Institut für Analysis und Algebra
Prof Dr. Rainer Löwen / Dipl. Math. Oliver Krauß

TU Braunschweig
WS 2010/2011

Mögliche Lösungen der Klausur zur ET-Mathematik I

Aufgabe 1
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte von Funktionen:

$$(1) \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(2x)+4x}{5\cos(x)-3x}, \qquad (2) \lim_{x\to\infty} \sqrt{6x}(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x}). \qquad [3],[5]$$

Lösung 1

$$(1) \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(2x)+4x}{5\cos(x)-3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sin(2x)}{x}+4}{\frac{5\cos(x)}{x}-3} = -\frac{4}{3}.$$

Dabei ist $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{5\cos(x)}{x} = 0$, weil $|5\cos(x)|$ und $|\sin(2x)|$ durch 5 beschränkt sind und $\frac{1}{x}$ für $x \to \infty$ gegen 0 konvergiert.

$$(2) \lim_{x\to\infty} \sqrt{6x}(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{6x}(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x})(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x})}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x}} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{6x}((2x+1)-2x)}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{6x}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+\frac{1}{2x}}+\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aufgabe 2
Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden komplexen Potenzreihen:

$$(1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\ln(k)},\qquad (2)\sum_{k=0}^{\infty}(1-e^{\frac{k\pi j}{9}})^k z^k. \qquad [5],[5]$$

Lösung 2
(1) Mit Quotientenkriterium:
Wir verwenden die Regel von l'Hospital: $R = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{\ln(k+1)}{\ln(k)}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{k+1}{k}\right| = 1.$

(1) Mit Wurzelkriterium:
Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $1 \leq \sqrt[k]{\ln(k)} \leq \sqrt[k]{k}$, wegen $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{k} = 1$ folgt damit nach Zangensatz die Gleichung $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\ln(k)} = 1$. Also ist der Konvergenzradius $R = \frac{1}{1} = 1$.

(2) Wir berechnen $\overline{\lim}\sqrt[k]{|(1-e^{\frac{k\pi j}{9}})^k|} = \overline{\lim}|1-e^{\frac{k\pi j}{9}}| \leq 2$, nach Dreiecksungleichung.
Um $\overline{\lim}\sqrt[k]{|(1-e^{\frac{k\pi j}{9}})^k|} = 2$ zu beweisen, zeigen wir noch, dass 2 ein Häufungspunkt ist:
Mit $k = 18n+9$ ergibt sich $|1-e^{\frac{k\pi j}{9}}| = |1-e^{(2n+1)\pi j}| = |2| = 2$, also haben wir eine konstante Teilfolge, also ist 2 ein Häufungspunkt. Somit ist der Konvergenzradius also $R = \frac{1}{\overline{\lim}|(1-e^{\frac{k\pi j}{9}})|} = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 3 [12]

Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Lösung 3

$$\begin{vmatrix} 5-t & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5-t & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3-t & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5-t \end{vmatrix} = (5-t)\begin{vmatrix} 5-t & 0 & 1 \\ 0 & 5-t & 1 \\ -2 & 1 & 3-t \end{vmatrix} =$$
$$(5-t)\left((5-t)\begin{vmatrix} 5-t & 1 \\ 1 & 3-t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 5-t \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\right) = (5-t)\left[(5-t)(t^2-8t+14)+2(5-t)\right] =$$
$$(5-t)(5-t)(t^2-8t+16) = (5-t)^2(4-t)^2$$

Die Eigenwerte sind also 4 und 5.

Berechung von E(4):

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 & I-IV \\ 0 & 1 & 1 & 1 & II-IV \\ -2 & 1 & -1 & -3 & III+2I+3IV \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & III-II \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Der Eigenraum zum Eigenwert 4 ist also $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$.

Berechung von E(5):

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2I+III \\ 0 & 0 & 1 & 1 & II-I \\ -2 & 1 & -2 & -3 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}.$$

Sei $x_4 = u \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist $x_3 = -u$. Sei $x_1 = v \in \mathbb{R}$ beliebig, dann ist $x_2 = u + 2v$.

Insgesamt ist daher $E(5) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$.

Aufgabe 4

Gegeben sei die Matrix $M = \begin{pmatrix} -7+j & 6-2j & 4+2j \\ 2-j & 9+2j & -8 \\ 5 & 7 & -9+j \end{pmatrix}$.

(1) Nehmen Sie an, dass $3+j$ ein Eigenwert von M ist und berechnen Sie den Eigenraum zum Eigenwert $3+j$. [8]

(2) Zeigen Sie nun, dass $3+j$ wirklich ein Eigenwert von M ist. [3]

Lösung 4

$$\text{(1)}\quad \begin{array}{cccc} -10 & 6-2j & 4+2j & -I/2 \\ 2-j & 6+j & -8 & II(2+j) \\ 5 & 7 & -12 & II+I/2 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{ccccc} 5 & -3+j & -2-j & & \\ 5 & 11+8j & -16-8j & II-I & \rightarrow \\ 0 & 10-j & -10+j & III/(10-j) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 5 & -3+j & -2-j & I+(3-j)III & \\ 0 & 14+7j & -14-7j & II/(14+7j)-III & \rightarrow \\ 0 & 1 & -1 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}.$$

Sei $x_3 = u \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann gilt: $x_2 - u = 0$ und $5x_1 - 5u = 0$, also $x_1 = x_2 = x_3 = u$. Der Eigenraum zum Eigenwert $3+j$ ist also $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$.

(2) Nach Teil (1) dieser Aufgabe gilt $M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (3+j) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also ist $3+j$ ein Eigenwert.

Aufgabe 5

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{\ln(|x|)}{x}$.

(1) Berechnen Sie den maximal möglichen Definitionsbereich in $\mathbb{R}$ und die Grenzwerte am Rand des Definitionsbereiches. [4]

(2) Berechnen Sie alle lokalen Minima und Maxima von f und beschreiben Sie das Monotonieverhalten von f. [6]

Lösung 5

(1) Der maximale Definitionsbereich in $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Es gilt
$\lim\limits_{x\nearrow 0} \dfrac{\ln(|x|)}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{\ln(|x|)}{x} = -\infty$.
Der Satz von l'Hospital liefert uns:
$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(|x|)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 0$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(|x|)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 0$.

(2) Zuerst berechnen wir $f'(x) = \dfrac{1-\ln|x|}{x^2}$. Damit hat f' die Nullstellen e und $-e$. Auf Grund der Monotonie von ln wissen wir außerdem, dass
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln|x| > 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -e[\ \cup\ ]e, \infty[$ und entsprechend
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-e, e[\backslash\{0\}$. Somit hat f bei $-e$ ein Minimum und bei e ein Maximum. Die Extremwerte sind $f(-e) = -e^{-1}$ und $f(e) = e^{-1}$.
Damit ist klar, dass f auf den Intervallen $]-\infty, -e]$ und $[e, \infty[$ streng monoton fallend ist. Auf den Intervallen $[-e, 0[$ und $]0, e]$ ist f streng monoton steigend.

Aufgabe 6
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$(1) \int_{-1}^{5} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx, \quad (2) \int \frac{4}{(x-2)^2(x^2-2x+2)}dx, \qquad [4],[6]$$

$$(3) \int \sin(x) + x\cos(x)dx, \quad (4) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin(x) + x\cos(x))\ln(x)dx. \qquad [2],[4]$$

Lösung 6

(1) Wir substituieren $y = x^2 + 1$. Dann gilt $\frac{dy}{dx} = 2x$. Wir haben also

$$\int_{-1}^{5} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_{2}^{26} \frac{x}{\sqrt{y}} \frac{dy}{2x} = \int_{2}^{26} \frac{dy}{2\sqrt{y}} = [\sqrt{y}]_2^{26} = \sqrt{26} - \sqrt{2}.$$

(2) Wir verwenden Partialbruchzerlegung:

$$\int \frac{4}{(x-2)^2(x^2-2x+2)}dx = \int \frac{ax+b}{x^2-2x+2} + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{(x-2)^2}dx.$$

Die Zuhaltemethode liefert $d = \frac{4}{2^2-2\cdot2+2} = 2$, eingesetzt heißt das:
$\frac{ax+b}{x^2-2x+2} + \frac{c}{x-2} = \frac{4}{(x-2)^2(x^2-2x+2)} - \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{-2x^2+4x}{(x-2)^2(x^2-2x+2)} = \frac{-2x}{(x-2)(x^2-2x+2)}$.
Erneutes Anwenden der Zuhaltemethode liefert: $c = \frac{-2\cdot2}{2^2-2\cdot2+2} = -2$, eingesetzt heißt das:
$\frac{ax+b}{x^2-2x+2} = \frac{-2x}{(x-2)(x^2-2x+2)} - \frac{-2}{(x-2)} = \frac{2x^2-6x+4)}{(x-2)(x^2-2x+2)} = \frac{2x-2}{x^2-2x+2}$,
also $a = 2$ und $b = -2$.
Wir berechnen nun:

$$\int \frac{4}{(x-2)^2(x^2-2x+2)}dx = \int \frac{2x-2}{x^2-2x+2} + \frac{-2}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}dx =$$

$$\ln|x^2-2x+2| - 2\ln|x-2| - \frac{2}{x-2}.$$

(3)

$$\int \sin(x) + x\cos(x)dx = -\cos(x) + x\sin(x) - \int \sin(x)dx =$$

$$-\cos(x) + x\sin(x) + \cos(x) = x\sin(x).$$

(4) Wir verwenden Partielle Integration und benutzen die in (3) bestimmte Stammfunktion von $\sin(x) + x\cos(x)$.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin(x) + x\cos(x))\ln(x)dx = [x\sin(x)\ln(x)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x)dx =$$

$$-\frac{\pi}{2}\ln(\frac{\pi}{2}) + [\cos(x)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{\pi}{2}\ln(\frac{\pi}{2}) - 1.$$