தமிழ்நாடு அரசு

ஒன்பதாம் வகுப்பு

முதல் பருவம்

தொகுதி 2

கணக்கு

தமிழ்நாடு அரசு விலையில்லாப் பாடநூல் வழங்கும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்பட்டது

பள்ளிக் கல்வித்துறை

தீண்டாமை மனித நேயமற்ற செயலும் பெருங்குற்றமும் ஆகும்

தமிழ்நாடு அரசு

முதல்பதிப்பு - 2018

(பொதுப் பாடத்திட்டத்தின் கீழ்
வெளியிடப்பட்ட முப்பருவ நூல்)

விற்பனைக்கு அன்று

பாடநூல் உருவாக்கமும்
தொகுப்பும்

மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி
மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம்

நூல் அச்சாக்கம்

தமிழ்நாடு பாடநூல் மற்றும்
கல்வியியல் பணிகள் கழகம்

www.textbooksonline.tn.nic.in

பொருளடக்கம்

பாடநூல் பயன்பாட்டுத் தலைப்புகள்

எண்ணென்ப ஏனை எழுத்தென்ப இவ்விரண்டும்
கண்ணென்ப வாழும் உயிர்க்கு – குறள் 392

கற்றல் விளைவுகள்

வகுப்பறைச் செயல்பாடுகளை அளவீடுகளுடன் கூடிய கற்றல் மைய முறையாக மாற்றி அமைத்தல்

குறிப்பு

பாடப்பொருளில் மாணவர்களுக்கான கூடுதல் தகவல்களை அளித்தல்

செயல்பாடு

கணிதத்தைக் கற்றுக் கொள்ள மாணவர்களை குறிப்பிட்ட செயல்பாடுகளில் ஈடுபட ஊக்குவித்தல்

இணையச் செயல்பாடு

கற்போரின் பாடப்பொருள் புரிதலை தொழில்நுட்பப் பயன்பாட்டின் மூலம் மேம்படுத்துதல்

சிந்தனைக் களம்

மாணவர்கள் கணிதத்தைக் கற்றுக் கொள்ளும் ஆர்வத்தைத் தூண்டுதல். மாணவர்களை பரந்த சிந்தனை கொண்டவர்களாக ஆக்குதல்

நினைவு கூர்வதற்கான கருத்துகள்

பாடப்பொருளில் கற்றவற்றை நினைவு கூறுதல்

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

பாடப்பொருளில் கூடுதல் மதிப்பீட்டு வினாக்களை அளித்தல்

முன்னேற்றத்தை சோதித்தல்

கற்போரின் முன்னேற்றத்தை சுய மதிப்பீடு செய்தல்

பயிற்சி

பாடப்பொருளில் கற்போருக்கு உள்ள புரிதலை மதிப்பிடுதல்

பாடநூலில் உள்ள விரைவு குறியீட்டை (QR Code) பயன்படுத்துவோம்! எப்படி?

- உங்கள் திறன்பேசியில்,கூகுள் playstore /ஆப்பிள் app store கொண்டு QR Code ஸ்கேனர் செயலியை இலவசமாகப் பதிவிறக்கம் செய்து நிறுவிக்கொள்க.
- செயலியைத் திறந்தவுடன், ஸ்கேன் செய்யும் பொத்தானை அழுத்தி திரையில் தோன்றும் கேமராவை QR Code–இன் அருகில் கொண்டு செல்லவும்.
- ஸ்கேன் செய்வதன் மூலம் திரையில் தோன்றும் உரலியை(URL) சொடுக்க, அதன் விளக்கப் பக்கத்திற்கு செல்லும்.

குறியீடுகள்

$=$	சமம் (equal to)	$P(A)$	A இன் அடுக்குக் கணம் (power set of A)
$\neq$	சமமில்லை (not equal to)	$\vert\vert\vert^{ly}$	இதேபோன்று (similarly)
$<$	விடக் குறைவு (less than)	$\triangle$	சமச்சீர் வித்தியாசம் (symmetric difference)
$\leq$	குறைவு அல்லது சமம் (less than or equal to)	$\mathbb{N}$	இயல் எண்கள் (Natural numbers)
$>$	விட அதிகம் (greater than)	$\mathbb{W}$	முழு எண்கள் (Whole numbers)
$\geq$	அதிகம் அல்லது சமம் (greater than or equal to)	$\mathbb{Z}$	முழுக்கள் (integers)
$\approx$	சமானமான (equivalent to)	$\mathbb{R}$	மெய்யெண்கள் (Real numbers)
$\cup$	சேர்ப்பு (union)	Δ	முக்கோணம் (Triangle)
$\cap$	வெட்டு (intersection)	$\angle$	கோணம் (Angle)
$\mathbb{U}$	அனைத்துக் கணம் (universal set)	$\perp$	செங்குத்து (perpendicular to)
$\in$	உறுப்பு (belongs to)	$\parallel$	இணை (parallel to)
$\notin$	உறுப்பல்ல (does not belong to)	$\Rightarrow$	உணர்த்துகிறது (implies)
$\subset$	தகு உட்கணம் (proper subset of)	$\therefore$	எனவே (therefore)
$\subseteq$	உட்கணம் (subset of or is contained in)	$\because$	ஏனெனில் (since (or) because)
$\not\subset$	தகு உட்கணமல்ல (not a proper subset of)	$\lvert\ \rvert$	தனிமதிப்பு (absolute value)
$\nsubseteq$	உட்கணமல்ல (not a subset of or is not contained in)	$\simeq$	தோராயமாகச் சமம் (approximately equal to)
A' (or) A^c	A இன் நிரப்புக்கணம் (complement of A)	$\cong$ (or) $\equiv$	சர்வ சமம் (congruent)
$\emptyset$ (or) $\{\ \}$	வெற்றுக்கணம் அல்லது இன்மைக் கணம் (empty set or null set or void set)	$\equiv$	முற்றொருமை (identically equal to)
$n(A)$	A என்ற கணத்தின் ஆதி எண் அல்லது செவ்வெண் (number of elements in the set A)	π	பை (pi)
		$\pm$	மிகை அல்லது குறை (plus or minus)

CGSX7D

மின் நூல்

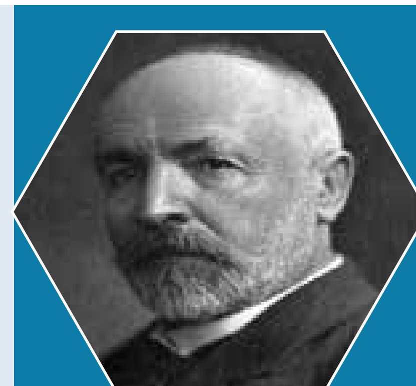
இணைய வளங்கள்

1 கண மொழி

பன்மையையும் ஒருமையாகக் காண வைப்பது கணம்
-ஜார்ஜ் கேண்டர்

CHBPAN

ஜெர்மன் கணிதவியலாளர் ஜார்ஜ் காண்டர் கணங்களின் கோட்பாடுகளை உருவாக்கினார். இன்று அவை கணிதத்தின் அனைத்துப் பிரிவுகளிலும் பயன்படுத்தப்படுகிறன. கணிதத்தில் அனைத்துக் கணிதக் கட்டமைப்புகளையும் கணங்களாகவே கருதலாம்.



ஜார்ஜ் காண்டர்
(1845 - 1918)

கற்றல் விளைவுகள்

- கணம் என்பதை விளக்குதல்.
- கணங்களை, விவரித்தல் முறை, கணக் கட்டமைப்பு முறை மற்றும் பட்டியல் முறையில் எழுதுதல்.
- கணங்களின் வகைகளை அறிதல்.
- கணத்தின் செயல்பாடுகளை அறிந்து, கணச் செயல்களை நிகழ்த்துதல்.
- கணங்கள் மற்றும் கணச் செயல்பாடுகளை வென்படங்களின் மூலம் குறிப்பிடுதல்.
- அன்றாட வாழ்க்கையில் தோன்றும் எளிய வகைக் கணக்குகளுக்குக் கணங்களின் மூலம் தீர்வு காணுதல்.

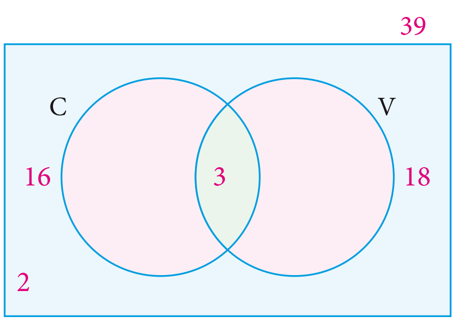
1.1 அறிமுகம்

நமது அன்றாட வாழ்க்கையில், நூல்கள், நாணயங்கள், அஞ்சல் தலைகள் சேகரிப்பு என பல்வேறு வகையான தொகுப்புகளை பயன்படுத்துகிறோம். பொருள்களின் தொகுப்புகளைக் கணித வழியில் குறிக்கும் ஒரு வழியே கணமொழி ஆகும்.

கணக்கைக் கவனிக்க: ஒரு வகுப்பில் உள்ள 39 மாணவர்களில் 16 மாணவர்கள் மட்டைப்பந்து மட்டுமே விளையாடுகிறார்கள். 18 மாணவர்கள் கைப்பந்து மட்டுமே விளையாடுகிறார்கள்.

3 மாணவர்கள் மட்டைப்பந்து மற்றும் கைப்பந்து ஆகிய இரண்டும் விளையாடுகிறார்கள், ஆனால் 2 மாணவர்கள் இவ்விரு விளையாட்டையும் விளையாடவில்லை.

இந்நிகழ்வைப் பின்வரும் படத்தின் மூலம் விளக்கலாம்.

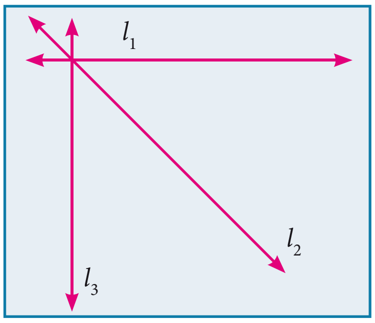


படம் 1.1

வரைபடத்தில் உள்ள வட்டங்கள் எதனைக் குறிக்கின்றன? அவை விளையாடும் மாணவர்களின் தொகுப்பு ஆகும். இங்கு 39 மாணவர்களுக்கு 39 அடையாளங்களையும் வரைய வேண்டிய தேவையில்லை. கைப்பந்து (V) விளையாடு பவர்களைக் குறிக்கும் வட்டத்திற்கும் மட்டைப்பந்து (C) விளையாடுபவர்களைக் குறிக்கும் வட்டத்திற்கும் வெவ்வேறு வண்ணமிட்டு வேறு படுத்திக் காட்டும் அவசியம் கூட எழவில்லை. இரு தொகுப்பு களையும் V மற்றும் C என அழைத்தால் போதுமானது. C மற்றும் Vஇல் இருப்போர் மற்றும் இவற்றில் ஏதாவது ஒன்றில் மட்டும் இருப்போர், இவ்விரண்டிலும் இல்லாதவர் ஆகியோரைப் பற்றிப் பேசும் மொழிதான் கண மொழி எனப்படுகிறது. இக்கணமொழியின் பயன்பாடு கணிதத்தில் பெருமளவு உள்ளதால், கணங்களைப் பற்றி நாம் அறிந்து கொள்வோம்..

ஏன் இம்மொழி இன்றியமையாதது என்பதற்கும், கணிதவியலாளர் இம்மொழியைப் பயன்படுத்துவதற்கும் ஒரே அடிப்படைக் காரணம் நமது அன்றாட வழக்கிலிருக்கும் மொழியின் குறைகளும் அதனால் ஏற்படும் குழப்பங்களும்தான் என்றால் மிகையாகாது. சான்றாக, நான் $1, 2, 3, \ldots$ என எழுதுவதாக வைத்துக் கொள்வோம். அவ்வாறு எழுதியதன் இறுதியிலுள்ள மூன்று புள்ளிகளின் பொருள் என்ன? இயல் எண்களின் பட்டியல்தானே என்று நீங்கள் ஒருவேளை விடை அளிக்கலாம்.அப்பொழுது மற்றொரு கேள்வி எழுகிறது, "இப்போது $1, 2, 4, \ldots$ என எழுதினால் எவ்வாறு விடை அளிப்பீர்கள்? அடுத்த எண் என்ன? 7 ஆக இருக்கலாம். பிறகு 11 எனத் தொடரலாம். (ஏன் இவ்வாறு எண்கள் அமைகின்றன எனக் காண முடிகிறதா?) அல்லது இத்தொடரினை $8, 16$ எனத் தொடரலாம். "இரண்டின் அடுக்குகளின் தொகுப்பு" என வெளிப்படையாகச் சொன்னால் அது பின்னர் எழுதியவற்றைக் குறிக்கும். எனவே எண்களின் தொகுப்புகளைப் பற்றி எவ்வளவு விவரித்தாலும் அவை தெளிவாகக் குறிப்பிடும் தொகுப்பைப் பற்றிச் சொல்வதை விட எழுதுவது கடினம். இங்கு தான் கணமொழி நமக்கு உதவுகிறது. 2 இன் அடுக்குகளை ஒரு கணமாகக் கொள்ளலாம்.

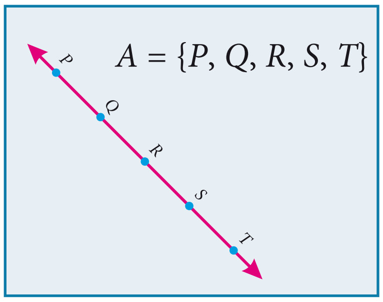
இத்தொடர் முடிவின்றி நீள்கிறது. எனவே, இது ஒரு எண்ணிலி கணமாகும். இதில் பல வகைகள் உண்டு. இயல் எண்களின் கணம், முழு எண்களின் கணம், விகிதமுறு எண்களின் கணம் எனப் பட்டியல் நீண்டுகொண்டே செல்லும். பகா எண்களின் கணம் கூட எண்ணிலி கணம் என்பதை நினைவு கொள்வோம். ஆனால் முடிவுறு கணங்களும் உண்டு என்பதனை மறக்கலாகாது.



படம் 1.2

ஒரு தளத்தில் மூன்று நேர்க்கோடுகளின் சந்திப்பு ஒரே புள்ளியில் தான் அமைகிறது. ஒரு கோட்டிலுள்ள புள்ளி என்று சொல்வதால் அக்கோட்டில் எண்ணற்ற புள்ளிகள் உள்ளன என்பது தெளிவாகிறது.எடுத்துக்காட்டாக, P, Q, R, S

மற்றும் T என ஒரு கோட்டின் மீது அமைந்த ஐந்து புள்ளிகளை ஒரு கணமாக $A = \{P, Q, R, S, T\}$ எனக் குறிக்கலாம்.



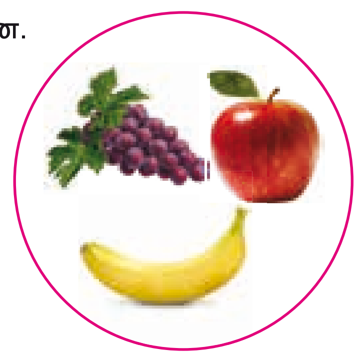
படம் 1.3

இயற்கணிதம் மற்றும் வடிவியலில் இத்தகைய பல கணங்களை முன்னரே கற்றுள்ளோம். மேலும் பல கணங்களையும் கற்க உள்ளோம். முதலில் கணங்களின் மொழியைக் கற்க வேண்டியுள்ளது. தற்போது சிறு எண்ணிக்கை உடைய முடிவுறு கணங்களையும், கணங்களின் மொழியையும் பற்றிக் கற்போம்

பின்வரும் படங்களைப் பார்க்கவும். அவை எதனைக் குறிப்பிடுகின்றன?

இங்குப் படம் 1.4 இல் பழங்களின் தொகுப்பையும், படம் 1.5 இல் வீட்டு உபயோகப் பொருள்களின் தொகுப்பையும் குறிக்கின்றன.

படத்தில் (1.4 மற்றும் 1.5) உள்ளவற்றின் சிறப்பியல்புகளை உற்று நோக்கினால் நம் கவனம் தனிப்பட்ட ஒரு பொருளிலிருந்து அவற்றின் தொகுப்பின் மேல் திசை மாறுவதை உணரலாம். அவ்வாறான எந்தவொரு தொகுப்பும் கணம் என அழைக்கப்படும்.



படம் 1.4

படம் 1.5

1.2 கணம் (Set)

நன்கு வரையறுக்கப்பட்டப் பொருள்களின் தொகுப்பு கணம் எனப்படும்.

இங்கு நன்கு வரையறுக்கப்பட்டப் பொருள்களின் தொகுப்பு என்பது கொடுக்கப்பட்ட பொருள், கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பில் உறுப்பாக உள்ளதா? இல்லையா? என்பதைப் பொருத்து அமைகிறது. கணத்தில் உள்ள பொருள்கள் அதன் உறுப்புகள் எனப்படும்.

சான்றாக,

1. மாவட்ட மைய நூலகத்தில் உள்ள நூல்களின் தொகுப்பு.
2. ஒரு வானவில்லில் உள்ள வண்ணங்களின் தொகுப்பு.
3. பகா எண்களின் தொகுப்பு.

பின்வருவனவற்றுள் எவை கணங்கள் ஆகும்?

1. இயல் எண்களின் தொகுப்பு.
2. ஆங்கில எழுத்துக்களின் தொகுப்பு.
3. ஒரு வகுப்பில் உள்ள நல்ல மாணவர்களின் தொகுப்பு.
4. நம் நாட்டிலுள்ள மாநிலங்களின் தொகுப்பு.
5. ஒரு தோட்டத்தில் உள்ள அழகிய மலர்களின் தொகுப்பு.

அருகில் உள்ள கட்டத்தில் (1), (2) மற்றும் (4) என்பன நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட தொகுப்பாக அமைவதால் அவை கணங்களாகும்.

ஆனால், 'நல்ல' மற்றும் 'அழகான' போன்றவற்றை நன்கு வரையறுக்கப்பட்டவையாக ஏற்பது கடினமாதலால் (3) மற்றும் (5) என்பன நன்கு வரையறுக்கப்படாதவைகளாகும். மல்லிகையை அழகான மலர் என நான் கருதினால் நீங்கள் அவ்வாறு எண்ணமாட்டீர்கள். எனவே ஐயத்திற்கு சற்றும் இடமின்றி அமையும் தொகுப்புகளையே நாம் கணங்களாகக் கருத இயலும்.

எனவே கேள்வி எண் (3) மற்றும் (5) ஆகியன கணங்கள் அன்று.

இந்த இரு நிபந்தனைகளும் இயல்பானவையே. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8… என்ற தொகுப்பும் 1, 3, 2, 4, 5, 7, 6, 8 ... என்ற தொகுப்பும் வெவ்வேறு முறையில் வரிசைப்படுத்தப் பட்டாலும் இரு தொகுப்புகளும் ஒன்றே. கணத்தில் ஒரு பொருள் உறுப்பாக உள்ளதா இல்லையா என்பதனை மட்டுமே நாம் அறிய வேண்டியுள்ளதால் அந்த உறுப்பினைப் பட்டியலின் பல இடங்களில் பட்டியலிட வேண்டியதில்லை.

குறிப்பு

(i) ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புக்கள் ஒரே ஒரு முறை மட்டுமே பட்டியலிடப்பட வேண்டும்.

(ii) ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புக்கள் வெவ்வேறு வகையில் வரிசைப்படுத்தப் பட்டு பட்டியலிடப்பட்டாலும் கணம் மாறாது.

செயல்பாடு-1

உன் அன்றாட வாழ்வில் கணங்களாக இருக்கக்கூடிய மற்றும் கணங்கள் அல்லாத தொகுப்பினை விவாதித்துப் பல எடுத்துக்காட்டுகளைத் தருக.

குறியீடுகள்

- பொதுவாக, ஒரு கணமானது A, B, P, Q, X, Y, போன்ற தலைப்பு எழுத்துக்களால் குறிப்பிடப்படுகிறது.
- ஒரு கணத்தின் உறுப்புக்கள் a, b, p, q, x, y, போன்ற ஆங்கில சிறிய எழுத்துக்களால் குறிக்கப்படுகின்றன.
- ஒரு கணத்தின் உறுப்புக்களை, “{ }” என்ற கண அடைப்பு அல்லது வில் அடைப்பிற்குள் எழுத வேண்டும்.
- x என்பது கணம் A இன் உறுப்பு என்பதை $x \in A$ என எழுதுவோம். (x என்பது A இன் ஓர் உறுப்பு).
- x என்பது கணம் A இன் உறுப்பு அல்ல என்பதை $x \notin A$ என எழுதுவோம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{2,3,5,7\}$ என்ற கணத்தைக் கருதுக.

A இன் ஓர் உறுப்பான 2 என்பதனை $2 \in A$ என எழுதலாம்.

A இன் ஓர் உறுப்பான 5 என்பதனை $5 \in A$ என எழுதலாம்.

A இன் ஓர் உறுப்பில்லாத 6 என்பதனை $6 \notin A$ என எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.1

A = {அஸ்வின், முரளிவிஜய், விஜய்சங்கர், பத்ரிநாத் }.

கோடிட்ட இடங்களை $\in$ அல்லது $\notin$ என்ற பொருத்தமான குறியிட்டு நிரப்புக.

(i) முரளிவிஜய் _____ A.   (ii) அஸ்வின் _______ A.   (iii) பத்ரிநாத் _______ A.

(iv) கங்குலி ______ A.   (v) டெண்டுல்கர் ______ A

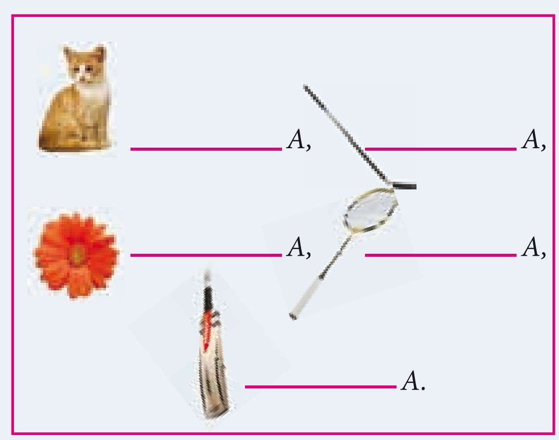
தீர்வு

(i) முரளிவிஜய் $\in A$.   (ii) அஸ்வின் $\in A$ (iii) பத்ரிநாத் $\in A$

(iv) கங்குலி $\notin A$.   (v) டெண்டுல்கர் $\notin A$.

செயல்பாடு-2

கோடிட்ட இடங்களை $\in$ அல்லது $\notin$ என்ற பொருத்தமான குறியிட்டு நிரப்புக



1.3 கணத்தைக் குறிப்பிடும் முறைகள் (Representation of a Set)

ஒற்றைப்படை எண்களின் தொகுப்பைப் பல்வேறு வகைகளில் விவரிக்கலாம்:

(1) "ஒற்றைப் படை எண்களின் கணம்" என்பது எளிமையான ஓர் தொகுப்பாகும்.

(2) நான் எண்ணியிருப்பது என்னவென்று, $\{1, 3, 5, \ldots\}$ என எழுதுவதின் மூலம் உங்களுக்குத் தெரியும்.

(3) x என்பது ஒற்றைப் படை எண் எனக் கொண்டு அனைத்து x இன் தொகுப்பைக் காண்க, எனவும் கூறலாம்.

இவை அனைத்துமே ஒன்றுக்கொன்று சமானமானவை மற்றும் பயனுள்ளவை. அதாவது "$x - 5 = 3$" என்ற சமன்பாட்டின் அனைத்துத் தீர்வுகளின் தொகுப்பும், $\{8\}$ என்பதும் ஒரே கணத்தைத்தான் குறிப்பிடுகின்றன.

ஒரு கணத்தினைப் பின்வரும் மூன்று முறைகளில் ஏதேனும் ஒருமுறையால் குறிப்பிடலாம்:

(i) விவரித்தல் முறை(அல்லது) வர்ணனை முறை (Descriptive Form)

(ii) கணக்கட்டமைப்பு முறை (அல்லது) விதி முறை (Set-Builder Form or Rule Form)

(iii) பட்டியல் முறை (அல்லது) அட்டவணை முறை (Roster Form or Tabular Form)

1.3.1 விவரித்தல் முறை (Descriptive Form)

கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளைச் சொற்களால் தெளிவாக விவரிக்கும் முறை விவரித்தல் முறை அல்லது வர்ணனை முறை எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) ஆங்கில உயிரெழுத்துக்களின் கணம்

(ii) முழு எண்களின் கணம்

1.3.2 கணக்கட்டமைப்பு முறை (அல்லது) விதி முறை (Set Builder Form or Rule Form)

ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் நிறைவு செய்யும் பண்புகளின் அடிப்படையில் கணத்தைக் குறிப்பிடும் முறை கணக்கட்டமைப்பு முறையாகும்.

குறிப்பு

குறியீடு ':' அல்லது '|' என்பது "அதன்படி" அல்லது "என்றவாறு" என்பதைக் குறிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) $A = \{x : x$ என்பது ஆங்கில உயிரெழுத்து$\}$

(ii) $B = \{x | x$ என்பது ஒரு முழு எண்$\}$

1.3.3 பட்டியல் முறை (அல்லது) அட்டவணை முறை (Roster Form or Tabular Form)

ஒரு கணத்தில் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளையும் பட்டியலிடுவது பட்டியல் முறை அல்லது அட்டவணை முறை என்றழைக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) $A = \{a, e, i, o, u\}$ (ii) $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

எப்போதும் இந்த முறையில் குறிப்பிடுவது இயலுமா?

குறிப்பு

எடுத்துக்காட்டு (ii) இல் உள்ள மூன்று புள்ளிகள் $(\ldots)$ என்பது முப்புள்ளி (ellipsis) என்று அழைக்கப்படுகிறது. இந்த முப்புள்ளி என்பது ஒரு தொகுப்பில் உள்ள உறுப்புகள் அவ்வமைப்பு முறையிலேயே தொடர்கின்றன என்பதைக் குறிக்கிறது.

செயல்பாடு-3

பின்வரும் கணங்களை அதற்குரிய முறையில் எழுதுக

வ.எண்	விவரித்தல் முறை	கணக்கட்டமைப்பு முறை	பட்டியல் முறை
1	பத்தை விடச் சிறிய அனைத்து முழு எண்களின் கணம்		
2		$\{x : x$ என்பது 3 இன் மடங்கு , $x \in \mathbb{N}\}$	
3			$\{2,4,6,8,10\}$
4	ஒரு வாரத்திலுள்ள அனைத்துக் கிழமைகளின் கணம்.		
5			$\{\ldots -3,-2,-1,0,1,2,3 \ldots\}$

எடுத்துக்காட்டு 1.2

பின்வரும் சொற்களிலுள்ள எழுத்துக்களின் கணத்தைப் பட்டியல் முறையில் எழுதுக

(i) ASSESSMENT (ii) PRINCIPAL

தீர்வு

(i) ASSESSMENT

$A = \{A, S, E, M, N, T\}$

(ii) PRINCIPAL

$B = \{P, R, I, N, C, A, L\}$

பயிற்சி 1.1

1. பின்வருவனவற்றில் எவை கணங்களாகும்?
   (i) ஒன்று முதல் 100 வரையுள்ள பகா எண்களின் தொகுப்பு.
   (ii) இந்தியாவில் உள்ள செல்வந்தர்களின் தொகுப்பு.
   (iii) இந்தியாவில் உள்ள ஆறுகளின் தொகுப்பு.
   (iv) வளைகோற் பந்தாட்டம் விளையாட்டை நன்றாக விளையாடும் வீரர்களின் தொகுப்பு.

2. பின்வரும் ஆங்கிலச் சொற்களிலுள்ள எழுத்துக்களைப் பட்டியல் முறையில் எழுதுக.

(i) INDIA (ii) PARALLELOGRAM

(iii) MISSISSIPPI (iv) CZECHOSLOVAKIA

3. $A = \{0, 3, 5, 8\}$, $B = \{2, 4, 6, 10\}$ மற்றும் $C = \{12, 14, 18, 20\}$ என்ற கணங்களைக் கொண்டு.

(அ) சரியா, தவறா எனக் கூறுக:

(i) $18 \in C$ (ii) $6 \notin A$ (iii) $14 \notin C$ (iv) $10 \in B$

(v) $5 \in B$ (vi) $0 \in B$

(ஆ) கோடிட்ட இடங்களை நிரப்புக:

(i) $3 \in$ _____ (ii) $14 \in$ ______ (iii) 18 _____ B (iv) 4 ______ B

4. பின்வரும் கணங்களைப் பட்டியல் முறையில் எழுதுக.

(i) A = 20 இக்கும் குறைவான இரட்டைப்படை இயல் எண்களின் கணம்.

(ii) $B = \{y : y = \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}, n \leq 5\}$

(iii) $C = \{x : x$ என்பது ஒரு முழுக் கன எண் மற்றும் $27 < x < 216\}$

(iv) $D = \{x : x \in \mathbb{Z}, -5 < x \leq 2\}$

5. பின்வரும் கணங்களைக் கணக் கட்டமைப்பு முறையில் எழுதுக.

(i) B = ஒரு நாள் ஆட்டங்களில் இரட்டைச் சதமடித்த இந்திய மட்டைப் பந்து வீரர்களின் தொகுப்பு.

(ii) $C = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\right\}$

(iii) D = ஓர் ஆண்டில் உள்ள தமிழ் மாதங்களின் தொகுப்பு.

(iv) E = 9 இக்கும் குறைவான ஒற்றை முழு எண்களின் கணம்.

6. பின்வரும் கணங்களை விவரித்தல் முறையில் எழுதுக

(i) P ={ சனவரி, சூன், சூலை}

(ii) $Q = \{7,11,13,17,19,23,29\}$

(iii) $R = \{x : x \in \mathbb{N}, x < 5\}$

(iv) $S = \{x : x$ ஓர் ஆங்கில மெய்யெழுத்து$\}$

1.4 கணங்களின் வகைகள் (Types of Sets)

ஆர்வத்தைத் தூண்டும் வகையில் ஒரு கணம் உண்டு. அதுவே வெற்றுத் தொகுப்பு எனப்படும். வெற்றுத் தொகுப்பை ஏன் அறிய வேண்டும்? $x^2 + 1 = 0$ என்கிற சமன்பாட்டின் மெய் எண்களின் தீர்வு கணத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். அதில் உறுப்புகளே இல்லை, மேலும் 90 பாகைக்கு மேலுள்ள கோணங்களைக் கொண்ட ஒரு செவ்வகத்தைக் கருதுவோம். அத்தகைய செவ்வகமே இல்லையாதலால் அது வெற்றுக் கணம் என அழைக்கப்படுகிறது.

அதனால் தான் வெற்றுக்கணம் முக்கியத்துவம் பெறுவதோடு அதற்குரிய ஒரு குறியீட்டையும் தனக்கெனப் பெருகிறது.

1.4.1 வெற்றுக்கணம் அல்லது வெறுமைக்கணம் (Empty Set or Null Set)

எந்த ஒரு உறுப்பும் இல்லாத கணம் வெற்றுக்கணம் அல்லது உறுப்புக்கள் இன்மைக்கணம் அல்லது வெறுமைக் கணம் எனப்படும்.

இது $\{\ \}$ அல்லது $\varnothing$ என்ற குறியீட்டால் குறிக்கப்படும்.

சிந்தனைக் களம்

$\{0\}$ மற்றும் $\{\varnothing\}$ என்பவை வெற்றுக்கணங்களா?

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) $A=\{x : x$ என்பது ஒரு ஒற்றைப்படை எண் மற்றும் இரண்டால் மீதியின்றி வகுபடும் எண்$\}$

$\therefore A=\{\ \}$ or $\varnothing$

(ii) எண்கள் 1 மற்றும் 2 இக்குமிடையேயுள்ள முழுக்களின் கணம்.

1.4.2. ஓருறுப்புக் கணம் (Singleton Set)

ஒரே ஒரு உறுப்பை மட்டும் உடைய கணம், ஓருறுப்புக் கணம் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,,

(i) $A = \{\mathbf{x : 3 < x < 5, x} \in \mathbb{N}\}$ (ii) இரட்டைப்படைப் பகா எண்களின் கணம்.

1.4.3 முடிவுறு கணம் (Finite Set)

முடிவுறு எண்ணிக்கையில் அமைந்த உறுப்புக்களைக் கொண்ட கணம் முடிவுறு கணம் எனப்படும்

குறிப்பு

வெற்றுக்கணத்தில் உறுப்புகள் இல்லை. எனவே $\varnothing$ ஒரு முடிவுறு கணமாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

1. ஒரு குடும்பத்திலுள்ள உறுப்பினர்களின் கணம்.
2. உள்ளரங்கு / வெளி மைதானத்தில் விளையாடும் விளையாட்டுகளின் கணம்.
3. பள்ளியில் கற்கும் கல்விசார் பாடங்களின் கணம்.
4. $A = \{x : x$ என்பது *36* இன் காரணி$\}$

1.4.4 முடிவுறாக் கணம் (Infinite Set)

ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை முடிவுறு எண்ணிக்கையில் இல்லை எனில் அக்கணம் , முடிவிலாக் கணம் அல்லது முடிவுறாக் கணம் எனப்படும்.

சிந்தனைக் களம்

இயல் எண்களின் கணம் முடிவுறு கணமா?

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) $\{5,10,15,...\}$ (ii) ஒரு நேர்க்கோட்டில் அமையும் அனைத்துப் புள்ளிகளின் கணம்.

ஒரு கணத்தின் ஆதி எண்

ஒரு கணம் முடிவுறு கணம் எனில், அதில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை அறிந்து கொள்வது பயனுள்ளதாகும்.

ஒரு முடிவுறு கணத்தில் உள்ள உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை அதன் ஆதி எண் எனப்படும்.

A என்ற கணத்தின் ஆதி எண்ணை $n(A)$ எனக் குறிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.3

$A = \{1,2,3,4,5,7,9,11\}$ எனில் $n(A)$ காண்க.

தீர்வு

$A = \{1,2,3,4,5,7,9,11\}$

கணம் A இல் 8 உறுப்புக்கள் இருப்பதால், $n(A) = 8$.

சிந்தனைக் களம்

$A = \{1, b, b, \{4, 2\}, \{x, y, z\}, d, \{d\}\}$, எனில் $n(A)$=____

1.4.5 சமான கணங்கள் (Equivalent Sets)

A, B என்ற இரு முடிவுறு கணங்களில் உள்ள உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை சமம் எனில் அவை சமான கணங்கள் எனப்படும். இது $A \approx B$ எனக் குறிக்கப்படும்.

A, B என்ற கணங்கள் சமான கணங்கள் எனில்

$$n(A) = n(B)$$

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{$ பந்து, மட்டை $\}$ மற்றும் $B = \{$வரலாறு, புவியியல்$\}$.

இங்கு $n(A) = n(B) = 2$. A மற்றும் B சமான கணங்கள்.

சிந்தனைக் களம்

$A=\{x:x$ என்பது இந்திய தேசியக் கொடியில் உள்ள ஒரு நிறம்$\}$ மற்றும் $B=\{$சிவப்பு, நீலம், பச்சை$\}$ எனில் இவ்விரு கணங்களும் சமான கணங்களா?

எடுத்துக்காட்டு 1.4

$P = \{ x : -3 \leq x \leq 0, x \in \mathbb{Z}\}$ மற்றும் $Q = 210$ என்ற எண்ணின் பகாக் காரணிகளின் தொகுப்பு, இவை இரண்டும் சமான கணங்களா?

தீர்வு

$P = \{-3, -2, -1, 0\}$, 210 இன் பகாக் காரணிகள் 2,3,5 மற்றும் 7 எனவே, $Q = \{2, 3, 5, 7\}$

$n(P)$ =4 மற்றும் $n(Q)$ = 4. ஆகையால், கணம் P மற்றும் கணம் Q ஆகியவை சமான கணங்கள்.

1.4.6 சம கணங்கள் (Equal Sets)

இரு கணங்கள் ஒரே மாதிரியான உறுப்புக்களைக் கொண்டிருந்தால் அவை சம கணங்கள் எனப்படும். அவ்வாறு இல்லை எனில் சமமற்ற கணங்கள் எனப்படும்.

A, B என்ற இரு கணங்கள், சம கணங்கள் எனில்

(i) கணம் A இல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும், கணம் B இன் ஓர் உறுப்பாக இருத்தல் வேண்டும்.

(ii) கணம் B இல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் கணம் A இன் ஓர் உறுப்பாக இருத்தல் வேண்டும்.

சிந்தனைக் களம்

$\varnothing$, $\{0\}$, $\{\varnothing\}$என்ற கணங்கள் சம கணங்களா? சமான கணங்களா?

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ மற்றும் $B = \{4, 2, 3, 1\}$

இங்கு A மற்றும் B சரியாக அதே உறுப்புக்களைக் கொண்டிருப்பதால் A யும் B யும் சம கணங்கள் ஆகும்.

குறிப்பு

(i) A, B என்பன சம கணங்கள் எனில் $A = B$.

(ii) A, B என்பன சம கணங்கள் இல்லை எனில் $A \neq B$.

ஒரு கணத்தில் ஒன்றோ அதற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகள் மீண்டும் மீண்டும் கணத்தில் இடம் பெற்றாலும் அதனால் அக்கணத்தில் எவ்வித மாற்றமும் ஏற்படாது.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A=\{a, b, c\}$ மற்றும் $B=\{a, a, b, b, b, c\}$ எனில், $B = \{ a, b, c, \}$. கணம் A இல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும், கணம் B இல் ஓர் உறுப்பாக இருப்பதாலும் கணம் B இன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் கணம் A இன் ஓர் உறுப்பாக இருப்பதாலும் இவ்விரு கணங்களும் சமமானவை..

குறிப்பு

சம கணங்கள் அனைத்தும் சமான கணங்கள் ஆகும். ஆனால் சமான கணங்கள் அனைத்தும் சம கணங்கள் ஆகாது. சான்றாக, $A = \{ p,q,r,s,t\}$ மற்றும் $B= \{ 4,5,6,7,8\}$. என்ற இரண்டு கணங்களில் $n(A)=n(B)$ எனவே, இவ்விரு கணங்களும் சமான கணங்களாகும். ஆனால் சம கணங்கள் ஆகாது.

எடுத்துக்காட்டு 1.5

$A = \{x : x \in \mathbb{N}, 4 \leq x \leq 8\}$ மற்றும்

$B = \{ 4, 5, 6, 7, 8\}$ என்பது சம கணங்களா என ஆராய்க.

தீர்வு

$A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$

A, B என்ற இரு கணங்களும் சமகணங்கள் ஆகும்.

1.4.7 உட்கணம் (Subset)

A, B என்பன இரு கணங்கள் என்க. கணம் A இல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் கணம் B இல் ஓர் உறுப்பு எனில், A என்பது B இன் ஓர் உட்கணம் ஆகும். இதை $A \subseteq B$ என எழுதலாம்..

$A \subseteq B$ என்பதை "A என்பது B இன் உட்கணம்" எனப் படிக்க வேண்டும்

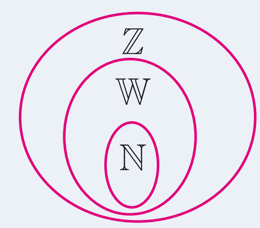
அதாவது, $A \subseteq B$ எனில் $a \in A$ மற்றும் $a \in B$ ஆகும்.

மேலும் A, என்பது B இன் உட்கணம் அல்ல எனில் $A \not\subseteq B$ என எழுதுவோம்.

தெளிவாக, A ஆனது B இன் உட்கணம் எனில்,

$n(A) \le n(B)$ என அமையும்.

சிந்தனைக் களம்



$\mathbb{W}$ என்பது $\mathbb{N}$ இன் உட்கணமா? அல்லது $\mathbb{Z}$ இன் உட்கணமா?

ஆகவே, A இன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் B இன் உறுப்பாக அமையும். கணம் B ஆனது குறைந்தது A பெற்றிருக்கும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைப் பெறும். அதாவது, $n(A) \le n(B)$.

மற்றொறு வழியிலும் இதை ஆராயலாம், $n(A) > n(B)$ எனக் கொண்டால், A ஆனது B ஐ விட அதிகமான உறுப்புகளை பெற்றிருக்கும். மேலும், A இல் உள்ள குறைந்தது ஓர் உறுப்பாவது B இல் இல்லாமல் இருக்கும். ஆகவே, A ஆனது B இன் உட்கணமல்ல.

எடுத்துக்காட்டாக, (i) $\{1\} \subseteq \{1,2,3\}$ (ii) $\{2,4\} \not\subseteq \{1,2,3\}$

செயல்பாடு-4

உன் நண்பர்களுடன் விவாதித்து உனது அன்றாட வாழ்க்கைச் சூழ்நிலையிலுள்ள உட்கணங்களைத் தருக.

எடுத்துக்காட்டு 1.6

$A = \{a, b\}$ என்ற கணத்தின் உட்கணங்களை எழுதுக.

தீர்வு

$A = \{a,b\}$

A இன் உட்கணங்கள் $\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$.

குறிப்பு

(i) $A \subseteq B$ மற்றும் $B \subseteq A$ எனில் $A = B$.
சம கணங்களை இவ்வாறு வரையறுக்க வேண்டும்.

(ii) வெற்றுக்கணம் என்பது ஒவ்வொரு கணத்திற்கும் உட்கணமாக அமையும். A என்பது ஒரு கணம் என்க. வெற்று கணம் Aஇன் ஓர் உட்கணமாக இல்லை எனக் கொள்ள ஒரே வழி x எனும் ஓர் உறுப்பு வெற்றுக் கணத்தில் இருக்க வேண்டும்,அதே வேளையில் Aஇல் உறுப்பாக இருக்கக்கூடாது. ஆனால், x எவ்வாறு வெற்றுக் கணத்தில் இருக்க இயலும்? அதற்கு வாய்ப்பில்லை. இதற்கான ஒரே சாத்தியக்கூறு வெற்றுக் கணமானது Aஇன் உட்கணமாக இருக்கவேண்டும். (குழப்பத்தில் ஆழ்ந்தீர்கள் எனில் பொறுமையாக உங்கள் நண்பர்களுக்கு எடுத்துக் கூறவும். இது சரியென ஏற்றுக்கொள்வீர்கள்!)

(iii) ஒவ்வொரு கணத்திற்கு, அந்த கணமே ஓர் உட்கணம் ஆகும். (ஏன் என்று முயன்றுபார், விவாதி.)

1.4.8. தகு உட்கணம் (Proper Subset)

A மற்றும் B இரு கணங்களாகும். A என்பது B இன் உட்கணம் மற்றும் $A \neq B$ எனில் A என்பது B இன் தகு உட்கணம் எனப்படும். இதை $A \subset B$ என எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக

$A = \{1,2,5\}$ மற்றும் $B = \{1,2,3,4,5\}$ எனில், A என்பது B இன் தகு உட்கணம் ஆகும். அதாவது $A \subset B$.

எடுத்துக்காட்டு 1.7

கோடிட்ட இடங்களில் $\subseteq$ அல்லது $\not\subseteq$ எனத் தகுந்த குறியிட்டு நிரப்புக..

(i) $\{10, 20, 30\}$ ____ $\{10, 20, 30, 40\}$

(ii) $\{p, q, r\}$ _____ $\{w, x, y, z\}$

தீர்வு

(i) $\{10, 20, 30\}$ ____ $\{10, 20, 30, 40\}$

$\{10, 20, 30\}$ இல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும்

$\{10, 20, 30, 40\}$ இருப்பதால் $\{10, 20, 30\} \subseteq \{10, 20, 30, 40\}$.

(ii) $\{p, q, r\}$ ______ $\{w, x, y, z\}$

$\{p, q, r\}$ இல் உள்ள p உறுப்பானது

$\{w, x, y, z\}$, கணத்தில் இல்லையாதலால்

$\{p, q, r\} \not\subseteq \{w, x, y, z\}$.

1.4.9 அடுக்குக் கணம் (Power Set)

கணங்களின் உறுப்புகளும் கணங்களாகலாம். பள்ளியில் உள்ள மனிதர்களை கணமாக எடுத்துக் கொண்டால், அதில் மாணவர்களின் கணம், ஆசிரியர்களின் கணம், ஆசிரியரல்லாப் பணியாளர்களின் கணம் ஆகிய அனைவரையும் உள்ளடக்கிய கணமாகப் பள்ளி அமைகிறது. மாணவர்களின் கணமும் முதல் வகுப்பில் உள்ள மாணவர்கள், இரண்டாம் வகுப்பில் உள்ள மாணவர்கள், ... எனப் பல கணங்களை உள்ளடக்கியதாக அமைகிறது. எனவே, கணத்தை உள்ளடக்கிய, கணத்தை உள்ளடக்கிய, கணத்தை உள்ளடக்கிய, கணத்தை உள்ளடக்கிய... என அமைத்துக்கொண்டே போகலாம்.

A எனும் ஏதேனும் ஒரு கணத்தின் அனைத்து உட்கணங்களையும் ஒரு கணமாக எடுத்துக் கொள்வோம். அதனை B என்க. இப்போது B இல் என்னென்ன கணங்கள் இருக்கும்? முதலில் A தனக்குத்தானே உட்கணமாதலால் A இருக்கும். வெற்றுக்கணமும் A இன் உட்கணம் என்பதால் வெற்றுக்கணம் இருக்கும். x என்பது Aஇன் ஓர் உறுப்பு எனில் ஓருறுப்புக் கணமான $\{x\}$ என்பதும் Bஇல் இருக்கும். (இதிலிருந்து Bஇல் குறைந்தபட்சம் A இல் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை இருக்கும்; அதாவது $n(A)$ ஆனது $n(B)$இக்குச் சமம்). A இல் உள்ள ஒவ்வொரு தனித்த x மற்றும் y உறுப்புகளுக்கும், $\{x, y\}$ என்பது Bஇல் இருக்கும். ஆமாம். நீங்கள் எண்ணுவது சரிதான். Bஇல் உறுப்புகள் அடுக்கிக் கொண்டே போகின்றன. எனவே இந்தக் கணத்திற்கு ஒரு பொருத்தமான பெயர் தேவை!

A என்ற கணத்தின் அனைத்து உட்கணங்களையும் கொண்ட கணம், அக்கணத்தின் அடுக்குக் கணம் எனப்படும். இதனை $P(A)$ எனக் குறிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) $A=\{2, 3\}$ எனில் Aஇன் அடுக்குக் கணத்தைக் காண்க.

A இன் உட்கணங்கள் $\varnothing$, $\{2\},\{3\},\{2,3\}$.

$\therefore$ A இன் அடுக்குக்கணம்,

$P(A) = \{\varnothing ,\{2\},\{3\},\{2,3\}\}$

(ii) $A = \{\varnothing , \{\varnothing\}\}$, எனில் Aஇன் அடுக்குக் கணம் $\{ \varnothing , \{\varnothing , \{\varnothing\}\}, \{\varnothing\} , \{\{\varnothing\}\} \}$ ஆகும்.

முக்கியப் பண்பு:

$n(A) \leq n[P(A)]$ என்பதை முன்னர் அறிந்தோம். ஆனால், $P(A)$ என்பது எவ்வளவு பெரியது? எனவே, கீழ்க்காணும் முடிவுகளுக்கு வர இயலுமா என ஆராய்வோம்?

(i) $n(A) = m$ எனில், $n[P(A)] = 2^m$

(ii) கணம் A இன் தகு உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை $n[P(A)]-1 = 2^m-1$.

எடுத்துக்காட்டு 1.8

$X=\{a, b, c, x, y, z\}$ என்ற கணத்தின் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கையையும், தகு உட்கணங்களின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டவை $X=\{a, b, c, x, y, z\}$. எனில், $n(X) = 6$

X இன் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை $= n[P(X)] = 2^6 = 64$

X இன் தகு உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை $= n[P(X)]-1 = 2^6-1$

$= 64 - 1 = 63$

பயிற்சி 1.2

1. பின்வரும் கணங்களின் ஆதி எண்ணைக் காண்க.

   (i) $M = \{p, q, r, s, t, u\}$

   (ii) $P = \{x : x = 3n+2, n \in \mathbb{W}$ மற்றும் $x < 15\}$

   (iii) $Q = \{y : y = \frac{4}{3n}, n \in \mathbb{N}$ மற்றும் $2 < n \leq 5\}$

   (iv) $R = \{x : x$ ஆனது முழுக்கள், $x \in \mathbb{Z}$ மற்றும் $-5 \leq x < 5\}$

   (v) $S = 1882$ முதல் 1906 வரை உள்ள அனைத்து நெட்டாண்டுகளின்(*Leap year*) கணம்.

2. பின்வரும் கணங்களில் எவை முடிவுறு கணம், எவை முடிவுறாக் கணம் எனக் கூறுக.

   (i) X = தமிழகத்தில் உள்ள மாவட்டங்களின் கணம்.

   (ii) Y = ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் நேர்க்கோடுகளின் கணம்.

   (iii) $A = \{ x : x \in \mathbb{Z}$ மற்றும் $x < 5\}$

   (iv) $B = \{x : x^2-5x+6 = 0, x \in \mathbb{N} \}$

3. பின்வருவனவற்றில் எவை சமான கணங்கள் அல்லது சமமற்ற கணங்கள் அல்லது சம கணங்கள் எனக் கூறுக.

(i) A = ஆங்கில உயிரெழுத்துகளின் கணம்.

B = "VOWEL" என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துகளின் கணம்

(ii) $C = \{2,3,4,5\}$

$D = \{ x : x \in \mathbb{W} , 1< x<5\}$

(iii) E = கணம் A={ $x : x$ என்பது "LIFE" என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துகளின் கணம்}

$F = \{F, I, L, E\}$

(iv) $G = \{x : x$ ஒரு பகா எண் $3 < x < 23\}$

$H = \{x : x$ என்பது 18 இன் வகு எண்கள்$\}$

4. பின்வருவனவற்றில் எவை வெற்றுக்கணம், எவை ஓருறுப்புக்கணம் எனக் காண்க.

(i) $A = \{x : x \in \mathbb{N} , 1 < x < 2\}$

(ii) B = 2 ஆல் வகுபடாத அனைத்து இரட்டைப்படை இயல் எண்களின் கணம்

(iii) $C = \{0\}$.

(iv) D = நான்கு பக்கங்களை உடைய முக்கோணங்களின் கணம்.

5. S = {சதுரம், செவ்வகம், வட்டம், சாய்சதுரம், முக்கோணம்} எனில் பின்வரும், Sஇன் உட்கணங்களின் உறுப்புகளைப் பட்டியலிடுக.

(i) நான்கு சம பக்கங்களை உடைய தள உருவங்களின் கணம்.

(ii) ஒரு பக்கம் கூட இல்லாத தள உருவங்களின் கணம்.

(iii) உட்கோணங்களின் கூடுதல் 180° ஆக உடைய தள உருவங்களின் கணம்.

(iv) 5 பக்கங்களை உடைய தள உருவங்களின் கணம்.

6. $A = \{a, \{a, b\}\}$ எனில், A இன் எல்லா உட்கணங்களையும் எழுதுக.

7. பின்வருவனவற்றின் அடுக்குக் கணத்தைக் காண்க.

(i) $A = \{a, b\}$ (ii) $B = \{1, 2, 3\}$ (iii) $D = \{p, q, r, s\}$ (iv) $E = \varnothing$

8. பின்வரும் கணங்களின் உட்கணங்கள் மற்றும் தகு உட்கணங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(i) W = {சிவப்பு, நீலம், மஞ்சள்} (ii) $X = \{ x^2 : x \in \mathbb{N} , x^2 \leq 100\}$.

9. (i) $n(A) = 4$, $n[P(A)]$ ஐக் காண்க.

(ii) If $n(A)=0$ எனில், $n[P(A)]$ ஐக் காண்க.

(iii) If $n[P(A)] = 256$ எனில், $n(A)$ ஐக் காண்க.

1.5 கணச் செயல்பாடுகள் (Set Operations)

எண்களில் துவங்கி, வெகு விரைவாகவே எண்கணிதச் செயல்பாடுகளையும் கற்றுத் தேர்ந்தோம். இயற்கணிதத்தில் கோவைகளைக் கற்றவுடன் அவற்றைக் கூட்டவும், பெருக்கவும், (x^2+2) $(x-3)$ என எழுதவும், கற்றுத் தேர்ந்தோம். தற்போது கணங்களைப் பற்றி அறிந்தவுடன், இயல்பாகவே நம் மனதில் சில கேள்விகள் எழும். கணங்களை வைத்து என்ன செய்யலாம்? அவற்றை எச்செயல்பாடுகளில் பயன்படுத்தலாம்? எனப் பலவாறு சிந்தனைகள் எழலாம்.

கணத்தை வைத்து என்ன செய்யலாம்? ஓர் உறுப்பை அதிலிருந்து எடுப்போம். ஆனால் அதில் எந்த உறுப்பை எடுப்பது? பொதுவாக இதற்குப் பல விடைகள் உண்டு. ஆகையால் "உறுப்பைக் கணத்திலிருந்து தேர்ந்தெடுத்தல் என்பது ஒரு கணிதச் செயல்பாடு இல்லை. ஆனால் கூட்டல், கழித்தல் போன்ற செயல்பாடுகளில் செய்தது போல் கொடுக்கப்பட்ட இரு கணங்களைச் சேர்த்து ஒரு புதிய கணத்தைப் பெறுவதற்கு நாம் முயற்சி செய்யலாம். எவ்வாறு இதனைச் செய்வது?

இரு கணங்களையும் ஒருங்கிணைப்பது ஒரு வழியாகும். இதன் மூலம் நமக்குப் புதிய கணமாக, ஒரே ஒரு கணம் பெற இயலும். ஆகவே, இது ஒரு செயல்பாடு. கொடுக்கப்பட்ட இரு கணங்களிலும் பொதுவான உறுப்புகளைச் சரியாகத் தேர்ந்தெடுக்க இயலும். கொடுக்கப்பட்ட கணத்தில் இல்லாத அனைத்து உறுப்புகளைப் பற்றி இப்பொழுது காணலாம். ஒரு கணத்திலுள்ள உறுப்புகளைப் பட்டியலிடலாம். ஆனால் அக்கணத்தில் இல்லாதவற்றைப் பட்டியலிட இயலுமா? ஏறக்குறைய எல்லாவற்றையும் பட்டியலிட வேண்டும். 5734 என்பது இயல் எண்களின் கணத்தில் உள்ளது என அறிவோம். ஆனால் அக்கணத்தில் ஏன் என் நாற்காலி இல்லை, ஒரு யானை இருக்க இயலாது எனக் கூறிக்கொண்டே போகலாம். முடிவு ஏது? இந்த உறுப்புகளைப் பற்றி எவ்வாறு விவரிப்பது? தெளிவாகவே நாம் எண்களின் கணத்தைப் பற்றியே பேசுவோமேயன்றி யானைகளைப் பற்றி அல்ல. எனவே உண்மையில் இயல் எண்கள் கணத்தில் இல்லாத ஏனைய எண்களைப் பற்றி மட்டுமே நாம் காண விழைகிறோம். எடுத்துக்காட்டாக, முழுக்களை உட்கிடையாக நிலைநிறுத்தி இயல் எண்கள் கணத்தில் இல்லாத முழுக்களைப் பற்றிப் பேசலாம். பொதுவாக, இவ்வாறு நிலைநிறுத்தும் கணத்தினை அனைத்துக் கணம் (கொடுக்கப்பட்ட கணத்தில் உள்ளது பற்றி அல்லது இல்லாதது பற்றியோ நாம் பேசுவதைப் பொறுத்து) என அழைக்கிறோம்.

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட கணங்களை குறிப்பிட்ட வரையறை அடிப்படையில் ஒரே கணமாக்குக. பின்னர் கணச் செயல்பாடுகளை மேற்கொள்க. வென்படத்தைப் பயன்படுத்தி கணங்களுக்கும் அவற்றின் மீது மேற்கொள்ளப்படும் செயல்பாடுகளுக்கும் உள்ள தொடர்பை காட்சிப்படுத்தலாம்.

1.5.1 அனைத்துக் கணம் (Universal Set)

அனைத்துக் கணம் (Universal Set) என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட நோக்கத்திற்காக அல்லது காரணத்திற்காக எடுத்துக் கொண்ட அனைத்து உறுப்புகளையும் உள்ளடக்கிய தொகுப்புகளின் கணம் அனைத்துக் கணம் எனப்படும். இது U என்ற குறியீட்டால் குறிப்பிடப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) இயல் எண்களின் உறுப்புகள் அனைத்தையும் கொண்டது அனைத்துக் கணம். $\mathrm{U}=\{x : x \in \mathbb{N}\}$.

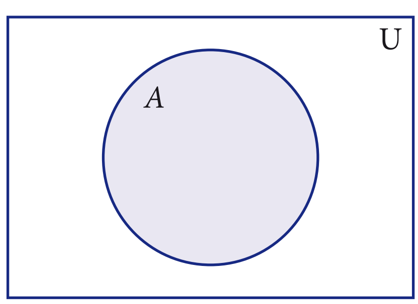
(ii) A = {பூமி, செவ்வாய், வியாழன்}, எனில், சூரியக் குடும்பத்திலுள்ள கோள்கள் அனைத்தையும் கொண்ட கணம் U எனக் கருதலாம்.

1.5.2 நிரப்புக் கணம் (Complement of a Set)

A என்ற கணத்தின் நிரப்புக் கணம் என்பது, கணம் A இன் உறுப்புகளைத் தவிர்த்து, அனைத்துக் கணத்தின் பிற எல்லா உறுப்புகளையும் கொண்ட கணம் ஆகும்.

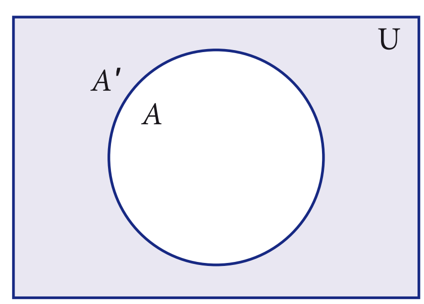
நிரப்புக் கணத்தை A' அல்லது A^c எனக் குறிக்கலாம். $A' = \{x : x \in \mathrm{U}, x \notin A\}$

நிரப்புக் கணத்தின் வென்படம்



A (நிழலிட்ட பகுதி)

படம் 1.6



A' (நிழலிட்ட பகுதி)

படம் 1.7

எடுத்துக்காட்டாக,

U = {வகுப்பில் உள்ள அனைத்து மாணவர்கள்} மற்றும் A= {வகுப்பில் உள்ள மட்டைப் பந்து விளையாடும் மாணவர்கள்} எனில் A'= {வகுப்பில் உள்ள மட்டைப் பந்து விளையாடாத மாணவர்கள்}.

எடுத்துக்காட்டு 1.9

$\mathrm{U} = \{c, d, e, f, g, h, i, j\}$ மற்றும் $A = \{ c, d, g, j\}$ எனில், A' காண்க.

தீர்வு

$\mathrm{U} = \{c, d, e, f, g, h, i, j\}, A = \{c, d, g, j\}$

$A' = \{e, f, h, i\}$

குறிப்பு

(i) $(A')' = A$

(ii) $\mathrm{U}' = \varnothing$

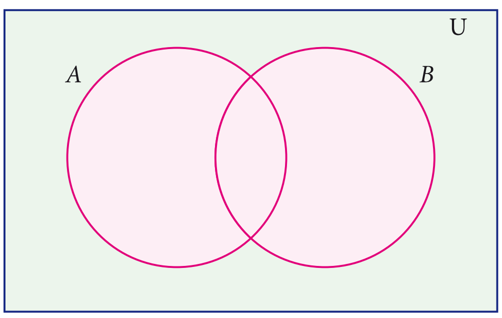
(iii) $\varnothing' = \mathrm{U}$

1.5.3 கணங்களின் சேர்ப்பு (Union of Two Sets)

இரு கணங்கள் A மற்றும் B இன் சேர்ப்புக் கணம் என்பது, கணம் A அல்லது கணம் B அல்லது இரண்டிலும் உள்ள உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம் ஆகும். இது $A\cup B$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது. இதை A சேர்ப்பு B எனப் படிக்க வேண்டும்.

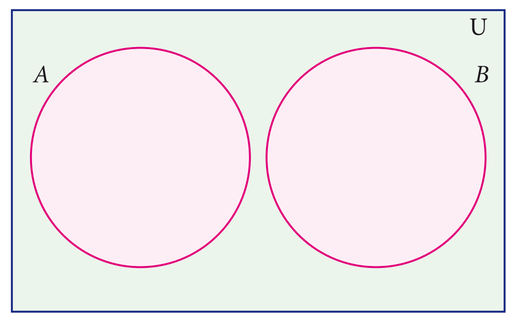
$$A\cup B = \{x : x \in A \text{ அல்லது } x\in B\}$$

இரு கணங்களின் சேர்ப்பு – வென்படத்தில் குறித்தல்



கணங்கள் A இக்கும் B இக்கும்
பொது உறுப்புகள் உண்டு

படம் 1.8



கணங்கள் A உம் B உம்
வெட்டாக் கணங்கள்

படம் 1.9

எடுத்துக்காட்டாக,

P = {ஆசியா, ஆப்பிரிக்கா, அண்டார்டிகா, ஆஸ்திரேலியா} மற்றும்

Q = {ஐரோப்பா, வடஅமெரிக்கா, தென் அமெரிக்கா} எனில் கணங்கள் P மற்றும் Q ஆகியவற்றின் சேர்ப்பு $P\cup Q$ = {ஆசியா, ஆப்பிரிக்கா, அண்டார்டிகா, ஆஸ்திரேலியா, ஐரோப்பா, வடஅமெரிக்கா, தென் அமெரிக்கா} ஆகும்.

குறிப்பு

(i) $A\cup A = A$ (ii) $A\cup\varnothing = A$

(iii) $A\cup U = U$ இங்கு A என்பது அனைத்துக் கணம் U இன் உட்கணம்

(iv) $A\subseteq A\cup B$ மற்றும் $B\subseteq A\cup B$

(v) $A\cup B = B\cup A$ (இரு கணங்களின் சேர்ப்பு பரிமாற்றத்தக்கது)

எடுத்துக்காட்டு 1.10

$A=\{1, 2, 6\}$ மற்றும் $B=\{2, 3, 4\}$ எனில், $A\cup B$ காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டவை $A = \{1, 2, 6\}$, $B=\{2, 3, 4\}$

$$A\cup B = \{1, 2, 3, 4,6\}.$$

எடுத்துக்காட்டு 1.11

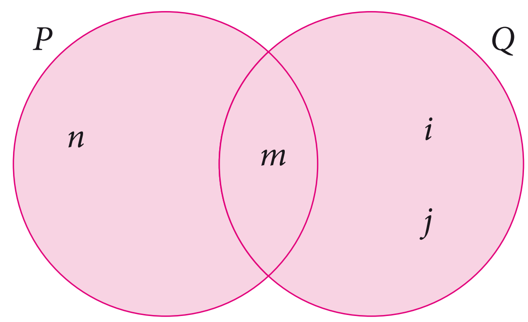
$P=\{m, n\}$ மற்றும் $Q= \{m, i, j\}$ எனில், P மற்றும் Q என்ற கணங்களை வென் படத்தில் குறித்து, அதன் மூலம் $P\cup Q$ காண்க.

தீர்வு

$P=\{m, n\}$ மற்றும் $Q= \{m, i, j\}$

வென்படத்தில் இருந்து,

$P\cup Q=\{n, m, i, j\}$.



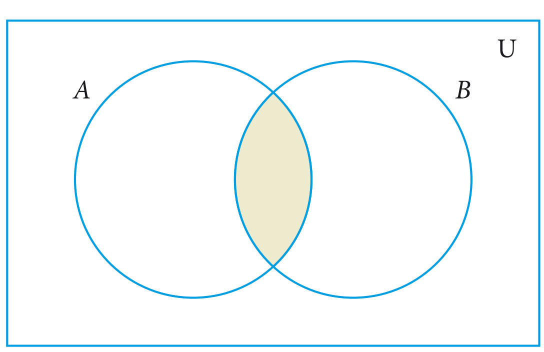
படம் 1.10

1.5.4 கணங்களில் வெட்டு (Intersection of TwoSets)

இரு கணங்கள் A மற்றும் B இன் வெட்டு என்பது அவ்விரு கணங்களின் பொது உறுப்புகளைக் கொண்ட கணமாகும். இதை $A\cap B$ எனக் குறிக்கிறோம். இதை A வெட்டு B எனப் படிக்கிறோம்.

$$A\cap B=\{x : x\in A \text{ மற்றும் } x\in B\}$$

இரு கணங்களின் வெட்டு– வென்படத்தில் குறித்தல்



படம் 1.11

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{1, 2, 6\}$; $B = \{2, 3, 4\}$ எனில், $A\cap B = \{2\}$. ஏனெனில், 2 ஆனது கணம் A மற்றும் B இன் பொது உறுப்பு.

குறிப்பு

(i) $A\cap A = A$ (ii) $A\cap\varnothing = \varnothing$

(iii) $A\cap U = A$ இங்கு A என்பது அனைத்துக்கணம் Uஇன் உட்கணம்

(iv) $A\cap B \subseteq A$ மற்றும் $A\cap B \subseteq B$

(v) $A\cap B = B\cap A$ (இரு கணங்களின் வெட்டுக்கணம் பரிமாற்ற விதிக்கு உட்பட்டது)

$n(A)$ மற்றும் $n(B)$ ஆகியவற்றின் அடிப்படையில் $n(A\cap B)$ ஐத் தீர்மானிக்க இயலுமா? இது கடினமாகத் தெரிகிறது. ஆனால் $n(A)$ மற்றும் $n(B)$ ஆகியவற்றின் அடிப்படையில் $n(A \cup B)$ ஐ எவ்வாறு சொல்ல இயலும்? Aஇல் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் $A\cup B$ இல் உள்ளன. அதைப் போலவே Bஇல் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் $n(A\cup B)$ இல் உள்ளன.

எனவே $n(A\cup B) = n(A) + n(B)$ எனச் சொல்ல இயலுமா? என்றால் இயலாது. A மற்றும் B இல் உள்ள பொதுவான ஓர் உறுப்பு பற்றிச் சிந்திக்கலாமா? A மற்றும் B இல் உள்ள பொதுவான உறுப்பு உறுதியாக $A\cup B$ இல் உள்ளது ஆனால், கணக்கிடும்போது அந்தப் பொதுவான உறுப்பினை $A\cup B$ இல் இரு முறை எடுத்துக் கொள்ளக்கூடாது.

எனவே, உண்மையில் $n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$.

இப்போது $n(A\cap B) = n(A) + n(B) - n(A\cup B)$ எனச் சொல்வது எளிது. ஆகையால், $n(A)$ மற்றும் $n(B)$ கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் வெட்டு மற்றும் சேர்ப்பு ஆகிய இரண்டிலொன்று தெரிந்தால் மற்றொன்றைத் தீர்மானிப்பது எளிது.

எடுத்துக்காட்டு 1.12

$A = \{x : x$ ஓர் இரட்டை இயல் எண் மற்றும் $1 < x \le 12\}$,

$B = \{ x : x$ ஆனது 3 இன் மடங்கு, $x \in \mathbb{N}$ மற்றும் $x \le 12\}$ $A\cap B$ காண்க.

தீர்வு

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ மற்றும் $B = \{3, 6, 9, 12\}$

$A\cap B = \{6, 12\}$

எடுத்துக்காட்டு 1.13

$A = \{2, 3\}$ மற்றும் $C = \{\ \}$ எனில், $A\cap C$ காண்க.

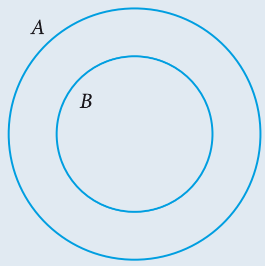
தீர்வு

இங்கு A மற்றும் C என்ற இரு கணங்களுக்கும் இடையே பொது உறுப்புகள் இல்லாததால் $A\cap C = \{\ \}$

1-SET LANGUAGE_TM.indd 21 18-03-2018 15:47:03

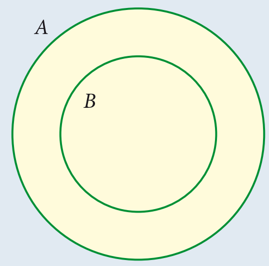
குறிப்பு

(i) $B \subseteq A$, எனில் A, Bஇன் சேர்ப்பு மற்றும் வெட்டு இவற்றை வென்படத்தில் காட்டுக.



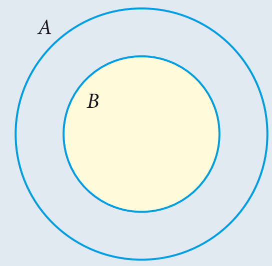
$B \subseteq A$

படம் 1.12



நிழலிடப்பட்ட பகுதி
$A \cup B = A$

படம் 1.13



நிழலிடப்பட்ட பகுதி
$A \cap B = B$

படம் 1.14

(ii) A, B என்ற இரு கணங்களுக்கு $A \cup B = A \cap B$. $\therefore A = B$

(iii) $n(A) = p$ மற்றும் $n(B) = q$ என்க.

(a) குறைந்தபட்சம் $n(A \cup B)$ = அதிகபட்சம் $\{p, q\}$

(b) அதிகபட்சம் $n(A \cup B) = p + q$

(c) குறைந்தபட்சம் $n(A \cap B) = 0$

(d) அதிகபட்சம் $n(A \cap B)$ = குறைந்தபட்சம் $\{p, q\}$

1.5.5 கணங்களின் வித்தியாசம் (Difference of Two Sets)

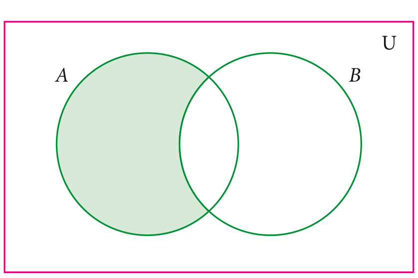
A, B என்பன இரு கணங்கள் என்க. கணம் A மற்றும் கணம் B இன் வித்தியாசம் என்பது கணம் A இல் உள்ள, ஆனால் கணம் B இல் இல்லா உறுப்புகளைக் கொண்ட கணமாகும். இதை $A - B$ அல்லது $A \setminus B$ என எழுதலாம். $A - B$ என்பதை A வித்தியாசம் B எனப் படிக்க வேண்டும்.

$$A - B = \{ x : x \in A \text{ மற்றும் } x \notin B\}$$

$$B - A = \{ y : y \in B \text{ மற்றும் } y \notin A\}.$$

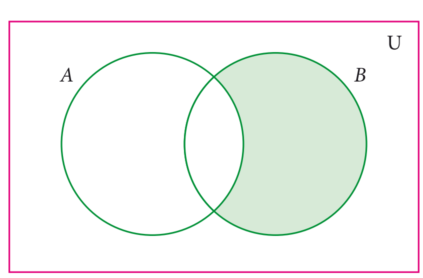
CHKKCB

கண வித்தியாசங்களுக்கான வென்படங்கள்



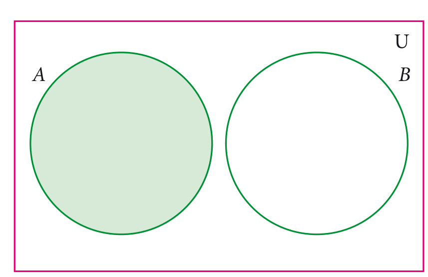
$A - B$

படம் 1.15



$B - A$

படம் 1.16



$A - B$

படம் 1.17

எடுத்துக்காட்டு 1.14

$A=\{-3, -2, 1, 4\}$ மற்றும் $B=\{0, 1, 2, 4\}$ எனில்,

(i) $A-B$ (ii) $B-A$ ஐக் காண்க.

தீர்வு

$A-B=\{-3, -2, 1, 4\}-\{0, 1, 2, 4\}=\{-3, -2\}$

$B-A=\{0, 1, 2, 4\}-\{-3, -2, 1, 4\}=\{0, 2\}$

குறிப்பு

(i) $A' = U - A$

(ii) $A-B = A\cap B'$

(iii) $A-A = \varnothing$

(iv) $A-\varnothing = A$

(v) $A-B = B-A \Leftrightarrow A=B$

(vi) $A-B = A$ எனில் $A\cap B = \varnothing$

1.5.6 கணங்களின் சமச்சீர் வித்தியாசம் (Symmetric Difference of Sets)

A மற்றும் B என்ற கணங்களின் சமச்சீர் வித்தியாசம் என்பது $(A-B)$ மற்றும் $(B-A)$ இவற்றின் சேர்ப்பாகும். இது $A\Delta B$ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது.

$A\Delta B = (A-B)\cup(B-A)$

$A\Delta B = \{x : x\in A-B$ அல்லது $x\in B-A\}$

எடுத்துக்காட்டு 1.15

$A=\{6, 7, 8, 9\}$ மற்றும் $B=\{8, 10, 12\}$ எனில், $A\Delta B$ காண்க.

தீர்வு

$A-B = \{6, 7, 9\}$

$B-A = \{10, 12\}$

$A\Delta B = (A-B)\cup(B-A) = \{6, 7, 9\}\cup\{10,12\}$

$A\Delta B = \{6, 7, 9, 10, 12\}$.

சிந்தனைக் களம்

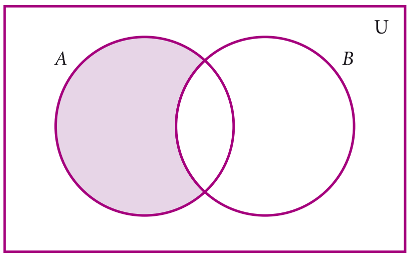
$(A-B)\cap(B-A)$ என்பது என்ன?

எடுத்துக்காட்டு 1.16

$A\Delta B$ ஐ வென்படம் மூலம் வரைக.

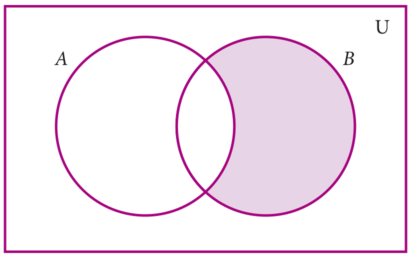
தீர்வு

$A\Delta B = (A-B)\cup(B-A)$



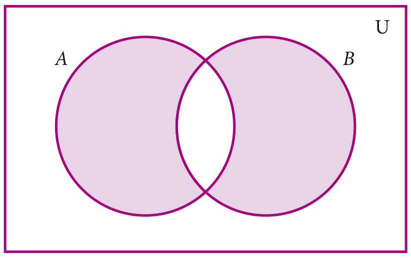
$A-B$

படம் 1.18



$B-A$

படம் 1.19



$(A-B)\cup(B-A)$

படம் 1.20

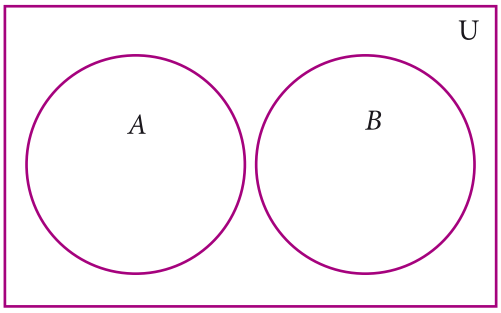
குறிப்பு

(i) $A\Delta A=\varnothing$ (ii) $A\Delta B = B\Delta A$

(iii) $A\Delta B=\{x : x\in A\cup B$ மற்றும் $x\notin A\cap B\}$ (iv) $A\Delta B= (A\cup B) - (A\cap B)$

1.5.7 வெட்டாக் கணங்கள் (Disjoint Sets)

A மற்றும் B என்ற இரு கணங்களுக்குப் பொதுவான உறுப்புகள் இல்லை எனில் அவை வெட்டாக்கணங்கள் ஆகும். அதாவது, $A\cap B=\varnothing$ எனில், A, B வெட்டாக் கணங்கள் ஆகும்



படம் 1.21

எடுத்துக்காட்டு 1.17

$A=\{20, 22, 23, 24\}$ $B=\{25, 30, 40, 45\}$ என்பவை வெட்டாகணங்களா என ஆராய்க.

தீர்வு

$$A = \{20,22, 23, 24\}\ ,\ B=\{25, 30, 40, 45\}$$

$$A\cap B = \{20,22, 23, 24\} \cap \{25, 30, 40, 45\}$$

$$= \{\ \}$$

$A\cap B = \varnothing$, A மற்றும் B ஆகியவை வெட்டாக் கணங்கள் ஆகும்.

குறிப்பு

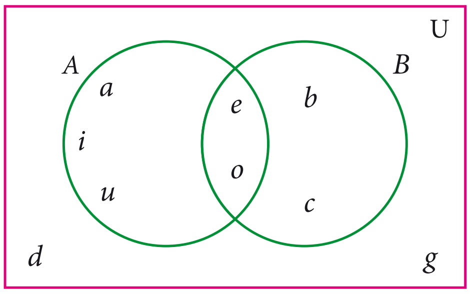
$A\cap B\neq \varnothing$ எனில், A மற்றும் B ஆகியவை வெட்டும் கணங்கள் (Overlapping) எனப்படும். அதாவது, இரு கணங்களுக்கு இடையே குறைந்தபட்சம் ஒரு பொது உறுப்பாவது இருந்தால் அவை வெட்டும் கணங்கள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.18

அருகில் உள்ள படத்தில் இருந்து பின்வருவனவற்றைக் காண்க

(i) A (ii) B (iii) $A-B$ (iv) $B-A$

(v) A' (vi) B' (vii) U



படம் 1.22

தீர்வு

(i) $A = \{a, e, i, o, u\}$ (ii) $B = \{b, c, e, o\}$

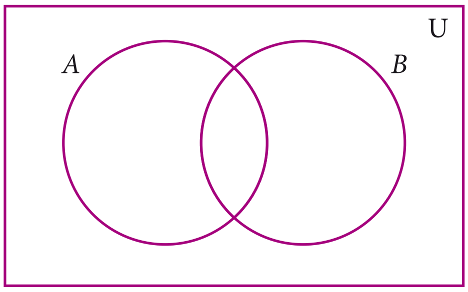
(iii) $A-B = \{a, i, u\}$ (iv) $B-A = \{b, c\}$

(v) $A' = \{b, c, d, g\}$ (vi) $B' = \{a, d, g, i, u\}$

(vii) $U = \{a, b, c, d, e, g, i, o, u\}$

எடுத்துக்காட்டு 1.19

அருகில் உள்ள படத்தில் காட்டியுள்ளபடி, வென்படம் வரைந்து, பின்வரும் கணச் செயல்களை வென்படத்தில் குறிக்கவும்.

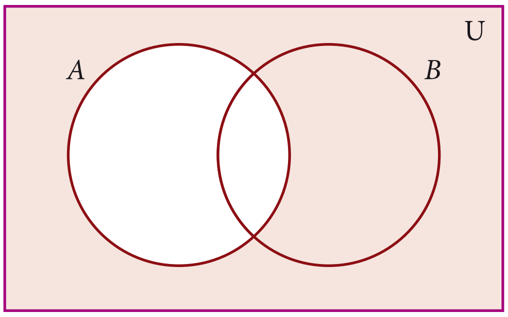


படம் 1.23

(i) A' (ii) $(A-B)'$ (iii) $(A\cup B)'$

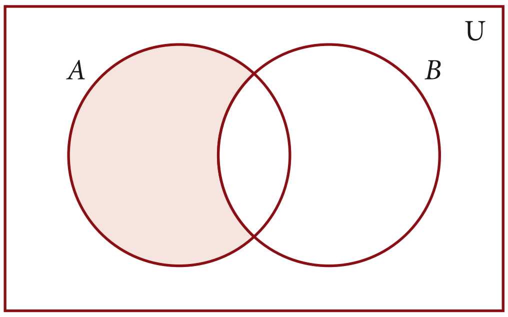
தீர்வு

(i) A'

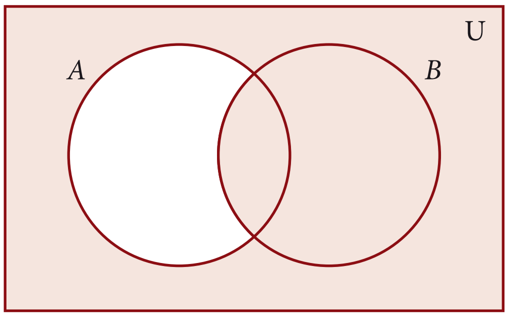


படம் 1.24 A'

(ii) $(A-B)'$



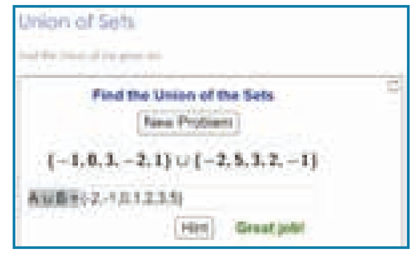
படம் 1.25 $A-B$



படம் 1.26 $(A-B)'$

இணையச் செயல்பாடு

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்



படி – 1

கீழேக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலியைத் தேடுபொறியில் தட்டச்சு செய்க அல்லது துரித துலங்கள் குறியீட்டை ஸ்கேன் செய்க.

படி – 2

“Union of Sets” என்று GeoGebra பக்கத்தில் தோன்றும். புதிய கணக்குகளைச் செய்து பார்க்க “NEW PROBLEM” என்பதைச் சொடுக்கவும்

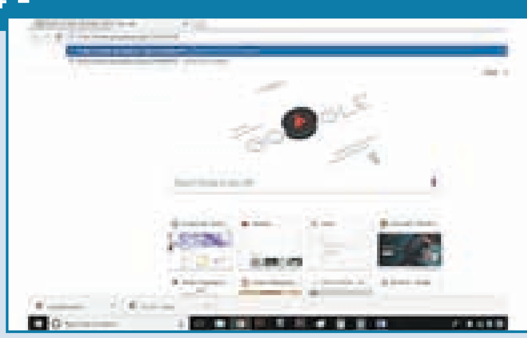
படி – 3

வினாவிற்கு ஏற்ற விடையைக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் கட்டத்தில் தட்டச்சு செய்யவும். ஏதேனும் சந்தேகம் இருந்தால் “HINT”– யை சொடுக்கவும்.

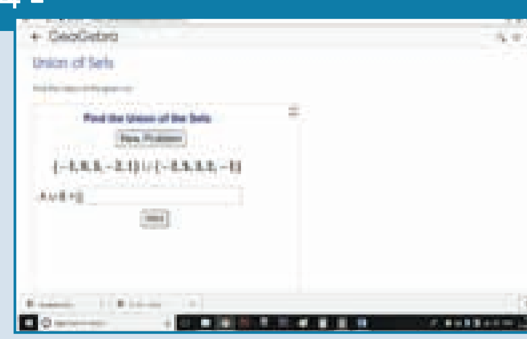
படி – 3

விடை சரியாக இருப்பின் “GREAT JOB” என்று திரையில் தோன்றும். தவறாக இருப்பின் “Try Again!” என்று தோன்றும் 5 கணக்குகளைத் தொடர்ந்து சரியாக செய்யும் வரை திரும்ப திரும்ப புதிய கணக்குகளைச் செய்து கற்கவும்

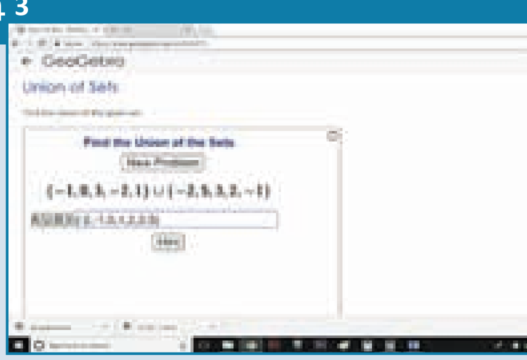
படி 1



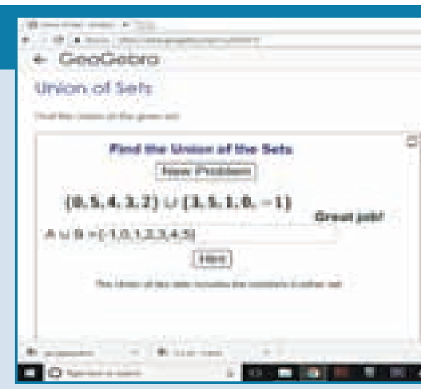
படி 2



படி 3



படி 4



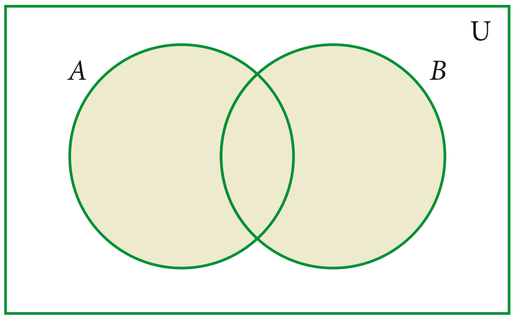
இதே போல் பாடம் சார்ந்த வேறு செயல்பாட்டினை செய்து பார்க்கவும்

செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

கணங்களின் சேர்ப்பு : https://www.geogebra.org/m/ufxdh47G

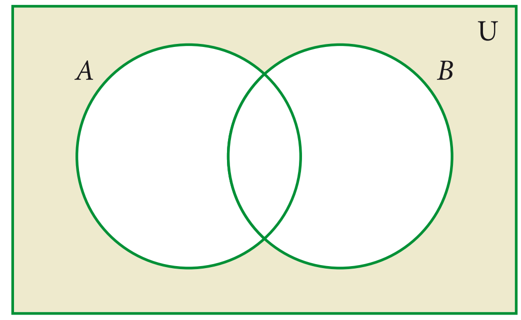
1-SET LANGUAGE_TM.indd 26 18-03-2018 15:47:03

(iii) $(A U B)'$



A∪B

படம் 1.27



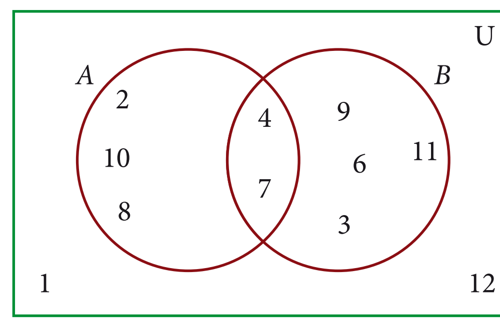
(A∪B)′

படம் 1.28

பயிற்சி 1.3

1. கொடுக்கப்பட்ட வென்படத்தில் இருந்து கீழேயுள்ள கணங்களின் உறுப்புகளை எழுதுக.

   (i) A (ii) B (iii) $A\cup B$ (iv) $A\cap B$
   (v) $A-B$ (vi) $B-A$ (vii) A' (viii) B'
   (ix) U



படம் 1.29

2. பின்வரும் கணங்களுக்கு $A\cup B$, $A\cap B$, $A-B$ மற்றும் $B-A$ காண்க.

   (i) $A = \{2, 6, 10, 14\}$ மற்றும் $B=\{2, 5, 14, 16\}$

   (ii) $A = \{a, b, c, e, u\}$ மற்றும் $B=\{a, e, i, o, u\}$

   (iii) $A = \{x : x \in N, x \leq 10\}$ மற்றும் $B=\{x : x \in W, x < 6\}$

   (iv) $A =$ “mathematics” என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துகளின் கணம்

   $B =$ “geometry” என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துக்களின் கணம்

3. $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $A = \{b, d, f, h\}$ மற்றும் $B = \{a, d, e, h\}$ எனில் பின்வரும் கணங்களைக் காண்க.

   (i) A' (ii) B' (iii) $A'\cup B'$ (iv) $A'\cap B'$ (v) $(A\cup B)'$

   (vi) $(A\cap B)'$ (vii) $(A')'$ (viii) $(B')'$

4. $U=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A=\{1, 3, 5, 7\}$ மற்றும் $B=\{0, 2, 3, 5, 7\}$ எனில் பின்வரும் கணங்களைக் காண்க.

   (i) A' (ii) B' (iii) $A'\cup B'$ (iv) $A'\cap B'$ (v) $(A\cup B)'$
   (vi) $(A\cap B)'$ (vii) $(A')'$ (viii) $(B')'$

5. கொடுக்கப்பட்ட கணச் சோடிகள் வெட்டும் கணங்களா? இல்லை வெட்டாக் கணங்களா?

(i) $A=\{f, i, a, s\}$ மற்றும் $B=\{a, n, f, h, s\}$

(ii) $C=\{x : x$ ஒரு பகா எண், $x>2\}$ மற்றும் $D=\{x{:}x$ ஓர் இரட்டைப்படை பகா எண்$\}$

(iii) $E=\{x : x$ என்பது 24 இன் காரணி$\}$ மற்றும் $F=\{x : x$ ஆனது 3இன் மடங்கு, $x<30\}$

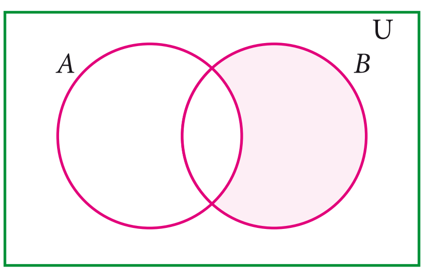
6. கொடுக்கப்பட்ட கணங்களின் சமச்சீர் வித்தியாசம் காண்க.

(i) $P=\{2, 3, 5, 7, 11\}$ மற்றும் $Q=\{1, 3, 5, 11\}$

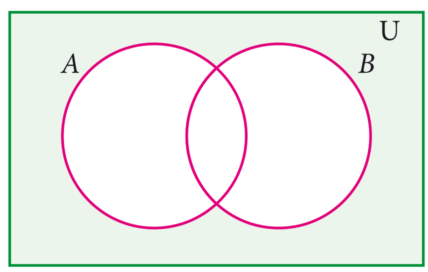
(ii) $R=\{l, m, n, o, p\}$ மற்றும் $S=\{j, l, n, q\}$

(iii) $X=\{5, 6, 7\}$ மற்றும் $Y=\{5, 7, 9, 10\}$

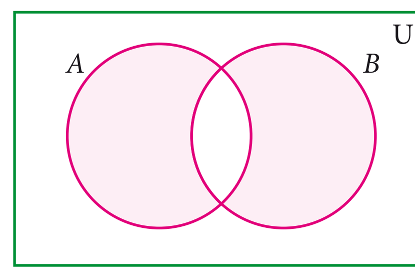
7. கணக் குறியீடுகளைக் கொண்டு பின்வரும் நிழலிட்ட பகுதியினைக் குறிப்பிடவும்.



படம் 1.30



படம் 1.31



படம் 1.32

8. A, B என்பன வெட்டும் கணங்கள் மற்றும் U என்பது அனைத்துக் கணம் எனில், பின்வருவனவற்றை வென்படத்தில் குறிக்கவும்,

(i) $A\cup B$ (ii) $A\cap B$ (iii) $(A\cap B)'$ (iv) $(B-A)'$ (v) $A'\cup B'$ (vi) $A'\cap B'$

(vii) வென்படம் (iii) மற்றும் (v) ஐ உற்று நோக்கி உன்னுடைய கருத்தை எழுதுக.

1.6 கணங்களின் ஆதி எண் மற்றும் செய்முறைக் கணக்குகள் (Cardinality and Practical Problems on Set Operations)

கணங்களின் சேர்ப்பு, வெட்டு, நிரப்பு மற்றும் வித்தியாசம் பற்றிக் கற்றுள்ளோம். இப்போது நாம் அன்றாட வாழ்வினையொட்டிய சில கணக்குகளைக் கணங்களின் மூலம் தீர்க்க முயல்வோம்.

முடிவுகள் :

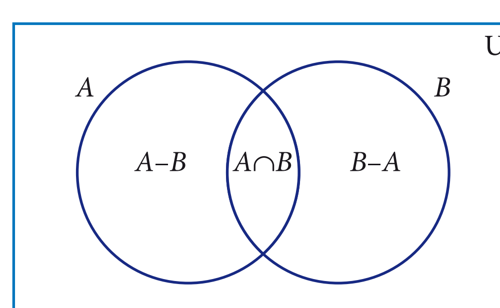
A, B என்பன இரு முடிவுறு கணங்கள் எனில்

(i) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

(ii) $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

(iii) $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$

(iv) $n(A')=n(U)-n(A)$



படம் 1.33

குறிப்பு

மேலே உள்ள முடிவுகளில் இருந்து, நாம் பெறுவது,

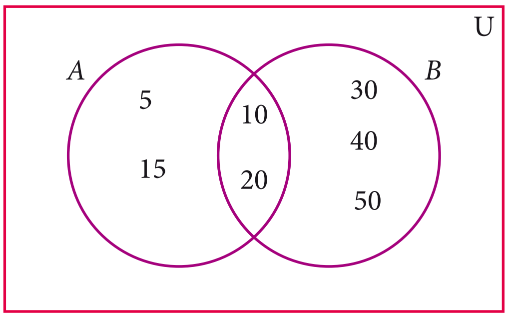
(i) $n(A\cap B) = n(A)+n(B) - n(A\cup B)$ (ii) $n(\mathrm{U}) = n(A)+n(A')$

(iii) A மற்றும் B என்பன வெட்டாக் கணங்கள் எனில், $n(A\cup B) = n(A)+n(B)$.

எடுத்துக்காட்டு 1.20

கொடுக்கப்பட்டுள்ள வென்படத்தில் இருந்து

$n(A\cup B) = n(A)+n(B) - n(A\cap B)$



படம் 1.34

தீர்வு

தரப்பட்டுள்ள வென்படத்தில் இருந்து,

$A = \{5, 10, 15, 20\}$

$B = \{10, 20, 30, 40, 50,\}$

இங்கு $A\cup B = \{5, 10, 15, 20, 30, 40, 50\}$

$A\cap B = \{10, 20\}$

$n(A) = 4,\quad n(B) = 5, n(A\cup B) = 7,\quad n(A\cap B) = 2$

$n(A\cup B) = 7 \qquad \rightarrow (1)$

$n(A)+n(B)-n(A\cap B) = 4+5-2$

$=7 \qquad \rightarrow (2)$

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து $n(A\cup B) = n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ எனச் சரிபார்க்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 1.21

$n(A) = 36$, $n(B) = 10$, $n(A\cup B)=40$, மற்றும் $n(A')=27$ எனில், $n(\mathrm{U})$ மற்றும் $n(A\cap B)$ காண்க.

தீர்வு

$n(A) = 36,\ n(B) =10,\ n(A\cup B)=40,\ n(A')=27$

(i) $n(\mathrm{U}) = n(A)+n(A') = 36+27 = 63$

(ii) $n(A\cap B) = n(A)+n(B)-n(A\cup B) = 36+10-40 = 46-40 = 6$

செயல்பாடு-5

பொருத்தமான ஆதி எண்களை அட்டவணையில் நிரப்புக

வ.எண்.	$n(A)$	$n(B)$	$n(A\cup B)$	$n(A\cap B)$	$n(A-B)$	$n(B-A)$
1	30	45	65			
2	20		55	10		
3	50	65		25		
4	30	43	70			

எடுத்துக்காட்டு 1.22

$A=\{b, d, e, g, h\}$ மற்றும் $B = \{a, e, c, h\}$ எனில், $n(A-B) = n(A)-n(A\cap B)$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு

$$A = \{b, d, e, g, h\},\ B = \{a, e, c, h\}$$

$$A - B = \{b, d, g\}$$

$$n(A-B) = 3 \qquad \ldots (1)$$

$$A \cap B = \{e, h\}$$

$$n(A \cap B) = 2, \qquad n(A) = 5$$

$$n(A) - n(A\cap B) = 5-2$$

$$= 3 \qquad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து நாம் பெறுவது

$n(A-B) = n(A)-n(A\cap B)$ எனச் சரிபார்க்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 1.23

ஒரு பள்ளியில் எல்லா மாணவர்களும் வளைகோற்பந்தாட்டம் அல்லது மட்டைப் பந்து அல்லது இரண்டும் விளையாடுகிறார்கள். 300 மாணவர்கள் வளைகோற்பந்தாட்டம் விளையாட்டையும், 250 மாணவர்கள் மட்டைப் பந்து விளையாட்டையும், 110 மாணவர்கள் இரண்டையும் விளையாடுகிறார்கள் எனில்

(i) எத்தனை மாணவர்கள் வளைகோற்பந்தாட்டம் மட்டும் விளையாடுகிறார்கள்.

(ii) எத்தனை மாணவர்கள் மட்டைப் பந்து மட்டும் விளையாடுகிறார்கள்.

(iii) பள்ளியில் உள்ள மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

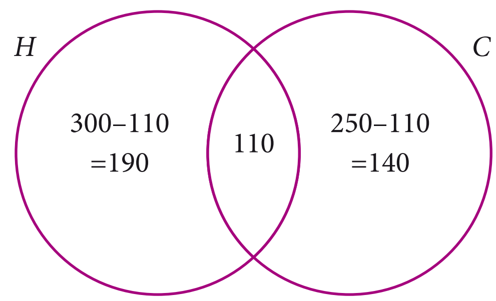
தீர்வு:

வளைகோற்பந்தாட்டம் விளையாடும் மாணவர்களின் கணம் H என்க. மட்டைப் பந்து விளையாடும் மாணவர்களின் கணம் C என்க.

இங்கு $n(H)=300$, $n(C)=250$ மற்றும் $n(H\cap C)=110$.

வென்படத்தைப் பயன்படுத்தித் தீர்வு காணல்.

வென்படத்தில் இருந்து,



படம் 1.35

(i) வளைகோற்பந்தாட்டம் மட்டும் விளையாடும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை = 190

(ii) மட்டைப் பந்து மட்டும் விளையாடும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை = 140

(iii) பள்ளியில் உள்ள மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை = 190 + 110 + 140 = 440

மாற்று முறை

(i) வளைகோற்பந்தாட்டம் மட்டும் விளையாடும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை

$$n(H-C) = n(H) - n(H\cap C)$$

$$= 300 - 110 = 190$$

(ii) மட்டைப் பந்து மட்டும் விளையாடும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை

$$n(C-H) = n(C) - n(H\cap C)$$

$$= 250 - 110 = 140$$

(iii) பள்ளியில் உள்ள மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை

$$n(H\cup C) = n(H) + n(C) - n(H\cap C)$$

$$= 300+250 - 110 = 440$$

எடுத்துக்காட்டு 1.24

ஒரு விருந்தில் 60 பேர் கலந்து கொண்டனர். அதில் 35 பேர் வென்னிலா பனிக்கூழ் (vennila ice cream) மற்றும் 30 பேர் சாக்லேட் பனிக்கூழ் (chocolate ice cream) எடுத்துக் கொண்டனர். பங்கேற்றவர்களில் அனைவரும் குறைந்தபட்சம் ஒரு வகைப் பனிக்கூழையாவது எடுத்துக் கொண்டால்,

(i) வென்னிலா மற்றும் சாக்லேட் என இரண்டு வகைப் பனிக் கூழையும் எடுத்துக் கொண்டவர்கள்,

(ii) வென்னிலா பனிக்கூழ் மட்டும் எடுத்துக் கொண்டவர்கள் மற்றும்

(iii) சாக்லேட் பனிக்கூழ் மட்டும் எடுத்துக்கொண்டவர்கள் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு :

V என்பது வென்னிலா பனிக்கூழ் எடுத்துக் கொண்டவர்களின் கணம் மற்றும் C என்பது சாக்லேட் பனிக்கூழ் எடுத்துக்கொண்டவர்களின் கணம் என்க.

எனவே, இங்கு $n(V) = 35, n(C) = 30, n(V\cup C) = 60,$

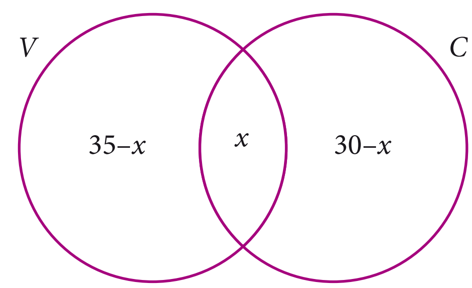
மேலும் இருவகையையும் பயன்படுத்தியவர்களின் எண்ணிக்கை x என்க.

வென்பட முறையில் தீர்வு காணல்

$$35 - x + x + 30 - x = 60$$

$$65 - x = 60$$

$$x = 5$$



படம் 1.36

5 பேர்கள் இருவகைப் பனிக்கூழையும் பயன்படுத்தியவர்கள்

(i) வென்னிலா பனிக்கூழ் மட்டும் பயன்படுத்தியவர்கள் $= 35 - x$

$= 35 - 5 = 30$

(ii) சாக்லேட் பனிக்கூழ் மட்டும் பயன்படுத்தியவர்கள் $= 30 - x$

$= 30 - 5 = 25$

CHUGDY

மாற்று முறை

வென்னிலா மற்றும் சாக்லேட் என இரண்டு வகைப் பனிக்கூழையும் பயன்படுத்தியவர்கள்

$$n(V\cap C) = n(V) + n(C) - n(V\cup C)$$

$$= 35+30 - 60 = 5$$

வென்னிலா பனிக்கூழ் மட்டும் பயன்படுத்தியவர்கள்

$$n(V-C) = n(V) - n(V\cap C)$$

$$= 35 - 5 = 30$$

சாக்லெட் பனிகூழ் மட்டும் பயன்படுத்தியவர்கள்

$$n(C-V) = n(C) - n(V \cap C)$$

$$= 30 - 5 = 25$$

பயிற்சி 1.4

1. (i) $n(A) = 25$, $n(B) = 40$, $n(A \cup B) = 50$ மற்றும் $n(B') = 25$ எனில், $n(A \cap B)$ மற்றும் $n(\mathrm{U})$ காண்க.

   (ii) $n(A) = 300$, $n(A \cup B) = 500$, $n(A \cap B) = 50$ மற்றும் $n(B') = 350$ எனில், $n(B)$ மற்றும் $n(\mathrm{U})$ காண்க.

2. $\mathrm{U} = \{x : x \in \mathbb{N}, x \leq 10\}$, $\mathrm{A} = \{2,3,4,8,10\}$ மற்றும் $\mathrm{B} = \{1,2,5,8,10\}$ எனில், $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

3. $\mathrm{U} = \{1, 2, 3, ..., 10\}$, $P = \{3, 4, 5, 6\}$ மற்றும் $Q = \{x : x \in \mathbb{N}, x < 5\}$ எனில், $n(Q - P) = n(Q) - n(P \cap Q)$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

4. ஒரு வகுப்பில் உள்ள அனைத்து மாணவர்களும் இசை அல்லது நாடகம் அல்லது இரண்டிலும் பங்கேற்கிறார்கள். 25 மாணவர்கள் இசையிலும், 30 மாணவர்கள் நாடகத்திலும் மற்றும் 8 மாணவர்கள் இசை மற்றும், நாடகம் இரண்டிலும் பங்கேற்கிறார்கள் எனில்

   (i) இசையில் மட்டும் பங்கேற்கும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை.

   (ii) நாடகத்தில் மட்டும் பங்கேற்கும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை.

   (iii) வகுப்பில் உள்ள மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

5. ஒரு கணித வகுப்பில், 20 குழந்தைகள் அளவுகோலையும், 17 குழந்தைகள் எழுதுகோலையும், 5 குழந்தைகள் இரண்டையும் எடுத்துவர மறந்து விட்டார்கள் எனில் எத்தனை குழந்தைகள்,

   (i) எழுதுகோலை மட்டும் எடுத்து வர மறந்தவர்கள்

   (ii) அளவுகோலை மட்டும் எடுத்து வர மறந்தவர்கள்

   (iii) வகுப்பில் உள்ள மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

6. ஒரு கிராமத்திலுள்ள 100 குடும்பங்களில், 65 குடும்பத்தினர் தமிழ்ச் செய்தித்தாளையும், 55 குடும்பத்தினர் ஆங்கிலச் செய்தித்தாளையும் வாங்குகிறார்கள் எனில்,

   (i) தமிழ் மற்றும் ஆங்கில செய்தித்தாள்கள் இரண்டையும்,

   (ii) தமிழ் செய்தித்தாள் மட்டும்

   (iii) ஆங்கில செய்தித்தாள் மட்டும் வாங்குகின்றவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

7. 45 பேர் கொண்ட ஒரு குழுவில் ஒவ்வொருவரும் தேநீர் அல்லது குளம்பி (coffee) அல்லது இரண்டையும் விரும்புகிறார்கள். 35 நபர்கள் தேநீர் மற்றும் 20 நபர்கள் குளம்பி விரும்புகிறார்கள். கீழ்க்காணும் நபர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(i) தேநீர் மற்றும் குளம்பி இரண்டையும் விரும்புபவர்கள்

(ii) தேநீரை விரும்பாதவர்கள்

(iii) குளம்பியை விரும்பாதவர்கள்

8. ஒரு தேர்வில் கணிதத்தில் 50% மாணவர்கள் தேர்ச்சி பெற்றனர் மற்றும் 70% மாணவர்கள் அறிவியலில் தேர்ச்சி பெற்றனர். மேலும் 10% இரண்டிலும் தேர்ச்சி பெறாதோர். 300 மாணவர்கள் இப்பாடங்களில் குறைந்தது ஒன்றிலாவது தேர்ச்சி பெற்றுள்ளனர். இந்த இரு தேர்வை மட்டுமே மாணவர்கள் எழுதியிருந்தால் தேர்வெழுதிய மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க..

9. A மற்றும் B ஆகிய இரு கணங்கள் $n(A-B) = 32 + x$, $n(B-A) = 5x$ மற்றும் $n(A\cap B) = x$. என அமைகின்றன. இத்தரவினை வென்படம் மூலம் குறிக்கவும். $n(A) = n(B)$, எனில் x இன் மதிப்பைக் காண்க.

10. 500 மகிழுந்து உரிமையாளர்களைப் பற்றிய ஆய்வில், 400 பேர் மகிழுந்து A ஐயும் 200 பேர் மகிழுந்து B ஐயும், 50 பேர் இரு வகையான மகிழுந்துகளையும் வைத்துள்ளனர் எனில் இது சரியான தகவலா?

பயிற்சி 1.5

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக

1. கீழ்க்கண்டவற்றில் சரியானது எது?

(அ) $\{7\} \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ (ஆ) $7 \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

(இ) $7 \notin \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ (ஈ) $\{7\} \not\subseteq \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

2. கணம் $P = \{x \mid x \in \mathbb{Z}\ , -1< x < 1\}$ என்பது

(அ) ஒருறுப்புக் கணம் (ஆ) அடுக்குக் கணம்

(இ) வெற்றுக் கணம் (ஈ) உட்கணம்

3. $U = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\}$ மற்றும் $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2 \le x < 6\}$ எனில் $(A')'$ என்பது

(அ) $\{1, 6, 7, 8, 9\}$ (ஆ) $\{1, 2, 3, 4\}$ (இ) $\{2, 3, 4, 5\}$ (ஈ) $\{ \}$

4. $B\subseteq A$ எனில் $n(A\cap B)$ என்பது

(அ) $n(A-B)$ (ஆ) $n(B)$ (இ) $n(B - A)$ (ஈ) $n(A)$

5. கணம் $A = \{x, y, z\}$ எனில், A இன் வெற்றுக் கணமில்லாத உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை

(அ) 8 (ஆ) 5 (இ) 6 (ஈ) 7

6. பின்வருவனவற்றுள் சரியானது எது?

(அ) $\varnothing \subseteq \{a, b\}$ (ஆ) $\varnothing \in \{a, b\}$ (இ) $\{a\} \in \{a, b\}$ (ஈ) $a \subseteq \{a, b\}$

7. $A \cup B = A \cap B$, எனில்

(அ) $A \neq B$ (ஆ) $A = B$ (இ) $A \subset B$ (ஈ) $B \subset A$

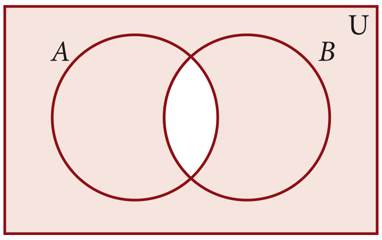
8. $B - A$ என்பது B, எனில் $A \cap B$ என்பது

(அ) A (ஆ) B (இ) U (ஈ) $\varnothing$

9. அருகில் உள்ள படத்தில் நிழலிடப்பட்ட பகுதி குறிப்பது

(அ) $(A \cup B)'$ (ஆ) $(A \cap B)'$

(இ) $A' \cap B'$ (ஈ) $A \cap B$

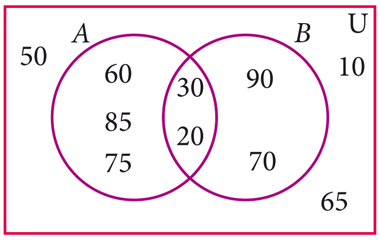


படம் 1.37

10. அருகில் உள்ள படத்திலிருந்து $n[P(A \Delta B)]$ ஐக் காண்க.

(அ) 8 (ஆ) 16

(இ) 32 (ஈ) 64



படம் 1.38

11. $n(A) = 10$ மற்றும் $n(B) = 15$, எனில் கணம் $A \cap B$ உள்ள குறைந்தபட்ச மற்றும் அதிகபட்ச உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

(அ) (10,15) (ஆ) (15,10) (இ) (10,0) (ஈ) (0,10)

12. $X = \{x : x = 4(n-1),\ n \in \mathbb{N}\}$ மற்றும் $Y = \{y : y = 3^n - 2n - 1,\ n \in \mathbb{N}\}$, எனில் $X \cup Y$ என்பது

(அ) $\mathbb{W}$ (ஆ) X (இ) Y (ஈ) $\mathbb{N}$

13. $A = \{\varnothing\}$ மற்றும் $B = P(A)$ எனில் $A \cap B$ ஆனது

(அ) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ (ஆ) $\{\varnothing\}$ (இ) $\varnothing$ (ஈ) $\{0\}$

14. ஒரு வகுப்பில் உள்ள 50 மாணவர்களில் 35 பேர் சுண்டாட்டம் (carrom) விளையாடுபவர்கள் மற்றும் 20 பேர் சதுரங்கம் விளையாடுபவர்கள் எனில், இந்த இரண்டு விளையாட்டையும் விளையாடுபவர்களின் எண்ணிக்கை

(அ) 5 (ஆ) 30 (இ) 15 (ஈ) 10.

நினைவு கூர்வதற்கான கருத்துகள்

1. ஒரு கணம் என்பது நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட பொருட்களின் தொகுப்பாகும்.
2. கணம் மூன்று முறைகளில் குறிப்பிடப்படுகிறது (i) விவரிப்பு முறை (ii) கணக் கட்டமைப்பு முறை (iii) பட்டியல் முறை.
3. கணத்திலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை ஆதி எண் என அழைக்கப்படுகிறது. அதனை $n(A)$ எனக் குறிப்பிடுவர்.
4. உறுப்புகள் இல்லாத கணம் வெற்றுக் கணம் என அழைக்கப்படுகிறது.
5. கணத்திலுள்ள உறுப்புகள் பூச்சியமாகவோ அல்லது முடிவுறு எண்ணிக்கையிலோ இருந்தால் அது முடிவுறு கணம் என அழைக்கப்படுகிறது. இல்லையெனில், முடிவுறாக் கணம் என அழைக்கப்படுகிறது.
6. இரு முடிவுறு கணங்களின் ஆதி எண்கள் சமம் எனில், அவை சமான கணங்கள் என அழைக்கப்படுகின்றன.
7. இரு கணங்களிலுள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் ஒரே மாதிரியான உறுப்புகளாக இருந்தால் அவ்விரு கணங்களும் சம கணங்களாகும்.
8. A இல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் B இல் இருந்தால் A என்ற கணம், B இன் உட்கணமாகும்.
9. $A \subseteq B$ மற்றும் $A \neq B$, எனில் A என்ற கணம், B இன் தகு உட்கணமாகும்.
10. A எனும் கணத்தின் அனைத்து உட்கணங்களையும் கொண்ட கணம் A இன் அடுக்குக் கணம் ஆகும். இது $P(A)$ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது.
11. m உறுப்புகள் கொண்டுள்ள ஒரு கணத்தின் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை 2^m.
12. m உறுப்புகள் கொண்டுள்ள ஒரு கணத்தின் தகு உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை $2^m - 1$.
13. A என்ற கணத்தின் நிரப்புக் கணம் A' ஆனது, A கணத்தில் இல்லாத அனைத்துக் கணத்தின் எல்லா உறுப்புகளையும் உடைய கணம் ஆகும்.
14. A மற்றும் B கணங்களின் சேர்ப்புக் கணம் A அல்லது B அல்லது இரண்டிலும் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளையும் கொண்டு அமையும்.
15. A மற்றும் B கணங்களில் உள்ள பொதுவான உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம் வெட்டுக் கணம் என அழைக்கப்படுகிறது.
16. $A \cap B = \varnothing$ எனில் A மற்றும் B ஆகிய கணங்கள் வெட்டாக் கணங்கள் என அழைக்கப்படுகின்றன. $A \cap B \neq \varnothing$ எனில் A மற்றும் B ஆகிய கணங்கள் வெட்டும் கணங்கள் (Overlapping) என அழைக்கப்படுகின்றன.
17. A மற்றும் B கணத்தின் கண வித்தியாசம் என்பது, B கணத்தில் இல்லாத A கணத்திலுள்ள உறுப்புகளுடைய கணமாகும்.

18. A மற்றும் B கணங்களின் சமச்சீர் வித்தியாசம் என்பது $A-B$ மற்றும் $B-A$ கணங்களின் சேர்ப்பு ஆகும்.

19. A மற்றும் B எனும் எவையேனும் இரு முடிவுறு கணங்களில்,

(i) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(ii) $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$

(iii) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

(iv) $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$

(v) $n(U) = n(A) + n(A')$

விடைகள்

பயிற்சி 1.1

1. (i) கணம் (ii) கணமல்ல (iii) கணம் (iv) கணமல்ல

2. (i) {I, N, D, A} (ii) {P, A, R, L, E, O, G, M} (iii) {M, I, S, P}
(iv) {C, Z, E, H, O, S, L, V, A, K, I}

3. (அ) (i) சரி (ii) சரி (iii) தவறு (iv) சரி (v) தவறு (vi) தவறு
(ஆ) (i) A (ii) C (iii) $\notin$ (iv) $\in$

4. (i) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$ (ii) $B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}\right\}$
(iii) $C = \{64, 125\}$ (iv) $D = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

5. (i) $B = \{x : x$ என்பது ஒரு நாள் சர்வதேச போட்டிகளில் இரட்டைச் சதமடித்த இந்திய வீரர்$\}$
(ii) $C = \left\{x : x = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$ (iii) $D = \{x : x$ என்பது ஓர் ஆண்டிலுள்ள தமிழ் மாதம்$\}$
(iv) $E = \{x : x$ என்பது 9 ஐ விடக் குறைவான ஒற்றை முழு எண்$\}$

6. (i) $P =$ 'J' என்ற எழுத்தில் தொடங்கும் ஆங்கில மாதங்களின் கணம்
(ii) $Q = 5$ மற்றும் 31 இக்கு இடைப்பட்ட பகா எண்களின் கணம்.
(iii) $R = 5$ ஐ விடக் குறைவான இயல் எண்களின் கணம்.
(iv) $S =$ ஆங்கில மெய்யெழுத்துக்களின் கணம்.

1-SET LANGUAGE_TM.indd 37 18-03-2018 15:47:05

பயிற்சி 1.2

1. (i) $n(M) = 6$ (ii) $n(P) = 5$ (iii) $n(Q) = 3$ (iv) $n(R) = 10$ (v) $n(S) = 5$

2. (i) முடிவுறு (ii) முடிவுறா (iii) முடிவுறா (iv) முடிவுறு

3. (i) சமான கணங்கள் (ii) சமமற்ற கணங்கள் (iii) சம கணங்கள் (iv) சமான கணங்கள்

4. (i) வெற்றுக் கணம் (ii) வெற்றுக் கணம் (iii) ஓருறுப்புக் கணம் (iv) வெற்றுக் கணம்

5. (i) {சதுரம், சாய்சதுரம்} (ii) {வட்டம்} (iii) {முக்கோணம்} (iv) { }

6. (i) $\{\ \}, \{a\}, \{a, b\}\ \{a, \{a, b\}\}$

7. (i) $\{\{\ \}, \{a\}, \{b\}\ \{a, b\}\}$

(ii) $\{\{\ \}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

(iii) $\{\{\ \}, \{p\}, \{q\}\ \{r\}, \{s\}, \{p, q\}, \{p, r\}, \{p, s\}, \{q, r\}, \{q, s\}, \{r, s\}, \{p, q, r\}, \{p, q, s\}, \{p, r, s\}, \{q, r, s\}, \{p, q, r, s\}\}$ (iv) $P(E)= \{\{\ \}\}$

8. (i) 8, 7 (ii) 1024, 1023 9. (i) 16 (ii) 1 (iii) 8

பயிற்சி 1.3

1. (i) $\{2, 4, 7, 8, 10\}$ (ii) $\{3, 4, 6, 7, 9, 11\}$ (iii) $\{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

(iv) $\{4, 7\}$ (v) $\{2, 8, 10\}$ (vi) $\{3, 6, 9, 11\}$

(vii) $\{1, 3, 6, 9, 11, 12\}$ (viii) $\{1, 2, 8, 10, 12\}$

(ix) $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

2. (i) $\{2, 5, 6, 10, 14, 16\}, \{2, 14\}, \{6, 10\}, \{5, 16\}$

(ii) $\{a, b, c, e, i, o, u\}, \{a, e, u\}, \{b, c\}, \{i, o\}$

(iii) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6, 7, 8, 9, 10,\}, \{0\}$

(iv) $\{m, a, t, h, e, i, c, s, g, o, r, y\}, \{e, m, t,\}, \{a, h, i, c, s\}, \{g, o, r, y\}$

3. (i) $\{a, c, e, g\}$ (ii) $\{b, c, f, g\}$ (iii) $\{a, b, c, e, f, g\}$ (iv) $\{c, g\}$ (v) $\{c, g\}$

(vi) $\{a, b, c, e, f, g\}$ (vii) $\{b, d, f, h\}$ (viii) $\{a, d, e, h\}$

4. (i) $\{0, 2, 4, 6\}$ (ii) $\{1, 4, 6\}$ (iii) $\{0, 1, 2, 4, 6\}$ (iv) $\{4, 6\}$ (v) $\{4, 6\}$

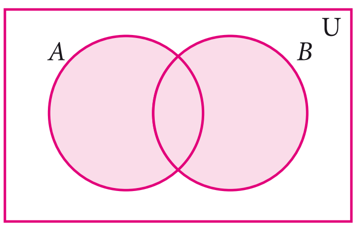
(vi) $\{0, 1, 2, 4, 6\}$ (vii) $\{1, 3, 5, 7\}$ (viii) $\{0, 2, 3, 5, 7\}$

5. (i) வெட்டும் கணங்கள் (ii) வெட்டாக் கணங்கள் (iii) வெட்டும் கணங்கள்

6. (i) $\{1, 2, 7\}$ (ii) $\{m, o, p, q, j\}$ (iii) $\{6, 9, 10\}$

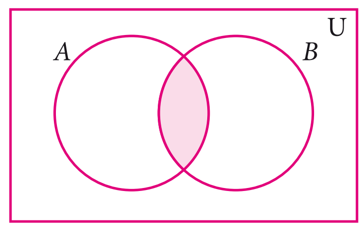
7. (i) $B-A$ (ii) $(A \cup B)'$ (iii) $(A - B) \cup (B - A)$

8. (i)



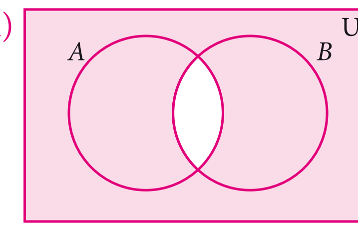
$A \cup B$

(ii)



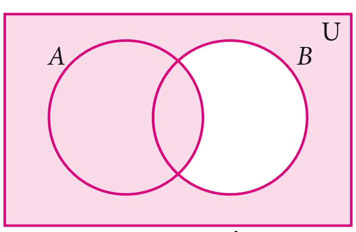
$A \cap B$

(iii)



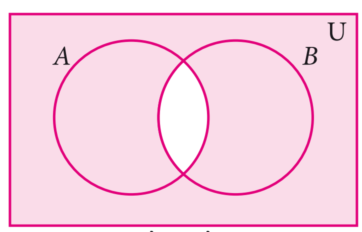
$(A \cap B)'$

(iv)



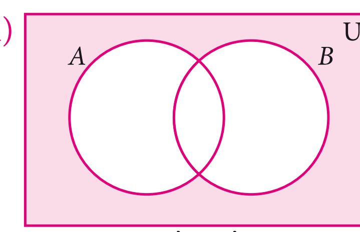
$(B-A)'$

(v)



$A' \cup B'$

(vi)



$A' \cap B'$

(vii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

பயிற்சி 1.4

1. (i) 15, 65 (ii) 250, 600 4. (i) 17 (ii) 22 (iii) 47

5. (i) 12 (ii) 15 (iii) 32

6. (i) 20 (ii) 45 (iii) 35

7. (i) 10 (ii) 10 (iii) 25 8. 1000 9. 8

10. சரியான தகவலல்ல

பயிற்சி 1.5

1. (ஆ) 2. (அ) 3. (இ) 4. (ஆ) 5. (ஈ) 6. (அ) 7. (ஆ) 8. (ஈ) 9. (ஆ)

10. (இ) 11. (ஈ) 12. (ஆ) 13. (ஆ) 14. (அ)

2 மெய்யெண்கள்

பேரண்டத்தையே உருவாக்குவன எண்கள்
-பிதாகரஸ்

CI4CFL

எண்முறை கணினியானது முதன் முதலில் 1926 ஆம் ஆண்டு அமெரிக்க கணித அறிஞரும், எண்ணியலாளருமான நார்மன் லெக்மர் (Norman Lehmer) என்பவரால் மிதிவண்டி சங்கிலிகள் மற்றும் கம்பிகளைக் கொண்டு உருவாக்கப்பட்டது. இக்கணினியானது $2^{93} + 1$ என்ற வடிவிலுள்ள எண்ணை மூன்று நொடிக்குள் பகாஎண் காரணிப்படுத்தியது. பிறகு, 1936இல் இவ்வியந்திரமானது சங்கிலிகளுக்கும், கம்பிகளுக்கும் பதிலாக 16மிமீ படச்சுருள்களைக் கொண்டு மாற்றி வடிவமைக்கப்பட்டது.

எண்ணியலில் இவரின் பங்களிப்பானது இன்றளவும் கணிப்பொறி மென்பொருளில் எண்ணியல் சல்லடையின் ஒருங்கிணைந்த சுற்றுகளில் முன்னோடியாக திகழ்கின்றது.

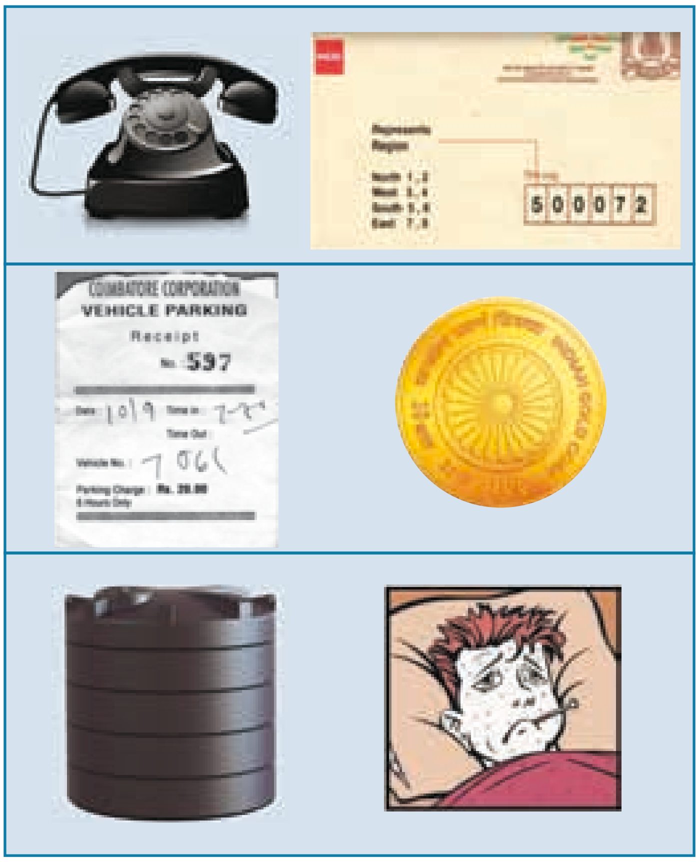
டெர்ரிக் நார்மன் லெக்மர்
1867-1930

கற்றல் விளைவுகள்

- விகிதமுறு எண்களை நினைவு கூர்தல்.
- இரு விகிதமுறு எண்களுக்கிடையே எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்கள் இருப்பதை அறிதல்.
- விகிதமுறு எண்களை எண் கோட்டில் குறித்தல்.
- விகிதமுறு எண்களை முடிவுறு தசம விரிவாகக் குறிப்பிடுதல்.
- விகிதமுறா எண்களைத் தசம வடிவில் குறிப்பிடுதல்.
- விகிதமுறா எண்களை எண் கோட்டில் குறித்தல்.
- மெய்யெண்களை எண் கோட்டில் காணுதல்.

2-Real Numbers_TM.indd 40 18-03-2018 15:47:42

2.1 அறிமுகம்



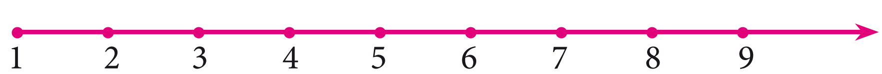
எங்கெங்கு காணினினும் எண்கள்.

- உங்கள் வீட்டில் தொலைபேசி உள்ளதா? அத்தொலைபேசியில் உள்ள இலக்கங்கள் எத்தனை?
- உங்கள் பகுதியின் அஞ்சலகக் குறியீட்டு எண் என்ன? அது எவ்வாறு பயனுள்ளதாக இருக்கும்?
- வண்டிகளை நிறுத்துமிடத்தில் அடையாள வில்லை வாங்கியுள்ளீர்களா? அதன் நோக்கம் என்ன?
- நீங்கள் 24 கேரட் தங்கத்தைக் கையாண்டிருக்கிறீர்களா? அதன் தரத்தினை எவ்வாறு முடிவு செய்வாய்?
- உன் கண்ணாடியின் பார்வைத் திறன் அளவு எவ்வளவு?
- உங்கள் வீட்டிலுள்ள மேல்நிலை நீர்த்தொட்டியின் கொள்ளளவு எவ்வளவு?
- உனது நண்பனுக்குக் காய்ச்சலா? அவரது உடலின் வெப்பநிலை எவ்வளவு?

எண்களின் பல்வேறு வகைகள் பற்றி இதுவரை நீங்கள் அறிந்ததை விரிவுபடுத்தி அறியவேண்டிய நேரம் இது.

2.2 விகிதமுறு எண்கள் (Rational Numbers)

உங்கள் வீட்டு நிலைப்பேழையில் உள்ள நூல்களை எண்ணும்போது 1,2,3.... என எண்ணத் தொடங்குவீர்கள். இந்த 1, 2, 3 ... ஆகியன இயல் எண்கள் எனப்படும். அவற்றை எண்கோட்டில் குறிப்பிடுவதைப் பற்றி நீங்கள் முன்பே அறிந்துள்ளீர்கள். (படம். 2.1ஐப் பார்க்க).



படம் 2.1

இயல் எண்களின் கணத்தை நாம் $\mathbb{N}$ என்று குறிப்பிடுவோம். இக்கணமானது

$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, \ldots \}$ என்பதாகும்.

ஒருவேளை உங்கள் நிலைப்பேழையில் உள்ள 5 நூல்களில் இருந்து ஒவ்வொன்றாக எடுத்துவிட்டால் எண்ணிக்கை 4, 3, 2 என 1 வரை குறைகிறது. இப்போது அந்தக் கடைசி 1 நூலையும் எடுத்துவிட்டால், அங்கு எந்த நூலும் இல்லை. நிலைப்பேழை காலியாக இருக்கும்.

இத்தகைய சூழ்நிலையைக் குறிக்க நாம் 0 என்ற குறியீட்டைப் பயன்படுத்துகிறோம். இது எதுவும் இல்லாத நிலையைக் குறிக்கப் பயன்படுகிறது. எனவே, எந்த நூலும் இல்லை என்பதே வேறு முறையில் இங்குள்ள நூல்களின் எண்ணிக்கை 0 எனக் குறிக்கப்படுகிறது. எனவே, பூச்சியத்தையும் ஓர் உறுப்பாகக் கொண்ட எண்களை 0, 1, 2, 3 ... நாம் முழு எண்கள் என்கிறோம். இந்தப் புதிய எண் 0 ஐ இயல் எண்ணுடன் சேர்த்து எண் கோட்டைக் கீழே காணுமாறு அமைக்கலாம்.

படம் 2.2

முழு எண்களின் கணத்தை நாம் $\mathbb{W}$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

$$\mathbb{W} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

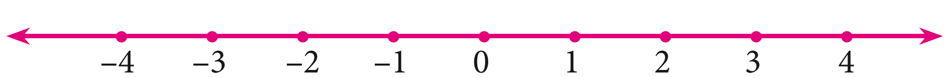
சில செயல்பாடுகள் மேலும், பல வகையான எண்களுக்கு வழிகோலுகிறது. சில செயல்பாடுகளை மிகை, முன்னோக்கி, மேலே, ஏறுவரிசை மற்றும் அதிகமாகும் என்பனவற்றை $(+)$ எனக் குறிக்கப்படும். அதேபோல் குறைவான, பின்னோக்கி, கீழே, இறங்கு வரிசை மற்றும் குறைவாகும் என்பனவற்றை $(-)$ என்று குறிக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, நான் வியாபாரத்தில் ₹1000 இலாபம் ஈட்டினால், அதை $+1000$ எனக் குறிப்பிடுவேன். அதே நேரத்தில் நான் ₹5000 நட்டமடைந்திருந்தால் அதை -5000 எனக் குறிப்பிடுவேன். ஏன்? இதைப் போலவே, ஒரு மலையின் அடிவாரம் கடல் மட்டத்திலிருந்து 2கி.மீ. கீழாகவும், அதன் உச்சி கடல் மட்டத்திலிருந்து 3 கி.மீ. உயரமாகவும் இருந்தால், அதன் அடிவாரத்தின் உயரம் -2 கி.மீ எனவும் அதன் உச்சியின் உயரம் $+3$ கி.மீ. எனவும் குறிப்பிடலாம். (அதன் மொத்த உயரம் என்ன? 5 கி.மீ. என்பது சரியா?)

இந்த புரிதலோடு, இனி நீங்கள் இயல் எண்களை மிகை எண்களாக எடுத்துக்கொள்ளலாம். அவற்றை மிகை முழுக்கள் என மறு பெயரிடலாம். இதன் மூலம் நீங்கள் குறை எண்கள் $(-1, -2, -3, \dots)$ இக்கு வழிவகுத்துள்ளீர்கள்.

இங்கு -2 என்பது -1 ஐ விட அதிகக் குறை மதிப்புடையது. எனவே -1, மற்றும் -2 ஆகிய இவற்றுள் -2 சிறியது மற்றும் -1 பெரியது ஆகும் எனில் $-2, -1$ ஐவிட -3 பெரிய எண்ணா? அல்லது சிறிய எண்ணா? என்று சிந்திக்கவும்.

இவ்வேளையில் எண்கோட்டை இவ்வாறு குறிப்பிடலாம்.



படம் 2.3

முழுக்களின் கணத்தை நாம் $\mathbb{Z}$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}.$$

படம் 2.2இல் உள்ளவாறு ஒரு படம் வரைந்துகொள். இதைக் கண்ணாடி முன் காட்டுக. இயல் எண்கள் கண்ணாடியில் பிரதிபலிப்பதைக் காணலாம். அதே கோட்டில் பூச்சியத்துக்கு

இணையாக முழு எண் கோட்டை கண்ணாடிக்கு மறுபுறம் நீட்டித்துப் பார். இயல் எண்கள் கண்ணாடியில் தெரியும். பிரதிபலிக்கும் எண்கள் குறைக் குறியுடன் சேர்த்துக் குறை முழுக்கள் ஆகும். அவற்றைக் குறை எண்களாகக் கருதுக. எனவே, பூச்சியத்திற்கு இடப்புறம் உள்ளவற்றைக் குறை எண்களாகவும், வலப்புறம் உள்ளவற்றை மிகை எண்களாகவும் கருதலாம். ஆனால் 0 ஒரு மிகை எண்ணுமல்ல, குறை எண்ணுமல்ல. இது எப்பக்கத்தையும் சாராது.

மேற்கண்ட படத்தைப் (படம் 2.2 மற்றும் 2.3) பார்க்கும்போது அடுத்தடுத்துள்ள இரு முழுக்களுக்கிடையே உள்ள இடைவெளி வியப்பிற்குரியது. அந்த இடைவெளியில் ஏதாவது எண்கள் இருக்குமா?

இயல் எண்கள் ($\mathbb{N}$) (படம் 2.1) இற்கான படத்தை எவ்வாறு வரைந்தீர்கள். முதலில் ஒரு நேர்க்கோடு வரைந்து அதில் புள்ளி 1ஐக் குறிக்கவும். 1 இன் வலப்புறமாக ஒரு குறிப்பிட்ட அலகு தூரத்தில் 2 என்ற புள்ளியைக் குறிக்கவும். இதைத் தேவையான முறை திரும்பத் திரும்பச் செய்யவும். முழு எண் ($\mathbb{W}$) (படம் 2.2) கிடைப்பதற்கு எண் கோட்டில் எண் 1 இலிருந்து அதே குறிப்பிட்ட அளவு தூரம் இடப்புறம் செல்லவும். அப்புள்ளி 0 ஆகும். இப்போது $\mathbb{N}$ உடன் மேற்குறிப்பிட்ட புள்ளிகளை இடப்புறமும் குறித்து, எளிதாக $\mathbb{Z}$ஐப் பெறலாம்.

பின்ன எண்களைப் பற்றி முன்பே நீங்கள் அறிந்திருப்பீர். $\mathbb{Z}$ இன் எண் கோட்டில் எவ்வாறு $\frac{1}{2}$ என்ற புள்ளியை நீ குறிப்பாய். இது சரியாக 0 உக்கும் 1 இற்கும் இடையேயுள்ள மையப் புள்ளி ஆகும். இதைப் போலவே நீங்கள் $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $2\frac{3}{4}$ ... போன்ற புள்ளிகளையும் குறிக்கலாம். பல்வேறு பின்னங்களை ஒரே புள்ளியில் குறிப்பதையும் நீங்கள் காணலாம். ஏன் என்று உங்களால் கூற முடியுமா? $\frac{5}{4}$ மற்றும் $\frac{10}{8}$ ஐ ஒரே புள்ளியில் குறிக்க இயலுமா? $\frac{7}{9}$ மற்றும் $\frac{35}{55}$ ஆகியவை ஒரே புள்ளியைக் குறிக்கும் என நினைக்கிறாயா? தற்போது உங்களால் 0 வில் இடப்புறம் உள்ள பின்னங்களையும் எளிதில் காண இயலும். இவையெல்லாம் $\frac{a}{b}$ வடிவத்தில் உள்ள பின்னங்கள், இதில் a மற்றும் b முழுக்களாகும். மேலும் $b \neq 0$ என்ற ஒரு வரம்புடன் இருக்கும். பின்னங்கள் தசம வடிவில் இருந்தாலும் இந்த அமைப்பு மாறாது.

பின்னங்களுக்கும், விகிதங்களுக்கும் உள்ள தொடர்பினால் இவ்வெண்கள் விகிதமுறு எண்கள் எனப்படுகின்றன. இதன் படம் கீழே உள்ளவாறு அமையலாம்.

படம் 2.4

ஒரு விகிதமுறு எண் என்பது இரு முழுக்களின் பின்ன வடிவத்தின் ஈவு ஆகும். இதைப் பூச்சியத்தால் வகுத்தலை மட்டும் தவிர்க்க வேண்டும்.

ஒரு பின்னத்திற்குப் பல்வேறு இணையான சமானப் பின்னங்கள் இருக்குமென்பதால், ஒரு விகிதமுறு எண்ணிற்குப் பல பெயர்கள் இருக்க வாய்ப்புண்டு. எனவே $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{8}{24}$ இவை அனைத்தும் ஒரே விகிதமுறு எண்ணையே குறிக்கும்.

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

(1) கொடுக்கப்பட்ட இணை எண்களில் ஒன்று மற்றதன் வலப்புறமாக எண்கோட்டில் அமையுமாறு உள்ள எண் இணை எது?

(i) $4, -5$ (ii) $-4, -5$ (iii) $\frac{16}{3}, \frac{21}{4}$

(2) $\frac{12}{48}$ என்பது இயல் எண், முழு எண், முழுக்கள், விகிதமுறு எண் ஆகியவற்றில் எவ்வகை எண் எனக் காண்க?

(3) பின்வரும் எண்களின் தன்மையை விவாதிக்க.

(i) $\frac{0}{11}$ (ii) $\frac{-6}{-3}$.

(4) எண் கோடு வரைந்து அதில் பின்வரும் எண்களைக் குறிக்க. $5, -1\frac{2}{3}, 2.5, \frac{5}{2}$ மற்றும் 2^2.

2.2.1 விகிதமுறு எண்களின் அடர்த்திப் பண்பு (Denseness Property of Rational Numbers)

a, b என்பன இரு விகிதமுறு எண்கள் மேலும் $a > b$ என்போம். $\frac{a+b}{2}$ என்பது அதன் சராசரியாகும். இந்தச் சராசரி ஒரு விகிதமுறு எண்ணா எனக் காண்போம்.

$a = \frac{p}{q}$ (p, q முழுக்களாகும் மற்றும் $q \neq 0$); $b = \frac{r}{s}$ (r, s முழுக்களாகும் மற்றும் $s \neq 0$), எனில்,

$$\frac{a+b}{2} = \frac{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}{2} = \frac{ps+qr}{2qs}$$ இது ஒரு விகிதமுறு எண்.

இது a மற்றும் b இக்கு இடையேயுள்ளது என மெய்ப்பிக்க வேண்டும்.

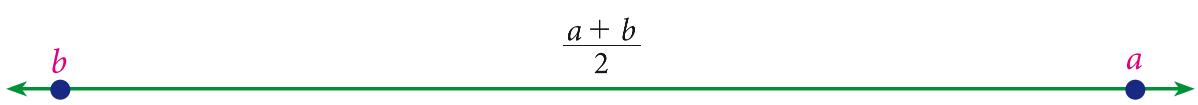
$$a - \left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{2a-a-b}{2} = \frac{a-b}{2} > 0$$ ஏனெனில் $a>b$.

ஆகையால், $a > \left(\frac{a+b}{2}\right)$ ... (1)

$$\left(\frac{a+b}{2}\right) - b = \frac{a+b-2b}{2} = \frac{a-b}{2} > 0$$ ஏனெனில் $a>b$.

ஆகையால், $\left(\frac{a+b}{2}\right) > b$ ... (2)

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து $a > \left(\frac{a+b}{2}\right) > b$, எனக் காணலாம்.



படம் 2.5

எனவே, எந்த இரு விகிதமுறு எண்களுக்கும் அதன் சராசரி அல்லது மையப்புள்ளி ஒரு விகிதமுறு எண்ணாக இருக்கும். இச்செயலைப் பலமுறை தொடர்ந்து செய்தால் இரு எண்களுக்கிடையே எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்களை உருவாக்க இயலும். எனவே இரு விகிதமுறு எண்களுக்கும் இடையே எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்கள் அமைந்துள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 2.1

$\frac{1}{2}$ மற்றும் $\frac{2}{3}$ இவற்றிற்கிடையே எவையேனும் இரு விகிதமுறு எண்களைக் காண்க.

தீர்வு 1

$\frac{1}{2}$ மற்றும் $\frac{2}{3}$ இவற்றிற்கிடையே உள்ள ஒரு விகித முறு எண்

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3+4}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{6}\right) = \frac{7}{12}$$

$\frac{1}{2}$ மற்றும் $\frac{7}{12}$ இவற்றிற்கிடையே உள்ள ஒரு விகித முறு எண்

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{7}{12}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{6+7}{12}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{13}{12}\right) = \frac{13}{24}$$

எனவே $\frac{1}{2}$ இக்கும் $\frac{2}{3}$ இக்கும் இடையே உள்ள இரண்டு விகிதமுறு எண்கள் $\frac{7}{12}$ மற்றும் $\frac{13}{24}$ ஆகும். (இதைப்போல் பல எண்கள் உள்ளன)

இரு விகிதமுறு எண்களுக்கிடையேயுள்ள விகிதமுறு எண்ணை உடனடியாகக் காண வாய்ப்பு உள்ளது.

முடிவு

$\frac{p}{q}$ மற்றும் $\frac{r}{s}$ என்பன $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ என்றவாறு உள்ள இரு விகிதமுறு எண்கள் எனில் $\frac{p+r}{q+s}$ என்ற விகிதமுறு எண் $\frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s}$ என்று அமையும்.

எடுத்துக்காட்டாக $\frac{1}{2}$ மற்றும் $\frac{2}{3}$ என்ற எண்களுக்கிடையே உள்ள எவையேனும் இரு விகிதமுறா எண்களைக் காண்க.

தீர்வு 2

$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ என்பது $\frac{1}{2} < \frac{1+2}{2+3} < \frac{2}{3}$ அல்லது $\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$

$\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$ என்பது $\frac{1}{2} < \frac{1+3}{2+5} < \frac{3}{5} < \frac{3+2}{5+3} < \frac{2}{3}$ அல்லது $\frac{1}{2} < \frac{4}{7} < \frac{3}{5} < \frac{5}{8} < \frac{2}{3}$

தீர்வு 3

வேறு ஏதேனும் புதிய முறைகள் இதற்கு உண்டா? ஆம். தசம எண் வடிவம் உங்களுக்குப் பிடிக்கும் என்றால், மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டை வேறு முறையிலும் தீர்க்க முடியும் என்பதைக் காணலாம்.

$$\frac{1}{2} = 0.5 \text{ மற்றும் } \frac{2}{3} = 0.66\ldots$$

$\frac{1}{2}$ மற்றும் $\frac{2}{3}$ இக்குமிடையே உள்ள விகிதமுறு எண்களை இவ்வாறாகப் பட்டியலிடலாம். 0.51, 0.57, 0.58, …

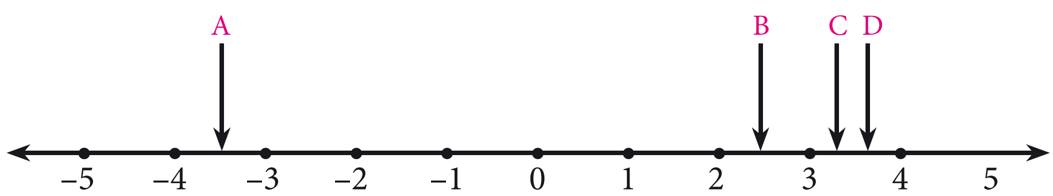
தீர்வு 4

இது போன்ற கணக்குகளைத் தீர்ப்பதற்கு மேலும் ஓர் எளிய வழிமுறையைக் காணலாம். எடுத்துக்காட்டாக, $\frac{4}{9}$ மற்றும் $\frac{3}{5}$ என்ற எண்களுக்கிடையே நான்கு விகிதமுறு எண்களைக் காண்க., 9 மற்றும் 5 இன் மீ.சி.ம. 45 ஆகும். அதனால், $\frac{4}{9} = \frac{20}{45}$ மற்றும் $\frac{3}{5} = \frac{27}{45}$ என எழுதலாம்.

$\frac{4}{9}$ மற்றும் $\frac{3}{5}$ என்ற எண்களுக்கிடையே உள்ள விகிதமுறு எண்கள். $\frac{21}{45}, \frac{22}{45}, \frac{23}{45}, \frac{24}{45}, \ldots$

பயிற்சி 2.1

1. $\frac{11}{3}$ ஐ மிகச் சரியாகக் காட்டும் அம்புக்குறி எது?

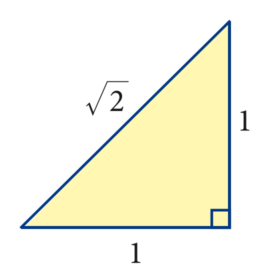


2. $\frac{-7}{11}$ மற்றும் $\frac{2}{11}$ என்ற எண்களுக்கிடையே எவையேனும் மூன்று விகிதமுறு எண்களைக் காண்க.

3. பின்வரும் எண் இணைகளுக்கு இடையே எவையேனும் ஐந்து விகிதமுறு எண்களைக் காண்க. (i) $\frac{1}{4}$ மற்றும் $\frac{1}{5}$ (ii) 0.1 மற்றும் 0.11 (iii) -1 மற்றும் -2

2.3 விகிதமுறா எண்கள் (Irrational Numbers)

எண் கோட்டில் ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணிற்கும் அதற்குரிய புள்ளி ஒன்று உள்ளது என்பதையும், விகிதமுறு எண்களின் அடர்த்திப் பண்பினைப் பற்றியும் நீங்கள் முன்பே அறிந்துள்ளீர்கள். எண் கோட்டில் உள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளும் விகிதமுறு எண்களால் நிரப்பப்பட்டுள்ளனவா? மற்றும் வேறு எவையேனும் எண்களுக்கான புள்ளிகள் உள்ளனவா என்பதை நாம் ஆராய்வோம்.



படம் 2.6

ஓர் அலகு அளவுகளைக் கொண்டு உருவாக்கப்பட்ட ஓர் இரு சமப் பக்கச் செங்கோண முக்கோணத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். பிதாகரஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி அதன் கர்ணத்தின் நீளத்தை $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ (படம் 2.6) எனக் காணலாம். கிரேக்கர்கள் $\sqrt{2}$ ஐ ஒரு முழு எண்ணுமல்ல, சாதாரணப் பின்னமும் அல்ல எனக் கண்டுபிடித்தனர். எண்கோட்டில் உள்ள புள்ளிகளுக்கும் எண்களுக்குமான தொடர்பு பற்றிய நம்பிக்கை இதனால் தகர்ந்தது. $\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறா எண் எனப்படும்.

> இரு முழுக்களை விகிதமாக எழுத இயலாத எண்களே விகிதமுறா எண்கள் ஆகும்.

$\sqrt{2}$ என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் என்பது ஒருவருக்கு எப்படித் தெரியும், இது ஒரு இயற்கையான கேள்வி. இதற்குக் காரணம் கூறுவது கடினம் அல்ல.

$\sqrt{2}$ என்பது உண்மையிலேயே ஒரு விகிதமுறு எண் எனில், $\frac{p}{q}$ எனக் (எளிய வடிவில்) கொள்வோம். p, q விற்கு ஒரு பொதுக் காரணியற்ற முழுக்களாகும். (எனவே $\frac{p}{q}$ எளிய வடிவில்) மற்றும் $q \neq 0$.

இப்போது, $\frac{p^2}{q^2} = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$

எனவே, $p^2 = 2q^2$ … (1)

இதிலிருந்து p^2 ஓர் இரட்டைப்படை எண் எனலாம் … (2)

இதிலிருந்து p ஓர் இரட்டைப்படை எண் எனலாம் … (3)

(இதை நிரூபிக்க முடியுமா?)

$p = 2m$ என்க (எவ்வாறு?); $p^2 = 4m^2$ எனக் கிடைக்கும்.;

ஆனால், (1) இலிருந்து

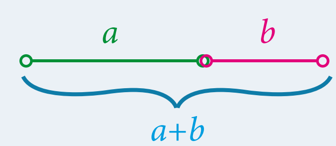
$\Rightarrow 2q^2 = 4m^2 \;\; or \;\; q^2 = 2m^2$.

இதன் விளைவாக q உம் ஓர் இரட்டைப்படை எண். … (4).

தங்க விகிதம்

φ தங்க விகிதம் என்பது கலை மற்றும் கட்டடக் கலையில் சிறந்த அற்புத விகிதமாகப் போற்றப்படுகிறது.

$(a+b)$ நீளமுள்ள ஒரு கோட்டுத்துண்டினை இரு துண்டுகளாக (a மற்றும் b) பிரிக்கவும். அவ்வாறு பிரிக்கும்போது, $(a+b)$-வுக்கும் a-வுக்கும் இடையேயுள்ள விகிதம் a-வுக்கும் b-வுக்கும் இடையேயுள்ள விகிதத்திற்கு சமமாக இருத்தல் வேண்டும்.



$a+b : a = a : b$

இதை விகித சமமாகக் கூறலாம். $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$

இங்கு a என்பது $a+b$ மற்றும் b இன் வடிவியல் சராசரி ஆகும்.

(3) மற்றும் (4) இலிருந்து p மற்றும் q விற்கு 2 ஒரு பொதுக்காரணி.

இது நாம் எடுத்துக் கொண்டதற்கு முரண்பாடாகும். எனவே $\sqrt{2}$ என்பதை $\frac{p}{q}$ என எழுதுவது தவறு. எனவே $\sqrt{2}$ என்பது விகிதமுறு எண்ணல்ல.

எடுத்துக்காட்டாக,

1. $\sqrt{2}$ ஐத் தவிர, அதைப்போன்ற எண்ணற்ற விகிதமுறா எண்களை உருவாக்கலாம்.

   எடுத்துக்காட்டாக: $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $2\sqrt{3}$, …

2. π என்பது ஒரு வட்டத்தின் சுற்றளவிற்கும், அதன் விட்டத்திற்கும் உள்ள விகிதம் ஆகும். இது விகிதமுறா எண்ணிற்கு மேலும் ஓர் எடுத்துக்காட்டாகும்.

3. e என்பது ஆய்லரின் எண் என அறியப்படும் இதுவும் விகிதமுறா எண்ணிற்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டாகும்.

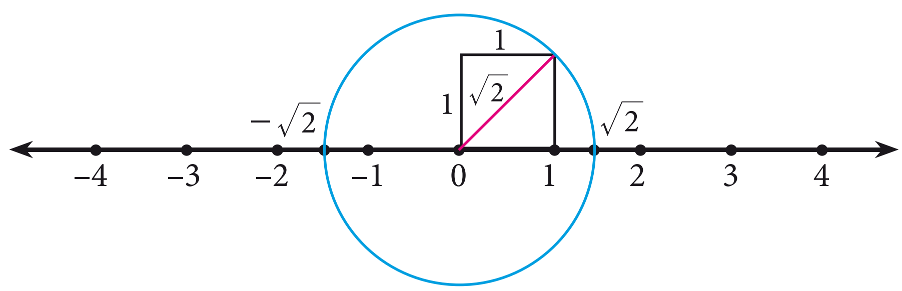
4. φ என்பது தங்க விகிதம், அல்லது தங்க சராசரி அல்லது தங்க பிரிவு என்பதைக் குறிக்கும் ஓர் எண் ஆகும். ஐங்கோணம், ஐங்கரம், தசமகோணம் போன்ற எளிய வடிவியல் தூரங்களின் விகிதங்களைக் கணக்கிடத் தடுமாறும்போது இந்த எண் பயன்படும். இதுவும் ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும்.

2.3.1 எண் கோட்டில் விகிதமுறா எண்கள் (Irrational Numbers on the Number Line)

விகிதமுறா எண்களுக்குரிய புள்ளிகள் எண் கோட்டில் எங்குள்ளன?

எடுத்துக்காட்டாக, $\sqrt{2}$ ஐ எண் கோட்டில் குறிப்போம். இது எளிது.

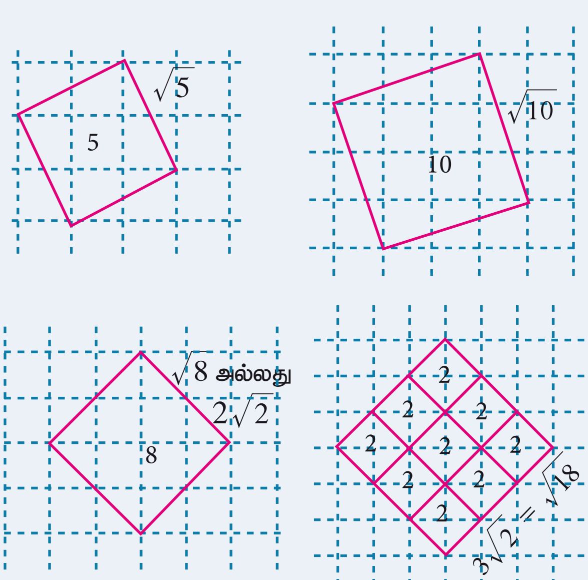
$\sqrt{2}$ என்பது ஓரலகு நீளமுடைய பக்கங்களைக் கொண்ட சதுரத்தின் மூலைவிட்டத்தின் நீளம் என்பதை நினைவில் கொள்க. (எப்படி?) இந்த அளவில் ஓர் எளிய சதுரத்தை வரைந்து அதன் மூலைவிட்டத்தை எண் கோட்டில் குறிக்கும் முறையைக் (படம் 2.7) காணலாம்.



படம் 2.7

வரைபடத் தாளில் சதுரங்களை வரைந்து தேவையான அளவில் விகிதமுறா எண்களை உருவாக்கலாம்.

சில எடுத்துக்காட்டுகள்



எண் கோட்டில் 0 வை மையமாகவும், சதுரத்தின் மூலை விட்டத்தை ஆரமாகவும் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைக. அது எண் கோட்டை இரு புள்ளிகளில் வெட்டும். 0 விற்கு வலப்புறமாக $\sqrt{2}$ வையும் இடப்புறமாக $-\sqrt{2}$ வையும் வெட்டும் புள்ளிகளில் குறிப்பிடவும். ($\sqrt{2}$ ஐக் குறிக்கத் துவங்கி மேலும் $-\sqrt{2}$ ஐயும் குறித்தாகி விட்டது)

இயல் எண்ணில் துவங்கி விகிதமுறு எண்கள் வரை விரிவுபடுத்தி, விகிதமுறா எண்களையும் அறிந்துள்ளோம். இதற்கு மேலும் எண் கோட்டை விரிவுபடுத்தி, வேறு எண்களைக் காண முடியுமா? ஆம். அவற்றை உயர் வகுப்புகளில் கற்கலாம். விகிதமுறு எண்களை முடிவுறு மற்றும் முடிவுறாத் தசம வடிவங்களாகக் குறிப்பது விகிதமுறா எண்களைப் புரிந்து கொள்வதற்கு உதவியாக இருக்கும். நாம் விகிதமுறு எண்களின் தசம வடிவத்தைக் காண்போம்.

2.3.2 விகிதமுறு எண்ணின் தசம வடிவம் (Decimal Representation of a Rational Number)

ஒரு விகிதமுறு எண்ணைப் பின்னமாக எழுதினால், அதன் தசம வடிவை நீள்வகுத்தல் முறையில் பெறலாம். கீழ்க்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளில் எப்போதும் மீதி 0 வருவதைக் காணுங்கள்:

எடுத்துக்காட்டு,

$$\begin{array}{r|l} & 0.875 \\ \hline 8 & 7.000 \\ & 64 \\ \hline & \ \ 60 \\ & \ \ 56 \\ \hline & \ \ \ \ 40 \\ & \ \ \ \ 40 \\ \hline & \ \ \ \ \ \ 0 \end{array}$$

$\frac{7}{8} = 0.875$

$$\begin{array}{r|l} & 0.84 \\ \hline 25 & 21.00 \\ & 200 \\ \hline & \ \ 100 \\ & \ \ 100 \\ \hline & \ \ \ \ 0 \end{array}$$

$\frac{21}{25} = 0.84$

$$\begin{array}{r|l} & 2.71875 \\ \hline 32 & 87.00000 \\ & 64 \\ \hline & 230 \\ & 224 \\ \hline & \ \ 60 \\ & \ \ 32 \\ \hline & \ \ 280 \\ & \ \ 256 \\ \hline & \ \ \ \ 240 \\ & \ \ \ \ 224 \\ \hline & \ \ \ \ \ \ 160 \\ & \ \ \ \ \ \ 160 \\ \hline & \ \ \ \ \ \ \ \ 0 \end{array}$$

$\frac{-87}{32} = -2.71875$

குறிப்பு

இவற்றில் வகுத்தல் செயலானது ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையிலான தசம வடிவில் முடிவுறும். இவை முடிவுறு தசம எண்கள் எனப்படும்.

ஒரு விகிதமுறு எண்ணின் தசம விரிவானது முடிவுறாமல் இருக்கலாமா? கீழ்க்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகள் (பூச்சியமற்ற மீதிகள்) இது தொடர்பான தெளிவை நமக்கு அளிக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.2

பின்வருவனவற்றை தசமவடிவில் எழுதுக. (i) $\frac{-4}{11}$ (ii) $\frac{11}{75}$

தீர்வு

$$\begin{array}{r|l} & 0.3636\ldots. \\ \hline 11 & 4.0000 \\ & 33 \\ \hline & \ \ 70 \\ & \ \ 66 \\ \hline & \ \ \ \ 40 \\ & \ \ \ \ 33 \\ \hline & \ \ \ \ \ \ 70 \\ & \ \ \ \ \ \ 66 \\ \hline & \ \ \ \ \ \ \ \ 4 \\ & \ \ \ \ \ \ \ \ \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 0.1466\ldots \\ \hline 75 & 11.0000 \\ & \ \ 75 \\ \hline & \ \ 350 \\ & \ \ 300 \\ \hline & \ \ \ \ 500 \\ & \ \ \ \ 450 \\ \hline & \ \ \ \ \ \ 500 \\ & \ \ \ \ \ \ 450 \\ \hline & \ \ \ \ \ \ \ \ 50 \\ & \ \ \ \ \ \ \ \ \vdots \end{array}$$

குறிப்பு

இவற்றில் தசம விரிவானது முடிவு பெறவில்லை. மீதிவரும் எண்கள் மீண்டும் மீண்டும் வரும். இவ்வாறு முடிவுறாத ஆனால் சுழல் தன்மையுள்ள எண்கள் கிடைக்கின்றன.

எனவே, $\frac{-4}{11} = -0.\overline{36}$

$\frac{11}{75} = 0.14\overline{6}$

எனவே, ஒரு விகிதமுறா எண்ணானது,

(i) முடிவுறும் தசம விரிவாகவோ அல்லது

(ii) முடிவுறாச் சுழல் தசம விரிவாகவோ இருக்கும்.

இதன் மறுதலையும் உண்மையே. அதாவது, ஓர் எண்ணின் தசம விரிவானது முடிவுற்றோ, முடிவுறாச் சுழல் தன்மையுடையதாகவோ இருந்தால் அவ்வெண் ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகும்.

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

பின்வரும் விகிதமுறு எண்களை தசம வடிவில் எழுதுக:

1. a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{8}$ c) $\frac{9}{25}$
2. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{47}{99}$ c) $-\frac{16}{45}$
3. 0.25 என்பதை 0.250000…என்றவாறு எழுத முடியுமா? ஒரு முடிவுறு தசம விரிவை சுழல் தசம விரிவாக எழுத முடியுமா?

இயல் எண்களின் தலைகீழிகள் விகிதமுறு எண்களே. அவற்றின் தசம வடிவங்கள் ஆர்வமூட்டுபவை. அவற்றின் முதல் பத்து எண்களைக் காண்போம்.

வ.எண்	தலைகீழி	தசம எண்ணின் தன்மை
1	$\frac{1}{1} = 1.0$	முடிவுறும்
2	$\frac{1}{2} = 0.5$	முடிவுறும்
3	$\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$	முடிவுறாச் சுழல்
4	$\frac{1}{4} = 0.25$	முடிவுறும்
5	$\frac{1}{5} = 0.2$	முடிவுறும்
6	$\frac{1}{6} = 0.1\overline{6}$	முடிவுறாச் சுழல்
7	$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$	முடிவுறாச் சுழல்
8	$\frac{1}{8} = 0.125$	முடிவுறும்
9	$\frac{1}{9} = 0.\overline{1}$	முடிவுறாச் சுழல்
10	$\frac{1}{10} = 0.1$	முடிவுறும்

2.3.3 தசமங்களின் காலமுறைமை (Period of Decimal)

விகிதமுறு எண்களின் தசமவிரிவில் உள்ள சுழல் தன்மையுடைய இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையே அவ்விகிதமுறு எண்ணின் தசமங்களின் கால முறைமை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) $\frac{25}{7} = 3.\overline{571428}$

இதன் கால முறைமை $= 6$

(ii) $\frac{27}{110} = 0.2\overline{45}$

இதன் கால முறைமை $= 2$

எடுத்துக்காட்டு 2.3

$\frac{1}{3}$ இன் சுழல் தசம விரிவைப் பயன்படுத்தி $\frac{1}{27}$ என்ற விகிதமுறு எண்ணின் சுழல் தன்மையுள்ள தசம விரிவைக் காண்க. இதைப் பயன்படுத்தி $\frac{59}{27}$ இன் சுழல் தசம விரிவைக் காண்க.

தீர்வு

$$\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$$

$$\frac{1}{27} = \frac{1}{9}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{9}\times 0.333... = 0.037037... = 0.\overline{037}$$

$$\frac{59}{27} = 2\frac{5}{27} = 2+\frac{5}{27} = 2+\left(5\times\frac{1}{27}\right)$$

$$= 2+(5\times 0.\overline{037}) = 2+(5\times 0.037037037...)$$

$$= 2+0.185185... = 2.185185... = 2.\overline{185}$$

2.3.4 முடிவுறு தசம எண்களை விகிதமுறு எண்களாக மாற்றுதல் (Conversion of Terminating Decimals into Rational Numbers)

முடிவுறு தசம எண்ணான 2.945ஐ விகிதமுறு எண்ணாகப் பின்ன வடிவத்தில் மாற்ற முயல்வோம்.

$0.1 = \frac{1}{10}$; $0.01 = \frac{1}{100}$; $0.001 = \frac{1}{1000}$ ... என்பது நாம் அறிந்ததே.

அதாவது, எந்த ஒரு தசம எண்ணிலும், தசமப் புள்ளிக்கு அடுத்துவரும் ஒவ்வோர் இலக்கமும், 10 இன் மடங்காக அதிகரிக்கும் பகுதியினை உடைய ஒரு பின்ன வடிவமாகும்.

எனவே, $2.945 = 2 + 0.945$

$$= 2+\frac{9}{10}+\frac{4}{100}+\frac{5}{1000}$$

$$= 2+\frac{900}{1000}+\frac{40}{1000}+\frac{5}{1000}$$ (பகுதியைப் பொதுவானதாக்குக)

$$= 2+\frac{945}{1000}$$

$$= \frac{2945}{1000}$$ அல்லது $$\frac{589}{200}$$

(மேற்காணும் கணக்கில் நேரடியாக $2.945 = \frac{2945}{1000}$ என எழுத இயலுமா?)

எடுத்துக்காட்டு 2.4

கீழ்க்காணும் தசம எண்களை $\frac{p}{q}$ (p மற்றும் q முழுக்களாகும். மற்றும் $q \neq 0$) என்ற வடிவில் மாற்றுக:

(i) 0.35 (ii) 2.176 (iii) – 0.0028

தீர்வு

(i) $0.35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$ (ii) $2.176 = \frac{2176}{1000} = \frac{272}{125}$

(iii) $-0.0028 = \frac{-28}{10000} = \frac{-7}{2500}$

2.3.5 முடிவுறாச் சுழல் தசம எண்ணை விகிதமுறு எண்களாக மாற்றுதல் (Conversion of Non-terminating and recurring decimals into Rational Numbers)

முடிவுறு தசம எண்ணைக் கையாளுவது எளிது. 2.4ஐப் போன்ற தசம எண் வரும்போது அதில் உள்ள தசமப் புள்ளியை நீக்க அந்த எண்ணை 10ஆல் வகுக்க வேண்டும். அதாவது, $2.4 = \frac{24}{10}$, இதைச் சுருக்கினால் $\frac{12}{5}$ கிடைக்கும். ஆனால், அதே தசம எண் $2.\overline{4}$, என இருந்தால், இங்கு எண்ணற்ற "4" வருவதால் பின்னத்தின் பகுதியில் எண்ணற்ற பூச்சியங்கள் வரும். எடுத்துக்காட்டாக,

$$2.4 = 2 + \frac{4}{10}$$

$$2.44 = 2 + \frac{4}{10} + \frac{4}{100}$$

$$2.444 = 2 + \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000}$$

$$\vdots$$

எண்ணற்ற "4" களைக் கொண்டு இக்கணக்கைக் கையாளுவது கடினம். இவ்வாறு எண்ணற்ற முடிவுறாத் தொடர்கள் வருவதிலிருந்து எவ்வகையிலாவது நாம் விடுபட வேண்டும். இத்தொடரிலிருந்து ஒன்று, இரண்டு, மூன்று அல்லது நான்கு உறுப்புகளை நீக்கினாலும் அத்தொடரோ, அதன் மதிப்போ மாறாது. அதே முடிவுறாத் தொடராக அது அமையும்.

$$x = 2.\overline{4} \qquad ...(1)$$

$$10x = 24.\overline{4} \qquad ...(2)$$

[இதை 10 ஆல் பெருக்கும்போது தசமப் புள்ளி ஓர் இலக்கம் வலப்பக்கம் நகர்ந்தாலும் இன்னமும் 4 என்ற எண் முடிவுறா எண்ணிகையில் உள்ளது).

(2) இலிருந்து (1) ஐக் கழிக்க,

$9x = 24.\overline{4} - 2.\overline{4} = 22$ (முடிவுறா 4 இலிருந்து முடிவுறா 4 ஐக் கழிக்க)

$9x = 22$ ($24 - 2 = 22$)

$x = \frac{22}{9}$ தேவையான மதிப்பு ஆகும்.

இதே முறையைப் பின்பற்றி எந்த ஒரு முடிவுறாச் சுழல் தசம விரிவையும் பின்னமாக மாற்றலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.5

கீழ்க்கண்ட தசம எண்களை $\frac{p}{q}$ $(p, q \in Z$ மற்றும் $q \neq 0)$ வடிவில் மாற்றுக.

(i) $0.\overline{3}$ (ii) $2.12\overline{4}$ (iii) $0.4\overline{5}$ (iv) $0.\overline{568}$

தீர்வு

(i) $x = 0.\overline{3} = 0.3333\ldots$ என்க (1)

(இங்குக் கால முறைமை = 1 எனவே, (1) ஐ 10 ஆல் பெருக்குக)

$10\,x = 3.3333...$ (2)

(2) – (1): $9\,x = 3$ அல்லது $x = \frac{1}{3}$

(ii) $x = 2.\overline{124} = 2.124124124\ldots$ (1)

(இங்கு தசமங்களின் கால முறைமை 3 தசம புள்ளிக்கு அடுத்துள்ள மூன்று இலக்கங்களை குறிக்கும். எனவே (1) ஐ 1000–ஆல் பெருக்குக.)

$1000\,x = 2124.124124124\ldots$ (2)

(2)–(1): $999\,x = 2122$ $x = \frac{2122}{999}$

(iii) $x = 0.4\overline{5} = 0.45555\ldots$ (1)

(இங்கு (1) ஐ 10–ஆல் பெருக்குக.)

$10\,x = 4.5555\ldots$ (2)

(இங்குத் தசமங்களின் கால முறைமை 1, எனவே (2) ஐ 10 ஆல் பெருக்குக.)

$100\,x = 45.5555\ldots$ (3)

(3) – (2): $90\,x = 41$ மற்றும் $x = \frac{41}{90}$

(iv) $x = 0.5\overline{68} = 0.5686868\ldots$ (1)

(இங்கு (1) ஐ 10–ஆல் பெருக்குக.)

$10\,x = 5.686868\ldots$ (2)

(இங்குத் தசமங்களின் கால முறைமை 2, எனவே (2) ஐ 100–ஆல் பெருக்குக.)

$1000\,x = 568.686868\ldots$ (3)

(3) – (2): $990\,x = 563$ அல்லது $x = \frac{563}{990}$.

குறிப்பு

ஒரு விகிதமுறு எண்ணின் தசம வடிவம் முடிவுறு தசம விரிவா அல்லது முடிவுறாச் சுழல் தசம விரிவா என்பதைக் கீழ்க்கண்ட விதியைப் பயன்படுத்தி அறியலாம்.

ஒரு விகிதமுறு எண் $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ ஐ $\frac{p}{2^m \times 5^n}$, என்ற வடிவில் எழுத இயலும். இங்கு $p \in \mathbb{Z}$ மற்றும் $m, n \in \mathbb{W}$, எனில் கொடுக்கப்பட்ட விகிதமுறு எண் முடிவுறு தசம எண்ணாக இருக்கும். அவ்வடிவில் எழுத இயலவில்லை எனில் அது முடிவுறாச் சுழல் தன்மையுடைய தசம விரிவாக அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.6

வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தாமல் கீழ்க்காணும் எண்களின் தசம விரிவு முடிவுறு அல்லது முடிவுறாச் சுழல் தன்மையுடையன என வகைப்படுத்துக.

(i) $\frac{13}{64}$ (ii) $\frac{-71}{125}$ (iii) $\frac{43}{375}$ (iv) $\frac{31}{400}$

தீர்வு

(i) $\frac{13}{64} = \frac{13}{2^6}$ எனவே, $\frac{13}{64}$ என்பது முடிவுறு தசம விரிவைப் பெற்றிருக்கும்.

(ii) $\frac{-71}{125} = \frac{-71}{5^3}$ எனவே, $\frac{-71}{125}$ என்பது முடிவுறு தசம விரிவைப் பெற்றிருக்கும்..

(iii) $\frac{43}{375} = \frac{43}{3^1 \times 5^3}$ எனவே, $\frac{43}{375}$ என்பது முடிவுறாச் சுழல் தசம விரிவைப் பெற்றிருக்கும்.

(iv) $\frac{31}{400} = \frac{31}{2^4 \times 5^2}$ எனவே, $\frac{31}{400}$ என்பது முடிவுறு தசம விரிவைப் பெற்றிருக்கும்..

எடுத்துக்காட்டு 2.7

சரிபார்க்க $1 = 0.\overline{9}$

தீர்வு

$$x = 0.\overline{9} = 0.99999\ldots \qquad (1)$$

(சமன்பாடு (1) ஐ 10 பெருக்க)

$$10\,x = 9.99999\ldots \qquad (2)$$

(2) இலிருந்து (1) ஐக் கழிக்கவும்

$9x = 9$ அல்லது $x = 1$

$0.\overline{9} = 1$

$1 = 0.9999\ldots$

$7 = 6.9999\ldots$

$3.7 = 3.6999\ldots$

இவ்வடிவத்திலிருந்து, எந்தவொரு முடிவுறு தசம விரிவையும் முடிவுறாத் தசம விரிவாக "9" களின் கட்டுகளாக எழுத இயலும் என்பதை அறியலாம்.

பயிற்சி 2.2

1. கீழ்க்காணும் விகிதமுறு எண்களைத் தசம எண்ணாக மாற்றி அது எவ்வகைத் தசம விரிவு என்பதையும் கூறுக.

(i) $\frac{2}{7}$ (ii) $\frac{35}{100}$ (iii) $-5\frac{3}{11}$ (iv) $\frac{22}{3}$ (v) $\frac{-9}{32}$ (vi) $\frac{327}{200}$

2. $\frac{1}{13}$ ஐத் தசம வடிவில் எழுதுக. அதன் தசம எண்ணின் காலமுறைமையைக் காண்க?

3. $\frac{1}{11}$ இன் தசம விரிவைப் பயன்படுத்தி $\frac{1}{33}$ இன் சுழல் தசம விரிவைக் காண்க. இதிலிருந்து $\frac{71}{33}$ தசம விரிவைத் தருவிக்க.

4. கீழ்க்காணும் தசம விரிவுகளை விகிதமுறு எண்ணாக எழுதுக?

(i) $0.\overline{24}$ (ii) $2.\overline{327}$ (iii) 0.86

(iv) -5.132 (v) $3.1\overline{7}$ (vi) $17.2\overline{15}$

(vii) $0.\overline{0001}$ (viii) $-21.213\overline{7}$

5. வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தாமல், பின்வருவனவற்றுள் எவை முடிவுறு தசம விரிவைப் பெற்றிருக்கும் எனக் கண்டுபிடிக்க.

(i) $\frac{7}{128}$ (ii) $\frac{21}{15}$ (iii) $\frac{19}{125}$

(iv) $4\frac{9}{35}$ (v) $\frac{387}{800}$ (vi) $\frac{219}{2200}$

2.3.6 தசம விரிவுகளைக் கொண்டு விகிதமுறா எண்களை அடையாளம் காணுதல் (Decimal Representation to Identify Irrational Numbers)

விகிதமுறா எண்களைத் தசம வடிவில் எழுதும்போது அவை முடிவுறாமலும், சுழல் தன்மை இல்லாமலும் இருப்பதை நாம் காணலாம். எடுத்துக்காட்டாக, π இன் தசம விரிவானது 3.14159265358979 எனத் தொடங்கி, சுழல் தன்மையற்றதாகவும், π இன் மதிப்பைத் துல்லியமாகக் கூற முடியாததாகவும் உள்ளது.

கீழ்க்காணும் தசம விரிவுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

(i) $0.1011001110001111\ldots$ (ii) $3.012012120121212\ldots$

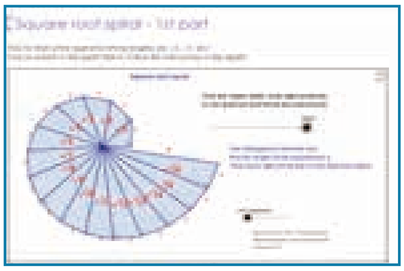
(iii) $12.230223300222333000\ldots$ (iv) $\sqrt{2} = 1.4142135624\ldots$

மேற்காணும் தசம விரிவுகள் முடிவுறு தன்மையுடையதா அல்லது முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையுடையதா? இல்லை... அவை முடிவுறவுமில்லை, முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையுடையனவுமில்லை. எனவே, அவை விகிதமுறு எண்கள் அல்ல. அவற்றை $\frac{p}{q}$, $(p, q, \in \mathbb{Z}$ மேலும் $q \neq 0)$ வடிவில் எழுத இயலாது. அவை விகிதமுறா எண்களாகும்.

முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற தசம விரிவைப் பெற்றிருக்கும் எண்கள் விகிதமுறா எண்கள் ஆகும்

இணையச் செயல்பாடு

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்



படி – 1

கீழேக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலியைத் தேடுபொறியில் தட்டச்சு செய்க அல்லது துரித துலங்கள் குறியீட்டை ஸ்கேன் செய்க.

படி – 2

“Real Numbers” என்று GeoGebra பக்கத்தில் தோன்றும் . இப்பக்கத்தில் பல பணித்தாள்கள் காணப்படும். புதிய கணக்குகளைச் செய்து பார்க்க “Square root spiral – 1st part” என்பதைச் சொடுக்கவும்.

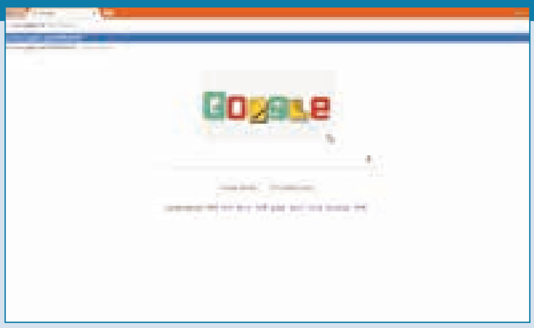
படி – 3

Steps எனும் நழுவலை இழுக்கவும். படிப்படியாக 2,3,4,5 என்ற எண்களின் வர்க்கமூல வடிவம் தோன்றும்.

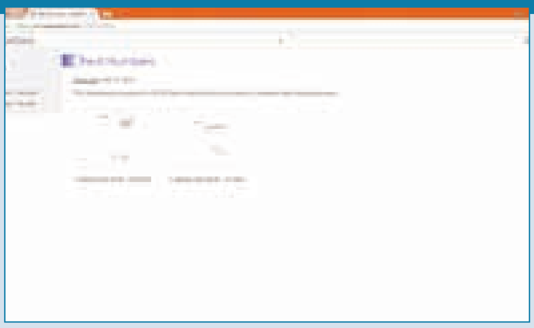
படி – 4

“Unit segment” எனும் நழுவலை இழுப்பதால் வர்க்கமூல வடிவத்தைப் பெரிதாகவும் தெளிவாகவும் காணலாம்.

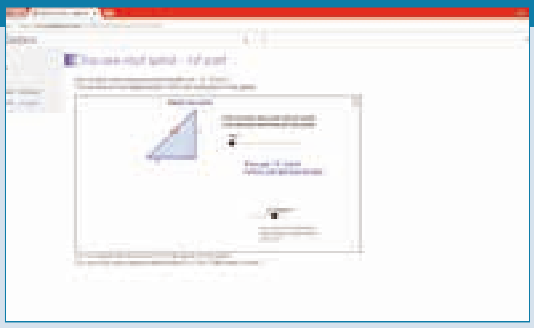
படி 1



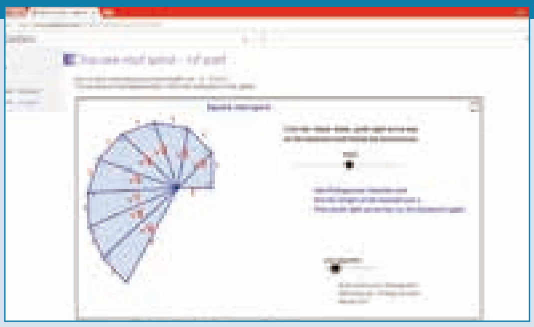
படி 2



படி 3



படி 4



இதே போல் பாடம் சார்ந்த வேறு செயல்பாட்டினை செய்து பார்க்கவும்

செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

வர்க்கமூலம் : https://www.ggbm.at/m6GQc6mQ

எடுத்துக்காட்டு 2.8

$\sqrt{3}$ இன் தசம விரிவைக் காண்க.

தீர்வு

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1.7320508.. \\ \hline
1 & 3.00,00,00,00,00,\ldots \\
 & 1 \\ \hline
27 & 200 \\
 & 189 \\ \hline
343 & 1100 \\
 & 1029 \\ \hline
3462 & 7100 \\
 & 6924 \\ \hline
346405 & 1760000 \\
 & 1732025 \\ \hline
34641008 & 279750000 \\
 & 277128064 \\ \hline
 & 2621936
\end{array}
$$

$\sqrt{2} = 1.414\ldots.,\quad \sqrt{3} = 1.732\ldots,$ $\pi = 3.141,$ போன்றவற்றை அடிக்கடிப் பயன்படுத்துவோம். அவை துல்லியமான மதிப்பல்ல, தோராயமான மதிப்பே. π இன் மதிப்பை $\frac{22}{7}$ $(3.\overline{142857})$ என நாம் அடிக்கடி அதன் மதிப்பாகப் பயன்படுத்துகிறோம். உண்மையில் அவை தோராயமான மதிப்பேயாகும். ஏனெனில் விகிதமுறா எண்களின் தசம விரிவானது முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்றது. அவற்றுக்குத் துல்லியமான மதிப்பு இல்லை.

எனவே, நீள் வகுத்தல் முறைப்படி, $\sqrt{3} = 1.7320508\ldots$

மேலும் முழு வர்க்கமற்ற மிகை எண்களின் வர்க்கமூலம் அனைத்தும் விகிதமுறா எண்கள் எனக் கண்டறியப்பட்டுள்ளது. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \ldots$ அனைத்தும் விதிமுறா எண்களே.

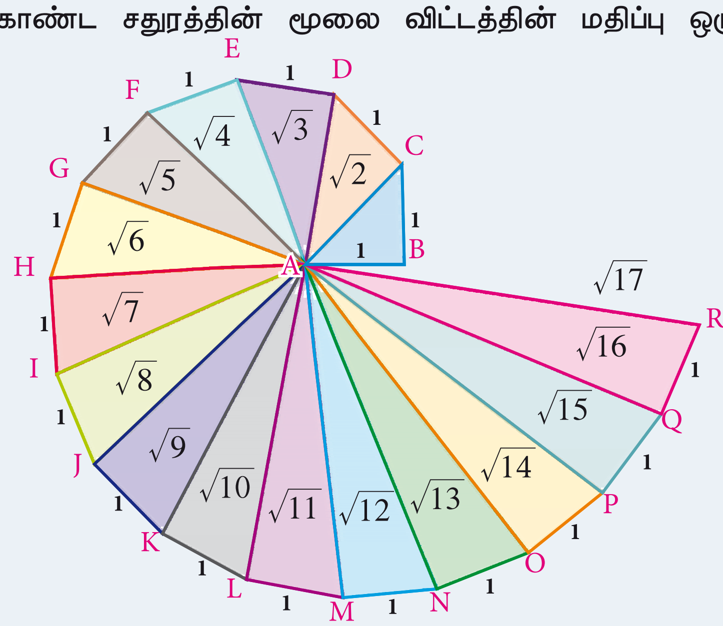
செயல்பாடு 1

வர்க்கமூலச் சுருள் – வடிவமைத்தல்

கணிப்பான்களைக் (Calculators) கண்டுபிடிப்பதற்கு முன்பாக விகிதமுறா எண்களின் மதிப்பைத் தோராயமாகக் கண்டுபிடிப்பது மிகவும் கடினமான செயலாக இருந்தது. ஓர் அலகு நீளமுள்ள பக்கத்தினைக் கொண்ட சதுரத்தின் மூலை விட்டத்தின் மதிப்பு ஒரு விகிதமுறா எண் என முதன்முதலில் கண்டறியப்பட்டது. ஆனால் அக்காலக் கணித அறிஞர்கள் இந்த விகிதமுறா எண்களின் தோராயத் தொலைவை (எடுத்துக்காட்டாக $\sqrt{7}$) எவ்வாறு கணக்கிட்டனர் என்பதைக் காண்போம்?

அதற்குரிய வழிதான் "வர்க்கமூலச் சுருள்"

படி:1 A என்ற புள்ளியிலிருந்து ஓரலகு அளவிற்கு $\overline{AB}$ என்ற கோட்டுத் துண்டு வரைக.



படம் 2.8

படி:2 $\overline{AB}$ இக்குச் செங்குத்தாக ஓரலகு அளவிற்கு $\overline{BC}$ என்ற கோட்டுத் துண்டு வரைக. (இங்கு $AB=BC=1$)

படி:3 AC ஐ இணைக்க. $(AC=\sqrt{2})$

படி:4 ஓரலகு நீளத்திற்கு $\overline{CD}$ என்ற கோட்டுத் துண்டை $\overline{AC}$ இக்குச் செங்குத்தாக வரைக.

படி:5 AD ஐ இணைக்க. $(AD=\sqrt{3})$.

படி:6 இப்படிகளைத் தொடர்ச்சியாகப் பல முறை செய்தால், அழகான சுருள் அமைப்பு கிடைக்கும். அதன் பக்கங்களாக $AC, AD, AE, \ldots$ இருக்கும்.

இங்கு, $\overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}, \ldots$ என்பன முறையே $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \ldots$ என்பனவற்றைக் குறிக்கும் என்பதைக் கவனிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.9

கீழுள்ளவற்றை விகிதமுறு அல்லது விகிதமுறா எண்களாக வகைப்படுத்துக.

(i) $\sqrt{10}$ (ii) $\sqrt{49}$ (iii) 0.025 (iv) $0.7\overline{6}$ (v) $2.505500555\ldots$ (vi) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

தீர்வு

(i) $\sqrt{10}$ ஒரு விகிதமுறா எண் (ஏனெனில் 10 ஒரு முழுவர்க்க எண் அல்ல).

(ii) $\sqrt{49}=7=\frac{7}{1}$, ஒரு விகிதமுறு எண் (49 ஒரு முழு வர்க்க எண்).

(iii) 0.025 ஒரு விகிதமுறு எண் (இது ஒரு முடிவுறு தசம எண்).

(iv) $0.7\overline{6}=0.7666\ldots$. ஒரு விகிதமுறு எண் (இது ஒரு முடிவுறாச் சுழல் தசம எண்).

(v) $2.505500555\ldots$. ஒரு விகிதமுறா எண் (இது விகிதமுறாச் சுழல் தன்மையற்ற தசம எண்).

(vi) $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ஒரு விகிதமுறா எண் (2 ஒரு முழு வர்க்க எண் அல்ல).

எடுத்துக்காட்டு 2.10

$\frac{23}{10}$ மற்றும் $\frac{12}{5}$ இக்கும் இடையே ஒரு விகிதமுறா எண்ணைக் காண்க.

குறிப்பு

எடுத்துக்காட்டு 2.9, (vi) இல் உள்ள முடிவைத் தவறுதலாக $\frac{p}{q}$ வடிவமாகக் கருதக்கூடாது. ஏனெனில் p மற்றும் q இரண்டும் முழுக்களாக இருக்க வேண்டுமேயொழிய விகிதமுறா எண்களாக இருக்கக்கூடாது.

தீர்வு

$\frac{23}{10}$ என்பது 2.3 மற்றும் $\frac{12}{5}$ என்பது 2.4 ஆகும்

2.3 ஐ விடப் பெரியதாகவும் 2.4 ஐ விடச் சிறியதாகவும் ஒரு விகிதமுறா எண் தேவை.

அத்தகையதோர் எண்

2.301001000100001000000100000001000000001……..

இதை எப்படி எழுதுவது?

பக்கத்தில் உள்ள கட்டத்தைப் பார்க்க.

இப்போது எழுதிய புதிய எண் விகிதமுறா எண்ணா?

ஆம். இது முடிவுறாச் சுழல் தன்மையற்ற எண்

> 2.3 ஐ அடுத்து
> இடம் 01
> பிறகு 001
> பிறகு 0001
> பிறகு 00001
> ⋮
> இதைப் போலவே

குறிப்பு

> இரு விகிதமுறு எண்கள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் மட்டுமே இம்முறையை கடைபிடிக்க இயலும். சிறிய விகிதமுறு எண்ணை, முடிவுறு தசம எண்ணாக எடுத்துக் கொண்டு அதன் கடைசி தசம இலக்கத்திற்குப் பிறகு 01 மேலும் 001 மேலும் 0001 மேலும் 00001 … … … என எழுதுக. இது கொடுக்கப்பட்ட இரு விகிதமுறு எண்களுக்கிடையே உள்ள ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும்.]

63 மற்றும் 64 இக்கிடையே ஒரு விகிதமுறா எண்ணைக் காண முடியுமா?

அது 63.01001000100001000001... ஆக இருக்கலாம்.

மேலும், விகிதமுறு எண்களின் 7.568903 மற்றும் 7.568904 இக்குமிடையே கீழ்க்காணும் விகிதமுறா எண் இருக்க வாய்ப்புண்டா?

7.568903 01001000100001000001.......

எடுத்துக்காட்டு 2.11

$\frac{1}{4}$ மற்றும் $\frac{1}{3}$ இக்குமிடையே எவையேனும் 4 விகிதமுறா எண்களைக் காண்க.

தீர்வு

$\frac{1}{4} = 0.25$ மற்றும் $\frac{1}{3} = 0.3333….. = 0.\overline{3}$

0.25 இக்கும் மற்றும் $0.\overline{3}$ இக்குமிடையே எண்ணற்ற விகிதமுறா எண்கள் உள்ளன.

0.25 இக்கும் மற்றும் $0.\overline{3}$ இக்குமிடையே உள்ள 4 விகிதமுறா எண்கள்

0.26010010001000001…..

0.27010010001000001…..

0.28010010001000001…..

0.31010010001000001…..

CID8H9

எடுத்துக்காட்டு 2.12

0.12 மற்றும் 0.13 என்ற எண்களுக்கு இடையே எவையேனும் மூன்று விகிதமுறா எண்களைக் காண்க.

தீர்வு

0.12, 0.13 என்ற எண்களுக்கு இடையே உள்ள 3 விகிதமுறா எண்கள் 0.12010010001…, 0.12040040004…, 0.12070070007…

எடுத்துக்காட்டு 2.13

0.5151151115, மற்றும் 0.5353353335... என்ற எண்களுக்கு இடையே எவையேனும் இரு விகிதமுறு எண்களைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட விகிதமுறா எண்களுக்கிடையே உள்ள இரு விகிதமுறு எண்கள் 0.5152 மற்றும் 0.5352 ஆகும்.

குறிப்பு

நினைவில் வைத்திருக்க வேண்டிய ஒரு முக்கிய முடிவினை (மெய்ப்பின்றி) நாம் காண்போம்.

ஒரு விகிதமுறு எண் 'a' மற்றும் ஒரு விகிதமுறா எண் $\sqrt{b}$ எனில், கீழ்க்காணும் அனைத்தும் விகிதமுறா எண்களே:

(i) $a+\sqrt{b}$; (ii) $a-\sqrt{b}$; (iii) $a\sqrt{b}$; (iv) $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$; (v) $\dfrac{\sqrt{b}}{a}$.

எடுத்துக்காட்டாக, விகிதமுறு எண் 4 மற்றும் விகிதமுறா எண் $\sqrt{5}$ ஐ எடுத்துக் கொண்டால் $4+\sqrt{5}$, $4-\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$, $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$, $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ --- இவை எல்லாம் விகிதமுறா எண்களே.

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

1. π என்பதை $\dfrac{22}{7}$ எனப் பயன்படுத்துகிறோம் எனில் π ஒரு விகிதமுறு எண் என்று கூறலாமா?
2. $\sqrt{2} = 1.414 = \dfrac{1414}{1000}$ எனப் பயன்படுத்துகிறோம் எனில் $\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறு எண் என்று கூறலாமா?
3. கொடுக்கப்பட்ட எளிய சமன்பாடுகளை தீர்க்கத் தேவையான எண்களின் வகையைக் காண்க. அட்டவணையில் வினா எண் (1) மற்றும் (2) உங்களுக்காக தீர்க்கப்பட்டுள்ளது

வ.எண்	சமன்பாடு	தீர்வு	எண்ணின் வகை
1	$x-7=17$	$x=24$	இயல் எண்
2	$x+5=5$	$x=0$	முழு எண்

3	$x + 1 = 9$		
4	$x + 9 = 1$		
5	$7x = 19$		
6	$5x = -3$		
7	$x^2 - 2 = 0$		

4. விகிதமுறா எண்ணைத் தீர்வாகக் கொண்ட ஒரு வாக்கியக் கணக்கை உருவாக்குக?

பயிற்சி 2.3

1. கீழ்க்கண்ட விகிதமுறா எண்களை எண் கோட்டில் குறிக்கவும்.

   (i) $\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt{4.7}$ (iii) $\sqrt{6.5}$

2. கீழ்க்கண்டவற்றுக்கிடையே எவையேனும் இரு விகிதமுறா எண்களைக் காண்க.

   (i) 0.3010011000111…. மற்றும் 0.3020020002….

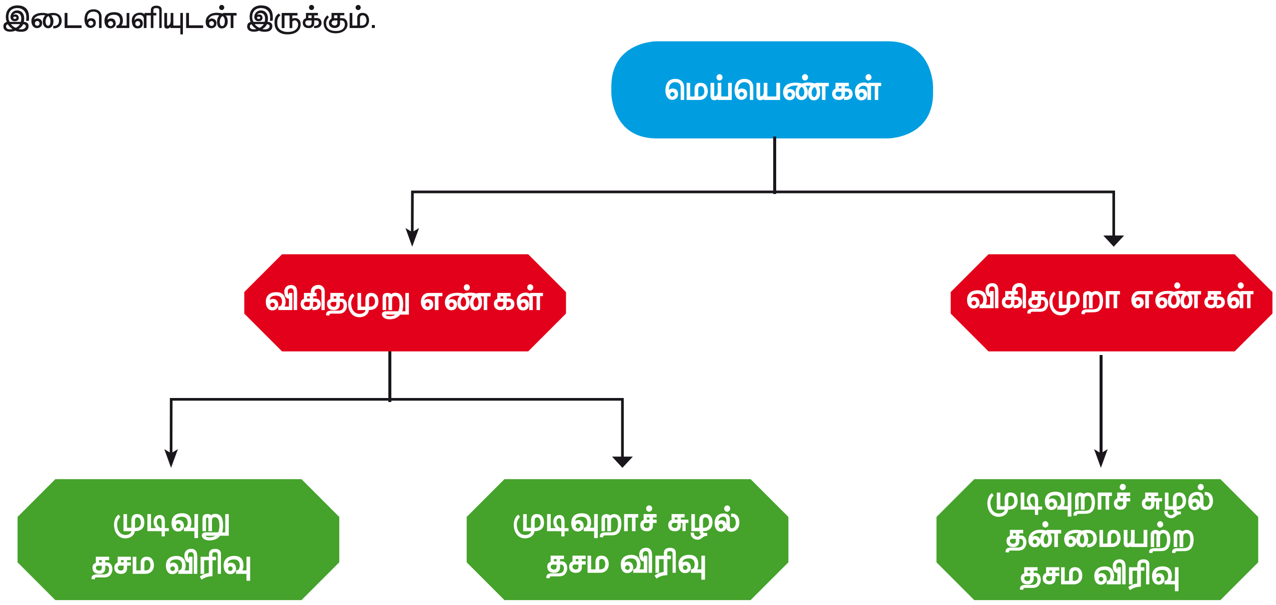
   (ii) $\frac{6}{7}$ மற்றும் $\frac{12}{13}$ (iii) $\sqrt{2}$ *மற்றும்* $\sqrt{3}$ (iv) 0.12 மற்றும் 0.13

3. 2.2360679….. மற்றும் 2.236505500…. இவ்வெண்களுக்கிடையே எவையேனும் இரு விகிதமுறு எண்களைக் காண்க.

2.4 மெய்யெண்கள் (Real Numbers)

அனைத்து விகிதமுறு மற்றும் விகிதமுறா எண்களையும் உள்ளடக்கியது மெய்யெண்கள் ஆகும்.

மெய்யெண்களை நாம் மெய் கோட்டில் (முடிவுறா மிகப் பெரிய எண் கோடு) உள்ள புள்ளிகளாகக் கருதலாம். இதில் முழுக்களுக்கு உரிய புள்ளிகள் அனைத்தும் மிகச் சீரான இடைவெளியுடன் இருக்கும்.



எந்தவொரு மெய்யெண்களையும் அதன் முடிவுறாத் தசம விரிவினைக் கொண்டு நாம் அடையாளம் காணலாம். [விகிதமுறு மற்றும் விகிதமுறா எண்களின் தசம விரிவினைப் பற்றி நாம் முன்னரே அறிந்துள்ளோம்.]

புதிர்

$$\begin{aligned} 1 &= \sqrt{1} \\ &= \sqrt{(-1)(-1)} \\ &= \sqrt{(-1)}\,\sqrt{(-1)} \\ &= -1 \end{aligned}$$

எவ்வாறு? மூன்றாவது வரிசையைக் காண்க.

$\sqrt{(-1)}$

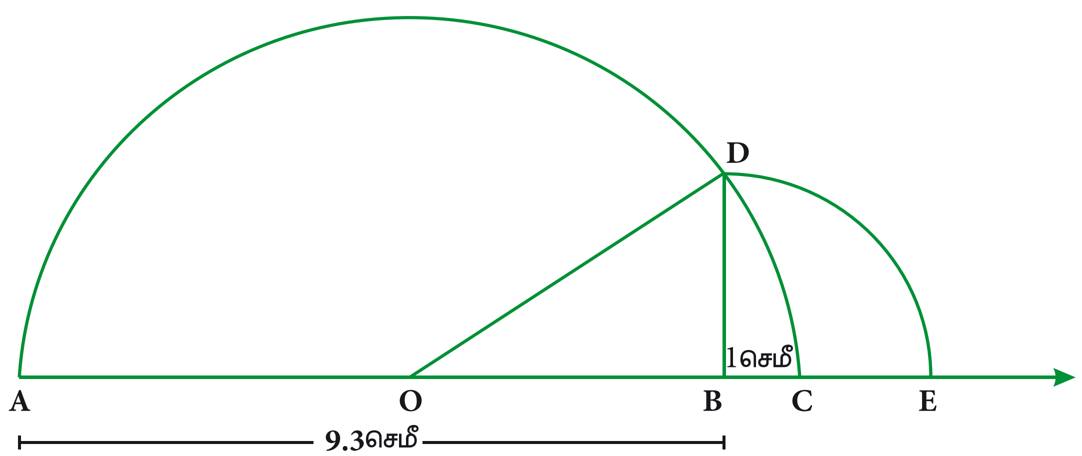
வரையறுக்கப்பட்டதா?

எடுத்துக்காட்டு 2.14

$\sqrt{9.3}$ ஐ எண் கோட்டில் குறிக்கவும்.

தீர்வு

- ஒரு நேர்க்கோடு வரைந்து அதில் A என்ற புள்ளியைக் குறிக்கவும்.
- $AB = 9.3$ செ.மீ. எனுமாறு B என்ற புள்ளியைக் குறிக்கவும்.
- $BC = 1$ என்ற அலகுக்கு ஒரு கோடு வரைந்து அதை 'C' எனக் குறிக்கவும்.
- AC இக்கு மையக் குத்துக்கோடு வரைந்து அதன் மையப் புள்ளியை O எனக் குறிக்கவும்.
- O ஐ மையமாகவும் $OC = OA$ ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு அரை வட்டம் வரையவும்.
- BD இக்குச் செங்குத்தாக B இல் AB என்ற கோடு வரையவும்.
- இப்போது, $BD = \sqrt{9.3}$ இதை எண்கோட்டில் $BE = BD = \sqrt{9.3}$ எனக் குறிக்கலாம்.



படம் 2.9

செயல்பாடு 2

கீழ்க்கண்ட பத்து மெய்யெண்களை கருதுக:

$\sqrt{2}, \frac{7}{9}, -1.32, \frac{6}{7}, -\sqrt{3}, 2.151155..., \frac{23}{6}, \frac{48}{5}, -3.010010001...$ மற்றும் $12.353553555.$

(i) மேற்கண்ட பத்து மெய்யெண்களையும் கட்டங்களில் ஏறு வரிசையில் எழுதுக.

(ii) அதே எண்களை கட்டங்களில் இறங்கு வரிசையில் எழுதுக.

2.4.1 மெய்யெண்களின் இருபடி வர்க்க மூலம் (The Square Root of a Real Number)

முழு எண்கள், தசம பின்னங்கள் போன்றவற்றின் வர்க்க மூலம் குறித்து ஏற்கனவே அறிந்துள்ளோம். $\sqrt{169}$ என்ற எண்ணின் மதிப்பினை(இதன் விடை முழுக்களாகும்) நீங்கள் எளிதாகக் கணக்கிட இயலும். இதே வழியில் $\sqrt{5}, \sqrt{18}$, ... போன்றவற்றின் மதிப்புகளைக் கணக்கிடும்போது விகிதமுறா எண் தீர்வுகளைப் பெறுவீர்கள்.

25 என்ற எண்ணிற்கு 5 மற்றும் -5 என இரு வர்க்க மூலங்கள் உண்டு. இருப்பினும் $\sqrt{25}$ என நாம் எழுதினால், எப்போதும் மிகை எண் வர்க்க மூலமாக 5 ஐயே கருதுகிறோம். (குறை எண் வர்க்க மூலம் -5 ஐ அல்ல). எனவே $\sqrt{\ }$ என்ற குறி மிகை வர்க்க மூலத்தை மட்டுமே குறிப்பதாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

a என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் எனில் எந்தவொரு விகிதமுறா எண் $\sqrt{a}$ ஐயும் சில நேரங்களில் விகிதமுறா மூலம் எனக் குறிப்பிடுவதுண்டு. $2\sqrt{3}$ ஐப் போன்ற மெய்யெண்களையும் தவறாக விகிதமுறா மூலம் எனக் குறிப்பிடுவதுண்டு. ஏனெனில், இதை $\sqrt{12}$ என எழுதலாம் (எப்படி?). சில நேரங்களில் $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ போன்ற கோவைகளையும் விகிதமுறா மூலம் என்போம். ஆனால் நுட்பமாக இதை இரு விகிதமுறா மூலங்களின் கூடுதல் எனக் கூறவேண்டும்.

π என்பது ஒரு விகிதமுறா மூலமா? இல்லை. இதை ஒரு விகிதமுறு எண்ணின் வர்க்க மூலமாகக் கருத இயலாது. மேலும் அதைப் போன்ற முடிவுறு எண்களின் கூட்டுத் தொகையாகவும் கூற முடியாது.

வர்க்க மூலங்களின் அடிப்படை விதிகளை நினைவுக்கூர்வோம்.

a மற்றும் b என்பன மிகை எண்கள் எனில்,

$$(\sqrt{a})^2 = a$$
$$\sqrt{a^2} = a$$
$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$
$$\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

குறிப்பு

a, b மிகையெண்களாக இருந்தால் மட்டுமே இவ்விதிகள் பொருந்தும். பொதுவாக, $\sqrt{a^2} = (a^2)^{\frac{1}{2}} = a$.

எடுத்துக்காட்டு 2.15

கீழ்க்கண்டவற்றுள் x மற்றும் y விகிதமுறு எண்களா அல்லது விகிதமுறா எண்களா எனக் காண்க.

(i) $a = 2+\sqrt{3}$, $b = 2-\sqrt{3}$; $x = a+b$, $y = a-b$

(ii) $a = \sqrt{2}+7$, $b = \sqrt{2}-7$; $x = a+b$, $y = a-b$

(iii) $a = \sqrt{75}$, $b = \sqrt{3}$; $x = ab$, $y = \frac{a}{b}$

(iv) $a = \sqrt{18}$, $b = \sqrt{3}$; $x = ab$, $y = \frac{a}{b}$

தீர்வு

(i) $a = 2+\sqrt{3}, b = 2-\sqrt{3}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$x = a+b = (2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) = 4$, ஒரு விகிதமுறு எண்.

$y = a-b = (2+\sqrt{3}) - (2-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறா எண்.

(ii) $a = \sqrt{2}+7$, $b = \sqrt{2}-7$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$x = a+b = (\sqrt{2}+7) + (\sqrt{2}-7) = 2\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறா எண்.

$y = a-b = (\sqrt{2}+7) - (\sqrt{2}-7) = 14$ ஒரு விகிதமுறு எண்.

(iii) $a = \sqrt{75}$, $b = \sqrt{3}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$x = ab = \sqrt{75}\times\sqrt{3} = \sqrt{75\times 3} = \sqrt{5\times5\times3\times3} = 5\times3 = 15$ ஒரு விகிதமுறு எண்.

$y = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5$ ஒரு விகிதமுறு எண்.

(iv) $a = \sqrt{18}$, $b = \sqrt{3}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$x = ab = \sqrt{18}\times\sqrt{3} = \sqrt{18\times3} = \sqrt{6\times3\times3} = 3\sqrt{6}$ ஒரு விகிதமுறா எண்.

$y = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{18}{3}} = \sqrt{6}$ ஒரு விகிதமுறா எண்.

குறிப்பு

(i) மேற்குறிப்பிட்ட எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்து இரு விகிதமுறா எண்களின் கூடுதல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல் ஆகியன ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகவோ அல்லது விகிதமுறா எண்ணாகவோ இருக்கலாம் என்பது தெளிவாகிறது.

(ii) பொதுவாக விகிதமுறா மூலங்களில் வரும் முழு வர்க்க எண்களைக் காரணிகளாக எழுதும்போது இயன்ற வரை எளிய (சுருங்கிய) வடிவில் எழுதுதல் வேண்டும்.

2.4.2 மெய்யெண் கோடு (The Real Number Line)

தொடர் உருப்பெருக்க முறையைப் பயன்படுத்திக் காணுதல்.

எண் கோட்டில் உள்ள எண்களை நாம் உருப்பெருக்கக் கண்ணாடியில் காண்பதைப் போலக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.16

4.863 ஐ எண் கோட்டில் குறிக்கவும்..

தீர்வு

4.863 என்பது 4 , 5 என்ற எண்களுக்கு இடையே உள்ளது.(படம். 2.10)

(i) 4 , 5 என்ற எண்களுக்கு இடையே உள்ள பகுதியை 10 சமபாகங்களாகப் பிரிக்கவும்.

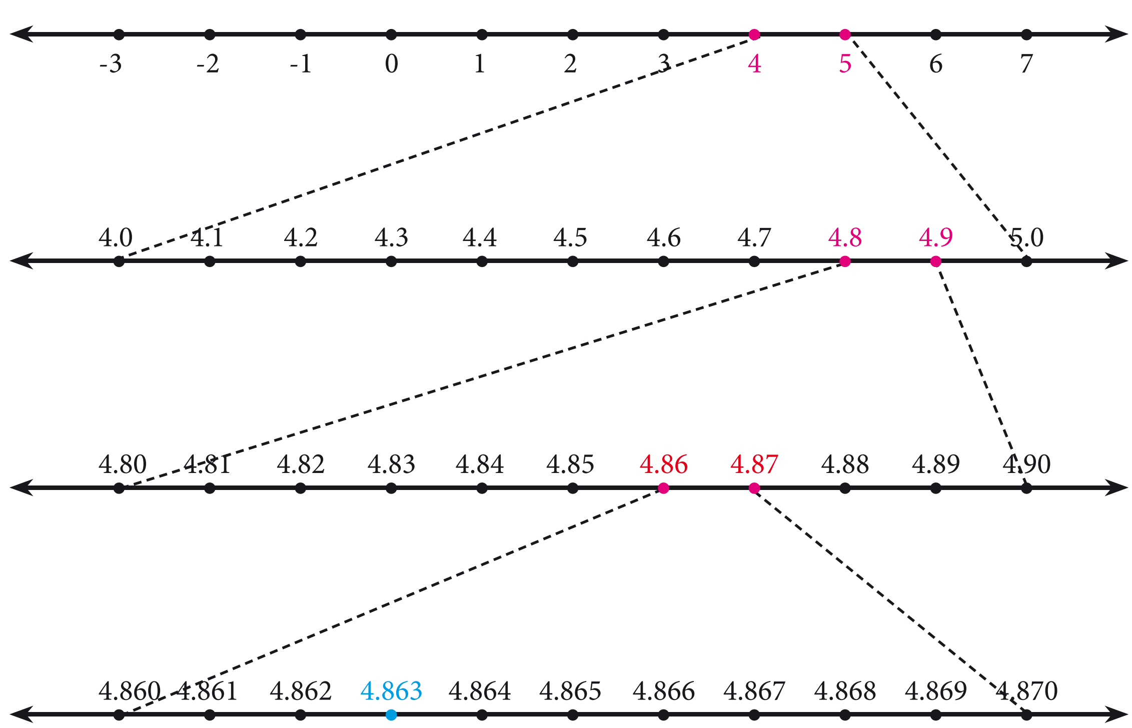
(ii) 4 இலிருந்து வலப்புறமாக எட்டாவது பிரிவை அல்லது 5 இலிருந்து இடப்புறமாக இரண்டாவது பிரிவை 4.8 என்ற புள்ளியாகக் குறிக்கவும்.

(iii) 4.86 என்பது 4.8 , 4.9 என்ற எண்களுக்கு இடையே இருக்கும். இவற்றுக்கிடையே இடையே உள்ள தூரத்தை 10 சம பாகங்களாகப் பிரிக்கவும்.

(iv) 4.8 இக்கு வலப்புறமாக 6 ஆவது அல்லது 4.9 இக்கு இடப்புறமாக 4 ஆவது பிரிவை 4.86 எனக் குறிக்கவும்.

(v) 4.863 என்பது 4.86, 4.87 என்ற எண்களுக்கு இடையே அமையும். இவற்றுக்கிடையே உள்ள பகுதியை 10 சம பாகங்களாகப் பிரிக்கவும்.

(vi) 4.86 இலிருந்து வலப்புறமாக 3 ஆவது அல்லது 4.87 இலிருந்து இடப்புறமாக 7 ஆவது பிரிவை 4.863 எனக் குறிக்கவும்.



படம் 2.10

எடுத்துக்காட்டு 2.17

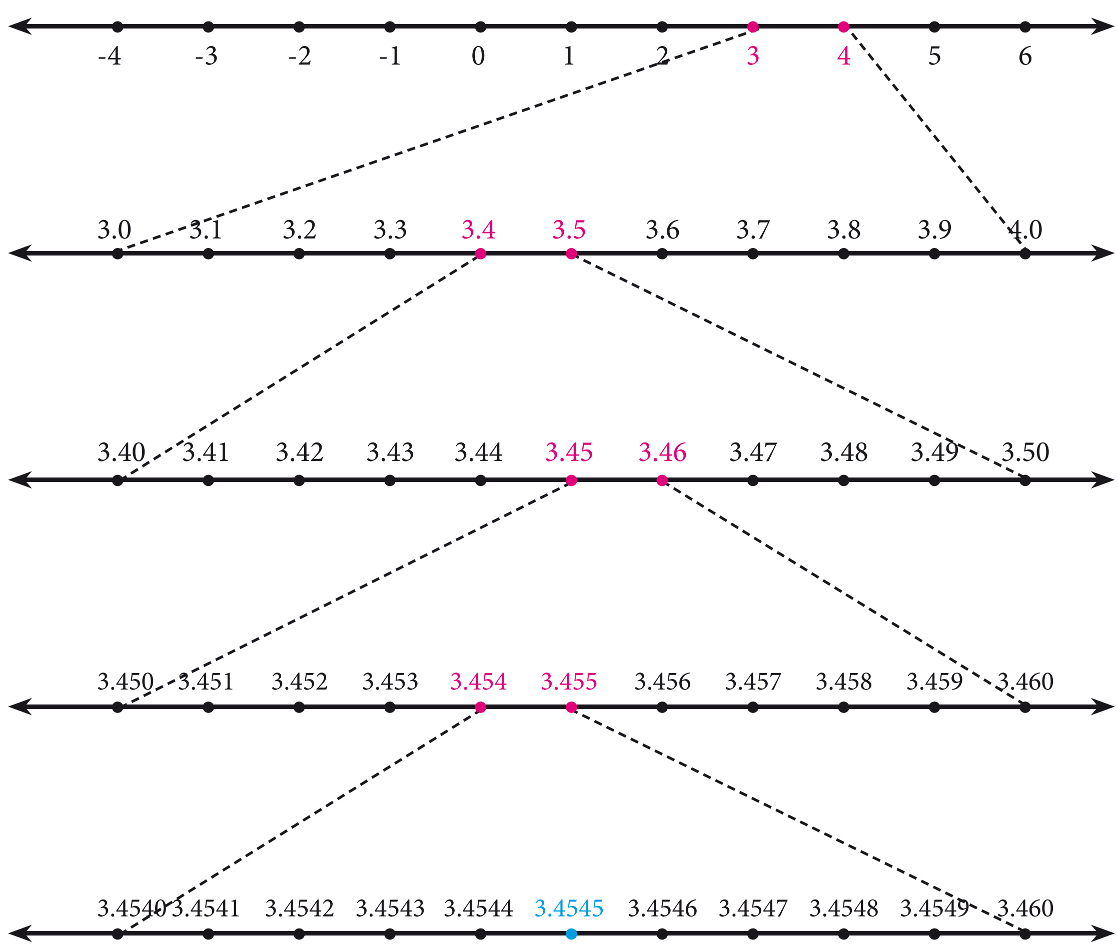
$3.\overline{45}$ ஐ 4 தசம இடத் திருத்தமாக எண் கோட்டில் குறிக்கவும்..

தீர்வு

$3.\overline{45} = 3.45454545.....$

$= 3.4545$ (4 தசம இடத் திருத்தமாக).

இது 3 மற்றும் 4 என்ற எண்களுக்கு இடையில் அமையும்.



படம் 2.11

பயிற்சி 2.4

1. கீழ்க்கண்ட எண்களை எண் கோட்டில் குறிக்கவும்.

(i) 5.348 (ii) $6.\overline{4}$ ஐ 3 தசம இடத் திருத்தமாக (iii) $4.\overline{73}$ ஐ 4 தசம இடத் திருத்தமாக.

பயிற்சி 2.5

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. n என்பது ஓர் இயல் எண் எனில் $\sqrt{n}$ என்பது

   (அ) எப்போதும் ஓர் இயல் எண். (ஆ) எப்போதும் ஒரு விகிதமுறா எண்.

   (இ) எப்போதும் ஒரு விகிதமுறு எண் (ஈ) ஒரு விகிதமுறு அல்லது விகிதமுறா எண்

2. கீழ்க்கண்டவற்றுள் எது உண்மையல்ல?

   (அ) ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் மெய்யெண்.

   (ஆ) ஒவ்வொரு முழுக்களும் விகிதமுறு எண்.

   (இ) ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் விகிதமுறா எண்.

   (ஈ) ஒவ்வோர் இயல் எண்ணும் ஒரு முழு எண்.

3. இரு விகிதமுறா எண்களின் கூடுதல் பற்றிய கீழ்க்கண்ட கூற்றுகளில் எது உண்மை?

   (அ) எப்போதும் ஒரு விகிதமுறா எண்.

   (ஆ) ஒரு விகிதமுறு அல்லது விகிதமுறா எண்ணாக இருக்கலாம்.

   (இ) எப்போதும் ஒரு விகிதமுறு எண்.

   (ஈ) எப்போதும் ஒரு முழுக்களாகும்.

4. கீழ்க்கண்டவற்றுள் எது முடிவுறு தசமத் தீர்வு?

   (அ) $\frac{5}{64}$ (ஆ) $\frac{8}{9}$ (இ) $\frac{14}{15}$ (ஈ) $\frac{1}{12}$

5. கீழ்க்கண்டவற்றுள் எது விகிதமுறா எண்?

   (அ) $\sqrt{25}$ (ஆ) $\sqrt{\frac{9}{4}}$ (இ) $\frac{7}{11}$ (ஈ) π

6. 2 மற்றும் 2.5 என்ற எண்களுக்குமிடையே உள்ள ஒரு விகிதமுறா எண்

   (அ) $\sqrt{11}$ (ஆ) $\sqrt{5}$ (இ) $\sqrt{2.5}$ (ஈ) $\sqrt{8}$

7. $\frac{1}{3}$ ஐ எந்த மிகச் சிறிய விகிதமுறு எண்ணால் பெருக்கினால் அதன் தசம விரிவு ஓர் இலக்கத்தோடு முடிவுறு தசம விரிவாக அமையும்?

   (அ) $\frac{1}{10}$ (ஆ) $\frac{3}{10}$ (இ) 3 (ஈ) 30

8. $0.\overline{3}$ என்ற எண்ணின் $\frac{p}{q}$ வடிவம், p மற்றும் q முழுக்கள் $q \neq 0$

   (அ) $\frac{33}{100}$ (ஆ) $\frac{3}{10}$ (இ) $\frac{1}{3}$ (ஈ) $\frac{3}{100}$

9. $0.\overline{23} + 0.\overline{22}$ இன் மதிப்பு என்ன?

   (அ) $0.\overline{43}$ (ஆ) 0.45 (இ) $0.4\overline{5}$ (ஈ) $0.\overline{45}$

2-Real Numbers_TM.indd 67 18-03-2018 15:49:05

10. $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ எனில் $\frac{5}{7}$ இன் மதிப்பு என்ன?

(அ) $0.\overline{142857}$ (ஆ) $0.\overline{714285}$ (இ) $0.\overline{571428}$ (ஈ) 0.714285

11. கீழ்க்கண்டவற்றுள் பொருந்தாததைக் காண்க.

(அ) $\sqrt{32} \times \sqrt{2}$ (ஆ) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$ (இ) $\sqrt{72} \times \sqrt{8}$ (ஈ) $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{18}}$

12. $0.\overline{34} + 0.3\overline{4} =$

(அ) $0.6\overline{87}$ (ஆ) $0.\overline{68}$ (இ) $0.6\overline{8}$ (ஈ) $0.68\overline{7}$

நினைவு கூர்வதற்கான கருத்துகள்

1. $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ என்ற வடிவில் உள்ள எண்ணின் தசம விரிவானது முடிவு பெறும் எனில், $\frac{p}{q}$ இன் தசம விரிவு முடிவுறு தசமவிரிவு (Terminating decimal expansion) எனப்படும். முடிவுறு தசம விரிவினைக் கொண்ட எண் முடிவுறு தசம எண் எனப்படும்

2. $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ என்ற எண்ணின் தசம விரிவு காணும்போது எந்நிலையிலும் மீதி பூச்சியமாகவில்லை எனில், ஈவில் மீண்டும் மீண்டும் வரும் இலக்கங்களின் தொகுதி கிடைக்கும். இந்நிலையில் $\frac{p}{q}$ இன் தசம விரிவு முடிவுறாச் சுழல் தசம விரிவு (Non-terminating and recurring decimal expansion) எனப்படும். முடிவுறாச் சுழல் தசம விரிவினைக் கொண்ட எண் முடிவுறாச் சுழல் தசம எண் எனப்படும்..

3. $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ வடிவில் உள்ள விகிதமுறு எண்ணை $\frac{p}{2^m \times 5^n}$ $(p \in \mathbb{Z}$ மற்றும் $m, n \in \mathbb{W})$ என்ற வடிவில் எழுத முடியுமானால், அந்த விகிதமுறு எண் முடிவுறு தசம விரிவினைப் பெற்றிருக்கும். அவ்வாறில்லையெனில், அந்த விகிதமுறு எண் முடிவுறாச் சுழல் தசம விரிவினைப் பெற்றிருக்கும்

4. ஒரு விகிதமுறு எண்ணினை முடிவுறு தசம விரிவாகவோ அல்லது முடிவுறாச் சுழல் தசம விரிவாகவோ குறிப்பிடலாம்.

5. முடிவுறாச் சுழல் தன்மையற்ற தசம விரிவினைக் கொண்ட எண் ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும். எனவே, ஒரு விகிதமுறா எண்ணை $\frac{p}{q}$, $(p, q$ முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0)$ என்ற வடிவில் எழுதமுடியாது.

6. மெய்யெண்களின் கணமானது விகிதமுறு மற்றும் விகிதமுறா எண்களின் சேர்ப்புக் கணமாகும்.

7. ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகவோ அல்லது விகிதமுறா எண்ணாகவோ இருக்கும்.

8. ஒரு மெய்யெண் விகிதமுறு எண் அல்ல எனில், அது ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும்.

9. ஒரு விகிதமுறு எண் மற்றும் ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகியவற்றின் கூட்டல் அல்லது கழித்தல் எப்பொழுதும் ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும்.

10. ஒரு பூச்சியமற்ற விகிதமுறு எண் மற்றும் ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகியவற்றின் பெருக்கல் அல்லது வகுத்தல் ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும்.

11. இரண்டு விகிதமுறா எண்களின் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் எப்பொழுதும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும் எனக் கூறமுடியாது. இது விகிதமுறு எண்ணாகவோ அல்லது விகிதமுறா எண்ணாகவோ இருக்கலாம்.

விடைகள்

பயிற்சி 2.1

1. D 2. $-\frac{6}{11}, -\frac{5}{11}, -\frac{4}{11}, \ldots \frac{1}{11}$

3. (i) $\frac{9}{40}, \frac{19}{80}, \frac{39}{160}, \frac{79}{320}, \frac{159}{640}$;

இதற்குப் பல விடைகள் உண்டு, அதில் ஒரு விடை தரப்பட்டுள்ளது.

(ii) 0.101, 0.102, ... 0.109

இதற்குப் பல விடைகள் உண்டு, அதில் ஒரு விடை தரப்பட்டுள்ளது.

(iii) $-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}, -\frac{17}{16}, -\frac{33}{32}$

இதற்குப் பல விடைகள் உண்டு, அதில் ஒரு விடை தரப்பட்டுள்ளது.

பயிற்சி 2.2

1. (i) 0.2857142..., முடிவுறாச் சுழல் தன்மை (ii) 0.35, முடிவுறும்

(iii) $-5.\overline{27}$, முடிவுறாச் சுழல் தன்மை (iv) $7.\overline{3}$, முடிவுறாச் சுழல் தன்மை

(v) –0.28125, முடிவுறும் (vi) 1.635, முடிவுறும் 2. 6 3. $2.\overline{15}$

4. (i) $\frac{24}{99}$ (ii) $\frac{2325}{999}$ (iii) $\frac{43}{50}$ (iv) $-\frac{1283}{250}$ (v) $\frac{143}{45}$

(vi) $\frac{5681}{330}$ (vii) $\frac{1}{9999}$ (viii) $-\frac{190924}{9000}$

5. (i) முடிவுறும் (ii) முடிவுறும் (iii) முடிவுறும்

(iv) முடிவுறா (v) முடிவுறும் (vi) முடிவுறா

பயிற்சி 2.3

2. (i) 0.301202200222..., 0.301303300333... (ii) 0.8616611666111 ..., 0.8717711777111 ...

(iii) 1.515511555..., 1.616611666... (iv) 0.12201100111..., 0.12301100111...

3. 2.2362, 2.2363

பயிற்சி 2.5

1. (ஈ) 2. (இ) 3. (ஆ) 4. (அ) 5. (ஈ) 6. (ஆ) 7. (ஆ) 8. (இ) 9. (ஈ) 10. (ஆ)

11. (ஈ) 12. (அ)

3 இயற்கணிதம்

CRLVD2

இயற்கணிதமே எண்செயலிகளின் அடிப்படை.

–ஜான் ரே

எல்லாப் பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளுக்கும் தீர்வு காண இயலுமா? $x^2 + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு வெளிப்படையாகப் பார்க்கும்போது தீர்வு இல்லை எனத் தோன்றலாம். எனினும், மெய்யெண்களைத் தாண்டிக் கலப்பெண்கள் என அழைக்கப்படும் எண்களையும் சேர்த்துப் பார்க்கும்போது, உண்மையில் எல்லாப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கும் தீர்வு காண இயலும். இது 1799இல் ஜெர்மானியக் கணிதவியல் வல்லுநர் கார்ல் பிரைட்ரிச் காஸ் என்பவரால் மெய்ப்பிக்கப்பட்ட மிக முக்கியமான இந்தத் தேற்றம் அடிப்படை இயற்கணிதத் தேற்றம் என அழைக்கப்படுகிறது.

ஜொஹன் கார்ல் பிரைட்ரிச் காஸ்
(1977 – 1855)

கற்றல் விளைவுகள்

- ஒரு மாறியில் அமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவையைப் புரிந்து கொள்ளுதல்.
- உறுப்புகளின் படி மற்றும் எண்ணிக்கையின் அடிப்படையில் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை வகைப்படுத்துதலைப் புரிந்து கொள்ளுதல்.
- கொடுக்கப்பட்ட மாறியின் மதிப்புகளுக்குப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மதிப்புகளைக் காணல்.
- பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூச்சியங்களைப் புரிந்து கொள்ளுதல்.
- பல்லுறுப்புக் கோவைகளில் அடிப்படைச் செயல்பாடுகளைச் செய்யும் திறனடைதல்.
- மீதித் தேற்றத்தைப் புரிந்து கொள்ளுதல்.

3.1 அறிமுகம்

பல்லுறுப்புக் கோவைகளை ஏன் கற்க வேண்டும்?

இயற்கணிதத்தில் உள்ள பல்லுறுப்புக் கோவைகளைப் பற்றிய அனைத்தையும் இந்த இயல் உள்ளடக்கியது. இதில் உள்ளவை நீங்கள் முன்னரே சந்தித்த, ஆனால் முழுமையாக

அறிமுகப்படுத்தப்படாத நண்பர்கள்தாம். இதற்குப் பிறகு வரும் உங்களுடைய அனைத்துக் கணிதப் பயணத்திலும், இவர்கள் உங்கள் நண்பர்களாகப் பயணிக்கத்தக்க வகையில் இவர்களை நாங்கள், உங்களுக்கு முழுமையாக அறிமுகப்படுத்த உள்ளோம்.

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$$

இது ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை. பார்ப்பதற்குச் சிறப்பு வாய்ந்ததாகத் தோன்றவில்லை. இல்லையா? நாம் முன்பே நிறைய இயற்கணிதக் கோவைகளைப் பார்த்திருக்கிறோம். எனவே, ஏன் இவற்றைப் பற்றிக் கவலைப்பட வேண்டும்? கணிதத்தில், பல்லுறுப்புக் கோவைகள் ஏன் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவை என்பதற்குப் பல காரணங்கள் உள்ளன.

இப்போது, அவற்றின் பயன்பாட்டை அறிய ஓர் எடுத்துக்காட்டைக் காண்போம். நாம் எண் கணிதத்தில் நிறையக் கற்று, அதன்பின் இயற்கணிதத்தில் தெரியாத எண்களைக் கொண்ட மாறிகள் பற்றிச் சிந்தித்தோம் என்பதை நினைவில் கொள்ளுங்கள்.

உண்மையில், நாம் இப்போது எண்களிடம் திரும்பச் சென்று, இயற்கணித மொழியில் அவற்றை எழுத முயல்வோம்.

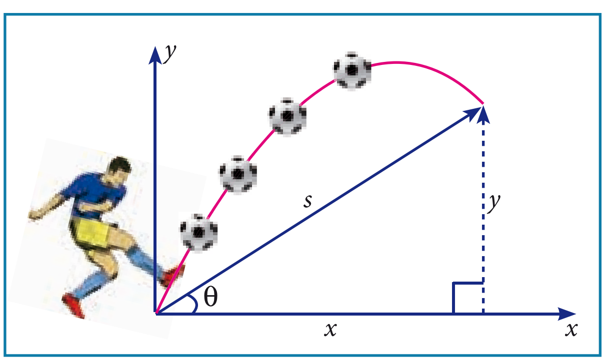
5418 என்ற ஓர் எண்ணைக் கவனியுங்கள். இது உண்மையில் “5” ஆயிரம் “4” நூறு மற்றும் பதினெட்டு.

இதைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்

$$5 \times 1000 + 4 \times 100 + 1 \times 10 + 8$$

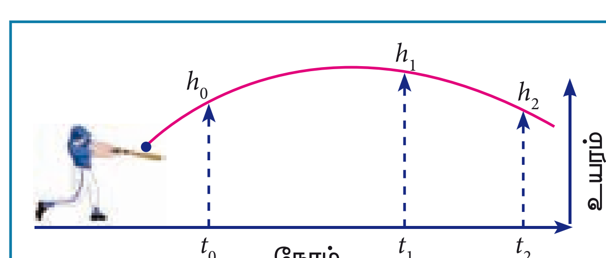
இதனை மேலும் கீழ்க்கண்டவாறும் எழுதலாம்:

$$5 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 8$$



படம் 3.1

இப்போது இது எதைப் பற்றியது என்பது தெளிவாக உள்ளது. $5x^3 + 4x^2 + x + 8$ என்ற வடிவத்தில் உள்ள இது, ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். இந்த வடிவத்தில் எழுதுவது எவ்வாறு பயனளிக்கும்? நாம் எப்போதும் எண்களைத் தசமத்தில் எழுதுகிறோம்தானே. ஆகையால் எப்போதும் $x = 10$. பின் இதில் என்ன வேடிக்கை? வகுத்தல் விதிகள் நினைவுள்ளதா? ஓர் எண்ணின் இலக்கங்களின் கூடுதல் 3 ஆல் வகுபட்டால் மட்டுமே, அந்த எண் 3 ஆல் வகுபடும் என்பதை நினைவு கொள்ளுங்கள். x என்பதை 3 ஆல் வகுத்த பிறகு மீதி 1 வருகிறதெனில், x^2, x^3, போன்றவற்றிற்கும் இது பொருந்தும் என்பதைக் கவனியுங்கள். இவை எல்லாம் 3 ஆல் வகுபட்ட பிறகு, 1 ஐ மீதியாகத் தருகின்றன. எனவே ஒவ்வோர் இலக்கத்தையும் 1 ஆல் பெருக்கி அவை அனைத்தையும் கூட்டினால், மொத்த இலக்கங்களின் கூடுதலை நீங்கள் பெறுகிறீர்கள். அது 3 ஆல் வகுபடும் எனில், மொத்த எண்ணிற்கும் அதேதான். 9 ஆல் வகுபடும் விதி, 2 அல்லது 5 ஆல் வகுபடும் விதி போன்றவற்றையும் இதேபோல எளிதாக



படம் 3.2

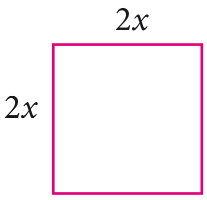
மெய்பிக்க இயலும். எமது நோக்கம் வகுத்தல் விதிகளை நிரூபிப்பது அல்ல. ஆனால் எண்களைப் பல்லுறுப்புக் கோவையாகக் குறிப்பிடும்போது அவை பல புதிய எண் அமைப்புகளை நமக்கு அளிக்கின்றன என்பதை வெளிப்படுத்துவதே ஆகும். சொல்லப் போனால் எண்கள் மட்டுமல்லாமல் பல வகை பொருட்களைப் பல்லுறுப்புக் கோவையாகக் குறிப்பிடும்போது, அவற்றிலிருந்து நாம் பலவற்றைக் கற்றுக் கொள்ள இயலும்.

இயற்கணிதத்தில் x^2, $5x^2-3$, $2x+7$ போன்றவற்றை x இன் சார்புகளாக நாம் உணரலாம். x மாறும்போது, சார்புகள் எவ்வாறு மாறுகின்றன என்பதைக் காண்பதற்கு நாம் ஒரு வரைபடம் வரைந்தால், அது சார்புகளின் செயல்பாட்டைப் புரிந்து கொள்ள மிகவும் உதவியாக இருக்கும். இப்போது அறிவியல், பொறியியல், வணிக ஆய்வுகள், பொருளாதாரம் மட்டுமல்லாமல் கணிதத்திலும் கூட நாம் சந்திக்கும் நல்ல பல சார்புகள் முழுவதுமாகப் பல்லுறுப்புக் கோவையைப் பிரதிபலிக்காவிடினும், அவை தோராயமாகப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளாக அமைகின்றன. உண்மையில், பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் தோராயமான சார்புகள் உயர் கணிதத்தின் அடிப்படைக் கருப்பொருளாக பயன்படுகின்றன.மேலும் இதே கருத்தின் அடிப்படையில் செயல்பட்டு பலர் தங்கள் வாழ்வியல் முறையை எளிதாக்குகின்றனர்.

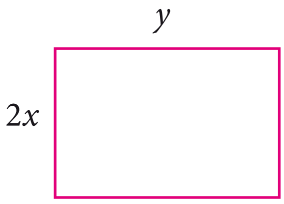
உயிரியல், கணினி அறிவியல், தொடர்பு அமைப்புகள் போன்றவற்றில் பல்லுறுப்புக் கோவைகள் மிகப் பரவலாகப் பயன்படுத்தப் படுகின்றன. இப்பட்டியல் தொடர்ந்து கொண்டே செல்கிறது. கொடுக்கப்பட்ட படங்கள் (படம் 3.1, 3.2, மற்றும் 3.3) ஒரு இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையைக் குறிக்கலாம். நாம், பல்லுறுப்புக் கோவைகள் என்ன என்பதை மட்டும் கற்றுக்கொள்ளப் போவதில்லை. அதற்கு மேலும் எண்களைப் பயன்படுத்தி எவ்வாறு கூட்டல், பெருக்கல், வகுத்தல் போன்றவற்றை கற்றுள்ளோமோ அதே போல் பல்லுறுப்புக் கோவைகளிலும் கற்றுக் கொள்ள இருக்கிறோம்.

படம் 3.3

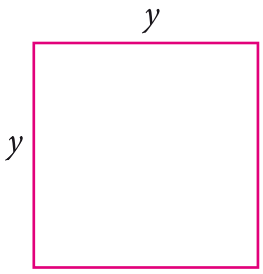
கொடுக்கப்பட்ட படங்களைக் கவனியுங்கள்



படம் 3.4



படம் 3.5



படம் 3.6

மேலே உள்ள 3 படங்களின் மொத்தப் பரப்பளவு $4x^2 + 2xy + y^2$, இந்தக் கோவையை நாம் இயற்கணிதக் கோவை என்று அழைக்கிறோம். இங்கே x மற்றும் y இக்கு வெவ்வேறான மதிப்புகள் அளிக்கும்போது வெவ்வேறு பரப்பளவு மதிப்புகளைப் பெறுகிறோம். x மற்றும் y பக்கங்களின் மதிப்புகள் மாறக்கூடியதாக உள்ளதால், அவை மாறிகள் என அழைக்கப்படுகின்றன. எனவே மாறி என்பது வெவ்வேறு எண் மதிப்புகளைக் கொண்ட குறியீடு ஆகும்.

வழக்கமாக மாறிகள் x, y, z போன்ற எழுத்துகளால் குறிப்பிடப்படுகின்றன. மேற்கண்ட இயற்கணிதக் கோவையில் உள்ள 4, 2 என்பவை மாறிலிகள் என அழைக்கப்படுகின்றன. எனவே மாறிலி என்பது நிலையான எண் மதிப்பு கொண்ட குறியீடு ஆகும்.

3.1.1 இயற்கணிதக் கோவை (Algebraic Expression)

இயற்கணிதக் கோவை என்பது நான்கு அடிப்படைக் கணிதக் குறியீடுகளின் உதவியுடன் மாறி மற்றும் மாறிலிகளால் இணைக்கப்பட்டு அமையும் கோவை ஆகும்.

இயற்கணிதக் கோவைக்கு எடுத்துக்காட்டுகள்

$$x^3 - 4x^2 + 8x - 1,\ 4xy^2 + 3x^2y - \frac{5}{4}xy + 9,\ 5x^2 - 7x + 6$$

3.1.2 மாறிலிகள் (Constants)

எந்த மெய்யெண்ணும் மாறிலியே. மாறிலிகள் மற்றும் எண்கணிதச் செயல்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி எண் கோவைகளை அமைக்கலாம்.

மாறிலிகளுக்கு எடுத்துக்காட்டுகள் $1, 5, -32, \frac{3}{7}, -\sqrt{2}, 8.432, 1000000$ இன்னும் பிற.

3.1.3 மாறிகள் (Variables)

கோவைகளில் மாறிகள் மற்றும் மாறிலிகளை இணைத்துப் பயன்படுத்தும்போது, ஒரு வரம்பிற்கு உட்பட்ட எண்களைக் குறிக்கும் வழிகளில் ஒவ்வொரு மாறிக்கும் ஒரு மதிப்பைப் பெறுகிறோம். நாம் அறிந்த $2\pi r$ ஆனது ஆரம் r உடைய வட்டத்தின் சுற்றளவைக் குறிக்கின்றது. நாம் r இன் மதிப்பை 1 செமீ, 4 செமீ, 9 செமீ … என மாற்றினால் $2\pi, 8\pi, 18\pi$ ... என்ற சுற்றளவுகள் கொண்ட பெரிய வட்டங்கள் நமக்கு கிடைக்கும்.

இந்த $2\pi r$ கோவையானது அனைத்து வட்டங்களின் சுற்றளவுகளுக்குமான சிறிய மற்றும் துல்லியமான விளக்கமாகும். நாம் எண்கணிதச் செயல்கள் மற்றும் இயற்கணிதக் கோவைகளை இணைத்துப் பயன்படுத்தும்போது, சார்புகள் மற்றும் எண்கள் என்ற உயர்தர மொழியைப் பெறுகிறோம். மாறிகள் என அழைக்கப்படும் தெரியாத மெய்யெண்களைக் குறிக்க x, y, a, b மற்றும் பல எழுத்துக்களைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

3.1.4 கெழுக்கள் (Coefficients)

ஓர் உறுப்பின் ஏதேனும் ஒரு பகுதி மீதமுள்ள ஒரு பகுதியுடன் பெருக்கப்பட்டிருப்பின் அப்பகுதியானது மீதமுள்ள பகுதியின் கெழு எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$x^2 + 5x - 24$ என்பது மூன்று உறுப்புகளைக் கொண்ட இயற்கணிதக் கோவையாகும். இங்கு x என்பது ஒரு மாறி. x^2 இன் கெழு 1 மற்றும் x இன் கெழு 5 ஆகும். மேலும் -24 மாறிலி ஆகும் (24 அல்ல).

செயல்பாடு 1

கீழ்க்காணும் கோவைகளை மாறி, கெழு மற்றும் மாறிலிகளாகப் பிரித்து எழுதுக.

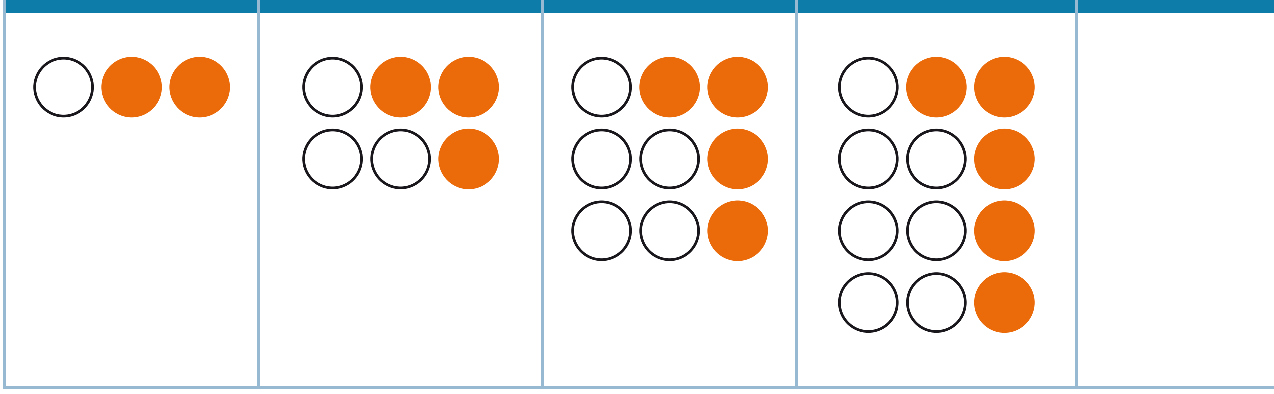
கோவை	$x + 7$	$3y - 2$	$5x^2$	$2xy + 11$	$-\frac{1}{2}p + 7$	$-8 + 3a$

மாறி	x			xy		
கெழு	1				$-\frac{1}{2}$	
மாறிலி	7					-8

3.2 பல்லுறுப்புக் கோவைகள் (Polynomials)

கீழ்க்கண்ட புள்ளி வரைபடங்கள் தொடர் அமைப்புகளைக் காட்டுகின்றன.

1 ஆவது	2 ஆவது	3 ஆவது	4 ஆவது	5 ஆவது



(அ) கொடுக்கப்பட்டுள்ள அமைப்புத் தொடரின் ஐந்தாவது அமைப்பை வரைக.

(ஆ) தொடரின் 10 ஆவது அமைப்பில் இருக்கும் புள்ளிகள் எத்தனை?
வெண்மை: _______________ வண்ணம் : _______________

(இ) n ஆவது தொடர் அமைப்பில் உள்ள வண்ணப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையை வழங்கும் கோவை _______________

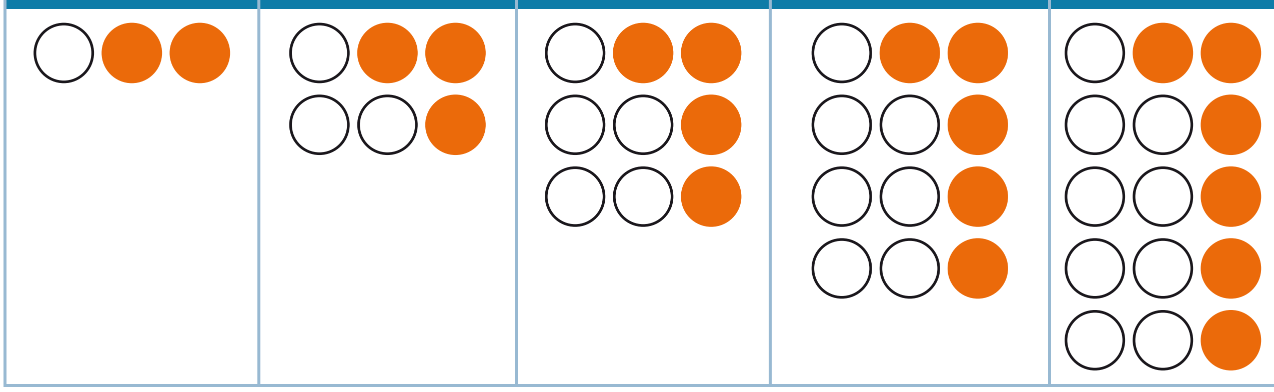
(ஈ) வெண்மைப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை மற்றும் மொத்தப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கத் தேவையான இயற்கணிதக் கோவைகளை எழுதுக.

வெண்மைப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை		வண்ணப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை		மொத்தப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை
_	+	_	=	_

தீர்வு:

(அ) அமைப்புத் தொடரின் ஐந்தாவது அமைப்பைக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள இடத்தில் வரைக.

1 ஆவது	2 ஆவது	3 ஆவது	4 ஆவது	5 ஆவது



(ஆ) தொடரின் 10–ஆவது அமைப்பில் எத்தனை புள்ளிகள் இருக்கும் ?

வெண்மை : <u>19</u> வண்ணம் : <u>11</u>

(இ) n ஆவது தொடர் அமைப்பில் வண்ணப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையை $n + 1$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையாகக் குறிக்கலாம்.

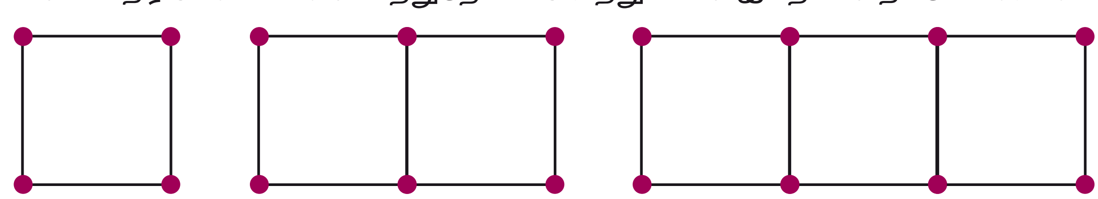
(ஈ) வெண்மைப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை மற்றும் மொத்தப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கத் தேவையான இயற்கணிதக் கோவைகளை எழுதுக.

வெண்மைப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை	+	வண்ணப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை	=	மொத்தப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை
$2n - 1$		$n + 1$		$3n$

செயல்பாடு 2

கீழ்க்கண்ட மாதிரி அமைப்பினை உற்றுநோக்கி அவற்றுக்கான இயற்கணிதக் கோவையை எழுதுக.

(i)

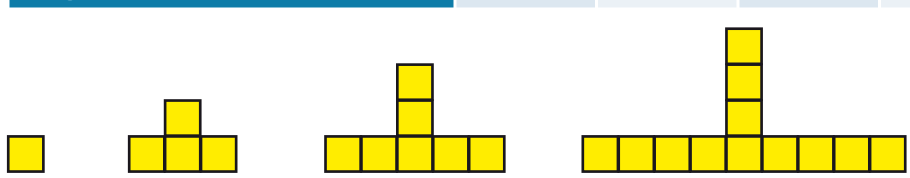


1 2 3

படம் 3.7

அமைப்பு எண்	1	2	3	4	5
தீக்குச்சிகளின் எண்ணிக்கை	4	7	10	13	16

(ii)



1 2 3 4

படம் 3.8

அமைப்பு எண்	1	2	3	4	5
சதுரப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை	1	4	7	10	13

3.2.1 ஒரு மாறியில் அமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவை (Polynomial in One Variable)

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

என்ற வடிவில் அமைந்த ஓர் இயற்கணிதக் கோவை பல்லுறுப்புக் கோவை எனப்படும். இங்கு x இன் படி 'n' மேலும் $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ ஆகியவை மாறிலிகள் $(a_n \neq 0)$ மற்றும் n ஒரு முழு எண்.

பல்லுறுப்புக் கோவைகள் பொதுவாக $f(x), g(x), p(t), q(z)$ மற்றும் $r(x)$ எனக் குறிக்கப்படும்.

குறிப்பு

இயற்கணிதக் கோவையின் மாறி எந்த மெய்யெண் மதிப்பையும் பெறலாம். எனினும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் அடுக்கு எப்பொழுதும் குறையல்லாத ஒருங்கிணைந்த அடுக்காகும். (non negative integral) அதாவது எப்பொழுதும் முழு எண்களை மட்டுமே கொண்டிருக்கும். எல்லா a இன் மதிப்பிற்கும் $a^0 = 1$ என்பதை நினைவில் கொள்க.

எடுத்துக்காட்டாக

வ. எண்.	கொடுக்கப்பட்ட கோவை	பல்லுறுப்புக் கோவை / பல்லுறுப்புக் கோவை அல்ல.	பல்லுறுப்புக் கோவை அல்ல எனில் காரணம்
1	$4y^3 + 2y^2 + 3y + 6$	பல்லுறுப்புக் கோவை	அடுக்குகள் அனைத்தும் மிகை முழுக்கள்
2	$4x^{-4} + 5x^4$	பல்லுறுப்புக் கோவை அல்ல.	x இன் ஓர் அடுக்கு குறை எண் (-4)
3	$m^2 + \frac{4}{5}m + 8$	பல்லுறுப்புக் கோவை	அடுக்குகள் அனைத்தும் மிகை முழுக்கள்
4	$\sqrt{5}\,y^2$	பல்லுறுப்புக் கோவை	அடுக்குகள் அனைத்தும் மிகை முழுக்கள்
5	$2r^2 + 3r - 1 + \frac{1}{r}$	பல்லுறுப்புக் கோவை அல்ல.	r இன் ஓர் அடுக்கு ஒரு குறை எண் $\left(\frac{1}{r} = r^{-1}\right)$
6	$8 + \sqrt{q}$	பல்லுறுப்புக் கோவை அல்ல.	q இன் அடுக்கு பின்ன எண் $(\sqrt{q} = q^{\frac{1}{2}})$
7	$\sqrt{8}\,p^2 + 5p - 7$	பல்லுறுப்புக் கோவை	அடுக்குகள் அனைத்தும் மிகை முழுக்கள்
8	$5n^{\frac{4}{5}} + 6n - 1$	பல்லுறுப்புக் கோவை அல்ல.	n இன் ஓர் அடுக்குப் பின்ன எண் $\frac{4}{5}$

3.2.2 பல்லுறுப்புக் கோவையின் திட்ட வடிவம் (Standard Form of a Polynomial)

$p(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை அதன் x இன் அடுக்கைப் பொறுத்து இறங்கு வரிசையிலோ அல்லது ஏறு வரிசையிலோ எழுத இயலும். இது பல்லுறுப்புக் கோவையின் **திட்ட வடிவம்** எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, (i) $8x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 9x + 6$ (ii) $5 - 3y + 6y^2 + 4y^3 - y^4$

செயல்பாடு 3

கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைத் திட்ட வடிவில் எழுதுக.

வ. எண்.	பல்லுறுப்புக் கோவை	திட்ட வடிவம்
1	$5m^4 - 3m + 7m^2 + 8$	
2	$\frac{2}{3}y + 8y^3 - 12 + \sqrt{5}\,y^2$	
3	$12p^2 - 8p^5 - 10p^4 - 7$	

3.2.3 பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி (Degree of the Polynomial)

ஒரு மாறியில் அமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவையில், மாறியின் மிக உயர்ந்த அடுக்கே அந்தப் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி எனப்படும்.

ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளைக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை எனில் அதன் ஒவ்வோர் உறுப்பில் உள்ள மாறிகளின் அடுக்குகளின் கூடுதல் கண்டறியப்பட்டு, அதில் மிக உயர்ந்த அடுக்கே அந்தப் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படியாகும்.

பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி என்பது மிகக் குறிப்பிடத்தக்க அடுக்காகக் கருதப்படுகிறது. x^2+5x எனும்போது x இன் மிக உயரிய மதிப்புகளுக்கு, x^2 இன் மதிப்பானது $5x$ ஐ விட மிக அதிகமாக இருக்கும். எனவே, x இன் மிக உயரிய மதிப்புகளுக்கு $x^2 + 5x$ கிட்டத்தட்ட x^2 ஐ ஒத்திருப்பதாக நாம் சிந்திக்கலாம். ஆகையினால், அடுக்கு உயர்ந்ததாக இருப்பின் அதன் ஆதிக்கமும் அதிகமாக இருக்கும். அதனால்தான், நாம் மிக உயர்ந்த அடுக்கினைப் பல்லுறுப்புக் கோவையின் முக்கியத் தகவலாகப் பயன்படுத்துவதோடு, அதற்கு ஒரு பெயரையும் வைத்துள்ளோம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.1

கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவையில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பின் படியையும் காண்க. மேலும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படியைக் காண்க.

$6ab^8 + 5a^2b^3c^2 - 7ab + 4b^2c + 2$

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவை $6ab^8 + 5a^2b^3c^2 - 7ab + 4b^2c + 2$

ஒவ்வோர் உறுப்பின் படியும் பின்வருமாறு

$6ab^8$ இன் படி $(1+8) = 9$

$5a^2b^3c^2$ இன் படி $(2+3+2) = 7$

$7ab$ இன் படி (1+1) = 2

$4b^2c$ இன் படி (2+1) = 3

2 இன் படி. 0 (மாறிலி உறுப்பின் படி எப்பொழுதும் பூச்சியமாகக் கருதப்படும்)

CRVREP

பல்லுறுப்புக் கோவை $6ab^8 + 5a^2b^3c^2 - 7ab + 4b^2c + 2$ யின் படி.

= மிக உயர்ந்த படியைக் கொண்ட உறுப்பின் படியாகும்

= 9

3.2.4 ஒரு மிகச்சிறந்த பல்லுறுப்புக் கோவை (A Very Special Polynomial)

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் கெழுவானது எந்த மெய்யெண்ணாகவும் இருக்கலாம் என நாம் கூறியிருந்தோம். ஒரு வேளை கெழு பூச்சியமாக இருப்பின் என்ன நிகழும்? அந்த உறுப்பு பூச்சியமாகிவிடும். எனவே நாம் அதனை எழுதத் தேவை இல்லை. சரி, மற்ற அனைத்துக் கெழுக்களும் பூச்சியம் எனில் என்னவாகும்? அவ்வாறு இருக்கும் என்பதை ஏற்றுக்கொள்வோம். மேலும் அதற்கு ஒரு பெயரையும் அளிப்போம்.

அது அனைத்துக் கெழுக்களையும் பூச்சியமாகக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

$$g(t) = 0t^4 + 0t^2 - 0t\ , \quad h(p) = 0p^2 - 0p + 0$$

மேற்காண் எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்து பூச்சியப் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படியினைப் பற்றி நாம் பேசவில்லை என்பதை உணரலாம். மேற்காண் இரண்டும் வெவ்வேறு படிகளைப் பெற்றிருப்பினும் இரண்டுமே பூச்சியப் பல்லுறுப்புக் கோவைகள்தாம்.

பூச்சியப் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி வரையறுக்கப்படவில்லை.

3.2.5 பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வகைகள் (Types of Polynomials)

(i) உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அடிப்படையில் பல்லுறுப்புக் கோவை	
ஓருறுப்புக் கோவை	ஒரே ஓர் உறுப்பைக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை ஓருறுப்புக் கோவை எனப்படும் எடுத்துக்காட்டு : 5, 6m, 12ab
ஈருறுப்புக் கோவை	இரண்டு உறுப்புகளை மட்டுமே கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை ஈருறுப்புக் கோவை எனப்படும். எடுத்துக்காட்டு : $5x + 3,\ 4a - 2,\ 10p + 1$
மூவுறுப்புக் கோவை	மூன்று உறுப்புகளை மட்டுமே கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை மூவுறுப்புக் கோவை எனப்படும். எடுத்துக்காட்டு : $4x^2 + 8x - 12,\ 3a^2 + 4a + 10$

(ii) "படி" இன் அடிப்படையில் பல்லுறுப்புக் கோவை	
மாறிலிப் பல்லுறுப்புக் கோவை	பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி பூச்சியம் எனில் அது மாறிலிப் பல்லுறுப்புக் கோவை எனப்படும். எடுத்துக்காட்டு : $5, -7, \frac{2}{3}, \sqrt{5}$
ஒருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை	பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி ஒன்று எனில், அது ஒருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை எனப்படும். எடுத்துக்காட்டு : $410x - 7$
இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை	பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி இரண்டு எனில், அது இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை எனப்படும். எடுத்துக்காட்டு : $2\sqrt{5}\,x^2 + 8x - 4$
முப்படிப் பல்லுறுப்புக்கோவை	பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி மூன்று எனில், அது முப்படிப் பல்லுறுப்புக்கோவை எனப்படும். எடுத்துக்காட்டு : $12y^3$, $6m^3 - 7m + 4$

எடுத்துக்காட்டு 3.2

கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அடிப்படையில் வகைப்படுத்துக.

வ. எண்	பல்லுறுப்புக் கோவை	உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அடிப்படையில் வகைப்பாடு
(i)	$5t^3 + 6t + 8t^2$	3 உறுப்புகள்	மூவுறுப்புக் கோவை
(ii)	$y-7$	2 உறுப்புகள்	ஈருறுப்புக் கோவை
(iii)	$\frac{2}{3}r^4$	1 உறுப்பு	ஓருறுப்புக் கோவை
(iv)	$6y^5 + 3y - 7$	3 உறுப்புகள்	மூவுறுப்புக் கோவை
(v)	$8m^2 + 7m^2$	ஒத்த உறுப்புகள். எனவே $15m^2$ ஓருறுப்பு	ஓருறுப்புக் கோவை

எடுத்துக்காட்டு 3.3

கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை அவற்றின் படிகளின் அடிப்படையில் வகைப்படுத்துக.

வ. எண்	பல்லுறுப்புக் கோவை	படி	வகை
(i)	$\sqrt[3]{4}\,z + 7$	படி ஒன்று	ஒரு படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை

(ii)	$z^3 - z^2 + 3$	படி மூன்று	முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை
(iii)	$\sqrt{7}$	படி பூச்சியம்	மாறிலிப் பல்லுறுப்புக் கோவை
(iv)	$y^2 - \sqrt{8}$	படி இரண்டு	இரு படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை

செயல்பாடு 4

கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை வகைப்படுத்துக.

வ. எண்	பல்லுறுப்புக் கோவை	உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அடிப்படையில் வகைப்பாடு	படிகளின் அடிப்படையில் வகைப்பாடு
(i)	$\frac{x^2}{\sqrt{2}} + x + 1$		
(ii)	$\sqrt{5}\,x^2 - \frac{6}{5}x$		
(iii)	1		
(iv)	$m^4 - \frac{6}{7}m^2 - 6m + 2.7$		
(v)	$\frac{t^3}{\sqrt{6}} + \frac{t^4}{4} - t$		

3.3 பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் எண்கணிதம் (Arithmetic of Polynomials)

பல்லுறுப்புக் கோவைகள் பற்றிய அதிகத் தகவல்களை அறிந்ததோடு மட்டுமல்லாமல், அவை பல வழிகளில் வகைப்படுத்தப்படுகின்றன என்பதையும் நாம் கண்டோம். இப்போது நாம் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை வைத்து என்ன செய்யப் போகிறோம்? x இல் அமைந்த ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையைக் கருதுக.

நாம் x இன் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பில் அந்தப் பல்லுறுப்புக் கோவையை மதிப்பீடு செய்யலாம். x இன் மதிப்பு மாறும்போது பல்லுறுப்புக் கோவையால் உருவான சார்பு எவ்வாறு மாறுகிறது என நாம் கேட்கலாம். பல்லுறுப்புக் கோவை சமன்பாட்டை எழுதி $P(x)=0$ எனக் கொண்டு நாம் x இன் தீர்வு காணலாம். இந்த இயலை நாம் கடந்து செல்கையில் இவை போன்ற பலவற்றைச் செய்ய இருக்கிறோம். அவற்றை, நாம் எண்களைப் போன்றே செயல்படுத்த இருக்கிறோம்! இந்த இயலின் தொடக்கத்தில், ஒவ்வொரு மிகை முழு எண்ணும் பல்லுறுப்புக் கோவையே என்பதைப் பற்றிக் கூறும்போது நாம் இதற்கான ஒரு தடத்தினை அளித்துள்ளோம்.

எண் கணிதத்தைத் தொடர்ந்து, பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் கூட்டுதல், ஒன்றிலிருந்து மற்றொன்றைக் கழித்தல், பல்லுறுப்புக் கோவைகளைப் பெருக்குதல், ஒன்றினை மற்றொன்றால் வகுத்தல் ஆகியவற்றை முயற்சி செய்ய உள்ளோம். பல்லுறுப்புக் கோவைகள் தொடர்பான ஆர்வமளிக்கும் பல பண்புகளைக் கற்கும்போது, எண்களுக்கும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கும் இடையே உள்ள ஒப்புமை ஆழமானதாக மாறிவிடும். தற்போது, பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் செயல்பாடுகளை எளிமையாக முயற்சி செய்து வரையறுப்பது வேடிக்கையானதாகவே இருக்கும்.

3.3.1 பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கூட்டல் (Addition of Polynomials)

இரண்டு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கூடுதலும் மற்றொரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

குறிப்பு

ஒத்த உறுப்புகளை மட்டுமே கூட்ட இயலும். $3x^2+5x^2$ என்பது $8x^2$ ஆகும். ஆனால் மாறுபட்ட உறுப்புகள் $3x^2$ மற்றும் $5x^3$ ஐக் கூட்டினால் $3x^2+5x^3$ என்ற ஒரு புதிய பல்லுறுப்புக் கோவை கிடைக்கும்

எடுத்துக்காட்டு 3.4

$p(x)=4x^2-3x+2x^3+5$ மற்றும் $q(x)=x^2+2x+4$ என்க, $p(x)+q(x)$ காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவை	திட்ட வடிவம்
$p(x)=4x^2-3x+2x^3+5$	$2x^3+4x^2-3x+5$
$q(x)=x^2+2x+4$	x^2+2x+4
$p(x)+q(x)=2x^3+5x^2-x+9$	

$p(x)+q(x)$ என்பதும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையே என்பதைக் காணலாம். எனவே, இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கூடுதலும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையே.

செயல்பாடு 5

கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் கூட்டுக மற்றும் அவற்றின் படியைக் காண்க.

வ.எண்.	பல்லுறுப்புக் கோவை	கூட்டல்	கிடைக்கும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி
(i)	$p(x)=5x^3-3x+x^2+4$ $q(x)=7x-4x^2+2$		
(ii)	$p(m)=6m-7$ $q(m)=7m^2-12+4m$		
(iii)	$p(x)=4x^2-6x^3-4x+6$ $q(x)=8x^3+2x^2-2$		
(iv)	$r(y)=7y^4+5y^2+4y$ $s(y)=2y-3y^2$		
(v)	$p(m)=12m^3-10m^2-7$ $q(m)=7m^3+5m^2-3$		

3.3.2 பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கழித்தல் (Subtraction of Polynomials)

இரண்டு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கழித்தல் மற்றொரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்..

குறிப்பு

ஒத்த உறுப்புகளை மட்டுமே கழிக்க இயலும். $8x^2 - 5x^2$ என்பதைக் கழித்தால் $3x^2$ கிடைக்கும். ஆனால் $5x^3$ ஐ $3x^2$ இல் கழிக்கக் கிடைக்கும் $3x^2 - 5x^3$ என்பது ஒரு புதிய பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.5

$p(x) = 4x^2 - 3x + 2x^3 + 5$ மற்றும் $q(x) = x^2 + 2x + 4$ என்க. $p(x) - q(x)$ காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவை	திட்ட வடிவம்
$p(x) = 4x^2 - 3x + 2x^3 + 5$	$2x^3 + 4x^2 - 3x + 5$
$q(x) = x^2 + 2x + 4$	$x^2 + 2x + 4$
$p(x) - q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1$	

$p(x) - q(x)$ என்பதும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையே என்பதைக் காணலாம். எனவே இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வித்தியாசம் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையே.

செயல்பாடு 6

கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வித்தியாசத்தைக் காண்க. மேலும் கழித்து வரும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படியைக் காண்க.

வ. எண்	பல்லுறுப்புக் கோவை	வித்தியாசம்	கிடைக்கும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி
(i)	$p(x) = 5x^3 - 3x + x^2 + 4$ $q(x) = 7x - 4x^2 + 2$		
(ii)	$p(m) = 6m - 7$ $q(m) = 7m^2 - 12 + 4m$		
(iii)	$p(x) = 4x^2 - 6x^3 - 4x + 6$ $q(x) = 8x^3 + 2x^2 - 2$		
(iv)	$r(y) = 7y^4 + 5y^2 + 4y$ $s(y) = 2y - 3y^2$		
(v)	$p(m) = 12m^3 - 10m^2 - 7$ $q(m) = 7m^3 + 5m^2 - 3$		

3.3.3 இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கல் (Multiplication of Two Polynomials)

8 அலகுகள் நீளமும் 7 அலகுகள் அகலமும் உடைய ஒரு செவ்வகத்தைக் கீழ்க்கண்டவாறு 4 செவ்வகங்களாகப் பிரிக்கும் பொழுது பரப்பு மாறாமல் உள்ளதை நாம் உணர்கிறோம். இது பல்லுறுப்புக் கோவையின் பெருக்கலைப் படிக்கத் தூண்டுகோலாக அமைகிறது.

	8
7	பரப்பு = 56

	5	3
1	5	3
6	30	18

$(x+1)$ நீளமும் $(3x+2)$ அகலமும் கொண்ட ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்பினைக் கீழ்க்கண்டவாறு கண்டறியலாம்.

	x	$+\ 1$
$3x$ +	$3x^2$	$3x$
2	$2x$	2

எனவே செவ்வகத்தின் பரப்பளவு

$= 3x^2 + 3x + 2x + 2$

$= 3x^2 + 5x + 2$

> x என்பது மாறி மற்றும் m, n என்பவை மிகை முழுக்கள் எனில், $x^m \times x^n = x^{m+n}$ ஆகும். இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்குத் தொகையும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையே ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.6

பெருக்குக : $(4x - 5), (2x^2 + 3x - 6)$.

தீர்வு

$(4x - 5)$, $(2x^2 + 3x - 6)$ ஐப் பெருக்குவதற்கு, முதல் பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் இரண்டாவது பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒவ்வோர் உறுப்புடன் பகிர்ந்து பெருக்குதல் வேண்டும். இந்த எடுத்துக்காட்டில் நாம் $4x$ மற்றும் -5 ஐப் பகிர வேண்டியது தேவையாகிறது. பிறகு ஒத்த உறுப்புகளை இணைக்க வேண்டும்.

$$(4x - 5)(2x^2 + 3x - 6) = 4x(2x^2 + 3x - 6) - 5(2x^2 + 3x - 6)$$

$$= 8x^3 + 12x^2 - 24x - 10x^2 - 15x + 30$$

$$= 8x^3 + 2x^2 - 39x + 30$$

அல்லது கெழுக்களைப் பிரித்துப் பெருக்கும் முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

	2	+3	-6
		+4	-5
	−10	−15	+30
8	+12	−24	
8	+2	−39	+30

$\therefore \quad (4x - 5)(2x^2+3x-6) = 8x^3 + 2x^2 - 39x + 30$

செயல்பாடு 7

பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைப் பெருக்குக. அதன் பெருக்கற்பலன் பல்லுறுப்புக் கோவையா என ஆராய்க. மேலும், பெருக்கிவரும் பல்லுறுப்புப் கோவையின் படியைக் காண்க.

வ. எண்	பல்லுறுப்புக் கோவை	பெருக்குக் கோவை	கிடைக்கும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி
(i)	$p(x) = 3x^3 + 2x - x^2 + 8$ $q(x) = 7x + 2$		
(ii)	$r(x) = 5y^3 - 3y^2 + 4$ $s(m) = 9y^2 - 2y + 6$		
(iii)	$p(m) = 8m - 9$ $q(m) = 9m^2 - 1 + 2m$		

பயிற்சி 3.1

1. பின்வரும் கோவைகளில் எவை பல்லுறுப்புக் கோவைகளாகும்? பல்லுறுப்புக் கோவை இல்லை எனில், அதற்கான காரணம் கூறுக.

    (i) $\frac{1}{x^2} + 3x - 4$ (ii) $x^2(x - 1)$

    (iii) $\frac{1}{x}(x + 5)$ (iv) $\frac{1}{x^{-2}} + \frac{1}{x^{-1}} + 7$

    (v) $\sqrt{5}\,x^2 + \sqrt{3}\,x + \sqrt{2}$ (vi) $m^2 - \sqrt[3]{m} + 7m - 10$

2. பின்வரும் ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புக் கோவையிலும் x^2 *மற்றும்* x-இன் கெழுக்களைக் காண்க.

    (i) $4 + \frac{2}{5}x^2 - 3x$ (ii) $6 - 2x^2 + 3x^3 - \sqrt{7}\,x$

    (iii) $\pi x^2 - x + 2$ (iv) $\sqrt{3}\,x^2 + \sqrt{2}\,x + 0.5$

    (v) $x^2 - \frac{7}{2}x + 8$

3. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் படியைக் காண்க.

    (i) $1 - \sqrt{2}\,y^2 + y^7$ (ii) $\frac{x^3 - x^4 + 6x^6}{x^2}$

    (iii) $x^3(x^2 + x)$ (iv) $3x^4 + 9x^2 + 27x^6$

    (v) $2\sqrt{5}\,p^4 - \frac{8p^3}{\sqrt{3}} + \frac{2p^2}{7}$

4. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைத் திட்ட வடிவில் மாற்றி எழுதுக..

(i) $x-9+\sqrt{7}x^3+6x^2$ (ii) $\sqrt{2}x^2-\frac{7}{2}x^4+x-5x^3$

(iii) $7x^3-\frac{6}{5}x^2+4x-1$ (iv) $y^2+\sqrt{5}y^3-11-\frac{7}{3}y+9y^4$

5. கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் கூட்டுக. மேலும் கூட்டி வரும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படியைக் காண்க.

(i) $p(x)=6x^2-7x+2$; $q(x)=6x^3-7x+15$

(ii) $h(x)=7x^3-6x+1$; $f(x)=7x^2+17x-9$

(iii) $f(x)=16x^4-5x^2+9$; $g(x)=-6x^3+7x-15$

6. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் கழிக்க. மேலும் கழித்து வரும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படியைக் காண்க.

(i) $p(x)=7x^2+6x-1$; $q(x)=6x-9$

(ii) $f(y)=6y^2-7y+2$; $g(y)=7y+y^3$

(iii) $h(z)=z^5-6z^4+z$; $f(z)=6z^2+10z-7$

7. $2x^3+6x^2-5x+8$ உடன் எந்தப் பல்லுறுப்புக் கோவையைக் கூட்ட $3x^3-2x^2+6x+15$ கிடைக்கும்?

8. $2x^4+4x^2-3x+7$ இலிருந்து எந்தப் பல்லுறுப்புக் கோவையைக் கழிக்க $3x^3-x^2+2x+1$ கிடைக்கும்?

9. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைப் பெருக்குக. பெருக்கி வரும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படியைக் காண்க :

(i) $p(x)=x^2-9$; $q(x)=6x^2+7x-2$

(ii) $f(x)=7x+2$; $g(x)=15x-9$

(iii) $h(x)=6x^2-7x+1$; $f(x)=5x-7$

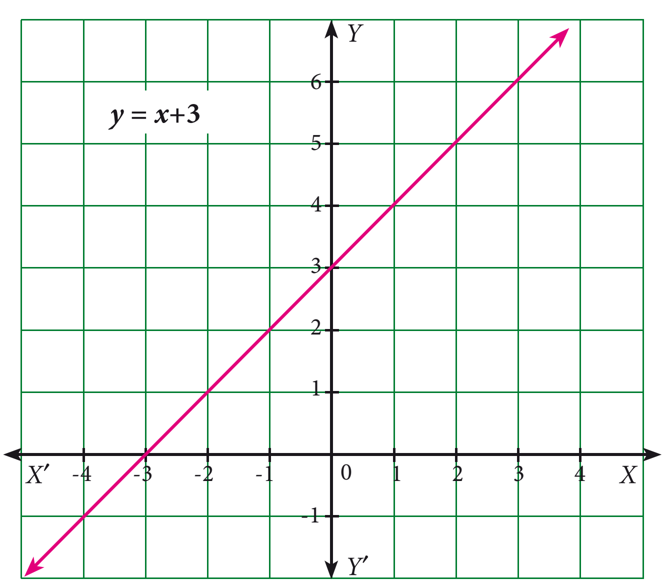
10. ஒரு இனிப்பின் விலை ₹$(x+y)$. அமீர் $(x+y)$ இனிப்புகளை வாங்கினார். எனில் அவர் கொடுத்த மொத்தத் தொகையை x மற்றும் y களில் காண்க. மேலும் $x=10$, $y=5$ எனில் அமீர் கொடுத்த தொகை எவ்வளவு?

11. ஒரு செவ்வகத்தின் நீளம் $(3x+2)$ அலகுகள் மற்றும் அதன் அகலம் $(3x-2)$ அலகுகள் எனில் x ஐப் பொருத்து அதன் பரப்பளவைக் காண்க. $x=20$ எனில், அதன் பரப்பளவைக் காண்க.

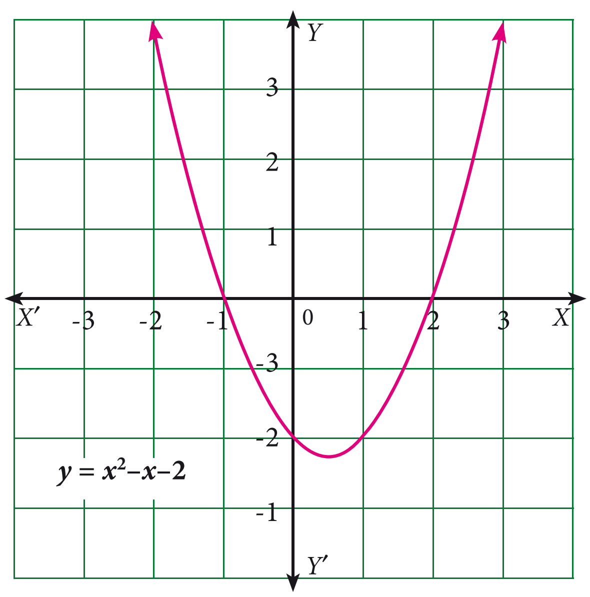
12. $p(x)$ என்பது படி 1ஐக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை மற்றும் $q(x)$ என்பது படி 2 ஐக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை எனில் $p(x)\times q(x)$ என்பது எவ்வகைப் பல்லுறுப்புக் கோவை?

3.4 பல்லுறுப்புக் கோவையின் மதிப்பு மற்றும் பூச்சியங்கள் (Value and Zeros of a Polynomial)

கீழ்க்காணும் இரு வரைபடங்களைப் பார்க்கவும். முதலாவது ஒருபடி மற்றும் இரண்டாவது இருபடி ஆகும்.முதல் வரைபடம் x அச்சை $(x = -3)$ ஒரு புள்ளியில் வெட்டுகிறது. மற்றும் இரண்டாம் வரைபடம் $(x = -1$ மற்றும் $x = 2)$ இரு புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. அவை இரண்டும் y அச்சை ஒரு புள்ளியில் மட்டுமே வெட்டுகின்றன. பொதுவாக, ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புக் கோவைக்கும் ஒரு வரைபடம் உண்டு. அந்த வரைபடத்தைப் படமாகக் காட்டலாம். (நமக்குச் சூத்திரங்களை விடப் படங்கள் பிடிக்குமல்லவா?) வரைபடங்கள் பயனுள்ள பல தகவல்களைக் கொண்டுள்ளன. அது ஒரு நேர்க்கோடா, வளைவரையின் வடிவம் என்ன, எத்தனை இடங்களில் x அச்சை வெட்டுகின்றன போன்ற மற்றும் பல.



படம் 3.9



படம் 3.10

நீங்கள் பல்லுறுப்புக் கோவையை வரைபடத்தில் எவ்வாறு குறிப்பீர்கள்? இதற்கான பதில் உங்களுக்குத் தெரியும். x இக்கு வெவ்வேறான மதிப்புகளைப் பிரதியிடப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கு வெவ்வேறான மதிப்புகள் கிடைக்கும்.

நாம் $x = 5$ எனப் பிரதியிட்டால், $x = 5$ என்ற மதிப்பிற்கான பல்லுறுப்புக் கோவையின் மதிப்பு கிடைக்கும். பொதுவாக, $x = a$ எனில், பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ இன் மதிப்பு $p(a)$ எனக் குறிக்கப்படும். $p(x)$ இல் x இன் மதிப்பிற்குப் பதிலாக, a எனப் பிரதியிட, $p(\mathrm{a})$ கிடைக்கும். இங்கு, a ஒரு மெய்யெண்.

x இன் பல மதிப்புகளுக்கு $p(x)$ இன் மதிப்பு பூச்சியம் ஆகலாம் என்பதைக் கவனிக்க (படம் 3.10 இல் உள்ளது போல). x இன் எத்தனை மதிப்புகளுக்கு மற்றும் எந்த மதிப்புகளுக்கு $p(x)$ பூச்சியம் ஆகும்? என்று ஆர்வமாகக் கேட்கத் தோன்றும். x இன் அந்த மதிப்புகளையே பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ இன் பூச்சியங்கள் என்போம்.

பல்லுறுப்புக் கோவையின் மதிப்புகள் என்பன வரைபடத்தில் நாம் குறிக்கும் மதிப்புகளே என்பதை நாம் காணலாம். மேலும், நாம் குறிக்கும் புள்ளிகள் x அச்சை வெட்டும்போது பல்லுறுப்புக் கோவை பூச்சியம் ஆவதை எளிதாகக் காணலாம்.

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவைக்குப் பூச்சியங்கள் இல்லாமல் இருக்கலாமா?

நீங்கள் தற்போது ஒரு கணிதவியலாளர் போல் சிந்திக்க வேண்டும். ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி 1 எனில், அதன் வடிவம் $ax+b$ ஆகும். நீங்கள் $ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க x இக்கு ஒரு மதிப்பு கிடைப்பதைப் பார்க்கலாம். எனவே, அதற்கு ஒரு பூச்சியம் உண்டு. படி பூச்சியமாக உள்ள பல்லுறுப்புக் கோவை எது? அக்கோவையின் மாறிலி உறுப்பு மட்டும் இருக்கும். அதை r என்க. r என்பது பூச்சியமல்ல $(r \neq 0)$ எனில், அதற்குப் பூச்சியம் இருக்க வாய்ப்பில்லை. எனவே மாறிலி கோவைக்குப் பூச்சியம் இல்லை.

படி மிகையாகக் கொண்ட $p(x)$ என்ற ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புக் கோவைக்கும் பூச்சியம் உண்டா? ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடு $p(x) = 0$ என்பதற்குத் தீர்வு உண்டு எனப் பொருள்படும். ஆனால் அது மெய்யல்ல. ஏனெனில் $x^2 + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு மெய்யெண் தீர்வுகள் இல்லை. பல்லுறுப்புக் கோவை $x^2 + 1$, மிகை மதிப்புகளை மட்டும் பெற்றுள்ளது. x அச்சை வெட்டுவது இல்லை.

எனவே, பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்குப் பூச்சியங்கள் இருக்கலாம். இல்லாமலும் இருக்கலாம். மேலும் ஒன்றோ அல்லது அதற்கு மேற்பட்டோ பூச்சியங்கள் இருக்கலாம். கொடுக்கப்பட்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவைக்குப் பூச்சியங்கள் உண்டா? இல்லையா? உண்டு எனில், எத்தனை என அறிந்து கொள்ளலாம்.

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை எண்ணற்ற பூச்சியங்களைப் பெற்றிருக்குமா?

அதாவது அது ஒரு சிறப்புப் பல்லுறுப்புக் கோவை. அது x அச்சைத் திரும்பத் திரும்ப x இன் புதுப்புது மதிப்புகளில் வெட்டிக் கொண்டே இருக்கும். தற்போது பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி அதிகபட்சப் பூச்சியங்கள் கொண்ட தேற்றத்தைத் தருகிறது. (நாம் தேற்றத்தை நிரூபிப்பதற்கு முன்னால் நிறைய கணிதக் கருத்துகளைக் கற்க வேண்டியுள்ளது. நீங்கள் அத்தேற்றத்தைக் கற்கும்போது அதன் அழகையும் காத்திருப்பின் பலனையும் உணர்வீர்கள்!)

நாம் தற்போது இவை அனைத்தையும் நிலையான வரையறையில் விளக்குவோம்.

நேர்க்கோடு அல்லது வளைவரையானது x அச்சை வெட்டும் புள்ளிகளைப் பொருத்தே அதன் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை அமையும்

படம் 3.9 இல் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை 1

படம் 3.10 இல் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை 2

குறிப்பு

ஒரு பல்லுறுப்பு கோவையின் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை $\leq$ பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி.

3.4.1 பல்லுறுப்புக் கோவையின் மதிப்பு (Value of aPolynomial)

$p(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையில் $x = a$ எனப் பிரதியிட அதன் மதிப்பு $p(a)$ எனக் கிடைக்கும். இது x ஐ a என மாற்றுவதால் கிடைக்கும் $(a \in R)$

எடுத்துக்காட்டாக,

$f(x) = x^2 + 3x - 1$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையில்

$x = 2$ எனும்போது

$f(x)$ இன் மதிப்பு $f(2) = 2^2+3(2)-1 = 4+6-1 = 9.$

3.4.2 பல்லுறுப்பு கோவையின் பூச்சியங்கள் (Zeros of Polynomial)

(i) $p(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 14$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இதில் x இடத்தில் 1 ஐப் பிரதியிட $p(1) = 4(1)^3 - 6(1)^2 + 3(1) - 14$

$= 4 - 6 + 3 - 14$

$= -13$

எனவே $x = 1$ எனில் $p(x)$ இன் மதிப்பு -13 எனலாம்.

$x = 0$ எனும் போது $p(0) = 4(0)^3 - 6(0)^2 + 3(0) - 14$

$= 0 - 0 + 0 - 14$

$= -14$

எனவே $x = 0$ எனில் $p(x)$ இன் மதிப்பு -14 ஆகும்.

(ii) $x = 2$ என $p(x)$ இல் பிரதியிட $p(2) = 4(2)^3 - 6(2)^2 + 3(2) - 14$

$= 32 - 24 + 6 - 14$

$= 0$

$x = 2$ எனும்போது $p(x)$ இன் மதிப்பு 0 ஆகும். எனவே நாம் 2 ஐ $p(x)$ இன் பூச்சியங்களில் ஒன்று எனக் கூறுகிறோம். இங்கு $p(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 14$.

3.4.3 பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் (Roots of a Polynomial Equation)

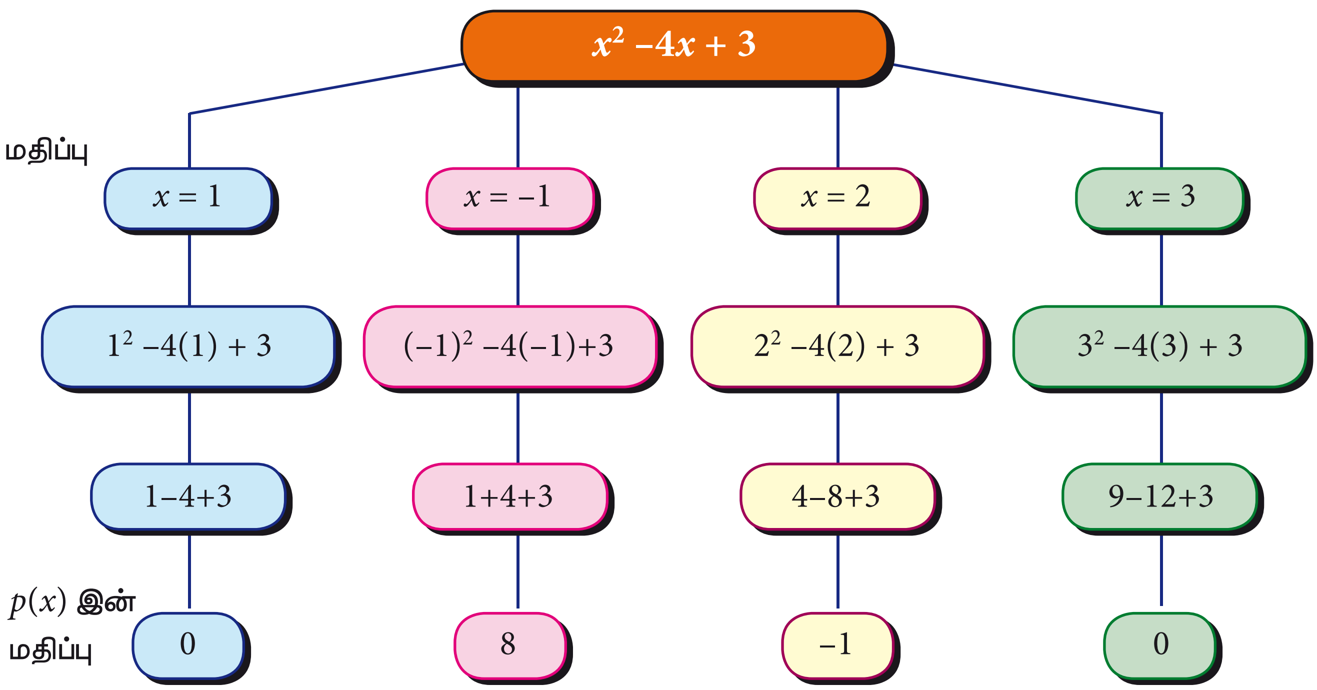
பொதுவாக, $p(a) = 0$ எனில், a என்பது $p(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒரு பூச்சியமாகும். அல்லது a என்பது $p(x) = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.7

$f(x) = x^2 - 4x + 3$ எனில், $f(1), f(-1), f(2), f(3)$. ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க. மேலும் $f(x)$இன் பூச்சியங்களைக் காண்க.

தீர்வு

$f(x) = x^2 - 4x + 3$



படம் 3.11

$x = 1$ மற்றும் $x = 3$ எனும்போது பல்லுறுப்புக் கோவை $f(x)$ இன் மதிப்பு பூச்சியமாகும், பல்லுறுப்புக் கோவை $f(x)$ இன் பூச்சியங்கள் 1 மற்றும் 3 ஆகும்.

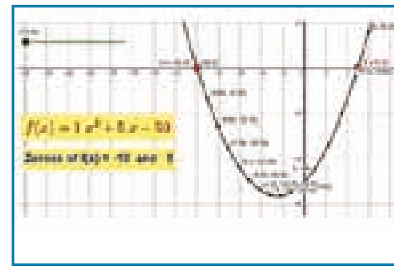
செயல்பாடு 8

பின்வரும் ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கும் $p(0), p(1)$ மற்றும் $p(-1)$ ஐக் காண்க.

வ. எண்	பல்லுறுப்புக் கோவை	$p(0)$	$p(1)$	$p(-1)$
(i)	$p(x) = x^2 + 2x - 1$			
(ii)	$p(x) = x^3 - 1$			
(iii)	$p(x) = x + 1$			

இணையச் செயல்பாடு

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்



படி – 1

கீழேக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலியைத் தேடுபொறியில் தட்டச்சு செய்க அல்லது துரித துலங்கள் குறியீட்டை ஸ்கேன் செய்க.

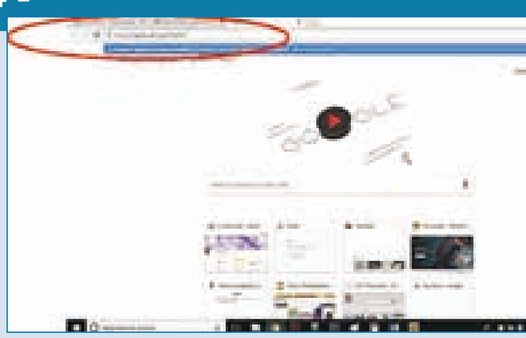
படி – 2

“Polynomials and Quadratic Equations” என்று GeoGebra பக்கத்தில் தோன்றும் . இப்பக்கத்தில் பல பணித்தாள்கள் காணப்படும். அவற்றில் “Zeroes: Quadratic Polynomial” என்பதைத் தெரிவு செய்யவும்.

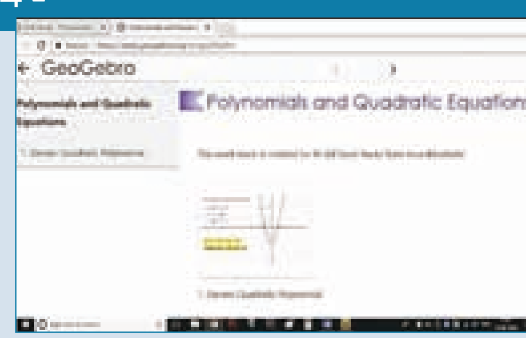
படி – 3

இருபடி சமன்பாட்டின் கெழுக்களை மாற்றி அமைக்க திரையில் தெரியும் a, b மற்றும் c எனும் நழுவல்களை இழுக்கவும். A மற்றும் B புள்ளிகள் x-axis. அச்சில் வெட்டிக்கொள்ளும் . இப்புள்ளிகளே பல்லுருப்புக்கோவைகளின் பூச்சியமாகும்.

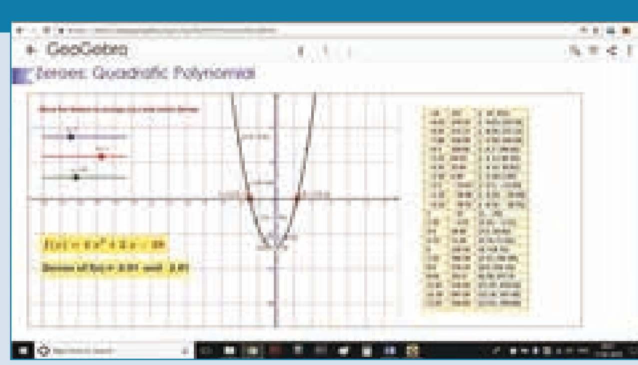
படி 1



படி 2



படி 3



இதே போல் பாடம் சார்ந்த வேறு செயல்பாட்டினை செய்து பார்க்கவும்

செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூச்சியங்கள்: https://ggbm.at/tgu3PpWm

எடுத்துக்காட்டு 3.8

பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூச்சியங்களைக் காண்க.

(i) $f(x) = 2x + 1$ (ii) $f(x) = 3x - 5$

தீர்வு

(i) கொடுக்கப்பட்டது $f(x) = 2x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2\left(x - (-\frac{1}{2})\right)$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left[-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 2(0) = 0$$

எனவே, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, $x = -\frac{1}{2}$ என்பது $f(x)$ இன் பூச்சியமாகும்.

(ii) கொடுக்கப்பட்டது $f(x) = 3x - 5 = 3\left(x - \frac{5}{3}\right)$

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = 3\left(\frac{5}{3} - \frac{5}{3}\right) = 3(0) = 0$$

எனவே, $x = \frac{5}{3}$ என்பது $f(x)$ இன் பூச்சியமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.9

பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காண்க.

(i) $5x - 3 = 0$ (ii) $-7 - 4x = 0$

தீர்வு

(i) $5x - 3 = 0$

$$5x = 3$$
$$x = \frac{3}{5}$$

(ii) $-7 - 4x = 0$

$$4x = -7$$
$$x = \frac{-7}{4} = -\frac{7}{4}$$

குறிப்பு

(i) ஒருபல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியம் என்பது பூச்சியமாக மட்டுமே இருக்க வேண்டியதில்லை எந்த மெய்யெண்ணாகவும் இருக்கலாம்.

(ii) ஒரு பூச்சியமற்ற மாறிலிப் பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு பூச்சியங்கள் இல்லை.

(iii) பூச்சியப் பல்லுறுப்புக் கோவையில் அனைத்து மெய்யெண்களும் பூச்சியங்கள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.10

$x^2 - 9$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு -3 மற்றும் 3 என்பன பூச்சியங்களா என்று சரிபார்க்கவும்?

தீர்வு

$$f(x) = x^2 - 9$$
$$f(-3) = (-3)^2 - 9 = 9 - 9 = 0$$

$$f(+3) = 3^2 - 9 = 9 - 9 = 0$$

$\therefore$ -3 மற்றும் 3 என்பன $x^2 - 9$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியங்கள் ஆகும்.

பயிற்சி 3.2

1. $f(y) = 6y - 3y^2 + 3$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் மதிப்பைக் காண்க.

   (i) $y = 1$ (ii) $y = -1$ (iii) $y = 0$

2. $p(x) = x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$ எனில், $p(2\sqrt{2})$ ஐக் காண்க.

3. கீழ்க்காணும் ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியங்களைக் காண்க.

   (i) $p(x) = x - 3$ (ii) $p(x) = 2x + 5$ (iii) $q(y) = 2y - 3$

   (iv) $f(z) = 8z$ (v) $p(x) = ax$ இங்கு $a \neq 0$ (vi) $h(x) = ax + b,\ a \neq 0,\ a, b \in R$

4. பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளின் மூலங்கள் காண்க.

   (i) $5x - 6 = 0$ (ii) $x + 3 = 0$ (iii) $10x + 9 = 0$ (iv) $9x - 4 = 0$

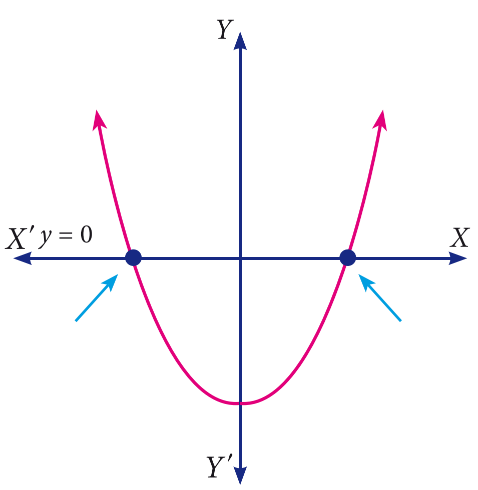
5. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கு அவற்றிற்கு எதிரே குறிப்பிட்டுள்ளவை பூச்சியங்களா எனச் சரிபார்க்க.

   (i) $p(x) = 2x - 1,\ x = \frac{1}{2}$ (ii) $p(x) = x^3 - 1,\ x = 1$

   (iii) $p(x) = ax + b,\ x = \frac{-b}{a}$ (iv) $p(x) = (x + 3)(x - 4),\ x = 4, x = -3$

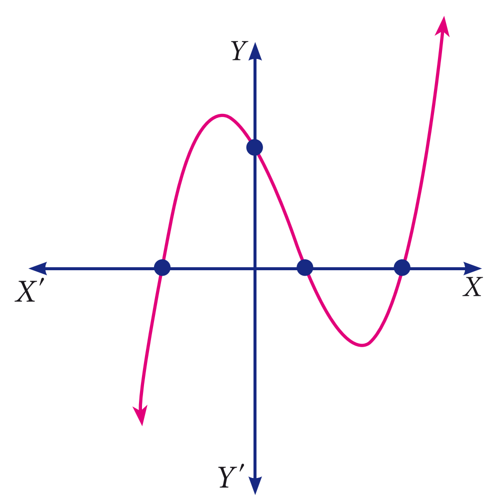
6. பின்வரும் வரைபடங்களால் குறிக்கப்படும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(i)



படம் 3.12

(ii)



படம் 3.13

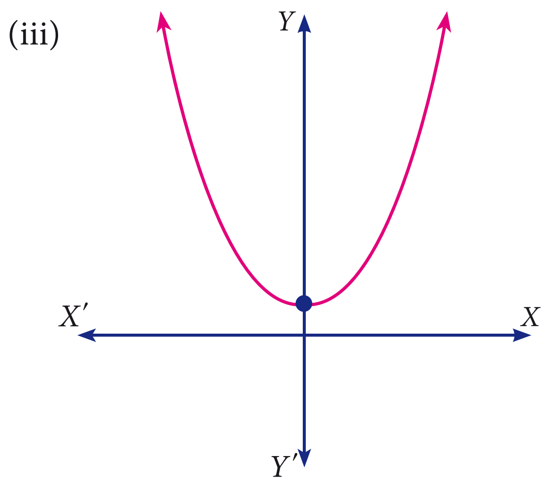


Fig. 3.14

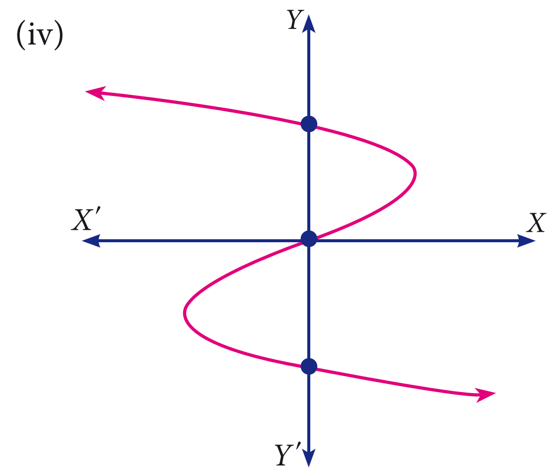
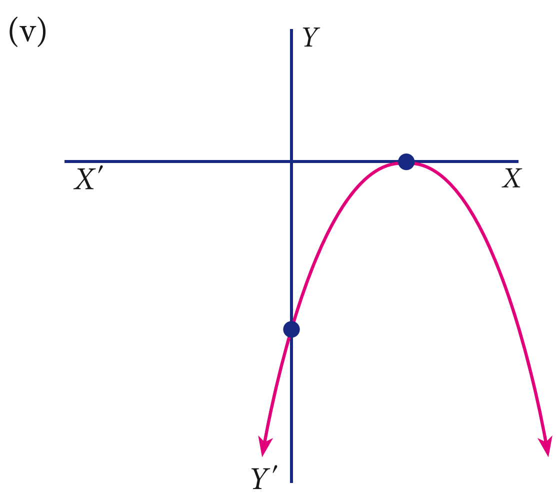


Fig. 3.15



படம் 3.16

3.5 பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வகுத்தல் (Division of Polynomials)

13 மற்றும் 5 என்ற இரு எண்களை எடுத்துக் கொள்வோம். 13 ஐ 5 ஆல் வகுக்கும் போது ஈவு மற்றும் மீதி என்ன?

ஈவு 2 மற்றும் மீதி3. இதையே 13 என்பதை $(5\times2)+3$ என எழுதலாம்.

தற்போது முயன்று பார்ப்போம்.

வகுக்க	கிடைக்கும் வடிவம்	மீதி	வகுப்பான்
11 ஐ 4 ஆல்	$(4\times2)+3$	3	4
24 ஐ 5 ஆல்	$(5\times4)+4$	4	5
18 ஐ 3 ஆல்	$(3\times6)+0$	0	3
22 ஐ 11 ஆல்	$(11\times2)+0$	0	11

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்து, மீதியானது வகுத்தியை விடக் குறைவானது என்பது தெளிவாகிறது. மீதி பூச்சியமெனில் வகுபடும் எண்ணானது வகுத்தியின் மடங்காகும் எனக் கூற இயலும்.

வகுபடும் எண் $=$ (வகுத்தி $\times$ ஈவு) $+$ மீதி.

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை மற்றொரு பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுக்க இயலுமா?

இயலும் வழக்கமான எண் வகுத்தலைப் போல வகுக்கலாம்.

பல்லுறுப்புக் கோவை வகுத்தலை ஒருறுப்புக் கோவை வகுத்தலிலிருந்து தொடங்குவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.11

$x^3 - 4x^2 + 6x$ ஐ x ஆல் வகுக்க. இங்கு $x \neq 0$

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டவை

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 6x}{x} = \frac{x^3}{x} - \frac{4x^2}{x} + \frac{6x}{x}, \quad x \neq 0$$
$$= x^2 - 4x + 6$$

3.5.1 பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கான வகுத்தல் விதியின் வடிவம் (Division Algorithm for Polynomials)

பொதுவாக, $p(x)$ மற்றும் $g(x)$ ஆகிய இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகள் $p(x)$ இன் படி $\geq$ $g(x)$ இன் படி மற்றும் $g(x) \neq 0$. எனில், $q(x)$ மற்றும் $r(x)$ என்ற இரு தனித்த பல்லுறுப்புக் கோவைகள்

$$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x) \qquad \ldots (1)$$

என்ற வடிவத்தில் கிடைக்கும்.

இங்கு $r(x) = 0$ அல்லது $r(x)$ இன் படி $<$ $g(x)$ இன் படி.

பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ என்பது வகுபடும் எண், $g(x)$ என்பது வகுத்தி, $q(x)$ என்பது ஈவு $r(x)$ என்பது மீதி. எனவே சமன்பாடு (1) யைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

வகுபடும் கோவை $=$ (வகுக்கும் கோவை $\times$ ஈவு) $+$ மீதி.

> $r(x)$ பூச்சியம் எனில், $p(x)$ என்பது $g(x)$ இன் மடங்கு. அதாவது $g(x)$ என்பது $p(x)$ ஐ வகுக்கும்.

இது சற்றுக் கடினமாகத் தோன்றினால் கவலை வேண்டாம், பல்லுறுப்புக் கோவைகளை வகுப்பது எப்படி என்று தெரிந்து கொண்டு பயிற்சி செய்தால் எளிதாகும். இதற்கு கீழ்க்காணும் எடுத்துக்காட்டுகள் உதவும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.12

$(5x^2 - 7x + 2) \div (x - 1)$ இன் ஈவு மற்றும் மீதியைக் காண்க.

தீர்வு

$(5x^2 - 7x + 2) \div (x - 1)$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x-2 \\ \hline
x-1 & 5x^2 - 7x + 2 \\
 & 5x^2 - 5x \\
 & (-) \quad (+) \\ \hline
 & \quad -2x + 2 \\
 & \quad -2x + 2 \\
 & \quad (+) \quad (-) \\ \hline
 & \qquad 0 \\ \hline
\end{array}
$$

(i) $\frac{5x^2}{x} = 5x$

(ii) $5x(x-1) = 5x^2-5x$

(iii) $-\frac{2x}{x} = -2$

(iv) $-2(x-1) = (-2x+2)$

$\therefore$ ஈவு $= 5x-2$ மீதி $= 0$

எடுத்துக்காட்டு 3.13

$f(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை $g(x)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் ஈவு மற்றும் மீதியைக் காண்க.

(i) $f(x) = (8x^3-6x^2+15x-7),\ g(x) = 2x+1.$ (ii) $f(x) = x^3 + 1,\ g(x) = x+1$

தீர்வு

(i) $f(x) = (8x^3-6x^2+15x-7),\ g(x) = 2x+1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^2 - 5x + 10 \\ \hline
2x+1 & 8x^3-6x^2 + 15x - 7 \\
 & 8x^3 + 4x^2 \\
 & (-) \quad (-) \\ \hline
 & \quad -10x^2 + 15x \\
 & \quad -10x^2 - 5x \\
 & \quad (+) \qquad (+) \\ \hline
 & \qquad\qquad 20x - 7 \\
 & \qquad\qquad 20x + 10 \\
 & \qquad\qquad (-) \quad (-) \\ \hline
 & \qquad\qquad\quad -17 \\ \hline
\end{array}
$$

$\therefore$ ஈவு $= 4x^2 - 5x + 10$, மீதி $= -17$

(ii) $f(x) = x^3 + 1,\ g(x) = x+1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - x + 1 \\ \hline
x+1 & x^3 + 0x^2 + 0x + 1 \\
 & x^3 + x^2 \\
 & (-) \quad (-) \\ \hline
 & \quad -x^2 + 0x \\
 & \quad -x^2 - x \\
 & \quad (+) \quad (+) \\ \hline
 & \qquad\qquad x + 1 \\
 & \qquad\qquad x + 1 \\
 & \qquad\qquad (-) \quad (-) \\ \hline
 & \qquad\qquad\quad 0 \\ \hline
\end{array}
$$

ஈவு $= x^2 - x + 1$, மீதி $= 0$

எடுத்துக்காட்டு 3.14

$x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 7$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை $x^2 + x + 1$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் ஈவு மற்றும் மீதியைக் காண்க.

தீர்வு

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 4x + 8 \\
\hline
x^2 + x + 1 & x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 0x - 7 \\
 & x^4 + x^3 + x^2 \\
 & (-) \quad (-) \quad (-) \\
\hline
 & -4x^3 + 4x^2 + 0x \\
 & -4x^3 - 4x^2 - 4x \\
 & (+) \quad (+) \quad (+) \\
\hline
 & 8x^2 + 4x - 7 \\
 & 8x^2 + 8x + 8 \\
 & (-) \quad (-) \quad (-) \\
\hline
 & -4x - 15 \\
\hline
\end{array}
$$

$\therefore$ ஈவு $= x^2 - 4x + 8$, மீதி $= -4x - 15$

பயிற்சி 3.3

1. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை வகுத்து ஈவு மற்றும் மீதியைக் காண்க.

   (i) $(4x^3 + 6x^2 - 23x + 18) \div (x+3)$ (ii) $(x^3 + 3x^2 - 31x + 12) \div (x-4)$

   (iii) $(8y^3 - 16y^2 + 16y - 15) \div (2y-1)$ (iv) $(8x^3 - 1) \div (2x-1)$

   (v) $(-18z + 14z^2 + 24z^3 + 18) \div (3z+4)$

2. செவ்வகத்தின் பரப்பு $x^2 + 7x + 12$. அதன் அகலம் $(x+3)$ எனில், அதன் நீளம் காண்க.

3. இணைகரத்தின் பரப்பு $25x^2 - 16$. அதன் அடிப்பக்கம் $(5x+4)$ எனில், அதன் உயரம் காண்க.

4. $(x+5)$ விவரங்களின் கூடுதல் (x^3+125) எனில், விவரங்களின் சராசரியைக் காண்க.

3.6 மீதித் தேற்றம் (Remainder Theorem)

முந்தையப் பகுதியில் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை மற்றொரு பூச்சியமற்ற பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுப்பதைப் பற்றிப் படித்துள்ளோம்.

இப்பகுதியில் மீதியைக் காண எளிய மற்றும் அழகான ஒரு முறையைக் காண்போம் .

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை ஒருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுக்க, மீதித் தேற்றம் என அழைக்கப்படும் மிகவும் பிரபலமான இயற்கணிதத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

$p(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி 1 ஐ விடப் பெரியதாகவோ அல்லது சமமாகவோ இருந்து, அதை $(x-a)$ என்ற நேரியக் கோவையால் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி $p(a)$ ஆகும். இங்கு a ஒரு மெய்யெண்.

மீதித் தேற்றத்தின் முக்கியத்துவம்: இத்தேற்றத்தின் மூலம் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையைச் சிக்கலான நீள்வகுத்தல் முறையில் வகுக்காமலேயே அதன் மீதியைக் காண இயலும். இது மற்றொரு முக்கியத் தேற்றமான 'காரணித் தேற்றத்தை' அறிய முன்னோடியாக இருக்கிறது.

குறிப்பு

(i) $p(x)$ ஐ $(x+a)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி $p(-a)$ ஆகும்.

(ii) $p(x)$ ஐ $(ax-b)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி $p\left(\frac{b}{a}\right)$ ஆகும்.

(iii) $p(x)$ ஐ $(ax+b)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி $p\left(-\frac{b}{a}\right)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு: 3.15

வ. எண்	வினா	தீர்வு	குறிப்பு
1	$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை $x + 1$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி.	$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ $f(-1) = (-1)^3+3(-1)^2+3(-1)+1$ $= -1+3-3+1 = 0$ எனவே, தேவையான மீதி 0	$g(x) = x+1$ $g(x) = 0$ $x+1 = 0$ $x = -1$
2	$f(x) = x^3 - x + 1$ என்பது $g(x) = 2 - 3x$ இன் மடங்கா என ஆராய்க.	$\therefore f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{2}{3} + 1$ $= \frac{8}{27} - \frac{2}{3} + 1$ $= \frac{8-18+27}{27} = \frac{17}{27} \neq 0$ $\Rightarrow f(x)$ என்பது $g(x)$ இன் மடங்கல்ல.	$g(x) = 2-3x$ $= 0$ எனச் சமப்படுத்த $x = \frac{2}{3}$ எனக் கிடைக்கிறது.
3	$f(x) = x^3 - ax^2 + 6x - a$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை $(x - a)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி.	$f(x) = x^3 - ax^2 + 6x - a$ $f(a) = a^3 - a(a)^2 + 6a - a$ $= a^3 - a^3 + 5a$ $= 5a$ எனவே, தேவையான மீதி $5a$	$g(x) = x-a$ $g(x) = 0$ $x - a = 0$ $x = a$

4	$2x^4+3x^3+2kx^2+3x+6$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை k இன் எந்த மதிப்பிற்குப் பல்லுறுப்புக் கோவை $(x+2)$ ஆல் மீதியின்றி வகுபடும்?	$f(x)=2x^4+3x^3+2kx^2+3x+6$ $f(x)$ ஐ $(x+2)$ ஆனது மீதியின்றி வகுக்க $f(-2)=0$ ஆக இருக்க வேண்டும். $2(-2)^4+3(-2)^3+2k(-2)^2+3(-2)+6=0$ $2(16)+3(-8)+2k(4)-6+6=0$ $32-24+8k=0$ $8k=-8,\quad k=-1$ எனவே, $f(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவை$(x-2)$ ஆல் மீதியின்றி வகுபட வேண்டுமெனில் $k=-1$ ஆக இருக்க வேண்டும்.	$g(x)=x+2$ $g(x)=0$ $x+2=0$ $x=-2$

எடுத்துக்காட்டு 3.16

$f(x)=ax^3+4x^2+3x-4$ மற்றும் $g(x)=x^3-4x+a$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைகளை $x-3$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதிகள் சமம் எனில், a இன் மதிப்பு மற்றும் மீதி காண்க .

தீர்வு :

$f(x)=ax^3+4x^2+3x-4$ மற்றும் $g(x)=x^3-4x+a$ என்க, $f(x)$ ஐ $(x-3)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி $f(3)$ ஆகும்.

$$f(3) = a(3)^3+4(3)^2+3(3)-4$$

$$= 27a+36+9-4$$

$$f(3) = 27a+41 \qquad (1)$$

$g(x)$ ஐ $(x-3)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி $g(3)$ ஆகும்.

$$g(3) = 3^3-4(3)+a$$

$$= 27-12+a$$

$$= 15+a \qquad (2)$$

மீதிகள் சமம் என்பதனால் $(1)=(2)$ ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்டவாறு, $f(3)=g(3)$

$$27a+41 = 15+a$$

$$27a - a = 15 - 41$$

$$26a = -26$$

$$a = \frac{-26}{26} = -1$$

$f(3)$ இல் $a = -1$ ஐப் பிரதியிட,

$$f(3) = 27(-1) + 41$$

$$= -27 + 41$$

$$f(3) = 14$$

$\therefore$ மீதி 14.

எடுத்துக்காட்டு 3.17

$f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவை $x^2 - 3x + 2$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையால் மீதியின்றி வகுபடும் என்று நீள் வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தாமல் நிரூபி.

தீர்வு :

$$f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$$

$g(x) = x^2 - 3x + 2$ என்க

$$= x^2 - 2x - x + 2$$

$$= x(x-2) - 1(x-2)$$

$$= (x-2)(x-1)$$

மீதித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $f(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவை $(x-1)$, $(x-2)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையால் மீதியின்றி வகுபடும் என்று நிரூபிக்க வேண்டும்.

$$f(1) = 2(1)^4 - 6(1)^3 + 3(1)^2 + 3(1) - 2$$

$$= 2 - 6 + 3 + 3 - 2$$

$$= 0$$

$$f(2) = 2(2)^4 - 6(2)^3 + 3(2)^2 + 3(2) - 2$$

$$= 32 - 48 + 12 + 6 - 2$$

$$f(2) = 0$$

$\therefore$ எனவே, $f(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவை $(x-1)$ $(x-2)$ ஆல் மீதியின்றி வகுபடும்.

அதாவது, $f(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவை $x^2 - 3x + 2$ ஆல் மீதியின்றி வகுபடும்.

பயிற்சி 3.4

1. $p(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவை $g(x)$ இன் மடங்கா எனச் சரிபார்க்க .

   (i) $p(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 3$; $g(x) = x - 2$

   (ii) $p(x) = 2x^3 - 11x^2 - 4x + 3$; $g(x) = 2x + 3$

2. மீதித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, $p(x)$ ஐ $g(x)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.

   (i) $p(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 1$; $g(x) = x + 1$

   (ii) $p(x) = 4x^3 - 12x^2 + 14x - 3$; $g(x) = 2x - 1$

   (iii) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 50$; $g(x) = x - 3$

   (iv) $p(x) = 27x^3 - 54x^2 + 3x - 4$; $g(x) = 1 - \frac{3}{2}x$

3. $3x^3 - 4x^2 + 7x - 5$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை $(x+3)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.

4. $x^{2018} + 2018$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை $x-1$ ஆல் வகுக்க கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.

5. $p(x) = 2x^3 - kx^2 + 3x + 10$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை $(x-2)$ஆல் மீதியின்றி வகுத்தால் k இன் மதிப்பைக் காண்க

6. $ax^3 - 3x^2 + 4$ மற்றும் $2x^3 - 5x + a$ ஆகிய பல்லுறுப்புக் கோவைகளை $(x-2)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதிகள் முறையே p மற்றும் q ஆகும். $p - 2q = 4$ எனில் a இன் மதிப்பைக் காண்க.

7. $2x^3 + ax^2 + 4x - 12$ மற்றும் $x^3 + x^2 - 2x + a$ என்ற இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளை $(x - 3)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதிகள் சமமானால், a இன் மதிப்பைக் காண்க. மேலும், அதன் மீதியைக் காண்க.

பயிற்சி 3.5

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. $x^3 + 6x^2 + kx + 6$ என்பது $(x + 2)$ ஆல் மீதியின்றி வகுபடும் எனில், k இன் மதிப்பு என்ன?

   (அ) -6 (ஆ) -7 (இ) -8 (ஈ) 11

2. $2x + 3 = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டின் மூலம்

   (அ) $\frac{1}{3}$ (ஆ) $-\frac{1}{3}$ (இ) $-\frac{3}{2}$ (ஈ) $-\frac{2}{3}$

3. $4-3x^3$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் வகை

(அ) மாறிலி பல்லுறுப்புக் கோவை (ஆ) ஒருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை

(இ) இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை (ஈ) முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவை.

4. $x^3 - x^2$ என்பது ஒரு __________ ஆகும்.

(அ) ஓருறுப்புக் கோவை (ஆ) ஈருறுப்புக் கோவை

(இ) மூவுறுப்புக் கோவை (ஈ) மாறிலி பல்லுறுப்புக் கோவை

5. $x^{51} + 51$ என்பது $x + 1$, ஆல் வகுக்கப்பட்டால் கிடைக்கும் மீதி

(அ) 0 (ஆ) 1 (இ) 49 (ஈ) 50

6. $2x+5$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியம்

(அ) $\frac{5}{2}$ (ஆ) $-\frac{5}{2}$ (இ) $\frac{2}{5}$ (ஈ) $-\frac{2}{5}$

7. $p(x) = x^3 - x^2 - 2,\ q(x) = x^2-3x+1$ ஆகிய பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கூடுதல்

(அ) $x^3 - 3x - 1$ (ஆ) $x^3 + 2x^2 - 1$ (இ) $x^3 - 2x^2 - 3x$ (ஈ) $x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

8. $p(x) = 4x - 3,\ q(x) = 4x + 3$ ஆகிய பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கற்பலன்

(அ) $1 - x - 8$ (ஆ) $16x^2 - 9$

(இ) $18x^3 + 12x^2 - 12x - 8$ (ஈ) $18x^3 - 12x^2 + 12x + 8$

9. $p(x) = x^3 - ax^2 + 6x - a$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை $(x - a)$ என்ற கோவையால் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி

(அ) $-5a$ (ஆ) $\frac{1}{5}$ (இ) 5 (ஈ) $5a$

10. தானியங்கி மூவுருளி (Auto) வாடகை மூன்று கிலோமீட்டருக்கு ₹25 எனவும் மேலும் வரும் ஒவ்வொரு கிலோமீட்டருக்கு ₹12 எனவும் வரையறுக்கப்படுகிறது. கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளில் இது எந்த உறவினைக் குறிக்கிறது? மொத்தத் தொகை ₹c எனவும், பயணம் செய்த தூரம் n கிலோமீட்டர் எனவும் குறிக்க.

(அ) $c = 25 + n$ (ஆ) $c = 25 + 12n$ (இ) $c = 25 + (n-3)12$ (ஈ) $c = (n-3)12$

11. $(y^3-2)(y^3 + 1)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி

(அ) 9 (ஆ) 2 (இ) 3 (ஈ) 6

12. கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் படிகளின் ஏறு வரிசை

(A) $-13q^5 + 4q^2 + 12q$ (B) $(x^2 + 4)(x^2 + 9)$

(C) $4q^8 - q^6 + q^2$ (C) $-\frac{5}{7}y^{12} + y^3 + y^5$

(அ) A,B,D,C (ஆ) A,B,C,D (இ) B,C,D,A (ஈ) B,A,C,D

நினைவு கூர்வதற்கான கருத்துகள்

- $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ என்ற இயற்கணிதக் கோவை x மாறியில் அமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். இங்கு $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ என்பன மாறிலிகள் $(a_n \neq 0)$ மற்றும் n ஒரு முழு எண்.
- பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ என்க. $p(a) = 0$ எனில் 'a' என்பது $p(x)$ இன் ஒரு பூச்சியம் ஆகும்.
- $p(x) = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கிறது எனில், $x = a$ ஆனது பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடு $p(x) = 0$ இன் ஒரு மூலமாகும்.
- மீதித்தேற்றம்: பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$இன் படி ஒன்றோ அல்லது அதற்கு மேலாகவோ இருக்கும். மேலும் $p(x)$ ஆனது நேரிய கோவை $(x-a)$ ஆல் வகுபடும் எனில் அதன் மீதி $p(a)$ ஆகும். இங்கு a ஒரு மெய்யெண்.

விடைகள்

பயிற்சி 3.1

1. (i) பல்லுறுப்புக் கோவை அல்ல (ii) பல்லுறுப்புக் கோவை
 (iii) பல்லுறுப்புக் கோவை அல்ல (iv) பல்லுறுப்புக் கோவை
 (v) பல்லுறுப்புக் கோவை (vi) பல்லுறுப்புக் கோவை அல்ல

2.

	x^2 இன் கெழு	x இன் கெழு
(i)	$\frac{2}{5}$	-3
(ii)	-2	$-\sqrt{7}$
(iii)	π	-1
(iv)	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$
(v)	1	$-\frac{7}{2}$

3. (i) 7 (ii) 4 (iii) 5 (iv) 6 (v) 4

4.

	இறங்கு வரிசை	ஏறு வரிசை
(i)	$\sqrt{7}\,x^3 + 6x^2 + x - 9$	$-9 + x + 6x^2 + \sqrt{7}\,x^3$
(ii)	$-\frac{7}{2}x^4 - 5x^3 + \sqrt{2}\,x^2 + x$	$x + \sqrt{2}\,x^2 - 5x^3 - \frac{7}{2}x^4$

(iii) $7x^3 - \frac{6}{5}x^2 + 4x - 1$ $\quad$ $-1 + 4x - \frac{6}{5}x^2 + 7x^3$

(iv) $9y^4 + \sqrt{5}\,y^3 + y^2 - \frac{7}{3}y - 11$ $\quad$ $-11 - \frac{7}{3}y + y^2 + \sqrt{5}\,y^3 + 9y^4$

5. (i) $6x^3+6x^2-14x+17$, 3 (ii) $7x^3+7x^2+11x-8$, 3 (iii) $16x^4-6x^3-5x^2+7x-6$, 4

6. (i) $7x^2+8$, 2 (ii) $-y^3+6y^2-14y+2$, 3 (iii) $z^5-6z^4-6z^2-9z+7$, 5

7. $x^3-8x^2+11x+7$ 8. $2x^4-3x^3+5x^2-5x+6$

9. (i) $6x^4+7x^3-56x^2-63x+18$, 4 (ii) $105x^2-33x-18$, 2 (iii) $30x^3-77x^2+54x-7$, 3

10. x^2+y^2+2xy, ₹.225 11. $9x^2-4$, 3596 ச.அலகுகள்

12. முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை அல்லது பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி 3

பயிற்சி 3.2

1. (i) 6 (ii) −6 (iii) 3 2. 1 3. (i) 3 (ii) $-\frac{5}{2}$ (iii) $\frac{3}{2}$ (iv) 0 (v) 0 (vi) $-\frac{b}{a}$

4. (i) $\frac{6}{5}$ (ii) −3 (iii) $-\frac{9}{10}$ (iv) $\frac{4}{9}$

5. (i) ஆம் பூச்சியம் (ii) ஆம் பூச்சியம் (iii) ஆம் பூச்சியம் (iv) ஆம் பூச்சியம்

6. (i) 2 (ii) 3 (iii) 0 (iv) 1 (v) 1

பயிற்சி 3.3

1. (i) ஈவு : $4x^2-6x-5$, மீதி : 33 (ii) ஈவு : x^2+7x-3, மீதி : 0

(iii) ஈவு : $4y^2-6y+5$, மீதி : −10 (iv) ஈவு : $4x^2+2x+1$, மீதி : 0

(v) ஈவு : $8z^2-6z+2$, மீதி : 10 2. நீளம் : $x+4$ 3. உயரம் : $5x-4$

4. சராசரி : $x^2-5x+25$

பயிற்சி 3.4

1. (i) $\mathrm{P}(x)$ என்பது $\mathrm{g}(x)$ இன் மடங்கு அல்ல (ii) $\mathrm{P}(x)$ என்பது $\mathrm{g}(x)$ இன் மடங்கு அல்ல

2. (i) மீதி : 0 (ii) மீதி : $\frac{3}{2}$ (iii) மீதி : 62 (iv) மீதி : −18

3. மீதி : −143 4. மீதி : 2019 5. $K = 8$ 6. $a = 4$ 7. $a = -3$ மீதி : 27

பயிற்சி 3.5

1. (ஈ) 2. (இ) 3. (இ) 4. (ஆ) 5. (ஈ) 6. (ஆ) 7. (அ) 8. (ஆ) 9. (ஈ) 10. (இ)

11. (ஈ) 12. (ஈ)

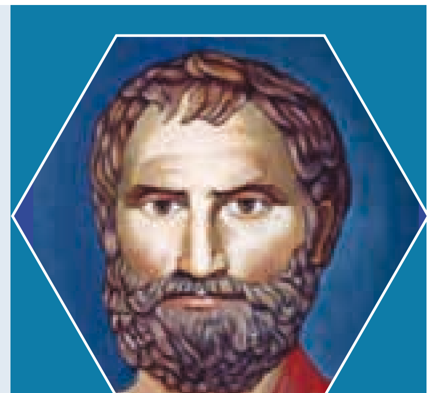
4 வடிவியல்

நரம்பின் மீட்டலில் வடிவியலைக் காணலாம்;
கோளத்தின் இடைவெளியில் இசையை உணரலாம் – பிதாகரஸ்

CSEIHZ

தேலீஸ் கிரேக்க நகரமாகிய மிலிடஸில் பிறந்தார். அவர் வடிவியலில் குறிப்பாக முக்கோணங்களின் அறிமுறை மற்றும் செய்முறை புரிதலுக்காக (Theoretical and practical understanding) நன்கு அறியப்பட்டவர்

இவர் பிரமிடுகளின் உயரத்தைக் காணவும், கடற்கரைக்கும் கப்பலுக்கும் இடைப்பட்ட தூரத்தையும் கணக்கிடவும் வடிவியலைப் பயன்படுத்தினார். கிரேக்க நாட்டின் ஏழு ஞானிகள் அல்லது ஏழு துறவிகளில் ஒருவராக விளங்கினார். மேற்கத்திய பண்பாட்டின் முதல் தத்துவ மேதையாக மற்றவர்களால் அவர் மதிக்கப்பட்டார்



தேலீஸ்
(பொ.கா.மு 620 – 546)

கற்றல் விளைவுகள்

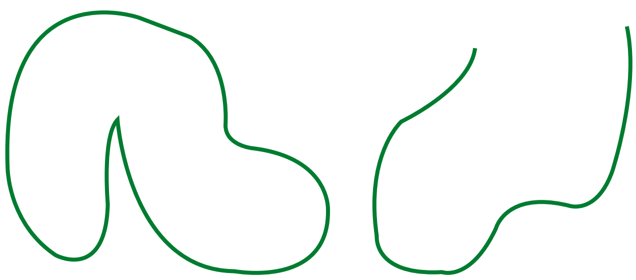
- நேரிய கோணங்கள் மற்றும் குத்தெதிர்க் கோணங்களின் மீது தேற்றங்களைப் புரிதல்.
- முக்கோணங்களின் கோணங்களின் கூடுதல் பண்பைப் புரிதல்.
- நாற்கரங்களை வகைப்படுத்துதல்.
- நாற்கரத்தின் பண்புகளைப் புரிதல் மற்றும் கணக்குகளைத் தீர்வு காண அவற்றைப் பயன்படுத்துதல்.
- முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையம் வரைதல்.
- முக்கோணத்தின் குத்துக் கோட்டு மையம் வரைதல்

4.1. அறிமுகம்

வடிவியலில் நாம் வடிவங்களைப் பற்றிப் படிக்கின்றோம். ஆனால் நீங்கள் வடிவங்களைப் படிப்பதற்கு என்ன இருக்கிறது என்று கேட்கலாம். வடிவங்களைக் கொண்டு என்னவெல்லாம் செய்யலாம் என நாம் முதலில் சிந்திப்போமா?

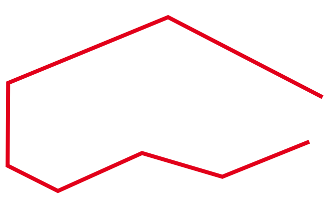
நாம் வடிவங்களை வரைகின்றோம். நாம் வடிவங்களை ஒப்பிடுகின்றோம். நாம் வடிவங்களை அளக்கின்றோம். வடிவங்களில் நாம் அளப்பது எதை?

கீழ்க்கண்ட வேறுபட்ட சில வடிவங்களை எடுத்துக்கொள்ளுங்கள்.



படம். 4.1

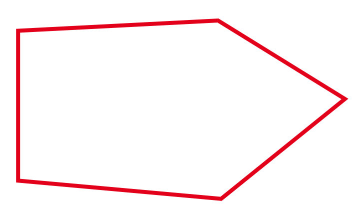
இரண்டிலும் வளைவரை வடிவத்தை உருவாக்குகின்றது. ஒன்று ஒரு பகுதியைச் சூழ்ந்து அடைபட்ட வளைவரை, மற்றொன்று திறந்த வளைவரை. நாம் ஒரு கயிற்றைக் (அல்லது கம்பியைக்) கொண்டு திறந்த வளைவரையின் நீளத்தை அளக்கலாம். அடைபட்ட வளைவரையின் எல்லையினை அளக்கலாம். இவற்றை விட நேர்க்கோடுகளை அளவுகோலினால் அளப்பது மிகவும் எளிதல்லவா? கீழ்க்காணும் இரண்டு வடிவங்களைக் கவனிக்க.



படம். 4.2

நாம் இப்பொழுது நேர்க்கோடுகளைக் கொண்டு உருவாக்கப்பட்ட அடைபட்ட வடிவங்களை மட்டும் கவனத்தில் கொள்ளப்போகின்றோம். இவற்றில் இருந்து பல சுவையான கருத்துக்களைப் பெறப்போகிறோம். படம் 4.2 திறந்த வளைவான வடிவத்தைக் குறிக்கிறது.

நாம் இங்கு வடிவங்களை வரைதல், ஒப்பீடு செய்தல் மற்றும் அளத்தல் என்பனவற்றுடன், மேலும் பல கருத்துக்களை அறியப் போகிறோம். அதற்காக நாம் அவற்றை விளக்கவேண்டும். நாம் இந்த வடிவங்களை எவ்வாறு விளக்குவது? (படம் 4.3ஐப் பார்க்க.)



படம். 4.3

அவை முழுவதும் நேர்க்கோடுகளால் உருவாக்கப்பட்டவை, முழுவதும் அடைபட்டவை.

நாம் அறிவியலில் காற்று, நீர் ஆகியவற்றுக்குச் சில பண்புகள் உள்ளன எனக் கற்றுள்ளோம். காற்று இடத்தை அடைத்துக்கொள்ளும். தண்ணீரானது அது இருக்கும் கலனைப் பொறுத்து வடிவத்தைப் பெறும், மேலிருந்து கீழாக விழும். இதே போல நாம் முக்கோணங்கள், செவ்வகங்கள், வட்டங்கள் என வரையும் அனைத்து வடிவங்களும் வேறுபட்டுத் தோன்றுவதை, வெவ்வேறான தனித்த பண்புகளைக்கொண்டு விளக்கலாம். நீங்கள் வடிவியலை நன்றாக அறியும் வேளையில் பூமியில் உள்ள பொருள்களுக்கு மட்டுமல்லாமல் எல்லாவற்றிற்கும் ஒரு வடிவத்தைக் கொடுக்க முடியும். இதன் முதற் படியாக நாம் தொடக்கப்பள்ளியில் சிறிய எண்கள் மற்றும் கணிதச் செயல்களைக் கற்றோம். இப்பொழுது அனைத்து எண்களுக்கும் அதைச் செயல்படுத்த தெரிந்து கொண்டோம். இதேபோல் நாம் மிக எளிய வடிவங்களின் பண்புகளை இப்பொழுது ஆழமாகக் கற்க இருக்கின்றோம். அவற்றை அறிந்து கொண்ட பின்பு இருபரிமாணம் (காகிதத்தில் நாம் வரைவது போல்) அல்லது முப்பரிமாணம் (வாழ்வில் நாம் பயன்படுத்தும் திட உருவங்கள் போல்) அல்லது எப்பரிமாணத்திலும் உள்ள வடிவங்கள் போன்ற மேலும் பலவற்றை விளக்கும் நுட்பங்களைக் கற்போம்.

செயல்பாடு 1

படம். 4.4

உன்னுடைய நண்பர் காகிதத்தில் ஒரு செவ்வகத்தின் படத்தை வரைந்து கொள்கிறார்.

கரும்பலகையின் முன்பாக நிற்கும் உனக்கு அது என்னவென்று தெரியாது.

அவர் அதே படத்தை, நீ கரும்பலகையில் மிகச்சரியாக வரைவதற்காக விளக்குகிறார்.

உங்கள் இருவருக்கும் செவ்வகத்தைப் பற்றி நன்றாகத் தெரியும், ஆகவே செவ்வகத்தை விளக்குவதும் வரைவதும் எளிது. மற்றவை எளிதல்ல.

இது எவ்வாறெனில் நாம் பார்த்த ஒரு நபரை நம்முடைய நண்பரிடம் பேசும்பொழுது "உயரமான, ஒல்லியான மனிதன், பெரிய மீசையுடையவன், வேகமாகப் பேசுகின்ற, மெல்லிய குரலைக்கொண்ட ..."

நாம் இவை போன்றே வடிவங்களுக்கும் செய்வோம்.

நாம் நினைக்கும் எந்த ஒரு வடிவத்தையும் நாம் விளக்கி, அதைக் கேட்டு மற்றொரு நபர் மிகச் சரியாக அதேபோல் உருவாக்க முடியுமா? ஆம். இயலுமே! இப்பொழுது வியப்பாக இல்லையா? வியப்பில் ஆழ்த்தும் விடையானது மிகவும் எளிதானது.

நாம் வடிவங்களை அதன் பண்புகளைக் கொண்டு விளக்க வேண்டும்.

நாம் இதனைக் கற்க ஏன் கடினப்பட வேண்டும்? ஓர் இயல்பான காரணம் என்னவென்றால், அனைத்து அறிவியல் மற்றும் பொறியியல் துறையிலும் வடிவியலின் தேவை இருக்கிறது. வடிவங்களின் கணிதப் புரிதல் இல்லாமல் நம்மால் கட்டடங்களின் வடிவமைப்பு அல்லது மேசைகள் மற்றும் நாற்காலிகள், அல்லது கைபேசியின் உள்ளே உள்ள சுற்றின் கட்டமைப்பு போன்றவற்றை வடிவமைக்க இயலாது. மற்றொரு முக்கியக் காரணமென்னவென்றால், வடிவியலானது உலகையும் அதில் உள்ள எல்லாவற்றையும் புதிய கண்ணோட்டத்தில் பார்க்க உதவுகிறது.

நீங்கள் பார்க்கும் அனைத்துப் பொருள்களும் எவ்வளவு சிக்கலாகத் தோன்றினாலும் அவை எளிய வடிவங்களின் தொகுப்பே என்பது புலப்படும். நீங்கள் ஒரு கணிதவியலாளரானால் மட்டும் என எண்ணாமல், ஓர் ஓவியரைப்போல் வேறுபட்ட பொருள்களின் சமச்சீர் மற்றும் வரிசை, ஒழுங்கையும் மெச்சத் தொடங்குவீர்கள். ஆம், வடிவியலானது உங்களை ஓர் ஓவியராகவும் ஆக்க உதவும்.

4.2 அடிப்படை வடிவியல் கருத்துகள் – மீள் பார்வை (Geometry Basics –Recall)

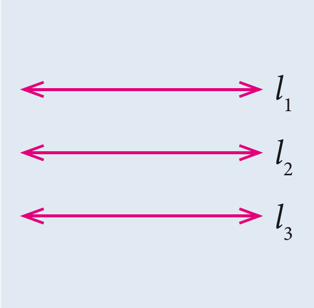
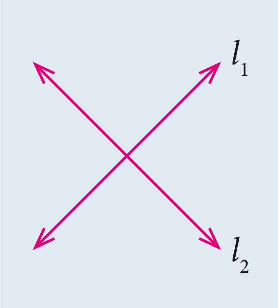
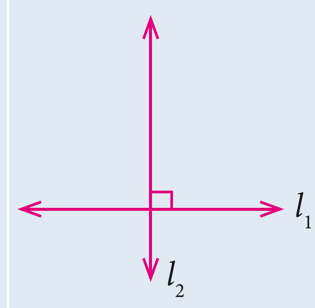
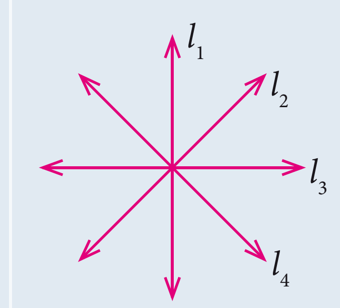
ஒரு சமதளத்தில் இரு நேர்க்கோடுகள் வரைந்தால் அவை இணைக் கோடுகளாகவோ அல்லது வெட்டும் கோடுகளாகவோ அமையும்.

இணைக் கோடுகள் : ஒன்றையொன்று சந்திக்காமல் ஒரே தளத்தில் செல்லும் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட கோடுகள்.

வெட்டும் கோடுகள் : இரண்டு கோடுகள் ஒரு பொதுவான புள்ளியில் சந்திக்கும்.

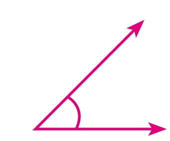
செங்குத்துக் கோடுகள் : இரு கோடுகள் ஒன்றையொன்று செங்கோணத்தில் வெட்டிக் கொள்ளும்.

ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள்: மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும்.

இணைக்கோடுகள்	வெட்டும் கோடுகள்	செங்குத்துக் கோடுகள்	ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள்
			
$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$		$l_1 \perp l_2$	

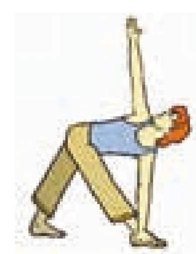
4.2.1 கோணங்களின் வகைகள் (Types of Angles)

நாம் அன்றாட வாழ்வில் கோணங்களைப் பயன்படுத்துகிறோம். குழாய் செப்பனிடுபவர் குழாய்களைச் சீராகப் பொருத்துவதற்குக் கோணத்தைப் பயன்படுத்துகிறார். மரவேலை செய்பவர்கள் தங்கள் கருவிகளைச் சரியான கோணத்தில் சரிசெய்து மரங்களைச் சரியான கோணத்தில் அறுக்கிறார்கள். வான்வழிப் போக்குவரத்துக் கட்டுப்பாட்டு அலுவலர்களும் (ATC- Air Traffic Controllers) விமானங்களை இயக்கக் கோணங்களைப் பயன்படுத்துகிறார்கள். சுண்டாட்ட (carrom) விளையாட்டு வீரர்கள் கோணங்களை நன்கு அறிந்திருந்தால் தங்கள் இலக்கைத் திட்டமிட முடியும். கோணமானது ஒரே கோட்டிலமையாத பொதுவான தொடக்கப் புள்ளியைக் கொண்ட இரு கதிர்களால் உருவாகின்றது.

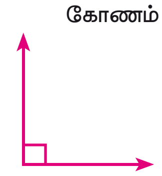


குறுங்கோணம்

90° ஐ விடவும் குறைவான கோணம்

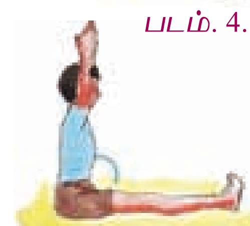


படம். 4.5

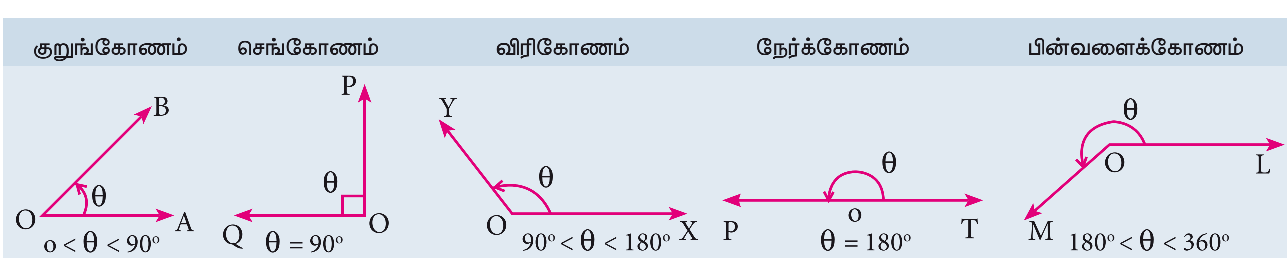


செங்கோணம்

சரியாக 90° அளவுள்ள கோணம்

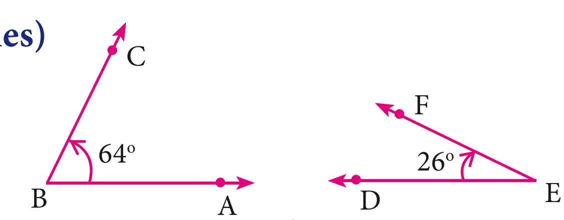


படம். 4.6



நிரப்புக் கோணங்கள் (Complementary Angles)

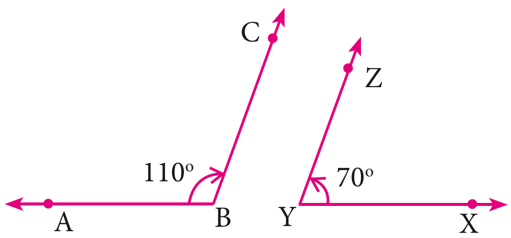
இரு கோண அளவுகளின் கூடுதல் 90° எனில், அக்கோணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று நிரப்புக் கோணங்களாகும். . எடுத்துக்காட்டாக, $\angle ABC = 64^\circ$ மற்றும் $\angle DEF = 26^\circ$, எனில், கோணங்கள்



படம். 4.7

$\angle ABC$ மற்றும் $\angle DEF$ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று நிரப்புக் கோணங்களாகும். ஏனென்றால் $\angle ABC + \angle DEF = 90°$

மிகை நிரப்புக் கோணங்கள் (Supplementary Angles)



படம். 4.8

இரு கோணங்களின் கூடுதல் $180°$ எனில் அக்கோணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று மிகை நிரப்புக் கோணங்களாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\angle ABC=110°$ மற்றும் $\angle XYZ=70°$ எனில், இங்கு, $\angle ABC + \angle XYZ = 180°$

$\therefore \angle ABC$ மற்றும் $\angle XYZ$ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று மிகை நிரப்பு கோணங்களாகும்.

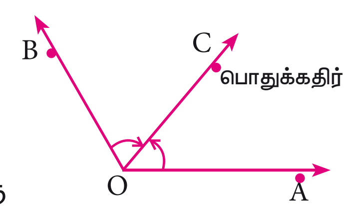
அடுத்துள்ள கோணங்கள் (Adjacent Angles)

இரு கோணங்கள்

i) பொதுவான முனைப் புள்ளியைப் பெற்றும்

ii) பொதுவான கதிர் ஒன்றினைப் பெற்றும்

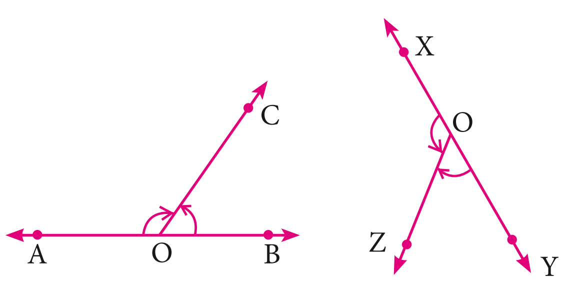
iii) அப்பொதுவான கதிரானது இரு பொதுவற்ற கதிர்களுக்கு இடையிலும் அமையுமாயின் அவை அடுத்துள்ள கோணங்களாகும்.



படம். 4.9

நேரிய கோணச் சோடிகள் (Linear Pair of Angles)

ஒரு கதிர் கோட்டின் மீது நிற்கும்போது உண்டாகும் அடுத்துள்ள கோணங்களின் கூடுதல் $180°$ எனில், அந்தக் கோணங்கள் நேரிய கோணங்கள் எனப்படும்.



படம். 4.10

$\angle AOC + \angle BOC=180°$

$\therefore \angle AOC$ மற்றும் $\angle BOC$ நேரிய கோணங்கள்

$\angle XOZ + \angle YOZ = 180°$

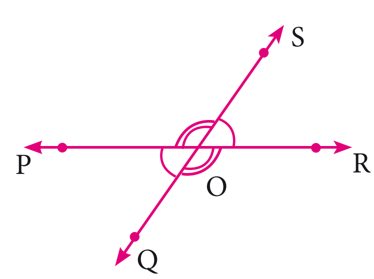
$\angle XOZ$ மற்றும் $\angle YOZ$ நேரிய கோணங்கள்

குத்தெதிர்க் கோணங்கள் (Vertically Opposite Angles)

இரு கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொண்டால் உண்டாகும் குத்தெதிர்க் கோணங்கள் சமம்.

படத்தில், $\angle POQ = \angle SOR$

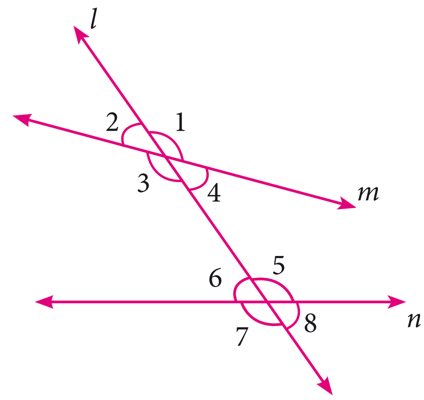
$\angle POS = \angle QOR$



படம். 4.11

4.2.2 குறுக்குவெட்டி (Transversal)

ஒரு கோடு இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட கோடுகளை வெவ்வேறு புள்ளிகளில் வெட்டுமேயானால் அது அக்கோடுகளின் குறுக்குவெட்டி எனப்படும்



படம். 4.12

வகை (i) ஒரு குறுக்கு வெட்டி இரு கோடுகளை வெட்டுவதால் எட்டுக் கோணங்கள் கிடைக்கின்றன. படத்தில் m மற்றும் n என்ற கோடுகளை l என்ற குறுக்குவெட்டி வெட்டுவதால்,

(i) ஒத்த கோணங்கள் : $\angle 1$ மற்றும் $\angle 5$, $\angle 2$ மற்றும் $\angle 6$, $\angle 3$ மற்றும் $\angle 7$, $\angle 4$ மற்றும் $\angle 8$

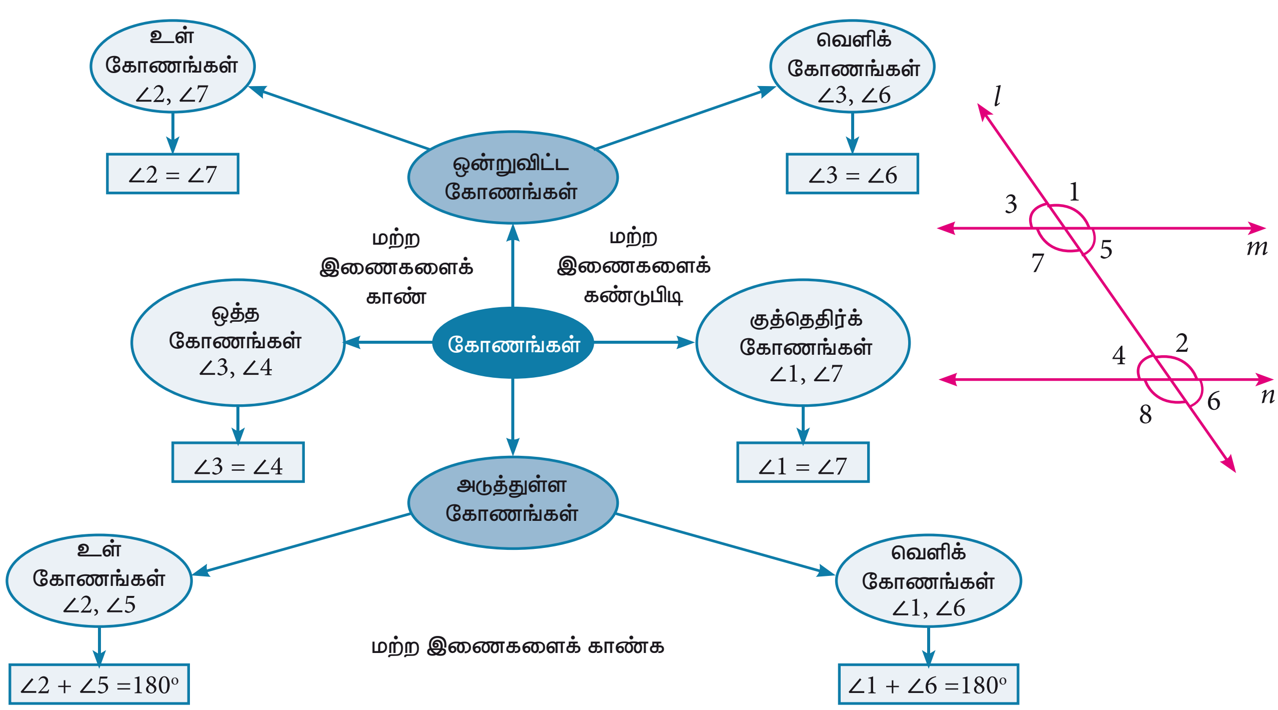
(ii) ஒன்றுவிட்ட உள் கோணங்கள்: $\angle 4$ மற்றும் $\angle 6$, $\angle 3$ மற்றும் $\angle 5$

(iii) ஒன்றுவிட்ட வெளிக் கோணங்கள் : $\angle 1$ மற்றும் $\angle 7$, $\angle 2$ மற்றும் $\angle 8$

(iv) $\angle 4$ மற்றும் $\angle 5$, $\angle 3$ மற்றும் $\angle 6$ என்பன குறுக்கு வெட்டியின் ஒரே பக்கத்தில் அமைந்த உள் கோணங்கள்.

(v) $\angle 1$ மற்றும் $\angle 8$, $\angle 2$ மற்றும் $\angle 7$ என்பன குறுக்கு வெட்டியின் ஒரே பக்கத்தில் அமைந்த வெளிக் கோணங்கள்.

வகை (ii) ஒரு குறுக்கு வெட்டியானது இரு இணைக் கோடுகளை வெட்டுவதால் வெவ்வேறு விதமான கோணச் சோடிகளைக் குறுக்கு வெட்டி ஏற்படுத்துகிறது.

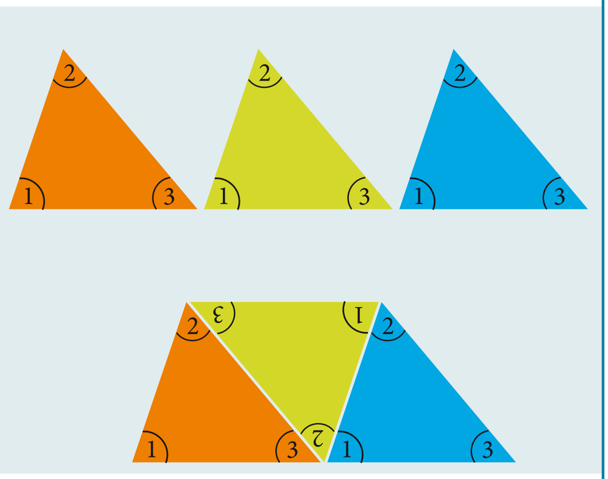


படம். 4.13

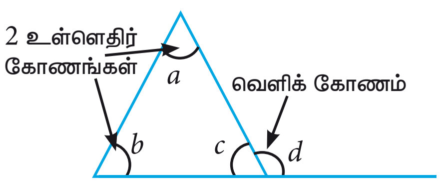
4.2.3 முக்கோணங்கள் (Triangles)

செயல்பாடு 2

மூன்று வெவ்வேறு வண்ணக் காகிதங்களை எடுத்து அவற்றை ஒன்றின் மீது ஒன்றாக வைக்கவும். மேல் காகிதத்தில் ஒரு முக்கோணம் வரைந்து, ஒரே அளவுள்ள வெவ்வேறு வண்ணங்கள் கொண்ட மூன்று முக்கோணங்கள் கிடைக்குமாறு வெட்டி எடுக்கவும். கொடுக்கப் பட்டுள்ளவாறு முனைகளையும், கோணங் களையும் குறிக்கவும். உள்கோணங்கள் $\angle 1, \angle 2$ மற்றும் $\angle 3$ ஐ ஒரே நேர்க்கோட்டில் அடுத்தடுத்து வருமாறு இடைவெளியில்லாமல் வைக்க மூன்று கோணங்கள் $\angle 1$, $\angle 2$ மற்றும் $\angle 3$ கிடைக்கும். இவற்றின் மொத்த அளவைப் பற்றி என்ன கூறுவாய்?



படம். 4.14



படம். 4.15

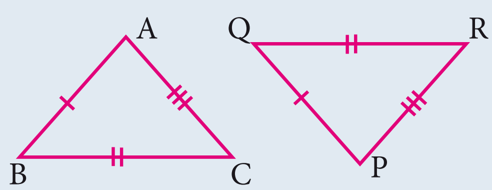
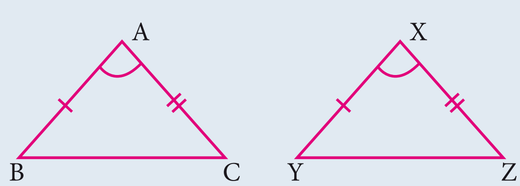
$d=a+b$

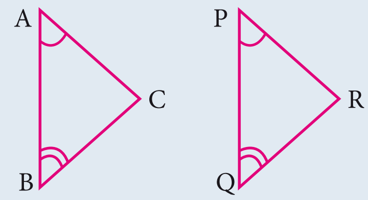
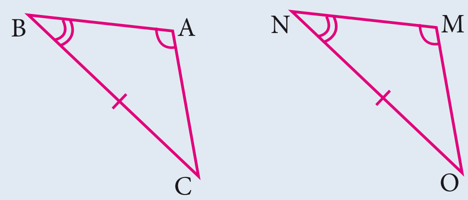
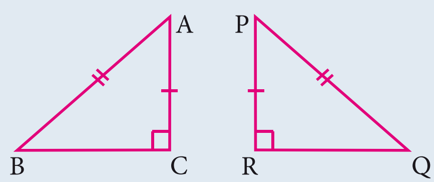
இதே படத்தைப் பயன்படுத்தி முக்கோணத்தின் வெளிக்கோணப் பண்பை விளக்க இயலுமா?

முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கம் நீட்டப்பட்டால் உண்டாகும் வெளிக்கோணமானது இரண்டு உள்ளெதிர்க் கோணங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம்.

4.2.4 சர்வசம முக்கோணங்கள் (Congruent Triangles)

ஒரு முக்கோணத்தின் அனைத்துப் பக்கங்களும், கோணங்களும் மற்றொரு முக்கோணத்தின் ஒத்த பக்கங்களுக்கும், ஒத்த கோணங்களுக்கும் சமமானால் அவ்விரு முக்கோணங்கள் சர்வசம முக்கோணங்கள் எனப்படும்

விதி	படங்கள்	காரணம்
ப–ப–ப		$AB = PQ$ $BC = QR$ $AC = PR$ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$
ப–கோ–ப		$AB = XY$ $\angle BAC = \angle YXZ$ $AC = XZ$ $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$

கோ–ப–கோ		$\angle A = \angle P$ $AB = PQ$ $\angle B = \angle Q$ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$
கோ–கோ–ப		$\angle A = \angle M$ $\angle B = \angle N$ $BC = NO$ $\Delta ABC \cong \Delta MNO$
செ–க–ப		$\angle ACB = \angle PRQ = 90°$ (R) AB = PQ கர்ணம் (H) $AC = PR$ (S) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

பயிற்சி 4.1

1. பின்வரும் கோணங்களின் நிரப்புக் கோணம் காண்க ($1° = 60'$ நிமிடங்கள், $1' = 60''$ வினாடிகள்)

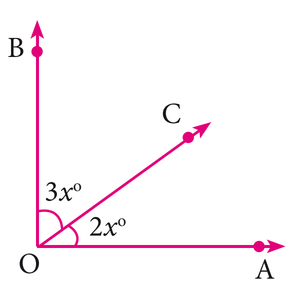
   (i) $70°$ (ii) $27°$ (iii) $45°$ (iv) $62°32'$

2. பின்வரும் கோணங்களின் மிகை நிரப்புக் கோணம் காண்க.

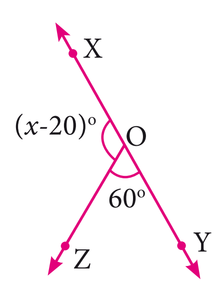
   (i) $140°$ (ii) $34°$ (iii) செங்கோணம் (iv) $121°48'$

3. x இன் மதிப்பு காண்க.

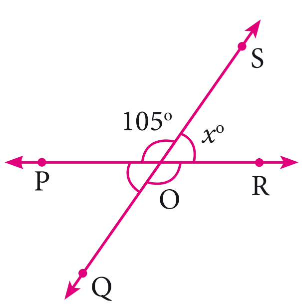
(i)



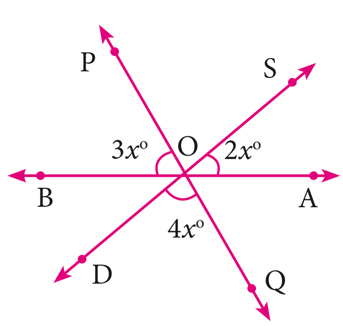
(ii)



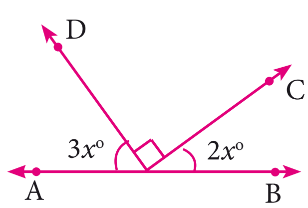
(iii)



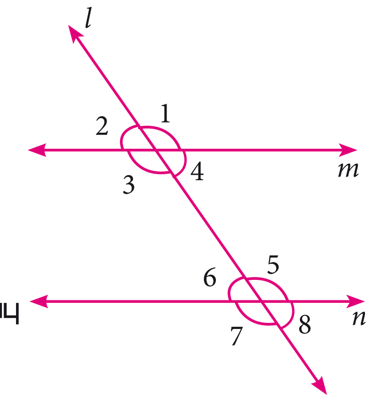
(iv)



(v)

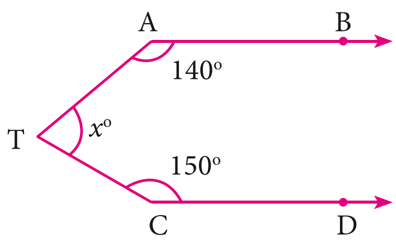


4. படத்தில் $m \parallel n$ மேலும் l ஆனது குறுக்கு வெட்டி எனில் $\angle 1 : \angle 2 = 11 : 7$ எனில், எட்டுக் கோணங்களையும் காண்க.

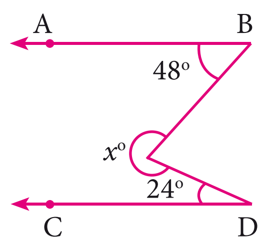


5. படத்தில், AB ஆனது CD இக்கு இணை எனில், x இன் மதிப்பு காண்க.

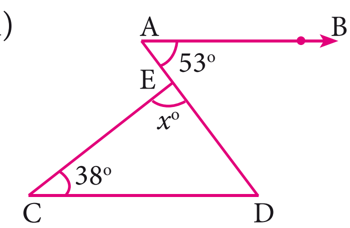
(i)



(ii)



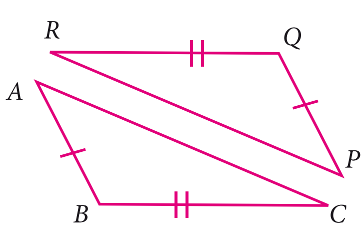
(iii)



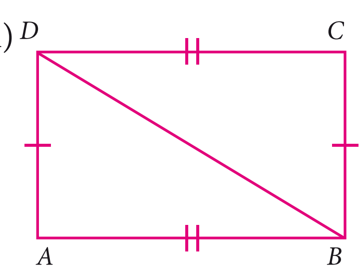
6. ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களின் விகிதம் $1 : 2 : 3$, எனில் முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு கோண அளவைக் காண்க.

7. கொடுக்கப்பட்டுள்ள முக்கோணச் சோடிகளைக் கருத்தில் கொள்க. மேலும் அவற்றில் ஒவ்வொரு சோடியும் சர்வசம முக்கோணங்களா எனக் காண்க. அவை சர்வசம முக்கோணம் எனில் எப்படி? சர்வசமமாக என்ன செய்ய வேண்டும்?

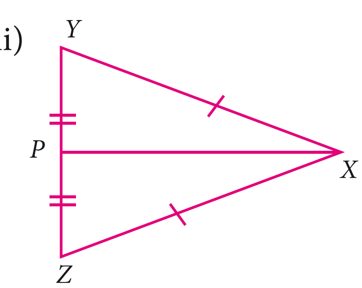
(i)



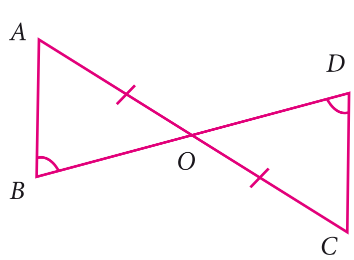
(ii)



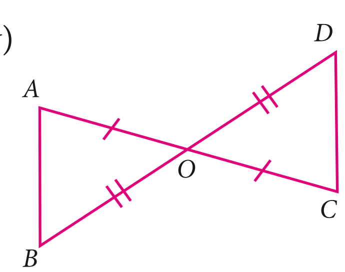
(iii)



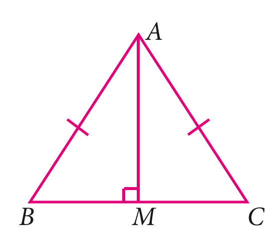
(iv)



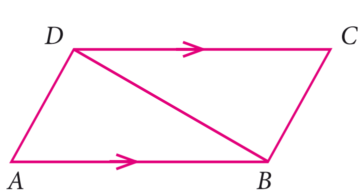
(v)



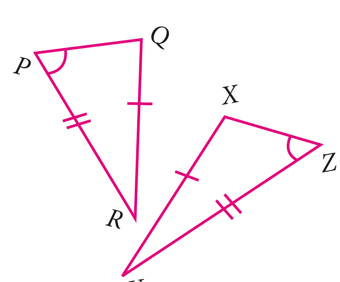
(vi)



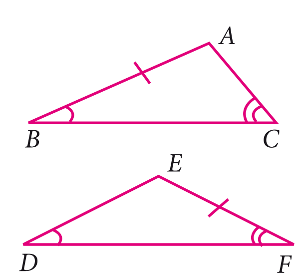
(vii)



(viii)

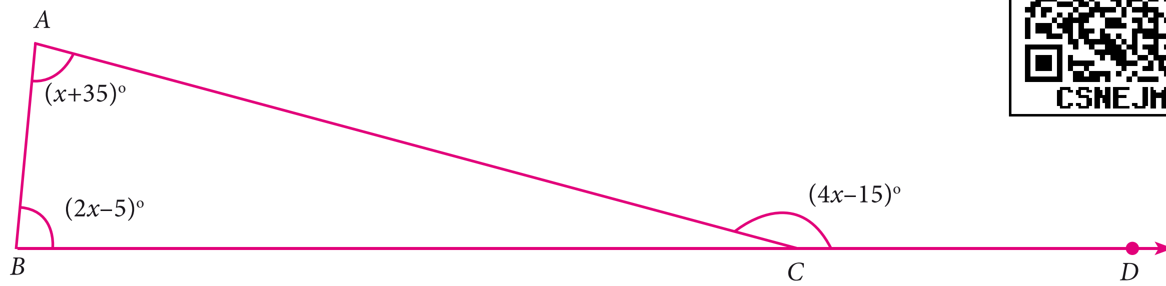


(ix)



8. ΔABC மற்றும் ΔDEF இல் $AB=DF$, மற்றும் $\angle ACB=70°$, $\angle ABC=60°$; $\angle DEF=70°$ மற்றும் $\angle EDF=60°$ எனில் முக்கோணங்கள் சர்வசமம் என நிறுவுக.

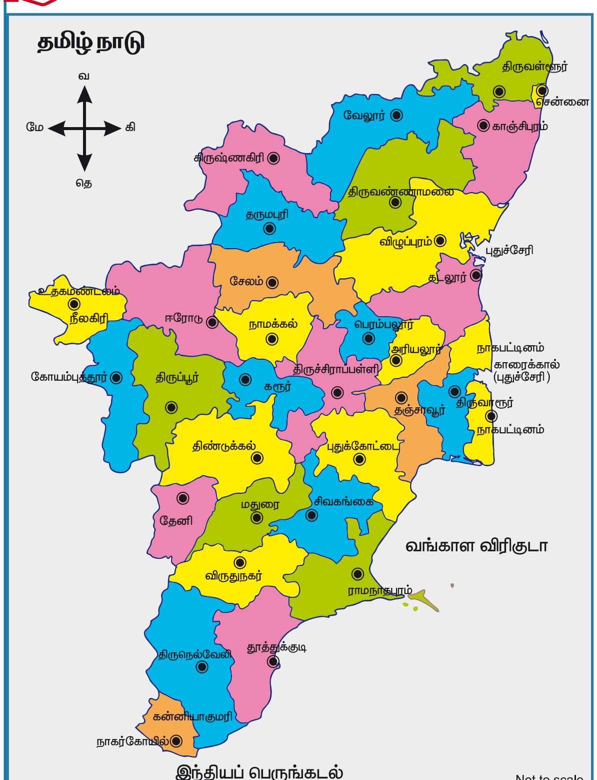
9. கொடுக்கப்பட்ட ΔABC இல் அனைத்துக் கோண அளவுகளையும் காண்க.



CSNEJH

4.3 நாற்கரங்கள் (Quadrilaterals)

செயல்பாடு 3



படம். 4.16

தமிழ்நாடு போக்குவரத்துக் கழகப் பேருந்துகள் கீழ்க்கண்ட நான்கு வழித்தடங்களை எடுத்துக் கொள்கின்றன. முதலாவது ஒருவழிப் பயணமாகும். மற்றவை சுற்றுப் பாதைப் பயணமாகும். வரைபடத்தில் இடங்களைக் கண்டறிந்து அவற்றைப் புள்ளிகளால் குறித்து, கோடுகளால் இணைத்து, வழித்தடத்தை வரைக. நான்கு வெவ்வேறு வழித்தடத்திலும் இணைக்கப் பட்டுள்ள இடங்கள் பின்வருமாறு

(i) நாகர்கோவில், திருநெல்வேலி, விருதுநகர், மதுரை

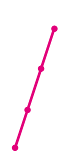
(ii) சிவகங்கை, புதுக்கோட்டை, தஞ்சாவூர், திண்டுக்கல்

(iii) ஈரோடு, கோயம்புத்தூர், தருமபுரி, கரூர்

(iv) சென்னை, கடலூர், கிருஷ்ணகிரி, வேலூர்

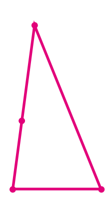
நாம் கீழ்க்கண்ட வடிவங்களைப் பெறுகின்றோம். நாம் இந்த இடங்களை இணைத்தால், அது பின்வருமாறு தோன்றும்.

(i)



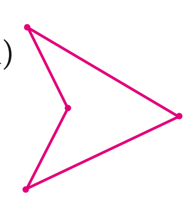
படம். 4.17

(ii)



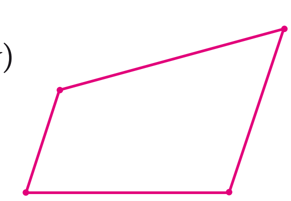
படம். 4.18

(iii)



படம். 4.19

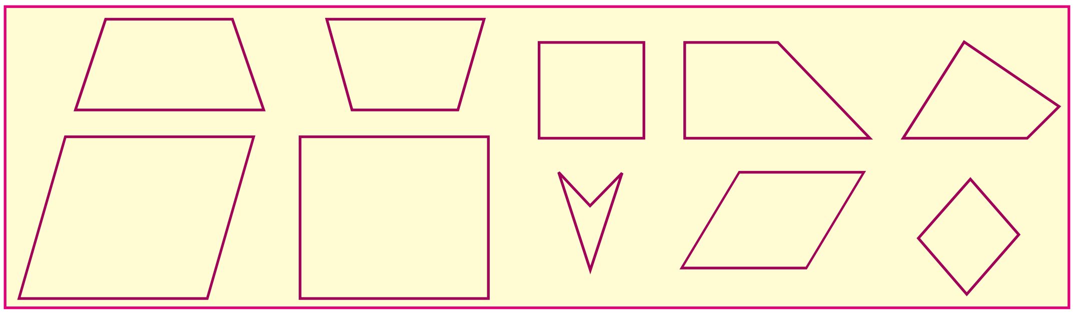
(iv)



படம். 4.20

நகரங்களின் பெயர்களைப் புள்ளிகளில் குறித்து வரைபடத்தில் உள்ளவாறே எவ்விதச் சுழற்சியும் இன்றி வடிவங்களை வரைக.

நாம் உற்று நோக்கினால், முதலாவது படத்தில் (4.17) நான்கு புள்ளிகள் ஒரே நேர்க் கோட்டில் அமைகின்றன என்பது புலப்படும். மற்ற மூன்றும் நாம் முன்பே கண்டுள்ளவாறு நேர்க்கோடுகளால் அடைபட்ட மூடிய வடிவங்கள் ஆகும். இந்த மூடிய வடிவங்களை அழைக்கச் சில பெயர்கள் நமக்குத் தேவைப்படுகின்றன. அவற்றை நாம் பலகோணம் என அழைப்போம்.



படம். 4.21

குறிப்பு

குழிவுப் பலகோணம் (*Concave Polygon*): பலகோணத்தின் ஏதேனும் ஒரு கோணத்தின் அளவு 180° யை விட அதிகமாக இருந்தால் அது குழிவுப் பலகோணமாகும்

குவிவுப் பலகோணம் (*Convex Polygon*): பலகோணத்தின் அனைத்து உட்கோணங்களும் 180° யை விடக் குறைவாக இருக்கும் (மூலை விட்டங்கள் பலகோணங்களுக்கு உள்ளேயே அமையும்).

பலகோணம் எவ்வாறு தோற்றமளிக்கும்? அவற்றின் பக்கங்களின் இரு முனைகளிலும் புள்ளிகள் இருக்கும். நாம் இந்தப் புள்ளிகளைப் பலகோணத்தின் முனைகள் என அழைப்போம். இந்த முனைகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டுகளே பக்கங்கள். *Poly* என்றால் பல என்பதைக் குறிக்கும். *Polygon* என்பது பல பக்கங்களைக் கொண்ட வடிவம் என்று பொருள்படும்.

ஒரு பலகோணத்திற்கு எத்தனை பக்கங்கள் இருக்கும்? ஒன்றா? ஆனால் இது ஒரு சாதாரணக் கோட்டுத்துண்டு. இரண்டா? ஆனால் இரண்டு பக்கங்களைக் கொண்டு மூடிய வடிவத்தை எவ்வாறு பெற இயலும்? மூன்றா? ஆம். இதை முன்பே அறிந்துள்ளோம். அதுதான் முக்கோணம். இப்பொழுது நான்கு பக்கங்கள்? சதுரம் மற்றும் செவ்வகம் நான்கு பக்கங்களைக் கொண்ட பலகோணத்தின் எடுத்துக்காட்டுகள், ஆனால் அவை மட்டுமன்று, இங்கு உள்ளவை நான்கு பக்கங்கள் கொண்ட பலகோணங்களுக்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள். இவற்றை நாம் நாற்கரங்கள் என அழைப்போம்.

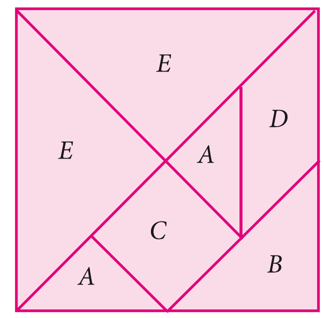
சிந்தனைக் களம்

உங்களுக்கு *bi-cycles* (இரு சக்கர வாகனம்) மற்றும் *tri-cycles* (முச்சக்கர வாகனம்) தெரியுமா? எந்தவொரு சொல்லின் முன்பும் நாம் இவற்றை எப்பொழுது இணைக்கலாம்? 2 (*bi*) அல்லது 3 (*tri*) என இணைக்கலாம். இதேபோல் 4 (*quadri*) என்பது நான்கையும் (*quadri cycles*) நான்கு சக்கர மிதிவண்டிகளையும் குறிக்கும். மேலும் (*Lateral*) 'கரம்' என்பது பக்கங்களைக் குறிக்கும். எனவே, நாற்கரம் (*quadrilateral*) என்பது 4– பக்கங்களைக் கொண்ட வடிவம். உங்களுக்கு முக்கரங்கள் தெரியுமல்லவா? அவை முக்கோணங்கள் தானே. நான்கிற்குப் பிறகு? நமக்கு 5 – *Penta*, 6 – *hexa*, 7– *hepta*, 8 – *octa*, 9 – *nona*, 10 – *deca* என ஒரு மரபு காணப்படுகிறது.

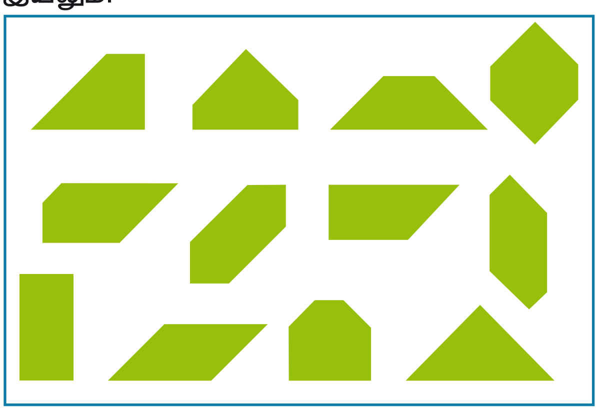
Trigons என்பது முக்கோணங்கள் என அழைக்கப்படும். *quadrigons* என்பது நாற்கரங்கள் என அழைக்கப்படும். ஆனால் அதற்கு பிறகே நாம் ஐங்கோணம், அறுங்கோணம், எழுங்கோணம், எண்கோணம், நவகோணம், தசகோணம் என்பனவற்றைப் பெற்றோம். இதற்கும் மேலாக 11– கோணம், 12– கோணம் முதலியனவும் உள்ளன. ஒருவேளை உங்களால் 23 – கோணம் வரைய இயலும்.

செயல்பாடு 4

இது ஒரு டேன்கிராம் (*tangram*) புதிரின் நகல் ஆகும். டேன்கிராம் புதிர் ஒரு சதுரத்திருந்து வெட்டி எடுக்கப்பட்ட ஏழு வடிவியல் துண்டுகளை உடையது. இந்தத் துண்டுகள் டேன்கள் (*tans*) என அழைக்கப்படும். இவற்றைக் கொண்டு பல்வேறு அமைப்புகள், பறவைகள், மனிதர்கள், எண்கள், வடிவியல் வடிவங்கள் மற்றும் பலவற்றை உருவாக்க இயலும்.

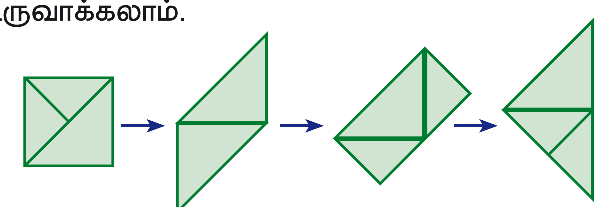


படம். 4.22



படம். 4.23

இந்தத் துண்டுகளைப் பல்வேறு வழிகளில் பயன்படுத்தி வேறுபட்ட பலகோணங்களையும் உருவாக்கலாம்.



படம். 4.24

இங்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள் (படம் 4.23 ஐப் பார்க்க.)

மூன்று முக்கோணத் துண்டுகளைப் பயன்படுத்தி ஒரு சதுரம், ஒரு முக்கோணம், ஒரு செவ்வகம் அல்லது ஓர் இணைகரம் உருவாக்குக. சரிவகத்தை, 5 துண்டுகளைப் பயன்படுத்தி உருவாக்குக. அறுங்கோணத்தை, 7 துண்டுகளைப் பயன்படுத்தி உருவாக்குக.

இங்கு ஒருவர் ஒரு சதுரத்தை (3 முக்கோணங்களால் உருவானது) எவ்வாறு ஒரு பெரிய முக்கோணமாக மாற்ற இயலும் என்பதைக் காணலாம். இதைப்போல் ஒரு மாற்றத்தை உருவாக்க முயற்சி செய்க (படம் 4.24 ஐப் பார்க்க.)

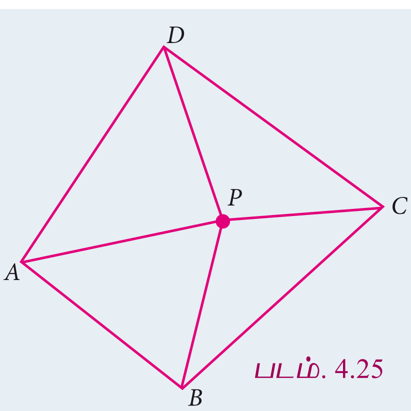
செயல்பாடு 5

பலகோணத்தின் கோணங்களின் கூடுதல்

ஏதேனும் ஒரு நாற்கரம் $ABCD$ ஐ வரைக.

அதன் உள்ளே P என்ற புள்ளியை உருவாக்குக. துண்டுகள் PA, PB, PC மற்றும் PD ஐ இணைக்க. நமக்கு இப்பொழுது நான்கு முக்கோணங்கள் கிடைத்துள்ளன.

நான்கு முக்கோணங்களின் அனைத்துக் கோணங்களின்



படம். 4.25

கூடுதல் எவ்வளவு? முனை P இல் கோணங்களின் கூடுதல் எவ்வளவு? உன்னால் இப்பொழுது நாற்கரம் $ABCD$ இன் கோணங்களின் கூடுதல் காண இயலுமா?

இதே முறையை மற்றப் பலகோணங்களுக்கும் விரிவுபடுத்த இயலுமா?

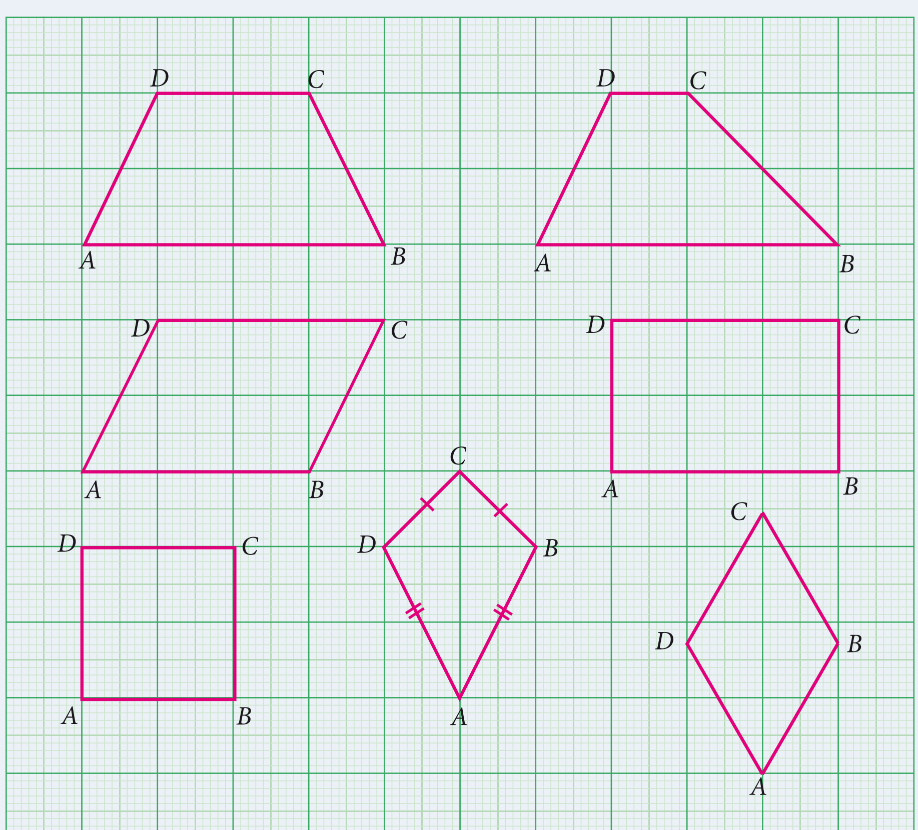
சிந்தனைக் களம்

1. பலகோணத்தின் பக்கம் $(n \geq 3)$, எனில் அதன் உள் கோணங்களின் கூடுதல் $(n-2)\times 180°$
2. ஒழுங்கு பல கோணத்திற்கு

- ஒவ்வொரு உள் கோணத்தின் மதிப்பு $\frac{(n-2)}{n}\times 180°$
- ஒவ்வொரு வெளிக் கோண மதிப்பு $\frac{360°}{n}$
- குவிவு பலகோணத்தின் (*Convex polygon*) பக்கங்களை நீட்டுவதால் உண்டாகும் வெளிக் கோணங்களின் கூடுதல் $360°$.
- பலகோணத்தின் பக்கங்கள் n எனில், அதன் மூலை விட்டங்களின் எண்ணிக்கை $\frac{n(n-3)}{2}$

செயல்பாடு 6

பின்வரும் சிறப்பு நாற்கரங்களை வரைபடத்தாளில் வரைக. நாற்கரத்தின் பண்புகளைப் பக்கங்கள் மற்றும் கோணங்கள் அடிப்படையில் வெளிக்கொணர, அவற்றின் பக்கங்கள் மற்றும் கோணங்களை அளந்து அட்டவணையை நிரப்புக.



படம். 4.26

வ. எண்	நாற்கரத்தின் பெயர்கள்	பக்கங்களின் நீளம்				கோண அளவுகள்			
		AB	BC	CD	DA	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$
1	சரிவகம்								
2	இருசமபக்கச் சரிவகம்								
3	இணைகரம்								
4	செவ்வகம்								
5	சாய்சதுரம்								
6	சதுரம்								
7	பட்டம்								

நீங்கள் பதிவிட்ட விவரங்களில் இருந்து சில அமைப்புகளைக் காண்கின்றீர்களா? நாம் பல பண்புகளைக் காண்கின்றோம். ஆனால் அவை பொதுவான உண்மையா அல்லது இந்த வடிவங்களுக்கு மட்டும் நிகழ்ந்தவையா? அதை நாம் அறிவது எப்படி? என்ன பண்புகளை நாம் காண இருக்கின்றோம் என்பது இன்னும் சரியாகப் புலப்படவில்லை. இதற்கு விடை காண நாம் முன்பே அறிந்தவற்றிற்குப் பின்னோக்கிச் சென்று அந்த இடத்திலிருந்து பார்ப்பதே சரியான வழியாக இருக்கும். நமக்குச் செவ்வகத்தைத் தெரியும். எனவே, நாம் செவ்வகத்தின் பண்புகள் என்ன எனக் கேட்டுக்கொள்வோம். அவையாவன:

- எதிர்ப் பக்கங்கள் சமம். (1)
- அனைத்துக் கோணங்களும் சமம். அவை ஒவ்வொன்றும் $90°$. (2)
- அடுத்துள்ள பக்கங்கள் சமமாக இருக்கலாம் அல்லது இல்லாமல் இருக்கலாம். (3)

இவற்றில் கடைசிக் கூற்றுகளை கொண்டு எந்த முடிவையும் எடுக்க இயலாது. (கணிதவியலாளர்கள் இத்தகைய கூற்றை தனியாக கூறவேண்டியதில்லை என்பர்) மேலும், அவர்கள் அவற்றை எழுதுவதையும் தவிர்ப்பர். குறிப்பாக அடுத்துள்ள பக்கங்களுக்குப் பொதுவான முனை இருக்கும் மற்றும் எதிர்ப்பக்கங்களுக்குப் பொதுவான முனை இருக்காது. சதுரம் மேற்கூறிய அனைத்துப் பண்புகளையும் பெற்றுள்ளது. ஆனால் (3)வது பண்பை அடுத்துள்ள பக்கங்கள் சமம் (4) என எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். மேலும் (1) மற்றும் (4) கூற்றுக்களை இணைத்துப் பார்த்தால் சதுரத்தின் அனைத்துப் பக்கங்களும் சமம் என்பது தெளிவாகும்.

அதனால் ஒவ்வொரு சதுரமும் செவ்வகமாகிவிடும். ஆனால் செவ்வகமானது எப்போதும் சதுரமாகாது. இது நாற்கரத்தை பக்கங்கள் மற்றும் கோணங்கள் அடிப்படையில் வகைப்படுத்தும் வழியை எளிமைப்படுத்துகிறது.

4.3.1 சில சிறப்பு நாற்கரங்களின் பெயர்கள் (Special Names for Some Quadrilaterals)

1. ஓர் இணைகரம் என்பது எதிர்ப்பக்கங்கள் இணையாக மற்றும் சமமாக உள்ள நாற்கரமாகும்.
2. ஒரு சாய்சதுரம் என்பது எதிர்ப்பக்கங்கள் சமமாகவும் மற்றும் எல்லாப் பக்கங்களும் சமமாகவும் உள்ள நாற்கரமாகும்.

3. ஒரு சரிவகம் என்பது ஒரு சோடி எதிர்ப் பக்கங்கள் இணையாக உள்ள நாற்கரமாகும்.

ஒரு சில இணைகரங்கள், சாய்சதுரங்கள் மற்றும் சரிவகங்களை வரைக.

படம். 4.27

பண்புகளைப் பட்டியலிடுவதின் பெரிய பயன் என்னவென்றால் நாம் அவற்றிற்கு இடையேயுள்ள உறவுகளை உடனடியாகத் தெரிந்துகொள்ளலாம்.

- ஒவ்வோர் இணைகரமும் சரிவகமாகும். ஆனால் ஒவ்வொரு சரிவகமும் இணைகரமாக இருக்க வேண்டியதில்லை.
- ஒவ்வொரு சாய்சதுரமும் இணைகரமாகும். ஆனால் ஒவ்வோர் இணைகரமும் சாய்சதுரமாக இருக்க வேண்டியதில்லை.
- ஒவ்வொரு செவ்வகமும் இணைகரமாகும். ஆனால் ஒவ்வோர் இணைகரமும் செவ்வகமாக இருக்க வேண்டியதில்லை.
- ஒவ்வொரு சதுரமும் சாய்சதுரமாகும். மேலும், ஒவ்வொரு சதுரத்தையும் இணைகரம் என நிறுவலாம்.

மாற்று வழியில் அமையாது என்பதைக் கணிதவியலாளர் மறுதலை உண்மையல்ல எனப் பொதுவாகக் கூறுவர். இப்பொழுது மாற்றுவழியில் அமைவது எப்போது? என்ற அழகிய வினா உடனடியாக எழுகின்றது. அதாவது இணைகரமானது எப்பொழுது செவ்வகமாகும்? எந்தவொரு இணைகரத்தில் எல்லாக் கோணங்களும் சமமாகும் போது, அது ஒரு செவ்வகமாகும். (நாம் ஏன் இதைக் காணவேண்டும்?) இப்பொழுது நாம் மேலும் பல சுவாரசியமான பண்புகளை உணர்ந்திருப்போம். அதாவது, சாய்சதுரம் என்பது எல்லாப் பக்கங்களும் சமமாக உள்ள இணைகரமே என்பதை நாம் கண்டோம்.

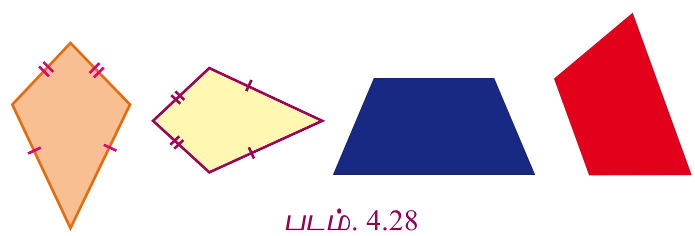
4.3.2 மேலும் சிறப்புப் பெயர்கள் (More Special Names)

நாற்கரத்தின் எல்லாப் பக்கங்களும் சமமாகும்பொழுது, நாம் அதைச் சமபக்கம் என அழைப்போம். நாற்கரத்தின் எல்லாக் கோணங்களும் சமமாகும்பொழுது, நாம் அதைச் சமகோணம் என அழைப்போம். முக்கோணங்களில் அனைத்துப் பக்கங்களும் சமமெனில், நாம் சமப் பக்க முக்கோணங்கள் எனக் கண்டுள்ளோம். இப்பொழுது நாம் அவற்றைச் சம கோணமுள்ள முக்கோணங்கள் எனவும் அழைக்கலாமே!

இவ்வாறாக,

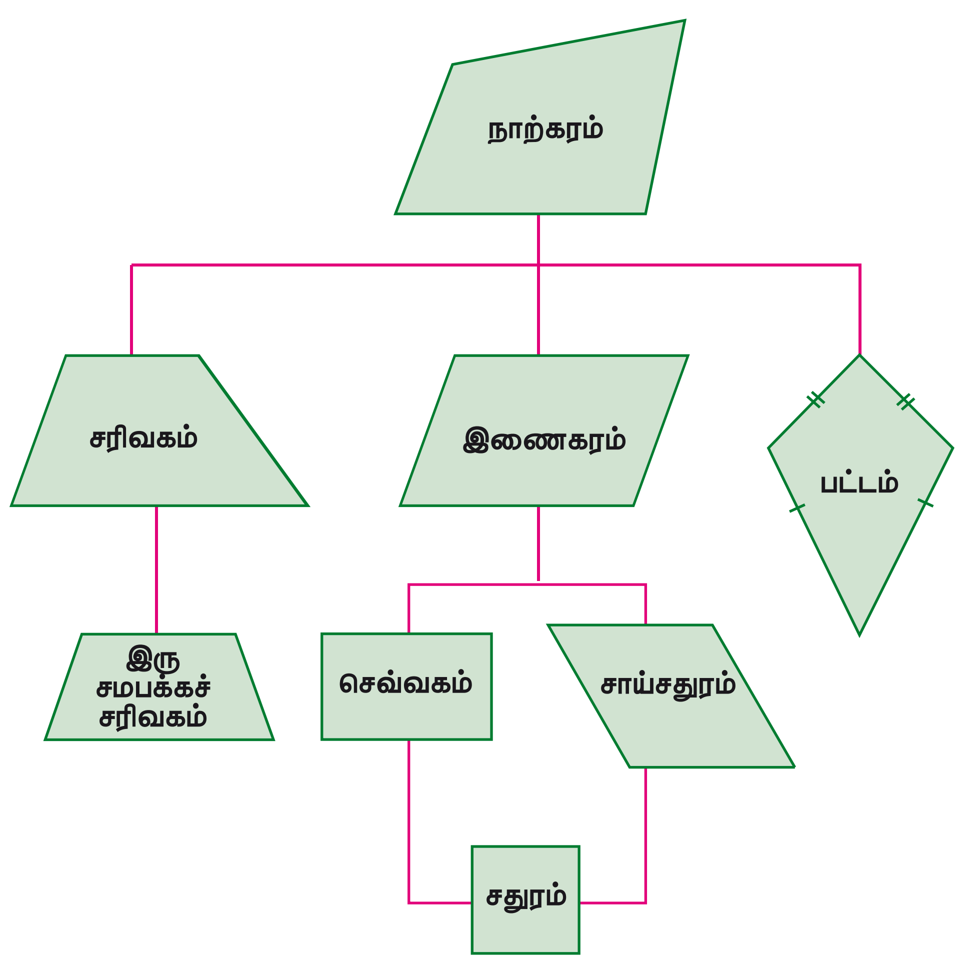
- ஒரு சாய்சதுரம் என்பது சமபக்க இணைகரமாகும்.
- ஒரு செவ்வகம் என்பது சமகோண இணைகரமாகும்.
- ஒரு சதுரம் என்பது சமபக்க மற்றும் சமகோண இணைகரமாகும்.

இங்குள்ள மேலும், இரு சிறப்பு நாற்கரங்களைப் பட்டம் மற்றும் இரு சமபக்கச் சரிவகம் என அழைப்போம்



படம். 4.28

4.3.3 நாற்கரத்தின் வகைகள் (Types of Quadrilaterals)



படம். 4.29

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடையளிக்கவும்.

(i) சாய் சதுரத்தின் எதிர்க் கோணங்கள் சமமா?

(ii) ஒரு சோடி எதிர்ப் பக்கங்கள் சமமாகவும், இணையாகவும் உள்ள நாற்கரம் ______________

(iii) பட்டத்தில் எதிர்ப் பக்கங்கள் சமமா?

(iv) சமக் கோணங்களையும் சமமற்ற பக்கங்களையும் கொண்ட இணைகரம் எது?

(v) சமப் பக்கங்களையும், சமமற்ற கோணங்களையும் கொண்ட இணைகரம் எது?

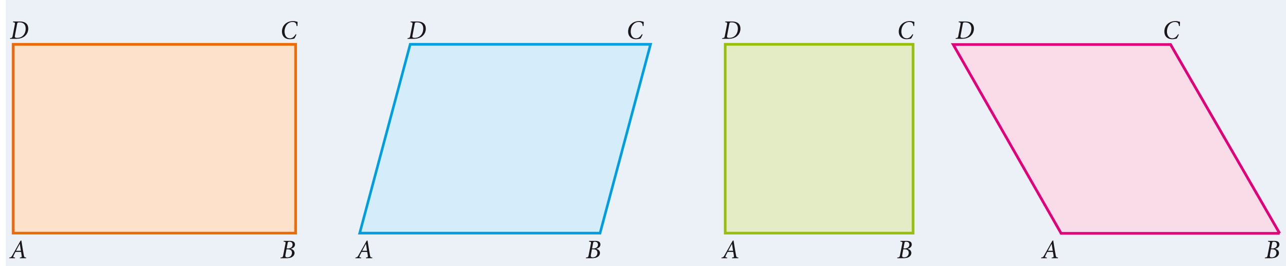
(vi) சமப் பக்கங்களையும் சமக் கோணங்களைகயும் கொண்ட இணைகரம் எது?

(vii) _________ என்பது ஒரு செவ்வகம், ஒரு சாய் சதுரம் மற்றும் ஓர் இணைகரம் ஆகும்.

செயல்பாடு 7

படி – 1

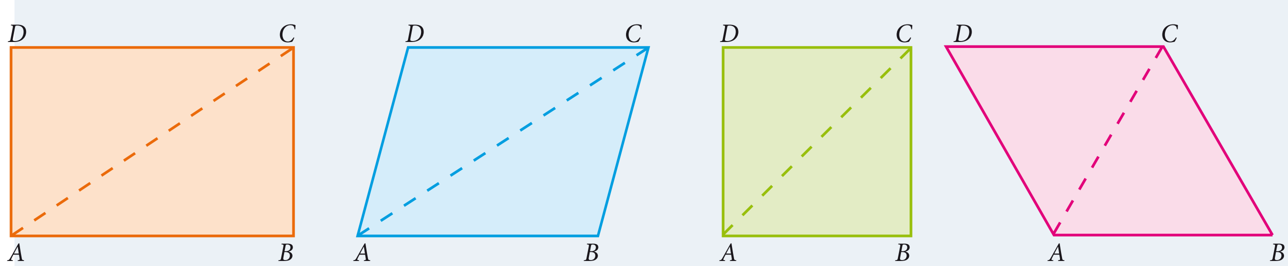
வண்ணக் காகிதத் தாளில் நான்கு வேறுபட்ட நாற்கரங்களை வெட்டி எடுக்கவும்.



படம். 4.30

படி – 2

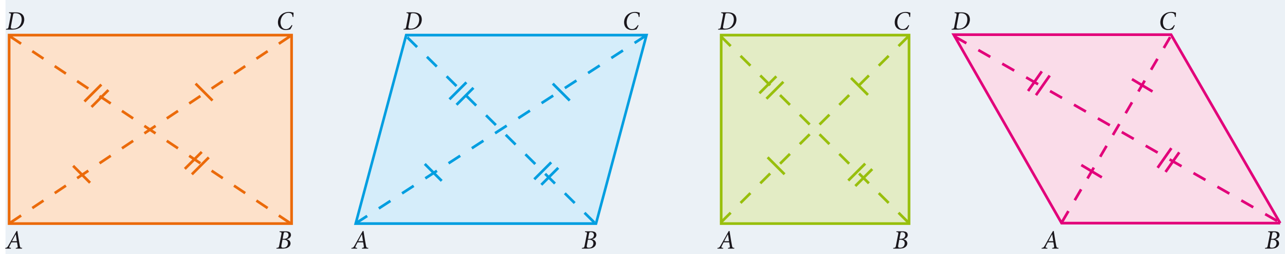
நாற்கரங்களை மூலை விட்டங்களைப் பொறுத்து மடிக்கவும். மடிப்புகளை நன்றாக அழுத்திக் கோடுகளை உருவாக்கவும். இங்கு புள்ளிக் கோடுகள் மடிப்புகளைக் குறிக்கின்றன.



படம். 4.31

படி – 3

நாற்கரங்களின் இரண்டு மூலை விட்டங்களையும் மடித்து நன்றாக அழுத்தி மடிப்புகளை உருவாக்குக



படம். 4.32

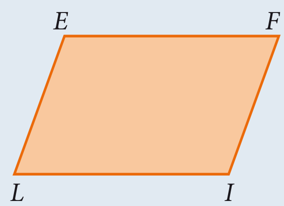
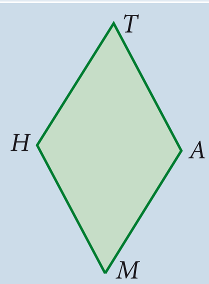
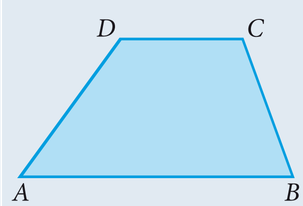
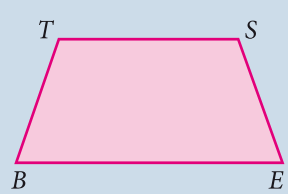
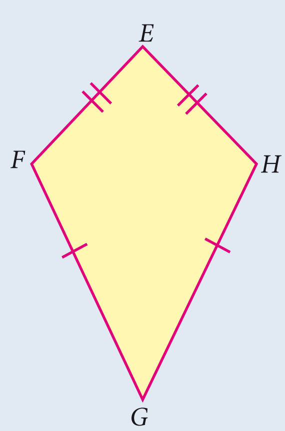
இவற்றில் இரண்டு எதிர் எதிர் முக்கோணங்கள் சர்வசமமாக இருப்பதை அறியலாம். மூலைவிட்டப் பகுதிகளின் நீளங்கள் மற்றும் அவற்றிற்கு இடையேயுள்ள கோணங்களை அளந்து எழுதுக.

இதேபோல் சரிவகம் , இருசமபக்க சரிவகம் மற்றும் பட்டத்திற்கும் செய்க.

மேற்பட்ட செயல்பாட்டிலிருந்து, மூலை விட்டங்களின் நீளங்களையும், இடைப்பட்ட கோணங்களையும் அளந்து அட்டவணைப்படுத்துக.

வ. எண்	நாற்கரத்தின் பெயர்கள்	மூலைவிட்டத்தின் நீளங்கள்						கோணங்களின் அளவுகள்			
		AC	*BD*	*OA*	*OB*	*OC*	*OD*	$\angle AOB$	$\angle BOC$	$\angle COD$	$\angle DOA$
1	சரிவகம்										
2	இருசமபக்கச் சரிவகம்										
3	இணைகரம்										
4	செவ்வகம்										
5	சாய்சதுரம்										
6	சதுரம்										
7	பட்டம்										

4.3.4 நாற்கரங்களின் பண்புகள் (Properties of Quadrilaterals)

பெயர்	வரைபடம்	பக்கங்கள்	கோணங்கள்	மூலை விட்டங்கள்
இணைகரம்		எதிர்ப் பக்கங்கள் இணை மற்றும் சமம்.	எதிர்க் கோணங்கள் சமம் மற்றும் அடுத்துள்ள கோணங்களின் கூடுதல் 180°.	மூலை விட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இரு சமக் கூறிடும்.
சாய்சதுரம்		அனைத்துப் பக்கங்களும் சமம் மற்றும் எதிர்ப்பக்கங்கள் இணை.	எதிர்க் கோணங்கள் சமம் மற்றும் அடுத்துள்ள கோணங்களின் கூடுதல் 180°.	மூலை விட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இரு சமக் கூறிடும்.
சரிவகம்		ஒரு சோடி எதிர் பக்கங்கள் இணை.	இணையில்லாப் பக்கங்களின் முனைகளில் உள்ள கோணங்கள் மிகை நிரப்பு.	மூலை விட்டங்கள் சமமாக இருக்க வேண்டிய தேவை இல்லை.
இருசமபக்கச் சரிவகம்		ஒரு சோடி எதிர்ப் பக்கங்கள் இணை, இணையில்லாப் பக்கங்களின் அளவுகள் சமம்.	இணைப் பக்கங்களின் முனைகளில் உள்ள கோணங்கள் சமம்.	மூலை விட்டங்கள் சமம்.
பட்டம்		இரு சோடி அடுத்துள்ள பக்கங்கள் சமம்.	ஒரு சோடி எதிர்க் கோணங்கள் சமம்.	1. மூலை விட்டங்கள் செங்கோணத்தில் வெட்டிக் கொள்ளும். 2. சிறிய மூலை விட்டத்தை பெரிய மூலை விட்டம் இரு சமக் கூறிடும். 3. பெரிய மூலை விட்டமானது, பட்டத்தை இரண்டு சர்வசம முக்கோணங் களாகப் பிரிக்கும்.

செயல்பாடு 8

செய்முறை

1. வரைபடத் தாளில் இணைகரத்தை வரைந்து அதனை வெட்டி எடுக்க.
2. இணைகரத்தின் மூலை விட்டங்களை வரைக.
3. மூலை விட்டங்களின் வழியாக வெட்டி இரு முக்கோணங்களைப் பெறுக
4. கிடைத்த முக்கோணங்களில் ஒன்றைத் திருப்பி மற்றொன்றின் மீது வைக்க.

இதிலிருந்து நீவீர் அறிவது யாது?

குறிப்பு

(i) ஒரு செவ்வகம் சமகோணமுள்ள இணைகரமாகும்.

(ii) ஒரு சாய் சதுரம் சமபக்கம் உள்ள இணைகரமாகும்.

(iii) ஒரு சதுரம் என்பது சமபக்கம் மற்றும் சம கோணமுள்ள இணைகரமாகும்.

(iv) சதுரம் ஒரு செவ்வகம், ஒரு சாய் சதுரம் மற்றும் இணைகரமாகும்.

செயல்பாடு 9

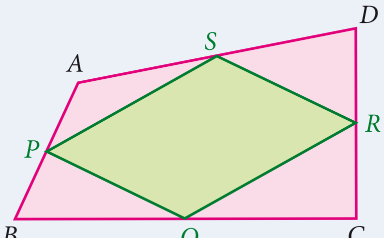
படிமுறை

நாற்கரம் $ABCD$ ஐக் காகிதத்தில் ஏதேனும் ஓர் அளவைக் கொண்டு வரைந்து வெட்டி எடுக்க. பக்கங்கள் AB, BC, CD மற்றும் DA இன் மையப் புள்ளிகள் முறையே P, Q, R மற்றும் S ஐ பக்கங்களை மடித்து உருவாக்குக. நாற்கரம் $PQRS$ ஐ வெட்டி எடுக்க.. நாற்கரத்தை மடித்து (i) PQ ஆனது SRஇன் மீது பொருந்துமா எனக் காண்க? இதேபோல் மாற்று முறையில் மடித்து QR ஆனது PS இன் மீது பொருந்துமா எனக் காண்க?

உற்றுநோக்குக

(i) இதிலிருந்து என்ன அறிகிறாய்?

(ii) கிடைத்த வடிவத்தின் பெயர் என்ன?



படம். 4.33

கீழ்க்கண்ட நாற்கரங்களை வரைந்து அவற்றின் பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகளை இணைத்து, இணைத்ததால் கிடைத்த வடிவங்களைக் காண்க. மேலும், அட்டவணைப்படுத்துக.

நாற்கரத்தின் பெயர்கள்	பக்கங்களின் மையப்புள்ளியை இணைப்பதால் கிடைக்கும் வடிவம்
இணைகரம்	
செவ்வகம்	
சதுரம்	
பட்டம்	
சரிவகம்	
சாய்சதுரம்	

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

பின்வருவனவற்றிற்குக் காரணம் கூறுக.

(i) ஒரு சதுரம் என்பது ஒரு சிறப்புச் செவ்வகம் ஆகும்.

(ii) ஒரு சாய் சதுரம் என்பது ஒரு சிறப்பு இணைகரம் ஆகும்.

(iii) சாய்சதுரம் மற்றும் பட்டம் ஒரு பொதுவானப் பண்பைப் பெற்றுள்ளன.

(iv) சதுரம் மற்றும் சாய்சதுரம் ஒரு பொதுவானப் பண்பைப் பெற்றுள்ளன.

பின்வரும் முக்கோணங்கள் சோடியாக இணைக்கப்பட்டால் உண்டாகும் நாற்கரத்தின் வகை என்ன?

(i) சமபக்க முக்கோணம்

(ii) செங்கோண முக்கோணம்

(iii) இரு சம பக்க முக்கோணம்

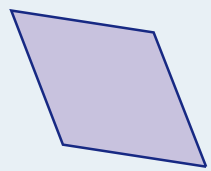
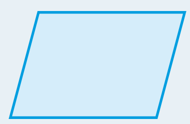
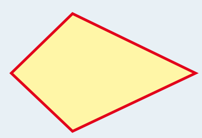
செயல்பாடு 10

கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் சரி அல்லது தவறு எனக் குறிப்பிடுக.

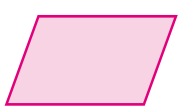
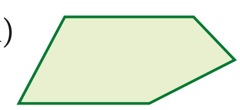
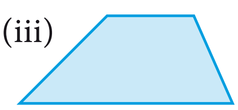
நாற்கரங்கள்	எதிர்ப் பக்கங்கள்		எல்லாப் பக்கங்களும் சமம்	மூலை விட்டங்கள்			கோணங்கள்		
	இணை	சமம்		சமம்	ஒன்றுகொன்று செங்குத்து	ஒன்றையொன்று இருசமக் கூறிடும்	எல்லாக் கோணங்களும் சமம்	எதிர் கோணங்கள் சமம்	அடுத்துள்ள கோணங்கள் மிகை நிரப்பிகள்
இணைகரம்									
செவ்வகம்									
சதுரம்									
சாய்சதுரம்									
சரிவகம்									
இருசமபக்கச் சரிவகம்									
பட்டம்									

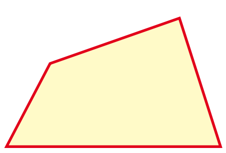
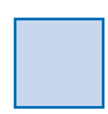
பயிற்சி 4.2

1. வடிவங்களின் பெயர்களை வலப் பக்கத்திலுள்ள படங்களுடன் பொருத்துக.

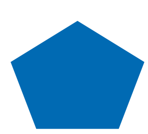
சாய் சதுரம்	
பட்டம்	
இணைகரம்	
சரிவகம்	
செவ்வகம்	

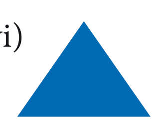
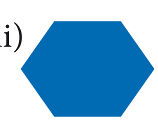
2. கொடுக்கப்பட்டுள்ளவற்றில் எவை இணைகரம் அல்லது இணைகரம் அல்ல எனக் காண்க

(i)  (ii)  (iii) 

(iv)  (v)  (vi) 

3. எவை நாற்கரம் அல்ல.

(i)  (ii)  (iii)  (iv) 

(v)  (vi)  (vii)  (viii) 

4. கொடுக்கப்பட்டுள்ளவற்றில் எவை சரிவகம் அல்லது சரிவகம் அல்ல எனக் காண்க.

(i)  (ii)  (iii) 

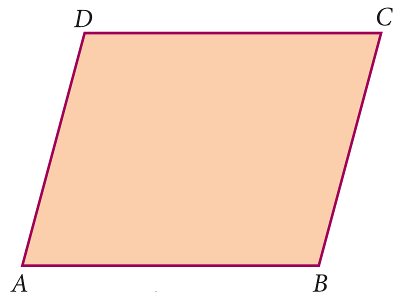
(iv)  (v)  (vi) 

4.3.5 இணைகரத்தின் பண்புகள் (Properties of Parallelogram)

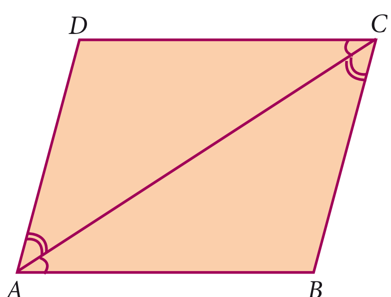
நாம் இப்போது ஒரு பயணத்தை மேற்கொள்ளலாம். பல்வகை நாற்கரங்களுக்கிடையே பயணிக்கும் வேளையில் எதிர்கொள்ளும் பண்புகளைக் குறித்துக் கொள்வோம். எத்தகு பண்புகளை நாம் எதிர்நோக்கலாம்? அவற்றின் உண்மைத் தன்மையை எவ்வாறு அறிய இயலும்?

எடுத்துக்காட்டாக, ஓர் இணைகரத்தின் எதிர்ப்பக்கங்கள் இணை எனினும் அவை சமமா? பலமுறை இணைகரங்களை வரைந்து மெய்யா எனச் சோதித்து அறிய முடியும். உண்மையில் அவையனைத்திலும் எதிர்ப் பக்கங்கள் சமமாகத்தான் இருக்கும். எனவே அனைத்து இணைகரங்களிலும் எதிர்ப்பக்கங்கள் சமமாகத்தான் இருக்கும் என்கிற முடிவுக்கு வர இயலுமா? இயலாது. ஒருவேளை பின்னர் நாம் சற்றும் எண்ணிப் பார்க்காத, எதிர்ப்பக்கங்கள் சமமாக இல்லாத ஓர் இணைகரத்தைக் காண்பதற்கு வாய்ப்புள்ளது. எனவே, நமக்கு ஓர் அடிப்படை நிரூபணம் தேவை.

கீழ்க்காணும் படத்திலுள்ள (படம் 4.34) $ABCD$ இணைகரத்தைக் கவனிப்போம். இதில் $AB = CD$ மற்றும் $AD = BC$, என்றாலும் அவற்றை உறுதியாக கூற இயலுமா? முக்கோணங்களையும் அதன் பண்புகளையும் நாம் அறிவோம். எனவே, அவற்றின் வாயிலாக முயலலாம் என்றாலும் $ABCD$ இணைகரத்தில் முக்கோணங்கள் ஏதும் இல்லை.



படம். 4.34



படம். 4.35

எனினும் AC ஐ இணைப்பதால் முக்கோணங்களை மிக எளிதாக உருவாக்க இயலும். (இவ்வாறு BD ஐயும் இணைக்கலாம் என்றாலும் இதுப் பற்றி பின்னர் காணலாம்). இப்போது நமக்கு AC ஐப் பொதுப் பக்கமாகக் கொண்ட முக்கோணங்கள் ADC மற்றும் ABC கிடைக்கின்றன. ஏதோ ஒரு வகையில் இவ்விரு முக்கோணங்களும் சர்வசமமானவை என நிரூபித்தால், $AB = CD$ மற்றும் $AD=BC$ என்பது உறுதியாகும்.

ΔADC மற்றும் ΔABC முக்கோணங்கள் சர்வசமமானவை என்பதை எவ்வாறு மெய்ப்பிக்க இயலும்? சர்வசமத் தன்மையை நிலைநாட்டப் பல விதிகள் இருப்பதால் அவற்றில் எது இங்குப் பொருத்தமானது என்பது ஆராயத்தக்கது.

இதுவரை $ABCD$ என்பது ஓர் இணைகரம் எனும் உண்மையை நாம் பயன்படுத்தவே இல்லை. எனவே, $AB \| DC$ மற்றும் $AD \| BC$ எனும் கருத்துகளைப் பயன்படுத்தி ΔADC மற்றும் ΔABC ஆகியவை சர்வசமமானவை என்று காட்டலாம். பக்கங்கள் இணையானவை என்பதால் சில கோணங்கள் சமமாகத்தான் இருக்க வேண்டும். அத்தகைய பண்புகளை நாம் அறிவோமா? ஆம். நம்மால் இயலும். குறுக்கு வெட்டிகள் பற்றியதுதானே!

இப்போது நமக்குத் தெளிவாகிறது. $AD \| BC$ மற்றும் AC ஒரு குறுக்கு வெட்டி என்பதால் $\angle DAC = \angle BCA$. இதேபோன்று, $AB \| DC$, மற்றும் AC ஒரு குறுக்கு வெட்டி என்பதால்

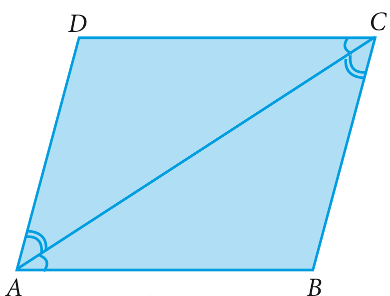
$\angle BAC = \angle DCA$. பொதுவான பக்கம் AC என்பதனால் கோ–ப–கோ விதிப்படி, ΔADC மற்றும் ΔABC சர்வசமமானவை எனத் தேவையான முடிவுக்கு நம்மால் வர இயலும். இதன் மூலம் $AB = CD$ மற்றும் $AD = BC$ என்பது உறுதியாகிறது.

எனவே, ஓர் இணைகரத்தின் எதிர்ப் பக்கங்கள் எப்போதும் சமமாகத்தான் இருக்கும்.

இது வரை கண்டறிந்த கருத்துகளை முறையான மெய்மைகளாகத் தொகுத்து எழுதலாம்.

தேற்றம் 1

ஓர் இணைகரத்தின் எதிர்ப்பக்கங்கள் சமம்



படம். 4.36

தரவு : $ABCD$ என்பது ஓர் இணைகரம்.

நிரூபிக்க : $AB=CD$ மற்றும் $DA=BC$

அமைப்பு : AC ஐ இணைக்கவும்.

நிரூபணம் :

$ABCD$ என்பது ஓர் இணைகரம்

$AD \parallel BC$ மற்றும் AC ஆனது குறுக்கு வெட்டி

$\angle DAC = \angle BCA$ →(1) (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சமம்)

$AB \parallel DC$ மற்றும் AC ஆனது குறுக்கு வெட்டி

$\angle BAC = \angle DCA$ →(2) (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சமம்)

ΔADC மற்றும் ΔCBA இல்

$\angle DAC = \angle BCA$ (1) இலிருந்து

AC ஆனது பொதுப் பக்கம்

$\angle DCA = \angle BAC$ (2) இலிருந்து

$\Delta ADC \cong \Delta CBA$ (கோ–ப–கோ)

ஆகவே $AD = CB$ மற்றும் $DC = BA$ (ஒத்த பக்கங்கள் சமம்)

மேற்கண்ட நிரூபணம் நிரூபிக்கும் வழியிலேயே, தேற்றத்திற்குத் தகுந்த ஒரு பண்பினையும் நிரூபித்தோம்.

தேற்றம் 2

இணைகரத்தின் ஒரு மூலைவிட்டம் அதனை இரு சர்வசம முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கின்றது.

$\angle DAC = \angle BCA$ மற்றும் $\angle BAC = \angle DCA$ என்பதிலிருந்து மேற்கண்ட நிரூபணம் கிடைத்தது என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

எனவே, படம் 4.36இன் படி,

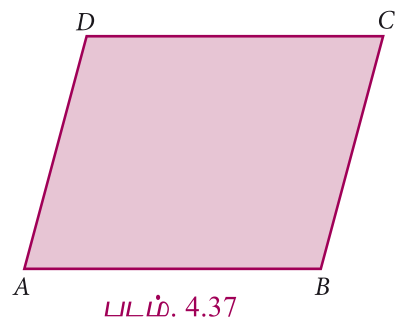
$$\angle BCA + \angle BAC = \angle DCA + \angle DAC$$

ஆனால், நாம் அறிந்த வரை:

$$\angle B + \angle BCA + \angle BAC = 180^\circ$$

மற்றும் $\angle D + \angle DCA + \angle DAC = 180^\circ$

ஆகையால் $\angle B = \angle D$ என்றுதான் இருக்க முடியும்.



படம். 4.37

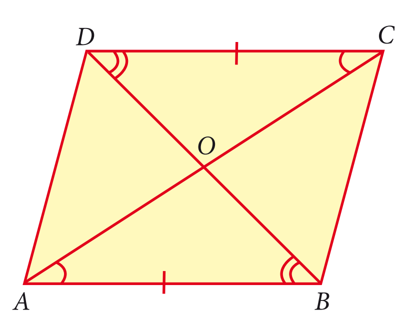
இவ்வாறே தொடர்ந்து சற்று விடா முயற்சியோடு முயன்றால் $\angle A = \angle C$ எனவும் காண்பிக்க இயலும். எனவே இவ்வாறு கீழ்க்காணும் தேற்றத்தையும் நம்மால் நிரூபிக்க முடியும்.

தேற்றம் 3

ஓர் இணைகரத்தில் எதிர்க் கோணங்கள் சமம்.

இப்போது முக்கோணங்களின் சர்வசமத் தன்மை வழியே மேலும் சில முக்கோணங்களை அணுகலாம். மேற்கண்ட படத்தில் உள்ள இரு மூலைவிட்டங்களான AC மற்றும் DB யைக் கவனிப்போம். ΔADC மற்றும் ΔCBA ஆகியவை சர்வசமம் என்பதை நாம் முன்னரே அறிந்துள்ளோம். இதே போன்று காரணக் காரிய விளக்கத்தோடு ΔDAB மற்றும் ΔBCD ஆகியவற்றை சர்வசமமானவை என்பதை நம்மால் எடுத்துக்காட்ட இயலும். மேலும் சில சர்வசம முக்கோணங்களை இப்படத்தில் கண்டறிய முடியுமா?

ஆம். இரு மூலை விட்டங்களும் O எனும் புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. இப்போது நம்மால் ΔAOB, ΔBOC, ΔCOD மற்றும் ΔDOA என 4 முக்கோணங்களைக் காண இயலும். இவற்றுள் சர்வசமச் சோடிகளை உங்களால் காண முடிகிறதா?



படம். 4.38

AB மற்றும் CD இணை மற்றும் சமம் என்பதனால், ΔAOB மற்றும் ΔCOD ஆகியவை சர்வசமம் என எளிதாக ஊகிக்க முடியும். மீண்டும் கோ–ப–கோ விதியினைப் பயன்படுத்தி, இச்சமயத்தில் $\angle OAB = \angle OCD$ மற்றும் $\angle ABO = \angle CDO$ என்றிருக்க முயற்சிக்கலாம். ஆனால், இதில் முதலாவது பின்வரும் கூற்றான $\angle CAB = \angle ACD$ (முன்பே நாம் நிறுவியுள்ளோம்) என்பதன் மூலம் அமைகிறது. மேலும், $\angle CAB$ மற்றும் $\angle OAB$ ஆகியவை ஒரே கோணங்கள்தாம் என்பதையும் உற்றுநோக்கலாம். (இதேபோல் $\angle OCD$ மற்றும் $\angle ACD$ சமம்). இப்போது BD என்பது ஒரு குறுக்கு வெட்டி எனும் காரணத்தைப் பயன்படுத்துவதால், $\angle ABD = \angle CDB$ என்பது கிடைக்கும். ஆனால் பிறகு $\angle ABD$ என்பதும் $\angle ABO$ என்பதும் ஒன்றே, $\angle CDB$ என்பதும் $\angle CDO$ என்பதும் ஒன்றேதான் என்கிற முடிவை அடையலாம்.

மீண்டும் இதனை முறைப்படி நிரூபிப்பதன் மூலம், மற்றுமொரு தேற்றம் கிடைக்கிறது.

தேற்றம் 4

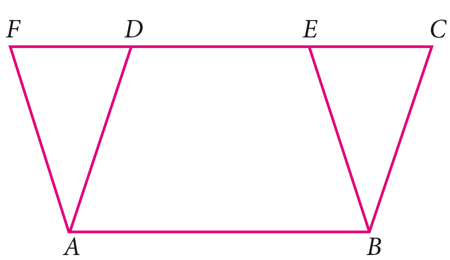
இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இரு சமக் கூறிடும்.

இணைகரத்தின் கோட்பாடுகளை இப்போது வலுப்படுத்தலாம். அடுத்துள்ள பெட்டிச் செய்தியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூற்றுகளை ஒவ்வொன்றாகக் கருதுவோம். ஒவ்வொரு கூற்றும் குறிப்பிட்ட பண்பு இருப்பதால் ஒரு நாற்கரம் என்கிற முடிவுக்கு வர உதவும். அவ்வாறான இணைகரம் எவ்வகையைச் சார்ந்ததாகலாம்?

- எதிரெதிர்ப் பக்கங்கள் இணை.
- எதிரெதிர்ப் பக்கங்கள் சமம்.
- அனைத்துக் கோணங்களும் செங்கோணங்கள்.
- மூலை விட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக் கூறிடும்.
- மூலை விட்டங்கள் சமம்.
- மூலை விட்டங்கள் செங்குத்து மற்றும் சமம்.
- மூலை விட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இரு சமக் கூறிடும்.
- ஒவ்வோர் அடுத்தடுத்த சோடிக் கோணங்கள் மிகை நிரப்பிகள்.

இப்போது இணைகரங்கள் பற்றிய மேலும் சில அறிவார்ந்த பண்புகளைக் காணப் போகிறோம். இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட இணைகரங்களின் ஏதாவது ஒரு பண்பினை நம்மால் முயன்று நிரூபிக்க இயலுமா? கீழ்க்காணும் படத்தில் (படம் 4.39) உள்ளது போன்று ஒரே அடித்தளத்தைப் பகிர்ந்து கொள்ளும் இரு இணைகரங்களின் பண்பினைப் பற்றி ஆராயலாம்.

$ABCD$ மற்றும் $ABEF$ ஆகிய இரு இணைகரங்களின் பொதுவான அடித்தளம் AB ஆகும். ΔADF மற்றும் ΔBCE என்ற ஒரு சோடி முக்கோணங்கள் சர்வசமமாக உள்ளன என்பதை நம்மால் எளிதில் பார்க்க முடிகிறது. முன்பே, $AD = BC$ மற்றும் $AF = BE$ என உள்ளன. ஆனால், $AD \parallel BC$ மற்றும் $AF \parallel BE$ என்பதனால், AD மற்றும் AF ஆல் அமைகின்ற கோணமும், BC மற்றும் BE ஆல் அமைகின்ற கோணமும் சமமாக இருத்தல் வேண்டும்.



படம். 4.39

எனவே, $\angle DAF = \angle CBE$. ஆகையால் $\angle ADF$ மற்றும் $\angle BCE$ முக்கோணங்கள் சர்வசமமானவை.

இத்தகைய உற்றுநோக்கல் மேலும் பல கருத்துகளுக்கு அடித்தளம் அமைக்கிறது. சர்வசம முக்கோணங்கள் ஒரே பரப்பளவு கொண்டவை. இதனால் $ABCD$ மற்றும் $ABEF$ இணைகரங்களின் பரப்பளவுகளைப் பற்றிய எண்ணம் நமக்கு எழுகிறது.

இணைகரம் $ABCD$ இன் பரப்பளவு $=$ $ABED$ நாற்கரத்தின் பரப்பளவு $+$ ΔBCE இன் பரப்பளவு

$=$ $ABED$ நாற்கரத்தின் பரப்பளவு $+$ ΔADF இன் பரப்பளவு

$=$ $ABEF$ இன் பரப்பளவு

இவ்வாறு மற்றுமொரு தேற்றத்தை நிரூபிக்கலாம்.

தேற்றம் 5:

ஒரே அடித்தளத்தையும் ஒரு சோடி இணைக் கோடுகளுக்கிடையேயும் அமையும் இணைகரங்களின் பரப்பளவுகள் சமம்.

இந்த வழிமுறைகள் மேலும் பல கருத்துகளை நிரூபிக்கின்றன. கிளைத்தேற்றம் என்று அழைக்கப்படும் அவற்றைத் தனித்தனியாக விளக்கமாக நிரூபிக்கத் தேவையில்லை.

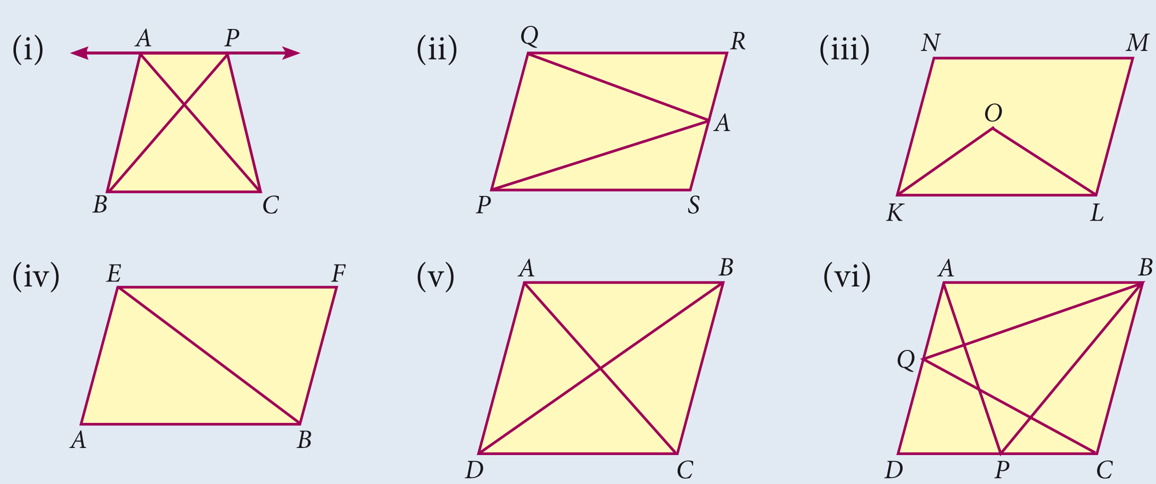
கிளைத்தேற்றம் 1: ஒரு பொதுவான அடிப்பக்கத்தையும் ஒரு சோடி இணைகோடுகளுக்கு இடையேயும் அமையும் முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகள் சமம்.

கிளைத்தேற்றம் 2: ஒரு பொதுவான அடிப்பக்கத்தையும் ஒரு சோடி இணைகோடுகளுக்கு இடையேயும் அமையும் ஒரு செவ்வகம் மற்றும் ஓர் இணைகரத்தின் பரப்பளவுகள் சமம்.

இணைகரங்கள் பெரியதாகவோ சிறியதாகவோ இருந்தாலும், அவற்றின் முனைகளிலுள்ள கோணங்கள், பக்கங்களின் நீளம் போன்றவை வெவ்வேறாக அமைந்திருந்தாலும், தேற்றங்கள் மற்றும் கிளைத்தேற்றங்கள் என்று அழைக்கப்படும் இத்தகைய கூற்றுகள் அனைத்து இணைகரங்களுக்கும் பொருந்தும்.

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

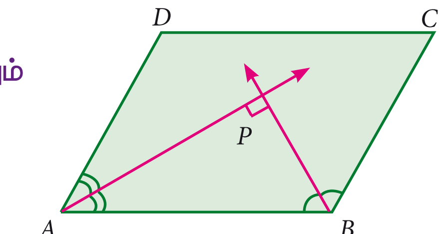
கீழ்க்காணும் படங்களில் ஒரு பொதுவான அடிப்பக்கத்தையும் மற்றும் ஒரு சோடி இணை கோடுகளுக்கு இடையேயும் அமைவன எவை? அவற்றில் பொதுவான அடிப்பக்கத்தையும் குறிப்பிட்ட அந்த இரு இணைக் கோடுகளையும் எழுதுக.



இதே வழிமுறையைப் பயன்படுத்தி நாற்கரத்தின் குறிப்பிட்ட வகையான இணைகரத்தின் பண்புகளைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.1

இணைகரம் $ABCD$ இல் அடுத்தடுத்த கோணங்கள் $\angle A$ மற்றும் $\angle B$ இன் இரு சம வெட்டிகள் P இல் சந்திக்கின்றன எனில், $\angle APB = 90^\circ$ என நிறுவுக.



படம். 4.40

தீர்வு

இணைகரம் $ABCD$ இல், AP மற்றும் BP ஆனது அடுத்தடுத்த கோணங்கள் $\angle A$ மற்றும் $\angle B$ இன் இரு சம வெட்டிகள்.

இணைகரத்தில் அடுத்தடுத்த கோணங்களின் கூடுதல் மிகை நிரப்பிகள். எனவே,

$$\angle A + \angle B = 180^\circ$$

$$\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = \frac{180^\circ}{2}$$

$$\angle PAB + \angle PBA = 90^\circ$$

CSXALA

ΔAPB இல்,

$$\angle PAB + \angle APB + \angle PBA = 180^\circ \text{ (முக்கோணத்தின் கோணங்களின் கூடுதல்)}$$

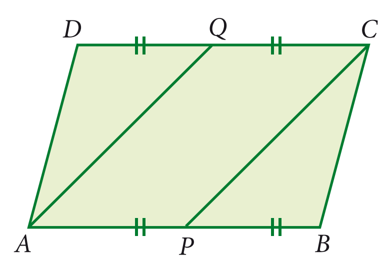
$$\angle APB = 180^\circ - [\angle PAB + \angle PBA]$$

$$= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

$\angle APB = 90^\circ$ நிறுவப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 4.2

படம் 4.41 இல் $ABCD$ கொடுக்கப்பட்டுள்ள இணைகரம், $ABCD$ இன் பக்கங்கள் AB மற்றும் DC இன் நடுப்புள்ளிகள் முறையே P மற்றும் Q எனில் $APCQ$ ஓர் இணைகரம் என நிறுவுக.



படம். 4.41

தீர்வு

AB மற்றும் DC இன் நடுப்புள்ளிகள் முறையே P மற்றும் Q என்க.

$\therefore \quad AP = \frac{1}{2} AB$ மற்றும்

$QC = \frac{1}{2} DC \quad (1)$

ஆனால், $AB = DC$ (இணைகரத்தின் எதிர்ப் பக்கங்கள் சமம்)

$\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} DC$

$AP = QC \quad (2)$

மேலும், $AB \parallel DC$

$AP \parallel QC$ (3) [$\because$ $ABCD$ ஓர் இணைகரமாகும்]

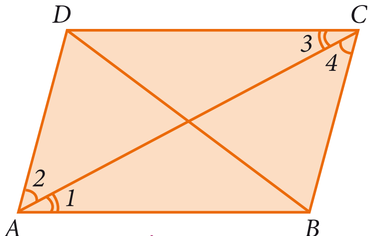
எனவே, நாற்கரம் $APCQ$ இல் $AP \parallel QC$ மற்றும் $AP = QC$ [(2) மற்றும் (3) இல் இருந்து)]

$\therefore$ நாற்கரம் $APCQ$ ஓர் இணைகரமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.3

இணைகரம் $ABCD$ இல் (படம் 4.42) $\angle BAD = 120°$ மற்றும் AC ஆனது $\angle BAD$ இன் கோண இரு சம வெட்டி எனில், $ABCD$ ஒரு சாய் சதுரம் என நிறுவுக.

தீர்வு



படம். 4.42

கொடுக்கப்பட்டவை $\angle BAD = 120°$ மற்றும்

AC ஆனது $\angle BAD$ இன் இரு சம வெட்டி

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \times 120° = 60°$$

$$\angle 1 = \angle 2 = 60°$$

இங்கு $AD \parallel BC$ மற்றும் AC ஆனது குறுக்கு வெட்டி

$$\angle 2 = \angle 4 = 60°$$

ΔABC ஆனது இரு சமப் பக்க முக்கோணம் [$\because \angle 1 = \angle 4 = 60°$]

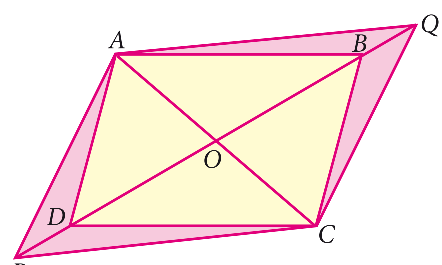
$$AB = BC$$

இணைகரம் $ABCD$ ஒரு சாய் சதுரமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.4

இணைகரம் $ABCD$ இல், $PD = BQ$ என்றுள்ளவாறு கோடு DB இன் மேலுள்ள புள்ளிகள் P மற்றும் Q எனில், $APCQ$ ஓர் இணைகரம் என நிறுவுக

தீர்வு



படம். 4.43

$ABCD$ ஓர் இணைகரம்.

$OA = OC$ ஓர் இணைகரம்.

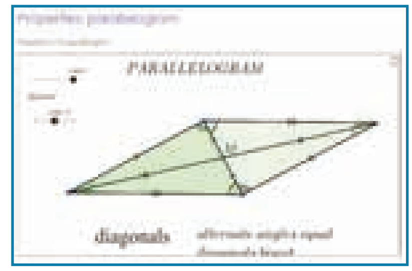
$OB = OD$ ($\because$ மூலை விட்டங்கள் இரு சமக் கூறிடும்)

இப்போது $OB + BQ = OD + DP$

$OQ = OP$ மற்றும் $OA = OC$

$\therefore$ $APCQ$ ஓர் இணைகரமாகும்..

இணையச் செயல்பாடு



இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்

படி – 1

தேடுபொறியில் கீழேக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலியைத் தட்டச்சு செய்க அல்லது துரித துலங்கள் குறியீட்டை ஸ்கேன் செய்க.

படி – 2

“Properties: Parallelogram” என்று GeoGebra பக்கத்தில் தோன்றும் . அங்கு “Rotate” மற்றும் “Page” எனும் நழுவல் (slider) தோன்றும்

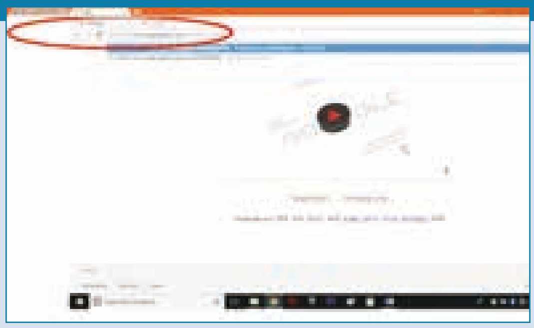
படி – 3

“Rotate” எனும் நழுவலில் உள்ள கரும்புள்ளியை இழுக்க, முக்கோண வடிவம் இரட்டித்து இணைகர வடிவம் தோன்றும்.

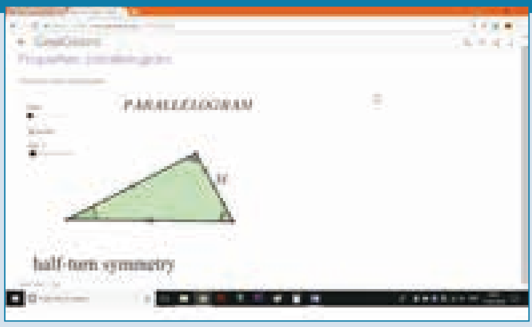
படி – 4

“Page” எனும் நழுவலில் உள்ள கரும்புள்ளியை இழுக்க, இணைகரத்தின் மூன்று பண்புகள் விளக்கப்படும்.

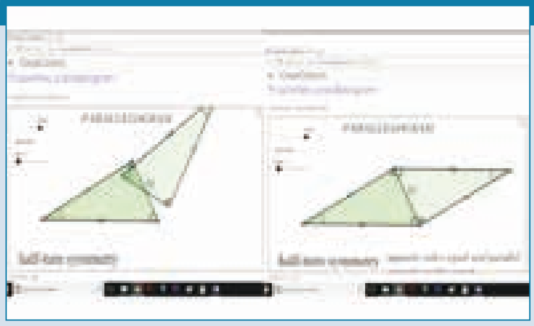
படி 1



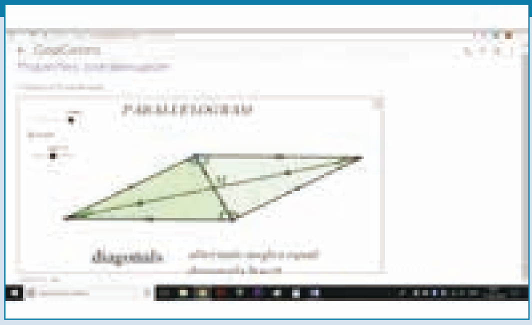
படி 2



படி 3



படி 4



இதே போல் பாடம் சார்ந்த வேறு செயல்பாட்டினை செய்து பார்க்கவும்

செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

இணைகரத்தின் பண்புகள்: https://www.geogebra.org/m/m9Q2QpWD

பயிற்சி 4.3

1. ஒரு நாற்கரத்தின் கோணங்களின் விகிதம் $2:4:5:7$ எனில், எல்லாக் கோண அளவுகளையும் காண்க.

2. நாற்கரம் $ABCD$ இல் $\angle A = 72°$ மற்றும் $\angle C$ ஆனது $\angle A$ இன் மிகை நிரப்பி மற்ற இரு கோணங்கள் $(2x-10)°$ மற்றும் $(x + 4)°$ எனில் x இன் மதிப்பையும் அனைத்துக் கோண அளவுகளையும் காண்க.

3. சாய் சதுரத்தின் பக்க அளவு 13 செ.மீ. மற்றும் ஒரு மூலை விட்டத்தின் நீளம் 24 செ.மீ. எனில், மற்றொரு மூலை விட்ட நீளம் காண்க.

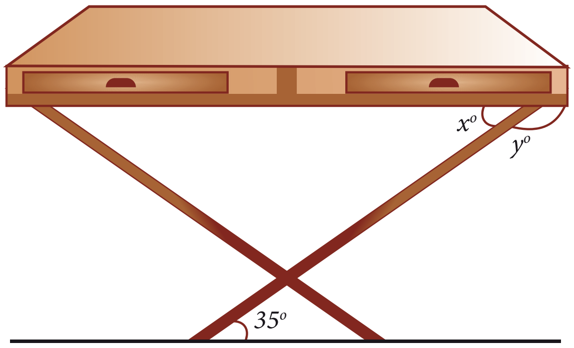
4. செவ்வகம் $ABCD$ இல் மூலை விட்டங்கள் AC மற்றும் BD ஆனது Oவில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. மேலும் $\angle OAB = 46°$ எனில் $\angle OBC$ காண்க.

5. சாய் சதுரத்தின் மூலை விட்டங்களின் நீளங்கள் 12 செ.மீ. மற்றும் 16 செ.மீ. எனில், சாய் சதுரத்தின் பக்க அளவு காண்க.

6. இணைகரத்தின் கோண இரு சம வெட்டிகள் செவ்வகத்தை அமைக்கும் என நிறுவுக..

7. ஒரு பொதுவான அடிப்பக்கத்தையும் ஒரு சோடி இணை கோடுகளுக்கு இடையேயும் அமைந்துள்ள முக்கோணம் மற்றும் இணைகரத்தின் பரப்புகள் $1 : 2$ என்ற விகிதத்தில் அமையும் என நிறுவுக.

8. படத்தில் மேசையின் கால்கள் தரையுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் $35°$ எனில், x மற்றும் y இன் மதிப்பு காண்க.



படம். 4.44

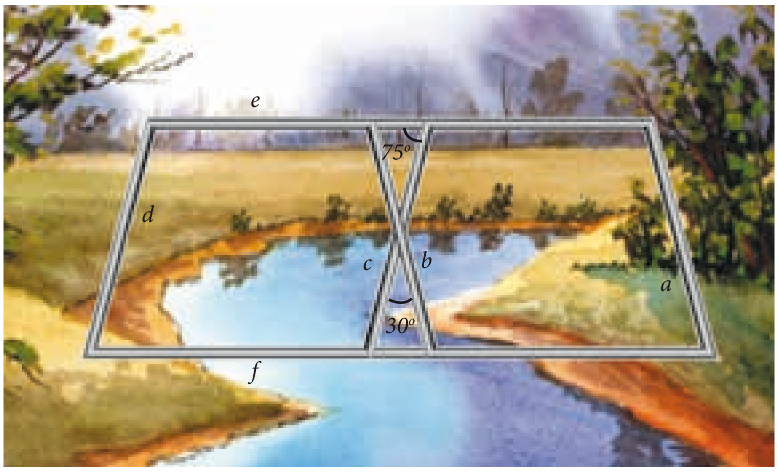
9. இரும்புக் கம்பிகள் a, b, c, d, e, மற்றும் f ஆனது படத்தில் உள்ளவாறு ஒரு பாலத்தை அமைக்கின்றன, இதில் $a \| b$, $c \| d$, $e \| f$ எனில், குறிக்கப்பட்ட கோணங்களைக் காண்க.

   (i) b மற்றும் c

   (ii) d மற்றும் e

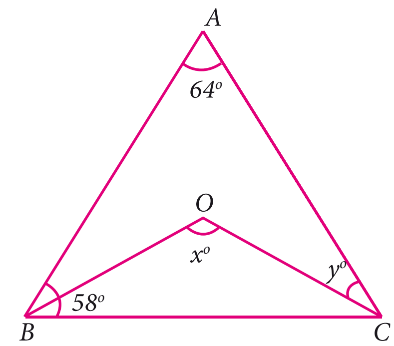
   (iii) d மற்றும் f

   (iv) c மற்றும் f



படம். 4.45

10. படம் 4.46, $\angle A = 64°$, $\angle ABC = 58°$. BO மற்றும் CO ஆனது $\angle ABC$ மற்றும் $\angle ACB$ இன் இருசம வெட்டிகள் எனில், ΔABC இல் $x°$ மற்றும் $y°$ காண்க.



படம். 4.46

11. கீழ்க்காணும் பண்புகளைப் பெற்றிருக்கும் நாற்கரம் எவ்வகை நாற்கரம் ஆகும்?

(i) இரு சோடி எதிர்க் கோணங்கள் சம அளவுடையவை.

(ii) இரு சோடி எதிர்ப்பக்கங்கள் சம நீளமுடையவை.

(iii) ஒவ்வொரு மூலைவிட்டமும் கோண இருசமவெட்டி.

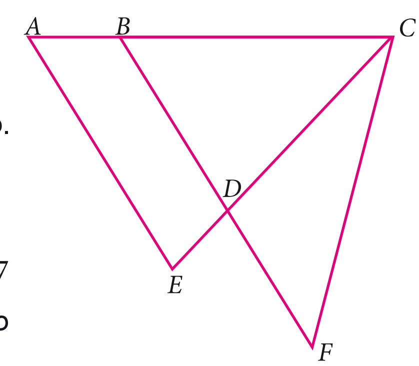
(iv) மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக் கூறிடும்.

(v) ஒவ்வோர் அடுத்துள்ள கோணச் சோடிகள் மிகை நிரப்பி.

(vi) மூலைவிட்டங்கள் சமம்.

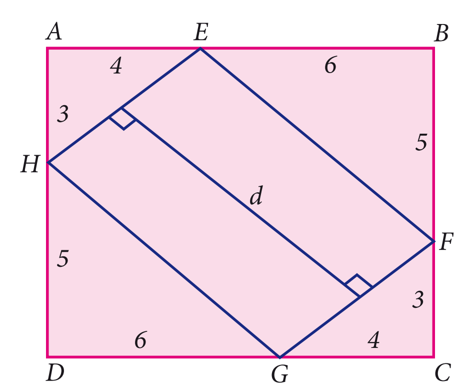
(vii) இரண்டு சர்வசம முக்கோணங்களாகப் பிரிக்க முடியும்.

12. படம் 4.47 இல் $AB = 2$, $BC = 6$, $AE = 6$, $BF = 8$, $CE = 7$ மற்றும் $CF = 7$, எனில், நாற்கரம் $ABDE$ இன் பரப்பு மற்றும் ΔCDF இன் பரப்பிற்கும் உள்ள விகிதம் காண்க.



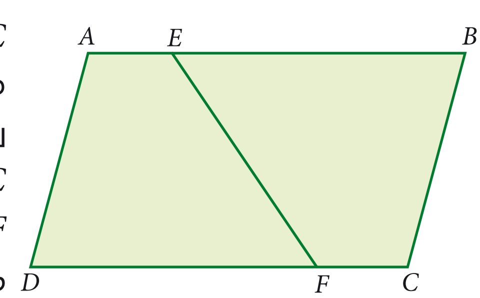
படம். 4.47

13. படம் 4.48 இல் செவ்வகம் $ABCD$ மற்றும் இணைகரம் $EFGH$ இல் d ஆனது $\overline{HE}$ மற்றும் $\overline{FG}$ இக்குச் செங்குத்து எனில், d இன் நீளம் காண்க.



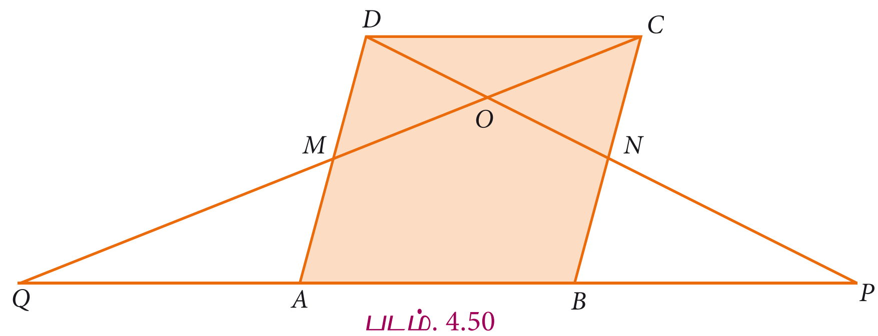
படம். 4.48

14. இணைகரம் $ABCD$ இல், AB இக்கு இணை DC மற்றும் DA இக்கு இணை CB. பக்கம் AB இன் நீளம் 20 செ.மீ . புள்ளி E ஆனது $AE = 3$ செ.மீ உள்ளவாறு A மற்றும் B இக்கு இடையே உள்ளது. D மற்றும் C இக்கு இடையே உள்ள புள்ளி F. கோட்டுத்துண்டு EF ஆனது இணைகரத்தினைச் சமப் பரப்புள்ள இரண்டு பகுதிகளாகப் பிரிக்கிறது எனில் DF இன் நீளம் காண்க.



படம். 4.49

15. படத்தில் இணைகரம் $ABCD$ இல் முனை D இலிருந்து வரையப்படும் கோடு DP ஆனது BC இன் நடுப்புள்ளியை N இலும், AB இன் நீட்சியை P இலும் சந்திக்கிறது. C இலிருந்து வரையப்படும் கோடு CQ ஆனது, AD இன் நடுப்புள்ளியை M இலும், AB இன் நீட்சியை Q விலும் சந்திக்கிறது. கோடுகள் DP மற்றும் CQ ஆனது O இல் சந்திக்கின்றன, எனில் ΔQPO இன் பரப்பளவானது, இணைகரம் $ABCD$ இன் பரப்பளவில் $\frac{9}{8}$ மடங்கு என நிறுவுக.



படம். 4.50

4.4 செய்முறை வடிவியல் (Constructions)

செய்முறை வடிவியல் என்பது புள்ளிகள், நேர்க்கோடுகள், கோணங்கள் மற்றும் பிற உருவங்களின் பண்புகளைப் பற்றிய வடிவியல் விதிகளைப் பயன்படுத்தி வடிவியல் உருவங்களை வரையும் முறையாகும். வடிவியலில் "வரைதல்" என்பது கோணங்கள், நேர்க்கோடுகள் மற்றும் உருவங்கள் ஆகியவற்றைத் துல்லியமாக வரைதலாகும். யுக்ளிட் என்பவர் தன் "கூறுகள்" ('Elements') என்ற நூலில் வடிவியலின் வரைபடங்களைப் பற்றித் தெளிவாகக் கூறியுள்ளார். எனவே, இவ்வரைபடங்கள் யுக்ளிடின் வரைபடங்கள் எனவும் அறியப்படுகின்றன. அளவுகோல் மற்றும் கவராயம் பயன்படுத்தி இவ்வரைபடங்கள் வரையப்படுகின்றன. கவராயம் சமத் தூரத்தையும், அளவுகோல் நேர்க்கோட்டில் புள்ளிகளை அமைக்கவும் உதவுகின்றன. அனைத்து வடிவியல் வரைதல்களும் இவ்விரு கருத்துகளின் அடிப்படையிலேயே அமைகின்றன.

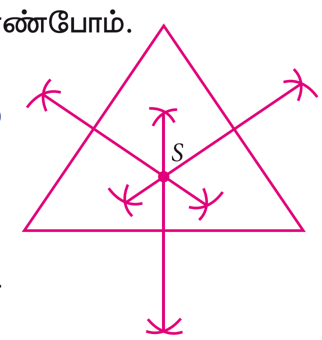
அளவுகோல் மற்றும் கவராயத்தைப் பயன்படுத்தி விகிதமுறு எண்கள் மற்றும் விகிதமுறா எண்களைக் குறிக்க இயலும் என்பதை நாம் இயல் 2 இல் கற்றோம். 1913இல் இந்தியக் கணிதமேதை இராமனுஜன் $355/113=\pi$ ஐக் குறிக்க ஒரு வடிவியல் முறையை அளித்தார். தற்போது துல்லியமான அளவுகளைக் கொண்டு வரையும் திறன்களைப் பயன்படுத்தி நேர்க்கோடுகளால் மலைக்குள்ளே செல்லும் சுரங்கப்பாதை அமைக்க வரையமுடியும் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. முந்தைய வகுப்புகளில் கோணங்கள் மற்றும் முக்கோணங்கள் வரைவது பற்றி நாம் கற்றுள்ளதை நினைவு கொள்வோம்.

இந்தப் பகுதியில் நாம் முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட மையம் மற்றும் குத்துக்கோட்டு மையம் வரைதல் பற்றி ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடுகளைப் பயன்படுத்திக் காண்போம்.

4.4.1 முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட மையம் வரைதல் (Construction of the Circumcentre of a Triangle)

சுற்று வட்ட மையம் (circumcentre)

ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட மையம் என்பது அம்முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களின் மையக் குத்துக்கோடுகளும் சந்திக்கும் புள்ளியாகும். இதனை "S" எனக் குறிப்போம்.



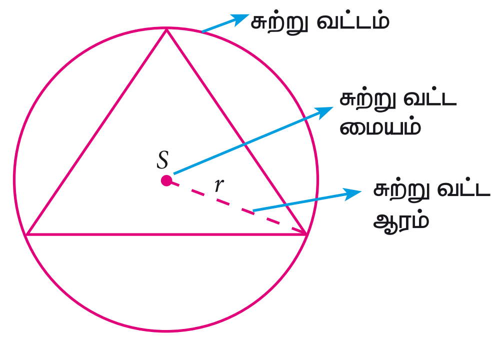
படம். 4.51

சுற்று வட்டம் (Circumcircle)

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று உச்சிப்புள்ளிகள் வழியே சுற்று வட்ட மையத்தை (S) மையமாகக் கொண்டுசெல்லும் வட்டம் சுற்று வட்டம் எனப்படும்.

சுற்று வட்ட ஆரம் (Circumradius)

சுற்று வட்ட மையம் S இக்கும் முக்கோணத்தின் ஏதேனும் ஓர் உச்சிப்புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தொலைவு சுற்று வட்ட ஆரம் எனப்படும்.



படம். 4.52

செயல்பாடு 11

நோக்கம் காகித மடிப்பைப் பயன்படுத்தி ஒரு கோட்டுத்துண்டின் மையப் புள்ளியைக் காணுதல்

செய்முறை ஒரு காகிதத்தை மடித்து PQ என்ற கோட்டுத்துண்டை உருவாக்குவோம். P என்ற புள்ளி Q இன் மீது பொருந்துமாறு மீண்டும் காகிதத்தை மடிக்கும்போது இரண்டு கோட்டுத் துண்டுகளும் வெட்டும் புள்ளியை M எனக் குறிக்க. M என்பது PQ இன் மையப்புள்ளி ஆகும்.

செயல்பாடு 12

நோக்கம் காகித மடிப்பைப் பயன்படுத்தி ஒரு கோட்டுத்துண்டின் மையக் குத்துக் கோட்டைக் காணுதல்.

செய்முறை ஒரு காகிதத்தை மடித்து PQ என்ற கோட்டுத்துண்டை உருவாக்குவோம். P என்ற புள்ளி Q இன் மீது பொருந்துமாறு மீண்டும் காகிதத்தை மடிக்கும் போது கிடைக்கும் கோட்டுத்துண்டு RS ஆகும். RS என்பது PQ இன் மையக்குத்துக்கோடு ஆகும்.

செயல்பாடு 13

நோக்கம் காகித மடிப்பைப் பயன்படுத்திக் கோட்டுத்துண்டிற்கு வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து குத்துக் கோடு அமைத்தல்.

செய்முறை ஒரு தாளில் AB என்ற கோட்டுத் துண்டை வரைந்து அதற்கு மேல் பகுதியில் P என்ற புள்ளியைக் குறிக்கவும். B என்ற புள்ளியை BA என்ற கோட்டுத் துண்டின் வழியே நகர்த்தும்போது P என்ற புள்ளியைத் தொடும்போது தாளை மடிக்கக் கிடைக்கும் கோடு P என்ற புள்ளியிலிருந்து AB இக்குக் குத்துக்கோடு ஆகும்.

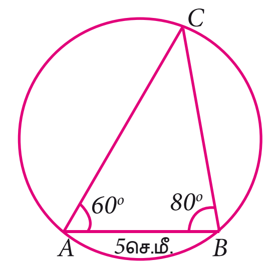
செயல்பாடு 14

நோக்கம் காகித மடிப்பைப் பயன்படுத்தி ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையத்தைக் காணுதல்.

செய்முறை ஒரு தாளில் முக்கோணத்தை வரைந்து கொள்க. பின்னர் செயல்பாடு 12ஐப் பயன்படுத்தி முக்கோணத்தின் எவையேனும் இரண்டு பக்கங்களுக்கு மையக்குத்துக்கோட்டைக் காண வேண்டும். இந்த இரண்டு மையக்குத்துக் கோடுகளும் அம்முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.5

$AB = 5$ செ.மீ., $\angle A = 60^\circ$ மற்றும் $\angle B = 80^\circ$. என்ற அளவுகளை உடைய ΔABC வரைக. அதற்குச் சுற்று வட்டம் வரைந்து சுற்று வட்ட ஆரம் காண்க.



உதவிப்படம்

தீர்வு

படி 1 கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவிற்கு ΔABC வரைக

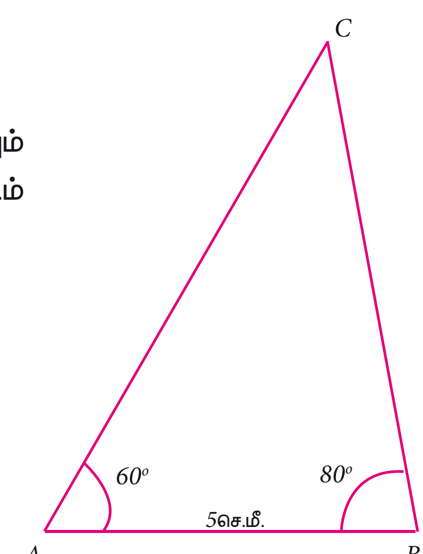
படி 2

எவையேனும் இரண்டு பக்கங்களுக்கு (AC மற்றும் BC) மையக் குத்துக்கோடுகள் வரைக. அவை வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி S, சுற்று வட்ட மையம் ஆகும்.

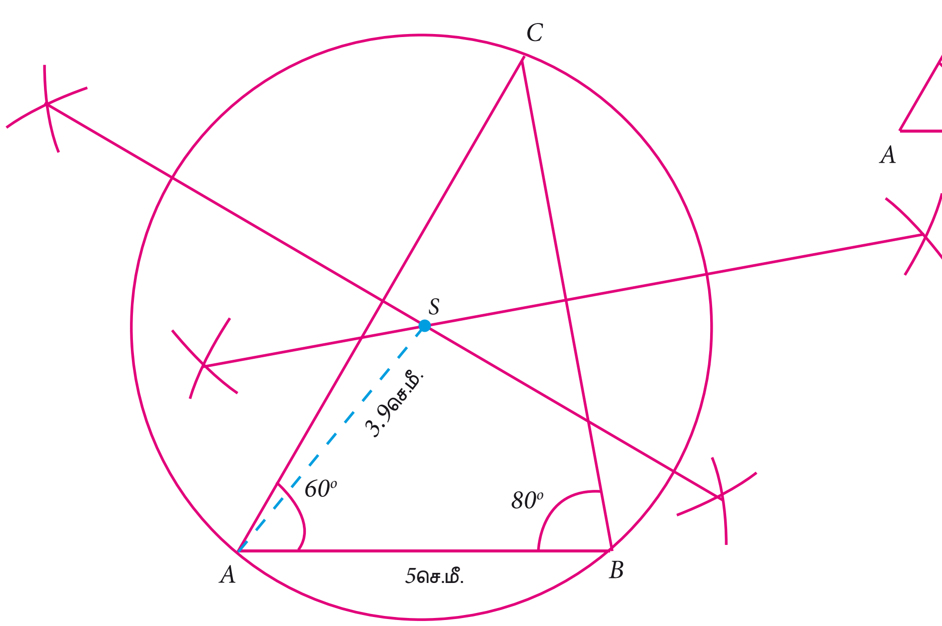
படி 3

Sஐ மையமாகவும், $SA = SB = SC$ ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு A, B, மற்றும் C வழியே செல்லும் ஒரு சுற்று வட்டம் வரைக.

சுற்று வட்ட ஆரம் $= 3.9$ செமீ.



படம். 4.53



படம். 4.54

பயிற்சி 4.4

1 சுற்று வட்டம் வரைக

(i) சமபக்க முக்கோணத்தின் பக்க அளவு 7 செ.மீ.

(ii) இரு சமபக்கச் செங்கோண முக்கோணத்தின் சமபக்கங்களின் நீளங்கள் 6 செ.மீ.

2 $AB = 8$ செ.மீ., $BC = 6$ செ.மீ. மற்றும் $\angle B = 70^\circ$ அளவுள்ள ABC வரைந்து, அம்முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டம் வரைக. சுற்று வட்ட மையம் காண்க.

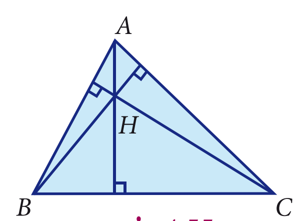
3 4.5 செ.மீ. மற்றும் 6 செ.மீ. அளவுகளை செங்குத்துப் பக்கங்களாகக் கொண்ட செங்கோண ΔPQR வரைந்து சுற்று வட்ட மையம் காண்க மற்றும் சுற்று வட்டம் வரைக.

4. $AB = 5$ செ.மீ., $BC = 6$ செ.மீ. மற்றும் $\angle B = 100^\circ$ அளவுள்ள ΔABC வரைந்து அதற்குச் சுற்று வட்டம் வரைக மற்றும் சுற்று வட்ட மையம் காண்க

5. $QR = 7$ செ.மீ., $\angle Q = 50^\circ$ மற்றும் $PQ = PR$ அளவுகள் கொண்ட இருசமபக்க ΔPQR வரைக. மேலும், ΔPQR இன் சுற்று வட்ட மையம் வரைக.

4.4.2 முக்கோணத்தின் குத்துக்கோட்டு மையம் வரைதல்

குத்துக்கோட்டு மையம் (Orthocentre)



படம். 4.55

ஒரு முக்கோணத்தின் குத்துக்கோட்டு மையம் என்பது அம்முக்கோணத்தின் மூன்று உச்சிகளில் இருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியாகும். இதை H என்று குறிப்போம்.

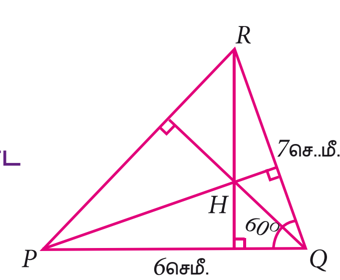
செயல்பாடு 15

நோக்கம் தாள் மடிப்பு முறையில் முக்கோணத்தின் குத்துக்கோட்டு மையத்தைக் கண்டறிதல்.

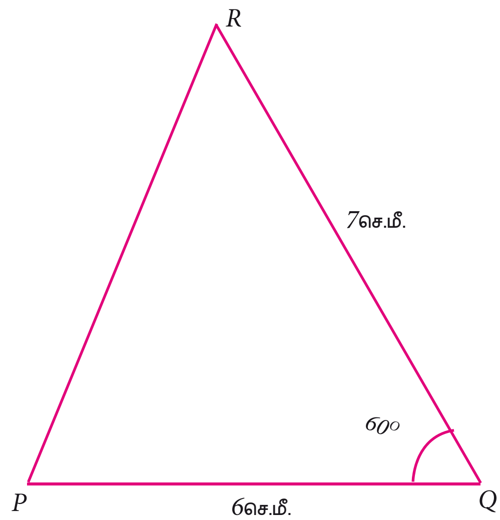
செய்முறை செயல்பாடு 12ஐப் பயன்படுத்தி முக்கோணத்தின் எவையேனும் இரு முனைகளுக்கு அவற்றின் எதிர்ப்பக்கங்களிலிருந்து செங்குத்துக்கோடுகள் வரைக. செங்குத்துக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி முக்கோணத்தின் குத்துக்கோட்டு மையம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.6

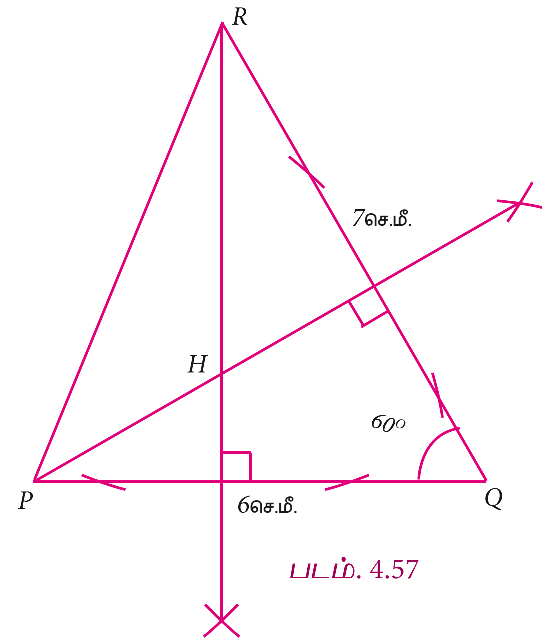
$PQ = 6$ செ.மீ., $\angle Q = 60^\circ$ மற்றும் $QR = 7$ செ.மீ. அளவுகளைக் கொண்ட ΔPQR வரைந்து அதன் குத்துக்கோட்டு மையம் காண்க.



உதவிப்படம்



படம். 4.56



படம். 4.57

தீர்வு

படி 1

கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவிற்கு ΔPQR வரைக.

படி 2:

R மற்றும் P இலிருந்து அதன் எதிர் பக்கங்கள் PQ மற்றும் QR இக்கு குத்துக்கோடுகள் வரைக.

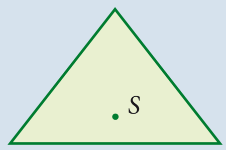
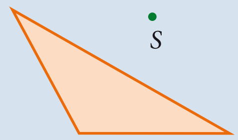
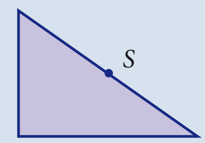
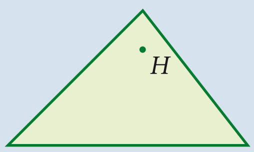
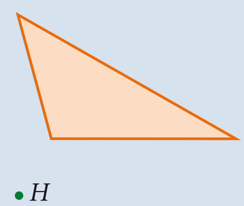
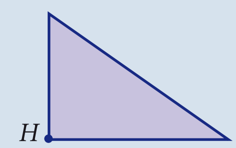
அவ்விரண்டு குத்துக்கோடுகளும் சந்திக்கும் புள்ளி H ஆனது, ΔPQR இன் குத்துக்கோட்டு மையம் ஆகும்.

பயிற்சி 4.5

1. $PQ = 7$ செ.மீ., $QR = 8$ செ.மீ. மற்றும் $PR = 5$ செ.மீ. என்ற அளவுகளைக் கொண்ட ΔPQR வரைந்து அதன் குத்துக்கோட்டு மையம் காண்க.
2. 6.5 செ.மீ. பக்க அளவுகளைக் கொண்ட சமபக்க முக்கோணம் வரைக. அம்முக்கோணத்திற்குக் குத்துக்கோடு மையம் காண்க.
3. $AB = 6$ செ.மீ., $\angle B = 110^\circ$ மற்றும் $BC = 5$ செ.மீ. என்ற அளவுகளை உடைய ΔABC வரைந்து அதன் குத்துக்கோடு மையம் காண்க.
4. $PQ = 4.5$ செ.மீ., $QR = 6$ செ.மீ. மற்றும் $PR = 7.5$ செ.மீ. என்ற அளவுகளை உடைய செங்கோண ΔPQR வரைந்து அதன் குத்துக்கோட்டு மையம் காண்க.
5. $AB = BC = 7$ செ.மீ. மற்றும் $\angle B = 70^\circ$ அளவுகள் கொண்ட இருசமபக்க முக்கோணம் வரைக. மேலும் ΔABC இன் குத்துக்கோடு மையம் காண்க.

குறிப்பு

கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணங்களுக்குச் சுற்றுவட்ட மையம் மற்றும் குத்துக்கோட்டு மையம் எங்கே அமையும் என்பதை அறிந்து கொள்ளுதல்.

	குறுங்கோண முக்கோணம்	விரிகோண முக்கோணம்	செங்கோண முக்கோணம்
சுற்றுவட்ட மையம் (S)	Δ உள்ளே 	Δ வெளியே 	கர்ணத்தின் மையம் 
குத்துக்கோட்டு மையம் (H)	Δ உள்ளே 	Δ வெளியே 	செங்கோணத்தின் உச்சிப்புள்ளி 

பயிற்சி 4.6

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. கொடுக்கப்பட்டுள்ள பக்க அளவுகளில் எந்த அளவிற்கு முக்கோணம் வரைய இயலாது?

   (அ) 8.2 செ.மீ., 3.5 செ.மீ., 6.5 செ.மீ. (ஆ) 6.3 செ.மீ., 3.1 செ.மீ., 3.2 செ.மீ.

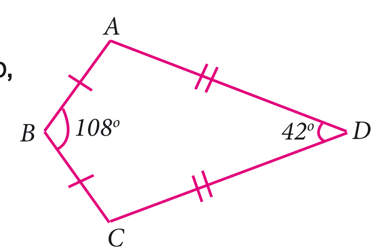
   (இ) 7 செ.மீ., 8 செ.மீ., 10 செ.மீ. (ஈ) 4 செ.மீ., 6 செ.மீ., 6 செ.மீ.

2. முக்கோணத்தின் வெளிக்கோணம் எந்த இரு கோணங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம்?

   (அ) வெளிக்கோணங்கள் (ஆ) உள்ளெதிர்க்கோணங்கள்

   (இ) ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் (ஈ) உள் கோணங்கள்

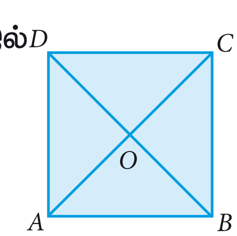
3. நாற்கரம் $ABCD$ இல் $AB = BC$ மற்றும் $AD = DC$ எனில், கோணம் $\angle BCD$ இன் அளவு



   (அ) 150° (ஆ) 30°

   (இ) 105° (ஈ) 72°

4. சதுரம் $ABCD$ இல் மூலை விட்டங்கள் AC மற்றும் BD ஆனது O இல் சந்திக்கின்றன எனில், சர்வசம முக்கோணச் சோடிகளின் எண்ணிக்கை



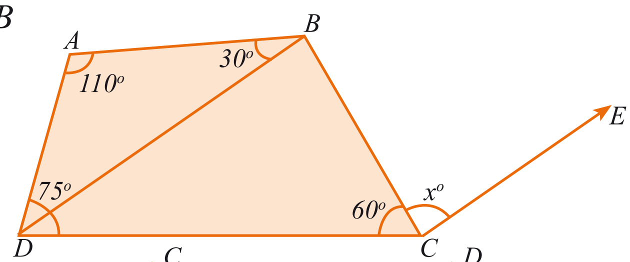
   (அ) 6 (ஆ) 8

   (இ) 4 (ஈ) 12

5. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் $CE \parallel DB$ எனில், x° இன் மதிப்பு

(அ) 45° (ஆ) 30°

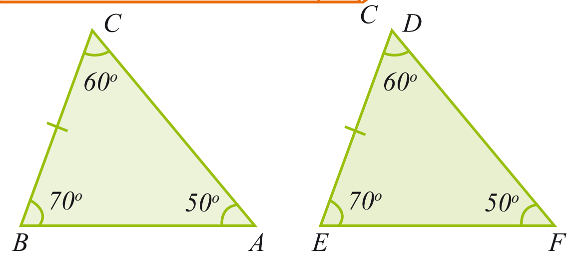
(இ) 75° (ஈ) 85°



6. கீழ்க்கண்ட கூற்றுகளில் சரியானது எது?

(அ) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (ஆ) $\Delta ABC = \Delta DEF$

(இ) $\Delta ABC \cong \Delta FDE$ (ஈ) $\Delta ABC \cong \Delta FED$



7. சாய் சதுரத்தின் மூலை விட்டங்கள் சமமெனில் அந்தச் சாய் சதுரம் ஒரு

(அ) இணைகரம் ஆனால் செவ்வகம் அல்ல (ஆ) செவ்வகம் ஆனால் சதுரம் அல்ல

(இ) சதுரம் (ஈ) இணைகரம் ஆனால் சதுரம் அல்ல

8. நாற்கரம் $ABCD$ இல் $\angle A$ மற்றும் $\angle B$ இன் இரு சம வெட்டிகள் O இல் சந்திக்கின்றன, எனில், $\angle AOB$ இன் மதிப்பு

(அ) $\angle C + \angle D$ (ஆ) $\frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$

(இ) $\frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{3}\angle D$ (ஈ) $\frac{1}{3}\angle C + \frac{1}{2}\angle D$

9. ஓர் இணைகரத்தின் உள் கோணங்கள் 90° எனில், அந்த இணைகரம் ஒரு

(அ) சாய் சதுரம் (ஆ) செவ்வகம் (இ) சரிவகம் (ஈ) பட்டம்

10. கீழ்க்கண்டவற்றுள் எந்தக் கூற்று சரியானது?

(அ) இணைகரத்தின் எதிர்க் கோணங்கள் சமமல்ல.

(ஆ) இணைகரத்தின் அடுத்துள்ள கோணங்கள் நிரப்பிகள்.

(இ) இணைகரத்தின் மூலை விட்டங்கள் எப்பொழுதும் சமம்.

(ஈ) இணைகரத்தின் இரு சோடி எதிர்ப் பக்கங்கள் எப்பொழுதும் சமம்.

11. முக்கோணத்தின் கோணங்கள் $(3x-40)^{\circ}$, $(x+20)^{\circ}$ மற்றும் $(2x-10)^{\circ}$ எனில் x இன் மதிப்பு

(அ) 40° (ஆ) 35° (இ) 50° (ஈ) 45°

நினைவு கூர்வதற்கான கருத்துகள்

- இணைகரத்தின் எதிர்ப் பக்கங்கள் சமம்.
- இணைகரத்தின் எதிர்க் கோணங்கள் சமம்.
- இணைகரத்தின் மூலை விட்டங்கள் ஒன்றை ஒன்று இரு சமக் கூறிடும்.
- இணைகரத்தின் மூலை விட்டங்கள் இணைகரத்தை இரு சர்வசம முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கும்.

- ஒரு நாற்கரத்தின் எதிர்ப் பக்கங்கள் சமம், எனில் அது ஓர் இணைகரமாகும்.
- ஒரே அடிப்பக்கத்தையும் இரு இணை கோடுகளுக்கு இடையேயும் அமையும் இணைகரத்தின் பரப்புகள் சமம்.
- ஒரே அடிப்பக்கத்தையும் இரு இணை கோடுகளுக்கு இடையேயும் அமையும் முக்கோணத்தின் பரப்புகள் சமம்.
- இணைகரத்தின் மூலை விட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில், அது ஒரு சாய் சதுரமாகும்.
- இணைகரத்தின் மூலை விட்டங்கள் அந்த இணைகரத்தைச் சமப் பரப்பு கொண்ட இரண்டு முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கும்.
- முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் மையக் குத்துக் கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி சுற்றுவட்ட மையம் எனப்படும்.
- முக்கோணத்தின் செங்குத்துக் கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி குத்துக்கோட்டு மையம் எனப்படும்.

விடைகள்

பயிற்சி 4.1

1. (i) 20° (ii) 63° (iii) 45° (iv) 27°28′
2. (i) 40° (ii)146° (iii) 90° (iv) 58°12′
3. (i) 18° (ii)140° (iii) 75° (iv) 20° (v) 18°
4. $\angle 1 = 110°$, $\angle 2 = 70°$, $\angle 3 = 110°$, $\angle 4 = 70°$, $\angle 5 = 110°$, $\angle 6 = 70°$, $\angle 7 = 110°$ $\angle 8 = 70°$
5. (i) 70° (ii) 288° (iii) 89° 6. 30°, 60°, 90° 9. 80°, 85 °, 15 °

பயிற்சி 4.2

2. (i), (v) மற்றும் (vi) இணைகரங்கள் 3. (iii), (vi) மற்றும் (viii) நாற்கரங்கள் அல்ல
4. (i), (v), மற்றும் (vi) சரிவகங்கள், (ii), (iii) மற்றும் (iv) சரிவகங்கள் அல்ல

பயிற்சி 4.3

1. (i) 40°, 80°, 100°, 140° 2. 62°, 114° , 66° 3. 10 செ.மீ. 4. 44° 5. 10 செ.மீ.
8. 35° , 145° 9. (i) 30° (ii) 105° (iii) 75° (iv) 105° 10. 122° , 29°
11. அனைத்துப் பண்புகளையும் நிறைவு செய்யும் நாற்கரம் சதுரமாகும்
12. பரப்பளவுகளின் விகிதங்கள் சமம் 13. $d = \sqrt{61}$ 14. DF = 17 செ.மீ.

பயிற்சி 4.6

1. (ஆ) 2. (ஆ) 3. (இ) 4. (அ) 5. (ஈ) 6. (ஈ) 7. (இ) 8. (ஆ) 9. (ஆ) 10. (ஈ) 11. (ஆ)

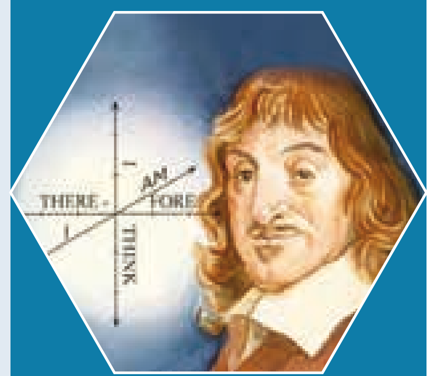
5 ஆயத்தொலை வடிவியல்

பிரபஞ்ச இயக்கத்தின் அளவீட்டுக் கலையைத் துல்லியமாக முன்மொழிந்து விளக்கும் பகுதியே வடிவியல்

– சர் ஐசக் நியூட்டன்

CT76HX

பிரான்ஸ் நாட்டு கணித அறிஞர் ரெனே டேகார்ட் (Rene Descartes) ஆயத்தொலை வடிவியல் அல்லது பகுமுறை வடிவியல் என்ற புதிய பிரிவைக் கணிதத்தில் உருவாக்கினார். அது கடந்த காலங்களில் எண்கணிதம், இயற்கணிதம் மற்றும் வடிவியல் ஆகியவற்றை ஒருங்கிணைத்து, வரைபடத்தில் புள்ளிகளாகவும், சமன்பாடுகளாகவும் வடிவியல் உருவங்களாகவும் காட்சிப்படுத்தும் ஓர் உத்தியாகும். தளத்தில் ஒரு புள்ளியின் ஆய அச்சுத் தொலைவுகளையும், இரு எண்களையும் பயன்படுத்தி ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு கோடுகளில் இருந்து அது எவ்வளவு தொலைவில் உள்ளது என்பதன் மூலம் குறிக்கலாம். இது முழுவதும் ரெனே டேகார்ட்டின் கண்டுபிடிப்பாகும்.



ரெனே டேகார்ட்

1596-1650

கற்றல் விளைவுகள்

- கார்ட்டீசியன் ஆயத் தொலை முறையைப் புரிந்து கொள்ளுதல்
- ஒரு புள்ளியின் கிடை அச்சுத் தொலைவு, செங்குத்து அச்சுத் தொலைவு மற்றும் கொடுக்கப் பட்ட புள்ளியின் அச்சுத்தூரங்கள் ஆகியவற்றை அறிந்து கொள்ளுதல்.
- கார்ட்டீசியன் தளத்தில் அமையும் இரு புள்ளிகளின் தொலைவை வாய்ப்பாட்டின் மூலம் கண்டறிதல்.

5.1 தளத்தினை வரைபடமாகக் குறித்தல் (Mapping the Plane)

நீங்கள் எதேனும் ஒரு முகவரியை எப்படி எழுதுவீர்கள்? எடுத்துக்காட்டாக.

சரக்கல்விளை தொடக்கப்பள்ளி,
135, சரக்கல்விளை வீட்டுவசதி வாரிய சாலை,
கீழ்சரக்கல்விளை, நாகர்கோவில் – 629 002,
கன்னியாகுமரி மாவட்டம்,
தமிழ்நாடு, இந்தியா.

படம் 5.1

எவ்வாறாயினும், இந்த உலகில் எவரும், எங்கிருந்தும், தான் படித்த பள்ளியை அடையாளப்படுத்த இந்தத் தகவல் போதுமானது. இந்தப் பூமியில் கோடானுகோடிக் கட்டடங்கள் உள்ளன எனக் கருதுக. இருப்பினும், ஒரு குறிப்பிட்ட மனிதர் பயின்ற பள்ளியை எவ்வளவு உள்ளடங்கிய பகுதியில் இருந்தாலும் அதை அடையாளம் காண முகவரி முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

இது எப்படிச் சாத்தியமாகிறது? ஒரு குறிப்பிட்ட முகவரியை அடையாளம் காணும் முறையைக் காண்போம். இந்த உலகம் நாடுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுஇருக்கிறதுஎன்பதைநாம்அறிவோம். அதில் இந்தியாவும் ஒன்று. மேலும், இந்தியா மாநிலங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டு இருக்கிறது. இந்த மாநிலங்களில் நம் தமிழ்நாட்டை அடையாளம் காண இயலும்.

மேலும், தொடர்ந்து நோக்கும்போது, நம் மாநிலம் மாவட்டங்களாகவும், மாவட்டங்கள் வட்டங்களாகவும், வட்டங்கள் கிராமங்களாகவும் தொடர்ந்து கொண்டே சென்றால், மேலும் இதே வழியில், அந்த வட்டத்தில் உள்ள ஏராளமான கிராமங்களில் சரக்கல்விளை கிராமத்தை ஒருவர் அடையாளம் காண இயலும். இப்படியாக அக்கிராமத்தில் உள்ள ஏராளமான சாலைகளில் நாம் ஆர்வமாக தேடும் வீட்டுவசதிவாரியச் சாலையும் ஒன்று. நாம் அத்தெருவில் உள்ள கட்டடங்களில் 135 என்ற கதவிலக்கம் கொண்ட அரசுத் தொடக்கப்பள்ளிக் கட்டடத்தைக் கண்டறிந்து, நமது ஆராய்ச்சியை முடிவிற்குக் கொண்டுவரலாம்.

அமெரிக்காவின், நியூயார்க் மாநகரின் ஒரு பகுதி மன்ஹாட்டன். வரைபடத்தில் இந்நகரின் நிழற்சாலைகள் (Avenue) வடக்குத் தெற்காகவும், தெருக்கள் கிழக்கு மேற்காகவும் அமைந்துள்ளன என்பதைக் காண்பிக்கிறது. நீங்கள் தேடும் பகுதி 9ஆவது மற்றும் 10ஆவது நிழற்சாலைகளுக்கு இடையே 57ஆவது தெருவில் இருக்கிறது எனில், அப்பகுதியை வரைபடத்தில் இருந்து உடனடியாகக் கண்டறியலாம். இதேபோல் 34 மற்றும் 35ஆவது சாலைகளுக்கு இடையில் 2ஆவது நிழற்சாலை அமைந்துள்ள இடத்தைக் கண்டறியலாம். மேலும், நியூயார்க்வாசிகள் இதை இன்னும் எளிதாக்குகிறார்கள். ஒரு தெருவில் உள்ள கதவிலக்கத்தைக் கொண்டு அவை எந்த இரு நிழற்சாலைகளுக்கு இடையே அமைகின்றன என்பதையும், ஒரு நிழற்சாலையில் உள்ள கதவிலக்கத்தைக் கொண்டு அது எந்த இரு தெருக்களுக்கு இடையே அமைகிறது எனவும் துல்லியமாகக் கண்டறியலாம்.

படம் 5.2

எல்லா வரைபடங்களும் பாதைகளையும் அதில் ஓர் இடத்தையும் குறிப்பிட, அதன் அருகில் உள்ளவை, தொலைவில் உள்ளவை, அது எவ்வளவு தொலைவில் அமைந்துள்ளது, அவற்றிற்கு இடையே அமைந்துள்ளவை போன்ற எல்லாத் தகவல்களையும் கொண்டு அந்த இடத்தை அடையாளம் காண உதவுகின்றன. நாம் அட்சரேகை (மன்ஹட்டன் தெருக்களைப்போன்று கிழக்கு மேற்காக) மற்றும் தீர்க்க ரேகை (மன்ஹட்டன் நிழற்சாலைகளைப் போன்று வடக்குத் தெற்காக) களைக் கொண்டு பூமியில் உள்ள இடங்களைத் துல்லியமாகக் குறிப்பிட இயலும். வரைபடத்தில் எண்களின் பயன்பாடு எவ்வாறு பயன் உள்ளதாய் இருக்கிறது என்பது ஆர்வமூட்டக்கூடியது.

எண்களைக் கொண்டு வரைபடத்தில் இடங்களைக் குறிப்பிடுவது என்ற கருத்து வடிவியல் மூலம் கிடைக்கிறது. தளங்கள், கன உருவங்கள் மற்றும் எல்லா வகையான வடிவங்கள் போன்றவற்றை வரைபடத்தைக் கொண்டு உருவாக்கக் கணித அறிஞர்கள் விரும்பினார்கள். அவர்கள் அவ்வாறான வரைபடத்தை ஏன் விரும்பினார்கள்? ஒரு வடிவியல் உருவத்தில் ஒரு செயலை நிகழ்த்தும்போது, ஒரு புள்ளியானது உட்புறத்தில் அல்லது வெளிப்புறத்தில் அல்லது விளிம்பில் அமைந்துள்ளதா என உற்று நோக்குகிறோம். ஒரு தள உருவத்தின் விளிம்பில் உள்ள இரு புள்ளிகளும், அதற்கு வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளியும் தரப்படுமானால், விளிம்பின் மேல் உள்ள இரு புள்ளிகளில் எது வெளியே அமையும் புள்ளிக்கு மிக அருகில் உள்ளது, அது எவ்வளவு நெருக்கமாக உள்ளது என்பதை ஆராய்வோம். கனச் சதுரம் போன்ற கன உருவங்களில் இதுபோன்ற சிக்கலான கேள்விகளைக் கற்பனை செய்யலாம்.

கணித அறிஞர்கள், வட்டங்கள், பலகோணங்கள் மற்றும் கோளங்கள் பற்றிய தங்களின் புரிதலுக்கு இப்படிக் கேள்விகள் எழுப்பி அதன் மூலம் தீர்வு கண்டார்கள். அன்றாட வாழ்க்கையிலும் கணித உத்திகள் மற்றும் நுணுக்கமான கணித வழிமுறைகள் பயன்பட்டன. 17ஆம் நூற்றாண்டில் கணித விதியில் ஆயத் தொலைவு முறை தோன்றியிராவிடில், 18ஆம் நூற்றாண்டில் அட்சரேகை மற்றும் தீர்க்கரேகை போன்றவற்றைக்கொண்டு உலக வரைபடத்தில் குறிப்பது நடைபெற்று இருக்காது.

நீங்கள் முன்பே மெய்யெண் தொகுப்பின் வரைபடத்தை எண்கோட்டில் அறிந்துள்ளீர்கள். இது இரு திசையிலும் முடிவில்லாமல் நீள்கிறது. எண்கோட்டில் எவையேனும் இரு புள்ளிகளுக்கிடையே முடிவில்லாத புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன. நாம் இப்பொழுது ஒரு தளத்தின் வரைபடத்தை வரைந்து, அத்தளத்தில் உள்ள புள்ளிகளையும், புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தொலைவு போன்றவற்றையும் விவாதிக்க இருக்கிறோம். மேலும், நாம் இதுவரை சுருக்கமாக விவாதித்த அனைத்து வடிவியல் வடிவங்களையும் வரைய இருக்கிறோம்.

எண்கணிதம் நம்மை எண்களின் உலகத்திற்கும் மற்றும் அதன் செயல்களின் உலகத்திற்கும் அறிமுகப்படுத்தியது, இயற்கணிதம் நமக்குத் தெரியாத ஒன்றின் மதிப்பையும் மற்றும் அவற்றைச் சமன்பாட்டில் பயன்படுத்திக் கண்டுபிடிக்கவும் கற்றுத்தந்தது. வடிவியல் நமக்கு வடிவங்களை அதன் பண்பின் அடிப்படையில் விளக்கக் கற்றுத்தந்தது. ஆயத்தொலை வடிவியலானது எண்களின் பயன் மற்றும் இயற்கணிதச் சமன்பாடுகளைக் கொண்டு வடிவியலைப் படிப்பதற்குப் பல உத்திகளை ஓர் இடத்தில் அழகிய முறையில் ஒருங்கிணைத்துக் காட்சிப்படுத்திக் கற்றுத்தர இருக்கிறது. இது மிகப்பெரிய ஆர்வமூட்டும் செயல்பாடாகும்.

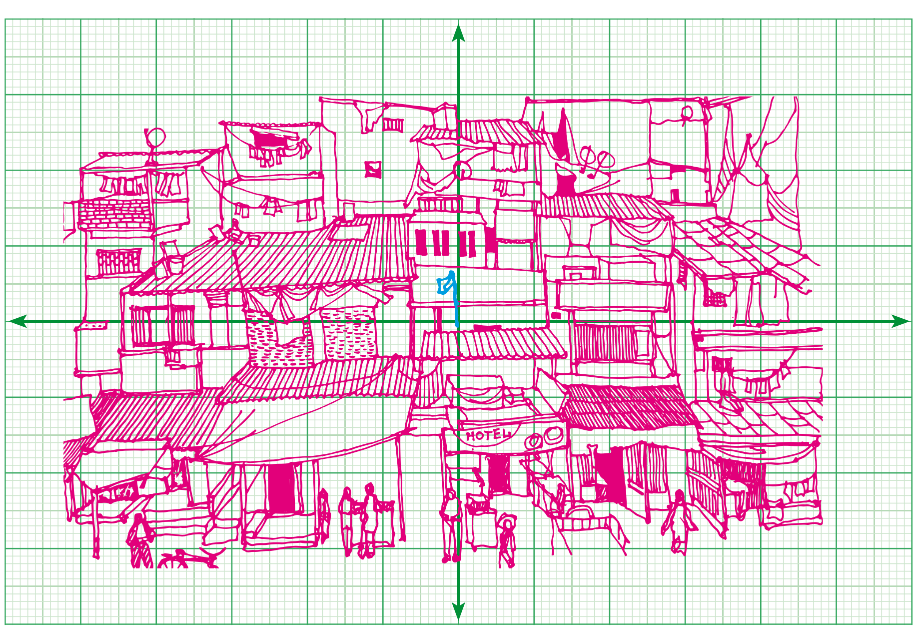
5.2 ஆயத் தொலைவைக் கண்டறிதல் (Devising a Coordinate System)

நீ உன் நண்பனிடம் 5செ.மீ., 3செ.மீ. உள்ள செவ்வகத்தை வெற்றுத் தாளில் வரையச் சொல்லவும். அதற்கு அவன் முடியும் ஆனால் வரைபடத்தாளில் எங்கே வரைய வேண்டும் என அவன் கேட்டால் அவனுக்கு நீ எப்படிப் பதில் சொல்வாய்?

படம் 5.3

இப்பொழுது படத்தைப் பார். நீ இதை மற்றொருவருக்கு எப்படி விளக்குவாய்?

மேற்கூறிய படத்தை(படம் 5.3) ஆய்வு செய்வோம். இதில் சாதாரணமாகக் குறிப்பிட்ட வீட்டை அடையாளப்படுத்துதல் என்பது மிகக் கடினமான பணியாகும். ஏதேனும் ஓர் இடத்தையோ அல்லது ஒரு பொருளையோ அடையாளத்திற்காக நிறுவும்பொழுது நமக்கு மற்றோர் இடத்தையோ அல்லது பொருளையோ அடையாளப்படுத்துதல் எளிதாகும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு கொடியைப் பொருத்திவிட்டு அந்தக் கொடிக்கு இடது புறமாக உள்ள வீட்டைப் பற்றியோ, அவ்வீட்டிற்குக் கீழே அமைந்துள்ள உணவகத்தைப் பற்றியோ, அதற்கு வலப்புறமாக அமைந்துள்ள அலை ஏற்பியைப் (Antenna) பற்றியோ பேசலாம்.

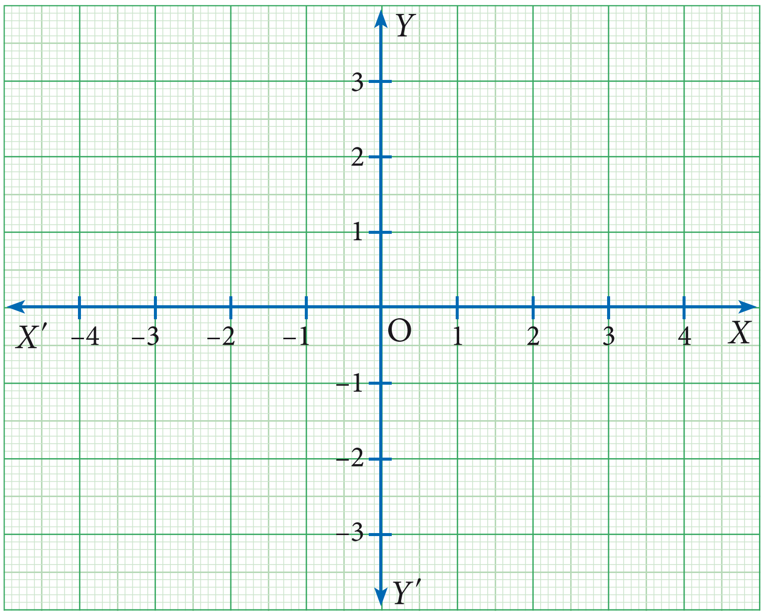


படம் 5.4

படம் 5.4 இல் உள்ளதுபோல், இரு செங்குத்துக்கோடுகள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியைக் கொடிக்கு அருகில் அமையுமாறு வரைக. இப்பொழுது நீ உன் நண்பனிடம் படத்தின் மொத்த நீள அகலத்தைக் கொடிக்கம்பத்தை ஆரம்ப இடக்குறியீடாகக் கொண்டு 2 செ.மீ. வலப்புறம், 3 செ.மீ. மேற்புறம், மேலும், உனக்குத் திசை தெரிந்தால் 2 செ.மீ. கிழக்கே, 3 செ.மீ. வடக்கே எனவும் கூறலாம்.

இது போன்றே நாம் செய்ய இருக்கிறோம். பொதுவாக, எண்கோடு என்பது பூச்சியத்திற்கு வலப்புறமாக மிகை எண்களையும், பூச்சியத்திற்கு இடப்புறமாகக் குறை எண்களையும் கொண்ட கிடைக்கோட்டில் குறிப்பதாகும். நாம் இப்பொழுது மற்றோர் எண்கோட்டு நகலைச் செங்குத்தாகக் கருதுவோம். ஆனால் பூச்சியத்திற்கு மேல்புறம் மிகை எண்களையும் கீழ்ப்புறம் குறை எண்களையும் குறிப்போம். (படம் 5.5).

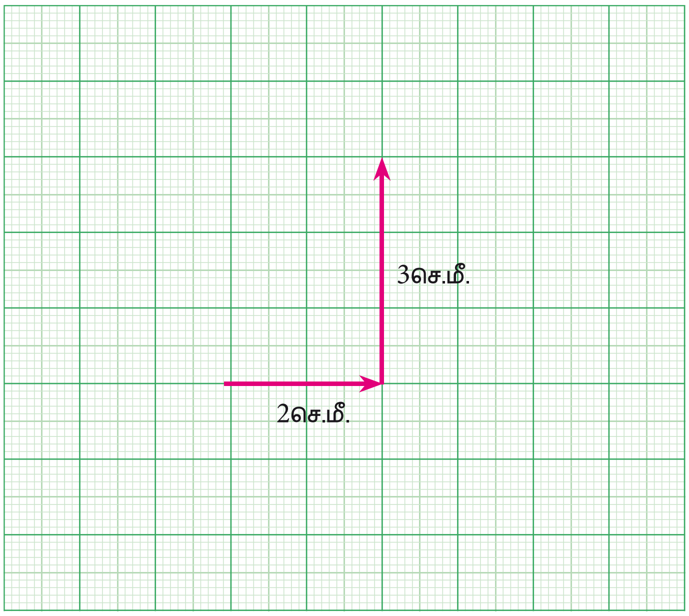
இரு எண்கோடுகளும் எங்கே சந்திக்கின்றன? இரு கோடுகளும் பூச்சியத்திலேயே சந்திக்கின்றன. இதுவே நம்முடைய கொடி குறிப்பிட்ட இடமாகும். இரண்டு கோடுகளிலும் இதனோடு தொடர்புடைய மற்ற எண்களைப்பற்றிப் பேசலாம். ஆனால், இப்பொழுது நீங்கள் இரு எண்கோட்டில் உள்ள எண்களை மட்டுமல்லாமல் அதைவிட அதிகமாகப் பார்க்கலாம்.



படம் 5.5

நாம் வலப்புறம் 2 அலகும் மேல்புறம் 3 அலகும் செல்வதாக நினைத்தால் நாம் இந்த இடத்தை $(\rightarrow 2, \uparrow 3)$ என அழைக்கலாம்.

செங்குத்து, கிடைநிலை, மேல், கீழ் ... போன்ற அனைத்தையும் பயன்படுத்துவது எளிதல்ல. எனவே, இதை நாம் சுருக்கமாக $(2, 3)$ எனக் கூறுவோம். மேலும் வலப்புறம் 2 அலகு மற்றும் மேற்புறம் 3 அலகு என்பதைப் புரிந்து கொண்டுள்ளோம்.



படம் 5.6

நாம் முதலில் 3 அலகு மேற்புறம், மற்றும் 2 அலகு வலப்புறம் சென்று அடைந்த இடமான $(2, 3)$ இக்கான வழிமுறையும் $(3, 2)$ இக்கான வழிமுறையும் ஒன்றாகுமா? என்பதைக் கருத்தில் கொள்க. மேலும், $(-2,3)$ எவ்வாறு அமையும்? இது எப்பொழுதும் $(0, 0)$ இலிருந்து 2 அலகு இடப்புறம் மற்றும் 3 அலகு மேற்புறம் அமையும். $(2, -3)$ இக்கான வழிமுறை என்ன? இது குறிப்பிடுவது 2 அலகு வலப்புறம் 3 அலகு கீழ்ப்புறம். நமக்கு இப்பொழுது கிடை மற்றும் செங்குத்து எண் கோடுகளுக்குப் பெயரிடவேண்டிய தேவை உள்ளது. கிடைநிலை எண் கோட்டை x அச்சு மற்றும் செங்குத்து எண் கோட்டை y அச்சு எனவும் அழைப்போம். வலப்புறத்தில் X, எனவும் இடப்புறத்தில் X', எனவும், மேல்புறம் Y, எனவும் கீழ்ப்புறம் Y' எனவும் குறிப்போம்.

x-ஆயத் தொலைவானது கிடை அச்சுத் தொலைவு *(abscissa)* எனவும் y ஆயத் தொலைவானது செங்குத்து அச்சுத் தொலைவு *(ordinate)* எனவும் அழைப்போம். ஆய அச்சுகள் வெட்டும் புள்ளி $(0,0)$ ஐ ஆதி (origin) என்போம்.

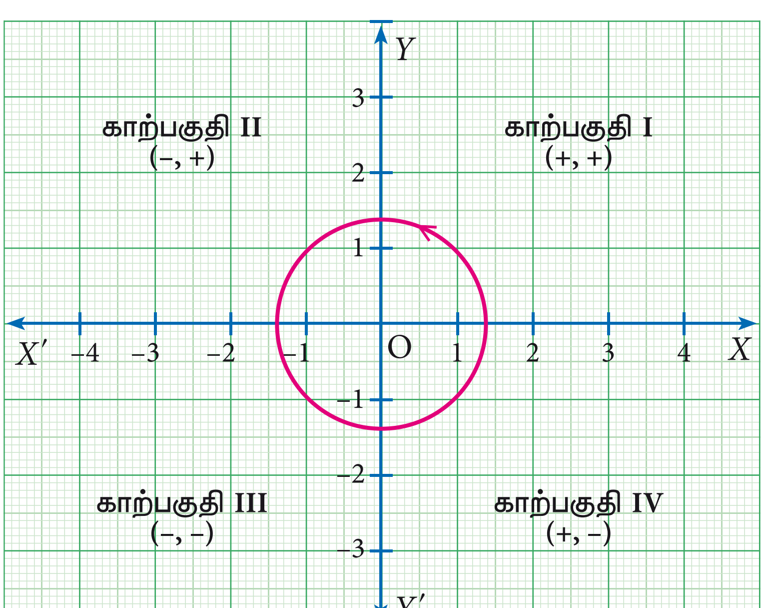
நாம் இப்பொழுது தாளிலுள்ள எந்தவொரு புள்ளியையும் (x,y) என விளக்கலாம். எவ்வாறாயினும் நம்முடைய தாளில் 1, 2, … குறிப்பது எதை? இந்த எண்களைக் குறிப்பிட நமக்குச் சில பொருத்தமான அலகுகளைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டிய தேவை உள்ளது. எடுத்துக்காட்டாக, நாம் 1 அலகை 1 செ.மீ. எனத் தேர்ந்தெடுப்போம். ஆகவே, $(0,0)$ இக்கு வலப்புறமாக 2 செ.மீ. நகர்ந்து மற்றும் மேல்நோக்கி 3 செ.மீ. நகர்தலே $(2, 3)$ இன் வழிமுறையாகும். அலகுகளைத் தேர்ந்தெடுப்பது தன்னிச்சையானது என்பதை நினைவில் கொள்ளவேண்டும். நாம் 1 அலகை 2 செ.மீ. என எடுப்போமேயானால் நமக்குக் கிடைக்கும் படங்கள் மிகப் பெரியதாகும். ஆனால் தொடர்புள்ள தூரம் எப்பொழுதும் மாறாது. இப்போது நம்மிடம் உள்ளது வெறும் காகிதம் அல்ல. தளத்தில் உள்ள எண்ணற்ற புள்ளிகளை விளக்கும் மொழி ஆகும்.

குறிப்பு

$(0,0)$ஐத் தாளின் மையத்திலோ அல்லது வேறு எங்கேயோ குறிப்பது ஒரு பொருட்டல்ல. நமக்கு எப்பொழுதும் $(0,0)$ ஆதிப்புள்ளியாகும். மேலும், அங்கிருந்தே புள்ளிக்கான எல்லா வழிமுறைகளும் தொடரும் ஆதிப்புள்ளியை O என்ற எழுத்தால் குறிப்பிடுவோம்.

x அச்சும் y அச்சும் தளத்தை நான்கு பகுதிகளாகப் பிரிக்கின்றன. அவற்றை நாம் காற்பகுதிகள் என்போம். (நினைவில் கொள்க: நாற்கரம் என்பது நான்கு பக்கங்களைக் கொண்டது. நான்கு காற்பகுதிகள்) பொதுவாக, அவை I, II, III மற்றும் IV என எண்ணிடப்படும். இதில் I ஆனது கிழக்கு மேற்பகுதியையும், II ஆனது மேற்கு மேல்பகுதியையும், III ஆனது மேற்கு கீழ் பகுதியையும் மற்றும், IV ஆனது கிழக்கு கீழ்ப்பகுதியையும் கடிகார எதிர்ச்சுற்றில் பயணத்தையும் உள்ளடக்கியதாகும்.

தளம்	காற்பகுதி	x,y இன் தன்மை	ஆயத் தொலைகளின் குறிகள்
XOY	I	$x>0, y>0$	$(+,+)$
$X'OY$	II	$x<0, y>0$	$(-,+)$
$X'OY'$	III	$x<0, y<0$	$(-,-)$
XOY'	IV	$x>0, y<0$	$(+,-)$



படம் 5.7

குறிப்பு

இந்த வழிமுறையை (கடிகார எதிர் சுற்று) கடிகாரச் சுற்றில் அல்லாமலோ அல்லது வேறு ஏதேனும் காற்பகுதியில் இருந்தோ தொடங்கலாமா? இது ஒன்றும் பொருட்டல்ல, ஆனால், இது சில நூற்றாண்டுகளுக்கு முன்பிருந்தே நம்மால் பின்பற்றப்படும் சில சிறந்த வழிமுறைகளில் ஒன்றாகும்.

குறிப்பு

1. x அச்சில் அமையும் எந்த ஒரு புள்ளி Pயின் y அச்சுத் தொலைவு பூச்சியம் ஆகும் $P\ (x,0)$.
2. y அச்சில் அமையும் எந்த ஒரு புள்ளி Q இன் x அச்சுத் தொலைவு பூச்சியம் ஆகும் $Q\ (0, y)$
3. $(x, y) \neq (y, x)$; x மற்றும் y சமமல்ல
4. செவ்வக ஆய அச்சுக்களை உடைய தளம் கார்ட்டீசியன் தளம் ஆகும்.

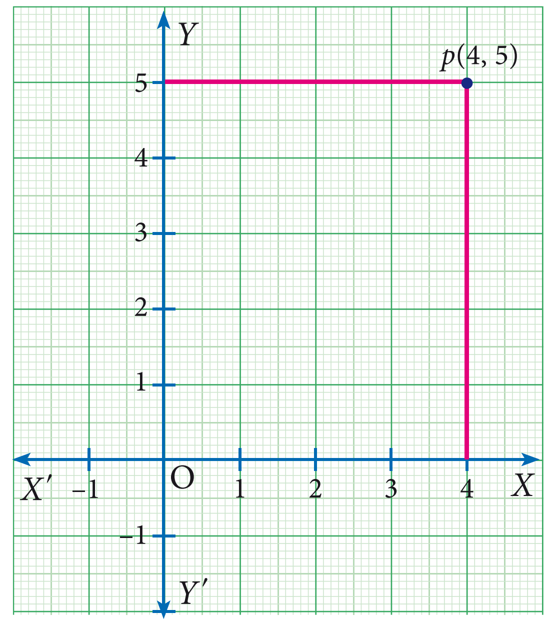
5.2.1 கார்ட்டீசியன் தளத்தில் புள்ளிகளைக் குறித்தல்
Plotting Points in Cartesian Coordinate Plane

$(4,5)$ என்ற புள்ளியைக் கார்ட்டீசியன் ஆய அச்சுத் தளத்தில் குறிக்க, x அச்சில் 4 அலகுகள் நகர்ந்து, அங்கிருந்து ஒரு செங்குத்துக் கோடு $x = 4$ வரைக.

இதே போல் y அச்சில் 5 அலகுகள் நகர்ந்து அங்கிருந்து ஒரு கிடைமட்டமாகக் கோடு $y = 5$ வரைக.

இந்த இரு கோடுகள் சந்திக்கும் இடம் கார்ட்டீசியன் தளத்தில் புள்ளி $(4, 5)$ இன் இடம் ஆகும்.

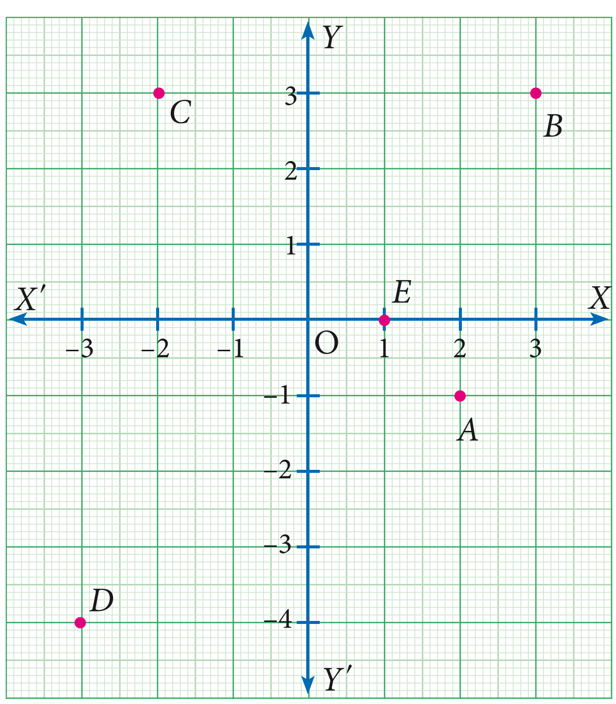
இப்புள்ளியானது x அச்சில் இருந்து 5 அலகுகள் தொலைவிலும் y அச்சில் இருந்து 4 அலகுகள் தொலைவிலும் அமையும். இவ்வாறு கார்ட்டீசியன் தளத்தில் $(4, 5)$ என்ற புள்ளி குறிக்கப்படுகிறது.



படம் 5.8

செயல்பாடு 1

கொடுக்கப்பட்டுள்ள வரைபடத்தில் இருந்து பின்வரும் அட்டவணையை நிரப்புக:

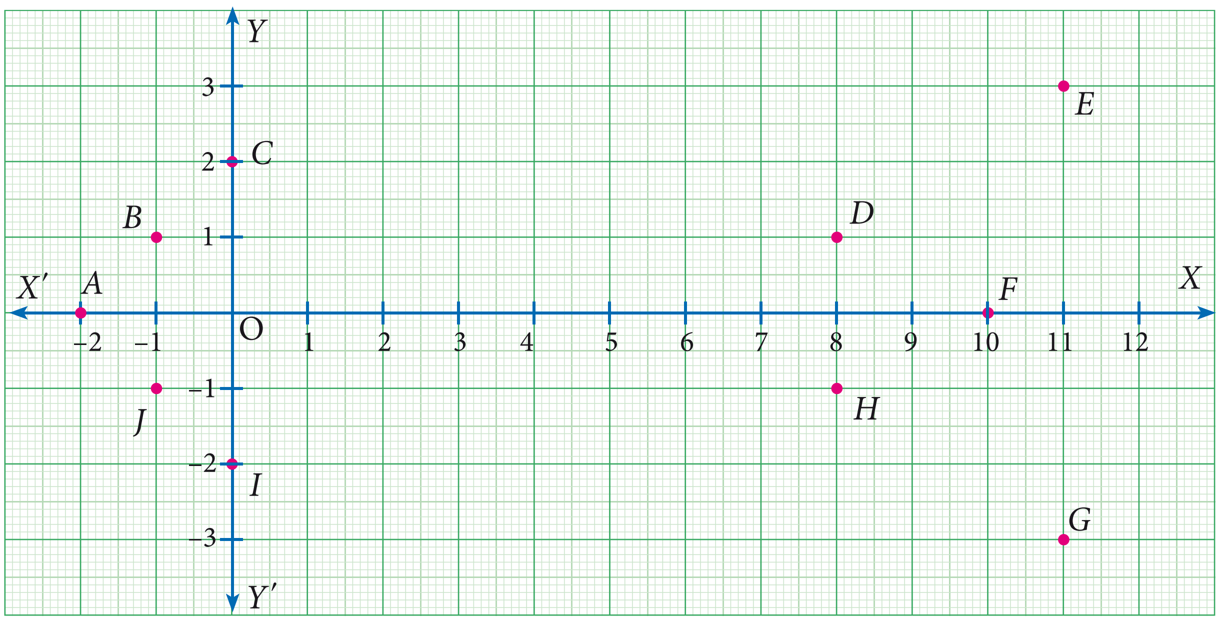


படம் 5.9

புள்ளிகள்	காற்பகுதி	வரிசைச்சோடி
A	IV	
B		(3,3)
C		(-2,3)
D	III	

செயல்பாடு 2

புள்ளிகளை வரிசைப்படி இணைத்துக் கிடைக்கும் உருவத்திற்குப் பெயரிடுக. குறைந்தபட்சம் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை: (i) x- அச்சின் மேல் (ii) y- அச்சின் மேல் (iii) ஒவ்வொரு காற்பகுதியிலும் இருந்து பெயரிடுக.



படம் 5.10

எடுத்துக்காட்டு 5.1

பின்வரும் புள்ளிகள் எந்தக் காற்பகுதியில் அமையும்?

(அ) (3,–8) (ஆ) (–1,–3) (இ) (2, 5) (ஈ) (–7, 3)

தீர்வு

(அ) x -ஆயத்தொலை மிகை மதிப்பு மற்றும் y – ஆயத்தொலை குறை மதிப்பு. எனவே, (3,–8) என்ற புள்ளி IV ஆவது காற்பகுதியில் அமையும்.

(ஆ) x -ஆயத்தொலை குறை மதிப்பு மற்றும் y -ஆயத்தொலை குறை மதிப்பு. எனவே, (–1,–3) என்ற புள்ளி III ஆவது காற்பகுதியில் அமையும்.

(இ) x -ஆயத்தொலை மிகை மதிப்பு மற்றும் y -ஆயத்தொலை மிகை மதிப்பு. எனவே, (2,5) என்ற புள்ளி I ஆவது காற்பகுதியில் அமையும்.

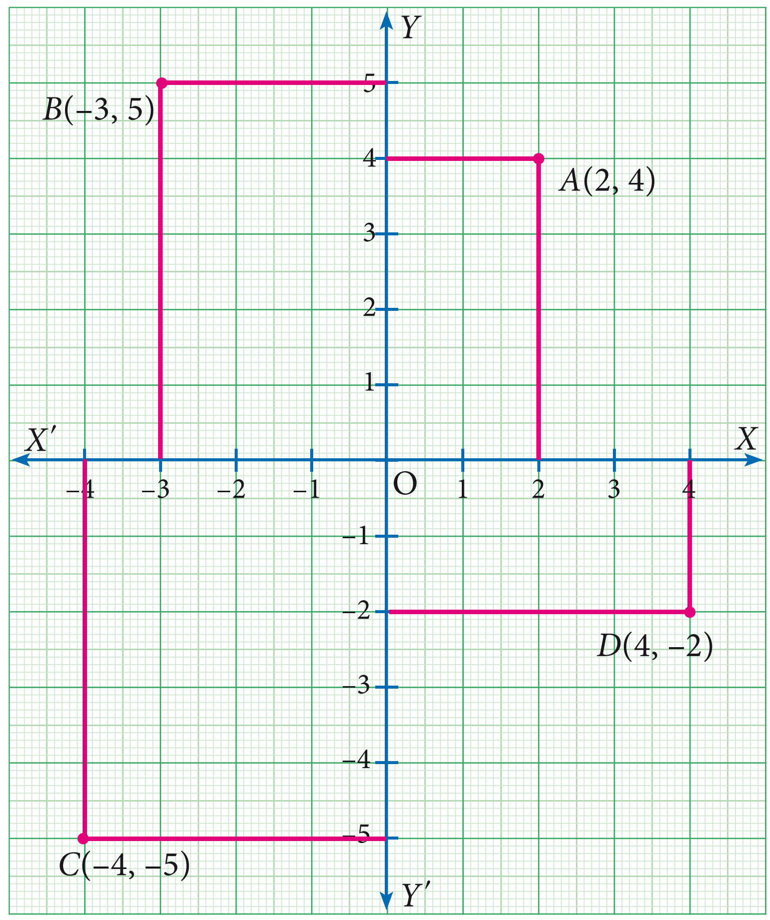
(ஈ) x -ஆயத்தொலை குறை மதிப்பு மற்றும் y – ஆயத்தொலை மிகை மதிப்பு. எனவே, (–7,3) என்ற புள்ளி II ஆவது காற்பகுதியில் அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.2

$A(2, 4)$, $B(-3, 5)$, $C(-4, -5)$, மற்றும் $D(4,-2)$ என்ற புள்ளிகளைக் கார்ட்டீசியன் தளத்தில் குறிக்கவும்.

தீர்வு

(i) $(2, 4)$ என்ற புள்ளியைக் குறிக்க, $x = 2$ என்ற குத்துக்கோடு மற்றும் $y = 4$. என்ற கிடைமட்டக் கோடும் வரைக. இவ்விரு கோடுகளின் சந்திப்புப் புள்ளி $(2, 4)$ இன் அமைவிடம் ஆகும். இம்முறையில் $A(2,4)$என்ற புள்ளி கார்ட்டீசியன் தளத்தில் காற்பகுதி I இல் குறிக்கப்படுகிறது.



படம் 5.11

(ii) $(-3, 5)$ என்ற புள்ளியைக் குறிக்க, $x = -3$ என்ற குத்துக்கோடு மற்றும் $y = 5$. என்ற கிடைமட்டக் கோடும் வரைக. இவ்விரு கோடுகளின் சந்திப்புப் புள்ளி $(-3, 5)$ இன் அமைவிடம் ஆகும். இம்முறையில் $B(-3, 5)$ என்ற புள்ளி கார்ட்டீசியன் தளத்தில் காற்பகுதி II இல் குறிக்கப்படுகிறது.

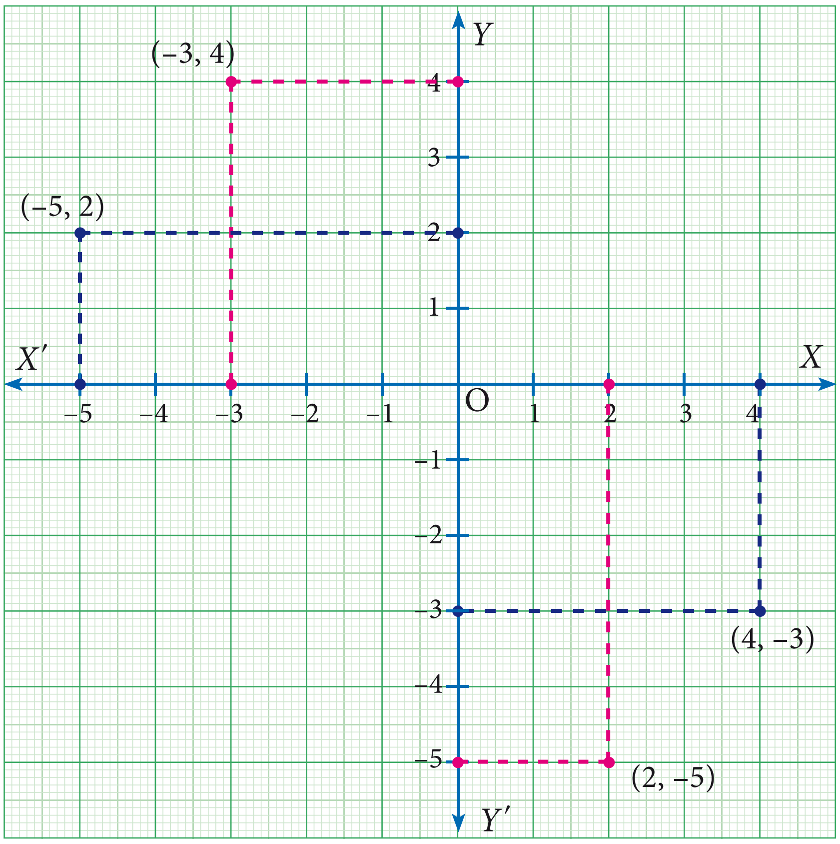
(iii) $(-4, -5)$ என்ற புள்ளியைக் குறிக்க, $x = -4$ என்ற குத்துக்கோடு மற்றும் $y = -5$. என்ற கிடைமட்டக் கோடும் வரைக. இவ்விரு கோடுகளின் சந்திப்புப் புள்ளி $(-4, -5)$ இன் அமைவிடம் ஆகும். இம்முறையில் $C(-4, -5)$ என்ற புள்ளி கார்ட்டீசியன் தளத்தில் காற்பகுதி III இல் குறிக்கப்படுகிறது.

(iv) $(4, -2)$ என்ற புள்ளியைக் குறிக்க, $x = 4$ என்ற குத்துக்கோடு மற்றும் $y = -2$. என்ற கிடைமட்டக் கோடும் வரைக. இவ்விரு கோடுகளின் சந்திப்பு புள்ளி $(4, -2)$ இன் அமைவிடம் ஆகும். இம்முறையில் $D(4, -2)$என்ற புள்ளி கார்ட்டீசியன் தளத்தில் காற்பகுதி IV இல் குறிக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 5.3

(i) $(2,-5)$ மற்றும் $(-5, 2)$ (ii) $(-3, 4)$ மற்றும் $(4,-3)$ என்ற புள்ளிகளின் அமைவிடத்தைச் செவ்வக ஆயத் தொலை முறையில் குறிக்க.

தீர்வு



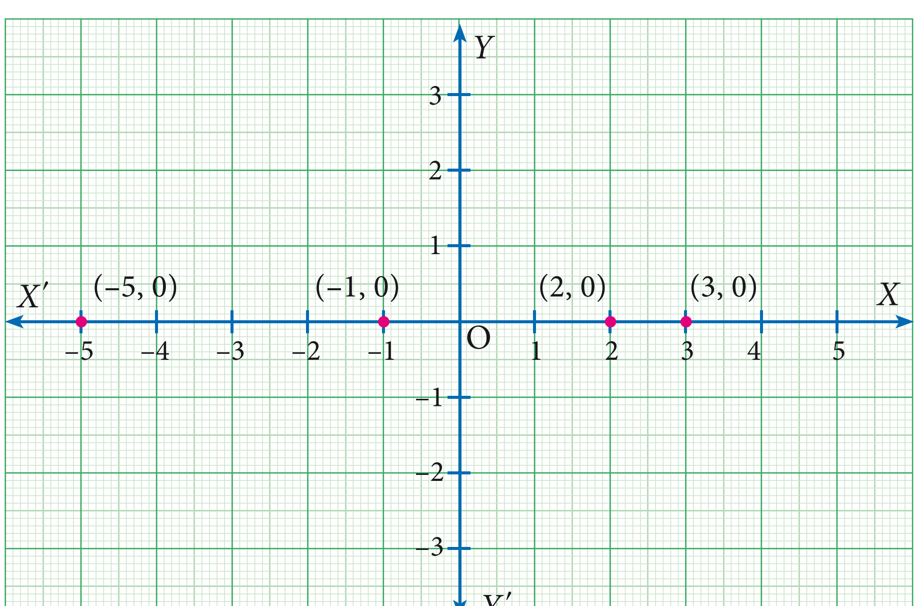
படம் 5.12

> **குறிப்பு**
>
> கார்ட்டீசியன் தளத்தில் ஒரு புள்ளியின் x அச்சுத் தொலைவு மற்றும் y அச்சுத் தொலைவு இரண்டையும் இடமாற்றம் செய்தால் அப்புள்ளி கார்ட்டீசியன் தளத்தில் வேறொரு புள்ளியின் அமைவிடத்தைப் பெறும். எப்பொழுது இவை இரண்டும் ஒன்றாக அமையுமா எனச் சிந்திக்க!

எடுத்துக்காட்டு 5.4

(2, 0), (−5, 0), (3, 0) மற்றும் (−1, 0) என்ற புள்ளிகளைக் கார்ட்டீசியன் தளத்தில் குறிக்கவும். மேலும் அவை எங்கே அமைந்துள்ளன?

தீர்வு



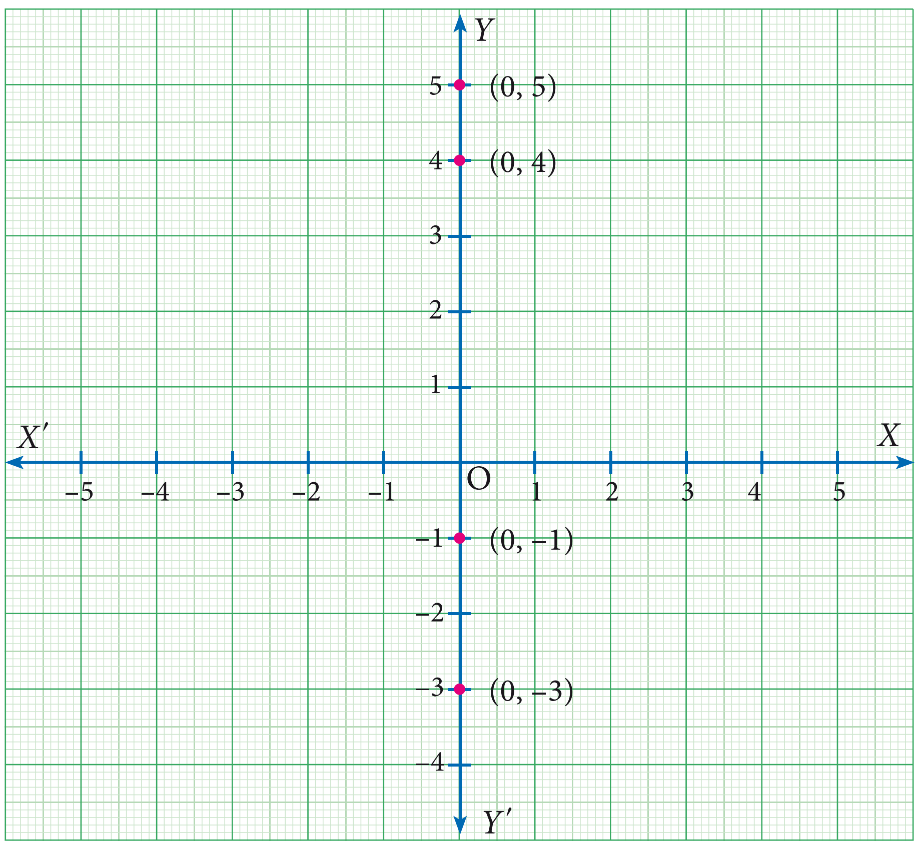
படம் 5.13

அனைத்துப் புள்ளிகளும் x-அச்சின் மேல் அமைந்துள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 5.5

$(0, -3)$, $(0, 4)$, $(0, -1)$, மற்றும் $(0, 5)$ என்ற புள்ளிகளைக் கார்ட்டீசியன் தளத்தில் குறிக்கவும். மேலும் அவை எங்கே அமைந்துள்ளன?

தீர்வு



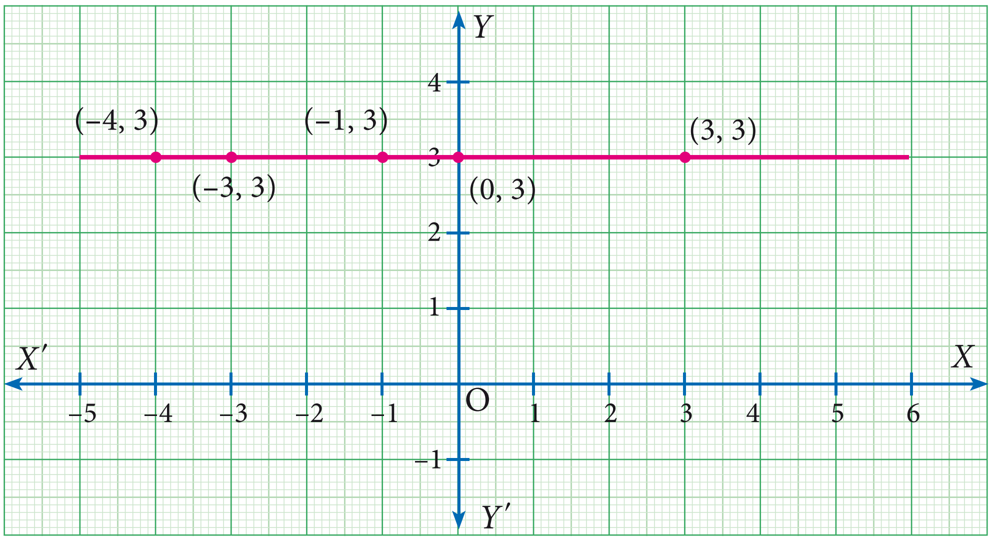
அனைத்துப் புள்ளிகளும் y-அச்சின் மேல் அமைந்துள்ளன.

படம் 5.14

எடுத்துக்காட்டு 5.6

$(-4, 3), (-3, 3), (-1, 3), (0, 3)$ மற்றும் $(3, 3)$ என்ற புள்ளிகளைக் கார்ட்டீசியன் தளத்தில் குறிக்கவும். இப்புள்ளிகளின் அமைவிடத்தைப் பற்றி நீங்கள் கூறுவது என்ன?

தீர்வு



தரப்பட்டுள்ள புள்ளிகளை இணைத்தால், அவை x-அச்சிற்கு இணையாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டில் அமைந்திருப்பதைக் காணலாம்.

படம் 5.15

எடுத்துக்காட்டு 5.7

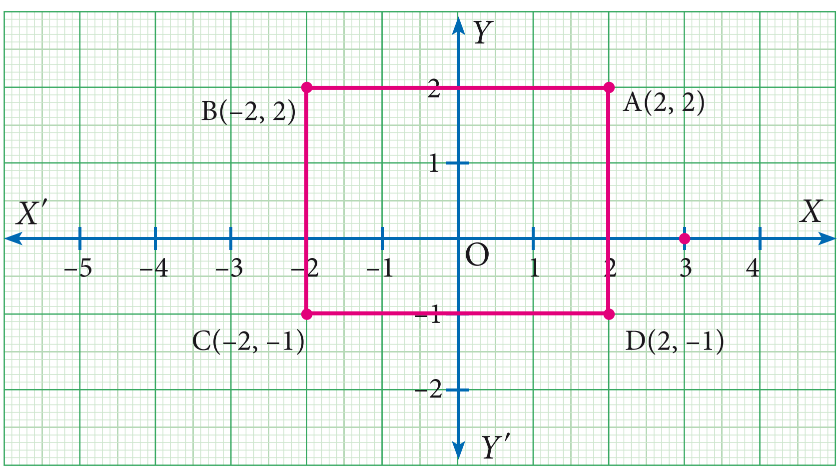
$A(2,2)$, $B(-2,2)$, $C(-2,-1)$, மற்றும் $D(2,-1)$ என்ற புள்ளிகளைக் கார்ட்டீசியன் தளத்தில் குறிக்கவும். அந்த புள்ளிகளை வரிசைப்படி இணைக்கும்போது கிடைக்கும் வடிவத்தை விவாதிக்கவும்.

குறிப்பு

x-அச்சிற்கு இணையான கோட்டில் அமைந்திருக்கும் புள்ளிகளின் y- அச்சுத் தொலைவு சமமானதாக அமையும்.

தீர்வு

புள்ளி	*A*	*B*	*C*	*D*
காற்பகுதி	I	II	III	IV



படம் 5.16

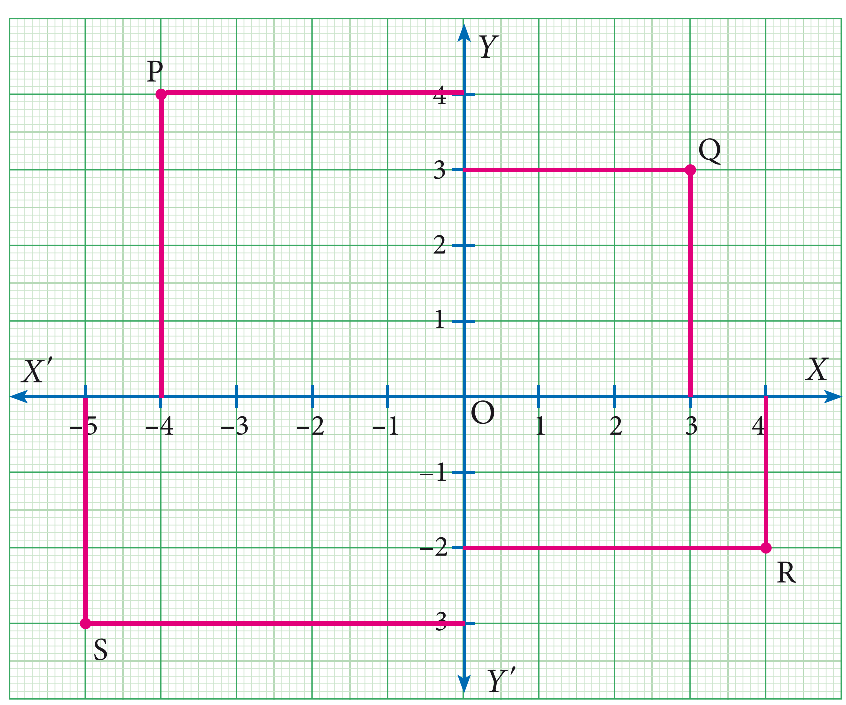
$ABCD$ ஒரு செவ்வகம் ஆகும். இச்செவ்வகத்தின் நீளம், அகலம் மற்றும் பரப்பளவு காண முடியுமா?

பயிற்சி 5.1

1. பின்வரும் புள்ளிகளை ஆய அச்சு வடிவத்தில் குறித்து அது எந்தக் காற்பகுதியில் அமைகிறது எனக் காண்க. $P(-7,6)$, $Q(7,-2)$, $R(-6,-7)$, $S(3,5)$ மற்றும் $T(3,9)$

2. அருகில் உள்ள படம் 5.17இல் தரப்பட்டுள்ள கார்ட்டீசியன் தளத்தில் இருந்து, பின்வரும் புள்ளிகளின் கிடை அச்சுத் தொலைவு மற்றும் செங்குத்து அச்சுத் தொலைவை எழுதுக.

(i) *P*	(ii) *Q*
(iii) *R*	(iv) *S*



படம் 5.17

3. பின்வரும் புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறித்து அவற்றை இணைக்கவும். கிடைக்கும் வடிவத்தைப் பற்றி தங்களின் கருத்தைக் கூறுக.

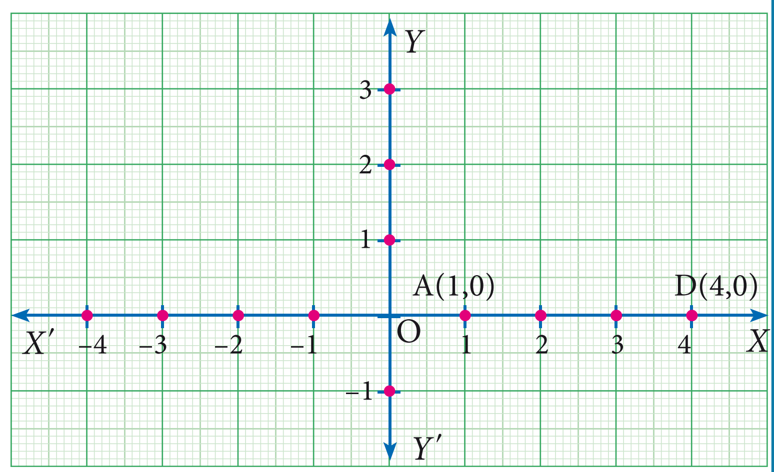
(i) $(-5,3)$ $(-1,3)$ $(0,3)$ $(5,3)$ (ii) $(0,-4)$ $(0,-2)$ $(0,4)$ $(0,5)$

4. பின்வரும் புள்ளிகளை ஆயத்தொலைத் தளத்தில் குறித்து, வரிசைப்படி அவற்றை இணைக்கவும். எந்த வகையான வடிவியல் உருவம் கிடைக்கும்?

(i) $(0,0)$ $(-4,0)$ $(-4,-4)$ $(0,-4)$ (ii) $(-3,3)$ $(2,3)$ $(-6,-1)$ $(5,-1)$

செயல்பாடு 3

பின்வரும் புள்ளிகளை வரைப்படத் தாளில், 1 செ.மீ = 1 அலகு என அளவுத் திட்டம் எடுத்துக் குறிக்கவும்.



படம் 5.18

A (1, 0) மற்றும் D (4, 0) புள்ளிகள் ஒன்று மற்றொன்றில் இருந்து எவ்வளவு தொலைவில் உள்ளது?

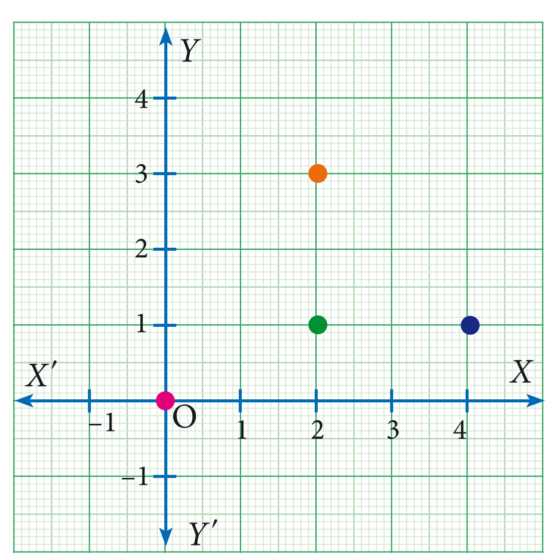
AD மற்றும் DA காண்க.

$AD = DA$ என்பது சரியா?

இதேபோல், மற்றொரு புள்ளி சோடிகளைக் குறித்து அவற்றிற்கு இடையேயுள்ள தொலைவைச் சரிபார்க்க.

5.3 இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு (Distance between any Two Points)

அகிலாவும் சண்முகமும் சத்தியமங்கலத்தில் ஒரே தெருவில் வசிக்கும் இரு நண்பர்கள். இத்தெருவும் நூலகம் அமைந்துள்ள மற்றொரு தெருவும் சந்திக்கும் இடத்தில் சண்முகத்தின் வீடு அமைந்துள்ளது. சண்முகத்தின் வீட்டிற்கு அருகில் உள்ள பள்ளியில் இருவரும் படிக்கின்றார்கள். கீழேயுள்ள வரைபடத்தைப் பார்க்காமல் அவர்களின் வீடுகள், நூலகம் மற்றும் பள்ளியின் படங்களை நீயாக வரைய முயற்சி செய்க.



படம் 5.19

பள்ளியானது, ஆதிப்புள்ளியில் உள்ளதாகக் கருதுக. (ஆயத்தொலை அமைப்பு மொழியின் எல்லா வழிமுறைகளையும் பயன்படுத்தி நாம் இதைச் செய்யலாமே!)

இப்பொழுது 1 அலகு = 50 மீட்டர்கள் என அளவுத் திட்டத்தை எடுத்துக்கொள்வோம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தை (படம் 5.19) படித்து நீங்கள் இங்குள்ள வினாக்களுக்கு விடையளிக்க வேண்டும்.

1 சண்முகத்தின் வீட்டிலிருந்து அகிலாவின் வீடு எவ்வளவு தொலைவில் உள்ளது?

2 சண்முகத்தின் வீட்டிலிருந்து நூலகம் எவ்வளவு தொலைவில் உள்ளது?

3 சண்முகம் மற்றும் அகிலாவின் வீடுகளிலிருந்து பள்ளி எவ்வளவு தொலைவில் உள்ளது?

4 அகிலாவின் வீட்டிலிருந்து நூலகம் எவ்வளவு தொலைவில் உள்ளது?

5 அகிலாவின் வீட்டிலிருந்து சண்முகத்தின் வீடு எவ்வளவு தொலைவில் உள்ளது?

வினா எண் (1)இற்கு விடையளித்த பின்பு கேள்வி (5)இற்கான தேவை இருக்காது. புள்ளி Aஇலிருந்து Bஇக்கு உள்ள தொலைவும், புள்ளி B இலிருந்து A இக்கு உள்ள தொலைவும் சமம் எனத் தெள்ளத்தெளிவாகிறது. மேலும், நாம் பொதுவாகப் புள்ளி Aஇக்கும் Bஇக்கும் இடைப்பட்ட தொலைவு என அழைப்போம். ஆனால் கணிதவியலாளர்கள் பொதுவாக எவ்வாறு எதிர்வரும் பண்புகளைக் குறித்துக்கொள்வார்களோ அதேபோல் நாம் இதையும் தொலைவு $AB =$ தொலைவு BA எனக் குறித்துக் கொள்வது சிறந்தது. இது ஒரு தளத்தில் அமையும் எல்லா புள்ளிகளுக்கும் பொருந்தும். ஆகவே, எவ்வாறாயினும் வினா எண் 5உம் வினா எண் 1உம் ஒன்றே.

மற்ற வினாக்களின் விடைதான் என்ன? அந்த வினாக்கள் அனைத்தும் வெவ்வேறானவையே. இரண்டு வீடுகளும் வடக்குத் தெற்காக ஒரே தெருவில் அமைந்துள்ளதை நாம் அறிவோம். இதிலிருந்து, y அச்சுத் தொலைவானது வினா எண்(1) இன் விடையாக அமைகிறது.

இதேபோன்று, நூலகமும் சண்முகத்தின் இல்லமும் கிழக்கு மேற்காகச் செல்லும் ஒரே தெருவில் இருப்பதால் x ஆயத் தொலைவுதான் (2) ஆவது வினாவிற்கான விடையாகும்.

குறிப்பு

தொலைவு AB = தொலைவு BA என்ற சமன்பாடு சில நேரங்களில் உண்மையல்ல என்பது தெளிவு. A இலிருந்து Bஇக்குச் செல்லும் சாலையானது ஒரு வழிப்பாதையாக இருக்கும்பொழுது நீங்கள் மறுவழியில் செல்ல இயலுமா? இப்பொழுது Bஇலிருந்து A இக்குச் செல்லும் தொலைவு அதிகமாகும். ஆனால் நாம் இவ்வாறான சிக்கல்கள் எல்லாம் தவிர்த்து இருவழியில் செல்வதாகவே கருதுவோம்

எத்தகைய வழிகள் உள்ளன என்பதைப் பொருத்துதான் மூன்றாவது மற்றும் நான்காவது வினாக்களுக்கான விடை அமைகிறது. x மற்றும் y அச்சுகளுக்கு இணையாக $1, 2, 3 \ldots$ எனக் குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகளை உடைய ஒரேயொரு தெரு மட்டுமே உள்ளதாக நாம் கருதினால் தொலைவுகளைக் கூட்டுவதால் இவ்வினாக்களுக்கு நம்மால் விடையளிக்க இயலும். ஆயினும் அகிலாவின் இல்லத்திற்குக் கிழக்கே உள்ள பரந்த திடலைக் கருதுவோம்.

ஒருவேளை திடலைக் கடந்து அவள் நடந்து செல்ல விரும்பக் கூடும். இவ்வேளையில் ஓரிடத்திலிருந்து வேறோர் இடத்திற்குச் செல்ல பல வழிகள் இருப்பதால் அவற்றின் தொலைவினைப் பற்றிக் கணக்கிடுவது துல்லியமாக இருக்காது. எனவே, அதனைக் கணிக்க நமக்கு ஒரு வழிமுறை தேவை. A மற்றும் B இக்கு இடையே பல வழிகள் இருப்பதால் அவற்றில் மீச்சிறு தொலைவினைக் குறிக்கத் தொலைவு (A, B) என்பதைப் பயன்படுத்துவோம்.

தளத்திலுள்ள A மற்றும் B என எவையேனும் இரு புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தொலைவைப்

பற்றிய புரிதலுக்கு A மற்றும் B இக்கு இடையே 'நேர்க்கோட்டுத் தொலைவு' தான் தொலைவு (A, B) என நம் மனதிற்குத் தோன்றும் உத்தி உதவும். இதுவே ஆயத் தொலை அமைப்பினை பயன்படுத்துவதின் முக்கியமான காரணியாகும்! அதற்கு முன்னர், நம் எடுத்துக்காட்டில் இன்னும் இரு வினாக்களுக்கு நாம் விடையளிக்க வேண்டும்.

1. பள்ளியை ஆதியாகக் கொண்டு இரு இல்லங்கள், பள்ளி மற்றும் நூலகத்திற்கான ஆயத் தொலைவுகளை வரையறுக்கவும்.
2. மேற்கண்ட எவையேனும் இரு இடங்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தினை ஆயத்தொலைவுகள் மூலம் கணக்கிடுக.

"நேர்க்கோட்டுத் தொலைவு" என்பது "காகத்தின் பறக்கும் பாங்கு" என அழைக்கப்படுகிறது. அதாவது இடையே தரை வழியாக எத்தன்மையான இடையூறு நேர்ந்தாலும் பொருட்படுத்தாது Aஇலிருந்து Bஇக்குச் செல்ல வேண்டுமெனில் பறக்கத்தான் வேண்டும் என்பதே இதன் பொருளாகும். எனினும் எந்தப் பறவையும் அவ்வாறு நேர்க்கோட்டில் பறப்பதில்லை என்பது உறுதி.

இதற்கு முறையான விடையளிக்க, $A = (x, y)$ மற்றும் $B = (x', y')$ எனத் தளத்தில் அமையும் இரு புள்ளிகளுக்கிடையே தொலைவு (A, B) கணக்கிட நம்மால் இயலும். மேலும், x, y, x' மற்றும் y' ஆகியவற்றின் வாயிலாக ஒரு வாய்ப்பாட்டை எளிதாகத் தருவிக்கலாம். இதனையே நாம் செய்ய முயல்வோம்.

5.3.1 ஆய அச்சுகளில் அமைந்த இரு புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு (Distance between Two Points on the Coordinate Axes)

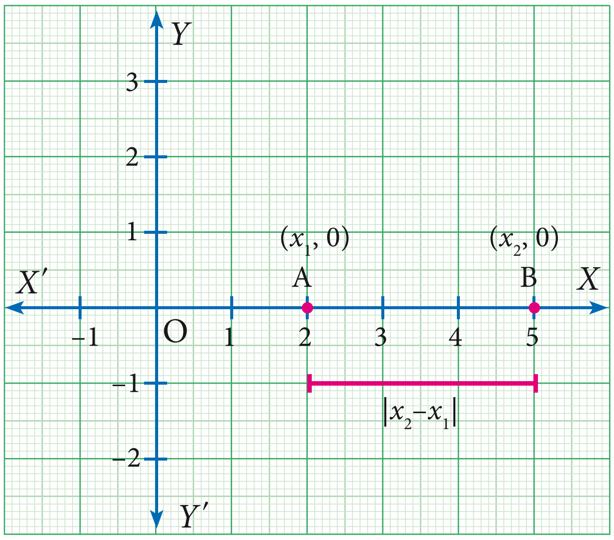
x அச்சின் மேல் உள்ள புள்ளிகள் : x அச்சில் அமைந்த இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு என்பது அவற்றின் x அச்சுத் தொலைவுகளின் வித்தியாசம் ஆகும்.

$A(x_1, 0)$ மற்றும் $B(x_2, 0)$ என்ற இரு புள்ளிகளை x அச்சின் மேல் கருதுவோம்.

புள்ளி Aஇல் இருந்து Bஇன் தொலைவு

$$AB = OB - OA = x_2 - x_1 \text{ ஏனெனில் } x_2 > x_1 \text{ அல்லது}$$
$$= x_1 - x_2 \text{ ஏனெனில் } x_1 > x_2$$
$$AB = |x_2 - x_1|$$

(இதை $x_2 - x_1$ இன் மட்டு மதிப்பு அல்லது மிகை மதிப்பு [absolute value] எனப் படிக்க வேண்டும்.)



படம் 5.20

செயல்பாடு 4

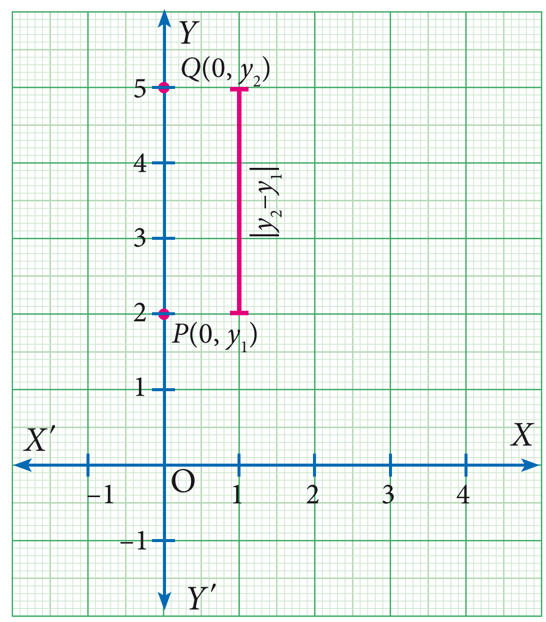
(i) கீழ்க்காணும் புள்ளிகள் எங்கே அமையும்?

$P\,(-2, 0)$, $Q\,(2,0)$, மற்றும் $R(3,0)$.

(ii) வினா எண் (i) இல் உள்ள புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவைக் காண்க.

(அ) P மற்றும் R (ஆ) Q மற்றும் R.

y அச்சின் மேல் உள்ள புள்ளிகள் : இதேபோல, y அச்சில் அமைந்த இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு என்பது அவற்றின் y அச்சுத் தொலைவுகளின் வித்தியாசம் ஆகும்.



படம் 5.21

$P(0,y_1)$, $Q(0,y_2)$ என்ற புள்ளிகளைக் கருதுக.

புள்ளி P இலிருந்து Q இன் தொலைவு

$PQ \;= OQ - OP.$

$= y_2 - y_1$ ஏனெனில் $y_2 > y_1$ அல்லது

$= y_1 - y_2$ ஏனெனில் $y_1 > y_2$

$PQ \;= |y_2 - y_1|$

(இதை $y_2 - y_1$ இன் மட்டு மதிப்பு அல்லது மிகை மதிப்பு [absolute value] எனப் படிக்க வேண்டும்)

செயல்பாடு 5

(i) பின்வரும் புள்ளிகள் எங்கு அமையும்?

$P(0, -4)$, $Q(0, -1)$, $R(0, 3)$, $S(0, 6)$.

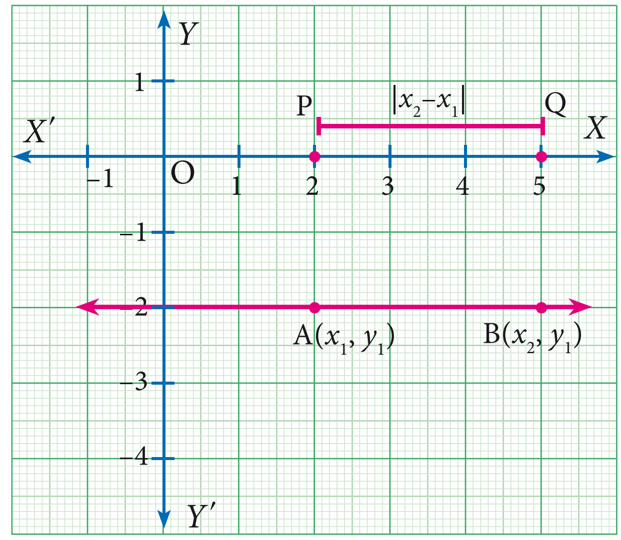
(ii) வினா எண் (i) இல் இருந்து கீழ்க்காணும் புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள ஆய அச்சுத் தொலைவுகளைக் காண்க.

(அ) P மற்றும் R (ஆ) Q மற்றும் S

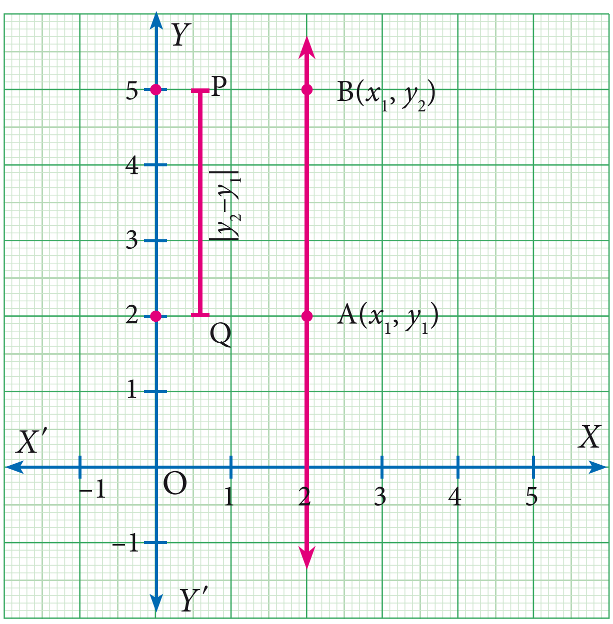
(iii) வினா எண் (i) இல் இருக்கும் புள்ளிகளுக்குக் கோட்டு வரைபடம் வரைக.

5.3.2 ஆய அச்சுகளுக்கு இணையான கோட்டில் அமையும் புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு (Distance Between Two Points Lying on a Line Parallel to Coordinate Axes)

$A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_2, y_1)$ என்ற புள்ளிகளைக் கொள்வோம். அவற்றின் y அச்சுகள் சமமாக உள்ளதால் அவை x அச்சிற்கு இணையாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டில் அமைகின்றன. A மற்றும் B என்ற புள்ளிகளில் இருந்து x அச்சிற்கு முறையே AP மற்றும் BQ என்ற செங்குத்துக் கோடுகள் வரைக. படத்தை (படம் 5.22) உற்று நோக்கினால் AB இன் தொலைவு, PQ இன் தொலைவிற்குச் சமமாக அமைகிறது.



படம் 5.22



படம் 5.23

AB இன் தொலைவு $= PQ$ இன் தொலைவு

$= |x_2 - x_1|$

[இரு புள்ளிகளின் x அச்சுத் தொலைவுகளின் வித்தியாசம்]

இதேபோல் புள்ளிகள் $A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_1, y_2)$ இணைக்கும் கோடு y அச்சிற்கு இணையாகும். எனவே, இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு $|y_2 - y_1|$ (இரு புள்ளிகளின் y அச்சுத் தொலைவுகளின் வேறுபாடு) ஆகும்.

செயல்பாடு 6

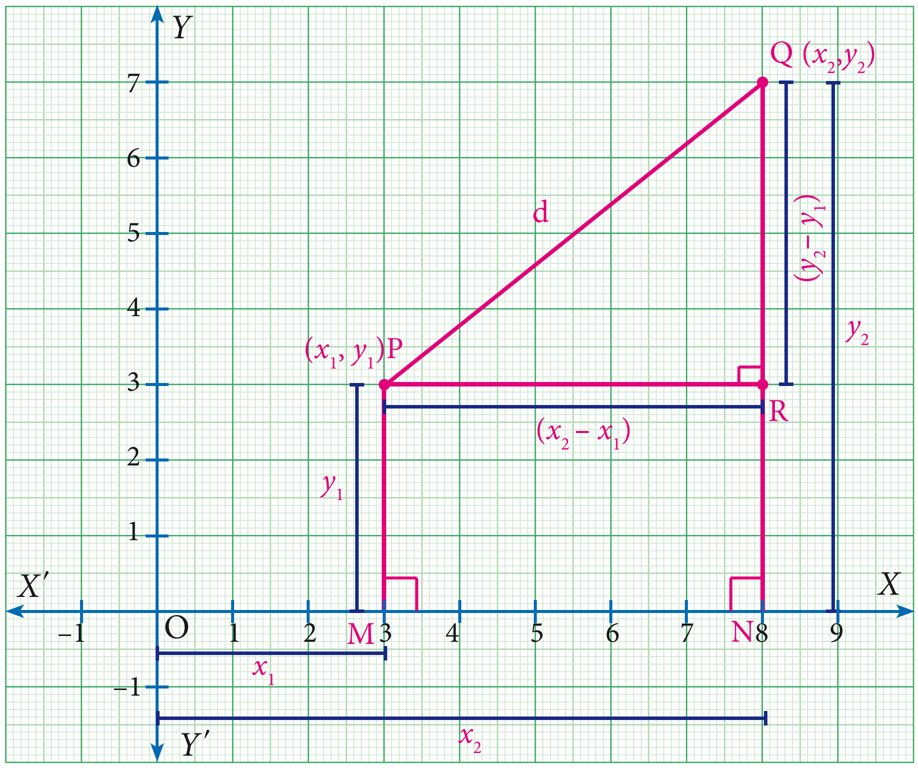
கீழே கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு காண்க

(i) $A(8,3)$ மற்றும் $B(-4, 3)$

(ii) $A(3,4)$ மற்றும் $B(3,8)$

5.3.3 தளத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு (Distance Between the Two Points on a Plane)

$P(x_1, y_1)$ மற்றும் $Q(x_2, y_2)$ என்பன கார்ட்டீசியன் தளத்தில் (அல்லது xy தளம்) உள்ள இரு புள்ளிகள் என்க. $d=PQ$ என்றவாறு அப்புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு "d" என்க.



படம் 5.24

படி 1

ஆய அச்சுகளின் விதிப்படி,

$OM = x_1$; $\quad MP = y_1$

$ON = x_2$; $\quad NQ = y_2$

இங்கு $PR = MN$

(செவ்வகம் $MNRP$ இன் எதிர்ப்பக்கங்கள்)

$= ON - OM$ $\quad$ (O இல் இருந்து தொலைவு)

$= x_2 - x_1$ $\quad$ ……..(1)

சிந்தனைக் களம்

ஒருவர் 3 கி.மீ. தூரம் வடக்கு நோக்கி செல்கிறார். பிறகு அங்கிருந்து 4 கி.மீ. கிழக்கு நோக்கி செல்கிறார் எனில், தற்போது ஆரம்ப இடத்திலிருந்து எவ்வளவு தொலைவில் இருக்கிறார்?

மற்றும் $RQ = NQ - NR$

$= NQ - MP$ $\quad$ (செவ்வகம் $MNRP$ இன் எதிர்ப்பக்கங்கள்)

$= y_2 - y_1$ $\quad$ ………..(2)

CTG2PK

படி 2

ΔPQR இல் R ஒரு செங்கோணம் ($PR \perp NQ$).

$PQ^2 = PR^2 + RQ^2$ $\quad$ (பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி)

$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $\quad$ (வர்க்க மூலத்தின் மிகைப்பகுதி)

குறிப்பு

இரு புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு

1. $P(x_1, y_1)$ மற்றும் $Q(x_2, y_2)$ என்ற இரு புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவிற்கான வாய்ப்பாடு $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$.

2. PQ இன் தொலைவு = QP இன் தொலைவு

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

3. $P(x_1, y_1)$ மற்றும் ஆதிப்புள்ளி $O(0,0)$ இக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு $OP = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

5.3.4 தொலைவுப் பண்புகள் (Properties of Distances)

ஒரு தளத்தில் அமைந்த எவையேனும் A, B எனும் இரு புள்ளிகளுக்குத் தொலைவு (A, B) = தொலைவு (B, A) என நாம் முன்னரே கண்டோம். மற்றப் பண்புகளைப் பற்றிச் சிந்தித்தோமா? ஒரு வேளை கவனிக்கத் தவறியிருக்கலாம் என்பதால் இங்குச் சில மட்டும் தரப்பட்டுள்ளன.

ஒரு தளத்திலுள்ள A மற்றும் B ஆகிய இரு புள்ளிகளும் ஒரே புள்ளியாக $(A=B)$ இருந்தால் மட்டுமே தொலைவு $(A, B) = 0$ ஆக இருக்கும்.

A மற்றும் B ஆகிய எவையேனும் இரு தனித்த புள்ளிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவு $(A, B) > 0$.

A, B மற்றும் C என மூன்று புள்ளிகளைக் கருதுவோம். அவற்றின் x ஆயத் தொலைவுகள் ஒன்றாக இருந்தால் அவை மூன்றும் y அச்சுக்கு இணையாக ஒரு கோட்டிலமைந்தப் புள்ளிகளாக இருக்கும் என நாம் அறிவோம். அதே போன்று, y அச்சுத் தூரங்கள் ஒன்றாக இருப்பின் அவை மூன்றும், x அச்சுக்கு இணையாக ஒரே கோட்டிலமைந்த புள்ளிகளாக இருக்கும் என நாம் அறிவோம். ஆயினும் ஒரு கோடமைந்த புள்ளிகளாக அமைய இவை மட்டுமே வரையறையன்று. மேலும், புள்ளிகள் $(0,0)$, $(1,1)$ மற்றும் $(2, 2)$ ஒரு கோடமைந்த புள்ளிகளாகும். இந்த ஆயத் தொலைவுப் புள்ளிகள் ஒரு கோடமைந்த புள்ளிகளாகத் திகழ எத்தகைய தொடர்பினைக் கொண்டிருக்க வேண்டும் என நினைக்கத் தோன்றுகிறது அல்லவா?

இங்குதான் தொலைவு வாய்ப்பாடு நமக்குப் பயன்படுகின்றது. A, B மற்றும் C ஆகிய புள்ளிகள் முக்கோணத்தின் முனைகளாக முறையாகப் பெயரிடப்பட்ட பிறகு,

தொலைவு (A, B) + தொலைவு (B, C) > தொலைவு (A, C) ஆக இருக்கும் என நாம் அறிவோம்.

எப்போது ஒரு தளத்திலுள்ள மூன்று புள்ளிகள் முக்கோணமாக அமையாது? அப்புள்ளிகள் ஒரு கோடமைந்தவையாக இருக்கும்போது முக்கோணமாக அமையாது.

தொலைவு(A,B) + தொலைவு(B,C) = தொலைவு(A,C) ஆக இருக்கும்.

அதேபோன்று, A, B மற்றும் C ஆகிய புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் முனைகளாகப் பெயரிட்டால் $\angle ABC = 90°$

A, B மற்றும் C ஆகிய புள்ளிகள் தொலைவு$(AB)^2$+ தொலைவு$(BC)^2$ = தொலைவு$(AC)^2$ என்பதை நிறைவு செய்தால் அப்புள்ளிகள் முறையே ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் முனைகளாக அமையும் என்ற மறுதலையையும் நம்மால் மெய்ப்பித்துக் காட்ட முடியும்.

இப்பண்புகளைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளைப் பார்க்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.8

$(-4, 3)$, $(2, -3)$ என்ற புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு காண்க.

தீர்வு

$(-4, 3)$, $(2,-3)$ என்ற புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு

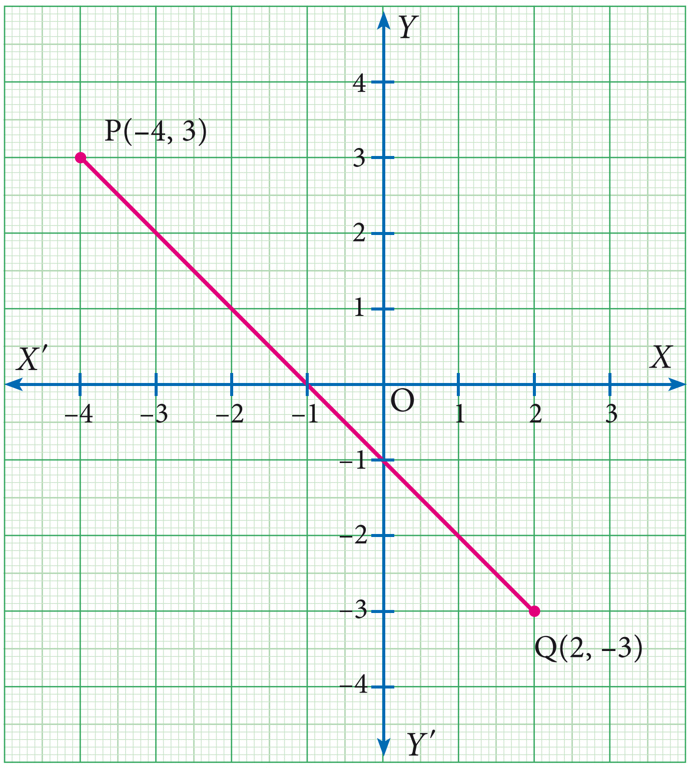
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(2+4)^2 + (-3-3)^2}$$

$$= \sqrt{(6^2 + (-6)^2)} = \sqrt{(36+36)}$$

$$= \sqrt{(36 \times 2)}$$

$$= 6\sqrt{2}$$



படம் 5.25

எடுத்துக்காட்டு 5.9

$A(3,1)$, $B(6,4)$ மற்றும் $C(8,6)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு கோடமையும் புள்ளிகள் என நிறுவுக.

தீர்வு

தொலைவு வாய்பாட்டின் படி

$$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(8-6)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{(4+4)} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(8-3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$$

ஆகவே, தரப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைகின்றன.

ஒரு கோடமைப் புள்ளிகள்

கொடுத்துள்ள மூன்று புள்ளிகளை இரண்டிரண்டு புள்ளிகளின் இணைகளாக எழுதி மூன்று இணைகளைப் பெறலாம். அவற்றுள் ஏதேனும் இரண்டு இணைகளின் கூடுதல் மூன்றாவது இணைக்கு சமமாக இருந்தால் அம்மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமையும். A, B, C என்ற மூன்று புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் அமையுமானால் $AB + BC = AC$ எனக் கூறலாம்

எடுத்துக்காட்டு 5.10

$A(7, 10)$, $B(-2, 5)$, $C(3, -4)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிகள் என நிறுவுக.

தீர்வு

$A = (7, 10),\ B = (-2, 5),\ C = (3,-4)$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-2-7)^2 + (5-10)^2}$$

$$= \sqrt{(-9)^2 + (-5)^2}$$

$$= \sqrt{(81 + 25)}$$

$$= \sqrt{106}$$

$$AB^2 = 106 \quad \ldots (1)$$

$$BC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(3-(-2))^2 + (-4-5)^2} = \sqrt{(5)^2 + (-9)^2}$$

$$= \sqrt{25 + 81} = \sqrt{106}$$

$$BC^2 = 106 \quad \ldots (2)$$

$$AC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(3-7)^2 + (-4-10)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-14)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 196} = \sqrt{212}$$

$$AC^2 = 212 \quad \ldots (3)$$

(1),(2) மற்றும் (3) இல் இருந்து ,

$$AB^2 + BC^2 = 106 + 106 = 212 = AC^2$$

அதாவது $AB^2 + BC^2 = AC^2$

ஆகவே தரப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் உச்சி B இல் செங்கோணத்தைக் கொண்ட செங்கோண ΔABC ஐ அமைக்கும்.

செங்கோண முக்கோணம்

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலானது அதன் கர்ணமாகிய மூன்றாவது பக்கத்தின் வர்க்கத்திற்குச் சமமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.11

$A(-4, -3), B(3, 1), C(3, 6), D(-4,2)$ என்ற வரிசைப்படி எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட புள்ளிகள் ஓர் இணைகரத்தின் உச்சிகளாக அமையும் என நிறுவுக.

தீர்வு

புள்ளிகள் $A(-4, -3), B(3, 1), C(3, 6), D(-4, 2)$ என்பன ஏதேனும் ஒரு நாற்கரம் $ABCD$ இன் உச்சிகள் என்க.

தொலைவு வாய்ப்பாட்டைப் பயன்படுத்த,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(3+4)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$$

$$BC = \sqrt{(3-3)^2 + (6-1)^2}$$

$$= \sqrt{0+25} = \sqrt{25} = 5$$

$$CD = \sqrt{(-4-3)^2 + (2-6)^2}$$

$$= \sqrt{(-7)^2 + (-4)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$$

$$AD = \sqrt{(-4+4)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{(0)^2 + (5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

இணைகரம்

இணைகரத்தின் எதிர்ப்பக்கங்கள் சமநீளமுடையவை

$AB = CD = \sqrt{65}$ மற்றும் $BC = AD = 5$

எதிரெதிர்ப்பக்கங்கள் சமம் என்பதால் தரப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் இணைகரம் $ABCD$ இன் உச்சிகளாக அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.12

புள்ளிகள் $A(3, 5), B(6, 2), C(3, -1),$ மற்றும் $D(0, 2)$ என்ற புள்ளிகள் வரிசையாக எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டால் அவை ஒரு சதுரத்தின் உச்சிகளாக அமையும் என நிறுவுக.

தீர்வு

$A(3,5), B(6,2), C(3, -1),$ மற்றும் $D(0,2)$ என்பன ஏதேனும் ஒரு நாற்கரம் $ABCD$ இன் உச்சிகள் என்க.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

தொலைவு வாய்ப்பாட்டைப் பயன்படுத்த,

சதுரம்

சதுரத்தின் நான்கு பக்கங்களும் சமநீளமுடையவை. மேலும் அதன் மூலைவிட்டங்களும் சமநீளமுடையவை.

$$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(3-6)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$CD = \sqrt{(0-3)^2+(2+1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$AD = \sqrt{(0-3)^2+(2-5)^2} = \sqrt{(-3)^2+(-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

மேலே உள்ள முடிவுகளில் இருந்து, $AB=BC=CD=DA= 3\sqrt{2}$

ஆகவே அதன் நான்குப் பக்கங்களும் சமம்.

மேலும், புள்ளிகள் $A(3, 5)$, $C(3, -1)$

மூலை விட்டம் $AC= \sqrt{(3-3)^2+(-1-5)^2} = \sqrt{(0)^2+(-6)^2} = \sqrt{36} = 6$

மூலை விட்டம் $BD= \sqrt{(0-6)^2+(2-2)^2} = \sqrt{(-6)^2+(0)^2} = \sqrt{36} = 6$

மேலே உள்ளவற்றிலிருந்து நாம் காண்பது, $AB = CD = 6$

எனவே, $ABCD$ என்பது ஒரு சதுரம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.13

$(5,-2)$, $(1, a)$ என்ற புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு 5 அலகுகள் எனில் a இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை $(5, -2)$, $(1, a)$ மற்றும் $d = 5$.

தொலைவு வாய்ப்பாடு,

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\sqrt{(1-5)^2+(a+2)^2} = 5$$

$$\sqrt{16+(a+2)^2} = 5$$

$16 + (a+2)^2 = 25$ (இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த)

$$(a+2)^2 = 25-16$$

$$(a+2)^2 = 9$$

$(a+2) = \pm 3$ (இருபுறமும் வர்க்க மூலம் காண)

$$a = -2 \pm 3$$

$a = -2 + 3$ (அல்லது) $a = -2 -3$

$a = 1$ (அல்லது) -5.

5-Coordinat_TM.indd 166 18-03-2018 15:50:08

எடுத்துக்காட்டு 5.14

$A(7, 3)$ மற்றும் x அச்சின் மீது அமைந்த புள்ளி B இன் x அச்சுத் தொலைவு 11 எனில் AB இன் தொலைவைக் காண்க.

தீர்வு

புள்ளி B ஆனது x அச்சின் மீது அமைவதால் அதன் y அச்சுத் தொலைவு 0 ஆகும்.

எனவே, புள்ளி $B(11, 0)$

$A(7, 3)$, $B(11, 0)$ என்ற புள்ளிகளுக்கிடையேயான தொலைவு,

தொலைவு வாய்ப்பாட்டின்படி,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(11-7)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$$

$$= 5$$

எடுத்துக்காட்டு 5.15

P, Q மற்றும் R என்ற புள்ளிகளின் அச்சுத் தொலைவுகள் முறையே $(6,-1)$, $(1, 3)$ மற்றும் $(a, 8)$. மேலும், $PQ = QR$ எனில் 'a' இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் $P(6, -1)$, $Q(1, 3)$ $R(a, 8)$

$$PQ = \sqrt{(1-6)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (4)^2} = \sqrt{41}$$

$$QR = \sqrt{(a-1)^2 + (8-3)^2} = \sqrt{(a-1)^2 + (5)^2}$$

கணக்கின்படி $PQ = QR$

ஆகவே $\sqrt{41} = \sqrt{(a-1)^2 + (5)^2}$

$41 = (a-1)^2 + 25$ [இருபுறமும் வர்க்கம் காண]

$$(a-1)^2 + 25 = 41$$

$$(a-1)^2 = 41 - 25$$

$$(a-1)^2 = 16$$

$$(a-1) = \pm 4 \quad \text{[வர்க்க மூலம் காண]}$$

$$a = 1 \pm 4$$

$$a = 1 + 4 \text{ அல்லது } a = 1 - 4$$

$$a = 5, -3$$

எடுத்துக்காட்டு 5.16

$A(2, 2)$, $B(8,-4)$ என்பன தரப்பட்டுள்ள தளத்திலுள்ள இரு புள்ளிகள் என்க. x-அச்சில் (மிகைப்பகுதி) P என்ற புள்ளி அமைந்துள்ளது. இது ABஐ $1 : 2$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது எனில், P இன் அச்சுத் தொலைவைக் காண்க.

தீர்வு

$A(2, 2)$ மற்றும் $B(8, -4)$, $P = (x, 0)$ என்க. (P ஆனது x அச்சின் மீதுள்ளதால்)

தொலைவு வாய்ப்பாட்டின்படி,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AP = \sqrt{(x-2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + 4} = \sqrt{x^2 - 4x + 8}$$

$$BP = \sqrt{(x-8)^2 + (0+4)^2} = \sqrt{x^2 - 16x + 64 + 16} = \sqrt{x^2 - 16x + 80}$$

கணக்கின்படி, $AP : PB = 1 : 2$

அதாவது $$\frac{AP}{BP} = \frac{1}{2} \quad (\because BP = PB)$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - 4x + 8}}{\sqrt{x^2 - 16x + 80}} = \frac{1}{2}$$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த,

$$\frac{x^2 - 4x + 8}{x^2 - 16x + 80} = \frac{1}{4}$$

$$4x^2 - 16x + 32 = x^2 - 16x + 80$$

$$3x^2 - 48 = 0$$

$$3x^2 = 48$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

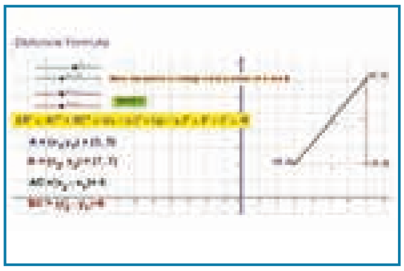
புள்ளி Pஆனது x அச்சில் (மிகைப்பகுதியில்) அமைவதால்,

புள்ளி P இன் அச்சுத் தொலைவுகள் $(4, 0)$

CTPXR8

இணையச் செயல்பாடு

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்



படி – 1

தேடுபொறியில் கீழேக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலியைத் தட்டச்சு செய்க அல்லது துரித துலங்கள் குறியீட்டை ஸ்கேன் செய்க.

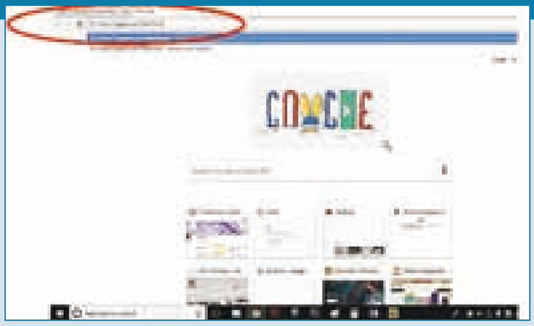
படி – 2

“IX Analytical Geometry” என்று GeoGebra பக்கத்தில் தோன்றும் . இப்பக்கத்தில் பல பணித்தாள்கள் காணப்படும். அவற்றில் தேவைப்படுவதைத் தேர்ந்தெடுத்து கொள்ளவும். எடுத்துகாட்டாக “Distance Formula” என்பதைத் தெரிவு செய்து கொள்ளவும்.

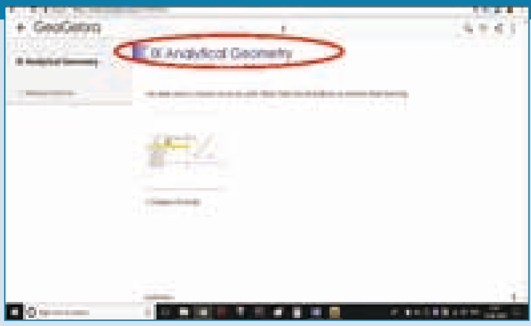
படி – 3

A மற்றும் B இன் ஒருங்கிணைப்புகளை மாற்ற x_1, x_2, y_1, y_2 என்ற நழுவல்களை நகர்த்தவும். இப்போது நீங்கள் A மற்றும் B யின் தொலைதூரத்தைக் கணக்கிடலாம்.

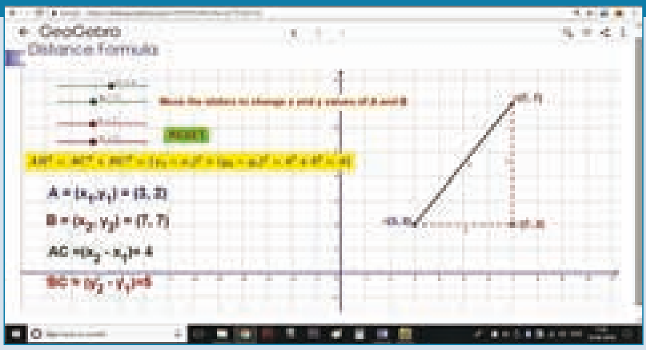
படி 1



படி 2



படி 3



இதே போல் பாடம் சார்ந்த வேறு செயல்பாட்டினை செய்து பார்க்கவும்

செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

பகுப்பாய்வு வடிவியல்: https://ggbm.at/V9HfY4v8

எடுத்துக்காட்டு 5.17

புள்ளிகள் (9, 3), (7,–1) மற்றும் (–1,3) வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் மையம் (4, 3) என நிறுவுக. மேலும் அவ்வட்டத்தின் ஆரம் காண்க.

தீர்வு

$P(4, 3), A(9, 3), B(7, -1)$ மற்றும் $C(-1, 3)$ என்க

புள்ளிகள் A, B, மற்றும் C வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் மையம் P என்பதால் அப்புள்ளிகள் P இல் இருந்து சம தூரத்தில் அமையும். அதாவது $PA = PB = PC$

தொலைவு வாய்ப்பாட்டைப் பயன்படுத்த,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AP = PA = \sqrt{(4-9)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 0} = \sqrt{25} = 5$$

$$BP = PB = \sqrt{(4-7)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$CP = PC = \sqrt{(4+1)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{(5)^2 + 0} = \sqrt{25} = 5$$

$$PA = PB = PC$$

எனவே, P என்ற புள்ளி A, B மற்றும் C என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் மையமாகும்.

ஆரம் $= PA = 5$.

பயிற்சி 5.2

1. கீழ்க்காணும் புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவைக் காண்க.

   (i) (1, 2) மற்றும் (4, 3) (ii) (3,4) மற்றும் (– 7, 2)

   (iii) (a, b) மற்றும் (c, b) (iv) (3,– 9) மற்றும் (–2, 3)

2. தரப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் ஒரு கோடமையும் புள்ளிகளா என ஆராய்க.

   (i) (7,–2),(5,1),(3,4) (ii) (–2, –8), (2,–3) (6,2)

   (iii) $(a,-2)$, $(a,3)$, $(a,0)$

3. பின்வரும் புள்ளிகள் வரிசைப்படி எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டால் அது ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணத்தை அமைக்கும் என நிறுவுக.

   (i) A (5,4), B(2,0), C (–2,3) (ii) A (6,–4), B (–2, –4), C (2,10)

4. பின்வரும் புள்ளிகள் வரிசைப்படி எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டால் அது ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தை அமைக்கும் என நிறுவுக.

(i) $A(2, 2), B(-2, -2), C\left(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right)$ (ii) $A\left(\sqrt{3}, 2\right), B\,(0,1), C(0,3)$

5. பின்வரும் புள்ளிகள் வரிசைப்படி எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டால் அது ஓர் இணைகரத்தை அமைக்கும் என நிறுவுக.

(i) $A(-3, 1), B(-6, -7), C\,(3, -9)$ மற்றும் $D(6, -1)$

(ii) $A\,(-7, -3)$, B(5,10), $C(15,8)$ மற்றும் $D(3, -5)$

6. பின்வரும் புள்ளிகள் வரிசைப்படி எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டால் அது ஒரு சாய் சதுரத்தை அமைக்குமா என ஆராய்க.

(i) $A(3,-2), B\,(7,6), C\,(-1,2)$ மற்றும் $D\,(-5, -6)$

(ii) $A\,(1,1), B(2,1), C\,(2,2)$ மற்றும் $D(1,2)$

7. புள்ளிகள் $A(-1, 1)$, $B(1,3)$ மற்றும் $C(3, a)$, மேலும் $AB = BC$ எனில் 'a' இன் மதிப்பைக் காண்க.

8. புள்ளி A இன் x அச்சுத் தொலைவு அதன் y அச்சுத் தொலைவிற்குச் சமம். மேலும், $B(1, 3)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து அப்புள்ளி A ஆனது 10 அலகு தொலைவில் இருக்கிறது. எனில் A இன் அச்சுத் தொலைவுகளைக் காண்க.

9. புள்ளி (x, y) ஆனது புள்ளிகள் $(3, 4)$ மற்றும் $(-5, 6)$ என்ற புள்ளிகளிலிருந்து சம தொலைவில் இருக்கிறது. x மற்றும் y இக்கு இடையே உள்ள உறவைக் காண்க.

10. புள்ளிகள் $A(2, 3)$ மற்றும் $B(2,-4)$ என்க. x அச்சின் மீது அமைந்துள்ள புள்ளி P ஆனது $AP = \frac{3}{7}AB$ என்ற வகையில் அமைந்துள்ளது எனில், புள்ளி P இன் அச்சுத் தொலைவைக் காண்க.

11. புள்ளிகள் $(3, 2), (7, 2)$ மற்றும் $(7, 5)$ ஐ உச்சிகளாக உடைய முக்கோணத்தின் சுற்றளவைக் காண்க.

12. புள்ளிகள் $(1, 2), (3, -4)$ மற்றும் $(5, -6)$ இன் வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் மையம் $(11, 2)$ என நிறுவுக.

13. ஆதிப் புள்ளியை மையமாக உடைய வட்டத்தின் ஆரம் 30 அலகுகள். அந்த வட்டம் ஆய அச்சுகளை வெட்டும் புள்ளிகளைக் காண்க. இவ்வாறான எந்த இரு புள்ளிகளுக்கும் இடையே உள்ள தொலைவைக் காண்க.

14. $A(-1, y)$ மற்றும் $B(5, 7)$ என்ற புள்ளிகள் $C(2, -3y)$ என்ற புள்ளியை மையமாக உடைய வட்டத்தின் மீது அமைந்துள்ளன. வட்டத்தின் ஆரத்தைக் காண்க.

பயிற்சி 5.3

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. புள்ளி $(-3,5)$ _________ ஆவது காற்பகுதியில் அமையும்.

   (அ) I (ஆ) II (இ) III (ஈ) IV

2. நான்காவது காற்பகுதியில் அமையும் ஒரு புள்ளியில் x அச்சு மற்றும் y அச்சின் குறிகள் முறையே

   (அ) $(+,+)$ (ஆ) $(-,-)$ (இ) $(-,+)$ (ஈ) $(+,-)$

3. புள்ளி $(0, -7)$ ______________________ இல் அமையும்

   (அ) x-அச்சின் மீது (ஆ) இரண்டாம் காற்பகுதியில்

   (இ) y-அச்சின் மீது (ஈ) நான்காம் காற்பகுதியில்

4. புள்ளி $(-10, 0)$ ______________________இல் அமையும்

   (அ) x-அச்சின் குறைப் பகுதியில் (ஆ) y-அச்சின் குறைப் பகுதியில்

   (இ) மூன்றாவது காற்பகுதியில் (ஈ) நான்காம் காற்பகுதியில்

5. ஒரு புள்ளியின் y-அச்சுத் தொலைவு பூச்சியம் எனில் அது எப்பொழுதும்______ அமையும்

   (அ) முதல் காற்பகுதியில் (ஆ) இரண்டாம் காற்பகுதியில்

   (இ) x-அச்சின் மீது (ஈ) y-அச்சின் மீது

6. புள்ளி M என்பது IVஆவது காற்பகுதியில் உள்ளது. அதன் அச்சுத் தொலைவுகள்

   (அ) (a,b) (ஆ) $(-a, b)$ (இ) $(a, -b)$ (ஈ) $(-a, -b)$

7. $(-5, 2)$ மற்றும் $(2, -5)$ என்ற புள்ளிகள் _________ அமையும்

   (அ) ஒரே காற்பகுதியில்

   (ஆ) முறையே II, III காற்பகுதியில்

   (இ) முறையே II, IV காற்பகுதியில்

   (ஈ) முறையே IV, II காற்பகுதியில்

8. புள்ளிகள் $O(0,0)$, $A(3, -4)$, $B(3, 4)$ மற்றும் $C(0, 4)$ ஐக் குறித்து அவற்றை OA, AB, BC மற்றும் CO என இணைத்தால் கிடைக்கும் உருவம் _____________.

(அ) சதுரம் (ஆ) செவ்வகம் (இ) சரிவகம் (ஈ) சாய்சதுரம்

9. புள்ளிகள் $P(-1, 1)$, $Q(3,-4)$, $R(1, -1)$, $S(-2, -3)$ மற்றும் $T(-4, 4)$ என்பன ஒரு வரைபடத் தாளில் குறிக்கப்பட்டால் நான்காவது காற்பகுதியில் அமையும் புள்ளிகள் ___________

(அ) P மற்றும் T (ஆ) Q மற்றும் R (இ) மற்றும் S (ஈ) P மற்றும் Q

10. ஒரு புள்ளியின் y அச்சுத் தொலைவு 4 மற்றும் அப்புள்ளி y அச்சில் அமைந்தால் அப்புள்ளி ________________ ஆகும்

(அ) $(4, 0)$ (ஆ) $(0, 4)$ (இ) $(1, 4)$ (ஈ) $(4, 2)$

11. $(2, 3)$ மற்றும் $(1, 4)$ என்ற புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு ______

(அ) 2 (ஆ) $\sqrt{56}$ (இ) $\sqrt{10}$ (ஈ) $\sqrt{2}$

12. புள்ளிகள் $A(2, 0)$, $B(-6, 0)$, $C(3, a-3)$ ஆனது x-அச்சின் மீது அமைந்தால் a இன் மதிப்பு _____

(அ) 0 (ஆ) 2 (இ) 3 (ஈ) -6

13. $(x+2, 4) = (5, y-2)$ எனில், (x,y) இன் மதிப்பு _____

(அ) $(7, 12)$ (ஆ) $(6, 3)$ (இ) $(3, 6)$ (ஈ) $(2, 1)$

14. Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 என்பன கார்ட்டீசியன் தளத்தின் நான்கு புள்ளிகள் எனில், $Q_2 \cap Q_3$ என்பது ___________

(அ) $Q_1 \cup Q_2$ (ஆ) $Q_2 \cup Q_3$

(இ) வெற்றுக் கணம் (ஈ) x-அச்சின் குறைப் பகுதி.

15. $(5, -1)$ என்ற புள்ளிக்கும் ஆதிப் புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தொலைவு__________

(அ) $\sqrt{24}$ (ஆ) $\sqrt{37}$ (இ) $\sqrt{26}$ (ஈ) $\sqrt{17}$

செயல்பாடு 7

$A(-1, 0)$, $B(3, 0)$, $C(3, 4)$, மற்றும் $D(-1, 4)$ என்ற புள்ளிகளை வரைப்படத் தாளில் குறிக்கவும். அவற்றை இணைத்து ஒரு செவ்வகத்தை உருவாக்கவும். கடிகாரச் சுற்றில் அதன் நிழல் உருவத்தை வரையவும்

(i) x-அச்சைப் பற்றி. (ii) y-அச்சைப் பற்றி.

நிழல் உருவின் அச்சுத் தொலைவைப் பற்றி உங்கள் கருத்தைக் கூறுக?.

செயல்பாடு 8

$A(1, 0)$, $B(-7, 2)$, $C(-3, 7)$ என்ற புள்ளிகளை வரைபடத் தாளில் குறித்து அவற்றை இணைத்து ஒரு முக்கோணத்தை உருவாக்கவும். $G(-3, 3)$ என்ற புள்ளியைக் குறிக்கவும். புள்ளி A இலிருந்து G வழியாக ஒரு கோடு வரையவும். அதை நீட்டித்து BC இல் புள்ளி D இல் சந்திக்கும்படிச் செய்யவும். புள்ளி B இலிருந்து G வழியாக ஒரு கோடு வரையவும். அதை நீட்டித்து AC இல் புள்ளி E இல் சந்திக்கும்படிச் செய்யவும்.

BD, DC, CE மற்றும் EA என்ற தொலைவுகளைக் கண்டு அவற்றின் தொடர்புகளைப் பற்றிக் கூறுக.

தொலைவு வாய்ப்பாட்டை பயன்படுத்தி CG மற்றும் GF இவற்றின் தொலைவைக் காண்க. இங்கு, F என்பது AB இல் அமைந்த ஒரு புள்ளி $AG: GD$, $BG: GE$ மற்றும் $CG: GF$ என்பதைப் பற்றி உங்கள் கருத்தைக் கூறுக.

குறிப்பு: G என்பது முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம். AD, BE மற்றும் CF என்பன முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள்.

நினைவு கூர்வதற்கான கருத்துகள்

- x_1, x_2 என்பன x-அச்சின் மீதுள்ள இரு புள்ளிகளின் x ஆயத் தொலைவுகள் எனில், அவற்றிற்கு இடையே உள்ள தொலைவு $x_2 > x_1$ எனில், $x_2 - x_1$ ஆகும்.
- y_1, y_2 என்பன y அச்சின் மீதுள்ள இரு புள்ளிகளின் y ஆயத் தொலைவுகள் எனில், அவற்றிற்கு இடையே உள்ள தொலைவு $|y_1 - y_2|$ ஆகும்.
- (x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ஆகும்.
- (x_1, y_1) மற்றும் ஆதிப்புள்ளி $(0, 0)$ இக்கு இடையே உள்ள தொலைவு $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ ஆகும்.

வரிசையில் அமைந்த மூன்று அல்லது நான்கு புள்ளிகள் தரப்பட்டால் அப்புள்ளிகளால் அமையும் வடிவத்தை நிறுவ:

- முக்கோணம் எனில் அதன் எவையேனும் இரு பக்கங்களின் கூடுதல் மூன்றாவது பக்கத்தை விட அதிகமாக இருக்கும்.
- இரு சமபக்க முக்கோணம் எனில் அதன் இரு பக்கங்கள் மட்டும் சமமாக இருக்கும்.
- சமபக்க முக்கோணம் எனில் அதன் மூன்று பக்கங்களும் சமமாக இருக்கும்.

- ❖ சதுரம் எனில் அதன் நான்கு பக்கங்கள் சமம் மற்றும் மூலைவிட்டங்கள் சமமாக இருக்கும்.
- ❖ செவ்வகம் எனில் அதன் ஒரு எதிரெதிர்ப் பக்கங்கள் சமம் மற்றும் மூலை விட்டங்கள் சமமாக இருக்கும்.
- ❖ இணைகரம் (செவ்வகம் அல்ல) எனில், அதன் ஒரு எதிரெதிர்ப் பக்கங்கள் சமம். ஆனால் அதன் மூலை விட்டங்கள் சமமல்ல.
- ❖ சாய்சதுரம் (ஒரு சதுரம் அல்ல) எனில் அதன் நான்குப் பக்கங்களும் சமம் ஆனால் அதன் மூலை விட்டங்கள் சமமல்ல.

விடைகள்

பயிற்சி 5.1

1. $P(-7,6)$; II காற்பகுதி , $Q(7,-2)$; IV காற்பகுதி, $R(-6, -7)$; II காற்பகுதி, $S(3,5)$; I காற்பகுதி, $T(3,9)$; I காற்பகுதி

2. $P = (-4,4)$ $Q = (3,3)$ $R=(4,-2)$ $S = (-5,-3)$

3. (i) x -அச்சிற்கு இணையான நேர்க்கோடு (ii) y -அச்சின் மேல் அமைந்துள்ள நேர்க்கோடு.

4. (i) சதுரம் (ii) சரிவகம்

பயிற்சி 5.2

1. (i) $\sqrt{10}$ அலகுகள் (ii) $2\sqrt{26}$ அலகுகள் (iii) $c-a$ (iv) 13 அலகுகள்

2. (i) ஒரு கோடமையும் (ii) ஒரு கோடமையும் (iii) ஒரு கோடமையும்

6.(i) ஆம் (ii) இல்லை 7. 5 அல்லது 1 8. A இன் ஆயத் தொலைவு $(9, 9)$ அல்லது $(-5,-5)$

9. $y = 4x+9$ 10. P இன் ஆயத் தொலைவு $(2,0)$ 11. 12 அலகுகள்

13. $30\sqrt{2}$ 14. $y = 7$, ஆரம் $= \sqrt{793}$, $y = -1$, ஆரம் $= 5$

பயிற்சி 5.3

1. (ஆ)	2. (ஈ)	3. (இ)	4. (அ)	5. (இ)
6. (இ)	7. (இ)	8. (இ)	9. (ஆ)	10. (ஆ)
11. (ஈ)	12. (இ)	13. (இ)	14. (இ)	15. (இ)

கணக்குக் கலைச்சொற்கள்	
அடர்த்திப் பண்பு	Denseness property
அடுக்குக்கணம்	Power set
அடுத்துள்ள கோணங்கள்	Adjacent angles
அனைத்துக் கணம்	Universal set
ஆய அச்சுகள்	Coordinate axes
இயற்கணிதக் கோவை	Algebraic expression
இரு கணங்களின் வித்தியாசம்	Difference of two sets
இரு கணங்களின் வெட்டு	Intersection of two sets
இருசமபக்க சரிவகம்	Isosceles Trapezium
இருசமபக்க முக்கோணம்	Isosceles triangles
இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை	Quadratic polynomial
ஈருறுப்புக் கோவை	Binomial expression
உட்கணம்	Sub set
உட்கோணங்கள்	Interior angles
உள்வட்ட மையம்	Incentre
உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	Number of terms
ஒத்த கோணங்கள்	Corresponding angles
ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள்	Concurrent lines
ஒருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை	Linear polynomial expression
ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்	Alternate angles
ஓருறுப்புக் கணம்	Singular set/Singleton set
ஓருறுப்புக் கோவை	Monomial expression
கணக்கட்டமைப்பு முறை	Set builder form/Rule form
கணங்களின் சமச்சீர் வித்தியாசம்	Symmetric difference of sets
கணங்களின் சேர்ப்பு	Union of sets
கணங்கள்	Sets
கணச்செயல்கள்	Set operations
கணத்தின் ஆதி எண்	Cardinal number of a set
கார்டீசியன் அச்சுத் தொலை முறை	Cartesian coordinate system
கார்டீசியன் தளம்	Cartesian plane
கால்பகுதி	Quadrant
குத்தெதிர் கோணங்கள்	Vertically opposite angles
குறுக்குவெட்டி	Transversal
குறுங்கோண முக்கோணம்	Acute triangle
குறை முழுக்கள்	Negative integers
கெழு	Co-efficient
சமகணங்கள்	Equal sets
சமகோண முக்கோணம்	Equiangular triangle
சமபக்க முக்கோணம்	Equilateral triangle
சமான கணங்கள்	Equivalent sets
சரிவகம்	Trapezium
சர்வசம முக்கோணங்கள்	Congruent triangles
சுழல் தன்மையுள்ள தசம எண்கள்	Recurring decimals
சுற்றுவட்ட ஆரம்	Circum radius
சுற்றுவட்டம்	Circumcircle
செங்கோண முக்கோணம்	Right triangle

தகு உட்கணம்	Proper sub set
தசம எண்களின் காலமுறைமை	Period of decimals
தசம குறியீடு	Decimal representation
தசம விரிவாக்கம்	Decimal expansion
தொகுப்பு	Collections
நடுக்கோடு	Median
நடுக்கோட்டு மையம்	Centriod
நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட	Well defined
நாற்கரம்	Quadrilateral
நிரப்புக் கணம்	Complement of a set
நேரிய கோணச்	Linear pair of angles
பட்டியல் முறை	Roster Form/Tabular form
பல கோணம்	Polygon
பல்லுறுப்புக் கோவையின் மூலங்கள்	Roots of a polynomial
பல்லுறுப்புக் கோவையின் வகுத்தல் படிமுறை	Division Algoritham of polynomial
பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடு	Polynomial equation
பல்லுறுப்புக்கோவையின் செயல்பாடு	Operation of polynomial
பல்லுறுப்புக்கோவையின் படி	Degree of polynomial
பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியங்கள்	Zeros of polynomial
புள்ளிகளைக் குறித்தல்	Plotting points
மாறிலி	Constant
மிகை முழுக்கள்	Positive integers
மீதித் தேற்றம்	Remainder theroem
முக்கோணத்தின் குத்துக்கோடுகள்	Altitudes of a triangle
முக்கோணத்தின் கோணங்களின் கூடுதல் பண்பு	Angle sum property of triangle
முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டமையம்	Circumcentre of a triangle
முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம்	Ortho centre of a triangle
முடிவிலி கணம்	Infinite set
முடிவுறா தசம எண்கள்	Non-terminating decimals
முடிவுறு கணம்	Finite set
முடிவுறு தசம எண்கள்	Terminating Decimals
முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவை	Cubic polynomial
மூலைவிட்டம்	Diagonal
மூவுறுப்புக் கோவை	Trinomial expression
மெய் எண் கோடு	Real number line
மெய்யெண்கள்	Real number
வர்க்க மூலம்	Square root
விகிதப்படுத்துதல்	Rationalization
விகிதமுறா எண்கள்	Irrational numbers
விகிதமுறா மூலம்	Surd / Irrational roots
விகிதமுறு எண்கள்	Rational numbers
விரிகோண முக்கோணம்	Obtuse traingle
விவரித்தல் முறை	Descriptive form
வெட்டா கணங்கள்	Disjoint sets
வெற்றுக் கணம்	Empty set/Null set
வென்படம்	Venn Diagram
x–அச்சின் தொலைவு (கிடைஅச்சு தொலைவு)	Abscissa
y–அச்சின் தொலைவு (செங்குத்து அச்சுத்தொலைவு)	Ordinate

ஒன்பதாம் வகுப்பு – கணக்கு
ஆக்கம்

மேலாய்வாளர்குழு
முனைவர் இரா. இராமானுஜம், பேராசிரியர்,
கணித அறிவியல் நிறுவனம், தரமணி, சென்னை.

முனைவர். அலோகா கன்ஹரே, துணை பேராசிரியர்,
ஹோமி பாபா அறிவியல் கல்வி மையம், மும்பை.

இரா. ஆத்மராமன், கணிதக் கல்வி ஆலோசகர்,
இந்திய கணித ஆசிரியர்கள் சங்கம், சென்னை–05.

பாட வல்லுநர்குழு
முனைவர். க. குமாரசாமி, இணை பேராசிரியர்,
ஆர்.கே.எம். விவேகானந்தா கல்லூரி, சென்னை.

முனைவர். தா. துளசிராம், இணை பேராசிரியர்,
அ.மா. ஜெயின் கல்லூரி, சென்னை.

பாட ஒருங்கிணைப்பாளர்
பா. தமிழ்செல்வி, துணை இயக்குநர்,
மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி
மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம், சென்னை – 06.

ஒருங்கிணைப்பாளர்
ஈ. ராஜ்கமல், இளநிலை விரிவுரையாளர்,
மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி மற்றும்
பயிற்சி நிறுவனம், சென்னை – 06

இணையச்செயல்பாடு ஒருங்கிணைப்பாளர்
கு. சங்கர், பட்டதாரி ஆசிரியர்,
அ.மே.நி.ப., கணியம்பாடி, வேலூர் மாவட்டம்.

பாடநூல் உருவாக்கம்
கோ.செ.அ.முகமது யூசுப் ஜெயினுலாபுதீன், பட்டதாரி ஆசிரியர்,
மன்ப உல் உலூம் மே.நி.ப, கோட்டை, கோயம்புத்தூர் –1

அ. செந்தில்குமார், பட்டதாரி ஆசிரியர்,
அ.மே.நி.ப., திருத்துறையூர், கடலூர் மாவட்டம்.

நா.பா. சிவகுமார், முதுகலை பட்டதாரி ஆசிரியர்,
வயவர்.மு.வெங்கடசுப்பாராவ்,
மெட்ரிக்குலேஷன் மேல்நிலைப்பள்ளி, தி.நகர், சென்னை–17

சு.சுதாகர், பட்டதாரி ஆசிரியர்,
ஜெயகோபால் கரோடியா தேசிய மே.நி.ப,
கிழக்கு தாம்பரம், சென்னை–59.

ராணி தேசிகன், கல்வி அதிகாரி,
ஜெயகோபால் கரோடியா ஹிந்து வித்யாலயா மெட்ரிக் மே.நி.ப.,
மேற்கு மாம்பலம், சென்னை–33

இரா. இரகோத்தமன், பட்டதாரி ஆசிரியர்,
அ.உ.நி.ப., தீத்தீபாளையம், கோயம்புத்தூர்.

இ. ஷாநவாஸ், பட்டதாரி ஆசிரியர்,
மாதிரிப் பள்ளி, காரிமங்கலம், தர்மபுரி மாவட்டம்.

நா. கலாவல்லி, தலைமையாசிரியை,
அ.உ.நி.ப., ஊத்துக்காடு, காஞ்சிபுரம் மாவட்டம்.

கு.பு. கணேஷ், பட்டதாரி ஆசிரியர்,
அவ்வையார் அரசினர் மகளிர் மே.நி.பள்ளி, தருமபுரி.

மு. திருவேங்கடத்தான், பட்டதாரி ஆசிரியர்,
சேதுபதி மேல்நிலைப்பள்ளி, மதுரை.

ச. மு. மணி, பட்டதாரி ஆசிரியர்,
அ.உ.நி.ப, திருக்கண்டலம், திருவள்ளூர் மாவட்டம்.

நா. வெங்கட்ராமன், முதுகலை பட்டதாரி ஆசிரியர்,
கோபால் நாயுடு மே.நி.ப, பீளமேடு, கோயம்புத்தூர்.

சி.கிருபாவதி, பட்டதாரி ஆசிரியர்,
ஒரக்காடு இரா. கோவிந்தராஜுலுநாயுடு அ.ஆ.மே.நி.ப.,
செங்குன்றம், திருவள்ளூர் மாவட்டம்.

கா. கிருஷ்ணகுமார், பட்டதாரி ஆசிரியர்,
அ.உ.நி.பள்ளி, ஏகாட்டூர், திருவள்ளூர் மாவட்டம்.

ஆய்வாளர்கள்
முனைவர் மு.ப. ஜெயராமன், உதவிப் பேராசிரியர்,
L.N. அரசு கலைக் கல்லூரி, பொன்னேரி–601204.

முனைவர் நா. கீதா, உதவிப் பேராசிரியர்,
L.N. அரசு கலைக் கல்லூரி, பொன்னேரி–601204.

சீ. கார்த்திகேயன், உதவிப் பேராசிரியர்,
L.N. அரசு கலைக் கல்லூரி, பொன்னேரி–601204.

முனைவர் கீ. கவிதா, உதவிப் பேராசிரியர்,
பாரதி மகளிர் கல்லூரி, சென்னை.

கலை மற்றும் வடிவமைப்புக்குழு

தலைமை ஒருங்கிணைப்பாளர்
வடிவமைப்பு– ஆக்கம்
சீனிவாசன் நடராஜன்

வரைபடம்
பா.சண்முகம்,
ஓவிய ஆசிரியர்,
ஊ.ஒ.ந.ப., திருமலைக் குப்பம்,
மாதனூர் ஒன்றியம், வேலூர் மாவட்டம்

பக்க வடிவமைப்பாளர்
ஜாய் கிராபிக்ஸ், சிந்தாதிரிபேட்டை சென்னை.

In-House - QC
ச.தமிழ்குமரன், சென்னை.
கோபு ராசுவேல்

ஒருங்கிணைப்பு
ரமேஷ் முனிசாமி

தட்டச்சர்
தி. கனிமொழி,
கணினி ஆசிரியர்,
அ.ஆ.மே.நி.ப., அ.க.இ., ஆவடி.

இந்நூல் 80 ஜி.எஸ்.எம் எலிகண்ட் மேப்லித்தோ தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது
ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர்: