V. Reihen

V.1. Definitionen und Beispiele

Definition V.1. Sei $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ eine Zahlenfolge. Dann heißt die Folge $(s_m)_{m=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$, mit

$$s_m := \sum_{n=1}^{m} a_n, \tag{V.1}$$

Reihe in $\mathbb{K}$ und s_m nennt man die **m. Partialsumme** (dieser Reihe). Ist $(s_m)_{m=1}^\infty$ konvergent, so schreiben wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{m\to\infty} \{s_m\} \;=\; \lim_{m\to\infty} \Big\{ \sum_{n=1}^{m} a_n \Big\}. \tag{V.2}$$

Eine Umschreibung des Cauchy-Kriteriums, Satz IV.11, und des Monotoniekriteriums, Satz IV.5, von Folgen auf Reihen liefert

Lemma V.2 (Cauchy-Kriterium für Reihen)**.** *Sei* $\big(\sum_{n=1}^{m} a_n\big)_{m=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ *eine Reihe in* $\mathbb{K}$*. Dann gilt*

$$\Big(\sum_{n=1}^{m} a_n\Big)_{m=1}^{\infty} \text{ ist konvergent } \Leftrightarrow$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\; \forall\, m \geq n \geq n_0 : \; \Big| \sum_{k=n}^{m} a_k \Big| \;\leq\; \varepsilon. \tag{V.3}$$

Lemma V.3 (Monotoniekriterium für Reihen)**.** *Sei* $(a_n)_{n=1}^\infty \in (\mathbb{R}_0^+)^\mathbb{N}$ *eine Folge nicht-negativer Zahlen. Dann gilt*

$$\Big\{ \Big(\sum_{n=1}^{m} a_n\Big)_{m=1}^{\infty} \text{ ist konvergent in } \mathbb{R}_0^+ \Big\} \;\Leftrightarrow\; \Big\{ \Big(\sum_{n=1}^{m} a_n\Big)_{m=1}^{\infty} \text{ ist nach oben beschränkt} \Big\}. \tag{V.4}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Wir beachten, dass man nicht nur Reihen als spezielle Folgen gewinnen kann, sondern dass man auch umgekehrt Folgen als spezielle Reihen auffassen kann, nämlich mit $a_n := s_n - s_{n-1}$.

- Aus der Anwendung des Cauchy-Kriteriums für Reihen, Lemma V.2, gewinnt man mit der Wahl $m = n \geq n_0$ sofort auch das **Nullfolgenkriterium**: Ist $\big(\sum_{n=1}^m a_n\big)_{m=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ eine konvergente Reihe, so ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ auch eine Nullfolge, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Meistens wendet man die Umkehrung dieser Aussage an: Wenn $a_n \to 0$, $n \to \infty$, nicht gilt, muss die Reihe $\big(\sum_{n=1}^m a_n\big)_{m=1}^\infty$ divergieren.
- Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $0 \leq |\lambda| < 1$. Dann ist die **geometrische Reihe** $\big(\sum_{n=0}^m \lambda^n\big)_{m=0}^\infty$ konvergent in $\mathbb{K}$, und es gilt
$$\sum_{n=0}^\infty \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda}. \tag{V.5}$$
Aus
$$(1-\lambda)\Big(\sum_{n=0}^m \lambda^n\Big) = \sum_{n=0}^m \lambda^n - \sum_{n=0}^m \lambda^{n+1} = \sum_{n=0}^m \lambda^n - \sum_{\tilde{n}=1}^{m+1} \lambda^{\tilde{n}} = 1 - \lambda^{m+1} \tag{V.6}$$
folgt nämlich
$$s_m := \sum_{n=0}^m \lambda^n = \frac{1-\lambda^{m+1}}{1-\lambda} \to \frac{1}{1-\lambda}, \tag{V.7}$$
für $m \to \infty$.
- Die **harmonische Reihe** $\big(\sum_{n=1}^m \frac{1}{n}\big)_{m=1}^\infty \in (\mathbb{R}_0^+)^\mathbb{N}$ ist divergent, dies folgt aus Satz V.13 von Cauchy. In der Tat können wir später leicht mit Hilfe der Integralrechnung zeigen, dass $\sum_{n=1}^m \frac{1}{n} \approx \ln(m)$ unbeschränkt wächst, falls $m \to \infty$.
- Satz V.13 liefert aber auch die Konvergenz der Reihe $\big(\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^p}\big)_{m=1}^\infty \in (\mathbb{R}_0^+)^\mathbb{N}$, für jedes $p > 1$.

V.2. Absolute Konvergenz

Definition V.4. Eine Reihe $\big(\sum_{n=1}^m a_n\big)_{m=1}^\infty$ in $\mathbb{K}$ heißt **absolut konvergent**
$$:\Leftrightarrow \qquad \text{Die Reihe } \Big(\sum_{n=1}^m |a_n|\Big)_{m=1}^\infty \text{ ist konvergent in } \mathbb{R}_0^+. \tag{V.8}$$

Lemma V.5. *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

Beweis. Ist die Reihe $\big(\sum_{n=1}^m a_n\big)_{m=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ absolut konvergent, so ist $\big(\sum_{n=1}^m |a_n|\big)_{m=1}^\infty \in (\mathbb{R}_0^+)^\mathbb{N}$ konvergent. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass
$$\forall\, m \geq n \geq n_0: \quad \sum_{k=n}^m |a_k| \leq \varepsilon. \tag{V.9}$$
Mit der Dreiecksungleichung gilt dann auch
$$\forall\, m \geq n \geq n_0: \quad \Big|\sum_{k=n}^m a_k\Big| \leq \sum_{k=n}^m |a_k| \leq \varepsilon, \tag{V.10}$$
also ist nach Lemma V.2 $\big(\sum_{n=1}^m a_n\big)_{m=1}^\infty$ konvergent in $\mathbb{K}$. □

Bemerkungen und Beispiele.

- Nicht jede konvergente Reihe ist auch absolut konvergent. Um dies zu sehen betrachten wir die Reihe $\big(\sum_{n=1}^m a_n\big)_{m=1}^\infty$ mit $a_n := (-1)^{n+1}\frac{1}{n} \in \mathbb{R}$.

  Wir beobachten, dass für $m = 2k$ gilt

$$\begin{aligned} s_{2k} &= 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{2k-1} - \tfrac{1}{2k} \\ &\le 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{2k-1} - \tfrac{1}{2k} + \underbrace{\tfrac{1}{2k+1} - \tfrac{1}{2k+2}}_{\ge 0} \;=\; s_{2k+2}. \end{aligned} \tag{V.11}$$

  Also ist die Folge $(s_{2k})_{k=1}^\infty$ der Partialsummen mit gerader Zahl von Summanden monoton wachsend. Außerdem ist wegen $2\ell(2\ell-1) \ge \ell^2$

$$s_{2k} \;=\; \sum_{\ell=1}^k \Big(\frac{1}{2\ell-1} - \frac{1}{2\ell}\Big) \;=\; \sum_{\ell=1}^k \frac{1}{2\ell(2\ell-1)} \;\le\; \sum_{\ell=1}^k \frac{1}{\ell^2} \;\le\; \text{const} \;<\; \infty \tag{V.12}$$

  beschränkt, da die Reihe $\big(\sum_{\ell=1}^k \frac{1}{\ell^2}\big)_{k=1}^\infty$ konvergent ist. Somit ist die Folge $(s_{2k})_{k=1}^\infty$ konvergent.

  Sei nun $\varepsilon > 0$. Da $(s_{2k})_{k=1}^\infty$ konvergent ist, gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}_0$ so, dass

$$\forall\, \ell \ge k \ge k_0 : \quad |s_{2\ell} - s_{2k}| \;\le\; \frac{\varepsilon}{3}. \tag{V.13}$$

  Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $n_0 \ge 2k_0 + 2$ und $\frac{1}{n_0} \le \frac{\varepsilon}{3}$ ist. Sind nun $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n \ge n_0$, so gibt es eindeutige Zahlen $\ell, k \in \mathbb{N}$, $\ell \ge k \ge k_0$ und $\sigma, \tau \in \{0,1\}$, sodass $m = 2\ell + \sigma$ und $n = 2k + \tau$ gelten. Damit erhalten wir aus (V.13)

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| &= |s_{2\ell+\sigma} - s_{2k+\tau}| \;\le\; |s_{2\ell+\sigma} - s_{2\ell}| + |s_{2\ell} - s_{2k}| + |s_{2k} - s_{2k+\tau}| \\ &\le \frac{1}{2\ell} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{2k} \;\le\; \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \;\le\; \varepsilon. \end{aligned} \tag{V.14}$$

  Also ist $(s_n)_{n=1}^\infty$ eine Cauchy-Folge und daher auch konvergent.

- Andererseits ist $\big(\sum_{n=1}^m (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\big)_{m=1}^\infty$ nicht absolut konvergent, denn $\big(\sum_{n=1}^m |(-1)^{n+1}\frac{1}{n}|\big)_{m=1}^\infty = \big(\sum_{n=1}^m \frac{1}{n}\big)_{m=1}^\infty$ ist divergent.

Eine fundamentale Eigenschaft absolut konvergenter Reihen ist die Tatsache, dass auch "Umordnungen" absolut konvergieren, und zwar alle gegen denselben Grenzwert.

Definition V.6. Seien $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ Zahlenfolgen. Die Reihe $\big(\sum_{n=1}^m b_n\big)_{m=1}^\infty$ heißt **Umordnung der Reihe** $\big(\sum_{n=1}^m a_n\big)_{m=1}^\infty$ $:\Leftrightarrow$

$$\exists\,\text{Bijektion } \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad b_n \;=\; a_{\sigma(n)}. \tag{V.15}$$

Satz V.7 (Großer Umordnungssatz)**.** *Seien* $\big(\sum_{n=1}^m a_n\big)_{m=1}^\infty$ *eine Reihe in* $\mathbb{K}$ *und* $\big(\sum_{n=1}^m b_n\big)_{m=1}^\infty$ *eine Umordnung von* $\big(\sum_{n=1}^m a_n\big)_{m=1}^\infty$*. Dann gilt*

$$(i) \quad \left\{\Big(\sum_{n=1}^m a_n\Big)_{m=1}^\infty \textit{ist abs. konv.}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\Big(\sum_{n=1}^m b_n\Big) \textit{ist abs. konv.}\right\}, \tag{V.16}$$

$$(ii) \quad \left\{\Big(\sum_{n=1}^m a_n\Big)_{m=1}^\infty \textit{ist absolut konvergent}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\sum_{n=1}^\infty a_n \;=\; \sum_{n=1}^\infty b_n\right\}. \tag{V.17}$$

Umgekehrt zeigt der nun folgende Satz, dass jede konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe in $\mathbb{R}$ so umgeordnet werden kann, dass sie gegen jeden beliebigen vorgegeben Grenzwert konvergiert.

Satz V.8. *Sei* $\big(\sum_{n=1}^m a_n\big)_{m=1}^\infty$ *eine Reihe in* $\mathbb{R}$*, die konvergent, aber nicht absolut konvergent ist, und seien* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \le \beta$*, beliebig. Dann gibt es eine Umordnung* $\big(\sum_{n=1}^m b_n\big)_{m=1}^\infty$ *von* $\big(\sum_{n=1}^m a_n\big)_{m=1}^\infty$*, so dass*

$$\liminf_{m\to\infty}\{t_m\} \;=\; \alpha, \quad \limsup_{m\to\infty}\{t_m\} \;=\; \beta, \tag{V.18}$$

wobei $(t_m)_{m=1}^\infty$ *die Folge in* $\mathbb{R}$ *mit* $t_m := \sum_{n=1}^m b_n$ *ist.*

Eine Anwendung von Satz V.7 ist das *Cauchy-Produkt*.
Dazu betrachten wir zwei Zahlenfolgen $(a_n)_{n=0}^\infty, (b_n)_{n=0}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ und die zugehörigen Reihen $\big(\sum_{n=0}^m a_n\big)_{m=1}^\infty$, $\big(\sum_{n=0}^m b_n\big)_{m=1}^\infty$ in $\mathbb{K}$, die wir als absolut konvergent annehmen. Wir bilden nun

$$c_0 \;:=\; a_0 b_0, \tag{V.19}$$
$$c_1 \;:=\; a_0 b_1 \,+\, a_1 b_0, \tag{V.20}$$
$$c_2 \;:=\; a_0 b_2 \,+\, a_1 b_1 \,+\, a_2 b_0, \tag{V.21}$$
$$\vdots$$
$$c_n \;:=\; a_0 b_n \,+\, a_1 b_{n-1} \,+ \ldots +\, a_n b_0 \;=\; \sum_{k=0}^n a_k\, b_{n-k}, \tag{V.22}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$, und betrachten die Reihe $\big(\sum_{n=0}^m c_n\big)_{m=1}^\infty$, das Cauchy-Produkt der Reihen $\big(\sum_{n=0}^m a_n\big)_{m=1}^\infty$ und $\big(\sum_{n=0}^m b_n\big)_{m=1}^\infty$.

Satz V.9 (Cauchy-Produkt)**.** *Seien* $\big(\sum_{n=0}^m a_n\big)_{m=1}^\infty, \big(\sum_{n=0}^m b_n\big)_{m=1}^\infty$ *zwei absolut konvergente Reihen in* $\mathbb{K}$ *und* $c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$*, für* $n \in \mathbb{N}_0$*. Dann ist das* ***Cauchy-Produkt*** $\big(\sum_{n=0}^m c_n\big)_{m=1}^\infty$ *absolut konvergent in* $\mathbb{K}$*, und es gilt*

$$\sum_{n=0}^\infty c_n \;=\; \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \;=\; \Big(\sum_{n=0}^\infty a_n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^\infty b_n\Big). \tag{V.23}$$

V.3. Konvergenzkriterien

Für die Überprüfung, ob eine Reihe konvergent oder divergent ist, diskutieren wir drei Konvergenzkriterien: das Majorantenkriterium, das Wurzelkriterium und das Quotientenkriterium.

Satz V.10 (Majorantenkriterium)**.**

(i) *Ist* $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ *eine Zahlenfolge und ist* $(b_n)_{n=1}^\infty \in (\mathbb{R}_0^+)^\mathbb{N}$ *eine Folge nichtnegativer Zahlen, sodass* $\left(\sum_{n=1}^m b_n\right)_{m=1}^\infty$ *(absolut) konvergent ist und* $|a_n| \leq b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt, so ist auch* $\left(\sum_{n=1}^m a_n\right)_{m=1}^\infty$ *absolut konvergent in* $\mathbb{K}$*.*

(ii) *Sind* $(a_n)_{n=1}^\infty \in (\mathbb{R}_0^+)^\mathbb{N}$ *und* $(b_n)_{n=1}^\infty \in (\mathbb{R}_0^+)^\mathbb{N}$ *zwei Folgen nichtnegativer Zahlen, sodass* $\left(\sum_{n=1}^m b_n\right)_{m=1}^\infty$ *divergent ist und* $a_n \geq b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt, so ist auch* $\left(\sum_{n=1}^m a_n\right)_{m=1}^\infty$ *divergent.*

Beweis.
(ii) Die Reihen über $(a_n)_{n=1}^\infty \in (\mathbb{R}_0^+)^\mathbb{N}$ und $(b_n)_{n=1}^\infty \in (\mathbb{R}_0^+)^\mathbb{N}$ sind jeweils genau dann konvergent, wenn $(s_m)_{m=1}^\infty$ bzw. $(t_m)_{m=1}^\infty$ nach oben beschränkt ist, wobei $s_m := \sum_{n=0}^m a_n$ und $t_m := \sum_{n=0}^m b_n$. Wegen der Divergenz von $\left(\sum_{n=1}^m b_n\right)_{m=1}^\infty$ ist $(t_m)_{m=1}^\infty$ unbeschränkt somit auch $(s_m)_{m=1}^\infty$, da $s_m \geq t_m \geq 0$. Also ist auch $\left(\sum_{n=1}^m a_n\right)_{m=1}^\infty$ divergent.

Zu *(i)*: Für $\varepsilon > 0$ gibt es, wegen der Konvergenz von $\left(\sum_{n=1}^m b_n\right)_{m=1}^\infty$, ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, m \geq n \geq n_0 : \quad \sum_{k=n}^m |a_k| \;\leq\; \sum_{k=n}^m b_k \;\leq\; \varepsilon. \tag{V.24}$$

Also ist $\left(\sum_{n=1}^m a_n\right)_{m=1}^\infty$ absolut konvergent und somit auch konvergent, nach Lemma V.5. □

Satz V.11 (Wurzelkriterium)**.** *Sei* $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ *eine Zahlenfolge.*

(i) *Gilt*

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\} \;<\; 1, \tag{V.25}$$

so ist die Reihe $\left(\sum_{n=1}^m a_n\right)_{m=1}^\infty$ *absolut konvergent in* $\mathbb{K}$*.*

(ii) *Gilt*

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\} \;>\; 1, \tag{V.26}$$

so ist die Reihe $\left(\sum_{n=1}^m a_n\right)_{m=1}^\infty$ *divergent in* $\mathbb{K}$*.*

Beweis.
Zu *(i)* Sei $\alpha := \limsup_{n\to\infty} \left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\} < 1$. Für $\varepsilon := \frac{1-\alpha}{2} > 0$ gibt es dann nach Satz IV.7 *(ii)* ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, n \geq n_0 : \quad \sqrt[n]{|a_n|} \;\leq\; \alpha + \varepsilon \;=\; \frac{1+\alpha}{2} \;<\; 1. \tag{V.27}$$

Also ist, für alle $m \geq n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{m} |a_k| \;&=\; \sum_{k=n}^{m} \big(\sqrt[k]{|a_k|}\big)^k \;\leq\; \sum_{k=n}^{m} \Big(\frac{1+\alpha}{2}\Big)^k \;\leq\; \Big(\frac{1+\alpha}{2}\Big)^n \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\frac{1+\alpha}{2}\Big)^j \\ &=\; \Big(\frac{1+\alpha}{2}\Big)^n \cdot \frac{1}{1-\frac{1+\alpha}{2}} \;=\; \Big(\frac{1+\alpha}{2}\Big)^n \cdot \Big(\frac{2}{1-\alpha}\Big). \end{aligned} \tag{V.28}$$

Wegen $\frac{1+\alpha}{2} < 1$ folgt $\lim_{n\to\infty} \big\{ \big(\frac{1+\alpha}{2}\big)^n \big\} = 0$, und somit ist nach dem Cauchy-Kriterium für Reihen $\big(\sum_{n=1}^m a_n\big)_{m=1}^\infty$ absolut konvergent.

(Gemäß (V.27) ist $|a_n| \leq (\frac{1+\alpha}{2})^n$ eine summierbare Majorante und die Behauptung hätte sich nach (V.27) auch direkt aus Satz V.10 (i) ergeben.)

Zu *(ii)* Seien $\alpha := \lim_{n\to\infty} \sup \big\{ \sqrt[n]{|a_n|} \big\} > 1$ und $\varepsilon := \frac{\alpha-1}{2} > 0$. Dann gibt es eine Teilfolge $(a_{n_j})_{j=1}^\infty$ mit

$$\forall\, j \in \mathbb{N}: \quad \sqrt[n_j]{|a_{n_j}|} \;>\; \alpha - \varepsilon \;=\; \frac{\alpha+1}{2} \;>\; 1. \tag{V.29}$$

Dann sind

$$\forall\, j \in \mathbb{N}: \quad |a_{n_j}| \;\geq\; \Big(\frac{\alpha+1}{2}\Big)^{n_j} \;\geq\; 1. \tag{V.30}$$

Um zu zeigen, dass $\big(\sum_{n=1}^m a_n\big)_{m=1}^\infty$ divergiert, beweisen wir, dass das Cauchy-Kriterium nicht erfüllt ist. Seien nämlich $\delta := \frac{1}{2}$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ irgend eine natürliche Zahl. Dann gibt es ein $j \in \mathbb{N}$, so dass $n_j \geq n_0$, und

$$\Big| \sum_{k=n_j}^{n_j} a_{n_j} \Big| \;=\; |a_{n_j}| \;\geq\; 1 > \delta. \tag{V.31}$$

Für $m := n := n_j \geq n_0$ ergibt sich daraus ein Widerspruch zum Cauchy-Kriterium. $\square$

Bemerkungen und Beispiele.

- Für $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ gibt es keine allgemeine Aussage. Beispielsweise ist $\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} \to 1$, mit $n \to \infty$, für alle $p > 0$, es ist aber $\big(\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2}\big)_{m=1}^\infty$ (absolut) konvergent in $\mathbb{R}$ und $\big(\sum_{n=1}^m \frac{1}{n}\big)_{m=1}^\infty$ divergent in $\mathbb{R}$.

Satz V.12 (Quotientenkriterium)**.** *Sei* $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \setminus \{0\}$ *eine Zahlenfolge.*

(i) Für

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \right\} \;<\; 1 \tag{V.32}$$

ist die Reihe $\big(\sum_{n=1}^m a_n\big)_{m=1}^\infty$ *absolut konvergent.*

(ii) Gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, n \geq n_0 : \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \;\geq\; 1, \tag{V.33}$$

so ist die Reihe $\left(\sum_{n=1}^m a_n\right)_{m=1}^\infty$ divergent.

Bemerkungen und Beispiele.

- Ein Vergleich mit Bedingung (V.26) aus dem Wurzelkriterium für die Divergenz einer Reihe würde, übertragen auf das Quotientenkriterium, die Bedingung

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \right\} \;>\; 1 \tag{V.34}$$

  für die Divergenz einer Reihe suggerieren. Dies ist jedoch falsch,[1] wie das folgende Gegenbeispiel illustriert.

- Für

$$a_n \;:=\; \begin{cases} 3^{-n}, & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \\ 2^{-n+1}, & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \end{cases} \tag{V.35}$$

  ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ sicher konvergent, da $|a_n|$ die summierbare Majorante 2^{-n+1} besitzt, aber

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \right\} \;\geq\; \limsup_{k\to\infty} \left\{ \frac{|a_{2k+1}|}{|a_{2k}|} \right\} \;=\; \limsup_{k\to\infty} \left\{ \frac{2^{-2k}}{3^{-2k}} \right\} \;=\; \limsup_{k\to\infty} \left\{ \left(\tfrac{3}{2}\right)^{2k} \right\} \;=\; \infty. \tag{V.36}$$

V.4. Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen

Eine der wichtigsten Anwendungen der obigen Konvergenzkriterien ist die Darstellung bzw. Definition elementarer Funktionen durch Potenzreihen. Wir beginnen mit der Exponentialfunktion.

- Seien $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $a_n := z^n/n!$. Wir beobachten, dass

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \;=\; \frac{|z|^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot |z|^n} \;=\; \frac{|z|}{(n+1)} \;\to\; 0, \quad n \to \infty. \tag{V.37}$$

  Also ist

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \right\} \;=\; \limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{|z|}{n+1} \right\} \;=\; \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{|z|}{n+1} \right\} \;=\; 0 \;<\; 1. \tag{V.38}$$

[1] Ich danke Ch. Brauer und B. Komander für diesen Hinweis.

Mit Hilfe des Quotientenkriteriums, Satz V.12, sehen wir also, dass die Reihe $\left(\sum_{n=0}^{m} \frac{z^n}{n!}\right)_{m=1}^{\infty}$ absolut konvergiert. Den Limes dieser Reihe nennen wir **Exponentialfunktion**,

$$\exp: \ \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \exp[z] \ := \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{V.39}$$

Dabei vereinbaren wir, dass $\exp[0] := 1$, d.h. hier ist Konvention $0^0 = 1$ sinnvoll und die Reihe für $\exp[0]$ besitzt nur einen nicht-verschwindenden Summanden.

- Analog seien $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ und $c_k := (-1)^k z^{2k}/(2k)!$ sowie $s_k := (-1)^k z^{2k+1}/(2k+1)!$. Dann sind

$$\limsup_{k\to\infty} \left\{ \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} \right\} \ = \ \limsup_{k\to\infty} \left\{ \frac{|z|^2}{(2k+2)(2k+1)} \right\} \ = \ 0 \ < \ 1, \tag{V.40}$$

$$\limsup_{k\to\infty} \left\{ \frac{|s_{k+1}|}{|s_k|} \right\} \ = \ \limsup_{k\to\infty} \left\{ \frac{|z|^2}{(2k+3)(2k+2)} \right\} \ = \ 0 \ < \ 1, \tag{V.41}$$

und die zugehörigen Reihen, die **Kosinusreihe** $\cos[z]$ und die **Sinusreihe** $\sin[z]$,

$$\cos[z] \ := \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \, z^{2k}}{(2k)!}, \qquad \sin[z] \ := \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \, z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \tag{V.42}$$

sind absolut konvergent für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Für $z = 0$ ergibt sich $\cos[0] = 1$ und $\sin[0] = 0$.

- Weiterhin beobachten wir, dass wegen $i^{2k} = (-1)^k$

$$\begin{aligned} e^{iz} \ := \ \exp[iz] \ &= \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \, z^n}{n!} \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} \, z^{2k}}{(2k)!} \ + \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1} \, z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \, z^{2k}}{(2k)!} \ + \ i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \, z^{2k+1}}{(2k+1)!} \ = \ \cos[z] + i \, \sin[z] \end{aligned} \tag{V.43}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

- Insbesondere sind dann

$$\cos[-z] \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \, (-z)^{2k}}{(2k)!}, \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \, z^{2k}}{(2k)!} \ = \ \cos[z], \tag{V.44}$$

$$\sin[-z] \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \, (-z)^{2k+1}}{(2k+1)!}, \ = \ -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \, z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \ = \ -\sin[z], \tag{V.45}$$

woraus

$$\frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \ = \ \frac{1}{2}\Big(\cos[z] + i \sin[z] + \cos[-z] + i \sin[-z] \Big) \ = \ \cos[z], \tag{V.46}$$

$$\frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \ = \ \frac{1}{2i}\Big(\cos[z] + i \sin[z] - \cos[-z] - i \sin[-z] \Big) \ = \ \sin[z] \tag{V.47}$$

folgen.

- So erhalten wir für alle $z \in \mathbb{C}$ die hyperbolischen Funktionen aus den trigonometrischen durch

$$\cosh[z] := \cos[iz] = \frac{1}{2}\big(e^z + e^{-z}\big) \quad \textbf{Kosinus Hyperbolicus}, \tag{V.48}$$

$$\sinh[z] := \frac{1}{i}\sin[iz] = \frac{1}{2}\big(e^z - e^{-z}\big) \quad \textbf{Sinus Hyperbolicus}. \tag{V.49}$$

- Definieren wir außerdem die **Binominalkoeffizienten**

$$\forall\, m, n \in \mathbb{N}_0, m \geq n: \quad \binom{m}{n} := \frac{m!}{n!(m-n)!}, \tag{V.50}$$

so gilt

$$\forall m \in \mathbb{N}_0\ z, w \in \mathbb{C}: \quad (z+w)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} z^n\, w^{m-n}. \tag{V.51}$$

Setzen wir $a_n := \frac{z^n}{n!}$ und $b_n := \frac{w^n}{n!}$, dann erhalten wir also für das Cauchy-Produkt

$$\begin{aligned} c_m &:= \sum_{n=0}^{m} a_n\, b_{m-n} = \sum_{n=0}^{m} \frac{z^n}{n!}\,\frac{w^{m-n}}{(m-n)!} \\ &= \frac{1}{m!}\sum_{n=0}^{m} \underbrace{\frac{m!}{n!(m-n)!}}_{=\binom{m}{n}} z^n\, w^{m-n} = \frac{(z+w)^m}{m!}. \end{aligned} \tag{V.52}$$

Also gilt das <u>Additionstheorem für die Exponentialfunktion</u>

$$\forall\, z, w \in \mathbb{C}: \quad \exp[z]\cdot\exp[w] = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{m=0}^{\infty} b_n\Big) = \Big(\sum_{m=0}^{\infty} c_m\Big) = \exp[z+w]. \tag{V.53}$$

- Schließlich erhalten wir die Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen und komplexe Argumente $z, w \in \mathbb{C}$, etwa

$$\begin{aligned} &\cos[z]\cos[w] - \sin[z]\sin[w] \\ &= \frac{1}{4}\big(e^{iz} + e^{-iz}\big)\big(e^{iw} + e^{-iw}\big) - \frac{1}{4i^2}\big(e^{iz} - e^{-iz}\big)\big(e^{iw} - e^{-iw}\big) \\ &= \frac{1}{4}\big(e^{iz+iw} + e^{-iz+iw} + e^{iz-iw} + e^{-iz-iw} + e^{iz+iw} - e^{-iz+iw} - e^{iz-iw} + e^{-iz-iw}\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}\big) = \cos[z+w], \end{aligned} \tag{V.54}$$

und genauso $\sin[z+w] = \sin[z]\cos[w] + \cos[z]\sin[w]$.

V.5. Ergänzungen

V.5.1. Der Satz von Cauchy zur Konvergenz von Reihen nichtnegativer, monotoner Summanden

Satz V.13 (Cauchy). *Sei $(a_n)_{n=1}^\infty \in (\mathbb{R}_0^+)^\mathbb{N}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer Zahlen. Dann gilt*

$$\left\{ \Big(\sum_{n=1}^m a_n \Big)_{m=1}^\infty \text{ ist konvergent in } \mathbb{R}_0^+ \right\} \Leftrightarrow \left\{ \Big(\sum_{k=1}^\ell 2^k \cdot a_{2^k} \Big)_{\ell=1}^\infty \text{ ist konvergent in } \mathbb{R}_0^+ \right\}. \tag{V.55}$$

Beweis. Wir setzen

$$s_m := \sum_{n=1}^m a_n \quad \text{und} \quad t_\ell := \sum_{k=1}^\ell 2^k a_{2^k}. \tag{V.56}$$

Konvergenz von $\big(\sum_{n=1}^m a_n\big)_{m=1}^\infty$ bzw. $\big(\sum_{k=1}^\ell 2^k a_{2^k}\big)_{\ell=1}^\infty$ ist dann nach Lemma V.3 äquivalent zur Beschränktheit von $(s_m)_{m=1}^\infty$ und $(t_\ell)_{\ell=1}^\infty$ nach oben. Es genügt also zu zeigen, dass

$$\Big[(s_m)_{m=1}^\infty \text{ ist nach oben beschränkt.} \Big] \Leftrightarrow \Big[(t_\ell)_{\ell=1}^\infty \text{ ist nach oben beschränkt.} \Big] \tag{V.57}$$

Für $m < 2^\ell$ ist

$$s_m \leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \ldots + \underbrace{\big(a_{2^\ell} + a_{2^\ell+1} + \ldots + a_{2^{\ell+1}-1}\big)}_{2^\ell \text{ Summanden}}. \tag{V.58}$$

Wegen $a_n \geq a_{n+1}$ sind

$$\begin{aligned} a_1 \leq a_1, \quad a_2 + a_3 \leq 2a_2, \quad a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \leq 4a_4, \\ \ldots, a_{2^\ell} + a_{2^\ell+1} + \ldots + a_{2^{\ell+1}-1} \ \leq \ 2^\ell \cdot a_{2^\ell}. \end{aligned} \tag{V.59}$$

Also gilt

$$s_m \ \leq \ a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^\ell a_{2^\ell} \ = \ t_\ell \tag{V.60}$$

und somit

$$\sup\big\{ s_m \,\big|\, m \in \mathbb{N} \big\} \ \leq \ \sup\big\{ t_\ell \,\big|\, \ell \in \mathbb{N} \big\}. \tag{V.61}$$

Für $m > 2^\ell$ ist jedoch

$$\begin{aligned} s_m \ &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) \\ &\quad + \ldots + \underbrace{\big(a_{2^{\ell-1}+1} + a_{2^{\ell-1}+2} + \ldots + a_{2^\ell}\big)}_{2^{\ell-1} \text{ Summanden}} \\ &\geq \tfrac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \ldots + 2^{\ell-1} a_{2^\ell} \\ &= \frac{1}{2} \big(a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^\ell a_{2^\ell} \big) \ = \ \frac{1}{2}\, t_\ell, \end{aligned} \tag{V.62}$$

wiederum wegen $a_n \geq a_{n+1}$. Somit ist

$$\sup\big\{s_m \mid m \in \mathbb{N}\big\} \ \geq \ \frac{1}{2}\,\sup\big\{t_\ell \mid \ell \in \mathbb{N}\big\}. \tag{V.63}$$

$\square$

V.5.2. Beweis des Großen Umordnungssatzes V.7

Zu (i): Seien $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \sigma^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Bijektionen, so dass

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad a_{\sigma(n)} \ = \ b_n, \quad a_n \ = \ b_{\sigma^{-1}(n)}. \tag{V.64}$$

Für $m \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$A(m) \ := \ \max\big\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(m)\big\}, \tag{V.65}$$

$$B(m) \ := \ \max\big\{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2), \ldots, \sigma^{-1}(m)\big\}. \tag{V.66}$$

Wir betrachten nun die monoton steigenden Folgen $(s_m)_{m=1}^\infty, (t_m)_{m=1}^\infty$ in $\mathbb{R}$, wobei

$$s_m \ := \ \sum_{n=1}^m |a_n|, \qquad t_m \ := \ \sum_{n=1}^m |b_n|. \tag{V.67}$$

Wir beobachten, dass, für jedes $m \in \mathbb{N}$,

$$t_m \ := \ \sum_{n=1}^m |a_{\sigma(n)}| \ \leq \ \sum_{n=1}^{A(m)} |a_n| \ = \ s_{A(m)}, \tag{V.68}$$

$$s_m \ := \ \sum_{n=1}^m |b_{\sigma^{-1}(n)}| \ \leq \ \sum_{n=1}^{B(m)} |b_n| \ = \ t_{B(m)}. \tag{V.69}$$

Somit ist

$$\sup_{m\in\mathbb{N}}\{t_m\} \ \leq \ \sup_{m\in\mathbb{N}}\{s_{A(m)}\} \ \leq \ \sup_{m\in\mathbb{N}}\{s_m\} \ \leq \ \sup_{m\in\mathbb{N}}\{t_{B(m)}\} \ \leq \ \sup_{m\in\mathbb{N}}\{t_m\}, \tag{V.70}$$

also

$$\sup_{m\in\mathbb{N}}\{s_m\} \ = \ \sup_{m\in\mathbb{N}}\{t_m\}, \tag{V.71}$$

und $(s_m)_{m=1}^\infty$ ist genau dann konvergent, wenn $(t_m)_{m=1}^\infty$ konvergent ist, nach Satz IV.5 (i).

Zu (ii): Seien $m \in \mathbb{N}$ und $B(m)$ wie in (V.66). Dann ist $B(m) \geq m$ und

$$\big\{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2), \ldots, \sigma^{-1}(m)\big\} \ \subseteq \ \{1, 2, \ldots, B(m)\}, \tag{V.72}$$

was

$$\begin{aligned} \{1, 2, \ldots, m\} \ &= \big\{\sigma\big(\sigma^{-1}(1)\big), \sigma\big(\sigma^{-1}(2)\big), \ldots, \sigma\big(\sigma^{-1}(m)\big)\big\} \\ &\subseteq \big\{\sigma(n) \,\big|\, n = 1, 2, \ldots, B(m)\big\} \ \subseteq \ \{1, 2, \ldots, A(B(m))\} \end{aligned} \tag{V.73}$$

impliziert. Also ist $Q_m := \{\sigma(n)\}_{n=1}^{B(m)} \supseteq \{1, \ldots, m\}$

$$\sum_{n=1}^{B(m)} b_n - \sum_{n=1}^{m} a_n = \sum_{k \in \mathcal{Q}_m} a_k - \sum_{k \in \{1,\ldots,m\}} a_k = \sum_{k \in \mathcal{Q}_m \setminus \{1,\ldots,m\}} a_k, \tag{V.74}$$

und wegen $\mathcal{Q}_m \subseteq \{1, 2, \ldots, A \circ B(m)\}$ ist dann

$$\Big| \sum_{n=1}^{B(m)} b_n - \sum_{n=1}^{m} a_n \Big| \leq \sum_{k \in \mathcal{Q}_m \setminus \{1,\ldots,m\}} |a_k| \leq \sum_{n=m+1}^{A \circ B(m)} |a_n| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n|. \tag{V.75}$$

Ist nun $\varepsilon > 0$, und ist $m_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\forall\, m \geq m_0 : \quad \sum_{n=m_0+1}^{m} |a_n|, \quad \sum_{n=m_0+1}^{m} |b_n| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \tag{V.76}$$

dann sind, wegen $B(m) \geq m$,

$$\Big| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{m_0} a_n \Big|, \quad \Big| \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{B(m_0)} b_n \Big| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{V.77}$$

Also ist mit (V.77) und (V.75))

$$\begin{aligned} \Big| \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Big| &\leq \Big| \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{B(m_0)} b_n \Big| + \Big| \sum_{n=1}^{B(m_0)} b_n - \sum_{n=1}^{m_0} a_n \Big| + \Big| \sum_{n=1}^{m_0} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Big| \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \sum_{n=m_0+1}^{\infty} |a_n| \leq \varepsilon. \end{aligned} \tag{V.78}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt $\big| \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \big| = 0$, also

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{V.79}$$

V.5.3. Beweis von Satz V.9 zum Cauchy-Produkt

Seien $a := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $b := \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $A := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, $B := \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$. Sei weiterhin $\varepsilon > 0$. Wegen der absoluten Konvergenz von $\big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \big)_{m=0}^{\infty}$ und $\big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \big)_{m=0}^{\infty}$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass, für alle $n \geq n_0$,

$$\Big| a - \sum_{k=0}^{n} a_k \Big| \leq \varepsilon, \qquad \Big| b - \sum_{k=0}^{n} b_k \Big| \leq \varepsilon, \tag{V.80}$$

$$\Big| A - \sum_{k=0}^{n} |a_k| \Big| \leq \frac{\varepsilon}{A+B}, \qquad \Big| B - \sum_{k=0}^{n} |b_k| \Big| \leq \frac{\varepsilon}{A+B}. \tag{V.81}$$

Wir beobachten nun, dass für $M \geq 2m$, $M, m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=2m}^{M} |c_n| \;=\; \sum_{n=2m}^{M} \sum_{k=0}^{n} |a_k|\,|b_{n-k}| \;\leq\; \sum_{\alpha=0}^{m} \sum_{\beta=m}^{M} |a_\alpha|\,|b_\beta| \;+\; \sum_{\alpha=m}^{M} \sum_{\beta=0}^{M} |a_\alpha|\,|b_\beta|. \tag{V.82}$$

Also ist, für $M \geq 2m \geq m \geq n_0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2m}^{M} |c_n| \;&\leq\; \underbrace{\Big(\sum_{\alpha=0}^{m} |a_\alpha|\Big)}_{\leq A} \underbrace{\Big(\sum_{\beta=m}^{M} |b_\beta|\Big)}_{\leq \varepsilon/A+B} \;+\; \underbrace{\Big(\sum_{\alpha=m}^{M} |a_\alpha|\Big)}_{\leq \varepsilon/A+B} \underbrace{\Big(\sum_{\beta=0}^{m} |b_\beta|\Big)}_{\leq B} \\
&\leq (A+B) \cdot \Big(\frac{\varepsilon}{A+B}\Big) \;=\; \varepsilon.
\end{aligned} \tag{V.83}$$

Somit ist $\big(\sum_{n=0}^{m} c_n\big)_{m=0}^{\infty}$ absolut konvergent. Außerdem ist

$$\begin{aligned}
\Big|ab - \sum_{n=0}^{2m} c_n\Big| \;&\leq\; \Big|ab - \Big(\sum_{\alpha=0}^{m} a_\alpha\Big)\Big(\sum_{\beta=0}^{m} b_\beta\Big)\Big| \;+\; \Big|\Big(\sum_{\alpha=0}^{m} a_\alpha\Big)\Big(\sum_{\beta=0}^{m} b_\beta\Big) \;-\; \sum_{n=0}^{2m} c_n\Big| \\
&\leq \Big|a - \sum_{\alpha=0}^{m} a_\alpha\Big| \cdot |b| \;+\; \Big|\sum_{\alpha=0}^{m} a_\alpha\Big| \cdot \Big|b - \sum_{\beta=0}^{m} b_\beta\Big| \\
&\qquad + \Big(\sum_{\alpha=0}^{m} |a_\alpha|\Big) \Big(\sum_{\beta=m}^{2m} |b_\beta|\Big) \;+\; \Big(\sum_{\alpha=m}^{2m} |a_\alpha|\Big) \Big(\sum_{\beta=0}^{m} |b_\beta|\Big) \\
&\leq \varepsilon\big(|b| + A + A + B\big) \;\leq\; 2\big(A+B\big)\varepsilon,
\end{aligned} \tag{V.84}$$

also gilt auch (V.23).

V.5.4. Rückführung des Quotientenkriteriums auf das Wurzelkriterium

Beweis von Satz V.12 [Quotientenkriterium].

Zu (i) Sei $\beta := \limsup_{n\to\infty} \Big\{\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\Big\} \in \mathbb{R}_0^+$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, n \geq n_0 : \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \;\leq\; \beta + \varepsilon, \tag{V.85}$$

nach Satz IV.7 (ii). Also ist

$$\forall n \geq n_0 : \qquad |a_n| \;\leq\; \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \cdot \frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|} \;\cdots\; \frac{|a_{n_0+1}|}{|a_{n_0}|} \;\cdot\; |a_{n_0}| \;\leq\; (\beta+\varepsilon)^{n-n_0}|a_{n_0}|, \tag{V.86}$$

und daher

$$\sqrt[n]{|a_n|} \;\leq\; (\beta+\varepsilon) \cdot \sqrt[n]{|a_{n_0}| \cdot (\beta+\varepsilon)^{-n_0}} \;\to\; \beta+\varepsilon, \quad \text{für } n \to \infty. \tag{V.87}$$

Somit erhalten wir, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\} \ \le \ \beta + \varepsilon. \tag{V.88}$$

Im Limes $\varepsilon \to 0$ folgt damit, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\} \ \le \ \beta \ = \ \limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \right\}, \tag{V.89}$$

und (i) folgt nun aus dem Wurzelkriterium.

Zu (ii) Sind umgekehrt $n_0 \in \mathbb{N}$ und

$$\forall\, n \ge n_0 : \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \ \ge \ 1, \tag{V.90}$$

so ist

$$\forall\, n \ge n_0 : \quad |a_n| \ \ge \ \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \cdot \frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|} \cdots \frac{|a_{n_0+1}|}{|a_{n_0}|} \cdot |a_{n_0}| \ \ge \ |a_{n_0}| \ > \ 0. \tag{V.91}$$

Also ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ keine Nullfolge, und das Nullfolgenkriterium ergibt die Divergenz der zugehörigen Reihe. $\square$