Урок 7. ДЗ

5-1 Вектор - это частный случай матрицы $1\times N$ и $N\times 1$. Повторите материал для векторов, уделяя особое внимание умножению $A\cdot B$

Повторил, особое внимание уделил. Ну вот, например,

$\bar{a} = (4, 5, 6)$

Умножим на скаляр.

$\bar{a}\cdot 8 = (4\cdot 8,\ 5\cdot 8,\ 6\cdot 8) = (32, 40, 48)$

Векторное произведение:

$\bar{b} = (2, 4, 3)$

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (5\cdot 3 - 6\cdot 4) - (4\cdot 3 - 6\cdot 2) + (4\cdot 4 - 5\cdot 2) =$$

$$= (15-24) - (12-12) + (16-10) = (-9, 0, 6)$$

Перемножим векторы $1\times N$ и $N\times 1$:

$\bar{a} = (7, 8, 9)$

$\bar{b} \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\bar{a}\cdot\bar{b} = 7\cdot 9 + 8\cdot 8 + 9\cdot 7 = 63 + 64 + 63 = 190$

$$\bar{b}\cdot\bar{a} = \bar{c} \Rightarrow \begin{aligned} c_{11} &= a_{11}\cdot b_{11} = 7\cdot 9 = 63 \\ c_{12} &= a_{11}\cdot b_{12} = 7\cdot 8 = 56 \\ c_{13} &= a_{11}\cdot b_{13} = 7\cdot 7 = 49 \\ c_{21} &= a_{21}\cdot b_{11} = 8\cdot 9 = 72 \\ c_{22} &= a_{21}\cdot b_{12} = 8\cdot 8 = 64 \\ c_{23} &= a_{21}\cdot b_{13} = 8\cdot 7 = 56 \\ c_{31} &= a_{31}\cdot b_{11} = 9\cdot 9 = 81 \\ c_{32} &= a_{31}\cdot b_{12} = 9\cdot 8 = 72 \\ c_{33} &= a_{31}\cdot b_{13} = 9\cdot 7 = 63 \end{aligned} \Rightarrow \begin{vmatrix} 63 & 56 & 49 \\ 72 & 64 & 56 \\ 81 & 72 & 63 \end{vmatrix}$$

В Python не применялись свои методы, как есть в файле.

Вычислите, по возможности не используя программирование: $(5E)^{-1}$, где E - единичная матрица размера 5×5

Как и в обычных уравнениях, нам нужно подобрать и добавить к матрице такой коэффициент, который избавит нас от 5. Если 5 вынести за скобки, то

$5^{-1} = \frac{1}{5^1} \Rightarrow$

$$(5E^{-1}) = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 \end{vmatrix}$$

Ответ: $\begin{vmatrix} 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 \end{vmatrix}$

5.2 Вычислить определитель

$$\Delta\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1(0\cdot9-6\cdot8) - 2(4\cdot9-6\cdot7) + 3(4\cdot8-0\cdot7) =$$

$$= -48 - 72 + 84 + 96 = 60$$

Ответ: $\Delta = 60$

5.3 Вычислить матрицу, обратную данной

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

обратная матрица считается по формуле: $A^{-1} = A_*^T / \Delta A$,

где: A^{-1} – обратная матрица

A_*^T – транспонированная матрица алгебраических дополнений

ΔA – определитель матрицы A.

1) В прошлой задаче мы посчитали определитель:

$\Delta A = 60$

2) Считаем матрицу алгебраических дополнений – это, собственно, матрица миноров, умноженная на $(-1)^{i+j}$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 0\cdot9 - 6\cdot8 = -48 \Rightarrow A_{*11} = (-1)^{1+1}\cdot(-48) = -48$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 4\cdot9 - 6\cdot7 = 36-42 = -6 \Rightarrow A_{*12} = (-1)^{1+2}\cdot(-6) = 6$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 4\cdot8 - 0\cdot7 = 32 \Rightarrow A_{*13} = (-1)^{1+3}\cdot 32 = 32$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 24 = -6 \Rightarrow A_{*21} = (-1)^{2+1}\cdot(-6) = 6$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 21 = -12 \Rightarrow A_{*22} = (-1)^{2+2}\cdot(-12) = -12$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot 8 - 2\cdot 7 = 8 - 14 = -6 \Rightarrow A_{*23} = (-1)^{2+3}\cdot(-6) = 6$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 6 - 3\cdot 0 = 12 \Rightarrow A_{*31} = (-1)^{3+1}\cdot 12 = 12$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 6 - 3\cdot 4 = 6 - 12 = -6 \Rightarrow A_{*32} = (-1)^{3+2}\cdot(-6) = 6$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 0 - 2\cdot 4 = -8 \Rightarrow A_{*33} = (-1)^{3+3}\cdot(-8) = -8$$

$$\Rightarrow A_* = \begin{vmatrix} -48 & 6 & 32 \\ 6 & -12 & 6 \\ 12 & 6 & -8 \end{vmatrix}$$

3) Транспонируем полученную матрицу алгебраических дополнений:

$$A_*^T = \begin{vmatrix} -48 & 6 & 12 \\ 6 & -12 & 6 \\ 32 & 6 & -8 \end{vmatrix}$$

4) Поделив элементы полученной матрицы на определитель исходной, мы получим обратную матрицу:

$$A^{-1} = A_*^T / \Delta A = \begin{vmatrix} -48 & 6 & 12 \\ 6 & -12 & 6 \\ 32 & 6 & -8 \end{vmatrix} : 60 = \boxed{\begin{vmatrix} -0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}53(3) & 0{,}1 & -0{,}13(3) \end{vmatrix}}$$

5) Как проверить себя — умножить обратную матрицу на «оригинал», должна получиться единичная. Проверим:

$$\underset{3\times 3}{E} = A^{-1}\cdot A = \begin{vmatrix} -0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}533 & 0{,}1 & -0{,}133 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Считаем поэлементно:

$$E_{11} = A^{-1}_{11}\cdot A_{11} + A^{-1}_{12}\cdot A_{21} + A^{-1}_{13}\cdot A_{31} = (-0{,}8)\cdot 1 + 0{,}1\cdot 4 + 0{,}2\cdot 7 = -0{,}8 + 0{,}4 + 1{,}4 = \underline{1}$$

$$E_{12} = A^{-1}_{11}\cdot A_{12} + A^{-1}_{12}\cdot A_{22} + A^{-1}_{13}\cdot A_{32} = (-0{,}8)\cdot 2 + 0{,}1\cdot 0 + 0{,}2\cdot 8 = -1{,}6 + 1{,}6 = 0$$

$$E_{13} = A^{-1}_{11}\cdot A_{13} + A^{-1}_{12}\cdot A_{23} + A^{-1}_{13}\cdot A_{33} = (-0{,}8)\cdot 3 + 0{,}1\cdot 6 + 0{,}2\cdot 9 = -2{,}4 + 0{,}6 + 1{,}8 = 0$$

$$E_{21} = A^{-1}_{21}\cdot A_{11} + A^{-1}_{22}\cdot A_{21} + A^{-1}_{23}\cdot A_{31} = 0{,}1\cdot 1 + (-0{,}2)\cdot 4 + 0{,}1\cdot 7 = 0{,}1 - 0{,}8 + 0{,}7 = 0$$

$$E_{22} = A^{-1}_{21}\cdot A_{12} + A^{-1}_{22}\cdot A_{22} + A^{-1}_{23}\cdot A_{32} = 0{,}1\cdot 2 + (-0{,}2)\cdot 0 + 0{,}8 = 0{,}2 + 0{,}8 = \underline{1}$$

$$E_{23} = A^{-1}_{21}\cdot A_{13} + A^{-1}_{22}\cdot A_{23} + A^{-1}_{23}\cdot A_{33} = 0{,}1\cdot 3 + (-0{,}2)\cdot 6 + 0{,}1\cdot 9 = 0{,}3 - 1{,}2 + 0{,}9 = 0$$

$$E_{31} = A^{-1}_{31}\cdot A_{11} + A^{-1}_{32}\cdot A_{21} + A^{-1}_{33}\cdot A_{31} = 0{,}533\cdot 1 + 0{,}1\cdot 4 + (-0{,}133)\cdot 7 = 0{,}533 + 0{,}4 - 0{,}931 = 0{,}002$$

$$E_{32} = A^{-1}_{31}\cdot A_{12} + A^{-1}_{32}\cdot A_{22} + A^{-1}_{33}\cdot A_{32} = 0{,}533\cdot 2 + 0{,}1\cdot 0 + (-0{,}133)\cdot 8 = 1{,}066 - 1{,}064 = 0{,}002$$

$$E_{33} = A^{-1}_{31}\cdot A_{13} + A^{-1}_{32}\cdot A_{23} + A^{-1}_{33}\cdot A_{33} = 0{,}533\cdot 3 + 0{,}1\cdot 6 + (-0{,}133)\cdot 9 = 1{,}599 + 0{,}6 - 1{,}197 = 1{,}002$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}533 & 0{,}1 & -0{,}133 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ чтд.

Ответ: $A^{-1} = \begin{vmatrix} -0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}533 & 0{,}1 & -0{,}133 \end{vmatrix}$

Приведите пример матрицы 4x4, ранг которой равен 1

У матрицы, все элементы которой одно и то же число, все определители, начиная со 2-го, равны нулю, тогда как определитель 2-го порядка нулю не равен $\Rightarrow$ ранг нашей матрицы $= 1$

Ответ: $\begin{bmatrix} 55 & 55 & 55 & 55 \\ 55 & 55 & 55 & 55 \\ 55 & 55 & 55 & 55 \\ 55 & 55 & 55 & 55 \end{bmatrix}$

5.4 Вычислите скалярное произведение векторов (1,5) и (2,8)

Просто перемножаем элементы с одинаковыми индексами, как формула писали, так и получим скалярное произведение.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

$\vec{a}\,(1,5)$

$\vec{b}\,(2,8)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1 \cdot 2) + (5 \cdot 8) = 2 + 40 = 42$

Ответ: 42

5.5 (1,5,0), (2,8,7), (7,1,5,3) - Вычислите смешанное произведение трёх векторов

Для вычисления используем векторное и скалярное произведение (порядок не важен)

$\vec{a} = (1, 5, 0)$

$\vec{b} = (2, 8, 7)$

$\vec{c} = (7, 1{,}5, 3)$

1) Векторное произведение $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 8 & 7 \end{vmatrix} = (5 \cdot 7 - 0 \cdot 8) - (1 \cdot 7 - 0 \cdot 2) + (1 \cdot 8 - 5 \cdot 2) = (35, -7, -2)$

2) скалярное произведение $\vec{c}$ и $(35; -7; -2)$

$\vec{c} \cdot (35, -7, -2) = 7 \cdot 35 + 1{,}5 \cdot (-7) + 3 \cdot (-2) = 245 - 10{,}5 - 6 = 228{,}5$

Ответ: 228,5