Урок 3. ДЗ

① Даны значения зарплат из выборки выпускников: 100, 80, 75, 77, 89, 33, 45, 25, 65, 17, 30, 24, 57, 55, 70, 75, 65, 84, 90, 150. Посчитать среднее арифметическое, среднее квадратичное отклонение, смещённую и несмещённую оценки дисперсий для данной выборки.

Среднее

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = (100+80+75+77+89+33+45+25+65+17+30+24+57+55+70+75+65+84+90+150)/20 = 65,3$$

смещённая дисперсия

$$D(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n} = \frac{(100-65,3)^2}{20} + \frac{(80-65,3)^2}{20} + \frac{(75-65,3)^2}{20} + \frac{(77-65,3)^2}{20} +$$

$$+ \frac{(89-65,3)^2}{20} + \frac{(33-65,3)^2}{20} + \frac{(45-65,3)^2}{20} + \frac{(25-65,3)^2}{20} + \frac{(65-65,3)^2}{20} +$$

$$+ \frac{(17-65,3)^2}{20} + \frac{(30-65,3)^2}{20} + \frac{(24-65,3)^2}{20} + \frac{(57-65,3)^2}{20} + \frac{(55-65,3)^2}{20} +$$

$$+ \frac{(70-65,3)^2}{20} + \frac{(75-65,3)^2}{20} + \frac{(65-65,3)^2}{20} + \frac{(84-65,3)^2}{20} + \frac{(90-65,3)^2}{20} +$$

$$+ \frac{(150-65,3)^2}{20} = 60,2045 + 10,8045 + 4,7045 + 6,8445 + 28,0845 + 52,1645 + 20,6045 + 60,2045 + 10,8045 + 4,7045 + 6,8445 + 28,0845 + 52,1645 + 20,6045 +$$

$$= 60,2045 + 10,8045 + 4,7045 + 6,8445 + 28,0845 + 52,1645 + 20,6045 +$$

$$+ 62,3045 + 85,2845 + 3,4445 + 5,3045 + 1,1045 + 4,7045 +$$

$$+ 81,2045 + 0,0045 + 116,6445 + 62,3045 + 85,2845 + 3,4445 + 5,3045 + 1,1045 + 4,7045 +$$

$$+ 81,2045 + 0,0045 + 116,6445 + 62,3045 + 85,2845 + 3,4445 + 5,3045 + 1,1045 + 4,7045 + 81,2045 + 0,0045 + 116,6445 + 62,3045 + 85,2845 + 3,4445 + 5,3045 + 1,1045 + 4,7045 + 81,2045 + 0,0045 + 116,6445 = 950,4$$

$$+ 0,0045 + 17,4845 + 30,5045 + 358,7045 = 950,4$$

несмещённая дисперсия

$$D'(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1} = \frac{(100-65,3)^2}{19} + \frac{(80-65,3)^2}{19} + \frac{(75-65,3)^2}{19} + \frac{(77-65,3)^2}{19} +$$

$$+ \frac{(89-65,3)^2}{19} + \frac{(33-65,3)^2}{19} + \frac{(45-65,3)^2}{19} + \frac{(25-65,3)^2}{19} + \frac{(65-65,3)^2}{19} +$$

$$+ \frac{(17-65,3)^2}{19} + \frac{(30-65,3)^2}{19} + \frac{(24-65,3)^2}{19} + \frac{(57-65,3)^2}{19} + \frac{(55-65,3)^2}{19} +$$

$$+ \frac{(70-65,3)^2}{19} + \frac{(75-65,3)^2}{19} + \frac{(65-65,3)^2}{19} + \frac{(84-65,3)^2}{19} + \frac{(90-65,3)^2}{19} +$$

$$+ \frac{(150-65,3)^2}{19} = 63,3732 + 11,3732 + 4,9521 + 7,2047 + 29,5626 + 54,91 +$$

$$+ 122,7837 + 65,5837 + 89,7732 + 3,6258 + 5,5837 +$$

$$+ 21,6889 + 85,4784 + 0,0047 + 122,7837 + 65,5837 + 89,7732 + 3,6258 + 5,5837 +$$

$$+ 21,6889 + 85,4784 + 0,0047 + 18,4047 + 32,11 + 377,5837 = 1000,457$$

$$+ 1,1626 + 4,9521 + 0,0047 + 18,4047 + 32,11 + 377,5837 = 1000,457$$

Среднее квадратичное отклонение

$$\sigma = \sqrt{D(x)}$$

от смещённой дисперсии:

$$\sigma = \sqrt{950,11} = 30,8239$$

от несмещённой дисперсии:

$$\sigma' = \sqrt{1000,457} = 31,63$$

ответ: $\bar{x} = 68,3$; $\left[\begin{array}{l} D(x) = 950,11 \\ \sigma = 30,8239 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} D'(x) = 1000,457 \\ \sigma' = 31,63 \end{array}\right.$

(2) В первом ящике находятся 8 шаров, из которых 5 белые. Во втором ящике – 12 шаров, из которых 5 белых. Из первого ящика вытаскивают случайным образом два шара, из второго – 4. Какова вероятность того, что 3 шара белые?

I ящик: $\underbrace{\text{5 белых 3 не белых}}_{8}$ $\Downarrow$ 2 шара

II ящик: $\underbrace{\text{5 белых 7 не белых}}_{12}$ $\Downarrow$ 4 шара

$\underbrace{\text{2 шара} \quad \text{4 шара}}_{\text{6 шаров}}$

$P(B_1)$ - достать 0 белых из I ящика и 3 белых из II ящика

$P(B_2)$ - достать 1 белый из I ящика и 2 белых из II ящика

$P(B_3)$ - достать 2 белых из I ящика и 1 белый из II ящика

$P(A) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) \Rightarrow$

$$\frac{C_5^0 \cdot C_3^2}{C_8^2} \cdot \frac{C_5^3 \cdot C_7^1}{C_{12}^4} + \frac{C_5^1 \cdot C_3^1}{C_8^2} \cdot \frac{C_5^2 \cdot C_7^2}{C_{12}^4} + \frac{C_5^2 \cdot C_3^0}{C_8^2} \cdot \frac{C_5^1 \cdot C_7^3}{C_{12}^4} =$$

$$= \frac{\frac{3!}{2!\cdot 1!}}{\frac{8!}{2!6!}} \cdot \frac{\frac{3!}{3!2!} \cdot \frac{7!}{1!6!}}{\frac{12!}{4!8!}} + \frac{\frac{5!}{1!4!} \cdot \frac{3!}{1!2!}}{\frac{8!}{2!6!}} \cdot \frac{\frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{7!}{2!5!}}{\frac{12!}{4!8!}} + \frac{\frac{5!}{2!3!}}{\frac{8!}{2!6!}} \cdot \frac{\frac{5!}{1!4!} \cdot \frac{7!}{8!4!}}{\frac{12!}{4!8!}} =$$

$$= \frac{3}{28} \cdot \frac{10 \cdot 7}{1880/24} + \frac{5 \cdot 3}{28} \cdot \frac{10 \cdot 21}{1880/24} + \frac{10}{28} \cdot \frac{5 \cdot 35}{188/24} =$$

$$= \frac{3 \cdot 70}{28 \cdot 495} + \frac{15 \cdot 210}{28 \cdot 495} + \frac{10 \cdot 175}{28 \cdot 495} = \frac{210}{13860} + \frac{3150}{13860} + \frac{1750}{13860} =$$

$$= \frac{5110}{13860} = 0,36(86)$$

ответ: $P(A) = 0,3686$

(3) В университет на факультеты A и B поступило равное коли-

число студентов, а на факультете C студентов поступило столько же, сколько на A и B вместе. Вероятность того, что студент факультета A сдаст первую сессию, равна 0.8. Для студента факультета B эта вероятность равна 0.7, а для студента факультета C – 0.9. Студент сдал первую сессию.

а) какова вероятность того, что он учится на факультете A?

б) –"–"– на факультете B?

в) –"–"– на факультете C?

S - сдача сессии

$P(S|A) = 0.8$

$P(S|B) = 0.7$

$P(S|C) = 0.9$

$P(A) = P(B) = 0,25$

$P(C) = P(A) + P(B) = 0.5$

$P(S) = P(A)\cdot P(S|A) + P(B)\cdot P(S|B) + P(C)\cdot P(S|C) =$

$= 0,25\cdot 0,8 + 0,25\cdot 0,7 + 0,5\cdot 0,9 = 0,2 + 0,175 + 0,45 = 0,825$

тогда по формуле Байеса: $P(A|B) = \dfrac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)} \Rightarrow$

а) Для факультета A: $P(A|S) = \dfrac{P(S|A)\cdot P(A)}{P(S)} = \dfrac{0,25\cdot 0,8}{0,825} = 0,24(24)$

б) Для факультета B: $P(B|S) = \dfrac{P(S|B)\cdot P(B)}{P(S)} = \dfrac{0,25\cdot 0,7}{0,825} = 0,2121$

в) Для факультета C: $P(C|S) = \dfrac{P(S|C)\cdot P(C)}{P(S)} = \dfrac{0,5\cdot 0,9}{0,825} = 0,54(54)$

ответ: $\left[\begin{array}{l} P(A|S) = 0,2424 \\ P(B|S) = 0,2121 \\ P(C|S) = 0,5454 \end{array}\right.$

(4) Устройство состоит из трёх деталей. Для первой детали вероятность выйти из строя в первый месяц равна 0.1, для второй – 0.2, для третьей – 0.25. Какова вероятность того, что в первый месяц выйдут из строя

а) все детали

б) только две детали

в) хотя бы одна деталь

г) от одной до двух деталей?

$P(B_1)$ – 1-я деталь выйдет из строя

$P(B_2)$ – 2-я деталь выйдет из строя

$P(B_3)$ – 3-я деталь выйдет из строя

$P(A_а)$ – все детали выйдут из строя

$P(A_а) = P(B_1)\cdot P(B_2)\cdot P(B_3) = 0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}25 = 0{,}005$

$P(A_б)$ – только две детали выйдут из строя

$$P(A_б) = P(B_1)\cdot P(B_2)\cdot P(\overline{B}_3) + P(B_1)\cdot P(\overline{B}_2)\cdot P(B_3) + P(\overline{B}_1)\cdot P(B_2)\cdot P(B_3) =$$
$$= 0{,}1\cdot 0{,}2\cdot(1-0{,}25) + 0{,}1\cdot(1-0{,}2)\cdot 0{,}25 + (1-0{,}1)\cdot 0{,}2\cdot 0{,}25 = 0{,}015 + 0{,}02 + 0{,}045 = 0{,}08$$

$P(A_в)$ – хотя бы одна деталь выйдет из строя

$$P(A_в) = 1 - P(\overline{B}_1)\cdot P(\overline{B}_2)\cdot P(\overline{B}_3) = 1 - 0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}75 = 1 - 0{,}54 = 0{,}46$$

$P(A_г)$ – выйдет из строя от одной до двух деталей.

{к $P(A_б)$ – „только две детали выйдут из строя" прибавим $P(A')$ – „только одна деталь выйдет из строя"}

$$P(A') = P(B_1)\cdot P(\overline{B}_2)\cdot P(\overline{B}_3) + P(\overline{B}_1)\cdot P(\overline{B}_2)\cdot P(B_3) + P(\overline{B}_1)\cdot P(B_2)\cdot P(\overline{B}_3) =$$
$$= 0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}75 + 0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}25 + 0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}75 = 0{,}06 + 0{,}18 + 0{,}135 = 0{,}375.$$

$\Rightarrow P(A_г) = P(A_б) + P(A') = 0{,}08 + 0{,}375 = 0{,}455$

Ответ: $P(A_а)$ – все детали выйдут из строя $= 0{,}005$

$P(A_б)$ – только две детали выйдут из строя $= 0{,}08$

$P(A_в)$ – хотя бы одна деталь выйдет из строя $= 0{,}46$

$P(A_г)$ – от одной до двух деталей выйдет из строя $= 0{,}455$