Prof. Eduard A. Jorswieck, Dr. Bile Peng 16. Dezember 2022

1. Übung
Grundlagen der Informationstechnik, Teil Nachrichtentechnik

Aufgabe 1.

Gegeben sei eine gedächtnislose Quelle, deren mögliche Ausgangssymbole $x_i, i = 1, \ldots, 8$ die Buchstaben A bis H sind. X sei dabei eine Zufallsvariable, die diese Quelle beschreibt. Die einzelnen Symbole treten dabei mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten auf:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	A	B	C	D	E	F	G	H
$P(X = x_i)$	0,2	0,05	0,01	0,1	0,4	0,1	0,06	0,08

Tabelle 1: Aufgabe Codebaum

a) Berechnen Sie die Unsicherheit $H(X)$ der Quelle bzw. der Zufallsvariablen X.

b) Konstruieren Sie einen präfixfreien Shannon-Fano Code um diese Quelle zu codieren. Geben Sie dabei für jedes Symbol $x_i (i = 1, \ldots, 8)$ das zugehörige Codewort an und zeichnen Sie den Codebaum.

c) Bestimmen Sie die mittlere Codewlrtlänge $\mathbb{E}(\omega_i)$, wobei ω_i die Länge des Codewortes ist, das zum Symbol x_i gehört.

Lösung 1.

a)

$$\begin{aligned} H(X) = &- \sum_i P(X = x_i) \log_2(P(X = x_i)) \\ = &- 0,2 \log_2(0.2) - 0,05 \log_2(0,05) - 0,01 \log_2(0,01) - 0,1 \log_2(0,1) \\ &- 0,4 \log_2(0,4) - 0,1 \log_2(0,1) - 0,06 \log_2(0,06) - 0,08 \log_2(0,08) \\ = &2,4751 \end{aligned} \tag{1}$$

b) Die Codelänge von jedem Zeichen ist in Tabelle 2 aufgelistet.

Der Codebaum ist in Abbildung 1 dargestellt.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	A	B	C	D	E	F	G	H
$P(X = x_i)$	0,2	0,05	0,01	0,1	0,4	0,1	0,06	0,08
$\log_2 \left\lceil \left(\frac{1}{P(X=x_i)} \right) \right\rceil$	3	5	7	4	2	4	5	4

Tabelle 2: Codelänge des Shannon-Fano-Codes

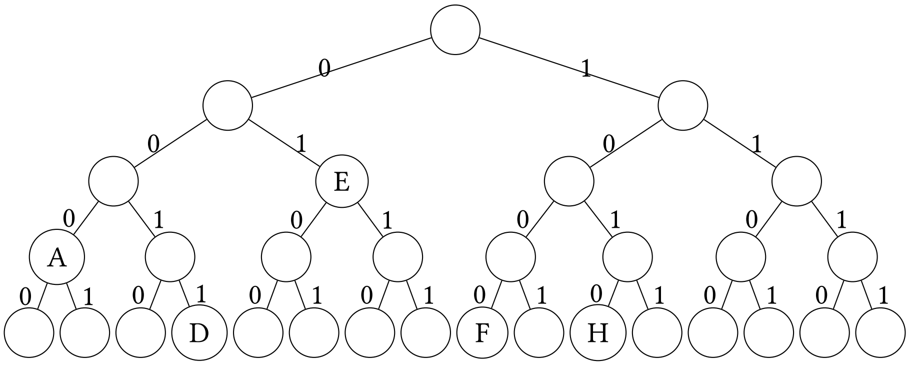


Abbildung 1: Der Codebaum des Shannon-Fano-Codes.

c)

$$\mathbb{E}(\omega_i) = \sum_i p_i \left\lceil \log_2 \left(\frac{1}{P(X = x_i)} \right) \right\rceil = 3,1400 \tag{2}$$

Aufgabe 2.

Gegeben sei ein normaler Würfel mit den Augenzahlen 1 bis 6, die alle gleich wahrscheinlich sind. X_i seien Zufallsvariablen, die die geworfene Augenzahl beim i-ten Wurf angeben.

a) Der Würfel wird einmal geworfen. Berechnen Sie die Unsicherheit $H(X_1)$ der Zufallsvariable X_1 und die Anzahl der im Mittel nötigen Bits, um die Zufallsvariable X_1 mit einem Shannon-Fano Codierer zu codieren.

b) Nun wird der Würfel zwei Mal geworfen. Berechnen Sie die Unsicherheit $H(X_1, X_2)$ des Vektors (X_1, X_2).

c) Wie groß ist im Unterschied zu Teilaufgabe b) die Unsicherheit der Zufallsvariable $Y = X_1 + X_2$, welche die Summe der gworfenen Augenzahlen angibt. Erklären Sie diesen Unterschied kurz. Berechnen Sie außerdem die Anzahl der im Mittel zur Codierung nötigen Bits, wenn zur Codierung von Y ein Shannon-Fano Codierer verwendet wird.

Lösung 2.

a)

$$H(X_1) = -6 \times \frac{1}{6} \log_2 \left(\frac{1}{6} \right) = 2,585 \tag{3}$$

$$\log_2\left[\left(\frac{1}{P(X=x_i)}\right)\right]=3 \tag{4}$$

b) Es gibt insgesamt $6\times 6=36$ mögliche Werte von $H(X_1,X_2)$, die gleich wahrscheinlich sind und eine Wahrscheinlichkeit von $1/36$ haben. Die Unsicherheit ist deswegen

$$H(X_1,X_2)=-36\times\frac{1}{36}\log_2\left(\frac{1}{36}\right)=5,170 \tag{5}$$

c) Die Anzahl der Möglichkeiten bei jedem Wert der Summe ist in Tabelle 3 aufgelistet. Der Unterschied liegt daran, dass eine Summe von unterschiedlicher Kombinationen von X_1 und X_2 realisiert werden kann.

X_1+X_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Möglichkeiten	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Tabelle 3: Anzahl der Möglichkeiten bei jedem Wert von Y

Da die Wahrscheinlichkeit von jedem Wert von (X_1,X_2) $1/36$ ist, ist die Wahrscheinlichkeit von jedem Wert der Summe X_1+X_2 proportional zur Anzahl der Möglichkeiten.

$$\sum_i P(Y=y_i)\log_2\left[\left(\frac{1}{P(Y=y_i)}\right)\right]=3,778. \tag{6}$$

Aufgabe 3.

In der folgenden Aufgabe sollen Methoden der Quellencodierung betrachtet werden.

a) In der nachfolgenden Tabelle sind die Codewörter von drei unterschiedlichen Quellencodes A, B und C aufgeführt. Welcher bzw. welche der Codes ist eindeutig decodierbar?

Code A	{0, 10, 11}
Code B	{01, 10, 11}
Code C	{0, 1, 11}

Tabelle 4: Aufgabe Codebaum

b) Code A aus Teilaufgabe a) kann zur Codierung einer gedächtnislosen, ergodischen Quelle mit Ausgangsalphabet $\{a,b,c\}$ und den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $P(a)=0.7, P(b)=0.25$ und $P(c)=0.05$ verwendet werden, die durch eine Zufallsvariablen U beschrieben werden kann. Bestimmen Sie die Unsicherkeit $H(U)$ der beschriebenen Quelle.

Lösung 3.

a) A und B

b)

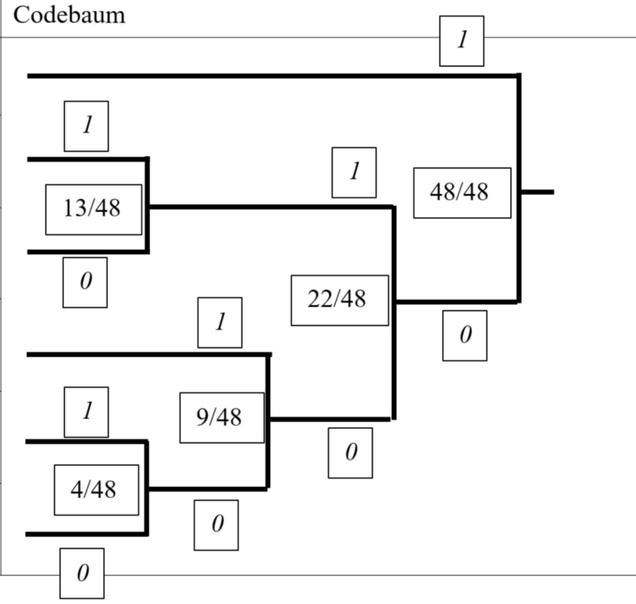
$$\begin{aligned}H(U) =& -\sum_i p_i \log_2(p_i)\\ =& -0,7\log_2(0,7) - 0,25\log_2(0,25) - 0,05\log_2(0,05)\\ =&1,076\end{aligned} \tag{7}$$

Aufgabe 4.

Es liegt das Alphabet $X = \{T, I, E, N, S, R\}$ mit den zugeordneten Wahrscheinlichkeiten $P = \{1/48, 5/48, 26/48, 7/48, 3/48, 6/48\}$ vor. Erstellen Sie nachvollziehbar den Codebaum entsprechend der Huffman-Codierung und nennen Sie die sich ergebenden Codewörter zur Darstellung des Alphabets X.

Lösung 4.

x_i	$p(x_i)$	Codebaum	Code
E	26/48		1
N	7/48		011
R	6/48		010
I	5/48		001
S	3/48		0001
T	1/48		0000



Aufgabe 5.

(Optional) wenn eine von 64 Drogen vergiftet ist. Wie viele Mäuse braucht man mindestens, um die vergiftete Droge herauszufinden und wie macht man das?

Lösung 5.

Die Informationstheorie beantwortet die Frage *wie viel* und die Codierungstheorie beantwortet die Frage *wie*.

Eine Maus hat zwei Zustände: lebendig oder tot. Daher benötigen wir $\log_2(64) = 6$ Mäuse, um 64 Zustände darzustellen.

Wir können die 64 Drogen in binärer Form darstellen. Zum Beispiel: Droge 0 ist 000000, Droge 1 ist 000001, Droge 2 ist 000010… Droge 63 ist 111111.

Dann lassen wir Maus 1 Drogen nehmen, deren erste Ziffer der Binärform 1 ist, lassen Maus 2 Drogen nehmen, deren zweite Ziffer der Binärform 1 ist usw. Auf diese Weise nimmt Maus 1 die Drogen 32, 33, 34, …, 63, Maus 2 die Drogen 16, 17, …, 31, Maus 6 die Drogen 1, 3, 5, …, 63.

Nehmen wir an, dass die Mäuse 1, 2 und 6 nach der Einnahme der Drogen sterben und die Mäuse 3, 4 und 5 leben. Dann ist die Droge 110001 (49) die vergiftete Droge, denn die Mäuse 1, 2 und 6 nehmen diese Droge und sterben, die Mäuse 3, 4 und 5 nehmen die Droge nicht und leben. Das gleiche Prinzip gilt für andere Binärzahlen.

Diese Methode wurde z. B. von Google angewandt, um kleinere Verbesserungen zu bewerten. Normalerweise wählt Google nach dem Zufallsprinzip 1% der Nutzer aus, um eine neue Verbesserung zu testen, und bittet sie um Feedback. Bei einem großen Unternehmen wie Google gibt es jedoch normalerweise mehr als 100 experimentelle Verbesserungen. Google nutzt diese Methode, um mehr als 100 Verbesserungen mit weniger als 100% der Nutzer zu testen.

2. Übung
Grundlagen der Informationstechnik, Teil Nachrichtentechnik

Aufgabe 1.

We betrachten Hamming Codes. Der Decodierer $\mathcal{D}$ ist in der Lage, Fehler von Hamming Codes zu erkennen und zu decodieren. Ein Decodierversagen tritt auf, wenn mehr Fehler als die Korrekturfähigkeit des Codes aufgetreten sind. Sei $\mathcal{C}_1$ der Hamming Code der Länge $n_1 = 7$.

a) Was ist die Rate R_1 von $\mathcal{C}_1$? Wie viele Fehler τ_1 kann dieser Code korrigieren?

Wir fügen ein weiteres Parity-Bit an den Hamming Code $\mathcal{C}_1$ und bezeichnen den so erzeugten Code als $\mathcal{C}_2$.

b) Was ist die Rate R_2 von $\mathcal{C}_2$? Wie viele Fehler τ_2 kann dieser Code korrigieren?

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit P_2 des Decodierversagens von $\mathcal{D}$, wenn $\mathcal{C}_2$ verwendet wird und der Bitfehlerwahrscheinlichkeit 1/8 ist.

Lösung 1.

a) Wenn die Codelänge $n_1 = 7$, gibt es nur einen gültigen Hamming Code mit $k_1 = 4$. Die Coderate ist deswegen $R_1 = 4/7$. Der Mindestabstand zwischen 2 gültigen Codewörter ist 3. Deswegen können wir einen Fehler korrigieren.

b) Mit dem zusätzlichen Parity-Bit hat $\mathcal{C}_2$ die Codelänge $n_2 = 8$ und die Dimension $k_2 = 4$. Deswegen ist die Coderate $R_2 = 1/2$. Da der Mindestabstand jetzt 4 ist, kann $\mathcal{C}_2$ immer noch einen Fehler korrigieren.

c) Der Decodierer versagt, wenn es mehr als einen Fehler auftreten, deren Wahrscheinlichkeit ist

$$p_v = 1 - \left(\binom{8}{0} \left(1 - \frac{1}{8}\right)^8 + \binom{8}{1} \left(1 - \frac{1}{8}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^1 \right) = 0.26. \tag{8}$$

Aufgabe 2.

Gegeben sei die folgende Generatormatrix eines linearen binären Codes $\mathcal{C}_1$

$$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Ein Codewort von $\mathcal{C}_1$ ist dann als $\mathbf{c}_1 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{G}_1$ definiert, wobei $\mathbf{i}$ den Informationsvektor der Länge k bezeichnet.

a) Bestimmen Sie die Codelänge n_1, die Dimension k_1 und die Rate R_1 von $\mathcal{C}_1$.

b) Was ist die Mindestdistanz des durch $\mathbf{G}_1$ definierten linearen Codes? Um welchen Code handelt es sich?

Es sei ein weiterer linearer binärer Code $\mathcal{C}_2$ mit gleicher Länge $n_2 = n_1$, Dimension k_2 und der Generatormatrix $\mathbf{G}_2$ gegeben. Der Code $\mathcal{C}$ sei definiert als:

$$\mathcal{C} = \{(\mathbf{c}_1 | \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2) : \mathbf{c}_1 \in \mathcal{C}_1 \text{ und } \mathbf{c}_2 \in \mathcal{C}_2\}. \tag{10}$$

c) Bestimmen Sie Länge n und Dimension k des Codes $\mathcal{C}$.

d) Bestimmen Sie die Generatormatrix $\mathbf{G}$ des in (10) definierten Codes $\mathcal{C}$ in Abhängigkeit von $\mathbf{G}_1$ und $\mathbf{G}_2$.

Lösung 2.

a) Die Codelänge $n_1 = 7$ (Anzahl der Spalten von $\mathbf{G}_1$). Die Dimension $k_1 = 4$ (Anzahl der Zeilen von $\mathbf{G}_1$). Die Rate $R_1 = 4/7$.

b) Die Mindestabstand ist 3. Es handelt sich um den Hamming Code.

c) $n = n_1 + n_2 = 2n_1$, $k = k_1 + k_2$

d)
$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_2 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Technische Universität Braunschweig

Institut für Nachrichtentechnik

Institut für Nachrichtentechnik — Abteilung Informationstheorie und Kommunikationssyteme

Prof. Eduard A. Jorswieck, Dr. Bile Peng 25. Januar 2023

3. Übung
Grundlagen der Informationstechnik, Teil Nachrichtentechnik

Aufgabe 1.

a) Definieren Sie Entropie, bedingte Entropie und Transinformation.

Abbildung 2 veranschaulicht den Informationsfluss in einem gestörten Kanal.

$H(x) = -\int_x P(x)\cdot\log_2(P(x))\,dx$

$H(x|y) = -\int_{x,y} P(x,y)\log_2(P(x|y))\,dx\,dy$

$T(x,y) = H(x) - H(X|Y) = H(y) - H(x|y)$

wenn $P(x) = P(x|y)$

$H(x|y) = -\int_{x,y} P(x,y)\cdot\log_2 P(x)\,dx\,dy$

$= -\int_x\int_y P(x,y)\cdot\log_2 P(x)\,dx\,dy$

$[\int_y P(x,y)\,dy = P(x)]$

$= -\int_x P(x)\log_2 P(x)\,dx$

$T(x,y) = H(x) - H(x|Y)$

$= H(Y) - H(Y|x)$

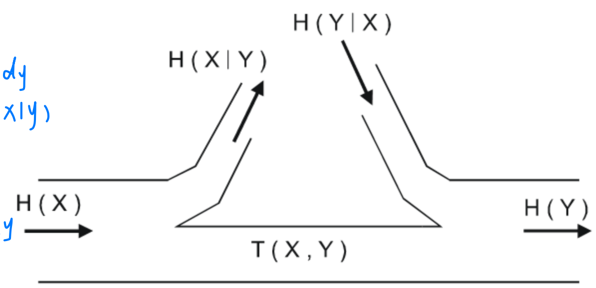


Abbildung 2: Informationsfluss in einem gestörten Kanal.

c). $H(x) = T(x,y) = H(Y)$

$H(x|Y) = H(Y|x) = 0$

$H(x) = H(x|Y) = H(Y)$

d). $H(x) = H(x|Y)$, $H(Y) = H(Y|x) = 0$

b) Wie werden die eingezeichneten Größen bezeichnet?

c) Illustrieren Sie den Informationsfluss in einem ungestörten Kanal. Orientieren Sie sich dabei an der Skizze auf Aufgabenteil a). Welche Aussagen können bzgl. der Größen $H(X|Y)$ und $H(Y|X)$ getroffen werden? In welcher Beziehung stehen $H(X)$, $H(Y)$ und $T(X,Y)$?

d) Wiederholen Sie die Skizze nach a) für den Fall des vollständig gestörten Übertragungskanals. Was gelten nun für Beziehungen zwischen den in a) eingef/ürten Größen?

Lösung 1.

a)

$$H(X) = -\int_x p(x)\log_2(p(x))\,dx. \tag{12}$$

$$H(X|Y) = -\int_{x,y} p(x,y)\log_2 p(x|y)dxdy. \tag{13}$$

$$T(X,Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X). \tag{14}$$

b)
   - $H(X)$: Entropie der Quelle
   - $H(X|Y)$: Äquivokation (verloren gegangene Information)
   - $H(Y|X)$: Irrelevanz (Informationsteil der Sinke ohne Bezug zur Information der Quelle)
   - $T(X,Y)$: Transinformation (gemeinsame Information der Quelle und Sinke)
   - $H(Y)$: Entropie der Sinke

c) $H(X) = T(X,Y) = H(Y)$, $H(X|Y) = H(Y|X) = 0$.

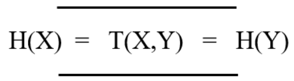


Abbildung 3: Informationsfluss in einem ungestörten Kanal.

d) $H(X) = H(X|Y)$, $H(Y) = H(Y|X)$, $T(X,Y) = 0$.

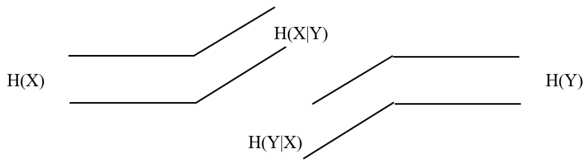


Abbildung 4: Informationsfluss in einem vollständig gestörten Kanal.

Aufgabe 2.

Gegeben sei ein Bandpass Additive White Gaussian Noise (AWGN) Kanal, dessen Kanalkapazität ist

$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{P}{W N_0}\right) \tag{15}$$

wobei P die Sendeleistung, N_0 die Rauschleistung pro Hertz und W die Bandbreite ist.

a) Zeichnen Sie C über W (für festes P/N_0).

b) Zeichnen Sie C über P/N_0 (für festes W).

c) Berechnen Sie $C = \lim_{W\to\infty} W \log_2 \left(1 + \frac{P}{W N_0}\right)$.

Lösung 2.

a) Siehe Abbildung 5 ($P/N_0 = 2$).

b) Siehe Abbildung 6 (W=1).

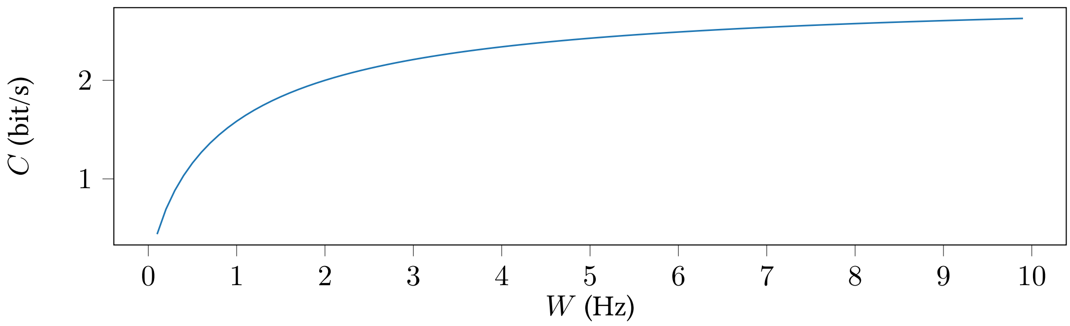


Abbildung 5: Beziehung zwischen Bandbreite W und Kapazität C.

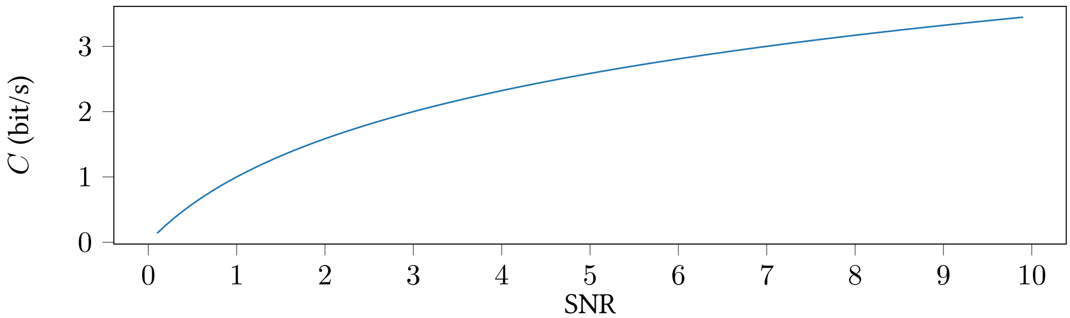


Abbildung 6: Beziehung zwischen Signal-Rausch-Verhältnis P/WN_0 und Kapazität C.

c) Um das Problem zu lösen, benötigen wir den Satz

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e. \tag{16}$$

Definieren wir $x = \cancel{WN_0/P}$, wir haben

P/WN_0

$$\begin{aligned}
&\lim_{W\to\infty} W\log_2\left(1+\frac{P}{WN_0}\right)\\
&= \lim_{W\to\infty}\frac{P}{N_0}\cdot\frac{WN_0}{P}\log_2\left(1+\frac{P}{WN_0}\right)\\
&= \lim_{W\to\infty}\frac{P}{N_0}\cdot\log_2\left(1+\frac{P}{WN_0}\right)^{\frac{WN_0}{P}}\\
&= \frac{P\log_2(e)}{N_0}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Aufgabe 3.

Formel $\boxed{18}$ ist die Kanalübertragungsfunktion für den Spezialfall einer Zweiwegausbreitung, der im Folgenden betrachtet werden soll.

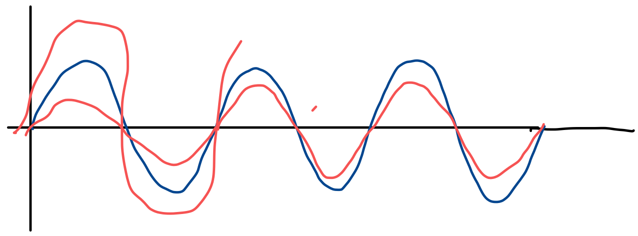
$$H(f) = a_d e^{-j2\pi f\tau_d} + a_u e^{-j2\pi f\tau_u}. \tag{18}$$

a) Welche Größen werden durch die Formelzeichen a_d, a_u, τ_d und τ_u beschrieben?

b) Zeichnen Sie das direkt einfallende Signal, das verzögerte Signal und das resultierende Signal. Nehmen Sie an, dass es sich bei dem gesendeten Signal um ein sinusförmiges Signal der Periodendauer $T = 1$ handelt und dass $a_d = 1$, $a_u = 0,5$, und $\tau_u - \tau_d = T$.

Lösung 3.

a)
- a_d: Amplitude des direkten Signals.
- a_u: Amplitude des verzögerten Signals.
- τ_d: Laufzeit des direkten Signals.
- τ_u: Laufzeit des verzögerten Signals.



b) Siehe Abbildung 7.

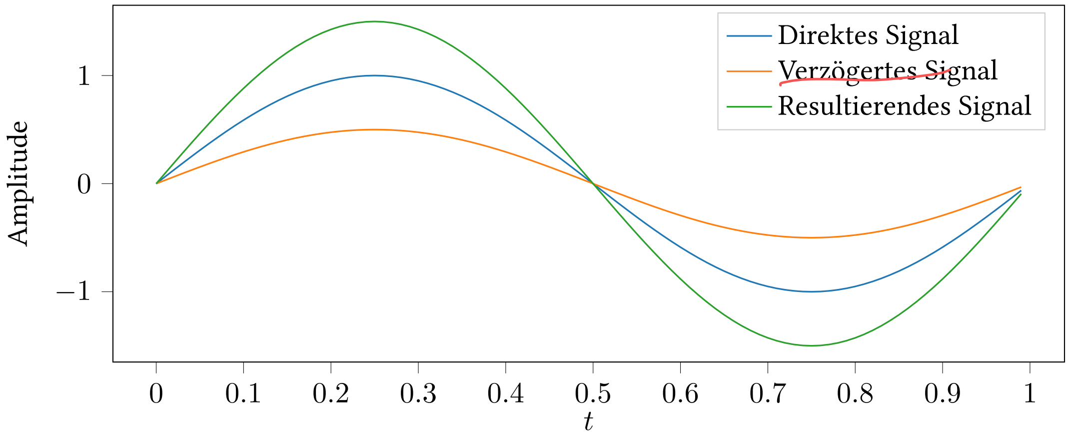


Abbildung 7: Signalübertragung in einem Mehrwegkanal.

4. Übung
Grundlagen der Informationstechnik, Teil Nachrichtentechnik

Aufgabe 1.

Im Bereich des terrestrischen digitalen Rundfunks (z.B. DVB, LTE, 5G) wird das OFDM-Modulationsverfahren eingesetzt.

a) Abbildung 8 zeigt das Spektrum eines OFDM-Symbols mit 10 binär unipolar modulierten Trägern. Nennen Sie die dazu gehörige Bitfolge.

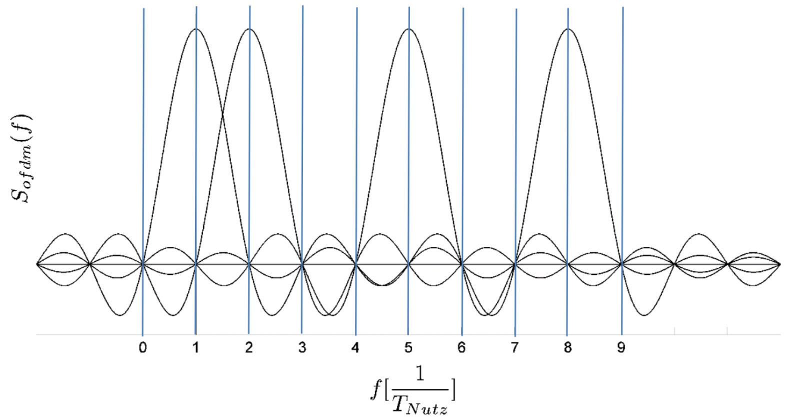


Abbildung 8: Das Spektrum eines OFDM-Symbols.

b) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Signale, die zu den Trägern mit den Nummern 1, 2, und 7 gehören.

Lösung 1.

a) 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0

b) Siehe Abbildung 9.

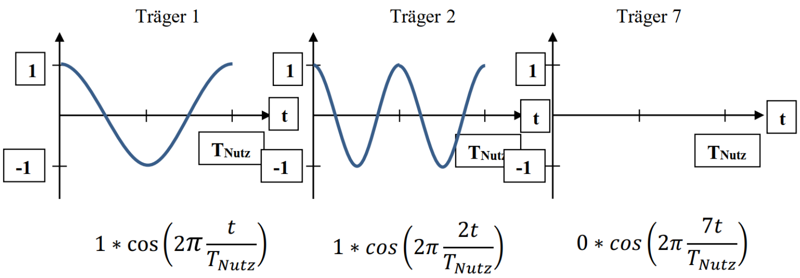


Abbildung 9: Zeitlicher Verlauf der OFDM-Signale.

Aufgabe 2.

Es soll der Unterschied zwischen einer BPSK und QPSK Übertragung untersucht werden.

a) Wie viele Bit pro Sendesymbol können mit den beiden Verfahren übertragen werden?

b) Geben Sie für beide Modulationsverfahren die Signalraumdarstellung an.

c) Wie groß ist die Distanz zwischen benachbarten Symbolen für beide Modulationsverfahren?

d)

Lösung 2.

a) BPSK: $\log_2(2) = 1$ bit, QPSK: $\log_2(4) = 2$ bit.

b) Siehe Abbildung 10.

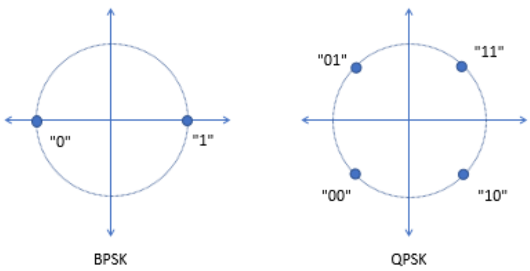


Abbildung 10: BPSK und QPSK.

c) Wir nehmen an, dass die Energie pro Bit 1 ist. Für BPSK ist die Amplitude des Symbols 1. Die Distanz zwischen 2 Symbole ist 2. Für QPSK ist die Amplitude des Symbols $\sqrt{2}$, da pro Symbol 2 Bit übertragen sind und die Energie eines Symbols 2 ist. Die Distanz zwischen 2 benachbarten Symbole ist deswegen $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$. BPSK und QPSK sind also gleich gut gegeben gleiche Energie pro Symbol.

Aufgabe 3.

a) Definieren Sie die 3 MIMO-Empfänger Matched Filter, Zero-Forcing und Minimum Mean-Square Error.

b) Unter welchen Bedingungen sind die 3 Empfänger anzuwenden?

Lösung 3.

a) Matched Filter: $\mathbf{H}^H\mathbf{y}$, Zero Forcing: $\mathbf{H}^+\mathbf{y} = (\mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^H\mathbf{y}$. MMSE: $(\sigma^2\mathbf{I} + \mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^H\mathbf{y}$.

b) Der Matched Filter ist optimal wenn die Interferenz 0 ist. Der Zero Forcing Filter ist optimal wenn die Rauschleistung 0 ist. Der MMSE Filter ist der optimale lineare Filter für alle Fälle.