Mathe 1 für ET - Prof. Dr. V. Bach - WS 2016/17

Aufgabe 1. [Folgen] (1 + 2 + 2 Punkte)

i.) Geben Sie die Definition der Konvergenz einer Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ an.

ii.) Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $a_n = \cos(\pi n) \cdot \dfrac{n+3}{n(n+5)}$.

Entscheiden Sie, ob $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert und geben Sie ggf. den Grenzwert von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ für $n \to \infty$ an.

iii.) Gegeben sei die Folge $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $b_n = \dfrac{(-3)^n + 2}{3^{n-1} + 2^n}$.

Bestimmen Sie alle Häufungspunkte von $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.

Aufgabe 2. [Reihen] (2,5 + 2,5 Punkte)

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

i.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$, ii.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.

Aufgabe 3. [Stetigkeit] (1 + 1 + 3 Punkte)

Es seien $U \subseteq \mathbb{R}$, $U \neq \emptyset$, eine nichtleere Teilmenge der reellen Zahlen, $x_0 \in U$, $y \in \mathbb{R}$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.

i.) Wie ist $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y$ definiert?

ii.) Formulieren Sie, was man unter Folgenstetigkeit von f im Punkt x_0 versteht.

iii.) Untersuchen Sie die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ \frac{x}{2} + 1, & x > 1, \end{cases}$$

auf Stetigkeit im Punkt $x_0 = 1$.

Aufgabe 4. [Differentiation, Satz von Taylor] (2,5 + 2,5 Punkte)

i.) Bestimmen Sie alle lokalen Maxima und Minima der Funktion

$$f : (0, \pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -\frac{1}{2} x \cos(2x) + \frac{1}{4} \sin(2x).$$

ii.) Bestimmen Sie $\cos\left(\frac{1}{10}\right)$ mit einer Genauigkeit von mindestens 10^{-4}.

Aufgabe 5. [Integrale] (2,5 + 2,5 Punkte)

Berechnen Sie folgende Integrale:

i.) $\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin(2x) \, \mathrm{d}x$, ii.) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 2} \, \mathrm{d}x$.

Aufgabe 6. [Unterräume] (1 + 4 Punkte)

i.) Es seien X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Formulieren Sie das Unterraumkriterium so, dass Y ein Unterraum von X ist.

ii.) Es sei $Y := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0,\ x_2 - x_3 = 0\}$. Zeigen Sie, dass Y ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist und berechnen Sie eine Basis von Y sowie $\dim(Y)$.

Aufgabe 7. [Lineare Gleichungssysteme] (4 + 1 Punkte)

Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad \vec{b} := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

i.) Prüfen Sie A auf Invertibilität und bestimmen Sie ggf. die inverse Matrix A^{-1}.

ii.) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$.

Aufgabe 8. [Schmidtsches Orthonormierungsverfahren] (1 + 4 Punkte)

i.) Geben Sie die Definition einer orthonormalen Teilmenge $A \subseteq X$ eines $\mathbb{R}$-Vektorraums X mit Skalarprodukt $\langle\cdot|\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ an.

ii.) Gegeben sei die Basis

$$\mathcal{B} := \left\{ \vec{x}_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ von $\mathbb{R}^3$.

Bonus-Aufgabe. [Differenzierbarkeit, Invertierbarkeit] (2,5 + 2,5 Punkte)

i.) Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

auf Differenzierbarkeit im Punkt $x_0 = 0$ und geben Sie ggf. die Ableitung im Punkt $x_0 = 0$ an.

ii.) Überprüfen Sie, ob folgende Matrix invertibel ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{9\times 9}(\mathbb{R}).$$