

# Modelos y Simulación para Videojuegos II PROVISORIO

Unidad 2

Dinámica

Ing. Mariano Banquero

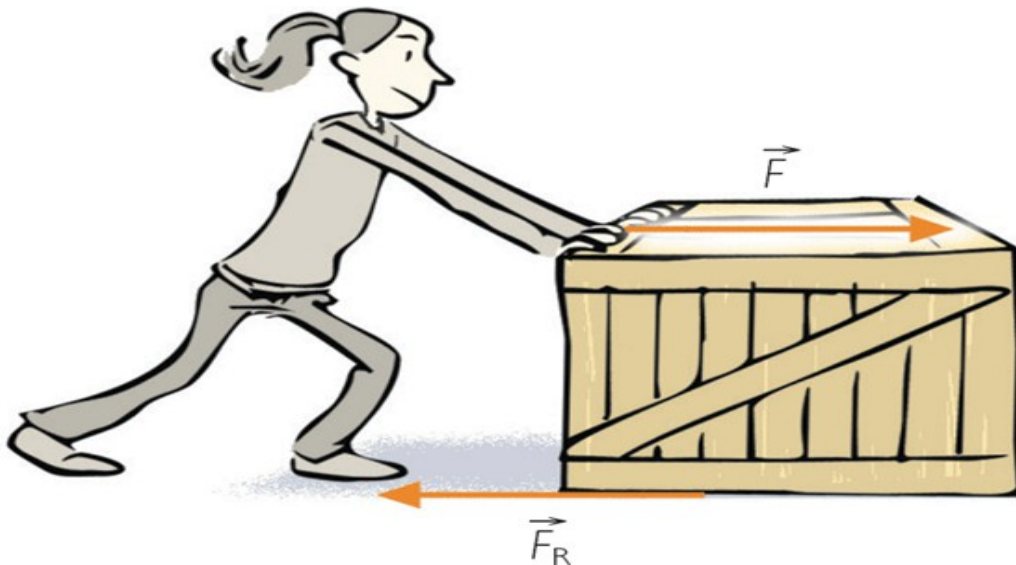
---

## Contenido

<b>Dinámica.....</b>	<b>3</b>
Masa.....	3
Centro de Masa.....	5
Fuerzas.....	6
Composición de Fuerzas. Resultantes.....	7
Leyes de Newton.....	9
1 - Principio de Inercia.....	9
2 - Segunda ley del movimiento. $F = ma$ .....	10
3 - Principio de acción y reacción:.....	12
Diagrama de Cuerpo Libre.....	13
Sistemas en equilibrio.....	13
Dinámica de los movimientos rectilíneos.....	14
Tipos de Fuerza.....	18
Fuerzas de rozamiento.....	18
Rozamiento estático y dinámico.....	19
Viscosidad.....	22
Fuerzas Elásticas.....	24
Fuerza Gravitatoria.....	25

## Dinámica

La dinámica es la rama de la física que estudia el movimiento de los cuerpos sometidos a la acción de las fuerzas. En el capítulo anterior vimos que la cinemática estudiaba el movimiento de los cuerpos, pero sin importar las causas que lo provocan, es decir las fuerzas. Por el contrario la dinámica se centra en el estudio de las fuerzas como las causas que provocan el movimiento.

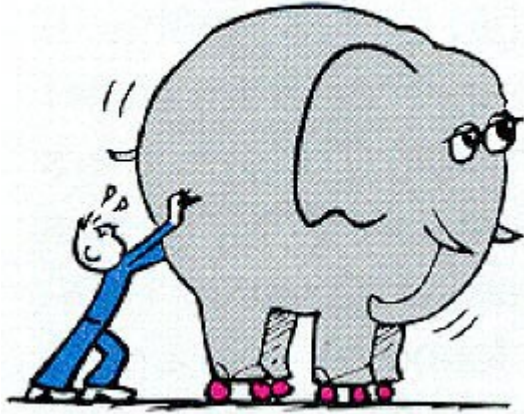


La dinámica estudia la acción de las fuerzas sobre los sistemas físicos, en especial en relación al movimiento.

## Masa

La masa es una medida de la cantidad de materia que posee un cuerpo. La unidad utilizada para medir la masa en el sistema internacional de unidades es el kilogramo (Kg.). Es una unidad escalar (es decir un número) y no debe confundirse con el peso, que es una magnitud vectorial que representa una fuerza (la fuerza de gravedad que actúa sobre un cuerpo cerca de la superficie del planeta).

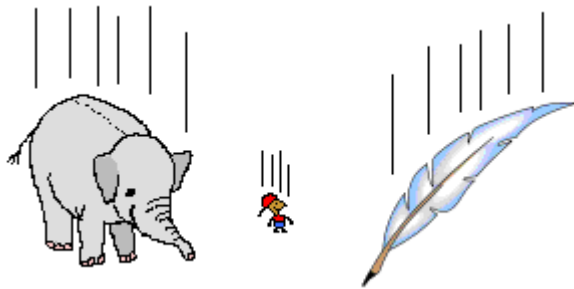
En el contexto de simulaciones para video juegos vamos a usar el concepto de masa inercial. La masa inercial es una medida de la resistencia de los objetos a ser desplazados. Los objetos más masivos son más difíciles de mover que los menos masivos.



Los objetos con mas masa son más difíciles de mover que los menos masivos.

En física también existe el concepto de masa gravitacional que se desprende la ley de gravitación universal de Newton. Esta ley dice que 2 objetos se atraen mutuamente con una fuerza que es proporcional a sus masas. Esta es la base por la cual la masa de los cuerpos se puede medir con la balanza, y porque intuitivamente solemos confundir la masa con el peso.

Los experimentos parecen mostrar que la masa gravitacional y la inercial coinciden (al menos con el grado de precisión al que podemos llegar actualmente), aunque no queda bien claro la razón. Estos experimentos son esencialmente pruebas del fenómeno ya observado por Galileo de que los objetos caen con una aceleración independiente de sus masas (en ausencia de factores externos como el rozamiento). Es decir todos los cuerpos caen con la misma aceleración.



En ausencia de rozamiento todos los cuerpos caen con la misma aceleración.

La masa puede ser computada a partir del volumen y la densidad de materia, utilizando esta ecuación :

$$m = v * d$$

La masa además tiene propiedad aditiva. Es decir que la masa total de un cuerpo se puede calcular sumando las masas individuales de cada una de sus partes. En las simulaciones físicas, muchas veces, para simplificar el problema, asumimos que el cuerpo tiene una distribución uniforme de materia, como si estuviese compuesto del mismo material. Es decir su densidad es constante, y las fórmulas para calcular la masa de un cuerpo se simplifican notablemente. En la práctica son similares a las fórmulas para calcular el volumen (o la superficie en el caso que estemos trabajando en 2d).

## Centro de Masa.

El centro de masa (CM) es un punto donde la masa del cuerpo esta igualmente distribuida. Esto quiere decir que el cuerpo se comporta para las ecuaciones del movimiento lineal, como si toda su masa estuviese concentrada en ese punto. Este concepto es de suma importancia práctica, ya que usualmente en una simulación, se puede representar todo un objeto físico complejo, usando solo la masa y la posición de su centro de masas.



El centro de masas de los cuerpos.

El centro de gravedad (o CG) es un concepto similar, pero depende del campo gravitatorio. Cuando el campo gravitatorio es constante, como en el caso de nuestras simulaciones, el centro de gravedad coincide con el centro de masas, por lo que es usual ver estos términos como sinónimos en los motores de física para videojuegos.

Una propiedad del centro de masas es que cualquier fuerza aplicada sobre el mismo solo produce un desplazamiento en el cuerpo, sin producir ninguna rotación.



Una fuerza aplicada sobre el centro de masas no produce ninguna rotación el cuerpo. Solo produce un movimiento lineal.

El centro de masas de una partícula, que como es puntual, no queda duda que es la posición de dicha partícula. Es decir no hay nada que computar.

Para calcular el centro de masas de un sistema de partículas, es decir de un cuerpo formado por N partículas, es preciso tener en cuenta la masa de cada partícula y su posición con respecto a algún punto fijo usado como sistema de referencia. Es decir la distribución de las masas dentro del cuerpo.

$$cm = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i r_i$$

donde M es la masa total del cuerpo, y  $r_i$  es la posición de la partícula  $i$ -ésima.

Se puede calcular cada eje forma independiente usando estas fórmulas:

$$cm_x = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad cm_y = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i$$

Las propiedades de masa, centro de masa y el momento de inercia (que estudiaremos más adelante) son llamadas "mass properties" en los motores de física. Casi todas las ecuaciones de la física que rigen el movimiento de los cuerpos y que son de utilidad para simulaciones de videojuegos, se pueden computar solo usando los valores de mass properties.

## Fuerzas.

Todos tenemos un concepto intuitivo de fuerza. Cuando empujamos un mueble, cuando sostenemos una valija, cuando aceleramos una bicicleta, decimos que estamos ejerciendo una fuerza. Esta noción intuitiva es la base para llegar a

una definición más estricta de lo que en física se considera una fuerza. Una característica importante de la fuerza es su direccionalidad, podemos ejercer diferentes fuerzas sobre un cuerpo en distintas direcciones. Lo cual nos lleva a considerar a la fuerza como una cantidad física vectorial, es decir que tiene magnitud y dirección. Para medir la intensidad de una fuerza se suele usar un dinamómetro, que no es otra cosa que un resorte fijado en un extremo, y sobre el otro extremo es donde se aplica la fuerza que queremos medir.



El dinamómetro se utiliza para medir la intensidad de una fuerza.

Las fuerzas se miden en Newton (N) (en el sistema MKS). Un newton es la fuerza necesaria para proporcionar una aceleración de  $1 \text{ m/s}^2$  a un objeto cuya masa sea de  $1 \text{ kg}$ .

$$\text{N} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

Otra unidad muy utilizada es la que corresponde al sistema técnico, llamada kilogramo fuerza kgf. Un kilogramo fuerza es el peso de la masa patrón (kilogramo masa) en condiciones normales ( $|g| = 9,80665 \text{ m/s}^2$ ).

Para convertir de una unidad a otra se puede usar la siguiente fórmula:

$$1\text{kgf} = 9,81\text{N} \quad ; \quad 1\text{N} = 1/9.81\text{kgf}$$

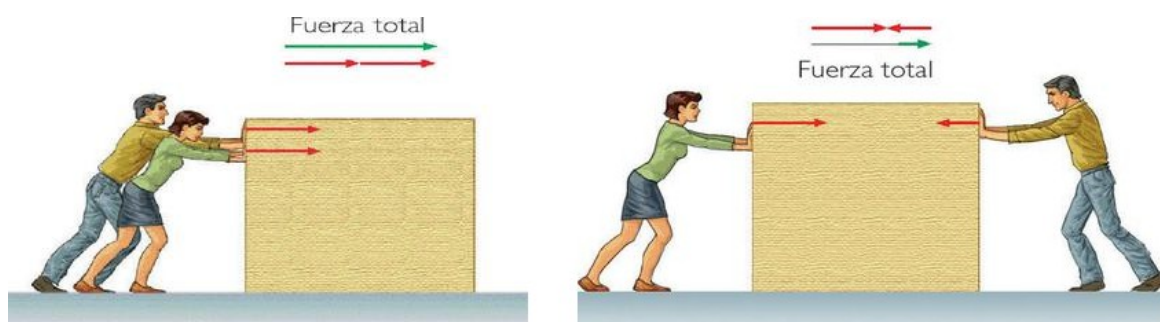
El valor de 9,81 corresponde al de la aceleración de la gravedad  $g$ , en la superficie de la Tierra.

El kgf es usualmente utilizado en la industria y el comercio, mientras que el N es el utilizado en las publicaciones científicas y trabajos de investigación.

## Composición de Fuerzas. Resultantes.

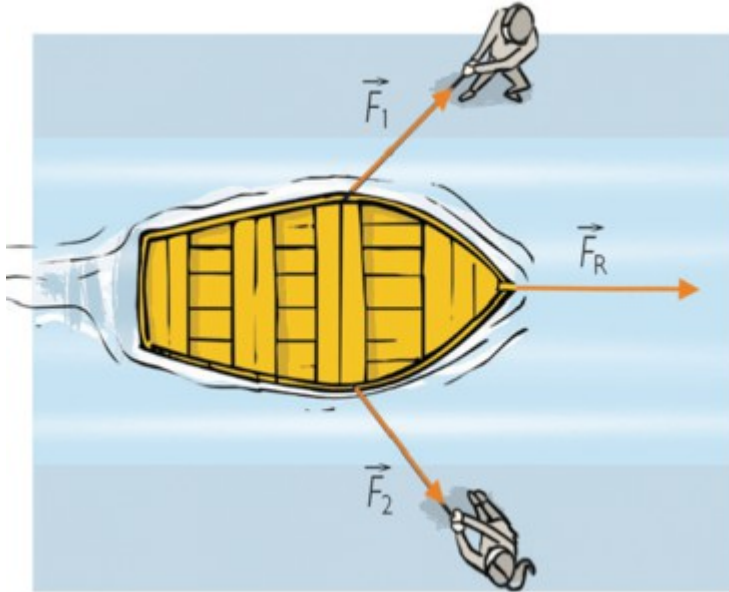
A menudo hay varias fuerzas ejercidas al mismo tiempo sobre un mismo cuerpo. Si se trata de una partícula, son fuerzas concurrentes. Es decir están todas aplicadas en un mismo punto. Para simplificar los problemas de simulación nos planteamos la siguiente pregunta: Existe una fuerza única capaz de producir el mismo efecto o resultado que el conjunto de todas las fuerzas que están actuando en un cuerpo en un momento dado?. Si esa fuerza existe y se puede calcular la llamamos fuerza resultante del sistema de fuerzas.

Llamamos sistema de fuerzas al conjunto de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo en un instante dado. Y llamamos resultante a una fuerza única, que por si sola, es capaz de producir exactamente el mismo resultado que el sistema de fuerzas. En ese caso, nos permite simplificar muchísimo el problema, pues en lugar de trabajar con un sistema de fuerzas, podemos trabajar con una única fuerza. Cuando se trata de cuerpos extensos, y las fuerzas se aplican sobre diferentes puntos, es posible que no exista una fuerza resultante. Pero en el caso de una partícula, como todas las fuerzas se aplican sobre el mismo punto, siempre es posible encontrar una resultante. La resultante de un sistema de fuerzas aplicadas sobre una partícula se obtiene efectuando la suma vectorial de todos los vectores fuerza que componen dicho sistema.

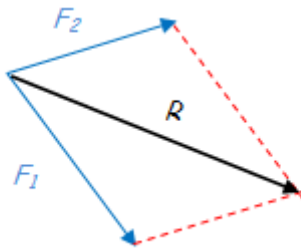


**Composición de fuerzas.** Si las fuerzas van en el mismo sentido se suman, si van en sentidos opuestos se restan.





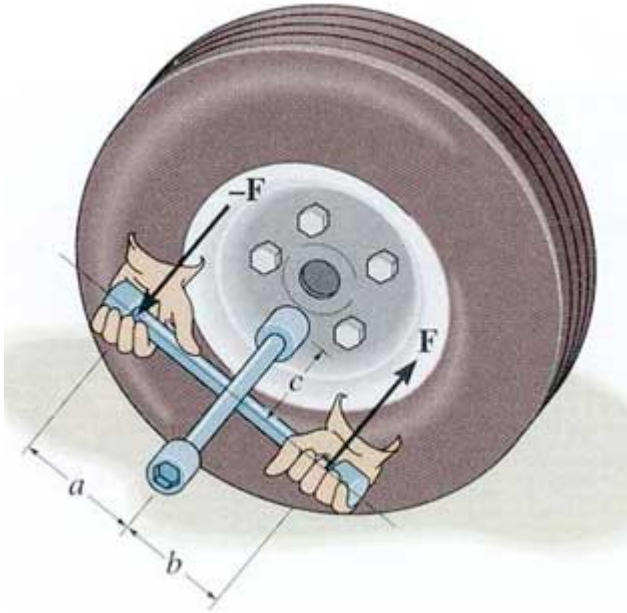
**Composición de fuerzas.** Si las fuerzas tienen dirección arbitraria se usa la regla del "paralelogramo" para obtener la resultante.



**La regla del paralelogramo:** La suma de dos fuerzas concurrentes es otra fuerza que coincide con la diagonal del paralelogramo formado por ambas.

Cuando se trata de un cuerpo extenso (por ejemplo un cuerpo rígido) las fuerzas no necesariamente se aplican sobre el mismo punto. Cuando las fuerzas se aplican sobre diferentes líneas de acción dentro de un cuerpo se llaman fuerzas no concurrentes.

En el caso de las fuerzas no concurrentes es posible que no haya forma de obtener una fuerza resultante



**Fuerzas no concurrentes:** No es posible hallar una fuerza resultante. La suma de las fuerzas se cancelan mutuamente, lo que indica que no hay movimiento lineal. Sin embargo como están aplicadas a distintas líneas de acción que no pasan por el centro de gravedad, si se produce un movimiento de rotación.

## Leyes de Newton.

A fines de 1600 Isaac Newton estableció 3 leyes (conocidas como las leyes de movimiento de Newton) que representan la base de todo lo que se utiliza para el estudio del movimiento de los cuerpos, no solo para las simulaciones de video juegos, si no para casi todos los problemas de física cotidianos. Esas 3 leyes son:

### 1 - Principio de Inercia.

Todo cuerpo permanece en reposo o movimiento rectilíneo uniforme, si sobre él no actúa ninguna fuerza, o si la resultante de las mismas es nula.



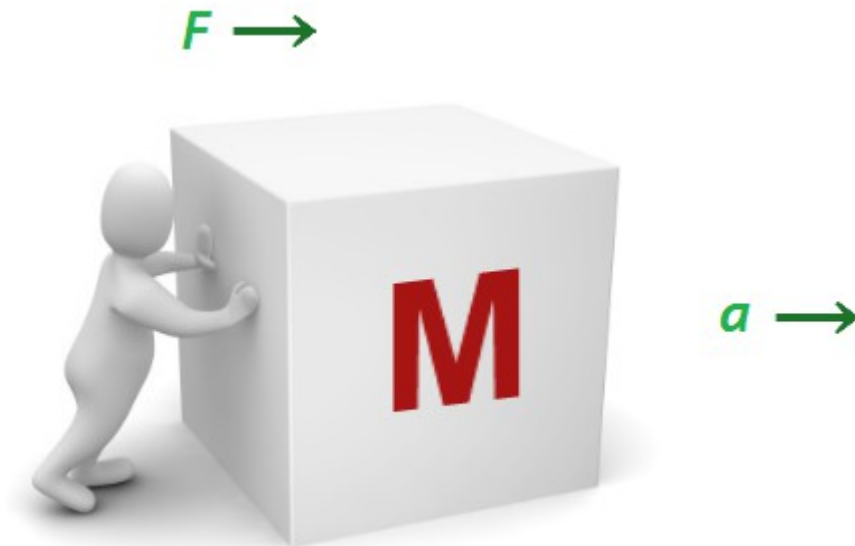
**Principio de inercia.** El ciclista tiene a seguir con el MRU que tenía antes de que la bicicleta se frenara abruptamente al chocar contra la piedra.

La inercia (del latín *inertía*) es la propiedad que tienen los cuerpos de permanecer en su estado de reposo o movimiento, mientras la fuerza sea igual a cero. También se dice que la inercia es la resistencia que opone la materia a modificar su estado de reposo o movimiento. Como consecuencia, un cuerpo conserva su estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme si no hay una fuerza actuando sobre él.

## 2 - Segunda ley del movimiento. $F = ma$

La aceleración es proporcional a la fuerza resultante, y tiene la misma dirección y sentido.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

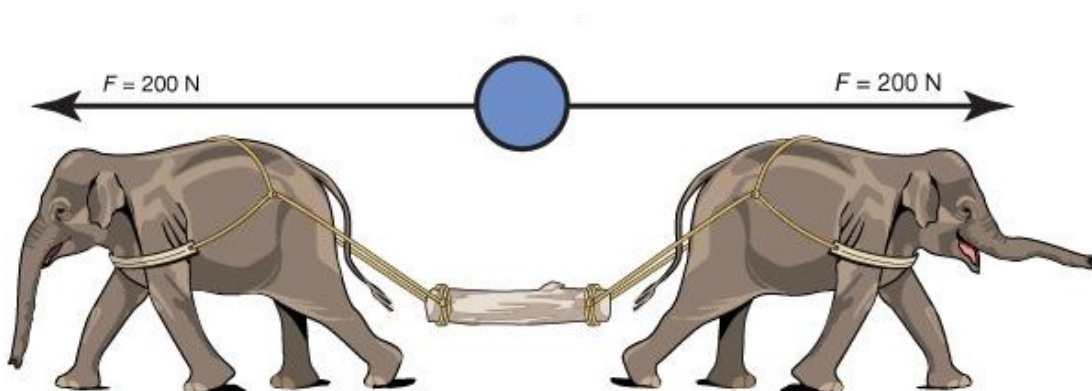


Segunda ley de Newton. Toda fuerza produce una aceleración

La segunda ley del movimiento es de una enorme importancia práctica ya que es la que vamos a utilizar como base para desarrollar todas nuestras simulaciones. Además es la base de todo el análisis en el campo de la mecánica clásica.

Como consecuencia de la segunda ley un sistema esta en reposo si y solo si la resultante de las fuerzas que actúan sobre él es igual a cero (o no hay ninguna fuerza actuando).

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = 0$$



Si la resultante de las fuerzas es nula, no hay aceleración.

La segunda ley del movimiento establece que toda fuerza produce una aceleración, pero además da una forma precisa de calcular dicha aceleración. Así de la ecuación se desprende que cuanto mayor sea la fuerza aplicada, mayor será

la aceleración. Y de la misma manera cuanto mayor es la masa de un cuerpo, menor será la aceleración.

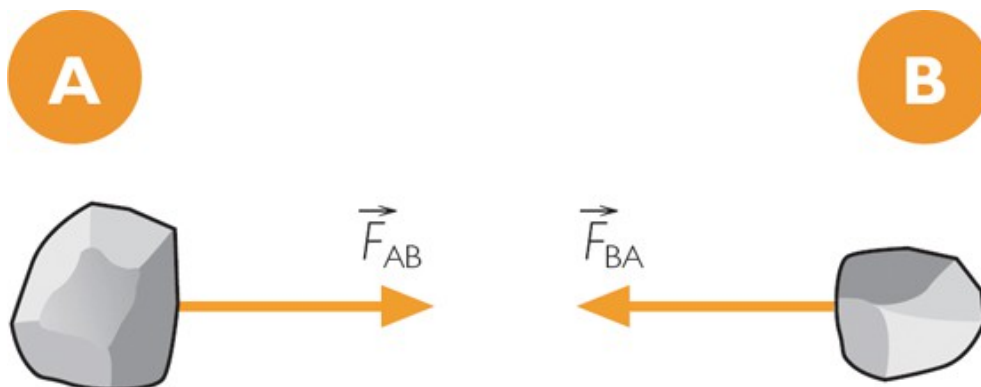
$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$



La misma fuerza sobre un cuerpo con menos masa (figura izquierda) produce mayor aceleración que sobre un cuerpo con más masa (figura derecha).

### 3 - Principio de acción y reacción:

Si un cuerpo A ejerce una acción sobre otro cuerpo B, éste realiza sobre A otra acción igual y de sentido contrario. Esto es algo que podemos comprobar a diario en numerosas ocasiones. Por ejemplo, cuando queremos dar un salto hacia arriba, empujamos el suelo para impulsarnos. La reacción del suelo es la que nos hace saltar hacia arriba. Cuando estamos en una piscina y empujamos a alguien, nosotros también nos movemos en sentido contrario. Esto se debe a la reacción que la otra persona hace sobre nosotros, aunque no haga el intento de empujarnos a nosotros.

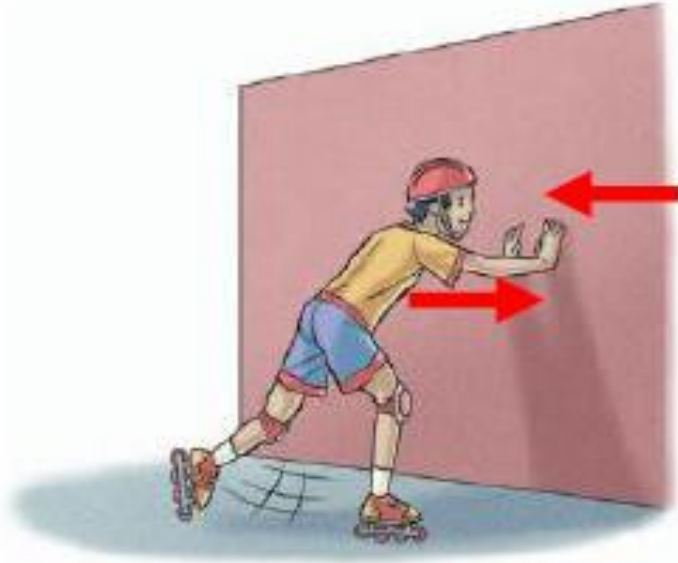


Las fuerzas de interacción entre 2 cuerpos son siempre de igual módulo, de igual dirección y de sentidos opuestos

Hay que destacar que, aunque los pares de acción y reacción tenga el mismo valor y sentidos contrarios, no se anulan entre si, puesto que actúan sobre cuerpos distintos. Por ejemplo si empujamos una pared con una cierta

---

fuerza, la pared nos empuja a nosotros con una fuerza de igual módulo y dirección, pero de sentido contrario, que nos hace retroceder. Sin embargo, la pared, por formar parte de la casa y esta a su vez de la Tierra, y tener una masa enormemente superior a la nuestra, permanece inmóvil.



Aunque los pares de acción y reacción tenga el mismo valor y sentidos contrarios, no se anulan entre si, puesto que actúan sobre cuerpos distintos.

## Diagrama de Cuerpo Libre.

Un diagrama de cuerpo libre es una representación gráfica utilizada a menudo por físicos e ingenieros para analizar las fuerzas que actúan sobre un cuerpo libre. Estos diagramas son una herramienta para descubrir las fuerzas desconocidas que aparecen en las ecuaciones del movimiento del cuerpo. El diagrama facilita la identificación de las fuerzas y momentos que deben tenerse en cuenta para la resolución del problema. También se emplean para el análisis de las fuerzas internas que actúan en estructuras.

Generalmente el cuerpo se representa solo con su masa y su centro de gravedad. Luego hay que incluir todas las fuerzas que actúan sobre el, pero no hay que incluir las fuerzas que actúan sobre otros cuerpos. Por ejemplo, si una pelota permanece en reposo sobre una mesa, la pelota ejerce una fuerza sobre ésta, pero en el diagrama de cuerpo libre de la primera solo hay que incluir la fuerza que la mesa ejerce sobre ella.

## Sistemas en equilibrio.

Consideremos un libro apoyado sobre una mesa, y esta apoyada sobre el piso (que pertenece a una casa, edificada sobre la superficie de la tierra, etc, etc). El conjunto formado por la mesa y libro no se mueve desde el punto de vista la Tierra (que lo consideramos un sistema de referencia sin entrar en mayores detalles).



La segunda ley de Newton establece que

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Pero como el sistema no se mueve, la aceleración es cero, con lo cual

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = 0$$

Eso significa que las fuerzas que intervienen tienen que estar compensadas de tal manera que la resultante sea nula, de lo contrario se debería producir algún movimiento.

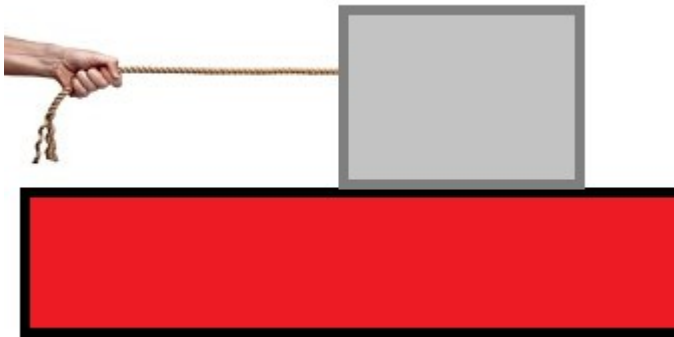
El libro hace una fuerza igual a su peso sobre la mesa debido a la fuerza de gravedad pero la mesa le responde con una fuerza de igual intensidad y dirección, pero de sentido contrario, de acuerdo al principio de acción y reacción. Por lo tanto la fuerza resultante sobre el libro es nula, y por lo tanto el libro no se mueve con respecto a la mesa. La mesa por su parte recibe la fuerza del libro (hacia abajo) y además ejerce otra fuerza hacia abajo producto de su propio peso. Como la mesa está apoyada sobre el piso, dicha fuerza (que es igual al peso de la mesa más el peso del libro) se aplica sobre el piso, que a su vez, por el principio de acción y reacción responde con una fuerza de igual magnitud y dirección pero de sentido contrario, que hace que la resultante de fuerzas sobre la mesa también sea nula y por lo tanto la mesa está quieta con respecto al piso. De esta forma todo el sistema está en estado de reposo. El piso está recibiendo la fuerza del peso de la mesa y

del libro. Esto es de suma importancia para el cómputo de la resistencia que tienen que tener los materiales para resistir las fuerzas a los que serán sometidos, por ejemplo en los llamados cálculos de estática o cálculos de estructuras.

## Dinámica de los movimientos rectilíneos.

### Ejemplo 1.

Consideremos el caso sencillo en que tiramos de un bloque mediante una soga. El bloque está apoyado sobre una mesa perfectamente horizontal y en el caso ideal en que no hay rozamiento entre las superficies de contacto. Supongamos también que la soga tiene una masa despreciable frente a la masa del bloque, en ese caso podemos considerarlo simplemente como un medio para ejercer una acción sobre el cuerpo.



Bloque tirado por medio de una soga.

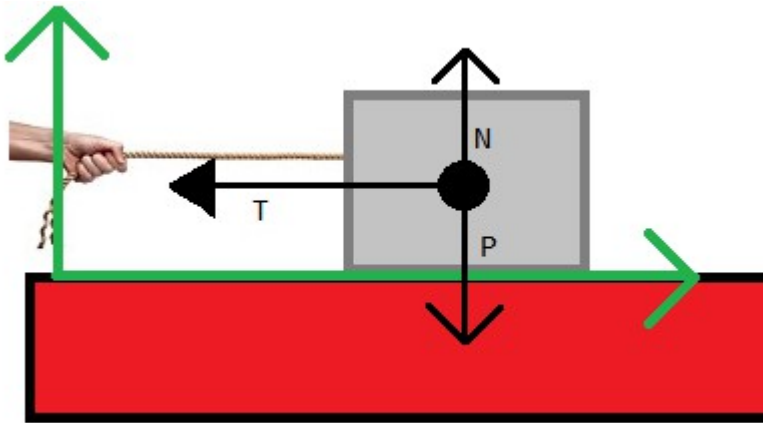
- La mano interactúa con el cuerpo a través de una soga, tirando de él. Esta acción se manifiesta concretamente a través de una tensión en la cuerda que va a tirar del cuerpo hacia la izquierda. Llamaremos  $T$  a la fuerza que ejerce la mano sobre el cuerpo.

- La Tierra interactúa con el cuerpo, y ejerce una fuerza hacia su centro (fuerza de gravedad). Esta fuerza representa el peso del cuerpo y lo representaremos con  $P$ .

- La mesa también interactúa con el cuerpo e impide que caiga hacia la Tierra. El resultado de la interacción entre la mesa y el cuerpo es una fuerza perpendicular a la superficie de contacto, ya que no aporta al movimiento del cuerpo en la dirección horizontal, sino que simplemente lo sostiene. Suele llamarse reacción normal del plano de contacto y se representa con  $N$ .

- Además consideramos todo el bloque como un cuerpo puntual, es decir toda su masa concentrada en el centro de gravedad y las fuerzas actúan en dicho punto.





Fuerzas aplicadas sobre el bloque. A este tipo de esquemas se lo llama Diagrama de Cuerpo Libre.

Ahora aplicamos la segunda ley de Newton al sistema.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Vamos a descomponer la ecuación vectorial y trabajar con los componentes horizontal y vertical en forma separada:

Primero con el eje horizontal,

$$\sum F_x = ma_x$$

$$\sum F_x = |\vec{T}| = ma_x \Rightarrow a_x = \frac{|\vec{T}|}{m}$$

Y ahora con el eje vertical

$$\sum F_y = ma_y$$

$$\sum F_y = |\vec{N}| - |\vec{P}| = ma_y$$

Como sabemos que el bloque no se mueve verticalmente, la aceleración en dirección y es igual a cero, con lo cual

$$|\vec{N}| - |\vec{P}| = 0 \Rightarrow |\vec{N}| = |\vec{P}|$$

---

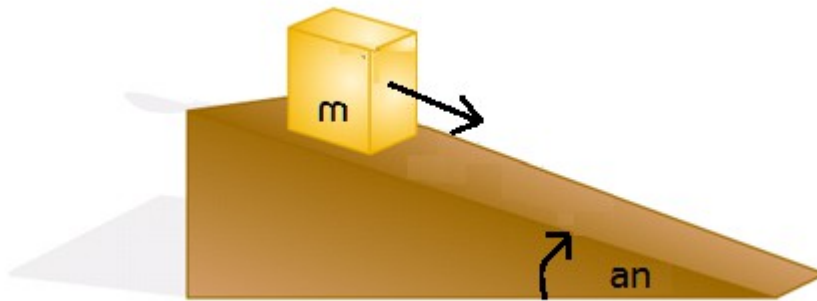
La aceleración solo depende de la tensión de la soga, que transmite al cuerpo la fuerza que la mano ejerce sobre ella y la masa del cuerpo. Todo sucede como si no hubiera ni peso  $P$ , ni fuerza normal  $N$  y solo actuara  $T$ .

**Ojo!** que la fuerza  $N$  y la fuerza  $P$  no son un par de acción y reacción pues están aplicadas sobre el mismo cuerpo. **Los pares de fuerzas acción y reacción actúan sobre cuerpos diferentes.**

Uno podría llegar a pensar que entonces es tan fácil mover un bloque de 10kilos que uno de 100, pero en la práctica eso no es cierto pues interviene la fuerza de rozamiento, que es proporcional a las fuerzas de contacto y por lo tanto dependen de  $N$  y de  $P$ .

### **Ejemplo 2.**

Consideremos un cuerpo que se desliza sin rozamiento por un plano inclinado. Hay 2 interacciones: la Tierra, que le ejerce una fuerza siempre dirigida hacia su centro, y el plano de contacto, que le ejerce una fuerza  $N$ , que en este caso no coincide en dirección con el peso  $P$ , si no que forma un cierto ángulo, que llamamos  $\alpha$ .



Un cuerpo en un plano inclinado.

Para simplificar los cálculos podríamos elegir un sistema de referencia con el eje  $X$  paralelo al plano inclinado. Con lo cual la aceleración solo tiene componente  $x$ . Pero el peso tendrá dos componentes no nulas  $P_x$  y  $P_y$ .

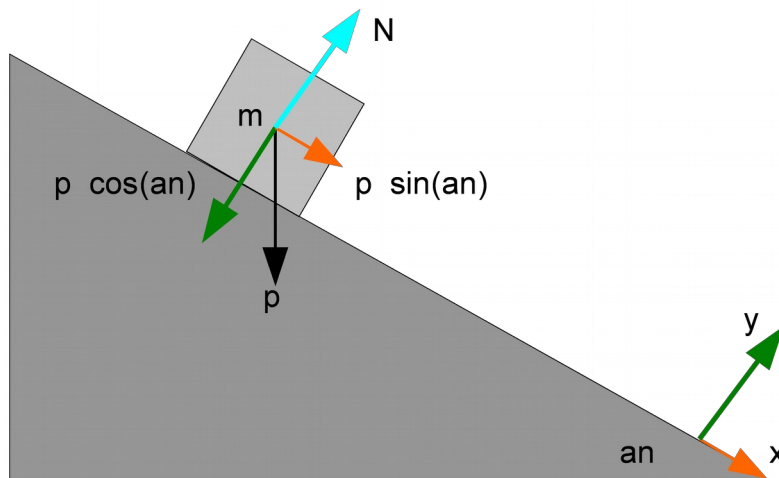


Diagrama del cuerpo libre del bloque deslizándose por un plano inclinado.

Si aplicamos la segunda ley :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Y separando las componentes:

$$\sum^{(1)} F_x = ma_x \Rightarrow |\vec{P}| \sin(an) = ma$$

$$\sum^{(2)} F_y = ma_y \Rightarrow |\vec{N}| - |\vec{P}| \cos(an) = 0$$

Recordemos que el objeto se mueve solo en dirección X, por lo que la componente de la aceleración Y es nula.

Despejando la aceleración de la ecuación (1) tenemos:

$$a = \frac{|\vec{P}| \sin(an)}{m} = \frac{m|\vec{g}|}{m} \sin(an) = |\vec{g}| \sin(an)$$

La aceleración de un cuerpo que desliza sobre un plano inclinado no depende de la masa!. Es como una caída libre más lenta: Galileo trabajó en el plano inclinado para disminuir la aceleración y poder medir los tiempos de caída.

OJO! LA fuerza perpendicular que ejerce el plano depende de la acción que sobre el se ejerce. N no siempre es igual a P x cos(an), puesto que es la respuesta del plano a la totalidad de las fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo.



El plano inclinado facilita la traslación de un cuerpo a una altura mayor, a expensas de un mayor recorrido. La energía del sistema tiene que ser la misma por las leyes de conservación, pero permite aplicar una fuerza menor, durante más tiempo.

## Tipos de Fuerza.

### Fuerzas de rozamiento.

En los casos estudiados hasta ahora hemos despreciado el rozamiento, ya sea porque interviene en un pequeño grado, o para poder simplificar el problema.

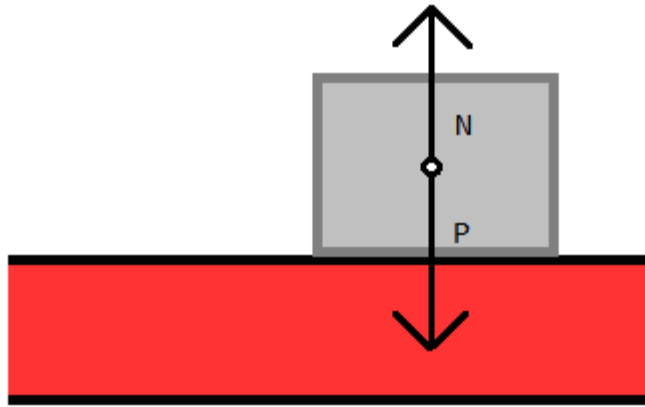
Hay muchas clases de rozamiento, entre sólidos, entre sólidos y líquidos, entre sólido y gas, entre líquidos, por deslizamiento entre superficies de sólidos, por rodadura sin deslizamiento de un sólido sobre otro, etc. Los casos más sencillos de tratar son los de rozamiento por deslizamiento entre superficies sólidas y los de rodadura entre el mismo tipo de superficies.

El movimiento de los astros es prácticamente libre de rozamientos y por esta razón su estudio contribuyó enormemente al descubrimiento de las leyes dinámicas. En cambio, en nuestro mundo, la presencia de la atmósfera hace que el rozamiento resulte inevitable o difícil de eliminar, y así durante siglos se pensó que para mantener el movimiento era preciso aplicar continuamente fuerzas, cuando lo que ocurre es todo lo contrario, y por ejemplo, lo que es necesario hacer para mantener el MRU es eliminar todo tipo de fuerzas, especialmente las de rozamiento.

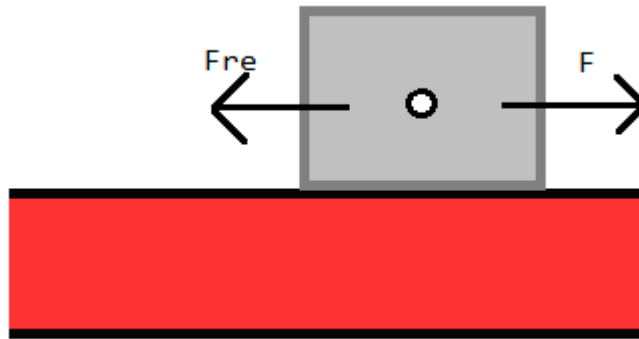
### Rozamiento estático y dinámico.

Consideremos un cuerpo en reposo apoyado sobre una superficie horizontal. Su peso  $P$  se equilibra por la fuerza  $N$  que ejerce el plano. Luego aplicamos una pequeña fuerza  $F$  en dirección tangente a la superficie, pero observamos que el bloque no se mueve. Eso solo es posible si existe otra fuerza en la misma

dirección y sentido opuesto que la compensa exactamente. Dicha fuerza se llama fuerza de rozamiento estático, y la representamos con el vector  $F_{re}$

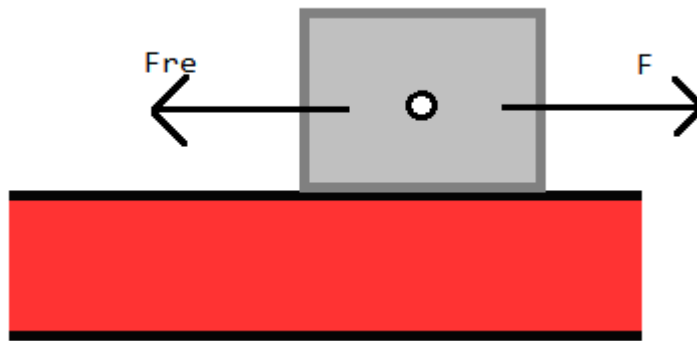


El cuerpo está apoyado sobre una superficie y no se mueve. Su peso está compensado por la reacción normal de contacto.

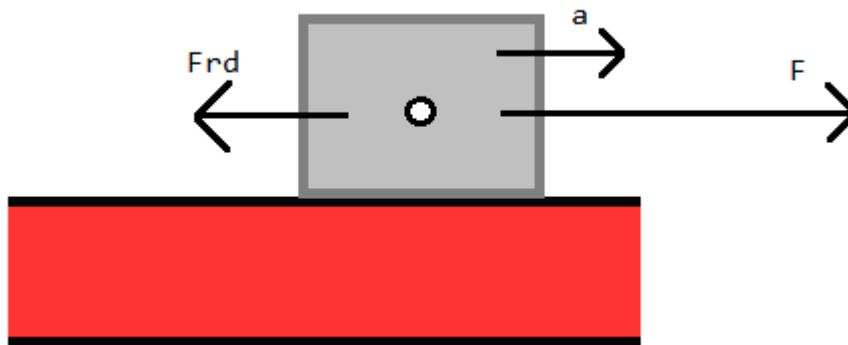


Aplicamos una fuerza sobre el cuerpo pero este no se mueve. La fuerza está compensada por la fuerza de rozamiento.

Si aumentamos la fuerza aplicada  $F$  observamos que el cuerpo continuará en reposo hasta que  $F$  tenga un valor máximo  $F_{max}$ , por encima del cual el cuerpo comenzará a moverse. Se observa experimentalmente que a partir de ese valor  $F_{max}$ , la fuerza de rozamiento cambia bruscamente a un valor menor, llamado  $F_{rd}$ , llamada fuerza de rozamiento dinámico.



Aumentamos la fuerza, pero sigue sin moverse. La fuerza de rozamiento compensa la fuerza aplicada.



A partir de cierta intensidad el cuerpo empieza a moverse. Hemos vencido la resistencia del rozamiento.

En resumen, las fuerzas de rozamiento estático son aquellas que actúan sobre las superficies en reposo entre sí, y tienen como valor máximo el mismo valor que la fuerza exterior aplicada para iniciar el movimiento. En cambio las fuerzas de rozamiento dinámico actúan cuando hay movimiento relativo entre las dos superficies.

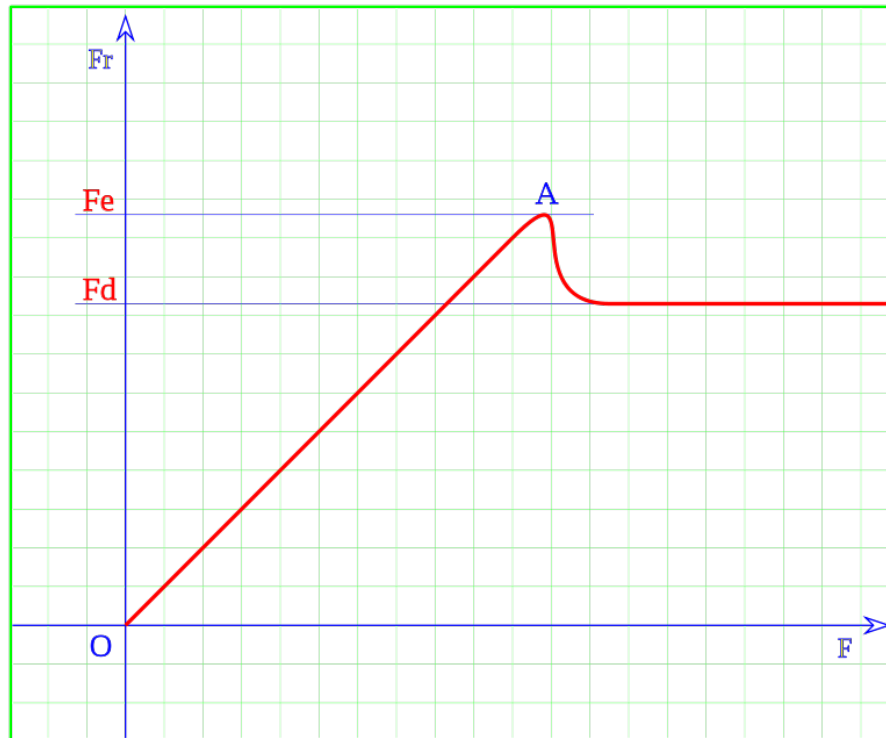


Gráfico de la fuerza de rozamiento estática y dinámica en función a la fuerza externa aplicada sobre el cuerpo.

Se comprueba experimentalmente que la fuerza de rozamiento estático máximo entre superficies secas y no lubricadas es aproximadamente independiente del área de contacto y que es proporcional a la fuerza normal:

$$|F_{re}^{\vec{max}}| = \mu_e |\vec{N}|$$

Donde la constante  $\mu_e$  es el coeficiente de rozamiento estático, que depende de la naturaleza de los materiales en contacto, del pulido de las superficies, de las partículas superficiales, de la temperatura, y del grado de contaminación, entre otros parámetros.



La fuerza de rozamiento dinámico depende también del tipo y estado de las superficies en contacto, y de la fuerza con que se aprietan entre sí, pero no depende de las fuerzas tangenciales aplicadas y además es aproximadamente independiente de la velocidad relativa de las superficies.

El módulo de la fuerza de rozamiento dinámico es:

$$|\vec{F}_{rd}| = \mu_d |\vec{N}|$$

donde  $\mu_d$  es coeficiente de rozamiento dinámico.

En síntesis:

- La fuerza de rozamiento tiene dirección paralela a la superficie de apoyo.
- El coeficiente de rozamiento depende exclusivamente de la naturaleza de los cuerpos en contacto, así como del estado en que se encuentren sus superficies.

Tabla de coeficientes de roce

Materiales en contacto	Coefficiente roce estático	Coefficiente roce cinético
Hielo / Hielo	0.1	0.03
Vidrio / Vidrio	0.9	0.4
Madera / Cuero	0.4	0.3
Madera / Piedra	0.7	0.3
Madera / Madera	0.4	0.3
Acero / Acero	0.74	0.57
Caucho / Cemento	1.0	0.8

Roce y Rozamiento NMD Física

Tablas de coeficientes de rozamiento.



La fuerza de rozamiento de la rueda con el piso es mayor cuando no desliza. La frenada más efectiva es silenciosa aunque menos espectacular. en las curvas vale lo mismo y ciertos conductores suelen aumentar la velocidad hasta que pequeños ruidos intermitentes y agudos le indican que no deben excederse, si desean mantener aplicada sobre el vehículo la

fuerza centrípeta que requiere su movimiento.

### Viscosidad.

También llamado rozamiento interno, la viscosidad se produce por las fuerzas de rozamiento que actúan entre dos capas paralelas de un fluido (líquido o



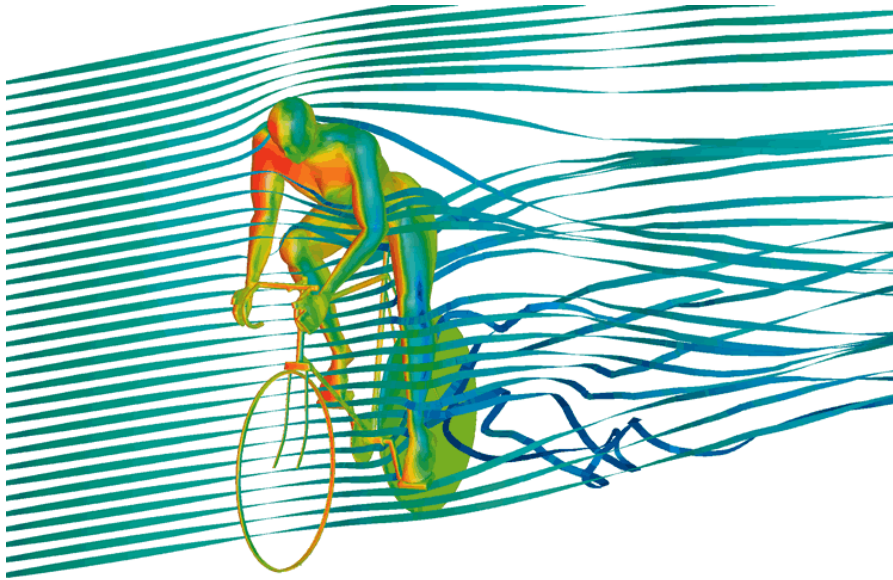
gas), que se desplazan con distintas velocidades. El rozamiento se origina en la interacción de átomos o moléculas entre las dos capas. Se puede comprobar experimentalmente que esta fuerza es proporcional a la velocidad media de los átomos o moléculas.

Análogamente en el caso de un cuerpo que se mueve en el interior de un fluido, también aparecen fuerzas, producto de la interacción de la superficie del cuerpo con las moléculas del fluido que en determinados casos son proporcionales a la velocidad del cuerpo respecto del fluido.

$$\vec{F} = -k\vec{v}$$

Donde  $k$  es una constante que depende de la naturaleza del fluido y de la forma del cuerpo. En otras condiciones esta fuerza es proporcional al cuadrado de la velocidad de desplazamiento.

Naturalmente estas fuerzas se oponen a la velocidad y van creciendo a medida que crece ésta. Por ejemplo, un cuerpo en caída libre, inicialmente quieto, se desplaza por acción de la gravedad. A medida que su velocidad aumenta va también aumentando la resistencia que ofrece el fluido en el cual se mueve (en este caso el aire). Y llega un momento (si la altura inicial es suficiente) en que esta resistencia iguala a la fuerza peso, a partir de ese momento el cuerpo continúa en caída con una velocidad constante, que se conoce como "velocidad límite".



**Resistencia aerodinámica:** es la fuerza que sufre un cuerpo al moverse a través del aire en la dirección de la velocidad relativa entre el aire y el cuerpo

En capítulos siguientes, cuando estudiemos el modelado específico de simulaciones de aviones, automóviles y barcos, analizaremos con más detalles las ecuaciones de la fuerza de rozamiento del agua y del aire sobre los cuerpos.

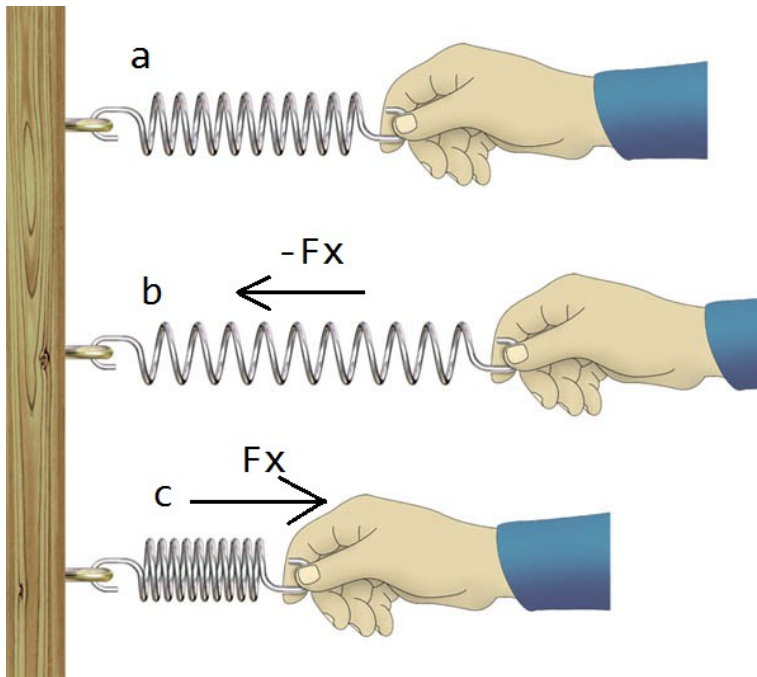
### Fuerzas Elásticas.

Consideremos las propiedades de una interacción que es función de la separación entre los cuerpos que interactúan, como es el caso de la fuerza que un resorte estirado o comprimido interpuesto entre 2 cuerpos, ejerce sobre ellos.

La fuerza ejercida por un resorte es proporcional al estiramiento o compresión del mismo respecto a la posición de deformación nula  $x_0$ .

$$F_x = -k(x - x_0) \quad 1)$$

en donde  $x - x_0$  puede ser negativo (resorte comprimido) o positivo (resorte estirado), las fuerzas en ambos casos son repulsiva y atractiva respectivamente.



Estados del resorte. a) estado de equilibrio o reposo. No ejerce ninguna fuerza. b) estiramos el resorte, ejerce una fuerza negativa, tiende a comprimirse. c) Comprimos el resorte, ejerce una fuerza positiva, tiende a estirarse.

Todos los resortes que cumplen con la condición lineal dada por la ecuación (1) son cuerpos elásticos que satisfacen la llamada ley de Hooke. Esta ley se verifica experimentalmente mientras que el desplazamiento  $(x-x_0)$  sea relativamente pequeño. Si el resorte aplica la misma fuerza de resistencia cada vez que se le aplica la misma fuerza, y en particular regresa a su posición de equilibrio o neutra cuando se retira la fuerza aplicada, se lo llama perfectamente elástico. Esto quiere decir que el resorte reacciona de forma lineal a la fuerza, cumpliendo la ley de Hooke (dada por la ecuación 1).

### Fuerza Gravitatoria.

La gravedad es una de las cuatro interacciones fundamentales. Origina la aceleración que experimenta un cuerpo físico en las cercanías de un objeto astronómico. También se denomina interacción gravitatoria o gravitación.

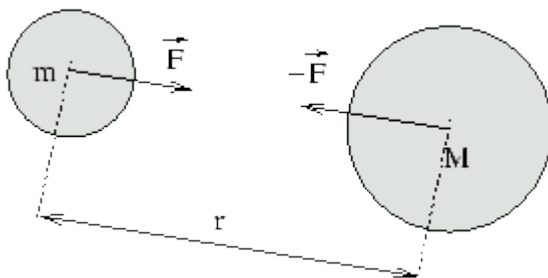
Por efecto de la gravedad tenemos la sensación de peso. Si estamos situados en las proximidades de un planeta, experimentamos una aceleración dirigida hacia la zona central de dicho planeta —si no estamos sometidos al efecto de otras fuerzas—. En la superficie de la Tierra, la aceleración originada por la gravedad es  $9.81 \text{ m/s}^2$ , aproximadamente.

En la teoría newtoniana de la gravitación, los efectos de la gravedad son siempre atractivos, y la fuerza resultante se calcula respecto del centro de gravedad de ambos objetos (en el caso de la Tierra, el centro de gravedad es su centro de masas, al igual que en la mayoría de los cuerpos celestes de características homogéneas). La gravedad newtoniana tiene un alcance teórico infinito; pero la fuerza es mayor si los objetos están próximos, y mientras se van alejando dicha fuerza pierde intensidad.

La ley de la gravitación universal formulada por Isaac Newton postula que la fuerza que ejerce una partícula puntual con masa  $m_1$  sobre otra con masa  $m_2$  es directamente proporcional al producto de las masas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa:

$$\mathbf{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \hat{\mathbf{u}}_{21}$$

donde  $\hat{\mathbf{u}}_{21}$  es el vector unitario que dirigido de la partícula 1 a la 2, esto es, en la dirección del vector  $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ , y  $G$  es la constante de gravitación universal, siendo su valor aproximadamente  $6,674 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$ .



Fuerzas mutuas de atracción entre dos esferas de diferente tamaño. De acuerdo con la mecánica newtoniana las dos fuerzas son iguales en módulo, pero de sentido contrario; al estar aplicadas en diferentes cuerpos no se anulan y su efecto combinado no altera la posición del centro de gravedad conjunto de ambas esferas.

---

Por ejemplo, usando la ley de la gravitación universal, podemos calcular la fuerza de atracción entre la Tierra y un cuerpo de 50 kg. La masa de la Tierra es  $5,974 \times 10^{24}$  kg y la distancia entre el centro de gravedad de la Tierra (centro de la tierra) y el centro de gravedad del cuerpo es 6378,14 km (igual a 6 378 140 m, y suponiendo que el cuerpo se encuentre sobre la línea del Ecuador). Entonces, la fuerza es:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2} = 6.67428 \times 10^{-11} \frac{50 \times 5.974 \times 10^{24}}{6378140^2} = 490.062 \text{ N}$$

La fuerza con que se atraen la Tierra y el cuerpo de 50 kg es 490.062 N (Newtons, Sistema Internacional de Unidades), lo que representa 50 kgf (kilogramo-fuerza, Sistema Técnico), como cabía esperar, por lo que decimos simplemente que el cuerpo pesa 50 kg.

Dentro de esta ley empírica, tenemos estas importantes conclusiones:

- Las fuerzas gravitatorias son siempre atractivas. El hecho de que los planetas describan una órbita cerrada alrededor del Sol indica este hecho. Una fuerza atractiva puede producir también órbitas abiertas, pero una fuerza repulsiva nunca podrá producir órbitas cerradas.
- Tienen alcance infinito. Dos cuerpos, por muy alejados que se encuentren, experimentan esta fuerza.
- La fuerza asociada con la interacción gravitatoria es central.
- A mayor distancia menor fuerza de atracción, y a menor distancia mayor la fuerza de atracción.