IV. Folgen und Konvergenz

收敛性

IV.1. Konvergenz von Zahlenfolgen

Wir erinnern an den Begriff der Zahlenfolge, den wir schon im Kapitel I eingeführt haben. Im Allgemeinen ist eine **Folge** $(a_n)_{n=1}^\infty \in A^\mathbb{N}$ in A eine Abbildung $a_{(\cdot)} : \mathbb{N} \to A$, $n \mapsto a_n$. Folgen mit Werten in $A \subseteq \mathbb{K}$ nennen wir **Zahlenfolgen**.

Definition IV.1.

(i) Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ heißt **konvergent** $:\Leftrightarrow$

$$\exists\, a \in \mathbb{K}\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0 : \quad |a_n - a| \leq \varepsilon. \tag{IV.1}$$

In diesem Fall heißt a **Grenzwert** oder **Limes** von $(a_n)_{n=1}^\infty$, und wir schreiben statt (IV.1) auch abkürzend

$$a_n \to a, \quad n \to \infty, \tag{IV.2}$$

oder

$$\lim_{n\to\infty} \{a_n\} \;=\; a. \tag{IV.3}$$

(ii) Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ heißt **divergent** $:\Leftrightarrow$

$$(a_n)_{n=1}^\infty \text{ ist nicht konvergent.} \tag{IV.4}$$

(iii) Enthält eine Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$, so heißt deren Grenzwert $\lim_{k\to\infty}\{a_{n_k}\}$ **Häufungswert** von $(a_n)_{n=1}^\infty$.

Bemerkungen und Beispiele.

- Wir bemerken, dass der Limes einer konvergenten Folge eindeutig ist. Ist nämlich

$$a_n \to a \quad \text{und} \quad a_n \to a', \quad n \to \infty, \tag{IV.5}$$

so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ zwei Indizes $n_0, n_0' \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, n \geq n_0 : \qquad |a_n - a| \leq \varepsilon, \tag{IV.6}$$

$$\forall\, n \geq n_0' : \qquad |a_n - a'| \leq \varepsilon. \tag{IV.7}$$

Für $n \geq \max\{n_0, n_0'\}$ ist demnach

$$|a - a'| \;\leq\; |a_n - a| \;+\; |a_n - a'| \;\leq\; 2\varepsilon. \tag{IV.8}$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt daraus

$$a \;=\; a'. \tag{IV.9}$$

- Seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $a_n := 1/n$. Dann konvergiert $a_n \to 0$, für $n \to \infty$.
- Seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $a_n := (-1)^n + \frac{1}{n}$. Dann ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ divergent und hat die Häufungswerte $\{-1, 1\}$.
- Seien $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $a_n := \alpha + \frac{1}{n} + i\beta - \frac{i}{n}$. Dann konvergiert $a_n \to \alpha + i\beta$, für $n \to \infty$.
- Seien $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $a_n := \cos(n) + i\,\sin(n)$. Dann ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ divergent.
- Jede konvergente Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^\infty$ in $\mathbb{K}$ ist auch **beschränkt**. Genauer gesagt, ist dann die *Menge* $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{K}$ *der Folgeglieder* beschränkt, d.h.

$$\exists\, R < \infty\ \forall\, n \in \mathbb{N}: \quad |a_n| \ \leq \ R. \tag{IV.10}$$

  Ist nämlich $a := \lim_{n\to\infty} a_n$, so können wir $\varepsilon := 1$ in (IV.1) wählen und erhalten ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall\, n \geq n_0: \quad |a_n| \ \leq \ |a| + |a_n - a| \ \leq \ |a| + 1. \tag{IV.11}$$

  Also gilt (IV.10) mit

$$R \ := \ \max\Big\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|, |a| + 1\Big\} \ < \ \infty. \tag{IV.12}$$

- Die Konvergenz von komplexen Folgen ist gleichbedeutend mit der Konvergenz ihres Real- und Imaginärteils,

$$\begin{aligned} &(z_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \text{ ist konvergent} \quad \Leftrightarrow \\ &\qquad (\mathrm{Re}\{z_n\})_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ und } (\mathrm{Im}\{z_n\})_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ sind beide konvergent.} \end{aligned} \tag{IV.13}$$

  Ist nämlich $|z_n - z| = \sqrt{\mathrm{Re}\{z_n - z\}^2 + \mathrm{Im}\{z_n - z\}^2} \leq \varepsilon$, so sind auch $|\mathrm{Re}\{z_n - z\}| \leq \varepsilon$ und $|\mathrm{Im}\{z_n - z\}| \leq \varepsilon$.
  Sind umgekehrt $|\mathrm{Re}\{z_n - z\}| \leq \varepsilon$ und $|\mathrm{Im}\{z_n - z\}| \leq \varepsilon$, so ist $|z_n - z| \leq \sqrt{2}\varepsilon$.

Satz IV.2. *Seien $\alpha \in \mathbb{K}$ und $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ zwei konvergente Zahlenfolgen und*

$$a \ := \ \lim_{n\to\infty}\{a_n\}, \quad b \ := \ \lim_{n\to\infty}\{b_n\}. \tag{IV.14}$$

Dann sind auch $(a_n + b_n)_{n=1}^\infty$ und $(\alpha\, a_n)_{n=1}^\infty$ konvergent, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\{a_n + b_n\} \ = a + b \ = \ \lim_{n\to\infty}\{a_n\} \ + \ \lim_{n\to\infty}\{b_n\}, \tag{IV.15}$$

$$\lim_{n\to\infty}\{\alpha\, a_n\} \ = \alpha\, a \ = \ \alpha \cdot \lim_{n\to\infty}\{a_n\}. \tag{IV.16}$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist auch $\varepsilon/(2 + |\alpha|) > 0$. Weil $(a_n)_{n=1}^\infty$ konvergent ist, gibt es $n_0' \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall\, n \geq n_0': \quad |a_n - a| \ \leq \ \frac{\varepsilon}{2 + |\alpha|}, \tag{IV.17}$$

und weil $(b_n)_{n=1}^\infty$ konvergent ist, gibt es $n_0'' \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall\, n \geq n_0'': \quad |b_n - b| \ \leq \ \frac{\varepsilon}{2}. \tag{IV.18}$$

Setzen wir nun

$$n_0 \ := \ \max\{n_0', n_0''\}, \tag{IV.19}$$

dann gilt für alle $n \geq n_0$, dass

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| \ &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \ \leq \ \frac{\varepsilon}{2 + |\alpha|} + \frac{\varepsilon}{2} \ \leq \ \varepsilon \end{aligned} \tag{IV.20}$$

und

$$|\alpha a_n - \alpha a| \ = \ |\alpha| \cdot |a_n - a| \ \leq \ \frac{|\alpha| \cdot \varepsilon}{2 + |\alpha|} \ \leq \ \varepsilon. \tag{IV.21}$$

□

Satz IV.3. *Seien $(a_n)_{n=1}^\infty$ und $(b_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ zwei konvergente Zahlenfolgen und*

$$a \ := \ \lim_{n\to\infty} \{a_n\}, \quad b \ := \ \lim_{n\to\infty} \{b_n\}. \tag{IV.22}$$

Dann ist $(a_n \cdot b_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ konvergent, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \{a_n \cdot b_n\} \ = \ a \cdot b \ = \ \lim_{n\to\infty} \{a_n\} \cdot \lim_{n\to\infty} \{b_n\}. \tag{IV.23}$$

Sind außerdem $b_n \neq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$, so ist auch $(a_n/b_n)_{n=1}^\infty$ konvergent, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \ = \ \frac{a}{b} \ = \ \frac{\lim_{n\to\infty}\{a_n\}}{\lim_{n\to\infty}\{b_n\}}. \tag{IV.24}$$

IV.2. Reelle Folgen und Monotonie

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass der Konvergenzbegriff in $\mathbb{C}$ auf den in $\mathbb{R}$ zurückgeführt werden kann. Aus der Ordnungsstruktur in $\mathbb{R}$ erhalten wir allerdings noch weitere Aussagen, die keine Entsprechung in $\mathbb{C}$ haben.

Definition IV.4. Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$

$$\text{heißt} \left\{ \begin{array}{l} \textbf{monoton steigend} \\ \textbf{streng monoton steigend} \\ \textbf{monoton fallend} \\ \textbf{streng monoton fallend} \end{array} \right\} \ :\Leftrightarrow \quad \forall\, n \in \mathbb{N} : \left\{ \begin{array}{l} a_n \leq a_{n+1}, \\ a_n < a_{n+1}, \\ a_n \geq a_{n+1}, \\ a_n > a_{n+1}. \end{array} \right. \tag{IV.25}$$

Satz IV.5. *Sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in $\mathbb{R}$.*

(i) *Ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ nach oben beschränkt und monoton steigend, so ist $(a_n)_{n=1}^\infty$konvergent.* (IV.26)

(ii) *Ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ nach unten beschränkt und monoton fallend, so ist $(a_n)_{n=1}^\infty$konvergent.* (IV.27)

Beweis. Offensichtlich sind (i) und (ii) äquivalent, wie man aus Ersetzung von a_n durch $-a_n$ ersieht. Wir zeigen nur (i). Die Menge $A := \{a_1, a_2, a_3, \ldots,\}$ ist nach oben beschränkt, und wir setzen

$$a \;:=\; \sup A. \tag{IV.28}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Weil a das Supremum von A ist, gibt es nach Lemma II.7 ein $a_{n_0} \in A$, so dass

$$a_{n_0} \;\leq\; a \;\leq\; a_{n_0} + \varepsilon. \tag{IV.29}$$

Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, gilt $a_{n_0} \leq a_n$ für $n \geq n_0$, und daher

$$\forall\, n \geq n_0 : \quad 0 \;\leq\; a - a_n \;\leq\; a - a_{n_0} \;\leq\; \varepsilon. \tag{IV.30}$$

Also ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ konvergent und $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = a$. $\square$

Sei $(a_n)_{n=1}^\infty \in [-R, R]^{\mathbb{N}}$ eine nach oben und unten durch $\pm R$, $0 < R < \infty$ beschränkte Folge. Setzen wir

$$A_m \;:=\; \{a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots\}, \tag{IV.31}$$

so gilt

$$[-R, R] \;\supseteq\; A_1 \;\supseteq\; A_2 \;\supseteq\; A_3 \;\supseteq \ldots. \tag{IV.32}$$

Setzen wir weiter, für $m \in \mathbb{N}$,

$$b_m := \inf A_m \quad \text{und} \quad c_m := \sup A_m, \tag{IV.33}$$

so gilt

$$\forall\, m \in \mathbb{N} : \quad -R \;\leq\; b_m \;\leq\; c_m \;\leq\; R. \tag{IV.34}$$

Außerdem impliziert (IV.31)-(IV.32), dass

$$b_m \;=\; \inf A_m \;=\; \min\big\{a_m,\ \inf A_{m+1}\big\} \;\leq\; \inf A_{m+1} \;=\; b_{m+1}, \tag{IV.35}$$

$$c_m \;=\; \sup A_m \;=\; \max\big\{a_m,\ \sup A_{m+1}\big\} \;\geq\; \sup A_{m+1} \;=\; c_{m+1}. \tag{IV.36}$$

Also sind beide Folgen, $(b_m)_{m=1}^\infty$ und $(c_m)_{m=1}^\infty$, beschränkt und monoton und daher auch konvergent in $\mathbb{R}$.

Definition IV.6. Sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

(i.a) Ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ nicht nach oben beschränkt, dann setzen wir

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{a_n\} \;:=\; \overline{\lim_{n\to\infty}}\{a_n\} := \infty. \tag{IV.37}$$

(Dabei ist “ ∞ ” nur als Symbol zu verstehen. $\infty, -\infty \notin \mathbb{R}$.)

(i.b) Ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ nach oben beschränkt, und ist $(c_m)_{m=1}^\infty$, mit $c_m := \sup\{a_m, a_{m+1}, \ldots\}$, nicht nach unten beschränkt, so setzen wir

$$\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} \;:=\; -\infty. \tag{IV.38}$$

(i.c) Ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ nach oben beschränkt, und ist $(c_m)_{m=1}^\infty$, mit $c_m := \sup\{a_m, a_{m+1}, \ldots\}$, nach unten beschränkt, so setzen wir

$$\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} \;:=\; \lim_{m\to\infty}\{c_m\} \;=\; \lim_{m\to\infty}\big\{\sup\{a_n \mid n \geq m\}\big\}. \tag{IV.39}$$

(ii)

$$\liminf_{n\to\infty}\{a_n\} \;:=\; \underline{\lim}_{n\to\infty}\{a_n\} \;:=\; -\limsup_{n\to\infty}\{-a_n\}. \tag{IV.40}$$

$\limsup_{n\to\infty}\{a_n\}$ heißt **Limes superior** von $(a_n)_{n=1}^\infty$,

$\liminf_{n\to\infty}\{a_n\}$ heißt **Limes inferior** von $(a_n)_{n=1}^\infty$.

Bemerkungen und Beispiele.

- Sei $a_n := n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ nicht nach oben beschränkt, und es gilt (i.a), also $\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} = \infty$.
- Sei $a_n := -n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ nach oben beschränkt. Weiterhin ist $c_m = \sup\big(\{-m, -m-1, -m-2, \ldots\}\big) = -m$, deshalb ist $(c_m)_{n=1}^\infty$ nicht nach unten beschränkt, und es gilt (i.b), also $\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} = -\infty$.
- Sei $a_n := (-1)^n\big(1 + \frac{1}{n}\big)$. Wegen $-2 \leq a_n \leq 2$ ist dann $(a_n)_{n=1}^\infty$ beschränkt, und es gilt (i.c). Weiterhin ist

$$c_{2k-1} \;=\; \sup\left\{-\left(\frac{2k}{2k-1}\right), +\left(\frac{2k+1}{2k}\right), -\left(\frac{2k+2}{2k+1}\right), +\left(\frac{2k+3}{2k+2}\right), \ldots\right\} \;=\; \frac{2k+1}{2k}, \tag{IV.41}$$
$$c_{2k} \;=\; \sup\left\{\frac{2k+1}{2k}, \frac{-2k-2}{2k+1}, \frac{2k+2}{2k+1}, \ldots\right\} \;=\; \frac{2k+1}{2k},$$

  also $c_m \to 1$, für $m \to \infty$, und $\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} = 1$.
- Genauso sieht man, dass $\liminf_{n\to\infty}\{a_n\} = -1$ für $a_n := (-1)^n\big(1 + \frac{1}{n}\big)$. Wir beobachten, dass -1 und 1 Häufungswerte der Folge $(a_n)_{n=1}^\infty$ sind.
- Sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap (0,1)$.
  Dann sind $\liminf_{n\to\infty}\{a_n\} = 0$ und $\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} = 1$.

Satz IV.7. *Sei $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.*

(i) Folgende Charakterisierungen sind gleichwertig:

$$\Big\{\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} \ =: \ \bar{a} \in \mathbb{R} \ \textit{existiert}\Big\} \tag{IV.42}$$

$$\Leftrightarrow \ \Big\{\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : \quad a_n \ \leq \ \bar{a} + \varepsilon \qquad \textit{und}$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall n_0 \in \mathbb{N} \ \exists n \geq n_0 : \quad a_n \ \geq \ \bar{a} - \varepsilon\Big\} \tag{IV.43}$$

$$\Leftrightarrow \ \Big\{(a_n)_{n=1}^\infty \ \textit{ist nach oben beschränkt und } \bar{a} \textit{ ist ihr größter Häufungswert}\Big\}. \tag{IV.44}$$

(ii) Folgende Charakterisierungen sind gleichwertig:

$$\Big\{\liminf_{n\to\infty}\{a_n\} \ =: \ \underline{a} \in \mathbb{R} \ \textit{existiert}\Big\} \tag{IV.45}$$

$$\Leftrightarrow \ \Big\{\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : \quad a_n \ \geq \ \underline{a} - \varepsilon \qquad \textit{und}$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall n_0 \in \mathbb{N} \ \exists n \geq n_0 : \quad a_n \ \leq \ \underline{a} + \varepsilon\Big\} \tag{IV.46}$$

$$\Leftrightarrow \ \Big\{(a_n)_{n=1}^\infty \ \textit{ist nach unten beschränkt und } \underline{a} \textit{ ist ihr kleinster Häufungswert}\Big\}. \tag{IV.47}$$

Korollar IV.8. *Sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in $\mathbb{R}$.*

$$\Big[(a_n)_{n=1}^\infty \ \textit{ist konvergent in } \mathbb{R}\Big] \quad \Leftrightarrow \quad \Big[\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} \ = \ \liminf_{n\to\infty}\{a_n\} \in \mathbb{R}\Big], \tag{IV.48}$$

und in diesem Fall gilt

$$\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} \ = \ \liminf_{n\to\infty}\{a_n\} \ = \ \lim_{n\to\infty}\{a_n\}. \tag{IV.49}$$

IV.3. Cauchy-Folgen

Definition IV.9. Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ heißt **Cauchy-Folge**

$$:\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ \forall\, m, n \geq n_0 : \quad |a_m - a_n| \leq \varepsilon. \tag{IV.50}$$

Cauchy-Folgen spielen in der Analysis eine große Rolle, weil man mit ihrer Hilfe den Konvergenzbegriff einführen kann, ohne expliziten Bezug auf den Grenzwert zu nehmen.

Lemma IV.10. *Sei eine $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ eine konvergente Folge. Dann ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Seien $\varepsilon > 0$ und $a := \lim_{n\to\infty}\{a_n\}$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, n \geq n_0 : \quad |a_n - a| \ \leq \ \varepsilon/2. \tag{IV.51}$$

Also ist

$$\forall\, m, n \geq n_0 : \quad |a_m - a_n| \;\leq\; |a_m - a| \;+\; |a_n - a| \;\leq\; \varepsilon. \tag{IV.52}$$

$\square$

Satz IV.11 (Cauchy-Kriterium)**.** *Ist $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ eine reelle Cauchy-Folge, so ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ konvergent.*

Beweis. Sei $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ eine reelle Cauchy-Folge. Wählen wir $\varepsilon := 1$, dann gibt es nach (IV.50) ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass (mit $m := n_0$)

$$\forall\, n \geq n_0 : \quad |a_n - a_{n_0}| \;\leq\; 1. \tag{IV.53}$$

Also ist

$$\forall\, n \geq n_0 : \quad |a_n| \;\leq\; |a_{n_0}| \;+\; |a_n - a_{n_0}| \;\leq\; |a_{n_0}| \;+\; 1, \tag{IV.54}$$

und daher

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \quad |a_n| \;\leq\; 1 \;+\; \max\big\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|\big\}, \tag{IV.55}$$

d.h. $(a_n)_{n=1}^\infty$ ist nach oben und nach unten beschränkt. Nach Definition IV.6 sind deshalb

$$\bar{a} := \limsup_{n\to\infty}\{a_n\}, \quad \underline{a} := \liminf_{n\to\infty}\{a_n\} \in \mathbb{R}, \tag{IV.56}$$

und es genügt zu zeigen, dass $\bar{a} = \underline{a}$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ gewählt. Weil $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, n \geq n_0 : \quad |a_n - a_{n_0}| \;\leq\; \varepsilon, \tag{IV.57}$$

was

$$\forall\, n \geq n_0 : \quad a_{n_0} - \varepsilon \;\leq\; a_n \;\leq\; a_{n_0} + \varepsilon \tag{IV.58}$$

impliziert. Daher gilt auch,

$$a_{n_0} - \varepsilon \;\leq\; \inf_{n \geq n_0}\{a_n\} \;=:\; b_{n_0} \;\leq\; c_{n_0} \;:=\; \sup_{n \geq n_0}\{a_n\} \;\leq\; a_{n_0} + \varepsilon. \tag{IV.59}$$

Aus (IV.59) und der Tatsache, dass b_m monoton steigt und c_m monoton sinkt, erhalten wir

$$a_{n_0} - \varepsilon \;\leq\; b_{n_0} \;\leq\; \lim_{n\to\infty}\{b_m\} \;=\; \underline{a} \tag{IV.60}$$

und

$$\bar{a} \;=\; \lim_{n\to\infty}\{c_m\} \;\leq\; c_{n_0} \;\leq\; a_{n_0} + \varepsilon, \tag{IV.61}$$

also

$$0 \;\leq\; \bar{a} - \underline{a} \;\leq\; \big(a_{n_0} + \varepsilon\big) - \big(a_{n_0} - \varepsilon\big) \;=\; 2\varepsilon. \tag{IV.62}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt daraus, dass

$$\underline{a} \;=\; \bar{a}, \tag{IV.63}$$

was nach Korollar IV.8 die Konvergenz von $(a_n)_{n=1}^\infty$ zur Konsequenz hat. $\square$

IV.4. Ergänzungen

IV.4.1. Vertauschung von Limiten mit Produkt und Quotient

Beweis. (Beweis von Satz IV.3) Als konvergente Folgen sind $(a_n)_{n=1}^\infty$ und $(b_n)_{n=1}^\infty$ beschränkt. Es gibt also ein $R < \infty$, so dass

$$\max\Big\{ \sup_n |a_n|,\ \sup_n |b_n|,\ |a|,\ |b| \Big\} \ \leq\ R. \tag{IV.64}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $n_0', n_0'' \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, n \geq n_0' : \quad |a_n - a| \ \leq\ \frac{\varepsilon}{2R}, \tag{IV.65}$$

$$\forall\, n \geq n_0'' : \quad |b_n - b| \ \leq\ \frac{\varepsilon}{2R}. \tag{IV.66}$$

Setzen wir $n_0 := \max\{n_0', n_0''\}$, dann gilt, für alle $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| \ &=\ |a_n b_n - a b_n + a b_n - ab| \\ &\leq\ |a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b| \ \leq\ \frac{\varepsilon}{2R} \cdot R + R \cdot \frac{\varepsilon}{2R} \ =\ \varepsilon. \end{aligned} \tag{IV.67}$$

Also ist $\lim_{n\to\infty}\{a_n b_n\} = ab$.

Für den Beweis von (IV.24) zeigen wir zunächst, dass die Folge $(\frac{1}{b_n})_{n=1}^\infty$ beschränkt ist. Dazu setzen wir $\varepsilon' := \frac{|b|}{2}$. Aus der Konvergenz von $(b_n)_{n=1}^\infty$ folgt dann die Existenz von $\tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, n \geq \tilde{n}_0 : \quad |b_n - b| \ \leq\ \varepsilon' \ =\ \frac{|b|}{2}. \tag{IV.68}$$

Damit ist aber

$$\forall\, n \geq \tilde{n}_0 : \quad |b_n| \ =\ |b + b_n - b| \ \geq\ |b| - |b_n - b| \ \geq\ \frac{|b|}{2}. \tag{IV.69}$$

Also ist

$$\max\left\{ \frac{|1|}{|b|}, \sup_n \left|\frac{1}{b_n}\right| \right\} \ \leq\ R \ :=\ \frac{2}{|b|} \ +\ \max\left\{ \frac{|1|}{|b_k|} \,\Big|\, 1 \leq k \ \leq\ \tilde{n}_0 \right\} \ <\ \infty. \tag{IV.70}$$

Für $\varepsilon > 0$ impliziert wiederum die Konvergenz von $(b_n)_{n=1}^\infty$ die Existenz von $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \geq n_0 : \quad |b - b_n| \ \leq\ \frac{\varepsilon}{R^2}. \tag{IV.71}$$

Somit ist dann

$$\forall n \geq n_0 : \quad \left| \frac{1}{|b|} - \frac{1}{b} \right| \ =\ \frac{|b - b_n|}{|b| \cdot |b_n|} \ \leq\ R^2 \cdot \frac{\varepsilon}{R^2} \ =\ \varepsilon. \tag{IV.72}$$

Also konvergiert $(\frac{1}{b_n})_{n=1}^\infty$ in $\mathbb{K}$ gegen $\frac{1}{b}$. Die Behauptung (IV.24) folgt nun aus (IV.23). □

IV.4.2. Limes Superior/Inferior als größter/kleinster Häufungswert

Beweis. (Beweis von Satz IV.7) Aussagen (i) und (ii) sind offenbar wieder äquivalent, und wir zeigen nur (i). Dazu zeigen wir

$$\text{(IV.42)} \quad \Rightarrow \quad \text{(IV.43)} \quad \Rightarrow \quad \text{(IV.44)} \quad \Rightarrow \quad \text{(IV.42)}. \tag{IV.73}$$

(IV.42) $\Rightarrow$ (IV.43): Sei $\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} = \bar{a} \in \mathbb{R}$, und sei $\varepsilon > 0$. Nehmen wir an, es gäbe unendlich viele $a_n \geq \bar{a} + \varepsilon$, also eine Teilfolge $(a_{n_j})_{j=1}^\infty$ mit $a_{n_j} \geq \bar{a} + \varepsilon$. Wegen $n_j \to \infty$, für $j \to \infty$, gibt es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $n_j \geq m$ und deshalb ist

$$\forall\, m \in \mathbb{N} : \quad \sup_{n \geq m}\{a_n\} \;\geq\; a_{n_j} \;\geq\; \bar{a} + \varepsilon, \tag{IV.74}$$

also

$$\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} \;\geq\; \bar{a} + \varepsilon \;=\; \limsup_{n\to\infty}\{a_n\} + \varepsilon. \tag{IV.75}$$

Widerspruch. Daraus folgt die Existenz eines $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, n \geq n_0 : \quad a_n \;\leq\; \bar{a} + \varepsilon. \tag{IV.76}$$

Gäbe es nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \geq \bar{a} - \varepsilon$, so müsste es $n_0' \in \mathbb{N}$ geben, so dass

$$\forall\, n_0 \geq n_0' : \quad a_n \;\leq\; \bar{a} - \varepsilon. \tag{IV.77}$$

Dann wäre aber

$$\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} \;\leq\; \sup_{n \geq n_0'}\{a_n\} \;\leq\; \bar{a} - \varepsilon \;=\; \limsup_{n\to\infty}\{a_n\} - \varepsilon. \tag{IV.78}$$

Widerspruch. Daraus folgt die Existenz einer Teilfolge $(a_{n_j})_{j=1}^\infty$ mit $a_{n_j} \geq \bar{a} - \varepsilon$, für alle $j \in \mathbb{N}$.

(IV.43) $\Rightarrow$ (IV.44): Seien $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ und $(a_{n_j})_{j=1}^\infty$ so, dass

$$\Big(\forall\, m \geq n_0 : \quad a_m \;\leq\; \bar{a} + \varepsilon\Big) \wedge \Big(\forall\, j \in \mathbb{N} : \quad a_{n_j} \;\geq\; \bar{a} - \varepsilon\Big). \tag{IV.79}$$

Dann gilt

$$\forall\, j \in \mathbb{N},\, n_j \geq n_0 : \quad |a_{n_j} - \bar{a}| \;\leq\; \varepsilon, \tag{IV.80}$$

und $\bar{a}$ ist ein Häufungswert von $(a_n)_{n=1}^\infty$. Außerdem ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ nach (IV.79) offensichtlich nach oben beschränkt.

Ist nun $b > \bar{a}$, so wählen wir $\varepsilon := \frac{b - \bar{a}}{3} > 0$. Nach (IV.43) gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, m \geq n_0 : \quad a_m \;\leq\; \bar{a} + \varepsilon \;=\; b - 2\varepsilon. \tag{IV.81}$$

Also kann b kein Häufungswert von $(a_n)_{n=1}^\infty$ sein. Somit ist $\bar{a}$ der größte Häufungswert von $(a_n)_{n=1}^\infty$.

(IV.44) $\Rightarrow$ (IV.42): Seien $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine nach oben beschränkte Folge und $\bar{a}$ ihr größter Häufungswert. Weil $(a_n)_{n=1}^\infty$ nach oben beschränkt ist, ist $\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} < \infty$. Ist andererseits $\varepsilon > 0$, so gibt es eine Teilfolge $(a_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ mit $a_{n_j} \geq \bar{a} - \varepsilon$, für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} \; = \; \lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{m\geq n}\{a_m\}\Big) \; \geq \; \lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{j\in\mathbb{N}:n_j\geq n}\{a_{n_j}\}\Big) \; \geq \; \bar{a} - \varepsilon, \tag{IV.82}$$

und mit $\varepsilon \to 0$ folgt

$$\bar{a} \; \leq \; \limsup_{n\to\infty}\{a_n\} \; < \; \infty. \tag{IV.83}$$

Sei nun $c_n := \sup_{m\geq n}\{a_m\}$. Dann ist c_n monoton fallend und $\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} = \lim_{n\to\infty}\{c_n\}$. Weiterhin gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ einen Index $m(n) \geq n$, so dass

$$c_n - \frac{1}{n} \; \leq \; a_{m(n)} \; \leq \; c_n, \tag{IV.84}$$

nach Definition des Supremums. O.B.d.A. können wir $m(n) < m(n+1)$ annehmen und erhalten eine konvergente Teilfolge $(a_{m(n)})_{n=1}^{\infty}$ mit

$$\lim_{n\to\infty}\{a_{m(n)}\} \; = \; \lim_{n\to\infty}\{c_n\} \; = \; \limsup_{n\to\infty}\{a_n\}. \tag{IV.85}$$

Also ist $\limsup_{n\to\infty}\{a_n\}$ ein Häufungswert von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Weil $\bar{a}$ der größte Häufungswert ist, folgt

$$\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} \; = \; \bar{a}. \tag{IV.86}$$

$\square$