Technische Universität Braunschweig

Decision Support
Institut für Wirtschaftsinformatik

# Operations Research

Vorlesung 5

Lineare Programmierung: Dualer Simplex & Dualität

# Wiederholung

- Standardproblem der linearen Optimierung
  - Maximierungsproblem
  - Kleiner-Gleich-Bedingungen

- Simplexalgorithmus
  - Umwandlung in Gleichungssystem durch Schlupfvariablen
  - Gleichungssystem mit Freiheitsgraden
  - Entfernen von Freiheitsgraden durch Nichtbasisvariablen (NBV) = 0
  - Lösung des linearen Gleichungssystems mit Gauß (Kreisregel)
  - Suche nach Verbesserung durch Änderung der NBV

# Heutige Fragestellungen

- Unser Simplex-Tableau startet generell mit dem Nullpunkt (Strukturvariablen = Nichtbasisvariablen).

- Was machen wir, wenn der Nullpunkt keine zulässige Lösung ist?

- Gibt es weitere Aussagen über lineare Programme, z.B.
  - Zur Konstruktion alternativer Algorithmen für LP-Modelle?
  - Zur Verringerung des Lösungsaufwandes?
  - Zur Interpretation von LP-Modellen und optimalen Endtableaus?

# Überblick

1. Dualer Simplex-Algorithmus
2. Duales Programm

# Überblick

1. **Dualer Simplex-Algorithmus**

2. Duales Programm

# Standardproblem der linearen Programmierung

**Alternative Sprechweise:** Standard*formulierung* der linearen Programmierung

$$\left.\begin{array}{lrl} \max & z = c_1 x_1 + \cdots + & c_n x_n \\ \text{u.d.N.} & a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n & \leq b_1 \\ & \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & \quad \vdots \\ & a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n & \leq b_m \\ & x_1, \ldots, x_n & \geq 0 \end{array}\right\} \quad \boxed{\begin{array}{lrl} \max & z & = c^T x \\ \text{u.d.N.} & Ax & \leq b \\ & x & \geq 0 \end{array}}$$

mit $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

# Herstellung der Standardform

## Zielfunktion

- Es liegt ein Minimierungsproblem vor:
  $\min z = c^T x \quad \leftrightarrow \quad \max z' = -c^T x$

## Nebenbedingungen

- Es liegt eine „≥“-Bedingung vor:
  $$2x_1 - 4x_2 - 3x_3 \geq 5$$
  $$\leftrightarrow$$
  $$-2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq -5$$
- Es liegt eine Gleichheitsbedingung vor:
  $$x_1 - 2x_2 - x_3 = 1$$
  $$\leftrightarrow$$
  $$x_1 - 2x_2 - x_3 \leq 1$$
  $$-x_1 + 2x_2 + x_3 \leq -1$$

## Variablen

- Es liegt eine unbeschränkte Variable $x_i \in \mathbb{R}$ oder nicht-positive Variable $x_i \leq 0$ vor.
- Es werden zwei bzw. eine neue vorzeichen-beschränkte Entscheidungsvariablen $x_i^+ \geq 0$ und $x_i^- \geq 0$ definiert.
- Ursprüngliche Variable wird in der Zielfunktion und den Restriktionen mit den neuen Variablen substituiert: $x_i = x_i^+ - x_i^-$ bzw. $x_i = -x_i^-$.

$$x_i \in \mathbb{R} \qquad\qquad x_i \leq 0$$

$$\underbrace{x_i^+ \geq 0 \qquad\qquad x_i^- \geq 0}_{x_i = x_i^+ - x_i^-} \qquad\qquad \underbrace{x_i^- \geq 0}_{x_i = -x_i^-}$$

# Beispiel

$$\begin{aligned} \min z = x_1 + 2x_2 & \\ x_1 - \quad x_2 &= 1 \\ -2x_1 + \quad x_2 &\leq 2 \\ x_1 \in \mathbb{R}, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max z = -\, x_1 - 2x_2 & \\ x_1 - \quad x_2 &\leq 1 \\ -x_1 + \quad x_2 &\leq -1 \\ -2x_1 + \quad x_2 &\leq 2 \\ x_1 \in \mathbb{R}, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max z = -\, x_1^+ + \quad x_1^- - 2x_2 & \\ x_1^+ - \quad x_1^- - \quad x_2 &\leq 1 \\ -x_1^+ + \quad x_1^- + \quad x_2 &\leq -1 \\ -2x_1^+ + \ 2x_1^- + \quad x_2 &\leq 2 \\ x_1^+, x_1^-, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

# Erweiterungen des Simplex-Algorithmus

max $\quad z = c^T x$

u.d.N. $\quad Ax \leq b$

$\quad x \geq 0$

für $\quad b \geq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$: $\quad x$ = 0 ist zulässige Ausgangslösung

für einzelne $b_i < 0$: $\quad x$ = 0 ist *keine* zulässige Ausgangslösung

für einzelne $a_{ij} \cdot x_j = b_j$: $\quad x$ = 0 ist *keine* zulässige Ausgangslösung

**Verfahren zur Bestimmung einer zulässigen Ausgangslösung:**

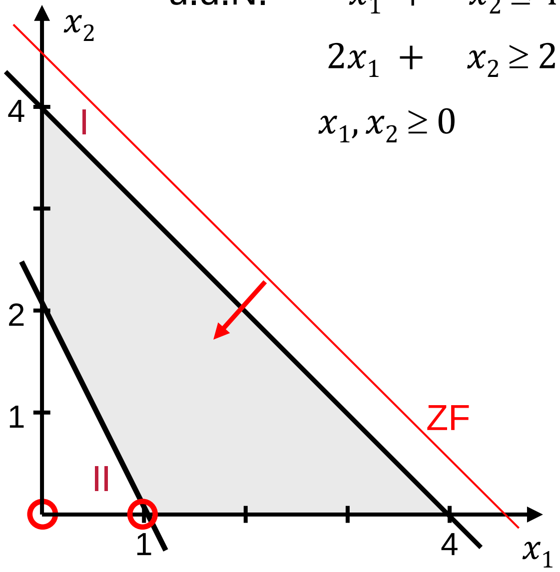
**Duale Simplex-Methode**

# Dualer Simplex: Motivation

Beispiel:

$$\min v = 2x_1 + 2x_2$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{u.d.N.} & x_1 + x_2 & \leq 4 & \text{(I)} \\ & 2x_1 + x_2 & \geq 2 & \text{(II)} \\ & x_1, x_2 & \geq 0 & \end{array}$$




Hinweis: $a_1x_1 + a_2x_2 \geq b \overset{\cdot(-1)}{\Longleftrightarrow} -a_1x_1 - a_2x_2 \leq -b$

Überführung in Standardform:

$$\begin{array}{lrcl} \max & z & = & -2x_1 - 2x_2 \\ \text{u.d.N.} & x_1 + x_2 & \leq & 4 \\ & -2x_1 - x_2 & \leq & -2 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

!

Einführung von Schlupfvariablen:

$$\begin{array}{lrcl} \max & z & = & -2x_1 - 2x_2 \\ \text{u.d.N.} & x_1 + x_2 + x_3 & = & 4 \\ & -2x_1 - x_2 + x_4 & = & -2 \\ & x_1, \dots, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

# Duale Simplex-Methode: Voraussetzungen

**Starttableau:**

| | $x_1$ | $x_2$ | RS |
|---|---|---|---|
| $-z$ | -2 | -2 | 0 |
| $x_3$ | 1 | 1 | 4 |
| $x_4$ | -2 | -1 | -2 |

**Problem:**

- Zielfunktion ist optimal (nur negative Koeffizienten)
- rechte Seite der 2. Nebenbedingung ist nicht zulässig

**Idee:**

Wähle Pivotelement so, dass die Zielfunktion optimal bleibt und die Basislösung zulässig wird

# Duale Simplex-Methode

***Voraussetzung:*** mindestens ein $b_i < 0$

***Vorgehensweise:***

- Bestimme Pivotzeile r: $b_r = \min\{b_i < 0\}$ (kleinstes negatives $b_i$)
- Bestimme Pivotspalte s: gilt wenn $a_{rj} < 0$ für mindestens ein $j$

$$\Rightarrow \frac{c_s}{a_{rs}} = \min\left\{\frac{c_j}{a_{rj}} \middle| a_{rj} < 0\right\}$$

- Austauschschritte wie bisher (primaler Simplex) durchführen

***Abbruch:***

1. alle $b_i \geq 0$ und alle $c_j \leq 0$ $\Rightarrow$ optimale Lösung gefunden
2. alle $b_i \geq 0$ und mind. ein $c > 0$ $\Rightarrow$ weiter mit primalem Simplex
3. mindestens ein $b_i < 0$ und alle zugehörigen $a_{ij} \geq 0$

   $\Rightarrow$ es existiert keine zulässige Lösung!

# Duale Simplex-Methode: Beispiel für Abbruch nach Fall 1. (I)

**Starttableau:**

$\frac{-2}{-2} = 1$ $\frac{-2}{-1} = 2$

| | $x_1$ | $x_2$ | RS |
|---|---|---|---|
| $-z$ | -2 | -2 | 0 |
| $x_3$ | 1 | 1 | 4 |
| $x_4$ | -2 | -1 | -2 |

Pivotzeile

Pivotspalte

Pivotelement

Basiswechsel: $x_1 \rightarrow$ BV

$x_4 \rightarrow$ NBV

*Pivotzeile r:* $b_r = \min\{b_i < 0\}$

*Pivotspalte s:*

gilt $a_{rj} < 0$ für mindestens ein $j$

$$\Rightarrow \frac{c_s}{a_{rs}} = \min\left\{\frac{c_j}{a_{rj}} \middle| a_{rj} < 0\right\}$$

# Duale Simplex-Methode: Beispiel für Abbruch nach Fall 1. (II)

**Folgetableau:**

| | $x_4$ | $x_2$ | RS |
|---|---|---|---|
| $-z$ | -1 | -1 | 2 |
| $x_3$ | 1/2 | 1/2 | 3 |
| $x_1$ | -1/2 | 1/2 | 1 |

**Abbruchkriterium erfüllt!**

alle $b_i \geq 0$ und alle $c_j \leq 0$ $\Rightarrow$ optimale Lösung gefunden

$x_1^* = 1, x_2^* = 0, z^* = -2$

**Rücktransformation in alte (Minimierungs-) Zielfunktion:** $v^* = -z^* = 2$

# Duale Simplex-Methode: Beispiel für Abbruch nach Fall 2. (I)

**Maximierungsproblem:**

$$\max z = 2x_1 + 1x_2$$
$$1x_1 + 1x_2 \geq 8$$
$$3x_1 + 1x_2 \geq 12$$
$$1x_1 + 1x_2 \leq 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

**Standardform:**

$$\max z = 2x_1 + 1x_2$$
$$-1x_1 - 1\,x_2 \leq -8$$
$$-3x_1 - 1\,x_2 \leq -12$$
$$1x_1 + 1\,x_2 \leq 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

**Starttableau:**

| | -2/3 | -1 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RS |
| $-z$ | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $x_3$ | -1 | -1 | 1 | 0 | 0 | -8 |
| $x_4$ | -3 | -1 | 0 | 1 | 0 | -12 |
| $x_5$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 10 |

*Pivotzeile r:* $b_r = \min\{b_i < 0\}$

➔ Dualer Simplex

*Pivotspalte s:*

gilt $a_{rj} < 0$ für mindestens ein $j$

$$\Rightarrow \frac{c_s}{a_{rs}} = min\left\{\frac{c_j}{a_{rj}} \middle| a_{rj} < 0\right\}$$

# Duale Simplex-Methode: Beispiel für Abbruch nach Fall 2. (II)

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-z$ | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | -12 |
| $x_3$ | 2 | 0 | 1 | -1 | 0 | 4 |
| $x_2$ | 3 | 1 | 0 | -1 | 0 | 12 |
| $x_5$ | -2 | 0 | 0 | 1 | 1 | -2 |
| $-z$ | 0 | 0 | 0 | 1/2 | -1/2 | -11 |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 1/2 | 3/2 | 9 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | -1/2 | -1/2 | 1 |
| $-z$ | 0 | -1 | 0 | 0 | -2 | -20 |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| $x_4$ | 0 | 2 | 0 | 1 | 3 | 18 |
| $x_1$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 10 |

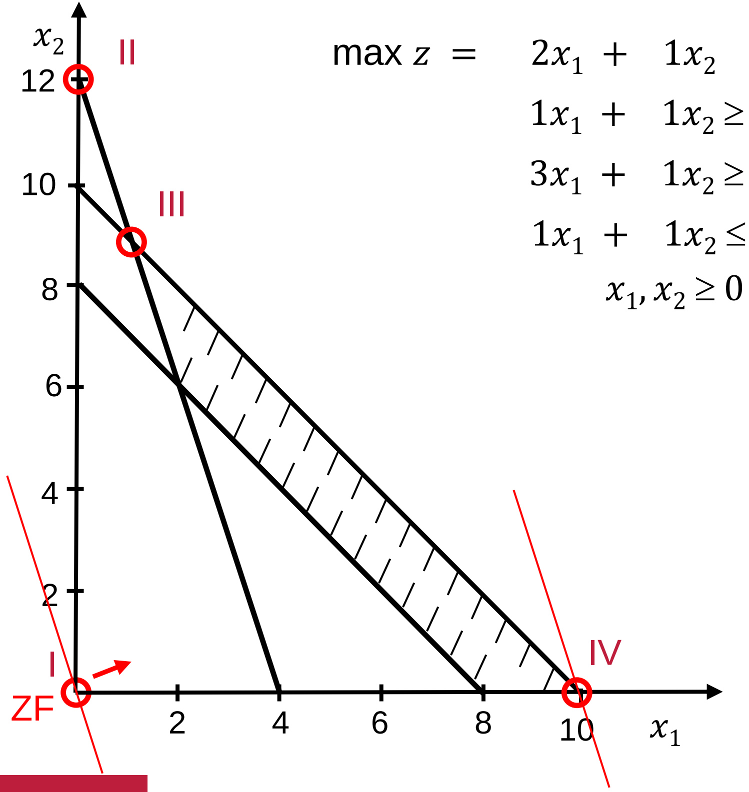
*Lösung (II):* $x_1 = 0; x_2 = 12$

*Pivotzeile r:* $b_r = \min\{b_i < 0\}$
➔ Dualer Simplex

*Lösung (III):* $x_1 = 1; x_2 = 9$
*Zulässige Lösung gefunden!*
*ABER: Lösung nicht optimal, da ein* $c_j > 0$
➔ Weiter mit primalem Simplex

*Abbruch, da alle* $c_j < 0$ *und alle* $b_i > 0$
➔ *Lösung (IV) zulässig und optimal*
$x_1 = 10; x_3 = 2; x_4 = 18;$
ZF $= 20$

# Duale Simplex-Methode: Beispiel für Abbruch nach 2. (III)




$$
\begin{aligned}
\max z \;=\;\; & 2x_1 + 1x_2 \\
& 1x_1 + 1x_2 \geq 8 \\
& 3x_1 + 1x_2 \geq 12 \\
& 1x_1 + 1x_2 \leq 10 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

I: Startlösung unzulässig
→ Dualer Simplex

II: Lösung unzulässig
→ Dualer Simplex

III: Lösung zulässig, aber nicht optimal
→ Primaler Simplex

IV: Lösung zulässig und optimal

# Dualer Simplex: Beispiel für Abbruch nach Fall 3.

|  | $x_1$ (-1) | $x_2$ | RS |  |
|---|---|---|---|---|
| $-z$ | 1 | 1 | 0 |  |
| $x_3$ | 1 | 1 | 2 |  |
| $x_4$ | -1 | 1 | -3 | < 0 |

Basistausch: $x_1$ in die Basis
$x_4$ verlässt die Basis

|  | $x_4$ | $x_2$ | RS |  |
|---|---|---|---|---|
| $-z$ | 1 | 2 | -3 |  |
| $x_3$ | 1 | 2 | -1 | < 0 |
| $x_1$ | -1 | -1 | 3 |  |

alle Koeffizienten in Pivotzeile $> 0$
→ Abbruch
→ es existiert keine zulässige Lösung

# Lösung von Linearen Programmen: Übersicht der Schritte

1. Herstellen der Standardform und Aufstellen des Simplextableaus

2. Prüfen, ob $x = 0$ eine zulässige Lösung ist
   - $x = 0$ ist zulässig → Gehe zu Schritt 4
   - $x = 0$ ist nicht zulässig → weiter mit Schritt 3

3. Durchführen des dualen Simplex bis
   - alle $b_i \geq 0$ und alle $c_j \leq 0$ → Optimale Lösung, gehe zu Schritt 5
   - alle $b_i \geq 0$ und mindestens ein $c > 0$ → zulässige Lösung, weiter mit Schritt 4
   - mind. ein $b_i < 0$ und alle zugehörigen $a_{ij} \geq 0$ → keine zulässige Lösung → Ende

4. Durchführen des primalen Simplex bis
   - mind. ein $c_j > 0$ und alle zugehörigen $a_{ij} \leq 0$ → keine optimale Lösung → Ende
   - alle $c_j \leq 0$ → weiter mit Schritt 5

5. Falls das Ausgangsproblem ein Minimierungsproblem war:
   - Rücktransformation des Zielfunktionswerts durch Multiplikation mit -1

# Überblick

1. Dualer Simplex-Algorithmus
2. **Duales Programm**

# Dualitätstheorie

- Dualitätstheorien sagen etwas über Paare von Systemen aus.
- Dualitätsaussagen beziehen sich hier auf Modellpaare, deren Beziehungen in eineindeutiger Weise definiert sind.
- Dualitätsaussagen dienen vor allem:
  - Zur Konstruktion alternativer Algorithmen für LP-Modelle
  - Zur Verringerung des Lösungsaufwandes
  - Zur Interpretation von LP-Modellen und optimalen Endtableaus

# Dualität

Primales Problem (P)

(Maximierungsproblem)

Duales Problem (D)

(Minimierungsproblem)

(1) Max $z = c^T x$ $\Leftrightarrow$ Min $v = b^T y$

$Ax \leq b$ | $A^T y \geq c$

$x \geq 0$ | $y \geq 0$

(2) Max $z = c^T x$ $\Leftrightarrow$ Min $v = b^T y$

$Ax = b$ | $A^T y \geq c$

$x \geq 0$ | $y \in \mathbb{R}^m$

(nicht vorzeichenbeschränkt)

# Dualisierung eines Standardform-Problems

(P) max z = $c_1x_1 + .. + c_jx_j + .. + c_nx_n$

$$a_{11}x_1 + .. + a_{1j}x_j + .. + a_{1n}x_n \le b_1$$
$$.. \quad .. \quad .. \quad .. \quad ... \quad ..$$
$$ai_1x_1 + .. + a_{ij}x_j + .. + a_{in}x_n \le b_i$$
$$.. \quad .. \quad .. \quad .. \quad ... \quad ..$$
$$am_1x_1 + .. + a_{mj}x_j + .. + a_{mn}x_n \le b_m$$
$$x_1, .. x_j, .. x_n \ge 0$$

(D) min v = $b_1y_1 + .. + b_iy_i + .. + b_my_m$

$$a_{11}y_1 + .. + a_{i1}y_i + .. + a_{m1}y_m \ge c_1$$
$$.. \quad .. \quad .. \quad .. \quad ... \quad ..$$
$$a_{1j}y_1 + .. + a_{ij}y_i + .. + a_{mj}y_m \ge c_j$$
$$.. \quad .. \quad .. \quad .. \quad ... \quad ..$$
$$a_{1n}y_1 + .. + a_{in}y_i + .. + a_{mn}y_m \ge c_n$$
$$y_1, .. y_i, .. y_m \ge 0$$

***Vorgehen:***

1. Jede Restriktion $i$ von (P) entspricht einer Variable $y_i$ in (D), die $b_i$ werden zu Zielfunktions-koeffizienten in (D)
2. Jede Variable $j$ von (P) entspricht einer Restriktion in (D), die $c_j$ werden zur rechten Seite von ≥- Restriktionen in (D)
3. Die Koeffizientenmatrix wird transponiert, d.h. die Zeilen $a_{i1} \; a_{ij} .. a_{in}$ in (P) werden zu Spalten in (D)
4. Für die Variablen $y_i$ in (D) werden Nichtnegativitätsrestriktionen eingeführt

# Ökonomische Interpretation
# Beispiel Produktionsprogrammplanung

(P) Maximierung des Deckungsbeitrags (bei gegebenen Ressourcen)

$$
\begin{aligned}
\max z = \quad & 3x_1 + 4x_2 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 1200 \\
& 5x_1 + 10x_2 \leq 3000 \\
& \phantom{5x_1 + {}} 0{,}5x_2 \leq 125 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

(D) Minimierung des Ressourcenverbrauchs / der Ressourcenbewertung
(bei gegebenem Ziel / bei gegebenen Produktpreisen)

$$
\begin{aligned}
\min v = \quad & 1200y_1 + 3000y_2 + 125y_3 \\
& 3y_1 + 5y_2 \geq 3 \\
& 2y_1 + 10y_2 + 0{,}5y_3 \geq 4 \\
& y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

# Dualitätstheorie: Eine ökonomische Interpretation für den Produktionsplanungsfall

**Primales Modell: Sicht des Produktionsplaners einer Firma**

**Ziel:** Deckungsbeitragsmaximale Gesamtproduktion

**Entscheidungen:** Produktionsmengen der einzelnen Produkte

**Nebenbedingungen:** Die gegebenen Kapazitäten pro Ressource dürfen nicht überschritten werden

**Duales Modell: Sicht eines möglichen Käufers der Produktionsanlagen**

**Ziel:** Minimaler Gesamtkaufpreis, Erkenntnis über Beitrag der Ressourcen am DB

**Entscheidungen:** Bewertung der Ressourcen je Einheit (→Schattenpreise)

**Nebenbedingungen:** Der sich aus den Ressourcenpreisen ergebende Herstellungspreis je Produkt darf den Marktpreis des Produktes nicht überschreiten

# Beispiel Produktionsprogrammplanung

(D) min $v = 1200y_1 + 3000y_2 + 125y_3$

$$3y_1 + 5y_2 \geq 3$$

$$2y_1 + 10y_2 + 0{,}5y_3 \geq 4$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

(D‘) Äquivalente Formulierung

max $v' = -1200y_1 - 3000y_2 - 125y_3$

$$-3y_1 - 5y_2 \leq -3$$

$$-2y_1 - 10y_2 - 0{,}5y_3 \leq -4$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

# Beispiel Produktionsprogrammplanung

*Primales Problem:*

2 Strukturvariablen, 3 Schlupfvariablen

$x_1, x_2,$ $\qquad$ $x_3, x_4, x_5$

*Duales Problem:*

3 Strukturvariablen, 2 Schlupfvariablen

$y_1, y_2, y_3,$ $\qquad$ $y_4, y_5$

1. Strukturvariablen des primalen Problems $\leftrightarrow$ 1. Schlupfvariablen des dualen Problems,

1. Schlupfvariablen des primalen Problems $\leftrightarrow$ 1. Strukturvariablen des dualen Problems, usw.

$$x_1 \leftrightarrow y_4, \quad x_2 \leftrightarrow y_5, \quad x_3 \leftrightarrow y_1, \quad x_4 \leftrightarrow y_2, \quad x_5 \leftrightarrow y_3$$

# Beispiel Produktionsprogrammplanung

(P) Primales Problem
Standard-Maximierungsproblem,
Nullpunkt zulässig,
mit primalem Simplex lösbar

(D‘) Duales Problem
Standard-Minimierungsproblem,
Nullpunkt nicht zulässig,
mit dualem Simplex lösbar

| | $x_1$ | $x_2$ | RS | |
|---|---|---|---|---|
| $-z$ | 3 | 4 | 0 | |
| $x_3$ | 3 | 2 | 1200 | $y_1$ |
| $x_4$ | 5 | 10 | 3000 | $y_2$ |
| $x_5$ | 0 | 0,5 | 125 | $y_3$ |
| | $-y_4$ | $-y_5$ | | |

duale NBV

duale BV

| | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | RS |
|---|---|---|---|---|
| $-v‘$ | -1200 | -3000 | -125 | 0 |
| $y_4$ | -3 | -5 | 0 | -3 |
| $y_5$ | -2 | -10 | -0,5 | -4 |

# Beispiel Produktionsprogrammplanung

(P) Endtableau

| | $x_4$ | $x_3$ | RS | |
|---|---|---|---|---|
| $-z$ | -3/10 | -1/2 | -1500 | |
| $x_5$ | -3/40 | 1/8 | 50 | $y_3$ |
| $x_1$ | -1/10 | 1/2 | 300 | $y_4$ |
| $x_2$ | 3/20 | -1/4 | 150 | $y_5$ |
| | $-y_2$ | $-y_1$ | | |

duale NBV

duale BV

$$x_1 = 300, x_2 = 150, z = 1500$$

(D‘) Endtableau

| | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | RS |
|---|---|---|---|---|
| $-v$‘ | -50 | -300 | -150 | 1500 |
| $y_2$ | 3/40 | 1/10 | -3/20 | 3/10 |
| $y_1$ | -1/8 | -1/2 | 1/4 | 1/2 |
| | $-x_5$ | $-x_1$ | $-x_2$ | |

$$y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = \frac{3}{10}, y_3 = 0, v' = -1500$$

$$\Rightarrow \quad v = 1500$$

**Austauschschritte für das primale und duale Problem lassen sich in <u>einem</u> Tableau durchführen**

# Dualität

***Es gilt (schwache Dualität):***

$x$ sei zulässige Lösung von (P)
$y$ sei zulässige Lösung von (D) $\Bigg\}$ $\boxed{c^T x \leq b^T y}$

***Satz (Dualität):***

Sind $x^*$ zulässige Lösung von (P)
und $y^*$ zulässige Lösung von (D) und gilt:
$c^T x^* = b^* y^* \Rightarrow$ $x^*$ und $y^*$ sind **optimal**

***Satz (Umkehrung):***

Sind $x^*$ und $y^*$ optimale Lösungen von (P) bzw. (D), so gilt: $\boxed{c^T x^* = b^T y^*}$

# Dualitätstheorie

Dualitätsaussagen dienen vor allem:

- Zur Konstruktion alternativer Algorithmen für LP-Modelle
  - Abschätzung des optimalen ZFW durch ZFW des Duals
  - Duale und primale Austauschschritte in einem Tableau
- Zur Verringerung des Lösungsaufwandes
  - Simplex Operationen steigen linear mit der Anzahl Variablen
  - Steigen quadratisch mit der Anzahl der Nebenbedingungen
- Zur Interpretation von LP-Modellen und optimalen Endtableaus
  - Widersprüche im Modell können erkannt werden
  - ZF Koeffizienten und rechte Seite in Beziehung setzen

# Zusammenfassung

- Dualer Simplex-Algorithmus
  - Um Startlösung für primalen Simplex-Algorithmus zu bestimmen

- Schritte im Simplex-Algorithmus
  - Primal: Zeilentransformation
  - Dual: Spaltentransformation

- Restriktionsparameter des primalen sind Zielfunktionskoeffizienten des dualen Programms
- Restriktionsparameter des dualen sind Zielfunktionskoeffizienten des primalen Programms
- Zeileneinträge des primalen entsprechen Spalteneinträgen des dualen Programms und umgekehrt

- Sensitivitätsanalyse im primalen Simplex:
  - Restriktionsparameter: Durchsuchen der Spalte
  - Zielfunktionskoeffizient: Durchsuchen der Zeile