தமிழ்நாடு அரசு

ஒன்பதாம் வகுப்பு

இரண்டாம் பருவம்

தொகுதி 2

கணக்கு

தமிழ்நாடு அரசு விலையில்லாப் பாடநூல் வழங்கும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்பட்டது

பள்ளிக் கல்வித்துறை

தீண்டாமை மனித நேயமற்ற செயலும் பெருங்குற்றமும் ஆகும்

தமிழ்நாடு அரசு

முதல்பதிப்பு - *2018*

(பொதுப் பாடத்திட்டத்தின் கீழ்
வெளியிடப்பட்ட முப்பருவ நூல்)

விற்பனைக்கு அன்று

பாடநூல் உருவாக்கமும்
தொகுப்பும்

மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி
மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம்

நூல் அச்சாக்கம்

தமிழ்நாடு பாடநூல் மற்றும்
கல்வியியல் பணிகள் கழகம்

www.textbooksonline.tn.nic in

பொருளடக்கம்

குறியீடுகள்

$=$	சமம் (equal to)	$P(A)$	A இன் அடுக்குக் கணம் (power set of A)
$\neq$	சமமில்லை (not equal to)	$\|\|\|^{ly}$	இதேபோன்று (similarly)
$<$	விடக் குறைவு (less than)	$\triangle$	சமச்சீர் வித்தியாசம் (symmetric difference)
$\leq$	குறைவு அல்லது சமம் (less than or equal to)	$\mathbb{N}$	இயல் எண்கள் (Natural numbers)
$>$	விட அதிகம் (greater than)	$\mathbb{W}$	முழு எண்கள் (Whole numbers)
$\geq$	அதிகம் அல்லது சமம் (greater than or equal to)	$\mathbb{Z}$	முழுக்கள் (integers)
$\approx$	சமானமான (equivalent to)	$\mathbb{R}$	மெய்யெண்கள் (Real numbers)
$\cup$	சேர்ப்பு (union)	Δ	முக்கோணம் (Triangle)
$\cap$	வெட்டு (intersection)	$\angle$	கோணம் (Angle)
$\mathbb{U}$	அனைத்துக் கணம் (universal set)	$\perp$	செங்குத்து (perpendicular to)
$\in$	உறுப்பு (belongs to)	$\parallel$	இணை (parallel to)
$\notin$	உறுப்பல்ல (does not belong to)	$\Rightarrow$	உணர்த்துகிறது (implies)
$\subset$	தகு உட்கணம் (proper subset of)	$\therefore$	எனவே (therefore)
$\subseteq$	உட்கணம் (subset of or is contained in)	$\because$	ஏனெனில் (since (or) because)
$\not\subset$	தகு உட்கணமல்ல (not a proper subset of)	$\| \enspace \|$	தனிமதிப்பு (absolute value)
$\not\subseteq$	உட்கணமல்ல (not a subset of or is not contained in)	$\simeq$	தோராயமாகச் சமம் (approximately equal to)
A' (or) A^c	A இன் நிரப்புக்கணம் (complement of A)	$\cong$ (or) $\equiv$	சர்வ சமம் (congruent)
$\emptyset$ (or) $\{ \}$	வெற்றுக்கணம் அல்லது இன்மைக் கணம் (empty set or null set or void set)	$\equiv$	முற்றொருமை (identically equal to)
$n(A)$	A என்ற கணத்தின் ஆதி எண் அல்லது செவ்வெண் (number of elements in the set A)	π	பை (pi)
$\sum$	கூடுதல் (summation)	$\pm$	மிகை அல்லது குறை (plus or minus)

AHB4K2

மின்நூல்

AHGCXS

மதிப்பீடு

B463_MAT_9_T2_TM

இணைய வளங்கள்

பாடநூல் பயன்பாட்டுத் தலைப்புகள்

எண்ணென்ப ஏனை எழுத்தென்ப இவ்விரண்டும்
கண்ணென்ப வாழும் உயிர்க்கு – குறள் 392

கற்றல் விளைவுகள்

வகுப்பறைச் செயல்பாடுகளை அளவீடுகளுடன் கூடிய கற்றல் மைய முறையாக மாற்றி அமைத்தல்

குறிப்பு

பாடப்பொருளில் மாணவர்களுக்கான கூடுதல் தகவல்களை அளித்தல்

செயல்பாடு/செயல்திட்டம்

கணிதத்தைக் கற்றுக் கொள்ள மாணவர்களை குறிப்பிட்ட செயல்பாடுகளில் ஈடுபட ஊக்குவித்தல்

இணையச் செயல்பாடு

கற்போரின் பாடப்பொருள் புரிதலை தொழில்நுட்பப் பயன்பாட்டின் மூலம் மேம்படுத்துதல்

சிந்தனைக் களம்

மாணவர்கள் கணிதத்தைக் கற்றுக் கொள்ளும் ஆர்வத்தைத் தூண்டுதல்.
மாணவர்களை பரந்த சிந்தனை கொண்டவர்களாக ஆக்குதல்

நினைவு கூர்வதற்கான கருத்துகள்

பாடப்பொருளில் கற்றவற்றை நினைவு கூறுதல்

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

பாடப்பொருளில் கூடுதல் மதிப்பீட்டு வினாக்களை அளித்தல்

முன்னேற்றத்தை சோதித்தல்

கற்போரின் முன்னேற்றத்தை சுய மதிப்பீடு செய்தல்

பயிற்சி

பாடப்பொருளில் கற்போருக்கு உள்ள புரிதலை மதிப்பிடுதல்

QR GUIDE

பாடநூலில் உள்ள விரைவு குறியீட்டை (QR Code) பயன்படுத்துவோம்! எப்படி?

- உங்கள் திறன்பேசியில்,கூகுள் playstore /ஆப்பிள் app store கொண்டு QR Code ஸ்கேனர் செயலியை இலவசமாகப் பதிவிறக்கம் செய்து நிறுவிக்கொள்க.
- செயலியைத் திறந்தவுடன், ஸ்கேன் செய்யும் பொத்தானை அழுத்தி திரையில் தோன்றும் கேமராவை QR Code–இன் அருகில் கொண்டு செல்லவும்.
- ஸ்கேன் செய்வதன் மூலம் திரையில் தோன்றும் உரலியை(URL) சொடுக்க, அதன் விளக்கப் பக்கத்திற்கு செல்லும்.

1 கண மொழி

கணிதவியலில், கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காண்பதை விட, வினாக்களை எழுப்பும் கலைத் திறனே மதிப்பு மிக்கது". - ஜார்ஜ் கேண்டர்

ஜான் வென்
(1834-1923)

ஜான் வென் என்பார் ஆங்கிலேயக் கணிதவியலாளர். இவர் கணங்களுக்கு இடையேயான உறவுகளைப் படங்களின் மூலம் விளக்கும் வென்படங்களை உருவாக்கினார். வென்படங்களானது கணக் கோட்பாடு, நிகழ்தகவு, புள்ளியியல், தர்க்கம் மற்றும் கணிப்பொறி அறிவியல் போன்ற துறைகளில் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

கற்றல் விளைவுகள்

- கணச் செயல்களில் பரிமாற்றுப் பண்பினை விளக்குதல்.
- கணச் செயல்களில் சேர்ப்புப் பண்பின் பொருளை விளக்குதல்.
- கணச் செயல்களில் பங்கீட்டுப் பண்பினை புரிந்துகொள்ளுதல்.
- டி மார்கன் விதிகளைச் சரிபார்த்தல்.
- கணமொழியைப் பயன்படுத்தி வாழ்க்கைப் பயன்பாட்டுக் கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காணுதல்.

1.1 அறிமுகம்

கணம் என்பது 'நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட பொருள்களின் தொகுப்பு' என்பதை நாம் அறிந்துள்ளோம். மேலும் பல்வேறு கணங்களான வெற்றுக்கணம், முடிவுறு கணம், முடிவுறாக் கணம், உட்கணம், அடுக்கு கணம், சமகணங்கள், சமான கணங்கள் மற்றும் அனைத்துக் கணம் பற்றி அறிந்திருக்கிறோம். நாம் இரு கணங்களுக்கிடையேயான சேர்ப்பு, வெட்டு மற்றும் கண வித்தியாசம் போன்ற கணச் செயல்களைச் செய்து பார்த்தோம்.

இப்பகுதி, கணச் செயல்களைத் (சேர்ப்பு, வெட்டு போன்ற) தொடர்ந்து பரிமாற்றுப் பண்பு, சேர்ப்புப் பண்பு போன்ற கணிதப் பண்புகளை ஆர்வமுடன் ஆராய்கிறது. இந்தப் பண்புகளில் பலவற்றை நாம் எண்களில் பார்த்திருக்கிறோம். கணங்களும் இப்பண்புகளைப் பெற்றிருக்குமா என்பதை வெளிக்கொணர்வோம்.

1.2 கணச் செயல்களின் பண்புகள் (Properties of Set Operations)

முதலில் நாம் கணங்களின் சேர்ப்பு மற்றும் வெட்டு போன்ற கணச் செயல்களின் பண்புகளைக் கற்போம்.

1.2.1 பரிமாற்றுப் பண்பு (Commutative Property)

கணமொழியில் கணச் செயல்களைப் பயன்படுத்தும்போதே பரிமாற்றுப் பண்புகளை நாம் பார்க்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக, கணங்களில் சேர்ப்பு (மற்றும் வெட்டு) செயல் பரிமாற்றுப் பண்பு உடையதா என்பதைக் காணலாம்.

$A = \{2, 3, 8, 10\}$ மற்றும் $B = \{1, 3, 10, 13\}$ என்பன இரு கணங்கள் என்க

இங்கு, $A \cup B = \{1, 2, 3, 8, 10, 13\}$ மற்றும்

$B \cup A = \{1, 2, 3, 8, 10, 13\}$

இதிலிருந்து, $A \cup B = B \cup A$ என்பதை நம்மால் காண இயலுகிறது.

இதுவே கணங்களின் சேர்ப்புக்கான பரிமாற்றுப் பண்பு என அழைக்கப்படுகிறது.

இப்பொழுது, $A \cap B = \{3, 10\}$ மற்றும் $B \cap A = \{3, 10\}$.

இதிலிருந்து, $A \cap B = B \cap A$ என்பதைப் பார்க்க முடிகிறது.

இதுவே, கணங்களின் வெட்டுக்கான பரிமாற்றுப் பண்பு என அழைக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு

எந்தவொரு கணம் A விற்கும்

(i) $A \cup A = A$ மற்றும் $A \cap A = A$ [தன்னடுக்கு விதிகள்].

(ii) $A \cup \phi = A$ மற்றும் $A \cap U = A$ [சமனி விதிகள்].

பரிமாற்றுப் பண்பு: A மற்றும் B என்பன எவையேனும் இருகணங்கள் எனில்,

(i) $A \cup B = B \cup A$ (ii) $A \cap B = B \cap A$

எடுத்துக்காட்டு 1.1 $A = \{b, e, f, g\}$ மற்றும் $B = \{c, e, g, h\}$ எனில், (i) கணங்களின் சேர்ப்பு (ii) கணங்களின் வெட்டுக்கான பரிமாற்றுப் பண்புகளைச் சரிபார்க்கவும்.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டவை,

$A = \{b, e, f, g\}$ மற்றும் $B = \{c, e, g, h\}$

(i) $A \cup B = \{b, c, e, f, g, h\}$ ... (1)

$B \cup A = \{b, c, e, f, g, h\}$ ... (2)

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து, $A \cup B = B \cup A$.

கணங்களின் சேர்ப்பு, பரிமாற்றுப் பண்பு உடையது என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

(ii) $A \cap B = \{e, g\}$ ... (3)

$B \cap A = \{e, g\}$ ... (4)

(3) மற்றும் (4) இலிருந்து, $A \cap B = B \cap A$

கணங்களின் வெட்டு, பரிமாற்றுப் பண்பு உடையது என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

சிந்தனைக் களம்

$P = \{l, n, p\}$ மற்றும் $P \cup Q = \{j, l, m, n, o, p\}$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. P மற்றும் Q என்பன வெட்டாக் கணங்கள் எனில், Q மற்றும் $P \cap Q$ என்னவாக இருக்க முடியும்?

குறிப்பு

எண்களில் கழித்தல் செயலானது பரிமாற்றுப் பண்பு உடையதல்ல என்பதை நினைவு கூர்வோம். கண வித்தியாசம் பரிமாற்றுப்பண்பு உடையதா? எண்களைப் போலவே, கண வித்தியாசமும் பரிமாற்றுப் பண்பு உடையது அல்ல எனக் காணலாம். எடுத்துக்காட்டாக, $A = \{a,b,c\}$, $B = \{b,c,d\}$ எனில், $A - B = \{a\}$, $B - A = \{d\}$; இவற்றிலிருந்து $A - B \neq B - A$ என்பதை நம்மால் காண முடிகிறது.

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

(1) $A = \{1,2,3,4\}$ மற்றும் $B = \{2,4,6,8\}$, எனில்,

(i) $A \cup B$ (ii) $B \cup A$ (iii) $A \cap B$ (iv) $B \cap A$ காண்க.

(2) இவற்றைப் பயன்படுத்தி கணங்களின் சேர்ப்பு மற்றும் வெட்டுக்கான பரிமாற்றுப் பண்புகளைச் சரிபார்க்கவும்.

1.2.2 சேர்ப்புப் பண்பு (Associative Property)

இப்பொழுது நாம் சேர்ப்பு மற்றும் வெட்டுச் செயல்களை மூன்று கணங்களைக் கொண்டு செய்து பார்ப்போம்.

$A = \{-1,0,1,2\}$, $B = \{-3,0,2,3\}$ மற்றும் $C = \{0,1,3,4\}$ என்பன மூன்று கணங்கள் என்க.

இப்பொழுது, $B \cup C = \{-3,0,1,2,3,4\}$

$$A \cup (B \cup C) = \{-1,0,1,2\} \cup \{-3,0,1,2,3,4\}$$

$$= \{-3,-1,0,1,2,3,4\} \quad \ldots (1)$$

பிறகு, $A \cup B = \{-3,-1,0,1,2,3\}$

$$(A \cup B) \cup C = \{-3,-1,0,1,2,3\} \cup \{0,1,3,4\}$$

$$= \{-3,-1,0,1,2,3,4\} \quad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

இது கணங்களின் சேர்ப்புக்கான சேர்ப்புப் பண்பு ஆகும்.

இப்பொழுது, $B \cap C = \{0,3\}$

$$A \cap (B \cap C) = \{-1,0,1,2\} \cap \{0,3\}$$

$$= \{0\} \quad \ldots (3)$$

பிறகு, $A \cap B = \{0,2\}$

$$(A \cap B) \cap C = \{0,2\} \cap \{0,1,3,4\}$$

$$= \{0\} \quad \ldots (4)$$

(3) மற்றும் (4) இலிருந்து, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

இது கணங்களின் வெட்டுக்கான சேர்ப்புப் பண்பு ஆகும்.

சேர்ப்புப் பண்பு: $A,\ B$ மற்றும் C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில்,

(i) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ (ii) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

எடுத்துக்காட்டு 1.2 $A=\{2,3,4,5\},B=\{2,3,5,7\}$ மற்றும் $C=\{1,3,5\}$ எனில், $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு

$A=\{2,3,4,5\},B=\{2,3,5,7\}$ மற்றும் $C=\{1,3,5\}$

இப்பொழுது, $B\cup C=\{1,2,3,5,7\}$

$A\cup(B\cup C)=\{1,2,3,4,5,7\}$ ... (1)

மேலும், $A\cup B=\{2,3,4,5,7\}$

$(A\cup B)\cup C=\{1,2,3,4,5,7\}$ ... (2)

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து, $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 1.3 $A=\left\{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{4},\frac{3}{4},2\right\},\ B=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{3}{4},2,\frac{5}{2}\right\}$ மற்றும் $C=\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{4},1,2,\frac{5}{2}\right\}$ எனில், $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு

இப்பொழுது, $(B\cap C)=\left\{\frac{1}{4},2,\frac{5}{2}\right\}$

$A\cap(B\cap C)=\left\{\frac{1}{4},2\right\}$ ... (1)

மேலும், $A\cap B=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{3}{4},2\right\}$

$(A\cap B)\cap C=\left\{\frac{1}{4},2\right\}$ ... (2)

(1) மற்றும் (2), இலிருந்து,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

குறிப்பு

பொதுவாக, கண வித்தியாசமானது சேர்ப்புப் பண்பை நிறைவு செய்யாது. அதாவது, $(A-B)-C\neq A-(B-C)$ ஆனால், $A,\ B$ மற்றும் C என்பன ஒன்றுக்கொன்று வெட்டாக் கணங்கள் எனில், கணவித்தியாசமானது சேர்ப்புப் பண்பை நிறைவு செய்யும். அதாவது, $(A-B)-C=A-(B-C)$ என்பது மெய்யாகும்.

பயிற்சி 1.1

1. $P=\{1,2,5,7,9\},\ Q=\{2,3,5,9,11\},\ R=\{3,4,5,7,9\}$ மற்றும் $S=\{2,3,4,5,8\}$ எனில்,
   (i) $(P\cup Q)\cup R$ (ii) $(P\cap Q)\cap S$ (iii) $(Q\cap S)\cap R$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

2. பின்வரும் கணங்களுக்குப் பரிமாற்றுப் பண்புகளைச் சோதிக்க.
$P = \{x : x$ ஆனது 2 மற்றும் 7 இக்கு இடையே உள்ள மெய்யெண்கள்$\}$ மற்றும்
$Q = \{x : x$ ஆனது 2 மற்றும் 7 இக்கு இடையே உள்ள விகிதமுறா எண்கள்$\}$

3. $A = \{p,q,r,s\}$, $B = \{m,n,q,s,t\}$ மற்றும் $C = \{m,n,p,q,s\}$ எனில், கணங்களின் சேர்ப்புக்கான சேர்ப்புப் பண்புகளைச் சரிபார்க்க.

4. $A = \left\{-11,\sqrt{2},\sqrt{5},7\right\}$, $B = \left\{\sqrt{3},\sqrt{5},6,13\right\}$ மற்றும் $C = \left\{\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},9\right\}$ ஆகியவற்றிற்குக் கணங்களின் வெட்டுக்கான சேர்ப்புப் பண்பினைச் சரிபார்க்க.

5. $A=\{x : x = 2^n,\ n \in \mathbb{W}$ மற்றும் $n<4\}$, $B=\{x : x = 2n,\ n \in \mathbb{N}$ மற்றும் $n\leq 4\}$ மற்றும் $C = \{0,1,2,5,6\}$ எனில், கணங்களின் வெட்டுக்கான சேர்ப்புப் பண்பினைச் சரிபார்க்க.

1.2.3 பங்கீட்டுப் பண்பு (Distributive Property)

எண்களில் கூட்டலின் மீதான பெருக்கலானது பங்கீட்டுப் பண்பை நிறைவு செய்யும். அதாவது, $a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c)$ என்பதைக் கடந்த வகுப்புகளில் கற்றிருக்கிறோம். நாம் இப்பொழுது கணங்களின் வெட்டானது சேர்ப்பின் மீதான பங்கீட்டுப் பண்பை நிறைவு செய்யும் என்பதைச் சரிபார்க்க முயலுவோம்.

$A = \left\{x,y,z\right\}$, $B = \left\{t,u,x,z\right\}$ மற்றும் $C = \left\{s,t,x,y\right\}$ என்ற மூன்று கணங்களைக் கருதுவோம்.

இப்பொழுது, $B \cup C = \left\{s,t,u,x,y,z\right\}$

$A \cap (B \cup C) = \left\{x,y,z\right\}$ ... (1)

மேலும், $A \cap B = \left\{x,z\right\}$ மற்றும் $A \cap C = \left\{x,y\right\}$

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \left\{x,y,z\right\}$ ... (2)

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

இது சேர்ப்பின் மீதான வெட்டின் பங்கீட்டுப் பண்பு எனப்படுகிறது.

கணங்களின் சேர்ப்பும் வெட்டின் மீது பங்கீடு செய்யும்

இப்பொழுது, $B \cap C = \{t,x\}$

$A \cup (B \cap C) = \{t,x,y,z\}$ ... (3)

மேலும், $A \cup B = \{t,u,x,y,z\}$ மற்றும் $A \cup C = \{s,t,x,y,z\}$

$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{t,x,y,z\}$ ... (4)

(3) மற்றும் (4), இலிருந்து $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

இது வெட்டின் மீதான சேர்ப்பின் பங்கீட்டுப் பண்பு எனப்படுகிறது.

பங்கீட்டுப்பண்பு: A, B மற்றும் C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில்,

(i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ [சேர்ப்பின் மீதான வெட்டின் பங்கீட்டுப் பண்பு]

(ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ [வெட்டின் மீதான சேர்ப்பின் பங்கீட்டுப் பண்பு]

எடுத்துக்காட்டு 1.4 $A = \{0,2,4,6,8\}, B = \{x : x$ ஒரு பகா எண் மற்றும் $x < 11\}$ மற்றும் $C = \{x : x \in \mathbb{N}$ மற்றும் $5 \le x < 9\}$ எனில், $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு

இங்கே $A = \{0,2,4,6,8\}$, $B = \{2,3,5,7\}$ மற்றும் $C = \{5,6,7,8\}$

முதலில் நாம் காண்பது, $B \cap C = \{5,7\}$

$A \cup (B \cap C) = \{0,2,4,5,6,7,8\}$ ... (1)

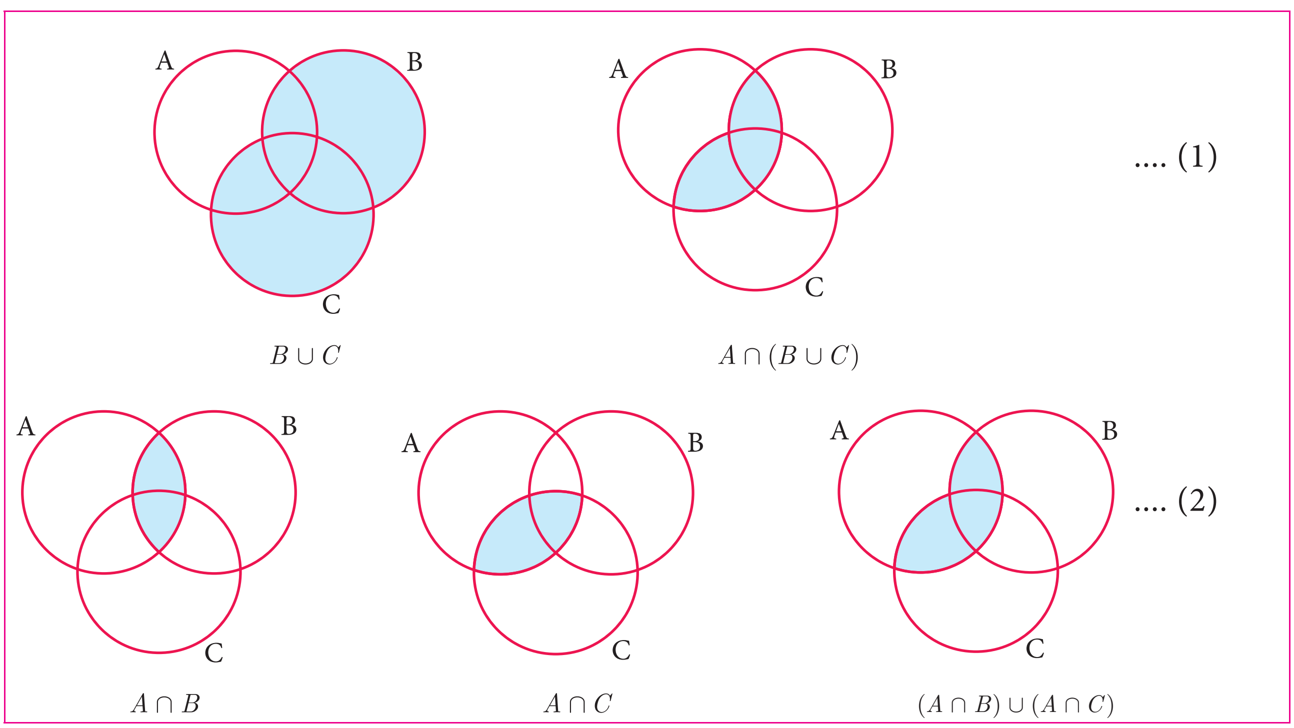
பின்னர், $A \cup B = \{0,2,3,4,5,6,7,8\}$ மற்றும் $A \cup C = \{0,2,4,5,6,7,8\}$

ஆகவே, $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{0,2,4,5,6,7,8\}$ ... (2)

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 1.5 வென்படங்களைப் பயன்படுத்தி $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு



படம் 1.1

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ என்பது வென்படம் மூலம் சரிபார்க்கப்பட்டது.

பயிற்சி 1.2

1. $K = \{a,b,d,e,f\}$, $L = \{b,c,d,g\}$ மற்றும் $M = \{a,b,c,d,h\}$ எனில், கீழ்க்காண்பனவற்றைக் கண்டறிக :

   (i) $K \cup (L \cap M)$ (ii) $K \cap (L \cup M)$

   (iii) $(K \cup L) \cap (K \cup M)$ (iv) $(K \cap L) \cup (K \cap M)$

2. கீழ்க்காணும் ஒவ்வொன்றிற்கும் வென்படம் வரைக :

   (i) $A \cup (B \cap C)$ (ii) $A \cap (B \cup C)$

   (iii) $(A \cup B) \cap C$ (iv) $(A \cap B) \cup C$

3. $A = \{11,13,14,15,16,18\}, B = \{11,12,15,16,17,19\}$ மற்றும் $C = \{13,15,16,17,18,20\}$ என்ற கணங்களுக்கு $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

4. $A = \{x : x \in \mathbb{Z}, -2 < x \le 4\}$, $B=\{x : x \in \mathbb{W}, x \le 5\}$, மற்றும் $C = \{-4,-1,0,2,3,4\}$ என்ற கணங்களுக்கு $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

5. வென்படங்களைப் பயன்படுத்தி $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

1.3 டி மார்கன் விதிகள் (De Morgan's Laws)

அகஸ்டஸ் டி மார்கன் (1806-1871) ஓர் ஆங்கிலேயக் கணிதமேதை. அவர் 1806 இல் இந்தியத் திருநாட்டில் தமிழகத்தில் உள்ள மதுரையில் ஜூன் மாதம் 27 ஆம் நாள் பிறந்தார். அப்போது அவருடைய தந்தையார் கிழக்கிந்தியக் கம்பெனியால் இந்தியாவில் பணியமர்த்தப்பட்டிருந்தார். டி மார்கன் ஏழு மாதக் குழந்தையாய் இருந்தபோது, அவரது குடும்பமானது இங்கிலாந்திற்குத் திரும்பியது. அவர் லண்டன் கேம்பிரிட்ஜ் (Cambridge) நகரில் உள்ள டிரினிட்டி (Trinity) கல்லூரியில் கல்வி பயின்றார். அவர் கண வித்தியாசம் மற்றும் கண நிரப்பிக்கான சில விதிகளை உருவாக்கினார். இந்த விதிகள் டி மார்கன் விதிகள் என அழைக்கப்படுகின்றன.

1.3.1 கணவித்தியாசத்திற்கான டி மார்கன் விதிகள் (De Morgan's Laws for Set Difference)

இந்த விதிகள் கணச் செயல்களான சேர்ப்பு, வெட்டு மற்றும் கண வித்தியாசத்தைத் தொடர்புபடுத்துகிறது.

$A = \{-5,-2,1,3\}$, $B = \{-3,-2,0,3,5\}$ மற்றும் $C = \{-2,-1,0,4,5\}$ என்ற மூன்று கணங்களைக் கருதுவோம்.

இப்பொழுது, $B \cup C = \{-3,-2,-1,0,3,4,5\}$

$A - (B \cup C) = \{-5,1\}$ ... (1)

மேலும், $A - B = \{-5,1\}$ மற்றும் $A - C = \{-5,1,3\}$

AHZ523

$$(A-B)\cup(A-C) = \{-5,1,3\} \quad \ldots (2)$$
$$(A-B)\cap(A-C) = \{-5,1\} \quad \ldots (3)$$

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து,

$A-(B\cup C) \neq (A-B)\cup(A-C)$ என நாம் காண்கிறோம்.

ஆனால் (1) மற்றும் (3) இலிருந்து,

$A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$ என்பதை நம்மால் காண முடிகிறது.

இப்பொழுது, $B\cap C = \{-2,0,5\}$

$A-(B\cap C) = \{-5,1,3\} \quad \ldots (4)$

சிந்தனைக் களம்

$(A-B)\cup(A-C)\cup(A\cap B)=$_____

(3) மற்றும் (4) இலிருந்து,

$A-(B\cap C) \neq (A-B)\cap(A-C)$ என நாம் காண்கிறோம்.

ஆனால் (2) மற்றும் (4) இலிருந்து, $A-(B\cap C) = (A-B)\cup(A-C)$ எனப் பெறுகிறோம்.

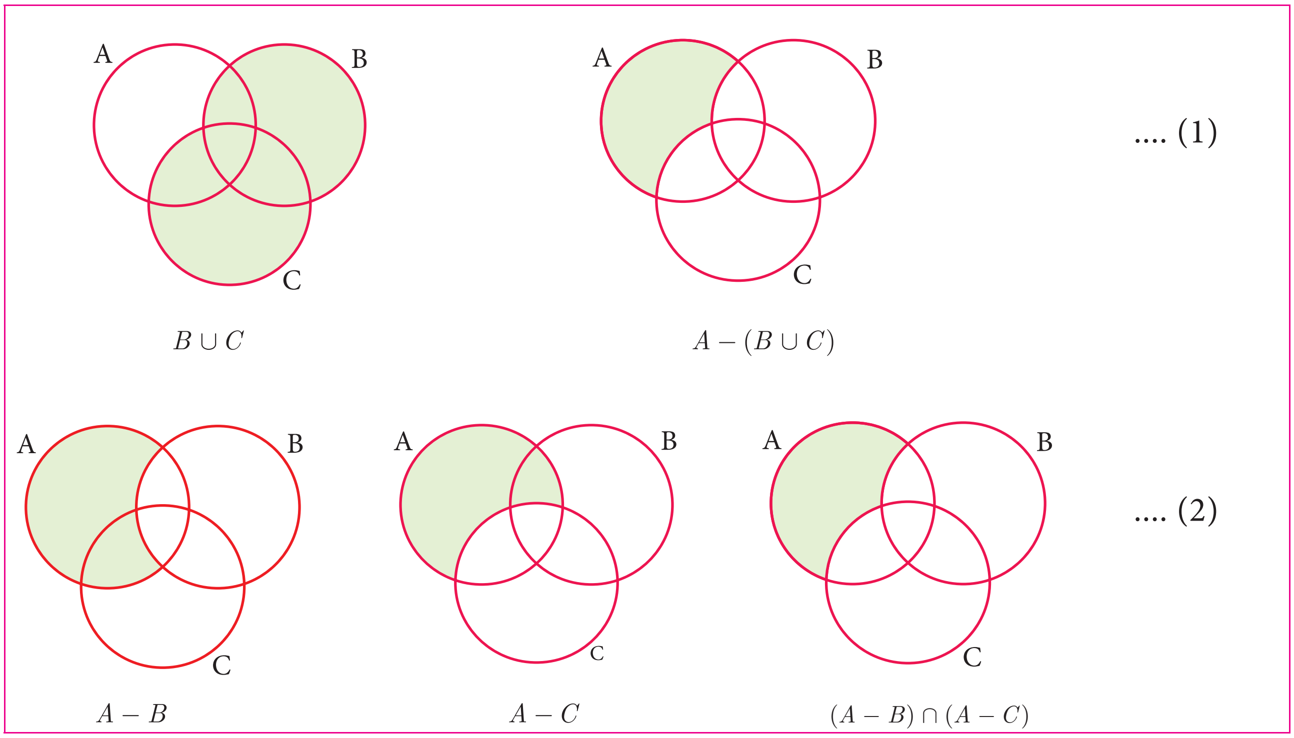
கண வித்தியாசத்திற்கான டிமார்கன் விதிகள்

A, B மற்றும் C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில்,

(i) $A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$ (ii) $A-(B\cap C) = (A-B)\cup(A-C)$

எடுத்துக்காட்டு 1.6 வென்படங்களைப் பயன்படுத்தி $A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு



படம் 1.2

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து, $A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 1.7 $P=\{x : x\in \mathbb{W}$ மற்றும் $0<x<10\}$, $Q=\{x : x=2n+1, n\in \mathbb{W}$ மற்றும் $n<5\}$ மற்றும் $R=\{2,3,5,7,11,13\}$ எனில், $P-(Q\cap R)=(P-Q)\cup(P-R)$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு

கணங்கள் P, Q மற்றும் R ஐப் பட்டியல் முறையில் எழுதுவோம்.

$$P=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\quad Q=\{1,3,5,7,9\}$$

மற்றும் $R=\{2,3,5,7,11,13\}$

முதலில், $(Q\cap R) = \{3,5,7\}$

$P-(Q\cap R) = \{1,2,4,6,8,9\}$ ... (1)

அடுத்து, $P-Q = \{2,4,6,8\}$ மற்றும்

$P-R = \{1,4,6,8,9\}$

ஆகவே, $(P-Q)\cup(P-R) = \{1,2,4,6,8,9\}$ ... (2)

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து, $P-(Q\cap R)=(P-Q)\cup(P-R)$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

> கணம் Q இன் உறுப்புகளைக் கண்டறிதல்
>
> கொடுக்கப்பட்டது, $x = 2n+1$
>
> $n=0 \rightarrow x = 2(0)+1 = 0+1 = 1$
>
> $n=1 \rightarrow x = 2(1)+1 = 2+1 = 3$
>
> $n=2 \rightarrow x = 2(2)+1 = 4+1 = 5$
>
> $n=3 \rightarrow x = 2(3)+1 = 6+1 = 7$
>
> $n=4 \rightarrow x = 2(4)+1 = 8+1 = 9$
>
> இதிலிருந்து x இன் மதிப்பானது 1, 3, 5, 7 மற்றும் 9 ஆகும்.

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

1. $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{b,d,e,f\}$ மற்றும் $C=\{a,b,d,f\}$ எனில்,
   (i) $B\cup C$ (ii) $A-(B\cup C)$ (iii) $A-B$ (iv) $A-C$ ஆகியவற்றைக் காண்க.
2. P, Q மற்றும் R என்ற மூன்று கணங்களைக் கொண்டு பின்வருவனவற்றிற்கு வென்படங்கள் வரைக. (i) $Q\cap R$ (ii) $P-(Q\cap R)$ (iii) $P-Q$ (iv) $P-R$

1.3.2 கண நிரப்பிக்கான டி மார்கன் விதிகள் (De Morgan's Laws for Complementation)

இந்த விதிகள் கணச் செயல்களான சேர்ப்பு மற்றும் வெட்டு ஆகியவற்றைக் கணநிரப்பியோடு தொடர்புபடுத்துகிறது.

அனைத்துக் கணம் $U=\{0,1,2,3,4,5,6\}$, $A=\{1,3,5\}$ மற்றும் $B=\{0,3,4,5\}$ ஆகியவற்றைக் கருதுவோம்.

இப்பொழுது, $A\cup B = \{0,1,3,4,5\}$

$(A\cup B)' = \{2,6\}$ .....(1)

அடுத்து, $A' = \{0,2,4,6\}$ and $B' = \{1,2,6\}$

$A'\cap B' = \{2,6\}$ .....(2)

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து, $(A\cup B)' = A'\cap B'$ என நாம் பெறுகிறோம்.

மேலும், $A\cap B = \{3,5\}$

> **சிந்தனைக் களம்**
>
> $A-B = A\cap B'$ என்பது சரியா?

$$(A\cap B)' = \{0,1,2,4,6\} \qquad .....(3)$$

$$A' = \{0,2,4,6\} \text{ மற்றும் } B' = \{1,2,6\}$$

$$A'\cup B' = \{0,1,2,4,6\} \qquad .....(4)$$

(3) மற்றும் (4) இலிருந்து, $(A\cap B)' = A'\cup B'$ என நாம் பெறுகிறோம்.

சிந்தனைக் களம்

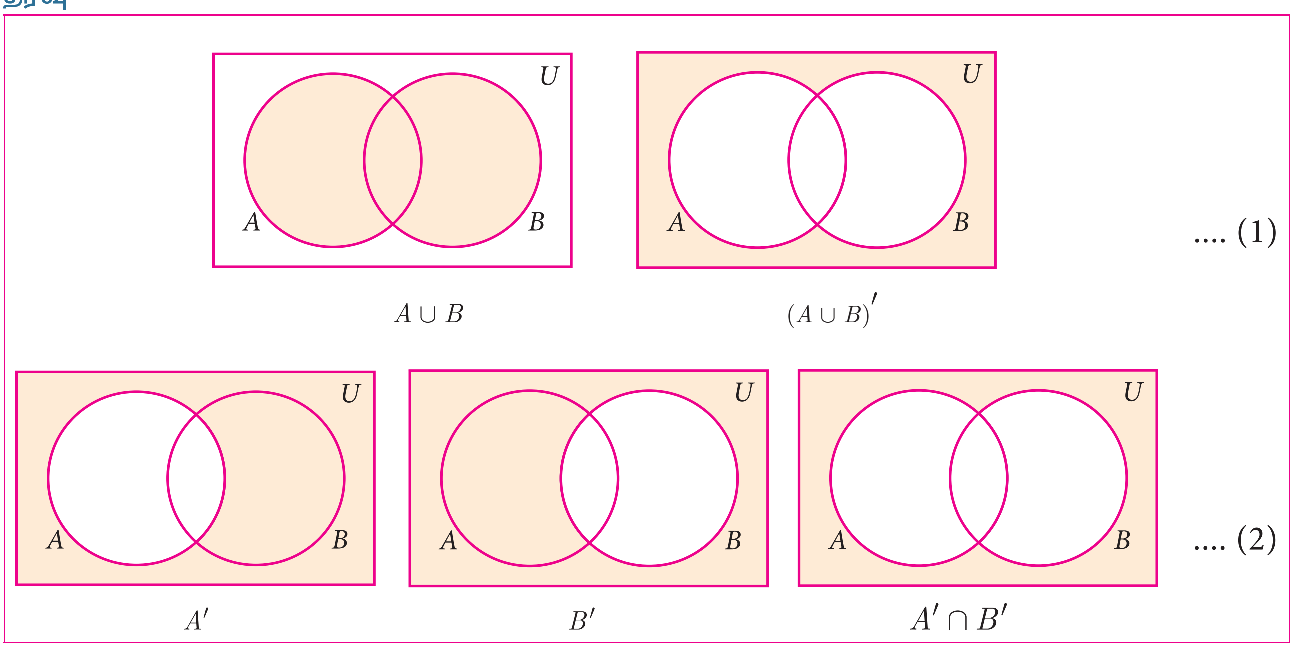
$(A-B)\cup(B-A')=$_____

கண நிரப்பிக்கான டி மார்கன் விதிகள் U என்பது அனைத்துக் கணம். A, B என்பன அதனுள் அமைந்த முடிவுறு கணங்கள் எனில், (i) $(A\cup B)' = A'\cap B'$ (ii) $(A\cap B)' = A'\cup B'$

எடுத்துக்காட்டு 1.8

வென்படங்களைப் பயன்படுத்திச் சரிபார் : $(A\cup B)' = A'\cap B'$

தீர்வு



படம் 1.3

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து, $(A\cup B)' = A'\cap B'$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 1.9

$U = \{x : x\in\mathbb{Z},\ -2\le x\le 10\}$, $A = \{x : x = 2p+1,\ p\in\mathbb{Z},\ -1\le p\le 4\}$, $B = \{x : x = 3q+1,\ q\in\mathbb{Z},\ -1\le q< 4\}$ என்ற கணங்களுக்குக் கணநிரப்பிக்கான டி மார்கன் விதிகளைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டவை, $U = \{-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$,

$A = \{-1,1,3,5,7,9\}$ மற்றும் $B = \{-2,1,4,7,10\}$

(i) $(A\cup B)' = A'\cap B'$

இப்பொழுது, $A\cup B = \{-2,-1,1,3,4,5,7,9,10\}$

$$(A\cup B)' = \{0,2,6,8\} \quad \text{..... (1)}$$

பிறகு, $A' = \{-2,0,2,4,6,8,10\}$ மற்றும் $B' = \{-1,0,2,3,5,6,8,9\}$

$$A'\cap B' = \{0,2,6,8\} \quad \text{..... (2)}$$

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து, $(A\cup B)' = A'\cap B'$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

சிந்தனைக் களம்

$(A\cup B)'\cup(A'\cap B) =$ ____

(ii) $(A\cap B)' = A'\cup B'$

இப்பொழுது, $A\cap B = \{1,7\}$

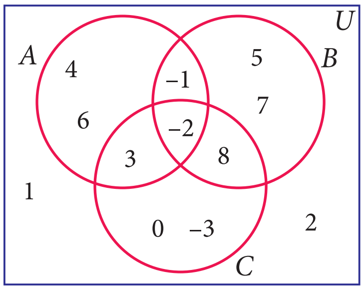
$$(A\cap B)' = \{-2,-1,0,2,3,4,5,6,8,9,10\} \quad \text{..... (3)}$$

மேலும், $A'\cup B' = \{-2,-1,0,2,3,4,5,6,8,9,10\}$ ..... (4)

(3) மற்றும் (4) இலிருந்து, $(A\cap B)' = A'\cup B'$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

பயிற்சி 1.3

1. அருகில் உள்ள வென்படத்திலிருந்து கீழ்க்காணும் கணங்களைக் காண்க :
   (i) $A-B$ (ii) $B-C$ (iii) $A'\cup B'$
   (iv) $A'\cap B'$ (v) $(B\cup C)'$
   (vi) $A-(B\cup C)$ (vii) $A-(B\cap C)$



2. A, B மற்றும் C என்பன ஒன்றையொன்று வெட்டும் கணங்கள் எனில், கீழ்க்காணும் கணங்களுக்கு வென்படம் வரைக :
   (i) $(A-B)\cap C$ (ii) $(A\cup C)-B$ (iii) $A-(A\cap C)$
   (iv) $(B\cup C)-A$ (v) $A\cap B\cap C$

3. $A = \{b,c,e,g,h\}$, $B = \{a,c,d,g,i\}$ மற்றும் $C = \{a,d,e,g,h\}$ எனில், $A-(B\cap C) = (A-B)\cup(A-C)$ எனக்காட்டுக.

4. $A = \{x : x = 6n,\ n\in\mathbb{W}$ மற்றும் $n<6\}$, $B = \{x : x = 2n,\ n\in\mathbb{N}$ மற்றும் $2<n\le 9\}$ மற்றும் $C = \{x : x = 3n,\ n\in\mathbb{N}$ மற்றும் $4\le n<10\}$ எனில், $A-(B\cap C) = (A-B)\cup(A-C)$ எனக் காட்டுக.

5. $A = \{-2, 0, 1, 3, 5\}$, $B = \{-1, 0, 2, 5, 6\}$ மற்றும் $C = \{-1, 2, 5, 6, 7\}$ எனில், $A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$ எனக்காட்டுக.

6. $A = \{y : y = \dfrac{a+1}{2},\ a\in\mathbb{W}$ மற்றும் $a\le 5\}$, $B = \{y : y = \dfrac{2n-1}{2},\ n\in\mathbb{W}$ மற்றும் $n<5\}$
   மற்றும் $C = \left\{-1,-\dfrac{1}{2},1,\dfrac{3}{2},2\right\}$ எனில், $A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$ எனக்காட்டுக.

7. வென்படங்களைப் பயன்படுத்தி $A-(B\cap C) = (A-B)\cup(A-C)$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

8. $U = \{4,7,8,10,11,12,15,16\}$, $A=\{7,8,11,12,\}$ மற்றும் $B = \{4,8,12,15\}$ எனில், கணநிரப்பிக்கான விதிகளைச் சரிபார்க்க.

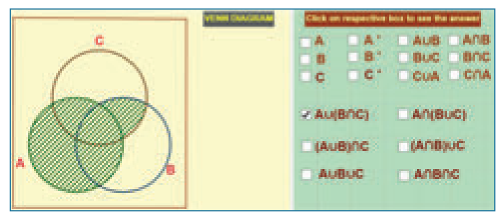
9. $U = \{x : -4 \leq x \leq 4,\ x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{x : -4 < x \leq 2, x \in \mathbb{Z}\}$ மற்றும்

$B = \{x : -2 \leq x \leq 3, x \in \mathbb{Z}\}$ எனில், கணநிரப்பிக்கான விதிகளைச் சரிபார்க்க.

10. வென்படங்களைப் பயன்படுத்தி $(A \cap B)' = A' \cup B'$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

இணையச் செயல்பாடு

செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப்பெறுவது

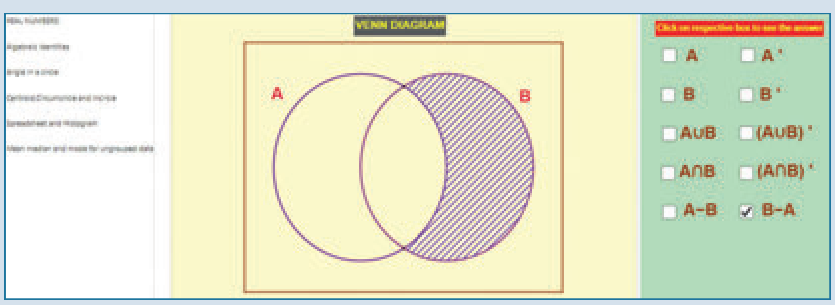


படி 1 : கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra வின் "Set Language" என்னும் பணித்தாளின் பக்கத்திற்குச் செல்க. இப்பணித்தாளில்

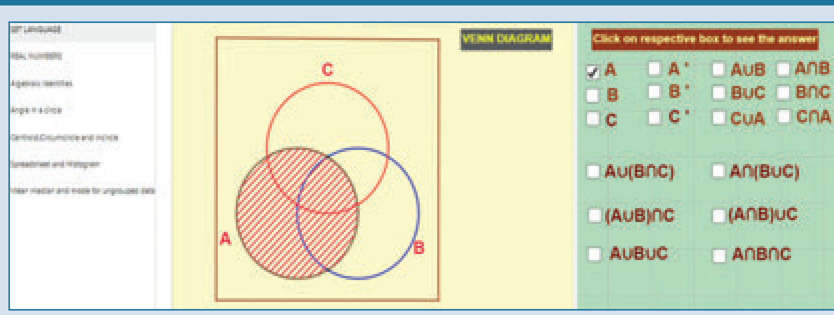
1. Venn Diagram for two sets and
2. Venn Diagram for three sets ஆகிய இரண்டு செயல்பாடுகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். முதல் செயல்பாட்டில், வலப்பக்கத்தில் கொடுக்கப் பட்டிருக்கும் கட்டங்களில் எதை நிரப்ப வேண்டுமோ, கண்டறிய வேண்டுமோ அதைத் தேர்வு செய்து வெண் வரைபடத்தில் இடம்பெறுவதை அறிக.

படி 2 : இதே போன்று இரண்டாம் செயல்பாட்டையும் செய்து பார்க்க.

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

கண மொழி: https://ggbm.at/BrG952dw or Scan the QR Code.

B463_MAT_9_T2_TM

சிந்தனைக் களம்

$(A-B)'$ இக்குச் சமமானது

(i) $B-A$ (ii) $B-A'$ (iii) $A'\cup B$ (iv) $A'\cap B$

1.4 ஆதி எண் மற்றும் கணச் செயல்கள் மீதான பயன்பாட்டுக் கணக்குகள் (Cardinality and Practical Problems on Set Operations)

முதற்பருவத்தில் $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி இரு கணங்களைக் கொண்ட கணக்குகளைத் தீர்ப்பது பற்றி கற்றறிந்தோம். மூன்று கணங்கள் கொடுக்கப்பட்டாலும், இதே முறையைப் பயன்படுத்தி மூன்று கணங்களுக்கான சூத்திரத்தையும் நம்மால் பெற இயலும்.

A, B மற்றும் C என்பன எவையேனும் மூன்று முடிவுறு கணங்கள் எனில்,

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

குறிப்பு

வென்படங்களைக் கொண்டு கணக்குகளைத் தீர்ப்பதில் பின்வரும் முடிவுகள் பயனுள்ளதாக இருக்கும் என்பதைக் கருதுவோம்.

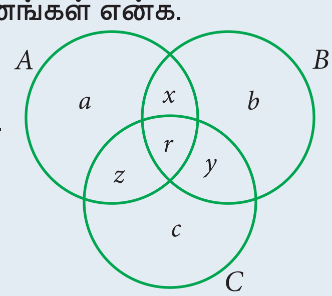
A, B மற்றும் C என்பன மாணவர்களைக் குறிக்கும் மூன்று கணங்கள் என்க.

வென்படத்திலிருந்து

கணம் A இல் மட்டும் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை = a.

கணம் B இல் மட்டும் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை = b.

கணம் C இல் மட்டும் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை = c.



படம்.1.4

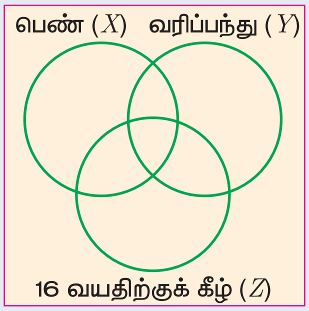
- ஒரே ஒரு கணத்தில் மட்டும் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $=(a+b+c)$
- இரண்டு கணங்களில் மட்டும் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $=(x+y+z)$
- மூன்று கணங்களில் மட்டும் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $=r$
- குறைந்தது இரு கணங்களில் உள்ள மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (இரண்டும் அதற்கு மேலும்) $=(x+y+z+r)$
- மூன்று கணங்களிலும் உள்ள மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $=(a+b+c+x+y+z+r)$

செயல்பாடு - 1

பின்வரும் அட்டவணையில் A, B, C, D, E, F, G, H, I, J என்பன விளையாட்டு வீரர்களைக் குறிக்கின்றன.

விளையாட்டு வீரர்	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
பாலினம்	ஆண்	பெண்	ஆண்	பெண்	ஆண்	பெண்	ஆண்	பெண்	ஆண்	பெண்
வயது	7	15	11	10	13	12	24	17	25	28
விளையாட்டு	வரிப்பந்து	மட்டைப்பந்து	கபடி	மட்டைப்பந்து	வரிப்பந்து	வரிப்பந்து	வரிப்பந்து	வரிப்பந்து	வளைகோல்பந்து	கபடி

மேற்கண்ட தரவுகளிலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட வென்படத்தை ஆங்கில எழுத்துகளைக் கொண்டு நிரப்புக. மேலும் கீழ்க்காணும் வினாக்களுக்கு விடையளிக்க.



படம் 1.5

(i) ஒரே ஒரு கணத்தில் மட்டும் உள்ள விளையாட்டு வீரர்களின் எண்ணிக்கை = _______.

(ii) இரண்டு கணங்களில் மட்டும் உள்ள விளையாட்டு வீரர்களின் எண்ணிக்கை = _______.

(iii) சரியாக மூன்று கணங்களில் உள்ள விளையாட்டு வீரர்களின் எண்ணிக்கை = _______.

(iv) வரிப்பந்து (Tennis) விளையாடாத பெண் விளையாட்டு வீரர்களின் எண்ணிக்கை = _______

(v) $(X \cup Y \cup Z)'$ இல் உள்ள விளையாட்டு வீரர்களின் எண்ணிக்கை = _______.

எடுத்துக்காட்டு 1.10

ஒரு கல்லூரியில் உள்ள மாணவர்களில், 240 மாணவர்கள் மட்டைப்பந்தும் (cricket), 180 மாணவர்கள் கால்பந்தும் (football), 164 மாணவர்கள் வளைகோல் பந்தும் (hockey), 42 பேர் மட்டைப்பந்து மற்றும் கால்பந்தும், 38 பேர் கால்பந்து மற்றும் வளைகோல் பந்தும், 40 பேர் மட்டைப் பந்து மற்றும் வளைகோல் பந்தும், 16 பேர் மூன்று விளையாட்டுகளும் விளையாடுகிறார்கள். ஒவ்வொரு மாணவரும் குறைந்தது ஒரு விளையாட்டிலாவது பங்கேற்கிறார் எனில்,

(i) கல்லூரியில் உள்ள மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை.

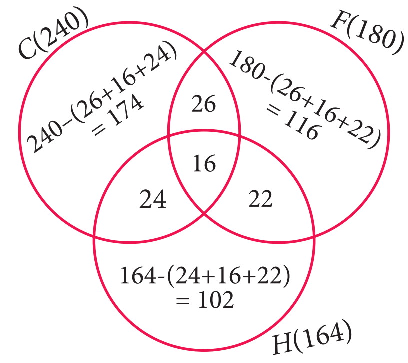
(ii) ஒரே ஒரு விளையாட்டு மட்டும் விளையாடும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை ஆகியவற்றைக் காண்க

தீர்வு

C என்பது மட்டைப்பந்து, F என்பது கால்பந்து, H என்பது வளைகோல் பந்து விளையாடும் மாணவர்களின் கணங்கள் என்க.

$n(C) = 240,\ n(F) = 180,\ \ n(H) = 164,\ n(C \cap F) = 42,$
$n(F \cap H) = 38,\ n(C \cap H) = 40,\ n(C \cap F \cap H) = 16.$

பெறப்பட்ட தரவுகளை வென்படத்தில் குறிப்போம்.



படம் 1.6

(i) கல்லூரியில் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை

$= 174+26+116+22+102+24+16 = 480$

(ii) ஒரே ஒரு விளையாட்டு மட்டும் விளையாடும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை

$= 174+116+102 = 392$

எடுத்துக்காட்டு 1.11 600 குடும்பங்கள் உள்ள ஒரு குடியிருப்பில் $\frac{3}{5}$ பங்கு துள்ளுந்து (scooter), $\frac{1}{3}$ பங்கு மகிழுந்து (car), $\frac{1}{4}$ பங்கு மிதிவண்டி (bicycle) வைத்துள்ளனர். 120 குடும்பங்கள் துள்ளுந்து மற்றும் மகிழுந்தும், 86 குடும்பங்கள் மகிழுந்து மற்றும் மிதிவண்டியும், 90 குடும்பங்கள் துள்ளுந்து மற்றும் மிதிவண்டியும் $\frac{2}{15}$ பங்கு குடும்பங்கள் மூன்று வகை வாகனங்களையும் வைத்திருக்கிறார்கள் எனில்,

(i) குறைந்தது இரண்டு வகை வாகனங்களை வைத்திருக்கும் குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை,

(ii) எந்த ஒரு வாகனமும் வைத்திருக்காத குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை ஆகியவற்றைக் காண்க.

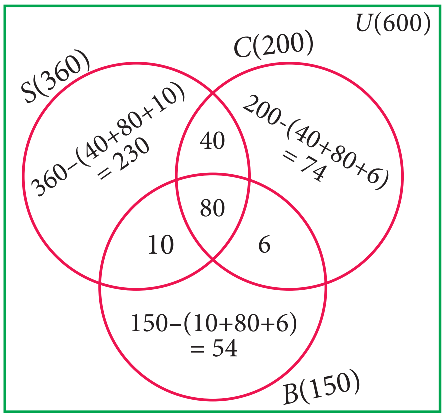
தீர்வு

S என்பது துள்ளுந்து, C என்பது மகிழுந்து மற்றும் B என்பது மிதிவண்டி வைத்திருக்கும் குடும்பங்களின் கணங்கள் என்க.

கொடுக்கப்பட்டது, $n(\mathrm{U}) = 600\,;\ n(S) = \frac{3}{5} \times 600 = 360$

$n(C) = \frac{1}{3} \times 600 = 200\,,\ \ n(B) = \frac{1}{4} \times 600 = 150$

$n(S \cap C \cap B) = \frac{2}{15} \times 600 = 80$



படம் 1.7

வென்படத்திலிருந்து,

(i) குறைந்தது இரண்டு வகை வாகனங்களை வைத்திருக்கும் குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை
$= 40+6+10+80 = 136$

(ii) எந்த ஒரு வாகனமும் வைத்திருக்காத குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை

$= 600 -$ (குறைந்தது ஒரு வாகனத்தை வைத்திருக்கும் குடும்பங்கள்)

$= 600 - (230 + 40 + 74 + 6 + 54 + 10 + 80)$

$= 600 - 494 = 106$

எடுத்துக்காட்டு 1.12 100 மாணவர்கள் உள்ள ஒரு குழுவில், 85 மாணவர்கள் தமிழ் பேசுபவர்கள், 40 மாணவர்கள் ஆங்கிலம் பேசுபவர்கள், 20 மாணவர்கள் பிரெஞ்சு பேசுபவர்கள், 32 பேர் தமிழ் மற்றும் ஆங்கிலமும், 13 பேர் ஆங்கிலம் மற்றும் பிரெஞ்சும், 10 பேர் தமிழ் மற்றும் பிரெஞ்சும் பேசுபவர்கள். ஒவ்வொரு மாணவரும் குறைந்தது ஒரு மொழியாவது பேசுகிறார் எனில், மூன்று மொழிகளும் பேசும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு

A என்பது தமிழ், B என்பது ஆங்கிலம் மற்றும் C என்பது பிரெஞ்சு மொழி பேசும் மாணவர்களின் கணங்கள் என்க.

கொடுக்கப்பட்டவை $n(A\cup B\cup C) = 100,\ n(A) = 85,\ n(\mathrm{B}) = 40,\ n(\mathrm{C}) = 20,$
$n(\mathrm{A}\cap B) = 32,\ n(\mathrm{B}\cap C) = 13,\ n(\mathrm{A}\cap C) = 10.$

விதியின்படி,

$$n(A\cup B\cup C) = n(A)+n(B)+n(\mathrm{C})-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

$$100 = 85+40+20-32-13-10+n(A\cap B\cap C)$$

$$n(A\cap B\cap C) = 100-90 = 10$$

ஆகவே, 10 மாணவர்கள் மூன்று மொழிகளையும் பேசுபவர்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 1.13 A, B மற்றும் C என்ற மூன்று வெவ்வேறு வகையான இதழ்கள் வாங்கும் 200 சந்தாதாரர்களிடம் நடத்தப்பட்ட ஆய்வில், 75 நபர்கள் A என்ற இதழை வாங்குவதில்லை எனவும், 100 நபர்கள் B என்ற இதழை வாங்குவதில்லை எனவும், 50 நபர்கள் C என்ற இதழை வாங்குவதில்லை எனவும், 125 நபர்கள் குறைந்தது இரண்டு இதழ்களாவது வாங்குவதாகவும் கண்டறியப்பட்டது. அதில்,

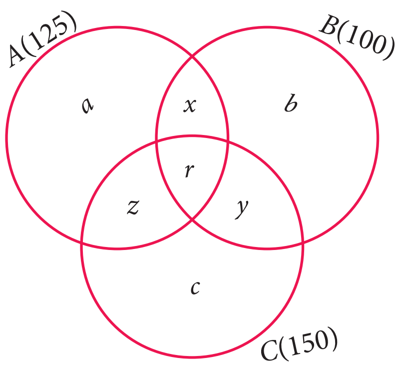
(i) சரியாக இரண்டு இதழ்களை வாங்கும் சந்தாதாரர்களின் எண்ணிக்கை,

(ii) ஒரே ஓர் இதழை மட்டும் வாங்கும் சந்தாதாரர்களின் எண்ணிக்கை ஆகியவற்றைக் காண்க.

.தீர்வு

மொத்த சந்தாதாரர்களின் எண்ணிக்கை = 200

இதழ்	வாங்காதவர்கள்	வாங்குபவர்கள்
A	75	125
B	100	100
C	50	150



படம் 1.8

வென்படத்திலிருந்து,

ஒரே ஓர் இதழை மட்டும் வாங்குபவர்களின் எண்ணிக்கை $= a + b + c$

சரியாக, இரண்டு இதழ்களை வாங்குபவர்களின் எண்ணிக்கை $= x + y + z$

மற்றும் 125 பேர் குறைந்தது இரண்டு இதழ்களையாவது வாங்குகின்றனர்.

அதாவது, $x + y + z + r = 125$ ... (1)

கொடுக்கப்பட்டவை: $n(A \cup B \cup C) = 200$, $n(A) = 125$, $n(B) = 100$, $n(C) = 150$,

$n(A \cap B) = x + r$, $n(B \cap C) = y + r$, $n(A \cap C) = z + r$, $n(A \cap B \cap C) = r$

இப்பொழுது,

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$\begin{aligned} 200 &= 125+100+150-x-r-y-r-z-r+r \\ &= 375-(x+y+z+r)-r \\ &= 375-125-r \quad \left[\because\ x + y + z + r = 125\right] \\ 200 &= 250-r \qquad \Rightarrow r = 50 \end{aligned}$$

(1) இலிருந்து, $x + y + z + 50 = 125$

$$x + y + z = 75$$

ஆகவே, சரியாக இரண்டு இதழ்களை மட்டும் வாங்கும் சந்தாதாரர்களின் எண்ணிக்கை = 75.

வென்படத்திலிருந்து,

$$(a + b + c) + (x + y + z + r) = 200 \quad \text{... (2)}$$

(1) –ஐ (2) இல் பிரதியிட,

$$\begin{aligned} a + b + c + 125 &= 200 \\ a + b + c &= 75 \end{aligned}$$

ஆகவே, ஒரே ஓர் இதழை மட்டும் வாங்கும் சந்தாதாரர்களின் எண்ணிக்கை = 75.

பயிற்சி 1.4

1. $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$ என்பதைக் கீழ்க்காணும் கணங்களுக்குச் சரிபார்க்க.

   (i) $A = \{a, c, e, f, h\}$, $B = \{c, d, e, f\}$ மற்றும் $C = \{a, b, c, f\}$

   (ii) $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$ மற்றும் $C = \{1, 5, 6, 7\}$

2. ஒரு குடியிருப்பில், 275 குடும்பங்கள் தமிழ் செய்தித்தாளும், 150 குடும்பங்கள் ஆங்கிலச் செய்தித்தாளும், 45 குடும்பங்கள் இந்தி செய்தித்தாளும் வாங்குகின்றனர். 125 குடும்பங்கள் தமிழ் மற்றும் ஆங்கிலச் செய்தித்தாள்களையும், 17 குடும்பங்கள் ஆங்கிலம் மற்றும் இந்தி செய்தித்தாள்களையும், 5 குடும்பங்கள் தமிழ் மற்றும் இந்தி செய்தித் தாள்களையும், 3 குடும்பங்கள் மூன்று செய்தித்தாள்களையும் வாங்குகிறார்கள். குடியிருப்பில் உள்ள ஒவ்வொரு குடும்பமும் குறைந்தது ஒரு செய்தித்தாளையாவது வாங்குகிறார்கள் எனில்,

(i) ஒரு செய்தித்தாளை மட்டும் வாங்கும் குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை,

(ii) குறைந்தது இரண்டு செய்தித்தாள்களை வாங்கும் குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை,

(iii) குடியிருப்பில் உள்ள மொத்தக் குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை ஆகியவற்றைக் காண்க

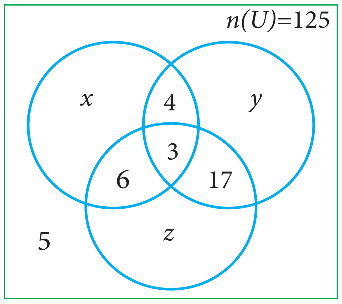
3. ஒரு சோப்பு தயாரிக்கும் நிறுவனம், ஒரு நகரில் 800 நபர்களிடம் நேர்முகத் தேர்வு நடத்தியது. அவர்களில் $\frac{3}{8}$ பங்கு A வகை சோப்பையும், $\frac{1}{5}$ பங்கு B வகை சோப்பையும், $\frac{1}{2}$ பங்கு C வகை சோப்பையும், 70 நபர்கள் A மற்றும் B வகை சோப்புகளையும், 55 நபர்கள் B மற்றும் C வகை சோப்புகளையும், 60 நபர்கள் A மற்றும் C வகை சோப்புகளையும், $\frac{1}{40}$ பங்கு நபர்கள் மூன்று வகை சோப்புகளையும் பயன்படுத்துவதாகத் தெரியவந்தது எனில்,

(i) இரண்டு வகை சோப்புகளை மட்டும் பயன்படுத்துபவர்களின் எண்ணிக்கை,

(ii) குறைந்தது ஒரு வகை சோப்பையாவது பயன்படுத்துபவர்களின் எண்ணிக்கை,

(iii) மூன்று வகை சோப்புகளில் எந்த ஒரு சோப்பையும் பயன்படுத்தாதவர்களின் எண்ணிக்கை ஆகியவற்றைக் காண்க.

4. 1000 விவசாயிகளிடம் நடத்தப்பட்ட ஆய்வில், 600 விவசாயிகள் நெல் பயிரிட்டதாகவும், 350 விவசாயிகள் கேழ்வரகு பயிரிட்டதாகவும், 280 விவசாயிகள் மக்காச்சோளம் பயிரிட்டதாகவும் தெரிவித்தனர். மேலும், 120 விவசாயிகள் நெல் மற்றும் கேழ்வரகு, 100 விவசாயிகள் கேழ்வரகு மற்றும் மக்காச்சோளம், 80 விவசாயிகள் நெல் மற்றும் மக்காச்சோளப் பயிர்களையும் பயிரிட்டனர். ஒவ்வொரு விவசாயியும் மேற்கண்டவற்றில் குறைந்தது ஒரு பயிராவது பயிர் செய்தார் எனில், மூன்று பயிர்களையும் பயிரிட்ட விவசாயிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.



5. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில், $n(\mathrm{U}) = 125$, y ஆனது x ஐப் போல் இருமடங்கு மற்றும் z ஆனது x ஐ விட 10 அதிகம் எனில், x, y மற்றும் z ஆகியவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

6. 35 மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு வகுப்பில் ஒவ்வொருவரும் சதுரங்கம் (Chess), சுண்டாட்டம் (Carrom), மேசை வரிப்பந்து (Table tennis) ஆகிய விளையாட்டுகளில் ஏதேனும் ஒன்றை விளையாடுகிறார்கள். 22 மாணவர்கள் சதுரங்கமும், 21 மாணவர்கள் சுண்டாட்டமும், 15 மாணவர்கள் மேசை

வரிப்பந்தும், 10 மாணவர்கள் சதுரங்கம் மற்றும் மேசை வரிப்பந்தும், 8 மாணவர்கள் சுண்டாட்டம் மற்றும் மேசை வரிப்பந்தும், 6 மாணவர்கள் மூன்று விளையாட்டுகளையும் விளையாடுகிறார்கள் எனில், (i) சதுரங்கம் மற்றும் சுண்டாட்டம் விளையாடி மேசை வரிப்பந்து விளையாடாதவர்கள் (ii) சதுரங்கம் மட்டும் விளையாடுபவர்கள் (iii) சுண்டாட்டம் மட்டும் விளையாடுபவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. (குறிப்பு: வென்படத்தைப் பயன்படுத்தவும்)

7. ஒரு வகுப்பிலுள்ள 50 மாணவர்கள், பேருந்து மூலமாகவோ அல்லது மிதிவண்டி மூலமாகவோ அல்லது நடந்தோ பள்ளிக்கு வந்தடைகின்றனர். 25 மாணவர்கள் பேருந்து மூலமும், 20 மாணவர்கள் மிதிவண்டி மூலமும், 30 மாணவர்கள் நடந்தும், 10 மாணவர்கள் மூன்று வகைப் பயணங்களிலும் வருகிறார்கள் எனில் எத்தனை மாணவர்கள் சரியாக இரண்டு வகைப் பயணங்களில் மட்டும் பள்ளிக்கு வந்தடைகின்றனர்.

AI913Q

பயிற்சி 1.5

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. $\mathrm{U} = \{x : x \in \mathbb{N}$ மற்றும் $x < 10\}$, $A = \{1,2,3,5,8\}$ மற்றும் $B = \{2,5,6,7,9\}$ எனில், $n\left[(A \cup B)'\right]$ என்பது

   (1) 1 (2) 2 (3) 4 (4) 8

2. P, Q மற்றும் R என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில், $P - (Q \cap R)$ என்பது

   (1) $P - (Q \cup R)$ (2) $(P \cap Q) - R$

   (3) $(P - Q) \cup (P - R)$ (4) $(P - Q) \cap (P - R)$

3. கீழ்க்காண்பவற்றில் எது சரி?

   (1) $A - B = A \cap B$ (2) $A - B = B - A$

   (3) $(A \cup B)' = A' \cup B'$ (4) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

4. $n(A \cup B \cup C) = 40,\ n(A) = 30,\ n(B) = 25,\ n(C) = 20,\ n(A \cap B) = 12,\ n(B \cap C) = 18$ மற்றும் $n(A \cap C) = 15$ எனில், $n(A \cap B \cap C)$ =_______

   (1) 5 (2) 10 (3) 15 (4) 20

5. $n(A \cup B \cup C) = 100,\ n(A) = 4x,\ n(B) = 6x,\ n(C) = 5x,\ n(A \cap B) = 20,$ $n(B \cap C) = 15,\ n(A \cap C) = 25$ மற்றும் $n(A \cap B \cap C) = 10$ எனில், x இன் மதிப்பு

   (1) 10 (2) 15 (3) 25 (4) 30

6. A, B மற்றும் C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில், $(A-B)\cap(B-C)$ இக்குச் சமமானது.

(1) A மட்டும் (2) B மட்டும் (3) C மட்டும் (4) ϕ

7. J என்பது மூன்று பக்கங்களைக் கொண்ட உருவங்களின் கணம், K என்பது ஏதேனும் இரண்டு பக்கங்கள் சமமாக உள்ள உருவங்களின் கணம் மற்றும் L என்பது ஒரு கோணம் செங்கோணமாக உள்ள உருவங்களின் கணம் எனில், $J\cap K\cap L$ என்பது

(1) இருசமபக்க முக்கோணங்களின் கணம்

(2) சமபக்க முக்கோணங்களின் கணம்

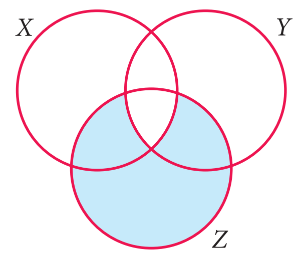
(3) இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணங்களின் கணம்

(4) செங்கோண முக்கோணங்களின் கணம்.

8. A மற்றும் B என்பன இரு வெற்றற்ற கணங்கள் எனில், $(A-B)\cup(A\cap B)$ என்பது

(1) A (2) B (3) ϕ (4) U

9. கொடுக்கப்பட்ட வென்படத்தில் நிழலிடப்பட்ட பகுதியானது



(1) $Z-(X\cup Y)$ (2) $(X\cup Y)\cap Z$

(3) $Z-(X\cap Y)$ (4) $Z\cup(X\cap Y)$

10. ஒரு நகரில், 40% மக்கள் ஒரு வகை பழத்தை மட்டும், 35% மக்கள் இரண்டு வகை பழங்களை மட்டும், 20% மக்கள் மூன்று வகை பழங்களையும் விரும்புகிறார்கள் எனில், மேற்கண்ட மூன்று வகை பழங்களையும் விரும்பாதவர்களின் சதவீதம் என்ன?

(1) 5 (2) 8 (3) 10 (4) 15

செயல்திட்டம்

1. உமது நண்பர்கள் மற்றும் அருகிலுள்ள 20 வீடுகளிலிருந்து கீழ்க்காணும் தரவுகளைத் திரட்டவும். எத்தனை வீடுகளில்,

(i) மிதிவண்டி உள்ளது? (ii) விசையுந்து (Motorbike) உள்ளது?

(iii) மடிக்கணினி உள்ளது? (iv) மிதிவண்டி மற்றும் விசையுந்து உள்ளன?

(v) விசையுந்து மற்றும் மடிக்கணினி உள்ளன?

(vi) மிதிவண்டி மற்றும் மடிக்கணினி உள்ளன?

(vii) மூன்றும் உள்ளன?

2. திரட்டப்பட்ட தரவுகளை வென்படத்தில் குறித்துக் கீழ்க்காணும் வினாக்களுக்கு விடையளிக்கவும். எத்தனை வீடுகளில்,

(i) சரியாக ஒரேயொரு பொருள் மட்டும் வைத்துள்ளனர்?

(ii) உந்துவண்டி மட்டும் வைத்துள்ளனர்?

(iii) மடிக்கணினி இல்லை?

(iv) மிதிவண்டி இல்லை?

(v) சரியாக இரண்டு பொருட்கள் மட்டும் வைத்துள்ளனர்?

நினைவு கூர்வதற்கான கருத்துகள்

- **பரிமாற்றுப் பண்பு**

  A, B என்பன எவையேனும் இரு கணங்கள் எனில்

  $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

- **சேர்ப்புப் பண்பு**

  A, B மற்றும் C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில்

  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

- **பங்கீட்டுப் பண்பு**

  A, B மற்றும் C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில்

  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (சேர்ப்பின் மீதான வெட்டு)

  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (வெட்டின் மீதான வெட்டு)

- **கண வித்தியாசத்திற்கான டி மார்கன் விதிகள்**

  A, B மற்றும் C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில்

  $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

  $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

- **கண நிரப்பிக்கான டி மார்கன் விதிகள்**

  $\mathbb{U}$ என்பது அனைத்துக் கணம், A, B என்பன அதன் உட்கணங்கள் எனில்

  $(A \cup B)' = A' \cap B'$; $(A \cap B)' = A' \cup B'$

- **கணங்களின் ஆதி எண்**

  (i) A மற்றும் B என்பன எவையேனும் இரு கணங்கள் எனில்

  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

  (ii) A, B மற்றும் C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில்

  $$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

2 மெய்யெண்கள்

பொதுவாகக் கணக்கீட்டில் மக்களுக்கு எது தேவையாக உள்ளது எனக் கருதும்போது, அதை நான் எப்பொழுதும் ஓர் எண்ணாகவே கண்டறிந்தேன்.

– அல் ஃவாரிஷ்மி

AIHW5D

அல் ஃவாரிஷ்மி

(780 கி.பி.(பொ.ஆ)–850கி.பி.(பொ.ஆ))

அல் ஃவாரிஷ்மி (Al khwarizmi) என்ற பாரசீகக் கணித மேதைதான் கணிதத்தில் குறிப்பிடும்படியாக, முறுடுகள் (surdus) என்ற சிறப்பு மிக்க கருத்தினை அடையாளம் கண்டார். விகிதமுறா எண்களை அவர் 'காதுகேளாமை' (inaudible) என்ற பொருளில் குறிப்பிட்டார். பின்னர் அது இலத்தீன் மொழியில் சர்டஸ் (surdus) என மொழி பெயர்க்கப்பட்டது. கணிதத்தில் ஒரு மூலத்தை விகிதமுறு எண்ணாக எழுத இயலவில்லை எனில், அது முறுடு (surd) அல்லது முருட்டெண் அல்லது விகிதமுறா மூலம் எனப்படும்.

கற்றல் விளைவுகள்

- அடுக்குகள் மற்றும் அடுக்கு விதிகளை நினைவுகூர்தல்.
- முறுடுகளை அடையாளம் காணுதல்.
- முறுடுகளில் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், மற்றும் வகுத்தல் போன்ற அடிப்படைச் செயல்களைச் செய்து பார்த்தல்.
- முறுடுகளின் பகுதியை விகிதப்படுத்துதல்.
- அறிவியல் குறியீடுகளைப் புரிந்துகொள்ளுதல்.

2.1 அறிமுகம்

$3\times3\times3\times3$ என்பதைச் சுருக்கமாக 3^4 என எழுதலாம். ஆகவே $81 = 3^4$. இங்கே 3 என்பது அடிமானம் எனவும் 4 என்பது அடுக்கு எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன.

$$x^n = \underbrace{x\times x\times x\times\ \ldots\ \times x}_{n \text{ காரணிகள்}} \quad (n \text{ ஒரு மிகை முழு})$$

என எழுதும் போது, x என்பது 'அடிமானம்' எனவும், n என்பது 'அடுக்கு' எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன. x^{-n} என்பது என்ன? இது x^n இன் பெருக்கல் தலைகீழி ஆகும். ($x^n \times x^{-n} = x^o = 1$ என்பதை அறிவோம்) எனவே,

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \text{என எழுதலாம்.}$$

இப்பொழுது $\frac{1}{2}$ என்பதை 2^{-1} என எழுதலாமா? நிச்சயமாக எழுதலாம். அதேபோல், 4^{-3} என்பதும் $\frac{1}{4^3}$ என்பதும் சமமா?

சிந்தனைக் களம்

- 2^{10} என்பது 1024 இக்குச் சமமா?
- $2^{-1} < 1$ என எழுதலாமா?
- -2^3 என்பதும் $(-2)^3$ என்பதும் ஒன்றல்லவா?
- $x^{-5} \times x^{-2}$ இன் மதிப்பு என்னவாக இருக்கும்?
- $x^{-m} \times x^{-n}$ இன் மதிப்பு என்ன?

எடுத்துக்காட்டு 2.1

மதிப்பிடுக: (i) 10^{-3} (ii) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ (iii) $(0.1)^{-4}$

தீர்வு

(i) $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0.001$

(ii) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{9}\right)} = 9$

(iii) $(0.1)^{-4} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)^4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{10000}\right)} = 10000$

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

1. அடுக்குகளில் குறை எண் இல்லாதவாறு சுருக்குக:

(i) $a^5 \times a^3$	(ii) $a^5 \times a^{-3}$	(iii) $a^5 \times a^{-5}$
(iv) $3x^5 \times x^{-1}$	(v) $6x^{-4} \times 7x^5$	(vi) $10m^{-1} \times 8m^{-1}$
(vii) $x^5 \div x^{-2}$	(viii) $x^{-5} \div x^{-2}$	(ix) $x^{-5} \div x^2$
(x) $24p^{-2} \div 6p^3$	(xi) $(a^{-5})^2$	(xii) $(a^{-5})^{-2}$
(xiii) $(a^5)^{-2}$	(xiv) $(2x^2)^{-3}$	(xv) $(2x^2y^3)^{-4}$

2. மதிப்பிடுக: (i) 9^{-2} (ii) $2^4 \times 4^{-2}$ (iii) $25^{-1} \times 5^{-2}$ (iv) $(0.2)^5$ (v) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-4}$

3. $x = 3$ மற்றும் $y = -1$ எனில், $(xy^2)^{-1}$ இன் மதிப்பு காண்க.

4. சுருக்குக: $\dfrac{2^n \times 3^{3n} \times 6^n}{2^{3n} \times 3^{2n} \times 30^n}$

2.2 மூலக்குறியீட்டு வடிவம் (Radical Notation)

n ஒரு மிகை முழு மற்றும் r ஒரு மெய்யெண் என்க. $r^n = x$ எனில், r என்பது x இன் n ஆவது மூலம் என அழைக்கப்படுகிறது.

இதை நாம், $\sqrt[n]{x} = r$ என எழுதுகிறோம். இங்கே, $\sqrt[n]{}$ என்பது மூலக்குறியீடு (radical) எனவும்; n என்பது மூலத்தின் வரிசை (index) எனவும் (இதுவரை அடுக்கு என நாம் இதனை அழைத்தோம்) மற்றும் x என்பது மூல அடிமானம் (radicand) எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன.

$n = 2$ எனில், என்ன நிகழும்? $r^2 = x$ ஆகும், எனவே, $r = \sqrt[2]{x}$, இப்பொழுது x இன் வர்க்கமூலத்தை நினைவு கூர்வோம். அதாவது r என்பது x இன் வர்க்கமூலம் ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக, $\sqrt[2]{16}$ என்பதை $\sqrt{16}$ என எழுதலாம்.

மேலும் $n = 3$ எனில், நாம் x இன் கனமூலத்தை $\sqrt[3]{x}$ எனப் பெறுகிறோம். எடுத்துக்காட்டாக, $\sqrt[3]{8}$ ஆனது 8இன் கனமூலமான 2 ஐத் தருகிறது. ($8 = 2^3$ என்பது சரிதானே?)

குறிப்பு

'வர்க்கமூலம்' மற்றும் 'கனமூலம்' என்பவற்றின் கருத்துகளைப் புரிந்து கொள்வதற்குப் பயனுள்ள வகையில் சற்றுக் கூடுதல் நேரம் ஒதுக்கினால் முறுடுகளை நன்கு புரிந்து கொள்ளலாம்.

4 என்ற எண்ணுக்கு எத்தனை வர்க்க மூலங்கள் உள்ளன? $(+2)\times(+2) = 4$ மற்றும் $(-2)\times(-2) = 4$ எனவே, $+2$ மற்றும் -2 இரண்டுமே 4இன் வர்க்கமூலங்கள் எனலாம். ஆனால், $\sqrt{4} = \pm 2$ என எழுதுவது தவறு. ஏனெனில், n என்பது இரட்டை எண்ணாக இருக்கும் போது $\sqrt[n]{x}$ ஆவது மிகை மூலத்தைக் குறிப்பிட n என்ற குறியீடும், n ஆவது குறை மூலத்தைக் குறிப்பிட $-\sqrt[n]{x}$ என்ற குறியீடுமே ஏற்றுக் கொள்ளப்பட்ட வழிமுறை ஆகும். எனவே, $\sqrt{4} = 2$ மற்றும் $-\sqrt{4} = -2$ என்றவாறு நாம் எழுத வேண்டும். n என்பது ஒற்றை எண்ணாக இருக்கும் போது, x இன் அனைத்து மதிப்பிற்கும், சரியாக ஒரேயொரு n ஆவது மெய் மூலம் மட்டுமே இருக்கும். எடுத்துக்காட்டாக, $\sqrt[3]{8} = 2$ மற்றும் $\sqrt[5]{-32} = -2$.

சிந்தனைக் களம்

கீழ்க்காண்பவற்றுள் எது தவறு?

(அ) 9 இன் வர்க்கமூலம் 3 அல்லது -3

(ஆ) $\sqrt{9} = 3$

(இ) $-\sqrt{9} = -3$

(ஈ) $\sqrt{9} = \pm 3$

2.2.1 பின்ன அடுக்கு (Fractional Index)

மீண்டும் $r = \sqrt[n]{x}$ என்ற வடிவத்தின் முடிவுகளை எடுத்துக் கொள்வோம். அருகிலுள்ள குறியீட்டில் மூலத்தின் வரிசையானது (இங்கு, $n = 3$) எத்தனை முறை விடையை (இங்கு 4) பெருக்கினால் மூல அடிமானம் கிடைக்கும் என்பதைத் தெரிவிக்கிறது.

மூலத்தின் வரிசை
மூலக்குறியீடு

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

மூல அடிமானம்
மெய்யெண்

அடுக்குகளையும், மூலங்களையும் குறிப்பிடுவதற்கு நம்மிடம் மேலும் ஒரு வழி உள்ளது. அது அடுக்கில் பின்னத்தைக் குறிப்பிடுதல். அதாவது, $\sqrt[n]{x}$ என்பதை $x^{\frac{1}{n}}$ (பின்ன அடுக்கு) என எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\sqrt[3]{64} = 64^{\frac{1}{3}}$ மற்றும் $\sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}}$.

சில விகிதமுறா மூலங்களின் அடுக்குக்குறி வடிவம், படிக்கும் முறை, மூலக்குறியீட்டு வடிவம், பின்ன அடுக்கு வடிவம் ஆகியவை பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

அடுக்குக்குறி வடிவம்	மூலக்குறியீட்டு வடிவம்	பின்ன அடுக்கு வடிவம்	பொதுவாக நாம் படிக்கும் முறை
$2^6 = 64$	$2 = \sqrt[6]{64}$	$2 = 64^{\frac{1}{6}}$	2 என்பது 64இன் 6ஆவது மூலம்
$2^5 = 32$	$2 = \sqrt[5]{32}$	$2 = 32^{\frac{1}{5}}$	2 என்பது 32இன் 5ஆவது மூலம்
$2^4 = 16$	$2 = \sqrt[4]{16}$	$2 = 16^{\frac{1}{4}}$	2 என்பது 16இன் 4ஆவது மூலம்
$2^3 = 8$	$2 = \sqrt[3]{8}$	$2 = 8^{\frac{1}{3}}$	2 என்பது 8இன் கனமூலம் அல்லது 2 என்பது 8இன் 3ஆவது மூலம்
$2^2 = 4$	$2 = \sqrt[2]{4}$ அல்லது சுருக்கமாக, $2 = \sqrt{4}$	$2 = 4^{\frac{1}{2}}$	2 என்பது 4இன் வர்க்கமூலம் அல்லது 2 என்பது 4இன் 2 வது மூலம்

எடுத்துக்காட்டு 2.2 பின்வருவனவற்றை 2^n வடிவத்தில் எழுதுக :

(i) 8 (ii) 32 (iii) $\frac{1}{4}$ (iv) $\sqrt{2}$ (v) $\sqrt{8}$

தீர்வு

(i) $8 = 2\times2\times2$; எனவே $8 = 2^3$

(ii) $32 = 2\times2\times2\times2\times2 = 2^5$

(iii) $\frac{1}{4} = \frac{1}{2\times2} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$

(iv) $\sqrt{2} = 2^{1/2}$

(v) $\sqrt{8} = \sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3$. இதனை $2^{\frac{3}{2}}$ எனவும் எழுதலாம்.

2.2.2 $x^{\frac{m}{n}}$ என்பதன் பொருள்: (m மற்றும் n என்பன மிகை முழுக்கள்)

$x^{\frac{m}{n}}$ என்பதை நாம் x இன் m ஆவது அடுக்கின் n ஆவது மூலம் அல்லது n ஆவது மூலத்தின் m ஆவது அடுக்கு என எழுதலாம்.

குறியீட்டில், $x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}$ அல்லது $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$ அல்லது $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m$

எடுத்துக்காட்டு 2.3 மதிப்பு காண்க: (i) $81^{\frac{5}{4}}$ (ii) $64^{\frac{-2}{3}}$

தீர்வு

(i) $81^{\frac{5}{4}} = \left(\sqrt[4]{81}\right)^5 = \left(\sqrt[4]{3^4}\right)^5 = 3^5 = 3\times3\times3\times3\times3 = 243$

(ii) $64^{\frac{-2}{3}} = \dfrac{1}{64^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{64}\right)^2} = \dfrac{1}{4^2}$ (எப்படி?) $= \dfrac{1}{16}$

பயிற்சி 2.1

1. பின்வருவனவற்றை 5^n வடிவத்தில் எழுதுக:

   (i) 625 (ii) $\dfrac{1}{5}$ (iii) $\sqrt{5}$ (iv) $\sqrt{125}$

2. பின்வருவனவற்றை 4^n வடிவில் எழுதுக:

   (i) 16 (ii) 8 (iii) 32

3. மதிப்பு காண்க:

   (i) $(49)^{\frac{1}{2}}$ (ii) $(243)^{\frac{2}{5}}$ (iii) $(8)^{\frac{5}{3}}$ (iv) $9^{\frac{-3}{2}}$

   (v) $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{\frac{-2}{3}}$ (vi) $\left(\dfrac{64}{125}\right)^{\frac{-2}{3}}$

4. பின்ன அடுக்கைப் பயன்படுத்தி எழுதுக:

   (i) $\sqrt{5}$ (ii) $\sqrt[2]{7}$ (iii) $\left(\sqrt[3]{49}\right)^5$ (iv) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{100}}\right)^7$

5. கீழ்க்காண்பவற்றின் 5 வது மூலத்தைக் காண்க:

   (i) 32 (ii) 243 (iii) 100000 (iv) $\dfrac{1024}{3125}$

2.3 முறுடுகள் (Surds)

மெய்யெண்களைப் பற்றிய கருத்துகள், அவற்றை எண்கோட்டில் குறித்தல் மற்றும் கையாளுதல் ஆகியவற்றை நன்கு அறிந்த நாம் தற்போது குறிப்பிட்ட சில தோராய மதிப்புகளை எப்படி முறுடுகளாக தனித்துவமான முறையில் குறிப்பிடுவது என்பது பற்றி கற்க இருக்கின்றோம்.

$\sqrt{4}$ என்ற எண்ணை $\sqrt{\ }$ குறியீடு இல்லாமல் நம்மால் சுருக்கமாகக் கூற இயலுமா? ஆம் முடியும். $\sqrt{4}$ இக்குப் பதிலாக 2 என எளிமையாக எழுத முடியும். அப்படியானால், $\sqrt{\dfrac{1}{9}}$ யும் அவ்வாறே எழுதலாமா? மிகவும் எளிதாக எழுதலாம். $\sqrt{\ }$ குறியீடு இல்லாமல் இதன் மதிப்பு $\dfrac{1}{3}$ ஆகும். $\sqrt{0.01}$ இன் மதிப்பு என்ன? இதனையும் எளிதாக எழுதலாம். இதன் தீர்வு 0.1 ஆகும்.

$\sqrt{4}$, $\sqrt{\frac{1}{9}}$ மற்றும் $\sqrt{0.01}$ என்பவற்றின் தீர்வு காணும்போது $\sqrt{\ }$ குறியீடு இல்லாமல் இருப்பதை நம்மால் காண முடிகிறது. எல்லா இடங்களிலும் இவ்வாறு செய்ய இயலுமா? $\sqrt{18}$ என்பதைக் கருதுக. மூலக்குறியீடு இல்லாமல் இதன் மதிப்பை நம்மால் காண இயலுமா? 2இன் வர்க்கமூலம், 5இன் கனமூலம் போன்று மூலக்குறியீடு இல்லாமல் தீர்வு காண இயலாத எண்கள் முறுடுகள் எனப்படுகின்றன. அவை விகிதமுறு எண்களைக் கெழுக்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டின் விகிதமுறா மூலங்கள் ஆகும்.

முறுடு என்பது ஒரு விகிதமுறு எண்ணின் விகிதமுறா மூலம் ஆகும். $\sqrt[n]{a}$ என்பது ஒரு முறுடு, இங்கே $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, 'a' ஒரு விகிதமுறு எண்.

எடுத்துக்காட்டுகள்: $\sqrt{2}$ ஒரு முறுடு. இது $x^2 = 2$ என்ற சமன்பாட்டின் விகிதமுறா மூலம் ஆகும். ($x^2 - 2 = 0$ என்பது விகிதமுறு எண்களைக் கெழுக்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு என்பதைக் கவனிக்க. $\sqrt{2}$ என்பது விகிதமுறா எண். இதை $1.4142135\ldots$ என்ற முடிவுறாச் சுழல் தன்மையற்ற தசம எண்ணால் குறிப்பிடலாம்.)

$\sqrt[3]{3}$ (இது $3^{\frac{1}{3}}$ இக்குச் சமமானது) ஒரு முறுடு. ஏனெனில், இது $x^3 - 3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் விகிதமுறா மூலம் ஆகும் ($\sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறா எண், இதை $1.7320508\ldots$ என்ற முடிவுறாச் சுழல் தன்மையற்ற தசம எண்ணால் குறிப்பிடலாம்).

$x^2 - 6x + 7 = 0$ போன்ற இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பது பற்றி நீங்கள் அடுத்த வகுப்பில் கற்க இருக்கிறீர்கள். மேற்கண்ட சமன்பாடானது விகிதமுறு எண்களைக் கெழுக்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு, அதன் ஒரு மூலம் $3+\sqrt{2}$ ஆனது ஒரு முறுடு ஆகும்.

$\sqrt{\frac{1}{25}}$ ஒரு முறுடா? இல்லை; இதை $\frac{1}{5}$ என்ற விகிதமுறு எண்ணாகச் சுருக்கி எழுத முடியும்.

$\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$ இன் மதிப்பு எவ்வாறு இருக்கும்? இது முறுடு அல்ல. இதனை $\frac{2}{3}$ எனச் சுருக்க இயலும். நமக்குத் தெரிந்த மிக முக்கியமான விகிதமுறா எண் π ஒரு முறுடல்ல ! அது ஒரு விகிதமுறா எண்ணாக இருந்த போதிலும், அதை $\sqrt{\ }$ குறியீட்டுக்குள் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாக எழுத இயலாது. (அதாவது, விகிதமுறு கெழுக்களைக் கொண்ட எந்தவொரு சமன்பாட்டிற்கும் இது மூலமாக இருக்காது.)

முறுடுகள் ஏன் முக்கியமாகின்றன? கணக்கீடுகள் செய்யும் போது, நாம் $\sqrt{2} = 1.414$, மற்றும் $\sqrt{3} = 1.732$ போன்ற தோராய மதிப்புகளை எடுத்துக் கொள்கிறோம்.

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(1.414\right)^2 = 1.99936 \neq 2\ ; \quad \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(1.732\right)^2 = 3.999824 \neq 3$$

இதிலிருந்து $\sqrt{2}$ மற்றும் $\sqrt{3}$ என்பவற்றின் தோராய மதிப்புகளை விட, வேறொரு துல்லியமான மற்றும் மிகச் சரியான மதிப்புகளை அவை கொண்டிருக்கின்றன என்பதை நம்மால் காண முடிகிறது. பொறியாளர்களும் விஞ்ஞானிகளும் பாலம் கட்டுதல், கட்டடக்கலை வேலைகள் போன்ற தங்கள் பணிகளைச் செய்யும் போது, மிகத் துல்லியமான மதிப்புகள் அவர்களுக்குத் தேவைப்படுகின்றன. எனவே முறுடுகளைப் பற்றி நாம் கற்பது இன்றியமையாததாகிறது.

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

1. பொருத்தமில்லாதது எது? உமது விடைக்குத் தகுந்த காரணம் கூறவும்..

   (i) $\sqrt{36}$, $\sqrt{\dfrac{50}{98}}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{1.44}$, $\sqrt[5]{32}$, $\sqrt{120}$

   (ii) $\sqrt{7}$, $\sqrt{48}$, $\sqrt[3]{36}$, $\sqrt{5}+\sqrt{3}$, $\sqrt{1.21}$, $\sqrt{\dfrac{1}{10}}$

2. அனைத்து முறுடுகளும் விகிதமுறா எண்களா? உமது விடையைக் கலந்தாலோசிக்கவும்.

3. எல்லா விகிதமுறா எண்களும் முறுடுகளா? சில எடுத்துக்காட்டுகளைக் கொண்டு சரிபார்க்க.

2.3.1 முறுடின் வரிசை (Order of a surd)

ஒரு முறுடானது எந்த மூலத்திலிருந்து பெறப்படுகிறதோ, அந்த மூலத்தின் வரிசை அந்த **முறுடின் வரிசை** எனப்படுகிறது. $\sqrt[n]{a}$ என்ற முறுடின் வரிசை n ஆகும். $\sqrt[5]{99}$ இன் வரிசை என்ன? இது 5 ஆகும்.

2.3.2 முறுடின் வகைகள் (Types of Surds)

முறுடுகளை பல்வேறு வழிகளில் வகைப்படுத்தலாம்.

(i) ஒரே வரிசை கொண்ட முறுடுகள் (Surds of Same order)

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட **முறுடுகளின் வரிசைகள் சமம்** எனில் அந்த முறுடுகள் ஒரே வரிசை கொண்ட முறுடுகள் எனப்படும். இவை **சம மூலக்குறியீடு கொண்ட முறுடுகள்** எனவும் அழைக்கப்படும். எடுத்துக்காட்டாக,

$\sqrt{x}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt[2]{m}$ என்பன இரண்டாம் வரிசை முறுடுகள் அல்லது **இருபடி முறுடுகள்**.

$\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{(x-2)}$, $(ab)^{\frac{1}{3}}$ என்பன மூன்றாம் வரிசை முறுடுகள் அல்லது **கன முறுடுகள்**.

$\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[4]{6}$ மற்றும் $8^{\frac{2}{5}}$ என்பன வெவ்வேறு வரிசை கொண்ட முறுடுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 2.4 பின்வருவனவற்றை ஒரே வரிசை கொண்ட முறுடுகளாக மாற்ற இயலுமா? (i) $\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt[4]{3}$ (iii) $\sqrt[3]{3}$

தீர்வு

$$\text{(i)}\ \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{6}{12}} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729}$$

$$\text{(ii)}\ \sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{27}$$

$$\text{(iii)}\ \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{4}{12}} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}$$

கடைசி வரியிலிருந்து, மூன்றும் ஒரே வரிசை கொண்ட முறுடுகளாக மாற்ற முடிகிறது.

(ii) **முறுடின் எளிய வடிவம்** (A surd in the simplest form) ஒரு முறுடின் எளிய வடிவம் என்பது அதை விகிதமுறு மற்றும் விகிதமுறா காரணிகளின் பெருக்கலாக எழுதும்போது, அதில் உள்ள விகிதமுறாக் காரணி கீழ்க்காணும் 3 விதிகளை நிறைவு செய்ய வேண்டும்.

(அ) மூலத்தின் வரிசை இயன்ற அளவு மிகச் சிறியதாய் இருக்க வேண்டும்.

(ஆ) மூலக் குறியீட்டின் வரிசை பின்னமாக இருத்தல் கூடாது.

(இ) வரிசை n கொண்ட மூலக் குறியீட்டுக்குள் a^n வடிவில் எந்த ஒரு காரணியும் இருக்கக் கூடாது. இங்கு a ஒரு மிகை முழு

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) பகுதியை விகிதப்படுத்த

$$\sqrt[3]{\frac{18}{25}} = \sqrt[3]{\frac{18\times 5}{25\times 5}} = \sqrt[3]{\frac{90}{125}} = \sqrt[3]{\frac{90}{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{90}}{5}$$

(ii) தொகுதியை விகிதப்படுத்த

$$\sqrt[3]{\frac{18}{25}} = \sqrt[3]{\frac{18\times 12}{25\times 12}} = \sqrt[3]{\frac{216}{300}} = \sqrt[3]{\frac{6^3}{300}} = \frac{6}{\sqrt[3]{300}}$$

(iii) எளிய வடிவில் எழுத,

$$\sqrt[3]{\frac{18}{125}} = \sqrt[3]{\frac{18}{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{5}$$

மேலும் இதனை விகிதப்படுத்த முடியுமா? விவாதிக்க.

எடுத்துக்காட்டு 2.5

1. கொடுக்கப்பட்டுள்ள முறுடுகளை எளிய வடிவில் எழுதுக: i) $\sqrt{8}$ ii) $\sqrt[3]{192}$

2. $\sqrt[3]{7} > \sqrt[4]{5}$ என்பதை மெய்ப்பிக்க.

தீர்வு

1. (i) $\sqrt{8} = \sqrt{4\times2} = 2\sqrt{2}$

(ii) $\sqrt[3]{192} = \sqrt[3]{4\times4\times4\times3} = 4\sqrt[3]{3}$

2. $\sqrt[3]{7} = \sqrt[12]{7^4} = \sqrt[12]{2401}$

$\sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$

$\sqrt[12]{2401} > \sqrt[12]{125}$

ஆகவே,, $\sqrt[3]{7} > \sqrt[4]{5}$.

(iii) முழுமையான மற்றும் கலப்பு முறுடுகள் (Pure and Mixed Surds) எளிய வடிவில் ஒரு முறுடின் கெழு அல்லது குணகம் 1 எனில், அந்த முறுடு முழுமையான முறுடு எனப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{7}$, $\sqrt[5]{49}$ ஆகியவை முழுமையான முறுடுகள்.

ஒரு முறுடின் எளிய வடிவில் அதன் கெழு அல்லது குணகம் 1–ஐத் தவிர வேறு ஓர் எண்ணாக இருப்பின் அது கலப்பு முறுடு எனப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக, $5\sqrt{3}$, $2\sqrt[4]{5}$, $3\sqrt[4]{6}$ என்பன கலப்பு முறுடுகள்.

(iv) எளிய மற்றும் கூட்டு முறுடுகள் (Simple and Compound Surds) ஒரே ஓர் உறுப்பை மட்டும் கொண்டுள்ள முறுடு எளிய முறுடு எனப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, $\sqrt{3}$, $2\sqrt{5}$ ஆகியன எளிய முறுடுகள். இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட முறுடுகள் கூட்டுச் செயலிகளால் (+ அல்லது −) இணைக்கப்பட்டிருந்தால் அது கூட்டு முறுடு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\sqrt{5}+3\sqrt{2}, \sqrt{3}-2\sqrt{7}, \sqrt{5}-7\sqrt{2}+6\sqrt{3}$ ஆகியன கூட்டு முறுடுகள்.

(v) ஈருறுப்பு முறுடு (Binomial Surd) கூட்டல் அல்லது கழித்தல் முறையில் இணைத்து எழுதப்பட்ட விரிவில் இரண்டும் முறுடாகவோ அல்லது ஒன்று விகிதமுறு எண் மற்றொன்று ஒரு முறுடாகவோ இருப்பின் அது ஈருறுப்பு முறுடு எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\frac{1}{2}-\sqrt{19}, 5+3\sqrt{2}, \sqrt{3}-2\sqrt{7}$ ஆகியன ஈருறுப்பு முறுடுகள் ஆகும் .

எடுத்துக்காட்டு 2.6 ஏறுவரிசையில் எழுதுக: $\sqrt[3]{2},\ \sqrt[2]{4},\ \sqrt[4]{3}$

தீர்வு

$\sqrt[3]{2},\ \sqrt[2]{4},\ \sqrt[4]{3}$ ஆகியவற்றின் வரிசைகள் $3,\ 2,\ 4.$

$3, 2, 4$ இன் மீ.பொ.ம $= 12.$

$$\sqrt[3]{2} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right) = \left(2^{\frac{4}{12}}\right) = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{16}\ ; \qquad \sqrt[2]{4} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right) = \left(4^{\frac{6}{12}}\right) = \sqrt[12]{4^6} = \sqrt[12]{4096}$$

$$\sqrt[4]{3} = \left(3^{\frac{1}{4}}\right) = \left(3^{\frac{3}{12}}\right) = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{27}$$

$\sqrt[3]{2},\ \sqrt[4]{3},\ \sqrt[2]{4}$ ஆனது $\sqrt[12]{16} < \sqrt[12]{27} < \sqrt[12]{4096}$

ஏறுவரிசை $\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[2]{4}$.

2.3.3 மூலக்குறியீட்டு விதிகள் (Laws of Radicals)

m, n என்பன மிகை முழுக்கள், a மற்றும் b என்பன மிகை விகிதமுறு எண்கள் எனில், கீழ்க்காணும் மூலக்குறியீட்டு விதிகளை நினைவு கூர்தல் பயனுள்ளது.

வ. எண்.	மூலக்குறியீட்டு வடிவம்	அடுக்கு வடிவம்
(i)	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a = \sqrt[n]{a^n}$	$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a = \left(a^n\right)^{\frac{1}{n}}$
(ii)	$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$
(iv)	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$	$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}$
(v)	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	$\dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$

AIRS71

மூலக்குறியீட்டு விதிகளைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்கக்கூடிய சில கணக்குகளைத் தற்போது விவாதிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.7 கொடுக்கப்பட்ட முறுடுகளை அதன் எளிய வடிவில் எழுதுக. மேலும், அவற்றின் வரிசை, மூல அடிமானம் மற்றும் கெழு ஆகியவற்றையும் கண்டறிக.

(i) $\sqrt[3]{108}$ (ii) $\sqrt[3]{(1024)^{-2}}$

தீர்வு

(i) $\sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{27\times 4}$

$= \sqrt[3]{3^3\times 4}$

$= \sqrt[3]{3^3}\times\sqrt[3]{4}$ (மூலக்குறியீட்டு விதி - ii)

$= 3\times\sqrt[3]{4}$ (மூலக்குறியீட்டு விதி - i)

2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

வரிசை= 3; மூல அடிமானம் = 4; கெழு = 3

(ii) $\sqrt[3]{(1024)^{-2}} = \left[\sqrt[3]{\left(2^3\times 2^3\times 2^3\times 2\right)^{-2}}\right]$

$= \left[\sqrt[3]{\left(2^3\times 2^3\times 2^3\times 2\right)}\right]^{-2}$ [மூலக்குறியீட்டு விதி (i)]

$= \left[\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{2}\right]^{-2}$ [மூலக்குறியீட்டு விதி(ii)]

$= \left[2\times 2\times 2\times\sqrt[3]{2}\right]^{-2}$ [மூலக்குறியீட்டு விதி (i)]

$= \left[8\times\sqrt[3]{2}\right]^{-2} = \left[\dfrac{1}{8}\right]^2\times\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2$

$= \dfrac{1}{64}\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$

2	1024
2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

வரிசை $= 3$; மூல அடிமானம்= $\dfrac{1}{4}$; கெழு= $\dfrac{1}{64}$

(அடுக்கு வடிவத்தைப் பயன்படுத்தியும் இதே முடிவுகளைப் பெற இயலும்).

குறிப்பு

5 மற்றும் 6 என்ற எண்களைக் கருதுக. மேலும் $5 = \sqrt{25}$ மற்றும் $6 = \sqrt{36}$ ஆகும். ஆகவே, $\sqrt{26}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{28}$, $\sqrt{29}$, $\sqrt{30}$, $\sqrt{31}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{33}$, $\sqrt{34}$, மற்றும் $\sqrt{35}$ என்பன 5 இக்கும் 6 இக்கும் இடைப்பட்ட முறுடுகளாகும்.

$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2\times 2} = \sqrt{18}$, $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2\times 3} = \sqrt{12}$ ஆகவே, $\sqrt{17}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{13}$ என்பன $2\sqrt{3}$ இக்கும் $3\sqrt{2}$ இக்கும் இடைப்பட்ட முறுடுகளாகும்.

2.3.4 முறுடுகளில் நான்கு அடிப்படைச் செயல்கள் (Four Basic Operations on Surds)

(i) **முறுடுகளில் கூட்டல் மற்றும் கழித்தல் (Addition and subtraction of surds)**

ஒத்த முறுடுகளைக் கீழ்க்காணும் விதியைப் பயன்படுத்திக் கூட்டவோ கழிக்கவோ முடியும்.

$$a\sqrt[n]{b} \pm c\sqrt[n]{b} = (a\pm c)\sqrt[n]{b}, \text{ இங்கு } b > 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 2.8 (i) $3\sqrt{7}$ மற்றும் $5\sqrt{7}$ ஐக் கூட்டுக. அவற்றின் கூடுதல் ஒரு விகிதமுறு எண்ணா அல்லது விகிதமுறா எண்ணா எனச் சரிபார்க்க.

(ii) $4\sqrt{5}$ ஐ $7\sqrt{5}$ இலிருந்து கழிக்க. தீர்வானது ஒரு விகிதமுறு எண்ணா அல்லது விகிதமுறா எண்ணா?

தீர்வு

(i) $3\sqrt{7}+5\sqrt{7} = (3+5)\sqrt{7} = 8\sqrt{7}$. தீர்வு ஒரு விகிதமுறா எண்.

(ii) $7\sqrt{5}-4\sqrt{5} = (7-4)\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$. தீர்வு ஒரு விகிதமுறா எண்.

எடுத்துக்காட்டு 2.9 கீழ்க்காண்பவற்றைச் சுருக்குக:

(i) $\sqrt{63}-\sqrt{175}+\sqrt{28}$ (ii) $2\sqrt[3]{40}+3\sqrt[3]{625}-4\sqrt[3]{320}$

தீர்வு

(i)
$$\begin{aligned}\sqrt{63}-\sqrt{175}+\sqrt{28} &= \sqrt{9\times7}-\sqrt{25\times7}+\sqrt{4\times7}\\ &= 3\sqrt{7}-5\sqrt{7}+2\sqrt{7}\\ &= \left(3\sqrt{7}+2\sqrt{7}\right)-5\sqrt{7}\\ &= 5\sqrt{7}-5\sqrt{7}\\ &= 0\end{aligned}$$

(ii) $2\sqrt[3]{40}+3\sqrt[3]{625}-4\sqrt[3]{320}$
$$\begin{aligned}&= 2\sqrt[3]{8\times5}+3\sqrt[3]{125\times5}-4\sqrt[3]{64\times5}\\ &= 2\sqrt[3]{2^3\times5}+3\sqrt[3]{5^3\times5}-4\sqrt[3]{4^3\times5}\\ &= 2\times2\sqrt[3]{5}+3\times5\sqrt[3]{5}-4\times4\sqrt[3]{5}\\ &= 4\sqrt[3]{5}+15\sqrt[3]{5}-16\sqrt[3]{5}\\ &= (4+15-16)\sqrt[3]{5} = 3\sqrt[3]{5}\end{aligned}$$

(ii) முறுடுகளில் பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் (Multiplication and division of surds)

ஒத்த முறுடுகளைக் கீழ்க்காணும் விதிகளைப் பயன்படுத்திப் பெருக்கவோ அல்லது வகுக்கவோ முடியும்.

முறுடுகளின் பெருக்கல் பண்புகள்	முறுடுகளின் பெருக்கல் பண்புகள்
(i) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	(iii) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
(ii) $a\sqrt[n]{b} \times c\sqrt[n]{d} = ac\sqrt[n]{bd}$ இங்கே $b, d > 0$	(iv) $\dfrac{a\sqrt[n]{b}}{c\sqrt[n]{d}} = \dfrac{a}{c}\sqrt[n]{\dfrac{b}{d}}$ இங்கே $b, d > 0$

எடுத்துக்காட்டு 2.10 $\sqrt[3]{40}$ மற்றும் $\sqrt[3]{16}$ ஐப் பெருக்குக.

தீர்வு

$$\sqrt[3]{40} \times \sqrt[3]{16} = \left(\sqrt[3]{2\times2\times2\times5}\right) \times \left(\sqrt[3]{2\times2\times2\times2}\right)$$
$$= \left(2\times\sqrt[3]{5}\right)\times\left(2\times\sqrt[3]{2}\right) = 4\times\left(\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{5}\right) = 4\times\sqrt[3]{2\times5}$$
$$= 4\sqrt[3]{10}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.11 $2\sqrt{72}\times5\sqrt{32}\times3\sqrt{50}$ இன் மதிப்பைக் கணக்கிட்டு விடையை எளிய வடிவில் தருக.

தீர்வு

$$2\sqrt{72}\times5\sqrt{32}\times3\sqrt{50} = \left(2\times6\sqrt{2}\right)\times\left(5\times4\sqrt{2}\right)\times\left(3\times5\sqrt{2}\right)$$
$$= 2\times5\times3\times6\times4\times5\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}$$
$$= 3600\times2\sqrt{2}$$
$$= 7200\sqrt{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sqrt{72} &= \sqrt{36\times2} = 6\sqrt{2}\\ \sqrt{32} &= \sqrt{16\times2} = 4\sqrt{2}\\ \sqrt{50} &= \sqrt{25\times2} = 5\sqrt{2}\end{aligned}}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.12 $\sqrt[9]{8}$ என்ற முறுடை $\sqrt[6]{6}$ ஆல் வகுக்க.

தீர்வு

$$\frac{\sqrt[9]{8}}{\sqrt[6]{6}} = \frac{8^{\frac{1}{9}}}{6^{\frac{1}{6}}}$$ (6, 9 இன் மீ.பொ.ம 18 என்பதைக் குறித்துக் கொள்க.)

$$= \frac{8^{\frac{2}{18}}}{6^{\frac{3}{18}}}$$ (எப்படி?)

$$= \left(\frac{8^2}{6^3}\right)^{\frac{1}{18}} = \left(\frac{8\times8}{6\times6\times6}\right)^{\frac{1}{18}}$$

$$= \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{18}} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^{\frac{1}{18}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{\frac{2}{3}}$$

செயல்பாடு - 1

கீழ்க்காணும் முடிவுகள் ஆர்வமானதாக இருக்கிறதா?

$\sqrt{4\dfrac{4}{15}} = 4\sqrt{\dfrac{4}{15}}$ மற்றும் $\sqrt{5\dfrac{5}{24}} = 5\sqrt{\dfrac{5}{24}}$ என்பவை சரியா என ஆராய்க. இதே வடிவில் மேலும் 4 புதிய முறுடுகளைக் காண்க.

பயிற்சி 2.2

1. முறுடுகளின் கூட்டல் மற்றும் கழித்தல் பண்புகளைப் பயன்படுத்திச் சுருக்குக:

   (i) $5\sqrt{3}+18\sqrt{3}-2\sqrt{3}$ (ii) $4\sqrt[3]{5}+2\sqrt[3]{5}-3\sqrt[3]{5}$

   (iii) $3\sqrt{75}+5\sqrt{48}-\sqrt{243}$ (iv) $5\sqrt[3]{40}+2\sqrt[3]{625}-3\sqrt[3]{320}$

2. முறுடுகளின் பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் பண்புகளைப் பயன்படுத்திச் சுருக்குக. :

   (i) $\sqrt{3} \times \sqrt{5} \times \sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{35} \div \sqrt{7}$ (iii) $\sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{125}$

   (iv) $\left(7\sqrt{a}-5\sqrt{b}\right)\left(7\sqrt{a}+5\sqrt{b}\right)$ (v) $\left[\sqrt{\frac{225}{729}}-\sqrt{\frac{25}{144}}\right] \div \sqrt{\frac{16}{81}}$

3. $\sqrt{2}=1.414$, $\sqrt{3}=1.732$, $\sqrt{5}=2.236$, $\sqrt{10}=3.162$ எனில், கீழ்க்காண்பவற்றின் மதிப்புகளை மூன்று தசம இடத்திருத்தமாகக் காண்க.

   (i) $\sqrt{40}-\sqrt{20}$ (ii) $\sqrt{300}+\sqrt{90}-\sqrt{8}$

4. முறுடுகளை இறங்கு வரிசையில் அமைக்க: (i) $\sqrt[3]{5}, \sqrt[9]{4}, \sqrt[6]{3}$ (ii) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{5}}, \sqrt[3]{\sqrt[4]{7}}, \sqrt{\sqrt{3}}$

5. (i) இரு முறுடுகளின் கூட்டல் (ii) இரு முறுடுகளின் வேறுபாடு

   (iii) இரு முறுடுகளின் பெருக்கல் (iv) இரு முறுடுகளின் ஈவு

   ஆகிய நிகழ்வுகளில் உம்மால் ஒரு முழுமையான முறுடைப் பெற இயலுமா? ஒவ்வொரு விடையையும் ஓர் எடுத்துக்காட்டுடன் விவரிக்க.

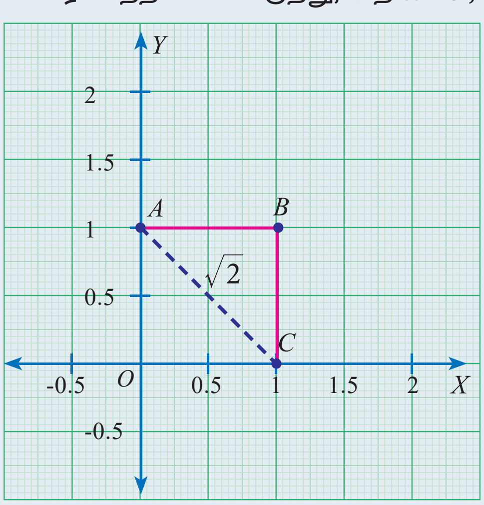
6. (i) இரு முறுடுகளின் கூட்டல் (ii) இரு முறுடுகளின் வேறுபாடு

   (iii) இரு முறுடுகளின் பெருக்கல் (iv) இரு முறுடுகளின் ஈவு

   ஆகிய நிகழ்வுகளில் உம்மால் ஒரு விகிதமுறு எண்ணைப் பெற இயலுமா? ஒவ்வொரு விடையையும் ஓர் எடுத்துக்காட்டுடன் விவரிக்க.

செயல்பாடு 2

வரைபடத்தாளை எடுத்து, அதில் O, A, B, C ஐப் பின்வருமாறு குறிக்க.



சதுரம் $OABC$ இல்,

$$OA = AB = BC = OC = 1 \text{ அலகு}$$

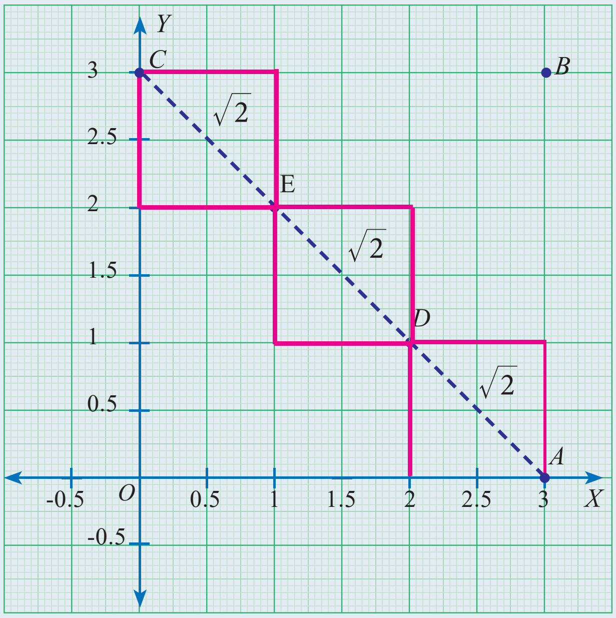
செங்கோண ΔOAC இல்,

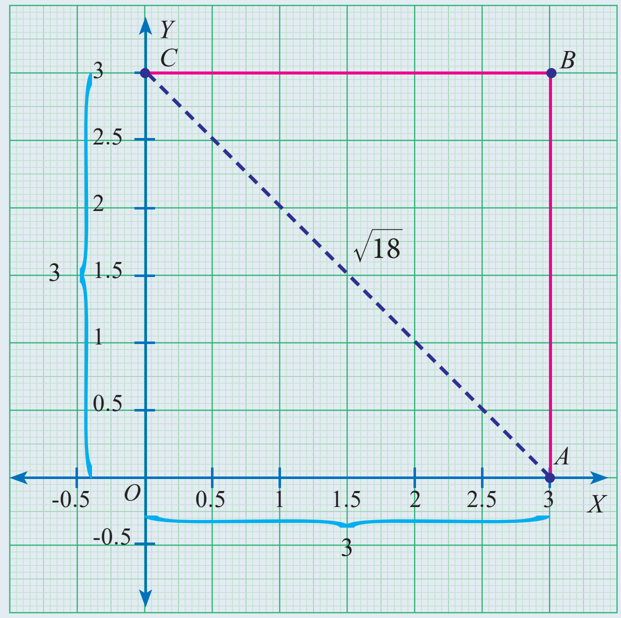
$$AC = \sqrt{1^2+1^2}$$

$$= \sqrt{2} \text{ அலகு [பிதாகரஸ் தேற்றப்படி]}$$

மூலைவிட்டத்தின் நீளம் $AC = \sqrt{2}$, ஒரு முறுடாகும்.

கீழ்க்காணும் வரைபடங்களைக் கருதுக.





மூலைவிட்டம் AC இன் நீளத்தை இரு வேறு வழிகளில் காணலாம்.

$AC = AD + DE + EC$

(ஓரலகு சதுரங்களின் மூலைவிட்டம்)

$= \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}$

$AC = 3\sqrt{2}$ அலகுகள்

$AC = \sqrt{OA^2 + OC^2} = \sqrt{3^2 + 3^2}$

$= \sqrt{9+9}$

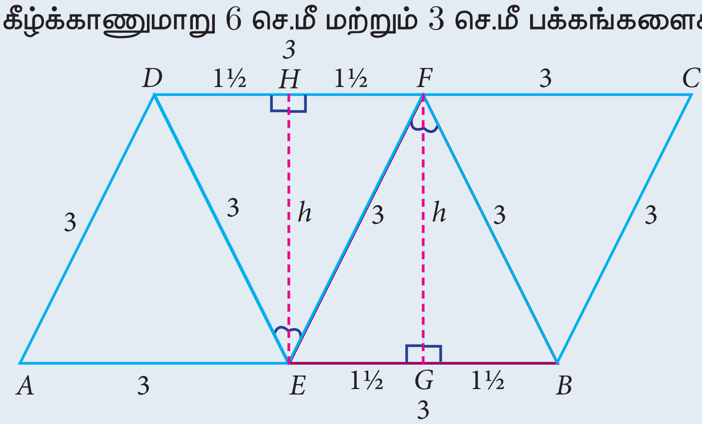
$AC = \sqrt{18}$ அலகுகள்

இவை சமமா? விவாதிக்க.

இதே செயலை வேறுபட்ட அளவுகள் கொண்ட வெவ்வேறு சதுரங்களை எடுத்துச் சரிபார்க்க.

செயல்பாடு-3

கீழ்க்காணுமாறு 6 செ.மீ மற்றும் 3 செ.மீ பக்கங்களைக் கொண்ட இணைகரத்தைக் கருதுக.



$A = \{$ இணைகரம் $ABCD$ இன் பரப்பளவு$\}$

$= \{$சமபக்க முக்கோணங்கள் AED, EDF, EFB, BFC ஆகியவற்றின் பரப்பளவுகளின் கூடுதல்$\}$

$A = 9\sqrt{3}$ செமீ^{2} (சரிபார்க்க.)

குறிப்பு :(i) இணைகரத்தின் பரப்பளவு $= A = b \times h$ ச. அலகுகள்,

$b = AE + EB = 3 + 3 = 6$ செமீ

$$h = FG = \sqrt{EF^2 - EG^2} = \sqrt{3^2 - \left(1\frac{1}{2}\right)^2} = 3\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ செமீ}$$

(ii) சமபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ச. அலகுகள், $a = 3$ செமீ

முக்கோணங்களின் எண்ணிக்கையைக் கூட்டி (அல்லது இணைகரத்தின் அளவை அதிகப்படுத்தி) மேற்கண்ட பண்புகளைச் சரிபார்க்க.

2.4 முறுடுகளை விகிதப்படுத்துதல்(Rationalisation of Surds)

கொடுக்கப்பட்ட ஓர் உறுப்பை விகிதமுறு எண்ணாக மாற்ற அதை எந்த உறுப்பால் பெருக்க அல்லது வகுக்க வேண்டுமோ, அந்த உறுப்பு கொடுக்கப்பட்ட உறுப்பின் "விகிதப்படுத்தும் காரணி" எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு:

(i) $\sqrt{3}$ இன் விகிதப்படுத்தும் காரணி $\sqrt{3}$ ($\because \sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$ ஒரு விகிதமுறு எண்)

(ii) $\sqrt[7]{5^4}$ இன் விகிதப்படுத்தும் காரணி $\sqrt[7]{5^3}$ (பெருக்கற்பலன் $=\sqrt[7]{5^7}=5$, ஒரு விகிதமுறு எண்)

சிந்தனைக் களம் :

1. மேலே கண்ட எடுத்துக்காட்டு (i) இல் $\sqrt{12}$ என்பதும் ஒரு விகிதப்படுத்தும் காரணியா? $\sqrt{3}$ இக்கு வேறு ஏதேனும் எண்கள் விகிதப்படுத்தும் காரணியாக இருக்க முடியுமா?
2. எடுத்துக்காட்டு (ii) $\sqrt[7]{5^3}$ இக்கு வேறு ஏதேனும் எண்கள் விகிதப்படுத்தும் காரணியாக இருக்க இயலுமா? முறுடைக் கொண்ட ஒரு விரிவாக்கத்திற்கு ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட விகிதப்படுத்தும் காரணிகள் இருக்கும்போது, அவற்றுள் மிகச் சிறியதை விகிதப்படுத்தும் காரணியாகக் கணக்கிடுவதற்கு நாம் எடுத்துக் கொண்டால் நமக்கு ஏதேனும் பயன் உண்டா?

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

கீழ்க்கண்ட ஒவ்வொன்றுக்கும் விகிதப்படுத்தும் காரணியைக் கண்டறிந்து அவற்றைச் சரிபார்க்க.

(i) $\sqrt{18}$ (ii) $5\sqrt{12}$ (iii) $\sqrt[3]{49}$ (iv) $\dfrac{1}{\sqrt{8}}$

2.4.1 இணை முறுடுகள்(Conjugate Surds)

$3+\sqrt{2}$ என்பதன் விகிதப்படுத்தும் காரணியை உம்மால் ஊகிக்க முடிகிறதா? இந்த முறுடானது ஒரு விகிதமுறு பகுதியையும், ஒரு மூலக்குறியீட்டுப் பகுதியையும் கொண்டுள்ளது. இந்த முறையிலான வடிவில் உள்ள எண்களுக்கு விகிதப்படுத்தும் காரணி ஓர் சிறப்பு மிக்க வடிவில் உள்ளது.

$3+\sqrt{2}$ இன் விகிதப்படுத்தும் காரணி $3-\sqrt{2}$. இதை மிகவும் எளிமையாகச் சரிபார்க்கலாம்.

$$\left(3+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)=3^2-\left(\sqrt{2}\right)^2$$
$$=9-2$$
$$=7 \text{ (ஒரு விகிதமுறு எண்)}$$

a, b என்பன விகிதமுறு எண்கள் எனில், $a+\sqrt{b}$ இன் விகிதப்படுத்தும் காரணி என்ன? $a-\sqrt{b}$ என்பது சரியா? சரிபார்க்க. a, b என்பன விகிதமுறு எண்கள் எனில், $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ என்பதன்

விகிதப்படுத்தும் காரணி எது? $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ என்பது சரியா அல்லது $-\sqrt{a}+\sqrt{b}$ என்பது சரியா? ஆராய்க.

$a+\sqrt{b}$ மற்றும் $a-\sqrt{b}$ என்ற வடிவத்தில் உள்ள முறுடுகள் **இணை முறுடுகள்** என அழைக்கப்படுகின்றன. $\sqrt{b}+a$ இன் இணை எது? $-\sqrt{b}+a$ என்பது சரியா? முறுடுக்கு முன்னால் உள்ள குறியை மாற்றுவதன் மூலம் அந்த எண்ணின் இணை முறுடைப் பெறலாம் என்பதை அறிய முடிகிறது !

எடுத்துக்காட்டு 2.13 பகுதியை விகிதப்படுத்துக. (i) $\dfrac{7}{\sqrt{14}}$ (ii) $\dfrac{5+\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}}$

தீர்வு:

(i) விகிதப்படுத்தும் காரணியான $\sqrt{14}$ ஆல் பகுதி மற்றும் தொகுதியைப் பெருக்குக.

$$\frac{7}{\sqrt{14}}=\frac{7}{\sqrt{14}}\times\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}}=\frac{7\sqrt{14}}{14}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

(ii)
$$\frac{5+\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}}=\frac{\left(5+\sqrt{3}\right)}{\left(5-\sqrt{3}\right)}\times\frac{\left(5+\sqrt{3}\right)}{\left(5+\sqrt{3}\right)}=\frac{\left(5+\sqrt{3}\right)^2}{5^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\frac{5^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+2\times5\times\sqrt{3}}{25-3}$$

$$=\frac{25+3+10\sqrt{3}}{22}=\frac{28+10\sqrt{3}}{22}=\frac{2\times[14+5\sqrt{3}]}{22}$$

$$=\frac{14+5\sqrt{3}}{11}$$

பயிற்சி 2.3

1. பகுதியை விகிதப்படுத்துக.

(i) $\dfrac{1}{\sqrt{50}}$ (ii) $\dfrac{5}{3\sqrt{5}}$ (iii) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{18}}$ (iv) $\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

2. பகுதியை விகிதப்படுத்திச் சுருக்குக.

(i) $\dfrac{\sqrt{48}+\sqrt{32}}{\sqrt{27}-\sqrt{18}}$ (ii) $\dfrac{5\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

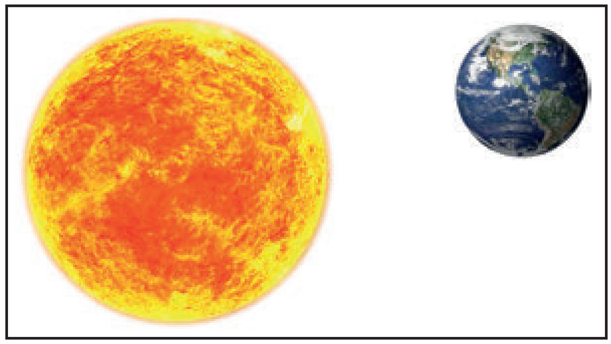
(iii) $\dfrac{2\sqrt{6}-\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{6}}$ (iv) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}+2}-\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}-2}$

3. $\dfrac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{7}+2} = a\sqrt{7}+b$ எனில், a மற்றும் b இன் மதிப்புகளைக் காண்க.

4. $x = \sqrt{5}+2$ எனில், $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ இன் மதிப்பு காண்க.

5. $\sqrt{2} = 1.414$ எனில், $\dfrac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$ இன் மதிப்பை 3 தசம இடத் திருத்தமாகக் காணவும்.

2.5 அறிவியல் குறியீட்டு வடிவம் (Scientific Notation)



கதிரவனின் விட்டம் $13,92,000$ கி.மீ மற்றும் பூமியின் விட்டம் $12,740$ கி.மீ இவற்றை ஒப்பிடச் சொன்னால், அது கடினமானதாகத் தோன்றும். மாறாக, $13,92,000$ என்பதை 1.392×10^6 எனவும் $12,740$ என்பதை 1.274×10^4, எனவும் கொடுத்தால் அது எளிமையாகத் தோன்றும். இந்த வகையிலான வடிவமைப்பு **அறிவியல் குறியீட்டு வடிவம்** எனப்படும்.

இங்கு $\dfrac{1.392\ \times10^6}{1.274\times10^4} \approx \dfrac{14}{13}\times10^2 \approx 108$

இதிலிருந்து, கதிரவனுக்குள் தோராயமாக 108 பூமியை வரிசையாக அடுக்கி வைக்க இயலும் என்பதைத் தற்போது உம்மால் கற்பனை செய்ய முடிகிறதா!

AJ1N8N

அறிவியல் குறியீட்டு வடிவம் என்பது மிகப்பெரிய அல்லது மிகச் சிறிய எண்களைத் தசமக் குறியீட்டு வடிவில் வடிவமைக்கும் ஒரு வழிமுறை ஆகும். இது எண்களை எளிமையாகப் பதிவு செய்யவும் பயன்படுத்தவும் அனுமதிக்கிறது.

2.5.1 அறிவியல் குறியீட்டு வடிவில் எண்களை எழுதுதல்(Writing a Number in Scientific Notation)

ஓர் எண்ணை அறிவியல் குறியீட்டு வடிவில் எழுதக் கீழ்க்காணும் வழிமுறைகள் பயனுள்ளதாக அமையும்.

(i) தசமப் புள்ளிக்கு இடப்பக்கம் ஒரேயொரு பூச்சியமற்ற எண் இருக்குமாறு, தசமப் புள்ளியை நகர்த்துக.

(ii) பழைய தசமப் புள்ளிக்கும் புதிய தசமப் புள்ளிக்கும் இடையில் உள்ள இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடுக. இதை 'n' என்க. இதை 10 இன் அடுக்கில் 10^n என எழுத வேண்டும்.

(iii) தசமப் புள்ளியானது இடப்பக்கம் நகர்த்தப்பட்டிருந்தால் அடுக்கு 'n' ஆனது மிகை எண் ஆகும். அது வலப்பக்கம் நகர்த்தப்பட்டிருந்தால் அடுக்கு 'n' ஆனது குறை எண் ஆகும்.

> N என்ற எண்ணை $N = a\times10^n$ என எழுதலாம். இங்கே, $1\le a<10$, 'n' ஒரு முழு) என்றவாறு குறித்தல் அறிவியல் குறியீட்டு வடிவம் எனப்படும்.

கீழே அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள 10 அடிமான எளிய எடுத்துக்காட்டுகள் மேற்கண்ட விளக்கத்தைத் தெளிவுபடுத்தும்.

தசமப் புள்ளி வடிவம்	அறிவியல் குறியீட்டு வடிவம்	தசமப் புள்ளி வடிவம்	அறிவியல் குறியீட்டு வடிவம்
100	1×10^{2}	0.01	1×10^{-2}
1,000	1×10^{3}	0.001	1×10^{-3}
10,000	1×10^{4}	0.0001	1×10^{-4}
1,00,000	1×10^{5}	0.00001	1×10^{-5}
10,00,000	1×10^{6}	0.000001	1×10^{-6}
1,00,00,000	1×10^{7}	0.0000001	1×10^{-7}

மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகளைக் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.14 அறிவியல் குறியீட்டு வடிவில் எழுதுக.

(i) 9768854 (ii) 0.04567891 (iii) 72006865.48

தீர்வு:

(i) $9\ 7\ 6\ 8\ 8\ 5\ 4\ .\ 0 = 9.768854 \times 10^{6}$

6 5 4 3 2 1

தசமப் புள்ளியானது 6 இடங்கள் இடப்பக்கமாக நகர்த்தப்பட்டுள்ளது. எனவே, $n = 6$.

(ii) $0\ .\ 0\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 1 = 4.567891 \times 10^{-2}$

1 2

தசமப் புள்ளியானது இரண்டு இடங்கள் வலப்பக்கமாக நகர்த்தப்பட்டுள்ளது. எனவே, $n = -2$.

(iii) $7\ 2\ 0\ 0\ 6\ 8\ 6\ 5\ .\ 4\ 8 = 7.200686548 \times 10^{7}$

7 6 5 4 3 2 1

தசமப் புள்ளியானது 7 இடங்கள் இடப்பக்கமாக நகர்த்தப்பட்டுள்ளது. எனவே, $n = 7$.

2.5.2 அறிவியல் குறியீட்டு வடிவத்தைத் தசம வடிவிற்கு மாற்றுதல் (Converting Scientific Notation to Decimal Form)

அறிவியல் குறியீட்டு வடிவில் உள்ள ஓர் எண்ணை பின் வரும் வழிமுறைகளைப் பின்பற்றி எளிமையாகத் தசம வடிவிற்கு மாற்றலாம்.

(i) தசம எண்ணை எழுதுக.

(ii) 10 இன் அடுக்கில் உள்ள எண் மிகை எண் எனில் வலப்பக்கமாகவும், குறை எண் எனில் இடப்பக்கமாகவும், அடுக்கில் உள்ள எண்ணிற்குச் சமமாகத் தசமப் புள்ளியை நகர்த்துக. தேவைப்படும் இடத்தில் பூச்சியத்தைச் சேர்த்துக் கொள்க.

(iii) அந்த எண்ணைத் தசம வடிவில் மீண்டும் எழுதுக.

எடுத்துக்காட்டு 2.15 கீழ்க்காணும் எண்களைத் தசம வடிவில் எழுதுக.

(i) 6.34×10^4 (ii) 2.00367×10^{-5}

தீர்வு:

(i) 6.34×10^4

$$\Rightarrow 6\,.\,3\;\;4\;\;0\;\;0 = 63400$$

1 2 3 4

(ii) 2.00367×10^{-5}

$$0\;\;0\;\;0\;\;0\;\;0\;\;2\;.00367$$

5 4 3 2 1

$= 0.0000200367$

2.5.3 அறிவியல் குறியீட்டு வடிவில் உள்ள எண்களின் கணக்கீடுகள் (Arithmetic of Numbers in Scientific Notation)

(i) அறிவியல் குறியீட்டு வடிவில் உள்ள எண்களின் அடுக்குகள் சமமாக இருந்தால், அவற்றின் கூட்டல் (அல்லது கழித்தல்) செயலை எளிமையாகச் செய்து விடலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.16 பூமியின் நிறை 5.97×10^{24} கி.கி., நிலாவின் நிறை 0.073×10^{24} கி.கி. இவற்றின் மொத்த நிறை என்ன?

தீர்வு:

மொத்த நிறை $= 5.97 \times 10^{24}$ கி.கி. $+$ 0.073×10^{24} கி.கி.

$= (5.97 + 0.073) \times 10^{24}$ கி.கி.

$= 6.043 \times 10^{24}$ கி.கி.

(ii) மூலக்குறியீட்டு விதிகளைச் சரியாகப் பயன்படுத்தி, அறிவியல் குறியீட்டு வடிவில் உள்ள எண்களின் பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தலை எளிமையாகச் செய்து முடிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.17 கீழ்க்காண்பவற்றை அறிவியல் குறியீட்டு வடிவில் எழுதுக.

(i) $(50000000)^4$ **(ii)** $(0.00000005)^3$ **(iii)** $(300000)^3 \times (2000)^4$ **(iv)** $(4000000)^3 \div (0.00002)^4$

தீர்வு

(i)
$$\begin{aligned}(50000000)^4 &= \left(5.0\times10^7\right)^4\\ &= (5.0)^4\times\left(10^7\right)^4\\ &= 625.0\times10^{28}\\ &= 6.25\times10^2\times10^{28}\\ &= 6.25\times10^{30}\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}(0.00000005)^3 &= \left(5.0\times10^{-8}\right)^3\\ &= (5.0)^3\times\left(10^{-8}\right)^3\\ &= (125.0)\times(10)^{-24}\\ &= 1.25\times10^2\times10^{-24}\\ &= 1.25\times10^{-22}\end{aligned}$$

(iii) $(300000)^3\times(2000)^4$
$$\begin{aligned}&= \left(3.0\times10^5\right)^3\times\left(2.0\times10^3\right)^4\\ &= (3.0)^3\times\left(10^5\right)^3\times(2.0)^4\times\left(10^3\right)^4\\ &= (27.0)\times\left(10^{15}\right)\times(16.0)\times\left(10^{12}\right)\\ &= \left(2.7\times10^1\right)\times\left(10^{15}\right)\times\left(1.6\times10^1\right)\times\left(10^{12}\right)\\ &= 2.7\times1.6\times10^1\times10^{15}\times10^1\times10^{12}\\ &= 4.32\times10^{1+15+1+12} = 4.32\times10^{29}\end{aligned}$$

(iv) $(4000000)^3\div(0.00002)^4$
$$\begin{aligned}&= \left(4.0\times10^6\right)^3\div\left(2.0\times10^{-5}\right)^4\\ &= (4.0)^3\times\left(10^6\right)^3\div(2.0)^4\times\left(10^{-5}\right)^4\\ &= \frac{64.0\times10^{18}}{16.0\times10^{-20}}\\ &= 4\times10^{18}\times10^{+20}\\ &= 4.0\times10^{38}\end{aligned}$$

சிந்தனைக் களம்:

1. 2.83104 என்ற எண்ணை, இரு எண்களின் பெருக்கற் பலனாக அறிவியல் குறியீட்டு வடிவில் எழுதுக.
2. 2.83104 என்ற எண் ஈவாகக் கிடைக்குமாறு இரு எண்களை அறிவியல் குறியீட்டு வடிவில் எழுதுக.

பயிற்சி 2.4

1. கீழ்க்காணும் எண்களை அறிவியல் குறியீட்டு வடிவில் எழுதுக.

   (i) 569430000000 (ii) 2000.57 (iii) 0.0000006000 (iv) 0.0009000002

2. கீழ்க்காணும் எண்களைத் தசம வடிவில் எழுதுக.

   (i) 3.459×10^6 (ii) 5.678×10^4

   (iii) 1.00005×10^{-5} (iv) 2.530009×10^{-7}

3. கீழ்க்காண்பவற்றைச் சுருக்கி அறிவியல் குறியீட்டு வடிவில் எழுதுக.

(i) $\left(300000\right)^{2} \times \left(20000\right)^{4}$ (ii) $\left(0.000001\right)^{11} \div \left(0.005\right)^{3}$

(iii) $\left\{\left(0.00003\right)^{6} \times \left(0.00005\right)^{4}\right\} \div \left\{\left(0.009\right)^{3} \times \left(0.05\right)^{2}\right\}$

4. கீழ்க்காணும் தகவலை அறிவியல் குறியீட்டு வடிவில் எழுதுக.

(i) உலக மக்கள் தொகை சுமார் 7000,000,000.

(ii) ஓர் ஒளி ஆண்டு என்பது 9460528400000000 கி.மீ. தூரத்தைக் குறிக்கிறது.

(iii) ஓர் எலக்ட்ரானின் நிறை 0.000000000000000000000000000000091093822 கி.கி

5. சுருக்குக: (i) $(2.75 \times 10^{7}) + (1.23 \times 10^{8})$ (ii) $(1.598 \times 10^{17}) - (4.58 \times 10^{15})$

(iii) $(1.02 \times 10^{10}) \times (1.20 \times 10^{-3})$ (iv) $(8.41 \times 10^{4}) \div (4.3 \times 10^{5})$

செயல்பாடு - 4

கதிரவனிலிருந்து கோள்களுக்கு உள்ள சராசரி தொலைவு பின்வருமாறு பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. விடுபட்ட மதிப்புகளை உரிய வடிவில் எழுதுக. மேலும், கோள்களுக்கு உள்ள தொலைவின் அளவுகளைக் கதிரவனுக்கு அருகிலிருந்து வரிசைப்படுத்துக.

கோள்	தசம வடிவம்(கிமீ)	அறிவியல் குறியீட்டு வடிவம் (கிமீ)
வியாழன்		7.78×10^{8}
செவ்வாய்	58000000	
புதன்		2.28×10^{8}
யுரேனஸ்	2870000000	
வெள்ளி	108000000	
நெப்டியூன்	4500000000	
பூமி		1.5×10^{8}
சனி		1.43×10^{8}

பயிற்சி 2.5

AJAJAB

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. கீழ்க்காணும் கூற்றுகளில் எது தவறு?

(1) 25 இன் வர்க்கமூலம் 5 அல்லது -5 (3) $\sqrt{25} = 5$

(2) $-\sqrt{25} = -5$ (4) $\sqrt{25} = \pm 5$

2. கீழ்க்காண்பவற்றுள் எது விகிதமுறு எண் அல்ல?

(1) $\sqrt{\dfrac{8}{18}}$ (2) $\dfrac{7}{3}$ (3) $\sqrt{0.01}$ (4) $\sqrt{13}$

3. $\sqrt{640}$ இன் எளிய வடிவம்

(1) $8\sqrt{10}$ (2) $10\sqrt{8}$ (3) $2\sqrt{20}$ (4) $4\sqrt{5}$

4. $\sqrt{27} + \sqrt{12} =$

(1) $\sqrt{39}$ (2) $5\sqrt{6}$ (3) $5\sqrt{3}$ (4) $3\sqrt{5}$

5. $\sqrt{80} = k\sqrt{5}$, எனில் $k=?$

(1) 2 (2) 4 (3) 8 (4) 16

6. $4\sqrt{7} \times 2\sqrt{3} = =$

(1) $6\sqrt{10}$ (2) $8\sqrt{21}$ (3) $8\sqrt{10}$ (4) $6\sqrt{21}$

7. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$ இன் பகுதியை விகிதமுறு எண்ணாக மாற்றிய பின் சுருங்கிய வடிவம்

(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ (2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ (4) $\dfrac{2}{3}$

8. $\left(2\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2$ இன் சுருங்கிய வடிவம்

(1) $4\sqrt{5}+2\sqrt{2}$ (2) $22-4\sqrt{10}$ (3) $8-4\sqrt{10}$ (4) $2\sqrt{10}-2$

9. $\dfrac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{2}}$ இக்கு சமமானது

(1) 3 (2) $\sqrt[3]{9}$ (3) 9 (4) $\sqrt[3]{3}$

10. $\left(0.000729\right)^{\frac{-3}{4}} \times \left(0.09\right)^{\frac{-3}{4}}$ = ______

(1) $\dfrac{10^3}{3^3}$ (2) $\dfrac{10^5}{3^5}$ (3) $\dfrac{10^2}{3^2}$ (4) $\dfrac{10^6}{3^6}$

11. If $\sqrt{9^x} = \sqrt[3]{9^2}$, எனில், $x =$ ______

(1) $\dfrac{2}{3}$ (2) $\dfrac{4}{3}$ (3) $\dfrac{1}{3}$ (4) $\dfrac{5}{3}$

12. அறிவியல் குறியீட்டு வடிவ எண்ணிற்கு மிகச் சரியான எடுத்துக்காட்டு எது?

(1) 0.5×10^5 (2) 0.1254 (3) 5.367×10^{-3} (4) 12.5×10^2

13. 5.92×10^{-3} இன் தசம வடிவம் எது?

(1) 0.000592 (2) 0.00592 (3) 0.0592 (4) 0.592

14. ஒரு செவ்வக வடிவ வீட்டு மனையின் நீளம் மற்றும் அகலங்கள் முறையே 5×10^5 மற்றும் 4×10^4 மீட்டர் எனில், அதன் பரப்பளவு என்ன?

(1) 9×10^1 மீ^{2} (2) 9×10^9 மீ^{2} (3) 2×10^{10} மீ^{2} (4) 20×10^{20} மீ^{2}

நினைவு கூர்வதற்கான கருத்துகள்

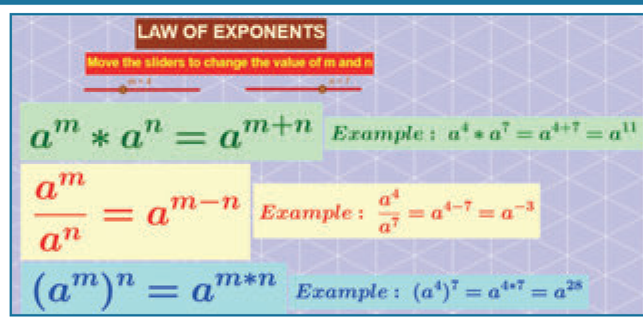
- 'a' என்பது மிகை விகிதமுறு எண், 'n' ஒரு மிகை முழு மற்றும் $\sqrt[n]{a}$ ஒரு விகிதமுறா எண் எனில், $\sqrt[n]{a}$ என்பது ஒரு முறுடு எனப்படும்.
- 'm', 'n' என்பன மிகை முழுக்கள், a, b என்பன மிகை விகிதமுறு எண்கள் எனில்,

$$\text{(i)}\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a = \sqrt[n]{a^n} \quad \text{(ii)}\ \sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad \text{(iii)}\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} \quad \text{(iv)}\ \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

- ஒரு முறுடை மற்றொரு முறுடால் பெருக்கி விகிதமுறு எண்ணைப் பெறும் செயல்முறை விகிதப்படுத்துதல் எனப்படும்.
- N என்ற எண்ணை $N = a\times 10^n$ என எழுதலாம். இங்கே, $1 \le a < 10$, 'n' ஒரு முழு) என்றவாறு குறித்தல் அறிவியல் குறியீட்டு வடிவம் எனப்படும்.

இணையச் செயல்பாடு

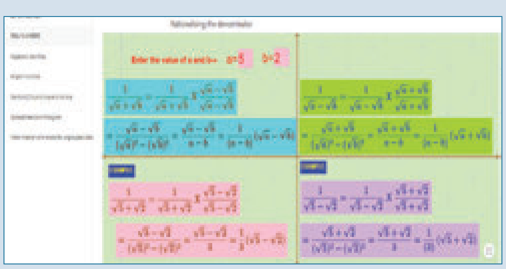
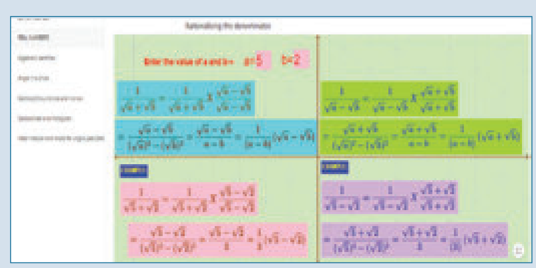
செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப்பெறுவது



படி – 1: கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra வின் "Real Numbers" என்னும் பணித்தாளின் பக்கத்திற்குச் செல்க. இப்பணித்தாளில் 1. Rationalising the denominator for surds 2. Law of exponents ஆகிய இரண்டு செயல்பாடுகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

முதல் செயல்பாட்டில், காரணிப்படுத்துவதற்கான வகுத்திகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். மேலும் எடுத்துக்காட்டுகளும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் கட்டங்களில் a மற்றும் b இன் மதிப்புகளை உள்ளீடு செய்தோ மதிப்புகளை மாற்றியோ காரணிகளின் மதிப்புகளை அறிக.

படி - 2 : இரண்டாம் செயல்பாட்டில் அடுக்கு விதி கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். மேலும் வலப்பக்கத்தில் எடுத்துக்காட்டுகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். மதிப்புகளை மாற்றுவதற்கு m மற்றும் n நழுவல்களை நகர்த்தி, விடைகளைச் சரிபார்க்கவும்

படி 1	படி 2
	

செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

Real Numbers: https://ggbm.at/BYEWDpHU or Scan the QR Code.

B463_MAT_9_T2_TM

3 இயற்கணிதம்

"இயற்கணிதம் ஓர் அமுதசுரபி. கேட்பதை விட மிகுதியாகக் கொடுத்துக் கொண்டே இருக்கும்". – டி'ஆலம்பர்ட்

AJJFBY

பாலோ ரஃபின்
(1765கி.பி.(பொ.ஆ)–1822கி.பி.(பொ.ஆ))

பாலோ ரஃபின் ஓர் இத்தாலியக் கணிதமேதை ஆவார். 1781 ஆம் ஆண்டிற்குள் தத்துவம், மருத்துவம், அறுவை சிகிச்சை மற்றும் கணிதத் துறையில் பல்கலைக்கழகப் பட்டம் பெற்றார். பல்லுறுப்புக் கோவையை நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவையால் கெழுக்களைப் பயன்படுத்தி வகுக்கும் சிறப்பான ஒரு முறையினை இவர் 1809 ஆம் ஆண்டில் அறிமுகப்படுத்தினார். அம்முறை தொகுமுறை வகுத்தல் (Synthetic Division) எனப்படும். கொடுக்கப்பட்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் சமன்பாட்டிற்கு உள்ள தீர்வுகளின் எண்ணிக்கையை "n படிகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டிற்கு n தீர்வுகள் உண்டு" என்ற கணிதத்தின் சிறப்பு மிக்க முடிவுகளை இயற்கணித அடிப்படை தேற்றத்தைக் கொண்டு இவர் கண்டறிந்தார்.

கற்றல் விளைவுகள்

- காரணித் தேற்றத்தைப் புரிந்து கொண்டு பயன்படுத்துதல்.
- இயற்கணித முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்திக் காரணிப்படுத்துதல்.
- பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துதல்.
- மீப்பெரு பொது வகுத்தி காணுதல்.
- $ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ என்ற வடிவில் உள்ள இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காரணிப்படுத்துதல்.
- முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காரணிப்படுத்துதல்.
- தொகுமுறை வகுத்தல் முறையில் ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையைக் காரணிப்படுத்துதல்.

3.1 அறிமுகம்

நாம் முதல் பருவத்தில் பல்லுறுப்புக் கோவைகள், படி மற்றும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைப் பொறுத்து அவற்றின் வகைகள், பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூச்சியங்கள், அடிப்படைச் செயல்கள், மீதித்தேற்றம் மற்றும் அதன் பயன்பாடுகள் ஆகியவற்றைக் கற்றோம்.

பல்லுறுப்புக் கோவைகள் (Polynomial)

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை என்பது மாறிகள் மற்றும் மாறிலிகளைக் கொண்டு நான்கு அடிப்படைச் செயல்களால் இணைக்கப்பட்ட தொகுப்பு ஆகும். இங்கு மாறிகளின் அடுக்குகள் குறையற்ற முழுக்கள் ஆகும்.

பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வகைப்பாடு (Classification of polynomial)

உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைப் பொறுத்து		
உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	**பெயர்**	**எடுத்துக்காட்டு**
ஓர் உறுப்பு	ஒருறுப்புக் கோவை	$5, -5x, 7x^2$
இரண்டு உறுப்புகள்	ஈருறுப்புக் கோவை	$(x+5), x^2 - 75$
மூன்று உறுப்புகள்	மூவுறுப்புக் கோவை	$(a+b+c), a^3+b^2+c^5$
நான்கு உறுப்புகள்	நான்குறுப்புக் கோவை	$x^6 + y^4 + 2+m^3$

படியைப் பொறுத்து		
பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி	**பெயர்**	**எடுத்துக்காட்டு**
பூச்சியம்	மாறிலிப் பல்லுறுப்புக் கோவை	$5, -7, -5, 25$
ஒன்று	நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவை	$x+5, y-5, 7x, -25x$
இரண்டு	இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை	$x^2 - 5x, x^2+5x+6$
மூன்று	முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை	$x^3+x+7, 7x^3-5x^2+3x+4$

பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியம் (அல்லது) மூலம்

$p(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் மீதி $p(a)=0$ எனில், 'a' என்பது $p(x)$ இன் பூச்சியம் அல்லது பல்லுறுப்புக் கோவை சமன்பாடு $p(x)=0$ என்பதன் மூலம் ஆகும்.

குறிப்பு

ஒரு மாறிலிக் கோவையின் படி $=0$ ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக,
$5 = 5\times 1 = 5\times x^0 = 5x^0$

சிந்தனைக் களம்

கீழ்க்காண்பவை பல்லுறுப்புக் கோவையா? உமது விடைக்கான காரணம் கூறுக.

(1) $2x^2 + \dfrac{5x}{1+x}$ (2) $5x^{-3} + 2x^2 - x - 9$ (3) $4x + 3\sqrt{x} - 1$

மீதித் தேற்றம் (Remainder Theorem)

$p(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை $(x-a)$ ஆல் வகுக்க மீதி $p(a)$ ஆகும்.

$(x^2 - 6x + 8)$ ஐ $(x-3)$ ஆல் வகுக்க,
மீதித் தேற்றத்தின்படி, மீதி $p(3)$

$$p(3) = 3^2 - 6(3) + 8$$
$$= 9 - 18 + 8$$
$$= -1$$
$$p(3) \neq 0$$

எனவே, $(x-3)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணியல்ல.

$x-3$ இன் பூச்சியம் காண,
$x - 3 = 0$
எனப் பிரதியிட,
$x = 3$
எனக் கிடைக்கும்.

மேலே உள்ள பல்லுறுப்புக் கோவையை $(x-4)$ ஆல் வகுக்க, மீதித் தேற்றத்தின்படி, மீதி $p(4)$; $p(4) = 4^2 - 6(4) + 8$

$$= 16 - 24 + 8$$

$$p(4) = 0$$

ஆகவே, $(x-4)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணியாகும்.

$x-4$ இன் பூச்சியம் காண,

$x - 4 = 0$

எனக் கொண்டால்

$x = 4$

இதன்படி, $p(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை $(x-a)$ ஆல் வகுக்க மீதி $p(a) = 0$ எனில், $(x-a)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணியாகும். மீதித் தேற்றம் காரணித் தேற்றத்திற்கு முன்னெடுத்துச் செல்கிறது.

காரணித் தேற்றத்தின் முக்கியத்துவம்

நெடிய மற்றும் நீள்வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தாமலேயே ஒரு நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவையானது, கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவையின் காரணியா இல்லையா எனக் கண்டறிய இயலும்.

3.2 காரணித் தேற்றம் (Factor Theorem)

$p(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி $n \geq 1$ மற்றும் 'a' என்பது ஒரு மெய்யெண் எனில்,

(i) $p(a) = 0$ ஆக உள்ளபோது, $(x-a)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி ஆகும்.

(ii) $(x-a)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி எனில், $p(a) = 0$ ஆகும்.

நிரூபணம்

$p(x)$ என்பது வகுபடும் கோவை மற்றும் $(x-a)$ வகுக்கும் கோவை.

பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வகுத்தல் விதியின் படி (division algorithm) $p(x) = (x-a)\,q(x) + p(a)$ இதில், $q(x)$ என்பது ஈவு மற்றும் மீதி $p(a)$ ஆகும்.

(i) $p(a) = 0$ எனில், $p(x) = (x-a)\,q(x)$ ஆகும். மேலும், $(x-a)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி.

(ii) $(x-a)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணியானதால்,

$$p(x) = (x-a)g(x)$$

இவ்வாறு,

$$p(a) = (a-a)\,g(a)$$
$$= 0 \times g(a)$$
$$= 0$$

சிந்தனைக் களம்

$a(a \neq 0), b$ என்பன எவையேனும் இரு முழுக்கள் என்க. a என்பது b இன் வகுத்தி எனில், $b = ax$ இங்கு x என்பது ஒரு முழுக்கள் (Integer) ஆகும்

$(x-a)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி எனில், $p(a) = 0$ ஆகும்.

குறிப்பு

- $p(a)=0$ எனில், $(x-a)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி. (ஏனெனில் $x-a=0,\ x=a$)
- $p(-a)=0$ எனில், $(x+a)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி. (ஏனெனில் $x+a=0,\ x=-a$)
- $p\left(-\frac{b}{a}\right)=0$ எனில், $(ax+b)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி.
  (ஏனெனில் $ax+b=0, ax=-b, x=-\frac{b}{a}$)
- $p\left(\frac{b}{a}\right)=0$ எனில், $(ax-b)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி.
  (ஏனெனில் $ax-b=0, ax=b, x=\frac{b}{a}$)
- $p(a)=0$ மற்றும் $p(b)=0$ எனில், $(x-a)\ (x-b)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி.
  (ஏனெனில் $x-a=0$ or $x-b=0$; $x=a$ or $x=b$)

எடுத்துக்காட்டு 3.1

$(x+2)$ என்பது $x^3-4x^2-2x+20$ இன் ஒரு காரணி எனக் காட்டுக.

தீர்வு

$p(x)=x^3-4x^2-2x+20$ என்க.

காரணித் தேற்றத்தின்படி, $(x+2)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி எனில், மீதி $p(-2)=0$

$(x+2)$ இன் பூச்சியம் காண,
$x+2=0$
$x=-2$

$$p(-2)=(-2)^3-4(-2)^2-2(-2)+20$$
$$=-8-4(4)+4+20$$
$$p(-2)=0$$

எனவே, $(x+2)$ என்பது $x^3-4x^2-2x+20$ இன் ஒரு காரணியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.2

$(3x-2)$ என்பது $3x^3+x^2-20x+12$ இன் ஒரு காரணியா?

தீர்வு

$p(x)=3x^3+x^2-20x+12$ என்க.

காரணித் தேற்றத்தின்படி, $(3x-2)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி எனில், மீதி $p\left(\frac{2}{3}\right)=0$ ஆகும்.

$3x-2$ இன் பூச்சியம் காண,
$3x-2=0$
$3x=2$
$x=\frac{2}{3}$

$$p\left(\frac{2}{3}\right)=3\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^2-20\left(\frac{2}{3}\right)+12$$

$$= 3\left(\frac{8}{27}\right)+\left(\frac{4}{9}\right)-20\left(\frac{2}{3}\right)+12$$

$$= \frac{8}{9}+\frac{4}{9}-\frac{120}{9}+\frac{108}{9}$$

$$= \frac{(120-120)}{9}$$

$$p\left(\frac{2}{3}\right)=0$$

ஆகவே, $(3x-2)$ என்பது $3x^3+x^2-20x+12$ இன் ஒரு காரணியாகும்.

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

- $p(\_\_\_\_\_\_) = 0$ எனில், $(x+3)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி.
- $p(\_\_\_\_\_\_) = 0$ எனில், $(3-x)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி.
- $p(\_\_\_\_\_\_) = 0$ எனில், $(y-3)$ என்பது $p(y)$ இன் ஒரு காரணி.
- $p(\_\_\_\_\_\_) = 0$ எனில், $(-x-b)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி.
- $p(\_\_\_\_\_\_) = 0$ எனில், $(-x+b)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி.

எடுத்துக்காட்டு 3.3 $2x^3-6x^2+mx+4$ இன் ஒரு காரணி $(x-2)$ எனில், m இன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

$p(x)=2x^3-6x^2+mx+4$ என்க.

காரணித் தேற்றத்தின் படி, மீதி $p(2)=0$ எனில், $(x-2)$ ஒரு காரணியாகும்.

$$\begin{aligned} p(2) &= 0 \\ 2(2)^3-6(2)^2+m(2)+4 &= 0 \\ 2(8)-6(4)+2m+4 &= 0 \\ -4+2m &= 0 \\ m &= 2 \end{aligned}$$

$x-2$ இன் பூச்சியம் காண,

$$x-2=0$$
$$x=2$$

பயிற்சி 3.1

1. கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கு $(x-1)$ என்பது காரணியா எனக் காண்க.
   $i)\ x^3+5x^2-10x+4$ $\qquad ii)\ x^4+5x^2-5x+1$
2. $2x^4+x^3+4x^2-x-7$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு $(x+2)$ என்பது ஒரு காரணியாகுமா?
3. காரணித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $2x^3-5x^2-28x+15$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு $(x-5)$ என்பது ஒரு காரணி எனக்காட்டுக.
4. $x^3-3x^2-mx+24$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு $(x+3)$ என்பது ஒரு காரணி எனில், m இன் மதிப்பைக் காண்க.

5. ax^2+5x+b என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு $(x-2)$ மற்றும் $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ ஆகியவை காரணிகள் எனில், $a=b$ எனக்காட்டுக.

6. $p(x)=2x^3-9x^2+x+12$ என்ற கோவைக்கு $(2x-3)$ என்பது ஒரு காரணியா?

7. $(x-1)$ என்பது $kx^3-2x^2+25x-26$ மீதியின்றி வகுக்குமெனில் (வகுத்தி) k இன் மதிப்பைக் காண்க.

8. x^2-2x-8 என்பது ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்பு எனில், $(x+2)$ மற்றும் $(x-4)$ என்பன அவற்றின் பக்கங்களா என்பதைக் காரணித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திச் சரிபார்க்க.

3.3 இயற்கணித முற்றொருமைகள்

ஒரு சமன்பாடு, அதிலுள்ள மாறிகளின் எம்மதிப்புக்கும் பொருந்துமாறு இருக்குமானால் அச்சமன்பாடு ஒரு முற்றொருமை எனப்படும்.

பின்வரும் முற்றொருமைகளை நாம் முன்பே கற்றிருக்கின்றோம்.

(1) $(a+b)^2 \equiv a^2+2ab+b^2$ (2) $(a-b)^2 \equiv a^2-2ab+b^2$

(3) $(a+b)(a-b) \equiv a^2-b^2$ (4) $(x+a)(x+b) \equiv x^2+(a+b)x+ab$

குறிப்பு

(i) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ (ii) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

(iii) $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2$ (iv) $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+2$

எடுத்துக்காட்டு 3.4 பின்வருவனவற்றை முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி விரித்தெழுதுக.

(i) $(3x+4y)^2$ (ii) $(2a-3b)^2$ (iii) $(5x+4y)(5x-4y)$ (iv) $(m+5)(m-8)$

தீர்வு

(i) $(3x+4y)^2$ [ஏனெனில், $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$]

$(3x+4y)^2=(3x)^2+2(3x)(4y)+(4y)^2$ [$a=3x,\ b=4y$ எனப் பிரதியிட]

$=9x^2+24xy+16y^2$

(ii) $(2a-3b)^2$ [ஏனெனில், $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$]

$(2a-3b)^2=(2a)^2-2(2a)(3b)+(3b)^2$ [$x=2a,\ y=3b$ எனப் பிரதியிட]

$=4a^2-12ab+9b^2$

(iii) $(5x+4y)(5x-4y)$ [ஏனெனில், $(a+b)(a-b) \; = a^2-b^2$]

$$(5x+4y)(5x-4y) = (5x)^2-(4y)^2 \qquad [a=5x \quad b=4y \text{ எனப் பிரதியிட}]$$
$$= 25x^2-16y^2$$

(iv) $(m+5)(m-8)$ [ஏனெனில், $(x+a)(x-b) = x^2+(a-b)x-ab$]

$$(m+5)(m-8) = m^2+(5-8)m-(5)(8)$$
$$= m^2-3m-40 \qquad [x=m,\ a=5,\ b=8 \text{ எனப் பிரதியிட}]$$

3.3.1 $(a+b+c)^2$ என்ற மூவுறுப்புக் கோவையின் விரிவாக்கம் (Expansion of Trinomial)

$\left(x+y\right)^2 = x^2+2xy+y^2$ நாம் அறிந்ததே.

$x=a+b,\ y=c$ எனப் பிரதியிட,

எனவே, $$(a+b+c)^2 = (a+b)^2+2(a+b)(c)+c^2$$
$$= a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$$
$$= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

எனவே,
$(a+b+c)^2 \equiv a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$(a+b+c)^2$

	a	b	c
a	a^2	ab	ca
b	ab	b^2	bc
c	ca	bc	c^2

எடுத்துக்காட்டு 3.5 $(a-b+c)^2$ இன் விரிவு காண்க.

தீர்வு

$(a+b+c)^2$ இன் விரிவில் 'b' ஐ '$-b$' எனப் பிரதியிட,

முற்றொருமை $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ இன் படி,

$$(a+(-b)+c)^2 = a^2+(-b)^2+c^2+2a(-b)+2(-b)c+2ca$$
$$= a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$$

எடுத்துக்காட்டு 3.6 $(2x+3y+4z)^2$ இன் விரிவு காண்க.

தீர்வு

முற்றொருமையின்படி,

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

$a=2x, b=3y$ மற்றும் $c=4z$ எனப் பிரதியிட,

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

பின்வரும் முற்றொருமைகளை விரிவுபடுத்திச் சரிபார்க்க.

$$(a+b+c)^2 = (-a-b-c)^2$$
$$(-a+b+c)^2 = (a-b-c)^2$$
$$(a-b+c)^2 = (-a+b-c)^2$$
$$(a+b-c)^2 = (-a-b+c)^2$$

$$(2x+3y+4z)^2 = (2x)^2+(3y)^2+(4z)^2+2(2x)(3y)+2(3y)(4z)+2(4z)(2x)$$
$$= 4x^2+9y^2+16z^2+12xy+24yz+16xz$$

எடுத்துக்காட்டு 3.7 $3m+2n-4l$ பக்க அளவு கொண்ட சதுரத்தின் பரப்பளவு காண்க.

தீர்வு

$a=3m$,
$b=2n$
$c=4l$
எனப்
பிரதியிட,

சதுரத்தின் பரப்பளவு $=$ பக்கம் $\times$ பக்கம்

$$= (3m+2n-4l)\times(3m+2n-4l)$$
$$= (3m+2n-4l)^2$$

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ என்பது நாம் அறிந்ததே.

$$\left[3m+2n+(-4l)\right]^2 = (3m)^2+(2n)^2+(-4l)^2+2(3m)(2n)+2(2n)(-4l)+2(-4l)(3m)$$
$$= 9m^2+4n^2+16l^2+12mn-16ln-24lm$$

எனவே, சதுரத்தின் பரப்பளவு

$= [9m^2+4n^2+16l^2+12mn-16ln-24lm]$ சதுர அலகுகள்

3.3.2 மூன்று ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கற்பலனை உள்ளடக்கிய முற்றொருமைகள் (Identities involving Product of Three Binomials)

$$(x+a)(x+b)(x+c) = [(x+a)\ (x+b)]\ (x+c)$$
$$= [x^2+(a+b)x+ab](x+c)$$
$$= x^2(x)+(a+b)(x)(x)+abx+x^2c+(a+b)(x)c+abc$$
$$= x^3+ax^2+bx^2+abx+cx^2+acx+bcx+abc$$
$$= x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$$

எனவே,

$$\boxed{(x+a)(x+b)(x+c) \equiv x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.8 கீழ்க்காண்பவற்றை விரித்தெழுதுக.

(i) $(x+5)(x+6)(x+4)$

(ii) $(b+3)(b+4)(b-5)$

(iii) $(2a+3)(2a+4)(2a+5)$

(iv) $(3x-1)(3x+2)(3x-4)$

தீர்வு

முற்றொருமை $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc\ \ldots\ (1)$

(i) $(x+5)(x+6)(x+4)$

$a=5$
$b=6$
$c=4$
என (1)ல் பிரதியிட,

$$= x^3+(5+6+4)x^2+(30+24+20)x+(5)(6)(4)$$
$$= x^3+15x^2+74x+120$$

(ii) $(2a+3)(2a+4)(2a+5)$

$$= (2a)^3 + (3+4+5)(2a)^2 + (12+20+15)(2a) + (3)(4)(5)$$
$$= 8a^3 + (12)(4a^2) + (47)(2a) + 60$$
$$= 8a^3 + 48a^2 + 94a + 60$$

$x = 2a$, $a = 3$ $b = 4$, $c = 5$ என (1)ல் பிரதியிட,

(iii) $(b+3)(b+4)(b-5)$

$$= b^3 + (3+4-5)b^2 + (12-20-15)b + (3)(4)(-5)$$
$$= b^3 + (2)b^2 + (-23)b + (-60)$$
$$= b^3 + 2b^2 - 23b - 60$$

$x = b$, $a = 3$, $b = 4$, $c = -5$ என (1)ல் பிரதியிட,

(iv) $(3x-1)(3x+2)(3x-4)$

$$= (3x)^3 + (-1+2-4)(3x)^2 + (-2-8+4)(3x) + (-1)(2)(-4)$$
$$= 27x^3 + (-3)9x^2 + (-6)(3x) + 8$$
$$= 27x^3 - 27x^2 - 18x + 8$$

$x \Rightarrow 3x$, $a \Rightarrow -1$ $b \Rightarrow 2$, $c \Rightarrow -4$ என (1)ல் பிரதியிட,

3.3.3 $(x+y)^3$ மற்றும் $(x-y)^3$ இன் விரிவாக்கம்

$$(x+a)(x+b)(x+c) \equiv x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$$

கீழ்க்காணும் முற்றொருமையில், $a = b = c = y$ எனப் பிரதியிட,

நாம் பெறுவது,

$$(x+y)(x+y)(x+y) = x^3 + (y+y+y)x^2 + (yy+yy+yy)x + yyy$$
$$= x^3 + (3y)x^2 + (3y^2)x + y^3$$

எனவே, $(x+y)^3 \equiv x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

அல்லது $(x+y)^3 \equiv x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$

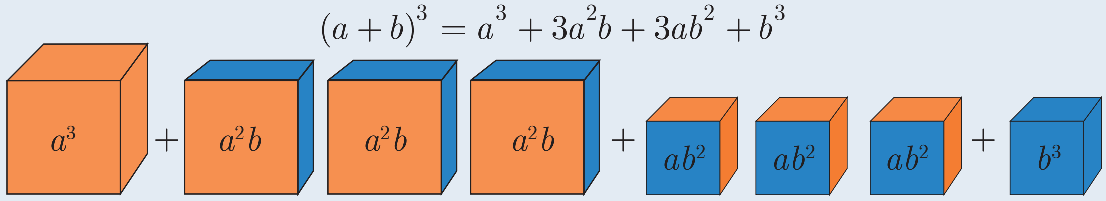
y இக்கு $-y$, எனப் பிரதியிட,

$(x-y)^3 \equiv x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ அல்லது

$(x-y)^3 \equiv x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$

செயல்பாடு - 1

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



கனசதுரம் மற்றும் கனச் செவ்வகங்களைக் கொண்டு $(a-b)^3$ இக்கான மாதிரியை மேற்கண்டவாறு உருவாக்குக.

எடுத்துக்காட்டு 3.9 $(2x+3y)^3$ ஐ விரித்தெழுதுக.

தீர்வு

$$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

$$\begin{aligned}(2x+3y)^3 &= (2x)^3+3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2+(3y)^3\\ &= 8x^3+3(4x^2)(3y)+3(2x)(9y^2)+27y^3\\ &= 8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.10 $(5a-3b)^3$ ஐ விரித்தெழுதுக.

தீர்வு

$(x-y)^3 = x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ என்பது நாம் அறிந்தது.

$$\begin{aligned}(5a-3b)^3 &= (5a)^3-3(5a)^2(3b)+3(5a)(3b)^2-(3b)^3\\ &= 125a^3-3(25a^2)(3b)+3(5a)(9b^2)-(3b)^3\\ &= 125a^3-225a^2b+135ab^2-27b^3\end{aligned}$$

$$\boxed{x^3+y^3+z^3-3xyz \equiv (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)}$$

மேற்கண்ட முற்றொருமையை வலப்புறமுள்ள கோவைகளைப் பெருக்கிச் சரிபார்க்கலாம்.

குறிப்பு

(1) $(x+y+z)=0$ எனில், $x^3+y^3+z^3=3xyz$ ஆகும்.

(2) கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் போன்றவற்றைச் சில முற்றொருமைகளில் பயன்படுத்துதல் (நிரூபணமின்றி).

(i) $x^3+y^3 \equiv (x+y)^3-3xy(x+y)$ (ii) $x^3-y^3 \equiv (x-y)^3+3xy(x-y)$

எடுத்துக்காட்டு 3.11 $(2x+3y+4z)\,(4x^2+9y^2+16z^2-6xy-12yz-8zx)$ இன் பெருக்கற்பலனைக் காண்க.

தீர்வு

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$ என்பது நாம் அறிந்ததே!

$$\begin{aligned}&(2x+3y+4z)(4x^2+9y^2+16z^2-6xy-12yz-8zx)\\ &\qquad= (2x)^3+(3y)^3+(4z)^3-3(2x)(3y)(4z)\\ &\qquad= 8x^3+27y^3+64z^3-72xyz\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.12 முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தி $10^3 - 15^3 + 5^3$ இன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

முற்றொருமையின்படி , $a+b+c=0$, எனில் $a^3+b^3+c^3=3abc$

$a = 10$,
$b = -15$,
$c = 5$
எனப் பிரதியிட

இங்கு, $a+b+c \quad = 10-15+5 = 0$

$$10^3+(-15)^3+5^3 = 3(10)(-15)(5)$$

$$10^3-15^3+5^3 = -2250$$

எடுத்துக்காட்டு 3.13 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \frac{2[a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{2}$$ (2 ஆல் பெருக்கி 2 ஆல் வகுக்க)

$$= \frac{1}{2}\left[2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\right]$$

$$= \frac{1}{2}[(a^2+b^2-2ab)+(b^2+c^2-2bc)+(c^2+a^2-2ca)]$$

$$= \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$ என நிரூபிக்கப்பட்டது.

பயிற்சி 3.2

AJTBDL

1. கீழ்க்காண்பவற்றை விரிவாக்குக:

   (i) $(2x+3y+4z)^2$ (ii) $(2a-3b+4c)^2$

   (iii) $(-p+2q+3r)^2$ (iv) $\left(\frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}\right)^2$

2. கீழ்க்காண்பவற்றின் விரிவாக்கம் காண்க:

   (i) $(x+4)(x+5)(x+6)$ (ii) $(2p+3)(2p-4)(2p-5)$

   (iii) $(3a+1)(3a-2)(3a+4)$ (iv) $(5+4m)(4m+4)(-5+4m)$

3. முழுவதும் விரிவாக்காமல் x^2 இன் கெழு, x இன் கெழு மற்றும் மாறிலி உறுப்புகளை இயற்கணித முற்றொருமையைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

   (i) $(x+5)(x+6)(x+7)$ (ii) $(2x+3)(2x-5)(2x-6)$

4. $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+14x^2+59x+70$ எனில், கீழ்க்காண்பனவற்றின் மதிப்பு காண்க.

(i) $a+b+c$ (ii) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ (iii) $a^2+b^2+c^2$ (iv) $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}$

5. விரிவுபடுத்துக

(i) $(2a+3b)^3$ (ii) $(3a-4b)^3$ (iii) $\left(x+\frac{1}{y}\right)^3$ (iv) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^3$

6. இயற்கணித முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்திப் பின்வருவனவற்றின் மதிப்பு காண்க.

(i) 98^3 (ii) 103^3 (iii) 99^3 (iv) 1001^3

7. $(x+y+z) = 9$ மற்றும் $(xy+yz+zx)=26$ எனில், $x^2+y^2+z^2$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

8. $3a+4b=10$ மற்றும் $ab=2$ எனில், $27a^3+64b^3$ இன் மதிப்பு காண்க.

9. $x-y=5$ மற்றும் $xy=14$ எனில், x^3-y^3 இன் மதிப்பு காண்க.

10. $a+\frac{1}{a}=6$ எனில், $a^3+\frac{1}{a^3}$ இன் மதிப்பு காண்க.

11. $x^2+\frac{1}{x^2}=23$ எனில், $x+\frac{1}{x}$ மற்றம் $x^3+\frac{1}{x^3}$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

12. $\left(y-\frac{1}{y}\right)^3=27$ எனில், $y^3-\frac{1}{y^3}$ இன் மதிப்பு காண்க.

13. சுருக்குக. (i) $(2a+3b+4c)(4a^2+9b^2+16c^2-6ab-12bc-8ca)$

(ii) $(x-2y+3z)(x^2+4y^2+9z^2+2xy+6yz-3xz)$

14. முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி மதிப்பு காண்க.

(i) $7^3-10^3+3^3$ (ii) $729-216-27$

(iii) $\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{5}{6}\right)^3$ (iv) $1+\frac{1}{8}-\frac{27}{8}$

15. $\left[\frac{(x^2-y^2)^3+(y^2-z^2)^3+(z^2-x^2)^3}{(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3}\right]$ ஐ முற்றொருமையைப் பயன்படுத்திச் சுருக்குக.

16. $a=4,\ b=5$ மற்றும் $c=6$ எனில், $\left[\frac{(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)}{(3abc-a^3-b^3-c^3)}\right]$ இன் மதிப்பு காண்க.

17. $x^3+y^3+z^3-3xyz=\frac{1}{2}[x+y+z][(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$ ஐச் சரிபார்க்க.

18. $2x-3y-4z=0$ எனில், $8x^3-27y^3-64z^3$ ஐக் காண்க.

3.4 காரணிப்படுத்துதல் (Factorisation)

பொதுவாக காரணிப்படுத்துதல் என்பது பெருக்கலின் திருப்புகைச் (reverse) செயல்பாடே ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக -1 : 3யையும், 5யையும் பெருக்கும்போது 15 கிடைக்கும்.
15ஐக் காரணிப்படுத்தும்போது $3,\ 5$ காரணிகளாகக் கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டாக -2 : $(x+2)$ மற்றும் $(x+3)$ ஐப் பெருக்கும்போது, x^2+5x+6 கிடைக்கிறது.
x^2+5x+6 ஐக் காரணிப்படுத்தும்போது $(x+2)$ மற்றும் $(x+3)$ ஆகியன காரணிகளாகக் கிடைக்கின்றன.

பெருக்குதல் ↓		காரணிப்படுத்துதல் ↑
$(x+3)(x+2)$		$(x+3)(x+2)$
$x(x+2)+3(x+2)$		$x(x+2)+3(x+2)$
$x^2+2x+3x+6$		$x^2+2x+3x+6$
x^2+5x+6		x^2+5x+6

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட பெரிய படியுடைய பல்லுறுப்புக் கோவையைச் சிறிய படியுடைய கோவைகளின் பெருக்கற்பலனாக மாற்றி எழுதும் முறையே காரணிப்படுத்துதல் ஆகும். இங்கு மீளக் காரணிப்படுத்த வாய்ப்பில்லாதவாறு சிறிய படியுடைய கோவைகள் அமைதல் வேண்டும்.

காரணிப்படுத்தலில் இரு முக்கிய வழிகள்

(i) பொதுவான காரணிமுறை

$ab+ac$

$a\cdot b+a\cdot c$

$a(b+c)$ காரணி அமைப்பு

(ii) குழுவாக எழுதுதல்

$a+b-pa-pb$

$(a+b)-p(a+b)$ குழுவாக அமைத்தல்

$(a+b)(1-p)$ காரணி அமைப்பு

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காரணிப்படுத்தும்போது, பொதுவான காரணிகளை எடுத்துக் காரணி அமைப்பாக்குவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.14

காரணிப்படுத்துக.

(i) $am+bm+cm$ (ii) a^3-a^2b (iii) $5a-10b-4bc+2ac$ (iv) $x+y-1-xy$

தீர்வு

(i) $am+bm+cm$

$am+bm+cm$

$m(a+b+c)$ காரணி அமைப்பு

(ii) a^3-a^2b

$a^2\cdot a-a^2\cdot b$ குழுவாக அமைத்தல்

$a^2\times(a-b)$ காரணி அமைப்பு

(iii) $5a-10b-4bc+2ac$

$5a-10b+2ac-4bc$

$5(a-2b)+2c(a-2b)$

$(a-2b)(5+2c)$

(iv) $x+y-1-xy$

$x-1+y-xy$

$(x-1)+y(1-x)$

$(x-1)-y(x-1)$

$(x-1)(1-y)$

$\boxed{(a-b)=-(b-a)}$

3.4.1 மீப்பெரு பொது வகுத்தி (மீ.பொ.வ) [Greatest Common Divisor (GCD)]

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியானது (சுருக்கமாக மீ.பொ.வ) அதன் பொதுக் காரணிகளுள் அதிகபட்சப் பொதுப்படியைக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். இதையே மீப்பெரு பொதுக்காரணி (மீ.பொ.கா) [Highest Common Factor (HCF)] என்போம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $14xy^2$ மற்றும் $42xy$ என்ற கோவைகளைக் கருதுவோம். 14 மற்றும் 42இன் பொது வகுத்திகள் 2, 7 மற்றும் 14 ஆகும். இவற்றின் மீ.பொ.வ 14 ஆகும். xy^2 மற்றும் xy இன் பொது வகுத்திகளாவன x, y மற்றும் xy இவற்றின் மீ.பொ.வ xy ஆகும்.

$$14xy^2 = 1 \cdot 2 \cdot 7 \cdot \; x \cdot y \cdot y$$
$$42xy = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot x \cdot y$$

எனவே, $14xy^2$ மற்றும் $42xy$ இன் மீ.பொ.வ $14xy$ ஆகும்.

காரணிப்படுத்துதல் முறையில் மீ.பொ.வ. காணுதல்

(i) கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு கோவையையும், காரணிகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுதவும்.

(ii) வகுக்கும் கோவைகளின் பொதுவான உயர் படி கொண்ட கோவையே மீ.பொ.வ ஆகும்.

(iii) கோவைகளில் கெழுக்கள் எண்களாக இருப்பின், அவற்றின் மீ.பொ.வ கண்டறிந்து அதைக் கோவைகளின் மீ.பொ.வ.வுடன் பெருக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.15 கீழ்க்காண்பவற்றிற்கு மீ.பொ.வ. காண்க.

(i) $16x^3y^2$, $24xy^3z$ (ii) (y^3+1) மற்றும் (y^2-1)

(iii) $2x^2-18$ மற்றும் x^2-2x-3 (iv) $(a-b)^2$, $(b-c)^3$, $(c-a)^4$

தீர்வு

(i) $16x^3y^2 = 2\times2\times2\times2\times x^3y^2 = 2^4\times x^3\times y^2 = 2^3\times2\times x^2\times x\times y^2$

$24xy^3z = 2\times2\times2\times3\times x\times y^3\times z = 2^3\times3\times x\times y^3\times z = 2^3\times3\times x\times y\times y^2\times z$

ஆகவே, மீ.பொ.வ. $= 2^3xy^2$

(ii) $y^3+1 = y^3+1^3 = (y+1)(y^2-y+1)$

$y^2-1 = y^2-1^2 = (y+1)(y-1)$

ஆகவே, மீ.பொ.வ. $= (y+1)$

(iii) $2x^2-18=2(x^2-9)=2(x^2-3^2)=2(x+3)(x-3)$

$$\begin{aligned} x^2-2x-3 &= x^2-3x+x-3 \\ &= x(x-3)+1(x-3) \\ &= (x-3)(x+1) \end{aligned}$$

ஆகவே, மீ.பொ.வ $=(x-3)$

(iv) $(a-b)^2, (b-c)^3, (c-a)^4$

1ஐத் தவிர, பொதுவான காரணி இல்லை. எனவே, மீ.பொ.வ $=1$.

பயிற்சி 3.3

1. கீழ்க்காண்பனவற்றிற்கு மீ.பொ.வ காண்க.

(i) p^5, p^{11}, p^9

(ii) $4x^3, y^3, z^3$

(iii) $9a^2b^2c^3, 15a^3b^2c^4$

(iv) $64x^8, 240x^6$

(v) $ab^2c^3, a^2b^3c, a^3bc^2$

(vi) $35x^5y^3z^4, 49x^2yz^3, 14xy^2z^2$

(vii) $25ab^3c, 100a^2bc, 125ab$

(viii) $3abc, 5xyz, 7pqr$

2. மீ.பொ.வ காண்க.

(i) $(2x+5), (5x+2)$

(ii) $a^{m+1}, a^{m+2}, a^{m+3}$

(iii) $2a^2+a, 4a^2-1$

(iv) $3a^2, 5b^3, 7c^4$

(v) x^4-1, x^2-1

(vi) $a^3-9ax^2, (a-3x)^2$

3.4.2 முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்திக் காரணிப்படுத்துதல் (Factorisation using Identity)

(i) $a^2+2ab+b^2\equiv(a+b)^2$

(ii) $a^2-2ab+b^2\equiv(a-b)^2$

(iii) $a^2-b^2\equiv(a+b)(a-b)$

(iv) $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\equiv(a+b+c)^2$

(v) $a^3+b^3\equiv(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(vi) $a^3-b^3\equiv(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(vii) $a^3+b^3+c^3-3abc\equiv(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

குறிப்பு

$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$; $a^4-b^4=(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$

$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$; $a^6-b^6=(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

(i) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=2\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2$ என நிரூபி.

(ii) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=4$ என நிரூபி.

எடுத்துக்காட்டு 3.16 காரணிப்படுத்துக.

(i) $9x^2+12xy+4y^2$ (ii) $25a^2-10a+1$ (iii) $36m^2-49m^2$

(iv) x^3-x (v) x^4-16 (vi) $x^2+4y^2+9z^2-4xy+12yz-6xz$

தீர்வு

(i) $9x^2+12xy+4y^2 = (3x)^2+2(3x)(2y)+(2y)^2$

$= (3x+2y)^2$ [ஏனெனில் $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$]

(ii) $25a^2-10a+1 = (5a)^2-2(5a)(1)+1^2$

$= (5a-1)^2$ [ஏனெனில் $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$]

(iii) $36m^2-49n^2 = (6m)^2-(7n)^2$

$= (6m+7n)(6m-7n)$ [ஏனெனில் $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$]

(iv) $x^3-x = x(x^2-1)$

$= x(x^2-1^2)$

$= x(x+1)(x-1)$

(v) $x^4-16 = x^4-2^4$ [ஏனெனில் $a^4-b^4=(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$]

$= (x^2+2^2)(x^2-2^2)$

$= (x^2+4)(x+2)(x-2)$

(vi) $x^2+4y^2+9z^2-4xy+12yz-6xz$

$= (-x)^2+(2y)^2+(3z)^2+2(-x)(2y)+2(2y)(3z)+2(3z)(-x)$

$= (-x+2y+3z)^2$ (அல்லது) $(x-2y-3z)^2$

எடுத்துக்காட்டு 3.17

பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக.

(i) $27x^3+125y^3$ (ii) $216m^3-343m^3$

(iii) $2x^4-16xy^3$ (iv) $8x^3+27y^3+642^3-72xy^2$

தீர்வு

(i) $27x^3+125y^3 = (3x)^3+(5y)^3$ [ஏனெனில் $(a^3+b^3)=(a+b)(a^2-ab+b^2)$]

$$= (3x+5y)\left((3x)^2-(3x)(5y)+(5y)^2\right)$$

$$= (3x+5y)(9x^2-15xy+25y^2)$$

(ii) $216m^3-343m^3 = (6m)^3-(7n)^3$ [ஏனெனில் $(a^3-b^3)=(a-b)(a^2+ab+b^2)$]

$$= (6m-7n)\left((6m)^2+(6m)(7n)+(7n)^2\right)$$

$$= (6m-7n)(36m^2+42mn+49n^2)$$

(iii) $2x^4-16xy^3 = 2x(x^3-8y^3)$

$= 2x\left(x^3-(2y)^3\right)$ [ஏனெனில் $(a^3-b^3)=(a-b)(a^2+ab+b^2)$]

$$= 2x\left((x-2y)(x^2+(x)(2y)+(2y)^2)\right)$$

$$= 2x(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$$

(iv) $8x^3+27y^3+64z^3-72xyz$

$$= (2x)^3+(3y)^3+(4z)^3-3(2x)(3y)(4z)$$

$$= (2x+3y+4z)(4x^2+9y^2+16z^2-6xy-12yz-8xz)$$

எடுத்துக்காட்டு 3.18

(i) $a+b=6,\ ab=5$ எனில், a^3+b^3 ஐக் காண்க.

(ii) $x-y=4,\ xy=5$ எனில், x^3-y^3 ஐக் காண்க.

தீர்வு

(i) $a+b=6,\ ab=5$

$$a^3+b^3 = (a+b)^3-3ab(a+b)$$

$$= (6)^3-3(5)(6)$$

$$= 126$$

(ii) $x-y=4,\ xy=5$

$$x^3-y^3 = (x-y)^3+3xy(x-y)$$

$$= 4^3+3(5)(4)$$

$$= 124$$

எடுத்துக்காட்டு 3.19 $\left(y-\frac{1}{y}\right)^3 = 729$ எனில், $y-\frac{1}{y}$ மற்றும் $y^3-\frac{1}{y^3}$ ஐக் காண்க.

தீர்வு

$$\left(y-\frac{1}{y}\right)^3 = 729$$

இருபுறமும் கனமூலம் காண,

$$\sqrt[3]{\left(y-\frac{1}{y}\right)^3} = \sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{9^3}$$

ஆகவே, $y-\frac{1}{y} = 9$

$$y^3-\frac{1}{y^3} = \left(y-\frac{1}{y}\right)^3 + 3\left(y-\frac{1}{y}\right) \qquad \left[\because a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)\right]$$

$$= 9^3 + 3(9)$$

$$y^3-\frac{1}{y^3} = 756$$

சிந்தனைக் களம்

பின்வருபவை 15ஆல் வகுபடுமா எனச் சோதிக்க.

(i) $2017^3 + 2018^3$

(ii) $2018^3 - 1973^3$

பயிற்சி 3.4

1. பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக:
   (i) $2a^2+4a^2b+8a^2c$ (ii) $ab-ac-mb+mc$
   (iii) $pr+qr+pq+p^2$ (iv) $2y^3+y^2-2y-1$
2. பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக:
   (i) x^2+4x+4 (ii) $3a^2-24ab+48b^2$ (iii) x^5-16x
   (iv) $m^2+\frac{1}{m^2}-23$ (v) $6-216x^2$ (vi) $a^2+\frac{1}{a^2}-18$
   (vii) m^4-7m^2+1 (viii) $x^{2n}+2x^n+1$ (ix) $\frac{1}{3}a^2-2a+3$
   (x) $a^4+a^2b^2+b^4$ (xi) x^4+4y^4
3. பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக:
   (i) $4x^2+9y^2+25z^2+12xy+30yz+20xz$ (ii) $1+x^2+9y^2+2x-6xy-6y$
   (iii) $25x^2+4y^2+9z^2-20xy+12yz-30xz$ (iv) $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{y^2}+\frac{9}{z^2}+\frac{4}{xy}+\frac{12}{yz}+\frac{6}{xz}$
4. பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக:
   (i) $8x^3+125y^3$ (ii) a^3-729 (iii) $27x^3-8y^3$
   (iv) m^3+512 (v) $a^3+3a^2b+3ab^2+2b^3$ (vi) a^6-64
5. பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக:
   (i) $x^3+8y^3+27z^3-18xyz$ (ii) $a^3+b^3-3ab+1$
   (iii) $x^3+8y^3+6xy-1$ (iv) $l^3-8m^3-27n^3-18lmn$

3.4.3 $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ என்ற அமைப்பில் உள்ள இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் (மூவுறுப்புக்கோவை) காரணிப்படுத்தல்

$ax^2 + bx + c$ இன் நேரிய காரணிகள் $(kx+m)$ மற்றும் $(lx+n)$ என்ற அமைப்பில் இருக்கும்.

எனவே, $ax^2 + bx + c = (kx+m)(lx+n) = klx^2 + (lm+kn)x + mn$

x^2, x இன் கெழு மற்றும் மாறிலி உறுப்புகளை இருபுறமும் ஒப்பீடு செய்யும்போது நமக்கு $a = kl$, $b = (lm+kn)$ மற்றும் $c = mn$ எனக் கிடைக்கின்றன. இதில் ac என்பது kl மற்றும் mn இன் பெருக்கற்பலன் ஆகும். இது x இன் கெழுவான lm மற்றும் kn இன் பெருக்கற்பலனுக்குச் சமம். ஆகவே, $(kl \times mn) = (lm \times kn)$.

$ax^2 + bx + c$ ஐக் காரணிப்படுத்த பின்பற்ற வேண்டிய படிகள்

படி 1 : x^2 இன் கெழுவை மாறிலி உறுப்புடன் பெருக்க வேண்டும். அதாவது, ac.

படி 2 : ac ஐ இரு காரணிகளாகப் பிரிக்க வேண்டும். அவ்வாறு பிரிக்கும்போது காரணிகளின் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கல் முறையே b மற்றும் ac இக்குச் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

படி 3 : இக்காரணிகளை இரு சோடிகளாகப் பிரித்துக் காரணிப்படுத்த வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.20 காரணிப்படுத்துக : $2x^2 + 15x + 27$

தீர்வு

$ax^2 + bx + c$ உடன் $2x^2 + 15x + 27$ ஐ சமப்படுத்த,

$a = 2,\ b = 15,\ c = 27$

பெருக்கற்பலன் $ac = 2 \times 27 = 54$ மற்றும் கூடுதல் $b = 15$

காரணிகளின் பெருக்கல் $ac = 54$	காரணிகளின் கூடுதல் $b = 15$	காரணிகளின் பெருக்கல் $ac = 54$	காரணிகளின் கூடுதல் $b = 15$
1×54	55	-1×-54	-55
2×27	29	-2×-27	-29
3×18	21	-3×-18	-21
6×9	**15**	-6×-9	-15
6 மற்றும் 9 ஆகியன தேவையான காரணிகள்			

6, 9 என்ற காரணிகள் $b = 15$ மற்றும் $ac = 54$ என்பதை நிறைவு செய்வதைக் காண முடிகிறது.

மைய உறுப்பை $6x$ மற்றும் $9x$ என மாற்றி அமைக்க.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 15x + 27 &= 2x^2 + 6x + 9x + 27 \\ &= 2x(x+3) + 9(x+3) \\ &= (x+3)(2x+9) \end{aligned}$$

எனவே, $2x^2 + 15x + 27 = (x+3)\ (2x+9)$

எடுத்துக்காட்டு 3.21

காரணிப்படுத்துக : $2x^2 - 15x + 27$

தீர்வு

$ax^2 + bx + c$ உடன்

$2x^2 - 15x + 27$ ஐச் சமப்படுத்த,

$a = 2,\ b = -15,\ c = 27$

பெருக்கற்பலன் $ac = 2 \times 27 = 54$,

மற்றும் கூடுதல் $b = -15$

காரணிகளின் பெருக்கல் **ac = 54**	காரணிகளின் கூடுதல் **b = –15**	காரணிகளின் பெருக்கல் **ac = 54**	காரணிகளின் கூடுதல் **b = –15**
1 × 54	55	–1 × –54	–55
2 × 27	29	–2 × –27	–29
3 × 18	21	–3 × –18	–21
6 × 9	15	**–6 × –9**	**–15**
–6 மற்றும் –9 ஆகியன தேவையான காரணிகள்			

மைய உறுப்பை $-6x$ மற்றும் $-9x$ என மாற்றி அமைக்க,

$$\begin{aligned} 2x^2 - 15x + 27 &= 2x^2 - 6x - 9x + 27 \\ &= 2x(x-3) - 9(x-3) \\ &= (x-3)(2x-9) \end{aligned}$$

எனவே, $2x^2 - 15x + 27$ இன் காரணிகள் $(x-3)$ மற்றும் $(2x-9)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.22

காரணிப்படுத்துக $2x^2 + 15x - 27$

தீர்வு

$ax^2 + bx + c$ ஐ $2x^2 + 15x - 27$ உடன் சமப்படுத்த,

$a = 2,\ b = 15,\ c = -27$

பெருக்கற்பலன் $ac = 2 \times -27 = -54$,

மற்றும் கூடுதல் $b = 15$

காரணிகளின் பெருக்கல் **ac = –54**	காரணிகளின் கூடுதல் **b = 15**	காரணிகளின் பெருக்கல் **ac = –54**	காரணிகளின் கூடுதல் **b = 15**
–1 × 54	53	1 × –54	–53
–2 × 27	25	2 × –27	–25
–3 × 18	**15**	3 × –18	–15
–6 × 9	3	6 × –9	–3
–3 மற்றும் 18 ஆகியன தேவையான காரணிகள்			

மைய உறுப்பை $-3x$ மற்றும் $18x$ என மாற்றி அமைக்க,

$$\begin{aligned} 2x^2 + 15x - 27 &= 2x^2 + 18x - 3x - 27 \\ &= 2x(x+9) - 3(x+9) \\ &= (x+9)(2x-3) \end{aligned}$$

எனவே, $2x^2 + 15x - 27$ இன் காரணிகள் $(x+9)$ மற்றும் $(2x-3)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.23

காரணிப்படுத்துக : $2x^2 - 15x - 27$

தீர்வு

$ax^2 + bx + c$ ஐ $2x^2 - 15x - 27$ உடன் சமப்படுத்த

$a = 2,\ b = -15,\ c = -27$

பெருக்கற்பலன் $ac = 2 \times -27 = -54$,

மற்றும் கூடுதல் $b = -15$

காரணிகளின் பெருக்கல் **ac = – 54**	காரணிகளின் கூடுதல் **b = – 15**	காரணிகளின் பெருக்கல் **ac = – 54**	காரணிகளின் கூடுதல் **b = – 15**
–1 × 54	53	1 × –54	–53
–2 × 27	25	2 × –27	–25
–3 × 18	15	**3 × –18**	**–15**
–6 × 9	3	6 × –9	–3
3 மற்றும் –18 ஆகியன தேவையான காரணிகள்			

மைய உறுப்பை $-18x$ மற்றும் $3x$ என மாற்றி அமைக்க,

9th Maths T-II TM.indb 65 11-08-2018 18:18:55

$$\begin{aligned} 2x^2 - 15x - 27 &= 2x^2 - 18x + 3x - 27 \\ &= 2x(x-9) + 3(x-9) \\ &= (x-9)(2x+3) \end{aligned}$$

எனவே, $2x^2 - 15x - 27 = (x-9)\,(2x+3)$

எடுத்துக்காட்டு 3.24 $(x+y)^2 + 9(x+y) + 20$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

தீர்வு

$x + y = p$, என்க.

$p^2 + 9p + 20$ ஐ

$ax^2 + bx + c$ உடன் சமப்படுத்த,

$a = 1,\ b = 9,\ c = 20$

பெருக்கற்பலன், $ac = 1 \times 20 = 20$,

மற்றும் கூடுதல் $b=9$

காரணிகளின் பெருக்கல் $ac = 20$	காரணிகளின் கூடுதல் $b = 9$	காரணிகளின் பெருக்கல் $ac = 20$	காரணிகளின் கூடுதல் $b = 9$
1×20	21	-1×-20	-21
2×10	12	-2×-10	-12
4×5	**9**	-4×-5	-9
4 மற்றும் 5 ஆகியன தேவையான காரணிகள்			

மைய உறுப்பை $4p$ மற்றும் $5p$ என மாற்றி அமைக்க,

$$\begin{aligned} p^2 + 9p + 20 &= p^2 + 4p + 5p + 20 \\ &= p(p+4) + 5(p+4) \\ &= (p+4)(p+5) \end{aligned}$$

$p = x + y$ எனப் பிரதியிட, நமக்குக் கிடைப்பது,

$$(x+y)^2 + 9(x+y) + 20 = (x+y+4)(x+y+5)$$

பயிற்சி 3.5

1. காரணிப்படுத்துக:

(i) $x^2 + 10x + 24$ (ii) $x^2 - 2x - 99$ (iii) $z^2 + 4z - 12$

(iv) $x^2 + 14x - 15$ (v) $p^2 - 6p - 16$ (vi) $t^2 + 72 - 17t$

(vii) $x^2 - 8x + 15$ (viii) $y^2 - 16y - 80$ (ix) $a^2 + 10a - 600$

2. காரணிப்படுத்துக:

(i) $2a^2 + 9a + 10$ (ii) $11 + 5m - 6m^2$ (iii) $4x^2 - 20x + 25$

(iv) $32 + 8x - 60x^2$ (v) $5x^2 - 29xy - 42y^2$ (vi) $9 - 18x + 8x^2$

(vii) $6x^2 + 16xy + 8y^2$ (viii) $9 + 3x - 12x^2$ (ix) $10 - 7a - 3a^2$

(x) $12x^2 + 36x^2y + 27y^2x^2$ (xi) $\left(a+b\right)^2 + 9\left(a+b\right) + 18$

3. காரணிப்படுத்துக:

(i) $(p-q)^2 - 6(p-q) - 16$ (ii) $9(2x-y)^2 - 4(2x-y) - 13$

(iii) $m^2 + 2mn - 24n^2$ (iv) $\sqrt{5}a^2 + 2a - 3\sqrt{5}$ (v) $a^4 - 3a^2 + 2$

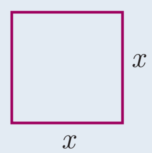
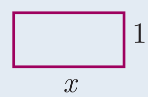
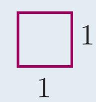
(vi) $8m^3 - 2m^2n - 15mn^2$ (vii) $4\sqrt{3}x^2 + 5x - 2\sqrt{3}$ (viii) $a^4 - 7a^2 + 1$

(ix) $a^2 + \frac{1}{a^2} - 18$ (x) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy}$ (xi) $\frac{3}{x^2} + \frac{8}{xy} + \frac{4}{y^2}$

செயல்பாடு - 2

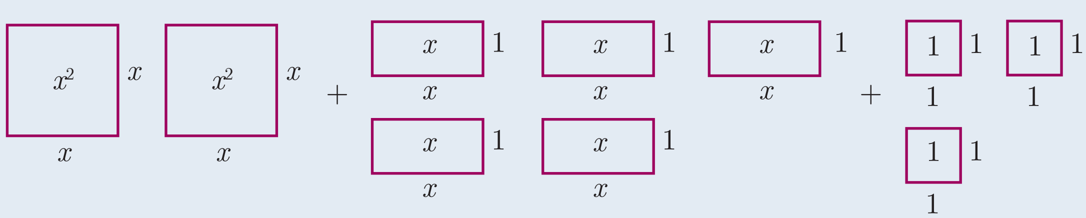
(1) நோக்கம் : தாள்களைப் பயன்படுத்திப் பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காரணிப்படுத்துதல்

தேவையான பொருட்கள் : தாளை மூன்று வகையில் பின்வருமாறு கத்தரித்து எடுத்துக்கொள்ளவும்.

வகை 1	வகை 2	வகை 3
		
வகை 1: x^2 சதுர அலகுகள் பரப்புடைய சதுரத் தாள்கள்	வகை 2: x சதுர அலகுகள் பரப்புடைய செவ்வகத் தாள்கள் (நீளம் x அலகுகள் மற்றும் அகலம் 1 அலகு)	வகை 3: ஓரலகு பரப்புடைய சதுரத் தாள்கள்

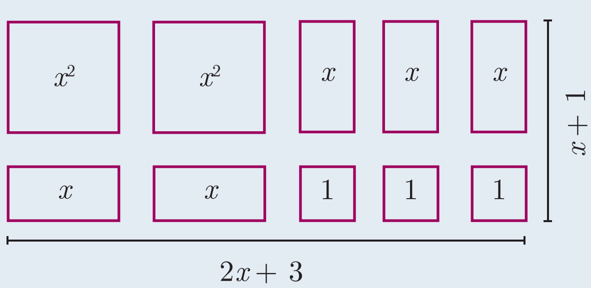
வழிமுறை : எடுத்துக்காட்டாக, $2x^2 + 5x + 3$ ஐக் காரணிப்படுத்த இரண்டு x^2 தாள்கள், ஐந்து x தாள்கள், மூன்று ஓரலகு தாள்களை எடுத்துக் கொள்வோம்.

தெரிவு செய்யப்பட்ட தாள்கள்



$2x^2 \quad + \quad 5x \quad + \quad 3$

தெரிவு செய்த தாள்களைப் பின்வருமாறு ஒன்றிணைத்தால் அவை ஒரு செவ்வகத்தை அமைக்கிறது. இங்குச் செவ்வகத்தின் நீளமும், அகலமும் காரணிகளாக அமைவதைப் பின்வரும் படத்தின் மூலம் பிரிக்கலாம்.



AK37F9

செவ்வகத்தின் பக்கங்கள் $(2x + 3)$ மற்றும் $(x + 1)$ ஆகும்.

(2) தாள்களைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துக

(i) $x^2 + 5x + 6$ (ii) $4x^2 + 8x + 3$ (iii) $3x^2 + 4x + 1$

3.5 தொகுமுறை வகுத்தல் (Synthetic Division)

பல்லுறுப்புக் கோவைகளை நேரிய காரணிகளாக வகுப்பதற்குத் தொகுமுறை வகுத்தல் என்பது ஒரு சிறந்த மற்றும் சுருக்கமான முறையாகும். இது காரணிகளைப் பிரிக்க உதவுகிறது. பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மூலங்களைக் காண்பது இதன் முக்கியப் பயனாகும். இம்முறையை இப்போது காண்போம்.

தொகுமுறை வகுத்தலைத் தெரிந்து கொள்வதற்கு நீள்வகுத்தல் முறையில் தீர்வு காணும் முறையை முதலில் காண்போம்.

வகுபடும் கோவை: $p(x) = (3x^3 - 2x^2 - 5 + 7x)$

மற்றும் வகுக்கும் கோவை: $d(x) = x + 3$ இவற்றைக் கொண்டு ஈவு மற்றும் மீதி காண்க.

நீள்வகுத்தல் முறை (Long Division Method)

கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவையை இறங்கு வரிசையில் (திட்ட வடிவில்) எழுதி, வகுக்கவும்.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^2 - 11x + 40 \\
\hline
x+3 & 3x^3 - 2x^2 + 7x - 5 \\
 & 3x^3 + 9x^2 \\
 & (-) \quad (-) \\
\hline
 & -11x^2 + 7x - 5 \\
 & -11x^2 - 33x \\
 & (+) \quad (+) \\
\hline
 & 40x - 5 \\
 & 40x + 120 \\
 & (-) \quad (-) \\
\hline
 & -125
\end{array}
$$

ஈவு காண,

$$\frac{3x^3}{x} = 3x^2$$

$$\frac{-11x^2}{x} = -11x$$

$$\frac{40x}{x} = 40$$

இங்கு, ஈவு $3x^2 - 11x + 40$ மற்றும் மீதி -125.

குறிப்பாக, $3x^3 - 2x^2 + 7x - 5 = 3x^2 - 11x + 40 - \dfrac{125}{x+3}$

தொகுமுறை வகுத்தலை மேற்காணும் எடுத்துக்காட்டுடன் விளக்குவோம்.

$p(x) = (3x^3 - 2x^2 - 5 + 7x)$ ஐ $d(x) = x + 3$ ஆல் வகுத்து ஈவு $q(x)$ மற்றும் மீதி காண்போம்.

படி 1: வகுபடும் கோவை மற்றும் வகுக்கும் கோவை இரண்டையும் திட்ட வடிவிற்கு மாற்றுக.

$3x^3 - 2x^2 + 7x - 5$ (திட்ட வடிவம்)

$x + 3$ (திட்ட வடிவம்)

வகுபடும் கோவையின் கெழுக்களை முதல் வரிசையில் எழுதவும். விடுபட்ட (இல்லாத) உறுப்பின் கெழுவுக்கு '0' எனப் பிரதியிட,

$3 \quad -2 \quad 7 \quad -5$ முதல் வரிசை

படி 2: வகுபடும் கோவையின் பூச்சியத்தைக் காண்க.

$x+3=0$ எனவே $x=-3$

படி 3: வகுபடும் கோவையின் பூச்சியத்தை முதல் வரிசைக்கு முன்னால் எழுதுக. இரண்டாம் வரிசையில் பூச்சியத்தை முதல் உறுப்புக்குக் கீழே எழுதுக.

-3	3	-2	7	-5	முதல் வரிசை
	0				இரண்டாம் வரிசை

படி 4: இரண்டாம், மூன்றாம் வரிசையைக் கீழ்க்காணுமாறு பூர்த்தி செய்க.

-3	3		-2		7		-5	முதல் வரிசை
	0	-3×3	-9	-3×-11	33	-3×40	-120	இரண்டாம் வரிசை
	3		-11		40		-125	மூன்றாம் வரிசை

மூன்றாவது வரிசையில் உள்ள கடைசி உறுப்பைத் தவிர ஏனைய உறுப்புகள் அனைத்தும் ஈவின் கெழுக்களாகும்.

ஈவு $3x^2-11x+40$ மற்றும் மீதி -125.

எடுத்துக்காட்டு 3.25 தொகுமுறை வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தி $(3x^3-4x^2-5)$ ஐ $(3x+1)$ ஆல் வகுத்து ஈவு, மீதி காண்க.

தீர்வு

$$p(x) = 3x^3-4x^2-5, \quad d(x)=(3x+1)$$

திட்ட வடிவம் $p(x) = 3x^3-4x^2+0x-5$ மற்றும் $d(x)=3x+1$

$d(x)= 3x+1$ இன் பூச்சியம் காண,

$3x+1=0$

$3x=-1$

$x=-\frac{1}{3}$

$\frac{-1}{3}$	3	-4	0	-5	
	0	-1	$\frac{5}{3}$	$\frac{-5}{9}$	
	3	-5	$\frac{5}{3}$	$\frac{-50}{9}$	மீதி

$$3x^3-4x^2-5=\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(3x^2-5x+\frac{5}{3}\right)-\frac{50}{9}$$

$$= \frac{(3x+1)}{3} \times 3\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{5}{9}\right) - \frac{50}{9}$$

$$3x^3 - 4x^2 - 5 = (3x+1)\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{5}{9}\right) - \left(\frac{50}{9}\right) \qquad \text{[குறிப்பு: } (p(x) = d(x)q(x) + r\,]$$

எனவே, ஈவு $\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{5}{9}\right)$ மற்றும் மீதி $\frac{-50}{9}$

எடுத்துக்காட்டு 3.26 $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 29$ ஐ $(x+4)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் ஈவு $x^3 - ax^2 + bx + 6$, எனில், a, b இன் மதிப்பு மற்றும் மீதி ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

$x+4$ இன் பூச்சியம் காண,
$x + 4 = 0$
$x = -4$

$p(x) = x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 29$ என்க.

திட்ட வடிவம் $= x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 29$

கெழுக்கள் 1 10 35 50 29

–4	1	10	35	50	29	
	0	–4	–24	–44	–24	
	1	6	11	6	5	மீதி

ஈவு $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ ஐ $x^3 - ax^2 + bx + 6$ உடன் ஒப்பிட,

x^2 இன் கெழு $6 = -a$ $\quad x$ இன் கெழு $11 = b$

ஆகவே, $a = -6$, $b = 11$ மற்றும் மீதி$= 5$.

பயிற்சி 3.6

1. தொகுமுறை வகுத்தலைப் பயன்படுத்தி ஈவு மற்றும் மீதி காண்க:

   (i) $(x^3 + x^2 - 7x - 3) \div (x-3)$ (ii) $(x^3 + 2x^2 - x - 4) \div (x+2)$

   (iii) $(x^3 + 4x^2 + 16x + 61) \div (x-4)$ (iv) $(3x^3 - 2x^2 + 7x - 5) \div (x+3)$

   (v) $(3x^3 - 4x^2 - 10x + 8) \div (3x-2)$ (vi) $(8x^4 - 2x^2 + 6x + 5) \div (4x+1)$

2. $(8x^4 - 2x^2 + 6x - 7)$ ஐ $(2x+1)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் ஈவு $(4x^3 + px^2 - qx + 3)$ எனில், p, q மற்றும் மீதியைக் காண்க.

3. $3x^3 + 11x^2 + 34x + 106$ ஐ $x - 3$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் ஈவு $3x^2 + ax + b$ எனில், a, b மற்றும் மீதி ஆகியவற்றைக் காண்க.

3.5.1 தொகுமுறை வகுத்தலைப் பயன்படுத்திக் காரணிப்படுத்துதல் (Factorisation using Synthetic Division)

ஒரு முப்படிக் கோவையைத் தொகுமுறை வகுத்தலின் உதவியால் எவ்வாறு ஒருபடிக் கோவைகளாகக் காரணிப்படுத்த இயலும் என்பதை இப்பகுதியில் நாம் கற்கலாம்.

கொடுக்கப்பட்ட முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ இக்கு ஒருபடிக் காரணி ஒன்றைத் தெரிந்து கொண்ட பிறகு, தொகுமுறை வகுத்தலைப் பயன்படுத்தி $p(x)$ இன் இருபடிக் காரணியைக் காணலாம். மேலும், அந்த இருபடிக் கோவையை இயலுமெனில் ஒருபடிக் காரணிகளின் பெருக்கற்பலனாகக் காரணிப்படுத்தலாம்.

குறிப்பு

- மாறிலிக் கோவை அல்லாத ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ இக்கு $p(a) = 0$ என இருந்தால் மட்டுமே $x = a$ என்பது அதன் பூச்சியமாகும்.
- $x-a$ ஆனது $p(x)$ இக்கு ஒரு காரணி என இருந்தால் மட்டுமே $p(a) = 0$ ஆகும். (காரணித் தேற்றம்)

ஒரு முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு $(x-1)$ மற்றும் $(x+1)$ ஆகியன காரணிகளாகுமா எனத் தெரிந்து கொள்ள எளிய முறை

- $p(x)$ இன் அனைத்து உறுப்புகளின் கெழுக்கள் மற்றும் மாறிலி உறுப்பின் கூடுதல் பூச்சியம் என இருந்தால் மட்டுமே $p(x)$ இக்கு $(x-1)$ ஒரு காரணியாகும்.
- $p(x)$ இன் இரட்டைப் படை அடுக்குகளில் உள்ள உறுப்புகளின் கெழுக்கள் மற்றும் மாறிலி உறுப்புகளின் கூடுதலானது ஒற்றைப்படை அடுக்குகளில் உள்ள உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதலுக்குச் சமம் என இருந்தால் மட்டுமே $(x+1)$ ஆனது $p(x)$ இக்கு ஒரு காரணியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.27 (i) $x^3 - 7x^2 + 13x - 7$ இக்கு $(x-1)$ ஒரு காரணியாகும் என நிரூபி.

(ii) $x^3 + 7x^2 + 13x + 7$ இக்கு $(x+1)$ ஒரு காரணியாகும் என நிரூபி.

தீர்வு

(i) $p(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 7$ என்க.

கெழுக்களின் கூடுதல் $= 1 - 7 + 13 - 7 = 0$

எனவே, $(x-1)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி.

(ii) $q(x) = x^3 + 7x^2 + 13x + 7$ என்க.

ஒற்றைப்படை அடுக்குகள் கொண்ட உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் $= 7 + 7 = 14$

ஒற்றைப்படை அடுக்குகள் கொண்ட உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் $= 1 + 13 = 14$

எனவே, $(x+1)$ என்பது $q(x)$ இன் ஒரு காரணி.

எடுத்துக்காட்டு 3.28 $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ ஐ நேரிய காரணிகளாகக் காரணிப்படுத்துக.

தீர்வு

$p(x) = x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ என்க.

அனைத்து உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் $= 1 + 13 + 32 + 20 = 66 \neq 0$

எனவே, $(x-1)$ என்பது ஒரு காரணியல்ல.

இரட்டைப்படை அடுக்குகள் கொண்ட உறுப்புகளின்

கெழுக்கள் மற்றும் மாறிலியின் கூடுதல் $= 13 + 20 = 33$

ஒற்றைப்படை அடுக்குகள் கொண்ட உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் $= 1 + 32 = 33$

ஆகவே, $(x+1)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி.

மற்ற நேரிய காரணிகளைக் காணத் தொகுமுறை வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்துவோம்.

முறை I

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & 13 & 32 & 20 \\
 & 0 & -1 & -12 & -20 \\
\hline
-2 & 1 & 12 & 20 & 0 \text{ (மீதி)} \\
 & 0 & -2 & -20 & \\
\hline
 & 1 & 10 & 0 \text{ (மீதி)} &
\end{array}$$

$p(x) = (x+1)(x+2)(x+10)$

எனவே,

$x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

$= (x+1)(x+2)(x+10)$

முறை II

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & 13 & 32 & 20 \\
 & 0 & -1 & -12 & -20 \\
\hline
 & 1 & 12 & 20 & 0 \text{ (மீதி)}
\end{array}$$

பிறகு, $p(x) = (x+1)(x^2 + 12x + 20)$

இப்போது, $x^2 + 12x + 20 = x^2 + 10x + 2x + 20$

$= x(x+10) + 2(x+10)$

$= (x+2)(x+10)$

எனவே, $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

$= (x+1)(x+2)(x+10)$

எடுத்துக்காட்டு 3.29 $x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

தீர்வு

$p(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ என்க.

$x = 1$ எனில் $p(1) = 1 - 5 - 2 + 24 = 18 \neq 0$ $(x-1)$ ஒரு காரணியல்ல.

$x = -1$ எனில் $p(-1) = -1 - 5 + 2 + 24 = 20 \neq 0$ $(x+1)$ ஒரு காரணியல்ல.

ஆகவே, மற்ற x இன் காரணிகளைக் காண முயன்று தவறிக் கற்றல் (trial and error method) முறையைப் பயன்படுத்தவும்.

$x = 2$ எனில்,

$p(2) = 2^3 - 5(2)^2 - 2(2) + 24$

$= 8 - 20 - 4 + 24$

$= 8 \neq 0$

ஆகவே, $(x-2)$ ஒரு காரணியல்ல

குறிப்பு

$x^2 - 7x + 12$ இற்கு 3 ஆனது ஒரு பூச்சியமா என சோதிக்கும்போது, 3 ஒரு பூச்சியமில்லை எனில், -3 அல்லது 4 அல்லது, -4 … பூச்சியமா என சோதிக்க.

$x = -2$ எனில்,

$p(-2) = \left(-2\right)^3 - 5(-2)^2 - 2(-2) + 24$

$= -8 - 20 + 4 + 24$

$p(-2) = 0$

ஆகவே, $(x+2)$ ஒரு காரணியாகும்

-2	1	-5	-2	24	
	0	-2	$+14$	-24	
3	1	-7	12	0	(மீதி)
	0	3	-12		
	1	-4	0	(மீதி)	

எனவே, $(x+2)(x-3)(x-4)$ ஆகியன காரணிகள்.

எனவே, $x^3 - 5x^2 - 2x^2 + 24 = (x+2)(x-3)(x-4)$

பயிற்சி 3.7

1. தொகுமுறை வகுத்தல் முறையினைப் பயன்படுத்திக் காரணிப்படுத்துக:

(i) $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ (ii) $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

(iii) $4x^3 - 5x^2 + 7x - 6$ (iv) $-7x + 3 + 4x^3$

(v) $x^3 + x^2 - 14x - 24$ (vi) $x^3 - 7x + 6$

(vii) $x^3 - 10x^2 - x + 10$ (viii) $x^3 - 5x + 4$

பயிற்சி 3.8

AKC3GH

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. $p(a) = 0$ எனில், $(x-a)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு ____________

(1) வகுத்தி (2) ஈவு (3) மீதி (4) காரணி

2. $(2-3x)$இன் பூச்சியம் ____________

(1) 3 (2) 2 (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{3}{2}$

3. $x-1$ என்பது ____________ இன் ஒரு காரணி.

(1) $2x-1$ (2) $3x-3$ (3) $4x-3$ (4) $3x-4$

4. $x-3$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி எனில், மீதி ______

(1) 3 (2) –3 (3) $p(3)$ (4) $p(-3)$

5. $(x+y)(x^2-xy+y^2)$ = ______

(1) $(x+y)^3$ (2) $(x-y)^3$ (3) x^3+y^3 (4) x^3-y^3

6. $x-8$ என்பது $x^2-6x-16$ இன் ஒரு காரணி எனில், மற்றொரு காரணி ________ ஆகும்.

(1) $(x+6)$ (2) $(x-2)$ (3) $(x+2)$ (4) $(x-16)$

7. $(a+b-c)^2 =$ __________

(1) $(a-b+c)^2$ (2) $(-a-b+c)^2$ (3) $(a+b+c)^2$ (4) $(a-b-c)^2$

8. ax^2+bx+c என்ற இருபடிக் கோவையின் காரணிகளின் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கற்பலன் முறையே,

(1) a, bc (2) b, ac (3) ac, b (4) bc, a

9. ax^2+bx+c என்ற ஈருறுப்புக் கோவையின் காரணிகள் $(x+5)$ மற்றும் $(x-3)$ எனில், a, b மற்றும் c இன் மதிப்புகள் ________

(1) 1,2,3 (2) 1,2,15 (3) 1,2, −15 (4) 1, −2,15

10. முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு அதிகபட்சம் _____ நேரிய காரணிகள் இருக்கலாம்.

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

11. மாறிலிக் கோவையின் படி

(1) 3 (2) 2 (3) 1 (4) 0

12. இரண்டு பகா எண்களின் மீ.பொ. வ

(1) −1 (2) 0 (3) 1 (4) 2

13. (x^2-2x+7) ஐ $(x+4)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி

(1) 28 (2) 31 (3) 30 (4) 29

14. a^k, a^{k+1}, a^{k+5} இதில் $k \in N$ எனில், இவற்றின் மீ.பொ.வ

(1) a^k (2) a^{k+1} (3) a^{k+5} (4) 1

15. x^4-y^4 மற்றும் x^2-y^2 இன் மீ.பொ.வ

(1) x^4-y^4 (2) x^2-y^2 (3) $(x+y)^2$ (4) $(x+y)^4$

16. 36 ஒன்பதாம் வகுப்பு மாணவர்களையும், 48 பத்தாம் வகுப்பு மாணவர்களையும் கொண்டு விளையாட்டுத் திடலில் வகுப்பு வாரியாகவும், சம எண்ணிக்கையில் உள்ளவாறும் குறைந்த பட்சம் எத்தனை வரிசைகளில் மாணவர்களை நிறுத்த இயலும்?

(1) 12 (2) 144 (3) 7 (4) 72

நினைவு கூர்வதற்கான கருத்துகள்

காரணித் தேற்றம்

- $p(x)$ஐ $(x-a)$ ஆல் வகுத்து கிடைக்கும் மீதி $p(a)=0$ எனில், $(x-a)$ என்பது $p(x)$இன் ஒரு காரணியாகும்.

முற்றொருமைகள்

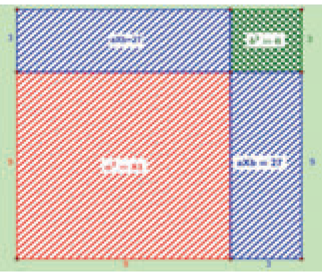
- $(a+b+c)^2 \equiv a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
- $(a+b)^3 \equiv a^3+b^3+3ab(a+b)$, $\quad a^3+b^3 \equiv (a+b)^3-3ab(a+b)$
- $(a-b)^3 \equiv a^3-b^3-3ab(a-b)$, $\quad a^3-b^3 \equiv (a-b)^3+3ab(a-b)$

பெருக்கல் முற்றொருமைகள்

- $a^3+b^3 \equiv (a+b)(a^2-ab+b^2)$
- $a^3-b^3 \equiv (a-b)(a^2+ab+b^2)$
- $a^3+b^3+c^3-3abc \equiv (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ac-bc-ca)$
- $x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc \equiv (x+a)(x+b)(x+c)$

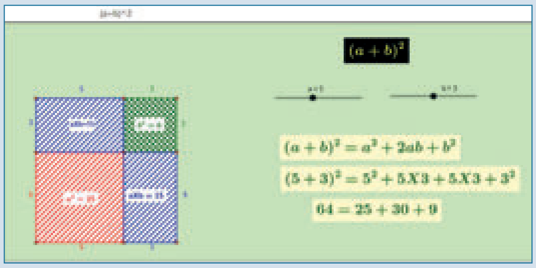
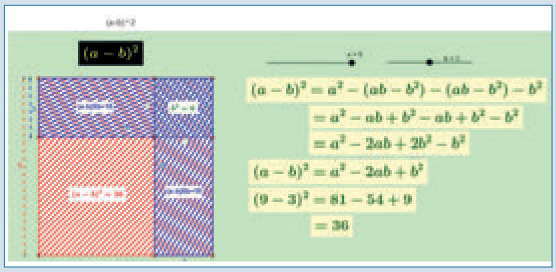
இணையச் செயல்பாடு

செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப்பெறுவது



படி – 1: கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra வின் "Algebraic Identities" என்னும் பணித்தாளின் பக்கத்திற்குச் செல்க. இப்பணித்தாளில் இயற்கணிதம் சார்ந்த பல செயல்பாடுகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். முதல் செயல்பாட்டில் $(a+b)^2$ இன் வரைபட அணுகுமுறை அளிக்கப்பட்டிருக்கும். கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் a மற்றும் b நழுவல்களை நகர்த்தி, பரப்பினைக் முற்றொருமைகளுடன் ஒப்பிடுக.

படி - 2: அதேபோன்று a மற்றும் b நழுவல்களை நகர்த்திப் பரப்பினையும் மீதமுள்ள முற்றொருமைகளையும் ஒப்பிடுக.

படி 1	படி 2
	

செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

Algebraic Identities: https://ggbm.at/PyUj657Y or Scan the QR Code.

B463_MAT_9_T2_TM

4 வடிவியல்

"கவிதையைப் போலவே, வடிவியலிலும் அகத்தூண்டல் அவசியமாகிறது"

– அலெக்ஸாண்டர் புஸ்கின்

AKKYIJ

யூக்ளிட்
(325 265 கி.மு. (பொ.ஆ.மு))

கிரேக்கக் கணிதமேதையான யூக்ளிட் 'வடிவியலின் தந்தை' என அழைக்கப்படுகிறார். இவருடைய "Elements" என்ற நூல் கணித வரலாற்றில் மிகச் சிறந்த பங்களிப்பை வழங்கியுள்ளது. இன்றளவும் இந்நூல் கணிதத்தில் வடிவியல் கற்பித்தலில் மிக முக்கியமான இடத்தைப் பெற்றுள்ளது. நாம் இப்போது பயன்படுத்தக் கூடிய யூக்ளிடியன் வடிவியல், எண்ணியல் கோட்பாடு ஆகியன இந்நூலிலிருந்து வருவிக்கப்பட்டுள்ளன.

கற்றல் விளைவுகள்

- வட்டத்தின் நாண்களின் மீதான தேற்றங்களைப் புரிந்து கொள்ளுதல், விளக்குதல் மற்றும் பயன்படுத்துதல்.
- வட்ட விற்கள் தாங்கும் கோணங்கள் மீதான தேற்றங்களைப் புரிந்து கொள்ளுதல், விளக்குதல் மற்றும் பயன்படுத்துதல்.
- வட்ட நாற்கரத்தின் மீதான தேற்றங்களைப் புரிந்து கொள்ளுதல், விளக்குதல் மற்றும் பயன்படுத்துதல்.
- கணக்குகளைத் தீர்ப்பதில் பொருத்தமான தேற்றங்களைப் பயன்படுத்துதல்.
- முக்கோணத்தின் உள்வட்டம் வரைந்து உள்வட்ட மையத்தைக் குறித்தல்.
- முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள் வரைந்து நடுக்கோட்டு மையத்தைக் குறித்தல்.

4.1 அறிமுகம்

வட்டங்கள் என்ற வடிவியல் உருவத்தை உங்களைச் சுற்றியுள்ள பொருள்களிலிருந்து பாருங்கள். வட்டத்தைப் பற்றிய கருத்துக்களை முழுவதுமாகப் புரிந்து கொண்டதன் விளைவாகச் சக்கரம் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. இது மனித குல வரலாற்றில் மிகப்பெரிய மாற்றத்தை ஏற்படுத்திய கண்டுபிடிப்பாகும்.

படம் 4.1

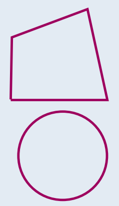
4.2 வட்டத்தின் பகுதிகள் (Parts of Circle)

ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து மாறாத தொலைவில் உள்ள புள்ளிகளின் கணமே ஒரு **வட்டம்** என விளக்கலாம். நிலையான புள்ளியானது அந்த வட்டத்தின் மையத்தையும் மாறாத தொலைவானது அந்த வட்டத்தின் **ஆரத்தையும்** குறிக்கும்.

ஒரு கோடு வட்டத்தை இரு புள்ளிகளில் வெட்டுமானால் அது அந்த வட்டத்தின் **வெட்டும்கோடு** என அழைக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு

ஒரு வட்டமானது பலகோணத்திலிருந்து வேறுபடுகிறது. ஒரு பலகோணம் (எடுத்துக்காட்டாக நாற்கரம்) பக்கங்கள் மற்றும் முனைகளை உடையது. அதே நேரத்தில் வட்டமானது எளிய சீரான வளைவரையாகும்.



படம் 4.2

ஒரு கோட்டுத்துண்டின் முனைப்புள்ளிகள் வட்டத்தின் மேல் அமையுமானால் அது அந்த வட்டத்தின் **நாண்** என அழைக்கப்படுகிறது.

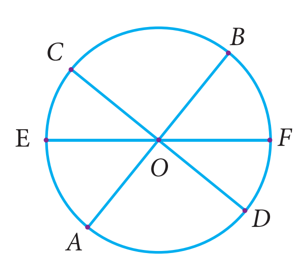
வட்ட மையத்தின் வழியே செல்லும் நாண் வட்டத்தின் **விட்டம்** என அழைக்கப்படுகிறது. வட்டத்தின் **பரிதி** என்பது அதன் எல்லையாகும். (பலகோணங்களில் இதற்கு நாம் சுற்றளவு என்ற சொல்லைப் பயன்படுத்துகிறோம்).

செயல்பாடு - 1

1. ஒரு பாட்டிலின் மூடியை அல்லது கண்ணாடிக் குவளையை தலைகீழாக வரைபட அட்டையில் (chart) வைக்கவும்.
2. எல்லையின் வெளிப்புறத்தைப் பிரதியெடுத்து, பொருளை அகற்றிவிட்டுப் பார்த்தால், வரைந்த வடிவம் ஒரு வட்டமாக இருக்கும். வட்டப் பகுதியை வெட்டி எடுக்கவும்.
3. வட்டத்தின் எல்லைகள் ஒன்றுடன் ஒன்று பொருந்துமாறு வட்டத்தை இரண்டாக மடிக்கவும். மடிப்பை நன்றாக அழுத்தி மடிப்புக் கோட்டை உருவாக்கவும். கோட்டின் எல்லைப் புள்ளிகளுக்கு A மற்றும் B எனப் பெயரிட்டு, AB என்ற கோட்டுத்துண்டை உருவாக்குக. இதே செயல்பாட்டை வேறு ஒரு நிலையில் இருந்து செய்க, முடிவுப் புள்ளிகளுக்கு C மற்றும் D எனப் பெயரிடவும். இந்த இரு கோட்டுத் துண்டுகளும் சந்திக்கும் புள்ளியை O எனப் பெயரிடவும். இதே முறையில் வெவ்வேறு நிலைகளில் வட்டத்தை மடிக்கும்பொழுது நீங்கள் உணர்வது என்ன? அனைத்துக் கோடுகளும் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகளா எனச் சிந்திக்கவும்.

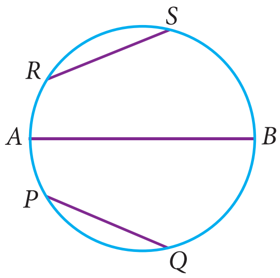
இந்தச் செயல்பாட்டில் இருந்து அனைத்துக் கோடுகளும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. அப்புள்ளியை வட்டத்தின் மையம் என்று அழைக்கின்றோம்.

கவையைப்பயன்படுத்தி வட்டத்தின் ஒவ்வொரு கோட்டுத்துண்டையும் அளக்கவும். நீங்கள் காண்பது என்ன? அனைத்துக் கோடுகளும் சமமாகவும், ஒவ்வொன்றும் வட்டத்தை இரண்டு சமப் பகுதிகளாகவும் பிரிப்பதைக் காணலாம். வட்டத்தை இரண்டு சமப் பாகங்களாகப் பிரிக்கும் கோட்டுத்துண்டு வட்டத்தின் விட்டம் என அழைக்கப்படும். வேறு வழியில் கூறுவதானால், இது வட்டத்தின் மேல் உள்ள இரண்டு புள்ளிகளை வட்ட மையம் வழியாக இணைக்கும். வட்டத்தின் விட்டமானது ஆரத்தின் இரு மடங்காகும்.



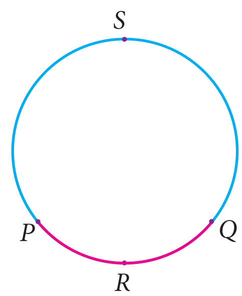
படம் 4.3

வட்டமான காகிதத்தை மையம் வழியாக மட்டுமல்லாமல் இயலும் வழிகளிலெல்லாம் மடிக்கும்பொழுது, (படம் 4.4) வட்டத்தின் மேல் இரு புள்ளிகளை அந்த மடிப்பு சந்திப்பதைக் காணலாம். இந்த மடிப்புகளை வட்டத்தின் நாண்கள் என அழைக்கின்றோம். இதுபோல வட்டத்தின் மேல் உள்ள இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டு, அந்த வட்டத்தின் நாண் என அழைக்கப்படுகிறது. படத்தில் AB, PQ மற்றும் RS என்பன வட்டத்தின் நாண்கள் ஆகும்.



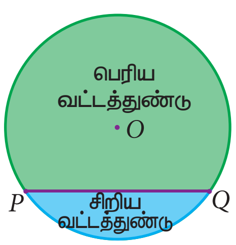
படம் 4.4

இப்பொழுது அதே வட்டத்தின் மேல் P, R, Q மற்றும் S (படம் 4.5) என்ற நான்கு புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். இங்கு PRQ மற்றும் QSP என்பன வட்டத்தின் தொடர்ச்சியான பகுதிகள் ஆகும். இந்தப் பகுதிகளை $\overparen{PRQ}$ மற்றும் $\overparen{QSP}$ அல்லது சுருக்கமாக $\overparen{PQ}$ மற்றும் $\overparen{QP}$ எனக் குறிக்கலாம். வட்டத்தின் தொடர்ச்சியான இந்தப் பகுதியானது வட்டத்தின் வில் என அழைக்கப்படுகிறது. பொதுவாக, விற்கள் கடிகார எதிர் திசையில் குறிக்கப்படுகிறது.



படம் 4.5

புள்ளிகள் P மற்றும் Q (படம் 4.6) ஆகியன முழு வட்டத்தை இரண்டு பகுதிகளாகப் பிரிக்கின்றன. ஒன்று நீளம் அதிகமானது மற்றொன்று நீளம் குறைவானது. நீளம் அதிகமானது பெரிய வில் $\overparen{QP}$ மற்றும் நீளம் குறைவானது சிறிய வில் $\overparen{PQ}$ என அழைக்கப்படுகிறது.



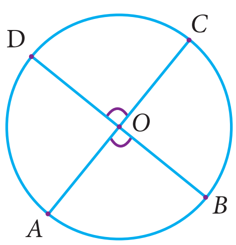
படம் 4.6

இப்பொழுது படம் 4.6 இல் நாண் PQ மற்றும் பெரிய வில் $\overparen{QP}$ ஆல் அடைபட்ட பகுதியைக் கருதினால், அது பெரிய வட்டத்துண்டு என அழைக்கப்படும். இதேபோல், அதே நாண் மற்றும் சிறிய வில்லால் அடைபட்ட பகுதி சிறிய வட்டத்துண்டு எனவும் அழைக்கப்படும்.

குறிப்பு

ஒரு வட்டத்தின் விட்டமானது,

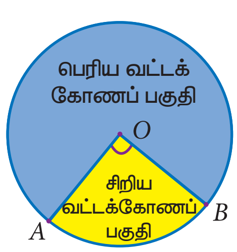
- வட்டத்தை இரு சம பாகங்களாகப் பிரிக்கும் ஒரு கோட்டுத்துண்டு.
- வட்டத்தின் மிக நீளமான நாண்.
- வட்டத்தின் ஒரு சமச்சீர் கோடு.
- ஆரத்தைப் போல இருமடங்கு நீளமுடையது.



படம் 4.7

வட்டத்தின் இரண்டு வில்கள் $\overparen{AB}$ மற்றும் $\overparen{CD}$ (படம் 4.7) ஆனது வட்ட மையத்தில் சமகோணங்களைத் தாங்கும் எனில், அவை ஒருங்கிசைவு வில்கள் எனப்படும். மேலும் அவற்றை, $\overparen{AB} \equiv \overparen{CD}$ என எழுதலாம். இதிலிருந்து, $m\overparen{AB} = m\overparen{CD}$ ஆகும். அதனால், $\angle AOB = \angle COD$

இங்கு, படம் 4.8இல் இரண்டு ஆரங்கள் மற்றும் வில்லால் அடைபடும் பகுதியை வட்டக்கோணப்பகுதி எனலாம். வட்டத் துண்டைப் போலவே, சிறிய வில்லானது சிறிய வட்டக் கோணப் பகுதியையும், பெரிய வில்லானது பெரிய வட்டக் கோணப் பகுதியையும் குறிப்பதைக் காணலாம்.



படம் 4.8

பொது மைய வட்டங்கள் (Concentric Circles)

ஒரே மையத்தையும் வெவ்வேறு ஆரங்களையும் உடைய வட்டங்கள் பொது மைய வட்டங்கள் எனப்படும். அன்றாட வாழ்வில் நாம் காணும் சில எடுத்துக்காட்டுகள்:

ஒரு வில்வித்தை இலக்கு

ஒரு சுண்டாட்ட வில்லை

நீர் அலைகள்

படம் 4.9

சர்வசம வட்டங்கள் (Congruent Circles)

இரண்டு வட்டங்கள் சர்வசமம் எனில், ஒன்று மற்றொன்றின் நகலாக இருக்கும் அல்லது ஒன்றுபோல் இருக்கும். அதாவது, அவை ஒரே அளவுடையவை. அன்றாட வாழ்வில் நாம் காணும் சில எடுத்துக்காட்டுகள்:

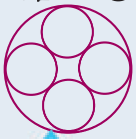
ஒரே மாட்டு வண்டியின் இரு சக்கரங்கள்

ஒலிம்பிக் வளையங்கள்

படம் 4.10

சிந்தனைக் களம்

படத்தில் உள்ளதுபோல், நான்கு சர்வசம வட்டங்கள் வரைக. நீங்கள் அறிவது என்ன?



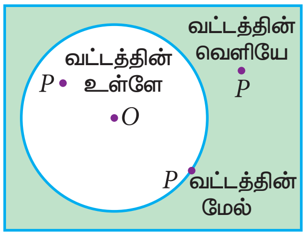
வட்டத்தைப் பொறுத்து ஒரு புள்ளி அமையும் நிலை (Position of a point with respect to a circle)

ஒரு தளத்தில் ஒரு வட்டத்தை எடுத்துக்கொண்டு (படம் 4.11) வட்டம் அமைந்துள்ள தளத்தில் புள்ளி P ஐக் கருதுக. வட்ட மையம் O விலிருந்து புள்ளி Pக்கு உள்ள தூரம் OP எனில், P இன் அமைவிடமானது,

(i) $OP =$ ஆரம் (புள்ளி, வட்டத்தின் மேல் உள்ளது.)

(ii) $OP <$ஆரம் (புள்ளி, வட்டத்தின் உள்ளே உள்ளது.)

(iii) $OP >$ ஆரம் (புள்ளி, வட்டத்தின் வெளியே உள்ளது.)



படம் 4.11

எனவே, ஒரு வட்டமானது அது அமைந்திருக்கும் தளத்தை மூன்று பகுதிகளாகப் பிரிக்கிறது.

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

சரியா, தவறா எனக் கூறுக

1. ஒவ்வொரு வட்ட நாணும் சரியாக வட்டத்தின் இரு புள்ளிகளைக் கொண்டிருக்கும்.
2. வட்டத்தின் அனைத்து ஆரங்களும் ஒரே நீளமுடையவை.
3. வட்டத்தின் ஒவ்வோர் ஆரமும் ஒரு நாணாகும்.
4. வட்டத்தின் ஒவ்வொரு நாணும் ஒரு விட்டமாகும்.
5. வட்டத்தின் ஒவ்வொரு விட்டமும் ஒரு நாணாகும்.
6. ஒரு வட்டத்திற்கு எத்தனை விட்டங்கள் வேண்டுமானாலும் இருக்க இயலும்.
7. இரு விட்டங்கள் ஒரே முனைப் புள்ளிகளைப் பெற்றிருக்க முடியாது.
8. ஒரு வட்டமானது தளத்தை மூன்று வெவ்வேறு பகுதிகளாகப் பிரிக்கிறது.
9. ஒரு வட்டத்தை ஒரு பெரிய வட்ட வில், ஒரு சிறிய வட்ட வில் எனப் பிரிக்கலாம்.
10. வட்ட மையத்திலிருந்து பரிதிக்கு உள்ள தொலைவு விட்டம் ஆகும்.

சிந்தனைக் களம்

1. ஒரு வட்டத்திற்கு எத்தனை பக்கங்கள் உள்ளன.
2. வட்டம் ஒரு பலகோணமா?

பயிற்சி 4.1

1. கோடிட்ட இடங்களை நிரப்புக :

   (i) ஆரத்தின் இரு மடங்கானது வட்டத்தின் ____________ என அழைக்கப்படுகிறது.

   (ii) மிக நீளமான நாண் வட்டத்தின் ____________ வழியே செல்லும்.

   (iii) வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து அதன் பரிதியின் எந்தவொரு புள்ளிக்கும் இடைப்பட்ட தூரம் ____________ என அழைக்கப்படுகிறது.

   (iv) வட்டத்தின் எவையேனும் இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட ஒரு பகுதி வட்டத்தின் ____________ ஆகும்.

   (v) வட்டமானது தளத்தை ____________ பகுதிகளாகப் பிரிக்கும்.

2. சரியா அல்லது தவறா என எழுதி அதற்கு காரணம் தருக.

   (i) வட்டத்தின் மேலுள்ள இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டானது வட்டத்தின் ஆரம் என அழைக்கப்படுகிறது.

   (ii) ஒரு வட்டத்திலுள்ள அனைத்து விட்டங்களின் ஒருங்கமைவுப் புள்ளி அவ்வட்டத்தின் மையமாகும்.

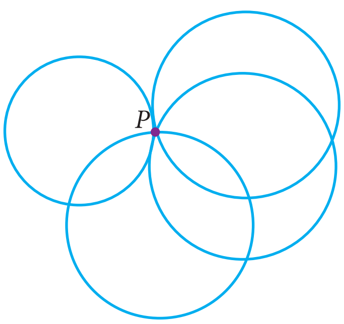
   (iii) வட்டத்தின் எல்லை வட்டப்பரிதி என அழைக்கப்படுகிறது.

(iv) ஒரு வட்டமானது எண்ணற்ற சமமான நாண்களைப் பெற்றிருக்கும்.

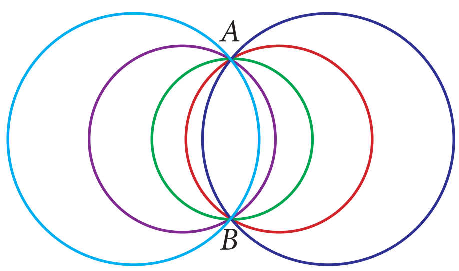
(v) வட்டக்கோணப்பகுதி என்பது நாணிற்கும் அதன் ஒத்த வில்லிற்கும் இடைப்பட்ட பகுதியாகும்.

4.3 மூன்று புள்ளிகள் வழியே செல்லும் வட்டம் (Circle Through Three Points)

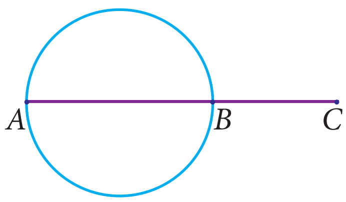
இரு புள்ளிகள் வழியே ஒரே ஒரு கோடுதான் வரைய முடியும் என்பதை நாம் முன்பே கற்றுள்ளோம். இதுபோன்று ஒரு புள்ளி வழியே மற்றும் இரண்டு புள்ளிகள் வழியே எத்தனை வட்டங்கள் வரைய இயலும் என்பதை நாம் கற்க இருக்கின்றோம். கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி P வழியேயும் (படம் 4.12) இரண்டு புள்ளிகள் A, B வழியேயும் (படம் 4.13) எண்ணற்ற வட்டங்கள் வரைய இயலும் என்பதை நம்மால் பார்க்க முடிகிறது.



படம் 4.12



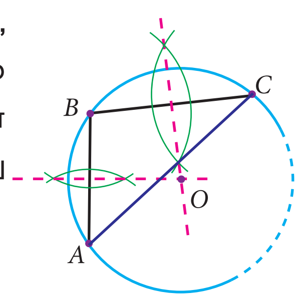
படம் 4.13



படம் 4.14

இப்பொழுது ஒரே கோட்டிலமையும் மூன்று புள்ளிகள் A, B மற்றும் C (படம் 4.14) ஐ எடுத்துக்கொள்வோம். இந்தப் புள்ளிகள் வழியே ஒரு வட்டம் வரைய நம்மால் இயலுமா? இதைச் சிந்திக்கும்பொழுது, புள்ளிகள் ஒரு கோடமைவன எனில் நம்மால் வட்டம் வரைய இயலாது !

மூன்று புள்ளிகளும் ஒரு கோட்டில் அமையாத புள்ளிகள் எனில், அவை ஒரு முக்கோணத்தை அமைக்கும் (படம் 4.15). சுற்றுவட்டம் வரைதலை நினைவு கூர்ந்தால், பக்கங்களின் மையக்குத்துக் கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியானது சுற்றுவட்ட மையம் எனவும் அந்த வட்டமானது சுற்றுவட்டம் எனவும் அழைக்கப்படும்.



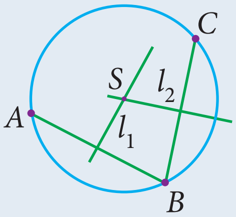
படம் 4.15

இதிலிருந்து A, B மற்றும் C வழியாக ஒரேயொரு வட்டம்தான் செல்கிறது என்பது தெளிவாகிறது. இந்தக் கூற்றானது பின்வரும் முடிவிற்கு அழைத்துச் செல்கிறது.

தேற்றம் 1 ஒரே கோட்டில் அமையாத மூன்று புள்ளிகள் வழியே ஒரே ஒரு வட்டம்தான் வரைய இயலும்.

செயல்பாடு - 2

ஒரே கோட்டில் அமையாத மூன்று புள்ளிகள் A, B மற்றும் C ஐ எடுத்துக்கொள்வோம். இந்த மூன்று புள்ளிகள் வழியே எத்தனை வட்டங்கள் வரைய இயலும்?



படம் 4.16

1. வரைபடத்தாளை ABஇன் வழியே செல்லுமாறு மடித்துக் கோட்டுத் துண்டை உருவாக்குக.
2. A ஆனது B இன் மீது பொருந்துமாறு AB ஐ மடித்து அதை நன்றாக அழுத்தி AB இக்கு மையக்குத்துக் கோடு l_1 ஐ உருவாக்கவும்.
3. புள்ளிகள் B மற்றும் C இக்கு படிகள் 1 மற்றும் 2 ஐத் திரும்பச் செய்து மடிப்புக் கோடு l_2 வை உருவாக்கவும்.
4. மடிப்புக் கோடுகள் l_1 மற்றும் l_2 ஆனது S இல் சந்திக்கின்றன.
5. இப்பொழுது, S ஐ மையமாகவும் SA ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைக. அவ்வட்டமானது கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் A, B மற்றும் C வழியே செல்கிறதா?

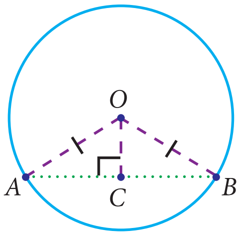
4.4 ஒரு வட்டத்தின் நாண்களின் பண்புகள் (Properties of Chords of a Circle)

கோடுகள், கோணங்கள், முக்கோணங்கள் மற்றும் நாற்கரங்களைப் பற்றி முன்பே அறிந்துள்ளோம். இவற்றுடன் வட்டம் என்ற புதிய கருத்தினை இணைத்துள்ளோம். இவற்றையெல்லாம் பயன்படுத்திச் சில நிரந்தர முடிவுகளை ஒன்றன் பின் ஒன்றாக பெற இருக்கின்றோம். இப்பொழுது நாம் வட்டத்தின் நாண்களை அடிப்படையாகக் கொண்டு சில பண்புகளை அறிய இருக்கின்றோம்.

தொடக்கமாக, ஒரு நாண் மற்றும் மையத்திலிருந்து நாணிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோட்டின் பண்பை காண இருக்கின்றோம்.

4.4.1 நாணிற்கு மையத்திலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்து (Perpendicular from the Centre to a Chord)

O-வை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தில் நாண் AB ஐ எடுத்துக்கொள்வோம். $OC \perp AB$ வரைக மற்றும் OA, OBஐ இணைக்க. இங்கு முக்கோணங்கள் ΔAOC மற்றும் ΔBOC ஐ எளிதாகப் பெறுகின்றோம். (படம் 4.17).



படம் 4.17

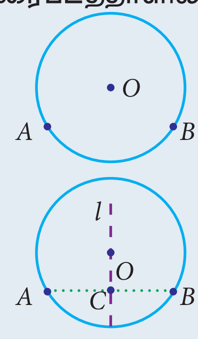
நம்மால் இந்த இரு முக்கோணங்களும் சர்வ சமமானவை என மெய்ப்பிக்க இயலுமா? இப்பொழுது, முன்பே கற்றுள்ள சர்வ சம முக்கோணங்களுக்கான பண்புகளைப் பயன்படுத்தி இதனை நிறுவலாம். $\angle OCA = \angle OCB = 90^\circ (OC \perp AB)$ மற்றும் $OA = OB$ ஆனது வட்டத்தின் ஆரங்கள். பக்கம் OC பொதுவானது. செ–க–ப விதி நமக்குக் கூறுவது ΔAOC மற்றும் ΔBOC சர்வ சமமானவை. இதிலிருந்து நாம் அறிவது $AC = BC$. இந்த விவாதத்தின் மூலம் நாம் பின்வரும் முடிவைப் பெறுகிறோம்.

தேற்றம் 2 ஒரு வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து ஒரு நாணிற்கு வரையப்படும் செங்குத்து அந்த நாணை இரு சமக் கூறிடும்.

தேற்றம் 2இன் மறுதலை ஒரு வட்டத்தின் மையத்தையும் ஒரு நாணின் நடுப்புள்ளியையும் இணைக்கும் கோடு அந்த நாணிற்குச் செங்குத்தாகும்.

செயல்பாடு - 3

1. O ஐ மையமாகக் கொண்டு ஏதேனும் ஆரமுடைய ஒரு வட்டத்தை வரைபடத்தாளில் அல்லது காகிதத்தில் வரையவும்.
2. வட்டத்தை வெட்டி எடுத்து, அவ்வட்டத்தின் மேல் புள்ளிகள் A மற்றும் B ஐக் குறிக்கவும்.
3. புள்ளிகள் A, B ஐ இணைக்கும் கோட்டின் வழியே A மற்றும் B ஐச் சரியாக மடித்து AB என்ற மடிப்புக் கோட்டுத் துண்டை உருவாக்கவும்.
4. B ஐ BA கோட்டுத் துண்டின் மீதே செல்லுமாறு A இன் மீது பொருந்தும் வரை நகர்த்தி மீண்டும் ஒரு மடிப்புக் கோட்டுத்துண்டை உருவாக்கவும்.

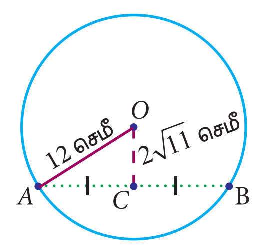


படம் 4.18

5. இந்த மடிப்பு கோட்டுத்துண்டு l ஆனது AB இக்கு மையக் குத்துக் கோடாக இருக்கும். மேலும் அது AB ஐ C இல் சந்திக்கும்.
6. AC மற்றும் BC சமமா? உங்கள் முடிவு என்ன?

எடுத்துக்காட்டு 4.1

ஆரம் 12 செமீ உள்ள வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து $2\sqrt{11}$ செமீ தொலைவில் உள்ள நாணின் நீளம் காண்க.



படம் 4.19

தீர்வு

நாண் AB மற்றும் AB இன் நடுப்புள்ளி C என்க.

ஆகையால், $OC \perp AB$,

OA மற்றும் OCயை இணைக்க. ஆரம் OA.

$OC = 2\sqrt{11}$ செமீ மற்றும் $OA = 12$செமீ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

செங்கோண ΔOAC இல் பிதாகரஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த,

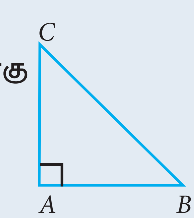
$$AC^2 = OA^2 - OC^2$$
$$= 12^2 - (2\sqrt{11})^2$$
$$= 144 - 44$$
$$= 100\text{செமீ}$$
$$AC^2 = 100\text{செமீ}$$
$$AC = 10\text{செமீ}$$

ஆகவே, நாண் AB இன் நீளம் $= 2AC$

$$= 2 \times 10\text{செமீ}$$
$$= 20\text{செமீ}$$

குறிப்பு

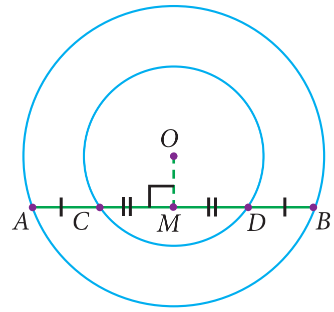
பிதாகரஸ் தேற்றம் : வடிவியலில் பிதாகரஸ் தேற்றம் மிக முக்கியமான மற்றும் நன்கு அறிந்த தேற்றங்களில் ஒன்றாகும். "ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணத்தின் வர்க்கமானது மற்ற இரு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம்." செங்கோண ΔABC இல் $BC^2 = AB^2 + AC^2$. இத்தேற்றத்தின் பயன்பாடு இந்த அலகில் மிகவும் பயனுள்ளதாக இருக்கும்



9th Maths T-II TM.indb 83 11-08-2018 18:19:34

எடுத்துக்காட்டு 4.2 பொது மைய வட்டங்களில், வெளி வட்டத்தின் நாண் AB ஆனது உள் வட்டத்தைப் படத்தில் உள்ளவாறு C மற்றும் D இல் சந்திக்கின்றது எனில், $AB-CD=2AC$ என நிறுவுக.

தீர்வு



படம் 4.20

கொடுக்கப்பட்டவை : வெளி வட்டத்தின் நாண் AB ஆனது உள் வட்டத்தை C மற்றும் Dஇல் சந்திக்கின்றது.

நிறுவ வேண்டியது : $AB-CD=2AC$

அமைப்பு : $OM \perp AB$ வரைக

மெய்ப்பித்தல் : இங்கு, $OM \perp AB$

மேலும், $OM \perp CD$

ஆகவே, $AM = MB$ ... (1)

(ஏனெனில், மையத்திலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்து நாணை இருசமக் கூறிடும்)

$CM = MD$ ... (2)

இப்பொழுது, $AB - CD = 2AM - 2CM$

$= 2(AM - CM)$ (1) மற்றும் (2) இலிருந்து

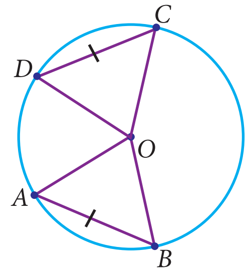
$AB - CD = 2AC$

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

1. வட்டத்தின் ஆரம் 25செமீ மற்றும் ஒரு நாணின் நீளம் 40 செமீ எனில் வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து நாணிற்கு உள்ள தூரம் காண்க.
2. $PQ=4$ செமீ உள்ளவாறு புள்ளிகள் P மற்றும் Q இன் வழியே மூன்று வட்டங்கள் வரைக.

4.4.2 நாண் மையத்தில் தாங்கும் கோணம் (Angle Subtended by Chord at the Centre)

ஒரு நாணிற்குப் பதிலாக நாம் இரு சமமான நாண்களை எடுத்துக்கொள்வோம். இப்பொழுது நாம் மற்றொரு பண்பை விவாதிக்க இருக்கின்றோம்.



படம் 4.21

Oவை மையமாக உடைய வட்டத்தில் இரண்டு சமமான நாண்களை எடுத்துக்கொள்வோம். நாணின் முனைகளை மையத்துடன் இணைத்து, நாம் முக்கோணங்கள் ΔAOB மற்றும் ΔOCD ஐ பெறுகின்றோம். இதில் நாண் AB = நாண் CD (ஏனெனில் கொடுக்கப்பட்ட நாண்கள் சமமானவை). மற்ற பக்கங்கள் ஆரங்கள், எனவே $OA=OC$ மற்றும் $OB=OD$. ப–ப–ப (SSS) விதிப்படி முக்கோணங்கள் சர்வசமமானவை. அதாவது $\Delta OAB \equiv \Delta OCD$. இதிலிருந்து, $m\angle AOB = m\angle COD$. இது பின்வரும் முடிவிற்கு அழைத்துச் செல்கிறது.

தேற்றம் 3 வட்டத்தின் சம நாண்கள் வட்ட மையத்தில் சமகோணங்களைத் தாங்கும்.

செயல்பாடு - 4

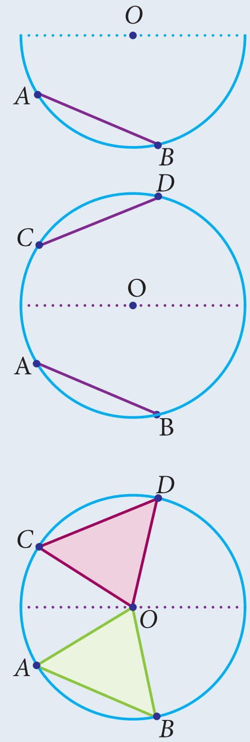
AKUUK7

வழிமுறை

1. O ஐ மையமாகக் கொண்டு ஏதேனும் ஆரத்தில் ஒரு வட்டம் வரைந்து, அதை வெட்டி எடுக்கவும்.
2. அதை மடித்து அரை வட்டம் உருவாக்குக. அதன் மேல் புள்ளிகள் A, B ஐ குறிக்கவும்.
3. அரை வட்டத்தில் AB இன் வழியே மடித்து, பின்பு பிரிக்கவும்.
4. நாம் மற்றோர் அரை வட்டத்தில், மேலும் ஒரு மடிப்பு கோட்டுத்துண்டைப் பெறுகின்றோம். அதை CD எனப் பெயரிடுவோம் $(AB = CD)$.
5. ஆரங்களை இணைத்து ΔOAB மற்றும் ΔOCD ஐ பெறுக.
6. படியெடுக்கும் தாளைப் பயன்படுத்தி, ΔOAB மற்றும் ΔOCD ஐப் படியெடுக்கவும்.
7. இந்த முக்கோணங்கள் ΔOAB மற்றும் ΔOCD ஐ ஒன்றின்மீது மற்றொன்றை வைக்கவும்.

உற்று நோக்குதல்

1. நீங்கள் அறிவது என்ன? $\Delta OAB \equiv \Delta OCD$ என்பது சரியா?
2. வட்ட மையம் O இலிருந்து நாண்கள் AB மற்றும் CD இக்குச் செங்குத்துக் கோடுகள் வரைக. வட்ட மையத்திலிருந்து நாணிற்கு உள்ள தூரத்தை அளக்க?

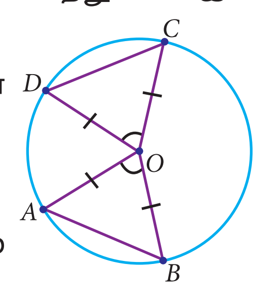


படம் 4.22

இப்பொழுது வட்ட மையத்தில் சம கோணங்களைத் தாங்கும் நாண்கள் AB மற்றும் CD இன் நீளங்களைக் காண்போம். அதாவது தேற்றம் (3) இலிருந்து $\angle AOB = \angle COD$ மேலும் ΔAOB மற்றும் ΔCOD இன் கோணங்களை உள்ளடக்கிய பக்கங்கள் ஆரங்களாகும்.

ப–கோ–ப (SAS) விதிப்படி, $\Delta AOB \equiv \Delta COD$.

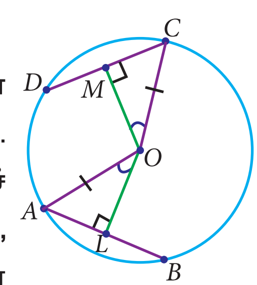
இதிலிருந்து நாண் AB = நாண் CD. இப்பொழுது நாம் மறுதலை முடிவைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்:



படம் 4.23

தேற்றம் 3 இன் மறுதலை வட்ட மையத்தில் சம கோணங்களைத் தாங்கும் இரு நாண்கள் எப்பொழுதும் சம நீளமுள்ளவை.

இதே வழியில் சம நாண்கள் கொடுக்கப்படும்பொழுது அவற்றின் மையத்திலிருந்து உள்ள தொலைவினை விவாதிக்க இருக்கின்றோம். $OL \perp AB$ மற்றும் $OM \perp CD$ வரைக. தேற்றம் (2)இலிருந்து, இந்தச் செங்குத்துக்கோடுகள் நாண்களைச் சமமாகப் பிரிக்கும். ஆகவே, $AL = CM$. ΔOAL மற்றும் ΔOCM ஐ ஒப்பிடும்பொழுது, கோணங்கள் $\angle OLA = \angle OMC = 90^\circ$ மற்றும் $OA = OC$ ஆரங்கள் ஆகும். செ–க–ப (RHS) விதிப்படி, $\Delta OAL \equiv \Delta OCM$. மையத்திலிருந்து உள்ள தொலைவு $OL = OM$ ஆகும். மேலும் முடிவைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.



படம் 4.24

தேற்றம் 4 வட்டத்தின் சம நாண்கள் வட்ட மையத்தில் இருந்து சம தொலைவில் இருக்கும்.

தேற்றம் 4 இன் மறுதலையும் கணக்குகளைத் தீர்க்க மிகவும் பயனுள்ளதாக இருப்பதால் அதையும் அறிவோம்.

தேற்றம் 4 இன் மறுதலை

வட்ட மையத்திலிருந்து சம தொலைவில் உள்ள நாண்கள் சம நீளமுள்ளவை.

பயிற்சி 4.2

1. வட்டத்தின் ஆரம் 25 செமீ மற்றும் ஒரு நாணின் நீளம் 40 செமீ எனில், மையத்திலிருந்து நாணிற்கு உள்ள தூரம் காண்க.
2. வட்டத்தின் விட்டம் 52 செமீ மற்றும் ஒரு நாணின் நீளம் 20 செமீ எனில், மையத்திலிருந்து நாணிற்கு உள்ள தூரம் காண்க.
3. வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 8 செமீ தொலைவில் 30 செமீ நீளமுள்ள நாண் வரையப்பட்டுள்ளது எனில், வட்டத்தின் ஆரம் காண்க.
4. ஆரம் $4\sqrt{2}$ செமீ உள்ள வட்டத்தில் AB மற்றும் CD என்ற ஒன்றுக்கு ஒன்று செங்குத்தான விட்டங்கள் வரையப்பட்டுள்ளன எனில், நாண் ACஇன் நீளம் காண்க. மேலும், $\angle OAC$ மற்றும் $\angle OCA$ காண்க.
5. ஆரம் 15 செமீ உள்ள வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 12 செமீ தொலைவில் அமைந்துள்ள நாணின் நீளம் காண்க.
6. Oஐ மையமாக உடைய வட்டத்தில் AB மற்றும் CD என்பன இரு இணையான நாண்கள் ஆகும். மேலும் ஆரம் 10 செமீ, $AB = 16$ செமீ மற்றும் $CD = 12$ செமீ எனில், இரு நாண்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவைத் தீர்மானிக்க.
7. 5 செமீ மற்றும் 3 செமீ ஆரமுள்ள இரு வட்டங்கள், இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. மேலும், அவற்றின் மையங்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு 4 செமீ எனில், பொது நாணின் நீளத்தைக் காண்க.

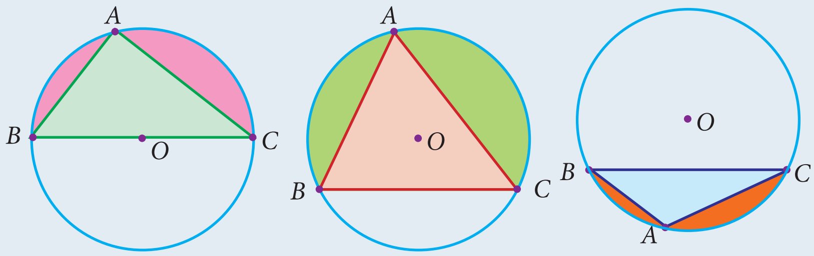
4.4.3 ஒரு வட்டவில் தாங்கும் கோணம் (Angle Subtended by an Arc of a Circle)

செயல்பாடு - 5

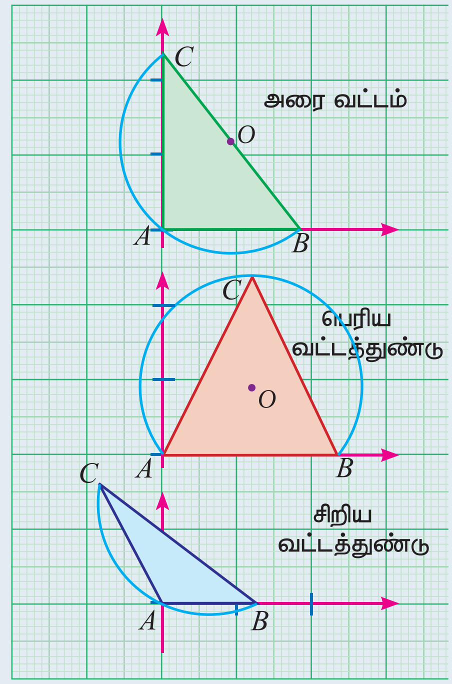
வழிமுறை :

1. O ஐ மையமாகக் கொண்டு வெவ்வேறு ஆர அளவுகளுடைய மூன்று வட்டங்களை வரைபடத்தாளில் வரைக.
2. இந்த வட்டங்களில் இருந்து அரைவட்டம், ஒரு சிறிய வட்டத்துண்டு மற்றும் ஒரு பெரிய வட்டத்துண்டுகளை வெட்டி எடுக்க.

3. அவற்றின் மேல் மூன்று புள்ளிகளைக் குறித்து அவற்றிற்கு A, B மற்றும் C எனப் பெயரிடுக.



படம் 4.25



படம் 4.26

4. முக்கோணங்களை வெட்டி எடுத்துப் படத்தில் காட்டியுள்ளது போல் புள்ளி A ஆனது ஆதிப்புள்ளியில் பொருந்துமாறு வரைபடத்தாளில் ஒட்டுக.

உற்றுநோக்குதல் :

(i) அரைவட்டத்தில் அமையும் கோணம் ____________

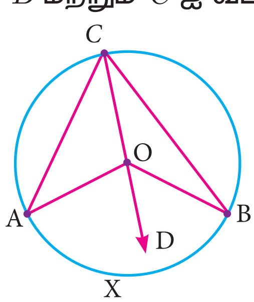
(ii) பெரிய வட்டத்துண்டில் அமையும் கோணம் ______

(iii) சிறிய வட்டத்துண்டில் அமையும் கோணம் ________

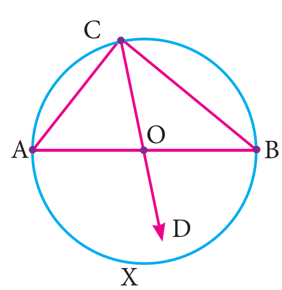
இப்பொழுது ஒரு வில்லானது வட்ட மையத்தில் தாங்கும் கோணத்திற்கும், வட்டப் பரிதியில் தாங்கும் கோணத்திற்கும் இடையேயுள்ள உறவைக் காண இருக்கின்றோம்.

4.4.4 மையம் மற்றும் பரிதியில் அமையும் கோணங்கள் (Angle at the Centre and the Circumference)

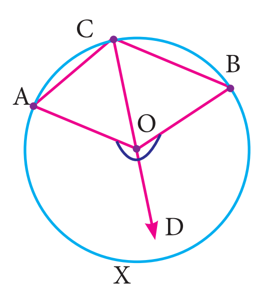
O வை மையமாகக் கொண்ட ஏதேனும் ஒரு வட்டத்தை எடுத்துக்கொள்வோம். இப்பொழுது புள்ளிகள் A, B மற்றும் C ஐ வட்டப் பரிதியில் குறிக்க.



படம் 4.27



படம் 4.28



படம் 4.29

இங்கு வில் $\overset{\frown}{AB}$ ஆனது சிறிய வில் (படம் 4.27), அரைவட்டம் (படம் 4.28) மற்றும் பெரிய வில் (படம் 4.29) என அமையும். மேலும் புள்ளி C ஆனது வில்களைப் பொறுத்து (படம் 4.27 முதல் 4.29 வரை) வெவ்வேறு வகையான கோணங்களைப் பெறும். மேலேயுள்ள அனைத்து வட்டங்களிலும் வில் $\overset{\frown}{AXB}$ மையத்தில் தாங்கும் கோணம் $\angle AOB$ ஆகும். மேலும் $\angle ACB$ ஆனது பரிதியில் தாங்கும் கோணம் ஆகும்.

நாம் மெய்ப்பிக்க வேண்டியது $\angle AOB = 2\angle ACB$.

இதற்காக, COவை D இக்கு நீட்டுக. மேலும் CD ஐ இணைக்க.

$\angle OCA = \angle OAC$ ஏனெனில், ($OA = OC$ ஆரங்கள்)

வெளிக்கோணம் = உள்ளெதிர் கோணங்களின் கூடுதல்.

$$\angle AOD = \angle OAC + \angle OCA$$
$$= 2\angle OCA \quad .... (1)$$

இதேபோல்,

$$\angle BOD = \angle OBC + \angle OCB$$
$$= 2\angle OCB \quad .... (2)$$

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து,

$$\angle AOD + \angle BOD = 2(\angle OCA + \angle OCB)$$

இறுதியாக நாம் அடையும் முடிவு $\angle AOB = 2\angle ACB$.

இதிலிருந்து பின்வரும் முடிவைப் பெறுகின்றோம்:

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

1. வேறுபட்ட அளவுள்ள வளையல்களின் எல்லைகளை வரைந்து அவை ஒவ்வொன்றின் மையத்தையும் மூலை மட்டங்களின் உதவியுடன் காண முயற்சி செய்க.
2. அளவுகோல் மற்றும் கவராயத்தைப் பயன்படுத்திக் கொடுக்கப்பட்ட பிறை நிலவை நகலெடுத்து முழு நிலவாக மாற்றுக.

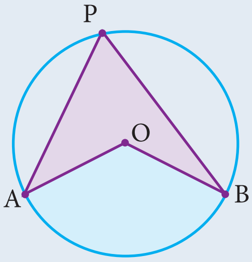
படம் 4.30

தேற்றம் 5

ஒரு வட்ட வில் மையத்தில் தாங்கும் கோணம் அந்த வில்லைத் தவிர்த்து வட்டத்தின் மீதிப் பரிதியில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் ஏற்படுத்தும் கோணத்தைப் போல் இருமடங்காகும்.

செயல்பாடு - 6

1. ஏதேனும் ஓர் ஆரத்தில் O வை மையமாகக் கொண்டு படத்தாளில் வட்டம் வரைக. (படம் 4.31)
2. புள்ளிகள் A மற்றும் B ஐ வட்டத்தின் மேல் எடுத்து வில் AB ஐப் பெறுக.
3. மையம் O வுடன் A, B ஐ இணைக்க. P என்பது வட்டத்தின் மற்றொரு பகுதியில் உள்ள புள்ளி என்க. புள்ளி P ஐப் புள்ளிகள் A மற்றும் B யுடன் இணைக்க.
4. படி எடுக்கும் தாளின் உதவியால் $\angle AOB$ ஐ மட்டும் வெட்டி எடுக்க. மேலும் இந்த வட்டக்கோணப் பகுதியை OA ஆனது OB இன் மேல் பொருந்துமாறு மடிக்க.
5. மடித்த காகிதத்தை வட்டப் பரிதியில் அமைந்துள்ள கோணம் $\angle APB$ இன் மீது OA ஆனது PA இன் மீது சரியாகப் பொருந்துமாறு வைக்க. நீங்கள் அறிவது என்ன?



படம் 4.31

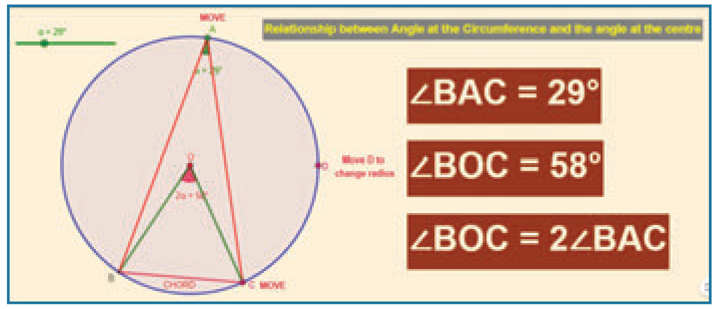
(i) $\frac{1}{2}\angle AOB$ இன் அளவு = ________ (ii) $\angle APB$ இன் அளவு = __________

குறிப்பு

- அரைவட்டத்தில் அமையும் கோணம் செங்கோணம்.
- வட்டத்தின் சம வில்கள் சமக் கோணங்களைத் தாங்கும்.

இணையச் செயல்பாடு

செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப்பெறுவது



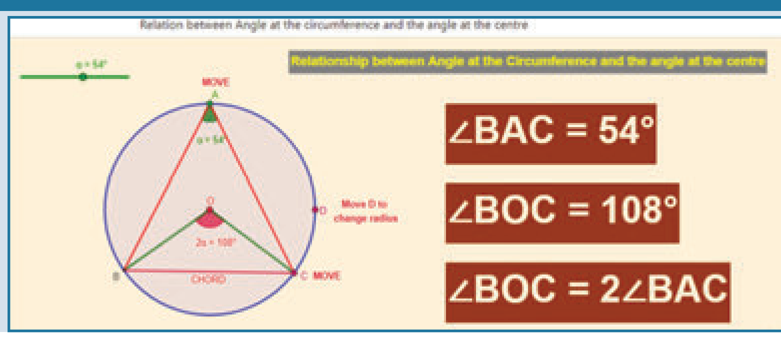
படி – 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra இன் "Angles in a circle" என்னும் பணித்தாளின் பக்கத்திற்குச் செல்க. இப்பணித்தாளில் வட்டம் குறித்த இரண்டு செயல்பாடுகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

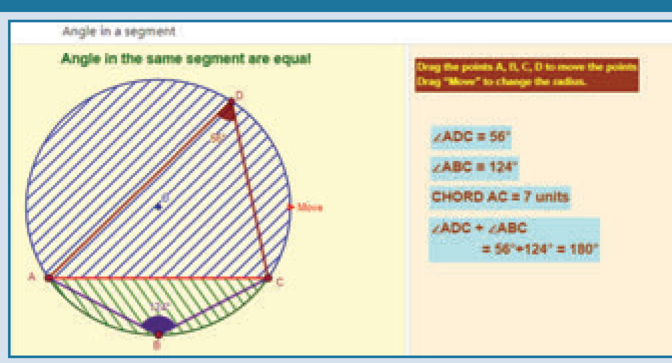
படி - 2

இரண்டாவது செயல்பாடு "Angles in the segment of a circle". B மற்றும் D புள்ளிகளை இழுத்து கோணங்களைச் சரிபார்க்க. மேலும் "Move" ஐக் கொண்டு வட்டத்தின் ஆரம் மற்றும் நாணின் நீளத்தை மாற்ற இயலும்.

படி 1



படி 2



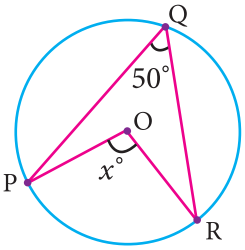
செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

Angle in a circle: https://ggbm.at/yaNUhv9S or Scan the QR Code.

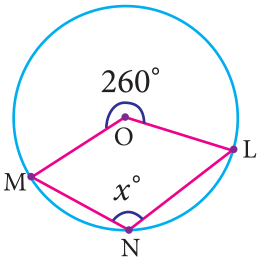
B463_MAT_9_T2_TM

எடுத்துக்காட்டு 4.3

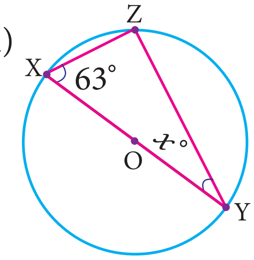
கீழ்க்காணும் படங்களில் x° இன் மதிப்பைக் காண்க.

(i) 

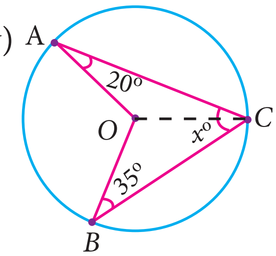
படம் 4.32

(ii) 

படம் 4.33

(iii) 

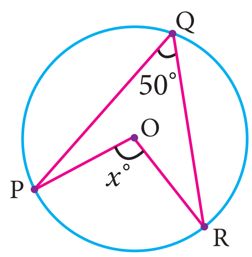
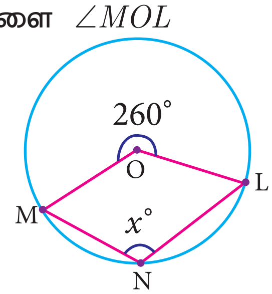
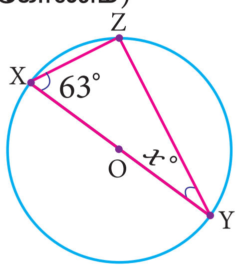
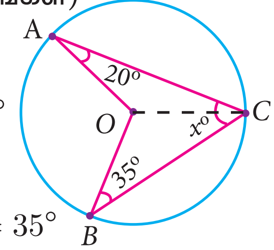
படம் 4.34

(iv) 

படம் 4.35

தீர்வு

ஒரு வட்டவில் மையத்தில் தாங்கும் கோணம் அந்த வில்லைத் தவிர்த்து வட்டத்தின் மீதிப் பரிதியில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் ஏற்படுத்தும் கோணத்தைப் போல் இரு மடங்காகும் என்ற தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துகின்றோம்.

(i) $\angle POR = 2\angle PQR$ $x^\circ = 2\times 50^\circ$ $x^\circ = 100^\circ$ 	(ii) $\angle MNL = \frac{1}{2}$ பின்வளை $\angle MOL$ $= \frac{1}{2}\times 260^\circ$ $x^\circ = 130^\circ$ 
(iii) XY ஆனது வட்டத்தின் விட்டம். எனவே, $\angle XZY = 90^\circ$ (அரை வட்டத்தில் அமையும் கோணம்) ΔXYZ இல் $x^\circ + 63^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ $x^\circ = 27^\circ$ 	(iv) $OA = OB = OC$ (ஆரங்கள்) ΔOAC இல், $\angle OAC = \angle OCA = 20^\circ$ ΔOBC இல், $\angle OBC = \angle OCB = 35^\circ$  (சமமான பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள கோணங்கள் சமம்) $\angle ACB = \angle OCA + \angle OCB$ $x^\circ = 20^\circ + 35^\circ$ $x^\circ = 55^\circ$

எடுத்துக்காட்டு 4.4

படத்தில் (படம் 4.36) வட்ட மையம் O மற்றும் $\angle ABC = 30^\circ$ எனில், $\angle AOC$ ஐக் காண்க.

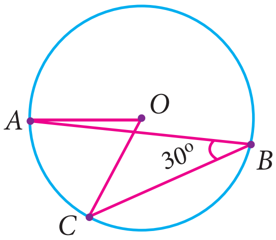
தீர்வு

$\angle ABC = 30^\circ$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$\angle AOC = 2\angle ABC$ (ஏனெனில், வட்டத்தின் ஒரு வில்லானது மையத்தில் தாங்கும் கோணம் மீதிப் பரிதியில் தாங்கும் கோணத்தின் இருமடங்காகும்)

$= 2\times 30^\circ$

$= 60^\circ$

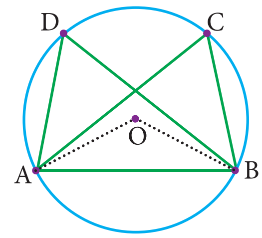


படம் 4.36

இப்பொழுது, நாம் மற்றொரு சிறப்பான தேற்றத்தைப் பார்க்கலாம். சிறிய வில்லானது விரிகோணத்தையும், பெரிய வில்லானது குறுங்கோணத்தையும் மற்றும் அரை வட்டமானது செங்கோணத்தையும் பரிதியில் தாங்கும் என்பதைக் கற்றிருக்கிறோம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள நாண் AB, புள்ளிகள் C மற்றும் D ஆகியவை வட்டப் பரிதியின் வெவ்வேறு இடங்களில் உள்ள புள்ளிகள் என்போம். நாம், $\angle ACB$ மற்றும் $\angle ADB$ ஐக் காண்போம். இந்தக் கோண அளவுகளுக்கிடையே ஏதேனும் வேறுபாடு உள்ளதா?

4.4.5 ஒரே வட்டத்துண்டு பரிதியில் தாங்கும் கோணங்கள் (Angles at the Circumference to the same Segment)

O வை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தில் வட்டத்துண்டு AB ஐ எடுத்துக்கொள்க. புள்ளிகள் C மற்றும் D ஆனது வட்டப் பரிதியின் மேல் உள்ள புள்ளிகள் ஆகும். ஆரங்கள் OA மற்றும் OB ஐ இணைக்க.



படம் 4.37

$$\frac{1}{2}\angle AOB = \angle ACB \quad \text{(தேற்றம் 5 இலிருந்து)}$$

மற்றும் $$\frac{1}{2}\angle AOB = \angle ADB \quad \text{(தேற்றம் 5 இலிருந்து,)}$$

$$\angle ACB = \angle ADB$$

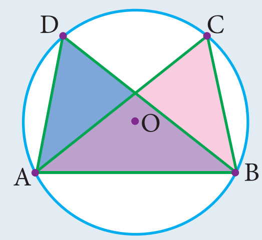
இந்த முடிவானது புதிய தேற்றத்தைத் தருவிக்கின்றது.

தேற்றம் 6 ஒரே வட்டத்துண்டில் அமையும் கோணங்கள் சமம்.

AL4QLU

செயல்பாடு - 7

வழிமுறை :

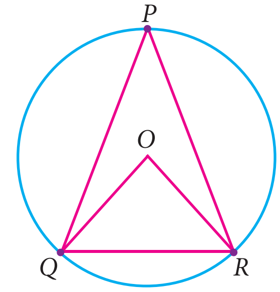


படம் 4.38

1. வரைபடத்தாளில் O வை மையமாகக் கொண்டு ஏதேனும் ஓர் ஆரத்தில் வட்டம் வரைக.
2. வட்டத்தின் மேல் A, B என்ற புள்ளிகளைக் குறித்து அவற்றை இணைத்துப் பெரிய வட்டத்துண்டு AB ஐப் பெறுக.
3. மீண்டும் இரு புள்ளிகள் C மற்றும் D ஐ அதே வட்டத் துண்டு AB இன் மீது குறிக்க.
4. $\angle ACB$ மற்றும் $\angle ADB$ ஐ வரைக.
5. படி (Trace) எடுக்கும் தாளைப் பயன்படுத்தி கோணங்கள் $\angle ACB$ மற்றும் $\angle ADB$ ஐ வரைக. அவற்றை வெட்டி எடுக்கவும்.
6. வெட்டி எடுக்கப்பட்ட கோணம் $\angle ACB$ ஐக் கோணம் $\angle ADB$ இன் மீது பொருத்துக.

   (i) நீங்கள் பார்ப்பது என்ன? (ii) $\angle ACB$ ஆனது $\angle ADB$ இன் மீது முழுமையாகப் பொருந்தியதா? (iii) பெரிய வட்டவில் AB இல் C, D இன் வெவ்வேறு நிலைகளுக்கும் இது பொருந்துமா? கலந்துரையாடவும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.5 கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் O ஆனது வட்டமையம், $\angle OQR = 48^\circ$ எனில், $\angle P$ இன் அளவு என்ன?



படம் 4.39

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டவை $\angle OQR = 48^\circ$.

எனவே, $\angle ORQ$ இன் அளவும் 48° (ஏன்?___________)

$\angle QOR = 180^\circ - (2 \times 48^\circ) = 84^\circ$.

நாண் QR ஆனது மையத்தில் உருவாக்கும் கோணம் மீதிப் பரிதியில் உருவாக்கும் கோணத்தைப் போல் இருமடங்காகும்.

எனவே, $\angle QPR = \frac{1}{2} \times 84^\circ = 42^\circ$.

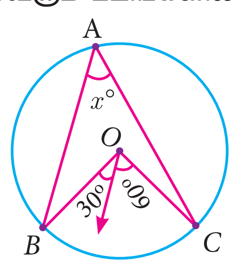
முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

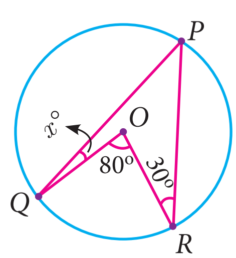
ஒரு வட்டத்தில்,

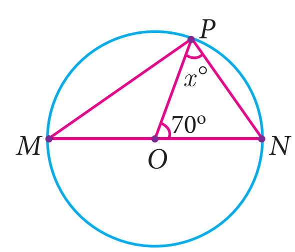
1. வட்டத்தின் மையத்தில் இருந்து நாணிற்கு வரையப்படும் செங்குத்து, நாணை _________
2. நாணின் நடுப்புள்ளியையும் வட்ட மையத்தையும் இணைக்கும் கோடு நாணிற்கு ___ஆகும்.
3. சம நாண்கள் வட்ட மையத்தில் ____________ கோணங்களைத் தாங்கும்.
4. வட்ட மையத்தில் சமகோணங்களைத் தாங்கும் நாண்கள் ____________
5. அரை வட்டத்தில் அமையும் கோணம் _________ ஆகும்.
6. வட்ட மையத்தில் தாங்கும் கோணம் ____________
7. வட்ட மையத்தில் அமையும் கோணம் வட்டப் பரிதியில் அமையும் கோணத்தின் _____ஆகும்.

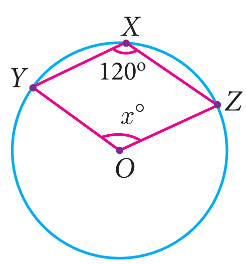
பயிற்சி 4.3

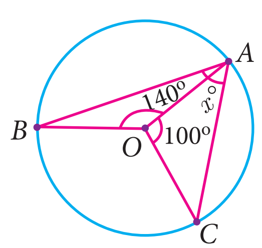
1. பின்வரும் படங்களில் x° இன் மதிப்பைக் காண்க.

(i)


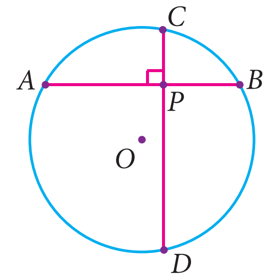
(ii)


(iii)


(iv)


(v)


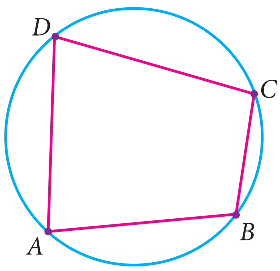
2. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில், $\angle CAB = 25^\circ$ எனில், $\angle BDC$, $\angle DBA$ மற்றும் $\angle COB$ காண்க.



4.5 வட்ட நாற்கரங்கள் (Cyclic Quadrilaterals)

இங்கு வட்ட நாற்கரம் என்ற சிறப்பு நாற்கரத்தையும் அதன் பண்புகளையும் பற்றி விவாதிக்க உள்ளோம். நாற்கரத்தின் நான்கு முனைகளும் வட்டத்தின் பரிதியைத் தொட்டுக் கொண்டு இருக்குமேயானால் அந்த நாற்கரம் வட்ட நாற்கரமாகும். இப்பொழுது வட்ட நாற்கரத்தின் சிறப்புப் பண்புகளைக் காணலாம்.

அனைத்து முனைகளும் வட்டத்தின் மீது அமைந்துள்ளவாறு நாற்கரம் $ABCD$ஐ எடுத்துக் கொள்க. நாம் இப்பொழுது எதிரெதிர்க் கோணங்கள் மிகைநிரப்புக் கோணங்கள் என மெய்ப்பிக்க வேண்டியுள்ளது. ஒவ்வொரு முனையையும் வட்டமையம் O உடன் இணைக்கவும். OA, OB, OC மற்றும் OD என்பன ஆரங்கள் ஆகும். இவற்றிலிருந்து நான்கு இருசமபக்க முக்கோணங்கள் OAB, OBC, OCD மற்றும் ODA ஆகியவற்றைக் காண்கிறோம். வட்டமையம் O வைச் சுற்றியுள்ள கோணங்களின் கூடுதல் 360°. ஒவ்வோர் இருசமபக்க முக்கோணங்களின் கோணங்களின் கூடுதல் 180°.



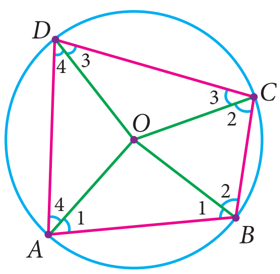
படம் 4.40

படத்திலிருந்து (படம் 4.41) நாம் பெறுவது,

$2\times(\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4)$ + மையம் O இல் அமையும் கோணம் $= 4\times 180^\circ$

$$2\times(\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4) + 360^\circ = 720^\circ$$

இதைச் சுருக்க, $(\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4) = 180^\circ$.



படம் 4.41

இதிலிருந்து நாம் காண்பது,

(i) $(\angle 1+\angle 2) + (\angle 3+\angle 4) = 180^\circ$ (எதிர்கோணங்கள் B மற்றும் D இன் கூடுதல்)

(ii) $(\angle 1+\angle 4) + (\angle 2+\angle 3) = 180^\circ$ (எதிர்கோணங்கள் A மற்றும் C இன் கூடுதல்)

இப்பொழுது முடிவுகள் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

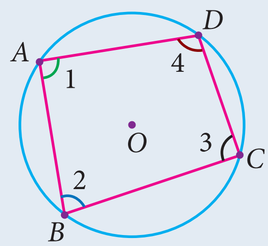
தேற்றம் 7 வட்ட நாற்கரத்தின் எதிர்கோணங்கள் மிகைநிரப்புக் கோணங்கள் ஆகும்.

தேற்றம் 7இன் மறுதலையும் கணக்குகளைத் தீர்ப்பதில் மிகவும் பயனுள்ளதாக இருப்பதால் அதையும் காண்போம்.

தேற்றம் 7இன் மறுதலை ஒரு நாற்கரத்தின் ஒரு சோடி எதிர்க்கோணங்கள் மிகைநிரப்புக் கோணங்கள் எனில் அந்த நாற்கரம் வட்ட நாற்கரமாகும்.

செயல்பாடு - 8

வழிமுறை



படம் 4.42

1. O வை மையமாகக் கொண்டு ஏதேனும் ஓர் ஆரத்தில் வட்டம் வரைக..
2. புள்ளிகள் A, B, C மற்றும் D ஐ அதன் எல்லைகளில் குறித்து வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ ஐ வரைக. அதன் கோணங்களுக்குப் படம் 4.42இல் உள்ளது போல் பெயரிடுக.
3. படி எடுக்கும் காகிதத்தைப் பயன்படுத்தி வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ ஐப் படியெடுக்க.
4. படம் 4.43 இல் காட்டியுள்ளவாறு கோணங்கள் A, B, C மற்றும் D ஐ வெட்டி எடுக்க
5. கோணங்கள் $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ மற்றும் $\angle 4$ ஐக் கோணங்கள் A, B, C மற்றும் D இன் அடுத்துள்ள கோணங்களாக அமையும்படி படம் 4.44 இல் காட்டியுள்ளவாறு ஒட்டுக.
6. கோணங்கள் $\angle 1 + \angle 3$ மற்றும் $\angle 2 + \angle 4$ ஆகியவற்றின் மதிப்பு காண்க.

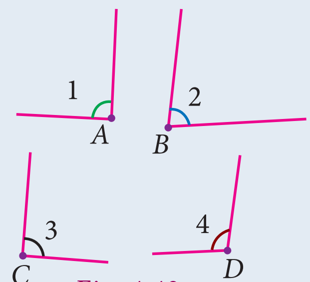
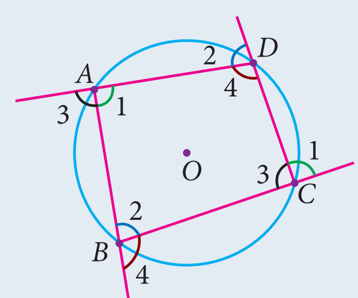


Fig. 4.43

உற்றுநோக்கிக் கீழ்க்காண்பவற்றை நிரப்புக:

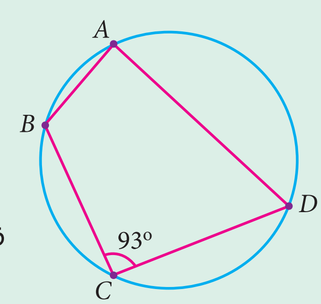


படம் 4.44

1. (i) $\angle A + \angle C =$ _____ (ii) $\angle B + \angle D =$ _____

   (iii) $\angle C + \angle A =$ _____ (iv) $\angle D + \angle B =$ _____
2. வட்ட நாற்கரத்தின் எதிர் எதிர் கோணங்களின் கூடுதல் ________.
3. வட்ட நாற்கரத்தின் ஒரு சோடி எதிர் கோணங்கள் ________.

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்



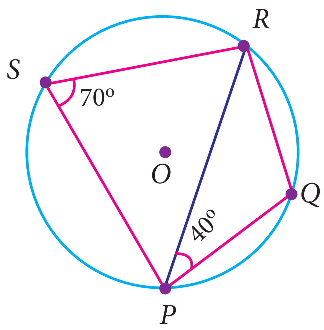
படம் 4.45

1. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் $\angle A$ இன் அளவு என்ன?.
2. செவ்வகம் ஒரு வட்ட நாற்கரமா?
3. எந்த ஓர் இணைகரமும் வட்ட நாற்கரமா?
4. வட்ட நாற்கரத்தின் ஒரு கோணம் செங்கோணம் எனில், அந்த நாற்கரத்தைப் பற்றி என்ன கூற இயலும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.6 வட்ட நாற்கரம் $PQRS$ இல் $\angle PSR = 70^\circ$ மற்றும் $\angle QPR = 40^\circ$ எனில், $\angle PRQ$ ஐக் காண்க (படம் 4.46 ஐப் பார்க்க).

தீர்வு

வட்ட நாற்கரம் $PQRS$ இல் $\angle PSR = 70^\circ$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது



படம் 4.46

$$\angle PSR + \angle PQR = 180^\circ \text{ (காரணம் கூறுக\_\_\_\_\_\_)}$$

$$70^\circ + \angle PQR = 180^\circ$$

$$\angle PQR = 180^\circ - 70^\circ$$

$$\angle PQR = 110^\circ$$

ΔPQR இல் நாம் பெறுவது,

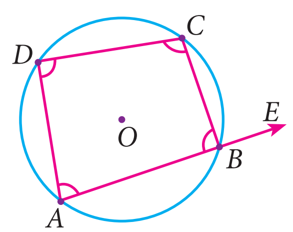
$$\angle PQR + \angle PRQ + \angle QPR = 180^\circ \quad \text{(காரணம் கூறுக\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)}$$

$$110^\circ + \angle PRQ + 40^\circ = 180^\circ$$

$$\angle PRQ = 180^\circ - 150^\circ$$

$$\angle PRQ = 30^\circ$$

ஒரு வட்ட நாற்கரத்தின் வெளிக்கோணம் (Exterior Angle of a Cyclic Quadrilateral)



படம் 4.47

ஒரு நாற்கரத்தின் வெளிக்கோணம் என்பது அதன் ஏதாவது ஒரு பக்கமும், அதன் அடுத்துள்ள பக்கத்தின் நீட்சியும் வெளியே உருவாக்கும் கோணம் ஆகும்.

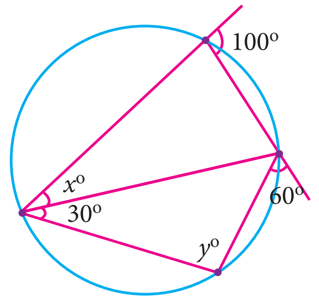
வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ இன் பக்கம் AB ஐ E வரை நீட்டுக. இங்கு, $\angle ABC$ மற்றும் $\angle CBE$ ஆகியன நேரிய கோணச் சோடிகள் ஆகும். இவற்றின் கூடுதல் 180° ஆகும். மேலும், $\angle ABC$ மற்றும் $\angle ADC$ ஆகியன வட்ட நாற்கரத்தின் எதிர் கோணங்கள், இவற்றின் கூடுதலும் 180° ஆகும். இவற்றில் இருந்து நாம் பெறுவது, $\angle ABC + \angle CBE = \angle ABC + \angle ADC$ ஆகவே $\angle CBE = \angle ADC$. இதேபோல் மற்ற கோணங்களுக்கும் நிறுவலாம்.

தேற்றம் 8 வட்ட நாற்கரத்தின் ஒரு பக்கத்தை நீட்டிப்பதால் ஏற்படும் வெளிக்கோணம் உள்ளெதிர் கோணத்திற்குச் சமம்.

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

1. ஒரு நாற்கரத்தின் ஒரு சோடி எதிர் கோணங்கள் மிகை நிரப்பிகள் எனில் அந்த நாற்கரம் _________ ஆகும்.
2. நாணின் நீளம் குறையும்பொழுது, மையத்திலிருந்து உள்ள தூரம் _________
3. வட்ட நாற்கரத்தின் ஒரு பக்கம் நீட்டப்பட்டால் உண்டாகும் வெளிக் கோணமானது உள்ளெதிர் கோணத்திற்கு _________
4. வட்ட நாற்கரத்தில் எதிர் கோணங்கள் _________

எடுத்துக்காட்டு 4.7 கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் கோணங்கள் x° மற்றும் y° இன் மதிப்பைக் காண்க.



படம் 4.48

தீர்வு

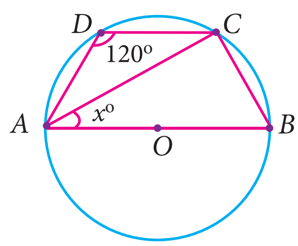
வட்ட நாற்கரத்தின் வெளிக் கோணங்களின் பண்பின்படி,

நாம் பெறுவது, $y^\circ = 100^\circ$ மேலும்,

$x^\circ + 30^\circ = 60^\circ$ ஆகையால், $x^\circ = 30^\circ$

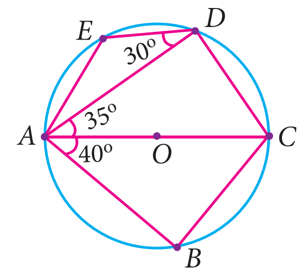
பயிற்சி 4.4

1. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் x° இன் மதிப்பு காண்க.

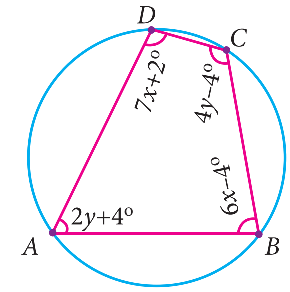


2. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் O வை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் விட்டம் AC. இங்கு, $\angle ADE = 30^\circ$; $\angle DAC = 35^\circ$ மற்றும் $\angle CAB = 40^\circ$ எனில்,

   (i) $\angle ACD$ (ii) $\angle ACB$ மற்றும் (iii) $\angle DAE$ காண்க.



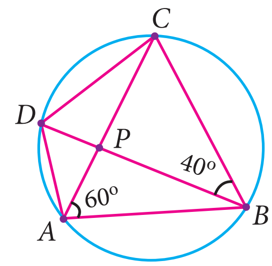
3. படத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ இன் அனைத்துக் கோணங்களையும் காண்க



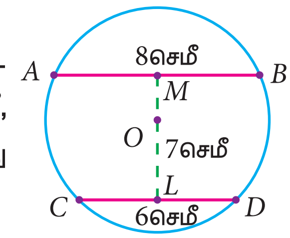
4. AB மற்றும் CD என்பன வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ இன் இணையான பக்கங்கள் மேலும் $AB = 10$ செமீ, $CD = 24$ செமீ மற்றும் வட்டத்தின் ஆரம் 13 செமீ பக்கங்கள் AB மற்றும் CD இக்கு இடையேயுள்ள குறைந்த தூரத்தைக் காண்க.

5. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ இன் விட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளி P மேலும், $\angle DBC = 40^\circ$ மற்றும் $\angle BAC = 60^\circ$ எனில்,

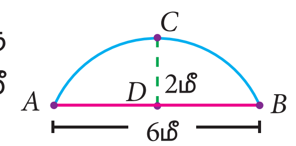
   (i) $\angle CAD$ (ii) $\angle BCD$ காண்க.



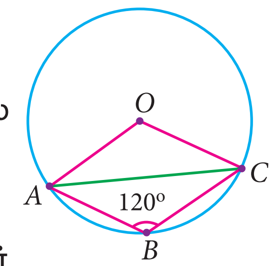
6. படத்தில் AB மற்றும் CD ஆனது O வை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் இரு இணையான நாண்கள். மேலும், $AB = 8$ செமீ, $CD = 6$ செமீ, $OM \perp AB$, $OL \perp CD$ இடைப்பட்ட தூரம் LM ஆனது 7 செமீ எனில், வட்டத்தின் ஆரம் காண்க?



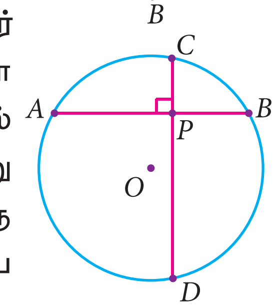
7. பாலத்தின் வளைவின் அளவுகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இங்கு வளைவின் அகலம் 6 மீ மற்றும் வளைவின் அதிகளவு உயரம் 2 மீ எனில், வளைவை உள்ளடக்கிய வட்டத்தின் ஆரம் என்ன?



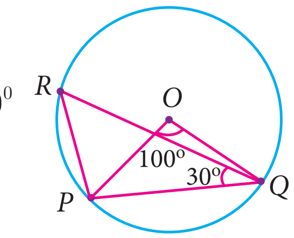
8. படத்தில் $\angle ABC = 120^0$, Oவை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் மேல் உள்ள புள்ளிகள் $A,\ B$ மற்றும் C எனில் $\angle OAC$ காண்க.



9. ஒரு பள்ளியில் மரம் நடும் விழா நிகழ்ச்சி நடக்கிறது. இதற்காக ஆசிரியர் ஒன்பதாம் வகுப்பு மாணவர்கள் மரக்கன்று நடுவதற்காக 6 மீ ஆரமுள்ள மைதானத்தை ஒதுக்குகின்றார். நான்கு மாணவர்கள் படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு $A,\ B,\ C$ மற்றும் D என்ற புள்ளிகளில் மரக்கன்று நடுகின்றனர். இங்கு $AB = 8$ மீ, $CD = 10$ மீ $AB \perp CD$ மற்றொரு மாணவர் AB மற்றும் CD வெட்டும் புள்ளியான Pஇல் பூந்தொட்டியை வைக்கின்றார் எனில், மையத்திலிருந்து P இக்கு உள்ள தூரம் காண்க.

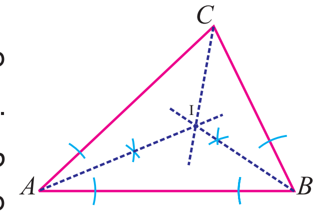


10. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில், $\angle POQ = 100^0$ மற்றும் $\angle PQR = 30^0$ எனில், $\angle RPO$ காண்க.



4.6 செய்முறை வடிவியல் (Constructions)

முதல் பருவத்தில் நாம் முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டம் மற்றும் செங்கோட்டு மையத்தைக் குறிப்பதற்குக் கற்றுக் கொண்டோம். இப்பொழுது நாம் முக்கோணத்தின் உள்வட்ட மையம் மற்றும் நடுக்கோட்டு மையத்தைக் குறிப்பதற்குக் கற்கத் தயாராகின்றோம். இதற்காக நாம் (i) கொடுக்கப்பட்ட கோட்டுத் துண்டின் மையக்குத்துக் கோடு வரைதல் மற்றும் (ii) கொடுக்கப்பட்ட கோணத்திற்குக் கோண இருசமவெட்டி வரைதல் போன்றவற்றைப் பயன்படுத்துகின்றோம்.

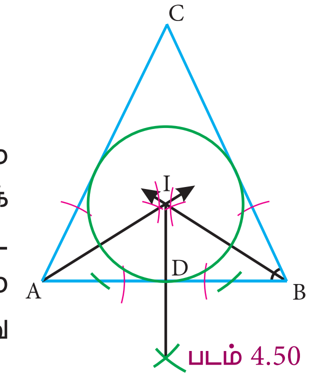


படம் 4.49

4.6.1 ஒரு முக்கோணத்தின் உள் வட்டம் வரைதல் (Construction of the Incircle of a Triangle)

உள் வட்ட மையம் (Incentre)

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோண இருசமவெட்டிகள் சந்திக்கும் புள்ளியானது, அதன் உள்வட்ட மையம் (முக்கோணத்தின் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகளில் ஒன்றால் உருவாவது) என அழைக்கப்படுகிறது. உள்வட்ட மையம் என்பது உள்வட்டத்தின் மையம் ஆகும். இது I என்ற ஆங்கில எழுத்தால் குறிக்கப்படுகிறது. இது முக்கோணத்தின் பக்கங்களில் இருந்து சமதொலைவில் உள்ளது.

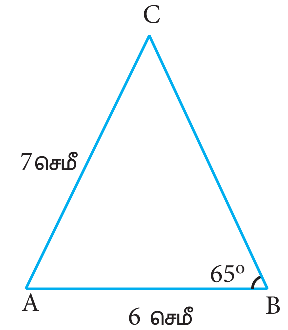


படம் 4.50

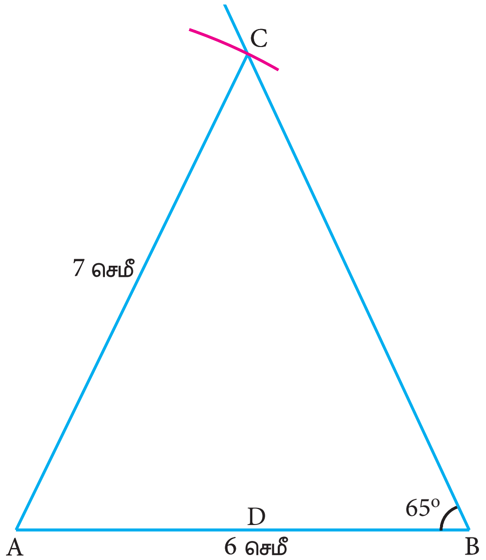
எடுத்துக்காட்டு 4.8 $AB = 6$ செமீ, $\angle B = 65^{\circ}$ மற்றும் $AC = 7$ செமீ அளவுகளுள்ள ΔABC வரைந்து அதன் உள்வட்டம் வரைக. மேலும் உள் ஆரத்தை அளந்து எழுதுக.

தீர்வு

உதவிப்படம்



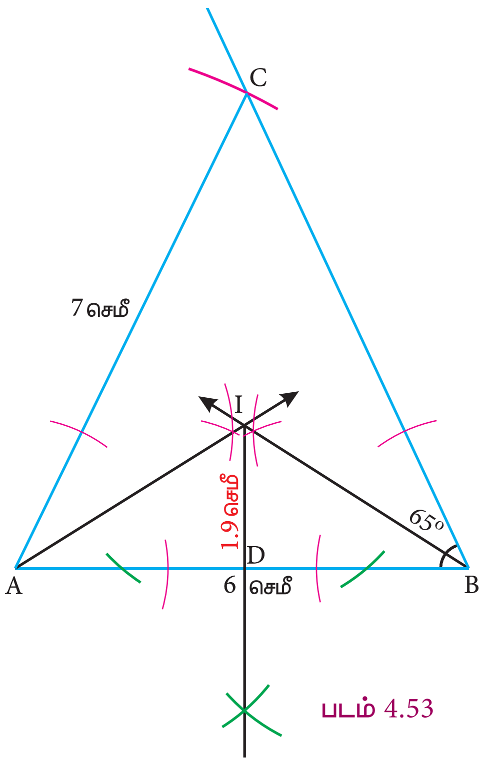
படம் 4.51



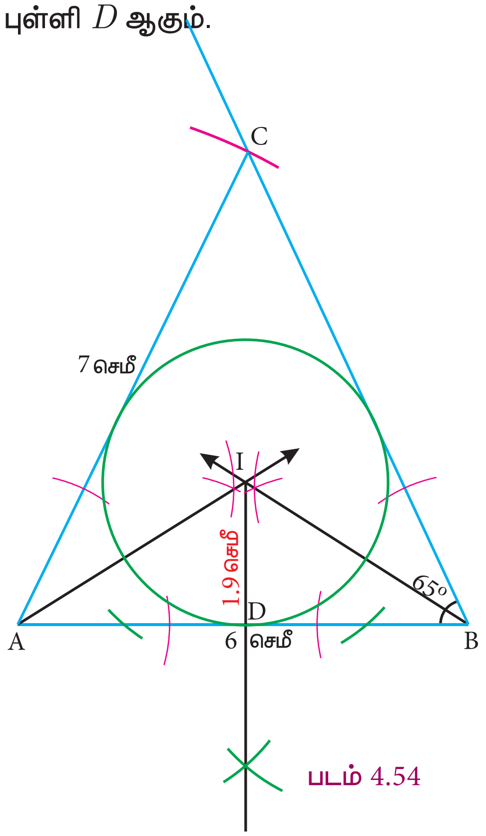
படம் 4.52

படி 1 : $AB = 6$செமீ, $\angle B = 65^{\circ}$ மற்றும் $AC = 7$செமீ அளவுகளுள்ள ΔABC வரைக.

படி 2: எவையேனும் இரு கோணங்களுக்குக் (இங்கு $\angle A$ மற்றும் $\angle B$) கோண இருசமவெட்டிகள் வரைக. அவை சந்திக்கும் புள்ளி I ஆனது ΔABC இன் உள்வட்ட மையம் ஆகும். I இல் இருந்து ஏதேனும் ஒரு பக்கத்திற்குச் (இங்கு AB) செங்குத்துக் கோடு வரைக. அக்கோடு AB ஐச் சந்திக்கும் புள்ளி D ஆகும்.



படம் 4.53



படம் 4.54

படி 3: I ஐ மையமாகவும் ID ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு வட்டம் வரைக. இவ்வட்டமானது முக்கோணத்தின் அனைத்துப் பக்கங்களையும் உட்புறமாகத் தொட்டுச் செல்லும்.

படி 4: உள் ஆரத்தை அளக்க. உள் ஆரம் $= 1.9$செமீ

குறிப்பு

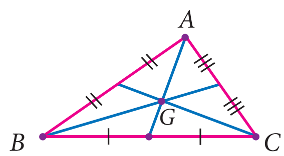
அனைத்து வகை முக்கோணங்களுக்கும் உள்வட்ட மையம் எப்போதும் முக்கோணத்தின் உள்ளேயே அமையும்.

பயிற்சி 4.5

1. 6.5 செமீ பக்க அளவுள்ள சமபக்க முக்கோணம் வரைந்து அதன் உள்வட்ட மையத்தைக் குறிக்க. மேலும் உள்வட்டத்தை வரைக.
2. கர்ணம் 10 செமீ, ஒருபக்க அளவு 8 செமீ உள்ள செங்கோண முக்கோணம் வரைக. அதன் உள்வட்ட மையத்தைக் குறித்து உள்வட்டம் வரைக.
3. $AB = 9$ செமீ, $\angle CAB = 115^\circ$ மற்றும் $\Delta ABC = 40^\circ$ என்ற அளவுகளுக்கு ΔABC வரைக. மேலும் அதன் உள்வட்ட மையத்தைக் குறித்து உள்வட்டம் வரைக.
(குறிப்பு : மேற்கண்ட கணக்குகளிலிருந்து எந்தவொரு முக்கோணத்திற்கும் உள்வட்டமானது முக்கோணத்தின் உள்ளே அமைகிறது என்பதை நீங்கள் காணலாம்)
4. $AB = BC = 6$செமீ, $\angle B = 80^\circ$ என்ற அளவுகளுக்கு ΔABC வரைக. அதன் உள்வட்ட மையத்தைக் குறித்து உள்வட்டம் வரைக.

4.6.2 முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் வரைதல் (Construction of the Centroid of a Triangle)

நடுக்கோட்டு மையம் (Centroid)

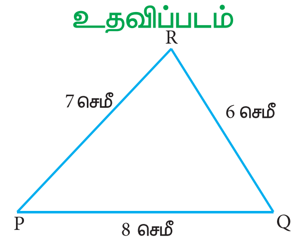


படம் 4.55

முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி, அம்முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் எனப்படும். இது பொதுவாக G எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது.

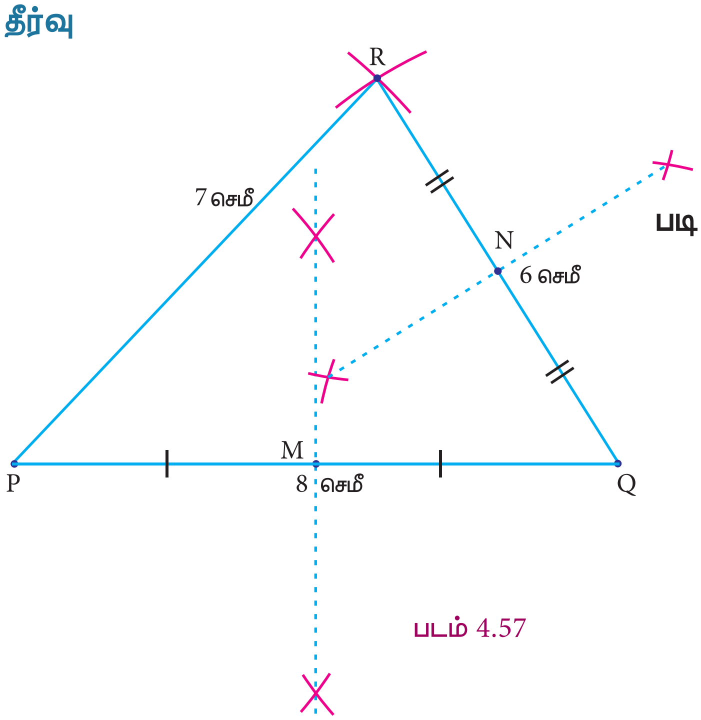
எடுத்துக்காட்டு 4.9 ΔPQR இன் நடுக்கோட்டு மையம் வரைக. அதன் பக்கங்கள் $PQ = 8$செமீ; $QR = 6$செமீ; $RP = 7$செமீ.

உதவிப்படம்



படம் 4.56

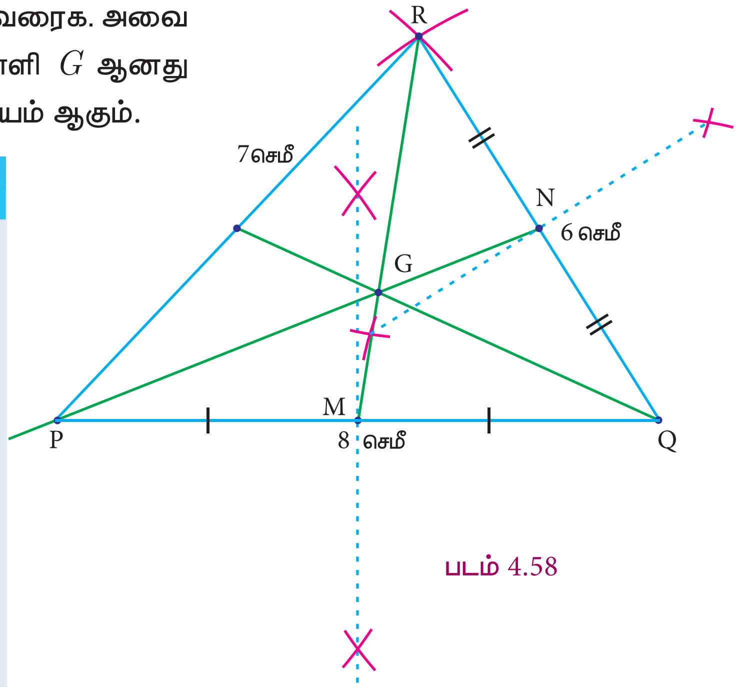
தீர்வு



படம் 4.57

படி 1 : கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவுகள் $PQ = 8$செமீ, $QR = 6$செமீ மற்றும் $RP = 7$செமீ கொண்ட ΔPQR வரைக. ஏதேனும் இரு பக்கங்களுக்கு (PQ மற்றும் QR) மையக்குத்துக் கோடுகள் வரைந்து PQ இன் நடுப்புள்ளி M மற்றும் QR இன் நடுப்புள்ளி N ஐ குறிக்க.

படி 2: நடுக்கோடுகள் PN மற்றும் RM வரைக. அவை சந்திக்கும் புள்ளி G ஆகும். புள்ளி G ஆனது ΔPQR இன் நடுக்கோட்டு மையம் ஆகும்.



படம் 4.58

குறிப்பு

- ஒரு முக்கோணத்திற்கு மூன்று நடுக்கோடுகள் வரைய இயலும்.
- நடுக்கோட்டு மையமானது நடுக்கோடுகளை முனையிலிருந்து 2:1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும்.
- அனைத்து வகை முக்கோணங்களுக்கும் நடுக்கோட்டு மையமானது முக்கோணத்தின் உள்ளேயே அமையும்.
- நடுக்கோட்டு மையமானது அந்த முக்கோணத்தின் புவிஈர்ப்பு மையம் (முக்கோணத்தை இந்தப் புள்ளியில் நிலையாகத் தாங்கி நிறுத்த முடியும்) அல்லது தாங்கு மையம் என அழைக்கப்படுகிறது.

பயிற்சி 4.6

1. $LM = 7.5$ செமீ, $MN = 5$செமீ மற்றும் $LN = 8$செமீ அளவுகளுக்கு ΔLMN வரைந்து அதன் நடுக்கோட்டு மையத்தைக் குறிக்கவும்.
2. முக்கோணம் ABC யை வரைந்து அதன் நடுக்கோட்டு மையத்தைக் குறிக்க. இங்கு A இல் செங்கோணம், $AB = 4$செமீ மற்றும் $AC = 3$செமீ.
3. AB = 6செமீ, $\angle B = 110^\circ$ மற்றும் AC = 9செமீ அளவுகளுள்ள ΔABC வரைந்து அதன் நடுக்கோட்டு மையத்தைக் குறிக்க.
4. $PQ = 5$ செமீ, $PR = 6$ செமீ மற்றும் $\angle QPR = 60^\circ$ அளவுகளுள்ள ΔPQR வரைக. மேலும் நடுக்கோட்டு மையத்தைக் குறிக்கவும்.
5. பக்க அளவு 6 செமீ அளவுகளுள்ள சமபக்க முக்கோணம் வரைக. மேலும் அதன் நடுக்கோட்டு மையம் மற்றும் உள்வட்ட மையத்தைக் குறிக்கவும். இதிலிருந்து நீங்கள் அறிவது என்ன?

ALHHQ5

பயிற்சி 4.7

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

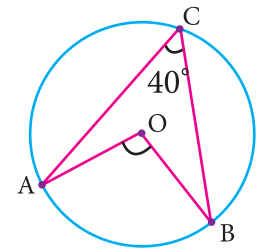
1. O வை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தில் சம நீளமுள்ள நாண்கள் PQ மற்றும் RS. மேலும், $\angle POQ = 70^\circ$ எனில், $\angle ORS =$________

(1) 60° (2) 70° (3) 55° (4) 80°

2. ஆரம் 25 செமீ உள்ள வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 15 செமீ தூரத்தில் உள்ள நாணின் நீளம் __________

(1) 25செமீ (2) 20செமீ (3) 40செமீ (4) 18செமீ

3. படத்தில் வட்டமையம் O மற்றும் $\angle ACB = 40°$ எனில், $\angle AOB =$ _______

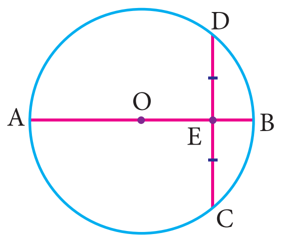


(1) $80°$ (2) $85°$ (3) $70°$ (4) $65°$

4. வட்ட நாற்கரம் $ABCD$யில், $\angle A = 4x$, $\angle C = 2x$ எனில், x இன் மதிப்பு

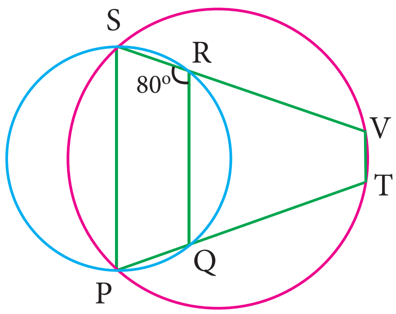
(1) $30°$ (2) $20°$ (3) $15°$ (4) $25°$

5. படத்தில் வட்டமையம் O மற்றும் விட்டம் AB ஆகியன, நாண் CD ஐப் புள்ளி E இல் இருசமக் கூறிடுகின்றன. மேலும், $CE = ED = 8$ செமீ மற்றும் $EB = 4$ செமீ எனில், வட்டத்தின் ஆரம்



(1) 8செமீ (2) 4செமீ (3) 6செமீ (4)10செமீ

6. படத்தில் $PQRS$ மற்றும் $PTVS$ என்ற இரண்டு வட்ட நாற்கரங்களில் $\angle QRS = 80°$ எனில், $\angle TVS =$

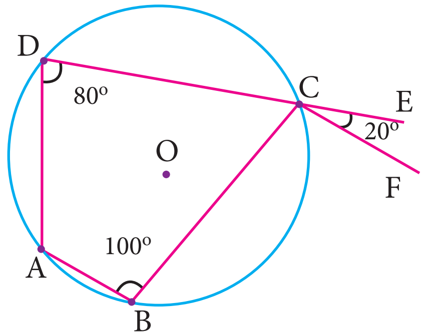


(1) $80°$ (2) $100°$ (3) $70°$ (4) $90°$

7. வட்ட நாற்கரத்தின் ஒரு கோண அளவு $75°$ எனில், எதிர் கோணத்தின் அளவு

(1) $100°$ (2) $105°$ (3) $85°$ (4) $90°$

8. படத்தில் வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ இல் பக்கம் DC ஆனது E வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது. மேலும் AB இக்கு இணையாக CF வரைக. இங்கு $\angle ADC = 80°$ மற்றும் $\angle ECF = 20°$ எனில், $\angle BAD = ?$



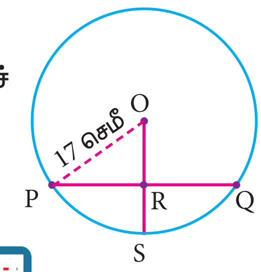
(1) $100°$ (2) $20°$

(3) $120°$ (4) $110°$

9. AD ஐ விட்டமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் ஒரு நாண் AB. இங்கு, $AD = 30$ செமீ மற்றும் $AB = 24$ செமீ எனில், வட்ட மையத்திலிருந்து AB அமைந்துள்ள தூரம் _______

(1) 10செமீ (2) 9செமீ (3) 8செமீ (4) 6செமீ.

10. படத்தில் $OP = 17$ செமீ, $PQ = 30$ செமீ மற்றும் OS ஆனது PQ இக்குச் செங்குத்து எனில்,



(1) 10செமீ (2) 6செமீ (3) 7செமீ (4) 9செமீ

நினைவு கூர்வதற்கான கருத்துகள்

- ஒரே கோட்டில் அமையாத மூன்று புள்ளிகள் வழியே ஒரே ஒரு வட்டம்தான் வரைய இயலும்.
- ஒரு வட்டத்தில் சம நீளமுள்ள நாண்கள் வட்ட மையத்தில் சம கோணங்களைத் தாங்கும்.
- வட்ட மையத்திலிருந்து நாணிற்கு வரையப்படும் செங்குத்து, அந்த நாணை இருசமக் கூறிடும்.
- ஒரு வட்டத்தில் உள்ள சம நாண்கள் வட்ட மையத்திலிருந்து சமதூரத்தில் இருக்கும்.
- ஒரு வட்டவில் மையத்தில் தாங்கும் கோணம் அந்த வில்லைத் தவிர்த்து வட்டத்தின் மீதிப் பரிதியில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் ஏற்படுத்தும் கோணத்தைப் போல் இரு மடங்காகும்.
- அரைவட்டத்தில் அமையும் கோணம் செங்கோணமாகும்.
- ஒரே வட்டத்துண்டில் அமையும் கோணங்கள் சமம்.
- வட்ட நாற்கரத்தின் ஒவ்வொரு சோடி எதிர் கோணங்களின் கூடுதல் $180°$ ஆகும்.
- வட்ட நாற்கரத்தின் ஒரு பக்கத்தை நீட்டிப்பதால் ஏற்படும் வெளிக்கோணம் உள்ளெதிர் கோணத்திற்குச் சமம்.

5 புள்ளியியல்

"புள்ளியியல் புரிதல் இல்லையெனில் ஒவ்வாக் கருத்துக்கள் மறைக்கப்பட்டுவிடும்" –ஆல்பர்ட் பெர்டில்சன்

சர் ரொனால்ட் ஆயில்மர் பிஷர்
(1890 - 1962 கி.பி. (பொ.ஆ.))

சர் ரொனால்ட் ஆயில்மர் பிஷர் ஓர் ஆங்கிலேயப் புள்ளியியலாளர் மற்றும் உயிரியலாளர் ஆவார். மேலும் சோதனை வடிவமைப்பு மற்றும் நவீனப் புள்ளியியலின் தந்தை என அழைக்கப்படுகிறார். இவர் செய்த விவசாயம் சார்ந்த ஆராய்ச்சியானது பல்லாயிரக்கணக்கானவர்களைப் பட்டினியிலிருந்து காப்பாற்றியது. லின்னியன் சமுதாயத்தால் வழங்கப்படும், லண்டனின் பெருமைமிகு டார்வின்–வாலஸ் பதக்கமானது இவருக்கு 1958 இல் வழங்கப்பட்டது.

கற்றல் விளைவுகள்

- புள்ளியியல் என்பதன் விளக்கத்தை அறிதல் மற்றும் அதன் அடிப்படைக் கருத்துகளைப் பட்டியலிடுதல்.
- சராசரி என்பதன் பொருளை நினைவுகூர்தல்.
- முன்பே அறிந்திருந்த சராசரியின் பல்வேறு வகைகளை நினைவுகூர்தல்.
- வகைப்படுத்தப்படாதத் தரவுகளின் சராசரி, இடைநிலை அளவு, முகடு ஆகியவற்றைக் காணும் வழிமுறைகளை நினைவுகூர்தல்.
- வகைப்படுத்தப்பட்டத் தரவுகளின் சராசரி, இடைநிலை அளவு, முகடு ஆகியவற்றைக் காணுதல்.

5.1 அறிமுகம்

முடிவுகளை எடுப்பதற்காகத் தரவுகளைத் திரட்டுதல், தொகுத்தல், ஆய்வு செய்தல் மற்றும் விளக்குதல் பற்றிய அறிவியலே புள்ளியியல் ஆகும். நாம் அன்றாடம் கடந்து செல்கின்ற பல்வேறு எண் மற்றும் தரம் சார்ந்த தரவுகள் நம் வாழ்வில் ஆழ்ந்த தாக்கத்தை ஏற்படுத்துகின்றன.

தரவுகளைத் தொகுத்தல் புள்ளியியலின் அடிப்படையாகும். இங்குத் தரவுகள் என்பது எண்ணியல் சார்ந்து திரட்டப்பட்ட உண்மைகள் ஆகும். நாம் அத்தரவுகளை, ஆய்வு செய்து முடிவுகளை எடுக்கின்றோம். அவ்வாறு முடிவுகளை எடுப்பதற்குப் புள்ளியியல் முறைகள் கருவியாகப் பயன்படுகின்றன.

மட்டைப்பந்து செய்திகள்

குழு U19	போட்டிகள்	வெற்றி	தோல்வி	டிரா
இந்தியா	71	52	18	0/1
ஆஸ்திரேலியா	67	50	15	0/2
பாகிஸ்தான்	69	50	19	0/0
பங்களாதேஷ்	64	45	17	1/1
மேற்கு இந்தியா	71	44	27	0/0
தென் ஆப்ரிக்கா	61	43	17	0/1
இங்கிலாந்து	69	40	28	0/1
இலங்கை	68	36	31	0/1
நியூசிலாந்து	66	30	35	0/1
ஜிம்பாப்வே	62	28	34	0/0
அயர்லாந்து	49	16	32	1/0
ஆப்கானிஸ்தான்	24	11	13	0/0
நமிபியா	47	9	37	1/0
கென்யா	17	5	12	0/0
கனடா	29	4	23	1/1
பப்புவா நியூ கினி	41	3	38	0/0

வாடிக்கையாளர் மனநிறைவு கணக்கெடுப்பு

தமிழ்நாடு உணவகம்

உங்கள் மனநிறைவை எங்களுக்கு தெரிவியுங்கள்

- மிகச் சிறப்பு
- சிறப்பு
- பரவாயில்லை
- சரியில்லை
- மிக மோசம்

இந்திய

மொத்த உள்நாட்டு உற்பத்தி முன்கணிப்பு – 2018

ஐ.நா.	7.2%
ஐஎம்எப்	7.4%
உலக வங்கி	7.3%
மோர்கன் ஸ்டேன்லி	7.5%
மூடிஸ்	7.6%
எச்எஸ்பிசி	7%
பேங்க் ஆப் அமெரிக்கா	7.2%
மெரில் லின்ச்	7.5%
கோல்ட்மேன் சேக்	8%

5.2 தரவுகளைத் திரட்டுதல் (Collection of Data)

நாம் நேரடியாகத் திரட்டிய தரவுகள் முதல்நிலைத் தரவுகள் ஆகும். ஒருவரிடம் நேரடியாகக் கேட்டு (தொலைபேசி, மின்னஞ்சல், தனிப்பட்ட முறையில்) ஆய்வுகளை நடத்துவது போன்ற பல்வேறு வழிமுறைகளைப் பயன்படுத்தி முதல்நிலைத் தரவுகளை திரட்டுகிறோம்.

மற்றவர்கள் திரட்டிய தரவுகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் இரண்டாம் நிலைத் தரவுகள் ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக, அரசு வெளியிட்ட தரவுகள், ஆய்வு முடிவுகளிலிருந்து பெறப்பட்ட அறிக்கைகள் போன்றவை ஆகும்.

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

முதல்நிலைத் தரவுகளை கண்டுபிடி

- நுகர்வோர் கருத்துகேட்பு
- மருத்துவ ஆராய்ச்சி அறிக்கைகள்
- பொருளாதார முன்னெச்செரிக்கைகள்
- பள்ளி தேர்வு முடிவுகள்
- தேர்தல் முடிவுகள்
- சந்தை விவரங்கள்
- விற்பனை முன்கணிப்பு
- விலை நிர்ணய பட்டியல்

5.2.1 உண்மைகளை வரிசைப்படுத்துதல் (Getting the Facts Sorted Out)

தொடக்க நிலையில் நாம் திரட்டும் தரவுகள் செம்மையானதாக இருக்காது. அதனால் அவை செப்பனிடப்படாத தரவுகள் எனப்படும். நம்மால் பகுப்பாய்வு செய்ய இயலாத நிலையில் இந்த விவரங்கள் இருப்பதால் இவை அதிகம் பயன்படுவதில்லை.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு தேர்வில் 50 மாணவர்கள் பெற்ற கணித மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு தரப்பட்டுள்ளன.

செயல்பாடு 1

தரவுகளைக் கொண்ட படங்கள், அட்டவணைகள், எண்கள் போன்றவற்றை உள்ளடக்கிய செருகேடு (Album) ஒன்றினை உருவாக்குக. இவை அன்றாட வாழ்வியலுடன் எவ்வாறு தொடர்பு கொண்டுள்ளது என்பதனை விவரிக்கவும்.

61	60	44	49	31	60	79	62	39	51	67	65	43	54	51	42
52	43	46	40	60	63	72	46	34	55	76	55	30	67	44	57
62	50	65	58	25	35	54	59	43	46	58	58	56	59	59	45
42	44														

இந்தப் புள்ளி விவரங்களிலிருந்து, ஐந்து உயர்ந்த மதிப்பெண்களை நீங்கள் கண்டுபிடிப்பது எளிமையான பணியா? அதை இந்தத் தகவலில் தேட வேண்டும். மேலும் மூன்றாவது உயர்ந்த மதிப்பெண் எது எனக் காண்பது இன்னும் கடினமானது. ஒருவேளை 56 இக்கும் குறைவாக மதிப்பெண் பெற்றவர்கள் எத்தனை பேர் என நீங்கள் அறிய விரும்பினால், இன்னும் சற்றுக் கூடுதலாக நேரம் எடுக்கும்.

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பெண்களை முறைப்படுத்தி எழுதினால் நம் வேலை எளிமையாக இருக்கும்.

சிறுசிறு கடினங்களுக்குப் பிறகு உயர்ந்த மதிப்பெண் 79 எனவும், குறைந்த மதிப்பெண் 25 எனவும், நாம் அறிய முடிகிறது. இந்த மதிப்பெண்களை நமக்கு ஏற்றவாறு பிரிவுகளாகப் பிரித்து, ஒவ்வொரு மதிப்பெண்ணையும் குறிப்பிட்ட அந்தப் பிரிவில் எழுதலாம். அவற்றை எப்படி எழுதலாம் என்பதற்கான மாதிரியை உற்று நோக்குக.

பிரிவு இடைவெளி	மதிப்பெண்
25-30	30,25
31-35	31,34,35
36-40	39,40
41-45	44,43,42,43,44,43,45,42,44
46-50	49,46,46,50,46
51-55	51,54,51,52,55,55,54
56-60	60, 60,60,57,58,59,58,58,56,59,59
61-65	61,62,65,63,62,65
66-70	67,67
71-75	72
76-80	79,76

மேற்கூறிய வினாக்களுக்கு அட்டவணையிலிருந்து எளிதாக விடையளிக்க இயலுமா?

“56 ஐ விடக் குறைவான மதிப்பெண்கள் பெற்றவர்கள் எத்தனை பேர்?” என்ற வினாவிற்கு விடை காண, அனைத்து மதிப்பெண்களையும் ஆராயத் தேவையில்லை. உங்களுக்குத் தேவை "எத்தனை?" என்பதற்கான பதில் மட்டுமே. இவ்வாறான, வினாக்களுக்குப் பதிலளிக்க, இந்த அட்டவணையில், ஒவ்வொரு பிரிவிலும் இருப்போர் எத்தனை பேர் எனச் சுருக்கமாகக் குறிப்பிட்டாலே போதுமானது. மேற்கண்ட அட்டவணையை மேலும் பயனுள்ளதாக்க அடுத்துள்ளவாறு எளிமையாக வரிசைப்படுத்தலாம்.

பிரிவு இடைவெளி	உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை
25-30	2
31-35	3
36-40	2
41-45	9
46-50	5
51-55	7
56-60	11
61-65	6
66-70	2
71-75	1
76-80	2

இந்த அட்டவணையானது ஒவ்வொரு பிரிவிலும் எத்தனை உறுப்புகள் உள்ளன என்பதை நமக்குத் தருகிறது. ஒவ்வொரு பிரிவுக்கும் எதிரே உள்ள எண், அந்தப் பிரிவுக்கு உட்பட்ட உறுப்புகள் எத்தனை இடம் பெற்றுள்ளன என்பதைக் குறிக்கிறது. இந்த எண் அந்தப் பிரிவின் நிகழ்வெண் எனப்படுகிறது. இந்த அட்டவணை நிகழ்வெண் அட்டவணை என அழைக்கப்படுகிறது.

நிகழ்வெண்ணைக் கணக்கிட நாம் நேர்க்கோட்டுக் குறிகளைப் பயன்படுத்துகிறோம். (இந்தக் கலத்தில், குறிப்பிட்ட பிரிவுக்கு எதிராக நேரடியாக மதிப்பெண்ணை எழுதாமல், அதற்குப் பதிலாக ஒரு நேர்க்கோட்டுக் குறி இடுகிறோம்.) எடுத்துக்காட்டாக 31-35 என்ற பிரிவுக்கு எதிரில் நேரடியாக மதிப்பெண்களான 31,34,35 என எழுதாமல் ||| எனக் குறியிடுகிறோம். அப்படியானால் 56-60 என்ற பிரிவுக்கு ||||||||||| என்று எழுத வேண்டுமே! இந்தக் குழப்பத்தைத் தவிர்க்க ஒவ்வோர் ஐந்தாவது நேர்க்கோட்டுக் குறியையும், அதற்கு முன்னர் குறிப்பிட்ட நான்கு நேர்க்கோட்டுக் குறிகளுக்குக் குறுக்காக 𝍸 என்றவாறு குறிப்பிடுகிறோம். எடுத்துக்காட்டாக, 11 என்பதைக் காட்ட நாம் 𝍸 𝍸 | என எழுதுகிறோம். இவ்வாறு எழுதினால் மேலே கண்ட விளக்கப்படத்திற்கான நிகழ்வெண் அட்டவணை கீழ்க்கண்டவாறு அமையும்.

பிரிவு இடைவெளி	நேர்க்கோட்டுக் குறிகள்	நிகழ்வெண்
25-30	||	2
31-35	|||	3
36-40	||	2
41-45	𝍸 ||||	9
46-50	𝍸	5
51-55	𝍸 ||	7
56-60	𝍸 𝍸 |	11
61-65	𝍸 |	6
66-70	||	2
71-75	|	1
76-80	||	2
	மொத்தம்	**50**

குறிப்பு

ஏதாவது ஒரு பிரிவினை எடுத்துக் கொள்க. 56-60 என எடுத்துக்கொண்டால், 56 என்பது பிரிவின் கீழெல்லை எனவும், 60 என்பது பிரிவின் மேலெல்லை எனவும் கூறப்படும்.

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

நிகழ்வெண் பட்டியல் தயாரிக்க.

23	44	12	11	45	55	79	20
52	37	77	97	82	56	28	71
62	58	69	24	12	99	55	78
21	39	80	65	54	44	59	65
17	28	65	35	55	68	84	97
80	46	30	49	50	61	59	33
11	57						

5.3 மையப்போக்கு அளவைகள் (Measures of Central Tendency)

அன்றாட வாழ்வில் நம்மிடம் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு தகவலுக்கான அளவைக் குறிப்பிடுவது அவசியமாகிறது. ஓர் ஆராய்ச்சியாளர் தமது ஆய்வில், மக்கள் சராசரியாக நாளொன்றுக்கு மூன்று மணி நேரம் தொலைக்காட்சித் தொடர்களைப் பார்க்கின்றார்கள் எனக் குறிப்பிட்டிருந்தால், ஒவ்வொருவரும் மூன்று மணி நேரம் பார்க்கின்றார்கள் என்று பொருள் அல்ல. சிலர் அதிக நேரம் பார்க்கலாம், சிலர் குறைவான நேரம் பார்க்கலாம். சராசரி என்பது கொடுக்கப்பட்ட தகவலில், 'தொலைக்காட்சித் தொடரைப் பார்த்தல்' என்ற செயலுக்கு ஏற்றுக் கொள்ளப்பட்ட ஒரு சுட்டி (அளவு) ஆகும்.

சராசரி என்பது ஒரு பெரிய அளவிலான தகவலை ஒரு குறிப்பிட்ட தனி மதிப்பிற்குச் சுருக்கிக் காட்டுகிறது. மேலும் அந்தத் தனிமதிப்பை ஒட்டி உண்மையான தகவலில் சில வேறுபாடுகள் உள்ளன என்பதையும் சுட்டுகிறது.

சராசரி என்ற கருத்தைப் பொறுத்தளவில் ஒரு சராசரி மனிதனின் பார்வையிலிருந்து ஒரு கணிதவியலாளரின் பார்வை சற்று வேறுபட்டது. சராசரிக்கான மூன்று வகைப்பட்ட வரையறைகள்

உள்ளன. அவை, கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை அளவு, முகடு ஆகியன ஆகும். இவை ஒவ்வொன்றும் வேறுபட்ட வழிமுறைகளிலிருந்து பெறப்படுகின்றன. இந்த மூன்றையும் ஒரே தகவலில் பயன்படுத்தினால் கூட, மூன்றும் பெரும்பாலும் வெவ்வேறான சராசரி மதிப்புகளையே தரும். இந்த மூன்று சராசரி அளவுகளிலும் கொடுக்கப்பட்ட தகவல்களில் எதைக் குறிக்கின்றன என்பதையும், கணக்கீட்டில் எது மிகச்சரியாக இருக்கும் என்பதையும் வேறுபடுத்திக் காட்டுவது நமக்குத் தேவையாகும்.

5.3.1 கூட்டுச் சராசரி (Arithmetic Mean-Raw Data)

எல்லாவகையான சராசரிகளிலும், பொதுவாகக் கொடுக்கப்பட்ட தகவலின் கூட்டுச்சராசரியே பயன்படுத்தப்படுகிறது. இது கொடுக்கப்பட்ட அனைத்து மதிப்புகளின் கூடுதலை, மதிப்புகளின் எண்ணிக்கையால் வகுத்துப் பெறப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு $(T20)$ மட்டைப் பந்தாட்ட வீரர் விளையாடிய 8 ஆட்டங்களில் எடுத்த ஓட்டங்கள் $25, 32, 36, 38, 45, 41, 35$ மற்றும் 36 என எடுத்துக்கொண்டால், அவரின் சராசரியை,

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{25+32+36+38+45+41+35+36}{8} = \frac{288}{8} = 36$$ எனக் கணக்கிடலாம்.

இதையே $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ என்ற n மதிப்புகள் எனில் அவற்றின் கூட்டுச்சராசரி $\bar{X}$ ஐக் (X bar எனப் படிக்க வேண்டும்) கீழ்க்கண்டவாறு நாம்எழுதலாம்.

$$\bar{X} = \frac{\text{அனைத்து மதிப்புகளின் கூடுதல்}}{\text{மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை}}$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i$$

இவ்வாய்ப்பட்டை நாம் இவ்வாறாக எழுதலாம்:

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{n}$$

குறிப்பு

எந்த மதிப்பை நாம் ஊகச்சராசரியாக தேர்ந்தெடுக்கிறோம் என்பது ஒர் பொருட்டல்ல. அந்த ஊகச்சராசரி நம் கணக்கீட்டை எளிமைப்படுத்தவேண்டும். ஊகச்சராசரியாக தேர்ந்தெடுக்கும் எண் பெரும்பாலான மதிப்புகளுக்கு அருகாமையில் இருப்பின் நன்று. மேலும் அவ்வெண் கொடுக்கப்பட்ட பட்டியலில் இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை.

ஊகச் சராசரி முறை (Assumed Mean method)

சில நேரங்களில், நம் கணக்கீட்டை எளிமையாகச் செய்வதற்கு ஒரு தோராயமான மதிப்பை சராசரியாகக் கணித்துக் கணக்கைச் செய்திருப்போம். அந்தத் தோராயமான மதிப்பை நாம் ஊகச்சராசரி என அழைக்கலாம். உதாரணமாக, முந்தைய எடுத்துக்காட்டில் உள்ள மட்டைப்பந்தாட்ட வீரர் எடுத்த ஓட்டங்களின் எண்ணிக்கையில் 38 என்ற மதிப்பை நாம் ஊகச்சராசரியாக எடுத்துக்கொள்வோம். பிறகு ஊகச்சராசரியிலிருந்து ஒவ்வொரு மதிப்பும் எவ்வளவு வேறுபடுகிறது என்பதைப் பட்டியலிடுவோம்.

$$25-38=-13,\quad 32-38=-6,\quad 36-38=-2,\quad 38-38=0,$$

$$45-38=7,\quad 41-38=3,\quad 35-38=-3,\quad 36-38=-2$$

வேறுபாடுகளின் சராசரி $= \dfrac{-13-6-2+0+7+3-3-2}{8} = \dfrac{-16}{8} = -2$

இப்பொழுது ஊகச்சராசரியுடன் வேறுபாடுகளின் சராசரியைக் கூட்ட நமக்குச் சரியான சராசரி கிடைக்கும்.

எனவே, சரியான சராசரி = ஊகச்சராசரி + வேறுபாடுகளின் சராசரி $= 38 - 2 = 36$.

பெரிய மதிப்பிலான எண்களுக்குச் சராசரி காண இந்த ஊகச்சராசரி முறை பயனுள்ளதாக இருக்கும்.

5.3.2 சராசரி – வகைப்படுத்தப்படாத நிகழ்வெண் பரவல் (Mean-Ungrouped Frequency Distribution)

பள்ளி விளையாட்டு நிகழ்வில் பங்குகொண்ட 12 மாணவர்களின் உயரங்களை(செ.மீ. யில்) எடுத்துக்கொள்வோம்.

140, 142, 150, 150, 140, 148, 140, 147, 145, 140, 147, 145.

இத்தரவுகளின் சராசரி உயரத்தை எவ்வாறு காண்பது?

இதற்குப் பல வழிகள் உள்ளன.

(i) அனைத்து மதிப்புகளையும் கூட்டி அதனை எண்ணிக்கையால் வகுத்துப் பெறலாம்.

$$\frac{140+142+150+150+140+148+140+147+145+140+147+145}{12} = \frac{1734}{12} = 144.5$$

(ii) ஊகச்சராசரி முறையைப் பயன்படுத்தியும் பெறலாம். இங்கு 141 என்ற மதிப்பை ஊகச்சராசரியாக எடுத்துக்கொண்டு கீழ்க்கண்டவாறு சராசரி காணலாம்.

$$= 141 + \frac{(-1)+(1)+(9)+(9)+(-1)+(7)+(-1)+(6)+(4)+(-1)+(6)+(4)}{12}$$

$$= 141 + \frac{-4+46}{12} = 141 + \frac{42}{12} = 141 + 3.5 = 144.5$$

(iii) இம்மூன்றாவது முறையானது வகைப்படுத்தப்படாத நிகழ்வெண் பரவலுக்குச் சராசரி காணும் முறையை விளக்குகிறது. இங்கு 140 என்ற மதிப்பு 4 முறை வந்துள்ளது. எனவே 140 இன் நிகழ்வெண் 4. 142 என்ற மதிப்பு 1 முறை வந்துள்ளது. எனவே 142 இன் நிகழ்வெண் 1. இதைப் போன்றே மற்ற மதிப்புகளுக்கும் காணும் போது, நமக்குப் பின்வரும் நிகழ்வெண் பட்டியல் கிடைக்கின்றது.

உயரங்கள் (செ.மீ இல்)	140	142	150	148	145	147
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	4	1	2	1	2	2

இங்கு 4 முறை 140 இருப்பதைக் காணலாம். அதன் மொத்தம் $140 \times 4 = 560$

இங்கு 1 முறை 142 இருப்பதைக் காணலாம். அதன் மொத்தம் $142 \times 1 = 142$

இங்கு 2 முறை 150 இருப்பதைக் காணலாம். அதன் மொத்தம் $150 \times 2 = 300$.

இதைப்போலவே மற்ற மதிப்புகளையும் காணவேண்டும்.

இத்தரவுகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு பட்டியலிடலாம்.

உயரம் (x)	நிகழ்வெண் (f)	fx
140	4	560
142	1	142
150	2	300
148	1	148
145	2	290
147	2	294
	12	1734

$$\text{கூட்டுச்சராசரி} = \frac{\text{உறுப்புகளின் கூடுதல்}}{\text{உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை}}$$

$$= \frac{1734}{12} = 144.5 \text{ செ.மீ.}$$

இம்முறையை அனைத்துத் தரவுகளுக்கும் பொதுமைப்படுத்தலாம். இது ஒரு வாய்ப்பாடாகவும் உருவாகிறது. $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ என்ற n விவரங்களின் நிகழ்வெண்கள் முறையே $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ எனில், சராசரி ஆனது பின்வருமாறு கிடைக்கிறது.

$$\bar{X} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \ldots f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

குறிப்பு

ஒவ்வொரு படிநிலையிலும் உள்ள அனைத்துக் குறியீடுகளும் எதனைக் குறிக்கின்றன என்பதன் பொருளுணர்ந்து அதனை முழுமையாகப் புரிந்து படிக்க வேண்டும்

மேற்காணும் முறையை ஊகச்சராசரி முறையுடன் இணைத்துப் பயன்படுத்த இயலுமா? இதோ அதை நோக்கிய ஒரு முயற்சி!

(iv) ஊகச்சராசரி 145 என்க. இப்பொழுது கீழ்க்கண்ட அட்டவணையைத் தயார் செய்வோம்

உயரம் (x)	$d =$ ஊகச்சராசரியிலிருந்து விலக்கம்	நிகழ்வெண் (f)	fd
140	140 – 145 = – 5	4	–20
142	142– 145 = – 3	1	–3
150	150 – 145 = + 5	2	+10
148	148 – 145 = + 3	1	+ 3
145 (ஊகச்சராசரி)	145 – 145 = 0	2	0
147	147 – 145 = + 2	2	+ 4
மொத்தம்		**12**	**–23 +17 = –6**

கூட்டுச் சராசரி = ஊகச்சராசரி + விலக்கங்களின் கூடுதல்களின் சராசரி

$$= A + \frac{\sum fd}{\sum f} = 145 + \left(\frac{-6}{12}\right) = 145.0 - 0.5 = 144.5$$

பெரிய மதிப்பிலான எண்களுக்குச் சராசரி காண இந்த ஊகச்சராசரி முறை உதவியாக இருக்கும்.

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

ஒரு பகுதியில் உள்ள 68 வீடுகளின் மின்நுகர்வானது வகைப்படுத்தப்படாத தரவுகளாக (அலகுகளில்) கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

75, 75, 75, 75, 95, 95, 95, 95, 95, 115, 115, 115, 115, 115, 115, 115, 115, 115, 115, 115, 115, 115, 135, 135, 135, 135, 135, 135, 135, 135, 135, 135, 135, 135, 135, 135, 135, 135, 135, 135, 135,155, 155, 155, 155, 155, 155, 155, 155, 155, 155, 155, 155, 155, 155,175, 175, 175, 175, 175, 175, 175, 175, 195, 195, 195, 195.

கீழ்க்கண்ட முறைகளில் இந்தத் தரவுகளின் சராசரியைக் காண முயற்சி செய்க.

(i) அனைத்து மதிப்புகளையும் கூட்டி மொத்த எண்ணிக்கையால் வகுக்க வேண்டும்

(ii) ஊகச்சராசரி முறையைப் (வழி(ii)) பயன்படுத்திக் காண்க

(iii) வகைப்படுத்தப்படாத நிகழ்வெண் பட்டியல் தயார் செய்து

$\bar{X} = \frac{\sum fx}{\sum f}$ என்ற வாய்ப்பாட்டைப் பயன்படுத்துக.

(iv) ஊகச்சராசரி முறையைப் (வழி (iv)) பயன்படுத்திக் காண்க

எந்த முறை உனக்கு எளிமையாக இருக்கிறது? ஏன்?

5.3.3 சராசரி – வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவல் (Mean-Grouped Frequency Distribution)

ஒரு புள்ளி விவரம் வகைப்படுத்தப்பட்ட புள்ளி விவரம் ஆக இருக்கவேண்டுமெனில் அவை பிரிவு இடைவெளிகளைப் பயன்படுத்தி ஒரு நிகழ்வெண் பட்டியலாக இருக்கவேண்டும்.

வயது (ஆண்டுகளில்)	10-20	20-30	30 – 40	40 – 50	50 - 60
வாடிக்கையாளர்களின் எண்ணிக்கை	80	120	50	22	8

மேற்கண்ட பட்டியலானது பல்வேறு வயதுடைய வாடிக்கையாளர்களின் எண்ணிக்கையைக் காட்டுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, 120 வாடிக்கையாளர்கள் 20 முதல் 30 வயதுக்குட்பட்டவர்களாக இருக்கிறார்கள். (வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் அட்டவணை தயாரிக்கும் போது தனிப்பட்ட தரவுகள் மறைந்து போகும்) இப்போது ஒவ்வொரு பிரிவு

இடைவெளியின் பிரதிநிதியாக ஒரு மதிப்பு தேவைப்படுகின்றது. இது அந்தப் பிரிவின் மைய மதிப்பாகும்.

மையப்புள்ளி (அ) பிரிவு புள்ளியானது கீழ்க்கண்ட வாய்ப்பாடு மூலம் கணக்கிடப்படுகிறது..

பிரிவின் மையப்புள்ளி $= \dfrac{UCL + LCL}{2}$ இங்கு UCL – என்பது பிரிவின் மேல் எல்லை, LCL – என்பது பிரிவின் கீழ் எல்லை ஆகும்.

5.4 கூட்டுச் சராசரி (Arithmetic Mean)

தொகுக்கப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவலின் சராசரியைக் கீழ்க்காணும் முறைகளில் ஏதேனும் ஒரு முறையைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடலாம்:

(i) நேரடி முறை (ii) ஊகச் சராசரி முறை (iii) படிவிலக்க முறை

5.4.1 நேரடி முறை (Direct Method)

நேரடி முறையைப் பயன்படுத்தும் போது, சராசரி காண்பதற்கான வாய்ப்பாடு $\bar{X} = \dfrac{\sum fx}{\sum f}$

இங்கு x என்பது பிரிவு இடைவெளியின் மையப்புள்ளி மற்றும் f என்பது அந்தப் பிரிவு இடைவெளியின் நிகழ்வெண் ஆகும்.

நேரடி முறையில் சராசரி காண்பதற்கான படிகள் :

(i) ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியின் மையப்புள்ளியைக் கண்டுபிடித்து அதை x எனக் குறிக்கவும்.

(ii) இம் மையப்புள்ளிகளை அதற்குரிய பிரிவு இடைவெளியின் நிகழ்வெண்ணோடு பெருக்கி, அப்பெருக்கல் பலனின் கூடுதல் fx ஐக் காணவும்.

(iii) $\sum fx$ ஐக் நிகழ்வெண்களின் $\sum f$ ஆல் வகுக்க, சராசரி கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.1 ஒரு குடியிருப்பில் வாழும் மக்களின் எண்ணிக்கை வயதின் அடிப்படையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. குடியிருப்பில் வாழும் மக்களின் சராசரி வயதைக் காண்க.

வயது	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
மக்களின் எண்ணிக்கை	2	6	9	7	4	2

தீர்வு

வயது	மக்களின் எண்ணிக்கை (f)	மைய மதிப்பு (x)	fx
0-10	2	5	10
10-20	6	15	90
20-30	9	25	225

30-40	7	35	245
40-50	4	45	180
50-60	2	55	110
	$\sum f = 30$		$\sum fx = 860$

சராசரி $= \bar{X} = \dfrac{\sum fx}{\sum f} = \dfrac{860}{30} = 28.67$

குடியிருப்பில் வாழும் மக்களின் சராசரி வயது $= 28.67$.

5.4.2 ஊகச் சராசரி முறை (Assumed Mean Method)

வகைப்படுத்தப்பட்ட தரவுகளின் கூட்டுச் சராசரியை நேரடி முறையின் மூலம் விரைவாகக் காண்பதைப் பற்றிப் பார்த்தோம்.கொடுக்கப்பட்ட தரவுகள் அதிக எண்ணிக்கையில் இருக்கும் போது தரவுகளையும் அதன் நிகழ்வெண்களையும் பெருக்கி மற்றும் அதனைக் கூட்டி மதிப்பு காண்பது கடினமாக இருப்பதோடு மட்டுமல்லாமல் தவறுகள் ஏற்படவும் அதிக நேரம் எடுத்துக்கொள்ளக் கூடியதாகவும் இருக்கும். இம்மாதிரியான வகைப்படுத்தப்பட்ட தரவுகளுக்கு ஊகச் சராசரி முறையைப் பயன்படுத்திக் கூட்டுச்சராசரி காணலாம்.

ஊகச் சராசரி முறையில் சராசரி காண்பதற்கான படிகள் :

1. தரவுகளில் ஏதாவது ஒரு மதிப்பை ஊகச் சராசரி (A) என எடுத்துக்கொள்வோம்.அந்த மதிப்பானது மைய மதிப்பாக இருந்தால் சிறப்பானதாக இருக்கும்
2. ஒவ்வொரு பிரிவிற்கும் விலக்கம் $d = x - A$ ஐக் காண்க.
3. விலக்கத்தினை அந்தந்தப் பிரிவு இடைவெளியின் நிகழ்வெண் f உடன் பெருக்கி, பின்பு $\sum fd$ ஐக் காண்க.
3. $\bar{X} = A + \dfrac{\sum fd}{\sum f}$ என்ற வாய்ப்பாட்டைப் பயன்படுத்துக.

எடுத்துக்காட்டு 5.2 கீழ்க்கண்ட தரவுகளுக்குச், சராசரியைக் காண்க.

பிரிவு	100-120	120-140	140-160	160-180	180-200	200-220	220-240
நிகழ்வெண்	10	8	4	4	3	1	2

தீர்வு

ஊகச் சராசரி $A = 170$

9th Maths T-II TM.indb 112 11-08-2018 18:20:28

பிரிவு	நிகழ்வெண் f	மையமதிப்பு x	$d = x-A$ $d = x-170$	fd
100-120	10	110	–60	–600
120-140	8	130	–40	–320
140-160	4	150	–20	–80
160-180	4	170	0	0
180-200	3	190	20	60
200-220	1	210	40	40
220-240	2	230	60	120
	$\sum f = 32$			$\sum fd = -780$

சராசரி $\bar{X} = A + \frac{\sum fd}{\sum f}$

$$= 170 + \left(\frac{-780}{32}\right)$$

$$\bar{X} = 170 - 24.375$$

$$= 145.625$$

5.4.3 படிவிலக்க முறை (Step Deviation Method)

இம்முறையில், கணக்கிடுவதை எளிமைப்படுத்துவதற்காக விலக்கம் $d = x - A$ ஐ இடைவெளியின் நீளம் c ஆல் வகுத்து (அதாவது $\frac{x-A}{c}$) பின்பு c ஆல் பெருக்கி சராசரி காணும் வாய்ப்பாடு பின்வருமாறு பெறப்படுகின்றது.

$$\bar{X} = A + \left[\frac{\sum fd}{\sum f} \times c\right], \text{ இங்கு } d = \frac{x-A}{c}.$$

எடுத்துக்காட்டு 5.3 கீழ்க்கண்ட பரவலிற்கு, படிவிலக்க முறையில், சராசரியைக் காண்க.

பிரிவு இடைவெளி	0-8	8-16	16-24	24-32	32-40	40-48
நிகழ்வெண் (f)	10	20	14	16	18	22

தீர்வு:

ஊகச் சராசரி $A = 28$, பிரிவு நீளம் $c = 8$

பிரிவு இடைவெளி	மையப்புள்ளி x	நிகழ்வெண் f	$d = \frac{x-A}{c}$	fd
0-8	4	10	–3	–30
8-16	12	20	–2	–40
16-24	20	14	–1	–14
24-32	28	16	0	0
32-40	36	18	1	18
40-48	44	22	2	44
		$\sum f = 100$		$\sum fd = -22$

சராசரி $\bar{X} = A + \frac{\sum fd}{\sum f} \times c$

$= 28 + \left(\frac{-22}{100}\right) \times 8$

$= 28 - 1.76 = 26.24$

குறிப்பு

(i) x_i யும் f_i யும் சிறிய மதிப்பாக இருக்கும் போது நேரடி முறையே சிறந்தது

(ii) x_i யும் f_i யும் பெரிய மதிப்பாக இருக்கும் போது ஊகச் சராசரி அல்லது படிவிலக்க முறையைப் பயன்படுத்தலாம்

(iii) பிரிவு இடைவெளிகள் சமமில்லாமல் இருக்கும் போதும், அது எண் மதிப்பில் பெரியதாக இருக்கும் போதும் படிவிலக்க முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

5.4.4 கூட்டுச்சராசரியின் சிறப்புப் பண்பு (A special property of the Arithmetic Mean)

a, b மற்றும் c என்பன மூன்று எண்கள் என்க. அவற்றின் சராசரி $\frac{a+b+c}{3}$ ஆகும். ஒவ்வொரு மதிப்பும் அதன் சராசரியிலிருந்து எவ்வளவு மாறுபடுகிறது? (அதை நாம் சராசரியிலிருந்து எண்ணின் விலக்கம் என்று அழைக்கிறோம்). மற்றும் அதன் விலக்கங்களின் கூடுதல் எவ்வளவு?

எண்கள்	சராசரியிலிருந்து விலக்கம்
a	$a - \frac{a+b+c}{3} = \frac{2a-b-c}{3}$
b	$b - \frac{a+b+c}{3} = \frac{2b-c-a}{3}$
c	$c - \frac{a+b+c}{3} = \frac{2c-a-b}{3}$
	மொத்தம் $= \frac{2a-b-c}{3} + \frac{2b-c-a}{3} + \frac{2c-a-b}{3} = 0$

இதிலிருந்து பின்வருமாறு பொதுமைப்படுத்தலாம்.

சராசரியிலிருந்து, அனைத்து உறுப்புகளின் விலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியம் ஆகும்.

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ என்ற n புள்ளிவிவரங்களின் கூட்டுச்சராசரி $\bar{X}$ எனில்

$(x_1 - \bar{X}) + (x_2 - \bar{X}) + (x_3 - \bar{X}) + \ldots + (x_n - \bar{X}) = 0$. எனவே $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X}) = 0$

1. தரவிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புடனும் ஒரு மாறா மதிப்பு k ஐ கூட்டினாலோ அல்லது கழித்தாலோ அதன் சராசரியும் மாறா மதிப்பு k அளவு கூடும் அல்லது குறையும்.
2. தரவிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புடனும் ஒரு மாறா மதிப்பு k, $k \neq 0$ ஆல் பெருக்கினாலோ அல்லது வகுத்தாலோ அதன் சராசரியும் மாறா மதிப்பு k ஆல் பெருக்கப்படும் அல்லது வகுக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.4 கீழ்க்காணும் தரவுகளுக்குக் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து, விலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை காண்க. 21, 30, 22, 16, 24, 28, 18, 17

தீர்வு

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{21+30+22+16+24+28+18+17}{8} = \frac{176}{8} = 22$$

கூட்டுச்சராசரி $\bar{X}$ லிருந்து x இன் விலக்கம் $x-\bar{X}$ ஆகும்.

விலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= (21-22)+(30-22)+(22-22)+(16-22)+(24-22)+(28-22)+(18-22)+(17-22)$$

$= 16-16 = 0.$ அல்லது $\sum(x-\bar{X}) = 0$

எனவே, சராசரியிலிருந்து அனைத்து உறுப்புகளின் விலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியம் என அறியப்படுகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 5.5 6 தரவுகளின் சராசரி 45, ஒவ்வொரு தரவுடன் 4 ஐக் கூட்டினால் கிடைக்கும் சராசரியைக் காண்க

தீர்வு

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ என்ற தரவுகளின்

சராசரி $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{6} = 45$ என்க.

ஒவ்வொரு தரவுடன் 4 ஐக் கூட்டினால் கிடைக்கும் புதிய சராசரி,

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{6}(x+4)}{6}$$

$$= \frac{(x_1+4)+(x_2+4)+x_3+4)+(x_4+4)+(x_6+4)}{6}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i + 24}{6} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i}{6} + 4$$

$$\bar{X} = 45 + 4 = 49.$$

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

10 தரவுகளின் சராசரி 48 ஒவ்வொரு தரவுடனும் 7 ஐக் கழித்தால் கிடைக்கும் புதிய தரவுகளின் சராசரியைக் காண்க

எடுத்துக்காட்டு 5.6 7 தரவுகளின் சராசரி 30 என்க ஒவ்வோர் எண்ணையும் 3 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் புதிய சராசரியைக் காண்க.

தீர்வு

X என்பது $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$. என்ற 7 தரவுகள் அடங்கிய கணம் எனில்

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i}{7} = 30 \text{ அல்லது } \sum_{i=1}^{7} x_i = 210$$

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

- 12 தரவுகளின் சராசரி 20 ஒவ்வொரு தரவையும் 6 ஆல் பெருக்க கிடைக்கும் புதிய தரவுகளின் சராசரியைக் காண்க.
- 30 தரவுகளின் சராசரி 16 ஒவ்வொரு தரவையும் 4 ஆல் வகுக்க கிடைக்கும் புதிய தரவுகளின் சராசரியைக் காண்க.

ஒவ்வோர் எண்ணையும் 3 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் புதிய சராசரி

$$\frac{\sum_{i=1}^{7}\frac{x_i}{3}}{7} = \frac{\left(\frac{x_1}{3}+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{3}+\frac{x_4}{3}+\frac{x_5}{3}+\frac{x_6}{3}+\frac{x_7}{3}\right)}{7}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i}{21} = \frac{210}{21} = 10$$

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

நான்கு எண்கள் மதிப்புகளில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு எண்ணையும் விடுத்து கிடைக்கும் மற்ற மூன்று எண்களின் கூட்டுச்சராசரிகள் முறையே 45, 60, 65 அல்லது 70 எனில், அந்த நான்கு எண்களின் கூட்டுச்சராசரியைக் காண்க.

மாற்று முறை

Y என்பது X இன் ஒவ்வோர் எண்ணையும் 3 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மதிப்பு எனில்

$\bar{Y} = \frac{\bar{X}}{3} = \frac{30}{3} = 10.$ புதிய தரவின் சராசரி பழைய விவரத்தின் சராசரியை 3ஆல் வகுக்கக் கிடைத்துள்ளது

எடுத்துக்காட்டு 5.7

25 மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் 78.4. இங்கு 96 என்ற மதிப்பானது 69 எனத் தவறுதலாக வாசிக்கப்பட்டது கண்டறியப்பட்டது எனில், சரியான மதிப்பெண்களைக் கொண்டு சராசரியைக் காண்க.

தீர்வு

மாணவர்களின் எண்ணிக்கை மற்றும் சராசரி முறையே $n = 25, \bar{X} = 78.4$

தவறான $\sum x = \bar{X} \times n \quad = 78.4 \times 25 = 1960$

சரியான Σx = தவறான Σx – தவறான மதிப்பெண் + சரியான மதிப்பெண்

$$= 1960 - 69 + 96 = 1987$$

சரியான $\bar{X} = \frac{\text{சரியான} \sum x}{n} = \frac{1987}{25} = 79.48$

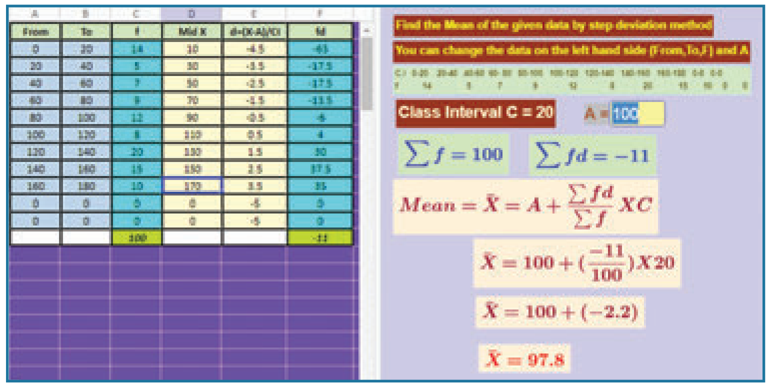
பயிற்சி 5.1

1. ஓர் இடத்தின் ஒரு வாரக் குளிர்கால வெப்பநிலை $26°c, 24°c, 28°c, 31°c, 30°c, 26°c, 24°c$ எனக் கண்டறியப்பட்டது. அந்த இடத்தின் அவ்வாரத்திற்கான சராசரி வெப்பநிலையைக் காண்க.

2. ஒரு குடும்பத்தில் உள்ள 4 நபர்களின் எடைகளின் சராசரி 60கி.கி. அவர்களில் மூவரின் எடைகள் 56கி.கி, 68கி.கி, மற்றும் 72கி.கி எனில் நான்காமவரின் எடையைக் காண்க.

இணையச் செயல்பாடு

இறுதியில்
கிடைக்கப்பெறும் படம்

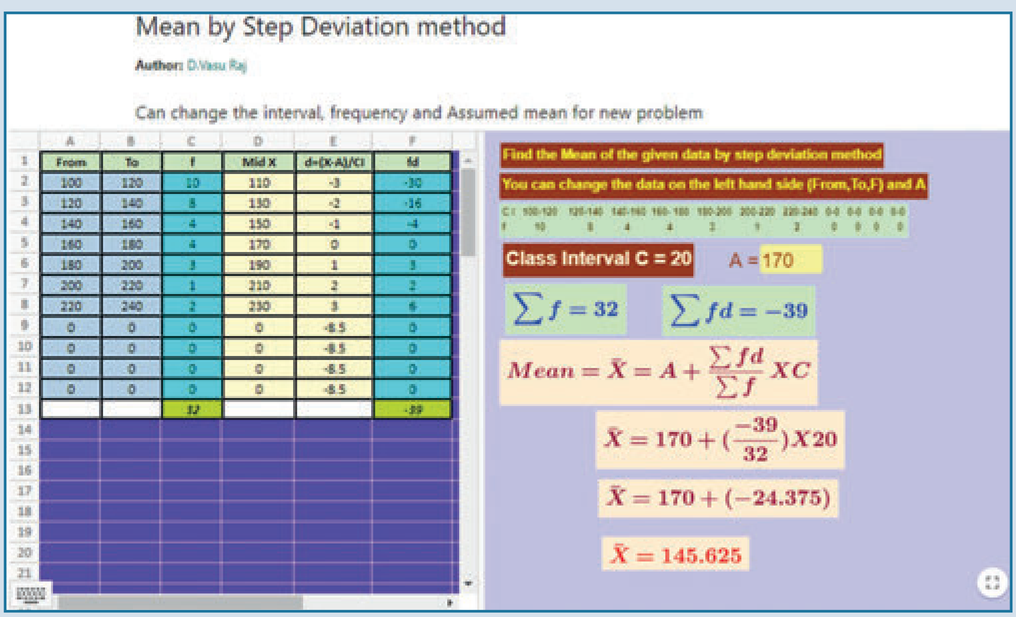


படி 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra பக்கத்தில் "Mean by step deviation method" என்னும் பணித்தாளிற்குச் செல்க.

இப்பணித்தாளில் 5.5 எடுத்துக்காட்டுக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். படிகளை உற்றுநோக்குக. விரிதாளின் (spread sheet) இடப்பக்கத்தில் உள்ள "From", "To" and "Frequency f" இல் புதிய தரவுகளை உள்ளீடு செய்து வினாக்களை மாற்ற முடியும். அதன் பின் வலப்பக்கத்தில் விடைகளைச் சரி பார்க்கவும்.

படி 1



செயல்பாட்டிற்கான உரலி : படிவிலக்க முறையில், சராசரி காணுதல்

https://ggbm.at/NWcKTRtA or scan the QR code

B463_MAT_9_T2_TM

3. ஒரு வகுப்பில் கணித அலகுத் தேர்வில், 10 மாணவர்கள் 75 மதிப்பெண், 12 மாணவர்கள் 60 மதிப்பெண், 8 மாணவர்கள் 40 மதிப்பெண் மற்றும் 3 மாணவர்கள்30 மதிப்பெண் பெற்றனர் எனில் மொத்தத்தில் சராசரி மதிப்பெண் என்ன?

4. ஓர் அறிவியல் ஆய்வகத்தில் 6 புற்றுநோய் பாதிக்கப்பட்ட எலிகளுக்கு இயற்கை மருந்துகளை 10 நாட்கள் கொடுத்து ஆய்வுகளை மேற்கொண்டு அதன் பிறகு அவற்றின் புற்றுநோய்க் கட்டிகளின் அளவுகள் பட்டியலிடப்பட்டுள்ளது.

மதிப்பெண்கள்	1	2	3	4	5	6
புற்று நோய்க் கட்டிகளின் அளவு(மி.மீ^{3})	145	148	142	141	139	140

புற்றுநோய்க்கட்டிகளின் சராசரி அளவைக் காண்க.

5. கீழ்க்கண்ட பரவலின் சராசரி 20.2 , எனில் p யின் மதிப்பைக் காண்க

மதிப்பெண்கள்	10	15	20	25	30
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	6	8	p	10	6

6. வகுப்பில் உள்ள மாணவர்களின் எடை வகுப்பறை பதிவேட்டிற்காக எடுக்கப்பட்டது. அவ்வகுப்பின் சராசரி எடையை நேரடி முறையின் மூலம் காண்க.

எடை(கி.கி)	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	4	11	19	14	0	2

7. கீழ்க்கண்ட பரவலின் சராசரியை ஊகச் சராசரி முறையில் காண்க.

பிரிவு இடைவெளி	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
நிகழ்வெண்	5	7	15	28	8

8. கீழ்க்கண்ட பரவலின் சராசரியைப் படி விலக்க முறையில் காண்க.

வயது	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44
ஆட்களின் எண்ணிக்கை	4	20	38	24	10	9

5.5 இடைநிலை அளவு

தரவுகளில் அதிக மதிப்புடைய தரவின் மதிப்பைக் குறைத்து, குறை மதிப்புடைய தரவின் மதிப்பை அதிகரித்துச் சரிசமமாகச் சமநிலைப்படுத்தும் தனித்துவமான மையமதிப்பு கூட்டுச் சராசரி ஆகும். ஓர் அலுவலகத்தில் பணிபுரியும் நான்கு பேரின் வருமானங்கள் முறையே ₹5000, ₹6000, ₹7000 மற்றும் ₹8000 என எடுத்துக்கொண்டால் அவர்களின் சராசரி

வருமானம் $= \dfrac{5000+6000+7000+8000}{4}$ = ₹6500ஆகும். இப்போது ஐந்தாவதாக ஒருவர் ₹ 29000 மாத வருமானத்தில் இக்குழுவில் சேர்ந்தால், இந்த ஐந்து நபர்களின் சராசரி வருமானம் $= \dfrac{5000+6000+7000+8000+29000}{5} = \dfrac{55000}{5}$ = ₹11000 ஆகும். இத்தரவுகளிலிருந்து குழுவில் உள்ள ஒவ்வொருவரின் சராசரி வருமானம் ₹11000 எனக் கூற இயலுமா? இது தவறாக அமைந்து விடாதா?இங்கே உள்ள சிக்கல் என்னவெனில் மிக உயர்ந்த மதிப்பானது சராசரியைப் பாதிக்கிறது. மேலும் அது சராசரியை பொதுவான மைய மதிப்பிலிருந்து விலக்கிச் செல்கிறது. இது போன்ற நிகழ்வில் நாம் மாறுபட்ட சராசரி வகையைத் தேர்ந்தெடுப்பது அவசியமாகிறது.

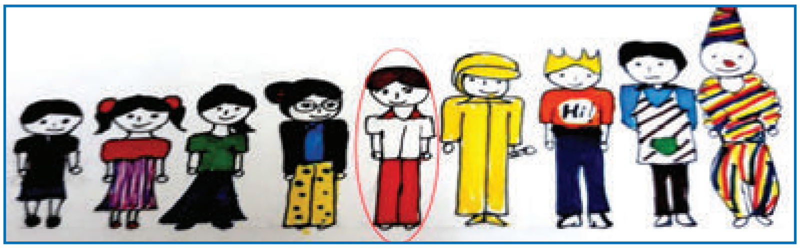
இடைநிலை அளவு

ஏறு அல்லது இறங்கு வரிசையில் அடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளை இரண்டு சம பாகங்களாகப் பிரிக்கும் மைய மதிப்பு இடைநிலை அளவு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு வகுப்பில் உள்ள 9 மாணவர்களின் உயரங்கள் முறையே 122 செ.மீ, 138 செ.மீ, 124 செ.மீ, 125 செ.மீ, 135 செ.மீ, 141 செ.மீ, 138 செ.மீ, 140 செ.மீ, 141 செ.மீ, 147 செ.மீ, மற்றும் 161 செ.மீ. என எடுத்துக்கொள்வோம்.

(i) வழக்கமான கணக்கீட்டில் சராசரி 137செ.மீ ஆகும்.

(ii) அந்த உயரங்களை ஏறு வரிசையில் 122 செ.மீ, 125 செ.மீ, 125 செ.மீ, 135 செ.மீ, 138 செ.மீ, 140 செ.மீ, 141 செ.மீ, 147 செ.மீ, 160 செ.மீ என எழுதும் போது 138 செ.மீ என்ற மதிப்பானது இருபுறமும் சம அளவிலான எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் பெற்று இருப்பதைக் காணலாம். அந்த மதிப்பை அவ்வுயரங்களின் இடைநிலை அளவு என்கிறோம்.



(iii) ஒரு தரவுத்தொகுப்பில் 11உறுப்புகள் ஒரு வரிசையில் அடுக்கப்பட்டு இருந்தால் அதன் 6 வது உறுப்பு இடைநிலை அளவு ஆகும். ஏனெனில் அவ்வுறுப்பு தான் மையத்தில் உள்ளது. தரவுத்தொகுப்பில் 101உறுப்புகள் இருந்தால் 51 வது உறுப்பு இடைநிலை அளவு ஆகும்.

ஒரு தரவுத் தொகுப்பில் ஒற்றை எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் இருந்தால் மையமதிப்பை எளிதாகக் காணலாம். பொதுவாக ஒரு தரவுத்தொகுப்பில் ஒற்றை எண்ணிக்கையில் n உறுப்புகள் இருந்தால் , அதன் இடைநிலை அளவு $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு ஆகும்.

(iv) ஒரு புள்ளி விவரத்தொகுப்பில் 6 உறுப்புகள் இருந்தால் எவ்வாறு இடைநிலை அளவு காண்பது? புள்ளி விவரத்தொகுப்பின் மையத்தில் உள்ள இரண்டு உறுப்புகளின்

சராசரி இடைநிலை அளவு ஆகும் (3.5 வது உறுப்பு எனக் குறிப்பிடலாமா?).

ஒரு தரவுத்தொகுப்பில் 100 உறுப்புகள் இருந்தால் 50.5 வது உறுப்பு இடைநிலை அளவு ஆகும்.

ஒரு தரவுத்தொகுப்பில் இரட்டை எண்ணிக்கையில் n உறுப்புகள் இருந்தால், அதன் இடைநிலை அளவு $\left(\frac{n}{2}\right)$ மற்றும் $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ ஆவது உறுப்புகளின் சராசரி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.8 ஒரு மட்டைப் பந்தாட்டத்தில் 11 வீரர்கள் எடுத்த ஓட்டங்கள் முறையே 7, 21, 45, 12, 56, 35, 25, 0, 58, 66, 29 எனில், அவற்றின் இடைநிலை அளவு காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட எண்களை ஏறு வரிசையில் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதுவோம்.

0, 7, 12, 21, 25, 29, 35, 45, 56, 58, 66

உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை= 11 (ஓர் ஒற்றைப்படை எண்)

இடைநிலை அளவு $=\left(\frac{11+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு

$=\left(\frac{12}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு = 6 ஆவது உறுப்பு = 29

எடுத்துக்காட்டு 5.9 10,17,16,21,13,18,12,10,19, 22, இடைநிலை அளவு காண்க

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட எண்களை ஏறு வரிசையில் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதுவோம்: 10,10,12,13,16,17,18,19,21,22.

உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை = 10 (ஓர் இரட்டைப்படை எண்)

இடைநிலை அளவு $=\left(\frac{10}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு மற்றும் $\left(\frac{10}{2}+1\right)$ ஆவது உறுப்புகளின் சராசரி

= 5 ஆவது உறுப்பு மற்றும் 6 ஆவது உறுப்புகளின் சராசரி

$$=\frac{16+17}{2}=\frac{33}{2}=16.5$$

எடுத்துக்காட்டு 5.10 கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையில், கணிதம் மற்றும் அறிவியலில் நடந்த அலகுத் தேர்வினை எழுதிய 12 மாணவர்களின் மதிப்பெண்கள்.

கணித மதிப்பெண்	52	55	32	30	60	44	28	25	50	75	33	62
அறிவியல் மதிப்பெண்	54	42	48	49	27	25	24	19	28	58	42	69

எந்தப் பாடத்தில் மாணவர்கள் அதிக மதிப்பெண் பெற்றுள்ளனர்?

தீர்வு

இரு மதிப்பெண்களையும் ஏறு வரிசையில் எழுதவும்.

கணித மதிப்பெண்	25	28	30	32	33	44	50	52	55	60	62	75
அறிவியல் மதிப்பெண்	19	24	25	27	28	42	42	48	49	54	58	69

மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 12 எனவே 6 வது மற்றும் 7 வது மதிப்பெண் பெற்ற மாணவர்களின் மதிப்பெண் சராசரி இடைநிலை அளவு ஆகும்.

கணிதப் பாடத்தின் இடைநிலை அளவு $= \dfrac{44+50}{2} = 47$

அறிவியல் பாடத்தின் இடைநிலை அளவு $= \dfrac{42+42}{2} = 42$

எனவே, கணிதப் பாடத்தின் மதிப்பெண் அறிவியல் பாடத்தைக் காட்டிலும் சிறந்தது என முடிவு செய்யலாம்.

5.5.1 இடைநிலை அளவு – வகைப்படுத்தப்படாத நிகழ்வெண் பரவல் (Median-Ungrouped Frequency Distribution)

(i) கொடுக்கப்பட்ட எண்களை ஏறு அல்லது இறங்கு வரிசையில் எழுதவும்.

(ii) குவிவு நிகழ்வெண் பரவலைக் கணக்கிடவும். N மொத்த நிகழ்வெண்.

(iii) N ஓர் ஒற்றைப்படை எண்ணாக இருந்தால், இடைநிலை அளவு $=\left(\dfrac{N+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு.

(iv) N ஓர் இரட்டைப்படை எண்ணாக இருந்தால் இடைநிலை அளவு

(v) $= \left(\dfrac{\left(\dfrac{N}{2}\right)\text{ஆவது உறுப்பு} + \left(\dfrac{N}{2}+1\right)\text{ஆவது உறுப்பு}}{2}\right)$

எடுத்துக்காட்டு 5.11 இடைநிலை அளவு காண்க

உயரம்(செ.மீ)	160	150	152	161	156	154	155
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	12	8	4	4	3	3	7

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட தரவுகளை ஏறு வரிசையில் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதுவோம்.

உயரம்(செ.மீ)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	குவிவு நிகழ்வெண்
150	8	8
152	4	12

154	3	15
155	7	22
156	3	25
160	12	37
161	4	41

இங்கு $N = 41$

இடைநிலை அளவு $= \left(\frac{N+1}{2}\right)$ ஆவது மதிப்பு $= \left(\frac{41+1}{2}\right)$ ஆவது மதிப்பு $= 21$ ஆவது மதிப்பு.

41 மாணவர்களின் உயரங்களை ஏறுவரிசையில் வரிசைப்படுத்தினால் 21ஆவது மாணவரின் உயரம் மைய மதிப்பாக இருக்கும். இவரின் இருபுறமும் 20 பேர் உள்ளனர். எனவே நாம் 21ஆவது மாணவரின் உயரத்தைக் காண்பது அவசியமாகிறது. 15 மாணவர்கள் (குவிவு நிகழ்வெண் பார்க்கவும்) 154 செ.மீ உயரத்திற்குச் சமமாகவோ அல்லது குறைவாகவோ உள்ளனர். 22 மாணவர்கள் (குவிவு நிகழ்வெண் பார்க்கவும்) 155 செ.மீ உயரத்திற்குச் சமமாகவோ அல்லது உயரமாகவோ உள்ளனர். இதிலிருந்து 21ஆவது மாணவரின் உயரம் 155 செ.மீ என்பதை அறியலாம்.

இடைநிலை அளவு = 155 செ.மீ

5.5.2 இடைநிலை அளவு – வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவல் (Median - Grouped Frequency Distribution)

வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவலின் இடைநிலை அளவின் கணக்கீடு கீழ்க்காணும் படிகளைக் கொண்டது.

படிகள்

(i) குவிவு நிகழ்வெண் பரவலைக் கணக்கிடவும்.

(ii) N என்பது நிகழ்வெண்களின் கூடுதல் எனில், $\frac{N}{2}$ இன் மதிப்பைக் காண்க

(iii) குவிவு நிகழ்வெண் $\frac{N}{2}$ ஐ உறுப்பாகக் கொண்டிருக்கும் பிரிவு இடைவெளி, இடைநிலை அளவு பிரிவு என்று அழைக்கப்படும்.

(iv) இடைநிலை அளவு $= l + \dfrac{\left(\frac{N}{2} - m\right)}{f} \times c$ என்ற வாய்ப்பாட்டைப் பயன்படுத்திக் காணலாம்.

இங்கு l = இடைநிலை அளவு பிரிவின் கீழ்எல்லை

f = இடைநிலை அளவு பிரிவின் நிகழ்வெண்

c = இடைநிலை அளவு பிரிவின் நீளம்

N = நிகழ்வெண்களின் கூடுதல் $\left(\sum f\right)$

m = இடைநிலை அளவுப் பிரிவின் குவிவு நிகழ்வெண்ணுக்கு உடனடியான முந்தைய குவிவு நிகழ்வெண்

எடுத்துக்காட்டு 5.12

கொடுக்கப்பட்டுள்ள 200 குடும்பங்களின் வாராந்திரச் செலவுக் குறிப்புகளின் இடைநிலை அளவு காண்க.

வாராந்திரச் செலவு (₹)	0-1000	1000-2000	2000-3000	3000-4000	4000-5000
குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	28	46	54	42	30

தீர்வு

வாராந்திரச் செலவு (₹)	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	குவிவு நிகழ்வெண்
0-1000	28	28
1000-2000	46	74
2000-3000	54	128
3000-4000	42	170
4000-5000	30	200
	N=200	

இடைநிலை அளவு $= \left(\frac{N}{2}\right)$ ஆவது மதிப்பு $= \left(\frac{200}{2}\right)$ ஆவது மதிப்பு

$=$ 100 ஆவது மதிப்பு

இடைநிலைப் பிரிவு $=$ 2000 – 3000

$\frac{N}{2} = 100 \quad l = 2000$

$m = 74, \quad c = 1000, \quad f = 54$

$$\text{இடைநிலை அளவு} = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)}{f} \times c$$

$$= 2000 + \left(\frac{100-74}{54}\right) \times 1000$$

$$= 2000 + \left(\frac{26}{54}\right) \times 1000 = 2000 + 481.5$$

$$= 2481.5$$

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

- முதல் நான்கு முழு எண்களின் இடைநிலை அளவு ______.
- முதல் நான்கு முழு எண்களுடன் நான்கு என்ற எண்ணை சேர்க்கும் போது இடைநிலை அளவு காண்க.
- இரு இடைநிலை அளவுகளுக்கிடையே உள்ள வேறுபாடு___.

எடுத்துக்காட்டு 5.13

கீழ்க்கண்ட தரவுகளின் இடைநிலை அளவு 24 எனில், x இன் மதிப்பைக் காண்க.

பிரிவு இடைவெளி	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
நிகழ்வெண்	6	24	x	16	9

தீர்வு

பிரிவு இடைவெளி	நிகழ்வெண் (f)	குவிவு நிகழ்வெண்
0-10	6	6
10-20	24	30
20-30	x	$30 + x$
30-40	16	$46 + x$
40-50	9	$55 + x$
	$N = 55 + x$	

இடைநிலை அளவு 24 எனில் இடைநிலைப் பிரிவு $20 - 30$

$l = 20 \quad N = 55 + x, \quad m = 30, \quad c = 10, \quad f = x$

$$\text{இடைநிலை அளவு} = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)}{f} \times c$$

$$24 = 20 + \frac{\left(\frac{55 + x}{2} - 30\right)}{x} \times 10$$

$$4 = \frac{5x - 25}{x} \qquad \text{(எளிமையாக்கிய பிறகு)}$$

$$4x = 5x - 25$$

$$5x - 4x = 25$$

$$x = 25$$

ஏற்றத்தாழ்வு அதிகம் உள்ள மதிப்புகளுக்கு மைய மதிப்புக் காண இடைநிலை அளவு ஒரு சரியான வழி ஆகும். ஏனென்றால் இவை இடைநிலை அளவை அதிகம் பாதிப்பதில்லை.

பயிற்சி 5.2

1. கீழ்க்கண்ட தரவுகளுக்கு இடைநிலை அளவு காண்க 47, 53, 62, 71, 83, 21, 43, 47, 41.
2. கீழ்க்கண்ட தரவுகளுக்கு இடைநிலை அளவு காண்க 36, 44, 86, 31, 37, 44, 86, 35, 60, 51
3. ஏறு வரிசையில் அமைக்கப்பட்ட 11, 12, 14, 18, x+2, x+4, 30, 32, 35, 41 என்ற தரவுகளின் இடைநிலை அளவு 24 எனில் x இன் மதிப்பைக் காண்க.
4. ஓர் ஆராய்ச்சியாளர் 13 எலிகளின் உணவு தேடும் பழக்கத்தை மைதா மாவைக் கொண்டு ஆராய்ச்சி செய்து அவை உணவு தேட எடுத்துக்கொள்ளும் நேரத்தை 31,33,63,33,28,29,33, 27,27,34,35,28,32 எனப் பட்டியலிட்டுள்ளார். எலிகள் உணவு தேட எடுத்துக்கொள்ளும் நேரத்தின் இடைநிலை அளவு காண்க.
5. ஒரு வகுப்பில் தொகுத்தறி மதிப்பீட்டில் மாணவர்கள் எடுத்த மதிப்பெண்களுக்கு இடைநிலை அளவு காண்க.

பிரிவு இடைவெளி	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	2	7	15	10	11	5

6. ஐந்து மிகைமுழுக்களின் சராசரியானது அதன் இடைநிலை அளவைப்போல் இருமடங்கு. அதில் நான்கு முழுக்கள் 3, 4, 6, 9 மற்றும் அதன் இடைநிலை அளவு 6 எனில் ஐந்தாவது முழுவைக் காண்க.

5.6 முகடு

மூன்று வேட்பாளர்கள் பெற்ற வாக்குகள் பற்றிய தரவுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன:

வேட்பாளர் திரு	பெற்ற வாக்குகள்
X	4, 12, 006
Y	9, 87, 991
Z	7, 11, 973
மொத்தம்	21, 11, 970

எந்த வேட்பாளர் வெற்றி பெற்றவராக அறிவிக்கப்படுவார்? கண்டிப்பாக மிக அதிக எண்ணிக்கையிலான வாக்குகளைப் பெற்ற திரு. Y அவர்கள்தான். ஆனால் அவருக்கு எதிரான வாக்குகளின் மொத்த எண்ணிக்கை அதிகம். ஆனாலும் இங்கு அவர்தான் வெற்றி பெற்ற வேட்பாளராகிறார். ஏனெனில் இங்குத் தேர்வு என்பது போட்டியாளர்களில் யார் அதிக வாக்குகள் பெற்றவர் என்பதைப் பொருத்து அமைகிறது.

ஒரு நிறுவனம் ஒரு பள்ளியின் 9 ஆம் வகுப்பில் உள்ள 100 மாணவர்களுக்கு விளையாட்டுக் காலணிகளை அளிக்க விரும்புகிறது. அந்த வகுப்பில் உள்ள மாணவர்களின் காலணிகளின் அளவுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

காலணிகளின் அளவு	5	6	7	8	9	10
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	10	12	27	31	19	1

அந்த நிறுவனம் எந்த அளவுடைய காலணிகளை அதிக எண்ணிக்கையில் வாங்க வேண்டும்?

மேற்கண்ட இரண்டு எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்து சராசரி மற்றும் இடைநிலை அளவு காண்பது இந்தச் சூழ்நிலைக்குப் பொருத்தமற்றதாக இருக்கும் என்று அறியலாம். இது போலவே ஆயத்த ஆடைகள் வாங்குவதற்கும் பொருந்தாது. எனவே முகடு பற்றிப் படிப்பது அவசியமாகிறது.

அதிகமுறை இடம் பெற்றுள்ள உறுப்பின் மதிப்பே முகடு ஆகும்.

சராசரியைப் பற்றிய காணொலிகளை வலையொளித் தளத்தில் தேடும்போது அதிகமாகப் பார்க்கப்பட்ட ஒரு காணொலியைப் பார்க்க நேரிடும். இந்த இடத்தில் முகடு என்ற கருத்து பயன்படுத்துகின்றது.

குறிப்பு

"எது மக்களால் அதிகம் விரும்பப்படுகிறது?" என்ற வினாவிற்கு விடையாக அமைவது புதுமை ஆகும். எடுத்துக்காட்டு : எந்த வடிவமைப்பிலான சட்டை மக்களால் அதிகம் விரும்பி உடுத்தப்படுகிறது?

வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பட்டியலில், அதிக நிகழ்வெண்ணைப் பெற்ற குழுவே முகட்டுக் குழுவாகும்.

5.6.1 முகடு – செப்பனிடப்படாதத் தரவு (Mode - Raw Data)

அதிக முறை இடம் பெற்றுள்ள உறுப்பின் மதிப்பே முகடு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.14 ஓர் அரிசி ஆலையில் உள்ள ஏழு தொழிலாளிகளின் நாள்கூலித் தரவுகள் முறையே ₹ 500, ₹ 600, ₹ 600, ₹ 800, ₹ 800, ₹ 800 மற்றும் ₹ 1000. நாள்கூலித் தரவுகளின் முகடு காண்க.

தீர்வு

இத்தரவில் ₹ 600 அதிகமான(மூன்று) முறை இடம் பெற்று, மற்றவை இரண்டு அல்லது ஒருமுறை இடம்பெற்றிருப்பதால், முகடு ₹ 800 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.15 பின்வரும் எண்களுக்கு முகடு காண்க 17, 18, 20, 20, 21, 21, 22, 22

தீர்வு

இத்தரவில் 20, 21, 22 என்ற எண்கள் ஒவ்வொன்றும் இருமுறை இடம்பெறுவதால், இத்தரவுகளுக்கு 20, 21, 22 ஆகிய மூன்று முகடுகள் உள்ளன.

குறிப்பு

ஒரே ஒரு முகடு உள்ள பரவல் ஒற்றை முகட்டுப் பரவல் எனப்படும்.

இரண்டு முகடுகள் உள்ள பரவல் இரட்டை முகட்டுப் பரவல் எனப்படும்.

மூன்று முகடுகள் உள்ள பரவல் மும்முகட்டுப் பரவல் எனப்படும்.

மூன்று முகடுகளுக்கு மேல் உள்ள பரவல் பன்முகட்டுப் பரவல் எனப்படும்.

5.6.2 முகடு – வகைப்படுத்தப்படாத நிகழ்வெண் பரவல் (Mode for Ungrouped Frequency Distribution)

வகைப்படுத்தப்படாத நிகழ்வெண் பரவலில் மிகப்பெரிய நிகழ்வெண்ணைப் பெற்றுள்ள உறுப்பின் மதிப்பு முகடு எனப்படும்

எடுத்துக்காட்டு 5.16 ஓர் எண் தொகுப்பானது ஐந்து 4 களையும், நான்கு 5 களையும், ஒன்பது 6 களையும், ஆறு 9 களையும் கொண்டுள்ளது. எனில் முகடு காண்க.

தீர்வு

எண் தொகுப்பின் அளவு	4	5	6	9
நிகழ்வெண்	5	4	9	6

கொடுக்கப்பட்ட தரவில், மிகப்பெரிய நிகழ்வெண் 9 ஐப் பெற்றிருக்கும் அளவு 6. எனவே முகடு 6 ஆகும்.

5.6.3 முகடு–வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவல் (Mode–Grouped Frequency Distribution)

வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவலில், உறுப்புகளின் சரியான மதிப்பு தெரியாது என்பதால் முகட்டின் சரியான மதிப்பைக் காண்பது மிகக் கடினமானது. எனினும், பிரிவு இடைவெளிகளின் நீளம் சமமானதாக உள்ள போது முகட்டின் தோராய மதிப்பைக் கீழ்வரும் வாய்ப்பாட்டின் மூலம் காணலாம்.

$$\text{முகடு} = l + \left(\frac{f - f_1}{2f - f_1 - f_2}\right) \times c$$

இங்கு மிகப்பெரிய நிகழ்வெண்ணைப் பெற்றுள்ள பிரிவை முகட்டுப் பிரிவு என்று அழைப்போம்.

l – முகட்டுப் பிரிவின் கீழ் எல்லை

f – முகட்டுப் பிரிவின் நிகழ்வெண்

f_1 – முகட்டுப் பிரிவின் நிகழ்வெண்ணுக்கு முந்தைய நிகழ்வெண்

f_2 – முகட்டுப் பிரிவின் நிகழ்வெண்ணுக்குப் பிந்தைய நிகழ்வெண்

எடுத்துக்காட்டு 5.17 கீழ்க்காணும் தரவுகளுக்கு முகடு காண்க.

மதிப்பெண்கள்	1-5	6-10	11-15	16-20	21-25
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	7	10	16	32	24

தீர்வு

மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
0.5-5.5	7
5.5-10.5	10
10.5-15.5	16
15.5-20.5	32
20.5-25.5	24

குறிப்பு

தொடர்ச்சியில்லாத பிரிவு இடைவெளியைத் தொடர்ச்சியான பிரிவு இடைவெளியாக மாற்றுவதற்கு ஒவ்வொரு இடைவெளியின் கீழ் எல்லையிலிருந்து 0.5 ஐக் கழிக்க வேண்டும் மற்றும் மேல் எல்லையுடன் 0.5ஐக் கூட்ட வேண்டும்.

முகட்டுப் பிரிவு 16-20 (மிகப்பெரிய நிகழ்வெண்).

$l = 15.5,\ f = 32,\ f_1 = 16,\ f_2 = 24,\ c = 20.5 - 15.5 = 5$

$$\text{முகடு} = l + \left(\frac{f - f_1}{2f - f_1 - f_2}\right) \times c$$

$$= 15.5 + \left(\frac{32 - 16}{64 - 16 - 24}\right) \times 5$$

$$= 15.5 + \left(\frac{16}{24}\right) \times 5 = 15.5 + 3.33 = 18.83.$$

AHF5V3

5.6.4 சராசரி , இடைநிலை அளவு, முகடு இவற்றிலிருந்து பெறப்பட்ட உறவு (An Empirical Relationship Between Mean, Median and Mode).

நிகழ்வெண்கள் சீராகப் பரவி இருக்கும்போது முன் கண்ட மூன்று வகையான சராசரிகளுக்கும் இடையே ஒருவகைத் தொடர்பு ஏற்படும்.

$$\text{முகடு} \approx 3 \text{ இடைநிலை அளவு} - 2 \text{ சராசரி}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.18 ஒரு பரவலின் சராசரி மற்றும் முகடு முறையே 66 மற்றும் 60 ஆகும். இடைநிலை அளவு காண்க.

தீர்வு

சராசரி = 66 முகடு = 60

$$\text{முகடு} \approx 3 \text{ இடைநிலை அளவு} - 2 \text{ சராசரி}$$

$$60 \approx 3 \text{ இடைநிலை அளவு} - 2(66)$$

$$3 \text{ இடைநிலை அளவு} \approx 60 + 132$$

$$\text{இடைநிலை அளவு} \approx \frac{192}{3} \approx 64$$

பயிற்சி 5.3

1. 10 தொழிலாளர்களின் மாத வருமானங்கள் முறையே:
   5000, 7000, 5000, 7000, 8000, 7000, 7000, 8000, 7000, 5000
   எனில் சராசரி, இடைநிலை அளவு,முகடு காண்க.
2. கொடுக்கப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கு முகடு காண்க: 3.1, 3.2, 3.3, 2.1, 1.3 , 3.3 , 3.1
3. 11, 15, 17, x+1,19, x–2, 3 என்ற தரவுகளின் சராசரி 14, எனில், x இன் மதிப்பைக் காண்க. மேலும் x இன் மதிப்பைக் கொண்டு தரவுகளின் முகடு காண்க.
4. விளையாட்டுக் கால்சட்டைகளுக்கான தேவைப்பட்டியல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

அளவு	38	39	40	41	42	43	44	45
எண்ணிக்கை	36	15	37	13	26	8	6	2

   எந்த அளவு கால்சட்டைக்கு அதிகத் தேவை உள்ளது?

5. தரவுகளின் முகடு காண்க

மதிப்பெண்	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	22	38	46	34	20

6. தரவுகளின் சராசரி, இடைநிலை அளவு, முகடு காண்க

எடை	25-34	35-44	45-54	55-64	65-74	75-84
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	4	8	10	14	8	6

செயல்திட்டம்

1. 20 வெவ்வேறு தரையில் வாழும் விலங்குகளின் அதிகபட்ச வேகத்தின் நிகழ்வெண் பட்டியலைத் தயாரிக்க. சராசரி, இடைநிலை அளவு மற்றும் முகடு காண்க. விடைகளை ஒப்பிடுக.
2. ஒரு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களின் விவரம் பற்றிய பதிவேட்டிலிருந்து
   (i) சராசரி வயதினைக் காண்க. (பிரிவு இடைவெளியைப் பயன்படுத்தி)
   (ii) சராசரி உயரத்தினைக் காண்க. (பிரிவு இடைவெளியைப் பயன்படுத்தி)

பயிற்சி 5.4

AHP1HQ

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. ஒழுங்கற்ற வடிவில் கிடைக்கும் தரவுகள் _________
   (1) வகைப்படுத்தப்பட்ட தரவுகள் (2) பிரிவு இடைவெளி.
   (3) முகடு (4) செப்பனிடப்படாத தரவுகள்.
2. மையப்புள்ளி m, தொடர் நிகழ்வெண் பரவலின் ஒரு பிரிவின் மேல் எல்லை 'b'எனில், அதன் கீழ் எல்லை.
   (1) $2m - b$ (2) $2m+b$ (3) $m-b$ (4) $m-2b$.
3. பின்வருவனவற்றில் எது மையப்போக்கு அளவை அல்ல?
   (1) சராசரி (2) வீச்சு (3) இடைநிலை அளவு (4) முகடு.
4. ஏழு மதிப்புகளின் சராசரி 81. அவற்றில் ஒரு மதிப்பு நீக்கப்படும் போது மற்ற மதிப்புகளின் சராசரி 78 ஆக அமைகிறது, எனில் நீக்கப்பட்ட மதிப்பு எவ்வளவு
   (1) 101 (2) 100 (3) 99 (4) 98.
5. ஒரு தரவில் அதிகமுறை இடம் பெற்றுள்ள உறுப்பின் மதிப்பு.
   (1) நிகழ்வெண் (2) வீச்சு (3) முகடு (4) இடைநிலை அளவு..
6. பின்வரும் எண் தொகுதிகளில் சராசரி, இடைநிலை மற்றும் முகடு ஒரே மதிப்பாக அமையும் தொகுதி எது?
   (1) 2,2,2,4 (2) 1,3,3,3,5 (3) 1,1,2,5,6 (4) 1,1,2,1,5.
7. சராசரியிலிருந்து, அனைத்து n உறுப்புகளின் விலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை
   (1) 0 (2) n-1 (3) n (4) n+1.
8. a, b, c, d மற்றும் e இன் சராசரி 28. a, c மற்றும் e இன் சராசரி 24, எனில் b மற்றும் d இன் சராசரி
   (1) 24 (2) 36 (3) 26 (4) 34
9. x, x+2, x+4, x+6, x+8, என்ற தரவின் சராசரி 11 எனில் முதல் மூன்று தரவுகளின் கூட்டுச்சராசரி
   (1) 9 (2)11 (3) 13 (4) 15.

10. $5, 9, x, 17$ மற்றும் 21 இன் சராசரியானது 13 எனில், x இன் மதிப்பு

(1) 9 (2) 13 (3) 17 (4) 21.

11. முதல் 11 இயல் எண்களின் வர்க்கங்களின் சராசரி

(1) 26 (2) 46 (3) 48 (4) 52.

12. முதல் 10 பகா எண்களின் வர்க்கங்களின் சராசரி

(1) 12.6 (2) 12.7 (3) 12.8 (4) 12.9

13. முதல் 10 முழு எண்களின் இடைநிலை அளவு

(1) 4 (2) 4.5 (3) 5 (4) 5.5.

14. ஓர் எண் தொகுப்பின் சராசரி $\bar{X}$. எண் தொகுப்பின் ஒவ்வொரு மதிப்பும் z, என்ற எண்ணால் பெருக்கப்படும் போது அதன் சராசரி

(1) $\bar{X}+z$ (2) $\bar{X}-z$ (3) $z\bar{X}$ (4) $\bar{X}$

15. 165 இன் பகாக் காரணிகளின் சராசரி

(1) 5 (2) 11 (3) 13 (4) 55

நினைவு கூர்வதற்கான கருத்துகள்

- ஒரு குறிப்பிட்ட நோக்கத்திற்காகத் திரட்டப்பட்ட உண்மைகள் மற்றும் எண் மதிப்புகளை **தரவுகள்** என்கிறோம்.
- நேரடியாகக் கள ஆய்வு செய்து தரவுகளைச் சேகரிப்பது **முதல் நிலைத் தரவுகள்** என்கிறோம். பிற மூலங்களிலிருந்து திரட்டிய தரவுகளைப் பயன்படுத்துதல் **இரண்டாம் நிலைத் தரவுகள்** ஆகும்.
- தொடக்க நிலையில் பெறப்பட்ட தரவுகள் **செப்பனிடப்படாதத் தரவுகள்** ஆகும்
- பிரிவு இடைவெளிகளைப் பயன்படுத்தி ஒழுங்குபடுத்தப்பட்டத் தரவுகள் **தொகுக்கப்பட்டத் தரவுகள்** ஆகும்.
- ஒரு மதிப்பின் **நிகழ்வெண்** என்பது அந்த மதிப்பு எத்தனை முறை வருகிறது என்பதைக் குறிக்கும்.
- நடுப்புள்ளி $=\dfrac{UCL+LCL}{2}$ (UCL – பிரிவின் மேல் எல்லை, LCL – பிரிவின் கீழ் எல்லை)
- பிரிவு இடைவெளியின் அளவு = UCL – LCL
- தொகுக்கப்பட்டத் தரவுகளின் சராசரி

நேரடி முறை	ஊகச் சராசரி முறை	படிவிலக்க முறை
$\bar{X}=\dfrac{\sum fx}{\sum f}$	$\bar{X}=A+\dfrac{\sum fd}{\sum f}$	$\bar{X}=A+\left[\dfrac{\sum fd}{\sum f}\times c\right]$

- ஒரு பிரிவின் குவிவு நிகழ்வெண் என்பது அந்தப் பிரிவு வரை உள்ள அனைத்துப் பிரிவுகளின் நிகழ்வெண்களின் கூடுதல் ஆகும்.
- வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவலின் இடைநிலை அளவு $=l+\dfrac{\left(\dfrac{N}{2}-m\right)}{f}\times c$
- வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவலின் முகடு $=l+\left(\dfrac{f-f_1}{2f-f_1-f_2}\right)\times c$

விடைகள்

1. கண மொழி

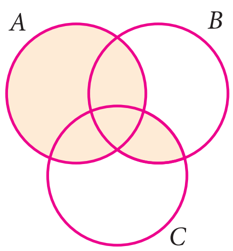
பயிற்சி 1.1

1. (i) {1,2,3,4,5,7,9,11} (ii) {2,5} (iii) {3,5 }

பயிற்சி 1.2

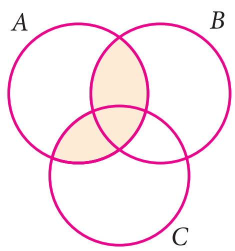
1. (i) $\{ a,b,c,d,e,f \}$ (ii) $\{a,b,d\}$ (iii) { a,b,c,d,e,f } (iv) {a, b, d }

2. (i)



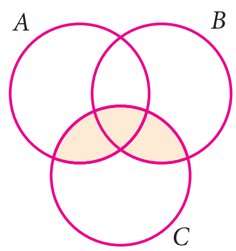
$A\cup(B\cap C)$

(ii)



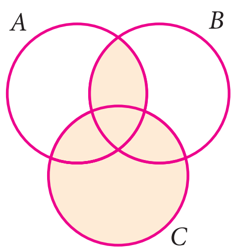
$A\cap(B\cup C)$

(iii)



$(A\cup B)\cap C$

(iv)



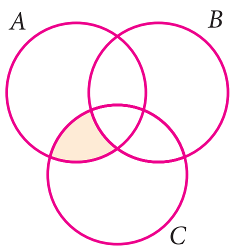
$(A\cap B)\cup C$

பயிற்சி 1.3

1. (i) $\{3,4,6\}$ (ii) $\{-1,5,7\}$ (iii) $\{-3,0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

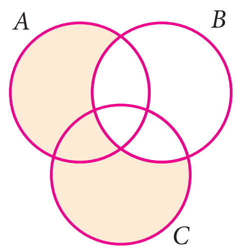
(iv) $\{-3,0,1,2\}$ (v) $\{1,2,4,6\}$ (vi) $\{4,6\}$ (vii) $\{-1,3,4,6\}$

2. (i)



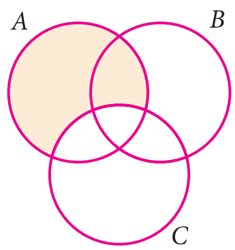
$(A-B)\cap C$

(ii)



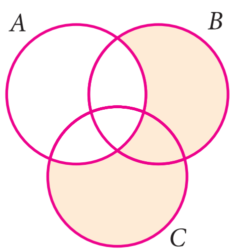
$(A\cup C)-B$

(iii)



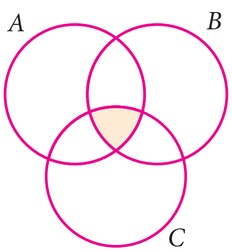
$A-(A\cap C)$

(iv)



$(B\cup C)-A$

(v)



$A\cap B\cap C$

பயிற்சி 1.4

2. (i) 185 (ii) 141 (iii) 326 3.(i) 125

(ii) 695 (iii) 105 4. 70

5. $x = 20$, $y = 40$, $z = 30$ 6. (i) 5 (ii) 7

(iii) 8 7. 5

பயிற்சி 1.5

1.(1) 1 2. (3) $(P-Q)\cup(P-R)$

3.(4) $(A\cap B)' = A'\cup B'$ 4.(2) 10 5.(1) 10

6.(4) ϕ 7. (3) இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணங்களின் கணம்.

8.(1) A 9.(3) $Z-(X\cap Y)$ 10.(1) 5

2. மெய்யெண்கள்

பயிற்சி 2.1

1.(i) 5^4 (ii) 5^{-1} (iii) $5^{\frac{1}{2}}$ (iv) $5^{\frac{3}{2}}$

2.(i) 4^2 (ii) $4^{\frac{3}{2}}$ (iii) $4^{\frac{5}{2}}$ 3.(i) 7

(ii) 9 (iii) 32 (iv) $\frac{1}{27}$ (v) 9

(vi) $\frac{25}{16}$ 4.(i) $5^{\frac{1}{2}}$ (ii) $7^{\frac{1}{2}}$ (iii) $7^{\frac{10}{3}}$

(iv) $10^{\frac{-14}{3}}$ 5.(i) 2 (ii) 3 (iii) 10 (iv) $\frac{4}{5}$

பயிற்சி 2.2

1.(i) $21\sqrt{3}$ (ii) $3\sqrt[3]{5}$ (iii) $26\sqrt{3}$ (iv) $8\sqrt[3]{5}$

2. (i) $\sqrt{30}$ (ii) $\sqrt{5}$ (iii) 30 (iv) $49a-25b$

(v) $\frac{5}{16}$ 3.(i) 1.852 (ii) 23.978

4. (i) $\sqrt[3]{5} > \sqrt[6]{3} > \sqrt[9]{4}$ (ii) $\sqrt{\sqrt{3}} > \sqrt[2]{\sqrt[3]{5}} > \sqrt[3]{\sqrt[4]{7}}$

5. (i) ஆம் (ii) ஆம் (iii) ஆம் (iv) ஆம்

6. (i) ஆம் (ii) ஆம் (iii) ஆம் (iv) ஆம்

பயிற்சி 2.3

1.(i) $\frac{\sqrt{2}}{10}$ (ii) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (iii) $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ (iv) $\frac{\sqrt{30}}{2}$

2. (i) $\frac{4}{3}(5+2\sqrt{6})$ (ii) $13-4\sqrt{6}$ (iii) $\frac{9+4\sqrt{30}}{21}$ (iv) $-2\sqrt{5}$

3. $a = \frac{-4}{3}, b = \frac{11}{3}$ 4. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 18$ 5. 5.414

பயிற்சி 2.4

1. (i) 5.6943×10^{11} (ii) 2.00057×10^{3} (iii) 6.0×10^{-7} (iv) 9.000002×10^{-4}

2. (i) 3459000 (ii) 56780 (iii) 0.0000100005 (iv) 0.0000002530009

3. (i) 1.44×10^{28} (ii) 8.0×10^{-60} (iii) 2.5×10^{-36} 4. (i) 7.0×10^{9}

(ii) 9.4605284×10^{15} கி.மீ (iii) $9.1093822 \times 10^{-31}$ கி.கி

5. (i) 1.505×10^{8} (ii) 1.5522×10^{17} (iii) 1.224×10^{7} (iv) 1.9558×10^{-1}

பயிற்சி 2.5

1.(4) $\sqrt{25} = \pm 5$ 2.(4) $\sqrt{13}$ 3.(1) $8\sqrt{10}$ 4.(3) $5\sqrt{3}$

5.(2) 4 6.(2) $8\sqrt{21}$ 7. (3) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 8.(2) $22 - 4\sqrt{10}$

9.(2) $\sqrt[3]{9}$ 10.(4) $\frac{10^6}{3^6}$ 11.(2) $\frac{4}{3}$ 12.(3) 5.367×10^{-3}

13.(2) 0.00592 14.(3) 2×10^{10} மீ^{2}

3. இயற்கணிதம்

பயிற்சி 3.1

1. (i) $(x-1)$ என்பது ஒரு காரணியாகும். (ii) $(x-1)$ என்பது ஒரு காரணியல்ல.

2. $x+2$ என்பது ஒரு காரணியல்ல 3. $(x-5)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணியாகும்.

4. $m = 10$ 6. ஆம் 7. $k = 3$ 8. ஆம்

பயிற்சி 3.2

1.(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy + 24yz + 16xz$ (ii) $4a^2 + 9b^2 + 16c^2 - 12ab - 24bc + 16ac$

(iii) $p^2 + 4q^2 + 9r^2 - 4pq + 12qr - 6pr$ (iv) $\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{9} + \frac{c^2}{4} + \frac{ab}{6} + \frac{bc}{3} + \frac{ac}{4}$

2.(i) $x^3 + 15x^2 + 74x + 120$ (ii) $8p^3 - 24p^2 - 14p + 60$

(iii) $27a^3 + 27a^2 - 18a - 8$ (iv) $64m^3 + 64m^2 - 100m - 100$

3.(i) 18,107,210 (ii) −32, −6, +90

4.(i) 14 (ii) $\frac{59}{70}$ (iii) 78 (iv) $\frac{78}{70}$

5.(i) $8a^3 + 27b^3 + 36a^2b + 54ab^2$ (ii) $27x^3 - 64y^3 - 108x^2y + 144xy^2$

(iii) $x^3 + \frac{1}{y^3} + \frac{3x^2}{y} + \frac{3x}{y^2}$ (iv) $a^3 + \frac{1}{a^3} + 3a + \frac{3}{a}$

6.(i) 941192 (ii) 1092727 (iii) 970299 (iv) 1003003001

7. 29 8. 280 9. 335 10. 198 11. ± 5, ± 110

12. 36 13.(i) $8a^3 + 27b^3 + 64c^3 - 72abc$ (ii) $x^3 - 8y^3 + 27z^3 + 18xyz$

14.(i) −630 (ii) 486 (iii) $\frac{-5}{12}$ (iv) $\frac{-9}{4}$

15. $(x+y)(y+z)(x+z)$ 16. $\frac{1}{15}$ 18. 72xyz

பயிற்சி 3.3

1. (i) p^5 (ii) 1 (iii) $3a^2b^2c^3$ (iv) $16x^6$

(v) abc (vi) $7xyz^2$ (vii) 25ab (viii) 1

2. (i) 1 (ii) a^{m+1} (iii) $(2a+1)$ (iv) 1

(v) $\left(x+1\right)\left(x-1\right)$ (vi) $\left(a-3x\right)$

பயிற்சி 3.4

1.(i) $2a^2(1+2b+4c)$ (ii) $(a-m)(b-c)$

(iii) $(p+q)(p+r)$ (iv) $(y+1)(y-1)(2y+1)$ 2.(i) $\left(x+2\right)^2$ (ii) $3(a-4b)^2$

(iii) $x(x+2)(x-2)(x^2+4)$ (iv) $\left(m+\frac{1}{m}+5\right)\left(m+\frac{1}{m}-5\right)$

(v) $6(1+6x)(1-6x)$ (vi) $\left(a-\frac{1}{a}+4\right)\left(a-\frac{1}{a}-4\right)$

(vii) $(m^2+3m+1)(m^2-3m+1)$ (viii) $(x^n+1)^2$

(ix) $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}\right)^2$ (x) $(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$ (xi) $(x^2+2y^2+2xy)(x^2+2y^2-2xy)$

3. (i) $(2x+3y+5z)^2$ (ii) $(1+x-3y)^2$ **(அல்லது)** $(-1-x+3y)^2$

(iii) $(-5x+2y+3z)^2$ **(அல்லது)** $(5x-2y-3z)^2$ (iv) $\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}\right)^2$

4. (i) $(2x+5y)(4x^2-10xy+25y^2)$ (ii) $(a-9)(a^2+9a+81)$

(iii) $(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$ (iv) $(m+8)(m^2-8m+64)$

(v) $(a+2b)(a^2+b^2+ab)$ (vi) $(a+2)(a-2)(a^2+4-2a)(a^2+4+2a)$

5. (i) $(x+2y+3z)(x^2+4y^2+9z^2-2xy-6yz-3xz)$

(ii) $(a+b+1)(a^2+b^2+1-ab-b-a)$

(iii) $(x+2y-1)(x^2+4y^2+1-2xy+2y+x)$

(iv) $(l-2m-3n)(l^2+4m^2+9n^2+2lm-6mn+3ln)$

பயிற்சி 3.5

1.(i) $(x+6)(x+4)$ (ii) $(x-11)(x+9)$

(iii) $(z+6)(z-2)$ (iv) $(x+15)(x-1)$

(v) $(p-8)(p+2)$ (vi) $(t-9)(t-8)$

(vii) $(x-5)(x-3)$ (viii) $(y-20)(y+4)$

(ix) $(a+30)(a-20)$

2. (i) $(2a+5)(a+2)$ (ii) $(11-6m)(m+1)$ (iii) $(2x-5)^2$ (iv) $(-12x-8)(5x-4)$

(v) $(x-7y)(5x+6y)$ (vi) $(2x-3)(4x-3)$ (vii) $2(3x+2y)(x+2y)$

(viii) $-3(4x+3)(x-1)$ (ix) $-1(3a+10)(a-1)$

(x) $3x^2(3y+2)^2$ (xi) $(a+b+6)(a+b+3)$

3. (i) $(p-q-8)(p-q+2)$ (ii) $(18x-9y-13)(2x-y+1)$

(iii) $(m+6n)(m-4n)$ (iv) $\left(a+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}a-3\right)$ (v) $(a+1)(a-1)(a^2-2)$

(vi) $m(4m+5n)(2m-3n)$ (vii) $\left(\sqrt{3}x+2\right)\left(4x-\sqrt{3}\right)$

(viii) $(a^2+3a+1)(a^2-3a+1)$ (ix) $\left(a-\frac{1}{a}+4\right)\left(a-\frac{1}{a}-4\right)$

(x) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2$ (xi) $\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{y}\right)$

பயிற்சி 3.6

1.(i) $x^2+4x+5,\ 12$ (ii) $(x^2-1),\ -2$

(iii) $x^2+8x+48,\ 253$ (iv) $3x^2-11x+40,\ -125$

(v) $x^2-\frac{2x}{3}-\frac{34}{9},\ \frac{4}{9}$ (vi) $2x^3-\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{8}+\frac{51}{32},\ \frac{109}{32}$

2. $4x^3-2x^2+3,\ p=-2,\ q=0,$ மீதி$=-10$

3. $a=20,\ b=94$, மீதி=388

பயிற்சி 3.7

1.(i) $(x-2)(x+3)(x-4)$ (ii) $(x+1)(x-2)(2x-1)$

(iii) $(x-1)(4x^2-x+6)$ (iv) $(x-1)(2x-1)(2x+3)$

(v) $(x+2)(x+3)(x-4)$ (vi) $(x-1)(x-2)(x+3)$

(vii) $(x-1)(x-10)(x+1)$ (viii) $(x-1)(x^2+x-4)$

பயிற்சி 3.8

1.(4) காரணி	2.(3) $\frac{2}{3}$	3.(2) $(3x-3)$	4.(3) $p(3)$
5.(3) $\left(x^3+y^3\right)$	6.(3) $(x+2)$	7.(2) $\left(-a-b+c\right)^2$	8.(2) b,ac
9.(3) 1,2, −15	10.(3) 3	11.(4) 0	12.(3) 1
13.(2) 31	14.(1) a^k	15.(2) $\left(x^2-y^2\right)$	16.(3) 7

4. வடிவியல்

பயிற்சி 4.1

1. (i) விட்டம்	(ii) மையம்	(iii) ஆரம்	(iv) வில்	(v) மூன்று
2. (i) தவறு	(ii) சரி	(iii) சரி	(iv) சரி	(v) தவறு

பயிற்சி 4.2

1. 15செ.மீ 2. 24செ.மீ 3. 17செ.மீ 4.8செ.மீ, 45°, 45°
5. 18செ.மீ 6. 14 செ.மீ 7. 6 செ.மீ

பயிற்சி 4.3

1. (i) 45° (ii) 10° (iii) 55° (iv) 120° (v) 60°
2. $\angle BDC = 25^\circ, \angle DBA = 65^\circ, \angle COB = 50^\circ$

பயிற்சி 4.4

1. 30° 2.(i) $\angle ACD = 55^\circ$ (ii) $\angle ACB = 50^\circ$ (iii) $\angle DAE = 25^\circ$
3. $\angle A = 64^\circ$; $\angle B = 80^\circ$; $\angle C = 116^\circ$; $\angle D = 100^\circ$ 4. 17செ.மீ
5.(i) $\angle CAD = 40^\circ$ (ii) $\angle BCD = 80^\circ$ 6. ஆரம்=5செ.மீ 7. 3.25 மீ
8. $\angle OAC = 30^\circ$ 9. 5.6 மீ 10. $\angle RPO = 60^\circ$

பயிற்சி 4.7

1.(1) 55° 2.(3) 40செ.மீ 3.(1) 80° 4.(1) 30°
5.(4) 10செ.மீ 6.(1) 80° 7.(2) 105° 8.(3) 120°
9.(2) 9செ.மீ 10.(4) 9செ.மீ

5. புள்ளியியல்

பயிற்சி 5.1

1. $27^\circ C$ 2. 44 கி.கி 3. 56.96 (அல்லது) 57 (தோராயமாக)
4. 142.5 மீ. மீ ^{3} 5. $p = 20$ 6. 40.2 7. 29.29 8. 29.05

பயிற்சி 5.2

1. 47 2. 44 3. 21 4. 32
5. 31 6. 38

பயிற்சி 5.3

1. 6600, 7000, 7000 2. 3.1 மற்றும் 3.3 (இருமுகடு) 3. 15
4. 40 5. 24 6. 55.9, 56.64, 58.5

பயிற்சி 5.4

1.(4) செப்பனிடப்படாத தரவுகள் 2.(1) 2m−b 3.(2) வீச்சு 4.(3) 99
5.(3) முகடு 6.(2) 1, 3, 3, 3, 5 7.(1) 0 8.(4) 34
9.(1) 9 10.(2) 13 11.(2) 46 12.(4) 12.9
13.(2) 4.5 14.(3) $z\overline{X}$ 15.(4) 55

கணிதக் கலைச்சொற்கள்

அடுக்குகள்	Indices
அரைவட்டம்	Semi-circle
அறிவியல் குறியீடு	Scientific notation
அனைத்துக் கணம்	Universal set
இடைநிலை அளவு	Median
இணை	Conjugate
இரண்டாம்நிலைத் தரவுகள்	Secondary data
ஈருறுப்பு முறுடுகள்	Binomial surds
உள்வட்ட ஆரம்	Inradius
உள்வட்ட மையம்	Incentre
உள்வட்டம்	Incircle
ஊகச் சராசரி	Assumed mean
கண நிரப்பி	Set complementation
கண வித்தியாசம்	Set difference
கணச் செயல்கள்	Set operations
கலப்பு முறுடுகள்	Mixed surds
காரணித் தேற்றம்	Factor theorem
காரணிப்படுத்துதல்	Factorisation
கூட்டு முறுடுகள்	Compound surds
கூட்டுச் சராசரி	Arithmetic mean
கோணம்	Angle
சர்வசம வட்டங்கள்	Congruent circle
சிறிய வட்டக் கோணப்பகுதி	Minor sector
செப்பனிடப்படாத தரவுகள்	Raw data
சேர்ப்புப் பண்பு	Associative property
தொகுக்கப்படாத தரவுகள்	Ungrouped data
தொகுக்கப்பட்ட தரவுகள்	Grouped data
தொகுமுறை வகுத்தல்	Synthetic division
நடுக்கோட்டுமையம்	Centroid
நாண்	Chord
நாற்கரம்	Quadrilateral
நிகழ்வெண் பட்டியல்	Frequency table
பங்கீட்டுப் பண்பு	Distributive property
படி விலக்க முறை	Step-deviation method
பரிதி	Circumference
பரிமாற்றுப் பண்பு	Commutative property
பூச்சியம் / காரணி	Zero / Factor
பெரிய வட்டக்கோணப்பகுதி	Major sector
பொதுமைய வட்டங்கள்	Concentric circle
மீப்பெரு பொது வகுத்தி	Greatest Common Divisor
முகடு	Mode
முடிவுறு கணம்	Finite set
முதல்நிலைத் தரவுகள்	Primary data
முழுமையான முறுடுகள்	Pure surds
முறுடுகள்	Surds
முற்றொருமைகள்	Identities
மூல அடிமானம்	Radicand
மூலக்குறியீடு	Radical
மையப்போக்கு அளவைகள்	Measures of central tendency
மையம்	Centre
வகுத்தல் படிமுறை	Division algorithm
வட்ட நாற்கரம்	Cyclic Quadrilateral
வட்டக்கோணப்பகுதி	Sector
வட்டத்துண்டு	Segment
விகிதப்படுத்துதல்	Rationalisation
விகிதமுறா எண்	Irrational number
விட்டம்	Diameter
வெட்டாக் கணங்கள்	Disjoint sets
வெட்டும் கணங்கள்	Overlapping sets
வென்படம்	Venn diagram

இடைநிலைக் கணக்கு – ஒன்பதாம் வகுப்பு
பாடநூல் உருவாக்கக் குழு

மேலாய்வாளர்

- **முனைவர் இரா. இராமானுஜம்,**
பேராசிரியர்,
கணித அறிவியல் நிறுவனம்,
தரமணி, சென்னை.

- **முனைவர். அலோகா கன்ஹறே,**
துணை பேராசிரியர்,
ஹோமி பாபா அறிவியல் கல்வி மையம், மும்பை.

- **இரா. ஆத்மராமன்,**
கணிதக் கல்வி ஆலோசகர்,
இந்திய கணித ஆசிரியர்கள் சங்கம், சென்னை–05.

பாட வல்லுநர்

- **முனைவர். க. குமாரசாமி,**
இணை பேராசிரியர்,
ஆர்.கே.எம். விவேகானந்தா கல்லூரி, சென்னை.

பாடநூல் உருவாக்கம்

- **பெ. பத்மநாபன்,**
விரிவுரையாளர்,
மாவட்ட ஆசிரியர் கல்வி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம்,
கீழ்பென்னாத்தூர், திருவண்ணாமலை மாவட்டம்

- **கோ.செ.அ.முகமது யூசுப் ஜெயினுலாபுதீன்,**
பட்டதாரி ஆசிரியர்,
மன்ப உல் உலூம் மே.நி.ப, கோட்டை, கோயம்புத்தூர் –1

- **அ. செந்தில்குமார்,**
பட்டதாரி ஆசிரியர்,
அ.மே.நி.ப., திருத்துறையூர், கடலூர் மாவட்டம்.

- **இ. ஷாநவாஸ்,**
பட்டதாரி ஆசிரியர்,
மாதிரிப் பள்ளி, காரிமங்கலம், தர்மபுரி மாவட்டம்.

- **கு.பு. கணேஷ்,**
பட்டதாரி ஆசிரியர் ,
அவ்வையார் அரசினர் மகளிர் மே.நி.பள்ளி, தருமபுரி.

- **நா. வெங்கட்ராமன்,**
முதுகலை பட்டதாரி ஆசிரியர்,
கோபால் நாயுடு மே.நி.ப, பீளமேடு, கோயம்புத்தூர்.

- **பா. கருப்பசாமி**
பட்டதாரி ஆசிரியர்,
அரசு ஆதிதிராவிடர் நல உயர்நிலைப் பள்ளி
இடையன்குளம், விருதுநகர் மாவட்டம்

ஆய்வாளர்கள்

- **முனைவர் மு.ப. ஜெயராமன்,**
உதவிப் பேராசிரியர்,
L.N. அரசு கலைக் கல்லூரி, பொன்னேரி–601204.

- **முனைவர் நா. கீதா,**
உதவிப் பேராசிரியர்,
L.N. அரசு கலைக் கல்லூரி, பொன்னேரி–601204.

- **முனைவர் கீ. கவிதா,**
உதவிப் பேராசிரியர்,
பாரதி மகளிர் கல்லூரி, சென்னை.

பாட ஒருங்கிணைப்பாளர்

- **பா. தமிழ்செல்வி,**
துணை இயக்குநர்,
மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம்,
சென்னை – 06.

ஒருங்கிணைப்பாளர்

- **ஈ. ராஜ்கமல்,**
இளநிலை விரிவுரையாளர்,
மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி மற்றும்
பயிற்சி நிறுவனம், சென்னை – 06

ஆய்வாளர்களின் ஒருங்கிணைப்பாளர்

- **ச. விஜயலட்சுமி,**
பட்டதாரி ஆசிரியர்
கூவத்தூர், காஞ்சிபுரம் மாவட்டம்

ICT ஒருங்கிணைப்பாளர்

- **தா. வாசுராஜ்,**
பட்டதாரி ஆசிரியர் (ஓய்வு), ,
கொசப்பூர், புழல் ஒன்றியம், திருவள்ளூர் மாவட்டம்.

விரைவுக் குறியீடு மேலாண்மைக் குழு

- **இரா. ஜெகநாதன்**
ஊ.ஒ.ந.நி பள்ளி கணேசபுரம்– போளூர்
திருவண்ணாமலை மாவட்டம்.

- **ந. ஜெகன்**
அ.ஆ.மே.நி.பள்ளி உத்திரமேரூர்
காஞ்சிபுரம் மாவட்டம்

- **ஜே.எப். பால் எட்வின் ராய்**
ஊ.ஒ.ந.நி பள்ளி இராக்கிப்பட்டி
சேலம் மாவட்டம்.

கலை மற்றும் வடிவமைப்புக்குழு

பக்க வடிவமைப்பாளர்

- **ஜாய் கிராபிக்ஸ்,**
சிந்தாதிரிபேட்டை, சென்னை –02.

In House

- **கோபு ராசுவேல்**
- **ராஜேஷ் தங்கப்பன்**
- **ஜெரால்டு வில்சன்**

அட்டை வடிவமைப்பு

- **கதிர் ஆறுமுகம்**

தட்டச்சர்

- **ஆ. பழனிவேல்,**
தட்டச்சர், மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம், சென்னை

ஒருங்கிணைப்பாளர்

- **ரமேஷ் முனிசாமி,**

இந்நூல் 80 ஜி.எஸ்.எம் எலிகண்ட் மேப்லித்தோ தாளில்
அச்சிடப்பட்டுள்ளது ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர்: