Урок 3. ДЗ

Тема - Введение в аналитическую геометрию

① Даны два вектора в трёхмерном пространстве: (10;10;10) и (0;0;-10). Найдите их сумму.

$\bar{a} = (10;10;10)$

$\bar{b} = (0;0;-10)$

$\bar{a} + \bar{b} = (10+0;10+0;10-10) = (10;10;0)$

Ответ: (10;10;0)

② Почему прямые не выглядят перпендикулярными?

Ответ: из-за разных масштабов осей координат. Если задать осям один масштаб (с помощью xlim/ylim или plt.axis('equal')), то проблемы не будет. В файле для доказательства код.

③ - В файле

④ 1) Пусть задана плоскость:

$Ax + By + Cz + D = 0$

Напишите уравнение плоскости, параллельной данной и проходящей через начало координат.

Две параллельные плоскости должны иметь пропорциональные коэффициенты. Если $x=0$, $y=0$ и $z=0$, то остаётся $D=0$ => уравнение параллельной плоскости $= Ax+By+Cz=0$. Оно ещё и через начало координат проходить будет, вот

Ответ: $Ax+By+Cz=0$

2) Пусть задана плоскость:

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

и прямая:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Как узнать, принадлежит прямая плоскости или нет?

Если обе точки прямой $(x_1;y_1;z_1)$ и $(x_2;y_2;z_2)$ будут принадлежать плоскости, то и сама прямая, проходящая через эти точки, будет принадлежать плоскости

Ответ: $A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1 = 0$

$A_1x_2 + B_1y_2 + C_1z_2 + D_1 = 0$

Тема - Графики на плоскости

① В файле

② Докажите, что при ортогональном преобразовании сохраняется расстояние между точками

Преобразование

$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}$

$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}$

будет считаться ортогональным при удовлетворении следующих условий:

$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$

$a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$

$a_{11} \cdot a_{12} + a_{21} \cdot a_{22} = 0$

$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$

Выберем 2 точки на плоскости:

$M_1(x_1; y_1)$

$M_2(x_2; y_2)$

В преобразованной координатной плоскости координаты этих точек можно представить как:

$M_1'(x_1'; y_1')$

$M_2'(x_2'; y_2')$

Если расстояния между точками в обеих системах координат совпадают, то $\Rightarrow$ при ортогональном преобразовании сохраняется расстояние между точками

$M_1'M_2' = (x_2' - x_1'; y_2' - y_1')$

$|M_1'M_2'| = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2}$

$$\begin{aligned}
|M_1'M_2'|^2 &= (a_{11}(x_2 - x_1) + a_{12}(y_2 - y_1))^2 + (a_{21}(x_2 - x_1) + a_{22}(y_2 - y_1))^2 = \\
&= a_{11}^2(x_2 - x_1)^2 + 2a_{11}a_{12}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + a_{12}^2(y_2 - y_1)^2 + \\
&+ a_{21}^2(x_2 - x_1)^2 + 2a_{21}a_{22}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + a_{22}^2(y_2 - y_1)^2 = \\
&= (a_{11}^2 + a_{21}^2)(x_2 - x_1)^2 + 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + (a_{12}^2 + a_{22}^2)(y_2 - y_1)^2 = \\
&= 1(x_2 - x_1)^2 + 0 + 1(y_2 - y_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = |M_1M_2|^2
\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\text{По условиям:} \\
&a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \\
&a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \\
&a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1
\end{aligned}\right\}$$

ч.т.д.