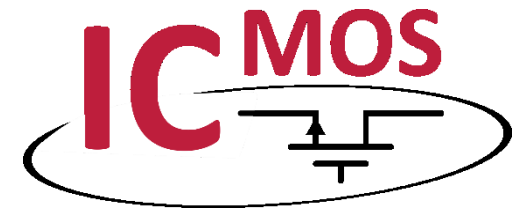




Technische
Universität
Braunschweig



Zweitore

Vadim Issakov

Sommersemester 2024

1. Zweitore – Einleitung

2. Impedanzmatrix $\underline{\underline{Z}}$

3. Admittanzmatrix $\underline{\underline{Y}}$

4. Kettenmatrix $\underline{\underline{A}}$

5. Hybridmatrix (Reihenparallelmatrix) $\underline{\underline{H}}$

6. Umrechnung verschiedener Matrixdarstellungen

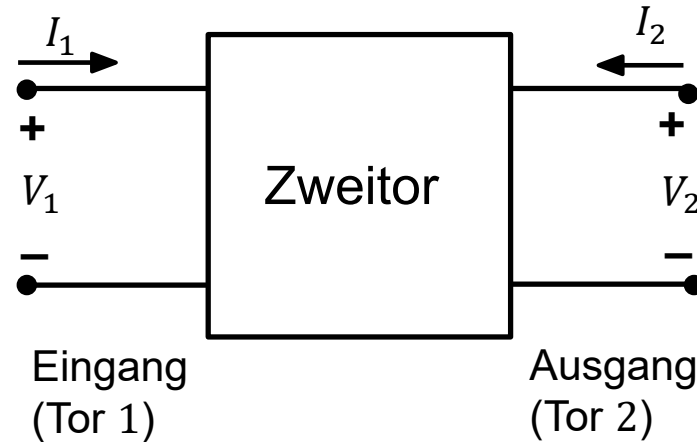
7. Zweitoreigenschaften

8. N-Tore

9. Zusammenschaltung von Zweitoren

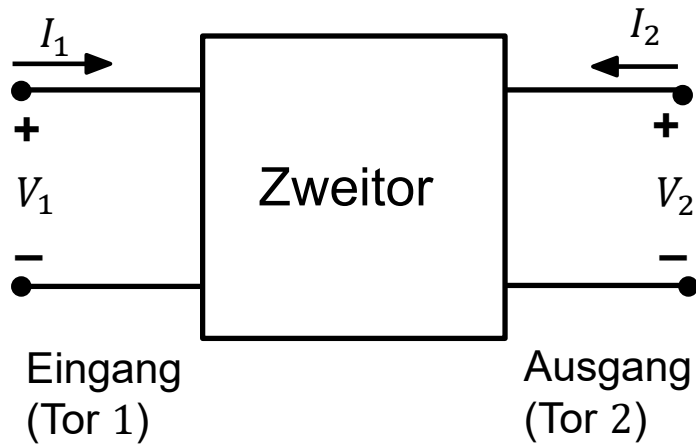
10. Streumatrix $\underline{\underline{S}}$

1. Zweitore - Einleitung



- Analyse und Charakterisierung von Netzwerken
- Oft zwischen Quelle und Verbraucher geschaltet.
- Mögliche Aufgaben: Leitungsverbindung, Filterschaltung, Dämpfungsglied, Verstärker u.a.m.
- Ein Zweitornetzwerk ist eine geschlossen gedachte Einheit (Teilnetzwerk, black box), das nur **über Ein- und Ausgangstore** zugänglich ist.
- Seine Eigenschaften liegen durch die V -, I -Relationen der Tore fest und werden durch Rechnung oder Messung bestimmt.
- Unabhängig vom inneren Aufbau wird ein Zweitor als Funktionsblock symbolisiert und durch zwei Torspannungen und -ströme beschrieben.

1. Zweitore - Einleitung

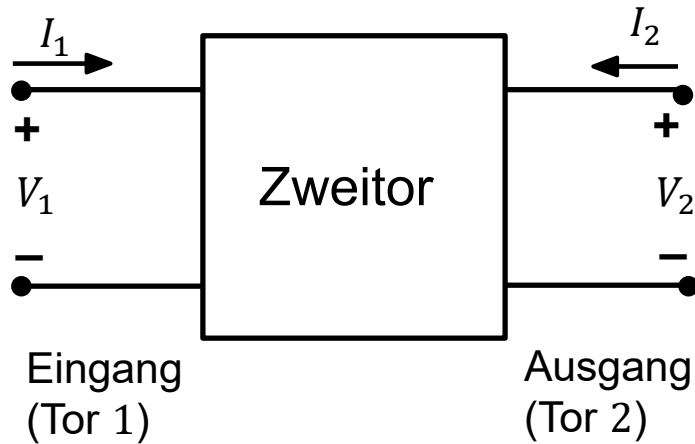


- ▶ Netzwerkanalyse führt zu zwei Gleichungen, die die 4 Parameter (V_1, I_1, V_2, I_2) verbinden; z.B.:
 - ▶ $V_1 = V_1(I_1, I_2)$
 - ▶ $V_2 = V_2(I_1, I_2)$
- ▶ Für lineare Netzwerke sind die beiden Gleichungen auch linear, z.B.:
 - ▶ $V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$
 - ▶ $V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$
- ▶ $\binom{4}{2} = 6$ mögliche Parameterverknüpfungen, um 2 Parameter von (V_1, I_1, V_2, I_2) in Abhängigkeit von den anderen beiden auszudrücken

- Eingang: Anregung
- Ausgang: Verbraucher / Last
- Schaltung zwischen Klemmen: „black box“

1. Zweitore - Einleitung

Die sechs Beschreibungsmöglichkeiten eines Zweitors:



$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned}$$

Impedanzmatrix $\underline{\underline{Z}}$

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 &= Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{aligned}$$

Admittanzmatrix $\underline{\underline{Y}}$

$$\begin{aligned} V_1 &= A_{11}V_2 + A_{12}(-I_2) \\ I_1 &= A_{21}V_2 + A_{22}(-I_2) \end{aligned}$$

Kettenmatrix $\underline{\underline{A}}$

$$\begin{aligned} V_1 &= H_{11}I_1 + H_{12}V_2 \\ I_2 &= H_{21}I_1 + H_{22}V_2 \end{aligned}$$

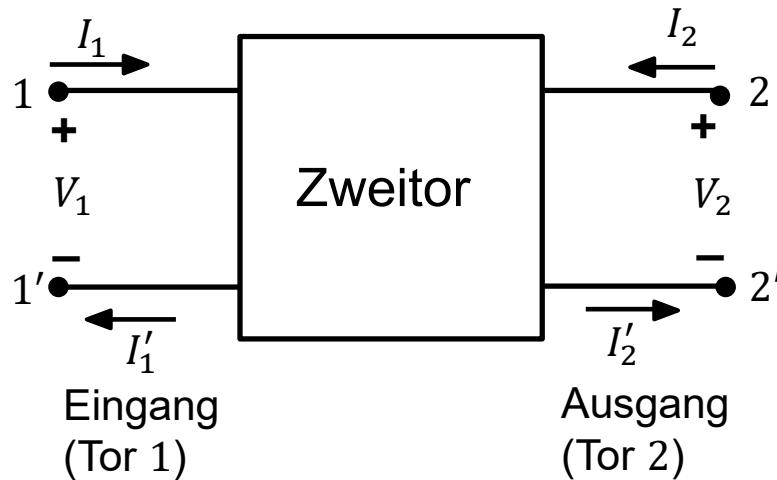
Hybridmatrix (Reihenparallelmatrix) $\underline{\underline{H}}$

$$\begin{aligned} I_1 &= C_{11}V_1 + C_{12}I_2 \\ V_2 &= C_{21}V_1 + C_{22}I_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 &= B_{11}V_1 + B_{12}(-I_1) \\ I_2 &= B_{21}V_1 + B_{22}(-I_1) \end{aligned}$$

Gebräuchlich sind die ersten vier Formen.

1. Zweitore - Einleitung



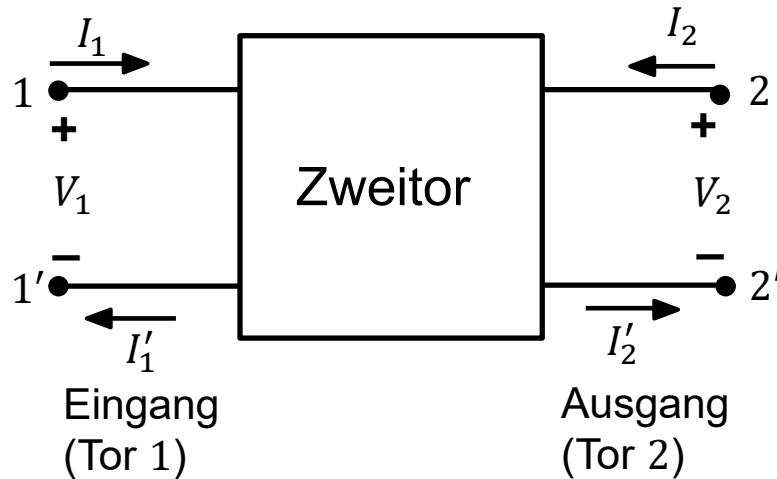
Torbedingungen:

$$I_1 = I_1'$$

$$I_2 = I_2'$$

- Fließt bei einem Klemmenpaar ein Strom I in eine Klemme und der gleiche Strom aus der anderen wieder heraus, so heißt dieses Klemmenpaar ein Tor.

1. Zweitore - Einleitung



Torbedingungen:

$$I_1 = I_1'$$

$$I_2 = I_2'$$

- Die Torbedingung wird automatisch erfüllt, wenn jedes Klemmenpaar mit einem Zweipol beschaltet ist.
- Zweitore haben zwei unabhängige Ströme I_1, I_2 am Eingangs- und Ausgangstor (Ausnahme: stromgesteuerte Stromquelle).
- An Tor 1 (Eingang): aktiver Zweipol;
an Tor 2 (Ausgang): Verbraucherzweipol
- Energiefluss von der Quelle zum Verbraucher im Zweitor
- Vorwärtsrichtung $1 \rightarrow 2$ bzw. Rückwärtsrichtung $2 \rightarrow 1$.

1. Zweitore – Einleitung
- 2. Impedanzmatrix \underline{Z}**
3. Admittanzmatrix \underline{Y}
4. Kettenmatrix \underline{A}
5. Hybridmatrix (Reihenparallelmatrix) \underline{H}
6. Umrechnung verschiedener Matrixdarstellungen
7. Zweitoreigenschaften
8. N-Tore
9. Zusammenschaltung von Zweitoren
10. S-Parameter

2. Impedanzmatrix Z

I_1, I_2 : anregende Signale

V_1, V_2 : Antwort auf die Anregungen

⇒ relevante Parameter sind Impedanzen (Z-Parameter)

Die Parameter erfüllen die folgenden Gleichungen:

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$$

Gleichungen in Matrix-Form:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

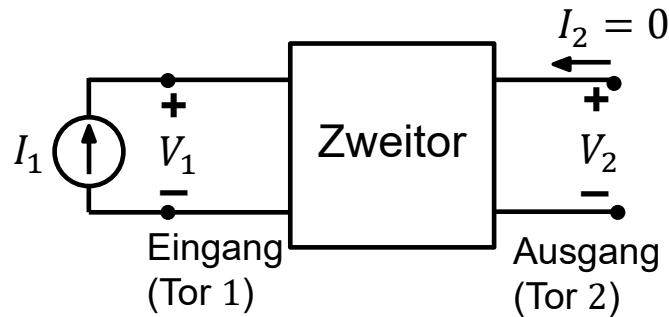
$$\underline{V} = \underline{\underline{Z}} \cdot \underline{I}$$

2. Impedanzmatrix Z

Bestimmung der Parameter

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Bestimmung von Z_{11} und Z_{21}



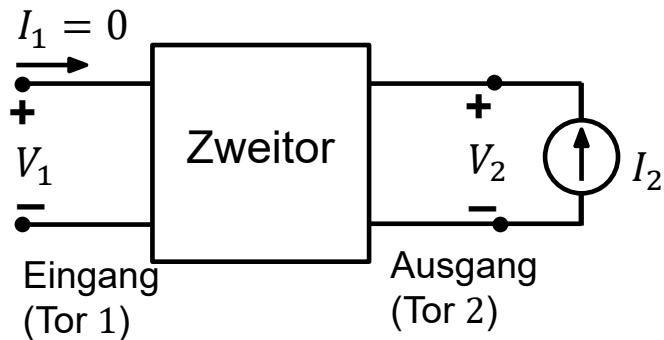
$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

Eingangsimpedanz
(Leerlauf am Ausgang)

$$Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

Vorwärts-Übertragungsimpedanz
(Leerlauf am Ausgang)

Bestimmung von Z_{12} und Z_{22}



$$Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

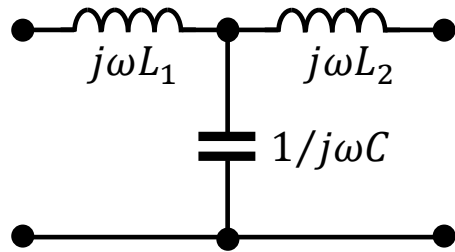
Rückwärts-Übertragungsimpedanz
(Leerlauf am Eingang)

$$Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

Ausgangsimpedanz
(Leerlauf am Eingang)

2. Impedanzmatrix Z

Beispiel: T-Netzwerk



$$L_1 = 2 \mu\text{H}, L_2 = 1 \mu\text{H}, C = 3 \text{ nF}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

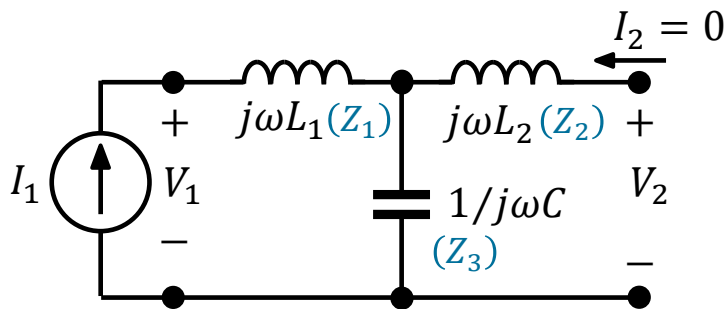
$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

$$Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

$$Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

$$Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

Bestimmung von Z_{11} und Z_{21}

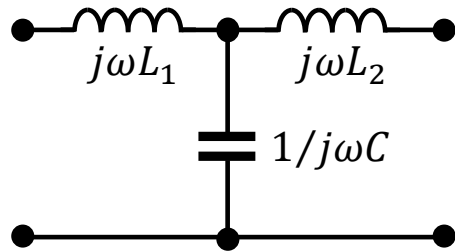


$$\begin{aligned} Z_{11} &= Z_1 + Z_3 = j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C} \\ &= \frac{1 + (j\omega)^2 L_1 C}{j\omega C} = \frac{1 - \omega^2 6 \times 10^{-15}}{j\omega 3 \times 10^{-9}} \Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{21} &= Z_3 = \frac{1}{j\omega C} \\ &= \frac{1}{j\omega 3 \times 10^{-9}} \Omega \end{aligned}$$

2. Impedanzmatrix Z

Beispiel: T-Netzwerk



$$L_1 = 2 \mu\text{H}, L_2 = 1 \mu\text{H}, C = 3 \text{ nF}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

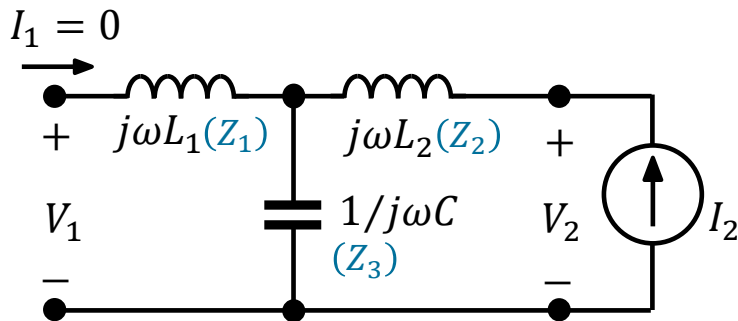
$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

$$Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

$$Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

$$Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

Bestimmung von Z_{12} und Z_{22}



$$\begin{aligned} Z_{12} = Z_3 &= \frac{1}{j\omega C} \\ &= \frac{1}{j\omega 3 \times 10^{-9}} \Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{22} &= Z_2 + Z_3 = j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C} \\ &= \frac{1 + (j\omega)^2 L_2 C}{j\omega C} = \frac{1 - \omega^2 3 \times 10^{-15}}{j\omega 3 \times 10^{-9}} \Omega \end{aligned}$$

1. Zweitore – Einleitung
2. Impedanzmatrix $\underline{\underline{Z}}$
- 3. Admittanzmatrix $\underline{\underline{Y}}$**
4. Kettenmatrix $\underline{\underline{A}}$
5. Hybridmatrix (Reihenparallelmatrix) $\underline{\underline{H}}$
6. Umrechnung verschiedener Matrixdarstellungen
7. Zweitoreigenschaften
8. N-Tore
9. Zusammenschaltung von Zweitoren
10. S-Parameter

3. Admittanzmatrix Y

V_1, V_2 : anregende Signale

I_1, I_2 : Antwort auf die Anregungen

⇒ relevante Parameter sind Admittanzen (Y-Parameter)

Die Parameter erfüllen die folgenden Gleichungen:

$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2$$

$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2$$

Gleichungen in Matrix-Form:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

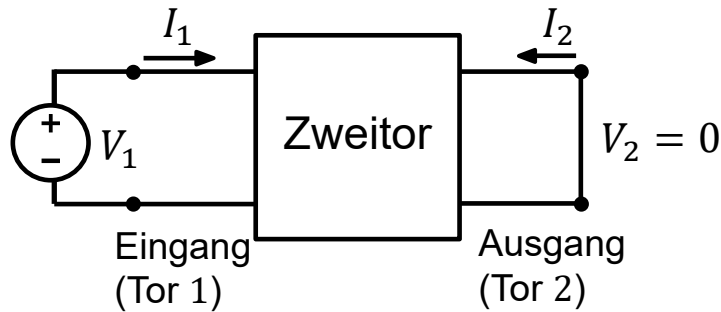
$$\underline{I} = \underline{\underline{Y}} \cdot \underline{V}$$

3. Admittanzmatrix Y

Bestimmung der Parameter

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Bestimmung von Y_{11} und Y_{21}



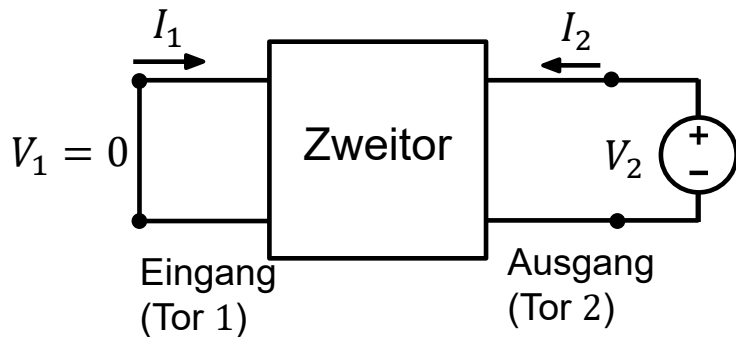
$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0}$$

Eingangsadmittanz
(Kurzschluss am Ausgang)

$$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0}$$

Vorwärts-Übertragungsadmittanz
(Kurzschluss am Ausgang)

Bestimmung von Y_{12} und Y_{22}



$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

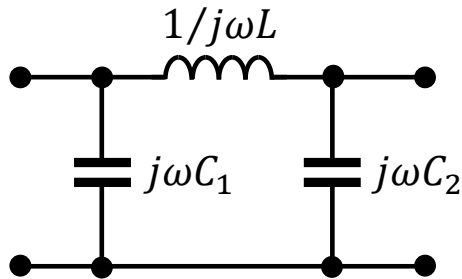
Rückwärts-Übertragungsadmittanz
(Kurzschluss am Eingang)

$$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

Ausgangsadmittanz
(Kurzschluss am Eingang)

3. Admittanzmatrix Y

Beispiel: Π -Netzwerk



$$C_1 = 3 \text{ nF}, C_2 = 1 \text{ nF}, L = 1 \text{ }\mu\text{H}$$

$$Y_1 = j\omega C_1$$

$$Y_2 = j\omega C_2$$

$$Y_3 = \frac{1}{j\omega L}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

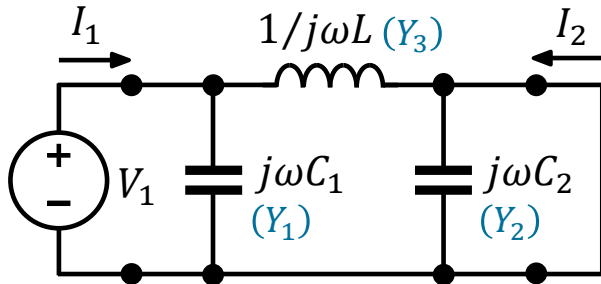
$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0}$$

$$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0}$$

$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

$$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

Bestimmung von Y_{11} und Y_{21}



$$I_1 = V_1(Y_1 + Y_3)$$

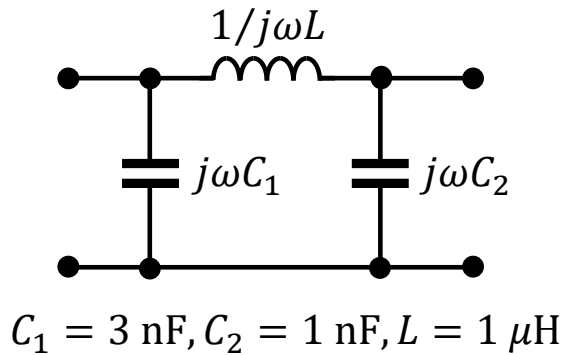
$$Y_{11} = \frac{I_1}{V_1} = Y_1 + Y_3 = \frac{1 + (j\omega)^2 LC_1}{j\omega L} = \frac{1 - \omega^2 3 \times 10^{-15}}{j\omega 10^{-6}} \text{ S}$$

$$I_2 = -Y_3 V_1$$

$$Y_{21} = \frac{I_2}{V_1} = -Y_3 = -\frac{1}{j\omega L} = -\frac{1}{j\omega 10^{-6}} \text{ S}$$

3. Admittanzmatrix \underline{Y}

Beispiel: Π -Netzwerk



$$Y_1 = j\omega C_1$$

$$Y_2 = j\omega C_2$$

$$Y_3 = \frac{1}{j\omega L}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

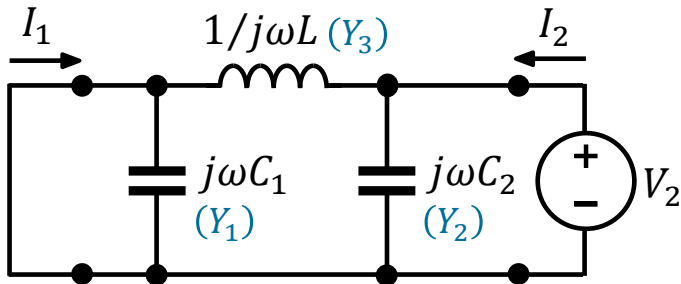
$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0}$$

$$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0}$$

$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

$$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

Bestimmung von Y_{12} und Y_{22}



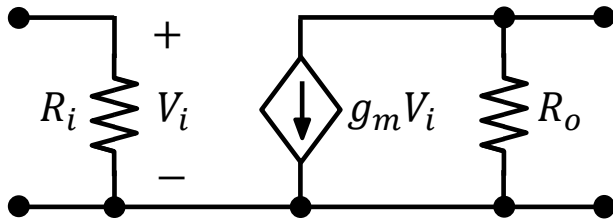
$$Y_{12} = -Y_3 = Y_{21}$$

$$I_2 = V_2(Y_2 + Y_3)$$

$$Y_{22} = \frac{I_2}{V_2} = Y_2 + Y_3 = \frac{1 - \omega^2 LC_2}{j\omega L} = \frac{1 - \omega^2 10^{-15}}{j\omega 10^{-6}} \text{ S}$$

3. Admittanzmatrix $\underline{\underline{Y}}$

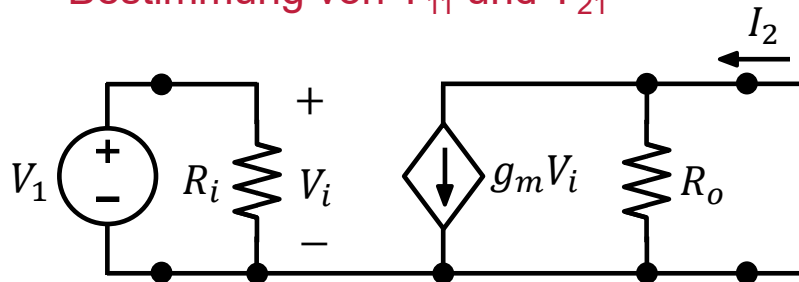
Beispiel: Grundsaltung eines Verstärkers



$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$R_i = 2,5 \text{ k}\Omega, R_o = 5 \text{ k}\Omega, g_m = 50 \text{ mS}$$

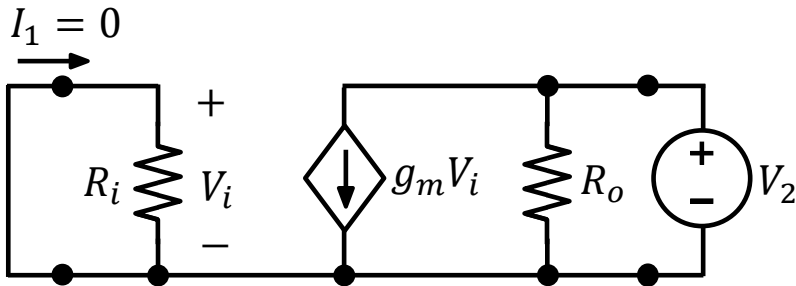
Bestimmung von Y_{11} und Y_{21}



$$Y_{11} = \frac{1}{R_i} = 0,4 \text{ mS}$$

$$Y_{21} = \frac{g_m V_i}{V_i} = g_m = 50 \text{ mS}$$

Bestimmung von Y_{12} und Y_{22}



$$Y_{12} = 0$$

$$Y_{22} = \frac{1}{R_o} = 0,2 \text{ mS}$$

$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0}$$

$$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0}$$

$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

$$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

1. Zweitore – Einleitung
2. Impedanzmatrix $\underline{\underline{Z}}$
3. Admittanzmatrix $\underline{\underline{Y}}$
- 4. Kettenmatrix $\underline{\underline{A}}$**
5. Hybridmatrix (Reihenparallelmatrix) $\underline{\underline{H}}$
6. Umrechnung verschiedener Matrixdarstellungen
7. Zweitoreigenschaften
8. N-Tore
9. Zusammenschaltung von Zweitoren
10. S-Parameter

4. Kettenmatrix A

- Oft Verwendung bei der Analyse von kaskadierten Netzwerken (der Ausgang eines Netzwerks wird mit dem Eingang eines weiteren Netzwerks verbunden).
- I_1, U_1 : anregende Signale
- I_2, U_2 : Antwort auf die Anregungen
- Die Kettenparameter erfüllen die beiden Gleichungen:

$$V_1 = A_{11}V_2 + A_{12}(-I_2)$$

$$I_1 = A_{21}V_2 + A_{22}(-I_2)$$

- Gleichungen in Matrix-Form:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

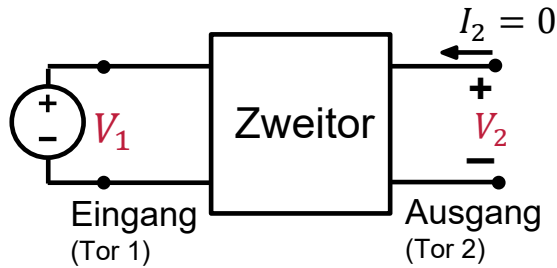
Oft werden die Parameter der Kettenmatrix als *ABCD*-Parameter bezeichnet.

$$A \triangleq A_{11} \quad B \triangleq A_{12}$$

$$C \triangleq A_{21} \quad D \triangleq A_{22}$$

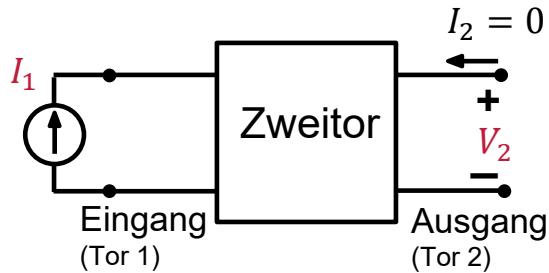
4. Kettenmatrix A

Bestimmung der Parameter:



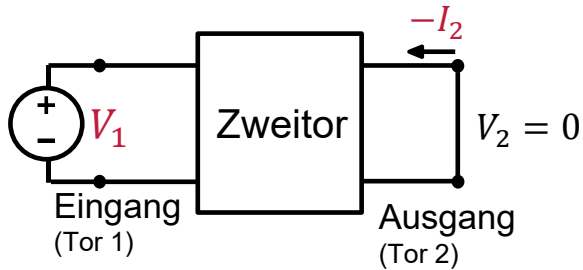
$$A_{11} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$$

reziproke Leerlauf-Spannungsübersetzung
vorwärts (Leerlauf am Ausgang)



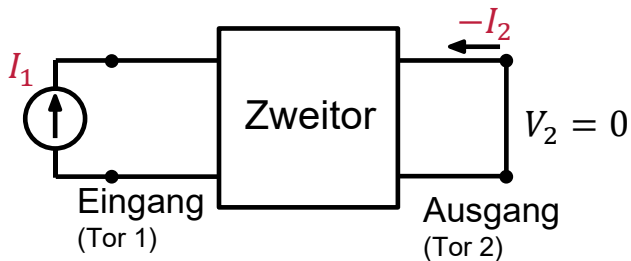
$$A_{21} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$$

reziproke Leerlauf-Übertragungsimpedanz
vorwärts (Leerlauf am Ausgang)



$$A_{12} = \left. \frac{V_1}{-I_2} \right|_{V_2=0}$$

reziproke Kurzschluss-Übertragungs-
admittanz vorwärts (Kurzschluss am Ausgang)

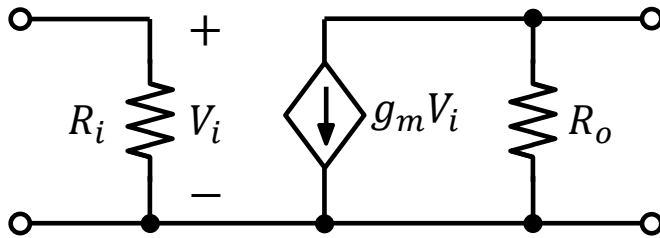


$$A_{22} = \left. \frac{I_1}{-I_2} \right|_{V_2=0}$$

reziproke Kurzschluss-Stromübersetzung
vorwärts (Kurzschluss am Ausgang)

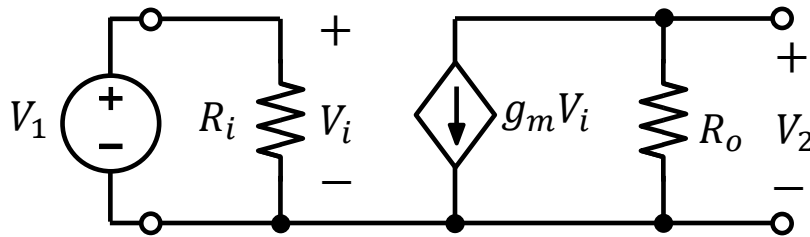
4. Kettenmatrix A

Beispiel: Vereinfachtes Modell eines Verstärkers



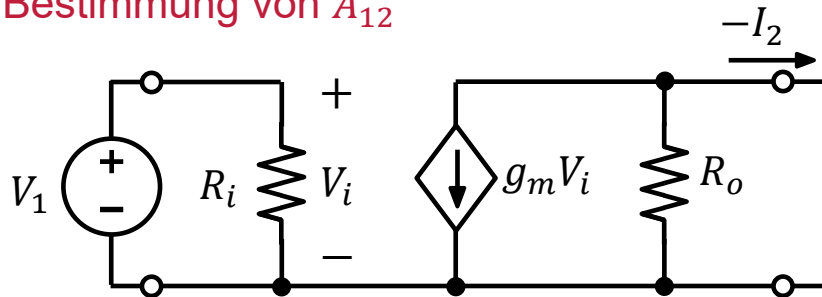
$$R_i = 10 \text{ k}\Omega, R_o = 1 \text{ k}\Omega, g_m = 40 \text{ mS}$$

Bestimmung von A_{11}



$$A_{11} = \frac{V_i}{-g_m V_i R_o} = -\frac{1}{g_m R_o} = -\frac{1}{40}$$

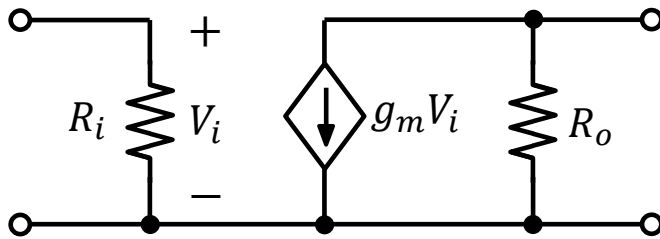
Bestimmung von A_{12}



$$A_{12} = \frac{V_i}{-g_m V_i} = -\frac{1}{g_m} = -\frac{1}{40 \times 10^{-3}} \Omega$$

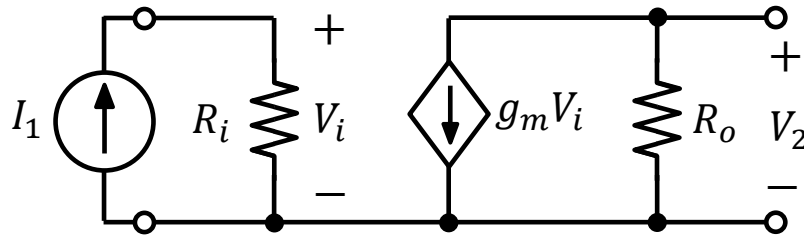
4. Kettenmatrix A

Beispiel: Vereinfachtes Modell eines Verstärkers



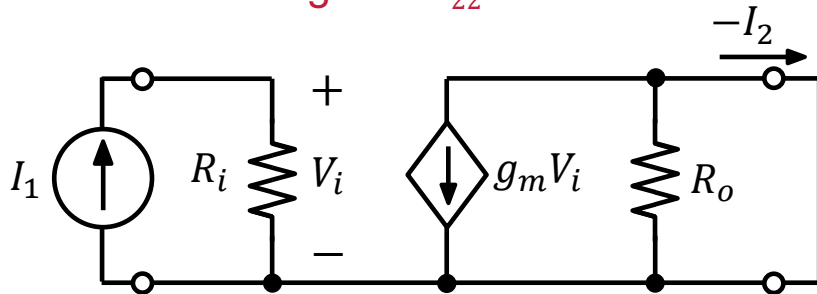
$$R_i = 10 \text{ k}\Omega, R_o = 1 \text{ k}\Omega, g_m = 40 \text{ mS}$$

Bestimmung von A_{21}



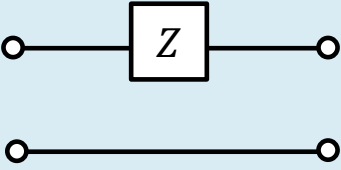
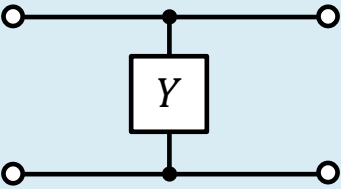
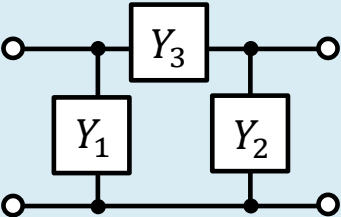
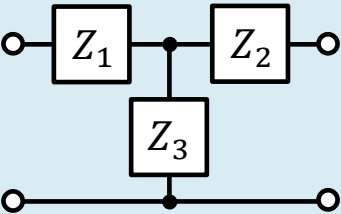
$$A_{21} = \frac{V_i}{-g_m V_i R_o R_i} = -\frac{1}{g_m R_o R_i} = -\frac{1}{400 \times 10^3} \text{ S}$$

Bestimmung von A_{22}



$$A_{22} = \frac{V_i}{-g_m V_i R_i} = -\frac{1}{g_m R_i} = -\frac{1}{400}$$

4. Kettenmatrix A - Vier Beispiele

Schaltung	<u><u>A</u></u>
	$\begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 1 + \frac{Y_2}{Y_3} & \frac{1}{Y_3} \\ Y_1 + Y_2 + \frac{Y_1 Y_2}{Y_3} & 1 + \frac{Y_1}{Y_3} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_3} & Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3} \\ \frac{1}{Z_3} & 1 + \frac{Z_2}{Z_3} \end{bmatrix}$

1. Zweitore – Einleitung
2. Impedanzmatrix $\underline{\underline{Z}}$
3. Admittanzmatrix $\underline{\underline{Y}}$
4. Kettenmatrix $\underline{\underline{A}}$
- 5. Hybridmatrix (Reihenparallelmatrix) $\underline{\underline{H}}$**
6. Umrechnung verschiedener Matrixdarstellungen
7. Zweitoreigenschaften
8. N-Tore
9. Zusammenschaltung von Zweitoren
10. S-Parameter

Hybridmatrix (Reihenparallelmatrix) H

- Bei der Beschreibung von Transistoren wichtig.
- I_1, V_2 : anregende Signale, Input
- V_1, I_2 : Antwort auf die Anregungen, Output
- Die Parameter erfüllen die folgenden Gleichungen:

$$V_1 = H_{11}I_1 + H_{12}V_2$$

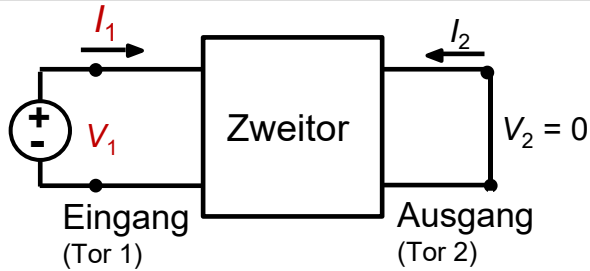
$$I_2 = H_{21}I_1 + H_{22}V_2$$

- Gleichungen in Matrix-Form:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

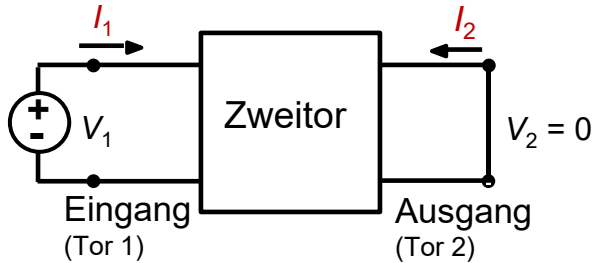
5. Hybridmatrix (Reihenparallelmatrix) H

Bestimmung der Parameter:



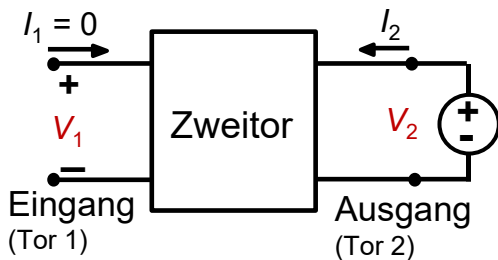
$$H_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0}$$

Kurzschluss-Eingangsimpedanz
(Kurzschluss am Ausgang)



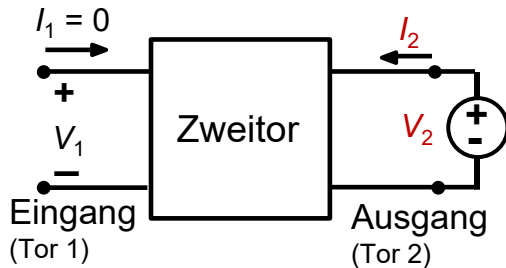
$$H_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0}$$

Kurzschluss-Stromübersetzung vorwärts
(Kurzschluss am Ausgang)



$$H_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0}$$

Leerlauf-Spannungsübersetzung rückwärts
(Leerlauf am Eingang)

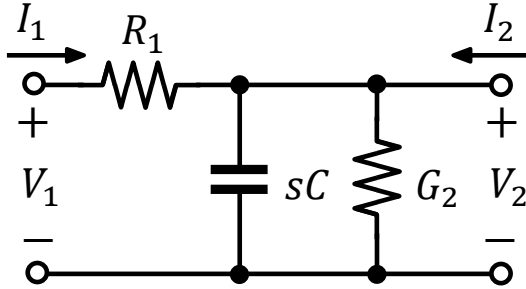


$$H_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0}$$

Leerlauf-Ausgangsadmittanz
(Leerlauf am Eingang)

5. Hybridmatrix (Reihenparallelmatrix) H

Beispiel:



$$H_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0} = R_1$$

$$H_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0} = -1, \text{ da } I_2 = -I_1$$

$$H_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0} = 1, \text{ da } V_1 = V_2$$

$$H_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0} = sC + G_2$$

$$H_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0}$$

$$H_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0}$$

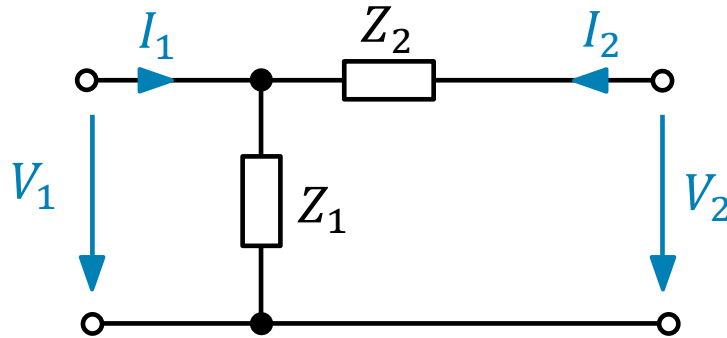
$$H_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0}$$

$$H_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0}$$

1. Zweitore – Einleitung
2. Impedanzmatrix $\underline{\underline{Z}}$
3. Admittanzmatrix $\underline{\underline{Y}}$
4. Kettenmatrix $\underline{\underline{A}}$
5. Hybridmatrix (Reihenparallelmatrix) $\underline{\underline{H}}$
- 6. Umrechnung verschiedener Matrixdarstellungen**
7. Zweitoreigenschaften
8. N-Tore
9. Zusammenschaltung von Zweitoren
10. S-Parameter

6. Umrechnung verschiedener Matrixdarstellungen

Γ -Schaltung



$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = Z_1;$$

$$Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} = Z_1$$

$$Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = Z_1;$$

$$Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = Z_1 + Z_2$$

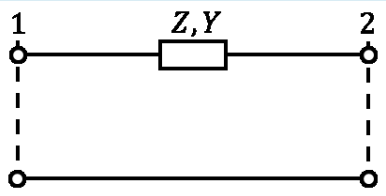
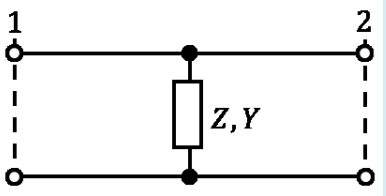
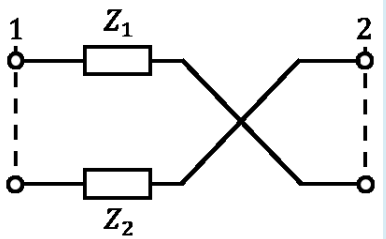
$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2};$$

$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} = -\frac{1}{Z_2}$$

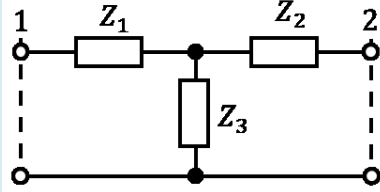
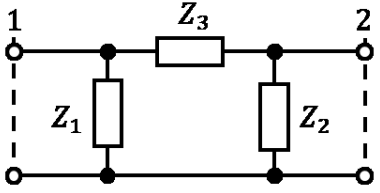
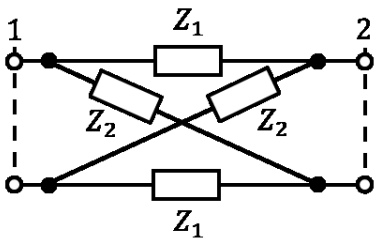
$$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} = -\frac{1}{Z_2};$$

$$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} = \frac{1}{Z_2}$$

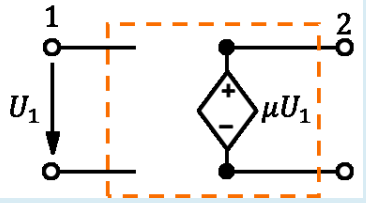
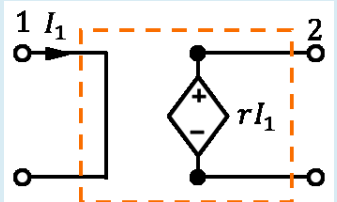
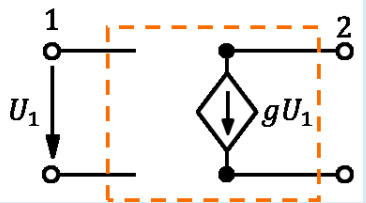
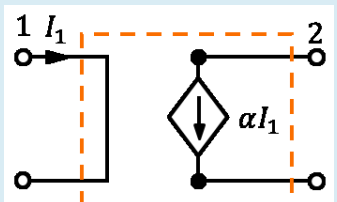
6. Matrizen einfacher Zweitore

Schaltung	$\underline{\underline{Z}}$	$\underline{\underline{Y}}$	$\underline{\underline{A}}$	$\underline{\underline{H}}$
	ne	$\begin{pmatrix} Y & -Y \\ -Y & Y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} Z & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} Z & Z \\ Z & Z \end{pmatrix}$	ne	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & Y \end{pmatrix}$
	ne	$\frac{1}{Z_1 + Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -(Z_1 + Z_2) \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} Z_1 + Z_2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

6. Matrizen der T-, Π - und X-Netzwerke

Schaltung	$\underline{\underline{Z}}$	$\underline{\underline{Y}}$	$\underline{\underline{A}}$
	$\begin{pmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{N} \begin{pmatrix} Y_1(Y_2 + Y_3) & -Y_1Y_2 \\ -Y_1Y_2 & Y_2(Y_1 + Y_3) \end{pmatrix}$ $N = Y_1 + Y_2 + Y_3$	$\begin{pmatrix} Z_1Y_3 + 1 & Z_1 + Z_2 + Z_1Z_2Y_3 \\ Y_3 & Z_2Y_3 + 1 \end{pmatrix}$
	$\frac{1}{N} \begin{pmatrix} Z_1(Z_2 + Z_3) & Z_1Z_2 \\ Z_1Z_2 & Z_2(Z_1 + Z_3) \end{pmatrix}$ $N = Z_1 + Z_2 + Z_3$	$\begin{pmatrix} Y_1 + Y_3 & -Y_3 \\ -Y_3 & Y_2 + Y_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} Z_3Y_2 + 1 & Z_3 \\ Y_1 + Y_2 + Y_1Y_2Z_3 & Z_3Y_1 + 1 \end{pmatrix}$
	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} Z_2 + Z_1 & Z_2 - Z_1 \\ Z_2 - Z_1 & Z_2 + Z_1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} Y_2 + Y_1 & Y_2 - Y_1 \\ Y_2 - Y_1 & Y_2 + Y_1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{Z_2 - Z_1} \begin{pmatrix} Z_2 + Z_1 & Z_2 - Z_1 \\ 2 & Z_2 + Z_1 \end{pmatrix}$

6. Matrizen idealer gesteuerter Quellen

Quelle	$\underline{\underline{Z}}$	$\underline{\underline{Y}}$	$\underline{\underline{A}}$	$\underline{\underline{H}}$
VCVS 	ne	ne	$\begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	ne
CCVS 	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ r & 0 \end{pmatrix}$	ne	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \end{pmatrix}$	ne
VCCS 	ne	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{g} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	ne
CCCS 	ne	ne	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$

6. Von Impedanzmatrix Z zu Kettenmatrix A

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}(-I_2)$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}(-I_2)$$

$$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} = \frac{Z_{11}I_1}{Z_{21}I_1} = \frac{Z_{11}}{Z_{21}}$$

$$B = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0} = \left. \frac{Z_{11}I_1 - Z_{12}I_2}{I_2} \right|_{V_2=0} = Z_{11} \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0} - Z_{12} = Z_{11} \frac{Z_{22}I_1}{Z_{21}I_1} - Z_{12} = \frac{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}{Z_{21}}$$

$$C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0} = \frac{I_1}{Z_{21}I_1} = \frac{1}{Z_{21}}$$

$$D = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0} = \frac{\frac{Z_{22}}{Z_{21}}I_2}{I_2} = \frac{Z_{22}}{Z_{21}}$$

6. Umrechnung verschiedener Matrixdarstellungen

Jede Zweitor-Matrix charakterisiert das gegebene Zweitor vollständig.
⇒ Möglichkeit, eine Matrix-Darstellung in eine andere umzurechnen.

Umrechnung von Impedanzmatrix in Admittanzmatrix:

$$\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{Z}} \underline{\underline{I}}$$

$$\underline{\underline{Z}}^{-1} \underline{\underline{V}} = \underline{\underline{Z}}^{-1} \underline{\underline{Z}} \underline{\underline{I}}$$

$\underline{\underline{Z}}^{-1}$ ist die inverse Matrix zu $\underline{\underline{Z}}$, so dass gilt

$$\underline{\underline{Z}} \underline{\underline{Z}}^{-1} = \underline{\underline{Z}}^{-1} \underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{1}} \quad (\text{Einheitsmatrix})$$

Damit gilt

$$\underline{\underline{Z}}^{-1} \underline{\underline{V}} = \underline{\underline{I}}$$

$$\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{Z}}^{-1}$$

Durch Bestimmung von $\underline{\underline{Z}}^{-1}$ kommt man von $\underline{\underline{Z}}$ zu $\underline{\underline{Y}}$.

Analog können alle Zweitor-Matrizen ineinander umgerechnet werden.

6. Umrechnung verschiedener Matrixdarstellungen

Parameterumrechnungen für die Zweitormatrizen:

	<u><u>Z</u></u>	<u><u>Y</u></u>	<u><u>H</u></u>	<u><u>A</u></u>
<u><u>Z</u></u>	$\begin{matrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{Y_{22}}{\det \underline{\underline{Y}}} & \frac{-Y_{12}}{\det \underline{\underline{Y}}} \\ \frac{-Y_{21}}{\det \underline{\underline{Y}}} & \frac{Y_{11}}{\det \underline{\underline{Y}}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\det \underline{\underline{H}}}{H_{22}} & \frac{H_{12}}{H_{22}} \\ \frac{-H_{21}}{H_{22}} & \frac{1}{H_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A_{11}}{A_{21}} & \frac{\det \underline{\underline{A}}}{A_{21}} \\ \frac{1}{A_{21}} & \frac{A_{22}}{A_{21}} \end{matrix}$
<u><u>Y</u></u>	$\begin{matrix} \frac{Z_{22}}{\det \underline{\underline{Z}}} & \frac{-Z_{12}}{\det \underline{\underline{Z}}} \\ \frac{-Z_{21}}{\det \underline{\underline{Z}}} & \frac{Z_{11}}{\det \underline{\underline{Z}}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{H_{11}} & \frac{-H_{12}}{H_{11}} \\ \frac{H_{21}}{H_{11}} & \frac{\det \underline{\underline{H}}}{H_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A_{22}}{A_{12}} & \frac{-\det \underline{\underline{A}}}{A_{12}} \\ \frac{-1}{A_{12}} & \frac{A_{11}}{A_{12}} \end{matrix}$
<u><u>H</u></u>	$\begin{matrix} \frac{\det \underline{\underline{Z}}}{Z_{22}} & \frac{Z_{12}}{Z_{22}} \\ \frac{-Z_{21}}{Z_{22}} & \frac{1}{Z_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{Y_{11}} & \frac{-Y_{12}}{Y_{11}} \\ \frac{Y_{21}}{Y_{11}} & \frac{\det \underline{\underline{Y}}}{Y_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A_{12}}{A_{22}} & \frac{\det \underline{\underline{A}}}{A_{22}} \\ \frac{-1}{A_{22}} & \frac{A_{21}}{A_{22}} \end{matrix}$
<u><u>A</u></u>	$\begin{matrix} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & \frac{\det \underline{\underline{Z}}}{Z_{21}} \\ \frac{1}{Z_{21}} & \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-Y_{22}}{Y_{21}} & \frac{-1}{Y_{21}} \\ \frac{-\det \underline{\underline{Y}}}{Y_{21}} & \frac{-Y_{11}}{Y_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-\det \underline{\underline{H}}}{H_{21}} & \frac{-H_{11}}{H_{21}} \\ \frac{-H_{22}}{H_{21}} & \frac{1}{H_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix}$

Nur für $\det \underline{\underline{Z}} \neq 0$ kann man die Z-Matrix in die Y-Matrix umrechnen.

Nur für $\det \underline{\underline{Y}} \neq 0$ kann man die Y-Matrix in die Z-Matrix umrechnen.

1. Zweitore – Einleitung
2. Impedanzmatrix $\underline{\underline{Z}}$
3. Admittanzmatrix $\underline{\underline{Y}}$
4. Kettenmatrix $\underline{\underline{A}}$
5. Hybridmatrix (Reihenparallelmatrix) $\underline{\underline{H}}$
6. Umrechnung verschiedener Matrixdarstellungen
- 7. Zweitoreigenschaften**
8. N-Tore
9. Zusammenschaltung von Zweitoren
10. S-Parameter

7. Reziproke Netzwerke

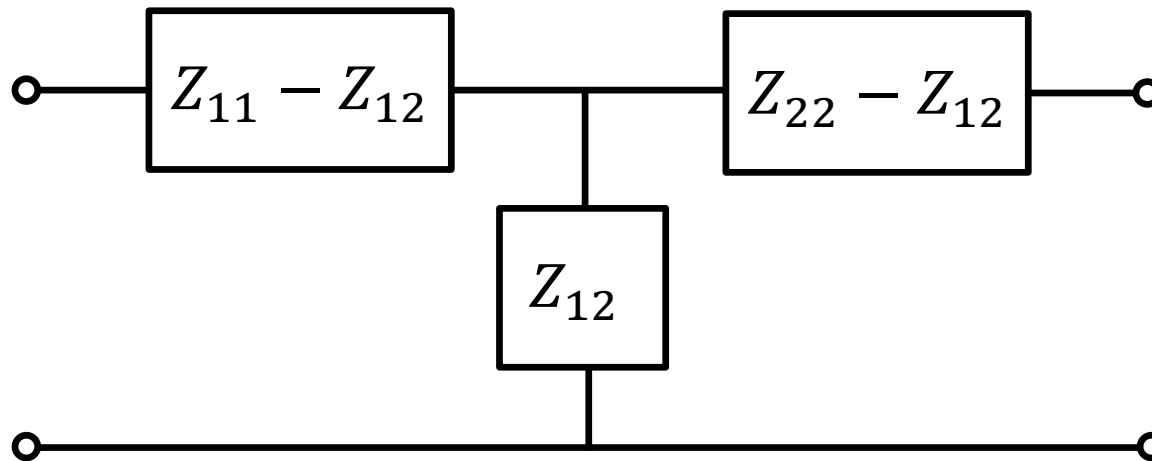
$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2,$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2,$$

$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2,$$

$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2.$$

Wenn reziprok: $Z_{12} = Z_{21}$ und $Y_{12} = Y_{21}$



7. Reziproke Netzwerke

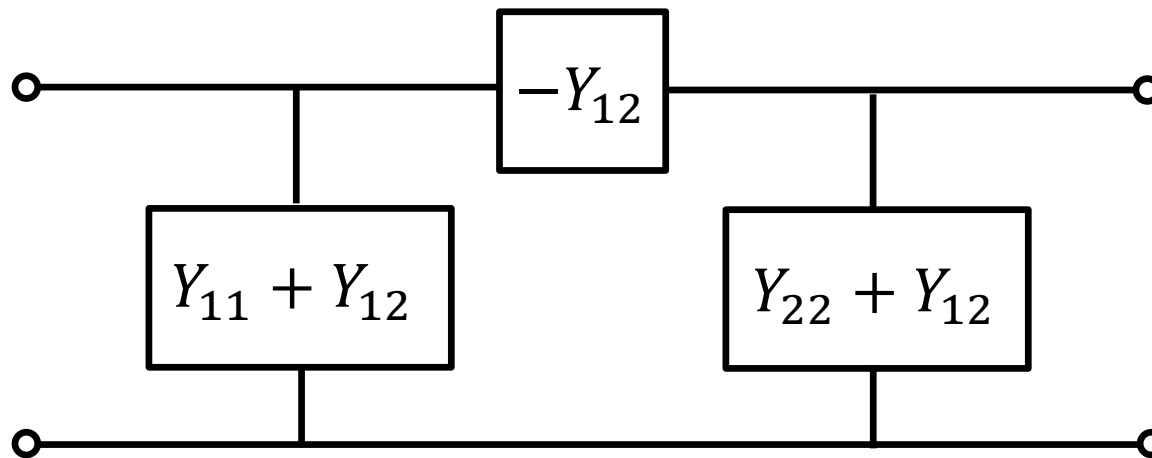
$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2,$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2,$$

$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2,$$

$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2.$$

Wenn reziprok: $Z_{12} = Z_{21}$ und $Y_{12} = Y_{21}$



7. Zweitoreigenschaften bei Z-,Y-,H- und A- Matrizen

Parameterumrechnungen für die Zweitormatrizen:

	<u>Z</u>	<u>Y</u>	<u>H</u>	<u>A</u>
<u>Z</u>	$\begin{matrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{Y_{22}}{\det \underline{Y}} & \frac{-Y_{12}}{\det \underline{Y}} \\ \frac{-Y_{21}}{\det \underline{Y}} & \frac{Y_{11}}{\det \underline{Y}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\det \underline{H}}{H_{22}} & \frac{H_{12}}{H_{22}} \\ \frac{-H_{21}}{H_{22}} & \frac{1}{H_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A_{11}}{A_{21}} & \frac{\det \underline{A}}{A_{21}} \\ \frac{1}{A_{21}} & \frac{A_{22}}{A_{21}} \end{matrix}$
<u>Y</u>	$\begin{matrix} \frac{Z_{22}}{\det \underline{Z}} & \frac{-Z_{12}}{\det \underline{Z}} \\ \frac{-Z_{21}}{\det \underline{Z}} & \frac{Z_{11}}{\det \underline{Z}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{H_{11}} & \frac{-H_{12}}{H_{11}} \\ \frac{H_{21}}{H_{11}} & \frac{\det \underline{H}}{H_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A_{22}}{A_{12}} & \frac{-\det \underline{A}}{A_{12}} \\ \frac{-1}{A_{12}} & \frac{A_{11}}{A_{12}} \end{matrix}$
<u>H</u>	$\begin{matrix} \frac{\det \underline{Z}}{Z_{22}} & \frac{Z_{12}}{Z_{22}} \\ \frac{-Z_{21}}{Z_{22}} & \frac{1}{Z_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{Y_{11}} & \frac{-Y_{12}}{Y_{11}} \\ \frac{Y_{21}}{Y_{11}} & \frac{\det \underline{Y}}{Y_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A_{12}}{A_{22}} & \frac{\det \underline{A}}{A_{22}} \\ \frac{-1}{A_{22}} & \frac{A_{21}}{A_{22}} \end{matrix}$
<u>A</u>	$\begin{matrix} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & \frac{\det \underline{Z}}{Z_{21}} \\ \frac{1}{Z_{21}} & \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-Y_{22}}{Y_{21}} & \frac{-1}{Y_{21}} \\ \frac{-\det \underline{Y}}{Y_{21}} & \frac{-Y_{11}}{Y_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-\det \underline{H}}{H_{21}} & \frac{-H_{11}}{H_{21}} \\ \frac{-H_{22}}{H_{21}} & \frac{1}{H_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix}$

Der Tabelle kann man entnehmen:

- $Z_{12} = Z_{21} \Leftrightarrow Y_{12} = Y_{21} \Leftrightarrow \det \underline{A} = 1$

Alle Zweitore, die bezüglich Z reziprok (kopplungssymmetrisch) sind, sind es auch bezüglich Y

- $Z_{11} = Z_{22} \Leftrightarrow Y_{11} = Y_{22} \Leftrightarrow A_{11} = A_{22}$ widerstandssymmetrisch

7. Zweitoreigenschaften - Reziprozität

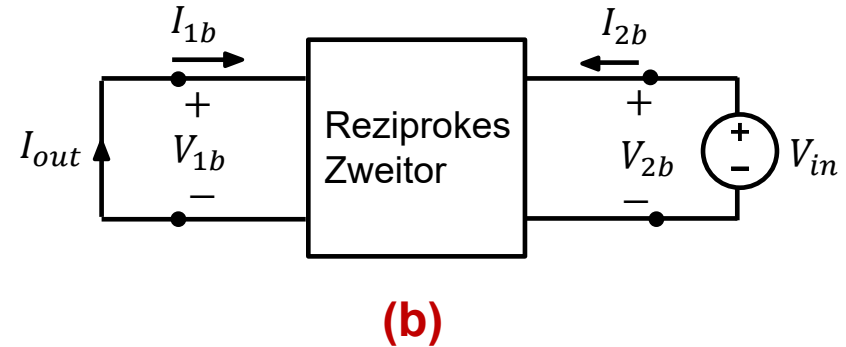
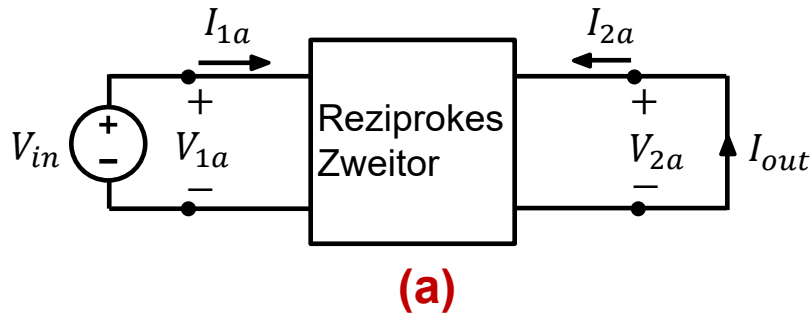
- Das Reziprozitätstheorem gilt
 - bei linearen passiven Netzwerken, d.h. Netzwerken ohne gesteuerte Quellen.
 - nur für das Verhältnis von Spannung zu Strom oder für das Verhältnis von Strom zu Spannung.
 - nicht für das Verhältnis von zwei Spannungen oder von zwei Strömen.
- Ein Zweitor ist reziprok, wenn entweder $Z_{12} = Z_{21}$ oder $Y_{12} = Y_{21}$
- Wenn die A- oder H-Parametermatrix existiert, dann gilt:
 $H_{12} = -H_{21}$ und/oder $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$ (also $\det \underline{\underline{A}} = 1$)
- Jedes Zweitor, das diese Bedingungen erfüllt, ist reziprok.

$$\underline{\underline{Z}}^T = \underline{\underline{Z}}$$

Admittanzmatrix	$Y_{21} = Y_{12}$
Impedanzmatrix	$Z_{21} = Z_{12}$
Hybridmatrix	$H_{12} = -H_{21}$
Kettenmatrix	$\det \underline{\underline{A}} = 1$
Streumatrix*	$S_{12} = S_{21}$

7. Zweitoreigenschaften - Interpretationen der Reziprozität

Interpretation 1: Wenn bei einem reziproken Zweitor die an den Toren angelegten Spannungen der beiden Netzwerke (a) und (b) gleich sind, dann stimmen auch die beiden Kurzschlussströme I_{2a} und I_{1b} überein.



Bedeutung: Wenn man eine Spannung V_{in} an Tor 1 anlegt und den Kurzschlussstrom an Tor 2 misst, und dann die gleiche Spannung an Tor 2 anlegt, sich der gleiche Kurzschlussstrom an Tor ergibt.

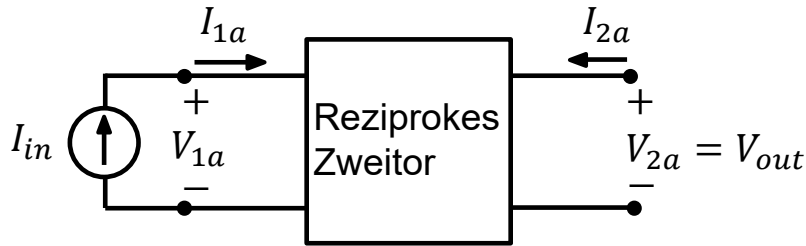
Umgekehrt kann man zeigen, dass, wenn die Interpretation 1 stimmt, dann die Y-Parameter symmetrisch sind, d.h. $Y_{12} = Y_{21}$.

$$Y_{21} = \left. \frac{I_{out}}{V_{in}} \right|_{V_{2a}=0} = \left. \frac{I_{2a}}{V_{1a}} \right|_{V_{2a}=0}$$

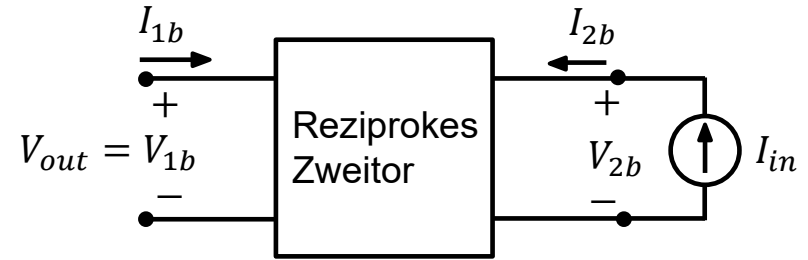
$$Y_{12} = \left. \frac{I_{out}}{V_{in}} \right|_{V_{1b}=0} = \left. \frac{I_{1b}}{V_{2b}} \right|_{V_{1b}=0}$$

7. Zweitoreigenschaften - Interpretationen der Reziprozität

Interpretation 2: Wenn bei einem reziproken Zweitor die an den Toren eingespeisten Ströme I_{in} der beiden Netzwerke a) und b) gleich sind, dann stimmen auch die beiden Leerlaufspannungen V_{2a} und V_{1b} überein.



(a)



(b)

Bedeutung: Wenn man einen Strom an Tor 1 einspeist und die Spannung an Tor 2 misst, und dann den gleichen Strom in Tor 2 einspeist, ergibt sich die gleiche Spannung an Tor 1.

Umgekehrt kann man zeigen, dass, wenn die Interpretation 2 stimmt, dann die Z-Parameter symmetrisch sind, $Z_{12} = Z_{21}$

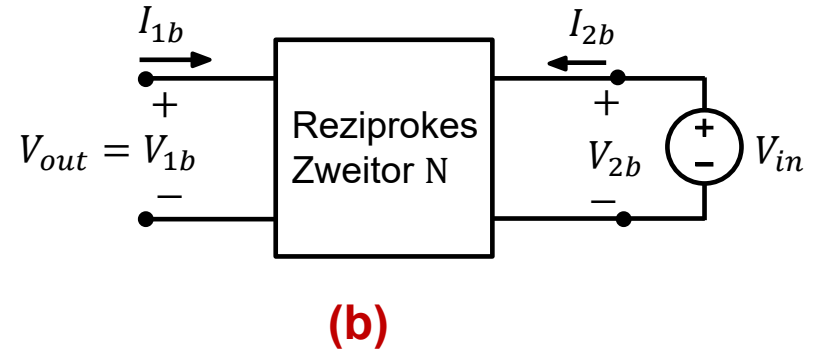
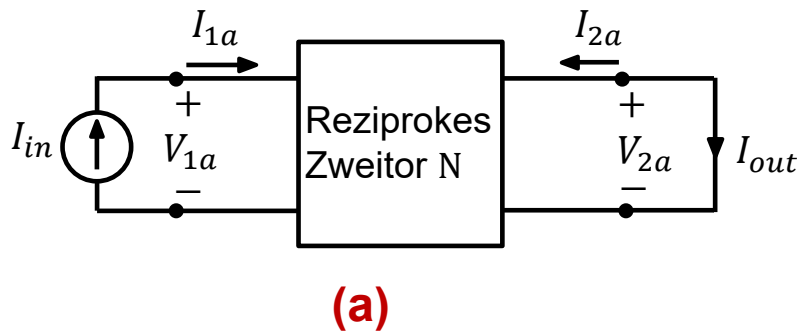
7. Zweitoreigenschaften - Interpretationen der Reziprozität

Interpretation 3: Das Zweitor N sei reziprok.

(a): Einspeisung von I_{in} ergibt $-I_{2a}$

(b): Anlegen von V_{in} ergibt V_{out}

Bei einem reziproken Zweitor ist das Kurzschlussstromverhältnis bei (a) gleich dem Leerlaufspannungsverhältnis bei (b).

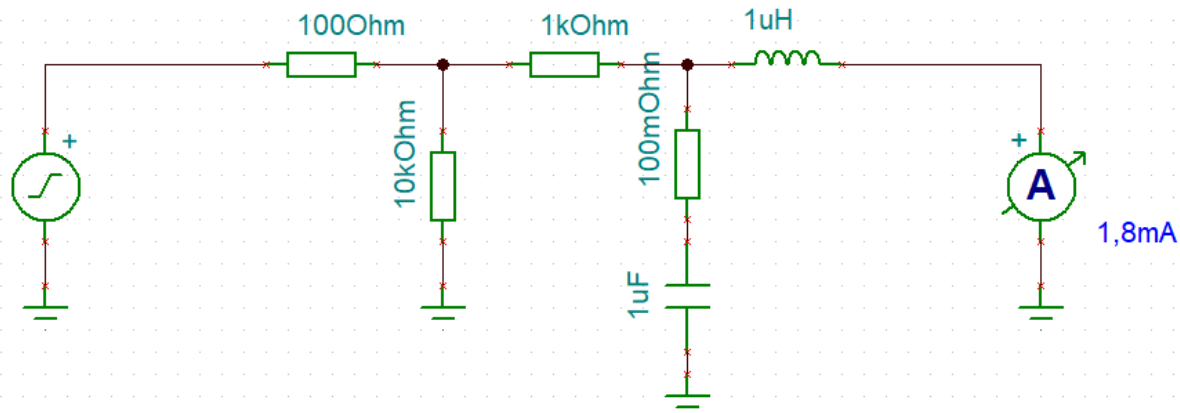


Reziprozität ist allein eine Eigenschaft der verwendeten Bauteile (R, L, C) und damit der Materialien, aus den diese hergestellt sind.

Die symmetrische Admittanz- und Impedanzmatrix reziproker Schaltungen darf nicht als symmetrischer Schaltungsaufbau missdeutet werden.

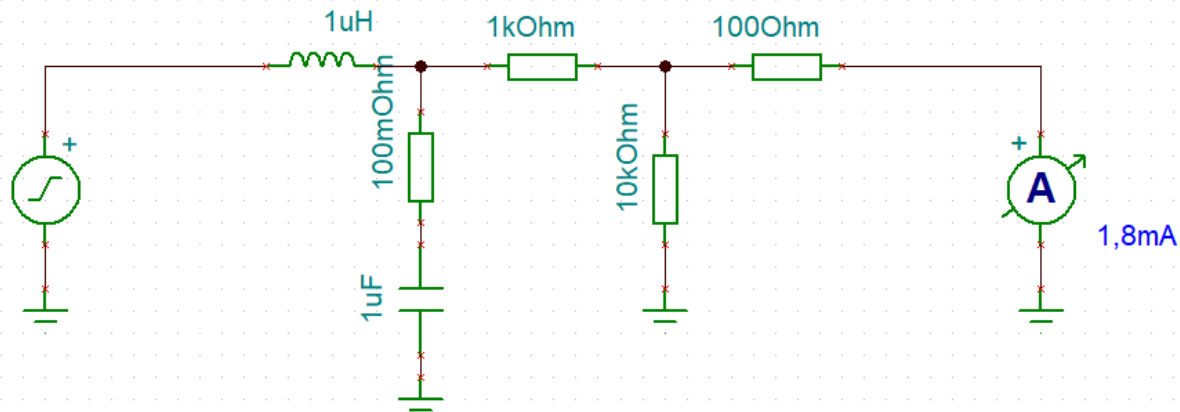
Spice Demo: DC-Analyse

Ideale Spannungsquelle
 $R = 0 \text{ Ohm}$
 $V_{dc} = 2 \text{ V}$
 $V_{ac} = \sin(1 \text{ V}, 100 \text{ kHz})$



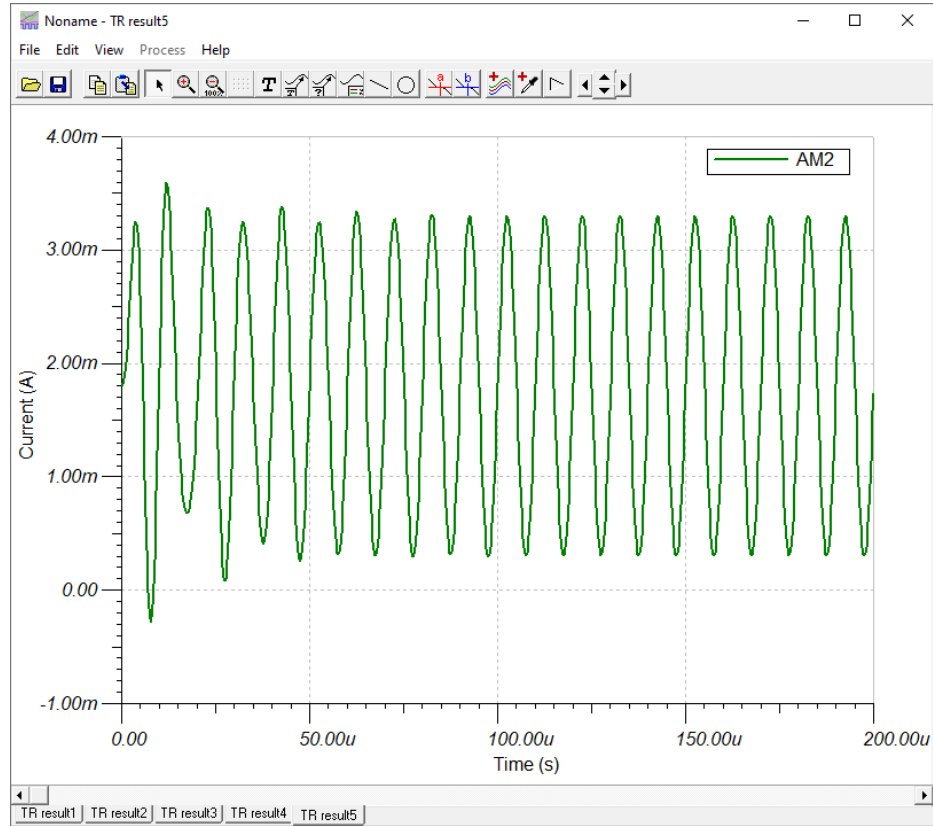
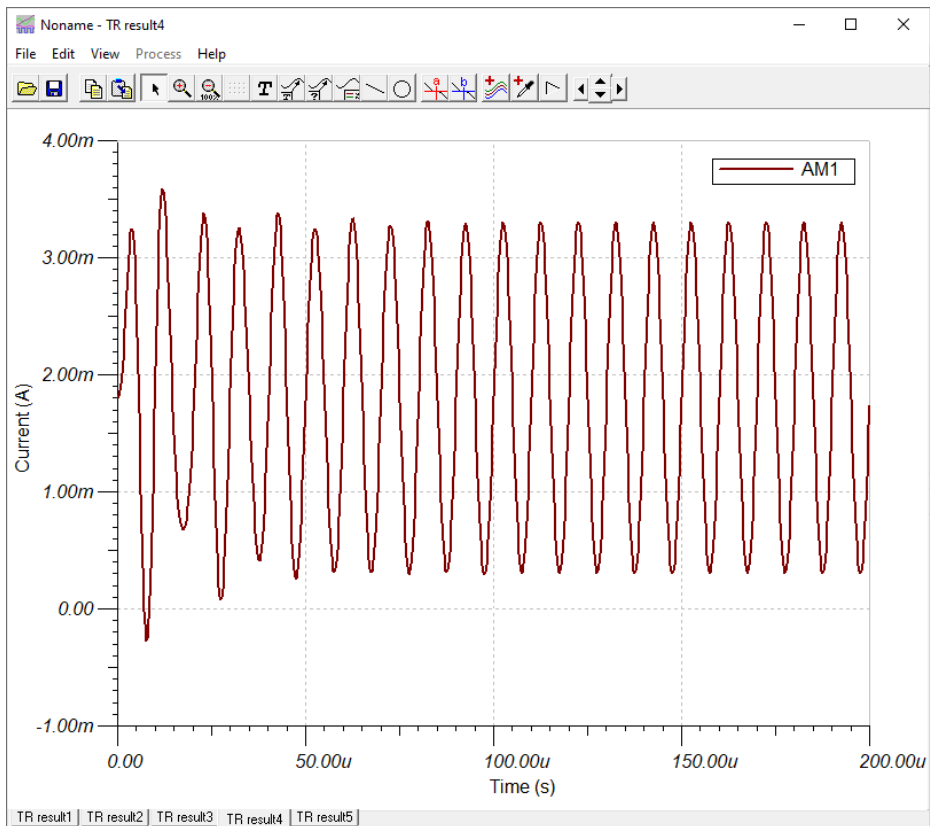
Ideales Amperemeter
($R = 0$)

Ideale Spannungsquelle
 $R = 0 \text{ Ohm}$
 $V_{dc} = 2 \text{ V}$
 $V_{ac} = \sin(1 \text{ V}, 100 \text{ kHz})$

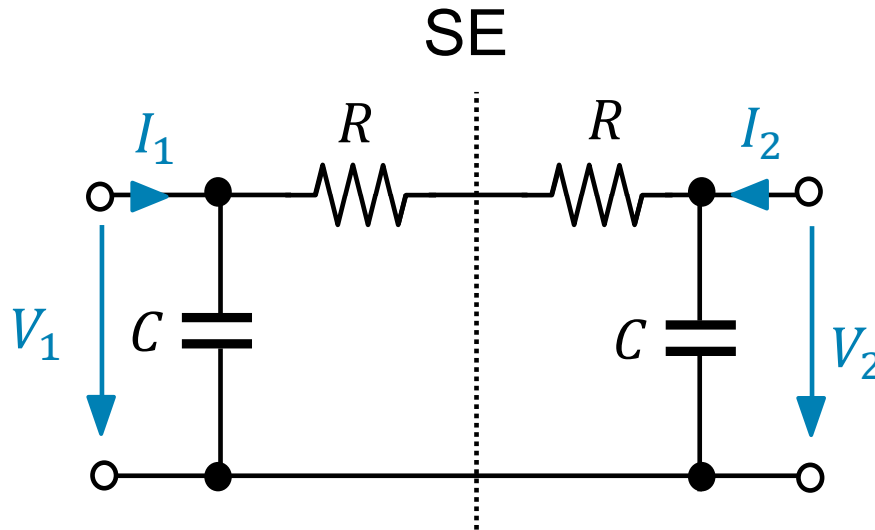


Ideales Amperemeter
($R = 0$)

Spice Demo: Transientenanalyse



7. Zweitoreigenschaften – Symmetrie



Für torsymmetrische Zweitore ergibt sich:

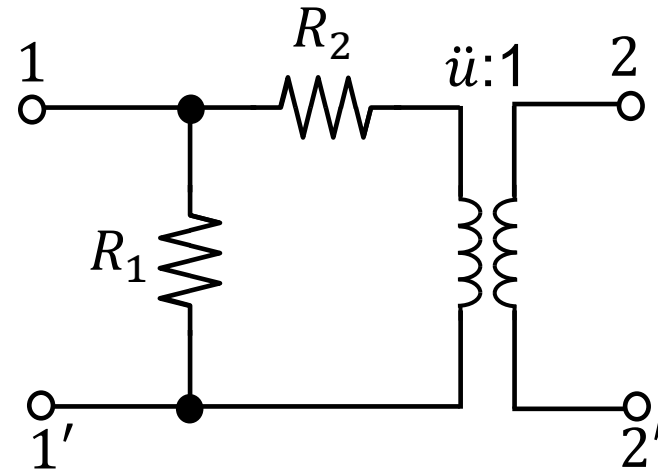
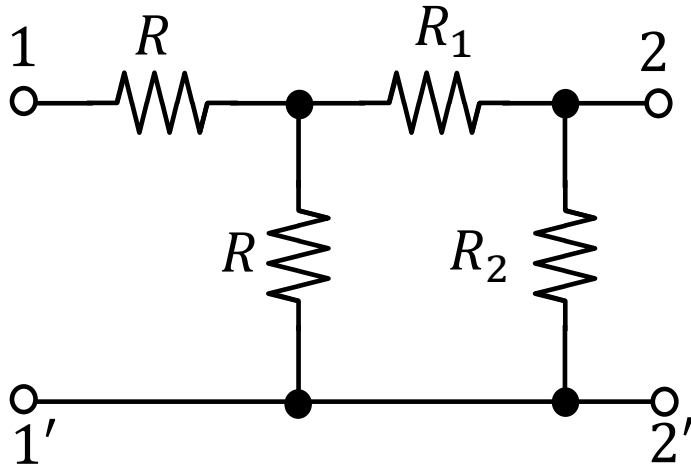
$$Z_{11} = Z_{22} ; \quad Z_{12} = Z_{21}$$

$$Y_{11} = Y_{22} ; \quad Y_{12} = Y_{21}$$

$$A_{11} = A_{22} ; \quad \det \underline{\underline{A}} = 1$$

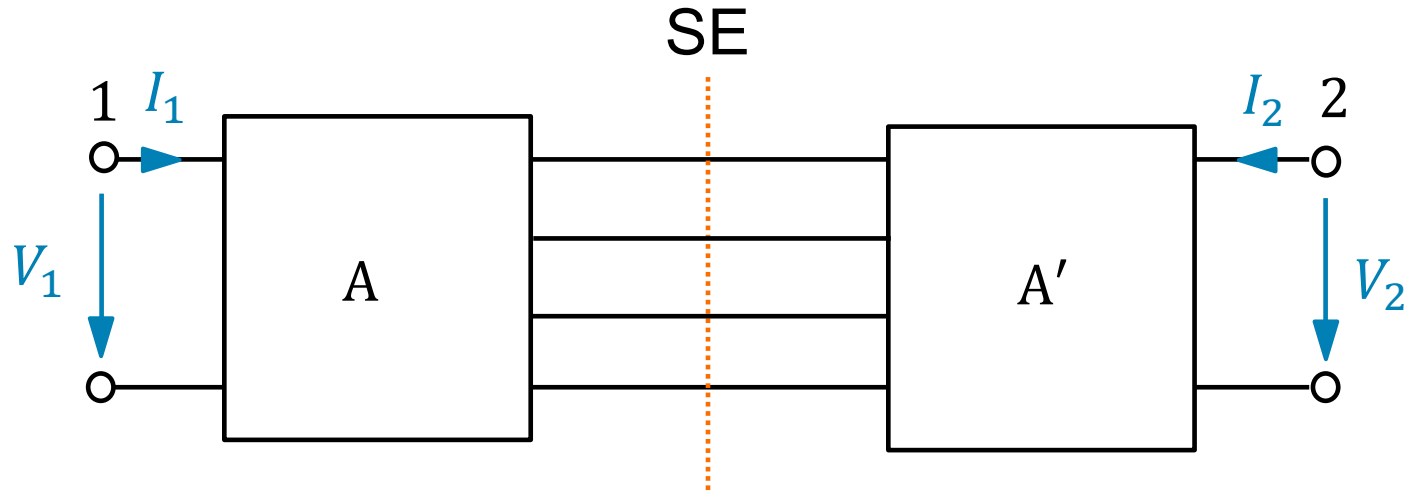
7. Zweitoreigenschaften – Symmetrie

- Folgende Schaltungen können auch unter bestimmten Bedingungen die Symmetriebedingung erfüllen, obwohl sie keine Aufbausymmetrie aufweisen

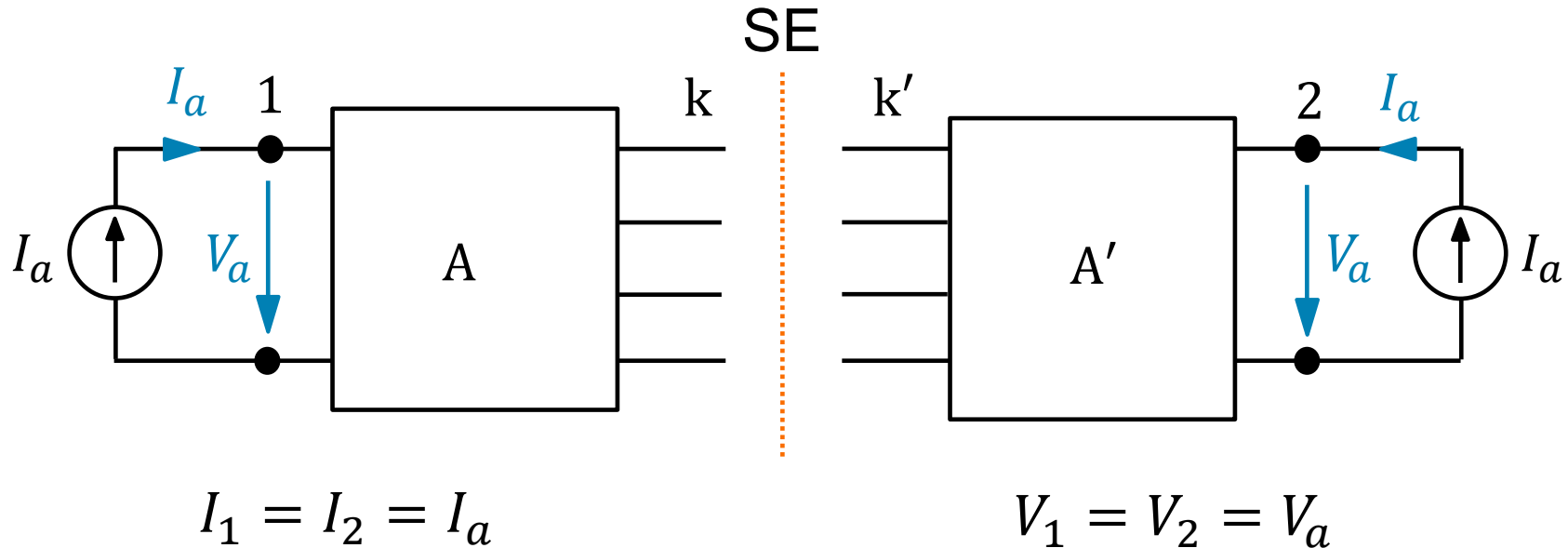


7. Zweitoreigenschaften – Analyse torsymmetrische Zweitore

- Aufbausymmetrisches Zweitor mit den spiegelbildlichen Teilnetzen A und A'



7. Zweitoreigenschaften – Gleichtakt (Common-Mode)

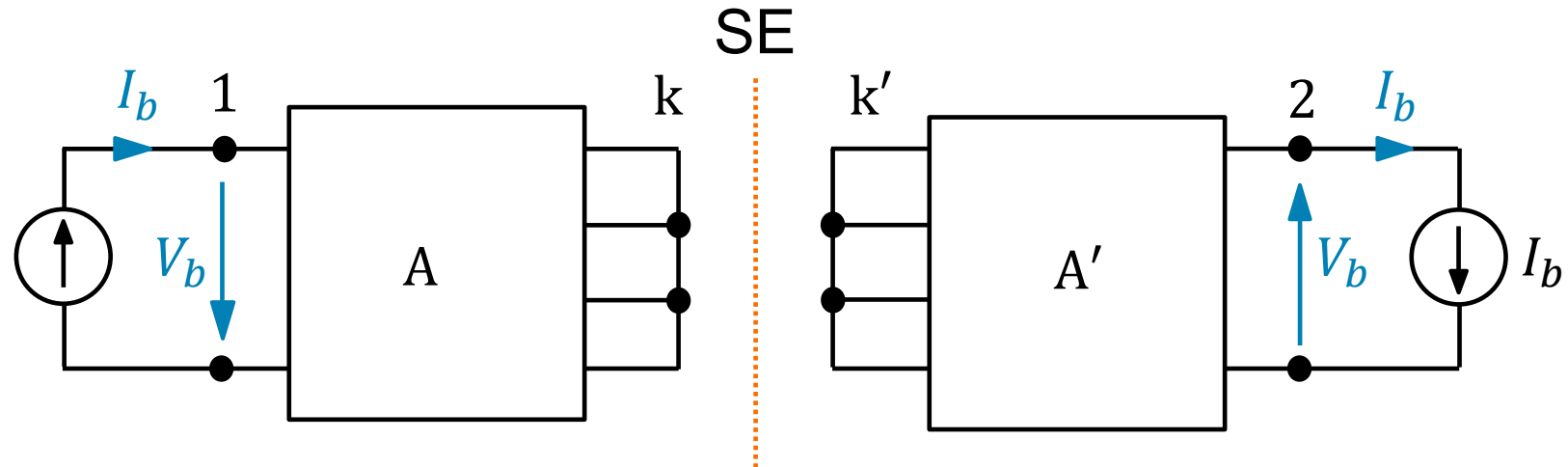


$$V_a = Z_{11} \cdot I_a + Z_{12} \cdot I_a$$

$$V_a = Z_{21} \cdot I_a + Z_{22} \cdot I_a$$

$$Z_a = \frac{V_a}{I_a} = Z_{11} + Z_{12} = Z_{21} + Z_{22}$$

7. Zweitoreigenschaften – Gegentakt (Differential Mode)



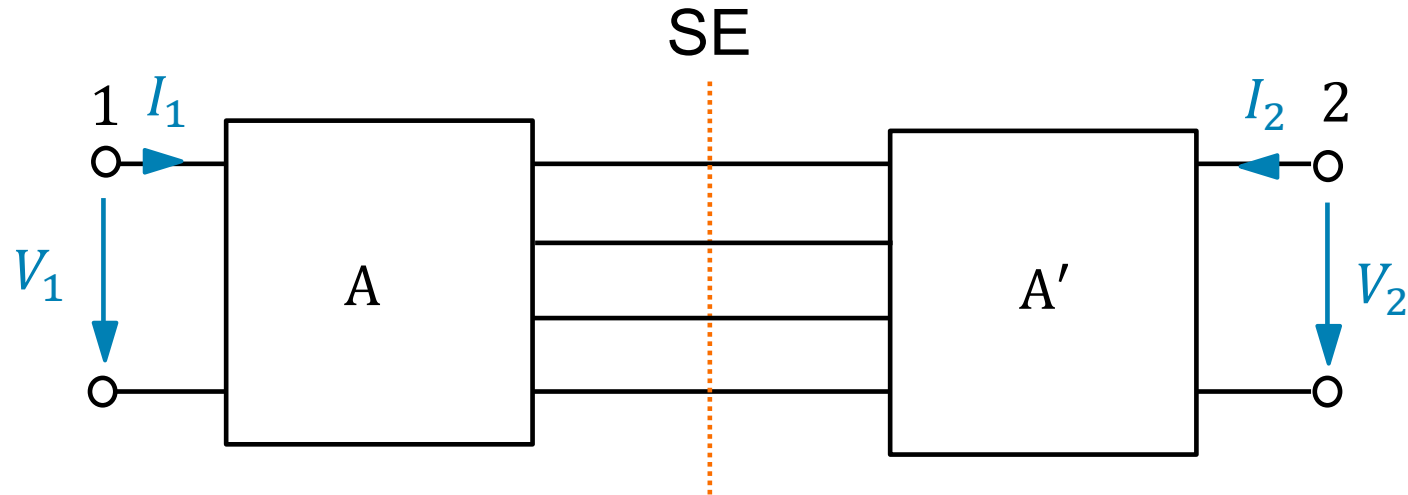
$$I_1 = -I_2 = I_b$$

$$V_1 = -V_2 = V_b$$

$$\begin{aligned} V_b &= Z_{11} \cdot I_b + Z_{12} \cdot (-I_b) \\ -V_b &= Z_{21} \cdot I_b + Z_{22} \cdot (-I_b) \end{aligned}$$

$$Z_b = \frac{V_b}{I_b} = Z_{11} - Z_{12} = Z_{22} - Z_{21}$$

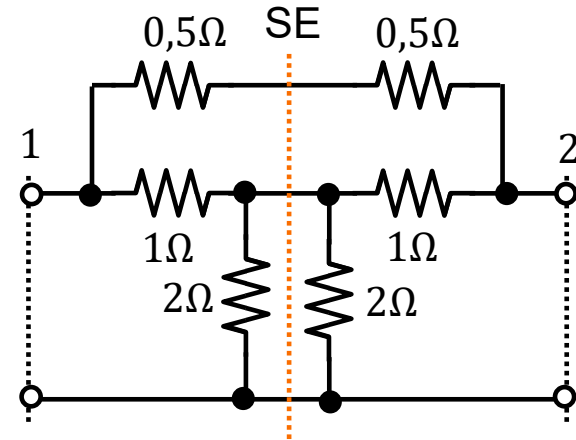
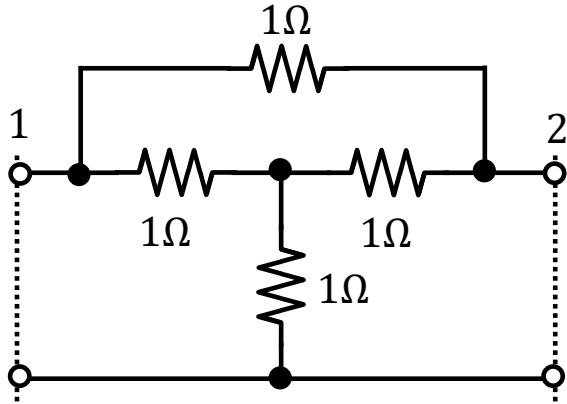
7. Zweitoreigenschaften – Analyse torsymmetrische Zweitore



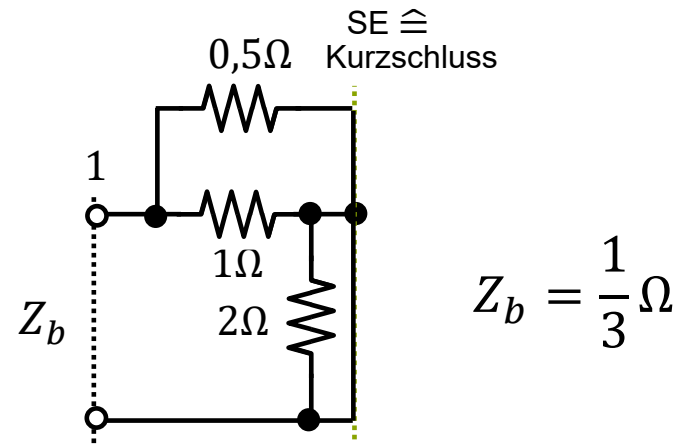
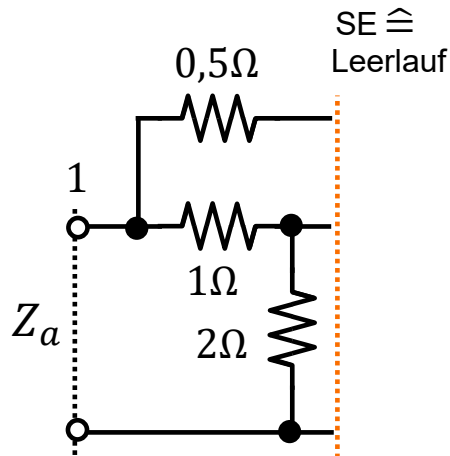
$$Z_{11} = Z_{22} = \frac{1}{2}(Z_a + Z_b)$$

$$Z_{12} = Z_{21} = \frac{1}{2}(Z_a - Z_b)$$

7. Zweitoreigenschaften – Beispiel



$$Z_a = 3\Omega$$



$$Z_b = \frac{1}{3}\Omega$$

$$Z_{11} = Z_{22} = \frac{5}{3}\Omega ; \quad Z_{12} = Z_{21} = \frac{4}{3}\Omega$$

7. Zweitoreigenschaften – Zusätzliche Beispiele

- Induktivität



- Differentielle Leitung

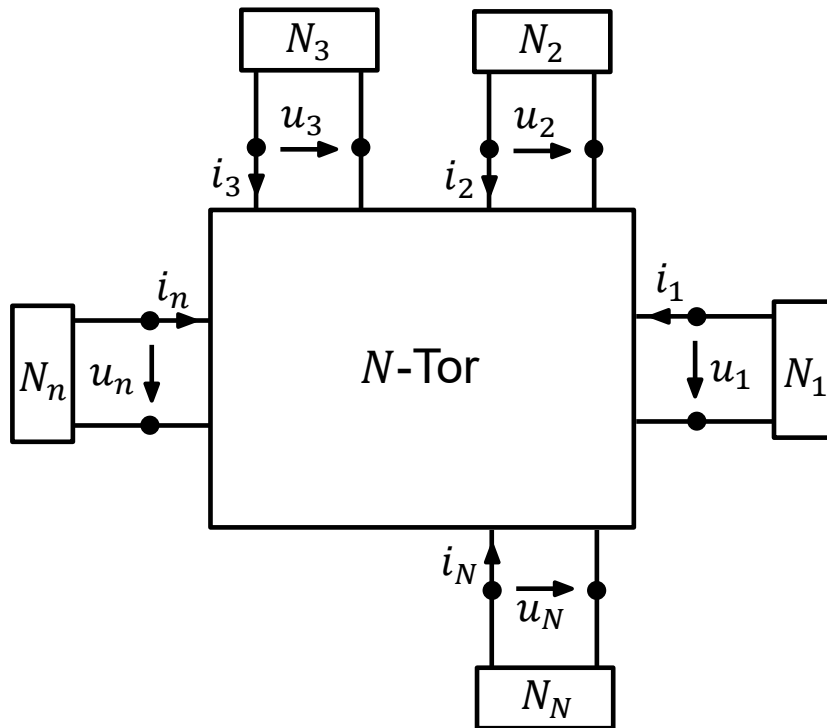


- Aktive Schaltungen



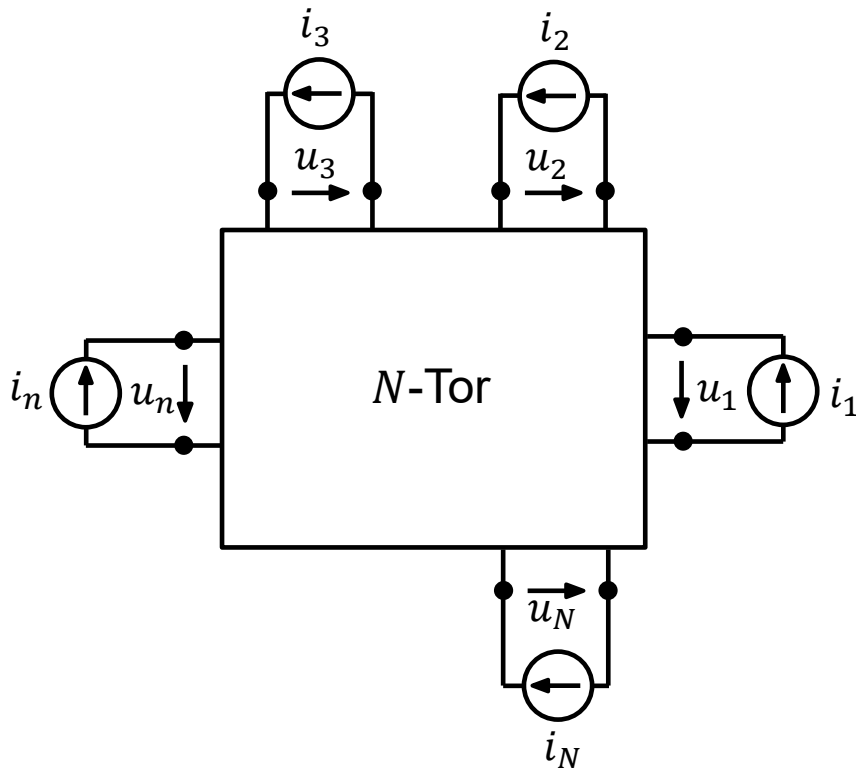
1. Zweitore – Einleitung
2. Impedanzmatrix $\underline{\underline{Z}}$
3. Admittanzmatrix $\underline{\underline{Y}}$
4. Kettenmatrix $\underline{\underline{A}}$
5. Hybridmatrix (Reihenparallelmatrix) $\underline{\underline{H}}$
6. Umrechnung verschiedener Matrixdarstellungen
7. Zweitoreigenschaften
- 8. N-Tore**
9. Zusammenschaltung von Zweitoren
10. S-Parameter

8. N-Tore



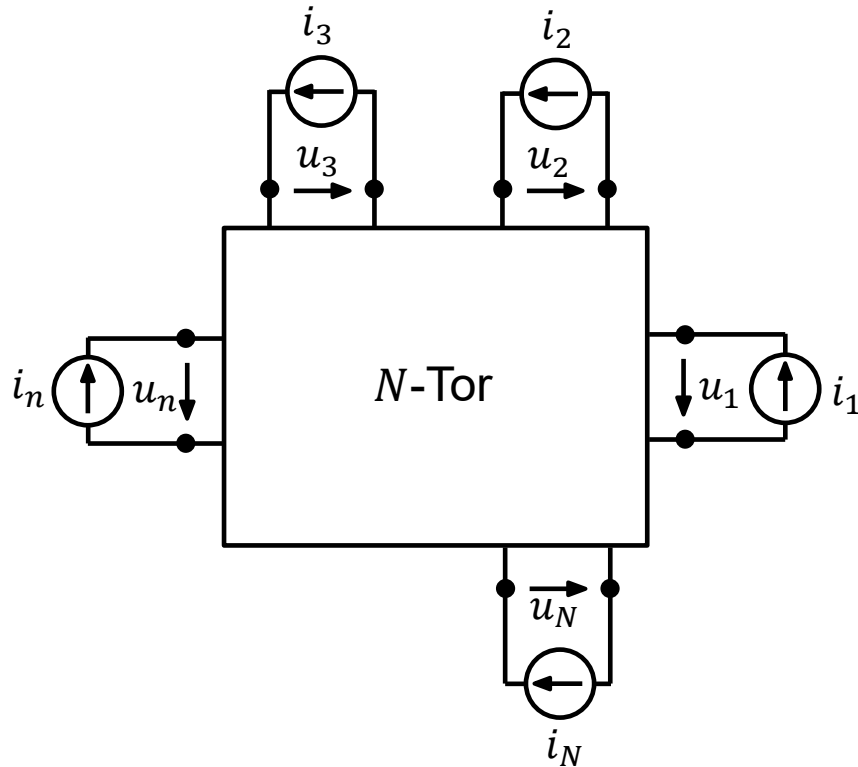
- Netzwerk mit N Klemmpaaren
- Gesucht:
 - ▶ u_1, u_2, \dots, u_N
 - ▶ i_1, i_2, \dots, i_N
- Dafür notwendig: $2N$ Gleichungen in der Form
 - ▶ $u_n = u_n(i_n)$ oder
 - ▶ $i_n = i_n(u_n)$
- N Gleichungen aus $N_1 \dots N_N$
- N Gleichungen aus N-Tor

8. N-Tore – Z-Matrix-Beschreibung



- Anregung mit Stromquellen i_1, i_2, \dots, i_N
- Bestimmung der Torspannungen u_1, u_2, \dots, u_N in Abhängigkeit von diesen Quellen:
 - ▶ $u_1 = u_1(i_1, i_2, \dots, i_N)$
 - ▶ $u_2 = u_2(i_1, i_2, \dots, i_N)$
 - ▶ $u_n = u_n(i_1, i_2, \dots, i_N)$
 - ▶ $u_N = u_N(i_1, i_2, \dots, i_N)$

8. N-Tore – Z-Matrix-Beschreibung

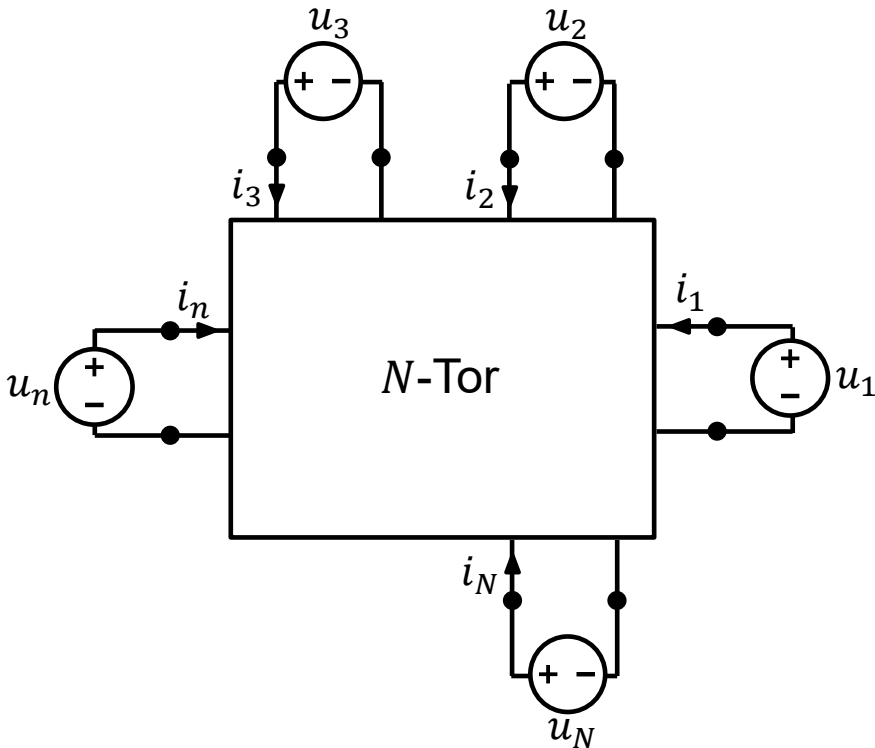


Für lineare N-Tore: Überlagerungsprinzip

- $u_1 = u_{10} + R_{11}i_1 + R_{12}i_2 + \dots + R_{1N}i_N$
- $u_2 = u_{20} + R_{21}i_1 + R_{22}i_2 + \dots + R_{2N}i_N$
- ...
- $u_N = u_{N0} + R_{N1}i_1 + R_{N2}i_2 + \dots + R_{NN}i_N$

- In Matrixform: $\underbrace{u}_N = \underbrace{u_0}_N + \underbrace{R}_{(N \times N)} \cdot \underbrace{i}_N$
- Phasorform: $\underline{U} = \underline{U}_0 + \underline{Z} \cdot \underline{I}$

8. N-Tore – Y-Matrix-Beschreibung



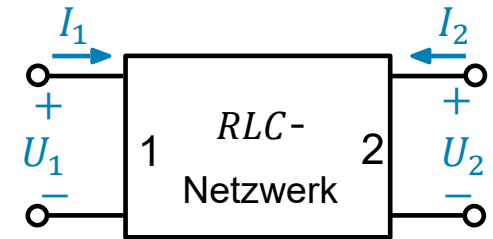
Für lineare N-Tore: Überlagerungsprinzip

- $i_1 = i_{10} + G_{11}u_1 + G_{12}u_2 + \dots + G_{1N}u_N$
 - $i_2 = i_{20} + G_{21}u_1 + G_{22}u_2 + \dots + G_{2N}u_N$
 - ...
 - $i_N = i_{N0} + G_{N1}u_1 + G_{N2}u_2 + \dots + G_{NN}u_N$
-
- In Matrixform: $\underset{\sim}{i} = \underset{\sim}{i_0} + \underset{(N \times N)}{\sim}{G} \cdot \underset{\sim}{i}$
 - Phasorform: $\underline{I} = \underline{I_0} + \underline{Y} \cdot \underline{U}$

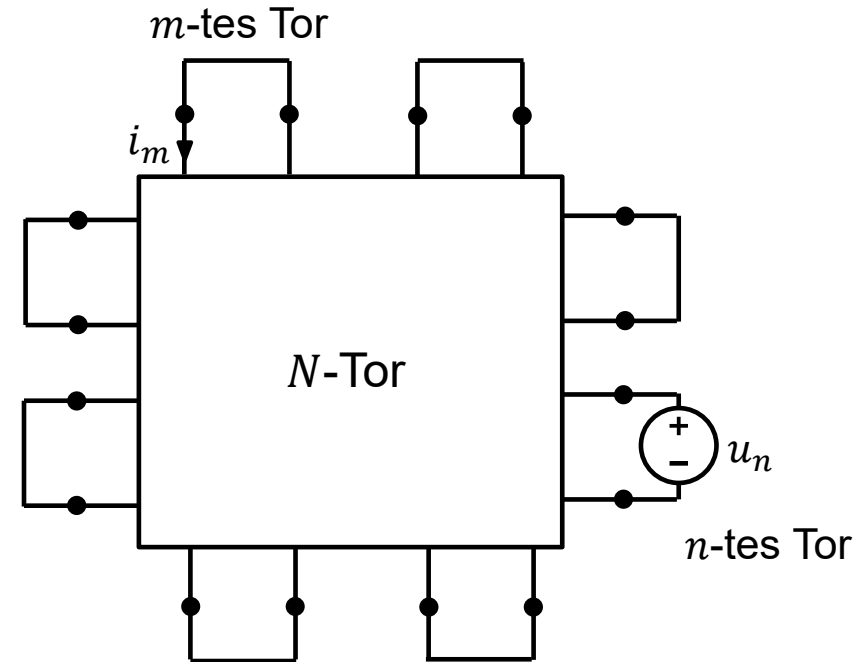
8. N-Tore – Symmetrie der Z- und Y-Matrix-Beschreibung

- Netzwerke **ohne interne Quellen** ...
 - ▶ besitzen in der Regel eine symmetrische Z und Y-Matrix

→ Solche Netzwerke sind **reziprok**



- Reziprok:
 - ▶ Übertragung von Tor n zu Tor m gleich Übertragung von Tor m zu Tor n



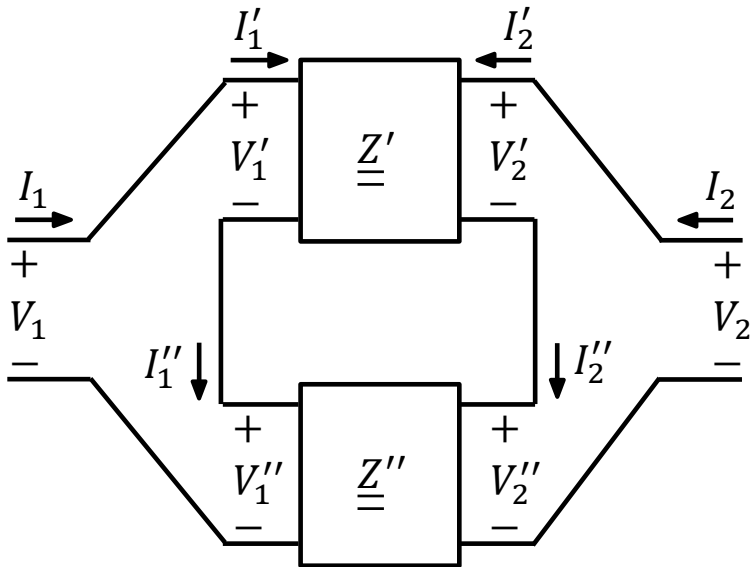
1. Zweitore – Einleitung
2. Impedanzmatrix $\underline{\underline{Z}}$
3. Admittanzmatrix $\underline{\underline{Y}}$
4. Kettenmatrix $\underline{\underline{A}}$
5. Hybridmatrix (Reihenparallelmatrix) $\underline{\underline{H}}$
6. Umrechnung verschiedener Matrixdarstellungen
7. Zweitoreigenschaften
8. N-Tore
- 9. Zusammenschaltung von Zweitoren**
10. S-Parameter

9. Zusammenschaltung von Zweitoren

1. Reihenschaltung von Zweitoren
2. Parallelschaltung von Zweitoren
3. Kettenschaltung von Zweitoren
4. Beispiele

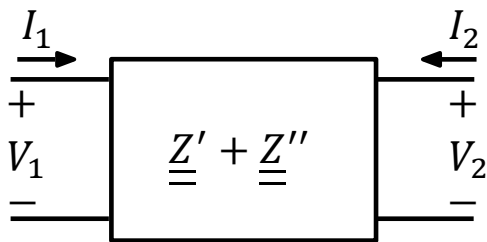
9.1. Reihenschaltung von Zweitoren

Sowohl die Eingangstore als auch die Ausgangstore der Zweitore sind in Reihe.



- Zusammenschaltung eines Zweitores in Z-Parameter-Darstellung $\underline{\underline{Z'}}$ mit einem zweiten $\underline{\underline{Z''}}$
- Reihenschaltung zweier Zweitore: Zweitore haben
 - gleichen Eingangsstrom und
 - gleichen Ausgangsstrom
- $I_1' = I_1''$ muss erfüllt sein (keine Ringströme in der Mitte), damit gilt:
 - Äquivalentes Zweitor durch äquivalente Impedanzmatrix $\underline{\underline{Z_{eq}}}$ darstellbar (Parameterbestimmung analog zu $\underline{\underline{Z}}$)

Äquivalentes Zweitor



$$Z_{eq11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

$$\text{Mit } I_2 = I_2' = I_2'' = 0$$

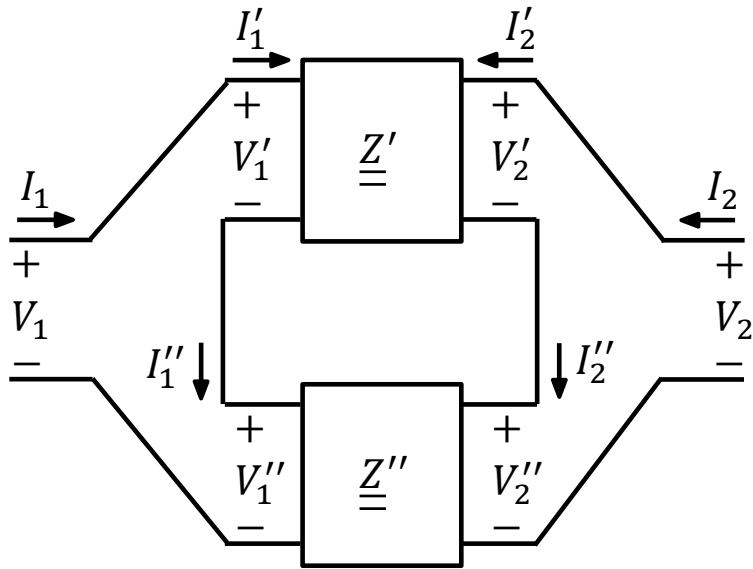
$$I_1 = I_1' = I_1''$$

$$V_1 = V_1' + V_1''$$

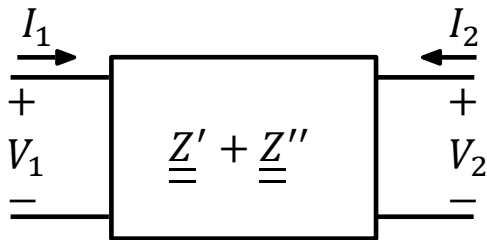
ergibt sich

$$Z_{eq11} = \left. \frac{V_1'}{I_1'} \right|_{I_2'=0} + \left. \frac{V_1''}{I_1''} \right|_{I_2''=0} = Z_{11}' + Z_{11}''$$

9.1. Reihenschaltung von Zweitoren



Äquivalentes Zweitor



Für die Z-Parameter und \underline{Z}_{eq} ergibt sich damit

$$Z_{eq11} = Z'_{11} + Z''_{11}$$

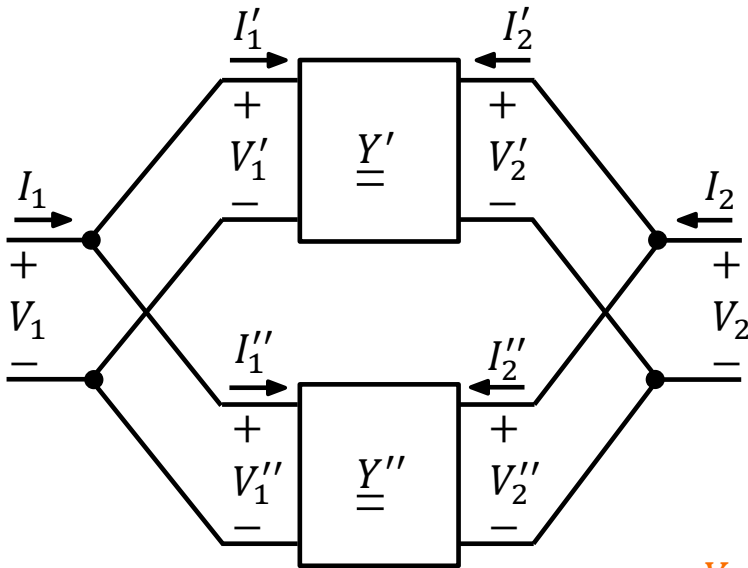
$$Z_{eq12} = Z'_{12} + Z''_{12}$$

$$Z_{eq21} = Z'_{21} + Z''_{21}$$

$$Z_{eq22} = Z'_{22} + Z''_{22}$$

$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}' + \underline{Z}''$$

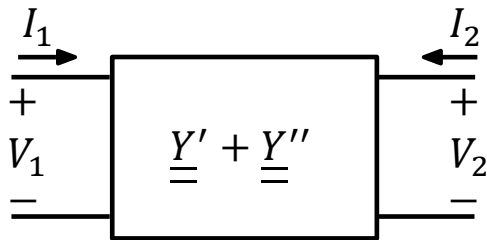
9.2. Parallelschaltung von Zweitoren



- Zusammenschaltung eines Zweitores in Y-Parameter-Darstellung $\underline{\underline{Y'}}$ mit einem zweiten $\underline{\underline{Y''}}$
- Parallelschaltung zweier Zweitore: Zweitore haben
 - gleiche Eingangsspannung und
 - gleiche Ausgangsspannung
- Äquivalentes Zweitor durch äquivalente Admittanzmatrix $\underline{\underline{Y_{eq}}}$ darstellbar (Parameterbestimmung analog zu $\underline{\underline{Y}}$)

$$Y_{eq11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0}$$

Äquivalentes Zweitor



Mit $V_2 = V_2' = V_2'' = 0$,

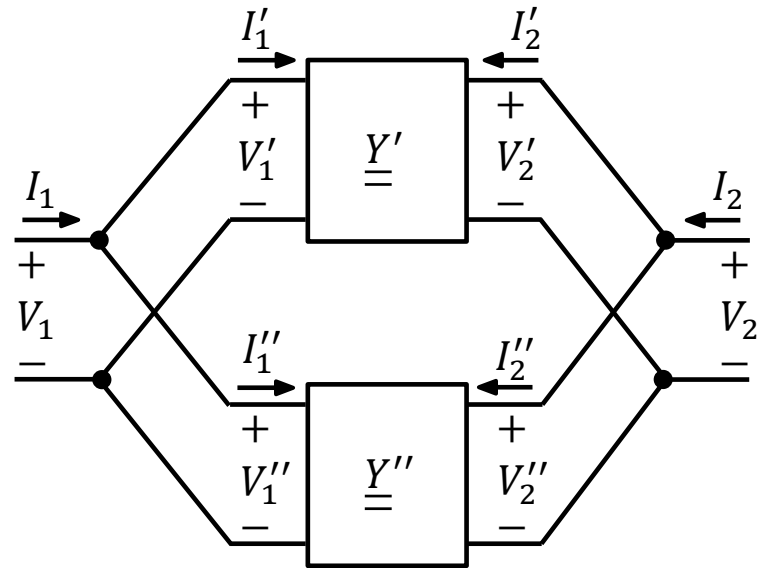
$$V_1 = V_1' = V_1'',$$

$$I_1 = I_1' + I_1''$$

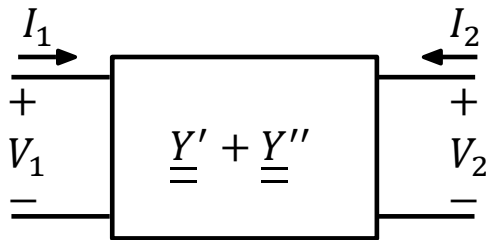
ergibt sich

$$Y_{eq11} = \left. \frac{I_1'}{V_1'} \right|_{V_2'=0} + \left. \frac{I_1''}{V_1''} \right|_{V_2''=0} = Y_{11}' + Y_{11}''$$

9.2. Parallelschaltung von Zweitoren



Äquivalentes Zweitor



Für die Y -Parameter und \underline{Y}_{eq} ergibt sich damit:

$$Y_{eq11} = Y'_{11} + Y''_{11}$$

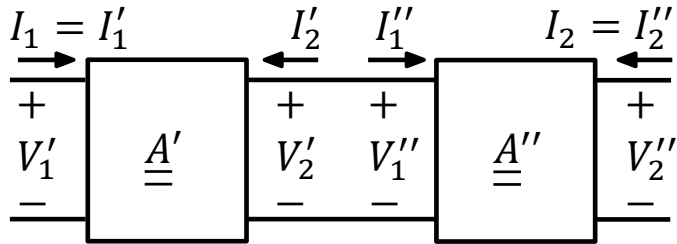
$$Y_{eq12} = Y'_{12} + Y''_{12}$$

$$Y_{eq21} = Y'_{21} + Y''_{21}$$

$$Y_{eq22} = Y'_{22} + Y''_{22}$$

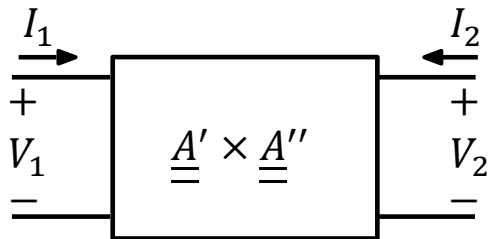
$$\underline{Y}_{eq} = \underline{Y}' + \underline{Y}''$$

9.3. Kettenschaltung von Zweitoren



- Zusammenschaltung eines Zweitores in A-Parameter-Darstellung $\underline{\underline{A'}}$ mit einem zweiten $\underline{\underline{A''}}$
- Äquivalentes Zweitor durch äquivalente Kettenmatrix $\underline{\underline{A_{eq}}}$ darstellbar (Parameterbestimmung analog zu $\underline{\underline{A}}$)

Äquivalentes Zweitor



$$A_{eq11} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$$

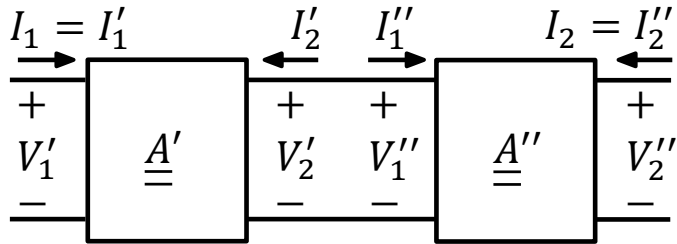
$$V_1' = A'_{11}V_2' - A'_{12}I_2'$$

$$\text{Mit } V_1 = V_1', \quad V_2' = V_1'', \quad V_2 = V_2'', \quad I_2' = -I_1''$$

ergibt sich

$$A_{eq11} = A'_{11} \left. \frac{V_1''}{V_2''} \right|_{I_2''=0} + A'_{12} \left. \frac{I_1''}{V_2''} \right|_{I_2''=0}$$

9.3. Kettenschaltung von Zweitoren

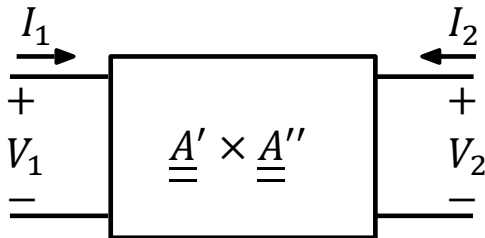


$$A_{eq11} = A'_{11} \left. \frac{V_1''}{V_2''} \right|_{I_2''=0} + A'_{12} \left. \frac{I_1''}{V_2''} \right|_{I_2''=0}$$

$\swarrow A_{11}$ $\swarrow A_{21}$

$$A_{eq11} = A'_{11}A''_{11} + A'_{12}A''_{21}$$

Äquivalentes Zweitor



Analog ergibt sich:

$$A_{eq12} = A'_{11}A''_{12} + A'_{12}A''_{22}$$

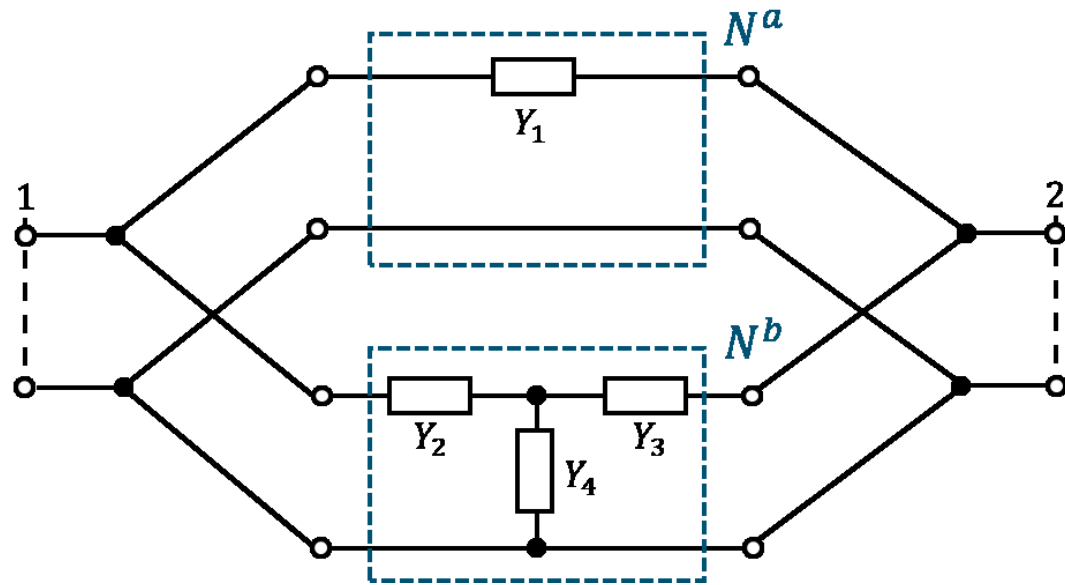
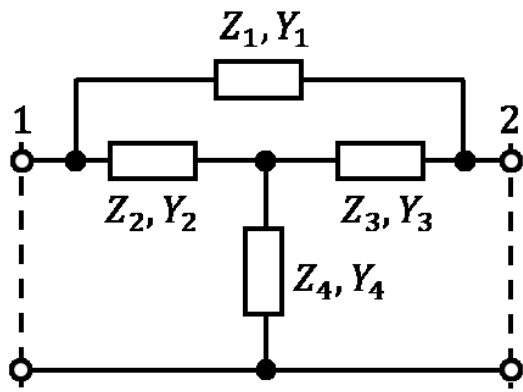
$$A_{eq21} = A'_{21}A''_{11} + A'_{22}A''_{21}$$

$$A_{eq22} = A'_{21}A''_{12} + A'_{22}A''_{22}$$

$$\underline{A}_{eq} = \underline{A}' \times \underline{A}''$$

Die Kettenmatrix der gesamten Schaltung ist das Matrix-Produkt der beiden einzelnen Kettenmatrizen.

9.4. Zusammenschaltung von Zweitoren – Beispiel 1

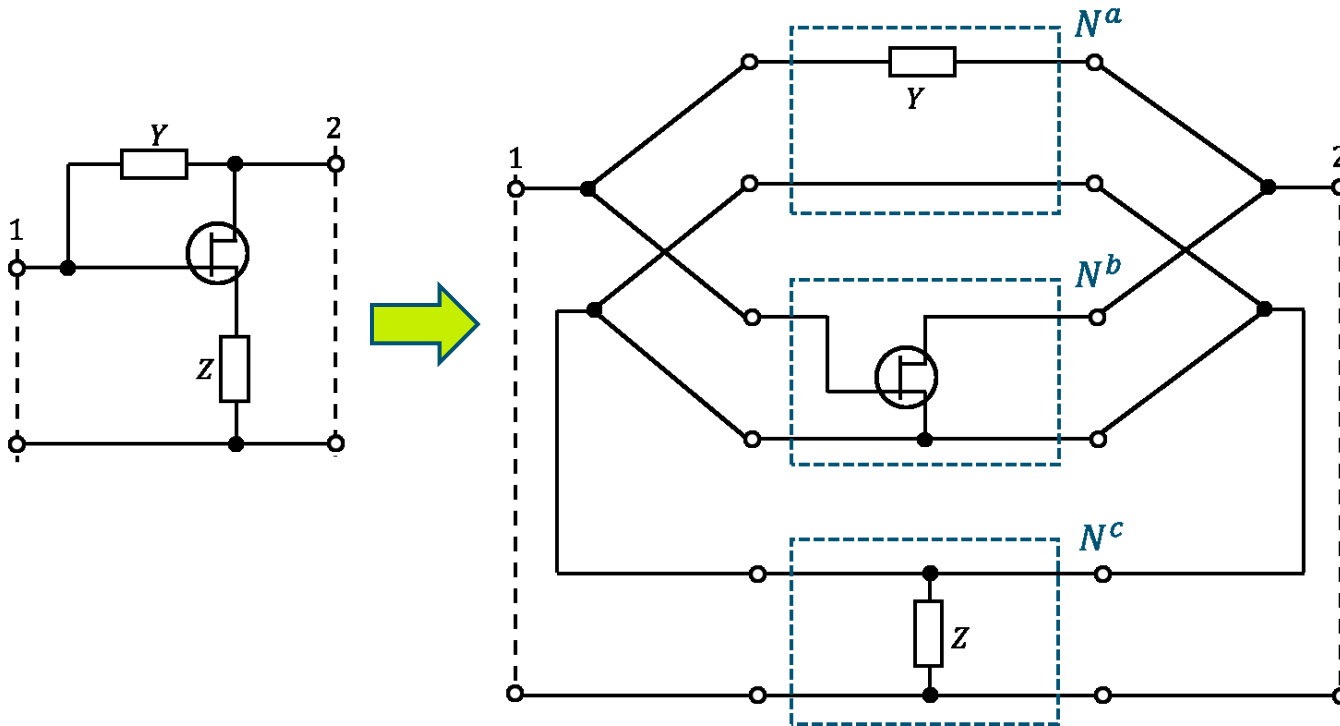


$$\underline{\underline{Y}}^a = \begin{pmatrix} Y_1 & -Y_1 \\ -Y_1 & Y_1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{Y}}^b = \frac{1}{Y_2 + Y_3 + Y_4} \begin{pmatrix} Y_2 \cdot (Y_3 + Y_4) & -Y_2 \cdot Y_3 \\ -Y_2 \cdot Y_3 & Y_3 \cdot (Y_2 + Y_4) \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{Y}}^a + \underline{\underline{Y}}^b = \begin{pmatrix} Y_1 + \frac{Y_2 \cdot (Y_3 + Y_4)}{Y_2 + Y_3 + Y_4} & -\left(Y_1 + \frac{Y_2 \cdot Y_3}{Y_2 + Y_3 + Y_4}\right) \\ -\left(Y_1 + \frac{Y_2 \cdot Y_3}{Y_2 + Y_3 + Y_4}\right) & Y_1 + \frac{Y_3 \cdot (Y_2 + Y_4)}{Y_2 + Y_3 + Y_4} \end{pmatrix}$$

9.4. Zusammenschaltung von Zweitoren – Beispiel 2



$$\underline{\underline{Y}}^b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{Y}}^{ab} = \begin{pmatrix} Y & -Y \\ g - Y & Y \end{pmatrix}$$

$$\det \underline{\underline{Y}}^{ab} = gY$$

$$\underline{\underline{Z}}^{ab} = \frac{1}{\det \underline{\underline{Y}}^{ab}} \cdot \begin{pmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{g} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 - \frac{g}{Y} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{Z}}^{ab} + \underline{\underline{Z}}^c = \begin{pmatrix} \frac{1}{g} + Z & \frac{1}{g} + Z \\ \frac{1}{g} + Z - \frac{1}{g} & \frac{1}{g} + Z \end{pmatrix}$$

1. Zweitore – Einleitung
2. Impedanzmatrix $\underline{\underline{Z}}$
3. Admittanzmatrix $\underline{\underline{Y}}$
4. Kettenmatrix $\underline{\underline{A}}$
5. Hybridmatrix (Reihenparallelmatrix) $\underline{\underline{H}}$
6. Umrechnung verschiedener Matrixdarstellungen
7. Zweitoreigenschaften
8. N-Tore
9. Zusammenschaltung von Zweitoren
- 10. Streumatrix $\underline{\underline{S}}$**

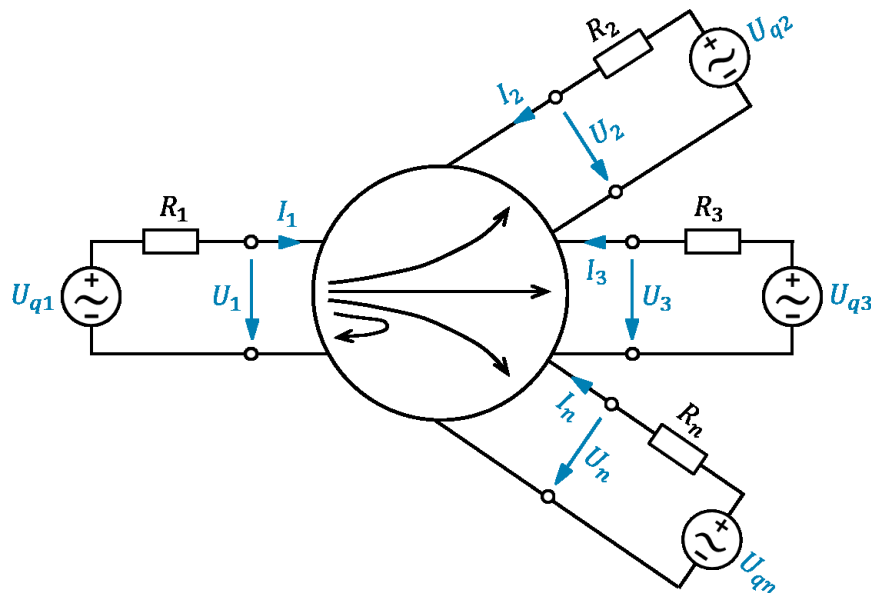
10. Streumatrix

Bisher:

- Verknüpfung von „Torspannungen“ und „Torströmen“
- Die äußere Beschaltung spielt keine Rolle.
- Messtechnische Ermittlung der Koeffizienten dieser Matrizen durch Kurzschlüsse und Leerläufe
- Stabilitätsprobleme bei hohen Frequenzen und/oder aktiven Schaltungen möglich!

Ausweg: Streumatrix:

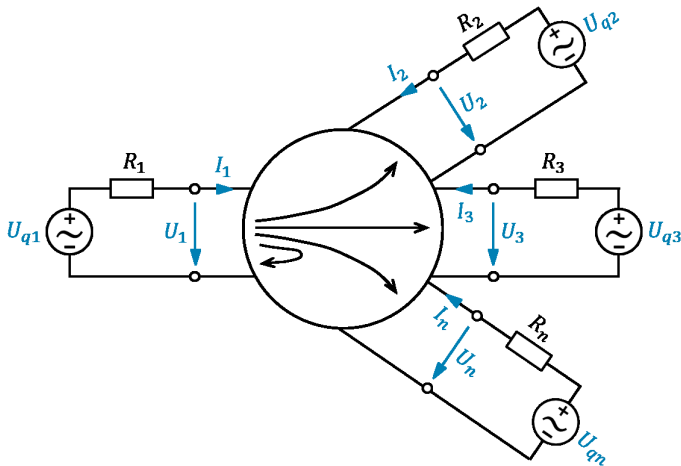
- Verknüpfung von normierten Torgrößen
- Als Normierungsgrößen gewählt werden zweckmäßigerweise die Widerstände der äußeren Beschaltung.



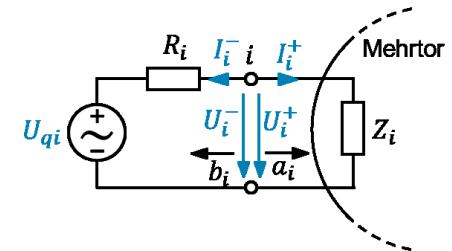
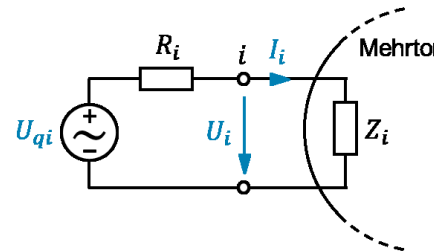
Beschaltung jedes Tors mit einer Spannungsquelle mit ohmschen Innenwiderstand

Für diesen Fall ist Übertragungsverhalten von einem beliebigen Tor zu allen anderen sowie die Anpassung jedes Tors an die jeweilige Quelle gesucht.

10. Streumatrix



Bezugsgrößen zur Definition der Torwellen:



Zur Bildung der durch die Streumatrix verknüpften Wellengrößen:

Transformation des Variablenpaares U_i , I_i des Tores i in neues Variablenpaar a_i , b_i entsprechend der Definition:

$$a_i = \frac{U_i + R_i \cdot I_i}{2 \cdot \sqrt{R_{Ni}}} = \frac{U_{qi}}{2 \cdot \sqrt{R_{Ni}}} \quad (1)$$

$$b_i = \frac{U_i - R_i \cdot I_i}{2 \cdot \sqrt{R_{Ni}}} = \frac{2U_i - U_{qi}}{2 \cdot \sqrt{R_{Ni}}} \quad (2)$$

R_{Ni} : Normierungswiderstand für Tor i (beliebig).

Zweckmäßige Wahl: $R_{Ni} = R_i$

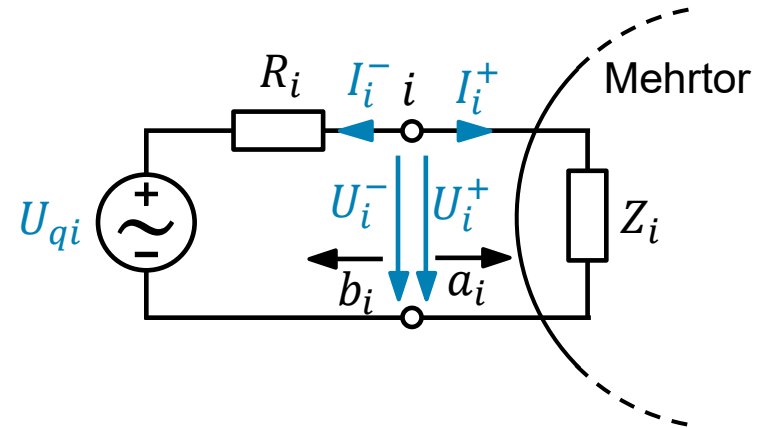
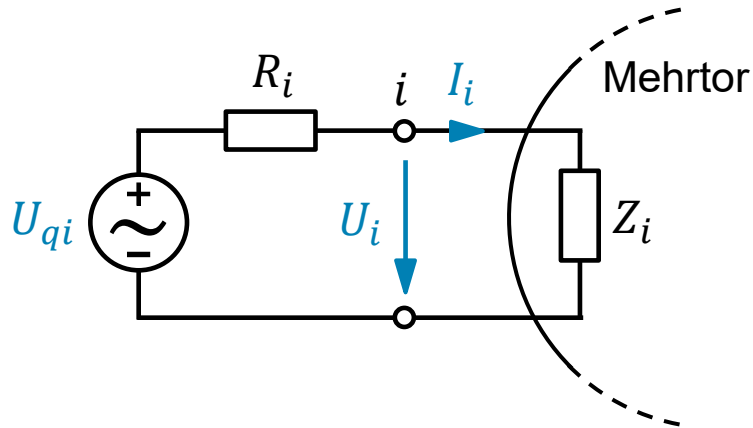
Mit $R_{Ni} = R_i$ ergibt sich aus Gl. (1) und (2) für die eindeutig umkehrbare Variablentransformation:

$$\frac{U_i}{\sqrt{R_i}} = a_i + b_i$$

$$I_i \cdot \sqrt{R_i} = a_i - b_i$$

10. Streumatrix

Bezugsgrößen zur Definition der Torwellen:



U_i : additive Überlagerung zweier Teilspannungen U_i^+ und U_i^-

I_i : Differenz zweier Teilströme I_i^+ und I_i^-

U_i^+ , I_i^+ wird „Welle“ zugeordnet, die sich auf Tor i zubewegt und Leistung in Richtung dieses Tores schickt.

U_i^- , I_i^- wird „Welle“ zugeordnet, die sich vom Tor i wegbewegt.

Damit:

$$U_i = U_i^+ + U_i^- \text{ und } I_i = I_i^+ + I_i^-$$

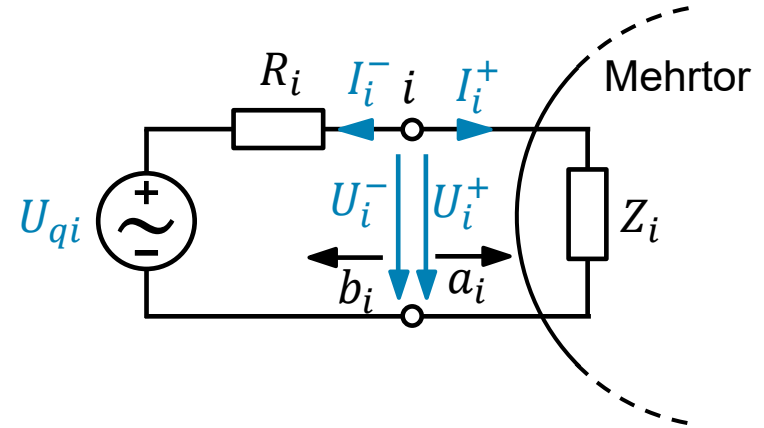
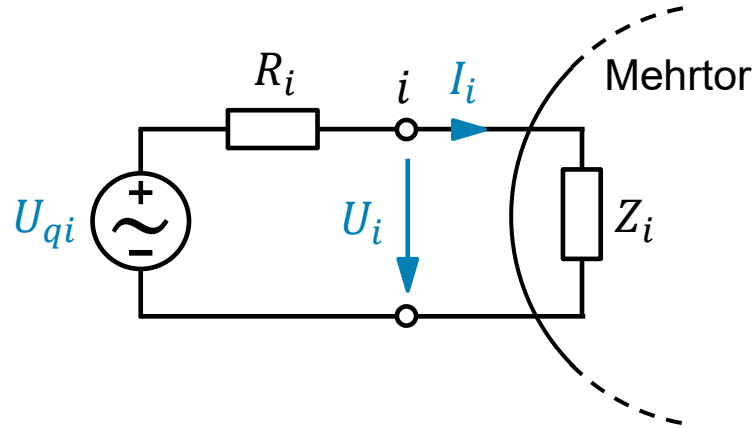
$$\text{mit } U_i^+ = R_i I_i^+ \text{ und } U_i^- = R_i I_i^-$$

Für die Wellengrößen a_i und b_i folgt dann:

$$a_i = \frac{U_i^+}{\sqrt{R_i}} = I_i^+ \cdot \sqrt{R_i}$$

$$b_i = \frac{U_i^-}{\sqrt{R_i}} = I_i^- \cdot \sqrt{R_i}$$

10. Streumatrix



a_i : durch U_i^+ oder I_i^+ und R_i beschriebene Welle, die in das Tor i hineinfließt.

b_i : durch U_i^- oder I_i^- und R_i beschriebene Welle, die vom Tor i wegfließt.

R_i : Beschaltungs- und Normierungswiderstand

10. Streumatrix

Definition einer Streumatrix:

Reflektierte Wellen als Funktion der zufließenden Wellen:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \underline{\underline{S}} \underline{a}$$

Bedeutung der Streuparameter $S_{\mu\nu}$

$$S_{\mu\nu} = \left. \frac{b_\mu}{a_\nu} \right|_{a_{i \neq \nu} = 0}$$

Transmissionskoeffizient

Transmissionsverhalten von Tor ν zu Tor μ

$$S_{\nu\nu} = \left. \frac{b_\nu}{a_\nu} \right|_{a_{i \neq \nu} = 0}$$

Reflexionskoeffizient

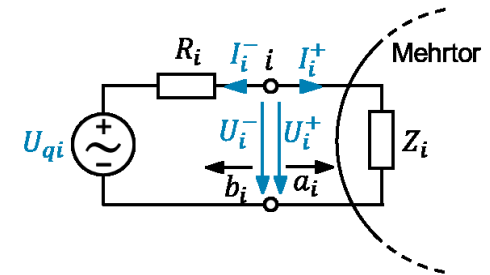
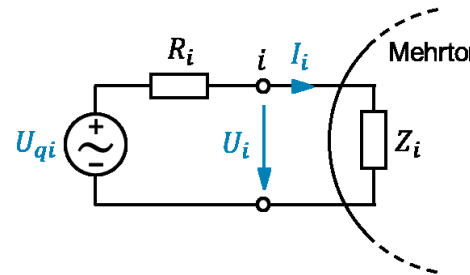
Reflexionsverhalten des Tors ν

10. Streumatrix

Bedeutung der Streuparameter $S_{\mu\nu}$

Mit $U_{qi \neq v} = 0$ folgt

$$b_{\mu} = \frac{2 \cdot U_{\mu}}{2 \cdot \sqrt{R_{\mu}}} ; \quad a_{\nu} = \frac{U_{qv}}{2 \cdot \sqrt{R_{\mu}}}$$



$$S_{\mu\nu} = 2 \frac{U_{\mu}}{U_{qv}} \cdot \sqrt{\frac{R_{\nu}}{R_{\mu}}} \bigg|_{U_{qi \neq v} = 0} \quad (3)$$

$$S_{\mu\nu} = \frac{b_{\mu}}{a_{\nu}} \bigg|_{a_{i \neq v} = 0}$$

$$S_{\nu\nu} = \frac{b_{\nu}}{a_{\nu}} \bigg|_{a_{i \neq v} = 0}$$

Absorbierte Wirkleistung am Widerstand R_{μ} des Tores μ : $P_{p\mu} = \frac{1}{2} \frac{|U_{\mu}|^2}{R_{\mu}}$

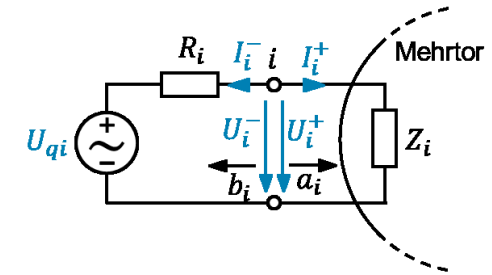
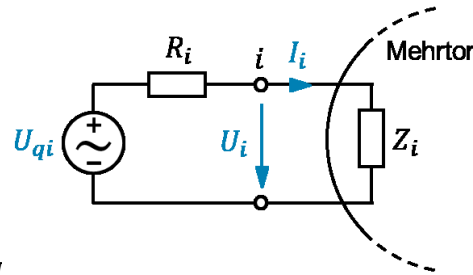
Am Tor ν verfügbare Leistung: $P_{p\nu, \max} = \frac{|U_{qv}|^2}{8 R_{\nu}} = \frac{1}{2} |a_{\nu}|^2$

Leistungsübertragung von Tor ν zum Tor μ $\frac{P_{p\mu}}{P_{p\nu, \max}} = 4 \frac{|U_{\mu}|^2}{|U_{qv}|^2} \cdot \frac{R_{\nu}}{R_{\mu}} = |S_{\mu\nu}|^2$

oder $P_{p\mu} = \frac{1}{2} |a_{\nu}|^2 \cdot |S_{\mu\nu}|^2$

10. Streumatrix

Bedeutung der Streuparameter $S_{\mu\nu}$



Vom Tor ν absorbierte Wirkleistung $I_{\nu\nu}$.

$$P_{p\nu} = \frac{1}{2} \Re\{U_\nu \cdot I_\nu^*\} = \frac{1}{2} \Re\left\{\sqrt{R_\nu} \cdot (a_\nu + b_\nu) \cdot \frac{1}{\sqrt{R_\nu}} \cdot (a_\nu^* - b_\nu^*)\right\}$$

oder
$$P_{p\nu} = \frac{1}{2} (|a_\nu|^2 - |b_\nu|^2) = P_{p\nu}^+ - P_{p\nu}^-$$

verfügbare Leistung der Quelle

vom Tor ν reflektierte Leistung

$$S_{\mu\nu} = \left. \frac{b_\mu}{a_\nu} \right|_{a_i \neq \nu = 0}$$

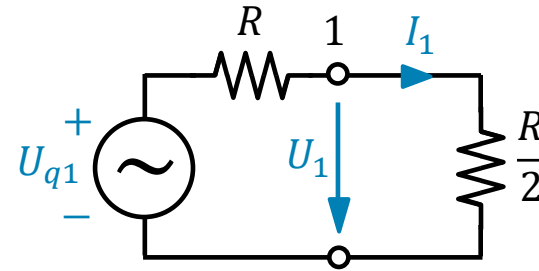
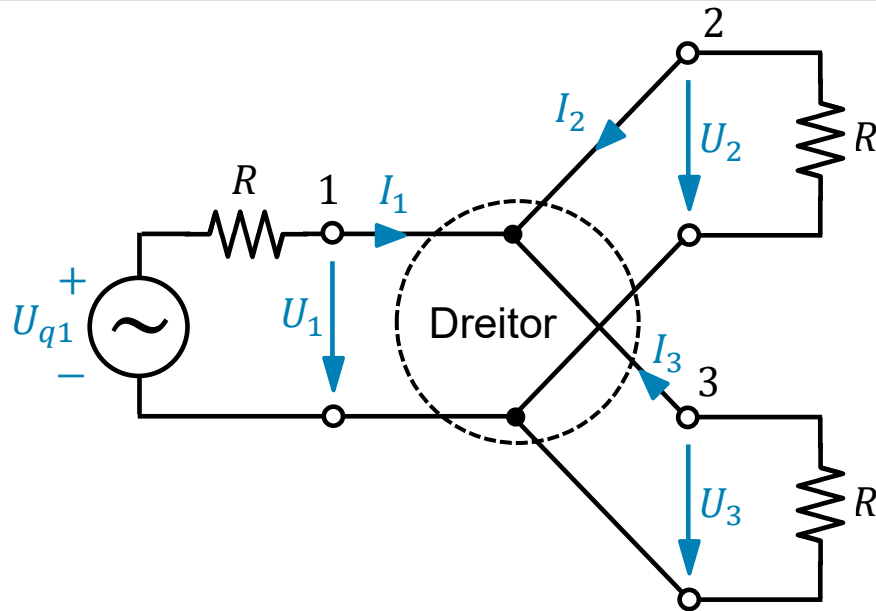
$$S_{\nu\nu} = \left. \frac{b_\nu}{a_\nu} \right|_{a_i \neq \nu = 0}$$

Für das Verhältnis von reflektierter zu zufließender Welle am Tor ν gilt mit Gl. (1) und (2):

$$S_{\nu\nu} = \frac{b_\nu}{a_\nu} = \frac{U_\nu - R_\nu \cdot I_\nu}{U_\nu + R_\nu \cdot I_\nu} = \frac{\frac{U_\nu}{I_\nu} - R_\nu}{\frac{U_\nu}{I_\nu} + R_\nu} = \frac{Z_\nu - R_\nu}{Z_\nu + R_\nu} \quad (4)$$

Wenn das Netzwerk reziprok ist, gilt $S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu}$

10. Streumatrix – Beispiel



$$S_{11} = S_{22} = S_{33}$$

$$\text{Gl. (4)} \rightarrow S_{11} = \frac{Z_1 - R_1}{Z_1 + R_1} = \frac{\frac{R}{2} - R}{\frac{R}{2} + R} = -\frac{1}{3}$$

$$U_1 = U_2 = U_3 = \frac{1}{3} U_{q1} \quad S_{21} = S_{31} = \frac{2}{3}$$

$$\underline{\underline{S}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

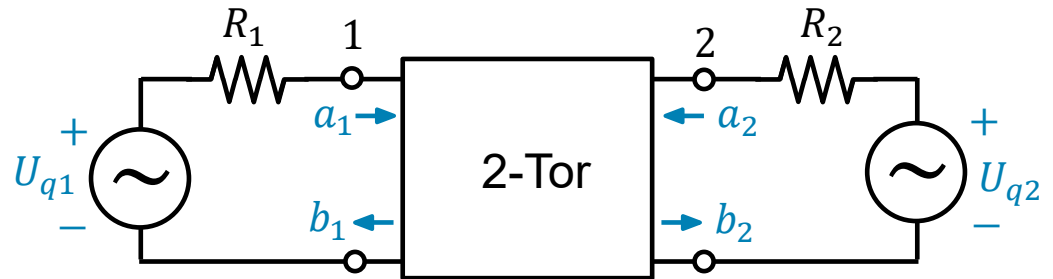
$$S_{vv} = \frac{Z_v - R_v}{Z_v + R_v} \quad (4)$$

$$S_{\mu v} = 2 \frac{U_\mu}{U_{qv}} \cdot \sqrt{\frac{R_v}{R_\mu}} \bigg|_{U_{qi \neq v} = 0} \quad (3)$$

10. Streumatrix eines Zweitors

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b} = \underline{S} \cdot \underline{a}$$



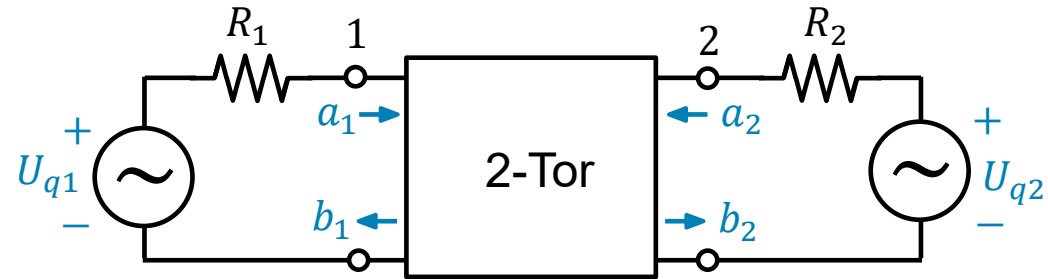
$$S_{11} = \left. \frac{Z_1 - R_1}{Z_1 + R_1} \right|_{U_{q2}=0}$$

$$S_{12} = 2 \cdot \left. \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{U_1}{U_{q2}} \right|_{U_{q1}=0}$$

$$S_{21} = 2 \cdot \left. \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \cdot \frac{U_2}{U_{q1}} \right|_{U_{q2}=0}$$

$$S_{22} = \left. \frac{Z_2 - R_2}{Z_2 + R_2} \right|_{U_{q1}=0}$$

10. Streumatrix eines verlustlosen Zweitors



$$P_p^+ = P_{p1}^+ + P_{p2}^+ = \frac{1}{2}|a_1|^2 + \frac{1}{2}|a_2|^2 = \frac{1}{2}\underline{A}^{*T} \cdot \underline{A} \quad \text{mit } \underline{A}^T = (a_1 \quad a_2)$$

$$P_p^- = P_{p1}^- + P_{p2}^- = \frac{1}{2}|b_1|^2 + \frac{1}{2}|b_2|^2 = \frac{1}{2}\underline{B}^{*T} \cdot \underline{B} \quad \text{mit } \underline{B}^T = (b_1 \quad b_2)$$

Für die vom Zweitor absorbierte Wirkleistung gilt mit $\underline{B} = \underline{S} \cdot \underline{A}$ bzw. $\underline{B}^{*T} = \underline{A}^{*T} \cdot \underline{S}^{*T}$:

$$P_p = P_p^+ - P_p^-$$

$$P_p = \frac{1}{2}\underline{A}^{*T}\underline{A} - \frac{1}{2}\underline{A}^{*T} \cdot \underline{S}^{*T} \cdot \underline{S} \cdot \underline{A}$$

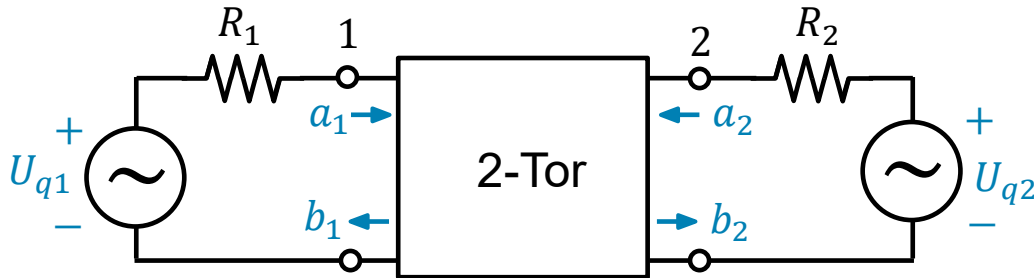
$$P_p = \frac{1}{2}\underline{A}^{*T} \cdot (\underline{E} - \underline{S}^{*T}\underline{S}) \cdot \underline{A}$$

$$P_p = \frac{1}{2}\underline{A}^{*T} \cdot \underline{P} \cdot \underline{A} \quad \text{mit } \underline{P} = \underline{E} - \underline{S}^{*T}\underline{S}$$

Für verlustlose Zweitore gilt $P_p = 0$
und damit auch $\underline{P} = 0$

$$\Rightarrow \underline{S}^{*T} \cdot \underline{S} = \underline{E}$$

10. Streumatrix eines verlustlosen Zweitors



$$\underline{\underline{S}}^{*T} \cdot \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{E}}$$

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1$$

$$|S_{22}|^2 + |S_{12}|^2 = 1$$

$$S_{11}^* \cdot S_{12} + S_{21}^* \cdot S_{22} = 0$$

$$\frac{|S_{11}|^2}{|S_{22}|^2} = \frac{1 - |S_{21}|^2}{1 - |S_{12}|^2} = \frac{|S_{21}|^2}{|S_{12}|^2}$$

$$|S_{11}| = |S_{22}|$$

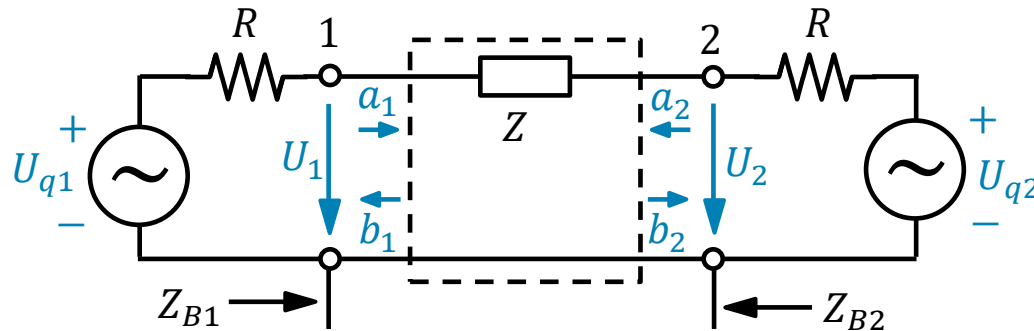
$$|S_{11}| = \sqrt{1 - |S_{12}|^2}$$

$$|S_{21}| = |S_{12}|$$

$$|\det \underline{\underline{S}}| = 1$$

10. Streumatrix eines Zweitports – Beispiel 1

Reihenschaltung einer Impedanz Z



$S_{11} = S_{22}$ (wegen Aufbausymmetrie des Zweitports folgt die Reflexionssymmetrie)

Normierung von Z $z = \frac{Z}{R}$

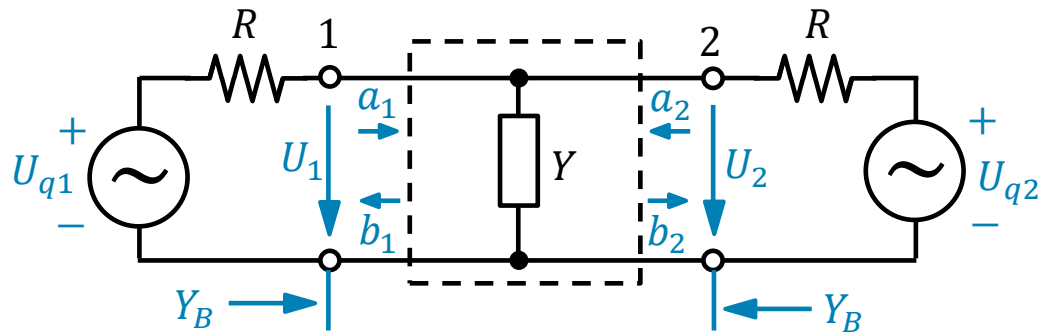
Eingangswiderstände: $Z_{B1} = Z_{B2} = Z_B = Z + R = (z + 1) \cdot R$

Reflexionskoeffizienten: $S_{11} = S_{22} = \frac{Z_B - R}{Z_B + R} = \frac{z_B - 1}{z_B + 1} = \frac{z}{z + 2}$

Transmissionskoeffizienten: $S_{21} = S_{12} = 2 \cdot \frac{U_2}{U_{q1}} \cdot \sqrt{\frac{R}{R}} = 2 \cdot \frac{U_1}{U_2} \cdot \sqrt{\frac{R}{R}} = 2 \cdot \frac{R}{2R + Z} = \frac{2}{z + 2}$

10. Streumatrix eines Zweitors – Beispiel 2

Parallelschaltung einer Admittanz Y



Zweitor ist aufbau- und damit reflexionssymmetrisch.

Normierung $y = YR$

Mit $y_B = Y_B R = y + 1$ folgt: $S_{11} = S_{22} = \frac{1 - y_B}{1 + y_B} = \frac{-y}{2 + y}$

sowie $S_{12} = S_{21} = \frac{2}{y + 2}$

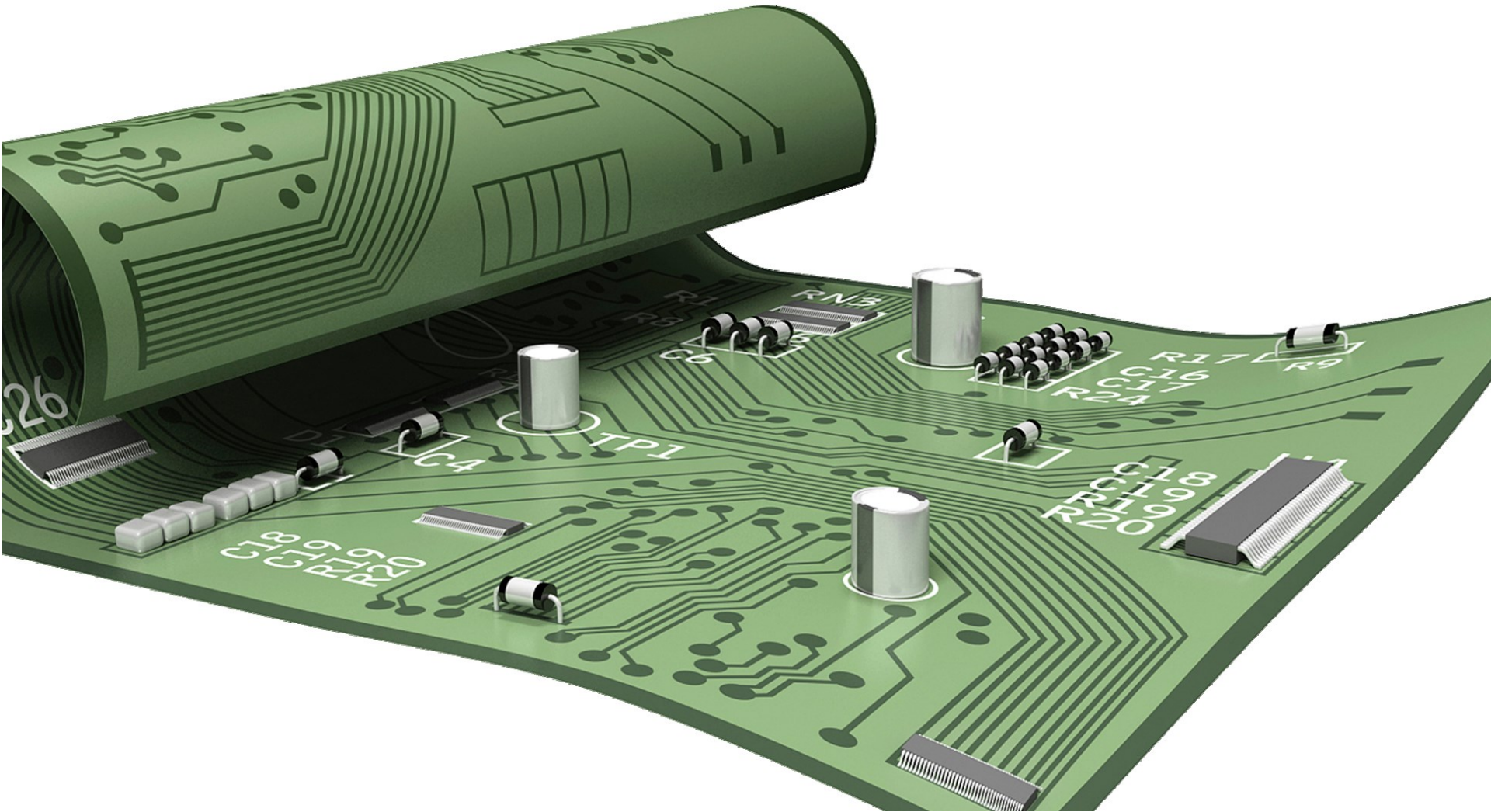
10. Parameterumrechnungen

$\underline{\underline{Z}} \leftrightarrow \underline{\underline{S}}$	$\underline{\underline{Y}} \leftrightarrow \underline{\underline{S}}$	$\underline{\underline{A}} \leftrightarrow \underline{\underline{S}}$
$Z_{11} = \frac{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$Y_{11} = \frac{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$A_{11} = \frac{S_{11} - S_{22} + 1 - \det \underline{\underline{S}}}{2S_{21}}$
$Z_{12} = \frac{2S_{12}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$Y_{12} = \frac{-2S_{12}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$A_{12} = \frac{S_{11} + S_{22} + 1 + \det \underline{\underline{S}}}{2S_{21}}$
$Z_{21} = \frac{2S_{21}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$Y_{21} = \frac{-2S_{21}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$A_{21} = \frac{-S_{11} - S_{22} + 1 + \det \underline{\underline{S}}}{2S_{21}}$
$Z_{22} = \frac{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$Y_{22} = \frac{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$A_{22} = \frac{-S_{11} + S_{22} + 1 - \det \underline{\underline{S}}}{2S_{21}}$
$S_{11} = \frac{(Z_{11} - 1)(Z_{22} + 1) - Z_{12}Z_{21}}{(Z_{11} + 1)(Z_{22} + 1) - Z_{12}Z_{21}}$	$S_{11} = \frac{(1 - Y_{11})(1 + Y_{22}) + Y_{12}Y_{21}}{(1 + Y_{11})(1 + Y_{22}) - Y_{12}Y_{21}}$	$S_{11} = \frac{A_{11} + A_{12} - A_{21} - A_{22}}{A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22}}$
$S_{12} = \frac{2Z_{12}}{(Z_{11} + 1)(Z_{22} + 1) - Z_{12}Z_{21}}$	$S_{12} = \frac{-2Y_{12}}{(1 + Y_{11})(1 + Y_{22}) - Y_{12}Y_{21}}$	$S_{12} = \frac{2 \det \underline{\underline{A}}}{A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22}}$
$S_{21} = \frac{2Z_{21}}{(Z_{11} + 1)(Z_{22} + 1) - Z_{12}Z_{21}}$	$S_{21} = \frac{-2Y_{21}}{(1 + Y_{11})(1 + Y_{22}) - Y_{12}Y_{21}}$	$S_{21} = \frac{2}{A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22}}$
$S_{22} = \frac{(Z_{11} + 1)(Z_{22} - 1) - Z_{12}Z_{21}}{(Z_{11} + 1)(Z_{22} + 1) - Z_{12}Z_{21}}$	$S_{22} = \frac{(1 + Y_{11})(1 - Y_{22}) + Y_{12}Y_{21}}{(1 + Y_{11})(1 + Y_{22}) - Y_{12}Y_{21}}$	$S_{22} = \frac{-A_{11} + A_{12} - A_{21} + A_{22}}{A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22}}$

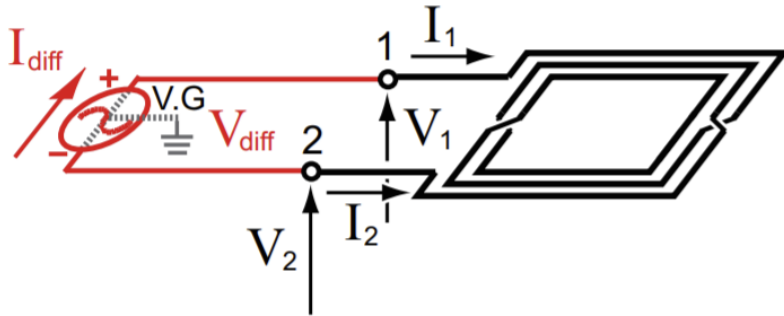
References

- [1] L.-P. Schmidt, G. Schaller, S. Martius „Grundlagen Elektrotechnik Netzwerke“, 2. Auflage, Pearson, 2014
- [2] Vorlesung Netzwerktheorie, TUHH

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!

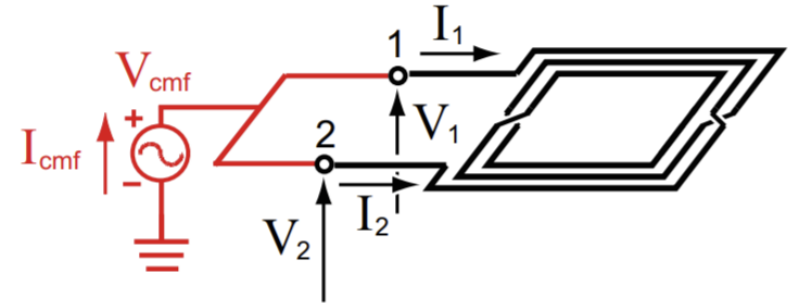


7. Zweitoreigenschaften – Beispiel Induktivität



$$I_1 = -I_2 = I_{\text{diff}}, \quad V_1 = -V_2 = V_{\text{diff}}/2, \quad V_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} I_{\text{diff}} \\ -I_{\text{diff}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y'_{11} & Y'_{12} \\ Y'_{21} & Y'_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_{\text{diff}}/2 \\ -V_{\text{diff}}/2 \end{pmatrix}$$



$$I_1 = I_2 = I_{\text{cmf}}/2, \quad V_1 = V_2 = V_{\text{cmf}}$$

$$\begin{pmatrix} I_{\text{cmf}}/2 \\ I_{\text{cmf}}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y'_{11} & Y'_{12} \\ Y'_{21} & Y'_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_{\text{cmf}} \\ V_{\text{cmf}} \end{pmatrix}$$

$$V_{\text{diff}} = \frac{4}{Y'_{11} - Y'_{12} - Y'_{21} + Y'_{22}} I_{\text{diff}} = Z_{\text{diff}} \cdot I_{\text{diff}}$$

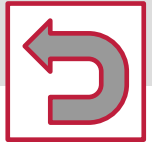
$$\therefore L_{\text{diff}} = \frac{1}{\omega} \text{Im}(Z_{\text{diff}})$$

$$Q_{\text{diff}} = \frac{\text{Im}(Z_{\text{diff}})}{\text{Re}(Z_{\text{diff}})}$$

$$V_{\text{cmf}} = \frac{1}{Y'_{11} + Y'_{12} + Y'_{21} + Y'_{22}} I_{\text{cmf}} = Z_{\text{cmf}} \cdot I_{\text{cmf}}$$

$$\therefore L_{\text{cmf}} = \frac{1}{\omega} \text{Im}(Z_{\text{cmf}})$$

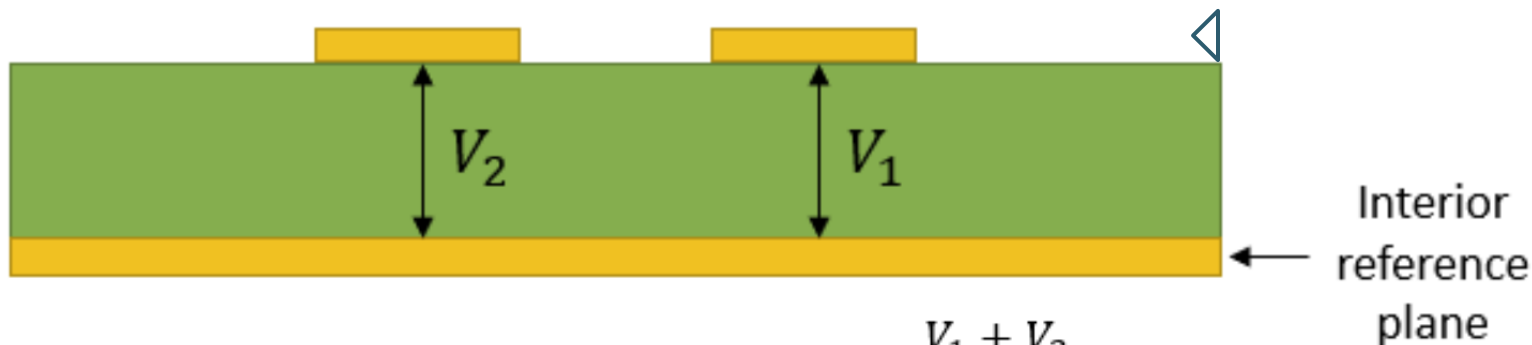
$$Q_{\text{cmf}} = \frac{\text{Im}(Z_{\text{cmf}})}{\text{Re}(Z_{\text{cmf}})}$$



$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Z_{ii} : Characteristic impedance of line i

Z_{12} : Impedance due to coupling between lines 1 and 2



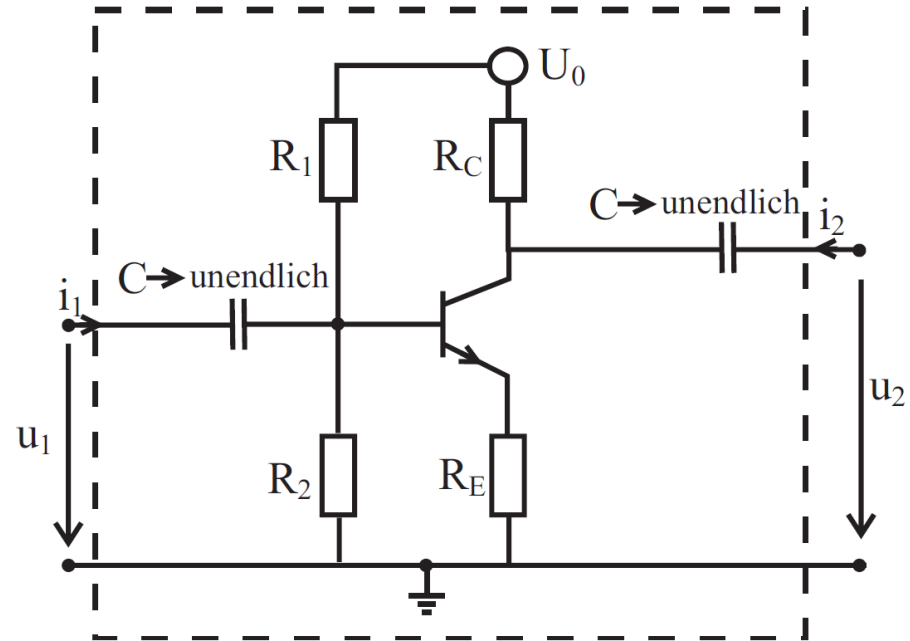
$$Z_{even} = Z_{11} + Z_{12} = \frac{V_1 + V_2}{I_1}$$

$$Z_{odd} = Z_{11} - Z_{12} = \frac{V_1 - V_2}{I_1}$$

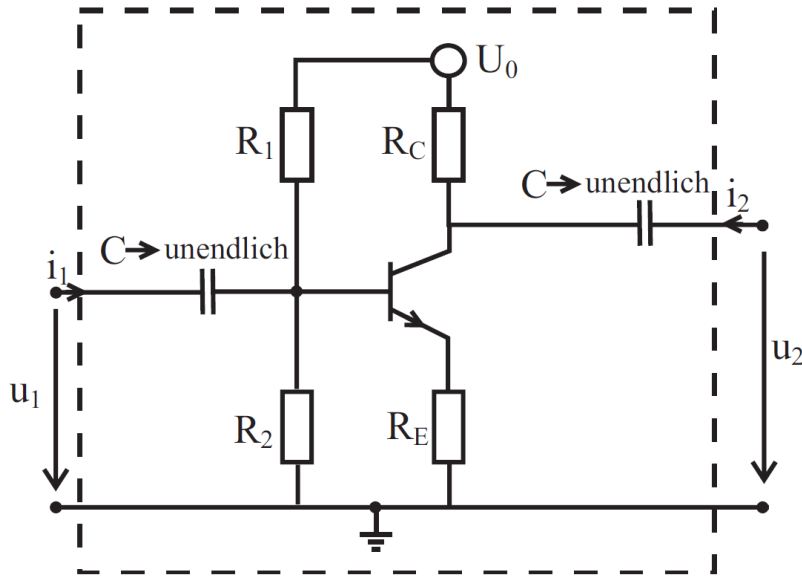
$$Z_{diff} = 2Z_{odd}, Z_{common} = 0.5Z_{even}$$

7. Zweitoreigenschaften – Beispiel: Aktive Schaltungen

- ▶ Aktive Elemente (Transistoren, Röhren) sind **nicht** reziprok, da die Verstärkung richtungsabhängig ist
- ▶ Beispiel: Gesucht ist die Z-Matrix
- ▶ Anmerkungen:
 - ▶ C hält die Gleichspannung von beiden Toren fern
 - ▶ $R_1, R_2 \rightarrow$ Spannungsteiler
 - ▶ R_C : Lastwiderstand
 - ▶ R_E : Rückkopplungswiderstand



7. Zweitoreigenschaften – Beispiel: Aktive Schaltungen



	Funktion	Kleinsignal Wechselstrom ESB
U_0	DC-Spannungsquelle für Arbeitspunkt	Kurzschluss
C	DC-Sperre (Kapazität \rightarrow unendlich)	Kurzschluss
R_1, R_2	Spannungsteiler zur Arbeitspunkteinstellung an B, C	$R_B = R_1 R_2$
R_C		Last
R_E		Rückkopplung

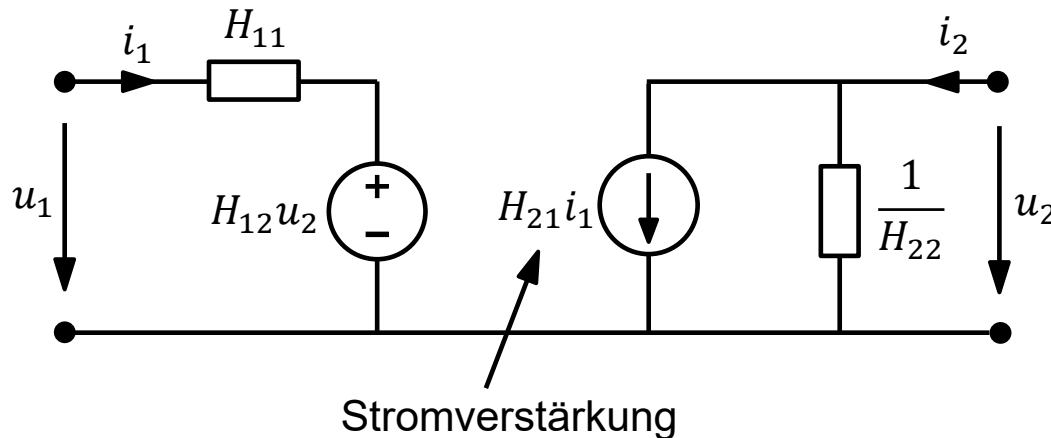
7. Zweitoreigenschaften – Beispiel: Aktive Schaltungen

H- (hybride, Stromverstärker-) Matrix:

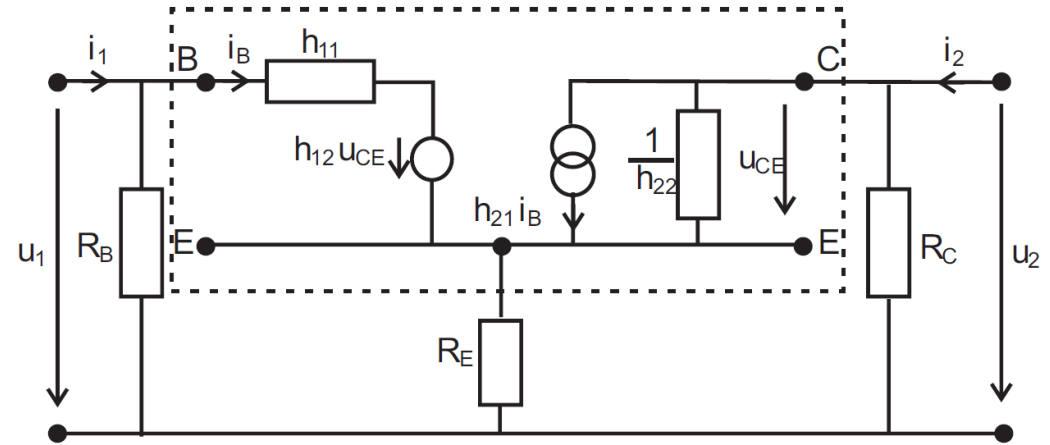
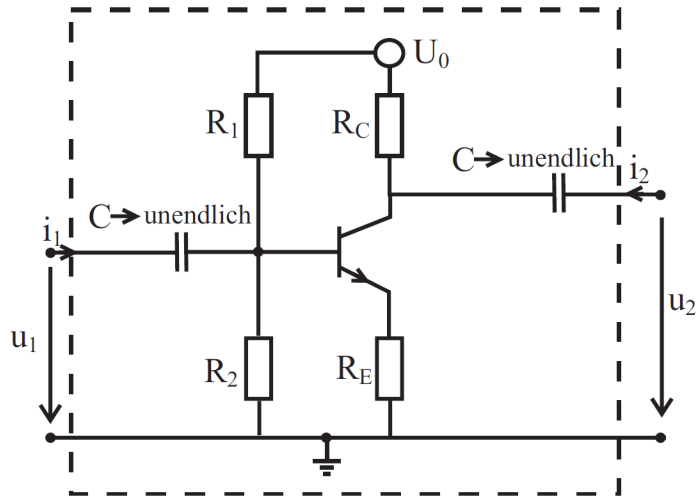
$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Name der Stromverstärker-Matrix aus Bedeutung von H_{21} :

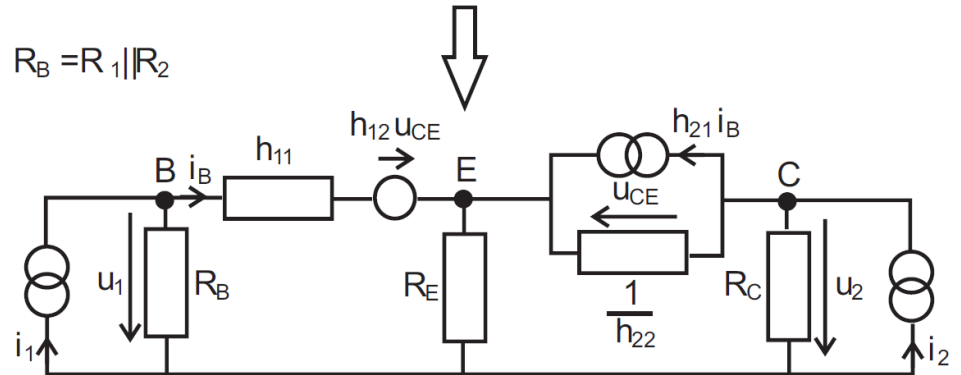
$H_{21} = \frac{i_2}{i_1}$ für Kurzschluss am Ausgang ($u_2 = 0$).



7. Zweitoreigenschaften – Beispiel: Aktive Schaltungen

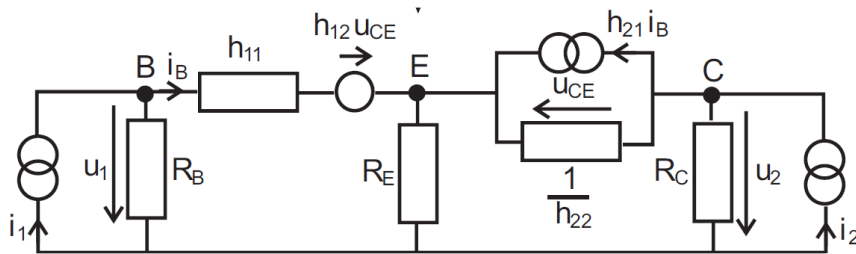


$$R_B = R_1 || R_2$$



	Kleinsignal Wechselstrom ESB
U_0	Kurzschluss
C	Kurzschluss
R_1, R_2	$R_B = R_1 R_2$
R_C	Last
R_E	Rückkopplung

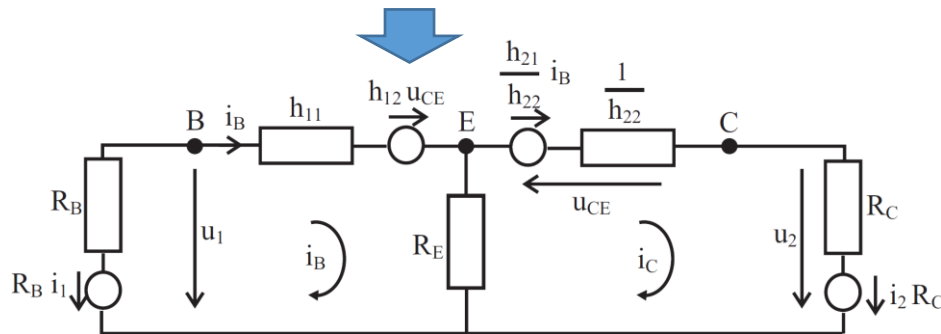
7. Zweitoreigenschaften – Beispiel: Aktive Schaltungen



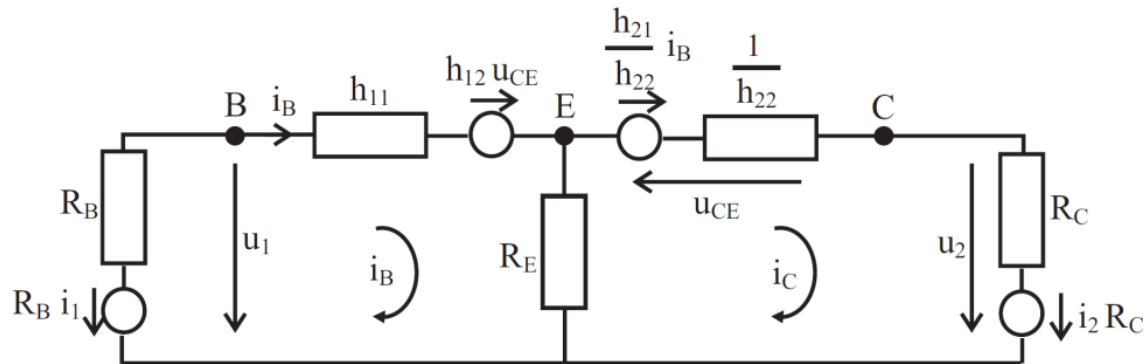
$$u_1 = R_B \underbrace{i_1}_{\text{gegeben}} - R_B \underbrace{i_B}_{\text{gesucht}}$$

$$u_2 = R_C \underbrace{i_2}_{\text{gegeben}} + R_C \underbrace{i_C}_{\text{gesucht}}$$

$$u_{CE} = - \left(\frac{i_C}{H_{22}} + \frac{H_{21}}{H_{22}} i_B \right)$$



7. Zweitoreigenschaften – Beispiel: Aktive Schaltungen



Maschengleichungen

$$\begin{aligned} \blacktriangleright (R_B + H_{11} + R_E)i_B - R_E i_C &= \underbrace{R_B i_1}_{\text{unabhängig}} - \underbrace{H_{12} u_{CE}}_{\text{gesteuert}} \\ \blacktriangleright -R_E i_B + \left(R_C + \frac{1}{H_{22}} + R_E\right) i_C &= - \underbrace{R_C i_2}_{\text{unabhängig}} - \underbrace{\frac{H_{21}}{H_{22}} i_B}_{\text{gesteuert}} \end{aligned}$$

7. Zweitoreigenschaften – Beispiel: Aktive Schaltungen

$$\triangleright (R_B + H_{11} + R_E)i_B - R_E i_C = R_B i_1 - H_{12} u_{CE} \quad \text{mit } u_{CE} = -\left(\frac{i_C}{h_{22}} + \frac{H_{21}}{H_{22}} i_B\right)$$

$$\triangleright -R_E i_B + \left(R_C + \frac{1}{H_{22}} + R_E\right) i_C = -R_C i_2 - \frac{H_{21}}{H_{22}} i_B$$

$$\triangleright (R_B + H_{11} + R_E)i_B - R_E i_C - H_{12} \left(\frac{i_C}{h_{22}} + \frac{H_{21}}{H_{22}} i_B\right) = R_B i_1$$

$$\triangleright -R_E i_B + \left(R_C + \frac{1}{H_{22}} + R_E\right) i_C + \frac{H_{21}}{h_{22}} i_B = -R_C i_2$$

$$\triangleright \left(R_B + H_{11} + R_E - \frac{H_{12}H_{21}}{H_{22}}\right) i_B - \left(R_E + \frac{H_{12}}{H_{22}}\right) i_C = R_B i_1$$

$$\triangleright -\left(R_E - \frac{H_{21}}{H_{22}}\right) i_B + \left(R_C + \frac{1}{H_{22}} + R_E\right) i_C = -R_C i_2$$

7. Zweitoreigenschaften – Beispiel: Aktive Schaltungen

- ▶ $\left(R_B + H_{11} + R_E - \frac{H_{12}H_{21}}{H_{22}}\right)i_B - \left(R_E + \frac{H_{12}}{H_{22}}\right)i_C = R_B i_1$
- ▶ $-\left(R_E - \frac{H_{21}}{H_{22}}\right)i_B + \left(R_C + \frac{1}{H_{22}} + R_E\right)i_C = -R_C i_2$

$$\begin{bmatrix} \left(R_B + H_{11} + R_E - \frac{H_{12}H_{21}}{H_{22}}\right) & -\left(R_E + \frac{H_{12}}{H_{22}}\right) \\ -\left(R_E - \frac{H_{21}}{H_{22}}\right) & \left(R_C + \frac{1}{H_{22}} + R_E\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_B \\ i_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_B i_1 \\ -R_C i_2 \end{bmatrix}$$

Maschen-Matrix **nicht** symmetrisch, weil $H_{12} \neq H_{21}$

7. Zweitoreigenschaften – Beispiel: Aktive Schaltungen

$$\triangleright \begin{bmatrix} \left(R_B + h_{11} + R_E - \frac{H_{12}H_{21}}{H_{22}}\right) & -\left(R_E + \frac{H_{12}}{H_{22}}\right) \\ -\left(R_E - \frac{H_{21}}{H_{22}}\right) & \left(R_C + \frac{1}{H_{22}} + R_E\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_B \\ i_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_B i_1 \\ -R_C i_2 \end{bmatrix}$$

$$\triangleright \begin{bmatrix} i_B \\ i_C \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} R_B i_1 \\ -R_C i_2 \end{bmatrix}$$

Mit:

$$u_1 = R_B i_1 - R_B i_B$$

$$u_2 = R_C i_2 + R_C i_C$$

Inverse, $g_{12} \neq g_{21}$

$$\triangleright u_1 = R_B i_1 - R_B (g_{11} R_B i_1 - g_{12} R_C i_2) = R_B (1 - g_{11} R_B) i_1 + g_{12} R_B R_C i_2$$

$$\triangleright u_2 = R_C i_2 + R_C (g_{21} R_B i_1 - g_{22} R_C i_2) = g_{21} R_B R_C i_1 + R_C (1 - g_{22} R_C) i_2$$

7. Zweitoreigenschaften – Beispiel: Aktive Schaltungen



- ▶ $u_1 = R_B(1 - g_{11}R_B)i_1 + g_{12}R_BR_Ci_2$
- ▶ $u_2 = g_{21}R_BR_Ci_1 + R_C(1 - g_{22}R_C)i_2$

$$\underline{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} R_B(1 - g_{11}R_B) & g_{12}R_BR_C \\ g_{21}R_BR_C & R_C(1 - g_{22}R_C) \end{bmatrix}$$

Wegen $g_{21} \neq g_{12}$ i.A. unsymmetrisch

