Prof. Dr.-Ing. Tim Fingscheidt, Jan-Aike Termöhlen, M.Sc., Marvin Sach, M.Sc.
TU Braunschweig, Institut für Nachrichtentechnik

Übungsaufgaben Kapitel 1

Aufgabe 1.1: Geometrische Reihe

Zeigen Sie, dass

$$\sum_{\nu=0}^{N-1} a^\nu = \frac{1-a^N}{1-a}$$

gilt. Berechnen Sie den Grenzwert für $N \to \infty$ und geben Sie eine Bedingung für die Konvergenz der unendlichen Reihe an.
Zeigen Sie dann, dass gilt:

$$\sum_{\nu=M}^{N-1} a^\nu = \frac{a^M - a^N}{1-a}\,.$$

Aufgabe 1.2: Systemeigenschaften

Für jedes der folgenden Systeme ist zu bestimmen, ob das System (1) stabil, (2) kausal, (3) linear, (4) verschiebungsinvariant und (5) speicherlos (=gedächtnislos) ist:

a) $\mathfrak{T}\{x(n)\} = \sum_{\nu=n_0}^{n} x(\nu)$

b) $\mathfrak{T}\{x(n)\} = \sum_{\nu=n-n_0}^{n+n_0} x(\nu)$

c) $\mathfrak{T}\{x(n)\} = e^{x(n)}$

d) $\mathfrak{T}\{x(n)\} = x(-n)$

e) $\mathfrak{T}\{x(n)\} = x(n) + 3\,\epsilon(n+1)$

Aufgabe 1.3: Impulsantwort aus Differenzengleichung

Gegeben sei ein System mit der Eingangsfolge $x(n)$ und der Ausgangsfolge $y(n)$, das die folgende Differenzengleichung erfüllt:

$$y(n) = n\,y(n-1) + x(n)\,.$$

Das System ist kausal und erfüllt die Bedingungen des Anfangsruhezustands, dies bedeutet, wenn $x(n) = 0$ für $n < n_0$ ist, dann ist $y(n) = 0$ für $n < n_0$.

a) Für $x(n) = \delta(n)$ ist $y(n)$ für alle n zu bestimmen.

b) Ist das System linear? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Ist das System zeitinvariant? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 1.4: Kausalität

Zeigen Sie für jede der folgenden Impulsantworten von LTI-Systemen, ob das jeweilige System kausal ist oder nicht:

a) $h(n) = (1/2)^n\, \epsilon(n)$

b) $h(n) = (1/2)^n\, \epsilon(n-1)$

c) $h(n) = (1/2)^{|n|}$

d) $h(n) = \epsilon(n+2) - \epsilon(n-2)$

e) $h(n) = (1/3)^n\, \epsilon(n) + 3^n\, \epsilon(-n-1)$

Aufgabe 1.5: Stabilität

Zeigen Sie für jede der folgenden Impulsantworten von LTI-Systemen, ob das jeweilige System stabil ist oder nicht:

a) $h(n) = 4^n\, \epsilon(n)$

b) $h(n) = \epsilon(n) - \epsilon(n-10)$

c) $h(n) = 3^n\, \epsilon(-n-1)$

d) $h(n) = \sin(\pi n/3)\, \epsilon(n)$

e) $h(n) = (3/4)^{|n|} \cos(\pi n/4 + \pi/4)$

f) $h(n) = 2\,\epsilon(n+5) - \epsilon(n) - \epsilon(n-5)$

Aufgabe 1.6: Differenzengleichung

Gegeben sei das durch die Differenzengleichung

$$y(n) = a\, y(n-1) + (1-a)\, x(n)$$

spezifizierte zeitdiskrete System. Geben Sie ein zugehöriges Blockdiagramm an und berechnen Sie durch iteratives Auswerten der Differenzengleichung die Impulsantwort, wobei $y(-1) = 0$ angenommen wird.

Aufgabe 1.7: Diskrete Faltung

Berechnen Sie die (aperiodische) Faltung $y(n) = x(n) * h(n)$ der zwei Folgen

$$x(n) = \begin{cases} 1 & n = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$h(n) = a^n \, \epsilon(n) \; .$$

Skizzieren Sie das Ergebnis für $a = 0.9$.

Aufgabe 1.8: Medianfilter

Das Medianfilter der Ordnung $N_b = 2l$, spezifiziert durch

$$y(n) = \text{median}\big(x(n-l), \ldots, x(n), \ldots, x(n+l)\big)$$

sortiert die Eingangswerte der Größe nach, so dass gilt

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(2l+1)}$$

und liefert als Ausgangssignal $y(n)$ den Median-Wert $x_{(l+1)}$ zurück.
Bestimmen Sie Impuls-und Sprungantwort des Medianfilters der Ordnung $N_b = 4$.
Ist das Filter a) linear b) verschiebungsinvariant c) kausal d) stabil?

Aufgabe 1.9: Periodizität

Bestimmen Sie, ob die nachfolgenden Signale periodisch sind oder nicht. Im Falle eines periodischen Signals geben Sie bitte die Periode an.

a) $x_a(t) = 3\,\cos(5t + \pi/6)$

b) $x(n) = 3\,\cos(5n + \pi/6)$

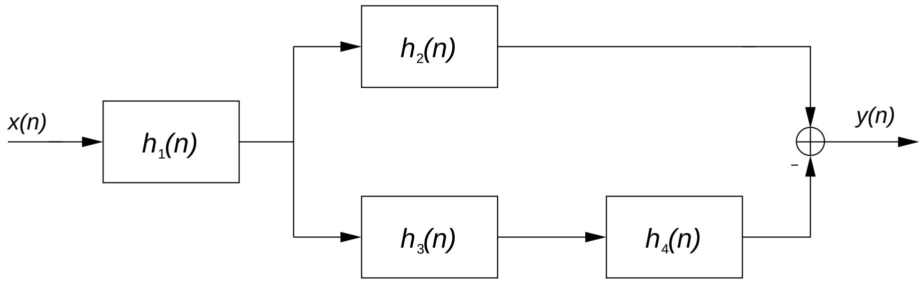
c) $x(n) = 2\,\exp\{j(n/6\, - \pi)\}$

d) $x(n) = \cos(n/8)\,\cos(\pi\, n/8)$

e) $x(n) = \cos(\pi\, n/2) - \sin(\pi\, n/8) + 3\,\cos(\pi\, n/4 + \pi/3)$

Aufgabe 1.10: LTI-System aus Einzelkomponenten

Betrachten Sie die nachfolgende Verschaltung mehrerer LTI-Systeme:



a) Geben Sie die Gesamtimpulsantwort $h(n)$ als Funktion von $h_1(n)$, $h_2(n)$, $h_3(n)$ und $h_4(n)$ an.

b) Bestimmen Sie $h(n)$ für:

$$h_1(n) = \{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\}$$

$$h_2(n) = h_3(n) = (n+1)\,\epsilon(n)$$

$$h_4(n) = \delta(n-2)$$

c) Bestimmen Sie die Antwort des Systems $h(n)$ aus b) für

$$x(n) = \delta(n+2) + 3\,\delta(n-1) - 4\,\delta(n-3)\,.$$

Aufgabe 1.11: Kaskade

Drei Systeme mit den Impulsantworten

$$h_1(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$$

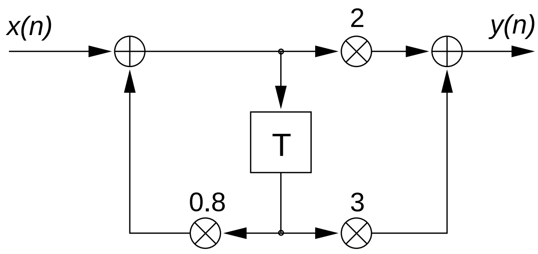
$$h_2(n) = g(n)$$

$$h_3(n) = \epsilon(n)$$

sind als Kaskade verbunden. Wie lautet die Impulsantwort $h(n)$ des Gesamtsystems?

Aufgabe 1.12: Inverses System

Betrachten Sie das nachfolgend dargestellte zeitdiskrete System:



Bestimmen Sie ein inverses System, d.h. ein System, für welches das Eingangssignal $y(n)$ das Ausgangssignal $x(n)$ liefert.

Aufgabe 1.13: Filterung mit Anfangsbedingungen

Ein FIR-System

$$y(n) = \sum_{\nu=0}^{N_b} b_\nu \cdot x(n-\nu)$$

sei zum Zeitpunkt $n\!=\!0$ *vor* der Berechnung von $y(n\!=\!0)$ mit

$$x(n-1)=1,\ x(n-2)=1,\ \ldots,\ x(n-N_b)=1$$

vorbelegt (Anfangsbedingung). Nun wird ein Einheitsimpuls $\delta(n)$ auf das System gegeben. Bestimmen Sie die Systemantwort $y(n)$, $n = 0, 1, \ldots$, ausgedrückt mit Hilfe einer Faltungssumme. Skizzieren Sie die Systemantwort für $b_0 = b_1 = \cdots = b_{N_b} = 1$.

Übungsaufgaben Kapitel 2

Aufgabe 2.1: Fourier-Transformation der Exponentialfunktion

Berechnen Sie die zeitdiskrete Fourier-Transformierte des Signals $x(n) = a_1^n \cdot \epsilon(n)$, $|a_1| < 1$, und geben Sie den Realteil, den Imaginärteil, den Betrag und die Phase an.

Aufgabe 2.2: Zeitverschiebungssatz

Beweisen Sie den Zeitverschiebungssatz der Fourier-Transformation zeitdiskreter Signale.

Aufgabe 2.3: Idealer zeitdiskreter Tiefpass

Berechnen Sie die Impulsantwort eines idealen zeitdiskreten Tiefpassfilters der Grenzfrequenz Ω_c mit $0 < \Omega_c < \pi$.

Aufgabe 2.4: Fourier-Transformation

Gegeben sei die Impulsantwort $h_{\mathrm{TP}}(n)$ eines idealen, zeitdiskreten Tiefpassfilters der Grenzfrequenz Ω_c. Berechnen Sie den Frequenzgang des Systems mit der Impulsantwort $h(n) = \delta(n) - h_{\mathrm{TP}}(n)$ und skizzieren Sie den Betrag des Frequenzgangs und die Phase im Bereich $-2\pi \leq \Omega \leq 2\pi$.

Aufgabe 2.5: Differenz erster Ordnung

Die Differenz erster Ordnung ist durch die Differenzengleichung $y(n) = x(n) - x(n-1)$ gegeben. Zeigen Sie, dass diese Differenzengleichung ein lineares, verschiebungsinvariantes System definiert. Berechnen Sie die Impulsantwort und den Frequenzgang und skizzieren Sie den Betrag des Frequenzgangs und die Phase im Bereich $-2\pi \leq \Omega \leq 2\pi$.

Aufgabe 2.6: Frequenzgang eines LTI-Systems

a) Berechnen Sie den Frequenzgang des linearen zeitinvarianten Systems, dessen Eingangs- und Ausgangsfolgen die gegebene Differenzengleichung erfüllen:

$$y(n) - \frac{1}{2}\, y(n-1) = x(n) + 2\, x(n-1) + x(n-2)\,.$$

b) Formulieren Sie eine Differenzengleichung, die ein System charakterisiert, dessen Frequenzgang

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1 - \frac{1}{2}\, e^{-j\Omega} + e^{-j3\Omega}}{1 + \frac{1}{2}\, e^{-j\Omega} + \frac{3}{4}\, e^{-j2\Omega}}$$

lautet. Skizzieren Sie das dazugehörige Blockschaltbild!

Aufgabe 2.7: LTI-System

Ein LTI-System hat die Impulsantwort $h(n) = 5\,(-1/2)^n\,\epsilon(n)$. Berechnen Sie mithilfe der Fourier-Transformation für die Eingangsfolge $x(n) = (1/3)^n\,\epsilon(n)$ die Ausgangsfolge dieses Systems.

Aufgabe 2.8: Fourier-Transformation

Gegeben sei das Signal $x(n)$ mit der Fourier-Transformation

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - a\,e^{-j\Omega}} \ .$$

Bestimmen Sie die Fourier-Transformation der folgenden Signale:

a) $x(2n+1)$

b) $x(-2n)$

c) $x(n) * x(n-1)$

d) $e^{j\pi n/2}\,x(n+2)$

e) $x(n)\,\cos(0.3\pi n)$

f) $x(n) * x(-n)$

Aufgabe 2.9: Amplituden- und Phasengang

Bestimmen und skizzieren Sie die Amplituden- und Phasengänge nachfolgender Systeme:

a) $y(n) = \frac{1}{2}\big[x(n) + x(n-1)\big]$

b) $y(n) = \frac{1}{2}\big[x(n) - x(n-1)\big]$

c) $y(n) = \frac{1}{2}\big[x(n+1) - x(n-1)\big]$

d) $y(n) = \frac{1}{2}\big[x(n+1) + x(n-1)\big]$

e) $y(n) = \frac{1}{2}\big[x(n) + x(n-2)\big]$

f) $y(n) = \frac{1}{2}\big[x(n) - x(n-2)\big]$

g) $y(n) = \frac{1}{3}\big[x(n) + x(n-1) + x(n-2)\big]$

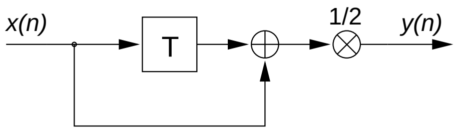
h) $y(n) = x(n) - x(n-8)$

i) $y(n) = x(n+4)$

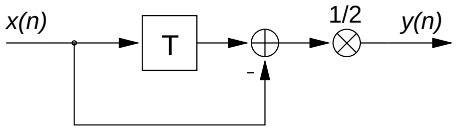
Aufgabe 2.10: Amplituden- und Phasengang

Bestimmen und skizzieren Sie die Amplituden- und Phasengänge nachfolgender Systeme:

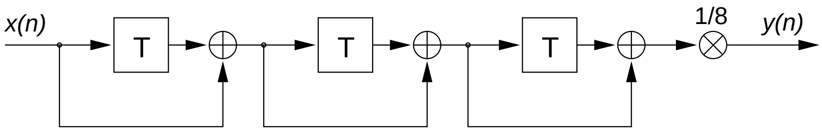
a)



b)



c)



Aufgabe 2.11: Amplituden- und Phasengang

Bestimmen Sie Amplituden- und Phasengang des Mehrwegekanals

$$y(n) = x(n) + x(n-M) \ .$$

Bei welchen Frequenzen gilt $H(e^{j\Omega}) = 0$?

Aufgabe 2.12: Amplitudengang

Betrachten Sie das Filter

$$y(n) = 0.9\, y(n-1) + b\, x(n) \ .$$

a) Wählen Sie b so, dass gilt: $|H(0)| = 1$.

b) Bestimmen Sie die Frequenz, bei der gilt: $|H(e^{j\Omega})| = 1/\sqrt{2}$.

Aufgabe 2.13: Frequenzgang eines FIR-Filters

Gegeben sei folgendes FIR-Filter:

$$y(n) = x(n) - x(n-4) \ .$$

a) Berechen und skizzieren Sie Phasen- und Amplitudengang des Filters.

b) Berechnen Sie die Antwort des Filters für das Eingangssignal
$x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) \qquad (-\infty < n < \infty)$.

c) Erklären Sie das Ergebnis von Teilaufgabe b) anhand der Antwort aus a).

Aufgabe 2.14: Frequenzgang eines idealen Bandpass-Filters

Der Frequenzgang eines idealen Bandpass-Filters ist gegeben durch:

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 0, & |\Omega| \leq \frac{\pi}{8} \\ 1, & \frac{\pi}{8} < |\Omega| < \frac{3\pi}{8} \\ 0, & \frac{3\pi}{8} \leq |\Omega| \leq \pi \end{cases} \quad .$$

a) Bestimmen Sie die Impulsantwort des Filters.

b) Zeigen Sie, dass die Impulsantwort als Produkt von $\cos(n\,\pi/4)$ und der Impulsantwort eines Tiefpass-Filters dargestellt werden kann.

Übungsaufgaben Kapitel 3

Aufgabe 3.1: z-Transformation und Konvergenz

Bestimmen Sie die z-Transformierten einschließlich der Konvergenzbereiche für jede der aufgeführten Folgen:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \epsilon(n)$

b) $-\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \epsilon(-n-1)$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \epsilon(-n)$

d) $\delta(n)$

e) $\delta(n-1)$

f) $\delta(n+1)$

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left[\epsilon(n) - \epsilon(n-10)\right]$

Aufgabe 3.2: z-Transformation

Bestimmen Sie die z-Transformierte der Folge

$$x(n) = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq N-1 \\ N, & N \leq n \end{cases} \quad .$$

Aufgabe 3.3: Inverse z-Transformation

Es folgen mehrere z-Transformierte. Bestimmen Sie jeweils die inverse z-Transformierte, und geben Sie außerdem in jedem Fall an, ob es eine Fourier-Transformierte gibt.

a) $X(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\,, \qquad |z| > \frac{1}{2}$

b) $X(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\,, \qquad |z| < \frac{1}{2}$

c) $X(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}\,, \qquad |z| > \frac{1}{2}$

d) $X(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}\,, \qquad |z| > \frac{1}{2}$

e) $X(z) = \frac{1-az^{-1}}{z^{-1}-a}\,, \qquad |z| > \left|\frac{1}{a}\right|$

Aufgabe 3.4: z-Transformation

Die Eingangsfolge eines kausalen linearen zeitinvarianten Systems ist gegeben durch:

$$x(n) = \epsilon(-n-1) + \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \epsilon(n) \ .$$

Die z-Transformierte der Ausgangsfolge dieses Systems sei:

$$Y(z) = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)} \ .$$

a) Bestimmen Sie $H(z)$, die z-Transformierte der Impulsantwort des Systems. Spezifizieren Sie unbedingt auch den Konvergenzbereich.

b) Welches ist der Konvergenzbereich für $Y(z)$?

c) Bestimmen Sie $y(n)$.

Aufgabe 3.5: Systemfunktion eines LTI-Systems

Die Systemfunktion eine kausalen linearen zeitinvarianten Systems ist gegeben durch:

$$H(z) = \frac{1-z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}} \ .$$

Die Eingangsfolge dieses Systems sei:

$$x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \epsilon(n) + \epsilon(-n-1) \ .$$

a) Ermitteln Sie die Impulsantwort des Systems $h(n)$.

b) Ermitteln Sie die Ausgangsfolge $y(n)$.

c) Ist das System stabil? Das heißt, ist $h(n)$ absolut summierbar?

Aufgabe 3.6: Konvergenzbereich

Skizzieren Sie für jede der folgenden z-Transfomierten das Pol-Nullstellen-Diagramm und schraffieren Sie den Konvergenzbereich:

a) $X_1(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+2z^{-1}}$, Konvergenzbereich: $|z| < 2$

b) $X_2(z) = \frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{2}{3}z^{-1}\right)}$, $x_2(n)$ kausal

c) $X_3(z) = \frac{1+z^{-1}-2z^{-2}}{1-\frac{13}{6}z^{-1}+z^{-2}}$, $x_3(n)$ absolut summierbar.

Aufgabe 3.7: Konvergenz und Systemfunktion

Bestimmen Sie für jedes der folgenden Paare, bestehend aus der z-Transformierten der Eingangsfolge $X(z)$ und der Systemfunktion $H(z)$, den Konvergenzbereich für die z-Transformierte der Ausgangsfolge $Y(z)$:

a) $X(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\,, \qquad |z| > \frac{1}{2}$

$H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\,, \qquad |z| > \frac{1}{4}$

b) $X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}\,, \qquad |z| < 2$

$H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\,, \qquad |z| > \frac{1}{3}$

c) $X(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{5}z^{-1}\right)\left(1+3z^{-1}\right)}\,, \qquad \frac{1}{5} < |z| < 3$

$H(z) = \frac{1+3z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}\,, \qquad |z| > \frac{1}{3}$

Aufgabe 3.8: Konvergenz und Systemfunktion

Bestimmen Sie für jedes der folgenden Paare, bestehend aus den z-Transformierten der Ein- und Ausgangsfolge $X(z)$ und $Y(z)$, den Konvergenzbereich der Systemfunktion $H(z)$:

a) $X(z) = \frac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}}\,, \qquad |z| > \frac{3}{4}$

$Y(z) = \frac{1}{1+\frac{2}{3}z^{-1}}\,, \qquad |z| > \frac{2}{3}$

b) $X(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}\,, \qquad |z| < \frac{1}{3}$

$Y(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{6}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}\,, \qquad \frac{1}{6} < |z| < \frac{1}{3}$

Aufgabe 3.9: Systemfunktion

Bestimmen Sie die Systemfunktionen der Abbildungen a), b), c) in Aufgabe 2.10.

Aufgabe 3.10: Analyse eines LTI-Systems

Betrachten Sie das System:

$$y(n) = x(n) - 0.95 \cdot x(n-6) \ .$$

a) Skizzieren Sie das Pol-Nullstellen-Diagramm.

b) Skizzieren Sie ausgehend vom Pol-Nullstellen-Diagramm den Amplitudengang $|H(e^{j\Omega})|$.

c) Bestimmen Sie die Systemfunktion des kausalen inversen Systems.

d) Skizzieren Sie den Amplitudengang $|G(e^{j\Omega})|$ des inversen Systems mittels des Pol-Nullstellen-Diagramms.

Aufgabe 3.11: Pol-Nullstellen-Diagramm und Impulsantwort eines LTI-Systems

Betrachten Sie ein stabiles lineares zeitinvariantes System mit der Eingangsfolge $x(n)$ und der Ausgangsfolge $y(n)$. Die Ein- und Ausgangsfolge erfüllen die Differenzengleichung

$$y(n-1) - \frac{10}{3} \cdot y(n) + y(n+1) = x(n) \ .$$

a) Stellen Sie die Pole und Nullstellen in der z-Ebene grafisch dar.

b) Bestimmen Sie die Impulsantwort $h(n)$.

Aufgabe 3.12: Lineare Differenzengleichung mit konstanten Koefizienten

Gegeben sei ein durch eine lineare Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten mit Anfangsruhezustand beschriebenes System. Die Sprungantwort des Systems ist gegeben durch:

$$y(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \epsilon(n) + \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot \epsilon(n) + \epsilon(n) \ .$$

a) Bestimmen Sie die Differenzengleichung.

b) Ermitteln Sie die Impulsantwort des Systems.

c) Geben Sie an, ob das System stabil ist.

Aufgabe 3.13: z-Transformation

Berechnen Sie die z-Transformierte $X(z)$ des Signals

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{n}{3}\right) \cdot \epsilon(n) \ .$$

Skizzieren Sie die Lage der Nullstellen und der Polstellen sowie den Konvergenzbereich in der komplexen z-Ebene.

Prof. Dr.-Ing. Tim Fingscheidt, Jan-Aike Termöhlen, M.Sc., Marvin Sach, M.Sc.
TU Braunschweig, Institut für Nachrichtentechnik

Aufgabe 3.14: Inverse z-Transformation

Berechnen Sie die rechtsseitige inverse z-Transformierte $h(n)$ für die z-Transformierte

$$H(z) = \frac{1}{1 - 1.7z^{-1} + 0.72z^{-2}}$$

unter Angabe des dabei zugrunde liegenden Konvergenzbereiches.

Aufgabe 3.15: Minimalphasiges System

Ein kausales, lineares und verschiebungsinvariantes System habe die Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 9z^{-2})}{(1 + 0.81z^{-2})} \; .$$

a) Ist das System stabil?

b) Geben Sie die Übertragungsfunktion für ein minimalphasiges System $H_{\text{min}}(z)$ und ein Allpass-System $H_{\text{AP}}(z)$ an, so dass $H(z) = H_{\text{min}}(z) \cdot H_{\text{AP}}(z)$ gilt.

Aufgabe 3.16: Analyse eines LSI-Systems

Ein kausales, lineares und verschiebungsinvariantes System habe die Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{(1 - 1.5z^{-1} - z^{-2})(1 + 0.9z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0.7jz^{-1})(1 + 0.7jz^{-1})} \; .$$

a) Geben Sie die zugehörige Differenzengleichung an.

b) Zeichnen Sie ein Pol-Nullstellen-Diagramm und markieren Sie den Konvergenzbereich von $H(z)$.

c) Skizzieren Sie $|H(e^{j\Omega})|$.

d) Ist das System stabil?

e) Existiert zu diesem System ein stabiles und kausales inverses System?

Aufgabe 3.17: Minimalphasensystem

Stellen Sie bei jeder der folgenden Systemfunktionen fest, ob sie ein Minimalphasensystem darstellen oder nicht. Begründen Sie Ihre Antworten:

$$\text{a)}\quad H_1(z) = \frac{\left(1-2z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$\text{b)}\quad H_2(z) = \frac{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{2}{3}z^{-1}\right)\left(1+\frac{2}{3}z^{-1}\right)}$$

$$\text{c)}\quad H_3(z) = \frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{j}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{j}{2}z^{-1}\right)}$$

$$\text{d)}\quad H_4(z) = \frac{z^{-1}\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{j}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{j}{2}z^{-1}\right)}$$

Aufgabe 3.18: Minimalphasige Systemfunktion

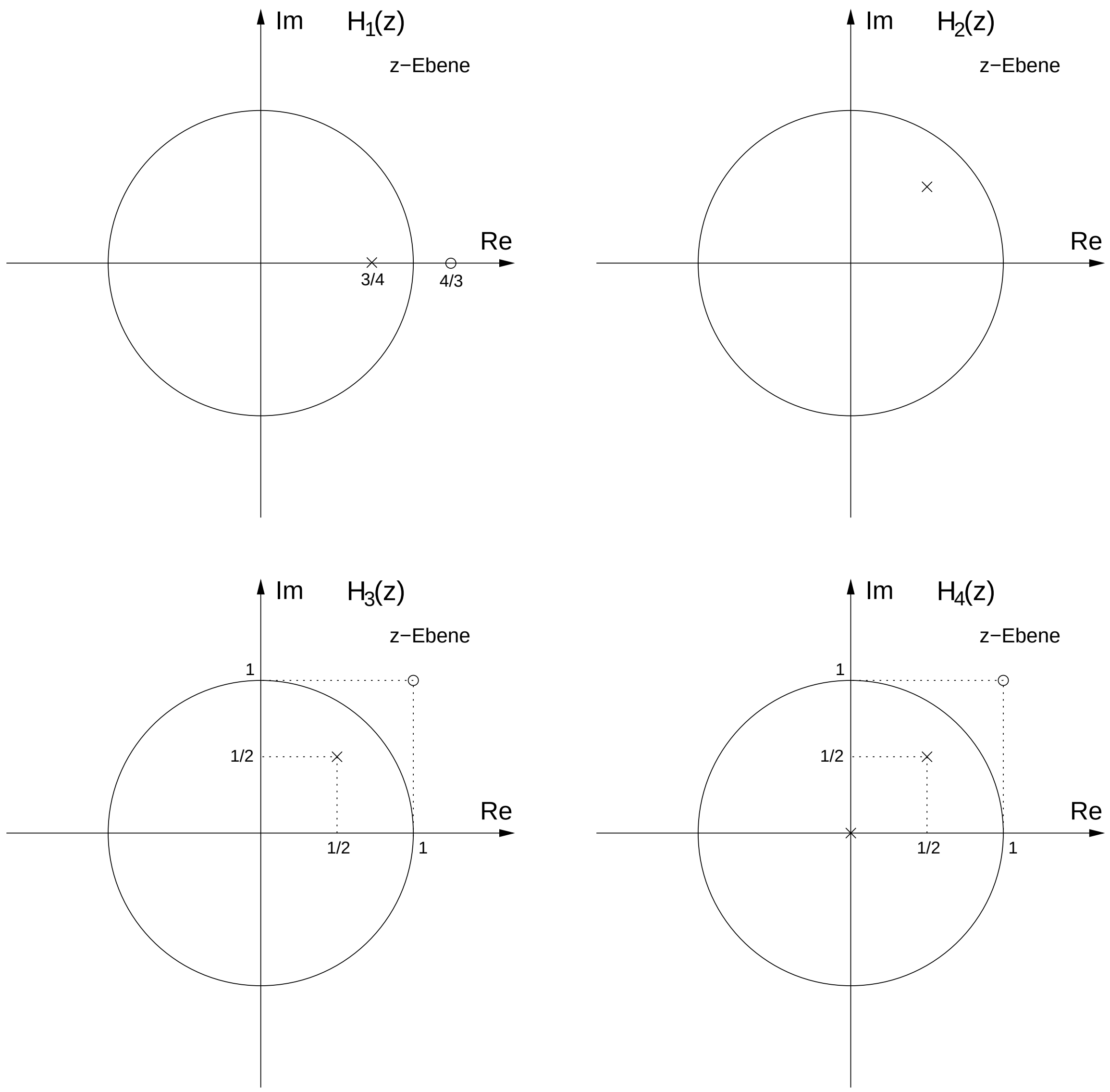
Geben Sie für jede der folgenden Systemfunktionen $H_k(z)$ eine minimalphasige Systemfunktion $H_{\min}(z)$ an, so dass die Amplituden der Frequenzgänge beider Systeme gleich sind, d.h. $|H_k(e^{j\Omega})| = |H_{\min}(e^{j\Omega})|$.

$$\text{a)}\quad H_1(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$\text{b)}\quad H_2(z) = \frac{\left(1+3z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{z^{-1}\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$\text{c)}\quad H_3(z) = \frac{\left(1-3z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{4}{3}z^{-1}\right)}$$

Aufgabe 3.19: Pol-Nullstellen-Diagramm eines Allpass



Die obenstehende Abbildung zeigt Pol-Nullstellen-Diagramme für vier verschiedene LTI-Systeme. Stellen Sie anhand dieser Diagramme fest, ob es sich um einen Allpass handelt oder nicht.

Aufgabe 3.20: Gruppenlaufzeit

Bestimmen Sie die Gruppenlaufzeit für $0 < \Omega < \pi$ für die beiden nachfolgenden Folgen:

a) $x_1(n) = \begin{cases} n-1, & 1 \leq n \leq 5 \\ 9-n, & 5 < n \leq 9 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

b) $x_2(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n-1|} + \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$.

Übungsaufgaben Kapitel 4

Aufgabe 4.1: Impulsinvarianz

Gegeben sei ein kausales zeitkontinuierliches System mit der Impulsantwort $h_a(t)$ und der Systemfunktion

$$H_a(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}\ .$$

Bestimmen Sie mithilfe der Impulsinvarianzmethode $H(z)$ für ein zeitdiskretes System so, dass $h(n) = h_a(nT)$.

Aufgabe 4.2: Entwurf eines IIR-Filters

Ein zeitdiskretes IIR-Tiefpassfilter soll basierend auf dem zeitkontinuierlichen Butterworth-Entwurf entsprechend der folgenden Vorgaben entworfen werden:

$$\Omega_\mathrm{p} = 0.5\pi,\ \Omega_\mathrm{st} = 0.6\pi,\ R_\mathrm{p} = 3\,\mathrm{dB},\ d_\mathrm{st} = 6\,\mathrm{dB},\ f_\mathrm{s} = 10\,\mathrm{kHz}\ .$$

a) Nutzen Sie die Bilinear-Transformation und zeichnen Sie das Toleranzschema mit allen relevanten Daten im analogen Bereich. Wählen Sie $\Omega' = \Omega_\mathrm{p}$ und $\omega' = \Omega_\mathrm{p}/T$.

b) Bestimmen Sie die benötigte Butterworth-Filterordnung exakt. Skizzieren Sie den Amplitudengang des zeitdiskreten Butterworth-Filters.

c) Geben Sie die Pollagen des analogen Butterworth-Filters an.

d) Geben Sie die z-Transformierte des zeitdiskreten Butterworth-Filters an.

e) Geben Sie die z-Transformierte eines Hochpasses basierend auf dem Butterworth-Entwurf mit

$$\Omega_\mathrm{p} = 0.5\pi,\ \Omega_\mathrm{st} = 0.4\pi,\ R_\mathrm{p} = 3\,\mathrm{dB},\ d_\mathrm{st} = 6\,\mathrm{dB},\ f_\mathrm{s} = 10\,\mathrm{kHz}$$

an.

Aufgabe 4.3: Filterentwurf mittels Impulsinvarianzmethode

Ein zeitdiskretes Tiefpassfilter soll entworfen werden, indem die Impulsinvarianz-Methode auf ein zeitkontinuierliches Butterworth-Filter mit dem quadrierten Amplitudengang

$$|H_a(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{j\omega}{j\omega_c}\right)^{2N}}$$

angewendet wird. Die Spezifikationen für das zeitdiskrete System sind:

$$R_\mathrm{p} = 1\,\mathrm{dB},\ \Omega_\mathrm{p} = 0.2\pi,\ \Omega_\mathrm{st} = 0.3\pi,\ d_\mathrm{st} = 15\,\mathrm{dB}\,.$$

Nehmen Sie an, dass Aliasing kein Problem ist, d.h., entwerfen Sie das zeitkontinuierliche Butterworth-Filter so, dass es die für das gewünschte zeitdiskrete Filter festgelegten Spezifikationen im Durchlass- und Sperrbereich erfüllt.

a) Skizzieren Sie die Toleranzgrenzen des Amplitudengangs $|H_a(j\omega)|$ für das zeitkontinuierliche Butterworth-Filter so, dass nachdem die Impulsinvarianz-Methode (d.h. $h(n) = h_a(n \cdot T)$) angewendet wurde, das resultierende zeitdiskrete Filter die vorgegebenen Entwurfsspezifikationen erfüllt.

b) Bestimmen Sie die ganzzahlige Ordnung N und die Größe $\omega_\mathrm{c} = f(\omega_\mathrm{s})$ mit $f_\mathrm{s} = 1/T$ so, dass das zeitkontinuierliche Butterworth-Filter die in Teil (a) bestimmten Spezifikationen erfüllt, an der Grenze des Durchlassbereichs sogar exakt.

Aufgabe 4.4: Impulsinvarianzmethode

Nehmen wir an, wir entwerfen ein zeitdiskretes Filter mithilfe der Impulsinvarianz-Methode ausgehend von einem idealen zeitkontinuierlichen Tiefpassfilter. Der zeitkontinuierliche Tiefpass hat eine Grenzfrequenz von $\omega_\mathrm{c} = 2\pi \cdot 1000\,\mathrm{s}^{-1}$, die Impulsinvarianzmethode benutzt $T = 0.2\,\mathrm{ms}$. Wie groß ist die Grenzfrequenz Ω_c des resultierenden zeitdiskreten Filters?

Aufgabe 4.5: Filterentwurf mittels bilinearer Transformation

Wir wollen ein zeitdiskretes Tiefpassfilter durch Anwenden der bilinearen Transformation auf ein ideales zeitkontinuierliches Tiefpassfilter entwerfen.

a) Nehmen Sie an, dass das zeitkontinuierliche Filter die Grenzfrequenz $f_\mathrm{c} = 1000\,\mathrm{Hz}$ hat und der Parameter der bilinearen Transformation mit $v = 10000\,\mathrm{s}^{-1}$ gewählt wird. Wie groß ist die Grenzfrequenz Ω_c des resultierenden zeitdiskreten Filters?

b) Das zeitdiskrete Tiefpassfilter soll mit Signalen der Abtastfrequenz $f_\mathrm{s} = 8\,\mathrm{kHz}$ arbeiten. Wählen Sie v so, dass die Grenzfrequenz des zeitdiskreten Filters der Grenzfrequenz des analogen Filters entspricht: $\Omega_\mathrm{c} = 2\pi \cdot \frac{f_\mathrm{c}}{f_\mathrm{s}}$.

Aufgabe 4.6: Grenzfrequenz bei der Impulsinvarianzmethode

Nehmen Sie an, wir haben ein ideales zeitdiskretes Tiefpassfilter mit der Grenzfrequenz $\Omega_\mathrm{c} = \pi/4$. Außerdem wissen wir, dass dieses Filter das Ergebnis einer auf ein zeitkontinuierliches Tiefpassfilter angewandten impulsinvarianten Transformation mit $T = 0.1\,\mathrm{ms}$ ist. Wie groß war die Grenzfrequenz ω_c des zeitkontinuierlichen Filters?

Aufgabe 4.7: Grenzfrequenz bei der bilinearen Transformation

Ein zeitdiskretes Hochpassfilter mit der Grenzfrequenz $\Omega_\mathrm{c} = \pi/2$ ist mithilfe der bilinearen Transformation entworfen worden. Es gelte $T = 6.25 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}$. Der Amplitudengang des zeitdiskreten Filters bei $\Omega = \pi/4$ soll dem Amplitudengang des zeitkontinuierlichen Filters bei $f = 1000\,\mathrm{Hz}$ entsprechen. Wie groß war die Grenzfrequenz ω_c des zeitkontinuierlichen Hochpassfilters?

Aufgabe 4.8: Bilineare Transformation mehrdeutig?

Mithilfe der bilinearen Transformation wird ein ideales zeitdiskretes Tiefpassfilter mit der Grenzfrequenz $\Omega_\mathrm{c} = 3\pi/5$ aus einem idealen zeitkontinuierlichen Tiefpassfilter mit der Grenzfrequenz $\omega_\mathrm{c} = 2\pi \cdot 300\,\mathrm{s}^{-1}$ entworfen. Geben Sie eine Lösung für den Parameter v an, die mit den gegebenen Informationen konsistent ist. Ist diese Lösung eindeutig? Falls nicht, so geben Sie eine weitere Lösung an, die mit den gegebenen Informationen konsistent ist.

Aufgabe 4.9: Entwurf eines zeitdiskreten Hochpassfilters

Nehmen Sie an, dass wir ein Hochpassfilter entwerfen wollen, das die folgenden Spezifikationen erfüllt:

$$0 < |H(e^{j\Omega})| < 0.04, \qquad 0 \le |\Omega| \le 0.2\pi$$

$$0.995 < |H(e^{j\Omega})| < 1.005, \qquad 0.3\pi \le |\Omega| \le \pi\,.$$

Das Filter soll entworfen werden, indem die bilineare Transformation auf ein zeitkontinuierliches Filter angewendet wird. Geben Sie die Spezifikation an, die für den Entwurf des zeitkontinuierlichen Filters genutzt werden sollte, um sicherzustellen, dass die Spezifikationen für das zeitdiskrete Filter erfüllt sind. Dabei soll gelten: $\Omega_\mathrm{p} = 0.3\pi = \omega_\mathrm{p} \cdot T$.

Aufgabe 4.10: Tschebyscheff-Filterentwurf

a) Bestimmen Sie die Ordnung eines Typ I-Tschebyscheff-Filters mit $R_\mathrm{p} = 3\,\mathrm{dB}$, $\omega_\mathrm{p} = 1000\pi\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_\mathrm{st} = 2000\pi\,\mathrm{s}^{-1}$ und einer Sperrdämpfung von $d_\mathrm{st} \ge 10\,\mathrm{dB}$ für $\omega \ge \omega_\mathrm{st}$.

b) Geben Sie den Parameter v der bilinearen Transformation an, wenn aus dem gefundenen analogen Filter ein zeitdiskretes Typ I-Tschebyscheff-Filter bestimmt werden soll mit $f_\mathrm{s} = 8\,\mathrm{kHz}$ und $\Omega_\mathrm{p} = \omega_\mathrm{p} \cdot T$.

Aufgabe 4.11: Butterworth-Filterentwurf eines Bandpassfilters

Transformieren Sie das einpolige Butterworth-Tiefpassfilter mit der Systemfunktion

$$H(z) = \frac{0.245(1 + z^{-1})}{1 - 0.509z^{-1}}$$

und der 3 dB-Bandbreite $\Omega_\mathrm{c} = 0.2\pi$ in ein Bandpassfilter mit der oberen Grenzfrequenz $\Omega'_\mathrm{u} = 3\pi/5$ und der unteren Grenzfrequenz $\Omega'_\mathrm{l} = 2\pi/5$.

Aufgabe 4.12: Butterworth-Filterentwurf eines Hochpassfilters

Transformieren Sie das einpolige Butterworth-Tiefpassfilter mit der Systemfunktion

$$H(z) = \frac{0.245(1 + z^{-1})}{1 - 0.509z^{-1}}$$

und der 3 dB-Bandbreite $\Omega_\mathrm{c} = 0.2\pi$ in jeweils ein Hochpassfilter mit

a) der Grenzfrequenz $\Omega'_\mathrm{p} = 0.8\pi$ sowie

b) der Grenzfrequenz $\Omega'_\mathrm{p} = 0.5\pi$.

Übungsaufgaben Kapitel 5

Aufgabe 5.1: Entwurf einer FIR-Filter-Kaskade

Ein FIR-Filter soll entsprechend den folgenden Vorgaben entworfen werden:

$$\Omega_{\mathrm{p}} = 0.25\pi,\ \Omega_{\mathrm{st}} = 0.4\pi,\ \delta_{\mathrm{st}} = 0.01$$

Die z-Transformierte der Filterimpulsantwort $h(n)$ wird mit $H(z)$ bezeichnet.

a) Geben Sie eine Abschätzung für die Ordnung des Filters bei Verwendung der modifizierten Fourier-Approximation mit dem Kaiser-Fenster an. Wie ist der Formfaktor β des Kaiser-Fensters zu wählen? [1]

Nun wird eine alternative Realisierung betrachtet: Die genannten Vorgaben sollen von einer Kaskade zweier identischer FIR-Filter niedrigerer Ordnung erfüllt werden. Die z-Transformierte der Filterimpulsantwort $g(n)$ dieser Filter wird mit $G(z)$ bezeichnet. Die Übertragungsfunktion der Kaskade ist mit $F(z) = G(z) \cdot G(z)$ gegeben.

b) Geben Sie die Kennwerte des Toleranzschemas Ω'_{p}, Ω'_{st}, δ'_{st} für die Filter $G(z)$ an.

c) Welche Filterordnung ist für $G(z)$ unter Verwendung der modifizierten Fourier-Approximation mit Kaiser-Fenster erforderlich?

d) Vergleichen Sie die Ordnung der Filter mit den Übertragungsfunktionen $H(z)$ und $F(z)$ und erörtern Sie Vor- und Nachteile beider Alternativen!

Aufgabe 5.2: FIR-Filterentwurf mittels Kaiser-Fenster

Wir wollen die Kaiser-Fenster-Methode anwenden, um ein zeitdiskretes FIR-Filter mit linearer Phase zu entwerfen. Folgende Spezifikationen sollen erfüllt werden:

$$\begin{aligned}
|H(e^{j\Omega})| &< 0.01, && 0 \le |\Omega| \le 0.25\pi \\
0.95 < |H(e^{j\Omega})| &< 1.05, && 0.35\pi \le |\Omega| \le 0.6\pi \\
|H(e^{j\Omega})| &< 0.01, && 0.65\pi \le |\Omega| \le \pi\,.
\end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die minimale Länge N der Impulsantwort und den Wert des Parameters β des Kaiser-Fensters für ein Filter, das die obigen Spezifikationen erfüllt.

b) Wie groß ist die Verzögerung des Filters?

c) Bestimmen Sie die ideale Impulsantwort $h_{\mathrm{ideal}}(n)$, auf die das Kaiser-Fenster angewendet werden sollte.

[1] Falls MATLAB zur Verfügung steht: Berechnen Sie die Impulsantwort und den Frequenzgang dieses Filters und stellen Sie diese grafisch dar. Hält das Filter die Spezifikation ein?

Aufgabe 5.3: Entwurf eines FIR-Tiefpassfilters mit verschiedenen Fenstern

Wir wollen ein FIR-Tiefpassfilter entwerfen, das die Spezifikationen

$$0.95 < H(e^{j\Omega}) < 1.05, \qquad 0 \leq |\Omega| \leq 0.25\pi$$

$$-0.01 < H(e^{j\Omega}) < 0.01, \qquad 0.35\pi \leq |\Omega| \leq \pi$$

erfüllt, indem wir ein Fenster $w(n)$ auf die Impulsantwort $h_{\text{ideal}}(n)$ des idealen zeitdiskreten Tiefpassfilters mit der Grenzfrequenz $\Omega_{\text{c}} = 0.3\pi$ anwenden. Welches der Ihnen bekannten Fenster kann genutzt werden, um diese Spezifikationen zu erfüllen? Geben Sie für jedes Fenster, von dem Sie annehmen, dass es diese Spezifikationen erfüllt, die minimale Ordnung N_{b} an, die für das Filter erforderlich ist.

Aufgabe 5.4: Entwurf eines FIR-Tiefpassfilters mit Kaiser-Fenster

Wir wollen ein FIR-Tiefpassfilter entwerfen, das die Spezifikationen

$$0.98 < H(e^{j\Omega}) < 1.02, \qquad 0 \leq |\Omega| \leq 0.63\pi$$

$$-0.15 < H(e^{j\Omega}) < 0.15, \qquad 0.65\pi \leq |\Omega| \leq \pi$$

erfüllt, indem wir ein Kaiser-Fenster auf die Impulsantwort $h_{\text{ideal}}(n)$ des idealen zeitdiskreten Tiefpassfilters mit der Grenzfrequenz $\Omega_{\text{c}} = 0.64\pi$ anwenden. Bestimmen Sie die Werte von β und N_{b}, die zur Erfüllung dieser Spezifikationen erforderlich sind.

Aufgabe 5.5: Entwurf eines FIR-Filters mit (modifizierter) Fourier-Approximation

Entwerfen Sie ein linearphasiges FIR-Filter, welches den idealen Frequenzgang

$$H_{\text{target}}(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq \pi/3 \\ 0, & \pi/3 \leq |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

annähert. Der Übergangsbereich soll $\Delta\Omega = \pi/6$ sein.

a) Bestimmen Sie die Filterordnung N_{b} sowie die Koeffizienten eines Filters mittels der Fourierapproximation (d.h. Verwendung eines Rechteck-Fensters).

b) Wiederholen Sie Ihre Berechnungen aus a) für die *modifizierte* Fourier-Approximation mit Hamming-Fenster.

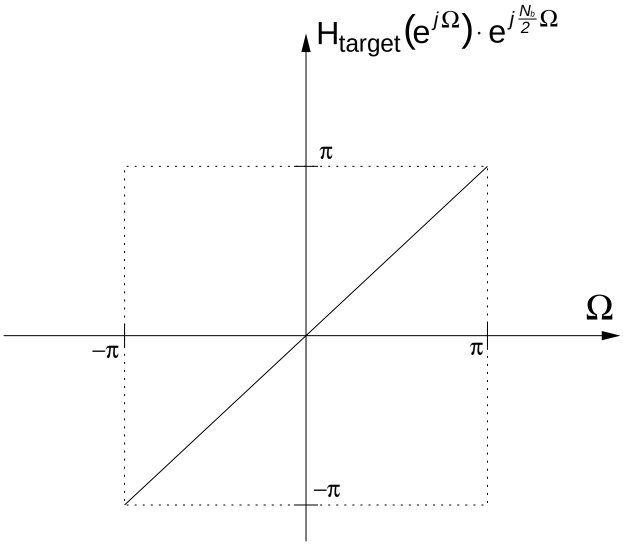
Aufgabe 5.6: Impulsatwort aus Werten des Frequenzgangs

Bestimmen Sie die Impulsantwort $h(n)$ eines linearphasigen FIR-Filters mit $N = 4$. Der Frequenzgang bei $\Omega = 0$ und $\Omega = \pi/2$ sei gegeben durch:

$$H(e^{j0}) = 1, \qquad H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = \frac{1}{2} \cdot e^{-j\frac{N_{\text{b}}}{2}\cdot\frac{\pi}{2}} \quad .$$

Aufgabe 5.7: Differenzierer

Benutzen Sie die modifizierte Fourier-Approximation mit einem Hann-Fenster, um einen Differenzierer folgender Form (siehe Abbildung) mit $N = 21$ zu entwerfen. Bestimmen Sie die Impulsantwort des resultierenden Filters.



Aufgabe 5.8: Zeitdiskreter Hilbert-Transformator

Ein idealer Hilbert-Transformator ist ein System, welches das Eingangssignal mit einer Phasenverschiebung von ± 90 Grad beaufschlagt. Der Frequenzgang eines idealen, zeitdiskreten Hilbert-Transformators mit von Null verschiedener, konstanter Gruppenlaufzeit kann mit

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} -j\, e^{-j\Omega\alpha} & 0 < \Omega < \pi \\ +j\, e^{-j\Omega\alpha} & -\pi < \Omega < 0 \end{cases}$$

angegeben werden.

a) Berechnen Sie den Betrag des Frequenzgangs für $-\pi < \Omega < 0$ und $0 < \Omega < \pi$.

b) Der ideale Hilberttransformator soll mit einem linearphasigen FIR-Filter approximiert werden. Welche(r) Typ(en) linearphasiger Filter (I-IV) sind (ist) dafür geeignet?

c) Berechnen Sie die Impulsantwort.

d) Skizzieren Sie die Impulsantwort einer kausalen, linearphasigen FIR-Approximation des Hilbert-Transformators für $\alpha = (N - 1)/2 = 11$.

Übungsaufgaben Kapitel 6

Aufgabe 6.1: Fourier-Transformation und DFT

Betrachten Sie die Folge $x(n)$, die durch $x(n) = c^n \cdot \epsilon(n)$ gegeben ist. Nehmen Sie $|c| < 1$ an. Eine periodische Folge $\tilde{x}(n)$ wird aus $x(n)$ wie folgt konstruiert:

$$\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n + r \cdot K)\,.$$

a) Bestimmen Sie $X(e^{j\Omega})$, die Fourier-Transformierte von $x(n)$.

b) Bestimmen Sie $\tilde{X}(k)$, die K-Punkte-DFT von $\tilde{x}(n)$, $0 \leq n \leq K-1$.

c) Welche Beziehung besteht zwischen $X(k)$ und $X(e^{j\Omega})$?

Aufgabe 6.2: DFT

Berechnen Sie die DFTs der folgenden endlichen Folgen, die die Länge K haben sollen (wobei K gerade ist):

a) $x(n) = \delta(n)$

b) $x(n) = \delta(n - n_0), \quad 0 \leq n_0 \leq K-1$

c) $x(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ gerade}, \quad 0 \leq n \leq K-1 \\ 0, & n \text{ ungerade}, \quad 0 \leq n \leq K-1 \end{cases}$

d) $x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq K/2-1 \\ 0, & K/2 \leq n \leq K-1 \end{cases}$

Aufgabe 6.3: Fourier-Transformation und DFT

Gegeben sei die komplexe Folge

$$x(n) = \begin{cases} e^{j\Omega_0 n}, & 0 \leq n \leq K-1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie $X(e^{j\Omega})$, die Fourier-Transformierte von $x(n)$.

b) Bestimmen Sie $X(k)$, die K-Punkte-DFT der endlichen Folge $x(n)$.

c) Bestimmen Sie die DFT von $x(n)$ für den Fall $\Omega_0 = 2\pi k_0/K$, wobei k_0 ganzzahlig ist.

Aufgabe 6.4: z-Transformation und DFT

Wir betrachten die endliche Folge $x(n) = \epsilon(n) - \epsilon(n-8)$. $X(z)$ sei die z-Transformierte von $x(n)$.

a) Wenn wir $X(z)$ bei $z = e^{j(2\pi/6)k}$ mit $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ abtasten, erhalten wir

$$Y_1(k) = X(z)\Big|_{z=e^{j(2\pi/6)k}}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Skizzieren Sie die Folge $y_1(n)$, die man als inverse DFT von $Y_1(k)$ erhalten kann.

b) Wenn wir $X(z)$ bei $z = e^{j(2\pi/8)k}$ mit $k = 0, 1, \ldots, 7$ abtasten, erhalten wir

$$Y_2(k) = X(z)\Big|_{z=e^{j(2\pi/8)k}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 7.$$

Skizzieren Sie die Folge $y_2(n)$, die man als inverse DFT von $Y_2(k)$ erhalten kann.

Aufgabe 6.5: DFT

Es sei $X(e^{j\Omega})$ die Fourier-Transformierte der Folge $x(n) = (1/2)^n \cdot \epsilon(n)$. Mit $y(n)$ wird eine endliche Folge der Länge 10 bezeichnet, d.h. $y(n) = 0$ für $n < 0$ und für $n \geq 10$. Die 10-Punkte DFT von $y(n)$, die 10 äquidistanten Abtastwerten von $X(e^{j\Omega})$ entspricht, wird als $Y(k)$ bezeichnet, d.h. $Y(k) = X(e^{j2\pi k/10})$. Bestimmen Sie $y(n)$.

Aufgabe 6.6: DFT

$x(n)$ sei eine endliche 20-Punkte-Folge bei der $x(n) = 0$ außerhalb von $0 \leq n \leq 19$ ist und $X(e^{j\Omega})$ sei die zugehörige Fourier-Transformierte. Bestimmen Sie das kleinste mögliche K, wenn wir $X(e^{j\Omega})$ bei $\Omega = 12\pi/36$ durch Berechnung einer K-Punkte-DFT erhalten wollen und entwickeln Sie eine Methode, um $X(e^{j12\pi/36})$ unter Verwendung des kleinsten K zu bestimmen.

Aufgabe 6.7: DFT

Zwei reellwertige Signale $x_1(n)$ und $x_2(n)$ der Länge K werden mittels einer einzigen DFT gemäß

$$y(n) = x_1(n) + jx_2(n) \qquad \circ\!\!-\!\!\bullet \qquad Y(k) = \text{DFT}\{y(n)\}$$

transformiert.

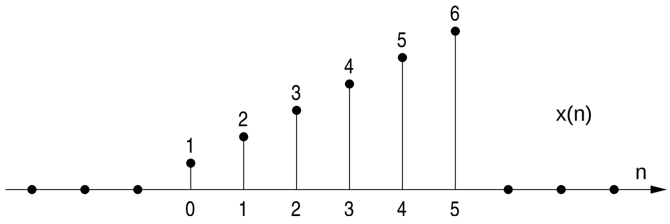
a) Wie können die diskreten Fouriertransformierten der einzelnen Folgen $x_1(n)$ und $x_2(n)$ aus der obigen komplexwertigen DFT auf einfache Weise ermittelt werden?

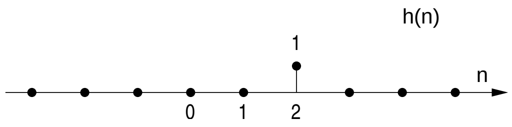
b) Geben Sie den Rechenaufwand in komplexwertigen MACs an für:

- zwei diskrete Fouriertransformationen für unbekannte (d.h. komplexe) Eingangssignale
- die obige Lösung aus Unterpunkt a).

Aufgabe 6.8: Lineare und zirkulare Faltung

Die folgende Abbildung zeigt die beiden endlichen Folgen $x(n)$ und $h(n)$.





a) Skizzieren Sie deren lineare Faltung.

b) Skizzieren Sie deren zirkulare Faltung für $K = 6$ und für $K = 8$.

Aufgabe 6.9: Faltung mittels DFT

Gegeben sind die beiden 4-Punkte-Folgen $x(n)$ und $h(n)$:

$$\begin{aligned} x(n) &= \cos(\tfrac{\pi n}{2}), \qquad & n = 0, 1, 2, 3, \\ h(n) &= 2^n, \qquad & n = 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die 4-Punkte-DFT $X(k)$.

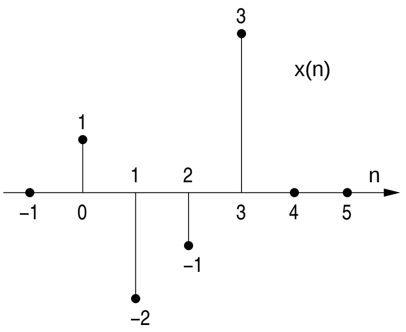
b) Berechnen Sie die 4-Punkte-DFT $H(k)$.

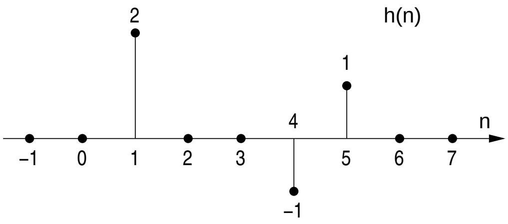
c) Berechnen Sie $y(n) = x(n) \otimes h(n)$ mit 4-Punkte-DFTs mittels $y(n) = \mathrm{IDFT}\{X(k) \cdot H(k)\}$.

d) Berechnen Sie $y(n) = x(n) \otimes h(n)$ mit $K = 4$ im Zeitbereich mittels Skizzen.

Aufgabe 6.10: Zirkulare Faltung

Die folgende Abbildung zeigt die beiden endlichen Folgen $x(n)$ und $h(n)$. Wie klein darf K höchstens sein, damit die zirkulare K-Punkte-Faltung von $x_1(n)$ und $x_2(n)$ gleich der linearen Faltung dieser Folgen ist, d.h. damit gilt: $x_1(n) \otimes x_2(n) = x_1(n) * x_2(n)$?





Aufgabe 6.11: Schnelle Faltung mittels overlap-add

Ein FIR-Filter der Ordnung 80 soll mit Hilfe der schnellen Faltung nach dem *overlap-add* Verfahren realisiert werden.

a) Welche Transformationslänge $K = 2^i$, $i \in \mathbb{N}$ ist mindestens erforderlich und welche Segmentlänge L ergibt sich dann für das Eingangssignal?

b) Wie viele Abtastwerte überlappen sich bei der Addition der Teilergebnisse?

c) Das Verfahren soll auf einem DSP realisiert werden. Wie viele komplexe Operationen (MACs oder MULTs oder ADDs oder SUBs) ergeben sich pro gültigem Ausgangs-Abtastwert, wenn die Transformation der Filterimpulsantwort nicht mitgezählt wird?

d) Es soll nun ein Mono-CD-Signal mit der Abtastrate $f_s = 44.1\,\text{kHz}$ gefiltert werden. Berechnen Sie die erforderlichen reellen Operationen pro Sekunde in [MOPS], wenn Sie vereinfachend ansetzen, dass 1 komplexe Operation 4 reellen Operationen entsprechen.

e) Wieviele Kanäle können Sie mit der unter d) abgeschätzten Filterung in etwa auf dem *Texas Instruments DSP C55x* Variante 160 MHz bzw. Variante 200 MHz gleichzeitig durchführen?
Auszüge aus dem Produktdatenblatt:

Product Information

Features

- High-Performance, Low-Power, Fixed-Point TMS320C55x™ Digital Signal Processor (DSP)
  - 6.25-/5-ns Instruction Cycle Time
  - 160-/200-MHz Clock Rate
  - One/Two Instructions Executed per Cycle
  - Dual Multipliers (Up to 400 Million Multiply-Accumulates Per Second (MMACS))
  - Two Arithmetic/Logic Units
  - One Internal Program Bus
  - Three Internal Data/Operand Read Buses
  - Two Internal Data/Operand Write Buses
- Instruction Cache (24K Bytes)
- 160K x 16-Bit On-Chip RAM Composed of:
  - Eight Blocks of 4K x 16-Bit Dual-Access RAM (DARAM) (64K Bytes)
  - 32 Blocks of 4K x 16-Bit Single-Access RAM (SARAM)(256K Bytes)
- 16K x 16-Bit On-Chip ROM (32K Bytes)
- 8M x 16-Bit Maximum Addressable External Memory Space
- 32-Bit External Memory Interface (EMIF)With Glueless Interface to:
  - Asynchronous Static RAM (SRAM)
  - Asynchronous EPROM
  - Synchronous DRAM (SDRAM)
  - Synchronous Burst SRAM (SBSRAM)

	TMS320VC5510A-160	TMS320VC5510A-200
CPU	1 C55x	1 C55x
Peak MMACS	320	400
Frequency(MHz)	160	200
RAM	320 KB	320 KB
ROM	32 KB	32 KB
On-Chip L1/SRAM	24 KB	24 KB

(http://focus.ti.com/docs/prod/folders/print/tms320vc5510a.html#pricingpackaging)

Aufgabe 6.12: Schnelle Faltung

Eine lineare Faltung einer Folge $x(n)$ von 5000 Werten mit einer endlichen Impulsantwort $h(n)$ der Länge $N = 105$ soll durchgeführt werden. Dabei soll die schnelle Faltung zum Einsatz kommen. Die Abtastfrequenz betrage $f_\mathrm{s} = 16\,\mathrm{kHz}$, die maximal erlaubte algorithmische Verzögerung der schnellen Faltung sei $\tau = 10\,\mathrm{ms}$.

a) Wählen Sie geeignete FFT-Längen $K = 2^i$, $i \in \mathbb{N}$, für die schnelle Faltung zum einen mittels OLA, zum anderen mittels OLS.

b) Von nun an gelte $K = \min\{K_\mathrm{OLA}, K_\mathrm{OLS}\}$. Wie häufig wird eine FFT / IFFT verwendet, wenn das OLA-Verfahren angewandt wird? Nehmen Sie $H(k)$ als gegeben an.

c) Wie häufig wird eine FFT / IFFT verwendet, wenn das OLS-Verfahren angewandt wird? Nehmen Sie $H(k)$ als gegeben an.

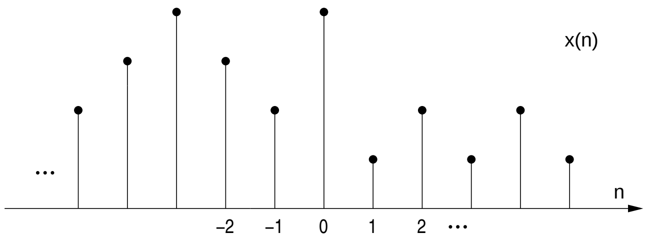
d) Berechnen Sie die notwendige Gesamtzahl der komplexwertigen MAC-Operationen pro Sekunde, unter der Annahme, dass $x(n)$ und $h(n)$ komplexwertig sind und die Verarbeitung in Echtzeit geschehen soll. Nehmen Sie $H(k)$ als gegeben an und setzen Sie für OLA und OLS lediglich die Operationen der FFT/IFFT an.

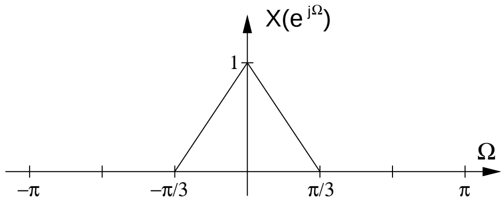
   Vergleichen Sie Ihre gefundenen Komplexitätsanforderungen für die konventionelle Faltung und für die schnelle Faltung jeweils mittels OLA und OLS.

Übungsaufgaben Kapitel 7

Aufgabe 7.1: Dezimation

Betrachten Sie das Signal $x(n)$ mit der Fourier-Transformierten $X(e^{j\Omega})$.





a) Setzen Sie jeden zweiten Signalwert zu Null gemäß

$$y(n) = \begin{cases} x(n), & n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \\ 0, & n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \end{cases} .$$

Berechnen und zeichnen Sie $y(n)$ sowie $Y(e^{j\Omega})$. Kann man $x(n)$ aus $y(n)$ rekonstruieren? Wenn ja, wie?

b) Dezimieren Sie $x(n)$ um den Faktor $L = 2$ (Dezimation=Unterabtastung).

$$e(n') = x(n = 2 \cdot n'), \quad n' \in \mathbb{Z}$$

Zeigen Sie, dass gilt: $E(e^{j\Omega'}) = Y(e^{j\Omega/2})$. Zeichnen Sie das Signal $e(n')$ sowie $E(e^{j\Omega'})$. Verliert man Information, wenn man das Signal $y(n)$ um den Faktor $L = 2$ gemäß

$$e(n') = y(n = 2 \cdot n') = x(n = 2 \cdot n')$$

dezimiert?

Aufgabe 7.2: Expansion und Interpolation

Betrachtet wird das Signal $x(n)$ aus Aufgabe 7.1.

a) Expandieren Sie das Signal $x(n)$ um den Faktor 2 (Expansion=Überabtastung):

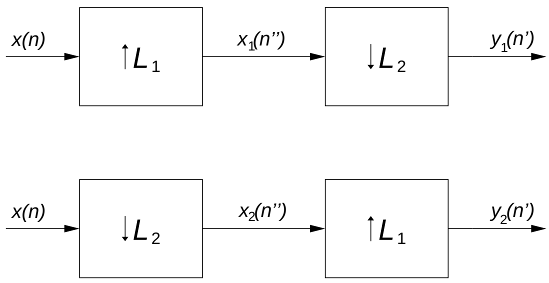
$$y(n') = \begin{cases} x(n = \frac{n'}{2}), & n' = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \\ 0, & n' = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \end{cases} .$$

Berechnen und zeichnen Sie $y(n')$ sowie die Fouriertransformierte $Y(e^{j\Omega'})$. Kann man $x(n)$ aus $y(n')$ rekonstruieren? Wenn ja, wie?

b) Interpolieren Sie $x(n)$ um den Faktor $L = 2$ (Interpolation=Expansion+Interpolationsfilter). Skizzieren Sie das interpolierte Signal $f(n')$ sowie seine Fouriertransformierte, wenn Sie als Interpolationsfilter ein ideales Tiefpassfilter der Grenzfrequenz Ω'_c wählen. In welchem Bereich darf Ω'_c liegen? Kann bei geeigneter Wahl von Ω'_c das Signal $x(n)$ aus $f(n')$ rekonstruiert werden? Wenn ja, wie?

Aufgabe 7.3: Dezimation und Expansion

Betrachten Sie die nachfolgend dargestellten Konfigurationen der Kaskadierung einer Dezimation und einer Expansion.

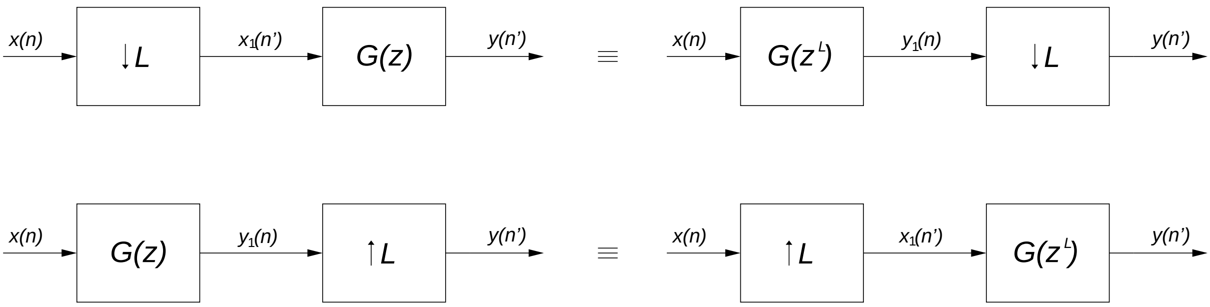


a) Zeigen Sie für $L_1 = L_2$, dass die Ausgangssignale der beiden Konfigurationen verschieden sind bzw., dass die beiden Konfigurationen nicht identisch sind.

b) Zeigen Sie, dass die beiden Systeme identisch sind, wenn und nur wenn L_1 und L_2 teilerfremd sind.

Aufgabe 7.4: Noble Identity

Im folgenden seien die verwendeten Filter $G(\cdot)$ kausal. Führen Sie alle Berechnungen im Zeitbereich durch!



a) Beweisen Sie die „Noble Identity“ im oberen Bild. Bedenken Sie, dass gilt: $z = r \cdot e^{j\Omega'}$.

b) Beweisen Sie die „Noble Identity“ im unteren Bild. Bedenken Sie, dass gilt: $z = r \cdot e^{j\Omega}$.

Aufgabe 7.5: Polyphasen-Zerlegung

Betrachten Sie ein beliebiges digitales Filter mit der Übertragungsfunktion

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \cdot z^{-n}$$

a) Führen Sie eine Polyphasen-Zerlegung von $H(z)$ durch, indem Sie jeweils die geradzahligen Abtastwerte $h_0(n) = h(2n)$, sowie ungeradzahligen Abtastwerte $h_1(n) = h(2n+1)$ gruppieren. Zeigen Sie, dass $H(z)$ durch

$$H(z) = E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2)$$

ausgedrückt werden kann und bestimmen Sie $E_0(z)$ sowie $E_1(z)$.

b) Verallgemeinern Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe a), indem Sie zeigen, dass $H(z)$ in eine L-Komponenten-Polyphasen-Filterstruktur mit der Übertragungsfunktion

$$H(z) = \sum_{l=0}^{L-1} z^{-l} \cdot E_l(z^L)$$

zerlegt werden kann. Bestimmen Sie $E_l(z)$.

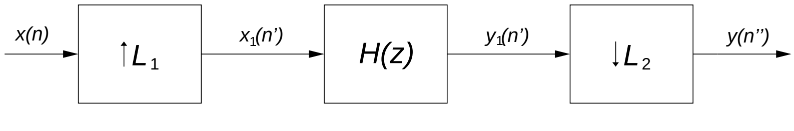
c) Bestimmen Sie für das IIR-Filter mit der Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$E_0(z)$ und $E_1(z)$ für die 2-Komponenten-Zerlegung.

Aufgabe 7.6: Gebrochen-rationale Abtastratenwandlung

Ein Signal $x(n)$ der Abtastrate $f_{s,x} = 12\,\text{kHz}$ soll mittels einer möglichst effizienten Struktur auf die Abtastrate $f_{s,y} = 8\,\text{kHz}$ umgesetzt werden. Gehen Sie dazu von folgender Struktur mit einem idealen Tiefpassfilter $H(z)$ aus:



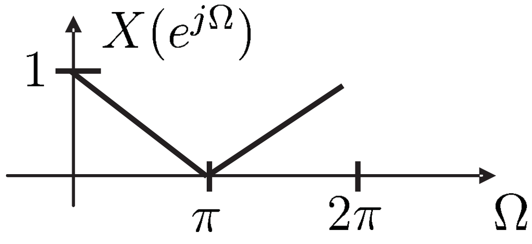
a) Bestimmen Sie L_1 und L_2 sowie die Grenzfrequenz Ω_c' des linearphasigen Filters $H(z)$.

b) Bestimmen Sie $h(n')$, wenn $H(z)$ nun ein linearphasiger FIR-Filterentwurf nach der Fourier-Approximation mit $N_b = 5$ sein soll.

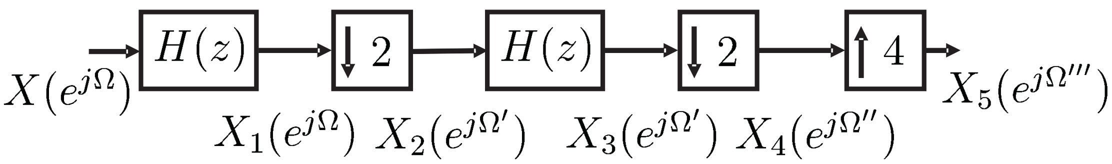
c) Skizzieren Sie eine effiziente Struktur für diese gebrochen-rationale Abtastratenwandlung und geben Sie die Filterkoeffizienten der auftretenden Filter an!

Aufgabe 7.7: Dezimation und Expansion

Ein Signal $x(n)$ habe eine Fouriertransformierte:



Skizzieren Sie die im Bild unten eingezeichneten Signale. Geben Sie die normierten Frequenzen als Funktion von Ω an, wenn das Filter $H(z)$ ein idealer Tiefpass mit der jeweils normierten Grenzfrequenz $\frac{\pi}{2}$ ist!

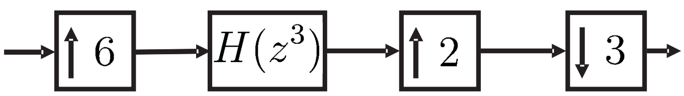


Aufgabe 7.8: Dezimation und Expansion

Vereinfachen Sie folgendes Blockschaltbild, so dass sich

a) eine minimale Anzahl Dezimatoren/Expander ergibt, bzw.

b) ein minimaler Speicheraufwand/Rechenkomplexität für das Filter.



Prof. Dr.-Ing. Tim Fingscheidt, Jan-Aike Termöhlen, M.Sc., Marvin Sach, M.Sc.
TU Braunschweig, Institut für Nachrichtentechnik

Aufgabe 7.9: QMF-Filterbank

Entwerfen Sie ein einfaches Tiefpassfilter $H_0(z)$ der Ordnung $N_b = 1$ unter Verwendung der Fourier-Approximation. Das Filter soll in einer QMF einsetzbar sein!

a) Geben Sie $h_0(n)$ sowie $H_0(z)$ an! Skizzieren Sie $|H_0(e^{j\Omega})|$.

b) Bestimmen Sie für die 3 anderen, in der QMF-Analyse und -Synthese benötigten Filter $h_1(n)$, $H_1(z)$, $g_0(n)$, $G_0(z)$, $g_1(n)$, $G_1(z)$. Skizzieren Sie jeweils die Frequenzgänge der Filter!

c) Zeigen Sie, dass unter Verwendung eines einfachen Skalierungsfaktors α eine perfekte Rekonstruktion möglich ist!

Literaturhinweis:

Viele der Aufgaben, die im Rahmen dieser Übung verwendet wurden, sind (teilweise in abgewandelter Form) den folgenden beiden Lehrbüchern entnommen:

- *Zeitdiskrete Signalverarbeitung* (A. V. Oppenheim, R. W. Schafer, J. R. Buck)
- *Digital Signal Processing* (J. G. Proakis, D. G. Manolakis)

In diesen Büchern finden sich viele weitere Aufgaben!
