Institut für Nachrichtentechnik

Prüfung

Digitale Signalverarbeitung

11.03.2014

Name : ____________________

Vorname : ____________________

Matrikelnummer : ____________________

Studiengang : ____________________

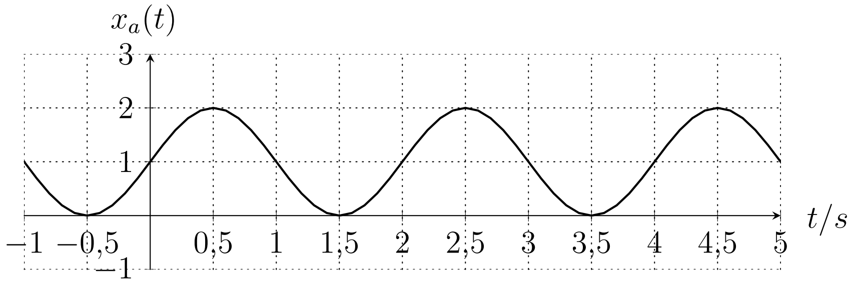
Klausurnummer : ____________________

Aufgabe	Punkte	
1	/11	
2	/10	
3	/15	
4	/14	
Σ	/50	
Note		

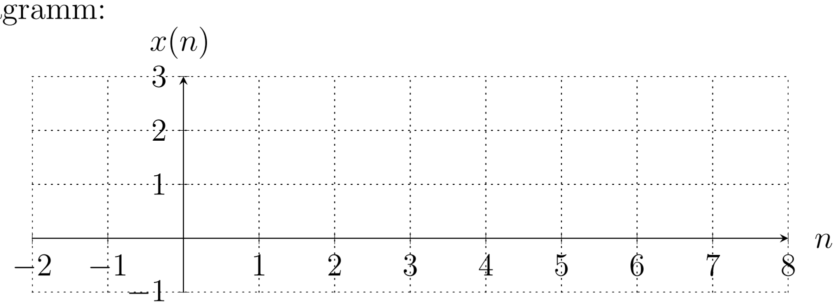
Aufgabe 1: Zeitdiskrete Faltung

(11 Punkte)

Gegeben sei das analoge zeitkontinuierliche Signal $x_a(t) = 1 + \sin(t \cdot \pi)$:



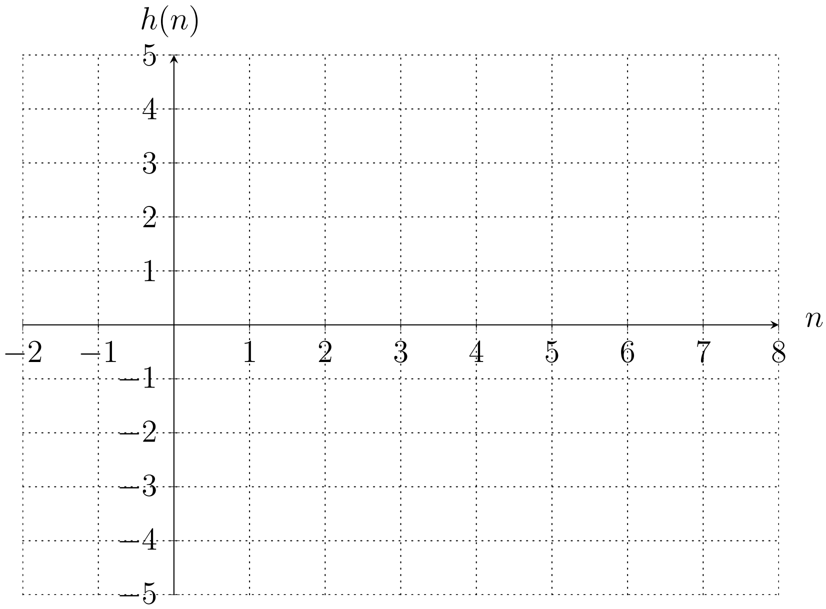
a) Tasten Sie $x_a(t)$ mit einer Abtastfrequenz $f_s = 2\,\mathrm{Hz}$ zu den Zeitpunkten $t = n/f_s$ im Zeitraum $0 \leq t \leq 2\,\mathrm{s}$ ab, und zeichnen Sie das resultierende zeitdiskrete Signal $x(n)$ in folgendes Diagramm:



Die Impulsantwort $h(n)$ eines zeitdiskreten Filters sei gegeben durch:

$$h(n) = 2\epsilon(n+1) - 2\delta(n+1) - \epsilon(n) - 2\epsilon(n-1) - \delta(n-1) + 3\delta(n-2) + \epsilon(n-4)$$

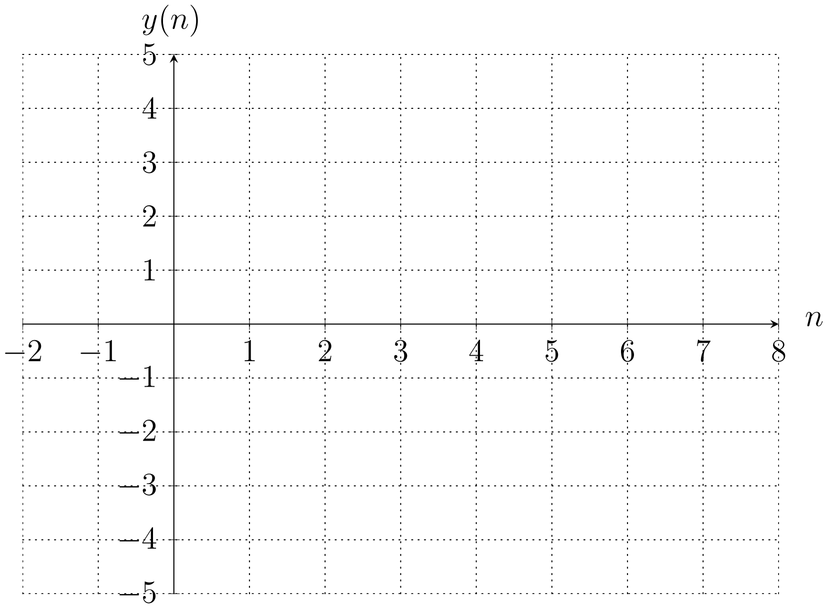
b) Zeichnen Sie $h(n)$ in folgendes Diagramm:



(Fortsetzung der Aufgabe auf der nächsten Seite)

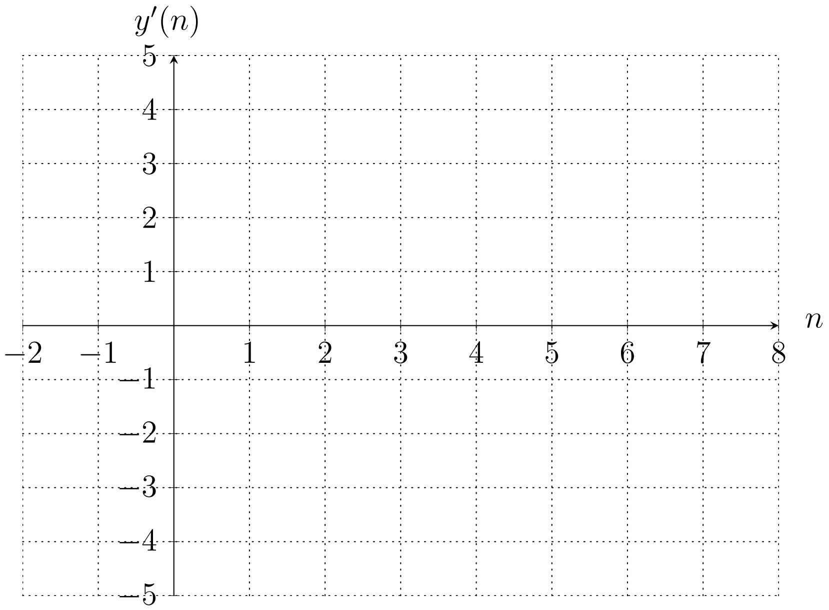
c) Ist das Filter $h(n)$ linearphasig? Wenn ja, welcher Typ? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Das Signal $x(n)$ diene nun als Eingangssignal des Filters $h(n)$. Zeichnen Sie das Ausgangssignal $y(n) = h(n) * x(n)$ in folgendes Diagramm:



e) Welchen der folgenden Filtertypen können Sie sicher ausschließen: Tiefpass, Hochpass, Bandsperre oder Bandpass? (Genau eine Antwort ist richtig!)

f) Nun soll das Signal $y'(n)$ mit Hilfe der schnellen Faltung von $h(n)$ mit $x(n)$ berechnet werden. Zeichnen Sie $y'(n)$ für $n = 0,1,...,4$ unter Verwendung einer DFT-Länge von $K = 5$ in folgendes Diagramm:

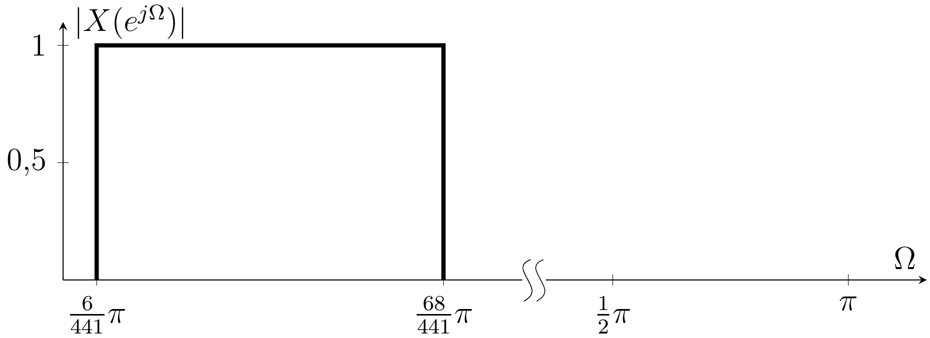


g) Geben Sie das minimal zu wählende K an, so dass gilt $y'(n) = y(n)$.

Aufgabe 2: Abtastratenwandlung

(10 Punkte)

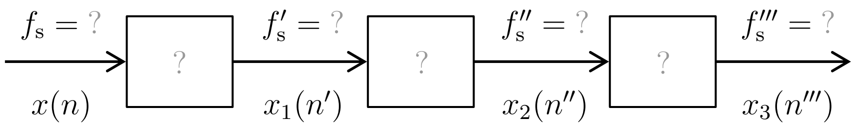
Sie erhalten eine Audio-CD, von der Sie wissen, dass sie einen Track mit der Abtastrate $f_s = 44{,}1\,\text{kHz}$ enthält. Da es sich um den Mitschnitt eines Telefongesprächs handelt, liefert eine Frequenzanalyse dieses Signals $x(n)$ folgendes bandbegrenztes Betragsspektrum $|X(e^{j\Omega})|$:



Das zugrundeliegende Signal $x(n)$ soll nun von Ihnen so aufbereitet werden, dass es mit Ihrem digitalen Anrufbeantworter kompatibel ist und als Ansagetext (als Signal $x_3(n''')$) mit der Abtastrate $f_s''' = 8\,\text{kHz}$ genutzt werden kann.

a) Bestimmen Sie das benötigte Abtastratenverhältnis R als gebrochen rationale Zahl.

b) Vervollständigen Sie das nachfolgende Blockschaltbild, um die gewünschte Abtastratenwandlung zu erreichen. Achten Sie auch auf die Eintragung aller fehlenden Zahlenwerte!

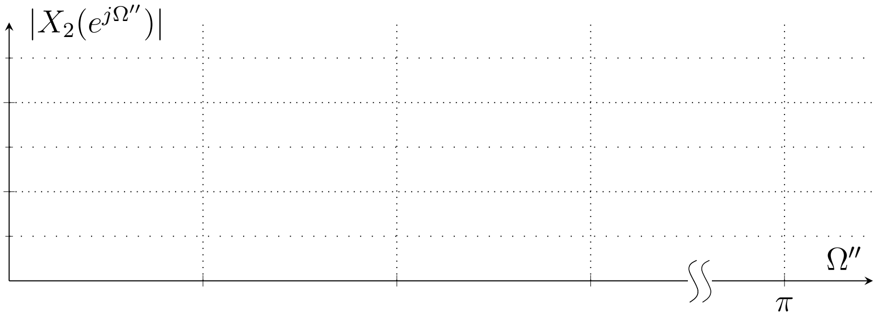


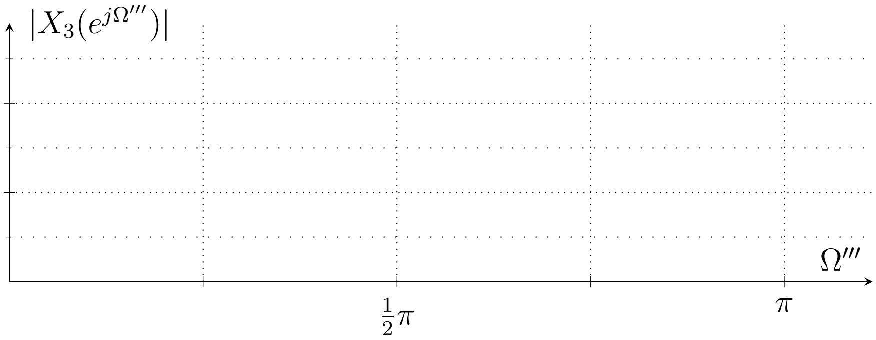
$$L_{\text{up}} = \ ? \ , \quad L_{\text{down}} = \ ? \ , \quad \Omega_{\text{c}} = \ ?$$

Die Grenzfrequenz Ω_c gehöre zu einem idealen Tiefpassfilter $H(z)$.

c) Skizzieren Sie nun die Amplitudenspektren $|X_2(e^{j\Omega''})|$ und $|X_3(e^{j\Omega'''})|$ jeweils für den Frequenzbereich von 0 bis π in die auf der nächsten Seite dargestellten Diagramme. Ergänzen Sie die Beschriftung der beiden Achsen in geeigneter Weise!

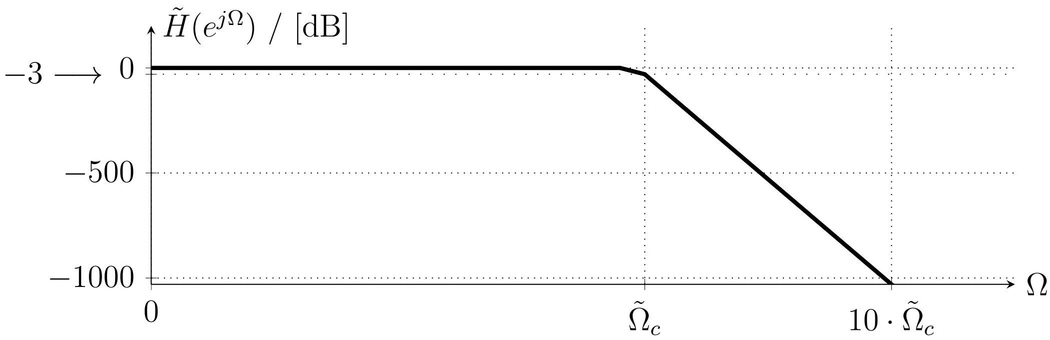
(Fortsetzung der Aufgabe auf der nächsten Seite)





d) Bestimmen Sie nun die untere ($f_{c,\ell}$) und obere Grenzfrequenz ($f_{c,u}$) von $|X_3(e^{j\Omega'''})|$ in Hertz. Stimmt dieses Ergebnis mit Ihrer Erwartung überein?

e) Sie wollen nun das ideale Filter aus Aufgabenteil b) mit einem realen Filter $\tilde{H}(e^{j\Omega})$ gemäß der unteren Abbildung mit einer Flankensteilheit von -1000 dB pro Dekade ersetzen. Setzen Sie die 3 dB-Grenzfrequenz $\tilde{\Omega}_c$ dieses Filters auf $\frac{34}{40}\pi$.



Welche Sperrdämpfung $\tilde{d}$ weist dieses Filter dann bei $\Omega = \pi$ auf?

Aufgabe 3: Filterentwurf

(15 Punkte)

Für eine Abtastratenwandlung (ähnlich zu Aufgabe 2) sollen Sie nun ein Tiefpassfilter entwerfen. Es soll gelten:

$$R_p = 1\,\mathrm{dB}, \quad \Omega_p = 0{,}85\pi$$
$$d_{st} = 90\,\mathrm{dB}, \quad \Omega_{st} = 0{,}9\pi$$

Ihr Auftraggeber lässt dabei eine maximale Verzögerung des Signals durch das Filter von 100 Abtastwerten zu. Zusätzlich sollen Phasenverzerrungen für das Signal möglichst klein gehalten werden. Da Ihnen keine Vorgaben zur Art des Filters gemacht sind, versuchen Sie Ihr Glück mit einem FIR-Filterentwurf. Sie gehen nach der modifizierten Fourier-Approximation mit dem Kaiserfenster vor.

a) Wählen Sie den Fensterparameter β so, dass die Spezifikation eingehalten werden kann. Runden Sie β zur nächsten natürlichen Zahl auf!

b) Welchem bekannten Fenstertypen (Rechteck, Hamming, Hann, Blackman) ähnelt das gewählte Kaiserfenster?

c) Schätzen Sie die benötigte Filterordnung N_b ab. Erläutern Sie, ob damit die Anforderung bezüglich der Verzögerung einzuhalten ist. Schätzen Sie auch die Breite des Hauptmaximums der Fensterfunktion ab.

d) Bestimmen Sie nun die Sperrdämpfung d'_{st}, die maximal mit der erlaubten Verzögerung von 100 Abtastwerten erreichbar wäre.

e) Welches β würde sich für d'_{st} nun ergeben?

Ihr Auftraggeber ist unzufrieden, dass Sie die Filterspezifikation bzw. seine Anforderungen nicht einhalten. Entwerfen Sie daher ein rekursives Filter nach dem Butterworth-Entwurf.

f) Schätzen Sie die benötigte Filterordnung N ab (Tipp: Stellen Sie die Gleichungen für den Durchlassbereich und den Sperrbereich gegenüber!). Bestimmen Sie nun die Grenzfrequenz ω_c in Abhängigkeit von der Abtastfrequenz.

g) Welche Sperrdämpfung (in dB) wird bei ω_c erzielt?

Diskutieren Sie nun die Stärken und Schwächen Ihrer drei Entwürfe (2x Kaiser, 1x Butterworth).

h) Welche Anforderungen lassen sich einhalten und um welchen Preis? Versuchen Sie Ihren besten Entwurf zu ermitteln und zu bewerten.

Aufgabe 4: Analyse eine kausalen LTI-Systems

(14 Punkte)

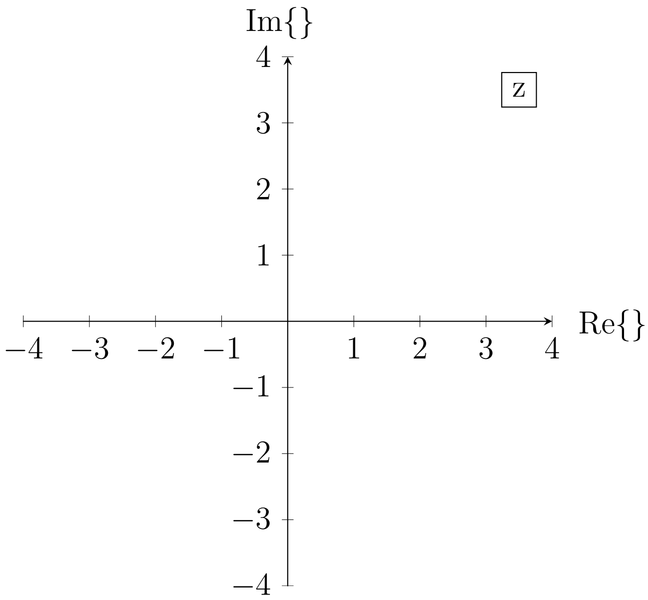
Gegeben sei ein kausales LTI-System mit der Übertragungsfunktion

$$H(z) = (1 - 0.5z^{-1})(1 - 4z^{-2})$$

a) Geben Sie die Differenzengleichung an, durch die das System beschrieben werden kann.

b) Bestimmen Sie die Impulsantwort $h(n)$ des Systems.

c) Tragen Sie alle Pole und Nullstellen des Systems in das nachfolgende Diagramm ein und schraffieren Sie das Konvergenzgebiet. Geben Sie die Lage der Pole und Nullstellen, sowie das Konvergenzgebiet exakt an.



d) Führen Sie eine Zerlegung des Systems in ein minimalphasiges System $H_{\text{min}}(z)$ und ein Allpasssystem $H_{\text{AP}}(z)$ durch, so dass $H(z) = H_{\text{min}}(z) \cdot H_{\text{AP}}(z)$ und $|H_{\text{AP}}(z = e^{j\Omega})| = 1$ gilt. Geben Sie $H_{\text{min}}(z)$ und $H_{\text{AP}}(z)$ an!

e) Zeichnen Sie das Blockschaltbild von $H_{\text{min}}(z)$ in Direktform I und das Blockschaltbild von $H_{\text{AP}}(z)$ in Direktform II.

f) Das Eingangssignal $x(n)$ des minimalphasigen Systems $H_{\text{min}}(z)$ sei

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie das Ausgangssignal $h_{\text{min}}(n)$ des minimalphasigen Systems. Vergleichen Sie $h_{\text{min}}(n)$ mit $h(n)$ aus Aufgabenteil b). Welche Eigenschaft eines minimalphasigen Systems wird ersichtlich?