

用偏微分方程作图像分析与处理

谢美华 王正明

(国防科技大学五院系统工程研究所,长沙 410073)

摘要 从偏微分方程去噪模型出发,论述了噪声抑制的原理,去噪方法与正则化方法和小波萎缩方法之间的联系;并根据这种联系,从正则化模型的角度分析了用偏微分方程进行图像复原以及超分辨等方面的应用。最后展望了发展前景。

关键词 图像处理 偏微分方程 正则化 小波

Application of Partial Difference Equation in Image Analysis and Processing

XIE Meihua WANG Zhengming

(System Engineering Institute, National University of Defense Technology, Changsha 410073)

Abstract The application of partial difference equation (PDE) in image analysis and processing is discussed. The PDE models for image denoising, the principle of PDE denoising their reduction approach and development processes are introduced. The relations of PDE, regularization and wavelet shrinkage are analyzed, the application of PDE in image restoration and image superresolution are introduced a preview of its development is given, and point out that the best way to evolve PDE is combining PDE with wavelet, regularization and basis pursuit to get a new model. An example of combining these models is given and good result in signal denoising is obtained.

Key words image processing partial difference equation regularization wavelet

1 引言

图像处理的总目标是提取图像中的总趋势特征,并准确地定位“边缘细节”等表征突变信息的曲线特征。经典处理方法重视提取总趋势特征,但忽视保护细节。近来的研究则着重于挖掘高频信息,其中富有代表性的有小波方法、正则化方法、最大后验估计法以及偏微分方程方法等。偏微分方程方法所利用的先验信息是图像为分片光滑的二元函数,只是该函数在某些重要数据处不连续。根据图像分片光滑的特性可构造关于梯度的约束,而根据图像处理目的的不同又可构造图像与原始图像之间的相似性约束,将此两个约束组合即得

到变分方程,进而由 Euler 方程得到图像处理的抛物方程。当然,这些约束的构造需考虑很多条件,这就决定了模型的发展和完善须经过一个较长的过程,这个发展过程包括由线性到非线性的发展、由低阶向高阶的发展。

2 图像去噪的偏微分方程模型

2.1 偏微分方程去噪模型的导出

偏微分方程应用于图像去噪最初是基于对以下事实的认识。

定理 1 令 $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ 是一个因果的尺度空间,具有以下性质:对任意 $(x, y) \in \mathbb{R}^2, p \in \mathbb{R}^2$ 和 2×2 的对称矩阵 A , 存在图像函数 u 满足 $Du(x, y) = p, D^2u(x, y) = A$ 。如果尺度空间中的

转移算子 $T_{t,s}$ 是线性的并且是欧氏不变的,则函数 $u(t, x, y) = (T_t u_0)(x, y)$ 是以下热传导方程在 t 时刻的解^[1]

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

定理 1 说明了以高斯函数卷积为代表的一类低通滤波器等价于求解以信号为初值的热传导方程,这就为偏微分方程应用于图像处理架起了桥梁。

2.2 偏微分方程模型的去噪原理

定理 1 表明线性去噪模型(1)式的解实际上等价于高斯光滑过程,因而能实现对噪声的抑制。此外,还可从频域上理解(1)式去噪的原理,用分离变量法求解(1)式,可得其解的正弦级数展开式为

收稿日期: 2005-01-04; 收到修改稿日期: 2005-01-15

基金项目: 全国优秀博士论文作者专项基金(200140)和国家自然科学基金(60272013)资助课题。

$$u(x_1, x_2, t) = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N A_{kl} \exp \left[- \left(\frac{k^2 \pi^2 t}{M^2} + \frac{l^2 \pi^2 t}{N^2} \right) \right] \sin \left(\frac{k \pi x_1}{M} \right) \sin \left(\frac{l \pi x_2}{N} \right) \quad (2)$$

其中 N, M 分别为沿 x, y 方向的采样点个数, A_{kl} 为含噪图像 $u_0(x, y)$ 按正弦级数展开后的系数。(2)式表明, 经(1)式去噪后的图像的频谱等于含噪图像的频谱乘以一个与扩散时间相关的萎缩因子 $w(k, l) = \exp[-(k^2 \pi^2 t / M^2 + l^2 \pi^2 t / N^2)]$, 而随着 k, l 的增大 $w(k, l)$ 不断减小, 因此(2)式对 $u_0(x, y)$ 的高频成分保留很少, 因而能实现对噪声的抑制。

2.3 偏微分方程去噪模型的发展

线性模型常导致对图像边缘的模糊。为避免模糊的产生, 出现了下述非线性扩散方程^[3,4]

$$\begin{cases} \partial_t u = \operatorname{div}[g(|\nabla u|^2) \nabla u] \\ g(|\nabla u|^2) = 1/(1+|\nabla u|^2/k^2) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \partial_t u = \operatorname{div}[g(|\nabla u_0|^2) \nabla u] \\ g(|\nabla u_0|^2) = 1/(1+|\nabla u_0|^2/k^2) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases} \quad (3)$$

非线性扩散模型的优点是, 扩散系数的取值取决于图像梯度, 在梯度小处(对应图像的平坦区域)取值大以确保对噪声的抑制, 在梯度大处(对应图像的边缘)取值小以保护边缘。

偏微分方程去噪模型除了由线性向非线性发展以外, 还经历了由矢量型扩散向张量型扩散的发展。上述线性与非线性模型都属于矢量型扩散, 张量型扩散方程的模型为^[5~7]

$$\partial_t u = \operatorname{div}[D \nabla u], \quad u(0, x, y) = u_0(x, y) \quad (4)$$

张量型扩散能根据边缘走向确定沿边缘方向和垂直边缘方向的扩散速度以实现沿边缘方向去噪, 从而达到边缘增强的目的, 克服了非线性扩散方程对边缘处噪声无所作为的缺点。除上述两种发展过程以外, 还经历了由低阶向高阶的发展, 由实扩散向复扩散的发展, 由单一型正向扩散方程到前向-后向混合型扩散方程的发展等。其中四阶扩散方程的表达式为^[8,9]

$$\partial u / \partial t = \Delta[g(|\Delta u|) \Delta u] \quad (5)$$

它的目的是用较二阶方程更高阶的多项式来表示图像以消除二阶扩散的"块状"效应。复扩散方程的表达式为^[10]

$$u_t = \operatorname{div}(c \nabla u), \quad u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad c, u \in \mathbb{C} \quad (6)$$

它的特点是扩散系数取复值, 能在获得去噪后图像的同时, 通过其虚部获得图像的边缘。

前向-后向扩散方程的表达式为^[11,12]

$$\begin{cases} \partial_t u = \operatorname{div}[g(|\nabla u|^2) \nabla u] \\ (x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases} \quad g(s) = \begin{cases} 1 - (s/k_f)^n & 0 \leq s \leq k_f \\ \alpha \{ [(s - k_b)/w]^{2m} - 1 \} & k_b - w \leq s \leq k_b + w \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (7)$$

它的特点是在平坦区域扩散系数取正值以抑制噪声, 而在边缘区域取负值以锐化边缘, 因而不但可以抑制图像中存在的噪声, 还可以提高边缘的清晰度。

除这些主流模型外, 偏微分方程去噪模型还有很多形式, 如自适应扩散、多重网格扩散^[13~16]等, 从多个角度考虑了偏微分方程模型应用于图像处理时的特点, 得到了很好的处理结果。

3 偏微分方程方法与正则化、小波方法的联系

3.1 偏微分方程方法与正则化方法的联系

正则化方法是图像处理中一种常用方法, 通过对问题的解附加约束条件来保证解的稳定性和唯一性。下面讨论正则化方法与偏微分方程方法之间的联系^[16]。偏微分方程

$$\partial_t u = \operatorname{div}[g(|\nabla u|^2) \nabla u], \quad \partial_n u = 0, \quad u(x, y, 0) = u_0(x, y) \quad (8)$$

的解的隐式表达式为

$$[u(x, t+h) - u(x, t)]/h = \operatorname{div}[g(|\nabla u|^2) \nabla u](x, t+h), \quad u(x, 0) = u_0(x, y) \quad (9)$$

其中 $h > 0$ 为迭代步长。假设 g 在 $(0, \infty)$ 上可测, 且存在一个 $(0, \infty)$ 上的可微函数 ψ 满足 $\psi' = g$, 那么下述函数的最小解在 $t+h$ 时刻满足方程(9)

$$J(u) = \|u - u(x, y, t)\|^2 + h \int_{\Omega} \psi(|\nabla u|^2) d\Omega \quad (10)$$

若函数 J 为凸函数, 则 J 的最小解由方程(9)唯一确定。显然(10)式是一个典型的考虑了逼近项和稳健函数的正则

化函数, 权值 h 称为正则化参数。这样方程(8)的关于时间 t 离散的隐式表达式的解就等价于一个迭代的正则化过程, 亦即求解下述迭代的函数集的最小解

$$J_n(u) = \|u - u_{n-1}\|^2 + h_n \int_{\Omega} \psi(|\nabla u|)^2 d\Omega \quad (11)$$

这里 u_n 为 J_n 的最小解。联立函数集(11), 就可获得方程(8)所对应的正则化方程

$$J(u) = \|u - u_0(x, y, t)\|^2 + h \int_{\Omega} \psi(|\nabla u|)^2 d\Omega \quad (12)$$

3.2 偏微分方程与小波萎缩法之间的联系

文献[17,18]从小波萎缩系数与扩散方程离散解的联系出发讨论了偏微分方程与小波萎缩法之间的联系, 偏微分方程方法一步迭代扩散的结果就可对应小波去噪的一步萎缩。这种对应关系可通过下述过程获得, 为方便起见, 考虑一维处理的情况

(1) 给出偏微分方程一步扩散的离散表达式

设所采用的偏微分方程的扩散系数为 g , 则离散化后的偏微分方程一步扩散的表达式为

$$u^{n+1}(i) = u^n(i) + \tau \{g[|u^n(i+1) - u^n(i)|][u^n(i+1) - u^n(i)] - g[|u^n(i) - u^n(i-1)|][u^n(i) - u^n(i-1)]\} \quad (13)$$

(2) 给出 haar 小波去噪的一步分解与重构的离散表达式

设所采用的 haar 小波的萎缩函数为 S_θ , 则基于 haar 小波一步分解与重构的离散表达式为

$$u^{n+1}(i) = \frac{u^n(i-1) + 2u^n(i) + u^n(i+1)}{4} + \frac{1}{2\sqrt{2}} S_\theta \left[\frac{u^n(i) - u^n(i+1)}{\sqrt{2}} \right] - \frac{1}{2\sqrt{2}} S_\theta \left[\frac{u^n(i-1) - u^n(i)}{\sqrt{2}} \right] \quad (14)$$

(3) 对比(1)、(2), 可得到 S_θ 与 g 之间的转换关系

$$\begin{cases} S_\theta(x) = x[1 - 4\tau g(|\sqrt{2}x|)] \\ g(|x|) = \frac{1}{4\tau} - \frac{\sqrt{2}}{4\tau x} S_\theta\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \end{cases} \quad (15)$$

(15) 式给出的是一种形式上的转换, 事实上也可将两者建模的思想统一起来。(2)式表明, 偏微分方程方法是一种离散傅里叶萎缩法, 小波萎缩函数的取法完全可以移植到偏微分扩散模型的萎缩系数构造中, 通过正则化的桥梁可将两者的思想统一到一个模型以得到更好的处理结果。

4 偏微分方程法在其它图像处理领域的应用

第三节已说明偏微分方程模型可用正则化模型来理解, 而正则化在图像处理的很多领域均有重要应用, 推而广之, 偏微分方程也可应用到这些领域。下面介绍其在图像复原和超分辨中的应用。

4.1 在图像复原中的应用

图像复原的正则化模型表示为

$$J(u^*) = \min \|H(u - u_0)\|_{\frac{2}{2}}^2 + \lambda_2(u) \|Cu\|_{\frac{2}{2}}^2 \quad (16)$$

其中 H 为退化算子, 它只降低图像的质量, 不改变图像的大小, C 为正则化算子。(16)式在 C 的构造上所采用的先验信息不直观, 构造也存在较大的麻烦, 为此, 可按(12)式的形式给出基于偏微分方程建模理论的图像复原的正则化模型

$$J(u) = \|H(u - u_0)\|^2 +$$

$$\lambda_2(u) \int_{\Omega} \psi(|\nabla u|)^2 d\Omega \quad (17)$$

对变分方程(17)可采用最速下降法求解, 得到图像复原的偏微分方程。

4.2 在图像超分辨中的应用

图像超分辨的正则化模型表示为

$$J(u^*) = \|D(u - u_0)\|_{\frac{2}{2}}^2 + \lambda_2(u) \|Cu\|_{\frac{2}{2}}^2 \quad (18)$$

其中 D 为降采样算子, 包含对图像的尺寸的改变。同样按 4.1 节的方法可以将偏微分方程模型中采用的约束条件应用到(18)式中, 得到图像超分辨的变分方程^[19,20]

$$J(u) = \|D(u - u_0)\|^2 +$$

$$\lambda_2(u) \int_{\Omega} \psi(|\nabla u|)^2 d\Omega \quad (19)$$

综合偏微分方程在去噪、复原和超分辨中的应用, 可将偏微分方程图

像处理中的模型统一为

$$J(u) = \|DH(u - u_0)\|^2 + \lambda_2(u) \int_{\Omega} \psi(|\nabla u|)^2 d\Omega \quad (20)$$

当面临的问题不同时对应的算子 D 和 H 的取法不同。

除此以外, 通过对(17)式中的点扩展函数加稀疏性约束还可应用于图像的盲复原, 通过对图像中不连续的突变点的集合的长度加约束还可应用于图像分割^[20]等。

5 发展方向

5.1 小波表示理论在偏微分方程模型中的应用

传统的偏微分方程模型对于光滑性的约束是源于图像可用分片光滑的多项式逼近的思想, 这种表示方法的时频域局部表示能力较差, 鉴于小波方法在表示图像局部特征方面的优点, 可设计基于小波表示理论的偏微分方程方法。图像的小波函数表示为

$$u = \sum_{k,j=1}^{\infty} A_{k,j} \psi_{k,j}(x, y) \quad (21)$$

将(21)式代入到(20)式中, 得到如下基于小波表示理论的正则化方程

$$J(u) = \| DH \left[\sum_{k,j=1}^{\infty} A_{k,j} \psi_{k,j}(x,y) - u_0 \right] \|^2 + \lambda_2(u) \int_{\Omega} \psi \left\{ \left| \nabla \left[\sum_{k,j=1}^{\infty} A_{k,j} \psi_{k,j}(x,y) \right] \right|^2 \right\} d\Omega \quad (22)$$

5.2 基于基追踪模型的偏微分方程法

(22)式虽然提供了一种小波方法与偏微分方程法的结合途径,但在先验信息的应用上并没有改变,因而不可能从本质上改善处理结果,为了更深入地反映小波的特性,可利用基追踪模型中所采用的小波系数的稀疏先验信息来限制解的特性^[21],得到的正则化方程为

$$J(u) = \| DH \left[\sum_{k,j=1}^{\infty} A_{k,j} \psi_{k,j}(x,y) - u_0 \right] \|^2 + \lambda_2(u) \int_{\Omega} \psi \left\{ \left| \nabla \left[\sum_{k,j=1}^{\infty} A_{k,j} \psi_{k,j}(x,y) \right] \right|^2 \right\} d\Omega + \| A_{k,j} \|_1 \quad (23)$$

若想得到更好的处理结果,可在基函数的选取上选用超完备的基集合,并用基追踪方法求解。

(23)式的优点主要体现在以下几方面

(1) 能更好地利用小波函数表示图像的特点,加强模型对图像局部特征的适应性;

(2) 结合了基追踪的表示方法,能有效地利用稀疏先验进行超分辨,并在基函数的选取上更加自由;

(3) 将偏微分方程与小波及基追踪的思想联系起来,用正则化方法建模,能为以后的研究提供广阔的天地。

但是,(23) 式中的待估参数很多,在二维情况下如何快速稳定地

求解仍有待研究。

5.3 范例

下面给出上述优化模型在一维信号去噪中的应用。对某含有奇异特征的真实信号[见图 1(a)]叠加方差为 5 的高斯白噪声,得到被噪声污染的信号[见图 1(b)],利用小波软阈值方法和正则化模型(23)式的算法分别滤波,共仿真 100 次,得到的处理结果分别见图 1 (c)和图 1(d),信噪比的计算结果见表 1 的第一行,表 1 的第二行和第三行给出的是另外两组例子的计算结果。计算结果说明了算法的有效性。其中小波基函数采用的是 Haar 小波,由于目前这个方面的算法还不成熟,所以结果还有待改进。

6 结束语

偏微分方程法除了与流行的图像处理方法之间存在千丝万缕的联系外,还和许多频域的处理方法存在联系。从本质上看,这些处理方法都是一种参数估计问题,只不过各自所估计的参数形式不同,而且其去噪或超分辨的本质也都在于对先验信息的利用,只是各种方法开发的先验信息各不相同,或者是相同的先验用不同的形式进行建模,当然不同方法所采用的参数估计算法亦不同。在深入研究这些方法建模的本质,为这些方法的相互利用架起桥梁后,就有可能将各种方法所开发的先验信息综合到同一个模型中,并采用合适的算法求解模型。当然,要系统地掌握各种方法的建模及求解过程,并用其他形式的模型表达出来,这其中涉及的工作量将是巨大的,但也是值得各位图像处理领域的专业人员钻研的问题。

表 1 各种方法去噪后的信噪比较

信号	加噪信号	小波软阈值去噪后的信号	(23)式去噪后的信号
信号 1	35.7590	35.1483	38.8111
信号 2	35.1138	36.1273	38.3279
信号 3	35.8166	35.5382	39.3048

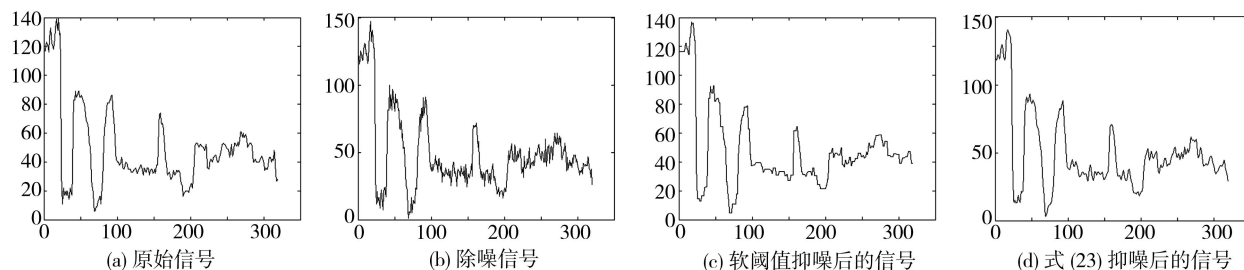


图 1 不同去噪方法的抑噪效果

参 考 文 献

- 1 Olivier F. Mathematical Problems in Image Processing: Partial Differential Equations and Calculus of Variations. Springer, 2001
- 2 Weickert J. A review of nonlinear diffusion filtering in scale-space theory in computer vision. *Lecture Notes in Computer Science*, 1997, **1252**: 3~28
- 3 Perona P, Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1990, **12**(7): 629~639
- 4 Wei G W. Generalized perona-malik equation for image restoration. *IEEE Signal Processing Lett.*, 1999, **6**(7): 165~167
- 5 Weickert J. Theoretical foundations of anisotropic diffusion in image processing. *Computing*, 1996, **11**: 221~236
- 6 Weickert J. Coherence-enhancing diffusion filtering. *International J. Computer Vision*, 1999, **31**(2/3): 111~127
- 7 Weickert J. Coherence-enhancing diffusion of colour Images. *Image and Computer Vision*, 1999, **17**(3/4): 199~210
- 8 You Yu-Li, Kaveh M. Fourth-order partial differential equations for noise removal. *IEEE Transaction on Image Processing*, 2000, **9**(10): 1723~1730
- 9 Lysaker M, Lundervold A, Tai X C. Noise removal using fourth-order partial differential equation with applications to medical magnetic resonance images in space and time. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2003, **12**(12): 1579~1590
- 10 Gilboa G, Zeevi Y Y, Sochen N A. Complex diffusion process for image filtering. Scale-Space'01, LNCS 2106, Springer-Verlay, 2001. 299~307
- 11 Pollak I, Willsky A S, Krim H. Image segmentation and edge enhancement with stabilized inverse diffusion equations. *IEEE Transaction on Image Processing*, 2000, **9**(2): 256~266
- 12 Gilboa G, Zeevi Y Y, Sochen N A. Forward and backward diffusion processes for adaptive image enhancement denosing. *IEEE Transaction on Image Processing*, 2002, **11**(7): 689~703
- 13 Black M J, Sapiro G. Robust anisotropic diffusion. *IEEE Transaction on Image Processing*, 1998, **7**(3): 421~432
- 14 Sijbers J, Den Dekker A J, Van Der Linden A *et al.*. Adaptive anisotropic noise filtering for magnitude MR data. *Magnetic Resonance Imaging*, 1999, **17**(10): 1533~1539
- 15 Acton S T. Multigrid anisotropic diffusion. *IEEE Transaction on Image Processing*, 1998, **7**(3): 280~291
- 16 Scherzer O, Weickert J. Relations between regularization and diffusion filtering. *J. Mathematical Imaging and Vision*, 2000, **12**(1): 43~63
- 17 Steidl G, Weickert J, Brox T *et al.*. On the equivalence of soft wavelet shrinkage, total variation diffusion, total variation regularization, and SIDes. *SIAM J. Numerical Analysis*, 2004, **42**(2): 686~713
- 18 Mrázek P, Weickert J, Steidl G. Correspondences between wavelet shrinkage and nonlinear diffusion. L. D. Gri_n, M. Lillholm (Eds.): Scale-Space 2003, LNCS 2695, 2003: 101~116
- 19 高 鑫, 刘来福, 黄海洋. 基于 PDE 和几何曲率流驱动扩散的图像分析与处理. *数学进展*, 2003, **32**(3): 285~294
- 20 石澄贤, 王元全, 李朝峰 等. 基于总变差的图像放大和增强方法. *计算机工程与应用*, 2004, **40**(2): 95~98
- 21 Chen S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM J. Sci. Comp.*, 1999, **20**(1): 33~61

(上接第 63 页)

射沟槽的深度与折射率成反比。

衍射透镜与光纤有相同直径 ($125\mu\text{m}$), 用倒装法结合器可以被动准直, 在实验中也可以主动调整使性能定量最佳。他们用蒙特卡洛计算证实这种设计适合于被动准直、价廉质优的模块。

在他们的实验中, 硅微透镜涂消

反射膜, 使插入损失最小, 如图 2 所示。准直透镜 (透镜 1 焦距为 $80\mu\text{m}$, 会聚透镜 (透镜 2) 的焦距是 $500\mu\text{m}$ 。二极管激光器产生对称的输出光束, 所以不需要柱面透镜聚焦。透镜准直到最佳性能, 激光二极管和单模光纤之间的耦合损失为 -3dB 。

用蒙特卡罗数值模拟, 考虑到

组装中每个元件的允许误差, 计算了组装中总耦合损失。结果损失是 -5dB 或略好一些, 大约 89% 的几率。研究人员确信, 能够廉价大量生产高性能的模块, 用于城域网络。现在他们正在用新型硅微透镜制作全激光模块。

(傅思生 编译)