Technische Universität Braunschweig

Netzwerke

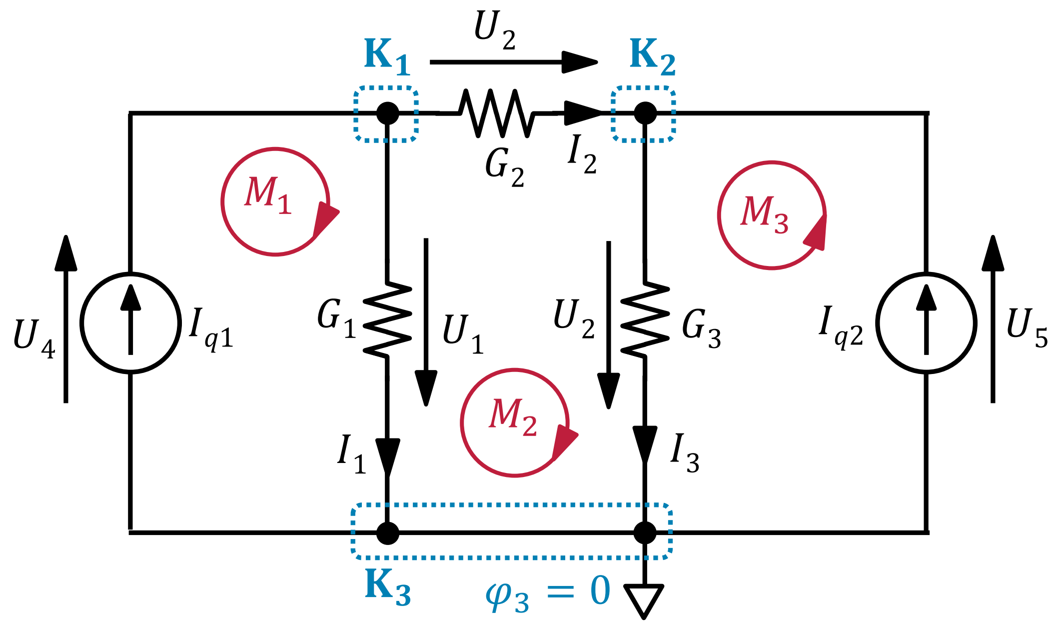
8. Methoden zur Berechnung von Netzwerken

Vadim Issakov

Sommersemester 2024

Methoden zur Berechnung von Netzwerken - Übersicht

- **Motivation für die Einführung von Lösungsverfahren**
- Knotenpotentialverfahren
- Maschenimpedanzverfahren
- Modifiziertes Knotenpotentialverfahren (Modified Node Analysis, MNA)



$k-1$	linear unabhängige Knotengleichungen
$z-k+1$	linear unabhängige Knotengleichungen
z	Zweiggleichungen
$\sum$: $2z$	Gleichungen für $2z$ Unbekannte $I_i, U_i, i = 1, \ldots, 5$

Motivation

$$
\begin{array}{c}
K_1 \\ K_2 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ Z1 \\ Z2 \\ Z3 \\ Z4 \\ Z5
\end{array}
\left(
\begin{array}{ccccc|ccccc}
+1 & +1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & +1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & +1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 & +1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & +1 \\
\hline
-R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -R_3 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\right)
\begin{bmatrix}
I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ \hline U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_{q1} \\ I_{q2}
\end{bmatrix}
$$

Aufwendig zu lösendes Gleichungssystem. Reduktion des Gleichungssystems mit

- Knotenpotentialverfahren → Gleichungssystem mit $(k-1)$ Unbekannten
- Maschenimpedanzverfahren → Gleichungssystem mit $(z-k+1)$ Unbekannten

Motivation

Knotenpotentialverfahren und Maschenimpedanzverfahren

- Vereinfachung der Berechnung bei
  - Netzwerken mit gesteuerten Quellen
  - komplexen Netzwerken

Methoden zur Berechnung von Netzwerken - Übersicht

- Motivation für die Einführung von Lösungsverfahren
- **Knotenpotentialverfahren**
- Maschenimpedanzverfahren
- Modifiziertes Knotenpotentialverfahren (MNA)

Knotenpotentialverfahren

Vorbereiten des Netzwerks

↓

Referenzknoten festlegen

Restlichen Knoten Potential zuordnen

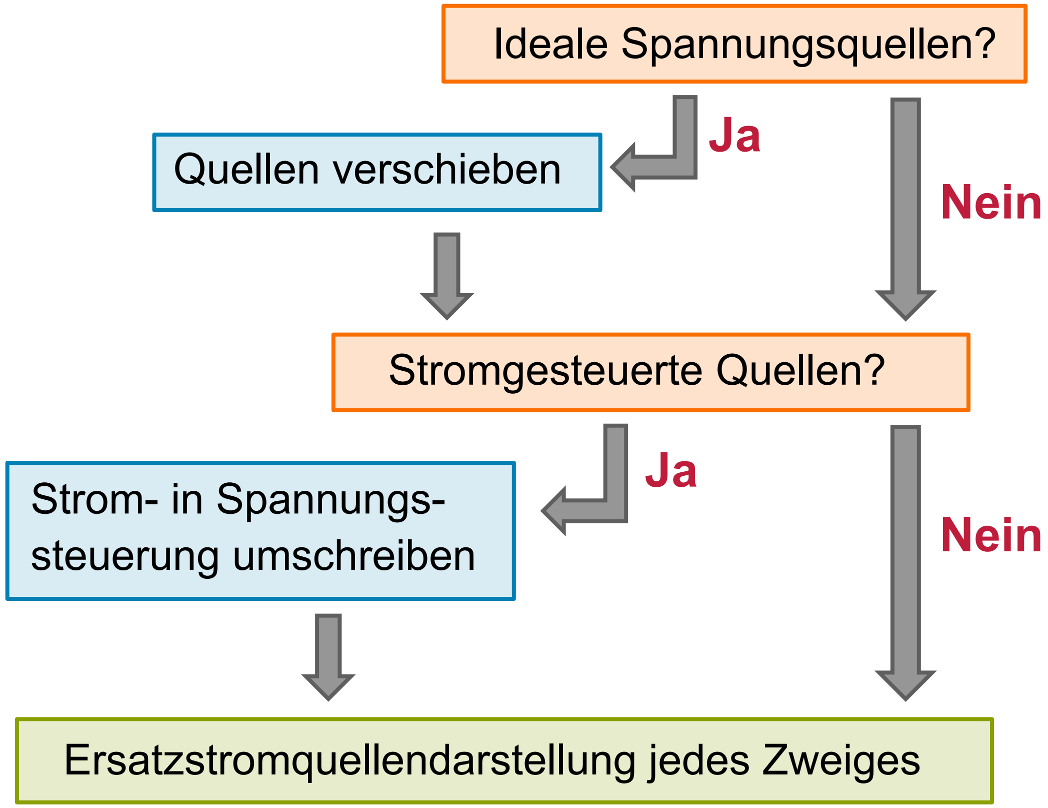
↓

Aufstellen des Gleichungssystems

↓

Berechnen der gesuchten Größen

Vorbereiten des Netzwerks



Gleichungssystem aufstellen - I

Enthält das Netzwerk gesteuerte Quellen?

Ja

- Gleichungssystem in **zwei** Schritten aufstellen
  - **Schritt 1**: Gleichungssystem so aufstellen, als ob die gesteuerten Quellen fest wären
    $\underline{\underline{Y}}'\underline{U}_K = \underline{I}_q'$
    $\underline{\underline{Y}}'$ symmetrisch
  - **Schritt 2**: Steuerungen berücksichtigen

$\Rightarrow$ $$\underline{\underline{Y}}\ \underline{U}_K = \underline{I}_q$$

$\underline{\underline{Y}}$ in der Regel **nicht** symmetrisch

Nein

- Gleichungssystem in **einem** Schritt aufstellbar

$$\underline{\underline{Y}}\ \underline{U}_K = \underline{I}_q$$

$\underline{\underline{Y}}$ symmetrisch

Gleichungssystem aufstellen - II

Methoden zur Aufstellung des Gleichungssystems

mit Hilfe der Kirchhoffschen Knotengleichungen

oder

direkt in Matrixschreibweise

(**Schritt 1** bei Netzwerken mit gesteuerten Quellen)

Gleichungssystem mit Hilfe der Kirchhoffschen Knotengleichungen aufstellen

$k-1$ Kirchhoffsche Knotenglei-chungen aufstellen

⇓

Stromquellen auf die rechte Seite (feste und gesteuerte)

⇓

Zweige mit Admittanzen: Zweigspannungen durch Knotenpotentiale ausdrücken

⇓

Gleichungssystem in Matrixform umschreiben

$$\sum_{p=1}^{n} I_p = 0$$

Vorzeichenkonvention muss beachtet werden!

(Schritt 1 bei Netzwerken mit gesteuerten Quellen)

Gleichungssystem aufstellen - IV

Gleichungssystem direkt in Matrixschreibweise aufstellen

(Schritt 1 bei Netzwerken mit gesteuerten Quellen)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Y'_{11} & \cdots & Y'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y'_{n1} & \cdots & Y'_{nn} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{Y}}'} \underbrace{\begin{bmatrix} U_{K1} \\ \vdots \\ U_{Kn} \end{bmatrix}}_{\underline{U}_K} = \underbrace{\begin{bmatrix} I'_{q1} \\ \vdots \\ I'_{qn} \end{bmatrix}}_{\underline{I}'_q}$$

Y'_{ii}: Σ Admittanzen der mit Knoten i verbundenen Bauelemente

Y'_{ik}: $i \neq k$
- $-(\Sigma$ Admittanzen zwischen Knoten i und $k)$;
- 0, wenn keine Admittanz zwischen Knoten i und k;
- $Y'_{ik} = Y'_{ki} \Rightarrow$ Zur Hauptdiagonalen symmetrische Matrix

I'_{qi} = Σ der mit Knoten i verbundenen Stromquellen (feste und gesteuerte);
- Quellstrom fließt in Knoten $i \Rightarrow$ Eintrag als positiver Wert
- Quellstrom fließt aus Knoten $i \Rightarrow$ Eintrag als negativer Wert

Bei Netzwerken nur mit festen Quellen gilt: $\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{Y}}'$, $\underline{I}_q = \underline{I}'_q$

Schritt 2: Steuerungen berücksichtigen

$$\boxed{\underline{\underline{Y}}'\underline{U}_K = \underline{I}_q'}$$

- Wenn gesteuerte Quellen in $\underline{I}_q'$ sind
  - $\underline{I}_q'$ abhängig von $\underline{U}_K$
  - Zerlege $\underline{I}_q'$ in festen und über $\underline{U}_K$ gesteuerten Anteil
  - Drücke steuernde Spannungen durch Knotenpotentiale aus

$$\underline{I}_q' = \underline{I}_q + \underline{\underline{Y}}_{steuer}\underline{U}_K$$

$$\underline{\underline{Y}}\ \underline{U}_K = \left(\underline{\underline{Y}}' - \underline{\underline{Y}}_{steuer}\right)\underline{U}_K = \underline{I}_q$$

$\underline{\underline{Y}}$ in der Regel **nicht** symmetrisch

$$\boxed{\underline{\underline{Y}}\ \underline{U}_K = \underline{I}_q}$$

Berechnung der gesuchten Größen

Berechnung am einfachsten mit Hilfe der **Cramerschen Regel**

Gleichungssystem: $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$

$\underline{\underline{A}}$ sei $(n \times n)$-Matrix mit $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$, so ist $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ eindeutig lösbar.

$$\boxed{x_i = \frac{\det \underline{\underline{A_i}}}{\det \underline{\underline{A}}}} \quad \text{für } i = 1, \cdots, n \text{ mit } \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

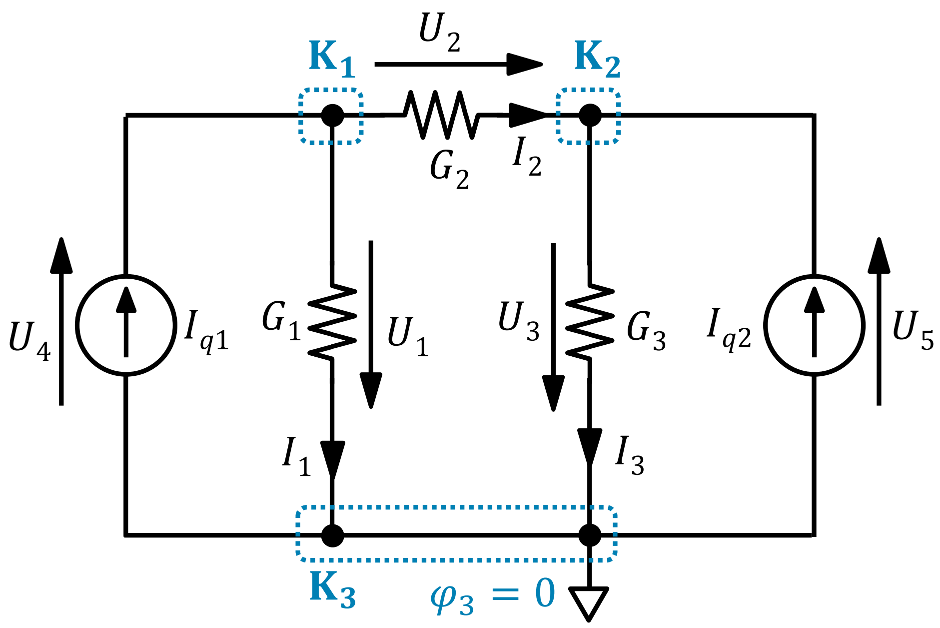
A_i wird gebildet, indem die i-te Spalte von $\underline{\underline{A}}$ durch $\underline{b}$ ersetzt wird.

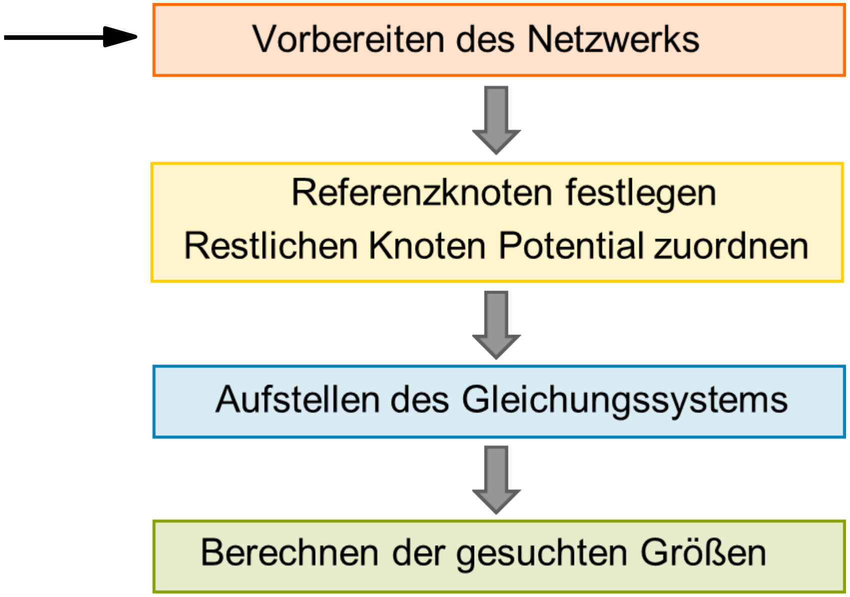
Beispiel:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_{\underline{b}}$$

$$x_2 = \frac{\det \underline{\underline{A_2}}}{\det \underline{\underline{A}}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Beispiel I

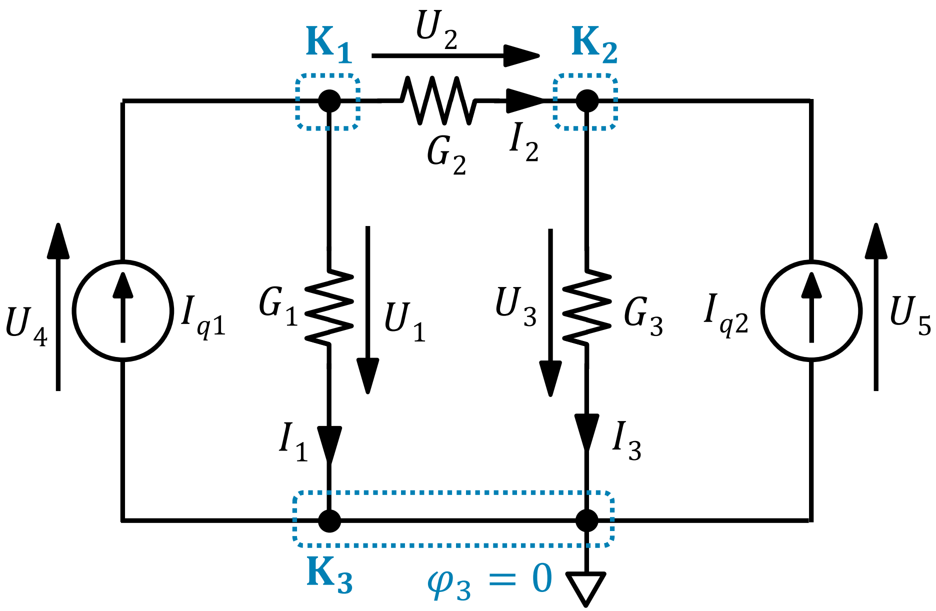




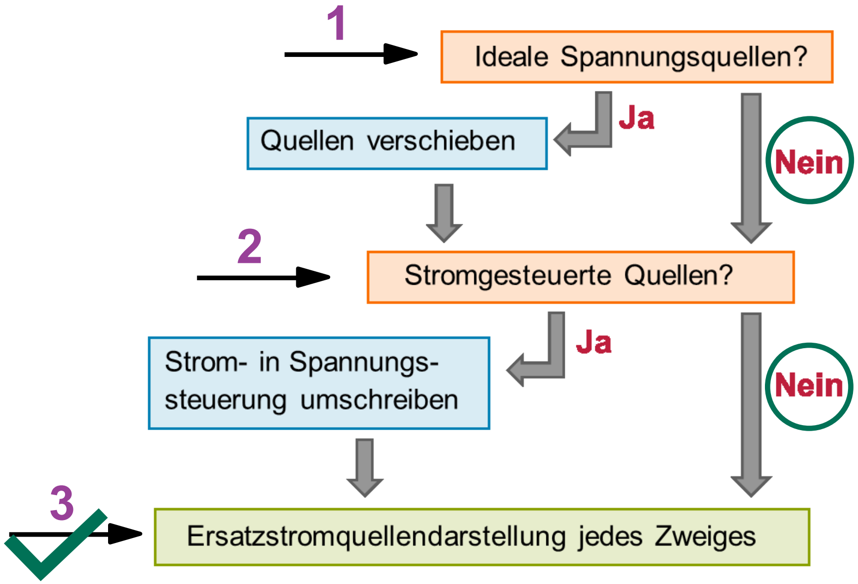
Netzwerk mit $G_1 > 0, G_2 > 0, G_3 > 0$ und zwei festen idealen Stromquellen I_{q1}, I_{q2}.

Berechnen Sie die Spannung U_1.

Beispiel I

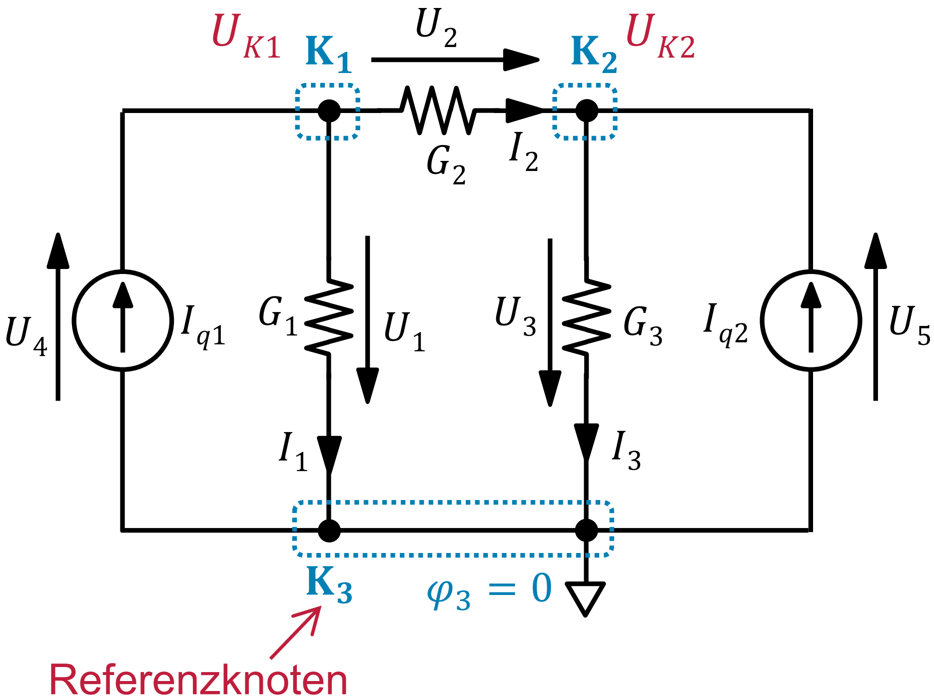


K_1
U_2
K_2
G_2
I_2
U_4
I_{q1}
G_1
U_1
U_3
G_3
I_{q2}
U_5
I_1
I_3
K_3
$\varphi_3 = 0$



1
Ideale Spannungsquellen?
Ja
Nein
Quellen verschieben
2
Stromgesteuerte Quellen?
Ja
Nein
Strom- in Spannungs-
steuerung umschreiben
3
Ersatzstromquellendarstellung jedes Zweiges

Beispiel I

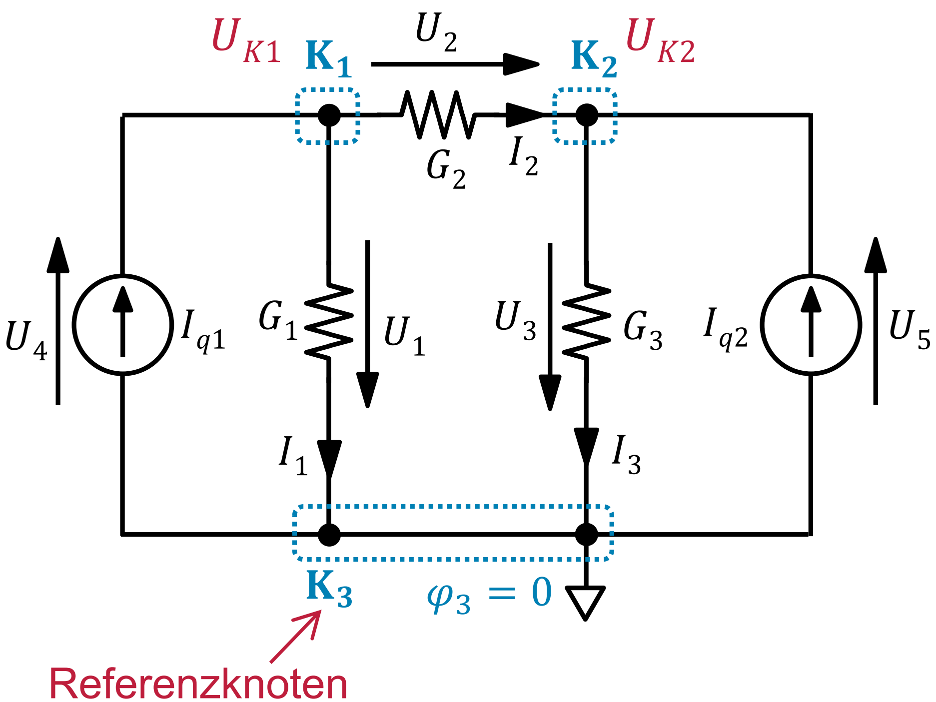


Vorbereiten des Netzwerks

Referenzknoten festlegen
Restlichen Knoten Potential zuordnen

Aufstellen des Gleichungssystems

Berechnen der gesuchten Größen



✓ Vorbereiten des Netzwerks

↓

✓ Referenzknoten festlegen
Restlichen Knoten Potential zuordnen

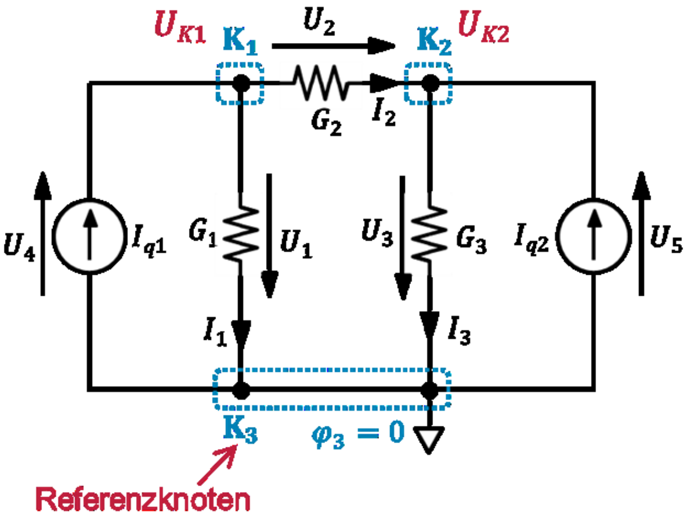
↓

→ Aufstellen des Gleichungssystems

↓

Berechnen der gesuchten Größen

Beispiel I – Aufstellen des Gleichungssystems



Enthält das Netzwerk gesteuerte Quellen?

Ja

- Gleichungssystem in **zwei** Schritten aufstellen
  - Schritt 1: Gleichungssystem so aufstellen, als ob die gesteuerten Quellen fest wären
    $\underline{\underline{Y}}'\underline{U}_K = \underline{I}_q'$
    $\underline{\underline{Y}}'$ symmetrisch
  - Schritt 2: Steuerungen berücksichtigen

    ➡ $\underline{\underline{Y}}\ \underline{U}_K = \underline{I}_q$

    $\underline{\underline{Y}}$ in der Regel **nicht** symmetrisch

Nein

- Gleichungssystem in **einem** Schritt aufstellbar

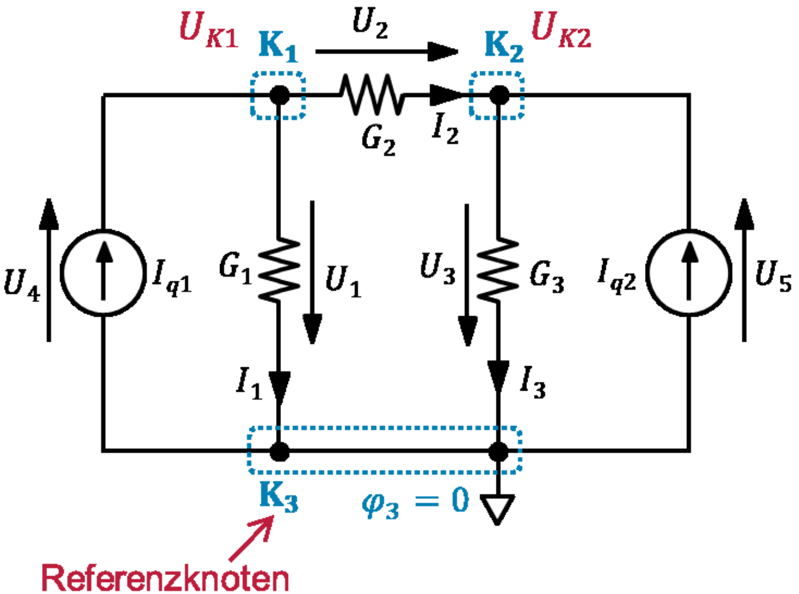
  $\underline{\underline{Y}}\ \underline{U}_K = \underline{I}_q$

  $\underline{\underline{Y}}$ symmetrisch

Methoden zur Aufstellung des Gleichungssystems

mit Hilfe der Kirchhoffschen Knotengleichungen **oder** direkt in Matrixschreibweise

Beispiel I – Aufstellen des Gleichungssystems



$k-1$ Kirchhoffsche Knotengleichungen aufstellen

K_1: $I_1 + I_2 - I_{q1} = 0$

K_2: $-I_2 + I_3 - I_{q2} = 0$

Stromquellen auf die rechte Seite (feste und gesteuerte)

K_1: $G_1U_1 + G_2U_2 = I_{q1}$

K_2: $-G_2U_2 + G_3U_3 = I_{q2}$

Zweige mit Admittanzen: Zweigspannungen durch Knotenpotenttiale ausdrücken

$$U_1 = U_{K1}$$
$$U_2 = U_{K1} - U_{K2}$$
$$U_3 = U_{K2}$$

Gleichungssystem in Matrixform umschreiben

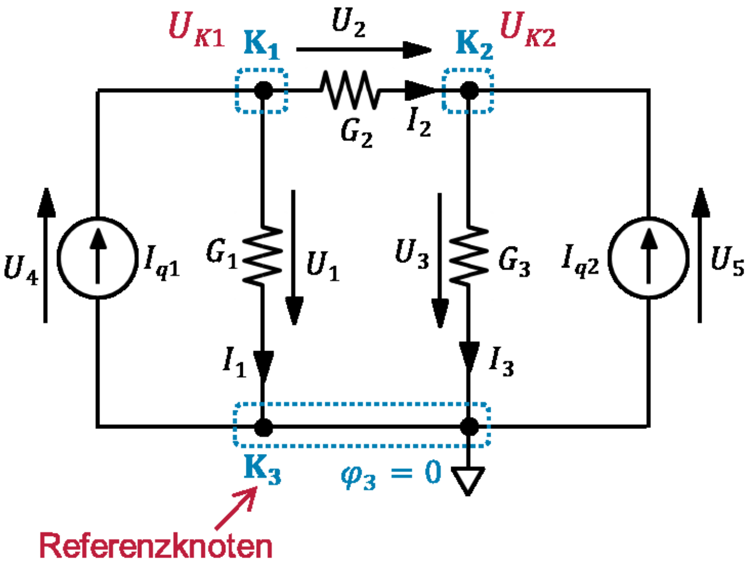
K_1: $(G_1 + G_2)U_{K1} - G_2U_2 = I_{q1}$

K_2: $-G_2U_{K1} + (G_2 + G_3)U_3 = I_{q2}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{Y}}} \begin{pmatrix} U_{K1} \\ U_{K2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{q1} \\ I_{q2} \end{pmatrix}$$

symmetrisch für passives Netzwerk

Beispiel I – Gleichungssystem direkt in Matrixform



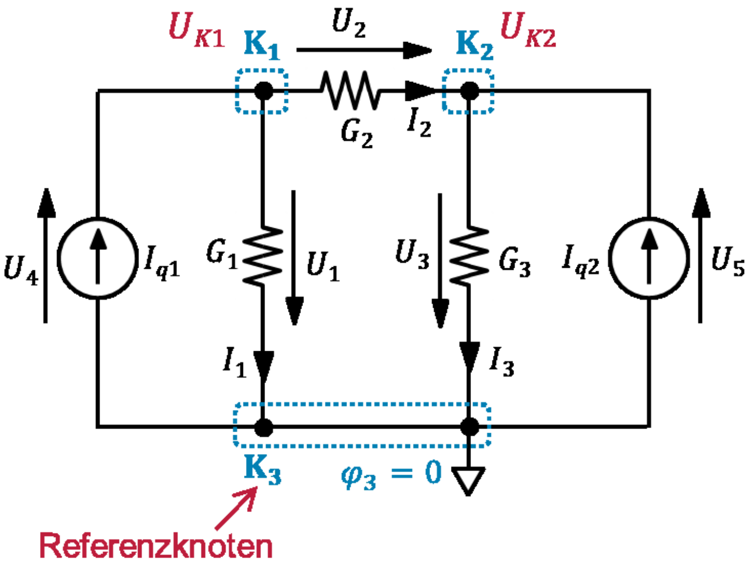
Y'_{ii}: Σ Admittanzen der mit Knoten i verbundenen Bauelemente

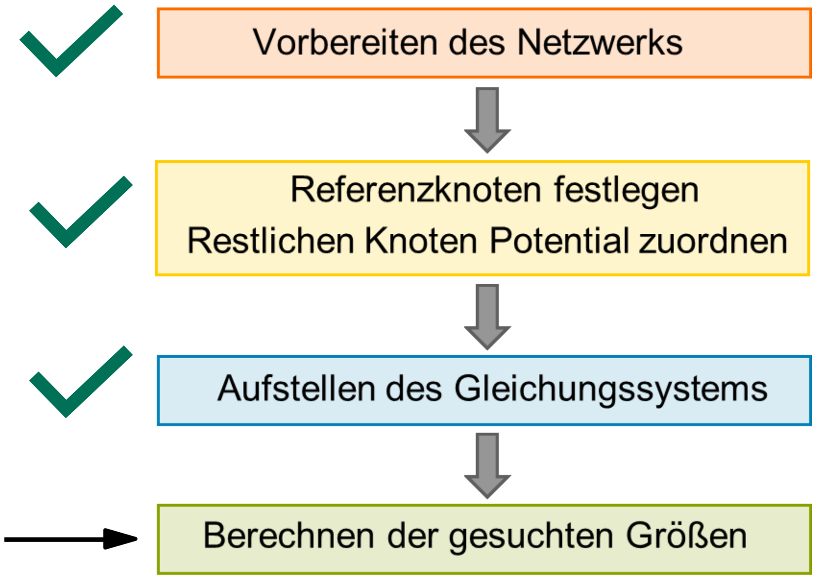
Y'_{ik}, $i \neq k$: $-(\Sigma$ Admittanzen zwischen Knoten i und $k)$;
0, wenn keine Admittanz zwischen Knoten i und k;
$Y'_{ik} = Y'_{ki} \Rightarrow$ Zur Hauptdiagonalen symmetrische Matrix

I'_{qi} = Σ der mit Knoten i verbundenen Stromquellen (feste und gesteuerte);
Quellstrom fließt in Knoten $i \Rightarrow$ Eintrag als positiver Wert
Quellstrom fließt aus Knoten $i \Rightarrow$ Eintrag als negativer Wert

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{K1} \\ U_{K2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{q1} \\ I_{q2} \end{bmatrix}$$

Beispiel I – Gleichungssystem direkt in Matrixform





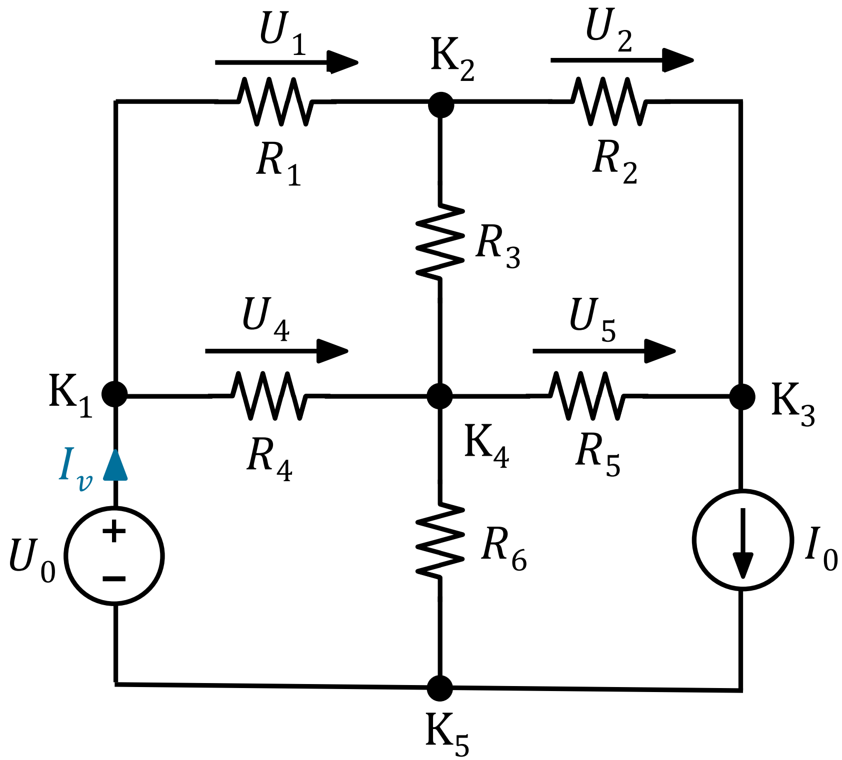
$$\boxed{\underbrace{\begin{pmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{Y}}} \begin{pmatrix} U_{K1} \\ U_{K2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{q1} \\ I_{q2} \end{pmatrix}}$$

Berechnen der Spannung U_1
(Cramersche Regel)

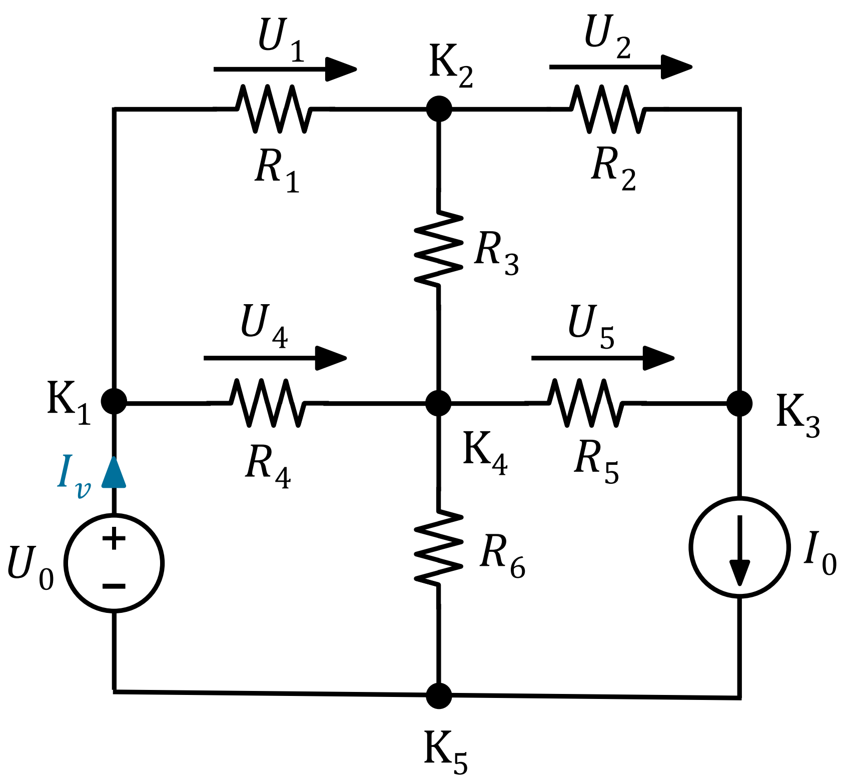
$$U_1 = U_{K1} = \frac{\begin{vmatrix} I_{q1} & -G_2 \\ I_{q2} & G_2 + G_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{vmatrix}} = \frac{(G_2 + G_3)I_{q1} + G_2 I_{q2}}{(G_1 + G_2)(G_2 + G_3) - G_2^2}$$

Netzwerk mit 6 Widerständen $R_i > 0, i = 1, \dots, 6$,
einer festen idealen Spannungsquelle U_0 und
einer festen idealen Stromquelle I_0.

Berechnen Sie die Spannung U_4.



Beispiel mit Spannungsquellenverschiebung



→ **Vorbereiten des Netzwerks**

↓

Referenzknoten festlegen
Restlichen Knoten Potential zuordnen

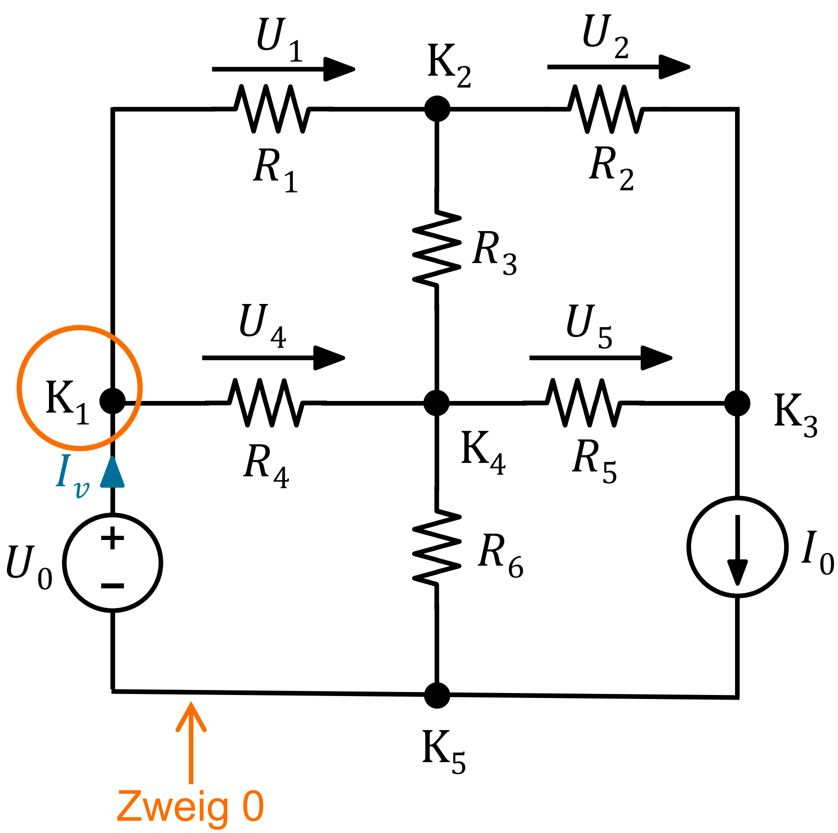
↓

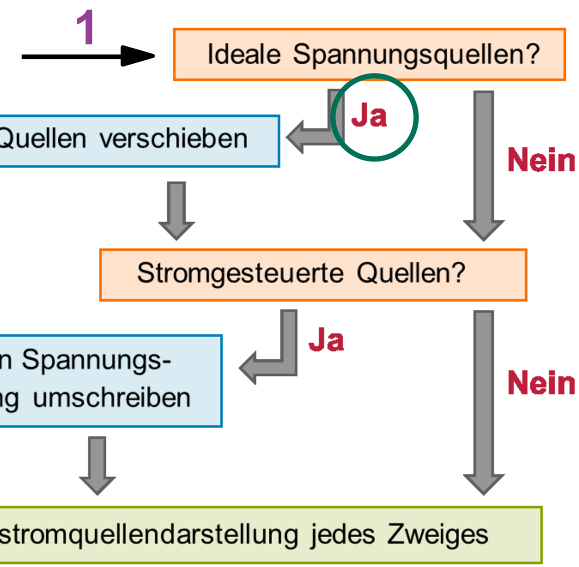
Aufstellen des Gleichungssystems

↓

Berechnen der gesuchten Größen

Beispiel mit Spannungsquellenverschiebung

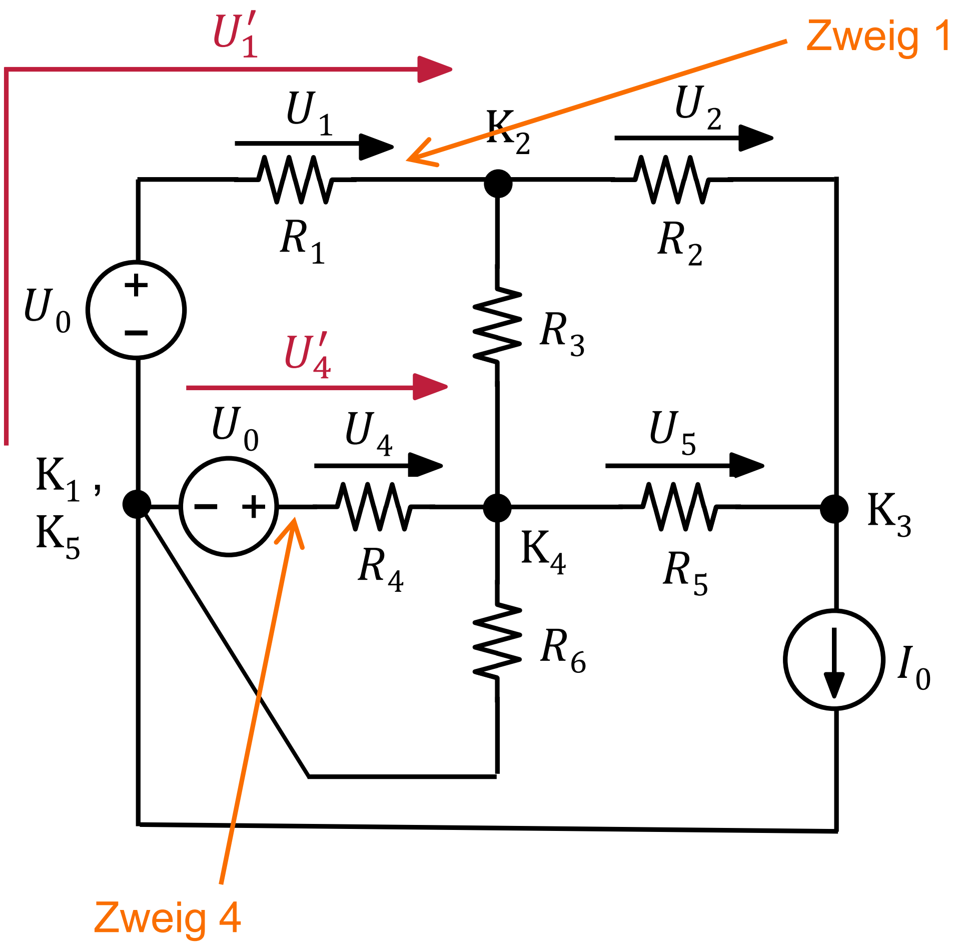




Verschiebung der Spannungsquelle von Zweig 0 in alle anderen Zweige von K_1

Beispiel mit Spannungsquellenverschiebung

Netzwerk nach Spannungsquellenverschiebung



Rücktransformationsgleichungen

$$U_1' = U_1 - U_0 \Rightarrow U_1 = U_1' + U_0$$

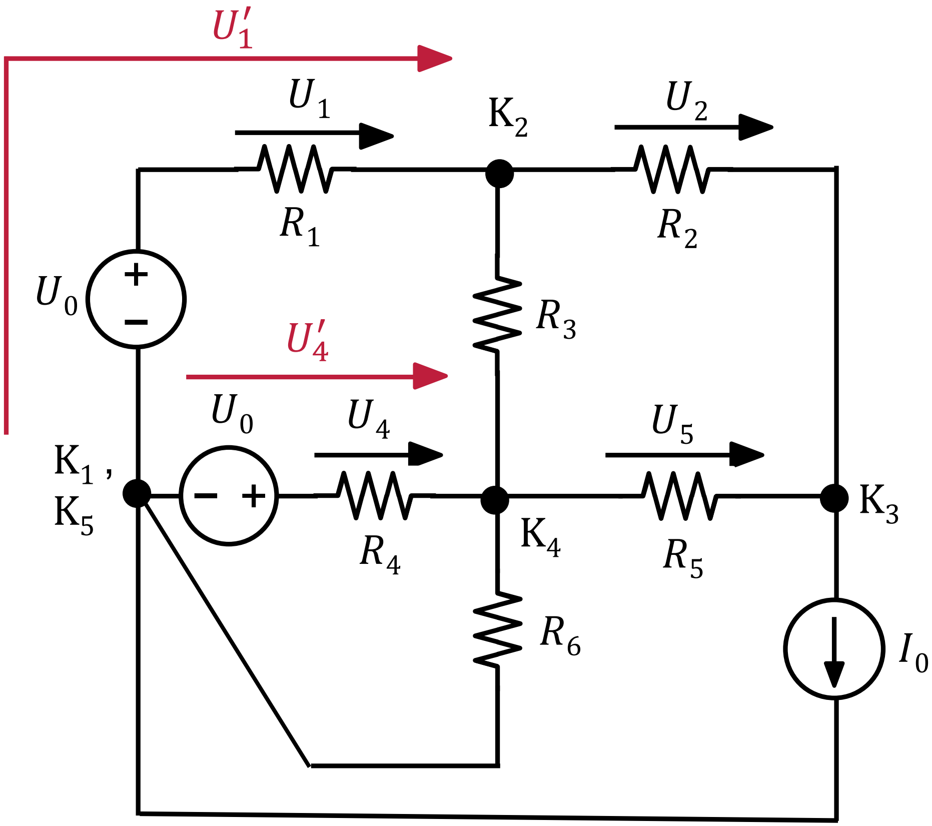
$$U_4' = U_4 - U_0 \Rightarrow \boxed{U_4 = U_4' + U_0}$$

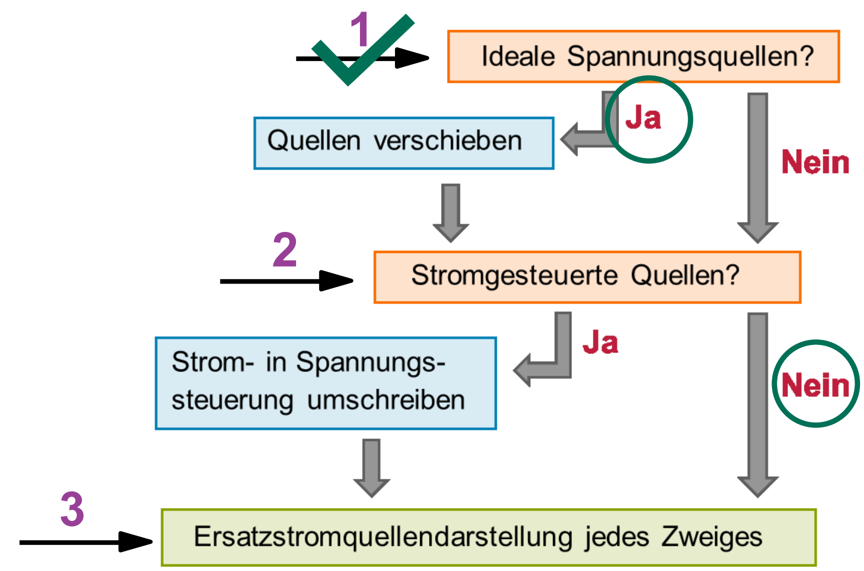
$$I_v = I_1 + I_4$$

gesuchte Spannung

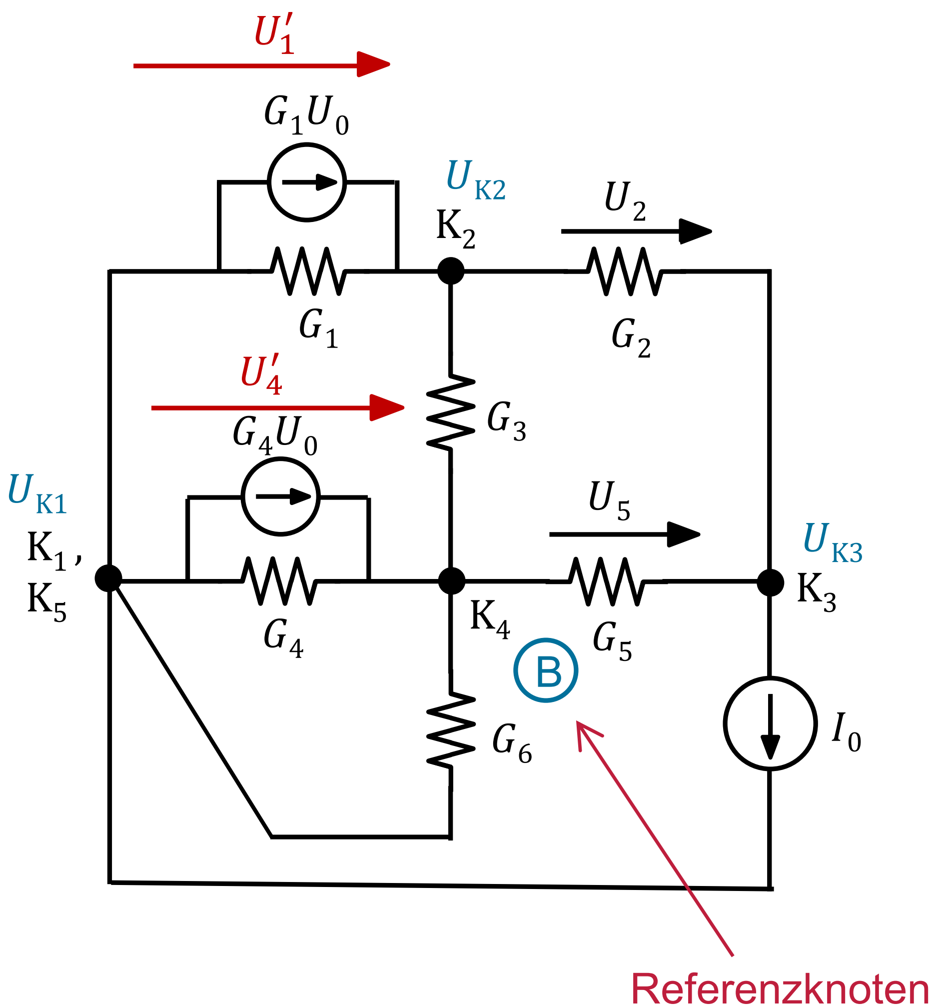
Rückgewinnungsgleichung für I_v

Netzwerk nach Spannungsquellenverschiebung





Beispiel mit Spannungsquellenverschiebung



$$G_i = \frac{1}{R_i}\ , i = 1, \ldots, 6$$

4

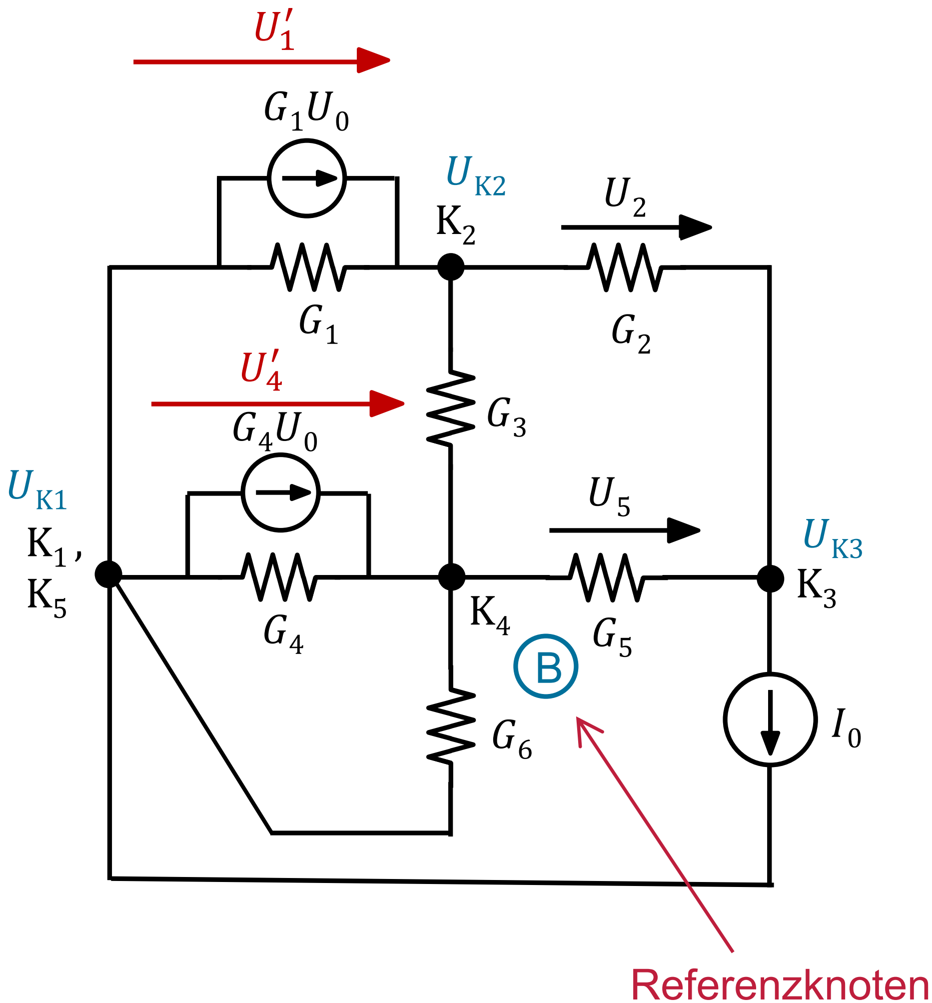
Vorbereiten des Netzwerks

Referenzknoten festlegen
Restlichen Knoten Potential zuordnen

Aufstellen des Gleichungssystems

Berechnen der gesuchten Größen

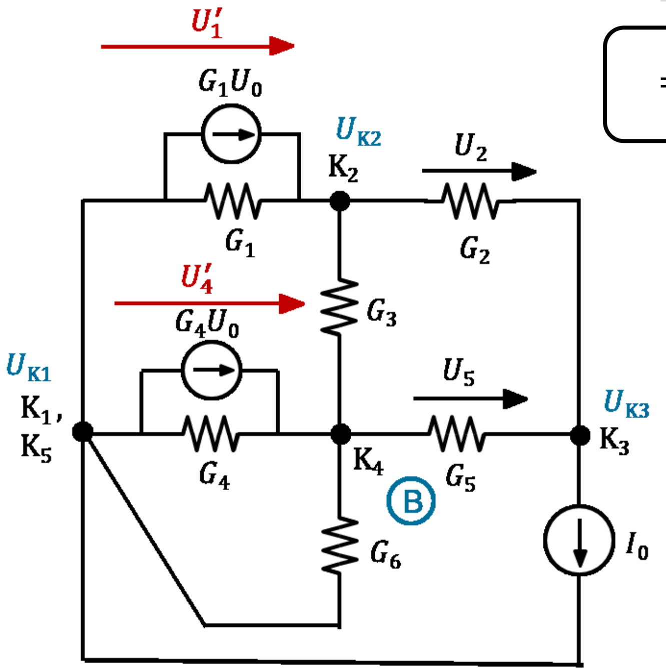
Beispiel mit Spannungsquellenverschiebung



$$G_i = \frac{1}{R_i}, i = 1, \dots, 6$$

- ✓ Vorbereiten des Netzwerks
- ✓ Referenzknoten festlegen
  Restlichen Knoten Potential zuordnen
- → Aufstellen des Gleichungssystems
- Berechnen der gesuchten Größen

Beispiel mit Spannungsquellenverschiebung



$$= \frac{1}{R_i}, i = 1, \dots, 6$$

Enthält das Netzwerk gesteuerte Quellen?

Ja

- Gleichungssystem in **zwei** Schritten aufstellen
  - Schritt 1: Gleichungssystem so aufstellen, als ob die gesteuerten Quellen fest wären
    $\underline{\underline{Y}}'\underline{U}_K = \underline{I}_q'$
    $\underline{\underline{Y}}'$ symmetrisch
  - Schritt 2: Steuerungen berücksichtigen

  ⇨ $\underline{\underline{Y}}\ \underline{U}_K = \underline{I}_q$

  $\underline{\underline{Y}}$ in der Regel **nicht** symmetrisch

Nein

- Gleichungssystem in **einem** Schritt aufstellbar

⇩

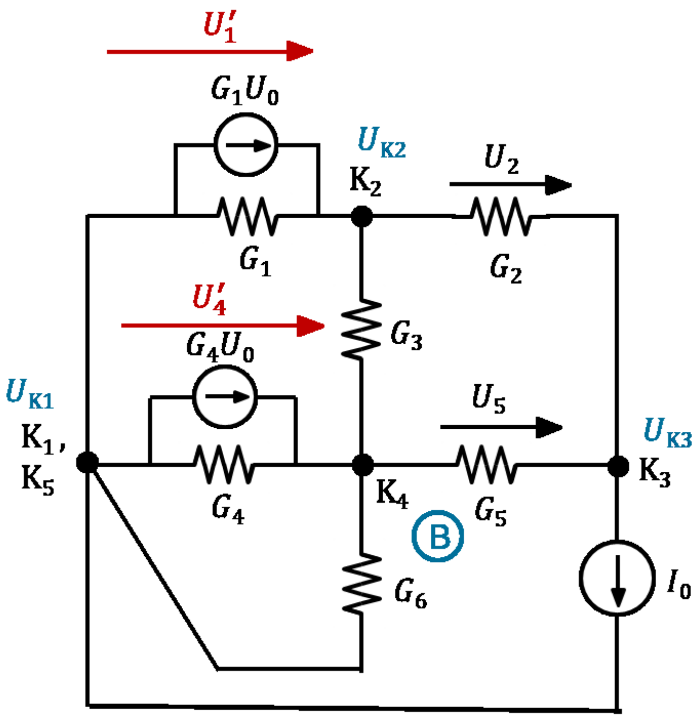
$\underline{\underline{Y}}\ \underline{U}_K = \underline{I}_q$

$\underline{\underline{Y}}$ symmetrisch

Methoden zur Aufstellung des Gleichungssystems

mit Hilfe der Kirchhoffschen Knotengleichungen **oder** direkt in Matrixschreibweise

Beispiel mit Spannungsquellenverschiebung



$$G_i = \frac{1}{R_i}, i = 1, \ldots, 6$$

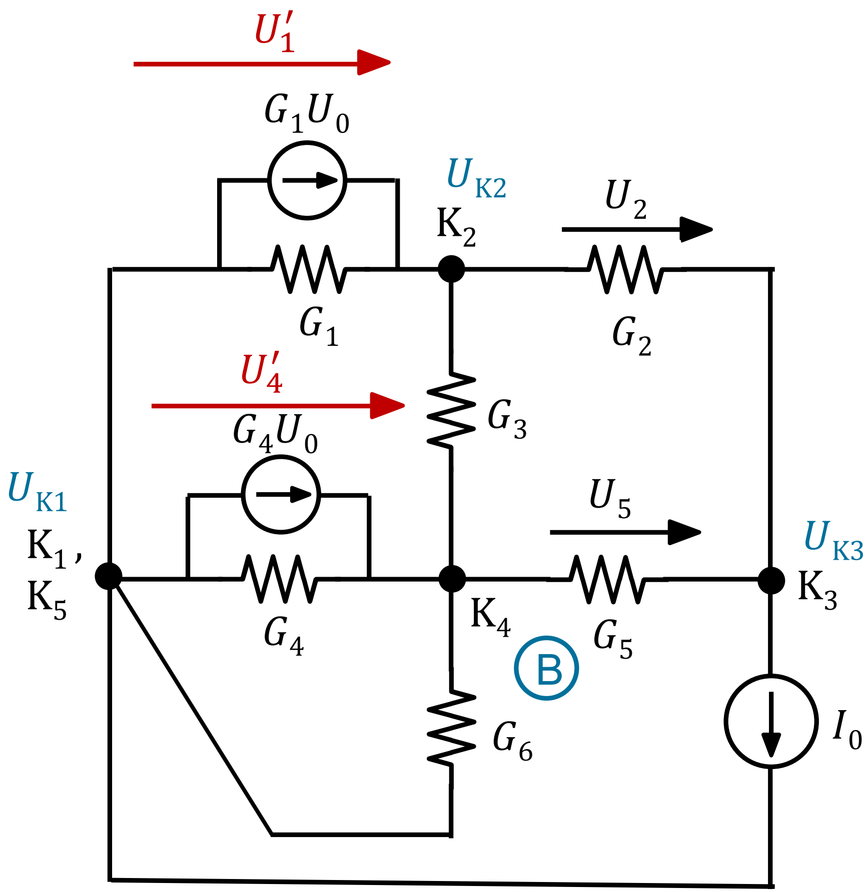
Y'_{ii}: Σ Admittanzen der mit Knoten i verbundenen Bauelemente

Y'_{ik}: $i \neq k$ −(Σ Admittanzen zwischen Knoten i und k) ;
0, wenn keine Admittanz zwischen Knoten i und k;
$Y'_{ik} = Y'_{ki}$ ⇒ Zur Hauptdiagonalen symmetrische Matrix

I'_{qi} = Σ der mit Knoten i verbundenen Stromquellen (feste und gesteuerte);
Quellstrom fließt in Knoten i ⇒ Eintrag als positiver Wert
Quellstrom fließt aus Knoten i ⇒ Eintrag als negativer Wert

$$\underbrace{\begin{pmatrix} G_1 + G_4 + G_6 & -G_1 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 & -G_2 \\ 0 & -G_2 & G_2 + G_5 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{Y}}} \begin{pmatrix} U_{K1} \\ U_{K2} \\ U_{K3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G_1U_0 - G_4U_0 + I_0 \\ G_1U_0 \\ -I_0 \end{pmatrix}$$

Beispiel mit Spannungsquellenverschiebung



$$G_i = \frac{1}{R_i}, i = 1, \ldots, 6$$

- ✓ Vorbereiten des Netzwerks
- ✓ Referenzknoten festlegen
Restlichen Knoten Potential zuordnen
- ✓ Aufstellen des Gleichungssystems
- → Berechnen der gesuchten Größen

Berechnen der Spannung U_4

Berechnen der Spannung U_4 (Cramersche Regel)

$$G_i = \frac{1}{R_i}\ , i = 1, \ldots, 6$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} G_1 + G_4 + G_6 & -G_1 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 & -G_2 \\ 0 & -G_2 & G_2 + G_5 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{Y}}} \begin{pmatrix} U_{K1} \\ U_{K2} \\ U_{K3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G_1 U_0 - G_4 U_0 + I_0 \\ G_1 U_0 \\ -I_0 \end{pmatrix}$$

$$U_4 = U_4' + U_0$$

$$U_4' = U_{K1} = \frac{\begin{vmatrix} -(G_1 + G_4) U_0 + I_0 & -G_1 & 0 \\ G_1 U_0 & G_1 + G_2 + G_3 & -G_2 \\ -I_0 & -G_2 & G_2 + G_5 \end{vmatrix}}{\det \underline{\underline{Y}}}$$

Beispiel mit Spannungsquellenverschiebung

Berechnen der Spannung U_4 für $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R$

$$G_i = \frac{1}{R_i}, i = 1, \dots, 6$$

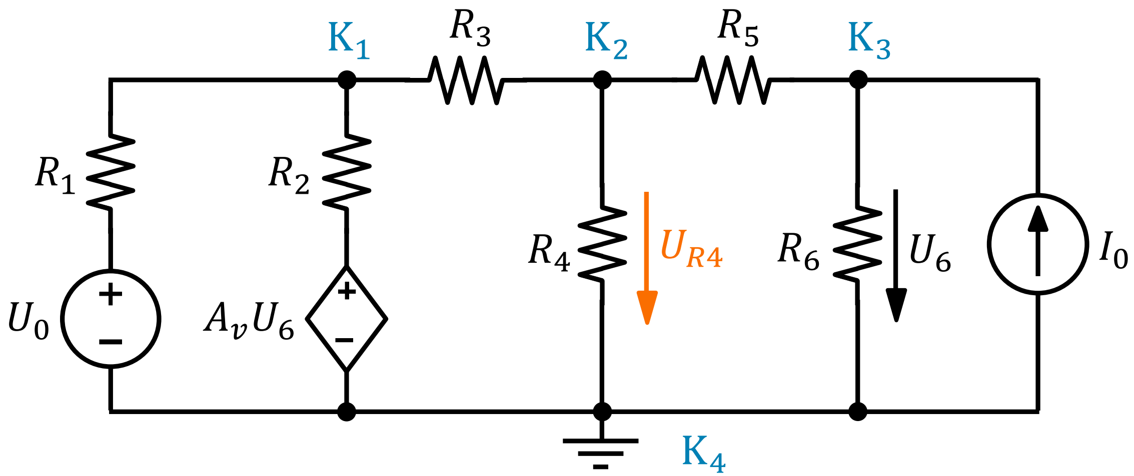
$$U_4 = U_4' + U_0$$

$$U_4' = U_{K1} = \frac{\begin{vmatrix} -2GU_0 + I_0 & -G & 0 \\ GU_0 & 3G & -G \\ -I_0 & -G & 2G \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3G & -G & 0 \\ -G & 3G & -G \\ 0 & -G & 2G \end{vmatrix}} = \frac{-8G^3U_0 + 4G^2I_0}{13G^3}$$

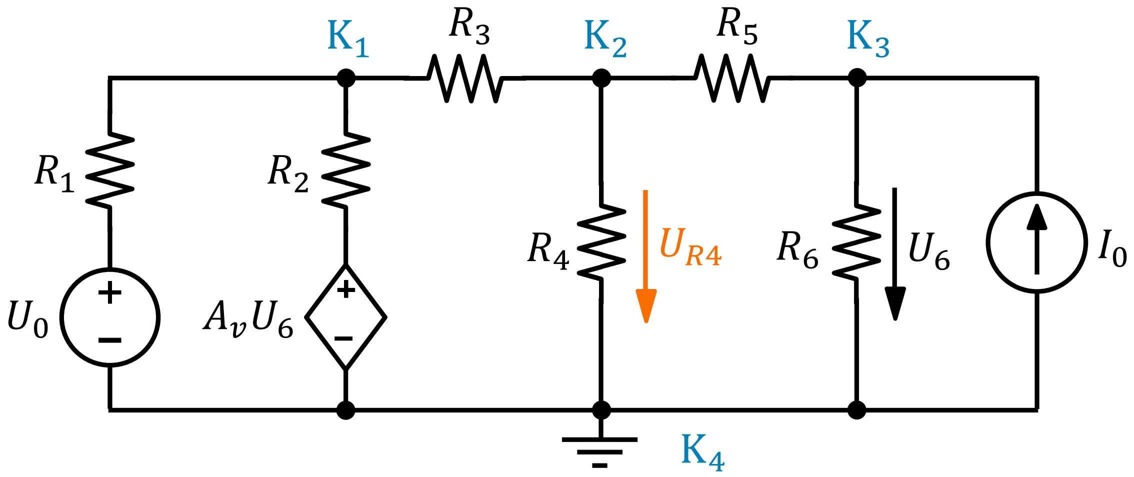
$$\boxed{U_4 = U_4' + U_0 = \frac{5}{13}U_0 + \frac{4}{13G}I_0}$$

Beispiel mit gesteuerter Quelle

Netzwerk mit 6 Widerständen $R_i > 0, i = 1, \ldots, 6$,
einer festen Spannungsquelle U_0,
einer festen idealen Stromquelle I_0 und
einer spannungsgesteuerten Spannungsquelle $A_v U_6$ mit $A_v > 0$.
Berechnen Sie die Spannung $\boldsymbol{U_{R4}}$.



Beispiel mit gesteuerter Quelle



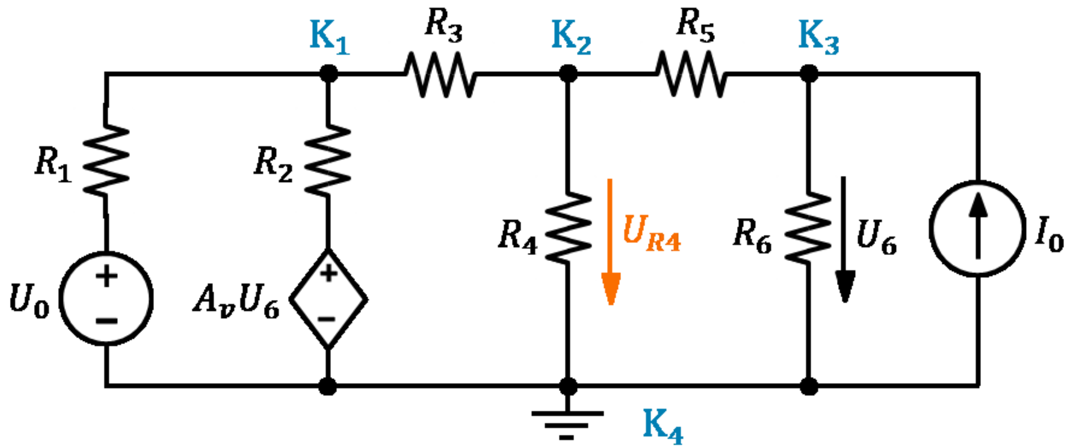
Vorbereiten des Netzwerks

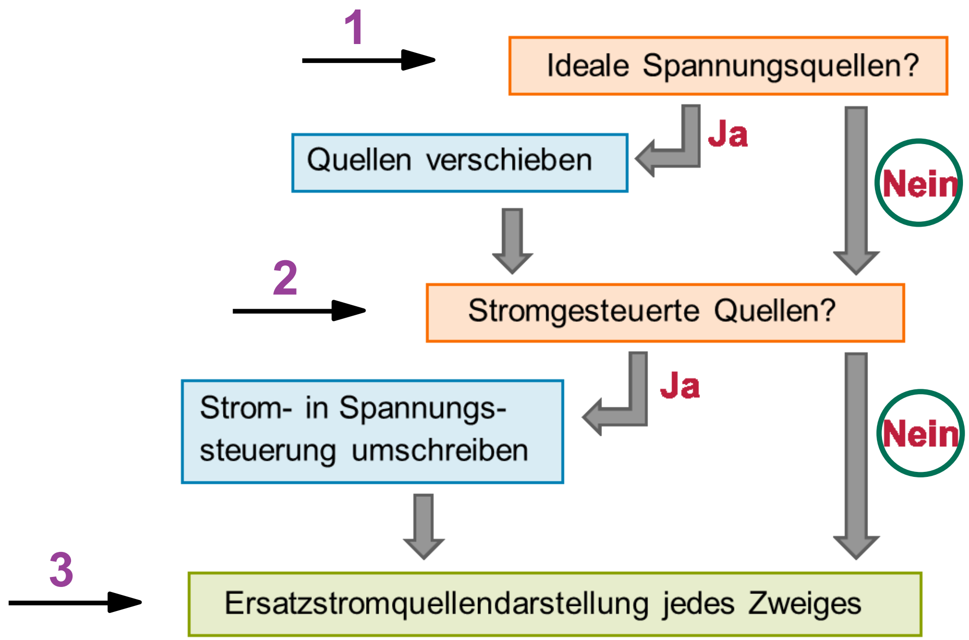
Referenzknoten festlegen
Restlichen Knoten Potential zuordnen

Aufstellen des Gleichungssystems

Berechnen der gesuchten Größen

Beispiel mit gesteuerter Quelle

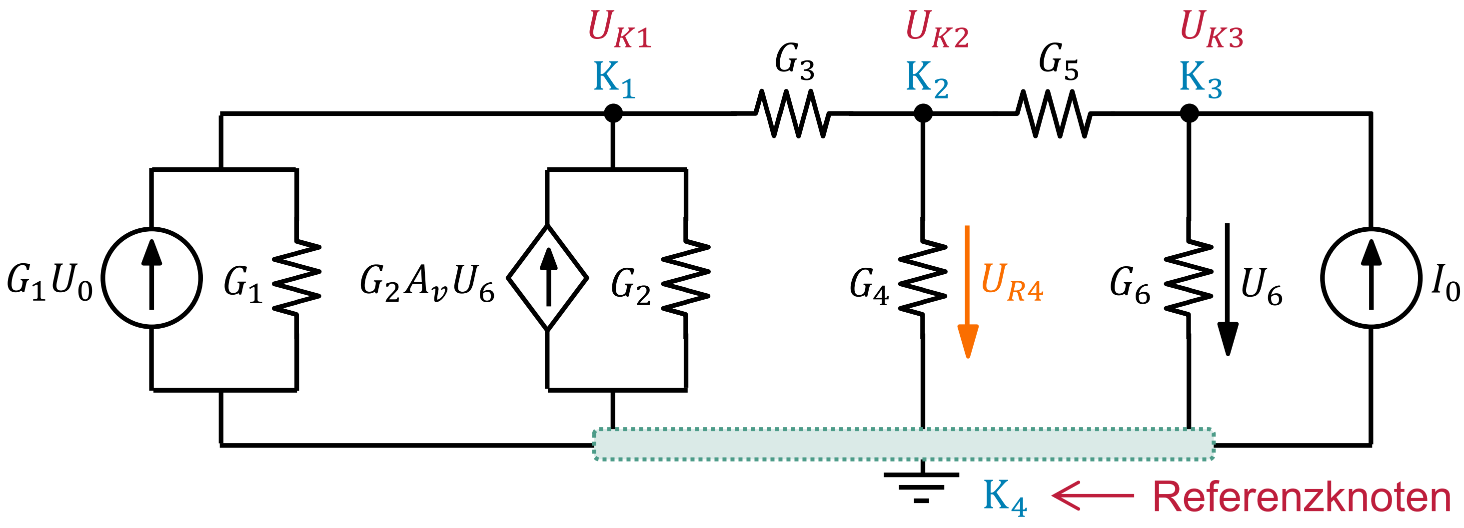




Umrechnen Impedanz

in Admittanz

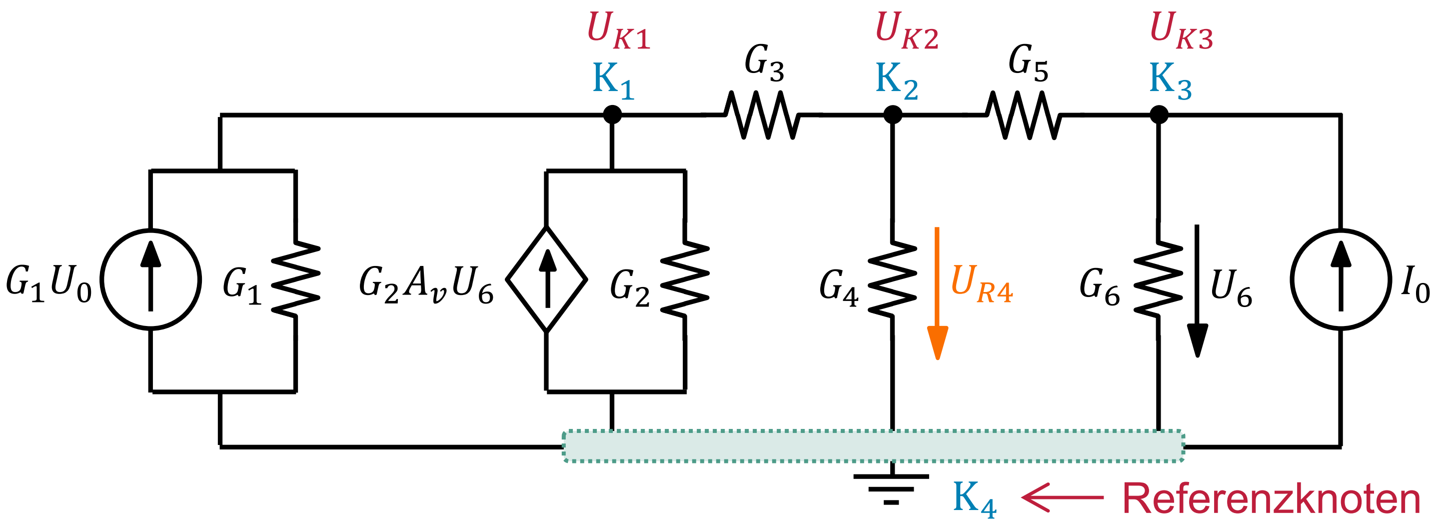
Beispiel mit gesteuerter Quelle



$$G_i = \frac{1}{R_i}, i = 1, \dots, 6$$

- ✓ Vorbereiten des Netzwerks
- → Referenzknoten festlegen
  Restlichen Knoten Potential zuordnen
- Aufstellen des Gleichungssystems
- Berechnen der gesuchten Größen

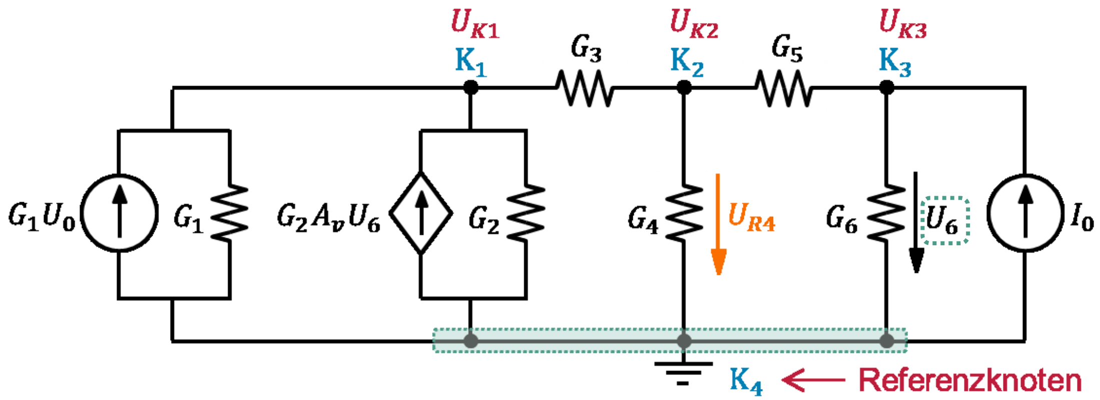
Beispiel mit gesteuerter Quelle



$$G_i = \frac{1}{R_i}, i = 1, \ldots, 6$$

- ✓ Vorbereiten des Netzwerks
- ✓ Referenzknoten festlegen
Restlichen Knoten Potential zuordnen
- → Aufstellen des Gleichungssystems
- Berechnen der gesuchten Größen

Beispiel mit gesteuerter Quelle - Gleichungssystem



Enthält das Netzwerk gesteuerte Quellen?

Ja

- Gleichungssystem in **zwei** Schritten aufstellen
  - Schritt 1: Gleichungssystem so aufstellen, als ob die gesteuerten Quellen fest wären
    $\underline{\underline{Y}}' \underline{U}_K = \underline{I}_q'$
    $\underline{\underline{Y}}'$ symmetrisch
  - Schritt 2: Steuerungen berücksichtigen
    $\Rightarrow \boxed{\underline{\underline{Y}}\ \underline{U}_K = \underline{I}_q}$
    $\underline{\underline{Y}}$ in der Regel **nicht** symmetrisch

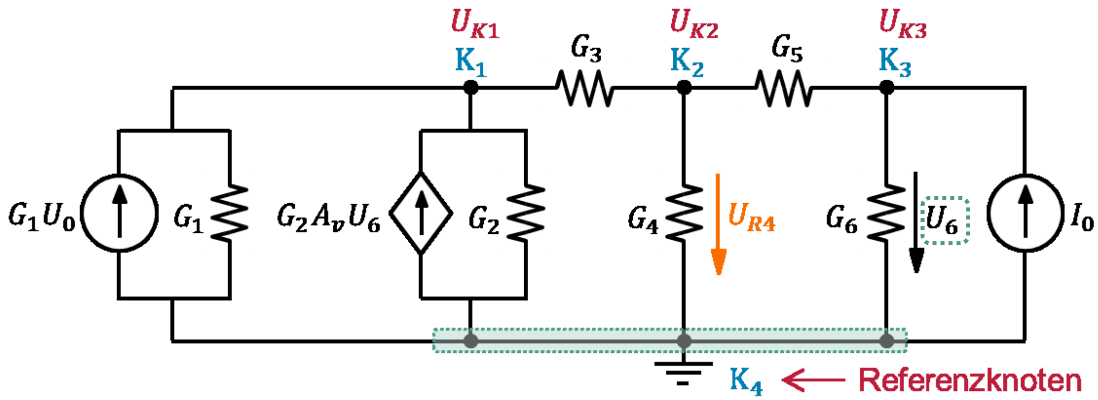
Nein

- Gleichungssystem in **einem** Schritt aufstellbar

$$\boxed{\underline{\underline{Y}}\ \underline{U}_K = \underline{I}_q}$$

$\underline{\underline{Y}}$ symmetrisch

Beispiel mit gesteuerter Quelle - Gleichungssystem



Y'_{ii}: Σ Admittanzen der mit Knoten i verbundenen Bauelemente

Y'_{ik}: $i \neq k$
$-(\Sigma$ Admittanzen zwischen Knoten i und $k)$;
0, wenn keine Admittanz zwischen Knoten i und k;
$Y'_{ik} = Y'_{ki} \Rightarrow$ Zur Hauptdiagonalen symmetrische Matrix

I'_{qi} = Σ der mit Knoten i verbundenen Stromquellen (feste und gesteuerte);
Quellstrom fließt in Knoten $i \Rightarrow$ Eintrag als positiver Wert
Quellstrom fließt aus Knoten $i \Rightarrow$ Eintrag als negativer Wert

$$\underbrace{\begin{pmatrix} G_1+G_2+G_3 & -G_3 & 0 \\ -G_3 & G_3+G_4+G_5 & -G_5 \\ 0 & -G_5 & G_5+G_6 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{Y}}'} \underbrace{\begin{pmatrix} U_{K1} \\ U_{K2} \\ U_{K3} \end{pmatrix}}_{\underline{U}_K} = \underbrace{\begin{pmatrix} G_1U_0 + G_2A_v\boxed{U_6} \\ 0 \\ I_0 \end{pmatrix}}_{\underline{I}'_q}$$

Beispiel mit gesteuerter Quelle

$$\underbrace{\begin{pmatrix} G_1+G_2+G_3 & -G_3 & 0 \\ -G_3 & G_3+G_4+G_5 & -G_5 \\ 0 & -G_5 & G_5+G_6 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{Y}}'} \underbrace{\begin{pmatrix} U_{K1} \\ U_{K2} \\ U_{K3} \end{pmatrix}}_{\underline{U}_K} = \underbrace{\begin{pmatrix} G_1U_0 + G_2A_v\boxed{U_6} \\ 0 \\ I_0 \end{pmatrix}}_{\underline{I}_q'}$$

Schritt 2: Steuerungen berücksichtigen

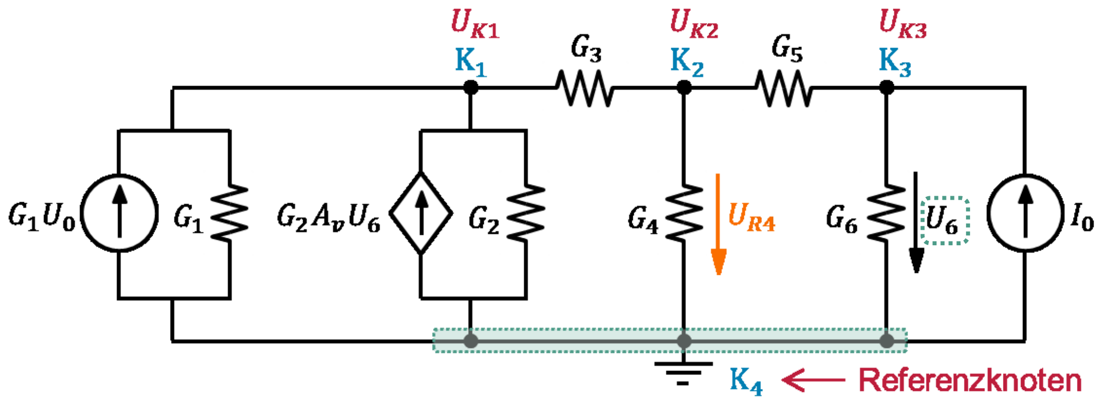
- Wenn gesteuerte Quellen in $\underline{I}_q'$ sind
  - $\underline{I}_q'$ abhängig von $\underline{U}_K$
  - Zerlege $\underline{I}_q'$ in festen und über $\underline{U}_K$ gesteuerten Anteil
  - Drücke steuernde Ströme durch Knotenpotentiale aus

$$\underline{I}_q' = \underline{I}_q + \underline{\underline{Y}}_{steuer}\underline{U}_K$$

$$\underline{\underline{Y}}\ \underline{U}_K = \left(\underline{\underline{Y}}' - \underline{\underline{Y}}_{steuer}\right)\underline{U}_K = \underline{I}_q$$

$\underline{\underline{Y}}$ in der Regel **nicht** symmetrisch

Beispiel mit gesteuerter Quelle



U_{K3}

$$\underbrace{\begin{pmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 & 0 \\ -G_3 & G_3 + G_4 + G_5 & -G_5 \\ 0 & -G_5 & G_5 + G_6 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{Y}}'} \underbrace{\begin{pmatrix} U_{K1} \\ U_{K2} \\ U_{K3} \end{pmatrix}}_{\underline{U}_K} = \underbrace{\begin{pmatrix} G_1 U_0 + G_2 A_v \boxed{\cancel{U_6}} \\ 0 \\ I_0 \end{pmatrix}}_{\underline{I}_q'}$$

Steuerung berücksichtigen: $\boxed{U_6 = U_{K3}}$

- Der Term $G_2 A_v U_{K3}$ muss auf die linke Seite verschoben werden, weil man eine Abhängigkeit von U_{K3} hat. Die Matrix $\underline{\underline{Y}}'$ muss entsprechend angepasst werden.
- Nach der Verschiebung: Der Vektor $\underline{I}_q$ enthält nur feste Quellen!

Beispiel mit gesteuerter Quelle

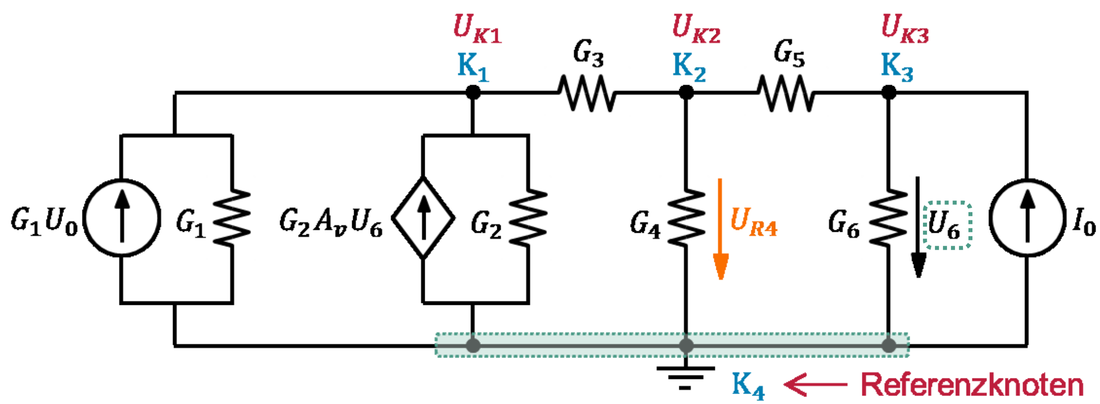
$$(G_1 + G_2 + G_3) \cdot U_{K1} - G_3 \cdot U_{K2} + 0 \cdot U_{K3} = G_1 U_0 + \boxed{}$$

$$(G_1 + G_2 + G_3) \cdot U_{K1} - G_3 \cdot U_{K2} - G_2 A_v \cdot U_{K3} = G_1 U_0$$

- Aktualisierte Matrix:

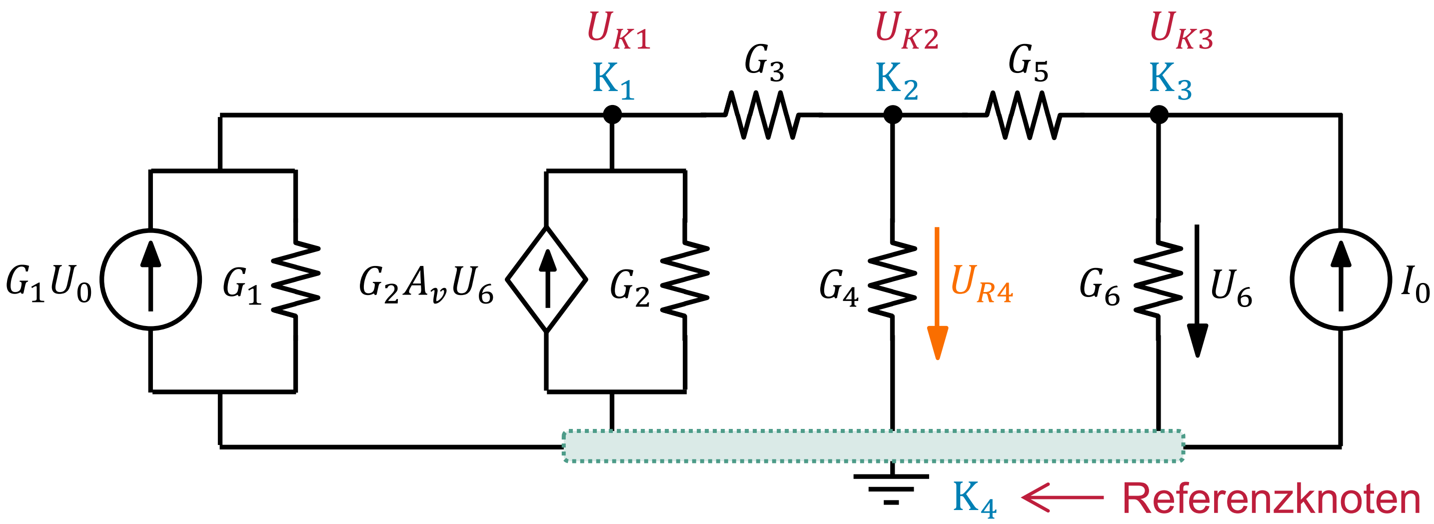
$$\underbrace{\begin{pmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 & -G_2 A_v \\ -G_3 & G_3 + G_4 + G_5 & -G_5 \\ 0 & -G_5 & G_5 + G_6 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{Y}}} \underbrace{\begin{pmatrix} U_{K1} \\ U_{K2} \\ U_{K3} \end{pmatrix}}_{\underline{U_K}} = \underbrace{\begin{pmatrix} G_1 U_0 \\ 0 \\ I_0 \end{pmatrix}}_{\underline{I'_q}}$$

- Die gesteuerte Quelle wirkt auf den **Knoten 1 (K1)** und wird gesteuert vom **Knoten 3 (K3)**
- Deshalb erscheint der Multiplikationsfaktor als Eintrag in der Y-Matrix an der Stelle $\boldsymbol{Y_{13}}$

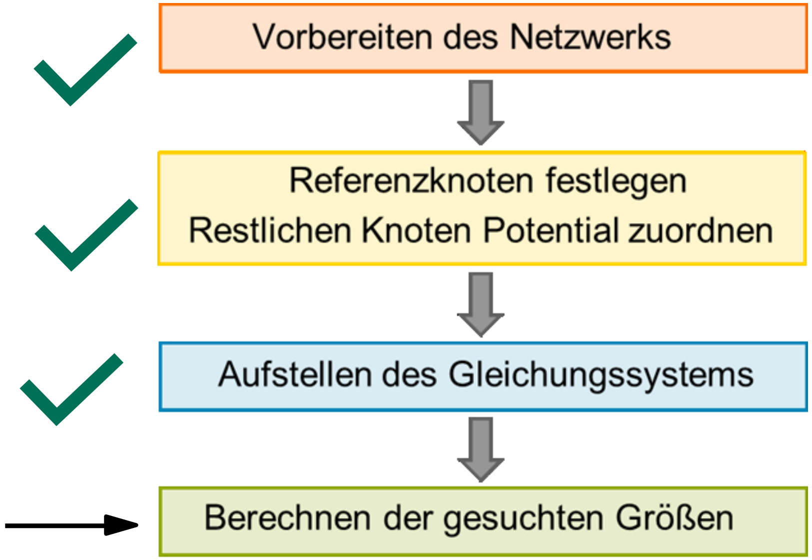


$$\underline{\underline{Y}} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \boxed{Y_{13}} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{pmatrix}$$

Beispiel mit gesteuerter Quelle



$$G_i = \frac{1}{R_i}, i = 1, \ldots, 6$$



Beispiel mit gesteuerter Quelle

Berechnen der Spannung U_{R4} (Cramersche Regel)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 & -G_2 A_v \\ -G_3 & G_3 + G_4 + G_5 & -G_5 \\ 0 & -G_5 & G_5 + G_6 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{Y}}} \underbrace{\begin{pmatrix} U_{K1} \\ U_{K2} \\ U_{K3} \end{pmatrix}}_{\underline{U}_K} = \underbrace{\begin{pmatrix} G_1 U_0 \\ 0 \\ I_0 \end{pmatrix}}_{\underline{I}'_q}$$

$$U_{R4} = U_{K2} = \frac{\begin{vmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & G_1 U_0 & -G_2 A_v \\ -G_3 & 0 & -G_5 \\ 0 & I_0 & G_5 + G_6 \end{vmatrix}}{\det \underline{\underline{Y}}}$$

Beispiel mit gesteuerter Quelle

Berechnen der Spannung U_{R4} mit

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R \rightarrow G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = G_5 = G_6 = G$$

$$U_{R4} = U_{K2} = \frac{\begin{vmatrix} 3G & GU_0 & -GA_v \\ -G & 0 & -G \\ 0 & I_0 & 2G \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3G & -G & -GA_v \\ -G & 3G & -G \\ 0 & -G & 2G \end{vmatrix}} = \frac{G^2 I_0 (3 + A_v) + 2G^3 U_0}{G^3 (13 - A_v)}$$

$$\begin{vmatrix} 3G & GU_0 & -GA_v \\ -G & 0 & -G \\ 0 & I_0 & 2G \end{vmatrix} = 3G \begin{vmatrix} 0 & -G \\ I_0 & 2G \end{vmatrix} + G \begin{vmatrix} GU_0 & -GA_v \\ I_0 & 2G \end{vmatrix} + 0 = G^2 I_0 (3 + A_v) + 2G^3 U_0$$

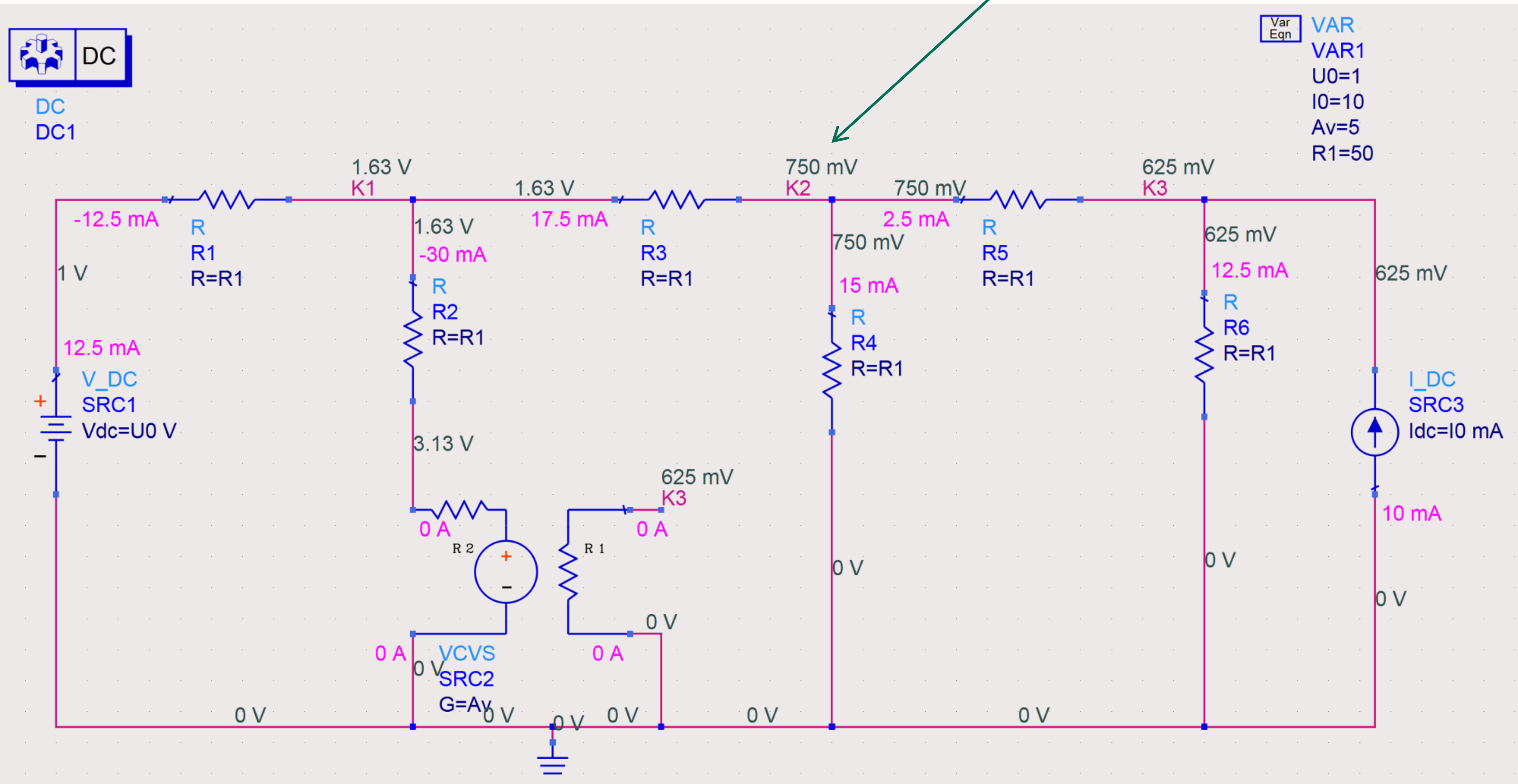
$$\boxed{U_{K2} = \frac{I_0}{G} \frac{3 + A_v}{13 - A_v} + \frac{2U_0}{13 - A_v} = \frac{I_0 R (3 + A_v)}{13 - A_v} + \frac{2U_0}{13 - A_v}}$$

Beispiel mit gesteuerter Quelle

Berechnen der Spannung U_{R4} mit z.B. $U_0 = 1\text{V},\ I_0 = 10\text{ mA},\ A_v = 5,\ R = 50\Omega$

$$U_{R4} = U_{K2} = \frac{I_0 R(3 + A_v)}{13 - A_v} + \frac{2U_0}{13 - A_v} = 750\text{ mV}$$

Simulationsergebnis



Methoden zur Berechnung von Netzwerken - Übersicht

- Motivation für die Einführung von Lösungsverfahren
- Knotenpotentialverfahren
- **Maschenimpedanzverfahren**
- Modifiziertes Knotenpotentialverfahren (MNA)

Maschenimpedanzverfahren

Vorbereiten des Netzwerks

↓

Fundamentalmaschen festlegen

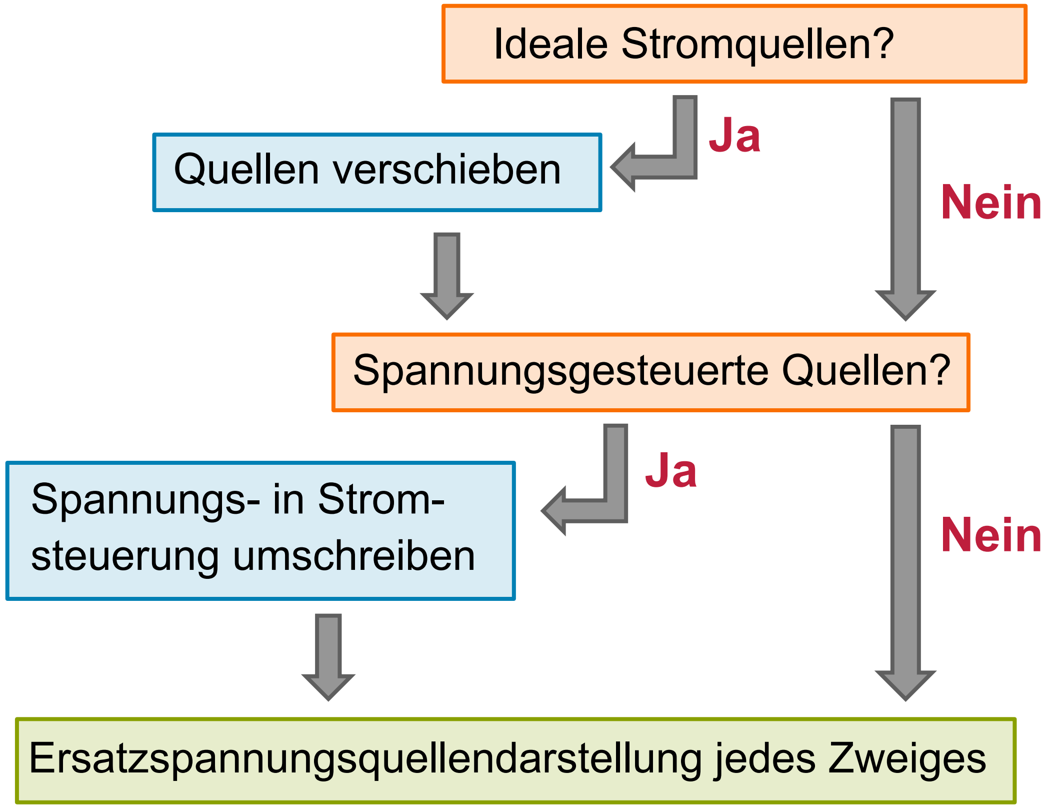
↓

Gleichungssystem aufstellen

↓

Gesuchte Größen berechnen

Vorbereiten des Netzwerks



Fundamentalmaschen (FM) festlegen

➡ Topologische Grundbegriffe

Orientierten Graphen zeichnen

↓

Festlegen eines Baums

↓

Fundamentalmaschen und Maschenströme

Zur Erinnerung:

- **Ein** Verbindungszweig (VZ) pro Fundamentalmasche (FM)
- Bei den FM-Gleichungen werden die VZ-Spannungen positiv gezählt.

Gleichungssystem aufstellen - I

Enthält das Netzwerk gesteuerte Quellen?

Ja

- Gleichungssystem in **zwei** Schritten aufstellen
  - **Schritt 1**: Gleichungssystem so aufstellen, als ob die gesteuerten Quellen fest wären
    $\underline{\underline{Z}}' \underline{I}_M = \underline{U}_q'$
    $\underline{\underline{Z}}'$ symmetrisch
  - **Schritt 2**: Steuerungen berücksichtigen

    ⇨ $\boxed{\underline{\underline{Z}}\ \underline{I}_M = \underline{U}_q}$

    $\underline{\underline{Z}}$ in der Regel **nicht** symmetrisch

Nein

- Gleichungssystem in **einem** Schritt aufstellbar

  ⇩

  $\boxed{\underline{\underline{Z}}\ \underline{I}_M = \underline{U}_q}$

  $\underline{\underline{Z}}$ symmetrisch

Gleichungssystem aufstellen - II

Methoden zur Aufstellung des Gleichungssystems

mit Hilfe der Kirchhoffschen Maschengleichungen

oder

direkt in Matrixschreibweise

(**Schritt 1** bei Netzwerken mit gesteuerten Quellen)

Gleichungssystem mit Hilfe der Kirchhoffschen Maschengleichungen aufstellen

$m = z - k + 1$ Kirchhoffsche Maschengleichungen aufstellen

↓

Spannungsquellen auf die rechte Seite (feste und gesteuerte)

↓

Zweige mit Impedanzen: Zweigströme durch Maschenströme ausdrücken

↓

Gleichungssystem in Matrixform umschreiben

$$\sum_{k=1}^{n} U_k = 0$$

Vorzeichenkonvention muss beachtet werden!

(Schritt 1 bei Netzwerken mit gesteuerten Quellen)

Gleichungssystem aufstellen - IV

Gleichungssystem direkt in Matrixschreibweise aufstellen

(Schritt 1 bei Netzwerken mit gesteuerten Quellen)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Z'_{11} & \cdots & Z'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z'_{n1} & \cdots & Z'_{nn} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{Z}}'} \underbrace{\begin{bmatrix} I_{M1} \\ \vdots \\ I_{Mn} \end{bmatrix}}_{\underline{I}_M} = \underbrace{\begin{bmatrix} U'_{q1} \\ \vdots \\ U'_{qn} \end{bmatrix}}_{\underline{U}'_q}$$

Z'_{ii}: Σ Impedanzen in Masche i

Z'_{ik}: $i \neq k$
- $\pm\Sigma$ Impedanzen, die zur Masche i und k gehören
- 0, Masche i und k haben keine gemeinsame Impedanz
- $+$, Maschenumlaufrichtungen beider Maschen stimmen überein;
- $-$, sonst
- $Z'_{ik} = Z'_{ki} \Rightarrow$ Zur Hauptdiagonalen symmetrische Matrix

U'_{qi} = $\pm\Sigma$ der Spannungsquellen (feste und gesteuerte) in Masche i;
- $-$, Zählpfeilrichtung und Maschenumlaufrichtung stimmen überein
- $+$, sonst

Bei Netzwerken nur mit festen Quellen gilt: $\underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{Z}}'$, $\underline{U}_q = \underline{U}'_q$

Schritt 2: Steuerungen berücksichtigen

$$\underline{\underline{Z}}'\underline{I}_M = \underline{U}_q'$$

- Wenn gesteuerte Quellen in $\underline{U}_q'$ sind
  - $\underline{U}_q'$ abhängig von $\underline{I}_M$
  - Zerlege $\underline{U}_q'$ in festen und über $\underline{I}_M$ gesteuerten Anteil
  - Drücke steuernde Ströme durch Maschenströme aus

$$\underline{U}_q' = \underline{U}_q + \underline{\underline{Z}}_{steuer}\underline{I}_M$$

$$\underline{\underline{Z}}\ \underline{I}_M = \left(\underline{\underline{Z}}' - \underline{\underline{Z}}_{steuer}\right)\underline{I}_M = \underline{U}_q$$

$\underline{\underline{Z}}$ in der Regel **nicht** symmetrisch

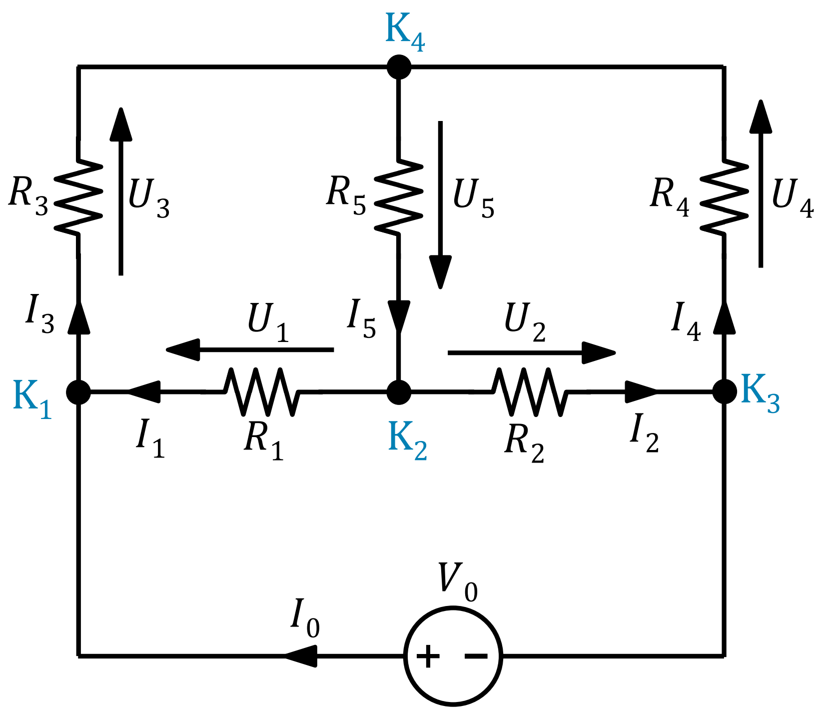
$$\boxed{\underline{\underline{Z}}\ \underline{I}_M = \underline{U}_q}$$

Beispiel Brückenschaltung

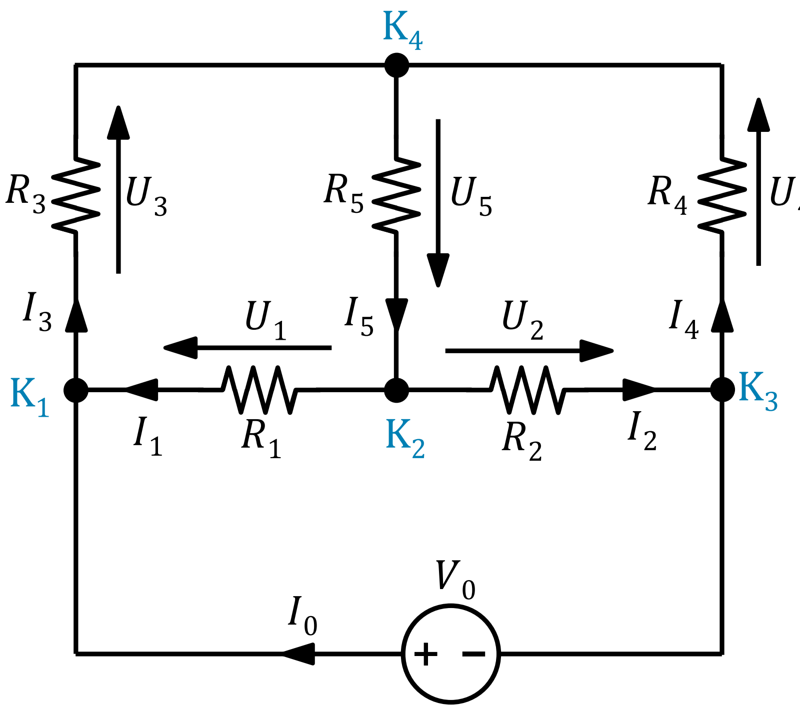
Netzwerk mit 5 Widerständen $R_i > 0, i = 1, \ldots, 5$

und einer festen idealen Spannungsquelle U_0.

Berechnen Sie die Spannung $\boldsymbol{U_4}$.



Beispiel Brückenschaltung



→ Vorbereiten des Netzwerks

⇩

Fundamentalmaschen festlegen

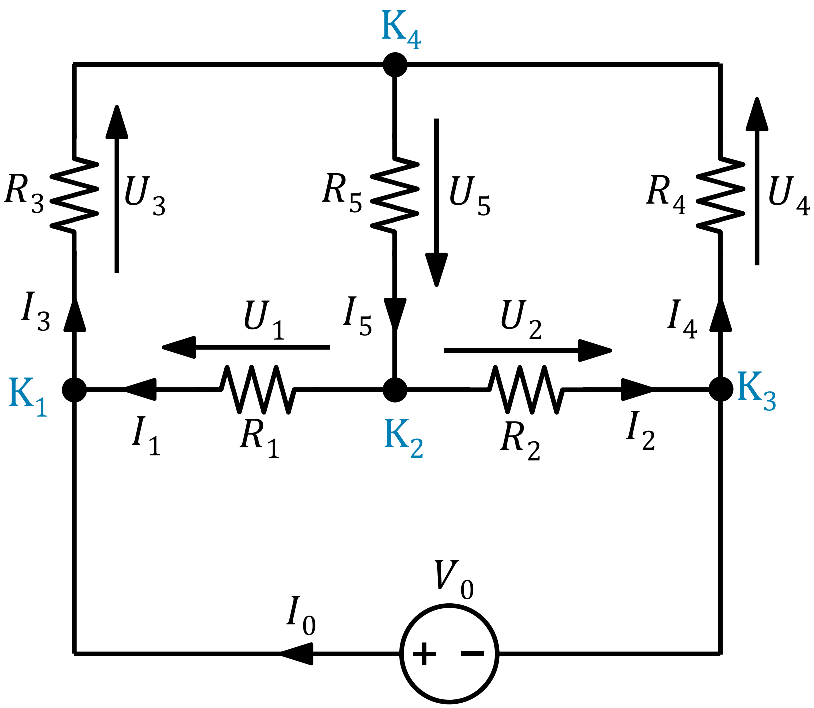
⇩

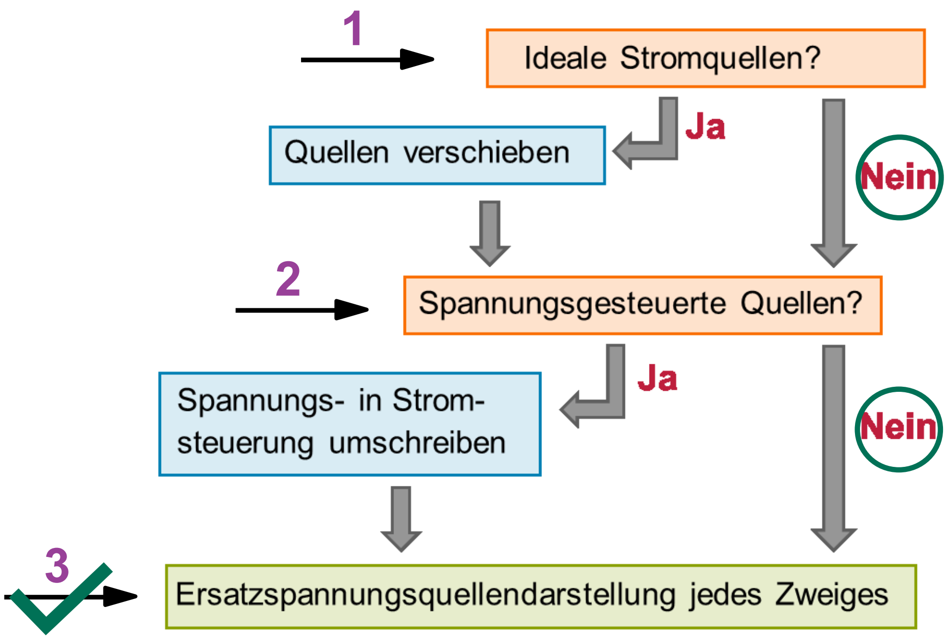
Gleichungssystem aufstellen

⇩

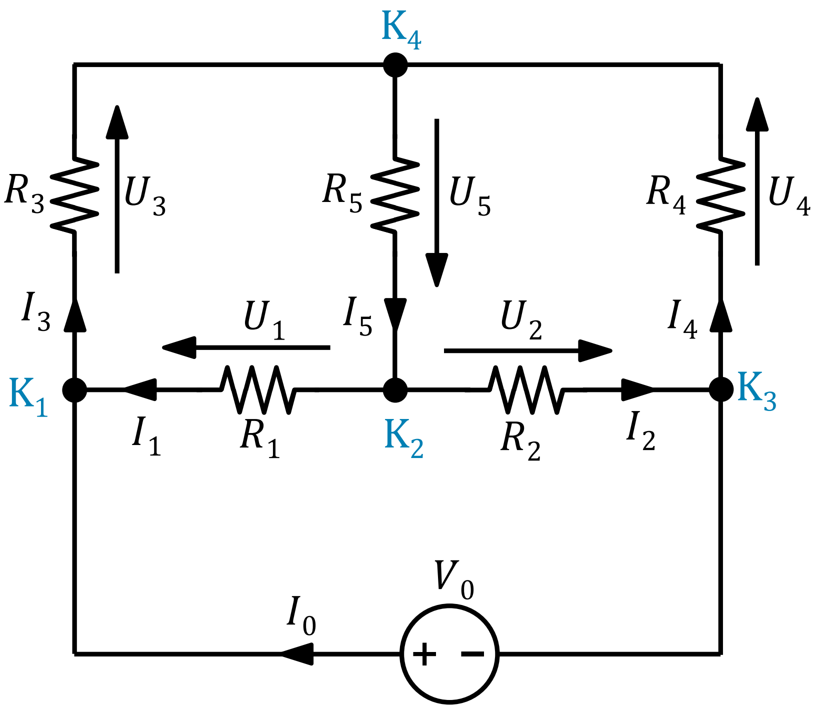
Gesuchte Größen berechnen

Beispiel Brückenschaltung



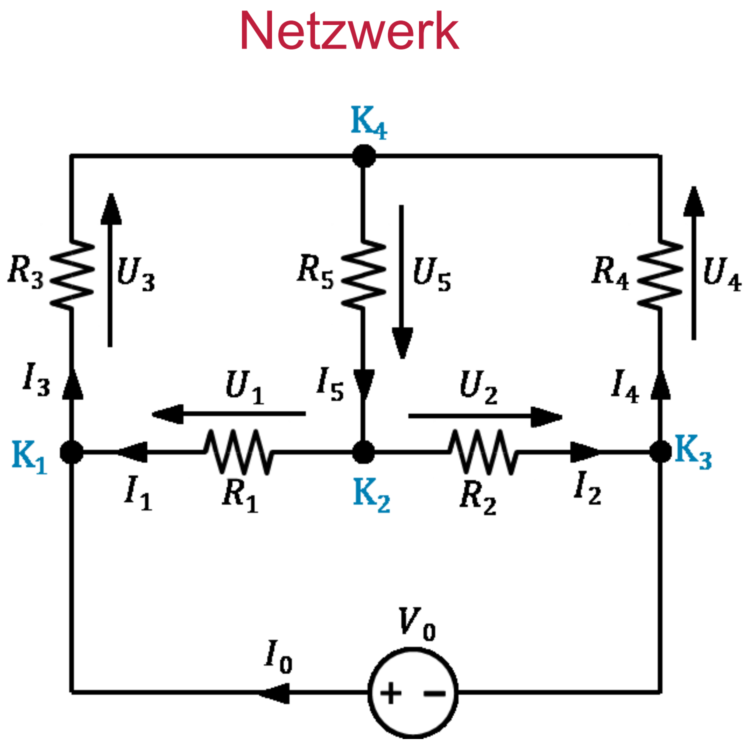


Beispiel Brückenschaltung



- ✓ Vorbereiten des Netzwerks
- → Fundamentalmaschen festlegen
- Gleichungssystem aufstellen
- Gesuchte Größen berechnen

Beispiel Brückenschaltung

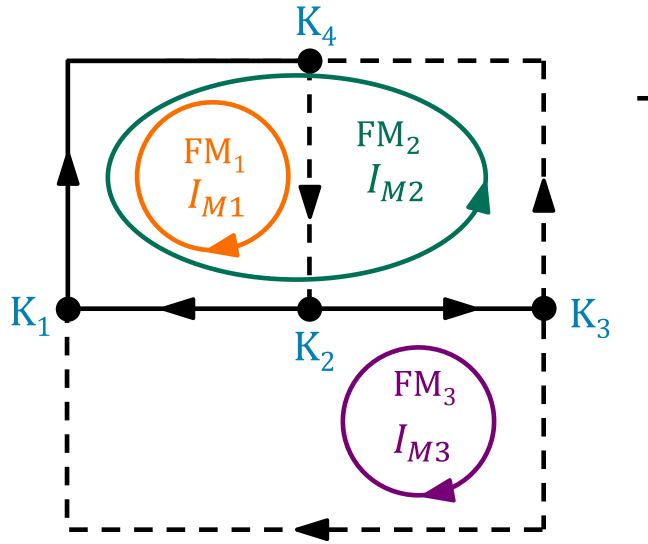


1 → Orientierten Graphen zeichnen

2 → Festlegen eines Baums

3 → Fundamentalmaschen und Maschenströme

Anzahl linear unabhängiger Maschen:
$m = z - k + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$



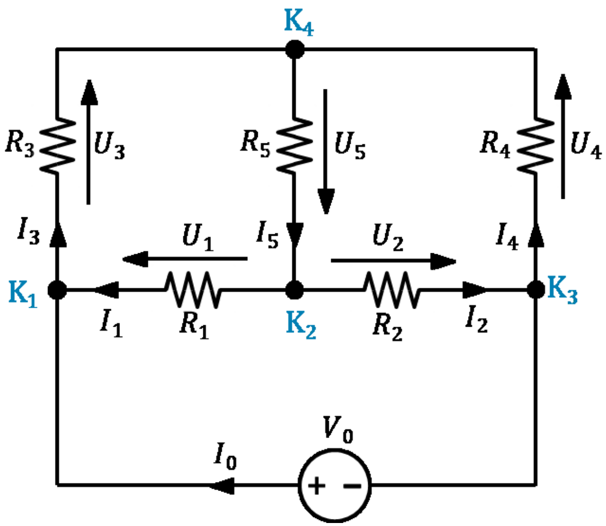
$I_{M1} = I_5$

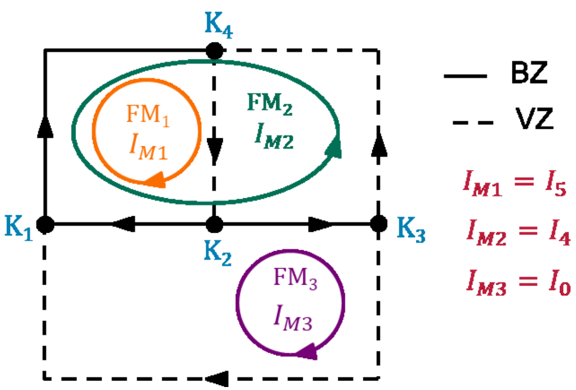
$I_{M2} = I_4$

$I_{M3} = I_0$

BZ = Baumzweig
VZ = Verbindungszweig

Beispiel Brückenschaltung





$I_{M1} = I_5$

$I_{M2} = I_4$

$I_{M3} = I_0$

✓ Vorbereiten des Netzwerks

⇩

✓ Fundamentalmaschen festlegen

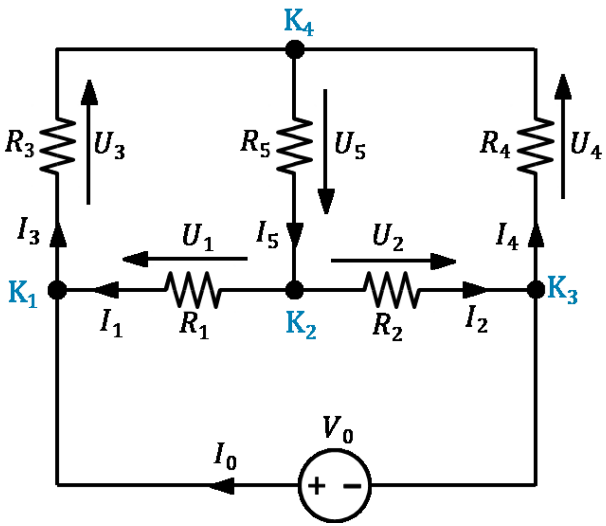
⇩

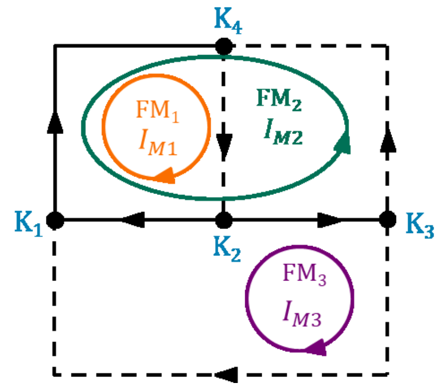
→ Gleichungssystem aufstellen

⇩

Gesuchte Größen berechnen

Beispiel Brückenschaltung





— BZ

- - VZ

$I_{M1} = I_5$

$I_{M2} = I_4$

$I_{M3} = I_0$

→ Enthält das Netzwerk gesteuerte Quellen?

Ja

- Gleichungssystem in **zwei** Schritten aufstellen
  - Schritt 1: Gleichungssystem so aufstellen, als ob die gesteuerten Quellen fest wären
    $\underline{\underline{Z}}' \underline{I}_M = \underline{U}_q'$
    $\underline{\underline{Z}}'$ symmetrisch
  - Schritt 2: Steuerungen berücksichtigen

    ⇒ $\underline{\underline{Z}}\ \underline{I}_M = \underline{U}_q$

    $\underline{\underline{Z}}$ in der Regel **nicht** symmetrisch

Nein

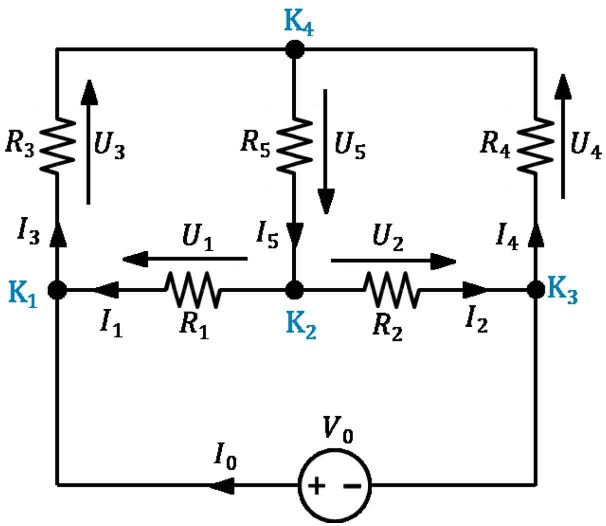
- Gleichungssystem in **einem** Schritt aufstellbar

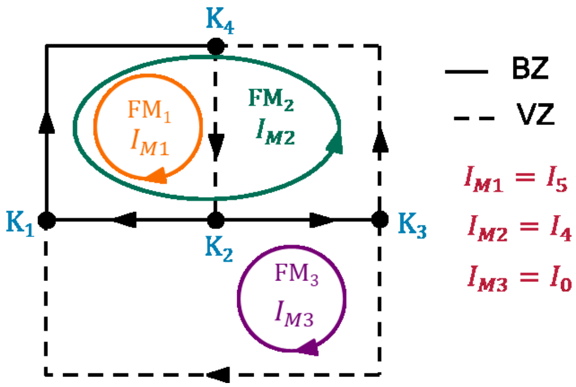
  ⇓

  $\underline{\underline{Z}}\ \underline{I}_M = \underline{U}_q$

  $\underline{\underline{Z}}$ symmetrisch

Beispiel Brückenschaltung





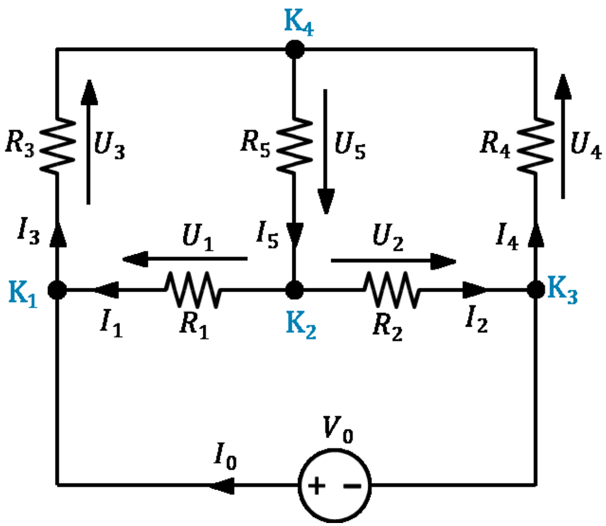
Methoden zur Aufstellung des Gleichungssystems

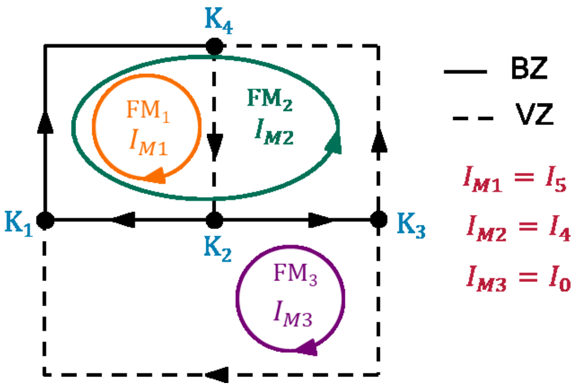
mit Hilfe der Kirchhoffschen Maschengleichungen

oder

direkt in Matrixschreibweise

Beispiel Brückenschaltung





$m = z - k + 1$ Kirchhoffsche Maschengleichungen aufstellen

⇓

Spannungsquellen auf die rechte Seite (feste und gesteuerte)

⇓

Zweige mit Impedanzen: Zweigströme durch Maschenströme ausdrücken

⇓

Gleichungssystem in Matrixform umschreiben

$$\begin{aligned} FM_1&: U_5 + U_1 + U_3 = 0 \\ FM_2&: U_4 - U_3 - U_1 + U_2 = 0 \\ FM_3&: -V_0 - U_1 + U_2 = 0 \end{aligned}$$

⇓

$$\begin{aligned} FM_1&: R_5 I_5 + R_1 I_1 + R_3 I_3 = 0 \\ FM_2&: R_4 I_4 - R_3 I_3 - R_1 I_1 + R_2 I_2 = 0 \\ FM_3&: -R_1 I_1 + R_2 I_2 = V_0 \end{aligned}$$

⇓

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{M1} - I_{M2} - I_{M3} & I_4 &= I_{M2} \\ I_2 &= I_{M2} + I_{M3} & I_5 &= I_{M1} \\ I_3 &= I_{M1} - I_{M2} & I_0 &= I_{M3} \end{aligned}$$

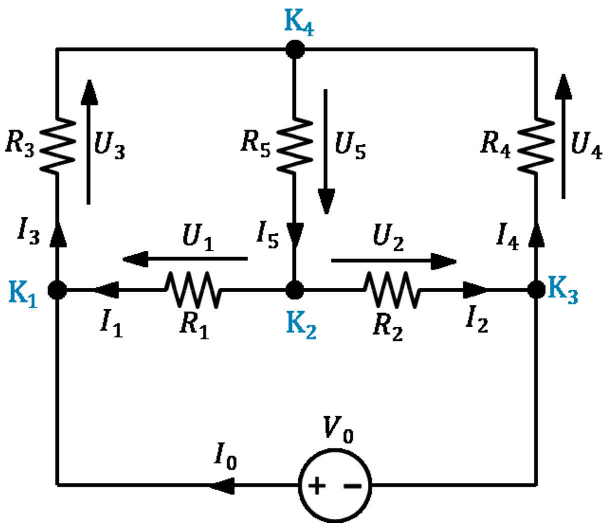
⇓

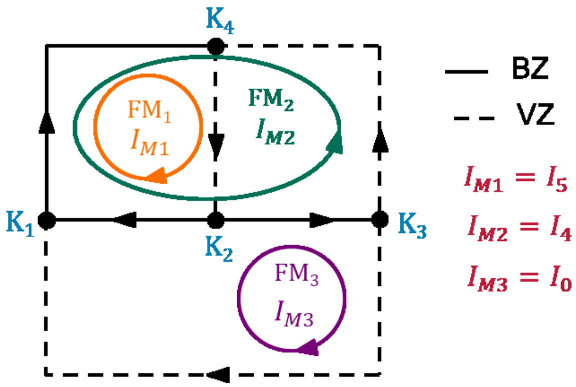
$$\begin{aligned} FM_1&: (R_1+R_3+R_5)I_{M1} - (R_1+R_3)I_{M2} - R_1 I_{M3} = 0 \\ FM_2&: -(R_1+R_3)I_{M1} + (R_1+R_2+R_3+R_4)I_{M2} + (R_1+R_2)I_{M3} = 0 \\ FM_3&: -R_1 I_{M1} + (R_1+R_2)I_{M2} + (R_1+R_2)I_{M3} = V_0 \end{aligned}$$

⇓

$$\underbrace{\begin{pmatrix} R_1+R_3+R_5 & -(R_1+R_3) & -R_1 \\ -(R_1+R_3) & R_1+R_2+R_3+R_4 & R_1+R_2 \\ -R_1 & R_1+R_2 & R_1+R_2 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{Z}}} \underbrace{\begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix}}_{\underline{I_M}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_0 \end{pmatrix}}_{\underline{U_q}}$$

Beispiel Brückenschaltung





$I_{M1} = I_5$

$I_{M2} = I_4$

$I_{M3} = I_0$

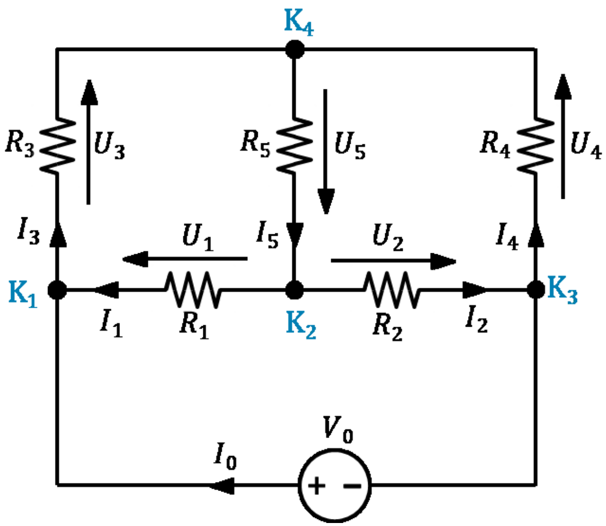
Methoden zur Aufstellung des Gleichungssystems

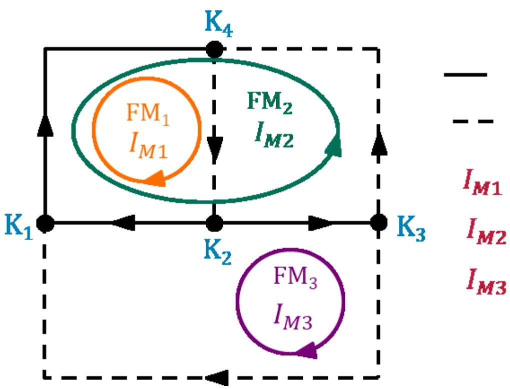
mit Hilfe der Kirchhoffschen Maschengleichungen

oder

direkt in Matrixschreibweise

Beispiel Brückenschaltung





$I_{M1} = I_5$

$I_{M2} = I_4$

$I_{M3} = I_0$

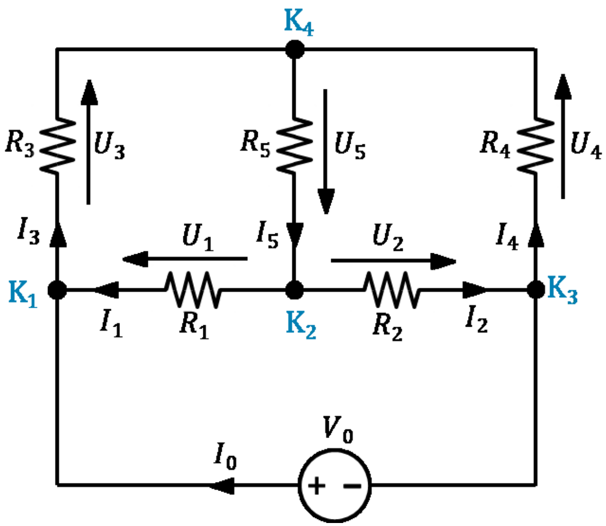
Z'_{ii}: Σ Impedanzen in Masche i

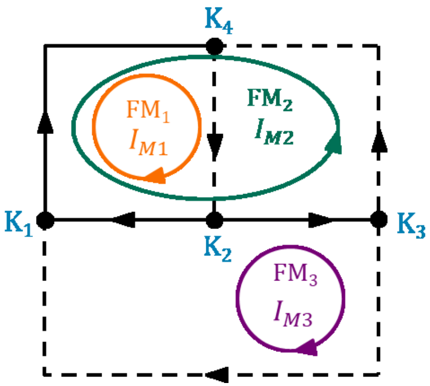
Z'_{ik}: $\pm\Sigma$ Impedanzen, die zur Masche i und k gehören
$i \neq k$ 0, Masche i und k haben keine gemeinsame Impedanz
+, Maschenumlaufrichtungen beider Maschen stimmen überein;
−, sonst
$Z'_{ik} = Z'_{ki} \Rightarrow$ Zur Hauptdiagonalen symmetrische Matrix

U'_{qi} = $\pm\Sigma$ der Spannungsquellen (feste und gesteuerte) in Masche i;
−, Zählpfeilrichtung und Maschenumlaufrichtung stimmen überein
+ , sonst

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 + R_5 & -(R_1 + R_3) & -R_1 \\ -(R_1 + R_3) & R_1 + R_2 + R_3 + R_4 & R_1 + R_2 \\ -R_1 & R_1 + R_2 & R_1 + R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ V_0 \end{bmatrix}$$

Beispiel Brückenschaltung

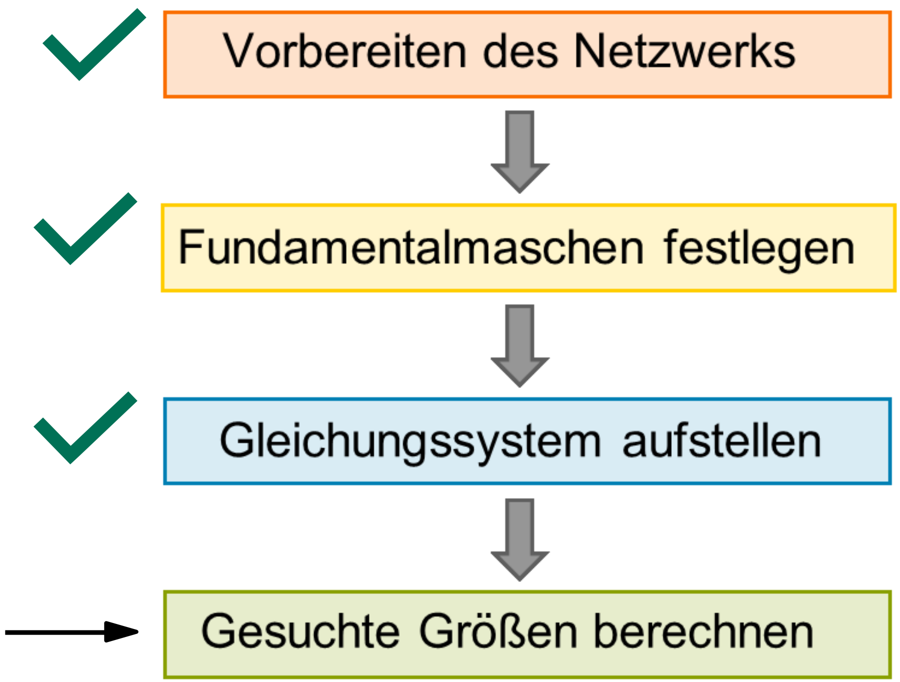




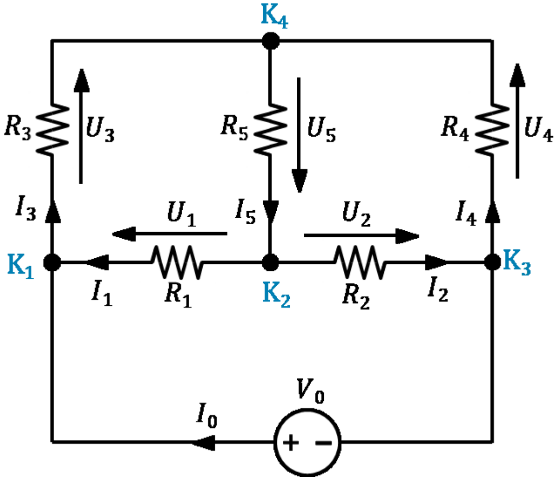
$I_{M1} = I_5$

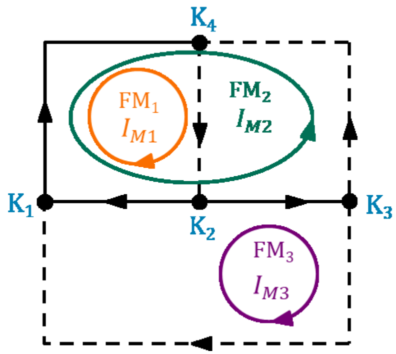
$I_{M2} = I_4$

$I_{M3} = I_0$



Beispiel Brückenschaltung





— BZ

- - VZ

$I_{M1} = I_5$

$I_{M2} = I_4$

$I_{M3} = I_0$

Berechnen von U_4 (Cramersche Regel)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} R_1+R_3+R_5 & -(R_1+R_3) & -R_1 \\ -(R_1+R_3) & R_1+R_2+R_3+R_4 & R_1+R_2 \\ -R_1 & R_1+R_2 & R_1+R_2 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{Z}}} \underbrace{\begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix}}_{\underline{I_M}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_0 \end{pmatrix}}_{\underline{U_q}}$$

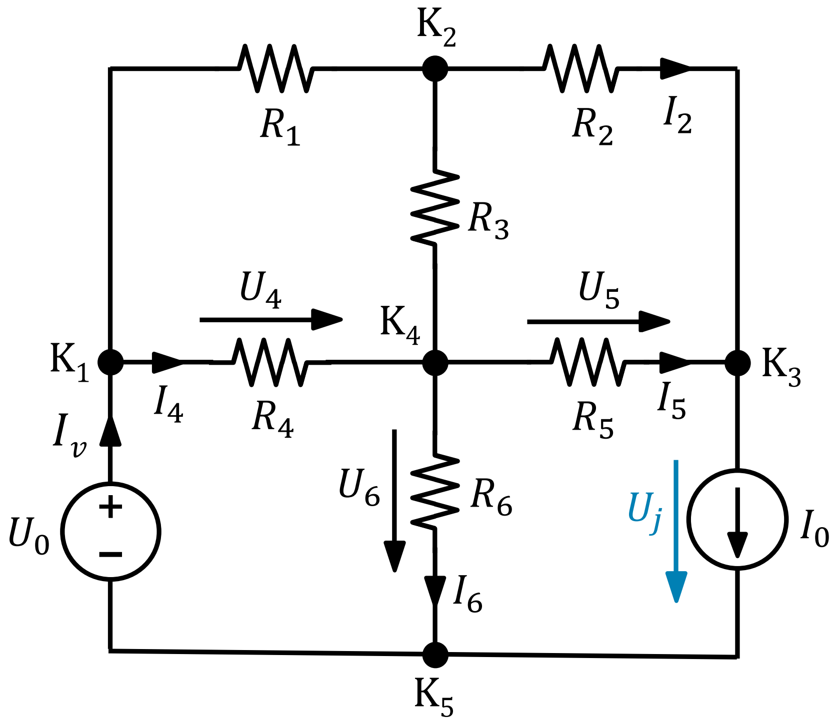
$$U_4 = R_4 I_4 = R_4 I_{M2} = R_4 \frac{\begin{vmatrix} R_1+R_3+R_5 & 0 & -R_1 \\ -(R_1+R_3) & 0 & R_1+R_2 \\ -R_1 & V_0 & R_1+R_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1+R_3+R_5 & -(R_1+R_3) & -R_1 \\ -(R_1+R_3) & R_1+R_2+R_3+R_4 & R_1+R_2 \\ -R_1 & R_1+R_2 & R_1+R_2 \end{vmatrix}}$$

$$= -R_4 \frac{(R_1+R_2+R_3)(R_1+R_2)+R_1(R_1+R_3)}{R_1R_2R_4+(R_1+R_2)(R_2+R_3)(R_3+R_4)} V_0$$

Beispiel mit Stromquellenverschiebung

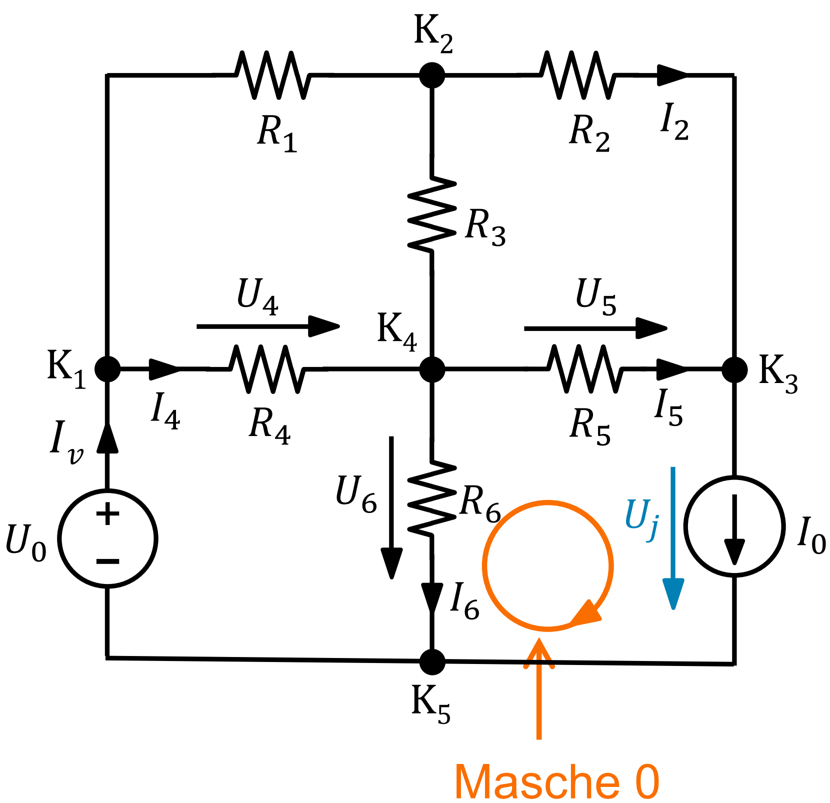
Netzwerk mit 6 Widerständen $R_i > 0, i = 1, \ldots, 6$,
einer festen idealen Spannungsquelle U_0 und
einer festen idealen Stromquelle I_0.

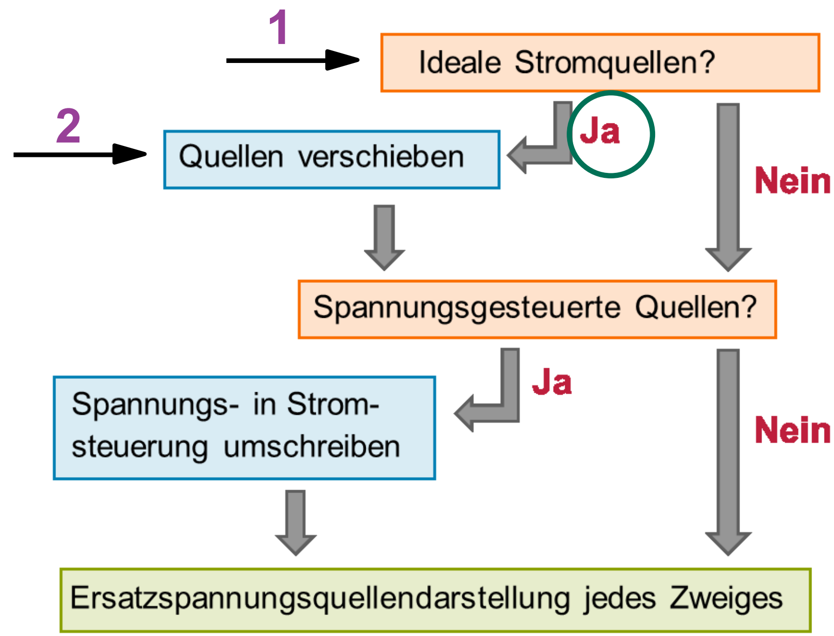
Berechnen Sie die Spannung U_4.



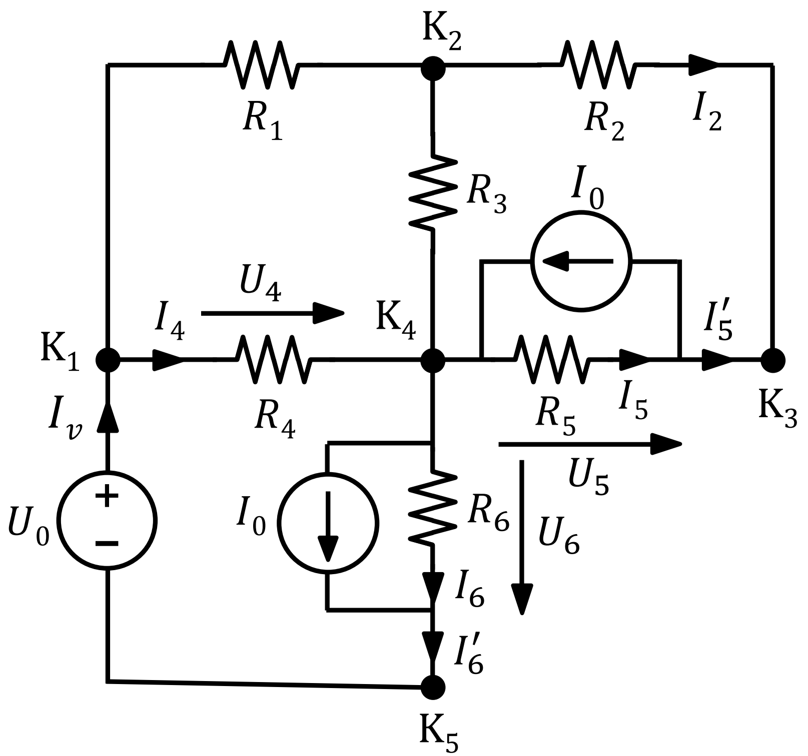
Technische Universität Braunschweig

Beispiel mit Stromquellenverschiebung





Netzwerk nach Stromquellenverschiebung



Rücktransformationsgleichungen

$$I_5' = I_5 - I_0 \Rightarrow I_5 = I_5' + I_0$$

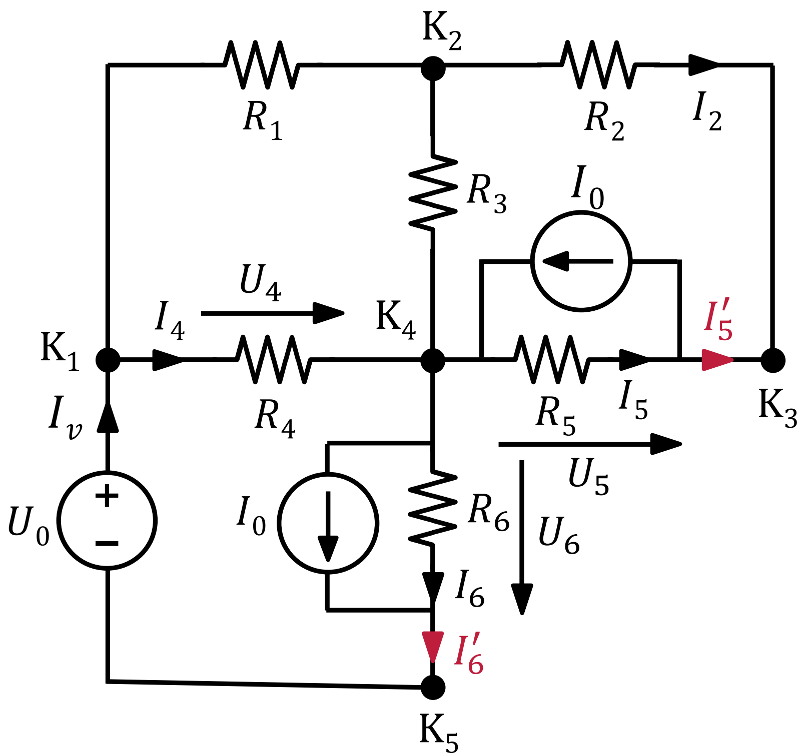
$$I_6' = I_6 + I_0 \Rightarrow I_6 = I_6' - I_0$$

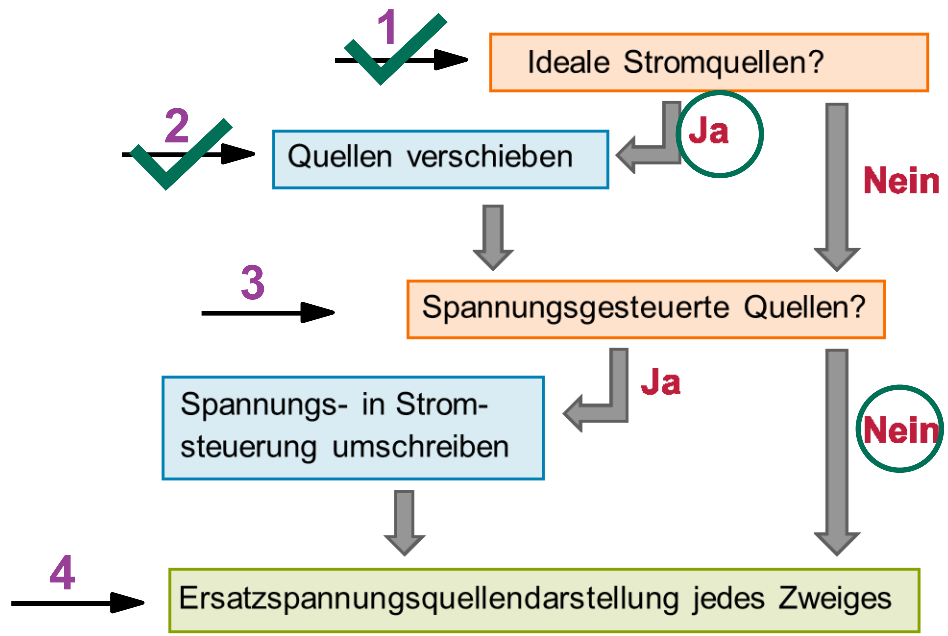
$$U_j = U_6 - U_5$$

Rückgewinnungsgleichung für U_j

Beispiel mit Stromquellenverschiebung

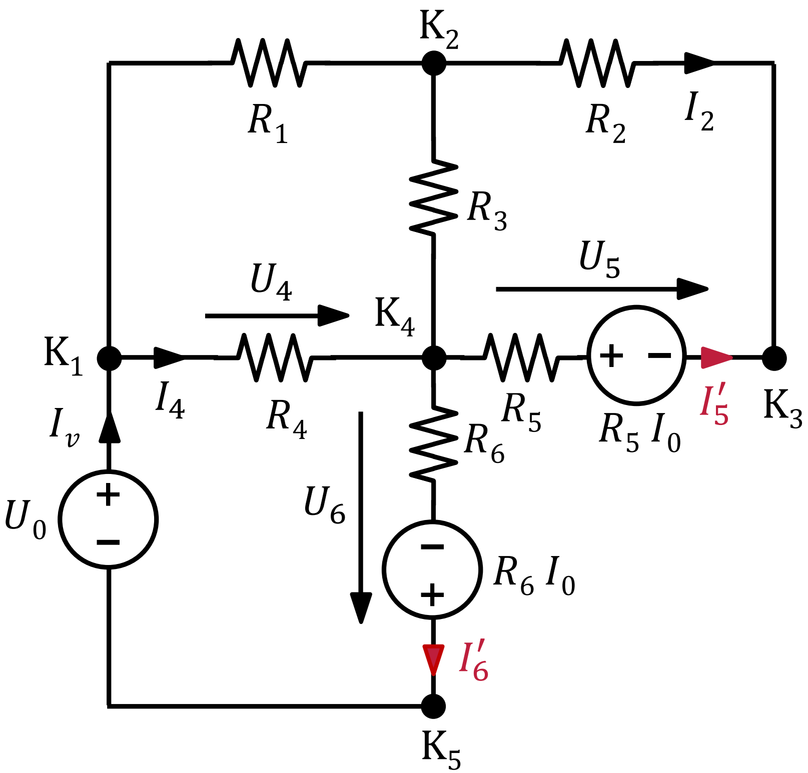
Netzwerk nach Stromquellenverschiebung





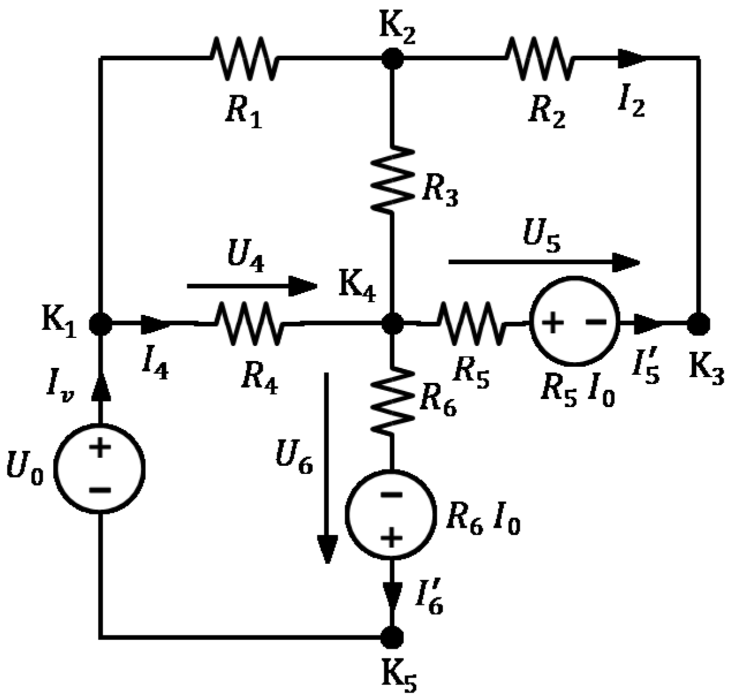
Beispiel mit Stromquellenverschiebung

Netzwerk in Ersatzspannungsquellendarstellung



- ✓ Vorbereiten des Netzwerks
- → Fundamentalmaschen festlegen
- Gleichungssystem aufstellen
- Gesuchte Größen berechnen

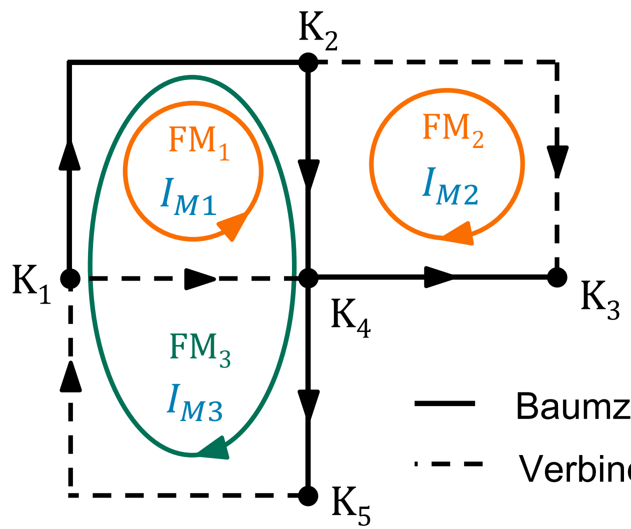
Beispiel mit Stromquellenverschiebung



1 → Orientierten Graphen zeichnen

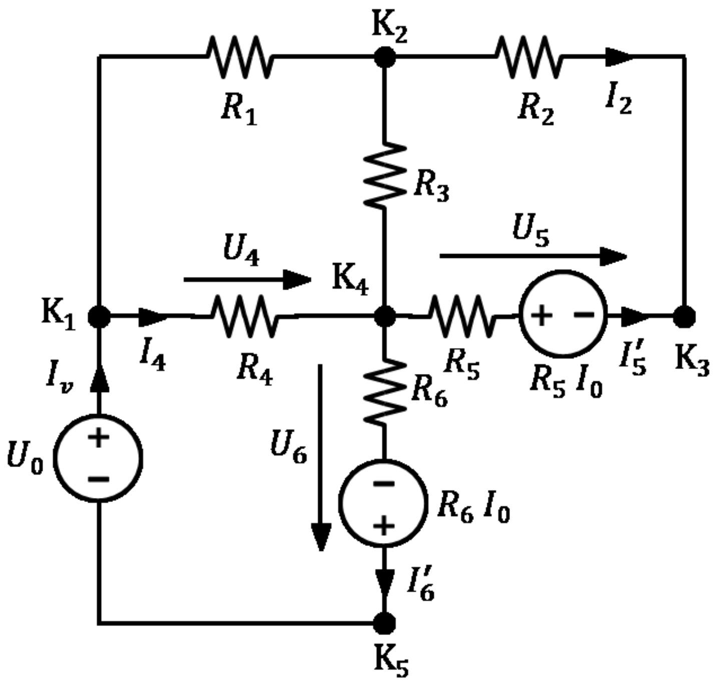
2 → Festlegen eines Baums

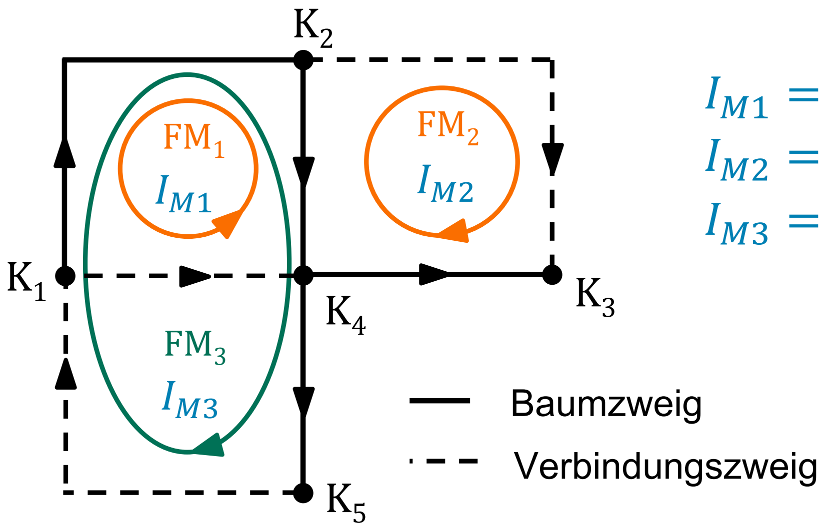
3 → Fundamentalmaschen und Maschenströme



$$I_{M1} = I_4$$
$$I_{M2} = I_2$$
$$I_{M3} = I_v$$

Beispiel mit Stromquellenverschiebung





$$I_{M1} = I_4$$
$$I_{M2} = I_2$$
$$I_{M3} = I_v$$

✓ Vorbereiten des Netzwerks

↓

✓ Fundamentalmaschen festlegen

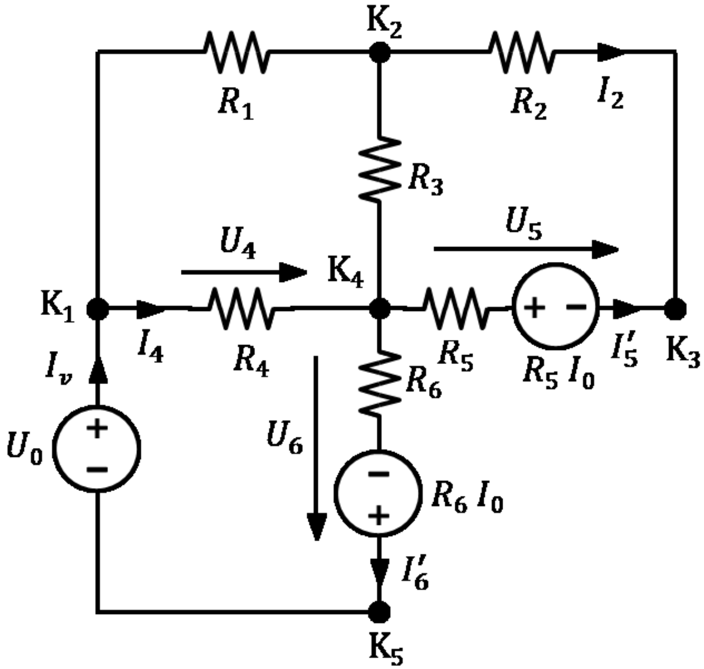
↓

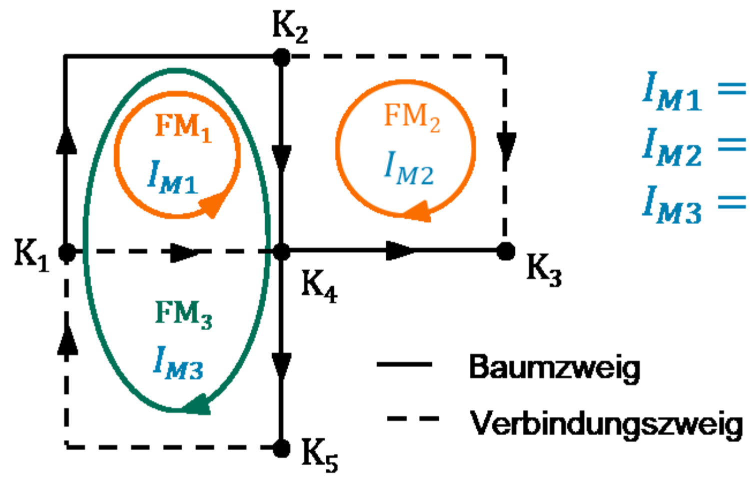
→ Gleichungssystem aufstellen

↓

Gesuchte Größen berechnen

Beispiel mit Stromquellenverschiebung





$I_{M1} = I_4$
$I_{M2} = I_2$
$I_{M3} = I_v$

Enthält das Netzwerk gesteuerte Quellen?

Ja

- Gleichungssystem in **zwei** Schritten aufstellen
  - Schritt 1: Gleichungssystem so aufstellen, als ob die gesteuerten Quellen fest wären
    $\underline{\underline{Z}}' \underline{I}_M = \underline{U}'_q$
    $\underline{\underline{Z}}'$ symmetrisch
  - Schritt 2: Steuerungen berücksichtigen
    ⇒ $\underline{\underline{Z}}\ \underline{I}_M = \underline{U}_q$
    $\underline{\underline{Z}}$ in der Regel **nicht** symmetrisch

Nein

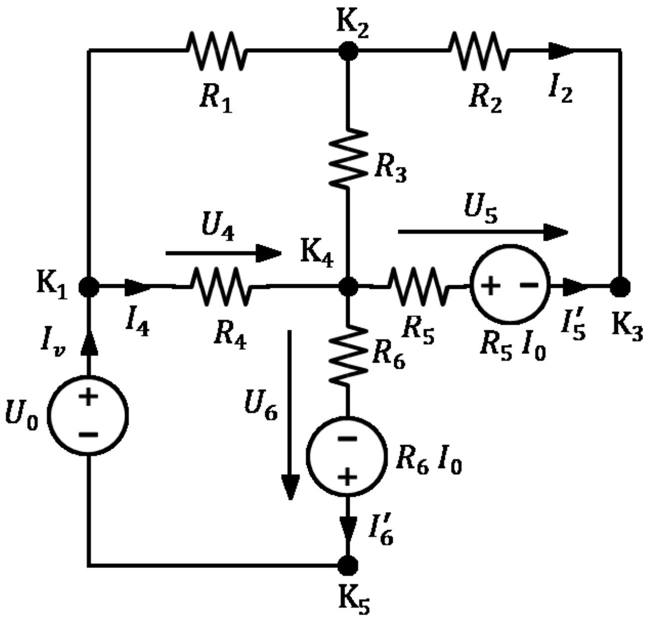
- Gleichungssystem in **einem** Schritt aufstellbar

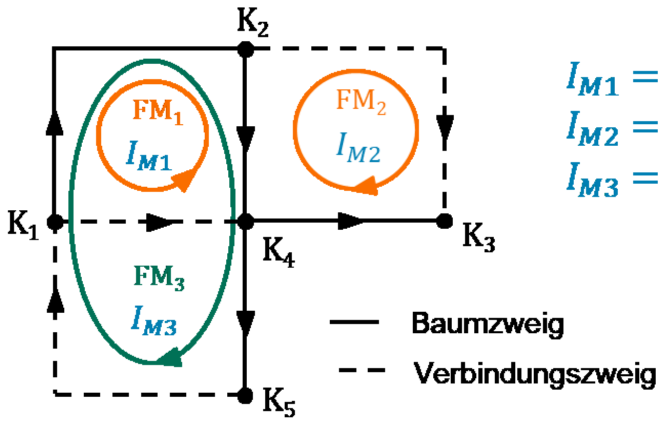
$\underline{\underline{Z}}\ \underline{I}_M = \underline{U}_q$

$\underline{\underline{Z}}$ symmetrisch

Technische Universität Braunschweig

Beispiel mit Stromquellenverschiebung





$I_{M1} = I_4$
$I_{M2} = I_2$
$I_{M3} = I_v$

Z'_{ii}: Σ Impedanzen in Masche i

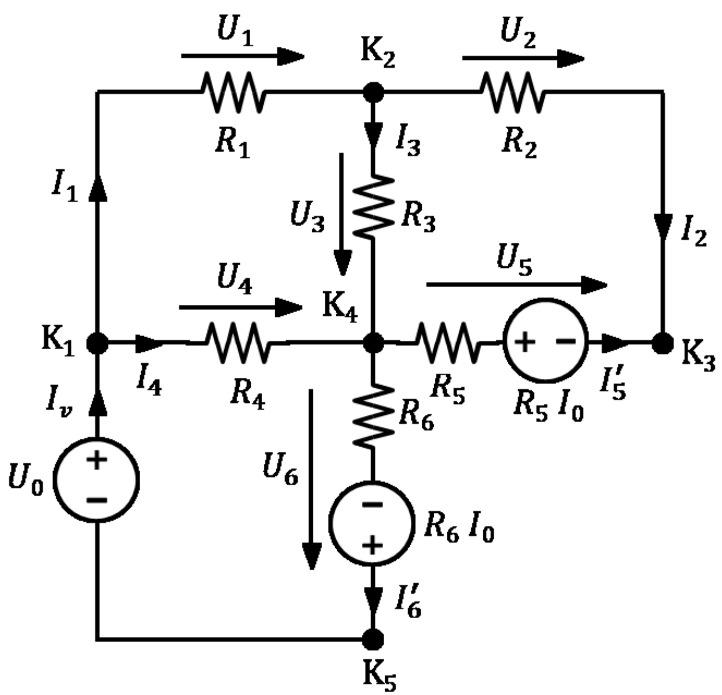
Z'_{ik}: $\pm\Sigma$ Impedanzen, die zur Masche i und k gehören
$i \neq k$ 0, Masche i und k haben keine gemeinsame Impedanz
$+$, Maschenumlaufrichtungen beider Maschen stimmen überein;
$-$, sonst
$Z'_{ik} = Z'_{ki}$ $\Rightarrow$ Zur Hauptdiagonalen symmetrische Matrix

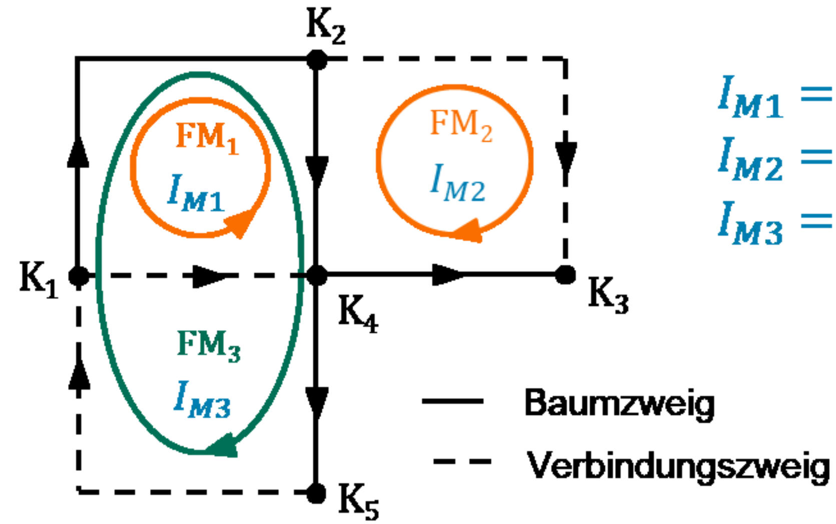
U'_{qi} = $\pm\Sigma$ der Spannungsquellen (feste und gesteuerte) in Masche i;
$-$, Zählpfeilrichtung und Maschenumlaufrichtung stimmen überein
$+$, sonst

$$\underbrace{\begin{pmatrix} R_1+R_3+R_4 & R_3 & -R_1-R_3 \\ R_3 & R_2+R_3+R_5 & -R_3 \\ -R_1-R_3 & -R_3 & R_1+R_3+R_6 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{Z}}} \underbrace{\begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix}}_{\underline{I}_M} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ R_5 I_0 \\ U_0 + R_6 I_0 \end{pmatrix}}_{\underline{U}_q}$$

Beispiel mit Stromquellenverschiebung

Berechnen der Spannung U_4 (Cramersche Regel)





$I_{M1} = I_4$
$I_{M2} = I_2$
$I_{M3} = I_v$

$$U_4 = R_4 I_4 = R_4 I_{M1} = R_4 \frac{\begin{vmatrix} 0 & R_3 & -R_1 - R_3 \\ R_5 I_0 & R_2 + R_3 + R_5 & -R_3 \\ U_0 + R_6 I_0 & -R_3 & R_1 + R_3 + R_6 \end{vmatrix}}{\det \underline{\underline{Z}}}$$

Beispiel mit Stromquellenverschiebung

Berechnen der Spannung U_4 mit $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R$

$$U_4 = RI_4 = RI_{M1} = R\frac{\begin{vmatrix} 0 & R & -2R \\ RI_0 & 3R & -R \\ U_0 + RI_0 & -R & 3R \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3R & R & -2R \\ R & 3R & -R \\ -2R & -R & 3R \end{vmatrix}} = R\frac{5R^2U_0 + 4R^3I_0}{13R^3} = \frac{5}{13}U_0 + \frac{4}{13}RI_0$$

Maschenimpedanzverfahren und Knotenadmittanzverfahren liefern gleiche Ergebnisse.

Knotenpotentialverfahren – Maschenverfahren

- Es wird ein lineares Netzwerk mit z Zweigen und k Knoten betrachtet, dessen Graph zusammenhängend ist.
- Knotenpotentialanalyse erfordert $k - 1$ Knotengleichungen.
- Maschenstromanalyse erfordert $z - k + 1$ Maschengleichungen.
- $k - 1 < z - k + 1$, falls Knoten über viele Zweige mit anderen Knoten verbunden ist.
- Vorteil für das Knotenpotentialverfahren, falls $\boxed{z > 2k - 2}$

Methoden zur Berechnung von Netzwerken - Übersicht

- Motivation für die Einführung von Lösungsverfahren
- Knotenpotentialverfahren
- Maschenimpedanzverfahren
- **Modifiziertes Knotenpotentialverfahren (MNA)**

Modifiziertes Knotenpotentialverfahren (Modified Nodal Analysis, MNA)

- Verwendung bei Schaltungssimulatoren wie Spice, Spectre, Qucs
- Quellenverschiebung und Umschreibung von Stromsteuerung auf Spannungssteuerung nicht leicht automatisierbar, deshalb bei MNA
  - **Keine** Spannungsquellenverschiebung
  - Keine Umschreibung von Stromsteuerung auf Spannungssteuerung
- Stattdessen zusätzliche Stromvariablen:
  - Zweigströme der Zweige mit idealen Spannungsquellen
  - Zweigströme, die in einem anderen Zweig zur Steuerung verwendet werden

Modifiziertes Knotenpotentialverfahren (Modified Nodal Analysis, MNA)

Zusätzliche Stromvariablen identifizieren

↓

Ersatzstromquellendarstellung der Zweige **ohne** zusätzliche Stromvariablen

↓

Referenzknoten festlegen

Restlichen Knoten Potentiale zuordnen

↓

Aufstellen des Gleichungssystems

↓

Berechnen der gesuchten Größen

Zusätzliche Stromvariablen identifizieren

Zusätzliche Stromvariable:

Ideale Spannungsquelle? → **Ja** → Zweigstrom des Zweiges mit idealer Spannungsquelle

Stromgesteuerte Quelle? → **Ja** → Zweigstrom, der in einem anderen Zweig zur Steuerung verwendet wird

- Keine doppelte Berücksichtigung eines Zweigstroms als zusätzliche Stromvariable (z.B. Zweig mit idealer Spannungsquelle und steuerndem Strom ⇒ eine zusätzliche Stromvariable)

Gleichungssystem aufstellen - I

- Matrix-Gleichung: $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{X} = \underline{b}$
- Netzwerk mit
  - n: Anzahl der Knoten ohne Referenzknoten $(n = k - 1)$
  - m: Anzahl der Zweige mit zusätzlichen Stromvariablen
- $\underline{\underline{A}}$: $(n + m) \times (n + m)$-Matrix

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{Y}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{U}_K \\ \underline{I}_V \end{bmatrix}}_{\underline{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{I}_q \\ \underline{E}_q \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

Gleichungssystem aufstellen - II

Enthält das Netzwerk gesteuerte Quellen?

Ja

- Gleichungssystem in **zwei** Schritten aufstellen
  - **Schritt 1**: Gleichungssystem so aufstellen, als ob die gesteuerten Quellen fest wären
    $\underline{\underline{A}}'\underline{X} = \underline{b}'$
    $\underline{\underline{A}}'$ symmetrisch
  - **Schritt 2**: Steuerungen berücksichtigen

    $\Rightarrow$ $\boxed{\underline{\underline{A}}\,\underline{X} = \underline{b}}$

    $\underline{\underline{A}}$ in der Regel **nicht** symmetrisch

Nein

- Gleichungssystem in **einem** Schritt aufstellbar

  $\Downarrow$

  $\boxed{\underline{\underline{A}}\,\underline{X} = \underline{b}}$

  $\underline{\underline{A}}$ symmetrisch

Bei Netzwerken nur mit festen Quellen gilt: $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}'$, $\underline{b} = \underline{b}'$

Gleichungssystem aufstellen - III

Methoden zur Aufstellung des Gleichungssystems

mit Hilfe der Kirchhoffschen Knotengleichungen

oder

direkt in Matrixschreibweise

(**Schritt 1** bei Netzwerken mit gesteuerten Quellen)

Gleichungssystem aufstellen - IV

$\underline{\underline{A}}' \cdot \boxed{\underline{X}} = \underline{b}'$

- $\underline{\boldsymbol{X}}$: $(n+m) \times 1$-Matrix
  - besteht aus zwei Untervektoren $\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{U}_K \\ \underline{I}_V \end{bmatrix}$
  - $\underline{U}_K$: $n \times 1$-Matrix, Knotenpotentiale (unbekannte Spannungen)
    - Jedes Element enthält das einem Knoten zugeordnete Knotenpotential (ohne Referenzknoten)
    - $\underline{U}_K = \begin{bmatrix} U_{K1} \\ \vdots \\ U_{Kn} \end{bmatrix}, \quad n = k - 1$

      Anzahl der Knoten
  - $\underline{I}_V$: $m \times 1$-Matrix, zusätzliche Stromvariablen
    - Für Netzwerk mit m zusätzlichen Stromvariablen: $\underline{I}_V = \begin{bmatrix} I_{V1} \\ \vdots \\ I_{Vm} \end{bmatrix}$

Gleichungssystem aufstellen - V

- $\underline{\underline{\boldsymbol{Y}}}'$: $n \times n$-Matrix (n: Anzahl der Knoten ohne Referenzknoten)

$$\underline{\underline{A}}' = \begin{bmatrix} \underline{\underline{Y}}' & \underline{\underline{B}}' \\ \underline{\underline{C}}' & \underline{\underline{D}}' \end{bmatrix}$$

Nur Zweige **ohne** zusätzliche Stromvariable berücksichtigen

Y'_{ii}: Σ Admittanzen der mit Knoten i verbundenen Bauelemente

Y'_{ik}: $-(\Sigma$ Admittanzen zwischen Knoten i und $k)$;
$i \neq k$ 0, wenn keine Admittanz zwischen Knoten i und k;
$Y'_{ik} = Y'_{ki} \Rightarrow$ Zur Hauptdiagonalen symmetrische Matrix

$$\begin{matrix} Y'_{11} & \cdots & Y'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y'_{n1} & \cdots & Y'_{nn} \end{matrix}$$

[redacted]

$\underline{\underline{Y}}'$

Bei Netzwerken nur mit festen Quellen gilt: $\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{Y}}'$

Gleichungssystem aufstellen - VI

- $\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}'$: $n \times m$-Matrix, (m: Anzahl der Zweige mit zusätzlichen Stromvariablen)

$$\underline{\underline{A}}' = \begin{bmatrix} \underline{\underline{Y}}' & \underline{\underline{B}}' \\ \underline{\underline{C}}' & \underline{\underline{D}}' \end{bmatrix}$$

Zweige mit zusätzlichen Stromvariablen

Nur Zweige **ohne** ideale Stromquelle

$$B'_{ki}: \begin{cases} +1, \text{ Zweig } i \text{ ist vom Knoten } k \text{ weg orientiert;} \\ -1, \text{ Zweig } i \text{ ist zum Knoten } k \text{ hin orientiert;} \\ = 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} B'_{11} & \cdots & B'_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B'_{n1} & \cdots & B'_{nm} \end{matrix}$$

$\underline{\underline{B}}'$

Bei Netzwerken nur mit festen Quellen gilt: $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}'$

Gleichungssystem aufstellen - VII

- $\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}'$: $m \times n$-Matrix, (m: Anzahl der Zweige mit zusätzlichen Stromvariablen)

$$\underline{\underline{A}}' = \begin{bmatrix} \underline{\underline{Y}}' & \underline{\underline{B}}' \\ \underline{\underline{C}}' & \underline{\underline{D}}' \end{bmatrix}$$

Zweige mit zusätzlichen Stromvariablen

Nur Zweige **ohne** ideale Stromquelle

C'_{ik}: $+1$, Zweig i ist vom Knoten k weg orientiert;
-1, Zweig i ist zum Knoten k hin orientiert;
$= 0$, sonst

$$\begin{matrix} C'_{11} & \cdots & C'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C'_{m1} & \cdots & C'_{mn} \end{matrix}$$

[redacted]

$\underline{\underline{C}}' = \underline{\underline{B}}'^{T}$ ($\underline{\underline{C}}'$ ist die Transponierte von $\underline{\underline{B}}'$)

Bei Netzwerken nur mit festen Quellen gilt: $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C}}'$

Gleichungssystem aufstellen - VIII

- $\underline{\underline{D}}'$: $m \times m$-Matrix

$$\underline{\underline{A}}' = \begin{bmatrix} \underline{\underline{Y}}' & \underline{\underline{B}}' \\ \underline{\underline{C}}' & \underline{\underline{D}}' \end{bmatrix}$$

Nur Zweige **mit** zusätzlichen Stromvariablen

D'_{ii}: $+1$, Zweig i ist ideale Stromquelle
$-Z_i$ (Impedanz des Zweiges i)
Achtung: keine ideale Stromquelle in diesem Zweig
0, sonst

$D'_{ik} = 0, \;\; i \neq k$

$$\begin{matrix} D'_{11} & \cdots & D'_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{matrix}$$

D' $\cdots$ D' [redacted]

$\underline{\underline{D}}'$

Bei Netzwerken nur mit festen Quellen gilt: $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}'$, alle Einträge $= 0$

Gleichungssystem aufstellen - IX

$\underline{\underline{A}}' \cdot \underline{X} = \boxed{\underline{b}'}$

- $\underline{b}'$: $(n+m) \times 1$-Matrix
  - feste und gesteuerte Strom- und Spannungsquellen
  - besteht aus zwei Untermatrizen
  - Bei Netzwerken nur mit festen Quellen gilt: $\underline{b} = \underline{b}'$

$$\underline{b}' = \begin{bmatrix} \underline{I}_q' \\ \underline{E}_q' \end{bmatrix}$$

- $\underline{I}_q'$: $n \times 1$-Matrix

> I_{qi}' = Σ der mit Knoten i verbundenen Stromquellen (feste und gesteuerte);
> Quellstrom fließt in Knoten i ⇒ Eintrag als positiver Wert
> Quellstrom fließt aus Knoten i ⇒ Eintrag als negativer Wert

- $\underline{E}_q'$: $m \times 1$-Matrix

> Nur Zweige **mit** zusätzlichen Stromvariablen

> E_{qi}' = Strom- oder Spannungsquelle (fest oder gesteuert) von Zweig i
> Orientierung von Quelle und Zweig i gleich
> ⇒ Eintrag als positiver Wert
> Orientierung von Quelle und Zweig i entgegengesetzt
> ⇒ Eintrag als negativer Wert

Gleichungssystem aufstellen - X

Schritt 2: Steuerungen berücksichtigen

$$\boxed{\underline{\underline{A}}'\underline{X} = \underline{b}'}$$

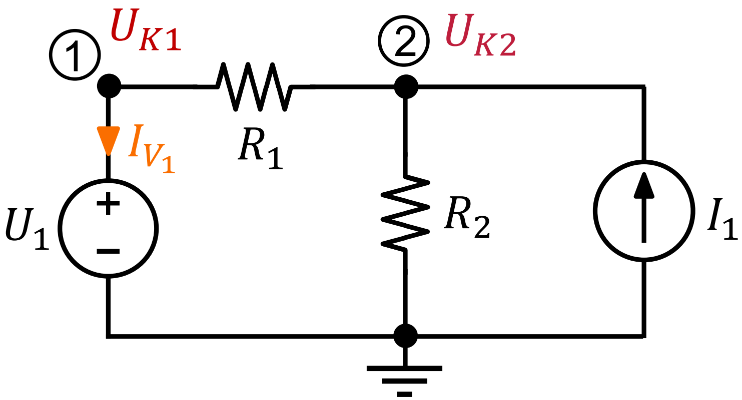
- Wenn gesteuerte Quellen in $\underline{b}'$ sind
  - Zerlege $\underline{b}'$ in festen und gesteuerten Anteil
  - Drücke steuernde Spannungen durch Knotenpotentiale und steuernde Ströme durch zusätzliche Stromvariablen aus

$$\underline{b}' = \underline{b} + \underline{\underline{A}}_{steuer}\underline{X}$$

$$\underline{\underline{A}}\ \underline{X} = \left(\underline{\underline{A}}' - \underline{\underline{A}}_{steuer}\right)\underline{X} = \underline{b}$$

$\underline{\underline{A}}$ in der Regel **nicht** symmetrisch

$$\boxed{\underline{\underline{A}}\ \underline{X} = \underline{b}}$$



$R_1 = 5\Omega, R_2 = 10\Omega, U_1 = 1\text{V}, I_1 = 1\text{A}$

→ Zusätzliche Stromvariablen identifizieren

⇓

Ersatzstromquellendarstellung der Zweige **ohne** zusätzliche Stromvariablen

⇓

Referenzknoten festlegen
Restlichen Knoten Potentiale zuordnen

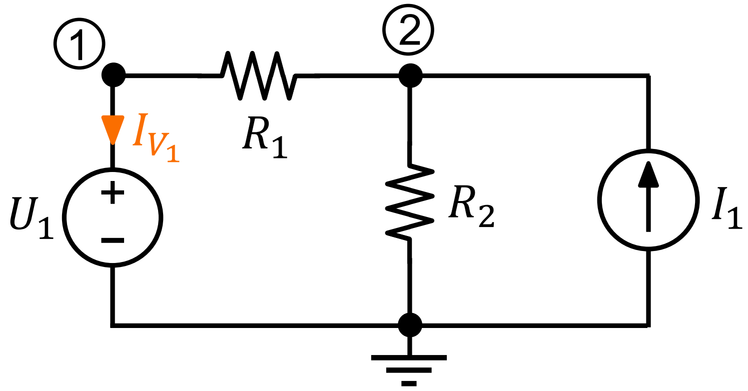
⇓

Aufstellen des Gleichungssystems

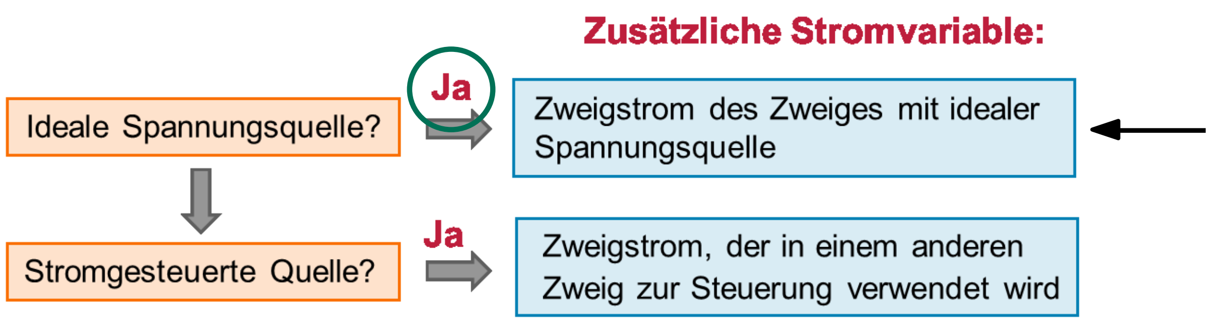
⇓

Berechnen der gesuchten Größen

Beispiel 1



$R_1 = 5\Omega, R_2 = 10\Omega, U_1 = 1\text{V}, I_1 = 1\text{A}$

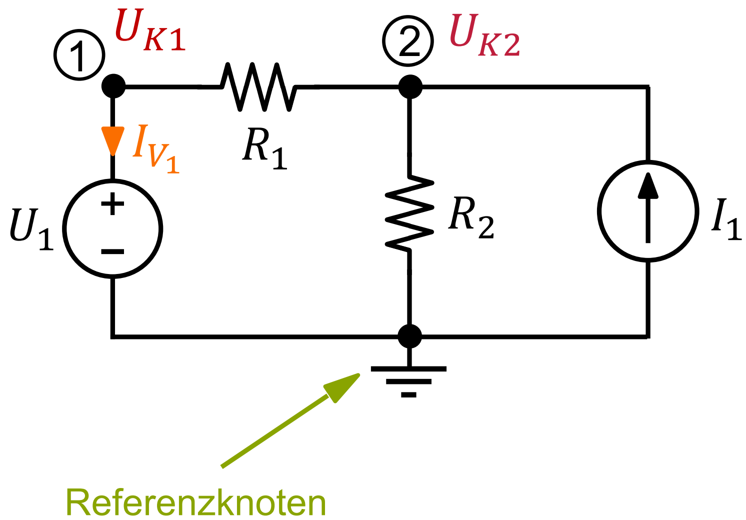


Zusätzliche Stromvariable:

- I_{V_1}: Zweig mit idealer Spannungsquelle

Beispiel 1

$$R_1 = 5\Omega, R_2 = 10\Omega, U_1 = 1\text{V}, I_1 = 1\text{A}$$



✓ Zusätzliche Stromvariablen identifizieren

↓

1 → Ersatzstromquellendarstellung der Zweige **ohne** zusätzliche Stromvariablen

↓

2 → Referenzknoten festlegen
Restlichen Knoten Potentiale zuordnen

↓

3 → Aufstellen des Gleichungssystems

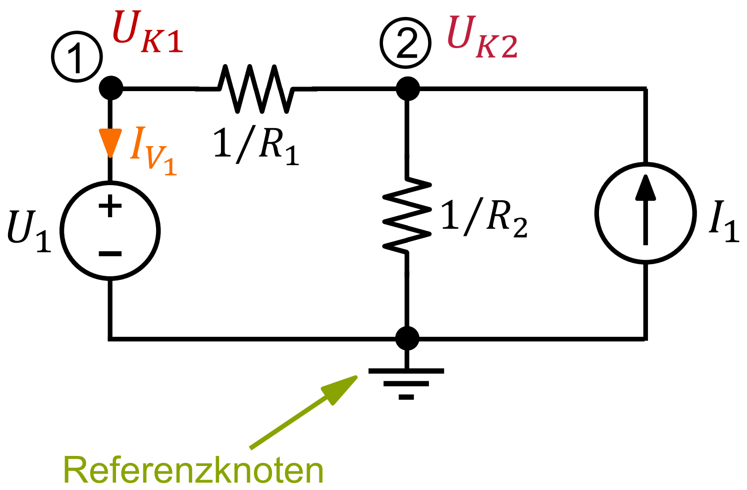
↓

Berechnen der gesuchten Größen

Zusätzliche Stromvariable: I_{V_1}

Ersatzstromquellendarstellung
(Impedanzen → Admittanzen): $R_1 \rightarrow \frac{1}{R_1}, R_2 \rightarrow \frac{1}{R_2}$

Beispiel 1 – Gleichungssystem direkt in Matrixform



$R_1 = 5\Omega, R_2 = 10\Omega, U_1 = 1\text{V}, I_1 = 1\text{A}$

Enthält das Netzwerk gesteuerte Quellen?

Ja

- Gleichungssystem in **zwei** Schritten aufstellen
  - **Schritt 1**: Gleichungssystem so aufstellen, als ob die gesteuerten Quellen fest wären
    $\underline{\underline{A}}'\underline{X} = \underline{b}'$
    $\underline{\underline{A}}'$ symmetrisch
  - **Schritt 2**: Steuerungen berücksichtigen

    ⇒ $\underline{\underline{A}}\ \underline{X} = \underline{b}$

    $\underline{\underline{A}}$ in der Regel **nicht** symmetrisch

Nein

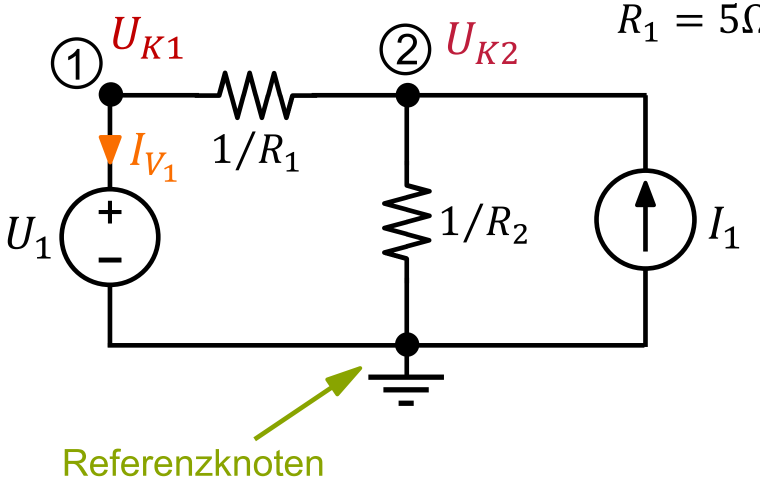
- Gleichungssystem in **einem** Schritt aufstellbar

  ⇓

  $\underline{\underline{A}}\ \underline{X} = \underline{b}$

  $\underline{\underline{A}}$ symmetrisch

Beispiel 1 – Gleichungssystem direkt in Matrixform



$R_1 = 5\Omega, R_2 = 10\Omega, U_1 = 1\text{V}, I_1 = 1\text{A}$

$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{X} = \underline{b}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{Y}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}}$$ [redacted]

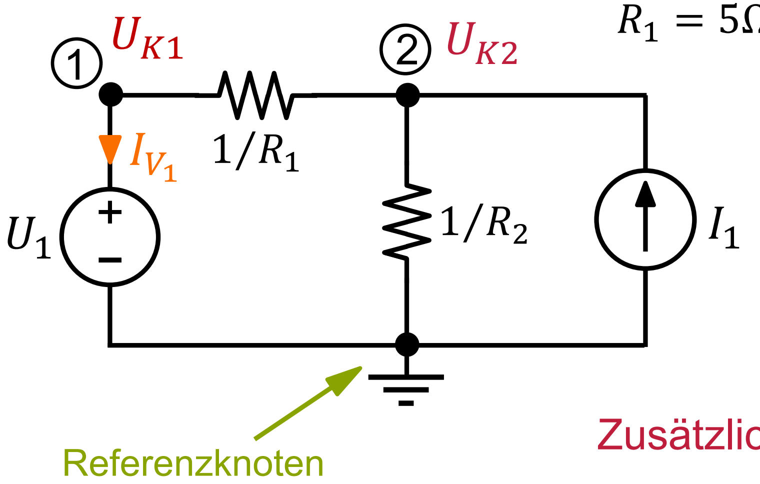
Zusätzliche Stromvariable: I_{V_1}

- $\underline{U_K}$: $n \times 1$-Matrix, Knotenpotentiale (unbekannte Spannungen)
  - $\underline{U_K} = \begin{bmatrix} U_{K1} \\ \vdots \\ U_{Kn} \end{bmatrix}$, $n = k - 1$
- $\underline{I_V}$: $m \times 1$-Matrix, zusätzliche Stromvariablen
  - Für Netzwerk mit m zusätzlichen Stromvariablen: $\underline{I_V} = \begin{bmatrix} I_{V1} \\ \vdots \\ I_{Vm} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{K1} \\ U_{K2} \\ I_{V_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Beispiel 1 – Gleichungssystem direkt in Matrixform

$R_1 = 5\Omega, R_2 = 10\Omega, U_1 = 1\text{V}, I_1 = 1\text{A}$



Zusätzliche Stromvariable: I_{V_1}

$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{Y}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}}$ [redacted] $\underline{X}$ = [redacted] $\underline{b}$

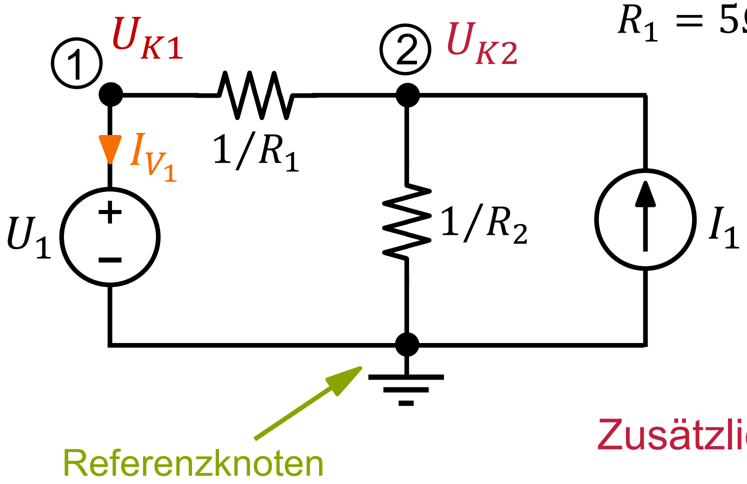
Nur feste Quellen $\Rightarrow \underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{Y}}'$

Nur Zweige ohne zusätzliche Stromvariable berücksichtigen

Y'_{ii}: Σ Admittanzen der mit Knoten i verbundenen Bauelemente

Y'_{ik}: $-(\Sigma$ Admittanzen zwischen Knoten i und $k)$;
$i \neq k$ 0, wenn keine Admittanz zwischen Knoten i und k;
$Y'_{ik} = Y'_{ki} \Rightarrow$ Zur Hauptdiagonalen symmetrische Matrix

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{K1} \\ U_{K2} \\ I_{V_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$



$R_1 = 5\Omega, R_2 = 10\Omega, U_1 = 1\text{V}, I_1 = 1\text{A}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{Y}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{U_K} \\ \underline{I_V} \end{bmatrix}}_{\underline{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{I_q} \\ \underline{E_q} \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

Zusätzliche Stromvariable: I_{V_1}

Nur feste Quellen $\Rightarrow \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B'}}$

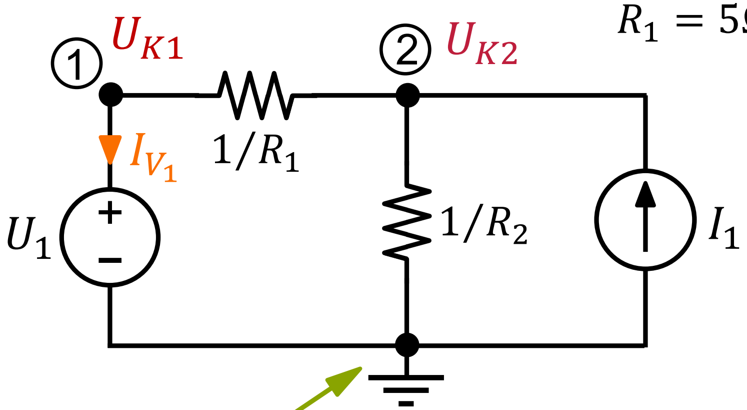
Zweige mit zusätzlichen Stromvariablen

Nur Zweige ohne ideale Stromquelle

B'_{ki}: $+1$, Zweig i ist vom Knoten k weg orientiert;
-1, Zweig i ist zum Knoten k hin orientiert;
$= 0$, sonst

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & \boxed{1} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & \boxed{0} \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{K1} \\ U_{K2} \\ I_{V_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Beispiel 1 – Gleichungssystem direkt in Matrixform



Referenzknoten

$R_1 = 5\Omega, R_2 = 10\Omega, U_1 = 1\text{V}, I_1 = 1\text{A}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{Y}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \underbrace{[\text{redacted}]}_{\underline{X}} = \underbrace{[\text{redacted}]}_{\underline{b}}$$

Zusätzliche Stromvariable: I_{V_1}

Nur feste Quellen $\Rightarrow \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C}}'$

Zweige mit zusätzlichen Stromvariablen

Nur Zweige **ohne** ideale Stromquelle

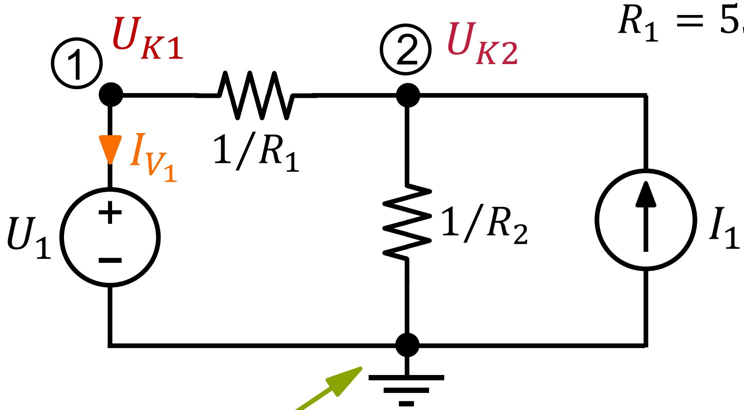
C'_{ik}: $+1$, Zweig i ist vom Knoten k weg orientiert;
-1, Zweig i ist zum Knoten k hin orientiert;
$= 0$, sonst

$$\boxed{\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{B}}^T}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 1 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{0} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{K1} \\ U_{K2} \\ I_{V_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Beispiel 1 – Gleichungssystem direkt in Matrixform

$R_1 = 5\Omega, R_2 = 10\Omega, U_1 = 1\text{V}, I_1 = 1\text{A}$



Referenzknoten

Zusätzliche Stromvariable: I_{V_1}

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{Y}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{U}_K \\ \underline{I}_V \end{bmatrix}}_{\underline{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{I}_q \\ \underline{E}_q \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

Nur feste Quellen $\Rightarrow \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}'$

Nur Zweige mit zusätzlichen Stromvariablen

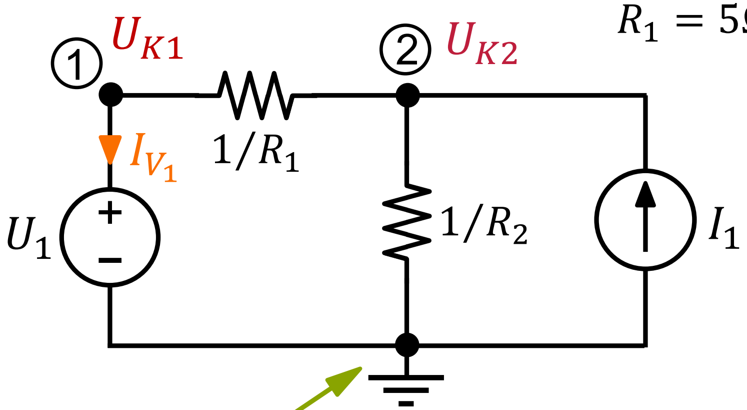
D'_{ii}: $+1$, Zweig i ist ideale Stromquelle
$-Z_i$ (Impedanz des Zweiges i)
Achtung: keine ideale Stromquelle in diesem Zweig
0, sonst

$D'_{ik} = 0,\ i \neq k$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 1 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{K1} \\ U_{K2} \\ I_{V_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

Technische Universität Braunschweig

Beispiel 1 – Gleichungssystem direkt in Matrixform



Referenzknoten

$R_1 = 5\Omega, R_2 = 10\Omega, U_1 = 1\text{V}, I_1 = 1\text{A}$

$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{X} = \underline{b}$

$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{Y}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}}$ [redacted] = [redacted]

Zusätzliche Stromvariable: I_{V_1}

I'_{qi} = Σ der mit Knoten i verbundenen Stromquellen (feste und gesteuerte);
Quellstrom fließt in Knoten i ⇒ Eintrag als positiver Wert
Quellstrom fließt aus Knoten i ⇒ Eintrag als negativer Wert

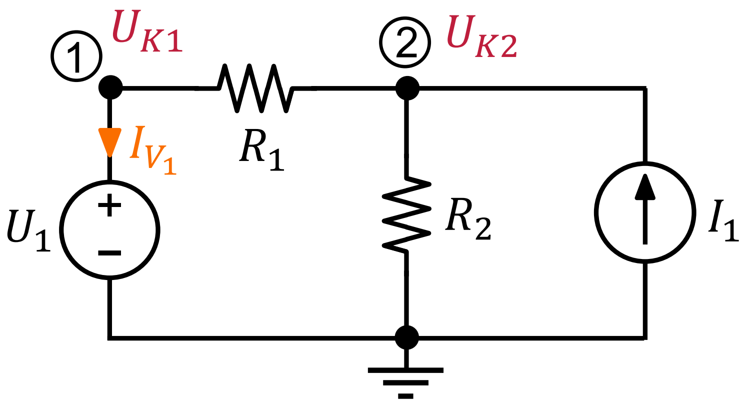
E'_{qi} = Strom- oder Spannungsquelle (fest oder gesteuert) von Zweig i
Orientierung von Quelle und Zweig i gleich
⇒ Eintrag als positiver Wert
Orientierung von Quelle und Zweig i entgegengesetzt
⇒ Eintrag als negativer Wert

Nur Zweige mit zusätzlichen Stromvariablen

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 1 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{K1} \\ U_{K2} \\ I_{V_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{0} \\ \boxed{I_1} \\ \boxed{U_1} \end{bmatrix}$$

Beispiel 1 – Mit Kirchhoffschen Knotengleichungen

$R_1 = 5\Omega, R_2 = 10\Omega, U_1 = 1\text{V}, I_1 = 1\text{A}$



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 1 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{K1} \\ U_{K2} \\ I_{V_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_1 \\ U_1 \end{bmatrix}$$

Aufstellen der Kirchhoffschen Knotengleichungen und der konstitutiven Gleichung

Knoten 1 : $$\frac{1}{R_1} U_{K1} - \frac{1}{R_1} U_{K2} + I_{V_1} = 0$$

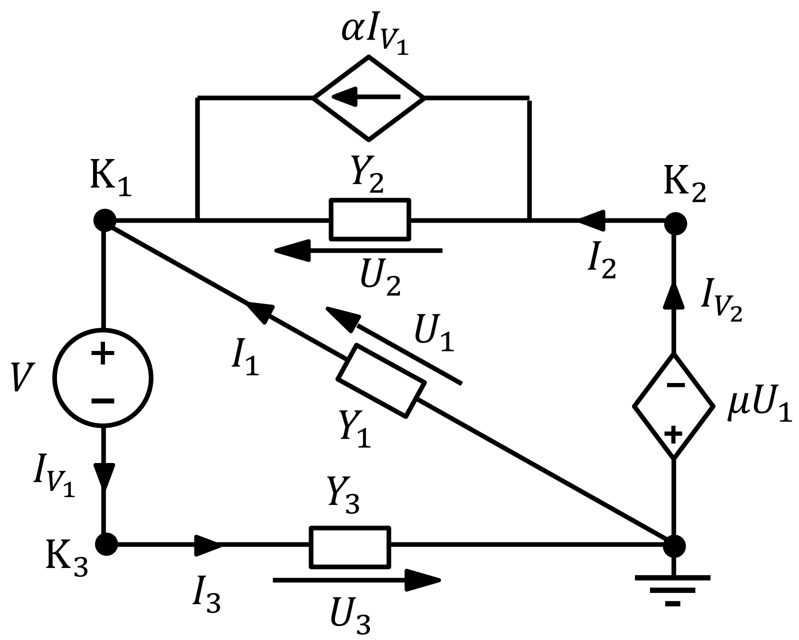
Knoten 2 : $$-\frac{1}{R_1} U_{K1} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) U_{K2} = I_1$$

$$U_{K1} = U_1$$

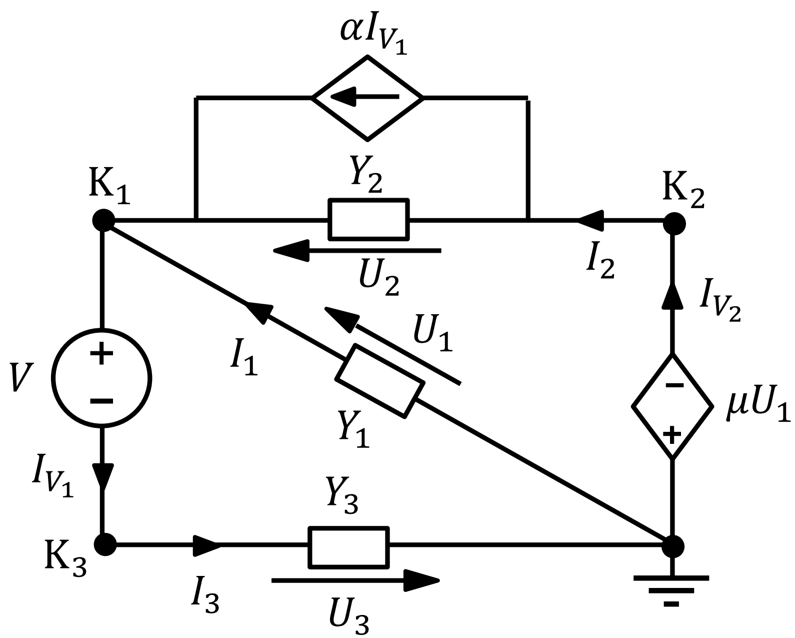
Es ergibt sich das gleiche Gleichungssystem wie mit den Regeln des MNA.

Beispiel 2: Netzwerk mit gesteuerten Quellen

Netzwerk mit 3 Admittanzen $Y_i > 0, i = 1,2,3$, einer idealen festen Spannungsquelle V, einer idealen spannungsgesteuerten Spannungsquelle $\mu U_1, \mu > 0$ und einer idealen stromgesteuerten Stromquelle $\alpha I_{V_1}, \alpha > 0$.
Geben Sie das Gleichungssystem des modifizierten Knotenpotentialverfahren in Matrixform an.



Beispiel 2: Netzwerk mit gesteuerten Quellen



→ Zusätzliche Stromvariablen identifizieren

⇓

Ersatzstromquellendarstellung der Zweige **ohne** zusätzliche Stromvariablen

⇓

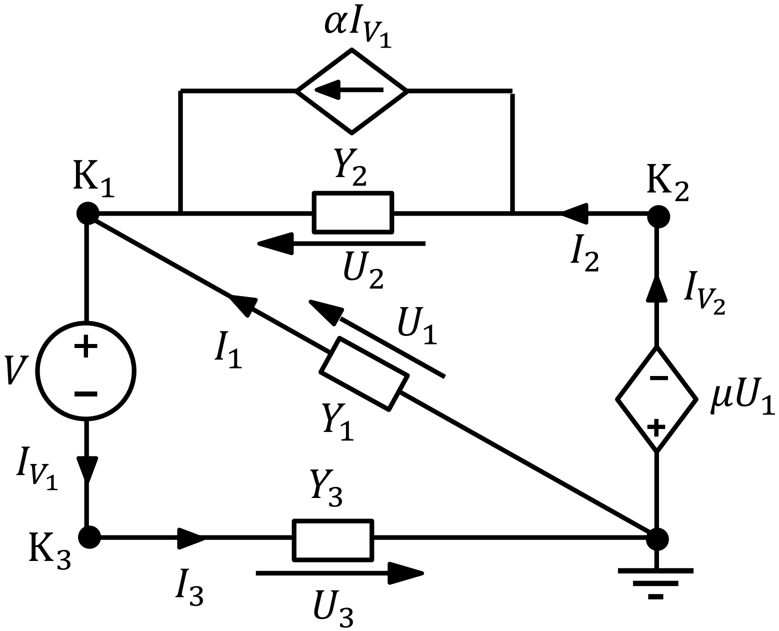
Referenzknoten festlegen
Restlichen Knoten Potentiale zuordnen

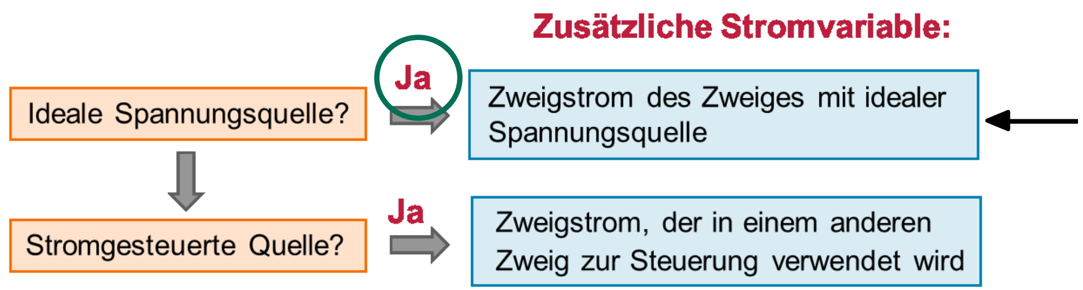
⇓

Aufstellen des Gleichungssystems

⇓

Berechnen der gesuchten Größen

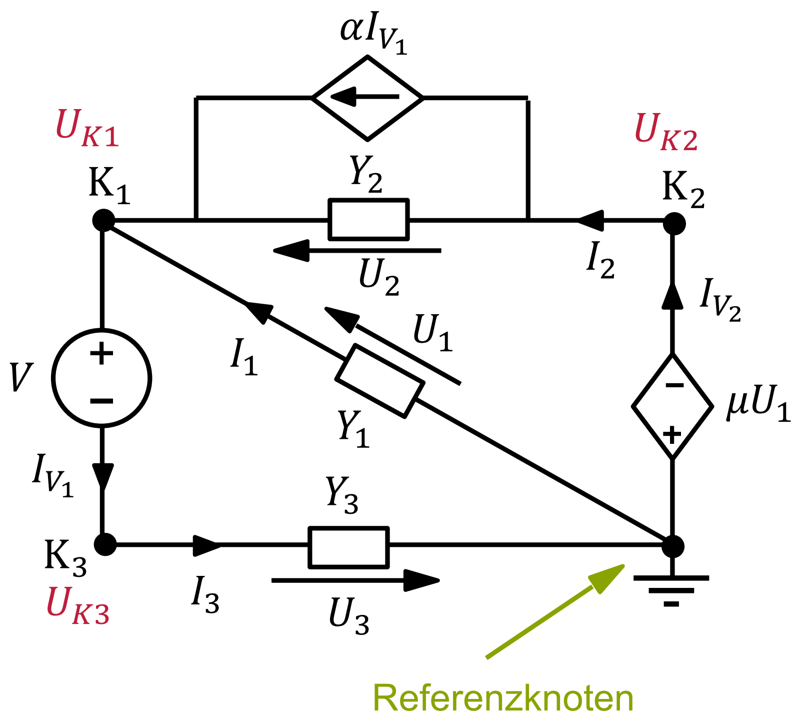




Zusätzliche Stromvariablen:

- I_{V_1}: Steuerstrom, Zweig mit idealer Spannungsquelle
- I_{V_2}: Zweig mit idealer Spannungsquelle

Beispiel 2: Netzwerk mit gesteuerten Quellen



✔ Zusätzliche Stromvariablen identifizieren

↓

1 → Ersatzstromquellendarstellung der Zweige **ohne** zusätzliche Stromvariablen

↓

2 → Referenzknoten festlegen
Restlichen Knoten Potentiale zuordnen

↓

3 → Aufstellen des Gleichungssystems

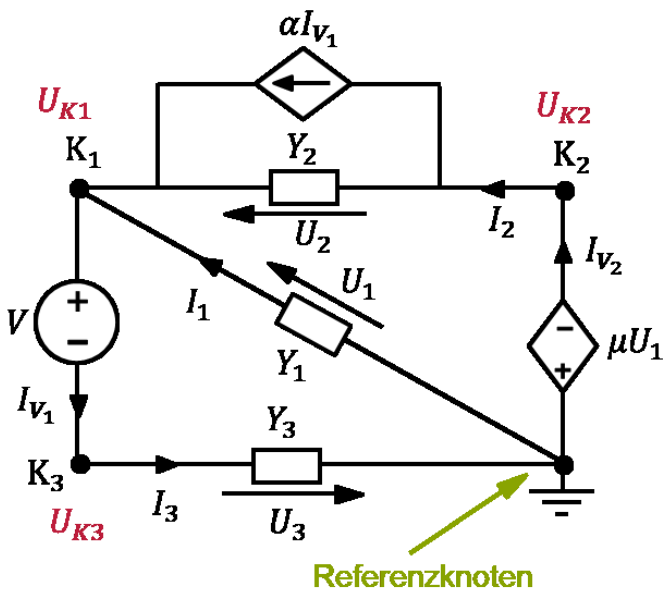
↓

Berechnen der gesuchten Größen

Zusätzliche Stromvariablen:

- I_{V_1}
- I_{V_2}

Beispiel 2: Netzwerk mit gesteuerten Quellen



Enthält das Netzwerk gesteuerte Quellen?

Ja

- Gleichungssystem in **zwei** Schritten aufstellen
  - **Schritt 1**: Gleichungssystem so aufstellen, als ob die gesteuerten Quellen fest wären
    $\underline{\underline{A}}'\underline{X} = \underline{b}'$
    $\underline{\underline{A}}'$ symmetrisch
  - **Schritt 2**: Steuerungen berücksichtigen
    ⇒ $\boxed{\underline{\underline{A}}\ \underline{X} = \underline{b}}$
    $\underline{\underline{A}}$ in der Regel **nicht symmetrisch**

Nein

- Gleichungssystem in **einem** Schritt aufstellbar

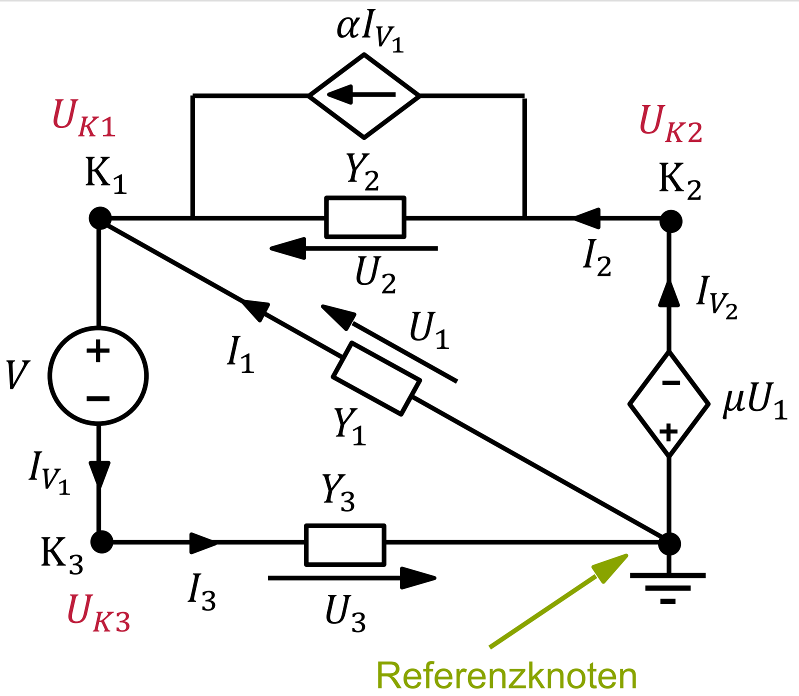
  ⇓

  $\boxed{\underline{\underline{A}}\ \underline{X} = \underline{b}}$

  $\underline{\underline{A}}$ symmetrisch

Beispiel 2: Netzwerk mit gesteuerten Quellen - $\underline{X}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{Y'}} & \underline{\underline{B'}} \\ \underline{\underline{C'}} & \underline{\underline{D'}} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A'}}}$$ [redacted] $\underline{U}_K$ [redacted] $\underline{I}_V$ [redacted] $\underline{X}$ $=$ $\begin{bmatrix} \underline{I}'_q \\ \underline{E}'_q \end{bmatrix}$ [redacted] $\underline{b}'$



- $\underline{U}_K$: $n \times 1$-Matrix, Knotenpotentiale (unbekannte Spannungen)
  - $\underline{U}_K = \begin{bmatrix} U_{K1} \\ \vdots \\ U_{Kn} \end{bmatrix}$, $n = k - 1$
- $\underline{I}_V$: $m \times 1$-Matrix, zusätzliche Stromvariablen
  - Für Netzwerk mit m zusätzlichen Stromvariablen: $\underline{I}_V = \begin{bmatrix} I_{V1} \\ \vdots \\ I_{Vm} \end{bmatrix}$

Zusätzliche Stromvariablen:

- I_{V_1}
- I_{V_2}

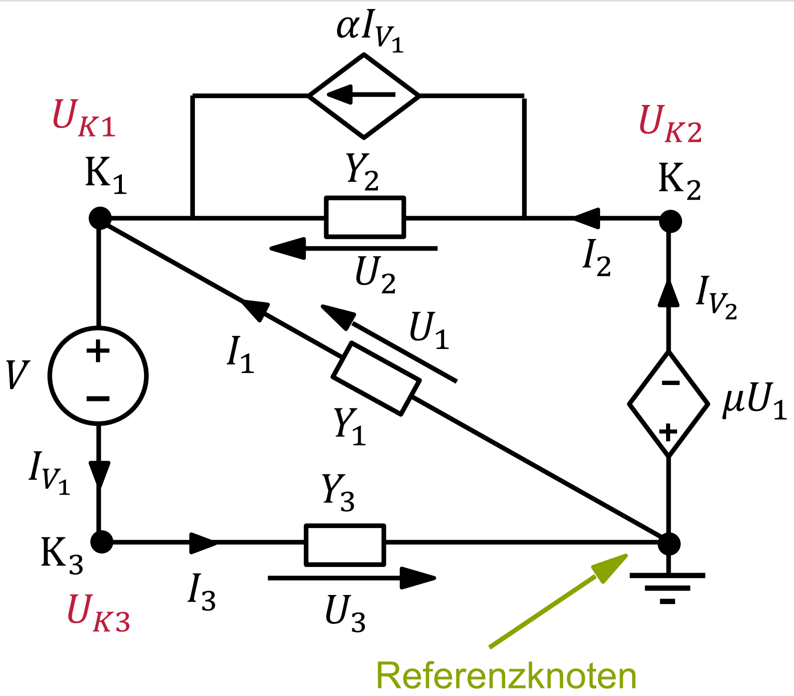
[redacted] U_{K1} [redacted] U_{K2} [redacted] U_{K3} [redacted] $=$ [redacted]

I_{V_1} [redacted]

I_{V_2} [redacted]

Beispiel 2: Netzwerk mit gesteuerten Quellen - $\underline{\underline{Y}}'$

$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{Y}}' & \underline{\underline{B}}' \\ \underline{\underline{C}}' & \underline{\underline{D}}' \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}'}$ [redacted] U_K I_V [redacted] $\underline{X}$ $= \begin{bmatrix} I'_q \\ E'_q \end{bmatrix}$ [redacted] $\underline{b}'$



Nur Zweige ohne zusätzliche Stromvariable berücksichtigen

Y'_{ii}: Σ Admittanzen der mit Knoten i verbundenen Bauelemente

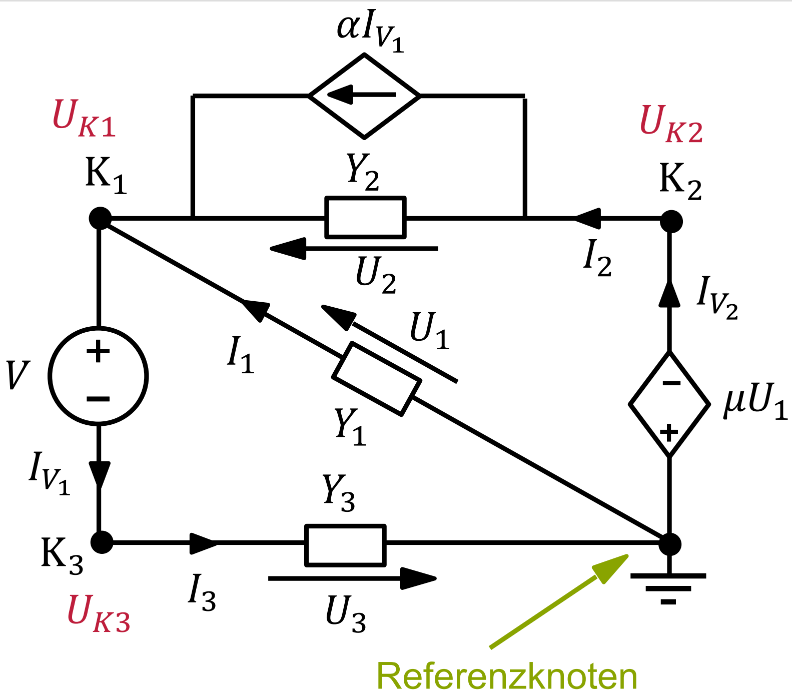
Y'_{ik}: $-(\Sigma$ Admittanzen zwischen Knoten i und $k)$;
$i \neq k$ 0, wenn keine Admittanz zwischen Knoten i und k;
$Y'_{ik} = Y'_{ki} \Rightarrow$ Zur Hauptdiagonalen symmetrische Matrix

[redacted] $\begin{matrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 & 0 \\ -Y_2 & Y_2 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 \end{matrix}$ [redacted] $\begin{matrix} U_{K1} \\ U_{K2} \\ U_{K3} \\ I_{V_1} \\ I_{V_2} \end{matrix}$ [redacted] $=$ [redacted]

Technische Universität Braunschweig

Beispiel 2: Netzwerk mit gesteuerten Quellen - $\underline{\underline{B}}'$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{Y}}' & \underline{\underline{B}}' \\ \underline{\underline{C}}' & \underline{\underline{D}}' \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}'}$$ [redacted] $= \begin{bmatrix} \underline{I}_q' \\ \underline{E}_q' \end{bmatrix}$ [redacted]



Zweige mit zusätzlichen Stromvariablen

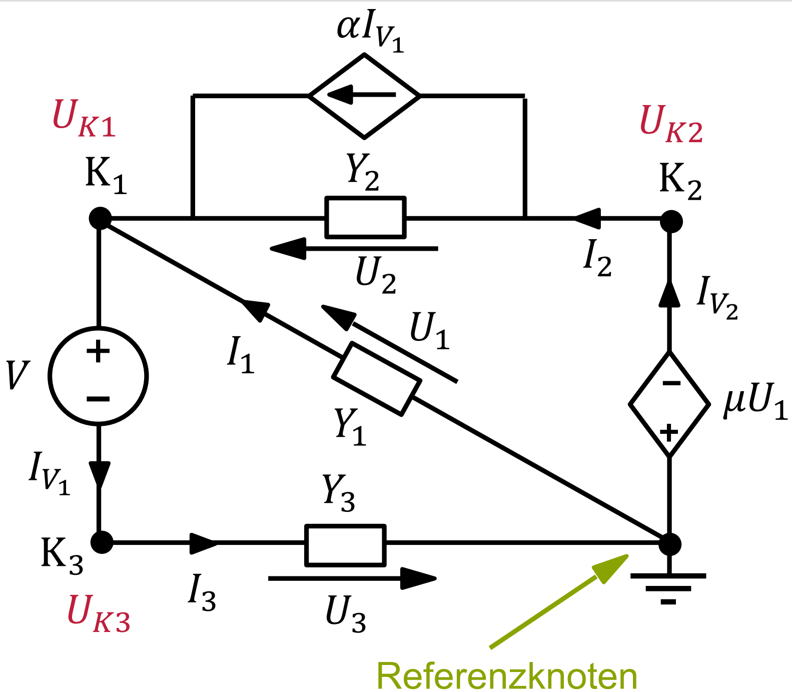
Nur Zweige ohne ideale Stromquelle

B'_{ki}: $+1$, Zweig i ist vom Knoten k weg orientiert;
-1, Zweig i ist zum Knoten k hin orientiert;
$= 0$, sonst

[redacted]
$$\begin{array}{ccc|cc} Y_1 + Y_2 & -Y_2 & 0 & \boxed{1} & \boxed{0} \\ -Y_2 & Y_2 & 0 & \boxed{0} & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & Y_3 & \boxed{-1} & \boxed{0} \\ \hline & & & & \end{array}$$
[redacted]
$$\begin{array}{c} U_{K1} \\ U_{K2} \\ U_{K3} \\ \hline I_{V_1} \\ I_{V_2} \end{array}$$
[redacted] $=$ [redacted]

Beispiel 2: Netzwerk mit gesteuerten Quellen - $\underline{\underline{C}}'$

$\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{\underline{Y}}' & \underline{\underline{B}}' \\ \underline{\underline{C}}' & \underline{\underline{D}}'\end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}'}$ [redacted] U_K [redacted] I_V [redacted] $\underline{X}$ $=$ $\begin{bmatrix}\underline{I}'_q \\ \underline{E}'_q\end{bmatrix}$ [redacted] $\underline{b}'$



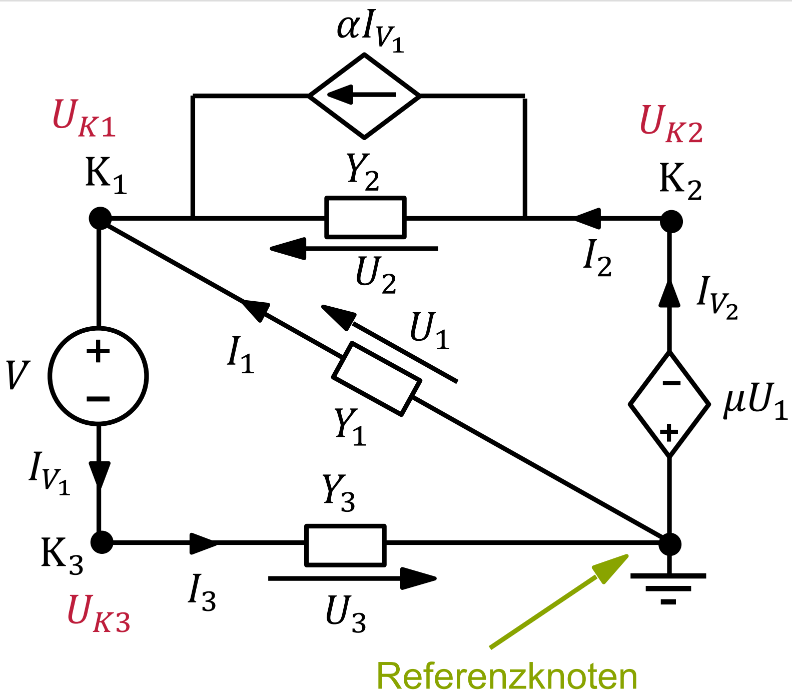
Zweige mit zusätzlichen Stromvariablen

Nur Zweige **ohne** ideale Stromquelle

C'_{ik}: $+1$, Zweig i ist vom Knoten k weg orientiert;
-1, Zweig i ist zum Knoten k hin orientiert;
$= 0$, sonst

[redacted] $_1 + Y_2$	$-Y_2$	0	1	0	[redacted] $_{K1}$	[redacted]	
$-Y_2$	Y_2	0	0	$-$ [redacted]	$_{K2}$	[redacted]	
0	0	Y_3	-1	0 [redacted]	$_{K3}$	$=$	[redacted]
$\boxed{1}$	$\boxed{0}$	$\boxed{-1}$		[redacted]	I_{V_1}	[redacted]	
$\boxed{0}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{0}$		[redacted]	I_{V_2}	[redacted]	

Beispiel 2: Netzwerk mit gesteuerten Quellen - $\underline{\underline{D}}'$



$\begin{bmatrix} \underline{\underline{Y}}' & \underline{\underline{B}}' \\ \underline{\underline{C}}' & \underline{\underline{D}}' \end{bmatrix}$ [redacted] $= \begin{bmatrix} \underline{I}_q' \\ \underline{E}_q' \end{bmatrix}$ [redacted]

$\underline{\underline{A}}'$ $\underline{X}$ $\underline{b}'$

Nur Zweige mit zusätzlichen Stromvariablen

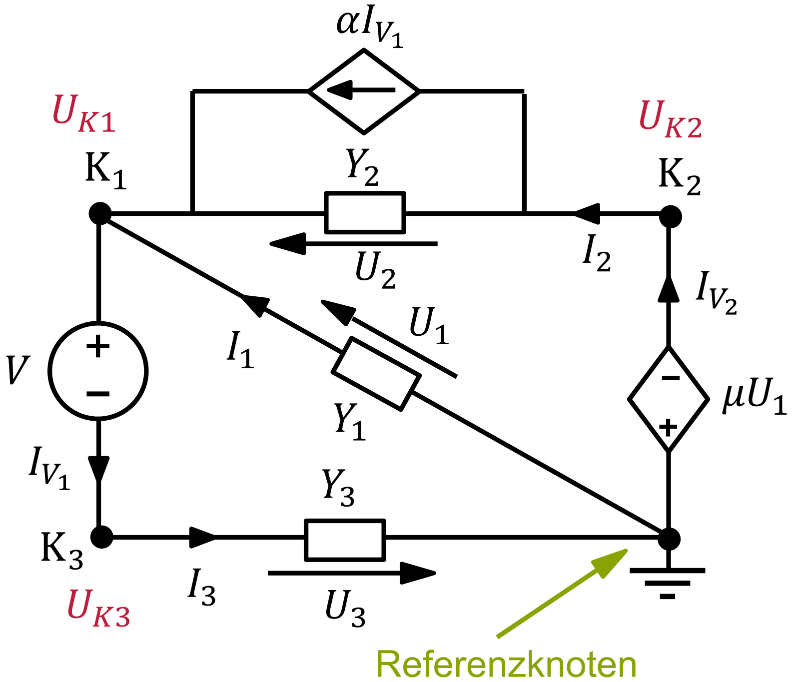
D_{ii}': $+1$, Zweig i ist ideale Stromquelle
$-Z_i$ (Impedanz des Zweiges i)
Achtung: keine ideale Stromquelle in diesem Zweig
0, sonst

$D_{ik}' = 0,\ i \neq k$

[redacted] $Y_1 + Y_2 \quad -Y_2 \quad 0 \quad 1 \quad 0$ [redacted] U_{K1} [redacted]
$-Y_2 \quad Y_2 \quad 0 \quad 0 \quad -1$ [redacted] U_{K2} [redacted]
$0 \quad 0 \quad Y_3 \quad -1 \quad 0$ [redacted] U_{K3} [redacted] $=$ [redacted]
$1 \quad 0 \quad -1 \quad \boxed{0} \quad \boxed{0}$ [redacted] I_{V_1} [redacted]
$0 \quad -1 \quad 0 \quad \boxed{0} \quad \boxed{0}$ [redacted] I_{V_2} [redacted]

Beispiel 2: Netzwerk nit gesteuerten Quellen - $\underline{b}'$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{Y}}' & \underline{\underline{B}}' \\ \underline{\underline{C}}' & \underline{\underline{D}}' \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}'} \text{[redacted]} \underline{U}_K \;\; \underline{I}_V \text{[redacted]} \underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{I}'_q \\ \underline{E}'_q \end{bmatrix} \text{[redacted]} \underline{b}'$$



I'_{qi} = Σ der mit Knoten i verbundenen Stromquellen (feste und gesteuerte);
Quellstrom fließt in Knoten i ⇒ Eintrag als positiver Wert
Quellstrom fließt aus Knoten i ⇒ Eintrag als negativer Wert

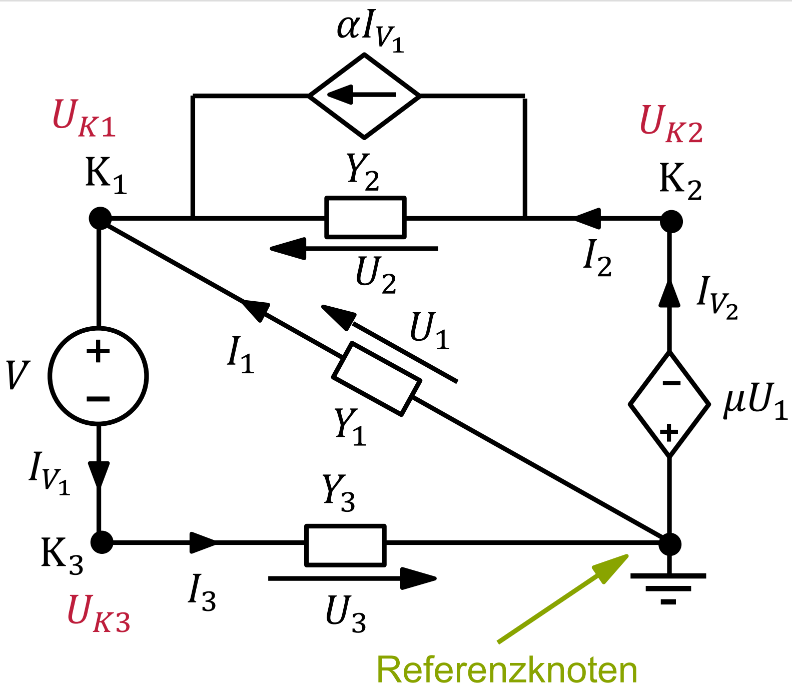
E'_{qi} = Strom- oder Spannungsquelle (fest oder gesteuert) von Zweig i
Orientierung von Quelle und Zweig i gleich
⇒ Eintrag als positiver Wert
Orientierung von Quelle und Zweig i entgegengesetzt
⇒ Eintrag als negativer Wert

Nur Zweige mit zusätzlichen Stromvariablen

$$\text{[redacted]} \begin{array}{ccc:cc} \text{[redacted]}_1 + Y_2 & -Y_2 & 0 & 1 & 0 \\ -Y_2 & Y_2 & 0 & 0 & -\text{[redacted]} \\ 0 & 0 & Y_3 & -1 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \text{[redacted]} \begin{array}{c} \text{[redacted]}_{K1} \\ U_{K\text{[redacted]}} \\ \text{[redacted]}_{K\text{[redacted]}} \\ \hdashline I_{V_1} \\ I_{V_2} \end{array} \text{[redacted]} = \text{[redacted]} \begin{array}{c} \boxed{\alpha I_{V_1}} \\ \boxed{-\alpha I_{V_\text{[redacted]}}} \\ \boxed{0} \\ \boxed{V} \\ \boxed{\mu U_1} \end{array} \text{[redacted]}$$

Beispiel 2: Netzwerk nit gesteuerten Quellen - $\underline{b}'$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{Y}}' & \underline{\underline{B}}' \\ \underline{\underline{C}}' & \underline{\underline{D}}' \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}'} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{U}_K \\ \underline{I}_V \end{bmatrix}}_{\underline{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{I}'_q \\ \underline{E}'_q \end{bmatrix}}_{\underline{b}'}$$



I'_{qi} = Σ der mit Knoten i verbundenen Stromquellen (feste und gesteuerte);
Quellstrom fließt in Knoten i ⇒ Eintrag als positiver Wert
Quellstrom fließt aus Knoten i ⇒ Eintrag als negativer Wert

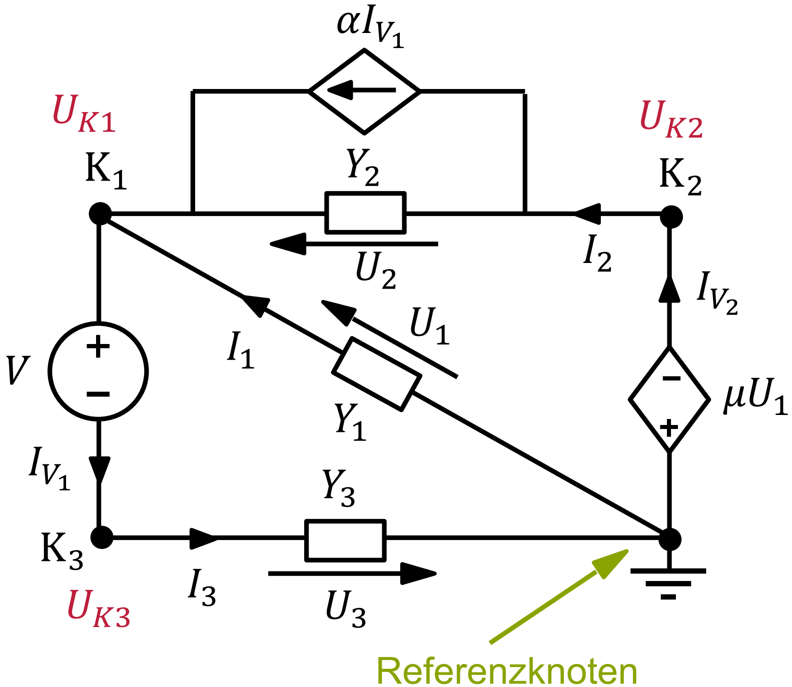
E'_{qi} = Strom- oder Spannungsquelle (fest oder gesteuert) von Zweig i
Orientierung von Quelle und Zweig i gleich
⇒ Eintrag als positiver Wert
Orientierung von Quelle und Zweig i entgegengesetzt
⇒ Eintrag als negativer Wert

Nur Zweige mit zusätzlichen Stromvariablen

$$\begin{bmatrix} Y_1+Y_2 & -Y_2 & 0 & 1 & 0 \\ -Y_2 & Y_2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & Y_3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{K1} \\ U_{K2} \\ U_{K3} \\ I_{V_1} \\ I_{V_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\alpha I_{V_1}} \\ \boxed{-\alpha I_{V_1}} \\ 0 \\ V \\ \boxed{\mu U_1} \end{bmatrix}$$

Technische Universität Braunschweig

Beispiel 2: Netzwerk mit gesteuerten Quellen



$$\begin{bmatrix} Y_1+Y_2 & -Y_2 & 0 & 1 & 0 \\ -Y_2 & Y_2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & Y_3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{K1} \\ U_{K2} \\ U_{K3} \\ I_{V_1} \\ I_{V_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\alpha I_{V_1}} \\ \boxed{-\alpha I_{V_1}} \\ 0 \\ V \\ \boxed{\mu U_1} \end{bmatrix}$$

Schritt 2: Steuerungen berücksichtigen

$$U_1 = -U_{K1}$$

[redacted] $_1 + Y_2$ $\quad -Y_2 \quad 0 \quad 1-\alpha \quad 0$ [redacted] $= $ [redacted] 0 [redacted]

$-Y_2 \quad Y_2 \quad 0 \quad \alpha \quad -$ [redacted] 0 [redacted]

$0 \quad 0 \quad Y_3 \quad -1 \quad 0$ [redacted] 0 [redacted]

$1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0$ [redacted] I_{V_1} [redacted] V [redacted]

$\mu \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0$ [redacted] I_{V_2} [redacted] 0 [redacted]

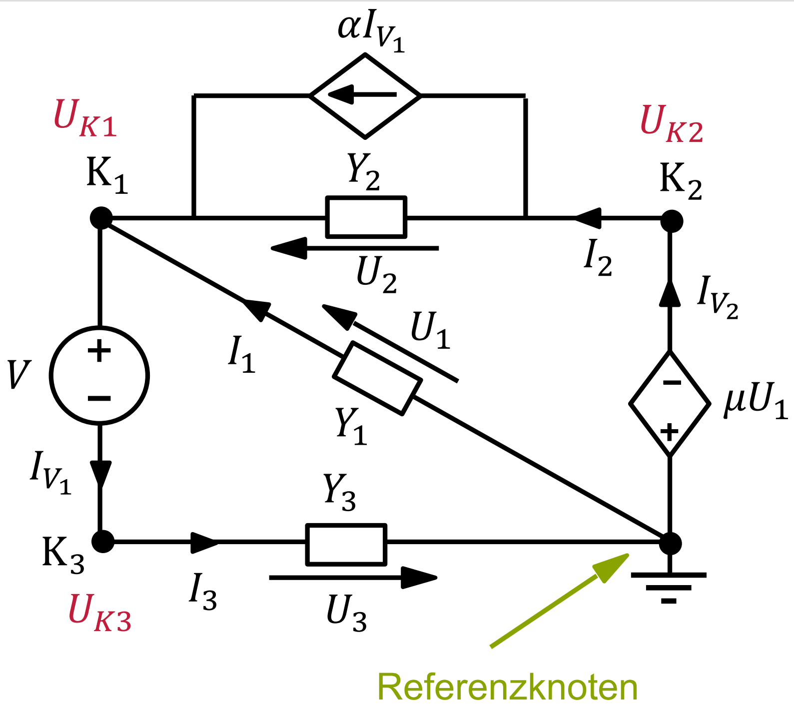
$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{Y}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}}$ [redacted] $=$ [redacted] $\underline{X}$ $\quad \underline{b}$

Technische Universität Braunschweig

Anhang:

Aufstellen des Gleichungssystems von Beispiel 2 mit Hilfe der Kirchhoffschen Knotengleichungen

Beispiel 2: Netzwerk mit gesteuerten Quellen – Mit Kirchhoffschen Gl.



Kirchhoffsche Knotengleichungen:

$$K_1\text{: } 0 = I_{V_1} - I_1 - I_2$$
$$K_2\text{: } 0 = I_2 - I_{V_2}$$
$$K_3\text{: } 0 = I_3 - I_{V_1}$$

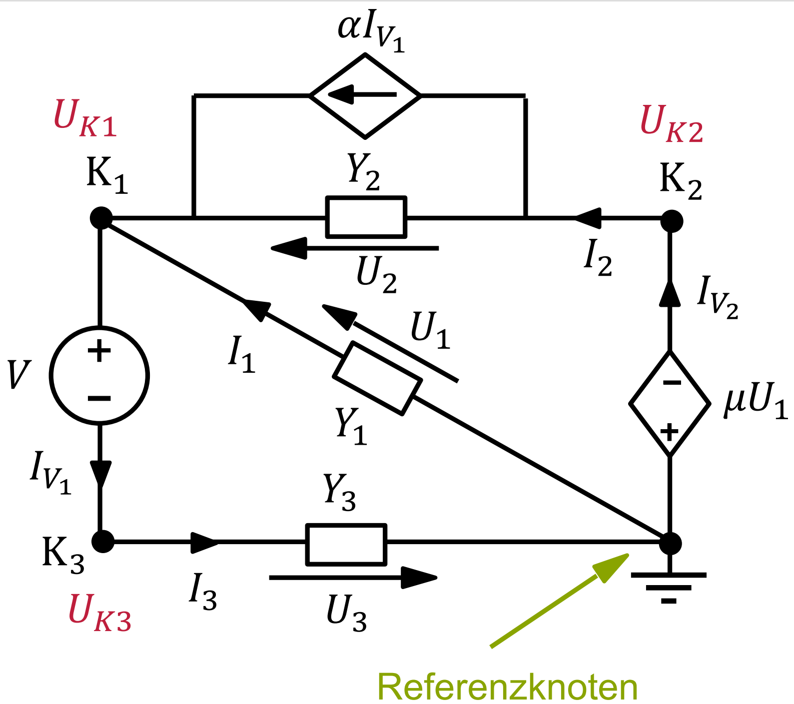
Ausdrücken der Zweigspannungen durch Knotenpotentiale.

$$U_1 = -U_{K1},\ U_2 = U_{K2} - U_{K1},\ U_3 = U_{K3}$$

Ersatzstromquellendarstellung der Zweige ohne zusätzliche Stromvariablen

$$I_1 = Y_1 U_1 = -Y_1 U_{K1}$$
$$I_2 = Y_2 U_2 + \alpha I_{V_1} = Y_2(U_{K2} - U_{K1}) + \alpha I_{V_1}$$
$$I_3 = Y_3 U_3 = Y_3 U_{K3}$$

Beispiel 2: Netzwerk mit gesteuerten Quellen – Mit Kirchhoffschen Gl.



$$\begin{aligned} K_1&: 0 = I_{V_1} - I_1 - I_2 \\ K_2&: 0 = I_2 - I_{V_2} \\ K_3&: 0 = I_3 - I_{V_1} \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_1 U_1 = -Y_1 U_{K1} \\ I_2 &= Y_2 U_2 + \alpha I_{V_1} = Y_2(U_{K2} - U_{K1}) + \alpha I_{V_1} \\ I_3 &= Y_3 U_3 = Y_3 U_{K3} \end{aligned}$$

in (1) einsetzen

$$\begin{aligned} K_1&: 0 = I_{V_1} + Y_1 U_{K1} - \left(Y_2(U_{K2} - U_{K1}) + \alpha I_{V_1}\right) \\ K_2&: 0 = Y_2(U_{K2} - U_{K1}) + \alpha I_{V_1} - I_{V_2} \\ K_3&: 0 = Y_3 U_{K3} - I_{V_1} \end{aligned}$$

Ideale feste und gesteuerte Spannungsquellen durch Knotenpotentiale ausdrücken:

$$\begin{aligned} U_{K1} - U_{K3} &= V \\ U_{K2} = -\mu U_1 = -\mu(-U_{K1}) &\Rightarrow \mu U_{K1} - U_{K2} = 0 \end{aligned}$$

Beispiel 2: Netzwerk mit gesteuerten Quellen – Mit Kirchhoffschen Gl.

Gesamter Gleichungssatz:

$$\mathrm{K}_1:\ 0 = I_{V_1} + Y_1 U_{K1} - \left(Y_2(U_{K2} - U_{K1}) + \alpha I_{V_1}\right)$$

$$\mathrm{K}_2:\ 0 = Y_2(U_{K2} - U_{K1}) + \alpha I_{V_1} - I_{V_2}$$

$$\mathrm{K}_3:\ 0 = Y_3 U_{K3} - I_{V_1}$$

$$U_{K1} - U_{K3} = V$$

$$U_{K2} = -\mu U_1 = -\mu(-U_{K1}) \Rightarrow \mu U_{K1} - U_{K2} = 0$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{X} = \underline{b}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{G}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix} \cdot \underline{X} = \underline{b}$$

$$\text{[redacted]}\begin{matrix} {}_1 + Y_2 & -Y_2 & 0 & 1-\alpha & 0 \\ -Y_2 & Y_2 & 0 & \alpha & -\text{[redacted]} \\ 0 & 0 & Y_3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \mu & -1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\text{[redacted]}\begin{matrix} U_{K1}\text{[redacted]} \\ U_{K}\text{[redacted]} \\ U_{K}\text{[redacted]} \\ I_{V_1} \\ I_{V_2} \end{matrix}\text{[redacted]} = \text{[redacted]}$$