Урок 5. ДЗ

① Известно, что генеральная совокупность распределена нормально со средним квадратическим отклонением равным 16. Найдите доверительный интервал для оценки математического ожидания a с надёжностью 0,95, если выборочная средняя M = 80, а объём выборки n = 256

$\sigma = 16$

$M(x) = a$

$p = 0{,}95$

$\bar{x}_в = 80$

$n = 256$

1) Т.к. был известен σ генеральной совокупности => критерий оценки k будет критерий Фишера Z из таблицы распределения Лапласа для $Z < 0$

2) Генеральная совокупность распределена нормально и задача на доверительный интервал => можем от критерия α перейти к $\frac{\alpha}{2}$

$\alpha = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$

$\frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025$

3) Т.к. был известен σ генеральной совокупности => стандартная ошибка среднего $= \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, где σ взято из генеральной совокупности

4) $Z(p_2 = 0{,}025) = -1{,}96$

5) Находим интервал по формуле:

$$\left[\bar{x}_в - Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x}_в + Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \Rightarrow \left[80 - 1{,}96\cdot\frac{16}{\sqrt{256}} ; 80 + 1{,}96\cdot\frac{16}{\sqrt{256}}\right]$$

$$\Rightarrow [80 - 1{,}96 ; 80 + 1{,}96] \Rightarrow [78{,}04 ; 81{,}96]$$

Вывод: [78,04 ; 81,96] – этот интервал с вероятностью 95% покрывает истинное математическое ожидание $M(x) = a$ генеральной совокупности.

② В результате 10 независимых измерений некоторой величины X, выполненных с одинаковой точностью, получены данные: 6,9, 6,1, 6,2, 6,8, 7,5, 6,3, 6,4, 6,9, 6,7, 6,1. Предполагая, что результаты измерений подчинены нормальному закону распределения вероятностей, оцените истинное значение величины X при помощи доверительного интервала, покрывающего это значение с доверительной вероятностью 0,95.

1) Неизвестно σ => не было известно σ генеральной совокупности => критерий оценки – критерий Стьюдента T из

таблицы Стьюдента

2) Тогда стандартная ошибка среднего — это $\frac{s}{\sqrt{n}}$, где s — это корень из дисперсии по выборке $s = \sqrt{D_B(x)}$, где $\sqrt{D_B(x)}$ — несмещённая оценка дисперсии.

3) Испытания проводились с одинаковой точностью => генеральная совокупность распределена нормально => мы можем перейти от α к $\frac{\alpha}{2}$

$p = 0,95 \Rightarrow \alpha = 1 - p = 1 - 0,95 = 0,05$

$\frac{\alpha}{2} = \frac{0,05}{2} = 0,025$

4) $n = 10$. => Находим среднюю величину по выборке $\bar{x}_в$

$$\bar{x}_в = \frac{6,9 + 6,1 + 6,2 + 6,8 + 7,5 + 6,3 + 6,4 + 6,9 + 6,7 + 6,1}{10} = 6,59$$

5) Находим несмещённую оценку дисперсии по формуле:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_в)^2 = ((6,9-6,59)^2 + (6,1-6,59)^2 + (6,2-6,59)^2 + (6,8-6,59)^2 + (7,5-6,59)^2 + (6,3-6,59)^2 + (6,4-6,59)^2 + (6,9-6,59)^2 + (6,7-6,59)^2 + (6,1-6,59)^2) / (10-1) = (0,31^2 + 0,49^2 + 0,39^2 + 0,21^2 + 0,91^2 + 0,29^2 + 0,19^2 + 0,31^2 + 0,11^2 + 0,49^2)/9 = (0,0961 + 0,2401 + 0,1521 + 0,0441 + 0,8281 + 0,0841 + 0,0361 + 0,0961 + 0,0121 + 0,2401)/9 = 0,2032.$$

$$s = \sqrt{0,2032} = 0,4508$$

6) Находим критерий Стьюдента t => $t_{\alpha/2} = 2,262$

7) Находим доверительный интервал по формуле

$$\left[\bar{x}_в - t_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} ; \bar{x}_в + t_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[6,59 - 2,262\cdot\frac{0,4508}{\sqrt{10}} ; 6,59 + 2,262\cdot\frac{0,4508}{\sqrt{10}}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [6,59 - 0,3225 ; 6,59 + 0,3225] \Rightarrow [6,2675 ; 6,9125]$$

Вывод: [6,2675 ; 6,9125] — этот интервал покрывает истинное значение x с доверительной вероятностью 95%

③ Утверждается, что шарики для подшипников, изготовленные автоматическим станком, имеют средний диаметр 17 мм. Используя односторонний критерий с $\alpha = 0,05$, проверить эту гипотезу, если в выборке из $n=100$ шариков средний диаметр оказался равным 17,5 мм, а дисперсия известна и равна 4 кв. мм.

$M_0 = 17$

$M = 17{,}5$

$n = 100$

$\alpha = 0{,}05$

$D = 4$

Гипотезы:

$H_0: M = M_0$

$H_1: M > M_0$

1) Известна дисперсия => дан анализ генеральной совокупности

$\sigma = \sqrt{D(x)} = \sqrt{4} = 2$

Стандартная ошибка среднего $= \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

2) Т.к. дан анализ генеральной совокупности => критерий оценки равен критерию Фишера Z по таблице для $Z > 0$

3) Находим $Z_{табл}$ и $Z_{расч}$.

$$Z_{табл} = Z(1-\alpha) = Z(1-0{,}05) = Z(p=0{,}95) = 1{,}65$$

$$Z_{расч} = \frac{M - M_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{17{,}5 - 17}{\frac{2}{10}} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

4) Сравниваем: $Z_{расч} > Z_{табл}$.

Вывод: Отвергаем гипотезу H_0, принимаем альтернативную гипотезу H_1, альтернативная гипотеза верна: на уровне значимости 5% $M = 17{,}5$.

(4) Продавец утверждает, что средний вес пачки чипсов составляет 200г. Из партии извлечена выборка из 10 пачек. Вес каждой пачки составляет: 202, 203, 199, 197, 195, 201, 200, 204, 194, 190. Известно, что их веса распределены нормально. Верно ли утверждение продавца, если учитывать, что доверительная вероятность равна 99%?

$n = 10$

$\alpha = 1\%$

$p = 0{,}99$

$M_0 = 200$

$M = \bar{x}_в$

Гипотезы:

$H_0: M = M_0$

$H_1: M \neq M_0$

1) Неизвестно σ => не дано анализа генеральной совокупности. => за критерий оценки возьмём критерий Стьюдента T.

2) Стандартная ошибка среднего $= \frac{S}{\sqrt{n}}$, где S - среднеквадратичное отклонение от несмещённой оценки дисперсии выборки.

3) Находим среднюю величину по выборке $\bar{x}_в$:

$$\bar{x}_в = \frac{202+203+199+197+195+201+200+204+194+190}{10} = 198{,}5$$

4) Находим несмещённую оценку дисперсии по формуле:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_в)^2 = \big((202-198{,}5)^2 + (203-198{,}5)^2 + (199-198{,}5)^2 +$$

$$+ (197-198{,}5)^2 + (195-198{,}5)^2 + (201-198{,}5)^2 + (200-198{,}5)^2 +$$

$$+ (204-198{,}5)^2 + (194-198{,}5)^2 + (190-198{,}5)^2\big)/(10-1) =$$

$$= (12{,}25 + 20{,}25 + 0{,}25 + 2{,}25 + 12{,}25 + 6{,}25 + 2{,}25 + 30{,}25 + 20{,}25 + 72{,}25)/9 =$$

$$= \frac{178{,}5}{9} = 19{,}83$$

$$s = \sqrt{19{,}83} = 4{,}4535$$

5) Находим $t_{табл}$ и $t_{расч}$

для табличного:

$k = n-1 = 10-1 = 9$

$p = 1-\alpha = 1-0{,}01 = 0{,}99$

$\Rightarrow t_{табл} = 2{,}821$

для расчётного:

$$t_{расч} = \frac{|M - M_0|}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{|198{,}5 - 200|}{\frac{4{,}4535}{\sqrt{10}}} = \frac{1{,}5\cdot\sqrt{10}}{4{,}4535} =$$

$$= \frac{4{,}4734}{4{,}4535} = 1{,}065$$

6) Сравниваем: $t_{расч} < t_{табл.}$

Вывод: Принимаем гипотезу H_0. Основная гипотеза верна на уровне значимости 99% $M = 200$