Institut für Nachrichtentechnik

Grundlagen der Informationstechnik - Nachrichtentechnik

Vorlesung: Eduard A. Jorswieck

Übung: Dr. Bile Peng

Wintersemester 2023-2024, 23. November 2023

Übertragungskanäle I

Kapitel 6 in M. Bossert 'Einführung in die Nachrichtentechnik'

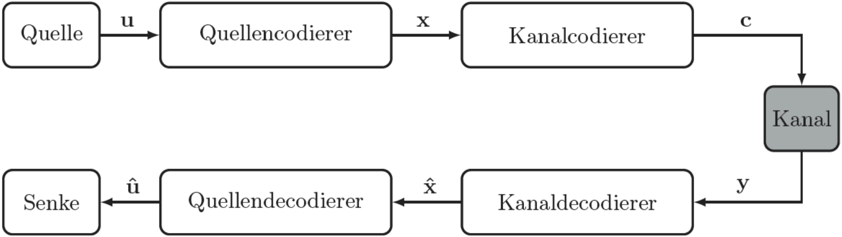

Abbildung 1: Der Kanal im Modell der Informationstheorie

Übertragungskanäle II

- Wir kümmern uns nicht um die Signalverarbeitung (Modulation und Demodulation), sondern konzentrieren uns auf die Kanalcodierung und -decodierung.
- Der Kanal wird – ebenso wie die Quelle – statistisch beschrieben:

$$p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{c}) = p(y_1, \ldots, y_n | c_1, \ldots, c_n)$$

durch die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass am Kanalausgang eine Sequenz $\boldsymbol{y}$ der Länge n beobachtet wird, wenn am Kanaleingang das Code $\boldsymbol{c}$ der Länge n anliegt.

Übertragungskanäle III

Definition: Gedächtnisloser diskreter Kanal

(discrete memoryless channel - DMC)
Bei einem gedächtnislosen Kanal gilt, dass die Ausgabe zum Zeitpunkt i nur von der Eingabe zum gleichen Zeitpunkt i abhängt, d.h., $p(y_i|c_1, ..., c_n) = p(y_i|c_i)$. Damit vereinfacht sich die bedingte Wahrscheinlichkeit für die gesamte Sequenz $\boldsymbol{y}$ am Ausgang zu

$$p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{c}) = \prod_{i=0}^{n-1} p(y_i|c_i).$$

Übertragungskanäle IV

Symmetrischer Binärkanal

(binary symmetric channel - BSC)
Der BSC hat binäre Eingangs- und Ausgangsalphabete und eine symmetrische bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung entsprechend der Abbildung.

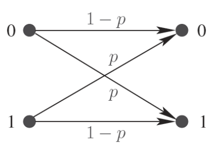

Abbildung 2: Der symmetrische Binärkanal

Übertragungskanäle V

Binärer Auslöschungskanal

(binary erasure channel - BEC)

Der BEC hat einen binären Eingang, aber einen ternären Ausgang. Am Ausgang wird entweder das korrekte Eingangsbit beobachtet oder es wird gelöscht (Symbol Δ).

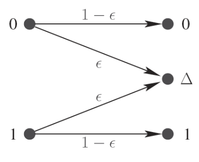

Abbildung 3: Der binäre Auslöschungskanal

Übertragungskanäle VI

Gauß-Kanal

(additive white Gaussian noise - AWGN)
Am Empfänger tritt in den Bauteilen thermisches Rauschen auf, welches Gaußverteilt modelliert wird. Das Signalmodell ist

$$y_i = x_i + n_i,$$

mit Gaußverteilter mittelwertfreier und statistisch unabhängiger Zufallsvariable n_i. Die Varianz von n_i entspricht der Rauschleistung σ^2. Die bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung ist

$$f(y_i|x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(y_i - x_i)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Übertragungskanäle VII

Rayleigh Kanal

(Rayleigh fading)
Rayleigh Kanäle sind ein einfaches Modell für Schwundkanäle (fading channels). Der Kanalkoeffizient h_i wird dabei ebenfalls Gaußverteilt modelliert.

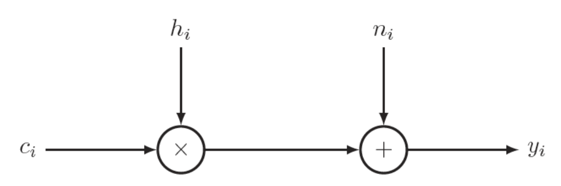

Abbildung 4: Der Rayleighkanal

Wechselseitige Information - Transinformation I

Definition: Wechselseitige Information zweier Ereignisse

Seien A und B zwei Ereignisse zweier Zufallsexperimente mit den Wahrscheinlichkeiten $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$, so ist die wechselseitige Information $I(A;B)$ definiert als

$$I(A;B) = \log_2 \frac{P(A|B)}{P(A)} \qquad \text{in bit.}$$

Wechselseitige Information - Transinformation II

- Die wechselseitige Information ist symmetrisch, d.h., $I(A;B) = I(B;A)$.

Definition: Eigeninformation eines Ereignisses

ist A ein Ereignis eines Zufallsexperiments mit der Wahrscheinlichkeit $P(A) \neq 0$ dann ist die Eigeninformation dieses Ereignisses definiert durch

$$I(A) = I(A;A) = -\log_2 P(A) \qquad \text{in bit.}$$

Wechselseitige Information - Transinformation III

Definition: Wechselseitige Information

Transinformation (mutual information)
Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit den Wahrscheinlichkeitsdichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$ dann ist die wechselseitige Information definiert als

$$I(X;Y) = \sum_x \sum_y f_{XY}(x,y) \log_2 \frac{f_{X|Y}(x|y)}{f_X(x)}.$$

- Die Transinformation ist symmetrisch $I(X;Y) = I(Y;X)$ und kann durch die Unsicherheit ausgedrückt werden:

$$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y).$$

Wechselseitige Information - Transinformation IV

Definition: Bedingte Unsicherheit

Die verbleibende Unsicherheit der Zufallsvariablen X nach Kenntnis der Zufallsvariablen Y ist definiert durch

$$H(X|Y) = -\sum_{y} f_Y(y) \sum_{x} f_{X|Y}(x|y) \log_2 f_{X|Y}(x|y).$$

Satz: Wechselseitige Unsicherheit und Entropie

Die wechselseitige Information ist

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X).$$

Wechselseitige Information - Transinformation V

Satz: Reduzierung der Entropie durch Bedingung

Es gilt: $H(X|Y) \leqslant H(X)$.

Satz: Schranken der wechselseitigen Information

Es gilt: $0 \leqslant I(X;Y) \leqslant \min\{H(X), H(Y)\}$.

Wechselseitige Information - Transinformation VI

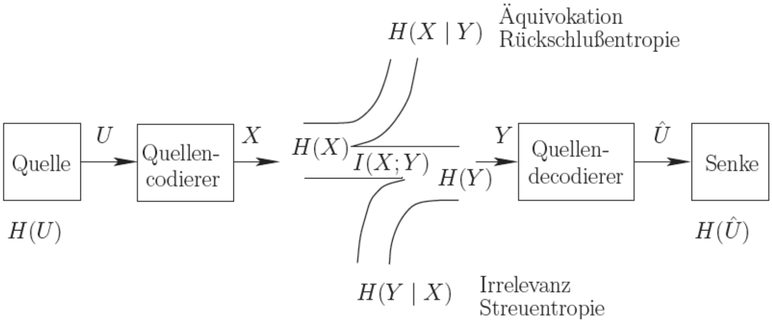

Abbildung 5: Unsicherheits- und Informationsfluss

Kanalkapazität

Für einen diskreten gedächtnislosen Kanal (DMC) ist die Kanalkapazität die maximal erreichbare wechselseitige Information

$$C = \max_{f_X(x)} I(X;Y) = \max_{f_X(x)} \{H(X) - H(X|Y)\} = \max_{f_X(x)} \{H(Y) - H(Y|X)\}.$$