Technische Universität Braunschweig

11. Übungsblatt

Upload: 11.07.2023.
Deadline: 18.07.2023, 10:00 Uhr (im Abgabeordner bei stud.ip).

Aufgabe 11.1 (2 + 2 + 2)

(a) Es seien $f : [0,3] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ und $F(f,\lambda) = \mu_1(f^{-1}(\lambda,\infty])$ das Maß der Niveaumenge. Zeigen Sie, dass $F(f,\lambda)$ Riemann-integrierbar ist und berechnen Sie

$$\int_{[0,3]} f(x)\,\mathrm{d}\mu_1(x) := \int_0^\infty F(f,\lambda)\,\mathrm{d}\lambda.$$

(b) Es sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton steigende, beschränkte und stetig differenzierbare Funktion mit $F'(x) = f(x)$. Zeigen Sie, dass f Lebesgue-integrierbar ist und dass das Lebesgue-Integral von f über $\mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}\mu_1(x) = \lim_{\lambda\to\infty}\{F(\lambda) - F(-\lambda)\}.$$

(c) Seien $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Zeigen Sie, dass f Lebesgue-integrierbar ist und für das Lebesgue-Integral

$$\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}\mu_1(x) = F(b) - F(a) \tag{1}$$

gilt. Was bedeutet (1) für das Lebesgue-Integral in Hinblick auf Satz VIII.13 und Satz VIII.14?

Aufgabe 11.2 (3 + 3)

(a) Betrachten Sie die Folge von Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{n}\cdot \mathbf{1}_{\{|x|\le n\}}$. Zeigen Sie, dass f_n punktweise gegen eine Grenzfunktion f_∞ konvergiert, d.h. dass es $f_\infty : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so gibt, dass $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_\infty(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Zeigen Sie weiterhin, dass

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}\mu_1(x) = 2 \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} f_\infty(x)\,\mathrm{d}\mu_1(x)$$

gilt. Wieso ist dies kein Widerspruch zu Satz XIII.12?

(b) Berechnen Sie

$$(i)\ \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} e^{-nx^2}\,\mathrm{d}\mu_1(x), \quad (ii)\ \lim_{n\to\infty}\int_{[0,\pi]} \sqrt[n]{\sin(x)}\,\mathrm{d}\mu_1(x).$$

Aufgabe 11.3 (2 + 2 + 2)

Berechnen Sie die Fouriertransformierten $\hat{f}_j : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$\hat{f}_j(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x)\,\frac{\mathrm{d}\mu_1(x)}{\sqrt{2\pi}}$$

der folgenden Funktionen:

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathbf{1}_{\{0\le x\le L\}}$, wobei $L > 0$.

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x\cdot\mathbf{1}_{\{0\le x\le L\}}$, wobei $L > 0$.

(c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-\alpha|x|}$, wobei $\alpha > 0$.

Aufgabe 11.4 (4 + 2)

(a) Berechnen Sie

(*i*) $\int_{[0,1]\times[0,2]} (xy^2 - x^2y)\, \mathrm{d}\mu_2(x,y)$, (*ii*) $\int_{[0,5]\times[-1,1]} y^3(\ln(x) + 2\cos(x)^3 - \tanh(x))\, \mathrm{d}\mu_2(x,y)$,

(*iii*) $\int_{[0,1]\times[0,1]} \mathbf{1}_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\leq 1\}}(s,t)\, \mathrm{d}\mu_2(s,t)$ (*iv*) $\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{\vec{x}\in\mathbb{R}^2 : \|\vec{x}\|_{eukl}\leq 1\}}(y,z)\, \mathrm{d}\mu_2(y,z)$.

(b) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig in $\mathbb{R}$ und $f(x) = g(x) = 0$, für alle $x \in \mathbb{R} \setminus [-50, 50]$. Zeigen Sie, dass Ihre Faltung $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\, \mathrm{d}\mu_1(y)$$

eine integrable Funktion definiert.