denen zum Schaltzeitpunkt $t = t_S$ durch das Öffnen der Schalter Stromanfangswerte $i_{L_1}(t_S^-)$ und $i_{L_2}(t_S^-)$ vorgegeben werden können. R_2 ist ein linearer, zeitinvarianter Widerstand und $v(t)$ und $j(t)$ sind die Ursprungsspannung und der Urstrom einer festen, ungesteuerten Spannungs- bzw. Stromquelle. Der Vektor $\vec{x}_A(t)$ ist bei diesem Beispiel über $\vec{x}_A^t(t) = (i_{L_1}(t), i_{L_2}(t))$ gegeben und untersucht werden soll die Lösbarkeit der Anfangswertprobleme erster und zweiter Art.

Eine einfache Vorüberlegung zeigt, dass sich diese Schaltung komplizierter verhält als die Schaltung aus Beispiel 5.1, da dieses Netzwerkmodell eine zustandsreduzierende algebraische Gleichung enthält. Nehmen wir dazu einmal an, es wäre eine Lösung des Anfangswertproblems erster Art bestimmt. Bei vorgegebenem $j(t)$ und vorgegebenen Strömen in den Induktivitäten vor dem Schalten $i_{L_1}(t_S^-)$, $i_{L_2}(t_S^-)$ gibt es also Funktionen $i_{L_1}(t), i_{L_2}(t)$ für $t > t_S$ mit $i_{L_1}(t_S^+) = i_{L_1}(t_S^-)$ und $i_{L_2}(t_S^+) = i_{L_2}(t_S^-)$, die zu einer Menge von Zweigspannungen und Zweigströmen gehören, die die Netzwerkgleichungen für $t > t_S$ lösen. Betrachtet man die Schnittmenge, die aus dem Quellenzweig und den Induktivitätszweigen besteht, so ergibt sich für $t > t_S$ die Schnittmengengleichung

$$i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t) = j(t), \quad (5.27)$$

die nach Def. 5.7 eine zustandsreduzierende algebraische Gleichung ist. Da $i_{L_1}(t)$ und $i_{L_2}(t)$ zu einer Lösung des Anfangswertproblems erster Art gehören, sind sie differenzierbar. Dies impliziert mit (5.27), dass auch $j(t)$ differenzierbar ist, was bisher nicht vorausgesetzt wurde.

Ferner gilt für $t \rightarrow t_S^+$:

$$\begin{aligned} j(t_S^+) &= i_{L_1}(t_S^+) + i_{L_2}(t_S^+) \\ &= i_{L_1}(t_S^-) + i_{L_2}(t_S^-) \end{aligned} \quad (5.28)$$

Die letzte Gleichung impliziert, dass es nicht für jede Kombination von $j(t)$ und $i_{L_1}(t_S^-), i_{L_2}(t_S^-)$ eine Lösung des Anfangswertproblems erster Art gibt, sondern diese kann es nur geben, falls

- 1) $j(t)$ differenzierbar ist und
- 2) Gleichung (5.28) erfüllt ist.

Entsprechende Folgerungen lassen sich auch bei Annahme einer Lösung der Anfangswertprobleme 1. oder 2. Art und für jede andere zustandsreduzierende algebraische Gleichung ziehen, falls diese existiert. Aufgrund dieser Vorüberlegung wird im weiteren angenommen, dass $j(t)$ differenzierbar und $v(t)$ stückweise stetig für $t > t_Q < t_S$ vorgegeben sind.

Um die vollständigen Bedingungen zu finden, unter denen es eine Lösung des Anfangswertproblem erster Art gibt, wird zunächst gezeigt, dass die Lösung des Netzwerkmodells für $t > t_S$ auf die Lösung eines Zustandsraummodells erster Ordnung mit $i_{L_1}(t)$ als Zustandsfunktion zurückgeführt werden kann. Zunächst wird dazu ein linear unabhängiger Satz von Netzwerkgleichungen für dieses Beispiel formuliert. Für $t > t_S$ gilt:

Schnittmengengleichungen(SGL):

$$i_j(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t), \quad i_{L_2}(t) = i_{R_2}(t), \quad i_{L_1}(t) = i_v(t) \quad (5.29)$$

Maschengleichungen(MGL):

$$u_{L_1}(t) + u_v(t) = -u_j(t), \quad \underbrace{u_{L_1}(t) + u_v(t) = u_{L_2}(t) + u_{R_2}(t)}_{(*)} \quad (5.30)$$

Zweiggleichungen(ZGL):

$$\begin{aligned} i_j(t) &= j(t), \quad u_v(t) = v(t), \quad u_{L_{1,2}}(t) = L_{1,2} \frac{d}{dt} i_{L_{1,2}}(t) \\ u_{R_2}(t) &= R_2 i_{R_2}(t) \end{aligned} \quad (5.31)$$

(*) impliziert zusammen mit den SGL und ZGL:

$$\begin{aligned} L_2 \frac{d}{dt} (j(t) - i_{L_1}(t)) + R_2 (j(t) - i_{L_1}(t)) &= L_1 \frac{d}{dt} i_{L_1}(t) + v(t) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} i_{L_1}(t) &= -\frac{R_2}{L_1 + L_2} i_{L_1}(t) + \frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{d}{dt} j(t) + \frac{R_2}{L_1 + L_2} j(t) - \frac{1}{L_1 + L_2} v(t) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Dies ist die Basisdifferentialgleichung eines Zustandsraumsystems erster Ordnung auf dem Intervall (t_S, ∞) .

Die Ableitung der Quellenfunktion von $j(t)$ auf der rechten Seite entsteht durch die Substitution von $i_{L_2}(t)$ in der Zweiggleichung von L_1 durch $j(t) - i_{L_1}(t)$ basierend auf der zustandsreduzierenden Gleichung.

Hat man $i_{L_1}(t)$ durch Angabe eines beliebigen Anfangszustandes i_{L_1,t_0} zum Zeitpunkt $t_0 \geq t_S$ für $t > t_S$ eindeutig festgelegt, so ergeben sich alle weiteren Netzwerkvariablen für $t > t_S$

als Linearkombinationen von $i_{L_1}(t)$ und den Quellengrößen $j(t)$, $\frac{d}{dt}j(t)$ und $v(t)$, denn aus (5.29)–(5.32) folgt:

$$\left. \begin{aligned} i_{L_2}(t) &= -i_{L_1}(t) + j(t) \\ i_{R_2}(t) &= -i_{L_1}(t) + j(t) \\ i_v(t) &= i_{L_1}(t) \\ i_j(t) &= j(t) \\ u_{L_2}(t) &= +\frac{L_2 R_2}{L_1 + L_2} i_{L_1}(t) + \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \frac{d}{dt} j(t) - \frac{L_2 R_2}{L_1 + L_2} j(t) + \frac{L_2}{L_1 + L_2} v(t) \\ u_{L_1}(t) &= -\frac{L_1 R_2}{L_1 + L_2} i_{L_1}(t) + \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \frac{d}{dt} j(t) + \frac{L_1 R_2}{L_1 + L_2} j(t) - \frac{L_1}{L_1 + L_2} v(t) \\ u_j(t) &= +\frac{L_1 R_2}{L_1 + L_2} i_{L_1}(t) - \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \frac{d}{dt} j(t) - \frac{L_1 R_2}{L_1 + L_2} j(t) - \frac{L_2}{L_1 + L_2} v(t) \\ u_{R_2}(t) &= -R_2 i_{L_1}(t) + R_2 j(t) \\ u_v(t) &= v(t) \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

Mit

$$\begin{aligned} e_1(t) &= j(t), \quad e_2(t) = v(t), \quad x(t) = i_{L_1}(t), \\ A &= -\frac{R_2}{L_1 + L_2}, \quad n = 1, \quad n_Q = 2, \quad \bar{k}_1 = 1, \quad \bar{k}_2 = 0, \\ B_{1,0} &= \frac{R_2}{L_1 + L_2}, \quad B_{1,1} = \frac{L_2}{L_1 + L_2}, \quad B_{2,0} = -\frac{1}{L_1 + L_2} \end{aligned}$$

ist das dem Netzwerkmodell aus Beispiel 5.2 zugeordnete Zustandsraummodell erster Ordnung bis auf die Ausgangsgleichungen (5.25) festgelegt. In der Übung wird gezeigt werden, dass sich die Lösung des Netzwerkmodells genau so gut auch auf die Lösung eines anderen Zustandsraummodells mit $x(t) = i_{L_2}(t)$ als Zustandsfunktion zurückführen lässt. Dabei ändert sich jedoch weder A noch n noch n_Q und definiert man weiterhin $e_1(t) = j(t)$ und $e_2(t) = v(t)$, so ändert sich auch \bar{k}_1 und \bar{k}_2 nicht. Es tritt also immer $\frac{d}{dt}j(t)$ bei der Formulierung des Zustandsraummodells auf und man muss daher $j(t)$ als differenzierbar voraussetzen, wenn man bei der Lösung des Zustandsraummodells im Bereich der stückweise stetigen Funktion bleiben will. Mit der Methode der Variation der Konstanten lassen sich unter der Voraussetzung, dass $j(t)$ und $v(t)$ für $t > t_S$ gegeben und differenzierbar bzw. stückweise stetig sind, wiederum Darstellungen für die Lösungen der Zustandsfunktion $i_{L_1}(t)$ und anderer Netzwerkvariablen wie z.B. $u_{L_1}(t)$ bei Vorgabe eines beliebigen Anfangszustandes i_{L_1,t_0} zum Zeitpunkt t_0 ($t_0 \geq t_S$) berechnen.

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet:

$$i_{L_1,h}(t) = K_h e^{(-\frac{R_2}{L_1+L_2})t}$$

Die Variation der Konstanten ergibt für $t > t_S$ analog zu (5.11)–(5.13):

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} K_p(t) \right) e^{-\frac{R_2}{L_1+L_2}t} &= \frac{R_2}{L_1 + L_2} j(t) + \frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{d}{dt} j(t) - \frac{1}{L_1 + L_2} v(t) \\ \Rightarrow K_p(t) &= K_p(t_0^+) + \int_{t_0}^t e^{\frac{R_2}{L_1+L_2}t'} \left(\frac{R_2}{L_1 + L_2} j(t') + \frac{L_2}{L_1 + L_2} j^{(1)}(t') - \frac{1}{L_1 + L_2} v(t') \right) dt' \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\Rightarrow i_{L_1}(t) = K_h e^{-\frac{R_2}{L_1+L_2}t} + \int_{t_0}^t e^{-\frac{R_2}{L_1+L_2}(t-t')} \left(\frac{R_2}{L_1 + L_2} j(t') + \frac{L_2}{L_1 + L_2} j^{(1)}(t') - \frac{1}{L_1 + L_2} v(t') \right) dt'$$

Mit $K_h = i_{L_1, t_0} e^{\frac{R_2}{L_1+L_2} t_0}$ folgt für $t > t_S$:

$$\begin{aligned}
i_{L_1}(t) &= i_{L_1, t_0} e^{-\frac{R_2}{L_1+L_2}(t-t_0)} + e^{-\frac{R_2}{L_1+L_2}(t-t')} \frac{L_2}{L_1+L_2} j(t') \Big|_{t'=t_0}^{t'=t} + \\
&\quad \int_{t_0}^t e^{-\frac{R_2}{L_1+L_2}(t-t')} \left(\left(\frac{R_2}{L_1+L_2} - \frac{R_2 L_2}{(L_1+L_2)^2} \right) j(t') - \frac{1}{L_1+L_2} v(t') \right) dt' \\
&= \underbrace{i_{L_1, t_0} e^{-\frac{R_2}{L_1+L_2}(t-t_0)}}_{=: i_{L_1, z, t_0}(t)} - \underbrace{\frac{L_2}{L_1+L_2} j(t_0) e^{-\frac{R_2}{L_1+L_2}(t-t_0)}}_{=: i_{L_1, d, 1, t_0}} + \\
&\quad \int_{t_0}^t \underbrace{e^{-\frac{R_2}{L_1+L_2}(t-t')} \left(\frac{R_2 L_1}{(L_1+L_2)^2} j(t') - \frac{1}{L_1+L_2} v(t') \right)}_{=: h_{i_{L_1}, 1}(t-t') e_1(t') + h_{i_{L_1}, 2}(t-t') e_2(t)} dt' + \underbrace{\frac{L_2}{L_1+L_2} j(t)}_{=: D_{i_{L_1}, 1, 0} e_1(t)}
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Der Term $i_{L_1, d, 1, t_0}(t)$ entsteht aufgrund der partiellen Integration, um die Ableitung der Quellenfunktionen $j(t)$ unter dem Integral zu entfernen.

$$\begin{aligned}
u_{L_1}(t) &= -\frac{L_1 R_2}{L_1+L_2} i_{L_1}(t) + \frac{L_1 L_2}{L_1+L_2} \frac{d}{dt} j(t) + \frac{L_1 R_2}{L_1+L_2} j(t) - \frac{L_1}{L_1+L_2} v(t) \\
&= -\underbrace{\frac{L_1 R_2}{L_1+L_2} i_{L_1, t_0} e^{-\frac{R_2}{L_1+L_2}(t-t_0)}}_{=: u_{L_1, z, t_0}(t)} + \underbrace{\frac{R_2 L_1 L_2}{(L_1+L_2)^2} j(t_0) e^{-\frac{R_2}{L_1+L_2}(t-t_0)}}_{=: u_{L_1, d, 1, t_0}} \\
&\quad + \int_{t_0}^t \underbrace{e^{-\frac{R_2}{L_1+L_2}(t-t')} \left(\frac{-(R_2 L_1)^2}{(L_1+L_2)^3} j(t') + \frac{L_1 R_2}{(L_1+L_2)^2} v(t') \right)}_{=: h_{u_{L_1}, 1}(t-t') e_1(t') + h_{u_{L_1}, 2}(t-t') e_2(t')} dt' \\
&\quad + \underbrace{\frac{L_1^2 R_2}{(L_1+L_2)^2} j(t) + \frac{L_1 L_2}{L_1+L_2} \frac{d}{dt} j(t) - \frac{L_1}{L_1+L_2} v(t)}_{=: D_{u_{L_1}, 1, 0} e_1(t) + D_{u_{L_1}, 1, 1} e_1^{(1)}(t) + D_{u_{L_1}, 2, 0} e_2(t)}
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Aus (5.33) und (5.35) folgt, dass sich das Anfangswertproblem zweiter Art für das Netzwerkmodell eindeutig lösen lässt, falls $j(t)$ differenzierbar und $v(t)$ stückweise stetig ist und für einen Anfangszustand $x_{t_0} = i_{L_1, t_0}$ sich die Zielanfangswerte darstellen lassen über

$$\begin{pmatrix} i_{L_1, t_0} \\ i_{L_2, t_0} \end{pmatrix} = \vec{x}_{A, t_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} j(t_0) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \overset{x(t_0^+)}{\parallel} x_{t_0} = \vec{x}_A(t_0^+). \tag{5.37}$$

Man beachte hierzu, dass aufgrund der zustandsreduzierenden Gleichung für $t > t_S$ der folgende Zusammenhang zwischen den differenzierbaren Variablen $\vec{x}_A(t) = (i_{L_1}(t), i_{L_2}(t))^t$ und der Zustandsfunktion $x(t) = i_{L_1}(t)$ gilt:

$$\vec{x}_A(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} j(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} x(t)$$

Dies ist für eine beliebige Funktion $x(t)$ und $t > t_S$ gleichzeitig auch eine Darstellung des Lösungsraumes der zustandsreduzierenden algebraischen Gleichung (5.27). $x(t)$ ist dabei eine Zustandsfunktion und kann daher beliebige reelle Werte annehmen. (5.37) entsteht aus dieser Lösungsraumdarstellung, indem man bei dieser den Grenzübergang $t \rightarrow t_0^+$ durchführt,

annimmt, dass bei Vorgabe von i_{L_1,t_0} und i_{L_2,t_0} eine Lösung des Anfangswertproblems 2. Art vorliegt und beachtet, dass aufgrund der Differenzierbarkeit von $j(t)$ immer $j(t_0^+) = j(t_0)$ gilt. $x_{t_0} = x(t_0^+)$ kann aufgrund der Eigenschaften des Zustandsraummodells immer als gegeben angenommen werden.

Will man für $t_0 > t_S$ diese Lösung durch Vorgabe von Anfangswerten $\vec{x}_A(t_S^-)$ der Induktivitätsströme vor dem Schalten einstellen, so muss man diese folgendermaßen wählen:

$$i_{L_1}(t_S^-) = i_{L_1,t_0} e^{-\frac{R_2}{L_1+L_2}(t_S-t_0)} - \frac{L_2}{L_1+L_2} j(t_0) e^{-\frac{R_2}{L_1+L_2}(t_S-t_0)} \\ - \int_{t_S}^{t_0} e^{-\frac{R_2}{L_1+L_2}(t_S-t')} \left(\frac{R_2 L_1}{(L_1+L_2)^2} j(t') - \frac{1}{L_1+L_2} v(t') \right) dt' + \frac{L_2}{L_1+L_2} j(t_S) \quad (5.38)$$

$$\begin{pmatrix} i_{L_1}(t_S^-) \\ i_{L_2}(t_S^-) \end{pmatrix} = \vec{x}_A(t_S^-) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} j(t_S) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} i_{L_1}(t_S^-) \quad (5.39)$$

Das Anfangswertproblem erster Art ist lösbar, falls wiederum $j(t)$ differenzierbar und $v(t)$ stückweise stetig ist und die Zielanfangswerte vor dem Schalten $\vec{x}_A(t_S^-)$ für einen Anfangszustand x_{t_S} die Gleichung

$$\begin{pmatrix} i_{L_1}(t_S^-) \\ i_{L_2}(t_S^-) \end{pmatrix} = \vec{x}_A(t_S^-) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} j(t_S) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \overset{x(t_S^+)}{\parallel} x_{t_S} = x_A(t_S^+) \quad (5.40)$$

erfüllen.

Dann und nur dann wenn die Zusatzbedingungen (5.37) und (5.40) erfüllt sind, gibt es eine Lösung für die Anfangswertprobleme 1. und 2. Art im Bereich der stückweise stetigen Funktionen mit stetigem Anschluss von $x_A(t)$ an die Zielanfangswerte, sodass

$$\vec{x}_A(t_S^+) = \vec{x}_A(t_S^-) \text{ bzw. } \vec{x}_A(t_0^+) = \vec{x}_{A,t_0} \quad (5.41)$$

gilt.

Die oben durchgeführte Berechnung der Lösung (5.35) des Anfangswertproblems 2. Art für $i_{L_1}(t)$ und konsistente Anfangswerte beruht darauf, dass die zustandsreduzierenden Gleichungen und das Zustandsraummodell bekannt sind. Dann ergibt sich eine natürliche Aufteilung in eine zero-input- und eine zero-state-Antwort über die homogene Lösung und die partikuläre Lösung des Zustandsraumdifferentialgleichungssystems, wenn die partikuläre Lösung, wie in (5.34) und (5.35) vorgeführt, speziell für verschwindende Anfangszustände ausgerechnet wird. Dies bedeutet jedoch **nicht**, dass bei dieser speziellen partikulären Lösung alle Anfangswerte verschwinden. Im Gegenteil: Bei der in (5.34) und (5.35) verwendeten speziellen partikulären Lösung gilt $i_{L_2,t_0} = j(t_0)$ aufgrund von (5.37) und $i_{L_1,t_0} = 0$. **Für $j(t_0) \neq 0$ verschwinden also nicht alle Anfangswerte bei dieser zero-state-Antwort.**

Bei allgemeinen linearen und zeitinvarianten Netzwerkmodellen sind die zustandsreduzierenden Gleichungen und die Zustandsraumdarstellungen oft nur mit sehr hohem Aufwand bestimmbar, so dass man typischerweise davon ausgehen muss, dass diese Informationen für die Lösung der Anfangswertprobleme eines Netzwerkmodells nicht zur Verfügung stehen.

Daher kann (5.20), bei dem $i_{C,zs}(t)$ sich einfach durch Lösen des Anfangswertproblems 2. Art für den Zielanfangswert $u_{C,t_0} = 0$ ergibt, für Netzwerkmodelle, für die wie im vorliegenden Fall $n < n_A$ gilt, nicht auf ein einfach anzuwendendes Verfahren, das die Kenntnis der zustandsreduzierenden Gleichungen nicht voraussetzt, verallgemeinert werden, sondern um

zu einer möglichst einfach anwendbaren Verallgemeinerung zu kommen, die ohne Kenntnis der zustandsreduzierenden Gleichungen immer eine korrekte Lösung liefert, wird später eine spezielle „zero state“ Antwort, die als Antwort aus dem Ruhezustand heraus bezeichnet wird (siehe Satz 5.5), eingeführt.

Für inkonsistente Zielanfangswerte $\begin{pmatrix} i_{L_1, t_0} \\ i_{L_2, t_0} \end{pmatrix}$, die nicht über (5.37) bei beliebiger Wahl von x_{t_0} dargestellt werden können, gibt es also keine Lösung des Anfangswertproblems 2. Art.

Trotzdem wird in den Kapiteln 8 und 10 gezeigt werden, dass für den Fall, dass inkonsistente Anfangswerte $\vec{x}_A(t_S^-)$ zum Schaltzeitpunkt t_S per Schaltungszwang quasi physikalisch vorgegeben werden, man weiter von den Lösungsdarstellungen (5.35), (5.36) für $t > t_S$ ($t = t_S$ muss hier explizit ausgeschlossen werden) ausgehen kann.

In den Lösungsdarstellungen (5.35), (5.36) kann $i_{L_1, t_0} = i_{L_1}(t_0^+)$ dann bei beliebiger Vorgabe von $i_{L_1}(t_S^-)$ und $i_{L_2}(t_S^-)$ wieder alle reellen Werte annehmen und kann daher weiterhin als Anfangszustand und $i_{L_1}(t)$ als Zustandsfunktion aufgefasst werden. Allerdings gilt in diesem Fall $\vec{x}_A(t_S^-) \neq \vec{x}_A(t_S^+)$ und es wird erst in Kapitel 8 geklärt werden können, wie $\vec{x}_A(t_S^+)$ und i_{L_1, t_0} in den Lösungsdarstellungen (5.35), (5.36) von $\vec{x}_A(t_S^-)$ abhängen. Jedenfalls bleibt keine der Beziehungen (5.38)–(5.40) bei inkonsistentem $\vec{x}_A(t_S^-)$ gültig.

Aufgrund von $\vec{x}_A(t_S^+) \neq \vec{x}_A(t_S^-)$ muss zum Schaltzeitpunkt bei inkonsistenten Anfangswerten mit unendlich hohen Leistungsspitzen aufgrund sprunghafter Änderungen der gespeicherten Feldenergie gerechnet werden.

5.2 Das allgemeine Verhalten

Die im vorigen Kapitel abgeleitete generelle Struktur der Lösungsdarstellung der Netzwerkvariablen bei den Netzwerkmodellen aus Beispiel 5.1 und Beispiel 5.2 ist allgemein gültig und gilt für jedes in dieser Vorlesung betrachtete, lineare und zeitinvariante Netzwerkmodell. Um dies zu verdeutlichen, wird im folgenden Satz die allgemeine Antwort der in dieser Vorlesung betrachteten linearen und zeitinvarianten Netzwerkmodelle im Zeitbereich angegeben, so weit dies für die weitere Entwicklung der Theorie zunächst nützlich ist. Die in diesem Satz gemachten Aussagen werden erst in Kapitel 8.2 mit Hilfe der Laplace-Transformation bewiesen werden. Trotzdem werden diese Resultate bereits hier angegeben, damit die, anhand von Beispielen nach und nach entwickelten Erkenntnisse, im Zeitbereich von einem abstrakteren Standpunkt aus beurteilt werden können und wichtige Aussagen allgemein bewiesen werden können, anstatt sie nur anhand von Beispielen zu motivieren. Ferner umreißt der Inhalt des Satzes 5.1 ein wesentliches Ziel dieser Vorlesung. Dieses besteht darin, die Aussagen in diesem Satz zu beweisen und konstruktive und effiziente Verfahren zu entwickeln, mit denen insbesondere die im Satz 5.1 vorkommenden Größen, wie z.B. die charakteristischen Frequenzen, berechnet werden können.

Satz 5.1 (Darstellung des Lösungsraumes linearer, zeitinvarianter Netzwerkmodelle)

Sei ein Netzwerkmodell, bestehend aus den bereits eingeführten oder noch einzuführenden elementaren, idealen, linearen, zeitinvarianten Zweipolen und festen Spannungs- oder Stromquellen gegeben. Das Netzwerkmodell bestehe in dieser Form (eventuell nach Öffnen oder Schließen von Schaltern zum Zeitpunkt t_S) seit $t_S \leq t_0$. Die Urspannungen der Spannungsquellen $v(t)$, bzw. die Urströme $j(t)$ der Stromquellen seien seit $t > t_Q$, $t_Q < t_S$ vorgegeben, stückweise stetig und bekannt und durch die Funktionen $e_k(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$ ($= v(t)$, bzw. $= j(t)$) repräsentiert. Sei ferner $a(t)$ eine beliebige Spannungs- oder Stromvariable im Netzwerkmodell und t_0 der Zeitpunkt, zu dem die Zielfangswerte \vec{x}_{A,t_0} vorgegeben werden. Hat das Netzwerkmodell bei Vorgabe der Zielfangswerte und $e_k(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$ eine eindeutige Lösung (siehe Bem. 8.16), dann gilt für $t > t_S$:

$$a(t) = a_{zi,t_0}(t) + \sum_{k=1}^{n_Q} \left(a_{d,k,t_0}(t) + \int_{t_0}^t h_{a,k}(t-t') e_k(t') dt' + \sum_{i=0}^{r_k+1} D_{a,k,i} e_k^{(i)}(t) \right) \quad (5.42)$$

Hierbei wird um die Übersichtlichkeit der Formeln zu erhöhen, die Abkürzung

$$e^{(i)}(t) := \frac{d^i}{(dt)^i} e(t)$$

für die i -te Ableitung der Zeitfunktion $e(t)$ benutzt.

(5.42) ist für jedes $t_0 \geq t_S$ eine Darstellung aller Lösungen des Netzwerkmodells für $t > t_S$. Für unterschiedliche t_0 sind die Lösungsdarstellungen äquivalent. Die einzelnen Terme in (5.42) haben die folgenden Eigenschaften:

1. Es gilt $r_k \geq -1$ für $1 \leq k \leq n_Q$. Die $D_{a,k,i}$, $1 \leq k \leq n_Q$, $0 \leq i \leq r_k + 1$ sind reelle Konstanten, die nicht von den $e_k(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$ abhängen. Ferner hängen die $h_{a,k}(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$ nicht von den $e_k(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$ ab. Für $r_k \geq 0$ ist r_k so festgelegt, dass $D_{a,k,r_k+1} \neq 0$ für mindestens eine der Netzwerkvariablen $a(t)$ gilt. Ist $r_k \geq 0$, so heißt das Netzwerkmodell bezüglich der Quellenvariablen $e_k(t)$ differenzierend. Falls $r_k + 1 = 0$ für $1 \leq k \leq n_Q$ gilt, heißt das Netzwerkmodell **nicht** differenzierend.

Die Eigenschaft, dass ein Netzwerkmodell differenzierend ist, hängt eng mit dem Begriff des Differentiationsindex ν_N des Netzwerkmodells zusammen. Ein differenzierendes Netzwerkmodell hat einen Differentiationsindex $\nu_N \geq 1$.

2. Ist das Netzwerkmodell bezüglich $e_k(t)$ differenzierend, so wird $e_k(t)$ $r_k + 1$ -fach differenzierbar für $t > t_Q$ vorausgesetzt, damit $a(t)$ bei beliebiger Auswahl von $a(t)$ immer eine stückweise stetige (gewöhnliche) Funktion ist.

3. Jedem Netzwerkmodell ist die Zahl $n = n_A - n_R$, die Ordnung des Netzwerkmodells genannt wird, zugeordnet. n ist eine natürliche Zahl oder Null. Aus $n_R \geq 0$ folgt $n \leq n_A$. $n = 0$ impliziert $a_{zi,t_0}(t) \equiv 0$ und $a_{d,k,t_0}(t) \equiv h_{a,k}(t) \equiv 0$ für alle $a(t)$ und $1 \leq k \leq n_Q$. Für $n \geq 1$ entspricht n der Dimension der dem Netzwerkmodell zugeordneten Zustandsraummodelle. Diese Zustandsraummodelle beschreiben alle Netzwerkvariablen $a(t)$ für $t > t_S$ äquivalent zu (5.42) über Ausgangsgleichungen analog zu (5.25) mit $\bar{k}_i = r_i + 1$, $i = 1, \dots, n_Q$. Ein derartiges Zustandsraummodell existiert für $n \geq 1$ immer! Es ist immer möglich, unter diesen Zustandsraummodellen eines auszuwählen, bei dem die Komponenten des n -dimensionalen Zustandsfunktionsvektors $\vec{x}(t)$ ebenfalls Komponenten von $\vec{x}_A(t)$ sind. Im weiteren wird davon ausgegangen, dass das ausgewählte Zustandsraummodell so wie gerade beschrieben gewählt wurde.

Für $n = n_A$ ist das Netzwerkmodell nicht differenzierend.

4. Für $n \geq 1$ gibt es natürliche Zahlen μ_1, \dots, μ_l mit $\sum_{i=1}^l \mu_i = n$ und komplexe Zahlen $\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_l$, die als natürliche Frequenzen des Netzwerkmodells bezeichnet werden. Die natürlichen Frequenzen sind die Eigenwerte der Matrix \underline{A} bei jedem der dem Netzwerkmodell zugeordneten Zustandsraummodelle. Die \underline{A}_i sind daher die Wurzeln des charakteristischen Polynoms von \underline{A} und μ_i die entsprechenden Vielfachheiten. Die \underline{A}_i und μ_i , $1 \leq i \leq l$ sind durch das Netzwerkmodell eindeutig bestimmt. Dazu gehören n Funktionen

$$\underbrace{e^{\underline{A}_1 t}, t e^{\underline{A}_1 t}, \dots, t^{\mu_1-1} e^{\underline{A}_1 t}}_{\mu_1}, \dots, \underbrace{e^{\underline{A}_l t}, t e^{\underline{A}_l t}, \dots, t^{\mu_l-1} e^{\underline{A}_l t}}_{\mu_l}. \quad (5.43)$$

Die Funktionen $a_{zi,t_0}(t)$ und $a_{d,k,t_0}(t)$, $h_{a,k}(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$ sind für jede Wahl von $a(t)$ Linearkombinationen mit von t unabhängigen Koeffizienten der in (5.43) definierten Funktionen. Das gleiche gilt, falls $e_k(t) \equiv 0$, $1 \leq k \leq n_Q$, für alle Zustandsfunktionen $\vec{x}(t)$ der zugeordneten Zustandsraummodelle bei beliebigem Anfangszustandsvektor \vec{x}_{t_0} . Das zeitliche Verhalten des Netzwerkmodells wird also durch die l ($l \leq n \leq n_A$) natürlichen Frequenzen \underline{A}_i weitgehend bestimmt.

5. Für $r_k + 1 = 0$ gilt $a_{d,k,t_0}(t) \equiv 0$. Für $r_k \geq 0$ hängt $a_{d,k,t_0}(t)$ linear vom Vektor $(e_k(t_0), \dots, e_k^{(r_k)}(t_0))$ ab. Dies impliziert $a_{d,k,t_0}(t) \equiv 0$ für $e_k(t_0) = \dots = e_k^{(r_k)}(t_0) = 0$.
6. $a_{zi,t_0}(t)$ hängt linear vom n -dimensionalen Anfangszustandsvektor \vec{x}_{t_0} ab. $D_{a,k,i}$, $1 \leq k \leq n_Q$, $0 \leq i \leq r_k + 1$; $h_{a,k}(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$ und $a_{d,k,t_0}(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$ hängen **nicht** von \vec{x}_{t_0} ab. Die lineare Abhängigkeit impliziert $a_{zi,t_0}(t) \equiv 0$ für alle $a(t)$, falls $\vec{x}_{t_0} = 0$. Wird \vec{x}_{t_0} beliebig aber fest vorgegeben und sind alle $e_k(t)$ für $t > t_Q$, $1 \leq k \leq n_Q$ gegeben, so ist (5.42) für ein gegebenes Netzwerkmodell und eine gegebene Lösungsvariable $a(t)$ eindeutig bestimmt. Alle Antworten $a(t)$ zusammengenommen erfüllen dann alle Zweig- und Kirchhoffgleichungen des Netzwerkmodells. n gibt also die Anzahl der frei wählbaren Anfangszustände (Freiheitsgrade) des Netzwerkmodells an. Gibt man \vec{x}_{t_0} statt \vec{x}_{A,t_0} vor, so ist $a_{zi,t_0}(t)$ gleich derjenigen Antwort $a(t)$, die sich bei gleichem Anfangszustand \vec{x}_{t_0} und verschwindender Erregung ($e_k(t) \equiv 0$, $1 \leq k \leq n_Q$) ergibt. $a_{zi,t_0}(t)$ wird daher auch „zero input response“ genannt. \vec{x}_{A,t_0} und $e_k(t)$ beeinflussen a_{zi,t_0} ausschließlich über \vec{x}_{t_0} . Sind mit \vec{x}_{A,t_0} konsistente Zielfangswerte vorgegeben, so ist jede Komponente von \vec{x}_{t_0} gleich einer Komponente von \vec{x}_{A,t_0} und somit \vec{x}_{t_0} über \vec{x}_{A,t_0} gegeben. Für inkonsistente Zielfangswerte \vec{x}_{A,t_0} gibt es keine (strenge) Lösung des Anfangswertproblems 2.Art. Nur für $t_0 = t_S$ und inkonsistente Zielfangswerte $\vec{x}_A(t_S^-)$ vor dem Schalten gibt es darüberhinaus eine verallgemeinerte (nicht strenge) Lösung des Anfangswertproblems 1.Art (siehe Kapitel 10.4). Diese Lösung kann für $t > t_S$ ebenfalls durch (5.42) dargestellt werden, wobei \vec{x}_{t_S} zusätzlich zu $\vec{x}_A(t_S^-)$ auch von den Netzwerkparametern und den $e_k^{(i)}(t_S)$, $1 \leq k \leq n_Q$, $0 \leq i \leq r_k$ abhängen kann. Für $t = t_S$ und inkonsistente Anfangswerte $\vec{x}_A(t_S^-)$ kann $a(t)$ anteilig verallgemeinerte Funktionen enthalten und es gilt $\vec{x}_A(t_S^-) \neq \vec{x}_A(t_S^+)$.

(Da zu jedem Zielfangzustandsvektor \vec{x}_{t_0} genau ein Zustandsfunktionsvektor $\vec{x}(t)$ gehört, der die Anfangsbedingung $\vec{x}(t_0^+) = \vec{x}_{t_0}$ und (5.24) für $t > t_S$ erfüllt, muss, im Gegensatz zu $\vec{x}_A(t_0^+)$ und \vec{x}_{A,t_0} , nicht zwischen $\vec{x}(t_0^+)$ und \vec{x}_{t_0} unterschieden werden. Da ferner die Zustandsfunktionen auf dem offenen Intervall $t_S < t < \infty$ differenzierbar sind, gilt für $t_0 > t_S$ $\vec{x}(t_0^+) = \vec{x}(t_0)$.)

7. Zwischen den differenzierbaren Variablen $\vec{x}_A(t)$ und dem Netzwerkzustandsfunktionsvektor $\vec{x}(t)$ besteht für $t > t_S$ der folgende Zusammenhang

$$\vec{x}_A(t) = \sum_{k=1}^{n_Q} \tilde{F}_{e_k} \left(e_k(t), \dots, e_k^{(r_k)}(t) \right)^t + \tilde{F}_x \vec{x}(t). \quad (5.44)$$

Der k -te Summand in der obigen Summe verschwindet genau dann, wenn $r_k < 0$ gilt!

Dabei sind die \tilde{F}_{e_k} , $1 \leq k \leq n_Q$ und \tilde{F}_x zeitunabhängige Matrizen, die nicht von \vec{x}_{t_0} und $e_k(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$, sondern nur von den Parametern und dem Graphen des Netzwerkmodells abhängen, und \tilde{F}_x hat den Rang n . (5.44) ist eine vollständige Darstellung des Lösungsraumes aller zustandsreduzierenden algebraischen Gleichungen des Netzwerkmodells (siehe Def. 5.7), wenn für $\vec{x}(t)$ beliebige n -dimensionale Vektorfunktionen eingesetzt werden. Somit verschwindet auch der Term $\tilde{\beta}_k^t \left(e_k(t), \dots, e_k^{(r_k)}(t) \right)^t$ auf der rechten Seite der zustandsreduzierenden Gleichungen in Def. 5.7 genau dann, wenn $r_k < 0$ gilt. Der erste Term auf der rechten Seite von (5.44) verschwindet somit für nicht differenzierende Netzwerke und der zweite für $n = 0$.

Für $n = n_A$ also $n_R = 0$ ist das Netzwerkmodell nicht differenzierend und \tilde{F}_x kann als Einheitsmatrix angenommen werden. Daher kann in diesem speziellen Fall $\vec{x}_A(t)$ für jedes $t > t_S$ beliebige Werte annehmen.

8. Das Anfangswertproblem erster Art hat genau dann eine Lösung, falls es einen Anfangszustandsvektor \vec{x}_{t_S} so gibt, dass folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\vec{x}_A(t_S^-) = \sum_{k=1}^{n_Q} \widetilde{F}_{e_k} \left(e_k(t_S), \dots, e_k^{(r_k)}(t_S) \right)^t + \widetilde{F}_{\vec{x}} \overset{\vec{x}(t_S^+)}{\parallel} \vec{x}_{t_S} = \vec{x}_A(t_S^+) \quad (5.45)$$

Die zu \vec{x}_{t_S} gehörige Lösung (5.42) wird dann durch die Vorgabe von $\vec{x}_A(t_S^-)$ selektiert. Das Anfangswertproblem zweiter Art hat genau dann eine Lösung, falls es einen Anfangszustandsvektor \vec{x}_{t_0} so gibt, dass folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\vec{x}_{A,t_0} = \sum_{k=1}^{n_Q} \widetilde{F}_{e_k} \left(e_k(t_0), \dots, e_k^{(r_k)}(t_0) \right)^t + \widetilde{F}_{\vec{x}} \overset{\vec{x}(t_0^+)}{\parallel} \vec{x}_{t_0} = \vec{x}_A(t_0^+) \quad (5.46)$$

Die zu \vec{x}_{t_0} gehörige Lösung (5.42) wird dann durch die Vorgabe von \vec{x}_{A,t_0} selektiert. (5.45) bzw. (5.46) ergeben sich aus der Lösungsraumdarstellung (5.44) mit Hilfe des Grenzüberganges $t \rightarrow t_S^+$ bzw. $t \rightarrow t_0^+$ über die Annahme, dass es zu $\vec{x}_A(t_S^-)$ bzw. \vec{x}_{A,t_0} eine Lösung des Anfangswertproblems erster bzw. zweiter Art gibt. Die Gültigkeit von (5.45) bzw. (5.46) ist äquivalent zu der Aussage, dass $x_A(t_S^-)$ bzw. \vec{x}_{A,t_0} alle zustandsreduzierenden Gleichungen erfüllen, wenn man bei diesen auf der rechten Seite (siehe Definition 5.7) t durch t_S bzw. t_0 und auf der linken Seite $\vec{x}_A(t)$ durch $\vec{x}_A(t_S^-)$ bzw. \vec{x}_{A,t_0} ersetzt.

9. Um für $t_0 > t_S$ die für konsistente Zielanfangswerte \vec{x}_{A,t_0} durch (5.42) und (5.46) gegebene Lösung beim Schalten zu erzeugen, sind vor dem Schalten ($t \rightarrow t_S^-$) folgende Anfangswerte einzustellen:

$$x_{A,j}(t_S^-) = (x_{A,j})_{zi,t_0}(t_S) + \sum_{k=1}^{n_Q} \left[(x_{A,j})_{d,k,t_0}(t_S) + \int_{t_0}^{t_S} h_{x_{A,j},k}(t_S - t') e_k(t') dt' + \sum_{i=0}^{r_k+1} D_{x_{A,j},k,i} e_k^{(i)}(t_S) \right], 1 \leq j \leq n_A$$

Dabei ist der Anfangszustandsvektor, der zu $(\vec{x}_{A,j})_{zi,t_0}(t)$, $1 \leq j \leq n_A$ gehört, stets \vec{x}_{t_0} aus (5.46).

Die Formel (5.19) ist mit Satz 5.1 verträglich, wenn man folgende spezielle Wahl trifft:

$$a(t) = i_C(t), n_Q = 1, r_1 = -1 \Rightarrow a_{d,t_0}(t) \equiv 0, e_1(t) = v(t), D_{a,1,0} = \frac{1}{R}, n = 1, \widetilde{F}_{\vec{x}} = 1, l = 1, \underline{A}_1 = -\frac{1}{RC}, x_A(t) = x(t) = u_C(t), x_{A,t_0} = x_{t_0} = u_{C,t_0}, h_{a,1}(t) = -\frac{1}{R^2 C} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (5.47)$$

(5.21) ergibt sich aus der letzten Gleichung in Satz 5.1 für $a(t) = u_C(t) = x_A(t) = x_{A,1}(t)$.

Die Formeln (5.36), (5.37) sind mit Satz 5.1 verträglich, wenn man folgende spezielle Wahl trifft:

$$\begin{aligned} a(t) &= u_{L_1}(t), \quad n_Q = 2, \quad e_1(t) = j(t), \quad e_2(t) = v(t), \quad r_1 = 0, \quad r_2 = -1, \quad D_{a,1,0} = \frac{L_1^2 R_2}{(L_1 + L_2)^2}, \\ D_{a,1,1} &= \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}, \quad D_{a,2,0} = \frac{-L_1}{L_1 + L_2}, \quad n = 1, \quad l = 1, \quad \underline{A}_1 = -\frac{R_2}{L_1 + L_2}, \quad \vec{x}_A(t) = (i_{L_1}(t), i_{L_2}(t))^t, \\ \vec{x}_{A,t_0} &= (i_{L_1,t_0}, i_{L_2,t_0})^t, \quad x_{t_0} = i_{L_1,t_0}, \quad x(t) = i_{L_1}(t), \quad \widetilde{F}_{e_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{F}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$h_{a,1}(t) = -\frac{(R_2 L_1)^2}{(L_1 + L_2)^3} e^{-\frac{R_2}{L_1 + L_2} t}, \quad h_{a,2}(t) = \frac{L_1 R_2}{(L_1 + L_2)^2} e^{-\frac{R_2}{L_1 + L_2} t} \quad (5.48)$$

(5.38) entspricht der letzten Gleichung in Satz 5.1 für $a(t) = i_{L_1}(t) = x_{A,1}(t)$.

Die in Satz 5.1 mitberücksichtigten, differenzierenden Netzwerkmodelle und das Problem, dass eine Lösung im Bereich gewöhnlicher stückweise stetiger Funktionen bei beliebiger Auswahl von \vec{x}_{A,t_0} möglicherweise nicht existiert (Beispiel 5.2), ergeben sich zumeist bei zu starken Vereinfachungen. Vernachlässigt man z.B. in Beispiel 5.1 den Widerstand ($R = 0$), so lauten die Zweiggleichungen für $t > t_S$:

$$u_R(t) = 0, \quad u_S(t) = 0, \quad u_Q(t) = v(t), \quad i_C(t) = C \frac{du_C}{dt}$$

Aus der Maschengleichung folgt

$$u_C(t) = v(t), \quad (5.49)$$

woraus mit den Knotengleichungen sofort folgt

$$-i_Q(t) = i_R(t) = i_S(t) = i_C(t) = C \frac{dv(t)}{dt}. \quad (5.50)$$

(5.49) ist wiederum eine zustandsreduzierende algebraische Gleichung nach Def. 5.7.

$i_C(t)$ stimmt jetzt mit der allgemeinen Antwort (5.42) überein, wenn man folgende spezielle Wahl trifft:

$$\begin{aligned} a(t) &= i_C(t), \quad n_Q = 1, \quad e_1(t) = v(t), \quad r_1 = 0, \\ n &= 0 \quad (\Rightarrow a_{d,1,t_0}(t) \equiv a_{zi,t_0}(t) \equiv h_{a,1}(t) \equiv 0), \\ D_{a,1,0} &= 0, \quad D_{a,1,1} = C \end{aligned} \quad (5.51)$$

Somit ändert sich das Verhalten des Netzwerkmodells bei Vernachlässigung des Widerstands R grundlegend. Aus einem Modell mit einem Freiheitsgrad (u_{C,t_0}) und einer ausgeprägten Eigendynamik, die durch die charakteristische Frequenz $\underline{A} = -\frac{1}{RC}$ und die Funktion $h_a(t) = -\frac{1}{R^2 C} e^{-\frac{1}{RC} t}$ repräsentiert wird (siehe (5.47)), ist ein Netzwerk geworden, das keine Eigendynamik und keinen Freiheitsgrad mehr hat und bei dem alle Spannungen und Ströme entweder verschwinden oder durch die Momentanwerte von $v(t)$ und $\frac{d}{dt}v(t) = v^{(1)}(t)$ festgelegt sind. Da die Modellantwort $a(t)$ auf die Anregung $e(t)$ hier ebenfalls **nicht** von „vergangenen“ Zeiten ($t' < t$) abhängt, scheint das Modell kein Gedächtnis zu haben. Es ist bei diesem Netzwerkmodell auch sofort einsichtig, dass $v(t)$ differenzierbar vorausgesetzt werden muss, da man bei Verletzung dieser Voraussetzung den Strom $i_C(t)$ gar nicht als gewöhnliche Funktion berechnen kann.

Definition 5.10

Ein Netzwerkmodell, wie es in Satz 5.1 beschrieben wird, wird als Modell ohne Gedächtnis (memoryless) oder als nicht dynamisch bezeichnet, wenn die ersten drei Terme auf der rechten Seite von (5.42) bei beliebiger Auswahl von $a(t)$ immer verschwinden und $a(t)$ somit unmittelbar von den Momentanwerten der Quellenfunktionen $e_1(t), \dots, e_{n_Q}(t)$ und deren Ableitungen abhängt. Trifft dies nicht zu, so bezeichnet man das Netzwerkmodell als ein Modell mit Gedächtnis oder als ein Modell mit Dynamik.

Der eigentliche Grund für den Verlust des Gedächtnisses und der Eigendynamik und des Auftretens von $v^{(1)}(t)$ in den Antwortfunktionen liegt beim Beispiel 5.3 mit $R = 0$ im Auftreten der zustandsreduzierenden Gleichung (5.49).

Da für $R = 0$ das Netzwerkmodell keinen Freiheitsgrad mehr hat, verliert das Netzwerkmodell auch die Fähigkeit, an einen beliebigen Wert der Kondensatorspannung $u_C(t_S^-)$ vor dem Schalten stetig auszuschließen, was für $R \neq 0$ problemlos möglich war (siehe (5.16) und (5.17)). Denn aufgrund von (5.49) gilt $n_R = 1$ und es gibt inkonsistente Anfangswerte. Denn wählt man $v(t) \equiv 0$, so gilt unmittelbar nach dem Schalten bei $t = t_S$ die Gleichung (5.49), woraus unmittelbar folgt:

$$u_C(t_S^+) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_S \\ t > t_S}} u_C(t) = 0 \quad (5.52)$$

Es gilt daher, falls die Kapazität für $t < t_S$ aufgeladen war,

$$u_C(t_S^-) \neq u_C(t_S^+). \quad (5.53)$$

Die Kondensatorspannung springt also bei $t = t_S$. Die Vorgabe der Zielanfangsbedingung $u_{C,t_S} = u_C(t_S^-) \neq 0$ ist also mit den Netzwerkgleichungen nach dem Schalten bei $t = t_S$ unverträglich! Dadurch lässt sich $i_C(t)$ auch nicht mehr vollständig über $i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$ berechnen, da $u_C(t)$ im klassischen Sinne nicht mehr einmal differenzierbar ist.

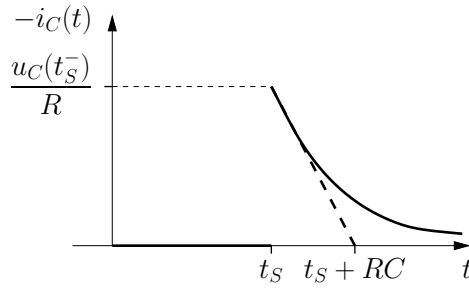
Der Fall, dass vor dem Schalten bei $t = t_S$ Anfangswerte $\vec{x}_A(t_S^-)$ vorgegeben werden, für die es trotz hinreichend glatter Vorgabe der Quellenfunktionen keine Lösung gibt, so dass $\vec{x}_A(t_S^+) = \vec{x}_A(t_S^-)$ gilt und alle Netzwerkvariablen im Bereich der gewöhnlichen stückweise stetigen Funktionen bleiben, ist im Satz 5.1 mitberücksichtigt. Auch in diesem Fall gilt (5.42) für $t > t_S$, aber es gilt $\vec{x}_A(t_S^-) \neq \vec{x}_A(t_S^+)$, genau wie das gerade behandelte Beispiel 5.1 mit $R = 0$ zeigt.

Um nun ein Gefühl dafür zu bekommen, wie $i_C(t)$ sich für $R = 0$ in der Nähe von t_S verhält, bedient man sich eines Hilfsmittels, das in der Mathematik bei der Darstellung von sogenannten „verallgemeinerten Funktionen oder Distributionen“ eine Schlüsselrolle spielt. Man nimmt zunächst $R > 0$ und die dann mögliche Darstellung (5.18) mit $v(t) \equiv 0$ an und lässt dann für $R > 0$ $R \rightarrow 0$ gehen und betrachtet das Verhalten von $i_C(t)$ bei diesem Grenzübergang.

Fall A)

Sei also zunächst $R > 0$ und $v(t) \equiv 0$. Mit (5.18) folgt

$$i_C(t) = \begin{cases} 0 & , t < t_S \\ -\frac{1}{R} u_C(t_S^-) e^{-\frac{(t-t_S)}{RC}} & , t > t_S \end{cases} \quad (5.54)$$

Abbildung 5.4: $i_C(t)$ nach (5.54)**Fall B)**

Einen vergleichbaren Stromverlauf bekommt man, wenn man wieder für $R > 0$ zum Zeitpunkt $t_S \leq t_0$ schaltet, und $v(t)$ und u_{C,t_0} in (5.19) für $t_e > t_0$ folgendermaßen wählt

$$v(t) = \begin{cases} u_{C,t_0} & t < t_e \\ 0 & t > t_e \end{cases} \quad (5.55)$$

Damit ergibt sich aus (5.19) für $t_S < t < t_e$:

$$\begin{aligned} i_C(t) &= \frac{u_{C,t_0}}{R} \left(1 - e^{\frac{(t_0-t)}{RC}} - \frac{e^{-\frac{t}{RC}}}{RC} \int_{t_0}^t e^{\frac{t'}{RC}} dt' \right) \\ &= \frac{u_{C,t_0}}{R} \left(1 - e^{\frac{(t_0-t)}{RC}} - e^{-\frac{t}{RC}} \left(e^{\frac{t'}{RC}} \Big|_{t'=t_0}^{t'=t} \right) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

und für $t > t_e$:

$$i_C(t) = -\frac{u_{C,t_0}}{R} e^{-\frac{(t-t_e)}{RC}}$$

Insgesamt entspricht B) also wieder (5.54) wenn man t_S und $u_C(t_S^-)$ im Fall A) mit t_e und u_{C,t_0} im Fall B) identifiziert. Im Fall B) impliziert die Wahl von $v(t)$ in Verbindung mit u_{C,t_0} sofort

$$u_C(t_S^-) = u_C(t_S^+) = u_{C,t_0}. \quad (5.56)$$

Für die gesamte, im Widerstand verbrauchte Joulsche Wärme W_J impliziert A) sofort:

$$\begin{aligned} W_J &= \int_{-\infty}^{\infty} R i_C^2(t) dt = \int_{t_S}^{\infty} \frac{u_C^2(t_S^-)}{R} e^{-\frac{2(t-t_S)}{RC}} dt \\ &= u_C^2(t_S^-) \left(-\frac{RC}{2} \right) \frac{1}{R} e^{-\frac{2(t-t_S)}{RC}} \Big|_{t=t_S}^{t=\infty} \\ &= \frac{1}{2} C u_C^2(t_S^-) \end{aligned} \quad (5.57)$$

Entsprechendes gilt im Fall B). Das Ergebnis ist unabhängig vom Widerstandswert gleich der vor dem Schalten im Kondensator gespeicherten Energie.

Für die gesamte durch $i_C(t)$ bewegte Ladung Q_C folgt ferner im Fall A):

$$\begin{aligned}
 Q_C &= \int_{-\infty}^{\infty} i_C(t) dt = \int_{t_S}^{\infty} -\frac{u_C(t_S^-)}{R} e^{-\frac{t-t_S}{RC}} dt \\
 &= u_C(t_S^-) \left(-\frac{1}{R} \right) (-RC) e^{-\frac{t-t_S}{RC}} \Big|_{t=t_S}^{t=\infty} \\
 &= -Cu_C(t_S^-)
 \end{aligned} \tag{5.58}$$

Wiederum gilt entsprechendes für B). Auch hier ist das Ergebnis von R unabhängig und entspricht der Tatsache, dass der Kondensator seine zum Zeitpunkt t_S^- gespeicherte Ladung vollständig umlädt, so dass er am Ende des Ausgleichsvorganges in beiden Fällen vollständig entladen ist.

Wir sehen, dass man $i_C(t)$ unabhängig von R (also auch für $R \rightarrow 0$) in beiden Fällen ein festes (R unabhängiges) Integral zuordnen kann. Was passiert nun mit $i_C(t)$ in beiden Fällen für $R \rightarrow 0$, wenn man das Verhalten von $i_C(t)$ für $R \rightarrow 0$ punktweise für festes t betrachtet. Zunächst ist festzustellen, dass die natürliche Frequenz $\underline{A} = -\frac{1}{RC}$ bei festem $C > 0$ für $R \rightarrow 0$ die komplexe Ebene verlässt. Da ferner bei festen $t > t_S$ und $C > 0$ immer aufgrund von Bemerkung 5.4 gilt

$$\lim_{\substack{R \rightarrow 0 \\ R > 0}} \frac{1}{R} e^{-\frac{(t-t_S)}{RC}} = 0 \tag{5.59}$$

folgt im Fall A):

$$\lim_{\substack{R \rightarrow 0 \\ R > 0}} i_C(t) = \begin{cases} 0 & , t < t_S \\ 0 & , t > t_S \end{cases}$$

Entsprechendes gilt im Fall B).

Betrachtet man den Grenzübergang also in diesem klassischen punktweisen Sinne, so ergibt sich als Grenzwert, bis auf das unbekannte Verhalten bei $t = t_S$, also die Nullfunktion. Dies führt jedoch sofort auf einen Widerspruch, da jede gewöhnliche Funktion, die überall bis auf den Punkt $t = t_S$ gleich 0 ist, die Eigenschaft hat, dass ihr Integral über die reelle Achse ebenfalls gleich Null ist. Andererseits erwartet man jedoch, dass dieses Integral wieder den über (5.58) bestimmten Wert ungleich Null annimmt.

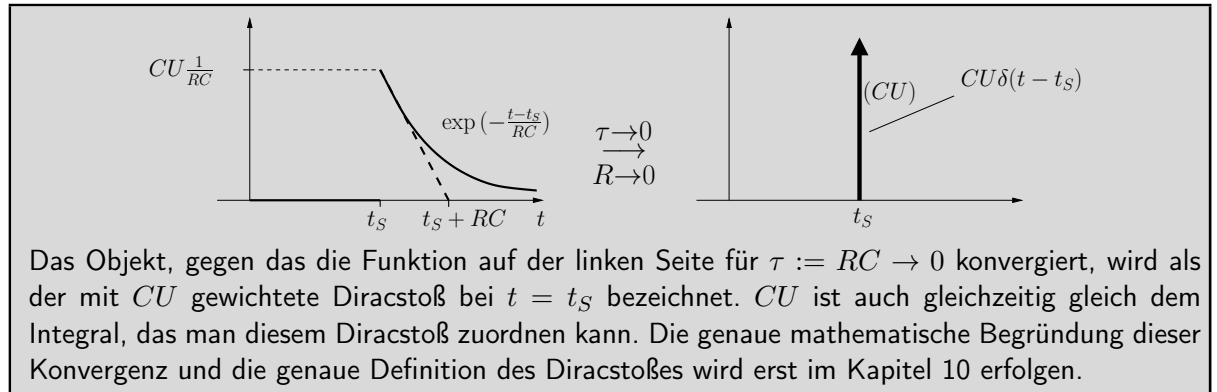
Um diesen bei Verwendung des punktweisen Grenzübergangs auftretenden Widerspruch aufzulösen, müssen wir den Begriff der Funktion erweitern und elementare „verallgemeinerte Funktionen“ oder „Distributionen“ wie den „Diracstoß“ sowie den entsprechenden Grenzwertbegriff einführen. Die genaue Beschäftigung damit wird jedoch auf das Kapitel 10 verschoben.

Als Fazit soll jedoch folgendes festgehalten werden:

Bemerkung 5.3

Entsteht ein lineares, zeitinvariantes Netzwerkmodell durch Öffnen und Schließen von Schaltern zum Zeitpunkt $t = t_S$ und gibt es zustandsreduzierende algebraische Gleichungen für $t > t_S$, sodass die Anfangswerte $\vec{x}_A(t_S^-)$ vor dem Schalten (t_S^-) im Widerspruch zu den Netzwerkgleichungen nach dem Schalten (t_S^+) stehen können, so muss man damit rechnen, dass der durch das Schalten ausgelöste Ausgleichsvorgang nicht mehr vollständig durch gewöhnliche Funktionen beschreibbar ist (Fall A). Verletzt man bei einem differenzierenden Netzwerkmodell die Voraussetzung, dass die anregenden Urspannungen und Urströme einer bestimmten Differenzierbarkeitsordnung unterliegen sollten, so muss man ebenfalls damit rechnen, dass die Reaktion des Netzwerkmodells nicht mehr vollständig durch gewöhnliche Funktionen beschreibbar ist (Fall B).

Definition 5.11



Hieraus folgt unmittelbar mit $\tau = RC$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_C(t) &= \frac{1}{C} i_C(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & , t < t_S \\ -u_C(t_S^-) \frac{1}{\tau} e^{-\frac{(t-t_S)}{\tau}} & , t > t_S \end{array} \right\} \xrightarrow[\tau \rightarrow 0]{R \rightarrow 0} -u_C(t_S^-) \delta(t - t_S) \\ &= (u_C(t_S^+) - u_C(t_S^-))|_{R=0} \delta(t - t_S) \end{aligned} \quad (5.60)$$

In diesem Sinne entspricht also die Ableitung der an der Stelle $t = t_S$ unstetigen, aber ansonsten konstanten Funktion $u_C|_{R=0}(t)$ dem mit der Sprunghöhe bei $t = t_S$ gewichteten Diracstoß. Dieses allgemein gültige Ergebnis wird streng im Kapitel 10 bewiesen.

5.3 Asymptotische Stabilität und die Darstellung der Antwort im Eingeschwungenen Zustand

Bemerkung 5.4

Ist $\Re\{\underline{A}\} < 0$, so gilt für $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^k e^{\underline{A}t} = 0 \quad (5.61)$$

$$\int_0^\infty |t^k e^{\underline{A}t}| dt < \infty \quad (5.62)$$

(5.62) bedeutet, dass $t^k e^{\underline{A}t}$ auf der positiven reellen Achse absolut integrierbar ist.

Beweis: Sei $t > 0$

$$\begin{aligned}
 |t^k e^{\underline{A}t}| &= t^k \left| e^{\Re\{\underline{A}\}t + j\Im\{\underline{A}\}t} \right| \\
 &= t^k \left| e^{\Re\{\underline{A}\}t} e^{j\Im\{\underline{A}\}t} \right| \\
 &= t^k \left| e^{\Re\{\underline{A}\}t} \right| |\cos(\Im\{\underline{A}\}t) + j \sin(\Im\{\underline{A}\}t)| \\
 &= t^k \left| e^{\Re\{\underline{A}\}t} \right| \sqrt{\underbrace{\cos^2(\Im\{\underline{A}\}t) + \sin^2(\Im\{\underline{A}\}t)}_1} \\
 &= t^k e^{\Re\{\underline{A}\}t}
 \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\ln |t^k e^{\underline{A}t}| = \ln(t^k e^{\Re\{\underline{A}\}t}) = k \ln t + \Re\{\underline{A}\}t = t \left(\underbrace{k \frac{\ln t}{t}}_{\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0} + \underbrace{\Re\{\underline{A}\}}_{< 0} \right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} -\infty$$

Da $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x) = 0$ gilt, folgt hieraus (5.61).

Ferner gilt:

$$\begin{aligned}
 \int_0^x |t^k e^{\underline{A}t}| dt &= \int_0^x t^k e^{\Re\{\underline{A}\}t} dt \\
 &= \int_0^x \underbrace{t^k e^{\frac{1}{2}\Re\{\underline{A}\}t}}_{\leq M \text{ nach (5.61)}} e^{\frac{1}{2}\Re\{\underline{A}\}t} dt \\
 &\leq M \frac{2}{\Re\{\underline{A}\}} e^{\frac{1}{2}\Re\{\underline{A}\}t} \Big|_{t=0}^{t=x} \\
 &= M \frac{2}{\Re\{\underline{A}\}} \left(e^{\frac{1}{2}\Re\{\underline{A}\}x} - 1 \right) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{2M}{-\Re\{\underline{A}\}} < \infty
 \end{aligned}$$

Es sei wieder Beispiel 5.1 betrachtet und der Spezialfall $v(t) \equiv 0$. Dann folgt für den Strom durch die Kapazität aus (5.18) bzw. (5.19) für $t > t_S$ bzw. $t > t_0$:

$$i_C(t) = i_{C,zi}(t) = -\frac{1}{R} \begin{Bmatrix} u_C(t_S^-) e^{-\frac{(t-t_S)}{RC}} \\ u_{C,t_0} e^{-\frac{(t-t_0)}{RC}} \end{Bmatrix} \quad (5.63)$$

Für $R > 0$ und $C > 0$ folgt somit sofort in beiden Fällen:

$$\Re\{\underline{A}\} = \Re\left\{-\frac{1}{RC}\right\} < 0 \quad (5.64)$$

und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i_C(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} i_{C,zi}(t) = 0. \quad (5.65)$$

Diese Eigenschaft wird allgemein als asymptotische Stabilität bezeichnet.

Definition 5.12 (asymptotische Stabilität)

Ein Netzwerkmodell, wie es in Satz 5.1 beschrieben wird, heißt *asymptotisch stabil*, wenn für das unerregte Netzwerkmodell ($e_1(t) \equiv e_2(t) \equiv \dots \equiv e_{n_Q}(t) \equiv 0$) bei beliebiger Auswahl von $a(t)$ und beliebiger Auswahl der freien Zustände \vec{x}_{t_0} gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0 \quad (5.66)$$

Unter den gegebenen Voraussetzungen folgt für beliebiges $a(t)$ aus Satz 5.1

$$a(t) \equiv a_{zi}(t) \quad (5.67)$$

und mit Bemerkung 5.4 folgt sofort:

Satz 5.2

Ein Netzwerkmodell, wie es in Satz 5.1 beschrieben ist, ist genau dann *asymptotisch stabil*, wenn alle natürlichen Frequenzen des Netzwerkmodells einen echt negativen Realteil ($\Re\{\underline{A}\} < 0$) haben.

Beweis:

Da das Zeitverhalten von $a_{zi}(t)$ aus (5.42) durch endlich viele Terme der Form (5.43) bestimmt wird und für alle vorkommenden natürlichen Frequenzen Bemerkung 5.4 gilt, ist die Voraussetzung $\Re\{\underline{A}\} < 0$ für alle vorkommenden natürlichen Frequenzen sicher hinreichend, um die asymptotische Stabilität zu erzwingen. Gilt andererseits $\Re\{\bar{A}\} \geq 0$ für eine der natürlichen Frequenzen des Netzwerkmodells, so existiert der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} t^k e^{\bar{A}t}$ entweder nicht oder er ist ungleich 0. Da in Bemerkung 8.30 gezeigt wird, dass es immer einen Anfangszustand \vec{x}_{t_0} und immer eine Netzwerkvariable $a(t)$ so gibt, dass $a_{zi}(t) = ce^{\bar{A}t}$ mit $c \neq 0$ gilt, folgt, dass das Netzwerkmodell in diesem Fall nicht asymptotisch stabil ist. Somit folgt insgesamt die Behauptung.

Asymptotisch stabile Netzwerkmodelle haben den großen Vorteil, dass man bei diesen, zumindest im Grenzfall $t \gg t_S$, von einer radikal vereinfachten Beschreibung des Systemverhaltens, die Darstellung der Antwort im eingeschwungenen Zustand genannt wird, ausgehen kann.

Um dies zu motivieren, sei wieder Beispiel 5.1 betrachtet, wobei angenommen werden soll, dass $v(t)$ für $t \geq t_1 \geq t_Q$ durch

$$v(t) = v_\infty(t) \quad (5.68)$$

gegeben ist, wobei $v_\infty(t)$ eine für alle Zeiten gegebene und für negative Zeiten beschränkte, stückweise stetige Funktion sein soll mit

$$|v_\infty(t)| \leq M < \infty \text{ für } t \leq 0. \quad (5.69)$$

Wichtig für das Weitere ist nun, dass für $R > 0$, $C > 0$ also $\Re\{-\frac{1}{RC}\} < 0$ das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-t')}{RC}} v_\infty(t') dt'$ existiert. Die Existenz des Integrals zeigen die folgenden Abschätzungen, wobei $|v_\infty(x)| \leq M_t < \infty$ für $x \leq t$ sein soll und $t_u < t$ beliebig gewählt

werden kann:

$$\left| \int_{t_u}^t e^{-\frac{(t-t')}{RC}} v_{\infty}(t') dt' \right| \leq \int_{t_u}^t e^{-\frac{(t-t')}{RC}} |v_{\infty}(t')| dt' \leq$$

$$M_t \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-t')}{RC}} dt' \stackrel{(t-t')=x}{=} M_t \int_{\infty}^0 e^{-\frac{x}{RC}} (-dx) = M_t \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{RC}} dx = M_t RC \quad (5.70)$$

Sei nun $t > t_S, t > t_1, R > 0, C > 0$ und $v(t)$ wie in (5.68) gegeben, dann gilt mit (5.69) folgende Abschätzung für den Strom $i_C(t)$ durch die Kapazität aus (5.18):

$$\left| i_C(t) - \frac{1}{R} v_{\infty}(t) + \frac{1}{R^2 C} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-t')}{RC}} v_{\infty}(t') dt' \right| \stackrel{\max\{t_S, t_1\}=t_2}{\leq}$$

$$\left| -\frac{1}{R} u_C(t_S^-) e^{-\frac{(t-t_S)}{RC}} + \frac{1}{R^2 C} \int_{-\infty}^{t_2} e^{-\frac{(t-t')}{RC}} v_{\infty}(t') dt' - \frac{1}{R^2 C} \int_{t_S}^{t_2} e^{-\frac{(t-t')}{RC}} v(t') dt' \right| \stackrel{M_0=M_{t_2}+\max_{t_S \leq t \leq t_2} |v(t)|}{\leq}$$

$$\frac{1}{R} |u_C(t_S^-)| e^{-\frac{(t-t_S)}{RC}} + \frac{M_0}{R^2 C} \int_{-\infty}^{t_2} e^{-\frac{(t-t')}{RC}} dt' \stackrel{x=(t-t')}{=} \frac{1}{R} |u_C(t_S^-)| e^{-\frac{(t-t_S)}{RC}} + \frac{M_0}{R^2 C} \int_{t-t_2}^{\infty} e^{-\frac{x}{RC}} dx$$

$$\leq \frac{1}{R} (|u_C(t_S^-)| + M_0) e^{-\frac{(t-t_2)}{RC}} \leq \epsilon$$

$$\text{für ein beliebiges } \epsilon > 0, \text{ falls } \ln \left(\frac{|u_C(t_S^-)| + M_0}{R\epsilon} \right) RC < \min \{ (t - t_S), (t - t_1) \} \quad (5.71)$$

Das heißt, $i_C(t)$ ist nach einer hinreichend langen Einschwingzeit $t - t_S \gg RC, (t - t_1) \gg RC$ über die vom vorgegebenen Anfangswert $u_C(t_S^-)$ und von den Zeitpunkten t_1, t_S unabhängige Darstellung

$$i_C(t) \approx i_{C,ez}(t) = \frac{1}{R} v_{\infty}(t) - \frac{1}{R^2 C} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-t')}{RC}} v_{\infty}(t') dt' \quad (5.72)$$

gegeben. Nach der Einschwingzeit ist die Antwortfunktion $i_C(t)$ also eine eindeutige Funktion der Erregung $v_{\infty}(t)$. Die sich nach einer hinreichend langen Einschwingzeit ergebende, stark vereinfachte Darstellung $i_{C,ez}(t)$ wird Darstellung von $i_C(t)$ im eingeschwungenen Zustand genannt.

Um diesen wichtigen Zusammenhang zusätzlich zu verdeutlichen, sollen (5.18) und (5.72) nochmals für den Spezialfall verglichen werden, bei dem der vorgegebene Anfangswert $u_C(t_S^-)$ zum Zeitpunkt $t_S = 0$ verschwindet und $v_{\infty}(t) = V_0 = \text{konst}$ und $v(t) = V_0$ für $t \geq t_S = 0$ (also $t_1 = 0$) gewählt wird. Aus (5.18) folgt für $t \geq 0$

$$i_C(t) = \frac{1}{R} V_0 - \frac{1}{R^2 C} \int_0^t e^{-\frac{(t-t')}{RC}} V_0 dt'$$

$$= \frac{1}{R} V_0 - \frac{V_0}{R} e^{-\frac{(t-t')}{RC}} \Big|_{t'=0}^{t'=t}$$

$$= \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

Aus (5.72) folgt für $t \gg RC$

$$i_C(t) \approx i_{C,ez}(t) = \frac{1}{R_0} V_0 - \frac{1}{R^2 C} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-t')}{RC}} V_0 dt' = \frac{1}{R} V_0 - \frac{V_0}{R} e^{-\frac{(t-t')}{RC}} \Big|_{t'=-\infty}^{t'=t} = 0$$

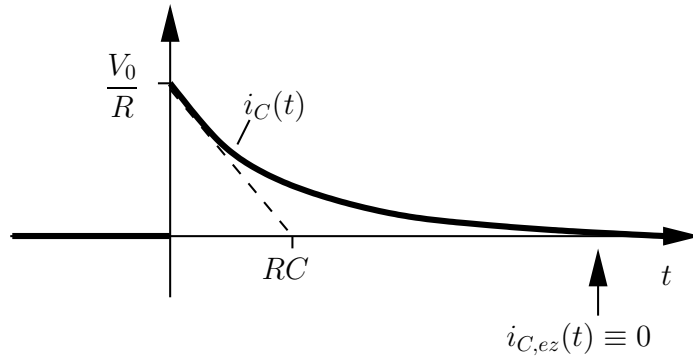


Abbildung 5.5: $i_C(t)$ nach (5.18) für $t_S = t_1 = 0$, $u_C(0^-) = 0$ und $v_\infty(t) = V_0$

Die obige Rechnung ist immer für $\Re\{-\frac{1}{RC}\} < 0$ gültig, also für eine Wahl von R und C , bei der das Netzwerkmodell aus Beispiel 5.1 asymptotisch stabil ist. Im vorliegenden Fall ist $e_\infty(t)$ konstant und $i_{C,ez}(t)$ entspricht ebenfalls einer Konstante, die im vorliegenden Spezialfall identisch Null ist.

Dies ist die spezielle Realisierung einer generellen Eigenschaft linearer, zeitinvarianter, asymptotisch stabiler Netzwerke, die in Satz 5.4 generell bewiesen werden wird. Bei Anregung mit einer Gleichspannung oder einem Gleichstrom ($e_\infty(t) = \text{konst.}$) gehen diese Netzwerke nach einer gewissen Einschwingzeit asymptotisch in einen zeitunabhängigen, eingeschwungenen Zustand über, der sich sofort aus der Darstellung der Netzwerkantwort im eingeschwungenen Zustand ergibt.

Auch diese für Beispiel 5.1 gezeigten Zusammenhänge sind wiederum allgemein gültig, wie sich anhand der Darstellung (5.42) wiederum leicht zeigen lässt.

Satz 5.3 (Darstellung der Antwort im eingeschwungenen Zustand)

Sei ein Netzwerkmodell wie in Satz 5.1 gegeben. Das Netzwerkmodell sei asymptotisch stabil. $e_{k,\infty}(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$ seien $r_k + 1$ -fach differenzierbare, für alle t definierten Funktionen mit $|e_{k,\infty}(t)| \leq M_k < \infty$ für $t \leq 0$. Ferner gibt es Zeitpunkte $t_k \geq t_Q$, $1 \leq k \leq n_Q$, so dass gilt:

$$e_k(t) = e_{k,\infty}(t) \text{ für } t \geq t_k, \quad 1 \leq k \leq n_Q \quad (5.73)$$

Sei $t_m = \max\{t_k, 1 \leq k \leq n_Q\}, t_S\}$ dann gilt für jede Variable $a(t)$ des Netzwerkmodells:

$$a(t) \xrightarrow{t-t_m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n_Q} \left(\int_{-\infty}^t h_{a,k}(t-t') e_{k,\infty}(t') dt' + \sum_{i=0}^{r_k+1} D_{a,k,i} e_{k,\infty}^{(i)}(t) \right) =: a_{ez}(t) \quad (5.74)$$

Die rechte Seite von (5.74) beschreibt dabei den eingeschwungenen Zustand von $a(t)$, der für

$$t - t_m \gg \max_{1 \leq i \leq l} \left(-\frac{1}{\Re\{\underline{A}_i\}} \right) =: \tau \quad (5.75)$$

also nach einer hinreichend großen Einschwingzeit immer angenommen wird. $a_{ez}(t)$ hängt nur von den Funktionen $e_{k,\infty}(t)$ ab und nicht vom Anfangszustand $\vec{x}_{t_s} = \vec{x}(t_s^+)$ nach dem Schalten ab und wird auch Darstellung der Antwort $a(t)$ auf die Erregungen $e_{k,\infty}(t)$ im eingeschwungenen Zustand genannt.

Beweis: Sei $M_{t_m} := \sup_{t \leq t_m} \left(\max_{1 \leq k \leq n_Q} |e_{k,\infty}(t)| \right)$, und $\overline{M}_{t_m} := \max_{t_S \leq t \leq t_m} \left(\max_{1 \leq k \leq n_Q} |e_k(t)| \right)$, so gilt für $t \geq t_m$:

$$\begin{aligned} & \left| a(t) - \left(\sum_{k=1}^{n_Q} \int_{-\infty}^t h_{a,k}(t-t') e_{k,\infty}(t') dt' + \sum_{i=0}^{r_k+1} D_{a,k,i} e_{k,\infty}^{(i)}(t) \right) \right| = \\ & \left| a_{zi,t_S}(t) + \sum_{k=1}^{n_Q} \left(a_{d,k,t_S}(t) + \int_{t_S}^{t_m} h_{a,k}(t-t') e_k(t') dt' - \int_{-\infty}^{t_m} h_{a,k}(t-t') e_{k,\infty}(t') dt' \right) \right| \leq \\ & |a_{zi,t_S}(t)| + \sum_{k=1}^{n_Q} \left(|a_{d,k,t_S}(t)| + (M_{t_m} + \overline{M}_{t_m}) \int_{-\infty}^{t_m} |h_{a,k}(t-t')| dt' \right) \stackrel{x=t-t'}{=} \\ & |a_{zi,t_S}(t)| + \sum_{k=1}^{n_Q} \left(|a_{d,k,t_S}(t)| + (M_{t_m} + \overline{M}_{t_m}) \int_{t-t_m}^{\infty} |h_{a,k}(x)| dx \right) \end{aligned}$$

Aufgrund von Satz 5.1 sind $a_{zi,t_S}(t)$ und $a_{d,k,t_S}(t)$, $h_{a,k}(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$ Linearkombinationen von Termen der Gestalt (5.43), deren Abklingverhalten jeweils durch die Zeitkonstanten $-\frac{1}{\Re\{\underline{A}_i\}}$ bestimmt wird, wobei das Gesamtverhalten für $(t - t_m) \rightarrow \infty$ durch das Maximum dieser Zeitkonstanten τ bestimmt wird. Daraus ergibt sich die Behauptung.

Da die Einschwingzeit τ von stabilen elektronischen Netzwerkmodellen typischerweise im Mikro- und Nanosekundenbereich liegt, kann man daher bereits im Millisekundenabstand von t_m davon ausgehen, dass die Schaltung sich im eingeschwungenen Zustand befindet, was die Beschreibung von linearen, zeitinvarianten Netzwerkmodellen sehr erleichtert.

Bemerkung 5.5 (Superpositionsprinzip im eingeschwungenen Zustand)

Es seien die Voraussetzungen von Satz 5.3 gegeben. Ferner sei

$$a_{k,e_z}(t) := \int_{-\infty}^t h_{a,k}(t-t') e_{k,\infty}(t') dt' + \sum_{i=0}^{r_k+1} D_{a,k,i} e_{k,\infty}^{(i)}(t). \quad (5.76)$$

$a_{k,e_z}(t)$ ergibt sich als Antwort im eingeschwungenen Zustand für den Spezialfall:

$$e_{j,\infty}(t) \equiv 0 \text{ für alle } t, e_j(t) \equiv 0, t \geq t_Q, 1 \leq j \leq n_Q, j \neq k \quad (5.77)$$

In diesem Spezialfall gilt also $t_j = t_Q$ für $1 \leq j \leq n_Q$, $j \neq k$ und daher

$$a(t) \xrightarrow{t - \max\{t_k, t_S\} \rightarrow \infty} a_{ez}(t) = a_{k,ez}(t). \quad (5.78)$$

Der allgemeine Fall ergibt sich also einfach als Überlagerung (Superposition) der Spezialfälle (5.76), (5.77), (5.78).

Der Beweis ergibt sich direkt aus Satz 5.3.

Bemerkung 5.6

Es seien die Voraussetzungen von Satz 5.3 gegeben. Ferner seien die $e_k(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$ für alle t bekannt und $r_k + 1$ -fach differenzierbar und für $t < 0$ beschränkt. Dann kann man in Satz 5.3

$$e_k(t) = e_{k,\infty}(t) \text{ für alle } t, 1 \leq k \leq n_Q \quad (5.79)$$

wählen. Dies impliziert $t_m = t_S$. Somit folgt aus (5.74)

$$a(t) \xrightarrow{t - t_S \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n_Q} \left(\int_{-\infty}^t h_{a,k}(t-t') e_k(t') dt' + \sum_{i=0}^{r_k+1} D_{a,k,i} e_k^{(i)}(t) \right) = a_{ez}(t). \quad (5.80)$$

Lässt man den Zeitpunkt der Netzwerkmodellerzeugung t_S zusätzlich gegen $-\infty$ gehen, so gilt

$$a(t) = \sum_{k=1}^{n_Q} \left(\int_{-\infty}^t h_{a,k}(t-t') e_k(t') dt' + \sum_{i=0}^{r_k+1} D_{a,k,i} e_k^{(i)}(t) \right) = a_{ez}(t) \text{ für alle } t. \quad (5.81)$$

5.4 Harmonisch eingeschwungener Zustand und Frequenzgang

Satz 5.4 (Harmonisch eingeschwungener Zustand)

Sei ein Netzwerkmodell wie in Satz 5.3 gegeben. Es gelte $n_Q = 1$ und $e_1(t) = e(t)$. (Der Index $k = 1$ wird im weiteren unterdrückt.) Ab dem Zeitpunkt t_1 stimme $e(t)$ mit der harmonischen Funktion mit dem Zeiger \underline{E} und der Kreisfrequenz ω überein:

$$e(t) = \Re\{\underline{E}e^{j\omega t}\} =: e_{\infty}(t) \text{ für } t \geq t_1 \quad (5.82)$$

Dann ergibt sich aus der Darstellung der Antwort im eingeschwungenen Zustand $a_{ez}(t)$ für die beliebig ausgewählte Zweigvariable $a(t)$ wiederum eine harmonische Funktion der gleichen Kreisfrequenz ω

$$a_{ez}(t) = \Re\{\underline{A}e^{j\omega t}\}, \quad (5.83)$$

für deren Zeiger gilt:

$$\begin{aligned}\underline{A} &= \underline{E} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t') h_a(t') e^{-j\omega t'} dt' + \sum_{i=0}^{r+1} D_{a,i} (j\omega)^i \right) \\ &= \underline{E} \left(\int_{-\infty}^t h_a(t-t') e^{j\omega t'} dt' + \sum_{i=0}^{r+1} D_{a,i} (e^{j\omega t})^{(i)} \right) e^{-j\omega t}\end{aligned}\quad (5.84)$$

$\Re\{\underline{A}e^{j\omega t}\}$ wird als der harmonisch eingeschwungene Zustand der Netzwerkvariablen $a(t)$ bezeichnet, der sich bei Anregung durch eine harmonische Funktion mit der Kreisfrequenz ω asymptotisch nach einer gewissen Einschwingzeit einstellt. Im harmonisch eingeschwungenen Zustand ist die Grundannahme der komplexen Wechselstromrechnung somit erfüllt. Ist das algebraische Gleichungssystem, das sich aus dieser Grundannahme ergibt, eindeutig lösbar, so ergeben sich die Zeiger \underline{A} für alle Netzwerke $a(t)$ aus dieser eindeutigen Lösung. Der bereits erwähnte zeitunabhängige eingeschwungene Zustand ergibt sich hier als Spezialfall für $\omega = 0$, $\underline{E} = E$. Es gilt dann:

$$a_{ez}(t) = A = E \left(\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t') h_a(t') dt' + D_{a,0} \right) \quad (5.85)$$

Dabei ist die oben benutzte Funktion $\Theta(t)$ die Sprungfunktion:

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (5.86)$$

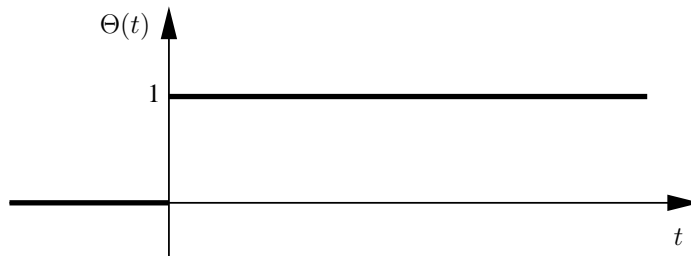


Abbildung 5.6: Die Sprungfunktion

Beweis:

Nach (5.76) gilt für $k = 1$ und $e_{1,\infty}(t) = e_{\infty}(t) = \Re\{\underline{E} e^{j\omega t}\}$

$$a_{ez}(t) = \int_{-\infty}^t h_a(t-t') \Re\{\underline{E} e^{j\omega t'}\} dt' + \sum_{i=0}^{r+1} D_{a,i} \Re\{\underline{E} e^{j\omega t}\}^{(i)}.$$

Es gilt für die Ableitungen:

$$\begin{aligned}\Re\{\underline{E} e^{j\omega t}\}^{(1)} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Re\{\underline{E} e^{j\omega(t+\Delta t)}\} - \Re\{\underline{E} e^{j\omega t}\}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Re\left\{ \underline{E} \frac{e^{j\omega(t+\Delta t)} - e^{j\omega t}}{\Delta t} \right\} \\ &= \Re\left\{ \underline{E} (e^{j\omega t})^{(1)} \right\} = \Re\{\underline{E} j\omega e^{j\omega t}\}\end{aligned}$$

also gilt allgemein für $i > 1$

$$\begin{aligned}\Re\{\underline{E}e^{j\omega t}\}^{(i)} &= \left(\Re\{\underline{E}e^{j\omega t}\}^{(1)}\right)^{(i-1)} = \Re\{\underline{E}j\omega e^{j\omega t}\}^{(i-1)} \\ &= \dots = \Re\{\underline{E}(j\omega)^i e^{j\omega t}\} = \Re\{\underline{E}(e^{j\omega t})^{(i)}\}\end{aligned}$$

Ferner gilt:

$$\int_{-\infty}^t h_a(t-t') \Re\{\underline{E}e^{j\omega t'}\} dt' = \int_{-\infty}^t \Re\{h_a(t-t') \underline{E}e^{j\omega t'}\} dt' = \Re\left\{\int_{-\infty}^t h_a(t-t') \underline{E}e^{j\omega t'} dt'\right\}$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned}a_{ez}(t) &= \Re\left\{\underline{E}\underbrace{\left(\int_{-\infty}^t h_a(t-t')e^{j\omega t'} dt' + \sum_{i=0}^{r+1} D_{a,i} (e^{j\omega t})^{(i)}\right)}_{\underline{g}(t)}\right\} \\ &= \Re\{\underline{E}(\underline{g}(t)e^{-j\omega t}) e^{j\omega t}\}.\end{aligned}$$

Mit

$$\int_{-\infty}^t h_a(t-t')e^{-j\omega(t-t')} dt' \stackrel{t-t'=x}{=} \int_{x=\infty}^{x=0} h_a(x)e^{-j\omega x}(-dx) = \int_0^{\infty} h_a(x)e^{-j\omega x} dx,$$

folgt also insgesamt

$\underline{g}(t)e^{-j\omega t}$ ist keine Funktion von t

und

$$a_{ez}(t) = \Re\left\{\underline{E}\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t')h_a(t')e^{-j\omega t'} dt' + \sum_{i=0}^{r+1} D_{a,i} (j\omega)^i\right)}_{\underline{A}}e^{j\omega t}\right\}$$

und damit die Behauptung.

Definition 5.13

Sei $\underline{g}(t)$ eine über der reellen Achse absolut integrierbare Funktion. Dann existiert

$$\underline{\mathcal{F}}(\underline{g}(t))(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} \underline{g}(t)e^{-j\omega t} dt \quad (5.87)$$

Die Abbildung $\underline{\mathcal{F}}$, die die über der reellen Achse absolut integrierbaren Funktionen \underline{g} auf komplexwertige Funktionen auf der imaginären Achse abbildet, wird Fourier Transformation genannt.

$\underline{\mathcal{F}}$ ist eine eindeutige und lineare Abbildung.

Bezüglich des Beweises der Eineindeutigkeit wird auf die Mathematikvorlesung verwiesen. Die Linearität kann man leicht zeigen. Seien dazu zwei komplexe Konstanten $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$ und zwei absolut integrierbare komplexwertige Funktionen $\underline{g}_1(t)$ und $\underline{g}_2(t)$ gegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\underline{\alpha} \underline{g}_1(t) + \underline{\beta} \underline{g}_2(t)\right)(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\underline{\alpha} \underline{g}_1(t) + \underline{\beta} \underline{g}_2(t)\right) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \underline{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{g}_1(t) e^{-j\omega t} dt + \underline{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{g}_2(t) e^{-j\omega t} dt = \underline{\alpha} \mathcal{F}\left(\underline{g}_1(t)\right)(\omega) + \underline{\beta} \mathcal{F}\left(\underline{g}_2(t)\right)(\omega) \quad (5.88)\end{aligned}$$

(5.84) lässt sich daher auch folgendermaßen schreiben:

$$\underline{A} = \underline{E} \left(\mathcal{F}(\Theta(t)h_a(t))(\omega) + \sum_{i=0}^{r+1} D_{a,i}(j\omega)^i \right) \quad (5.89)$$

Bemerkung 5.7

Wichtige Rechenregeln für komplexe Zahlen

$$\underline{a} = a_r + ja_i, \underline{b} = b_r + jb_i; a_r, a_i, b_r, b_i, c \text{ reell}$$

$$\Re\{\underline{a}\} + \Re\{\underline{b}\} = a_r + b_r = \Re\{\underline{a} + \underline{b}\} \quad (5.90)$$

$$\Re\{\underline{a}\}c = a_rc = \Re\{\underline{a}c\} \quad (5.91)$$

$$\Re\{\underline{a}e^{j\frac{\pi}{2}}\} = \Re\left\{\underbrace{\underline{a}\cos\frac{\pi}{2}}_0 + j\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_1\right\} = \Re\{ja_r - a_i\} = -a_i \quad (5.92)$$

Sei Beispiel 5.1 mit $v(t) = \Re\{\underline{V}e^{j\omega t}\}$ für $t \geq t_1 \geq t_Q$ gegeben. Gesucht ist der eingeschwungene Zustand aller Zweigspannungen und Ströme, der für $R > 0$, $C > 0$ existiert und für $t - t_S \gg RC$, $t - t_1 \gg RC$ angenommen wird. Für $i_C(t)$ ist dieser nach (5.83), (5.84), Satz 5.3 und (5.72) gegeben über

$$i_{C,eZ}(t) = \Re\{\underline{I}_C e^{j\omega t}\}$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_C &= \underline{V} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t') \left(-\frac{1}{R^2 C} e^{-\frac{t'}{RC}} \right) e^{-j\omega t'} dt' + \frac{1}{R} \right) \\ &= \underline{V} \left(\int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{R^2 C} \right) e^{-(\frac{1}{RC} + j\omega)t'} dt' + \frac{1}{R} \right) \\ &= \underline{V} \cdot \left(\left(-\frac{1}{R^2 C} \right) \left(-\frac{1}{1/(RC) + j\omega} \right) e^{-(\frac{1}{RC} + j\omega)t'} \Big|_{t'=0}^{t'=\infty} + \frac{1}{R} \right) \\ &= \underline{V} \cdot \left(\frac{-1}{R + j\omega R^2 C} + \frac{1}{R} \right) = \underline{V} \left(\frac{1}{R} \left(1 - \frac{1}{1 + j\omega RC} \right) \right) \\ &= \frac{\underline{V}}{R} \cdot \frac{1 + j\omega RC - 1}{1 + j\omega RC} = \underline{V} \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC} = \underline{V} \frac{1}{R + 1/(j\omega C)}\end{aligned}$$

Dies ist natürlich genau das Ergebnis, das mit der komplexen Wechselstromrechnung aus Beispiel 5.1 folgt, wenn $v(t)$ harmonisch ist und man sich bei der Berechnung auf den harmonisch eingeschwungenen Zustand (HEZ) beschränkt:

HEZ:

$$\left. \begin{aligned} i_{Q,S,R,C}(t) &= \Re \{ \underline{I}_{Q,S,R,C} e^{j\omega t} \} \\ u_{Q,S,R,C}(t) &= \Re \{ \underline{U}_{Q,S,R,C} e^{j\omega t} \} \end{aligned} \right\} \quad (5.93)$$

KGL:

$$-i_Q(t) = i_S(t) = i_R(t) = i_C(t) \xrightarrow[t=0, t=\pi/2]{\omega} -\underline{I}_Q = \underline{I}_S = \underline{I}_R = \underline{I}_C \quad (5.94)$$

MGL:

$$u_Q(t) = u_S(t) + u_R(t) + u_C(t) \xrightarrow[t=0, t=\pi/2]{\omega} \underline{U}_Q = \underline{U}_S + \underline{U}_R + \underline{U}_C \quad (5.95)$$

ZGL:

$$\left. \begin{aligned} u_R(t) &= Ri_R(t) \xrightarrow[t=0, t=\pi/2]{\omega} \underline{U}_R = R\underline{I}_R \\ u_Q(t) &= v(t) = \Re \{ \underline{V} e^{j\omega t} \} \xrightarrow[t=0, t=\pi/2]{\omega} \underline{U}_Q = \underline{V} \\ u_S(t) &= 0 \xrightarrow[t=0, t=\pi/2]{\omega} \underline{U}_S = 0 \\ i_C(t) &= C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d}{dt} \Re \{ \underline{U}_C e^{j\omega t} \} = \\ &\Re \{ C \underline{U}_C j\omega e^{j\omega t} \} = \Re \{ \underline{I}_C e^{j\omega t} \} \xrightarrow[t=0, t=\pi/2]{\omega} \underline{I}_C = j\omega C \underline{U}_C \end{aligned} \right\} \quad (5.96)$$

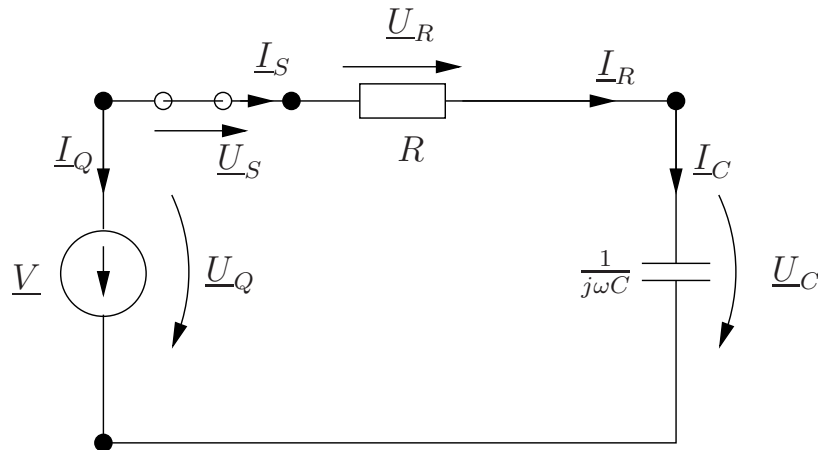


Abbildung 5.7: Netzwerkmodell für den harmonisch eingeschwungenen Zustand

Aus den diesem Netzwerkproblem zugeordneten Gleichungen folgt sofort:

$$\underline{V} = \underline{I}_C R + \underline{I}_C \frac{1}{j\omega C} \Rightarrow \underline{I}_C = \underline{V} \frac{1}{R + 1/(j\omega C)}$$

Das Verhältnis der Zeiger von \underline{I}_C und \underline{V}

$$\frac{\underline{I}_C}{\underline{V}} = \frac{1}{R + 1/(j\omega C)}, \quad (5.97)$$

das nach Satz 5.4 und (5.72)

$$\frac{\underline{I}_C}{\underline{V}} = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t') \left(-\frac{1}{R^2 C} e^{-\frac{t'}{RC}} \right) e^{-j\omega t'} dt' + \frac{1}{R} \quad (5.98)$$

entspricht, ergibt sich also am elegantesten mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung.

Beispiel 5.3

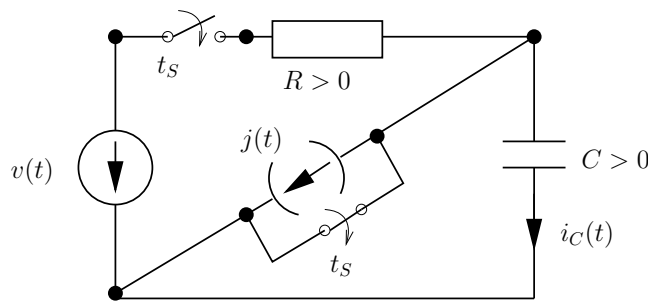


Abbildung 5.8: Netzwerkmodell im Zeitbereich

$$\begin{aligned} v(t) &= \Re\{\underline{V}e^{j\omega_v t}\} \text{ für } t \geq t_v \geq t_Q \\ j(t) &= \Re\{\underline{J}e^{j\omega_j t}\} \text{ für } t \geq t_j \geq t_Q \end{aligned}$$

Gesucht ist für die gegebenen Quellenfunktionen die Darstellung des eingeschwungenen Zustandes $i_{C,eZ}(t)$, in den $i_C(t)$ für $t - t_s \gg RC$, $t - t_v \gg RC$, $t - t_j \gg RC$ übergeht.

Das unerregte Netzwerkmodell aus Abbildung 5.8 entspricht für $t > t_s$ dem unerregten Netzwerk aus Beispiel 5.1. Damit ist der „zero input response“ bei beiden Netzwerken gleich und somit das Netzwerkmodell aus Abbildung 5.8 nach Definition 5.12 asymptotisch stabil.

Nach Bemerkung 5.5 setzt sich $i_{C,eZ}(t)$ additiv zusammen aus den Darstellungen der eingeschwungenen Zustände für die spezielle Wahl der Quellenfunktionen

1. $v(t) = \Re\{\underline{V}e^{j\omega_v t}\}$ für $t \geq t_v$, $j(t) \equiv 0$
2. $v(t) \equiv 0$, $j(t) = \Re\{\underline{J}e^{j\omega_j t}\}$ für $t \geq t_j$

Nach Satz 5.4 ergibt sich sowohl im Fall 1 als auch im Fall 2 aus der Darstellung des eingeschwungenen Zustandes ein harmonisch eingeschwungener Zustand, der sich jeweils mit der komplexen Wechselstromrechnung berechnen lässt.

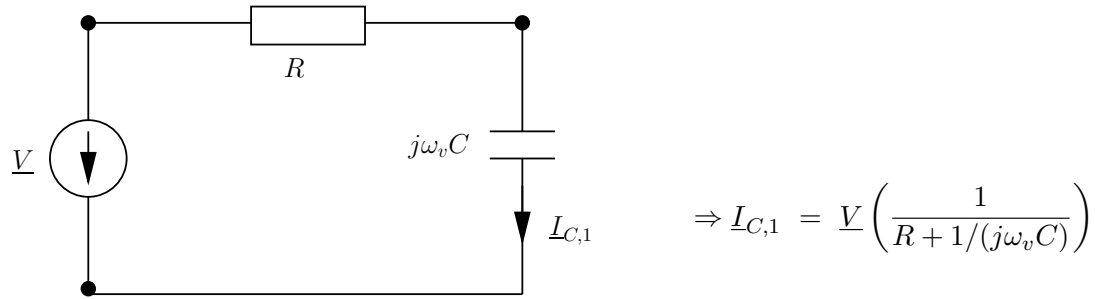


Abbildung 5.9: Netzwerkmodell für den harmonisch eingeschwungenen Zustand von Teilproblem 1

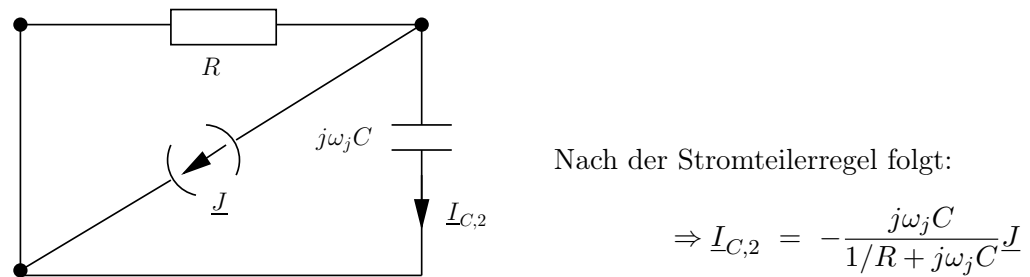


Abbildung 5.10: Netzwerkmodell für den harmonisch eingeschwungenen Zustand von Teilproblem 2

Insgesamt folgt somit:

$$i_{C,ez}(t) = \Re \left\{ \frac{V}{R + 1/(j\omega_v C)} e^{j\omega_v t} \right\} - \Re \left\{ \frac{j\omega_j C J}{1/R + j\omega_j C} e^{j\omega_j t} \right\}$$

Definition 5.14

Sei ein Netzwerkmodell wie in Satz 5.4 gegeben und das Netzwerkmodell sei harmonisch angeregt mit

$$e(t) = \Re \{ \underline{E} e^{j\omega t} \} \text{ für } t \geq t_1 \geq t_Q,$$

sodass der sich nach den Sätzen 5.3 und 5.4 ergebende harmonisch eingeschwungene Zustand einer beliebigen, reellen Linearkombination von Zweigspannungen oder Zweigströmen $o(t)$ wiederum eine harmonische Funktion mit der gleichen Kreisfrequenz

$$o_{ez}(t) = \Re \{ \underline{Q} e^{j\omega t} \}$$

ist. Bestimmt man das Verhältnis der Zeiger \underline{Q} und \underline{E} für jede Frequenz ω , so wird die sich daraus ergebende Funktion von ω

$$\frac{\underline{Q}}{\underline{E}} := \underline{H}(j\omega) \quad (5.99)$$

als Frequenzgang bezeichnet.

Nach Satz 5.4 ist

$$\begin{aligned}\underline{H}_{a_{ez}}(j\omega) &:= \frac{\underline{A}}{\underline{E}} = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t') h_a(t') e^{-j\omega t'} dt' + \sum_{i=0}^{r+1} D_{a,i}(j\omega)^i \\ &= \left(\int_{-\infty}^t h_a(t-t') e^{j\omega t'} dt' + \sum_{i=0}^{r+1} D_{a,i} (e^{j\omega t})^{(i)} \right) e^{-j\omega t}\end{aligned}$$

demnach der Frequenzgang, der der Darstellung der Antwort im eingeschwungenen Zustand von $a(t)$ zugeordnet ist.

Bemerkung 5.8

Die einfachste Methode zur Berechnung von Frequenzgängen ist die komplexe Wechselstromrechnung. Mit dieser Methode, die darauf beruht, alle Zweigspannungen und Zweigströme und alle Spannungs- und Stromquellen als harmonische Funktionen mit gleicher Frequenz ω anzusetzen, können Frequenzgänge auch rein formal im Sinne der Berechnung einer speziellen partikulären Lösung für ein Netzwerkmodell bestimmt werden. Die Voraussetzung der asymptotischen Stabilität ist für diese formale Bestimmung nicht nötig.

5.5 Bestimmung der Darstellung der Antwort im eingeschwungenen Zustand mit Hilfe des Frequenzganges

Regt man das Netzwerkmodell aus Beispiel 5.1 harmonisch an, so kann man den für $t \rightarrow \infty$ sich einstellenden, harmonisch eingeschwungenen Zustand mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung bestimmen. Das Verhältnis der Zeiger, die den harmonisch eingeschwungenen Zustand von $v(t)$ und $i_C(t)$ beschreiben, ergibt sich nach (5.97) zu:

$$\frac{\underline{I}_C}{\underline{V}} = \frac{1}{R + 1/(j\omega C)} = \frac{Cj\omega}{RCj\omega + 1} = \frac{1}{R} \frac{j\omega}{j\omega + 1/(RC)} = \underline{H}_{i_C,ez}(j\omega) \quad (5.100)$$

Dieser Beispielfrequenzgang, dessen Zähler und Nenner Polynome in $j\omega$ sind, ist eine gebrochen rationale Funktion.

Definition 5.15

Eine Funktion $\underline{H}(\underline{s})$ der Form

$$\underline{H}(\underline{s}) = \underline{c} \frac{\underline{P}(\underline{s})}{\underline{Q}(\underline{s})} \quad (5.101)$$

mit normierten Polynomen

$$\left. \begin{aligned} \underline{P}(\underline{s}) &= \underline{s}^m + \underline{\alpha}_{m-1} \underline{s}^{m-1} + \dots + \underline{\alpha}_0 \\ \underline{Q}(\underline{s}) &= \underline{s}^n + \underline{\beta}_{n-1} \underline{s}^{n-1} + \dots + \underline{\beta}_0 \end{aligned} \right\} \quad (5.102)$$

wird gebrochen rationale Funktion genannt.

Formt man $\underline{H}_{i_C,ez}(j\omega)$ ferner nach den Regeln der Partialbruchzerlegung um,

$$\underline{H}_{i_C,ez}(j\omega) = \frac{1}{R} \frac{j\omega + 1/RC - 1/RC}{j\omega + 1/RC} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2 C} \frac{1}{j\omega + 1/RC} \quad (5.103)$$

so lassen sich die entstehenden Summanden den entsprechenden Summanden der entsprechenden Darstellung im eingeschwungenen Zustand durch Koeffizientenvergleich zuordnen.

$$\begin{array}{ccc}
 H_{i_{C,ez}}(j\omega) & = & -\frac{1}{R^2C} \frac{1}{j\omega + 1/RC} + \frac{1}{R}(j\omega)^0 \\
 \bullet & & \bullet \\
 \circ & & \circ
 \end{array} \quad (5.104)$$

$$i_{C,ez}(t) = -\frac{1}{R^2C} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-t')}{RC}} v_{\infty}(t') dt' + \frac{1}{R} v_{\infty}(t)$$

Es gelingt also offensichtlich auf diese Weise, mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung und der Partialbruchzerlegung, die Darstellung im eingeschwungenen Zustand bezüglich der Koeffizienten zu ermitteln. Dies ist kein Zufall, sondern dies funktioniert auch im allgemeinen Fall.

Bemerkung 5.9

Sei ein asymptotisch stabiles Netzwerk wie in Satz 5.4 beschrieben gegeben. Die in (5.43) vorkommenden, natürlichen Frequenzen \underline{A}_i und die in (5.43) maximal vorkommenden Potenzen von t sind durch das Netzwerk eindeutig festgelegt. $h_a(t)$ aus (5.83) hat dann nach Satz 5.1 (4.) die folgende Darstellung:

$$h_a(t) = \sum_{i=1}^l \sum_{m=1}^{\mu_i} \eta_{a,i,m} t^{m-1} e^{\underline{A}_i t} \quad (5.105)$$

Dabei sind die Koeffizienten

$$\eta_{a,i,m}, i = 1, 2, \dots, l, m = 1, \dots, \mu_i, \quad (5.106)$$

durch die Wahl von $a(t)$ in Satz 5.1 eindeutig bestimmt. Damit lässt sich die Darstellung im eingeschwungenen Zustand aus (5.76) (der Index k wird wieder unterdrückt) wie folgt schreiben:

$$a_{ez}(t) = \sum_{i=1}^l \sum_{m=1}^{\mu_i} \eta_{a,i,m} \int_{-\infty}^t (t-t')^{m-1} e^{\underline{A}_i(t-t')} e_{\infty}(t') dt' + \sum_{i=0}^{r+1} D_{a,i} e_{\infty}^{(i)}(t) \quad (5.107)$$

r ist wiederum nach Satz 5.1 durch das Netzwerk bestimmt und die

$$D_{a,i}, i = 0, 1, \dots, r+1 \quad (5.108)$$

sind durch die Wahl von $a(t)$ eindeutig festgelegt.

Bemerkung 5.10

Sei $\Re\{\underline{A}\} < 0$ und $k = 0, 1, 2, \dots$, dann gilt

$$\mathcal{F}\left(\Theta(t)t^k e^{\underline{A}t}\right)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t)t^k e^{\underline{A}t} e^{-j\omega t} dt = \frac{k!}{(j\omega - \underline{A})^{k+1}} \quad (5.109)$$

Daraus folgen unmittelbar die folgenden Korrespondenzen: $k = 0$, $\Re\{\underline{A}\} < 0$:

$$\Theta(t)e^{\underline{A}t} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega - \underline{A}} \quad (5.110)$$

$$\underline{A} = \alpha_0 + j\omega_0, \quad \alpha_0 < 0 : \left(\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \right)$$

$$\Theta(t) \cos \omega_0 t e^{\alpha_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{j\omega - \alpha_0}{(j\omega - \alpha_0)^2 + \omega_0^2} \quad (5.111)$$

$$\underline{A} = \alpha_0 + j\omega_0, \quad \alpha_0 < 0 : \left(\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \right)$$

$$\Theta(t) \sin \omega_0 t e^{\alpha_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\omega_0}{(j\omega - \alpha_0)^2 + \omega_0^2} \quad (5.112)$$

Beweis: Der Beweis gilt für $k > 1$. Die Fälle $k = 1$ und $k = 0$ ergeben sich entsprechend.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t) t^k e^{\underline{A}t} e^{-j\omega t} dt &= \int_0^{\infty} t^k e^{(\underline{A}-j\omega)t} dt = \frac{1}{(\underline{A}-j\omega)} t^k e^{(\underline{A}-j\omega)t} \Big|_{t=0}^{t=\infty} - \\ &\frac{1}{(\underline{A}-j\omega)} \int_0^{\infty} k t^{k-1} e^{(\underline{A}-j\omega)t} dt \stackrel{\text{Bem. 5.4}}{=} \frac{k}{(j\omega - \underline{A})} \int_0^{\infty} t^{k-1} e^{(\underline{A}-j\omega)t} dt = \frac{k(k-1)}{(j\omega - \underline{A})^2} \int_0^{\infty} t^{k-2} e^{(\underline{A}-j\omega)t} dt \\ &= \dots = \frac{k!}{(j\omega - \underline{A})^k} \int_0^{\infty} \underbrace{t^{k-k}}_{=1} e^{(\underline{A}-j\omega)t} dt = \frac{k!}{(j\omega - \underline{A})^k} \cdot \frac{1}{\underline{A} - j\omega} e^{(\underline{A}-j\omega)t} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{k!}{(j\omega - \underline{A})^{k+1}} \end{aligned}$$

Bemerkung 5.11

Sei ein asymptotisch stabiles Netzwerkmodell NM wie in Satz 5.4 gegeben. Die Darstellung im eingeschwungenen Zustand kann für jede Wahl von $a(t)$ als Abbildung EZ_a^{NM} der Menge MDBF der $r+1$ -fach differenzierbaren und für $t < 0$ beschränkten Funktionen $e_{\infty}(t)$ auf die Menge MF der gewöhnlichen, stückweise stetigen Funktionen gedeutet werden:

$$\left. \begin{aligned} &\text{EZ}_a^{\text{NM}} : \text{MDBF} \rightarrow \text{MF} \\ &e_{\infty}(t) \rightarrow \text{EZ}_a^{\text{NM}}(e_{\infty}(t)) = a_{ez}(t) = \int_{-\infty}^t h_a(t-t') e_{\infty}(t') dt' + \sum_{i=0}^{r+1} D_{a,i} e_{\infty}^{(i)}(t) \end{aligned} \right\} \quad (5.113)$$

Ferner kann die Zuordnung des Frequenzganges zu einer gegebenen Darstellung im eingeschwungenen Zustand EZ_a^{NM} aus Definition 5.14 als eine Abbildung FG der Menge MDEZ der Darstellungen im eingeschwungenen Zustand EZ_a^{NM} auf die Menge MGRF der gebrochen rationalen Funktionen gedeutet werden:

$$\left. \begin{aligned} &\text{FG} : \text{MDEZ} \rightarrow \text{MGRF} \\ &\text{EZ}_a^{\text{NM}} \rightarrow \text{FG}(\text{EZ}_a^{\text{NM}}) = \text{EZ}_a^{\text{NM}}(e^{j\omega t})e^{-j\omega t} = \underline{H}_{a_{ez}}(j\omega) \end{aligned} \right\} \quad (5.114)$$

Beweis:

Zu zeigen bleibt nur, dass $H_{a,ez}(j\omega)$ jeweils eine gebrochen, rationale Funktion von $j\omega$ ist.

Mit (5.109) ergibt sich zunächst:

$$\text{FG}(\text{EZ}_a^{\text{NM}}) = \text{EZ}_a^{\text{NM}}(e^{j\omega t})e^{-j\omega t} = \left(\sum_{i=1}^l \sum_{m=1}^{\mu_i} \eta_{a,i,m} \int_{-\infty}^t (t-t')^{m-1} e^{\underline{A}_i(t-t')} e^{j\omega t'} dt' + \sum_{i=0}^{r+1} D_{a,i}(j\omega)^i e^{j\omega t} \right) e^{-j\omega t}$$

Ferner gilt für $m \geq 1$:

$$\int_{-\infty}^t (t-t')^{m-1} e^{\underline{A}_i(t-t')} e^{j\omega t'} dt' \stackrel{t-t'=x}{=} \left(\int_0^\infty x^{m-1} e^{\underline{A}_i x} e^{-j\omega x} dx \right) e^{j\omega t}$$

Damit folgt aus Bemerkung 5.10 sofort:

$$\text{FG}(\text{EZ}_a^{\text{NM}}) = \text{EZ}_a^{\text{NM}}(e^{j\omega t})e^{-j\omega t} = \sum_{i=1}^l \sum_{m=1}^{\mu_i} \eta_{a,i,m} \frac{(m-1)!}{(j\omega - \underline{A}_i)^m} + \sum_{i=0}^{r+1} D_{a,i}(j\omega)^i \quad (5.115)$$

Hieraus ist sofort, durch Umformen auf den Hauptnenner, zu erkennen, dass der der Darstellung im eingeschwungenen Zustand E_a^{NM} zugeordnete Frequenzgang eine gebrochen rationale Funktion von $j\omega$ ist.

Bemerkung 5.12

Sei wiederum ein asymptotisch stabiles Netzwerkmodell NM wie in Satz 5.4 gegeben. Nach Bemerkung 5.11 und Definition 5.15 gilt:

$$\text{FG}(\text{EZ}_a^{\text{NM}}) = \underline{C}_a^{\text{NM}} \frac{\underline{P}_a^{\text{NM}}(j\omega)}{\underline{Q}_a^{\text{NM}}(j\omega)} \quad (5.116)$$

Hierbei sollen $\underline{P}_a^{\text{NM}}(j\omega)$ und $\underline{Q}_a^{\text{NM}}(j\omega)$ normierte Polynome sein. Setzt man voraus, dass $\underline{P}_a^{\text{NM}}(\underline{s})$ und $\underline{Q}_a^{\text{NM}}(\underline{s})$ keine gemeinsamen Nullstellen haben, so gilt:

Die Nullstellen von $\underline{Q}_a^{\text{NM}}(\underline{s})$ und damit die Polstellen von $\text{FG}(\text{EZ}_a^{\text{NM}})$ sind alle auch natürlichen Frequenzen \underline{A}_i des Netzwerkmodells. Ist \underline{A}_i Nullstelle von $\underline{Q}_a^{\text{NM}}(\underline{s})$, so ist deren Vielfachheit kleiner gleich μ_i . Daraus folgt mit Satz 5.1 (4.) sofort, dass $\underline{Q}_a^{\text{NM}}(\underline{s})$ ein Teilpolynom des dem Netzwerkmodell nach Satz 5.1 zugeordneten charakteristischen Polynoms ist und $\text{grad}(\underline{Q}_a^{\text{NM}}(\underline{s})) \leq n$ gilt, wobei n die Ordnung des Netzwerkmodells und der Grad des charakteristischen Polynoms ist.

$\text{grad } \underline{Q}_a^{\text{NM}}(\underline{s}) = n = n_A - n_R$ impliziert mit Satz 5.1 (4.) somit, dass die natürlichen Frequenzen des Netzwerkmodells über die Nullstellen von $\underline{Q}_a^{\text{NM}}(\underline{s})$ vollständig bestimmt sind. $n_A = \text{grad}(\underline{Q}_a^{\text{NM}}(\underline{s})) \leq n$ impliziert ferner $n_A = n$ und somit nach Satz 5.1 (7.,8.), dass das Netzwerkmodell nicht differenzierend ist und für beliebige Zielanfangswerte \vec{x}_{A,t_0} das Anfangswertproblem zweiter Art immer eine eindeutige Lösung hat. Letzteres ist ein einfaches Kriterium, um die Existenz inkonsistenter Anfangswerte auszuschließen.

Aus (5.115) folgt weiterhin sofort, dass das Netzwerkmodell genau dann bezüglich $e(t)$ differenzierend ist, falls es mindestens einen Frequenzgang $FG(EZ_a^{NM})$ gibt, bei dem der Grad des Zählerpolynoms echt größer als der Grad des Nennerpolynoms ist ($\text{grad } \underline{P}_a^{NM}(j\omega) > \text{grad } \underline{Q}_a^{NM}(j\omega)$).

Formal kann man Frequenzgänge, ohne die Existenz eines harmonisch eingeschwungenen Zustandes vorauszusetzen, über die komplexe Wechselstromrechnung auch für nicht asymptotisch stabile Netzwerke berechnen. In Kapitel 8.2 wird gezeigt werden, dass alle hier aufgezählten Eigenschaften, die aus der Betrachtung des Frequenzganges folgen, auch für nicht asymptotische Netzwerkmodelle erhalten bleiben. Ferner folgt zusätzlich sofort folgende Aussage:

Hat ein über die komplexe Wechselstromrechnung bestimmter Frequenzgang einen Pol \underline{A} mit $\Re\{\underline{A}\} \geq 0$, so ist das zugrunde liegende Netzwerk nicht asymptotisch stabil.

Zum Beweis geht man von (5.115) aus. Durch $FG(EZ_a^{NM}) = \underline{H}_{a,e_z}(j\omega)$ wird die gebrochen rationale Funktion $\underline{H}_{a,e_z}(s)$ auf der gesamten komplexen Ebene festgelegt. Haben $\underline{P}_a^{NM}(s)$ und $\underline{Q}_a^{NM}(s)$ keine gemeinsamen Nullstellen, so sind die Nullstellen von $\underline{Q}_a^{NM}(s)$ alle Polstellen von $\underline{H}_{a,e_z}(s)$. Aus (5.115) ist aber sofort klar, dass als Polstellen von $\underline{H}_{a,e_z}(s)$ nur die natürlichen Frequenzen des Netzwerkmodells in Frage kommen. Ferner hat $(s - \underline{A}_i)^{\mu_i} \underline{H}_{a,e_z}(s)$ nach (5.115) keine Polstelle bei $s = \underline{A}_i$. Dies impliziert, dass $\underline{Q}_a^{NM}(s)/(s - \underline{A}_i)^{\mu_i}$ keine Nullstelle bei $s = \underline{A}_i$ haben kann! Mit $\sum_{i=1}^l \mu_i = n$ folgt daher sofort $\text{grad } \underline{Q}_a^{NM}(s) \leq n$.

Für die letzte Behauptung nehme man an, dass das Netzwerkmodell asymptotisch stabil ist. Dann gilt nach dem bisher Gezeigten, dass für alle Pole \underline{A} des Frequenzganges $\Re\{\underline{A}\} < 0$ gilt. Gibt es also einen Pol \underline{A} mit $\Re\{\underline{A}\} \geq 0$, so muss die Annahme falsch sein.

Bemerkung 5.13

Die Abbildung FG aus Bemerkung 5.11 ist eineindeutig, so dass die Umkehrabbildung FG^{-1} auf der Bildmenge $FG(\text{MDEZ})$ existiert.

Zum Beweis: Der Beweis ergibt sich aus der in den Bemerkungen 5.14 und 5.15 beschriebenen, konstruktiven Bestimmung der Umkehrabbildung FG^{-1} .

Bemerkung 5.14 (Zur Korrespondenz zwischen der Darstellung des eingeschwungenen Zustandes und dem zugeordneten Frequenzgang durch Koeffizientenvergleich)

Die Abbildung FG für die zwei wichtigen Spezialfälle: (Hierbei sei $e_\infty(t)$ eine beliebige hinreichend glatte und für $t < 0$ beschränkte Funktion und $m \geq 1$)

$$\int_{-\infty}^t (t - t')^{m-1} e^{\underline{A}(t-t')} e_\infty(t') dt' \xrightarrow[FG]{FG^{-1}} \frac{(m-1)!}{(j\omega - \underline{A})^m}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (5.117)$$

$$e_\infty^{(i)}(t) \xrightarrow[FG]{FG^{-1}} (j\omega)^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (5.118)$$

Da sowohl $EZ_a^{NM}(e_\infty(t))$ als auch der zugeordnete Frequenzgang in die, in den beiden Spezialfällen auftretenden Terme eindeutig zerlegt werden kann, ist im allgemeinen Fall die eindeutige Zuordnung von EZ_a^{NM} und $FG(EZ_a^{NM})$ einfach durch Koeffizientenvergleich möglich.

Allgemeiner Fall:

$$\begin{aligned}
 EZ_a^{NM}(e_\infty(t)) &= \sum_{i=1}^l \sum_{m=1}^{\mu_i} \left(\underline{\eta}_{a,i,m} \right) \left(\int_{-\infty}^t (t-t')^{m-1} e^{\underline{A}_i(t-t')} e_\infty(t') dt' \right) + \sum_{i=0}^{r+1} (D_{a,i}) \left(e_\infty^{(i)}(t) \right) \\
 &\quad \begin{array}{c} \uparrow \downarrow FG \\ FG^{-1} \uparrow \downarrow FG \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \downarrow FG \\ FG^{-1} \uparrow \downarrow FG \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \downarrow FG \\ FG^{-1} \uparrow \downarrow FG \end{array} \\
 &\quad \sum_{i=1}^l \sum_{m=1}^{\mu_i} \left(\underline{\eta}_{a,i,m} \right) \left(\frac{(m-1)!}{(j\omega - \underline{A}_i)^m} \right) + \sum_{i=0}^{r+1} (D_{a,i}) (j\omega)^i \\
 &= FG(EZ_a^{NM}) = EZ_a^{NM}(e^{j\omega t}) e^{-j\omega t} \quad (5.119)
 \end{aligned}$$

Bei der Berechnung von Frequenzgängen mit der komplexen Wechselstromrechnung sind diese leicht in die Form (5.101) zu bringen, treten aber nicht sofort in der Form (5.115) auf. Um die Form (5.101) auf die Form (5.115) umzuformen, von der aus die Rücktransformation FG^{-1} per Koeffizientenvergleich leicht möglich ist, steht die Technik der Partialbruchzerlegung zur Verfügung.

Bemerkung 5.15 (Partialbruchzerlegung)

Sei $\underline{H}(\underline{s}) = \underline{c} \frac{\underline{P}(\underline{s})}{\underline{Q}(\underline{s})}$ mit $\underline{c} \neq 0$ und normierten Polynomen $\underline{P}(\underline{s}), \underline{Q}(\underline{s})$ mit $\text{grad}(\underline{P}(\underline{s})) = m$ und $\text{grad}(\underline{Q}(\underline{s})) = n$ gegeben, wobei $\underline{Q}(\underline{s})$ die nach dem Satz von Weierstraß immer existente Darstellung

$$\underline{Q}(\underline{s}) = (\underline{s} - \underline{s}_1)^{\mu_1} \cdot (\underline{s} - \underline{s}_2)^{\mu_2} \cdots (\underline{s} - \underline{s}_l)^{\mu_l} \text{ mit } \sum_{v=1}^l \mu_v = n \quad (5.120)$$

haben soll.

Dabei sind $\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_l$ die Nullstellen von $\underline{Q}(\underline{s})$ und $\mu_v = 1, 2, 3, \dots, v = 1, \dots, l$ die entsprechenden Vielfachheiten dieser Nullstellen. $\underline{P}(\underline{s})$ und $\underline{Q}(\underline{s})$ sollen keine gemeinsamen Nullstellen haben. Dann hat $\underline{H}(\underline{s})$ die folgende Darstellung mit eindeutig bestimmten im allgemeinen komplexen Konstanten $\underline{F}_\nu, \underline{D}_{i,\nu}$:

$$\begin{aligned}
 \underline{H}(\underline{s}) &= \sum_{\nu=0}^{m-n} \underline{F}_\nu \underline{s}^\nu + \sum_{i=1}^l \sum_{\nu=1}^{\mu_i} \frac{\underline{D}_{i,\nu}}{(\underline{s} - \underline{s}_i)^\nu} \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad \text{verschwindet für } m < n
 \end{aligned} \quad (5.121)$$

Es gilt $\underline{F}_{m-n} \neq 0$ für $m - n \geq 0$.

Die Koeffizienten werden mit Hilfe der Regeln der Partialbruchzerlegung bestimmt.

Ist $m \geq n$, so wird zunächst durch sukzessive in der Regel mehrmalige $((m - n + 1)$ -malige) Anwendung des folgenden Rechenschrittes

$$\begin{aligned}
 \frac{\underline{P}(\underline{s})}{\underline{Q}(\underline{s})} &= \frac{(\underline{s})^{m-n} \underline{Q}(\underline{s}) + (\underline{P}(\underline{s}) - (\underline{s})^{m-n} \underline{Q}(\underline{s}))}{\underline{Q}(\underline{s})} \\
 &\quad \text{normiertes Polynom mit } \text{grad}(\underline{P}_2(\underline{s})) \leq m-1 \\
 &\quad \uparrow \\
 &= (\underline{s})^{m-n} + \underline{c}_2 \frac{\underline{P}_2(\underline{s})}{\underline{Q}(\underline{s})} \quad (5.122)
 \end{aligned}$$

ein Polynom $m - n$ -ten Grades abgespalten. Dies ergibt folgende Darstellung:

$$\underline{H}(\underline{s}) = \sum_{\nu=0}^{m-n} \underline{F}_{\nu}(\underline{s})^{\nu} + \frac{\overline{P}(\underline{s})}{\underline{Q}(\underline{s})} \quad (5.123)$$

$\text{grad}(\overline{P}(\underline{s})) < n$
 \uparrow

Danach müssen die Nullstellen von $\underline{Q}(\underline{s})$ und deren Vielfachheiten bestimmt werden. Basierend darauf werden dann abschließend, über den folgenden Ansatz mit den Konstanten $\underline{D}_{i,\nu}$ per Koeffizientenvergleich die unbekannten $\underline{D}_{i,\nu}$ bestimmt.

$$\frac{\overline{P}(\underline{s})}{\underline{Q}(\underline{s})} = \sum_{i=1}^l \sum_{\nu=1}^{\mu_i} \frac{\underline{D}_{i,\nu}}{(\underline{s} - \underline{s}_i)^{\nu}} \quad (5.124)$$

Merke: Der Ansatz (5.124) ist nur sinnvoll, falls $\text{grad}(\overline{P}(\underline{s})) < \text{grad}(\underline{Q}(\underline{s}))$ gilt!

Die Koeffizienten \underline{D}_{i,μ_i} , die jeweils zur höchsten vorkommenden Potenz von $(\underline{s} - \underline{s}_i)$ gehören, lassen sich auch elegant mittels

$$\underline{D}_{i,\mu_i} = \left. (\underline{s} - \underline{s}_i)^{\mu_i} \frac{\overline{P}(\underline{s})}{\underline{Q}(\underline{s})} \right|_{\underline{s}=\underline{s}_i} \quad (5.125)$$

bestimmen. Im Normalfall einfacher Nullstellen (\underline{s}_i mit $\mu_i = 1$ für alle i) sind damit alle Konstanten $\underline{D}_{i,1}$ durch (5.125) bestimmbar.

Beispiel 5.4

Es sei der folgende Beispielfrequenzgang mit reellen A und T gegeben:

$$\underline{H}(j\omega) = A \frac{4(j\omega)^3 + \frac{6}{T}(j\omega)^2 + \frac{2}{T^2}(j\omega) + \frac{11}{T^3}}{2(j\omega)^2 + \frac{8}{T}(j\omega) + \frac{26}{T^2}}$$

Man verifiziert leicht, dass $\underline{H}(j\omega)^* = \underline{H}(-j\omega)$ gilt.

Gesucht ist die Partialbruchzerlegung, die folgendermaßen berechnet wird:

1. Normieren der Polynome:

$$\underline{H}(\underline{s}) = \frac{4}{2} A \frac{\overbrace{\underline{s}^3 + \frac{3}{2T}\underline{s}^2 + \frac{1}{2T^2}\underline{s} + \frac{11}{4T^3}}^{\underline{P}(\underline{s})}}{\underbrace{\underline{s}^2 + \frac{4}{T}\underline{s} + \frac{13}{T^2}}_{\underline{Q}(\underline{s})}}$$

2. Abspalten eines Polynoms 3-2=1. Grades nach (5.122), (5.123)

$$\begin{aligned}
 \underline{H}(\underline{s}) &= 2A \frac{\underline{s}Q(\underline{s}) + \underline{P}(\underline{s}) - \underline{s}Q(\underline{s})}{\underline{Q}(\underline{s})} \\
 &= 2A\underline{s} + 2A \frac{-\frac{5}{2T}\underline{s}^2 - \frac{25}{2T^2}\underline{s} + \frac{11}{4T^3}}{\underline{Q}(\underline{s})} \\
 &= 2A\underline{s} - 2A \frac{\overbrace{5 \frac{\underline{s}^2}{2T} + \frac{5}{T}\underline{s} - \frac{11}{10T^2}}^{\underline{P}(\underline{s})}}{\underline{Q}(\underline{s})} \\
 &= 2A \left(\underline{s} - \frac{5}{2T} \frac{\underline{Q}(\underline{s}) + \underline{P}(\underline{s}) - \underline{Q}(\underline{s})}{\underline{Q}(\underline{s})} \right) \\
 &= 2A \left(\underline{s} - \frac{5}{2T} \left(1 + \frac{\frac{1}{T}\underline{s} - \frac{141}{10T^2}}{\underline{Q}(\underline{s})} \right) \right)
 \end{aligned}$$

3. Bestimmung der Nullstellen von $\underline{Q}(\underline{s})$:

$$\underline{Q}(\underline{s}) = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -\frac{2}{T} \pm \sqrt{\frac{4}{T^2} - \frac{13}{T^2}} = \frac{1}{T}(-2 \pm \sqrt{-9}) = \frac{1}{T}(-2 \pm j3)$$

4. Prüfen, ob eine der Nullstellen keine Polstelle von $\underline{H}(\underline{s})$ ist:

$$\text{Es gilt jedoch } \underline{s}_{1,2} - \frac{141}{10T} \neq 0 \Rightarrow \underline{s}_{1,2} \text{ Polstellen von } \underline{H}(\underline{s})$$

5. Ansatz der Partialbrüche ($\underline{D}_{1,0} = \underline{D}_1$, $\underline{D}_{2,0} = \underline{D}_2$):

$$\overbrace{-2A \frac{5}{2T^2}}^c \frac{\underline{s} - \frac{141}{10T}}{(\underline{s} - \underline{s}_1)(\underline{s} - \underline{s}_2)} = \frac{\underline{D}_1}{(\underline{s} - \underline{s}_1)} + \frac{\underline{D}_2}{(\underline{s} - \underline{s}_2)}$$

6. Bestimmen von \underline{D}_1 , \underline{D}_2 mit (5.125):

$$\begin{aligned}
 \underline{D}_1 &= c \frac{(\underline{s} - \underline{s}_1)(\underline{s} - \frac{141}{10T})}{\underline{Q}(\underline{s})} \Big|_{\underline{s}=\underline{s}_1} = \\
 &= c \frac{((-2 + 3j)\frac{1}{T} - \frac{141}{10T})}{(-2 + 3j)\frac{1}{T} - (-2 - 3j)\frac{1}{T}} \\
 &= c \frac{(-\frac{161}{10} + 3j)\frac{1}{T}}{6j/T} = -\frac{5A}{T^2} \left(\frac{1}{2} + j\frac{161}{60} \right)
 \end{aligned}$$

ebenso folgt:

$$\underline{D}_2 = -\frac{5A}{T^2} \left(\frac{1}{2} - j\frac{161}{60} \right)$$

Endergebnis:

$$\underline{H}(j\omega) = 2A \left(j\omega - \frac{5}{2T} \left(1 + \frac{1}{T} \left(\frac{\frac{1}{2} + j\frac{161}{60}}{j\omega + (2 - 3j)/T} + \frac{\frac{1}{2} - j\frac{161}{60}}{j\omega + (2 + 3j)/T} \right) \right) \right)$$

Beispiel 5.5

Es sei das Netzwerkmodell aus Abbildung 5.11 gegeben.

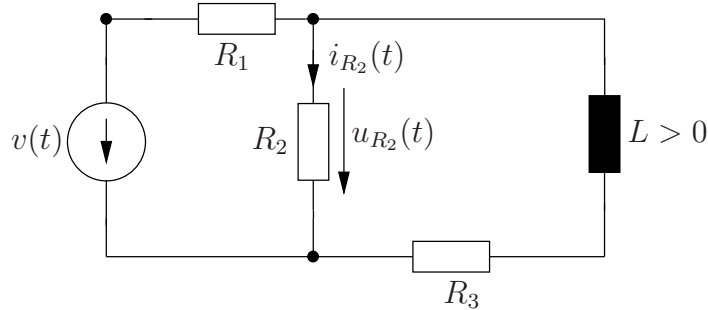


Abbildung 5.11: Netzwerkmodell für Beispiel 5.5.

Ferner sei angenommen, dass $v(t) = \Theta(t)V_0$ für alle t gilt und der Zeitpunkt der Netzwerkerzeugung t_S lange zurückliegt ($t_S \rightarrow -\infty$). $i_{R_2}(t)$ soll für alle t unter diesen Voraussetzungen und der zusätzlichen Vereinfachung $R_1 = R_2 = R_3 = R > 0$ bestimmt werden.

1. Schritt: Bestimmung des Frequenzgangs $\underline{H}(j\omega)$ mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung in der Form (5.115):

$$v(t) = \Re\{\underline{V}e^{j\omega t}\}, \quad i_{R_2}(t) = \Re\{\underline{I}_{R_2}e^{j\omega t}\}$$

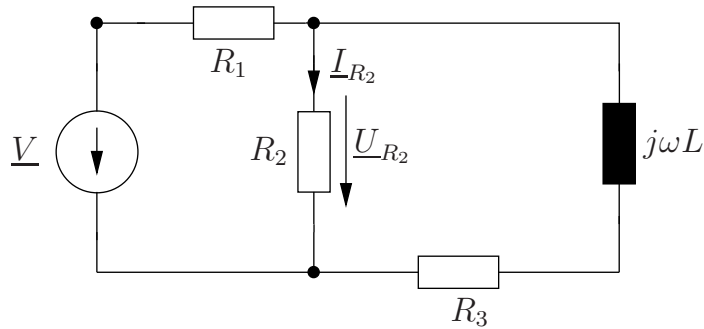


Abbildung 5.12: Netzwerkmodell aus Beispiel 5.5 bei Anwendung der komplexen Wechselstromrechnung

Anwendung der Spannungsteilerregel:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{R_2} &= \frac{\underline{U}_{R_2}}{R_2} = \frac{1}{R_2} \underline{V} \frac{1}{R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + 1/(R_3 + j\omega L)}} \\ &= \frac{\underline{V}}{R_2} \frac{1}{R_1 (1/R_2 + 1/(R_3 + j\omega L)) + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{V}{R_2} \frac{R_2(R_3 + j\omega L)}{R_1(R_3 + j\omega L) + R_1R_2 + R_2(R_3 + j\omega L)} \\
&= \frac{V}{R_2} \frac{R_3 + j\omega L}{(R_1 + R_2)j\omega L + R_1R_3 + R_1R_2 + R_2R_3} \\
&\stackrel{R_1=R_2=R_3=R}{=} \frac{V}{2R} \frac{L}{j\omega + R/L} \\
&\stackrel{\downarrow}{=} \frac{V}{2RL} \frac{j\omega + R/L}{j\omega + \frac{3}{2}(R/L)} \\
\Rightarrow \underline{H}_{i_{R_2}, ez}(j\omega) &= \frac{\underline{I}_{R_2}}{V} = \frac{1}{2R} \frac{j\omega + R/L}{j\omega + \frac{3}{2}(R/L)}
\end{aligned}$$

$-\frac{3}{2}(R/L) < 0$ ist somit eine natürliche Frequenz des Netzwerkmodells. Es gilt also nach Bemerkung 5.12 $n = n_A = 1$. Das Netzwerkmodell ist also nach Satz 5.1 nicht differenzierend und es gibt keine inkonsistenten Anfangswerte! Ferner ist $-\frac{3}{2}(R/L) < 0$ die einzige natürliche Frequenz des Netzwerkmodells und das Netzwerkmodell daher nach Satz 5.2 asymptotisch stabil. Damit ist mit Bemerkung 5.6 $i_{R_2}(t)$ über die Darstellung im eingeschwungenen Zustand berechenbar.

2. Schritt: Partialbruchzerlegung:

$$\underline{H}_{i_{R_2}, ez}(j\omega) = \frac{1}{2R} \left(\frac{j\omega + \frac{3}{2}(R/L) - \frac{3}{2}(R/L) + (R/L)}{j\omega + \frac{3}{2}(R/L)} \right) \quad (5.126)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2R} \left(1 - \frac{\frac{1}{2}(R/L)}{j\omega + \frac{3}{2}(R/L)} \right) \\
&= -\frac{1}{4L} \frac{1}{j\omega + \frac{3}{2}(R/L)} + \frac{1}{2R} (j\omega)^0
\end{aligned} \quad (5.127)$$

3. Schritt: Bestimmung der Darstellung des eingeschwungenen Zustandes mit FG^{-1} :

$$\begin{aligned}
\underline{H}(j\omega) &= -\frac{1}{4L} \frac{1}{j\omega + \frac{3}{2}(R/L)} + \frac{1}{2R} (j\omega)^0 \\
&\quad \begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow FG^{-1} \\ \circ \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow FG^{-1} \\ \circ \end{array} \\
EZ_{i_{R_2}}^{\text{NM}}(v_\infty(t)) &= -\frac{1}{4L} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{3}{2}(R/L)(t-t')} v_\infty(t') dt' + \frac{1}{2R} v_\infty(t)
\end{aligned} \quad (5.128)$$

4. Schritt: Bestimmung von $i_{R_2}(t)$ für alle t für $v(t) = \Theta(t)V_0$. Aus Bemerkung 5.6 folgt unter den gegebenen Voraussetzungen:

$$v(t) = \Theta(t)V_0 = v_\infty(t), \quad i_{R_2}(t) = i_{R_2, ez}(t) \quad \text{für alle endlichen } t \quad (5.129)$$

Unter diesen Voraussetzungen gilt für die Antwort (Sprungantwort) von $i_{R_2}(t)$:

$$\begin{aligned}
i_{R_2}(t) &= i_{R_2, ez}(t) = EZ_{i_{R_2}}^{\text{NM}}(v(t)) = \frac{V_0}{2R} \Theta(t) - \Theta(t) \frac{V_0}{4L} \int_0^t e^{-\frac{3}{2}(R/L)(t-t')} dt' \\
&= \Theta(t) \left(\frac{V_0}{2R} - \frac{V_0}{4L} \left(\frac{2}{3} \frac{L}{R} \right) \left(e^{-\frac{3}{2}(R/L)(t-t')} \right) \Big|_{t'=0}^{t'=t} \right) \\
&= \Theta(t) \left(\frac{V_0}{2R} - \frac{V_0}{6R} \left(1 - e^{-\frac{3}{2}(R/L)t} \right) \right)
\end{aligned} \quad (5.130)$$

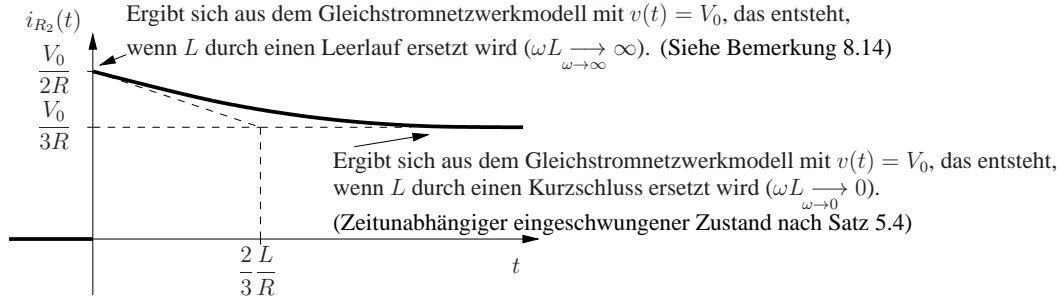


Abbildung 5.13: Antwort von $i_{R_2}(t)$ auf einen Spannungssprung $v(t) = \Theta(t)V_0$ bei Beispiel 5.5 für $t_S \rightarrow -\infty$.

Bemerkung 5.16 (Bestimmung der Darstellung im eingeschwungenen Zustand)

Es seien die Voraussetzungen von Satz 5.4 gegeben. Das Netzwerkmodell sei also insbesondere asymptotisch stabil.

Schritt 1 : Bestimmung des Frequenzganges $\underline{H}_{aez}(j\omega) = \frac{\underline{A}}{\underline{E}}$ mit den Ansätzen $a(t) = \Re\{\underline{A}e^{j\omega t}\}$, $e(t) = \Re\{\underline{E}e^{j\omega t}\}$ mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung.

Schritt 2 : Partialbruchzerlegung von $\underline{H}_{aez}(j\omega)$.

Schritt 3 : Bestimmung von $EZ_a(e_\infty(t))$ mit Hilfe von FG^{-1} wie in Bemerkung 5.14. Dabei sei $e_\infty(t)$ eine beliebige, für alle Zeiten gegebene, $r+1$ -fach differenzierbare und für $t < 0$ beschränkte Funktion.

5.6 Darstellung der Antwort aus dem Ruhezustand heraus

Für die Darstellung der Antwort des Netzwerkmodells im eingeschwungenen Zustand muss man die Funktion $h_a(t)$ und die Konstanten $D_{a,i}$, $i = 0, \dots, r+1$ bestimmen, was, wie oben gezeigt wurde, über den Frequenzgang und mit Hilfe der Partialbruchzerlegung leicht möglich ist. Es gibt eine weitere Situation, bei der es für die vollständige Beschreibung der Antwort von $a(t)$ ausreicht, $h_a(t)$, $D_{a,i}$, $i = 0, \dots, r+1$ und $e(t)$ zu kennen. Um dies zu demonstrieren, sei wiederum Beispiel 5.1 und die Darstellung für $i_C(t)$ aus (5.18) betrachtet. Falls die Bedingungen

$$x_{t_S} = u_{C,t_S} = u_C(t_S^-) = 0, \quad v(t) = 0 \text{ für } t < t_b, t_b > t_S \quad (5.131)$$

gelten, folgt

$$i_C(t) = \frac{1}{R}v(t) - \frac{1}{R^2C} \int_{t_b}^t e^{-\frac{t-t'}{RC}} v(t') dt, \quad t \geq t_S \text{ und } i_C(t) = 0 \text{ für } t < t_b. \quad (5.132)$$

Definiert man nun

$$v_\infty(t) = \begin{cases} 0 & t < t_b \\ v(t) & t \geq t_b, \end{cases} \quad (5.133)$$

so gilt $v(t) = v_\infty(t)$ für $t \geq t_S$ und die Darstellung im eingeschwungenen Zustand stimmt für diese Wahl von $v_\infty(t)$ mit $i_C(t)$ aus (5.132) für $t \geq t_S$ überein ($EG_{i_C}^{\text{Beispiel 5.1}}(v_\infty(t)) = i_C(t)$)

für $t \geq t_S$). Daher lässt sich auch die Darstellung (5.132), die im weiteren Darstellung der Antwort bei Anregung aus dem Ruhezustand heraus genannt wird, über den Frequenzgang (siehe Bem. 5.14) ermitteln.

Dies ist wiederum kein Zufall, sondern gilt allgemein.

Satz 5.5 (Antwort bei Anregung aus dem Ruhezustand heraus)

Es seien die Voraussetzungen von Satz 5.1 gegeben. Es gelte für $t_b \geq t_0$:

$$\vec{x}(t_0^+) = \vec{x}_{t_0} = 0, \quad e_k(t) = 0 \text{ für } t < t_b, \quad 1 \leq k \leq n_Q \quad (5.134)$$

Diese Situation soll im weiteren als **Anregung aus dem Ruhezustand heraus** bezeichnet werden. Es gilt dann:

1. Ist das Netzwerk bezüglich $e_k(t)$ differenzierend, so gilt:

$$e_k(t) = 0 \text{ für } t < t_b \Rightarrow e_k(t_0) = \dots = e_k^{(r_k)}(t_0) = 0 \Rightarrow a_{d,k,t_0}(t) \equiv 0 \quad (5.135)$$

- 2.

$$(5.134) \stackrel{(5.46)}{\Leftrightarrow} \vec{x}_A(t_0^+) = 0, \quad e_k(t) = 0 \text{ (für } t < t_b), \quad 1 \leq k \leq n_Q \quad (5.136)$$

(5.46) impliziert ferner, dass $\vec{x}_{A,t_0} = 0$ ein Vektor von konsistenten Anfangswerten ist und das Anfangswertproblem 2. Art bei Vorgabe von $\vec{x}_{A,t_0} = 0$ eine eindeutige Lösung hat, die durch den Anfangszustandsvektor $\vec{x}_{t_0} = 0$ festgelegt ist. Durch $\vec{x}_{A,t_0} = 0$ wird also die zu $\vec{x}_{t_0} = 0$ gehörige Lösung selektiert.

(Dies bedeutet mit (5.45) insbesondere, dass $\vec{x}_{A,t_S} = \vec{x}_A(t_S^-) = 0$ ein Vektor von konsistenten Anfangswerten ist und dass durch Vorgabe von $\vec{x}_{A,t_S} = \vec{x}_A(t_S^-) = 0$ zum Zeitpunkt $t = t_0 = t_S$ die zu $\vec{x}_{t_S} = \vec{x}(t_S^+) = 0$ gehörende Lösung des Anfangswertproblems erster Art selektiert wird.)

3. Die Netzwerkantwort $a(t)$ entspricht der unten angegebenen Form:

$$a(t) = a_{rz}(t) = \sum_{k=1}^{n_Q} \left(\int_{t_b}^t h_{a,k}(t-t') e_k(t') dt' + \sum_{i=0}^{r_k+1} D_{a,k,i} e_k^{(i)}(t) \right), \quad t \geq t_S \quad (5.137)$$

$a_{rz}(t)$ wird im weiteren auch als Darstellung der Antwort bei Anregung aus dem Ruhezustand heraus oder kürzer als Antwort aus dem Ruhezustand heraus bezeichnet. $a_{rz}(t) = 0$ für $t_S \leq t < t_b$ und $a_{rz}(t)$ **hängt für $t_S \leq t_0 \leq t_b$ nicht von t_0 ab.**

Beachte: Die asymptotische Stabilität ist hier nicht vorausgesetzt.

Wichtiger Spezialfall $t_b = t_0 = t_S$:

In diesem Fall reicht es aus $e_k(t) = 0$ für $t < t_b = t_0 = t_S$ nur für die Eingangsfunktionen zu fordern, für die das Netzwerkmodell differenzierend ist ($r_k \geq 0$). Aus (5.45) folgt mit dieser Voraussetzung wieder, dass $\vec{x}_A(t_S^-) = 0$ ein Vektor von konsistenten Anfangswerten ist, der die Lösung mit dem Anfangszustandsvektor $\vec{x}_{t_S} = \vec{x}(t_S^+) = 0$ selektiert. Daher gilt in diesem Fall wieder $a_{zi,t_S}(t) \equiv 0$ und $a_{d,k,t_S}(t) \equiv 0$ für alle Ausgangsfunktionen und $a(t) = a_{rz}(t)$ für $t \geq t_S$. Dies lässt sich nicht auf den Fall $t_b \geq t_0 > t_S$ verallgemeinern, da für $t_b \geq t_0 > t_S$ immer $a_{rz}(t) = 0$ für $t_S \leq t < t_b$ gelten muss.

Beweis:

Ist das Netzwerk bezüglich $e_k(t)$ differenzierend, so ist $e_k(t)$ als $r_k + 1$ -fach differenzierbar vorausgesetzt. Dies impliziert: $e_k(t), \dots, e_k^{(r_k)}(t)$ sind stetig. $e_k(t) = 0$ für $t < t_b \Rightarrow e_k(t) = \dots = e_k^{(r_k)}(t) = 0$ für $t < t_b \Rightarrow$ (Stetigkeit) $e_k(t_b) = \dots = e_k^{(r_k)}(t_b) = 0$. Damit ist 1. gezeigt.

2. folgt nun mit 1. und Satz 5.1, (5.46), da \widetilde{F}_x Höchststrang hat.

3. ergibt sich mit 1., 2. aus Satz 5.1, (5.42).

Bemerkung 5.17 (Superpositionsprinzip bei der Antwort aus dem Ruhezustand heraus)

Es seien die Voraussetzungen von Satz 5.5 gegeben. Ferner sei

$$a_{k,rz}(t) := \int_{t_b}^t h_{a,k}(t-t')e_k(t')dt' + \sum_{i=0}^{r_k+1} D_{a,k,i}e_k^{(i)}(t) \quad (5.138)$$

$a_{k,rz}(t)$ ergibt sich als Antwort bei Anregung aus dem Ruhezustand heraus für

$$e_j(t) = 0, \quad t > t_Q, \quad 1 \leq j \leq n_Q, \quad j \neq k. \quad (5.139)$$

In diesem Spezialfall gilt also:

$$a_{rz}(t) = a_{k,rz}(t) \quad (5.140)$$

Der allgemeine Fall ergibt sich also einfach als Überlagerung (Superposition) der Spezialfälle (5.138), (5.139).

Der Beweis ergibt sich direkt aus Satz 5.5.

Bemerkung 5.18

Es seien die Voraussetzungen von Satz 5.1 gegeben und das Netzwerkmodell sei zusätzlich asymptotisch stabil. Es werden folgende Situationen verglichen:

Situation 1: Das Netzwerkmodell existiert schon immer ($t_S \rightarrow -\infty$) und die $e_k(t)$ seien für alle Zeiten bekannt mit $e_k(t) = 0$ für $t < t_b$, $1 \leq k \leq n_Q$, so dass, wie in Bemerkung 5.6, $e_k(t) = e_{k,\infty}(t)$ gewählt werden kann für alle t . Dann folgt aus Bemerkung 5.6 für alle t

$$a(t) = a_{ez}(t) = \begin{cases} 0 & t < t_b \\ \sum_{k=1}^{n_Q} \left(\int_{t_b}^t h_{a,k}(t-t')e_k(t')dt' + \sum_{i=0}^{r_k+1} D_{a,k,i}e_k^{(i)}(t) \right), & t \geq t_b \end{cases} \quad (5.141)$$

Situation 2: Das Netzwerkmodell existiert seit t_S und $e_k(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$ seien ab $t_Q < t_S$ bekannt mit $e_k(t) = 0$ für $t_Q \leq t < t_b$. Zum Zeitpunkt t_0 mit $t_S \leq t_0 \leq t_b$ werde der Anfangszustand $\vec{x}_{t_0} = 0$ vorgegeben. Dann gilt für $t \geq t_S$:

$$a(t) = a_{rz}(t) = \begin{cases} 0 & t_S \leq t < t_b \\ \sum_{k=1}^{n_Q} \left(\int_{t_b}^t h_{a,k}(t-t')e_k(t')dt' + \sum_{i=0}^{r_k+1} D_{a,k,i}e_k^{(i)}(t) \right), & t \geq t_b \end{cases} \quad (5.142)$$

Die beiden Antworten in den beiden Situationen sind also für $t \geq t_S$ gleich! (5.142) lässt sich also als Antwort im eingeschwungenen Zustand interpretieren, die sich, wie in Bemerkung 5.14 beschrieben, über die Bestimmung von Frequenzgängen und die Anwendung des Superpositionsprinzips (Bemerkung 5.5) bestimmen lässt.

Bemerkung 5.19 (Bestimmung der Darstellung der Antwort aus dem Ruhezustand heraus)

Es seien die Voraussetzungen von Bemerkung 5.16 gegeben.

Schritt A: Führe die Schritte 1 - 3 aus Bemerkung 5.16 aus.

Schritt B: Setze

$$e_{\infty,s}(t) := \begin{cases} e(t), & t \geq t_b \\ 0, & t < t_b, \end{cases}$$

Dann gilt :

$$a_{rz}(t) = EZ_a(e_{\infty,s}(t)) = a_{ez}(t) \text{ für } t \geq t_S$$

In Kapitel 8 (speziell Bem. 8.18 und Bem. 8.28) wird mit Hilfe der Laplacetransformation gezeigt, dass mittels der Frequenzgangsbestimmung mit der komplexen Wechselstromrechnung die Berechnung der Antwort bei Erregung aus dem Ruhezustand heraus auch bei nicht asymptotisch stabilen Netzwerkmodellen nahezu identisch abläuft. Die Bestimmung der Darstellung im eingeschwungenen Zustand mit der Integration von $-\infty$ bis t wird allerdings vermieden, da die inverse Laplacetransformation statt FG^{-1} benutzt wird. Formal ist dies identisch mit der Beschränkung der Urbilder der Abbildung EZ_a aus Bem. 5.11 auf Funktionen, die für $t < t_b$ verschwinden, sodass die möglicherweise nicht konvergente Integration von $-\infty$ bis t_b vermieden wird. Beachtet man diese Einschränkung, so lässt sich der oben angegebene Algorithmus auch zur Bestimmung der Antwort aus dem Ruhezustand bei nicht asymptotisch stabilen Netzwerkmodellen anwenden.

Sowohl die Darstellung der Antwort im eingeschwungenen Zustand als auch die Darstellung der Antwort bei Anregung aus dem Ruhezustand heraus lässt sich in einer einheitlichen Form darstellen, wenn man die Voraussetzungen für $e_k(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$ bei der Erregung aus dem Ruhezustand heraus beachtet und $e_k(t)$ für $t_Q > -\infty$ im Bereich $-\infty < t < t_Q$ mit 0 fortsetzt.

$$a_{ez}(t) = \sum_{k=1}^{n_Q} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t-t') h_{a,k}(t-t') e_{k,\infty}(t') dt' + \sum_{i=0}^{r_k+1} D_{a,k,i} e_{k,\infty}^{(i)}(t) \right) \quad (5.143)$$

$$a_{rz}(t) = \sum_{k=1}^{n_Q} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t-t') h_{a,k}(t-t') \Theta(t'-t_S) e_k(t') dt' + \sum_{i=0}^{r_k+1} D_{a,k,i} e_k^{(i)}(t) \right) \quad (5.144)$$

Dabei gilt die Beziehung (5.144) für $t_S > -\infty$ nur für $t \geq t_S$. (5.144) ist jedoch auch für $t < t_S$ gültig, falls man $a_{rz}(t)$ für $t < t_S$ durch 0 künstlich fortsetzt.

Bemerkung 5.20

Es seien die Voraussetzungen von Satz 5.1 gegeben. Ferner seien konsistente Zielfangswerte \vec{x}_{A,t_0} gegeben und es gelte $t_b \geq t_0$ sowie $e_k(t) = 0$ für $t < t_b$, $1 \leq k \leq n_Q$.

Das AWP 2. Art ist dann eindeutig lösbar und es gilt:

$$a(t) = a_{zi,t_0}(t) + a_{rz}(t), \quad t \geq t_S \quad (5.145)$$

mit gewöhnlichen Funktionen $a_{zi,t_0}(t)$ und $a_{rz}(t)$. Ferner gilt:

$$\begin{aligned} a_{rz}(t) &= \sum_{k=1}^{n_Q} \left(\int_{t_b}^t h_{a,k}(t-t') e_k(t') dt' + \sum_{i=0}^{r_k+1} D_{a,k,i} e_k^{(i)}(t) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n_Q} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t-t') h_{a,k}(t-t') e_k(t') dt' + \sum_{i=1}^{r_k+1} D_{a,k,i} e_k^{(i)}(t) \right) \end{aligned}$$

$a_{zi,t_0}(t_0)$ und $a_{rz}(t)$ können unabhängig voneinander mittels der zusätzlichen Annahmen $e_k(t) = 0$, $1 \leq k \leq n_Q$ bzw. $\vec{x}_{A,t_0} = 0$ bestimmt werden. Für $a_{rz}(t)$ wird dabei typischerweise Bemerkung 5.19 zur Anwendung kommen.

Für $t_b = t_0 = t_S$ kann auf die Voraussetzung $e_k(t) = 0$ für $t < t_b \geq t_0$ bei denjenigen Eingangsfunktionen, für die das Netzwerkmodell nicht differenzierend ist ($r_k = -1$), verzichtet werden. Bei der Berechnung von $a_{rz}(t)$ mit obiger Formel sollte im ersten Integral dann t_b durch t_S und im zweiten Integral $e_k(t')$ durch $\Theta(t' - t_S) e_k(t')$ ersetzt werden.

Da für $n = n_A$ alle Zielfangswerte konsistent sind und das Netzwerkmodell nicht differenzierend ist, gilt (5.145) für $t_b = t_S = t_0$ auch ohne die über die Voraussetzungen von Satz 5.1 hinausgehenden Zusatzvoraussetzungen, wenn man im obigen uneigentlichen Integral $e_k(t')$ durch $\Theta(t' - t_S) e_k(t')$ ersetzt. Für $t_0 = t_S = t_b$ gilt also in diesem Fall immer $a(t) = a_{zi,t_S}(t) + a_{rz}(t)$ für $t \geq t_S$ und beide Anteile können wie oben angegeben unabhängig voneinander bestimmt werden.

(Für $t_b = t_0 = t_S$ und $e_k(t) = 0$ für $t < t_b$ für alle k mit $r_k \geq 0$ gilt (5.145) für $t \geq t_S$ auch für inkonsistente Anfangswerte $\vec{x}_A(t_S^-)$ und beide Anteile $a_{zi,t_S}(t)$ und $a_{rz}(t)$ können wie oben angegeben unabhängig voneinander bestimmt werden. Dies wird in Kapitel 8.2 gezeigt. In diesem Fall ist $a_{zi,t_S}(t)$ allerdings keine gewöhnliche Funktion mehr und es gilt $\vec{x}_A(t_S^-) \neq \vec{x}_A(t_S^+)$.)

Beweis:

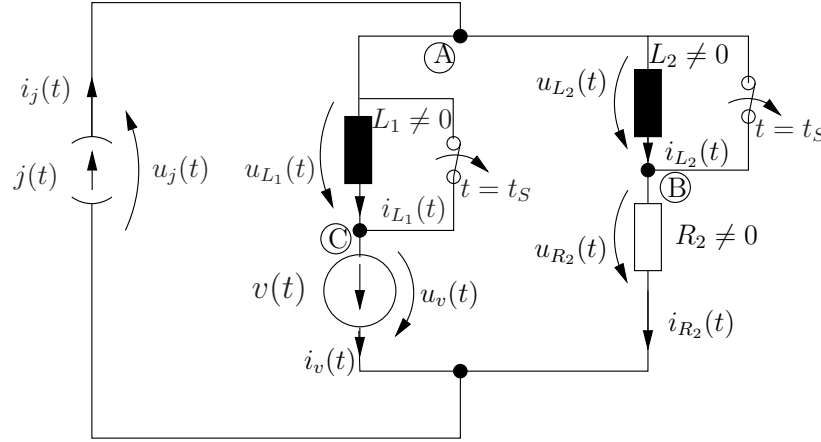
Für konsistente Zielfangswerte gibt es nach Satz 5.1 und (5.46) eine Lösung des Anfangswertproblems 2. Art und einen eindeutig bestimmten Anfangszustandsvektor \vec{x}_{t_0} , der aufgrund der Voraussetzungen $e_k(t) = 0$, $1 \leq k \leq n_Q$ für $t < t_0$ nicht von den $e_k(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$ abhängt. \vec{a}_{zi,t_0} ist daher für jedes konsistente \vec{x}_{A,t_0} eindeutig bestimmt und unabhängig von $e_k(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$. Aufgrund der Voraussetzungen folgt ebenso wie in Satz 5.5 1. $a_{d,k,t_0}(t) = 0$, $1 \leq k \leq n_Q$. (5.145) ergibt sich somit sofort aus (5.42), (5.144) und den Voraussetzungen. Da $a_{zi,t_0}(t)$ nicht von $e_k(t)$, $k = 1, \dots, n_Q$ und $h_{a,k}(t)$, $D_{a,k,i}$, $1 \leq k \leq n_Q$, $1 \leq i \leq r_k + 1$ nicht von \vec{x}_{t_0} abhängen, ergibt sich die getrennte Bestimmbarkeit von $a_{zi,t_0}(t)$ und $a_{rz}(t)$ unmittelbar aus den gegebenen Voraussetzungen.

Bezüglich des Sonderfalls $t_b = t_0 = t_S$ wird auf die Bemerkungen am Ende von Satz 5.5 verwiesen.

Die Voraussetzung $e_k(t) = 0$ für $t < t_b \geq t_0$, falls $r_k \geq 0$ und $1 \leq k \leq n_Q$ ist notwendig, damit bei konsistenten Zielfangswerten $a(t) = a_{zi,t_S}(t) + a_{rz}(t)$ gilt und beide Anteile unabhängig

voneinander als gewöhnliche Funktionen bestimmt werden können. Um dies zu demonstrieren, wird nochmals Beispiel 5.2 betrachtet.

Beispiel 5.2



$j(t) = f(t)$, $f(t_S) \neq 0$, $v(t) \equiv 0$, $f(t)$ differenzierbar für $t > t_Q < t_S$, $1 = n \neq n_A = 2$

Betrachtet wird die Lösung des Anfangswertproblems 2. Art mit $t_0 = t_S$ und $i_{L_1,t_S} = i_{L_1}(t_S^+)$. Die Lösungsdarstellung von $u_{L_1}(t)$ für $t \geq t_S$ ist gegeben über (siehe (5.36)):

$$\begin{aligned}
 u_{L_1}(t) &= \underbrace{-\frac{L_1 R_2}{L_1 + L_2} i_{L_1,t_S} e^{-\frac{R_2}{L_1+L_2}(t-t_S)} + \frac{R_2 L_1 L_2}{(L_1 + L_2)^2} f(t_S) e^{-\frac{R_2}{L_1+L_2}(t-t_S)}}_{u_{L_1,zi}(t)} \\
 &\quad + \int_{t_S}^t e^{-\frac{R_2}{L_1+L_2}(t-t')} \left(\frac{-(R_2 L_1)^2}{(L_1 + L_2)^3} f(t') \right) dt' + \frac{L_1^2 R_2}{(L_1 + L_2)^2} f(t) + \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \frac{d}{dt} f(t) \\
 &= u_{L_1,zi}(t) + u_{L_1,zs}(t)
 \end{aligned}$$

Die konsistenten Anfangswerte für diese Lösung mit dem Anfangszustand i_{L_1,t_S} sind:

$$i_{L_1}(t_S^+) = i_{L_1,t_S} \quad \text{und} \quad i_{L_2}(t_S^+) = f(t_S) - i_{L_1,t_S} = i_{L_2,t_S}.$$

i_{L_2,t_S} ist aber nur berechenbar, wenn die Zustandsraumdarstellung und die zustandsreduzierende Gleichung $i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t) = j(t)$ bekannt sind. Auch die Aufteilung der Lösung in die zwei unabhängig berechenbaren Anteile $u_{L_1,zi}(t)$ (berechenbar durch Vorgabe des Anfangszustandes i_{L_1,t_S} bei $t_0 = t_S$ und $j(t) = 0$ für alle t) und $u_{L_1,zs}(t)$ (berechenbar durch Vorgabe des Anfangszustandes $i_{L_1,t_S} = 0$ bei $t_0 = t_S$ und $j(t) = f(t)$) gelingt nur, wenn die Zustandsraumdarstellung bekannt ist.

Die Vorgabe der Anfangswerte i_{L_1,t_S} und $i_{L_2,t_S} = f(t_S) - i_{L_1,t_S}$ und die Wahl von $j(t) \equiv 0$ führen dazu, dass diese Anfangswerte inkonsistent sind, da die zustandsreduzierende Gleichung $i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t) = j(t) = 0$ von diesen Anfangswerten im Grenzfall $t \rightarrow t_S^+$ nicht erfüllt wird. Das AWP 2. Art ist in diesem Fall nicht lösbar. Es gibt allerdings eine Lösung, wenn man auch verallgemeinerte Funktionen (Distributionen) als Teil der Lösung zulässt, und die entsprechende Lösung von $u_{L_1}(t)$ enthält auch verallgemeinerte Funktionen. Daher kann die gewöhnliche Funktion $u_{L_1,zi}(t)$ so nicht berechnet werden!

Weiterhin führt die Vorgabe der Anfangswerte $i_{L_1,t_S} = i_{L_2,t_S} = 0$ in Verbindung mit der Originalanregung $j(t) = f(t)$ wiederum dazu, dass die Anfangswerte inkonsistent sind, da $f(t_S) \neq 0$ gilt. Das AWP 2. Art ist wiederum nicht lösbar. Lässt man verallgemeinerte Funktionen zu, so gibt es eine Lösung, die ebenfalls verallgemeinerte Funktionen z. B. bei der Lösung von

$u_{L_1}(t)$ enthält. Diese stimmt schon aus diesem Grunde mit $u_{L_1,rz}(t)$ nicht überein, da $u_{L_1,rz}(t)$ per Definition eine gewöhnliche Funktion ist. Ferner kann unter den gegebenen Voraussetzungen ($f(t)$ differenzierbar und $f(t_S) \neq 0$) $i_{L_1,zs}(t)$ nicht als Antwort aus dem Ruhezustand interpretiert werden.

Fazit: Ist die Voraussetzung $j(t) = 0$ für $t \leq t_b \geq t_0$ verletzt, so führt der Ansatz $a_{zi}(t) + a_{rz}(t)$ aus Bem. 5.20 und die dort beschriebene Berechnungsmethode ($a_{zi}(t)$ durch Vorgabe der gegebenen Anfangswerte und der Annahme $j(t) = 0$ für alle t zu berechnen und $a_{rz}(t)$ so wie in Bem. 5.20 beschrieben mit Hilfe der Abbildung FG^{-1} zu bestimmen) zu keiner korrekten Lösung, da die korrekte Lösung keine verallgemeinerten Funktionen enthält.

Das in (5.143) und (5.144) verwendete Integral spielt in der Netzwerktheorie und in der Systemtheorie eine sehr wichtige Rolle und soll daher im nächsten Kapitel näher betrachtet werden.

5.7 Faltungsprodukt und Systemverhalten

Definition 5.16 (Faltungsprodukt)

Seien $a(t)$, $b(t)$ zwei stückweise stetige Funktionen, die auf der gesamten reellen Achse definiert sind, und gelte entweder mit festen t_3, t_4 :

$$\text{i) } a(t) = b(t) = 0 \quad \text{für} \quad t \leq t_3 \quad \text{oder} \quad (5.146)$$

$$\text{ii) } |a(t)| \leq M < \infty \quad \text{für alle } t < t_3 \quad \text{und } b(t) = 0 \text{ für } t < t_4 \text{ mit} \quad \int_{t_4}^{\infty} |b(t)| dt < \infty$$

so ist für alle t

$$(a * b)(t) = (a(\bullet) * b(\bullet))(t) = (a(t') * b(t'))(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t - t') b(t') dt' \quad (5.147)$$

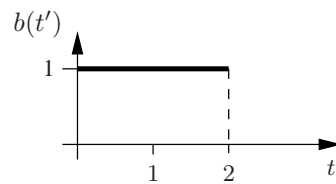
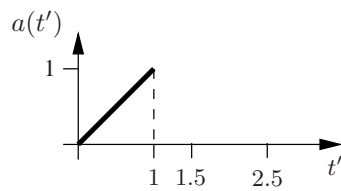
wohldefiniert.

$$\left(\begin{array}{l} \text{(i)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} a(t - t') b(t') dt' \\ \text{(ii)} \quad \text{Dazu betrachte man:} \\ \quad \text{Mit } x_1 < t_4 < x_2 \text{ beliebig:} \\ \quad \int_{x_1}^{x_2} |a(t - t') b(t')| dt' \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{ll} \int_{t_3}^{t-t_3} a(t - t') b(t') dt' & , \quad t \geq 2t_3 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{array} \right. \quad (5.148)$$

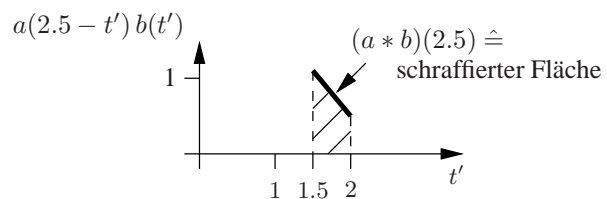
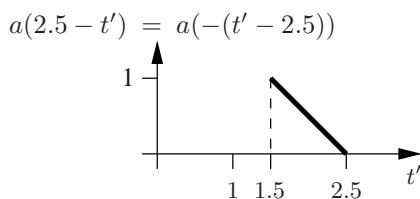
$$\leq \underbrace{\max_{x \leq t-t_4} |a(x)|}_{\text{unabhängig von } x_1, x_2!} \underbrace{\int_{t_4}^{\infty} |b(t')| dt'}_{< \infty} < \infty$$

Die neue Zeitfunktion $(a * b)(t)$ heißt Faltungsprodukt von $a(t)$ und $b(t)$.

Beispiel 5.6



Berechnung von $(a * b)(2.5)$



$a(t')$ wird „gefaltet“ ($a(t') \rightarrow a(-t')$) und $a(-t')$ wird um $t = 2.5$ nach rechts verschoben.)

Satz 5.6 (Eigenschaften des Faltungsprodukts)

Seien a, b, c Funktionen dergestalt, dass die Eigenschaften i) oder ii) aus Definition 5.16 für die in den untenstehenden Faltungsprodukten vorkommenden Funktionen erfüllt sind. Dann gilt mit reellen Zahlen α, β, τ :

$$1) \quad ((\alpha a + \beta b) * c)(t) = \alpha(a * c)(t) + \beta(b * c)(t) \quad (5.149)$$

$$2) \quad (a * b)(t) = (b * a)(t) \quad (5.150)$$

$$3) \quad (a(\bullet - \tau) * b)(t) = (a * b)(t - \tau) \quad (5.151)$$

$$4) \quad ((a * b) * c)(t) = (a * (b * c))(t) \quad (5.152)$$

Sei a n -fach differenzierbar, sodass jede der Ableitungen $a^{(k)}(t)$, $k = 0, \dots, n$ zusammen mit b entweder i) oder ii) erfüllt, so gilt

$$5) \quad \left(\frac{d}{dt}\right)^n (a * b)(t) = (a * b)^{(n)}(t) = (a^{(n)} * b)(t) \quad (5.153)$$

Beweis:

zu 1)

$$\begin{aligned} ((\alpha a + \beta b) * c)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} ((\alpha a(t-t') + \beta b(t-t')) c(t')) dt' \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} a(t-t') c(t') dt' + \beta \int_{-\infty}^{\infty} b(t-t') c(t') dt' \\ &= \alpha (a * c)(t) + \beta (b * c)(t) \end{aligned}$$

zu 2)

$$\begin{aligned} (a * b)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} a(t-t') b(t') dt' \\ &\quad (dt^* = -dt' \quad ; \quad t^* = t - t') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a(t^*) b(t - t^*) dt^* \\ &\quad (t' = t^*) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} b(t - t') a(t') dt' \\ &= (b * a)(t) \end{aligned}$$

zu 3)

$$\begin{aligned}
(a(\bullet - \tau) * b)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} a(t - t' - \tau) b(t') dt' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} a(t - \tau - t') b(t') dt' \\
&= (a * b)(t - \tau)
\end{aligned}$$

zu 4)

$$\begin{aligned}
((a * b) * c)(t) &\stackrel{2)}{=} ((b * a) * c)(t) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} b(t - t' - t'') a(t'') dt'' \right) c(t') dt' \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} b(t - t' - t'') a(t'') c(t') dt'' dt' \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} b(t - t' - t'') c(t') dt' \right) a(t'') dt'' \\
&= ((b * c) * a)(t) \stackrel{2)}{=} (a * (b * c))(t)
\end{aligned}$$

zu 5) sei $h > 0$

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{(a * b)(t + h) - (a * b)(t)}{h} - (a^{(1)} * b)(t) \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{a(t + h - t') - a(t - t')}{h} - a^{(1)}(t - t') \right| |b(t')| dt' \\
&\downarrow \text{Mittelwertsatz der Differentialrechnung} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |a^{(1)}(\xi(t - t', h)) - a^{(1)}(t - t')| |b(t')| dt' = X \quad \text{mit} \quad t - t' + h \geq \xi \geq t - t' \\
&\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} X = 0 \quad \text{aufgrund der Voraussetzungen,}
\end{aligned}$$

z.B. mit Voraussetzung i) und $t + h \geq 2 t_3$ sowie der vereinfachenden Annahme der stetigen Differenzierbarkeit von a folgt

$$X \leq \max_{t_3 \leq t' \leq t - t_3 + h} \left| a^{(1)}(\xi(t - t', h)) - a^{(1)}(t - t') \right| \int_{t_3}^{t - t_3 + h} |b(t')| dt' \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

da $a^{(1)}$ auf jedem kompakten Intervall gleichmäßig stetig ist. Das Argument lässt sich n -mal wiederholen!

Definition 5.17 (Zustandsloses System mit einer Eingangs- und einer Ausgangsfunktion)

Jede Abbildung $\mathcal{T} : D_E \rightarrow D_A$, wobei D_E und D_A geeignete Teilmengen der Menge aller reell- oder komplexwertigen, stückweise stetigen Zeitfunktionen sind, definiert ein System:

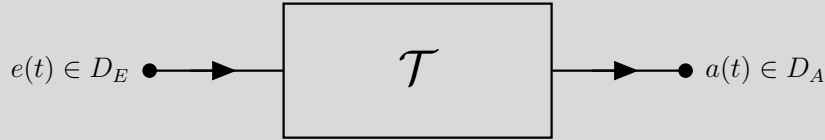


Abbildung 5.14

$$a(t) := \mathcal{T}(e(t'))(t) \quad (5.154)$$

Bei einem solchen Systemmodell wirkt immer nur der Eingang auf den Ausgang. Es ist unerheblich wie viele weitere Systemmodelle $a(t)$ als Eingangsfunktion benutzen. Dies hat keinen Einfluss (keine Rückwirkung) auf \mathcal{T} und $a(t)$!

Sei Beispiel 5.1 für $R \neq 0$ betrachtet:

Mit $e(t) := v(t)$ und $a(t) := i_C(t)$ und vorgegebenen u_{C,t_0} , R , C stellt (5.19) eine entsprechende Funktion \mathcal{T} dar:

$$\mathcal{T}(e(t'))(t) := -\frac{1}{R}u_{C,t_0} \exp\left(\frac{-(t-t_0)}{RC}\right) - \frac{1}{R^2C} \int_{t_0}^t \exp\left(\frac{-(t-t')}{RC}\right) e(t') dt' + \frac{1}{R}e(t) \quad (5.155)$$

Es ist oft notwendig, nicht alle Zeitfunktionen in D_E zuzulassen. Dazu sei wiederum Beispiel 5.1 betrachtet, wobei nun $R = 0$ und $C \neq 0$ gewählt wird.

Mit (5.50) ergibt dies

$$\mathcal{T}(e(t'))(t) = C \frac{de(t')}{dt'}(t' = t), \quad (5.156)$$

wobei D_E nun auf die Menge aller einmal differenzierbaren Funktionen beschränkt werden muss.

Aus Satz 5.1 ergibt sich für allgemeine, lineare, zeitinvariante Netzwerkmodelle, dass der Systembegriff aus Definition 5.17 für Netzwerkmodelle anwendbar ist, wenn man sich auf eine Eingangsfunktion $e(t)$, (bei Netzwerken typischerweise die Urspannung oder der Urstrom einer Quelle), und eine Ausgangsfunktion $a(t)$, (typischerweise eine beliebige, aber fest vorgegebene Zweigvariable (Strom oder Spannung)), beschränkt. Gibt man dann alle Netzwerkparameter (R, L, C, \dots) und einen Anfangszustandsvektor \vec{x}_{t_0} vor, so kann (5.42) als Systemfunktion \mathcal{T} interpretiert werden.

Definition 5.18 (Systemeigenschaften)

Sei ein System, wie in Definition 5.17 beschrieben, gegeben.

A) Das System ist linear, wenn für reelle bzw. komplexe Zahlen α und β sowie $e_1(t), e_2(t) \in D_E$ gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \alpha e_1(t) + \beta e_2(t) \in D_E \\ \text{b) } \mathcal{T}(\alpha e_1(t') + \beta e_2(t'))(t) = \alpha \mathcal{T}(e_1(t'))(t) + \beta \mathcal{T}(e_2(t'))(t) \end{array} \right\} \quad (5.157)$$

B) Das System ist zeitinvariant, wenn für ein beliebiges Zeitinkrement $\tau \geq 0$ und $e(t) \in D_E$ gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } e(t - \tau) \in D_E \\ \text{b) } \mathcal{T}(e(t' - \tau))(t) = \mathcal{T}(e(t'))(t - \tau) \end{array} \right\} \quad (5.158)$$

C) Das System ist kausal, falls für ein beliebiges \bar{t}_0 und $e_1(t), e_2(t) \in D_E$ gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } e_1(t) + e_2(t) \in D_E \\ \text{b) } e_1(t) = 0 \text{ für } t < \bar{t}_0 \Rightarrow \mathcal{T}(e_1(t') + e_2(t'))(t) = \mathcal{T}(e_2(t'))(t) \text{ für } t < \bar{t}_0 \end{array} \right\} \quad (5.159)$$

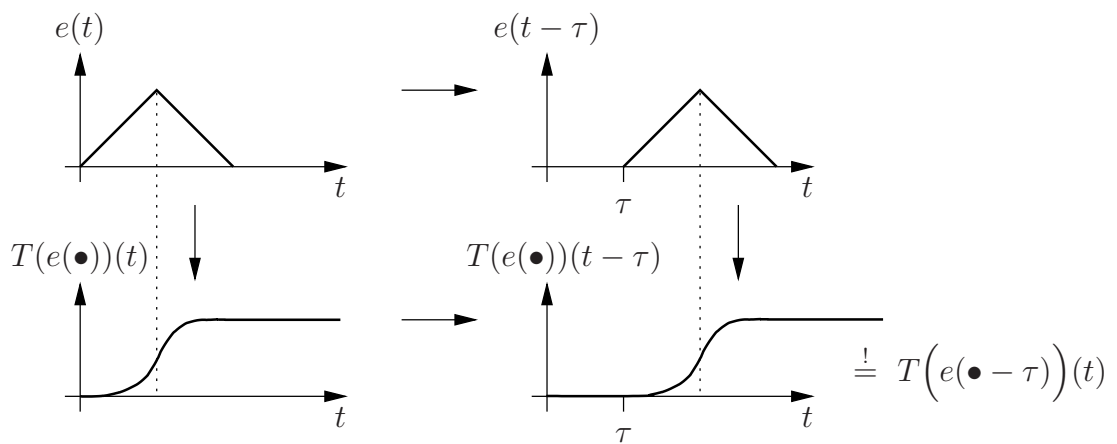
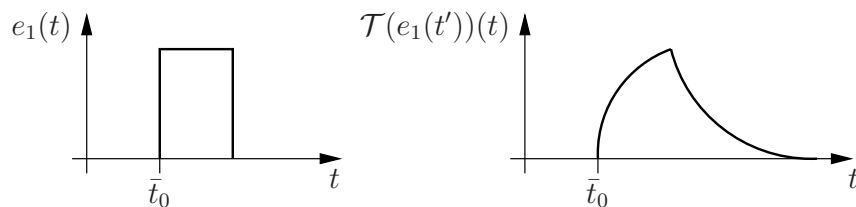


Abbildung 5.15: Veranschaulichung der Zeitinvarianz



Fazit: Die Wirkung beginnt nicht vor der Ursache!

Abbildung 5.16: Veranschaulichung der Kausalität für $e_2(t) = \mathcal{T}(e_2(t'))(t) = 0$

Bemerkung 5.21

Bei vorgegebenem Netzwerkmodell und Beschränkung auf eine Quellenfunktion $e_k(t)$, (alle anderen Quellenfunktionen seien zu Null gesetzt, der Index k wird im weiteren wieder unterdrückt!), also vorgegebenem $h_a(t)$ und $D_{a,i}, i = 0, \dots, r + 1$, entspricht sowohl die Darstellung der Antwort im eingeschwungenen Zustand (5.143) als auch die Darstellung der Antwort aus dem Ruhezustand heraus (5.144) einem linearen, zeitinvarianten und kausalen Systemverhalten. Dabei sei $e_\infty(t)$ in (5.143) als Systemeingangsfunktion gewählt. Ferner sei sowohl $a_{rz}(t)$ als auch $e(t)$ in (5.144) im Bereich $t < t_S$ durch 0 fortgesetzt, wodurch (5.144) für alle t gültig wird.

Beweis:

Antwort im eingeschwungenen Zustand:

Sei D_E die Menge aller $(r+1)$ -fach differenzierbaren Funktionen, die für $t < 0$ beschränkt sind. Dann gilt

$$\left. \begin{array}{l} e_{\infty,1}(t), e_{\infty,2}(t) \in D_E \Rightarrow \alpha e_{\infty,1}(t) + \beta e_{\infty,2}(t) \in D_E \\ e_{\infty}(t) \in D_E \Rightarrow e_{\infty}(t - \tau) \in D_E \end{array} \right\} \quad (5.160)$$

Der Rest ergibt sich aus den Eigenschaften des Faltungsproduktes. Zur Kausalität ist nur noch zu bemerken, dass für $t < \bar{t}_0$, und $e_{\infty}(t') = e_{\infty,1}(t') + e_{\infty,2}(t')$ mit $e_{\infty,1}(t') = 0$ für $t' < \bar{t}_0$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(e_{\infty,1}(t') + e_{\infty,2}(t'))(t) &= \int_{-\infty}^t h_a(t-t') \left(\underbrace{e_{\infty,1}(t')}_{=0} + e_{\infty,2}(t') \right) dt \\ &\quad + \sum_{i=0}^{r+1} D_{a,i} \left(\underbrace{e_{\infty,1}^{(i)}(t')}_{=0} + e_{\infty,2}^{(i)}(t') \right) \\ &= \mathcal{T}(e_{\infty,2}(t'))(t) \end{aligned} \quad (5.161)$$

Antwort aus dem Ruhezustand heraus:

Hier sei D_E die Menge aller $(r+1)$ -fach differenzierbaren Funktionen, die für $t < t_b$ verschwinden. Dann gilt (5.160) entsprechend, wobei hier nun die Voraussetzung $\tau > 0$ notwendig ist. Für $\tau < 0$ kann $e(t - \tau) \in D_E$ unter der Voraussetzung $e(t) \in D_E$ nicht garantiert werden. Der Rest ergibt sich wiederum aus den Eigenschaften des Faltungsproduktes bei entsprechender Berücksichtigung von (5.161).

Wie sich leicht zeigen lässt, entspricht das in Satz 5.1 und (5.42) festgehaltene, allgemeine zeitliche Verhalten eines linearen, zeitinvarianten Netzwerksystems auch bei Vorgabe eines Anfangszustandsvektor \vec{x}_{t_0} im allgemeinen weder einem linearen noch einem kausalen und auch keinem zeitinvarianten Systemverhalten. Die zusätzlichen Annahmen und Näherungen, die bei der Betrachtung der Antwort im eingeschwungenen Zustand und der Antwort aus dem Ruhezustand heraus gemacht wurden, sind also absolut notwendig, um die Eigenschaften der Linearität, Zeitinvarianz und Kausalität zu erhalten.

Es sei dazu wiederum Beispiel 5.1 mit $R, C > 0$, $e(t) = v(t)$, $a(t) = i_C(t)$, $t_0 = 0$ betrachtet. Dann gilt mit (5.19), (5.155) und $t_0 = 0 > t_S$ sowie vorgegebenem $u_{C,t_0} = u_C(0) \neq 0$ für $t > 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(V_0\Theta(t') + V_0\Theta(t'))(t) &= \mathcal{T}(2V_0\Theta(t'))(t) \\ &= \frac{1}{R}2V_0\Theta(t) - \frac{2V_0}{R^2C}e^{-\frac{t}{RC}} \int_0^t e^{\frac{t'}{RC}} dt' + \frac{u_C(0)}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \\ &\neq \frac{1}{R^2}2V_0 - \frac{2V_0}{R^2C}e^{-\frac{t}{RC}} \int_0^t e^{\frac{t'}{RC}} dt' + \frac{2u_C(0)}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \\ &= 2\mathcal{T}(V_0\Theta(t'))(t) \end{aligned} \quad (5.162)$$

Für $u_C(0) \neq 0$ ist das System also nichtlinear. Nur für $u_C(0) = 0$ ist das Verhalten linear.

Sei $e(t) = V_0 \Theta(t+T)$ mit $T > 0$, $V_0 \neq 0$. Dann gilt mit $\tau = T > 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(e(t'))(\underbrace{0}_{T-T=0}) &= \frac{1}{R} V_0 + \frac{u_C(0)}{R} \\ &\neq \mathcal{T}(e(t'-T))(T) = \mathcal{T}(V_0 \Theta(t'))(T) \\ &= \frac{1}{R} V_0 + \frac{u_C(0)}{R} e^{-\frac{T}{RC}} - \frac{V_0}{R^2 C} e^{-\frac{t}{RC}} \int_0^T e^{\frac{t'}{RC}} dt' \end{aligned} \quad (5.163)$$

Gleichheit tritt hier nur ein, falls $u_C(0) = 0$ und $T = 0$ gilt, woraus $e(t) = 0$ für $t < 0$ folgt.

Die Bedingungen für das Vorliegen der Antwort aus dem Ruhezustand heraus, die in (5.131) bzw. (5.134) zusammengefasst wurden, sind also absolut notwendig für das Vorliegen eines zeitinvarianten Systemverhaltens.

Sei nun $u_C(0) = 0$, $e_2(t) \equiv 0$ und $\bar{t}_0 < 0$, $V_0 > 0$ sowie $e_1(t) = V_0 \Theta(t - \bar{t}_0)$. Sei ferner $t < \bar{t}_0 < 0$, dann gilt wieder mit (5.19), (5.155)

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(e_1(t') + e_2(t'))(t) &= \mathcal{T}(e_1(t'))(t) = \frac{-V_0}{R^2 C} \int_0^t e^{-\frac{1}{RC}(t-t')} \Theta(t' - \bar{t}_0) dt' + \frac{1}{R} V_0 \Theta(t - \bar{t}_0) \\ &= \underbrace{\frac{-V_0}{R^2 C} \int_0^{\bar{t}_0} \underbrace{e^{-\frac{1}{RC}(t-t')}}_{>0} dt'}_{\neq 0} \neq \mathcal{T}(e_2(t'))(t) = 0 \end{aligned} \quad (5.164)$$

Für $\bar{t}_0 < t_0$ ist das Systemverhalten also im allgemeinen nicht kausal. Dies ist auch nicht verwunderlich, da hier die Darstellung von $i_C(t)$ gewählt wurde, die $i_C(t)$ für $t < t_0 = 0$ genau so berechnet, dass für t_0 $u_{C,t_0} = u(t_0)$ gilt. Andererseits lässt sich leicht zeigen, dass (5.19) für $\bar{t}_0 > t_0$ immer ein kausales Systemverhalten ergibt. Der Beweis dazu sollte als Übungsaufgabe durchgeführt werden.

Kapitel 6

Lineare algebraische Netzwerkgleichungen

Im Kapitel 5 hat sich gezeigt, dass zumindest bei asymptotisch stabilen, linearen, zeitinvarianten Netzwerkmodellen die Bestimmung des Frequenzganges für alle Frequenzen ω mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung von zentraler Bedeutung ist. Denn nach der Bestimmung des Frequenzganges und der Durchführung der Rücktransformation aus Bemerkung 5.14 reduziert sich sowohl die Bestimmung der Darstellung der Antwort im eingeschwungenen Zustand als auch die Bestimmung der Antwort bei Erregung aus dem Ruhestand heraus auf eine vergleichsweise einfache Integrations- (Faltungs-) und Differentiationsaufgabe (siehe (5.143) und (5.144)). Die Antwort auf die Erregung durch mehrere Quellen kann dabei jeweils mittels der in den Bemerkungen 5.5 und 5.17 beschriebenen Superpositionsprinzipien auf die Überlagerung von Antworten auf jeweils nur eine Quelle zurückgeführt werden. Bei der komplexen Wechselstromrechnung (KWR) wird für jede Spannungs- oder Stromvariable der Ansatz $u(t) = \Re\{\underline{U}e^{j\omega t}\}$ bzw. $i(t) = \Re\{\underline{I}e^{j\omega t}\}$ mit festem ω gemacht, wobei $\omega = 0$ durchaus zugelassen sein soll. Dadurch werden aus den in (1.1)-(1.5) eingeführten elementaren Zweipolgleichungen rein algebraische Gleichungen, in denen keine zeitliche Ableitung mehr vorkommt:

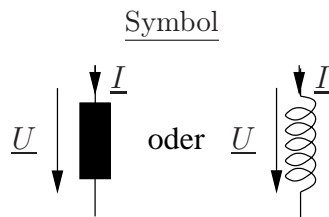
- linearer, zeitinvarianter Widerstand R

<u>Symbol</u>	<u>Gleichung</u>
	$\underline{U} = R \cdot \underline{I} \quad (6.1)$

- lineare, zeitinvariante Kapazität C

<u>Symbol</u>	<u>Gleichung</u>
	$\underline{I} = j\omega C \cdot \underline{U} \quad (6.2)$

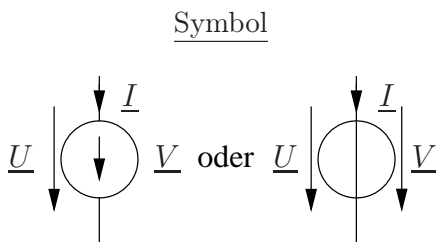
- lineare, zeitinvariante Induktivität L



Gleichung

$$\underline{U} = j\omega L \cdot \underline{I} \quad (6.3)$$

- ideale Spannungsquelle

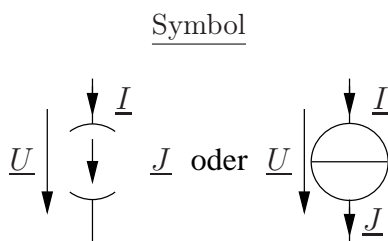


Gleichung

$$\underline{U} = \underline{V} \quad , \quad (6.4)$$

\underline{V} ist bekannt und vorgegeben. \underline{I} ist nicht durch die ideale Spannungsquelle bestimmt, sondern ergibt sich aus der äußeren Beschaltung.

- ideale Stromquelle



Gleichung

$$\underline{I} = \underline{J}, \quad (6.5)$$

\underline{J} ist bekannt und vorgegeben. \underline{U} ist nicht durch die ideale Stromquelle bestimmt, sondern ergibt sich aus der äußeren Beschaltung.

Das heißt, dass man bei der Bestimmung von Frequenzgängen linearer zeitinvarianter Netzwerkmodelle mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung stets von rein algebraischen Netzwerkgleichungen ausgehen kann.

6.1 Das Tableau der Netzwerkgleichungen

Sei ein lineares zeitinvariantes Zweipolnetzwerkmodell gegeben, wobei jedem Zweipol der in Kapitel 4.2 eingeführten Konvention folgend, wie in Definition 4.4 beschrieben, eine Strom- und Spannungsvariable nach dem Verbraucherzählpfeilsystem zugeordnet ist. Damit ist jedem Zweipol ein Zweig im Netzwerkgraphen zugeordnet und jeder Zweigspannung und jedem Zweigstrom in Sinne der komplexen Wechselstromrechnung ein Zeiger zugeordnet. Der Netzwerkgraph enthalte z -Zweige sowie k -Knoten und s -Komponenten und die Zweige seien von 1 bis z durchnummeriert. Es ist nicht notwendig, dass die den Zweigen zugeordneten Zweipole alle elementare Zweipole sind, sondern diese können aus elementaren Zweipolen zusammengesetzt sein. Dann hat das aus der komplexen Wechselstromrechnung resultierende Gleichungssystem die folgende allgemeine algebraische Form, die auch oft als das Tableau der Netzwerkgleichungen bezeichnet wird:

Definition 6.1 (Tableau der Netzwerkgleichungen)

$$\underline{N} \begin{pmatrix} \underline{\vec{U}} \\ \underline{\vec{I}} \end{pmatrix} = \begin{matrix} z-k+s \{ \\ k-s \{ \\ z \{ \end{matrix} \begin{pmatrix} \underline{MGL} & , & \underline{0} \\ \underline{0} & , & \underline{SGL} \\ \underline{ZU} & , & \underline{ZI} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\vec{U}} \\ \underline{\vec{I}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{\vec{ZR}} \end{pmatrix} = \underline{\vec{NR}} \quad (6.6)$$

Die Zweige (Zweipole) des Zweipolnetzwerkmodells sind von $1, \dots, z$ durchnummeriert. Für jeden Zweig wird eine Strom- und eine Spannungsvariable entsprechend dem Verbraucherzählpfeilsystem eingeführt. Diese Variablen erhalten die Nummer $(1, \dots, z)$ des zugehörigen Zweiges. Dabei ist

$$\underline{\vec{U}}^t = (\underline{U}_1, \dots, \underline{U}_z) \quad (6.7)$$

der Vektor der Zweigspannungen und

$$\underline{\vec{I}}^t = (\underline{I}_1, \dots, \underline{I}_z) \quad (6.8)$$

der Vektor der Zweigströme.

Die reelle Matrix \underline{MGL} hat $z - k + s$ Zeilen und beschreibt $(z - k + s)$ unabhängige Maschengleichungen. Somit ist

$$\underline{MGL} = \underline{FM}, \quad (6.9)$$

also eine geeignete Wahl für \underline{MGL} , wobei \underline{FM} die Fundamentalmascheninzidenzmatrix aus Definition 4.2 ist.

Die reelle Matrix \underline{SGL} hat $k - s$ Zeilen und beschreibt $k - s$ linear unabhängige Schnittmengengleichungen. Somit sind

$$\underline{SGL} = \underline{FS} \quad (6.10)$$

oder

$$\underline{SGL} = \underline{KG} \quad (6.11)$$

geeignete Wahlen für \underline{SGL} , wobei \underline{FS} die Fundamentalschnittmengenzinidenzmatrix aus Definition 4.1 und \underline{KG} die Knotenzweiginzidenzmatrix aus Definition 4.3 ist.

Die z -Zweipole induzieren z -Zweiggleichungen, die durch die komplexen Matrizen \underline{ZU} und \underline{ZI} sowie den komplexen Vektor $\underline{\vec{ZR}}$ dargestellt werden. $\underline{\vec{ZR}}$ enthält dabei den Anteil der linearen Zweiggleichungen, der von den Zweigspannungen und Zweigströmen unabhängig ist.

Diese allgemeine Beschreibung der Zweiggleichungen erlaubt es, dass z.B. die Spannung eines Zweiges vom Strom eines anderen Zweiges abhängen kann. Dies ist ein Effekt, der durch die bisher definierten elementaren Zweipole nicht berücksichtigt werden kann, aber andererseits bei realen technischen Bauelementen immer wieder auftritt.

Beispiel 6.1

(gekoppelte verlustlose Spulen, verlustloser Transformator)

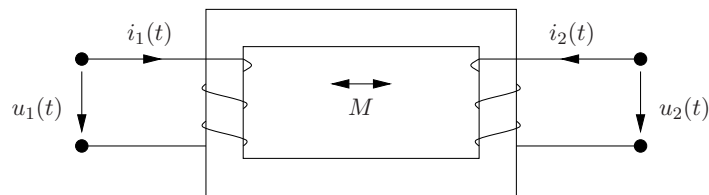


Abbildung 6.1: Reale Struktur

Bestimmungsgleichungen im Zeitbereich:

(Annahmen: Ohmsche Verluste vernachlässigbar, niedrige Frequenzen)

$$\left. \begin{aligned} u_1(t) &= L_1 \frac{di_1}{dt}(t) + M \frac{di_2}{dt}(t) \\ u_2(t) &= M \frac{di_1}{dt}(t) + L_2 \frac{di_2}{dt}(t) \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

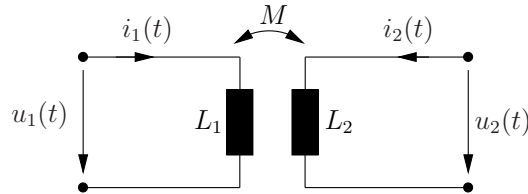
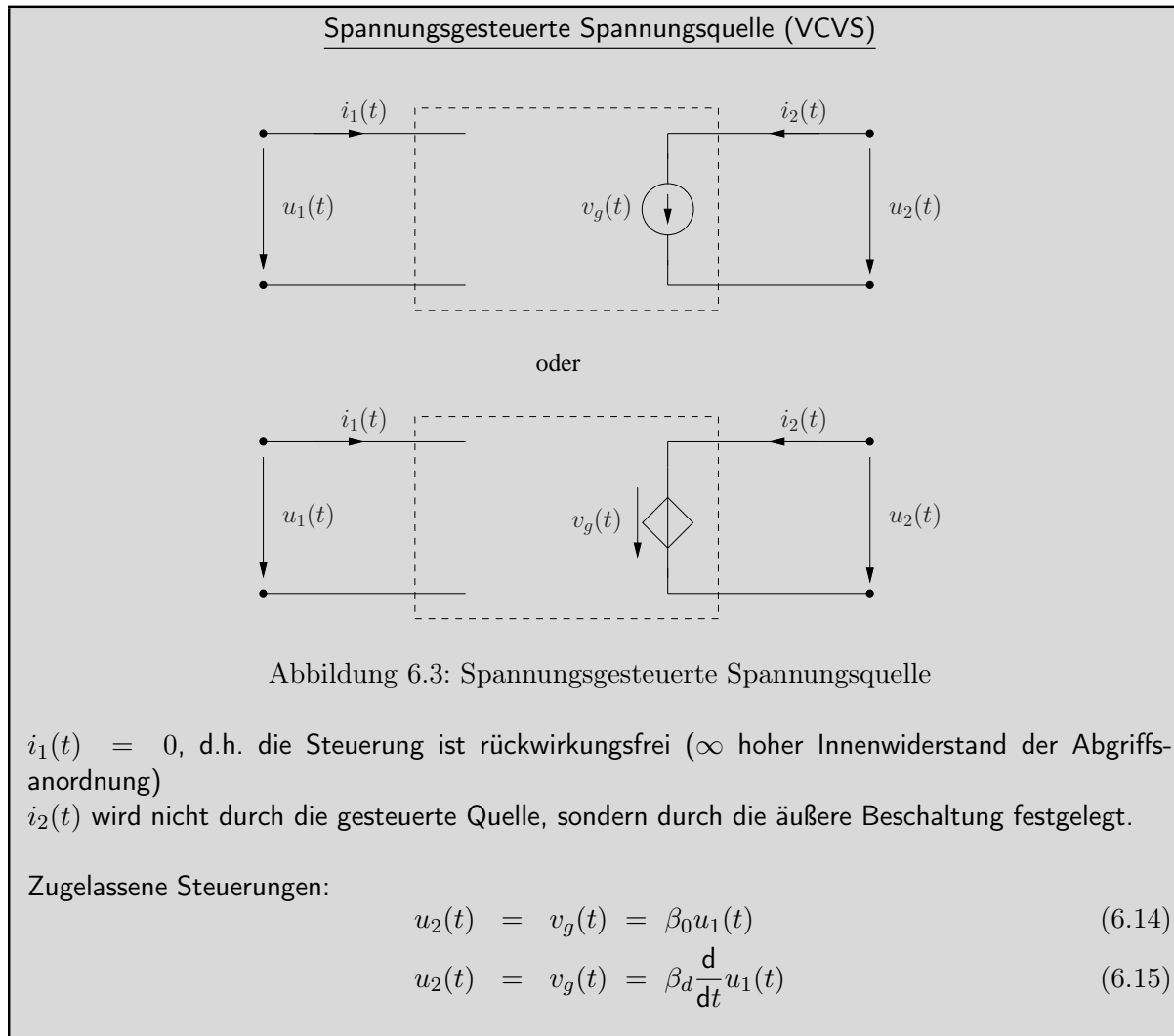


Abbildung 6.2: Ersatzschaltbild zu (6.12)

Bestimmungsgleichungen bei Anwendung der KWR:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= j\omega M \underline{I}_1 + j\omega L_2 \underline{I}_2 \end{aligned} \quad (6.13)$$

Definition 6.2 Weitere elementare, ideale Zweipolmodelle (Gesteuerte Quellen)

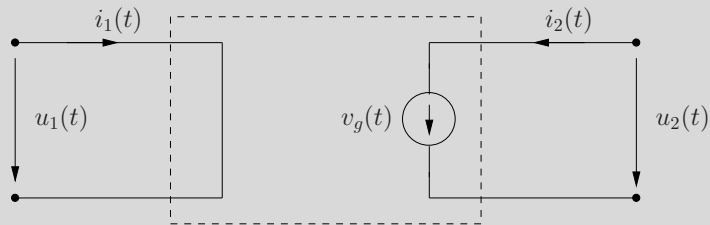


Gleichungen bei Anwendung der KWR:

$$\underline{U}_2 = \beta_0 \underline{U}_1 \quad (6.16)$$

$$\underline{U}_2 = j\omega\beta_d \underline{U}_1 \quad (6.17)$$

Stromgesteuerte Spannungsquelle (CCVS)



oder

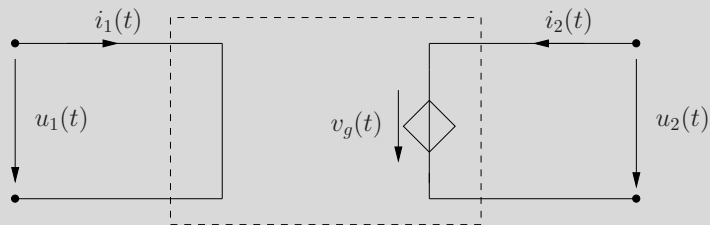


Abbildung 6.4: Stromgesteuerte Spannungsquelle

$u_1(t) = 0$, d.h. die Steuerung erfolgt rückwirkungsfrei (verschwindender Innenwiderstand der Abgriffsanordnung)

$i_2(t)$ wird nicht durch die Quelle, sondern durch die äußere Beschaltung bestimmt.

Zugelassene Steuerungen:

$$u_2(t) = v_g(t) = r_0 i_1(t) \quad (6.18)$$

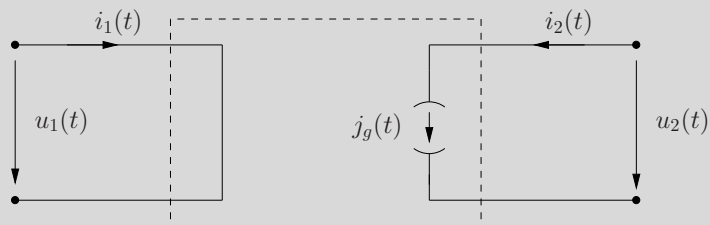
$$u_2(t) = v_g(t) = r_d \frac{di_1}{dt}(t) \quad (6.19)$$

Gleichungen bei Anwendung der KWR:

$$\underline{U}_2 = r_0 \underline{I}_1 \quad (6.20)$$

$$\underline{U}_2 = j\omega r_d \underline{I}_1 \quad (6.21)$$

Stromgesteuerte Stromquelle (CCCS)



oder

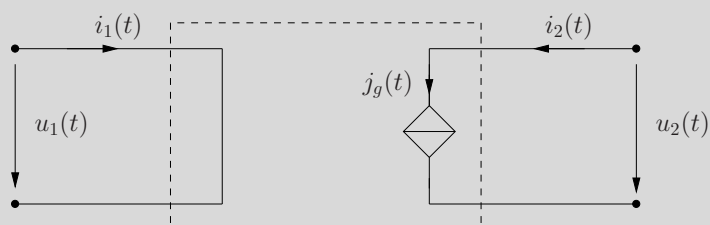


Abbildung 6.5: Stromgesteuerte Stromquelle

$u_1(t) = 0$, d.h. die Steuerung erfolgt rückwirkungsfrei (verschwindender Innenwiderstand der Abgriffsanordnung)

$u_2(t)$ hängt nicht von der Quelle ab, sondern wird durch die äußere Schaltung bestimmt.

Zugelassene Steuerungen:

$$i_2(t) = j_g(t) = \alpha i_1(t) \quad (6.22)$$

$$i_2(t) = j_g(t) = \alpha_d \frac{d}{dt} i_1(t) \quad (6.23)$$

Gleichungen bei Anwendung der KWR:

$$\underline{I}_2 = \alpha \underline{I}_1 \quad (6.24)$$

$$\underline{I}_2 = j\omega \alpha_d \underline{I}_1 \quad (6.25)$$

Spannungsgesteuerte Stromquelle (VCCS)

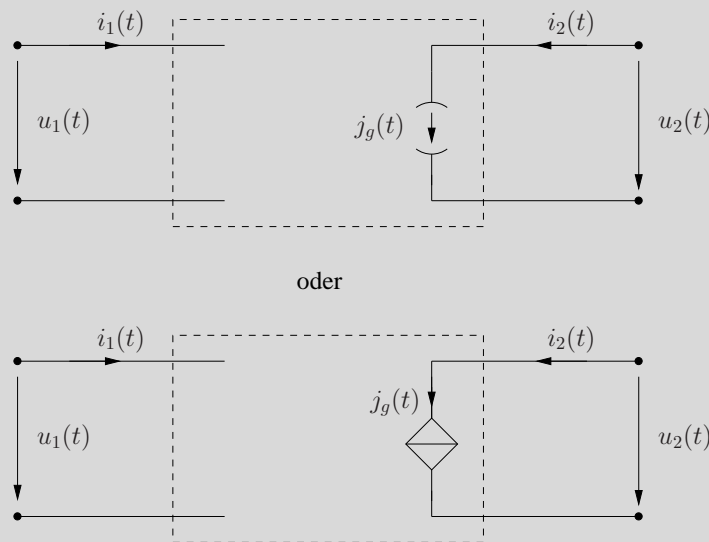


Abbildung 6.6: Spannungsgesteuerte Stromquelle

$i_1(t) = 0$, d.h. die Steuerung erfolgt rückwirkungslos (∞ hoher Innenwiderstand der Abgriffsanordnung)

$u_2(t)$ hängt nicht von der Quelle ab, sondern wird durch die äußere Schaltung bestimmt.

Zugelassene Steuerungen:

$$i_2(t) = j_g(t) = g u_1(t) \quad (6.26)$$

$$i_2(t) = j_g(t) = g_d \frac{d}{dt} u_1(t) \quad (6.27)$$

Gleichungen bei Anwendung der KWR:

$$\underline{I}_2 = g \underline{U}_1 \quad (6.28)$$

$$\underline{I}_2 = j\omega g_d \underline{U}_1 \quad (6.29)$$

Mit Hilfe der stromgesteuerten Spannungsquelle ergibt sich damit das in Abbildung 6.7 festgehaltene Netzwerkmodell für die Beschreibung des verlustlosen Transformators in der Näherung (6.12):

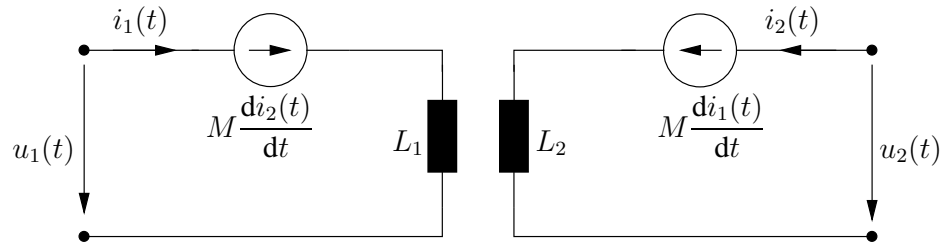


Abbildung 6.7: Ersatzschaltbild aus elementaren Zweipolen für den verlustlosen Transformator aus Beispiel 6.1

Im harmonisch eingeschwungenen Zustand ergeben sich für alle gesteuerte Quellen aus Definition 6.2 wiederum rein algebraische Gleichungen, so dass auch diese elementaren Zweipole wiederum in das Gleichungstableau aus Definition 6.1 passen.

Beispiel 6.2

(Beispiel 5.1 bei Anwendung der KWR)

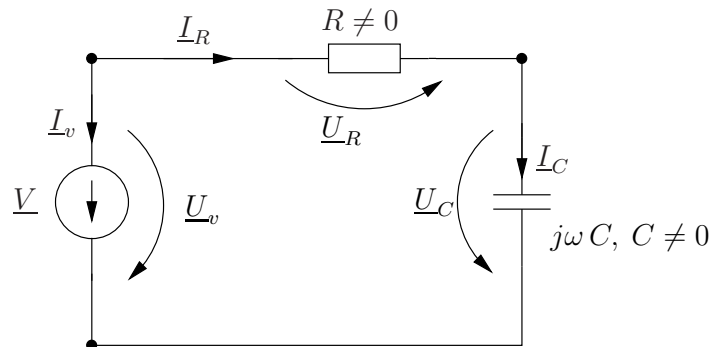


Abbildung 6.8

$$\begin{aligned}
 \vec{U}^t &= (U_v, U_R, U_C) \\
 \vec{I}^t &= (I_v, I_R, I_C) \\
 \underline{\underline{N}} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -R & 0 \\ 0 & 0 & j\omega C & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \vec{NR} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \underline{V} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.30)
 \end{aligned}$$

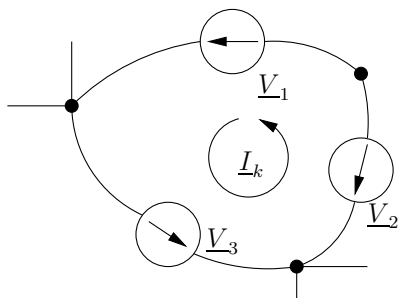
Bemerkung 6.1

Das Tableau der Netzwerkgleichungen (6.6) hat eine eindeutige Lösung, falls $\det \underline{\underline{N}} \neq 0$ ist. In diesem Fall folgt aus $\vec{NR} = 0$ also $\vec{ZR} = 0$ sofort $\vec{U} = 0$ und $\vec{I} = 0$!

Bemerkung 6.2

Enthält ein Zweipolnetzwerkmodell Maschen aus festen (ungesteuerten) Spannungsquellen oder Schnittmengen aus festen (ungesteuerten) Stromquellen, so gilt:

- A) Die Urspannungen (Urströme) erfüllen die *MGL* (*SGL*) nicht \Rightarrow Die Netzwerkmodellgleichungen haben keine Lösung $\Rightarrow \det \underline{N} = 0$ für alle ω .
- B) Die Urspannungen (Urströme) erfüllen die *MGL* (*SGL*). Es gilt jedoch weiterhin $\det \underline{N} = 0$ für alle ω , da \underline{N} nicht von der Wahl der festen Quellen abhängt. \Rightarrow Die Netzwerkgleichungen haben entweder weiterhin keine Lösung oder sie haben beliebig viele Lösungen.

Beispiel 6.3

$$\underline{V}_1 + \underline{V}_3 - \underline{V}_2 = 0 \quad (6.31)$$

Wenn die Ströme in den Spannungsquellenzweigen keine Steuergrößen in anderen Zweigen sind, kann man sich leicht klar machen, dass bei Vorhandensein einer Lösung des Netzwerkproblems ein beliebiger Kreisstrom \underline{I}_k in der Masche fließen kann.

Bemerkung 6.3

Für die in Bemerkung 6.2 beschriebenen Netzwerkmodelle gilt:

$$\det \underline{N} = 0 \text{ für alle } \omega \quad (6.32)$$

Netzwerkmodelle, für die (6.32) gilt, werden im weiteren Verlauf der Vorlesung nicht weiter betrachtet, da das zugehörige Gleichungssystem als nicht sinnvoll gestellt betrachtet wird. Es ist jedoch kein Problem, wenn $\det \underline{N} = 0$ nur für endlich viele ω gilt. Dies wird später noch genauer begründet werden.

Definition 6.3

Sei ein Zweipol (Zweig) im Netzwerkmodell und die bei Anwendung der KWR für diesen Zweipol geltende Netzwerkgleichung (eine Zeile in der unteren Hälfte des Gleichungssystems (6.6)) sei herausgegriffen:

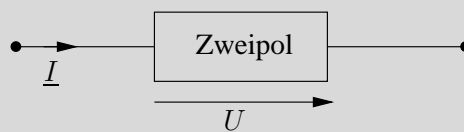


Abbildung 6.9: Zweipol mit zugeordneten Strom und zugeordneter Spannung

- A) Der Zweipol (Zweig) hat eine Ersatzstromquellendarstellung, wenn sich die zugehörige Netzwerkgleichung nach \underline{I} auflösen und in der folgenden Form schreiben lässt:

$$\underline{I} = \underline{Y} \underline{U} + \underline{J} \quad (6.33)$$

Dabei darf \underline{Y} von keinen Spannungen und Strömen im Netzwerkmodell abhängen und \underline{J} darf nicht von \underline{U} oder \underline{I} abhängen. \underline{J} zerfällt typischerweise in einem festen (ungesteuerten) und einen gesteuerten Anteil.

$$\underline{J} = \underline{J}_g + \underline{J}_f \quad (6.34)$$

\underline{J}_f hängt wiederum von keinen Spannungen und Strömen im Netzwerkmodell ab. \underline{J}_g kann hingegen linear von allen Zweigspannungen und Zweigströmen außer \underline{U} und \underline{I} abhängen. \underline{J}_g entspricht also der Parallelschaltung von elementaren gesteuerten Stromquellen. Gilt $\underline{Y} = 0$ in (6.33), so wird die Stromquellendarstellung ideal genannt.

- B) Der Zweipol (Zweig) hat eine Ersatzspannungsquellendarstellung, wenn sich die zugehörige Netzwerkgleichung nach \underline{U} auflösen und in folgender Form schreiben lässt:

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I} + \underline{V} \quad (6.35)$$

Dabei darf \underline{Z} von keinen Spannungen und Strömen im Netzwerk abhängen und \underline{V} darf nicht von \underline{U} oder \underline{I} abhängen. \underline{V} zerfällt typischerweise in einen festen (ungesteuerten) und einen gesteuerten Anteil.

$$\underline{V} = \underline{V}_g + \underline{V}_f \quad (6.36)$$

\underline{V}_f hängt wiederum von keinen Spannungen und Strömen im Netzwerkmodell ab. \underline{V}_g kann hingegen linear von allen Zweigspannungen und Zweigströmen im Netzwerkmodell abhängen. \underline{V}_g entspricht also der Reihenschaltungen von elementaren gesteuerten Spannungsquellen. Gilt $\underline{Z} = 0$ in (6.35) so wird die Spannungsquellendarstellung ideal genannt.

- C) Gilt $\underline{Y} \neq 0$ in (6.33) oder $\underline{Z} \neq 0$ in (6.35), so kann anstatt nach $\underline{I}(\underline{U})$ auch nach $\underline{U}(\underline{I})$ aufgelöst werden. Der Zweipol (Zweig) hat dann sowohl eine Ersatzstromquellen- als auch eine Ersatzspannungsquellendarstellung und es gilt

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}, \quad \underline{J} = -\frac{\underline{V}}{\underline{Z}} \quad (6.37)$$

Bemerkung 6.4

Auf der Basis der in Kapitel 4 bereitgestellten Hilfsmittel lässt sich das Tableaugleichungssystem (6.6) besonders einfach lösen, wenn entweder $\underline{Z}\underline{U}$ oder $\underline{Z}\underline{I}$ aus (6.6) invertierbar ist. Unter diesen Voraussetzungen lassen sich die Zweiggleichungen aus (6.6) in folgende äquivalente Form bringen. Existiert $\underline{Z}\underline{I}^{-1}$ so folgt:

$$\underline{\vec{I}} = -\underline{Z}\underline{I}^{-1}\underline{Z}\underline{U} \underline{\vec{U}} + \underline{Z}\underline{I}^{-1}\underline{\vec{Z}}\underline{\vec{R}} \quad (6.38)$$

D.h. Jeder Zweig (Zweipol) hat eine Ersatzstromquellendarstellung, in der nur spannungsgesteuerte Stromquellen vorkommen.

Existiert $\underline{Z}\underline{U}^{-1}$ so folgt:

$$\underline{\vec{U}} = -\underline{Z}\underline{U}^{-1}\underline{Z}\underline{I} \underline{\vec{I}} + \underline{Z}\underline{U}^{-1}\underline{\vec{Z}}\underline{\vec{R}} \quad (6.39)$$

D.h. Jeder Zweig (Zweipol) hat eine Ersatzspannungsquellendarstellung, in der nur stromgesteuerte Spannungsquellen vorkommen.

Im weiteren werden nun zunächst die auf den Darstellungen (6.38) und (6.39) beruhenden Standardlöseverfahren abgehandelt. Danach werden Maßnahmen (z.B. Quellenverschiebung) behandelt, die dazu dienen, die Zweiggleichungen in die Form (6.38), (6.39) zu transformieren, um von allgemeineren Voraussetzungen als (6.38) (6.39) ausgehen zu können.

6.2 Das Schnittmengenadmittanz- und das Knotenadmittanzverfahren

6.2.1 Das Schnittmengenadmittanzverfahren

Voraussetzungen:

1. Alle Zweige haben eine Ersatzstromquellendarstellung nach (6.33)
2. Alle Urströme sind von der Form

$$\underline{J} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fest}}}{\underline{J}_f} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Spannungssteuerung}}}{\underline{\vec{C}}^t \underline{\vec{U}}} \quad (6.40)$$

Diese Voraussetzungen gelten z.B., wenn $(\underline{ZI})^{-1}$ existiert.

Abstrakte Vorgehensweise, wenn $(\underline{ZI})^{-1}$ existiert :

- I) Berücksichtigung der SGL durch FSGL :

$$\underline{FS} \underline{\vec{I}} = 0 \quad (6.41)$$

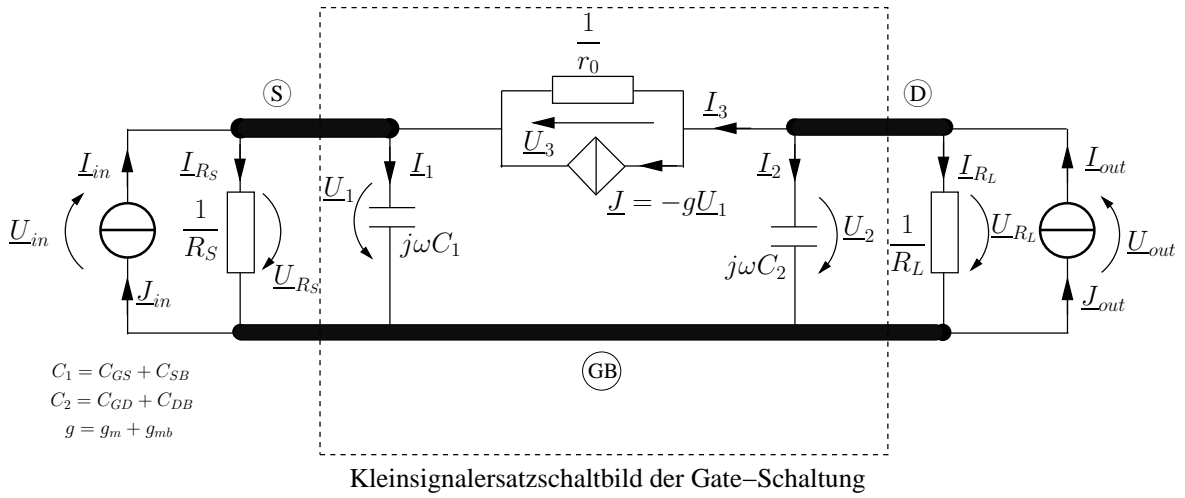
- II) Berücksichtigung der Zweiggleichungen :

$$\begin{aligned} \underline{\vec{I}} &= -\underline{ZI}^{-1} \underline{ZU} \underline{\vec{U}} + \underline{ZI}^{-1} \underline{\vec{Z}\vec{R}} \\ \Rightarrow \underline{FS} \underline{ZI}^{-1} \underline{ZU} \underline{\vec{U}} &= \underline{FS} \underline{ZI}^{-1} \underline{\vec{Z}\vec{R}} \end{aligned} \quad (6.42)$$

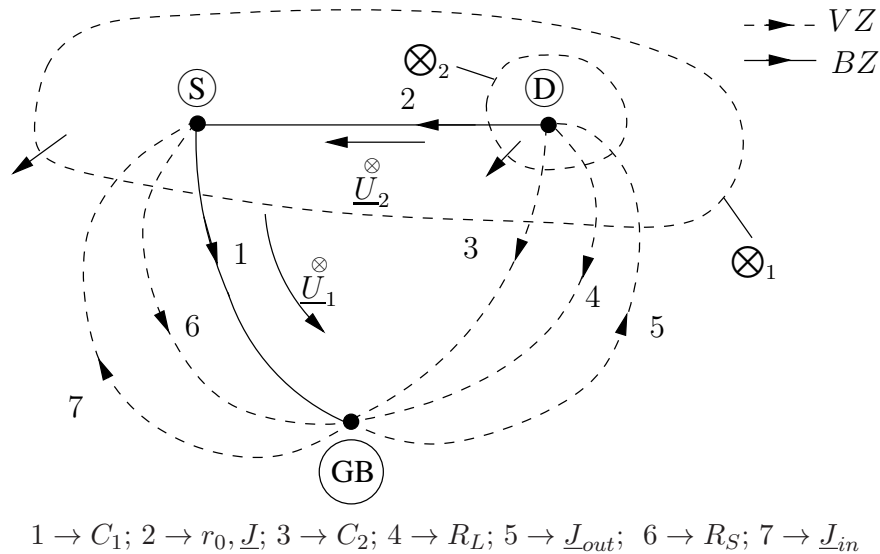
- III) Berücksichtigung der MGL durch BZSP :

$$\begin{aligned} \underline{\vec{U}} &= \underline{FS}^t \underline{\vec{U}} \\ \Rightarrow \underline{FS} \underline{ZI}^{-1} \underline{ZU} \underline{FS}^t \underline{\vec{U}} &= \underline{FS} \underline{ZI}^{-1} \underline{\vec{Z}\vec{R}} \end{aligned} \quad (6.43)$$

$k - s$ Gleichungen mit $k - s$ Unbekannten statt $2z$ Gleichungen mit $2z$ Unbekannten $\hat{=}$ Schnittmengenadmittanzverfahren.

Beispiel 6.4

Alle Zweigggleichungen haben eine Ersatzstromquellendarstellung und es gibt nur Spannungssteuerungen.

Graph

I) Fundamentalschnittmengengleichungen:

$$\begin{aligned} -\underline{I}_{in} + \underline{I}_{R_S} + \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_{R_L} - \underline{I}_{out} &= 0 \\ \underline{I}_3 + \underline{I}_2 + \underline{I}_{R_L} - \underline{I}_{out} &= 0 \end{aligned} \quad (6.44)$$

II)a Zweigggleichungen zur Umwandlung von $\vec{I} \rightarrow \vec{U}$ verwenden: (Gesteuerte Quellen werden dabei zunächst wie fest vorgegebene (ungesteuerte) Quellen behandelt)

$$\frac{\underline{U}_{R_S}}{R_S} + j\omega C_1 \underline{U}_1 + j\omega C_2 \underline{U}_2 + \frac{\underline{U}_{R_L}}{R_L} = \underline{J}_{in} + \underline{J}_{out} \quad (6.45)$$

$$\underline{U}_2 j\omega C_2 + \frac{\underline{U}_3}{r_0} + \frac{\underline{U}_{R_L}}{R_L} = \underline{J}_{out} - \underline{J} \quad (6.46)$$

III) Zweigspannungen durch BZ-Spannungen ausdrücken:

$$\begin{aligned}
 -\underline{U}_{in} &= \underline{U}_{R_S} = \underline{U}_1 = \underline{\overset{\otimes}{U}}_1 \\
 \underline{U}_3 &= \underline{\overset{\otimes}{U}}_2 \\
 -\underline{U}_{out} &= \underline{U}_{R_L} = \underline{U}_2 = \underline{\overset{\otimes}{U}}_1 + \underline{\overset{\otimes}{U}}_2
 \end{aligned} \tag{6.47}$$

Dies impliziert:

$$\begin{aligned}
 \underline{\overset{\otimes}{U}}_1 \left(\frac{1}{R_S} + \frac{1}{R_L} + j\omega(C_1 + C_2) \right) + \underline{\overset{\otimes}{U}}_2 \left(\frac{1}{R_L} + j\omega C_2 \right) &= \underline{J}_{in} + \underline{J}_{out} \\
 \underline{\overset{\otimes}{U}}_1 \left(\frac{1}{R_L} + j\omega C_2 \right) + \underline{\overset{\otimes}{U}}_2 \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{R_L} + j\omega C_2 \right) &= \underline{J}_{out} - \underline{J}
 \end{aligned} \tag{6.48}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\overset{\otimes}{Y}}_{OS} \underline{\overset{\otimes}{U}} &= \underline{\overset{\otimes}{J}}, \quad \underline{\overset{\otimes}{U}} = \begin{pmatrix} \underline{\overset{\otimes}{U}}_1 \\ \underline{\overset{\otimes}{U}}_2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\overset{\otimes}{J}} = \begin{pmatrix} \underline{J}_{in} + \underline{J}_{out} \\ \underline{J}_{out} - \underline{J} \end{pmatrix} \\
 \underline{\overset{\otimes}{Y}}_{OS} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{R_S} + \frac{1}{R_L} + j\omega(C_1 + C_2) & ; & \frac{1}{R_L} + j\omega C_2 \\ \frac{1}{R_L} + j\omega C_2 & ; & \frac{1}{r_0} + \frac{1}{R_L} + j\omega C_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.49}$$

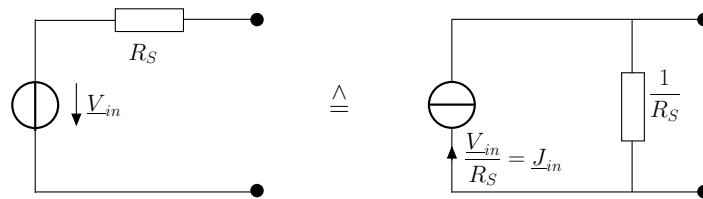
II)b,III Berücksichtigung der Steuerungen:

$$\underline{J} = -g\underline{U}_1 = -g\underline{\overset{\otimes}{U}}_1 \tag{6.50}$$

$$\underline{\overset{\otimes \otimes}{Y}}\underline{\overset{\otimes}{U}} = \underline{\overset{\otimes}{J}}_0 = \begin{pmatrix} \underline{J}_{in} + \underline{J}_{out} \\ \underline{J}_{out} \end{pmatrix} \tag{6.51}$$

$$\underline{\overset{\otimes}{Y}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_S} + \frac{1}{R_L} + j\omega(C_1 + C_2) & , & \frac{1}{R_L} + j\omega C_2 \\ \frac{1}{R_L} + j\omega C_2 - g & , & \frac{1}{r_0} + \frac{1}{R_L} + j\omega C_2 \end{pmatrix} \tag{6.52}$$

Bestimmung der Spannungsverstärkung $\underline{A}_v(j\omega)$:



$$\underline{A}_v(j\omega) := \left(\frac{-\underline{U}_{out}}{\underline{V}_{in}} \right) \Big|_{\underline{J}_{out}=0} \tag{6.53}$$

$$= \frac{\underline{\overset{\otimes}{U}}_1 + \underline{\overset{\otimes}{U}}_2}{\underline{V}_{in}} \Big|_{\underline{J}_{out}=0} \tag{6.54}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{V_{in}} \frac{\det \begin{pmatrix} \frac{V_{in}}{R_S} & ; & \frac{1}{R_L} + j\omega C_2 \\ 0 & , & \frac{1}{r_0} + \frac{1}{R_L} + j\omega C_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \frac{1}{R_S} + \frac{1}{R_L} + j\omega(C_1 + C_2) & ; & \frac{V_{in}}{R_S} \\ \frac{1}{R_L} + j\omega C_2 - g & ; & 0 \end{pmatrix}}{\det \left(\overset{\otimes}{\underset{\sim}{Y}} \right)} \\
&= \frac{1}{R_S} \frac{\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{R_L} + j\omega C_2 \right) - \left(\frac{1}{R_L} + j\omega C_2 - g \right)}{\det \left(\overset{\otimes}{\underset{\sim}{Y}} \right)} \\
&= \frac{\frac{1}{R_S} \left(\frac{1}{r_0} + g \right)}{\frac{1}{R_S r_0} + \frac{1}{R_S R_L} + \frac{1}{r_0 R_L} + \frac{g}{R_L} + j\omega \left(C_2 \left(\frac{1}{R_S} + \frac{1}{R_L} \right) + (C_1 + C_2) \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{R_L} \right) \right.} \\
&\quad \left. - 2C_2 \frac{1}{R_L} + gC_2 \right) + (j\omega)^2 C_1 C_2} \\
&= \frac{\frac{1}{R_S} \left(\frac{1}{r_0} + g \right)}{\frac{1}{R_S r_0} + \frac{1}{R_S R_L} + \frac{1}{r_0 R_L} + \frac{g}{R_L} + j\omega \left(C_1 \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{R_L} \right) + C_2 \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{R_S} + g \right) \right) + (j\omega)^2 C_1 C_2} \\
&= \frac{R_L}{R_S} \frac{1 + gr_0}{\frac{R_L}{R_S} + \frac{r_0}{R_S} + (1 + gr_0)} \frac{1}{1 + aj\omega + b(j\omega)^2} \tag{6.55}
\end{aligned}$$

$$a = C_1 \frac{r_0 + R_L}{\beta} + C_2 \frac{R_L \left(1 + \frac{r_0}{R_S} + gr_0 \right)}{\beta} \tag{6.56}$$

$$b = C_1 C_2 \frac{R_L r_0}{\beta} \tag{6.57}$$

$$\beta = \frac{R_L}{R_S} + \frac{r_0}{R_S} + (1 + gr_0) \tag{6.58}$$

Entsprechend ergibt sich:

$$\underline{Z}_{out}(j\omega) := \frac{-\underline{U}_{out}}{\underline{J}_{out}} \Big|_{\underline{J}_{in}=0} = \frac{\overset{\otimes}{\underline{U}}_1 + \overset{\otimes}{\underline{U}}_2}{\underline{J}_{out}} \Big|_{\underline{J}_{in}=0} \tag{6.59}$$

$$= \frac{[(1 + gr_0)R_S + r_0] R_L}{(1 + gr_0)R_S + r_0 + R_L} \frac{1 + j\omega \frac{C_1 r_0 R_S}{(1 + gr_0)R_S + r_0}}{1 + aj\omega + b(j\omega)^2} \tag{6.60}$$

$$\underline{Z}_{in}(j\omega) := \frac{-\underline{U}_{in}}{\underline{J}_{in}} \Big|_{\substack{\underline{J}_{out}=0 \\ \frac{1}{R_S}=0}} = \frac{\overset{\otimes}{\underline{U}}_1}{\underline{J}_{in}} \Big|_{\substack{\underline{J}_{out}=0 \\ \frac{1}{R_S}=0}} \tag{6.61}$$

$$= \frac{R_L + r_0}{(1 + gr_0)} \frac{1 + j\omega(C_2(R_L/r_0))}{1 + j\omega\hat{a} + (j\omega)^2\hat{b}} \tag{6.62}$$

$$\hat{a} = C_1 \frac{R_L + r_0}{1 + gr_0} + C_2 R_L, \quad \hat{b} = \frac{C_1 C_2 R_L r_0}{1 + gr_0} \tag{6.63}$$

Die typische Vorgehensweise beim Schnittmengenadmittanzverfahren.

Schritt 1: Man lege einen Baum fest und nummeriere die Zweige entsprechend Bemerkung 4.2. Man bestimme die Fundamentalschnittmengen (FSM) und Baumzweigspannungen (BZSP).

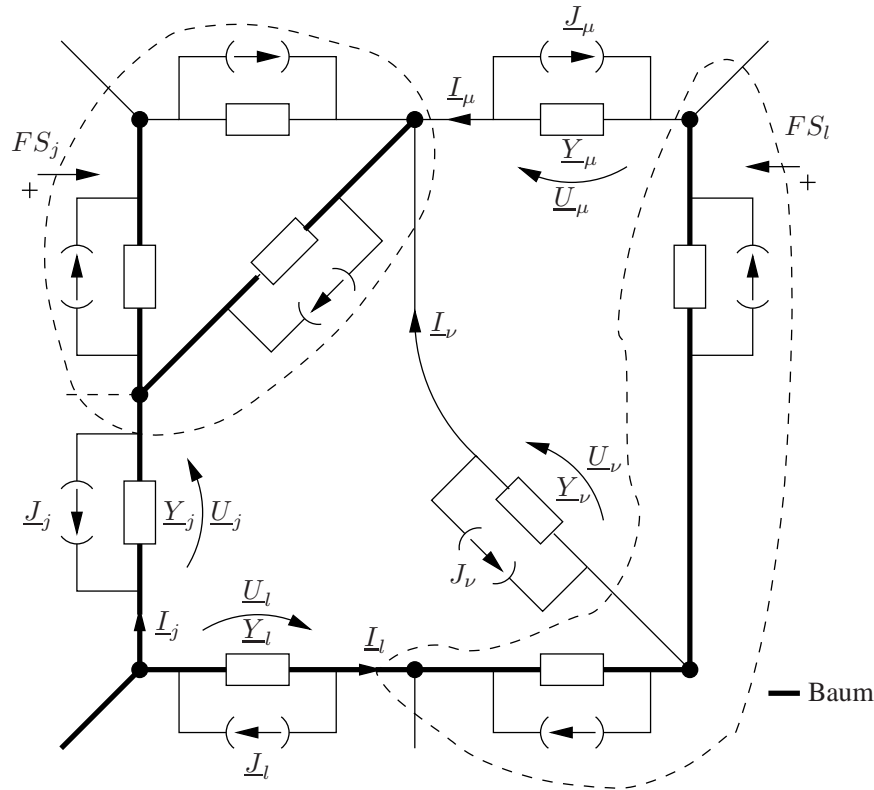


Abbildung 6.10

Schritt 2: Aufstellen der FSGL. Dabei werden die Zweigströme mit Hilfe der zugehörigen Zweiggleichung (ZGL) durch Zweigspannungen und feste Größen ausgedrückt und die Zweigspannungen wieder durch die BZSP ausgedrückt. Die Urströme \underline{J} (siehe (6.40)) werden dabei zunächst (formal) als feste ungesteuerte Größen behandelt. Dies ergibt ein Gleichungssystem mit $k - s$ Gleichungen und $k - s$ Unbekannten BZSP, der Form

$$\underline{\tilde{Y}}_{OS}^{\otimes} \underline{\tilde{U}}^{\otimes} = \underline{\tilde{J}}^{\otimes} \quad (6.64)$$

Sind alle Urströme \underline{J} fest, so ist $\overset{\otimes}{Y}_{OS}$ die Schnittmengenadmittanzmatrix ($\overset{\otimes}{Y} = \overset{\otimes}{Y}_{OS}$) und (6.64) ist das Schnittmengenadmittanzgleichungssystem in seiner endgültigen Form. Es gilt:

$$\overset{\otimes}{Y}_{OS} = \begin{pmatrix} \overset{\otimes}{Y}_{m,n}^{OS} \end{pmatrix} \quad 1 \leq m, n \leq k-s$$

$$\overset{\otimes}{Y}_{m,n}^{OS} = \begin{cases} m = n (=j) & : (\underline{Y}_j + \underline{Y}_\nu + \underline{Y}_\mu + \dots) \\ & \text{Summe aller zu den Zweigen der FS}_j \text{ ge-} \\ & \text{hörenden Admittanzen.} \\ m \neq n & : (-\underline{Y}_\nu - \underline{Y}_\mu \pm \dots) \\ (m=j, n=l) & \text{Die Admittanz von } \underline{VZ}_{r+k-s} \text{ geht ein,} \\ \text{oder} & \text{wenn der BZ}_m \text{ in der FM}_r \text{ (nach Satz} \\ (m=l, n=j) & \text{3.6} \Leftrightarrow \underline{VZ}_{r+k-s} \text{ liegt in FS}_m \text{) und gleich-} \\ & \text{zeitig der BZ}_n \text{ in der FM}_r \text{ liegt. Die Ad-} \\ & \text{mittanz geht } +/- \text{ ein, wenn } \overset{\otimes}{U}_m \text{ und } \overset{\otimes}{U}_n \\ & \text{im Sinne der FM}_r \text{ gleich/entgegengesetzt} \\ & \text{orientiert sind.} \end{cases} \quad (6.65)$$

Da nach Satz 3.6 gilt

$$\text{BZ}_m \text{ in FM}_r \Leftrightarrow \underline{VZ}_{r+k-s} \text{ in FS}_m$$

ist $\overset{\otimes}{Y}_{OS}$ symmetrisch. Ferner ist

$$\vec{\underline{J}}^t = \left(\overset{\otimes}{J}_1, \dots, \overset{\otimes}{J}_{k-s} \right)$$

mit

$$\overset{\otimes}{J}_{n(=j)} = (\underline{J}_j + \underline{J}_\nu + \underline{J}_\mu + \dots) \quad (6.66)$$

Der Urstrom des Zweiges r geht ein, wenn der Zweig r in der FS_n liegt. Er geht $+/-$ ein, wenn er im Sinne der FS_n ungleichsinnig/gleichsinnig zu $\overset{\otimes}{U}_n$ orientiert ist.

Schritt 3: Sind einige der Urströme gesteuert, so ist $\vec{\underline{J}}$ abhängig von $\vec{\underline{U}}$ und daher ((6.65) (6.66)) noch nicht in seiner endgültigen Form. Um diese zu erreichen, zerlegt man $\vec{\underline{J}}$ zunächst in einen festen und einen über $\vec{\underline{U}}$ gesteuerten Anteil. Die Zweigspannungen werden also wieder über die Baumzweigspannungen ausgedrückt.

$$\vec{\underline{J}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fest}}}{\overset{\otimes}{J}_0} + \overset{\otimes}{Y}_{kor} \vec{\underline{U}} \quad (6.67)$$

Damit ergibt sich das endgültige Gleichungssystem über

$$\overset{\otimes}{Y}_{OS} \vec{\underline{U}} = \left(\overset{\otimes}{Y}_{OS} - \overset{\otimes}{Y}_{kor} \right) \vec{\underline{U}} = \vec{\underline{J}}_0 \quad (6.68)$$

$\overset{\otimes}{Y}$ ist dabei die Schnittmengenadmittanzmatrix und $\vec{\underline{J}}_0$ der Vektor der festen Schnittmengenurströme.

Die typische Vorgehensweise beim Knotenadmittanzverfahren.

Schritt 1: Man nummeriere die Zweige, wähle einen Bezugsknoten pro Zusammenhangskomponente und nummeriere alle Nichtbezugsknoten

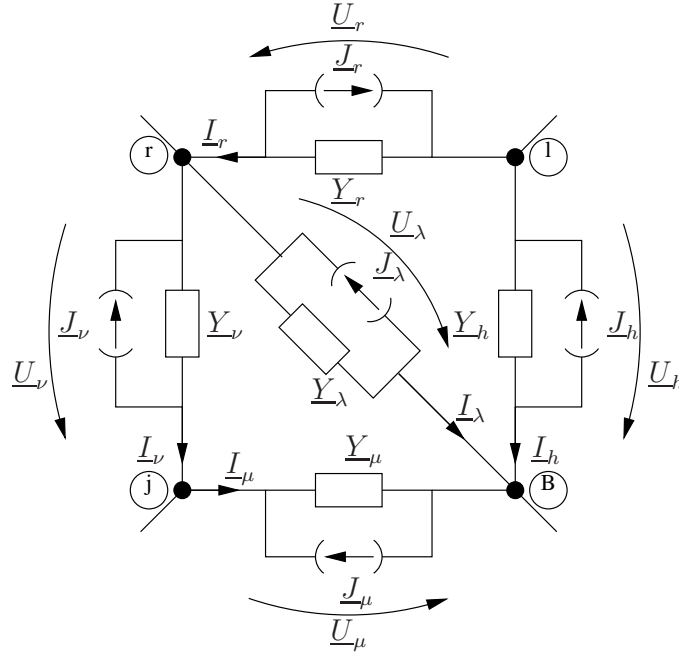


Abbildung 6.11

Schritt 2: Aufstellen der KGL der Nichtbezugsknoten. Dabei werden die Zweigströme mit Hilfe der ZGL über die Zweigspannungen ausgedrückt und die Zweigspannungen wiederum über die Knotenpotentiale ausgedrückt. Die Urströme \underline{J} (siehe (6.40)) werden dabei zunächst formal wie feste ungesteuerte Größen behandelt. Dies ergibt ein Gleichungssystem mit $k - s$ Gleichungen und $k - s$ unbekannten Knotenpotentialen in der Form

$$\dot{\tilde{Y}}_{OS} \dot{\underline{U}} = \dot{\underline{J}} \quad (6.72)$$

Sind alle Urströme \underline{J} fest, so ist $\dot{\tilde{Y}}_{OS}$ die Knotenadmittanzmatrix ($\dot{\tilde{Y}} = \dot{\tilde{Y}}_{OS}$) und (6.72) ist das Knotenadmittanzgleichungssystem in endgültiger Form.

Es gilt:

$$\dot{\tilde{Y}}_{OS}^{OS} = \begin{cases} m = n(= r) & : (\underline{Y}_r + \underline{Y}_\lambda + \underline{Y}_\nu + \dots) \\ & \text{Summe der Admittanzen, der mit dem Knoten } m = n \text{ inzidenten Zweige.} \\ m \neq n & : (-\underline{Y}_\nu) \\ (m = r, n = j) & \text{Negative Summe der Admittanzen der} \\ \text{oder} & \text{zwischen den Knoten } m \text{ und } n \text{ liegenden} \\ (m = j, n = r) & \text{Zweige (0 falls kein solcher Zweig existiert)} \end{cases} \quad (6.73)$$

$\Rightarrow \dot{\tilde{Y}}_{OS}$ ist symmetrisch!

$$\vec{\underline{J}} = \left(\vec{\underline{J}}_1, \dots, \vec{\underline{J}}_{k-s} \right)$$

$$\vec{\underline{J}}_{m(=r)} = (\underline{J}_\nu + \underline{J}_\lambda - \underline{J}_r - \dots) \pm \text{Summe aller Urströme} \quad (6.74)$$

aller mit dem Knoten m inzidenten Zweige. $+/-$
wenn der Urstrom zum Knoten hin / vom Knoten weg zeigt.

Schritt 3: Sind gesteuerte Urströme vorhanden, so ist $\vec{\underline{J}}$ abhängig von $\vec{\underline{U}}$
($\hat{=}$ IIb, III)

$$\vec{\underline{J}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fest}}}{\vec{\underline{Y}}_{kor}} \vec{\underline{U}} + \vec{\underline{J}}_0 \quad (6.75)$$

Damit ergibt sich das endgültige Gleichungssystem über

$$\underset{\sim}{\vec{\underline{Y}}} \vec{\underline{U}} = \left(\underset{\sim}{\vec{\underline{Y}}}_{OS} - \underset{\sim}{\vec{\underline{Y}}}_{kor} \right) \vec{\underline{U}} = \vec{\underline{J}}_0 \quad (6.76)$$

Dabei heißt $\underset{\sim}{\vec{\underline{Y}}}$ die Knotenadmittanzmatrix und $\vec{\underline{J}}_0$ der Vektor der festen Knotenströme.

Schritte 2 und 3 formal gesehen:

Nach Voraussetzung gilt wiederum (6.69). Berücksichtigung der KGL ergibt:

$$\underline{\underline{KG}} \vec{\underline{I}} = 0$$

Berücksichtigung der ZGL :

$$\underline{\underline{KG}} \underset{\sim}{\vec{\underline{Y}}} \vec{\underline{U}} = \underline{\underline{KG}} \vec{\underline{J}} = \underline{\underline{KG}} \underset{\sim}{\vec{\underline{Y}}}_{kor} \vec{\underline{U}} + \underline{\underline{KG}} \vec{\underline{J}}_0$$

Berücksichtigung der MGL: $\left(\vec{\underline{U}} = \underline{\underline{KG}}^t \vec{\underline{U}} \right)$

$$\underbrace{\underline{\underline{KG}} \underset{\sim}{\vec{\underline{Y}}} \underline{\underline{KG}}^t}_{\underset{\sim}{\vec{\underline{Y}}}_{OS}} \vec{\underline{U}} = \underbrace{\underline{\underline{KG}} \vec{\underline{J}}}_{\vec{\underline{J}}} = \underbrace{\underline{\underline{KG}} \underset{\sim}{\vec{\underline{Y}}}_{kor}}_{\underset{\sim}{\vec{\underline{Y}}}_{kor}} \underline{\underline{KG}}^t \vec{\underline{U}} + \underbrace{\underline{\underline{KG}} \vec{\underline{J}}_0}_{\vec{\underline{J}}_0} \quad (6.77)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\underline{\underline{KG}} \left(\underset{\sim}{\vec{\underline{Y}}} - \underset{\sim}{\vec{\underline{Y}}}_{kor} \right) \underline{\underline{KG}}^t}_{\underset{\sim}{\vec{\underline{Y}}}} \vec{\underline{U}} = \vec{\underline{J}}_0 \quad (6.78)$$

6.3 Das Maschenimpedanzverfahren

Voraussetzungen:

1. Alle Zweige haben eine Ersatzspannungsquellendarstellung nach (6.35)
2. Alle Urspannungen haben die Form:

$$\underline{V} = \underbrace{\underline{V}_f}_{\text{fest}} + \underbrace{\underline{\vec{C}}^t \underline{\vec{I}}}_{\text{Stromsteuerung}} \quad (6.79)$$

Diese Voraussetzungen gelten z.B., wenn $(ZU)^{-1}$ existiert.

Abstrakte Vorgehensweise, wenn $(ZU)^{-1}$ existiert:

- I) Berücksichtigung der MGL durch FMGL:

$$\underline{\underline{FM}} \underline{\vec{U}} = 0 \quad (6.80)$$

- II) Berücksichtigung der Zweiggleichungen:

$$\begin{aligned} \underline{\vec{U}} &= -(ZU)^{-1} \underline{\underline{ZI}} \underline{\vec{I}} + (ZU)^{-1} \underline{\vec{ZR}} \\ \Rightarrow \underline{\underline{FM}}(ZU)^{-1} \underline{\underline{ZI}} \underline{\vec{I}} &= \underline{\underline{FM}}(ZU)^{-1} \underline{\vec{ZR}} \end{aligned} \quad (6.81)$$

(Dieser Schritt kann in zwei Schritte II)a und II)b unterteilt werden, wenn man für II)a zunächst die gesteuerten Spannungsquellen wie feste ungesteuerte Quellen behandelt.)

- III) Berücksichtigung der SGL durch Maschenströme:

$$\begin{aligned} \underline{\vec{I}} &= (\underline{\underline{FM}})^t \underline{\vec{I}} \\ \Rightarrow \underline{\underline{FM}}(ZU)^{-1} \underline{\underline{ZI}} (\underline{\underline{FM}})^t \underline{\vec{I}} &= \underline{\underline{FM}}(ZU)^{-1} \underline{\vec{ZR}} \end{aligned} \quad (6.82)$$

$z - k + s$ **Gleichungen mit $z - k + s$ Unbekannten** \triangleq Maschenimpedanzverfahren.

Die typische Vorgehensweise beim Maschenimpedanzverfahren.

Schritt 1: Man lege einen Baum fest, orientiere die Zweige und nummeriere nach Bemerkung 4.2.
Man bestimme die FM und VZ-Kreisströme.

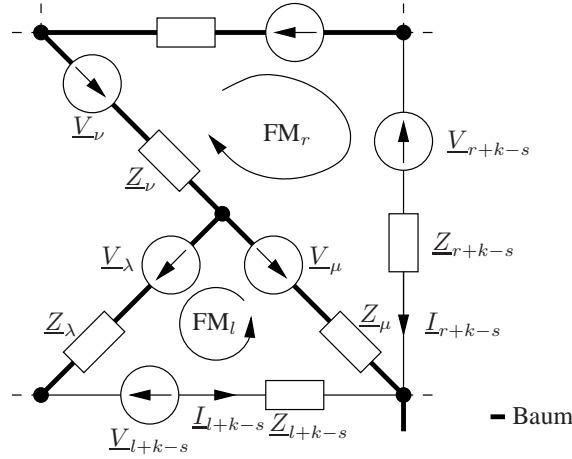


Abbildung 6.12

Schritt 2:
($\hat{=}$ I,IIa,III)

Aufstellen der FMGL. Dabei werden die Zweigspannungen mit Hilfe der ZGL durch Zweigströme und feste Größen ausgedrückt. Die Urspannungen \underline{V} (siehe (6.79)) werden dabei zunächst (formal) als feste Größen behandelt. Danach werden alle Zweigströme durch die $z - k + s$ VZ-Kreisströme ausgedrückt. Dies ergibt ein System mit $z - k + s$ Gleichungen und $z - k + s$ unbekannten VZ-Kreisströmen $\vec{\underline{I}}$ der Form:

$$\overset{\circ}{\underset{\sim}{Z}}_{OS} \vec{\underline{I}} = \vec{\underline{V}} \quad (6.83)$$

Es gilt:

$$\overset{\circ}{\underset{\sim}{Z}}_{OS} = \begin{cases} m = n(=l) & : (\underline{Z}_{l+k-s} + \underline{Z}_\mu + \underline{Z}_\lambda) \\ & \text{Summe der Impedanzen, der in der Ma-} \\ & \text{sche } m = n \text{ liegenden Zweige.} \\ m \neq n & : (\underline{Z}_\mu) \\ (m=l, n=r) & \pm \text{ Summe der Impedanzen der Zweige, die} \\ \text{oder} & \text{sowohl in FM}_m \text{ als auch FM}_n \text{ liegen. Die} \\ (m=r, n=l) & \text{Impedanz eines Zweiges geht positiv ein,} \\ & \text{wenn sich die zugeordneten Maschenströ-} \\ & \text{me im betrachteten Zweig addieren.} \end{cases} \quad (6.84)$$

$\Rightarrow \overset{\circ}{\underset{\sim}{Z}}_{OS}$ ist symmetrisch!

$$\vec{\underline{V}}^t = \left(\overset{\circ}{V}_1, \dots, \overset{\circ}{V}_m \right), \quad 1 \leq m \leq z - k + s$$

$$\overset{\circ}{V}_{m(=l)} = \underline{V}_\mu + \underline{V}_{l+k-s} - \underline{V}_\lambda \quad (6.85)$$

\pm Summe der Urspannungen der zur Masche gehörenden Zweige. Eine Urspannungsquelle geht positiv ein, wenn sie im Sinne der Masche zur Masche negativ orientiert ist.

Sind die Urspannungsquellen fest, so ist (6.83) das Maschenimpedanzgleichungssystem in seiner endgültigen Form (insbesondere $\overset{\circ}{\underset{\sim}{Z}}_{OS} = \overset{\circ}{\underset{\sim}{Z}}$ s.u.).

Schritt 3: Sind einige der Urspannungsquellen nicht fest, so ist (6.83) nicht das endgültige System. Man muss zunächst noch alle Steuerströme durch VZ-Kreisströme ausdrücken. $\vec{\underline{V}}$ hat dann die Form

$$\vec{\underline{V}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fest}}}{\vec{\underline{V}}_0} + \overset{\circ}{\underline{\underline{Z}}}_{kor} \vec{\underline{I}} \quad (6.86)$$

(6.83) geht dann über in

$$\underbrace{\left(\overset{\circ}{\underline{\underline{Z}}}_{OS} - \overset{\circ}{\underline{\underline{Z}}}_{kor} \right)}_{= \overset{\circ}{\underline{\underline{Z}}}} \vec{\underline{I}} = \vec{\underline{V}}_0 \quad (6.87)$$

Dies ist das endgültige Maschenimpedanzgleichungssystem. $\overset{\circ}{\underline{\underline{Z}}}$ heißt Maschenimpedanzmatrix und $\vec{\underline{V}}_0$ der Vektor der festen Maschenurspannungen.

Schritt 2 und 3 formal gesehen:

Laut Voraussetzung gilt:

$$\vec{\underline{U}} = \underline{\underline{Z}} \vec{\underline{I}} - \vec{\underline{V}}, \quad \vec{\underline{V}} = \underline{\underline{Z}}_{kor} \vec{\underline{I}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fest}}}{\vec{\underline{V}}_0} \quad (6.88)$$

mit

$$\underline{\underline{Z}} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underline{Z}_z \end{pmatrix}, \quad \vec{\underline{V}}^t = (\pm V_1, \dots, \pm V_z)$$

$\left(\begin{array}{c} \xrightarrow{\underline{I}} \boxed{\underline{\underline{Z}}} \xrightarrow{\underline{V}} \end{array} \right)$
 $\begin{array}{l} \uparrow \\ \text{das } + \text{ Zeichen gilt,} \\ \text{wenn } \underline{I} \text{ und } \underline{V} \\ \text{entgegengesetzt orien-} \\ \text{tiert sind.} \end{array}$

Berücksichtigung der MGL:

$$\underline{\underline{FM}} \vec{\underline{U}} = 0$$

Berücksichtigung der ZGL:

$$\underline{\underline{FM}} \underline{\underline{Z}} \vec{\underline{I}} = \underline{\underline{FM}} \vec{\underline{V}} = \underline{\underline{FM}} \vec{\underline{V}}_0 + \underline{\underline{FM}} \underline{\underline{Z}}_{kor} \vec{\underline{I}}$$

Berücksichtigung der SGL: $\left(\vec{I} = \underline{FM}^t \vec{I} \right)$

$$\underbrace{\underline{FM} \underline{Z} \underline{FM}^t}_{\vec{Z}_{OS}} \vec{I} = \underbrace{\underline{FM} \vec{V}}_{\vec{V}} = \underbrace{\underline{FM} \underline{Z}_{kor} \underline{FM}^t}_{\vec{Z}_{kor}} \vec{I} + \underbrace{\underline{FM} \vec{V}_0}_{\vec{V}_0} \quad (6.89)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\underline{FM} (\underline{Z} - \underline{Z}_{kor}) \underline{FM}^t}_{\vec{Z}} \vec{I} = \vec{V}_0 \quad (6.90)$$

6.4 Die Quellenverschiebung

Das Schnittmengenadmittanzverfahren und das Knotenadmittanzverfahren setzen Zweiggleichungen in Ersatzstromquellendarstellung mit ausschließlich spannungsgesteuerten Stromquellen voraus. Insbesondere Zweige mit idealer Spannungsquellendarstellung sind störend, wenn diese beiden Standardverfahren zur Anwendung kommen sollen.

Die Technik der Spannungsquellenverschiebung ist eine Möglichkeit, das gegebene Netzwerkmodelle so zu transformieren, dass ein Netzwerkmodell entsteht, das bezüglich der Lösung äquivalent ist und keine idealen Spannungsquellen enthält. Lassen sich danach noch alle Stromsteuerungen in äquivalente Spannungssteuerungen transformieren, so kann für das transformierte Netzwerk $\underline{Z}\underline{I} = \underline{1}$ angenommen werden und das Schnittmengenadmittanz- sowie das Knotenadmittanzverfahren sind anwendbar.

6.4.1 Die Spannungsquellenverschiebung

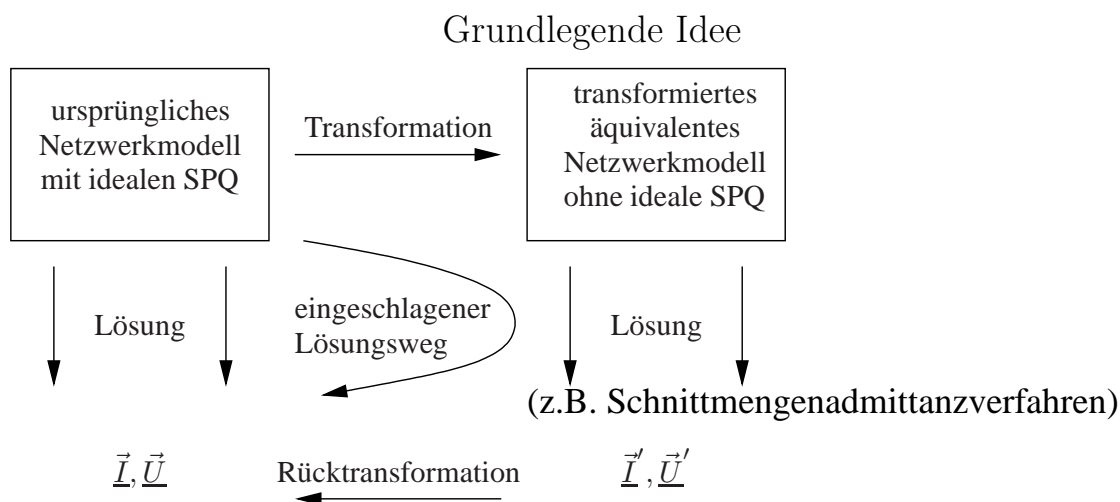


Abbildung 6.13

Die grundlegende Idee ist, das ursprüngliche Netzwerkmodell, das Zweige mit idealer Spannungsquellendarstellung enthält, so zu transformieren, dass das transformierte, aber zum ur-

sprünglichen äquivalente, Netzwerkmodell keine Zweige mit idealer Spannungsquellendarstellung enthält.

Beide Lösungswege sind äquivalent, wenn zwischen \vec{I}, \vec{U} und \vec{I}', \vec{U}' eine umkehrbare eindeutige Beziehung besteht.

Es sei ein lineares algebraisches Netzwerkmodell gegeben, das Zweigggleichungen enthält, die idealen Spannungsquellen sind. Eine der idealen Spannungsquellen \underline{V}_0 sei herausgegriffen. Diese Spannungsquelle ist entweder fest $\underline{V}_0 \neq f(\vec{I}, \vec{U})$ oder gesteuert (z.B. $\underline{V}_0 = \underline{V}_{0,f} + \vec{C}_1^t \vec{U} + \vec{C}_2^t \vec{I}$ mit den Nebenbedingungen: $\underline{V}_{0,f} \neq f(\vec{I}, \vec{U})$, $\underline{U}_0, \underline{I}_0$ steuern \underline{V}_0 nicht).

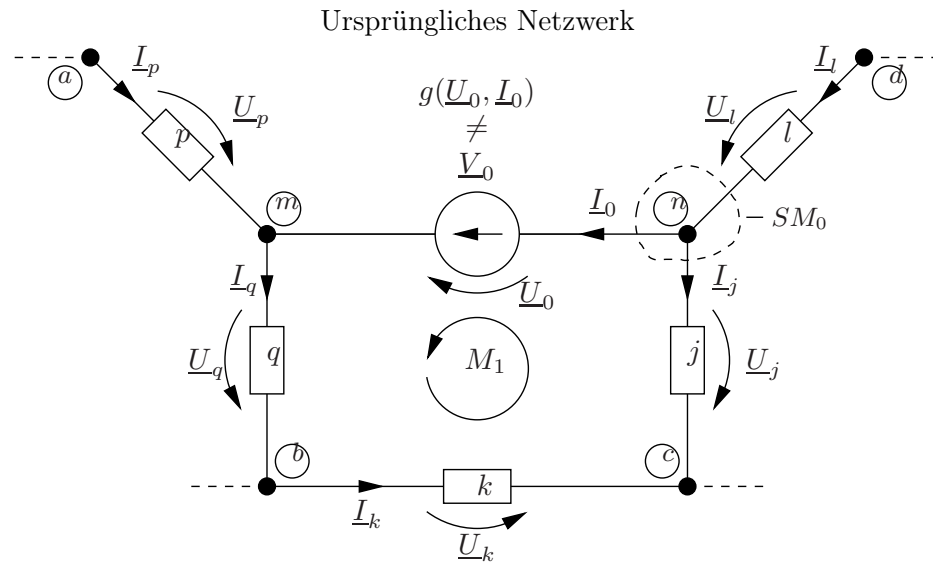


Abbildung 6.14

Ziel: Transformiertes äquivalentes Netzwerkmodell ohne ideale Spannungsquellen.

Die dem Zweig 0 zugeordnete ZGL lässt sich, da eine ideale Spannungsquellendarstellung vorliegt, in folgender Form schreiben

$$\underline{U}_0 = \overbrace{\underline{a}_1 \underline{U}_1 + \dots + \underline{a}_{z-1} \underline{U}_{z-1} + \underline{b}_1 \underline{I}_1 + \dots + \underline{b}_{z-1} \underline{I}_{z-1}}^{=\underline{U}_0} + \underline{V}_{0,f}. \quad (6.91)$$

$\underline{V}_{0,f}, \underline{a}_i, \underline{b}_i, i = 1, \dots, z-1$ sind dabei feste Koeffizienten. $\underline{U}_0, \underline{I}_0$ kommen in dieser Darstellung auf der rechten Seite nicht vor. Ferner erlaubt jede Schnittmengengleichung (z.B. SM_0), in der der Strom \underline{I}_0 vorkommt, eine Darstellung von \underline{I}_0 durch die anderen Zweigströme. Im Fall von SM_0 also z. B.

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_l - \underline{I}_j \quad (6.92)$$

In dieser Gleichung kommen ebenfalls \underline{U}_0 und \underline{I}_0 auf der rechten Seite nicht vor!

Diese beiden Gleichungen erlauben es nun, $\underline{I}_0, \underline{U}_0$ aus allen anderen Netzwerkgleichungen zu eliminieren!

Bemerkung 6.5

Mathematisch entspricht dies der folgenden, immer erlaubten Umformung des Netzwerkgleichungssystems (6.6).

Voraussetzung: Zwei der Netzwerkgleichungen seien nach $\underline{I}_0, \underline{U}_0$ so auflösbar, dass $\underline{I}_0, \underline{U}_0$ durch $\underline{I}_k, \underline{U}_k, k = 1, \dots, z-1$ und feste Größen $\underline{R}_1, \underline{R}_2$ dargestellt werden.

$$\underline{U}_0 + \underline{\vec{D}}_1^t (\underline{U}_1, \dots, \underline{U}_{z-1}, \underline{I}_1, \dots, \underline{I}_{z-1})^t = \underline{R}_1 =: \underline{U}_0 + \underline{\vec{D}}_1^t \begin{pmatrix} \underline{\vec{U}}'' \\ \underline{\vec{I}}'' \end{pmatrix} \quad (6.93)$$

$$\underline{I}_0 + \underline{\vec{D}}_2^t (\underline{U}_1, \dots, \underline{U}_{z-1}, \underline{I}_1, \dots, \underline{I}_{z-1})^t = \underline{R}_2 =: \underline{I}_0 + \underline{\vec{D}}_2^t \begin{pmatrix} \underline{\vec{U}}'' \\ \underline{\vec{I}}'' \end{pmatrix} \quad (6.94)$$

Dann kann man durch links Multiplizieren von (6.6) mit einer invertierbaren Matrix $\underline{\vec{A}}$ und Umordnen der Lösungsvariablen mit einer invertierbaren Permutationsmatrix $\underline{\vec{P}}$ das Tableau der Netzwerkgleichungen folgendermaßen umformen :

$$\begin{aligned} \underline{\vec{A}} \underline{\vec{N}} \underline{\vec{P}} \begin{pmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{I}_0 \\ \underline{\vec{U}}'' \\ \underline{\vec{I}}'' \end{pmatrix} &= \underline{\vec{A}} \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{\vec{Z}} \underline{\vec{R}} \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \underline{\vec{D}}_1^t \\ 0 & 1 & \underline{\vec{D}}_2^t \\ 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \underline{\vec{D}} \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{I}_0 \\ \underline{\vec{U}}'' \\ \underline{\vec{I}}'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \underline{R}_1 \\ \underline{R}_2 \\ \\ \underline{\vec{R}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.95)$$

Dabei sind $\underline{\vec{A}}$ und $\underline{\vec{P}}$ $2z \times 2z$ Matrizen, $\underline{\vec{D}}$ eine $(2z-2) \times (2z-2)$ Matrix und $\underline{\vec{R}}, \underline{\vec{D}}_1, \underline{\vec{D}}_2$ $(2z-2)$ dimensionale Vektoren. Es gilt:

$$\det \underline{\vec{D}} \neq 0 \iff \det \underline{\vec{N}} \neq 0$$

Ferner gilt mit den Beziehungen

$$\text{Rücktransformation: } \begin{pmatrix} \underline{\vec{U}} \\ \underline{\vec{I}} \end{pmatrix} = \underline{\vec{P}} \left[\begin{pmatrix} \underline{R}_1 \\ \underline{R}_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\underline{\vec{D}}_1^t \\ -\underline{\vec{D}}_2^t \\ \underline{1}_{2z-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\vec{U}}'' \\ \underline{\vec{I}}'' \end{pmatrix} \right], \quad (6.96)$$

($\underline{1}_{2z-2}$ ist die $2z-2 \times 2z-2$ dim. Einheitsmatrix) und

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{I}_0 \\ \underline{\vec{U}}'' \\ \underline{\vec{I}}'' \end{pmatrix} = \underline{\vec{P}}^{-1} \begin{pmatrix} \underline{\vec{U}} \\ \underline{\vec{I}} \end{pmatrix}, \quad (6.97)$$

die Aussage

$$\begin{pmatrix} \underline{\vec{U}} \\ \underline{\vec{I}} \end{pmatrix} \text{ löst (6.6)} \iff \begin{pmatrix} \underline{\vec{U}}'' \\ \underline{\vec{I}}'' \end{pmatrix} \text{ löst } \underline{\vec{D}} \begin{pmatrix} \underline{\vec{U}}'' \\ \underline{\vec{I}}'' \end{pmatrix} = \underline{\vec{R}}. \quad (6.98)$$

Bemerkung 6.6

Eine weitere erlaubte Umformung ist das Einführen neuer Lösungsvariabler z.B. in der Form:

$$(\text{Transformation}) \quad \begin{pmatrix} \vec{U}' \\ \vec{I}' \end{pmatrix} = \underline{\underline{B}} \begin{pmatrix} \vec{U}'' \\ \vec{I}'' \end{pmatrix} + \vec{C} \quad (6.99)$$

Dabei muss vorausgesetzt werden, dass $\underline{\underline{B}}$ eine invertierbare Matrix ist. Dann gilt:

$$(\text{Rücktransformation}) \quad \begin{pmatrix} \vec{U}'' \\ \vec{I}'' \end{pmatrix} = \underline{\underline{B}}^{-1} \begin{pmatrix} \vec{U}' \\ \vec{I}' \end{pmatrix} - \underline{\underline{B}}^{-1} \vec{C} \quad (6.100)$$

Durch Einsetzen der letzten Gleichung entsteht aus

$$\underline{\underline{D}} \begin{pmatrix} \vec{U}'' \\ \vec{I}'' \end{pmatrix} = \vec{R}$$

das neue Gleichungssystem

$$\underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}^{-1} \begin{pmatrix} \vec{U}' \\ \vec{I}' \end{pmatrix} = \vec{R} + \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}^{-1} \vec{C}. \quad (6.101)$$

Unter Beachtung der Beziehungen (6.99), (6.100) gilt:

$$\begin{pmatrix} \vec{U}'' \\ \vec{I}'' \end{pmatrix} \text{ löst } \underline{\underline{D}} \begin{pmatrix} \vec{U}'' \\ \vec{I}'' \end{pmatrix} = \vec{R} \iff \begin{pmatrix} \vec{U}' \\ \vec{I}' \end{pmatrix} \text{ löst } (6.101).$$

Die Elimination der Variablen \underline{I}_0 aus den anderen Schnittmengengleichungen, die \underline{I}_0 enthalten (z.B. SM_k), kann man einfach über die Addition oder Subtraktion der entsprechenden Schnittmengengleichungen ($SM_0 \pm SM_k$) bewerkstelligen. In der Sprache der Graphentheorie entspricht die Elimination der folgenden Graphentransformationen:

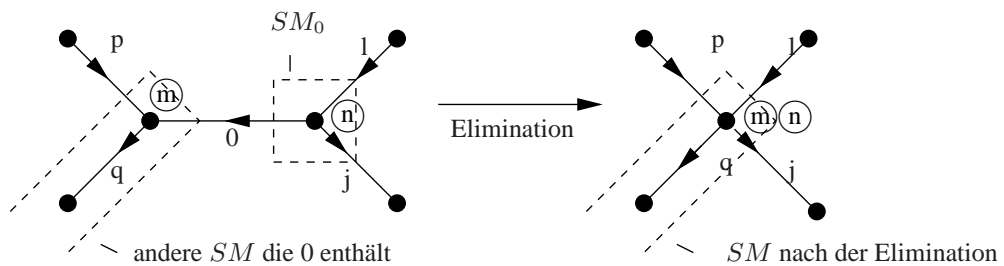


Abbildung 6.15

Der Netzwerkgraph wird modifiziert, indem man den Zweig 0 entfernt und die Knoten m und n zu einem Knoten vereint. Durch die Elimination entsteht eine SGL des modifizierten Graphen.

Bei der Elimination von \underline{U}_0 aus den Maschengleichungen mit Hilfe der Zweigggleichung

$\underline{U}_0 = \underline{V}_0$ sind die Verhältnisse schwieriger. Dabei eliminiert man mit Hilfe der ZGL $\underline{U}_0 = \underline{V}_0$ die Spannung \underline{U}_0 in allen MGL. Die neuen MGL kann man nicht sofort als MGL eines neuen Netzwerkmodells deuten (ist \underline{V}_0 fest, so sind die Gleichungen nach der Elimination inhomogen!). Das weitere Vorgehen wird nun anhand der Maschengleichung M_1 demonstriert:

$$\begin{aligned}
 M_1 : \quad \underline{U}_0 + \underline{U}_q + \underline{U}_k - \underline{U}_j &= 0 \\
 &\Downarrow \text{ Elimination} \\
 \underline{U}_q + \underline{U}_k - \underline{U}_j &= -\underline{V}_0 \\
 &\Downarrow \text{ Variablensubstitution} \\
 \underline{U}_q + \underline{U}_k - \underbrace{(\underline{U}_j - \underline{V}_0)}_{\underline{U}'_j} &= 0 \quad : M'_1
 \end{aligned}$$

Man führt also eine Spannungsvariablensubstitution in den verbliebenen Zweigen von SM_0 ein. Jede Masche, die den Zweig 0 enthält, durchläuft die anderen Zweige von SM_0 wenigstens einmal mehr in der im Sinne der SM_0 zum Zweig 0 umgekehrten Richtung. Daher muss \underline{V}_0 in den restlichen Zweigen von SM_0 in der im Sinne der SM_0 zum Zweig 0 umgekehrten Richtung berücksichtigt werden, damit sich eine äquivalente Maschengleichung ergibt.

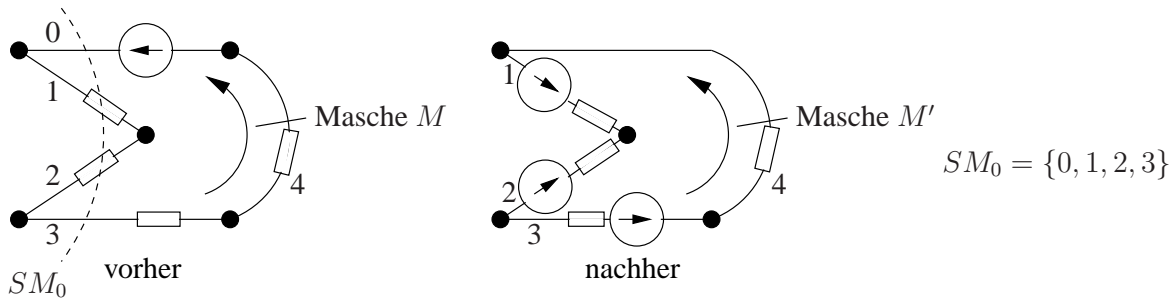


Abbildung 6.16

Nach dieser Variablensubstitution sind auch die Maschengleichungen nach der Elimination sofort als Maschengleichungen des Graphen, der durch Weglassen des Zweiges 0 und Zusammenlegen der Knoten \textcircled{m} und \textcircled{n} entsteht, zu interpretieren. Damit sind die SGL und MGL des ursprünglichen Netzwerks bereits als SGL und MGL des transformierten Netzwerkgraphen interpretierbar. Zwischen \underline{U}' und \underline{U} in den restlichen Zweigen von SM_0 besteht damit analog zu Bem. 6.6, (6.99) eine Beziehung der Form:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}'_l \\ \underline{U}'_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{U}_l + \underline{V}_0 \\ \underline{U}_j - \underline{V}_0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} \underline{U}_l \\ \underline{U}_j \end{pmatrix} + \underline{\underline{B}} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \vdots \\ \underline{U}_{z-1} \end{pmatrix} + \underline{\underline{C}} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \vdots \\ \underline{I}_{z-1} \end{pmatrix} + \underline{\underline{D}}$$

\downarrow
 ohne $\underline{U}_l, \underline{U}_j$

Wegen (6.91) kommen $\underline{I}_0, \underline{U}_0$ dabei nicht vor. Ist $\underline{\underline{A}}$ invertierbar (z.B. für \underline{V}_0 fest $\Rightarrow \underline{\underline{A}} = \underline{1}$, $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}} = 0$, $\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \underline{V}_0 \\ -\underline{V}_0 \end{pmatrix}$, für ein Beispiel mit nicht invertierbarem $\underline{\underline{A}}$ siehe Bemerkung 6.8), so ist $\begin{pmatrix} \underline{U}_l \\ \underline{U}_j \end{pmatrix}$ durch die neuen gestrichenen Variablen und die anderen nicht geänderten Variablen ausdrückbar.

$$\begin{array}{c} \text{ohne } \underline{U}_l, \underline{U}_j \\ \updownarrow \\ \left(\begin{array}{c} \underline{U}_l \\ \underline{U}_j \end{array} \right) = +\tilde{A}^{-1} \left(\begin{array}{c} \underline{U}'_l \\ \underline{U}'_j \end{array} \right) - \tilde{A}^{-1} \tilde{B} \left(\begin{array}{c} \underline{U}_1 \\ \vdots \\ \underline{U}_{z-1} \end{array} \right) - \tilde{A}^{-1} \tilde{C} \left(\begin{array}{c} \underline{I}_1 \\ \vdots \\ \underline{I}_{z-1} \end{array} \right) - \tilde{A}^{-1} \tilde{D} \quad (6.102) \end{array}$$

Im Sinne von Bemerkung 6.6, (6.100) existiert daher die Rücktransformation. Daher kann man auch in den ZGL mit Hilfe der SGL₀ und der ZGL $\underline{U}_0 = \underline{V}_0$ zunächst $\underline{U}_0, \underline{I}_0$ eliminieren und dann ohne Probleme die ZGL mit (6.102) auf die neuen gestrichenen Variablen umschreiben. Insgesamt ergibt sich damit ein neues Netzwerkgleichungssystem der Form (6.6), bei dem $\underline{U}_l, \underline{U}_j$ durch $\underline{U}'_l, \underline{U}'_j$ ersetzt sind und $\underline{I}_0, \underline{U}_0$ nicht mehr vorkommen.

Beachte : Es kann nicht garantiert werden, dass die Zweigggleichungen des transformierten Netzwerks immer entweder eine *ESPQ* nach (6.33) oder eine *ESTQ* Darstellung nach (6.35) haben. In der Regel ist dies jedoch der Fall.

Hat man dieses transformierte Netzwerkproblem gelöst, so kann man \underline{I}_0 durch die SGL₀ und \underline{U}_0 durch $\underline{U}_0 = \underline{V}_0$ zurückgewinnen. Dabei lässt sich \underline{V}_0 aufgrund (6.102) in der Form $\underline{V}_0 = f(\underline{U}_1, \dots, \underline{U}'_l, \underline{U}'_j, \dots, \underline{U}_z, \underline{I}_1, \dots, \underline{I}_z)$ schreiben.

Insgesamt ergibt sich daraus die Methode der Quellenverschiebung entlang einer beliebigen Schnittmenge SM_0 , deren Regeln unten nochmals kurz zusammengefasst werden.

Bemerkung 6.7 (Spannungsquellenverschiebung)

Die Quelle wird vom Zweig 0 in alle anderen Zweige der SM_0 verschoben. In diesen Zweigen erhält sie die umgekehrte Orientierung wie im Zweig 0 im Sinne der Orientierung von SM_0 .

Transformationsbeziehungen:

$$\begin{aligned} \underline{U}_l &= \underline{U}'_l - \underline{V}_0 \\ \underline{U}_j &= \underline{U}'_j + \underline{V}_0 \\ \underline{I}_0 &= \underline{I}_l - \underline{I}_j \\ \underline{U}_0 &= \underline{V}_0 \end{aligned} \quad (6.103)$$

Wichtig: \underline{V}_0 muss eindeutig als Funktion der Variablen des neuen Netzwerkmodells $\underline{U}_1, \dots, \underline{U}'_l, \underline{U}'_j, \dots, \underline{U}_z, \underline{I}_1, \dots, \underline{I}_z$ darstellbar sein. (\longrightarrow siehe Bem. 6.5 und 6.6)

Merke: $\underline{I}_0, \underline{U}_0$ kommen im transformierten Netzwerk nicht mehr vor. Die Endknoten des Zweiges 0 \textcircled{m} und \textcircled{n} fallen zusammen. Alle anderen Zweigströme bleiben erhalten. Alle anderen Zweigspannungen, die nicht zu den Schnittmengenzweigen von SM_0 gehören, bleiben erhalten.

Diese Transformion ist nur möglich, wenn man $\underline{U}_l, \underline{U}_j$ durch die Variablen des transformierten Netzwerks ausdrücken kann, also wenn \tilde{A} invertierbar ist. Dies ist bei festem \underline{V}_0 immer der Fall.

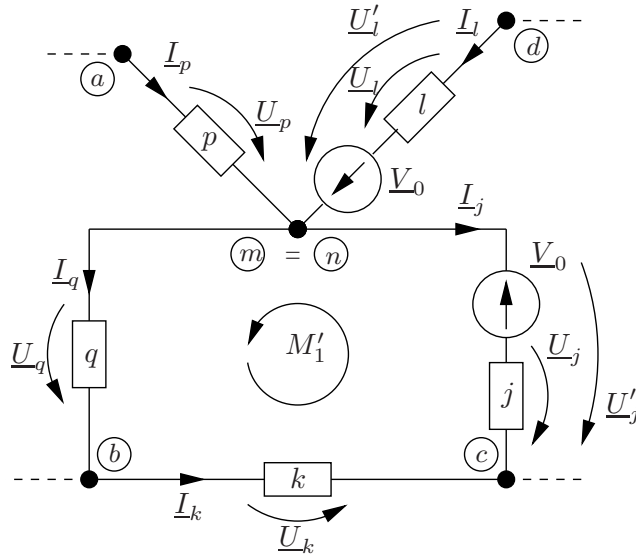
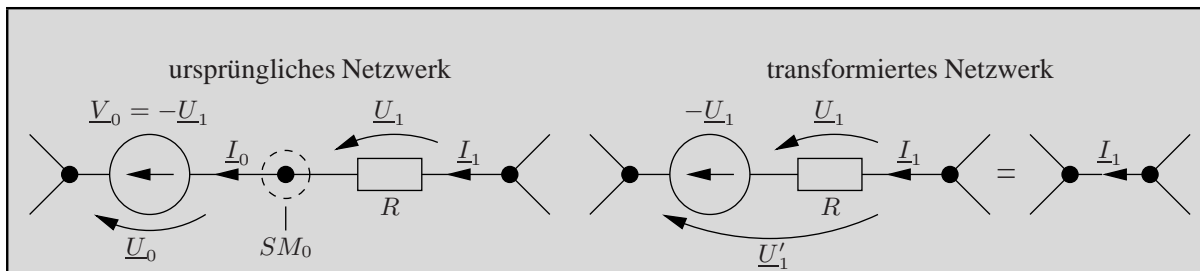
Abbildung 6.17: Transformiertes Netzwerk nach der Quellenverschiebung entlang SM_0 **Bemerkung 6.8** (Sonderfall)

Abbildung 6.18

$$\underline{U}'_1 = -\underline{U}_1 + \underline{U}_1 = 0 \Rightarrow A = 0, D = 0, \underline{B} = 0, \underline{C} = 0$$

Damit kann insbesondere V_0 nicht als Funktion der neuen Netzwerkvariablen ausgedrückt werden. Abhilfe: $\underline{U}_1 = R\underline{I}_1$ (Steuerung mit Hilfe der ZGL umschreiben)

$$\underline{U}'_1 = \underline{U}_1 - R\underline{I}_1 \Rightarrow A = 1, \underline{B} = 0, \underline{C} = (-R, 0, \dots, 0), D = 0$$

In beiden Fällen entspricht der neue Zweig im transformierten Netzwerk einer idealen Spannungsquelle mit $\underline{V} = 0$. Die Anzahl der idealen Spannungsquellen im ursprünglichen und im transformierten Netzwerkmodell ist also gleich.

Bemerkung 6.9

Es sei ein algebraisches Netzwerkmodell gegeben, bei dem jedem Zweig eine Zweiggleichung der Form (6.33) oder (6.35) zugeordnet ist. Dem Zweig 0 sei eine ideale, ungesteuerte Spannungsquellengleichung zugeordnet und es gebe eine Schnittmenge, die den Zweig 0 enthält. Die Anzahl der idealen Spannungsquellen im gegebenen Netzwerk reduziert sich durch eine beliebige Verschiebung dieser Quelle um 1 und es entsteht ein Netzwerkmodell, bei dem wiederum jedem Zweig eine Zweiggleichung der Form (6.33) bzw. (6.35) zugeordnet ist.

Beweisskizze:

Die ZGL im gegebenen Netzwerk entsprechen (6.35) ($\underline{I} = \underline{Y}\underline{U} + \underline{J}$; $\underline{Y} \neq 0$) oder (6.33) mit $\underline{Z} = 0$ ($\underline{U} = \underline{V}$). Da $\underline{J}, \underline{V} \neq f(\underline{U}, \underline{I})$ und \underline{V}_0 fest, gilt auch nach Umschreiben auf die gestrichenen Variablen $\underline{J}, \underline{V} \neq f(\underline{U}, \underline{I})$ bzw. $\underline{J}, \underline{V} \neq f(\underline{U}', \underline{I})$, wenn der betreffende Zweig in SM_0 liegt. Im letzten Fall modifizieren sich die ZGL zu $\underline{I} = \underline{Y}\underline{U}' + \underline{J} \pm \underline{Y}\underline{V}_0$ bzw. $\underline{U}' = \underline{V} \pm \underline{V}_0$. Der Typ der ZGL bleibt also in jedem Fall erhalten.

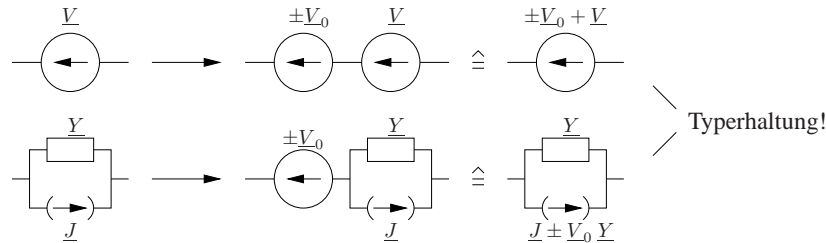


Abbildung 6.19

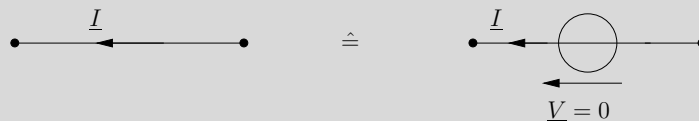
Da insgesamt ein Zweig mit einer idealen Spannungsquelle nach der Transformation entfällt, gilt die Behauptung.

Bemerkung 6.9 gilt in der Regel auch für gesteuerte Quellen. Doch bereits Bemerkung 6.8 zeigt, dass dies nicht immer gilt, denn dort entsteht aus einem Zweig mit einer ZGL nach (6.35) eine ideale Spannungsquelle.

Insgesamt entsteht also nach Verschieben einer festen idealen Spannungsquelle in einem Netzwerkmodell mit festen Quellen ein Netzwerkmodell, das wieder den Voraussetzungen von Abschnitt 6.1 entspricht und eine ideale Spannungsquelle weniger enthält. Nach endlich vielen Schritten ist man im Fall von ausschließlich festen idealen Spannungsquellen in einem Netzwerkmodell mit festen Quellen also am Ziel. Man erhält ein Netzwerk, das keine Zweige mit idealer Spannungsquellendarstellung mehr enthält. Dies ist auch bei gesteuerten idealen Spannungsquellen in der Regel der Fall, kann aber nicht garantiert werden.

Bemerkung 6.10 (Verschieben von Kurzschlusszweigen)

Aufgrund von Bemerkung 6.7 und



sind folgende Netzwerke äquivalent, solange man von der Bestimmung von $\underline{I}_1, \underline{I}_2$ absieht.

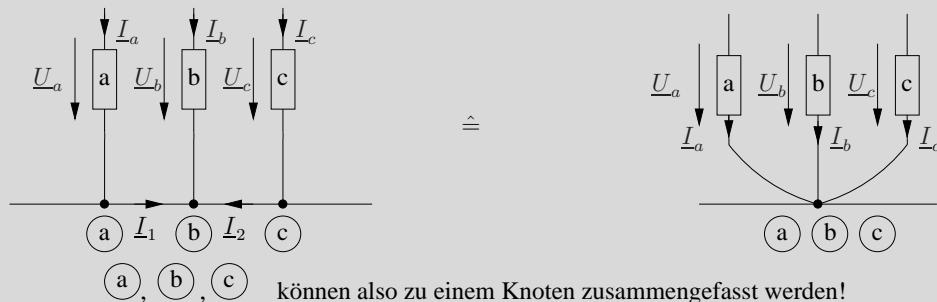


Abbildung 6.20

Bemerkung 6.11

Bei der Verschiebung von Spannungsquellen können Zweige entstehen, deren Endknoten zusammenfallen, also Schlingen.

Beispiel

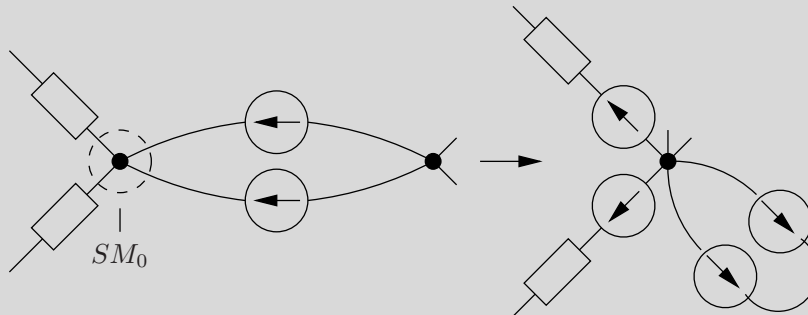


Abbildung 6.21

Entspricht der Zweipol in der Schlinge dabei einer idealen Spannungsquelle, so muss das Verfahren abgebrochen werden, da diese Spannungsquelle nicht weiter verschoben werden kann. Im Fall, dass das ursprüngliche Netzwerk nur feste (ungesteuerte) Quellen hatte, setzt dies die Existenz einer Masche aus festen idealen Spannungsquellen im ursprünglichen Netzwerk voraus. Dies ist jedoch in Bemerkung 6.3 ausgeschlossen worden.

6.4.2 Die Stromquellenverschiebung

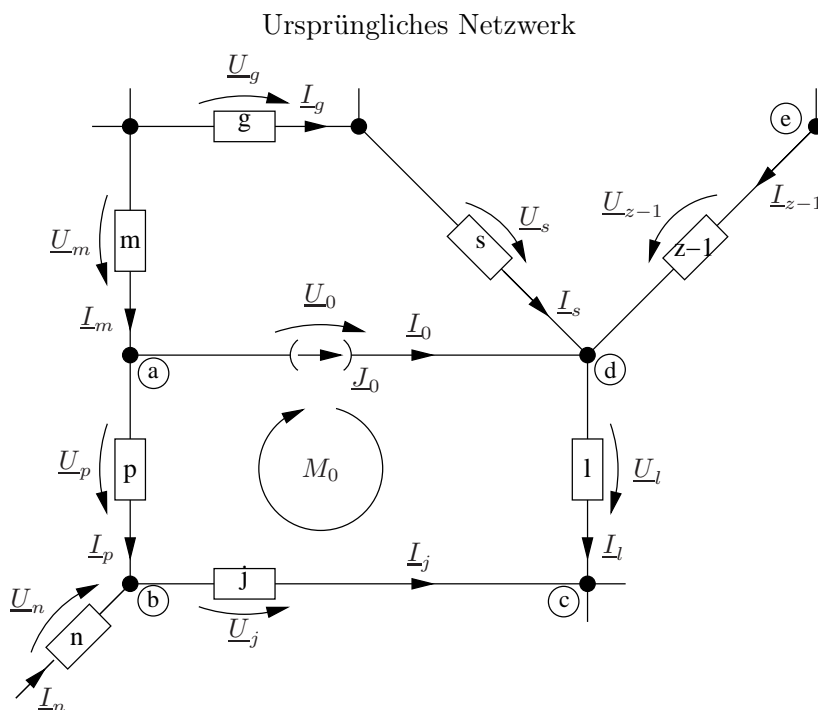


Abbildung 6.22

Es sei ein lineares algebraisches Netzwerkmodell gegeben, das Zweiggleichungen enthält, die ideale Stromquellen darstellen. Eine dieser idealen Stromquellen \underline{I}_0 sei herausgegriffen. Diese

Stromquelle \underline{J}_0 ist entweder fest ($\underline{J}_0 \neq f(\vec{U}, \vec{I})$) oder gesteuert:

$$\underline{J}_0 = \underbrace{\underline{J}_{0,f}}_{\neq f(\vec{U}, \vec{I})} + \overset{\substack{\uparrow \\ \text{ohne } \underline{U}_0}}{\vec{C}_1^t} \vec{U} + \overset{\substack{\uparrow \\ \text{ohne } \underline{I}_0}}{\vec{C}_2^t} \vec{I}$$

Ziel: Transformiertes äquivalentes Netzwerkmodell ohne ideale Stromquellen, um das Maschenimpedanzverfahren anwenden zu können.

Bemerkung 6.12 (Stromquellenverschiebung)

Man nimmt eine Masche M_0 , die den Zweig 0 enthält, und verschiebt die Stromquelle entlang M_0 , wie unten zu sehen.

Die Quelle wird vom Zweig 0 in alle anderen Zweige von M_0 verschoben. In diesen Zweigen erhält sie die umgekehrte Orientierung wie im Zweig 0 im Sinne der Orientierung von M_0 . Der Zweig 0 verschwindet.

Transformationsbeziehungen:

$$\begin{aligned} \underline{I}_l &= \underline{I}'_l + \underline{J}_0 \\ \underline{I}_j &= \underline{I}'_j - \underline{J}_0 \\ \underline{I}_p &= \underline{I}'_p - \underline{J}_0 \\ \underline{I}_0 &= \underline{J}_0 & (ZGL_0) \\ \underline{U}_0 &= \underline{U}_p + \underline{U}_j - \underline{U}_l & (MGL_0) \end{aligned} \quad (6.104)$$

Transformiertes Netzwerk

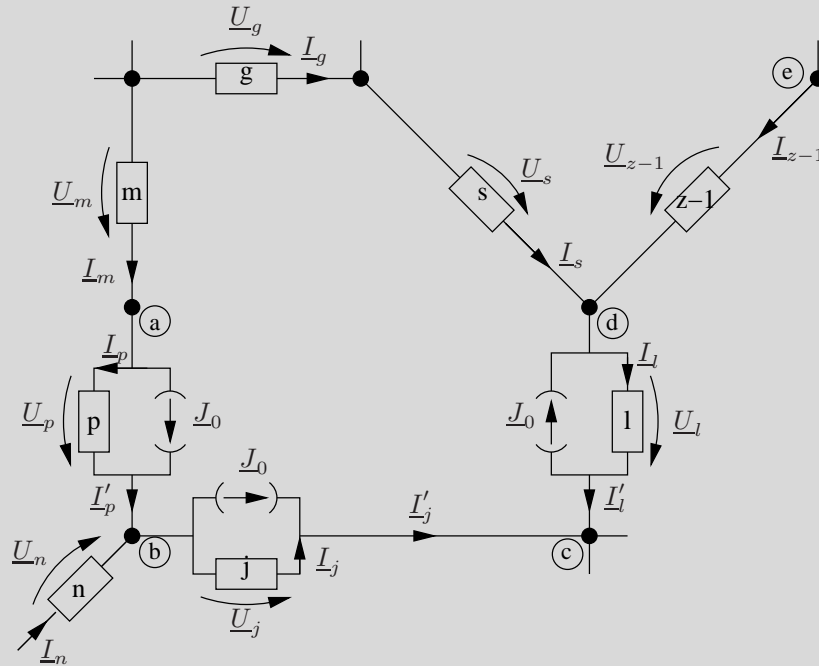


Abbildung 6.23

Wichtig: \underline{J}_0 muss als Funktion der Variablen des transformierten Netzwerkmodells $\underline{U}_1, \dots, \underline{U}_z, \underline{I}_1, \dots, \underline{I}'_l, \dots, \underline{I}'_p, \dots, \underline{I}'_j, \dots, \underline{I}_z$ darstellbar sein.

Merke: Die Variablen $\underline{I}_0, \underline{U}_0$ kommen im transformierten Netzwerk nicht mehr vor. Die Ströme der anderen Zweige aus M_0 ändern sich nach (6.104). Alle anderen Zweigvariablen verändern sich nicht.

Diese Transformation ist nur möglich, wenn man $\underline{I}_l, \underline{I}_j, \underline{I}_p$ durch die Variablen des transformierten Netzwerks ausdrücken kann, wenn \underline{A} wie in (6.106) invertierbar ist. Dies ist bei festem \underline{J}_0 immer der Fall.

Beweisskizze:

Die dem Zweig 0 zuzuordnende *ZGL* lässt sich, da eine ideale Stromquellendarstellung vorliegt, folgendermaßen schreiben

$$\underline{I}_0 = \overbrace{\underline{a}_1 \underline{U}_1 + \dots + \underline{a}_{z-1} \underline{U}_{z-1} + \underline{b}_1 \underline{I}_1 + \underline{b}_{z-1} \underline{I}_{z-1} + \underline{J}_{0,f}}^{= \underline{J}_0} \quad (ZGL_0). \quad (6.105)$$

$\underline{J}_{0,f}, \underline{a}_i, \underline{b}_i, i = 1, \dots, z-1$ sind dabei feste Koeffizienten und $\underline{I}_0, \underline{U}_0$ kommen in dieser Darstellung von \underline{J}_0 nicht vor. Ferner erlaubt jede *MGL* (z.B. die für M_0), in der die Spannung \underline{U}_0 vorkommt, eine Darstellung von \underline{U}_0 durch die anderen Zweigspannungen. Im Fall von M_0 gilt also

$$\underline{U}_0 = \underline{U}_p + \underline{U}_j - \underline{U}_l \quad (MGL_0)$$

In dieser Gleichung kommen $\underline{U}_0, \underline{I}_0$ auf der rechten Seite ebenfalls nicht vor! Diese beide Gleichungen erlauben es, \underline{I}_0 und \underline{U}_0 im Sinne von Bemerkung 6.5 aus allen anderen Netzwerkgleichungen zu eliminieren.

Die Elimination der Variablen \underline{U}_0 aus den anderen Maschengleichungen lässt sich wieder durch Addition oder Subtraktion der entsprechenden Maschengleichungen bewerkstelligen.

In der Sprache der Graphentheorie entspricht dies der Graphentransformation aus Abb. 6.23.

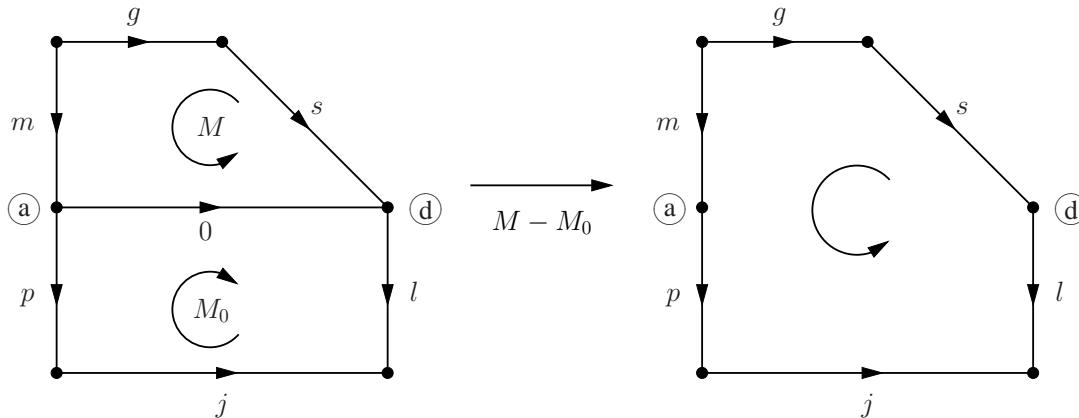


Abbildung 6.24

Der Netzwerkgraph wird modifiziert, indem man den Zweig 0 entfernt. Durch Elimination entsteht eine *MGL* des modifizierten Graphen.

Bei der Elimination von \underline{I}_0 aus den *SGL* mit Hilfe der Zweigggleichung $\underline{I}_0 = \underline{J}_0$ sind die Verhältnisse schwieriger. Das weitere Vorgehen wird daher anhand der Knotengleichung für \textcircled{d} erklärt.

$$\begin{aligned} \underline{I}_{z-1} + \underline{I}_s + \underline{I}_0 - \underline{I}_l & \stackrel{\text{Einsetzen von } \underline{I}_0 = \underline{J}_0}{\Longleftrightarrow} \underline{I}_{z-1} + \underline{I}_s - \underline{I}_l = -\underline{J}_0 \\ & \stackrel{\text{Variablensubst.}}{\Longleftrightarrow} \underline{I}_{z-1} + \underline{I}_s - \underbrace{(\underline{I}_l - \underline{J}_0)}_{\underline{I}'_l} = 0 \end{aligned}$$

Eine analoge Variablensubstitution führt man in allen verbleibenden Zweigen von M_0 durch. Sei mit SM_k eine beliebige Schnittmenge, die den Zweig 0 enthält, gegeben und seien alle Zweige von M_0 im Sinne von M_0 positiv orientiert. Dann ist unter den restlichen Zweigen von M_0 , die ebenfalls in SM_k liegen, die Anzahl der im Sinne von SM_k zum Zweig 0 gegensinnig orientierten Zweige (siehe Abb. 6.24) immer genau um 1 größer als die Anzahl der zu 0 gleichsinnig orientierten Zweige.

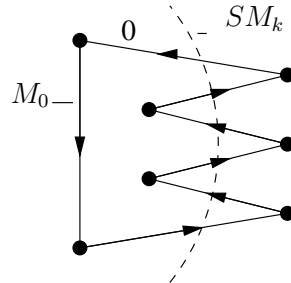


Abbildung 6.25

Daher muss \underline{J}_0 in die restlichen Zweige von M_0 mit im Sinne von M_0 negativer Orientierung zum Zweig 0 verschoben werden, da dann der Beitrag von \underline{J}_0 zur SGL gleich bleibt und sich somit nach der Variablensubstitution immer eine äquivalente Schnittmengengleichung ergibt (siehe Abb. 6.25). Nach Einführung der dadurch motivierten Variablentransformation in allen

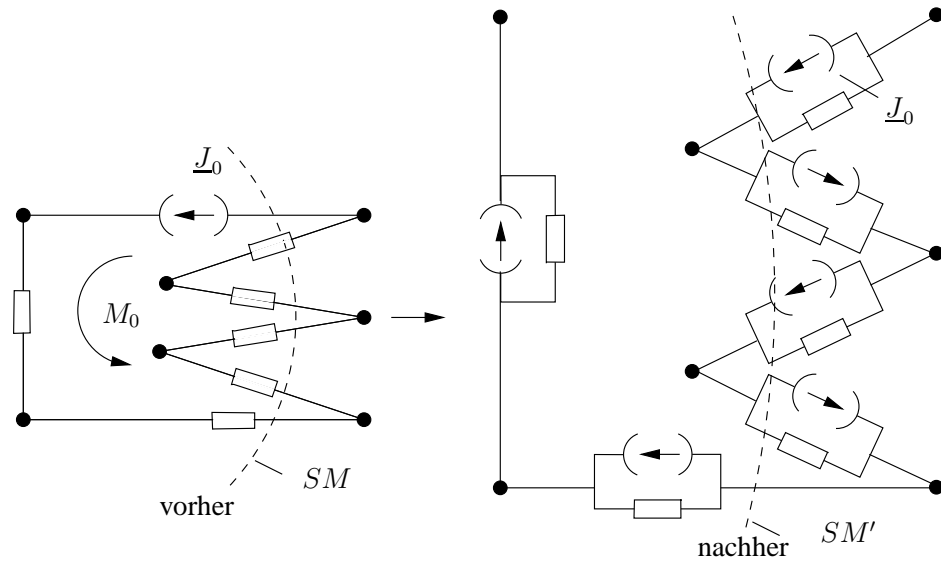


Abbildung 6.26

restlichen Zweigen von M_0 , kann die aus der SGL_k entstehende Gleichung sofort wieder als SGL des transformierten Graphen gedeutet werden, der aus dem Verschwinden des Zweiges 0 resultiert. Zwischen den neu eingeführten Stromvariablen $\underline{I}'_e, \underline{I}'_j, \underline{I}'_p$ und den alten $\underline{I}_e, \underline{I}_j, \underline{I}_p$ besteht aufgrund der Eigenschaften von \underline{J}_0 eine Beziehung der Form

$$\begin{pmatrix} \underline{I}'_l \\ \underline{I}'_j \\ \underline{I}'_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{I}_l - \underline{J}_0 \\ \underline{I}_j + \underline{J}_0 \\ \underline{I}_p + \underline{J}_0 \end{pmatrix} = \underline{A} \begin{pmatrix} \underline{I}_l \\ \underline{I}_j \\ \underline{I}_p \end{pmatrix} + \underbrace{\underline{B} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \vdots \\ \underline{I}_{z-1} \end{pmatrix}}_{\text{ohne } \underline{I}_l, \underline{I}_j, \underline{I}_p, \underline{I}_0} + \underline{C} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \vdots \\ \underline{U}_{z-1} \end{pmatrix} + \underline{\bar{D}}$$

\uparrow
 ohne \underline{U}_0

Nach Bemerkung 6.6 führt diese Variablentransformation immer zu einem äquivalenten Gleichungssystem, wenn \underline{A} invertierbar ist und somit der Satz der alten Variablen durch den Satz der neuen Variablen ausgedrückt werden kann. \underline{A} muss daher invertierbar sein, um die Methode durchführen zu können.

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_l \\ \underline{I}_j \\ \underline{I}_p \end{pmatrix} = \underline{A}^{-1} \begin{pmatrix} \underline{I}'_l \\ \underline{I}'_j \\ \underline{I}'_p \end{pmatrix} - \underline{A}^{-1} \underline{B} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \vdots \\ \underline{I}_{z-1} \end{pmatrix} - \underline{A}^{-1} \underline{C} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \vdots \\ \underline{U}_{z-1} \end{pmatrix} - \underline{A}^{-1} \underline{D} \quad (6.106)$$

Bei festen \underline{J}_0 ($\underline{J}_0 = \underline{J}_{0,f}$) gilt $\underline{A} = \underline{1} \Rightarrow \underline{A}^{-1} = \underline{1}$. Bei festen \underline{J}_0 führt die Einführung der neuen Variablen $\underline{I}'_l, \underline{I}'_j, \underline{I}'_p$ also immer zu einem äquivalenten Gleichungssystem.

Die ZGL_0 und die MGL_0 kann man mit (6.106) nun dazu benutzen, um $\underline{I}_0, \underline{U}_0$ aus allen Zweigggleichungen zu eliminieren und $\underline{I}_l, \underline{I}_j, \underline{I}_p$ durch $\underline{I}'_l, \underline{I}'_j, \underline{I}'_p$ in allen Zweigggleichungen zu ersetzen. Insgesamt führt das für den transformierten Graphen ohne Zweig 0 wieder zu einem zulässigen Netzwerkgleichungssystem der Form (6.6), das zu dem ursprünglichen Netzwerkgleichungssystem im Sinne der Bemerkungen 6.5 und 6.6 äquivalent ist.

Beachte : Es kann nicht garantiert werden, dass die Zweigggleichungen des transformierten Netzwerks immer entweder eine $ESPQ$ nach (6.33) oder eine $ESTQ$ Darstellung nach (6.35) haben. In der Regel ist dies jedoch der Fall.

Hat man das transformierte Netzwerkproblem gelöst, so ergeben sich die Variablen des alten Netzwerkproblems durch die Rücktransmutationsbeziehungen (6.104). Man beachte dabei, dass \underline{J}_0 aufgrund von (6.106) jetzt als von $\underline{I}'_l, \underline{I}'_j, \underline{I}'_p$ abhängig aufgefasst werden kann.

Bemerkung 6.13

Es sei ein algebraisches Netzwerkmodell gegeben, bei dem jedem Zweig eine Zweigggleichung der Form (6.33) oder (6.35) zugeordnet ist. Dem Zweig 0 sei eine ideale, ungesteuerte Stromquengleichung zugeordnet und es gebe eine Masche, die dem Zweig 0 enthält. Die Anzahl der idealen Stromquellen im gegebenen Netzwerk reduziert sich durch eine beliebig Verschiebung dieser Quelle um 1 und es entsteht ein Netzwerkmodell, bei dem wiederum jedem Zweig eine Zweigggleichung der Form (6.33) bzw. (6.35) zugeordnet ist (siehe Abb. 6.26).

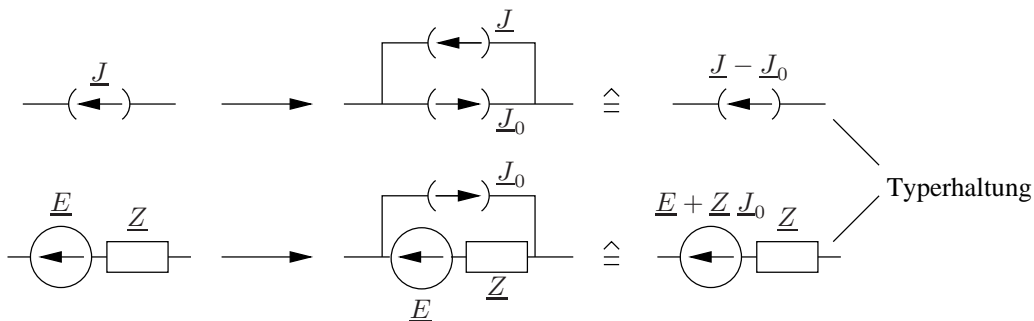


Abbildung 6.27

Bemerkung 6.14

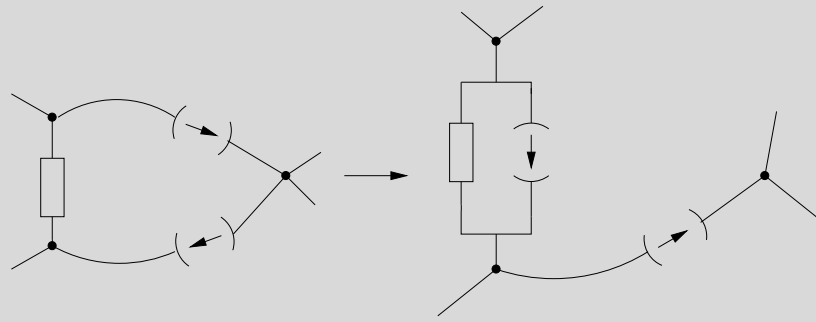


Abbildung 6.28

Beim Verschieben von Stromquellen kann ein Zweig entstehen, dessen Zweiggleichung einer idealen Stromquelle entspricht und der in keiner Masche liegt. Diese Stromquelle kann deshalb nicht weiter verschoben werden. Im Fall, dass das ursprüngliche Netzwerk nur feste (ungesteuerte) Quellen hatte, setzt die Existenz eines solchen Falls jedoch die Existenz einer Schnittmenge aus festen Stromquellen im ursprünglichen Netzwerk voraus. Dies ist jedoch in Bemerkung 6.3 ausgeschlossen worden.

6.5 Eindeutige Lösbarkeit von Widerstandsnetzwerken mit festen Quellen

Bemerkung 6.15

Besteht ein Netzwerk nur aus linearen, zeitinvarianten Widerständen $R > 0$ und festen (ungesteuerten) Quellen und liegt keiner der in Bemerkung 6.2 beschriebenen Fälle vor, so hat das Netzwerk immer eine eindeutige Lösung unabhängig von der Wahl der Quellenspannungen $v(t)$ und Quellenströme $j(t)$.

Beweis:

Sei jeder Quelle und jedem Widerstand ein Zweig des Netzwerkmodells zugeordnet. Aufgrund der Voraussetzungen sind alle Netzwerkgleichungen bereits im Zeitbereich für jeden Zeitpunkt t rein algebraisch, so dass der Vektor der Unbekannten (\vec{U}^t, \vec{I}^t) aus (6.6) mit den Zeitfunktionen zum Zeitpunkt t indentifiziert werden kann:

$$(\vec{U}^t, \vec{I}^t) = (u_1(t), \dots, u_{z_u}(t), i_1(t), \dots, i_{z_u}(t)) \quad (6.107)$$

$\vec{U}^t, \vec{I}, \vec{I}^{\circ}$ sind also reelle Vektoren in diesem Spezialfall.

Verschiebt man nun zunächst alle idealen Spannungsquellen und dann alle idealen Stromquellen (nach den Bemerkungen 6.9, 6.11, 6.13, 6.14 ist dies möglich), so erhält man ein bezüglich der Lösung äquivalentes Netzwerkmodell mit weniger Zweigen ($z \leq z_u$), bei dem jede Zweiggleichung eine Darstellung der Form

$$u(t) = R \cdot i(t) - v(t) \quad \text{mit} \quad R > 0$$

hat.

Seien $\underline{\underline{Z}}, \overset{\circ}{\underline{\underline{Z}}}, \overset{\circ}{\underline{\underline{I}}}$ wie in Kapitel 6.3 definiert.

$$\Rightarrow \underline{\underline{Z}} = \begin{pmatrix} R_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & R_z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \text{Rang}(\underline{\underline{Z}}) = z$$

$\Rightarrow \overset{\circ}{\underline{\underline{Z}}}$ ist invertierbar, denn aus

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\underline{\underline{Z}}} \overset{\circ}{\underline{\underline{I}}} = 0 & \Rightarrow \overset{\circ}{\underline{\underline{I}}}^t \overset{\circ}{\underline{\underline{Z}}} \overset{\circ}{\underline{\underline{I}}} = 0 = \left(\underline{\underline{FM}}^t \overset{\circ}{\underline{\underline{I}}} \right)^t \underbrace{\underline{\underline{Z}} \left(\underline{\underline{FM}}^t \overset{\circ}{\underline{\underline{I}}} \right)}_{\substack{\vec{I} \\ (\dim \vec{I} = z)}} \\ & = \sum_{\nu=1}^z R_{\nu} i_{\nu}^2 \Rightarrow \vec{I} = 0 \\ \text{Rang } \underline{\underline{FM}}^t = z - k + s & \xRightarrow{\downarrow} \overset{\circ}{\underline{\underline{I}}} = 0 \Rightarrow \dim \left(\text{Lösungsraum von } \overset{\circ}{\underline{\underline{Z}}} \overset{\circ}{\underline{\underline{I}}} = 0 \right) = 0 \\ \text{Satz M2} & \xRightarrow{\downarrow} \text{Rang } \overset{\circ}{\underline{\underline{Z}}} = z - k + s - 0 = z - k + s \\ & \Rightarrow \overset{\circ}{\underline{\underline{Z}}} \text{ ist invertierbar} \\ & \Rightarrow \text{Das zum ursprünglichen Gleichungssystem äquivalente} \\ & \quad \text{System } \overset{\circ}{\underline{\underline{Z}}} \overset{\circ}{\underline{\underline{I}}} = \overset{\circ}{V}_0 \text{ hat genau eine Lösung.} \end{aligned}$$

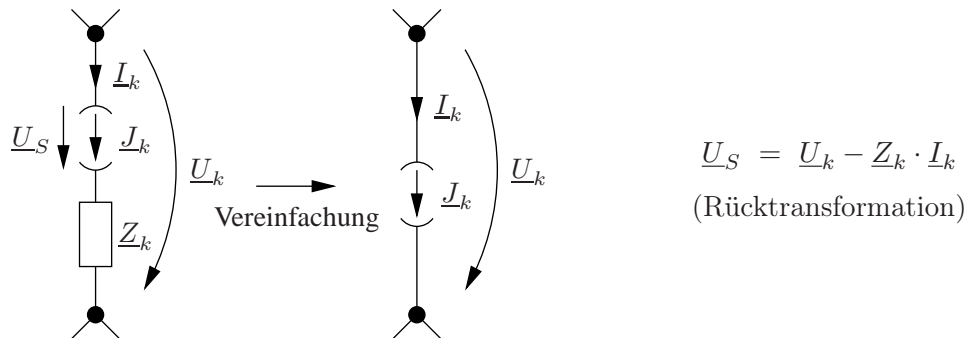
6.6 Lösung allgemeiner algebraischer Netzwerkmodelle mit Hilfe des Schnittmengenadmittanz-, des Knotenadmittanz- und des Maschenimpedanzverfahrens.

Es sei ein algebraisches Netzwerkmodell bestehend aus elementaren Zweipolen gegeben. Nicht jedem Zweipol soll dabei notwendigerweise ein Zweig des Netzwerkgraphen zugeordnet werden, sondern jedem Zweig kann ein Subnetzwerk aus elementaren Zweipolen zugeordnet sein.

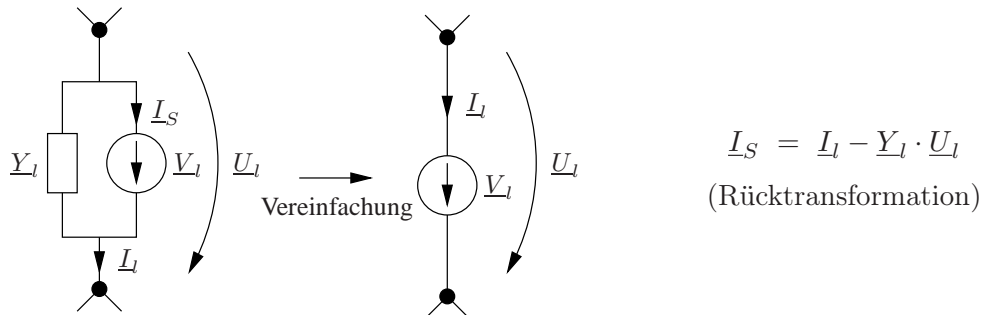
Schritt 1: Bestimmen der Zweiggleichungen, so dass nur noch Zweigspannungen und Zweigströme als Unbekannte vorkommen.

Konvention: Als Netzwerkknöten werden nur die deutlich gekennzeichneten Knöten \bullet gewählt. Alles zwischen diesen hervorgehobenen Knöten wird als ein Zweipol aufgefasst!

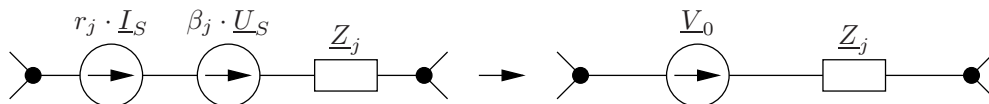
Nach diesem Schritt sollte für jeden der Zweige die Zweiggleichung entweder in Ersatzspannungsquellen- oder Ersatzstromquellendarstellung vorliegen.

Beispiel 6.5

Vor der Vereinfachung muss die Steuerspannung u_S durch die Zweigströme und Zweigspannungen des Netzwerkmodells ausgedrückt werden. Im endgültigen Netzwerk dürfen als Steuerervariablen nur die Zweigspannungen und -ströme vorkommen.



Umschreiben der Steuerung auf Zweigströme und Zweigspannungen des Netzwerkmodells.



$$\underline{V}_0 = r_j (\underline{I}_l - \underline{Y}_l \cdot \underline{U}_l) + \beta_j (\underline{U}_k - \underline{Z}_k \cdot \underline{I}_k)$$

Schritt 2 beim Schnittmengen- und Knotenadmittanzverfahren: Man verschiebe alle idealen Spannungsquellen bis alle Zweige eine ZGL der Form (6.33) (ESTQ) haben und bestimme nach jeder Verschiebung explizit die Steuerung aller Quellen als Funktion der transformierten Strom- und Spannungsvariablen.

Schritt 3 beim Schnittmengen- und Knotenadmittanzverfahren: Alle steuernden Zweigströme müssen durch Zweigspannungen und feste Größen ausgedrückt werden. Dazu ist in der Regel die dem jeweiligen steuernden Zweigstrom zugeordnete ZGL geeignet.

Schritt 2 beim Maschenimpedanzverfahren: Man verschiebe alle idealen Stromquellen, bis alle Zweige eine Darstellung der Form (6.35) ESPQ haben und bestimme nach jeder Verschiebung explizit die Steuerung aller Quellen als Funktion der transformierten Strom- und Spannungsvariablen.

Schritt 3 beim Maschenimpedanzverfahren: Alle steuernden Zweigspannungen müssen durch Zweigströme und feste Größen ausgedrückt werden. Dazu ist in der Regel die der steuernden Zweigspannung zugeordnete Zweiggleichung geeignet.

Nach erfolgreicher Durchführung der Schritte 1-3 ist entweder das Schnittmengen- bzw. Knotenadmittanzverfahren oder das Maschenimpedanzverfahren direkt auf das transformierte Netzwerkmodell anwendbar. Es kann insbesondere beim Vorliegen gesteuerter Quellen nicht garantiert werden, dass alle Schritte problemlos durchgeführt werden können (siehe Bemerkung 6.13 und Bemerkung 6.14). In der bei weitem überwiegenden Anzahl der Fälle ist dies jedoch der Fall. Insbesondere können die Schritte 1–3 immer dann durchgeführt werden, wenn jedem Zweig des ursprünglichen Netzwerkmodells eine Zweiggleichung der Form (6.33) oder (6.35) zugeordnet ist und alle Quellen ungesteuert sind.

6.7 Das modifizierte Knotenadmittanzverfahren (Modified Nodal Approach)

Alle bisherigen Verfahren zielen auf eine systematische Verringerung der Anzahl der Unbekannten im letztendlich resultierenden linearen Gleichungssystem. So verringert sich z.B. die Anzahl der linear unabhängigen Schnittmengengleichungen bei jeder Spannungsquellenverschiebung um 1 und damit die Anzahl der Unbekannten beim Schnittmengenadmittanz- bzw. Knotenadmittanzverfahren. Bei Handrechnungen ist dies oft vorteilhaft und erhöht die Übersichtlichkeit. Andererseits sind algorithmische Schritte wie die Baumsuche oder die Quellenverschiebung nicht leicht automatisierbar, so dass sie bei der Lösung von Netzwerkgleichungssystemen mit Hilfe von dedizierter Software möglichst vermieden werden. Jedoch kann bei der rechnergestützten Lösung der Netzwerkgleichungen eine höhere Anzahl von Unbekannten in Kauf genommen werden, wenn dadurch die algorithmische Transparenz steigt und damit das Erstellen der zugehörigen Software einfacher wird. Dies hat zur Entwicklung des modifizierten Knotenadmittanzverfahrens geführt. Dabei werden analog zum Knotenadmittanzverfahren die Knotengleichungen aufgestellt und die Maschengleichungen über Knotenpotenziale berücksichtigt. Beides ist ohne Bestimmung eines Baumes möglich, weshalb dieses Verfahren bei der rechnergestützten Lösung der Netzwerkgleichungen favorisiert wird. Es wird jedoch nicht vorausgesetzt, dass bei jedem Zweig mit Hilfe der zugehörigen Zweiggleichung der Zweigstrom über Zweigspannungen ausgedrückt werden kann. Stattdessen werden alle Zweigströme, die entweder bei der dem Zweig zugeordneten Zweiggleichung nicht vorkommen (ideale SPQ) oder in einem anderen Zweig zur Steuerung verwendet werden, als zusätzliche Variable beim Aufstellen des Gleichungssystems zugelassen. Für diese Zweige werden dann die zugeordneten Zweiggleichungen als zusätzliche Gleichungen ins Gleichungssystem aufgenommen, wodurch die Anzahl der Unbekannten wieder gleich der Anzahl der Gleichungen wird.

Um das Verfahren zu beschreiben sei wieder vorausgesetzt, dass jedem Zweig des algebraischen Zweipolnetzwerkmodells eine Zweiggleichung der Form (6.33) (ESTQ) oder (6.35) (ESPQ) zugeordnet ist. Insbesondere kommen in den Zweiggleichungen also nur Zweigströme und Zweigspannungen vor. Um dies zu erreichen, ist unter Umständen die Durchführung des im vorigen Abschnitt beschriebenen Vorbereitungsschrittes 1 notwendig. Schritte 2 und 3 können jedoch bis auf die Umwandlung von der ESPQ in die ESTQ-Darstellung bei allen Zweigen, deren Ströme nicht Lösungsvariablen sind, entfallen.

Es sei pro Zusammenhangskomponente ein Bezugsknoten gewählt und alle anderen Knoten seien von $1 \dots k - s$ durchnummeriert. Diesen Knoten seien die Knotenpotenziale $\vec{\underline{U}} = (\underline{\dot{U}}_1, \dots, \underline{\dot{U}}_{k-s})^t$ zugeordnet. Die Zweige seien von $1 \dots z$ durchnummeriert und die Zweige, in denen entweder eine ideale Spannungsquelle liegt oder deren Ströme zur Steuerung verwendet werden, haben die Indizes m_1, \dots, m_q . Um das Aufstellen allgemeiner Regeln zu

erleichtern, sei weiterhin vorausgesetzt, dass alle Zweiggleichungen derjenigen Zweige, deren Ströme keine Zusatzvariablen sind, in ESTQ-Form vorliegen, und alle anderen Zweiggleichungen außer den idealen Stromquellen in ESPQ-Form vorliegen. Es ist immer möglich diese Darstellung der Zweiggleichungen zu erzeugen. Das Gleichungssystem hat nun die folgende allgemeine Form:

$$\begin{array}{c} k-s \\ \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\left(\begin{array}{c|c} \underline{\underline{Y}}^M & \underline{\underline{B}} \\ \hline \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{D}} \end{array} \right)}^{k-s \quad q} \\ q \end{array} \right. \end{array} \begin{pmatrix} \underline{\underline{U}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\underline{U}}_{k-s} \\ \underline{\underline{I}}_{m_1} \\ \vdots \\ \underline{\underline{I}}_{m_q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{J}}_0^M \\ \vdots \\ \underline{\underline{V}}_0^M \end{pmatrix} \quad (6.108)$$

Abbildung 6.29: Gleichungsstruktur des verallgemeinerten Knotenadmittanzverfahrens

Zunächst werden wieder Steuerungen beim Aufstellen nicht berücksichtigt und alle Quellen wie feste Quellen behandelt.

Dies ergibt folgende Aufstellregeln :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{Y}}_{OS}^M &= \left(\underline{\underline{Y}}_{OS,m,n}^M \right) \quad 1 \leq m, n \leq k-s \\ \underline{\underline{Y}}_{OS,m,n}^M &= \begin{cases} m=n & : \text{ Summe aller Admittanzen der mit dem Knoten } m=n \\ & \text{ inzidenten Zweige, deren Zweigströme nicht zusätzli-} \\ & \text{ che Variable sind.} \\ m \neq n & : \text{ Negative Summe der Admittanzen der zwischen den} \\ & \text{ Knoten } m \text{ und } n \text{ liegenden Zweige, deren Zweigströme} \\ & \text{ nicht zusätzliche Variable sind.} \end{cases} \quad (6.109) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{B}}_{OS} &= \left(\underline{\underline{B}}_{OS,l,r} \right) \quad 1 \leq l \leq k-s, 1 \leq r \leq q \\ \underline{\underline{B}}_{OS,l,r} &= \begin{cases} 1/-1 & : \text{ wenn der Zweig } m_r \text{ keine ideale Stromquelle ist, mit} \\ & \text{ den Knoten } l \text{ inzident ist und vom Knoten weg/zum} \\ & \text{ Knoten hin orientiert ist.} \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases} \quad (6.110) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}}_{OS} &= \left(\underline{\underline{C}}_{OS,r,l} \right) \quad 1 \leq l \leq k-s, 1 \leq r \leq q \\ \underline{\underline{C}}_{OS,r,l} &= \begin{cases} 1/-1 & : \text{ wenn der Zweig } m_r \text{ keine ideale Stromquelle ist,} \\ & \text{ mit den Knoten } l \text{ inzident ist und vom Knoten} \\ & \text{ weg/zum Knoten hin orientiert ist.} \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases} \quad (6.111) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{D}_{OS} &= (\underline{D}_{OS,l,r}) \quad 1 \leq l, r \leq q \\ \underline{D}_{OS,l,r} &= \begin{cases} -\underline{Z}_{m_l} & , l = r \text{ und } m_r \text{ ist keine ideale Stromquelle} \\ 1 & , l = r \text{ und } m_r \text{ ist eine ideale Stromquelle} \\ 0 & , l \neq r \end{cases} \end{aligned} \quad (6.112)$$

Dabei ist \underline{Z}_{m_l} die Impedanz, die in der ESPQ-Darstellung der Zweigggleichung des Zweiges m_l auftritt.

Es gilt für die oben definierten Matrizen:

$$\underline{\underline{Y}}_{OS}^M = \left(\underline{\underline{Y}}_{OS}^M \right)^t, \quad \underline{D}_{OS} = \underline{D}_{OS}^t, \quad \underline{B}_{OS}^t = \underline{C}_{OS} \quad (6.113)$$

Die Matrix des modifizierten Knotenadmittanzverfahrens ist in diesem Spezialfall also symmetrisch.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{J}}^M &= \left(\underline{J}_l^M \right)^t \quad 1 \leq l \leq k-s \\ \underline{J}_l^M &= \text{Summe aller Urströme derjenigen Zweige, die mit dem Knoten } l \text{ inzident sind. Ein Urstrom wird positiv/negativ gezählt, wenn er zum Knoten } l \text{ hin/weg orientiert ist.} \end{aligned} \quad (6.114)$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{V}}^M &= \left(\underline{V}_r^M \right)^t \quad 1 \leq r \leq q \\ \underline{V}_r^M &= \text{Urspannung oder Urstrom des Zweiges } m_r. \text{ Die Urspannung oder der Urstrom wird positiv/negativ gezählt, wenn sie oder er positiv/negativ zum Zweig } m_r \text{ orientiert ist.} \end{aligned} \quad (6.115)$$

Die rechte Seite kann in einen gesteuerten und einen festen Anteil aufgeteilt werden.

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{J}}^M \\ \underline{\underline{V}}^M \end{pmatrix} = \underline{\underline{K}} \begin{pmatrix} \underline{\dot{U}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\dot{U}}_{k-s} \\ \underline{I}_{m_1} \\ \vdots \\ \underline{I}_{m_q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\underline{J}}_0^M \\ \underline{\underline{V}}_0^M \end{pmatrix} \quad (6.116)$$

\uparrow
fest

Liegen keine Steuerungen vor ($K = 0$), so ist man fertig. Ansonsten muss die bisher aufgestellte Matrix korrigiert werden.

Das endgültige Gleichungssystem des modifizierten Knotenadmittanzverfahrens lautet nun :

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{Y}}^M & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{D}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\underline{U}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\underline{U}}_{k-s} \\ \underline{\underline{I}}_{m_1} \\ \vdots \\ \underline{\underline{I}}_{m_q} \end{pmatrix} = \quad (6.117)$$

$$\left(\begin{pmatrix} \underline{\underline{Y}}_{os}^M & \underline{\underline{B}}_{os} \\ \underline{\underline{C}}_{os} & \underline{\underline{D}}_{os} \end{pmatrix} - \underline{\underline{K}} \right) \begin{pmatrix} \underline{\underline{U}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\underline{U}}_{k-s} \\ \underline{\underline{I}}_{m_1} \\ \vdots \\ \underline{\underline{I}}_{m_q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{J}}_0^M \\ \underline{\underline{V}}_0^M \end{pmatrix}$$

Beispiel 6.6

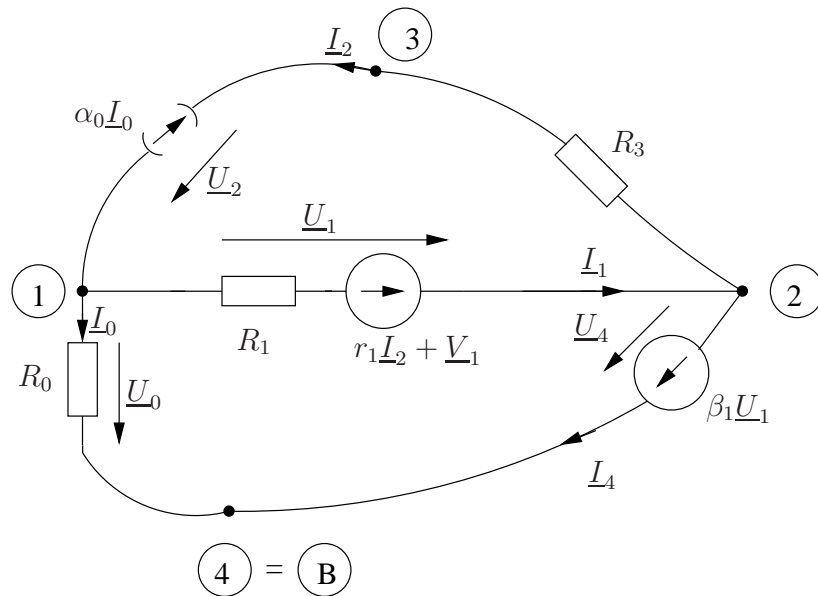


Abbildung 6.30

1) Identifizierung der zusätzlichen Stromvariablen

$$\begin{aligned} m_1 &= 0 && \text{Steuerstrom} \\ m_2 &= 2 && \text{Steuerstrom} \\ m_3 &= 4 && \text{Spannungsquellenzweig} \end{aligned}$$

- 2) Umwandlung von nicht idealen Ersatzspannungsquellendarstellungen in Ersatzstromquellendarstellungen für alle Zweige außer m_1 , m_2 und m_3 .

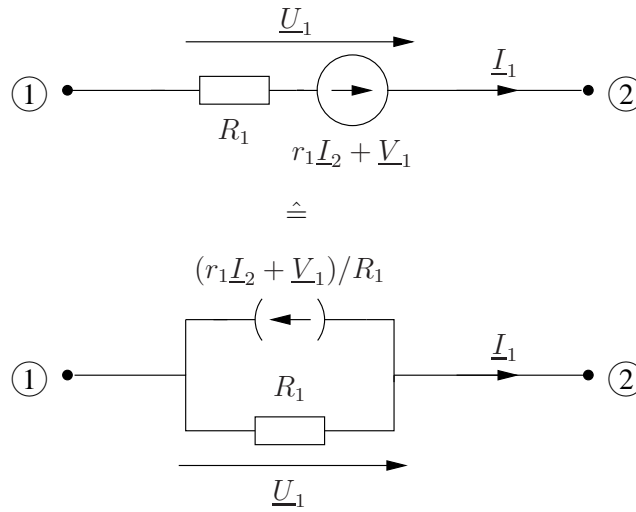


Abbildung 6.31

- 3) Das Gleichungssystem kann wieder in zwei Schritten aufgestellt werden, wobei zunächst im ersten Schritt alle Quellen als fest (ungesteuert) behandelt werden.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & 0 & 2 & 4 \\
 \textcircled{1} & \left(\begin{array}{ccc} 1/R_1 & -1/R_1 & 0 \\ -1/R_1 & 1/R_1 + 1/R_3 & -1/R_3 \\ 0 & -1/R_3 & 1/R_3 \end{array} \right) & \begin{pmatrix} \dot{\underline{U}}_1 \\ \dot{\underline{U}}_2 \\ \dot{\underline{U}}_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} (r_1 \underline{I}_2 + \underline{V}_1)/R_1 - \alpha_0 \underline{I}_0 \\ -(r_1 \underline{I}_2 + \underline{V}_1)/R_1 \\ \alpha_0 \underline{I}_0 \\ 0 \\ -\alpha_0 \underline{I}_0 \\ \beta_1 \underline{U}_1 \end{pmatrix} \\
 0 & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -R_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_4 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \end{array} \quad (6.118)$$

- 4) Berücksichtigung der Steuerungen:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & 0 & 2 & 4 \\
 \textcircled{1} & \left(\begin{array}{ccc} 1/R_1 & -1/R_1 & 0 \\ -1/R_1 & 1/R_1 + 1/R_3 & -1/R_3 \\ 0 & -1/R_3 & 1/R_3 \end{array} \right) & \begin{pmatrix} \dot{\underline{U}}_1 \\ \dot{\underline{U}}_2 \\ \dot{\underline{U}}_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \underline{V}_1/R_1 \\ -\underline{V}_1/R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 0 & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 + \alpha_0 \\ 0 \\ -\alpha_0 \\ -R_0 \\ \alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -r_1/R_1 \\ r_1/R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_4 \end{pmatrix} \\
 2 & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_4 \end{pmatrix} \\
 4 & \begin{pmatrix} -\beta_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 + \beta_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_4 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \end{array} \quad (6.119)$$

Kapitel 7

Kleinsignalanalyse nichtlinearer, zeitinvarianter Schaltungen

Die betrachteten Schaltungen enthalten nun neben linearen Zweipolen auch nichtlineare Bauelemente wie z.B. Transistoren. Die Theorie der linearen, zeitinvarianten Netzwerkmodelle ist bei diesen Schaltungen im Zusammenhang mit der Kleinsignalanalyse von zentraler Bedeutung. Bei der Kleinsignalanalyse solcher Schaltungen betrachtet man das transiente Verhalten kleiner Strom- oder Spannungsschwankungen um einen zeitlich stationären Arbeitspunkt herum. Dies wird nun an der untenstehenden Schaltung verdeutlicht.

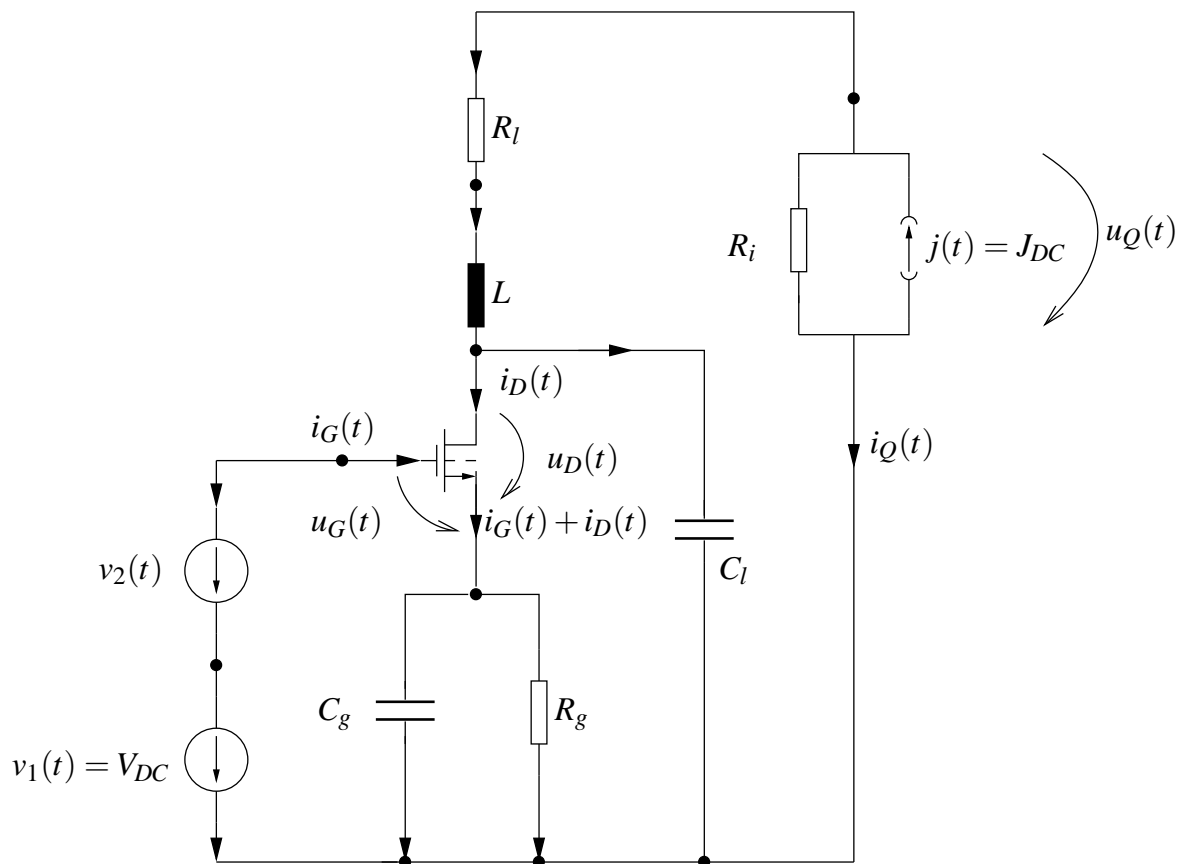


Abbildung 7.1: Verstärkerschaltung zur Verdeutlichung der Kleinsignalanalyse

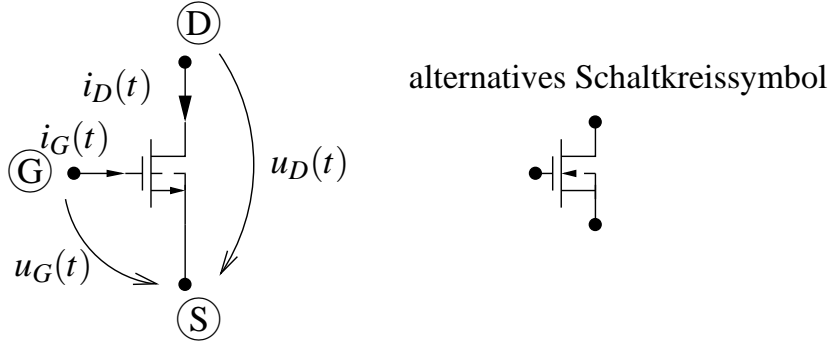


Abbildung 7.2: Schaltkreissymbol eines N-Kanal MOS-Transistors. Substrat- und Source-Kontakt sind kurzgeschlossen.

$v_2(t)$ ist eine möglicherweise transiente Kleinsignalanregung. Auf die Bedeutung des Wortes "klein" in diesem Zusammenhang wird später noch genauer eingegangen. Für jeden Zweipol wird wie angegeben eine Orientierung für die Zweipolspannung und den Zweipolstrom eingeführt. Ferner werden hinreichend viele Strom- und Spannungsvariablen zur Beschreibung des Transistorverhaltens eingeführt. Das Transistorsymbol bezeichnet einen N-Kanal MOS-Transistor, da der Pfeil im Transistorsymbol, der die Sourceelektrode kennzeichnet, vom Transistor wegzeigt (siehe Abbildung 7.2, linkes Symbol). Beim P-Kanal MOS-Transistor zeigt der Pfeil, der die Sourceelektrode kennzeichnet, in den Transistor hinein. Substrat- und Source-Kontakt sind dabei hier kurzgeschlossen. Zunächst wird der zeitunabhängige Arbeitspunkt der Schaltung bestimmt. Dazu wird

$$v_2(t) \equiv 0 =: V_{2,DC} = U_{v_2,DC} \quad (7.1)$$

gesetzt und alle Spannungen und Ströme werden analog zu den verbleibenden Quellen als zeitunabhängig angenommen.

$$\begin{aligned} u_X(t) &= U_{X,DC} & i_X(t) &= I_{X,DC} \\ X &= \{L, C_g, C_l, R_g, R_l, Q, v_1, v_2, G, D\} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Für die zeitabhängigen Ströme durch die Kapazitäten und die zeitabhängige Spannung an der Induktivität gilt daher:

$$\begin{aligned} I_{C_{g,l},DC} &= C_{g,l} \frac{dU_{C_{g,l},DC}}{dt} = 0 \\ U_{L,DC} &= L \frac{dI_{L,DC}}{dt} = 0 \end{aligned} \quad (7.3)$$

Das Ersatzschaltbild zur Bestimmung der zeitunabhängigen (DC) Lösung hat daher das folgende vereinfachte Aussehen:

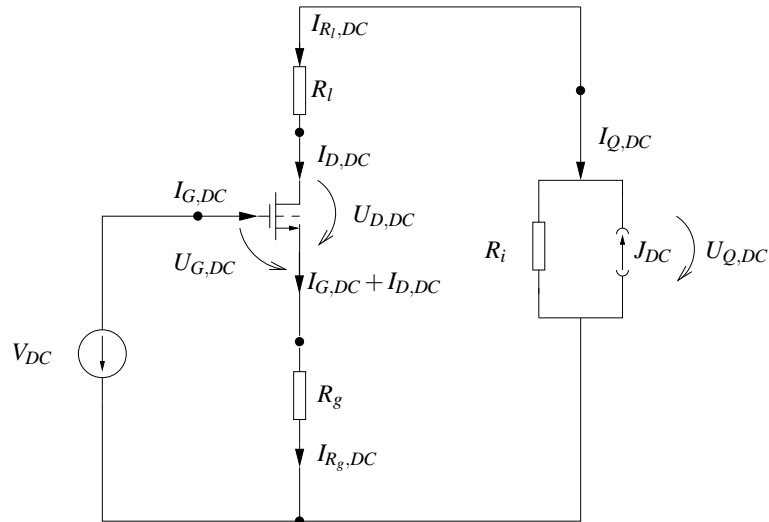


Abbildung 7.3: Ersatzschaltbild zur Bestimmung des stationären DC-Arbeitspunktes

Bemerkung 7.1 (Regeln zum Aufstellen und zum Zweck des DC-Ersatzschaltbildes)

- 1) Bei allen ungesteuerten Quellen wird nur ein zeitunabhängiger DC-Anteil (oft der zeitunabhängige Anteil der vorgegebenen Spannung $v(t)$ oder des vorgegebenen Stroms $j(t)$) berücksichtigt. Hat eine Spannungsquelle keinen DC-Anteil, so wird diese durch einen „Kurzschluss“ ersetzt. Hat eine Stromquelle keinen DC-Anteil, so wird diese durch einen „Leerlauf“ ersetzt.
- 2) Alle Spannungen und Ströme im Netzwerkmodell werden als zeitunabhängig angenommen. Daher werden Kapazitäten durch einen „Leerlauf“ und Induktivitäten durch einen „Kurzschluss“ ersetzt. Gesucht wird eine Lösung aller Netzwerkgleichungen unter diesen Voraussetzungen. Diese Lösung wird DC-Lösung oder Arbeitspunkt genannt.

Der Transistor wird dabei durch seine stationären Kennlinienfelder beschrieben. Bei MOS-Transistoren gilt

$$I_{G,DC} = 0, \quad (7.4)$$

so dass nur das Ausgangskennlinienfeld in Abb. 7.5 von Interesse ist. Zur Vereinfachung der weiteren Rechnung wird nun noch die zeitunabhängige ESTQ-Schaltung in eine ESPQ-Schaltung transformiert.

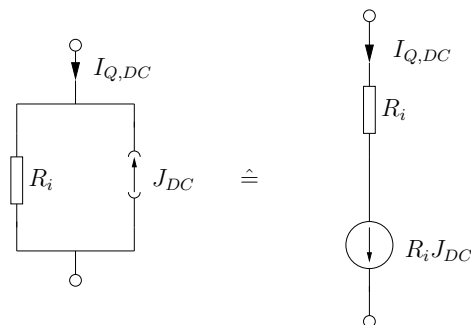


Abbildung 7.4

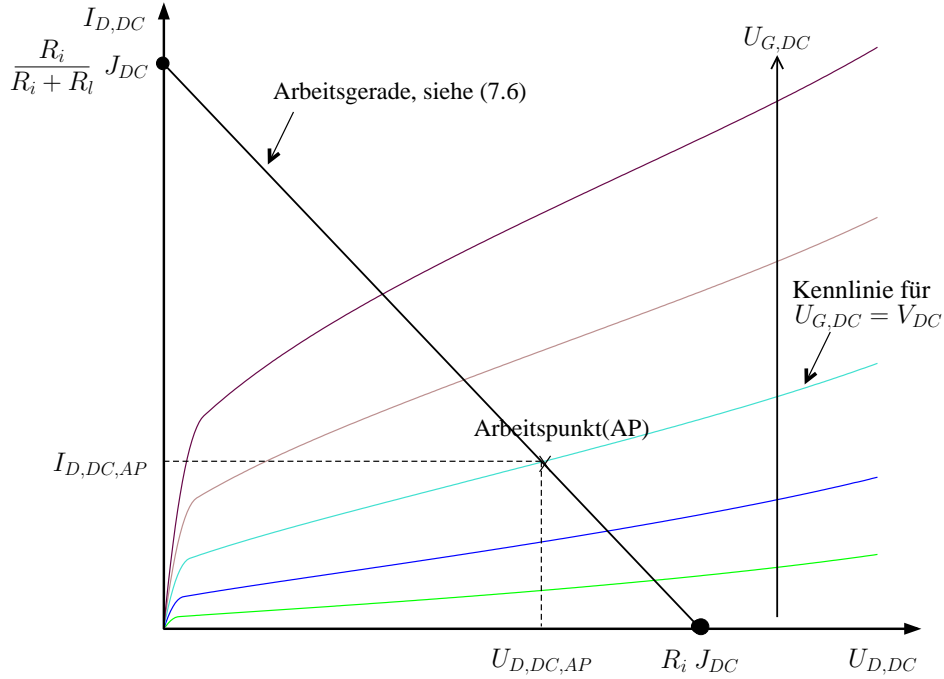


Abbildung 7.5: Ausgangskennlinienfeld eines MOS-Transistors und graphische Arbeitspunktbestimmung für $R_g = 0$

Aus den Knotengleichungen und (7.4) folgt nun sofort

$$I_{D,DC} = I_{R_g,DC} = I_{R_l,DC} = -I_{Q,DC}. \quad (7.5)$$

Aus den Maschengleichungen folgt ferner

$$U_{D,DC} = R_i J_{DC} - (R_l + R_i + R_g) I_{D,DC} \quad (7.6)$$

und

$$U_{G,DC} = V_{DC} - R_g I_{D,DC}. \quad (7.7)$$

Zusammen mit dem Ausgangskennlinienfeld in Abb. 7.5, das den nichtlinearen, stationären Zusammenhang

$$I_{D,DC} = f_{D,stat}(U_{D,DC}, U_{G,DC}), \quad (7.8)$$

darstellt, bilden (7.6), (7.7) ein nichtlineares Gleichungssystem bestehend aus drei Gleichungen und drei Unbekannten, das bei geeigneter Wahl von R_i, R_g, R_l genau eine Lösung $I_{D,DC}, U_{G,DC}, U_{D,DC}$ hat, die den Arbeitspunkt festlegt. In einfachen Fällen kann man den Arbeitspunkt graphisch im Kennlinienfeld bestimmen. Setzt man (7.7) in (7.8) ein und eliminiert $U_{G,DC}$ in (7.8), so ergibt sich zusätzlich zu (7.6) eine weitere Kurve in der $I_{D,DC}, U_{D,DC}$ Ebene und der Schnittpunkt dieser beiden Kurven ist der gesuchte Arbeitspunkt. Eine graphische Lösung ist auch einfach möglich, falls (7.7) die Form $U_{G,DC} = AV_{DC} + BU_{D,DC}$ mit Konstanten A und B hat. Besonders einfach ist die Lösung im vorliegenden Fall für $R_g = 0$, da dann (7.7) in (7.8) eingesetzt die Kennlinie für $U_{G,DC} = V_{DC}$ ergibt. Die dazu gehörige Lösung ist in Abb. 7.5 dargestellt. Im allgemeinen Fall wird man ein Netzwerkanalyseprogramm (z.B. PSPICE) benutzen, um den DC-Arbeitspunkt mit Hilfe der DC-Analyse (Gleichstromanalyse) zu bestimmen.

Hat man den DC-Arbeitspunkt gefunden, so kann man die Kleinsignalanalyse durchführen. Hierbei werden kleine Abweichungen von den DC-Arbeitspunktspannungen und -strömen betrachtet. Man nimmt dabei an, dass das Verhalten der nichtlinearen Bauelemente in linearer Näherung durch ein lineares zeitinvariantes Netzwerkmodell beschrieben werden kann. Vom jeweiligen nichtlinearen Bauelement und dem gewünschten Arbeitspunkt hängt es ab, welche Spannungs- und Stromschwankungen noch klein genug sind, um in linearer Näherung zu rechnen. Bei Bipolartransistoren muss z.B. die "Basis-Emitter"-Kleinsignalspannungsschwankung betragsmäßig sehr viel kleiner als die Temperaturspannung gewählt werden, um in linearer Näherung rechnen zu können.

$$|u_{BE,KS}(t)| \ll V_T = \frac{kT}{q} \approx 25\text{mV} \quad (T = 300\text{K}) \quad (7.9)$$

Bei MOS-Transistoren sind typischerweise deutlich größere Spannungspegel zulässig, um in linearer Näherung zu rechnen. Nach Durchführung der Kleinsignalanalyse muss man daher nachträglich überprüfen, für welchen Pegel der Kleinsignaleingangsquellen und über welches Zeitintervall die Rechnung in linearer Näherung gerechtfertigt ist. Wählt man den Eingangspegel und das Zeitintervall jedoch hinreichend klein, lässt sich die lineare Näherung andererseits stets rechtfertigen. Zur Durchführung der Kleinsignalanalyse wird jede Zweigspannung und jeder Zweigstrom als Summe des zeitlich stationären Arbeitspunktwertes und einer Kleinsignalgröße angesetzt.

$$\begin{aligned} u_X(t) &= U_{X,DC} + u_{X,KS}(t) \\ i_X(t) &= I_{X,DC} + i_{X,KS}(t) \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$X = \{L, C_g, C_l, R_g, R_l, Q, v_1, v_2, G, D\}$$

Enthält die nichtlineare Schaltung ideale Schalter und soll das Kleinsignalmodell für den Zeitbereich nach dem Schalten gelten ($t > t_S$), so bezieht sich die DC-Lösung in (7.10) auf die nichtlineare Schaltung nach dem Schalten.

Die DC-Spannungen und -ströme erfüllen für sich alleine genommen bereits alle MGL, alle KGL und alle Zweiggleichungen für alle Zweige, die nur lineare Zweipole enthalten. Daher gelten die entsprechenden Gleichungen für die Kleinsignalanteile alleine. Dies wird nun anhand von exemplarischen Beispielen verdeutlicht. Dabei ist zu beachten, dass der DC-Wert der Spannungsquelle $v_2(t)$ in (7.1) zu Null gewählt wurde und (7.3) im DC-Fall gilt.

Maschengleichung:

$$\begin{aligned} u_{v_2}(t) + u_{v_1}(t) - u_{C_g}(t) - u_G(t) &= 0 \\ \Rightarrow \underbrace{\overbrace{U_{v_2,DC}}^{=0} + \overbrace{U_{v_1,DC}}^{=V_{DC}} - \overbrace{U_{C_g,DC}}^{=U_{R_g,DC}} - U_{G,DC}}_{=0} & \\ + u_{v_2,KS}(t) + u_{v_1,KS}(t) - u_{C_g,KS}(t) - u_{G,KS}(t) &= 0 \\ \Rightarrow u_{v_2,KS}(t) + u_{v_1,KS}(t) - u_{C_g,KS}(t) - u_{G,KS}(t) &= 0 \end{aligned} \quad (7.11)$$

Knotengleichung:

$$\begin{aligned} i_G(t) + i_D(t) - i_{C_g}(t) - i_{R_g}(t) &= 0 \\ \Rightarrow \underbrace{\overbrace{I_{G,DC}}^{=0} + I_{D,DC} - \overbrace{I_{C_g,DC}}^{=0} - I_{R_g,DC}}_{=0} & \\ + i_{G,KS}(t) + i_{D,KS}(t) - i_{C_g,KS}(t) - i_{R_g,KS}(t) &= 0 \\ \Rightarrow i_{G,KS}(t) + i_{D,KS}(t) - i_{C_g,KS}(t) - i_{R_g,KS}(t) &= 0 \end{aligned} \quad (7.12)$$

Zweiggleichung:

$$\begin{aligned}
 i_Q(t) &= \frac{u_Q(t)}{R_i} - j(t) \\
 \Rightarrow I_{Q,DC} + i_{Q,KS}(t) &= \frac{U_{Q,DC}}{R_i} + \frac{u_{Q,KS}(t)}{R_i} - J_{DC} - j_{KS}(t) \\
 \Rightarrow i_{Q,KS}(t) &= \frac{u_{Q,KS}(t)}{R_i} - j_{KS}(t)
 \end{aligned} \tag{7.13}$$

Aus der Definition der idealen Spannungs- oder Stromquellen folgt, dass bei der Spannung an der idealen Gleichspannungsquelle und bei dem Strom durch die ideale Gleichstromquelle, die zusammen den DC-Arbeitspunkt bestimmen und gegenüber der DC-Analyse nicht geändert werden, der Kleinsignalanteil verschwinden muss.

$$j_{KS}(t) = v_{1,KS}(t) = u_{v_1,KS}(t) \equiv 0 \tag{7.14}$$

Aufgrund von (7.1) gilt ferner

$$v_{2,KS}(t) = v_2(t) = u_{v_2,KS}(t) \tag{7.15}$$

Das Kleinsignalersatzschaltbild der Schaltung aus Abbildung 7.1 hat daher die Gestalt aus Abbildung 7.6.

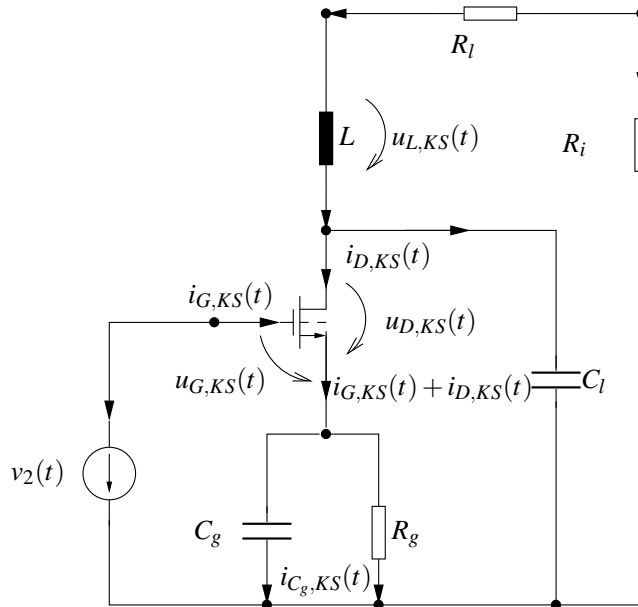


Abbildung 7.6: Kleinsignalersatzschaltbild der Schaltung aus Abbildung 7.1. Das Transistor-symbol bezeichnet hier der Konvention entsprechend das lineare, zeitinvariante Kleinsignal-netzwerkmodell des Transistors im vorher bestimmten Arbeitspunkt.

Bemerkung 7.2 (Regeln zum Aufstellen des Kleinsignalersatzschaltbildes)

- 1) Bei allen ungesteuerten Quellen wird nur der Kleinsignalanteil berücksichtigt. Hat eine Spannungsquelle nur einen DC-Anteil, so wird sie durch einen „Kurzschluss“ ersetzt. Hat eine Stromquelle nur einen DC-Anteil, so wird sie durch einen „Leerlauf“ ersetzt.
- 2) Aufgrund der vorher bestimmten DC-Lösung gelten alle Maschengleichungen, Schnittmengengleichungen und Zweigggleichungen, die bei linearen, zeitinvarianten Zweipolen und idealen Quellen für die Großsignalspannungen und Ströme gelten, sofort auch für die entsprechenden Kleinsignalspannungen und Ströme in entsprechender Form.
- 3) Enthält das ursprüngliche Netzwerkmodell ideale Schalter, so ergeben sich die Anfangswerte vor dem Schalten (t_S^-) des Kleinsignalmodells für $t > t_S$ aus der Differenz der Werte der Netzwerkvariablen vor dem Schalten (t_S^-) und der DC-Lösung nach dem Schalten.

Setzt man noch das im nächsten Kapitel beschriebene Kleinsignalersatzschaltbild des Transistors ein, so ergibt sich ein lineares, zeitinvariantes Netzwerkmodell, für das alle bereits eingeführten oder noch einzuführenden Methoden und Konzepte zur Analyse von linearen, zeitinvarianten Netzwerkmodellen Anwendung finden können. Mit Hilfe der in späteren Kapiteln genauer beschriebenen Methoden kann zum Beispiel eine Stabilitätsanalyse des Kleinsignalnetzwerkmodells durchgeführt werden.

Bemerkung 7.3 (Stabiler Arbeitspunkt)

Ist das Kleinsignalnetzwerkmodell asymptotisch stabil, so wird der DC-Arbeitspunkt als ein stabiler Arbeitspunkt bezeichnet und man kann die Darstellung der Antwort im eingeschwungenen Zustand des Kleinsignalnetzwerkmodells mit Hilfe von Frequenzgängen bestimmen. In Netzwerkanalyseprogrammen wie PSPICE wird die Bestimmung der Frequenzgänge mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung kurz AC-Analyse genannt.

7.1 Kleinsignalersatzschaltbilder aktiver Bauelemente

Kleinsignalmodelle werden durch Linearisierung aus Großsignalmodellen abgeleitet. Bei aktiven Bauelementen (in integrierten Schaltungen oder mit einem Gehäuse versehen auf einer Schaltungsplatine) werden diese Großsignalmodelle typischerweise von den Bauelementherstellern zur Verfügung gestellt. Bei weit verbreiteten, mit einem Gehäuse versehenen und vermarkteten Bauelementen sind solche Großsignalmodelle oft bereits in den Standardversionen der Schaltkreissimulatoren vorhanden. Auffallend ist, dass bei den Modellen aktiver Bauelemente der Benutzer anders als bei Widerständen, Kapazitäten etc. zumeist keine Modellparameter mehr eingibt. D.h. für jeden Transistortyp gibt es also ein extra zur Verfügung gestelltes Großsignalmodell, das vom Benutzer der Schaltkreissimulationsprogramme nicht mehr beeinflusst wird. Dies ist ein Indiz dafür, dass die Entwicklung von Großsignalmodellen nicht den Anwendern der Schaltkreissimulatoren überlassen werden kann, sondern mit großer Sorgfalt und beträchtlichem Aufwand bei den Herstellern der Bauelemente geschieht.

Wie geht man bei der Entwicklung der Großsignalmodelle nun vor? Einerseits benutzt man analytische Näherungslösungen der physikalischen Modelle (Differenzialgleichungen), die den Teilchentransport im Halbleiter beschreiben (im weiteren kurz Halbleitergleichungen genannt). Einige solcher elementar wichtigen Näherungslösungen werden zum Beispiel in der

Vorlesung „Grundlagen der Elektronik“ vorgestellt werden. Andererseits kann man die Halbleitergleichungen numerisch auch direkt lösen und sich dadurch ein sehr genaues, aber bezüglich der Rechenzeit auch aufwendiges Großsignalmodell für die Halbleiterbauelemente beschaffen. Dieses Verfahren wird kurz als „Numerische Bauelementsimulation“ bezeichnet.

In der Industrie wird dieses Hilfsmittel heute intensiv bei der Entwicklung von rechenzeiteffizienten (kompakten) Großsignalmodellen für die numerische Schaltkreissimulation eingesetzt. In kritischen Fällen ist es aber auch durchaus üblich, das numerische Bauelements simulationsmodell direkt als Großsignalmodell bei der Schaltkreissimulation zu verwenden. Eine Einführung in diesen für die Genauigkeit der Schaltkreissimulatoren zentral wichtigen Bereich wird in der Vorlesung „Numerische Bauelement- und Schaltkreissimulation“ gegeben. Die Vorlesung wird von unserem Institut regelmäßig angeboten. In der Vorlesung „Wechselströme und Netzwerke“ wird auf die Großsignalmodelle nicht im Detail eingegangen, sondern es wird exemplarisch von einem bestimmten Großsignalmodellansatz ausgegangen, der, wie sich wiederum mit Hilfe der numerischen Bauelements simulation zeigen lässt, bei vielen wichtigen Bauelementen, wie z.B. symmetrischen MOS-Transistoren, das Bauelementverhalten für viele Anwendungen hinreichend genau beschreibt. Dies ist der sogenannte quasistatische (oder quasistationäre), ladungsbasierende Ansatz, der hier am Beispiel des MOS-Transistors aus Abb. 7.1 vorgestellt werden soll.

Bei diesem Modell betrachtet man zunächst den zeitlich stationären Fall und ordnet den Bauelementklemmen D und G neben den stationären Kennlinienfelder (siehe 7.8)

$$\begin{aligned} I_{G,DC} &= f_{G,stat}(U_{D,DC}, U_{G,DC}) = 0 \\ I_{D,DC} &= f_{D,stat}(U_{D,DC}, U_{G,DC}) \end{aligned} \quad (7.16)$$

noch jeweils Ladungsfelder zu

$$\begin{aligned} Q_{G,DC} &= g_{G,stat}(U_{D,DC}, U_{G,DC}) \\ Q_{D,DC} &= g_{D,stat}(U_{D,DC}, U_{G,DC}). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Die Funktionen $f_{D,stat}$, $g_{G,stat}$, $g_{D,stat}$ können dabei unter der Annahme von zeitunabhängigen Klemmenspannungen sowohl mit Hilfe analytischer Näherungslösungen der Halbleitergrundgleichungen, als auch mit der numerischen Bauelements simulation bestimmt werden. Eine experimentelle Bestimmung der Ladungsfunktionen $g_{G,stat}$, $g_{D,stat}$ ist ebenfalls möglich, aber sehr aufwendig. Hier nehmen wir an, dass die Funktionen gegeben sind.

Das quasistatische, ladungsbasierende Großsignalmodell hat nun die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} i_G(t) &= f_{G,stat}(u_D(t), u_G(t)) + \frac{d}{dt} g_{G,stat}(u_D(t), u_G(t)) \\ i_D(t) &= f_{D,stat}(u_D(t), u_G(t)) + \frac{d}{dt} g_{D,stat}(u_D(t), u_G(t)) \end{aligned} \quad (7.18)$$

Das Kleinsignalmodell folgt nun durch Einführung der stationären Arbeitspunktvariablen und der Kleinsignalvariablen sowie durch Linearisierung der Funktionen f und g um den Arbeitspunkt herum. Für den Drainstrom folgt aus (7.18)

$$\begin{aligned} i_D(t) &= I_{D,DC} + i_{D,KS}(t) = \\ & f_{D,stat}(U_{D,DC} + u_{D,KS}(t), U_{G,DC} + u_{G,KS}(t)) \\ & + \frac{d}{dt} g_{D,stat}(U_{D,DC} + u_{D,KS}(t), U_{G,DC} + u_{G,KS}(t)) \end{aligned} \quad (7.19)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} g_{D,stat}(U_{D,DC} + u_{D,KS}(t), U_{G,DC} + u_{G,KS}(t)) = \\
& \frac{\partial g_{D,stat}}{\partial U_D}(U_{D,DC} + u_{D,KS}(t), U_{G,DC} + u_{G,KS}(t)) \frac{d}{dt} u_{D,KS}(t) \\
& + \frac{\partial g_{D,stat}}{\partial U_G}(U_{D,DC} + u_{D,KS}(t), U_{G,DC} + u_{G,KS}(t)) \frac{d}{dt} u_{G,KS}(t)
\end{aligned} \quad (7.20)$$

Die Funktionen $F = f_{D,stat}$, $\frac{\partial g_{D,stat}}{\partial U_D}$, $\frac{\partial g_{D,stat}}{\partial U_G}$ werden nun um den Arbeitspunkt herum nach folgendem Muster linearisiert

$$\begin{aligned}
& F(U_{D,DC} + u_{D,KS}(t), U_{G,DC} + u_{G,KS}(t)) \\
& = F(U_{D,DC}, U_{G,DC}) + \frac{\partial F}{\partial U_D}(U_{D,DC}, U_{G,DC}) u_{D,KS}(t) \\
& + \frac{\partial F}{\partial U_G}(U_{D,DC}, U_{G,DC}) u_{G,KS}(t) + (\text{Terme höherer Ordnung})
\end{aligned} \quad (7.21)$$

Einsetzen von (7.21) in (7.20) und (7.19) und Vernachlässigung aller Terme, in denen Produkte von Kleinsignalspannungen mit Kleinsignalspannungen und/oder Kleinsignalspannungsableitungen nach der Zeit vorkommen, liefert bei Beachtung von $I_{D,DC} = f_{D,stat}(U_{D,DC}, U_{G,DC})$ die folgende Gleichung für den Kleinsignal drainstrom:

$$\begin{aligned}
i_{D,KS}(t) & = \underbrace{\frac{\partial f_{D,stat}}{\partial U_D}(U_{D,DC}, U_{G,DC})}_{1/R_D (= 1/r_0)} u_{D,KS}(t) \\
& + \underbrace{\frac{\partial f_{D,stat}}{\partial U_G}(U_{D,DC}, U_{G,DC})}_{g_m} u_{G,KS}(t) \\
& + \frac{\partial g_{D,stat}}{\partial U_D}(U_{D,DC}, U_{G,DC}) \frac{d}{dt} u_{D,KS}(t) \\
& + \frac{\partial g_{D,stat}}{\partial U_G}(U_{D,DC}, U_{G,DC}) \frac{d}{dt} u_{G,KS}(t)
\end{aligned} \quad (7.22)$$

Analog ergibt sich für den Kleinsignal gatestrom:

$$\begin{aligned}
i_{G,KS}(t) & = \frac{\partial g_{G,stat}}{\partial U_D}(U_{D,DC}, U_{G,DC}) \frac{d}{dt} u_{D,KS}(t) \\
& + \frac{\partial g_{G,stat}}{\partial U_G}(U_{D,DC}, U_{G,DC}) \frac{d}{dt} u_{G,KS}(t)
\end{aligned} \quad (7.23)$$

Die Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung wird durch die Annahme der „Kleinheit“ der Kleinsignalspannungen motiviert.

Kleinsignalspannungen sind also dann klein genug, wenn diese Vernachlässigung gerechtfertigt ist.

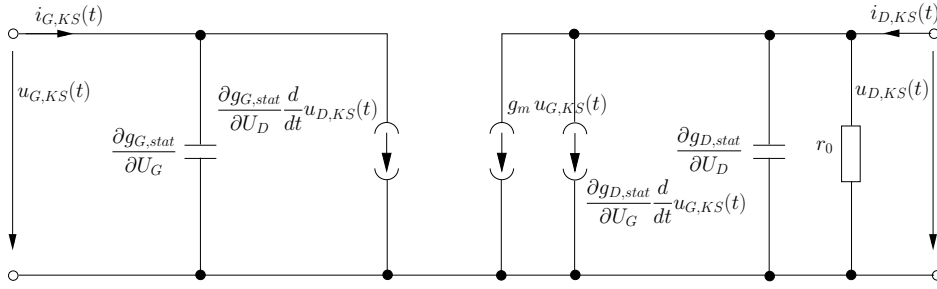


Abbildung 7.7: Vollständiges quasistatisches Kleinsignalersatzschaltbild des MOS-Transistors

(7.22) und (7.23) sind nun äquivalent zu dem Kleinsignalnetzwerkmodell in Abbildung 7.7. Zur Vereinfachung werden in Abbildung 7.7 die Argumente $U_{D,DC}$, $U_{G,DC}$ unterdrückt.

Typischerweise gilt:

$$\frac{\partial g_{D,stat}}{\partial U_G}(U_{D,DC}, U_{G,DC}) \neq \frac{\partial g_{G,stat}}{\partial U_D}(U_{D,DC}, U_{G,DC}) \quad (7.24)$$

(siehe Vorlesung „Numerische Bauelement- und Schaltkreissimulation“).

Trotzdem ist es üblich eine weitere Näherung einzuführen, um zu einem für analytische Handrechnungen einfacheren Kleinsignalersatzschaltbild zu kommen.

Man setzt

$$\frac{\partial g_{D,stat}}{\partial U_G}(U_{D,DC}, U_{G,DC}) := \frac{\partial g_{G,stat}}{\partial U_D}(U_{D,DC}, U_{G,DC}) \quad (7.25)$$

Damit werden die transienten Kleinsignalgateströme (und damit der sogenannte „Miller Effekt“ (siehe Vorlesung „Schaltungstechnik“)) richtig beschrieben. Der durch die Gatespannungsschwankungen ausgelöste kapazitive Ladestrom an der Drain wird hingegen fehlerhaft beschrieben. Dieser ist jedoch zumeist klein gegen die entsprechende ohmsche Komponente, wodurch die Näherung sinnvoll wird.

Definiert man nun mit dieser Näherung noch die folgenden Kapazitäten wie folgt

$$C_G := \frac{\partial g_{G,stat}}{\partial U_G}(U_{D,DC}, U_{G,DC}) + \frac{\partial g_{G,stat}}{\partial U_D}(U_{D,DC}, U_{G,DC}) \quad (7.26)$$

$$C_D := \frac{\partial g_{D,stat}}{\partial U_D}(U_{D,DC}, U_{G,DC}) + \frac{\partial g_{G,stat}}{\partial U_D}(U_{D,DC}, U_{G,DC}) \quad (7.27)$$

$$C_{G,D} = C_{D,G} := -\frac{\partial g_{G,stat}}{\partial U_D}(U_{D,DC}, U_{G,DC}), \quad (7.28)$$

und beachtet die in (7.22) eingeführten Abkürzungen, so lassen sich (7.22) und (7.23) in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} i_{D,KS}(t) &= \frac{1}{R_D} u_{D,KS}(t) + g_m u_{G,KS}(t) + \\ &\quad C_D \frac{d}{dt} u_{D,KS}(t) + C_{D,G} \frac{d}{dt} (u_{D,KS}(t) - u_{G,KS}(t)) \end{aligned} \quad (7.29)$$

$$i_{G,KS}(t) = C_G \frac{d}{dt} u_{G,KS}(t) + C_{D,G} \frac{d}{dt} (u_{G,KS}(t) - u_{D,KS}(t)) \quad (7.30)$$

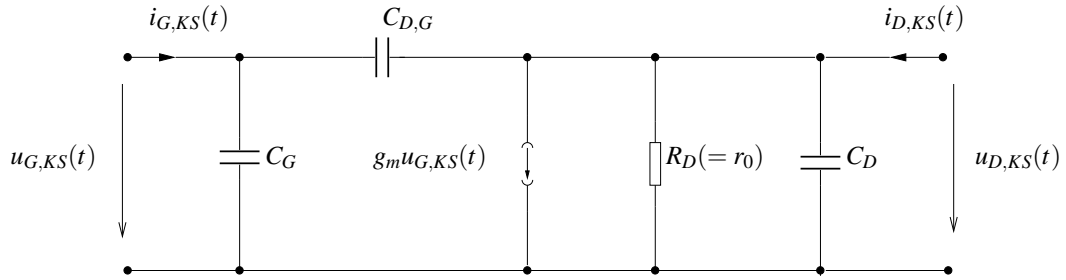
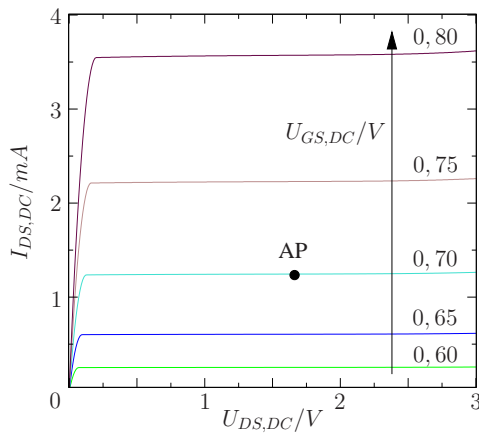


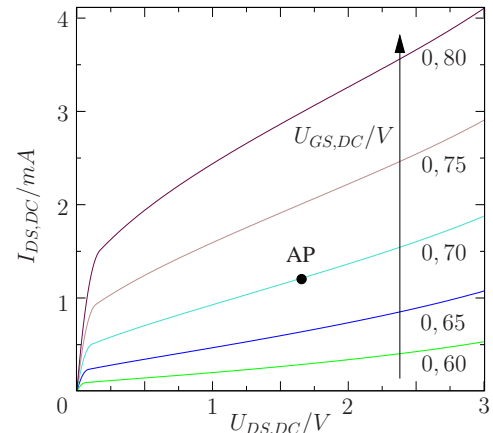
Abbildung 7.8: Vereinfachtes quasistatisches Kleinsignalersatzschaltbild des MOS-Transistors

Dies entspricht exakt dem folgenden linearen, zeitinvarianten Netzwerkmodell, das im weiteren stets als Kleinsignalersatzschaltbild des MOS-Transistors in dieser Vorlesung Verwendung finden wird.

Dieses Ersatzschaltbild gilt nur für kurzgeschlossene Bulk- und Source-Kontakte des MOS-Transistors. Von dieser Voraussetzung wird im weiteren aber ausgegangen werden. Aus der Ableitung geht klar hervor, dass die Parameter $C_G, C_{D,G}, C_D, R_D, g_m$ des Kleinsignalersatzschaltbildes stark vom gewählten Arbeitspunkt abhängen. Typischerweise wird dieser so gewählt, dass g_m möglichst groß und alle anderen Parameter (insbesondere R_D^{-1} und $C_{D,G}$) möglichst klein werden, weil dadurch das Kleinsignalersatzschaltbild einer idealen spannungsgesteuerten Stromquelle möglichst gut durch den MOS-Transistor approximiert wird und dies schaltungstechnisch oft wünschenswert ist. Natürlich lassen sich diese Forderungen immer nur unvollständig erfüllen. In Abbildung 7.9 a) und b) sind die Ausgangskennlinienfelder zweier



(a) Langkanal MOSFET mit $L = 25\mu\text{m}$.
 $g_m \approx 12.3\text{m}\Omega^{-1}, r_0 = 243.9\text{k}\Omega \Rightarrow g_m r_0 \approx 3000$



(b) Kurzkanal MOSFET mit $L = 0.24\mu\text{m}$.
 $g_m \approx 14\text{m}\Omega^{-1}, r_0 = 2.2\text{k}\Omega \Rightarrow g_m r_0 \approx 31$

Abbildung 7.9: Ausgangskennlinienfelder eines Langkanaltransistors (a) und eines Kurzkanaltransistors (b). Die Transistoren wurden in einer realistischen $0.25\mu\text{m}$ CMOS-Technologie hergestellt.

NMOS-Transistoren mit unterschiedlichen Kanallängen (a) $L = 25\mu\text{m}$, b) $L = 0.24\mu\text{m}$), die in einer realen $0.25\mu\text{m}$ CMOS-Technologie hergestellt wurden, dargestellt.

Bei dem in Abbildung 7.9 a) vorgestellten Transistor gilt im gewählten Arbeitspunkt $g_m/r_0^{-1} = g_m r_0 \approx 3000$. Das heißt, bei niedrigen Frequenzen ω und geeigneter Arbeitspunktwahl entspricht das Kleinsignalverhalten von Langkanal MOS-Transistoren durchaus in guter Näherung einer idealen spannungsgesteuerten Stromquelle. Bei schnellen Kurzkanaltransistoren werden die Stromquelleneigenschaften jedoch wesentlich schlechter, wie am Beispiel des Tran-

sistors in Abbildung 7.9 b) zu sehen ist, denn bei diesem gilt bei etwa gleichem Arbeitspunkt $g_m r_0 \approx 31$.

Die Kleinsignalersatzschaltbilder anderer aktiver Bauelemente sehen ähnlich aus. So unterscheidet sich das Kleinsignalersatzschaltbild eines Bipolartransistors in Emitterschaltung nur am Eingang durch einen Widerstand parallel zur Eingangskapazität. Dadurch wird der Tatsache Rechnung getragen, dass beim Bipolartransistor der Basisstrom im zeitlich stationären Fall nicht verschwindet.

In jedem Fall werden in dieser Vorlesung bei der Stellung eines Problems, das aktive Bauelemente umfasst, die Kleinsignalersatzschaltbilder der aktiven Bauelemente bei der Problemstellung vorgegeben.

Im weiteren Verlauf der Vorlesung werden in den allermeisten Fällen wiederum nur Kleinsignalmodelle behandelt. Der Index KS wird daher zur Vereinfachung der Formeln immer dann unterdrückt, wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind.

Bemerkung 7.4 Konvention zur Vereinfachung von Schaltbildern

In Schaltbildern werden zur Vereinfachung oft ideale Gleichspannungsquellen weggelassen. Dies ist typischerweise der Fall, wenn viele Gleichspannungsquellen mit einem gemeinsamen Knoten verbunden sind. Dieser gemeinsame Knoten wird dann als Erdknoten oder Masseknoten (Ground) gekennzeichnet.



Abbildung 7.10: Kennzeichnung des Erd- oder Masseknotens

Alle so gekennzeichneten Knoten sind kurzgeschlossen. Der jeweils andere Knoten derjenigen Gleichspannungsquellen, die mit dem Erdknoten verbunden sind, wird mit dem Ursprungswert der Gleichspannungsquelle gekennzeichnet. Die in Abbildung 7.11 gezeigten beiden Schaltungen sind nach dieser Konvention also identisch.

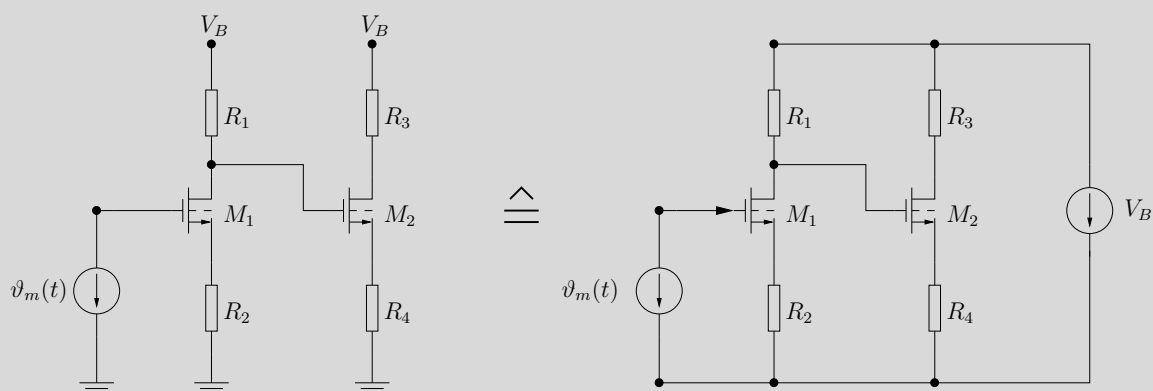


Abbildung 7.11: Äquivalente Darstellungen einer Schaltung

7.2 Der Operationsverstärker

Eine ideale gesteuerte Stromquelle lässt sich wie gesehen unter Umständen durch das Kleinsignalverhalten eines MOS-Transistors realisieren. Durch geeignete Kombination von MOS-Transistoren in einer Kaskodenschaltung (siehe Vorlesung „Schaltungstechnik“) lassen sich die Stromquelleneigenschaften weiter verbessern. Um alle in Kapitel 6.1 eingeführten gesteuerten Quellen näherungsweise darstellen zu können, bedarf es noch der Realisierung einer gesteuerten Spannungsquelle. Zur näherungsweisen Realisierung einer spannungsgesteuerten Spannungsquelle müssen mehrere Transistoren in einer Schaltung verbunden werden. Die bekannteste Schaltungsfamilie dieses Typs ist die Familie der Operationsverstärker. Abbildung 7.12 zeigt eine typische Operationsverstärkerschaltung, bei der die Konvention aus Bemerkung 7.4 verwendet wurde. Für die Analyse vieler Schaltungsanwendungen reicht es aus, wenn man das tatsächliche Verhalten einer Operationsverstärkerschaltung stark idealisiert und nur die wesentlichen Eigenschaften der Schaltung in einem sogenannten Verhaltensmodell beschreibt. Eine solches idealisiertes Verhaltensmodell einer Operationsverstärkerschaltung wird wie in Abbildung 7.13 gezeigt symbolisch dargestellt ($-V_{SS} = V_{DD} > 0$).

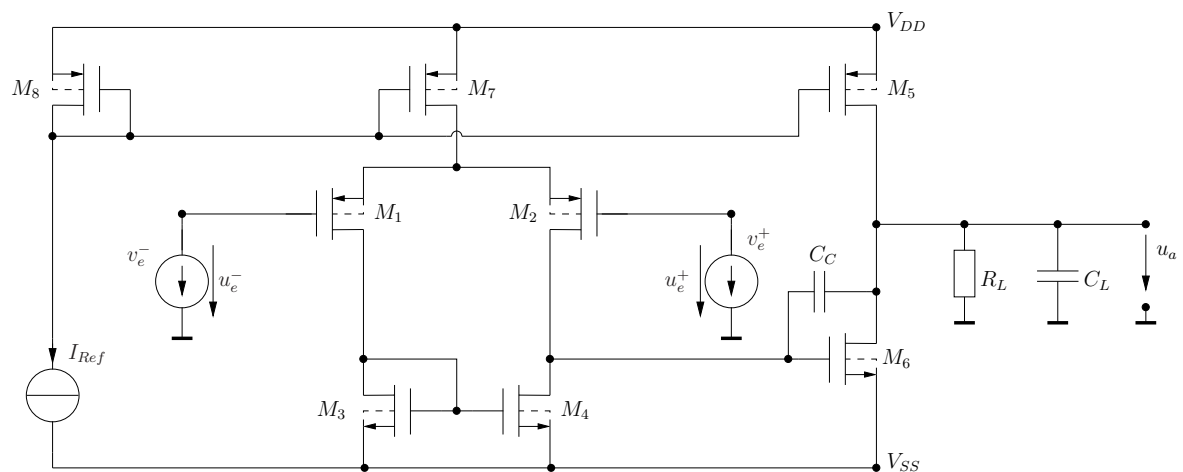


Abbildung 7.12: Vollständiges Ersatzschaltbild des CMOS Miller-Operationsverstärker auf der Transistorebene (R_L, C_L symbolisieren die Last).

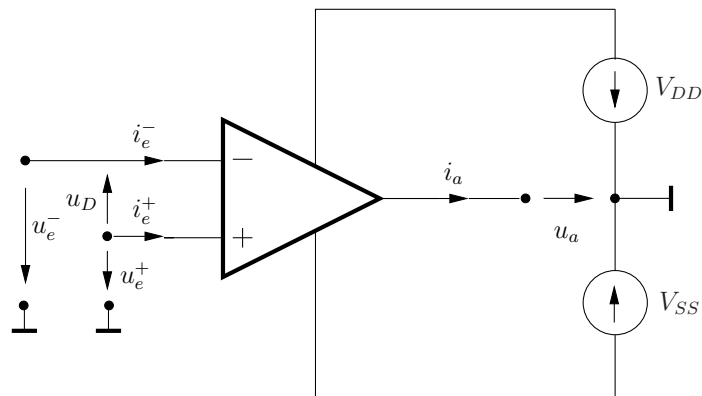
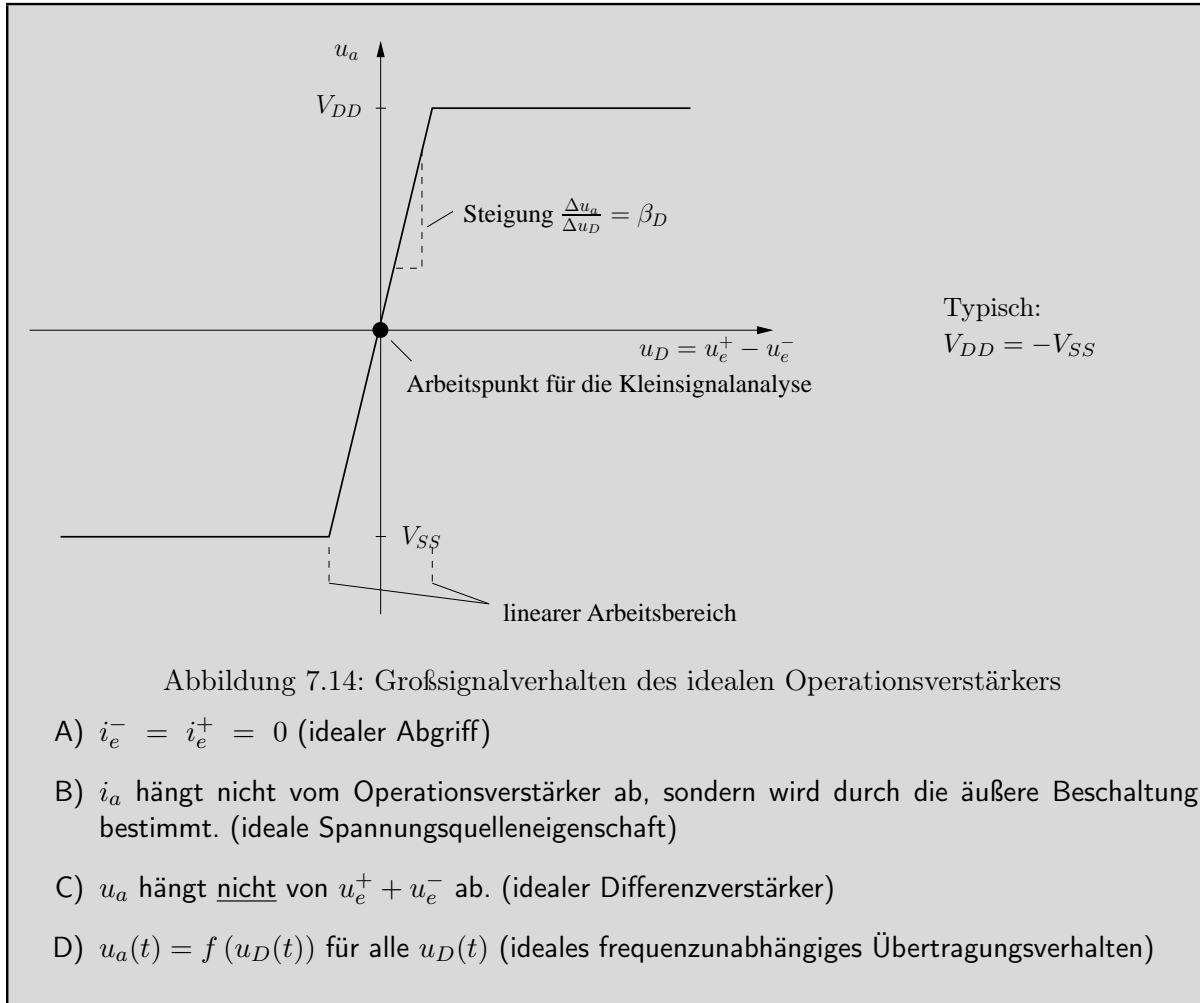


Abbildung 7.13: Großsignalverhaltensmodell des Operationsverstärkers

Definition 7.1 (Eigenschaften des Großsignalverhaltensmodells eines idealen Operationsverstärkers)



Die Differenzverstärkung β_D des Operationsverstärkers im linearen Arbeitsbereich ist typischerweise sehr groß $\beta_D > 10^4$. Der typische Arbeitspunkt für die Kleinsignalanalyse des Operationsverstärkers ist $U_{e,DC}^- = U_{e,DC}^+ \Rightarrow U_{D,DC} = 0$ und $U_{a,DC} = 0$. Damit ergibt sich das Kleinsignalersatzschaltbild als ideale spannungsgesteuerte Spannungsquelle (siehe Abb. 7.15).

Die Eigenschaften A) B) C) D) aus Definition 7.1 gelten eins zu eins auch für die entsprechenden Kleinsignalgrößen. Ferner gilt für $u_{a,KS}$, falls der Arbeitspunkt im linearen Bereich liegt:

$$u_{a,KS} = \beta_D u_{D,KS} = \beta_D (u_{e,KS}^+ - u_{e,KS}^-). \quad (7.31)$$

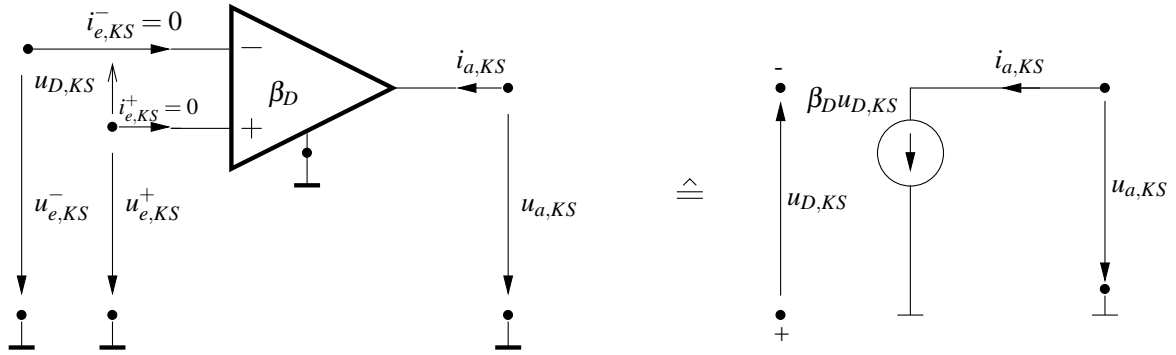
Wählt man den in Abbildung 7.14 gekennzeichneten Arbeitspunkt für die Kleinsignalentwicklung, so gilt das Kleinsignalverhaltensmodell des idealen Operationsverstärkers solange wie

$$|u_{D,KS}| = |u_D| \leq V_{DD}/\beta_D \quad (7.32)$$

erfüllt ist. Ist zum Beispiel $V_{DD} = 10 \text{ V}$ und $\beta_D = 10^4$, so muss

$$|u_{D,KS}| = |u_D| \leq \frac{10 \text{ V}}{10^4} = 1 \text{ mV} \quad (7.33)$$

gelten. Das heißt, dass $|u_{D,KS}|$, damit die Kleinsignalentwicklung einen Sinn macht, immer sehr klein bleiben muss. Liegt der betrachtete Operationsverstärker nun in-



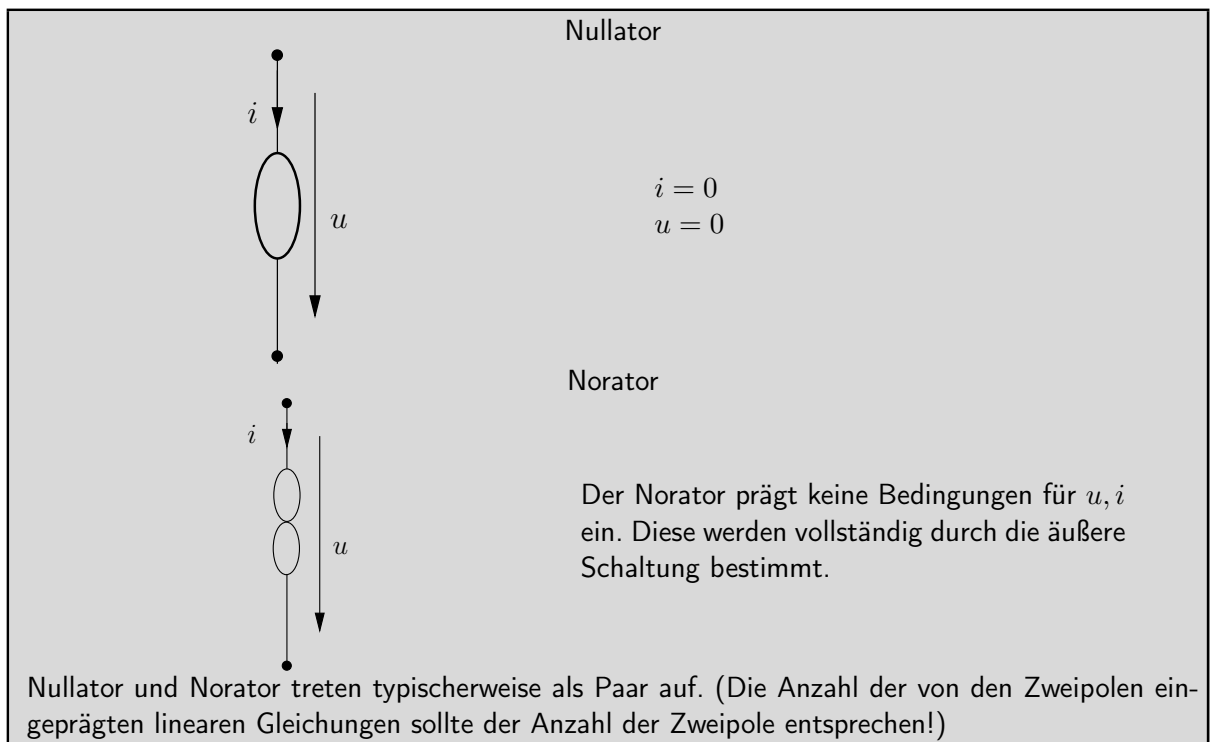
Abbildungung 7.15: Kleinsignalverhaltensmodell des idealen Operationsverstärkers für einen Arbeitspunkt im linearen Arbeitsbereich

nerhalb eines nichtlinearen, zeitinvarianten Netzwerkmodells und wird ein Arbeitspunkt gewählt, für den das Kleinsignalmodell der Gesamtschaltung stabil ist, so kann man annehmen, dass bei hinreichend kleiner harmonischer Kleinsignalanregung durch ideale Quellen $u_{a,KS}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \Re \{ \underline{U}_{a,KS} e^{j\omega t} \}$ mit $|\underline{U}_{a,KS}| \leq V_{DD}$ gilt. Ferner gilt $|\underline{U}_{D,KS}| \leq |\underline{U}_{a,KS}| / \beta_D \xrightarrow[\beta_D \rightarrow \infty]{} 0$. Asymptotisch stabile Schaltungen mit Operationsverstärkern lassen sich daher oft vereinfacht unter der Annahme:

$$u_{D,KS} = 0 \Leftrightarrow \beta_D \rightarrow \infty \quad (7.34)$$

analysieren, was die Rechnungen oft sehr erleichtert. Diese Eigenschaft wird auch oft als „virtueller Kurzschluss“ bezeichnet. Um das Kleinsignalmodell des idealen Operationsverstärkers mit unendlicher Differenzverstärkung zu beschreiben, ist es nützlich, zwei weitere lineare und zeitinvariante elementare Zweipole einzuführen.

Definition 7.2 Zusätzliche elementare, ideale Zweipolmodelle (Nullator, Norator)



Ein Beispiel für die Anwendung dieser neuen Zweipole ist das Kleinsignalverhaltensmodell des idealen Operationsverstärkers mit unendlicher Verstärkung. Bei Verwendung der hier vorgestellten, sehr stark idealisierten Kleinsignalverhaltensmodelle des Operationsverstärkers in Schaltungen, muss man allerdings darauf achten, dass eine realistische Stabilitätsanalyse der Schaltungen mit diesen Modellen typischerweise nicht möglich ist. Die Interpretation der mit den stark idealisierten Verhaltensmodellen berechneten Frequenzgänge als Idealisierung des tatsächlichen Übertragungsverhaltens bei harmonischer Anregung im eingeschwungenen Zustand darf nur unter dem Vorbehalt einer genaueren Stabilitätsanalyse gemacht werden, die insbesondere die reale Frequenzabhängigkeit des Übertragungsverhaltens berücksichtigen muss (siehe Vorlesung „Schaltungstechnik“).

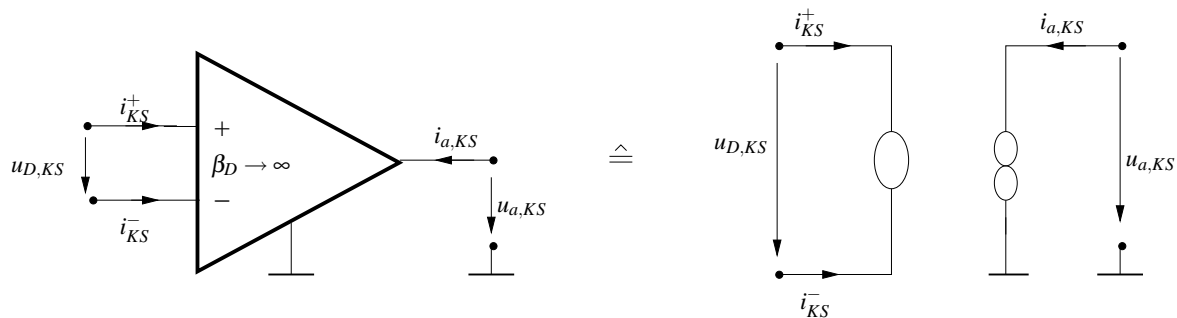


Abbildung 7.16: Vereinfachtes Kleinsignalverhaltensmodell des idealen Operationsverstärkers mit nahezu unendlicher Differenzverstärkung für vereinfachte Berechnungen innerhalb einer asymptotisch stabilen Gesamtschaltung.

Bemerkung 7.5

Bei der Analyse von Operationsverstärkerschaltungen wird im Schaltbild oft der Masseanschluss des idealen Operationsverstärkers unterdrückt. Dadurch erscheint die Bauelementknotenregel verletzt. Es ist daher oft ratsam, die vorgegebenen Schaltbilder wie unten gezeigt zu ergänzen.

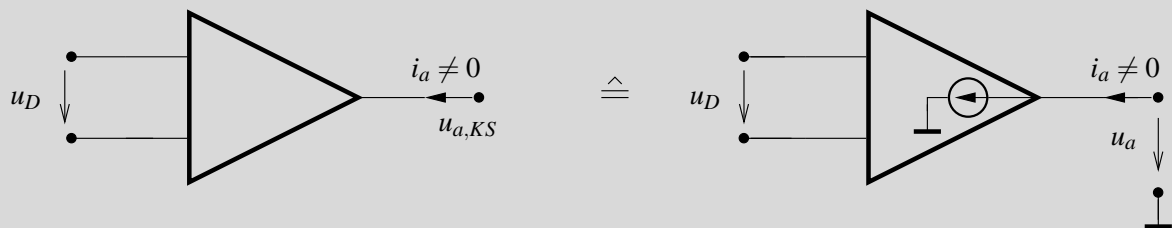


Abbildung 7.17

Kapitel 8

Effektive Berechnung des allgemeinen transienten Verhaltens linearer zeitinvarianter Netzwerkmodelle mit der Laplacetransformation

Ziel dieses Kapitels ist es, das allgemeine transiente Verhalten eines Zweipolnetzwerkmodells, wie es in Satz 5.1 beschrieben ist, mit Hilfe der Laplacetransformation zu berechnen.

Dabei wird speziell der Zeitpunkt der Vorgabe der Anfangswerte \vec{x}_{A,t_0} zu $t_0 = 0$ gewählt.

Bemerkung 8.1

Ist bei einem Netzwerkproblem $t_0 \neq 0$, so kann das Netzwerkproblem für die transformierte Zeit

$$\bar{t} = t - t_0 \quad (8.1)$$

formuliert werden.

Aufgrund der vorausgesetzten Zeitinvarianz ändern sich die Schnittmengengleichungen, Maschengleichungen und elementaren Zweipolgleichungen nicht, wenn man folgende Substitutionen beachtet

$$\begin{aligned} t &\rightarrow \bar{t} \\ t_0 &\rightarrow 0 \\ e(t) &\rightarrow \bar{e}(\bar{t}) \end{aligned} \quad (8.2)$$

$e(t)$ steht dabei stellvertretend für alle Zeitfunktionen des ursprünglichen Netzwerkproblems und es gilt

$$\bar{e}(\bar{t}) := e(\bar{t} + t_0) \quad (= e(t)) \quad (8.3)$$

Alle anderen Parameter der Netzwerkgleichungen ändern sich nicht. Das in der transformierten Zeit formulierte Netzwerkproblem erfüllt die Voraussetzung, dass die Anfangswertvorgabe zum Zeitpunkt $\bar{t}_0 = 0$ ($\bar{e}(0) = e(t_0)$) erfolgt. Hat man eine Lösung $\bar{a}(\bar{t})$ des Netzwerkproblems in der transformierten Zeit mit Hilfe der Laplacetransformation gefunden, so ergibt sich eine Lösung des ursprünglichen Problems sofort über die Rücktransformation

$$a(t) := \bar{a}(t - t_0) \quad (= \bar{a}(\bar{t})). \quad (8.4)$$

8.1 Die Laplacetransformation gewöhnlicher Funktionen

Definition 8.1

Sei $\underline{f}(t)$ für $t > 0$ gegeben und stückweise stetig. Sei \underline{s} eine komplexe Zahl und es gelte

$$\int_0^{\infty} |\underline{f}(t)| e^{-\Re\{\underline{s}\}t} dt < \infty \quad (8.5)$$

Dann heißt

$$\mathcal{L}(\underline{f})(\underline{s}) = \mathcal{L}(\underline{f}(t))(\underline{s}) = \underline{F}(\underline{s}) := \int_0^{\infty} \underline{f}(t) e^{-st} dt \quad (8.6)$$

die Laplacetransformierte von $\underline{f}(t)$ an der Stelle \underline{s} .

Bemerkung 8.2

Sei \underline{s}_0 eine komplexe Zahl, so dass (8.5) gilt. Dann existiert die Laplacetransformierte für alle \underline{s} mit $\Re\{\underline{s}\} \geq \Re\{\underline{s}_0\}$. Denn $\underline{f}(t) e^{-st}$ ist absolut von 0 bis ∞ integrierbar, da für alle $T > 0$ gilt:

$$\int_0^T |\underline{f}(t) e^{-st}| dt = \int_0^T |\underline{f}(t)| e^{-\Re\{\underline{s}\}t} dt \leq \int_0^{\infty} |\underline{f}(t)| e^{-\Re\{\underline{s}_0\}t} dt < \infty \quad (8.7)$$

Ist also (8.5) für ein \underline{s}_0 erfüllt, so existiert $\mathcal{L}(\underline{f}(t))(\underline{s})$ auf der ganzen rechten Halbebene $\Re\{s\} \geq \Re\{s_0\}$. Diese Halbebene wird auch als Konvergenzhalbebene bezeichnet.

Bemerkung 8.3 (ohne Beweis)

Seien zwei Funktionen $\underline{f}_1, \underline{f}_2$ nach Definition 8.1 gegeben, dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\underline{f}_1)(\underline{s}) &= \mathcal{L}(\underline{f}_2)(\underline{s}) \text{ für alle } \underline{s} \text{ mit } \Re\{\underline{s}\} = \alpha \\ \Downarrow \\ \underline{f}_1(t) &= \underline{f}_2(t) \text{ für } t > 0 \text{ bis auf die Unstetigkeitsstellen von } \underline{f}_1 \text{ oder } \underline{f}_2 \end{aligned}$$

Stimmen die Laplacetransformierten zweier Funktionen auf einer ganzen vertikalen Geraden in ihren Konvergenzhalbebenen überein, so stimmen die Funktionen selbst (im Wesentlichen) überein. In diesem Sinne ist die Transformation \mathcal{L} eineindeutig.

Bemerkung 8.4

Sind $\underline{f}_1, \underline{f}_2$ zwei Funktionen nach Definition 8.1, für die die Laplacetransformierte für $\Re\{\underline{s}\} \geq \alpha$ existiert und seien $\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_2$ zwei Zahlen, so gilt

$$\mathcal{L}(\underline{\beta}_1 \underline{f}_1 + \underline{\beta}_2 \underline{f}_2)(\underline{s}) = \underline{\beta}_1 \mathcal{L}(\underline{f}_1)(\underline{s}) + \underline{\beta}_2 \mathcal{L}(\underline{f}_2)(\underline{s}) \quad (8.8)$$

für alle \underline{s} mit $\Re\{\underline{s}\} \geq \alpha$. \mathcal{L} ist also linear.

Der Beweis ergibt sich sofort aus der Definition 8.1.

Bemerkung 8.5 (wichtige Korrespondenzen) Es gilt $\underline{s}_0 := \alpha_0 + j\omega_0$

i) $\underline{f}(t) = e^{\underline{s}_0 t}, \quad \underline{s}_0 = \alpha_0 + j\omega_0, \quad t > 0,$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\underline{f})(s) &= \int_0^\infty e^{\underline{s}_0 t} e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty e^{(\alpha_0 - \Re\{\underline{s}\})t} e^{j(\omega_0 - \Im\{\underline{s}\})t} dt \quad \text{existiert für } \Re\{\underline{s}\} > \alpha_0 \\ &= \frac{1}{\underline{s}_0 - \underline{s}} e^{(\underline{s}_0 - \underline{s})t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\underline{s} - \underline{s}_0} \end{aligned}$$

Daher gilt:

$$e^{\underline{s}_0 t}, \quad t > 0 \quad \xrightarrow[\text{(\circ \longrightarrow \bullet)}]{\mathcal{L}} \quad \frac{1}{\underline{s} - \underline{s}_0} \quad (\Re\{\underline{s}\} > \alpha_0) \quad (8.9)$$

ii)

$$\cos \omega_0 t e^{\alpha_0 t}, \quad t > 0 \quad \xrightarrow[\text{(\circ \longrightarrow \bullet)}]{} \frac{\underline{s} - \alpha_0}{(\underline{s} - \alpha_0)^2 + \omega_0^2} \quad (\Re\{\underline{s}\} > \alpha_0) \quad (8.10)$$

$$\begin{aligned} \cos \omega_0 t e^{\alpha_0 t} &= \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) e^{\alpha_0 t} \\ &= \frac{1}{2} (e^{\underline{s}_0 t} + e^{\underline{s}_0^* t}) \\ &\quad \downarrow \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\underline{s} - \underline{s}_0} + \frac{1}{\underline{s} - \underline{s}_0^*} \right) = \frac{1}{2} \frac{2\underline{s} - 2\alpha_0}{\underline{s}^2 - 2\underline{s}\alpha_0 + \alpha_0^2 + \omega_0^2} \\ &= \frac{\underline{s} - \alpha_0}{(\underline{s} - \alpha_0)^2 + \omega_0^2} \end{aligned}$$

iii)

$$\cos \omega_0 t, \quad t > 0 \quad \xrightarrow[\text{(\alpha_0=0)}]{\text{(\circ \longrightarrow \bullet)}} \frac{\underline{s}}{\underline{s}^2 + \omega_0^2} \quad (\Re\{\underline{s}\} > 0) \quad (8.11)$$

iv)

$$1, \quad t > 0 \quad \xrightarrow[\text{(\alpha_0=\omega_0=0)}]{\text{(\circ \longrightarrow \bullet)}} \frac{1}{\underline{s}} \quad (\Re\{\underline{s}\} > 0) \quad (8.12)$$

v)

$$\sin \omega_0 t e^{\alpha_0 t}, \quad t > 0 \quad \xrightarrow[\text{(\alpha_0=0)}]{\text{(\circ \longrightarrow \bullet)}} \frac{\omega_0}{(\underline{s} - \alpha_0)^2 + \omega_0^2} \quad (\Re\{\underline{s}\} > \alpha_0) \quad (8.13)$$

(Beweis wie in ii))

vi)

$$t^n e^{\underline{s}_0 t}, \quad t > 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad \xrightarrow[\text{(\alpha_0=\omega_0=0)}]{\text{(\circ \longrightarrow \bullet)}} \frac{n!}{(\underline{s} - \underline{s}_0)^{n+1}} \quad (\Re\{\underline{s}\} > \alpha_0) \quad (8.14)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} t^n e^{s_0 t} e^{-st} dt &= t^n \frac{1}{(s_0 - s)} e^{(s_0 - s)t} \Big|_0^{\infty} + (-1)^1 \frac{n}{(s_0 - s)} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{s_0 t} e^{-st} dt \\
&= \frac{n}{(s - s_0)} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{+s_0 t} e^{-st} dt \quad \dots \quad \frac{n!}{(s - s_0)^n} \int_0^{\infty} e^{+s_0 t} e^{-st} dt \\
&= \frac{n!}{(s - s_0)^{n+1}}
\end{aligned}$$

Man beachte:

Mit Definition 5.13 gilt für $\Re\{s_0\} = \alpha_0 < 0$

$$\mathcal{F}(\Theta(t)t^k e^{s_0 t})(\omega) = \mathcal{L}(t^k e^{s_0 t})(s = j\omega) \quad (8.15)$$

In diesem Fall liefert also die Fouriertransformation an der Stelle ω und die Laplacetransformation für $s = j\omega$ identische Ergebnisse.

Bemerkung 8.6 (Verschiebungssatz)

Sei \underline{f} auf der gesamten reellen Achse gegeben, stückweise stetig und $\underline{f}(t) = 0$ für $t < 0$. Sei ferner $\tau \geq 0$ und sei die Laplacetransformierte von \underline{f} existent für $\Re\{s\} \geq \alpha_0$. Dann gilt

$$\mathcal{L}(\underline{f}(t - \tau))(s) = e^{-s\tau} \mathcal{L}(\underline{f}(t))(s) \quad \text{für alle } \Re\{s\} \geq \alpha_0 \quad (8.16)$$

zum Beweis:

$$\begin{aligned}
e^{-s\tau} \mathcal{L}(\underline{f}(t))(s) &= e^{-s\tau} \int_0^{\infty} \underline{f}(t') e^{-st'} dt' \quad \text{für alle } \Re\{s\} \geq \alpha_0 \\
&\stackrel{t-\tau=t'}{\downarrow} e^{-s\tau} \int_{\tau}^{\infty} \underline{f}(t - \tau) e^{-s(t-\tau)} dt \\
&= \int_0^{\infty} \underline{f}(t - \tau) e^{-st} dt \\
&= \mathcal{L}(\underline{f}(t - \tau))(s)
\end{aligned}$$

Definition 8.2

Sei $\underline{f}(t)$ eine im Intervall $0 < t < T$ ($T = \infty$ ist zugelassen) definierte gewöhnliche Funktion. Dann gilt

$${}^0\underline{f}(t) := \begin{cases} \underline{f}(t) & , \quad 0 < t < T \\ 0 & , \quad t \leq 0 \end{cases} \quad (8.17)$$

${}^0\underline{f}(t)$ ist also für $-\infty < t < T$ definiert und setzt die Funktion $\underline{f}(t)$ für negative Zeiten mit 0 fort. Ist $\underline{f}(t)$ für alle Zeiten gegeben, wie zum Beispiel $e^{s_0 t}$, so gilt

$${}^0\underline{f}(t) = \Theta(t)\underline{f}(t) \quad (8.18)$$

Bemerkung 8.7 (Faltungssatz)

Seien $\underline{f}_1, \underline{f}_2$ zwei Funktionen nach Definition 8.1, für die $\mathcal{L}(\underline{f}_{1,2})(\underline{s})$ für $\Re\{\underline{s}\} \geq \alpha_0$ existiert. Dann gilt

$$\left({}^0\underline{f}_1 * {}^0\underline{f}_2\right)(t) = \int_0^t \underline{f}_1(t-t') \underline{f}_2(t') dt' \text{ für } t > 0 \quad (8.19)$$

und für alle \underline{s} mit $\Re\{\underline{s}\} \geq \alpha_0$ folgt $\mathcal{L}\left({}^0\underline{f}_1 * {}^0\underline{f}_2\right)(\underline{s})$ existiert und

$$\mathcal{L}\left({}^0\underline{f}_1 * {}^0\underline{f}_2\right)(\underline{s}) = \mathcal{L}(\underline{f}_1)(\underline{s}) \cdot \mathcal{L}(\underline{f}_2)(\underline{s}). \quad (8.20)$$

zum Beweis:

Für $\Re\{\underline{s}\} \geq \alpha_0$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\underline{f}_1)(\underline{s}) \cdot \mathcal{L}(\underline{f}_2)(\underline{s}) &= \int_0^\infty \underline{f}_2(t') e^{-\underline{s}t'} \left(\int_0^\infty \underline{f}_1(t^*) e^{-\underline{s}t^*} dt^* \right) dt' \\ &\stackrel{t^*=t-t'}{=} \int_0^\infty \underline{f}_2(t') e^{-\underline{s}t'} \left(\int_{t'}^\infty \underline{f}_1(t-t') e^{-\underline{s}(t-t')} dt \right) dt' \\ &= \int_0^\infty \underline{f}_2(t') e^{-\underline{s}t'} \left(\int_0^\infty {}^0\underline{f}_1(t-t') e^{-\underline{s}(t-t')} dt \right) dt' \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty {}^0\underline{f}_1(t-t') \underline{f}_2(t') e^{-\underline{s}(t-t')} e^{-\underline{s}t'} dt' \right) dt \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^t \underline{f}_1(t-t') \underline{f}_2(t') dt' \right) e^{-\underline{s}t} dt \\ &= \mathcal{L}\left({}^0\underline{f}_1 * {}^0\underline{f}_2\right)(\underline{s}) \end{aligned}$$

Das Faltungsprodukt geht bei der Laplacetransformation in das gewöhnliche Produkt über!

Bemerkung 8.8 (Ableitungssatz)

Sei $\underline{f}(t)$ für $t > 0$ gegeben und einmal differenzierbar. Ferner sollen sowohl $\mathcal{L}(\underline{f}(t))(\underline{s})$ als auch $\mathcal{L}(\underline{f}^{(1)}(t))(\underline{s})$ für $\Re\{\underline{s}\} > \alpha_0$ existieren.

Beachte: $\underline{f}^{(1)}$ existiert $\Rightarrow \underline{f}$ ist stetig für $t > 0$ und stetig ergänzbar mit $\underline{f}(0^+)$ für $t = 0$.

Dann gilt:

$$\mathcal{L}(\underline{f}^{(1)}(t))(\underline{s}) = \underline{s} \mathcal{L}(\underline{f}(t))(\underline{s}) - \underline{f}(0^+) \quad (8.21)$$

zum Beweis:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\underline{f}^{(1)}(t))(\underline{s}) &= \int_0^\infty \underline{f}^{(1)}(t') e^{-\underline{s}t'} dt' \\ &= \underline{f}(t) e^{-\underline{s}t} \Big|_{0^+}^\infty - \int_0^\infty \underline{f}(t') (-\underline{s}) e^{-\underline{s}t'} dt' \end{aligned} \quad (8.22)$$

(Beachte:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{f}(t) e^{-st} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^t \underline{f}^{(1)}(t') e^{-st'} dt' + \int_0^t \underline{f}(t') (-s) e^{-st'} dt' + \underline{f}(0^+) \right) \quad (8.23)$$

existiert, da $\mathcal{L}(\underline{f}^{(1)}(t))(\underline{s})$ und $\mathcal{L}(\underline{f}(t))(\underline{s})$ existieren. Der Grenzwert muss 0 sein, da $\mathcal{L}(\underline{f}(t))(s)$ existiert.)

Daher gilt:

$$\mathcal{L}(\underline{f}^{(1)}(t))(\underline{s}) = \underline{s} \mathcal{L}(\underline{f}(t))(\underline{s}) - \underline{f}(0^+)$$

Merke: Mittels der Laplacetransformation geht die Ableitung in eine rein algebraische Operation über!

Bemerkung 8.9 (Erster Grenzwertsatz)

Es seien die Voraussetzungen von Bemerkung 8.8 gegeben. Ferner wird vorausgesetzt, dass

$$\lim_{\substack{\underline{s} \rightarrow \infty \\ \Re\{\underline{s}\} > \alpha_0}} \mathcal{L}(\underline{f}^{(1)}(t))(\underline{s}) := \lim_{\substack{|\underline{s}| \rightarrow \infty \\ \Re\{\underline{s}\} > \alpha_0}} \mathcal{L}(\underline{f}^{(1)}(t))(\underline{s}) \quad (8.24)$$

existiert mit

$$\lim_{\substack{\underline{s} \rightarrow \infty \\ \Re\{\underline{s}\} > \alpha_0}} \mathcal{L}(\underline{f}^{(1)}(t))(\underline{s}) = 0. \quad (8.25)$$

Dann gilt:

$$\lim_{\substack{\underline{s} \rightarrow \infty \\ \Re\{\underline{s}\} > \alpha_0}} \underline{s} \mathcal{L}(\underline{f}(t))(\underline{s}) = \underline{f}(0^+) \quad (8.26)$$

Der Beweis ist eine direkte Folgerung aus Bemerkung 8.8.

Bemerkung 8.10 (Zweiter Grenzwertsatz)

Es seien wiederum die Voraussetzungen von Bemerkung 8.8 gegeben. Ferner wird vorausgesetzt $\alpha_0 \leq 0$ und die Existenz und Stetigkeit von $\mathcal{L}(\underline{f}^{(1)}(t))(\underline{s})$ für $\Re\{\underline{s}\} \geq \alpha_0$. Dann gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{f}(t) = \lim_{\substack{\underline{s} \rightarrow 0 \\ \Re\{\underline{s}\} > \alpha_0}} \underline{s} \underline{F}(\underline{s}) := \lim_{\substack{|\underline{s}| \rightarrow 0 \\ \Re\{\underline{s}\} > \alpha_0}} \underline{s} \underline{F}(\underline{s}) \quad (8.27)$$

Zum Beweis:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\underline{s} \rightarrow 0 \\ \Re\{\underline{s}\} > \alpha_0}} \mathcal{L}(\underline{f}^{(1)}(t))(\underline{s}) &= \lim_{\substack{\underline{s} \rightarrow 0 \\ \Re\{\underline{s}\} > \alpha_0}} \underline{s} \underline{F}(\underline{s}) - \underline{f}(0^+) = \mathcal{L}(\underline{f}^{(1)}(t))(0) \\ &= \int_0^\infty \underline{f}^{(1)}(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \underline{f}^{(1)}(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \underline{f}(T) - \underline{f}(0^+) \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Die Anwendung der Grenzwertsätze wird wesentlich einfacher, wenn die Laplacetransformierten gebrochen rationale Funktionen in \underline{s} mit $\text{grad}(\underline{P}(\underline{s})) < \text{grad}(\underline{Q}(\underline{s}))$ sind. (siehe Definition 5.15)

Bemerkung 8.11

Sei mit $l \geq 1$, $k_i \geq 1$, $1 \leq i \leq l$

$$\underline{h}(t) = \sum_{i=1}^l \sum_{m=1}^{k_i} \underline{\eta}_{i,m} t^{m-1} e^{\underline{A}_i t}, \quad (8.28)$$

wobei unterschiedliche \underline{A}_i , $i = 1, \dots, l$ und $\underline{\eta}_{i,k_i} \neq 0$, $i = 1, \dots, l$ vorausgesetzt werden. Es gilt:

A)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\underline{h}(t))(\underline{s}) &= \sum_{i=1}^l \sum_{m=1}^{k_i} \underline{\eta}_{i,m} (m-1)! \frac{1}{(\underline{s} - \underline{A}_i)^m} \\ &= \underline{c} \frac{\underline{P}(\underline{s})}{\underline{Q}(\underline{s})} \text{ für } \underline{s} > \max_{1 \leq i \leq l} \Re\{\underline{A}_i\} \end{aligned} \quad (8.29)$$

Hierbei kann für $\underline{P}(\underline{s})$ und $\underline{Q}(\underline{s})$ angenommen werden :

$$\text{i) } \underline{P}(\underline{s}), \underline{Q}(\underline{s}) \text{ sind normiert} \quad (8.30)$$

$$\text{ii) } \text{grad}(\underline{P}(\underline{s})) < \text{grad}(\underline{Q}(\underline{s})) \quad (8.31)$$

$$\text{iii) } \underline{Q}(\underline{s}) = \prod_{i=1}^l (\underline{s} - \underline{A}_i)^{k_i} \Rightarrow \text{grad}(\underline{Q}(\underline{s})) = \sum_{i=1}^l k_i \quad (8.32)$$

$$\text{iv) } \underline{P}(\underline{s}) \text{ und } \underline{Q}(\underline{s}) \text{ haben keine gemeinsamen Nullstellen.} \quad (8.33)$$

B) Jeder gebrochen rationalen Funktion $\underline{H}(\underline{s}) = \underline{c} \frac{\underline{P}(\underline{s})}{\underline{Q}(\underline{s})}$ mit den Eigenschaften (8.30)–(8.33) ist genau eine Funktion $\underline{h}(t)$ der Form (8.28) zugeordnet, so dass gilt:

$$\mathcal{L}(\underline{h}(t))(\underline{s}) = \underline{H}(\underline{s}) \text{ für } \Re\{\underline{s}\} > \max_{1 \leq i \leq l} \Re\{\underline{A}_i\} \quad (8.34)$$

C)

$$\underline{h}^{(1)}(t) = \sum_{i=1}^l \left(\sum_{m=1}^{k_i} \underline{\eta}_{i,m} t^{m-1} \underline{A}_i + \sum_{m=2}^{k_i} \underline{\eta}_{i,m} (m-1) t^{m-2} \right) e^{\underline{A}_i t} \quad (8.35)$$

(Beachte: Die zweite Summe verschwindet für $k_i < 2$)

$\underline{h}^{(1)}(t)$ hat also wiederum die generelle Gestalt aus (8.28) mit den gleichen natürlichen Frequenzen \underline{A}_i und den gleichen Potenzen von t wie $\underline{h}(t)$. Nur die Koeffizienten $\underline{\eta}_{i,m}$ sind für $\underline{h}(t)$ und $\underline{h}^{(1)}(t)$ unterschiedlich.

D)

$$\mathcal{L}(\underline{h}^{(1)}(t))(\underline{s}) = \underline{s} \mathcal{L}(\underline{h}(t))(\underline{s}) - \underline{h}(0) \text{ existiert für } \Re\{\underline{s}\} > \max_{1 \leq i \leq l} \Re\{\underline{A}_i\} \quad (8.36)$$

$$\lim_{\substack{\underline{s} \rightarrow \infty \\ \Re\{\underline{s}\} > \max_{1 \leq i \leq l} \Re\{\underline{A}_i\}}} \underline{s} \underline{H}(\underline{s}) = \lim_{\underline{s} \rightarrow \infty} \underline{s} \underline{H}(\underline{s}) = \underline{h}(0) \quad (8.37)$$

E) Sei entweder für höchstens ein i_0 , $1 \leq i_0 \leq l$, $\underline{A}_{i_0} = 0$ mit $k_{i_0} = 1$ und $\max_{\substack{1 \leq i \leq l \\ i \neq i_0}} \Re\{\underline{A}_i\} < 0$ oder es gelte $\max_{1 \leq i \leq l} \Re\{\underline{A}_i\} < 0$, dann gilt:

$$\lim_{\substack{\underline{s} \rightarrow 0 \\ \Re\{\underline{s}\} > \max_{1 \leq i \leq l} \Re\{\underline{A}_i\}}} \underline{s} \mathcal{L}(\underline{h}(t))(\underline{s}) = \lim_{\underline{s} \rightarrow 0} \underline{s} \underline{H}(\underline{s}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{h}(t) \quad (8.38)$$

Zum Beweis:

- A) i)–iii) folgen sofort aus Bemerkung 8.5 und (8.14). Gilt iii) und ist z.B. \underline{A}_{i_0} , $1 \leq i_0 \leq l$ ebenfalls Nullstelle von $\underline{P}(\underline{s})$, so ist \underline{A}_{i_0} nicht μ_{i_0} -fache Polstelle von $\mathcal{L}(\underline{h}(t))(\underline{s})$ im Widerspruch zur Darstellung (8.29). Somit impliziert die Gültigkeit von iii) diejenige von iv).
- B) folgt sofort aus Bemerkung 5.15 und Bemerkung 8.5
- D) folgt mit C) aus A) und Bemerkung 8.9, wenn man

$$\lim_{\underline{s} \rightarrow \infty} \underline{c} \frac{\underline{P}(\underline{s})}{\underline{Q}(\underline{s})} = 0 \quad (8.39)$$

für alle Polynome mit $\text{grad}(\underline{P}(\underline{s})) < \text{grad}(\underline{Q}(\underline{s}))$ beachtet.

- E) Mit Bemerkung 5.15 folgt aus den Voraussetzungen, dass mit einem Polynom $\underline{c}(\underline{s})$ und einer Konstanten $\underline{\beta}$ gilt:

$$\underline{H}(\underline{s}) = \frac{\underline{\beta}}{\underline{s}} + \frac{\underline{c}(\underline{s})}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^l (\underline{s} - \underline{A}_i)^{k_i}} \quad (8.40)$$

Somit sind die Pole von $\underline{s}\underline{H}(\underline{s}) - \underline{h}(0)$ unter den \underline{A}_i mit $i \neq i_0$ zu finden. Aus Bemerkung 8.8 und A), B) folgt somit, dass auch die natürlichen Frequenzen von $\underline{h}^{(1)}(t)$ unter den \underline{A}_i mit $i \neq i_0$ zu finden sind.

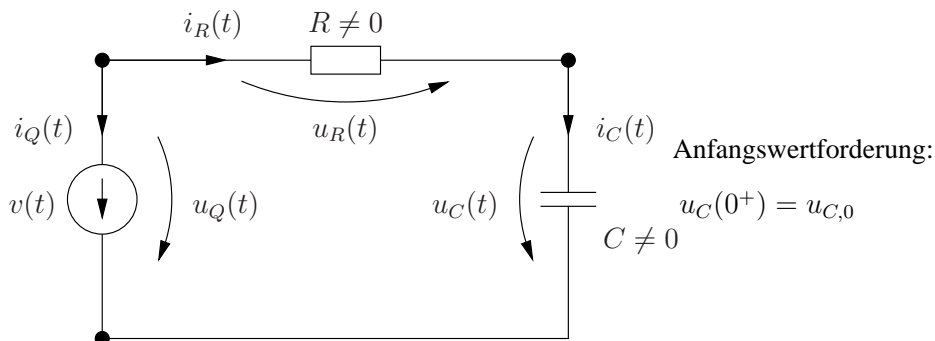
Damit ist $\mathcal{L}\left\{\underline{h}^{(1)}(t)\right\}(\underline{s})$ für $\Re\{\underline{s}\} \geq 0$ existent und stetig. Somit folgt E) aus Bemerkung 8.10.

Beispiel 8.1

$$\underline{f}(t) = 1 \text{ für } t > 0 \Rightarrow \underline{f}^{(1)}(t) = 0 \text{ für } t > 0$$

$$\begin{array}{ccc} \underline{s} \mathcal{L}(\underline{f}(\bullet))(\underline{s}) - \underline{f}(0^+) & \stackrel{\text{Bemerkung 8.5}}{\stackrel{=}{\downarrow}} & \underline{s} \frac{1}{\underline{s}} - 1 = 0 \\ \mathcal{L}(\underline{f}^{(1)}(t))(\underline{s}) & = & 0 \end{array}$$

Beispiel 5.1



Aufgrund der Ergebnisse zu Beispiel 5.1 in Kapitel 5 ist bekannt, dass eine Lösung des Anfangswertproblems 2. Art immer existiert. Zusätzlich wird noch angenommen, dass diese Lösung für $\Re\{\underline{s}\} > \alpha$ mit beliebigem, festen α laplacetransformierbar ist. Dies ist der Fall, falls $v(t)$ laplacetransformierbar ist:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(u_{Q,R,C}(t))(\underline{s}) &=: \underline{U}_{Q,R,C}(\underline{s}) \\ \mathcal{L}(i_{Q,R,C}(t))(\underline{s}) &=: \underline{I}_{Q,R,C}(\underline{s}) \end{aligned} \right\} \quad (8.41)$$

$$\left. \begin{array}{ll} \text{KGL :} & \\ i_Q(t) + i_R(t) = 0 \quad \text{für } t > 0 & \circ \longrightarrow \bullet \quad \underline{I}_Q(\underline{s}) + \underline{I}_R(\underline{s}) = 0 \quad \text{für } \Re\{\underline{s}\} > \alpha \\ -i_R(t) + i_C(t) = 0 \quad \text{für } t > 0 & \circ \longrightarrow \bullet \quad -\underline{I}_R(\underline{s}) + \underline{I}_C(\underline{s}) = 0 \quad \text{für } \Re\{\underline{s}\} > \alpha \\ \text{MGL :} & \\ u_R(t) + u_C(t) - u_Q(t) = 0, \quad t > 0 & \circ \longrightarrow \bullet \quad \underline{U}_R(\underline{s}) + \underline{U}_C(\underline{s}) - \underline{U}_Q(\underline{s}) = 0, \quad \Re\{\underline{s}\} > \alpha \\ \text{ZGL :} & \\ u_Q(t) = v(t) = e(t), \quad t > 0 & \circ \longrightarrow \bullet \quad \underline{U}_Q(\underline{s}) = \underline{V}(\underline{s}), \quad \Re\{\underline{s}\} > \alpha \\ u_R(t) = Ri_R(t), \quad t > 0 & \circ \longrightarrow \bullet \quad \underline{U}_R(\underline{s}) = R\underline{I}_R(\underline{s}), \quad \Re\{\underline{s}\} > \alpha \\ i_C(t) = C \frac{d u_C}{dt}, \quad u_C(0^+) = u_{C,0}, \quad t > 0 & \circ \longrightarrow \bullet \quad \underline{I}_C(\underline{s}) = \underline{s} C \underline{U}_C(\underline{s}) - C u_{C,0}, \quad \Re\{\underline{s}\} > \alpha \end{array} \right\} \quad (8.42)$$

algebraische Gleichungen und Differentialgleichungen
rein algebraisches Gleichungssystem

Nach dem Aufstellen der Netzwerkgleichungen im Laplacebereich wird von der Annahme, dass eine Lösung des Anfangswertproblems 2. Art existiert, kein Gebrauch mehr gemacht. Stattdessen wird auf der Basis der Netzwerkgleichungen im Laplacebereich untersucht, inwieweit sich daraus eine Lösung des Anfangswertproblems 2. Art ergibt.

Zunächst stellt man fest, dass das Gleichungssystem im Laplacebereich leichter zu lösen ist.

$$KGLen \Rightarrow \underline{I}_C(\underline{s}) = \underline{I}_R(\underline{s}) = -\underline{I}_Q(\underline{s}) = \underline{I}(\underline{s})$$

Die MGL mit eingesetzten ZGLen und KGLen lautet:

$$\begin{aligned} R \underline{I}(\underline{s}) + \frac{\underline{I}(\underline{s}) + C u_{C,0}}{\underline{s} C} &= \underline{V}(\underline{s}) \\ \Rightarrow \underline{I}(\underline{s}) \left(R + \frac{1}{\underline{s} C} \right) &= \underline{V}(\underline{s}) - u_{C,0} \frac{1}{\underline{s}} \\ \Rightarrow \underline{I}(\underline{s}) &= \left(R + \frac{1}{\underline{s} C} \right)^{-1} \left(\underline{V}(\underline{s}) - u_{C,0} \frac{1}{\underline{s}} \right) \\ \underline{U}_C(\underline{s}) &= \frac{\underline{I}(\underline{s}) + C u_{C,0}}{\underline{s} C} \\ &= \frac{1}{\left(R + \frac{1}{\underline{s} C} \right) \underline{s} C} \left(\underline{V}(\underline{s}) - u_{C,0} \frac{1}{\underline{s}} \right) + \frac{u_{C,0}}{\underline{s}} \\ &= \underbrace{\frac{\frac{1}{R C}}{\underline{s} + \frac{1}{R C}} \underline{V}(\underline{s})}_{\substack{\bullet \\ \circ \quad \text{Bem. 8.5 i) \\ + \\ \circ \quad \text{Bem. 8.7}}} + \underbrace{\frac{u_{C,0}}{\underline{s} + \frac{1}{R C}}}_{\substack{\bullet \\ \circ}} \end{aligned} \quad (8.43)$$

$$a(t) = u_C(t) = \int_0^t \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}(t-t')} v(t') dt' + u_{C,0} e^{-\frac{t}{RC}} \quad t > 0 \quad (8.44)$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} u_C(t) = u_C(0^+) = u_{C,0} \quad (8.45)$$

Dieses Ergebnis entspricht (5.15) für $t_0 = 0$, $u_{C,t_0} = u_{C,0}$, $t > 0$.

Das Ergebnis (5.15), das ursprünglich durch die direkte Lösung des Anfangswertproblems (5.3) erzielt wurde, lässt sich also mit Hilfe der Laplacetransformation über die Lösung eines rein algebraischen Gleichungssystems und die inverse Laplacetransformation ebenfalls erzielen.

Der Strom $\underline{I}_C(\underline{s})$ im Laplacebereich ergibt sich aus $\underline{U}_C(\underline{s})$ zum Beispiel über

$$\begin{aligned} \underline{I}_C(\underline{s}) &= \frac{\underline{V}(\underline{s}) - \underline{U}_C(\underline{s})}{R} = \frac{1}{R} \frac{\underline{s}}{\underline{s} + 1/RC} \underline{V}(\underline{s}) - \frac{u_{C,0}}{R} \frac{1}{\underline{s} + 1/RC} \\ &= \frac{1}{R} \left(1 - \frac{1}{RC} \frac{1}{\underline{s} + 1/RC} \right) \underline{V}(\underline{s}) - \frac{u_{C,0}}{R} \frac{1}{\underline{s} + 1/RC} \end{aligned} \quad (8.46)$$

$$i_C(t) = \frac{1}{R} v(t) - \frac{1}{R^2 C} \int_0^t e^{-(t-t')/RC} v(t') dt' - \frac{u_{C,0}}{R} e^{-t/RC} \quad t > 0 \quad (8.47)$$

Dies entspricht wiederum (5.19) (bzw. (5.18) für $t_0 = t_S$) für $t_0 = 0$, $u_{C,t_0} = u_{C,0}$, $t > 0$ (bzw. $t_S = 0$, $u_C(t_S^-) = u_{C,0}$, $t > 0$). Auch hier ergibt sich also wiederum die vollständige Lösung des Anfangswertproblems für $i_C(t)$ für $t > 0$ über die rein algebraische Rechnung im Laplacebereich plus Rücktransformation. Nur die in (5.19) ebenfalls bestimmte Lösung für den Zeitbereich $t_S \leq t \leq t_0 = 0$ ergibt sich nicht direkt aus der Laplacetransformation. Aufgrund der Struktur der Lösungsdarstellungen sind diese aber auch sofort im Bereich $t_S \leq t \leq t_0 = 0$ gültig, wie folgende Bemerkung zeigt.

Bemerkung 8.12

Die Lösungsdarstellungen von $u_C(t)$ und $i_C(t)$ ((8.44) und (8.47)) ergeben für t in den Bereich $t_S \leq t \leq t_0 = 0$ fortgesetzt sofort auch Lösungen der Netzwerkgleichungen im Bereich $t_S \leq t \leq t_0$! Dies liegt an der Struktur der Lösungsdarstellung! Um dies zu zeigen, seien folgende Ansätze gewählt:

$$u_C(t) = \bar{A}v(t) + \int_0^t \bar{B} e^{\bar{A}(t-t')} v(t') dt' + \bar{C} u_{C,0} e^{\bar{A}t} \quad (8.48)$$

$$i_C(t) = \bar{D}v(t) + \int_0^t \bar{E} e^{\bar{A}(t-t')} v(t') dt' + \bar{F} u_{C,0} e^{\bar{A}t} \quad (8.49)$$

Die Darstellungen machen im Bereich $t_S \leq t \leq t_0 = 0$ einen Sinn. Ferner werde vorausgesetzt, dass $u_C(t)$, $i_C(t)$ für $t > 0$ die Gleichung

$$Cu_C^{(1)}(t) - i_C(t) = 0 \quad (8.50)$$

für beliebige $u_{C,0}$ und beliebig oft differenzierbare und inklusive der Ableitungen laplacetransformierbare $v(t)$ erfüllen.

Daraus folgt für $t > 0$:

$$\begin{aligned}
 0 &= C\bar{A}v^{(1)}(t) + C\bar{B}v(t) + \int_0^t C\bar{B}\bar{A} e^{\bar{A}(t-t')} v(t') dt' + C\bar{C} u_{C,0} \bar{A} e^{\bar{A}t} \\
 &\quad - \bar{D}v(t) - \int_0^t \bar{E} e^{\bar{A}(t-t')} v(t') dt' - \bar{F} e^{\bar{A}t} u_{C,0} = 0 \\
 \left. \begin{aligned}
 v(t) &\equiv 0, u_{C,0} \neq 0 \Rightarrow C\bar{C}\bar{A} - \bar{F} = 0 \\
 v(t) &= V_0 = \text{konst} \neq 0 \text{ und } t \rightarrow 0 \Rightarrow C\bar{B} - \bar{D} = 0 \\
 v(t) &= Gt, G \neq 0 \text{ und } t \rightarrow 0 \Rightarrow C\bar{A} = 0 \\
 v(t) &\text{ beliebig} \Rightarrow C\bar{B}\bar{A} - \bar{E} = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (8.51)
 \end{aligned}$$

Damit folgt sofort, dass auch die in den Bereich $t_S \leq t \leq 0$ fortgesetzten Lösungsdarstellungen die Gleichung

$$Cu_C^{(1)}(t) = i_C(t)$$

für $t_S \leq t \leq 0$ erfüllen. Ferner kann sogar auf die Voraussetzung der Laplacetransformierbarkeit von $v(t)$ verzichtet werden. Die Lösungsdarstellungen erfüllen die Zweiggleichung der Kapazität bereits für nur stückweise stetiges $v(t)$ und alle t mit $t_S \leq t < \infty$. Diese Argumentation lässt sich leicht verallgemeinern!

Bei der Rücktransformation von (8.43) und (8.46) in den Zeitbereich ist wieder die Partialbruchzerlegung (Bemerkung 5.17) angewendet worden, die bereits in Verbindung mit Bemerkung 5.14 zur Berechnung der Darstellung der Netzwerkantwort im eingeschwungenen Zustand mit Hilfe des Frequenzganges verwendet wurde. Zur Berechnung der Darstellung des eingeschwungenen Zustandes von $i_C(t)$ wurde dabei in (5.104) der Frequenzgang aus (5.97)

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{R} \frac{j\omega}{j\omega + 1/RC} = \frac{\underline{I}_C}{\underline{V}} \quad (8.52)$$

verwendet. Es fällt auf, dass

$$\frac{\underline{I}_C}{\underline{V}} = \underline{H}(j\omega) = \left. \frac{1}{R} \frac{\underline{s}}{\underline{s} + 1/RC} \right|_{\underline{s}=j\omega} = \left. \frac{\underline{I}_C(\underline{s})}{\underline{V}(\underline{s})} \right|_{\substack{u_{C,0}=0 \\ \underline{s}=j\omega}} = \left. \frac{\mathcal{L}(i_C(t))(\underline{s})}{\mathcal{L}(v(t))(\underline{s})} \right|_{\substack{u_{C,0}=0 \\ \underline{s}=j\omega}} \quad (8.53)$$

gilt.

Definition 8.3

Analog zur Definition des Frequenzganges in Definition 5.15 sei ein Netzwerkmodell wie in Satz 5.1 gegeben und durch nur eine hinreichend oft differenzierbare, laplacetransformierbare, ungesteuerte, ideale Quelle $e(t)$ ($\mathcal{L}(e(t))(\underline{s}) = \underline{E}(\underline{s})$) mit $e(t) = 0$ für $t < 0$ wie bei der Anregung aus dem Ruhezustand heraus (Satz 5.5) angeregt. Sei $o(t)$ eine Linearkombination von Zweigströmen oder Zweigspannungen und $\underline{O}(\underline{s}) = \mathcal{L}(o(t))(\underline{s})$. Das Verhältnis

$$\left. \frac{\underline{O}(\underline{s})}{\underline{E}(\underline{s})} \right|_{(\text{Alle Anfangswerte verschwinden})} = \underline{H}(\underline{s}) \quad (8.54)$$

wird Übertragungsfunktion (Systemfunktion) genannt.

In unserem Beispiel ist somit der Frequenzgang gleich der Übertragungsfunktion für $\underline{s} = j\omega$

$$\begin{array}{ccc} \underline{H}(j\omega) & = & \underline{H}(\underline{s})|_{\underline{s}=j\omega} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Frequenzgang} & & \text{Übertragungsfunktion} \end{array} \quad (8.55)$$

Dieser Zusammenhang ist allgemein gültig, wie später noch bewiesen werden wird. Aus diesem Grunde werden der Frequenzgang und die Übertragungsfunktion auch mit dem gleichen Buchstaben bezeichnet.

Warum (8.55) zumindest bei dem vorliegenden Beispiel gelten muss, lässt sich leicht erklären.

Die Gleichungen (5.94)–(5.96), die zur Berechnung von $\underline{I}_x, \underline{U}_x$, $x \in \{Q, R, C\}$ und damit zur Berechnung von $\underline{H}(j\omega)$ benutzt wurden, stimmen mit den Gleichungen (8.41)–(8.42) zur Berechnung von $\underline{I}_x(\underline{s}), \underline{U}_x(\underline{s})$, $x \in \{Q, R, C\}$ genau überein, wenn man

$$u_{C,0} = 0 \quad (8.56)$$

wählt und die Substitutionen

$$\left. \begin{array}{l} \underline{I}_x \leftrightarrow \underline{I}_x(\underline{s}) \\ \underline{U}_x \leftrightarrow \underline{U}_x(\underline{s}) \\ j\omega \leftrightarrow \underline{s} \end{array} \right\} \quad (8.57)$$

beachtet. Insofern ist klar, dass auch die Lösungen der Gleichungssysteme übereinstimmen, wenn man (8.56) und (8.57) berücksichtigt. (8.53) ist ein Beispiel dafür. Man beachte, dass die formale Äquivalenz der Gleichungssysteme (5.94)–(5.96) und (8.41)–(8.42) mit der Voraussetzung (8.56) auch für $R < 0$ erhalten bleibt.

Für $R < 0$ und $C > 0$ ist das Netzwerk nicht asymptotisch stabil. Ein realistisches Schaltungsbeispiel bei dem für $t > t_S$ das Kleinersatzschaltbild der Beispielschaltung 5.1 mit $R < 0$ und $C > 0$ entspricht, wird in den Abbildungen 8.1–8.3 vorgestellt. Für $R < 0$ und $C > 0$, kann man nicht annehmen, dass das Netzwerk auf eine Anregung durch eine harmonische Kleinsignalfunktion $v(t) = \Re\{\underline{V}e^{j\omega t}\}$ asymptotisch mit einer harmonischen Zeitfunktion der gleichen Frequenz ω reagiert. In der Realität lässt sich der Frequenzgang für $R < 0$ also nicht mehr messen. Andererseits bleiben die Gleichungen (5.94)–(5.96) richtig, wenn man jede Netzwerkvariable wie in (5.93) als harmonische Funktion mit der Frequenz ω annimmt. Die komplexe Wechselstromrechnung ist für $R < 0$ also mehr formaler Natur. Aus ihr ergibt sich zwar eine gültige partikuläre Lösung, ohne dass der angenommene harmonisch eingeschwungene Zustand sich jedoch tatsächlich einstellt. Die Rechnung im Laplacebereich führt andererseits auch für $R < 0$ auf die sich tatsächlich einstellende Lösung. Einzige notwendige Voraussetzung bleibt allerdings die Laplacetransformierbarkeit aller Netzwerkvariablen, was beim vorliegenden Beispiel in der Halbebene $\Re\{\underline{s}\} > \alpha$ erfüllt ist, wenn $v(t)$ in dieser Halbebene laplacetransformierbar ist und $\alpha > -1/RC$ gilt. Ist $R < 0$, so gilt somit $\alpha > 0$. Die Laplacetransformierten von $i_C(t)$ und $v(t)$, $\underline{I}_C(\underline{s})$ und $\underline{V}(\underline{s})$ existieren im Fall $R < 0$ also nicht für $\underline{s} = j\omega$. Andererseits ist das Verhältnis von $\underline{I}_C(\underline{s})$ und $\underline{V}(\underline{s})$ gleich der gebrochen rationalen Funktion $\underline{H}(\underline{s}) = \frac{1}{R} \frac{\underline{s}}{\underline{s} + 1/RC}$ für $\Re\{\underline{s}\} > \alpha$ und $\underline{H}(\underline{s})$ ist als gebrochen rationale Funktion andererseits für alle \underline{s} sinnvoll definiert. Interpretiert man die rechte Seite von (8.55) also in dem Sinn, dass die durch $\frac{\underline{I}_C(\underline{s})}{\underline{V}(\underline{s})}$ für $\Re\{\underline{s}\} > \alpha$ ausgewählte gebrochen rationale Funktion $\underline{H}(\underline{s})$ an der Stelle $\underline{s} = j\omega$ ausgewertet wird und betrachtet die linke Seite als formales Ergebnis einer komplexen Wechselstromrechnung für festes ω , bei der die Netzwerkvariablen explizit als harmonische Funktionen der Frequenz ω angenommen werden, so bleibt (8.55) auch für $R < 0$ richtig. Wir werden darauf später nochmals genauer eingehen.

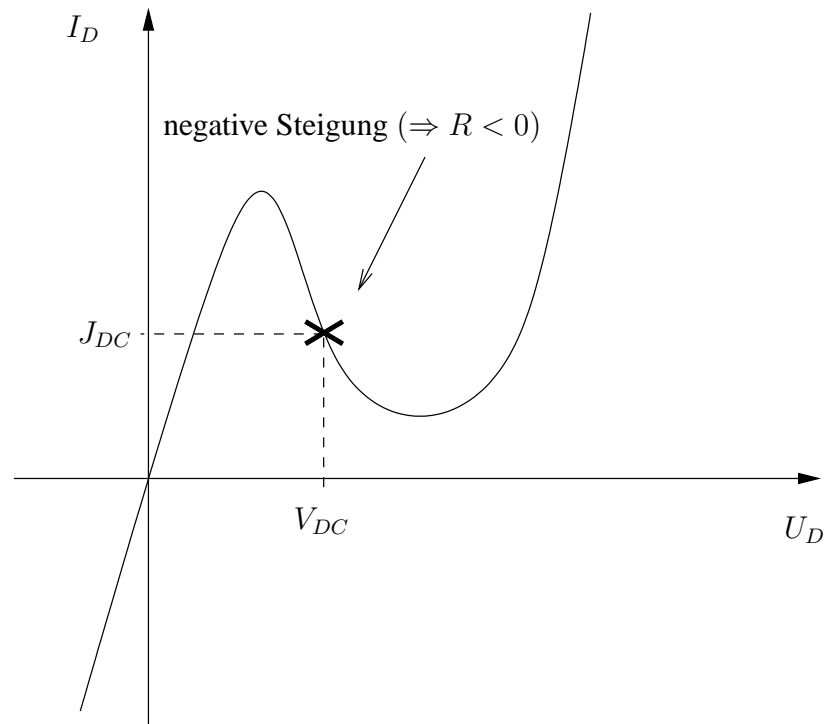


Abbildung 8.1: Statische Kennlinie einer Esaki Diode

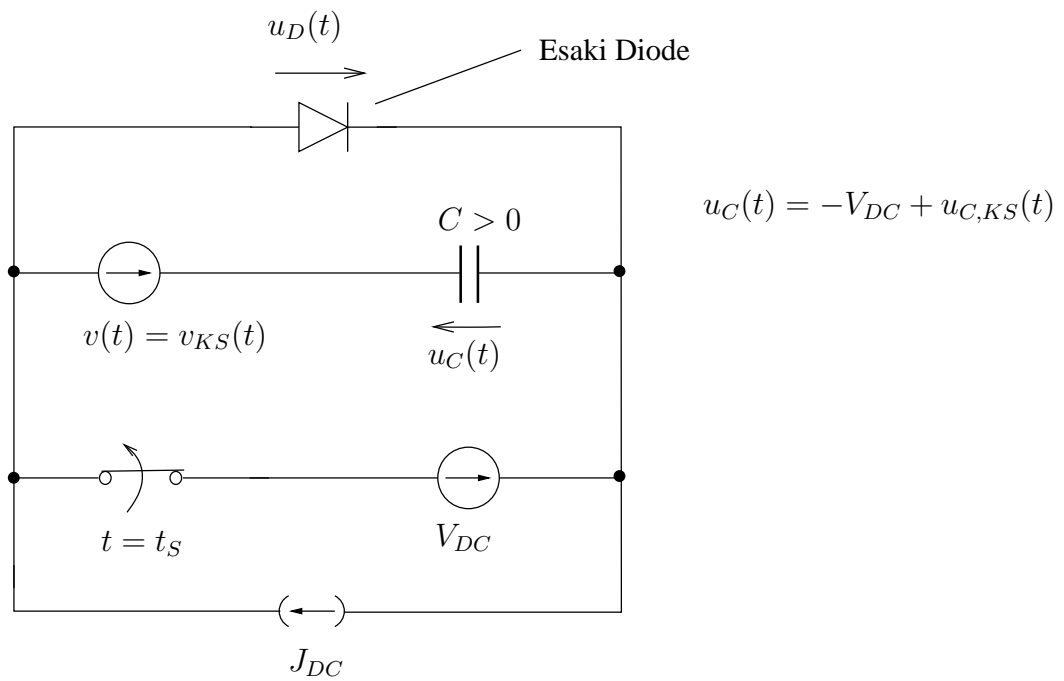
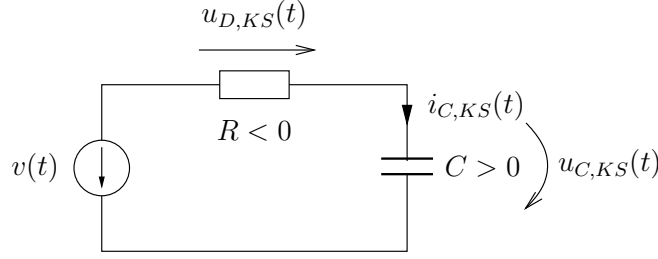


Abbildung 8.2: Großsignalersatzschaltbild

Abbildung 8.3: Zugehöriges Kleinsignalersatzschaltbild für $t > t_S$

Abschließend sei nun noch für das Beispiel 5.1 der Fall $R \rightarrow 0$ für $R > 0$, der bereits in Zusammenhang mit Definition 5.11 und Bemerkung 5.3 behandelt wurde, im Laplace-Bereich betrachtet. Im Gegensatz zum Zeitbereich, in dem für $i_C(t)$ und $R \rightarrow 0$ Schwierigkeiten mit der Grenzwertbildung auftraten, die zur Definition des Diracstoßes führten, existiert im Laplacebereich für $\underline{I}_C(\underline{s})$ ein sinnvoller Grenzwert für $v(t) \equiv 0$ ($\Rightarrow \underline{V}(\underline{s}) \equiv 0$) und $u_{C,0} \neq 0$:

$$\lim_{\substack{R \rightarrow 0 \\ R > 0}} \underline{I}_C(\underline{s}) \Big|_{\underline{V}(\underline{s})=0} = \lim_{\substack{R \rightarrow 0 \\ R > 0}} \frac{-u_{C,0}}{R\underline{s} + 1/C} = -Cu_{C,0} = \underline{I}_C(\underline{s}) \Big|_{\underline{V}(\underline{s})=0, R=0} \neq 0 \quad (8.58)$$

Der Grenzwert ist eine nicht verschwindende Konstante in der komplexen \underline{s} -Ebene. Diese kann nicht die Laplace-Transformierte einer gewöhnlichen Funktion sein, wie folgender Satz impliziert.

Satz 8.1 (Lemma von Riemann-Lebesgue)

Sei $f(t)$ eine im Intervall (a, b) absolut integrierbare Funktion, so gilt

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) e^{-j\omega t} dt = 0 \quad (8.59)$$

Beweis:

Um den Beweis zu vereinfachen, wird $f(t)$ als einmal differenzierbar angenommen. (Bezüglich des Beweises für den allgemeinen Fall wird auf die Spezialliteratur verwiesen.)

Dann gilt mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) e^{-j\omega t} dt \right| &\leq \left| \frac{1}{j\omega} \left(e^{-j\omega b} f(b^-) - e^{-j\omega a} f(a^+) \right) \right| + \left| \frac{1}{j\omega} \int_a^b f^{(1)}(t) e^{-j\omega t} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\omega} \left(|f(a^+)| + |f(b^-)| + \int_a^b |f^{(1)}(t)| dt \right) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Sei nun $\underline{f}(t)$ für $\Re\{\underline{s}\} \geq \alpha_0$ laplacetransformierbar und $\underline{s} = \alpha + j\omega$. Dann gilt für $\alpha > \alpha_0$

$$\int_0^\infty |f(t)| e^{-\alpha t} dt < \infty. \quad (8.60)$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Aufgrund von (8.60) gibt es ein $T > 0$ mit

$$\left| \int_T^\infty f(t) e^{-st} dt \right| \leq \int_T^\infty |f(t)| e^{-\alpha t} dt < \varepsilon$$

Ferner gilt aufgrund von (8.59)

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^T f(t) e^{-st} dt = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^T f(t) e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = 0$$

Dies impliziert für alle $\alpha \geq \alpha_0$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \mathcal{L}(f(t))(\alpha + j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^\infty f(t) e^{-(\alpha + j\omega)t} dt = 0$$

Dieses Ergebnis beweist, dass es keine Konvergenzhalbene geben kann, so dass (8.58) Laplacetransformierte einer gewöhnlicher Funktion ist.

In Definition 5.11 wurde dem Strom $i_C(t)$ für $R = 0$ die verallgemeinerte Funktion $-Cu_C(t_S^-) \delta(t - t_S)$ zugeordnet. Für den Spezialfall $t_0 = t_S = 0$ und $u_{C,0} = u_{C,t_0} = u_C(t_S^-)$ legt dies die Korrespondenz

$$\delta(t) \circ \bullet \mathcal{L}\{\delta(t)\}(\underline{s}) = 1 \quad (8.61)$$

nahe. Mit dieser Korrespondenz sind (8.58) und Definition (5.11) bzw. (5.60) in Einklang. Für den Spezialfall $t_0 = t_S = 0$ gelingt es also offensichtlich, das Anfangswertproblem 1. Art auch für einen im Fall $R = 0, v(t) \equiv 0$ inkonsistenten Anfangswert $u_C(t_S^-) \neq 0$ zu lösen, falls man verallgemeinerte Funktionen wie den Diracstoß zulässt. Dazu ist noch notwendig, die Gültigkeit von

$$(\Theta(t - t_S))^{(1)} = \frac{d}{dt} \Theta(t - t_S) = \delta(t - t_S) \quad (8.62)$$

zu fordern, um die Netzwerkgleichung

$$C u_C^{(1)}(t) = i_C(t)$$

auch für die an der Stelle $t = t_S$ springende Funktion

$$u_C(t) = u_C(t_S^-) (1 - \Theta(t - t_S)) \quad (8.63)$$

zu erfüllen. Für $i_C(t)$ folgt dann mit (8.63):

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = -Cu_C(t_S^-) \delta(t - t_S)$$

Die Beziehungen (8.61), (8.62) werden erst in Kapitel 10 mathematisch korrekt bewiesen werden und werden hier zunächst als plausible Forderungen festgehalten.

Die Hinzunahme der verallgemeinerten Funktion $\delta(t)$ ermöglicht allerdings nicht eine Lösung des Anfangswertproblems 2. Art für $t_0 > t_S$ und den Fall $R = 0, v(t) \equiv 0$. Dazu sei die Abbildung 8.4 betrachtet, die die Lösung für $i_C(t)$ für den Fall $R > 0, v(t) \equiv 0$ und die Anfangswerte $u_C(t_S^-) \neq 0$ bzw. $u_{C,t_0} \neq 0$ darstellt. Für jedes $u_C(t_S^-) \neq 0$ gilt für das zur gleichen Lösung gehörige u_{C,t_0}

$$\lim_{R \rightarrow 0} u_{C,t_0} = 0. \quad (8.64)$$

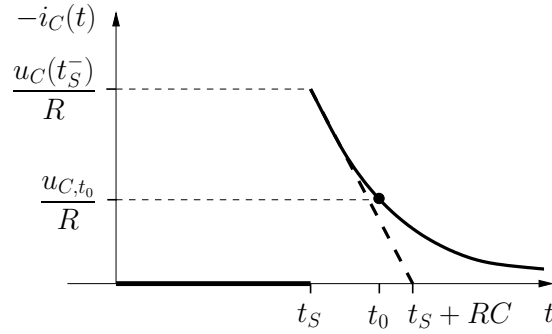


Abbildung 8.4

Damit ist klar, dass auch die als Grenzwerte für $R \rightarrow 0$ aus den Lösungen für $R > 0$ entstehenden Lösungen für $R = 0$, die die verallgemeinerte Funktionen $\delta(t)$ enthalten, keine Lösung des Anfangswertproblems 2. Art für $u_{C,t_0} \neq 0$ und $t_0 > t_S$ ergeben.

Liegt (8.58) also für den Fall $t_0 = 0 > t_S$ als formale Lösung der Netzwerkgleichungen für $\underline{I}_C(\underline{s})$ im Laplacebereich vor, so entspricht dies aufgrund der Korrespondenz (8.61) zwar der Zeitbereichsfunktion $-Cu_{C,0} \delta(t)$, kann aber aufgrund der in Abbildung 8.4 festgehaltenen Beziehung zwischen $u_C(t_S^-)$ und $u_{C,t_0} = u_{C,0}$ nicht als Lösung des Anfangswertproblems 2. Art für $R = 0$ und einen inkonsistenten Anfangswert $u_{C,t_0} \neq 0$ im Zeitbereich akzeptiert werden, da der Diracstoß nur zum Zeitpunkt $t = t_S$ für $R \rightarrow 0$ entstehen kann. Aus diesen Überlegungen erkennt man, wie wichtig eine genaue Untersuchung der Ergebnisse im Zeitbereich für die korrekte Interpretation der Ergebnisse im Laplacebereich ist.

Die genauen Bedingungen, unter denen sich das Anfangswertproblem 2. Art für $R = 0$ im Bereich gewöhnlicher Funktionen lösen lässt, lassen sich mit Hilfe der Laplacetransformation leicht herleiten.

Aus (8.46) folgt:

$$\underline{I}_C(\underline{s})|_{R=0} = \lim_{\substack{R \rightarrow 0 \\ R \neq 0}} \underline{I}_C(\underline{s}) = \underline{s}C\underline{V}(\underline{s}) - Cu_{C,0} = C(\underline{s}\underline{V}(\underline{s}) - v(0)) + C(v(0) - u_{C,0}) \quad (8.65)$$

Die Rücktransformation dieser Funktion in der komplexen Ebene in den Bereich der gewöhnlichen Zeitfunktionen gelingt nur unter den Bedingungen

$$\left. \begin{array}{l} \text{i)} \quad u_{C,0} = v(0) \\ \text{ii)} \quad v(t) \text{ ist differenzierbar} \end{array} \right\} \quad (8.66)$$

und der zusätzlicher Bedingung, dass $v(t)$ und $v^{(1)}(t)$ laplacetransformierbar sind. Bedingung (8.66) i) geht aus der zustandsreduzierenden algebraischen Gleichung (5.49), die der Maschengleichung entspricht, unter der Annahme, dass eine Lösung des Anfangswertproblems 2. Art für den Zielanfangswert $u_{C,0}$ existiert, hervor. Der keiner gewöhnlichen Funktion zuordbare konstante \underline{s} unabhängige Anteil in (8.65) tritt genau dann nicht auf, wenn (8.66) i) erfüllt ist.

Ist (8.66) gültig, so gilt:

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \\ \circ \end{array} \quad (8.67)$$

$$i_C(t) = C \frac{dv(t)}{dt}, \quad t > 0$$

Man sieht, dass für $R = 0$ das Netzwerkmodell differenzierend ist und keinen freien Zustand mehr besitzt.

Interessant ist, dass man bereits im Laplacebereich vor der Rücktransformation an dem Faktor \underline{s} vor $\underline{V}(\underline{s})$ sofort erkennt, dass das Netzwerkmodell bezüglich $v(t)$ differenzierend mit $r + 1 \geq 1$ sein muss. Das Ergebnis (5.50) wird durch (8.67) also reproduziert. Einzige zusätzliche Voraussetzung im Vergleich zur reinen Zeitbereichslösung ist die Laplacetransformierbarkeit von $v(t)$ und $v^{(1)}(t)$. Analog zu Bemerkung 8.12 kann man aber auch hier zeigen, dass die Voraussetzung der Laplacetransformierbarkeit nicht wesentlich für die Gültigkeit der mit Hilfe der Laplacetransformation im Zeitbereich ermittelten Lösungsdarstellungen ist.

Für das differenzierende Netzwerkmodell mit $R = 0$ gilt $r + 1 \geq 1$. Zur Bestimmung der Übertragungsfunktion wird $v(t) = 0$ für $t < 0$ und die $r + 1$ -fache Differenzierbarkeit von $v(t)$ nach Definition 8.3 gefordert. Analog zu (5.135) folgt somit $v(0) = 0$, was mit der Bedingung $u_{C,0} = 0$, die sich aus der Forderung der Anregung aus dem Ruhezustand ergibt, in der Maschengleichung verträglich ist. Als Übertragungsfunktion ergibt sich somit:

$$\underline{H}(\underline{s}) = \frac{\mathcal{L}(i_C(t))(\underline{s})}{\mathcal{L}(v(t))(\underline{s})} \bigg|_{\substack{u_{C,0}=0 \\ v(t)=0, t<0}} = \underline{s}C \quad (8.68)$$

Auch hier gilt also wiederum (8.55).

Um die Behandlung von Netzwerkmodellen im Laplacebereich weiter zu üben, soll noch das folgende Beispiel aus Abbildung 8.5 behandelt werden.

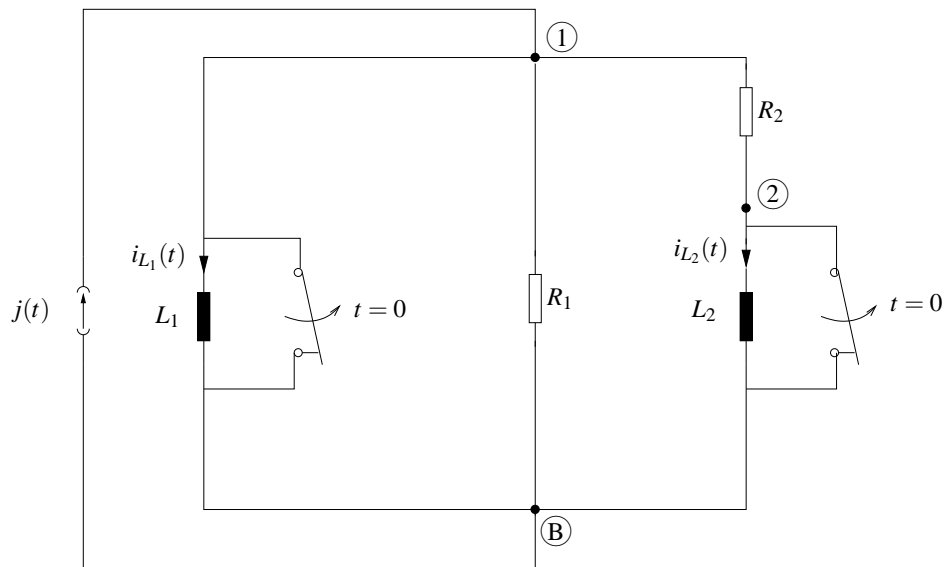


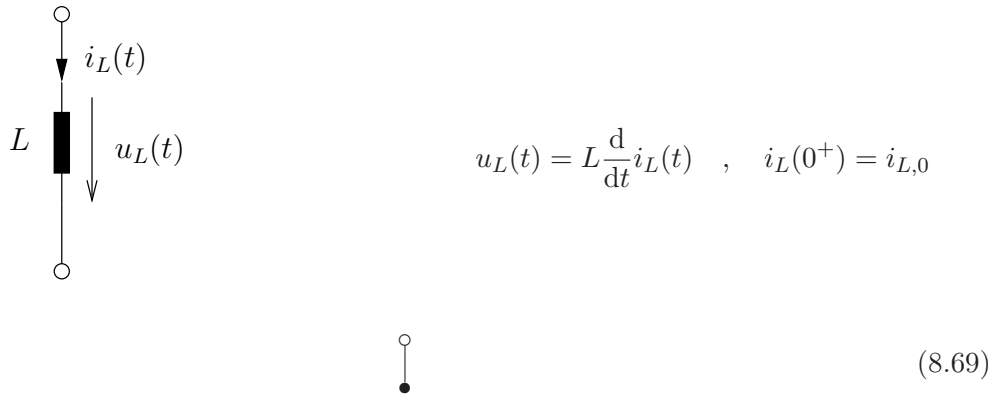
Abbildung 8.5: Beispielschaltung 8.1 im Zeitbereich.

$R_1 > 0$, $R_2 > 0$, $L_1 > 0$, $L_2 > 0$ sind lineare, zeitinvariante Widerstände und Induktivitäten, $j(t)$ bezeichnet eine ungesteuerte ideale Stromquelle. Die Schalter werden zum Zeitpunkt $t = 0$ geöffnet. Vor dem Schalten fließen in den Induktivitäten Gleichströme, die die Anfangswerte für das Netzwerkmodell für den Bereich $t > 0$ vorgeben. Diese werden mit $i_{L_1,0}$ bzw. $i_{L_2,0}$ bezeichnet.

Die Beispielschaltung 8.1 entspricht dem Beispiel 5.2 für den Spezialfall: $R_1 \rightarrow \infty$, $v(t) = 0$, $t_S = 0$.

Es wird eine Lösung des Anfangswertproblems erster Art ($t_0 = t_S = 0$) (siehe Definition 5.8) gesucht; also nach Strömen in den Induktivitäten, die beim Schalten nicht springen. Die Ströme vor dem Schalten werden vorgegeben ($i_{L_{1,2}}(0^-) = i_{L_{1,2},0}$). Eine Lösung dieses Anfangswertproblems soll nun wieder mit Hilfe der Laplacetransformation gesucht werden, indem das Anfangswertproblem im Zeitbereich zunächst mit Hilfe der Laplacetransformation wieder in ein algebraisches Netzwerkgleichungssystem überführt wird. Aus den Ergebnissen aus Kapitel 5, zum Beispiel 5.2, geht hervor, dass zumindest für $R_1 \rightarrow \infty$ nicht immer eine Lösung dieses Anfangswertproblems bei beliebiger Vorgabe von Anfangswerten existiert. Trotzdem wird beim Aufstellen der Gleichungen für den Laplacebereich stets angenommen, dass eine laplacetransformierbare Lösung des Anfangswertproblems existiert.

Sei dazu zunächst die Zweipolgleichung einer Induktivität betrachtet.



$$u_L(t) = L \frac{d}{dt} i_L(t) \quad , \quad i_L(0^+) = i_{L,0} \quad (8.69)$$

$$\underline{U}_L(\underline{s}) = \underline{s}L\underline{I}_L(\underline{s}) - Li_{L,0} \Leftrightarrow \underline{I}_L(\underline{s}) = \frac{1}{\underline{s}L}\underline{U}_L(\underline{s}) + \frac{i_{L,0}}{\underline{s}}$$

Dies entspricht den algebraischen Netzwerkmodellen aus Abbildung 8.6.

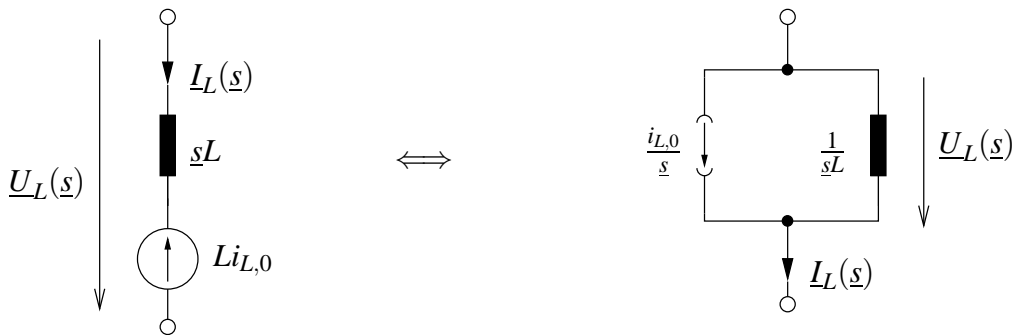
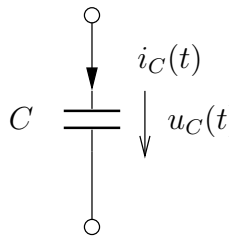


Abbildung 8.6: Algebraisches Netzwerkmodell einer linearen zeitinvarianten Induktivität im Laplacebereich

Das Induktivitätssymbol in Abbildung 8.6 symbolisiert hier die lineare, homogene Netzwerkgleichung der Induktivität im Laplacebereich für den Spezialfall, dass der Anfangswert verschwindet. Diese Gleichung wird durch die Angabe der Impedanz $\underline{s}L$ oder der Admittanz $\frac{1}{\underline{s}L}$ neben dem Induktivitätssymbol näher gekennzeichnet.

Entsprechendes gilt für die Zweipolgleichung einer linearen, zeitinvarianten Kapazität.



$$i_C(t) = C \frac{d}{dt} u_C(t) \quad , \quad u_C(0^+) = u_{C,0}$$

(8.70)

$$I_C(\underline{s}) = \underline{s} C U_C(\underline{s}) - C u_{C,0} \Leftrightarrow U_C(\underline{s}) = \frac{1}{\underline{s} C} I_C(\underline{s}) + \frac{u_{C,0}}{\underline{s}}$$

Dies entspricht den algebraischen Netzwerkmodellen aus Abbildung 8.7.

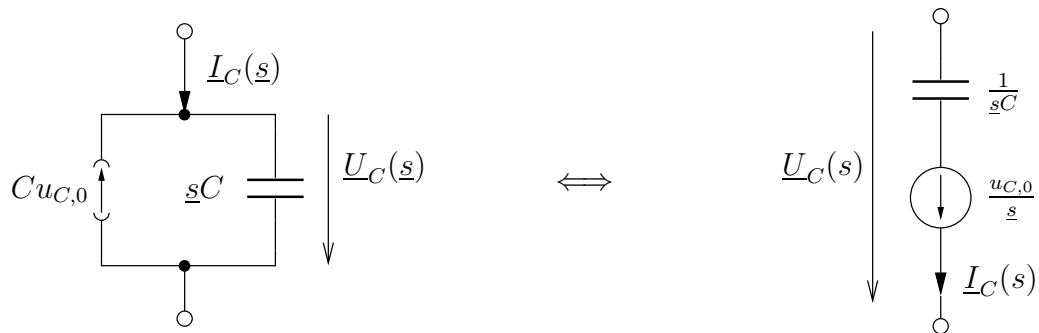


Abbildung 8.7: Algebraisches Netzwerkmodell einer linearen zeitinvarianten Kapazität im Laplacebereich

Das Kapazitätssymbol symbolisiert in Abbildung 8.7 wiederum die lineare, homogene Netzwerkgleichung der Kapazität im Laplacebereich für den Spezialfall des verschwindenden Anfangswertes. Diese Gleichung wird durch die Angabe der Admittanz $\underline{s}C$ oder der Impedanz $\frac{1}{\underline{s}C}$ neben dem Kapazitätssymbol näher gekennzeichnet. Sowohl bei der Induktivität als auch der Kapazität wird der Einfluss der Anfangswerte durch ideale, feste (ungesteuerte) Quellen im algebraischen Netzwerkmodell charakterisiert.

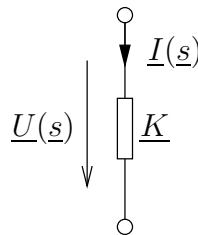


Abbildung 8.8: Darstellung einer allgemeinen Impedanz oder Admittanz im Laplacebereich

Wie bereits im Bereich der komplexen Wechselstromrechnung bezeichnet das Symbol in Abbildung 8.8 einerseits einen idealen zeitinvarianten Widerstand R . In diesem Fall ist \underline{K} reell ($\underline{K} = R$ (Impedanzdarstellung $\Rightarrow \underline{U}(\underline{s}) = R \underline{I}(\underline{s})$), $\underline{K} = G$ (Admittanzdarstellung $\Rightarrow \underline{I}(\underline{s}) = G \underline{U}(\underline{s})$). Andererseits bezeichnet \underline{K} auch eine allgemeine Admittanz ($\underline{K} = \underline{Y} \Rightarrow \underline{I}(\underline{s}) = \underline{Y} \underline{U}(\underline{s})$) oder Impedanz ($\underline{K} = \underline{Z} \Rightarrow \underline{U}(\underline{s}) = \underline{Z} \underline{I}(\underline{s})$). In diesem Fall ist \underline{K} typischerweise komplex und hängt von \underline{s} ab. Ob die Admittanz- oder Impedanzdarstellung gemeint ist, ergibt sich aus der Dimension von \underline{K} .

Das algebraische Netzwerkmodell der Beispielschaltung 8.1 hat im Laplacebereich also die Gestalt aus Abbildung 8.9. Da die Knotenadmittanzmethode zur Lösung verwendet werden soll, wird die Admittanzdarstellung gewählt und die Anfangswerte werden über Stromquellen berücksichtigt.

Nachdem die Netzwerkgleichungen im Laplacebereich nun aufgestellt sind, wird nicht mehr vorausgesetzt, dass eine Lösung des Anfangswertproblems zweiter Art existiert, sondern es wird auf der Basis der Netzwerkgleichungen im Laplacebereich untersucht, inwieweit sich eine Lösung des Anfangswertproblems 2. Art aus diesen Netzwerkgleichungen ergibt. Darüberhinaus wird untersucht, inwieweit die zusätzliche Berücksichtigung von verallgemeinerten Funktionen eine Lösung der Anfangswertprobleme erster und zweiter Art im Fall von inkonsistenten Anfangswerten ermöglicht.

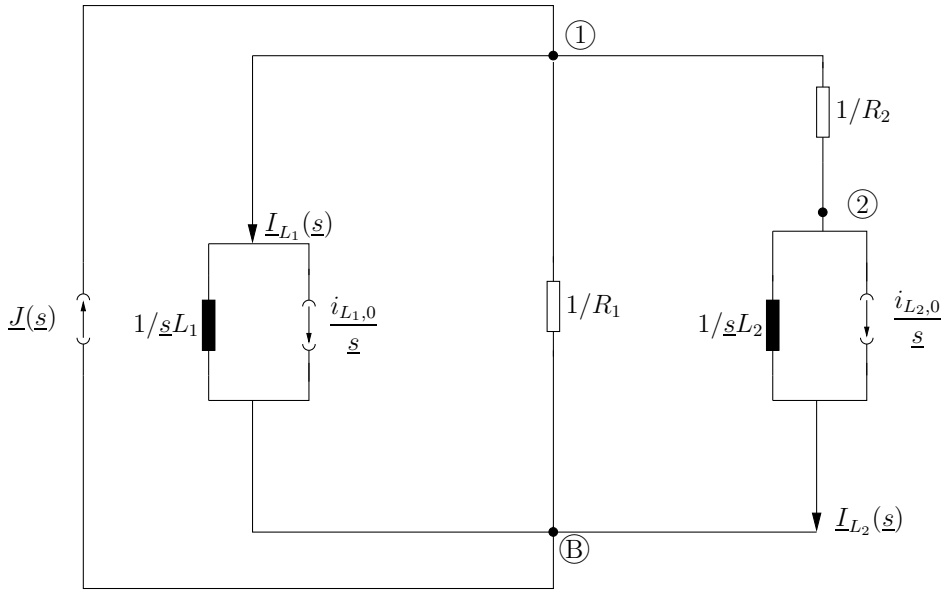


Abbildung 8.9: Algebraisches Netzwerkmodell der Beispielschaltung 8.1 im Laplacebereich

Knoten ③ der Beispielschaltung wird als Bezugsknoten gewählt. Das Knotenadmittanzgleichungssystem für die Knotenpotentiale $\dot{\underline{U}}_1(s)$ und $\dot{\underline{U}}_2(s)$ der verbleibenden Knoten lautet somit:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{sL_1} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2}, & \frac{1}{sL_2} + \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}}^{\dot{\underline{Y}}_{\sim}} \begin{bmatrix} \dot{\underline{U}}_1(s) \\ \dot{\underline{U}}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{J}(s) - \frac{i_{L_1,0}}{s} \\ -\frac{i_{L_2,0}}{s} \end{bmatrix} \quad (8.71)$$

Die Lösung ergibt sich mit der Cramerschen Regel zu:

$$\dot{\underline{U}}_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} \underline{J}(s) - \frac{i_{L_1,0}}{s} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{i_{L_2,0}}{s} & \frac{1}{sL_2} + \frac{1}{R_2} \end{vmatrix}}{\det \dot{\underline{Y}}_{\sim}}$$

$$\dot{\underline{U}}_1(\underline{s}) = R_1 \frac{\underline{s} \left(\underline{s} + \frac{R_2}{L_2} \right)}{\underline{Q}(\underline{s})} \underline{J}(\underline{s}) - R_1 \frac{\underline{s} + \frac{R_2}{L_2}}{\underline{Q}(\underline{s})} i_{L_1,0} - R_1 \frac{\underline{s}}{\underline{Q}(\underline{s})} i_{L_2,0} \quad (8.72)$$

$$\underline{Q}(\underline{s}) = \underline{s}^2 + \underline{s} \left(\frac{R_1 + R_2}{L_2} + \frac{R_1}{L_1} \right) + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} \quad (8.73)$$

$$\dot{\underline{U}}_2(\underline{s}) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{\underline{s}L_1} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, & \underline{J}(\underline{s}) - \frac{i_{L_1,0}}{\underline{s}} \\ -\frac{1}{R_2}, & -\frac{i_{L_2,0}}{\underline{s}} \end{vmatrix}}{\det \dot{\underline{Y}}} =$$

$$R_1 \frac{\underline{s}^2}{\underline{Q}(\underline{s})} \underline{J}(\underline{s}) - R_1 \frac{\underline{s}}{\underline{Q}(\underline{s})} i_{L_1,0} - (R_1 + R_2) \frac{\underline{s} + \frac{R_1 R_2}{L_1(R_1 + R_2)}}{\underline{Q}(\underline{s})} i_{L_2,0} \quad (8.74)$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \underline{I}_{L_1}(\underline{s}) &= \frac{1}{\underline{s}L_1} \underline{U}_{L_1}(\underline{s}) + \frac{i_{L_1,0}}{\underline{s}} = \frac{1}{\underline{s}L_1} \dot{\underline{U}}_1(\underline{s}) + \frac{i_{L_1,0}}{\underline{s}} \\ &= \frac{R_1}{L_1} \frac{\underline{s} + \frac{R_2}{L_2}}{\underline{Q}(\underline{s})} \underline{J}(\underline{s}) - \frac{R_1}{L_1} \frac{1}{\underline{Q}(\underline{s})} i_{L_2,0} - \underbrace{\frac{R_1}{L_1} \frac{\underline{s} + R_2/L_2}{\underline{s} \underline{Q}(\underline{s})} i_{L_1,0} + \frac{i_{L_1,0}}{\underline{s}}}_{+\frac{\underline{s} + (R_1 + R_2)/L_2}{\underline{Q}(\underline{s})} i_{L_1,0}} \end{aligned} \quad (8.75)$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_{L_2}(\underline{s}) &= \frac{1}{\underline{s}L_2} \underline{U}_{L_2}(\underline{s}) + \frac{i_{L_2,0}}{\underline{s}} = \frac{1}{\underline{s}L_2} \dot{\underline{U}}_2(\underline{s}) + \frac{i_{L_2,0}}{\underline{s}} \\ &= \frac{R_1}{L_2} \frac{\underline{s}}{\underline{Q}(\underline{s})} \underline{J}(\underline{s}) - \frac{R_1}{L_2} \frac{1}{\underline{Q}(\underline{s})} i_{L_1,0} - \underbrace{\frac{(R_1 + R_2)}{L_2} \frac{\underline{s} + \frac{R_1 R_2}{L_1(R_1 + R_2)}}{\underline{s} \underline{Q}(\underline{s})} i_{L_2,0} + \frac{i_{L_2,0}}{\underline{s}}}_{+\frac{(\underline{s} + R_1/L_1)}{\underline{Q}(\underline{s})} i_{L_2,0}} \end{aligned} \quad (8.76)$$

Um die Stabilität des Netzwerkmodells und die Anwendbarkeit des zweiten Grenzwertsatzes beurteilen zu können, ist die Lage der Nullstellen von $\underline{Q}(\underline{s})$ in der \underline{s} -Ebene wichtig. Dazu ist die folgende Bemerkung von Bedeutung.

Bemerkung 8.13

Sei $\underline{Q}(\underline{s})$ ein normiertes Polynom 2-ter Ordnung mit positiv reellen Koeffizienten.

$$\underline{Q}(\underline{s}) = \underline{s}^2 + \alpha_1 \underline{s} + \alpha_0, \quad \alpha_1 > 0, \alpha_0 > 0 \quad (8.77)$$

Dann haben die Nullstellen von $\underline{Q}(\underline{s})$, $\underline{s}_1, \underline{s}_2$ mit

$$\underline{Q}(\underline{s}) = (\underline{s} - \underline{s}_1)(\underline{s} - \underline{s}_2) \quad (8.78)$$

immer einen negativen Realteil

$$\Re \{ \underline{s}_1 \} < 0, \quad \Re \{ \underline{s}_2 \} < 0. \quad (8.79)$$

Zum Beweis:

$$\underline{s}_{1,2} = \begin{cases} -\frac{\alpha_1}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha_1^2}{4} - \alpha_0}, & \alpha_0 \leq \frac{\alpha_1^2}{4} \\ -\frac{\alpha_1}{2} \pm j\sqrt{\alpha_0 - \frac{\alpha_1^2}{4}}, & \alpha_0 \geq \frac{\alpha_1^2}{4} \end{cases} \quad (8.80)$$

Dabei steht $\sqrt{}$ jeweils für die positive, reelle Quadratwurzel. Die Behauptung ergibt sich direkt aus dieser Darstellung und der Tatsache, dass gilt:

$$\sqrt{\frac{\alpha_1^2}{4} - \alpha_0} < \frac{\alpha_1}{2}, \quad \text{für } \alpha_0 > 0 \text{ und } \frac{\alpha_1^2}{4} > \alpha_0 \quad (8.81)$$

Alle Darstellungen (8.72), (8.74), (8.75), (8.76) haben die Form

$$\underline{A}(\underline{s}) = c_1 \frac{\underline{P}_1(\underline{s})}{\underline{Q}(\underline{s})} \underline{J}(\underline{s}) + c_2 \frac{\underline{P}_2(\underline{s})}{\underline{Q}(\underline{s})} i_{L_1,0} + c_3 \frac{\underline{P}_3(\underline{s})}{\underline{Q}(\underline{s})} i_{L_2,0} \quad (8.82)$$

mit normierten Polynomen $\underline{P}_{1,2,3}(\underline{s})$, $\underline{Q}(\underline{s})$, für die gilt

$$\text{grad}(\underline{P}_1(\underline{s})) \leq \text{grad}(\underline{Q}(\underline{s})) \quad (8.83)$$

und

$$\text{grad}(\underline{P}_{2,3}(\underline{s})) < \text{grad}(\underline{Q}(\underline{s})) \quad (8.84)$$

Beachtet man noch für $\text{grad}(\underline{P}_1(\underline{s})) = \text{grad}(\underline{Q}(\underline{s}))$ die Umformung

$$\frac{\underline{P}_1(\underline{s})}{\underline{Q}(\underline{s})} = 1 + c_4 \frac{\underline{P}_4(\underline{s})}{\underline{Q}(\underline{s})} \quad (8.85)$$

mit

$$\text{grad}(\underline{P}_4(\underline{s})) < \text{grad}(\underline{Q}(\underline{s})), \quad (8.86)$$

so lässt sich (8.82) leicht mit Hilfe der Partialbruchzerlegung (siehe Bem. 5.15) und den Korrespondenzen aus Bem. 8.5 sowie Bem. 8.7 in den Bereich gewöhnlicher Funktionen zurücktransformieren, wobei sich die folgende, allgemeine Form ergibt:

$$a(t) = \underbrace{i_{L_1,0} h_{1,a}(t) + i_{L_2,0} h_{2,a}(t)}_{a_{zi,0}(t)} + \int_0^t h_a(t-t') j(t') dt' + D_{a,0} j(t), \quad t > 0 \quad (8.87)$$

Das Netzwerkmodell ist für $R_1 < \infty$ also nicht differenzierend. $D_{a,0}$ verschwindet, falls $\text{grad}(\underline{P}_1(\underline{s})) < \text{grad}(\underline{Q})$. Da alle Polynome reelle Koeffizienten haben, sind $h_{1,a}(t)$, $h_{2,a}(t)$, $h_a(t)$ auch reelle Funktionen, wie später noch allgemein gezeigt wird. Die natürlichen Frequenzen $A_{1,2}$ des Netzwerkmodells sind die Wurzeln von $\underline{Q}(\underline{s})$:

$$\underline{A}_{1,2} = -\frac{R_1 + R_2}{2L_2} - \frac{R_1}{2L_1} \pm \sqrt{\left(\frac{R_1 + R_2}{2L_2} + \frac{R_1}{2L_1}\right)^2 - \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2}} \quad (8.88)$$

Es gilt nach Bemerkung 8.13

$$\Re \{ \underline{A}_{1,2} \} < 0, \quad (8.89)$$

was die asymptotische Stabilität des Netzwerkmodells impliziert.

Für $\text{grad}(\underline{P}_1(\underline{s})) < \text{grad}(\underline{Q}(\underline{s}))$ verschwinden die letzten beiden Terme in (8.87) für $t \rightarrow 0^+$ immer. Diese Bedingung ist für die Darstellungen von $\underline{I}_{L_1}(\underline{s})$ und $\underline{I}_{L_2}(\underline{s})$ in (8.75) und (8.76) erfüllt. Für die Erfüllung der Anfangsbedingungen müssen daher die "zero input response"-Anteile verantwortlich sein. Deren Laplacetransformierte sind gebrochen rationale Funktionen, die die Voraussetzungen von Bemerkung 8.11 erfüllen, so dass nach Bemerkung 8.11 gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{|\underline{s}| \rightarrow \infty} \underline{s} \underline{I}_{L_1,zi}(\underline{s}) &= i_{L_1}(0^+) = \\ &= \underbrace{\lim_{|\underline{s}| \rightarrow \infty} \left(\frac{\underline{s} \left(\underline{s} + \frac{R_1+R_2}{L_2} \right)}{\underline{Q}(\underline{s})} i_{L_1,0} \right)}_{=i_{L_1,0}} + \\ &\quad \underbrace{\lim_{|\underline{s}| \rightarrow \infty} \left(-\frac{R_1}{L_1} \frac{\underline{s}}{\underline{Q}(\underline{s})} i_{L_2,0} \right)}_{=0} = i_{L_1,0} \end{aligned} \quad (8.90)$$

$$\begin{aligned} \lim_{|\underline{s}| \rightarrow \infty} \underline{s} \underline{I}_{L_2,zi}(\underline{s}) &= i_{L_2}(0^+) = \\ &\quad \underbrace{\lim_{|\underline{s}| \rightarrow \infty} \left(-\frac{R_1}{L_2} \frac{\underline{s}}{\underline{Q}(\underline{s})} i_{L_1,0} \right)}_{=0} + \\ &\quad \underbrace{\lim_{|\underline{s}| \rightarrow \infty} \left(\frac{\underline{s} \left(\underline{s} + \frac{R_1}{L_1} \right)}{\underline{Q}(\underline{s})} i_{L_2,0} \right)}_{=i_{L_2,0}} = i_{L_2,0} \end{aligned} \quad (8.91)$$

Die geforderten Anfangsbedingungen werden durch die gefundenen, gewöhnlichen Lösungsfunktionen $i_{L_1}(t), i_{L_2}(t)$ also tatsächlich für $t \rightarrow 0^+$ stetig reproduziert.

Daher gibt es keine inkonsistenten Anfangswerte, woraus $n = n_A$ mit Satz 5.1 folgt.

Da in der Darstellung (8.87) für $a(t) = i_{L_1,2}(t)$ der letzte Term entfällt, folgt sofort aus (8.87), dass $i_{L_1,2}(t)$ für $t > 0$ differenzierbar und $\frac{d}{dt} i_{L_1,2}(t)$ laplacetransformierbar sind. Daher ist der Ableitungssatz (Bemerkung 8.8) anwendbar und aus der Gültigkeit von

$$\underline{U}_{L_1,2}(\underline{s}) = \underline{s} L_{1,2} \underline{I}_{L_1,2}(\underline{s}) - L_{1,2} i_{L_1,2,0} \quad (8.92)$$

folgt sofort

$$\underline{U}_{L_1,2}(\underline{s}) = L_{1,2} \mathcal{L} \left\{ \frac{d}{dt} i_{L_1,2}(t) \right\}(\underline{s}) + L_{1,2} (i_{L_1,2}(0^+) - i_{L_1,2,0}) \quad (8.93)$$

Da der letzte Term verschwindet (dies folgt sofort elementar auch mit dem Satz von Riemann-Lebesgue) folgt aufgrund der Eindeutigkeit der Laplacetransformation sofort

$$u_{L_1,2}(t) = L_{1,2} \frac{d}{dt} i_{L_1,2}(t) \quad (8.94)$$

also die Gültigkeit der Zweiggleichung der Induktivität im Zeitbereich. Dies folgt alleine aufgrund der Zweiggleichungen (8.92) im Laplacebereich und der Existenz von entsprechend glatten rücktransformierten Funktionen im Zeitbereich. Analog folgt die Gültigkeit aller anderen Netzwerkgleichungen im Zeitbereich alleine aufgrund der entsprechenden Gleichungen im Laplacebereich und der Existenz der rücktransformierten Zeitfunktionen.

Aufgrund der Form der Lösungen im Laplacebereich kann man bei diesem Beispiel also zeigen, dass die anfängliche Annahme einer laplacetransformierbaren Lösung des Anfangswertproblems 2. Ordnung gerechtfertigt ist. Analog zur Bemerkung 8.12 kann man zusätzlich aufgrund der Lösungsdarstellung (8.87) auch die Voraussetzung der Laplacetransformierbarkeit von $j(t)$ wieder fallenlassen.

Die Lösungsdarstellung (8.87) stimmt für $t > 0$ mit der generellen Form (5.42) aus Satz 5.1 für nicht differenzierende Netzwerke überein, wenn man dort

$$\begin{aligned} n_Q &= 1, \quad e_1(t) = j(t), \quad r_1 + 1 = 0, \quad n_A = 2, \quad n = 2, \quad \vec{x}_0 = \vec{x}_{A,0} = (i_{L_1,0}, i_{L_2,0})^t, \\ \tilde{F}_x &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}_{e_1} = 0 \end{aligned} \quad (8.95)$$

wählt.

Das gestellte Anfangswertproblem erster Art aus Abbildung 8.5 ist also im Bereich der gewöhnlichen Funktionen lösbar, auch wenn beliebige Anfangswerte $i_{L_1,0}, i_{L_2,0}$ vorgegeben werden. Daher sind die Anfangswerte auch Anfangszustände.

Auch die Anfangswerte der Knotenpotenziale $u_1(t)$ bzw. $u_2(t)$ lassen sich leicht bestimmen. Hier verschwinden die "zero state response"-Anteile für $t \rightarrow 0^+$ nicht, sondern sind durch $D_{a,0} j(0^+)$ gegeben. Der rechtsseitige Grenzwert wird hier verwendet, um auch den Fall, dass $j(t)$ für $t = 0$ springt, korrekt zu erfassen.

$D_{a,0}$ lässt sich mit Hilfe der Polynomdivision (siehe (8.85)) leicht für beide Fälle bestimmen. In beiden Fällen ergibt sich $D_{a,0} = R_1$. Somit folgt:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1(0^+) &= R_1 j(0^+) + \lim_{|s| \rightarrow \infty} \left(\underline{s} \dot{\underline{U}}_{1,zi}(\underline{s}) \right) \\ &= R_1 j(0^+) - \underbrace{\lim_{|s| \rightarrow \infty} R_1 \frac{\underline{s} \left(\underline{s} + \frac{R_2}{L_2} \right)}{\underline{Q}(\underline{s})} i_{L_1,0}}_{R_1 i_{L_1,0}} - \underbrace{\lim_{|s| \rightarrow \infty} R_1 \frac{\underline{s}^2}{\underline{Q}(\underline{s})} i_{L_2,0}}_{R_1 i_{L_2,0}} \\ &= R_1 (j(0^+) - i_{L_1,0} - i_{L_2,0}) \end{aligned} \quad (8.96)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_2(0^+) &= R_1 j(0^+) + \lim_{|s| \rightarrow \infty} \left(\underline{s} \dot{\underline{U}}_{2,zi}(\underline{s}) \right) \\ &= R_1 j(0^+) - \underbrace{\lim_{|s| \rightarrow \infty} R_1 \frac{\underline{s}^2}{\underline{Q}(\underline{s})} i_{L_1,0}}_{R_1 i_{L_1,0}} - \underbrace{\lim_{|s| \rightarrow \infty} \left((R_1 + R_2) \frac{\underline{s} \left(\underline{s} + \frac{R_1 R_2}{L_1(R_1 + R_2)} \right)}{\underline{Q}(\underline{s})} i_{L_2,0} \right)}_{(R_1 + R_2) i_{L_2,0}} \\ &= R_1 (j(0^+) - i_{L_1,0} - i_{L_2,0}) - R_2 i_{L_2,0} \end{aligned} \quad (8.97)$$

Dieses Resultat ergibt sich sofort auch aus einer Gleichstromanalyse, wenn man die Stromquelle und die Induktivitäten durch Gleichstromquellen mit den entsprechenden Stromwerten für $t \rightarrow 0^+$ ersetzt (siehe Abbildung 8.10).

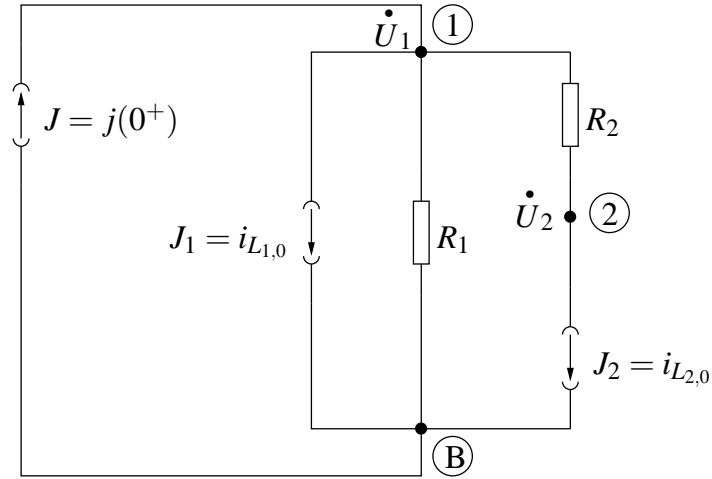


Abbildung 8.10: Gleichstromnetzwerkmodell zur Bestimmung der Anfangswerte $\dot{u}_1(0^+) = \dot{U}_1$ bzw. $\dot{u}_2(0^+) = \dot{U}_2$

Bemerkung 8.14

Dieses Ergebnis lässt sich verallgemeinern. Bei allen Netzwerkmodellen, die nur aus linearen, zeitinvarianten Widerständen, Kapazitäten, Induktivitäten und festen (ungesteuerten) Quellen bestehen und bei denen die Anfangswerte mit den Anfangszuständen identifiziert werden können (Fall $n = n_A$), können alle Anfangswerte durch eine entsprechende Gleichstromanalyse bestimmt werden. Die Kapazitäten müssen dabei durch entsprechende Gleichspannungsquellen mit $V = u_{C,0}$ und die festen Spannungsquellen durch Gleichspannungsquellen mit $V = v(0^+)$ ersetzt werden.

Der Beweis ergibt sich aus Satz 5.1. Wegen $n = n_A$ ist das Anfangswertproblem 2. Art immer lösbar. Für diese Lösungen gilt $u_c(0^+) = u_{c,0}$ bei Kapazitäten und $i_L(0^+) = i_{L,0}$ bei Induktivitäten. Somit folgt, dass die rechtsseitigen Grenzwerte der Netzwerkvariablen zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ die Gleichungen des in Bemerkung 8.14 beschriebenen Gleichstromnetzwerkmodells erfüllen. Dies gilt bei beliebiger Vorgabe von \vec{x}_{A,t_0} und $e_k(t_0^+)$, $1 \leq k \leq n_Q$. Da das Netzwerkmodell nach dem Ersetzen von Kapazitäten durch Spannungsquellen und Induktivitäten durch Stromquellen ein Widerstandsnetzwerk mit ungesteuerten Quellen ist, kann dies nur möglich sein, wenn das Widerstandsnetzwerk den Voraussetzungen von Bemerkung 6.15 genügt und immer eindeutig lösbar ist. Die rechtsseitigen Grenzwerte zum Zeitpunkt t_0 werden also durch die Lösung des in Bemerkung 8.14 beschriebenen Gleichstromwiderstandsnetzwerks eindeutig reproduziert.

Da das Beispielnetzwerk asymptotisch stabil ist, geht es bei Anregung mit einer zeitlich konstanten Stromquelle $j(t) = J$ für $t \rightarrow \infty$ in einen zeitlich konstanten, eingeschwungenen Zustand über. Dieser lässt sich mit Hilfe des zweiten Grenzwertsatzes leicht berechnen. Für

$$\underline{J}(\underline{s}) = \mathcal{L}\{J\}(\underline{s}) = J/\underline{s} \quad (8.98)$$

sind alle Summanden in (8.72), (8.74), (8.75) und (8.76) gebrochen rationale Funktionen, die außer einer Polstelle bei $\underline{s} = 0$ nur Polstellen mit echt negativem Realteil haben. Daher sind die Voraussetzungen von Bemerkung 8.11 E) für alle Summanden erfüllt und es gilt:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1(t \rightarrow \infty) &= \lim_{\underline{s} \rightarrow 0} \underline{s} \dot{\underline{U}}_1(\underline{s}) = \\ \lim_{\underline{s} \rightarrow 0} \left(R_1 \frac{\underline{s} \left(\underline{s} + \frac{R_2}{L_2} \right)}{\underline{Q}(\underline{s})} J - R_1 \frac{\underline{s} \left(\underline{s} + \frac{R_2}{L_2} \right)}{\underline{Q}(\underline{s})} i_{L_{1,0}} - R_1 \frac{\underline{s}^2}{\underline{Q}(\underline{s})} i_{L_{2,0}} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (8.99)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_2(t \rightarrow \infty) &= \lim_{\underline{s} \rightarrow 0} \underline{s} \dot{\underline{U}}_2(\underline{s}) = \\ \lim_{\underline{s} \rightarrow 0} \left(R_1 \frac{\underline{s}^2}{\underline{Q}(\underline{s})} J - R_1 \frac{\underline{s}^2}{\underline{Q}(\underline{s})} i_{L_{1,0}} - (R_1 + R_2) \frac{\underline{s} \left(\underline{s} + \frac{R_1 \cdot R_2}{L_1 \cdot (R_1 + R_2)} \right)}{\underline{Q}(\underline{s})} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (8.100)$$

$$\begin{aligned} i_{L_1}(t \rightarrow \infty) &= \lim_{\underline{s} \rightarrow 0} \underline{s} \underline{I}_{L_1}(\underline{s}) = \\ \lim_{\underline{s} \rightarrow 0} \left(\frac{R_1}{L_1} \frac{\underline{s} + \frac{R_2}{L_2}}{\underline{Q}(\underline{s})} J + \frac{\underline{s} \left(\underline{s} + \frac{R_1 + R_2}{L_2} \right)}{\underline{Q}(\underline{s})} i_{L_{1,0}} - \frac{R_1}{L_1} \frac{\underline{s}}{\underline{Q}(\underline{s})} i_{L_{2,0}} \right) &= J \end{aligned} \quad (8.101)$$

$$\begin{aligned} i_{L_2}(t \rightarrow \infty) &= \lim_{\underline{s} \rightarrow 0} \underline{s} \underline{I}_{L_2}(\underline{s}) = \\ \lim_{\underline{s} \rightarrow 0} \left(\frac{R_1}{L_2} \frac{\underline{s}}{\underline{Q}(\underline{s})} J - \frac{R_1}{L_2} \frac{\underline{s}}{\underline{Q}(\underline{s})} i_{L_{1,0}} + \frac{\underline{s} \left(\underline{s} + \frac{R_1}{L_1} \right)}{\underline{Q}(\underline{s})} i_{L_{2,0}} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (8.102)$$

Auch dieses Ergebnis ergibt sich sofort für $\omega = 0$ nach Satz 5.4 aus einer Gleichstromanalyse. Aufgrund der vorausgesetzten Zeitunabhängigkeit aller Zweigspannungen und Zweigströme verschwinden dabei die Zweigspannungen der Induktivitäten.

Abschließend soll nun noch das Verhalten des Netzwerkes für $R_1 = \infty$ untersucht werden. In diesem Fall bilden die Induktivitätszweige und der Stromquellenzweig eine Schnittmenge und es entsteht für $t > 0$ eine zustandsreduzierende algebraische Gleichung nach Def. 5.7 Für $t \rightarrow 0^+$ lautet diese Bedingung

$$j(0^+) - i_{L_1}(0^+) - i_{L_2}(0^+) = 0 \quad (8.103)$$

Es wird hier jeweils der rechtsseitige Grenzwert (z.B. $j(0^+) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} j(t)$) gewählt, um auch den Fall, dass die Ströme zum Zeitpunkt $t_S = 0$ springen, korrekt zu erfassen.

Die Laplacetransformierte von $\dot{u}_1(t)$ ergibt sich für $R_1 = \infty$ wiederum durch Grenzübergang aus (8.72).

$$\begin{aligned} \lim_{R_1 \rightarrow \infty} \dot{\underline{U}}_1(\underline{s}) &= \dot{\underline{U}}_1(\underline{s})|_{R_1=\infty} \\ &= \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \frac{\underline{s} \left(\underline{s} + \frac{R_2}{L_2} \right)}{\underline{s} + \frac{R_2}{L_1 + L_2}} J(\underline{s}) - \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \frac{\underline{s} + \frac{R_2}{L_2}}{\underline{s} + \frac{R_2}{L_1 + L_2}} i_{L_{1,0}} - \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \frac{\underline{s}}{\underline{s} + \frac{R_2}{L_1 + L_2}} i_{L_{2,0}} \end{aligned} \quad (8.104)$$

Dies lässt sich durch Polynomdivision umformen in:

$$\begin{aligned}
 \left. \dot{\underline{U}}_1(\underline{s}) \right|_{R_1=\infty} &= \\
 &= \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} (\underline{s} J(\underline{s}) - j(0^+)) + R_2 \left(\frac{L_1}{L_1 + L_2} \right)^2 J(\underline{s}) \\
 &\quad - \frac{(R_2 L_1)^2}{(L_1 + L_2)^3} \frac{1}{\underline{s} + \frac{R_2}{L_1 + L_2}} J(\underline{s}) + \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} (j(0^+) - i_{L_1,0} - i_{L_2,0}) \\
 &\quad - R_2 \left(\frac{L_1}{L_1 + L_2} \right)^2 \frac{1}{\underline{s} + \frac{R_2}{L_1 + L_2}} i_{L_1,0} + R_2 \frac{L_1 L_2}{(L_1 + L_2)^2} \frac{1}{\underline{s} + \frac{R_2}{L_1 + L_2}} i_{L_2,0}
 \end{aligned} \tag{8.105}$$

Hier gelingt also aufgrund von Satz 8.1 eine Rücktransformation in den Bereich der gewöhnlichen Funktionen nur, wenn die Anregung $j(t)$, die für $t > t_Q < t_S = t_0 = 0$ gegeben ist, zusätzlich differenzierbar vorausgesetzt wird, $j(t)$ und $j^{(1)}(t)$ laplacetransformierbar sind und die Zielfangswerte die Gleichung (8.106) erfüllen.

$$j(0^+) - i_{L_1,0} - i_{L_2,0} = 0 \tag{8.106}$$

Wiederum wie beim Beispiel 5.1 und dem Fall $R = 0$ folgt die Bedingung (8.106) aus der zustandsreduzierenden algebraischen Gleichung (5.27) bzw. (8.103) unter der Annahme, dass es für die Zielfangswerte $i_{L_1,0}, i_{L_2,0}$ eine Lösung des Anfangswertproblems 2. Art gibt.

Die Bedingung, die zum Verschwinden desjenigen Anteils der Laplacetransformierten $\left. \dot{\underline{U}}_1(\underline{s}) \right|_{R_1=\infty}$, dem ein Diracstoß im Zeitbereich zugeordnet werden muss, führt, ergibt sich also wiederum direkt aus der zustandsreduzierenden algebraischen Gleichung. Ist also $j(t)$ differenzierbar und (8.106) erfüllt, so gilt im Zeitbereich für $t > 0$:

$$\begin{aligned}
 \left. \dot{u}_1(t) \right|_{R_1=\infty} &= \\
 &\quad \underbrace{\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_1} j^{(1)}(t) + R_2 \left(\frac{L_1}{L_1 + L_1} \right)^2 j(t)}_{D\dot{u}_{1,1}} \\
 &\quad - \underbrace{\int_0^t \frac{(R_2 L_1)^2}{(L_1 + L_2)^3} e^{-\frac{R_2(t-t')}{L_1 + L_2}} j(t') dt'}_{h_{\dot{u}_1}(t)} \\
 &\quad - \underbrace{R_2 \left[\left(\frac{L_1}{L_1 + L_2} \right)^2 + \frac{L_1 L_2}{(L_1 + L_2)^2} \right] e^{-\frac{R_2}{L_1 + L_2} t} i_{L_1,0}^{x_0}}_{\dot{u}_{1,zi,0}(t)} \\
 &\quad + \underbrace{R_2 \frac{L_1 L_2}{(L_1 + L_2)^2} e^{-\frac{R_2}{L_1 + L_2} t} j(0)}_{\dot{u}_{1,d,0}(t)}
 \end{aligned} \tag{8.107}$$

Dieses Ergebnis stimmt mit (5.37) für $t_0 = 0$ und $v(t) \equiv 0$ und mit (5.42) für ein differenzierendes Netzwerkmodell überein. (5.42) gilt für dieses Beispiel für

$$j(t) = e_1(t), \quad n_Q = 1, \quad n_A = 2, \quad n_R = 1, \quad r_1 = r = 0, \quad n = 1 \quad (8.108)$$

und eine mögliche Wahl für den einzigen Anfangszustand ist :

$$x_0 = i_{L_1,0} \quad (8.109)$$

Die Gleichung (5.46) lautet in diesem Fall

$$\begin{pmatrix} i_{L_1,0} \\ i_{L_2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{L_1}(0^+) \\ i_{L_2}(0^+) \end{pmatrix} \Big|_{R_1=\infty} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} j(0) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} x_0. \quad (8.110)$$

Das Ergebnis entspricht auch (5.40) für $t_S = t_0 = 0$. Als Zustand hätte außer $i_{L_1,0}$ auch $i_{L_2,0}$ oder eine Linearkombination von beiden vorgegebenen Anfangswerten gewählt werden können. Insofern besteht hier eine gewisse Willkür.

Dass (8.110) tatsächlich aus den Netzwerkgleichungen im Laplacebereich unter der Voraussetzung (8.106) folgt, soll nun wieder mit dem 1. Grenzwertsatz aus der Form von $\underline{I}_{L_1,2}(\underline{s})|_{R_1=\infty}$ abgeleitet werden.

Für die Laplacetransformationen der Ströme für $R_1 = \infty$ gilt mit (8.73) und (8.75):

$$\begin{aligned} \lim_{R_1 \rightarrow \infty} \underline{I}_{L_1}(\underline{s}) = & \frac{L_2}{L_1 + L_2} \left(\frac{\underline{s} + \frac{R_2}{L_2}}{\underline{s} + \frac{R_2}{L_1 + L_2}} \right) \underline{J}(\underline{s}) - \frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{1}{\underline{s} + \frac{R_2}{L_1 + L_2}} i_{L_2,0} \\ & + \frac{L_1}{L_1 + L_2} \frac{1}{\underline{s} + \frac{R_2}{L_1 + L_2}} i_{L_1,0} \end{aligned} \quad (8.111)$$

Die Rücktransformation dieses Ergebnisses in den Bereich gewöhnlicher, stetiger Zeitfunktionen gelingt auch für nur stückweise stetiges $j(t)$ sofort.

$$\begin{aligned} i_{L_1}(t) \Big|_{R_1=\infty} = & \frac{L_2}{L_1 + L_2} j(t) + R_2 \frac{L_1}{(L_1 + L_2)^2} \int_0^t e^{-\frac{R_2}{L_1 + L_2}(t-t')} j(t') dt' \\ & + \left(\frac{L_1}{L_1 + L_2} i_{L_1,0} - \frac{L_2}{L_1 + L_2} i_{L_2,0} \right) e^{-\frac{R_2}{L_1 + L_2} t}, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (8.112)$$

und für $i_{L_1}(0^+)|_{R_1=\infty}$ ergibt sich sofort mit dem 1. Grenzwertsatz:

$$i_{L_1}(0^+) \Big|_{R_1=\infty} = i_{L_1,0} + \frac{L_2}{L_1 + L_2} (j(0^+) - i_{L_1,0} - i_{L_2,0}) \quad (8.113)$$

Der gewünschte Anfangswert $i_{L_1,0}$ wird von $i_{L_1}(t)|_{R_1=\infty}$ also nur stetig reproduziert, wenn $j(0^+)$ und die Anfangswerte $i_{L_1,0}, i_{L_2,0}$ die aus der zustandsreduzierenden Schnittmengengleichung resultierende Gleichung (8.106) erfüllen. Ist $j(t)$ differenzierbar, so ist auch $i_{L_1}(t)|_{R_1=\infty}$ differenzierbar.

Für die entsprechenden Laplacetransformationen gilt

$$L_1 \mathcal{L} \left\{ i_{L_1}^{(1)}(t) \Big|_{R_1=\infty} \right\} = \underline{s} L_1 \underline{I}_{L_1}(\underline{s}) \Big|_{R_1=\infty} - L_1 i_{L_1}(0^+) \Big|_{R_1=\infty} \quad (8.114)$$

Ist (8.106) verletzt, so gilt für $i_{L_1}^{(1)}(t) \Big|_{R_1=\infty}$ also offenbar nicht

$$L_1 \mathcal{L} \left\{ i_{L_1}^{(1)}(t) \Big|_{R_1=\infty} \right\} = \underline{s} L_1 \underline{I}_{L_1}(\underline{s}) \Big|_{R_1=\infty} - L_1 i_{L_1,0}. \quad (8.115)$$

Genau dann wenn (8.106) gilt und $j(t)$ differenzierbar ist, lässt sich also die Zweigggleichung für die Induktivität L_1 im Zeitbereich für $i_{L_1}(t)$ und $u_{L_1}(t)$ analog zu (8.92)–(8.94) zeigen.

Ist (8.106) verletzt, so gibt es im Bereich der gewöhnlichen Funktionen also offenbar keine Lösung des Anfangswertproblems. Dieses Problem können wir erst auflösen, wenn wir am Ende der Vorlesung den Ableitungssatz auch für Funktionen $i_{L_1}(t) \Big|_{R_1=\infty}$ mit Sprüngen an Unstetigkeitsstellen zur Verfügung haben werden. Denn die Annahme einer Unstetigkeitsstelle der Funktion $i_{L_1}(t) \Big|_{R_1=\infty}$ für $t = 0$, an der diese Funktion von $i_{L_1,0}$ auf den in (8.113) berechneten Wert springt, wird das Problem auflösen. Für eine unstetige Funktion können wir die Zweigggleichung $L_1 \frac{di_{L_1}(t)}{dt} = u_{L_1}(t)$ für $t = 0$ im Bereich gewöhnlicher Funktionen jedoch gar nicht formulieren. Um also konsequent im Bereich gewöhnlicher Funktionen zu bleiben, sind also auch für $i_{L_1}(t) \Big|_{R_1=\infty}$ die Voraussetzungen (8.106) und $j(t)$ differenzierbar notwendig, obwohl zunächst keine Schwierigkeiten bei der Rücktransformation auftraten. Unter diesen Voraussetzungen lässt sich (8.112) umformen in :

$$\begin{aligned} i_{L_1}(t) \Big|_{R_1=\infty} &= \\ & \underbrace{\frac{L_2}{L_1 + L_2} j(t)}_{D_{i_{L_1,0}}} + \underbrace{\int_0^t R_2 \frac{L_1}{(L_1 + L_2)^2} e^{-\frac{R_2}{L_1 + L_2}(t-t')} j(t') dt'}_{h_{i_{L_1}}(t)} \\ & + \underbrace{i_{L_1,0} e^{-\frac{R_2}{L_1 + L_2} t}}_{i_{L_1,zi,0}(t)} - \underbrace{j(0) \frac{L_2}{L_1 + L_2} e^{-\frac{R_2}{L_1 + L_2} t}}_{i_{L_1,d,0}(t)} \end{aligned} \quad (8.116)$$

Diese Form entspricht wiederum (5.42) mit den in (8.108) und (8.110) zusammengefassten Festlegungen. Ferner entspricht (8.116) wiederum (5.35) für $v(t) = 0, t_0 = 0$.

Aus (8.76) folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{R_1 \rightarrow \infty} \underline{I}_{L_2}(\underline{s}) &= \\ & \frac{L_1}{L_1 + L_2} \left(1 - \frac{\frac{R_2}{L_1 + L_2}}{\underline{s} + \frac{R_2}{L_1 + L_2}} \right) \underline{J}(\underline{s}) \\ & - \frac{L_1}{L_1 + L_2} \frac{1}{\underline{s} + \frac{R_2}{L_1 + L_2}} i_{L_1,0} \\ & + \frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{1}{\underline{s} + \frac{R_2}{L_1 + L_2}} i_{L_2,0} \end{aligned} \quad (8.117)$$

Auch hier gelingt die Rücktransformation in den Bereich der gewöhnlichen Zeitfunktionen bereits für stückweise stetiges $j(t)$ und es folgt analog zu (8.113):

$$i_{L_2}(0^+) \Big|_{R_1=\infty} = i_{L_2,0} + \frac{L_1}{L_1 + L_2} (j(0^+) - i_{L_1,0} - i_{L_2,0}) \quad (8.118)$$

Auch hier nimmt $i_{L_2}(t)|_{R_1=\infty}$ den vorgegebenen Anfangswert nur stetig an, wenn $j(0^+)$ und die Anfangswerte die Gleichung (8.106) für $R_1 = \infty$ erfüllen. Aus (8.113) und (8.118) folgt sofort

$$i_{L_1}(0^+) \Big|_{R_1=\infty} + i_{L_2}(0^+) \Big|_{R_1=\infty} = j(0^+). \quad (8.119)$$

(8.119) und damit die rechte Gleichung in (8.110) mit $x_0 = i_{L_1}(0^+)$ sind also auch gültig, falls nur $j(t)$ differenzierbar ist, aber (8.106) verletzt ist und keine Lösung des Anfangswertproblems 2. Art gefunden werden kann.

Die in Kapitel 5 für Beispiel 5.2 gefundenen Bedingungen für die Lösbarkeit des Anfangswertproblems 2. Art ergeben sich also aus den Bedingungen, unter denen alle Zweigvariablen im Laplacebereich in den Bereich der gewöhnlichen Zeitfunktionen zurücktransformiert werden können. Dies ist immer so, wie im Kapitel 8.2 gezeigt werden wird.

Wenn die vorgegebenen Zielanfangswerte $i_{L_1,0}, i_{L_2,0}$ (8.106) nicht erfüllen, lassen sich also, wie bereits angedeutet, die Ergebnisse (8.113) und (8.118) für $i_{L_1}(t)$ und $i_{L_2}(t)$ so verstehen, dass diese Ströme zum Zeitpunkt $t = 0$ instantan von $i_{L_1,0}$ bzw. $i_{L_2,0}$ auf die in (8.113) und (8.118) berechneten Werte springen, so dass unmittelbar nach diesen Sprüngen die Knotengleichung immer erfüllt ist und die Ströme für $t > 0$ als stetig angenommen werden können. Um die Induktivitätsspannungen zu dem Zeitpunkt $t = 0$, an dem die Induktivitätsströme springen, genauer zu betrachten, wird nun das Beispiel 8.1 im Zeitbereich unter folgenden, die Rechnung vereinfachenden Voraussetzungen nochmals detailliert untersucht:

$$i_{L_1,0} = i_{L_2,0} = 0, \quad L_1 = L_2, \quad j(t) = J_0 = \text{const.}, \quad R_1 = \alpha R_2, \quad \alpha \gg 1 \quad (8.120)$$

Unter diesen Voraussetzungen ($\alpha \neq \infty$) lässt sich das Anfangswertproblem im Bereich gewöhnlicher Zeitfunktionen ohne Schwierigkeiten lösen. Aus (8.75), (8.76), (8.88) folgt für diesen Fall:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{L_1}(\underline{s}) &= \alpha \frac{R_2}{L} \frac{\underline{s} + \frac{R_2}{L}}{(\underline{s} - A_1)(\underline{s} - A_2)\underline{s}} J_0 \\ \underline{I}_{L_2}(\underline{s}) &= \alpha \frac{R_2}{L} \frac{1}{(\underline{s} - A_1)(\underline{s} - A_2)} J_0 \end{aligned} \quad (8.121)$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= -\frac{R_2}{L} \left(\alpha + \frac{1}{2} + \sqrt{\alpha^2 + \frac{1}{4}} \right) \stackrel{\alpha \gg 1}{\approx} -\frac{2R_2}{L} \alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} -\infty^1 \Rightarrow -\frac{1}{\Re\{A_1\}} = \frac{L}{2\alpha R_2} =: \tau_1 \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0 \\
A_2 &= -\frac{R_2}{L} \left(\alpha + \frac{1}{2} - \underbrace{\alpha \sqrt{1 + \frac{1}{4\alpha^2}}}_{\approx 1 + \frac{1}{8\alpha^2}} \right) \stackrel{\alpha \gg 1}{\approx} -\frac{R_2}{L} \left(\alpha + \frac{1}{2} - \alpha - \frac{1}{8\alpha} \right) \stackrel{\alpha \gg 1}{\approx} -\frac{R_2}{2L}
\end{aligned} \tag{8.122}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\alpha \frac{R_2}{L} \frac{(\underline{s} + \frac{R_2}{L}) J_0}{(\underline{s} - A_1)(\underline{s} - A_2)\underline{s}} = \frac{c_1}{\underline{s}} + \frac{c_2}{(\underline{s} - A_1)} + \frac{c_3}{(\underline{s} - A_2)}$$

$$c_1 = \alpha \frac{R_2}{L} \frac{\frac{R_2}{L}}{A_1 A_2} J_0 = J_0 \tag{8.123}$$

$$c_2 = \alpha \frac{R_2}{L} \frac{A_1 + \frac{R_2}{L}}{(A_1 - A_2) A_1} J_0 = \alpha \frac{(-2\alpha + 1)}{(-2\alpha + \frac{1}{2})(-2\alpha)} J_0 \stackrel{\alpha \gg 1}{\approx} -\frac{1}{2} J_0 \tag{8.124}$$

$$c_3 = \alpha \frac{R_2}{L} \frac{A_2 + \frac{R_2}{L}}{(A_2 - A_1) A_2} J_0 = \alpha \frac{(-\frac{1}{2} + 1)}{(-\frac{1}{2} + 2\alpha)(-\frac{1}{2})} J_0 \stackrel{\alpha \gg 1}{\approx} -\frac{1}{2} J_0 \tag{8.125}$$

$$\alpha \frac{R_2}{L} \frac{1}{(\underline{s} - A_1)(\underline{s} - A_2)} J_0 = \frac{b_1}{(\underline{s} - A_1)} + \frac{b_2}{(\underline{s} - A_2)}$$

$$b_1 = \alpha \frac{R_2}{L} \frac{1}{A_1 - A_2} J_0 = \frac{\alpha}{-2\alpha + \frac{1}{2}} J_0 \stackrel{\alpha \gg 1}{\approx} -\frac{1}{2} J_0 \tag{8.126}$$

$$b_2 = \alpha \frac{R_2}{L} \frac{1}{A_2 - A_1} J_0 = \frac{\alpha}{-\frac{1}{2} + 2\alpha} J_0 \stackrel{\alpha \gg 1}{\approx} \frac{1}{2} J_0 \tag{8.127}$$

Somit folgt für die Ströme im Zeitbereich

$$i_{L_1}(t) = J_0 \left(1 - \frac{1}{2} e^{-2\alpha \frac{R_2}{L} t} - \frac{1}{2} e^{-\frac{R_2}{2L} t} \right), \quad t > 0 \tag{8.128}$$

$$i_{L_2}(t) = \frac{1}{2} J_0 \left(-e^{-2\alpha \frac{R_2}{L} t} + e^{-\frac{R_2}{2L} t} \right), \quad t > 0 \tag{8.129}$$

¹Für sehr große α liegen A_1 und A_2 sehr weit voneinander entfernt. Das zu diesem Beispiel im Zeitbereich zugeordnete differential-algebraische System der Netzwerkgleichungen wird daher als ein steifes System (Englisch: stiff system oder stiff problem) bezeichnet. Dies ist immer der Fall, falls große Abstände zwischen den natürlichen Frequenzen auftreten.

Für die Spannung $\dot{u}_1(t)$ gilt:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1(t) &= L \frac{d i_{L_1}}{dt} = \\ L J_0 \left(\alpha \frac{R_2}{L} e^{-2\alpha \frac{R_2}{L} t} + \frac{1}{4} \frac{R_2}{L} e^{-\frac{R_2}{2L} t} \right) &= \\ \underbrace{\alpha R_2 J_0 e^{-2\alpha \frac{R_2}{L} t}}_{u_{1, \text{sta}}(t)} + \frac{1}{4} R_2 J_0 e^{-\frac{R_2}{2L} t} \quad , \quad t > 0 \end{aligned} \quad (8.130)$$

Das transiente Verhalten sowohl von $i_{L_1}(t)$, $i_{L_2}(t)$ als auch von $\dot{u}_1(t)$ wird durch zwei abklingende Exponentialfunktionen mit sehr unterschiedlichen Zeitkonstanten $\tau_1 = \frac{L}{R_2} \frac{1}{2\alpha}$, $\tau_2 = \frac{2L}{R_2}$ beschrieben, wie den Abbildungen 8.11 und 8.12 deutlich zu entnehmen ist.

Für $R_1 \rightarrow \infty$, also $\alpha \rightarrow \infty$ gilt $\tau_1 \rightarrow 0$. Für $\tau_1 \rightarrow 0$ springen die Ströme $i_{L_1}(t)$ und $i_{L_2}(t)$ von $i_{L_1,0} = i_{L_2,0} = 0$ auf $J_0/2$, was den Ergebnissen (8.113), (8.118) entspricht.

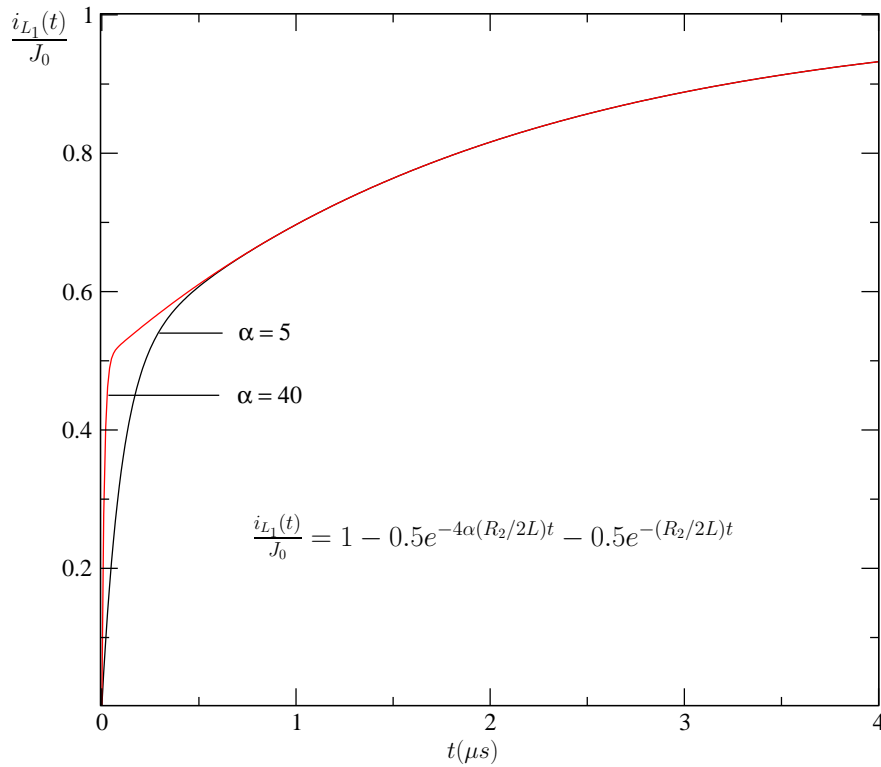
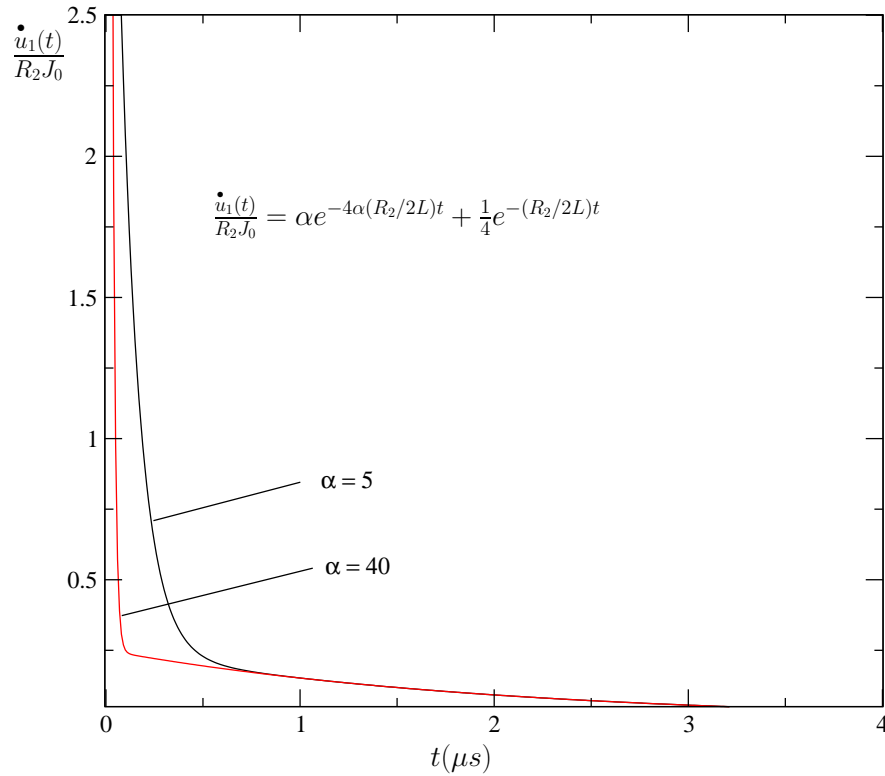


Abbildung 8.11: Verlauf von $i_{L_1}(t)$ für verschiedene α und $\tau_2 = \frac{2L}{R_2} = 2\mu s$

Abbildung 8.12: Verlauf von $\dot{i}_1(t)$ für verschiedene α und $\tau_2 = \frac{2L}{R_2} = 2\mu s$

Die durch Rücktransformation in den Bereich der gewöhnlichen Funktionen gewonnenen Anfangswerte $i_{L_1}(0^+)|_{R_1=\infty}$ und $i_{L_2}(0^+)|_{R_1=\infty}$ aus (8.113), (8.118) geben also offenbar den Funktionswert nach dem anfänglichen Sprung richtig wieder.

Die nicht mit der kleinen Zeitkonstante τ_1 verknüpften Anteile von (8.128) und (8.130) lassen sich aber auch aus den (5.42) entsprechenden Darstellungen (8.107) und (8.116) gewinnen, wenn man in diesen Darstellungen für den Anfangszustand x_0 nicht $i_{L_1,0}$ sondern den Anfangswert $i_{L_1}(0^+)$ nach dem anfänglichen Sprung vorgibt:

$$x_0 = \frac{J_0}{2} \quad (8.131)$$

Setzt man dies zusammen mit den anderen Festlegungen aus (8.120) in (8.107) ein, so ist die Summe der letzten beiden Terme sofort 0 und die anderen ergeben sich für $t > 0$ zu

$$\begin{aligned} u_1(t) \Big|_{R_1=\infty, \text{ gewöhnlicher Funktionsanteil}} &= u_{1,g}(t) \Big|_{R_1=\infty} \\ &= \frac{R_2}{4} J_0 - \frac{R_2^2}{8L} e^{-\frac{R_2}{2L}t} \int_0^t e^{\frac{R_2}{2L}t'} J_0 dt' \\ &= \frac{R_2}{4} J_0 e^{-\frac{R_2}{2L}t}. \end{aligned} \quad (8.132)$$

Analog folgt aus (8.116) unter den gleichen Voraussetzungen für $t > 0$:

$$\begin{aligned}
i_{L_1}(t) \Big|_{R_1=\infty, \text{ gewöhnlicher Funktionsanteil}} &= i_{L_1,g}(t) \Big|_{R_1=\infty} \\
&= \frac{1}{2}J_0 + \frac{R_2}{4L}e^{-\frac{R_2}{2L}t} \int_0^t e^{\frac{R_2}{2L}t'} J_0 dt' \\
&= J_0 - \frac{J_0}{2}e^{-\frac{R_2}{2L}t} \quad (8.133)
\end{aligned}$$

Die (5.42) entsprechenden Darstellungen (8.107) bzw. (8.116) geben also auch bei differenzierenden Netzwerkmodellen und/oder bei Vorgabe von inkonsistenten Zielanfangswerten, die (8.106) nicht erfüllen, das Netzwerkverhalten für alle $t > 0$ richtig wieder, wenn man dabei die Anfangswerte und Anfangszustände als Anfangswerte $\vec{x}_A(0^+)$ und Anfangszustände $\vec{x}(0^+)$ nach einem möglichen anfänglichen, schnellen transienten Ausgleichsvorgang versteht. Man rechnet leicht nach, dass (8.132) und (8.133) die Zweiggleichung für L_1 für $t > 0$ erfüllen.

Der mit der Zeitkonstante $\tau_1 = \frac{1}{-A_1}$ verknüpfte, schnell abklingende Teil der Spannungsfunktion $\dot{u}_{1,\text{sta}}(t)$ hat für verschiedene Werte von α und $\tau_2 = \frac{2L}{R_2} = 2\mu s$ die Gestalt aus Abbildung 8.13.

$\dot{u}_{1,\text{sta}}(t)$ strebt an der Stelle $t = 0$ für $R_1 \rightarrow \infty$ (also $\tau_1 \rightarrow 0$) genau wie $-i_C(t)$ an der Stelle $t = t_S$ für $R \rightarrow 0$ im Beispiel 5.1 und (5.54) gegen unendlich. Für $t > t_S$ verschwindet $-i_C(t)$ für $R \rightarrow 0$ im Beispiel 5.1 und (5.54) genau so wie $\dot{u}_{1,\text{sta}}(t)$ für $R_1 \rightarrow \infty$ in Abbildung 8.13.

In (5.58) wurde gezeigt, dass das Integral über $i_C(t)$ unabhängig von R den Wert $-Cu_C(t_S^-)$ hat, wobei

$$\frac{-Cu_C(t_S^-)}{C} = -u_C(t_S^-) = u_C(t_S^+) - u_C(t_S^-). \quad (8.134)$$

gerade dem Sprung der Spannung $u_C(t)$ für $v(t) \equiv 0$ und $R \rightarrow 0$ entspricht. Entsprechendes gilt auch für den schnellen transienten Anteil (sta) in $\dot{u}_1(t)$. Dieser ist gegeben über

$$\dot{u}_{1,\text{sta}}(t) = \Theta(t)\alpha R_2 J_0 e^{-2\alpha \frac{R_2}{L}t} = \Theta(t)\frac{L}{2}J_0 \left(\frac{2\alpha R_2}{L} \right)^{1/\tau_1} e^{-t/\left(\frac{L}{2\alpha R_2}\right)} = \Theta(t)\frac{L}{2}J_0 \frac{1}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \quad (8.135)$$

Es gilt unabhängig von α :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t)\alpha R_2 J_0 e^{-2\alpha \frac{R_2}{L}t} dt = \alpha R_2 J_0 \frac{1}{-2\alpha \frac{R_2}{L}} e^{-2\alpha \frac{R_2}{L}t} \Big|_0^{\infty} = L \frac{J_0}{2} \quad (8.136)$$

Analog zu (8.134) gilt also

$$L \frac{J_0}{2} \frac{1}{L} = \frac{J_0}{2} = i_{L_1} \Big|_{R_1=\infty}(0^+) - i_{L_1} \Big|_{R_1=\infty}(0^-) \quad (8.137)$$

Der Wert des Integrals (8.136) geteilt durch L entspricht also, unabhängig von α , dem Sprung von $i_{L_1}(t)$ an der Stelle $t = 0$ für $R_1 \rightarrow \infty$. Das Integral über die in Abbildung 8.13 dargestellten Funktionen beschreibt also unabhängig von α den Sprung des Stroms $i_{L_1}(t)$ bei $t = 0$ im Fall $\alpha \rightarrow \infty$.

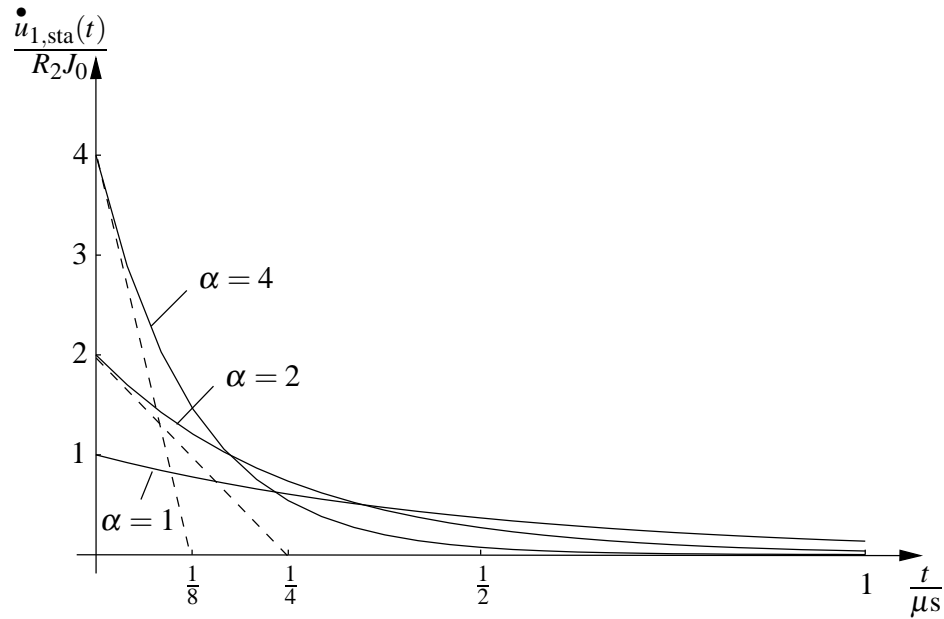


Abbildung 8.13: Verlauf des schnell abklingenden Teils $\dot{u}_{1,sta}(t)$ von $\dot{u}_1(t)$ für $\tau_2 = \frac{2L}{R_2} = 2\mu s$ und verschiedene α .

Diesem anfänglichen, transienten Ausgleichsvorgang, dem offenbar sowohl in Beispiel 5.1 für $R \rightarrow 0$ als auch in Beispiel 8.1 für $R_1 \rightarrow \infty$ ein von R bzw. R_1 unabhängiges Integral zuzuordnen ist, kann also wieder der in Definition 5.11 eingeführte Diracstoß zugeordnet werden und es gilt analog zu (5.60):

$$\frac{d}{dt} i_{L_1, sta}(t) = \frac{1}{L} \dot{u}_{1, sta}(t) = \Theta(t) \frac{J_0}{2} \frac{1}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \xrightarrow[\tau_1 \rightarrow \infty]{\tau_1 \rightarrow 0} \overbrace{\left(i_{L_1}(0^+) - i_{L_1}(0^-) \right)}^{\frac{J_0}{2}} \Big|_{R_1=\infty} \delta(t) \circ \bullet \frac{J_0}{2}. \quad (8.138)$$

Wie diese Konvergenz genau mathematisch zu verstehen ist, wird allerdings wiederum erst am Ende der Vorlesung in Kapitel 10 genau ausgeführt. Die Zuordnung im Laplacebereich in (8.138) entspricht dabei für $j(0) = J_0, i_{L_1,0} = i_{L_2,0} = 0, L_1 = L_2 = L$ genau dem Term aus (8.105), dem auch bei differenzierbarem $j(t)$ keine gewöhnliche Funktion zugeordnet werden kann. Ebenso wie $u_C|_{R=0}(t)$ in Beispiel 5.1 erzeugt die bei $t = 0$ unstetige Funktion $i_{L_1}|_{R_1=\infty}(t)$ bei der Ableitung einen mit der Sprunghöhe bei $t = 0$ gewichteten Diracstoß. Auch dieses Ergebnis wird in Kapitel 10 exakt bewiesen. Anschaulich ergibt sich für $R_1 = \infty$ insgesamt für $u_{L_1}(t)$ und $i_{L_1}(t)$:

$$i_{L_1}(t) = \Theta(t) \left(\frac{J_0}{2} + \frac{J_0}{2} \left(1 - e^{-\frac{R_2}{2L}t} \right) \right)$$

$$u_{L_1}(t) = \frac{L J_0}{2} \delta(t) + \Theta(t) \frac{L J_0}{2} \left(\frac{R_2}{2L} e^{-\frac{R_2}{2L}t} \right)$$

Bitte beachten Sie, dass für $t > 0$ auch für die Anteile von $u_{L_1}(t)$ und $i_{L_1}(t)$, die keinen Diracstoß (keine verallgemeinerte Funktion) enthalten, die Zweiggleichung der Induktivität L erfüllt ist. Die gilt allgemein, wie in Bemerkung 10.17 gezeigt werden wird.

Die Darstellung (5.42) beschränkt sich also offenbar auf den Anteil der Lösung des Anfangswertproblems, der durch gewöhnliche Funktionen beschreibbar ist. Da dabei der unter Umständen auftretende, anfängliche schnelle transiente Ausgleichsvorgang nicht mitbeschrieben

wird, ist unklar, wie sich in diesen Fällen die Anfangszustände $\vec{x}(t_S^+)$ (und damit über (5.44) die Anfangsbedingungen $\vec{x}_A(t_S^+)$) nach dem über gewöhnliche Funktionen nicht beschreibbaren Ausgleichsvorgang bei $t = t_S$, die in (5.42) benötigt werden, aus den vorgegebenen Zielanfangswerten ergeben, wenn diese zustandsreduzierenden algebraischen Gleichungen für $t > 0$ widersprechen. Insofern ist (5.42) eine unvollständige Beschreibung.

Andererseits ist es nur durch Anwendung der Laplacetransformation gelungen, mit (8.113) und (8.118) die richtigen Anfangswerte nach dem anfänglichen, schnellen Ausgleichsvorgang zu bestimmen. Die Laplacetransformation erfasst also auch den schnellen transienten Ausgleichsvorgang für $R_1 = \infty$ richtig und beschreibt somit auch den Bereich der verallgemeinerten Funktionen bereits mit. Auch wenn man sich dem Fall $R_1 = \infty$ im Zeitbereich durch den Grenzübergang $R_1 \rightarrow \infty$ (so wie er für verallgemeinerte Funktionen (siehe Def. 10.6) festgelegt ist,) annähert, ergeben sich die Anfangswerte nach dem Schalten ohne Probleme in Einklang mit der zustandsreduzierenden Gleichung.

Bemerkung 8.15

Die Darstellung (5.42) aus Satz 5.1 beschreibt das Netzwerkverhalten auf alle Fälle richtig für $t > t_S$.

Für $t_0 = t_S$ sei der Fall, dass inkonsistente Zielanfangswerte $\vec{x}_A(t_S^-)$ vorgegeben sind, betrachtet. Auch in diesem Fall kann man von einer eindeutigen Lösung des Netzwerkmodells ausgehen, die an die Zielanfangswerte anschließt, wenn man im Gegensatz zur Definition 5.8 verallgemeinerte Funktionen als Lösungsbestandteile zulässt. (5.42) beschreibt dann nur den Anteil der Netzwerkreaktion, der durch gewöhnliche Funktionen beschrieben werden kann und nicht den instantan bei $t = t_S$ ablaufenden Ausgleichsvorgang, der durch verallgemeinerte Funktionen beschrieben wird und dafür sorgt, dass nach dem Ausgleichsvorgang die Netzwerkgleichungen durch die verbleibenden gewöhnlichen Funktionsanteile erfüllt werden. Dementsprechend bleibt in Satz 5.1 unklar, wie sich $\vec{x}(t_S^+)$ (und somit über (5.44) $\vec{x}_A(t_S^+)$) aus den inkonsistenten Anfangswerten $\vec{x}_A(t_S^-)$ ergeben. Falls $n = n_A$ gilt, gibt es keine inkonsistenten Anfangswerte und für $t_0 > t_S$ lässt sich jede Lösung des AWP 2. Art auch über eine Lösung des AWP 1. Art darstellen, die an physikalisch vorgegebene Anfangswerte $\vec{x}_A(t_S^-)$ vor dem Schalten stetig anschließt. Analog werden für $n < n_A$ und $t_0 > t_S$ nur Lösungen des AWP 2. Art akzeptiert, die sich auch über eine Lösung des AWP 1. Art darstellen lassen.

Bei der Lösung des AWP 1. Art treten bei inkonsistenten Anfangswerten $\vec{x}_A(t_S^-)$ Lösungsanteile mit Diracstößen (verallgemeinerten Funktionen) nur für $t = t_S$ nichtverschwindend auf. Daher gibt es für $n < n_A$, $t_0 > t_S$ und inkonsistente Anfangswerte \vec{x}_{A,t_0} keine akzeptable Lösung des AWP 2. Art, auch keine über verallgemeinerte Funktionen beschreibbare, wie sie sich formal durch Rücktransformation aus dem Laplacebereich bei Vorgabe von \vec{x}_{A,t_0} ergibt. Denn in dieser Rücktransformierten treten nichtverschwindende Lösungsanteile mit Diracstößen (verallgemeinerten Funktionen) bei $t = t_0 > t_S$ auf, die in einer Lösung des AWP 1. Art niemals vorkommen können.

Zum Beweis:

Diese Folgerungen werden durch das gerade behandelte Beispiel nahegelegt. Endgültig bewiesen wird Bemerkung 8.15 in Kapitel 8.2 unter Hinzunahme von Bemerkung 10.16 und Bemerkung 10.17.

8.2 Das allgemeine transiente Verhalten linearer, zeitinvarianter Netzwerkmodelle

Dieses Kapitel ist dem Beweis von Satz 5.1 gewidmet. Ausgangspunkt ist ein lineares, zeitinvariantes Zweipolnetzwerkmodell so wie es in der Voraussetzung von Satz 5.1 beschrieben wird, wobei jeder Zweipol als ein elementarer Zweipol angenommen wird. Um Missverständnisse zu vermeiden, werden unten nochmals die zugelassenen elementaren Zweipole aufgelistet. Es wird ferner angenommen, dass alle Quellenfunktionen nebst deren als existent angenommenen Ableitungen erster und höherer Ordnung (siehe Def. 5.6) in einer gemeinsamen Halbebene laplacetransformierbar sind. Darüberhinaus wird O.B.D.A (siehe Bemerkung 8.1) $t_0 = 0$ angenommen. (Die Beschränkung auf laplace-transformierbare Quellenfunktionen kann man nachträglich, nachdem man die Lösungsdarstellung (5.42) gefunden hat, leicht analog zu Bemerkung 8.12 beseitigen.) Zur Motivation der Darstellung der Zweiggleichungen im Laplacebereich in (8.139) – (8.145) wird zunächst die Existenz einer laplacetransformierbaren Lösung des Anfangswertproblems 2. Art angenommen.

Zugelassene elementare Zweipole

Alle Zweipolgleichungen im Zeitbereich gelten für $t > 0$.

- Feste Quelle (Spannungs- oder Stromquelle):

ZGL:

$$\begin{array}{lcl} i(t) & = & j(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \underline{I}(\underline{s}) = \underline{J}(\underline{s}) \\ \text{oder} \quad u(t) & = & v(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \underline{U}(\underline{s}) = \underline{V}(\underline{s}) \end{array} \quad (8.139)$$

- Lineare zeitinvariante R, L, C :

ZGL:

$$\begin{array}{lcl} u(t) & = & R \cdot i(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \underline{U}(\underline{s}) = R \cdot \underline{I}(\underline{s}) \\ u(t) & = & L \cdot \frac{d}{dt} i(t) \quad , \quad i(0^+) = i_0 \quad \circ \text{---} \bullet \quad \underline{U}(\underline{s}) = \underline{s} L \underline{I}(\underline{s}) - L i_0 \\ i(t) & = & C \cdot \frac{d}{dt} u(t) \quad , \quad u(0^+) = u_0 \quad \circ \text{---} \bullet \quad \underline{I}(\underline{s}) = \underline{s} C \underline{U}(\underline{s}) - C u_0 \end{array} \quad (8.140)$$

- Gesteuerte Quellen: $u_s(i_s)$ beliebige(r) Zweigspannung (Zweigstrom) mit $u_s \neq u, i_s \neq i$.

- Spannungsgesteuerte Spannungsquellen:

ZGL:

$$\begin{array}{lcl} u(t) & = & \beta_0 u_s(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \underline{U}(\underline{s}) = \beta_0 \underline{U}_s(\underline{s}) \\ u(t) & = & \beta_d \frac{d}{dt} u_s(t) \quad , \quad u_s(0^+) = u_{s,0} \quad \circ \text{---} \bullet \quad \underline{U}(\underline{s}) = \underline{s} \beta_d \underline{U}_s(\underline{s}) - \beta_d u_{s,0} \end{array} \quad (8.141)$$

- Stromgesteuerte Spannungsquellen: (z.B. induktive Kopplung)

ZGL:

$$\begin{array}{lcl} u(t) & = & r_0 i_s(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \underline{U}(\underline{s}) = r_0 \underline{I}_s(\underline{s}) \\ u(t) & = & r_d \frac{d}{dt} i_s(t) \quad , \quad i_s(0^+) = i_{s,0} \quad \circ \text{---} \bullet \quad \underline{U}(\underline{s}) = \underline{s} r_d \underline{I}_s(\underline{s}) - r_d i_{s,0} \end{array} \quad (8.142)$$

- Spannungsgesteuerte Stromquelle:

ZGL:

$$\begin{aligned} i(t) &= g_0 u_s(t) & \circ \longrightarrow \bullet \quad \underline{I}(\underline{s}) &= g_0 \underline{U}_s(\underline{s}) \\ i(t) &= g_d \frac{d}{dt} u_s(t) \quad , \quad u_s(0^+) = u_{s,0} & \circ \longrightarrow \bullet \quad \underline{I}(\underline{s}) &= \underline{s} g_d \underline{U}_s(\underline{s}) - g_d u_{s,0} \end{aligned} \quad (8.143)$$

- Stromgesteuerte Stromquelle:

ZGL:

$$\begin{aligned} i(t) &= \alpha_0 i_s(t) & \circ \longrightarrow \bullet \quad \underline{I}(\underline{s}) &= \alpha_0 \underline{I}_s(\underline{s}) \\ i(t) &= \alpha_d \frac{d}{dt} i_s(t) \quad , \quad i_s(0^+) = i_{s,0} & \circ \longrightarrow \bullet \quad \underline{I}(\underline{s}) &= \underline{s} \alpha_d \underline{I}_s(\underline{s}) - \alpha_d i_{s,0} \end{aligned} \quad (8.144)$$

- Nullator, Norator Paar:

ZGL:

$$\begin{aligned} i(t) &= 0 & \circ \longrightarrow \bullet \quad \underline{I}(\underline{s}) &= 0 \\ u(t) &= 0 & \circ \longrightarrow \bullet \quad \underline{U}(\underline{s}) &= 0 \end{aligned} \quad (8.145)$$

$\beta_{0,d}, r_{0,d}, g_{0,d}, \alpha_{0,d}$ sind reelle Zahlen, die nicht von \underline{s} abhängen.

Das in Definition 6.1 eingeführte Tableau der Netzwerkgleichungen hat im Laplacebereich die folgende Form:

$$\underline{N}(\underline{s}) \begin{pmatrix} \underline{\vec{U}}(\underline{s}) \\ \underline{\vec{I}}(\underline{s}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{MGL} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{SGL} \\ \underline{ZGL}(s) & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\vec{U}}(\underline{s}) \\ \underline{\vec{I}}(\underline{s}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{\vec{ZR}}(\underline{s}) \end{pmatrix} \quad (8.146)$$

mit

$$\underline{\vec{ZR}}(\underline{s}) =: \underline{\vec{ZRQ}}(\underline{s}) + \underline{\vec{ZRA}} \quad (8.147)$$

$\underline{\vec{ZRQ}}$ fasst die Beiträge aller festen (ungesteuerten) Spannungs- oder Stromquellen und $\underline{\vec{ZRA}}$ die Beiträge aller Anfangswerte zusammen. Sei $j_k - z$ der Index der Zweiggleichung des Zweiges in der die Quelle $e_k(t)$ ($\underline{E}_k(\underline{s}) = \mathcal{L}\{e_k(t)\}(\underline{s})$) liegt.

Dann gilt für $z+1 \leq i \leq 2z$

$$\begin{aligned} \underline{\vec{ZRQ}}(\underline{s}) &=: \left(\underline{\hat{E}}_{z+1}(\underline{s}), \dots, \underline{\hat{E}}_{2z}(\underline{s}) \right)^t \\ \underline{\hat{E}}_i(\underline{s}) &= \begin{cases} 0 & , \text{ falls } i \neq j_k \text{ für alle } 1 \leq k \leq n_Q \\ \underline{E}_k(\underline{s}) & , \text{ falls } i = j_k \text{ für ein } k \text{ mit } 1 \leq k \leq n_Q \end{cases} \\ \underline{\vec{ZRA}} &=: (X_{z+1}, \dots, X_{2z})^t \\ &= \underline{AX} \vec{x}_{A,0} \end{aligned} \quad (8.148)$$

Hierbei ist \underline{AX} eine reelle Matrix und $\vec{x}_{A,0}$ der Vektor der Zielanfangswerte aus Satz 5.1.

$\underline{N}(\underline{s})$ hat nur reelle Koeffizienten und Koeffizienten der Form: (reelle Konstante) $\cdot \underline{s}$.

Die Lösungen des Gleichungssystems (8.146) mit den Zusätzen (8.147), (8.148) werden im weiteren im Laplacebereich und im Zeitbereich untersucht. $\vec{x}_{A,0}$ und $\underline{E}_k(\underline{s}) = \mathcal{L}\{e_k(t)\}(\underline{s})$, $1 \leq k \leq n_Q$ werden dabei als vorgegeben betrachtet. Die Existenz einer Lösung des Anfangswertproblems 2. Art wird im weiteren Verlauf dieses Kapitels nicht mehr vorausgesetzt!

Bemerkung 8.16 (Eindeutige Lösbarkeit des Netzwerkmodells)

Das Gleichungssystem (8.146) hat genau dann für beliebiges $\vec{Z}\vec{R}(\underline{s})$ eine eindeutige Lösung, falls $\det(\underline{N}(\underline{s})) \neq 0$ ist. Um für alle Netzwerkvariablen eine Lösung im Zeitbereich bei vorgegebenen Anfangsbedingungen zu bestimmen, ist die Kenntnis der laplacetransformierten Netzwerkvariablen auf einer vertikalen Geraden in der s -Ebene ausreichend. Daher kann $\det(\underline{N}(\underline{s}_i)) = 0$ für endlich viele \underline{s}_i zugelassen werden. Nur der Fall

$$\det(\underline{N}(\underline{s})) \equiv 0 \text{ für alle } \underline{s} \quad (8.149)$$

wird ausgeschlossen. Solche Netzwerkmodelle haben keine eindeutigen Lösungen.

Sei als zu bestimmende Netzwerkvariable $a_m(t)$ O.B.D.A. der m -te Koeffizient von $(\vec{U}(\underline{s}), \vec{I}(\underline{s}))$ gewählt. Dann gilt nach der Cramerschen Regel:

$$\underline{A}_m(\underline{s}) = \sum_{k=1}^{n_Q} (-1)^{m+j_k} \underline{E}_k(\underline{s}) \frac{\det(\underline{N}_{j_k,m}(\underline{s}))}{\det(\underline{N}(\underline{s}))} + \sum_{k=z+1}^{2z} (-1)^{k+m} X_k \frac{\det(\underline{N}_{k,m}(\underline{s}))}{\det(\underline{N}(\underline{s}))} \quad (8.150)$$

$\underline{N}_{k,m}(\underline{s})$ entsteht dabei aus $\underline{N}(\underline{s})$ durch Streichen der k -ten Zeile und m -ten Spalte.

Bemerkung 8.17 (Determinantenentwicklungsformel, ohne Beweis)

Sei \underline{A} eine $n \times n$ -Matrix und seien P_1, \dots, P_l alle Permutationen (eindeutige Abbildungen) von $\{1, \dots, n\}$ auf sich selbst.

Dann gilt

$$\det(\underline{A}) = \det(a_{i,j}) = \sum_{\nu=1}^l (-1)^{T(P_\nu)} a_{P_\nu(1),1} \cdot a_{P_\nu(2),2} \cdots a_{P_\nu(n),n} \quad (8.151)$$

mit P_ν : ν -te Permutation und $T(P_\nu)$: Anzahl der Transpositionen von P_ν .

Aus dieser Bemerkung folgt sofort, dass sowohl $\det(\underline{N}(\underline{s}))$ als auch $\det(\underline{N}_{j,k}(\underline{s}))$ für alle j, k Polynome mit reellen Koeffizienten in \underline{s} sind. Da in jedem Summanden von (8.151) von jeder Spalte genau ein Element vorkommt gilt:

$$\text{grad} \left\{ \frac{\det(\underline{N}_{j,k}(\underline{s}))}{\det(\underline{N}(\underline{s}))} \right\} \leq n_A \quad (8.152)$$

Siehe Beispiel 8.1 für ein Beispiel mit $n_A = 2$.

Insgesamt ergibt sich damit für $\underline{A}_m(\underline{s})$ die Darstellung

$$\underline{A}_m(\underline{s}) = \sum_{k=1}^{n_Q} \underline{E}_k(\underline{s}) \underbrace{c_{j_k,m} \frac{\underline{P}_{j_k,m}(\underline{s})}{\underline{Q}_{j_k,m}(\underline{s})}}_{:=\underline{H}_{j_k,m}(\underline{s})} + \sum_{k=z+1}^{2z} X_k \underbrace{c_{k,m} \frac{\underline{P}_{k,m}(\underline{s})}{\underline{Q}_{k,m}(\underline{s})}}_{:=\underline{H}_{k,m}(\underline{s})} \quad (8.153)$$

dabei sind alle $c_{k,m}$ reelle Konstanten und für $c_{k,m} \neq 0$ sind $\underline{P}_{k,m}(\underline{s})$, $\underline{Q}_{k,m}(\underline{s})$ Polynome in \underline{s} mit einem Grad $\leq n_A$ in der normierten Form:

$$(\underline{Q}(\underline{s}) =) \underline{P}(\underline{s}) = \underline{s}^l + a_{l-1}\underline{s}^{l-1} + \cdots + a_0, \quad l \leq n_A \quad (8.154)$$

Die Polynome $\underline{P}_{k,m}(\underline{s})$, $\underline{Q}_{k,m}(\underline{s})$ sind so gewählt, dass sie keine gemeinsamen Nullstellen haben.

Bemerkung 8.18

Die $\underline{H}_{j_k,m}(\underline{s})$ aus der linken Summe von (8.153) können nach Definition 8.3 sofort als Übertragungsfunktionen identifiziert werden, denn bei der Anregung aus dem Ruhezustand durch nur eine ungesteuerte ideale Quelle (zum Beispiel $e_{k_0}(t)$, $1 \leq k_0 \leq n_Q$, $e_k(t) \equiv 0$ für $1 \leq k \leq n_Q$, $k \neq k_0$) folgt aus (8.153) $\underline{A}_m(\underline{s}) = \underline{H}_{j_{k_0},m}(\underline{s}) \underline{E}_{j_{k_0}}(\underline{s})$. Entsprechendes gilt aber auch für alle $\underline{H}_{k,m}(\underline{s})$ aus der rechten Summe von (8.153), die bisher nicht erfasst wurden. Sei zum Beispiel k_0 mit $z+1 \leq k_0 \leq 2z$ beliebig herausgegriffen und X_{k_0} durch die Laplacetransformierte einer dimensionsmäßig passenden vorgegebenen, hinreichend oft differenzierbaren Zeitfunktion $\overset{\circ}{e}_{k_0}(t)$ ergänzt

$$X_{k_0} \longrightarrow X_{k_0} + \mathcal{L} \left\{ \overset{\circ}{e}_{k_0}(t) \right\}(\underline{s}) = X_{k_0} + \overset{\circ}{E}_{k_0}(\underline{s}), \quad (8.155)$$

so ändert sich in (8.146) nur eine Zeile der rechten Seite und analog zu (8.150), (8.153) folgt sofort $\underline{A}_m(\underline{s}) = \underline{H}_{k_0,m}(\underline{s}) \overset{\circ}{E}_{k_0}(\underline{s})$ für $E_k(\underline{s}) = 0$, $1 \leq k \leq n_Q$, $X_k = 0$, $z+1 \leq k \leq 2z$

Weiter unten wird gezeigt, dass die Ergänzung (8.155) auch als Erweiterung des gegebenen Netzwerkmodells durch einen elementaren Zweipol, der eine ideale, ungesteuerte, laplacetransformierbare und hinreichend oft differenzierbare Quelle $e(t)$ darstellt, verstanden werden kann, so dass alle $\underline{H}_{k,m}(\underline{s})$ auf der rechten Seite von (8.153) als Frequenzgänge eines entsprechend erweiterten Netzwerkmodells interpretiert werden können. Wie ebenfalls gezeigt wird, ändert sich durch diese Erweiterung die Lösbarkeit des Netzwerkmodells und auch das Netzwerkverhalten ohne Erregung, das über die asymptotische Stabilität bestimmt, nicht. Bei Verschwinden der Anfangswerte ($X_k = 0$, $z+1 \leq k \leq 2z$) und Anwendung der Ersetzungsregeln

$$\begin{aligned} \underline{A}_m(\underline{s}) &\rightarrow \underline{A}_m \quad (1 \leq n \leq 2z) \\ \overset{\circ}{E}_{k_0}(\underline{s}) &\rightarrow \overset{\circ}{E}_{k_0} \\ \underline{E}_k(\underline{s}) &\rightarrow \underline{E}_k \quad (1 \leq k \leq n_Q) \\ \underline{I}_l(\underline{s}) &\rightarrow \underline{I}_l \quad (1 \leq k \leq z) \\ \underline{U}_l(\underline{s}) &\rightarrow \underline{U}_l \quad (1 \leq k \leq z) \\ \underline{s} &\rightarrow j\omega \end{aligned} \quad (8.156)$$

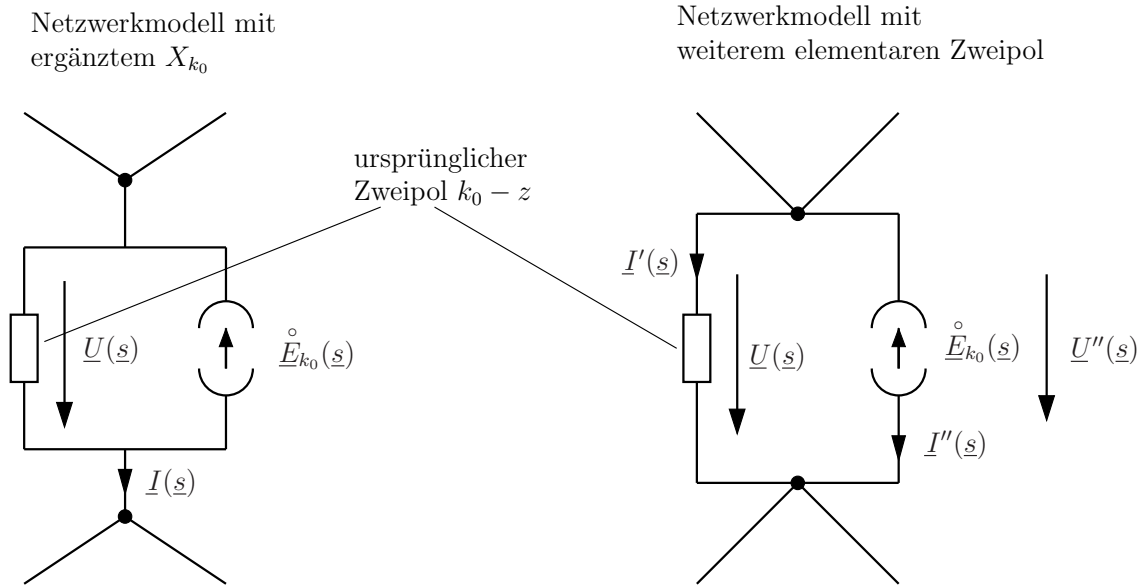
beim erweiterten Netzwerkmodell entsteht ein analoges algebraisches Gleichungssystem, dem ein Netzwerkmodell im Bereich der komplexen Wechselstromrechnung zugeordnet werden kann. $\underline{H}_{k_0,m}(\underline{s})$ ergibt sich für $\underline{s} = j\omega$ aus diesem erweiterten Netzwerkmodell als Frequenzgang über:

$$\underline{H}_{k_0,m}(j\omega) = \frac{\underline{A}_m}{\overset{\circ}{E}_k \mid_{\underline{E}_k=0, 1 \leq k \leq n_Q}}$$

Im Fall nicht asymptotisch stabiler Netzwerkmodelle ist der hier definierte Frequenzgang nicht messbar und das Resultat einer formalen Anwendung der komplexen Wechselstromrechnung.

Beweis zu Bemerkung 8.18:

Fall 1: Zu k_0 ist eine elementare Zweipolgleichung zugeordnet, die die Dimension eines laplace-transformierten Stroms hat.



Falls das linke Netzwerkmodell eine Lösung hat, so entsteht durch Übernahme aller gemeinsamen Variablen und die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned}\underline{U}''(\underline{s}) &= \underline{U}(\underline{s}) \\ \underline{I}''(\underline{s}) &= -\underline{\overset{\circ}{E}}_{k_0}(\underline{s}) \\ \underline{I}'(\underline{s}) &= \underline{I}(\underline{s}) - \underline{I}''(\underline{s}) = \underline{I}(\underline{s}) + \underline{\overset{\circ}{E}}_{k_0}(\underline{s})\end{aligned}$$

eine Lösung des rechten Gleichungssystems. Gleiches gilt auch umgekehrt, falls man $\underline{I}(\underline{s})$ über

$$\underline{I}(\underline{s}) = \underline{I}'(\underline{s}) + \underline{I}''(\underline{s}) = \underline{I}'(\underline{s}) - \underline{\overset{\circ}{E}}_{k_0}(\underline{s})$$

bestimmt. Daraus folgt die Behauptung, da es zwischen den Lösungen der beiden Netzwerkmodelle eine eindeutige Abbildung gibt.

Fall 2: Zu k_0 sei eine elementare Zweipolgleichung zugeordnet, die die Dimension einer laplace-transformierten Spannung hat.

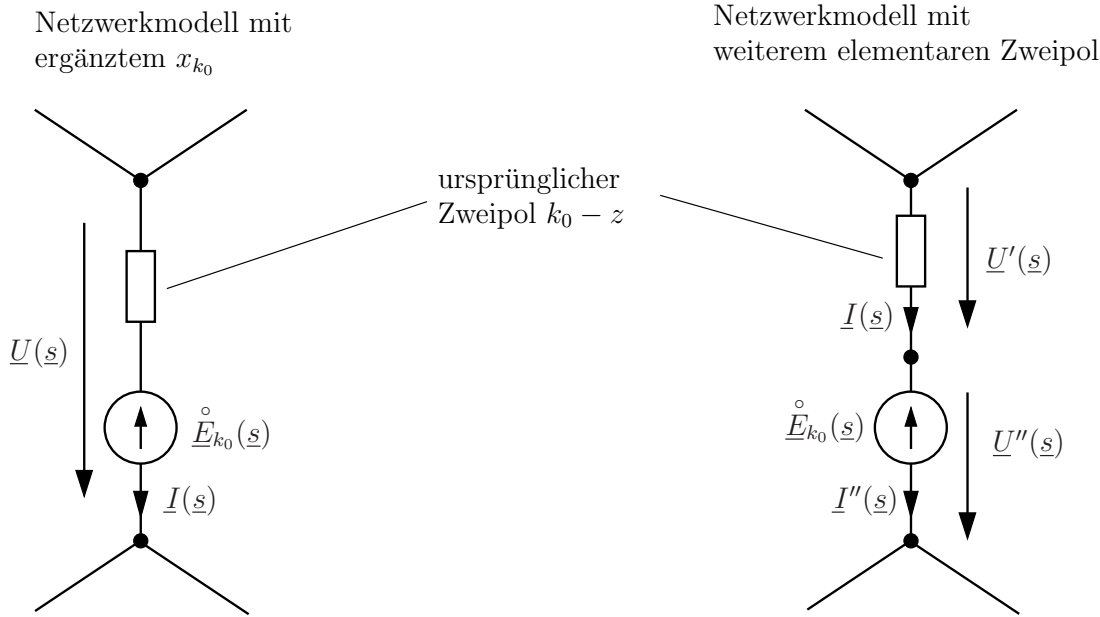
Falls das linke Netzwerkmodell eine Lösung hat, so entsteht durch Übernahme der gemeinsamen Variablen und die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned}\underline{I}''(\underline{s}) &= \underline{I}(\underline{s}) \\ \underline{U}''(\underline{s}) &= -\underline{\overset{\circ}{E}}_{k_0}(\underline{s}) \\ \underline{U}'(\underline{s}) &= \underline{U}(\underline{s}) - \underline{U}''(\underline{s}) = \underline{U}(\underline{s}) + \underline{\overset{\circ}{E}}_{k_0}(\underline{s})\end{aligned}$$

eine Lösung des rechten Gleichungssystems. Gleiches gilt auch umgekehrt, falls man $\underline{U}(\underline{s})$ über

$$\underline{U}(\underline{s}) = \underline{U}'(\underline{s}) + \underline{U}''(\underline{s}) = \underline{U}'(\underline{s}) - \underline{\overset{\circ}{E}}_{k_0}(\underline{s})$$

bestimmt. Daher gibt es zwischen den Lösungen der beiden Netzwerkmodelle eine eindeutige Abbildung, woraus die Behauptung folgt.



Nach dem Fundamentalsatz der Algebra kann ein Polynom wie (8.154) immer in der Form

$$\underline{s}^l + a_{l-1}\underline{s}^{l-1} + \dots + a_0 = (\underline{s} - \underline{s}_1)^{\mu_1} (\underline{s} - \underline{s}_2)^{\mu_2} \dots (\underline{s} - \underline{s}_\lambda)^{\mu_\lambda} \quad (8.157)$$

dargestellt werden, wobei $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_\lambda$ die Nullstellen des Polynoms sind und $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\lambda$ die Vielfachheiten dieser Nullstellen mit $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_\lambda = l$ sind. Ferner sind nach (8.150) alle Nullstellen von $\underline{Q}_{k,m}(\underline{s})$ ebenfalls Nullstellen von $\det(\underline{N}(\underline{s}))$. Da es nur selten vorkommt, dass die Zähler- und Nennerpolynome in (8.150) gemeinsame Nullstellen haben, sind die Nullstellen von $\det(\underline{N}(\underline{s}))$ im Normalfall auch die Nullstellen der Polynome $\underline{Q}_{k,m}(\underline{s})$. Aufgrund der Struktur der Matrix $\underline{N}(\underline{s})$ sind die Koeffizienten aller Polynome $\underline{P}_{k,m}(\underline{s}), \underline{Q}_{k,m}(\underline{s})$ außerdem reell. Da für eine reelle Zahl c gilt $c^* = c$ und ferner gilt

$$(\underline{a} + \underline{b})^* = \underline{a}^* + \underline{b}^*, \quad (\underline{a} \cdot \underline{b})^* = \underline{a}^* \underline{b}^*, \quad (\underline{a}/\underline{b})^* = \underline{a}^*/\underline{b}^*,$$

folgt die Symmetriebedingung

$$(\underline{P}_{k,m}(\underline{s}))^* = \underline{P}_{k,m}(\underline{s}^*), \quad (\underline{Q}_{k,m}(\underline{s}))^* = \underline{Q}_{k,m}(\underline{s}^*) \Rightarrow (\underline{H}_{k,m}(\underline{s}))^* = \underline{H}_{k,m}(\underline{s}^*). \quad (8.158)$$

Bemerkung 8.19

Für jede Nullstelle \underline{s}_0 eines Polynoms $\underline{P}(\underline{s})$ für das (8.158) gilt, folgt:

1. \underline{s}_0 ist reell oder
2. \underline{s}_0 ist komplex und \underline{s}_0^* ist ebenfalls eine Nullstelle. $\underline{s}_0, \underline{s}_0^*$ haben die gleichen Vielfachheiten.

Zum Beweis:

Ist \underline{s}_0 Nullstelle von $\underline{P}(\underline{s})$, so gilt aufgrund von (8.158), falls $\underline{P}(\underline{s})$ reelle Koeffizienten hat:

$$0 = \underline{P}(\underline{s}_0) = (\underline{P}(\underline{s}_0))^* = \underline{P}(\underline{s}_0^*)$$

D.h. \underline{s}_0^* ist ebenfalls Nullstelle von $\underline{P}(\underline{s})$. Betrachtet man ferner

$$\underline{R}(\underline{s}) = \frac{\underline{P}(\underline{s})}{(\underline{s} - \underline{s}_0)(\underline{s} - \underline{s}_0^*)} = \frac{\underline{P}(\underline{s})}{\underline{s}^2 - 2 \cdot \Re\{\underline{s}_0\} \cdot \underline{s} + |\underline{s}_0|^2},$$

so erfüllt $\underline{R}(\underline{s})$ ebenfalls die Voraussetzungen für die Gültigkeit von (8.158). Ist daher \underline{s}_0 Nullstelle von $\underline{R}(\underline{s})$ und somit doppelte Nullstelle von $\underline{P}(\underline{s})$, so gilt wiederum

$$0 = \underline{R}(\underline{s}_0) = (\underline{R}(\underline{s}_0))^* = \underline{R}(\underline{s}_0^*)$$

\underline{s}_0^* ist also ebenfalls doppelte Nullstelle von $\underline{P}(\underline{s})$.

Dieses Argument lässt sich wiederholen und der Beweis von Bemerkung 8.19 somit vervollständigen.

Bemerkung 8.20

Sei $\underline{H}(\underline{s}) = c \frac{\underline{P}(\underline{s})}{\underline{Q}(\underline{s})}$ mit normierten Polynomen $\underline{P}(\underline{s}), \underline{Q}(\underline{s}), c \neq 0, \text{grad}(\underline{P}(\underline{s})) - \text{grad}(\underline{Q}(\underline{s})) = q$. Die Nullstellen von $\underline{Q}(\underline{s})$ seien $\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_l$ mit den Vielfachheiten μ_1, \dots, μ_l ($\Rightarrow \sum_{\nu=1}^l \mu_i = \text{grad}(\underline{Q}(\underline{s})), \underline{Q}(\underline{s}) = (\underline{s} - \underline{s}_1)^{\mu_1} \cdot \dots \cdot (\underline{s} - \underline{s}_l)^{\mu_l}$). $\underline{P}(\underline{s})$ und $\underline{Q}(\underline{s})$ haben keine gemeinsamen Nullstellen.

Wenn für $\underline{P}(\underline{s})$ und $\underline{Q}(\underline{s})$ (8.158) erfüllt ist, so hat $\underline{H}(\underline{s})$ die Darstellung

$$\underline{H}(\underline{s}) = \sum_{\nu=0}^q \underset{\substack{\uparrow \\ \text{verschwindet} \\ \text{für } q < 0}}{F_\nu \underline{s}^\nu} + \sum_{i=1}^{l_1} \sum_{\nu=1}^{\mu_i} \frac{D_{i,\nu}}{(\underline{s} - \underline{s}_i)^\nu} + \sum_{i=l_1+1}^{l_2} \sum_{\nu=1}^{\mu_i} \left(\frac{D_{i,\nu}}{(\underline{s} - \underline{s}_i)^\nu} + \frac{D_{i,\nu}^*}{(\underline{s} - \underline{s}_i^*)^\nu} \right). \quad (8.159)$$

mit $l = l_1 + 2(l_2 - l_1)$, $F_q \neq 0$ falls $q \geq 0$. Dabei sind die Konstanten $F_\nu, \nu = 0, \dots, q$; $D_{i,\nu}, i = 1, \dots, l_1, \nu = 1, \dots, \mu_i$; $D_{i,\nu}, i = l_1 + 1, \dots, l_2, \nu = 1, \dots, \mu_i$ eindeutig bestimmt.

Beweis:

Aufgrund von Bemerkung 8.19 lassen sich die Nullstellen von $\underline{Q}(\underline{s})$ so anordnen, dass s_1, \dots, s_{l_1} reelle Nullstellen sind und $\underline{s}_{l_1+1}, \dots, \underline{s}_{l_2}$ komplexe Nullstellen sind und die Auflistung $s_1, \dots, s_{l_1}, \underline{s}_{l_1+1}, \dots, \underline{s}_{l_2}, \underline{s}_{l_1+1}^*, \dots, \underline{s}_{l_2}^*$ alle Nullstellen von $\underline{Q}(\underline{s})$ wiedergibt ohne eine Nullstelle doppelt aufzulisten. Dies impliziert

$$l = l_1 + 2(l_2 - l_1). \quad (8.160)$$

Nach Bemerkung 5.15 und Bemerkung 8.19 hat $\underline{H}(\underline{s})$ die folgende eindeutig bestimmte Darstellung:

$$\begin{aligned} \underline{H}(\underline{s}) &= \sum_{\nu=0}^q F_\nu \underline{s}^\nu + \sum_{i=1}^{l_1} \sum_{\nu=1}^{\mu_i} \frac{D_{i,\nu}}{(\underline{s} - \underline{s}_i)^\nu} \\ &\quad + \sum_{i=l_1+1}^{l_2} \sum_{\nu=1}^{\mu_i} \left(\frac{D_{i,\nu}}{(\underline{s} - \underline{s}_i)^\nu} + \frac{D_{i,\nu}'}{(\underline{s} - \underline{s}_i^*)^\nu} \right) \end{aligned} \quad (8.161)$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} 0 \equiv \underline{H}(\underline{s}^*)^* - \underline{H}(\underline{s}) &= \sum_{\nu=0}^q (\underline{F}_\nu^* - \underline{F}_\nu) \underline{s}^\nu + \sum_{i=1}^{l_1} \sum_{\nu=1}^{\mu_i} \frac{\underline{D}_{i,\nu}^* - \underline{D}_{i,\nu}}{(\underline{s} - \underline{s}_i)^{\mu_i}} \\ &+ \sum_{i=l_1+1}^{l_2} \sum_{\nu=1}^{\mu_i} \frac{(\underline{D}_{i,\nu})^* - \underline{D}'_{i,\nu}}{(\underline{s} - \underline{s}_i^*)^\nu} + \frac{(\underline{D}'_{i,\nu})^* - \underline{D}_{i,\nu}}{(\underline{s} - \underline{s}_i)^\nu} \end{aligned} \quad (8.162)$$

Da die Funktionen $1, \underline{s}, \dots, \underline{s}^\nu, \frac{1}{\underline{s} - \underline{s}_i}, \frac{1}{\underline{s} - \underline{s}_j}, \frac{1}{(\underline{s} - \underline{s}_j)^2}, \dots$ alle linear unabhängig sind, folgt daher

$$\begin{aligned} F_\nu, \nu = 0, \dots, q, \quad D_{i,\nu}, i = 1, \dots, l_1, \nu = 1, \dots, \mu_i \text{ sind reell und} \\ \underline{D}'_{i,\nu} = \underline{D}_{i,\nu}^*, i = l_1 + 1, \dots, l_2, \nu = 1, \dots, \mu_i \end{aligned} \quad (8.163)$$

Daraus folgt die Behauptung !

Bemerkung 8.21

Seien die Voraussetzungen von Bemerkung 8.20 gegeben. Dann hat $\underline{H}(\underline{s})$ die Darstellung (8.159) und den letzten beiden Summanden von (8.159) wird über die inverse Laplacetransformation eine reelle beliebig oft differenzierbare Zeitfunktion zugeordnet.

$$\begin{aligned} \underline{H}_g(\underline{s}) &:= \sum_{i=1}^{l_1} \sum_{\nu=1}^{\mu_i} \frac{\underline{D}_{i,\nu}}{(\underline{s} - \underline{s}_i)^\nu} + \sum_{i=l_1+1}^{l_2} \sum_{\nu=1}^{\mu_i} \left(\frac{\underline{D}_{i,\nu}}{(\underline{s} - \underline{s}_i)^\nu} + \frac{\underline{D}_{i,\nu}^*}{(\underline{s} - \underline{s}_i^*)^\nu} \right) \\ &\quad \downarrow \\ h_g(t) &:= \sum_{i=1}^{l_1} \sum_{\nu=1}^{\mu_i} \underline{D}_{i,\nu} \frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!} e^{\underline{s}_i t} + \sum_{i=l_1+1}^{l_2} \sum_{\nu=1}^{\mu_i} \frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \left(\underline{D}_{i,\nu} e^{\underline{s}_i t} + \underline{D}_{i,\nu}^* e^{\underline{s}_i^* t} \right), \quad t > 0 \end{aligned} \quad (8.164)$$

Beweis:

Es verbleibt zu zeigen, dass $h_g(t)$ reell ist. Man beachte dazu:

$$(e^{\underline{s}t})^* = e^{\underline{s}^*t}$$

$$\underline{D} e^{\underline{s}t} + \underline{D}^* e^{\underline{s}^*t} = 2e^{\Re\{\underline{s}\}t} (\Re\{\underline{D}\} \cos(\Im\{\underline{s}\}t) - \Im\{\underline{D}\} \sin(\Im\{\underline{s}\}t)) \quad (8.165)$$

Die Bemerkungen 8.20 und 8.21 gelten für alle gebrochen rationalen Funktionen $\underline{H}_{k,m}(\underline{s})$ aus (8.153).

Die Nullstellen aller Nennerpolynome von $\underline{H}_{k,m}(\underline{s})$ aus (8.153) sind immer auch Nullstellen von $\det(\underline{N}(\underline{s}))$. Die Nullstellen von $\det(\underline{N}(\underline{s}))$ seien wie folgt aufgelistet, ohne dass eine Nullstelle zweimal vorkommt:

$$\underline{A}_i, i = 1, \dots, l_{N,1}; \quad \underline{A}_i, i = l_{N,1} + 1, \dots, l_{N,2}; \quad \underline{A}_i^*, i = l_{N,1} + 1, \dots, l_{N,2} \quad (8.166)$$

Die Vielfachheiten seien $\mu_{N,1}, \dots, \mu_{N,l_{N,2}}$. Dann haben die $\underline{H}_{k,m}(\underline{s})$, falls sie nicht identisch verschwinden ($\underline{H}_{k,m}(\underline{s}) \not\equiv 0$), nach Bemerkung 8.20 die folgende Darstellung

$$\begin{aligned} \underline{H}_{k,m}(\underline{s}) &= \sum_{\nu=0}^{q_{k,m}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{verschwindet} \\ \text{für } q_{k,m} < 0!}}{F_{k,m,\nu} \underline{s}^\nu} + \underline{H}_{g,k,m}(\underline{s}). \end{aligned} \quad (8.167)$$

Dabei gilt für $q_{k,m}$, falls es positiv ist ($q_{k,m} \geq 0$), dass $F_{k,m}, q_{k,m} \neq 0$ ist. Für $\underline{H}_{k,m}(\underline{s}) \equiv 0$ sei $q_{k,m} := -1$. Ferner gilt:

$$\begin{aligned} \underline{H}_{g,k,m}(\underline{s}) &= \sum_{i=1}^{l_{N,1}} \sum_{\nu=1}^{\mu_{N,i}} \frac{D_{k,m,i,\nu}}{(\underline{s} - A_i)^\nu} + \sum_{i=l_{N,1}+1}^{l_{N,2}} \sum_{\nu=1}^{\mu_{N,i}} \left(\frac{D_{k,m,i,\nu}}{(\underline{s} - A_i)^\nu} + \frac{D_{k,m,i,\nu}^*}{(\underline{s} - A_i^*)^\nu} \right) \\ h_{g,k,m}(t) &= \sum_{i=1}^{l_{N,1}} \sum_{\nu=1}^{\mu_{N,i}} D_{k,m,i,\nu} \frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!} e^{A_i t} + \sum_{i=l_{N,1}+1}^{l_{N,2}} \sum_{\nu=1}^{\mu_{N,i}} \frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \left(D_{k,m,i,\nu} e^{A_i t} + D_{k,m,i,\nu}^* e^{A_i^* t} \right) \end{aligned} \quad (8.168)$$

Dabei können einige der Summanden in (8.168) auch komplett wegfallen, wenn die zugehörigen \underline{A}_i ebenfalls Nullstellen von $\det \left(\underline{N}_{k,m}(\underline{s}) \right)$ sind. Dies ist jedoch selten der Fall.

Mit (8.153) und (8.167) ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} \underline{A}_m(\underline{s}) &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n_Q} \sum_{\nu=0}^{q_{j_k,m}} F_{j_k,m,\nu} \underline{s}^\nu \underline{E}_k(\underline{s}) + \sum_{k=z+1}^{2z} \sum_{\nu=0}^{q_{k,m}} F_{k,m,\nu} \underline{s}^\nu X_k}_{\underline{A}_{m,1}(\underline{s})} \\ &+ \sum_{k=1}^{n_Q} \underline{H}_{g,j_k,m}(\underline{s}) \underline{E}_k(\underline{s}) + \sum_{k=z+1}^{2z} \underline{H}_{g,k,m}(\underline{s}) X_k \end{aligned} \quad (8.169)$$

Der dritte und vierte Summand kann sofort in den Bereich der gewöhnlichen Zeitfunktionen zurücktransformiert werden. Um bezüglich des ersten Terms weiterzukommen, wird vorausgesetzt, dass die Quellenfunktionen hinreichend oft differenzierbar sind.

Bemerkung 8.22

Sei $\nu = 1, 2, \dots$ und $e(t)$ für $t > t_Q < 0$ ν -fach differenzierbar und für $\Re\{\underline{s}\} > \alpha$ seien $e^{(i)}(t)$, $i = 0, 1, \dots, \nu$ laplacetransformierbar.

Dann gilt für $\Re\{\underline{s}\} > \alpha$:

$$\underline{s}^\nu \underline{E}(\underline{s}) = \underline{s}^\nu \mathcal{L}\{e(t)\}(\underline{s}) = \mathcal{L}\{e^{(\nu)}(t)\}(\underline{s}) + \sum_{i=0}^{\nu-1} e^{(i)}(0) \underline{s}^{\nu-1-i} \quad (8.170)$$

Beweis:

Mit dem Ableitungssatz (Bemerkung 8.8) gilt:

$$\begin{aligned} &\underline{s}^\nu \mathcal{L}\{e(t)\}(\underline{s}) \\ &= \underline{s}^{\nu-1} \left(\mathcal{L}\{e^{(1)}(t)\}(\underline{s}) + e(0) \right) \\ &= \underline{s}^{\nu-2} \left(\mathcal{L}\{e^{(2)}(t)\}(\underline{s}) + e^{(1)}(0) \right) + \underline{s}^{\nu-1} e(0) \\ &= \dots \\ &= \mathcal{L}\{e^{(\nu)}(t)\}(\underline{s}) + \sum_{i=0}^{\nu-1} e^{(i)}(0) \underline{s}^{\nu-1-i} \end{aligned}$$

Sei nun für $1 \leq k \leq n_Q$

$$r_k := \max \left(\max_{1 \leq m \leq 2z} q_{jk,m}, 0 \right) - 1. \quad (8.171)$$

Setzt man die Quellenfunktionen $e_k(t)$ für $t > t_Q < 0$, falls $r_k \geq 0$ ist, $r_k + 1$ -fach differenzierbar voraus, so kann man $\underline{A}_{m,1}(\underline{s})$ aus (8.169) durch Einsetzen von (8.170) umformen:

$$\begin{aligned} \underline{A}_{m,1}(\underline{s}) &= \sum_{k=1}^{n_Q} \sum_{\nu=0}^{q_{jk,m}} F_{jk,m,\nu} \mathcal{L} \left\{ e_k^{(\nu)}(t) \right\}(\underline{s}) \\ &\quad + \underbrace{\sum_{k=1}^{n_Q} \sum_{\nu=1}^{q_{jk,m}} F_{jk,m,\nu} \sum_{i=0}^{\nu-1} e_k^{(i)}(0) \underline{s}^{\nu-1-i}}_{\substack{\uparrow \\ \text{(verschwindet für } q_{jk,m} < 1)}} + \sum_{k=z+1}^{2z} \sum_{\nu=0}^{q_{k,m}} F_{k,m,\nu} \underline{s}^{\nu} X_k \end{aligned} \quad (8.172)$$

$\underline{A}_{D,m}(\underline{s})$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \underline{A}_m(\underline{s}) &:= \underline{A}_{D,m}(\underline{s}) + A_{g,m}(\underline{s}) = \underline{A}_{D,m}(\underline{s}) + \sum_{k=1}^{n_Q} \left(\left(\sum_{\nu=0}^{q_{jk,m}} F_{jk,m,\nu} \mathcal{L} \left\{ e_k^{(\nu)}(t) \right\}(\underline{s}) \right) + \underline{H}_{g,jk,m}(\underline{s}) E_k(\underline{s}) \right) \\ &\quad + \sum_{k=z+1}^{2z} \underline{H}_{g,k,m}(\underline{s}) X_k, \end{aligned} \quad (8.173)$$

wodurch $\underline{A}_{g,m}(\underline{s})$ definiert wird.

Diesem Teil von $\underline{A}_m(\underline{s})$ lässt sich sofort eine gewöhnliche Funktion im Zeitbereich zuordnen:

$$a_{g,m}(t) = \sum_{k=1}^{n_Q} \left(\left(\sum_{\nu=0}^{q_{jk,m}} F_{jk,m,\nu} e_k^{(\nu)}(t) \right) + \int_0^t h_{g,jk,m}(t-t') e_k(t') dt' \right) + \sum_{k=z+1}^{2z} X_k h_{g,k,m}(t), t > 0 \quad (8.174)$$

$\underline{A}_{g,m}(\underline{s})$
●
○

Bemerkung 8.23

- a) Aufgrund des Lemmas von Riemann-Lebesgue (Satz 8.1) kann $\underline{A}_{D,m}(\underline{s})$ nur genau dann einer gewöhnlichen Funktion (der Nullfunktion) zugeordnet werden, wenn $\underline{A}_{D,m}(\underline{s})$ identisch verschwindet ($\underline{A}_{D,m}(\underline{s}) \equiv 0$).

$\underline{A}_{D,m}(\underline{s})$ beschreibt in Falle $t_0 = t_S = 0$ im Zeitbereich den instantanen Ausgleichsvorgang, der bei $t = t_S = 0$ abläuft, falls das Netzwerk bei $t = t_S = 0$ durch Öffnen und Schließen von Schaltern erzeugt wird und zu den für $t > 0$ geltenden Netzwerkgleichungen im Widerspruch stehende inkonsistente Zielanfangswerte $\vec{x}_A(0^-)$ vorgegeben werden. Dieser Ausgleichsvorgang kann durch gewöhnliche Funktionen nicht beschrieben werden.

- b) Für $t_0 = t_S = 0$ wird für $t > 0$ die Netzwerkantwort immer durch $a_{g,m}(t)$ alleine beschrieben. Das heißt, dass die Netzwerkantworten $a_{g,m}(t)$, $m = 1, \dots, 2z$ für $t > 0$ alle Netzwerkgleichungen bis auf die vorgegebenen Anfangsbedingungen streng im klassischen Sinne erfüllen. Die einzigen zusätzlichen Voraussetzungen hierfür sind die Gültigkeit von Bemerkung 8.16 und die $r_k + 1$ -fache Differenzierbarkeit von $e_k(t)$, $k = 1, \dots, n_Q$.

- c) Gilt Bemerkung 8.16, so hat das Anfangswertproblem erster Art für $r_k + 1$ -fach differenzierbare $e_k(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$ genau dann eine (laplacetransformierbare) Lösung, falls für $\vec{x}_{A,0} = \vec{x}_A(0^-)$ alle $\underline{A}_{D,m}(\underline{s})$, $1 \leq m \leq 2z$ identisch verschwinden.

Gilt Bemerkung 8.16, so hat das Anfangswertproblem zweiter Art für $r_k + 1$ -fach differenzierbare $e_k(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$ genau dann eine (laplacetransformierbare) Lösung, falls alle $\underline{A}_{D,m}(\underline{s})$ für das vorgegebene $\vec{x}_{A,0}$ verschwinden. Die Lösung ist durch (8.174) gegeben.

- d) Falls $t_0 = 0 > t_S$ gilt, gibt es für $\underline{A}_{D,m}(\underline{s}) \neq 0$ keine Interpretation als instantaner Ausgleichsvorgang. Denn für jede Lösung des Anfangswertproblems erster Art, die sich nach dem Erzeugen des Netzwerkmodells zum Zeitpunkt $t = t_S < t_0 = 0$ einstellt, gilt aufgrund von a) und b) für hinreichend oft differenzierbare Quellenfunktionen und bei Gültigkeit von Bemerkung 8.16, dass sie für $t > t_S$ durch gewöhnliche Funktionen beschreibbar ist. (Es macht also Sinn von $\vec{x}_A(t)$ für $t > t_S$ als gewöhnlicher Funktion zu sprechen!). Daher verschwinden alle $\underline{A}_{D,m}(\underline{s})$ für alle m , falls $\vec{x}_{A,0} = \vec{x}_A(0)$ gilt. Gibt es für ein vorgegebenes $\vec{x}_{A,0}$ keine für $t > t_S < 0$ gültige Lösung des Anfangswertproblems zweiter Art, die aus gewöhnlichen Funktionen, die ebenfalls zu einer Lösung des Anfangswertproblems erster Art gehören, besteht (alle möglichen Anfangswerte $\vec{x}_A(t_S^+)$ seien hier zugelassen), so hat das Anfangswertproblem zweiter Art keine Lösung und es gilt aufgrund von c) $\underline{A}_{D,m}(\underline{s}) \neq 0$ für mindestens ein m .

Beweis:

Diese Aussagen von Teil a) und b) werden durch die Ergebnisse von Beispiel 5.1 für $R \rightarrow 0$ und Beispiel 8.1 für $R_1 \rightarrow \infty$ nahegelegt (siehe insbesondere Beispiel 8.1, $a_{D,m}(t)$ entspricht dabei für $\alpha \rightarrow \infty$ den mit der natürlichen Frequenz $-2\alpha \frac{R_2}{L}$ verbundenen Termen). Der endgültige Beweis von Teil a) und b) erfolgt nach Einführung der Distributionen in Kapitel 10.

zu Teil c):

Falls $\underline{A}_{D,m}(\underline{s}) \neq 0$ für ein m gilt, folgt mit Hilfe des Satzes von Riemann-Lebesgue, dass es keine gewöhnliche laplacetransformierbare Lösung der Anfangswertprobleme erster und zweiter Art gibt. Sei nun $\underline{A}_{D,m}(\underline{s}) \equiv 0$ für alle m . Somit gilt für alle Netzwerkvariablen

$$\underline{A}_m(\underline{s}) = \underline{A}_{g,m}(\underline{s}) = \mathcal{L}\{a_{g,m}(t)\}(\underline{s}) \quad (8.175)$$

Damit erfüllen die $\underline{A}_{g,m}(\underline{s})$ die laplacetransformierten Netzwerkgleichungen (8.139)–(8.145). Für alle Netzwerkgleichungen, die im Zeitbereich keine Zeitableitung enthalten, folgt aus der Gültigkeit der Netzwerkgleichungen im Laplacebereich, sofort die Gültigkeit der entsprechenden Netzwerkgleichungen im Zeitbereich. Alle Netzwerkgleichungen, die im Zeitbereich eine Ableitung enthalten, haben im Laplacebereich die Form

$$\underline{A}_{g,m_1}(\underline{s}) = \gamma(\underline{s} \underline{A}_{g,m_2}(\underline{s}) - a_{m_2,0}), \quad (8.176)$$

wobei $\gamma \neq 0$ eine reelle Zahl ist und $m_1 \neq m_2$, $1 \leq m_1, m_2 \leq 2z$ gilt.

Ist $a_{g,m_2}(t)$ für $t \geq 0$ im klassischen Sinne differenzierbar und ebenso wie $a_{g,m_2}^{(1)}(t)$ laplacetransformierbar, so kann Bemerkung 8.8 angewendet werden, und es gilt:

$$\begin{aligned} \underline{A}_{g,m_1}(\underline{s}) &= \gamma \left(\mathcal{L}\{a_{g,m_2}^{(1)}(t)\}(\underline{s}) + a_{g,m_2}(0^+) - a_{m_2,0} \right) \\ &\Rightarrow \mathcal{L}\{a_{g,m_1}(t) - \gamma a_{g,m_2}^{(1)}(t)\}(\underline{s}) = \gamma (a_{g,m_2}(0^+) - a_{m_2,0}) \end{aligned} \quad (8.177)$$

Links steht die Laplacetransformierte einer gewöhnlichen Funktion und rechts eine von \underline{s} unabhängige Konstante. Nach dem Lemma von Riemann-Lebesgue ist dies nur möglich, falls gilt:

$$\begin{aligned} a_{g,m_1}(t) &= \gamma a_{g,m_2}^{(1)}(t), t > 0 \\ a_{g,m_2}(0^+) &= a_{m_2,0} \end{aligned} \quad (8.178)$$

Das heißt, $a_{g,m_2}(t)$ und $a_{g,m_1}(t)$ sind strenge Lösungen der entsprechenden Netzwerkgleichung im Zeitbereich. Zu zeigen bleibt also nur noch die Differenzierbarkeit von $a_{g,m_2}(t)$ und die Laplacetransformierbarkeit von $a_{g,m_2}^{(1)}(t)$, falls (8.176) gilt. Dies wird in Bemerkung 8.24 gezeigt. Damit ist Teil c) gezeigt.

zum Teil d)

Setzt man zunächst $t_0 = t_S = 0$, so folgt aus Teil b), dass die $a_{g,m}(t)$ für $t > t_S$ die Netzwerkantwort alleine beschreiben. Wechselt man nun zu einem Zeitpunkt $t_0 > t_S$ für die Anfangswertvorgabe*, so ändert sich die Lösungsmenge des Netzwerkproblems nicht, dass heißt zum Zeitpunkt t_0 ist die Lösung auf alle Fälle über gewöhnliche Funktionen gegeben und einen instantanen Ausgleichsvorgang, der über verallgemeinerte Funktion zu beschreiben wäre, kann es zum Zeitpunkt $t_0 > t_S$ nicht geben. (Die den verallgemeinerten Funktionen entsprechenden sehr schnellen transienten Ausgleichsvorgänge, die mit Zeitkonstanten $\tau \rightarrow 0$ (siehe Beispiel 8.1 für $R_1 \rightarrow \infty$) abklingen, können nur durch die Schaltvorgänge zum Zeitpunkt $t = t_S$ angeregt werden und sind danach sofort abgeklungen). Damit ergibt sich die Behauptung in Teil d), wenn man noch die Verschiebung der Netzwerkantworten auf der Zeitachse beachtet (siehe Bemerkung 8.1), die sich aus der Anwendung der Laplacetransformation und der Definition $t_0 = 0$ für die Fälle $t_S = t_0 = 0$ und $t_S < t_0 = 0$ ergibt. Insofern gilt das bereits in Bemerkung 8.15 gesagte.

Bemerkung 8.24

Es sei ein Netzwerkmodell wie am Anfang von Kapitel 8.2 beschrieben gegeben. Ferner seien die $e_k(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$, $r_k + 1$ -fach differenzierbar und es gelte Bemerkung 8.16. Es gilt für $1 \leq m \leq 2z$ $\underline{A}_m(\underline{s}) = \underline{A}_{D,m}(\underline{s}) + \underline{A}_{g,m}(\underline{s})$ und die Darstellungen (8.172), (8.173), (8.174) sind gültig. Gilt für zwei $m_1 \neq m_2$, $1 \leq m_1, m_2 \leq 2z$ mit einem reellem $\gamma \neq 0$ die Gleichung

$$\underline{A}_{m_1}(\underline{s}) = \gamma(\underline{s}\underline{A}_{m_2}(\underline{s}) - a_{m_2,0}), \quad (8.179)$$

so gilt:

$a_{g,m_2}(t)$ ist differenzierbar für $t > 0$ und $a_{g,m_2}^{(1)}(t)$ ist laplacetransformierbar

Beweis:

Da

$$\left(\int_0^t h_{g,k,m_2}(t-t')e_k(t')dt \right)^{(1)} = h_{g,k,m_2}(0)e_k(t) + \int_0^t h_{g,k,m_2}^{(1)}(t-t')e_k(t')dt' \quad (8.180)$$

ist, ist $a_{g,m_2}(t)$ nur dann nicht differenzierbar, falls es ein k_0 mit $1 \leq k_0 \leq n_Q$ gibt, so dass gilt

$$r_{k_0} + 1 \geq 0, F_{j_{k_0}, m_2, r_{k_0} + 1} \neq 0.$$

* Beachte: Für $t_0 > t_S$ kann man die Anfangswerte \vec{x}_{A,t_0} nur mathematisch als Zielanfangswerte vorgeben, aber nicht wie für $t_0 = t_S$ physikalisch beim Umlegen der Schalter durch $\vec{x}(t_S^-)$ einprägen.

Dies sei im folgenden angenommen.

Es sei nun speziell gewählt:

$$e_{k_0}(t) = \frac{t^{r_{k_0}+1}}{(r_{k_0}+1)!}, e_k(t) = 0 \text{ für } k \neq k_0,$$

$$\vec{x}_{A,0} = 0 \quad (\Rightarrow X_k = 0 \text{ für alle } k \text{ also insbesondere } a_{m_2,0} = 0)$$

(Man beachte, die $\underline{H}_{k,m}(\underline{s})$ hängen nur von $\underline{N}(\underline{s})$ und nicht von $\overrightarrow{\underline{Z}\underline{R}}(\underline{s})$ in (8.146) ab!)

Dann gilt im Laplacebereich für alle \underline{s} in der Konvergenzhalbebene

$$\begin{aligned} \underline{A}_{m_1}(\underline{s}) &= \left(\sum_{v=0}^{r_{k_0}+1} F_{j_{k_0},m_1,v} \underline{s}^v + \underline{H}_{g,j_{k_0},m_1}(\underline{s}) \right) \frac{1}{\underline{s}^{r_{k_0}+2}} \\ &= \gamma \underline{s} \underline{A}_{m_2}(\underline{s}) \\ &= \gamma \left(\sum_{v=0}^{r_{k_0}+1} F_{j_{k_0},m_2,v} \underline{s}^{v+1} + \underline{s} \underline{H}_{g,j_{k_0},m_2}(\underline{s}) \right) \frac{1}{\underline{s}^{r_{k_0}+2}} \end{aligned}$$

Aufgrund von (8.168) gilt

$$\lim_{|\underline{s}| \rightarrow \infty} \underline{H}_{g,j_{k_0},m_2}(\underline{s}) = \lim_{|\underline{s}| \rightarrow \infty} \underline{H}_{g,j_{k_0},m_1}(\underline{s}) = 0$$

und somit

$$\begin{aligned} \lim_{|\underline{s}| \rightarrow \infty} \underline{A}_{m_1}(\underline{s}) &= \phi \\ \lim_{|\underline{s}| \rightarrow \infty} \gamma \underline{s} \underline{A}_{m_2}(\underline{s}) &= \gamma F_{j_{k_0},m_2,r_{k_0}+1} \neq 0 \end{aligned}$$

Beide Grenzwerte müssen jedoch gleich sein, woraus sich ein Widerspruch ergibt. Die Annahme muss daher falsch und $F_{j_{k_0},m_2,r_{k_0}+1} = 0$ sein.

Für ein differenzierbares $a_{g,m_2}(t)$ folgt aus (8.174) und mit (8.180), (8.168) sofort die Laplace-transformierbarkeit von $a_{g,m_2}^{(1)}(t)$. Insgesamt folgt also die Behauptung.

Für die Netzwerkvariablen, die in $\vec{\underline{X}}_A(\underline{s}) := \mathcal{L}\{\vec{x}_A(t)\}(\underline{s})$ zusammengefasst werden, gilt, falls die Voraussetzungen von Bemerkung 8.24 erfüllt sind, dass ihr Anteil $\vec{\underline{X}}_{A,g}(\underline{s})$, der einer gewöhnlichen Funktion $\vec{x}_{A,g}(t)$ für $t > 0$ entspricht, im Sinne von Definition 5.6 einmal differenzierbar ist. Daher sind die $\vec{x}_{A,g}(t)$ im Bereich $t > 0$ stetig und der rechtseitige Grenzwert $\vec{x}_{A,g}(0^+)$ existiert.

Gibt man diese Anfangswerte nach einem möglicherweise existierenden instantanen Ausgleichsvorgang im Vektor $\vec{x}_{A,0}$ vor

$$\vec{x}_{A,0} = \vec{x}_{A,g}(0^+), \quad (8.181)$$

so gilt

$$\underline{A}_{D,m}(\underline{s}) \equiv 0, m = 1, \dots, 2z, \quad (8.182)$$

denn die sich aus der Lösung von (8.146) ergebenden $a_{g,m}(t)$ lösen nach Bemerkung 8.23 b) das Anfangswertproblem zweiter Art bei Vorgabe der Anfangswerte (8.181) streng im Bereich der gewöhnlichen Funktionen und aufgrund der geforderten eindeutigen Lösbarkeit der Gleichungen im Laplacebereich (siehe Bemerkung 8.16) wird diese klassische Lösung beim Umweg über die Laplacetransformation reproduziert.

Gibt man einen beliebigen Zielfangswertvektor $\vec{x}_{A,0}$ vor, so sind die sich daraus ergebenden gewöhnlichen Funktionsanteile $a_{g,m}(t)$ trotzdem immer auch Lösungen eines Anfangswertproblems zweiter Art, für das (8.182) gilt (siehe (8.132), (8.133) als ein Beispiel dafür). Betrachtet man also nur die Lösungen, für die (8.182) gilt, so befinden sich die $a_{g,m}(t), 1 \leq m \leq 2z$ immer darunter.

Ordnet man in $\underline{A}_{D,m}(\underline{s})$ die Summanden nach Potenzen in \underline{s} , so ergibt sich $\underline{A}_{D,m}(\underline{s})$ und (8.182) in der Form

$$\underline{A}_{D,m}(\underline{s}) = \sum_{\substack{\nu=0 \\ \uparrow \\ \text{verschwindet für} \\ \max_{z+1 \leq k \leq 2z} q_{k,m} =: q_m < 0}}^{\max_{z+1 \leq k \leq 2z} q_{k,m} =: q_m} \gamma_{\nu,m} \underline{s}^\nu \equiv 0, \quad m = 1, \dots, 2z \quad (8.183)$$

und (8.182) ist äquivalent zu der Forderung

$$\begin{aligned} & \text{(entfällt für } q_m < 0) \\ & \gamma_{\nu,m} \stackrel{\downarrow}{=} 0, \quad \nu = 0, \dots, q_m; \quad m = 1, \dots, 2z \end{aligned} \quad (8.184)$$

Aufgrund von (8.172) ist klar, dass, falls $q_m \geq 0$ gilt, für $\gamma_{\nu,m}$ eine Beziehung der folgenden Form gilt:

$$\gamma_{\nu,m} = \vec{C}_{\nu,m}^t \begin{pmatrix} X_{z+1} \\ \vdots \\ X_{2z} \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^{n_Q} \vec{B}_{k,\nu,m}^t \begin{pmatrix} e_k(0) \\ \vdots \\ e_k^{(r_k)}(0) \end{pmatrix} \quad (8.185)$$

Dabei hängen die $\vec{C}_{\nu,m}$ und $\vec{B}_{k,\nu,m}$ nur von der Tableaumatrix $\tilde{N}(\underline{s})$ und $j_k, i \leq k \leq n_Q$ und nicht von $\overrightarrow{\underline{ZRA}}(\underline{s})$ bzw. $e_k(t)$ ab. Ferner verschwindet der Term $\vec{B}_{k,\nu,m}^t(e_k(0), \dots, e_k^{(r_k)}(0))^t$, falls $r_k < 0$ gilt.

Sammelt man die Gleichungen (8.184) für alle $m = 1, \dots, 2z$ und $\nu = 0, \dots, q_m$ in einem gemeinsamen Gleichungssystem und setzt die Darstellung (8.185) ein, so ergibt sich ein Gleichungssystem der Form:

$$\underbrace{(C \cdot \underline{AX})}_{\text{unbekannt}} \underbrace{\vec{x}_{A,0}}_{\text{unbekannt}} = \underbrace{C}_{\text{unbekannt}} \begin{pmatrix} X_{z+1} \\ \vdots \\ X_{2z} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n_Q} \underline{B}_k \begin{pmatrix} e_k(0) \\ \vdots \\ e_k^{(r_k)}(0) \end{pmatrix} \quad (8.186)$$

\uparrow
vorgegeben

das äquivalent zu (8.182) ist. Dabei ist die rechte Seite über die Quellenfunktionen vorgegeben und die Unbekannten sind die Anfangswerte $\vec{x}_{A,0}$. Wiederum verschwindet der Term $\underline{B}_k(e_k(0), \dots, e_k^{(r_k)}(0))^t$, falls $r_k < 0$ gilt. Da die $a_{g,m}(t)$, die sich bei Vorgabe von $e_k(t), 1 \leq k \leq n_Q$ und zunächst beliebigen Zielfangswerten $\vec{x}_{A,0}$ ergeben, für die spezielle Wahl der Zielfangswerte $\vec{x}_{A,0} = \vec{x}_{A,g}(0^+)$ (siehe (8.181)) das Anfangswertproblem zweiter Art streng lösen, hat das Gleichungssystem (8.186) für jede Wahl von $r_k + 1$ -fach differenzierbaren Eingangsfunktionen $e_k(t)$ stets eine Lösung. Sei nun mit k_0 eine der Quellen indiziert und $\vec{x}_{A,k_0,\nu}, \nu = 0, \dots, r_{k_0}$ eine der Lösungen von (8.186) für

$$e_{k_0,\nu}(t) = \frac{t^\nu}{\nu!}, \quad t \geq 0, \quad e_k(t) \equiv 0 \quad \text{für } k \neq k_0. \quad (8.187)$$

Dabei sei stets $\vec{x}_{A,k_0,0} = 0$ gewählt, falls dies möglich ist.

Es gilt:

$$e_{k_0,\nu}^{(i)}(0) = \begin{cases} 1 & , i = \nu \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases} \quad (8.188)$$

Somit ist

$$\vec{x}_{A,0,part.} = \underbrace{(\vec{x}_{A,k_0,0}, \dots, \vec{x}_{A,k_0,r_{k_0}})}_{=: \tilde{F}_{e_{k_0}}} \begin{pmatrix} e_{k_0}(0) \\ \vdots \\ e_{k_0}^{(r_{k_0})}(0) \end{pmatrix} \quad (8.189)$$

eine partikuläre Lösung von

$$(\underline{C} \cdot \underline{AX}) \vec{x}_{A,0} = \underline{B}_{k_0} \begin{pmatrix} e_{k_0}(0) \\ \vdots \\ e_{k_0}^{(r_{k_0})}(0) \end{pmatrix}. \quad (8.190)$$

Aufgrund der Konstruktion verschwindet der Term $\tilde{F}_{e_{k_0}} \left(e_{k_0}(0), \dots, e_{k_0}^{(r_{k_0})}(0) \right)^t$ genau dann, wenn $\underline{B}_{k_0} \left(e_{k_0}(0), \dots, e_{k_0}^{(r_{k_0})}(0) \right)^t$ verschwindet.

Sei ferner

$$\vec{x}_{A,0,hom.} = \tilde{F}_x \vec{x}_0 \quad (8.191)$$

eine Darstellung des Lösungsraumes des homogenen Systems (8.186)

$$(\underline{C} \cdot \underline{AX}) \vec{x}_{A,0} = 0. \quad (8.192)$$

\vec{x}_0 sei dabei ein n -dimensionaler frei wählbarer Vektor und $\text{Rang } \tilde{F}_x = n$. \vec{x}_0 entspricht den freien Zuständen des Netzwerkmodells. Es gilt

$$0 \leq n \leq n_A. \quad (8.193)$$

Dabei ist sowohl $n = 0$ als auch $n = n_A$ möglich. Beispiel 5.1 mit $R = 0$ ergibt ein Netzwerkmodell ohne frei wählbare Zustände ($n = 0$).

$n = n_A$ ist der Normalfall, der

$$\underline{C} \cdot \underline{AX} = 0 \quad (8.194)$$

entspricht.

Bemerkung 8.25

- a) Die Terme $\underline{B}_{k_0} \left(e_{k_0}(0), \dots, e_{k_0}^{(r_{k_0})}(0) \right)^t$ in (8.186) und $\tilde{F}_{e_{k_0}} \left(e_{k_0}(0), \dots, e_{k_0}^{(r_{k_0})}(0) \right)^t$ in (8.189) mit $1 \leq k_0 \leq n_Q$ verschwinden für beliebiges $r_{k_0} + 1$ -fach differenzierbares $e_{k_0}(t)$ genau dann, wenn $r_{k_0} = -1$.
- b) Gilt $n = n_A$, so folgt $r_k = -1$ für $1 \leq k \leq n_Q$. Für $n = n_A$ ist das Netzwerkmodell also für keine der Quellenfunktionen differenzierend.

Beweis:

zu a):

Für $r_{k_0} = -1$ verschwinden die beiden Terme aufgrund der Konstruktion der \underline{B}_{k_0} und $\underline{F}_{e_{k_0}}$. Sei nun $r_{k_0} > -1$. Dann gibt es ein m_0 , so dass $q_{j_{k_0}, m_0} = r_{k_0} + 1$ und $F_{j_{k_0}, m_0, q_{j_{k_0}, m_0}} \neq 0$. Dann ist nach (8.172) das erste Element von $\vec{B}_{k_0, r_{k_0}, m_0}^t$ gleich $F_{j_{k_0}, m_0, q_{j_{k_0}, m_0}}$. Setzt man nun noch $e_{k_0}(t) = 1$ für alle t , so gilt $\vec{B}_{k_0, r_{k_0}, m_0}^t \left(e_{k_0}(0), \dots, e_{k_0}^{(r_{k_0})}(0) \right)^t = F_{j_{k_0}, m_0, q_{j_{k_0}, m_0}} \neq 0$. Somit folgt ebenfalls $\underline{B}_{k_0} \left(e_{k_0}(0), \dots, e_{k_0}^{(r_{k_0})}(0) \right)^t \neq 0$. Der Term $\underline{B}_{k_0} \left(e_{k_0}(0), \dots, e_{k_0}^{(r_{k_0})}(0) \right)^t$ verschwindet also nicht für alle $r_{k_0} + 1$ -fach differenzierbaren $e_{k_0}(t)$ und nach Konstruktion verschwindet somit auch $\underline{F}_{e_{k_0}} \left(e_{k_0}(0), \dots, e_{k_0}^{(r_{k_0})}(0) \right)^t$ ebenfalls nicht für alle $r_{k_0} + 1$ -fach differenzierbaren $e_{k_0}(t)$.

zu b):

Sei $n = n_A$ und $r_{k_0} \geq 0$ für ein k_0 mit $1 \leq k_0 \leq n_Q$, dann gibt es ein m_0 , so dass $q_{j_{k_0}, m_0} = r_{k_0} + 1$ und $F_{j_{k_0}, m_0, q_{j_{k_0}, m_0}} \neq 0$ ist.

Sei ferner $e_k(t) = 0$ für $k \neq k_0$. Dann gilt mit (8.172) und (8.183)

$$\gamma_{r_{k_0}, m_0} = F_{j_{k_0}, m_0, q_{j_{k_0}, m_0}} e_{k_0}(0),$$

denn der erste Term auf der rechten Seite von (8.185) muss verschwinden, da $\text{Rang}(\underline{C} \cdot \underline{A} \underline{X}) = 0$ ($n = n_A$) vorausgesetzt ist.

Setzt man nun noch $e_{k_0}(t) \equiv 1$, so dass $e_{k_0}(0) \neq 0$, so folgt

$$\gamma_{r_{k_0}, m_0} \neq 0$$

unabhängig von der Wahl von $\vec{x}_{A,0}$. Somit hat das Gleichungssystem (8.184) bzw. (8.186) keine Lösung. Da jedoch $\vec{x}_{A,0} = \vec{x}_{A,g}(0^+)$ bei beliebiger Wahl hinreichend differenzierbarer Quellenfunktionen (siehe (8.181), (8.182)) immer eine Lösung von (8.184) liefert, ergibt sich ein Widerspruch und damit die Behauptung.

Insgesamt ergibt sich also

$$\vec{x}_{A,0} = \underline{F}_x \vec{x}_0 + \sum_{k=1}^{n_Q} \underline{F}_{e_k} \begin{pmatrix} e_k^{(0)}(0) \\ \vdots \\ e_k^{(r_k)}(0) \end{pmatrix} \quad (8.195)$$

als Darstellung des Lösungsraums von (8.186). Wiederum hängen \underline{F}_x und \underline{F}_{e_k} , $1 \leq k \leq n_Q$ nur von den zeitinvarianten Parametern der Netzwerkgleichungen aber nicht von $\vec{x}_{A,0}$ und nicht von $e_k(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$ ab.

Definiert man nun noch

$$\begin{pmatrix} X_{z+1, e_k} \\ \vdots \\ X_{2z, e_k} \end{pmatrix} := \underline{A} \underline{X} \underline{F}_{e_k} \begin{pmatrix} e_k^{(0)}(0) \\ \vdots \\ e_k^{(r_k)}(0) \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n_Q \quad (8.196)$$

und

$$\begin{pmatrix} X_{z+1, x} \\ \vdots \\ X_{2z, x} \end{pmatrix} := (\underline{A} \underline{X} \underline{F}_x) \vec{x}_0, \quad (8.197)$$

so gilt:

$$\begin{pmatrix} X_{z+1} \\ \vdots \\ X_{2z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{z+1,x} \\ \vdots \\ X_{2z,x} \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{n_Q} \begin{pmatrix} X_{z+1,e_k} \\ \vdots \\ X_{2z,e_k} \end{pmatrix}. \quad (8.198)$$

Beachtet man ferner, dass die $a_{g,m}(t)$ eine strenge Lösung des Anfangswertproblems zweiter Art für die spezielle Wahl der Zielanfangswerte $\vec{x}_{A,0} = \vec{x}_{A,g}(0^+)$ sind, so ergibt sich aus (8.174) und Bemerkung 8.23, dass ein \vec{x}_0 existiert, so dass für $t > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} a_{g,m}(t) = & \sum_{k=1}^{n_Q} \sum_{\nu=0}^{q_{j_k,m}} F_{j_k,m,\nu} e_k^{(\nu)}(t) + \sum_{k=1}^{n_Q} \int_0^t h_{g,j_k,m}(t-t') e_k(t') dt' + \\ & \underbrace{\sum_{k=z+1}^{2z} X_{k,x} h_{g,k,m}(t)}_{a_{m,zi,0}(t)} + \sum_{j=1}^{n_Q} \underbrace{\sum_{k=z+1}^{2z} X_{k,e_j} h_{g,k,m}(t)}_{a_{m,d,j,0}(t)} \end{aligned} \quad (8.199)$$

Fordert man $e_k(t) = 0$ für $t < 0$ und alle k mit $r_k \geq 0$, so gilt $e_k^{(0)}(0) = \dots = e_k^{(r_k)}(0) = 0$ für diese k . Ferner gilt für differenzierbare Netzwerkvariable $a_m(t)$ nach Bemerkung 8.24 $q_{j_k,m} \leq r_k$ für alle k .

Somit folgt mit diesen zusätzlichen Voraussetzungen, dass $\vec{x}_{A,0} = \vec{x}_{A,g}(0^+)$ nur vom dritten Summanden in (8.174) abhängt und somit unabhängig von den $e_k(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$ ist. Mit (8.195) gilt dies dann auch für \vec{x}_0 . Damit lassen sich $a_{m,zi,0}(t)$ und

$$a_{m,rz}(t) = \sum_{k=1}^{n_Q} \sum_{\nu=0}^{q_{j_k,m}} F_{j_k,m,\nu} e_k^{(\nu)}(t) + \sum_{k=1}^{n_Q} \int_0^t h_{g,j_k,m}(t-t') e_k(t') dt'$$

für $t > 0$ unabhängig voneinander unter den Nebenbedingungen verschwindender Eingangsfunktionen ($e_k(t) = 0, 1 \leq k \leq n_Q$) bzw. verschwindender Zielanfangswerte ($\vec{x}_{A,0} = 0$) bestimmen wie in Bem. 5.20 behauptet. Ferner hängt unter dieser Zusatzvoraussetzung auch $A_{D,m}(\underline{s})$ in (8.172) nicht von den Eingangsfunktionen $e_k(t), 1 \leq k \leq n_Q$ ab. Auch der zusätzlich bei $t = 0$ bei Vorgabe von inkonsistenten Anfangswerten auftretende Anteil der verallgemeinerten Funktionen $a_{D,m}(t)$ im zero input response (siehe (10.96)) hängt somit nicht von den Eingangsfunktionen ab und lässt sich unter der Annahme verschwindender Eingangsfunktionen durch alleinige Vorgabe der inkonsistenten Anfangswerte fehlerfrei bestimmen.

Der "zero input response" lässt sich dabei noch durch Einsetzen von (8.197) und mit den Abkürzungen

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ \vdots \\ x_{0,n} \end{pmatrix}, (\underbrace{AX \cdot F_x}_{\tilde{F}_x})_{k,j} = \beta_{k,j}, \quad k = 1, \dots, z, \quad j = 1, \dots, n \quad (8.200)$$

umformen in

$$a_{m,zi,0}(t) = \sum_{j=1}^n x_{0,j} \underbrace{\left(\sum_{k=z+1}^{2z} \beta_{k-z,j} h_{g,k,m}(t) \right)}_{=: h_{g,j,m}^x(t)} \quad (8.201)$$

$$\underline{A}_{m,zi,0}(\underline{s}) = \sum_{j=1}^n x_{0,j} \underbrace{\left(\sum_{k=z+1}^{2z} \beta_{k-z,j} \underline{H}_{g,k,m}(\underline{s}) \right)}_{=: \underline{H}_{g,j,m}^x(\underline{s})} \quad (8.202)$$

Dabei sind alle Polstellen der $\underline{H}_{g,j,m}^x(\underline{s})$ wieder auch Nullstellen von $\det(\underline{N}(\underline{s}))$.

Bemerkung 8.26

Durch (8.199) wird die Darstellung (5.42) für $t > t_0$ bewiesen, ebenso wie viele Aussagen von Satz 5.1. Dazu muss man nur $a(t) := a_m(t)$ wählen und Bemerkung 8.1 ($t_0 = 0$) beachten. Ferner muss man definieren

$$D_{a,k,i} := \begin{cases} F_{j_k,m,i} & , 0 \leq i \leq q_{j_k,m} \\ 0 & , i > q_{j_k,m} \end{cases}$$

$$h_{a,k}(t) := h_{g,j_k,m}(t)$$

Zu beweisen bleiben nur noch die Teile 3., 4. und 7. von Satz 5.1.

Für $t_0 > t_S$ ergibt sich die Gültigkeit von (5.42) für t mit $t_S < t \leq t_0$ wiederum leicht durch eine zur Bemerkung 8.12 analoge Überlegung.

Bemerkung 8.27

Da alle möglichen natürlichen Frequenzen (Polstellen) von $h_{g,j,m}^x(t)$ (von $\underline{H}_{g,j,m}^x(\underline{s})$) immer auch Nullstellen von $\det(\underline{N}(\underline{s}))$ sind, gilt: Haben alle Nullstellen von $\det(\underline{N}(\underline{s}))$ einen echt negativen Realteil, so ist das Netzwerkmodell asymptotisch stabil. Die Bedingung, dass alle Nullstellen von $\det(\underline{N}(\underline{s}))$ einen echt negativen Realteil haben, ist nicht nur hinreichend sondern auch notwendig für die asymptotische Stabilität, wie unten gezeigt wird.

Daher ist für die asymptotische Stabilität des Netzwerkmodells auch notwendig und hinreichend, dass die natürlichen Frequenzen der in (8.168) definierten Funktionen $h_{g,k,m}$, $k = n+1, \dots, z$, $m = 1, \dots, 2z$, bzw. die Polstellen der in (8.153) definierten gebrochen rationalen Funktionen $\underline{H}_{k,m}(\underline{s})$, $k = n+1, \dots, 2z$, $m = 1, \dots, 2z$ alle einen echt negativen Realteil haben. Dabei kann man sich auf die k , für die $X_k \neq 0$ sein kann, beschränken. (8.153) kann im Laplacebereich für jedes m mit jedem der in den Kapiteln 6.2–6.7 vorgegebenen Lösungsverfahren berechnet werden. Auf das explizite Aufstellen von $\underline{N}(\underline{s})$ und das Berechnen der Determinante $\det(\underline{N}(\underline{s}))$ kann somit meist verzichtet werden.

Beweis:

Es sei das unerregte Netzwerkmodell ($e_k(t) \equiv 0$, $1 \leq k \leq n_Q$) betrachtet. Für alle Spannungen und Ströme des betrachteten Netzwerkmodells wird der Ansatz

$$a(t) = \Re \{ \underline{A} e^{s_0 t} \} \quad (8.203)$$

gemacht. Sei eine Zweiggleichung im Zeitbereich herausgegriffen, z.B. o. B. d. A.:

$$u_k(t) = r_d \frac{di_j}{dt}$$

$$\text{Ansatz: } u_k(t) = \Re \{ \underline{U}_k e^{s_0 t} \}, \quad i_j(t) = \Re \{ \underline{I}_j e^{s_0 t} \}$$

$$\Rightarrow \left(\Re \{ \underline{U}_k e^{s_0 t} \} = r_d \Re \{ \underline{I}_j e^{s_0 t} \} \quad \text{für alle } t \right.$$

$$\left. \Leftrightarrow \underline{U}_k = r_d \underline{I}_j \right)$$

Diese letzte Gleichung entspricht der Zweiggleichung im Laplacebereich für $\underline{s} = \underline{s}_0$ und $i_{j,0} = 0$ ($\underline{U}_k(\underline{s}_0) = r_d \underline{I}_j(\underline{s}_0)$). Entsprechendes gilt für alle Zweiggleichungen. Diese entsprechen den Gleichungen im Laplacebereich für $\underline{s} = \underline{s}_0$, wenn man die Anfangswerte zu 0 setzt. Aus den Maschengleichungen im Zeitbereich folgen mit (8.203) entsprechende Maschengleichungen für die „Zeiger“, z.B. $\sum_l u_l(t) = 0$ für alle $t \Leftrightarrow \sum_l \underline{U}_l = 0$. Diese entsprechen wieder den entsprechenden Maschengleichungen im Laplacebereich für $\underline{s} = \underline{s}_0$ ($\sum_l \underline{U}_l(\underline{s}_0) = 0$). Entsprechendes gilt auch für die Schnittmengengleichungen.

Der Ansatz (8.203) zusammen mit den Netzwerkgleichungen im Zeitbereich ist daher äquivalent zu den folgenden Gleichungen für die Zeiger:

$$\underline{N}(\underline{s}_0) \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \vdots \\ \underline{I}_z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Dies entspricht Gl. (8.146) für $\overrightarrow{ZRA} = 0$, $\overrightarrow{ZRQ} = 0$ und $\underline{s} = \underline{s}_0$, wenn man $\underline{U}, \underline{I}$ mit $\underline{U}(\underline{s}_0), \underline{I}(\underline{s}_0)$ identifiziert. Ist $\det \underline{N}(\underline{s}_0) = 0$, so gibt es mindestens eine nicht verschwindende Lösung des obigen linearen Gleichungssystems. Die so gefundene Lösung erfüllt mit (8.203) also alle Zweiggleichungen, Maschengleichungen und Schnittmengengleichungen im Zeitbereich. Ermittelt man nun für diese Lösung der Netzwerkgleichungen im Zeitbereich die Anfangswerte der differenzierbaren Variablen $\vec{x}_{A,0} := \vec{x}_A(0)$ und gibt diese Anfangswerte in (8.146) vor, so wird diese Lösung wegen $\det \underline{N}(\underline{s}) \neq 0$ bis auf endlich viele \underline{s} durch (8.174) reproduziert und diese Lösung ist daher die eindeutig bestimmte Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems 2. Art für das unerregte Netzwerk. Da die Lösung nicht verschwindet, ist das Netzwerkmodell für $\Re \{ \underline{s}_0 \} \geq 0$ nicht asymptotisch stabil.

Bemerkung 8.28

Sei $j_{k_0} = z$ der Index des Zweiges des Netzwerkmodells, in dem die ideale Quelle mit der Quellenfunktion $e_{k_0}(t)$ liegt. Alle Urspannungen und Urströme der anderen Quellen sollen verschwinden. $e_{k_0}(t)$ sei $r_{k_0} + 1$ -fach differenzierbar, falls $r_{k_0} \geq 0$ gilt, und rege das Netzwerk aus dem Ruhezustand heraus an.

$$e_{k_0}(t) = 0, \quad t < 0, \quad \vec{x}_{A,0} = 0 \quad (8.204)$$

Analog zu (5.135), (5.136), impliziert dies mit (8.195)

$$e_{k_0}(0) = \dots = e_{k_0}^{(r_{k_0})}(0) = 0, \text{ falls } r_{k_0} \geq 0 \text{ gilt, und } \vec{x}_0 = 0. \quad (8.205)$$

Sei mit $a_{m_0}(t)$ eine beliebige andere Netzwerkvariable als Ausgangsfunktion gewählt. Dann gilt mit (8.153) und (8.195)–(8.198):

$$\begin{aligned} \frac{\underline{A}_{m_0}(\underline{s})}{\underline{E}_{k_0}(\underline{s})} &= \frac{\mathcal{L}\{a_{m_0}(t)\}(\underline{s})}{\mathcal{L}\{e_{k_0}(t)\}(\underline{s})} = \underline{H}_{j_{k_0}, m_0}(\underline{s}) = (-1)^{j_{k_0} + m_0} \frac{\det(\underline{N}_{j_{k_0}, m_0}(\underline{s}))}{\det \underline{N}(\underline{s})} = \\ &= \underline{H}_{g, j_{k_0}, m_0} + \sum_{\nu=0}^{q_{j_{k_0}, m_0}} F_{j_{k_0}, m_0, \nu} \underline{s}^\nu \end{aligned} \quad (8.206)$$

$\underline{H}_{j_{k_0}, m_0}$ ist daher eine spezielle Übertragungsfunktion.

(Die Beziehung

$$\underline{H}_{j_{k_0}, m_0}(\underline{s}) = \frac{\underline{A}_{m_0}(\underline{s})}{\underline{E}_{k_0}(\underline{s})}$$

gilt bereits, falls nur $\vec{x}_{A,0} = 0$ gilt. Die zusätzliche Bedingung $e_{k_0}(t) = 0$ für $t < 0$ ist notwendig, damit $\underline{A}_{m_0}(\underline{s})$ in jedem Falle die Laplacetransformierte einer gewöhnlichen Funktion $a_{m_0}(t)$ ist. ($\underline{A}_{m_0}(\underline{s}) = \mathcal{L}\{a_{m_0}(t)\}(\underline{s})$)

Im Zeitbereich folgt für $a_{m_0}(t)$ ferner aus (8.173)–(8.174), (8.168)

$$\begin{aligned} \underline{A}_{m_0}(\underline{s}) &= \underline{H}_{j_{k_0}, m_0}(\underline{s}) \underline{E}_{k_0}(\underline{s}) \\ &= \sum_{i=1}^l \sum_{\nu=1}^{\bar{\mu}_i} \underline{\bar{D}}_{j_{k_0}, m_0, i, \nu} \left(\frac{1}{(\underline{s} - \underline{\bar{A}}_i)^\nu} \underline{E}_{k_0}(\underline{s}) \right) + \sum_{\nu=0}^{q_{j_{k_0}, m_0}} F_{j_{k_0}, m_0, \nu} (\underline{s}^\nu \underline{E}_{k_0}(\underline{s})) \\ &\quad \mathcal{L}^{-1} \downarrow \uparrow \mathcal{L} \quad \mathcal{L}^{-1} \downarrow \uparrow \mathcal{L} \\ &= \sum_{i=1}^l \sum_{\nu=1}^{\bar{\mu}_i} \underline{\bar{D}}_{j_{k_0}, m_0, i, \nu} \left(\int_0^t \frac{1}{(\nu-1)!} (t-t')^{\nu-1} e^{\underline{\bar{A}}_i(t-t')} e_{k_0}(t') dt' \right) + \sum_{\nu=0}^{q_{j_{k_0}, m_0}} F_{j_{k_0}, m_0, \nu} \left(e_{k_0}^{(\nu)}(t) \right) \\ &= \int_0^t h_{g, j_{k_0}, m_0}(t-t') e_{k_0}(t') dt' + \sum_{\nu=0}^{q_{j_{k_0}, m_0}} F_{j_{k_0}, m_0, \nu} e_{k_0}^{(\nu)}(t) = a_{m_0}(t) \end{aligned} \quad (8.207)$$

Dies entspricht der in (5.137) definierten Antwort aus dem Ruhezustand heraus für den Spezialfall $e_k(t) \equiv 0, k \neq k_0$. Dabei entsprechen die $\overline{D}_{j_{k_0}, m_0, i, \nu}, \overline{A}_i, \overline{\mu}_i$ den entsprechenden Größen aus (8.168) ohne oberen Querstrich. Nur ist die Sortierung im Index i anders. Die Antwort aus dem Ruhezustand wird hier durch inverse Laplacetransformation aus $\underline{H}_{j_{k_0}, m_0}(s) \underline{E}_{k_0}(s)$ erzeugt. Ansonsten entspricht die Vorgehensweise weitgehend der in Bemerkung 5.19 beschriebenen Methode. Nur die Rücktransformation ist leicht anders, da hier die Rücktransformation \mathcal{L}^{-1} von $\underline{H}_{j_{k_0}, m_0}(s) \underline{E}_{k_0}(s)$ ausgeht, wohingegen FG^{-1} in (5.119) vom Frequenzgang $\underline{H}_{j_{k_0}, m_0}(j\omega)$ ausgeht. (8.207) erweitert somit die Methode aus Bem. 5.19 auf asymptotisch instabile Netzwerkmodelle. Ferner sei festgehalten, dass die Laplacetransformierte der Antwort aus dem Ruhezustand heraus $a_{m_0}(t)$ gleich der Übertragungsfunktion $\underline{H}_{j_{k_0}, m_0}(s)$ multipliziert mit der Laplacetransformierten der Eingangsfunktion ist. Aus (8.167) und den Sätzen 5.1 und 5.5 folgt weiterhin sofort, dass das Netzwerkmodell genau dann bezüglich $e_{k_0}(t)$ differenzierend ist, falls es mindestens eine Übertragungsfunktion $\underline{H}_{j_{k_0}, m_0}(s)$ gibt, bei der der Grad des Zählerpolynoms echt größer als der Grad des Nennerpolynoms ist.

Seien nun weiterhin alle $e_k(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$, $r_k + 1$ -fach differenzierbar und es gelte Bemerkung 8.16. Mit der Definition

$$\vec{h}_{g,m}(t) := (h_{g,z+1,m}(t), \dots, h_{g,2z,m}(t))^t \quad (8.208)$$

lässt sich (8.199) folgendermaßen für $t > 0$ umschreiben:

$$\begin{aligned} a_m(t) = a_{g,m}(t) = & \sum_{k=1}^{n_Q} \sum_{\nu=0}^{q_{j_k,m}} F_{j_k,m,\nu} e_k^{(\nu)}(t) + \sum_{k=1}^{n_Q} \int_0^t h_{g,j_k,m}(t-t') e_k(t') dt' \\ & + \underbrace{\vec{h}_{g,m}^t(t) \underline{A} \underline{X} \underline{F}_x \vec{x}_0}_{a_{m,zi,0}(t)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n_Q} \vec{h}_{g,m}^t(t) \underline{A} \underline{X} \underline{F}_{e_k} \begin{pmatrix} e_k^{(0)}(0) \\ \vdots \\ e_k^{(r_k)}(0) \end{pmatrix}}_{a_{m,d,k,0}(t)} \end{aligned} \quad (8.209)$$

(8.209) sei nun zunächst für den Fall $t_S = t_0 = 0$ ausgewertet. Damit ist $a_{g,m}(t)$, $1 \leq m \leq 2z$ für $t > 0 = t_S$ bekannt und insbesondere $\vec{x}_{A,g}(t)$ für $t > 0 = t_S$.

Sei nun der Fall $t_S = 0 < t_0$ mit

$$\vec{x}_{A,t_0} = \vec{x}_{A,g}(t_0) \quad (8.210)$$

betrachtet. Um die Laplacetransformation zur Lösung des Anfangswertproblems zweiter Art für $t_0 > 0$ anzuwenden, muss nach Bemerkung 8.1 zur Zeit $\bar{t} = t - t_0$ und den Eingangsfunktionen $\bar{e}_k(\bar{t}) := e_k(\bar{t} + t_0) = e_k(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$ übergegangen werden. Für die Zielanfangswerte sei folgendes gewählt:

$$\vec{x}_{A,0} = \vec{x}_{A,t_0} = \vec{x}_{A,g}(t_0) \quad (8.211)$$

Da $\bar{a}_m(\bar{t}) := a_{g,m}(\bar{t} + t_0) = a_{g,m}(t)$ das vorgegebene Anfangswertproblem zweiter Art löst und diese Lösung aufgrund der in Bemerkung 8.16 geforderten Eindeutigkeit der Lösung im Laplacebereich eindeutig reproduziert wird und ferner bei dem für \bar{t} und $\bar{e}(\bar{t})$ formulierten Problem im Laplacebereich sowohl $\underline{N}(s)$ als auch $\underline{A} \underline{X}$ und ebenso j_k , $1 \leq k \leq n_Q$ unverändert

bleiben, hat $\bar{a}_m(\bar{t})$ nach (8.209) für $\bar{t} > 0$ ($t > t_0$) die Darstellung

$$\begin{aligned} \bar{a}_m(\bar{t}) = & \sum_{k=1}^{n_Q} \sum_{\nu=0}^{q_{j_k,m}} F_{j_k,m,\nu} \bar{e}_k^{(\nu)}(\bar{t}) \sum_{k=1}^{n_Q} \int_0^{\bar{t}} h_{g,j_k,m}(\bar{t}-t') \bar{e}_k(t') dt' \\ & + \bar{h}_{g,m}^t(\bar{t}) \underbrace{AX}_{\widetilde{F}_x} \underbrace{F_x}_{\widetilde{F}_x} \vec{x}_0 + \sum_{k=1}^{n_Q} \bar{h}_{g,m}^t(\bar{t}) \underbrace{AX}_{\widetilde{F}_{e_k}} \underbrace{F_{e_k}}_{\widetilde{F}_{e_k}} \begin{pmatrix} \bar{e}_k^{(0)}(0) \\ \vdots \\ \bar{e}_k^{(r_k)}(0) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8.212)$$

Beachtet man

$$\begin{aligned} & \int_0^{\bar{t}} h_{g,j_k,m}(\bar{t}-t') \overbrace{\bar{e}_k(t')}^{e_k(t'+t_0)} dt' \stackrel{\substack{\uparrow \\ t''=t'+t_0}}{=} \int_{t_0}^{\bar{t}+t_0} h_{g,j_k,m}(\bar{t}+t_0-t'') e_k(t'') dt'' \\ & = \int_{t_0}^t h_{g,j_k,m}(t-t'') e_k(t'') dt'' \end{aligned} \quad (8.213)$$

und geht zu $t = \bar{t} + t_0$, $a_{g,m}(t) = \bar{a}_m(t - t_0)$ und $e_k(t) = \bar{e}_k(t - t_0)$ über, so folgt für $t > t_0$:

$$\begin{aligned} a_{g,m}(t) = & \sum_{k=1}^{n_Q} \sum_{\nu=0}^{q_{j_k,m}} F_{j_k,m,\nu} e_k^{(\nu)}(t) + \sum_{k=1}^{n_Q} \int_{t_0}^t h_{g,j_k,m}(t-t') e_k(t') dt' \\ & + \underbrace{\bar{h}_{g,m}^t(t-t_0) \underbrace{AX}_{\widetilde{F}_x} \underbrace{F_x}_{\widetilde{F}_x} \vec{x}_0}_{a_{m,z,i,t_0}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n_Q} \bar{h}_{g,m}^t(t-t_0) \underbrace{AX}_{\widetilde{F}_{e_k}} \underbrace{F_{e_k}}_{\widetilde{F}_{e_k}} \begin{pmatrix} e_k^{(0)}(t_0) \\ \vdots \\ e_k^{(r_k)}(t_0) \end{pmatrix}}_{a_{m,d,k,t_0}} \end{aligned} \quad (8.214)$$

Ferner gilt mit (8.195) und (8.210)

$$\vec{x}_{A,0} = \underbrace{F_x}_{\widetilde{F}_x} \vec{x}_0 + \sum_{k=1}^{n_Q} \underbrace{F_{e_k}}_{\widetilde{F}_{e_k}} \begin{pmatrix} \bar{e}_k^{(0)}(0) \\ \vdots \\ \bar{e}_k^{(r_k)}(0) \end{pmatrix} \quad (8.215)$$

also

$$\vec{x}_{A,t_0} = \vec{x}_{A,g}(t_0) = \underbrace{F_x}_{\widetilde{F}_x} \vec{x}_0 + \sum_{k=1}^{n_Q} \underbrace{F_{e_k}}_{\widetilde{F}_{e_k}} \begin{pmatrix} e_k^{(0)}(t_0) \\ \vdots \\ e_k^{(r_k)}(t_0) \end{pmatrix} \quad (8.216)$$

Da $\vec{x}_{A,g}(t)$ und $e_k(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$ für $t > 0$ bekannt sind und $\underbrace{F_x}_{\widetilde{F}_x}, \underbrace{F_{e_k}}_{\widetilde{F}_{e_k}}$ nur von den zeit-invarianten Eigenschaften des Netzwerkmodells und nicht von den Quellenfunktionen und Anfangswerten abhängen und $\underbrace{F_x}_{\widetilde{F}_x}$ Höchststrang hat, definiert (8.216) für $t_0 > 0$ den Vektor der Zustandsfunktionen auf eindeutige Art und Weise.

$$\vec{x}(t_0) := \vec{x}_0, t_0 > 0 \quad (8.217)$$

(8.216) und (8.217) ergeben (5.44), falls man t_0 in t umbenennt. (8.216) ist ferner für $t_0 > 0 = t_S$ und beliebiges \vec{x}_0 eine Darstellung des Lösungsraumes für das Gleichungssystem

(siehe (8.186))

$$(\underline{C} \cdot \underline{AX}) \vec{x}_{A,g}(t_0) = \sum_{k=1}^{n_Q} \underline{B}_k \begin{pmatrix} e_k(t_0) \\ \vdots \\ e_k^{(r_k)}(t_0) \end{pmatrix}$$

Dies ist per Definition (siehe Def. 5.7), falls man t_0 in t umbenennt, ein System von zustandsreduzierenden algebraischen Gleichungen. (8.186) und damit (8.182) sind also auch im allgemeinen Fall zustandsreduzierende algebraische Gleichungen, die aus den Netzwerkgleichungen folgen, zugeordnet und die Bedingung (8.182) für das Verschwinden derjenigen Terme der Laplacetransformierten, denen Distributionen zugeordnet werden müssen, ergibt sich also wiederum aus entsprechenden zustandsreduzierenden algebraischen Gleichungen unter der Annahme, dass für die Zielfangswerte $\vec{x}_{A,0}$ eine Lösung des Anfangswertproblems zweiter Art existiert. Die bisherigen Ausführungen implizieren sofort $\text{Rang}(\underline{C} \cdot \underline{AX}) \leq n_R$. Nimmt man aber $n_R > \text{Rang}(\underline{C} \cdot \underline{AX})$ einmal an, so gibt es auch für verschwindende $e_k(t) \equiv 0, 1 \leq k \leq n_Q$ einen Satz von Zielfangswerten, für die einerseits (8.182) erfüllt ist, und die andererseits einer zustandsreduzierenden algebraischen Gleichung widersprechen, wenn man den Grenzübergang $t \rightarrow 0$ betrachtet, da es zu diesen Anfangswerten nach Bemerkung 8.23 C) wegen (8.182) eine Lösung des Anfangswertproblems 2. Art gibt. Dies widerspricht aber wiederum Bemerkung 8.23 C) und der Existenz einer Lösung des Anfangswertproblems 2. Art, die insbesondere alle Netzwerkgleichungen, also auch alle zustandsreduzierenden Gleichungen für $t > 0$ erfüllt. Somit muss die Annahme falsch sein und es gilt:

$$\text{Rang}(\underline{C} \cdot \underline{AX}) = n_R$$

Hieraus folgt die in Satz 5.1 postulierte Beziehung

$$n = n_A - n_R \quad (8.218)$$

mit (8.186), (8.191) und Satz M2 unmittelbar.

Da \underline{F}_x Höchststrang hat, hat \underline{F}_x mindestens n linear unabhängige Zeilenvektoren. Reduziert man das Gleichungssystem (8.216) auf diese Zeilen, so erhält es die Form

$$\vec{x}_{A,g}^R(t) = \underline{F}_x^R \vec{x}(t) + \sum_{k=1}^{n_Q} \underline{F}_{e_k}^R \begin{pmatrix} e_k^{(0)}(t) \\ \vdots \\ e_k^{(r_k)}(t) \end{pmatrix}, t > 0$$

Der obere Index R weist dabei auf die Reduktion auf diese n Zeilen hin. \underline{F}_x^R ist per Definition invertierbar, so dass gilt

$$\vec{x}(t) = (\underline{F}_x^R)^{-1} \vec{x}_{A,g}^R(t) - \sum_{k=1}^{n_Q} (\underline{F}_x^R)^{-1} \underline{F}_{e_k}^R \begin{pmatrix} e_k^{(0)}(t) \\ \vdots \\ e_k^{(r_k)}(t) \end{pmatrix}, t > 0 \quad (8.219)$$

und mit (8.216)

$$\vec{x}_{A,g}(t) = \underline{F}_x (\underline{F}_x^R)^{-1} \vec{x}_{A,g}^R(t) + \sum_{k=1}^{n_Q} \left(\underline{F}_{e_k} - \underline{F}_x (\underline{F}_x^R)^{-1} \underline{F}_{e_k}^R \right) \begin{pmatrix} e_k^{(0)}(t) \\ \vdots \\ e_k^{(r_k)}(t) \end{pmatrix}, t > 0 \quad (8.220)$$

Ferner gilt für beliebiges $t_0 > 0$ mit (8.214), (8.217) und (8.219) für $t > t_0$:

$$\begin{aligned}
 a_{g,m}(t) &= \sum_{k=1}^{n_Q} \sum_{\nu=0}^{q_{j_k,m}} F_{j_k,m,\nu} e_k^{(\nu)}(t) \\
 &+ \sum_{k=1}^{n_Q} \int_{t_0}^t h_{g,j_k,m}(t-t') e_k(t') dt' + \vec{h}_{g,m}^t(t-t_0) \widetilde{A} \widetilde{X} \widetilde{F}_x (F_x^R)^{-1} \vec{x}_{A,g}^R(t_0) \\
 &+ \sum_{k=1}^{n_Q} \vec{h}_{g,m}^t(t-t_0) \widetilde{A} \widetilde{X} \left(\widetilde{F}_{e_k} - \widetilde{F}_x (F_x^R)^{-1} \widetilde{F}_{e_k}^R \right) \begin{pmatrix} e_k^{(0)}(t_0) \\ \vdots \\ e_k^{(r_k)}(t_0) \end{pmatrix} \quad (8.221)
 \end{aligned}$$

Dies entspricht wiederum der Darstellung (5.42), wobei nun $\vec{x}_{A,g}^R(t)$ die Rolle des Zustandsfunktionsvektors übernimmt. Ferner entspricht (8.220) in diesem Sinne (5.44). Wie in Satz 5.1, 3. behauptet, kann man also $\vec{x}(t)$ offenbar immer als Teil von $\vec{x}_{A,g}(t)$ annehmen. Es sei nun (8.221) speziell für $t \rightarrow t_0$ mit beliebigen $t_0 > 0$ ausgewertet. Es gilt somit für $t_0 > 0$:

$$\begin{aligned}
 a_{g,m}(t_0) &= \sum_{k=1}^{n_Q} \sum_{\nu=0}^{q_{j_k,m}} F_{j_k,m,\nu} e_k^{(\nu)}(t_0) + \vec{h}_{g,m}^t(0) \widetilde{A} \widetilde{X} \widetilde{F}_x (F_x^R)^{-1} \vec{x}_{A,g}^R(t_0) \\
 &+ \sum_{k=1}^{n_Q} \vec{h}_{g,m}^t(0) \widetilde{A} \widetilde{X} \left(\widetilde{F}_{e_k} - \widetilde{F}_x (F_x^R)^{-1} \widetilde{F}_{e_k}^R \right) \begin{pmatrix} e_k^{(0)}(t_0) \\ \vdots \\ e_k^{(r_k)}(t_0) \end{pmatrix} \quad (8.222)
 \end{aligned}$$

Per Definition gibt es zu jeder der n Netzwerkvariablen

$$\vec{x}_{A,g}^R(t) = (x_{A,g,1}^R(t), \dots, x_{A,g,n}^R(t))^t \quad (8.223)$$

eine Zweiggleichung der Form

$$a_{m_j}(t) = \gamma_j(x_{A,g,j}^R)^{(1)}, \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \neq 0 \end{matrix} \quad (8.224)$$

die diese erfüllt. Setzt man (8.222) ein, so folgt für $t > 0$:

$$\begin{aligned}
 (\vec{x}_{A,g}^R(t))^{(1)} &= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma_1} \vec{h}_{g,m_1}^t(0) \widetilde{A} \widetilde{X} \widetilde{F}_x (F_x^R)^{-1} \\ \vdots \\ \frac{1}{\gamma_n} \vec{h}_{g,m_n}^t(0) \widetilde{A} \widetilde{X} \widetilde{F}_x (F_x^R)^{-1} \end{pmatrix}}_{\cong \widetilde{A}} \vec{x}_{A,g}^R(t) + \\
 &\underbrace{\sum_{k=1}^{n_Q} \left[\begin{bmatrix} \sum_{\nu=0}^{q_{j_k,m_1}} \frac{1}{\gamma_1} F_{j_k,m_1,\nu} e_k^{(\nu)}(t) \\ \vdots \\ \sum_{\nu=0}^{q_{j_k,m_n}} \frac{1}{\gamma_n} F_{j_k,m_n,\nu} e_k^{(\nu)}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma_1} \vec{h}_{g,m_1}^t(0) \widetilde{A} \widetilde{X} \left(\widetilde{F}_{e_k} - \widetilde{F}_x (F_x^R)^{-1} \widetilde{F}_{e_k}^R \right) \\ \vdots \\ \frac{1}{\gamma_n} \vec{h}_{g,m_n}^t(0) \widetilde{A} \widetilde{X} \left(\widetilde{F}_{e_k} - \widetilde{F}_x (F_x^R)^{-1} \widetilde{F}_{e_k}^R \right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_k^{(0)}(t) \\ \vdots \\ e_k^{(r_k)}(t) \end{pmatrix} \right]}_{\cong \sum_{k=1}^{n_Q} \sum_{\nu=0}^{r_k+1} \vec{B}_{k,\nu} e_k^{(\nu)}(t)} \quad (8.225)
 \end{aligned}$$

Für $\vec{x}_{A,g}^R(t)$ gilt also das Basisdifferentialgleichungssystem (5.24) eines Zustandsraummodells n -ter Ordnung und alle Netzwerkvariablen $a_{g,m}(t)$ sind mit (8.222) Ausgangsfunktionen dieses Zustandsraummodells (ersetze dazu t_0 durch t in (8.222) und vergleiche (8.222) mit (5.25)).

Nach (8.222) gilt für jede Netzwerkvariable für $t > 0$ (siehe (5.25)) eine Gleichung der Form

$$a_{g,m}(t) = \vec{C}_m^t \vec{x}_{A,g}^R(t) + \sum_{i=1}^{n_Q} \sum_{j=0}^{r_k+1} E_{m,i,j} e_i^{(j)}(t)$$

Ferner gilt nach (8.220) für jedes der n_A Elemente von $\vec{x}_{A,g}(t)$ eine Gleichung der Form

$$x_{A,g,l}(t) = \vec{C}_l^t \vec{x}_{A,g}^R(t) + \sum_{i=1}^{n_Q} \sum_{j=0}^{r_k} \bar{E}_{l,i,j} e_i^{(j)}(t) .$$

Dabei kann $\vec{x}_{A,g}^R(t)$ für jedes t nach Konstruktion (siehe (8.191)–(8.193)) beliebige Werte annehmen ebenso wie $e_i^{(j)}(t)$ für alle i und j (siehe (8.187)–(8.188)).

Sei nun eine algebraische Netzwerkgleichung des Netzwerkmodells zwischen zwei Netzwerkvariablen gegeben. Z.B.:

$$a_{m_1}(t) = R a_{m_2}(t)$$

Laut Voraussetzung erfüllen die über (8.222) in der oben angegebenen Form gegebenen Lösungen diese Netzwerkgleichung für $t > 0$ und, da sowohl $x_{A,g}^R(t)$ als auch $e_i^{(j)}(t)$ beliebige Werte annehmen können, folgt daraus sofort:

$$\vec{C}_{m_1}^t = R \vec{C}_{m_2}^t, \quad E_{m_1,i,j} = R E_{m_2,i,j} \quad \text{für alle } i, j$$

Entsprechendes gilt für alle algebraischen Netzwerkgleichungen des Netzwerkmodells.

Sei ferner eine der nicht algebraischen Gleichungen, die nicht zu den n durch (8.224) erfassten Gleichungen gehören, gegeben z.B.:

$$a_{m_3}(t) = \gamma x_{A,g,l}^{(1)}(t), \quad \gamma \neq 0$$

Mit (8.220) und (8.222) und den oben angegebenen Formen dieser Gleichungen, sowie (8.225), folgt daher

$$\begin{aligned} & \vec{C}_{m_3}^t \vec{x}_{A,g}(t) + \sum_{i=1}^{n_Q} \sum_{j=0}^{r_k+1} \bar{E}_{m_3,i,j} e_i^{(j)}(t) = \\ & \gamma \left(\vec{C}_l^t \left(x_{A,g}^R(t) \right)^{(1)}(t) + \sum_{i=1}^{n_Q} \sum_{j=0}^{r_k} \bar{E}_{l,i,j} e_i^{(j+1)}(t) \right) \stackrel{(8.225)}{=} \\ & \gamma \left(\vec{C}_l^t \underline{A} x_{A,g}^R(t) + \sum_{i=1}^{n_Q} \left(\sum_{j=0}^{r_k+1} \vec{C}_l^t \vec{B}_{i,j} e_i^{(j)}(t) + \sum_{j=1}^{r_k+1} \bar{E}_{l,i,j-1} e_i^{(j)}(t) \right) \right) \end{aligned}$$

Da für alle $t > 0$ sowohl $x_{A,g}^R(t)$ als auch $e_i^{(j)}(t)$ für alle i, j beliebige Werte annehmen können, folgt somit

$$\vec{C}_{m_3}^t = \gamma \vec{C}_l^t \underline{A}, \quad E_{m_3,i,j} = \gamma \left(\vec{C}_l^t \vec{B}_{i,j} + \begin{matrix} (\bar{E}_{l,i,-1} := 0) \\ \downarrow \\ \bar{E}_{l,i,j-1} \end{matrix} \right) \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq n_Q, \quad 0 \leq j \leq r_k + 1$$

Entsprechendes gilt für alle nicht algebraischen Netzwerkgleichungen, die nicht durch (8.224) erfasst werden.

Gibt man nun eine Lösung des Differentialgleichungssystems (8.225) $x_{A,g}^R(t)$ vor, berechnet die differenzierbaren Variablen über (8.220) und alle anderen Netzwerkvariablen über (8.222), so folgt aufgrund der oben abgeleiteten zeitunabhängigen Beziehungen zwischen den Koeffizienten der Darstellungen (8.220) und (8.222), dass alle Netzwerkgleichungen des ursprünglich vorgegeben Netzwerkmodells durch die so berechneten Netzwerkvariablen gelöst werden. Dabei ist nur noch zu beachten, dass die durch (8.224) erfassten Netzwerkgleichungen gelöst werden, wenn (8.225) erfüllt ist. Der Lösungsraum des Zustandsraummodells (8.225) mit den Ausgangsgleichungen (8.220) bzw. (8.222) ist daher identisch mit dem Lösungsraum des ursprünglich vorgegebenen Anfangswertproblems 2. Art. Dabei wird für $\vec{x}_{A,g}^R(t)$ für ein beliebiges $t_0 > 0 = t_S$ ein beliebiger Anfangszustandsvektor \vec{x}_{t_0} vorgegeben und $\vec{x}_{A,g}^R(t_0^+) = \vec{x}_{t_0}$ gefordert. Die Anfangswerte \vec{x}_{A,t_0} für das ursprüngliche Anfangswertproblem 2. Art müssen dabei über (8.220) also

$$\vec{x}_{A,t_0} = \tilde{F}_x (\tilde{F}_x^R)^{-1} \vec{x}_{t_0} + \sum_{k=1}^{n_Q} \left(\tilde{F}_{e_k} - \tilde{F}_x (\tilde{F}_x^R)^{-1} \tilde{F}_{e_k}^R \right) \begin{pmatrix} e_k^{(0)}(t_0) \\ \vdots \\ e_k^{(r_k)}(t_0) \end{pmatrix}$$

berechnet werden. Für die Anfangswerte \vec{x}_{A,t_0} , die durch die obige Gleichung nicht erfasst werden, gibt es keine Lösung des Anfangswertproblems 2. Art.

Es bleibt noch zu zeigen, dass das Zustandsraummodell für jedes \vec{x}_{t_0} genau eine Lösung hat.

Satz 8.2

Jedes Zustandsraummodell nach Definition 5.9 hat bei Vorgabe eines beliebigen Zustandsvektors \vec{x}_{t_0} zum Zeitpunkt $t_0 > t_Q$ für \bar{k}_i -fach differenzierbare und inklusive aller \bar{k}_i -Ableitungen laplace-transformierbare Funktionen $e_i(t)$, die für $t_Q < t < \infty$ gegeben sind, genau eine Lösung im Bereich der gewöhnlichen Funktionen, für die $\vec{x}(t_0^+) = \vec{x}_{t_0}$ gilt. Diese Lösung hat für $t > t_Q$ die Gestalt:

$$x_j(t) = \sum_{k=1}^n \left(\bar{h}_{k,j}(t - t_0) x_{t_0,k} + \int_{t_0}^t \bar{h}_{k,j}(t - t') q_k(t') dt' \right) \quad (8.226)$$

mit

$$q_k(t) = \sum_{i=1}^{n_Q} \sum_{\nu=0}^{\bar{k}_i} B_{i,\nu,k} e_i^{(\nu)}(t) \quad (8.227)$$

Dabei sind die $\bar{h}_{k,j}(t)$ Funktionen der Form (8.28) mit

$$\bar{h}_{k,j}(t) \circ \bullet (-1)^{(k+j)} \frac{\det(\underline{s} \mathbf{1} - \underline{A})_{k,j}}{\det(\underline{s} \mathbf{1} - \underline{A})}, \quad (8.228)$$

deren charakteristische Frequenzen genau die Eigenwerte von \underline{A} sind.

Es gilt ferner

$$\begin{aligned} \vec{x}_{t_0} &= (x_{t_0,1}, \dots, x_{t_0,n})^t, \vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^t \\ \vec{B}_{i,v} &= (B_{i,v,1}, \dots, B_{i,v,n}), \vec{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))^t \end{aligned} \quad (8.229)$$

zum Beweis:

Es sei O.B.D.A $t_0 = 0$ angenommen (siehe Bemerkung 8.1).

Zur Motivation der Darstellung des Anfangswertproblems im Laplacebereich wird zunächst angenommen, dass eine laplacetransformierbare Lösung $\vec{x}(t)$ des Anfangswertproblems existiert.

Nach der Laplacetransformation lautet das Anfangswertproblem (5.24):

$$\underline{s} \cdot \underline{\vec{X}}(\underline{s}) - \vec{x}_0 = \underline{A} \cdot \underline{\vec{X}}(\underline{s}) + \mathcal{L}\{\vec{q}(t)\}(\underline{s}) \quad (8.230)$$

Dabei ist $\underline{\vec{X}}(\underline{s}) = (\mathcal{L}\{x_1(t)\}(\underline{s}), \dots, \mathcal{L}\{x_n(t)\}(\underline{s}))^t$.

Aus (8.230) folgt, wenn $\underline{1}$ die n -dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet:

$$(\underline{s}\underline{1} - \underline{A}) \underline{\vec{X}}(\underline{s}) = \vec{x}_0 + \mathcal{L}\{\vec{q}(t)\}(\underline{s}) \quad (8.231)$$

Ausgehend von der Lösung $\underline{\vec{X}}(\underline{s})$ von (8.231) wird nun unabhängig von der ursprünglichen Annahme, dass eine Lösung im Zeitbereich existiert, gezeigt, dass die Rücktransformation immer existiert und die rücktransformierte Zeitfunktion eine Lösung des Anfangswertproblems darstellt.

Analog zu (8.150) berechnet sich die j -te ($1 \leq j \leq n$) Komponente von $\underline{\vec{X}}(\underline{s})$ wie folgt:

$$\underline{X}_j(\underline{s}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} \underbrace{\frac{\det\left(\left(\underline{s}\underline{1} - \underline{A}\right)_{k,j}\right)}{\det(\underline{s}\underline{1} - \underline{A})}}_{\underline{H}_{k,j}(\underline{s})} (x_{0,k} + \mathcal{L}\{q_k(t)\}(\underline{s})) \quad (8.232)$$

Dabei entsteht $\left(\underline{s}\underline{1} - \underline{A}\right)_{k,j}$ aus $\left(\underline{s}\underline{1} - \underline{A}\right)$, wenn man die k -te Zeile und die j -te Spalte streicht. Ferner sind $x_{0,k}$, $q_k(t)$, $1 \leq k \leq n$ die Komponenten der Vektoren \vec{x}_0 und $\vec{q}(t)$.

Aufgrund der speziellen Struktur von $\left(\underline{s}\underline{1} - \underline{A}\right)$ kann man mit Bemerkung 8.17 sofort folgern:

- 1) $\det(\underline{s}\underline{1} - \underline{A})$ ist ein normiertes Polynom, das den Grad n hat und nur reelle Koeffizienten besitzt.
- 2) Das Polynom $\det\left(\left(\underline{s}\underline{1} - \underline{A}\right)_{k,j}\right)$ hat ebenfalls nur reelle Koeffizienten und den Grad $n-1$, falls $k=j$ und einen Grad $\leq n-2$ hat, falls $k \neq j$. Für $k=j$ ist das Polynom ebenfalls normiert.

Für die Nullstellen von $\det(\underline{s}\underline{1} - \underline{A})$ und $\det\left(\left(\underline{s}\underline{1} - \underline{A}\right)_{k,j}\right)$, $1 \leq k, j \leq n$ gilt somit Bemerkung 8.19. Ferner ist das Polynom $\det(\underline{s}\underline{1} - \underline{A})$ das charakteristische Polynom von \underline{A} und seine Nullstellen sind daher die Eigenwerte von \underline{A} .

Für die in \underline{s} gebrochen rationalen Funktionen $\det\left(\left(\underline{s}\underline{1} - \underline{A}\right)_{k,j}\right) / \det(\underline{s}\underline{1} - \underline{A})$ gibt es wieder eine Partialbruchzerlegung der Form (8.159), wobei die erste Summe verschwindet (Fall $q < 0$). Daher gibt es analog zur Bemerkung 8.21 eine gewöhnliche reelle Funktion $\bar{h}_{k,j}(t)$ mit

$$(-1)^{k+j} \frac{\det\left(\left(\underline{s}\underline{1} - \underline{A}\right)_{k,j}\right)}{\det(\underline{s}\underline{1} - \underline{A})} \bullet \longrightarrow \bar{h}_{k,j}(t), \quad t \geq 0, \quad (8.233)$$

wobei die $\bar{h}_{k,j}(t)$ wiederum in der Form (8.164) dargestellt werden können und die charakteristischen Frequenzen A_i , $i = 1, \dots, l_1$, \underline{A}_i , \underline{A}_i^* , $i = l_1 + 1, \dots, l_2$ die Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Matrix \underline{A} mit den Vielfachheiten μ_i (also insbesondere die Eigenwerte von \underline{A}) sind. Es gilt

$$\sum_{i=1}^{l_1} \mu_i + 2 \sum_{i=l_1+1}^{l_2} \mu_i = n.$$

Aus (8.232) folgt daher

$$\begin{aligned} x_j(t) = & \sum_{k=1}^n \left(\bar{h}_{k,j}(t) x_{0,k} \right. \\ & \left. + \int_0^t \bar{h}_{k,j}(t-t') q_k(t') dt' \right), \quad t > 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (8.234)$$

Für $t \rightarrow t_0 = 0$ verschwindet der zweite Term in (8.234). Aufgrund des ersten Grenzwertsatzes (Bemerkung 8.9) und Bemerkung 8.11 gilt aufgrund der obigen Eigenschaften 1) und 2):

$$\bar{h}_{k,j}(0) = \lim_{\underline{s} \rightarrow \infty} \underline{s} \bar{H}_{k,j}(\underline{s}) = \lim_{\underline{s} \rightarrow \infty} (-1)^{k+j} \underline{s} \frac{\det((\underline{s}\underline{1} - \underline{A})_{k,j})}{\det(\underline{s}\underline{1} - \underline{A})} = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases} \quad (8.235)$$

Somit gilt

$$x_j(0^+) = \sum_{k=1}^n \bar{h}_{k,j}(0) x_{0,k} = x_{0,j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (8.236)$$

Die vorgegebenen Anfangswerte werden von $x_j(t)$, $j = 1, \dots, n$ also stetig angenommen.

Aufgrund der Darstellung (8.234) sind die $x_j(t)$, $j = 1, \dots, n$ für $t > 0$ differenzierbar und die $\frac{d}{dt} x_j(t)$, $j = 1, \dots, n$ sind ebenfalls laplacetransformierbar. Somit folgt aus dem Ableitungssatz

$$\underline{s} \vec{X}(\underline{s}) = \mathcal{L} \left\{ \frac{d}{dt} x(t) \right\} (\underline{s}) + \vec{x}(0^+), \quad (8.237)$$

und mit (8.231) folgt sofort aufgrund der Linearität der Laplacetransformation und (8.236)

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d}{dt} \vec{x}(t) - \underline{A} \vec{x}(t) - \vec{q}(t) \right\} = \vec{x}_0 - \vec{x}(0^+) = 0. \quad (8.238)$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Laplacetransformation impliziert dies, dass (8.234) die für beliebiges \vec{x}_0 existierende, eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (5.24) im Bereich der gewöhnlichen Funktionen ist. Die Gültigkeit der Lösungsdarstellung (8.234) für $t < 0 = t_0$ und die Möglichkeit, auf die Voraussetzung der Laplacetransformierbarkeit der Eingangsfunktionen und ihrer Ableitungen zu verzichten, kann wiederum analog zu Bemerkung 8.12 gezeigt werden.

Für ν -fach differenzierbare Funktionen $e(t)$ und $h(t)$ gilt mit der partiellen Integration folgende Umformung

$$\begin{aligned} \int_0^t \bar{h}(t-t') e^{(\nu)}(t') dt' &= \sum_{j=0}^{\nu-1} \left(\bar{h}^{(j)}(0) e^{(\nu-j-1)}(t) - \bar{h}^{(j)}(t) \right. \\ &\quad \left. e^{(\nu-j-1)}(0) \right) + \int_0^t \bar{h}^{(\nu)}(t-t') e(t') dt' \end{aligned} \quad (8.239)$$

Mit dieser Umformung kann man (8.226) in die Form (5.42) überführen.

Bemerkung 8.29

Sei ein Netzwerk wie in Satz 5.1 gegeben. Dazu existiert immer ein zum Netzwerkmodell äquivalentes Zustandsraummodell der Dimension n wie in Definition 5.9 mit $\bar{k}_i := r_i + 1$, $1 \leq i \leq n_Q$ (siehe (8.222), (8.225)) gegeben. Alle Netzwerkvariablen $a(t)$ sind Ausgangsfunktionen dieses Zustandsraummodells. Alle in (5.42) vorkommenden Funktionen $a_{zi,t_0}(t)$, $a_{d,k,t_0}(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$, $h_{a,k}(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$ haben die Gestalt (8.28) mit natürlichen Frequenzen A_i , $i = 1, \dots, l$ und Potenzen von t bis zur Ordnung $k_i - 1$. Alle diese natürlichen Frequenzen in diesen Funktionen sind immer auch Nullstellen mit einer Vielfachheit von mindestens k_i des charakteristischen Polynoms der Matrix \underline{A} des Zustandsraummodells und somit Eigenwerte von \underline{A} . Ebenso wie in Bemerkung 5.12 für die Frequenzgänge folgt somit, mit Hilfe von Bem. 8.28, dass für alle Übertragungsfunktionen des Netzwerkmodells $\underline{H}_{j_k,m}(s) = c_{j_k,m} \frac{\underline{P}_{j_k,m}(s)}{\underline{Q}_{j_k,m}(s)}$ ($\underline{P}_{j_k,m}(s)$, $\underline{Q}_{j_k,m}(s)$ sollen keine gemeinsamen Nullstellen haben) gilt:

$$\text{grad}(\underline{Q}_{j_k,m}(s)) \leq n.$$

$\text{grad}(\underline{Q}_{j_k,m}(s)) = n = n_A - n_R$ impliziert (siehe (8.218)), dass alle natürlichen Frequenzen \underline{A}_i , $1 \leq i \leq l$ durch die Nullstellen von $\underline{Q}_{j_k,m}(s)$ erfasst werden. Da mit (8.193) $n \leq n_A$ gilt, impliziert $n_A = \text{grad}(\underline{Q}_{j_k,m}(s)) \leq n$ ferner sofort $n = n_A$ und somit nach Bemerkung 8.25 sofort $r_k < 0$, $1 \leq k \leq n_Q$. Mit (8.195) bedeutet dies, dass das Netzwerkmodell nicht differenzierend ist und für beliebige Zielanfangswerte \vec{x}_{A,t_0} das Anfangswertproblem zweiter Art immer eine eindeutige Lösung hat. Dies ist ein einfaches Kriterium, um die Existenz inkonsistenter Anfangswerte auszuschliessen.

Beweis:

Die Darstellung (5.42) kann mit Hilfe von (8.239) (formuliert für $t_0 \neq 0$) für jede Zustandsraumdarstellung mittels (5.25) aus (8.234) (formuliert für $t_0 \neq 0$) erzeugt werden. Daraus folgt mit Satz 8.2 und Bemerkung 8.11 die Behauptung:

Bemerkung 8.30

Sei ein Netzwerkmodell wie in Satz 5.1 gegeben und sei eines der zugeordneten Zustandsraummodelle wie in Definition 5.9 gegeben. Dabei sei das Zustandsraummodell so gewählt, dass alle Elemente von $x(t)$ Zweigspannungen oder Zweigströme des Netzwerkmodells sind. Dies ist, wie in (8.225) gezeigt wurde, immer möglich. Ist \underline{E} ein Eigenwert der Matrix \underline{A} , so gibt es für mindestens eine Netzwerkvariable des unerregten Netzwerks eine Lösung der Form $a(t) = \Re\{\underline{A} e^{\underline{E}t}\}$ mit $\underline{A} \neq 0$ und $a(t)$ ungleich der Nullfunktion. Gilt daher für einen der Eigenwerte \underline{E} der Matrix \underline{A} $\Re\{\underline{E}\} \geq 0$, so ist das Netzwerkmodell nicht asymptotisch stabil, da $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$ nicht immer gilt.

Beweis:

Sei $\vec{x}_E \neq 0$ ein Eigenvektor zum Eigenwert \underline{E} . Da \underline{A} reell ist, gilt entweder \underline{E} ist reell und \vec{x}_E kann reell angenommen werden oder \underline{E} ist komplex und \underline{E}^* ist ebenfalls Eigenwert und \vec{x}_E^* ist ein Eigenvektor zum Eigenwert \underline{E}^* . Insgesamt ist also entweder

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_E e^{\underline{E}t} \quad (8.240)$$

oder mit (8.165)

$$\vec{x}(t) = \frac{1}{2} \left(\vec{x}_E e^{\underline{E}t} + \vec{x}_E^* e^{\underline{E}^*t} \right) = \Re \{ \vec{x}_E e^{\underline{E}t} \} = e^{\Re\{\underline{E}\}t} \left[\Re\{\vec{x}_E\} \cos(\Im\{\underline{E}\}t) - \Im\{\vec{x}_E\} \sin(\Im\{\underline{E}\}t) \right] \quad (8.241)$$

eine Lösung des homogenen (unerregten) Zustandsraummodells. Ist $\Re\{\underline{E}\} \geq 0$, so konvergiert $\vec{x}(t)$ für $t \rightarrow \infty$ nicht gegen 0. Da jedes Element von $\vec{x}(t)$ einer Netzwerkvariablen entspricht, folgt daraus die Behauptung.

Bemerkung 8.31

1. Für die asymptotische Stabilität des Netzwerkmodells ist nach Satz 8.2, Bemerkung 8.29 und Bemerkung 8.30 notwendig und hinreichend, dass alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(\underline{s}1 - \underline{A})$ einen echt negativen Realteil haben.
2. Sei ein Zweipolnetzwerkmodell wie am Anfang von Kapitel 8.2 beschrieben gegeben. Sei, wie in Definition 8.3 beschrieben, eine Übertragungsfunktion $\underline{H}(\underline{s})$ festgelegt. Wenn diese Übertragungsfunktion eine Polstelle (natürliche Frequenz) \underline{s}_0 mit positivem Realteil ($\Re\{\underline{s}_0\} \geq 0$) hat, so ist das Netzwerkmodell asymptotisch nicht stabil.
3. Sei $\underline{H}(\underline{s}) = c \frac{P(\underline{s})}{Q(\underline{s})}$, wobei $P(\underline{s})$ und $Q(\underline{s})$ Polynome ohne gemeinsame Nullstellen sind, und sei $\text{grad } Q(\underline{s}) = n = n_A - n_R$. $\Re\{\underline{s}_0\} < 0$ für alle Nullstellen \underline{s}_0 von $Q(\underline{s})$ ist nach Bemerkung 8.29 eine notwendige und hinreichende Bedingung für die asymptotische Stabilität des Netzwerkmodells.

Beweis zu 2.

Jede Polstelle jeder Übertragungsfunktion ist Nullstelle von $\det \underline{N}(\underline{s})$. Daher folgt die 2. Behauptung aus Bemerkung 8.27.

Gegenbeispiel 8.3:

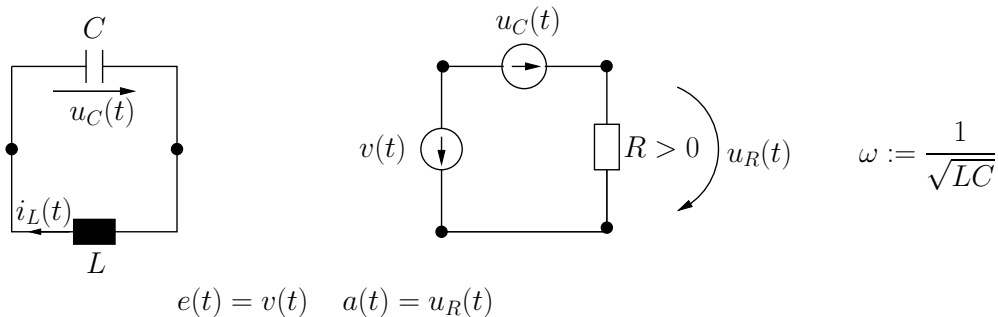


Abbildung 8.14

Die Lösung für $u_C(t)$ für $t_0 = 0$ und die Zielanfangswerte $u_{C,0}$ und $i_{L,0} = 0$ ist:

$$u_C(t) = u_{C,0} \cos \omega t$$

Das Netzwerkmodell ist also nicht asymptotisch stabil!

Es gilt:

$$u_C(t) \equiv 0 \text{ für } u_{C,0} = i_{L,0} = 0$$

Es folgt für die Übertragungsfunktion:

$$\underline{H}(\underline{s}) = 1 = \left. \frac{\mathcal{L}\{u_R(t)\}(\underline{s})}{\mathcal{L}\{e(t)\}(\underline{s})} \right|_{\substack{u_{C,0} = 0 \\ i_{L,0} = 0}}$$

\Rightarrow Das Nennerpolynom von $\underline{H}(\underline{s})$ hat keine Nullstellen, also auch keine mit einem Realteil, der größer oder gleich 0 wäre.

Für den „zero input response“ von $u_R(t)$ gilt jedoch z.B.

$$u_R(t) \bigg|_{\substack{u_{C,0} \text{ gegeben} \\ i_{L,0} = 0 \\ e(t) \equiv 0}} = -u_{C,0} \cos \omega t$$

Dies zeigt wiederum, dass das Netzwerkmodell nicht asymptotisch stabil ist.

Aus der Tatsache, dass eine Übertragungsfunktion eines Netzwerkmodells keine Polstellen mit positivem Realteil hat, folgt also noch nicht zwingend die asymptotische Stabilität des gesamten Netzwerkmodells.

Bemerkung 8.32

Stellt man eine Übertragungsfunktion $\underline{H}(\underline{s})$ wie folgt

$$\underline{H}(\underline{s}) = c \cdot \frac{\underline{P}(\underline{s})}{\underline{Q}(\underline{s})}$$

dar, wobei $c \neq 0$ und $\underline{P}(\underline{s})$, $\underline{Q}(\underline{s})$ normierte Polynome ohne gemeinsame Nullstellen sein sollen, ist $\underline{H}(\underline{s})$ vollständig bekannt, falls neben der reellen Konstanten c alle Nullstellen von $\underline{P}(\underline{s})$ und $\underline{Q}(\underline{s})$ sowie deren Vielfachheiten gegeben sind. Letztere Nullstellen entsprechen den Polstellen von $\underline{H}(\underline{s})$. $\underline{H}(\underline{s})$ ist also weitgehend bekannt, wenn man seine Nullstellen und Polstellen angibt. Dies geschieht üblicherweise durch ein Pol-Nullstellen-Schema der folgenden Form:

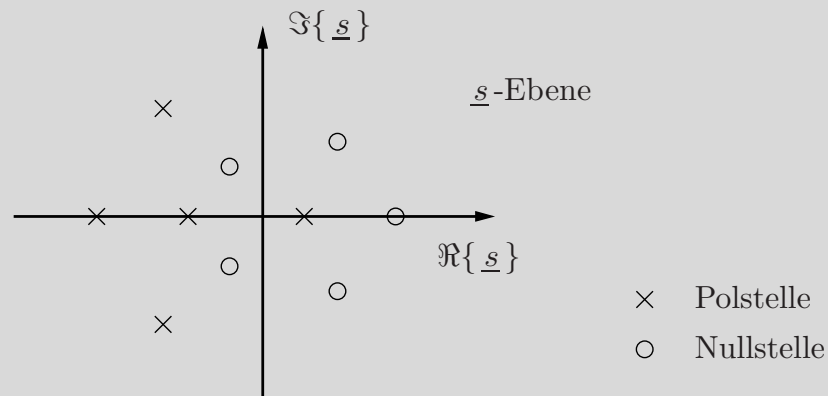


Abbildung 8.15

Definition 8.4

Ein Polynom für dessen Nullstellen s_i , $\Re\{s_i\} < 0$ gilt, wird Hurwitzpolynom genannt.

Bemerkung 8.33

Ein normiertes Hurwitzpolynom, das die Symmetriebedingung (8.158) erfüllt, kann folgendermaßen dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
 \underline{P}(\underline{s}) &= \underline{s}^n + \alpha_{n-1}\underline{s}^{n-1} + \dots + \alpha_0 \\
 &= \prod_{i=1}^{l_1} (\underline{s} - s_i)^{\mu_i} \cdot \prod_{i=l_1+1}^{l_2} (\underline{s} - \underline{s}_i)^{\mu_i} (\underline{s} - \underline{s}_i^*)^{\mu_i} \\
 &= \prod_{i=1}^{l_1} (\underline{s} - s_i)^{\mu_i} \cdot \prod_{i=l_1+1}^{l_2} (\underline{s}^2 - 2\Re\{\underline{s}_i\}\underline{s} + |\underline{s}_i|^2)^{\mu_i} \\
 &\quad \text{mit } \sum_{i=1}^{l_1} \mu_i + 2 \sum_{i=l_1+1}^{l_2} \mu_i = n.
 \end{aligned}$$

Es folgt: $\alpha_\nu > 0$, $\nu = 0, \dots, n-1$. Ein normiertes Hurwitzpolynom, das die Symmetriebedingung erfüllt, hat also nur echt positive Koeffizienten. Hat also ein normiertes Polynom, das die Symmetriebedingung erfüllt, einen Koeffizienten, der kleiner oder gleich 0 ist, so muss dieses Polynom eine Nullstelle haben, die keinen echt negativen Realteil hat!

Achtung: Für $n \geq 3$ gilt nicht, dass ein normiertes Polynom, das die Symmetriebedingung erfüllt und echt positive Koeffizienten hat, immer ein Hurwitzpolynom ist!

(Gegenbeispiel: $\underline{s}^3 + \underline{s}^2 + \underline{s} + 1 = (\underline{s} + 1)(\underline{s} + j)(\underline{s} - j)$)

Bemerkung 8.34

Bei der Darstellung gebrochen rationaler Funktionen $\underline{H}(\underline{s}) = \frac{\underline{P}(\underline{s})}{\underline{Q}(\underline{s})}$ durch Polynome sei hier stets vorausgesetzt, dass $\underline{P}(\underline{s})$ und $\underline{Q}(\underline{s})$ keine gemeinsamen Nullstellen haben.

- 1) Das Netzwerkmodell ist genau dann asymptotisch stabil, wenn $\det \underline{N}(\underline{s})$ Hurwitzpolynom ist.
- 2) Es ist ebenfalls genau dann asymptotisch stabil, falls das charakteristische Polynom der Matrix \underline{A} aus (8.225) ein Hurwitzpolynom ist.
- 3) Notwendig und hinreichend für die asymptotische Stabilität des Netzwerkmodells ist, dass alle Nennerpolynome der in (8.153) definierten, gebrochen rationalen Funktionen $\underline{H}_{k,m}(\underline{s})$, $k = z+1, \dots, 2z, m = 1, \dots, 2z$ Hurwitzpolynome sind. Nach (8.222) und (8.153) kann man sich dabei auf die k , für die $X_k \neq 0$ sein kann, und die m , die zu differenzierbaren Variablen gehören, beschränken.
- 4) Da der zero input response äquivalent sowohl durch (8.174) als auch durch (8.222) beschrieben wird, müssen wegen Satz 8.2 und Bemerkung 8.30 alle Nullstellen von $\det(\underline{s} \underline{1} - \underline{A})$ ebenfalls Nullstellen von $\det \underline{N}(\underline{s})$ sein. Ferner wird die durch (8.203) und Bemerkung 8.27 gegebene Lösung auch durch (8.222) beschrieben. Daher sind alle Nullstellen von $\det \underline{N}(\underline{s})$ auch Nullstellen von $\det(\underline{s} \underline{1} - \underline{A})$.

Haben ferner $\det \underline{\underline{N}}(\underline{s})$ und $\det(\underline{s} \underline{1} - \underline{\underline{A}})$ nur einfache Nullstellen, so folgt sofort mit einer reellen Konstante $K \neq 0$

$$\det \underline{\underline{N}}(\underline{s}) = K \det(\underline{s} \underline{1} - \underline{\underline{A}}) \Rightarrow$$

$$\text{grad}(\det \underline{\underline{N}}(\underline{s})) = \text{grad}(\det(\underline{s} \underline{1} - \underline{\underline{A}})) = n.$$

(Diese Gleichungen gelten auch, falls $\det \underline{\underline{N}}(\underline{s})$ und $\det(\underline{s} \underline{1} - \underline{\underline{A}})$ nicht nur einfache Nullstellen haben. Denn ein solches Netzwerkmodell lässt sich durch geringe Netzwerkparametervariationen immer durch ein Netzwerkmodell beliebig genau approximieren, bei dem $\det \underline{\underline{N}}(\underline{s})$ und $\det(\underline{s} \underline{1} - \underline{\underline{A}})$ einfache Nullstellen haben. Der Rest folgt dann sofort aus der stetigen Abhängigkeit der Nullstellen von den Netzwerkparametern.¹)

Bemerkung 8.35

Typische Vorgehensweisen zur Bestimmung der Netzwerkeigenschaften von linearen, zeitinvarianten Netzwerken (siehe den Anfang von Abschnitt 8.2 bezüglich der Beschreibung des Netzwerks):

A) Bestimmung von $\underline{\underline{A}}_m(\underline{s})$ in der Normalform (8.153) für $m = 1, \dots, 2z$

$$\underline{\underline{A}}_m(\underline{s}) = \sum_{k=1}^{n_Q} \underline{\underline{E}}_k(\underline{s}) \underbrace{c_{j_k, m} \frac{\underline{\underline{P}}_{j_k, m}(\underline{s})}{\underline{\underline{Q}}_{j_k, m}(\underline{s})}}_{:= \underline{\underline{H}}_{j_k, m}(\underline{s})} + \sum_{k=z+1}^{2z} X_k \underbrace{c_{k, m} \frac{\underline{\underline{P}}_{k, m}(\underline{s})}{\underline{\underline{Q}}_{k, m}(\underline{s})}}_{:= \underline{\underline{H}}_{k, m}(\underline{s})}$$

durch eines der Lösungsverfahren aus Kapitel 6 (\Rightarrow Übertragungsfunktionen, Frequenzgänge).

Aufgrund von Bem. 8.18 können alle $\underline{\underline{H}}_{k, m}(\underline{s})$, $1 \leq m \leq 2z$, $z+1 \leq k \leq 2z$ als Übertragungsfunktionen aufgefasst werden. Falls für eine der Übertragungsfunktionen $\underline{\underline{H}}_{k, m}(\underline{s})$, $z+1 \leq k \leq 2z$ bei teilerfremder Darstellung durch $\underline{\underline{P}}_{k, m}(\underline{s})$ und $\underline{\underline{Q}}_{k, m}(\underline{s})$ $\text{grad}(\underline{\underline{Q}}_{k, m}(\underline{s})) = n = n_A - n_R$ gilt, sind alle natürlichen Frequenzen des Netzwerkmodell über die Nullstellen von $\underline{\underline{Q}}_{k, m}(\underline{s})$ erfasst und für die asymptotische Stabilität des Netzwerkmodells ist die Bedingung, dass alle diese Nullstellen einen echt negativen Realteil haben, notwendig und hinreichend. Falls sogar $\text{grad}(\underline{\underline{Q}}_{k, m}(\underline{s})) = n_A = n$ ($n_R = 0$) gilt, ist das Netzwerkmodell nicht differenzierend und es gibt keine inkonsistenten Anfangswerte.

B) Bestimmung der Nullstellen von $\underline{\underline{Q}}_{l, m}(\underline{s})$ für alle $m = 1, \dots, 2z$ und alle l , für die X_l nicht immer verschwindet und für die $a_m(t)$ zu den differenzierbaren Variablen gehört. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die asymptotische Stabilität des Netzwerkmodells ist, dass alle diese Nullstellen einen echt negativen Realteil haben.

C) Bestimmung der Partialbruchzerlegung von $\underline{\underline{H}}_{l, m}(\underline{s})$ für alle $m = 1, \dots, 2z$ und alle l , für die X_l nicht verschwindet oder es ein k mit $j_k = l$ gibt und Bestimmung von $\underline{\underline{A}}_{D, m}(\underline{s})$ und $\underline{\underline{A}}_{g, m}(\underline{s})$ wie in (8.172) und (8.173).

¹ Für einen ausführlichen Beweis siehe A. Fettweis: „On the Algebraic Derivation of State Equations“, IEEE Trans. on Circuit Theory, Vol. CT-16, p.171, 1969

D) Rücktransformation mit den Korrespondenzen aus Bemerkung 8.5 und dem Faltungssatz (Bemerkung 8.7). Bei Netzwerkmodellen, bei denen es inkonsistente Zielfangswerte $\vec{x}_{A,0}$ geben kann, verschwindet der Anteil $A_{D,m}(\underline{s})$ aus (8.172), dem keine gewöhnliche Funktion zugeordnet werden kann, nicht immer. Diesem Anteil entspricht im Zeitbereich für $t_S = t_0 = 0$ eine instantan bei $t = 0$ ablaufende Netzwerkreaktion, die mit verallgemeinerten Funktionen ausgedrückt werden muss (siehe Kapitel 10). Der verbleibende Anteil $\underline{A}_{g,m}(\underline{s})$ beschreibt dann im Zeitbereich den Zeitverlauf nach dem instantanen Ausgleichsvorgang bei $t = 0$.

Falls für $0 = t_0 > t_S$ nicht alle $\underline{A}_{D,m}(\underline{s})$ verschwinden, gibt es für das Anfangswertproblem zweiter Art keine Lösung. In diesem Fall kann $\underline{A}_{D,m}(\underline{s})$ auch nicht als instantaner Ausgleichsvorgang, der durch verallgemeinerte Funktionen beschrieben wird, interpretiert werden.

(\Rightarrow Netzwerkantwort im Zeitbereich für $t > 0$, Antwort aus dem Ruhezustand heraus, Darstellung der Antwort im eingeschwungenen Zustand)

Kapitel 9

Netzwerktheoreme und Vierpole (Zweitore)

9.1 Netzwerktheoreme

Satz 9.1 (Substitutionstheorem)

Es sei ein Zweipolnetzwerk (NW1), bei dem sich wie üblich Zweipole und Zweige entsprechen, gegeben. Dies lasse sich wie folgt in Teilnetzwerke aufteilen:

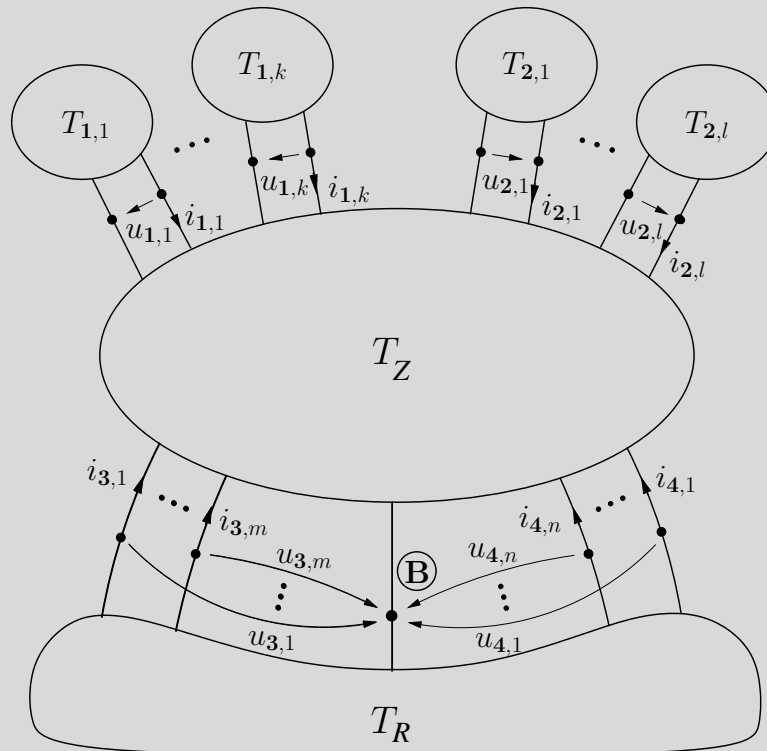
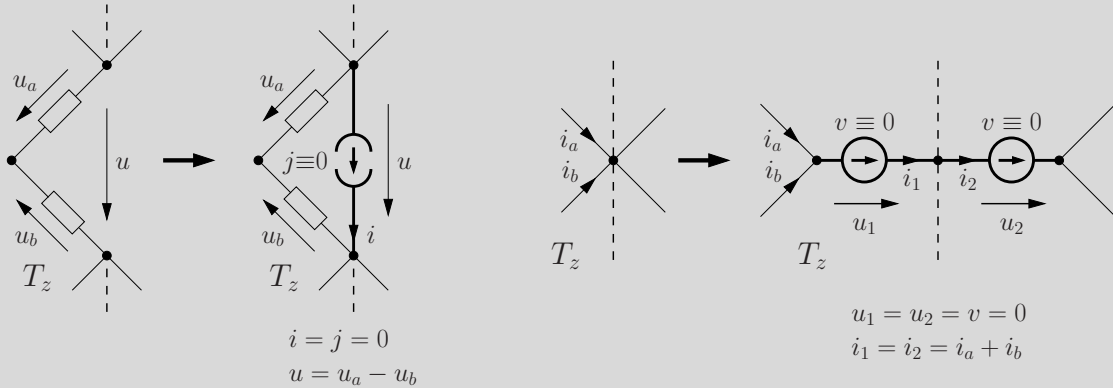


Abbildung 9.1: Netzwerkmodell NW1 mit Aufteilung in Teilnetzwerke $T_1, \dots, T_{1,k}, T_{2,1}, \dots, T_{2,l}, T_R, T_Z$

Die Zweiggleichungen der im Teil T_Z des Netzwerkes liegenden Zweige (Zweipole) enthalten als Variablen außer $u_{1,r}, i_{1,r}, r = 1, \dots, k; u_{2,r}, i_{2,r}, r = 1, \dots, l; u_{3,r}, i_{3,r}, r = 1, \dots, m; u_{4,r}, i_{4,r}, r = 1, \dots, n$ nur Zweigströme und Zweigspannungen der Zweige aus T_Z .

Die Fälle $k = 0, l = 0, m = 0, n = 0$ sind in jeder beliebigen Kombination zugelassen. (Für $m = n = 0$ verschwindet T_R und der Knoten \textcircled{B} .) Weitere Voraussetzungen werden bezüglich der Zweiggleichungen nicht gemacht. Es sei nun eine Lösung der Netzwerkgleichungen des Netzwerkmodells NW1 durch Angabe der Zweigspannungen \vec{U}_0 und Zweigströme \vec{I}_0 gegeben. Die in Abbildung 9.1 ausgezeichneten Ströme und Spannungen können dabei als Zweigströme und Zweigspannungen von Zweigen, die zum Netzwerkmodell T_z gehören, aufgefasst werden. Dies lässt sich immer durch entsprechende Ergänzung von T_z um feste Strom- und Spannungsquellen mit verschwindenden Urspannungen und Urströmen erreichen, ohne dass sich das Verhalten von T_z verändert (siehe unten):



Die Netzwerkgleichungen können im Zeitbereich, im Laplacebereich oder im Bereich der komplexen Wechselstromrechnung formuliert sein. Die Elemente von \vec{U}_0, \vec{I}_0 können daher Zeitfunktionen, Laplacetransformierte oder komplexe Zeiger sein. Aus \vec{U}_0, \vec{I}_0 werden nun die entsprechenden Werte für $u_{1,r}, r = 1, \dots, k; i_{2,r}, r = 1, \dots, l; u_{3,r}, r = 1, \dots, m; i_{4,r}, r = 1, \dots, n$ abgelesen oder extrahiert. Die Teilnetzwerke $T_{1,r}, r = 1, \dots, k; T_{2,r}, r = 1, \dots, l$ und T_R aus Abb. 9.1 werden nun, wie in Abb. 9.2 gezeigt, durch Urstromquellen und Urspannungsquellen substituiert.

$$\begin{aligned}
 v_{1,r} &= u_{1,r} \quad , r = 1, \dots, k \\
 j_{2,r} &= i_{2,r} \quad , r = 1, \dots, l \\
 v_{3,r} &= u_{3,r} \quad , r = 1, \dots, m \\
 j_{4,r} &= i_{4,r} \quad , r = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{9.1}$$

Dadurch entsteht das modifizierte Netzwerkmodell NW2 (siehe Abb. 9.2):

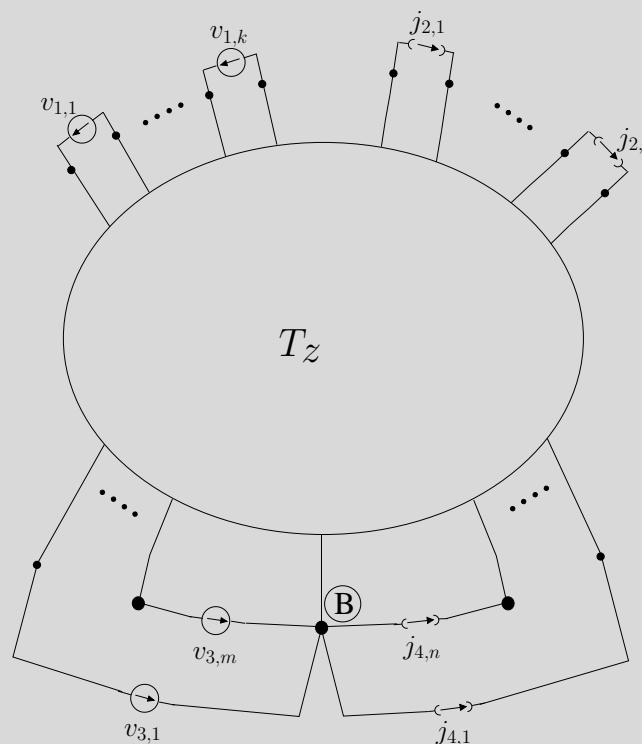


Abbildung 9.2: Netzwerkmodell nach der Substitution

Es gilt:

- $u_{1,r}, i_{1,r}, r = 1, \dots, k; u_{2,r}, i_{2,r}, r = 1, \dots, l; u_{3,r}, i_{3,r}, r = 1, \dots, m; u_{4,r}, i_{4,r}, r = 1, \dots, n$ als Lösungsvariablen in den neuen Quellenzweigen ergeben zusammen mit den Zweigströmen und Zweigspannungen aus \vec{U}_0, \vec{I}_0 , die zu Zweigen aus T_z gehören, auch eine Lösung der Netzwerkgleichungen von NW2. Hat NW2 genau eine Lösung, so kann man durch Lösen von NW2 die im ersten Satz beschriebene, aus einer Lösung von NW1 extrahierte Lösung bestimmen.
- Haben NW1 und NW2 jeweils genau eine Lösung, so sind NW1 und NW2 bezüglich des Teils der Lösung, der sich auf die Zweigvariablen aus T_z bezieht, äquivalent. In diesem Sinne kann man NW2 an Stelle von NW1 lösen.

Beweis:

zu 1): Die unter 1) beschriebene Lösung erfüllt alle MGL, SGL und ZGL von NW2. Man beachte dazu, dass alle MGL und SGL von NW2 auch MGL und SGL von NW1 sind, beziehungsweise als solche aufgefasst werden können. Ferner sind aufgrund der Voraussetzung alle Zweiggleichungen von Zweigen aus T_z durch die angegebene Lösung erfüllt. Aufgrund von (9.1) ist auch die Zweiggleichung der über die Substitution hinzugekommenen Quellenzweige erfüllt.

zu 2): ergibt sich aus 1)

Bemerkung 9.1 Warum Eindeutigkeit der Lösung?

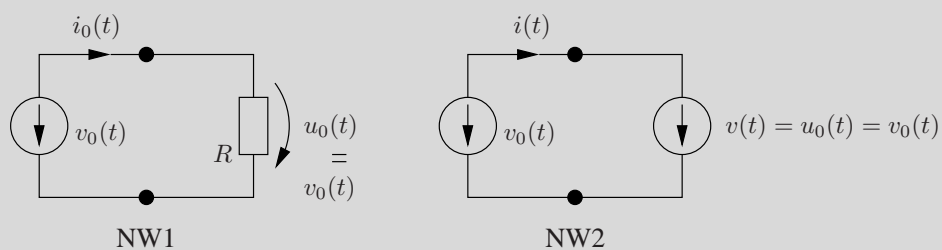


Abbildung 9.3

NW2 hat beliebig viele Lösungen, da $i(t)$ beliebig sein kann. Die Lösung von NW1 kann daher nicht immer durch eine Lösung von NW2 ersetzt werden.

Das Substitutionstheorem ist das allgemeingültigste Netzwerkretheorem und liefert die Grundlage dafür, dass sich ein Netzwerkproblem in kleinere Teilprobleme zerlegen lässt, die nacheinander gelöst werden können.

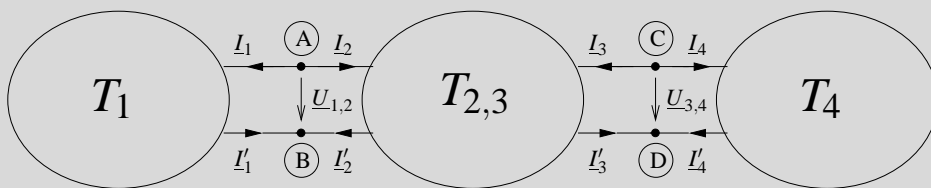
Bemerkung 9.2

Abbildung 9.4: Zerlegung eines Netzwerkes

Sei ein lineares algebraisches Zweipolnetzwerkmodell im Laplacebereich oder im Bereich der komplexen Wechselstromrechnung gegeben und, wie in Abbildung 9.4 zu sehen, in drei Teile T_1 , $T_{2,3}$, T_4 teilbar, die an den Knoten \textcircled{A} , \textcircled{B} , \textcircled{C} , \textcircled{D} , wie zu sehen, untereinander verbunden sind.

Die Zweigggleichungen seien dergestalt, dass das Substitutionstheorem mit $T_z = T_1$, $T_z = T_{2,3}$ und $T_z = T_4$ angewendet werden kann.

Aufgrund der Schnittmengengleichungen gilt:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= -\underline{I}_2 = \underline{I}'_1 = -\underline{I}'_2 \\ \underline{I}_3 &= -\underline{I}_4 = \underline{I}'_3 = -\underline{I}'_4 \end{aligned} \quad (9.2)$$

Es seien nun folgende Netzwerkteilprobleme jeweils unabhängig voneinander (im Laplacebereich bei zusätzlicher Vorgabe der Anfangswerte) eindeutig lösbar, wobei $\underline{V}_{1,2}$ bzw. $\underline{V}_{3,4}$ beliebige Urspannungen sein sollen.

Man beachte: Aufgrund von (6.6) und (8.146) ist bei linearen, algebraischen Netzwerkgleichungen die Eindeutigkeit der Lösung über die Tableaumatrix $\underline{\underline{N}}$ und $\det \underline{\underline{N}} \neq 0$ feststellbar, unabhängig von der Wahl der Urspannungen und Urströme, deren Werte $\underline{\underline{N}}$ nicht beeinflussen.

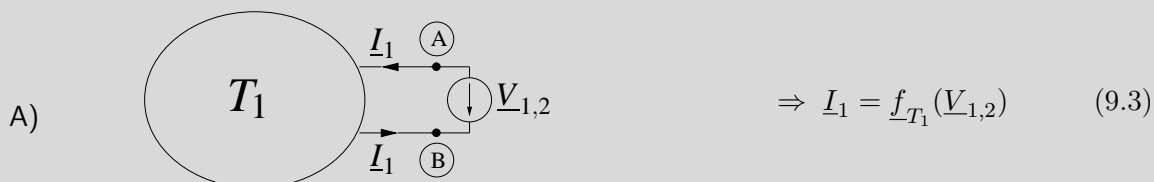


Abbildung 9.5

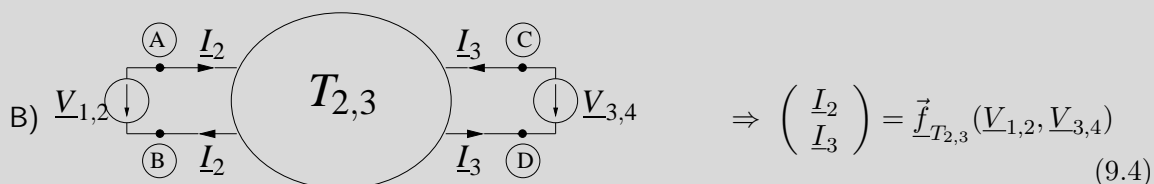


Abbildung 9.6

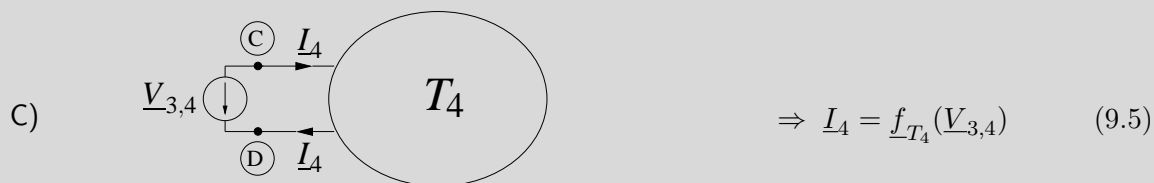


Abbildung 9.7

Dabei sind \underline{f}_{T_1} , $\vec{f}_{T_{2,3}}$, \underline{f}_{T_4} typischerweise von $j\omega$ (KWR) oder s (Laplacebereich) abhängige komplexe Funktionen.

Hat jetzt das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -\underline{f}_{T_1}(\underline{V}_{1,2}) \\ -\underline{f}_{T_4}(\underline{V}_{3,4}) \end{pmatrix} = \underline{f}_{T_{2,3}}(\underline{V}_{1,2}, \underline{V}_{3,4}) \quad (9.6)$$

ebenfalls eine eindeutige Lösung, so ist das Ursprungsproblem eindeutig lösbar und man kann zur eindeutigen Lösung des ursprünglichen Netzwerkproblems folgendermaßen vorgehen:

Schritt 1: Bestimmung der Zweipol- (Eintor-) Gleichungen (9.3) und (9.5) sowie der Vierpol- (Zweitor) Gleichungen (9.4)

Schritt 2: Lösen von (9.6) und Bestimmung von $\underline{V}_{1,2} = \underline{U}_{1,2}$ bzw. $\underline{V}_{3,4} = \underline{U}_{3,4}$

Schritt 3: Bestimmung aller restlichen Unbekannten durch Lösen der Teilprobleme A)B)C) bei Vorgeben der Urspannungen $\underline{V}_{1,2}$, $\underline{V}_{3,4}$ aus Schritt 2.

Ist man nur an $\underline{U}_{1,2}$, $\underline{U}_{3,4}$ und $\underline{I}_1 = -\underline{I}_2$ bzw. $\underline{I}_3 = -\underline{I}_4$ interessiert, so kann man nach Schritt 2 aufhören und die Ströme mit (9.3), (9.5) oder (9.4) bestimmen.

Diese Vorgehensweise ist immer dann vorteilhaft, wenn die Bestimmung von (9.3)-(9.5) leicht ist oder diese Gleichungen gegeben sind. Auch wenn nur wenige Netzwerkvariablen in nur einem der Teilnetzwerke interessieren, hat diese Vorgehensweise Vorteile.

Die Aussagen von Bemerkung 9.2 bleiben richtig, falls in A)B)C) eine der Spannungsquellen durch eine Stromquelle ersetzt wird oder beide Spannungsquellen durch Stromquellen ersetzt werden.

Zum Beweis:

Sei eine Lösung des Originalnetzwerkproblems aus Abbildung 9.4 gegeben, die durch den Index 0 gekennzeichnet werden soll. Aufgrund des Substitutionstheorems und den Voraussetzungen gilt:

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_{0,1} &= \underline{f}_{T_1}(\underline{U}_{0,1,2}) \\ \begin{pmatrix} \underline{I}_{0,2} \\ \underline{I}_{0,3} \end{pmatrix} &= \underline{f}_{T_{2,3}}(\underline{U}_{0,1,2}, \underline{U}_{0,3,4}) \\ \underline{I}_{0,4} &= \underline{f}_{T_4}(\underline{U}_{0,3,4}) \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

Somit sind aufgrund von (9.2) $\underline{U}_{0,1,2}$, $\underline{U}_{0,3,4}$ die eindeutige Lösung von (9.6). Die in A)B)C) beschriebene Methode reproduziert aufgrund der Voraussetzungen und des Substitutionstheorems also die Lösung des Originalnetzwerkproblems aus Bild 9.4. Die Lösung des Originalproblems ist somit eindeutig bestimmt.

Satz 9.2 (Das Superpositionstheorem bei algebraischen Netzwerkgleichungen)

Es sei ein lineares, algebraisches Zweipolnetzwerk gegeben, bei dem die Zweipole entweder eine homogene ZGL der Form

$$\vec{a}^t \vec{I} + \vec{b}^t \vec{U} = 0 \quad (9.8)$$

(\vec{a}, \vec{b} zeitunabhängig und unabhängig von \vec{I}, \vec{U}) haben oder feste, ideale Quellen sind. Die Elemente von \vec{I}, \vec{U} können Laplacetransformierte oder Zeiger (inklusive Gleichströme oder Gleichspannungen) sein. In den Zweigen mit den Indizes n_1, \dots, n_k sollen die festen, idealen Stromquellen mit den Urströmen $\underline{J}_{n_1}, \dots, \underline{J}_{n_k}$ und in den Zweigen l_1, \dots, l_m die festen Spannungsquellen mit den Urspannungen $\underline{V}_{l_1}, \dots, \underline{V}_{l_m}$ liegen.

Ist das Netzwerk eindeutig lösbar, so lässt sich die Lösung in der folgenden Form darstellen:

$$\begin{pmatrix} \vec{U} \\ \vec{I} \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^k \begin{pmatrix} \vec{U} \\ \vec{I} \end{pmatrix}_{\underline{J}_{n_l}} \underline{J}_{n_l} + \sum_{i=1}^m \begin{pmatrix} \vec{U} \\ \vec{I} \end{pmatrix}_{\underline{V}_{l_i}} \underline{V}_{l_i} \quad (9.9)$$

Dabei ist $\begin{pmatrix} \vec{U} \\ \vec{I} \end{pmatrix}_{\underline{J}_{n_r}}$ $1 \leq r \leq k$ die spezielle Netzwerklösung für

$$\underline{J}_{n_r} = 1; \underline{J}_{n_i} = 0 \text{ } i \neq r, 1 \leq i \leq k; \underline{V}_{l_i} = 0, 1 \leq i \leq m$$

und $\begin{pmatrix} \vec{U} \\ \vec{I} \end{pmatrix}_{\underline{V}_{l_r}}$ $1 \leq r \leq m$ die Lösung für

$$\underline{V}_{l_r} = 1; \underline{V}_{l_i} = 0 \text{ } i \neq r, 1 \leq i \leq m; \underline{J}_{n_i} = 0, 1 \leq i \leq k$$

Beweis: Die Netzwerkgleichungen lassen sich analog zu (6.6) in die Form (9.10) bringen:

$$\begin{pmatrix} \underline{MGL} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{SGL} \\ \underline{ZU} & \underline{ZI} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U} \\ \vec{I} \end{pmatrix} = \underline{\vec{NR}} \quad (9.10)$$

Aus der Eindeutigkeit der Lösung $\Rightarrow \det \underline{N} \neq 0$, also die Eindeutigkeit der Lösung für ein beliebiges $\underline{\vec{NR}}$. Damit sind alle oben definierten $\begin{pmatrix} \vec{U} \\ \vec{I} \end{pmatrix}_{\underline{J}}$ und $\begin{pmatrix} \vec{U} \\ \vec{I} \end{pmatrix}_{\underline{V}}$ eindeutig bestimmt (Cramersche Regel). In $\underline{\vec{NR}}$ stehen an den Stellen $z + l_r$ die Einträge \underline{V}_{l_r} und an den Stellen $z + n_r$ die Einträge \underline{J}_{n_r} . An allen anderen Stellen stehen Nullen.

$$\underline{\vec{NR}}^t = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_z, 0, \dots, 0, \underbrace{\underline{V}_{l_r}}_{\substack{\uparrow \\ z + l_r}}, \dots, \underbrace{\underline{J}_{n_r}}_{\substack{\uparrow \\ z + n_r}}, 0, \dots, 0 \right) \quad (9.11)$$

Ferner gilt z. B.:

$$\left(\underline{N} \begin{pmatrix} \vec{U} \\ \vec{I} \end{pmatrix}_{\underline{V}_{l_r}} \right)^t = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_z, 0, \dots, 0, \underbrace{\underline{V}_{l_r}}_{\substack{\uparrow \\ z + l_r}}, 0, \dots, 0 \right) \quad (9.12)$$

An allen Stellen außer $z + l_r$ stehen bei dieser Partiallösung auf der rechten Seite Nullen.

Überlagert man die Partiallösungen nach (9.9), so ergibt sich also eine Lösung des ursprünglichen Problems und wegen der Eindeutigkeit der Lösung folgt die Behauptung.

Bemerkung 9.3

Im Laplacebereich setzen sich die festen Quellen aus den Laplacetransformierten der festen Quellen im Zeitbereich und den Anfangswerten zusammen. Somit folgt (8.150) aus Satz 9.2 und, wie in Kapitel 8 gezeigt, auch Satz 5.1. Somit ist Satz 9.2 auch die Grundlage der in den Bemerkungen 5.5 und 5.17 formulierten Superpositionsprinzipien im eingeschwungenen Zustand und aus dem Ruhezustand heraus.

Satz 9.3 Zur Existenz einer eigentlichen Zustandsraumdarstellung

Es sei ein Zweipolnetzwerk gegeben, dessen Zweipole, (jedem Zweipol soll ein Zweig entsprechen), entweder lineare, zeitinvariante Widerstände, Kapazitäten, Induktivitäten oder feste Quellen sind. Alle Widerstände seien echt positiv ($R > 0$). Das Netzwerk enthalte keine Schnittmengen aus Stromquellen- oder Induktivitätszweigen und keine Maschen aus Spannungsquellen- oder Kapazitätszweigen. Dann ist dem Netzwerkmodell ein eigentliches Zustandsraummodell nach Definition 5.9 zugeordnet. Die Zustandsfunktionen sind dabei die Kapazitätsspannungen und Induktivitätsströme. Alle Netzwerkspannungen und -ströme sind dann Ausgangsfunktionen des eigentlichen Zustandsraummodells ($\bar{k}_i = 0, i = 1, \dots, n_Q$) und ergeben sich über Ausgangsgleichungen. Ersetzt man die Maschen- und Schnittmengenbedingung durch die Voraussetzung, dass das Netzwerkmodell nach der Substitution der Kapazitäten durch Spannungsquellen und der Induktivitäten durch Stromquellen eine eindeutige Lösung hat, so kann man zusätzlich als Zweipole gesteuerte Quellen, bei denen nicht durch die Ableitung einer Zweigvariable gesteuert wird, zulassen und die gleiche Aussage mit einem nahezu unveränderten Beweisverfahren zeigen.

Beweisskizze:

Sei $\vec{U}(t), \vec{I}(t)$ eine Lösung. Analog zu Satz 9.1 substituiere man alle Induktivitäten durch Stromquellen und alle Kapazitäten durch Spannungsquellen. Das modifizierte Netzwerk ist ein Widerstandsnetzwerk mit festen Quellen, das eindeutig lösbar ist nach Bemerkung 6.15. Damit ist $\vec{U}(t), \vec{I}(t)$ die einzige Lösung des modifizierten Netzwerks.

Nach Satz 9.2 gilt für eine beliebige Zweigvariable $a(t)$ aus $\vec{U}(t)$ oder $\vec{I}(t)$ eine Beziehung der Form

$$a(t) = \vec{C}_a^t \vec{x}(t) + \vec{D}_{a,V}^t \vec{V}(t) + \vec{D}_{a,J}^t \vec{J}(t). \quad (9.13)$$

Dabei ist $\vec{x}(t)$ der Vektor aller Induktivitätsströme und Kapazitätsspannungen, $\vec{V}(t)$ der Vektor aller festen Spannungsquellen und $\vec{J}(t)$ der Vektor aller festen Stromquellen. $\vec{C}_a, \vec{D}_{a,V}, \vec{D}_{a,J}$ hängen nur vom Netzwerkgraphen und den Widerstandswerten ab. (9.13) gilt insbesondere für alle Induktivitätsspannungen (z.B. $u_L(t)$) und alle Kapazitätsströme (z.B. $i_C(t)$). Daher gelten für diese Gleichungen der folgenden Form:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} u_C(t) &= \frac{i_C(t)}{C} = \frac{1}{C} \left(\vec{C}_{i_C}^t \vec{x}(t) + \vec{D}_{i_C,V}^t \vec{V}(t) + \vec{D}_{i_C,J}^t \vec{J}(t) \right) \\ \frac{d}{dt} i_L(t) &= \frac{u_L(t)}{L} = \frac{1}{L} \left(\vec{C}_{u_L}^t \vec{x}(t) + \vec{D}_{u_L,V}^t \vec{V}(t) + \vec{D}_{u_L,J}^t \vec{J}(t) \right) \end{aligned} \right\} \quad (9.14)$$

Sammelt man nun die Gleichungen (9.14) in der Reihenfolge der Variablen in $\vec{x}(t)$, so ergibt sich (5.24) mit $\vec{B}_{i,j} = 0$ für $j > 0$. \vec{A} setzt sich dabei aus den Vektoren \vec{C}_{i_C} und \vec{C}_{u_L} zusammen und die $\vec{B}_{i,0}$ aus Elementen von $\vec{D}_{i_C,V}$ und $\vec{D}_{u_L,V}$. \vec{x}_{t_0} gibt die Anfangswerte der Kapazitätsspannungen und Induktivitätsströme für $t = t_0$ vor. (5.25) ergibt sich für eine be-

liebige Netzwerkvariable aus (9.13). Dabei gilt wiederum $E_{k,i,j} = 0$ für $j > 0$. Damit ist der Satz bewiesen.

Man beachte:

Der Beweis dieses Satzes ist insofern konstruktiv als er eine klare Vorschrift beinhaltet, wie aus einem Netzwerkmodell, das die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, ein Zustandsraummodell extrahiert werden kann.

Bemerkung 9.4

Erfüllt ein Netzwerk die Voraussetzungen von Satz 9.3, so entsprechen die freien Zustände \vec{x}_{t_0} den Zielanfangswerten \vec{x}_{A,t_0} der Kapazitätsspannungen und Induktivitätsströme und in Satz 5.1 gilt $n = n_A$, $n_R = 0$, $a_{d,k,t_0}(t) = 0$, $r_k = -1$, $k = 1, \dots, n_Q$, $\vec{F}_x = \underline{1}$. Ferner gilt $D_{a,k,0} = 0$, falls $a(t)$ eine Kapazitätsspannung oder einen Induktivitätsstrom bezeichnet. (5.42) ist für die Induktivitätsströme und Kapazitätsspannungen immer eine strenge Lösung des Anfangswertproblems erster oder zweiter Art für die vorgegebenen Zielanfangswerte \vec{x}_{A,t_0} . Hier gilt somit die Regel: Induktivitätsströme und Kapazitätsspannungen springen beim Schalten ($t = t_S$) nicht!

Beweis: Der Beweis folgt aus Satz 9.3 und Satz 8.2.

Satz 9.4 Das Reziprozitätstheorem

Es sei ein linear algebraisches Zweipolnetzwerkmodell gegeben, dessen Zweige (Zweipole) von $1, \dots, z$ durchnummeriert sind und dessen Zweiggleichungen sich in der Form

$$\vec{I} = \underline{Y} \vec{U} \quad \text{oder} \quad \underline{Z} \vec{I} = \vec{U} \quad (9.15)$$

mit symmetrischen Matrizen \underline{Y} ($\underline{Y}^t = \underline{Y}$) oder \underline{Z} ($\underline{Z}^t = \underline{Z}$) schreiben lassen. Die Elemente von \vec{U} und \vec{I} sind dabei Laplacetransformierte oder komplexe Zeiger. Diesem Netzwerk werden nun zwei weitere Zweige mit den Indizes I und II hinzugefügt. Dies geschieht entweder durch Anklempen an bestehende Knoten:

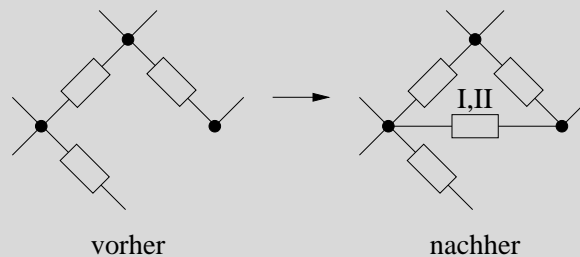


Abbildung 9.8

oder durch Auftrennen eines bestehenden Zweiges:

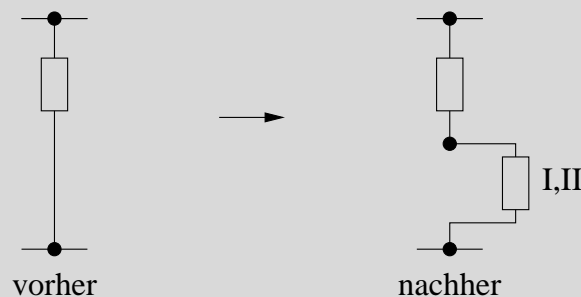


Abbildung 9.9

Es werden zwei verschiedene Lösungen des erweiterten Netzwerks betrachtet, die zu zwei verschiedenen Quellenkonfigurationen in den Zweigen I,II gehören. Diese sollen mit

$$\vec{U}_a, \vec{I}_a, \underline{U}_{I,a}, \underline{I}_{I,a}, \underline{U}_{II,a}, \underline{I}_{II,a}$$

und

$$\vec{U}_b, \vec{I}_b, \underline{U}_{I,b}, \underline{I}_{I,b}, \underline{U}_{II,b}, \underline{I}_{II,b}$$

bezeichnet werden. Die Existenz solcher Lösungen wird also vorausgesetzt. Dann gilt:

a)

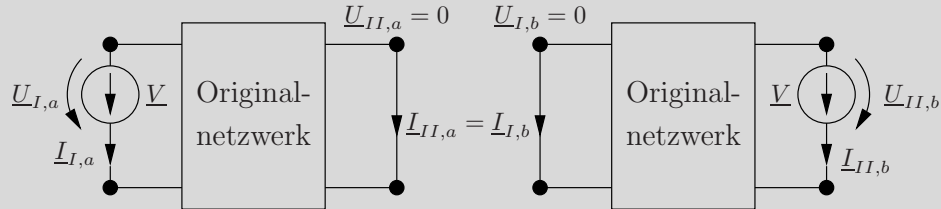


Abbildung 9.10

b)

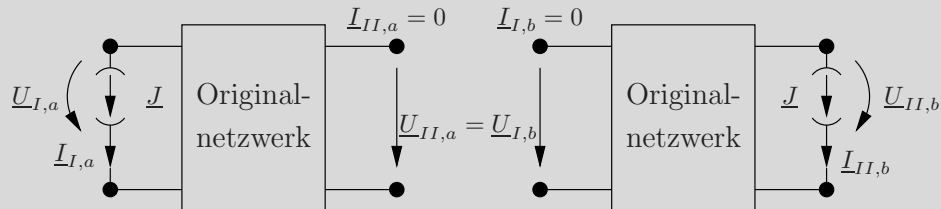


Abbildung 9.11

c)

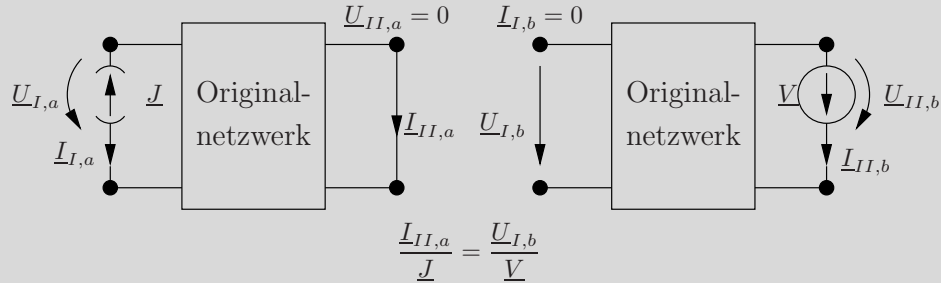


Abbildung 9.12

Beweis:

Da beide Lösungen a) und b) die SGL und MGL des erweiterten Netzwerkmodells erfüllen, gilt aufgrund des Tellegenschen Theorems (Satz 4.10):

$$\begin{aligned} A) \quad & \vec{U}_a^t \vec{I}_b + \underline{U}_{I,a} \underline{I}_{I,b} + \underline{U}_{II,a} \underline{I}_{II,b} = 0 \\ B) \quad & \vec{U}_b^t \vec{I}_a + \underline{U}_{I,b} \underline{I}_{I,a} + \underline{U}_{II,b} \underline{I}_{II,a} = 0 \end{aligned} \quad (9.16)$$

Nach Voraussetzung gilt nun

$$\vec{U}_a^t \cdot \vec{I}_b = \vec{U}_a^t \cdot \underline{Y} \cdot \vec{U}_b = (\underline{Y}^t \cdot \vec{U}_a)^t \cdot \vec{U}_b = (\underline{Y} \cdot \vec{U}_a)^t \cdot \vec{U}_b = \vec{I}_a^t \cdot \vec{U}_b = \vec{U}_b^t \cdot \vec{I}_a \quad (9.17)$$

Subtrahiert man B) von A) folgt daher

$$\underline{U}_{I,a} \underline{I}_{I,b} + \underline{U}_{II,a} \underline{I}_{II,b} = \underline{U}_{I,b} \underline{I}_{I,a} + \underline{U}_{II,b} \underline{I}_{II,a} \quad (9.18)$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned} \underline{U}_{I,a} &= \underline{V}, \quad \underline{U}_{II,a} = 0, \quad \underline{U}_{I,b} = 0, \quad \underline{U}_{II,b} = \underline{V} \\ \Rightarrow \quad \underline{V} \cdot \underline{I}_{I,b} &= \underline{V} \cdot \underline{I}_{II,a} \Rightarrow \underline{I}_{I,b} = \underline{I}_{II,a} \Rightarrow a) \end{aligned} \quad (9.19)$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned} \underline{I}_{I,a} &= \underline{J}, \quad \underline{I}_{II,a} = 0, \quad \underline{I}_{I,b} = 0, \quad \underline{I}_{II,b} = \underline{J} \\ \Rightarrow \quad \underline{U}_{II,a} \cdot \underline{J} &= \underline{U}_{I,b} \cdot \underline{J} \Rightarrow \underline{U}_{II,a} = \underline{U}_{I,b} \Rightarrow b) \end{aligned} \quad (9.20)$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned} \underline{I}_{I,a} &= -\underline{J}, \quad \underline{U}_{II,a} = 0, \quad \underline{I}_{I,b} = 0, \quad \underline{U}_{II,b} = \underline{V} \\ \Rightarrow \quad -\underline{U}_{I,b} \cdot \underline{J} + \underline{V} \cdot \underline{I}_{II,a} &= 0 \Rightarrow \frac{\underline{U}_{I,b}}{\underline{V}} = \frac{\underline{I}_{II,a}}{\underline{J}} \Rightarrow c) \end{aligned} \quad (9.21)$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung 9.5

Die Voraussetzung von Satz 9.4 ist insbesondere dann erfüllt, wenn jeder Zweipol des Netzwerks vor der Erweiterung eine ZGL der Form



$$\underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U} \quad (9.22)$$

hat. Dann ist \underline{Y} eine Diagonalmatrix, also insbesondere symmetrisch. Dies trifft im Zeitbereich bei linearen Widerstandsnetzwerken ohne Quellen zu. Im Laplace-Bereich trifft dies bei R, L, C -Netzwerken ohne Quellen, (also bei verschwindenden Anfangswerten), zu.

Gilt das Reziprozitätstheorem im Laplacebereich, so lautet seine Aussage in den Zeitbereich übersetzt, z.B. für den Fall a), dass bei Erregung des Netzwerks durch eine hinreichend oft differenzierbare Spannung $v(t)$ mit $v(t) = 0$ für $t < t_b$ aus dem Ruhezustand bei $t_0 \leq t_b$ heraus, sich die gleichen Antworten ergeben, unabhängig davon, ob man an I erregt und an II den Kurzschlussstrom ermittelt oder umgekehrt.

Ein Beispiel zu Fall b) ist in Abbildung 9.13 zu sehen.

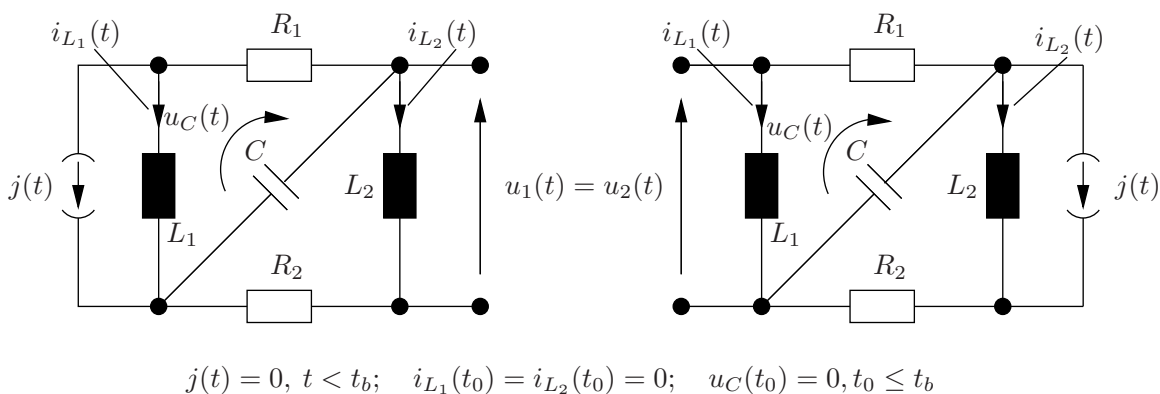


Abbildung 9.13

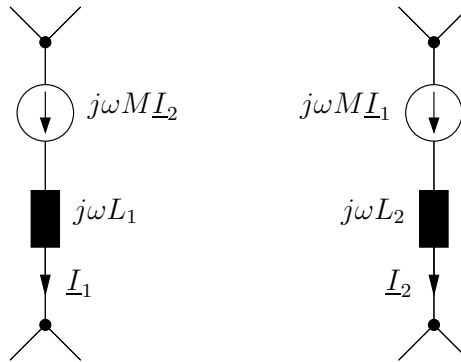


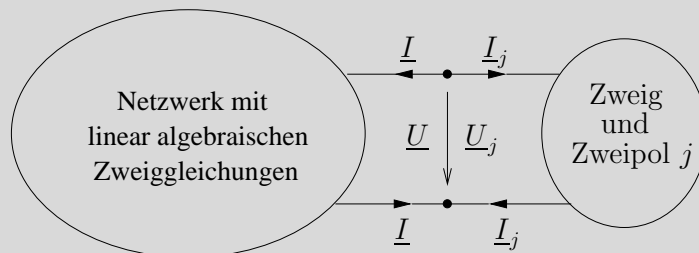
Abbildung 9.14

Induktive Kopplungen bei einem harmonisch eingeschwungenen Netzwerk (siehe Abb. 9.14) ergeben ebenfalls eine symmetrische Matrix \underline{Z} . Denn man sieht leicht ein, dass bei einem Netzwerk nach Bemerkung 9.5, das zusätzlich induktive Kopplungen enthält, eine Gleichung der Form $\vec{U} = \underline{Z} \vec{I}$ gilt, mit $\underline{Z}^t = \underline{Z}$.

9.2 Vierpole (Zweitore)

Zweipol- (Eintor-) und Vierpol- (Zweitor-) Darstellungen beruhen beide auf den gleichen Prinzipien, nämlich der Anwendung des Substitutions- und des Superpositionsprinzips. Daher wird zunächst nochmals ausführlich die Zweipoldarstellung behandelt.

Satz 9.5 Zweipol- (Eintor-) Ersatzdarstellung bei algebraischen Netzwerkmodellen

Abbildung 9.15: Definition der Zweipol- (Eintor-) Variablen ($\text{KGL} \Rightarrow \underline{I} = -\underline{I}_j$)

Es sei ein Zweipolnetzwerkmodell gegeben und diesem sei wie üblich ein Graph zugeordnet, bei dem jedem Zweipol ein Zweig entspricht. Es sei der Zweig j ($1 \leq j \leq z$) herausgegriffen. Allen anderen Zweigen des Netzwerkmodells sei entweder eine algebraische Zweiggleichung der Form (9.8) zugeordnet oder diese Zweige entsprechen idealen festen Quellen. (9.8) impliziert hierbei, dass keine anderen Variablen des Zweiges j außer \underline{I}_j , \underline{U}_j eine steuernde Wirkung auf das restliche Netzwerk haben. Über die Zweiggleichung des Zweipols j wird nichts vorausgesetzt. Die Vektoren der Zweigspannungen \vec{U} und Zweigströme \vec{I} bestehen dabei typischerweise aus Laplacetransformierten oder Zeigern. Es wird vorausgesetzt, dass das Netzwerkmodell (z.B. bei Vorgabe hinreichend vieler Anfangswerte) eine Lösung hat. Dann gilt:

- A) Ist das Netzwerk nach Substitution des Zweipols j durch eine Spannungsquelle (siehe Satz 9.1) eindeutig lösbar, dann gilt für \underline{U} und \underline{I} der folgende Zusammenhang (siehe Abbildung 9.16):

$$-\underline{I}_j = \underline{I} = \underline{J} + \underline{Y} \cdot \underline{U} = \underline{J} + \underline{Y} \underline{U}_j \quad (9.23)$$

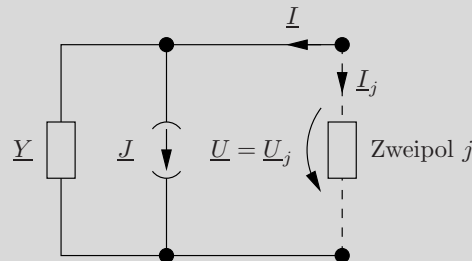


Abbildung 9.16: Ersatzstromquellendarstellung des Restnetzwerks

Dabei ist \underline{J} der Strom $\underline{I} = -\underline{I}_j$, der für $\underline{U} = 0$ durch den Zweipol j fließt und $+\underline{Y} \cdot \underline{U}$ der Strom $\underline{I} = -\underline{I}_j$, der nach Nullsetzen aller festen Quellen im Restnetzwerk (ohne Zweipol j) durch den Zweipol j fließt. Das heißt: Das Restnetzwerk kann bzgl. seiner Wirkung auf den Zweipol j durch eine Ersatzstromquelle ersetzt werden, falls außer \underline{I} und \underline{U} keine innere Lösungsvariable des Restnetzwerks steuernd auf den Zweipol wirkt.

- B) Ist das Netzwerk nach Substitution des Zweipols j durch eine Stromquelle (siehe Satz 9.1) eindeutig lösbar, so gilt für \underline{U} , \underline{I} die Gleichung (siehe Abbildung 9.17):

$$\underline{U}_j = \underline{U} = \underline{V} + \underline{Z} \cdot \underline{I} = \underline{V} - \underline{Z} \underline{I}_j \quad (9.24)$$

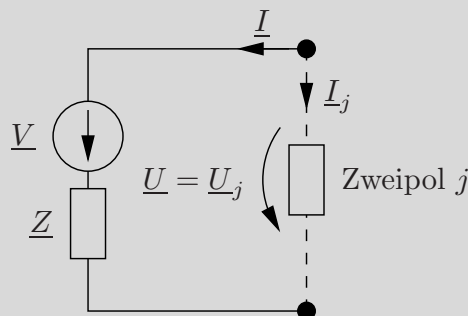


Abbildung 9.17: Ersatzspannungsquellendarstellung des Restnetzwerks

Dabei ist \underline{V} die Spannung, die für $\underline{I} = 0$ am Zweipol j abfällt und $+\underline{Z} \cdot \underline{I}$ die Spannung, die nach Nullsetzen aller festen Quellen im Restnetzwerk am Zweipol abfällt. Das heißt: Das Restnetzwerk kann bezüglich seiner Wirkung auf den Zweipol j durch eine Ersatzspannungsquelle ersetzt werden, falls außer \underline{I} und \underline{U} keine innere Lösungsvariable des Restnetzwerks steuernd auf den Zweipol wirkt.

(Beachte:

Feste Quellen im Laplacebereich bestehen aus Anfangswerten und festen Quellen im Zeitbereich)

Beweis: (Fall A) Nach Satz 9.1 wird die Lösung des Originalnetzwerkes durch die eindeutige Lösung des Netzwerkmodells nach der Spannungsquellensubstitution im Zweig j reproduziert. Ferner kann auf das modifizierte Netzwerk Satz 9.2 angewendet werden, insbesondere auf den Strom \underline{I} . Fasst man nun die Beiträge zu \underline{I} von allen festen Quellen (außer der den Zweig j substituierenden Spannungsquelle mit $\underline{V}_0 = \underline{U}_j$) zu \underline{I} zusammen, so ergibt sich die Behauptung.

(Fall B) ist analog.

Bemerkung 9.6

Die weitverbreitete Regel, wonach sich \underline{Y} , \underline{Z} nach „Kurzschluss“ aller Spannungsquellen und „Leerlauf“ aller Stromquellen im Restnetzwerk aus \underline{U} , \underline{I} ergibt, ist im allgemeinen falsch. Gesteuerte Quellen dürfen nicht modifiziert werden!

Beispiel 9.1

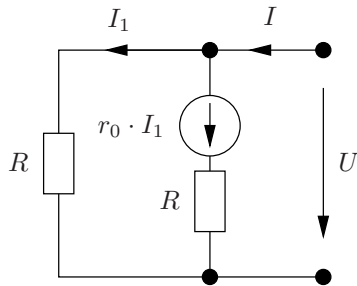


Abbildung 9.18

$$\begin{aligned}
 I &= I_1 + (U - r_0 \cdot I_1) \frac{1}{R}, \quad I_1 = \frac{U}{R} \\
 \Rightarrow I &= \frac{U}{R} + \left(U - r_0 \cdot \frac{U}{R} \right) \frac{1}{R} \Rightarrow \\
 Y &= \frac{I}{U} = \frac{1}{R} \left(2 - \frac{r_0}{R} \right)
 \end{aligned} \tag{9.25}$$

Nach der Regel (falsch interpretiert) würde folgen:

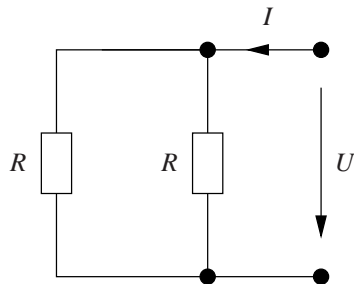


Abbildung 9.19

$$\Rightarrow Y = \frac{2}{R} \tag{9.26}$$

Bemerkung 9.7

Handelt es sich bei den algebraischen Gleichungen (9.8) um Gleichungen im Laplacebereich und sind $\vec{\underline{U}}$, $\vec{\underline{I}}$ Vektoren im Laplacebereich, so muss das Ergebnis von Satz 9.5, wie im Kapitel 8 durchgeführt, analog zu (8.153) interpretiert werden. Sei dazu O.B.D.A $j_1 = j$ und $\underline{E}_1(\underline{s})$ die im Zweig j nach der Substitution auftauchende ideale Quelle. Dann ist \underline{I}_j und $-\underline{Y} \underline{U}_j$ in (9.23) $\underline{A}_{z+j}(\underline{s})$ und $\underline{H}_{z+j,z+j}(\underline{s}) \underline{E}_1(\underline{s})$ in (8.153) zuzuordnen. Ebenso ist $\underline{U}_j, -\underline{Z} \underline{I}_j$ in (9.24) $\underline{A}_j(\underline{s})$ und $\underline{H}_{z+j,j}(\underline{s}) \underline{E}_1(\underline{s})$ in (8.153) zuzuordnen. Der restliche Teil der Summe aus (8.153) ist jeweils in $-\underline{J}$ (siehe (9.23)) bzw. \underline{V} (siehe (9.24)) zusammengefasst.

Eine problemlose Darstellung im Zeitbereich von (9.23) bzw. (9.24) ist nur möglich, wenn für das Netzwerkmodell nach der Substitution $n = n_A$ gilt. Dann folgt:

$$\begin{aligned}\underline{Y}(s) &= G_0 + \underline{Y}_g(s) \\ \underline{Z}(s) &= R_0 + \underline{Z}_g(s)\end{aligned}\quad (9.27)$$

und $\underline{J}(s), \underline{Y}_g(s)$ bzw. $\underline{V}(s), \underline{Z}_g(s)$ sind gewöhnliche Funktionen für $t > 0$ zugeordnet:

$$\begin{aligned}\underline{J}(s) &\bullet \text{---} \circ j(t) \\ \underline{Y}_g(s) &\bullet \text{---} \circ y_g(t) \\ \underline{V}(s) &\bullet \text{---} \circ v(t) \\ \underline{Z}_g(s) &\bullet \text{---} \circ z_g(t)\end{aligned}\quad (9.28)$$

(9.23) bzw. (9.24) entsprechen dann den Zeitbereichsdarstellungen

$$i(t) = j(t) + G_0 u(t) + \int_0^t y_g(t-t') u(t') dt' \quad (9.29)$$

bzw.

$$u(t) = v(t) + R_0 i(t) + \int_0^t z_g(t-t') i(t') dt'. \quad (9.30)$$

Sind alle Anfangswerte beim Netzwerkmodell nach der Substitution 0 und verschwinden alle Quellen für $t < 0$, so ergibt sich die Situation der Antwort aus dem Ruhezustand heraus. (9.23) entspricht dann für alle Zeiten t der Darstellung

$$i(t) = j(t) + G_0 u(t) + (\Theta(t') y_g(t') * u(t'))(t) \quad (9.31)$$

und (9.24) entspricht dann für alle Zeiten t der Darstellung

$$u(t) = v(t) + R_0 i(t) + (\Theta(t') z_g(t') * i(t'))(t). \quad (9.32)$$

Dabei wird $u(t)$ in (9.31) bzw. $i(t)$ in (9.32) für $t < 0$ als verschwindend angenommen und $j(t)$ in (9.31) bzw. $v(t)$ in (9.32) setzen sich aus den Antworten aus dem Ruhezustand heraus bezüglich aller festen Quellen im Restnetzwerk (außer Zweig j) zusammen.

Ist das Netzwerkmodell nach der Substitution asymptotisch stabil, sind alle Quellenfunktionen für alle Zeiten bekannt und für negative Zeiten beschränkt (siehe Bemerkung 5.6) und erfolgt die Netzwerkerzeugung für $t_S \rightarrow -\infty$ so impliziert (9.23) wiederum (9.31) und (9.24) wiederum (9.32). Im Unterschied zur Antwort aus dem Ruhezustand heraus, wird bezüglich der Anfangswerte keine Aussage benötigt und $u(t)$ in (9.31) bzw. $i(t)$ in (9.32) wird als für alle Zeiten bekannt und für negative Zeiten beschränkt vorausgesetzt. $j(t)$ in (9.31) bzw. $v(t)$ in (9.32) setzt sich dabei, dem Superpositionsprinzip aus Bemerkung 5.5 folgend, aus den Antworten im eingeschwungenen Zustand bezüglich der Quellen des Restnetzwerkes (außer Zweig j) zusammen. All diese Antworten im eingeschwungenen Zustand lassen sich dann wie in Kapitel 5 gezeigt mithilfe der komplexen Wechselstromrechnung berechnen.

Ferner sind

$$\underline{Y}(j\omega) = G_0 + Y_g(j\omega) = \left. \frac{I}{U} \right|_{\text{innere Quellen verschwinden}} \quad (9.33)$$

$$\underline{Z}(j\omega) = R_0 + Z_g(j\omega) = \left. \frac{U}{I} \right|_{\text{innere Quellen verschwinden}} \quad (9.34)$$

messbare Frequenzgänge, die sich aus (9.33) bzw. (9.34) ergeben, wenn man alle Quellen im Netzwerkmodell bis auf die im Zweig j abschaltet, harmonisch mit der Frequenz ω anregt, den eingeschwungenen Zustand abwartet und die Zeiger wie folgt zuordnet

$$\begin{aligned} u(t) &= \Re \{ \underline{U} e^{j\omega t} \} \\ i(t) &= \Re \{ \underline{I} e^{j\omega t} \}. \end{aligned} \quad (9.35)$$

Die Darstellungen (9.31) bzw. (9.32) gehören zu den Grundlagen der Rauschanalyse von linearen zeitinvarianten Zweipolen.

Ist das Netzwerkmodell nach der Substitution differenzierend oder ist die Vorgabe von mit den Netzwerkgleichungen unverträglichen Zielanfangswerten möglich, so müssen die Eingangsfunktionen möglicherweise hinreichend oft differenzierend sein, um zu einer Zeitbereichsdarstellung mit gewöhnlichen Funktionen zu kommen. (9.27) muss nun möglicherweise ersetzt werden durch

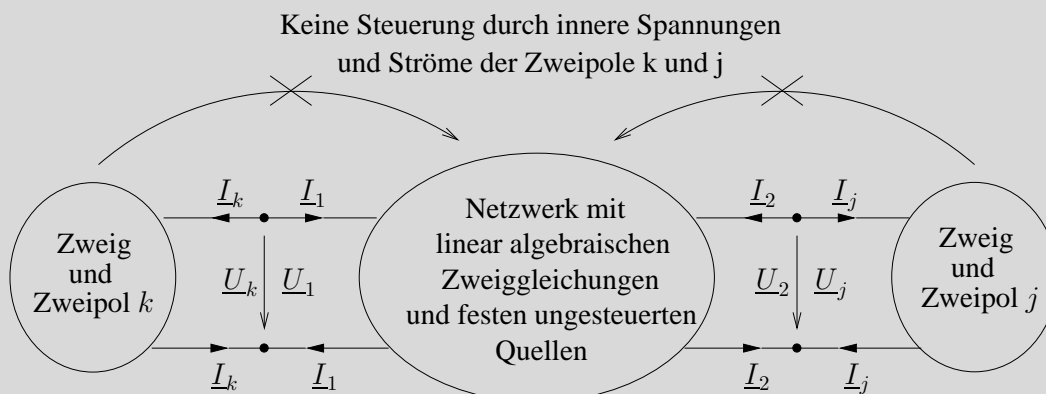
$$\begin{aligned} \underline{Y}(s) &= \sum_{i=0}^l G_i \underline{s}^i + \underline{Y}_g(s) \\ \underline{Z}(s) &= \sum_{i=0}^l R_i \underline{s}^i + \underline{Z}_g(s) \end{aligned} \quad (9.36)$$

Dann entsprechen $z_g(t)$ und $y_g(t)$ aus (9.28) wieder gewöhnlichen Funktionen, aber $j(t)$ und $v(t)$ enthalten möglicherweise einen Distributionsanteil und sind nur für $t > 0$ gewöhnliche Funktionen. Beachtet man dies, kann man (9.29) und (9.30) übernehmen, wenn man folgende Ersetzungen vornimmt:

$$\begin{aligned} G_0 u(t) &\rightarrow \sum_{i=0}^l G_i u^{(i)}(t) \\ R_0 i(t) &\rightarrow \sum_{i=0}^l R_i i^{(i)}(t) \end{aligned} \quad (9.37)$$

Natürlich werden $u(t)$ und $i(t)$ hier entsprechend glatt vorausgesetzt. Mit (9.37) kann man ansonsten die Aussagen zu den Antworten aus dem Ruhezustand heraus und im eingeschwungenen Zustand, also (9.31) und (9.32), übernehmen. In (9.33) und (9.34) muss natürlich noch folgende Ersetzung vorgenommen werden:

$$\begin{aligned} G_0 &\rightarrow \sum_{i=0}^l G_i (j\omega)^i \\ R_0 &\rightarrow \sum_{i=0}^l R_i (j\omega)^i \end{aligned} \quad (9.38)$$

Satz 9.6 Vierpol- (Zweitor-) DarstellungenAbbildung 9.20: Definition der Vierpol- (Zweitor-) Variablen ($\text{KGL} \Rightarrow I_k = -I_1, I_j = -I_2$)

Es sei wieder ein Zweipolnetzwerkmodell wie in Satz 9.5 gegeben, bei dem jedem Zweipol ein Zweig entspricht. Es seien nun zwei Zweipole k und j herausgegriffen. Allen anderen Zweipolen sei wiederum eine algebraische Zweiggleichung der Form (9.8) zugeordnet oder diese Zweipole seien ideale feste Quellen. Über die k und j zugeordneten Zweiggleichungen wird nichts vorausgesetzt. ((9.8) impliziert, dass keine inneren Variablen der Zweipole k und j , die nicht identisch zu $\underline{U}_j, \underline{I}_j$ bzw. $\underline{U}_k, \underline{I}_k$ sind, als Steuergrößen in den Zweiggleichungen der anderen Zweipole auftauchen können.) Über $\underline{\vec{U}}$ und $\underline{\vec{I}}$ gilt das in Satz 9.5 Gesagte. Das Netzwerkmodell habe wieder (z.B. nach Vorgabe hinreichend vieler Anfangswerte) eine Lösung. Dann gilt:

- A) Ist das Netzwerk nach Substitution der Zweipole j und k durch Spannungsquellen (siehe Satz 9.1) eindeutig lösbar, dann gilt für die Vierpolvariablen $\underline{U}_1, \underline{I}_1, \underline{U}_2, \underline{I}_2$ folgende Vierpolersatzdarstellung mit Ersatzstromquellen und Y-Parametern:

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{J}_{1,Y} \\ \underline{J}_{2,Y} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{pmatrix}}_{\underline{\widetilde{Y}}} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} \quad (9.39)$$

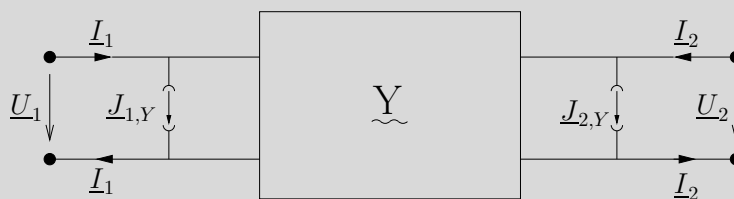


Abbildung 9.21: Vierpolersatzdarstellung mit Y-Parametern und Ersatzstromquellen

Dabei gilt:

$$\begin{aligned} \underline{J}_{l,Y} &= \underline{I}_l \Big|_{\underline{U}_1=\underline{U}_2=0}, \quad l = 1, 2 \\ \underline{Y}_{l,m} &= \frac{\underline{I}_l}{\underline{U}_m} \Big|_{\substack{\underline{U}_n=0 \text{ für } n \neq m \\ \text{innere feste Quellen Null gesetzt}}}, \quad m, l = 1, 2 \end{aligned} \quad (9.40)$$

- B) Ist das Netzwerk nach Substitution der Zweipole j und k durch Stromquellen (siehe Satz 9.1) eindeutig lösbar, dann gilt folgende Vierpolersatzdarstellung mit Ersatzspannungsquellen und Z -Parametern:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{V}_{1,Z} \\ \underline{V}_{2,Z} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{pmatrix}}_{\underline{Z}} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} \quad (9.41)$$

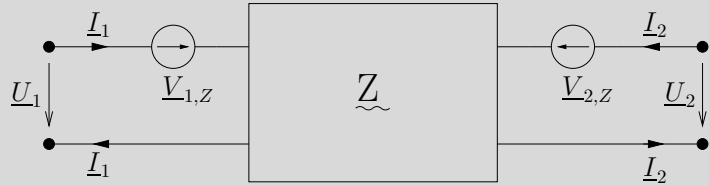


Abbildung 9.22: Vierpolersatzdarstellung mit Z -Parametern und Ersatzspannungsquellen

Dabei gilt:

$$\begin{aligned} \underline{V}_{l,Z} &= \underline{U}_l \Big|_{\underline{I}_1=\underline{I}_2=0}, \quad l = 1, 2 \\ \underline{Z}_{l,m} &= \frac{\underline{U}_l}{\underline{I}_m} \Big|_{\substack{\underline{I}_n=0 \text{ für } n \neq m \\ \text{innere feste Quellen Null gesetzt}}}, \quad m, l = 1, 2 \end{aligned} \quad (9.42)$$

- C) Ist das Netzwerk nach Substitution des Zweipols j durch eine Spannungsquelle und des Zweipols k durch eine Stromquelle (siehe Satz 9.1) eindeutig lösbar, dann gilt folgende Vierpolersatzdarstellung mit H -Parametern:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{V}_{1,H} \\ \underline{J}_{2,H} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{pmatrix}}_{\underline{H}} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} \quad (9.43)$$

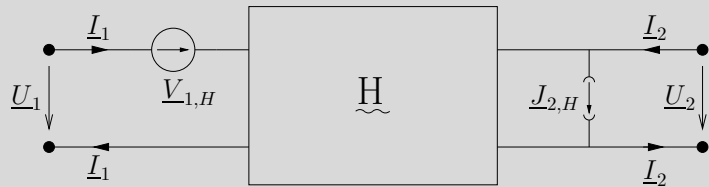


Abbildung 9.23: Vierpolersatzdarstellung mit H -Parametern und einer Ersatzspannungsquelle am Eingang und einer Ersatzstromquelle am Ausgang

Dabei gilt:

$$\underline{V}_{1,H} = \underline{U}_1 \Big|_{\underline{I}_1=\underline{U}_2=0}; \quad \underline{J}_{2,H} = \underline{I}_2 \Big|_{\underline{I}_1=\underline{U}_2=0} \quad (9.44)$$

Falls alle inneren ungesteuerten Quellen verschwinden, gilt:

$$\begin{aligned} \underline{H}_{1,1} &= \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \right|_{\underline{U}_2=0} \quad ; \quad \underline{H}_{1,2} = \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \right|_{\underline{I}_1=0} \\ \underline{H}_{2,1} &= \left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \right|_{\underline{U}_2=0} \quad ; \quad \underline{H}_{2,2} = \left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} \right|_{\underline{I}_1=0} \end{aligned} \quad (9.45)$$

D) Vertauscht man Strom- und Spannungsquellen in C), so ergibt sich die G-Parameterdarstellung.

Zum Beweis:

Der Beweis folgt wiederum direkt aus dem Substitutionssatz und dem Superpositionsprinzip, wenn man Letzteres auf diejenigen Torvariablen anwendet, die nicht durch die substituierten Quellen festgelegt werden. Die Wirkung der inneren festen Quellen wird dabei stets summarisch in den Ersatzquellen zusammengefasst.

Die Vierpoldarstellungen aus Satz 9.5 müssen nicht alle existieren wie das folgende Beispiel 9.2 zeigt:

Beispiel 9.2

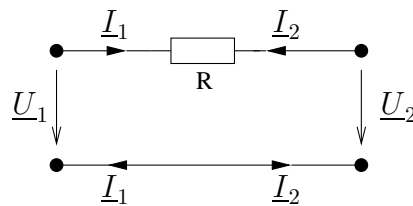


Abbildung 9.24: Vierpol ohne Z-Parameterdarstellung

Der Vierpol aus Beispiel 9.2 hat eine Y-Parameterdarstellung aber keine Z-Parameterdarstellung. Die Y-Parameterdarstellung lautet:

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/R & , & -1/R \\ -1/R & , & 1/R \end{pmatrix}}_{\underline{Y}} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} \quad (9.46)$$

Die Z-Parameterdarstellung gibt es nicht, da es nach der Substitution von Stromquellen an den Toren keine eindeutige Lösung mehr gibt, bzw. $\det \underline{Y} = 0$ gilt.

Bisher wurden aufgrund der Verwendung des Substitutionstheorems immer genau eine Variable von Tor 1 und eine von Tor 2 mit genau den anderen Variablen von Tor 1 und Tor 2 durch die Vierpoldarstellungen verknüpft. Man kann aber auch leicht die Variablen von Tor 1 durch die Variablen an Tor 2 ausdrücken. Das wird nun exemplarisch ausgehend von der Y-Parameterdarstellung gezeigt. Entsprechend könnte man auch von jeder anderen Vierpoldarstellung aus Satz 9.6 ausgehen, falls diese existiert.

Bemerkung 9.8

Sei ein Vierpol mit \underline{Y} Parameterdarstellung (siehe (9.39)) und Abb. 9.21 gegeben und sei $\underline{Y}_{2,1} \neq 0$. Dann gilt die folgende \underline{A} -Parameterdarstellung (auch Kettenparameterdarstellung genannt) mit den Ersatzquellen auf der Seite von Tor 1 (Eingang):

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{V}_{1,A} \\ \underline{J}_{1,A} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{pmatrix}}_{\underline{A}} \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{pmatrix} \quad (9.47)$$

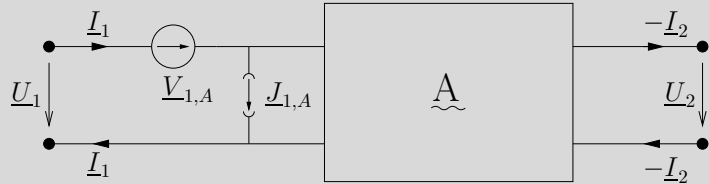


Abbildung 9.25: Vierpolersatzdarstellung mit \underline{A} -Parametern und Ersatzquellen am Eingang

Zum Beweis:

Aus (9.39) folgt sofort:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -\underline{Y}_{11} & +1 \\ -\underline{Y}_{21} & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{X}} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{12} \underline{U}_2 \\ \underline{Y}_{22} \underline{U}_2 - \underline{I}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{J}_{1,Y} \\ \underline{J}_{2,Y} \end{pmatrix} \quad (9.48)$$

det $\underline{X} = \underline{Y}_{21}$. Man kann also nach $\underline{U}_1, \underline{I}_1$ auflösen für $\underline{Y}_{21} \neq 0$. Mit der Cramerschen Regel folgt:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= -\frac{1}{\underline{Y}_{21}}(\underline{J}_{2,Y}) - \frac{1}{\underline{Y}_{21}}(\underline{Y}_{22}\underline{U}_2 - \underline{I}_2) \\ \underline{I}_1 &= +\frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{21}}(\underline{J}_{1,Y} + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2) - \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}}(\underline{J}_{2,Y} + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2 - \underline{I}_2) \end{aligned} \quad (9.49)$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \underline{V}_{1,A} &= -\frac{\underline{J}_{2,Y}}{\underline{Y}_{21}} \\ \underline{J}_{1,A} &= \frac{1}{\underline{Y}_{21}}(\underline{Y}_{21}\underline{J}_{1,Y} - \underline{Y}_{11}\underline{J}_{2,Y}) \\ \underline{A}_{11} &= -\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}}, \quad \underline{A}_{12} = -\frac{1}{\underline{Y}_{21}} \\ \underline{A}_{21} &= -\frac{\det(\underline{Y})}{\underline{Y}_{21}}, \quad \underline{A}_{22} = -\frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}} \end{aligned} \quad (9.50)$$

Entsprechend kann man zumeist auch die Ausgangsvariablen durch die Eingangsvariablen ausdrücken und die Ersatzquellen zum Tor 2 verlegen. Dies gibt dann die \underline{B} -Parameterdarstellung.

Bemerkung 9.9

Resultieren die Vierpoldarstellungen in (9.39), (9.41), (9.43), (9.47) aus algebraischen Netzwerkgleichungen im Laplacebereich, so gelten die Ausführungen zur Darstellung im Zeitbereich

in Zusammenhang mit Bemerkung 9.7 sinngemäß auch für die Vierpoldarstellungen. Insbesondere ist festzuhalten, dass für Vierpole, die nach der Quellensubstitution asymptotisch stabil sind, bereits sehr lange existieren ($t_S \rightarrow -\infty$) und deren innere und äußere Quellenfunktionen hinreichend oft differenzierbar und für $t < 0$ beschränkt sind, über die Darstellung der Antwort im eingeschwungenen Zustand im Zeitbereich für alle t beschrieben werden können. (9.39) impliziert in diesem Fall mit der Zerlegung

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{i,k}(\underline{s}) &= \sum_{j=0}^{l_{i,k}} G_{j,i,k} \underline{s}^j + \underline{Y}_{i,k,g}(\underline{s}), \quad i, k = 1, 2 \\ \underline{Y}_{i,k,g}(\underline{s}) &\bullet \text{---} \circ \quad y_{i,k,g}(t), \quad i, k = 1, 2 \end{aligned} \quad (9.51)$$

$$\begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{1,Y}(t) \\ j_{2,Y}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{l_{11}} G_{j,1,1} u_1^{(j)}(t) + (\Theta(t') y_{1,1,g}(t') * u_1(t'))(t) + \sum_{j=0}^{l_{12}} G_{j,1,2} u_2^{(j)}(t) + (\Theta(t') y_{1,2,g}(t') * u_2(t'))(t) \\ \sum_{j=0}^{l_{21}} G_{j,2,1} u_1^{(j)}(t) + (\Theta(t') y_{2,1,g}(t') * u_1(t'))(t) + \sum_{j=0}^{l_{22}} G_{j,2,2} u_2^{(j)}(t) + (\Theta(t') y_{2,2,g}(t') * u_2(t'))(t) \end{pmatrix} \quad (9.52)$$

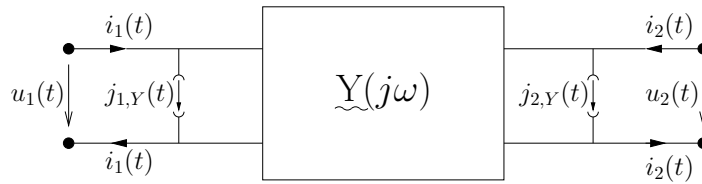


Abbildung 9.26: Vierpolersatzdarstellung für den eingeschwungenen Zustand im Zeitbereich

$j_{1,Y}(t)$ und $j_{2,Y}(t)$ sind dabei die Kurzschlussströme ($u_1(t) = u_2(t) = 0$) am Eingang und Ausgang, die durch die Superposition der Wirkung der inneren Quellen im eingeschwungenen Zustand erzeugt werden. Die Frequenzgänge in $\underline{Y}(j\omega)$ lassen sich über den harmonisch eingeschwungenen Zustand bestimmen, indem man an den Toren mit harmonischen Funktionen anregt ($u_i(t) = \Re\{\underline{U}_i e^{j\omega t}\}$, $i = 1, 2$), alle inneren Quellenfunktionen zu Null setzt und die Ströme auswertet, wenn sie eingeschwungen sind ($i_i(t) = \Re\{\underline{I}_i e^{j\omega t}\}$, $i = 1, 2$). Dann gilt:

$$\underline{Y}_{i,k}(j\omega) = \left. \frac{\underline{I}_i}{\underline{U}_k} \right|_{\substack{\underline{U}_n=0, n \neq k \\ \text{innere Quellen Null gesetzt}}} \quad (9.53)$$

Da $j_{1,Y}(t)$ und $j_{2,Y}(t)$ sich ebenfalls aus Antworten im eingeschwungenen Zustand zusammensetzen, ist auch bei der Berechnung dieser Ströme die Bestimmung von Frequenzgängen mit der komplexen Wechselstromrechnung von zentraler Bedeutung. Eine zu (9.52) analoge Darstellung des eingeschwungenen Zustandes im Zeitbereich gilt auch für alle anderen Vierpoldarstellungen (z.B. Z,H,A-Parameterdarstellung), wenn die entsprechenden Netzwerke nach der Quellensubstitution an den Toren asymptotisch stabil sind. Diese Darstellungen sind die Grundlage der Rauschanalyse von linearen, zeitinvarianten Vierpolen.

Setzt man alle inneren Quellenfunktionen zu Null, so wird das Vierpolverhalten alleine über die \underline{Y} , \underline{Z} , \underline{H} oder \underline{A} Matrizen beschrieben. Diese Beschreibungen des quellenfreien Vierpols sind, falls sie existieren, alle insofern äquivalent als sie ineinander umrechenbar sind.

Definition 9.1

Ein Vierpol mit den in Abbildung 9.20 eingeführten Torvariablen ist reziprok, falls alle festen, ungesteuerten Quellen verschwinden und falls in der gesamten komplexen Ebene bis auf endlich viele Punkte

$$\left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1} \right|_{\underline{U}_2=0} = \underline{Y}_{21} = \left. \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \right|_{\underline{U}_1=0} = \underline{Y}_{12} \quad (9.54)$$

oder

$$\left. \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1} \right|_{\underline{I}_2=0} = \underline{Z}_{21} = \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} \right|_{\underline{I}_1=0} = \underline{Z}_{12} \quad (9.55)$$

gilt. Beide Bedingungen implizieren einander, falls die jeweils andere Darstellung existiert.

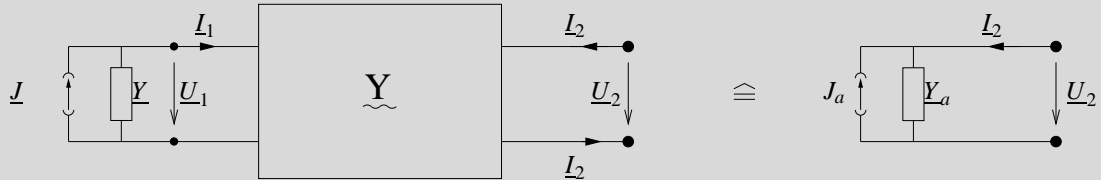
Bemerkung 9.10

Abbildung 9.27: Ersatzdarstellung des am Eingang beschalteten Vierpols

Ein Vierpol mit Y -Parameterdarstellung, bei dem alle festen, ungesteuerten Quellen verschwinden, sei an Tor 1 durch einen Zweipol mit der angegebenen Ersatzstromquellendarstellung angesteuert. Hat das in Abbildung 9.27 links gezeigte Netzwerkmodell am Tor 2 eine Ersatzstromquellendarstellung, dann kann die Schaltung unter der Voraussetzung

$$\underline{Y}_{11} + \underline{Y} \neq 0 \text{ in der gesamten komplexen Ebene bis auf endlich viele Punkte}$$

am Ausgang durch eine Ersatzstromquelle beschrieben werden, deren Parameter folgendermaßen gegeben sind:

$$\underline{J}_a = \left(-\frac{\underline{J}}{\underline{Y} + \underline{Y}_{11}} \right) \underline{Y}_{21} \quad (9.56)$$

$$\underline{Y}_a = \underline{Y}_{22} - \frac{\underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11} + \underline{Y}} \quad (9.57)$$

Dreht man die Situation um und beschaltet das Tor 2 mit der Ersatzstromquelle bestehend aus \underline{J} und \underline{Y} und hat das dann entstehende Netzwerkmodell eine Ersatzstromquellendarstellung am Tor 1, so ergeben sich die Elemente dieser Ersatzstromquelle aus (9.56) und (9.57) durch Vertauschen der Indizes 1 und 2.

Der Beweis von (9.56) und (9.57) bleibt als Übungsaufgabe dem Leser überlassen. Als Hinweis soll genügen, dass das Substitutionstheorem bei diesem Beweis wieder eine wichtige Rolle spielt.

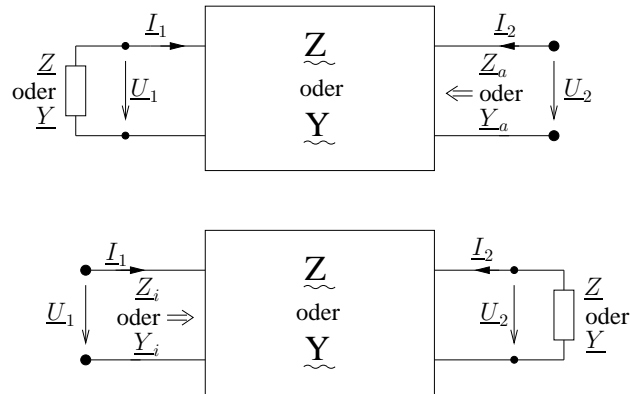


Abbildung 9.28: Eingangs- und Ausgangsimpedanz eines beschalteten Vierpols bei einseitigem Abschluss

Definition 9.2

Ein Vierpol heißt symmetrisch, falls die in Abbildung 9.28 gezeigten Schaltungsvarianten eines Vierpols, bei dem alle festen, ungesteuerten Quellen verschwinden, für alle \underline{Y} oder \underline{Z} in der gesamten komplexen Ebene bis auf endlich viele Punkte das gleiche Zweipolverhalten liefern. Es muss also gelten, falls die Impedanzen und Admittanzen existieren

$$\underline{Y}_i = \underline{Y}_a \text{ und } \underline{Z}_i = \underline{Z}_a \quad (9.58)$$

Mit Bemerkung 9.10 folgt sofort, falls die Y -Parameterdarstellung existiert

$$\underline{Y}_i = \underline{Y}_a \Leftrightarrow \underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22} \quad (9.59)$$

Analog lässt sich zeigen, falls die Z -Parameterdarstellung existiert

$$\underline{Z}_i = \underline{Z}_a \Leftrightarrow \underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22} \quad (9.60)$$

Aktive Vierpole sind zumeist nicht reziprok und symmetrisch. Dies liegt in der Natur der Sache, da man bei aktiven Vierpolen oft mit dem Eingang den Ausgang beeinflussen möchte, das Umgekehrte jedoch verhindert werden soll. Wird Tor 1 als Eingang und Tor 2 als Ausgang festgelegt, so kommt bei der Y -Parameterdarstellung eines aktiven Vierpols meist dem Element \underline{Y}_{21} eine große Bedeutung zu. \underline{Y}_{21} wird meist so groß wie möglich gemacht, wohingegen \underline{Y}_{12} so klein wie möglich sein sollte.

Bemerkung 9.11

Um bei einem Vierpol mit Y -Parameterdarstellung mit dem Eingang (Tor 1) den Ausgang effektiv zu steuern, sollte die Transconductance

$$\underline{Y}_{21} = \left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1} \right|_{\underline{U}_2=0} \quad (9.61)$$

möglichst groß sein. Dies geschieht ohne steuernden Einfluss des Ausgangs auf den Eingang, wenn

$$\underline{Y}_{12} = 0 \quad (9.62)$$

gilt. In diesem Fall wird der Vierpol rückwirkungsfrei genannt. In diesem Fall folgt aus Bemerkung 9.10 und 9.57 unabhängig von \underline{Y}

$$\underline{Y}_i = \underline{Y}_{11}, \quad \underline{Y}_a = \underline{Y}_{22} \quad (9.63)$$

Eingangs- und Ausgangsadmittanz des Vierpols sind damit von der Abschlussadmittanz \underline{Y} auf der jeweils anderen Seite des Vierpols unabhängig.

Beim Zusammenschalten von Vierpolen ist darauf zu achten, dass die Torbedingung (siehe Abbildung 9.29), die durch die Anwendung des Substitutionstheorems impliziert wird, erfüllt bleibt, da man ansonsten die Vierpolgleichungen nicht mehr zur Berechnung des sich aus der Zusammenschaltung ergebenden Netzwerkmodells benutzen kann:

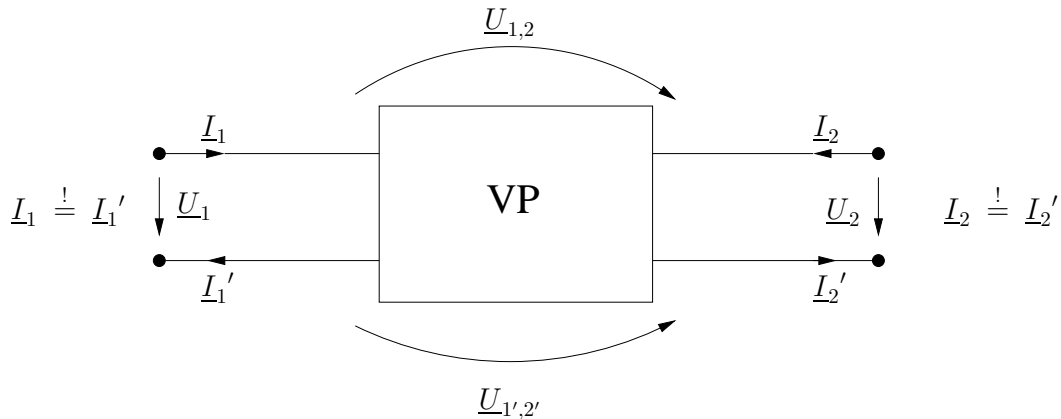


Abbildung 9.29: Torbedingung bei Vierpolen

Ist die Torbedingung erfüllt, so kann man z.B. die Y -Parameter-Darstellung der Parallelschaltung von Vierpolen, bei denen die festen, ungesteuerten Quellen verschwinden, berechnen, indem man einfach die Y -Parameter der Vierpole addiert (siehe Abbildung 9.30).

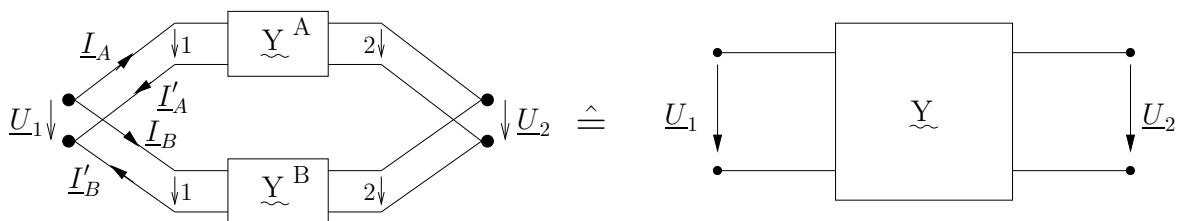


Abbildung 9.30: Parallelschaltung von Vierpolen ohne innere Quellen

$$\underline{I}_A = \underline{I}'_A, \underline{I}_B = \underline{I}'_B \Rightarrow \underline{Y} = \underline{Y}^A + \underline{Y}^B \quad (9.64)$$

Ist die Torbedingung für die individuellen Vierpole nach dem Parallelschalten erfüllt, ergibt sich die Addition der Y -Parameter direkt aus der Gleichheit der Torspannungen und der Addition der Torströme.

Beispiel 9.3

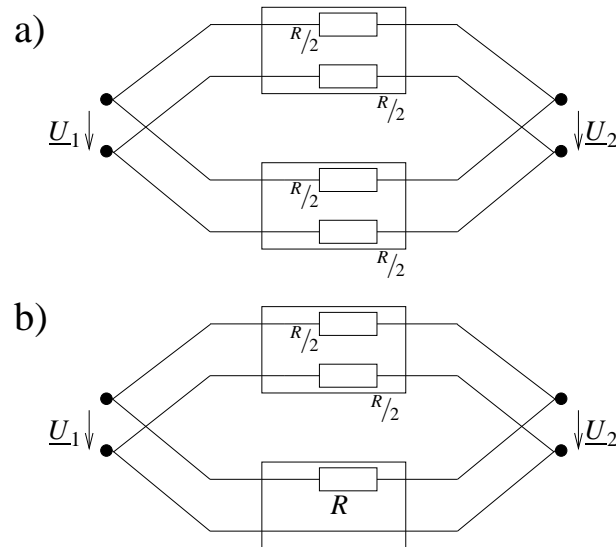


Abbildung 9.31: Parallelschaltung von Vierpolen, a) Torbedingung erfüllt, b) Torbedingung nicht erfüllt.

Alle individuellen Vierpole in Abbildung 9.31 haben vor dem Parallelschalten die Y -Parameter aus (9.46). Nur im Fall a) ist die Torbedingung erfüllt. Hier ergibt sich das richtige Ergebnis also durch Addition der Y -Parameter. Im Fall b) gilt dies nicht, denn die Torbedingung ist nicht erfüllt.

Der tiefere Grund für die Notwendigkeit der Überprüfung der Torbedingung bei einer Parallelschaltung liegt darin, dass sich aufgrund der Parallelschaltung per Schaltungszwang am Vierpol Spannungen $U_{1,2}$ und $U_{1',2'}$ einstellen (siehe Abb. 9.29), die mit den Torbedingungen unverträglich sind (z.B. $\underline{U}_{1',2'} = 0$ bei Beispiel 9.3 b). Dies kann nicht passieren, wenn der Vierpol in Wahrheit ein Dreipol ist, bei dem ein Pol (z.B. $1' = 2'$ und $\underline{U}_{1',2'} = 0$) beiden Toren gemeinsam ist. Denn dann ist $U_{1,2}$ per Maschengleichung festgelegt, falls \underline{U}_1 und \underline{U}_2 gegeben sind, und die oben angesprochene Unverträglichkeit kann nicht mehr auftreten.

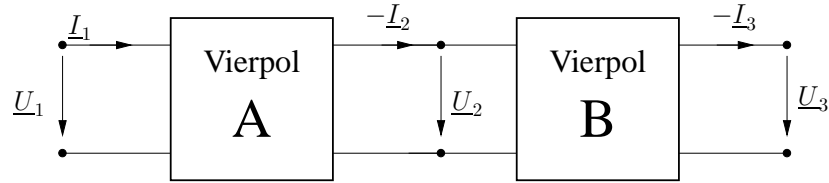


Abbildung 9.32: Kettenschaltung von zwei Vierpolen.

Bei der Kettenschaltung von Vierpolen bleibt die Torbedingung bei einem Abschluss am Eingang und Ausgang durch Zweipole immer erhalten, und es gilt bei Vierpolen, bei denen die festen, ungesteuerten inneren Quellen verschwinden:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \tilde{A}^A \cdot \tilde{A}^B \begin{pmatrix} \underline{U}_3 \\ -\underline{I}_3 \end{pmatrix} \quad (9.65)$$

Die A-Parameter des resultierenden Vierpols ergeben sich also aus der Matrixmultiplikation der individuellen A-Parameter Matrizen. Daher werden die A-Parameter auch Kettenparameter genannt.

In den Tabellen 9.1 und 9.2 sind nochmals summarisch für Vierpole, bei denen die festen, ungesteuerten Quellen verschwinden, die verschiedenen Vierpolbeschreibungen (Tab. 9.1) und die Vorschriften für die Umrechnung von einer Darstellung in die jeweils andere (Tab. 9.2) zusammengefasst.

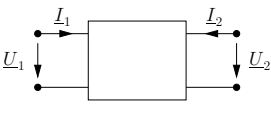
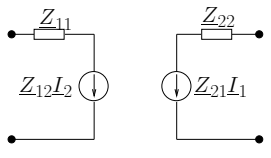
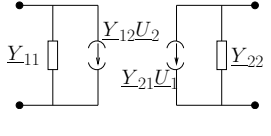
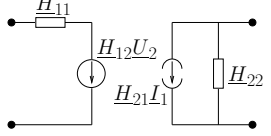
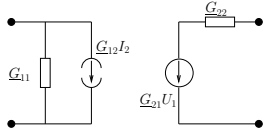
	Bedeutung der Parameter	Allgemeine Ersatzschaltbilder	Bedingung für Reziprozität (R) Symmetrie (S)
$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \underline{Z} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}$	$\underline{Z}_{11} = \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \right _{\underline{I}_2=0} \quad \underline{Z}_{12} = \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} \right _{\underline{I}_1=0}$ $\underline{Z}_{21} = \left. \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1} \right _{\underline{I}_2=0} \quad \underline{Z}_{22} = \left. \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} \right _{\underline{I}_1=0}$		$(R) : \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_{12}$ $(S) : \underline{Z}_{22} = \underline{Z}_{11}$
$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underline{Y} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}$	$\underline{Y}_{11} = \left. \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} \right _{\underline{U}_2=0} \quad \underline{Y}_{12} = \left. \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \right _{\underline{U}_1=0}$ $\underline{Y}_{21} = \left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1} \right _{\underline{U}_2=0} \quad \underline{Y}_{22} = \left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} \right _{\underline{U}_1=0}$		$(R) : \underline{Y}_{21} = \underline{Y}_{12}$ $(S) : \underline{Y}_{22} = \underline{Y}_{11}$
$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underline{H} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}$	$\underline{H}_{11} = \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \right _{\underline{U}_2=0} \quad \underline{H}_{12} = \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \right _{\underline{I}_1=0}$ $\underline{H}_{21} = \left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \right _{\underline{U}_2=0} \quad \underline{H}_{22} = \left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} \right _{\underline{I}_1=0}$		$(R) : \underline{H}_{21} = -\underline{H}_{12}$ $(S) : \underline{H} = 1$
$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \underline{G} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}$	$\underline{G}_{11} = \left. \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} \right _{\underline{I}_2=0} \quad \underline{G}_{12} = \left. \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} \right _{\underline{U}_1=0}$ $\underline{G}_{21} = \left. \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \right _{\underline{I}_2=0} \quad \underline{G}_{22} = \left. \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} \right _{\underline{U}_1=0}$		$(R) : \underline{G}_{21} = -\underline{G}_{12}$ $(S) : \underline{G} = 1$
$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \underline{A} \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{pmatrix}$	$\underline{A}_{11} = \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \right _{\underline{I}_2=0} \quad \underline{A}_{12} = \left. \frac{\underline{U}_1}{-\underline{I}_2} \right _{\underline{U}_2=0}$ $\underline{A}_{21} = \left. \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \right _{\underline{I}_2=0} \quad \underline{A}_{22} = \left. \frac{\underline{I}_1}{-\underline{I}_2} \right _{\underline{U}_2=0}$	keine	$(R) : \underline{A} = 1$ $(S) : \underline{A}_{22} = \underline{A}_{11}$
$\begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underline{B} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ -\underline{I}_1 \end{pmatrix}$	$\underline{B}_{11} = \left. \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \right _{\underline{I}_1=0} \quad \underline{B}_{12} = \left. \frac{\underline{U}_2}{-\underline{I}_1} \right _{\underline{U}_1=0}$ $\underline{B}_{21} = \left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1} \right _{\underline{I}_1=0} \quad \underline{B}_{22} = \left. \frac{\underline{I}_2}{-\underline{I}_1} \right _{\underline{U}_1=0}$	keine	$(R) : \underline{B} = 1$ $(S) : \underline{B}_{22} = \underline{B}_{11}$

Tabelle 9.1: Vierpoldarstellung ($|\underline{X}| = \underline{X}_{11}\underline{X}_{22} - \underline{X}_{12}\underline{X}_{21}$)

Gegeben Berechnet	\underline{Z}	\underline{Y}	\underline{H}	\underline{G}	\underline{A}	\underline{B}
Impedanzmatrix \underline{Z}	$\underline{Z}_{11} \quad \underline{Z}_{12}$ $\underline{Z}_{21} \quad \underline{Z}_{22}$	$\frac{\underline{Y}_{22}}{ \underline{Y} } \quad -\frac{\underline{Y}_{12}}{ \underline{Y} }$ $-\frac{\underline{Y}_{21}}{ \underline{Y} } \quad \frac{\underline{Y}_{11}}{ \underline{Y} }$	$\frac{ \underline{H} }{\underline{H}_{22}} \quad \frac{\underline{H}_{12}}{\underline{H}_{22}}$ $-\frac{\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{22}} \quad \frac{1}{\underline{H}_{22}}$	$\frac{1}{\underline{G}_{11}} \quad -\frac{\underline{G}_{12}}{\underline{G}_{11}}$ $\frac{\underline{G}_{21}}{\underline{G}_{11}} \quad \frac{ \underline{G} }{\underline{G}_{11}}$	$\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}} \quad \frac{ \underline{A} }{\underline{A}_{21}}$ $\frac{1}{\underline{A}_{21}} \quad \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}}$	$\frac{\underline{B}_{22}}{\underline{B}_{21}} \quad \frac{1}{\underline{B}_{21}}$ $\frac{ \underline{B} }{\underline{B}_{21}} \quad \frac{\underline{B}_{11}}{\underline{B}_{21}}$
Admittanzmatrix \underline{Y}	$\frac{\underline{Z}_{22}}{ \underline{Z} } \quad -\frac{\underline{Z}_{12}}{ \underline{Z} }$ $-\frac{\underline{Z}_{21}}{ \underline{Z} } \quad \frac{\underline{Z}_{11}}{ \underline{Z} }$	$\underline{Y}_{11} \quad \underline{Y}_{12}$ $\underline{Y}_{21} \quad \underline{Y}_{22}$	$\frac{1}{\underline{H}_{11}} \quad -\frac{\underline{H}_{12}}{\underline{H}_{11}}$ $\frac{\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{11}} \quad \frac{ \underline{H} }{\underline{H}_{11}}$	$\frac{ \underline{G} }{\underline{G}_{22}} \quad \frac{\underline{G}_{12}}{\underline{G}_{22}}$ $-\frac{\underline{G}_{21}}{\underline{G}_{22}} \quad \frac{1}{\underline{G}_{22}}$	$\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{12}} \quad -\frac{ \underline{A} }{\underline{A}_{12}}$ $-\frac{1}{\underline{A}_{12}} \quad \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{12}}$	$\frac{\underline{B}_{11}}{\underline{B}_{12}} \quad -\frac{1}{\underline{B}_{12}}$ $-\frac{ \underline{B} }{\underline{B}_{12}} \quad \frac{\underline{B}_{22}}{\underline{B}_{12}}$
Hybridmatrix \underline{H}	$\frac{ \underline{Z} }{\underline{Z}_{22}} \quad \frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{22}}$ $-\frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22}} \quad \frac{1}{\underline{Z}_{22}}$	$\frac{1}{\underline{Y}_{11}} \quad -\frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{11}}$ $\frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11}} \quad \frac{ \underline{Y} }{\underline{Y}_{11}}$	$\underline{H}_{11} \quad \underline{H}_{12}$ $\underline{H}_{21} \quad \underline{H}_{22}$	$\frac{\underline{G}_{22}}{ \underline{G} } \quad -\frac{\underline{G}_{12}}{ \underline{G} }$ $-\frac{\underline{G}_{21}}{ \underline{G} } \quad \frac{\underline{G}_{11}}{ \underline{G} }$	$\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}} \quad \frac{ \underline{A} }{\underline{A}_{22}}$ $-\frac{1}{\underline{A}_{22}} \quad \frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{22}}$	$\frac{\underline{B}_{12}}{\underline{B}_{11}} \quad \frac{1}{\underline{B}_{11}}$ $-\frac{ \underline{B} }{\underline{B}_{11}} \quad \frac{\underline{B}_{21}}{\underline{B}_{11}}$
Inv. Hybridmatrix \underline{G}	$\frac{1}{\underline{Z}_{11}} \quad -\frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{11}}$ $\frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11}} \quad \frac{ \underline{Z} }{\underline{Z}_{11}}$	$\frac{ \underline{Y} }{\underline{Y}_{22}} \quad \frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{22}}$ $-\frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{22}} \quad \frac{1}{\underline{Y}_{22}}$	$\frac{\underline{H}_{22}}{ \underline{H} } \quad -\frac{\underline{H}_{12}}{ \underline{H} }$ $-\frac{\underline{H}_{21}}{ \underline{H} } \quad \frac{\underline{H}_{11}}{ \underline{H} }$	$\underline{G}_{11} \quad \underline{G}_{12}$ $\underline{G}_{21} \quad \underline{G}_{22}$	$\frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{11}} \quad -\frac{ \underline{A} }{\underline{A}_{11}}$ $\frac{1}{\underline{A}_{11}} \quad \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}}$	$\frac{\underline{B}_{21}}{\underline{B}_{22}} \quad -\frac{1}{\underline{B}_{22}}$ $\frac{ \underline{B} }{\underline{B}_{22}} \quad \frac{\underline{B}_{12}}{\underline{B}_{22}}$
Kettenmatrix \underline{A}	$\frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}} \quad \frac{ \underline{Z} }{\underline{Z}_{21}}$ $\frac{1}{\underline{Z}_{21}} \quad \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}}$	$-\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} \quad -\frac{1}{\underline{Y}_{21}}$ $-\frac{ \underline{Y} }{\underline{Y}_{21}} \quad -\frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}}$	$-\frac{ \underline{H} }{\underline{H}_{21}} \quad -\frac{\underline{H}_{11}}{\underline{H}_{21}}$ $-\frac{\underline{H}_{22}}{\underline{H}_{21}} \quad -\frac{1}{\underline{H}_{21}}$	$\frac{1}{\underline{G}_{21}} \quad \frac{\underline{G}_{22}}{\underline{G}_{21}}$ $\frac{\underline{G}_{11}}{\underline{G}_{21}} \quad \frac{ \underline{G} }{\underline{G}_{21}}$	$\underline{A}_{11} \quad \underline{A}_{12}$ $\underline{A}_{21} \quad \underline{A}_{22}$	$\frac{\underline{B}_{22}}{ \underline{B} } \quad \frac{\underline{B}_{12}}{ \underline{B} }$ $\frac{\underline{B}_{21}}{ \underline{B} } \quad \frac{\underline{B}_{11}}{ \underline{B} }$
Kehrmatrix \underline{B}	$\frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{12}} \quad \frac{ \underline{Z} }{\underline{Z}_{12}}$ $\frac{1}{\underline{Z}_{12}} \quad \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{12}}$	$-\frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{12}} \quad -\frac{1}{\underline{Y}_{12}}$ $-\frac{ \underline{Y} }{\underline{Y}_{12}} \quad -\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{12}}$	$\frac{1}{\underline{H}_{12}} \quad \frac{\underline{H}_{11}}{\underline{H}_{12}}$ $\frac{\underline{H}_{22}}{\underline{H}_{12}} \quad \frac{ \underline{H} }{\underline{H}_{12}}$	$-\frac{ \underline{G} }{\underline{G}_{12}} \quad -\frac{\underline{G}_{22}}{\underline{G}_{12}}$ $-\frac{\underline{G}_{11}}{\underline{G}_{12}} \quad -\frac{1}{\underline{G}_{12}}$	$\frac{\underline{A}_{22}}{ \underline{A} } \quad \frac{\underline{A}_{12}}{ \underline{A} }$ $\frac{\underline{A}_{21}}{ \underline{A} } \quad \frac{\underline{A}_{11}}{ \underline{A} }$	$\underline{B}_{11} \quad \underline{B}_{12}$ $\underline{B}_{21} \quad \underline{B}_{22}$

Tabelle 9.2: Umrechnung von Vierpolparametern ($|\underline{X}| = \det \underline{X} = \underline{X}_{11}\underline{X}_{22} - \underline{X}_{12}\underline{X}_{21}$)

Kapitel 10

Stoßantwort und elementare verallgemeinerte Funktionen (Distributionen)

Aufgrund von Bemerkung 8.18 und (8.153) ist klar, dass man das allgemeine transiente Verhalten eines linearen, zeitinvarianten Netzwerkmodells vollständig durch die Analyse von Frequenzgängen $\underline{H}_{k,m}(j\omega)$ bestimmen kann. In Bemerkung 8.28 ist dargestellt, dass man die $\underline{H}_{k,m}(\underline{s})$ auch als Übertragungsfunktionen durch Anregung aus dem Ruhezustand heraus über das Verhältnis der Laplacetransformierten am Eingang und am Ausgang (siehe (8.206)) bestimmen kann. (Um alle notwendigen $\underline{H}_{k,m}(\underline{s})$ als Übertragungsfunktion bestimmen zu können, muss man dabei in der Regel wie in Bemerkung 8.18 die Beiträge der Anfangswerte X_k auf der rechten Seite von (8.146) durch vorgegebene Quellen $\hat{E}_k(\underline{s})$ ersetzen.). In diesem Kapitel wird mit der Bestimmung der Stoßantwort ausgehend von Impulsantworten ein reines Zeitbereichsverfahren vorgestellt, das zu den in den Bemerkungen 8.28 bzw. 8.18 vorgestellten Verfahren im Laplacebereich bzw. im Bereich der komplexen Wechselstromrechnung gleichwertig ist.

10.1 Motivation der Netzwerkanalyse auf der Basis der Stoßantwort

Es sei wie in den Definitionen 5.17 und 5.18 beschrieben ein lineares und zeitinvariantes System gegeben, das durch die Abbildung \mathcal{T} gegeben ist. Wie in Bemerkung 5.21 festgehalten, kann es sich dabei z.B. um die Antwort aus dem Ruhezustand eines Netzwerkmodells handeln, wenn man eine Quelle als Eingang und eine Netzwerkvariable als Ausgang festlegt. Um die Analyse zu vereinfachen, sei vorausgesetzt, dass das Netzwerk bzw. das System nicht differenzierend ist, sodass stückweise stetige Eingangsfunktionen zulässig sind. Insbesondere sei die folgende Funktion für reelles $\tau > 0$ zulässig:

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 & , 0 < t \leq \tau, \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad (10.1)$$

Ferner sei $e(t)$ eine beschränkte, stetige und zulässige Eingangsfunktion (siehe Abbildung 10.1). Dann kann man folgendermaßen vorgehen:

1. Schritt: Approximation von $e(t)$ durch eine Treppenfunktion

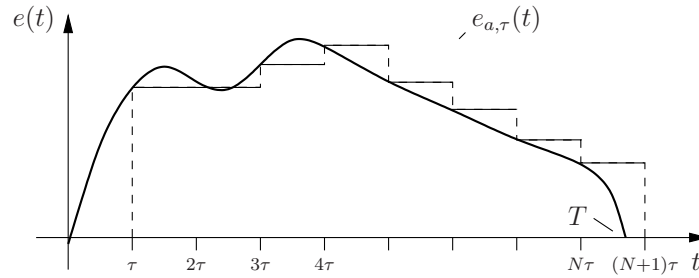


Abbildung 10.1

$$e_{a,\tau}(t) = \sum_{\nu=0}^N e(\nu\tau) \operatorname{rect}_{\tau}(t - \nu\tau) \tau ; \quad \text{mit } N < \frac{T}{\tau} \leq N+1 \quad (10.2)$$

und

$$\operatorname{rect}_{\tau}(t) := \frac{1}{\tau} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right). \quad (10.3)$$

Es gilt für $e(t)$ für alle t :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} e_{a,\tau}(t) = e(t). \quad (10.4)$$

2. Schritt: Darstellung der Ausgangsfunktion unter Ausnutzung der Linearität und Zeitinvarianz ($t_{\nu} := \nu \tau$)

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(e_{a,\tau}(t'))(t) &\stackrel{\text{Linearität}}{=} \sum_{\nu=0}^N e(t_{\nu}) \mathcal{T}(\operatorname{rect}_{\tau}(t' - t_{\nu}))(t) \tau \\ &\stackrel{\text{Zeitinvarianz}}{=} \sum_{\nu=0}^N e(t_{\nu}) \underbrace{\mathcal{T}(\operatorname{rect}_{\tau}(t'))(t - t_{\nu})}_{\substack{\text{Systemantwort auf} \\ \text{einen kurzen Im-} \\ \text{puls der Energie 1} \\ \left(\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{rect}_{\tau}(t) dt = 1\right)}} \tau \end{aligned} \quad (10.5)$$

Bei einem hinreichend „gutartigen“ System sind folgende Annahmen plausibel, aber bisher keineswegs bewiesen:

Annahme 10.1

$$\mathcal{T}(\operatorname{rect}_{\tau}(t'))(t) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} a_{\delta}(t) \quad (10.6)$$

Annahme 10.2

$$\mathcal{T}(e(t'))(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{T}(e_{a,\tau}(t'))(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(t') a_{\delta}(t - t') dt' = (e * a_{\delta})(t) \quad (10.7)$$

Wäre dies erfüllt, könnte das gesamte Systemverhalten im linearen, zeitinvarianten Systemmodus auf die Kenntnis von $a_{\delta}(t)$ zurückgeführt werden! Dies würde die Behandlung von linearen und zeitinvarianten Systemen stark vereinfachen. Daher wäre es sehr nützlich, wenn

Annahme 10.1 und Annahme 10.2 bei einer möglichst großen Anzahl von linearen und zeitinvarianten Systemen gelten würden!

Da $a_\delta(t)$ für das Weitere sehr wichtig sein wird, zunächst zwei Definitionen:

Definition 10.1 (Darstellung des Einheitsstoßes)

Sei δ_1 eine zumindest stückweise stetige Funktion mit

$$\begin{aligned} \int_0^1 \delta_1(x) dx &= 1 \\ \delta_1(x) &\geq 0 \text{ für alle } x, \\ \delta_1(x) &= 0 \text{ für } x \leq 0 \text{ und } x > 1 \end{aligned} \quad (10.8)$$

(Solche Funktionen existieren und können als beliebig oft differenzierbar vorausgesetzt werden. (siehe Übung))

Die Funktionsfolge mit reellen $\tau > 0$

$$\delta_\tau(t) = \frac{1}{\tau} \delta_1\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad (10.9)$$

heißt für $\tau \rightarrow 0$ eine Darstellung des Einheitsstoßes.

(Der genauere Sinn dieser Definition wird später noch klar werden!)

Merke:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\tau(t) dt \stackrel{x=\frac{t}{\tau}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_1(x) dx = \int_0^1 \delta_1(x) dx = 1 \quad (10.10)$$

Definition 10.2

Sei durch $\mathcal{T}(e(t'))(t)$ ein lineares, zeitinvariantes System beschrieben und $\delta_\tau(t)$ eine Darstellung des Einheitsstoßes, für die alle δ_τ , $\tau > 0$ zulässige Eingangsfunktionen sind. Dann wird

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{T}(\delta_\tau(t'))(t) =: a_\delta(t) \quad (10.11)$$

Stoßantwort genannt.

Mit dieser Definition lässt sich Annahme 10.2 kurz folgendermaßen formulieren:

„Die Systemantwort ergibt sich durch Faltung der Eingangsfunktion mit der Stoßantwort“.

Zunächst ist jedoch völlig unklar, ob der Grenzwert in (10.11) überhaupt existiert. Ferner ist ebenfalls unklar, ob, falls (10.11) existiert, Annahme 10.2 richtig ist. Dies soll nun anhand von zwei Beispielen untersucht werden.

Beispiel 10.1

In Beispiel 5.1 sei für $t_S = 0$ die Antwort aus dem Ruhestand ($u_{C,0} = u_C(0^-) = 0$) betrachtet und $e(t) = v(t)$, $a(t) = u_C(t)$ gesetzt, dann folgt aus (5.17):

$$a(t) = \mathcal{T}(e(t')) = u_C(t) = \int_0^t \frac{1}{RC} e^{-\frac{(t-t')}{RC}} e(t') dt' \quad (10.12)$$

Aufgrund von Bemerkung 5.21 ist für $e(t) = 0$ für $t < 0$ durch (10.12) ein lineares, zeitinvariantes System definiert.

Sei nun ferner $e(t) = \delta_\tau(t) = \text{rect}_\tau(t)$ gewählt. Es gilt nach (10.12):

$$\begin{aligned} a_{\text{rect}_\tau}(t) &= \mathcal{T}(\text{rect}_\tau(t'))(t) = u_c(t) \\ &= \int_0^t \frac{1}{RC} e^{-\frac{(t-t')}{RC}} \frac{1}{\tau} \text{rect}\left(\frac{t'}{\tau}\right) dt' \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad t \leq 0 \\ \frac{1}{\tau} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) & , \quad 0 < t < \tau \\ \frac{\left(e^{\frac{\tau}{RC}} - 1\right)}{\tau} e^{-\frac{t}{RC}} & , \quad t \geq \tau \end{cases} \end{aligned} \quad (10.13)$$

Da

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\left(e^{\frac{\tau}{RC}} - 1\right)}{\tau} = \frac{d}{dt} e^{\frac{t}{RC}} \Big|_{t=0} = \frac{1}{RC} \quad (10.14)$$

folgt

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{T}(\text{rect}_\tau(t'))(t) = \begin{cases} \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t \leq 0 \end{cases} = a_\delta(t) \quad (10.15)$$

Bei diesem System existiert also die Stoßantwort im Sinne eines klassischen punktweisen Grenzwertes. Annahme 10.1 ist bei diesem Beispiel somit gerechtfertigt. Ferner folgt aus (10.12) sofort für eine beliebige Eingangsfunktion $e(t)$ mit $e(t) = 0$ für $t < 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(e(t'))(t) &= \int_0^t a_\delta(t-t') e(t') dt' = \int_{-\infty}^{\infty} a_\delta(t-t') e(t') dt' \\ &= (a_\delta * e)(t) \end{aligned} \quad (10.16)$$

Bei diesem Systembeispiel ist also auch Annahme 10.2 richtig.

Beispiel 10.2

(Spannungsteiler)

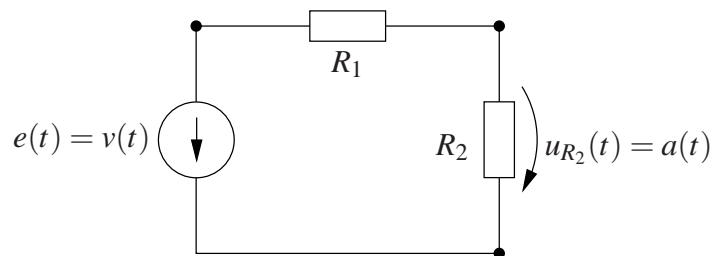


Abbildung 10.2

Sei

$$\begin{aligned} e(t) &:= v(t) \\ a(t) &:= u_{R_2}(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e(t) \end{aligned} \quad (10.17)$$

Sei $\delta_\tau(t)$ eine Darstellung des Einheitsstoßes. Es gilt:

$$\mathcal{T}(\delta_\tau(t'))(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \delta_\tau(t) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0 \text{ für alle } t \quad (10.18)$$

denn $\delta_\tau(t) = 0$ für $t \leq 0$ und $t > \tau$.

Mit der 0-Funktion gilt aber immer für alle $e(t)$, mit $e(t) = 0$ für $t < 0$:

$$(e(t') * 0(t'))(t) = 0(t) = 0 \text{ für alle } t \quad (10.19)$$

D. h. Annahme 10.2 ist bei diesem System offensichtlich mit $a_\delta(t) = 0(t)$ nicht erfüllt!

Solange man den Grenzübergang in Annahme 10.1 im Sinne eines klassischen punktweisen Grenzwertes auffasst, ergibt sich also keine sinnvolle Stoßantwort, für die Annahme 10.2 richtig wäre. Um dieses Problem zu beseitigen müssen wir zunächst den Grenzwertbegriff in Annahme 10.1 erweitern. Dies geschieht im nächsten Abschnitt.

10.2 Grundbegriffe der Distributionstheorie

Definition 10.3 (Distribution, verallgemeinerte Funktion)

Eine Distribution D ist eine lineare (und stetige (wird nicht erklärt)) Abbildung eines Testfunktionenraumes mit den Testfunktionen $\varphi(t)$ auf die reellen Zahlen ($D(\varphi)$ ist also reell). Testfunktionen $\varphi(t)$ sind gewöhnliche reellwertige Funktionen auf den reellen Zahlen und somit für alle t erklärt. Der allgemeinste Testfunktionenraum besteht aus den auf den reellen Zahlen stetigen Funktionen. Dieser Raum wird für viele Distributionen eingeschränkt, um die Existenz dieser Distributionen zu sichern. Beliebige oft differenzierbare Funktionen, die außerhalb eines kompakten Intervalls verschwinden, bilden dabei den Testfunktionenraum, auf dem alle Distributionen erklärt sind.

Jede so definierte Distribution D kann sofort auch auf komplexwertige Testfunktionen $\varphi(t)$ und als Abbildung dieser komplexwertigen Testfunktionen auf die komplexen Zahlen aufgefasst werden, wenn man voraussetzt, dass $\Re\{\varphi(t)\}$ und $\Im\{\varphi(t)\}$ Testfunktionen von D sind und folgendes definiert:

$$D(\varphi) := D(\Re\{\varphi\}) + j D(\Im\{\varphi\})$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass die so definierten $\varphi(t)$ einen Vektorraum auf den komplexen Zahlen bilden und D eine lineare Abbildung auf diesem Vektorraum ist.

Bemerkung 10.1

Da es sich bei Distributionen um Abbildungen eines vorher festgelegten Testfunktionenraumes auf die reellen Zahlen handelt, macht es Sinn, bei zwei Distributionen D_1 und D_2 und zwei reellen Zahlen α, β von der Distribution $\alpha D_1 + \beta D_2$ zu sprechen. Für eine beliebige Testfunktion φ ist diese neue Distribution definiert über

$$(\alpha D_1 + \beta D_2)(\varphi) = \alpha D_1(\varphi) + \beta D_2(\varphi). \quad (10.20)$$

Distributionen bilden also einen Vektorraum.

Beachte: Die Multiplikation zweier beliebiger Distributionen kann nicht sinnvoll definiert werden.

Definition 10.4 (Interpretation einer gewöhnlichen Funktion als Distribution)

Sei $h(t)$ eine gewöhnliche, auf der gesamten reellen Achse definierte, stückweise stetige Funktion und sei ein Testfunktionenraum gewählt, sodass

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot \varphi(t) \, dt$$

für alle Testfunktionen φ existiert. Dann ist durch

$$[h(t)] : \varphi(t) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} h(t') \cdot \varphi(t') \, dt' =: [h(t)](\varphi(t)) \quad (10.21)$$

eine Distribution $[h(t)]$ definiert.

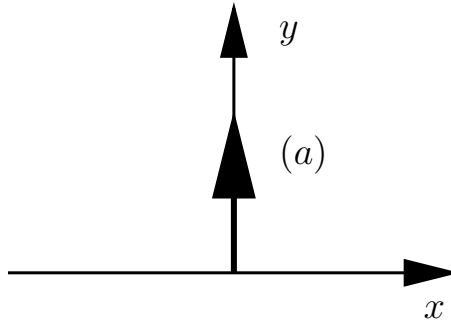
Ohne Beweis: Diese Zuordnung ist eineindeutig, d.h. $[h_1(t)] = [h_2(t)] \Leftrightarrow h_1(t) = h_2(t)$ (Bis auf die Stellen, an denen h_1 oder h_2 unstetig sind.)

Distributionen D , für die es ein $h(t)$ gibt, sodass $D := [h(t)]$, werden **reguläre Distributionen** genannt.

Durch Nachrechnen lässt sich für reelle Zahlen α, β und zwei reguläre Distributionen $[h_1(t)]$ und $[h_2(t)]$ auf einem Testfunktionenraum der Testfunktion φ leicht zeigen:

$$\alpha[h_1(t)] + \beta[h_2(t)] = [\alpha h_1(t) + \beta h_2(t)] \quad (10.22)$$

Das Auffassen gewöhnlicher Funktionen als Distributionen und die Superposition von Funktionen bzw. Distributionen ist also vertauschbar. $[h(t)]$ wird auch oft einfach mit $h(t)$ bezeichnet werden, insbesondere wenn keine Notwendigkeit zur Unterscheidung besteht. Ist z. B. D_1 eine Distribution und sind α, β reelle Zahlen, so sollte man $\alpha D_1 + \beta h(t)$ als $\alpha D_1 + \beta [h(t)]$ interpretieren.

Abbildung 10.3: Darstellung von $a\delta(t)$ (a reell)**Definition 10.5** (Diracstoß, Deltadistribution)

Sei als Testfunktionenraum der Raum aller stetigen Funktionen gewählt. Sei ferner eine Funktionenfolge $\delta_\tau(t)$ nach Definition 10.1 gewählt. Die Deltadistribution oder der Diracstoß δ ist für jede Testfunktion φ definiert über

$$\delta(\varphi) := \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\tau(t') \varphi(t') dt'. \quad (10.23)$$

Zum Sinn der Definition und dem Wert von $\delta(\varphi)$:

Sei φ eine für alle reellen Zahlen definierte, stückweise stetige Funktion, die für $t = 0$ stetig ist, dann gilt:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\tau(t') \varphi(t') dt' - \varphi(0) \right| &= \left| \int_0^\tau \delta_\tau(t') \varphi(t') dt' - \int_0^\tau \delta_\tau(t') \varphi(0) dt' \right| \\ &\leq \int_0^\tau |\varphi(t') - \varphi(0)| \delta_\tau(t') dt' \\ &\leq \max_{0 < t' < \tau} |\varphi(t') - \varphi(0)| \xrightarrow[\tau \rightarrow 0]{\varphi \text{ stetig}} 0 \end{aligned} \quad (10.24)$$

D.h. unabhängig von der Wahl der Funktionenfolge $\delta_\tau(t)$ nach Definition 10.1 und für alle Testfunktionen gilt:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\tau(t') \varphi(t') dt' \quad \text{existiert immer und} \quad \delta(\varphi) = \varphi(0)$$

Sprechweise: Die Distribution δ filtert den Wert von φ an der Stelle 0 heraus.

Definition 10.6

Sei D_n eine Folge von Distributionen und D eine weitere Distribution auf dem gleichen Testfunktionenraum. Dann sagt man: D_n konvergiert gegen D für $n \rightarrow \infty \iff$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n(\varphi) = D(\varphi) \quad (10.25)$$

für alle Testfunktionen φ

Bemerkung 10.2

Nach Definition 10.6 gilt daher im Sinne der Distributionstheorie:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \delta_\tau(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} [\delta_\tau(t)] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\delta_{1/n}(t)] = \delta \quad (10.26)$$

Bemerkung 10.3

Sei als Testfunktionenraum nun der Raum aller beschränkten, stetigen Funktionen gewählt. Dann gilt für $\tau > 0$ im Sinne der Distributionstheorie:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} [\Theta(t) \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}] = \delta \quad (10.27)$$

Beweis: Sei $\varphi(t)$ Testfunktion mit $|\varphi(t)| \leq M$ für alle t . Dann gilt:

$$\begin{aligned} [\Theta(t) \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}](\varphi(t)) &= \int_0^\infty \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \varphi(t) dt \\ &\stackrel{T>0}{=} \int_0^T \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \varphi(t) dt + \int_T^\infty \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \varphi(t) dt \end{aligned} \quad (10.28)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| [\Theta(t) \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}](\varphi(t)) - \underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \varphi(0) dt}_{\varphi(0)} \right| &\leq \int_0^T \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} |\varphi(t) - \varphi(0)| dt + 2M \int_T^\infty \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} dt \\ &\leq \max_{0 \leq t \leq T} |\varphi(t) - \varphi(0)| + 2M e^{-T/\tau} \end{aligned} \quad (10.29)$$

Sei $T > 0$ so klein, dass für ein beliebiges $\epsilon > 0$

$$\max_{0 \leq t \leq T} |\varphi(t) - \varphi(0)| \leq \epsilon/2$$

und $\tau > 0$ bei gegebenem $T > 0$ so klein, dass

$$2M e^{-T/\tau} \leq \epsilon/2$$

dann gilt:

$$\left| [\Theta(t) \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}](\varphi(t)) - \varphi(0) \right| \leq \epsilon.$$

und somit die Behauptung.

Setzt man $t_S = 0$, so kann man somit sowohl $\frac{1}{C} i_C(t) = \frac{d}{dt} u_C(t)$ für $RC \rightarrow 0$ in (5.54) als auch $\frac{1}{L} \dot{u}_{1,sta}(t) = \frac{d}{dt} i_{L1,sta}(t)$ für $L/\alpha R_2 \rightarrow 0$ in (8.135) als mit $u_C(0^+) - u_C(0^-)$ (siehe (5.54) und (5.58)) bzw. $i_{L1}(0^+) - i_{L1}(0^-)$ (siehe (8.137)) gewichteten Diracstoß interpretieren. Insofern wird Definition 5.11 durch Bemerkung 10.3 nachträglich gerechtfertigt.

Bemerkung 10.4

Ohne Beweis: Bei einer allgemeinen Distribution D gibt es immer eine Folge von beliebig glatten (Test-)Funktionen $D_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$, die außerhalb eines kompakten Intervalls verschwinden, sodass im Sinne der Distributionstheorie gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [D_n(t)] = D \quad (10.30)$$

D.h. für eine beliebige Testfunktion $\varphi(t)$, dass $D(\varphi) = D(t) (\varphi(t))$ beliebig genau durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_n(t) \varphi(t) dt. \quad (10.31)$$

für $n \rightarrow \infty$ approximiert wird. Dies motiviert die formale Schreibweise

$$D(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} D(t) \varphi(t) dt \quad (10.32)$$

und die Konvention D mit dem Argument t zu verstehen, so als ob $D(t)$ eine gewöhnliche Funktion sei.

Folgende Schreibweisen sind daher äquivalent:

$$D(\varphi) = D(t) (\varphi(t)) \quad (10.33)$$

Insbesondere schreibt man oft

$$\delta(\varphi) = \delta(t) (\varphi(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0) \quad (10.34)$$

Kommen wir kurz auf Beispiel 10.2 zurück:

Fassen wir die Ausgangsfunktion

$$\mathcal{T}(\delta_\tau(t'))(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \delta_\tau(t) \quad (10.35)$$

als Folge von Distributionen auf, so gilt im Sinne der Distributionstheorie:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{R_2}{R_1 + R_2} [\delta_\tau(t)] = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \delta(t) \quad (10.36)$$

Im Sinne der Distributionstheorie können wir also der Ausgangsfolge einen Grenzwert zuordnen, der sich nicht aus dem klassischen Grenzwert $0(t)$ ergibt, denn die der Nullfunktion zugeordnete Distribution bildet alle Testfunktionen auf 0 ab!

Definition 10.7

Seien $T \neq 0$, t_0 Zahlen und als Testfunktion alle stetigen Funktionen zugelassen, so ist

$$\delta\left(\frac{t-t_0}{T}\right) := \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\delta_\tau\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \right], \quad (10.37)$$

wobei $\delta_\tau(t)$ wie in Definition 10.1 gegeben sei. Aus der Definition folgt:

$$\left[\delta_\tau\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \right] (\varphi(t)) \stackrel{\substack{1) \\ \uparrow \\ \text{Def. 10.4}}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\tau\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \varphi(t) dt \quad (10.38)$$

$$\stackrel{\substack{2) \\ \uparrow \\ \frac{t-t_0}{T} = x}}{=} |T| \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\tau(x) \varphi(xT + t_0) dx$$

$$\stackrel{\substack{3) \\ \uparrow \\ \text{Def. 10.4}}}{=} |T| [\delta_\tau(t)] (\varphi(tT + t_0))$$

$$\stackrel{\substack{4) \\ \uparrow \\ \text{Def. 10.5}}}{\xrightarrow{\tau \rightarrow 0}} |T| \delta(t) (\varphi(tT + t_0)) = |T| \varphi(t_0) \quad (10.39)$$

D.h.

$$\delta\left(\frac{t-t_0}{T}\right)(\varphi(t)) = |T| \delta(t)(\varphi(tT+t_0)) = |T| \varphi(t_0) \quad (10.40)$$

Definition 10.8

Da die oben durchgeführten Umformungen 1) - 4) ohne Änderung ebenso bei einer beliebigen Distribution $D(t)$ und einer Folge von regulären Distributionen mit $[D_n(t)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} D(t)$ durchgeführt werden könnten, definiert man $D\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$ über

$$D\left(\frac{t-t_0}{T}\right)(\varphi(t)) := |T| D(t)(\varphi(tT+t_0)) \quad (10.41)$$

für alle $\varphi(t)$ aus einem geeigneten Testfunktionenraum.

Aufgrund dieser Definition gilt sofort für reguläre Distributionen

$$[h(t)]\left(\frac{t-t_0}{T}\right) = \left[h\left(\frac{t-t_0}{T}\right)\right](t). \quad (10.42)$$

Definition 10.9 (Ableitungen von δ)

Sei ein Testfunktionenraum mit mindestens n -fach stetig differenzierbaren Funktionen φ gegeben und sei eine mindestens n -fach differenzierbare Darstellungsfolge $\delta_\tau(t)$ von δ nach Definition 5.12 gegeben, dann wird $\delta^{(n)}$ definiert über

$$\delta^{(n)}(t)(\varphi(t)) := \lim_{\tau \rightarrow 0} [\delta_\tau^{(n)}(t)](\varphi(t)) \quad (10.43)$$

$$[\delta_\tau^{(n)}(t)](\varphi(t)) \stackrel{1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\tau^{(n)}(t) \varphi(t) dt \quad (10.44)$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{2)}{=} \delta_\tau^{(n-1)}(t) \varphi(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + (-1)^1 \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\tau^{(n-1)}(t) \varphi^{(1)}(t) dt \\ & \quad \begin{array}{l} \nearrow 0 \\ \uparrow \\ \delta_\tau \text{ verschwindet} \\ \text{außerhalb } [0, \tau] \end{array} \\ & \vdots \\ & \stackrel{3)}{=} (-1)^{n-1} \delta_\tau(t) \varphi^{(n-1)}(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\tau(t) \varphi^{(n)}(t) dt \\ & \quad \begin{array}{l} \nearrow 0 \end{array} \\ & \stackrel{4)}{=} [\delta_\tau(t)] \left((-1)^n \varphi^{(n)}(t) \right) \\ & \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \delta(t) \left((-1)^n \varphi^{(n)}(t) \right) = (-1)^n \varphi^{(n)}(0) \end{aligned} \quad (10.45)$$

D.h.

$$\delta^{(n)}(t)(\varphi(t)) = \delta(t) \left((-1)^n \varphi^{(n)}(t) \right) = (-1)^n \varphi^{(n)}(0) \quad (10.46)$$

Definition 10.10

Da man die obigen Schritte 1) \rightarrow 4) wiederum bei einer beliebigen Distribution $D(t)$ und

$[D_n(t)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} D(t)$ mit hinreichend glatten gewöhnlichen Funktionen $D_n(t)$ durchführen kann, definiert man $D^{(n)}(t)$ über

$$D^{(n)}(t) (\varphi(t)) = D(t) \left((-1)^n \varphi^{(n)}(t) \right) \quad (10.47)$$

mit φ aus einem passenden Testfunktionenraum.

Aufgrund dieser Definition gilt für einmal differenzierbare Funktionen $h(t)$ und stetig differenzierbare Testfunktionen φ , die außerhalb eines kompakten Intervalls verschwinden:

$$\begin{aligned} [h(t)]^{(1)} (\varphi) &= [h(t)] (-\varphi^{(1)}) = - \int_{-\infty}^{\infty} h(t') \varphi^{(1)}(t') dt' = \int_{-\infty}^{\infty} h^{(1)}(t') \varphi(t') dt' \\ &= [h^{(1)}(t)] (\varphi) \\ \Rightarrow [h(t)]^{(1)} &= [h^{(1)}(t)] \end{aligned} \quad (10.48)$$

Ist h n -fach differenzierbar, so gilt daher

$$[h(t)]^{(n)} = \left([h(t)]^{(1)} \right)^{(n-1)} = [h^{(1)}(t)]^{(n-1)} = \dots = [h^{(n)}(t)]. \quad (10.49)$$

Beispiel 10.3

$$[\Theta(t)]^{(1)} = \delta(t), \quad (10.50)$$

denn seien als Testfunktionen die einmal stetig differenzierbaren Funktionen $\varphi(t)$, die außerhalb eines kompakten Intervalls verschwinden, gewählt, so gilt für alle $\varphi(t)$

$$[\Theta(t)]^{(1)} (\varphi(t)) = (-1) [\Theta(t)] \left(\varphi^{(1)}(t) \right) \quad (10.51)$$

$$\begin{aligned} &= (-1) \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t) \varphi^{(1)}(t) dt \\ &= (-1) \int_0^{\infty} \varphi^{(1)}(t) dt \\ &= (-1) \left(\varphi(\infty) - \varphi(0) \right) \\ &= \varphi(0) = \delta(t) (\varphi(t)) \end{aligned} \quad (10.52)$$

Bemerkung 10.5

Ist $h(t)$ eine einmal, im klassischen Sinne differenzierbare Funktion, so gilt für endlich viele reelle Zahlen A_ν, t_ν , $\nu = 1, \dots, m$:

$$\left[\sum_{\nu=1}^m A_\nu \Theta(t - t_\nu) + h(t) \right]^{(1)} = \sum_{\nu=1}^m A_\nu \delta(t - t_\nu) + [h^{(1)}(t)] \quad (10.53)$$

Der Beweis ergibt sich leicht aus den Ausführungen zu (10.41), (10.48) und (10.50).

Bemerkung 10.6 (Stoßantwort des Differenziergliedes)

Es sei ein lineares zeitinvariantes System für differenzierbare Eingangsfunktionen $e(t)$ gegeben über

$$\mathcal{T}(e(t'))(t) = e^{(1)}(t) \quad (10.54)$$

und sei δ_τ eine einmal differenzierbare Darstellung des Diracstoßes nach Def. 10.1. Es gilt:

$$\mathcal{T}(\delta_\tau(t'))(t) = \delta_\tau^{(1)}(t)$$

Im Sinne der Distributionstheorie gilt daher: (siehe Definition 10.9)

$$\left[\delta_\tau^{(1)}(t) \right] \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \delta^{(1)}(t) \quad (10.55)$$

$\delta^{(1)}(t)$ ist also die Stoßantwort des in (10.54) definierten Differenziergliedes.

Bemerkung 10.7

Sei ein lineares zeitinvariantes System, wie in Bem. 5.21 beschrieben, mit einer Systemantwort, wie in (5.143) bzw. (5.144) gegeben:

$$a(t) = \mathcal{T}(e(t'))(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t-t') h_a(t-t') e(t') dt' + \sum_{i=0}^{r+1} D_{a,i} e^{(i)}(t) \quad (10.56)$$

Dabei ist $h_a(t)$ nach Satz 5.1 eine gewöhnliche stetige und überall definierte Funktion. Sei $\delta_\tau(t)$ nach Definition 10.1 eine Darstellung von $\delta(t)$, sodass alle $\delta_\tau(t)$ $r+1$ -fach stetig differenzierbar sind. Aufgrund von Definition 10.1 erfüllen alle $\delta_\tau(t)$ ebenfalls $\delta_\tau(t) = 0$ für $t < 0$. Es gilt dann:

$$a_\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{T}(\delta_\tau(t'))(t) = [\Theta(t)h_a(t)] + \sum_{i=0}^{r+1} D_{a,i} \delta^{(i)}(t) \quad (10.57)$$

Zum Beweis:

Es sei $\int_0^t h_a(t-t') \delta_\tau(t') dt' = (\Theta(t')h_a(t') * \delta_\tau(t'))(t)$ als Distribution aufgefasst. Dann gilt für jede stetige und außerhalb eines kompakten Intervalls verschwindende Testfunktion $\varphi(t)$:

$$\begin{aligned}
 [(\Theta(t')h_a(t') * \delta_\tau(t'))(t)](\varphi(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} ({}^0h_a * \delta_\tau)(t') \varphi(t') dt' & (10.58) \\
 &= (({}^0h_a * \delta_\tau)(t') * \varphi(-t'))(t=0) \\
 &\stackrel{\text{Satz 5.6}}{=} \underbrace{(({}^0h_a(\bar{t}) * \varphi(-\bar{t}))(t') * \delta_\tau(t'))(t=0)}_{\text{stetig in } t'} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} ({}^0h_a(\bar{t}) * \varphi(-\bar{t}))(t') \delta_\tau(-t') dt' \\
 &\stackrel{t'=-t^*}{=} \int_{-\infty}^{\infty} ({}^0h_a(\bar{t}) * \varphi(-\bar{t}))(-t^*) \delta_\tau(t^*) dt^* \\
 &\stackrel{\text{Def. 10.5}}{\xrightarrow{\tau \rightarrow 0}} ({}^0h_a(\bar{t}) * \varphi(-\bar{t}))(0) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} {}^0h_a(t') \varphi(t') dt' \\
 &= [{}^0h_a(t')](\varphi(t')) & (10.59)
 \end{aligned}$$

Im Sinne der Distributionstheorie gilt also

$$[{}^0h_a * \delta_\tau] \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} [{}^0h_a] = [\Theta(t)h_a(t)] \quad (10.60)$$

Insgesamt folgt daraus mit Definition 10.9 die Behauptung.

Damit gilt also für lineare zeitinvariante Systeme, die aus einem linearen, zeitinvarianten Netzwerkmodell resultieren, bei dem nur eine ungesteuerte Quelle die Eingangsfunktion vorgibt (alle anderen Quellenfunktionen seien Null gesetzt) und entweder die Antwort aus dem Ruhezustand heraus oder (asymptotische Stabilität vorausgesetzt) die Antwort im eingeschwungenen Zustand betrachtet wird, dass die Annahme 10.1 gilt!

Bemerkung 10.8 (Physikalische Dimension von Diracstoß und Stoßantwort)

Hat t die Dimension der Zeit, also z.B. [sec], so folgt aus Definition 10.5, dass der Diracstoß die Dimension [sec⁻¹] hat. (Beachte: x und δ_1 in (10.8) sind dimensionlos vorausgesetzt!) Dies hat zur Folge, dass die Stoßantworten, falls Systemeingang $e(t)$ und Systemausgang $a(t)$ dimensionsgleich sind, ebenfalls die Dimension [sec⁻¹] haben. Ist $e(t)$ ein Strom und $a(t)$ eine Spannung, so hat die Stoßantwort die Dimension [$\frac{V}{A \cdot \text{sec}}$] und im umgekehrten Fall die Dimension [$\frac{A}{V \cdot \text{sec}}$].

Um die Gültigkeit der Annahme 10.2 zu zeigen, ist die Verfügbarkeit der Laplacetransformation nützlich. Diese wird im nächsten Abschnitt behandelt. Zur Vorbereitung dienen die folgenden Definitionen.

Definition 10.11 (Multiplikation einer Distribution mit einer gewöhnlichen Funktion)

Sei $D(t)$ eine Distribution auf dem Testfunktionenraum mit den Elementen $\varphi(t)$. Sei $\chi(t)$ ferner eine Funktion, für die gilt: $\chi(t)\varphi(t)$ ist eine Testfunktion für beliebige Wahl von $\varphi(t)$. Dann wird die Distribution $\chi(t)D(t)$ definiert über

$$(\chi(t)D(t))(\varphi(t)) = D(t)(\chi(t)\varphi(t)) \quad (10.61)$$

Definition 10.12

Eine Distribution $D(t)$ heißt für $t < t_u$ bzw. $t > t_o$ verschwindend, wenn für alle zulässigen Testfunktionen $\varphi(t)$ mit $\varphi(t) = 0$ für $t \geq t_u$ bzw. $t \leq t_o$ gilt: $D(t)(\varphi(t)) = 0$. Verschwindet $D(t)$ für $t > t_o$ und $t < t_u$ bei geeigneten t_o und t_u , so sagt man $D(t)$ habe einen kompakten Träger.

Aus dieser Definition folgt für stückweise stetige $h(t)$ sofort:

$$[h(t)] \text{ verschwindet für } t < t_u (t > t_o) \iff h(t) = 0 \text{ für } t < t_u (t > t_o) \quad (10.62)$$

(Bis auf die Unstetigkeitsstellen.)

Beispiel 10.4

- a) $\delta^{(n)}(t)$ hat einen kompakten Träger für alle n . (Man wähle $t_o = t_u = 0$)
- b) $[\Theta(t)]$ verschwindet für $t < 0$.

Beispiel 10.5

In diesem Beispiel soll ganz elementar ohne Ausnutzung von Bemerkung 10.7 sozusagen „zu Fuß“ einmal die Stoßantwort eines Netzwerksystems ausschließlich im Zeitbereich ausgerechnet werden. Man wird dabei erkennen, dass dies zwar ohne Probleme möglich ist, andererseits aber auch recht zeitaufwendig ist. Ein wesentlich weniger aufwendiges Verfahren, das auf der Verwendung der Laplacetransformation beruht, werden wir im nächsten Abschnitt kennenlernen. Die hier exemplarisch beschriebene Analyse der Stoßantwort durch Anregung mit kurzen Impulsen entspricht genau einem beliebten Verfahren zur experimentellen Analyse der Stoßantwort.

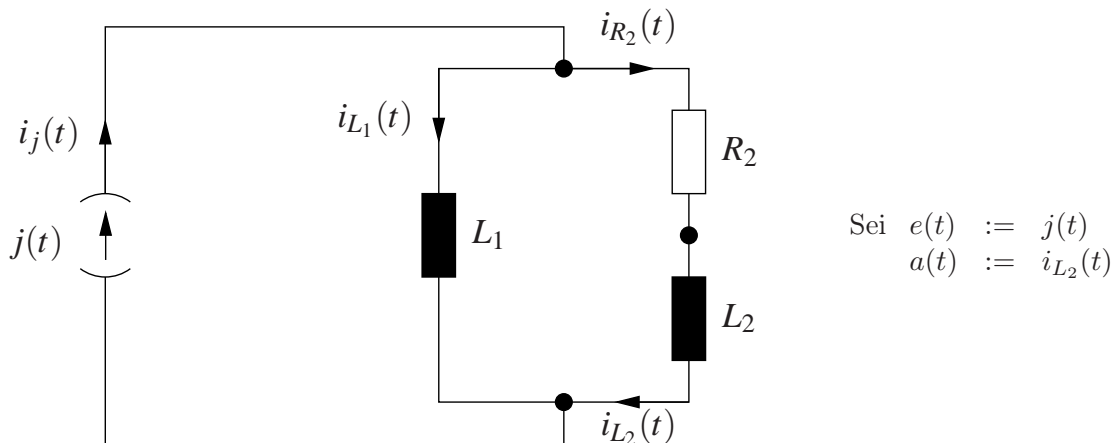


Abbildung 10.4

Aus Beispiel 8.1 mit $R_1 \rightarrow \infty$ ist bekannt, dass $e(t)$ im obigen Netzwerkmodell einmal im gewöhnlichen Sinne differenzierbar sein muss, damit alle Netzwerkvariablen gewöhnliche Funktionen bleiben können.

Zur Bestimmung der Stoßantwort wird das System in seinem linearen und zeitinvarianten Modus und somit die Antwort aus dem Ruhezustand heraus betrachtet. Es gelte $t_0 = t_b = 0$.

Das heißt: $i_{L_1}(0) = i_{L_2}(0) = 0$ und $e(t) = 0$ für $t < 0$! \Rightarrow (da $e(t)$ differenzierbar) $e(0) = 0$!

Die Funktionen $\text{rect}_\tau(t)$ sind daher keine zulässigen Eingangsfunktionen, da sie nicht differenzierbar im gewöhnlichen Sinne sind.

Aber die Funktionen $\text{tri}_\tau(t)$ sind zulässig mit

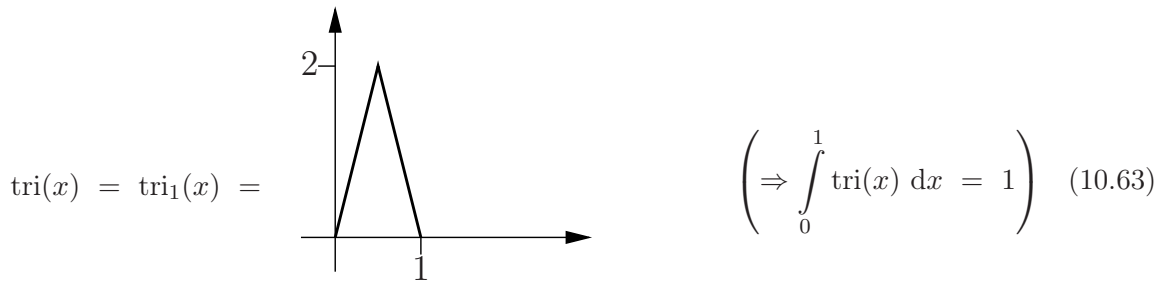


Abbildung 10.5

$$\text{tri}(x) = 4r(x) - 8r\left(x - \frac{1}{2}\right) + 4r(x - 1) \quad \text{mit } r(x) = \begin{cases} x; & x > 0 \\ 0; & \text{sonst} \end{cases} \quad (10.64)$$

Da ferner $r\left(\frac{t}{\tau} - x\right) = \frac{1}{\tau} r(t - x\tau)$ gilt, folgt:

$$\begin{aligned} \text{tri}_\tau(t) &= \frac{1}{\tau} \text{tri}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \frac{1}{\tau} \left(4r\left(\frac{t}{\tau}\right) - 8r\left(\frac{t}{\tau} - \frac{1}{2}\right) + 4r\left(\frac{t}{\tau} - 1\right) \right) \\ &= \frac{1}{\tau^2} \left(4r(t) - 8r\left(t - \frac{1}{2}\tau\right) + 4r(t - \tau) \right) \end{aligned} \quad (10.65)$$

Aufgrund der Linearität und Zeitinvarianz lässt sich die Antwort auf $\text{tri}_\tau(t)$ auf die Antwort auf $r(t)$ zurückführen.

Antwort auf $r(t)$:

$$\text{DGL:} \quad \frac{d i_{L_2}(t)}{dt} = - \overbrace{\frac{R_2}{L_1 + L_2}}^{T^{-1}} i_{L_2}(t) + \frac{L_1}{L_1 + L_2} \overbrace{\frac{d}{dt} r(t)}^{\Theta(t)} \quad (10.66)$$

Anfangswert (AW): $i_{L_2}(0) = 0$

$$\text{Ansatz:} \quad i_{L_2,r}(t) = f(t) e^{-\frac{t}{T}} \quad \left(\overset{\text{AW}}{\Rightarrow} f(0) = 0 \right) \quad (10.67)$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{DGL}{\Rightarrow} \left(\frac{d}{dt} f(t) \right) e^{-\frac{t}{T}} = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \Theta(t) \\
&\Rightarrow f(t) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} T \left(e^{\frac{t}{T}} - 1 \right) \Theta(t) \\
&\Rightarrow i_{L_2,r}(t) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} T \Theta(t) \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \\
&\Rightarrow i_{L_2,\text{tri}_\tau}(t) = \frac{1}{\tau^2} \left(4i_{L_2,r}(t) - 8i_{L_2,r} \left(t - \frac{1}{2} \tau \right) + 4i_{L_2,r}(t - \tau) \right) \quad (10.68)
\end{aligned}$$

$$\text{Für } t < 0 \text{ gilt: } i_{L_2,\text{tri}_\tau}(t) = 0 \quad (10.69)$$

Für $t < \tau \ll T$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\left| i_{L_2,r}(t) - \frac{L_1}{L_1 + L_2} r(t) \right|}_{=f_{r,\tau}(t)} = \\
&\left| \frac{-L_1}{L_1 + L_2} T \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v!} \left(-\frac{t}{T} \right)^v \Theta(t) - \frac{L_1}{L_1 + L_2} t \Theta(t) \right| = \\
&\left| \Theta(t) \frac{L_1}{L_1 + L_2} T \sum_{v=2}^{\infty} \frac{1}{v!} \left(-\frac{t}{T} \right)^v \right| \leq \\
&\left| \Theta(t) \frac{L_1 T}{L_1 + L_2} \left(\frac{t}{T} \right)^2 \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{(v+2)!} \left(\frac{t}{T} \right)^v \right| \leq \\
&\left| \Theta(t) \frac{L_1}{(L_1 + L_2) T} \tau^2 \underbrace{\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} \left(\frac{\tau}{T} \right)^v}_{=e^{\tau/T}} \right| \leq \tau^2 \frac{L_1}{(L_1 + L_2) T} e \quad (10.70)
\end{aligned}$$

Da $f_{r,\tau}(t) = 0$ für $t < 0$, folgt für $0 < t < \tau \ll T$ ferner

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\left| i_{L_2,\text{tri}_\tau}(t) - \frac{L_1}{L_1 + L_2} \text{tri}_\tau \right|}_{=f_{\text{tri}_\tau}} = \frac{1}{\tau^2} \left| 4f_{r,\tau}(t) - 8f_{r,\tau} \left(t - \frac{1}{2} \tau \right) + 4f_{r,\tau}(t - \tau) \right| \\
&\leq 16 \frac{L_1}{(L_1 + L_2) T} e = c_1 \quad (10.71)
\end{aligned}$$

Somit gilt für $0 < t < \tau$ und $\tau \ll T$

$$i_{L_2,\text{tri}_\tau}(t) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \text{tri}_\tau + f_{\text{tri}_\tau}(t) \text{ mit } |f_{\text{tri}_\tau}(t)| \leq c_1 \quad (10.72)$$

Im Bereich $t > \tau$ mit $\tau \ll T$ gilt

$$\begin{aligned}
i_{L_2, \text{tri}_\tau}(t) &= \underbrace{\frac{4L_1}{L_1 + L_2} T e^{-\frac{t}{T}} \frac{1}{\tau^2}}_{=A(t)} \left(-1 + 2e^{\frac{\tau}{2T}} - e^{\frac{\tau}{T}} \right) \\
&= A(t) \frac{1}{\tau^2} \left(-1 + 2 + \frac{\tau}{T} + \frac{1}{4} \frac{\tau^2}{T^2} - 1 - \frac{\tau}{T} - \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{T^2} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{v=3}^{\infty} \frac{1}{v!} \left(2 \left(\frac{\tau}{2T} \right)^v - \left(\frac{\tau}{T} \right)^v \right) \right) \\
&= A(t) \left(-\frac{1}{4T^2} + \tau \underbrace{\sum_{v=3}^{\infty} \frac{1}{v!} \left(2 \frac{\tau^{v-3}}{(2T)^v} - \frac{\tau^{v-3}}{T^v} \right)}_{f(\tau)} \right) \\
&= -\frac{L_1}{L_1 + L_2} \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} + \frac{4L_1}{L_1 + L_2} T \tau f(\tau) e^{-\frac{t}{T}} \quad (10.73)
\end{aligned}$$

Dabei gilt $|f(\tau)| \leq c_2$ für $0 < \tau < T$, da $f(\tau)$ als konvergente Potenzreihe im Intervall $[0, T]$ stetig ist.

Insgesamt gilt somit für alle stetigen beschränkten Testfunktionen $\varphi(t)$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} i_{L_2, \text{tri}_\tau}(t) \varphi(t) dt &= \int_0^{\tau} \frac{L_1}{L_2 + L_1} \text{tri}_\tau(t) \varphi(t) dt \quad (= A(\tau)) \\
&\quad + \int_0^{\tau} f_{\text{tri}_\tau}(t) \varphi(t) dt \quad (= B(\tau)) \\
&\quad + \int_{\tau}^{\infty} -\frac{L_1}{L_1 + L_2} \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \varphi(t) dt \quad (= C(\tau)) \\
&\quad + \int_{\tau}^{\infty} \frac{4L_1}{L_1 + L_2} T \tau f(\tau) e^{-\frac{t}{T}} \varphi(t) dt \quad (= D(\tau)) \quad (10.74)
\end{aligned}$$

$$A(\tau) \xrightarrow[\tau \rightarrow 0]{\text{Def. 5.16}} \frac{L_1}{L_1 + L_2} \varphi(0) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \delta(\varphi) \quad (10.75)$$

$$|B(\tau)| \leq \int_0^{\tau} c_1 \varphi(t) dt \xrightarrow[\tau \rightarrow 0]{} 0 \quad (10.76)$$

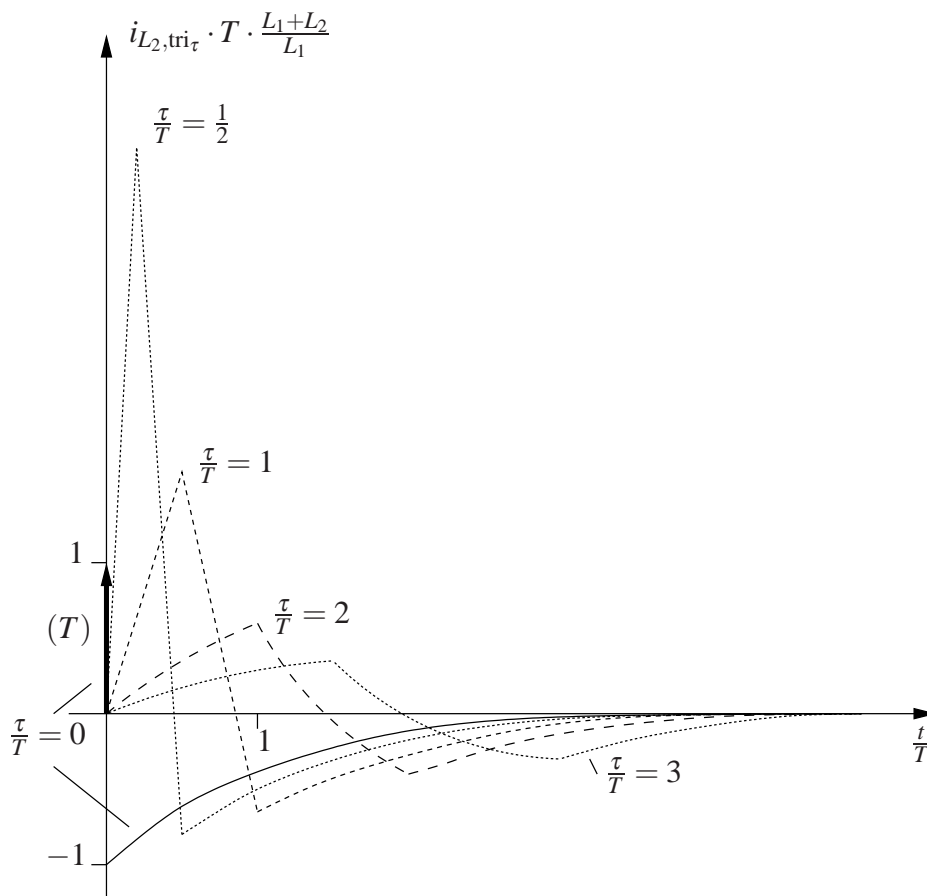
$$C(\tau) \xrightarrow[\tau \rightarrow 0]{} \int_0^{\infty} -\frac{L_1}{L_1 + L_2} \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \varphi(t) dt = -\frac{L_1}{L_1 + L_2} \frac{1}{T} [\Theta(t) e^{-\frac{t}{T}}] (\varphi(t)) \quad (10.77)$$

$$|D(\tau)| \leq \tau \frac{4L_1}{L_1 + L_2} T c_2 \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{T}} |\varphi(t)| dt}_{< \infty} \xrightarrow[\tau \rightarrow 0]{} 0 \quad (10.78)$$

Die Stoßantwort ist daher

$$i_{L_2, \delta}(t) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \left(\delta(t) - \frac{1}{T} [\Theta(t) e^{-\frac{t}{T}}] \right) \quad (10.79)$$

Man vergleiche das Ergebnis mit (10.57) unter Ausnutzung von $i_{L_2}(t) = j(t) - i_{L_1}(t)$ und der Darstellung für $i_{L_1}(t)$ in Formel (8.112). Beide Ergebnisse stimmen überein!

Abbildung 10.6: $i_{L_2, \text{tri}_\tau}(t)$ für verschiedene τ

10.3 Laplacetransformation und Faltung von elementaren Distributionen

Definition 10.13

Zur Einführung von $\mathcal{L}\left\{\delta^{(n)}\right\}(\underline{s})$ $n = 1, 2, \dots$ gehen wir von einer hinreichend glatten Darstellungsfolge $\delta_\tau(t)$ (siehe Definition 10.1) von $\delta(t)$ aus und fassen e^{-st} als Testfunktion auf:

$$\mathcal{L}\left\{\delta^{(n)}(t)\right\}(\underline{s}) := \lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{L}\left\{\delta_\tau^{(n)}(t)\right\}(\underline{s}) \quad (10.80)$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^\infty \delta_\tau^{(n)}(t) e^{-st} dt$$

$$= \delta^{(n)}(t) (e^{-st}) \quad (10.81)$$

$$= \delta(t) \left((-1)^n (e^{-st})^{(n)} \right)$$

$$= \underline{s}^n \delta(t) (e^{-st})$$

$$= \underline{s}^n \quad \text{für alle } \underline{s} \quad (10.82)$$

Definition 10.14

Sei $D(t)$ eine für $t < 0$ verschwindende Distribution (siehe Definition 10.12), für die e^{-st} für $\Re\{\underline{s}\} > \alpha$ eine zulässige Testfunktion ist. $D(t)$ heißt dann laplacetransformierbar (für

$\Re\{\underline{s}\} > \alpha$) und es gilt:

$$\mathcal{L}\{D(t)\}(\underline{s}) = D(t) (e^{-\underline{s}t}) \text{ für } \Re\{\underline{s}\} > \alpha \quad (10.83)$$

Bemerkung 10.9 (ohne Beweis)

Bemerkung 8.3 gilt sinngemäß auch für Distributionen.

Bemerkung 10.10

Aus Definition 10.14 folgt sofort, dass Bemerkung 8.4 ebenfalls für Distributionen gilt.

Bemerkung 10.11

Sei $\tau > 0$ und $D(t)$ sei für $\Re\{\underline{s}\} > \alpha$ eine laplacetransformierbare Distribution (siehe Definition 10.14), dann folgt aus Definition 10.14:

$$\mathcal{L}\{D(t - \tau)\}(\underline{s}) \text{ existiert für } \Re\{\underline{s}\} > \alpha \quad (10.84)$$

und es gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{D(t - \tau)\}(\underline{s}) &\stackrel{\text{Def. 10.14}}{\underset{\downarrow}{=}} D(t - \tau) (e^{-\underline{s}t}) \stackrel{\text{Def. 10.8}}{\underset{\downarrow}{=}} D(t) (e^{-\underline{s}(t+\tau)}) \\ &= e^{-\underline{s}\tau} D(t) (e^{-\underline{s}t}) \stackrel{\text{Def. 10.14}}{\underset{\downarrow}{=}} e^{-\underline{s}\tau} \mathcal{L}\{D(t)\}(\underline{s}) \end{aligned} \quad (10.85)$$

Bemerkung 8.6 gilt also auch für Distributionen.

Bemerkung 10.12

Ist f eine gewöhnliche Funktion, die für $\Re\{\underline{s}\} > \alpha$ laplacetransformierbar nach Definition 8.1 ist, so gilt:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(\underline{s}) = \int_0^\infty f(t) e^{-\underline{s}t} dt = \int_{-\infty}^\infty {}^0f(t) e^{-\underline{s}t} dt = [{}^0f(t)](e^{-\underline{s}t}) = \mathcal{L}\{[{}^0f(t)]\}(\underline{s}) \quad (10.86)$$

Bemerkung 10.13

Ist D laplacetransformierbar, so ist auch $D^{(1)}$ laplacetransformierbar. (Man mache sich klar, dass $D^{(1)}$ für $t < 0$ verschwindet und $e^{-\underline{s}t}$ zulässige Testfunktion ist, da $(e^{-\underline{s}t})^{(1)} = -\underline{s} e^{-\underline{s}t}$.)

Es gilt:

$$\mathcal{L}\{D^{(1)}\}(\underline{s}) = D^{(1)}(e^{-\underline{s}t}) = -D\left((e^{-\underline{s}t})^{(1)}\right) = \underline{s} D(e^{-\underline{s}t}) = \underline{s} \mathcal{L}\{D\}(\underline{s}) \quad (10.87)$$

Dies ist die Ableitungsregel für Distributionen.

Bemerkung 10.14

Bemerkung 10.13 und Bemerkung 8.8 sind verträglich, denn es gilt für jedes einmal differen-

zierbare f , das die Voraussetzungen von Bemerkung 8.8 erfüllt:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} \left\{ [{}^0f]^{(1)} \right\} (\underline{s}) &\stackrel{\text{Bem. 10.13}}{\stackrel{\downarrow}{=}} \underline{s} \mathcal{L} \left\{ [{}^0f] \right\} (\underline{s}) \\
 &\stackrel{\text{Bem. 10.12}}{\stackrel{\downarrow}{=}} \underline{s} \mathcal{L} \{ f \} (\underline{s}) \\
 &\stackrel{\text{Bem. 8.8}}{\stackrel{\downarrow}{=}} \mathcal{L} \left\{ f^{(1)} \right\} (\underline{s}) + f(0^+) \\
 &\stackrel{\text{Bem. 10.12}}{\stackrel{\downarrow}{=}} \mathcal{L} \left\{ [{}^0(f^{(1)})] + f(0^+) \delta \right\} (\underline{s}) \quad (10.88)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\stackrel{\text{Bem. 10.9}}{\stackrel{\downarrow}{\Rightarrow}} [{}^0f]^{(1)} = [{}^0(f^{(1)})] + f(0^+) \delta \quad (10.89)
 \end{aligned}$$

Dies ist richtig, denn ist φ eine einmal differenzierbare Testfunktion, die außerhalb eines kompakten Intervalls verschwindet, so gilt:

$$\begin{aligned}
 [{}^0f]^{(1)}(\varphi) &= (-1) \int_0^\infty f(t) \varphi^{(1)}(t) dt \\
 &= (-1) f(t) \varphi(t) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty f^{(1)}(t) \varphi(t) dt \\
 &= f(0^+) \varphi(0) + \int_{-\infty}^\infty [{}^0(f^{(1)})](t) \varphi(t) dt \\
 &= f(0^+) \delta(\varphi) + [{}^0(f^{(1)})](\varphi) \quad (10.90)
 \end{aligned}$$

Das Auftreten von δ ist auch anschaulich sofort klar, da 0f bei $t = 0$ einen Sprung der Höhe $f(0^+)$ hat.

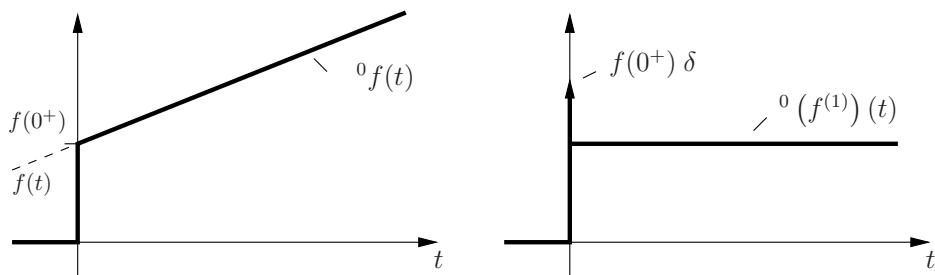


Abbildung 10.7: Ableitung im Sinne der Distributionstheorie

Bemerkung 10.15 (Die Laplacetransformation der Stoßantwort ist die Übertragungsfunktion)

Sei in einem linearen, zeitinvarianten Netzwerkmodell durch Auswählen einer der Quellenfunktionen der ungesteuerten Quellen als Input $e(t)$ und gleichzeitiges Nullsetzen aller anderen festen Quellen sowie durch Auswählen einer weiteren Zweigvariablen als Output $a(t)$ und Betrachtung der Antwort aus dem Ruhezustand heraus ein lineares, zeitinvariantes System definiert. Dann ist die Laplacetransformierte der Stoßantwort dieses Systems die Übertragungsfunktion des Systems.

Beweis:

Seien die Bezeichnungen aus Kapitel 8.2 gewählt und wie in Bemerkung 8.28 durch den Index k_0 die erregende Quelle und durch den Index m_0 die Ausgangsvariable bezeichnet. Das über das Netzwerkmodell definierte System werde durch ein $r_{k_0} + 1$ -fach differenzierbares $e(t)$ aus dem Ruhezustand heraus angeregt. Es gelte $t_0 = t_b = 0$. Dann gilt mit (8.206), (8.167) und (8.168)

$$\begin{aligned}
 a(t) &:= a_{m_0}(t) \\
 e(t) &:= e_{k_0}(t) \\
 \underline{H}(\underline{s}) &:= \underline{H}_{j_{k_0}, m_0}(\underline{s}) \\
 F_\nu &:= F_{j_{k_0}, m_0, \nu} \\
 q &:= q_{j_{k_0}, m_0} \\
 \underline{H}_g(\underline{s}) &:= \underline{H}_{g, j_{k_0}, m_0}(\underline{s}) \\
 h_g(t) &:= h_{g, j_{k_0}, m_0}(t)
 \end{aligned} \tag{10.91}$$

Mit Bemerkung 8.28 folgt hieraus:

$$\underline{H}(\underline{s}) = \frac{\underline{A}(\underline{s})}{\underline{E}(\underline{s})} = \frac{\mathcal{L}\{a(t)\}(\underline{s})}{\mathcal{L}\{e(t)\}(\underline{s})} \stackrel{(8.167)}{\underset{\downarrow}{=}} \sum_{\nu=0}^q F_\nu \underline{s}^\nu + \underline{H}_g(\underline{s}) \tag{10.92}$$

Hieraus folgt wiederum mit Bemerkung 8.28:

$$\begin{aligned}
 \underline{A}(\underline{s}) &= \underline{H}(\underline{s}) \underline{E}(\underline{s}) = \sum_{\nu=0}^q F_\nu \underline{s}^\nu \underline{E}(\underline{s}) + \underline{H}_g(\underline{s}) \underline{E}(\underline{s}) \\
 &\quad \downarrow \\
 a(t) &= \sum_{\nu=0}^q F_\nu e^{(\nu)}(t) + \int_0^t h_g(t-t') e(t') dt' = \sum_{\nu=0}^q F_\nu e^{(\nu)}(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t-t') h_g(t-t') e(t') dt' \\
 &= \sum_{\nu=0}^q F_\nu e^{(\nu)}(t) + (\Theta(t') h_g(t') * e(t'))(t)
 \end{aligned} \tag{10.93}$$

Mit Bemerkung 10.7 folgt für die Stoßantwort dieses Systems:

$$a_\delta(t) = [\Theta(t) h_g(t)] + \sum_{i=0}^q F_\nu \delta^{(\nu)}(t) \tag{10.94}$$

und mit Definition 10.13, Bemerkung 10.12 und (8.167) folgt sofort:

$$\mathcal{L}\{a_\delta(t)\} = \sum_{\nu=0}^q F_\nu \underline{s}^\nu + \underline{H}_g(\underline{s}) = \underline{H}(\underline{s}) \tag{10.95}$$

Bemerkung 10.16

Mit den Korrespondenzen von $\delta^{(n)}(t)$ aus Definition 10.13 gelingt es jetzt auch, die vollständige Antwort $\underline{A}_m(\underline{s})$ aus Kapitel 8.2 und Formel (8.169) zurück in den Zeitbereich zu transformieren. Der bisher noch unberücksichtigte Term $\underline{A}_{D,m}(\underline{s})$ aus (8.172) entspricht somit im Zeitbereich einer Distribution der folgenden Form:

$$\begin{aligned} \underline{A}_{D,m}(\underline{s}) &= \sum_{k=1}^{n_Q} \sum_{\nu=0}^{q_{j_k,m}} F_{j_k,m,\nu} \sum_{i=0}^{\nu-1} e_k^{(i)}(0) \underline{s}^{(\nu-1-i)} + \sum_{k=z+1}^{2z} \sum_{\nu=0}^{q_{k,m}} F_{k,m,\nu} \underline{s}^\nu X_k \\ &\quad \circ \\ a_{D,m}(t) &= \sum_{k=1}^{n_Q} \sum_{\nu=0}^{q_{j_k,m}} F_{j_k,m,\nu} \sum_{i=0}^{\nu-1} e_k^{(i)}(0) \delta^{(\nu-1-i)}(t) + \sum_{k=z+1}^{2z} \sum_{\nu=0}^{q_{k,m}} F_{k,m,\nu} \delta^{(\nu)}(t) X_k \end{aligned} \quad (10.96)$$

Damit ist klar, dass $a_{D,m}(t)$ eine für $t > 0$ verschwindende Distribution ist und somit $a_{g,m}(t)$ für $t > 0$ die Systemantwort alleine beschreibt.

Mit den im letzten Kapitel und der Theorie der Distributionen gewonnenen Erkenntnissen soll nun auch noch die letzte unbewiesene Behauptung aus Bemerkung 8.23 b) gezeigt werden, die besagt, dass die gewöhnlichen Funktionsanteile $a_{g,m}(t)$ von $a_m(t)$ die Netzwerkgleichungen im Zeitbereich für $t > 0$ streng lösen. Zu überprüfen sind hier nur die Netzwerkgleichungen, die im Zeitbereich keine algebraische Form besitzen, also Ableitungen enthalten.

Bemerkung 10.17

Es sei ein Netzwerkmodell, wie am Anfang von Kapitel 8.2 beschrieben, gegeben. Dann gilt mit (8.172)–(8.174) und Bemerkung 10.16, dass für $r_k + 1$ -differenzierbare $e_k(t)$ jede Netzwerkvariable im Zeitbereich für $t \geq 0$ als verallgemeinerte Lösung des Anfangswertproblems 1. Art die folgende Form hat:

$$\begin{aligned} a_m(t) &= a_{D,m}(t) + [\Theta(t) a_{g,m}(t)] \\ a_{D,m}(t) &= \sum_{k=1}^{n_Q} \sum_{\nu=0}^{r_k+1} F_{j_k,m,\nu} \sum_{i=0}^{\nu-1} e_k^{(i)}(0) \delta^{(\nu-1-i)}(t) + \sum_{k=z+1}^{2z} \sum_{\nu=0}^{q_{k,m}} F_{k,m,\nu} \delta^{(\nu)}(t) X_k \\ a_{g,m}(t) &= \sum_{k=1}^{n_Q} \left(\sum_{\nu=0}^{r_k+1} F_{j_k,m,\nu} e_k^{(\nu)}(t) + \int_0^t h_{g,j_k,m}(t-t') e_k(t') dt' \right) + \sum_{k=z+1}^{2z} X_k h_{g,k,m}(t) \end{aligned}$$

Dabei sind die $h_{g,k,m}(t)$ beliebig oft differenzierbare Funktionen der Form (8.168). Ferner gelte zwischen den Netzwerkvariablen $a_{m_1}(t)$ und $a_{m_2}(t)$ im Laplacebereich die folgende Netzwerkgleichung mit reellen $\gamma \neq 0$ und $a_{m_2,0}$:

$$\underline{A}_{m_1}(\underline{s}) = \gamma (\underline{s} \underline{A}_{m_2}(\underline{s}) - a_{m_2,0}) \quad (10.97)$$

Dann gilt:

- 1) $a_{g,m_2}(t)$ ist differenzierbar für $t > 0$.
- 2) $a_{g,m_1}(t) = \gamma a_{g,m_2}^{(1)}(t)$ für $t > 0$ überall dort, wo beide Funktionen $a_{g,m_1}(t)$ und $a_{g,m_2}^{(1)}(t)$ stetig sind.

1) folgt sofort aus Bemerkung 8.24.

Beweis zu 2): Es sei $\bar{t}_0 > 0$ und mit $\tau > 0$ $\delta_\tau(t)$ wie in 10.9 definiert und $\max_{1 \leq k \leq n_Q} (r_k + 1)$ -fach stetig differenzierbar ausgewählt. Dann gilt mit (10.97) und den Regeln der Laplacetransformation für Distributionen:

$$a_{D,m_1}(t) + [\Theta(t)a_{g,m_1}(t)] = \gamma a_{D,m_2}^{(1)}(t) + \gamma [\Theta(t)a_{g,m_2}(t)]^{(1)} - \gamma a_{m_2,\phi} \delta(t)$$

Da für $\nu \leq \max_{1 \leq k \leq n_Q} (r_k + 1)$

$$\delta^{(\nu)}(t) (\delta_\tau(t - \bar{t}_0)) = \delta(t) \left((-1)^\nu \delta_\tau^{(\nu)}(t - \bar{t}_0) \right) = (-1)^\nu \delta_\tau^{(\nu)}(-\bar{t}_0) = 0$$

gilt, folgt

$$\begin{aligned} [\Theta(t)a_{g,m_1}(t)] (\delta_\tau(t - \bar{t}_0)) &= \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_0 + \tau} a_{g,m_1}(t) \delta_\tau(t - \bar{t}_0) dt \\ &= \gamma [\Theta(t)a_{g,m_2}(t)]^{(1)} (\delta_\tau(t - \bar{t}_0)) \stackrel{\text{wegen 1)}}{=} \gamma [\Theta(t)a_{g,m_2}^{(1)}(t)] (\delta_\tau(t - \bar{t}_0)) + \underbrace{\gamma a_{g,m_2}(0^+) \delta(t) (\delta_\tau(t - \bar{t}_0))}_{=0} \\ &= \gamma \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_0 + \tau} a_{g,m_2}^{(1)}(t) \delta_\tau(t - \bar{t}_0) dt. \end{aligned}$$

Falls sowohl $a_{g,m_1}(t)$ als auch $a_{g,m_2}^{(1)}(t)$ für $t = \bar{t}_0$ stetig sind, gilt für $\tau \rightarrow 0$ analog zu (10.24)

$$a_{g,m_1}(\bar{t}_0) = \gamma a_{g,m_2}^{(1)}(\bar{t}_0)$$

und somit die Behauptung.

Definition 10.15 (Faltung einer Stoßantwort mit einer gewöhnlichen Funktion)

Sei eine Stoßantwort wie in Bemerkung 10.7 gegeben:

$$a_\delta(t) = [\Theta(t) h_a(t)] + \sum_{i=0}^{r+1} D_{a,i} \delta^{(i)}(t) \quad (10.98)$$

Ist $e(t)$ ferner eine $r + 1$ -fach differenzierbare Funktion, für die die Faltung mit $\Theta(t) h_a(t)$ existiert, so wird mit einer $r + 1$ -fach differenzierbaren Darstellung $\delta_\tau(t)$ des Diracstoßes nach

Def. 10.1 die Faltung der Stoßantwort mit $e(t)$ folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}
(a_\delta(t') * e(t'))(t) &= (e(t') * a_\delta(t'))(t) \\
&= \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\left(\Theta(t') h_a(t') + \sum_{i=0}^{r+1} D_{a,i} \delta_\tau^{(i)}(t') \right) * e(t') \right)(t) \\
&\stackrel{\text{Satz 5.6}}{=} \left(\Theta(t') h_a(t') * e(t') \right)(t) + \sum_{i=0}^{r+1} D_{a,i} \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\delta_\tau(t') * e^{(i)}(t') \right)(t) \\
&\stackrel{\text{Def 5.5, (10.24)}}{=} \left(\Theta(t') h_a(t') * e(t') \right)(t) + \sum_{i=0}^{r+1} D_{a,i} e^{(i)}(t) \tag{10.99} \\
&\stackrel{e^{(r+1)}(t) \text{ sei zusätzlich stetig vorausgesetzt, falls } D_{a,r+1} \neq 0}{=} \left[\Theta(t') h_a(t') \right] (e(t-t')) + \sum_{i=0}^{r+1} D_{a,i} \delta^{(i)}(t') (e(t-t'))
\end{aligned}$$

Bemerkung 10.18

Die letzte Zeile von (10.99) entspricht für den Spezialfall, dass die Distribution eine Stoßantwort ist, der allgemeinen Definition der Faltung einer Distribution mit einer Testfunktion.

Denn ist $D(t)$ eine Distribution auf einem Testfunktionenraum und $\varphi(t)$ eine dieser Testfunktionen, so wird die Faltung der Distribution mit einer Testfunktion $\varphi(t)$, bei der für alle reellen a (a festgehalten) $\varphi(a-t)$ ebenfalls eine Testfunktion ist, folgendermaßen definiert:

$$(D(t') * \varphi(t'))(t) = (\varphi(t') * D(t'))(t) := D(t')(\varphi(t-t')) \tag{10.100}$$

Dabei wird in (10.100) $\varphi(t-t')$ bei festgehaltenem t als Testfunktion von t' aufgefasst. Das Ergebnis dieser Faltung ist also eine gewöhnliche Funktion von t .

Bemerkung 10.19 (Darstellung der Antwort im eingeschwungenen Zustand und der Antwort aus dem Ruhezustand heraus als Faltung mit der Stoßantwort)

Sowohl bei der Antwort aus dem Ruhezustand heraus (Satz 5.5, (5.144)) als auch bei der Antwort im eingeschwungenen Zustand (Satz 5.3, (5.143)) sind die jeweiligen Eingangsfunktionen $e_k(t)$ bzw. $e_{k,\infty}(t)$, wenn man sie als hinreichend glatt annimmt, Funktionen, die mit der Stoßantwort

$$a_\delta(t) = [\Theta(t) h_a(t)] + \sum_{i=0}^{r+1} D_{a,i} \delta^{(i)}(t) \quad (10.101)$$

gefaltet werden können. Aus Definition 10.15 und 10.18 folgt somit sofort

$$\begin{aligned} a_{ez}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t-t') h_a(t-t') e_\infty(t') dt' + \sum_{i=0}^{r+1} D_{a,i} e_\infty^{(i)}(t) \\ &= ([\Theta(t') h_a(t')] * e_\infty(t'))(t) + \sum_{i=0}^{r+1} D_{a,i} (\delta^{(i)}(t') * e_\infty(t'))(t) \\ &= (a_\delta(t') * e_\infty(t'))(t) = (\mathcal{L}^{-1}(\underline{H}(\underline{s}))(t') * e_\infty(t'))(t) \\ &= FG^{-1}(\underline{H}(\underline{s})|_{\underline{s}=j\omega})(e_\infty(t)) \end{aligned} \quad (10.102)$$

$$\begin{aligned} a_{rz}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t-t') h_a(t-t') e(t') dt' + \sum_{i=0}^{r+1} D_{a,i} e^{(i)}(t) \\ &= (a_\delta(t') * e(t'))(t) = (\mathcal{L}^{-1}(\underline{H}(\underline{s}))(t') * e(t'))(t) \end{aligned} \quad (10.103)$$

Damit ist die Gültigkeit der Annahme 10.2 ebenfalls gezeigt. Mit Hilfe der Definitionen der Distributionstheorie lässt sich die Systemantwort bei jedem linearen, zeitinvarianten System der Form (10.56), also sowohl bei der Antwort aus dem Ruhezustand heraus als auch bei der Antwort im eingeschwungenen Zustand, als Faltung der Eingangsfunktion mit der Stoßantwort auffassen. (10.102) zeigt ferner den engen Zusammenhang zwischen der Abbildung FG^{-1} und der inversen Laplacetransformation.

Bemerkung 10.20

Sei wie in Bemerkung 10.15 die Antwort aus dem Ruhezustand heraus mit $t_0 = t_b = 0$ betrachtet und die zugehörige Stoßantwort sei

$$a_\delta(t) = [\Theta(t) h_a(t)] + \sum_{i=0}^q D_{a,i} \delta^{(i)}(t). \quad (10.104)$$

Zulässige Eingangsfunktionen sind in diesem Fall alle q -fach differenzierbare Funktionen $e(t)$ mit

$$e(t) = 0 \quad \text{für } t < 0. \quad (10.105)$$

Mit Satz 5.5 (insbesondere (5.135)) und Bemerkung 8.22 gilt für diese Eingangsfunktionen und $i \leq q$

$$\mathcal{L}\{e^{(i)}(t)\}(\underline{s}) = \underline{s}^i \mathcal{L}\{e(t)\}(\underline{s}) = \underline{s}^i \underline{E}(\underline{s}) \quad (10.106)$$

Somit folgt aus (10.103):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{(a_\delta(t') * e(t'))(t)\}(\underline{s}) &= \mathcal{L}\left\{\int_0^t h_a(t-t') e(t') dt'\right\}(\underline{s}) + \sum_{i=0}^q D_{a,i} \mathcal{L}\{e^{(i)}(t)\}(\underline{s}) \\ &= \left(\mathcal{L}\{h_a(t)\}(\underline{s}) + \sum_{i=0}^q D_{a,i} \underline{s}^i\right) \underline{E}(\underline{s}) \\ &\stackrel{\text{Bem. 10.12}}{=} \underbrace{\mathcal{L}\{[\Theta(t) h_a(t)] + \sum_{i=0}^q D_{a,i} \delta^{(i)}(t)\}}_{a_\delta(t)}(\underline{s}) \underline{E}(\underline{s}) \end{aligned} \quad (10.107)$$

Auch hier entspricht also die Laplacetransformierte des Faltungsproduktes dem Produkt der entsprechenden Laplacetransformierten.

Zur Ermittlung des Netzwerkverhaltens bei der Erregung aus dem Ruhezustand heraus oder im eingeschwungenen Zustand wurde die Ermittlung der Übertragungsfunktion im Laplacebereich, die Frequenzganganalyse mit der komplexen Wechselstromrechnung und die Bestimmung der Stoßantwort durch Impulsanregung mit Impulsen, die den Einheitsstoß (Diracstoß) approximieren, ausführlich beschrieben. Eine weitere beliebte Analysemethode ist die Bestimmung der Sprungantwort. Diese Methode hat den Vorteil, dass bei nicht differenzierenden Netzwerken der Einheitssprung eine zulässige Anregung aus dem Ruhezustand heraus darstellt und somit in vielen Fällen die Antwort auf diese Erregung direkt im Bereich gewöhnlicher Funktionen bestimmbar bleibt. In diesem Fall gilt:

Bemerkung 10.21 (Sprungantwort bei nicht differenzierenden Netzwerken)

Sei ein Netzwerkmodell wie in Satz 5.1 gegeben und über $e(t)$ und $a(t)$ ein System definiert (weitere feste Quellen neben $e(t)$ seien zu Null gesetzt!). Das Netzwerkmodell sei für $e(t)$ nicht differenzierend. Betrachtet werde die Antwort aus dem Ruhezustand heraus mit $t_0 = t_b = 0$. Unter dieser Voraussetzung ist das System linear und zeitinvariant und $e(t) = \Theta(t)$ ist eine zulässige Eingangsfunktion. Sei $a_\delta(t) = [\Theta(t)h_a(t)] + D_{a,0}\delta(t)$ die Stoßantwort des Systems, dann ist $[(\Theta(t') * \Theta(t')h_a(t'))(t) + D_{a,0}\Theta(t)] = [a_{\Theta,g}(t)]$, die Sprungantwort $a_\Theta(t)$ des Systems. Dann gilt :

$$a_\Theta^{(1)}(t) = [a_{\Theta,g}(t)]^{(1)} = a_\delta(t) \quad (10.108)$$

Die Ableitung der Sprungantwort im Sinne der Distributionstheorie ergibt also die Stoßantwort.

Beweis :

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L} \left\{ [a_{\Theta,g}(t)]^{(1)} \right\} (\underline{s}) \\
 & \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{Bem. 10.13}}}{=} \underline{s} \mathcal{L} \{ [a_{\Theta,g}(t)] \} (\underline{s}) \\
 & \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{Bem. 10.12}}}{=} \underline{s} \mathcal{L} \{ a_{\Theta,g}(t) \} (\underline{s}) \\
 & \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{Bem. 8.5+ Bem. 8.7}}}{=} \underline{s} \left(\frac{1}{\underline{s}} \cdot \mathcal{L} \{ [\Theta(t)h_a(t)] \} (\underline{s}) + D_{a,0} \frac{1}{\underline{s}} \right) \\
 & = \mathcal{L} \{ [\Theta(t)h_a(t)] \} (\underline{s}) + D_{a,0} \\
 & = \mathcal{L} \{ a_\delta(t) \} (\underline{s}) \\
 & \stackrel{\substack{\Rightarrow \\ \uparrow \\ \text{Bem. 10.9}}}{=} [a_{\Theta,g}(t)]^{(1)} = a_\delta(t)
 \end{aligned}$$

Beispiel 10.6

Die Systemantwort des Spannungsteilersystems aus Beispiel 10.2 ist nach (10.17):

$$a(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e(t)$$

Da $\Theta(t)$ eine für dieses System zulässige Eingangsfunktion ist, ergibt sich die Sprungantwort $a_\Theta(t)$ als reguläre Distribution zu

$$a_\Theta(t) = \left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} \Theta(t) \right]. \quad (10.109)$$

Somit ergibt sich die zugehörige Stoßantwort durch die entsprechende Ableitung im Sinne der Distributionstheorie

$$a_\delta(t) = \left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} \Theta(t) \right]^{(1)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} [\Theta(t)]^{(1)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \delta(t). \quad (10.110)$$

Bei differenzierbaren Netzwerken ist $\Theta(t)$ jedoch keine zulässige Erregung und die Sprungantwort muss durch die Antwort $a_{\Theta_\tau}(t)$ auf geglättete Sprünge

$$\Theta_\tau(t) = (\Theta(t') * \delta_\tau(t'))(t) \quad (10.111)$$

bestimmt werden, wobei $\delta_\tau(t)$ eine hinreichend glatte Approximationsfolge für den Einheitsstoß (siehe Definition 10.1) darstellen soll.

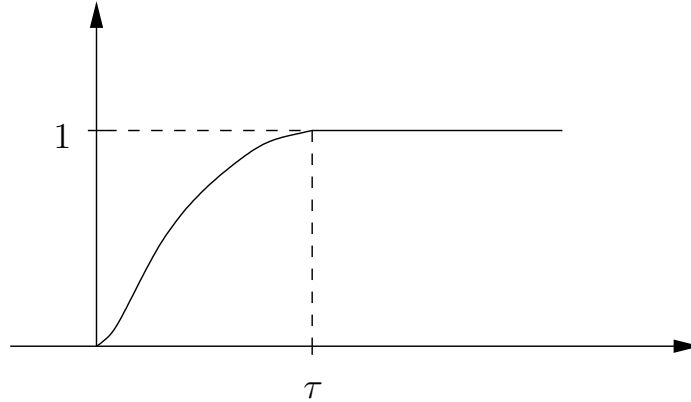


Abbildung 10.8: Geglätteter Einheitssprung $\Theta_\tau(t)$

Die Sprungantwort für differenzierende Netzwerke wird somit folgendermaßen definiert:

Definition 10.16 (Sprungantwort für differenzierende Netzwerke)

$$a_\Theta(t) = \underset{\substack{\text{Grenzwert im Sinne der} \\ \text{Distributionstheorie}}}{\lim_{\tau \rightarrow 0}} [a_{\Theta_\tau}(t)] \quad (10.112)$$

Die Eingangsfunktionen $\Theta_\tau(t)$ werden dabei so glatt vorausgesetzt, wie nötig ist, um $a_{\Theta_\tau}(t)$ als gewöhnliche Funktion interpretieren zu können. Ist $\Theta(t)$ selbst eine zulässige Eingangsfunktion, so ist $a_\Theta(t)$ eine reguläre Distribution und entspricht daher einer gewöhnlichen Funktion. Auch hier gilt $a_\Theta^{(1)}(t) = a_\delta(t)$. Dies wird später mit Hilfe der Faltung für Distributionen gezeigt.

Für das Weitere ist es noch wichtig, das Faltungsprodukt auch für Stoßantworten $a_\delta(t)$ zur Verfügung zu haben. Im Unterschied zu dem in Definition 10.15 definierten Faltungsprodukt sind hier beide Faktoren typischerweise keine regulären Distributionen und das Resultat ist typischerweise, wie wir sehen werden, wiederum keine reguläre Distribution.

Da Stoßantworten für $t < 0$ verschwindende Distributionen sind, die für hinreichend großes α für $\Re\{\underline{s}\} > \alpha$ laplacetransformierbar sind, ist es sinnvoll, sich bei der Einführung dieser Faltung von der Laplacetransformation leiten zu lassen und der Tatsache Rechnung zu tragen, dass bei der bisher eingeführten Faltung bei Faktoren, die für $t < 0$ verschwindende Funktionen oder Distributionen sind, immer die Laplacetransformierte des Faltungsproduktes gleich dem Produkt der Laplacetransformierten ist. Betrachtet seien hierzu zunächst einige spezielle Fälle bevor zum allgemeinen Fall übergegangen wird. Seien also $\tau_1, \tau_2 > 0$ und $f(t), g(t)$ für alle t definierte, beliebig oft differenzierbare, laplacetransformierbare Funktionen mit $\mathcal{L}\{f(t)\}(\underline{s}) = \underline{F}_g(\underline{s})$, $\mathcal{L}\{g(t)\}(\underline{s}) = \underline{G}_g(\underline{s})$. Dann gilt für $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\delta^{(n)}(t - \tau_1)\}(\underline{s}) \mathcal{L}\{[\Theta(t - \tau_2)g(t - \tau_2)]\}(\underline{s}) &= \underline{s}^n e^{-\underline{s}\tau_1} \underline{G}_g(\underline{s}) e^{-\underline{s}\tau_2} \\ &= \underline{s}^n e^{-\underline{s}(\tau_1 + \tau_2)} \underline{G}_g(\underline{s}) = e^{-\underline{s}(\tau_1 + \tau_2)} \underline{s}^n \mathcal{L}\{[\Theta(t)g(t)]\}(\underline{s}) \\ &= \mathcal{L}\{[\Theta(t - (\tau_1 + \tau_2))g(t - (\tau_1 + \tau_2))]^{(n)}\}(\underline{s}) \end{aligned} \quad (10.113)$$

Dies legt die folgenden Definitionen nahe:

$$\begin{aligned}
 & \left(\delta^{(n)}(t' - \tau_1) * [\Theta(t - \tau_2)g(t' - \tau_2)] \right) (t) = \left([\Theta(t - \tau_2)g(t' - \tau_2)] * \delta^{(n)}(t' - \tau_1) \right) (t) = \\
 & [\Theta(t - (\tau_1 + \tau_2))g(t - (\tau_1 + \tau_2))]^{(n)} = \left([\Theta(t - (\tau_1 + \tau_2))g(t - (\tau_1 + \tau_2))]^{(1)} \right)^{(n-1)} \\
 & = g(0)\delta^{(n-1)}(t - (\tau_1 + \tau_2)) + [\Theta(t - (\tau_1 + \tau_2))g^{(1)}(t - (\tau_1 + \tau_2))]^{(n-1)} = \\
 & \sum_{\eta=0}^{n-1} g^{(\eta)}(0)\delta^{(n-1-\eta)}(t - (\tau_1 + \tau_2)) + [\Theta(t - (\tau_1 + \tau_2))g^{(n)}(t - (\tau_1 + \tau_2))] \quad (10.114)
 \end{aligned}$$

Ferner gilt für $\tau_1, \tau_2 > 0$:

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}([\Theta(t - \tau_1)g(t - \tau_1)])(\underline{s})\mathcal{L}([\Theta(t - \tau_2)f(t - \tau_2)])(\underline{s}) = e^{-\underline{s}\tau_1}\underline{G}_g(\underline{s})e^{-\underline{s}\tau_2}\underline{F}_g(\underline{s}) \\
 & = e^{-\underline{s}(\tau_1+\tau_2)}\underline{G}_g(\underline{s})\underline{F}_g(\underline{s}) = \mathcal{L}\{(\Theta(t')f(t') * \Theta(t')g(t'))(t - (\tau_1 + \tau_2))\}(\underline{s}) \\
 & = \mathcal{L}\{[(\Theta(t' - \tau_1)f(t' - \tau_1) * \Theta(t' - \tau_2)g(t' - \tau_2))(t)]\}(\underline{s}) \quad (10.115)
 \end{aligned}$$

Dies legt die folgende Definition nahe:

$$\begin{aligned}
 & ([\Theta(t' - \tau_1)f(t' - \tau_1)] * [\Theta(t' - \tau_2)g(t' - \tau_2)])(t) \\
 & = ([\Theta(t' - \tau_2)g(t' - \tau_2)] * [\Theta(t' - \tau_1)f(t' - \tau_1)])(t) \quad (10.116) \\
 & = [(\Theta(t' - \tau_1)f(t' - \tau_1) * \Theta(t' - \tau_2)g(t' - \tau_2))(t)]
 \end{aligned}$$

Es gilt

$$(\Theta(t')f(t') * \Theta(t')g(t'))(t) = \Theta(t) \int_0^t f(t - t')g(t')dt' \quad (10.117)$$

und $\int_0^t f(t - t')g(t')$ ist unendlich oft differenzierbar.

Seien $\tau_1, \tau_2 > 0$ und $m, n = 0, 1, 2, \dots$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{\delta^{(n)}(t - \tau_1)\}(\underline{s})\mathcal{L}\{\delta^{(m)}(t - \tau_2)\}(\underline{s}) & = e^{-\tau_1\underline{s}}\underline{s}^n e^{-\tau_2\underline{s}}\underline{s}^m = e^{-(\tau_1+\tau_2)\underline{s}}\underline{s}^{m+n} \\
 & = \mathcal{L}\{\delta^{(m+n)}(t - (\tau_1 + \tau_2))\}(\underline{s}) \quad (10.118)
 \end{aligned}$$

Dies legt die folgende Definition nahe:

$$\begin{aligned}
 & (\delta^{(n)}(t' - \tau_1) * \delta^{(m)}(t' - \tau_2))(t) = (\delta^{(m)}(t' - \tau_2) * \delta^{(n)}(t' - \tau_1))(t) \\
 & = \delta^{(m+n)}(t - (\tau_1 + \tau_2)) \quad (10.119)
 \end{aligned}$$

Definition 10.17

Die Faltung der Distributionen wird zur Vereinfachung nur für Distributionen der Form (10.120) erklärt:

$$D(t) = \sum_{\nu=1}^{l_1} A_\nu \delta^{(i_\nu)}(t - t_\nu) + \sum_{\nu=1}^{l_2} B_\nu [\Theta(t - \tau_\nu)h_\nu(t - \tau_\nu)] \quad (10.120)$$

Dabei sind $l_1, l_2 > 0$ natürliche Zahlen, $A_\nu, \nu = 1, \dots, l_1, B_\nu, \nu = 1, \dots, l_2$ reelle Zahlen, $t_\nu, \nu = 1, \dots, l_1, \tau_\nu, \nu = 1, \dots, l_2$ positive reelle Zahlen, $i_\nu, \nu = 1, \dots, l_1$ positive ganze Zahlen und $h_\nu, \nu = 1, \dots, l_2$ sind unendlich oft differenzierbare Funktionen, die auf der ganzen reellen Achse definiert sind.

Aufgrund der Definition ist sofort klar, dass die Superposition von zwei Distributionen der Form (10.120) sofort wieder eine Distribution der Form (10.120) ergibt. Die Distributionen der Form (10.120) bilden also einen Vektorraum. Insbesondere haben die Stoßantworten aller durch lineare, zeitinvariante Netzwerkmodelle induzierten Systeme die Form (10.120). Die Distributionen der Form (10.120) sind ebenfalls alle laplacetransformierbar.

Seien nun zwei Distributionen $D_1(t)$ und $D_2(t)$ der Form (10.120) gegeben. Das Produkt

$$\mathcal{L}\{D_1(t)\}(\underline{s}) \cdot \mathcal{L}\{D_2(t)\}(\underline{s}) \quad (10.121)$$

besteht dann aus lauter Summanden der Form (10.113), (10.115) oder (10.118), die in den Zeitbereich zurücktransformiert werden können. Aus (10.113), (10.114), (10.116), (10.117) und (10.119) folgt ferner, dass bei der Rücktransformation wieder eine Distribution $D_f(t)$ der Form (10.120) entsteht. Es gilt also

$$\mathcal{L}\{D_1(t)\}(\underline{s}) \cdot \mathcal{L}\{D_2(t)\}(\underline{s}) = \mathcal{L}\{D_f(t)\}(\underline{s}) \quad (10.122)$$

Es wird nun definiert:

$$(D_1(t') * D_2(t'))(t) = D_f(t) \quad (10.123)$$

(10.114), (10.116), (10.119) sind als Spezialfälle in dieser Definition enthalten.

Da bei dieser Definition das Faltungsprodukt dem gewöhnlichen Produkt der Laplacetransformierten entspricht, ist diese Definition mit allen vorherigen Definitionen der Faltung verträglich.

Denn sind $f_1(t)$, $f_2(t)$ zwei gewöhnliche, überall definierte, beliebig glatte Funktionen, so gilt mit Definition 10.17:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{([{}^0f_1(t')] * [{}^0f_2(t')]) (t)\}(\underline{s}) &\stackrel{\text{Def. 10.17}}{=} \mathcal{L}\{[{}^0f_1(t')]\}(\underline{s}) \cdot \mathcal{L}\{[{}^0f_2(t')]\}(\underline{s}) \\ &\stackrel{\text{Bem. 10.12}}{=} \mathcal{L}\{f_1(t)\}(\underline{s}) \cdot \mathcal{L}\{f_2(t)\}(\underline{s}) \\ &\stackrel{\text{Bem. 8.7}}{=} \mathcal{L}\{({}^0f_1(t') * {}^0f_2(t'))(t)\}(\underline{s}) \\ &\stackrel{\text{Bem. 10.12}}{=} \mathcal{L}\{[({}^0f_1(t') * {}^0f_2(t'))(t)]\}(\underline{s}) \\ &\stackrel{\text{Bem. 10.9}}{\Rightarrow} ([{}^0f_1(t')] * [{}^0f_2(t')]) (t) = [({}^0f_1(t') * {}^0f_2(t'))(t)] \end{aligned} \quad (10.124)$$

Beispiel 10.7

Sei $D(t)$ eine Distribution der Form (10.120) und δ der Diracstoß, dann gilt:

$$\begin{array}{ccc} D(t) & * & \delta(t) = D(t) \\ \circ \downarrow & & \circ \downarrow \quad \circ \downarrow \\ \bullet & & \bullet \end{array} \quad \begin{array}{l} \delta \text{ ist wiederum die } 1 \\ \text{(das neutrale Element)} \\ \text{des Faltungsproduktes} \end{array} \quad (10.125)$$

$$\mathcal{L}\{D\}(\underline{s}) \cdot 1 = \mathcal{L}\{D\}(\underline{s})$$

Bemerkung 10.22

Aufgrund der Gültigkeit des kommutativen, assoziativen und distributiven Gesetzes beim Rechnen mit komplexen Zahlen folgt mit Definition 10.17 sofort, dass Satz 5.6 1) 2) und 4) auch für die Faltung nach Definition 10.17 erfüllt ist.

Dies soll hier stellvertretend für 4) gezeigt werden. Seien D_i , $i = 1, \dots, 3$ Distributionen der Form (10.120). Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{D_1 * (D_2 * D_3)\}(\underline{s}) &\stackrel{\text{Def. 10.17}}{\underset{\downarrow}{=}} \mathcal{L}\{D_1\}(\underline{s}) \mathcal{L}\{D_2 * D_3\}(\underline{s}) \\
 &= \mathcal{L}\{D_1\}(\underline{s}) \mathcal{L}\{D_2\}(\underline{s}) \mathcal{L}\{D_3\}(\underline{s}) \\
 &= \mathcal{L}\{D_1 * D_2\}(\underline{s}) \mathcal{L}\{D_3\}(\underline{s}) \\
 &= \mathcal{L}\{(D_1 * D_2) * D_3\}(\underline{s})
 \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{Bem. 10.9}}{\underset{\downarrow}{\Rightarrow}} D_1 * (D_2 * D_3) = (D_1 * D_2) * D_3 \quad (10.126)$$

Bemerkung 10.23

Ebenso gilt Satz 5.6 3). Denn sind D_1, D_2 Distributionen der Form (10.120) und $\tau > 0$, so sind auch $D_1(t - \tau)$, $D_2(t - \tau)$ und $(D_1 * D_2)(t - \tau)$ von der Form (10.120) und es gilt:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{(D_1 * D_2)(t - \tau)\}(\underline{s}) &\stackrel{\text{Bem. 10.11}}{\underset{\downarrow}{=}} e^{-\underline{s}\tau} \mathcal{L}\{D_1 * D_2\}(\underline{s}) \\
 &\stackrel{\text{Def. 10.17}}{\underset{\downarrow}{=}} e^{-\underline{s}\tau} \mathcal{L}\{D_1\}(\underline{s}) \mathcal{L}\{D_2\}(\underline{s}) \\
 &\stackrel{\text{Bem. 10.11}}{\underset{\downarrow}{=}} \mathcal{L}\{D_1(t - \tau)\}(\underline{s}) \mathcal{L}\{D_2\}(\underline{s}) \\
 &\stackrel{\text{Def. 10.17}}{\underset{\downarrow}{=}} \mathcal{L}\{D_1(t - \tau) * D_2\}(\underline{s}) \\
 &\stackrel{\text{ebenso}}{\underset{\downarrow}{=}} \mathcal{L}\{D_1 * D_2(t - \tau)\}(\underline{s})
 \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{Bem. 10.9}}{\underset{\downarrow}{\Rightarrow}} (D_1 * D_2)(t - \tau) = (D_1(t - \tau) * D_2)(t) = (D_1 * D_2(t - \tau))(t) \quad (10.127)$$

Bemerkung 10.24

Mit Bemerkung 10.13 ist sofort klar, dass auch Satz 5.6 5) sinngemäß für Distributionen gilt. Seien D_1, D_2 Distributionen der Form (10.120), so gilt:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{(D_1 * D_2)^{(n)}\}(\underline{s}) &\stackrel{\text{Bem. 10.13}}{\underset{\downarrow}{=}} \underline{s}^n \mathcal{L}\{D_1 * D_2\}(\underline{s}) \\
 &\stackrel{\text{Def. 10.17}}{\underset{\downarrow}{=}} \underline{s}^n \mathcal{L}\{D_1\}(\underline{s}) \cdot \mathcal{L}\{D_2\}(\underline{s}) \\
 &\stackrel{\text{Bem. 10.13}}{\underset{\downarrow}{=}} \mathcal{L}\{D_1^{(n)}\}(\underline{s}) \cdot \mathcal{L}\{D_2\}(\underline{s}) \\
 &\stackrel{\text{Def. 10.17}}{\underset{\downarrow}{=}} \mathcal{L}\{D_1^{(n)} * D_2\}(\underline{s}) \\
 &\stackrel{\text{ebenso}}{\underset{\downarrow}{=}} \mathcal{L}\{D_1 * D_2^{(n)}\}(\underline{s})
 \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{Bem. 10.9}}{\underset{\downarrow}{\Rightarrow}} (D_1 * D_2)^{(n)} = D_1^{(n)} * D_2 = D_1 * D_2^{(n)} \quad (10.128)$$

Beispiel 10.8

i)

$$\begin{array}{ccc}
 \delta^{(2)}(t) * \delta^{(3)}(t) & = & \delta^{(5)}(t) \\
 \begin{array}{ccc} \circ & & \circ \\ | & & | \\ \bullet & & \bullet \end{array} & \xrightarrow{\text{Rechenweg}} & \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \\
 \underline{s}^2 \cdot \underline{s}^3 & = & \underline{s}^5
 \end{array} \quad (10.129)$$

ii)

$$\begin{array}{ccccccc}
 [\Theta(t) e^{At}] * \delta^{(1)}(t) & = & [\Theta(t) e^{At}]^{(1)} & = & \delta(t) + A [\Theta(t) e^{At}] \\
 \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} & \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} & \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} & \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} & \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} & & \\
 \frac{1}{\underline{s} - A} \cdot \underline{s} & = & \frac{\underline{s}}{\underline{s} - A} & = & 1 + \frac{A}{\underline{s} - A} & & (10.130)
 \end{array}$$

Bemerkung 10.25

Es seien zwei Systeme gegeben, bei denen der Zusammenhang zwischen den Eingangsfunktionen $e_j(t)$, $j = 1, 2$, und den Ausgangsfunktionen $a_j(t)$, $j = 1, 2$, über die untenstehende Gleichung (10.131) gegeben ist. $h_{a,j}$, $j = 1, 2$, seien dabei beliebig glatte, laplacetransformierbare Funktionen. Die Eingangsfunktionen seien laplacetransformierbar, $r_j + 1$ -fach ($j = 1, 2$) differenzierbar und es gelte $e_j(t) = 0$ für $t < 0$, $j = 1, 2$. Die Systeme sind somit linear und zeitinvariant und könnten z.B. über lineare, zeitinvariante Netzwerkmodelle bei Betrachtung der Antwort aus dem Ruhezustand heraus erzeugt worden sein.

$$a_j(t) = \int_0^t h_{a,j}(t-t') e_j(t') dt + \sum_{i=0}^{r_j+1} D_{a,i,j} e_j^{(i)}(t) \quad , \quad j = 1, 2 \quad (10.131)$$

Sei nun $e_1(t)$ so glatt gewählt, dass $a_1(t)$ eine zulässige $r_2 + 1$ -fach differenzierbare Eingangsfunktion des zweiten Systems ist. Aufgrund der Kausalität des ersten Systems gilt $a_1(t) = 0$ für $t < 0$, falls $e_1(t) = 0$ für $t < 0$. Unter diesen Voraussetzungen kann man die beiden Systeme durch die Bedingungen

$$\begin{aligned}
 e_2(t) &= a_1(t) \\
 e(t) &:= e_1(t) \\
 a(t) &= a_2(t)
 \end{aligned} \quad (10.132)$$

zu einem gemeinsamen System verknüpfen, ohne beim zweiten System die Voraussetzungen an die Eingangsfunktion zu verletzen.

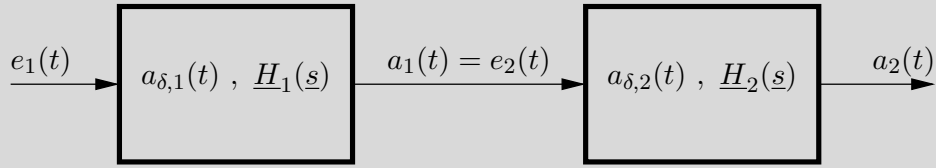


Abbildung 10.9

Den Systemen ist nach Bemerkung 10.7 die Stoßantwort

$$a_{\delta,j}(t) = [{}^0h_{a_j}(t)] + \sum_{i=0}^{r_j+1} D_{a,i,j} \delta^{(i)}(t) \quad , \quad j = 1, 2 \quad (10.133)$$

und nach Bemerkung 10.15 die Übertragungsfunktion

$$\underline{H}_j(\underline{s}) = \mathcal{L}\{h_{a_j}(t)\}(\underline{s}) + \sum_{i=0}^{r_j+1} D_{a,i,j} \underline{s}^i \quad , \quad j = 1, 2 \quad (10.134)$$

zugeordnet.

Schaltet man die Systeme, wie in Abb. 10.9 zu sehen, hintereinander, sodass $e_2(t)$ über $a_1(t)$ gegeben ist, ohne dass dabei das System 1 beeinflusst wird (siehe Beispiel 10.9), so gilt mit

$$\begin{aligned} \underline{E}_j(\underline{s}) &= \mathcal{L}\{e_j(t)\}(\underline{s}) \quad , \quad \underline{A}_j(\underline{s}) = \mathcal{L}\{a_j(t)\}(\underline{s}) \quad , \quad j = 1, 2 \quad , \\ e(t) &:= e_1(t) \quad , \quad a(t) := a_2(t) \quad (\Rightarrow \underline{E}(\underline{s}) := \underline{E}_1(\underline{s}) \quad , \quad \underline{A}(\underline{s}) := \underline{A}_2(\underline{s})) \end{aligned} \quad (10.135)$$

der folgende Zusammenhang zwischen $\underline{E}(\underline{s})$ und $\underline{A}(\underline{s})$:

$$\underline{A}(\underline{s}) = \underline{H}_2(\underline{s}) \underline{E}_2(\underline{s}) = \underline{H}_2(\underline{s}) \underline{A}_1(\underline{s}) = \underline{H}_2(\underline{s}) \underline{H}_1(\underline{s}) \underline{E}_1(\underline{s}) = \underline{H}_2(\underline{s}) \underline{H}_1(\underline{s}) \underline{E}(\underline{s}) \quad (10.136)$$

Die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems ist somit gegeben über:

$$\underline{H}(\underline{s}) = \frac{\underline{A}(\underline{s})}{\underline{E}(\underline{s})} = \underline{H}_1(\underline{s}) \underline{H}_2(\underline{s}) \quad (10.137)$$

Da die Einzelstoßantworten von der Form (10.120) sind, ist das Produkt der Übertragungsfunktion wie in Def. 10.17 rücktransformierbar.

Da weiterhin $\underline{H}(\underline{s})$ mit Bemerkung 10.15 die Laplacetransformierte der Stoßantwort ist, folgt somit für die Stoßantwort des Gesamtsystems $a_{\delta}(t)$ mit Definition 10.17

$$a_{\delta}(t) = a_{\delta,1}(t) * a_{\delta,2}(t) \quad , \quad (10.138)$$

wobei $a_{\delta,1}(t)$ bzw. $a_{\delta,2}(t)$ die Stoßantworten der Einzelsysteme 1 bzw. 2 sind.

Die Gesamtstoßantwort ergibt sich also als Faltung der Einzelstoßantworten. Die Gesamtübertragungsfunktion ist das Produkt der Einzelübertragungsfunktionen.

Eine typische Schaltungsanwendung von Bemerkung 10.25 wird in Beispiel 10.9 vorgestellt:

Beispiel 10.9

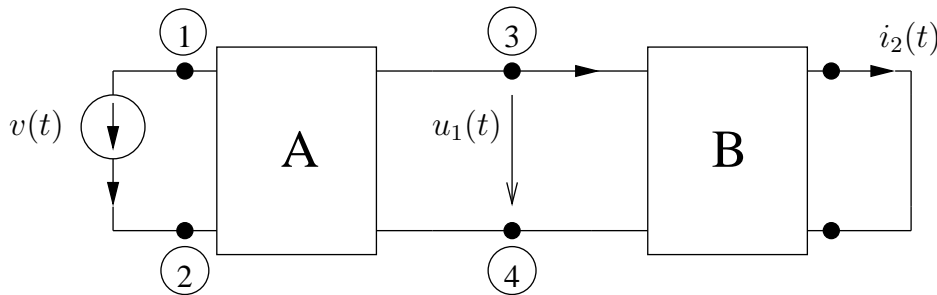


Abbildung 10.10

Das Netzwerkproblem in Abb. 10.10 sei bei Vorgabe der Anfangswerte eindeutig lösbar. Die Vierpole A,B seien lineare, zeitinvariante Netzwerkmodelle ohne ungesteuerte Quellen. Das Netzwerkmodell in Abb. 10.10 werde aus dem Ruhezustand heraus durch $v(t)$ erregt ($v(t) = 0$ für $t < 0$) und $v(t)$ sei so glatt, dass alle Netzwerkvariablen gewöhnliche Funktionen sind. Auf die links und rechts von Tor ③ – ④ befindlichen Teilnetzwerke sei jeweils das Substitutionstheorem anwendbar, falls das Restnetzwerk am Tor ③ – ④ durch eine Spannungsquelle substituiert wird. Der Vierpol B hat daher bezüglich der Klemmen ③ und ④ eine Ersatzstromquellendarstellung. Diese hat bei Erregung aus dem Ruhezustand heraus die Form:

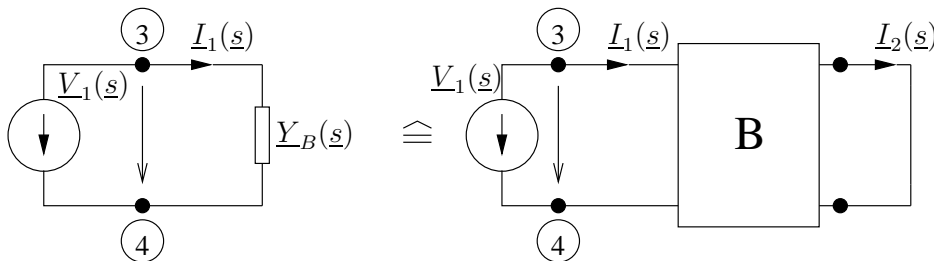


Abbildung 10.11

Das heißt: Bei Erregung von Vierpol B an den Klemmen ③ – ④ durch eine ungesteuerte, ideale Spannungsquelle ist das resultierende Netzwerkmodell bei Vorgabe der Anfangswerte eindeutig lösbar. Die Übertragungsfunktionen

$$\begin{aligned} \underline{H}_1(s) &= \left. \frac{\mathcal{L}\{u_1(t)\}(s)}{\mathcal{L}\{v(t)\}(s)} \right|_{\text{Erregung aus dem Ruhezustand}} \\ \underline{H}_2(s) &= \left. \frac{I_2(s)}{V_1(s)} \right|_{\text{Erregung aus dem Ruhezustand}} \end{aligned} \quad (10.139)$$

seien bekannt. Dabei werden $\underline{H}_1(s)$, $\underline{H}_2(s)$ typischerweise durch Berechnung der folgenden, bei Erregung aus dem Ruhezustand heraus gültigen Netzwerkteilprobleme im Laplacebereich bestimmt. Die eindeutige Lösbarkeit des Teilproblems in Abb. 10.12 wird also ebenfalls vorausgesetzt.

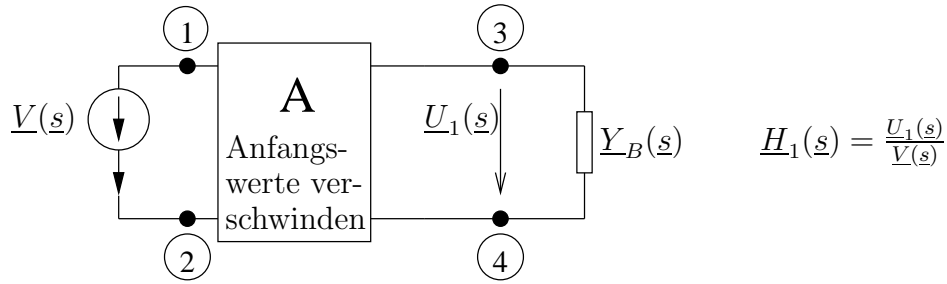


Abbildung 10.12

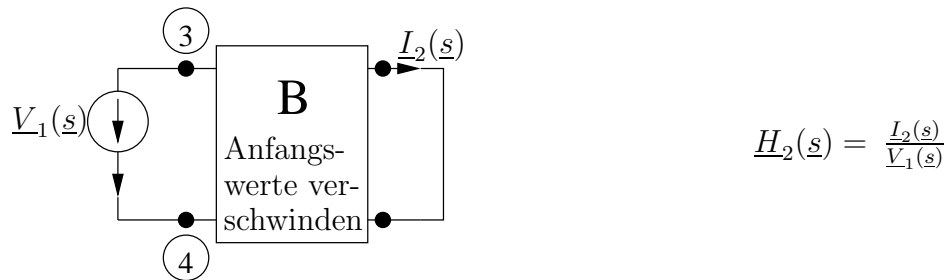


Abbildung 10.13

Die Lösung $\underline{I}_2(\underline{s})$ für das Originalnetzwerkproblem wird durch das Netzwerkmodell in Abb. 10.13 aufgrund der Anwendbarkeit des Substitutionstheorems reproduziert, falls

$$\underline{V}_1(\underline{s}) = \underline{U}_1(\underline{s}) \quad (10.140)$$

gewählt wird. Ferner wird die Lösung $\underline{U}_1(\underline{s})$ für das Originalproblem durch das Teilproblem in Abb. 10.12 aufgrund seiner eindeutigen Lösbarkeit reproduziert. Legt man nun $v(t)$ als Eingangsfunktion $e(t) = v(t)$ und $i_2(t)$ als Ausgangsfunktion $a(t) = i_2(t)$ fest, so hat mit Bemerkung 10.25 das resultierende System die Übertragungsfunktion

$$\left. \frac{\underline{I}_2(\underline{s})}{\underline{V}(\underline{s})} \right|_{\text{Erregung aus dem Ruhezustand}} = \underline{H}(\underline{s}) = \underline{H}_1(\underline{s}) \underline{H}_2(\underline{s}). \quad (10.141)$$

Und für die zugehörige Stoßantwort gilt

$$a_\delta(t) = (a_{\delta,1}(t') * a_{\delta,2}(t'))(t), \quad (10.142)$$

mit $\mathcal{L}\{a_\delta(t)\}(\underline{s}) = \underline{H}(\underline{s})$ und $\mathcal{L}\{a_{\delta,j}(t)\}(\underline{s}) = \underline{H}_j(\underline{s})$, $j = 1, 2$.

Beachte: Bei der Ermittlung von $\underline{H}_1(\underline{s})$ wird der Vierpol A mit der "richtigen" Last $\underline{Y}_B(\underline{s})$ am Ausgang belastet. Nur dann führt die Aufteilung des Originalnetzwerkproblems in die zwei einfacheren Teilprobleme in Abb. 10.12 bzw. Abb. 10.13 zum richtigen Ergebnis.

Bemerkung 10.26

Sind die den Systemen 1 und 2 in Bemerkung 10.25 zugrundeliegenden Netzwerkmodelle asymptotisch stabil, so kann man zu Bemerkung 10.25 entsprechende Aussagen für die Antworten im eingeschwungenen Zustand formulieren. Insbesondere gilt für den Gesamtfrequenzgang

$$\underline{H}(j\omega) = \underline{H}_1(j\omega) \underline{H}_2(j\omega) \quad (10.143)$$

Beispiel 10.9 lässt sich bei vorliegender asymptotischer Stabilität der Netzwerkmodelle in Abb. 10.10, 10.12, 10.13 ebenfalls für die Antworten im eingeschwungenen Zustand und die entsprechenden Frequenzgänge formulieren.

Bemerkung 10.27 (Zur Sprungantwort bei differenzierenden Systemen)

Bei einem über ein lineares, zeitinvariantes Netzwerkmodell definiertes System gelte bei Betrachtung der Antwort aus dem Ruhezustand heraus zwischen Eingang und Ausgang die Beziehung:

$$a(t) = (a_\delta(t') * e(t'))(t) \quad (10.144)$$

mit

$$a_\delta(t) = [{}^0h_a(t)] + \sum_{i=0}^{r+1} D_{a,i} \delta^{(i)}(t) \quad (10.145)$$

Dann gilt

$$a_\Theta(t) = ([\Theta(t')] * a_\delta(t'))(t) \quad (10.146)$$

und aus Bemerkung 10.24, (10.50), (10.125) folgt somit

$$\begin{aligned} a_\Theta^{(1)}(t) &= ([\Theta(t')]^{(1)} * a_\delta(t'))(t) \\ &= (\delta(t') * a_\delta(t'))(t) \\ &= a_\delta(t) \end{aligned} \quad (10.147)$$

Die Stoßantwort ergibt sich also bei differenzierenden Netzwerken wie behauptet aus der Sprungantwort nach Definition 10.16 durch Ableiten im Sinne der Distributionstheorie.

Beweis: Es gilt:

$$[a_{\Theta_\tau}(t)] = [([{}^0h_a(t')] * \Theta_\tau(t'))(t)] + \sum_{i=0}^{r+1} D_{a,i} [(\delta^{(i)}(t') * \Theta_\tau(t'))(t)] \quad (10.148)$$

Sei $\varphi(t)$ eine $r + 1$ -fach stetig differenzierbare Testfunktion, die außerhalb eines kompakten Intervalls verschwindet. Es gilt:

$$\begin{aligned} [(\delta^{(i)}(t') * \Theta_\tau(t'))(t)](\varphi(t)) &= [\Theta_\tau^{(i)}(t)](\varphi(t)) \\ &= [\Theta_\tau(t')]^{(i)}(\varphi(t)) = [\Theta_\tau(t')] \left((-1)^i \varphi^{(i)}(t) \right) \\ &= \left((\Theta(\hat{t}) * \delta_\tau(\hat{t}))(t') * (-1)^i \varphi^{(i)}(-t') \right)(t=0) \\ &= \underbrace{((\Theta(\hat{t}) * (-1)^i \varphi^{(i)}(-\hat{t}))(t') * \delta_\tau(t'))(t=0)}_{\text{stetig in } t'} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\Theta(\hat{t}) * (-1)^i \varphi^{(i)}(-\hat{t}))(-\bar{t}) \delta_\tau(\bar{t}) d\bar{t} \\ &\stackrel{\tau \rightarrow 0}{\rightarrow} (\Theta(\hat{t}) * (-1)^i \varphi^{(i)}(-\hat{t}))(\bar{t}=0) \\ &= [\Theta(t)]((-1)^i \varphi^{(i)}(t)) \\ &= [\Theta(t)]^{(i)}(\varphi(t)) = \left(\delta^{(i)}(t') * [\Theta(t')] \right)(t)(\varphi(t)) \end{aligned} \quad (10.149)$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned}
 [([{}^0h_a(t')] * \Theta_\tau(t'))(t)](\varphi(t)) &= [({}^0h_a(t') * (\Theta(\hat{t}) * \delta_\tau(\hat{t}))(t'))(t)](\varphi(t)) \\
 &= (({}^0h_a(t') * (\Theta(\hat{t}) * \delta_\tau(\hat{t}))(t'))(t) * \varphi(-t))(\bar{t} = 0) \\
 &= \left(\underbrace{(({}^0h_a(\hat{t}) * \Theta(\hat{t}))(t') * \varphi(-t'))(t)}_{\text{stetig in } t} * \delta_\tau(t) \right)(\bar{t} = 0) \\
 &\xrightarrow{\tau \rightarrow 0} (({}^0h_a(\hat{t}) * \Theta(\hat{t}))(t') * \varphi(-t'))(t = 0) \\
 &= [({}^0h_a(\hat{t}) * \Theta(\hat{t}))(t)](\varphi(t)) \\
 &= ([{}^0h_a(t')] * [\Theta(t')])(t)(\varphi(t))
 \end{aligned} \tag{10.150}$$

Insgesamt folgt somit

$$[a_{\Theta_\tau}(t)] \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} (a_\delta(t') * [\Theta(t')])(t) \tag{10.151}$$

im Sinne der Distributionstheorie.

10.4 Das verallgemeinerte Anfangswertproblem erster Ordnung und seine Lösung

Dieses Kapitel dient dazu zu zeigen, dass die Schwierigkeiten, die bei der Ermittlung von Lösungen des Anfangswertproblems erster Art im Fall von Netzwerken auftraten, bei denen eine beliebige Anfangswertvorgabe $\vec{x}_A(t_S^-)$ im Widerspruch zu den Netzwerkgleichungen nach dem Schalten stehen konnte, eigentlich auf einer zu eingeschränkten Wahl des Lösungsraumes (stückweise, stetige gewöhnliche Funktionen) beruhte. Daher wird zunächst eine Menge von Distributionen definiert, die alle durch stückweise stetige Funktionen erzeugten Distributionen enthält.

Definition 10.18 (Definition von L_{t_S})

Für jedes Element $a(t)$ von L_{t_S} gilt, dass es eine stückweise stetige, reelle, überall definierte, gewöhnliche Funktion $a_g(t)$ und reelle Konstanten A_ν , $\nu = 0, \dots, n$ gibt, sodass gilt:

$$a(t) = [a_g(t)] + \sum_{\nu=0}^n \overbrace{A_\nu \delta^{(\nu)}(t - t_S)}^{a_d(t)} \tag{10.152}$$

Wie üblich ist $a_g(t)$ bis auf seine Werte an den Unstetigkeitsstellen eindeutig durch $a(t)$ festgelegt.

Ferner sei $a(t) \in L_{t_S}$ L_{t_S} -differenzierbar genannt, falls $a^{(1)}(t) \in L_{t_S}$. Dies impliziert die Differenzierbarkeit von $a_g(t)$ für $t > t_S$ und $t < t_S$ und die folgende Form von $a^{(1)}(t)$:

$$\begin{aligned} a^{(1)}(t) = & [a_g^{(1)}(t) \theta(-(t - t_S))] + (a_g(t_S^+) - a_g(t_S^-)) \delta(t - t_S) \\ & + \sum_{\nu=0}^n A_\nu \delta^{\nu+1}(t - t_S) + [a_g^{(1)}(t) \theta(t - t_S)] \end{aligned} \quad (10.153)$$

Ferner sei die für $t < t_S$ verschwindende Distribution ${}^{t_S}a(t)$ für $a(t) \in L_{t_S}$ über

$${}^{t_S}a(t) = \sum_{\nu=0}^n A_\nu \delta^{(\nu)}(t - t_S) + [a_g(t) \theta(t - t_S)] \quad (10.154)$$

definiert.

Definition 10.19 (verallgemeinertes Anfangswertproblem erster Art)

Es sei wie in Satz 5.1 ein Netzwerkmodell aus elementaren Zweipolen gegeben, das für $t = t_S$ durch Schließen und Öffnen von Schaltern erzeugt wird.

Es sei angenommen, dass reelle Anfangswerte \vec{x}_{A,t_S} (vor dem Schalten) vorgegeben sind.

Gesucht werden die Bedingungen an die Glattheit der Quellenfunktionen und an den Wertebereich von \vec{x}_{A,t_S} , die die eindeutige Existenz von Lösungen für die Spannungen $u(t)$ und Ströme $v(t)$ als für $t < t_S$ verschwindende Distributionen der Form

$$\begin{aligned} u(t) &= {}^{t_S}\bar{u}(t) \\ i(t) &= {}^{t_S}\bar{i}(t) \end{aligned} \quad (10.155)$$

mit $\bar{u}(t), \bar{i}(t) \in L_{t_S}$ sichert.

Lösung heißt in diesem Zusammenhang für Zweigggleichungen, die eine Ableitung enthalten, dass die abzuleitende Variable $a(t)$ die Form

$$a(t) = {}^{t_S}\bar{a}(t) \quad (10.156)$$

mit einer L_{t_S} -differenzierbaren Distribution $\bar{a}(t)$ aus L_{t_S} hat und die Ableitung über ${}^{t_S}(\bar{a}^{(1)}(t))$ gegeben ist. Für einen Induktivitätszweig wird somit z.B. die Gleichung

$$u(t) = {}^{t_S}\bar{u}(t) = L {}^{t_S}(\bar{i}^{(1)}(t)) \quad (10.157)$$

mit $i(t) = {}^{t_S}\bar{i}(t)$ und $\bar{i}^{(1)} \in L_{t_S}$ gefordert. Insofern gilt für $\vec{x}_A(t)$

$$\vec{x}_A(t) = ({}^{t_S}\bar{x}_{A,1}(t), \dots, {}^{t_S}\bar{x}_{A,n_A}(t))^t \quad (10.158)$$

mit

$$\bar{x}_{A,i}(t) \in L_{t_S} \text{ und } L_{t_S}\text{-differenzierbar, } i = 1, \dots, n_A. \quad (10.159)$$

Für die gewöhnlichen Funktionsanteile $\vec{x}_{A,i,g}(t)$ der $\bar{x}_{A,i}(t)$ wird dabei die Erfüllung der Anfangsbedingung gefordert:

$$(\bar{x}_{A,1,g}(t_S^-), \dots, \bar{x}_{A,n_A,g}(t_S^-))^t = \vec{x}_{A,t_S} \quad (10.160)$$

(Beachte: $\bar{x}_{A,i,g}(t_S^-)$ wird bei der Berechnung von ${}^{t_S}(\bar{x}_{A,i}^{(1)}(t))$ gebraucht!)

Will man nun die Lösbarkeit des verallgemeinerten Anfangswertproblems erster Art mit der Laplacetransformation untersuchen, so muss man für $t_S \neq 0$ zunächst analog zu Bemerkung

kung 8.1 zum Zeitpunkt $t_S = 0$ für die Anfangswertvorgabe übergehen. Danach sind alle gesuchten Lösungsvariablen für $t < 0$ verschwindende Distributionen, deren Laplacetransformation keine Schwierigkeiten bereitet.

Bemerkung 10.28

Hat $a(t)$ die Gestalt $a(t) = {}^0(\bar{a}(t))$ mit $\bar{a}(t) \in L_0$ und ist $\bar{a}(t)$ L_0 -differenzierbar, so gilt die Transformationregel

$$b(t) = {}^0(\bar{a}^{(1)}(t)), \bar{a}_g(0^-) = a_0 \circ \bullet \quad \mathcal{L}\{b(t)\}(\underline{s}) = \underline{s} \mathcal{L}\{a(t)\}(\underline{s}) - a_0 \quad (10.161)$$

Zum Beweis:

Es gilt für ${}^0(\bar{a}(t)) = [\bar{a}_g(t)] + \sum_{\nu=0}^n \bar{A}_\nu \delta^{(\nu)}(t)$

$$b(t) = {}^0(\bar{a}^{(1)}(t)) = -\bar{a}_g(0^-)\delta(t) + \left(\sum_{\nu=0}^n \bar{A}_\nu \delta^{(\nu)}(t) + [\bar{a}_g(t)\Theta(t)] \right)^{(1)} \quad (10.162)$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{b(t)\}(\underline{s}) = \underline{B}(\underline{s}) &= \mathcal{L}\left\{ \left(\sum_{\nu=0}^n \bar{A}_\nu \delta^{(\nu)}(t) + [\bar{a}_g(t)\Theta(t)] \right)^{(1)} \right\} \\ &= -\bar{a}_g(0^-) + \underbrace{\underline{s} \mathcal{L}\{a(t)\} - a_0}_{\substack{\uparrow \\ \text{Bem. 10.13} \\ \parallel \\ A(\underline{s})}} \end{aligned} \quad (10.163)$$

Die am Anfang von Kapitel 8.2 stillschweigend gemachte Annahme unveränderter Gleichungen im Laplacebereich, auch beim Auftreten von Netzwerkvariablen, die Distributionen sind, wird also durch die Neudefinition des Anfangswertproblems 1. Art bestätigt.

Zum Abschluss dieses Kapitels soll nun Beispiel 8.1 für den Fall $R_1 \rightarrow \infty$ und beliebigen Anfangsbedingungen, bei dem ja bekanntlich die Spannungen an den Induktivitäten einen distributiven Anteil haben, konsequent mit Hilfe der Laplacetransformation für Distributionen und dem Anfangswertproblem nach Definition 10.19 durchgerechnet werden. $j(t)$ sei dabei eine gewöhnliche, vorgegebene, einmal differenzierbare Quellenfunktion.

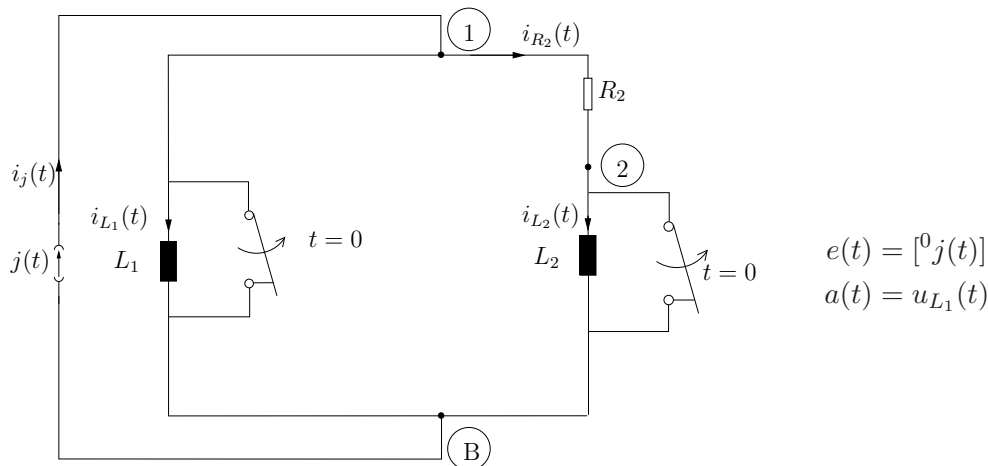


Abbildung 10.14: Beispielschaltung 10.10 im Zeitbereich

Mit Bemerkung 10.28 gilt für die Gleichungen im Laplace- und Zeitbereich:

ZGL :

$$\begin{aligned}
 u_{L_1}(t) &= L_1 {}^0(\bar{i}_{L_1}^{(1)}(t)), \quad \bar{i}_{L_1,g}(0^-) = i_{L_1,0} \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \underline{U}_{L_1}(\underline{s}) = \underline{s} L_1 \underline{I}_{L_1}(\underline{s}) - i_{L_1,0} \\
 u_{L_2}(t) &= L_2 {}^0(\bar{i}_{L_2}^{(1)}(t)), \quad \bar{i}_{L_2,g}(0^-) = i_{L_2,0} \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \underline{U}_{L_2}(\underline{s}) = \underline{s} L_2 \underline{I}_{L_2}(\underline{s}) - i_{L_2,0} \\
 R_2 i_{R_2}(t) &= u_{R_2}(t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad R_2 \underline{I}_{R_2}(\underline{s}) = \underline{u}_{R_2}(\underline{s}) \\
 i_j(t) &= {}^0[j(t)] \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \underline{I}_j(\underline{s}) = J(\underline{s})
 \end{aligned} \tag{10.164}$$

Dabei gilt: $i_{L_{1,2}}(t) = {}^0(\bar{i}_{L_{1,2}}(t))$ mit $\bar{i}_{L_{1,2}}(t) \in L_0$ und $\bar{i}_{L_{1,2}}(t)$ L_0 -differenzierbar.

MGL :

$$\begin{aligned}
 u_{L_1}(t) &= u_{L_2}(t) + u_{R_2}(t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \underline{U}_{L_1}(\underline{s}) = \underline{U}_{L_2}(\underline{s}) + \underline{U}_{R_2}(\underline{s}) \\
 u_j(t) &= -u_{L_1}(t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \underline{U}_j(\underline{s}) = -\underline{U}_{L_1}(\underline{s})
 \end{aligned} \tag{10.165}$$

KGL :

$$\begin{aligned}
 i_j(t) &= i_{L_1}(t) + i_{R_2}(t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \underline{I}_j(\underline{s}) = \underline{I}_{L_1} + \underline{I}_{R_2}(\underline{s}) \\
 -i_{R_2}(t) &= i_{L_2}(t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \underline{I}_{R_2}(\underline{s}) = \underline{I}_{L_2}(\underline{s})
 \end{aligned} \tag{10.166}$$

Diese Gleichungen entsprechen exakt den Gleichungen im Beispiel 8.1 im Laplacebereich für $R_1 \rightarrow \infty$. Mit Beispiel 8.1 und $R_1 \rightarrow \infty$ folgt mit (8.104)

$$\underline{U}_{L_1}(\underline{s}) = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \left(\frac{\underline{s} \left(\underline{s} + \frac{R_2}{L_2} \right)}{\underline{s} + \frac{R_2}{L_1 + L_2}} J(\underline{s}) - \frac{\underline{s} + \frac{R_2}{L_2}}{\underline{s} + \frac{R_2}{L_1 + L_2}} i_{L_1,0} - \frac{\underline{s}}{\underline{s} + \frac{R_2}{L_1 + L_2}} i_{L_2,0} \right) \tag{10.167}$$

Dies ergibt mit der Partialbruchzerlegung (siehe 8.105):

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_{L_1}(\underline{s}) &= \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \left(\underline{s} J(\underline{s}) + \frac{R_2}{L_2} \frac{L_1}{L_1 + L_2} J(\underline{s}) - \frac{R_2^2 \frac{L_1}{L_2}}{(L_1 + L_2)^2} \frac{1}{\underline{s} + \frac{R_2}{L_1 + L_2}} J(\underline{s}) - i_{L_1,0} - i_{L_2,0} \right. \\
 &\quad \left. - R_2 \frac{\frac{L_1}{L_2}}{L_1 + L_2} \frac{1}{\underline{s} + \frac{R_2}{L_1 + L_2}} i_{L_1,0} + \frac{R_2}{L_1 + L_2} \frac{1}{\underline{s} + \frac{R_2}{L_1 + L_2}} i_{L_2,0} \right)
 \end{aligned} \tag{10.168}$$

Im Gegensatz zur Situation im Kapitel 8 kann nun mit der auch für Distributionen zur Verfügung stehenden Laplacetransformation sofort die Lösung im Zeitbereich angegeben werden,

$$\begin{aligned}
& \text{(10.168)} \\
& \text{ } \circ \\
& a(t) = u_{L_1}(t) = \\
& \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \left([{}^0 j(t)]^{(1)} + \frac{R_2}{L_2} \frac{L_1}{L_1 + L_2} [{}^0 j(t)] - \frac{R_2^2 \frac{L_1}{L_2}}{(L_1 + L_2)^2} \left[\left(\Theta(t') e^{-\frac{R_2 t'}{L_1 + L_2}} * {}^0 j(t') \right)(t) \right] \right. \\
& \quad \left. - i_{L_1,0} \delta(t) - i_{L_2,0} \delta(t) - \right. \\
& \quad \left. R_2 \frac{\frac{L_1}{L_2}}{L_1 + L_2} i_{L_1,0} \left[\Theta(t) e^{-\frac{R_2 t}{L_1 + L_2}} \right] + \frac{R_2}{L_1 + L_2} i_{L_2,0} \left[\Theta(t) e^{-\frac{R_2 t}{L_1 + L_2}} \right] \right) \quad (10.169)
\end{aligned}$$

Mit Bemerkung 10.14 gilt für differenzierbares $j(t)$

$$[{}^0 j(t)]^{(1)} = j(0) \delta(t) + [{}^0(j^{(1)}(t))] \quad (10.170)$$

Mit (10.22) folgt somit

$$\begin{aligned}
a(t) &= \left[\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \left(({}^0(j^{(1)}(t))) + \frac{R_2}{L_2} \frac{L_1}{L_1 + L_2} {}^0(j(t)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{R_2^2 \frac{L_1}{L_2}}{(L_1 + L_2)^2} \Theta(t) \int_0^t e^{-\frac{R_2}{L_1 + L_2}(t-t')} j(t') dt' \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - i_{L_1,0} \frac{R_2 \frac{L_1}{L_2}}{L_1 + L_2} \Theta(t) e^{-\frac{R_2 t}{L_1 + L_2}} + i_{L_2,0} \frac{R_2}{L_1 + L_2} \Theta(t) e^{-\frac{R_2}{L_1 + L_2} t} \right) \right] \quad (10.171) \\
& \quad + \underbrace{\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} (j(0) - i_{L_1,0} - i_{L_2,0}) \delta(t)}_{a_D(t)} \\
&= a_D(t) + [{}^0 \bar{a}_g(t)]
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\bar{a}_g(t) &= \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \left(j^{(1)}(t) + \frac{R_2}{L_2} \frac{L_1}{L_1 + L_2} j(t) \right. \\
& \quad \left. - \frac{R_2^2 \frac{L_1}{L_2}}{(L_1 + L_2)^2} \int_0^t e^{-\frac{R_2}{L_1 + L_2}(t-t')} j(t') dt' \right. \\
& \quad \left. - \frac{R_2}{L_1 + L_2} \left(i_{L_1,0} \frac{L_1}{L_2} - i_{L_2,0} \right) e^{-\frac{R_2}{L_1 + L_2} t} \right) \quad (10.172)
\end{aligned}$$

Man sieht, dass für beliebige Zielanfangswerte $i_{L_1,2,0}$ bei hinreichend glatter Quellenfunktion $j(t)$ immer genau eine Lösung des verallgemeinerten Anfangswertproblems 1. Art existiert. Dies ist ein allgemein gültiges Ergebnis wie aus Kapitel 8.2 folgt.

Man sieht, dass $a(t)$ nur dann als gewöhnliche Funktion aufgefasst werden kann, wenn $j(t)$ differenzierbar und die Knotengleichung $j(0) - i_{L_1,0} - i_{L_2,0} = 0$ erfüllt ist. Ansonsten ist $a_D(t) \neq 0$ und $a(t)$ keine reguläre Distribution. Für $i_{L_2,0} = j(0) - i_{L_1,0}$ reproduziert $\bar{a}_g(t)$ die Lösung (8.107) für $t \geq 0$. (Beachte: Für $a_g(t)$ nach (8.174) gilt $a_g(t) = \bar{a}_g(t)$ für $t \geq 0$.)

Kapitel 11

Passivität und absolute Stabilität

11.1 Passive Netzwerkmodelle

Typische passive Zweipole

- Es wird der Widerstand R im Zeitbereich betrachtet:

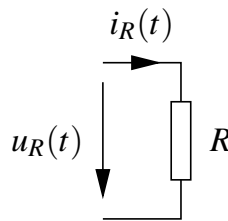


Abbildung 11.1: Widerstand R

Die im Widerstand im Zeitintervall $[t_0, t]$ verbrauchte Energie $w(t, t_0)$ beträgt:

$$w(t, t_0) = \int_{t_0}^t u_R(t') i_R(t') dt' \quad (11.1)$$

$$= \int_{t_0}^t R i_R^2(t') dt' \quad (11.2)$$

$$\stackrel{R \neq 0}{=} \int_{t_0}^t \frac{1}{R} u_R^2(t') dt' \quad (11.3)$$

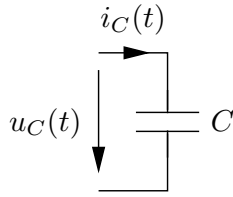
Es gilt somit für alle t, t_0 mit $t > t_0$ und alle $i_R(t)$ und $u_R(t)$

$$w(t, t_0) \geq 0 \quad \text{für} \quad R > 0 \quad \text{und} \quad (11.4)$$

$$w(t, t_0) \leq 0 \quad \text{für} \quad R < 0. \quad (11.5)$$

Die an den Widerstand abgegebene Energie ist also stets positiv für $R > 0$. Für $R > 0$ ist der Widerstand also passiv, für $R < 0$ ist er aktiv.

- Es wird die Kapazität $C > 0$ im Zeitbereich betrachtet:

Abbildung 11.2: Kapazität C

Es gilt

$$w(t, t_0) = \int_{t_0}^t u_C(t') i_C(t') dt' \quad (11.6)$$

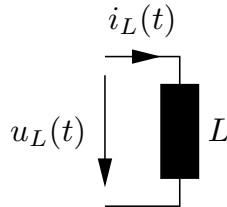
$$= C \int_{t_0}^t u_C(t') \frac{d}{dt'} u_C(t') dt' \quad (11.7)$$

$$= \frac{1}{2} C (u_C^2(t) - u_C^2(t_0)) \quad (11.8)$$

$$\Rightarrow w(t, t_0) + \underbrace{\frac{1}{2} C u_C^2(t_0)}_{E_G(t_0)} = \frac{1}{2} C u_C^2(t) \geq 0 \quad (11.9)$$

für alle t, t_0 mit $t > t_0$, $u_C(t)$, $i_C(t)$ mit $i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$.

- Es wird die Induktivität $L > 0$ im Zeitbereich betrachtet:

Abbildung 11.3: Induktivität L

Es gilt

$$w(t, t_0) = \int_{t_0}^t u_L(t') i_L(t') dt' \quad (11.10)$$

$$= L \int_{t_0}^t i_L(t') \frac{d}{dt'} i_L(t') dt' \quad (11.11)$$

$$= \frac{1}{2} L i_L^2(t) - \underbrace{\frac{1}{2} L i_L^2(t_0)}_{E_G(t_0)} \quad (11.12)$$

$$\Rightarrow w(t, t_0) + E_G(t_0) = \frac{1}{2} L i_L^2(t) \geq 0 \quad (11.13)$$

für alle t, t_0 mit $t > t_0$, $u_L(t)$, $i_L(t)$ mit $u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$.

Definition 11.1 (Passive Mehrtore)

Es sei ein Zweipolnetzwerkmodell (NW1) wie in Abbildung 9.1 gegeben, das in mehrere Teilnetzwerke aufgeteilt werden kann, so dass wie in Abbildung 9.1 gezeigt Tore und Torvariablen

$$u_{1,r}(t), i_{1,r}(t), r = 1, \dots, k \dots$$

$$u_{4,r}(t), i_{4,r}(t), r = 1, \dots, n$$

definiert werden können. Es sei eine Lösung des Netzwerkgleichungssystems von NW1 im Zeitbereich gegeben, zu der auch die oben definierten Torvariablen gehören.

Falls es eine positive Funktion ($E_{G,Z}(t) \geq 0$ für alle t) gibt, die auf eindeutige Weise von den Zweipolströmen und -spannungen des Teilnetzwerkmodells T_Z zum gleichen Zeitpunkt abhängt, und für alle t, t_0 mit $t \geq t_0$ und jede mögliche Lösung von NW1 bei beliebiger Wahl der anderen Teilnetzwerke in Abb. 9.1

$$\int_{t_0}^t \left(\sum_{r=1}^k u_{1,r}(t) i_{1,r}(t) + \sum_{r=1}^l u_{2,r}(t) i_{2,r}(t) + \sum_{r=1}^m u_{3,r}(t) i_{3,r}(t) + \sum_{r=1}^n u_{4,r}(t) i_{4,r}(t) \right) dt + E_{G,Z}(t_0) \geq 0 \quad (11.14)$$

gilt, so ist das Mehrtor T_Z passiv.

Eine simple Folgerung aus Def. 11.1 ist, dass der ideale Widerstand, die ideale Kapazität und die ideale Induktivität passive Eintore sind.

Satz 11.1

Besteht ein Mehrtor T_Z wie in Definition 11.1 beschrieben ausschließlich aus Zweipolen i , die im Sinne von Definition 11.1 passive Eintore sind, so ist das Mehrtor T_Z insgesamt passiv im Sinne von Definition 11.1, falls das Substitutionstheorem (Satz 9.1) auf T_Z anwendbar ist und $E_{G,Z}(t) = \sum_i E_{G,i}(t)$ gilt, wobei $E_{G,i}(t)$ diejenige Funktion ist, für die der Zweipol i die Passivitätsbedingung (11.14) erfüllt.

Beweis:

Sei eine Lösung der Netzwerkgleichungen von NW1 wie in Def. 11.1 angenommen gegeben. Das Substitutionstheorem ist anwendbar. Daher gibt es für jedes Tor von T_Z unter den Torvariablen eine Variable, die im Sinne des Substitutionstheorems am Tor durch eine entsprechende Strom- oder Spannungsquelle vorgegeben werden kann und zusammen mit T_Z ein neues Netzwerkmodell NW2 ergibt, das bei Vorgabe von geeignet gewählten Anfangswerten eindeutig lösbar ist und die Lösung des Netzwerkmodells NW1 für die Torvariablen und die Variablen der Zweipole aus T_Z reproduziert. Die Torvariablen sind bis auf ein Vorzeichen im Sinne des Verbraucherzählpfeilsystems die Zweigvariablen der Quelle, die bei NW2 an jedem Tor entweder den Torstrom oder die Torspannung vorgibt. Dies ist in Abbildung 11.4 am Beispiel einer Stromquelle und den Torvariablen $i_0(t), u_0(t)$ gezeigt.

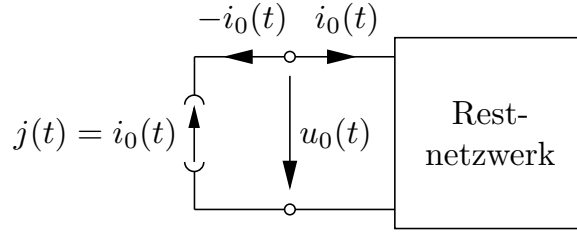


Abbildung 11.4

$u_0(t)$, $-i_0(t)$ sind die Zweigvariablen der Stromquelle im Sinne des Verbraucherzählpfeilsystems.

Für die Lösung des Netzwerkproblems NW2 gilt das Tellegensche Theorem (Satz 4.10). Somit gilt

$$\sum_{r=1}^k u_{1,r}(t) i_{1,r}(t) + \sum_{r=1}^l u_{2,r}(t) i_{2,r}(t) + \sum_{r=1}^m u_{3,r}(t) i_{3,r}(t) + \sum_{r=1}^n u_{4,r}(t) i_{4,r}(t) = \sum_{j=1}^N u_j(t) i_j(t) \quad (11.15)$$

wobei die Summe auf der rechten Seite über alle internen Zweipole von T_Z geht. $u_j(t)$, $i_j(t)$ sind dabei im Sinne des Verbraucherzählpfeilsystems orientiert. Aufgrund der Voraussetzung¹ folgt nun für $t > t_0$

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \left(\sum_{r=1}^k u_{1,r}(t) i_{1,r}(t) + \sum_{r=1}^l u_{2,r}(t) i_{2,r}(t) + \sum_{r=1}^m u_{3,r}(t) i_{3,r}(t) + \sum_{r=1}^n u_{4,r}(t) i_{4,r}(t) \right) dt \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t u_j(t) i_j(t) dt \geq - \sum_{j=1}^N E_{G,j}(t_0) = -E_{G,Z}(t_0) \end{aligned} \quad (11.16)$$

und damit die Behauptung des Satzes.

Satz 11.2

Es sei ein lineares, zeitinvariantes Zweipolnetzwerk mit den am Anfang vom Kapitel 8.2 formulierten Voraussetzungen und Zweipolen gegeben. Die festen ungesteuerten Quellen $e_k(t)$ liegen in den Zweigen $j_k - z$, $k = 1, \dots, n_Q$. Sei $\underline{N}(\underline{s})$ nach Gl. (8.146) die Tableau matrix im Laplacebereich für dieses Netzwerk. Ein nicht eindeutig lösbares Netzwerkmodell mit $\det(\underline{N}(\underline{s})) = 0$ für alle \underline{s} sei wieder ausgeschlossen. Ist $\det(\underline{N}(\underline{s}_0)) \neq 0$, so gibt es einen Satz von Anfangswerten, so dass bei Vorgabe von $e_k(t) = \Re \{ \underline{E}_k e^{s_0 t} \}$, $k = 1, \dots, n_Q$ die Ausgangsfunktion $a(t) = a_m(t)$ im Zweig m bzw. $m - z$ die Form $a(t) = \Re \{ \underline{A} e^{s_0 t} \}$ für jede Wahl von $a(t)$ hat. Dabei ist $\underline{A} = \sum_{k=1}^{n_Q} \underline{H}_{j_k, m}(\underline{s}_0) \underline{E}_k$, wobei $\underline{H}_{j_k, m}(\underline{s})$ wie in (8.153) definiert ist. \underline{A} und \underline{E}_k , $k = 1, \dots, n_Q$ sind komplexe Zeiger.

¹Enthält T_Z Quellen mit den Urströmen oder Urspannungen Null, um zum Beispiel die Torvariablen als Zweigvariablen interpretieren zu können, so kann man diese Quellen als passive Eintore i mit verschwindender Funktion $E_{G,i}(t)$ ($E_{G,i}(t) = 0$ für alle t) interpretieren.

Beweis:

Für alle Spannungen und Ströme wird analog zu Bemerkung 8.27 der Ansatz z.B. $i(t) = \Re \{ \underline{I} e^{s_0 t} \}$ gemacht. Sei eine Zweiggleichung im Zeitbereich herausgegriffen, o. B. d. A.:

$$u_k(t) = r_d \frac{di_j}{dt} \quad (11.17)$$

$$\text{Ansatz: } u_k(t) = \Re \{ \underline{U}_k e^{s_0 t} \}, \quad i_j(t) = \Re \{ \underline{I}_j e^{s_0 t} \} \quad (11.18)$$

$$\Rightarrow \Re \{ \underline{U}_k e^{s_0 t} \} = r_d \Re \{ \underline{I}_j s_0 e^{s_0 t} \} \quad \text{für alle } t \quad (11.19)$$

$$\Leftrightarrow \underline{U}_k = r_d \underline{I}_j s_0 \quad (11.20)$$

Dies entspricht der Zweiggleichung im Laplacebereich für $\underline{s} = \underline{s}_0$ und $i_{j,0} = 0$ ($\underline{U}_k(\underline{s}_0) = r_d \underline{I}_j(\underline{s}_0) \underline{s}_0$). Entsprechendes gilt für alle Zweiggleichungen. Diese entsprechen den Gleichungen im Laplacebereich für $\underline{s} = \underline{s}_0$, wenn man die Anfangswerte zu 0 setzt. Aus den Maschengleichungen im Zeitbereich folgen entsprechende Maschengleichungen für die „Zeiger“, z.B. $\sum_l u_l(t) = 0$ für alle $t \Rightarrow \sum_l \underline{U}_l = 0$. Diese entsprechen wieder den entsprechenden Maschengleichungen im Laplacebereich für $\underline{s} = \underline{s}_0$ ($\sum_l \underline{U}_l(\underline{s}_0) = 0$). Entsprechendes gilt auch für die Schnittmengengleichungen. Für die „Zeiger“ gilt daher die Gleichung (siehe Gl. (8.146))

$$\underline{\underline{N}}(\underline{s}_0) \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \vdots \\ \underline{I}_z \end{pmatrix} = \underline{\underline{R}} \quad (11.21)$$

$$\underline{\underline{R}} = (\dots, 0, \dots, \underline{E}_k, \dots)^t \quad (11.22)$$

\uparrow Index j_k
 Index $\neq j_k, k=1, \dots, n_Q$

Dies entspricht Gl. (8.146) für $\overrightarrow{\underline{ZRA}} = 0$ und $\underline{s} = \underline{s}_0$, wenn man $\underline{U}, \underline{I}$ mit $\underline{U}(\underline{s}_0), \underline{I}(\underline{s}_0)$ und \underline{E} mit $\underline{E}(\underline{s}_0)$ identifiziert. Für $\det(\underline{\underline{N}}(\underline{s}_0)) \neq 0$ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar und es gilt

$$\underline{A} = \sum_{k=1}^{n_Q} \underline{H}_{j_k, m}(\underline{s}_0) \underline{E}_k = \sum_{k=1}^{n_Q} (-1)^{m+j_{k_0}} \frac{\det(\underline{\underline{N}}_{j_{k_0}, m}(\underline{s}_0))}{\det(\underline{\underline{N}}(\underline{s}_0))} \underline{E}_k \quad (11.23)$$

für jede Wahl von m . Die so gefundene Lösung erfüllt alle Netzwerkgleichungen im Zeitbereich. Ermittelt man nun für diese Lösung der Netzwerkgleichungen die Anfangswerte der differenzierbaren Variablen $\vec{x}_{A,0} := \vec{x}_A(0)$ und gibt diese Anfangswerte in (8.146) vor, so wird diese Lösung wegen $\det \underline{\underline{N}}(\underline{s}) \neq 0$ bis auf endlich viele \underline{s} durch (8.174) reproduziert und diese Lösung ist daher die eindeutig bestimmte Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems 2. Art.

Definition 11.2

Eine rationale komplexwertige Funktion $\underline{H}(\underline{s})$ der komplexen Variablen \underline{s} heißt positiv, falls bis auf endlich viele Stellen $\underline{s}_k, k = 1, \dots, L$ in der rechten Halbebene ($\Re\{\underline{s}\} > 0$) gilt:

1. $\underline{H}^*(\underline{s}) = \underline{H}(\underline{s}^*)$.
2. $\Re\{\underline{H}(\underline{s})\} \geq 0$ für $\Re\{\underline{s}\} > 0$.

Satz 11.3

Es seien die Voraussetzungen von Satz 11.2 gegeben. Ferner sei das Mehrtor, das nach Entfernen der Quellen $e_k(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$ entsteht, im Sinne der Definition 11.1 passiv.

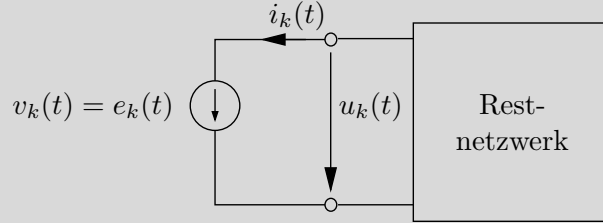


Abbildung 11.5

- A) Zusätzlich seien nun alle Quellen Spannungsquellen, also $e_k(t) = v_k(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$. Darüber hinaus sei der Strom im Zweig $j_k - z$, der im Sinne des Verbraucherzählpfeilsystems dem Richtungssinn von $v_k(t)$ entspricht, mit $i_k(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$ bezeichnet (siehe Abbildung 11.5). Wählt man nun in Satz 11.2 $m = j_l$, $1 \leq l \leq n_Q$, so entspricht \underline{A} aus (11.23) \underline{I}_l und mit (11.23) folgt

$$\underline{I}_l = \sum_{k=1}^{n_Q} \underline{H}_{j_k, j_l}(\underline{s}_0) \underline{V}_k = \sum_{k=1}^{n_Q} -\underline{Y}_{l, k}(\underline{s}_0) \underline{V}_k, \quad (11.24)$$

wobei $\underline{Y}_{l, k}(\underline{s})$, $1 \leq l, k \leq n_Q$ die \underline{Y} -Parameter des durch die Zweige $j_k - z$, $1 \leq k \leq n_Q$ definierten Mehrtores sind. Für die Matrix $\underline{Y}(\underline{s})$ gilt für beliebige n_Q -dimensionale Vektoren $\underline{\vec{V}}$ und $\Re\{\underline{s}\} > 0$ mit $\det \underline{N}(\underline{s}) \neq 0$

$$(\underline{\vec{V}}^t)^* \left(\underline{Y}(\underline{s}) + ((\underline{Y}(\underline{s}))^*)^t \right) \underline{\vec{V}} \geq 0 \quad (11.25)$$

Für $\Re\{\underline{s}\} > 0$ und $\det \underline{N}(\underline{s}) \neq 0$ ist $\left(\underline{Y}(\underline{s}) + ((\underline{Y}(\underline{s}))^*)^t \right)$ somit positiv semidefinit. Für $n_Q = 1$ folgt daraus, dass $\underline{Y}(\underline{s})$ eine positive Funktion ist.

- B) Nun seien alle Quellen Stromquellen, also $e_k(t) = j_k(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$. Ferner sei die Spannung im Zweig $j_k - z$, der im Sinne des Verbraucherzählpfeilsystems dem Richtungssinn von $j_k(t)$ entspricht, mit $u_k(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$ bezeichnet. Wählt man nun in Satz 11.2 $m = j_l - z$, $1 \leq l \leq n_Q$, so entspricht \underline{A} aus (11.26) \underline{U}_l und es folgt

$$\underline{U}_l = \sum_{k=1}^{n_Q} \underline{H}_{j_k, j_l - z}(\underline{s}_0) \underline{J}_k = \sum_{k=1}^{n_Q} -\underline{Z}_{l, k}(\underline{s}_0) \underline{J}_k, \quad (11.26)$$

wobei $\underline{Z}_{l, k}(\underline{s})$, $1 \leq l, k \leq n_Q$ die \underline{Z} -Parameter des durch die Zweige $j_k - z$, $1 \leq k \leq n_Q$ definierten Mehrtores sind. Für die Matrix $\underline{Z}(\underline{s})$ gilt für beliebige n_Q -dimensionale Vektoren $\underline{\vec{J}}$ und $\Re\{\underline{s}\} > 0$ mit $\det \underline{N}(\underline{s}) \neq 0$

$$(\underline{\vec{J}}^t)^* \left(\underline{Z}(\underline{s}) + ((\underline{Z}(\underline{s}))^*)^t \right) \underline{\vec{J}} \geq 0 \quad (11.27)$$

Für $\Re\{\underline{s}\} > 0$ und $\det \underline{N}(\underline{s}) \neq 0$ ist $\underline{Z}(\underline{s}) + ((\underline{Z}(\underline{s}))^*)^t$ somit positiv semidefinit. Für $n_Q = 1$ folgt daraus, dass $\underline{Z}(\underline{s})$ eine positive Funktion ist.

Beweis zu A):

Seien $v_k(t) = \Re\{\underline{V}_k e^{s_0 t}\}$ mit beliebigen \underline{V}_k für $k = 1, \dots, n_Q$ vorgegeben. Nach Satz 11.2 gibt es bis auf endlich viele s_0 , für die $\det(\underline{N}(s_0)) = 0$ gilt, eine Lösung, bei der für die Ströme durch die vorgegebenen Quellen $i_k(t)$, $1 \leq k \leq n_Q$, die entgegengesetzt gleich zu den Strömen der Tore sind, die durch die Spannungsquellen angeregt werden, die Darstellung $i_k(t) = \Re\{\underline{I}_k e^{s_0 t}\}$ gilt. Da das Mehrtor nach Voraussetzung passiv ist, gibt es eine Funktion $E_G(t)$, so dass für jede Wahl von t, t_0 mit $t \geq t_0$ gilt:

$$-\sum_{k=1}^{n_Q} \int_{t_0}^t v_k(t') i_k(t') dt' + E_G(t_0) \geq 0 \quad (11.28)$$

Es gilt weiterhin für alle k , $1 \leq k \leq n_Q$ nach Voraussetzung

$$-i_k(t) = \Re \left\{ \sum_{l=1}^{n_Q} \underline{Y}_{k,l}(s_0) \underline{V}_l e^{s_0 t} \right\}, \quad s_0 = \alpha_0 + j\omega_0 \quad (11.29)$$

Mit diesen Voraussetzungen folgt:

$$\begin{aligned} -\sum_{k=1}^{n_Q} v_k(t) i_k(t) &= -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n_Q} (\underline{V}_k e^{j\omega_0 t} + \underline{V}_k^* e^{-j\omega_0 t}) e^{\alpha_0 t} \cdot (\underline{I}_k e^{j\omega_0 t} + \underline{I}_k^* e^{-j\omega_0 t}) e^{\alpha_0 t} \\ &= -\frac{1}{4} e^{2\alpha_0 t} \sum_{k=1}^{n_Q} (\underline{V}_k \underline{I}_k^* + \underline{V}_k^* \underline{I}_k) + (\underline{V}_k \underline{I}_k e^{2j\omega_0 t} + \underline{V}_k^* \underline{I}_k^* e^{-2j\omega_0 t}) \quad (11.30) \end{aligned}$$

Sei nun

$$\vec{V}^t := (\underline{V}_1, \dots, \underline{V}_{n_Q}), \quad \vec{I}^t := (\underline{I}_1, \dots, \underline{I}_{n_Q})$$

so lässt sich (11.30) umformen in:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_Q} v_k(t) i_k(t) &= -\frac{1}{4} e^{2\alpha_0 t} \left(\vec{V}^t \vec{I}^* + (\vec{V}^*)^t \vec{I} + 2\Re \left\{ \vec{V}^t \vec{I} e^{2j\omega_0 t} \right\} \right) \\ &= \frac{1}{4} e^{2\alpha_0 t} \left(\vec{V}^t \underline{Y}^*(s_0) \vec{V}^* + (\vec{V}^*)^t \underline{Y}(s_0) \vec{V} + 2\Re \left\{ \vec{V}^t \underline{Y}(s_0) \vec{V} e^{2j\omega_0 t} \right\} \right) \\ &= \frac{1}{4} e^{2\alpha_0 t} \left((\vec{V}^*)^t (\underline{Y}(s_0) + (\underline{Y}^*(s_0))^t) \vec{V} + 2\Re \left\{ \vec{V}^t \underline{Y}(s_0) \vec{V} e^{2j\omega_0 t} \right\} \right) \quad (11.31) \end{aligned}$$

Mit (11.29) gilt daher für $\alpha_0 \neq 0$:

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^t \frac{1}{4} \left((\vec{V}^*)^t (\underline{Y}(s_0) + (\underline{Y}^*(s_0))^t) \vec{V} e^{2\alpha_0 t} + 2\Re \left\{ \vec{V}^t \underline{Y}(s_0) \vec{V} e^{2s_0 t} \right\} \right) dt + E_G(t_0) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{8\alpha_0} \left((\vec{V}^*)^t (\underline{Y}(s_0) + (\underline{Y}^*(s_0))^t) \right) \vec{V} e^{2\alpha_0 t} + \frac{1}{4} \Re \left\{ \vec{V}^t \underline{Y}(s_0) \vec{V} \frac{1}{s_0} e^{2s_0 t} \right\} \\ &\quad + \underbrace{E_G(t_0) - \frac{1}{8\alpha_0} \left((\vec{V}^*)^t (\underline{Y}(s_0) + (\underline{Y}^*(s_0))^t) \right) \vec{V} e^{2\alpha_0 t_0} - \frac{1}{4} \Re \left\{ \vec{V}^t \underline{Y}(s_0) \vec{V} \frac{1}{s_0} e^{2s_0 t_0} \right\}}_{=: \alpha} \geq 0 \quad (11.32) \end{aligned}$$

Mit $\vec{V}^t \underline{Y}(\underline{s}_0) \vec{V} \frac{1}{\underline{s}_0} =: \beta e^{j\gamma}$ und $\beta \geq 0$ folgt nun, dass (11.32) äquivalent ist zu

$$\frac{1}{8\alpha_0} e^{2\alpha_0 t} \left((\vec{V}^*)^t \left(\underline{Y}(\underline{s}_0) + (\underline{Y}^*(\underline{s}_0))^t \right) \vec{V} + 2\beta\alpha_0 \cos(2\omega_0 t + \gamma) \right) + \alpha \geq 0 \quad (11.33)$$

Sei nun $\alpha_0 > 0$. Da (11.33) für alle t und insbesondere für $t \rightarrow \infty$ gilt, folgt aus (11.33) für $\alpha_0 = \Re\{\underline{s}_0\} > 0$

$$(\vec{V}^*)^t \left(\underline{Y}(\underline{s}_0) + (\underline{Y}^*(\underline{s}_0))^t \right) \vec{V} \geq 2\beta\alpha_0 \geq 0 \quad (11.34)$$

Somit gilt für jedes \underline{s}_0 mit $\Re\{\underline{s}_0\} > 0$ und $\det \underline{N}(\underline{s}_0) \neq 0$, dass $\underline{Y}(\underline{s}_0) + (\underline{Y}^*(\underline{s}_0))^t$ eine positiv definite Matrix ist. Für $n_Q = 1$ folgt somit sofort $\Re\{\underline{Y}(\underline{s}_0)\} \geq 0$. $\underline{Y}(\underline{s}_0)$ ist somit eine positive Funktion.

Der Beweis für Fall B) erfolgt analog.

Bemerkung 11.1

Gegeben sei ein Zweitor, das die Voraussetzungen von Satz 11.3 A) erfüllt. Sei ferner für ein ω $\det \underline{N}(j\omega) \neq 0$, dann folgt für die Y -Parameter des Zweitores:

1. $\underline{Y}(j\omega) + (\underline{Y}^*(j\omega))^t$ ist positiv semidefinit.
2. $\Re\{\underline{Y}_{11}(j\omega)\} \geq 0$ und

$$\underbrace{4 \left(\Re\{\underline{Y}_{11}(j\omega)\} \Re\{\underline{Y}_{22}(j\omega)\} - \Re\{\underline{Y}_{12}(j\omega)\} \Re\{\underline{Y}_{21}(j\omega)\} \right)}_{=: NO(j\omega)} - |\underline{Y}_{21}(j\omega) - \underline{Y}_{12}(j\omega)|^2 \geq 0$$

Für $NO(j\omega) \neq 0$ ist dies äquivalent zu

$$1 \geq \frac{|\underline{Y}_{21}(j\omega) - \underline{Y}_{12}(j\omega)|^2}{\underbrace{\left(\Re\{\underline{Y}_{11}(j\omega)\} \Re\{\underline{Y}_{22}(j\omega)\} - \Re\{\underline{Y}_{12}(j\omega)\} \Re\{\underline{Y}_{21}(j\omega)\} \right)}_{=: U(j\omega)}} \geq 0$$

Die dimensionslose Größe U wird als Leistungsverstärkung nach Mason bezeichnet.

3. Ferner ergibt sich für die bei harmonischer Anregung mit der Frequenz ω an den Toren aus der komplexen Wechselstromrechnung resultierende Lösung, dass für die im zeitlichen Mittel an das Zweitor abgegebene Wirkleistung P_{ab} gilt:

$$P_{ab} = \frac{1}{2} \Re \left\{ (\underline{U}_1, \underline{U}_2) \begin{pmatrix} \underline{I}_1^* \\ \underline{I}_2^* \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{4} (\underline{U}_1^*, \underline{U}_2^*) \left(\underline{Y}(j\omega) + (\underline{Y}^*(j\omega))^t \right) \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} \geq 0$$

Beweis zu 1.)

Die Koeffizienten von $\underline{Y}(\underline{s})$ sind gebrochen rationale Funktionen, die überall in der komplexen Ebene außerhalb der Punkte, für die $\det \underline{N}(\underline{s}) = 0$ gilt, stetig sind. Nimmt man diese Punkte auf der imaginären Achse aus, so folgt 1. aufgrund der Stetigkeit und da $\underline{Y}(\underline{s}) + (\underline{Y}^*(\underline{s}))^t$ positiv definit ist für alle \underline{s} mit $\Re\{\underline{s}\} > 0$ nach Satz 11.3 A).

Beweis zu 2.)

Sei $\det \underline{N}(j\omega) \neq 0 \Rightarrow \underline{Y}(j\omega)$ existiert und $\hat{\underline{Y}} := \underline{Y}(j\omega) + (\underline{Y}^*(j\omega))^t$ ist positiv definit. $\hat{\underline{Y}}$ ist selbstadjungiert bezüglich des Standardskalarproduktes im zweidimensionalen Vektorraum über den komplexen Zahlen, das für zwei zweidimensionale komplexe Spaltenvektoren $\vec{\underline{E}}_1$ und $\vec{\underline{E}}_2$ über $(\vec{\underline{E}}_1^*)^t \vec{\underline{E}}_2$ definiert ist. Nach dem Spektralsatz gibt es daher eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren von $\hat{\underline{Y}}$, die mit $\vec{\underline{X}}_1, \vec{\underline{X}}_2$ bezeichnet werden soll. Sei $\vec{\underline{E}}_1 = \underline{a} \vec{\underline{X}}_1 + \underline{b} \vec{\underline{X}}_2$ die Darstellung von $\vec{\underline{E}}_1$ in der Eigenvektorbasis mit $\underline{a} = 0$ und $\underline{b} = 0$ genau dann, wenn $\vec{\underline{E}}_1 = 0$. Dann gilt

$$(\vec{\underline{E}}_1^*)^t \hat{\underline{Y}} \vec{\underline{E}}_1 = (\vec{\underline{E}}_1^*)^t (\lambda_1 \underline{a} \vec{\underline{X}}_1 + \lambda_2 \underline{b} \vec{\underline{X}}_2) = \lambda_1 |\underline{a}|^2 + \lambda_2 |\underline{b}|^2, \quad (11.35)$$

wobei λ_1, λ_2 Eigenwerte der Matrix $\hat{\underline{Y}}$ sind. $\hat{\underline{Y}}$ ist somit genau dann positiv semidefinit, falls λ_1, λ_2 reell sind (Dies gilt immer, da $\hat{\underline{Y}}$ selbstadjungiert ist!) und $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ gilt. Seien nun die Y -Parameter in Real- und Imaginärteil zerlegt ($\underline{Y}_{i,k} = G_{i,k} + jB_{i,k}; i, k = 1, 2$). Es gilt:

$$\hat{\underline{Y}} = \begin{pmatrix} 2G_{11} & \underline{Y}_{12} + \underline{Y}_{21}^* \\ \underline{Y}_{21} + \underline{Y}_{12}^* & 2G_{22} \end{pmatrix} \quad (11.36)$$

Sei ferner $\vec{\underline{E}}_1^t = (1, 0)$. Dann gilt $(\vec{\underline{E}}_1^*)^t \hat{\underline{Y}} \vec{\underline{E}}_1 = 2G_{11}$. $G_{11} \geq 0$ ist also notwendig, damit $\hat{\underline{Y}}$ semidefinit ist. Mit $\vec{\underline{E}}_1^t = (0, 1)$ folgt analog die Notwendigkeit von $G_{22} \geq 0$. Das charakteristische Polynom von $\hat{\underline{Y}}$ ist gegeben durch $\underline{s}^2 - 2(G_{11} + G_{22})\underline{s} + \det \hat{\underline{Y}}$.

Für die Nullstellen gilt daher:

$$\begin{aligned} \underline{s}_{1,2} &= (G_{11} + G_{22}) \pm \sqrt{(G_{11} + G_{22})^2 - \det \hat{\underline{Y}}} \\ &= (G_{11} + G_{22}) \pm \sqrt{(G_{11} + G_{22})^2 - 4G_{11}G_{22} + |\underline{Y}_{12} + \underline{Y}_{21}^*|^2} \\ &= G_{11} + G_{22} \pm \sqrt{(G_{11} - G_{22})^2 + |\underline{Y}_{12} + \underline{Y}_{21}^*|^2} \end{aligned} \quad (11.37)$$

Die $\underline{s}_{1,2}$ sind somit reell. Da $G_{11} \geq 0$ und $G_{22} \geq 0$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} \underline{s}_{1,2} \geq 0 &\Leftrightarrow (G_{11} + G_{22})^2 \geq (G_{11} - G_{22})^2 + |\underline{Y}_{12} + \underline{Y}_{21}^*|^2 \\ &\Leftrightarrow 4G_{11}G_{22} \geq |\underline{Y}_{12} + \underline{Y}_{21}^*|^2 \end{aligned} \quad (11.38)$$

Die Bedingungen $G_{11} \geq 0, G_{22} \geq 0$ und (11.38) sind also notwendig und hinreichend dafür, dass $\hat{\underline{Y}}$ positiv semidefinit ist. Dabei kann entweder auf die Bedingung $G_{11} \geq 0$ oder $G_{22} \geq 0$ verzichtet werden, da diese jeweils aus den verbleibenden Bedingungen folgt. Die letzte Bedingung kann noch umgeformt werden.

$$\begin{aligned} 4G_{11}G_{22} &\geq |\underline{Y}_{12} + \underline{Y}_{21}^*|^2 \Leftrightarrow \\ G_{11}G_{22} &\geq \frac{1}{4}(\underline{Y}_{12} + \underline{Y}_{21}^*)(\underline{Y}_{12}^* + \underline{Y}_{21}) \\ &= \frac{1}{4}(\underbrace{\underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21} + \underline{Y}_{12}^*\underline{Y}_{21}^*}_{2\Re\{\underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}\}} + |\underline{Y}_{12}|^2 + |\underline{Y}_{21}|^2) \\ &= \frac{1}{4}(2(G_{12}G_{21} - B_{12}B_{21}) + |\underline{Y}_{12}|^2 + |\underline{Y}_{21}|^2) \\ &= G_{12}G_{21} + \frac{1}{4}\left(-2\underbrace{(G_{12}G_{21} + B_{12}B_{21})}_{\Re\{\underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}^*\}} + |\underline{Y}_{12}|^2 + |\underline{Y}_{21}|^2\right) \\ &= G_{12}G_{21} + \frac{1}{4}|\underline{Y}_{12} - \underline{Y}_{21}|^2 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$4(G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}) - |\underline{Y}_{12} - \underline{Y}_{21}|^2 \geq 0 \quad (11.39)$$

Für $G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21} \neq 0$ ist dies äquivalent zu

$$1 \geq \underbrace{\frac{|\underline{Y}_{12} - \underline{Y}_{21}|^2}{G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}}}_{=: U} \geq 0 \quad (11.40)$$

Beweis zu 3.)

Erregt man das Zweitor an den Toren harmonisch mit der Frequenz ω durch $v_i(t) = \Re\{\underline{V}_i e^{j\omega t}\}$, $i = 1, 2$, dann existiert aufgrund von $\det \underline{N}(j\omega) \neq 0$ eine eindeutige Lösung der Gleichungen der komplexen Wechselstromrechnung und somit existieren eindeutig Torströme $i_i(t) = \Re\{\underline{I}_i e^{j\omega t}\}$. Diese Lösung gibt im zeitlichen Mittel die Wirkleistung

$$P_{ab} = \frac{1}{2} \Re\{\underline{V}_1 \underline{I}_1^*\} + \frac{1}{2} \Re\{\underline{V}_2 \underline{I}_2^*\}$$

an die Tore ab. Da die \underline{Y} -Parameter existieren, folgt sofort mit 1.

$$\begin{aligned} P_{ab} &= \frac{1}{4} \left[(\underline{V}_1, \underline{V}_2) \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}^* + (\underline{V}_1, \underline{V}_2)^* \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[(\underline{V}_1, \underline{V}_2) \underline{Y}^* \begin{pmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \end{pmatrix}^* + (\underline{V}_1, \underline{V}_2)^* \underline{Y} \begin{pmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[(\underline{V}_1, \underline{V}_2)^* ((\underline{Y}^*)^t + \underline{Y}) \begin{pmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \end{pmatrix} \right] \geq 0. \end{aligned}$$

Satz 11.4

Sei $\underline{H}(\underline{s})$ eine positive Funktion (siehe Def. 11.2). Dann gilt:

- A) $\Re\{\underline{H}(j\omega)\} \geq 0$ für alle $j\omega$, die keine Polstellen sind.
- B) $\underline{H}(\underline{s})$ hat für $\Re\{\underline{s}\} > 0$ keine Pol- oder Nullstellen.
- C) $1/\underline{H}(\underline{s})$ existiert für $\Re\{\underline{s}\} > 0$ und ist positiv.
- D) Polstellen $\underline{s}_i = j\omega_i$, $i = 1, \dots, k$ von $\underline{H}(\underline{s})$ auf der imaginären Achse haben in der Nähe von $j\omega_i$ eine Laurentreihenentwicklung der Form

$$\begin{aligned} \underline{H}(\underline{s} - j\omega_i) &= c_i \frac{1}{\underline{s} - j\omega_i} + \underline{B}_i + R_i(\underline{s} - j\omega_i) \quad (11.41) \\ \text{mit } |R_i(\underline{s} - j\omega_i)| &\leq D_i |\underline{s} - j\omega_i| \\ \text{für } |\underline{s} - j\omega_i| < \eta_i \text{ und } c_i > 0 \text{ sowie } \Re\{\underline{B}_i\} &\geq 0. \end{aligned}$$

- E) Für große $|\underline{s}|$ gilt ferner

$$\begin{aligned} \underline{H}(\underline{s}) &= C_\infty \underline{s} + \underline{B}_\infty + R_\infty(\underline{s}) \quad (11.42) \\ \text{mit } |R_\infty(\underline{s})| &\leq D_\infty \frac{1}{|\underline{s}|} \\ \text{für } |\underline{s}| > \eta_\infty \text{ und } C_\infty \geq 0, \Re\{\underline{B}_\infty\} &\geq 0. \end{aligned}$$

Beweis:

Zu A) Als gebrochen rationale Funktion ist $\underline{H}(\underline{s})$ überall außer an seinen endlich vielen isolierten Polstellen stetig. Daher muss für alle \underline{s}_0 , die keine Polstellen sind und für die es eine Folge von \underline{s}_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{s}_n = \underline{s}_0$ und $\Re\{\underline{H}(\underline{s}_n)\} \geq 0$ für alle n gibt, aufgrund der Stetigkeit von $\Re\{\underline{H}(\underline{s})\}$ in \underline{s}_0 $\Re\{\underline{H}(\underline{s}_0)\} \geq 0$ gelten. Da $\underline{H}(\underline{s})$ eine positive Funktion ist, folgt daher $\Re\{\underline{H}(\underline{s})\} \geq 0$ für $\Re\{\underline{s}\} \geq 0$ mit Ausnahme der Polstellen und somit Behauptung A).

Zu B) $\underline{H}(\underline{s})$ ist eine gebrochen rationale Funktion auf der komplexen Ebene und hat daher nur isolierte Null- und Polstellen endlicher Vielfachheit bzw. Ordnung und ist außerhalb dieser Polstellen holomorph. Daher gibt es für jede Null- oder Polstelle \underline{s}_0 von $\underline{H}(\underline{s})$ um \underline{s}_0 herum eine Laurent- oder Taylorreihenentwicklung, die in einer Umgebung U_0 von \underline{s}_0 (ohne \underline{s}_0 !) gleichmäßig und absolut konvergiert und die Form

$$\underline{H}(\underline{s}) = \sum_{i=k_0}^{\infty} \underline{a}_i (\underline{s} - \underline{s}_0)^i \quad (11.43)$$

hat, wobei $\underline{a}_{k_0} \neq 0$ gilt und k_0 die Vielfachheit der Nullstelle bzw. $-k_0$ die Ordnung der Polstelle bezeichnet. Für $\underline{s} \in U_0$ mit $\underline{s} \neq \underline{s}_0$ gilt daher

$$\underline{H}(\underline{s}) = \underline{a}_{k_0} (\underline{s} - \underline{s}_0)^{k_0} \left(1 + \frac{(\underline{s} - \underline{s}_0)}{\underline{a}_{k_0}} \underbrace{\sum_{i=k_0+1}^{\infty} \underline{a}_i (\underline{s} - \underline{s}_0)^{i-k_0-1}}_{:= \underline{f}(\underline{s} - \underline{s}_0)} \right) \quad (11.44)$$

$\underline{f}(\underline{s} - \underline{s}_0)$ ist auf U_0 stetig und beschränkt, so dass auf U_0

$$|\underline{f}(\underline{s} - \underline{s}_0)| < M_0 \text{ für ein } M_0$$

gilt. Für \underline{s} aus U_0 gilt nun mit $\underline{a}_{k_0} = |\underline{a}_{k_0}| e^{j\varphi_{k_0}}$, $(\underline{s} - \underline{s}_0) = |\underline{s} - \underline{s}_0| e^{j\varphi}$

$$\begin{aligned} \Re\{\underline{H}(\underline{s})\} &= |\underline{a}_{k_0}| |\underline{s} - \underline{s}_0|^{k_0} \left(\cos(\varphi_{k_0} + k_0\varphi) \Re\left\{1 + \frac{\underline{s} - \underline{s}_0}{\underline{a}_{k_0}} \underline{f}(\underline{s} - \underline{s}_0)\right\} \right. \\ &\quad \left. - \sin(\varphi_{k_0} + k_0\varphi) \Im\left\{\frac{\underline{s} - \underline{s}_0}{\underline{a}_{k_0}} \underline{f}(\underline{s} - \underline{s}_0)\right\} \right) \end{aligned} \quad (11.45)$$

Für $k_0 \neq 0$ gibt es in U_0 immer ein \underline{s} und ein φ mit $\underline{s} \neq \underline{s}_0$, so dass $\cos(\varphi_{k_0} + k_0\varphi) \leq -\varepsilon < 0$ mit $0 < \varepsilon < 1$ gilt. Ferner kann für festgehaltenes φ $|\underline{s} - \underline{s}_0|$ so klein gewählt werden, dass

$$\left| \frac{\underline{s} - \underline{s}_0}{\underline{a}_{k_0}} \underline{f}(\underline{s} - \underline{s}_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

gilt. Dann folgt aus (11.45) für alle \underline{s} aus U_0 , die die beiden zuletzt genannten Bedingungen erfüllen

$$\Re\{\underline{H}(\underline{s})\} \leq |\underline{a}_{k_0}| |\underline{s} - \underline{s}_0|^{k_0} \left(-\varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon}{3} \right) + \frac{\varepsilon}{3} \right) \leq |\underline{a}_{k_0}| |\underline{s} - \underline{s}_0| \left(-\frac{\varepsilon}{3} \right) < 0.$$

Für $\Re\{\underline{s}_0\} > 0$ ergibt dies einen Widerspruch zu der Eigenschaft von $\underline{H}(\underline{s})$ eine positive Funktion zu sein. Daher kann $\underline{H}(\underline{s})$ für $\Re\{\underline{s}_0\} > 0$ keine Pol- oder Nullstellen haben.

Zu C) Da $\underline{H}(\underline{s})$ nach B) keine Nullstellen für $\Re\{\underline{s}\} > 0$ hat, existiert $1/\underline{H}(\underline{s})$ überall, ist eine gebrochene

rationale Funktion mit $(1/\underline{H}(\underline{s}))^* = 1/\underline{H}(\underline{s}^*)$. Ferner gilt

$$\frac{1}{\underline{H}(\underline{s})} = \frac{\underline{H}(\underline{s})^*}{|\underline{H}(\underline{s})|^2}$$

$$\Rightarrow \Re\left\{\frac{1}{\underline{H}(\underline{s})}\right\} = \frac{\Re\{\underline{H}(\underline{s})\}}{|\underline{H}(\underline{s})|^2} \geq 0$$

für $\Re\{\underline{s}\} > 0$. Somit ist $1/\underline{H}(\underline{s})$ ebenfalls eine positive Funktion.

Zu D) Die Darstellung (11.45) gilt auch in der Umgebung eines Poles $\underline{s}_0 = j\omega_0$ auf der imaginären Achse. Allerdings folgt aus $\Re\{\underline{s}\} > 0$ für $(\underline{s} - j\omega_0) = |\underline{s} - j\omega_0| e^{j\varphi}$ die Bedingung

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \text{ modulo } 2\pi$$

Für $|k_0| > 1$ gibt es trotzdem immer ein φ mit $0 < \varphi < \pi$, so dass $\cos(\varphi_k + k_0\varphi) < 0$ ist, wodurch der Widerspruch aus B) wieder erzeugt werden kann. Nur für

$\varphi_k = 0$ modulo 2π ist $\cos(\varphi_k \pm \varphi) \geq 0$ für $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ modulo 2π .

Für eine positive Funktion muss daher bei einer Pol- oder Nullstelle auf der imaginären Achse $|k_0| = 1$ und $\Im\{\underline{a}_{k_0}\} = 0$, $\underline{a}_{k_0} > 0$ gelten. Nur unter dieser Bedingung kann es für eine positive Funktion eine Pol- oder Nullstelle auf der imaginären Achse geben. Damit gilt auf der imaginären Achse in der Nähe eines Poles bei $j\omega_0$ mit (11.43)

$$\Re\{\underline{H}(j\omega)\} = \Re\{\underline{a}_0\} + \underbrace{\Re\left\{(j\omega - j\omega_0) \sum_{i=1}^{\infty} \underline{a}_i (j\omega - j\omega_0)^{i-1}\right\}}_{\text{Beschränkt in einer Umgebung von } j\omega_0}$$

Somit muss ebenfalls $\Re\{\underline{a}_0\} \geq 0$ gelten, damit $\Re\{\underline{H}(j\omega)\} \geq 0$ außerhalb der Pole (siehe A)) richtig sein kann.

Insgesamt folgt somit D) aufgrund der Reihendarstellung (11.43).

Zu E) Sei $\underline{H}(\underline{s}) = C \frac{\underline{P}(\underline{s})}{\underline{Q}(\underline{s})}$ mit teilerfremden und normierten Polynomen $\underline{P}(\underline{s})$ und $\underline{Q}(\underline{s})$. Aufgrund der Partialbruchzerlegung (siehe Bem. 5.15) gilt

$$\underline{H}(\underline{s}) = \sum_{i=0}^q \underline{F}_i \underline{s}^i + \frac{\overline{\underline{P}}(\underline{s})}{\underline{Q}(\underline{s})}, \quad (11.46)$$

wobei $q = \text{grad } \underline{P}(\underline{s}) - \text{grad } \underline{Q}(\underline{s})$, $\text{grad } \overline{\underline{P}}(\underline{s}) < \text{grad } \underline{Q}(\underline{s})$ und die Summe in (11.46) für $q < 0$ verschwindet. Für $q \geq 0$ gilt $\underline{F}_q \neq 0$.

$\lim_{|\underline{s}| \rightarrow \infty} \frac{\underline{s} \overline{\underline{P}}(\underline{s})}{\underline{Q}(\underline{s})}$ existiert somit und ist endlich. Daher gibt es ein D_∞ und ein η_∞ , so dass

$$\left| \frac{\overline{\underline{P}}(\underline{s})}{\underline{Q}(\underline{s})} \right| < \frac{1}{|\underline{s}|} D_\infty \text{ für } |\underline{s}| > \eta_\infty. \quad (11.47)$$

Ist $q \leq 0$, so gilt $\lim_{|\underline{s}| \rightarrow \infty} |\underline{H}(\underline{s})| = \underline{F}_0$. Dies ist nur dann in Einklang mit $\underline{H}(\underline{s})$ als positiver Funktion, falls $\Re\{\underline{F}_0\} \geq 0$ gilt.

Sei nun $q > 0$. Dann gilt

$$\underline{H}(\underline{s}) = \underline{F}_q \underline{s}^q \left(1 + \underbrace{\sum_{i=0}^{q-1} \frac{\underline{F}_i}{\underline{F}_q} \underline{s}^{i-q}}_{\underline{F}(\underline{s})} + \frac{1}{\underline{F}_q} \frac{\overline{P}(\underline{s})}{\underline{Q}(\underline{s})} \frac{1}{\underline{s}^q} \right) \quad (11.48)$$

und

$$\lim_{|\underline{s}| \rightarrow \infty} \underline{F}(\underline{s}) = 0.$$

Sei nun $\underline{F}_q = |\underline{F}_q| e^{j\varphi_q}$ und $\underline{s} = |\underline{s}| e^{j\varphi}$, dann gilt

$$\Re\{\underline{H}(\underline{s})\} = |\underline{F}_q| |\underline{s}|^q \left(\cos(\varphi_q + q\varphi) \left(1 + \Re\{\underline{F}(\underline{s})\} \right) - \sin(\varphi_q + q\varphi) \Im\{\underline{F}(\underline{s})\} \right) \quad (11.49)$$

Analog zu den Überlegungen zu D) basierend auf (11.45) ist (11.49) nur dann kompatibel mit der Eigenschaft von $\underline{H}(\underline{s})$ eine positive Funktion zu sein, wenn

$$q = 1, \quad \underline{F}_q \text{ reell und } \underline{F}_q > 0 \Rightarrow \varphi_q = 0 \text{ modulo } 2\pi$$

gilt. In diesem Fall folgt aus (11.46) auf der imaginären Achse

$$\Re\{\underline{H}(j\omega)\} = \Re\{\underline{F}_0\} + \Re\left\{ \frac{\overline{P}(j\omega)}{\underline{Q}(j\omega)} \right\} \quad (11.50)$$

Da für eine positive Funktion $\underline{H}(\underline{s})$ die Bedingung B) gelten muss, folgt somit wegen (11.47) zusätzlich

$$\Re\{\underline{F}_0\} \geq 0$$

und somit insgesamt die Behauptung unter E).

Satz 11.5 (Maximumprinzip für harmonische Funktionen)

Sei $U(x, y)$ auf einer offenen Menge G hinreichend glatt und harmonisch

$$(\text{d. h. } \Delta U(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(x, y) = 0)$$

für alle $(x, y) \in G$. Dann gilt

A) Für alle $(x_0, y_0) \in G$ und jeden Kreis $K(r, x_0, y_0)$ mit dem Radius r um (x_0, y_0) herum

$$\left(K(r, x_0, y_0) := \{(x, y) \mid |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 = r^2 \} \right),$$

für den die ganze Kreisfläche $F_K(r, x_0, y_0)$

$$\left(F_K(r, x_0, y_0) := \{(x, y) \mid |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 \leq r^2 \} \right)$$

ganz zu G gehört ($F_K(r, x_0, y_0) \subseteq G$) gilt:

$$\begin{aligned} \phi(r) &:= \frac{1}{2\pi r} \int_{K(r, x_0, y_0)} U(x, y) |dK| \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} U(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) 2\pi r d\varphi \\ &= U(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (11.51)$$

B) Ist G ferner zusätzlich kurvenmäßig zusammenhängend, so folgt aus (11.51):

$$\begin{aligned} U(\bar{x}, \bar{y}) &= \inf \left\{ U(x, y) \mid (x, y) \in G \right\} \text{ für ein } (\bar{x}, \bar{y}) \in G \\ \Rightarrow U(x, y) &\text{ ist konst. auf } G \end{aligned} \quad (11.52)$$

$$\begin{aligned} U(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}) &= \sup \left\{ U(x, y) \mid (x, y) \in G \right\} \text{ für ein } (\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}) \in G \\ \Rightarrow U(x, y) &\text{ ist konst. auf } G \end{aligned} \quad (11.53)$$

C) Ist G zusätzlich noch beschränkt und $U(x, y)$ auf $G \cup \partial G$ stetig, so gilt

$$\max_{(\bar{x}, \bar{y}) \in \partial G} U(\bar{x}, \bar{y}) \geq U(x, y) \geq \min_{(\bar{x}, \bar{y}) \in \partial G} U(\bar{x}, \bar{y}) \text{ für alle } (x, y) \in G. \quad (11.54)$$

Gilt für ein $(x, y) \in G$ in (11.54) das Gleichheitszeichen, so ist $U(x, y)$ konstant auf $G \cup \partial G$.

Beweis:

Zu A) Sei $\phi(r)$ für $(x_0, y_0) \in G$ und $r \leq r_0 > 0$ existent. Für auf G stetig differenzierbares $U(x, y)$ gilt:

$$\frac{\partial}{\partial r} \phi(r) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x} U(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi), \frac{\partial}{\partial y} U(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) \right) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} d\varphi \quad (11.55)$$

Dabei ist $\vec{n}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$ der nach außen gerichtete Einheitsvektor senkrecht zum Kreis $K(r, x_0, y_0)$ am Punkt $(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi)$. Nennt man $dK = 2\pi r d\varphi$ die Länge des Kreisbogens, der zum Winkелеlement $d\varphi > 0$ gehört, so gilt

$$\frac{\partial}{\partial r} \phi(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{K(r, x_0, y_0)} \text{grad } U(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) \cdot \vec{n}(\varphi) dK \quad (11.56)$$

Aufgrund des Gaußschen Integralsatzes kann dieses Kurvenintegral über die Randkurve in ein Flächenintegral über die Innenfläche umgeschrieben werden. Somit folgt

$$\frac{\partial}{\partial r} \phi(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{F_K(r, x_0, y_0)} \overbrace{\text{div grad}}^{:=\Delta} U(x, y) dx dy = 0 \quad (11.57)$$

Da sich ferner aufgrund der Stetigkeit von $U(x, y)$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \phi(r) = U(x_0, y_0)$$

ergibt, gilt für alle r , für die $F_K(r, x_0, y_0) \subseteq G$ erfüllt ist,

$$\phi(r) = U(x_0, y_0)$$

und somit Behauptung A).

Zu B) Sei (11.52) erfüllt. Dann gilt für jede Kreisscheibe $F_K(r, \bar{x}, \bar{y})$, die ganz in G liegt:

$$0 = \frac{1}{2\pi r} \int_{K(r, \bar{x}, \bar{y})} |U(x, y) - U(\bar{x}, \bar{y})| dK. \quad (11.58)$$

Dies ist nur möglich, falls $U(x, y) = U(\bar{x}, \bar{y})$ für $(x, y) \in K(r, \bar{x}, \bar{y})$. Da r beliebig ist, solange $F_K(r, \bar{x}, \bar{y})$ in G liegt, folgt sofort auch

$$U(x, y) = U(\bar{x}, \bar{y}) \text{ für } (x, y) \in F_K(r, \bar{x}, \bar{y}),$$

solange $F_K(r, \bar{x}, \bar{y})$ in G liegt.

Sei nun (x_1, y_1) ein beliebiger anderer Punkt aus G . Da G kurvenmäßig zusammenhängend ist, gibt es eine stetige Abbildung $C(\eta) : [0, 1] \rightarrow G$ mit $C(0) = (\bar{x}, \bar{y})$ und $C(1) = (x_1, y_1)$.

Annahme: $\{\eta \mid \eta \in [0, 1] \text{ und } U(C(\eta)) \neq U(\bar{x}, \bar{y})\} = M \neq \emptyset$

Sei $\bar{\eta} := \inf M$. $U(C(\bar{\eta}))$ ist stetig auf $[0, 1]$, woraus folgt

$$U(C(\bar{\eta})) = U(\bar{x}, \bar{y})$$

und in jeder Umgebung um $C(\bar{\eta})$ gibt es einen Kurvenpunkt $C(\hat{\eta})$ mit

$$U(C(\hat{\eta})) \neq U(\bar{x}, \bar{y}).$$

Dies steht im Widerspruch zu der Tatsache, dass es für $C(\bar{\eta}) \in G$ immer eine Kreisscheibe $F_K(r, C(\bar{\eta}))$ mit $r > 0$ gibt, die ganz in G liegt. Aufgrund von A) und dem weiter oben Gezeigten muss dann

$$U(C(\hat{\eta})) = U(\bar{x}, \bar{y}) \text{ für alle } C(\hat{\eta}) \in F_K(r, C(\bar{\eta}))$$

gelten. Somit muss die obige Annahme falsch sein. M ist also die leere Menge und $U(x_1, y_1) = U(\bar{x}, \bar{y})$. Da (x_1, y_1) beliebig aus G gewählt wurde, folgt somit die Behauptung (11.52). (11.53) folgt analog mit einem entsprechenden Beweis.

Zu C) Da $U(x, y)$ auf der kompakten Menge $G \cup \partial G$ stetig ist, nimmt $U(x, y)$ sein Maximum und sein Minimum auf dieser kompakten Menge an. Nimmt $U(x, y)$ sein Maximum oder Minimum auf G an, so muss $U(x, y)$ nach B) konstant sein. Falls $U(x, y)$ nicht konstant ist, nimmt $U(x, y)$ sein Maximum oder Minimum somit auf ∂G an, woraus (11.54) unmittelbar folgt.

Bemerkung 11.2

Sei $\underline{H}(\underline{s})$ eine für $\Re\{\underline{s}\} > 0$ nicht konstante, positive Funktion, dann gilt

$$\Re\{\underline{H}(\underline{s})\} > 0 \text{ für } \Re\{\underline{s}\} > 0 \quad (11.59)$$

Beweis:

Nach Satz 11.4 hat $\underline{H}(\underline{s})$ keine Polstellen für $\Re\{\underline{s}\} > 0$. Da $\underline{H}(\underline{s})$ eine gebrochen rationale Funktion ist, ist $\underline{H}(\underline{s})$ somit für $\Re\{\underline{s}\} > 0$ holomorph und $\Re\{\underline{H}(\underline{s})\}$ somit für $\Re\{\underline{s}\} > 0$ harmonisch. Sei $A = \inf \{\Re\{\underline{H}(\underline{s})\} \mid \Re\{\underline{s}\} > 0\}$. Nach Satz 11.5 B) nimmt $\Re\{\underline{H}(\underline{s})\}$, da diese Funktion auf $\Re\{\underline{s}\} > 0$ nicht konstant ist, das Infimum für $\Re\{\underline{s}\} > 0$ nicht an. Es gilt somit

$$\Re\{\underline{H}(\underline{s})\} > A \geq 0 \text{ für } \Re\{\underline{s}\} > 0$$

und somit die Behauptung.

Satz 11.6

Sei $\underline{H}(\underline{s})$ eine gebrochen rationale Funktion auf der komplexen Ebene, für die $(\underline{H}(\underline{s}))^* = \underline{H}(\underline{s}^*)$ gilt und die keine Pole im Gebiet $\Re\{\underline{s}\} > 0$ hat.

$\underline{H}(\underline{s})$ erfüllt ferner die Bedingungen unter A), D) und E) aus Satz 11.4. Dies impliziert, dass $\underline{H}(\underline{s})$ eine positive Funktion ist.

Beweis:

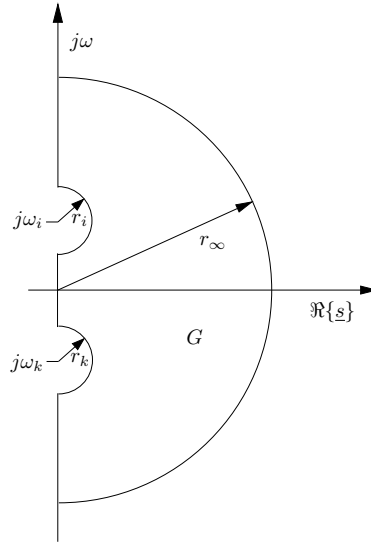


Abbildung 11.6

Es sei das in Abbildung 11.6 angegebene von Teilen der imaginären Achse und Halbkreisbögen mit den Radien r_i , r_k und r_∞ berandete, in der rechten Halbebene $\Re\{\underline{s}\} > 0$ liegende Gebiet G betrachtet.

Es sei exemplarisch angenommen, dass $\underline{H}(\underline{s})$ für $\underline{s} = j\omega_i$ und $\underline{s} = j\omega_k$ Pole hat. Die Radien r_i und r_k seien so klein gewählt, dass $R_i(\underline{s} - j\omega_i)$ und $R_k(\underline{s} - j\omega_k)$ aus (11.41) auf den jeweiligen Kreisbögen betragsmäßig kleiner als ε für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ sind. Aufgrund (11.41) ist dies möglich. Ferner sei r_∞ so groß gewählt, dass $R_\infty(\underline{s})$ aus (11.42) auf dem Halbkreis mit dem Radius r_∞ betragsmäßig kleiner als ε ist. Dies ist nach (11.42) ebenfalls möglich. Aufgrund der Voraussetzungen folgt somit, dass auf der Berandung von G

$$\Re\{\underline{H}(\underline{s})\} \geq -\varepsilon$$

gilt. Das Gebiet ist ferner beschränkt und kurvenmäßig zusammenhängend. Ferner ist $\underline{H}(\underline{s})$ außer an den Polstellen holomorph und somit $\Re\{\underline{H}(\underline{s})\}$ harmonisch auf G und stetig auf $G \cup \partial G$. Mit Satz 11.5 C) folgt somit

$$\Re\{\underline{H}(\underline{s})\} \geq -\varepsilon \text{ auf } G.$$

Da r_i , r_k beliebig klein, r_∞ beliebig groß und ε daher ebenfalls beliebig klein gewählt werden kann, folgt somit

$$\Re\{\underline{H}(\underline{s})\} \geq 0 \text{ für } \Re\{\underline{s}\} > 0$$

und somit die Behauptung.

11.2 Absolut stabile Zweitornetzwerkmodelle

Verstärkerzweitore müssen oft unter der Nebenbedingung variabler Eintore auf der Last- oder der Generatorseite entworfen werden, wobei zumeist angenommen werden kann, dass, bei Abschaltung aller ungesteuerten Quellen an den Eintoren, die Eintore passive sind. Wichtige Beispiele sind die Verstärker, die Antennensignale verstärken oder Antennen treiben müssen, da Antennen insbesondere bei mobilen Anwendungen stark variable Admittanzfunktionen abhängig von der Umgebung haben. In diesen Fällen ist es wichtig den Verstärker so zu entwerfen, dass er auch bei variablen Admittanzen auf der Last- oder Generatorseite asymptotisch stabil bleibt. Dies führt auf den Begriff der absoluten Stabilität (engl. unconditional stability).

Definition 11.3

Es sei ein lineares, zeitinvariantes Zweipol-Netzwerkmodell gegeben, das aus den am Anfang von Kap. 8.1 aufgeführten elementaren Zweipolen besteht und eine eindeutige Lösung im Sinne von Bem. 8.16 hat. Durch die Festlegung von zwei Toren wie in Abbildung 11.7 gezeigt zerfällt das Netzwerkmodell in zwei Eintore und ein Zweitor. Die Gleichungen des Netzwerkmodells sollen eine Anwendung des Substitutionstheorems an den Toren erlauben. Ferner sollen die Eintore bei Abschaltung der inneren festen ungesteuerten Quellen passiv im Sinne von Definition 11.1 sein und im Sinne von Satz 9.5 sowohl eine Ersatzstromquellen- als auch eine Ersatzspannungsquellendarstellung haben mit Impedanzfunktionen $\underline{Z}(\underline{s})$ und Admittanzfunktionen $\underline{Y}(\underline{s}) = \frac{1}{\underline{Z}(\underline{s})}$, die nach Definition 11.2 positive Funktionen sind und für die für alle reellen ω

$$\Re\{\underline{Z}(j\omega)\} > 0 \text{ bzw. } \Re\{\underline{Y}(j\omega)\} > 0 \quad (11.60)$$

gilt. Darüber hinaus seien die Eintore sowohl bei einem Abschluss mit einer idealen Spannungsquelle als auch bei einem Abschluss mit einer idealen Stromquelle asymptotisch stabil. Das Zweitor sei nun festgehalten und die Eintore werden unter Beibehaltung der obigen Voraussetzungen beliebig variiert. Ist das Netzwerkmodell dabei für alle zulässigen Variationen der Eintore asymptotisch stabil, so heißt das Zweitor absolut stabil.

Falls das Netzwerkmodell für eine der Eintorvariationen nicht asymptotisch stabil ist, so gibt es nach Bemerkung 8.27 einen Satz von nicht verschwindenden Anfangszuständen, so dass alle Netzwerkvariablen die Form $a(t) = \Re\{\underline{A} e^{\underline{s}_0 t}\}$ mit $\Re\{\underline{s}_0\} \geq 0$ haben. Gilt für eine der Torvariablen des Zweitors, dass diese nicht für alle Zeiten verschwindet (dies bedeutet $\underline{A} \neq 0$), so bedeutet dies, dass die Instabilität an den Toren beobachtet werden kann (kurz: torbeobachtbar ist).

Satz 11.7

Es sei ein Netzwerkmodell wie in Definition 11.3 beschrieben und in Abbildung 11.7 gezeigt gegeben.

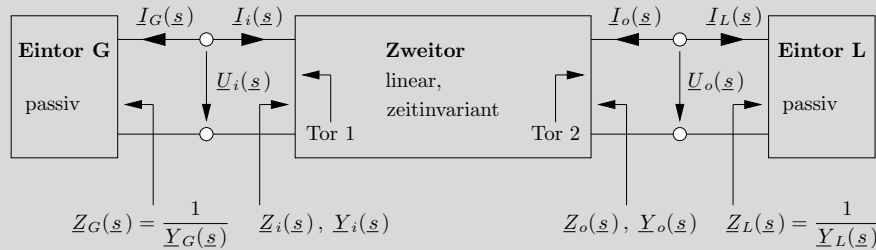


Abbildung 11.7

Das Netzwerkmodell sei nicht absolut stabil und diese Instabilität sei torbeobachtbar (siehe Def. 11.3). Es gibt somit zwei Eintore L und G , so dass eine der Torvariablen die Form $a(t) = \Re\{\underline{A} e^{s_0 t}\}$ mit $\underline{A} \neq 0$ und $\Re\{s_0\} \geq 0$ hat.

Sei nun angenommen, dass eine der Torvariablen an Tor 1 nicht verschwindet und diese Torvariable $u_i(t)$ ist. Somit gilt:

$$0 \neq u_i(t) = \Re\{\underline{U}_i e^{s_0 t}\} \text{ mit } \underline{U}_i \neq 0, \Re\{s_0\} \geq 0$$

Dann folgt:

A) Hat das Zweitor eine \underline{Y} -Parameterdarstellung mit $\underline{Y}_{11}(s)$ und $\underline{Y}_{22}(s)$, die positive Funktionen sind, und ist das Zweitor bei Abschluss mit idealen Spannungsquellen an den Toren asymptotisch stabil und hat das Zweitor an Tor 1 bei Belastung durch das Eintor L an Tor 2 eine Ersatzstromquellendarstellung, so folgt:

1. $\underline{Y}_i(s_0)$ existiert
2. $\underline{Y}_i(s) = \underline{Y}_{11}(s) - \frac{\underline{Y}_{12}(s) \underline{Y}_{21}(s)}{\underline{Y}_{22}(s) + \underline{Y}_L(s)}, \Re\{s\} \geq 0$
3. $\Re\{\underline{Y}_i(s_0)\} < 0 \Rightarrow \underline{Y}_i(s)$ ist keine positive Funktion.

B) Hat das Zweitor eine \underline{Z} -Parameterdarstellung mit $\underline{Z}_{11}(s)$ und $\underline{Z}_{22}(s)$, die positive Funktionen sind, und ist das Zweitor bei Abschluss mit idealen Stromquellen asymptotisch stabil und hat das Zweitor an Tor 1 bei Belastung durch das Eintor L an Tor 2 eine Ersatzspannungsquellendarstellung, so folgt:

1. $\underline{Z}_i(s_0)$ existiert
2. $\underline{Z}_i(s) = \underline{Z}_{11}(s) - \frac{\underline{Z}_{12}(s) \underline{Z}_{21}(s)}{\underline{Z}_{22}(s) + \underline{Z}_L(s)}, \Re\{s\} \geq 0$
3. $\Re\{\underline{Z}_i(s_0)\} < 0 \Rightarrow \underline{Z}_i(s)$ ist keine positive Funktion.

Die entsprechenden Aussagen A) und B) gelten ebenfalls, falls $i_i(t) = \Re\{\underline{I}_i e^{s_0 t}\}$ nicht verschwindet, und analog für $\underline{Y}_o(s)$ bzw. $\underline{Z}_o(s)$, falls eine der Torvariablen an Tor 2 nicht verschwindet.

Beweis zu A)

Die nach Voraussetzung existierenden Eintore L und G werden im folgenden Beweis als fest vorgegeben betrachtet und nicht verändert.

Es werde zunächst das Netzwerkmodell betrachtet, das aus dem Netzwerkmodell aus Abbildung 11.7 entsteht, wenn man das Eintor G durch eine ideale Spannungsquelle substituiert. Die Impedanzfunktion $\underline{Y}_i(\underline{s})$ existiert nach Voraussetzung. $\underline{Y}_i(\underline{s}_0)$ existiert als endliche komplexe Zahl, wenn \underline{s}_0 keine natürliche Frequenz des Netzwerkmodells nach der Substitution ist und somit $\det \hat{\underline{N}}(\underline{s}_0) \neq 0$ gilt, wobei $\hat{\underline{N}}(\underline{s}_0)$ die Tableaumatrix des Netzwerkmodells nach der Substitution ist.

Falls $\det \hat{\underline{N}}(\underline{s}_0) = 0$ gilt, gibt es nach dem Beweis von Bemerkung 8.27 eine nicht verschwindende Lösung für das unerregte Netzwerkmodell nach der Substitution (d.h. alle ungesteuerten Quellen und insbesondere $u_i(t)$ sind gleich 0), bei der alle Netzwerkvariablen die Form (8.203) haben. Insbesondere gilt

$$u_o(t) = \Re\{\underline{U}_o e^{\underline{s}_0 t}\}.$$

Da das Zweitor eine Y -Parameterdarstellung hat, wird die Lösung am Zweitor reproduziert, falls man das Eintor L durch die Spannungsquelle $v(t) = \Re\{\underline{U}_o e^{\underline{s}_0 t}\}$ substituiert. Da ferner das Zweitor bei Abschluss mit idealen Spannungsquellen asymptotisch stabil ist (und somit für alle seine natürlichen Frequenzen $\Re\{\underline{s}\} < 0$ gilt) und $\Re\{\underline{s}_0\} \geq 0$ ist, folgt nach Satz 11.2 und (11.23), da $u_i(t) \equiv 0$ gilt:

$$\underline{I}_o = \underline{Y}_{22}(\underline{s}_0) \underline{U}_o. \quad (11.61)$$

Da das Eintor L eine Ersatzstromquellendarstellung hat, wird die Lösung an Eintor L ebenfalls reproduziert, falls das Zweitor am Eintor L durch die ideale Spannungsquelle $v(t) = \Re\{\underline{U}_o e^{\underline{s}_0 t}\}$ substituiert wird. Da ferner das Eintor L bei Abschluss mit einer idealen Spannungsquelle asymptotisch stabil ist, folgt wiederum nach Satz 11.2 wegen $\Re\{\underline{s}_0\} \geq 0$

$$\underline{I}_L = \underline{Y}_L(\underline{s}_0) \underline{U}_o \quad (11.62)$$

Nach Abbildung 11.7 gilt

$$i_L(t) = -i_o(t) \Rightarrow \underline{I}_L = -\underline{I}_o.$$

Falls $\underline{U}_o \neq 0$ folgt

$$\underline{Y}_{22}(\underline{s}_0) + \underline{Y}_L(\underline{s}_0) = 0 \quad (11.63)$$

Aufgrund der Voraussetzungen folgt andererseits

$$\Re\{\underline{Y}_{22}(\underline{s}_0)\}_{\geq 0} + \Re\{\underline{Y}_L(\underline{s}_0)\}_{>0} > 0 \quad (11.64)$$

und somit ein Widerspruch.

Es muss also $\underline{U}_o = 0$, also $u_o(t) \equiv 0$, gelten.

Daraus folgt aber, dass es entweder für das Eintor L oder das Zweitor bei Kurzschluss an den Toren eine nicht verschwindende Lösung der Form (8.203) gibt. Dies ist aber ebenfalls nicht möglich aufgrund der Stabilitätsvoraussetzungen für das Eintor L und das Zweitor. Insgesamt muss daher $\det \hat{\underline{N}}(\underline{s}_0) \neq 0$ gelten und die Behauptung A)1. ist bewiesen.

A)2. folgt analog zu Bemerkung 9.10, da $\Re\{\underline{Y}_{22}(\underline{s})\} + \Re\{\underline{Y}_L(\underline{s})\} > 0$ für $\Re\{\underline{s}\} \geq 0$ nach Voraussetzung.

Sei nun das Netzwerkmodell aus Abbildung 11.7 betrachtet und die Existenz einer Lösung der Form (8.203) mit $u_i(t) \neq 0$ ($\Rightarrow \underline{U}_i \neq 0$) und $\Re\{\underline{s}_0\} \geq 0$ weiterhin vorausgesetzt. Substituiert man nun das Zweitor G durch eine ideale Spannungsquelle mit $v(t) = u_i(t) = \Re\{\underline{U}_i e^{\underline{s}_0 t}\}$, so wird die obige Lösung im Restnetzwerkmodell reproduziert. Da nach A)1. \underline{s}_0 keine natürliche Frequenz des Restnetzwerkmodells sein kann, folgt nach Satz 11.2

$$\underline{I}_i = \underline{Y}_i(\underline{s}_0) \underline{U}_i. \quad (11.65)$$

Ebenso folgt

$$\underline{I}_G = \underline{Y}_G(\underline{s}_0) \underline{U}_i \quad (11.66)$$

bei Substitution des Restnetzwerks durch die ideale Spannungsquelle $v(t)$ für das Eintor G . Aufgrund der Kirchhoffschen Gesetze gilt

$$\begin{aligned} i_i(t) = -i_G(t) &\Rightarrow \underline{I}_i = -\underline{I}_G \\ &\Rightarrow \underline{Y}_i(\underline{s}_0) = -\underline{Y}_G(\underline{s}_0) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \underline{U}_i \neq 0 \\ &\Rightarrow \Re\{\underline{Y}_i(\underline{s}_0)\} = -\Re\{\underline{Y}_G(\underline{s}_0)\} < 0 \end{aligned} \quad (11.67)$$

Damit ist auch die Behauptung A)3. bewiesen.

Zu B)

Aufgrund der Voraussetzungen für das Eintor G folgt nach der Substitution des mit dem Eintor L belasteten Zweitores durch die ideale Spannungsquelle $v(t) = \Re\{\underline{U}_i e^{s_0 t}\}$, dass die Lösung der Gestalt (8.203) am Zweitor G reproduziert wird und mit Satz 11.2 gilt

$$\underline{I}_G = \underline{Y}_G(\underline{s}_0) \underline{U}_i. \quad (11.68)$$

Aufgrund der asymptotischen Stabilität des Zweipols G bei Abschluss mit einer idealen Spannungsquelle ist $\underline{Y}_G(\underline{s}_0)$ endlich. Da $\underline{Y}_G(\underline{s})$ eine positive Funktion ist, gilt ferner mit Bem. 11.2 und (11.60) für $\Re\{\underline{s}_0\} \geq 0$

$$\Re\{\underline{Y}_G(\underline{s}_0)\} > 0 \Rightarrow \underline{Y}_G(\underline{s}_0) \neq 0 \quad (11.69)$$

Aufgrund von $\underline{U}_i \neq 0$ folgt somit $\underline{I}_G = -\underline{I}_i \neq 0$.

Man darf also auch $\underline{I}_i \neq 0$ voraussetzen. Damit wird der Beweis von B) analog zum Beweis von A), wenn man bei den Substitutionen statt mit idealen Spannungsquellen mit idealen Stromquellen argumentiert.

Da ferner das Ausgangsproblem bezüglich der Tore 1 und 2 symmetrisch formuliert ist, folgen die entsprechenden Aussagen A) bzw. B) für $\underline{Y}_o(\underline{s})$ bzw. $\underline{Z}_o(\underline{s})$, falls man

$$u_o(t) = \Re\{\underline{U}_o e^{s_0 t}\} \neq 0 \quad (\Rightarrow \underline{U}_o \neq 0)$$

voraussetzen darf. Damit ist Satz 11.7 vollständig bewiesen.

Satz 11.8

Es sei ein Netzwerkmodell wie in Definition 11.3 beschrieben und wie in Abbildung 11.7 gezeigt gegeben. Dann gilt:

- A) Falls das Zweitor eine \underline{Y} -Parameterdarstellung besitzt, so dass $\underline{Y}_{11}(\underline{s})$ und $\underline{Y}_{22}(\underline{s})$ positive Funktionen sind und das Zweitor bei Abschluss mit idealen Spannungsquellen asymptotisch stabil ist und ferner das Zweitor an Tor 1 bzw. Tor 2 bei gleichzeitiger Belastung an Tor 2 mit dem Eintor L bzw. an Tor 1 mit dem Eintor G jeweils eine Ersatzstromquellendarstellung hat, so lauten hinreichende Bedingungen dafür, dass es keine torbeobachtbare Instabilität bei diesem Zweitor bei Belastung durch die Eintore G und L geben kann, wie folgt:

$$1. \quad F(j\omega) := 2 \cdot \Re\{\underline{Y}_{11}(j\omega)\} \Re\{\underline{Y}_{22}(j\omega)\} - \Re\{\underline{Y}_{12}(j\omega) \underline{Y}_{21}(j\omega)\} - |\underline{Y}_{12}(j\omega) \underline{Y}_{21}(j\omega)| \geq 0 \quad \text{für } 0 \leq \omega < \infty \quad (11.70)$$

2. Die \underline{Y} -Parameter haben für große $|\underline{s}|$ eine Darstellung der Form

$$\underline{Y}_{ik}(\underline{s}) = \underline{C}_{\infty,ik} \underline{s} + \underline{B}_{\infty,ik} + \underline{R}_{\infty,ik}(\underline{s}) \quad (11.71)$$

$$\text{mit } |\underline{R}_{\infty,ik}(\underline{s})| < D_{\infty,ik} \frac{1}{|\underline{s}|} \quad \text{für } |\underline{s}| > \eta_{\infty,ik}$$

mit $i, k = 1, 2$ und es gilt

$$\underline{C}_{\infty,11} \cdot \underline{C}_{\infty,22} - \underline{C}_{\infty,12} \cdot \underline{C}_{\infty,21} \geq 0 \quad (11.72)$$

Dabei ist die (11.72) so zu lesen, dass die linke Seite reell ist und positiv. Aufgrund von Satz 11.4 und den Voraussetzungen sind $\underline{C}_{\infty,11}$ und $\underline{C}_{\infty,22}$ reell und positiv.

- B) Falls das Zweitor eine \underline{Z} -Parameterdarstellung besitzt, so dass $\underline{Z}_{11}(\underline{s})$ und $\underline{Z}_{22}(\underline{s})$ positive Funktionen sind und das Zweitor bei Abschluss mit idealen Stromquellen asymptotisch stabil ist und ferner das Zweitor an Tor 1 bzw. Tor 2 bei gleichzeitiger Belastung an Tor 2 mit dem Eintor L bzw. an Tor 1 mit dem Eintor G eine Ersatzspannungsquellendarstellung hat, so lauten hinreichende Bedingungen dafür, dass es keine torbeobachtbare Instabilität bei diesem Zweitor bei Belastung durch die Eintore G und L geben kann, wie folgt:

$$1. \quad 2 \cdot \Re\{\underline{Z}_{11}(j\omega)\} \Re\{\underline{Z}_{22}(j\omega)\} - \Re\{\underline{Z}_{12}(j\omega) \underline{Z}_{21}(j\omega)\} - |\underline{Z}_{12}(j\omega) \underline{Z}_{21}(j\omega)| \geq 0 \quad \text{für } 0 \leq \omega < \infty \quad (11.73)$$

2. Die \underline{Z} -Parameter haben für große $|\underline{s}|$ eine Darstellung der Form

$$\underline{Z}_{ik} = \underline{C}_{\infty,ik} \underline{s} + \underline{B}_{\infty,ik} + \underline{R}_{\infty,ik}(\underline{s}) \quad (11.74)$$

$$\text{mit } |\underline{R}_{\infty,ik}(\underline{s})| < D_{\infty,ik} \frac{1}{|\underline{s}|} \quad \text{für } |\underline{s}| > \eta_{\infty,ik}$$

mit $i, k = 1, 2$ und es gilt

$$\underline{C}_{\infty,11} \cdot \underline{C}_{\infty,22} - \underline{C}_{\infty,12} \cdot \underline{C}_{\infty,21} \geq 0 \quad (11.75)$$

Zum Beweis von A)

Falls $\underline{Y}_o(\underline{s})$ und $\underline{Y}_i(\underline{s})$ positive Funktionen sind, so kann es nach Satz 11.7 keine torbeobachtbare Instabilität geben. Aufgrund der Voraussetzungen und insbesondere der Stabilitätsbedingungen haben $\underline{Y}_o(\underline{s})$ und $\underline{Y}_i(\underline{s})$ keine Polstellen im Bereich $\Re\{\underline{s}\} \geq 0$. Daher sind nach Satz 11.6 nur die Bedingungen A) und E) aus Satz 11.4 für $\underline{Y}_o(\underline{s})$ und $\underline{Y}_i(\underline{s})$ zu zeigen, um sicherzustellen, dass $\underline{Y}_o(\underline{s})$ und $\underline{Y}_i(\underline{s})$ positive Funktionen sind.

Sei nun zunächst der Fall

$$\Re\{\underline{Y}_{11}(j\omega)\} = 0 \text{ oder } \Re\{\underline{Y}_{22}(j\omega)\} = 0 \quad (11.76)$$

betrachtet. In diesem Fall lautet die Bedingung (11.70)

$$-\Re\{\underline{Y}_{12}(j\omega) \underline{Y}_{21}(j\omega)\} \geq |\underline{Y}_{12}(j\omega) \underline{Y}_{21}(j\omega)| \quad (11.77)$$

Setzt man $\underline{Y}_{12}(j\omega) \underline{Y}_{21}(j\omega) = |\underline{Y}_{12}(j\omega) \underline{Y}_{21}(j\omega)| e^{j\varphi}$, dann folgt

$$-|\underline{Y}_{12}(j\omega) \underline{Y}_{21}(j\omega)| \cos \varphi \geq |\underline{Y}_{12}(j\omega) \underline{Y}_{21}(j\omega)|. \quad (11.78)$$

Dies ist nur möglich für

$$\underline{Y}_{12}(j\omega) = 0 \text{ oder } \underline{Y}_{21}(j\omega) = 0 \text{ oder } \varphi = \pi \text{ modulo } 2\pi \quad (11.79)$$

In den ersten beiden Fällen ist

$$\Re\{\underline{Y}_i(j\omega)\} \geq 0 \text{ und } \Re\{\underline{Y}_o(j\omega)\} \geq 0$$

gesichert. Im letzteren Fall gilt für $\underline{B} = (\underline{Y}_{22}(j\omega) + \underline{Y}_L(j\omega))$ mit $\underline{B} = |B| e^{j\varphi_B}$ und $|B| \neq 0$ sowie $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_B \leq \frac{\pi}{2}$ aufgrund der Voraussetzungen

$$\Re\left\{\frac{-\underline{Y}_{12}(j\omega)\underline{Y}_{21}(j\omega)}{\underline{B}}\right\} = \frac{|\underline{Y}_{12}(j\omega)\underline{Y}_{21}(j\omega)|}{|B|} \cos \varphi_B \geq 0, \quad (11.80)$$

woraus wiederum $\Re\{\underline{Y}_i(j\omega)\} \geq 0$ und mit einem analogen Argument ebenfalls $\Re\{\underline{Y}_o(j\omega)\} \geq 0$ folgt.

Im Folgenden sei nun

$$\Re\{\underline{Y}_{11}(j\omega)\} \neq 0 \text{ und } \Re\{\underline{Y}_{22}(j\omega)\} \neq 0 \quad (11.81)$$

angenommen. Dann lässt sich die Bedingung

$$\begin{aligned} \Re\{\underline{Y}_i(j\omega)\} &= \Re\{\underline{Y}_{11}(j\omega)\} - \Re\left\{\frac{\underline{Y}_{12}(j\omega)\underline{Y}_{21}(j\omega)}{\underline{Y}_{22}(j\omega) + \underline{Y}_L(j\omega)}\right\} \geq 0 \\ \text{für } \Re\{\underline{Y}_L(j\omega)\} &> 0 \text{ und } \Re\{\underline{Y}_{22}(j\omega)\} > 0 \end{aligned} \quad (11.82)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \Re\{\underline{Y}_{22}(j\omega) + \underline{Y}_L(j\omega)\} &= E > \Re\{\underline{Y}_{22}(j\omega)\} > 0 \\ \Im\{\underline{Y}_{22}(j\omega) + \underline{Y}_L(j\omega)\} &= F \\ \Re\{\underline{Y}_{12}(j\omega) \underline{Y}_{21}(j\omega)\} &= G \\ \Im\{\underline{Y}_{12}(j\omega) \underline{Y}_{21}(j\omega)\} &= H \\ \Re\{\underline{Y}_{11}(j\omega)\} &= R > 0 \end{aligned} \quad (11.83)$$

umformen in

$$\begin{aligned}
 R - \frac{GE + HF}{E^2 + F^2} &\geq 0 & (11.84) \\
 \Leftrightarrow E^2 + F^2 - \frac{G}{R}E - \frac{H}{R}F &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow E^2 + F^2 - \frac{G}{R}E - \frac{H}{R}F + \frac{G^2}{4R^2} + \frac{H^2}{4R^2} &\geq \frac{G^2 + H^2}{4R^2} \\
 \Leftrightarrow \left(E - \frac{G}{2R}\right)^2 + \left(F - \frac{H}{2R}\right)^2 &\geq \frac{G^2 + H^2}{4R^2} \quad \text{für } E > \Re\{\underline{Y}_{22}(j\omega)\} > 0. & (11.85)
 \end{aligned}$$

Diese Bedingung ist genau dann für ein beliebiges $\underline{Y}_L(j\omega)$ mit $\Re\{\underline{Y}_L(j\omega)\} > 0$ erfüllt, falls für das Infimum von E , das durch $\Re\{\underline{Y}_{22}(j\omega)\} > 0$ gegeben ist,

$$\Re\{\underline{Y}_{22}(j\omega)\} - \frac{G}{2R} \geq \frac{\sqrt{G^2 + H^2}}{2R} \quad (11.86)$$

gilt. Setzt man die Abkürzungen ein, so folgt als notwendige und hinreichende Bedingung für $\Re\{\underline{Y}_i(j\omega)\} \geq 0$ sofort (11.70). Man rechnet leicht nach, dass (11.70) ebenfalls garantiert, dass $\Re\{\underline{Y}_o(j\omega)\} \geq 0$ gilt.

Damit ist Bedingung A) aus Satz 11.4 für $\underline{Y}_o(\underline{s})$ und $\underline{Y}_i(\underline{s})$ gezeigt.

Um Bedingung E) aus Satz 11.4 ebenfalls zu zeigen, seien (11.71) und (11.72) angenommen. Aus den angenommenen asymptotischen Entwicklungen für große \underline{s} folgt mit der Voraussetzung, Satz 11.4 E) und (11.70):

$$\begin{aligned}
 \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{F(j\omega)}{|\omega|^2} &= \Re\{\underline{C}_{\infty,12}\underline{C}_{\infty,21}\} - |\underline{C}_{\infty,12}\underline{C}_{\infty,21}| \geq 0 & (11.87) \\
 &\uparrow \\
 \underline{C}_{\infty,11} &\geq 0 \\
 \underline{C}_{\infty,22} &\geq 0
 \end{aligned}$$

Aufgrund einer zu (11.77) - (11.79) analogen Überlegung ist dies nur möglich, falls gilt:

$$\underline{C}_{\infty,12} = 0 \quad \text{oder} \quad \underline{C}_{\infty,21} = 0 \quad \text{oder} \quad \underline{C}_{\infty,12}\underline{C}_{\infty,21} > 0 \quad (11.88)$$

Sei nun ferner zunächst

$$\underline{C}_{\infty,11} = 0 \quad \text{oder} \quad \underline{C}_{\infty,22} = 0 \quad (11.89)$$

angenommen. Dann folgt aus (11.72)

$$-\underline{C}_{\infty,12} \cdot \underline{C}_{\infty,21} \geq 0. \quad (11.90)$$

Mit (11.88) impliziert dies $\underline{C}_{\infty,12} = 0$ oder $\underline{C}_{\infty,21} = 0$.

Sei nun $\underline{C}_{\infty,12} \neq 0$ und $\underline{C}_{\infty,21} = 0$, aber $\underline{D}_{\infty,21} \neq 0$ weiterhin angenommen. Dann folgt

$$\begin{aligned}
 \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{F(j\omega)}{|\omega|} &= -\Re\left\{\frac{1}{|\omega|} j\omega \underline{C}_{\infty,12} \underline{D}_{\infty,21}\right\} - |\underline{C}_{\infty,12} \underline{D}_{\infty,21}| \\
 &= +\Im\{\underline{C}_{\infty,12} \underline{D}_{\infty,21}\} - |\underline{C}_{\infty,12} \underline{D}_{\infty,21}| \\
 \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \frac{F(j\omega)}{|\omega|} &= -\Re\left\{\frac{1}{|\omega|} j\omega \underline{C}_{\infty,12} \underline{D}_{\infty,21}\right\} - |\underline{C}_{\infty,12} \underline{D}_{\infty,21}| \\
 &= -\Im\{\underline{C}_{\infty,12} \underline{D}_{\infty,21}\} - |\underline{C}_{\infty,12} \underline{D}_{\infty,21}|
 \end{aligned}$$

Mindestens eine der Bedingungen führt zu einem Widerspruch dazu, dass $F(j\omega)$ auch für große ω positiv bleiben muss.

Analog führt auch die Annahme $\underline{C}_{\infty,21} \neq 0$ und $\underline{C}_{\infty,21} = 0$ aber $\underline{D}_{\infty,21} \neq 0$ zu einem Widerspruch zu (11.70).

Unter der Bedingung (11.89) schließen (11.70) und (11.72) die Fälle

$$\begin{aligned} & \underline{C}_{\infty,12} \cdot \underline{C}_{\infty,21} \neq 0 \text{ oder } \underline{C}_{\infty,12} \cdot \underline{D}_{\infty,21} \neq 0, \quad \underline{C}_{\infty,21} = 0 \\ & \text{oder } \underline{C}_{\infty,21} \cdot \underline{D}_{\infty,12} \neq 0, \quad \underline{C}_{\infty,12} = 0 \end{aligned} \quad (11.91)$$

somit aus. Die einzige weitere Möglichkeit, dass z. B. $\underline{Y}_i(\underline{s}) - \underline{Y}_{11}(\underline{s})$ für $|\underline{s}| \rightarrow \infty$ nicht endlich bleibt, ergibt sich durch die Annahme $\underline{D}_{\infty,12} \cdot \underline{D}_{\infty,21} \neq 0$ und $\lim_{|\underline{s}| \rightarrow \infty} (\underline{Y}_{22}(\underline{s}) + \underline{Y}_L(\underline{s})) = 0$.

$\underline{Y}_{22}(\underline{s}) + \underline{Y}_L(\underline{s})$ ist aufgrund der Voraussetzungen eine positive Funktion, so dass nach Satz 11.4 für große $|\underline{s}|$ folgendes angenommen werden darf:

$$\frac{1}{\underline{Y}_{22}(\underline{s}) + \underline{Y}_L(\underline{s})} = \overline{C}_{\infty} \underline{s} + \overline{D}_{\infty} + \overline{R}_{\infty}(\underline{s}) \quad (11.92)$$

mit $\overline{C}_{\infty} > 0$, $\Re\{\overline{D}_{\infty}\} \geq 0$ und $\lim_{|\underline{s}| \rightarrow \infty} |\overline{R}_{\infty}(\underline{s})| = 0$. Ferner folgt aus $\lim_{|\underline{s}| \rightarrow \infty} (\underline{Y}_{22}(\underline{s}) + \underline{Y}_L(\underline{s})) = 0$ und $\Re\{\underline{Y}_{22}(\underline{s})\} \geq 0$ und $\Re\{\underline{Y}_L(\underline{s})\} > 0$ für $\Re\{\underline{s}\} \geq 0$ sofort $\lim_{|\underline{s}| \rightarrow \infty} \Re\{\underline{Y}_{22}(\underline{s})\} = 0$ für $\Re\{\underline{s}\} \geq 0$.

Somit folgt für $F(j\omega)$ aus (11.70)

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} F(j\omega) = -\Re\{\underline{D}_{\infty,12} \underline{D}_{\infty,21}\} - |\underline{D}_{\infty,12} \underline{D}_{\infty,21}| \geq 0. \quad (11.93)$$

Dies ist, wie man analog zu (11.77) - (11.79) zeigt, nur möglich für $-\underline{D}_{\infty,12} \underline{D}_{\infty,21} > 0$. Somit gilt in diesem Fall für große $|\underline{s}|$

$$\frac{-\underline{Y}_{12}(\underline{s}) \underline{Y}_{21}(\underline{s})}{\underline{Y}_{22}(\underline{s}) + \underline{Y}_L(\underline{s})} = \underbrace{-\underline{D}_{\infty,12} \underline{D}_{\infty,21} \overline{C}_{\infty}}_{> 0} \underline{s} + \underline{G}_{\infty}(\underline{s}) \quad (11.94)$$

mit für alle \underline{s} beschränktem $\underline{G}_{\infty}(\underline{s})$.

Somit ist gezeigt, dass der Entwicklungskoeffizient $\underline{C}_{\infty,i}$ aus (11.42) für $\underline{Y}_i(\underline{s})$ unter der Bedingung (11.89) immer positiv ist. Analog lässt sich dies auch für $\underline{Y}_o(\underline{s})$ sofort zeigen.

Verbleibt noch der Fall

$$\underline{C}_{\infty,11} \neq 0 \text{ und } \underline{C}_{\infty,22} \neq 0. \quad (11.95)$$

In diesem Fall gilt für $\underline{Y}_i(\underline{s})$

$$\underline{C}_{\infty,i} = \underline{C}_{\infty,11} - \frac{\underline{C}_{\infty,12} \underline{C}_{\infty,21}}{\underline{C}_{\infty,22} + \underline{C}_{\infty,L}}$$

Dabei ist $\underline{C}_{\infty,L}$ der Entwicklungskoeffizient aus (11.42) für $\underline{Y}_L(\underline{s})$. $\underline{Y}_L(\underline{s})$ ist eine positive Funktion und somit $\underline{C}_{\infty,L} \geq 0$ nach (11.42). Mit (11.88) folgt daher

$$\underline{C}_{\infty,i} \geq \underline{C}_{\infty,11} - \frac{\underline{C}_{\infty,12} \underline{C}_{\infty,21}}{\underline{C}_{\infty,22}} \underset{\substack{\geq \\ \uparrow}}{(11.75)} 0. \quad (11.75)$$

Analog gilt für $\underline{Y}_o(\underline{s})$

$$\underline{C}_{\infty,o} \geq \underline{C}_{\infty,22} - \frac{\underline{C}_{\infty,12} \underline{C}_{\infty,21}}{\underline{C}_{\infty,11}} \underset{\substack{\geq \\ \uparrow}}{(11.75)} 0. \quad (11.75)$$

Damit gilt sowohl für $\underline{Y}_o(\underline{s})$ als auch $\underline{Y}_i(\underline{s})$ eine Entwicklung der Form (11.42) aus Satz 11.4 mit $\underline{C}_{\infty,i,o} \geq 0$. Da (11.70) $\Re\{\underline{Y}_{i,o}(j\omega)\} \geq 0$ für alle ω garantiert, folgt $\Re\{\underline{B}_{\infty,i,o}\} \geq 0$ in (11.42) sofort aus $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \Re\{\underline{Y}_{i,o}(j\omega)\} = \Re\{\underline{B}_{\infty,i,o}\} \geq 0$. Damit sind die Bedingungen A) und E) aus Satz 11.4 gezeigt und $\underline{Y}_i(\underline{s})$ und $\underline{Y}_o(\underline{s})$ sind nach Satz 11.6 positive Funktionen. Nach Satz 11.7 kann daher auch keine torbeobachtbare Instabilität auftreten und Behauptung A) ist vollständig bewiesen.

Der Beweis von Behauptung B) erfolgt analog.