Institut für Nachrichtentechnik

Prüfung

Digitale Signalverarbeitung

16.03.2016

Name : ____________________

Vorname : ____________________

Matrikelnummer : ____________________

Studiengang : ____________________

Klausurnummer : ____________________

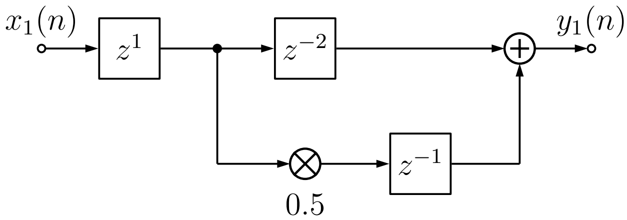
Aufgabe	Punkte	
1	/12	
2	/12	
3	/12	
4	/14	
Σ	/50	
Note		

Aufgabe 1: Übertragungsfunktionen und Analyse von LTI-Systemen

(12 Punkte)

Gegeben sei das nicht kausale System $H_1(z)$ mit dem Eingangssignal $x_1(n)$ und dem Ausgangssignal $y_1(n)$, gemäß dem nachfolgend dargestellten Blockschaltbild.

$H_1(z)$:



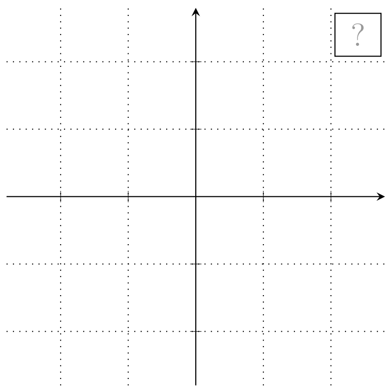
a) Vereinfachen Sie das gegebene System $H_1(z)$ und machen Sie es kausal. Nennen Sie das System $H_2(z)$, das Eingangssignal sei nun $x_2(n)$ und das Ausgangssignal $y_2(n)$.

b) Wie lautet die Differenzengleichung von $H_2(z)$?

c) Berechnen Sie die Impulsantwort $h_2(n)$.

d) Berechnen Sie die z-Transformierte $H_2(z)$.

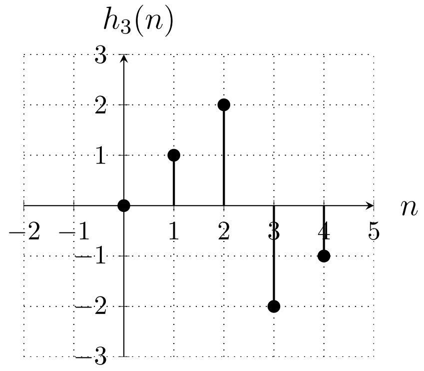
e) Zeichnen Sie die Pol- und Nullstellen von $H_2(z)$ in das folgende Diagramm ein. Achten Sie auf eine vollständige Beschriftung des Diagramms!



Hinweis: *Folgende Aufgaben sind ohne vorherige Ergebnisse lösbar!*

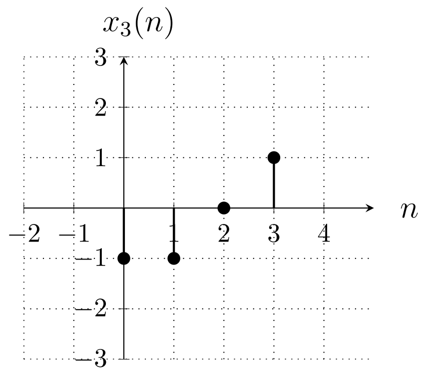
f) Es gilt $H_2(e^{j\Omega}) = |H_2(e^{j\Omega})| \cdot e^{j\phi_2(\Omega)}$. Geben Sie den Term für $|H_2(e^{j\Omega})|$ und $\phi_2(\Omega)$ an.

Gegeben sei die folgende Impulsantwort $h_3(n)$:



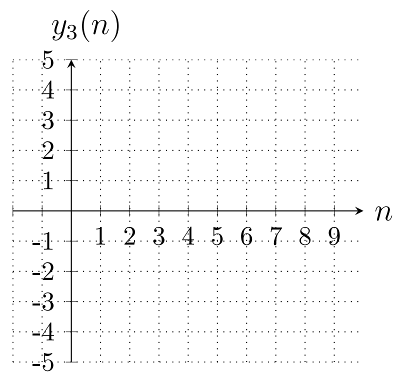
g) Handelt es sich bei dem Filter $h_3(n)$ um ein linearphasiges Tiefpass-Filter? Begründen Sie Ihre Antwort!

Gegeben sei das folgende Signal:



h) Welche Länge hat das Ergebnis der linearen Faltung von $x_3(n)$ mit $h_3(n)$?

i) Berechnen Sie das Ergebnis $y_3(n)$ der linearen Faltung von $x_3(n)$ mit $h_3(n)$ und skizzieren Sie es in folgendes Diagramm:



Aufgabe 2: Inverse z-Transformation

(12 Punkte)

Gegeben sei folgende z-Transformierte:

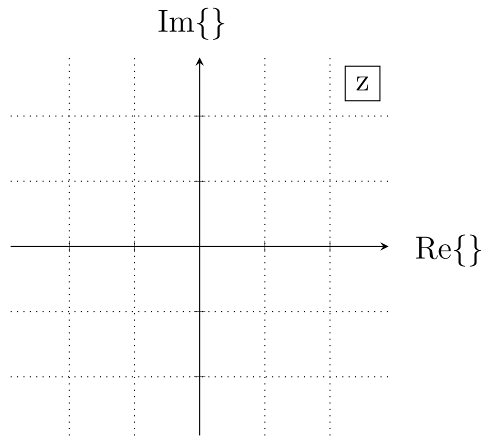
$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}{1 - \frac{1}{16}z^{-2}}$$

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen $z_{0\mu}$ und Polstellen $z_{\infty p}$ von $H(z)$ und geben Sie alle Konvergenzgebiete von $H(z)$ an. Geben Sie $H(z)$ in der Form

$$H(z) = \frac{\prod_{\mu=1}^{N_b}(z - z_{0\mu})}{\prod_{\nu=1}^{N_a}(z - z_{\infty\nu})}$$

an.

b) Tragen Sie alle Pol- und Nullstellen des Systems in das nachfolgende Diagramm ein und schraffieren Sie das Konvergenzgebiet (ROC) für die rechtsseitige Folge. Achten Sie auf eine vollständige Beschriftung des Diagramms!



c) Ist $H(z)$ minimalphasig? Begründen Sie Ihre Antwort. Führen Sie eine Zerlegung von $H(z)$ in einen Allpass $H_{\mathrm{AP}}(z)$ und ein weiteres System $H_{\min}(z)$ durch.

Nehmen Sie im weiteren Verlauf der Aufgabe an, dass $h(n)$ eine rechtsseitige, kausale Folge ist.

d) Berechnen Sie $h(n)$ mit der Ihnen aus der Vorlesung bekannten Methode 5) (Partialbruchzerlegung). Geben Sie $H(z)$ in der folgenden Form an: $H(z) = R_0 + \sum_{p=1}^{P} \sum_{\nu=1}^{\nu_p} R_{p,\nu} \frac{z}{(z - z_{\infty,p})^\nu}$.

Aufgabe 3: IIR-Filterdesign

(12 Punkte)

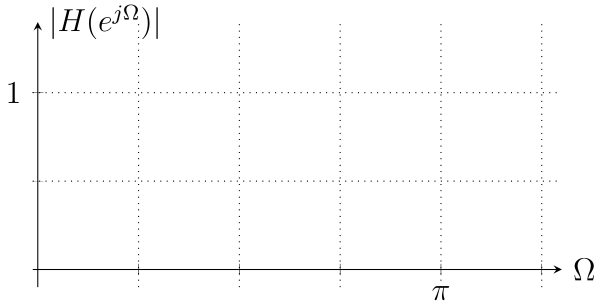
Durch Anwendung der billinearen Transformation auf ein zeitkontinuierliches Butterworth-Filter soll ein zeitdiskretes Filter entworfen werden. Die Spezifikation ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} 1 \geq& |H(e^{j\Omega})| > 1-\delta_p && \text{für } 0 \leq \Omega < \frac{2\pi}{5} \\ 1-\delta_p \geq& |H(e^{j\Omega})| > \delta_s && \text{für } \frac{2\pi}{5} \leq \Omega < \frac{4\pi}{5} \\ \delta_s \geq& |H(e^{j\Omega})| \geq 0 && \text{für } \frac{4\pi}{5} \leq \Omega \leq \pi \end{aligned}$$

$$\delta_\mathrm{p} = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} + 1 \qquad d_{st} = 12 \text{ dB} \qquad f_s = 10 \text{ kHz.}$$

a) Handelt es sich nach der obigen Spezifikation um ein Tiefpass-, Hochpass- oder Bandpass-Filter?

b) Vervollständigen Sie das untenstehende Toleranzschema im Frequenzbereich mit allen notwendigen Parametern und Sperrbereichen der Filterspezifikation.



c) Berechnen Sie den Transformationsfaktor v der billinearen Transformation und geben Sie ω_p und ω_{st} an. Nehmen Sie $\omega' = \omega_p$ und $\Omega' = \Omega_p$ an.

d) Bestimmen Sie die minimale Ordnung N des Butterworth-Filters, mithilfe derer die Spezifikation eingehalten werden kann.

Für die weiteren Aufgabenteile e) und f) nehmen Sie bitte die in Aufgabenteil d) ermittelte Ordnung N an!

e) Bestimmen Sie die Dämpfung d^*_st, die das entworfene Filter tatsächlich bei der Frequenz Ω_st hat, und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit d_st.

f) Geben Sie alle Nullstellen der resultierenden Übertragungsfunktion des Butterworth-Filters im Laplace-Bereich und im z-Bereich an. Welche Ordnung hat bzw. haben die Nullstelle(n) im z-Bereich?

g) Geben Sie die Länge der Impulsantwort des entworfenen Butterworth-Filters an.

Aufgabe 4: Abtastratenwandlung

(14 Punkte)

Gegeben ist ein Audio-Signal $x(n)$ mit einer Länge von 3 Minuten. Nehmen Sie an, dass die Datenmenge des Audio-Signals 92.160.000 Bit umfasst. Das Signal ist linear PCM-codiert, daher wurden 16 Bit Speicher pro Abtastwert genutzt.

a) Mit welcher Frequenz f_s wurde das vorliegende Audio-Signal abgetastet?

Bei der spektralen Analyse des Audio-Signals fällt Ihnen auf, dass die höchste im Signal vorkommende Frequenz bei $f_\mathrm{max} = \frac{3}{8} f_s$ liegt. Um die Datenmenge ohne Verlust von Frequenzkomponenten zu reduzieren, bietet sich eine Abtastratenwandlung an.

b) Bestimmen Sie das benötigte teilerfremde Abtastratenverhältnis $r = \frac{p}{q}$, mit $p,q \in \mathbb{N}$.

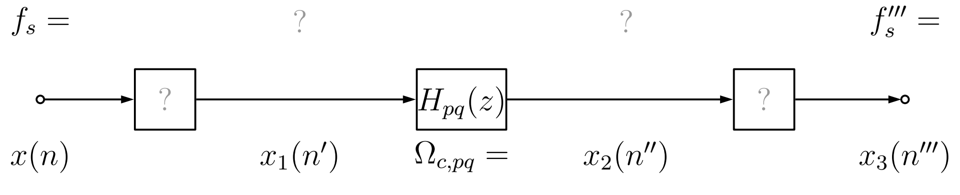
Das Audio-Signal muss im Zuge der Abtastratenwandlung sowohl dezimiert, als auch expandiert werden (Reihenfolge ist noch zu bestimmen!).

c) Geben Sie die Grenzfrequenz $\Omega_{c,p}$ des idealen Tiefpassfilters $H_p(z)$ an, welches zur Vermeidung von Aliasing im Kontext der Expandierung notwendig ist.

d) Geben Sie die Grenzfrequenz $\Omega_{c,q}$ des idealen Tiefpassfilters $H_q(z)$ an, welches zur Vermeidung von Aliasing im Kontext der Dezimation notwendig ist.

e) Die beiden idealen Tiefpassfilter $H_p(z)$ und $H_q(z)$ können zu *einem* Tiefpassfilter $H_{pq}(z)$ vereinfacht werden. Wie lautet die Grenzfrequenz $\Omega_{c,pq}$ des Filters $H_{pq}(z)$?

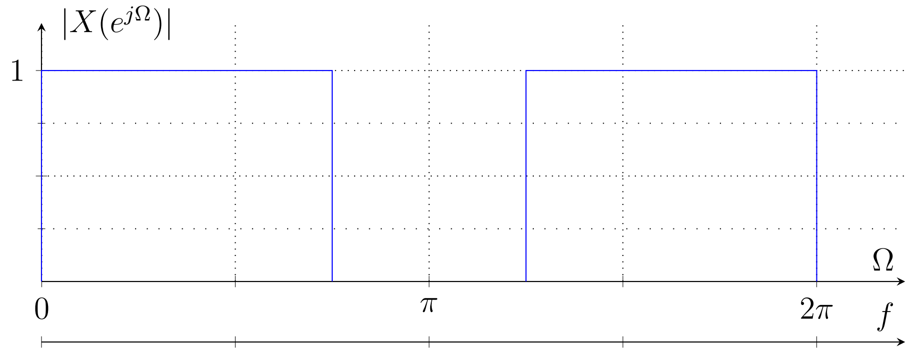
f) Vervollständigen Sie das nachfolgende optimierte Blockschaltbild, um die gewünschte Abtastratenwandlung zu erreichen. Beschriften Sie alle Signale, Abtastraten, Blöcke und ggfs. benötigte Grenzfrequenzen. Nutzen Sie alle gezeigten Blöcke und achten Sie auf die korrekte Verwendung von gestrichenen Größen nach einem Wechsel der Abtastrate!

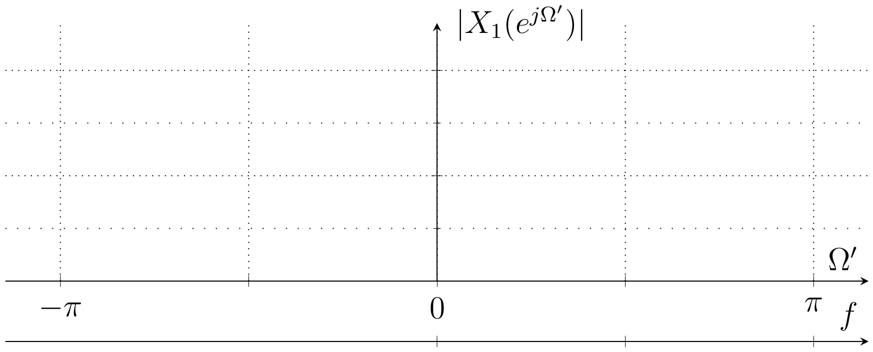


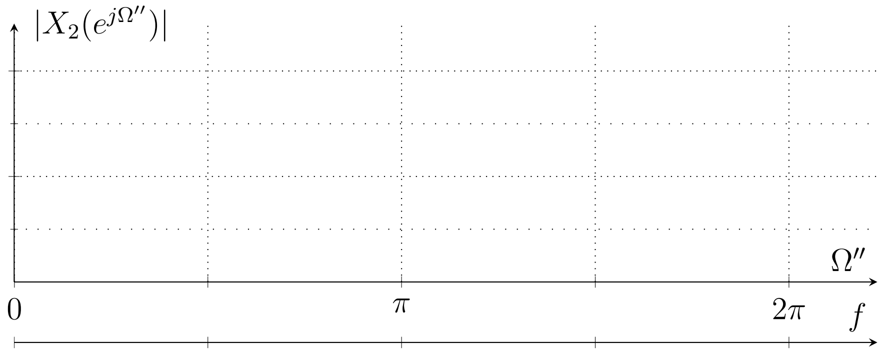
g) Zeichnen Sie die Betragsspektren $|X_1(e^{j\Omega'})|$, $|X_2(e^{j\Omega''})|$, $|X_3(e^{j\Omega'''})|$ in die dafür vorgesehenen Diagramme auf Seite 7. Geben Sie entscheidende Grenzfrequenzen mit Zahlenwerten an und nutzen dabei eine doppelte Frequenzachse mit der normierten Kreisfrequenz Ω und der Frequenz f. Achten Sie auf ggfs. gestrichene Bezeichner und auf eine vollständige Achsenbeschriftung!

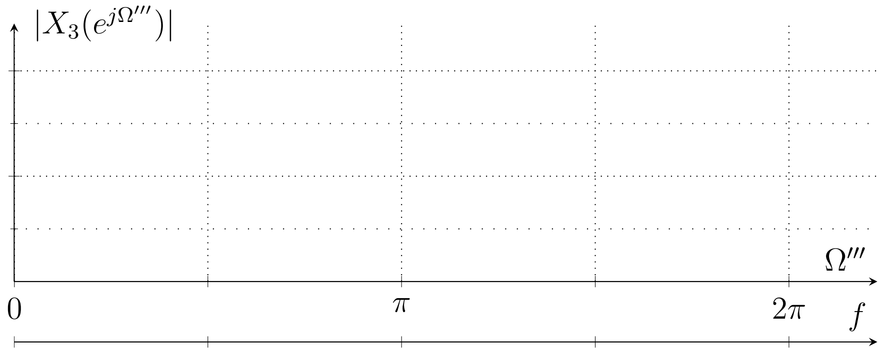
h) Geben Sie den Kompensationsfaktor α an, damit folgende Gleichung gilt:

$$\alpha \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_3(n''')|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X_2(e^{j\Omega''})|^2.$$


$|X(e^{j\Omega})|$
1
Ω
0
π
2π
f


$|X_1(e^{j\Omega'})|$
Ω'
$-\pi$
0
π
f


$|X_2(e^{j\Omega''})|$
Ω''
0
π
2π
f


$|X_3(e^{j\Omega'''})|$
Ω'''
0
π
2π
f