Technische Universität Braunschweig

6. Übungsblatt

Upload: 06.06.2023.
Deadline: 13.06.2023, 10:00 Uhr (im Abgabeordner bei stud.ip).

Aufgabe 6.1 $(2+1+1+2)$

Es seien die Partitionen $P_2, P_3, \ldots$ von $[0,1]$ gegeben durch

$$P_n := \{\tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}, \ldots, \tfrac{n-1}{n}\}, \quad \forall\, n \geq 2,$$

und $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ eine Funktion.

(a) Berechnen Sie $\underline{\mathcal{I}}(f, P_n)$ und $\overline{\mathcal{I}}(f, P_n)$.

(b) Betrachten Sie den Grenzwert $n \to \infty$ der obigen Summen und argumentieren Sie, dass f Riemann-integrierbar ist auf $[0,1]$.

(c) Verifizieren Sie Ihre Ergebnisse aus (b) indem Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung benutzen.

(d) Nun sei $g : [0,4] \to \mathbb{R}$ gegeben als

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ 5, & 1 \leq x < 3, \\ -2, & 3 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Geben Sie eine Partition P von $[0,4]$ an, sodass $|\underline{\mathcal{I}}(g, P) - \overline{\mathcal{I}}(g, P)| \leq 10^{-10}$. Welchen Wert nimmt das Integral an?

Aufgabe 6.2 $(1+1+1+1+1+1)$

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$(i) \int_{-1}^{5} e^x \mathrm{d}x, \quad (ii) \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sin(-x)\mathrm{d}x, \quad (iii) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\mathrm{d}x,$$

$$(iv) \int_1^e \frac{7}{x}\mathrm{d}x, \quad (v) \int_{-1}^{0} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k \mathrm{d}x, \quad (vi) \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)|\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 6.3 $(1+1+1+1+1+1)$

Berechnen Sie die folgenden Integrale, indem Sie partiell integrieren und/oder geeignet substituieren:

$$(i) \int x e^x \mathrm{d}x, \quad (ii) \int_1^e \ln(x)\mathrm{d}x, \quad (iii) \int e^x \sin(x)\mathrm{d}x,$$

$$(iv) \int x e^{-x^2} \mathrm{d}x, \quad (v) \int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x, \quad (vi) \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 6.4 (6)

Es seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine monoton steigende Funktion. Beweisen Sie: f ist Riemann-integrierbar auf $[a,b]$.