Урок 2. ДЗ

① Вероятность того, что стрелок попадёт в мишень, выстрелив один раз, равна 0,8. Стрелок выстрелил 100 раз. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в цель ровно 85 раз.

$p = 0{,}8$ - вероятность одного события

$k = 85$ - количество благоприятных для нас действий

$n = 100$ - общее количество действий

$\left.\begin{array}{l} p > 0{,}1 \\ n = 100 \end{array}\right\}$ будем использовать формулу биномиального распределения

$P_n(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, где $q = 1 - p$ =>

$P_{100}(85) = C_{100}^{85} \cdot 0{,}8^{85} \cdot (1 - 0{,}8)^{100-85} = \frac{100!}{85!\,15!} \cdot 0{,}8^{85} \cdot 0{,}2^{15} = 0{,}8^{85} \cdot 0{,}2^{15} = 0{,}0481$

Ответ: $P = 0{,}0481$

② Вероятность того, что лампочка перегорит в течение первого дня эксплуатации, равна 0.0004. В жилом комплексе после ремонта в один день включили 5000 новых лампочек

а) какова вероятность, что ни одна из них не перегорит в первый день?

$p = 0{,}0004$

$n = 5000$

$\left.\begin{array}{l} p < 0{,}1 \\ n > 100 \end{array}\right\}$ будем использовать распределение Пуассона

$m = 0$

$P_m \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$, где $\lambda = n \cdot p$ =>

$\lambda = 5000 \cdot 0{,}0004 = 2$

$P_0 \approx \frac{2^0}{0!} \cdot e^{-2} \approx \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2{,}71828^2} \approx \frac{1}{7{,}389046 1584} \approx 0{,}1354$

Ответ: $P_0 \approx 0{,}1354$

б) какова вероятность, что перегорят ровно две?

$m = 2$

$P_2 \approx \frac{2^2}{2!} \cdot e^{-2} \approx 2 \cdot \frac{1}{2{,}71828^2} \approx 2 \cdot \frac{1}{7{,}3890461584} \approx 0{,}2707$

Ответ: $P_2 \approx 0{,}2707$

③ Монету подбросили 144 раза. Какова вероятность, что орёл выпадет ровно 70 раз?

$n = 144$

$k = 70$

$p = \frac{1}{2}$

$\left.\begin{array}{l} n > 100, \text{но} \\ p > 0{,}1 \end{array}\right\}$ будем использовать формулу биномиального распределения

$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$P_{144}(70) = \frac{144!}{70! \cdot 74!} \cdot 0{,}5^{70} \cdot 0{,}5^{74} = 0{,}0628$

Ответ: $P = 0{,}0628$

④ В первом ящике находится 10 шаров, из которых 7 - белые.
Во втором ящике - 11 шаров, из которых 9 белых
Из каждого ящика вытаскивают случайным образом по два шара.

I ящик: 7 белых + 3 не белых → 10 ⇓ 2 шара

II ящик: 9 белых + 2 не белых → 11 ⇓ 2 шара

4 шара

а) Какова вероятность того, что все шары белые?

$$P(A)=\frac{C_7^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_9^2}{C_{11}^2}=\frac{\frac{7!}{2!(7-2)!}}{\frac{10!}{2!(10-2)!}}\cdot\frac{\frac{9!}{2!(9-2)!}}{\frac{11!}{2!(11-2)!}}=\frac{\frac{7!}{5!}}{\frac{10!}{8!}}\cdot\frac{\frac{9!}{7!}}{\frac{11!}{9!}}=\frac{6\cdot7}{9\cdot10}\cdot\frac{8\cdot9}{10\cdot11}=\frac{3024}{9900}=0{,}3054$$

Ответ: $P(A)=0{,}3054$

б) Какова вероятность того, что ровно два шара белые?

$P(B_1)$ - достать 2 белых из I ящика и 0 белых из II ящика
$P(B_2)$ - достать 1 белый из I ящика и 1 белый из II ящика
$P(B_3)$ - достать 0 белых из I ящика и 2 белых из II ящика

$P(A)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)\Rightarrow$

$$P(A)=\frac{C_7^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_2^2}{C_4^2}+\frac{C_7^1\cdot C_3^1}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_9^1\cdot C_2^1}{C_4^2}+\frac{C_3^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_9^2}{C_4^2}=$$

$$=\frac{\frac{7!}{2!\cdot5!}}{\frac{10!}{2!\cdot8!}}\cdot\frac{\frac{2!}{2!0!}}{\frac{11!}{2!\cdot9!}}+\frac{\frac{7!}{1!6!}\cdot\frac{3!}{1!2!}}{\frac{10!}{2!8!}}\cdot\frac{\frac{9!}{1!8!}\cdot\frac{2!}{1!2!}}{\frac{11!}{2!\cdot9!}}+\frac{\frac{3!}{2!1!}}{\frac{10!}{2!\cdot8!}}\cdot\frac{\frac{9!}{2!7!}}{\frac{11!}{2!\cdot9!}}=0{,}2048$$

Ответ: $P(A)=0{,}248$

в) Какова вероятность того, что хотя бы один шар белый?

Решаем от обратного
$P(A)$ - достанем хотя бы 1 белый шар
$P(\neg A)$ - не достанем ни одного белого шара

$\Rightarrow P(A)=1-P(\neg A)$:

$$P(A)=1-\frac{C_3^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_2^2}{C_4^2}=1-\frac{\frac{3!}{2!1!}}{\frac{10!}{2!\cdot8!}}\cdot\frac{\frac{2!}{2!0!}}{\frac{11!}{2!\cdot9!}}=1-\frac{3}{(9\cdot10)/2}\cdot\frac{1}{(10\cdot11)/2}=$$

$$=1-\frac{3}{45}\cdot\frac{1}{55}=1-\frac{3}{2475}=1-0{,}0012=0{,}9988$$

Ответ: $P(A)=0{,}9988$