Урок 4. ДЗ

① Решите уравнение: $\frac{\sin(x)}{x}=0$

x в знаменателе $\Rightarrow$ ОДЗ: $x \neq 0$

$\sin(x)=0$

$x=\pi n$, где n - целое число, т.е. $\in \mathbb{Z}$

Ответ: $x=\pi n$, $n \neq 0$ и $n \in \mathbb{Z}$

② Даны три прямые:

$y=k_1x+b_1$

$y=k_2x+b_2$

$y=k_3x+b_3$

Как узнать, пересекаются они в одной точке или нет?

Ход мысли #1.

k_1, k_2 и k_3 отвечают за угол. $\Rightarrow$ если $k_1 \neq k_2 \neq k_3$, то прямые не параллельны, а значит где-то да пересекаются

Две непараллельные прямые пересекаются в одной точке. Пусть этой точкой будет точка $M(x_1;y_1)$

$$\begin{cases} y_1=k_1x_1+b_1 \\ y_1=k_2x_1+b_2 \\ y_1=k_3x_1+b_3 \end{cases} \sim \begin{cases} y_1=k_1x_1+b_1 \\ k_1x_1+b_1=k_2x_1+b_2 \\ y_1=k_3x_1+b_3 \end{cases} \sim \begin{cases} y_1=k_1x_1+b_1 \\ x_1=\frac{b_2-b_1}{k_1-k_2} \\ y_1=k_3x_1+b_3 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} y_1=k_1x_1+b_1 \\ x_1=\frac{b_2-b_1}{k_1-k_2} \\ y_1=\frac{b_2-b_1}{k_1-k_2}\cdot k_3+b \end{cases}$$

Ответ: Если $y=\frac{b_2-b_1}{k_1-k_2}\cdot k_3+b$, то прямые пересекаются в одной точке

Ход мысли #2

Поочередно приравняем пары равенств и так выразим x

$k_1x+b_1=k_2x+b_2$	$k_2x+b_2=k_3x+b_3$	$k_3x+b_3=k_1x+b_1$
$k_1x-k_2x=b_2-b_1$	$k_2x-k_3x=b_3-b_2$	$k_3x-k_1x=b_1-b_3$
$x(k_1-k_2)=b_2-b_1$	$x(k_2-k_3)=b_3-b_2$	$x(k_3-k_1)=b_1-b_3$
$x=\frac{b_2-b_1}{k_1-k_2}$	$x=\frac{b_3-b_2}{k_2-k_3}$	$x=\frac{b_1-b_3}{k_3-k_1}$

$$\Rightarrow x=\frac{b_2-b_1}{k_1-k_2}=\frac{b_3-b_2}{k_2-k_3}=\frac{b_1-b_3}{k_3-k_1}$$

Составим выражения:

$$\frac{b_2-b_1}{k_1-k_2} = \frac{b_1-b_3}{k_3-k_1} \Rightarrow (b_2-b_1)(k_3-k_1) = (b_1-b_3)(k_1-k_2) \Rightarrow$$

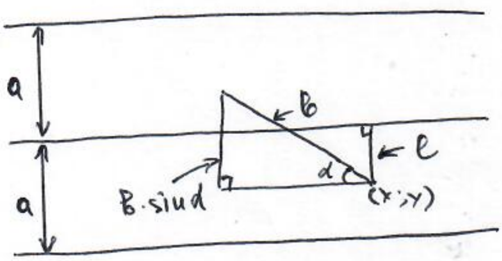
$$\Rightarrow (b_1-b_2)(k_1-k_3) = (b_1-b_3)(k_1-k_2) \Rightarrow \frac{(b_1-b_2)(k_1-k_3)}{b_1-b_3} = k_1-k_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(b_1-b_2)\cancel{(k_1-k_3)}}{(b_1-b_3)\cancel{(k_1-k_3)}} = \frac{k_1-k_2}{k_1-k_3} \Rightarrow \frac{b_1-b_2}{b_1-b_3} = \frac{k_1-k_2}{k_1-k_3}$$

Ответ: если выполняется выражение $\frac{b_1-b_2}{b_1-b_3} = \frac{k_1-k_2}{k_1-k_3}$, то прямые пересекаются в одной точке.

③ На листе тетради „в линейку" (расстояние между линиями равно a) лежит игла (длиной b). Координаты нижней точки иглы (x, y), игла лежит под углом α. Пересекает ли игла линию или нет?

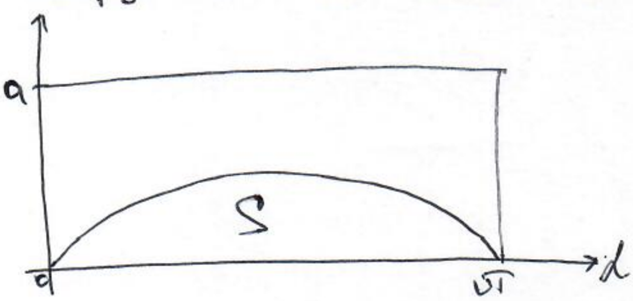
Это задача Бюффона о бросании иглы. Представим её так:



„Классические" условия задачи так:

1) $a > b$
↳ расстояние между линиями больше иглы
2) $0 \le \alpha \le \pi$
↳ угол принимает диапазон от 0 до π
3) $0 \le l \le a$
↳ l - это расстояние от нижней точки иглы $(x;y)$ до ближайшей линии
4) Противолежащий катет $\angle\alpha = b \cdot \sin\alpha$ и он всегда $\geq l$
5) Бросания иглы равновероятны

Согласно геометрическому подходу определения вероятности мы можем представить бросание иглы на координатной плоскости



По оси абсцисс у нас отложен угол α, меняющийся значения от 0 до π

По оси ординат у нас отложено расстояние от 0 до a (расстояние между полосами)

Брошенная иголка пересечёт линию с вероятностью:

$$p = \frac{S}{\pi \cdot a}$$

↳ площадь под кривой / площадь всего прямоугольника (вероятность всех возможных событий)

S считаем с помощью интеграла (вроде так):

$$S = \int_0^{\pi} b \cdot \sin\alpha \, d\alpha = -b\cos\alpha \Big|_0^{\pi} = 2b$$

Ответ: игла пересечёт линию с вероятностью $\frac{2b}{\pi \cdot a}$

④ Решить аналитически и потом численно (в программе) уравнение, зависящее от параметра a:

$\sin(a \cdot x) = 0$

при условии: $0{,}01 < a < 0{,}02$, $100 < x < 500$

Выразим x для начала:

$\sin(a \cdot x) = 0$

$a \cdot x = \pi \cdot n$, где $n \in Z$

$x = \frac{\pi \cdot n}{a}$

$$\left\{ \text{ОДЗ}: \begin{cases} 0{,}01 < a < 0{,}02 \\ 100 < x < 500 \end{cases} \right\}$$

Теперь перебираем все возможные варианты n и сверяем их с ОДЗ, попадаем ли мы в диапазон допустимых значений

если $n := -1$, то:

$x = \frac{\pi \cdot (-1)}{a} = -\frac{\pi}{a}$ → $-\frac{\pi}{0{,}02} = -157$ —; → $-\frac{\pi}{0{,}01} = -314$ —

$\Rightarrow x \neq -\frac{\pi}{a}$

если $n := 0$, то:

$x = \frac{\pi \cdot 0}{a} = \frac{0}{a}$ → $\frac{0}{0{,}02} = 0$ —; → $\frac{0}{0{,}01} = 0$ —

$\Rightarrow x \neq \frac{0}{a}$

если $n := 1$, то:

$x = \frac{\pi \cdot 1}{a} = \frac{\pi}{a}$ → $\frac{\pi}{0{,}02} = 157$ V; → $\frac{\pi}{0{,}01} = 314$ V

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{a}$

если $n := 2$, то:

$$x = \frac{\pi \cdot 2}{a}$$ $\nearrow \frac{2\pi}{0,02} = 314$ ✓; $\searrow \frac{2\pi}{0,01} = 628$ —

т.к. одна граница не подходит, решаем неравенство:

$$\frac{2\pi}{a} < 500 \;\Big|\; :2\pi \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{500}{2\pi} \Rightarrow a > \frac{2\pi}{500} \Rightarrow a > \frac{\pi}{250}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2\pi}{a} \text{ при } a \in \left(\frac{\pi}{250}; 0,02\right)$$

если $n := 3$, то:

$$x = \frac{\pi \cdot 3}{a}$$ $\nearrow \frac{3\pi}{0,02} = 471$ ✓; $\searrow \frac{3\pi}{0,01} = 942$ —

т.к. одна граница не подходит, решаем неравенство:

$$\frac{3\pi}{a} < 500 \;\Big|\; :3\pi \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{500}{3\pi} \Rightarrow a > \frac{3\pi}{500}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{a} \text{ при } a \in \left(\frac{3\pi}{500}; 0,02\right)$$

если $n := 4$, то:

$$x = \frac{\pi \cdot 4}{a}$$ $\nearrow \frac{4\pi}{0,02} = 628$ —; $\searrow \frac{4\pi}{0,01} = 1256$ —

Больше подходящих целых чисел для n нет

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{a} \\ x = \frac{2\pi}{a}, \text{ при условии, что } a \in \left(\frac{\pi}{250}; 0,02\right) \\ x = \frac{3\pi}{a}, \text{ при условии, что } a \in \left(\frac{3\pi}{500}; 0,02\right) \end{cases}$

17.6.2 Найти угол между прямыми $4y - 3x + 12 = 0$ и $7y + x - 14 = 0$

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 12 \\ 1 & 7 & -14 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_1 a_2 + b_1 b_2} = \frac{1 \cdot 4 - (-3) \cdot 7}{(-3) \cdot 1 + 4 \cdot 7} = \frac{25}{25} = 1$$

$\alpha = \frac{\pi}{4}$ или 45^0

Ответ: $\frac{\pi}{4}$ или 45^0

17.6.4 Найти угол α между прямыми $x = \sqrt{2}$ и $x = -\sqrt{3}$

$x - \sqrt{2} = 0$

$x + \sqrt{3} = 0$

↳ в уравнениях у x нет коэффициентов k

$\Rightarrow$ прямые параллельны друг другу и оси Y

$\Rightarrow$ угол $\alpha = 0^0$, т.к. прямые не пересекаются

Ответ: 0^0

Выяснить вид кривых второго порядка, порождённых следующими уравнениями.

17.6.5 $y^2 - 2x - 2y - 5 = 0$

$y^2 - 2x - 2y - 5 + 1 - 1 = 0$

$(y^2 - 2y + 1) - (2x + 6) = 0$

$(y-1)^2 - 2(x+3) = 0$

$(y-1)^2 = 2(x+3)$

↳ уравнение вида $y^2 = 2px \Rightarrow$ парабола

Ответ: парабола

17.6.6 $3x^2 + 5y^2 + 12x - 30y + 42 = 0$

$3x^2 + 12x + 5y^2 - 30y + 42 = 0$

$3x^2 + 12x + 5y^2 - 30y + 12 - 15 + 45 = 0$

$(3x^2 + 12x + 12) + (5y^2 - 30y + 45) = 15$

$3(x+2)^2 + 5(y-3)^2 = 15$

$$\frac{(x+2)^2}{5} + \frac{(y-3)^2}{3} = 1$$

↳ уравнение вида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ эллипс

Ответ: эллипс

17.6.7 $2x^2 - y^2 + 6y - 7 = 0$

$2x^2 - y^2 + 6y - 7 + 9 - 9 = 0$

$2x^2 - (y^2 - 6y + 9) - 7 + 9 = 0$

$2x^2 - (y^2 - 6y + 9) = -2$

$2x^2 - (y-3)^2 = -2$

$-\frac{x^2}{1} + \frac{(y-3)^2}{2} = 1$

$\frac{(y-3)^2}{2} - \frac{x^2}{1} = 1$

↳ уравнение вида $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ⇒ гипербола

ответ: гипербола

17.6.8 $2x^2 - 3y^2 - 28x - 42y - 55 = 0$

$(2x^2 - 28x) - (3y^2 - 42y) - 55 = 0$

$(2x^2 - 28x) - (3y^2 - 42y) + 98 - 147 - 6 = 0$

$(2x^2 - 28x) - (3y^2 - 42y) + 49 \cdot 2 - 49 \cdot 3 - 6 = 0$

$2(x-7)^2 - 3(x+7)^2 = 6$

$\frac{(x-7)^2}{3} - \frac{(x+7)^2}{2} = 1$

↳ уравнение вида $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ⇒ гипербола

ответ: гипербола