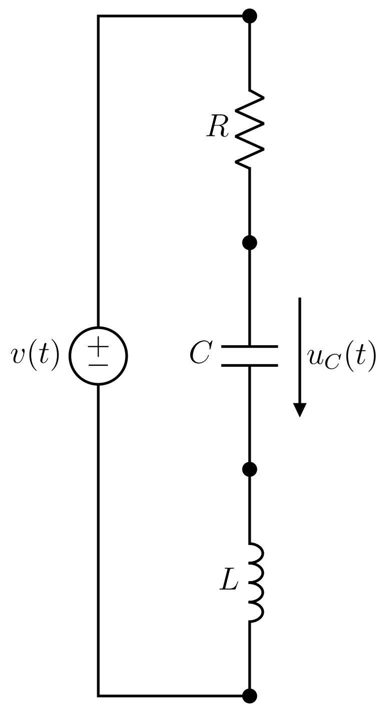
Nachtrag zur Hausaufgabe 1: Harmonisch eingeschwungener Zustand und Resonanz

Das untenstehende Netzwerkmodell besteht aus einem Widerstand $R > 0$, einer Induktivität $C > 0$, einer Kapazität $C > 0$ und einer idealen festen Spannungsquelle $v(t) = V_0 \cos(\omega_1 t)$. Das Netzwerk befinde sich im harmonisch eingeschwungenen Zustand.

(Das Netzwerk wird mit einer cos-Funktion fester Frequenz ω_1 erregt. Für $t \to \infty$ stellt sich ein eingeschwungener Zustand ein und alle Ströme und Spannungen des Netzwerks schwingen mit der gleichen Frequenz ω_1.)



Frequenzgang (Aufstellen mit Hilfe der Spannungsteilerregel):

$$H(j\omega) = \frac{U_C}{V} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R + j\omega L} = \frac{1}{(j\omega)^2 LC + j\omega CR + 1}$$

Die Polstellen des Frequenzgangs sind bei Teilerfremdheit von Zähler und Nenner die Nullstellen des Nenners.
Die Polstellen des Frequenzgangs $H(j\omega)$ sind:

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

Damit bei einem Netzwerk eine Resonanz auftreten kann, muss das Netzwerk auch ohne Erregung schwingfähig sein (homogene Lösung der Differentialgleichung). Dafür muss der Frequenzgang ein komplex-konjugiertes Polpaar haben.
Damit bei diesem Netzwerk eine Resonanz auftreten kann, muss für R bei vorgegebenem L und C gelten: $R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.
Für $R \geq 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ gibt es keine Frequenz ω_1, bei der eine Resonanz auftritt.

Im harmonisch eingeschwungenen Zustand gilt für den Phasor $U_C = H(j\omega)V$ in der komplexen Wechselstromrechnung die folgende Darstellung im Zeitbereich:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \mathrm{Re}\left\{U_C\,\mathrm{e}^{j\omega_1 t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{H(j\omega_1)V\,\mathrm{e}^{j\omega_1 t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\left|H(j\omega_1)\right|\mathrm{e}^{j\varphi}V_0\,\mathrm{e}^{j\omega_1 t}\right\} \\ &= \left|H(j\omega_1)\right|V_0\cos\left(\omega_1 t + \varphi\right) \end{aligned}$$

mit

$$\left|H(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\omega^2 LC\right)^2 + \omega^2 C^2 R^2}}\,, \qquad \varphi = \begin{cases} -\arctan\dfrac{\omega_1 CR}{1-\omega_1^2 LC}\,, & 1 > \omega_1^2 LC \\ -\arctan\dfrac{\omega_1 CR}{1-\omega_1^2 LC} - \pi\,, & 1 < \omega_1^2 LC \\ -\dfrac{\pi}{2}\,, & 1 = \omega_1^2 LC \end{cases}$$

Die Fallunterscheidung für φ ist notwendig, um eine eindeutige und korrekte Lösung für beliebige Werte von L, C und ω_1 zu erhalten.

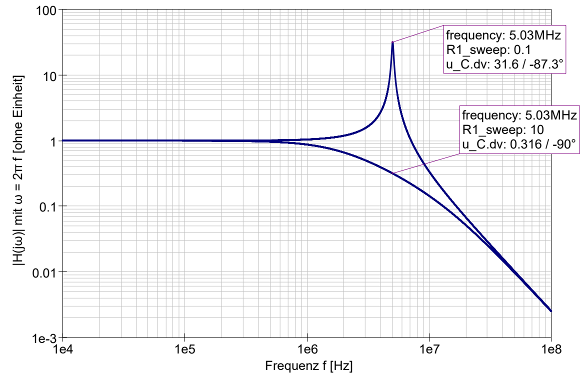
Bei einer Änderung der Frequenz ω_1 ändert sich an der Lösung für $u_C(t)$ in symbolischer Form nichts.

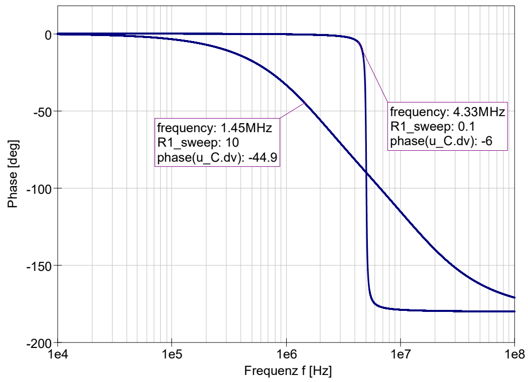
Die Resonanzfrequenz ist eine Extremstelle des frequenzabhängigen Betrags des Frequenzgangs $H(j\omega)$.
Um die Resonanzfrequenz ω_0 zu ermitteln, sind die Nullstellen der ersten Ableitung von $\left|H(j\omega)\right|$ zu bestimmen.

$$\frac{\mathrm{d}\left|H(j\omega)\right|}{\mathrm{d}\,\omega} = 0 \;\Rightarrow\; \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$$

Zur Verdeutlichung werden die Ergebnisse einer Simulation mit qucs mit $L = 100$ nH, $C = 10$ nF, $V_0 = 1$ V und $R = 0.1\,\Omega$ ($R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$), $R = 10\,\Omega$ ($R \geq 2\sqrt{\frac{L}{C}}$) gezeigt.

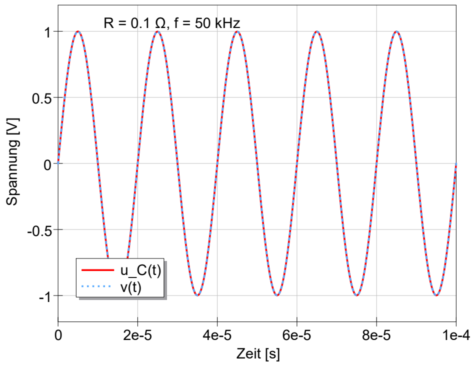
a) Ergebnisse der Frequenzbereichssimulation für $R = 0.1\Omega$ und $R = 10\Omega$; Darstellung des Betrags und der Phase in einem Bodediagramm:

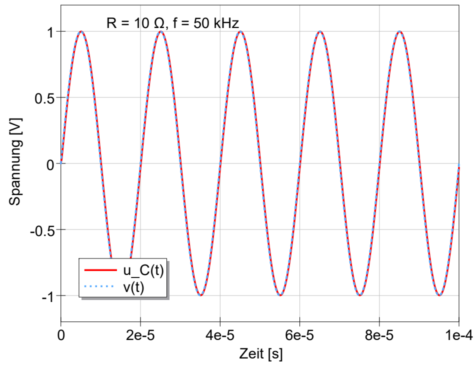


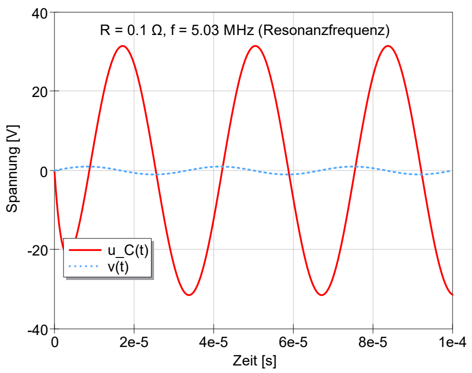


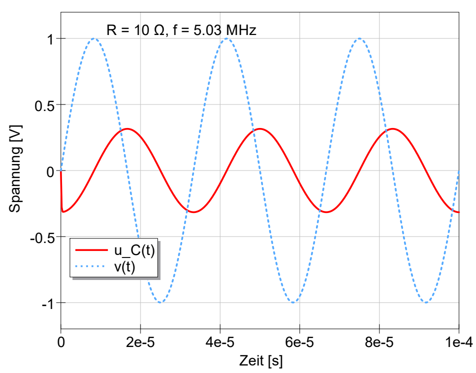
Es ist gut zu erkennen, dass es für $R = 0,1\ \Omega$ zu einer Resonanzspitze im Betragsverlauf kommt. Dagegen tritt für $R = 10\ \Omega$ keine Resonanz auf, da das Netzwerk überdämpft ist.

b) Simulationsergebnisse für $u_C(t)$ mit $R = 0.1\ \Omega$ und $R = 10\ \Omega$ bei den Frequenzen $f = 50$ kHz und $f = 5.03$ MHz.









Für $R = 0,1\,\Omega$ zeigt sich die Resonanzspitze im Zeitbereich als starke Erhöhung der Amplitude bei der Resonanzfrequenz.