Institut für Regelungstechnik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr.-Ing. M. Maurer
Prof. Dr.-Ing. W. Schumacher

Hans-Sommer-Str. 66
38106 Braunschweig
Tel. (0531) 391-3840

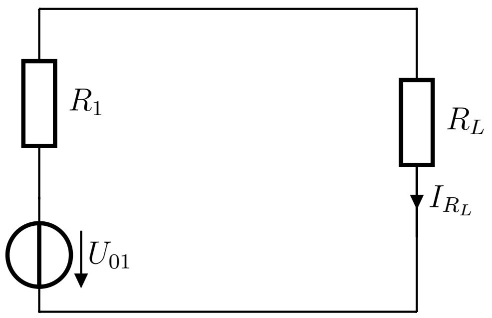
Grundlagen der Elektrotechnik

Lösungsvorschlag zu den Klausuraufgaben F'19

1 Gleichstromnetzwerk

Punkte: 16

a)



(1)

$\sum_{a)} 1$

b)

$$I = \frac{U_{01}}{R}$$

mit $U_{01} = I_{01} \cdot R_1 = 40\,\mathrm{m\Omega} \cdot 125\,\mathrm{A} = 5\,\mathrm{V}$ (0.5)

$$I_{R_L} = \frac{U_{01}}{R_1 + R_L} \text{ (0.5) } = \frac{125\,\mathrm{A} \cdot 40\,\mathrm{m\Omega}}{40\,\mathrm{m\Omega} + 60\,\mathrm{m\Omega}} = \frac{5\,\mathrm{V}}{100\,\mathrm{m\Omega}} = 50\,\mathrm{A}$$

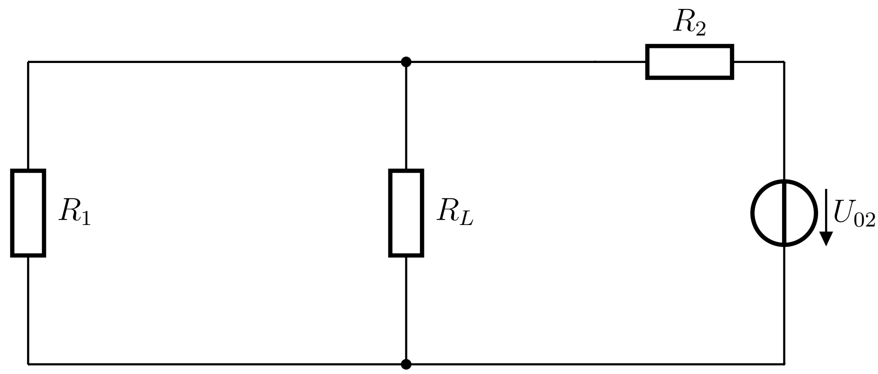
$$P = {I_{R_L}}^2 \cdot R_L = 50\,\mathrm{A}^2 \cdot 60\,\mathrm{m\Omega} = 150\,\mathrm{W} \text{ (0.5)}$$

$\Rightarrow$ Nein, das Fahrzeug kann nicht mehr gestartet werden, da zum Starten des Motors 1200 W benötigt werden. (0.5)

$\sum_{b)} 2$

c) $\Rightarrow$ R_3 kann für die nachfolgenden Berechnungen für I_{R_L} vernachlässigt werden, da er parallel zur Spannungsquelle geschaltet ist. (0.5)

$\underline{I_{R_L,U_{02}} = ?:}$



(0.5)

$$I_{R_2} = \frac{U_{02}}{R_{ges}}$$

$$R_{ges} = R_2 + \frac{R_1 \cdot R_L}{R_1 + R_L}$$

$$I_{R_2} = \frac{U_{02}}{R_2 + \frac{R_1 \cdot R_L}{R_1 + R_L}} = \frac{U_{02} \cdot (R_1 + R_L)}{R_2 \cdot (R_1 + R_L) + R_1 \cdot R_L} \text{ (1)}$$

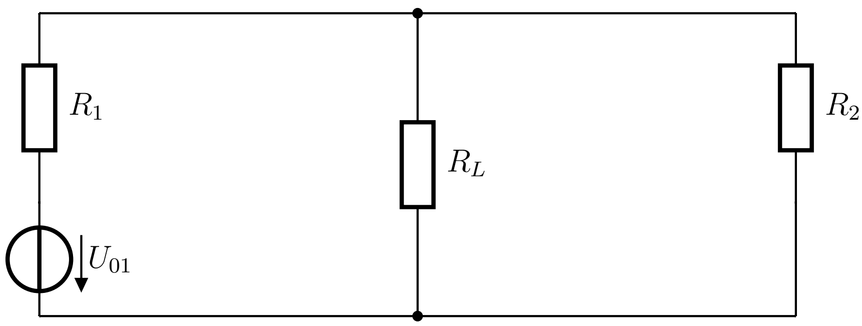
Stromteiler:

$$I_{R_L,U_{02}} = \frac{R_1}{R_1 + R_L} \cdot I_{R_2}$$

$$= U_{02} \cdot \frac{R_1}{R_2(R_1 + R_L) + R_1 \cdot R_L} \text{ (1)}$$

$\underline{I_{R_L,I_{01}} = ?}$:

$\Rightarrow$ Mit Umwandlung I_{01} in U_{01}



(0.5)

$$I_{R_1} = \frac{U_{01}}{R_{ges}} = \frac{U_{01} \cdot (R_2 + R_L)}{R_1 \cdot (R_2 + R_L) + R_2 \cdot R_L} \text{ (1)}$$

Stromteiler:

$$\begin{aligned} I_{R_L,I_{01}} &= \frac{R_2}{R_2 + R_L} \cdot I_{R_1} \\ &= U_{01} \cdot \frac{R_2}{R_1(R_2 + R_L) + R_2 \cdot R_L} \text{ (1)} \end{aligned}$$

Superposition:

$$\begin{aligned} I_{R_L} &= I_{R_L,I_{01}} + I_{R_L,U_{02}} \\ &= \frac{R_1 \cdot U_{02} + R_2 \cdot U_{01}}{R_1 R_L + R_1 R_2 + R_2 R_L} \text{ (0.5)} \\ &= 150\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

$\sum_{c)} 6$

d)

$$\begin{aligned} I_{R_L} &= 150\,\mathrm{A} \text{ (0.5)} \\ P &= {I_{R_L}}^2 \cdot R_L = (150\,\mathrm{A})^2 \cdot 60\,\mathrm{m\Omega} = 1350\,\mathrm{W} \text{ (1)} \end{aligned}$$

Das Fahrzeug kann gestartet werden, da nun mehr als 1200 W zur Verfügung stehen. (0.5)

$\sum_{d)} 2$

e)

$$P_L = \frac{U_L^2}{R_L}$$

$$U_L = U_0 \cdot \frac{R_L}{(R_i + R_L)} \text{ (0.5)}$$

damit:

$$P_L = \frac{U_0^2 \cdot \frac{R_L^2}{(R_i+R_L)^2}}{R_L} = U_0^2 \cdot \frac{R_L}{(R_i + R_L)^2} \text{ (0.5)}$$

$\Rightarrow$ Für Maximum 1. Ableitung $\stackrel{!}{=} 0$ (0.5)

Hier: Quotientenregel

$$\begin{aligned} g(R_L) &= U_0^2 \cdot R_L \longmapsto g'(R_L) = U_0^2 \\ h(R_L) &= (R_L + R_i)^2 \longmapsto h'(R_L) = 2(R_L + R_i) \end{aligned}$$

$$P'(R_L)_L = \frac{U_0^2 \cdot (R_L + R_i)^2 - U_0^2 \cdot R_L \cdot 2(R_L + R_i)}{(R_L + R_i)^2 \cdot (R_L + R_i)^2} \overset{!}{=} 0 \,(1)$$

$\Rightarrow$ Gleichung $\overset{!}{=} 0$ wenn Zähler $\overset{!}{=} 0$

Somit:

$$U_0^2 \cdot (R_L + R_i)^2 - U_0^2 \cdot R_L \cdot 2(R_L + R_i) \overset{!}{=} 0$$
$$\Leftrightarrow (R_L + R_i)^2 = 2R_L(R_L + R_i)$$
$$\Leftrightarrow R_L + R_i = 2R_L$$
$$\Leftrightarrow R_i = R_L \,(0.5)$$

Überprüfen ob auch wirklich ein Maximum gefunden wurde:

$$P''(R_L)_L = \frac{2U_0R_L - 4U_0R_i}{(R_i + R_L)^4} \,(1) \qquad \text{bei } R_i = R_L\text{:}$$
$$\Rightarrow -\frac{2U_0R_L}{(2R_L)^4} < 0 \,(0.5)$$

$\Rightarrow$ Damit wurde das Maximum gefunden.

$\square$

$\sum_{e)} 4.5$

f) $\Rightarrow$ Leistungsanpassung (0.5)

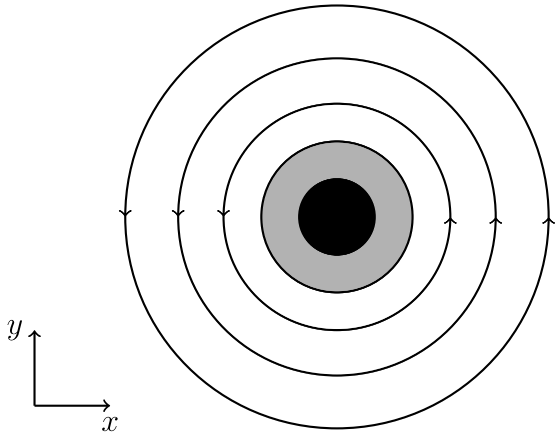
$\sum_{f)} 0.5$

$\sum_{A1} 16$

2 Magnetfeld

Punkte: 16

a)



(1)

$\sum_{a)} 1$

b)

$$\oint_s \overrightarrow{H} \cdot d\overrightarrow{s} = \iint_A \overrightarrow{J} \cdot d\overrightarrow{A}$$

(0.5)

Das Integral entlang eines beliebigen geschlossenen Pfades s über die Feldstärke $\overrightarrow{H}$ ist gleich der Summe aller die von s eingeschlossene Fläche A durchsetzende Ströme unter Berücksichtigung ihrer jeweiligen Fließrichtung. (0.5)

$\sum_{b)} 1$

c) **Vereinfachungen**

- $\overrightarrow{H} \parallel d\overrightarrow{s}$, daher keine vektorielle Darstellung notwendig
- $\overrightarrow{H}$ ist konstant bei festem r, daher keine Abhängigkeit von φ bei Koordinatentransformation in Polarkoordinaten
- Das Kabel ist als unendlich dünn gegeben, daher umfasst $\iint_A \overrightarrow{J} \cdot d\overrightarrow{A}$ das gesamte Kabel und den darin fließenden Strom und ist somit gleich I

Punkte: Bei 2 von 3 Begründungen noch 0,5 Punkte, bei 3 von 3 Begründungen (1) Punkt.

Magnetische Feldstärke

$$\begin{aligned}
&& \oint_s \vec{H} \cdot d\vec{s} &= \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \\
\Leftrightarrow && \int_0^{2\pi} H(r) \cdot r\, d\varphi &= \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \ (0.5) \\
\Leftrightarrow && H(r) \cdot 2\pi r &= I \\
\Leftrightarrow && H(r) &= \frac{I}{2\pi} \frac{1}{r} \ (0.5)
\end{aligned}$$

Magnetische Flussdichte

Mit $H(r) = \frac{B(r)}{\mu_0 \mu_r}$ (0.5) folgt

$$\begin{aligned}
&& \frac{B(r)}{\mu_0 \mu_{r\,\mathrm{Luft}}} &= \frac{I}{2\pi} \frac{1}{r} \\
\Leftrightarrow && B(r) &= \mu_0 \mu_r \cdot \frac{I}{2\pi} \frac{1}{r} \ (0.5)
\end{aligned}$$

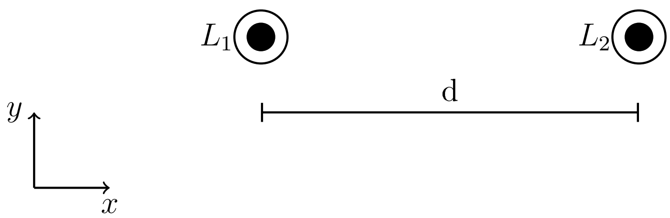
$\sum_{c)} 3$

d) Lorentzkraft $\vec{F_L} = I(\vec{l} \times \vec{B})$ (0.5)

Die auf einen Leiter der Länge l wirkende Kraft $\vec{F_L}$ entspricht der Stromstärke I des in dem Leiter fließenden Stroms mal des Kreuzprodukts aus der Länge l des Leiters und der magnetischen Flusssdichte B des den Leiter durchfließenden Magnetfelds. (0.5)

$\sum_{d)} 1$

e)



Begründung: Lorentzkraft mit Rechter-Hand-Regel oder Wissen aus der Vorlesung: Gleiche Richtung führt zu Anziehung, Unterschiedliche Richtungen führt zu Abstoßung. Jeweils entsprechend verständlich ausformuliert. (1)

$\sum_{e)} 1$

f)

$$\overrightarrow{B_1} = \mu_0\mu_r \cdot \frac{I_1\overrightarrow{e_y}}{2\pi d} \text{ (0.5)}$$
$$\overrightarrow{F_2} = I_2\left(\overrightarrow{l} \times \overrightarrow{B_1}\right) \text{ (0.5)}$$
$$\overrightarrow{F_2} = I_2\left(\overrightarrow{l} \times \left(\mu_0\mu_r \cdot \frac{I_1\overrightarrow{e_y}}{2\pi d}\right)\right)$$
$$= \mu_0\mu_r \cdot \frac{I_1 I_2 \cdot l}{2\pi d}\left(\overrightarrow{e_z} \times \overrightarrow{e_y}\right) \text{ (0.5)}$$
$$= \mu_0\mu_r \cdot \frac{I_1 I_2 \cdot l}{2\pi d}\left(-\overrightarrow{e_x}\right) \text{ (0.5)}$$
$$\frac{\overrightarrow{F_2}}{l} = \mu_0\mu_r \cdot \frac{I_1 I_2}{2\pi d}\left(-\overrightarrow{e_x}\right)$$

Punkte:

- Keine vektorielle Darstellung oder Richtung der Vektoren nicht ersichtlich: Max. 1 bis 1,5 Punkte auf die Aufgabe erreichbar (je nach schwere des Fehlers)
- Keine Indizes oder Indizes falsch: Max. 1 bis 1,5 Punkte auf die Aufgabe erreichbar (je nach schwere des Fehlers)

$\sum_{f)} 2$

g)

$$\Phi = \iint_A \overrightarrow{B}\, d\overrightarrow{A} \text{ (1)}$$
$$= \int_d^{d+b_2}\int_0^{l_2} B(r)\, dh\, dr$$
$$= \int_d^{d+b_2}\int_0^{l_2} \frac{I_1 \cdot \mu_0\mu_{r\,\text{Luft}}}{2\pi r}\, dh\, dr \text{ (1)}$$
$$= \frac{I_1 \cdot l_2 \cdot \mu_0\mu_{r\,\text{Luft}}}{2\pi}\ln\left(\frac{d+b_2}{d}\right) \text{ (1)}$$

$\sum_{g)} 3$

h) $u_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = 0$, da bei Gleichstrom keine Änderung des magnetischen Flusses Φ. (1)

$\sum_{h)} 1$

i)

$$
\begin{aligned}
\Phi &= l_2 \frac{i_1(t)\cdot \mu_0 \mu_{r\,\mathrm{Luft}}}{2\pi} \ln\left(\frac{d+b_2}{d}\right) \\
&= l_2 \frac{\hat{I}_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \varphi_1)\cdot \mu_0 \mu_{r\,\mathrm{Luft}}}{2\pi} \ln\left(\frac{d+b_2}{d}\right) \\
u_{ind}(t) &= -N \frac{d\,\Phi}{d\,t} \\
&= -\frac{d}{d\,t}\left[l_2 \frac{\hat{I}_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \varphi_1)\cdot \mu_0 \mu_{r\,\mathrm{Luft}}}{2\pi} \ln\left(\frac{d+b_2}{d}\right)\right] \; (1) \\
&= -\frac{\hat{I}_1}{2\pi} \cdot l_2 \cdot \omega_1 \cdot \mu_0 \mu_{r\,\mathrm{Luft}} \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) \cdot \ln\left(\frac{d+b_2}{d}\right) \; (1)
\end{aligned}
$$

$\sum_{i)} 2$

j) Bewegungsinduktion und Ruheinduktion (0.5), hier: Ruheinduktion (0.5)

$\sum_{j)} 1$

$\sum_{A2} 16$

3 Komplexe Wechselstromrechnung

Punkte: 31

a) Ansatz 0,5 Punkte und Ergebnis 0,5 Punkte

$$\begin{aligned} L_x &= (L_1 + L_2)||L_3 \ (0.5) \\ L_{12} &= (L_1 + L_2) = 2 \cdot 4\,\text{mH} = 8\,\text{mH} \\ L_x &= \frac{L_{12} \cdot L_3}{L_{12} + L_3} = \frac{8\,\text{mH} \cdot 8\,\text{mH}}{8\,\text{mH} + 8\,\text{mH}} = 4\,\text{mH} \ (0.5) \end{aligned}$$

Ansatz 0,5 Punkte und Ergebnis 0,5 Punkte

$$\begin{aligned} C_x &= (C_1 + C_2)||C_3 \ (0.5) \\ C_{12} &= \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = 0,5 \cdot 200\,\mu\text{F} = 100\,\mu\text{F} \\ C_x &= C_{12} + C_3 = 2 \cdot 100\,\mu\text{F} = 200\,\mu\text{F} \ (0.5) \end{aligned}$$

$\sum_{a)} 2$

b)
- Lineares System (0.5)
  (lineare Bauteile, beschrieben durch lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten)
- Eingeschwungener Zustand (0.5)
- Konzentrierte Parameter
  (im Vergleich zu verteilten Parametern in der Hochfrequenztechnik)

$\sum_{b)} 1$

c)
- Die Aufteilung der Induktivitäten als Parallelschaltung kann der Stromreduktion pro Induktivität dienen (0.5)
- Zu hohe Ströme verursachen aufgrund der magnetischen Sättigung ein nichtlineares Bauteilverhalten. (0.5)
  (Netzwerke können hierdurch nicht mehr durch die komplexe Wechselstromrechnung beschrieben werden.)

$\sum_{c)} 1$

d) Amplitude $\hat{u}_{L_x}$ und Phasenverschiebungswinkel φ_0 aus dem Diagramm ablesen:

$\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ (0.5) $\qquad \hat{u}_{L_x} = 4\,\text{V}$ (0.5)

Effektivwert U_{L_x} berechnen:

$$\begin{aligned} U_{L_x} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \hat{u}_{L_x} \ (0.5) \\ &= \frac{4}{\sqrt{2}}\,\text{V} \end{aligned}$$

Trigonometrische Form von $\underline{U}_{L_x}$ berechnen:

$$\underline{U}_{L_x} = U_{L_x} \cdot \cos(\varphi_0) + \mathrm{j} \cdot U_{L_x} \cdot \sin(\varphi_0)$$
$$= \frac{4\,\mathrm{V}}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{j}\frac{1}{\sqrt{2}}) = (2 + \mathrm{j}2)\,\mathrm{V} \text{ (0.5)}$$

$\sum_{d)} 2$

e) Ansatz 0,5 Punkte und Ergebnis 0,5 Punkte

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{L_x}}{\underline{Z}_{L_x}} = \frac{\underline{U}_{L_x}}{\mathrm{j}\omega L_x} \text{ (0.5)}$$
$$= \frac{(2+\mathrm{j}2)\,\mathrm{V} \cdot (\text{-j})}{1000\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{H}} = \frac{(2-\mathrm{j}2)\,\mathrm{V}}{4\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}} = (0,5 - \mathrm{j}0,5)\,\mathrm{A} \text{ (0.5)}$$

$\sum_{e)} 1$

f) Ansatz 0,5 Punkte und Ergebnis 0,5 Punkte

$$\underline{I}_4 = \frac{\underline{U}_{Lx}}{R_2 + \underline{Z}_{C_x}} \text{ (0.5)} = \frac{\underline{U}_{Lx}}{R_2 - \frac{\mathrm{j}}{\omega C_x}} = \underline{U}_{Lx}\frac{R_2 + \frac{\mathrm{j}}{\omega C_x}}{{R_2}^2 + (\frac{1}{\omega C_x})^2}$$

mit $\frac{1}{\omega C_x} = \frac{1}{10^3\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 200\,\mathrm{\mu F}} = \frac{1000}{200}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = 5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}$
und ${R_2}^2 + (\frac{1}{\omega C_x})^2 = (5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}})^2 + (5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}})^2 = 50\,(\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}})^2$

$$\underline{I}_4 = (2 + \mathrm{j}2)\,\mathrm{V} \cdot (\frac{5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}}{50\,(\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}})^2} + \mathrm{j} \cdot \frac{5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}}{50\,(\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}})^2})$$
$$= \frac{2}{10}\,\mathrm{A} + \mathrm{j}\frac{2}{10}\,\mathrm{A} + \mathrm{j}\frac{2}{10}\,\mathrm{A} - \frac{2}{10}\,\mathrm{A}$$
$$= \mathrm{j}0{,}4\,\mathrm{A} \text{ (0.5)}$$

$$\underline{U}_{R_2} = \underline{I}_4 \cdot R_2 \text{ (0.5)} = \mathrm{j}0{,}4\,\mathrm{A} \cdot 5\,\Omega = \mathrm{j}2\,\mathrm{V} \text{ (0.5)}$$
$$\underline{U}_{C_x} = \underline{U}_{L_x} - \underline{U}_{R_2} \text{ (0.5)} = (2 + \mathrm{j}2)\,\mathrm{V} - \mathrm{j}2\,\mathrm{V} = 2\,\mathrm{V} \text{ (0.5)}$$

$\sum_{f)} 3$

g) Ansatz 0,5 Punkte und Ergebnis 0,5 Punkte

$$\begin{aligned}\underline{I}_2 &= \underline{I}_3 + \underline{I}_4 \ (0.5)\\ &= (0,5 - \mathrm{j}0,5)\,\mathrm{A} + \mathrm{j}0{,}4\,\mathrm{A}\\ &= (0,5 - \mathrm{j}0,1)\,\mathrm{A} \ (0.5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_{C_4} &= \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{C_4} \ (0.5) \ = \underline{I}_2 \cdot \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_4}\\ &= (0,5 - \mathrm{j}0,1)\,\mathrm{A} \cdot \frac{(-\mathrm{j})}{10^3\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 50\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}}}\\ &= (0,5 - \mathrm{j}0,1)\,\mathrm{A} \cdot (\text{-j}20\,)\frac{1\,\mathrm{V}}{1\,\mathrm{A}} = (-2 - \mathrm{j}10)\,\mathrm{V} \ (0.5)\end{aligned}$$

$\sum_{g)} 2$

h) Ansatz 0,5 Punkte und Ergebnis 0,5 Punkte

$$\begin{aligned}\underline{U}_0 &= \underline{U}_{C_4} + \underline{U}_{L_x} \ (0.5)\\ &= (-2 - \mathrm{j}10)\,\mathrm{V} + (2 + \mathrm{j}2)\,\mathrm{V} = -\mathrm{j}8\,\mathrm{V} \ (0.5)\end{aligned}$$

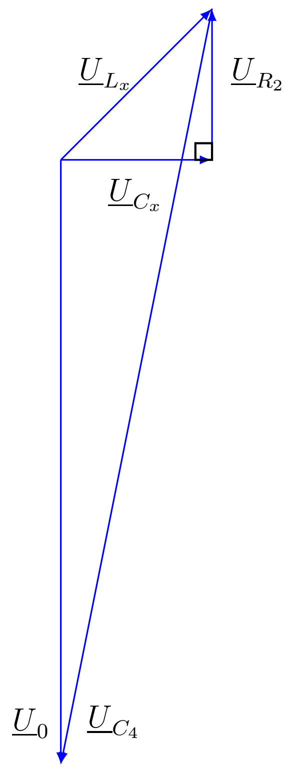
$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_0}{R_1} \ (0.5) \ = \frac{-\mathrm{j}8\,\mathrm{V}}{4\,\Omega} = -\mathrm{j}2\,\mathrm{A} \ (0.5)$$

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \ (0.5) \ = (0,5 - \mathrm{j}0,1)\,\mathrm{A} - \mathrm{j}2\,\mathrm{A} = (0,5 - \mathrm{j}2,1)\,\mathrm{A} \ (0.5)$$

$\sum_{h)} 3$

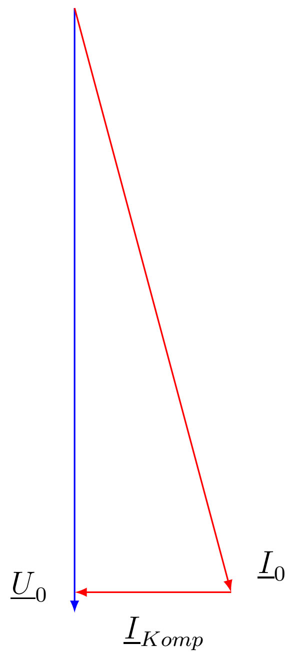
i) Pro korrektem Zeiger mit korrekter Konstruktionsreihenfolge bzw. Addition 1 Punkt.

$\rightarrow$ 5 Zeiger (1) (1) (1) (1) (1)



$\sum_{i)} 5$

j) Zeigerdiagramm: Pro korrektem Zeiger (0,5 Punkte) (0.5) (0.5) (0.5)



$\rightarrow$ Kapazitives Verhalten I_0 ist voreilend gegenüber U_0. (0.5)

$\sum_{j)} 2$

k) Induktivität zur Kompensation des kapazitiven Verhaltens (0.5)

$\sum_{k)} 0.5$

l) Ablesen von $|I_{Komp}| \approx 0{,}5\,\text{A}$ (0.5)
$|I_{Komp}| = \frac{|U_0|}{\omega L_{Komp}}$ (0.5)
$\rightarrow L_{Komp} = \frac{8\,\text{V}}{10^3\,\frac{1}{\text{s}} \cdot 0{,}5\,\text{A}} = 16\,\text{mH}$ (0.5)

$\sum_{l)} 1.5$

m)
- $\omega = 0$: $|\underline{Z}_{AB}| = R_1 = 4\,\Omega$ (0.5)
- $\omega \rightarrow \infty$: $|\underline{Z}_{AB}| = R_1 || R_2 = \frac{4 \cdot 4}{4+4}\,\Omega = 2\,\Omega$ (0.5)

$\sum_{m)} 1$

n)
- Reihenschwingkreis: C_4, L_x und C_x (0.5)
- Parallelschwingkreis: L_x und C_x (0.5)

$\sum_{n)} 1$

o)

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{AB} &= \underline{Z}_{C_4} + (\underline{Z}_{C_x} || \underline{Z}_{L_x}) \ (1) \\
&= \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_4} + \frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_x} \cdot \mathrm{j}\omega L_x}{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_x} + \mathrm{j}\omega L_x} \\
&= \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_4} + \frac{\mathrm{j}\omega L_x}{1 - \omega^2 L_x C_x} \ (1) \\
&= \frac{1 - \omega^2 L_x C_x - \omega^2 L_x C_4}{\mathrm{j}\omega C_4 \cdot (1 - \omega^2 L_x C_x)} \\
&= -\mathrm{j}\frac{1 - \omega^2 L_x C_x - \omega^2 L_x C_4}{\omega C_4 - \omega^3 L_x C_x C_4} \ (1)
\end{aligned}$$

$\sum_{o)} 3$

p) 1. Kennkreisfrequenz ω_R (Reihenschwingkreis): Zähler = 0

$$\begin{aligned}
0 &= 1 - {\omega_R}^2 L_x C_x - {\omega_R}^2 L_x C_4 \ (0.5) \\
1 &= {\omega_R}^2 L_x C_x + {\omega_R}^2 L_x C_4 \\
\omega_R &= \frac{1}{\sqrt{L_x C_x + L_x C_4}} \ (0.5)
\end{aligned}$$

2. Kennkreisfrequenz ω_P (Parallelschwingkreis): Nenner = 0

$$\begin{aligned}
0 &= \omega_P C_4 - {\omega_P}^3 L_x C_x C_4 \ (0.5) \\
1 &= {\omega_P}^2 L_x C_x \\
\omega_P &= \frac{1}{\sqrt{L_x C_x}} \ (0.5)
\end{aligned}$$

$\sum_{p)} 2$

$\sum_{A3} 31$

4 Schaltvorgänge bei Kondensatoren

Punkte: 16

a) $Q = CU$ (0.5)
$Q_{C_1} = C_1 u_{C_1}(t)$ mit $u_{C_1}(t) = U_0$ im eingeschwungenen Zustand
$\rightarrow Q_{C_1} = C_1 U_0$ (0.5)
$Q_{C_2} = 0$, weil „C_2 ist vollständig entladen". (0.5)

$\sum_{a)} 1.5$

b) $Q_{C_1} = C_1 u_{C_1}(t)$
$Q_{C_2} = C_2 u_{C_2}(t) \quad //Q_{C_1}$ und Q_{C_2} (0.5)
$Q_{ges} = Q_{C_1} + Q_{C_2}$
$Q_{ges} = C_1 u_{C_1}(t) + C_2 u_{C_2}(t)$ (0.5)

$\sum_{b)} 1$

c) mit $Q_{ges} = C_1 U_0$ aus a)
$Q_{ges} = C_1 U_0 = C_1 u_{C_1}(t) + C_2 u_{C_2}(t)$ (0.5)
$u_{C_2}(t) = \frac{C_1}{C_2}(U_0 - u_{C_1}(t))$ (0.5)

$\sum_{c)} 1$

d) $u_{C_1}(t) = u_{C_2}(t) + u_R(t)$ (0.5)

$\sum_{d)} 0.5$

e) $u_{C_1}(t) = u_{C_2}(t) + u_R(t)$
mit $u_{C_2}(t) = \frac{C_1}{C_2}(U_0 - u_{C_1}(t))$
und mit $u_R(t) = i(t)R$ (0.5) mit $i(t) = -$[redacted]$C_1 \frac{\mathrm{d}u_{C_1}}{\mathrm{d}t}$ (0.5)
$u_{C_1}(t) = \frac{C_1}{C_2}(U_0 - u_{C_1}(t)) - RC_1 \frac{\mathrm{d}u_{C_1}}{\mathrm{d}t}$ (0.5)

$\sum_{e)} 1.5$

f) $u_{C_1}(t) = \frac{C_1}{C_2}(U_0 - u_{C_1}(t)) - RC_1 \frac{\mathrm{d}u_{C_1}}{\mathrm{d}t}$
$0 = U_0 \frac{C_1}{C_2} - u_{C_1}(t)\frac{C_1}{C_2} - u_{C_1}(t) - RC_1 \frac{\mathrm{d}u_{C_1}}{\mathrm{d}t}$
$0 = -U_0 \frac{C_1}{C_2}\frac{1}{RC_1} + u_{C_1}(t)\frac{C_1}{C_2}\frac{1}{RC_1} + u_{C_1}(t)\frac{1}{RC_1} + \frac{\mathrm{d}u_{C_1}}{\mathrm{d}t}$
$0 = -U_0 \frac{1}{RC_2} + u_{C_1}(t)\frac{1}{RC_2} + u_{C_1}(t)\frac{1}{RC_1} + \frac{\mathrm{d}u_{C_1}}{\mathrm{d}t}$
$U_0 \frac{1}{RC_2} = u_{C_1}(t)(\frac{1}{RC_1} + \frac{1}{RC_2}) + \frac{\mathrm{d}u_{C_1}}{\mathrm{d}t}$ bzw.
$u_{C_1}(t)(\frac{1}{RC_1} + \frac{1}{RC_2}) + \frac{\mathrm{d}u_{C_1}}{\mathrm{d}t} = U_0 \frac{1}{RC_2}$ (0.5)

$\sum_{f)} 0.5$

g) $u(t) = \int b \cdot e^{a \cdot t}\mathrm{d}t \cdot e^{-a \cdot t}$
$a = \frac{1}{RC_1} + \frac{1}{RC_2}$ (0.5)
$b = U_0 \frac{1}{RC_2}$ (0.5) eingesetzt:

$u_{C_1}(t) = \int U_0 \frac{1}{RC_2} e^{(\frac{1}{RC_1}+\frac{1}{RC_2})t} \mathrm{d}t \cdot e^{-(\frac{1}{RC_1}+\frac{1}{RC_2})t}$ mit $\frac{1}{RC_1} + \frac{1}{RC_2} = \frac{C_1+C_2}{RC_1C_2}$
$u_{C_1}(t) = [U_0 \frac{1}{RC_2} \frac{RC_1C_2}{C_1+C_2} e^{(\frac{1}{RC_1}+\frac{1}{RC_2})t} + C_i] e^{-(\frac{1}{RC_1}+\frac{1}{RC_2})t}$, Integrationskonstante C_i
$u_{C_1}(t) = U_0 \frac{C_1}{C_1+C_2} e^{(\frac{1}{RC_1}+\frac{1}{RC_2})t} e^{-(\frac{1}{RC_1}+\frac{1}{RC_2})t} + C_i e^{-(\frac{1}{RC_1}+\frac{1}{RC_2})t}$
$u_{C_1}(t) = U_0 \frac{C_1}{C_1+C_2} + C_i e^{-(\frac{1}{RC_1}+\frac{1}{RC_2})t}$ // $U_0 \frac{C_1}{C_1+C_2}$ (0.5) , $C_i e^{-(\frac{1}{RC_1}+\frac{1}{RC_2})t}$ (0.5)

$\sum_{g)} 2$

h) $u_{C_1}(t=0) = U_0 = U_0 \frac{C_1}{C_1+C_2} + C_i e^{-(\frac{1}{RC_1}+\frac{1}{RC_2})(0)}$ (0.5)
$U_0 = U_0 \frac{C_1}{C_1+C_2} + C_i$
$U_0 (1 - \frac{C_1}{C_1+C_2}) = C_i$
$U_0 (\frac{C_1+C_2}{C_1+C_2} - \frac{C_1}{C_1+C_2}) = C_i$
$U_0 \frac{C_1+C_2-C_1}{C_1+C_2} = C_i$
$U_0 \frac{C_2}{C_1+C_2} = C_i$ (0.5)
$\Rightarrow u_{C_1}(t) = U_0 \frac{C_1}{C_1+C_2} + U_0 \frac{C_2}{C_1+C_2} e^{-(\frac{1}{RC_1}+\frac{1}{RC_2})t}$

$\sum_{h)} 1$

i) mit Gleichung $u_{C_2}(t) = \frac{C_1}{C_2}(U_0 - u_{C_1}(t))$ aus c):
$u_{C_2}(t) = \frac{C_1}{C_2}(U_0 - u_{C_1}(t))$
$= \frac{C_1}{C_2} U_0 - \frac{C_1}{C_2} u_{C_1}(t)$
$= \frac{C_1}{C_2} U_0 - \frac{C_1}{C_2} [U_0 \frac{C_1}{C_1+C_2} + U_0 \frac{C_2}{C_1+C_2} e^{-(\frac{1}{RC_1}+\frac{1}{RC_2})t}]$
$= \frac{C_1}{C_2} U_0 - U_0 \frac{C_1}{C_2} \frac{C_1}{C_1+C_2} - U_0 \frac{C_1}{C_2} \frac{C_2}{C_1+C_2} e^{-(\frac{1}{RC_1}+\frac{1}{RC_2})t}$
$= U_0 (\frac{C_1}{C_2} - \frac{C_1}{C_2} \frac{C_1}{C_1+C_2}) - U_0 \frac{C_1}{C_1+C_2} e^{-(\frac{1}{RC_1}+\frac{1}{RC_2})t}$
$= U_0 (\frac{C_1(C_1+C_2)}{C_2(C_1+C_2)} - \frac{C_1^2}{C_2(C_1+C_2)}) - U_0 \frac{C_1}{C_1+C_2} e^{-(\frac{1}{RC_1}+\frac{1}{RC_2})t}$
$= U_0 (\frac{C_1^2+C_1C_2-C_1^2}{C_2(C_1+C_2)}) - U_0 \frac{C_1}{C_1+C_2} e^{-(\frac{1}{RC_1}+\frac{1}{RC_2})t}$
$= U_0 (\frac{C_1}{C_1+C_2}) - U_0 \frac{C_1}{C_1+C_2} e^{-(\frac{1}{RC_1}+\frac{1}{RC_2})t} = u_{C_2}(t)$ (0.5)

$\sum_{i)} 0.5$

j) Wegen der Maschengleichung
$u_{C_1}(t) = u_{C_2}(t) + u_R(t)$ und $\lim_{t\to\infty} i(t) = 0 \Leftrightarrow u_R(t) = 0$ (Ladungsausgleich dauert endlich lange) gibt $\lim_{t\to\infty} u_{C_1}(t) = \lim_{t\to\infty} u_{C_2}(t)$. (0.5)

mit (I) $\lim_{t\to\infty} e^{-\infty} = 0$ (0.5) folgt

$u_{C_1}(t) = U_0 \frac{C_1}{C_1+C_2} + U_0 (\frac{C_2}{C_1+C_2}) e^{-(\frac{1}{RC_1}+\frac{1}{RC_2})t}$ mit (I)

$u_{C_1}(t) = U_0 \frac{C_1}{C_1+C_2} = u_{C_2}(t)$ (0.5)

(1) $C_1 = C_2$:
$u_{C_1}(t) = U_0 \frac{1}{2} = u_{C_2}(t)$ (0.5)

(2) $C_1 << C_2$:
$u_{C_1}(t) = 0 = u_{C_2}(t)$ (0.5)

(2) $C_1 >> C_2$:
$u_{C_1}(t) = U_0 = u_{C_2}(t)$ (0.5)

$\sum_{j)} 3$

k) Maschengleichung: $u_R(t) = u_{C_1}(t) - u_{C_2}(t)$ (0.5) Ansatz

$u_R(t) = U_0\frac{C_1}{C_1+C_2} + U_0\frac{C_2}{C_1+C_2}e^{-(\frac{1}{RC_1}+\frac{1}{RC_2})t} - [U_0(\frac{C_1}{C_1+C_2}) - U_0\frac{C_1}{C_1+C_2}e^{-(\frac{1}{RC_1}+\frac{1}{RC_2})t}]$

$u_R(t) = U_0\frac{C_2}{C_1+C_2}e^{-(\frac{1}{RC_1}+\frac{1}{RC_2})t} + U_0\frac{C_1}{C_1+C_2}e^{-(\frac{1}{RC_1}+\frac{1}{RC_2})t}$

$u_R(t) = U_0(\frac{C_2+C_1}{C_1+C_2})e^{-(\frac{1}{RC_1}+\frac{1}{RC_2})t}$

$u_R(t) = U_0e^{-(\frac{1}{RC_1}+\frac{1}{RC_2})t}$ (0.5)

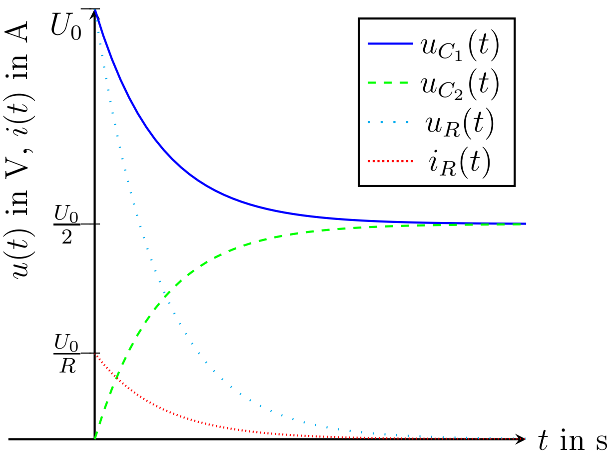
$\sum_{k)} 1$

Nicht in der Klausur gefordert: Bestimmen Sie den Strom $i(t)$.

$i(t) = \frac{1}{R}u_R(t)$

$i(t) = \frac{1}{R}U_0e^{-(\frac{1}{RC_1}+\frac{1}{RC_2})t}$

l) Achsenbeschriftung und eindeutig Graphenbeschriftung (0.5)
Startwerte und Grenzwert richtig gezeichnet (1)
Startwerte und Grenzwert auf Y-Achse angegeben (1)
(Hinweis: $i(t)$ ist nicht gefordert)



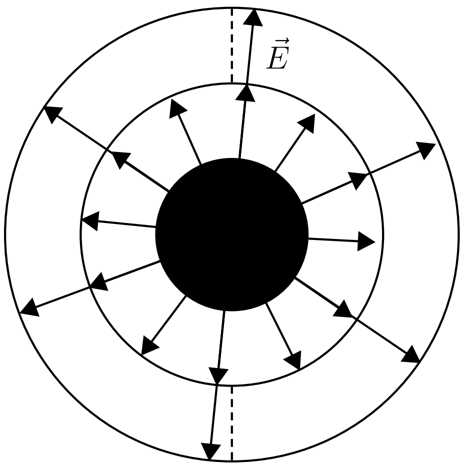
$\sum_{l)} 2.5$

$\sum_{A4} 16$

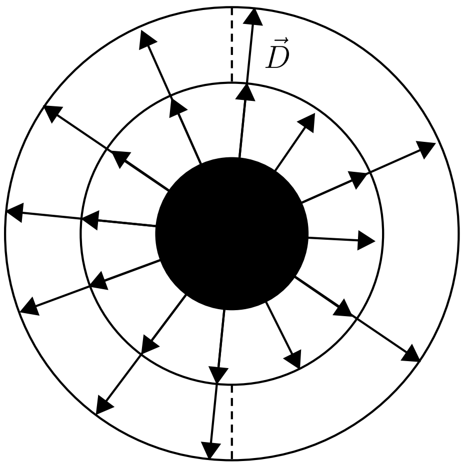
5 Elektrisches Feld

Punkte: 21

a) Die Metallelektrode bei R_2 sorgt für eine Entkopplung des elektrischen Feldes und des Feldes der elektrischen Flussdichte zwischen der inneren und äußeren Kondensatoranordnung. Dadurch ergeben sich zwei Kondensatoranordnungen, die getrennt behandelt werden können. (1)



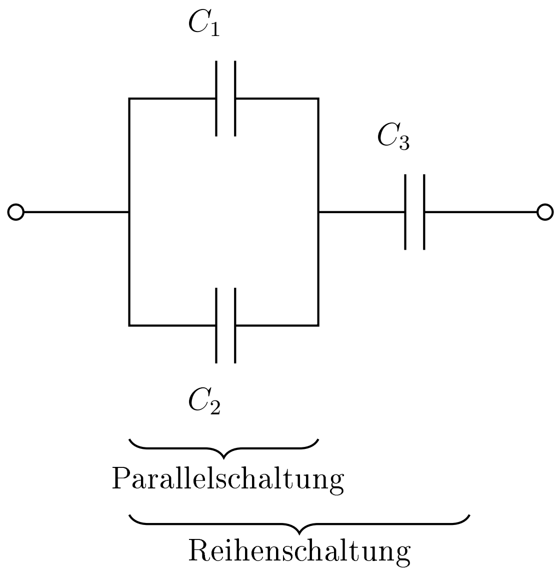
(1.5)



(1.5)

$\sum_{a)} 4$

b)



- Zeichnung (1)
- Beschriftung (1)

$\sum_{b)} 2$

c)

$$Q_z = \oiint_A \vec{D} d\vec{A} \; (1)$$

A- zylindrische Oberfläche, deren Radius r folgende
Beziehung erfüllt: $R_2 \leq r \leq R_3$ (0.5)

An Enden des Zylinders $\vec{D} \perp d\vec{A} \Rightarrow$ Nur Mantelfläche liefert Beitrag (0.5)

$$Q_z = \iint_{A-Mantel} \vec{D} d\vec{A}$$

$d\vec{A} = r d\phi dz \vec{e_r}$ (1)

Bei konstantem Radius ist $\vec{D}$ in den einzelnen Dielektrika konstant (0.5)

$$\Psi_1 = \int_{z=0}^{l} \int_{\phi=0}^{\pi} D_1 \vec{e_r} r d\phi dz \vec{e_r} \; (1)$$

$$= lrD_1\pi$$

$$\Psi_2 = \int_{z=0}^{l} \int_{\phi=\pi}^{2\pi} D_2 \vec{e_r} r d\phi dz \vec{e_r} \; (1)$$

$$= lrD_2\pi$$

$$Q_z = \Psi_1 + \Psi_2 = lr\pi \left(D_1 + D_2\right) \; (0.5)$$

$\sum_{c)} 6$

d)

E_t und D_n sind stetig (1)
E_t ist stetig, $E_n = 0$, damit folgt
$E_1 = E_2$ (1)

$\sum_{d)} 2$

e)

$$
\begin{aligned}
E_1 &= E_2 = E_{12} \\
Q_z &= lr\pi\left(D_1 + D_2\right) \\
&= lr\pi\left(\epsilon_0\epsilon_1 E_{12} + \epsilon_0\epsilon_2 E_{12}\right) \text{ (1)} \\
&= lr\pi\left(\epsilon_0 \cdot 2\epsilon_2 E_{12} + \epsilon_0\epsilon_2 E_{12}\right) \\
&= 3 \cdot lr\pi\epsilon_0\epsilon_2 E_{12} \text{ (0.5)} \\
E_{12} &= \frac{Q_z}{3 \cdot lr\pi\epsilon_0\epsilon_2} \text{ (0.5)}
\end{aligned}
$$

$\sum_{e)} 2$

f)

$$Q_z = \oiint_A \vec{D} d\vec{A}$$

A- zylindrische Oberfläche, deren Radius r folgende
Beziehung erfüllt: $R_1 \leq r \leq R_2$
An Enden des Zylinders $\vec{D} \perp d\vec{A}$ $\Rightarrow$ Nur Mantelfläche liefert Beitrag

$$Q_z = \iint_{A-Mantel} \vec{D} d\vec{A}$$

$d\vec{A} = r d\phi dz \vec{e_r}$

Bei konstantem Radius ist $\vec{D}$ konstant

$$Q_z = \int_{z=0}^{l} \int_{\phi=0}^{2\pi} D_3 \vec{e_r} r d\phi dz \vec{e_r} \text{ (1)}$$

$$= 2\pi l r D_3$$

$$E_3 = \frac{Q_z}{2\pi l r \epsilon_0 \epsilon_3} \text{ (1)}$$

$\sum_{f)} 2$

g)

$$
\begin{aligned}
U &= \int \vec{E} d\vec{s} \,(0.5) \\
d\vec{s} &= d\vec{r} \\
\vec{E} &\parallel d\vec{r} \\
U &= \int_{r=R_1}^{R_2} E_3 dr + \int_{r=R_2}^{R_3} E_{12} dr \;(0.5) \\
&= \int_{r=R_1}^{R_2} \frac{Q_z}{2\pi r l \epsilon_0 \epsilon_3} dr + \int_{r=R_2}^{R_3} \frac{Q_z}{3\pi r l \epsilon_0 \epsilon_2} dr \\
&= \frac{Q_z}{2\pi l \epsilon_0 \epsilon_3} \ln(\frac{R_2}{R_1}) + \frac{Q_z}{3\pi l \epsilon_0 \epsilon_2} \ln(\frac{R_3}{R_2}) \;(1) \\
&= \frac{Q_z}{2\pi l \epsilon_0 \epsilon_2} \ln(\frac{R_2}{R_1}) + \frac{Q_z}{3\pi l \epsilon_0 \epsilon_2} \ln(\frac{R_3}{R_2}) \\
&= \frac{3Q_z}{6\pi l \epsilon_0 \epsilon_2} \ln(\frac{R_2}{R_1}) + \frac{2Q_z}{6\pi l \epsilon_0 \epsilon_2} \ln(\frac{R_3}{R_2}) \\
&= \frac{Q_z}{6\pi l \epsilon_0 \epsilon_2} \left(3\ln(\frac{R_2}{R_1}) + 2\ln(\frac{R_3}{R_2}) \right) \;(1)
\end{aligned}
$$

$\sum_{g)} 3$

$\sum_{A5} 21$