Technische Universität Braunschweig

7. Übungsblatt

Upload: 13.06.2023.
Deadline: 20.06.2023, 10:00 Uhr (im Abgabeordner bei stud.ip).

Aufgabe 7.1 (2 + 4)

Sei die Gamma-Funktion $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+$ definiert durch

$$\forall\, x > 0 : \quad \Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t. \tag{1}$$

Beweisen Sie:

(a) Die Gamma-Funktion ist wohldefiniert, d.h. der Integrand in (1) ist absolut Riemann-integrabel für jedes $x > 0$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad .$$

Aufgabe 7.2 (3 + 3)

(a) Es sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}_0^+$ eine monoton fallende und nichtnegative Funktion. Beweisen Sie, dass f genau dann absolut Riemann-integrabel ist, wenn die Reihe

$$(s_m)_{m=1}^\infty := \left(\sum_{k=1}^m f(k) \right)_{m=1}^\infty$$

konvergiert.

(b) Nutzen Sie Aufgabenteil (a) um zu zeigen:

$$\left\{ (s_n)_{n=1}^\infty = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \right)_{n=1}^\infty \text{ konvergiert} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \{\alpha > 1\}\,.$$

Aufgabe 7.3 (3 + 3)

Gegeben sei die Abbildung

$$\|\cdot\|_1 : \mathcal{R}[0,1] \to \mathbb{R}_0^+, \quad f \mapsto \int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x.$$

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) $\|\cdot\|_1$ definiert eine Norm auf $\mathcal{R}[0,1]$.

(b) $\|\cdot\|_1$ definiert eine Norm auf $C([0,1])$.

Aufgabe 7.4 (1,5 + 2,5 + 2)

(a) Bestimmen Sie alle reelle Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$-x_1 - 3x_2 + 0 = 3.$$

(b) Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Berechnen Sie

$$(i)\ \vec{v} + 3 \cdot \vec{w},\ (ii)\ A + B,\ (iii)\ A \cdot B,\ (iv)\ B \cdot A,\ (v)\ A \cdot \vec{v}.$$

(c) Seien A und B die Matrizen aus (b). Bestimmen Sie jeweils die Determinanten von A und B und entscheiden Sie, welche dieser beiden Matrizen invertierbar sind. Berechnen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix.