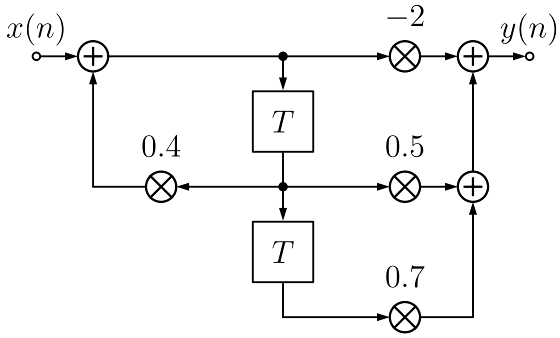
Musterlösung zur Klausur
"Digitale Signalverarbeitung"
vom 26.08.2016

Aufgabe 1: Übertragungsfunktionen und Analyse von LTI-Systemen

(15 Punkte gesamt)

a) (2 Punkte)

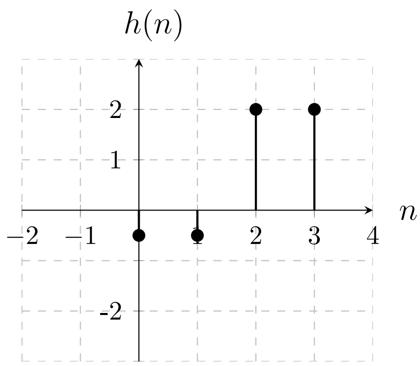


b) (1 Punkt)
Es handelt sich um ein IIR-Filter, da das Ausgangssignal mit einem Takt Verzögerung ($y(n-1)$) rückgekoppelt wird.

c) (1 Punkt)
Gleichung nach $x(n)$ auflösen ergibt:

$$x(n) = \frac{1}{b_0}y(n) - \frac{a_1}{b_0}y(n-1) - \frac{b_1}{b_0}x(n-1) - \frac{b_2}{b_0}x(n-2)$$

d) (1 Punkt)



e) (1 Punkt)

$$h(n) = -\frac{1}{2}\delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + 2\delta(n-3)$$

f) (1 Punkt)

$$H(z) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^{-1} + 2z^{-2} + 2z^{-3}$$

g) (1 Punkt)
Ja, weil die Übertragungsfunktion kein z^n mit $n > 0$ enthält.

h) (3 Punkte)

$$
\begin{aligned}
H(z) &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^{-1} + 2z^{-2} + 2z^{-3} \qquad | \cdot \frac{z^3}{z^3} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{2}z^2 + 2z^1 + 2z^0}{z^3}
\end{aligned}
$$

Polstellen:

$$z_{\infty,1-3} = 0$$

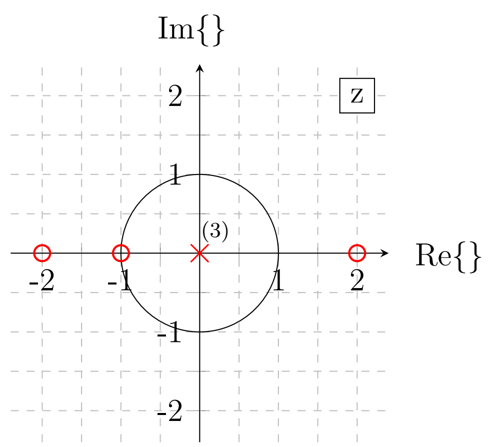
Nullstellen:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{2}z^2 + 2z^1 + 2z^0 &\overset{!}{=} 0 \\
-\frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{2}z^2 + 2z^1 + 2z^0 & \qquad | : -\frac{1}{2} \\
z^3 + z^2 - 4z^1 - 4z^0 &\overset{!}{=} 0 \\
z^3 + z^2 - 4z^1 - 4z^0 : (z+1) &= z^2 - 4
\end{aligned}
$$

Polynomdivision mit $z_{0,1} = -1$ gefunden durch ausprobieren...

$$
\begin{aligned}
z^2 - 4 &= 0 \\
z^2 &= 4 \\
z_{0,2} &= 2 \\
z_{0,3} &= -2
\end{aligned}
$$

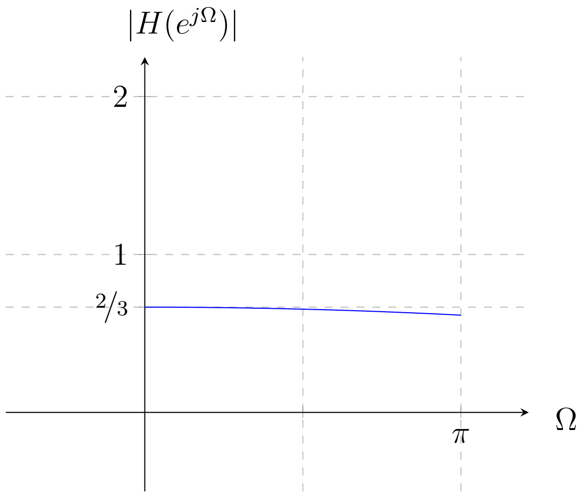
i) (1 Punkt)

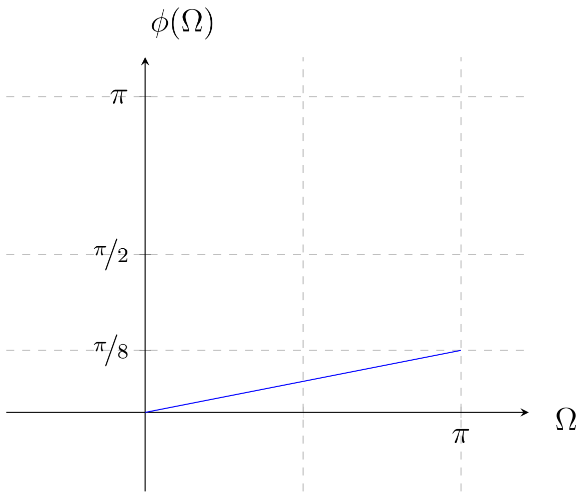


j) (3 Punkte)

$$
\begin{aligned}
H(e^{j\Omega}) &= \frac{1}{3}\left[1 + e^{j\frac{\Omega}{4}}\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[1 + e^{j\frac{2\Omega}{8}}\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[1 + e^{j\frac{2\Omega}{8}}\right] \qquad \mid \cdot\, e^{-j\frac{\Omega}{8}} e^{j\frac{\Omega}{8}} \\
&= \frac{1}{3}\left[e^{-j\frac{\Omega}{8}} + e^{j\frac{\Omega}{8}}\right] \cdot e^{j\frac{\Omega}{8}} \\
&= \frac{2}{3} \cdot \cos\left(\frac{\Omega}{8}\right) \cdot e^{j\frac{\Omega}{8}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow |H(e^{j\Omega})| &= \left|\frac{2}{3} \cdot \cos\left(\frac{\Omega}{8}\right)\right| \\
\phi(\Omega) &= \frac{\Omega}{8}
\end{aligned}
$$





Aufgabe 2: Zerlegung eines LTI-Systems

(12 Punkte gesamt)

a) (2 Punkte)

$$\begin{aligned}H(z) &= \frac{(1-27z^{-3})(1+27z^{-3})(1-0.95z^{-1})}{1-\frac{1}{9}z^{-2}} \qquad \Big|\cdot\frac{z^7}{z^7} = \frac{z^3\cdot z^3\cdot z^1}{z^5\cdot z^2}\\ &= \frac{(z^3-27)(z^3+27)(z-0.95)}{z^5(z^2-\frac{1}{9})}\end{aligned}$$

Polstellen:

$$\begin{aligned}z^2-\frac{1}{9} &\overset{!}{=} 0\\ z^2 &= \frac{1}{9}\\ z_{\infty,1} &= \frac{1}{3}\\ z_{\infty,2} &= -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$z_{\infty,3\ldots 7} = 0$$

Nullstellen:

$$z_{0,1} = 0.95$$

$$\begin{aligned}z^3-27 &\overset{!}{=} 0\\ z^3 &= 27\cdot e^{j2\pi k} \qquad |\sqrt[3]{}, k = 0{,}1{,}2\\ z_{0,2} &= 3\\ z_{0,3} &= 3\cdot e^{j2\pi\frac{1}{3}}\\ z_{0,4} &= 3\cdot e^{j2\pi\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z^3+27 &\overset{!}{=} 0\\ z^3 &= -27\cdot e^{j2\pi k} \qquad |\sqrt[3]{}, k = 0{,}1{,}2\\ z_{0,5} &= -3\\ z_{0,6} &= -3\cdot e^{j2\pi\frac{1}{3}}\\ z_{0,7} &= -3\cdot e^{j2\pi\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

b) (1 Punkt)
Ja, da das System laut Aufgabenstellung kausal ist und alle Polstellen im EHK liegen.

c) (1 Punkt)
$H(z) = \frac{(z-0.95)(z-3)(z-z_{0,3})(z-z_{0,4})(z+3)(z-z_{0,6})(z-z_{0,7})}{(z-\frac{1}{3})(z+\frac{1}{3})z^5}$

d) (1 Punkt)
Da das System stabil ist, kann es zerlegt werden.

e) (3 Punkte)

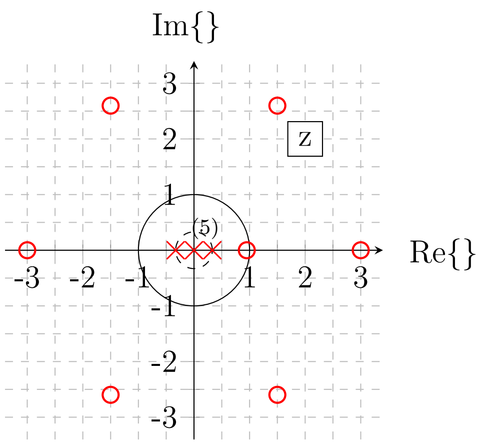
$$
\begin{aligned}
P_{OUT}(z) &= (z-3)(z-z_{0,3})(z-z_{0,4})(z+3)(z-z_{0,6})(z-z_{0,7}) \\
P'_{OUT}(z) &= (z-\frac{1}{3})(z-\frac{1}{z^*_{0,3}})(z-\frac{1}{z^*_{0,4}})(z+\frac{1}{3})(z-\frac{1}{z^*_{0,6}})(z-\frac{1}{z^*_{0,7}}) \\
P_{REST}(z) &= (z-0.95) \\
H_{min}(z) &= \frac{P'_{OUT}(z)\cdot P_{REST}(z)}{(z-\frac{1}{3})(z+\frac{1}{3})z^5}\cdot\frac{1}{b_0} = \frac{(z-\frac{1}{z^*_{0,3}})(z-\frac{1}{z^*_{0,4}})(z-\frac{1}{z^*_{0,6}})(z-\frac{1}{z^*_{0,7}})(z-0.95)}{z^5}\cdot\frac{1}{b_0} \\
H_{AP}(z) &= \frac{P_{OUT}(z)}{P'_{OUT}(z)}\cdot b_0 = \frac{(z-3)(z-z_{0,3})(z-z_{0,4})(z+3)(z-z_{0,6})(z-z_{0,7})}{(z-\frac{1}{3})(z-\frac{1}{z^*_{0,3}})(z-\frac{1}{z^*_{0,4}})(z+\frac{1}{3})(z-\frac{1}{z^*_{0,6}})(z-\frac{1}{z^*_{0,7}})}\cdot b_0
\end{aligned}
$$

f) (1 Punkt)

$$
\begin{aligned}
|H_{AP}(z)| &\overset{!}{=} 1 \\
|H_{AP}(z=e^{j\Omega=0}=1)| &= |729\cdot b_0| \\
\rightarrow b_0 &= \pm\frac{1}{729}
\end{aligned}
$$

g) (1 Punkt) Ja, weil alle Nullstellen innerhalb des EHK sind.

h) (1 Punkt)



i) (1 Punkt)
Hochpass

Aufgabe 3: Filterdesign

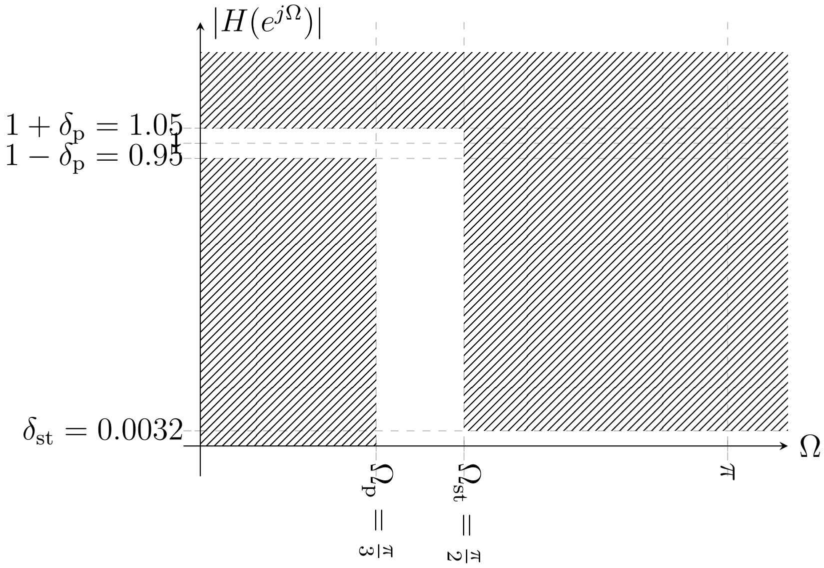
(14 Punkte gesamt)

a) (3 Punkte)
IIR erlaubt niedrigere Filterordnung für vergleichbare Spezifikation als FIR
IIR erlaubt geringere Komplexität, weniger Speicher als FIR
FIR erlaubt linearen Phasengang, IIR nicht
FIR ist immer stabil, IIR nicht

b) (2 Punkte)

$$\delta_{\mathrm{p}} = 10^{\frac{0.4238}{20}} - 1 = 0.05$$
$$\delta_{\mathrm{st}} = 10^{-\frac{50}{20}} = 0.0032$$
$$R_p = 20\log(1+0.05) - 20\log(1-0.05) = 0.8693\,\mathrm{dB}$$

c) (2 Punkte)



d) (1 Punkt)
Nein, da das Gibbssche Phänomen ein Überschwingen von etwa 9 % verursacht und damit die Spezifikation ($\delta_{\mathrm{p}} + 1 = 1.05$) nicht eingehalten werden kann.

e) (2 Punkte)
Hamming und Blackman, da beide eine Sperrdämpfung $> 50\,\mathrm{dB}$ erreichen (oder Kaiser mit $\beta \geq 5$).

f) (4 Punkte)

$$\Delta\Omega = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

Kaiser:

$$d = -20\log\left(\min\left\{\delta_{\mathrm{st}},\delta_{\mathrm{p}}\right\}\right) = 50\,\mathrm{dB}$$

$$\beta = 0.5842 \cdot \left(\frac{d}{\mathrm{dB}} - 21\right)^{0.4} + 0.07886 \cdot \left(\frac{d}{\mathrm{dB}} - 21\right) = 4.5335$$

$$N_b \geq \frac{50 - 7.95}{2.29 \cdot \frac{\pi}{6}} = 35.0697$$

$\rightarrow N_b = 36$ (wenn d mit δ_{p} ausgerechnet wurde kann hier auch 35 rauskommen.)

Chebyshev:

$$N_b \geq \frac{-10\log\left(0.05 \cdot 0.0032\right) - 13}{2.323 \cdot \Delta\Omega} = 20.5199$$

$\rightarrow N_b = 21$

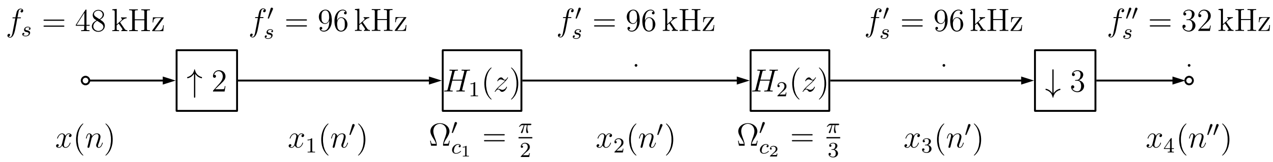
Aufgabe 4: Abtastratenwandlung

(9 Punkte gesamt)

a) (1 Punkt)
$\frac{245760000\,\text{bit}}{(8\cdot 60)\,\text{s}\cdot 16\,\text{bit}} = 32\,\text{kHz}$

b) (1 Punkt)
$r = \frac{2}{3}$

c) (3 Punkte)



d) (1 Punkt)
$H_3(z)$ stellt einen Tiefpass mit Grenzfrequenz $\Omega'_c = \frac{\pi}{3}$ dar.

e) (2 Punkte)

$$48\,\text{kHz} = 2\pi$$
$$\rightarrow \frac{3}{4}\pi = 18\,\text{kHz}$$

Bei $32\,\text{kHz}$ Abtastrate können Frequenzen bis $16\,\text{kHz}$ dargestellt werden, es gehen also $2\,\text{kHz}$ verloren.

f) (1 Punkt)

$$20\log\frac{1}{3} = -9.5424\,\text{dB}$$
$$20\log 3 = 9.5424\,\text{dB}$$