Урок 2. ДЗ

① Напишите уравнение параболы, проходящей через три точки (x, y): (1, 2), (3, 10), (5, 1)

Уравнение параболы: $y = ax^2 + bx + c$

Формируем систему:

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ 9a + 3b + c = 10 \\ 25a + 5b + c = 1 \end{cases}$$

Находим ответ с помощью треугольной формулы для матрицы 3×3:

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot3\cdot1 + 1\cdot9\cdot5 + 25\cdot1\cdot1 - (25\cdot3\cdot1 + 9\cdot1\cdot1 + 5\cdot1\cdot1) = 3 + 45 + 25 - 75 - 9 - 5 = -16$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 10 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot1 + 10\cdot5\cdot1 + 1\cdot1\cdot1 - 1\cdot3\cdot1 - 10\cdot1\cdot1 - 5\cdot1\cdot2 = 6 + 50 + 1 - 3 - 10 - 10 = 34$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 9 & 10 & 1 \\ 25 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot10\cdot1 + 9\cdot1\cdot1 + 25\cdot2\cdot1 - 25\cdot10\cdot1 - 9\cdot2\cdot1 - 1\cdot1\cdot1 = 10 + 9 + 50 - 250 - 18 - 1 = -200$$

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 10 \\ 25 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot3\cdot1 + 9\cdot5\cdot2 + 1\cdot10\cdot25 - 25\cdot3\cdot2 - 9\cdot1\cdot1 - 5\cdot10\cdot1 = 3 + 90 + 250 - 150 - 9 - 50 = 134$$

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta_A} = \frac{34}{-16} = -\frac{17}{8}$$

$$b = \frac{\Delta_b}{\Delta_A} = \frac{-200}{-16} = \frac{25}{2}$$

$$c = \frac{\Delta_c}{\Delta_A} = \frac{134}{-16} = -\frac{67}{8}$$

Ответ: уравнение: $y = -\frac{17}{8}x^2 + \frac{25}{2}x - \frac{67}{8}$

Красивый чистый график есть в .ipynb-файле ☺

② Известно, что свежий огурец на 99% состоит из воды. Месяц назад взвесили мешок со свежими огурцами. Получилось, что мешок весил ровно 100кг. Мешок убрали, а через месяц снова взвесили. Огурцы за это время усохли, и теперь вода составляла уже только 98% их веса. Сколько теперь (в кг) весят огурцы?

мешок с огурцами = 100кг и это 100%
от взвешивания к взвешиванию в огурцах не менялся вес, что не вода, этого добра или 1%
$1\% \Rightarrow 0{,}01 \cdot 100 = 1$кг
во втором взвешивании масса этого „добра" не изменилась, оставаясь 1кг, при этом в соотношении к воде, которой стало 98%, это теперь 2%
x = новый вес огурцов
$x = 1 \cdot 100/2 = 50$
Ответ: 50кг

③ Решить уравнения:

1) $2^x = 256$
$x = \log_2 256$
$x = 8$
Ответ: 8

2) $2^x = 300$
$x = \log_2 300$
$x \approx 8{,}23$
Ответ: $\approx 8{,}23$

3) $\log_8 2^{8x-4} = 4$
$(8x-4)\log_8 2 = 4$
$(8x-4)\log_{2^3} 2 = 4$
$\frac{8x-4}{3}\log_2 2 = 4$
$\frac{8x-4}{3} = 4 \quad | \times 3$
$8x - 4 = 12$
$8x = 16$
$x = 16/8$
$x = 2$ Ответ: 2

4) $3^{\log_9(5x-5)} = 5$
$(5x-5)^{\log_9 3} = 5$
$(5x-5)^{1/2} = 5$
$5x - 5 = 25$
$5x = 30$
$x = 30/5$
$x = 6$
Ответ: 6

5) $x^{\log_3 x + 1} = 9$
$\log_3 x^{\log_3 x + 1} = \log_3 9$
$\log_3 x(\log_3 x + 1) = 2$
Переменная: $y := \log_3 x$, тогда:
$y(y+1) = 2$
$y^2 + y - 2 = 0$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -2 \end{cases}$
$x = \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1+3}{2} = 1$
$x = \frac{-1 - \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1-3}{2} = -2$
$\log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3$
$\log_3 x = -2 \Rightarrow x = 1/9$
Ответ: 3; 1/9

④ Вычислить:

1) $\log_4 16 = 2$

Ответ: 2

2) $\log_5 \frac{1}{25} = \log_5 \frac{1^2}{5^2} = 2\log_5 5^{-1} = -2$

Ответ: -2

3) $\log_{25} 5 = \log_{5^2} 5 = \frac{1}{2}\log_5 5 = \frac{1}{2}$

Ответ: $\frac{1}{2}$

4) $\log_3 \sqrt{27} = \log_3 27^{1/2} = \frac{1}{2}\log_3 3^3 = \frac{1}{2}\cdot 3 = \frac{3}{2} = 1{,}5$

Ответ: 1,5

5) $\log_2 12 - \log_2 3 = \log_2 \frac{12}{3} = \log_2 4 = 2$

Ответ: 2

6) $\log_6 12 + \log_6 3 = \log_6 (12\cdot 3) = \log_6 36 = 2$

Ответ: 2

7) $e^{\ln 5} = e^{\log_e 5} = 5$

Ответ: 5

8) $\frac{\log_2 225}{\log_2 15} = \log_{15} 225 = \log_{15} 15^2 = 2$

Ответ: 2

9) $\log_4 32 + \log_{0,1} 10 = \log_{2^2} 2^5 + \log_{10^{-1}} 10 =$

$= 5\cdot\frac{1}{2}\cdot\log_2 2 + \left(-\frac{1}{1}\right)\log_{10} 10 = 5\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 - 1 = 1{,}5$

Ответ: 1,5

10) $9^{\log_3 \sqrt{5}} = 3^{2\log_3 \sqrt{5}} = 3^{\log_3 (\sqrt{5})^2} = (\sqrt{5})^2 = 5$

Ответ: 5