Dobrý den,
v posledních dvou cvičeních nám zbývá řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Nejprve začneme s počátečním problémem.

Úkol na tento týden na konci textu. Deadline na odevzdání 24.5. 2020

Teo z přednášek: http://kfe.fjfi.cvut.cz/~limpouch/numet/ode.pdf str 1-18

Projděte si doplňující dokument :http://kfe.fjfi.cvut.cz/~matysma4/nme/cv10/odeuvod.pdf

který využijeme pro prográmek na metody: Eulerova, Heunova metoda, metoda středního bodu

Skript: http://kfe.fjfi.cvut.cz/~matysma4/nme/cv10/odeuvod.m
Budeme řešit úlohu pro množení bakterií zadanou v dokumentu.
3) do času T=5

4) připravíme si počáteční podmínky: na začátku jedna bakterie, pro 3 metody

9-11) připravíme si naši funkci, krok a analytické řešení

použijeme příkazy *hold on*/ *hold off* a v každém kroku vykreslíme řešení pomocí metod: Eulerova, Heunova metoda, metoda středního bodu, kde na řádcích 32,36,40) použijeme příslušné vzorečky z dokumentu: http://kfe.fjfi.cvut.cz/~matysma4/nme/cv10/odeuvod.pdf

V grafu vidíme že jsme použitím Heunovy metody a metody středního bodu výsledek zpřesnili oproti Eulerově metodě.

Ještě se podíváme na Stiff problém. Odkomentujte řádky 15-17 ve skriptu a spusťte.
Vidíme, že pro rovnici s funkcí: -15**y* a krok 0.14 všechny použité metody divergují. Metoda začne konvergovat pro krok < 0.13, přičemž Eulerova metoda osciluje.

Tj. potřebujeme použít krok kratší než charakteristický čas útlumu úlohy,
viz teorie http://kfe.fjfi.cvut.cz/~limpouch/numet/ode.pdf na straně 15

Projděte si dokument na konstrukci Runge-Kuttovy metody:
http://kfe.fjfi.cvut.cz/~matysma4/nme/cv10/RungeKutta.pdf

Porovnáme si Eulerovu a Runge-Kuttovu metodu pro řešení úlohy harmonického oscilátoru.

rovnici y"+omega^2 * y = 0
Převedeme na soustavu rovnic prvního řádu:
y' = z
z' = -omega^2 * y

a přejmenujeme do konvence: u'=f(t,u), u=[y,z] → můžeme pak řešit obě dvě rovnice najednou

Euler: http://kfe.fjfi.cvut.cz/~matysma4/nme/cv10/Euler.m

14-18) Nastavíme počáteční konstanty

20) Připravíme si 2-rozměrnou proměnou skrze kterou vyřešíme obě dvě rovnice najednou a dosadíme do ní počáteční podmínky

22) rovnici *f* přepíšeme pro *u*: Jsou to vlastně 2 rovnice, proto čárka mezi nimi:
f1= u(2)
f2= -omega g^2*u(1)
kde u(1) = *y*, u(2)=*z*   tj. *u*=[*y*,*z*]

Pro formalismus zanecháme v *inline* proměnné : '*t*','*u*'
Tady by stačilo jen '*u*'. Ale obecně bychom mohli mít složitější funkci pro daný typ, závislou také na '*t*', jelikož máme *u*'=d*u*/d*t*==*f*(*t*,*u*).

29-36) Vykreslíme do dvou subplotů polohu a rychlost, tj. *y* a její derivaci. *u*(1) a *u*(2)
38) Použijeme vzorec pro Eulerovu metodu. Mohli bychom použít dvě rovnice a počítat *y* a *z* na dvou řádcích. Musíme je ale počítat najednou v jednom for cyklu → doplňují se v každém kroku.

Vidíme výsledek odpovídající harmonickému oscilátoru: V nulové poloze je maximální rychlost a naopak.

Runge-Kutt: http://kfe.fjfi.cvut.cz/~matysma4/nme/cv10/RungeKutta.m

Použijeme stejnou úlohu jako pro Eulerovu metodu.

Na řádku 17) ale zvětšíme krok 5krát oproti Eulerově metodě. Runge-Kuttova metoda je metoda mnohem vyššího řádu a tak si to můžeme dovolit.

Tělo skriptu je stejné. Na řádcích 39-43) Použijeme vzorce pro Runge-Kuttovu metodu 4tého řádu.
Viz vzorce v http://kfe.fjfi.cvut.cz/~matysma4/nme/cv10/RungeKutta.pdf
a v teo http://kfe.fjfi.cvut.cz/~limpouch/numet/ode.pdf strana 5

I přes mnohem větší velikost kroku jsme dosáhli obdobného výsledku.

Zkuste si naopak zvednout krok na 0.5 v předchozím skriptu
http://kfe.fjfi.cvut.cz/~matysma4/nme/cv10/Euler.m
→ chyba začne značně narůstat

Oproti Eulerově metodě jsme ale museli funkci *f* vyčíslit mnohonásobně vícekrát.

Řešení soustavy rovnic:
Zadání úlohy: http://kfe.fjfi.cvut.cz/~matysma4/nme/cv10/odesoustava.pdf

Skript: http://kfe.fjfi.cvut.cz/~matysma4/nme/cv10/rksoustava.m

14) Obdobně jako v předchozích skriptech zapíšeme soustavu 4 rovnic najednou přes 4složkovou proměnou *u/w*, s jednotlivými rovnicemi oddělenými čárkou v []

23) uděláme krátkou pauzu ve vykreslování bodů pro efekt animace

26) vykreslíme 2D pozici

30-34) provedeme Runge-Kuttovu metodu

Vidíme že vykreslíme pěkný kruh i pro relativně velký krok *h*.

Zkusíme úlohu lehce zesložitit. Odkomentujte řádek 11 → nebudeme obíhat po kružnici ale po elipse

Vidíme že krok je příliš velký v okolí bodů obratu a zaneseme numerickou chybu.

Odkomentujte i řádky 19) a 20) → uděláme adaptivní volbu kroku v závislosti na pozicích bodů.
→ už zachováme elipsu.

Projděte si doplňující text k dalším metodám řešení ODE
http://kfe.fjfi.cvut.cz/~matysma4/nme/cv10/dalsimetody.pdf

Podíváme se ještě jednou na Stiff problém obecně pro RK metody:
Použijeme úlohu z přednášky: http://kfe.fjfi.cvut.cz/~limpouch/numet/ode.pdf na str 15
Skript: http://kfe.fjfi.cvut.cz/~matysma4/nme/cv10/stiff.m

3-5) Známe analytické řešení
viz https://www.wolframalpha.com/input/?i=d%5E2y%2Fdx%5E2+%2B+101*dy%2Fdx+%2B+100*y+%3D0%3B+y%280%29+%3D+2%3B+y%27%280%29+%3D+-101+

8,9) opět převedeme rovnici druhého řádu na soustavu 2 rovnic prvního řádu
pro obecnost necháme *f*(*x*,*y*,*z*) abychom mohli případně použít stejný skript i pro rovnice závislé na *x*

12-17) budeme úlohu řešit na oblasti <*a*,*b*> a budeme lehce měnit krok podle předpisu h=(b-a)/40;

19-23) Použijeme RK metodu 2. a 4. řádu a uložíme si celý vývoj který pak vykreslíme do grafu.

25-27) vykreslíme si přesné řešení

34) Opět budeme postupně vykreslovat body do jednoho grafu

36-37) Vykreslíme si první bod z počátečních podmínek

41-64) Provedeme RK metodu 2. a 4. řádu: viz rovnice z přednášek

Spustíme:
b=0.7 → *h*= 0.0175 → nám konvergují obě dvě metody (RK4 rychleji)

odkomentujte řádek 14)
b=0.8 → *h*= 0.02 → R4 konverguje. R2 konverguje k nesprávné hodnotě.

odkomentujte řádek 15)
b=0.9 → *h*= 0.0225 → R4 konverguje. R2 diverguje s rychle rostoucí chybou.

To vše při pouze malém navýšení kroku *h*

Úkol:
Ve skriptu: http://kfe.fjfi.cvut.cz/~matysma4/nme/cv10/rksoustava.m

Přepište řešič úlohy tak aby byla použita Bulirsch-Stoerova metoda s použitím metody Leap-Frog pro pevný krok *h*
viz http://kfe.fjfi.cvut.cz/~matysma4/nme/cv10/odesoustava.pdf strana 2