4. Übungsblatt

Upload: 09.05.2023.
Deadline: 23.05.2023, 10:00 Uhr (im Abgabeordner bei stud.ip).

Aufgabe 4.1 (1,5 + 1,5 + 1,5 + 1,5)

Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf Offenheit, Abgeschlossenheit, Beschränktheit und Kompaktheit.

(a) $A = (0, 4] \subseteq \mathbb{R}$.

(b) $B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (i - 2^{-i}, i + 2^{i}) \subseteq \mathbb{R}$.

(c) $C = \{z \in \mathbb{C} | -2 \leq \operatorname{Im}\{z\} \leq 2\} \subseteq \mathbb{C}$.

(d) $D = \{r \cdot e^{i\varphi} \in \mathbb{C} | r \in [2, 3], \varphi \in [0, 2\pi)\} \subseteq \mathbb{C}$.

Aufgabe 4.2 (1,5 + 1,5 + 3)

Beweisen Sie mit Hilfe von Definition VI.5 und ohne Verwendung von Satz VI.6, dass

(a) $f : [1, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$, in $[1, \infty)$ stetig ist,

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto g(x)$ definiert durch

$$g(x) := \begin{cases} x^2, & x \leq 2, \\ x, & x > 2 \end{cases}$$

unstetig ist in $x_0 = 2$.

(c) Begründen Sie, welche der folgenden Funktionen $f_j : U_j \to \mathbb{R}$ sich stetig auf die reellen Zahlen erweitern lassen für $j = 1, 2, 3$, d.h. für welche eine in $\mathbb{R}$ stetige Funktion $\tilde{f}_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert, sodass $\tilde{f}_j(x) = f_j(x),\ \forall\, x \in U_j$, und geben Sie ggf. diese Erweiterung an:

(i) $U_1 = \mathbb{R},\ f_1(x) = x^2 \cdot \sin(4 - x)$.

(ii) $U_2 = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},\ f_2(x) = -x \cdot e^{-\frac{1}{x^2-1}}$.

(iii) $U_3 = \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ f_3(x) = \frac{e^x (x^2-1)}{x+1}$.

Aufgabe 4.3 (2 + 2 + 2)

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \leq 2, \\ x, & x > 2. \end{cases}$$

Geben Sie einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ und Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ so an, dass

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 = \lim_{n\to\infty} b_n\right) \wedge \left(\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(b_n)\right)$$

gilt.

(b) Nutzen Sie die Folgenstetigkeit, um die Grenzwerte der Folgen $(c_n)_{n=1}^{\infty}, (d_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ zu berechnen:

(i) $c_n = \sin(\sqrt[n]{n}\pi)$.

(ii) $d_n = \cos\left[\exp(\frac{1}{\sqrt[n]{n!}})\frac{2n^2+1}{n^2+3n}\pi\right]$.

(c) Es seien $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen für die

$$\forall x \in \mathbb{Q} : g(x) = h(x)$$

gilt. Beweisen Sie, dass g und h auf ganz $\mathbb{R}$ übereinstimmen.

Aufgabe 4.4 (1,5 + 1,5 + 3)

(a) Beweisen Sie, dass $f : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$, auf $(0,\infty)$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung durch Bildung des Grenzwertes des Differenzenquotienten.

(b) Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto g(x)$ gegeben durch

$$g(x) := \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ x-1, & x > 1. \end{cases}$$

Geben Sie einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ und Nullfolgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ so an, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(x_0+a_n) - g(x_0)}{a_n} \neq \lim_{n\to\infty} \frac{g(x_0+b_n) - g(x_0)}{b_n}.$$

(c) Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

(i) $f(x) = x^5 \sin(-3x)$.

(ii) $g(x) = x^{3x+2}$.

(iii) $h(x) = \frac{x^2\sqrt{x}}{\cos(x^3)+2}$.