II. Reelle und komplexe Zahlen

II.1. Körper

Im vorigen Kapitel I haben wir die wichtigsten Zahlenmengen bereits genannt:
die *natürlichen* Zahlen,

$$\mathbb{N} \;:=\; \{1, 2, 3, \ldots\}, \tag{II.1}$$

die *ganzen* Zahlen,

$$\mathbb{Z} \;:=\; \{0, +1, -1, +2, -2, \ldots\}, \tag{II.2}$$

die *rationalen* Zahlen,

$$\mathbb{Q} \;:=\; \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}, \tag{II.3}$$

sowie die *reellen* und die *komplexen* Zahlen,

$$\mathbb{R} \quad \text{und} \quad \mathbb{C}. \tag{II.4}$$

Wir wenden uns zunächst $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ zu.

- Für $a, b \in \mathbb{N}$ ist auch $a + b \in \mathbb{N}$. Diese Tatsache bezeichnet man als *Abgeschlossenheit* von $\mathbb{N}$ bezüglich Addition.
- I.A. gilt $a - b \in \mathbb{N}$ jedoch nicht. Dafür geht man von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Z}$ über; für $a, b \in \mathbb{Z}$ sind $a + b$ und $a - b \in \mathbb{Z}$. Insbesondere ist 0 das *neutrale Element* bezüglich Addition in $\mathbb{Z}$: $a + 0 = 0 + a = a$. Man sagt, dass $\mathbb{Z}$ bezüglich der Addition + eine *Gruppe* bildet; diesen Begriff haben wir in der Vorlesung *Lineare Algebra für Elektrotechnik* ausführlich behandelt.
- Weiterhin ist $\mathbb{Z}$ auch bezüglich Multiplikation abgeschlossen, d.h. für $a, b \in \mathbb{Z}$ ist auch $a \cdot b \in \mathbb{Z}$, und es gilt das Distributivgesetz, $a(b + c) = ab + bc$. Somit ist $\mathbb{Z}$ bezüglich der Addition + und der Multiplikation $(\cdot)$ ein *Ring*; diesen Begriff haben wir in der Vorlesung *Lineare Algebra für Elektrotechnik* ebenfalls ausführlich behandelt.
- Schließlich gelangt man von $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{Q}$ durch die Forderung, dass auch Abgeschlossenheit bezüglich Division gelten soll: Für $a, b \in \mathbb{Q}$ sind $a+b, a-b, a \cdot b \in \mathbb{Q}$ und $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, falls $b \neq 0$. Diese Eigenschaften von $\mathbb{Q}$ stehen auch exemplarisch für die allgemeine Definition eines *Körpers*; auch diesen Begriff haben wir in der Vorlesung *Lineare Algebra für Elektrotechnik* behandelt, knüpfen aber nochmal neu daran an:

Definition II.1. Eine nichtleere Menge $\mathbb{F} \neq \emptyset$ heißt **Körper**[1] $:\Leftrightarrow$
Auf $\mathbb{F}$ sind **Addition** $+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ **Mulitplikation** $(\cdot) : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ definiert, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) $\mathbb{F}$ ist bezüglich Addition eine kommutative Gruppe mit neutralem Element Null $0 \in \mathbb{F}$, d.h. für es gelten $0 + a = a$, für alle $a \in \mathbb{F}$, und weiterhin

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{F} : \qquad (a + b) + c \;=\; a + (b + c)\,, \quad a + b = b + a\,, \tag{II.5}$$

$$\forall\, a \in \mathbb{F}\; \exists\, (-a) \in \mathbb{F} : \qquad a + (-a) \;=\; 0\,; \tag{II.6}$$

(ii) $\mathbb{F} \setminus \{0\}$ ist bezüglich Multiplikation eine kommutative Gruppe mit neutralem Element Eins $1 \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, d.h. es gelten $1 \cdot a = a$, für alle $a \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, und weiterhin

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{F} \setminus \{0\} : \qquad (a \cdot b) \cdot c \;=\; a \cdot (b \cdot c)\,, \quad a \cdot b = b \cdot a\,, \tag{II.7}$$

$\forall\, a \in \mathbb{F} \setminus \{0\}\; \exists\, \frac{1}{a} \in \mathbb{F} \setminus \{0\} : \qquad a \cdot \frac{1}{a} =$ [redacted]; (II.8)

(iii) Es gilt das Distributivgesetz

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{F} : \qquad a \cdot (b + c) \;=\; a \cdot b + a \cdot c\,. \tag{II.9}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Aus $0+0 = 0$ folgt $0 \cdot a + 0 \cdot a = (0+0) \cdot a = 0 \cdot a$, woraus wir $0 \cdot a = 0$ durch Addition von $-(0 \cdot a)$ für jedes $a \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ gewinnen. Insbesondere gilt dann $1 \cdot 0 = 0$, und (II.7) lässt sich auf alle $a, b, c \in \mathbb{F}$ erweitern.
- Gemäß Definition II.1 enthält jeder Körper $\mathbb{F}$ mindestens Null und Eins, $0, 1 \in \mathbb{F}$, und diese sind voneinander verschieden.
- Der kleinst(möglich)e Körper ist $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, und in der Tat ist dies ein Körper mit $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 0$ und $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 1$, $1 \cdot 1 = 1$.
- Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z} \supseteq \mathbb{N}$ der natürlichen und der ganzen Zahlen sind keine Körper.
- Die Menge $\mathbb{Q} \supseteq \mathbb{Z}$ der rationalen Zahlen ist ein Körper, und zwar der kleinste, der $\mathbb{Z}$ enthält.

II.2. Das Supremumsaxiom

Wir erinnern als Nächstes an den Begriff der *totalen Ordnung*, den wir schon in Definition I.1 kennengelernt haben.

Definition II.2. Eine Menge $S \neq \emptyset$ heißt **total geordnet** bezüglich „<“ $:\Leftrightarrow$

(i) Sind $a, b \in S$, so gilt genau eine der drei Relationen $a < b$, $a = b$ oder $a > b$. (II.10)

(ii) Sind $a, b, c \in S$, und gilt $a < b$ und $b < c$, dann gilt auch $a < c$. (II.11)

[1] engl.: field

Das Symbol „<“ heißt **Ordnungsrelation** auf S.

Beispiele für total geordnete Mengen sind $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und -wie wir später sehen werden-, auch $\mathbb{R}$.

Definition II.3. Seien $S \neq \emptyset$ eine bezüglich „<“ total geordnete Menge und $T \subseteq S$ eine Teilmenge.

(i) Gibt es ein $b \in S$ so, dass $t \leq b$ für alle $t \in T$ gilt, so heißt T **nach oben beschränkt**, und b heißt **obere Schranke** an T.

(ii) Gibt es ein $b' \in S$ so, dass $t \geq b'$ für alle $t \in T$ gilt, so heißt T **nach unten beschränkt**, und b' heißt **untere Schranke** an T.

(iii) Ist T nach oben und nach unten beschränkt, so heißt T **beschränkt**.

Definition II.4. Seien $S \neq \emptyset$ eine bezüglich „<“ total geordnete Menge, $T \subseteq S$ eine nach oben beschränkte Teilmenge. Ein Element $b \in S$ heißt **Supremum von *T*** $:\Leftrightarrow$

$$(i) \qquad \forall t \in T : \qquad t \leq b \,, \tag{II.12}$$

$$(ii) \quad \forall a \in S,\ a < b\ \exists t \in T : \qquad a < t \,. \tag{II.13}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Besitzt eine Teilmenge $T \subseteq S$ einer total geordneten Menge S ein Supremum $b \in S$, so ist dieses eindeutig und wir schreiben
$$b \ =: \ \sup \{T\} \,, \tag{II.14}$$
für *das* Supremum von T.
- Sind $S := \mathbb{Q}$ und $T := \{a \in \mathbb{Q} \mid a^2 < 2\}$, so ist S total geordnet bezüglich der üblichen Relation „<“ zwischen Zahlen, und T ist nach oben beschränkt - z.B. ist $2 \in \mathbb{Q}$ eine obere Schranke.
Es existiert jedoch kein Supremum von T in S: Man sieht nämlich leicht ein, dass $b^2 = 2$ für das Supremum $b = \sup\{T\} \in S = \mathbb{Q}$ gelten müsste, diese Gleichung besitzt aber keine rationale Lösung, wie wir schon in der neunten Klasse lernen ($\sqrt{2}$ ist irrational).
- Wir folgern, dass $\mathbb{Q}$ das unten formulierte Supremumsaxiom nicht erfüllt.

Definition II.5. Eine total geordnete Menge $S \neq \emptyset$ erfüllt das **Supremumsaxiom**, falls jede nach oben beschränkte Teilmenge $T \subseteq S$ ein Supremum $\sup\{T\} \in S$ besitzt.

Satz II.6. *Es gibt einen eindeutigen geordneten Körper $\mathbb{F} \supseteq \mathbb{Q}$, der das Supremumsaxiom erfüllt und in dem für alle $a, b, c \in \mathbb{F}$: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ und $a, b > 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$ gelten. Wir nennen diesen Körper $\mathbb{F}$ die **reellen Zahlen** und bezeichnen ihn mit $\mathbb{R}$.*

实数的定义

Bemerkungen und Beispiele.

- Der Beweis von Satz II.6 beinhaltet die Konstruktion der reellen aus den rationalen Zahlen, und für sie fehlt uns in der Vorlesung leider die Zeit. Diese Konstruktion ist aber ein Juwel der Mathematik und soll niemandem vorenthalten werden; wir fügen sie als Ergänzung zu diesem Kapitel unten an.

- Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ beinhalten die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, wenn wir $\mathbb{R}$ mit $\mathrm{Re}\{\mathbb{C}\} = \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}(z) = 0\}$ den komplexen Zahlen mit verschwindendem Imaginärteil identifizieren. Und auf $\mathbb{C}$ lässt sich auch eine Ordnungsrelation „$\prec$“ definieren, bezüglich der $\mathbb{C}$ total geordnet ist. Mit dieser Ordnungsrelation ist jedoch das Supremumsaxiom verletzt oder die Eigenschaften $a \prec b \Rightarrow a + c \prec b + c$ und $a, b \succ 0 \Rightarrow a \cdot b \succ 0$ gelten nicht für alle $a, b, c \in \mathbb{C}$. Nur die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ besitzen alle diese Eigenschaften.
- Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ haben wir im vergangenem Semester in der Vorlesung *Lineare Algebra für Elektrotechnik* definiert und ihre Eigenschaften dort ausführlich diskutiert. Wir wiederholen dies nicht verweisen dazu auf das Vorlesungsmanuskript.

Die im folgenden Lemma festgehaltene Konsequenz des Supremumsaxiom spielt in den Beweisen der Analysis eine zentrale Rolle

Lemma II.7. *Seien $T_1 \subseteq \mathbb{R}$ eine nach oben und $T_1 \subseteq \mathbb{R}$ eine nach unten beschränkte Menge reeller Zahlen. Dann gelten*

$$(i) \qquad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \, t_1 \in T_1 : \qquad \sup T_1 - \varepsilon < t_1, \tag{II.15}$$

$$(ii) \qquad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \, t_2 \in T_2 : \qquad \inf T_2 + \varepsilon > t_2. \tag{II.16}$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus den Definitionen von Supremum und Infimum. □

Bemerkungen und Beispiele.

- Lemma II.7 besagt, dass man das Supremum $\sup(T_1)$ einer nach oben beschränkten Teilmenge $T_1 \subseteq \mathbb{R}$ und das Infimum $\inf(T_1)$ einer nach unten beschränkten Teilmenge $T_2 \subseteq \mathbb{R}$ durch Elemente aus T_1 und T_2 beliebig gut nähern kann: Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ -und sei es auch noch so klein- findet man $t_1 \in T_1$ und $t_2 \in T_2$, so dass

$$0 \;\le\; \sup(T_1) - t_1 \;<\; \varepsilon \quad \text{und} \quad 0 \;\le\; t_2 - \inf(T_2) \;<\; \varepsilon. \tag{II.17}$$

- Es sind $\sup[0,5] = \sup(0,5) = 5$ und $\inf[0,5] = \inf(0,5) = 0$.
- Mit $T := \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ sind $\sup\{T\} = 1$ und $\inf\{T\} = 0$.

$A = (2, 2\sqrt{2}] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \le 2\sqrt{2}\} \Rightarrow$ A ist beschränkt, $\sup(A) = 2\sqrt{2}$, $\inf(A) = 2$

$B = [0, 4) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < 4\} \Rightarrow \sup(B) = 4$,

(i) $\forall x \in B: x < 4$ ($\Rightarrow$ 4 ist obere Schranke an B)

(ii) sei $0 \le y < 4$. Dann ist $y < \frac{1}{2}(4+y) < 4$, weiterhin ist $\frac{1}{2}(4+y) \in B$

$\Rightarrow$ y ist kein Supremum

$C := \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\} \subseteq [0,1]$, $\sup(C) = 1$, $\inf(C) = 0$

II.3. Ergänzung: Konstruktion der Reellen Zahlen

In dieser Ergänzung wollen wir die Konstruktion der reellen Zahlen vorstellen. Dabei kann man verschiedene Wege beschreiten - etwa den über die Dedekindschen Schnitte. Wir wählen jedoch einen andere Weg, der in die Funktionalanalysis weist: Wir führen die reellen Zahlen als Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen ein - ganz analog zur Vervollständigung normierter Vektorräume.

II.3.1. Äquivalenz rationaler Cauchy-Folgen

Definition II.8. Sei

$$\mathcal{R} \ := \ \left\{ (a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \ \middle| \ \forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, m, n \geq n_0 : \ |a_m - a_n| \leq 10^{-k} \right\} \tag{II.18}$$

die Menge aller **rationalen Cauchy-Folgen**. Wir definieren eine Relation $\sim : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \{w, f\}$ durch

$$(a_n)_{n=1}^\infty \sim (b_n)_{n=1}^\infty \quad :\Leftrightarrow \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, m, n \geq n_0 : \ |a_m - b_n| \ \leq \ 10^{-k}\,. \tag{II.19}$$

Gilt (II.18), so heißen $\underline{a} := (a_n)_{n=1}^\infty$ und $\underline{b} := (b_n)_{n=1}^\infty$ **äquivalent**.

Lemma II.9. $\sim : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \{w, f\}$ *ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Seien $\underline{a} := (a_n)_{n=1}^\infty$, $\underline{b} := (b_n)_{n=1}^\infty$, $\underline{c} := (c_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{R}$.

Reflexivität: $\underline{a} \sim \underline{a}$ ist gleichwertig mit $\underline{a} \in \mathcal{R}$.

Symmetrie: Offensichtlich ist $\underline{a} \sim \underline{b}$ gleichwertig mit $\underline{b} \sim \underline{a}$.

Transitivität: Sei $k \in \mathbb{N}$, und gelten $\underline{a} \sim \underline{b}$ und $\underline{b} \sim \underline{c}$. Dann gibt es $n_0', n_0'' \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, m, n \geq n_0' : \qquad |a_m - b_n| \ \leq \ 10^{-k-1}\,, \tag{II.20}$$

$$\forall\, n, \ell \geq n_0'' : \qquad |b_n - c_\ell| \ \leq \ 10^{-k-1}\,. \tag{II.21}$$

Mit $n_0 := \max(n_0', n_0'')$ ist damit

$$\forall\, m, \ell \geq n_0 : \quad |a_m - c_\ell| \ \leq \ |a_m - b_m| + |b_m - c_\ell| \ \leq \ 10^{-k-1} + 10^{-k-1} \ \leq \ 10^{-k}\,. \tag{II.22}$$

und daher gilt auch $\underline{a} \sim \underline{c}$. □

Bemerkungen und Beispiele.

- Somit zerfällt $\mathcal{R}$ in disjunkte Äquivalenzklassen, die wir als **reelle Zahlen** bezeichnen,

$$\mathbb{R} \ := \ \mathcal{R}/\sim\ . \tag{II.23}$$

- Ist $\underline{a} \in \mathcal{R}$, so bezeichnen wir die zugehörige Äquivalenzklasse mit $[\underline{a}]$.

- Die rationalen Zahlen sind in folgender Weise in $\mathbb{R}$ eingebettet: Zu $q \in \mathbb{Q}$ betrachten wir die konstante Folge $(q, q, q, \ldots) = (q)_{n=1}^{\infty}$. Offenbar ist $(q)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{R}$, und wir identifizieren $q \in \mathbb{Q}$ mit der Äquivalenzklasse $[(q)_{n=1}^{\infty}] \in \mathbb{R}$.
- Wir schreiben insbesondere $[\underline{0}] := [(0)_{n=1}^{\infty}]$.

Lemma II.10. *Sei $\underline{a} = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{R}$ und $[\underline{a}] \neq [\underline{0}]$. Dann gilt*

$$\textit{entweder} \quad [\underline{a}] > [\underline{0}] \quad :\Leftrightarrow \exists\, L, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0 : \ a_n \geq 10^{-L}, \tag{II.24}$$

$$\textit{oder} \quad [\underline{a}] < [\underline{0}] \quad :\Leftrightarrow \exists\, L, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0 : \ a_n \leq -10^{-L}. \tag{II.25}$$

Beweis. Da $[\underline{a}] \neq [\underline{0}]$, ist $(a_n)_{n=1}^{\infty} \not\sim (0)_{n=1}^{\infty}$, und es gilt

$$\exists\, L \in \mathbb{N}\ \forall\, N_0 \in \mathbb{N}\ \exists\, \tilde{n} \geq N_0 : \quad |a_{\tilde{n}} - 0| = |a_{\tilde{n}}| \geq 10^{-L+1}. \tag{II.26}$$

Wählen wir nun $k := L + 1$, so ergibt sich aus der Tatsache, dass $\underline{a} \in \mathcal{R}$,

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, m, n \geq n_0 : \quad |a_m - a_n| \leq 10^{-L}. \tag{II.27}$$

Jetzt wählen wir $N_0 := n_0$ in (II.26) und erhalten

$$\exists\, \tilde{n} \geq n_0 : \quad |a_{\tilde{n}}| \geq 10^{-L+1}. \tag{II.28}$$

Wir setzen dann $n := \tilde{n}$ in (II.27) und sehen, dass

$$\forall\, m \geq n_0 : \quad |a_m| \geq |a_{\tilde{n}}| - |a_m - a_{\tilde{n}}| \geq 10^{-L+1} - 10^{-L} = 9 \cdot 10^{-L}. \tag{II.29}$$

Ist $a_{n_0} > 0$, so ist $a_{n_0} = |a_{n_0}|$ und nach (II.26) gilt für alle $m \geq n_0$:

$$\begin{aligned} a_m &= a_{n_0} + a_m - a_{n_0} = |a_{n_0}| + a_m - a_{n_0} = |a_{n_0}| - |a_m - a_{n_0}| \\ &\geq 9 \cdot 10^{-L} - 10^{-L} = 8 \cdot 10^{-L} \geq 10^{-L}. \end{aligned} \tag{II.30}$$

Ist umgekehrt $a_{n_0} < 0$, so ist $a_{n_0} = -|a_{n_0}|$, und analog folgt

$$\forall\, m \geq n_0 : \quad a_m \leq -10^{-L}. \tag{II.31}$$

$\square$

Lemma II.11. *Seien $\underline{a} := (a_n)_{n=1}^{\infty}$, $\underline{b} := (b_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{R}$. Dann gilt*

$$\big(\underline{a} \sim \underline{b}\big) \quad \Leftrightarrow \quad \big(\underline{a} - \underline{b} \sim \underline{0}\big), \tag{II.32}$$

wobei $\underline{a} - \underline{b} := (a_n - b_n)_{n=1}^{\infty}$.

Beweis.
<u>"$\Rightarrow$":</u> Ist $\underline{a} \sim \underline{b}$, so gilt insbesondere

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0 : \quad |a_n - b_n| \leq 10^{-k}, \tag{II.33}$$

also auch

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, m, n \geq n_0 : \quad |(a_n - b_n) - 0| \ \leq\ 10^{-k}\,, \tag{II.34}$$

wobei 0 das m. Element der Folge $\underline{0}$ ist. Mit anderen Worten: $(\underline{a} - \underline{b}) \sim \underline{0}$.

<u>"$\Leftarrow$":</u> Ist umgekehrt $(\underline{a} - \underline{b}) \sim \underline{0}$, so gilt (II.33). Weiterhin ist $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{R}$, und daher gibt es $n_0' \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, m, n \geq n_0' : \quad |a_m - a_n| \ \leq\ 10^{-k}\,. \tag{II.35}$$

Für $m, n \geq \max(n_0, n_0')$ erhalten wir somit

$$|a_m - b_n| \ \leq\ |a_m - a_n| \ +\ |a_n - b_n| \ \leq\ 2 \cdot 10^{-k}\,, \tag{II.36}$$

d.h. $\underline{a} \sim \underline{b}$. □

II.3.2. Die Grundrechenarten

Definition II.12. Seien $\underline{a} = (a_n)_{n=1}^\infty,\ \underline{b} = (b_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{R}$. Wir definieren

$$\underline{a}\ \pm\ \underline{b}\ := (a_n\ \pm\ b_n)_{n=1}^\infty, \tag{II.37}$$

$$\underline{a}\ \cdot\ \underline{b}\ := (a_n\ \cdot\ b_n)_{n=1}^\infty \tag{II.38}$$

und, für $\underline{b} \not\sim \underline{0}$,

$$\frac{1}{\underline{b}} := \left(\frac{1}{b_n + \mathrm{sgn}(b_n) \cdot 10^{-n}} \right)_{n=1}^\infty , \tag{II.39}$$

wobei $\mathrm{sgn} : \mathbb{Q} \to \{-1, 1\}$,

$$\mathrm{sgn}(q) := \begin{cases} 1\,, & \text{falls } q \geq 0\,, \\ -1\,, & \text{falls } q < 0\,. \end{cases} \tag{II.40}$$

Lemma II.13. *Seien $\underline{a} = (a_n)_{n=1}^\infty,\ \underline{b} = (b_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{R}$. Dann sind $\underline{a}\ \pm\ \underline{b}$, $\underline{a}\ \cdot\ \underline{b} \in \mathcal{R}$, und für $\underline{b} \not\sim \underline{0}$ ist auch $\frac{1}{\underline{b}} \in \mathcal{R}$.*

Beweis. Da $\underline{a}, \underline{b} \in \mathcal{R}$, gibt es zu $k \in \mathbb{N}$ zwei Zahlen $n_0', n_0'' \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall\, m, n \geq n_0' : \qquad |a_m - a_n| \ \leq\ 10^{-k-1}\,, \tag{II.41}$$

$$\forall\, m, n \geq n_0'' : \qquad |b_m - b_n| \ \leq\ 10^{-k-1}\,. \tag{II.42}$$

somit gilt $\forall\, m, n \geq \max(n_0', n_0'')$:

$$\begin{aligned} |(a_m\ \pm\ b_m)| \ &= |(a_m - a_n)\ \pm\ (b_m - b_n)| \\ &\leq |a_m - a_n| \ +\ |b_m - b_n| \ \leq\ 10^{-k-1} + 10^{-k-1} \ \leq\ 10^{-k}\,, \end{aligned} \tag{II.43}$$

also $\underline{a}\ \pm\ \underline{b} \in \mathcal{R}$. Mit $k := 1$ folgt aus $\underline{a}, \underline{b} \in \mathcal{R}$, dass

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, m, n \geq n_0 : \quad |a_m - a_n|,\ |b_m - b_n| \ \leq\ 10^{-1}\,. \tag{II.44}$$

Setzen wir $m := n_0$, so folgt daraus, dass

$$\forall\, m,n \geq n_0 : \quad |a_m| + |b_m| \;\leq\; |a_{n_0}| + |b_{n_0}| + 2 \cdot 10^{-1} \;\leq\; |a_{n_0}| + |b_{n_0}| + 1\,. \tag{II.45}$$

Mit

$$C \;:=\; \Big(\sum_{r=1}^{n_0} |a_r| + |b_r| \Big) + 1\,, \tag{II.46}$$

erhalten wir

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \;\leq\; C, \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} |b_n| \;\leq\; C\,. \tag{II.47}$$

Wir beobachten nun, dass

$$\begin{aligned} |a_m b_m - a_n b_n| \; &= |(a_m - a_n) b_m \;+\; a_n (b_m - b_n)| \\ &\leq |a_m - a_n| \cdot |b_m| \;+\; |a_n| \cdot |b_m - b_n| \\ &\leq C \cdot \big(|a_m - a_n| \;+\; |b_m - b_n| \big)\,. \end{aligned} \tag{II.48}$$

Seien nun $k \in \mathbb{N}$ und $\ell \in \mathbb{N}$ so, dass $C \leq 10^{\ell}$. Dann gibt es $n_0', n_0'' \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, m,n \geq n_0' : \qquad |a_m - a_n| \;\leq\; 10^{-k-\ell}\,, \tag{II.49}$$

$$\forall\, m,n \geq n_0'' : \qquad |b_m - b_n| \;\leq\; 10^{-k-\ell}\,. \tag{II.50}$$

Also ist mit (II.48)

$$\forall\, m,n \geq \max(n_0', n_0'') : \quad |a_m b_m - a_n b_n| \;\leq\; 10^{-k}\,, \tag{II.51}$$

d.h. $\underline{a} \cdot \underline{b} \in \mathcal{R}$.

Ist schließlich $\underline{b} \sim \underline{0}$, so existieren nach Lemma II.10 zwei Zahlen $L, n_0' \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall\, n \geq n_0' : \quad |b_n| \;\geq\; 10^{-L}\,. \tag{II.52}$$

Für $k \in \mathbb{N}$ gibt es $n_0'' \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, m,n \geq n_0'' : \quad |b_m - b_n| \;\leq\; 10^{-k-1-2L}\,, \tag{II.53}$$

und so erhalten wir für alle $m,n \geq \max(n_0, n_0') + 2L + k + 1 \;=:\; n_0$.

$$\begin{aligned} &\big| (b_m + \mathrm{sgn}(b_m) \cdot 10^{-m})^{-1} \;-\; (b_n + \mathrm{sgn}(b_n) \cdot 10^{-n})^{-1} \big| \\ &= \Big(\frac{1}{|b_m| + 10^{-m}} \Big) \cdot \Big(\frac{1}{|b_n| + 10^{-n}} \Big) \cdot \Big| b_m - b_n + \mathrm{sgn}(b_m) 10^{-m} - \mathrm{sgn}(b_n) 10^{-n} \Big| \\ &\leq 10^{-2L} \cdot \big(10^{-k-1-2L} + 10^{-k-1-2L} + 10^{-k-1-2L} \big) \;\leq\; 3 \cdot 10^{-k-1} \;\leq\; 10^{-k}\,. \end{aligned} \tag{II.54}$$

Also ist $\frac{1}{\underline{b}} \in \mathcal{R}$. □

Lemma II.14. *Seien* $\underline{a} = (a_n)_{n=1}^\infty$, $\underline{\hat{a}} = (\hat{a}_n)_{n=1}^\infty$, $\underline{b} = (b_n)_{n=1}^\infty$, $\underline{\hat{b}} = (\hat{b}_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{R}$ *mit* $\underline{a} \sim \underline{\hat{a}}$ *und* $\underline{b} \sim \underline{\hat{b}}$. *Dann sind*

$$\underline{a} \pm \underline{b} \sim \underline{\hat{a}} \pm \underline{\hat{b}} \tag{II.55}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} \sim \underline{\hat{a}} \cdot \underline{\hat{b}} \tag{II.56}$$

und, falls $\underline{b} \not\sim \underline{0}$,

$$\frac{1}{\underline{b}} \sim \frac{1}{\underline{\hat{b}}}. \tag{II.57}$$

Beweis. Wie in Lemma II.13 gibt es $L \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : |a_n|,\ |\hat{a}_n|,\ |b_n|,\ |\hat{b}_n| \ \leq\ 10^L. \tag{II.58}$$

Zu $k \in \mathbb{N}$ gibt es dann $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, m, n \geq n_0 : |a_m - \hat{a}_n|,\ |b_m - \hat{b}_n| \ \leq\ 10^{-k-1-L}. \tag{II.59}$$

Also sind für alle $m, n \geq n_0$

$$\begin{aligned} |(a_m \pm b_m) - (\hat{a}_n \pm \hat{b}_n)| &= |(a_m - \hat{a}_n) \pm (b_m - \hat{b}_n)| \\ &\leq 2 \cdot 10^{-k-1-L} \ \leq\ 10^{-k} \end{aligned} \tag{II.60}$$

und

$$\begin{aligned} |a_m \cdot b_m - \hat{a}_n \cdot \hat{b}_n| &= |(a_m - \hat{a}_n) b_m + \hat{a}_n (b_m - \hat{b}_n)| \\ &\leq |b_m| \cdot |a_m - \hat{a}_n| + |\hat{a}_n| \cdot |b_m - \hat{b}_n| \\ &\leq 2 \cdot 10^L \cdot 10^{-k-1-L} \ \leq\ 10^{-k}. \end{aligned} \tag{II.61}$$

Dies beweist (II.55) und (II.56). Glg (II.57) ist analog. □

Korollar II.15. *Die Verknüpfungen* $+,\ -,\ \cdot\ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$[\underline{a}] \pm [\underline{b}] := [\underline{a} \pm \underline{b}], \tag{II.62}$$

$$[\underline{a}] \cdot [\underline{b}] := [\underline{a} \cdot \underline{b}], \tag{II.63}$$

und die Abbildung $1/(\cdot) : \mathbb{R} \setminus \{[\underline{0}]\} \to \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{[\underline{b}]} := \left[\frac{1}{\underline{b}}\right] \tag{II.64}$$

sind wohldefiniert, d.h. unabhängig von den gewählten Repräsentanten $\underline{a}, \underline{b} \in \mathcal{R}$.

Lemma II.16. $\mathbb{R}$ *ist bezüglich der in* (II.62)–(II.63) *und durch*

$$\forall\, [\underline{a}] \in \mathbb{R},\ [\underline{b}] \in \mathbb{R} \setminus \{[\underline{0}]\} : \quad \frac{\underline{a}}{\underline{b}} := \left[\underline{a} \cdot \frac{1}{\underline{b}}\right] \tag{II.65}$$

definerten Verknüpfungen ein Körper.

Beweis. Nachprüfen der Körperaxiome; dabei sind $[\underline{0}]$ und $[\underline{1}] = [(1)_{n=1}^{\infty}]$ die neutralen Elemente der Addition bzw. Multiplikation. $\square$

Definition II.17. Für je zwei Elemente $[\underline{a}]$, $[\underline{b}] \in \mathbb{R}$ mit $[\underline{a}] \neq [\underline{b}]$ definieren wir

$$[\underline{a}] \ < \ [\underline{b}] \qquad :\Leftrightarrow [\underline{a} - \underline{b}] \ < \ 0\,, \tag{II.66}$$

$$[\underline{a}] \ > \ [\underline{b}] \qquad :\Leftrightarrow [\underline{a} - \underline{b}] \ > \ 0\,, \tag{II.67}$$

wobei die rechten Seiten in Lemma II.10 definiert sind.

Lemma II.18. $\mathbb{R}$ *ist bezüglich "$<$" total geordnet, und für alle* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *gelten* $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ *und* $a, b > 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$.

Beweis. Nachprüfen der Definition einer totalen Ordnung und der Eigenschaften $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ und $a, b > 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$. $\square$

II.3.3. Das Supremumsaxiom

Satz II.19. $\mathbb{R}$ *erfüllt das Supremumsaxiom.*

Beweis. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine durch $[\underline{c}] \in \mathbb{R}$, $\underline{c} = (c_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{R}$ nach oben beschränkte Teilmenge, wobei wir der Einfachheit halber annehmen, dass $A \cap \mathbb{R}^+ \neq \emptyset$.

Da $\underline{c} \in \mathcal{R}$, ist auch $\underline{c}$ beschränkt, d.h. es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall\, [\underline{a}] \in A : \quad [\underline{a}] \ < \ \left[(10^N)_{n=1}^{\infty}\right]. \tag{II.68}$$

Wir setzen nun $b_1 := \beta_1 \cdot 10^{N-1}$, wobei $\beta_1 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ so gewählt ist, dass

$$\exists\, x_1 \in A \ : \qquad x_1 \ \geq \ \left[(\beta_1 \cdot 10^{N-1})_{n=1}^{\infty}\right] \text{ und} \tag{II.69}$$

$$\forall\, x \in A \ : \qquad x \ < \ \left[\left((\beta_1 + 1) \cdot 10^{N-1}\right)_{n=1}^{\infty}\right]. \tag{II.70}$$

Anschließend setzen wir $b_2 := b_1 + \beta_2 \cdot 10^{N-2}$, wobei $\beta_2 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ so gewählt ist, dass

$$\exists\, x_2 \in A \ : \qquad x_2 \ \geq \ \left[(b_2)_{n=1}^{\infty}\right] \text{ und} \tag{II.71}$$

$$\forall\, x \in A \ : \qquad x \ < \ \left[\left(b_2 + 10^{N-2}\right)_{n=1}^{\infty}\right], \tag{II.72}$$

u.s.w. Für allgemeines $k \in \mathbb{N}$ setzen wir $b_k := b_{k-1} + \beta_k \cdot 10^{N-k}$, wobei $\beta_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ so gewählt ist, dass

$$\exists\, x_k \in A \ : \qquad x_k \ \geq \ \left[(b_k)_{n=1}^{\infty}\right] \text{ und} \tag{II.73}$$

$$\forall\, x \in A \ : \qquad x \ < \ \left[(b_k + 10^{N-k})_{n=1}^{\infty}\right]. \tag{II.74}$$

Die so gebildete Folge $(b_n)_{n=1}^\infty =: \underline{b}$ ist offenbar eine Cauchy-Folge, denn für $m > n \geq n_0$ ist

$$|b_m - b_n| \;=\; \left| \sum_{\ell=n+1}^{m} \beta_\ell \cdot 10^{N-\ell} \right| \;\leq\; 10^{N-n} \;\leq\; 10^{N-n_0}\,. \tag{II.75}$$

Sei nun $\underline{d} := (d_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{R}$ mit $[\underline{d}] < [\underline{b}]$, d.h. $[\underline{b} - \underline{d}] > [\underline{0}]$. Nach Lemma II.10 gibt es dann $m_0, M \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall\, m > n \geq m_0 : \quad d_m \;<\; b_m - 10^{-M} \;\leq\; b_n - (10^{-M} - 10^{N-n})\,, \tag{II.76}$$

wie in (II.75). Für $n_0 := m_0 + N + M + 1$ ergibt dies

$$\forall\, m > n_0 : \quad d_m \;\geq\; b_{n_0} - 10^{-M-1}\,, \tag{II.77}$$

was

$$[\underline{d}] \;\leq\; \Big[\big(b_{n_0} - 10^{-M-1} \big)_{n=1}^\infty \Big] \;\leq\; x_{n_0} - \Big[\big(10^{-M-1} \big)_{n=1}^\infty \Big] \;<\; x_{n_0} \;\in\; A \tag{II.78}$$

impliziert. Also ist $[\underline{d}]$ keine obere Schranke an A.

Sei schließlich $[\underline{a}] \in A$, und nehmen wir an, dass $[\underline{a}] > [\underline{b}]$, also $[\underline{a} - \underline{b}] > [\underline{0}]$. Dann gibt es $m_0, M \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\forall\, m > k \geq m_0 : \quad a_m \;>\; b_m + 10^{-M} \;\geq\; b_k + 10^{-M} - 10^{N-k}\,. \tag{II.79}$$

Für $k := M + N + 1 + m_0$ bedeutete dies, dass für alle $m > k$

$$\begin{aligned} a_m \;&\geq b_k + 10^{-M} - 10^{-M-1} \;\geq\; b_k + 9 \cdot 10^{-M-1} \\ &= b_k + 9 \cdot 10^{m_0+N-1} \;\geq\; b_k + 10^{N-k}\,, \end{aligned} \tag{II.80}$$

was

$$[\underline{a}] \;\geq\; \Big[\big(b_k + 10^{N-k} \big)_{k=1}^\infty \Big] \tag{II.81}$$

impliziert. Gleichung (II.81) steht jedoch in Widerspruch zu (II.74). Also gilt $[\underline{a}] \leq [\underline{b}]$.

Zusammenfassend erhalten wir

$$\forall\, [\underline{a}] \in A : \qquad [\underline{a}] \;\leq\; [\underline{b}], \tag{II.82}$$

$$\forall\, [\underline{d}] < [\underline{b}]\ \exists\, [\underline{a}] \in A : \qquad [\underline{d}] \;<\; [\underline{a}]\,. \tag{II.83}$$

Also ist $[\underline{b}] = \sup A$. $\square$