

Modelos y Simulación para Videojuegos II

[Apunte PROVISORIO]

Unidad 1

Cinemática

Ing. Mariano Banquero

Contenido

Cinemática.....	3
La posición.....	3
El tiempo.....	6
Trayectoria.....	6
Tipos de trayectorias.....	7
Descripción del movimiento.....	7
Velocidad media.....	9
Velocidad instantánea.....	12
Aceleración media.....	12
Aceleración instantánea.....	12
Aceleración Tangencial y Aceleración Normal.....	13
Ecuaciones del Movimiento.....	14
Movimiento Rectilíneo Uniforme. (MRU).....	17
Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado. (MRUV).....	19
Caída Libre y Tiro Vertical.....	20
Cinemática 2d.....	21
Movimiento Parabólico.....	24
Ecuaciones de movimiento parabólico.....	25

Cinemática

La cinemática (del griego κινεω, kineo, movimiento) es la rama de la física que estudia las leyes del movimiento de los cuerpos sin considerar las causas que lo originan (las fuerzas) y se limita, esencialmente, al estudio de la trayectoria en función del tiempo.

Muchas veces nos interesa simular el movimiento de un cuerpo sin tener en cuenta los movimientos relativos de sus distintas partes, por ejemplo

- El vuelo de una mosca sin tener en cuenta el movimiento de sus alas.
- El andar de un auto sin tener en cuenta el giro de las ruedas.
- El movimiento de una bola de pool, sin tener en cuenta si esta rotando.

Esto puede deberse a que no nos interesa una descripción tan detallada en el contexto de la simulación o bien, a que el cuerpo está tan distante o es tan pequeño que no podríamos apreciar ese tipo de detalles.

En cualquiera de estos casos se dice que el cuerpo se comporta como una partícula, o lo que equivale a considerarlo como si fuera un punto en el espacio. A veces se usa el término cuerpo puntual o punto material con el mismo significado.

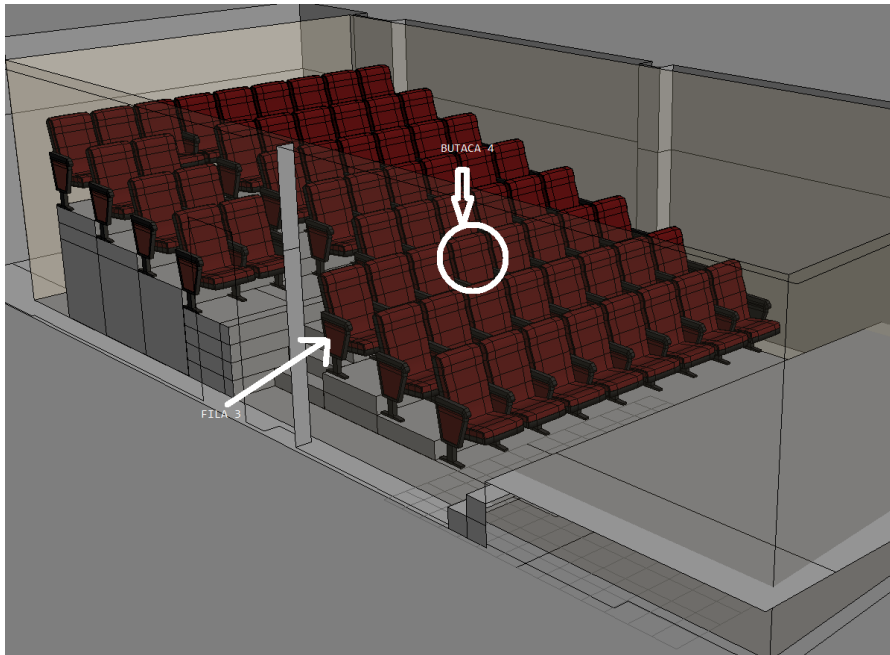
Sin embargo no debemos olvidar que aunque lo representemos como un punto, el objeto que estamos estudiando puede ser un planeta, una bola de pool o un átomo. Es decir no es una cuestión del tamaño del objeto.

Intuitivamente decimos que una partícula se mueve si la observamos cambiar de lugar, es decir si ocupa distintas posiciones en distintos instantes. Es decir que el concepto de movimiento se relaciona con las nociones de espacio y de tiempo.

La posición.

Si hemos acordado llamar movimiento al cambio de la posición con el tiempo, será necesario establecer un criterio para determinar qué posición ocupa un cuerpo en un instante dado. Se trata de establecer un sistema de referencia (SR) adecuado para lo que necesitamos estudiar. Por ejemplo,

- La ubicación del baño: 20 metros hacia adelante por este pasillo.
- La posición de un asiento dentro de una sala de cine: fila 3 butaca 4.
- La ubicación de cualquier lugar del globo terráqueo que informa el GPS: latitud y longitud.

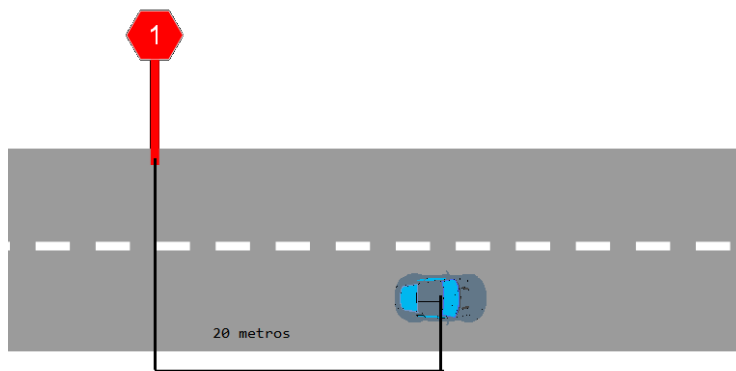


Ubicación de una butaca en una sala de cine. Para identificar una posición es preciso establecer un sistema de referencia.

En el primer caso solo precisamos un valor para indicar la posición, (la cantidad de metros), mientras que en los otros dos ejemplos estamos usando 2 valores distintos. La cantidad de valores independientes que se necesitan para definir una posición se denomina dimensiones.

Una dimensión

Supongamos que un cuerpo que se mueve por una recta, es decir que realiza un movimiento en una dimensión. Para determinar su posición sólo necesitamos determinar cual es el origen, y luego indicar a qué distancia del origen se encuentra, la posición del cuerpo puede ser positiva o negativa según se encuentre a la derecha o a la izquierda del origen respectivamente.

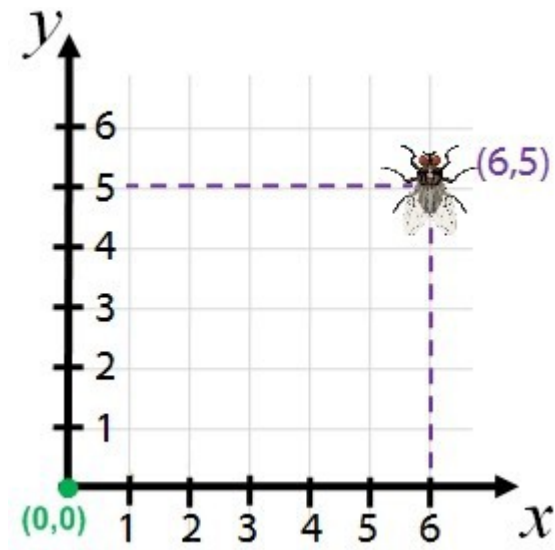


Un auto moviéndose en línea recta. Para marcar su posición solo hace falta definir el origen y la distancia al mismo.

Dos dimensiones

Si el cuerpo realiza un movimiento en dos dimensiones, es decir se mueve por un plano, necesitaremos dos coordenadas para determinar la posición que ocupa en un instante dado. Los dos valores que determinan la posición de un cuerpo en un plano podemos establecerlos utilizando distintos sistemas de referencia. El más utilizado es el de las coordenadas cartesianas, que utilizan las distancias a dos ejes usualmente llamados X e Y, acompañadas de los signos (+) ó (-).

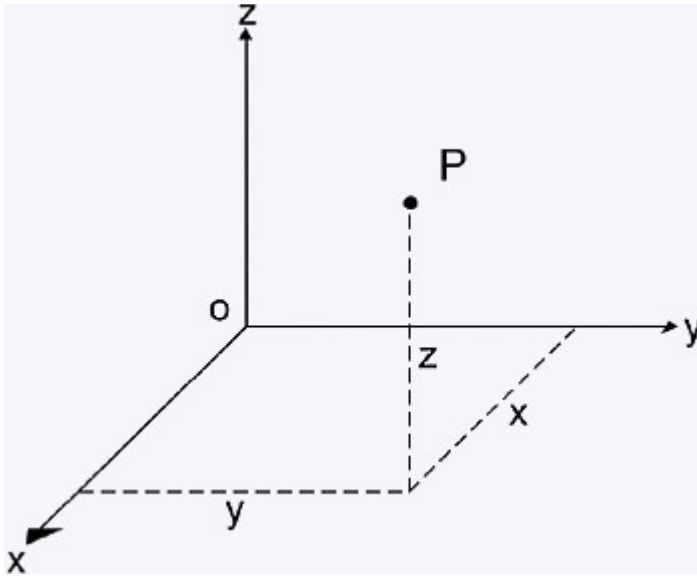
El signo negativo para la coordenada X se utiliza si el punto se encuentra a la izquierda del origen y para la coordenada Y cuando está por debajo del origen.



Para representar la posición de la mosca, primero tenemos que determinar donde está el origen y la dirección de los ejes, lo cual constituye el sistema de referencia (SR). Por último la posición de la mosca se logra dando los valores a X y Y. En nuestro caso ($X=6$, $Y=5$).

Tres dimensiones

En el caso de un cuerpo que siguiera una trayectoria de tres dimensiones, es decir que se moviera por el espacio, necesitaríamos tres coordenadas para determinar su posición en un instante dado. El concepto es similar al de 2 dimensiones, solo que se agrega un eje más llamado Z :



Una vez ubicado el origen de coordenadas y los ejes XYZ, la ubicación de un punto P en el espacio queda determinado por el valor de sus coordenadas $P = (x,y,z)$

El tiempo.

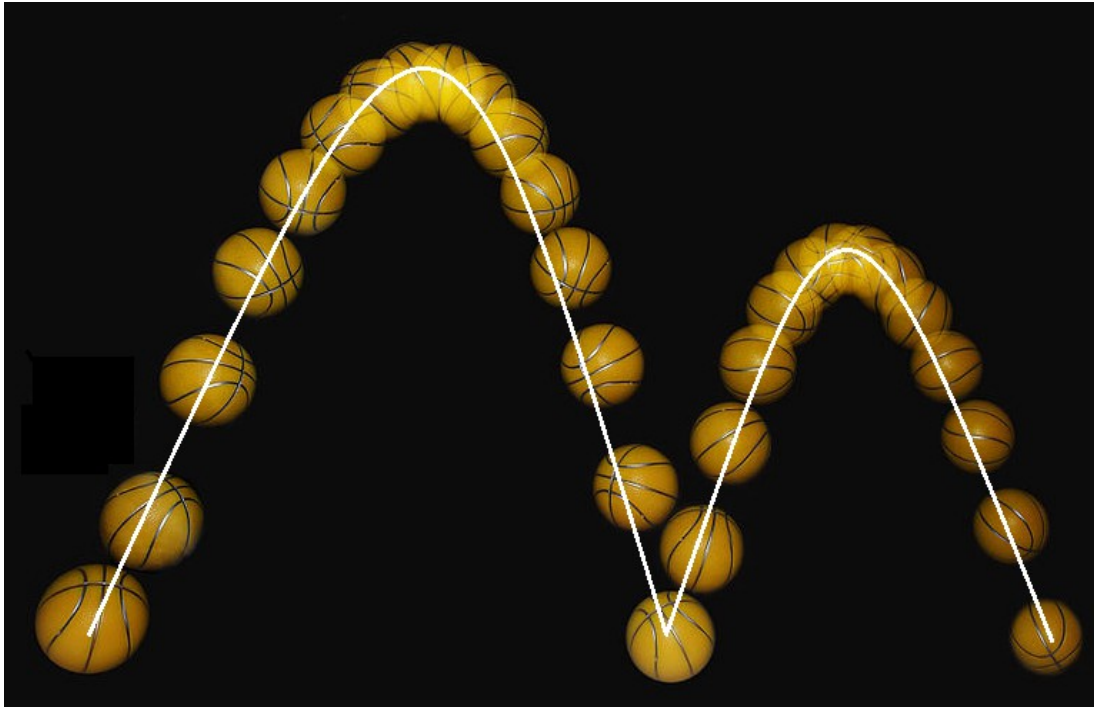
De la misma forma que para las coordenadas espaciales, para identificar un instante de tiempo debemos también saber a que referirlo:

- 300 años antes de Cristo.
- Dentro de 2 horas.
- Cuenta regresiva en una lanzamiento espacial.

Para medir el tiempo hay que definir un origen o tiempo cero y luego indicar cuantas unidades de tiempo transcurren hasta que ocurre el evento que queremos identificar. Las unidades pueden ser segundos, minutos, horas, etc. Usualmente se utiliza una cantidad positiva si el evento ocurre después del origen y negativa para el caso que ocurra antes. Por convención a este número lo llamamos coordenada temporal y se identifica con la letra **t**.

Trayectoria.

Ahora podemos considerar una partícula y estudiar las posiciones que va ocupando en diferentes instantes. La trayectoria es la línea formada por las sucesivas posiciones por las que pasa un móvil.



Trayectoria de un balón de basket. Indicada en la línea blanca corresponde a la secuencia de puntos por donde pasó el balón en cada instante del tiempo.

Parece razonable que podamos hacer una primera clasificación de los movimientos utilizando como criterio la forma de su trayectoria:

Tipos de Movimientos

de una dimensión
de dos dimensiones
de tres dimensiones

Tipos de trayectorias

Líneas rectas
Líneas curvas planas
Líneas curvas no planas

Descripción del movimiento.

Para un estudio completo del movimiento debemos relacionar posiciones e instantes. Es intuitivo afirmar que la partícula debe ocupar una y sólo una posición en cada instante, aunque si puede ocupar una misma posición una y otra vez en diferentes instantes. Esto nos lleva a decir que la posición es una función del tiempo, o sea

$$\vec{r} = r(t)$$

Como r denota una posición, se representa como un vector de una, dos o tres dimensiones de acuerdo al caso. En general, decimos que se trata de un vector de 3 dimensiones siendo que el espacio físico en el que vivimos tiene 3 dimensiones. El caso de un plano o de una recta son casos particulares.

$$\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$$

Conocer la función $r(t)$ es conocer todo acerca del movimiento que hace la partícula que estudiamos, es decir donde estuvo en cada instante pasado y donde estará en cada instante futuro.

Cabe aclarar que en la vida real, rara vez se puede encontrar una expresión algebraica simple para tal función, debido a que las partículas interactúan entre sí y con el resto del medio, y producto de dichas interacciones cambian sus posiciones, inclusive de manera caótica. Por ejemplo las distintas moléculas de agua que se desplazan por una tubería, chocan entre si y entre las paredes de la tubería de forma que hacen su estudio sumamente complicado. Las funciones que describen este tipo de movimientos se estudian en dinámica de los fluidos.

Afortunadamente hay muchísimos casos donde sí es posible hallar una función $r(t)$ que permita describir el movimiento de una partícula y usarla para hacer una simulación. Son casos donde la partícula está aislada, o bien, durante un período de tiempo lo suficientemente pequeño como para que la partícula no interactúe (colisione) con ningún otra. Un ejemplo podría ser el disparo de una bala en un juego de FPS. Mientras la bala no colisione con ningún personaje se puede usar una simple ecuación de movimiento rectilíneo uniforme (como veremos más adelante). Cuando la bala colisiona con algún personaje la ecuación deja de ser válida, pero ya no tiene sentido seguir simulando el movimiento del proyectil. En los siguientes capítulos estudiaremos algunas funciones de movimiento típicas.

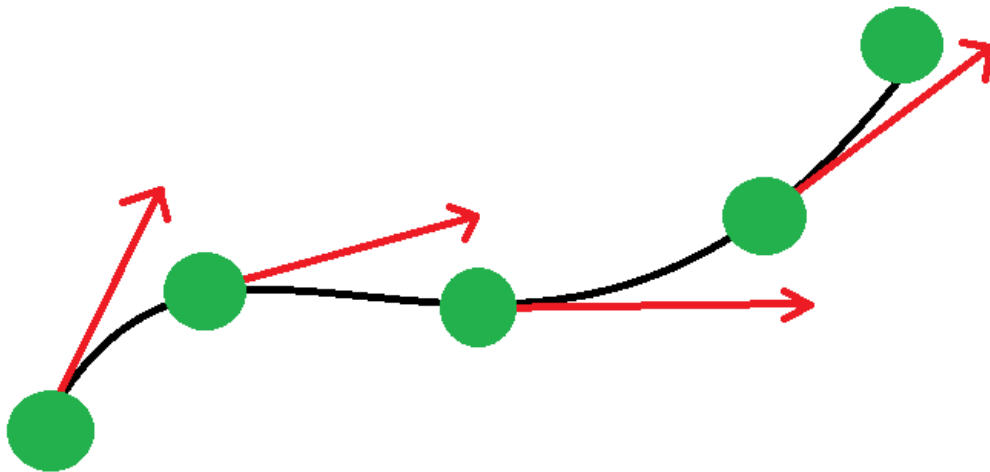


First Person Shooter. Se pueden usar las ecuaciones del movimiento para determinar si la trayectoria de la bala (marcada en amarillo) da en el blanco.

Velocidad media.

La velocidad es una cantidad física que expresa el desplazamiento de un objeto por unidad de tiempo. En general se trata de una cantidad vectorial, es decir que tiene dirección y magnitud. La dirección es siempre tangente a la trayectoria y su sentido es el mismo que el del desplazamiento.

La magnitud de la velocidad es lo que conocemos como rapidez (speed en inglés) y es el concepto con el cual estamos más familiarizados. Por ejemplo, es el valor que indica el velocímetro de un automóvil.



La velocidad es una cantidad vectorial. Su dirección es tangente a la trayectoria y su sentido es siempre en la dirección del desplazamiento.

A la rapidez también se la llama "velocidad sobre la trayectoria", y muchas veces para abreviar simplemente se usa el término "velocidad", lo cual puede generar alguna confusión, pues la palabra "velocidad" se puede referir al vector velocidad o al escalar rapidez o velocidad sobre la trayectoria. En un caso se trata de una cantidad vectorial y en el otro de una cantidad escalar. Nosotros por simplicidad usaremos el término velocidad en los apuntes para referirnos a cualquiera de las 2 velocidades y en las fórmulas usaremos la notación habitual de \vec{v} para el vector velocidad y v para su magnitud o módulo. En los movimientos rectilíneos, la trayectoria es una línea recta y el vector velocidad \vec{v} coincide con su módulo v , ya que solo hace falta una dimensión.

En esta primera parte vamos a estudiar los movimientos en una sola dimensión, lo que se llama Cinemática 1D, con lo cual no hay que tener en cuenta la dirección del vector velocidad, pues es siempre única dirección posible, que es la recta sobre la cual el objeto se está moviendo. En la segunda parte del apunte estudiaremos movimientos en el plano, o sea Cinemática 2D, y ahí si tendremos que distinguir con mayor cuidado cuando se trate del vector velocidad \vec{v} , y tener en cuenta su dirección y su sentido, y cuando se trate del módulo o la rapidez v en cuyo caso es valor escalar.



En los movimientos rectilíneos la trayectoria es una línea recta. La velocidad se comporta como un cantidad escalar y se puede usar simplemente el módulo o rapidez.

La velocidad sobre la trayectoria se calcula dividiendo la distancia recorrida por el tiempo empleado en recorrerla (lapso) :

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Por convención se usa el símbolo Δ (delta) para indicar una variación entre 2 cantidades. Si la distancia recorrida se mide en metros y el tiempo en segundos, la velocidad obtenida se encuentra expresada en metros sobre segundos, que es la unidad en el sistema internacional de unidades, y su símbolo es m/s.

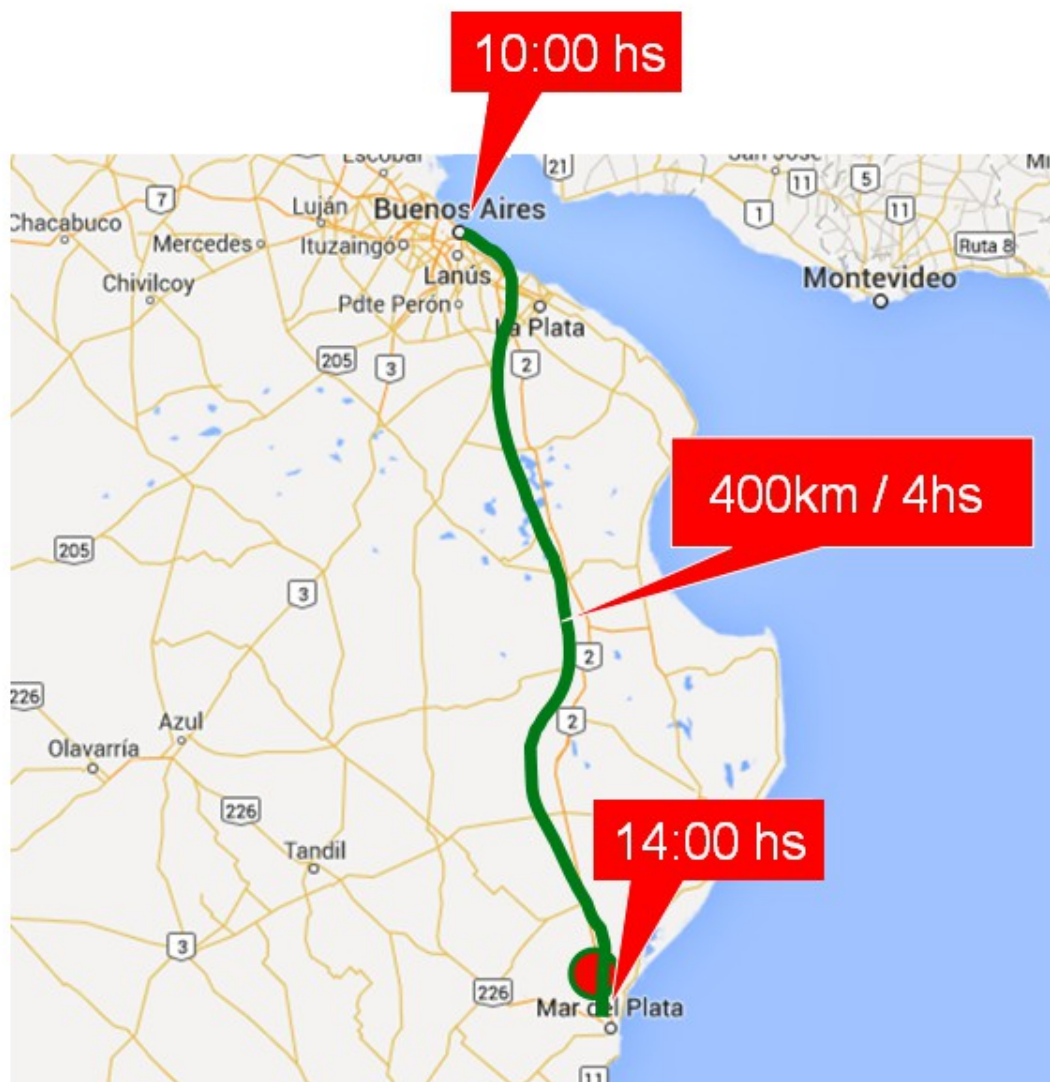
Otra unidad usual, ya que es usada en la vida cotidiana, es el kilómetro x hora , cuyo símbolo es km/h.

Para transformar velocidades de una unidad a otra se puede utilizar la siguiente equivalencia :

$$1 \text{ km/h} \approx 0,27778 \text{ m/s}$$

Ejemplo:

Un móvil parte de la ciudad de Buenos Aires a las 10 de la mañana. Tomando la ruta 2 luego de recorrer la distancia de 400 km llega a las 14:00 hs a la ciudad de Mar del Plata.



Velocidad Media. El recorrido no es línea recta, pero estamos usando la noción de velocidad sobre la trayectoria. Es como si se estirara la ruta para transformarla en una recta de 400 km de longitud.

Para calcular la velocidad del automóvil usamos la fórmula:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{400 \text{ km}}{4 \text{ hs}} = 100 \text{ km/h}$$

La velocidad así calculada se llama velocidad media, pues representa el promedio de la velocidad durante todo el viaje. En nuestro caso, el auto no siempre se movió a 100 km/h. Probablemente hubo momentos en los que pudo ir mucho más rápido, por ejemplo a la velocidad máxima de la ruta 2 de 130 km/h. Incluso pudo haber momentos en los que estuvo totalmente detenido, por ejemplo para cargar nafta en una estación de servicio. La velocidad de 100 km/h es simplemente un promedio de todo el viaje.

Velocidad instantánea.

En ejemplo anterior, conocíamos la posición del auto en solo 2 momentos, al inicio del viaje, cuando el auto se encontraba en Buenos Aires, y al final de viaje, 4 horas más tarde, cuando el auto se encontraba en Mar del Plata. Esto no nos dice mucho del viaje en sí. Para una descripción mas detallada, deberíamos conocer la posición del auto en más instantes. Cuanto más próximos sean los instantes en que conocemos su posición mas detallada será la descripción del movimiento.

En ese caso tendremos más valores de la velocidad media, cada uno correspondiente a un intervalo de tiempo más corto. La velocidad instantánea es el valor al que parece aproximarse la velocidad media cuando los intervalos de tiempo se hacen cada vez más cortos. La velocidad instantánea es similar a la que informa el velocímetro del auto, es decir la velocidad que tiene el auto en ese preciso instante.

Matemáticamente se dice que es el "límite" de la velocidad media, cuando el lapso de tiempo tiende a cero:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Aceleración media.

La aceleración es una cantidad física que mide el cambio de la velocidad por unidad de tiempo. Es decir la aceleración produce un cambio en la velocidad. Como toda cantidad vectorial tiene una dirección y una magnitud.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Aceleración instantánea.

Haciendo el mismo análisis que hicimos para la velocidad, cuando tomamos intervalos de tiempo cada vez más pequeños, la aceleración media se convierte en aceleración instantánea:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

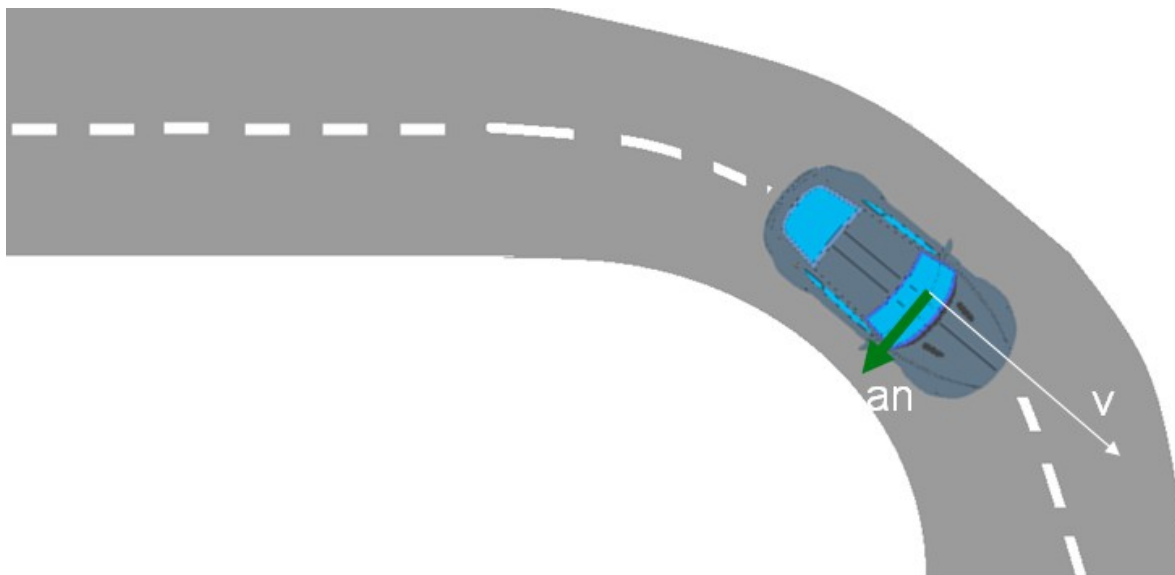
Aceleración Tangencial y Aceleración Normal.

Cuando estamos conduciendo un automóvil en línea recta y pisamos el acelerador, el auto aumenta su velocidad manteniendo la misma dirección. Es decir se modifica sólo la magnitud o módulo de la velocidad. Este es el concepto intuitivo que tenemos de aceleración. A esta aceleración se la llama tangencial, pues tiene la misma dirección que la velocidad y es tangente a la trayectoria. El sentido puede ser el mismo que la velocidad, (como al pisar el acelerador) o bien en sentido contrario, por ejemplo cuando se pisa el freno (desaceleración).



La aceleración tangencial tiene la misma dirección que la velocidad. Por lo tanto no modifica la dirección del móvil. Puede ser en el mismo sentido del movimiento (aceleración) o en sentido contrario (frenado).

Cuando tomamos una curva (supongamos que el velocímetro del auto marca siempre la misma velocidad en toda la curva), también produce una aceleración que hace que vaya cambiando la dirección del vector velocidad. A esta aceleración se la llama normal o centrípeta.



La aceleración normal tiene la 90 grados con respecto a la dirección que la velocidad. Por lo tanto no modifica la rapidez del móvil, solo hace que cambie de dirección. Es la aceleración que sentimos cuando venimos manejando y tomamos una curva.

Resumiendo:

Velocidad media es la variación de la posición en un lapso de tiempo.

Cuando ese lapso de tiempo se hace cada vez mas corto:

Velocidad instantánea es la derivada del vector posición con respecto al tiempo.

Aceleración media es la variación de la velocidad en un lapso de tiempo.

Cuando ese lapso de tiempo se hace cada vez mas corto:

Aceleración instantánea es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo, o sea la derivada segunda de la posición con respecto al tiempo.

Ecuaciones del Movimiento.

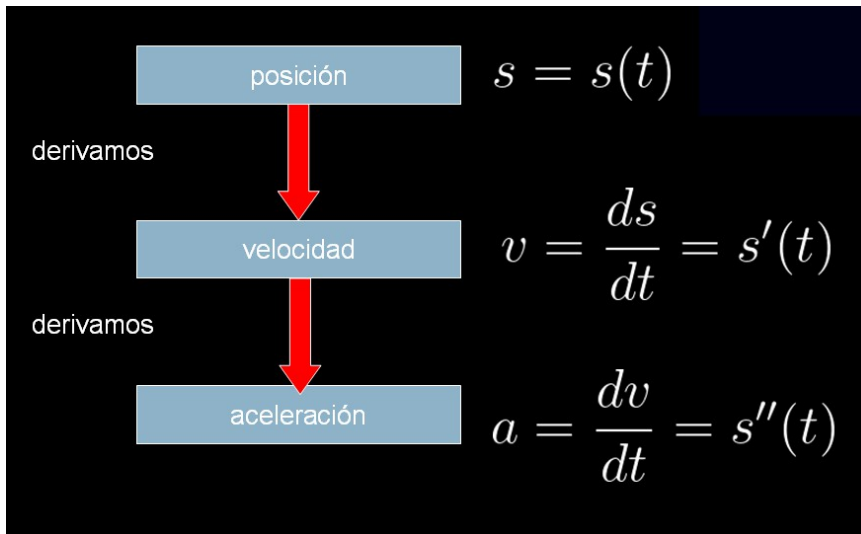
En términos diferenciales la velocidad es la derivada del desplazamiento (cambio de posición) con respecto al tiempo :

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (1)$$

Y la aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo o sea la derivada segunda del desplazamiento con respecto al tiempo.

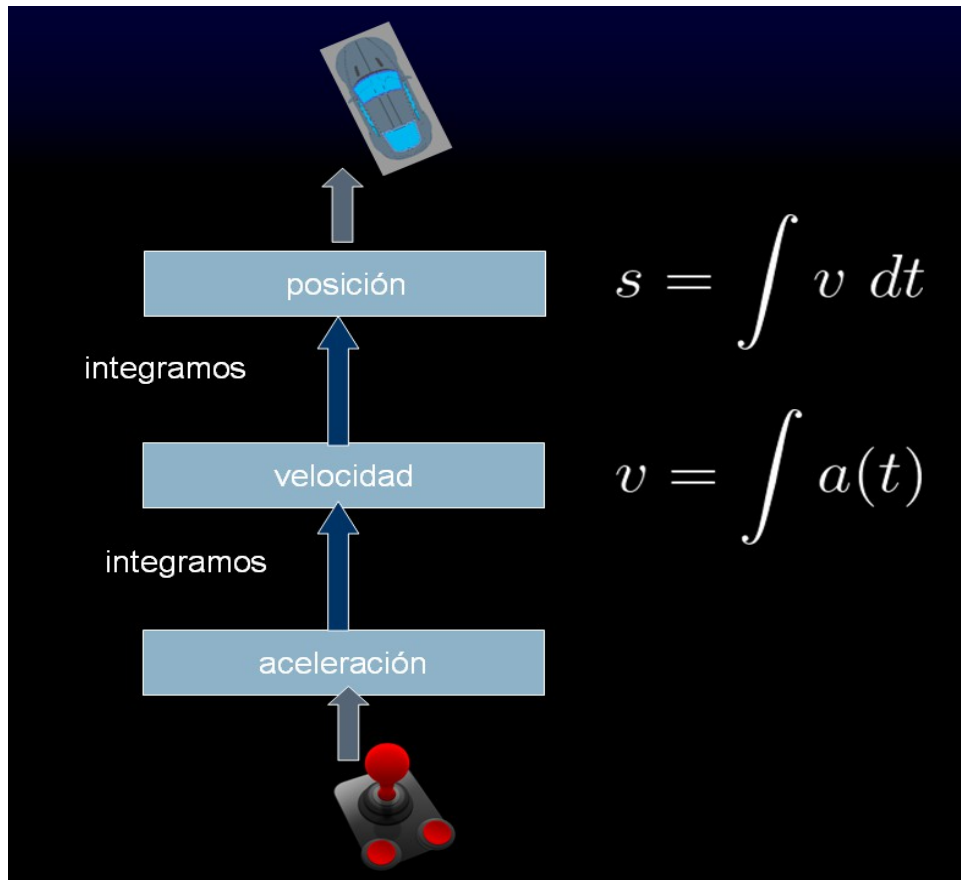
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2v}{dt^2} \quad (2)$$

Es decir que partiendo de la posición, se puede derivar una vez para obtener la velocidad y una vez más para obtener la aceleración:



Derivando la posición con respecto al tiempo obtenemos la velocidad. Volviendo a derivar se obtiene la aceleración.

En una simulación física la situación usualmente es la inversa y lo que precisamos averiguar es la posición del objeto que estamos simulando a partir de sus cambios en la velocidad (aceleración). Por ejemplo el jugador puede usar el joystick y el teclado para modificar la velocidad del auto (acelerar, frenar, cambiar la dirección) en un juego de carreras. Partiendo de que conocemos la aceleración, tenemos que realizar el proceso inverso, es decir lo que en cálculo se llama "integrar", para obtener la velocidad, y luego integrar nuevamente para obtener la posición, que es finalmente la variable que vamos a usar para poder dibujar el objeto en la simulación.



El jugador controla a aceleración del auto con el joystick. Para obtener la posición tenemos que integrar 2 veces.

Partiendo de la ecuación (2) podemos despejar dv (cambio de la velocidad) :

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a dt \quad (3)$$

Esta ecuación es de gran importancia práctica, ya que a partir de la aceleración que podemos medir tomando los datos del teclado o del joystick, nos permite calcular la variación en la velocidad. Ojo! que es la "variación" de la velocidad, para obtener la velocidad actual o velocidad instantánea tenemos que sumar dicha variación al valor anterior de la velocidad.

Y siguiendo el mismo análisis, usando la ecuación (1) podemos despejar ds (cambio en la posición) :

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v dt \quad (4)$$

Ojo! que es la "variación" de la posición, para obtener la posición actual que es la que usamos para dibujar la simulación, tenemos que sumar dicha variación al valor de la posición anterior.

Las ecuaciones (3) y (4) constituyen la base de los sistemas de simulación y serán analizamos en mayor profundidad más adelante. Por ahora, una **de** las formas más simples de implementar estas ecuaciones es:

```
v = v + a * dt;  
x = x + v * dt;
```

Donde x representa la posición y dt el lapso de tiempo o elapsed time, es decir el tiempo transcurrido desde la última vez que actualizamos los datos. Se supone que se conoce la aceleración a , y se aplica la fórmula (3) para modificar la velocidad. La fórmula (4) da el cambio en la velocidad, y por lo tanto hay que sumárselo al valor de la velocidad anterior para obtener la valor actual.

Luego con el valor de la velocidad actual en la variable v , se aplica la fórmula (3) para obtener el cambio en la posición que, hay que sumárselo al valor anterior para obtener la posición actual.

Estas 2 simples líneas de código representan el proceso de integración, y es el método conocido como método de Euler. Como veremos más adelante existen otros métodos de integración más potentes (con menos margen de error).

Resumiendo:

Integrando la aceleración se obtiene el cambio en la velocidad.

Para integrar se multiplica la aceleración por el tiempo transcurrido.

El cambio en la velocidad se suma a la velocidad anterior para obtener la actual.

Integrando la velocidad se obtiene el cambio en la posición.

Para integrar se multiplica la velocidad por el tiempo transcurrido.

El cambio en la posición se suma a la posición anterior para obtener la actual.

Este proceso se llama Método de Integración de Euler.

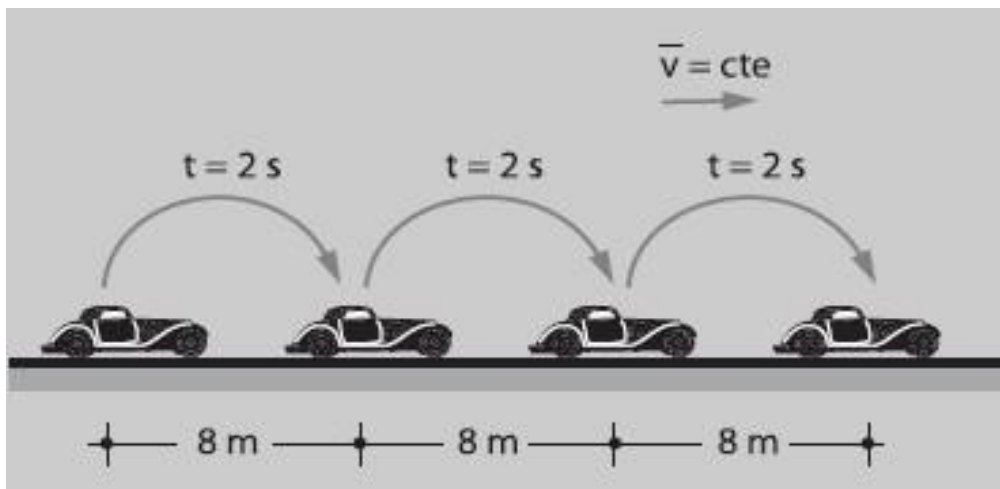
Movimiento Rectilíneo Uniforme. (MRU)

En este movimiento la velocidad permanece constante y no hay una variación de la aceleración en el transcurso del tiempo. Este caso corresponde al movimiento de un objeto lanzado en el espacio fuera de toda interacción, o al movimiento de un objeto que se desliza sin fricción. El objeto se mueve en línea recta, siendo la velocidad v constante y la posición x variará linealmente respecto del tiempo, según las ecuaciones:

$$v = v_0 = \text{const.}$$

$$x = v_0 t + x_0$$

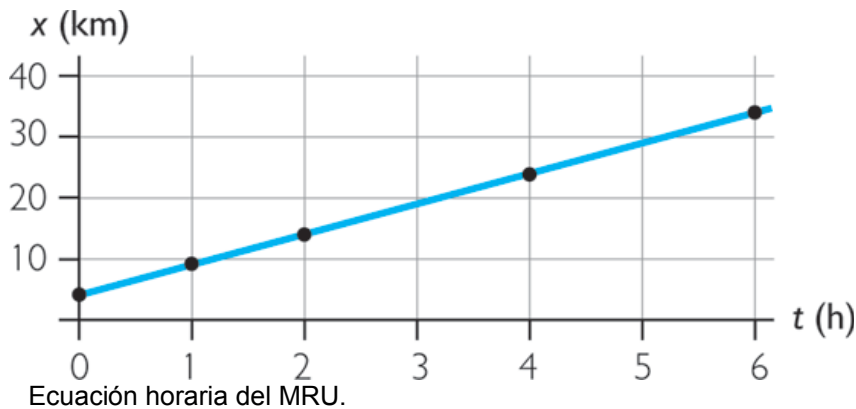
Donde x_0 es la posición inicial del móvil respecto al centro de coordenadas, es decir para $t = 0$. Como la velocidad es constante, y recordando que la aceleración mide los cambios de velocidad en función de tiempo, se deduce que la aceleración es cero.



MRU: Auto moviéndose en línea recta con velocidad constante. Cada 2 segundos recorre siempre 8 metros.

Como el objeto se mueve en línea recta, solo hace falta una coordenada para representar los vectores de posición, velocidad y aceleración. En este caso particular, se puede graficar la posición en función del tiempo utilizando ejes cartesianos. Dicha representación grafica se denomina "ecuación horaria". En el eje horizontal se suele representar el tiempo, y en el vertical la posición, que es igual a la distancia recorrida, ya que la partícula se mueve en línea recta. OJO! La ecuación horaria es una gráfica que representa la posición x en función del tiempo,

NO ES LA TRAYECTORIA DE UNA PARTÍCULA que se mueve hacia arriba en línea recta.



El gráfico siempre es una línea recta, la pendiente representa la velocidad. Por lo tanto la recta es creciente si la velocidad es positiva. La velocidad puede ser negativa si el móvil se está moviendo en dirección contraria.

Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado. (MRUV)

El movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA), también conocido como movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV), es aquel en el que un móvil se desplaza sobre una trayectoria recta estando sometido a una aceleración constante.

Un ejemplo de este tipo de movimiento es el de caída libre (y tiro vertical), en el cual la aceleración interviniente, y considerada constante, es la que corresponde a la gravedad.

También puede definirse como el movimiento que realiza una partícula que partiendo del reposo es acelerada por una fuerza constante. Por ejemplo un auto de fórmula en la recta de largada. Parte del reposo (velocidad inicial = 0) y cuando se da la señal de largada el piloto pisa el acelerador, y el auto acelera constantemente hasta el final de la recta principal. Durante ese lapso tuvo un MRUV.

El MRUA, como su propio nombre indica, tiene una aceleración constante:

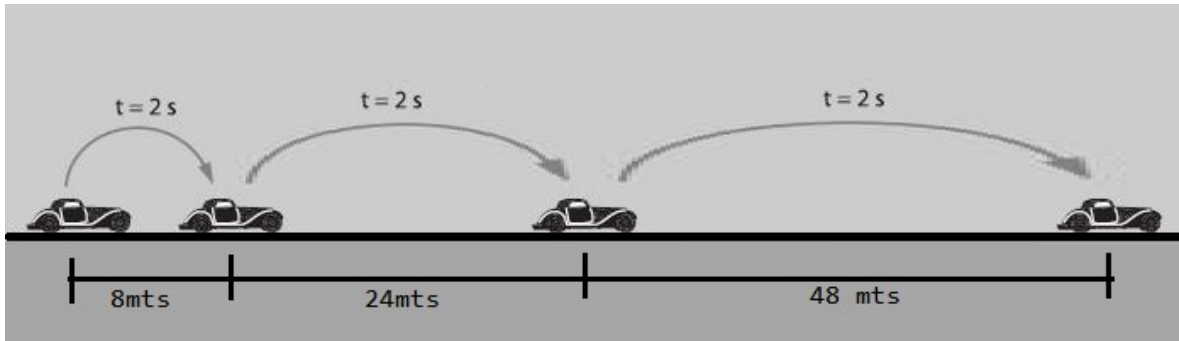
$$a(t) = a$$

La velocidad v para un instante t dado (siendo v_0 , la velocidad inicial):

$$v(t) = at + v_0$$

Finalmente la posición x en función del tiempo se expresa por: (siendo x_0 , la posición inicial.)

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$



MRUV: Auto moviéndose en línea recta con aceleración constante de 4 m/s^2 . Tomando intervalos fijos de 2 segundos, cada vez recorre más distancia.

El gráfico de la distancia recorrida en función del tiempo, para el MRUV es una parábola, ya que como se puede ver de la ecuación cinemática, se trata de una función cuadrática. OJO! que se trata de un gráfico de la distancia recorrida (X) en función del tiempo (t) y de ninguna manera representa la trayectoria de un partícula que se esta moviendo hacia arriba!



Ecuación horaria del MRUV.

Caída Libre y Tiro Vertical.

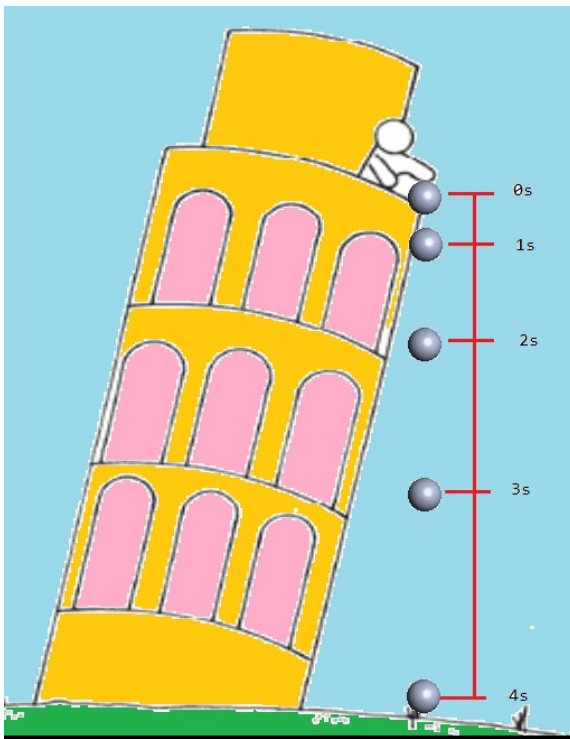
Un ejemplo cotidiano de movimiento con aceleración constante es el de un cuerpo que cae hacia la Tierra. Se observa experimentalmente que si no hay resistencia del aire, todos los cuerpos, independientemente de su peso, tamaño y

forma caen con la misma aceleración en la misma región de la superficie terrestre. Así mismo si la distancia recorrida no es demasiado grande comparada con el radio de la Tierra, dicha aceleración es constante. A este movimiento en el cual se desprecia la resistencia del aire, y las pequeñas variaciones de la fuerza de gravedad debidas a la altura, se llama caída libre. De la misma forma, cuando se lanza un objeto hacia arriba se llama tiro vertical.

Tanto en la caída libre, como en el tiro vertical, que en verdad son casos particulares del MRUV, la aceleración debido a la gravedad la llamaremos g , su valor cerca de la superficie del planeta es de aproximadamente $9,8 \text{ m/s}^2$ y siempre se dirige hacia el centro de la Tierra.

Supongamos una caída libre desde el reposo, es decir la velocidad inicial $v_0 = 0$, y que el objeto esta inicialmente a una altura h_0 , reemplazando estos valores y la constante de aceleración de la gravedad g en las ecuaciones del MRUV obtenemos las ecuaciones de la caída libre:

$$\begin{aligned} v_y(t) &= -gt \\ y(t) &= h_0 - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \quad \text{Ecuaciones de la caída libre}$$

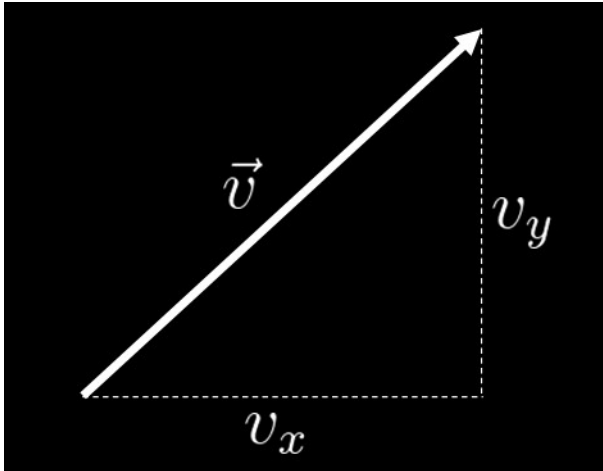


Ejemplo de caída libre.

Cinemática 2d.

Hasta aquí hemos visto movimientos rectilíneos, en donde los vectores velocidad y aceleración son colineales, es decir tienen la misma dirección. Sin embargo hay casos donde esto no ocurre y entonces el movimiento se realiza en una trayectoria curva.

En 2 dimensiones la partícula se puede mover en cualquier dirección del plano, por lo tanto para poder describir el movimiento, las variables cinemáticas de posición, velocidad y aceleración tienen que ser vectoriales. No alcanza solo con la magnitud de dichas cantidades, si no que es preciso establecer la dirección.



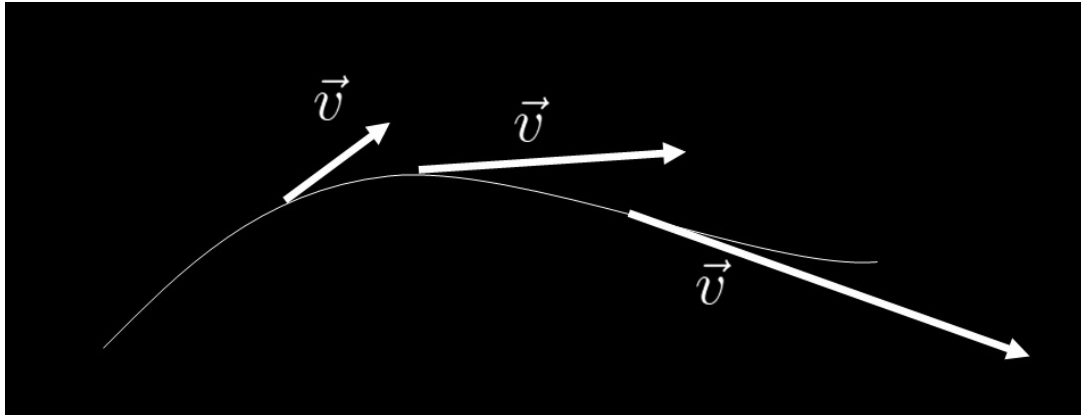
Un vector v en 2 dimensiones está compuesto de 2 componentes, una vertical llamada v_y y otra horizontal llamada v_x .

Una partícula que se mueve libremente en 2 dimensiones describe una trayectoria que es representada por una curva en el plano. La trayectoria es la curva que une todos los puntos por los cuales pasó la partícula.



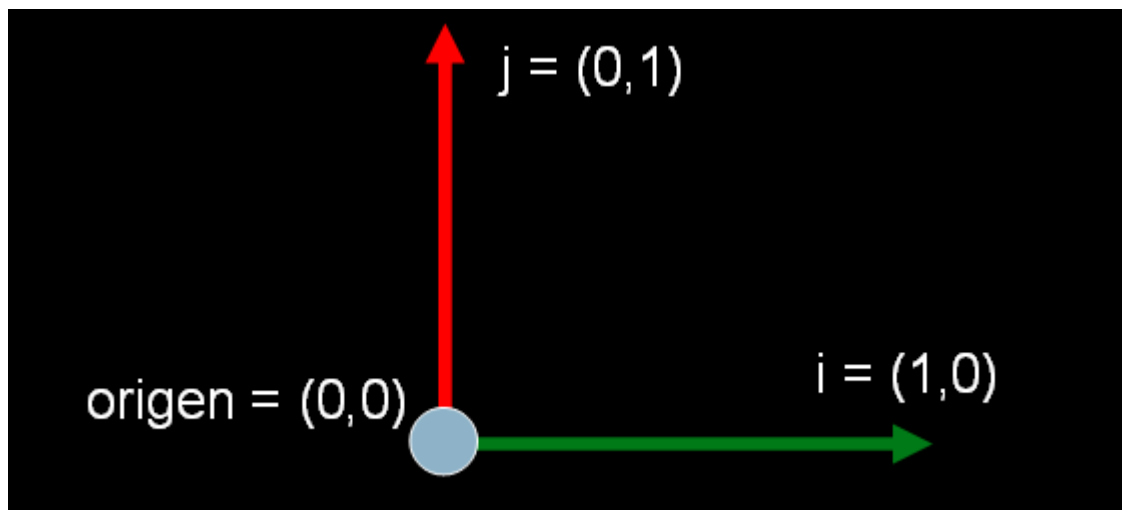
Trayectoria de una hormiga en 2 dimensiones. (marcada en amarillo)

El vector de velocidad es tangente a la curva de la trayectoria en cada punto y su magnitud representa la rapidez instantánea en dicho punto.



Trayectoria y vector velocidad.

Para trabajar algebraicamente en 2 dimensiones puede resultar conveniente usar la notación vectorial. Para ello definimos 2 vectores unitarios y ortogonales entres si (a 90 grados) que representan los ejes verticales y horizontales, es decir una base del espacio 2d. Dichos vectores se llaman versores del plano y se representan usualmente con las letras i y j con una flecha arriba.



Sistema de Referencia en 2 D.

Cualquier vector de 2 dimensiones se puede escribir como la suma de su componente horizontal multiplicada por el versor i más su componente vertical multiplicada por el versor j . Es decir:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Con esta notación podemos reescribir las ecuaciones del movimiento que estudiamos hasta ahora para que funcionen 2 dimensiones:

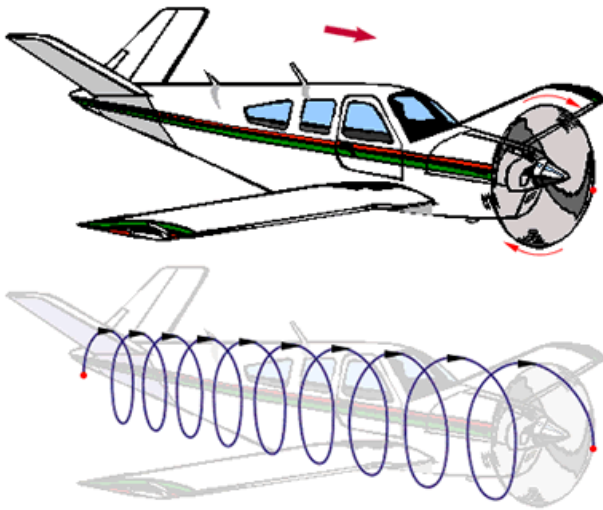
$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$

velocidad

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

aceleración

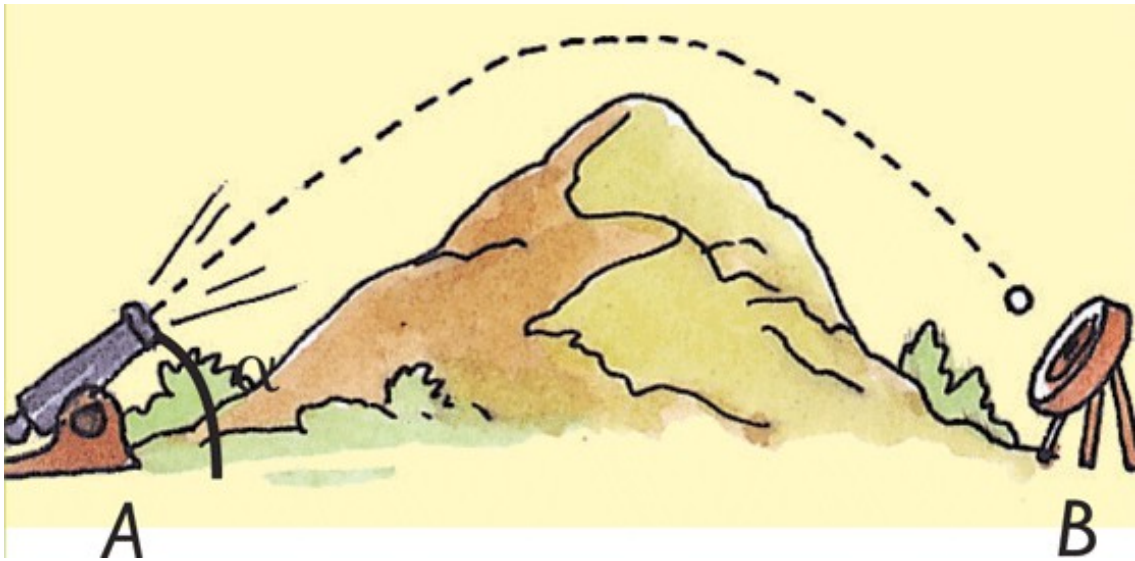
Luego, podemos trabajar con cada eje en forma independiente y luego combinar los resultados. Esta propiedad de "separabilidad" de los ejes es de suma importancia práctica ya que permite dividir un problema complejo como el movimiento en 2 dimensiones en dos problemas simples de movimiento en una sola dimensión, que ya los tenemos estudiados. Además el mismo criterio se aplica a los problemas de cinemática en 3 dimensiones y todo tipo de movimientos más complicados, como veremos más adelante. Esta técnica se denomina "composición de movimientos".



Composición de movimientos. El movimiento del punto rojo en la hélice del avión se puede describir como una composición del movimiento rectilíneo del avión y el circular de la hélice.

Movimiento Parabólico.

Se denomina movimiento parabólico al realizado por un objeto cuya trayectoria describe una parábola. Se corresponde con la trayectoria ideal de un proyectil que se mueve en un medio que no ofrece resistencia al avance y que está sujeto a un campo gravitatorio uniforme. El disparo de un cañón, el lanzamiento de un tiro libre en fútbol, etc (sin tener en cuenta el rozamiento del aire) son ejemplos de movimientos parabólicos. También se llama tiro parabólico o tiro oblicuo. Este tipo de movimiento puede ser analizado como la composición de dos movimientos rectilíneos: un movimiento rectilíneo uniforme horizontal y un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado vertical.



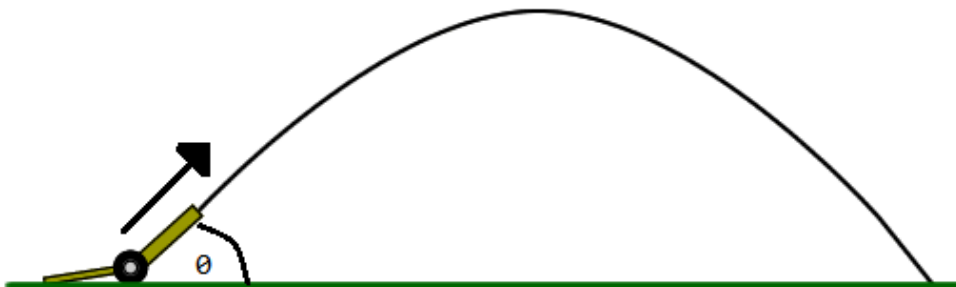
Ejemplo de movimiento parabólico: juego del cañón.

El tiro parabólico tiene las siguientes características:

- Conociendo la velocidad de salida (inicial), el ángulo de inclinación inicial y la diferencia de alturas (entre salida y llegada) se conocerá toda la trayectoria.
- Los ángulos de salida y llegada son iguales.
- La mayor distancia cubierta o alcance se logra con ángulos de salida de 45° .
- Para lograr la mayor distancia fijado el ángulo el factor más importante es la velocidad inicial (velocidad del disparo).
- Se puede analizar el movimiento en vertical independientemente del horizontal.

Ecuaciones de movimiento parabólico.

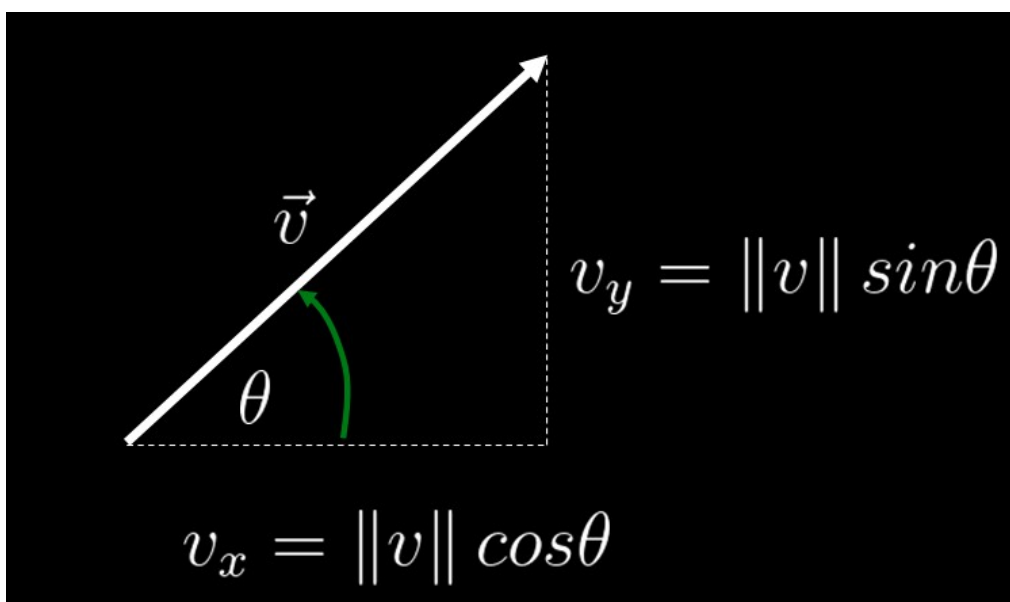
Supongamos que estamos simulando un juego de disparo de cañón. En este tipo de juegos el jugador tiene que indicar la inclinación del cañón (es decir el ángulo que forma el eje del cañón con el piso), y la intensidad del disparo.



Juego del cañón. Las condiciones iniciales son la inclinación del cañón y la intensidad del disparo.

Una vez realizado el disparo, y suponiendo que no existen ninguna otra influencia externa, como el rozamiento del aire, y no hay ningún obstáculo que se interponga en la trayectoria de la bala, la misma va a describir una curva llamada parábola, hasta hacer impacto con el piso (donde termina la simulación).

Cuando tenemos el ángulo y la magnitud de un vector de la velocidad inicial, podemos usar la siguientes fórmulas de trigonometría para calcular las componentes horizontales y verticales.



Ahora vamos a re-escribir la ecuación general del movimiento usando la notación vectorial que acabamos de introducir:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \quad (1) \quad \text{Ecuación MRUV}$$

Todos los cuerpos caen en dirección hacia abajo (el centro de la tierra), con lo cual queda claro que la aceleración de la gravedad solo tiene componente vertical. También hay que tener en cuenta que el sentido es hacia "abajo", con lo cual g es negativo o bien hay que restar el término de la aceleración en la ecuación (1).

$$\vec{a} = g\vec{j} \quad (2) \text{ Aceleración de la gravedad constante y hacia abajo.}$$

Ahora supongamos que la bala se lanza con una velocidad inicial \vec{v}_0 , cuyo módulo es v_0 y su dirección forma un ángulo θ con el piso, entonces :

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos\theta \vec{j} + v_0 \sin\theta \vec{i} \quad (3) \text{ velocidad inicial}$$

Por último el vector \vec{r}_0 es la posición inicial del cañón. Sin perder generalidad podemos decir que se encuentra en el origen de coordenadas y a cierta altura. (que podría ser cero si el cañón está sobre el piso)

$$\vec{r}_0 = h_0 \vec{i} \quad (4) \text{ posición inicial}$$

Reemplazando las ecuaciones (2), (3) y (4) en la ecuación (1), y escribiendo las componentes horizontales y verticales en forma separada nos quedan estas ecuaciones generales del movimiento parabólico:

$$x = v_0 \cos\theta t \quad (5) \text{ movimiento horizontal = MRU}$$

$$y = h_0 + v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (6) \text{ movimiento vertical = MRUV}$$

La ecuación (5) describe el movimiento horizontal y como se puede ver se trata de un movimiento rectilíneo uniforme. La velocidad es constante, y es proporcional a la intensidad del disparo y depende también del ángulo con el que se realiza el mismo.

La ecuación (6) describe el movimiento vertical y se puede ver que se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, la aceleración constante es la de la gravedad. La bala primero sube gracias al impulso de la velocidad inicial, pero la gravedad la va frenando, hasta que eventualmente se frena del todo cuando alcanza un máximo de altura. En ese momento el componente de la velocidad vertical es cero, y a partir de ahí comienza a caer, cada vez más rápido debido a la aceleración de la gravedad, hasta que eventualmente impacta en el suelo.

Las ecuaciones (5) y (6) combinadas permiten simular el movimiento parabólico en dos dimensiones y es un claro ejemplo de como un problema, en principio complejo, se puede dividir en problemas más simples y atacarlos por separado.