Analysis für Elektrotechnik
Sommersemester 23
Prof. Dr. Volker Bach
M.Sc. Jakob Geisler

Technische Universität Braunschweig

12. Übungsblatt

Upload: 18.07.2023.
Deadline: 25.07.2023, 10:00 Uhr (im Abgabeordner bei stud.ip).
Dieses Blatt gibt nur Bonuspunkte!

Aufgabe 12.1 (2 + 2 + 2)

(a) Es seien $U := \mathbb{R}^+ \times (-\pi,\pi) \times \mathbb{R}$ und $V := \mathbb{R}^3 \setminus \{(-\lambda, 0, \eta)^T \in \mathbb{R} | \lambda \geq 0, \eta \in \mathbb{R}\}$ zwei offene Mengen und

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix},$$

eine Abbildung. Zeigen Sie, dass Φ eine Koordinatentransformation von U nach V induziert.

(b) Berechnen Sie das Volumen eines Zylinders $Z_{r,L}$ mit Radius $r > 0$ und Länge $L > 0$.

(c) Berechnen Sie

$$\int_{Z_{2,10}} z\sqrt{x^2+y^2} e^{\sqrt{x^2+y^2}} \, d\mu_3(x,y,z),$$

wobei $Z_{2,10} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 10\}$ ein Zylinder mit Radius 2 und Länge 10 ist.

Aufgabe 12.2 (2 + 2 + 2)

Es seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto x+y+z$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \ (x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2-16$ zwei Funktionen.

(a) Berechnen Sie die kritischen Punkte von f unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) \equiv 0$.

(b) Wählen Sie eine geeignete Parametrisierung von $K_4 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | g(x,y,z) = 0\}$, d.h. wählen Sie eine stetige bijektive Funktion $\Phi : U_1 \cup U_2 \cup U_3 \to K_4$, die stetig differenzierbar ist auf U_1, wobei $U_1 = (-\pi,\pi) \times (0,\pi)$, $U_2 := \{\pi\} \times (0,\pi)$ und $U_3 = \{0\} \times \{0,\pi\} \subseteq \mathbb{R}^2$ sind.

(c) Berechnen Sie erneut die Extrema von f auf K_4 und klassifizieren Sie diese, indem Sie $f \circ \Phi : \tilde{U} \to \mathbb{R}$ betrachten.

Aufgabe 12.3 (3 + 3)

Das elektrische Potential der homogen geladenen Kugel $B_{\mathbb{R}^3}(\vec{0}, R) \subseteq \mathbb{R}^3$ vom Radius $R > 0$ ist proportional zu

$$\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ y \mapsto \Psi(\vec{y}) := \int_{B_{\mathbb{R}^3}(\vec{0},R)} \frac{1}{\|\vec{y} - \vec{x}\|_{eukl}} \mathrm{d}\mu_3(x_1, x_2, x_3).$$

(a) Zeigen Sie für $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$, dass

$$\Psi(\vec{y}) = \int_0^R \int_0^\pi \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^2 \sin(\theta)}{\sqrt{r^2 + \|\vec{y}\|_{eukl}^2 - 2r\|\vec{y}\|_{eukl} \cos(\theta)}} \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}r.$$

Hinweis: Nehmen Sie zunächst an, dass $\vec{y} = (0, 0, \|y\|_{eukl})^T$ ein Vektor in positiver z-Richtung ist und verallgemeinern Sie dann Ihr Ergebnis auf beliebige $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$.

(b) Nutzen Sie die Darstellung aus (a), um $\Psi(\vec{y})$ für alle $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ anzugeben.

Aufgabe 12.4 (3 + 1 + 2)

Es sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - \frac{1}{4}$.

(a) Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten $(a_k)_{k=0}^\infty, (b_k)_{k=1}^\infty \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ von f so, dass

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

μ_1-fast überall auf $[-\pi, \pi]$ gilt.

(b) Begründen Sie, warum die Fourierreihe von f auch punktweise konvergiert.

(c) Lösen Sie das Basler-Problem, d.h., berechnen Sie den Grenzwert der Reihe

$$s_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2},$$

für $n \to \infty$.