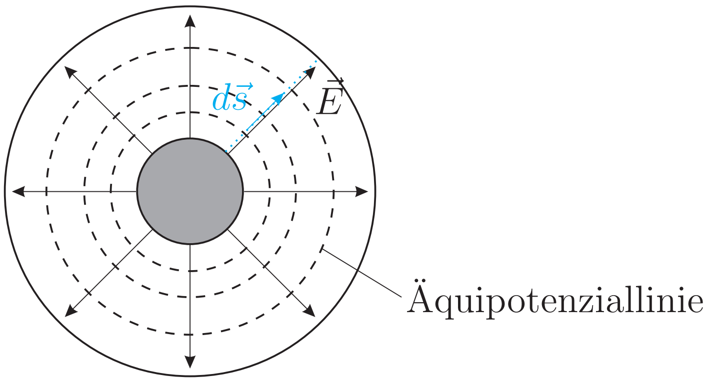
# 1 Elektrisches Feld

**Punkte: 20**

a) der Betrag der elektrischen Feldstärke ist an der inneren Elektrode am größten (1)

Skizze (1)




$\sum_a 2$

b) $Q = \iint\limits_A \vec{D} d\vec{A}$ (1)

$A$ - zylindrische Oberfläche dessen Radius $r$ folgende Beziehung erfüllt: $R_1 \leq r \leq R_2$

auf dem Zylindermantel $|\vec{D}| =$ konstant (1) , $\vec{D} \parallel d\vec{A}$ (1)

an den Enden $\vec{D} \perp d\vec{A} \Rightarrow \vec{D} \cdot d\vec{A} = 0$

$Q_z = \iint\limits_{A-Mantel} DdA = D \iint\limits_{A-Mantel} dA = D \cdot 2\pi r \cdot l$ (1)

$D = \varepsilon E$ (1)

$E = \frac{Q_z}{2\pi r \varepsilon l}$ (1)

$\sum_b 6$

c) $U = \int \vec{E} d\vec{s}$ (1)

$\vec{E} \| d\vec{s}$ (siehe Skizze a)) (1)

$U_z = \int E ds = \int\limits_{R1}^{R2} \frac{Q_z}{2\pi r \varepsilon l} dr = \frac{Q_z}{2\pi \varepsilon l} \int\limits_{R1}^{R2} \frac{1}{r} dr$ (1)

$U_z = \frac{Q_z}{2\pi \varepsilon l} \ln r|_{R_1}^{R_2} = \frac{Q_z}{2\pi \varepsilon l} \ln \frac{R_2}{R_1}$ (1)

$\sum_c 4$

d) $C = \frac{Q}{U}$ (1)

$C_z = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln(R_2/R_1)}$ (1)

$C_z = \frac{2\pi 50 \cdot 10^{-9} \cdot 21 \cdot 10^{-3}}{\pi(\ln 1.5e)} \frac{\text{Asm}}{\text{Vm}} = \frac{2100 \cdot 10^{-12}}{\ln 1.5 + \ln e}\,\text{F} = \frac{2.1}{1.4}\,\text{nF} = 1.5\,\text{nF}$ (1)

$\sum_d 3$

e) Parallelschaltung (1)

$\sum_e 1$

f) $C_z = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln(R_2/R_1)}$

Logarithmus streng steigende Funktion $\longrightarrow$ Kapazität indirekt proportional zum Radienverhältnis der Elektroden

durch zusätzliche Elektrode wird dieses Verhältnis kleiner somit die einzelnen Kapazitäten größer (1)

Parallelschaltung der Kondensatoren: Gesamtkapazität = Summe der Einzelkapazitäten (1)

oder

$C = \varepsilon \frac{A}{d}$

die zusätzliche Elektrode bedeutet eine größere Gesamtoberfläche der Elektroden (1)

gleichzeitig wird der Abstand zwischen den Elektroden kleiner (1)

$\sum_f 2$

g) Nein. Da die Spannung gleich bleibt, die Entfernung zwischen den Elektroden aber abnimmt, ist eine höhere Feldstärke zu erwarten

aus a), b) und c) $E_{max} = \frac{U}{R_1 \ln(R_2/R_1)}$ (alternativ $E = \frac{U}{d}$) (1)

Somit wird die Durchschlagsfestigkeit des Dielektrikums überschritten. (1)

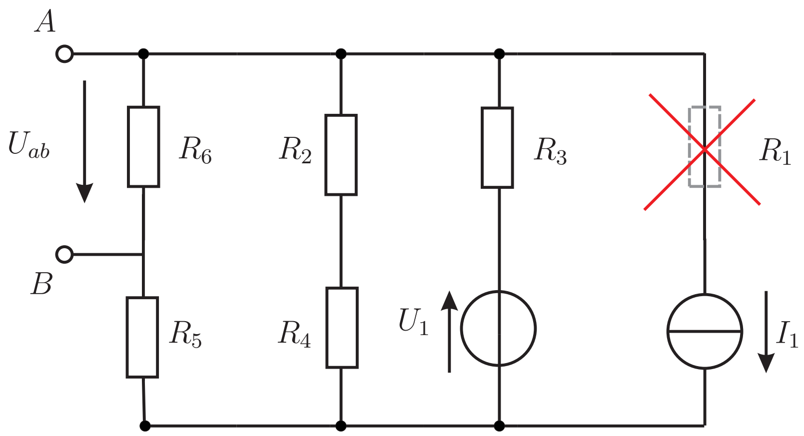
$\sum_g 2$

## 2 Gleichstromnetzwerk

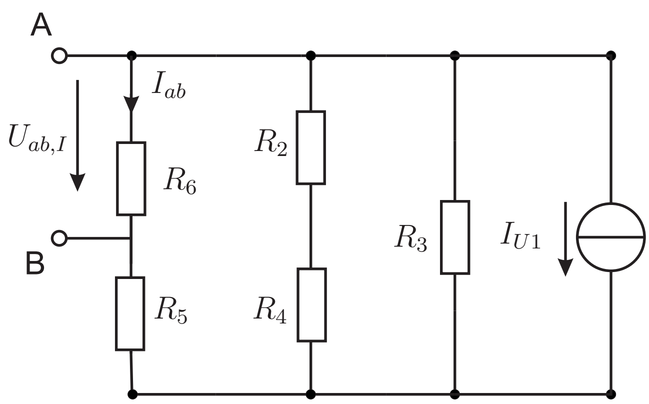
**Punkte: 13**

a) Superpositionsprinzip

die Wirkung jeder Quelle getrennt betrachten, danach die Einzelwirkungen zur Gesamtwirkung überlagern. Quellen, deren Wirkung gerade nicht betrachtet wird, durch ihre Innenwiderstände ersetzen.




Wirkung der Spannungsquelle $U_1$ umgewandelt in Stromquelle betrachten ($I_1$ und $R_1$ entfallen).

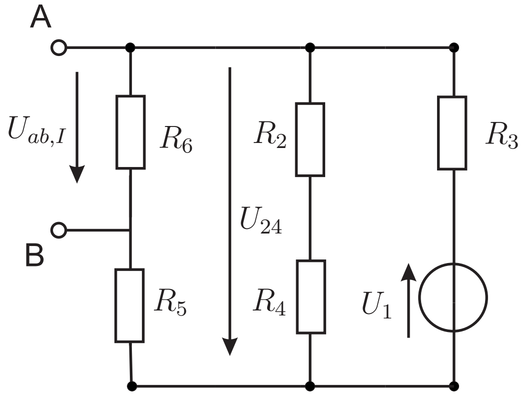



$$
\begin{aligned}
I_{ab} &= \frac{\frac{1}{R_6+R_5}}{\frac{1}{R_6+R_5}+\frac{1}{R_2+R_4}+\frac{1}{R_3}} \cdot -\frac{U_1}{R_3} \\
&= -U_1 \frac{R_2+R_4}{R_3(R_2+R_4+R_5+R_6)+(R_2+R_4)\cdot(R_5+R_6)} \\
U_{ab,I} &= I_{ab}\cdot R_6 \\
&= -U_1 \frac{R_6\cdot(R_2+R_4)}{R_3(R_2+R_4+R_5+R_6)+(R_2+R_4)\cdot(R_5+R_6)}
\end{aligned}
$$

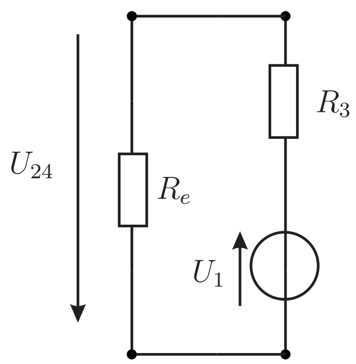
Skizze (Ansatz) 1 Punkt, Umwandlung 1 Punkt, Stromteiler 1 Punkt, Ergebnis 1 Punkt

ALTERNATIV-LÖSUNG

Wirkung der Spannungsquelle $U_1$ mit doppeltem Spannungsteiler betrachten ($I_1$ und $R_1$ entfallen).




$$U_{ab,I} = \frac{R_6}{R_6 + R_5} \cdot U_{24}$$




$$R_e = \frac{(R_2 + R_4) \cdot (R_5 + R_6)}{R_2 + R_4 + R_6 + R_5}$$

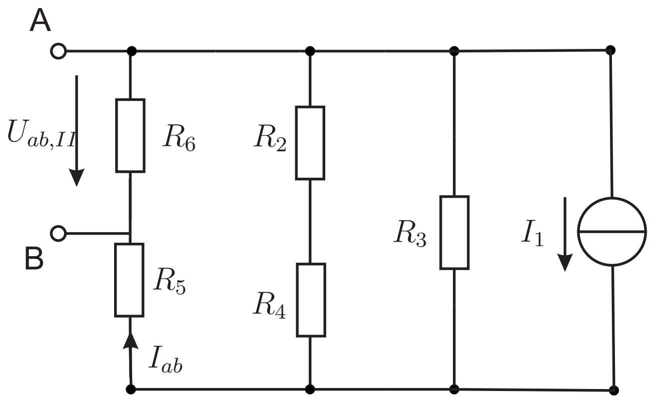
$$U_{24} = \frac{R_e}{R_e + R_3} \cdot -U_1$$

$$U_{ab,I} = \frac{R_6}{R_5 + R_6} \cdot \frac{\frac{(R_2+R_4)(R_5+R_6)}{R_2+R_4+R_5+R_6}}{\frac{(R_2+R_4)(R_5+R_6)}{R_2+R_4+R_5+R_6} + R_3} \cdot (-U_1)$$

$$U_{ab,I} = \frac{R_6 \cdot (R_2 + R_4)}{(R_2 + R_4)(R_5 + R_6) + R_3 \cdot (R_2 + R_4 + R_5 + R_6)} \cdot -U_1$$

Skizze (Ansatz) 1 Punkt, Pro Spannungsteiler 1 Punkt, Ergebnis 1 Punkt

Wirkung der Stromquelle $I_1$ betrachten (Spannungsquelle $U_1$ ist dabei ein Kurzschluss, $R_1$ in der Reihe mit der Stromquelle entfällt).




Stromteiler:

$$\begin{aligned}
I_{ab} &= \frac{R_3||(R_2+R_4)||(R_5+R_6)}{R_5+R_6} I_1 \\
R_3||(R_2+R_4)||(R_5+R_6) &= \frac{R_3\cdot(R_2+R_4)\cdot(R_5+R_6)}{(R_2+R_4)(R_5+R_6)+R_3\cdot(R_2+R_4+R_5+R_6)} \\
I_{ab} &= \frac{R_3\cdot(R_2+R_4)}{(R_2+R_4)(R_5+R_6)+R_3\cdot(R_2+R_4+R_5+R_6)} I_1 \\
U_{ab,II} &= -I_{ab}\cdot R_6
\end{aligned}$$

Skizze (Ansatz) 1 Punkt, Stromteiler 1 Punkt, Rechnung 1 Punkt, Ergebnis 1 Punkt

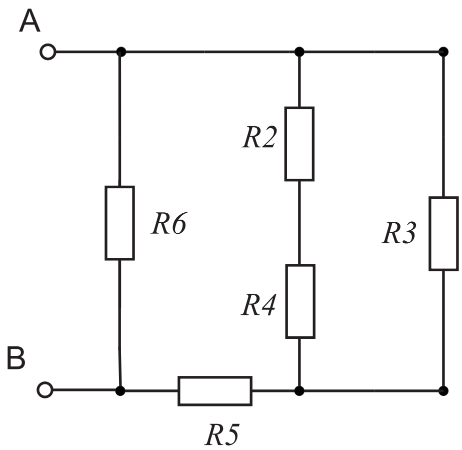
Endergebnis durch Superposition:

$$\begin{aligned}
U_{ab} &= U_{ab,I} + U_{ab,II} \\
&= \frac{-(R_2+R_4)\cdot R_6\cdot U_1 - R_3\cdot R_6\cdot(R_2+R_4)\cdot I_1}{(R_2+R_4)(R_5+R_6)+R_3\cdot(R_2+R_4+R_5+R_6)}
\end{aligned}$$

Ergebnis/Superposition 1 Punkt

$\sum_a 9$

b) Quellen ersetzen durch spezifische Widerstände.




$$
\begin{aligned}
R_{ab} &= \frac{\left(\frac{(R_2+R_4)\cdot R_3}{R_2+R_4+R_3} + R_5\right)\cdot R_6}{\frac{(R_2+R_4)\cdot R_3}{R_2+R_4+R_3} + R_5 + R_6} \\
&= \frac{R_6 \cdot (R_3 \cdot (R_2+R_4) + R_5 \cdot (R_2+R_3+R_4))}{R_3 \cdot (R_2+R_4) + (R_5+R_6)\cdot(R_2+R_3+R_4)}
\end{aligned}
$$

Serien- und Parallelschaltung $R_2, R_3, R_4$ - 1 Punkt
Serien- und Parallelschaltung $R_6, R_5, R_{234}$ - 1 Punkt
Rechnung 1 Punkt
Ergebnis 1 Punkt

$\sum_b 4$

## 3 Zeitlich veränderliches Magnetfeld

**Punkte: 17**

a)

$$\Phi = \iint\limits_A \vec{B} d\vec{A}$$

$$\Phi = \iint\limits_A B\vec{e}_x d\vec{A} = \iint\limits_A B\cos(\omega t)\, dA = B\cos(\omega t) \iint\limits_A dA$$

$$\Phi = abB\cos(\omega t)$$

Zeile 1: Ansatz 1 Punkt
Zeile 2: Winkelabhängigkeit von der Zeit 1 Punkt, Kreuzprodukt ausrechnen 1 Punkt
Zeile 3: Integral auflösen + Ergebnis 1 Punkt

$\sum_a 4$

b)

$$u_i = -N\frac{d\Phi}{dt} \mid N = 1$$

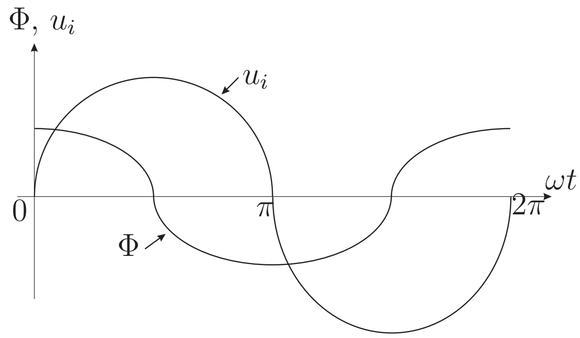
$$u_i = -\frac{d\, abB\cos(\omega t)}{dt} = -abB\frac{d\cos(\omega t)}{dt} = -abB\left(-\omega\sin(\omega t)\right) = abB\omega\sin(\omega t)$$

$$i_1 = u_i/R = abB\omega\sin(\omega t)/R$$

je Zeile 1 Punkt

$\sum_b 3$

c)




Verlauf von $\Phi$ und $u_i$ je 1 Punkt

$\sum_c 2$

d)

Verdopplung des Betrags der Spannung, da $u \propto B$ (1) ($u_i = abB\omega \sin(\omega t)$)

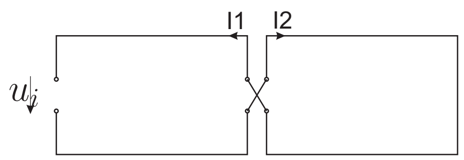
Verdopplung des Betrags der Spannung, da $u \propto \omega$ (1) ($u_i = abB\omega \sin(\omega t)$)

Vervierfachung des Betrags der Spannung, da $u \propto ab$ (1) ($u_i = abB\omega \sin(\omega t)$)

Verdopplung des Betrags des Stroms, da $i \propto \frac{ab}{a+b}$ (1). $i_1 = abB\omega \sin(\omega t)/R$ Der Nenner $a+b$ entsteht durch den Widerstand $R = \frac{\rho l}{A}$, $l = 2(a+b)$ (1)

$\sum_d 5$

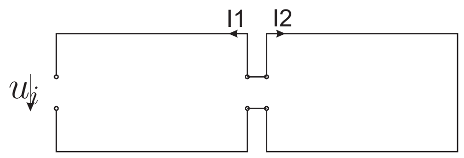
e)




$u_i = 0$, die Wirkung in den beiden Schleifen heben sich gegenseitig auf (1)

$\sum_e 1$

f)




$A = 2ab$ (Verdoppelung der Fläche) (1)

$u_i = A\omega B \sin(\omega t) = 2ab\omega B \cos(\omega t)$ (1)

$\sum_f 2$

## 4 Komplexe Wechselstromrechnung

**Punkte: 30**

a)

$$\underline{Z}_{LC} = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = j\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C} \text{ (1)}$$

$$\underline{Z} = R_0 + \frac{Z_{LC} \cdot R_1}{Z_{LC} + R_1} = R_0 + \frac{jR_1\left(\omega^2 LC - 1\right)}{j\left(\omega^2 LC - 1\right) + \omega R_1 C} \text{ (1)}$$

$\sum_a 2$

b)

$$I_0 - \text{ maximal wenn } |Z(\omega)| - \text{ minimal } \text{ (1)}$$

$$\omega^2 LC - 1 = 0,\ \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \text{ (1)}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{400\,\text{mH} \cdot 500\,\mu\text{F}}} = \sqrt{\frac{10^4}{2}}\,\text{Hz} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 100\,\text{Hz} \approx 70\,\text{Hz} \text{ (1)}$$

$\sum_b 3$

c)

$$\underline{U}_{R_1} = R_1 \cdot \underline{I}_1 = 25\,\Omega \cdot 7\,\text{A} = 175\,\text{V} \text{ (1)}$$

$$\underline{Z}_{LC} = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = j\left(200\,\text{Hz} \cdot 400\,\text{mH} - \frac{1}{200\,\text{Hz} \cdot 500\,\mu\text{F}}\right)$$

$$= j\,(80 - 10)\,\Omega = j70\,\Omega \text{ (1)}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{U_R}{Z_{LC}} = \frac{175\,\text{V}}{j70\,\Omega} = -j2.5\,\text{A} \text{ (1)}$$

$$\underline{U}_L = j\omega L\underline{I}_2 = j80\,\Omega \cdot (-j2.5\,\text{A}) = 200\,\text{V} \text{ (1)}$$

$$\underline{U}_C = -j\frac{1}{\omega C}\underline{I}_2 = -j10\,\Omega \cdot (-j2.5\,\text{A}) = -25\,\text{V} \text{ (1)}$$

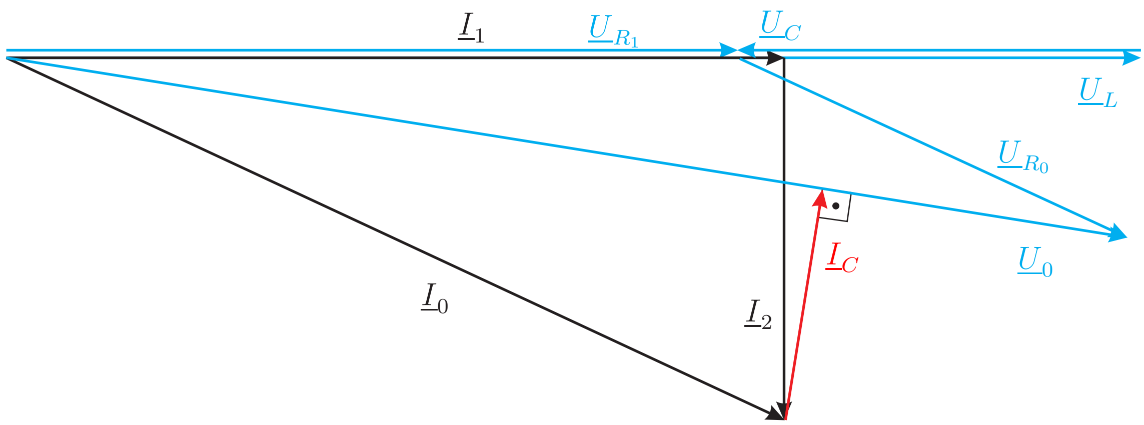
$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (7 - j2.5)\text{A} \text{ (1)}$$

$$\underline{U}_{R_0} = R_0 I_0 = 5\,\Omega \cdot (7 - j2.5)\text{A} = (35 - j12.5)\text{V} \text{ (1)}$$

$$\underline{U}_0 = \underline{U}_{R_0} + \underline{U}_{R_1} = (35 - j12.5)\text{V} + 175\,\text{V} = (210 - j12.5)\,\text{V} \text{ (1)}$$

$\sum_c 8$

d)




je Richtiger Zeiger 0.5 Punkte

$\sum_d 4$

e)

induktives Verhalten $\Rightarrow$ Kapazität (1)

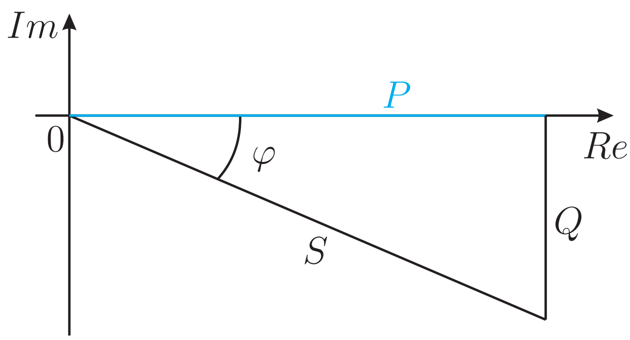
Skizze: $|\underline{I}_C| \approx 3\,\mathrm{A}$ (1)

$$C = \frac{|\underline{I}_C|}{\omega |\underline{U}_0|} \quad (1)$$

$$C \approx \frac{3\,\mathrm{A}}{200\,\mathrm{Hz} \cdot 300\,\mathrm{V}} \approx 50\,\mu\mathrm{F} \quad (1)$$

$\sum_e 4$

f)




Skizze 2 Punkte

$\sum_f 2$

g)

$\underline{S} = \underline{U}_0 \cdot \underline{I}_0^*$ (1)
$\underline{S} = (296\text{V} - j48\text{V}) \cdot (10,3\text{A} + j4,8\text{A}) = (3048,8\text{W} + j1420,8\text{var} - j494,4\text{var} + 230,4\text{W})$
$= 3279,2\text{W} + j926,4\text{var}$ (0.5) ggf. Annäherung
$P = Re\{\underline{S}\} = 3279,2\,\text{W}$ (0.5)

$\sum_g 2$

h)

$$f = \frac{1}{T} \quad (0.5)$$
$$f = \frac{1}{0.02\,\text{s}} = 50\,\text{Hz} \quad (0.5)$$

$\sum_h 1$

i)

Zeigerdiagramm: Spannung vor Strom ($\varphi_{ui} > 0$) (0.5)

zeitl. Verlauf: Strom vor Spannung ($\varphi_{ui} < 0$) (0.5)

Schaltung verhält sich in diesem Fall kapazitiv (1)

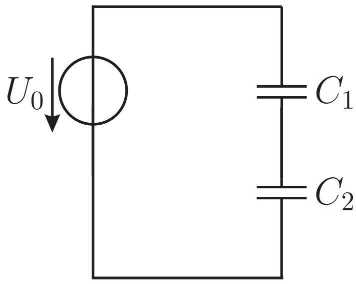
die Impedanz der Schaltung hängt von der Frequenz mit der sie betrieben wird ab ($\underline{Z} = \underline{Z}(\omega)$). (1) Die Impedanz der Kapazität $Z_C = \frac{1}{\omega C}$ wird mit fallender Frequenz größer während die Impedanz der Spule $Z_L = \omega L$ kleiner wird. Abhängig von der Impedanz stellt sich ein anderer Phasenwinkel ein ($\underline{I}_0 = \underline{U}_0/\underline{Z}$). (1)

$\sum_i 4$

## 5 Kondensatornetzwerk

**Punkte: 20**

a) Zeichung (1)




b) $C_{ges1} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$ (1) I

c) $U_{ges1} = U_1 + U_2$ (0,5) II

$Q_{ges1} = Q_1 = Q_2$ (0,5) III

d) aus I mit $C_1 = 2\,\mu F$, $C_2 = 4\,\mu F$ folgt

$C_{ges1} = \frac{2\,\mu F \cdot 4\,\mu F}{2\,\mu F + 4\,\mu F} = \frac{4}{3}\,\mu F$ (0,5) IV

e) $U_{ges1} = U_0 = 210V$ (0.5) V

$Q = C \cdot U$ (0,5) in III eingesetzt: VI

$C_1 \cdot U_1 = C_2 \cdot U_2$ (0,5) nach $U_1$ aufgelöst:

$\Rightarrow U_1 = \frac{C_2}{C_1} U_2$ (0,5) eingesetzt in II:

$U_{ges1} = \frac{C_2}{C_1} U_2 + U_2 = (1 + \frac{C_2}{C_1}) U_2$ (0,5)

$\Rightarrow U_2 = \frac{U_{ges1}}{(1 + \frac{C_2}{C_1})}$ mit V eingesetzt

$\Rightarrow U_2 = \frac{210V}{1 + \frac{4\,\mu F}{2\,\mu F}} = 70V$ (0,5)

eingesetzt in II: $\Rightarrow U_1 = U_{ges1} - U_2 = 140V$ (0,5)

mit VI und $U_1$ bzw. $U_2$ folgt:

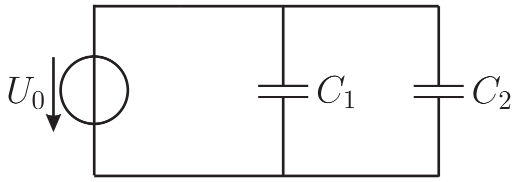
$Q_{ges1} = Q_2 = Q_1 = C_1 \cdot U_1 = 2\,\mu F \cdot 140V = 280\mu C$ (0,5)

(Alternativ: $Q_2 = C_2 \cdot U_2 = 4\,\mu F \cdot 70V = 280\mu C$)

f) $W_{ges1} = \frac{1}{2} Q_{ges1} \cdot U_{ges1}$ bzw. $= \frac{1}{2} C_{ges1} \cdot U_{ges1}^2$ (0,5) $= \frac{1}{2}\frac{4}{3}\,\mu F (210V)^2 = 29.400 mWs$ (0,5)

$\sum_{Reihenschaltung} 8,5$

g) Zeichung (1)




h) $C_{ges2} = C_1 + C_2$ (1) I

i) $U_{ges2} = U_1 = U_2$ (0,5) II

$Q_{ges2} = Q_1 + Q_2$ (0,5) III

j) aus I mit $C_1 = 2\,\mu F$, $C_2 = 4\,\mu F$ folgt

$C_{ges2} = 2\,\mu F + 4\,\mu F = 6\,\mu F$ (0.5) IV

k) aus II: $U_{ges2} = U_1 = U_2 = U_0 = 210V$ (0.5) V

$Q = C \cdot U$ VI

V und VI: $\Rightarrow Q_1 = C_1 \cdot U_1$ (0.5) $= 2\,\mu F \cdot 210V = 420\,\mu C$ (0.5)

V und VI: $\Rightarrow Q_2 = C_2 \cdot U_2 = 4\,\mu F \cdot 210V = 840\,\mu C$ (0.5)

aus III folgt: $Q_{ges2} = 420\,\mu C + 840\,\mu C = 1.26\,mC$ (0.5)

l) $W_{ges2} = \frac{1}{2}Q_{ges2} \cdot U_{ges2} bzw. = \frac{1}{2}C_{ges2} \cdot U_{ges2}^2 = \frac{1}{2}6\,\mu F(210V)^2 = 132.3\,mWs$ (0,5)

$\sum_{Parallelschaltung} 6,5$

m) $W_{diff} = W_{ges1} - W_{ges2} = 29.400mWs - 132.3\,mWs = -102.9 < 0$ (0.5)

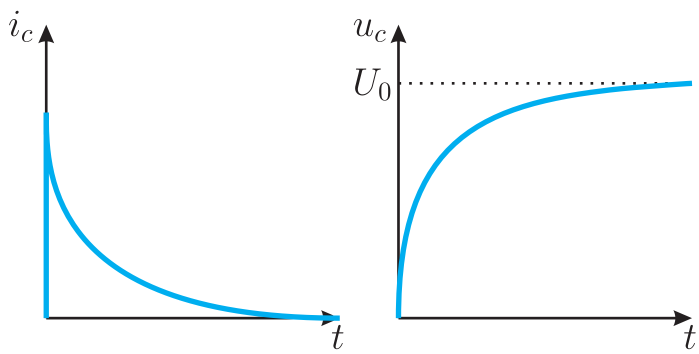
Die Differenz entsteht durch die unterschiedlichen Gesamtkapazitäten $C_{ges2}$ und $C_{ges2}$ (0.5) bei gleicher Spannung $U_{ges}$ (0.5).

(Dies kann man gut an der Formel $W_{ges} = \frac{1}{2}C_{ges} \cdot U_{ges}^2$ erkennen.)

Die Energiedifferenz wird aus der Quelle geliefert. (0.5)

$\sum_{Vergleich} 2$

n) Zeichung: $i_c$, $u_c$, $t$ (0.5). links: Sprung (0.5) fallen (0.5) asymptotisch gegen 0 (0.5). rechts: steigt stetig (0.5) gegen $U_0$ (0.5).




$\sum_{Ladevorgang} 3$