Technische Universität Braunschweig

8. Übungsblatt

Upload: 20.06.2023.
Deadline: 27.06.2023, 10:00 Uhr (im Abgabeordner bei stud.ip).

Aufgabe 8.1 (4 + 2)

(a) Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \in (\mathbb{R}^3)^\mathbb{N}$ und $(c_n)_{n=1}^\infty, (d_n)_{n=1}^\infty \in (\mathbb{C}^2)^\mathbb{N}$ auf Konvergenz in $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_{eukl})$ bzw. $(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_{unit})$:

$$(i)\ a_n = \begin{pmatrix} e^{-n} \\ \sqrt[n]{5} \\ \frac{n^2}{5n^2-2n} \end{pmatrix}, \quad (ii)\ b_n = \begin{pmatrix} \sqrt{n} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \\ 3 \end{pmatrix}, \quad (iii)\ c_n = \begin{pmatrix} \frac{\sin(n\pi i)}{n} \\ \frac{2i+3n}{n} \end{pmatrix}, \quad (iv)\ d_n = \begin{pmatrix} \frac{e^{n\pi i}}{n} \\ \frac{(3ni)^2}{4n^2+5} \end{pmatrix}.$$

(b) Sei $(f_n)_{n=1}^\infty \in (C([0,1]))^\mathbb{N}$ gegeben durch

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n.$$

Desweiteren seien $\|g\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |g(x)|$ und

$$\|g\|_1 := \int_0^1 |g(t)| \mathrm{d}t,$$

zwei Normen auf $C([0,1])$. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_1$ ist, aber nicht bezüglich $\|\cdot\|_\infty$.

Aufgabe 8.2 (3 + 3)

(a) Zeigen Sie, dass die $\|\cdot\|_1$-Norm äquivalent ist zur $\|\cdot\|_\infty$-Norm auf $\mathbb{C}^d$, wobei $d \in \mathbb{N}$.

(b) Seien X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum sowie $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ zwei äquivalente Normen auf X. Beweisen Sie:

$$\left\{(x_n)_{n=1}^\infty \in X^\mathbb{N} \text{ konvergiert in } (X, \|\cdot\|_a)\right\} \Leftrightarrow \left\{(x_n)_{n=1}^\infty \in X^\mathbb{N} \text{ konvergiert in } (X, \|\cdot\|_b)\right\}.$$

Aufgabe 8.3 (4 + 2)

Geben Sie die Gradienten, bzw. die Jacobi-Matrizen von f_1, f_2, f_3 und f_4 an.

$$(i)\ f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto 3x^2y + 2yz^3 - 4xz, \quad (ii)\ f_2 : \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R},\ \vec{x} \mapsto \frac{1}{\|\vec{x}\|_{eukl}},$$

$$(iii) f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 6xy - 4z \\ 3x^2 + 2z^3 \\ 6yz^2 - 4x \end{pmatrix}, \quad f_4 : \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}^3,\ \vec{x} \mapsto -\frac{\vec{x}}{(\|x\|_{eukl})^3}.$$

Ist es Zufall, dass die Jacobi-Matrizen von f_3 und f_4 symmetrisch sind? Begründen Sie.

Aufgabe 8.4 (3 + 2 + 1)

(a) Untersuchen Sie die Mengen $A, B \subseteq (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_{eukl})$ auf Offenheit, Abgeschlossenheit und Kompaktheit:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{N}^3 \middle| |x_i| < 10, \forall i \in \{1,2,3\} \right\}, \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \neq 0 \right\}.$$

(b) Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum und $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ die reellen Zahlen mit dem Betrag als Norm. Zeigen Sie, dass die Norm

$$\|\cdot\|_X : X \to \mathbb{R}, \vec{x} \mapsto \|\vec{x}\|_X$$

als Abbildung selbst stetig ist.

(c) Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_{eukl}), (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{eukl})$ zwei normierte Räume und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ ein stetiger linearer Operator. Zeigen Sie, dass es ein $\vec{z} \in \mathbb{R}^m$ mit $\|\vec{z}\|_{eukl} = 1$ gibt so, dass

$$\|A\vec{z}\|_{eukl} = \sup_{\|\vec{x}\|_{eukl}=1} \|A\vec{x}\|_{eukl} =: \|A\|_{op}.$$

Hinweis: Nutzen Sie Satz IX.6.