# Sai số HTĐKTĐ gián đoạn trong chế độ xác lập

15th Lecture, 9th Sep 2023

**Giảng viên/Instructor:**
Trung tá, ThS. Nguyễn Ngọc Hưng
Mobile phone: 0968354050
Email: hungtd@mta.edu.vn

# Mục đích, Yêu cầu

## ❑Mục đích

- ✓Find the steady-state tracking error for a closed-loop control system.
- ✓Find the steady-state error caused by a disturbance input for a closed-loop control system.

## ❑Yêu cầu

- ✓Chú ý nghe giảng
- ✓Làm lại các ví dụ và tự thực hiện các bài tập về nhà.
- ✓Sử dụng máy tính và matlab để kiểm chứng lý thuyết

myselfHungNN 2023

# Nội dung chính

- ❑ Khái niệm cơ bản đánh giá chất lượng làm việc hệ thống
- ❑ Cách xác định sai số và mối quan hệ giữa sai số và bậc của hệ thống
- ❑ Analog disturbances in a digital system

# Nội dung chính

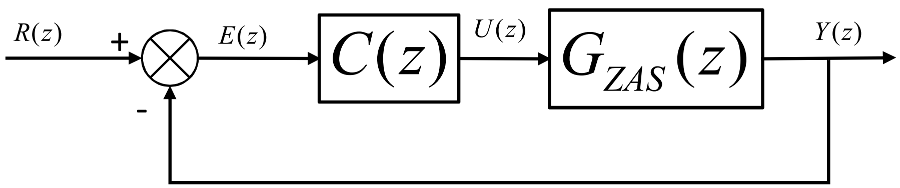
- ❑ **Khái niệm cơ bản đánh giá chất lượng làm việc hệ thống**
- ❑ Cách xác định sai số và mối quan hệ giữa sai số và bậc của hệ thống
- ❑ Analog disturbances in a digital system

myselfHungNN 2023

# Khái niệm cơ bản đánh giá chất lượng làm việc hệ thống

- ❑Sai số bám là sai lệch giữa đáp ứng đầu ra so với đầu vào chuẩn

$$e(t) = r(t) - y(t)$$




- ❑Đối với hệ kín (closed-loop system) ta có thể viết lại

$$E(z) = R(z) - Y(z) = [1 - G_{cl}(z)]R(z)$$

$$G_{cl}(z) = \frac{C(z)G_{ZAS}(z)}{1 + C(z)G_{ZAS}(z)}$$

- ❑Áp dụng định lý về giá trị cuối của hàm gốc

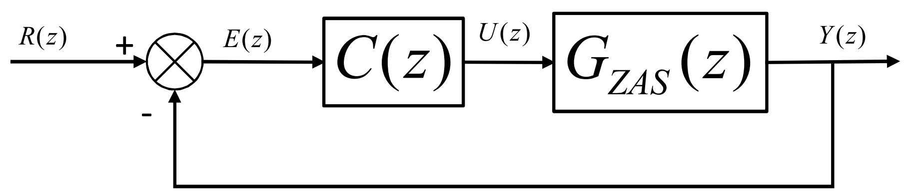
$$e(\infty) = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{z\to 1}[(1 - z^{-1})(1 - G_{cl}(z)R(z)] = (1 - z^{-1})[1 - G_{cl}(z)]R(z)\Big]_{z=1}$$

$$e(\infty) = (z-1)[1 - G_{cl}(z)]R(z)\Big]_{z=1}$$

myselfHungNN 2023

# Khái niệm cơ bản đánh giá chất lượng làm việc hệ thống

- **Hàm ảnh Z của sai số bám được xác định theo**




$$E(z) = \frac{R(z)}{1 + C(z)G_{ZAS}(z)} = \frac{R(z)}{1 + L(z)}$$

$$e(\infty) = (1 - z^{-1})E(z)\Big]_{z=1} = \left.\frac{(z-1)R(z)}{z[1 + L(z)]}\right]_{z=1}$$

- **Biểu diễn lại *L(z)* dưới dạng**

$$L(z) = \left.\frac{N(z)}{(z-1)^m D(z)}\right]_{z=1} \qquad m \geq 0$$

myselfHungNN 2023

# Nội dung chính

- ❑ Khái niệm cơ bản đánh giá chất lượng làm việc hệ thống
- ❑ **Cách xác định sai số và mối quan hệ giữa sai số và bậc của hệ thống**
- ❑ Analog disturbances in a digital system

# Cách xác định sai số và mối quan hệ giữa sai số và bậc của hệ thống

$$L(z) = \left.\frac{N(z)}{(z-1)^m D(z)}\right]_{z=1} \qquad m \geq 0$$

**Type Number: The type number of the system is the number of unity poles in the system z-transfer function ( index *m*)**

$$e(\infty) = (1 - z^{-1})E(z)\Big|_{z=1} = \left.\frac{(z-1)^{m+1} D(z) R(z)}{z[N(z) + (z-1)^m D(z)]}\right]_{z=1}$$

$$e(\infty) = \left.\frac{(z-1)^{m+1} D(1) R(z)}{z[N(1) + (z-1)^m D(1)]}\right]_{z=1}$$

myselfHungNN 2023

# Cách xác định sai số và mối quan hệ giữa sai số và bậc của hệ thống

❑ **Chúng ta đánh giá giá trị sai số này với các tín hiệu đầu vào điển hình**

- sampled step
- sampled ramp
- sampled parabolic

myselfHungNN 2023

# Cách xác định sai số và mối quan hệ giữa sai số và bậc của hệ thống

## ❑Sampled Step

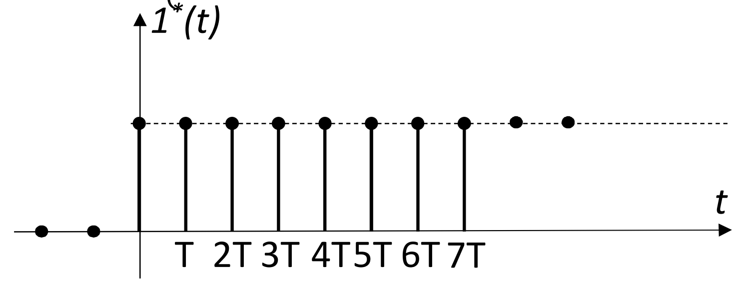
$$r(t) = 1^*(t)$$

$$R(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

$$e(\infty) = \left.\frac{1}{1+L(z)}\right]_{z=1}$$

$$e(\infty) = \frac{1}{1+K_p} \qquad K_p = L(1)$$

$$1^*(t) = \begin{cases} 1 & t = kT \\ 0 & t \neq kT \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$




$$e(\infty) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+L(1)} & m = 0 \\ 0 & m \geq 1 \end{cases}$$

myselfHungNN 2023

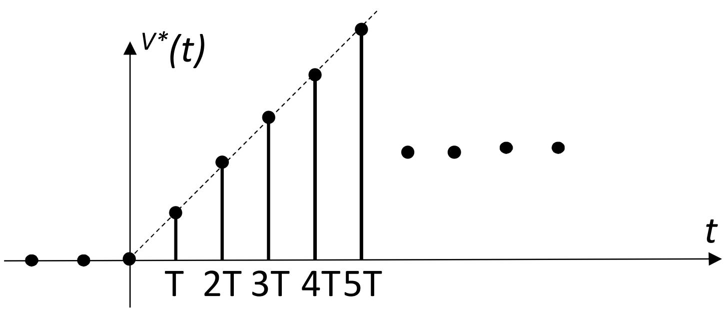
# Cách xác định sai số và mối quan hệ giữa sai số và bậc của hệ thống

## ❑Sampled Ramp

$$r(t) = V^*(t) \qquad e(\infty) = \frac{T}{[z-1][1+L(z)]}\Bigg]_{z=1}$$

$$R(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} \qquad e(\infty) = \frac{1}{K_v} \qquad K_v = \frac{1}{T}(z-1)L(z)\Bigg]_{z=1}$$

$$V^*(t) = \begin{cases} t & t = kT \\ 0 & t \neq kT \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$




$$e(\infty) = \begin{cases} \infty, & m = 0 \\ \dfrac{T}{(z-1)L(z)\big]_{z=1}}, & m = 1 \\ 0, & m \geq 2 \end{cases}$$

myselfHungNN 2023

# Cách xác định sai số và mối quan hệ giữa sai số và bậc của hệ thống

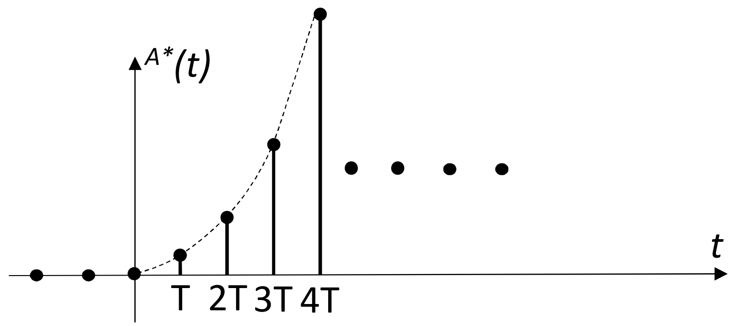
## ❑Sampled Parabolic

$$r(t) = A^*(t) \qquad e(\infty) = \left.\frac{T}{[z-1][1+L(z)]}\right]_{z=1}$$

$$a^*(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2} & t = kT \\ 0 & t \neq kT \end{cases} \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

$$R(z) = \frac{T^2 z}{(z-1)^3} \qquad e(\infty) = \frac{1}{K_a} \qquad K_a = \left.\frac{1}{T^2}(z-1)^2 L(z)\right]_{z=1}$$

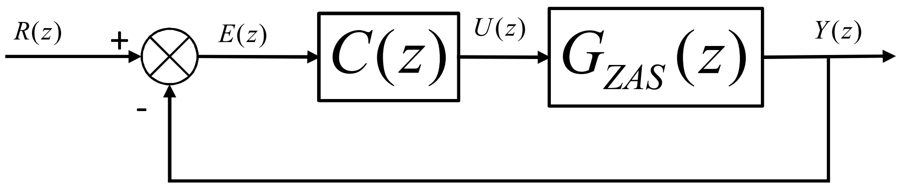
$$e(\infty) = \begin{cases} \infty, & m = 0,1 \\ \dfrac{T^2}{\left.(z-1)^2 L(z)\right]_{z=1}}, & m = 2 \\ 0, & m \geq 3 \end{cases}$$




myselfHungNN 2023

# Cách xác định sai số và mối quan hệ giữa sai số và bậc của hệ thống

- **Example 3.10:** Find the steady-state position error for the digital position control system




$$C(z)=\frac{K_c(z-b)}{z-c} \qquad G_{ZAS}(z)=\frac{K(z+a)}{(z-1)(z-b)} \qquad 0<a,b,c<1$$

1. For a sampled unit step input
2. For a sampled unit ramp input

$$L(z)=C(z)G_{ZAS}(z)=\frac{K_c(z-b)}{z-c}\frac{K(z+a)}{(z-1)(z-b)}=\frac{K_cK(z+a)}{(z-1)(z-c)}$$

# Cách xác định sai số và mối quan hệ giữa sai số và bậc của hệ thống

❑ **Example 3.10**

$$L(z) = \frac{K_c K(z+a)}{(z-1)(z-c)}$$ ➡ This system is Type 1 system

1. For a sampled unit step input $e(\infty) = 0$

2. For a sampled unit ramp input $e(\infty) = \frac{T}{(z-1)L(z)\big]_{z=1}} = \frac{T}{KK_C}\left(\frac{1-c}{1+a}\right)$

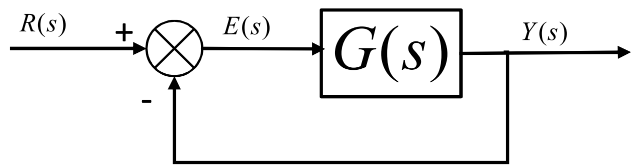
myselfHungNN 2023

# Cách xác định sai số và mối quan hệ giữa sai số và bậc của hệ thống

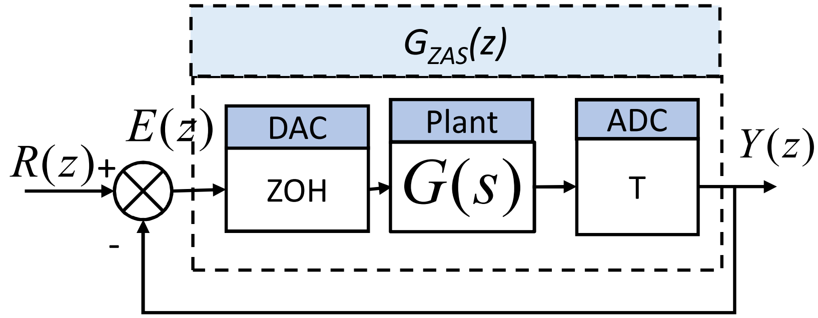
❑**Example 3.11:** Find the steady-state error for the analog system

$$G(s) = \frac{K}{s+a} \qquad a > 0$$

1. For proportional analog control with a unit step input




2. For proportional digital control with a unit step input




myselfHungNN 2023

# Cách xác định sai số và mối quan hệ giữa sai số và bậc của hệ thống

## ❑Example 3.11

$$G(s) = \frac{K/a}{s/a+1} \quad a>0 \qquad e(\infty) = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+K/a} = \frac{a}{a+K}$$

---

$$G_{ZAS}(z) = \frac{K}{a}\left(\frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}}\right) \quad a>0 \qquad k_p = G_{ZAS}(z)\Big]_{z=1} = \frac{K}{a}$$

$$e(\infty) = \frac{1}{1+K_p} = \frac{a}{a+K}$$

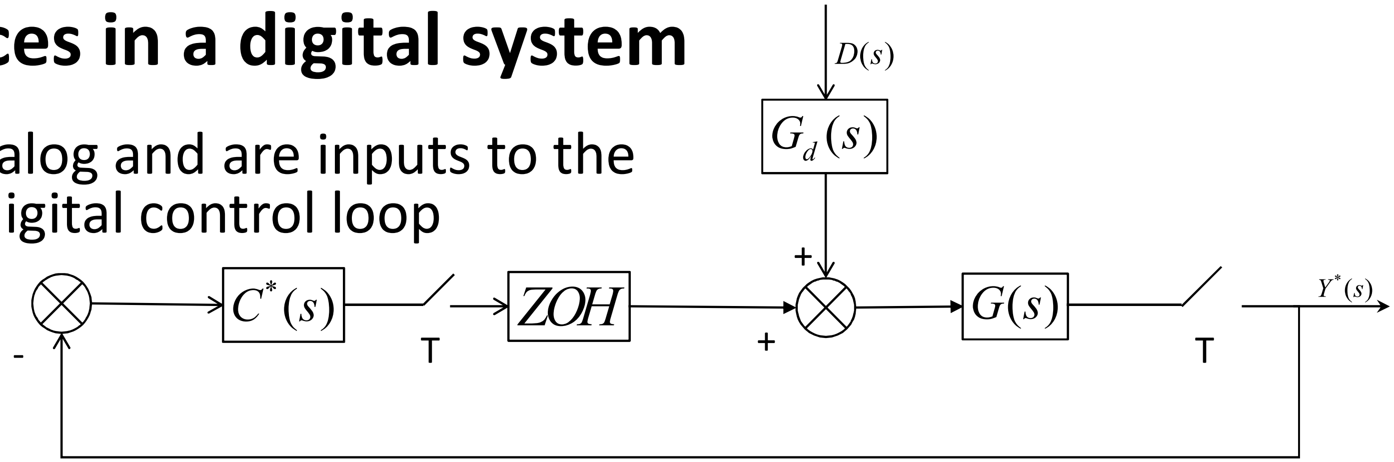
myselfHungNN 2023

# Nội dung chính

- ❑ Khái niệm cơ bản đánh giá chất lượng làm việc hệ thống
- ❑ Cách xác định sai số và mối quan hệ giữa sai số và bậc của hệ thống
- ❑ **Analog disturbances in a digital system**

# Analog disturbances in a digital system

- All disturbances are analog and are inputs to the analog subsystem in a digital control loop




The Laplace transform of the impulse-sampled output

$$Y^*(s) = (GG_d)^*(s) - (GG_{ZOH})^*(s)C^*(s)Y^*(s)$$

$$\rightarrow Y^*(s) = \frac{(GG_dD)^*(s)}{1+(G_{ZAS})^*(s)C^*(s)}$$

$$\rightarrow Y(z) = \frac{(GG_dD)(z)}{1+G_{ZAS}(z)C(z)}$$

Because the disturbance is ideally zero, the steady state error due to a disturbance

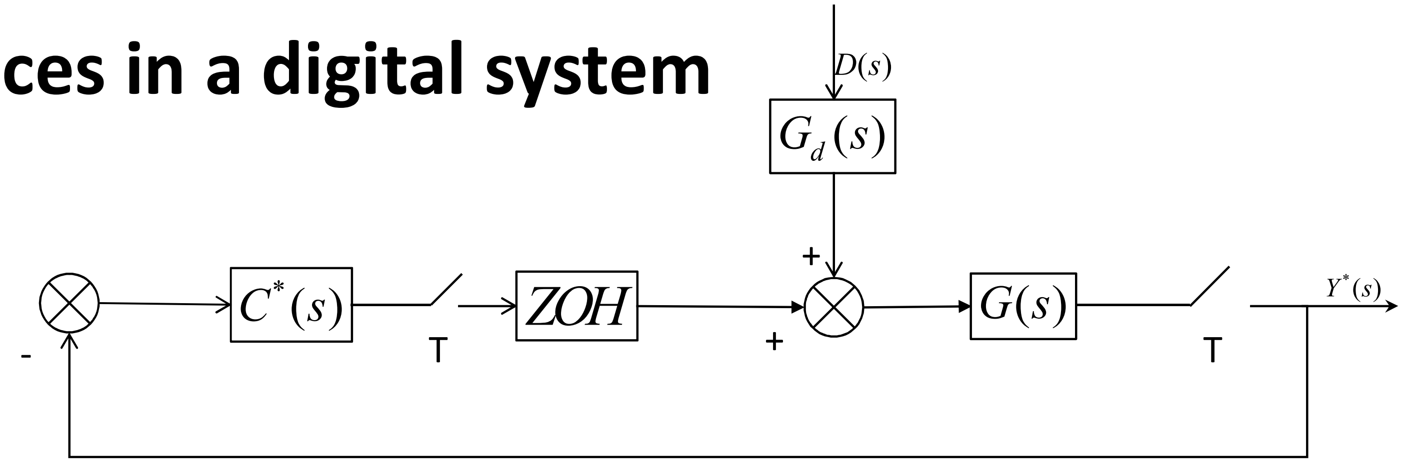
$$e_D(\infty) = 0 - y(\infty) = -y(\infty)$$

myselfHungNN 2023

# Analog disturbances in a digital system

**❑Example 3.9**

Find the steady-state response of the system to **an impulse disturbance of strength *A***




$$G(s) = \frac{K_p}{s+1}, \qquad G_d(s) = \frac{1}{s}, \qquad C(z) = K_c$$

myselfHungNN 2023

# Analog disturbances in a digital system

## ❑Solution

Loop Gain function

$$G(s)G_d(s)D(s) = \frac{K_p A}{s(s+1)} = K_p A\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right]$$

The *z*-transform of the corresponding impulse response sequence

$$(GG_dD)(z) = K_p A\left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}}\right]$$

The equivalent digital transfer function

$$G_{ZAS}(z) = K_p A\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}$$

$$Y(z) = \frac{K_p A\left[\dfrac{z}{z-1} - \dfrac{z}{z-e^{-T}}\right]}{1+K_c\left[K_p\dfrac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}\right]}$$

myselfHungNN 2023

# Analog disturbances in a digital system

## ❑Solution

the sampled output

$$Y(z) = \frac{K_p A\left[\dfrac{z}{z-1} - \dfrac{z}{z-e^{-T}}\right]}{1 + K_c\left[K_p \dfrac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}\right]}$$

we use the final value theorem to obtain the steady-state response

$$y(\infty) = (z-1)Y(z)\Big]_{z=1} \Rightarrow y(\infty) = \frac{K_p A}{1 + K_c K_p}$$

$$e_D(\infty) = -y(\infty) = -\frac{K_p A}{1 + K_c K_p}$$

myselfHungNN 2023

# Summary

- Find the steady-state tracking error for a closed-loop control system.
- Find the steady-state error caused by a disturbance input for a closed-loop control system.
- Analog disturbances in a digital system

myselfHungNN 2023