தமிழ்நாடு அரசு

ஒன்பதாம் வகுப்பு

மூன்றாம் பருவம்

தொகுதி 2

கணக்கு

தமிழ்நாடு அரசு விலையில்லாப் பாடநூல் வழங்கும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்பட்டது

பள்ளிக் கல்வித்துறை

தீண்டாமை மனித நேயமற்ற செயலும் பெருங்குற்றமும் ஆகும்

தமிழ்நாடு அரசு

முதல்பதிப்பு - *2018*

(புதிய பாடத்திட்டத்தின் கீழ்
வெளியிடப்பட்ட முப்பருவ நூல்)

விற்பனைக்கு அன்று

பாடநூல் உருவாக்கமும்
தொகுப்பும்

மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி
மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம்

நூல் அச்சாக்கம்

தமிழ்நாடு பாடநூல் மற்றும்
கல்வியியல் பணிகள் கழகம்
www.textbooksonline.tn.nic.in

பொருளடக்கம்

F5S3RD

மின் நூல்

F5XC54

மதிப்பீடு

B563_9_MAT_TM_T3

இணைய வளங்கள்

குறியீடுகள்

$=$	சமம் (equal to)	$P(A)$	A இன் நிகழ்தகவு (probability of A)
$\neq$	சமமில்லை (not equal to)	$\|\|\|^{ly}$	இதேபோன்று (similarly)
$<$	விடக் குறைவு (less than)	$\triangle$	சமச்சீர் வித்தியாசம் (symmetric difference)
$\leq$	குறைவு அல்லது சமம் (less than or equal to)	$\mathbb{N}$	இயல் எண்கள் (Natural numbers)
$>$	விட அதிகம் (greater than)	$\mathbb{W}$	முழு எண்கள் (Whole numbers)
$\geq$	அதிகம் அல்லது சமம் (greater than or equal to)	$\mathbb{Z}$	முழுக்கள் (integers)
$\approx$	சமானமான (equivalent to)	$\mathbb{R}$	மெய்யெண்கள் (Real numbers)
$\cup$	சேர்ப்பு (union)	Δ	முக்கோணம் (Triangle)
$\cap$	வெட்டு (intersection)	$\angle$	கோணம் (Angle)
$\mathbb{U}$	அனைத்துக் கணம் (universal set)	$\perp$	செங்குத்து (perpendicular to)
$\in$	உறுப்பு (belongs to)	$\parallel$	இணை (parallel to)
$\notin$	உறுப்பல்ல (does not belong to)	$\Rightarrow$	உணர்த்துகிறது (implies)
$\subset$	தகு உட்கணம் (proper subset of)	$\therefore$	எனவே (therefore)
$\subseteq$	உட்கணம் (subset of or is contained in)	$\because$	ஏனெனில் (since (or) because)
$\not\subset$	தகு உட்கணமல்ல (not a proper subset of)	$\|\ \|$	தனிமதிப்பு (absolute value)
$\not\subseteq$	உட்கணமல்ல (not a subset of or is not contained in)	$\simeq$	தோராயமாகச் சமம் (approximately equal to)
A' (or) A^c	A இன் நிரப்புக்கணம் (complement of A)	$\cong$ (or) $\equiv$	சர்வ சமம் (congruent)
$\emptyset$ (or) $\{\ \}$	வெற்றுக்கணம் அல்லது இன்மைக் கணம் (empty set or null set or void set)	$\equiv$	முற்றொருமை (identically equal to)
$n(A)$	A என்ற கணத்தின் ஆதி எண் அல்லது செவ்வெண் (number of elements in the set A)	π	பை (pi)
$\sum$	கூடுதல் (summation)	$\pm$	மிகை அல்லது குறை (plus or minus)

பாடநூல் பயன்பாட்டுத் தலைப்புகள்

எண்ணென்ப ஏனை எழுத்தென்ப இவ்விரண்டும்
கண்ணென்ப வாழும் உயிர்க்கு – குறள் 392

கற்றல் விளைவுகள்

வகுப்பறைச் செயல்பாடுகளை அளவீடுகளுடன் கூடிய கற்றல் மைய முறையாக மாற்றி அமைத்தல்

குறிப்பு

பாடப்பொருளில் மாணவர்களுக்கான கூடுதல் தகவல்களை அளித்தல்

செயல்பாடு/செயல்திட்டம்

கணிதத்தைக் கற்றுக் கொள்ள மாணவர்களை குறிப்பிட்ட செயல்பாடுகளில் ஈடுபட ஊக்குவித்தல்

இணையச் செயல்பாடு

கற்போரின் பாடப்பொருள் புரிதலை தொழில்நுட்பப் பயன்பாட்டின் மூலம் மேம்படுத்துதல்

சிந்தனைக் களம்

மாணவர்கள் கணிதத்தைக் கற்றுக் கொள்ளும் ஆர்வத்தைத் தூண்டுதல்.
மாணவர்களை பரந்த சிந்தனை கொண்டவர்களாக ஆக்குதல்

நினைவு கூர்வதற்கான கருத்துகள்

பாடப்பொருளில் கற்றவற்றை நினைவு கூறுதல்

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

பாடப்பொருளில் கூடுதல் மதிப்பீட்டு வினாக்களை அளித்தல்

முன்னேற்றத்தை சோதித்தல்

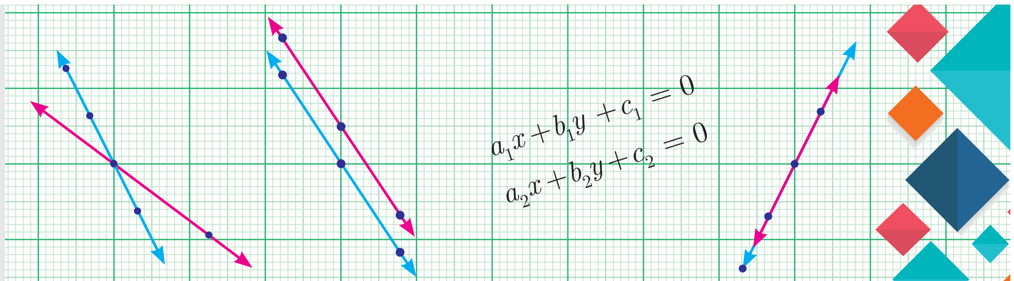
கற்போரின் முன்னேற்றத்தை சுய மதிப்பீடு செய்தல்

பயிற்சி

பாடப்பொருளில் கற்போருக்கு உள்ள புரிதலை மதிப்பிடுதல்

"The essence of mathematics is not to make simple things complicated but to make complicated things simple" -S. Gudder

1



இயற்கணிதம்

இயற்கணிதத்தைப் போல் வேறெதுவும் நடைமுறை வாழ்க்கையோடு தொடர்புடையது இல்லை என உறுதியாகக் கூற முடியும். - பிரான் லேபோவிச்

டையோபான்டஸ்

அலெக்ஸாண்டிரியாவின் டையோபான்டஸ் 84 ஆண்டுகள் வாழ்ந்த கணித மேதையாவார். இவர் கி.பி.(பொ.ஆ) 201 இக்கும் கி.பி. (பொ.ஆ) 215 இக்கும் இடையில் பிறந்தவர். இவர் இயற்கணிதவியல் என்ற தொடர் புத்தகத்தின் ஆசிரியர் ஆவார். இவரது புத்தகங்கள் இயற்கணிதச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு பற்றி அமைந்தனவாகும். மேலும் இயற்கணிதத்தின் தந்தை எனவும் அழைக்கப்படுகிறார்.

கற்றல் விளைவுகள்

- ஒரு மாறியில் அமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளை நினைவு கூர்தல்.
- இரு மாறியில் அமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளை அடையாளம் கண்டு புரிந்துகொள்ளுதல்.
- ஒரு கோட்டின் சாய்வையும் மற்றும் அவற்றின் வெட்டுத் துண்டுகளையும் பற்றித் தெரிந்துகொள்ளுதல்.
- கொடுக்கப்பட்டுள்ள நேரிய சமன்பாடுகளுக்கு வரைபடம் வரைதல்.
- இரு மாறிகளில் அமைந்த ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளை :
  - வரைபட முறை
  - இயற்கணித முறை
    - ❖ பிரதியிடுதல் முறை
    - ❖ நீக்கல் முறை
    - ❖ குறுக்குப் பெருக்கல் முறை ஆகிய முறைகளில் தீர்த்தல்
- இரு மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளின் ஒருங்கமைவு மற்றும் ஒருங்கமைவற்ற தன்மைகளைப் பற்றி புரிந்துகொள்ளுதல்.

F61YT1

1.1 அறிமுகம்

கணிதம் என்பது தொடர்புகளைப் பற்றிய ஒரு முறையான கற்றலாகும். இங்கு நேரிய தொடர்புகளைப் பற்றி நாம் கற்க இருக்கின்றோம். தொடர்புகளை அட்டவணை தயாரித்தல், சமன்பாடு அமைத்தல் மற்றும் வரைபடத் தாளில் குறித்தல் என மூன்று முறைகளில் நேர்த்தியாக ஒருங்கிணைக்கலாம்.

கீழ்க்கண்ட தகவல்களைப் படிக்கவும்:

ஒரு வாடகை மகிழுந்து நிறுவனம் பயணக் கட்டணமாக ஒவ்வொரு கிலோமீட்டருக்கும் ₹2 வீதமும், அழைப்புக் கட்டணமாக ₹20 எனவும் பெறுகிறது. ஒருவர் வாடகை மகிழுந்தை பயன்படுத்துவதற்கான கட்டண விவரம் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது.

தரவுகளை அட்டவணைப்படுத்தல் மூலம் குறிப்பிடுதல்

கடக்கும் தூரம் (கி.மீ)	0	1	2	3	4	5	…	10	…	20	…
வாடகைக் கட்டணம் (₹)	20	22	24	26	28	30	…	?	…	?	…

வாடகை எவ்வாறு கணக்கிடப்படுகிறது என்பது உமக்குத் தெரிகிறதா? இதிலிருந்து ஒருவர் 10கி.மீ மற்றும் 20கி.மீ பயணம் செய்ய எவ்வளவு வாடகைக் கட்டணம் செலுத்த வேண்டும் என்பதை கணிக்க உங்களால் முடிகிறதா?

பயணத் தொலைவிற்கும் மற்றும் வாடகைக் கட்டணத்திற்கான தொடர்பை அறிந்துகொள்ள இவ்வாறான அட்டவணை அமைப்பது ஒரு வழிமுறையாகும்.

தரவுகளைக் கொண்டு சமன்பாட்டை அமைக்கும் முறை

பயணம் செய்யும் தூரத்தை x கி.மீ எனவும், அதற்கான கட்டணத்தை ₹y எனவும் கொண்டு ஒரு சமன்பாட்டினை அமைக்க நாம் முயற்சிக்கலாம்.

அழைப்புக் கட்டணம் (0 கி.மீ தொலைவிற்கு) $=$ ₹ 20

1 கி.மீ. இக்கான கட்டணம் $=$ ₹ 22 $=$ ₹ $20 + 2\times1$

2 கி.மீ. இக்கான கட்டணம் $=$ ₹ 24 $=$ ₹ $20 + 2\times2$

3 கி.மீ. இக்கான கட்டணம் $=$ ₹ 26 $=$ ₹ $20 + 2\times3$

⋮ ⋮

x கி.மீ.க்கான கட்டணம் (₹y ஆல் குறிக்க) $=$? $=$ ₹ $20 + 2\times x$

$$y = 2x + 20$$

எனவே $y = 2x + 20$ என்ற சமன்பாடானது பயணத்தில் கடந்த தூரம் மற்றும் வாடகைக் கட்டணம் ஆகியவற்றிற்கிடையேயான தொடர்பை விளக்குகிறது.

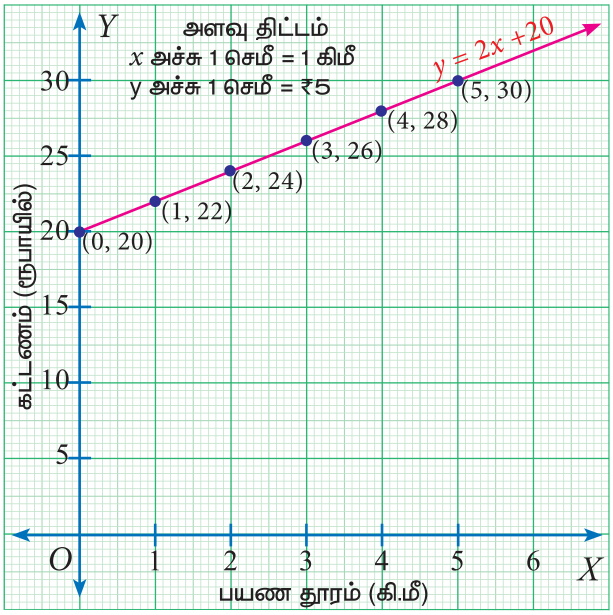
பின்னிருந்து முன்னோக்கி செல்லும் முறையில் இச்சமன்பாடு சரியாக அமைகிறதா என்று பார்க்கலாம்.

பயணம் தூரம் $x = 4$ என்க. இதனை $y = 2x + 20$, என்ற சமன்பாட்டில் பிரதியிட கட்டணம் $2(4) + 20 = 28$ ஆகும். இது அட்டவணையின்படி சரிதான் என்பதை அறியலாம். (மேலும், சிலவற்றிற்குச் சரி பார்க்க).

தரவுகளை வரைபடத்தில் குறித்தல்

வரைபடம் என்பது புள்ளி விவரங்களை தெளிவாகப் புரிந்துகொள்வதற்கு உதவும் ஒரு காட்சிக் கருவி ஆகும். மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரங்களைக்கொண்டு எளிதாக வரைபடம் ஒன்றை வரைந்து இதற்குத் தீர்வு காணலாம்.

வரைபடத்தில் (படம் 1.1) அச்சுகள் எவ்வாறு குறிக்கப்பட்டுள்ளன என்பதைக் கவனிக்க. X-அச்சு பயணத் தூரத்தையும் Y-அச்சு அதற்கான பயணக் கட்டணத்தையும் குறிப்பிடுகின்றன. வெவ்வேறான அளவுத் திட்டங்களில் இரண்டு அச்சுகளும் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளன. குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் அனைத்தும் ஒரே நேர்க்கோட்டின் மீது அமைவதைக் காணலாம்.



படம் 1.1

ஒரே தொடர்பினை இம்முறைகள் ஒருங்கிணைப்பதைக் கவனிக்க. அட்டவணையானது தரவுகளை வரிசைப்படுத்துவதற்கும், சமன்பாடானது வழிமுறைகளைப் பொதுமைப்படுத்துவதற்கும் மற்றும் வரைபடமானது இதனைக் காட்சிப்படுத்துவதற்கும் உதவுகிறது.

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

கொடுக்கப்பட்ட சூழ்நிலைக்கு ஏற்ப அட்டவணை தயாரித்து, சமன்பாடு அமைத்து வரைபடம் வரைக. காவ்யா ஒரு மகிழுந்தை வாடகைக்கு அமர்த்துகிறார். அந்நிறுவனம் ஒரு கி.மீ பயணத் தொலைவிற்கு ₹5 வாடகைக் கட்டணமாக வசூலிக்கிறது எனில், 10 கி.மீ தூரம் செல்ல வாடகைக் கட்டணம் எவ்வளவு ஆகும் என்பதைக் காண்க.

1.2 ஒரு மாறியில் அமைந்த நேரிய சமன்பாடு (Linear Equation in one variable)

சமன்பாடு என்றால் என்ன?

இரண்டு கோவைகளை ஒன்றுக்கொன்று சமப்படுத்துதலே சமன்பாடு ஆகும்.

சமன்பாட்டிற்கான சில எடுத்துக்காட்டுகள் அருகிலுள்ள பெட்டியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

சமன்பாடுகள்
$4x - 5 = 3,$
$2y + 1 = -7,$
$5a = 19,$
$x + 3 = -x$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள இந்தச் சமன்பாடுகளின் சிறப்பு என்ன?

(i) x, y, a ... போன்ற ஏதேனும் ஒரு மாறி ஒவ்வொரு சமன்பாட்டிலும் இருக்கிறது

(ii) ஒவ்வொரு மாறியின் அடுக்கும் 1 ஆகும்.

அதாவது $ax+b=0$ என்ற சமன்பாடானது, x ஐ மாறியாகக் கொண்ட ஒரு மாறியில் அமைந்து நேரிய சமன்பாடு ஆகும் (இங்கு a,b என்பன மெய்யெண்கள் மற்றும் $a \neq 0$).

எடுத்துக்காட்டு: $x = 2,\ 3y - 5 = 0,\ 2m = -3$ மற்றும் $5k - 2 = 2k + 2$

மேற்காணும் சமன்பாடுகள் முதற்படி அல்லது நேரிய சமன்பாடுகள் எனப்படும். ஏன் அவை நேரிய சமன்பாடுகள் என்று கூறப்படுகின்றன என்பதைப் பற்றி நாம் காண்போம்.

$4x - 5 = 3$ என்ற சமன்பாட்டைக் கருத்தில் கொள்வோம். நாம் இதைச் சுருக்கி x என்ற மாறியினை இடதுபுறமும், எண் மதிப்பினை வலதுபுறமும் அமைப்போம்.

கொடுக்கப்பட்டவை $4x - 5 = 3$

இருபுறமும் 5 ஐக் கூட்டுக $4x - 5 + 5 = 3 + 5$

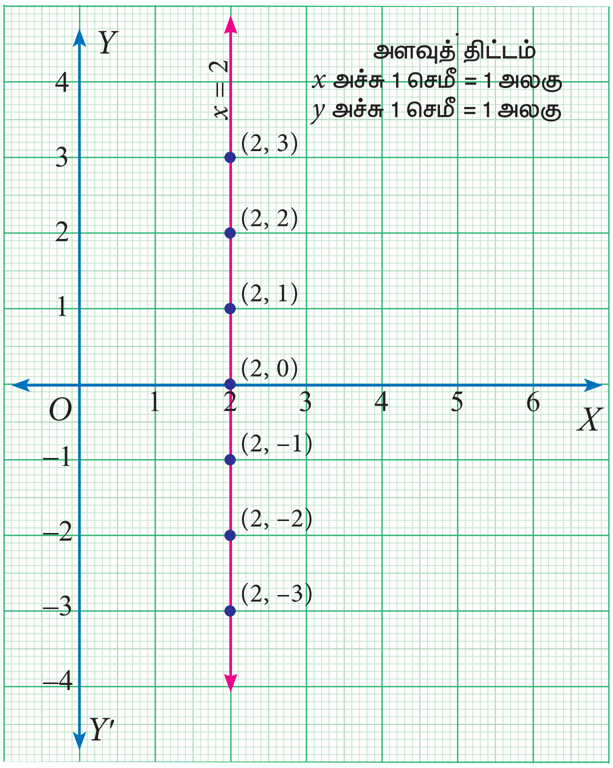
$$4x + 0 = 8$$

$$4x = 8$$

இருபுறமும் 4 ஆல் வகுக்க $\frac{4x}{4} = \frac{8}{4}$

$$x = 2$$

இச்சமன்பாட்டின் சுருங்கிய வடிவினைக் கீழேயுள்ள வரைபடத்தில் (படம் 1.2) காணலாம். இந்த வரைபடத்திலிருந்து y இன் எந்த மதிப்பிற்கும் x இன் மதிப்பு இரண்டேயாகும். என்பதை அறியலாம். வரைபடம் வரைவதற்கு $(2, -3), (2, -2), (2,-1), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3)\ldots$ என்ற வரிசையிலான சோடிகளை எடுத்துக்கொள்வோம். இப்புள்ளிகளை இணைத்து வரைபடத்தில் குறிக்கும்பொழுது Y-அச்சிற்கு இணையான கோடு அமைவதையும் காணலாம். இதுவே இச்சமன் பாட்டிற்கான நேரிய வரைபடம் ஆகும். ஆகவே இச்சமன்பாடானது நேரிய சமன்பாடு ஆகும்.



படம் 1.2

இப்பொழுது தொடக்கத்தில் உள்ள பெட்டியில் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளும் நேரிய சமன்பாடுகள்தானா என்பதை நேரிய வரைபடம் மூலம் ஆராயலாம். நேரிய சமன்பாடுகள் அல்லாதவை பற்றியும் உன்னால் நினைக்க முடிகிறதா?

ஒரு சமன்பாட்டின் தீர்வு

$\frac{1}{2}x + 3 = -x$ என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுவோம்.

$x = -2$ எனப் பிரதியிட,

இடப்பக்கம் $= \frac{1}{2}\times(-2)+3=-1+3=+2$

மேலும் வலப்பக்கம் $= -x=-(-2)=+2$.

இங்கு -2 என்ற மதிப்பு சமன்பாட்டை நிறைவு செய்வதால் அதுவே தீர்வாகிறது. (இந்தச் சமன்பாட்டிற்கு வேறு ஏதேனும் தீர்வு உள்ளதா?)

ஒரு சமன்பாட்டின் மாறிகளுக்குக் கொடுக்கப்படும் அனைத்து மதிப்புகளும் அந்தச் சமன்பாட்டினை நிறைவு செய்தால் அம்மதிப்புகள் அச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் ஆகும்.

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

$x = \frac{4}{3}$ என்பது $1\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} = 2x - \frac{1}{2}$ என்ற சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வாகுமா எனச் சோதித்துப் பார்?

பயிற்சி 1.1

1. ஒரு மாறியில் அமைந்த நேரிய சமன்பாட்டிற்கு இரண்டு எடுத்துக்காட்டுகள் தருக.

2. $\frac{1}{4}$ என்பது $3(x + 1) = 3(5-x) - 2(5 + x)$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வாகுமா என்பதைச் சோதித்துப் பார்.

3. கீழ்க்காணும் நேரிய சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காண்க.

   (i) $\frac{2(x+1)}{3} = \frac{3(x-2)}{5}$ (ii) $\frac{2}{x+1} = 4 - \frac{x}{x+1}, (x \neq -1)$

4. கீழ்க்காணும் நேரிய சமன்பாடுகளுக்கு நேரிய வரைபடம் வரைக.

   (i) $y = 4$ (ii) $x = -2$ (iii) $2x - 4 = 0$
   (iv) $6 + 2y = 0$ (v) $9 - 3x = 0$

1.3 இரு மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாடு (Linear Equation in Two Variables)

இரு மாறிகளில் அமைந்த ஒரு நேரிய சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் $ax + by + c = 0$ ஆகும். இதில், a, b, c ஆகியன மெய்யெண்கள், a மற்றும் b ஆகிய இரண்டும் பூச்சியமற்றவை (x, y என்பன இரண்டு மாறிகள், c என்பது மாறிலி).

எடுத்துக்காட்டுகள்

இரு மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாடு	இரு மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாடல்லாதவை
$2x + y = 4$	$xy + 2x = 5$ (ஏன்?)
$-5x + \frac{1}{2} = y$	$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 25$ (ஏன்?)
$5x = 35y$	$x(x+1) = y$ (ஏன்?)

ஒரு படியில் அமைந்த இரண்டு மாறிகளைக் கொண்டதும் இரண்டு மாறிகளின் பெருக்குதல் இல்லாமலும் அமையும் சமன்பாடானது இரு மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாடாகும். (இரு மாறிகளில் அமைந்த ஒரு சமன்பாட்டின்படி 1 எனில் அச்சமன்பாடு இரு மாறியில் அமைந்த நேரிய சமன்பாடு எனப்படும்).

உதாரணமாக $2x + y = 4$ என்பது நேரிய சமன்பாடாகுமா? நீங்கள் நினைப்பது சரிதான். ஏனென்றால் இச்சமன்பாட்டின் வரைபடம் ஒரு நேர்க்கோடாகும். அதனைச் சரிபார்ப்போமா ?

$2x + y = 4$ என்ற வரைபடம் வரைய சில புள்ளிகளை எடுத்துக்கொண்டு அவற்றை நாம் இணைக்க வேண்டி இருக்கிறது. (அப்புள்ளிகளே சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் வரிசை சோடிகள் ஆகும்). கொடுக்கப்பட்டுள்ள சோடி புள்ளிகளைக் கொண்டு $2x + y = 4$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு அட்டவணையைத் தயாரிக்க

$y = 4 - 2x$ என்பதாக எடுத்துக் கொள்வோம். (ஏன்? எப்படி?)

$x = -4$ எனில், $y = 4 - 2(-4) = 4 + 8 = 12$

$x = -2$ எனில், $y = 4 - 2(-2) = 4 + 4 = 8$

$x = 0$ எனில், $y = 4 - 2(0) = 4 + 0 = 4$

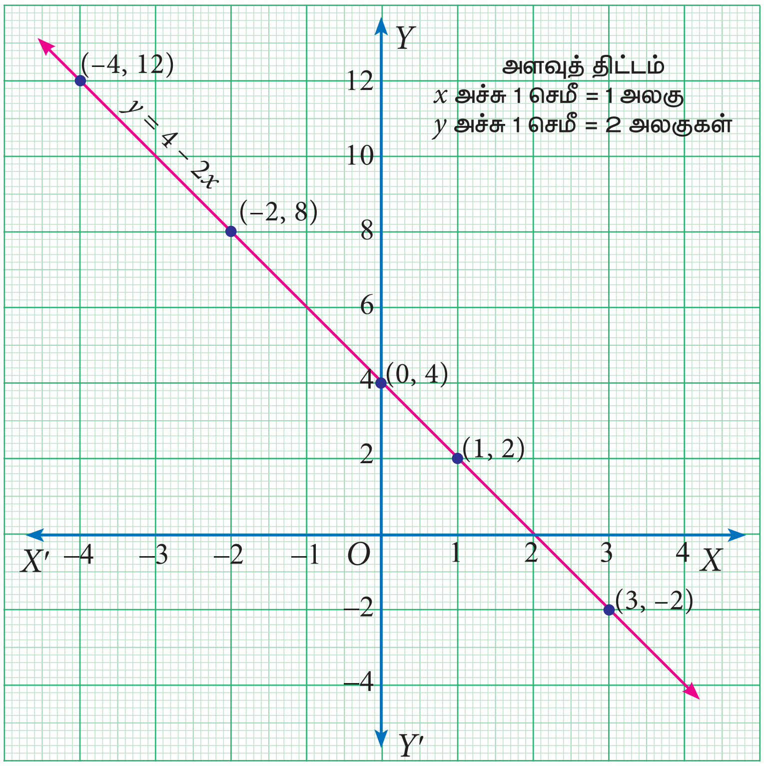
$x = +1$ எனில், $y = 4 - 2(+1) = 4 - 2 = 2$

$x = +3$ எனில், $y = 4 - 2(+3) = 4 - 6 = -2$

இந்த மதிப்புகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்தலாம்:

x-இன் மதிப்பு	-4	-2	0	1	3
y-இன் மதிப்பு	12	8	4	2	-2

(ஒரு கோட்டினை அமைக்க, நமக்குப் பல புள்ளிகள் தேவைப்படுகிறதா? ஒரு கோட்டினை அமைக்க இரண்டு புள்ளிகள் போதுமானது. இதைச் சரிபார்ப்பதற்காக கூடுதலாக ஒரு புள்ளியினை எடுத்துக் கொள்ளலாம்).



படம் 1.3

படம் 1.3 இல் $(-4,12), (-2,8), (0,4), (1,2)$ மற்றும் $(3,-2)$ ஆகிய புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறிக்கும்பொழுது அவை ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைவதைக் காணலாம். இதிலிருந்து $2x + y = 4$ என்ற சமன்பாடு ஒரு நேர்க்கோடாக அமைகிறது என்பது தெளிவாகின்றது. (ஆகவே இது ஒரு நேரிய சமன்பாடு எனப்படுகிறது).

கோட்டின் மீதுள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளும் இந்தச் சமன்பாட்டினை நிறைவு செய்வதால் கோட்டின் மீதுள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளின் வரிசைச் சோடிகளும் அச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

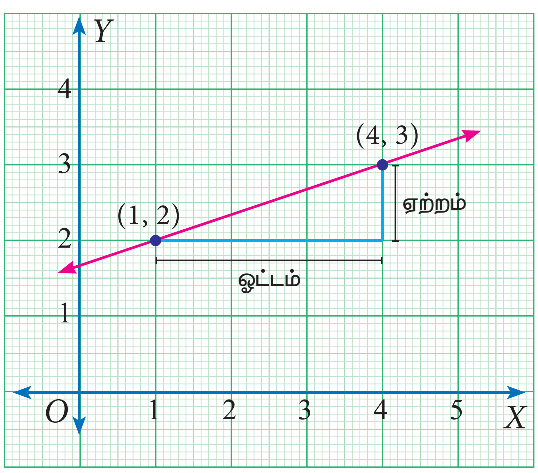
1.4 ஒரு கோட்டின் சாய்வு (Slope of a Line)

இரு மாறிகளில் அமைந்த எல்லா ஒருபடிச் சமன்பாடும் ஒரு நேர்க்கோடுதான் என்பதைப் பார்த்தோம். ஆகவே, ஒரு நேரிய சமன்பாட்டைக் குறிக்கும் கோட்டினைப் பற்றி மேலும் தெரிந்துகொள்வது நமக்கு அவசியமாகிறது. குறிப்பாக ஒரு கோட்டின் சாய்வு என்ற முக்கியமான கருத்தைப் பற்றி தெரிந்துகொள்வது அவசியமாகிறது. ஒரு கோடு எவ்வளவு ஏற்றத்தில் உள்ளது என்பதை எண்களால் விளக்குவதே அந்தக் கோட்டின் சாய்வாகும். கோட்டின் சாய்வானது m என்ற ஆங்கில எழுத்தால் பொதுவாகக் குறிக்கலாம்.

செங்குத்தாக அமையாத ஒரு கோட்டின் சாய்வானது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$\text{சாய்வு } (m) = \frac{\text{ஏற்றம்}}{\text{ஓட்டம்}} = \frac{\text{செங்குத்து வேறுபாடு}}{\text{கிடைமட்ட வேறுபாடு}}$$

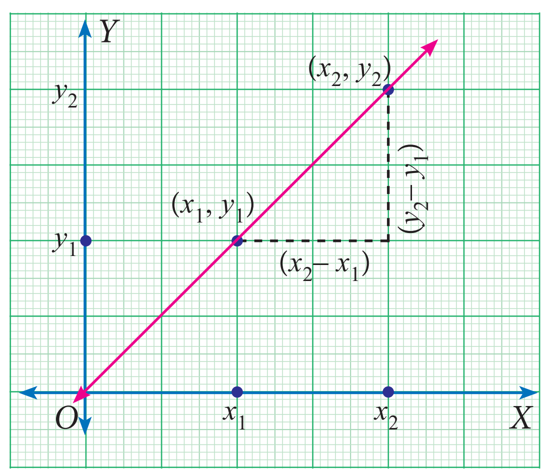
இந்தப் படத்தில்,



படம் 1.4

$$\text{சாய்வு } (m) = \frac{\text{ஏற்றம்}}{\text{ஓட்டம்}} = \frac{3-2}{4-1} = \frac{1}{3}$$

பொதுவாக,



படம் 1.5

(x_1,y_1) மற்றும் (x_2,y_2) என்ற புள்ளிகளின் வழியே செல்லும் செங்குத்தாக அமையாத ஒரு கோட்டின் சாய்வு

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y\text{-இன் மாறுபாடு}}{x\text{-இன் மாறுபாடு}} \quad \text{இங்கு, } (x_2 \neq x_1)$$

எடுத்துக்காட்டு 1.1 கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் இருக்கும் அனைத்துக் கோடுகளின் சாய்வுகளைக் காண்க.

தீர்வு

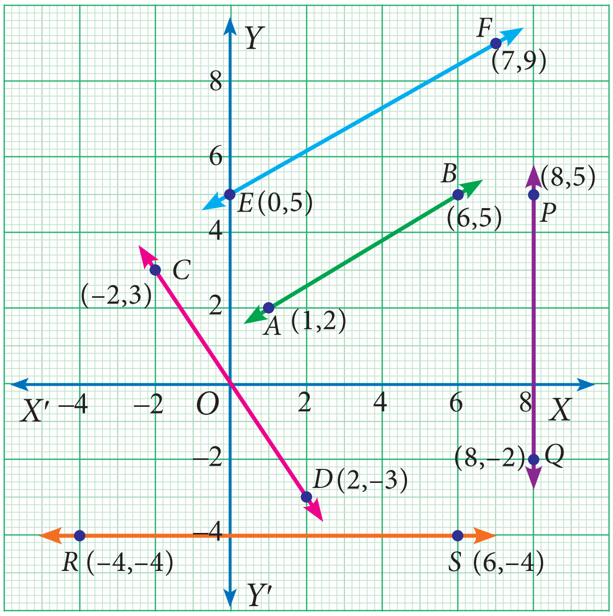
AB இன் சாய்வு $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{3}{5}$

CD இன் சாய்வு $= \dfrac{y\text{-இன் மாறுபாடு}}{x\text{-இன் மாறுபாடு}} = -\dfrac{3}{2}$

EF இன் சாய்வு $= \dfrac{4}{7}$

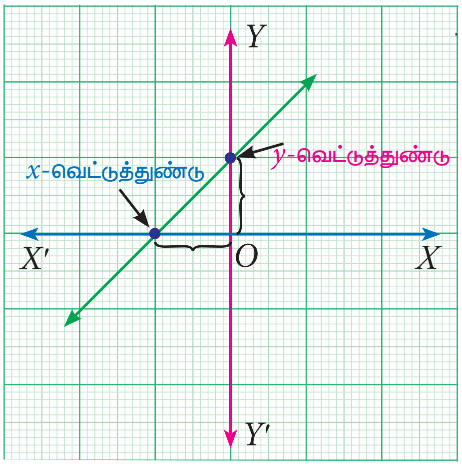
PQ இன் சாய்வு = வரையறுக்கப்படாதது

RS இன் சாய்வு $= 0$.



படம் 1.6

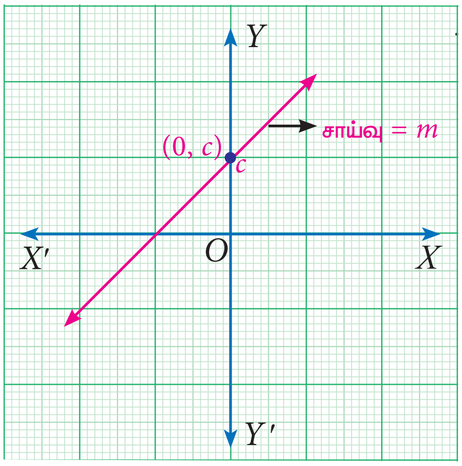
1.5 ஒரு கோட்டின் வெட்டுத்துண்டு (Intercept of a Line)



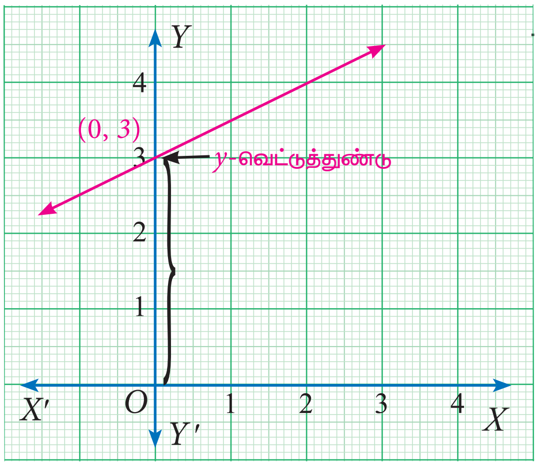
படம் 1.7

ஒரு கோட்டின் வெட்டுத்துண்டு என்பது ஆதிப் புள்ளிக்கும், அக்கோடானது X– அச்சு அல்லது Y– அச்சினை வெட்டும் புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தொலைவு ஆகும். (அச்சுகளைப் பற்றிக் குறிப்பிடாமல் இருந்தால் Y–அச்சினைக் கருத்தில் கொள்ள வேண்டும்). பொதுவாக, y–வெட்டுத்துண்டினை c என்ற எழுத்தால் குறிக்கலாம்.

ஒரு கோட்டின் சாய்வு m என்றும் அந்தக் கோடு y அச்சை வெட்டுமிடம் c என்றும் எடுத்துக்கொண்டால் (c என்பது y–வெட்டுத் துண்டு) $y = mx + c$ என்பதை அக்கோட்டின் சமன்பாடாக கருதலாம். (இது மேல்நிலை வகுப்புகளில் நிரூபிக்கப்படும்).



படம் 1.8



படம் 1.9

எடுத்துக்காட்டாக, படம் 1.9 இல் உள்ள கோட்டின் சாய்வு m ஆனது $\dfrac{1}{2}$ (எப்படி?) என்றும் y-வெட்டுத்துண்டு c ஆனது 3 என்றும் எடுத்துக்கொண்டால் $y = \dfrac{1}{2}x + 3$ என்பது கோட்டின் சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.2 (சாய்வைக் கணக்கிடுவது எளிதே!) $2y - 3x = 12$ என்ற சமன்பாட்டின் சாய்வு மற்றும் y–வெட்டுத்துண்டினைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $2y - 3x = 12$

$$\Rightarrow \quad 2y = +3x + 12$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2y}{2} = \frac{3x+12}{2}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{3x}{2} + \frac{12}{2}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{3}{2}x + 6$$

$y = mx + c$ உடன் ஒப்பிட,

சாய்வு $m = \frac{3}{2}$ மற்றும் y-வெட்டுத்துண்டு $c = 6$

எடுத்துக்காட்டு 1.3 (வரைபடம் வரைதல் எளிதே!) $y = 4x - 3$ என்ற கோட்டின் சமன்பாட்டிற்கு வரைபடம் வரைக.

தீர்வு

இதற்கு முன்பே அட்டவணையை அமைத்து, புள்ளிகளை வரிசைப் படுத்துவதுடன், சோடிப் புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறித்து அவற்றை இணைப்பது பற்றிய ஒரு வழிமுறையை நாம் கடந்து வந்திருக்கிறோம். ஆனால், ஒரு கோட்டை நிர்ணயிக்க குறைந்தது எத்தனை புள்ளிகள் நமக்குத் தேவை? இரண்டு புள்ளிகள் போதுமானதே. ஒரு கோடு $y = mx + c$ என்ற வடிவில் இருந்தால் இதனை எளிதில் காணலாம்.

> **குறிப்பு**
> $y = 4x-3$ ஐ $y = mx+c$ என்ற சமன்பாட்டுடன் ஒப்பீடு செய்து y வெட்டுத்துண்டு (c) ஐக் காணலாம்

கொடுக்கப்பட்ட கோடு $y = 4x - 3$

y-வெட்டுத்துண்டைப் பெற

$x = 0$ எனப் பிரதியிட, $y = 4(0) - 3$

$$y = -3$$

இதிலிருந்து $(0, -3)$ என்ற புள்ளியும்

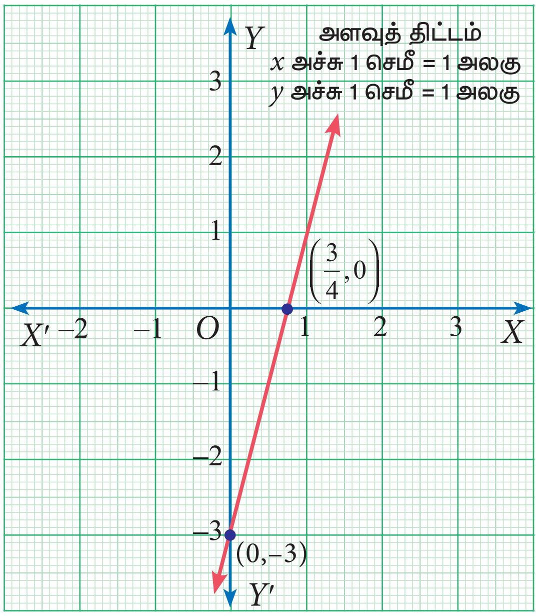
y-வெட்டுத்துண்டு $= -3$ எனவும் கிடைக்கிறது

x-வெட்டுத்துண்டைப் பெற

$y = 0$ எனப் பிரதியிட, $0 = 4x - 3$

$$3 = 4x$$

$$\frac{3}{4} = x$$



படம் 1.10

இதிலிருந்து $\left(\frac{3}{4},0\right)$ என்ற புள்ளி மற்றும் x-வெட்டுத்துண்டு $= \frac{3}{4}$ எனவும் கிடைக்கிறது.

இப்பொழுது $(0,-3)$ மற்றும் $\left(\frac{3}{4},0\right)$ என்ற இரண்டு புள்ளிகளின் வழியே வரைபடத்தை வரையலாம்.

முன்னேற்றச் சோதனை

1. கீழ்க்காணும் கோடுகளின் சாய்வினைக் காண்க.
   (i) $3x + 5y + 4 = 0$, (ii) $x + y = 0$, (iii) $y = 7$.
2. $2x+ 3y = 6$ என்பதை $y = mx + c$ என்ற வடிவில் மாற்றி வரைபடம் வரைக.
3. கீழ்க்காண்பவற்றிற்கு x-வெட்டுத்துண்டு மற்றும் y-வெட்டுத்துண்டுகளைக் காண்க :
   (i) $y = 5x -15$ (ii) $y = 7x$ (iii) $x = 5$

எடுத்துக்காட்டு 1.4 பின்வருவனவற்றிற்கு வரைபடம் வரைக.

(i) $y = 3x - 1$ (ii) $y = \left(\frac{2}{3}\right)x + 3$

தீர்வு

(i) $y = 3x - 1$ என்ற கோட்டிற்கான புள்ளிகளின் வரிசைச் சோடிகளை காண்பதற்கு அட்டவணையைத் தயாரிக்கலாம்.

x-இன் மதிப்பாக எந்த மதிப்பை வேண்டுமென்றாலும் எடுத்துக்கொள்ளலாம், இங்கு -1, 0 மற்றும் 1 ஐ மட்டுமே எடுத்துக்கொள்கிறோம் .

$x = -1$ எனில், $y = 3(-1)-1 = -4$

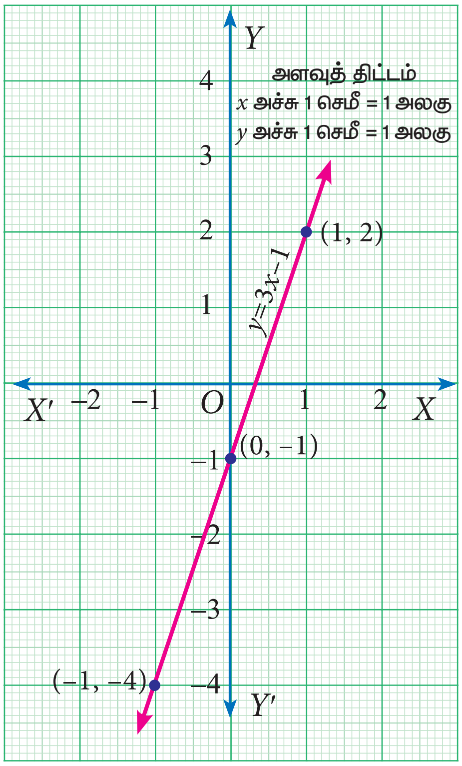
$x = 0$ எனில், $y = 3(0)-1 = -1$

$x = 1$ எனில், $y = 3(1)-1 = 2$

x	-1	0	1
y	-4	-1	2

குறிக்க வேண்டிய புள்ளிகள் (x,y) :

$(-1, -4), (0, -1), (1, 2)$.



படம் 1.11

(ii) $y = \left(\frac{2}{3}\right)x + 3$ என்ற கோட்டின் புள்ளிகளின் வரிசைச் சோடிகளைக் காண்பதற்கான அட்டவணைத் தயாரிக்கலாம்.

x இன் மதிப்புகளை $-3,\ 0,\ 3$ என எடுத்துக்கொள்கிறோம். (ஏன்?)

$x = -3$ எனில், $y = \frac{2}{3}(-3) + 3 = 1$

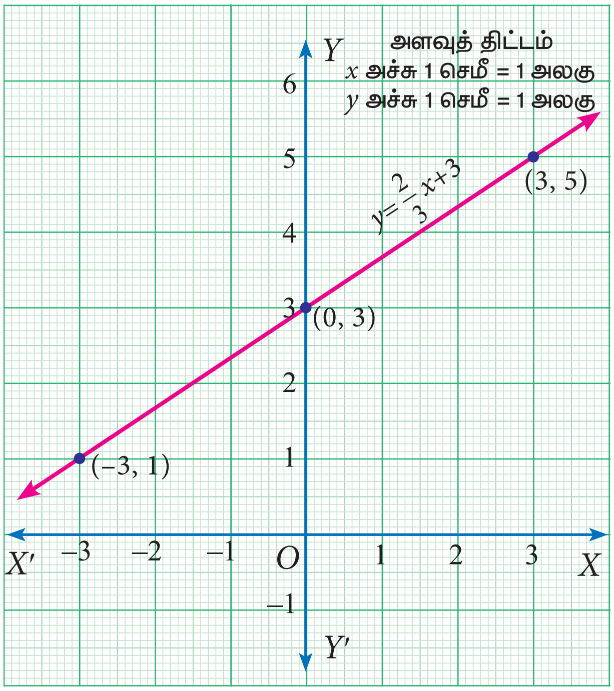
$x = 0$ எனில், $y = \frac{2}{3}(0) + 3 = 3$

$x = 3$ எனில், $y = \frac{2}{3}(3) + 3 = 5$

x	-3	0	3
y	1	3	5

குறிக்க வேண்டிய புள்ளிகள் (x,y) :

$(-3,1), (0,3), (3,5)$.



படம் 1.12

பயிற்சி 1.2

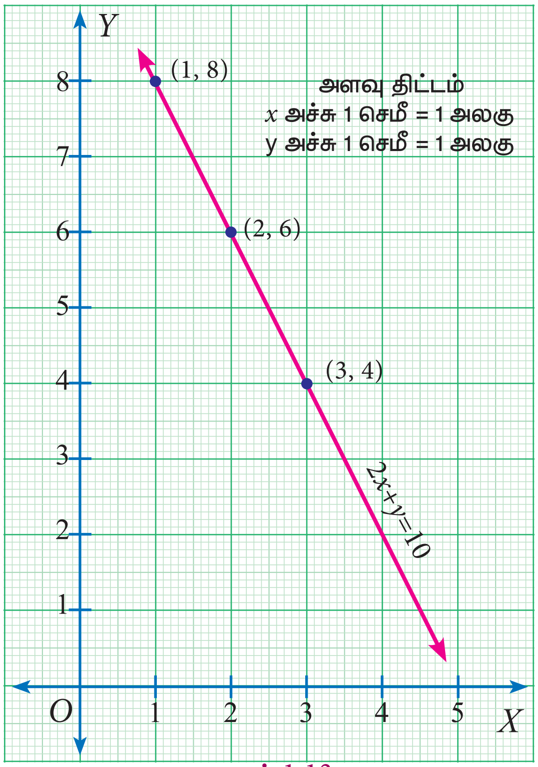
1. கீழ்க்காண்பவற்றிற்கு வரைபடம் வரைக

(i) $y = 2x$ (ii) $y = 4x - 1$ (iii) $y = \left(\frac{3}{2}\right)x + 3$ (iv) $3x + 2y = 14$

1.6 ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகள் (Simultaneous Linear Equations)

சமன்பாடுகளை வரைபடத்தில் குறிப்பது பற்றி ஏற்கனவே அறிந்த நாம், தற்போது சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு குறித்தும், குறிப்பாக இரண்டு ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளைப் பற்றி கற்க இருக்கிறோம்.

ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகள் என்றால் என்ன? இரண்டு அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட நேரிய சமன்பாடுகள் ஒரே வகையான மாறிகளைக் கொண்டிருந்தால் அவை ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகள் ஆகும்.



படம் 1.13

இவை ஏன் நமக்குத் தேவைப்படுகின்றன? $2x + y = 10$ ஐப் போன்ற ஒரு சமன்பாட்டிற்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டு. $(1,8), (2,6), (3,4)$ மற்றும் மேலும் சில புள்ளிகளும் வரைபடத்தில் உள்ள கோட்டின் மீது அமையும் முடிவுறாத தீர்வுகளாகும். இது போன்ற ஒரு சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பதற்கு, இதனுடன் சேர்த்து மற்றொரு சமன்பாட்டையும் பயன்படுத்தினால் மட்டுமே ஒரே நேரத்தில் இந்த இரண்டு சமன்பாடுகளையும் தீர்க்கும் ஒரு வரிசைச் சோடியைத் தீர்வாகப் பெற முடியும். இதுபோன்று இரண்டு சமன்பாடுகளை ஒருங்கிணைத்துத் தீர்க்கக் கிடைக்கும் அர்த்தமுள்ள சூழ்நிலைகளை ஏற்படுத்தும் சமன்பாடுகளை ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகள் என்கிறோம்.

ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளை நடைமுறை வாழ்க்கைச் சூழ்நிலையின் மூலம் புரிந்துகொள்ளுதல்.

அனிதா இரண்டு அழிப்பான்களையும் ஒரு கரி எழுதுகோலையும் ₹10 இக்கு வாங்கினாள் என்று கருதுக. அவற்றின் தனிப்பட்ட விலை பற்றி அனிதாவிற்குத் தெரியவில்லை. ஓர் அழிப்பானின் விலையை x எனவும், ஒரு கரி எழுதுகோலின் விலையை y எனவும் கொண்டு இதற்கு ஒரு சமன்பாட்டினை நாம் அமைப்போம்.

அதாவது, $2x + y = 10$ ...(1)

இப்பொழுது, ஓர் அழிப்பான் மற்றும் ஒரு கரி எழுதுகோலின் விலையைத் தனித்தனியாக அறிந்துகொள்ள அனிதா விரும்புகிறாள்.

அதற்காக அவள் x மற்றும் y இக்குப் பல மதிப்புகளைப் பயன்படுத்தி சமன்பாடு (1) இக்கு தீர்வு காண முயற்சி செய்கிறாள்.

2 (ஓர் அழிப்பானின் விலை) + ஒரு கரி எழுதுகோலின் விலை = ₹10

$$2(1)+8 = 10$$
$$2(1.5)+7 = 10$$
$$2(2)+6 = 10$$
$$2(2.5)+5 = 10$$
$$2(3)+4 = 10$$
$$\vdots \quad \vdots$$

குறிக்க வேண்டிய புள்ளிகள் :

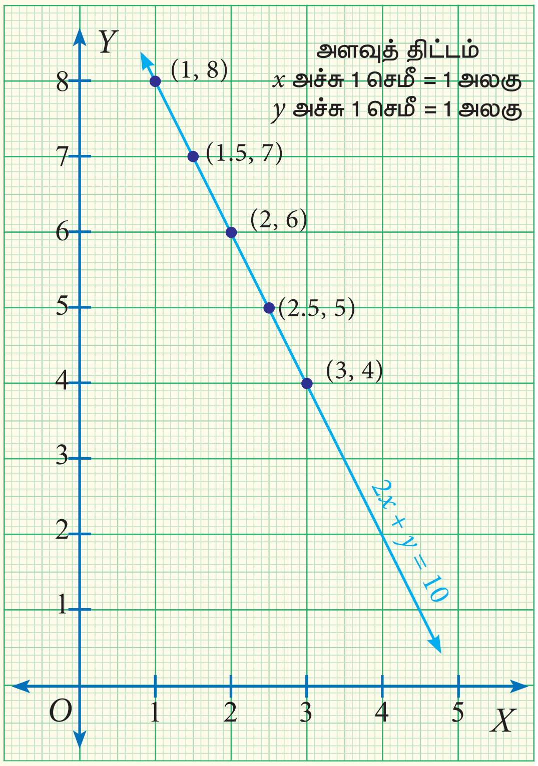
x	1	1.5	2	2.5	3	...
y	8	7	6	5	4	...

அவள் எண்ணற்ற விடைகளைப் பெறுகிறாள். ஆகையால் அவள் இரண்டாவது சமன்பாட்டைக் கொண்டு விலையை அறிய முயற்சிக்கிறாள்.

அனிதாவிற்கு மேலும் சில கரி எழுதுகோல்கள் மற்றும் அழிப்பான்கள் தேவைப்படுகிறது. இப்பொழுது அவர் வாங்கிய 3 அழிப்பான்கள் மற்றும் 4 கரி எழுதுகோல்களுக்காகக் கடைக்காரர் மொத்தத் தொகையாக ₹30 ஐப் பெற்றுக்கொள்கிறார். இதற்கு முன்பு அமைத்ததைப் போலவே நாம் மற்றொரு சமன்பாட்டை அமைக்கலாம்.

$3x + 4y = 30$ ...(2)

இப்பொழுதும் அவள் கீழ்க்கண்டவாறு எண்ணற்ற தீர்வுகளைப் பெறுகிறாள்.



படம் 1.14

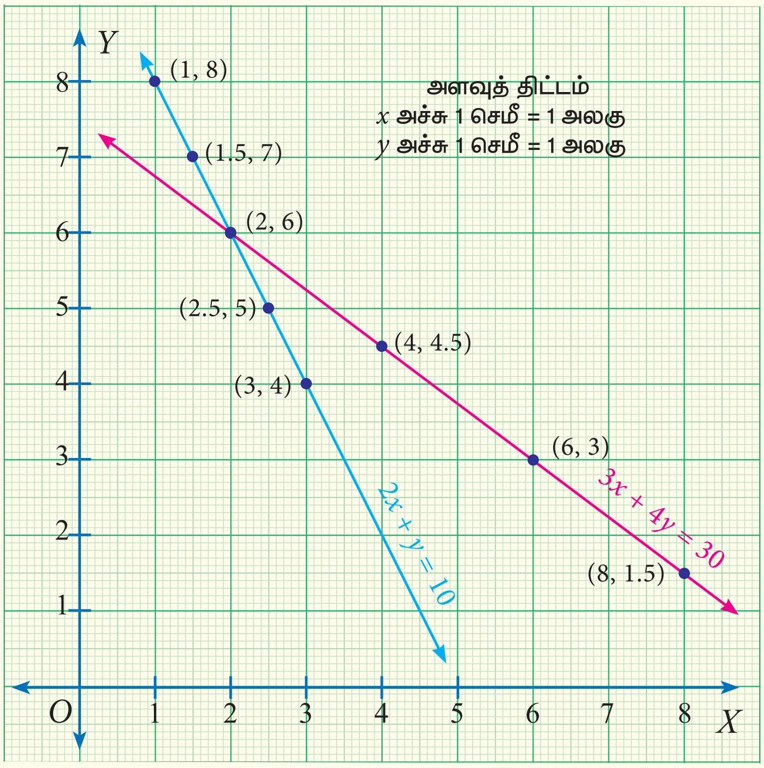
3 (ஓர் அழிப்பானின் விலை) + 4 (ஒரு கரி எழுதுகோலின் விலை) = ₹30

$$3(2)+4\,(6) = 30$$
$$3(4)+4\,(4.5) = 30$$
$$3(6)+4\,(3) = 30$$
$$3(8)+4\,(1.5) = 30$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

குறிக்க வேண்டிய புள்ளிகள் :

x	2	4	6	8	...
y	6	4.5	3	1.5	...

இதனை அவளது ஆசிரியருடன் கலந்துரையாடும்போது அதற்கு அவர் இரண்டு சமன்பாடுகளையும் ஒருங்கே அமைத்துத் தீர்க்கும்போது ஒரே ஒரு தீர்வுதான் கிடைக்கும் என்று கூறினார்.



படம் 1.15

சமன்பாடு (1) மற்றும் (2) ஐத் தீர்க்க, ஓர் அழிப்பானின் விலை ₹2 என்றும் ஒரு எழுதுகோலின் விலை ₹6 என்றும் பெறுகிறோம். இதனை வரைபடத்தில் (படம் 1.15) காண முடியும்.

இது போன்ற நிகழ்வில் ஓர் அர்த்தமுள்ள சூழ்நிலையை உருவாக்க நம்மால் இணைத்துக் கருதப்படும் சமன்பாடுகளே ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகள் எனப்படுகின்றன.

ஆகவே, ஒரே வகையான மாறிகளில் அமைந்த இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நேரிய சமன்பாடுகளை ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகள் அல்லது நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு அல்லது நேரிய சமன்பாடுகளின் சோடி என அழைக்கப்படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 1.5

$x - 2y = 7$ மற்றும் $2x + 3y = 7$ என்ற ஒருங்கமைந்த சமன்பாடுகளுக்கு $(5, -1)$ என்பது தீர்வாகுமா என்பதைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டவை $\quad x - 2y = 7 \qquad \ldots(1)$

$2x + 3y = 7 \qquad \ldots(2)$

$x = 5,\ y = -1$ எனில், நமக்குக் கிடைப்பது,

(1) இலிருந்து $x - 2y = 5 - 2(-1) = 5 + 2 = 7$ (வலது பக்கம்)

(2) இலிருந்து $2x + 3y = 2(5) + 3(-1) = 10 - 3 = 7$ (வலது பக்கம்)

ஆகவே, $x = 5,\ y = -1$ என்ற மதிப்புகளானது சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) ஐ ஒரே நேரத்தில் நிறைவு செய்கிறது. ஆகவே, $(5,-1)$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் தீர்வாகும்.

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

$2x - 5y - 2 = 0$ மற்றும் $x + y - 6 = 0$ ஆகிய ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளுக்கு $(3, 3)$ என்பது ஒரு தீர்வாகுமா என்பதை வரைபடம் மூலம் சோதித்துப் பார்க்கவும்.

1.6.1 ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் முறைகள்

ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கப் பல வழிமுறைகள் உள்ளன. அவற்றைப் பெரும்பாலும் வடிவியல் முறை மற்றும் இயற்கணித முறை என வகைப்படுத்தலாம்.

வடிவியல் முறை	இயற்கணித முறை
1. வரைபட முறை	1. பிரதியிடல் முறை
	2. நீக்கல் முறை
	3. குறுக்குப் பெருக்கல் முறை

வரைபட முறையின் மூலம் தீர்வு காணுதல் (Solving by Graphical Method)

இரு மாறிகளில் அமைந்த ஒருபடிச் சமன்பாட்டை எவ்வாறு வரைபடம் வரைந்து விளக்கலாம் என்பதை முன்னரே கண்டுள்ளோம். இங்கு நாம் இரு மாறிகளில் அமைந்த இரு நேரிய சமன்பாடுளின் வரைபடம் வரைந்து அதன் மூலம் ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளுக்கான தீர்வை காண முடியும் என்பதைப் பற்றிக் கற்கப்போகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.6 ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளுக்கு வரைபடம் மூலம் தீர்வு காண்க $x + y = 5;\ 2x - y = 4$.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டவை $\quad x + y = 5 \quad \ldots(1)$

$2x - y = 4 \quad \ldots(2)$

சமன்பாடு (1) இக்கு வரைபடம் வரைதல் எளிது.

முதற்கோட்டின் x மற்றும் y வெட்டுத்துண்டுகளைப் பயன்படுத்தி அவற்றின் மீதுள்ள இரண்டு புள்ளிகளையும் காணலாம்.

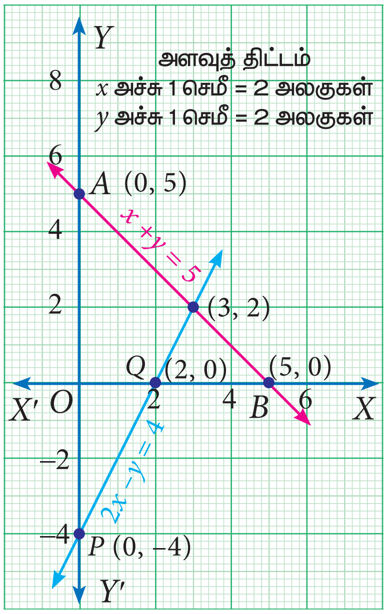
$x = 0$ எனில், (1) இலிருந்து $y = 5$ எனக் கிடைக்கும்.

எனவே, $A(0,5)$ என்பது கோட்டின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியாகும்.

$y = 0$ எனில், (1) இலிருந்து $x = 5$ எனக் கிடைக்கும்.

எனவே, $B(5,0)$ என்பது கோட்டின் மீதுள்ள மற்றொரு புள்ளியாகும்.

வரைபடத்தில் A மற்றும் B ஆகிய இரண்டு புள்ளிகளைக் குறித்து அவற்றை இணைத்துக் கோடு (1) வரைக.



படம் 1.16

இதே முறையைப் பயன்படுத்திச் சமன்பாடு (2) இக்கும் வரைபடம் வரையலாம்.

$x = 0$ எனில், (2) இலிருந்து $y = -4$ எனக் கிடைக்கும்.

எனவே $(0,-4)$ என்பது கோட்டின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி.

$y = 0$ எனில், (2) இலிருந்து $x = 2$ எனக் கிடைக்கும்.

எனவே $Q(2,0)$ என்பது அந்தக் கோட்டின் மீதுள்ள மற்றொரு புள்ளி ஆகும்.

வரைபடத்தில் P மற்றும் Q ஆகிய புள்ளிகளைக் குறித்து இரண்டு புள்ளிகளையும் இணைத்துக் கோடு (2) வரைக.

இந்த இரு கோடுகளும் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியான $(3,2)$ என்பது சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) இன் தீர்வாகும். இரு கோடுகளுக்கும் ஒரே ஒரு புள்ளி தீர்வாக அமைகிறது. ஆகவே, தீர்வு $x = 3$, $y = 2$ ஆகும்.

குறிப்பு

கிடைக்கப்பெற்ற தீர்வானது இரண்டு சமன்பாடுகளுக்கும் தீர்வாக அமைகிறதா (நிறைவு செய்கிறதா) என்று சரிபார்த்தல் நலம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.7

ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளுக்கு வரைபடம் மூலம் தீர்வு காண்க $3x + 2y = 6;\ 6x + 4y = 8$

தீர்வு

ஒவ்வொரு கோட்டிற்கும் அட்டவணை தயாரித்து வரிசைச் சோடிப் புள்ளிகளைக் குறிக்கவும்.

$3x + 2y = 6$ இன் வரைபடம்

x	-2	0	2
y	6	3	0

குறிக்கவேண்டிய புள்ளிகள் :

$(-2,6), (0,3), (2,0)$

$6x + 4y = 8$ இன் வரைபடம்

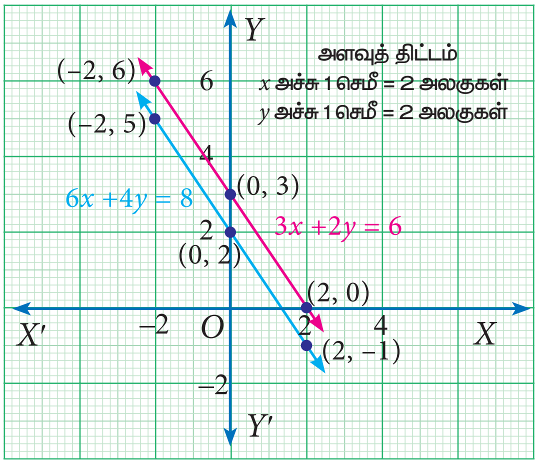
x	-2	0	2
y	5	2	-1

குறிக்கவேண்டிய புள்ளிகள்:

$(-2,5), (0,2), (2,-1)$

இரண்டு சமன்பாடுகளுக்கும் வரைபடம் வரைந்தால், இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று இணையாக அமைந்து நமக்கு வெட்டும்புள்ளியைக் கொடுக்காததைக் காணலாம். இதன் மூலமாக இரண்டு சமன்பாடுகளுக்கும் பொதுவான வெட்டும்புள்ளி தீர்வாக அமையாததைக் காணலாம். எனவே, இச்சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு கிடையாது.

வரைபடம் வரையாமலே இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று இணையானது என்பதை நாம் கணிக்கலாம்.



படம் 1.17

இந்த இரண்டு சமன்பாடுகளின் கோடுகளையும் $y = mx + c$ என்ற வடிவில் எழுதச் சாய்வுகள் சமம் என்பதை அறியலாம், இதிலிருந்து, கோடுகள் இணையாகச் செல்வதாலும் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளாததாலும் இதற்குத் தீர்வுகள் இல்லை என்பதை அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.8

ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளுக்கு வரைபடம் மூலம் தீர்வு காண்க $y = 2x + 1;\ -4x + 2y = 2$

தீர்வு

ஒவ்வொரு கோட்டிற்கும் அட்டவணை தயாரித்து வரிசைச் சோடிப் புள்ளிகளைக் குறிக்கவும்.

$y = 2x + 1$ இன் வரைபடம்

x	-2	-1	0	1	2
$2x$	-4	-2	0	2	4
1	1	1	1	1	1
$y = 2x+1$	-3	-1	1	3	5

குறிக்கவேண்டிய புள்ளிகள் :

$(-2, -3), (-1, -1), (0,1), (1,3), (2, 5)$

$-4x + 2y = 2$ இன் வரைபடம்

$$2y = 4x + 2$$
$$y = 2x + 1$$

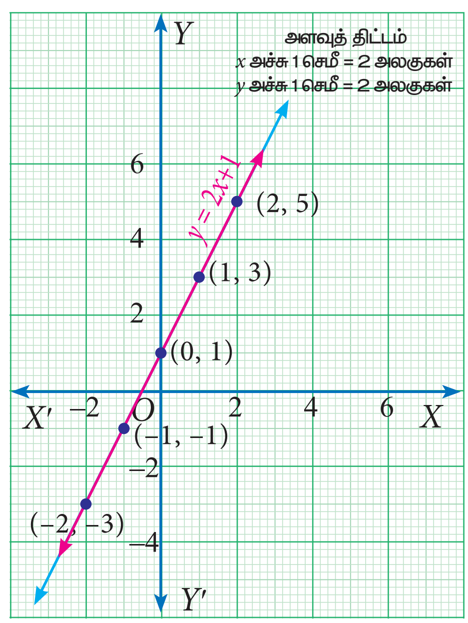
x	-2	-1	0	1	2
$2x$	-4	-2	0	2	4
1	1	1	1	1	1
$y = 2x+1$	-3	-1	1	3	5

குறிக்கவேண்டிய புள்ளிகள் :

$(-2, -3), (-1, -1), (0, 1), (1, 3), (2, 5)$

இங்கு, இரு சமன்பாடுகளும் ஒரே மாதிரியானவை. ஆனால் இரண்டும் வெவ்வேறு வடிவில் அமைந்துள்ளன. சமன்பாடுகள் ஒரே மாதிரியானவை என்பதால் தீர்வுகளும் ஒரே மாதிரியானவை. ஒரு கோட்டின் மீதமைந்த அனைத்துப் புள்ளிகளும் மற்றொரு கோட்டின் மீதும் உள்ளன.

எனவே, இங்கு கோட்டின் மீது அமைந்துள்ள அனைத்து வரிசைச் சோடிப் புள்ளிகளும் எண்ணற்ற தீர்வுகளாக அமைகின்றன.



படம் 1.18

எடுத்துக்காட்டு 1.9

ஒரு செவ்வகத்தின் சுற்றளவு 36 மீட்டர் மற்றும் நீளமானது அகலத்தின் மூன்று மடங்கை விட 2 மீட்டர் அதிகமெனில், செவ்வகத்தின் பக்க அளவுகளை வரைபட முறையைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட கூற்றுகளுக்கு நாம் சமன்பாடுகளை அமைப்போம்.

செவ்வகத்தின் நீளம் மற்றும் அகலத்தை முறையே l மற்றும் b என்க.

முதல் கூற்றுக்குச் சமன்பாடு அமைத்தல்

செவ்வகத்தின் சுற்றளவு $= 36$ மீ

$$2(l + b) = 36$$

$$l+b=\frac{36}{2}$$

$$l=18-b \qquad \dots (1)$$

b	2	4	5	8
18	18	18	18	18
−b	−2	−4	−5	−8
l = 18−b	16	14	13	10

புள்ளிகள்: (2,16), (4,14), (5,13), (8,10)

இரண்டாவது கூற்றுக்குச் சமன்பாடு அமைத்தல் :

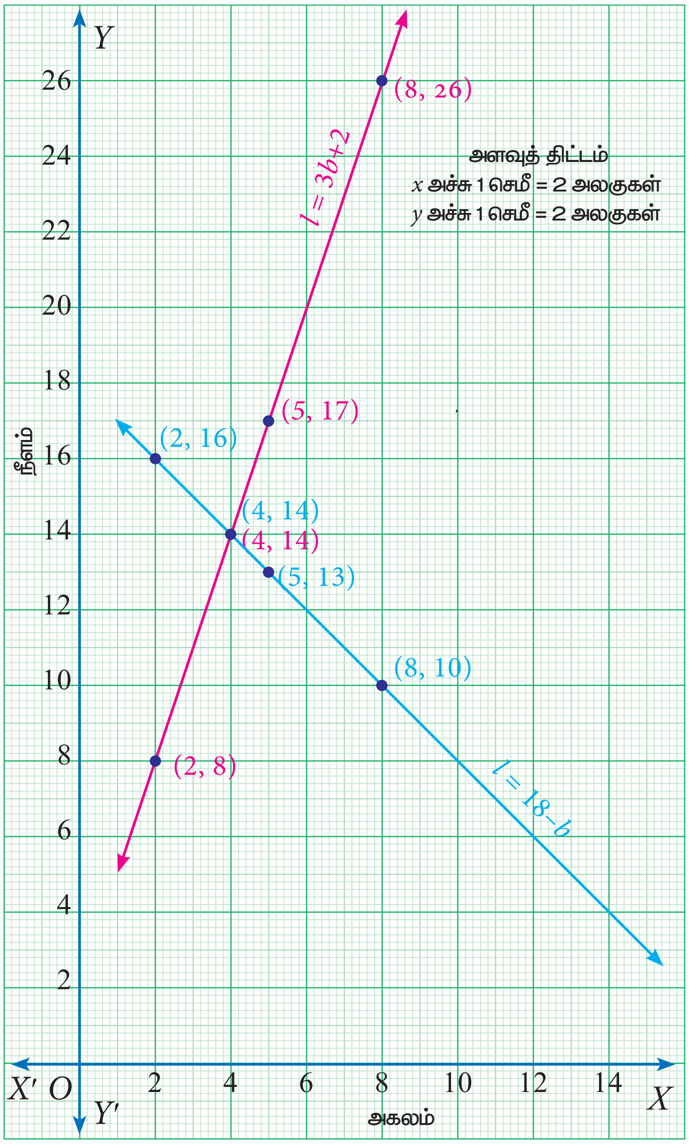
இரண்டாவது கூற்றின்படி, நீளமானது அகலத்தின் மூன்று மடங்கை விட 2 மீ அதிகம்

எனவே $l=3b+2$ ... (2)

சமன்பாடு (2) இக்கு அட்டவணை அமைப்போம்

b	2	4	5	8
$3b$	6	12	15	24
2	2	2	2	2
$l=3b+2$	8	14	17	26

புள்ளிகள் : (2,8), (4,14), (5,17), (8,26)



படம் 1.19

இரண்டு கோடுகளுக்கும் பொதுவான ஒரு புள்ளியே தீர்வாக அமையும். இங்கு (4,14) என்பதே தீர்வாக இருப்பதைக் காணலாம். எனவே தீர்வானது b = 4, l = 14.

சரிபார்த்தல் :

$2(l+b) = 36 \quad \dots(1)$	$l = 3b+2 \quad \dots(2)$
$2(14+4) = 36$	$14 = 3(4)+2$
$2\times 18 = 36$	$14 = 12+2$
$36 = 36$ மெய்	$14 = 14$ மெய்

பயிற்சி 1.3

1. வரைபட முறையில் தீர்க்க

(i) $x+y=7;\ x-y=3$ (ii) $3x+2y=4;\ 9x+6y-12=0$

(iii) $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1; \frac{x}{2}+\frac{y}{4}=2$ (iv) $x-y=0;\ \ y+3=0$

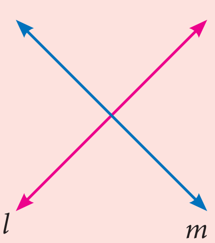
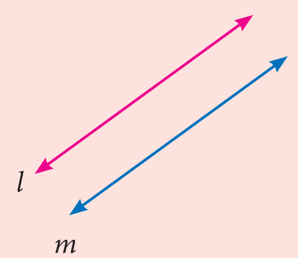
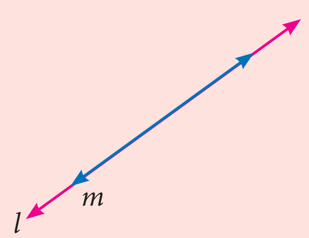
(v) $x-2y=1; x-2y+5=0$ (vi) $2x+y=4;\ \ 4x+2y=8$

(vii) $y=2x+1; y+3x-6=0$ (viii) $x=-3; y=3$

2. இரண்டு மகிழுந்துகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு 100 மைல்கள். இரண்டும் ஒன்றையொன்று நோக்கிப் பயணித்தால் ஒரு மணி நேரத்தில் சந்தித்துக் கொள்ளும். இரண்டும் ஒரே திசையில் செல்லும்போது 2 மணி நேரத்தில் ஓரிடத்தில் சந்தித்து ஒன்றாகப் பயணிக்குமெனில், இரண்டு மகிழுந்துகளின் வேகங்களைக் கணக்கிடுக.

சில சிறப்புப் பண்புகள்

வரைபடங்களின் மூலம் ஒருங்கமைந்தச் சமன்பாடுகளுக்கு எத்தனை தீர்வுகள் இருக்கும் என்பதைக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள படங்களின் மூலம் நாம் காணலாம்.

வெட்டும் கோடுகள்	இணைகோடுகள்	ஒன்றிய கோடுகள் (ஒன்றின் மீது ஒன்று)
		
ஒரே ஒரு தீர்வு	தீர்வு இல்லை	எண்ணற்ற தீர்வுகள்

- நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு, ஒரே ஒரு தீர்வினைப் பெற்றிருக்கும்போது (வரைபடத்தில் கோடுகள் ஒரேயொரு இடத்தில் வெட்டிக்கொள்ளும்), அந்தத் தொகுப்பானது ஒருங்கமைவுத் (consistent) தொகுப்பு எனப்படுகிறது.
- நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்குத் தீர்வு இல்லை எனில் (வரைபடத்தில் கோடுகள் எந்த இடத்திலும் வெட்டிக்கொள்ளாது) அந்தத் தொகுப்பானது ஒருங்கமைவற்ற (inconsistent) தொகுப்பு எனப்படுகிறது.
- நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் இருக்கும்போது அவை இரண்டும் ஒரே கோடுகள் ஆகும். (வரைபடத்தில் கோடுகள், அனைத்துப் புள்ளிகளிலும் ஒன்றின் மீது ஒன்றாகப் பொருந்தும்) அந்தத் தொகுப்பும் ஒருங்கமைவுடையது (consistent) ஆகும்.

பிரதியிடல் முறையில் தீர்வு காணுதல் (Solving by Substitution Method)

இந்த முறையில், ஒரு மாறியின் மதிப்பை மற்றொரு மாறியில் பிரதியிட்டு, இரு மாறிகள் கொண்ட சமன்பாட்டை ஒரு மாறி கொண்ட சமன்பாடாக மாற்றித் தீர்வு (ஒரு சோடி நேரிய சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதற்குப் பதிலாக) காண்கிறோம். ஒரு மாறியின் மதிப்பை மற்றொரு மாறியில் பிரதியிடுவதால் இதை நாம் பிரதியிடல் முறை என்று அழைக்கிறோம்.

இதற்கான வழிமுறைகள் பின்வருமாறு

படி 1: கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு சமன்பாடுகளில் ஏதேனும் ஒன்றிலிருந்து, ஒரு மாறியின் மதிப்பை மற்றொரு மாறியின் மதிப்பைக் கொண்டு காணவும்.

படி 2: படி 1 இல் பெறப்பட்ட மாறியின் மதிப்பை மற்றொரு சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டுத் தீர்க்க ஒரு மாறியின் மதிப்பைப் பெறலாம்.

படி 3: படி 2 இல் பெறப்பட்ட மாறியின் மதிப்பைப் படி 1 இல் பிரதியிட மற்றொரு மாறியின் மதிப்பைப் பெறலாம்..

எடுத்துக்காட்டு 1.10

ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளை பிரதியிடல் முறையில் தீர்க்க: $x+3y=16$ மற்றும் $2x-y=4$

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டவை $x+3y=16$ ... (1)

$2x-y=4$ ... (2)

படி 1	படி 2	படி 3	தீர்வு
சமன்பாடு (2) இலிருந்து $2x-y=4$ $-y=4-2x$ $y=2x-4$ ...(3)	(3) ஐ (1) இல் பிரதியிட $x+3y=16$ $x+3(2x-4)=16$ $x+6x-12=16$ $7x=28$ $x=4$	$x = 4$ என (3) இல் பிரதியிட $y=2x-4$ $y=2(4)-4$ $y=4$	$x=4$ மற்றும் $y=4$

Progress Check

(i) படி 1 இல், சமன்பாடு (2) இக்கு பதிலாகச் சமன்பாடு (1) ஐ எடுத்து x இன் மதிப்பை y இல் பெற இயலுமா? இதே போல் ஒரு மாறியின் மதிப்பை மற்றொரு மாறியின் மதிப்பில் பெற வேறு ஏதேனும் வழி உள்ளதா? விவாதிக்கவும்.

(ii) மேற்கண்ட கணக்கில் தீர்வு சரியானதா என்பதைப் பிரதியிடல் மூலம் சரிபார்க்கவும்.

(iii) மேற்கண்ட கணக்கிற்குத் தீர்வு (4, 4) எனப் பெற்றுள்ளோம். இதைத் தவிர வேறு எந்தத் தீர்வும் இல்லை என உறுதியாகக் கூற இயலுமா? கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளுக்கு வரைபடம் வரைந்து ஒரே ஒரு தீர்வு மட்டும் தான் உள்ளதா என்பதைச் சரிபார்க்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.11

ஓர் ஈரிலக்க எண்ணின் இலக்கங்களின் கூடுதல் 5. அதன் இலக்கங்கள் இடமாற்றப்பட்டால் கிடைக்கும் புதிய எண்ணானது கொடுக்கப்பட்ட எண்ணை விட 27 குறைவு எனில் அந்த எண்ணைக் காண்க.

தீர்வு

x என்பது பத்தாம் இலக்க எண் என்றும் y என்பது ஒன்றாம் இலக்க எண் என்றும் கொள்க.

கொடுக்கப்பட்டவை $x+y=5 \quad \ldots (1)$

	பத்தாம் இலக்கம்	ஒன்றாம் இலக்கம்	மதிப்பு
கொடுக்கப்பட்ட எண்	x	y	$10x+y$
புதிய எண் (இலக்கங்களை இடமாற்றிய பின்பு)	y	x	$10y+x$

கொடுக்கப்பட்ட எண் – இடமாற்றபட்ட எண் $=27$

$$(10x+y)-(10y+x)=27$$

$$10x-x+y-10y=27$$

$$9x-9y=27$$

$$\Rightarrow \qquad x-y=3 \qquad \ldots (2)$$

$x+y=5 \quad \ldots (1)$ இலிருந்து, $y=5-x \qquad \ldots (3)$

(3) ஐ (2) இல் பிரதியிட $x-(5-x)=3$

$$x-5+x=3$$

$$2x=8$$

$$x=4$$

$x=4$ என (3) இல் பிரதியிட $y=5-x \ =5-4$

$$y=1$$

ஆகவே, $10x+y=10\times 4+1=40+1 \ =41.$

ஆகையால் கொடுக்கப்பட்ட ஈரிலக்க எண் $=41$ ஆகும்.

சரிபார்த்தல் :

இலக்கங்களின் கூடுதல் $=5$

$x+y=5$

$4+1=5$

$5=5$ மெய்

கொடுக்கப்பட்ட எண் – புதிய எண் $=27$

$41-14=27$

$27=27$ மெய்

பயிற்சி 1.4

1. பிரதியிடல் முறையில் தீர்க்க.

(i) $2x-3y=7;\ 5x+y=9$ (ii) $1.5x+0.1y=6.2;\ 3x-0.4y=11.2$

(iii) $10\%\ of\ x+20\%\ of\ y=24;\ 3x-y=20$ (iv) $\sqrt{2}\,x-\sqrt{3}\,y=1;\ \sqrt{3}\,x-\sqrt{8}\,y=0$

(v) $\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{\sqrt{y}}=2;\ \dfrac{4}{\sqrt{x}}-\dfrac{9}{\sqrt{y}}=-1$ (குறிப்பு : $\dfrac{1}{\sqrt{x}}=a;\dfrac{1}{\sqrt{y}}=b$ என்க)

2. இராமனின் வயது அவருடைய இரு மகன்களுடைய வயதுகளின் கூடுதலைப் போல் மூன்று மடங்காகும். ஐந்தாண்டுகள் கழித்து அவரின் வயது தனது மகன்களுடைய

வயதுகளின் கூடுதலைப் போல் இரு மடங்காகும் எனில், இராமனின் தற்போதைய வயதைக் காண்க.

3. 100 மற்றும் 1000 இக்கு இடையே அமையும் ஒரு மூன்றிலக்க எண்ணின் நடு இலக்கம் பூச்சியமாகவும் மற்ற இரு இலக்கங்களின் கூடுதல் 13 ஆகவும் இருக்கின்றன. இலக்கங்களை இடம் மாற்றி அமைக்கும்போது கிடைக்கும் எண்ணானது, அந்த எண்ணை விட 495 அதிகம் எனில், அந்த எண்ணைக் காண்க.

நீக்கல் முறையில் தீர்வு காணுதல் (Solving by Elimination Method)

இம்முறையானது ஒரு சோடி நேரிய சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் மற்றோர் இயற்கணித முறையாகும். இந்த முறையானது பிரதியிடல் முறையை விடச் சிறந்த முறையாகும். இங்கு கொடுக்கப்பட்ட ஒரு சோடி நேரிய சமன்பாடுகளிலுள்ள இரண்டு மாறிகளில் ஏதேனும் ஒன்றை நீக்கக் கிடைக்கும் ஒரு மாறியில் அமைந்த நேரிய சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு காணும் முறையாகும்.

இதன் பல்வேறு படிநிலைகள் பின்வருமாறு:

படி 1: இரண்டு சமன்பாடுகளிலும் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மாறியின் கெழுக்கள் சமமாக அமையுமாறு ஒரு குறிப்பிட்ட மாறிலியால் (மாறிலிகளால்) ஒரு சமன்பாட்டினையோ அல்லது இரண்டையுமே பெருக்க வேண்டும்.

படி 2: படி 1 இல் கிடைத்த சமன்பாடுகளைக் கூட்டியோ அல்லது கழித்தோ சமமான கெழுக்களைக் கொண்ட மாறியை நீக்க வேண்டும்.

படி 3: படி 2 இன் மூலம் கிடைத்த ஒரு மாறியில் அமைந்த சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பதன் வாயிலாக தெரியாத மாறியின் மதிப்பைக் காண வேண்டும்.

படி 4: படி 3 இல் கிடைத்த ஒரு மாறியின் மதிப்பைக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளில் ஏதேனும் ஒன்றில் பிரதியிட்டுத் தெரியாத மற்றொரு மாறியின் மதிப்பைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.12

நீக்கல் முறையில் தீர்வு காண்க: $4a+3b=65$ மற்றும் $a+2b=35$

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டவை, $4a+3b=65$ .....(1)

$a+2b=35$ .....(2)

(2) ஐ 4 ஆல் பெருக்க $4a + 8b = 140$

(1) இலிருந்து $4a + 3b = 65$

$$\begin{array}{rcrcl} 4a & + & 8b & = & 140 \\ 4a & + & 3b & = & 65 \\ (-) & & (-) & & (-) \\ \hline & & 5b & = & 75 \end{array}$$

இதிலிருந்து $b = 15$

$b = 15$ என (2) இல் பிரதியிட,

$a + 2(15) = 35$ இதிலிருந்து $a = 5$

ஆகவே, தீர்வு $a = 5,\ b = 15$.

சரிபார்த்தல் :

$4a+3b$	=	65	...(1)
$4(5)+3(15)$	=	65	
$20 + 45$	=	65	
65	=	65	மெய்
$a + 2b$	=	35	...(2)
$5 + 2(15)$	=	35	
$5+30$	=	35	
35	=	35	மெய்

எடுத்துக்காட்டு 1.13

நீக்கல் முறையில் தீர்வு காண்க: $2x+3y=14$ மற்றும் $3x-4y=4$

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டவை, $2x+3y=14$ ...(1)

$3x-4y=4$ ...(2)

y ஐ நீக்க:

(1) ஐ 4 ஆல் பெருக்க, கிடைப்பது $8x+12y=56$

(2) ஐ 3 ஆல் பெருக்க, கிடைப்பது $\underline{9x-12y\ =12}$

இரண்டையும் கூட்ட நமக்குக் கிடைப்பது, $17x=68$

ஆகவே, $x=4$

$x=4$ என (1) இல் பிரதியிட நாம் பெறுவது

$$2x+3y=14$$
$$2(4)+3y=14$$
$$8+3y=14$$
$$y=2$$

ஆகவே தீர்வு $x=4$, $y=2$ ஆகும்.

இங்கு நமது நோக்கமானது மாறி yஐ நீக்குவது ஆகும். எனவே, மாறி y இன் கெழுக்களைச் சமப்படுத்த 3 மற்றும் 4 இன் மீ.சி.ம 12 நமக்கு உதவும் !

சரிபார்த்தல் :

$2x+3y$	=	14	...(1)
$2(4)+3(2)$	=	14	
$8+6$	=	14	
14	=	14	மெய்
$3x-4y$	=	4	...(2)
$3(4)-4(2)$	=	4	
$12-8$	=	4	
4	=	4	மெய்

எடுத்துக்காட்டு 1.14

நீக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தித் தீர்வு காண்க: $8x-3y=5xy$ மற்றும் $6x-5y=-2xy$

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள் $8x-3y=5xy$ ...(1)

$6x-5y=-2xy$ ...(2)

கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பில் xy என்ற உறுப்பு உள்ளதால் இது ஒரு நேரிய சமன்பாட்டில் அமைந்த தொகுப்பு அல்ல. மேலும், $x=0$ எனில், $y=0$ இதே போல் $y=0$ எனில், $x=0$ என்பதையும் கவனிக்க. ஆகவே, $(0,0)$ என்பது தொகுப்பின் ஒரு தீர்வாகும். மேலும் $x\neq 0$ மற்றும் $y\neq 0$ என்றவாறு வேறொரு தீர்வும் இருக்க இயலும்.

$x\neq 0,\ y\neq 0$ என்பனவற்றைக் கருத்தில் கொள்வோம்.

ஒவ்வொரு சமன்பாட்டின் இரண்டு பக்கங்களையும் xy ஆல் வகுக்க,

(1) இலிருந்து $\frac{8x}{xy}-\frac{3y}{xy}=\frac{5xy}{xy}$ நாம் பெறுவது, $\frac{8}{y}-\frac{3}{x}=5$ ...(3)

(2) இலிருந்து $\frac{6x}{xy}-\frac{5y}{xy}=\frac{-2xy}{xy}$ நாம் பெறுவது, $\frac{6}{y}-\frac{5}{x}=-2$ ...(4)

$a=\frac{1}{x},\ b=\frac{1}{y}$ என்க.

(3) மற்றும் (4) ஆனது, $8b-3a=5$ ...(5)

$6b-5a=-2$ ...(6) என ஆகும்.

இவை a மற்றும் b ஆல் அமைந்த நேரிய சமன்பாடுகள் ஆகும்.

a ஐ நீக்குவதற்காக, $(5)\times 5 \Rightarrow \quad 40b-15a=25$ .....(7)

$(6)\times 3 \Rightarrow \quad 18b-15a=-6$ .....(8)

கடந்த எடுத்துக்காட்டுகளைப் போலவே இதைத் தொடர $\left(\frac{11}{23},\frac{22}{31}\right)$ என்ற தீர்வைப் பெறலாம்.

ஆகவே, இந்தத் தொகுப்பானது $\left(\frac{11}{23},\frac{22}{31}\right)$ மற்றும் $(0,0)$ ஆகிய இரு தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும்.

பயிற்சி 1.5

1. நீக்கல் முறையில் தீர்வு காண்க

(i) $2x-y=3;\quad 3x+y=7$

(ii) $x-y=5;\quad 3x+2y=25$

(iii) $\frac{x}{10}+\frac{y}{5}=14;\quad \frac{x}{8}+\frac{y}{6}=15$

(iv) $3(2x+y)=7xy;\quad 3(x+3y)=11xy$

(v) $\frac{4}{x}+5y=7;\ \frac{3}{x}+4y=5$

(vi) $\frac{3}{x+y}+\frac{2}{x-y}=3;\quad \frac{2}{x+y}+\frac{3}{x-y}=\frac{11}{3}$

(vii) $13x+11y=70;\ 11x+13y=74$

(viii) $37x+29y=45;\quad 29x+37y=21$

2. A மற்றும் B ஆகியோரது மாத வருமானங்களின் விகிதம் 3:4 ஆகவும் அவர்களுடைய செலவுகளின் விகிதம் 5:7 ஆகவும் இருக்கின்றன. ஒவ்வொருவரும் மாதம் ₹5,000 சேமிக்கிறார்கள் எனில், அவர்களுடைய மாத வருமானத்தைக் காண்க.

3. 5 வருடங்களுக்கு முன்பு, ஒருவருடைய வயதானது அவருடைய மகனின் வயதைப் போல் 7 மடங்காகும். 5 வருடங்கள் கழித்து அவருடைய வயதானது மகனின் வயதைப் போல் 4 மடங்காக இருக்கும் எனில், அவர்களுடைய தற்போதைய வயது என்ன?

குறுக்குப் பெருக்கல் முறையில் தீர்வு காணுதல் (Solving by Cross Multiplication Method)

பிரதியிடல் மற்றும் நீக்கல் முறைகளானது பல்வேறு கணிதச் செயல்களை உள்ளடக்கியது. ஆனால் குறுக்குப் பெருக்கல் முறையானது கெழுக்களைச் சீரிய முறையில் பயன்படுத்தி வழிமுறையை எளிமையாக்கித் தீர்வினைப் பெற வழி செய்கிறது. இந்த முறையில் எண்களுக்கு இடையில் குறுக்குக் கோடுகள் அமைத்துப் பெருக்குவதால் இது குறுக்குப் பெருக்கல் முறை என்று அழைக்கப்படுகிறது. இந்த முறையைப் பின்வருமாறு விவாதிப்போம்.

நமக்கு $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ என்றவாறு அமைந்த ஒரு சோடி நேரிய ஒருங்கமைவுச் சமன்பாடுகள் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \qquad ...(1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0 \qquad ...(2)$$

நாம் அவற்றைப் பின்வருமாறு தீர்க்கலாம் :

$(1) \times b_2 -\ (2) \times b_1$ என்பதிலிருந்து $b_2(a_1x+b_1y+c_1) - b_1(a_2x+b_2y+c_2) = 0$

$$\Rightarrow \quad x(a_1b_2 - a_2b_1) = (b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{(b_1c_2 - b_2c_1)}{(a_1b_2 - a_2b_1)}$$

$(1) \times a_2 -\ (2) \times a_1$ என்பதிலிருந்து

$$y = \frac{(c_1a_2 - c_2a_1)}{(a_1b_2 - a_2b_1)}$$ எனப் பெறலாம்.

ஆகவே தொகுப்பின் தீர்வானது

$$\boxed{x = \frac{(b_1c_2 - b_2c_1)}{(a_1b_2 - a_2b_1)}, \quad y = \frac{(c_1a_2 - c_2a_1)}{(a_1b_2 - a_2b_1)}}$$

இதைப் பின்வருமாறும் எழுதலாம்

$$\boxed{\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}}$$

இதனைப் பின்வருமாறு நினைவில் கொள்ளலாம்

$$\begin{array}{ccccccc} & x & & y & & 1 & \\ b_1 & & c_1 & & a_1 & & b_1 \\ & \times & & \times & & \times & \\ b_2 & & c_2 & & a_2 & & b_2 \end{array}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.15

குறுக்குப் பெருக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தித் தீர்வு காண்க:

$3x - 4y = 10$ மற்றும் $4x + 3y = 5$

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு

$$3x - 4y = 10 \quad \Rightarrow 3x - 4y - 10 = 0 \quad .....(1)$$

$$4x + 3y = 5 \quad \Rightarrow 4x + 3y - 5 = 0 \quad .....(2)$$

குறுக்குப் பெருக்கல் முறையைப் பயன்படுத்துவதற்காகக் கெழுக்களை நாம் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\begin{array}{ccccccc} & x & & y & & 1 & \\ -4 & & -10 & & 3 & & -4 \\ & \times & & \times & & \times & \\ 3 & & -5 & & 4 & & 3 \end{array}$$

$$\frac{x}{(-4)(-5)-(3)(-10)} = \frac{y}{(-10)(4)-(-5)(3)} = \frac{1}{(3)(3)-(4)(-4)}$$

$$\frac{x}{(20)-(-30)} = \frac{y}{(-40)-(-15)} = \frac{1}{(9)-(-16)}$$

$$\frac{x}{20+30} = \frac{y}{-40+15} = \frac{1}{9+16}$$

$$\frac{x}{50} = \frac{y}{-25} = \frac{1}{25}$$

ஆகவே நாம் பெறுவது $x = \frac{50}{25}$; $y = \frac{-25}{25}$

$x = 2$; $y = -1$

எனவே தீர்வானது $x = 2,\ y = -1$ ஆகும்.

சரிபார்த்தல் :

$$\begin{aligned} 3x-4y &= 10 \quad ...(1) \\ 3(2)-4(-1) &= 10 \\ 6+4 &= 10 \\ 10 &= 10 \quad \text{மெய்} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x+3y &= 5 \quad ...(2) \\ 4(2)+3(-1) &= 5 \\ 8-3 &= 5 \\ 5 &= 5 \quad \text{மெய்} \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.16

குறுக்குப் பெருக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்க $2x = -7y + 5$ மற்றும் $-3x = -8y - 11$.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் தொகுப்பைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்

$$2x + 7y - 5 = 0$$

$$-3x + 8y + 11 = 0$$

குறுக்குப் பெருக்கல் முறைக்காகக் கெழுக்களைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்

$$\begin{array}{ccccccc} & x & & y & & 1 & \\ 7 & & -5 & & 2 & & 7 \\ 8 & & 11 & & -3 & & 8 \end{array}$$

$$\frac{x}{(7)(11)-(8)(-5)} = \frac{y}{(-5)(-3)-(11)(2)} = \frac{1}{(2)(8)-(-3)(7)}$$

$$\frac{x}{77+40} = \frac{y}{15-22} = \frac{1}{16+21}$$

$$\frac{x}{117} = \frac{y}{-7} = \frac{1}{37}$$

$$\frac{x}{117} = \frac{1}{37}, \qquad \frac{y}{-7} = \frac{1}{37}$$

ஆகவே தீர்வு $\left(\frac{117}{37}, \frac{-7}{37}\right)$ ஆகும்.

சரிபார்த்தல் :

$$\begin{aligned} 2x+7y-5 &= 0 \quad ...(1) \\ 2\left(\frac{117}{37}\right)+7\left(\frac{-7}{37}\right)-5 &= 0 \\ \frac{234}{57}-\frac{49}{37}-5 &= 0 \\ \frac{185}{37}-5 &= 0 \\ 5-5 &= 0 \quad \text{மெய்} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x+8y+11 &= 0 \quad ...(2) \\ 3\left(\frac{117}{37}\right)+8\left(\frac{-7}{37}\right)+11 &= 0 \\ \frac{-351}{37}-\frac{56}{37}+11 &= 0 \\ \frac{-407}{37}+11 &= 0 \\ -11+11 &= 0 \quad \text{மெய்} \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.17

குறுக்குப் பெருக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தி தீர்க்க :
$3x + 5y = 21$ மற்றும் $-7x - 6y = -49$

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு $3x+5y-21=0;\quad -7x-6y+49=0$

கெழுக்களைக் குறுக்குப் பெருக்கல் முறைக்காக எழுத நாம் பெறுவது,

$$\begin{array}{cccccccc} & x & & y & & 1 & & \\ 5 & & -21 & & 3 & & 5 \\ -6 & & 49 & & -7 & & -6 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(5)(49)-(-6)(-21)}=\frac{y}{(-21)(-7)-(49)(3)}=\frac{1}{(3)(-6)-(-7)(5)}$$

$$\frac{x}{119}=\frac{y}{0}=\frac{1}{17}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{119}=\frac{1}{17}, \quad \frac{y}{0}=\frac{1}{17}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{119}{17}, \quad y=\frac{0}{17}$$

$$\Rightarrow \quad x=7, \quad y=0$$

சரிபார்த்தல் :

$$\begin{aligned} 3x+5y &= 21 \quad \ldots(1)\\ 3(7)+5(0) &= 21\\ 21+0 &= 21\\ 21 &= 21 \quad \text{மெய்} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -7x-6y &= -49 \ldots(2)\\ -7(7)-6(0) &= -49\\ -49+0 &= -49\\ -49 &= -49 \quad \text{மெய்} \end{aligned}$$

குறிப்பு

இங்கே $\frac{y}{0}=\frac{1}{17}$ என்பது $y=\frac{0}{17}$ ஆகும். ஆகவே இங்கு $\frac{y}{0}$ என்பது ஒரு குறியீடே அன்றி, அதனை 0 ஆல் வகுத்தல் எனப் பொருள் கொள்ளக்கூடாது. பூச்சியத்தால் ஓர் எண்ணை வகுத்தல் என்பது வரையறுக்கப்படவில்லை என்ற கூற்று எப்பொழுதும் மெய்யாகும்.

பயிற்சி 1.6

1. குறுக்குப் பெருக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்க

   (i) $8x-3y=12;\ 5x=2y+7$ (ii) $6x+7y-11=0;\ 5x+2y=13$

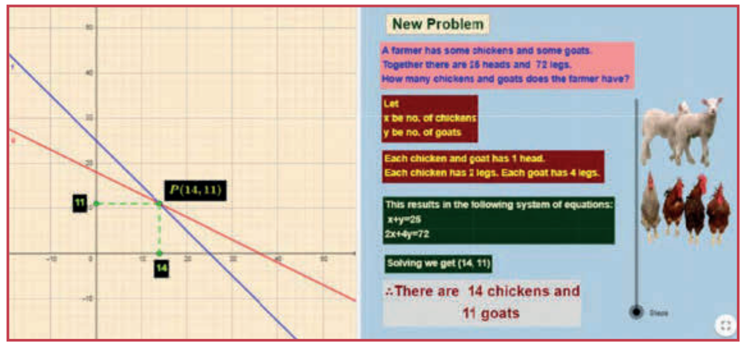
   (iii) $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=5;\ \frac{3}{x}-\frac{1}{y}+9=0$

2. அட்சயா தனது பணப்பையில் (purse) இரண்டு ரூபாய் நாணயங்களையும், ஐந்து ரூபாய் நாணயங்களையும் வைத்திருந்தாள். அவள் மொத்தமாக ₹ 220 மதிப்புடைய 80 நாணயங்களை வைத்திருந்தாள் எனில், ஒவ்வொன்றிலும் எத்தனை நாணயங்கள் வைத்திருந்தாள்.

3. இரு வெவ்வேறு அளவு விட்டமுடைய குழாய்கள் மூலம் ஒரு நீச்சல் குளத்தில் முழுமையாக நீர் நிரப்ப 24 மணி நேரம் ஆகும். அதிக விட்டமுடைய குழாயை 8 மணி நேரமும் குறைந்த விட்டமுடைய குழாயை 18 மணி நேரமும் பயன்படுத்தி நீர் நிரப்பினால் நீச்சல் குளத்தில் பாதி அளவு நீர் நிரம்பும் எனில், தனித்தனியாக அந்தக் குழாய்களைக் கொண்டு நீச்சல் குளம் முழுவதிலும் நீர் நிரப்ப ஆகும் கால அளவுகளைக் காண்க.

இணையச் செயல்பாடு

செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப்பெறுவது



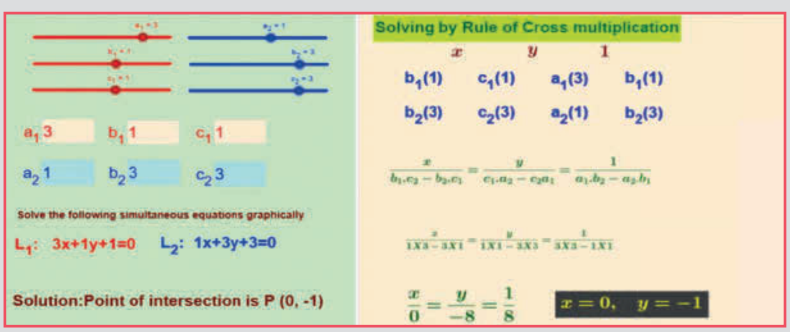
படி – 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி, GeoGebra வின் "Algebra" பக்கத்திற்குச் செல்க. Solving by rule of cross multiplication, Graphical method மற்றும் Chick–Goat puzzle ஆகிய மூன்று தலைப்புகளில் பணித்தாள்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

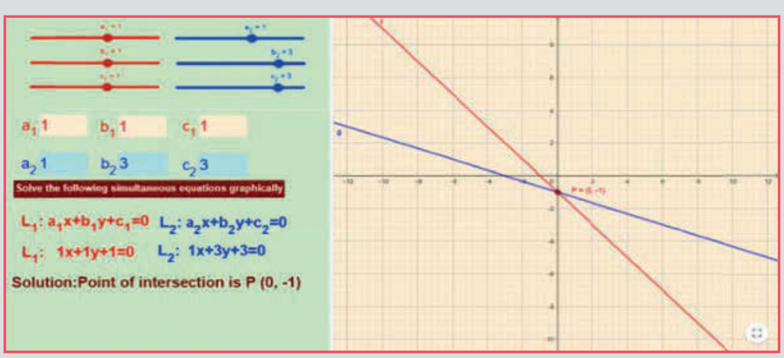
படி - 2

நழுவல்களை நகர்த்தி அல்லது உரிய மதிப்புகளை உள்ளீடு செய்து சமன்பாடுகளை மாற்றி, தீர்வுகளைக் கண்டறியவும். மூன்றாம் தலைப்பில் உள்ள "new problem" என்பதைச் சொடுக்கிக் கணக்குகளைச் செய்யவும். நழுவல்களை நகர்த்திப் படிநிலைகளைப் பார்க்கவும்.

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

இயற்கணிதம் : https://ggbm.at/qampr4ta or Scan the QR Code.

B563_9_MAT_TM_T3

1.7 இரு மாறிகளாலான நேரிய சமன்பாடுகளின் ஒருங்கமைவு மற்றும் ஒருங்கமைவற்ற தன்மை (Consistency and Inconsistency of Linear Equations in Two Variables)

கீழ்க்காணும் இரு மாறிகளாலான ஒரு சோடி நேரிய சமன்பாடுகளைக் கருதுக.

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad ...(1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0 \quad ...(2)$$

இங்கு $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ ஆகியன மெய்யெண்கள் ஆகும்.

சமன்பாடுகள் கீழ்க்கண்டவாறு தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும். :

(i) $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ எனில் ஒரேயொரு தீர்வு மட்டும் பெற்றிருக்கும் (ஒருங்கமைவுடையது).

(ii) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ எனில் எண்ணற்ற தீர்வுகள் இருக்கும் (ஒருங்கமைவுடையது)

(iii) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ எனில் தீர்வு இல்லை. (ஒருங்கமைவற்றது).

எடுத்துக்காட்டு 1.18 கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவுடையதா அல்லது ஒருங்கமைவற்றதா என்பதைச் சோதிக்கவும். அவை ஒருங்கமைவுடையது எனில் எத்தனை தீர்வுகள் இருக்கும்?

(i) $2x - 4y = 7$, $x - 3y = -2$ (ii) $4x + y = 3$, $8x + 2y = 6$ (iii) $4x + 7 = 2y$, $2x + 9 = y$

தீர்வு

வ. எண்	சோடிக் கோடுகள்	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	விகிதங்களை ஒப்பிடுதல்	வரைபடக் குறியீடு	இயற்கணித விளக்கம்
(i)	$2x-4y=7$ $x-3y=-2$	$\frac{2}{1}=2$	$\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$	$\frac{7}{-2}=\frac{-7}{2}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	வெட்டும் கோடுகள்	ஒரேயொரு தீர்வு
(ii)	$4x+y=3$ $8x+2y=6$	$\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$	ஒன்றிணைந்த கோடுகள்	எண்ணற்ற தீர்வுகள்
(iii)	$4x+7=2y$ $2x+9=y$	$\frac{4}{2}=2$	$\frac{2}{1}=2$	$\frac{7}{9}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	இணை கோடுகள்	தீர்வு இல்லை

செயல்பாடு - 1

கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவுடையதா அல்லது ஒருங்கமைவற்றதா என்பதைச் சோதிக்கவும். அவை ஒருங்கமைவுடையது எனில் எத்தனை தீர்வுகள் இருக்கும்?

(i)	(ii)	(iii)
$2x - y = 3$	$3x - 4y = 12$	$2x - y = 5$
$4x - 2y = 6$	$9x - 12y = 24$	$3x + y = 10$

எடுத்துக்காட்டு 1.19

$kx + 2y = 3;\ 2x - 3y = 1$ என்ற சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு ஒரேயொரு தீர்வு மட்டும் உண்டெனில் k இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட நேரிய சமன்பாடுகள்

$$\begin{aligned} kx + 2y &= 3 \ .....(1) \\ 2x - 3y &= 1 \ .....(2) \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{bmatrix}$$

இங்கு $a_1 = k,\ b_1 = 2,\ a_2 = 2,\ b_2 = -3;$

ஒரேயொரு தீர்வு உண்டெனில் $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ எனக் கருதுவோம். எனவே $\frac{k}{2} \neq \frac{2}{-3}$; ஆகவே $k \neq \frac{4}{-3}$

எடுத்துக்காட்டு 1.20

$2x - 3y = 7;\quad (k+2)x - (2k+1)y = 3(2k-1)$ என்ற சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டெனில் k இன் மதிப்பு காண்க

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட இரு நேரிய சமன்பாடுகள்

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 7 \\ (k+2)x - (2k+1)y &= 3(2k-1) \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{bmatrix}$$

இங்கு $a_1 = 2,\ b_1 = -3,\ a_2 = (k+2),\ b_2 = -(2k+1),\ c_1 = 7,\ c_2 = 3(2k-1)$

எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டெனில், $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ எனக் கருதுவோம்.

$$\frac{2}{k+2} = \frac{-3}{-(2k+1)} = \frac{7}{3(2k-1)}$$

$$\frac{2}{k+2} = \frac{-3}{-(2k+1)}$$
$$2(2k+1) = 3(k+2)$$
$$4k + 2 = 3k + 6$$
$$k = 4$$

$$\frac{-3}{-(2k+1)} = \frac{7}{3(2k-1)}$$
$$9(2k-1) = 7(2k+1)$$
$$18k - 9 = 14k + 7$$
$$4k = 16$$
$$k = 4$$

எடுத்துக்காட்டு 1.21

$8x+5y=9;\ kx+10y=15$ என்ற சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்குத் தீர்வுகள் இல்லையெனில் k இன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட இரு நேரிய சமன்பாடுகள்

$$\begin{aligned} 8x+5y&=9 \\ kx+10y&=15 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{bmatrix}$$

இங்கு $a_1=8,\ b_1=5,\ c_1=9,\ a_2=k, b_2=10, c_2=15$

தீர்வுகள் இல்லையெனில் $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ ஆகவே, $\frac{8}{k}=\frac{5}{10}\neq\frac{9}{15}$

$$80=5k$$

$$k=16$$

செயல்பாடு - 2

1. கொடுக்கப்பட்ட நேரிய ஒருங்கமைவுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் கீழ்க்கண்டவாறு இருந்தால் k இன் மதிப்பைக் காண்க:
   (i) $2x+ky=1;\ 3x-5y=7$ ஆகிய சமன்பாடுகளுக்கு ஒரேயொரு தீர்வு உண்டு.
   (ii) $kx+3y=3;\ 12x+ky=6$ ஆகிய சமன்பாடுகளுக்கு தீர்வு இல்லை
   (iii) $(k-3)x+3y=k;\ kx+ky=12$ ஆகிய சமன்பாடுகளுக்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டு
2. கொடுக்கப்பட்ட $3x-(a+1)y=2b-1,\quad 5x+(1-2a)y=3b$ நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டெனில் a மற்றும் b இன் மதிப்புகளைக் காண்க

செயல்பாடு - 3

கீழ்க்காணும் அட்டவணையில், கொடுக்கப்பட்ட நேரிய சமன்பாட்டிற்குப் பொருத்தமான மற்றொரு நேரிய சமன்பாட்டினைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட நேரிய சமன்பாடு	மற்றொரு நேரிய சமன்பாடு		
	ஒரேயொரு தீர்வு	எண்ணற்ற தீர்வுகள்	தீர்வு இல்லை
$2x+3y=7$	$3x+4y=8$	$4x+6y=14$	$6x+9y=15$
$3x-4y=5$			
$y-4x=2$			
$5y-2x=8$			

பயிற்சி 1.7

ஏதேனும் ஒரு முறையைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்க

1. $x = 3$, $x = 5$ மற்றும் $2x - y - 4 = 0$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு வரைபடம் வரைக. இந்தக் கோடுகளும் x–அச்சும் இணைந்து ஏற்படுத்தும் நாற்கரத்தின் பரப்பைக் காண்க.

2. ஓர் ஈரிலக்க எண்ணையும் அதன் இலக்கங்களை மாற்றுவதால் கிடைக்கும் எண்ணையும் கூட்டினால் 110 கிடைக்கும். கொடுக்கப்பட்ட அந்த ஈரிலக்க எண்ணிலிருந்து 10 ஐக் கழித்தால் அது கொடுக்கப்பட்ட ஈரிலக்க எண்ணின் இலக்கங்களின் கூடுதலின் 5 மடங்கை விட 4 அதிகம் எனில், அந்த எண்ணைக் காண்க.

3. ஒரு பின்னத்தின் பகுதி மற்றும் தொகுதியின் கூடுதல் 12. அப்பின்னத்தின் பகுதியுடன் 3 ஐக் கூட்டினால் அதன் மதிப்பு $\frac{1}{2}$ ஆகும் எனில், அப்பின்னத்தைக் காண்க.

4. A மற்றும் B என்ற புள்ளிகள் நெடுஞ்சாலையில் 70 கி.மீ இடைவெளியில் அமைந்துள்ளன. A இலிருந்து ஒரு மகிழுந்தும் B இலிருந்து மற்றொரு மகிழுந்தும் ஒரே நேரத்தில் புறப்படுகின்றன. அவை இரண்டும் ஒரே திசையில் பயணித்தால் 7 மணி நேரத்தில் ஒன்றையொன்று சந்திக்கும். அவை இரண்டும் ஒன்றை நோக்கி மற்றொன்று பயணித்தால் 1 மணி நேரத்தில் சந்திக்கும் எனில், அம்மகிழுந்துகளின் வேகங்களைக் காண்க.

5. ABCD என்ற வட்ட நாற்கரத்தில் $\angle A = (4y + 20)^\circ$, $\angle B = (3y - 5)^\circ$, $\angle C = (4x)^\circ$ மற்றும் $\angle D = (7x + 5)^\circ$ எனில், நான்கு கோணங்களையும் காண்க.

6. ஒரு தொலைக்காட்சிப் பெட்டியை 5% இலாபத்திற்கும், ஒரு குளிர்சாதனப் பெட்டியை 10% இலாபத்திற்கும் விற்பதால் கடைக்காரருக்கு நிகர இலாபம் ₹2,000 கிடைக்கிறது. ஆனால் அவர் ஒரு தொலைக்காட்சிப் பெட்டியை 10% இலாபத்திற்கும், ஒரு குளிர்சாதனப் பெட்டியை 5% நட்டத்திற்கும் விற்பதால் அவரின் நிகர இலாபம் ₹1,500 கிடைக்கிறது எனில், தொலைக்காட்சிப் பெட்டி மற்றும் குளிர்சாதனப் பெட்டியின் சரியான விலைகளைக் காண்க.

7. இரு எண்கள் 5 : 6 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. அவை ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் முறையே 8 ஐக் கழித்தால் அவற்றின் விகிதம் 4 : 5 என மாறும் எனில், அந்த எண்களைக் காண்க.

8. அர்ச்சுனன் வயது அவரது இரு மகன்களுடைய வயதுகளின் கூடுதலின் இரு மடங்காகும். 20 ஆண்டுகள் கழித்து அவரது வயது அவரின் இரு மகன்களுடைய வயதுகளின் கூடுதலுக்குச் சமம் எனில், அர்ச்சுனனின் வயது என்ன?

9. ஒரு நகரத்தில் உள்ள வாடகை மகிழுந்துக்கான கட்டணம், பயணம் செய்த தூரத்திற்கான கட்டணத்தோடு ஒரு குறிப்பிட்ட நிலையான கட்டணமும் சேர்ந்ததாகும். 10 கி.மீ தூரப் பயணத்திற்கு ₹75 மற்றும் 15 கி.மீ பயணத்திற்கு ₹110 வாடகையாக வசூலிக்கப்பட்டால், 25 கி.மீ தூரம் பயணம் செய்ய ஒருவர் எவ்வளவு வாடகைப் பணத்தைச் செலுத்த வேண்டியிருக்கும்? (வரைபடம் மூலமும் விளக்க முயற்சிக்கலாம்).

10. ஒரு தொடர் வண்டியின் முன்பதிவில் அரை மற்றும் முழுப் பயணச் சீட்டிற்கான முன்பதிவுக் கட்டணம் சமமானது. மும்பையிலிருந்து அகமதாபாத்திற்கான ஒரு முழுப் பயணச் சீட்டின் விலை ₹ 216 ஆகும். ஒரு முழு மற்றும் ஓர் அரைப் பயணச் சீட்டின் மொத்த விலை ₹ 327 எனில், ஒரு முழுப் பயணச் சீட்டு மற்றும் முன்பதிவிற்கான கட்டணங்கள் எவ்வளவு?

11. புத்தகங்களை வாடகைக்கு வழங்கும் ஒரு நூலகம் முதல் இரண்டு நாள்களுக்கு ஒரு குறிப்பிட்ட நிலையான வாடகைக் கட்டணத்தையும், அதற்குப் பிறகு ஒவ்வொரு நாளுக்கும் கூடுதல் கட்டணத்தையும் வசூலிக்கும். அமுதா 6 நாட்களுக்கு ₹22 உம், சாகர் 4 நாள்களுக்கு ₹ 16 உம் வாடகையாகச் செலுத்தினால், ஒரு நாளுக்குரிய கட்டணத்தையும், குறிப்பிட்ட நிலையான கட்டணத்தையும் காண்க.

12. 4 பெரியவர்கள் மற்றும் 4 சிறுவர்கள் சேர்ந்து 3 நாள்களில் ஒரு வேலையை முடிக்கிறார்கள். 2 பெரியவர்கள் மற்றும் 5 சிறுவர்கள் சேர்ந்து அதே வேலையை 4 நாள்களில் முடிக்கிறார்கள் எனில், இப்பணியைத் தனியாக ஒரு பெரியவர் எத்தனை நாள்களில் செய்வார்? ஒரு சிறியவர் தனியாக எத்தனை நாள்களில் செய்வார்?

பயிற்சி 1.8

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. $2x+3y=15$ என்ற சமன்பாட்டிற்குக் கீழ்க்கண்டவற்றுள் எது உண்மையானது?

   (1) ஒரேயொரு தீர்வு உண்டு (2) இரண்டு தீர்வுகள் உண்டு

   (3) தீர்வு இல்லை (4) எண்ணற்ற தீர்வுகள்

2. $2x+3y=m$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $x=2$, $y=-2$ என்பது ஒரு தீர்வு எனில், mஇன் மதிப்பு...

   (1) 2 (2) -2 (3) 10 (4) 0

3. கீழ்க்கண்டவற்றுள் எது நேரிய சமன்பாடு

   (1) $x+\frac{1}{x}=2$ (2) $x(x-1)=2$ (3) $3x+5=\frac{2}{3}$ (4) $x^3-x=5$

4. கீழ்க்கண்டவற்றில் $2x-y=6$ இன் தீர்வு எது?

   (1) (2,4) (2) (4,2) (3) (3, -1) (4) (0,6)

5. ஒரு மாறியில் அமைந்த நேரிய சமன்பாடு என்பது ....

   (1) $2x+2=y$ (2) $5x-7=6-2x$ (3) $2t(5-t)=0$ (4) $7p-q=0$

6. $2x+3y=k$ என்பதன் தீர்வு (2,3) எனில், k இன் மதிப்பைக் காண்க.

   (1) 12 (2) 6 (3) 0 (4) 13

7. $ax+by+c=0$ என்ற சமன்பாட்டினை எந்த நிபந்தனை நிறைவு செய்யாது?

(1) $a \neq 0$, $b=0$ (2) $a=0$, $b \neq 0$ (3) $a=0$, $b=0, c \neq 0$ (4) $a \neq 0$, $b \neq 0$

8. கீழ்க்காண்பவற்றில் எது நேரிய சமன்பாடு அல்ல

(1) $ax+by+c=0$ (2) $0x+0y+c=0$

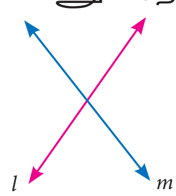
(3) $0x+by+c=0$ (4) $ax+0y+c=0$

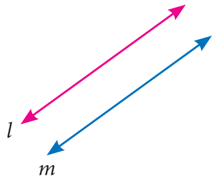
F6AUUN

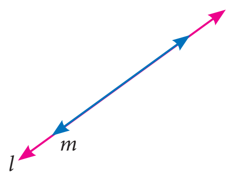
9. $4x+6y-1=0$ மற்றும் $2x+ky-7=0$ ஆகியவை இணை கோடுகளாக அமையும் எனில், k இன் மதிப்பு காண்க

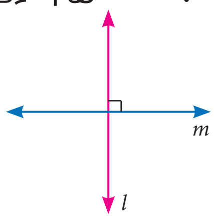
(1) $k=3$ (2) $k=2$ (3) $k=4$ (4) $k=-3$

10. கீழ்க்காணும் நேரிய சமன்பாடுகளுக்கான வரைபடங்களில் எதற்குத் தீர்வு இல்லை?

(1) 

(2) 

(3) 

(4) 

11. $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ எனில், இங்கு $a_1x+b_1y+c_1=0$ மற்றும் $a_2x+b_2y+c_2=0$ ஆகிய நேரிய சமன்பாடுகளுக்கு __________

(1) தீர்வு இல்லை (2) இரண்டு தீர்வுகள் (3) ஒரு தீர்வு (4) எண்ணற்ற தீர்வுகள்

12. $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ எனில், $a_1x+b_1y+c_1=0$ மற்றும் $a_2x+b_2y+c_2=0$ ஆகிய நேரிய சமன்பாடுகளுக்கு __________

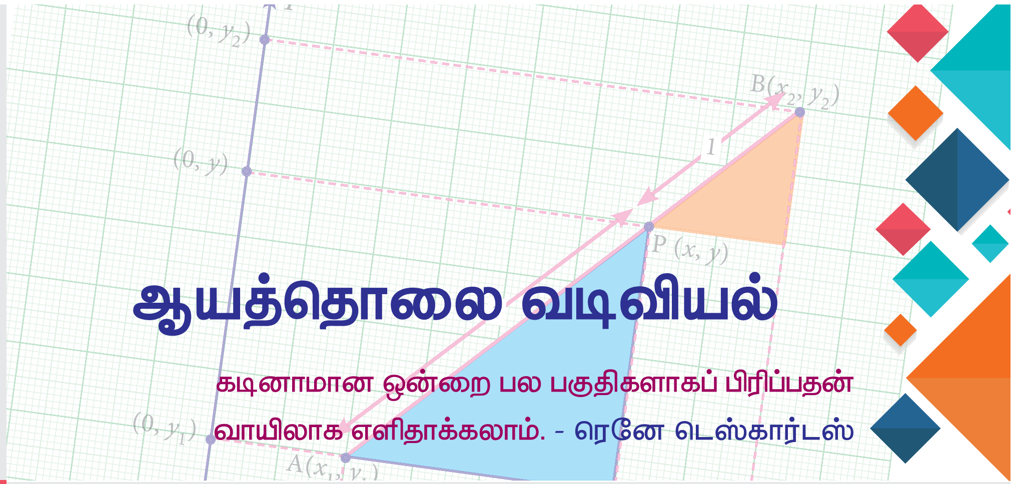
(1) தீர்வு இல்லை (2) இரண்டு தீர்வுகள் (3) ஒரு தீர்வு (4) எண்ணற்ற தீர்வுகள்

நினைவில் கொள்க

- நேரிய தொடர்புகளை அதன் புள்ளி விவரங்களைக் கொண்டு (i) அட்டவணைப்படுத்துதல் (ii) வரைபடம் வரைதல் (iii) சமன்பாடு அமைத்தல் ஆகிய முறைகளில் விளக்கலாம்.

- இரண்டு கோவைகளை ஒன்றுக்கொன்று சமப்படுத்துதலே சமன்பாடு ஆகும்.

- ஒரே ஒரு மாறியைக் கொண்ட ஒரு சமன்பாட்டின் உயரிய அடுக்கு 1 எனில் அது ஒரு மாறியிலான நேரிய சமன்பாடு ஆகும். $(ax+b=0,\ a\neq 0)$.
- ஒரு சமன்பாட்டின் மாறிகளுக்குக் கொடுக்கப்படும் அனைத்து மதிப்புகளும் அந்தச் சமன்பாட்டினை நிறைவு செய்தால் அம்மதிப்புகள் அச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் ஆகும்.
- ஒரு படியில் அமைந்த இரண்டு மாறிகளைக் கொண்டதும் இரண்டு மாறிகளின் பெருக்குதல் இல்லாமலும் அமையும் சமன்பாடானது இரு மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாடாகும் $(ax+by+c=0,\ a\neq 0$ மற்றும் $b\neq 0)$.
- $y=mx+c$ என்பது இரு மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாட்டின் மற்றொரு வடிவமாகும்.
- ஒரு கோட்டின் சாய்வு என்பது அக்கோட்டினுடைய சரிவு நிலையின் எண் மதிப்பே ஆகும். சாய்வு $= \dfrac{\text{ஏற்றம்}}{\text{ஓட்டம்}} = \dfrac{\text{செங்குத்து வேறுபாடு}}{\text{கிடைமட்ட வேறுபாடு}}$
- ஒரு கோட்டின் வெட்டுத்துண்டு என்பது ஆதிப் புள்ளிக்கும், அக்கோடானது X-அச்சு அல்லது Y-அச்சினை வெட்டும் புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தொலைவு ஆகும்.
- இரு மாறிகளில் அமைந்த ஒரு நேரிய சமன்பாட்டிற்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டு.
- இரு மாறிகளில் அமைந்த நேரிய வரைபடம் என்பது ஒரு நேர்க்கோடு ஆகும்.
- ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகள் ஒரே மாதிரியான மாறிகளைக் கொண்ட இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நேரிய சமன்பாடுகளைக் கொண்ட அமைப்பாகும்.



2

ஆயத்தொலை வடிவியல்

கடினமான ஒன்றை பல பகுதிகளாகப் பிரிப்பதன் வாயிலாக எளிதாக்கலாம். - ரெனே டெஸ்கார்ட்டஸ்

பியரி டி பெர்மாட்
(கி.பி. (பொ.ஆ.) 1601-1665)

பியரி டி பெர்மாட், 17ஆம் நூற்றாண்டின் முற்பகுதியில் வாழ்ந்த முக்கியமான கணிதவியல் அறிஞர்களில் ஒருவர். அவர் ஆயத் தொலைவு வடிவியலில் மிகச் சிறந்த பங்களிப்பை வழங்கியுள்ளார். குறிப்பாக, வளைகோடுகளின் மிகச் சிறிய மற்றும் மிகப் பெரிய ஆயத் தொலைவுகளைக் கண்டறியும் முறைக்காக அறியப்படுகிறார். டெஸ்கார்ட்டஸின் புகழ்பெற்ற "லா ஜியோமிதி" எனும் நூல் வெளியிடப்படுவதற்கு முன்பே, 1636 இல் பியரி டி பெர்மாட்டின் ஆயத்தொலை தொடர்பான முக்கிய ஆய்வுகள் கைப்பிரதி வடிவில் வெளிவந்து விட்டன.

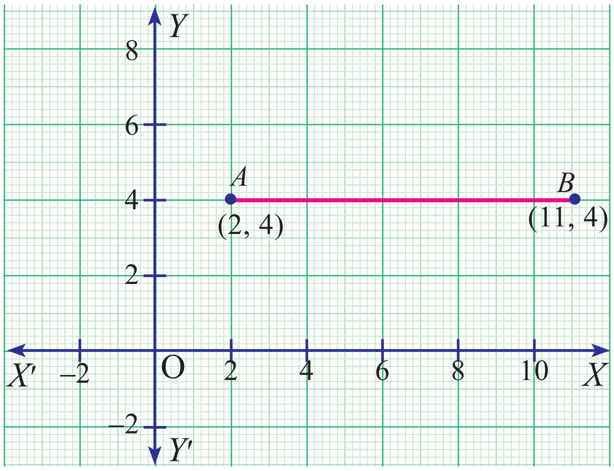
F6G48E

கற்றல் விளைவுகள்

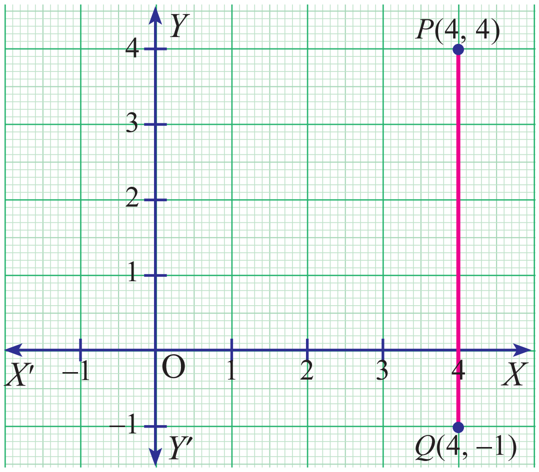
- நடுப்புள்ளிக்கான சூத்திரத்தைப் புரிந்து கொள்ளுதல் மற்றும் கணக்குகளைத் தீர்ப்பதில் பயன்படுத்துதல்.
- பிரிவு சூத்திரத்தைத் தருவித்தல் மற்றும் கணக்குகளைத் தீர்ப்பதில் பயன்படுத்துதல்.
- நடுக்கோட்டு மையத்திற்கான சூத்திரத்தைப் புரிந்துகொள்ளுதல் மேலும் அதன் பயன்பாட்டை அறிதல்.

2.1 அறிமுகம்

நாம் முன்பே ஆயத்தொலை வரிசை சோடிகளைப் பயன்படுத்தி ஒரு தளத்தில் புள்ளிகளைக் குறிப்பதைப் பார்த்துள்ளோம். இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவைக் காண்பதற்கு இது வழி வகுக்கின்றது.



படம் 2.1

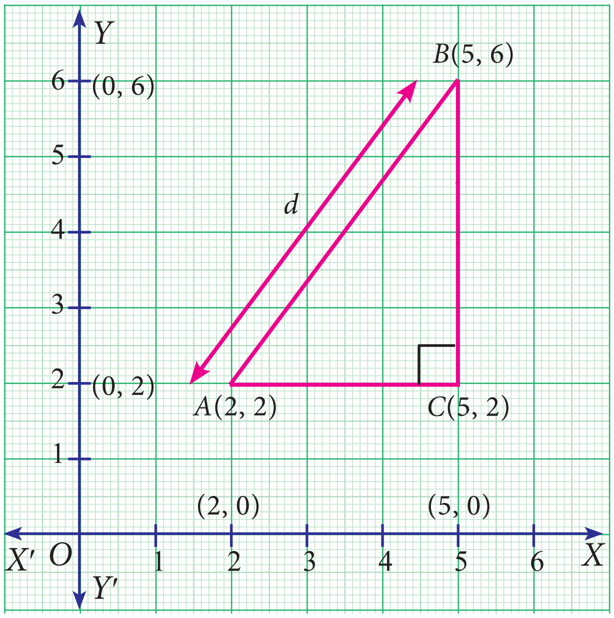


படம் 2.2

AB என்பது X-அச்சுக்கு இணையான கோட்டுத்துண்டு. $AB = x$ ஆயத் தொலைவின் வேறுபாடு $= \|11-2\| = 9$	PQ என்பது Y-அச்சுக்கு இணையான கோட்டுத்துண்டு. $PQ = y$ ஆயத் தொலைவின் வேறுபாடு $= \|(-1)-4\| = 5$

புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டுகளானது எப்பொழுதும் ஏதேனும் ஒரு ஆய அச்சுக்கு இணையாக இருக்க வேண்டும் என்ற அவசியமில்லை. எடுத்துக்காட்டாக படம் 2.3 ஆனது $A(2,2)$ மற்றும் $B(5,6)$ இக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு d ஐக் காட்டுகிறது.

இது செங்குத்தாகவோ கிடைமட்டமாகவோ இல்லாமல் அமைந்த ஒரு கோட்டுத் துண்டின் முடிவுப் புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவைக் காணும் பொதுவான நிலையாகும்.



படம் 2.3

இங்கு, $AC = 5-2 = 3$ அதாவது AC ஆனது X-அச்சுக்கு இணையானது. எனவே இதன் நீளமானது x ஆயத் தொலைவுகளின் வேறுபாடு ஆகும். இதே போல், BC ஆனது Y- அச்சுக்கு இணையானது, எனவே, $BC = 6-2 = 4$.

ΔABC ஆனது C இல் செங்கோணத்தைச் தாங்குகிறது.

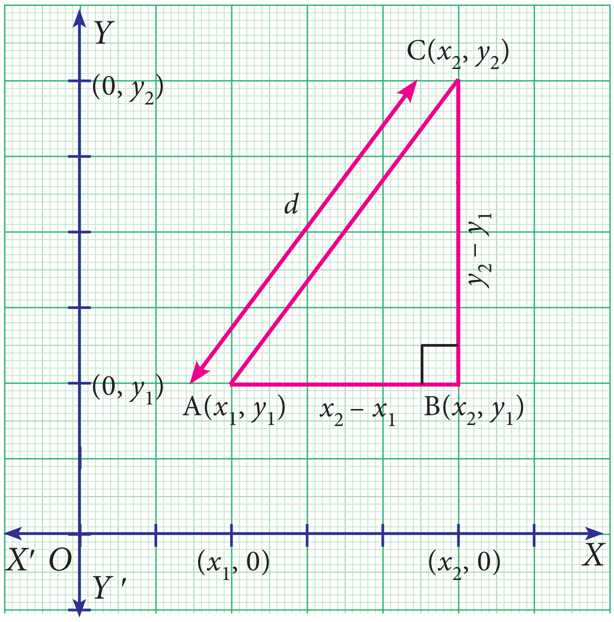
பிதாகரஸ் தேற்றப்படி, $AB = \sqrt{(AC)^2+(BC)^2}$

$$= \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$$

இதைப் பொதுமைப்படுத்துவதின் வாயிலாக, $A(x_1, y_1)$ மற்றும் $C(x_2, y_2)$ என்ற இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவைக் கணக்கிடும்,

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

என்ற தொலைவு சூத்திரத்தைப் பெறுகின்றோம்.



படம் 2.4

2.2 ஒரு கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளி (The Mid–point of a Line Segment)

படம் 2.5

ஒருவர் தனது இரு சக்கர வண்டியைக் கல்லூரியில் இருந்து கிழக்கு நோக்கி நேராகச் செல்லும் பாதையில் கிராமம் A இக்கும் பின்பு கிராமம் B இக்கும் செலுத்துவதாகக் கற்பனை செய்யுங்கள். இரண்டு கிராமங்களுக்கு இடையில் எரிபொருள் நிரப்பும் நிலையம் இல்லை. A மற்றும் B இக்கு இடையில் அமைந்த ஒரு புள்ளியில், தனது பயணத்திற்குத் தேவையான எரிபொருள் இல்லை என்பதை அவர் உணர்கிறார். இந்நிலையில், அவர் A இக்குத் திரும்பி

விடுவாரா அல்லது தனது பயணத்தை Bஐ நோக்கித் தொடர்வாரா? குறைந்த தூரம் எது? இவற்றை எவ்வாறு அறிவது? இதற்கு அவர் நடுவில் அமைந்த மையப்புள்ளியைக் கடந்து விட்டாரா என்பதை அறிய வேண்டியுள்ளது

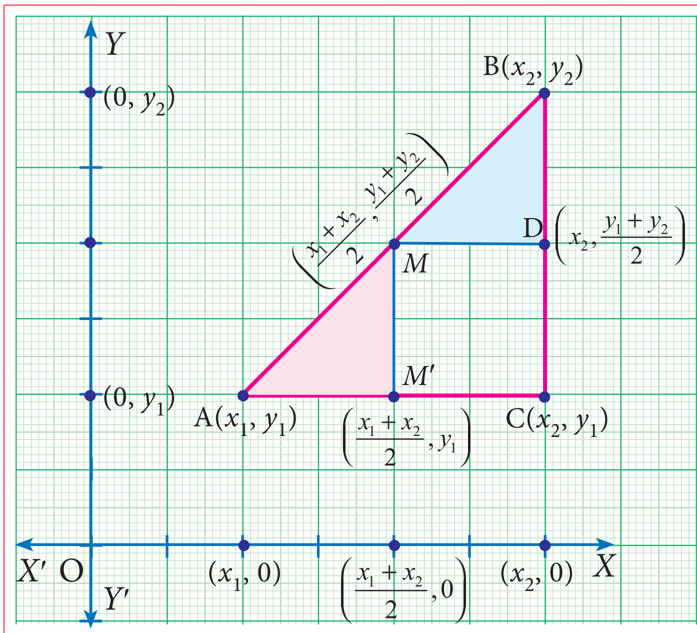
படம் 2.6

மேற்காணும் படம் 2.6 ஆனது இந்தச் சூழ்நிலையை விளக்குகிறது. கல்லூரியானது ஆதி O விலும், இதிலிருந்து கிராமம் A மற்றும் கிராமம் B முறையே தொலைவுகள் x_1 மற்றும் x_2 விலும் $(x_1 < x_2)$ அமைந்துள்ளதாகக் கற்பனை செய்வோம். AB இன் நடுப்புள்ளி M எனில் x ஆனது பின்வரும் வழியில் பெறப்படுகின்றது.

$AM = MB$ மற்றும் $x - x_1 = x_2 - x$

இதிலிருந்து, $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ எனப் பெறலாம்.

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ என்பன இரு புள்ளிகள், படம் 2.7 இல் கோட்டுத் துண்டு AB இன் நடுப்புள்ளி $M(x, y)$ எனில், M' என்பது AC இன் நடுப்புள்ளியாகும். ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் பக்கங்களின் மையக் குத்துக் கோடுகள் கர்ணத்தின் நடுப்புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்ளும். (இது படத்தில் காணும் வண்ணமிடப்பட்ட இரண்டு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பண்புகளில் இருந்தும் பெறப்படுகின்றது. இவ்வகை முக்கோணங்களில் ஒத்த பக்கங்களின் விகிதங்கள் சமம்).



படம் 2.7

மற்றொரு வகையில் தீர்வு காணல்
(Using similarity property)
(விகிதச் சமப் பண்பைப் பயன்படுத்தி)

நாம் புள்ளி M ஐ $M(x,y)$ எனக் கருதுவோம். இப்போது $\Delta AMM'$ மற்றும் ΔMBD ஆகியவை விகிதச் சமமானவை. எனவே,

$$\frac{AM'}{MD} = \frac{MM'}{BD} = \frac{AM}{MB}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{1}{1} \qquad (AM = MB)$$

$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x} = 1$ ஐக் கருதுக.

$$2x = x_2 + x_1 \Rightarrow x = \frac{x_2 + x_1}{2}$$

இதேபோல், $y = \dfrac{y_2 + y_1}{2}$

M இன் x ஆயத்தொலைவு, A மற்றும் C இன் x ஆயத்தொலைவுகளின் சராசரி $= \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, மேலும் இதேபோல், M இன் y-ஆயத் தொலைவு, B மற்றும் C இன் y ஆயத்தொலைவுகளின் சராசரி $= \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ ஆகும்.

புள்ளிகள் $A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_2, y_2)$ ஐ இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ஆகும்.

சிந்தனைக்களம்

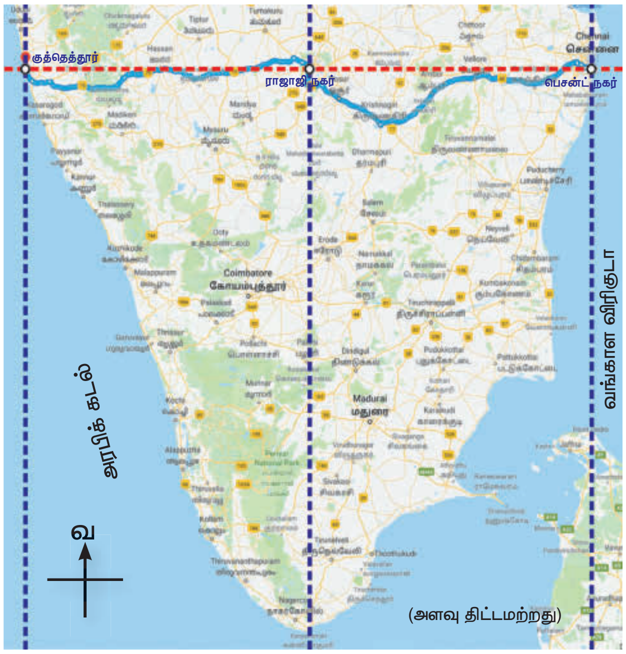
$AD = 4$ செமீ மேலும், D ஆனது AC இன் நடுப்புள்ளி மற்றும் C ஆனது AB இன் நடுப்புள்ளி எனில் AB இன் நீளம் காண்க.

எடுத்துக்காட்டாக, புள்ளிகள் $(-8,-10)$ மற்றும் $(4,-2)$ ஐ இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு $x_1 = -8$, $x_2 = 4$, $y_1 = -10$ மற்றும் $y_2 = -2$.

தேவையான நடுப்புள்ளி ஆனது $\left(\frac{-8+4}{2}, \frac{-10-2}{2}\right)$ அல்லது $(-2,-6)$.

நம்முடைய நடைமுறை வாழ்க்கைச் சூழலில் நடுப்புள்ளியின் பயன்பாட்டைப் பார்க்கலாம். பின்வரும் நகரங்களின் தீர்க்கரேகை மற்றும் அட்சரேகையைக் கருதுவோம்.

நகரங்களின் பெயர்	தீர்க்கரேகை	அட்சரேகை
சென்னை (பெசன்ட் நகர்)	$80.27°$ கி	$13.00°$ வ
மங்களூரு (குத்தெத்தூர்)	$74.85°$ கி	$13.00°$ வ
பெங்களூரு (ராஜாஜி நகர்)	$77.56°$ கி	$13.00°$ வ



படம் 2.8

நாம் சென்னை ($80.27°$ கி, $13.00°$ வ) மற்றும் மங்களூரு ($74.85°$ கி, $13.00°$ வ) ஆகியவற்றின் தீர்க்கரேகை மற்றும் அட்சரேகைகளை இணைகளாக எடுக்கலாம். மேலும் பெங்களூருவானது சென்னை மற்றும் மங்களூருவிற்கு நடுவில் அமைந்துள்ள நகரமாகும். இப்பொழுது நாம் ஆயத்தொலைவுகளின் சராசரிகளைக் கணக்கிட்டால், $\left(\frac{80.27+74.85}{2}, \frac{13.00+13.00}{2}\right)$ என அமையும். இது பெங்களூருவின் தீர்க்கரேகை மற்றும் அட்சரேகையான ($77.56°$ கி, $13.00°$ வ)ஐக் கொடுக்கின்றது. மேற்காணும் எடுத்துக்காட்டுகளில் இருந்து மையத்தில் அமைந்துள்ள புள்ளியானது மற்ற இரண்டு புள்ளிகளுக்கும் நடுப் புள்ளியாகும். மேலும் அந்தப் புள்ளியானது மற்ற இரண்டு புள்ளிகளைச் சம விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 2.1 ஒரு வட்டத்தின் மையப்புள்ளி $(3,-4)$. AB ஆனது அந்த வட்டத்தின் விட்டம் மற்றும் $B(5,-6)$ எனில் A இன் ஆயத் தொலைவுகளைக் காண்க.

தீர்வு

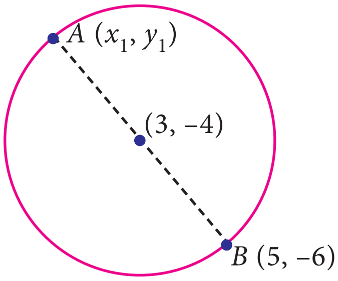
A இன் ஆயத்தொலைவு (x_1, y_1) என்க, $B(5,-6)$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. விட்டம் AB இன் நடுப்புள்ளி வட்டத்தின் மையம் என்பதால், நாம் பெறுவது,

$$\frac{x_1+x_2}{2}=3 \qquad \frac{y_1+y_2}{2}=-4$$

$$x_1+5=6 \qquad y_1-6=-8$$

$$x_1=6-5 \qquad y_1=-8+6$$

$$x_1=1 \qquad y_1=-2$$



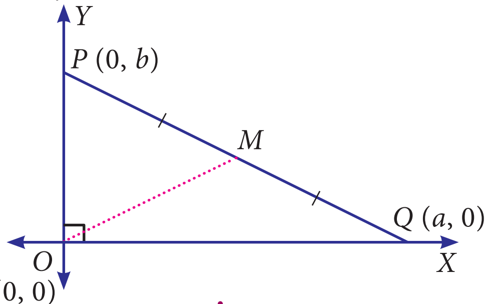
படம் 2.9

எனவே, A இன் ஆயத்தொலைவுகள் $(1,-2)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.2 நடுப்புள்ளியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணத்தின் நடுப்புள்ளியானது முக்கோணத்தின் முனைகளில் இருந்து சம தொலைவில் அமையும் என நிறுவுக. (உகந்த புள்ளிகளை எடுக்க).

தீர்வு

POQ ஒரு செங்கோண முக்கோணம், அதன் செங்கோணம் ஆதிப்புள்ளி O இல் அமைந்துள்ளது. இங்கு $OQ = a$ அலகுகள் மற்றும் OP ஆனது b அலகுகள் என்க. P, Q இன் ஆயத்தொலைவுகளை முறையே $(0,b)$ மற்றும் $(a,0)$ எனப் பெயரிடுக.



படம் 2.10

நடுப்புள்ளி சூத்திரத்தின்படி, கர்ணம் PQ இன் நடுப்புள்ளி M எனில் $[PM=MQ]$, M ஆனது

$$\left(\frac{a+0}{2},\frac{b+0}{2}\right)=\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right).$$

தொலைவு சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த நாம் காண்பது

$$OM=\sqrt{\left(\frac{a}{2}-0\right)^2+\left(\frac{b}{2}-0\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}}$$ இந்த மதிப்பானது

$$QM=\sqrt{\left(a-\frac{a}{2}\right)^2+\left(0-\frac{b}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}}$$ என்பதற்குச் சமமாகிறது. மேலும் இதேபோல்,

$$PM=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}}$$

இதிலிருந்து $OM = QM = PM$, எனக் காண்கிறோம். இதுவே நாம் நிறுவ வேண்டியதாகும்.

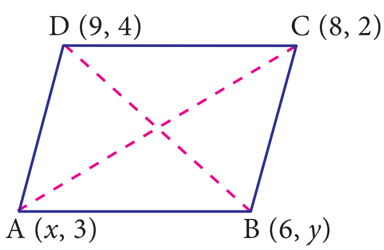
முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

(i) $A(3,0)$ மற்றும் $B(-5,4)$ ஐ இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி X என்க. மேலும் $P(-11,-8)$ மற்றும் $Q(8,-2)$ ஐ இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளி Y என்க. கோட்டுத் துண்டு XY இன் நடுப்புள்ளி காண்க.

(i) $A(8,-5)$ மற்றும் $B(-2,11)$, ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளி $(3,x)$ எனில் 'x' இன் மதிப்பு காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 2.3 $(x,3),(6,y),(8,2)$ மற்றும் $(9,4)$ என்பன வரிசையாக எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட இணைகரத்தின் உச்சிகள் எனில் x மற்றும் y இன் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு



படம் 2.11

$A(x,3)$, $B(6,y)$, $C(8,2)$ மற்றும் $D(9,4)$ என்பவை இணைகரம் $ABCD$ இன் உச்சிகள் என்க. வரையறையின்படி, மூலைவிட்டங்கள் AC மற்றும் BD ஒன்றையொன்று இருசமக் கூறிடும்

AC இன் நடுப்புள்ளி $=$ BD இன் நடுப்புள்ளி

$$\left(\frac{x+8}{2},\frac{3+2}{2}\right)=\left(\frac{6+9}{2},\frac{y+4}{2}\right)$$

இருபுறமும் ஆயத் தொலைவுகளைச் சமப்படுத்த, நாம் பெறுவது

$$\frac{x+8}{2}=\frac{15}{2} \quad \text{மற்றும்} \quad \frac{5}{2}=\frac{y+4}{2}$$

$$x+8=15 \qquad 5=y+4$$

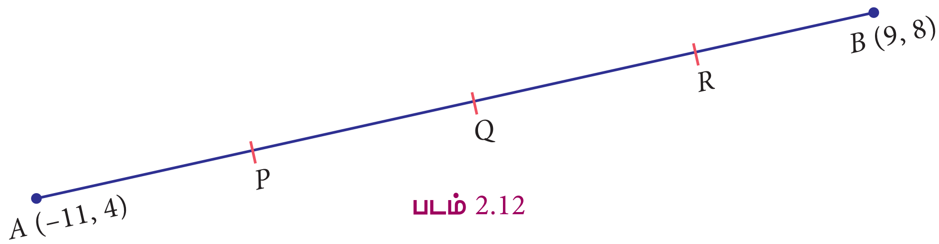
$$x=7 \qquad y=1$$

இதிலிருந்து, $x=7$ மற்றும் $y=1$.

சிந்தனைக்களம்

$A(6,1)$, $B(8,2)$ மற்றும் $C(9,4)$ என்பன இணைகரம் $ABCD$ இல் வரிசையாக எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட உச்சிகள். நடுப்புள்ளிக்கான சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி நான்காவது உச்சி Dயைக் காண்க. (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) மற்றும் (x_4,y_4) என்பன இணைகரத்தின் நான்கு முனைகள் எனில் மேற்காணும் புள்ளிகளைப் பயன்படுத்தி $(x_1+x_3-x_2, y_1+y_3-y_2)$ இன் மதிப்பு காண்க. மேலும் உமது விடைக்கான காரணத்தைக் கூறுக.

எடுத்துக்காட்டு 2.4 புள்ளிகள் $A(-11,4)$ மற்றும் $B(9,8)$ ஐ இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை நான்கு சமப் பாகங்களாகப் பிரிக்கும் புள்ளிகளைக் காண்க.



படம் 2.12

தீர்வு

$A(-11,4)$ மற்றும் $B(9,8)$ஐ இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டை நான்கு சமப் பாகங்களாகப் பிரிக்கும் புள்ளிகள் P, Q, R என்க. இங்கு $AP = PQ = QR = RB$.

இங்கு AB இன் நடுப்புள்ளி Q, AQ இன் நடுப்புள்ளி P மற்றும் QB இன் நடுப்புள்ளி R என்க.

AB இன் நடுப்புள்ளி $Q = \left(\frac{-11+9}{2}, \frac{4+8}{2}\right) = \left(\frac{-2}{2}, \frac{12}{2}\right) = (-1,6)$

AQ இன் நடுப்புள்ளி $P = \left(\frac{-11-1}{2}, \frac{4+6}{2}\right) = \left(\frac{-12}{2}, \frac{10}{2}\right) = (-6,5)$

QB இன் நடுப்புள்ளி $R = \left(\frac{-1+9}{2}, \frac{6+8}{2}\right) = \left(\frac{8}{2}, \frac{14}{2}\right) = (4,7)$

எனவே கோட்டுத்துண்டு AB ஐ நான்கு சமபாகங்களாகப் பிரிக்கும் புள்ளிகள் $P(-6, 5)$, $Q(-1, 6)$ மற்றும் $R(4, 7)$ ஆகும்.

செயல்பாடு - 1

1. $A(1, -2)$, $B(7,2)$, $C(5,8)$ மற்றும் $D(-1,4)$ என்பவை வரிசையாக எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட இணைகரத்தின் உச்சிகள். இணைகரம் $ABCD$ இன் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் இணைந்து மற்றோர் இணைகரத்தை உருவாக்கும் என நிறுவுக.
2. புள்ளிகள் $A(7,10)$, $B(-2,5)$ மற்றும் $C(3,-4)$ என்பன $\angle B = 90^0$ உடைய செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிகள். ΔABC இக்கு சர்வ சமமாக உள்ள மற்றொரு முக்கோணத்தைக் கருதுவோம். இந்த சர்வ சம முக்கோணத்தில், நமக்குப் பொருத்தமான ஒரு பக்கத்தை இரண்டு முக்கோணங்களுக்கும் பொதுவாகவும், மூன்றாவது உச்சியை D எனவும் எடுத்துக் கொள்க. இரண்டு முக்கோணங்களையும் இணைத்துக் கிடைக்கும் பின்வரும் பல கோணங்களை உருவாக்குக. மேலும் D இன் ஆயத் தொலைவுகளைக் காண்க.

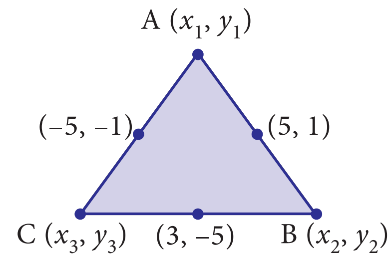
   (i) $ABCD$ ஒரு செவ்வகம் (ii) $ADBC$ ஓர் இணைகரம்

   (iii) ACD ஆனது AB ஐக் குத்துயரமாகக் கொண்ட ஓர் இருசமபக்க முக்கோணம்.

   (iv) ACD ஆனது BC ஐக் குத்துயரமாகக் கொண்ட ஓர் இருசமபக்க முக்கோணம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.5 ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் $(5,1)$, $(3,-5)$ மற்றும் $(-5,-1)$ எனில், அந்த முக்கோணத்தின் முனைகளின் ஆயத்தொலைவுகளைக் காண்க.

தீர்வு



படம் 2.13

ΔABC இன் முனைகள் $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ மற்றும் $C(x_3, y_3)$ என்க. மேலும் பக்கங்கள் AB, BC மற்றும் CA இன் நடுப்புள்ளிகள் முறையே $(5,1)$, $(3,-5)$ மற்றும் $(-5,-1)$ என்க.

$$\frac{x_1+x_2}{2}=5 \Rightarrow x_1+x_2=10 \quad \ldots(1)$$
$$\frac{x_2+x_3}{2}=3 \Rightarrow x_2+x_3=6 \quad \ldots(2)$$
$$\frac{x_3+x_1}{2}=-5 \Rightarrow x_3+x_1=-10 \quad \ldots(3)$$

(1), (2) மற்றும் (3) ஐக் கூட்டக் கிடைப்பது,

$$2x_1+2x_2+2x_3=6$$

2 ஆல் வகுக்க,

$$x_1+x_2+x_3=3 \quad \ldots(4)$$

$(4)-(2) \Rightarrow x_1=3-6=-3$

$(4)-(3) \Rightarrow x_2=3+10=13$

$(4)-(1) \Rightarrow x_3=3-10=-7$

$$\frac{y_1+y_2}{2}=1 \Rightarrow y_1+y_2=2 \quad \ldots(5)$$
$$\frac{y_2+y_3}{2}=-5 \Rightarrow y_2+y_3=-10 \quad \ldots(6)$$
$$\frac{y_3+y_1}{2}=-1 \Rightarrow y_3+y_1=-2 \quad \ldots(7)$$

(5), (6) மற்றும் (7) ஐக் கூட்டக் கிடைப்பது,

$$2y_1+2y_2+2y_3=-10$$

2 ஆல் வகுக்க,

$$y_1+y_2+y_3=-5 \quad \ldots(8)$$

$(8)-(6) \Rightarrow y_1=-5+10=5$

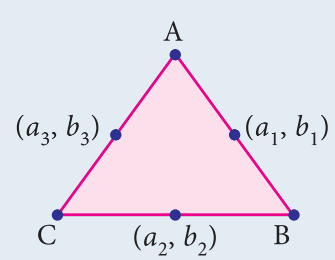
$(8)-(7) \Rightarrow y_2=-5+2=-3$

$(8)-(5) \Rightarrow y_3=-5-2=-7$

முக்கோணத்தின் மூன்று முனைகள் $A(-3,5)$, $B(13,-3)$ மற்றும் $C(-7,-7)$ ஆகும்.

சிந்தனைக்களம்

(a_1,b_1), (a_2,b_2) மற்றும் (a_3,b_3) என்பன ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் என்க. எடுத்துக்காட்டு 2.5 ஐப் பயன்படுத்தி, $(a_1+a_3-a_2,\ b_1+b_3-b_2)$, $(a_1+a_2-a_3,\ b_1+b_2-b_3)$ மற்றும் $(a_2+a_3-a_1,\ b_2+b_3-b_1)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க. விடைகளை ஒப்பிடும்போது நீங்கள் அறிவது என்ன? உங்கள் விடைக்கான காரணத்தைத் தருக.



படம் 2.14

பயிற்சி 2.1

1. கீழ்க்காணும் புள்ளிகளை இணைத்து உருவாக்கும் கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளிகளைக் காண்க.

   (i) $(-2,3)$ மற்றும் $(-6,-5)$ (ii) $(8,-2)$ மற்றும் $(-8,0)$

   (iii) (a,b) மற்றும் (a+2b,2a−b) (iv) $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{7}\right)$ மற்றும் $\left(\frac{3}{2},\frac{-11}{7}\right)$

2. ஒரு வட்டத்தின் மையம் $(-4,2)$. அந்த வட்டத்தில் $(-3,7)$ என்பது விட்டத்தின் ஒரு முனை எனில், மற்றொரு முனையைக் காண்க.

3. $(3,4)$ மற்றும் $(p,7)$ ஐ இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளி (x,y) ஆனது $2x+2y+1=0$, இன் மேல் அமைந்துள்ளது எனில், p இன் மதிப்பு காண்க.?

4. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் $(2,4)$, $(-2,3)$ மற்றும் $(5,2)$.எனில் அந்த முக்கோணத்தின் முனைகளின் ஆயத்தொலைவுகளைக் காண்க.

5. AB ஐ ஒரு நாணாக உடைய வட்டத்தின் மையம் $O(0,0)$. இங்கு, புள்ளிகள் A மற்றும் B முறையே $(8,6)$ மற்றும் $(10,0)$ ஆகும். வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து நாண் AB இக்கு வரையப்படும் செங்குத்து OD எனில், OD இன் மையப்புள்ளியின் ஆயத் தொலைவுகளைக் காண்க.

6. புள்ளிகள் $A(-5,4)$, $B(-1,-2)$ மற்றும் $C(5,2)$ என்பன இரு சமபக்கச் செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிகள், இதில் B இல் செங்கோணம் அமைந்துள்ளது. மேலும் $ABCD$ ஒரு சதுரம் எனில் D இன் ஆயத்தொலைவுகளைக் காண்க.

7. முக்கோணம் DEF இன் பக்கங்கள் DE, EF மற்றும் FD களின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே $A(-3,6)$, $B(0,7)$ மற்றும் $C(1,9)$ எனில், நாற்கரம் $ABCD$ ஓர் இணைகரம் என நிறுவுக.

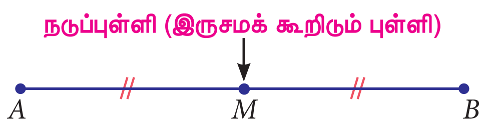
8. $A(-3,2)$, $B(3,2)$ மற்றும் $C(-3,-2)$ என்பன A இல் செங்கோணத்தைக் கொண்டுள்ள செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிகள் எனில் கர்ணத்தின் நடுப்புள்ளியானது உச்சிகளிலிருந்து சமத் தொலைவில் உள்ளது என்பதை நிறுவுக.

9. ஒரு முக்கோணத்தின் எவையேனும் இரு பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டானது மூன்றாவது பக்கத்தில் பாதியளவு உடையது என நிறுவுக. [குறிப்பு: கணக்கீடு எளிமையாக அமைய ΔABC இன் முனைகளை $A(0,0)$, $B(2a,0)$ மற்றும் C ஆனது $(2b,2c)$ என எடுக்கவும். AC மற்றும் BC இன் நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டைக் கருதுக.]

10. இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக் கூறிடும் என நிறுவுக. [குறிப்பு: இரு அச்சுகளிலும் 1செமீ = a அலகுகள் என எடுக்கவும்]

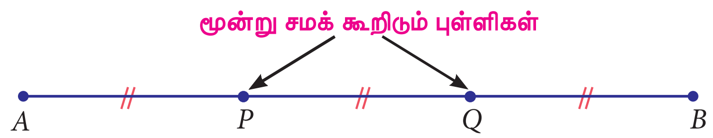
2.3 ஒரு கோட்டுத் துண்டை மூன்று சமக் கூறிடும் புள்ளிகள் (Points of Trisection of a Line Segment)

ஒரு கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி ஆனது அந்தக் கோட்டுத்துண்டை இருசமக் கூறிடும் புள்ளி ஆகும். நாம் ஒரு கோட்டுத் துண்டை மூன்று சமப் பாகங்களாகப் பிரிக்க வேண்டுமெனில், அக்கோட்டுத் துண்டை மூன்று சமக் கூறிடுவதற்கு ஏற்ப புள்ளிகளைத் தேர்ந்தெடுத்துக் குறித்திட வேண்டும்.



படம் 2.15

$AM = MB$

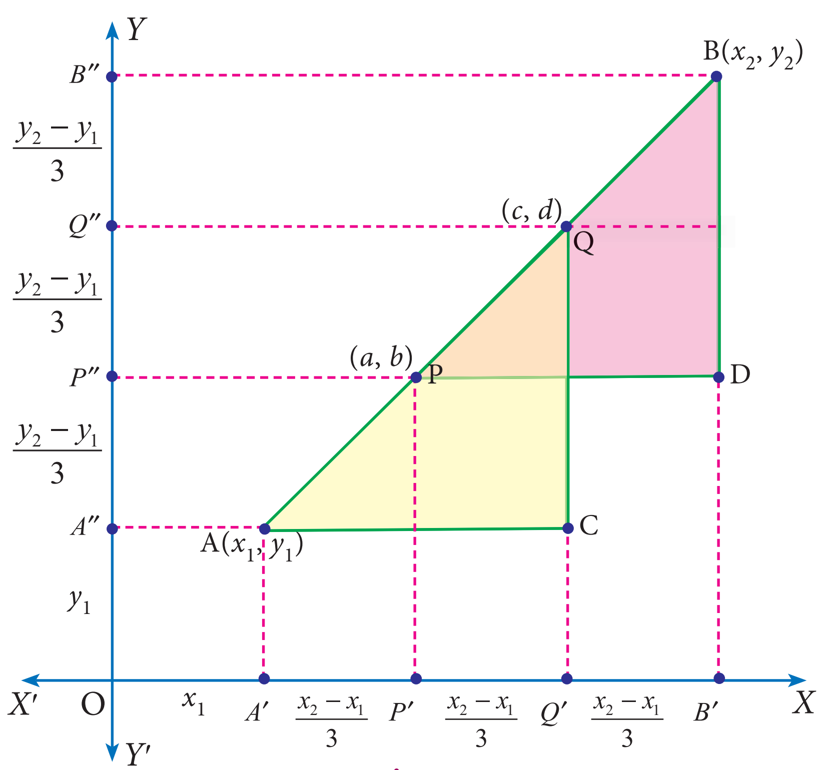


படம் 2.16

$AP = PQ = QB$

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கோட்டுத்துண்டை, இரண்டு புள்ளிகள் மூன்று சமக் கூறிடும். இந்தப் புள்ளிகளை அடைவதற்கான வழிமுறையானது, நாம் இருசமக் கூறிடும் (அதாவது நடுப்புள்ளி) புள்ளியை அடைவது போன்றதே. கொடுக்கப்பட்ட படம் 2.17 ஐ உற்று நோக்குவோம். இங்கு கோட்டுத்துண்டு AB யை மூன்று சமக் கூறிடும் புள்ளிகள் P மற்றும் Q ஆகும். இதில் A ஆனது (x_1, y_1) மற்றும் B ஆனது (x_2, y_2). இதிலிருந்து நாம் P ஆனது AQ இன் நடுப்புள்ளி மற்றும் Q ஆனது PB இன் நடுப்புள்ளி என்பவற்றை நாம் தெளிவாக உணரலாம். இங்கு ΔACQ மற்றும் ΔPDB ஆகியவற்றைக் கருதுவோம். (இவற்றை வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பண்புகளின் அடிப்படையிலும் சரிபார்க்கலாம்; உயர் வகுப்புகளில் இது விரிவாக விளக்கப்படும்).

$$A'P' = P'Q' = Q'B'$$



படம் 2.17

குறிப்பு

நாம் ஒரு கோட்டுத் துண்டை மூன்று சமப் பாகங்களாகப் பிரிக்கும் பொழுது கிடைமட்ட மற்றும் செங்குத்துக் கால்களும் மூன்று சமப் பாகங்களாகப் பிரிக்கப்படும்.

P ஆனது (a, b) எனில்,

$$a = OP' = OA' + A'P' = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{3} = \frac{x_2 + 2x_1}{3};$$

$$b = PP' = OA'' + A''P'' = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{3} = \frac{y_2 + 2y_1}{3}$$

எனவே, புள்ளி P ஆனது $\left(\frac{x_2 + 2x_1}{3}, \frac{y_2 + 2y_1}{3}\right)$ ஆகும்.

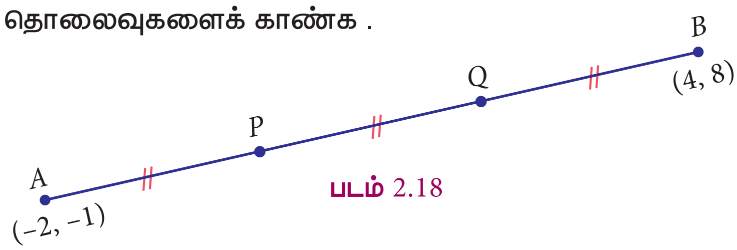
Qஆனது (c, d) எனில்,

$$c = OQ' = OB' - Q'B' = x_2 - \left(\frac{x_2 - x_1}{3}\right) = \frac{2x_2 + x_1}{3};$$

$$d = OQ'' = OB'' - Q''B'' = y_2 - \left(\frac{y_2 - y_1}{3}\right) = \frac{2y_2 + y_1}{3}$$

அதாவது தேவையான புள்ளி Q ஆனது $\left(\frac{2x_2 + x_1}{3}, \frac{2y_2 + y_1}{3}\right)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.6 $(-2,-1)$ மற்றும் $(4,8)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை மூன்று சமக் கூறிடும் புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைவுகளைக் காண்க .



படம் 2.18

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் $A(-2,-1)$ மற்றும் $B(4,8)$ என்க.

AB ஐ மூன்று சமப் பாகங்களாகப் பிரிக்கும் புள்ளிகள் $P(a,b)$ மற்றும் $Q(c,d)$ என்க. ஆகவே $AP = PQ = QB$ ஆகும்.

மேலே நிறுவப்பட்ட சூத்திரத்தின்படி, புள்ளி P ஆனது

$$\left(\frac{x_2 + 2x_1}{3}, \frac{y_2 + 2y_1}{3}\right) = \left(\frac{4 + 2(-2)}{3}, \frac{8 + 2(-1)}{3}\right) = \left(\frac{4-4}{3}, \frac{8-2}{3}\right) = (0, 2)$$

மற்றும் புள்ளி Q ஆனது

$$\left(\frac{2x_2 + x_1}{3}, \frac{2y_2 + y_1}{3}\right) = \left(\frac{2(4) - 2}{3}, \frac{2(8) - 1}{3}\right) = \left(\frac{8-2}{3}, \frac{16-1}{3}\right) = (2, 5)$$

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

புள்ளிகள் $(4,-1)$ மற்றும் $(-2,-3)$ ஐ இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை மூன்று சமக் கூறிடும் புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைவுகளைக் காண்க.

புள்ளி $(6,-9)$ மற்றும் ஆதியை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை மூன்று சமக் கூறிடும் புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைவுகளைக் காண்க.

2.4 பிரிவுச் சூத்திரம் (Section Formula)

கோட்டுத் துண்டை இருசமக் கூறிடுதல் மற்றும் மூன்று சமக் கூறிடுதல் பற்றிக் கற்றோம். இப்போது புள்ளிகள் (x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) ஆகியவற்றை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை $m:n$ என்ற விகிதத்தில் பிரித்தலைக் கற்றுக்கொள்வோம்.

ஒரு கோட்டுத்துண்டு AB மற்றும் ஒரு மிகை மெய் எண் r கொடுக்கப்பட்டுள்ளன

படம் 2.19

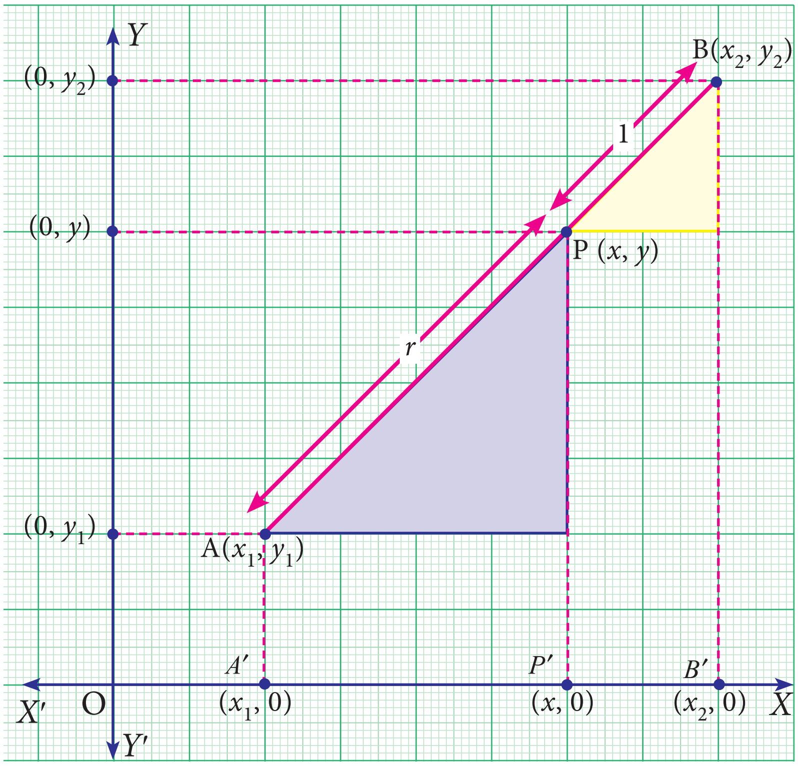
நாம் AB ஐ $r:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி P இன் ஆயத் தொலைவுகளைக் காண இருக்கின்றோம்.

அதாவது $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{r}{1}$ அல்லது $AP = r(PB)$.

இதிலிருந்து $x - x_1 = r(x_2 - x)$

இதைத் தீர்க்க, $x = \dfrac{rx_2 + x_1}{r+1}$ ….. (1)

நாம் இந்த முடிவை ஒரு கோட்டின் மேல் அமைந்துள்ள எந்தவொரு புள்ளிக்கும் பின்வருமாறு பொதுமைப்படுத்தலாம்



படம் 2.20

$AP : PB = r:1$ என எடுக்க, நாம் பெறுவது $A'P' : P'B' = r:1$.

எனவே $\quad A'P' = r(P'B')$

ஆகவே, $\quad (x - x_1) = r(x_2 - x)$

இதிலிருந்து நாம் பெறுவது,

$$x = \frac{rx_2 + x_1}{r+1} \quad \ldots [(1) \text{ ஐப் பார்க்க}]$$

இதே வழியில் நாம் பெறுவது $y = \dfrac{ry_2 + y_1}{r+1}$

A மற்றும் B இக்கு இடையில் P மற்றும் $\dfrac{AP}{PB} = r$, எனில் நாம் பெறும் வாய்ப்பாடு P ஆனது

$$\left(\frac{rx_2 + x_1}{r+1}, \frac{ry_2 + y_1}{r+1}\right).$$

r ஆனது $\dfrac{m}{n}$ என எடுக்கப்பட்டால், பிரிவுச் சூத்திரமானது

$\left(\dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$, எனக் கிடைக்கிறது. இது நமக்குக் கணக்கீடுகளில் அதிகம் பயன்படுகிறது.

சிந்தனைக் களம்

(i) $m = n = 1$ எனில் நிகழ்வது என்ன? நாம் முன்பே நிறுவிய முடிவு ஒன்றை அடையாளம் காண முடிகிறதா?

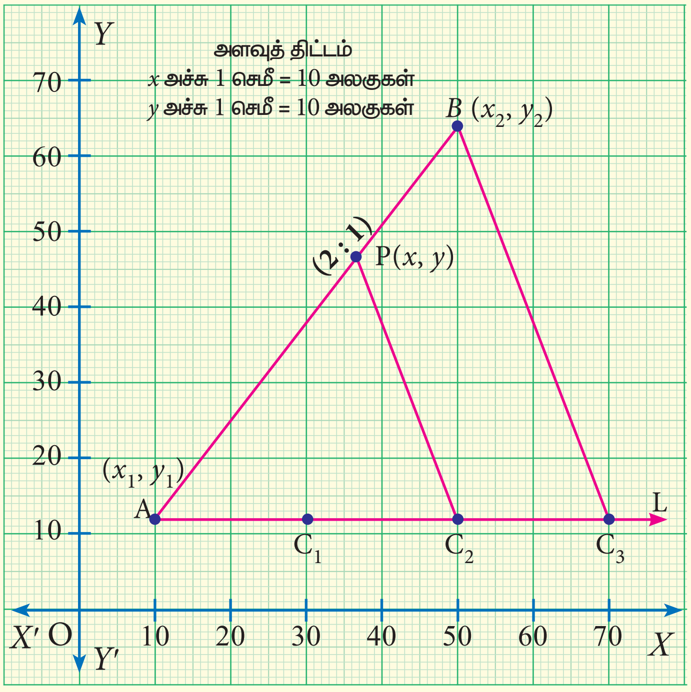
(ii) $AP : PB = 1 : 2$ மற்றும் $AQ : QB = 2:1$ எனில் $AP : AB$ என்ன? $AQ : AB$ என்ன?

செயல்பாடு - 2

1. $A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_2, y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைத்து வரைபடத்தாளில் ஒரு கோட்டுத்துண்டு வரைக.

2. புள்ளி A இலிருந்து x-அச்சுக்கு இணையாகக் கோடு AL ஐ வரைக.

3. கோட்டுத்துண்டு AB-ஐ 2:1 (இங்கு, $m = 2$ மற்றும் $n = 1$) எனப் பிரிப்பதற்காக AL இன் மேல் சம இடைவெளிகளில் $2+1 = 3$ $(m+n)$ புள்ளிகளைக் குறிக்க. அதாவது $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3$ ஆகும்.



படம் 2.21

4. BC_3 ஐ இணைக்க. C_2 இன் வழியாக BC_3 இக்கு இணையாக ஒரு கோடு வரைக. இந்தக் கோடு AB ஐ $P(x,y)$ இல் சந்திக்கின்றது.

5. P ஆனது AB ஐ உட்புறமாக 2:1 (அதாவது, $m:n$) என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது

உற்றுநோக்கல்

(i) படத்தில் $A(x_1, y_1)$ இன் = ______________, $B(x_2, y_2)=$______________ மற்றும் $P(x, y)=$ ______________ ஆகிய புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைவுகள்.

(ii) பிரிவுச் சூத்திரத்தின்படி $A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_2, y_2)$ ஐ இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை $2:1$ என உட்புறமாகப் பிரிக்கும் புள்ளி P இன் ஆயத் தொலைவுகள் ____________.

குறிப்பு

(i) புள்ளிகள் (x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) ஐ இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை X-அச்சு பிரிக்கும் விகிதம் $\dfrac{-y_1}{y_2}$ மற்றும் Y-அச்சு பிரிக்கும் விகிதம் $\dfrac{-x_1}{x_2}$.

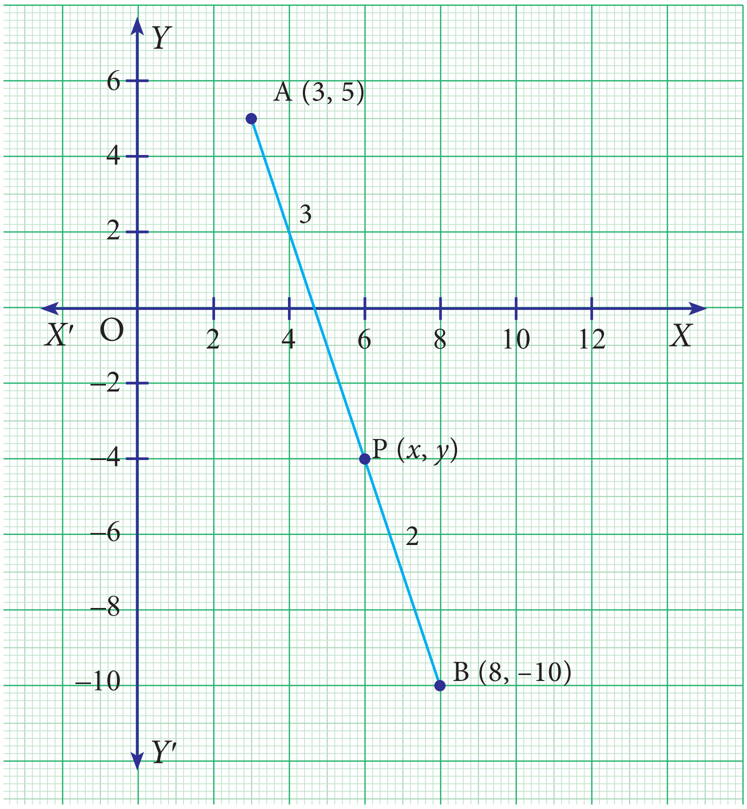
(ii) மூன்று புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் அமையும் எனில், அவற்றின் ஒரு புள்ளி மற்ற இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை $r:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும்.

(iii) கொடுக்கப்பட்ட மூன்று புள்ளிகளும் ஒரு கோட்டில் அமையும்பொழுது மட்டுமே பிரிவுச் சூத்திரம் பயன்படும் என்பதை நினைவில் கொள்ளவும்.

(iv) இந்தப் பிரிவுச் சூத்திரமானது ஒரு முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம், உள்வட்ட மையம், வெளிவட்ட மையம் போன்றவற்றைக் காணப் பயன்படுகிறது. இயற்பியலில் இது பொருளின் பொருண்மை மையம், சம நிலைப் புள்ளிகள் போன்ற பலவற்றில் பயன்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2.7

புள்ளிகள் $(3,5)$ மற்றும் $(8,-10)$ ஆகியவற்றை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை $3:2$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கும் புள்ளியின் ஆயத் தொலைவுகளைக் காண்க.



படம் 2.22

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் $A(3,5)$, $B(8,-10)$ என்க. மேலும் புள்ளி $P(x,y)$ ஆனது கோட்டுத் துண்டு AB ஐ $3:2$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கும் புள்ளி என்க.

பிரிவுச் சூத்திரத்தின்படி,

$$P(x, y)=P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

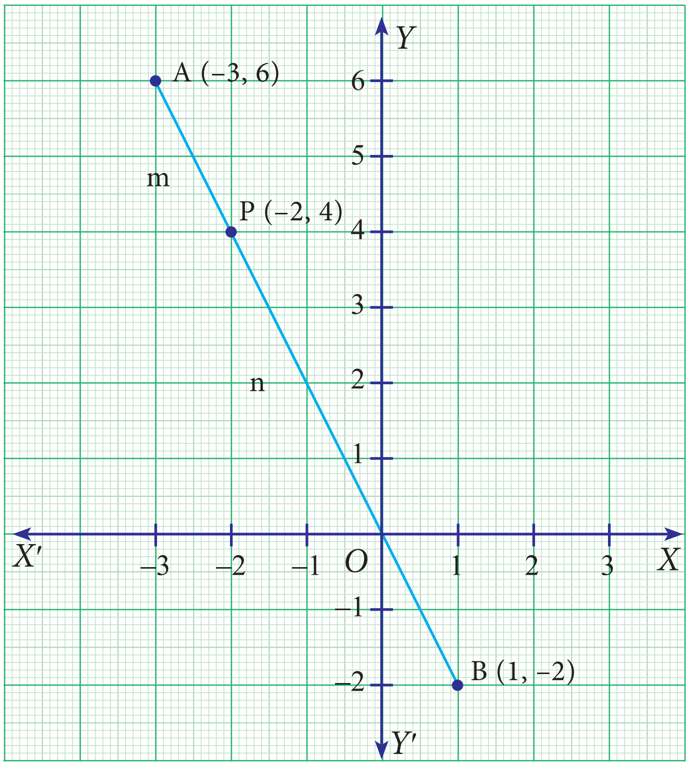
இங்கு, $x_1 = 3,\ y_1 = 5,\ x_2 = 8,\ y_2 = -10$ மற்றும் $m = 3,\ n = 2$

ஆகையால், $$P(x, y) = P\left(\frac{3(8)+2(3)}{3+2}, \frac{3(-10)+2(5)}{3+2}\right)$$

$$= P\left(\frac{24+6}{5}, \frac{-30+10}{5}\right) = P(6, -4)$$

எடுத்துக்காட்டு 2.8

$A(-3,\ 6)$ மற்றும் $B(1,\ -2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டைப் புள்ளி $P(-2,\ 4)$ ஆனது உட்புறமாக என்ன விகிதத்தில் பிரிக்கும்?



படம் 2.23

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் $A(-3,\ 6)$ மற்றும் $B(1,\ -2)$ஆகும். $P(-2,\ 4)$ ஆனது AB ஐ உட்புறமாக $m : n$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது என்க.

பிரிவுச் சூத்திரத்தின்படி

$$P(x, y) = P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

$$= P(-2, 4) \quad .....(1)$$

இங்கு $x_1 = -3,\ y_1 = 6,\ x_2 = 1,\ y_2 = -2$

$$(1) \Rightarrow \left(\frac{m(1)+n(-3)}{m+n}, \frac{m(-2)+n(6)}{m+n}\right) = P(-2, 4)$$

x-இன் ஆயத்தொலைவைச் சமப்படுத்த, நாம் பெறுவது

$$\frac{m-3n}{m+n} = -2 \quad \text{அல்லது} \quad m - 3n = -2m - 2n$$

$$3m = n$$

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{3}$$

$$m : n = 1 : 3$$

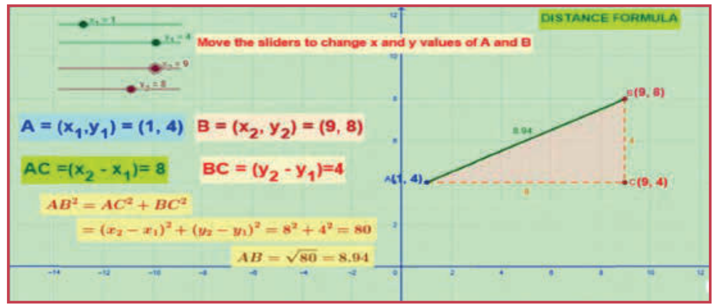
P ஆனது AB ஐ உட்புறமாக $1:3$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது.

குறிப்பு

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் y இன் ஆயத்தொலைவுகளைச் சமப்படுத்தியும் இதே முடிவைப் பெறலாம். அதை முயன்று பார்க்கவும்.

இணையச் செயல்பாடு

இறுதியில்
கிடைக்கப்பெறும் படம்



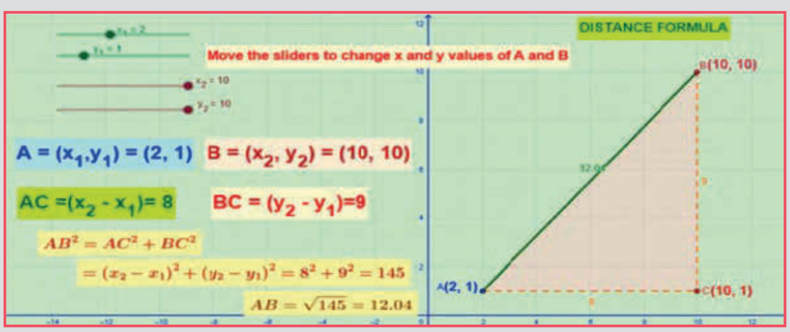
படி 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி, GeoGebra வின் “Co-ordinate Geometry” பக்கத்திற்குச் செல்க. Distance Formula மற்றும் Section Formula ஆகிய இரண்டு தலைப்புகளில் பணித்தாள்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்

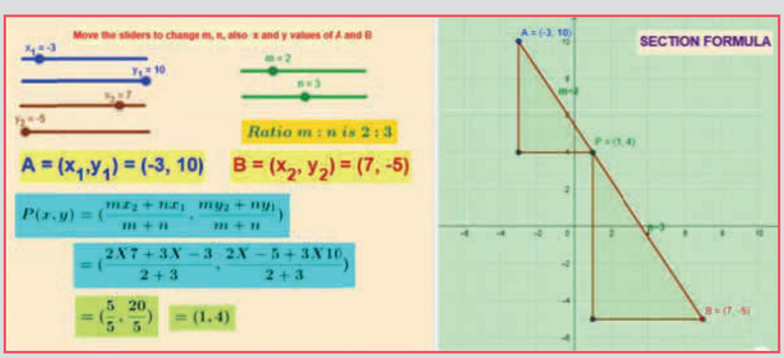
படி 2

புள்ளிகளையும் விகிதங்களையும் மாற்றுவதற்கு உரிய மதிப்பிற்கு நழுவலை நகர்த்தவும். கணக்குகளைச் செய்து விடைகளைச் சரி பார்க்கவும்.

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

B563_9_MAT_TM_T3

ஆயத் தொலை வடிவியல்: https://ggbm.at/sfszfe24 or Scan the QR Code.

எடுத்துக்காட்டு 2.9 புள்ளிகள் $A(-3,5)$ மற்றும் B ஐ இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டைப் புள்ளி $P(-2,3)$ ஆனது $1:6$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கின்றது எனில் B இன் ஆயத் தொலைவுகளைக் காண்க?

தீர்வு

புள்ளிகள் $A(-3,5)$ மற்றும் $B(x_2, y_2)$ என்க.

புள்ளி $P(-2,3)$ஆனது AB ஐ உட்புறமாக $1:6$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பிரிவுச் சூத்திரத்தின்படி $P\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right) = P(-2,3)$

$$P\left(\frac{1(x_2)+6(-3)}{1+6}, \frac{1(y_2)+6(5)}{1+6}\right) = P(-2,3)$$

ஆயத் தொலைவுகளைச் சமப்படுத்த

$\dfrac{x_2-18}{7} = -2$	$\dfrac{y_2+30}{7} = 3$
$x_2 - 18 = -14$	$y_2 + 30 = 21$
$x_2 = 4$	$y_2 = -9$

ஆகவே, புள்ளி B இன் ஆயத்தொலைவுகள் $(4,-9)$ ஆகும்.

பயிற்சி 2.2

1. $A(4,-3)$ மற்றும் $B(9,7)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை $3:2$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கும் புள்ளியின் ஆயத் தொலைவுகளைக் காண்க.

2. $A(-5,11)$ மற்றும் $B(4,-7)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை $7:2$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கும் புள்ளியின் ஆயத்தொலைவுகளைக் காண்க.

3. $A(-3,5)$ மற்றும் $B(4,-9)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டைப் புள்ளி $P(2,-5)$ என்ன விகிதத்தில் பிரிக்கும்?

4. $A(1,2)$ மற்றும் $B(6,7)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டில் $AP = \dfrac{2}{5}AB$ என்றவாறு அமையும் புள்ளி P இன் ஆயத் தொலைவுகளைக் காண்க.

5. $A(-5,6)$ மற்றும் $B(4,-3)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை மூன்று சமப் பாகங்களாகப் பிரிக்கும் புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைவுகளைக் காண்க.

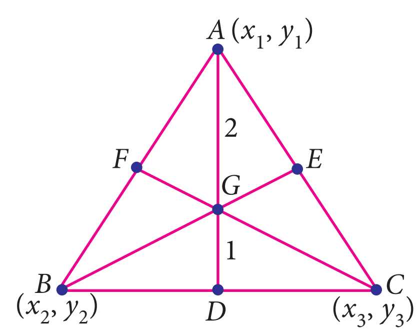
6. $A(6,3)$ மற்றும் $B(-1, -4)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டானது, ABஇன் நீளத்தில் பாதி அளவினை இரு முனைகளிலும் இணைத்து இரு மடங்காக ஆக்கப்படுகின்றது எனில் புதிய முனைகளின் ஆயத்தொலைவுகளைக் காண்க.

7. பிரிவுச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திப் புள்ளிகள் $A(7, -5)$, $B(9, -3)$ மற்றும் $C(13,1)$ ஆகியன ஒரே கோட்டில் அமையும் என நிரூபிக்க.

8. கோட்டுத்துண்டு AB ஆனது முனை B இலிருந்து C இக்கு அதன் நீளம் 25% அதிகரிக்குமாறு நீட்டப்படுகின்றது. புள்ளிகள் A மற்றும் B இன் ஆயத் தொலைவுகள் முறையே $(-2,-3)$ மற்றும் $(2,1)$ எனில் C இன் ஆயத்தொலைவுகளைக் காண்க.

9. ஒரு மகிழுந்து மாறா வேகத்தில் பயணிக்கின்றது. அது புறப்பட்ட இடத்திலிருந்து பிற்பகல் 2 மணியளவில் 180 கிமீ தொலைவிலும் பிற்பகல் 6 மணியளவில் 360 கிமீ தொலைவிலும் உள்ளது எனில் நள்ளிரவு 12 மணியளவில் எவ்வளவு தொலைவில் இருக்கும் என்பதைப் பிரிவு சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

2.5 நடுக்கோட்டு மையத்தின் ஆயத்தொலைவுகள் (The Coordinates of the Centroid)



படம் 2.24

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ மற்றும் $C(x_3, y_3)$ ஆகியவற்றை முனைப் புள்ளிகளாகக் கொண்டுள்ள ΔABC ஐக் கருதுக.

AD, BE மற்றும் CF என்பன ΔABC இன் நடுக்கோடுகள் என்க.

BC இன் மையப் புள்ளி $D\left(\dfrac{x_2+x_3}{2}, \dfrac{y_2+y_3}{2}\right)$

நடுக்கோடு AD ஐ நடுக்கோட்டு மையம் G ஆனது உட்புறமாக $2:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. பிரிவுச் சூத்திரத்தின்படி, நடுக்கோட்டு மையம் $G(x,y)$ஆனது,

$$\left(\frac{\dfrac{2(x_2+x_3)}{2}+1(x_1)}{2+1}, \frac{\dfrac{2(y_2+y_3)}{2}+1(y_1)}{2+1}\right) = \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ மற்றும் $C(x_3, y_3)$ ஆகியவற்றை முனைப்புள்ளிகளாகக் கொண்டுள்ள முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் $G\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

செயல்பாடு - 3

1. வரைபடத் தாளில் $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ மற்றும் $C(x_3, y_3)$–ஐ உச்சிகளாக உடைய ΔABC –ஐ வரைக.

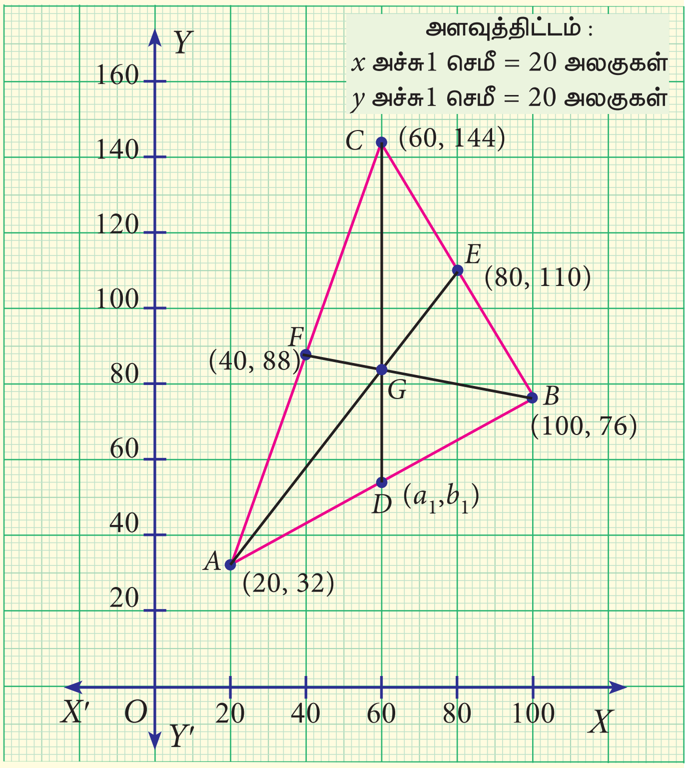
2. ΔABC இன் நடுக்கோடுகள் வரைந்து நடுக்கோட்டு மையத்தைக் குறிக்கவும்

உற்றுநோக்கல்

(i) ΔABC இன் முனைகளின் ஆயத்தொலைவுகள் இங்கு
$A(x_1, y_1) =$ ____________________,
$B(x_2, y_2) =$ _______________ மற்றும்
$C(x_3, y_3) =$ __________

(ii) நடுக்கோட்டு மையம் G இன் ஆயத்தொலைவுகள்= _____________

(iii) நடுக்கோட்டு மையத்திற்கான சூத்திரத்தின்படி G இன் ஆயத் தொலைவுகள் = __________.



படம் 2.25

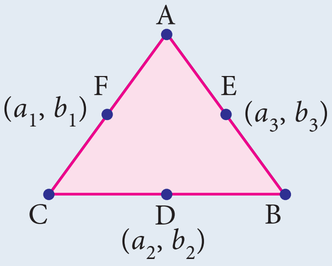
(iv) AB இன் நடுப்புள்ளி _____________.

(v) AB இன் நடுப்புள்ளி மற்றும் (x_3, y_3) ஐ இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை 2:1 என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கும் புள்ளி _____________.

குறிப்பு

1. ஒரு முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள் ஒரு புள்ளி (G) யில் சந்திக்கும். மேலும் அந்தப் புள்ளியானது, நடுக்கோட்டின் மேல் உள்ள முனைக்கு எதிர்ப்பக்கத்திலிருந்து மூன்றில் ஒரு பங்கு தொலைவில் அமையும்.

2. ஒரு முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையமும் அந்த முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளை இணைத்து உருவாக்கப்படும் முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையமும் ஒன்றே (வெவ்வேறானவை அல்ல).



படம் 2.26

3. $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ மற்றும் (a_3, b_3) ஆனது ΔABC இன் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் எனில் அதன் நடுக்கோட்டு மையம்

$$G\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}\right)$$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.10 $A(6,-1)$, $B(8,3)$ மற்றும் $C(10,-5)$ ஆகியவற்றை முனைப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் காண்க.

F6YVBP

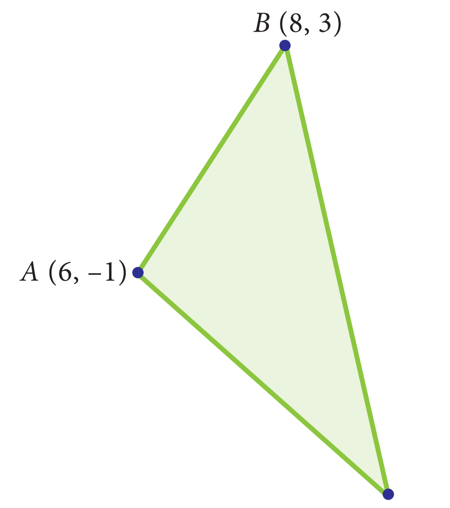
தீர்வு

$A(6,-1)$, $B(8,3)$ மற்றும் $C(10,-5)$ ஆகியவற்றை முனைப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் $G(x,y)$

$$G(x,y)=G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

கொடுக்கப்பட்டது $(x_1,y_1)=(6,-1)$; $(x_2,y_2)=(8,3)$;

$(x_3,y_3)=(10,-5)$



படம் 2.27

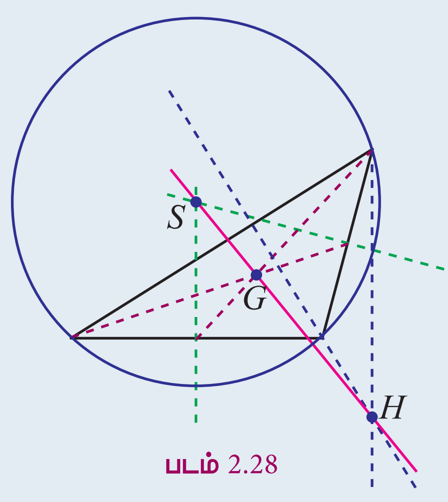
முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம்

$$G(x,y)=G\left(\frac{6+8+10}{3},\frac{-1+3-5}{3}\right)$$

$$=G\left(\frac{24}{3},\frac{-3}{3}\right)=G(8,-1)$$

குறிப்பு

1. ஒரு முக்கோணத்தில், ஆய்லரின் கோடு என்பது செங்கோட்டு மையம் (H), நடுக்கோட்டு மையம் (G) மற்றும் சுற்றுவட்ட மையம் (S) இன் வழியே செல்லும் கோடு ஆகும். G ஆனது, கோட்டுத்துண்டு HS ஐ $2:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும். அதாவது நடுக்கோட்டு மையமானது செங்கோட்டு மையம் மற்றும் சுற்றுவட்ட மையத்தை $2:1$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கும்.



படம் 2.28

2. ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தில் செங்கோட்டு மையம், உள்வட்ட மையம், நடுக்கோட்டு மையம் மற்றும் சுற்றுவட்ட மையம் அனைத்தும் ஒரே புள்ளியில் அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.11 $(1,-6)$ மற்றும் $(-5,2)$ ஆகியன ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு முனைப் புள்ளிகள் மற்றும் அதன் நடுக்கோட்டு மையம் $(-2,1)$ எனில் முக்கோணத்தின் மூன்றாவது முனைப் புள்ளியைக் காண்க.

தீர்வு

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று முனைப் புள்ளிகள் $A(1,-6), B(-5,2)$ மற்றும் $C(x_3, y_3)$ என்க.

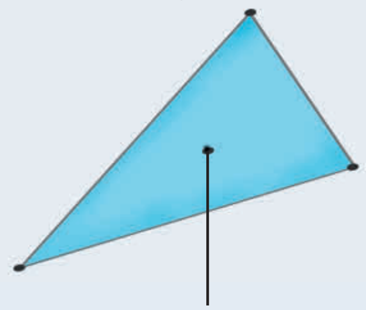
முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் $(-2,1)$ ஆனது கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே நாம் பெறுவது,

$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=-2$	$\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=1$
$\frac{1-5+x_3}{3}=-2$	$\frac{-6+2+y_3}{3}=1$
$-4+x_3=-6$	$-4+y_3=3$
$x_3=-2$	$y_3=7$

எனவே மூன்றாவது முனைப் புள்ளி $(-2,7)$ ஆகும்.

சிந்தனைக் களம்

ஆசிரியர், முனைகள் A(5, 8), B(2, 4), C(8, 3) இல் அமையுமாறு உள்ள ஒரு முக்கோண வடிவத் தட்டு மற்றும் ஒரு குச்சியை மாணவனிடம் வழங்கித் தட்டைக் குச்சியின் மேல் நிலையாக நிற்கச் செய்யுமாறு கூறினார். அந்த மாணவனுக்குத் தட்டு நிலையாக நிற்கும் புள்ளியைக் காண்பதற்குத் தங்களால் உதவ முடியுமா.



பயிற்சி 2.3

1. பின்வரும் புள்ளிகளை முனைப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் காண்க.

   (i) $(2,-4), (-3,-7)$ மற்றும் $(7,2)$ (ii) $(-5,-5), (1,-4)$ மற்றும் $(-4,-2)$

2. ஒரு முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் $(4,-2)$ மற்றும் அதன் இரு முனைப்புள்ளிகள் $(3,-2)$ மற்றும் $(5,2)$ எனில் மூன்றாவது முனைப் புள்ளியைக் காண்க.

3. $A(-1,3), B(1,-1)$ மற்றும் $C(5,1)$ ஆகியன ஒரு முக்கோணத்தின் முனைப்புள்ளிகள் எனில் A வழியே செல்லக் கூடிய நடுக்கோட்டின் நீளத்தைக் காண்க.

4. $(1,2), (h,-3)$ மற்றும் $(-4,k)$ ஆகியன ஒரு முக்கோணத்தின் முனைப்புள்ளிகள். மேலும் புள்ளி $(5,-1)$ ஆனது அந்த முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் எனில், $\sqrt{(h+k)^2+(h+3k)^2}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

5. $A(-3,5)$ மற்றும் $B(3,3)$ ஆகியன முறையே ஒரு முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம் மற்றும் நடுக்கோட்டு மையம் ஆகும். C ஆனது இந்த முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட மையம் எனில், கோட்டுத் துண்டு AC ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் ஆரம் காண்க.

6. $A(3,4)$, $B(-2,-1)$ மற்றும் $C(5,3)$ என்பன முக்கோணம் ABC இன் முனைப் புள்ளிகள். G ஆனது அதன் நடுக்கோட்டு மையம் மற்றும் $BDCG$ ஆனது ஓர் இணைகரம் எனில் முனைப்புள்ளி D இன் ஆயத் தொலைவுகளைக் காண்க.

7. முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் $\left(\frac{3}{2},5\right), \left(7,\frac{-9}{2}\right)$ மற்றும் $\left(\frac{13}{2},\frac{-13}{2}\right)$ எனில் அந்த முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் காண்க.

பயிற்சி 2.4

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

F78RDC

1. $P(2,4)$ மற்றும் $Q(5,7)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டை 2:1 என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கும் புள்ளி C இன் ஆயத்தொலைவுகள்

   (1) $\left(\frac{7}{2},\frac{11}{2}\right)$ (2) (3,5) (3) (4,4) (4) (4,6)

2. $A(-4,3)$ மற்றும் $B(-2,4)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி $P\left(\frac{a}{3},\frac{b}{2}\right)$ எனில் (a,b) ஆனது

   (1) $(-9,7)$ (2) $\left(-3,\frac{7}{2}\right)$ (3) $(9,-7)$ (4) $\left(3,-\frac{7}{2}\right)$

3. $P(2,7)$ மற்றும் $R(-2,3)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டை $Q(1,6)$என்ற புள்ளியானது என்ன விகிதத்தில் பிரிக்கும்?

   (1) 1:2 (2) 2:1 (3) 1:3 (4) 3:1

4. $(-3,2)$, என்ற புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தில் $(3,4)$ ஐ ஒரு முனையாகக் கொண்ட விட்டத்தின் மற்றொரு முனையைக் காண்க

   (1) $(0,-3)$ (2) $(0,9)$ (3) $(3,0)$ (4) $(-9,0)$

5. $A(a_1,b_1)$ மற்றும் $B(a_2,b_2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டை X–அச்சு எந்த விகிதத்தில் பிரிக்கும்?

   (1) $b_1 : b_2$ (2) $-b_1 : b_2$ (3) $a_1 : a_2$ (4) $-a_1 : a_2$

6. $(6,4)$ மற்றும் $(1,-7)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டை X–அச்சு எந்த விகிதத்தில் பிரிக்கும்?

   (1) 2:3 (2) 3:4 (3) 4:7 (4) 4:3

7. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் AB, BC மற்றும் CA ஆகியவற்றின் நடுப் புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைவுகள் முறையே $(3,4)$, $(1,1)$ மற்றும் $(2,-3)$ எனில் A மற்றும் B இன் ஆயத்தொலைவுகள் யாவை?

   (1) (3,2), (2,4) (2) (4,0), (2,8)
   (3) (3,4), (2,0) (4) (4,3), (2,4)

8. $(-a,2b)$ மற்றும் $(-3a,-4b)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் நடுப் புள்ளியானது

   (1) $(2a,3b)$ (2) $(-2a,-b)$ (3) $(2a,b)$ (4) $(-2a,-3b)$

9. $(-5,1)$ மற்றும் $(2,3)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டை Y-அச்சு உட்புறமாக என்ன விகிதத்தில் பிரிக்கும்?

(1) 1:3 (2) 2:5 (3) 3:1 (4) 5:2

10. $(1,-2)$, $(3,6)$, $(x,10)$ மற்றும் $(3,2)$ ஆகியன ஓர் இணைகரத்தின் வரிசையாக எடுக்கப்பட்ட முனைப் புள்ளிகள் எனில், x இன் மதிப்பானது

(1) 6 (2) 5 (3) 4 (4) 3

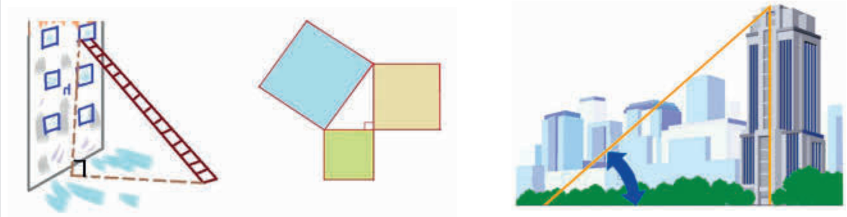
11. $(-1,-6)$, $(-2,12)$ மற்றும் $(9,3)$ ஆகியவற்றை முனைப் புள்ளிகளாகக் கொண்டுள்ள ஒரு முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம்

(1) (3,2) (2) (2,3) (3) (4,3) (4) (3,4)

நினைவில் கொள்க

- $A(x_1,y_1)$ மற்றும் $B(x_2,y_2)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளி $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$
- $A(x_1,y_1)$ மற்றும் $B(x_2,y_2)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை உட்புறமாக $m:n$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி $P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$
- $A(x_1,y_1), B\ (x_2,y_2)$ மற்றும் $C(x_3,y_3)$ ஆகிய புள்ளிகளை முனைகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$
- ஒரு முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையமும் அந்த முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளை இணைத்து உருவாக்கும் முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையமும் ஒன்றே; வெவ்வேறானவை அல்ல.

3



முக்கோணவியல்

உண்மையில் முக்கோணவியலைப் போல் கணிதத்தில் முக்கியமான இடத்தைப் பெற்றிருப்பது எதுவுமில்லை.

- ஜே.எஃப்.ப்.ஹெர்பர்ட்

லெனார்டு ஆய்லர்
(கி.பி. (பொ.ஆ.) 1707-1783)

ஆய்லரும், நியூட்டனைப் போலவே அவருடைய தலைமுறையில் சிறந்த கணிதமேதையாவார். அவர் கணிதத்தின் அனைத்து துறைகளையும் கற்றதோடு, தனது பார்வையை இழந்த பின்பும் கடின உழைப்பைத் தொடர்ந்தார். கணிதத்தின் பல துறைகளில், குறிப்பாக நுண்கணிதம் மற்றும் முக்கோணவியலில் ஆய்லர் தனது சிறந்த பங்களிப்பைச் செய்துள்ளார்.

வடிவியலில் பல தேற்றங்களுக்கு நிரூபணம் அளித்தவர்களில் முதலாமவர் இவரே.

கற்றல் விளைவுகள்

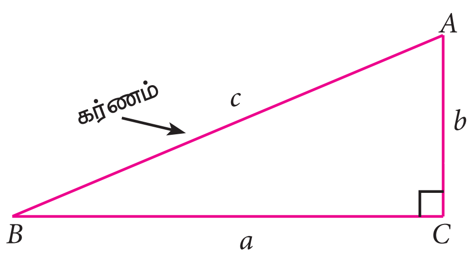
- முக்கோணவியல் விகிதங்களைப் பற்றிக் கற்றல்.
- பல்வேறு முக்கோணவியல் விகிதங்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்புகளைப் புரிந்துகொள்ளச் செய்தல்.
- முக்கோணவியல் விகிதங்கள் மற்றும் அவற்றின் தலைகீழிகளின் மதிப்புகளை அடையாளம் காணுதல்.
- நிரப்புக் கோணங்களின் கருத்தைப் பயன்படுத்துதல்.
- முக்கோணவியல் அட்டவணைகளைப் பயன்படுத்துவதைப் புரிந்துகொள்ளுதல்

F7HMEZ

3.1 அறிமுகம்

செங்கோண முக்கோணத்தை நாம் அடிக்கடி பயன்படுத்தவிருப்பதால், அது தொடர்பான பிதாகரஸ் தேற்றத்தை நினைவு கூர்வோம்.

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் செங்கோணத்திற்கு எதிரே உள்ள பக்கம் கர்ணம் ஆகும். படம் 3.1 இல் இரு பக்கங்களின் நீளங்கள் a மற்றும் b மற்றும் கர்ணத்தின் நீளம் c ஆகும். இவற்றிற்கிடையேயான தொடர்பை பிதாகரஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $a^2 + b^2 = c^2$ என்று அறிந்துள்ளோம்.

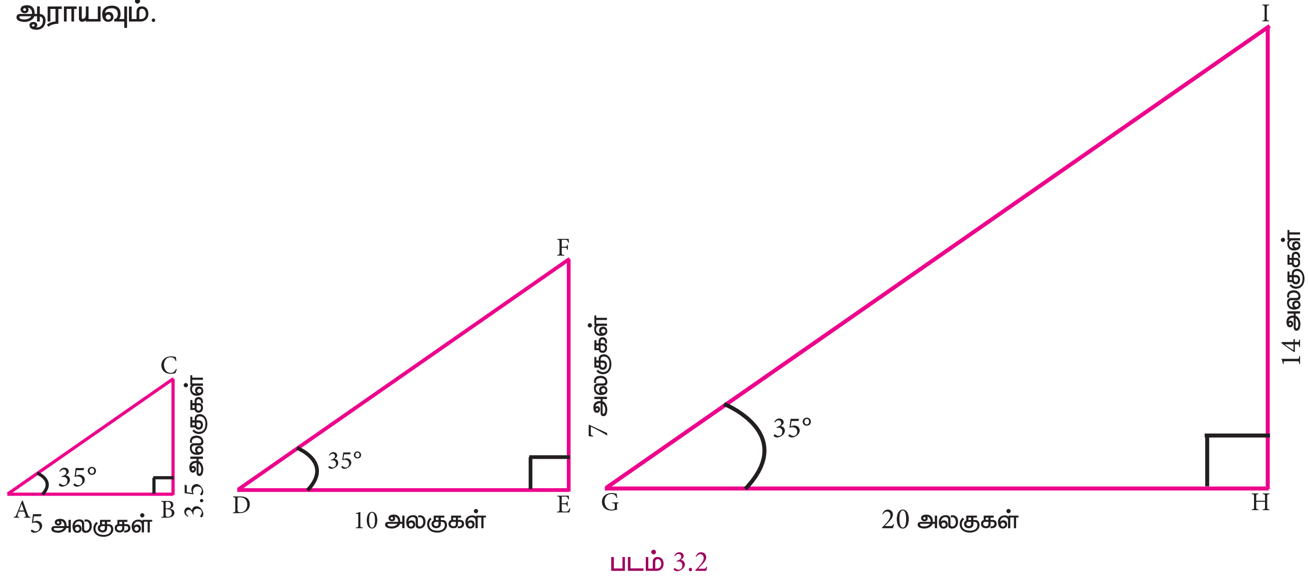


படம் 3.1

எனவே பக்க அளவுகள் 3, 4 மற்றும் 5 அலகுகள் கொண்ட முக்கோணத்தைச் செங்கோண முக்கோணம் என நாம் அறியலாம். ஏனெனில் $3^2 + 4^2 = 5^2$. (இதில் கர்ணத்தின் நீளம் 5 அலகுகள். ஏன்?) பக்க அளவுகள் 5,12 மற்றும் 13 அலகுகள் கொண்ட முக்கோணம் செங்கோண முக்கோணமா? பக்க அளவுகள் 8, 10 மற்றும் 12 அலகுகள் கொண்ட முக்கோணம் எப்படி இருக்கும்?

முக்கோணவியல் என்பதின் ஆங்கிலச் சொல்லான **Trigonometry** என்பது கிரேக்கச் சொற்களான trigonon-metron என்பவற்றிலிருந்து பெறப்பட்டுள்ளது. trigonon-என்பதின் பொருள் முக்கோணம் என்பதாகும், மற்றும் metron – என்பதின் பொருள் அளவுகள் என்பதாகும். இது முக்கோணத்தின் கோண அளவுகள் மற்றும் அதன் பக்கங்களின் நீளங்களுக்கு இடையில் உள்ள தொடர்புகளைப் பற்றி விவரிக்கும் கணிதத்தின் ஒரு பிரிவு ஆகும்.பொறியியல் வல்லுநர்கள், அறிவியல் அறிஞர்கள் மற்றும் நில அளவையாளர்களுக்கு முக்கியமானதொரு கருவியாக முக்கோணவியல் பயன்படுகிறது. இது கடற்பயணம் மற்றும் நிலநடுக்கம் சார்ந்த துறைகளிலும் பயன்படுகிறது.

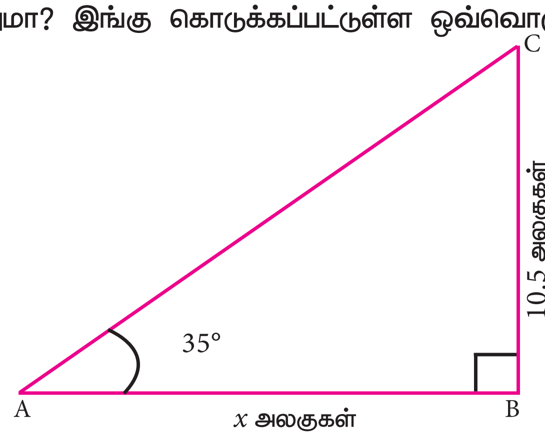
கீழ்க்காணும் மூன்று செங்கோண முக்கோணங்களை உற்று நோக்குங்கள். குறிப்பாக அவற்றின் அளவுகளை ஆராயுங்கள். மூன்று முக்கோணங்களிலும் கோண அளவுகள் ஒன்றாகவே உள்ளன. எதிர்ப்பக்கத்தின் (கொடுக்கப்பட்ட கோணத்திற்கு எதிரே உள்ள பக்கம்) அளவுகளையும், அடுத்துள்ள பக்கங்களின் (கொடுக்கப்பட்ட கோணத்திற்கு அடுத்துள்ள பக்கம்) அளவுகளையும் நன்கு ஆராயவும்.



படம் 3.2

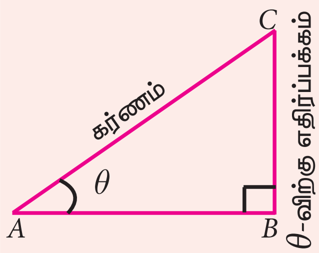
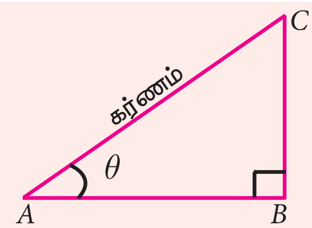
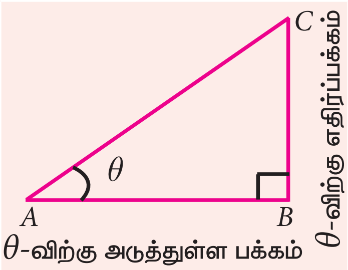
ஒவ்வொரு முக்கோணத்திலும் எதிர்ப்பக்கம் மற்றும் அடுத்துள்ளப் பக்கங்களுக்கிடையேயான விகிதம் $\left(\frac{\text{எதிர்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}\right)$ என்ன என்று கூற இயலுமா? இங்கு கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு செங்கோண முக்கோணத்திலும் இந்த விகிதம் 0.7; இந்த முடிவைப் பொறுத்துப் படம் 3.3 இல் x இன் மதிப்பு என்னவாக இருக்கும் ? அது 15 ஆக இருக்குமா?

இதைப் போன்ற குறிப்பிடத்தக்க விகிதங்கள் அக்காலக் கணித அறிஞர்களை வியப்பில் ஆழ்த்தியதோடு மட்டுமல்லாமல், முக்கோணவியல் என்ற புதிய பாடம் உருவாவதற்கான வழிவகையையும் செய்தன.

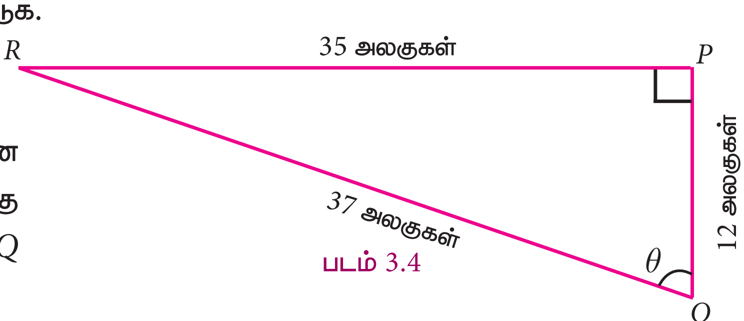


படம் 3.3

முக்கோணவியலில் மூன்று அடிப்படை விகிதங்கள் உள்ளன. அம்மூன்று விகிதங்களும் செங்கோண முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தை மற்றொரு பக்கத்தால் வகுக்கக் கிடைக்கும் விகிதங்களாகும். அவையாவன,

கோணத்தின் பெயர்	sine	cosine	tangent
சுருங்கிய வடிவம்	sin	cos	tan
ஒப்புமை அளவீடுகள்			
விகிதம்	$\sin\theta = \dfrac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$	$\cos\theta = \dfrac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$	$\tan\theta = \dfrac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$

எடுத்துக்காட்டு 3.1 கீழ்க்கண்ட படத்தில் உள்ள அளவுகளுக்கு θ வைப் பொறுத்து sine, cosine மற்றும் tangent விகிதங்களைக் கணக்கிடுக.



படம் 3.4

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ள செங்கோண முக்கோணம் PQR இல் கோணம் θ விற்கு எதிர்ப்பக்கம் PR, அடுத்துள்ள பக்கம் PQ ஆகும்.

$$\sin\theta = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{PR}{QR} = \frac{35}{37}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{PQ}{QR} = \frac{12}{37}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{PR}{PQ} = \frac{35}{12}$$

F7RIGH

முக்கோணவியல் விகிதங்களைப் பின்னங்களாகவே குறிப்பிடலாம். தேவைப்பட்டால் அவற்றைச் சுருக்கியும் எழுதலாம்.

குறிப்பு

முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் குறிப்பிடும்போது பக்க அளவுகளின் விகிதங்களாகக் குறிப்பிடுவதால் அவை அலகுகளற்ற எண்களாகும்.

$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ போன்ற விகிதங்களை $(\sin)\times(\theta)$, $(\cos)\times(\theta)$, $(\tan)\times(\theta)$ எனத் தவறாக எடுத்துக் கொள்ளக்கூடாது.

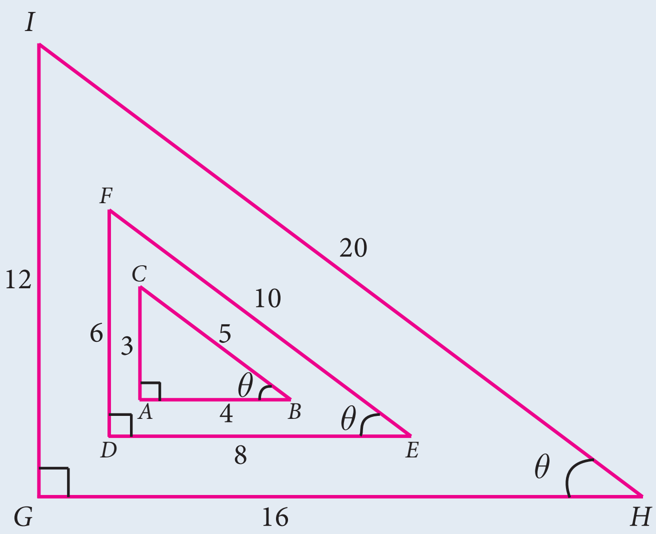
சிந்தனைக் களம்

கொடுக்கப்பட்டுள்ள முக்கோணங்கள் ABC, DEF மற்றும் GHI இன் பக்க அளவுகள் 3-4-5, 6-8-10 மற்றும் 12-16-20.

இவை அனைத்தும் செங்கோண முக்கோணங்களா? விவாதிக்கவும்.

முனைகள் B, E மற்றும் H இல் அமையும் கோணங்களின் அளவுகள் சமமாக இருக்கும். (அவை ஒவ்வொன்றும் θ விற்குச் சமம்)

மேற்குறிப்பிடப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு பின்வரும் அட்டவணையில் நிரப்பி, கிடைக்கும் விகிதங்களைப் பற்றிய கருத்துகளைக் கூறுக.



படம் 3.5

ΔABC இல்	ΔDEF இல்	ΔGHI இல்
$\sin\theta = \frac{3}{5}$	$\sin\theta = \frac{6}{10} = ?$	$\sin\theta = \frac{12}{20} = ?$
$\cos\theta = ?$	$\cos\theta = ?$	$\cos\theta = ?$
$\tan\theta = \frac{3}{4}$	$\tan\theta = ?$	$\tan\theta = ?$

தலைகீழ் விகிதங்கள் (Reciprocal ratios)

மூன்று முக்கோணவியல் விகிதங்களை நாம் sine, cosine மற்றும் tangent எனக் குறிப்பிட்டோம். இம்முக்கோணவியல் விகிதங்களின் தலைகீழ் விகிதங்கள் கணக்கீடுகளில் பெரிதும் பயனுள்ளவையாக இருக்கின்றன. அவற்றை நாம் கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கலாம்.

முக்கோணவியல் அடிப்படை விகிதங்கள்	அவற்றின் தலைகீழிகள்	சுருங்கிய வடிவம்
$\sin\theta = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$	$\text{cosecant}\theta = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}$	$\text{cosec}\theta = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}$
$\cos\theta = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$	$\text{secant}\theta = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$	$\sec\theta = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$
$\tan\theta = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$	$\text{cotangent}\theta = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}$	$\cot\theta = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}$

மேற்கண்ட விகிதங்களிலிருந்து கீழ்க்காணும் விகிதத் தொடர்புகளை நாம் அறியலாம்.

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

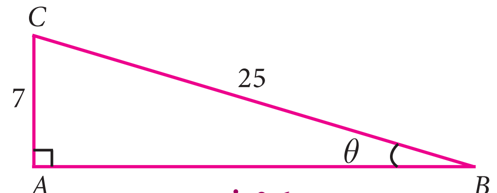
$(\sin\theta)\times(\operatorname{cosec}\theta) = 1$. இதை நாம் $\sin\theta\cdot\operatorname{cosec}\theta = 1$ என்று எழுதுவோம்.

$(\cos\theta)\times(\sec\theta) = 1$. இதை நாம் $\cos\theta.\sec\theta = 1$ என்று எழுதுவோம்.

$(\tan\theta)\times(\cot\theta) = 1$. இதை நாம் $\tan\theta\ .\ \cot\theta = 1$ என்று எழுதுவோம்.

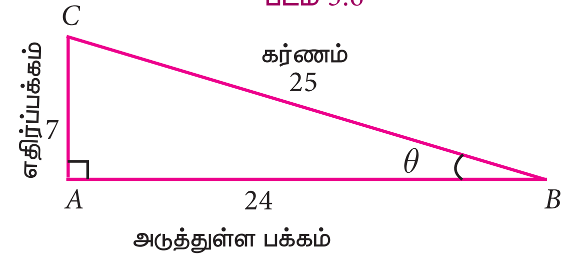
எடுத்துக்காட்டு 3.2

கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் θ -வைப் பொறுத்து 6 முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் காண்க.



படம் 3.6

தீர்வு



படம் 3.7

பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி,

$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2}$$

$$= \sqrt{(25)^2 - 7^2}$$

$$= \sqrt{625 - 49} = \sqrt{576} = 24$$

ஆறு முக்கோணவியல் விகிதங்களைப் பின்வருமாறு நாம் எழுதலாம்.

$$\sin\theta = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{7}{25} \qquad \cos\theta = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{24}{25}$$

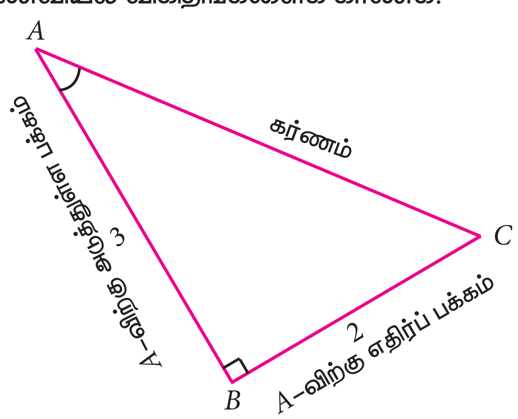
$$\tan\theta = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{7}{24} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}} = \frac{25}{7}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{25}{24} \qquad \cot\theta = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}} = \frac{24}{7}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.3

$\tan A = \frac{2}{3}$, எனில், மற்ற முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் காண்க.

தீர்வு



படம் 3.8

$$\tan A = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{2}{3}$$

பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி,

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$AC = \sqrt{13}$$

$$\sin A = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \qquad \cos A = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}} = \frac{\sqrt{13}}{2} \qquad \sec A = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

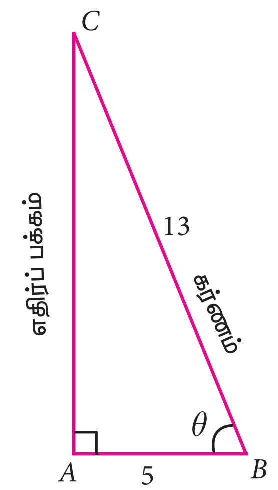
$$\cot A = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}} = \frac{3}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.4 $\sec\theta = \frac{13}{5}$, எனில் $\frac{2\sin\theta - 3\cos\theta}{4\sin\theta - 9\cos\theta} = 3$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$BC = 13$ மற்றும் $AB = 5$ என்க.

$$\sec\theta = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{BC}{AB} = \frac{13}{5}$$



படம் 3.9

பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி,

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$$

$$= \sqrt{13^2 - 5^2}$$

$$= \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$$

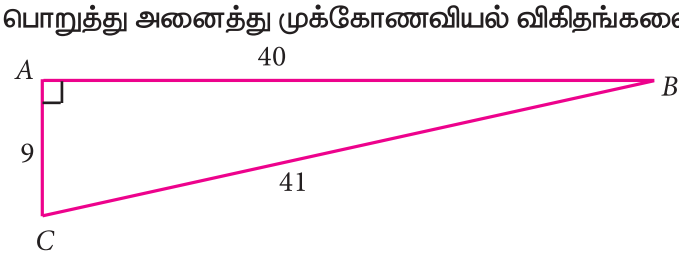
எனவே, $\sin\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{13}$; $\cos\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{13}$

இடப்பக்கம் $= \frac{2\sin\theta - 3\cos\theta}{4\sin\theta - 9\cos\theta} = \frac{2\times\frac{12}{13} - 3\times\frac{5}{13}}{4\times\frac{12}{13} - 9\times\frac{5}{13}} = \frac{\frac{24-15}{13}}{\frac{48-45}{13}} = \frac{9}{3} = 3$ = வலப்பக்கம்

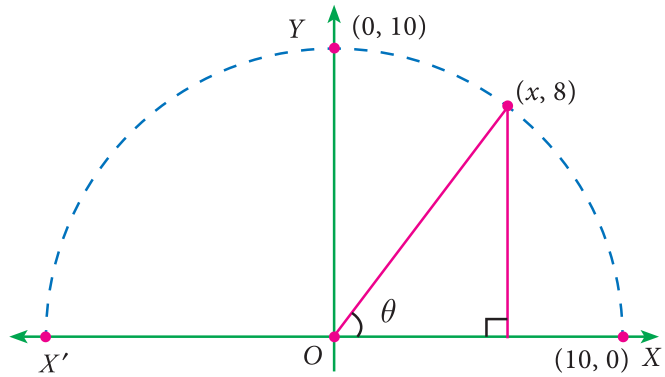
குறிப்பு : முனைப்புள்ளி C இல் கோணம் θ அமையுமாறு எடுத்துக்கொண்டும் மேற்கண்ட கணக்கை இதே வழியில் செய்யலாம்.

பயிற்சி 3.1

1. கோணம் B ஐப் பொறுத்து அனைத்து முக்கோணவியல் விகிதங்களையும் காண்க.



2. கோணம் θ வின் அனைத்து முக்கோணவியல் விகிதங்களையும் காண்க.

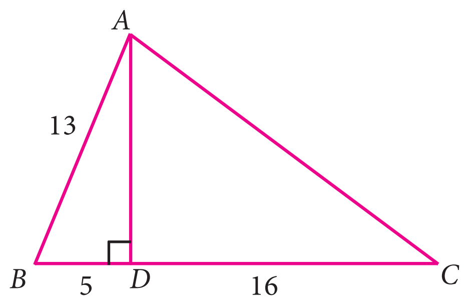


3. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில்

(i) $\sin B$ (ii) $\sec B$ (iii) $\cot B$

(iv) $\cos C$ (v) $\tan C$ (vi) $\operatorname{cosec} C$

ஆகியவற்றைக் காண்க.



4. $2\cos\theta = \sqrt{3}$ எனில், θ–வின் அனைத்து முக்கோணவியல் விகிதங்களையும் காண்க.

5. $\cos A = \dfrac{3}{5}$ எனில் , $\dfrac{\sin A - \cos A}{2\tan A}$ இன் மதிப்பைக் காண்க

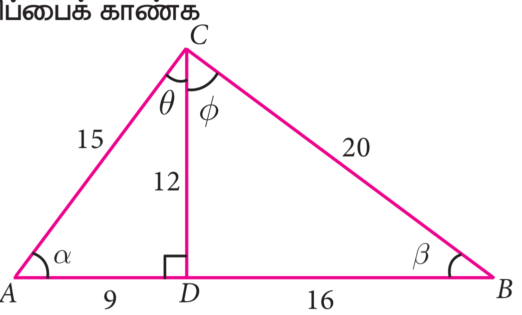
6. $\cos A = \dfrac{2x}{1+x^2}$ எனில், $\sin A$ மற்றும் $\tan A$ இன் மதிப்புகளை x இல் காண்க

7. $\sin\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ எனில், $b\sin\theta = a\cos\theta$ என நிறுவுக

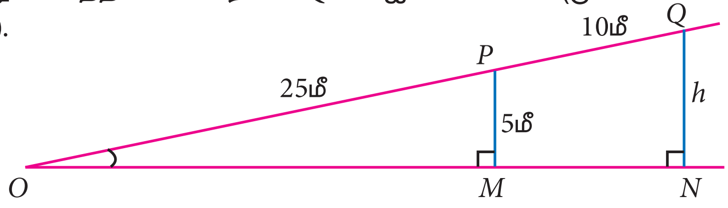
8. $3\cot A = 2$ எனில், $\dfrac{4\sin A - 3\cos A}{2\sin A + 3\cos A}$ இன் மதிப்பைக் காண்க

9. $\cos\theta : \sin\theta = 1:2$ எனில், $\dfrac{8\cos\theta - 2\sin\theta}{4\cos\theta + 2\sin\theta}$ இன் மதிப்பைக் காண்க

10. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் $\theta + \phi = 90°$ என மெய்பிக்க. இப்படத்தில் மேலும் இரு செங்கோண முக்கோணங்கள் உள்ளன என்பதை மெய்ப்பித்து, $\sin\alpha$, $\cos\beta$ மற்றும் $\tan\phi$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளையும் காண்க.



11. ஒரு மாணவன் ‘O’ என்ற புள்ளியில் தரையில் நின்று கொண்டு ‘P’ என்ற புள்ளியில் உள்ள பட்டத்தை $OP = 25$ மீ என்றவாறு காண்கிறான். Pஇலிருந்து மேலும் 10 மீ தொலைவு நகர்ந்து Q என்ற புள்ளியில் பட்டம் உள்ள போது, தரையிலிருந்து பட்டத்தின் உயரம் ‘QN’ ஐக் காண்க. (முக்கோணவியல் விகிதங்களைப் பயன்படுத்துக).

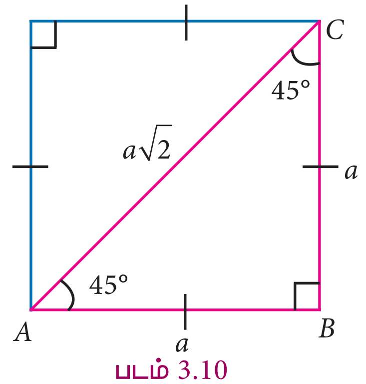


3.2 சில சிறப்புக் கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்கள் (Trigonometric Ratios of Some Special Angles)

சில குறிப்பிட்ட முக்கோணவியல் விகிதங்களின் மதிப்புகளை வடிவியல் முறையிலும் பெறலாம். இரு சிறப்பு வகை முக்கோணங்கள் இங்கே நமக்குப் பயன்படுகின்றன.

3.2.1 முக்கோணவியல் விகிதங்கள் (கோண அளவு $45°$) (Trigonometric ratios of $45°$)

$45°$, $45°$ மற்றும் $90°$ கோண அளவுள்ள ஒரு முக்கோணம் ABC ஐப் படம் 3.10 இல் உள்ளவாறு எடுத்துக் கொள்வோம்.



படம் 3.10

இது ஒரு சதுரத்தின் மூலைவிட்டத்தைப் பொறுத்து வெட்டப்பட்ட ஒரு சதுரத்தின் பாதி அளவு ஆகும். மேலும் இது ஒரு இரு சமபக்க முக்கோணம் என்பதைக் கவனத்தில் கொள்ளவும். (சதுரத்தின் பக்கங்கள் என்பதால் இம்முக்கோணத்தில் இரு பக்கங்கள் சம அளவானவையாக அதாவது a அலகுகள் இருக்கும்).

பிதாகரஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி மூலைவிட்டத்தின் நீளம் $a\sqrt{2}$ என்பதைச் சரிபார்க்கலாம்.

ABC என்ற செங்கோண முக்கோணத்திலிருந்து,

$$\sin 45° = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

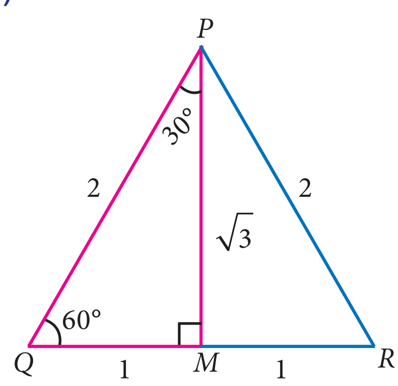
$$\cos 45° = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45° = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

இதிலிருந்து நாம் எளிதாக
$\operatorname{cosec} 45° = \sqrt{2}$;
$\sec 45° = \sqrt{2}$ மற்றும்
$\cot 45° = 1$ எனக் காணலாம்.

3.2.2 முக்கோணவியல் விகிதங்கள் (கோணங்கள் $30°$ மற்றும் $60°$) (Trigonometric Ratios of $30°$ and $60°$)

பக்க அளவு 2 அலகுகள் கொண்ட ஒரு சமபக்க முக்கோணம் PQR ஐ எடுத்துக் கொள்வோம். $\angle P$ இன் கோண இரு சமவெட்டி வரைக. அது QR ஐ வெட்டும் புள்ளி M என்க.



படம் 3.11

$$PQ = QR = RP = 2 \text{ அலகுகள்.}$$

$$QM = MR = 1 \text{ அலகு (ஏன்?)}$$

PQ மற்றும் QM இன் மதிப்புகள் தெரியும் என்பதால், PM இன் மதிப்பைப் பிதாகரஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திக் காணலாம்.

இங்கு, $PM = \sqrt{3}$ அலகுகள் எனக் கிடைக்கும்.

தற்போது செங்கோண முக்கோணம் PQM இலிருந்து,

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{QM}{PQ} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{PM}{PQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{QM}{PM} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

இதிலிருந்து நாம் எளிதாக $\operatorname{cosec} 30^\circ = 2, \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$ மற்றும் $\cot 30^\circ = \sqrt{3}$ எனக் காணலாம்.

அதே முக்கோணத்தின் மற்றொரு கோணமான 60° ஐப் பொறுத்து முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் காண்போம்.

$$\sin 60^\circ = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{PM}{PQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{QM}{PQ} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{PM}{QM} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

இதிலிருந்து நாம் எளிதாக $\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}, \sec 60^\circ = 2$ மற்றும் $\cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ எனக் காணலாம்.

செயல்பாடு – 1

மேலே கிடைக்கப் பெற்ற மதிப்புகளைக் கொண்டு கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையை நிறைவு செய்க.

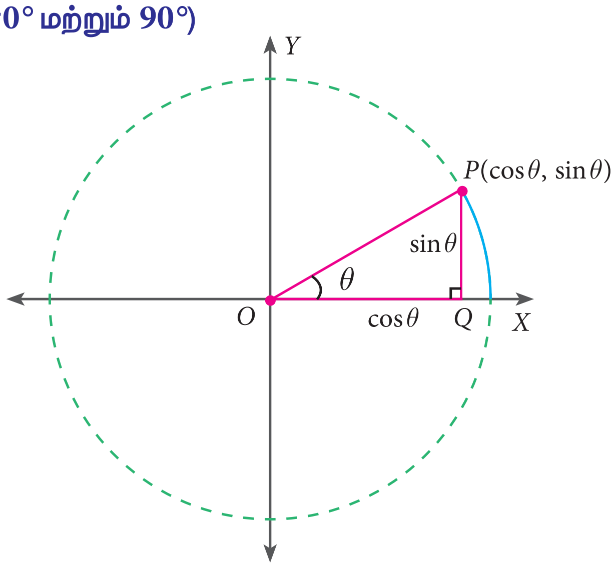
θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
30°			
45°			
60°			

3.2.3 முக்கோணவியல் விகிதங்கள் (கோணங்கள் 0° மற்றும் 90°) (Trigonometric Ratios of 0° and 90°)

முக்கோணவியல் விகிதங்கள் 0° மற்றும் 90° இன் மதிப்புகளைக் காண நாம் ஓரலகு வட்டத்தைப் பயன்படுத்திக் கொள்வோம்.

ஓரலகு வட்டம் என்பது ஆதிப்புள்ளியை மையமாகவும், ஆரம் 1 அலகும் கொண்ட ஒரு வட்டம் ஆகும்.

இதற்காக இங்கு 1 அலகு ஆரம் கொண்ட வட்டத்தை வரைகிறோம். ஏன்?

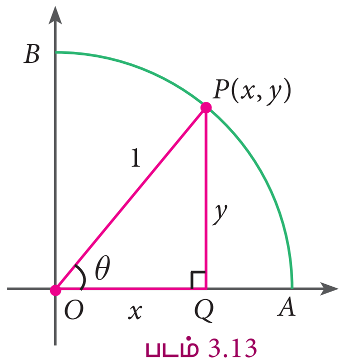


படம் 3.12

இவ்வட்டத்திற்குள் நாம் எடுத்துக் கொள்ளப்போகும் அனைத்து முக்கோணங்களுக்கும் கர்ணத்தின் அளவு 1 அலகாகவே இருப்பதால், கோணங்களையும், விகிதங்களையும் ஒப்பிடுவதற்கு மிக எளிதாக இருக்கும்.

நாம் மிகை மதிப்புகளை மட்டும் கணக்கிடுவதால், (தூரங்களின் அளவுகள் என்பதால்) அதற்குரிய முதற் காற்பகுதியை மட்டும் கணக்கில் எடுத்துக் கொள்வோம்.

$P(x,y)$ என்பது ஓரலகு வட்டத்தின் மீது முதற் காற்பகுதியில் உள்ள ஒரு புள்ளி எனில், $\angle POQ = \theta$



படம் 3.13

$$\sin\theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{y}{1} = y \;;\quad \cos\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{x}{1} = x \;;\quad \tan\theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y}{x}$$

$\theta = 0^\circ$ எனும்போது, OP ஆனது OA இன் மீது அமையும். இங்கு $A(1,0)$ என்பதால் $x=1,\ y=0$.

இதைப் பயன்படுத்தி நாம் பெறுவது,

$\sin 0^\circ = 0$; $\operatorname{cosec} 0^\circ =$ வரையறுக்கப்படவில்லை. (ஏன்?)

$\cos 0^\circ = 1$; $\sec 0^\circ = 1$

$\tan 0^\circ = \frac{0}{1} = 0$; $\cot 0^\circ =$ வரையறுக்கப்படவில்லை. (ஏன்?)

$\theta = 90^\circ$ எனும்போது, OP ஆனது OB இன் மீது அமையும். இங்கு $B\,(0,1)$ என்பதால் $x=0, y=1$.

இதைப் பயன்படுத்தி நாம் பெறுவது,

$\sin 90^\circ = 1$; $\operatorname{cosec} 90^\circ = 1$

$\cos 90^\circ = 0$; $\sec 90^\circ =$ வரையறுக்கப்படவில்லை

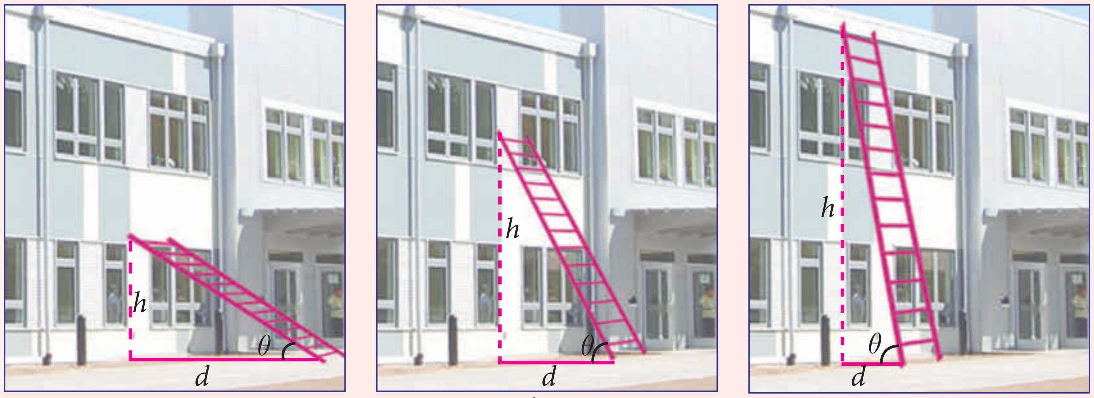
$\tan 90^\circ = \frac{1}{0} =$ வரையறுக்கப்படவில்லை ; $\cot 90^\circ = 0$

இவ்வாறு பெறப்பட்ட அனைத்து முடிவுகளையும் அட்டவணைப்படுத்தலாம்.

θ / முக்கோணவியல் விகிதங்கள்	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	வரையறுக்கப் படவில்லை
$\operatorname{cosec}\theta$	வரையறுக்கப் படவில்லை	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	வரையறுக்கப் படவில்லை
$\cot\theta$	வரையறுக்கப் படவில்லை	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

சிந்தனைக் களம்

சுவற்றிற்கு வர்ணம் பூசுபவர் தன்னுடைய ஏணியைப் பல்வேறுபட்ட நிலைகளில் பயன்படுத்துவதைப் படத்தில் காணலாம்.



படம் 3.14

ஏணியானது சுவற்றுடன் மூன்று செங்கோண முக்கோணங்களை உருவாக்குவதை உற்று நோக்குங்கள். பின்வரும் மதிப்புகளில் ஏற்படும் மாற்றங்களை விவாதிக்கவும். (i) d (ii) h (iii) θ (iv) வர்ணம் பூசுபவர் வர்ணம் பூசுகையில் அவரின் நிலைத்தன்மை?

எடுத்துக்காட்டு 3.5

மதிப்பு காண்க. (i) $\sin 30° + \cos 30°$ (ii) $\tan 60° . \cot 60°$

(iii) $\dfrac{\tan 45°}{\tan 30° + \tan 60°}$ (iv) $\sin^2 45° + \cos^2 45°$

தீர்வு

(i) $\sin 30° + \cos 30° = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

(ii) $\tan 60° . \cot 60° = \sqrt{3} \times \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 1$

(iii) $\dfrac{\tan 45°}{\tan 30° + \tan 60°} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{3}}{1}}$

$$= \frac{1}{\dfrac{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\dfrac{1+3}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

(iv) $\sin^2 45° + \cos^2 45° = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$$= \frac{1^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} + \frac{1^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

குறிப்பு

(i) $(\sin\theta)^2$ என்பதை $\sin^2\theta = \left(\sin\theta\right) \times \left(\sin\theta\right)$ என்போம்.

(ii) $(\sin\theta)^2$ என்பதை $\sin\theta^2$ என எழுதக்கூடாது, ஏனெனில் இது $\sin(\theta \times \theta)$ எனப் பொருள்படும்.

சிந்தனைக் களம்

கீழ்க்கண்ட குழுக்களில் உள்ளவை போன்ற மூன்று எண்களைப் பித்தகோரியன் எண்கள் (அல்லது Pythogorean Triplets) என்பர். அவை மூன்றும் சேர்ந்து ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்க அளவுகளாக அமையும்.

(i) 3, 4, 5 (ii) 5, 12, 13 (iii) 7, 24, 25

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

மேற்குறிப்பிட்ட ஏதாவது ஒரு பித்தகோரியன் எண்கள் குழுவில் உள்ள மூன்று எண்களையும் பூச்சியமற்ற ஒரு மாறிலியால் பெருக்கவும். தற்போது கிடைக்கப் பெற்றுள்ள புதிய மூன்று எண்களும் பித்தகோரியன் எண்களா எனச் சோதித்துப் பார்க்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.6

பின்வருவனவற்றின் மதிப்பு காண்க.

(i) $(\cos 0° + \sin 45° + \sin 30°)(\sin 90° - \cos 45° + \cos 60°)$

(ii) $\tan^2 60° - 2\tan^2 45° - \cot^2 30° + 2\sin^2 30° + \frac{3}{4}\operatorname{cosec}^2 45°$

தீர்வு

(i) $(\cos 0° + \sin 45° + \sin 30°)(\sin 90° - \cos 45° + \cos 60°)$

$$= \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right]\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \left[\frac{2\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right]\left[\frac{2\sqrt{2} - 2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right] = \left[\frac{3\sqrt{2} + 2}{2\sqrt{2}}\right]\left[\frac{3\sqrt{2} - 2}{2\sqrt{2}}\right]$$

$$= \frac{18 - 4}{4\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{14}{4 \times 2} = \frac{7}{4}$$

(ii) $\tan^2 60° - 2\tan^2 45° - \cot^2 30° + 2\sin^2 30° + \frac{3}{4}\operatorname{cosec}^2 45°$

$$= \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2(1)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\sqrt{2}\right)^2$$

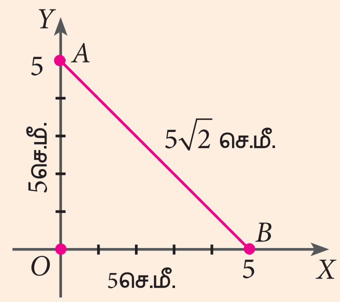
$$= 3 - 2 - 3 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$$

$$= -2 + \frac{4}{2} = -2 + 2 = 0$$

செயல்பாடு - 2

ஒரு வரைபடத்தாளில் கீழ்க்கண்ட அளவுகள் கொண்ட ஒரு முக்கோணம் OBA ஐப் படத்தில் உள்ளவாறு வரைக.

- அதன் பக்க அளவுகளின் விகிதம் $5:5:5\sqrt{2}$ அதாவது, $1:1:\sqrt{2}$ என்பதை ஆராயுங்கள்.
- $\angle A, \angle B$ மற்றும் $\angle O$ இன் கோண அளவுகளைக் கணக்கிடவும்.
- $\angle A = 45°, \angle B = 45°, \angle O = 90°$ எனப் பெறுகிறோம்.
- $\angle A : \angle B : \angle O$ என்பன $45° : 45° : 90°$ எனப் பெறுகிறோம்.



படம் 3.15

பக்க அளவுகள் $1:1:\sqrt{2}$ என்றவாறு பல்வேறு அளவுள்ள முக்கோணங்களை (X-அச்சு மற்றும் Y-அச்சு சம அளவுகள் இருக்குமாறு) வரைந்து, அவற்றின் கோணங்களை ஒவ்வொரு முறையும் அளவிட்டு பதிவு செய்யவும். இவற்றிலிருந்து நீவிர் அறிவது என்ன?

குறிப்பு

(i) ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் கோணங்கள் $45° : 45° : 90°$ என்ற அளவில் இருந்தால், அதன் பக்கங்கள் $1:1:\sqrt{2}$.என்ற விகிதத்தில் இருக்கும்.

(ii) இதைப் போலவே கோணங்கள் $30° : 60° : 90°$ என்ற விகிதத்தில் இருந்தால் அதன் பக்கங்கள் $1:\sqrt{3}:2$ என்ற விகிதத்தில் இருக்கும்.

(உங்கள் வடிவியல் கணித உபகரணப் பெட்டியில் இருக்கும் இரு மூலைமட்டக் கருவிகளே (*Set Squares*) மேற்கூறிய இரு முக்கோணங்களுக்கு மிகச் சிறந்த எடுத்துக்காட்டு ஆகும்.)

பயிற்சி 3.2

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளைச் சரிபார்க்க.

   (i) $\sin^2 60° + \cos^2 60° = 1$

   (ii) $1 + \tan^2 30° = \sec^2 30°$

   (iii) $\cos 90° = 1 - 2\sin^2 45° = 2\cos^2 45° - 1$

   (iv) $\sin 30° \cos 60° + \cos 30° \sin 60° = \sin 90°$

2. கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

   (i) $\dfrac{\tan 45°}{\operatorname{cosec} 30°} + \dfrac{\sec 60°}{\cot 45°} - \dfrac{5\sin 90°}{2\cos 0°}$

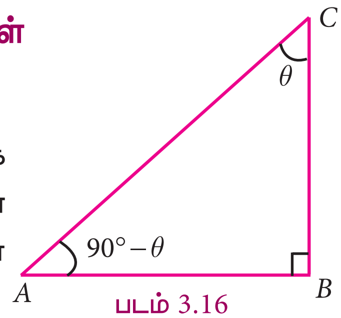
   (ii) $(\sin 90° + \cos 60° + \cos 45°) \times (\sin 30° - \cos 0° + \cos 45°)$

   (iii) $\sin^2 30° - 2\cos^3 60° + 3\tan^4 45°$

3. $A = 30°$ எனில், $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$ என்பதைச் சரிப்பார்க்கவும்.

4. $x = 15°$ எனில், $8\sin 2x . \cos 4x . \sin 6x$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

3.3 நிரப்புக் கோணங்களுக்கான முக்கோணவியல் விகிதங்கள் (Trigonometric Ratios for Complementary Angles)



படம் 3.16

இரு குறுங்கோணங்களின் கூடுதல் 90° எனில், அவை நிரப்புக் கோணங்கள் என்பதை நினைவுகூர்வோம். ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் உள்ள இரு குறுங்கோணங்களைப் பற்றி என்ன கூறலாம்?

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்திலுள்ள இரு குறுங்கோணங்களின் கூடுதல் 90°.எனவே செங்கோண முக்கோணத்தில் உள்ள இரு குறுங்கோணங்கள் எப்பொழுதுமே ஒன்றுக்கொன்று நிரப்புக் கோணங்கள் ஆகும்.

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள படம் 3.16 இல், முக்கோணம் ABC ஆனது B இல் செங்கோணத்தைத் தாங்கியுள்ளது. மேலும் $\angle C = \theta$ எனில், $\angle A = 90^\circ - \theta$ ஆகும்.

கோணம் θ ஐப் பொறுத்து

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{AB}{AC} & \operatorname{cosec}\theta &= \frac{AC}{AB} \\ \cos\theta &= \frac{BC}{AC} & \sec\theta &= \frac{AC}{BC} \\ \tan\theta &= \frac{AB}{BC} & \cot\theta &= \frac{BC}{AB} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots(1)$$

இதைப் போலவே கோணம் $(90^\circ - \theta)$ ஐப் பொறுத்து,

$$\left.\begin{aligned} \sin(90^\circ-\theta) &= \frac{BC}{AC} & \operatorname{cosec}(90^\circ-\theta) &= \frac{AC}{BC} \\ \cos(90^\circ-\theta) &= \frac{AB}{AC} & \sec(90^\circ-\theta) &= \frac{AC}{AB} \\ \tan(90^\circ-\theta) &= \frac{BC}{AB} & \cot(90^\circ-\theta) &= \frac{AB}{BC} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots(2)$$

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) ஐ ஒப்பிட,

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \cos(90^\circ-\theta) & \quad \operatorname{cosec}\theta &= \sec(90^\circ-\theta) \\ \cos\theta &= \sin(90^\circ-\theta) & \sec\theta &= \operatorname{cosec}(90^\circ-\theta) \\ \tan\theta &= \cot(90^\circ-\theta) & \cot\theta &= \tan(90^\circ-\theta) \end{aligned}$$

எனக் காண்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.7

கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்புகளைக் கேட்கப்பட்டுள்ள முக்கோணவியல் விகிதங்களில் மாற்றிக் கூறுக. (i) $\sin 74^\circ$ இன் மதிப்பை cosine இல் (ii) $\tan 12^\circ$ இன் மதிப்பை cotangent இல் (iii) $\operatorname{cosec} 39^\circ$ இன் மதிப்பை secant இல்

தீர்வு

(i) $\sin 74^\circ = \sin(90^\circ - 16^\circ)$ (ஏனெனில், $90^\circ - 16^\circ = 74^\circ$)

வலப்பக்கமானது $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

எனவே, $\sin 74^\circ = \cos 16^\circ$

(ii) $\tan 12^\circ = \tan(90^\circ - 78^\circ)$ (ஏனெனில், , $12^\circ = 90^\circ - 78^\circ$)

வலப்பக்கமானது $\tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

எனவே, $\tan 12^\circ = \cot 78^\circ$

(iii) $\operatorname{cosec} 39^\circ = \operatorname{cosec}(90^\circ - 51^\circ)$ (ஏனெனில், $39^\circ = 90^\circ - 51^\circ$)

வலப்பக்கமானது $\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec\theta$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

எனவே, $\operatorname{cosec} 39^\circ = \sec 51^\circ$

எடுத்துக்காட்டு 3.8 மதிப்பிடுக. (i) $\dfrac{\sin 49^\circ}{\cos 41^\circ}$ (ii) $\dfrac{\sec 63^\circ}{\operatorname{cosec} 27^\circ}$

தீர்வு

(i) $\dfrac{\sin 49^\circ}{\cos 41^\circ}$

$\sin 49^\circ = \sin(90^\circ - 41^\circ) = \cos 41^\circ$ ஏனெனில், $49^\circ + 41^\circ = 90^\circ$ (நிரப்புக் கோணங்கள்),

$\sin 49^\circ = \cos 41^\circ$ எனப் பிரதியிட நாம் பெறுவது, $\dfrac{\cos 41^\circ}{\cos 41^\circ} = 1$

(ii) $\dfrac{\sec 63^\circ}{\operatorname{cosec} 27^\circ}$

$\sec 63^\circ = \sec(90^\circ - 27^\circ) = \operatorname{cosec} 27^\circ$, எனப் பிரதியிட,

(இங்கு, 63° மற்றும் 27° நிரப்புக் கோணங்கள்) நாம் பெறுவது,

$$\frac{\sec 63^\circ}{\operatorname{cosec} 27^\circ} = \frac{\operatorname{cosec} 27^\circ}{\operatorname{cosec} 27^\circ} = 1$$

எடுத்துக்காட்டு 3.9 மதிப்புக் காண்க. (i) $\tan 7^\circ \tan 23^\circ \tan 60^\circ \tan 67^\circ \tan 83^\circ$

(ii) $\dfrac{\cos 35^\circ}{\sin 55^\circ} + \dfrac{\sin 12^\circ}{\cos 78^\circ} - \dfrac{\cos 18^\circ}{\sin 72^\circ}$

தீர்வு

(i) $\tan 7^\circ \tan 23^\circ \tan 60^\circ \tan 67^\circ \tan 83^\circ$

$= \tan 7^\circ \tan 83^\circ \tan 23^\circ \tan 67^\circ \tan 60^\circ$ (நிரப்புக் கோணங்களைக் குழுப்படுத்த)

$= \tan 7^\circ \tan(90^\circ - 7^\circ) \tan 23^\circ \tan(90^\circ - 23^\circ) \tan 60^\circ$

$= (\tan 7^\circ . \cot 7^\circ)(\tan 23^\circ . \cot 23^\circ) \tan 60^\circ$

$= (1) \times (1) \times \tan 60^\circ$

$= \tan 60^\circ \quad = \sqrt{3}$

(ii) $\dfrac{\cos 35^\circ}{\sin 55^\circ} + \dfrac{\sin 12^\circ}{\cos 78^\circ} - \dfrac{\cos 18^\circ}{\sin 72^\circ}$

$$= \frac{\cos(90^\circ - 55^\circ)}{\sin 55^\circ} + \frac{\sin(90^\circ - 78^\circ)}{\cos 78^\circ} - \frac{\cos(90^\circ - 72^\circ)}{\sin 72^\circ}$$

$$= \frac{\sin 55^\circ}{\sin 55^\circ} + \frac{\cos 78^\circ}{\cos 78^\circ} - \frac{\sin 72^\circ}{\sin 72^\circ}$$

$$= 1 + 1 - 1 = 1$$

ஏனெனில்,
$\cos 35^\circ = \cos(90^\circ - 55^\circ)$
$\sin 12^\circ = \sin(90^\circ - 78^\circ)$
$\cos 18^\circ = \cos(90^\circ - 72^\circ)$

எடுத்துக்காட்டு 3.10 (i) $\operatorname{cosec} A = \sec 34^\circ$ எனில், A இன் மதிப்பைக் காண்க.

(ii) $\tan B = \cot 47^\circ$ எனில், B இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

(i) $\operatorname{cosec} A = \sec(90^\circ - A)$ என நாம் அறிவோம்.

$$\sec(90^\circ - A) = \sec(34^\circ)$$

$$90^\circ - A = 34^\circ$$

$$A = 90^\circ - 34^\circ$$

$$A = 56^\circ$$

(ii) $\tan B = \cot(90^\circ - B)$ என நாம் அறிவோம்.

$$\cot(90^\circ - B) = \cot 47^\circ$$

$$90^\circ - B = 47^\circ$$

$$B = 90^\circ - 47^\circ$$

$$B = 43^\circ$$

பயிற்சி 3.3

1. கீழ்க்காண்பவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $\left(\dfrac{\cos 47^\circ}{\sin 43^\circ}\right)^2 + \left(\dfrac{\sin 72^\circ}{\cos 18^\circ}\right)^2 - 2\cos^2 45^\circ$

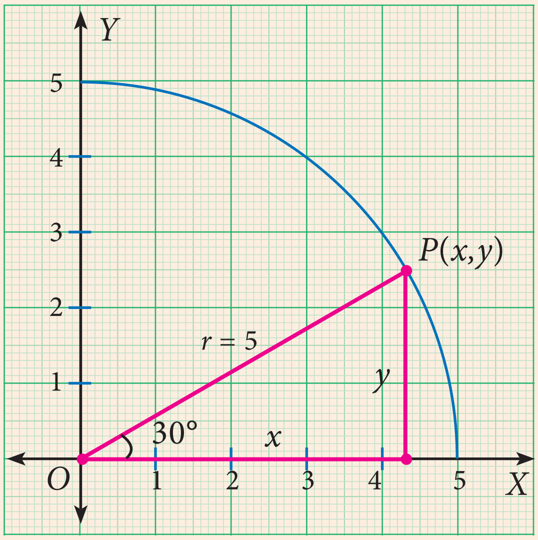
(ii) $\dfrac{\cos 70^\circ}{\sin 20^\circ} + \dfrac{\cos 59^\circ}{\sin 31^\circ} + \dfrac{\cos\theta}{\sin(90^\circ - \theta)} - 8\cos^2 60^\circ$

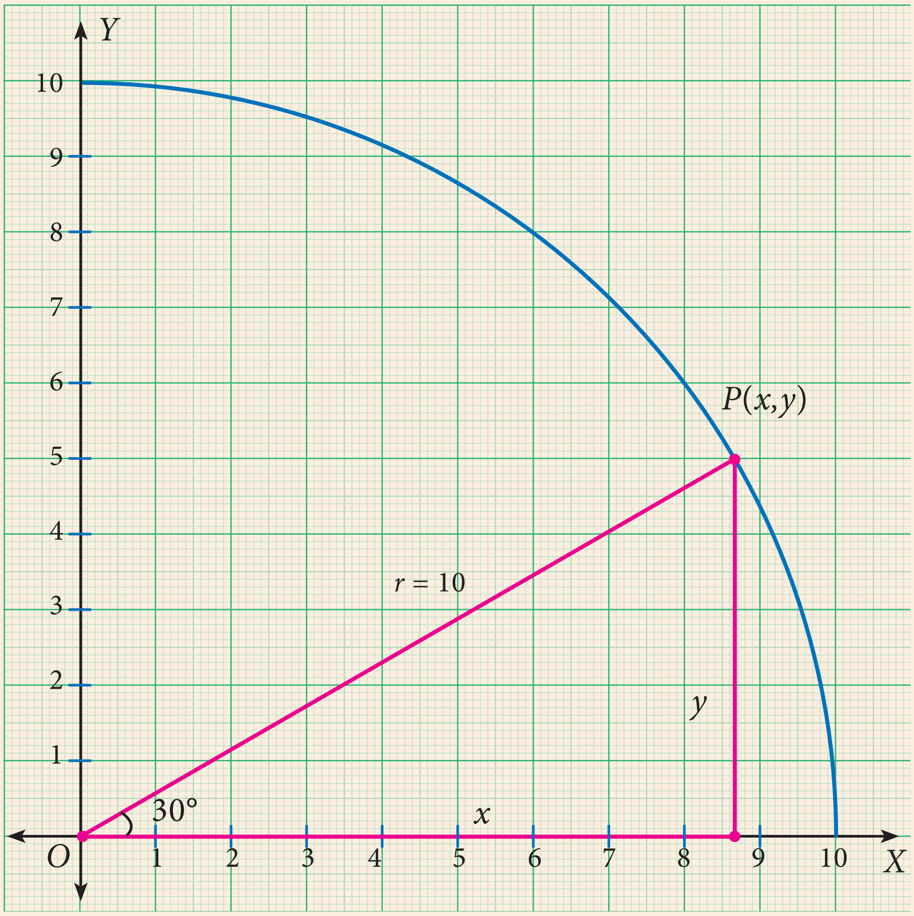
(iii) $\tan 15^\circ \tan 30^\circ \tan 45^\circ \tan 60^\circ \tan 75^\circ$

(iv) $\dfrac{\cot\theta}{\tan(90^\circ - \theta)} + \dfrac{\cos(90^\circ - \theta)\tan\theta\sec(90^\circ - \theta)}{\sin(90^\circ - \theta)\cot(90^\circ - \theta)\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta)}$

செயல்பாடு - 3

ஒரு வரைபடத் தாளில் ஆரங்கள் 5 செமீ மற்றும் 10 செமீ கொண்ட இரு வட்டவிற்களை முதல் காற்பகுதியில் *(I quadrant)* பின்வருமாறு வரைக.





$\theta = \angle XOP = 30^\circ$ என்றவாறு OP ஐ வரைக. அதிலிருந்து $P(x,y)$ காண்க. இதே படிகளை

$\theta = 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 0^\circ$ போன்றவற்றிற்கும் பின்பற்றி $P(x,y)$ இன் மதிப்புகளைக் கண்டறிந்து அவற்றை அட்டவணைப்படுத்துக.

முக்கோணவியல் விகிதங்கள்	வட்டம் r = 5 செமீ					வட்டம் r = 10 செமீ				
	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$0°$
$\sin\theta = \frac{y}{r}$										
$\cos\theta = \frac{x}{r}$										
$\tan\theta = \frac{y}{x}$										

1. அட்டவணையிலிருந்து நீவிர் காண்பது என்ன?
2. இந்த அட்டவணையை இப்பாடத்தின் இறுதியில் உள்ள முக்கோணவியல் விகிதங்களின் அட்டவணையோடு ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவும்.

சிந்தனைக் களம்

(i) $\sin\theta$ இன் குறைந்தளவு மற்றும் அதிகளவு மதிப்பு எவ்வளவு?

(ii) $\cos\theta$ இன் குறைந்தளவு மற்றும் அதிகளவு மதிப்பு எவ்வளவு?

3.4 முக்கோணவியல் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தும் முறை (Method of using Trigonometric Table)

$0°$, $30°$, $45°$, $60°$ மற்றும் $90°$ போன்ற முக்கோணவியல் விகிதங்களின் மதிப்புகளை நாம் கணக்கிடக் கற்றுக்கொண்டோம். ஆனால் சில சமயங்களில் அனைத்துக் குறுங்கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்களின் மதிப்புகளையும் நாம் கணக்கிட வேண்டியுள்ளது. எனவே முக்கோணவியல் விகித அட்டவணையைப் பயன்படுத்த நாம் கற்றுக் கொள்வோம்.

இங்கு ஒரு பாகை $(1°)$ என்பது 60 நிமிடங்களாகவும் $(60')$ மற்றும் ஒரு நிமிடம் $(1')$ என்பது 60 நொடிகளாகவும் $(60'')$ பிரிக்கப்பட்டுள்ளன. எனவே, $1° = 60'$ மற்றும் $1' = 60''$.

முக்கோணவியல் விகித அட்டவணையானது $0°$ முதல் $90°$ வரையான கோணங்களை $60'$ நிமிடத்தின் சம இடைவெளிகளாகப் பிரித்து, அவற்றின் மதிப்புகளை நான்கு தசம இடத் திருத்தமாகக் கொண்டுள்ளது. இந்த அட்டவணையானது மூன்று பகுதிகளைக் கொண்டது.

இடது ஓரமாக உள்ள நிரலானது $0°$ முதல் $90°$ வரை பாகை அளவுகளைக் கொண்டது. அதைத் தொடர்ந்து பத்து நிரல்கள் $0', 6', 12', 18', 24', 30', 36', 42', 48'$ மற்றும் $54'$ எனப் பத்துத் தலைப்புகளின் கீழ் நிமிடங்கள் வரிசையாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. பொது வித்தியாசம் என்ற தலைப்பில் ஐந்து நிரல்கள் 1, 2, 3, 4 மற்றும் 5 என்ற மதிப்புகள் இடம்பெற்றுள்ளன.

மேலே குறிப்பிட்ட பத்து நிரலில் உள்ள நிமிட அளவுகளைத் தவிரப் பிற கோண அளவுகளுக்கு ஏற்றவாறு பொது வித்தியாசங்களை கூட்டியோ, கழித்தோ அதன் மதிப்புகளைப் பெறலாம். sine மற்றும் tangent விகிதங்களுக்குப் பொது வித்தியாசத்தை கூட்டியும் cosine விகிதங்களுக்குப் பொது வித்தியாசத்தை கழித்தும் கோண விகித மதிப்புகளைப் பெறலாம்.

கீழ்க்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்து முக்கோணவியல் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் கணக்கிடும் முறையைப் புரிந்துக் கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.11 $\sin 64°34'$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

	$0'$	$6'$	$12'$	$18'$	$24'$	$30'$	$36'$	$42'$	$48'$	$54'$	பொது வித்தியாசம்				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
64°						0.9026								5	

$64°34' = 64°30' + 4'$ என எழுதலாம்.

அட்டவணையிலிருந்து, $\sin 64°30' = 0.9026$

பொது வித்தியாசம் $4' = \quad 5$ (sine இற்குப் பொது வித்தியாசத்தை கூட்டவும்)

$\sin 64°34' = 0.9031$

எடுத்துக்காட்டு 3.12 $\cos 19°59'$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

	$0'$	$6'$	$12'$	$18'$	$24'$	$30'$	$36'$	$42'$	$48'$	$54'$	பொது வித்தியாசம்				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
19°										0.9403					5

$19°59' = 19°54' + 5'$ என எழுதலாம்.

அட்டவணையிலிருந்து, $\cos 19°54' = 0.9403$

பொது வித்தியாசம் $5' = \quad 5$ (cosine இற்குப் பொது வித்தியாசத்தை கழிக்கவும்)

$\cos 19°59' = 0.9398$

எடுத்துக்காட்டு 3.13 $\tan 70°13'$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

	$0'$	$6'$	$12'$	$18'$	$24'$	$30'$	$36'$	$42'$	$48'$	$54'$	பொது வித்தியாசம்				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
70°			2.7776								26				

$70^\circ 13' = 70^\circ 12' + 1'$ என எழுதலாம்.

அட்டவணையிலிருந்து, $\tan 70^\circ 12' = 2.7776$

பொது வித்தியாசம் $1' = 26$ (tan இற்குப் பொது வித்தியாசத்தை கூட்டவும்)

$\tan 70^\circ 13' = 2.7802$

எடுத்துக்காட்டு 3.14

மதிப்புக் காண்க.

(i) $\sin 38^\circ 36' + \tan 12^\circ 12'$ (ii) $\tan 60^\circ 25' - \cos 49^\circ 20'$

தீர்வு

(i) $\sin 38^\circ 36' + \tan 12^\circ 12'$

$\sin 38^\circ 36' = 0.6239$

$\tan 12^\circ 12' = 0.2162$

$\sin 38^\circ 36' + \tan 12^\circ 12' = 0.8401$

(ii) $\tan 60^\circ 25' - \cos 49^\circ 20'$

$\tan 60^\circ 25' = 1.7603 + 0.0012 = 1.7615$

$\cos 49^\circ 20' = 0.6521 - 0.0004 = 0.6517$

$\tan 60^\circ 25' - \cos 49^\circ 20' = 1.1098$

எடுத்துக்காட்டு 3.15

θ இன் மதிப்பைக் காண்க.

(i) $\sin\theta = 0.9858$ (ii) $\tan\theta = 0.5902$ (iii) $\cos\theta = 0.7656$

தீர்வு

(i) $\sin\theta = 0.9858 = 0.9857 + 0.0001$

அட்டவணையிலிருந்து, $0.9857 = 80^\circ 18'$

பொது வித்தியாசம் $1 = 2'$ (பொது வித்தியாசத்தை கூட்டவும்)

$0.9858 = 80^\circ 20'$

$\sin\theta = 0.9858 = \sin 80^\circ 20'$

$\theta = 80^\circ 20'$

(ii) $\tan\theta = 0.5902 = 0.5890 + 0.0012$

அட்டவணையிலிருந்து, $0.5890 = 30°30'$

பொது வித்தியாசம் $12 = 3'$ (பொது வித்தியாசத்தை கூட்டவும்)

$$0.5902 = 30°33'$$

$$\tan\theta = 0.5902 = \tan 30°33'$$

$$\theta = 30°33'$$

(iii) $\cos\theta = 0.7656 = 0.7660 - 0.0004$

அட்டவணையிலிருந்து, $0.7660 = 40°0'$

பொது வித்தியாசம் $4 = 2'$ (பொது வித்தியாசத்தை கழிக்கவும்)

$$0.7656 = 40°2'$$

$$\cos\theta = 0.7656 = \cos 40°2'$$

$$\theta = 40°2'$$

எடுத்துக்காட்டு 3.16 கர்ணம் 5 செமீ மற்றும் ஒரு குறுங்கோணம் $48°30'$ கொண்ட ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு

படத்திலிருந்து,

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\sin 48°30' = \frac{AB}{5}$$

$$0.7490 = \frac{AB}{5}$$

$$5 \times 0.7490 = AB$$

$$AB = 3.7450 \text{ செமீ}$$

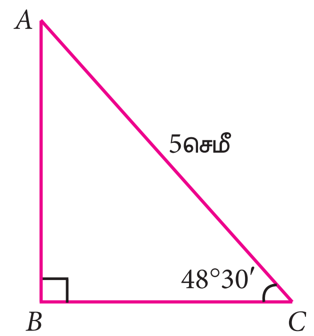
$$\cos\theta = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos 48°30' = \frac{BC}{5}$$

$$0.6626 = \frac{BC}{5}$$

$$0.6626 \times 5 = BC$$

$$BC = 3.313 \text{ செமீ}$$



படம் 3.17

முக்கோணத்தின் பரப்பு $= \frac{1}{2} bh$ அடிப்பக்கம்×உயரம்

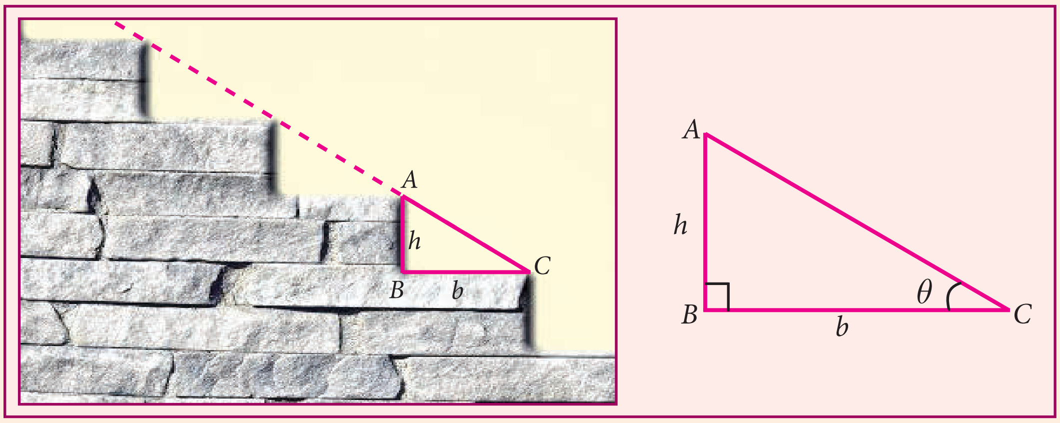
$$= \frac{1}{2} \times BC \times AB$$

$$= \frac{1}{2} \times 3.3130 \times 3.7450$$

$$= 1.6565 \times 3.7450 = 6.2035925 \text{ செமீ}^2$$

செயல்பாடு - 4

உங்கள் வீட்டின் படிகளைக் கவனியுங்கள். அவற்றில் ஒரு படியின் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரங்களைக் கணக்கிடுக. அதைக் கீழ்க்காணும் படத்தில் குறித்துப் படியின் ஏற்றக் கோணத்தைக் காண்க.



(i) ஒரே உயரம் மற்றும் அகலங்களைக் கொண்ட வேறுப்பட்ட படிகட்டுகளின் ஏற்றக் கோணங்களை ஒப்பிடவும். மேலும் அவற்றை உற்று நோக்கி விவாதிக்கவும்.

(ii) சில நேரங்களில் வீட்டில் உள்ள சில படிகள் ஒரே உயரத்தில் இல்லாமல் இருக்கலாம். அது போல் ஒரே அகலமும் வெவ்வேறு உயரங்களும் கொண்ட படிகளின் ஏற்றக் கோணங்களையும் கணக்கிட்டு ஒப்பிட்டு விவாதிக்கவும்.

பயிற்சி 3.4

1. கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்பு காண்க.

   (i) $\sin 49^\circ$ (ii) $\cos 74^\circ 39'$ (iii) $\tan 54^\circ 26'$ (iv) $\sin 21^\circ 21'$ (v) $\cos 33^\circ 53'$ (vi) $\tan 70^\circ 17'$

2. θ இன் மதிப்பு காண்க.

   (i) $\sin\theta = 0.9975$ (ii) $\cos\theta = 0.6763$ (iii) $\tan\theta = 0.0720$

   (iv) $\cos\theta = 0.0410$ (v) $\tan\theta = 7.5958$

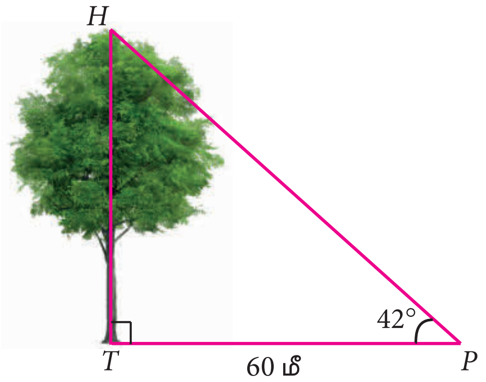
3. கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்பு காண்க. (i) $\sin 65^\circ 39' + \cos 24^\circ 57' + \tan 10^\circ 10'$

   (iii) $\tan 70^\circ 58' + \cos 15^\circ 26' - \sin 84^\circ 59'$

4. கர்ணம் 10 செமீ மற்றும் ஒரு குறுங்கோண அளவு $24^\circ 24'$ கொண்ட ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பு காண்க.

5. 5மீ நீளமுள்ள ஓர் ஏணியானது சுவற்றிலிருந்து 4மீ தொலைவில் அடிப்பாகம் தரையைத் தொடுமாறு சுவற்றின் மீது சாய்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது எனில், ஏணி தரைப்பகுதியுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் காண்க.

6. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் HT என்பது நேரான ஒரு மரத்தின் உயரத்தைக் குறிக்கிறது. மரத்தின் அடிப்பாகத்திலிருந்து 60 மீட்டர் தொலைவிலுள்ள P என்ற புள்ளியிலிருந்து மரத்தின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் ($\angle P$) 42^o எனில் மரத்தின் உயரத்தைக் காண்க.



பயிற்சி 3.5

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. $\sin 30° = x$ மற்றும் $\cos 60° = y$ எனில், $x^2 + y^2$ இன் மதிப்பு

(1) $\frac{1}{2}$ (2) 0 (3) $\sin 90°$ (4) $\cos 90°$

2. $\tan\theta = \cot 37°$ எனில், θ இன் மதிப்பு

(1) 37° (2) 53° (3) 90° (4) 1°

3. $\tan 72°.\tan 18°$ இன் மதிப்பு

(1) 0 (2) 1 (3) 18° (4) 72°

F81EIA

4. $\frac{\tan 15°}{\cot 75°}$ இன் மதிப்பு

(1) $\cos 90°$ (2) $\sin 30°$ (3) $\tan 45°$ (4) $\cos 30°$

5. $\frac{2\tan 30°}{1-\tan^2 30°}$ இன் மதிப்பு

(1) $\cos 60°$ (2) $\sin 60°$ (3) $\tan 60°$ (4) $\sin 30°$

6. $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ மற்றும் α ஒரு குறுங்கோணம் எனில், $(3\cos\alpha - 4\cos^3\alpha)$ இன் மதிப்பு

(1) 0 (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) -1

7. $2\sin 2\theta = \sqrt{3}$ எனில், θ இன் மதிப்பு

(1) 90° (2) 30° (3) 45° (4) 60°

8. $3\sin 70° \sec 20° + 2\sin 49° \sec 51°$ இன் மதிப்பு

(1) 2 (2) 3 (3) 5 (4) 6

9. $2\tan 30° \tan 60°$ இன் மதிப்பு

(1) 1 (2) 2 (3) $2\sqrt{3}$ (4) 6

10. $\dfrac{1-\tan^2 45^\circ}{1+\tan^2 45^\circ}$ இன் மதிப்பு

(1) 2 (2) 1 (3) 0 (4) $\dfrac{1}{2}$

11. $\cos A = \dfrac{3}{5}$ எனில், $\tan A$ இன் மதிப்பு

(1) $\dfrac{4}{5}$ (2) $\dfrac{3}{4}$ (3) $\dfrac{5}{3}$ (4) $\dfrac{4}{3}$

12. $\operatorname{cosec}(70^\circ+\theta)-\sec(20^\circ-\theta)+\tan(65^\circ+\theta)-\cot(25^\circ-\theta)$ இன் மதிப்பு

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3

13. $\tan 1^\circ.\tan 2^\circ.\tan 3^\circ \ldots \tan 89^\circ$ இன் மதிப்பு

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

14. $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$ மற்றும் $\cos\beta = \dfrac{1}{2}$ எனில், $\alpha+\beta$ இன் மதிப்பு

(1) 0° (2) 90° (3) 30° (4) 60°

15. $\dfrac{\sin 29^\circ 31'}{\cos 60^\circ 29'}$ இன் மதிப்பு

(1) 0 (2) 2 (3) 1 (4) -1

நினைவில் கொள்க

- முக்கோணவியல் விகிதங்கள்

$\sin\theta = \dfrac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$	$\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{\text{கர்ணம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}$
$\cos\theta = \dfrac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$	$\sec\theta = \dfrac{\text{கர்ணம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$
$\tan\theta = \dfrac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$	$\cot\theta = \dfrac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}$

- முக்கோணவியல் விகிதங்களின் தலைகீழிகள்

$$\sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

- நிரப்புக் கோணங்களுக்கான முக்கோணவியல் விகிதங்கள்

$$\sin\theta = \cos(90^\circ-\theta) \qquad \operatorname{cosec}\theta = \sec(90^\circ-\theta)$$

$$\cos\theta = \sin(90^\circ-\theta) \qquad \sec\theta = \operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)$$

$$\tan\theta = \cot(90^\circ-\theta) \qquad \cot\theta = \tan(90^\circ-\theta)$$

NATURAL SINES

கோணம்	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	பொது வித்தியாசம்				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
0	0.0000	0.0017	0.0035	0.0052	0.0070	0.0087	0.0105	0.0122	0.0140	0.0157	3	6	9	12	15
1	0.0175	0.0192	0.0209	0.0227	0.0244	0.0262	0.0279	0.0297	0.0314	0.0332	3	6	9	12	15
2	0.0349	0.0366	0.0384	0.0401	0.0419	0.0436	0.0454	0.0471	0.0488	0.0506	3	6	9	12	15
3	0.0523	0.0541	0.0558	0.0576	0.0593	0.0610	0.0628	0.0645	0.0663	0.0680	3	6	9	12	15
4	0.0698	0.0715	0.0732	0.0750	0.0767	0.0785	0.0802	0.0819	0.0837	0.0854	3	6	9	12	15
5	0.0872	0.0889	0.0906	0.0924	0.0941	0.0958	0.0976	0.0993	0.1011	0.1028	3	6	9	12	14
6	0.1045	0.1063	0.1080	0.1097	0.1115	0.1132	0.1149	0.1167	0.1184	0.1201	3	6	9	12	14
7	0.1219	0.1236	0.1253	0.1271	0.1288	0.1305	0.1323	0.1340	0.1357	0.1374	3	6	9	12	14
8	0.1392	0.1409	0.1426	0.1444	0.1461	0.1478	0.1495	0.1513	0.1530	0.1547	3	6	9	12	14
9	0.1564	0.1582	0.1599	0.1616	0.1633	0.1650	0.1668	0.1685	0.1702	0.1719	3	6	9	12	14
10	0.1736	0.1754	0.1771	0.1788	0.1805	0.1822	0.1840	0.1857	0.1874	0.1891	3	6	9	12	14
11	0.1908	0.1925	0.1942	0.1959	0.1977	0.1994	0.2011	0.2028	0.2045	0.2062	3	6	9	11	14
12	0.2079	0.2096	0.2113	0.2130	0.2147	0.2164	0.2181	0.2198	0.2215	0.2233	3	6	9	11	14
13	0.2250	0.2267	0.2284	0.2300	0.2317	0.2334	0.2351	0.2368	0.2385	0.2402	3	6	8	11	14
14	0.2419	0.2436	0.2453	0.2470	0.2487	0.2504	0.2521	0.2538	0.2554	0.2571	3	6	8	11	14
15	0.2588	0.2605	0.2622	0.2639	0.2656	0.2672	0.2689	0.2706	0.2723	0.2740	3	6	8	11	14
16	0.2756	0.2773	0.2790	0.2807	0.2823	0.2840	0.2857	0.2874	0.2890	0.2907	3	6	8	11	14
17	0.2924	0.2940	0.2957	0.2974	0.2990	0.3007	0.3024	0.3040	0.3057	0.3074	3	6	8	11	14
18	0.3090	0.3107	0.3123	0.3140	0.3156	0.3173	0.3190	0.3206	0.3223	0.3239	3	6	8	11	14
19	0.3256	0.3272	0.3289	0.3305	0.3322	0.3338	0.3355	0.3371	0.3387	0.3404	3	5	8	11	14
20	0.3420	0.3437	0.3453	0.3469	0.3486	0.3502	0.3518	0.3535	0.3551	0.3567	3	5	8	11	14
21	0.3584	0.3600	0.3616	0.3633	0.3649	0.3665	0.3681	0.3697	0.3714	0.3730	3	5	8	11	14
22	0.3746	0.3762	0.3778	0.3795	0.3811	0.3827	0.3843	0.3859	0.3875	0.3891	3	5	8	11	14
23	0.3907	0.3923	0.3939	0.3955	0.3971	0.3987	0.4003	0.4019	0.4035	0.4051	3	5	8	11	14
24	0.4067	0.4083	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4163	0.4179	0.4195	0.4210	3	5	8	11	13
25	0.4226	0.4242	0.4258	0.4274	0.4289	0.4305	0.4321	0.4337	0.4352	0.4368	3	5	8	11	13
26	0.4384	0.4399	0.4415	0.4431	0.4446	0.4462	0.4478	0.4493	0.4509	0.4524	3	5	8	10	13
27	0.4540	0.4555	0.4571	0.4586	0.4602	0.4617	0.4633	0.4648	0.4664	0.4679	3	5	8	10	13
28	0.4695	0.4710	0.4726	0.4741	0.4756	0.4772	0.4787	0.4802	0.4818	0.4833	3	5	8	10	13
29	0.4848	0.4863	0.4879	0.4894	0.4909	0.4924	0.4939	0.4955	0.4970	0.4985	3	5	8	10	13
30	0.5000	0.5015	0.5030	0.5045	0.5060	0.5075	0.5090	0.5105	0.5120	0.5135	3	5	8	10	13
31	0.5150	0.5165	0.5180	0.5195	0.5210	0.5225	0.5240	0.5255	0.5270	0.5284	2	5	7	10	12
32	0.5299	0.5314	0.5329	0.5344	0.5358	0.5373	0.5388	0.5402	0.5417	0.5432	2	5	7	10	12
33	0.5446	0.5461	0.5476	0.5490	0.5505	0.5519	0.5534	0.5548	0.5563	0.5577	2	5	7	10	12
34	0.5592	0.5606	0.5621	0.5635	0.5650	0.5664	0.5678	0.5693	0.5707	0.5721	2	5	7	10	12
35	0.5736	0.5750	0.5764	0.5779	0.5793	0.5807	0.5821	0.5835	0.5850	0.5864	2	5	7	10	12
36	0.5878	0.5892	0.5906	0.5920	0.5934	0.5948	0.5962	0.5976	0.5990	0.6004	2	5	7	9	12
37	0.6018	0.6032	0.6046	0.6060	0.6074	0.6088	0.6101	0.6115	0.6129	0.6143	2	5	7	9	12
38	0.6157	0.6170	0.6184	0.6198	0.6211	0.6225	0.6239	0.6252	0.6266	0.6280	2	5	7	9	11
39	0.6293	0.6307	0.6320	0.6334	0.6347	0.6361	0.6374	0.6388	0.6401	0.6414	2	4	7	9	11
40	0.6428	0.6441	0.6455	0.6468	0.6481	0.6494	0.6508	0.6521	0.6534	0.6547	2	4	7	9	11
41	0.6561	0.6574	0.6587	0.6600	0.6613	0.6626	0.6639	0.6652	0.6665	0.6678	2	4	7	9	11
42	0.6691	0.6704	0.6717	0.6730	0.6743	0.6756	0.6769	0.6782	0.6794	0.6807	2	4	6	9	11
43	0.6820	0.6833	0.6845	0.6858	0.6871	0.6884	0.6896	0.6909	0.6921	0.6934	2	4	6	8	11
44	0.6947	0.6959	0.6972	0.6984	0.6997	0.7009	0.7022	0.7034	0.7046	0.7059	2	4	6	8	10

NATURAL SINES

கோணம்	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	பொது வித்தியாசம்				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
45	0.7071	0.7083	0.7096	0.7108	0.7120	0.7133	0.7145	0.7157	0.7169	0.7181	2	4	6	8	10
46	0.7193	0.7206	0.7218	0.7230	0.7242	0.7254	0.7266	0.7278	0.7290	0.7302	2	4	6	8	10
47	0.7314	0.7325	0.7337	0.7349	0.7361	0.7373	0.7385	0.7396	0.7408	0.7420	2	4	6	8	10
48	0.7431	0.7443	0.7455	0.7466	0.7478	0.7490	0.7501	0.7513	0.7524	0.7536	2	4	6	8	10
49	0.7547	0.7559	0.7570	0.7581	0.7593	0.7604	0.7615	0.7627	0.7638	0.7649	2	4	6	8	9
50	0.7660	0.7672	0.7683	0.7694	0.7705	0.7716	0.7727	0.7738	0.7749	0.7760	2	4	6	7	9
51	0.7771	0.7782	0.7793	0.7804	0.7815	0.7826	0.7837	0.7848	0.7859	0.7869	2	4	5	7	9
52	0.7880	0.7891	0.7902	0.7912	0.7923	0.7934	0.7944	0.7955	0.7965	0.7976	2	4	5	7	9
53	0.7986	0.7997	0.8007	0.8018	0.8028	0.8039	0.8049	0.8059	0.8070	0.8080	2	3	5	7	9
54	0.8090	0.8100	0.8111	0.8121	0.8131	0.8141	0.8151	0.8161	0.8171	0.8181	2	3	5	7	8
55	0.8192	0.8202	0.8211	0.8221	0.8231	0.8241	0.8251	0.8261	0.8271	0.8281	2	3	5	7	8
56	0.8290	0.8300	0.8310	0.8320	0.8329	0.8339	0.8348	0.8358	0.8368	0.8377	2	3	5	6	8
57	0.8387	0.8396	0.8406	0.8415	0.8425	0.8434	0.8443	0.8453	0.8462	0.8471	2	3	5	6	8
58	0.8480	0.8490	0.8499	0.8508	0.8517	0.8526	0.8536	0.8545	0.8554	0.8563	2	3	5	6	8
59	0.8572	0.8581	0.8590	0.8599	0.8607	0.8616	0.8625	0.8634	0.8643	0.8652	1	3	4	6	7
60	0.8660	0.8669	0.8678	0.8686	0.8695	0.8704	0.8712	0.8721	0.8729	0.8738	1	3	4	6	7
61	0.8746	0.8755	0.8763	0.8771	0.8780	0.8788	0.8796	0.8805	0.8813	0.8821	1	3	4	6	7
62	0.8829	0.8838	0.8846	0.8854	0.8862	0.8870	0.8878	0.8886	0.8894	0.8902	1	3	4	5	7
63	0.8910	0.8918	0.8926	0.8934	0.8942	0.8949	0.8957	0.8965	0.8973	0.8980	1	3	4	5	6
64	0.8988	0.8996	0.9003	0.9011	0.9018	0.9026	0.9033	0.9041	0.9048	0.9056	1	3	4	5	6
65	0.9063	0.9070	0.9078	0.9085	0.9092	0.9100	0.9107	0.9114	0.9121	0.9128	1	2	4	5	6
66	0.9135	0.9143	0.9150	0.9157	0.9164	0.9171	0.9178	0.9184	0.9191	0.9198	1	2	3	5	6
67	0.9205	0.9212	0.9219	0.9225	0.9232	0.9239	0.9245	0.9252	0.9259	0.9265	1	2	3	4	6
68	0.9272	0.9278	0.9285	0.9291	0.9298	0.9304	0.9311	0.9317	0.9323	0.9330	1	2	3	4	5
69	0.9336	0.9342	0.9348	0.9354	0.9361	0.9367	0.9373	0.9379	0.9385	0.9391	1	2	3	4	5
70	0.9397	0.9403	0.9409	0.9415	0.9421	0.9426	0.9432	0.9438	0.9444	0.9449	1	2	3	4	5
71	0.9455	0.9461	0.9466	0.9472	0.9478	0.9483	0.9489	0.9494	0.9500	0.9505	1	2	3	4	5
72	0.9511	0.9516	0.9521	0.9527	0.9532	0.9537	0.9542	0.9548	0.9553	0.9558	1	2	3	3	4
73	0.9563	0.9568	0.9573	0.9578	0.9583	0.9588	0.9593	0.9598	0.9603	0.9608	1	2	2	3	4
74	0.9613	0.9617	0.9622	0.9627	0.9632	0.9636	0.9641	0.9646	0.9650	0.9655	1	2	2	3	4
75	0.9659	0.9664	0.9668	0.9673	0.9677	0.9681	0.9686	0.9690	0.9694	0.9699	1	1	2	3	4
76	0.9703	0.9707	0.9711	0.9715	0.9720	0.9724	0.9728	0.9732	0.9736	0.9740	1	1	2	3	3
77	0.9744	0.9748	0.9751	0.9755	0.9759	0.9763	0.9767	0.9770	0.9774	0.9778	1	1	2	3	3
78	0.9781	0.9785	0.9789	0.9792	0.9796	0.9799	0.9803	0.9806	0.9810	0.9813	1	1	2	2	3
79	0.9816	0.9820	0.9823	0.9826	0.9829	0.9833	0.9836	0.9839	0.9842	0.9845	1	1	2	2	3
80	0.9848	0.9851	0.9854	0.9857	0.9860	0.9863	0.9866	0.9869	0.9871	0.9874	0	1	1	2	2
81	0.9877	0.9880	0.9882	0.9885	0.9888	0.9890	0.9893	0.9895	0.9898	0.9900	0	1	1	2	2
82	0.9903	0.9905	0.9907	0.9910	0.9912	0.9914	0.9917	0.9919	0.9921	0.9923	0	1	1	2	2
83	0.9925	0.9928	0.9930	0.9932	0.9934	0.9936	0.9938	0.9940	0.9942	0.9943	0	1	1	1	2
84	0.9945	0.9947	0.9949	0.9951	0.9952	0.9954	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0	1	1	1	2
85	0.9962	0.9963	0.9965	0.9966	0.9968	0.9969	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974	0	0	1	1	1
86	0.9976	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9981	0.9982	0.9983	0.9984	0.9985	0	0	1	1	1
87	0.9986	0.9987	0.9988	0.9989	0.9990	0.9990	0.9991	0.9992	0.9993	0.9993	0	0	0	1	1
88	0.9994	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998	0.9998	0	0	0	0	0
89	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0	0	0	0	0

NATURAL COSINES

(பொது வித்தியாசம் பகுதியில் உள்ள எண்களைக் கழிக்க வேண்டும் கூட்டக் கூடாது)

கோணம்	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	பொது வித்தியாசம்				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0	0	0	0	0
1	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995	0.9995	0	0	0	0	0
2	0.9994	0.9993	0.9993	0.9992	0.9991	0.9990	0.9990	0.9989	0.9988	0.9987	0	0	0	1	1
3	0.9986	0.9985	0.9984	0.9983	0.9982	0.9981	0.9980	0.9979	0.9978	0.9977	0	0	1	1	1
4	0.9976	0.9974	0.9973	0.9972	0.9971	0.9969	0.9968	0.9966	0.9965	0.9963	0	0	1	1	1
5	0.9962	0.9960	0.9959	0.9957	0.9956	0.9954	0.9952	0.9951	0.9949	0.9947	0	1	1	1	2
6	0.9945	0.9943	0.9942	0.9940	0.9938	0.9936	0.9934	0.9932	0.9930	0.9928	0	1	1	1	2
7	0.9925	0.9923	0.9921	0.9919	0.9917	0.9914	0.9912	0.9910	0.9907	0.9905	0	1	1	2	2
8	0.9903	0.9900	0.9898	0.9895	0.9893	0.9890	0.9888	0.9885	0.9882	0.9880	0	1	1	2	2
9	0.9877	0.9874	0.9871	0.9869	0.9866	0.9863	0.9860	0.9857	0.9854	0.9851	0	1	1	2	2
10	0.9848	0.9845	0.9842	0.9839	0.9836	0.9833	0.9829	0.9826	0.9823	0.9820	1	1	2	2	3
11	0.9816	0.9813	0.9810	0.9806	0.9803	0.9799	0.9796	0.9792	0.9789	0.9785	1	1	2	2	3
12	0.9781	0.9778	0.9774	0.9770	0.9767	0.9763	0.9759	0.9755	0.9751	0.9748	1	1	2	3	3
13	0.9744	0.9740	0.9736	0.9732	0.9728	0.9724	0.9720	0.9715	0.9711	0.9707	1	1	2	3	3
14	0.9703	0.9699	0.9694	0.9690	0.9686	0.9681	0.9677	0.9673	0.9668	0.9664	1	1	2	3	4
15	0.9659	0.9655	0.9650	0.9646	0.9641	0.9636	0.9632	0.9627	0.9622	0.9617	1	2	2	3	4
16	0.9613	0.9608	0.9603	0.9598	0.9593	0.9588	0.9583	0.9578	0.9573	0.9568	1	2	2	3	4
17	0.9563	0.9558	0.9553	0.9548	0.9542	0.9537	0.9532	0.9527	0.9521	0.9516	1	2	3	3	4
18	0.9511	0.9505	0.9500	0.9494	0.9489	0.9483	0.9478	0.9472	0.9466	0.9461	1	2	3	4	5
19	0.9455	0.9449	0.9444	0.9438	0.9432	0.9426	0.9421	0.9415	0.9409	0.9403	1	2	3	4	5
20	0.9397	0.9391	0.9385	0.9379	0.9373	0.9367	0.9361	0.9354	0.9348	0.9342	1	2	3	4	5
21	0.9336	0.9330	0.9323	0.9317	0.9311	0.9304	0.9298	0.9291	0.9285	0.9278	1	2	3	4	5
22	0.9272	0.9265	0.9259	0.9252	0.9245	0.9239	0.9232	0.9225	0.9219	0.9212	1	2	3	4	6
23	0.9205	0.9198	0.9191	0.9184	0.9178	0.9171	0.9164	0.9157	0.9150	0.9143	1	2	3	5	6
24	0.9135	0.9128	0.9121	0.9114	0.9107	0.9100	0.9092	0.9085	0.9078	0.9070	1	2	4	5	6
25	0.9063	0.9056	0.9048	0.9041	0.9033	0.9026	0.9018	0.9011	0.9003	0.8996	1	3	4	5	6
26	0.8988	0.8980	0.8973	0.8965	0.8957	0.8949	0.8942	0.8934	0.8926	0.8918	1	3	4	5	6
27	0.8910	0.8902	0.8894	0.8886	0.8878	0.8870	0.8862	0.8854	0.8846	0.8838	1	3	4	5	7
28	0.8829	0.8821	0.8813	0.8805	0.8796	0.8788	0.8780	0.8771	0.8763	0.8755	1	3	4	6	7
29	0.8746	0.8738	0.8729	0.8721	0.8712	0.8704	0.8695	0.8686	0.8678	0.8669	1	3	4	6	7
30	0.8660	0.8652	0.8643	0.8634	0.8625	0.8616	0.8607	0.8599	0.8590	0.8581	1	3	4	6	7
31	0.8572	0.8563	0.8554	0.8545	0.8536	0.8526	0.8517	0.8508	0.8499	0.8490	2	3	5	6	8
32	0.8480	0.8471	0.8462	0.8453	0.8443	0.8434	0.8425	0.8415	0.8406	0.8396	2	3	5	6	8
33	0.8387	0.8377	0.8368	0.8358	0.8348	0.8339	0.8329	0.8320	0.8310	0.8300	2	3	5	6	8
34	0.8290	0.8281	0.8271	0.8261	0.8251	0.8241	0.8231	0.8221	0.8211	0.8202	2	3	5	7	8
35	0.8192	0.8181	0.8171	0.8161	0.8151	0.8141	0.8131	0.8121	0.8111	0.8100	2	3	5	7	8
36	0.8090	0.8080	0.8070	0.8059	0.8049	0.8039	0.8028	0.8018	0.8007	0.7997	2	3	5	7	9
37	0.7986	0.7976	0.7965	0.7955	0.7944	0.7934	0.7923	0.7912	0.7902	0.7891	2	4	5	7	9
38	0.7880	0.7869	0.7859	0.7848	0.7837	0.7826	0.7815	0.7804	0.7793	0.7782	2	4	5	7	9
39	0.7771	0.7760	0.7749	0.7738	0.7727	0.7716	0.7705	0.7694	0.7683	0.7672	2	4	6	7	9
40	0.7660	0.7649	0.7638	0.7627	0.7615	0.7604	0.7593	0.7581	0.7570	0.7559	2	4	6	8	9
41	0.7547	0.7536	0.7524	0.7513	0.7501	0.7490	0.7478	0.7466	0.7455	0.7443	2	4	6	8	10
42	0.7431	0.7420	0.7408	0.7396	0.7385	0.7373	0.7361	0.7349	0.7337	0.7325	2	4	6	8	10
43	0.7314	0.7302	0.7290	0.7278	0.7266	0.7254	0.7242	0.7230	0.7218	0.7206	2	4	6	8	10
44	0.7193	0.7181	0.7169	0.7157	0.7145	0.7133	0.7120	0.7108	0.7096	0.7083	2	4	6	8	10

NATURAL COSINES

(பொது வித்தியாசம் பகுதியில் உள்ள எண்களைக் கழிக்க வேண்டும் கூட்டக் கூடாது)

கோணம்	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	பொது வித்தியாசம்				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
45	0.7071	0.7059	0.7046	0.7034	0.7022	0.7009	0.6997	0.6984	0.6972	0.6959	2	4	6	8	10
46	0.6947	0.6934	0.6921	0.6909	0.6896	0.6884	0.6871	0.6858	0.6845	0.6833	2	4	6	8	11
47	0.6820	0.6807	0.6794	0.6782	0.6769	0.6756	0.6743	0.6730	0.6717	0.6704	2	4	6	9	11
48	0.6691	0.6678	0.6665	0.6652	0.6639	0.6626	0.6613	0.6600	0.6587	0.6574	2	4	7	9	11
49	0.6561	0.6547	0.6534	0.6521	0.6508	0.6494	0.6481	0.6468	0.6455	0.6441	2	4	7	9	11
50	0.6428	0.6414	0.6401	0.6388	0.6374	0.6361	0.6347	0.6334	0.6320	0.6307	2	4	7	9	11
51	0.6293	0.6280	0.6266	0.6252	0.6239	0.6225	0.6211	0.6198	0.6184	0.6170	2	5	7	9	11
52	0.6157	0.6143	0.6129	0.6115	0.6101	0.6088	0.6074	0.6060	0.6046	0.6032	2	5	7	9	12
53	0.6018	0.6004	0.5990	0.5976	0.5962	0.5948	0.5934	0.5920	0.5906	0.5892	2	5	7	9	12
54	0.5878	0.5864	0.5850	0.5835	0.5821	0.5807	0.5793	0.5779	0.5764	0.5750	2	5	7	9	12
55	0.5736	0.5721	0.5707	0.5693	0.5678	0.5664	0.5650	0.5635	0.5621	0.5606	2	5	7	10	12
56	0.5592	0.5577	0.5563	0.5548	0.5534	0.5519	0.5505	0.5490	0.5476	0.5461	2	5	7	10	12
57	0.5446	0.5432	0.5417	0.5402	0.5388	0.5373	0.5358	0.5344	0.5329	0.5314	2	5	7	10	12
58	0.5299	0.5284	0.5270	0.5255	0.5240	0.5225	0.5210	0.5195	0.5180	0.5165	2	5	7	10	12
59	0.5150	0.5135	0.5120	0.5105	0.5090	0.5075	0.5060	0.5045	0.5030	0.5015	3	5	8	10	13
60	0.5000	0.4985	0.4970	0.4955	0.4939	0.4924	0.4909	0.4894	0.4879	0.4863	3	5	8	10	13
61	0.4848	0.4833	0.4818	0.4802	0.4787	0.4772	0.4756	0.4741	0.4726	0.4710	3	5	8	10	13
62	0.4695	0.4679	0.4664	0.4648	0.4633	0.4617	0.4602	0.4586	0.4571	0.4555	3	5	8	10	13
63	0.4540	0.4524	0.4509	0.4493	0.4478	0.4462	0.4446	0.4431	0.4415	0.4399	3	5	8	10	13
64	0.4384	0.4368	0.4352	0.4337	0.4321	0.4305	0.4289	0.4274	0.4258	0.4242	3	5	8	11	13
65	0.4226	0.4210	0.4195	0.4179	0.4163	0.4147	0.4131	0.4115	0.4099	0.4083	3	5	8	11	13
66	0.4067	0.4051	0.4035	0.4019	0.4003	0.3987	0.3971	0.3955	0.3939	0.3923	3	5	8	11	14
67	0.3907	0.3891	0.3875	0.3859	0.3843	0.3827	0.3811	0.3795	0.3778	0.3762	3	5	8	11	14
68	0.3746	0.3730	0.3714	0.3697	0.3681	0.3665	0.3649	0.3633	0.3616	0.3600	3	5	8	11	14
69	0.3584	0.3567	0.3551	0.3535	0.3518	0.3502	0.3486	0.3469	0.3453	0.3437	3	5	8	11	14
70	0.3420	0.3404	0.3387	0.3371	0.3355	0.3338	0.3322	0.3305	0.3289	0.3272	3	5	8	11	14
71	0.3256	0.3239	0.3223	0.3206	0.3190	0.3173	0.3156	0.3140	0.3123	0.3107	3	6	8	11	14
72	0.3090	0.3074	0.3057	0.3040	0.3024	0.3007	0.2990	0.2974	0.2957	0.2940	3	6	8	11	14
73	0.2924	0.2907	0.2890	0.2874	0.2857	0.2840	0.2823	0.2807	0.2790	0.2773	3	6	8	11	14
74	0.2756	0.2740	0.2723	0.2706	0.2689	0.2672	0.2656	0.2639	0.2622	0.2605	3	6	8	11	14
75	0.2588	0.2571	0.2554	0.2538	0.2521	0.2504	0.2487	0.2470	0.2453	0.2436	3	6	8	11	14
76	0.2419	0.2402	0.2385	0.2368	0.2351	0.2334	0.2317	0.2300	0.2284	0.2267	3	6	8	11	14
77	0.2250	0.2233	0.2215	0.2198	0.2181	0.2164	0.2147	0.2130	0.2113	0.2096	3	6	9	11	14
78	0.2079	0.2062	0.2045	0.2028	0.2011	0.1994	0.1977	0.1959	0.1942	0.1925	3	6	9	11	14
79	0.1908	0.1891	0.1874	0.1857	0.1840	0.1822	0.1805	0.1788	0.1771	0.1754	3	6	9	11	14
80	0.1736	0.1719	0.1702	0.1685	0.1668	0.1650	0.1633	0.1616	0.1599	0.1582	3	6	9	12	14
81	0.1564	0.1547	0.1530	0.1513	0.1495	0.1478	0.1461	0.1444	0.1426	0.1409	3	6	9	12	14
82	0.1392	0.1374	0.1357	0.1340	0.1323	0.1305	0.1288	0.1271	0.1253	0.1236	3	6	9	12	14
83	0.1219	0.1201	0.1184	0.1167	0.1149	0.1132	0.1115	0.1097	0.1080	0.1063	3	6	9	12	14
84	0.1045	0.1028	0.1011	0.0993	0.0976	0.0958	0.0941	0.0924	0.0906	0.0889	3	6	9	12	14
85	0.0872	0.0854	0.0837	0.0819	0.0802	0.0785	0.0767	0.0750	0.0732	0.0715	3	6	9	12	15
86	0.0698	0.0680	0.0663	0.0645	0.0628	0.0610	0.0593	0.0576	0.0558	0.0541	3	6	9	12	15
87	0.0523	0.0506	0.0488	0.0471	0.0454	0.0436	0.0419	0.0401	0.0384	0.0366	3	6	9	12	15
88	0.0349	0.0332	0.0314	0.0297	0.0279	0.0262	0.0244	0.0227	0.0209	0.0192	3	6	9	12	15
89	0.0175	0.0157	0.0140	0.0122	0.0105	0.0087	0.0070	0.0052	0.0035	0.0017	3	6	9	12	15

NATURAL TANGENTS

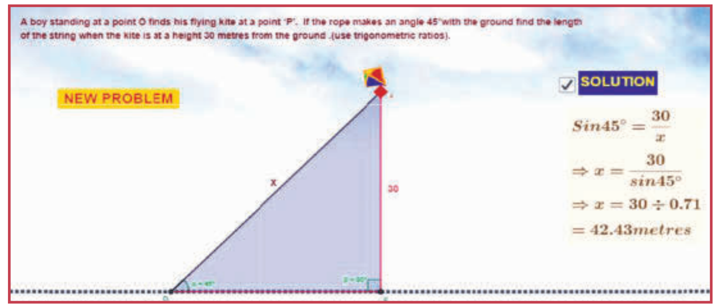
கோணம்	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	பொது வித்தியாசம்				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
0	0.0000	0.0017	0.0035	0.0052	0.0070	0.0087	0.0105	0.0122	0.0140	0.0157	3	6	9	12	15
1	0.0175	0.0192	0.0209	0.0227	0.0244	0.0262	0.0279	0.0297	0.0314	0.0332	3	6	9	12	15
2	0.0349	0.0367	0.0384	0.0402	0.0419	0.0437	0.0454	0.0472	0.0489	0.0507	3	6	9	12	15
3	0.0524	0.0542	0.0559	0.0577	0.0594	0.0612	0.0629	0.0647	0.0664	0.0682	3	6	9	12	15
4	0.0699	0.0717	0.0734	0.0752	0.0769	0.0787	0.0805	0.0822	0.0840	0.0857	3	6	9	12	15
5	0.0875	0.0892	0.0910	0.0928	0.0945	0.0963	0.0981	0.0998	0.1016	0.1033	3	6	9	12	15
6	0.1051	0.1069	0.1086	0.1104	0.1122	0.1139	0.1157	0.1175	0.1192	0.1210	3	6	9	12	15
7	0.1228	0.1246	0.1263	0.1281	0.1299	0.1317	0.1334	0.1352	0.1370	0.1388	3	6	9	12	15
8	0.1405	0.1423	0.1441	0.1459	0.1477	0.1495	0.1512	0.1530	0.1548	0.1566	3	6	9	12	15
9	0.1584	0.1602	0.1620	0.1638	0.1655	0.1673	0.1691	0.1709	0.1727	0.1745	3	6	9	12	15
10	0.1763	0.1781	0.1799	0.1817	0.1835	0.1853	0.1871	0.1890	0.1908	0.1926	3	6	9	12	15
11	0.1944	0.1962	0.1980	0.1998	0.2016	0.2035	0.2053	0.2071	0.2089	0.2107	3	6	9	12	15
12	0.2126	0.2144	0.2162	0.2180	0.2199	0.2217	0.2235	0.2254	0.2272	0.2290	3	6	9	12	15
13	0.2309	0.2327	0.2345	0.2364	0.2382	0.2401	0.2419	0.2438	0.2456	0.2475	3	6	9	12	15
14	0.2493	0.2512	0.2530	0.2549	0.2568	0.2586	0.2605	0.2623	0.2642	0.2661	3	6	9	12	16
15	0.2679	0.2698	0.2717	0.2736	0.2754	0.2773	0.2792	0.2811	0.2830	0.2849	3	6	9	13	16
16	0.2867	0.2886	0.2905	0.2924	0.2943	0.2962	0.2981	0.3000	0.3019	0.3038	3	6	9	13	16
17	0.3057	0.3076	0.3096	0.3115	0.3134	0.3153	0.3172	0.3191	0.3211	0.3230	3	6	10	13	16
18	0.3249	0.3269	0.3288	0.3307	0.3327	0.3346	0.3365	0.3385	0.3404	0.3424	3	6	10	13	16
19	0.3443	0.3463	0.3482	0.3502	0.3522	0.3541	0.3561	0.3581	0.3600	0.3620	3	7	10	13	16
20	0.3640	0.3659	0.3679	0.3699	0.3719	0.3739	0.3759	0.3779	0.3799	0.3819	3	7	10	13	17
21	0.3839	0.3859	0.3879	0.3899	0.3919	0.3939	0.3959	0.3979	0.4000	0.4020	3	7	10	13	17
22	0.4040	0.4061	0.4081	0.4101	0.4122	0.4142	0.4163	0.4183	0.4204	0.4224	3	7	10	14	17
23	0.4245	0.4265	0.4286	0.4307	0.4327	0.4348	0.4369	0.4390	0.4411	0.4431	3	7	10	14	17
24	0.4452	0.4473	0.4494	0.4515	0.4536	0.4557	0.4578	0.4599	0.4621	0.4642	4	7	11	14	18
25	0.4663	0.4684	0.4706	0.4727	0.4748	0.4770	0.4791	0.4813	0.4834	0.4856	4	7	11	14	18
26	0.4877	0.4899	0.4921	0.4942	0.4964	0.4986	0.5008	0.5029	0.5051	0.5073	4	7	11	15	18
27	0.5095	0.5117	0.5139	0.5161	0.5184	0.5206	0.5228	0.5250	0.5272	0.5295	4	7	11	15	18
28	0.5317	0.5340	0.5362	0.5384	0.5407	0.5430	0.5452	0.5475	0.5498	0.5520	4	8	11	15	19
29	0.5543	0.5566	0.5589	0.5612	0.5635	0.5658	0.5681	0.5704	0.5727	0.5750	4	8	12	15	19
30	0.5774	0.5797	0.5820	0.5844	0.5867	0.5890	0.5914	0.5938	0.5961	0.5985	4	8	12	16	20
31	0.6009	0.6032	0.6056	0.6080	0.6104	0.6128	0.6152	0.6176	0.6200	0.6224	4	8	12	16	20
32	0.6249	0.6273	0.6297	0.6322	0.6346	0.6371	0.6395	0.6420	0.6445	0.6469	4	8	12	16	20
33	0.6494	0.6519	0.6544	0.6569	0.6594	0.6619	0.6644	0.6669	0.6694	0.6720	4	8	13	17	21
34	0.6745	0.6771	0.6796	0.6822	0.6847	0.6873	0.6899	0.6924	0.6950	0.6976	4	9	13	17	21
35	0.7002	0.7028	0.7054	0.7080	0.7107	0.7133	0.7159	0.7186	0.7212	0.7239	4	9	13	18	22
36	0.7265	0.7292	0.7319	0.7346	0.7373	0.7400	0.7427	0.7454	0.7481	0.7508	5	9	14	18	23
37	0.7536	0.7563	0.7590	0.7618	0.7646	0.7673	0.7701	0.7729	0.7757	0.7785	5	9	14	18	23
38	0.7813	0.7841	0.7869	0.7898	0.7926	0.7954	0.7983	0.8012	0.8040	0.8069	5	9	14	19	24
39	0.8098	0.8127	0.8156	0.8185	0.8214	0.8243	0.8273	0.8302	0.8332	0.8361	5	10	15	20	24
40	0.8391	0.8421	0.8451	0.8481	0.8511	0.8541	0.8571	0.8601	0.8632	0.8662	5	10	15	20	25
41	0.8693	0.8724	0.8754	0.8785	0.8816	0.8847	0.8878	0.8910	0.8941	0.8972	5	10	16	21	26
42	0.9004	0.9036	0.9067	0.9099	0.9131	0.9163	0.9195	0.9228	0.9260	0.9293	5	11	16	21	27
43	0.9325	0.9358	0.9391	0.9424	0.9457	0.9490	0.9523	0.9556	0.9590	0.9623	6	11	17	22	28
44	0.9657	0.9691	0.9725	0.9759	0.9793	0.9827	0.9861	0.9896	0.9930	0.9965	6	11	17	23	29

NATURAL TANGENTS

கோணம்	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	பொது வித்தியாசம்				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
45	1.0000	1.0035	1.0070	1.0105	1.0141	1.0176	1.0212	1.0247	1.0283	1.0319	6	12	18	24	30
46	1.0355	1.0392	1.0428	1.0464	1.0501	1.0538	1.0575	1.0612	1.0649	1.0686	6	12	18	25	31
47	1.0724	1.0761	1.0799	1.0837	1.0875	1.0913	1.0951	1.0990	1.1028	1.1067	6	13	19	25	32
48	1.1106	1.1145	1.1184	1.1224	1.1263	1.1303	1.1343	1.1383	1.1423	1.1463	7	13	20	27	33
49	1.1504	1.1544	1.1585	1.1626	1.1667	1.1708	1.1750	1.1792	1.1833	1.1875	7	14	21	28	34
50	1.1918	1.1960	1.2002	1.2045	1.2088	1.2131	1.2174	1.2218	1.2261	1.2305	7	14	22	29	36
51	1.2349	1.2393	1.2437	1.2482	1.2527	1.2572	1.2617	1.2662	1.2708	1.2753	8	15	23	30	38
52	1.2799	1.2846	1.2892	1.2938	1.2985	1.3032	1.3079	1.3127	1.3175	1.3222	8	16	24	31	39
53	1.3270	1.3319	1.3367	1.3416	1.3465	1.3514	1.3564	1.3613	1.3663	1.3713	8	16	25	33	41
54	1.3764	1.3814	1.3865	1.3916	1.3968	1.4019	1.4071	1.4124	1.4176	1.4229	9	17	26	34	43
55	1.4281	1.4335	1.4388	1.4442	1.4496	1.4550	1.4605	1.4659	1.4715	1.4770	9	18	27	36	45
56	1.4826	1.4882	1.4938	1.4994	1.5051	1.5108	1.5166	1.5224	1.5282	1.5340	10	19	29	38	48
57	1.5399	1.5458	1.5517	1.5577	1.5637	1.5697	1.5757	1.5818	1.5880	1.5941	10	20	30	40	50
58	1.6003	1.6066	1.6128	1.6191	1.6255	1.6319	1.6383	1.6447	1.6512	1.6577	11	21	32	43	53
59	1.6643	1.6709	1.6775	1.6842	1.6909	1.6977	1.7045	1.7113	1.7182	1.7251	11	23	34	45	56
60	1.7321	1.7391	1.7461	1.7532	1.7603	1.7675	1.7747	1.7820	1.7893	1.7966	12	24	36	48	60
61	1.8040	1.8115	1.8190	1.8265	1.8341	1.8418	1.8495	1.8572	1.8650	1.8728	13	26	38	51	64
62	1.8807	1.8887	1.8967	1.9047	1.9128	1.9210	1.9292	1.9375	1.9458	1.9542	14	27	41	55	68
63	1.9626	1.9711	1.9797	1.9883	1.9970	2.0057	2.0145	2.0233	2.0323	2.0413	15	29	44	58	73
64	2.0503	2.0594	2.0686	2.0778	2.0872	2.0965	2.1060	2.1155	2.1251	2.1348	16	31	47	63	78
65	2.1445	2.1543	2.1642	2.1742	2.1842	2.1943	2.2045	2.2148	2.2251	2.2355	17	34	51	68	85
66	2.2460	2.2566	2.2673	2.2781	2.2889	2.2998	2.3109	2.3220	2.3332	2.3445	18	37	55	73	92
67	2.3559	2.3673	2.3789	2.3906	2.4023	2.4142	2.4262	2.4383	2.4504	2.4627	20	40	60	79	99
68	2.4751	2.4876	2.5002	2.5129	2.5257	2.5386	2.5517	2.5649	2.5782	2.5916	22	43	65	87	108
69	2.6051	2.6187	2.6325	2.6464	2.6605	2.6746	2.6889	2.7034	2.7179	2.7326	24	47	71	95	119
70	2.7475	2.7625	2.7776	2.7929	2.8083	2.8239	2.8397	2.8556	2.8716	2.8878	26	52	78	104	131
71	2.9042	2.9208	2.9375	2.9544	2.9714	2.9887	3.0061	3.0237	3.0415	3.0595	29	58	87	116	145
72	3.0777	3.0961	3.1146	3.1334	3.1524	3.1716	3.1910	3.2106	3.2305	3.2506	32	64	96	129	161
73	3.2709	3.2914	3.3122	3.3332	3.3544	3.3759	3.3977	3.4197	3.4420	3.4646	36	72	108	144	180
74	3.4874	3.5105	3.5339	3.5576	3.5816	3.6059	3.6305	3.6554	3.6806	3.7062	41	81	122	163	204
75	3.7321	3.7583	3.7848	3.8118	3.8391	3.8667	3.8947	3.9232	3.9520	3.9812	46	93	139	186	232
76	4.0108	4.0408	4.0713	4.1022	4.1335	4.1653	4.1976	4.2303	4.2635	4.2972	53	107	160	213	267
77	4.3315	4.3662	4.4015	4.4373	4.4737	4.5107	4.5483	4.5864	4.6252	4.6646					
78	4.7046	4.7453	4.7867	4.8288	4.8716	4.9152	4.9594	5.0045	5.0504	5.0970					
79	5.1446	5.1929	5.2422	5.2924	5.3435	5.3955	5.4486	5.5026	5.5578	5.6140					
80	5.6713	5.7297	5.7894	5.8502	5.9124	5.9758	6.0405	6.1066	6.1742	6.2432					
81	6.3138	6.3859	6.4596	6.5350	6.6122	6.6912	6.7720	6.8548	6.9395	7.0264					
82	7.1154	7.2066	7.3002	7.3962	7.4947	7.5958	7.6996	7.8062	7.9158	8.0285					
83	8.1443	8.2636	8.3863	8.5126	8.6427	8.7769	8.9152	9.0579	9.2052	9.3572					
84	9.5144	9.6768	9.8448	10.0187	10.1988	10.3854	10.5789	10.7797	10.9882	11.2048					
85	11.4301	11.6645	11.9087	12.1632	12.4288	12.7062	12.9962	13.2996	13.6174	13.9507					
86	14.3007	14.6685	15.0557	15.4638	15.8945	16.3499	16.8319	17.3432	17.8863	18.4645					
87	19.0811	19.7403	20.4465	21.2049	22.0217	22.9038	23.8593	24.8978	26.0307	27.2715					
88	28.6363	30.1446	31.8205	33.6935	35.8006	38.1885	40.9174	44.0661	47.7395	52.0807					
89	57.2900	63.6567	71.6151	81.8470	95.4895	114.5887	143.2371	190.9842	286.4777	572.9572					

இணையச் செயல்பாடு

செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப்பெறுவது



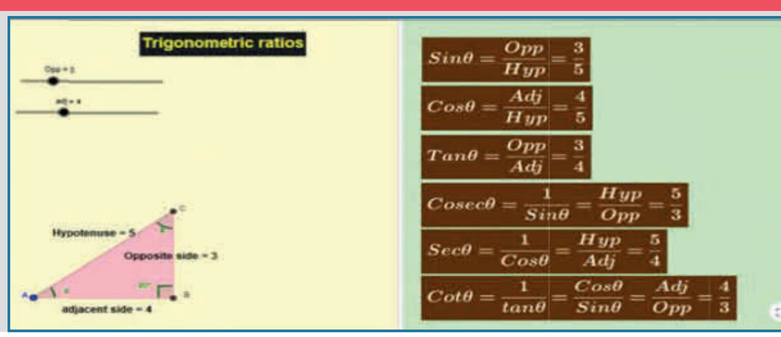
படி – 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி, GeoGebra வின் "Trigonometry" பக்கத்திற்குச் செல்க. Trigonometric ratios, Complimentary angles மற்றும் Kite problem ஆகிய மூன்று தலைப்புகளில் பணித்தாள்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

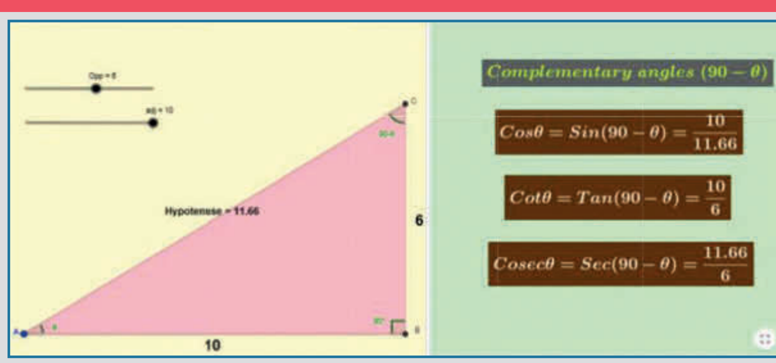
படி – 2

புள்ளிகளையும் விகிதங்களையும் மாற்றுவதற்கு உரிய மதிப்பிற்கு நழுவலை நகர்த்தவும். கணக்குகளைச் செய்து விடைகளைச் சரி பார்க்கவும்.

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

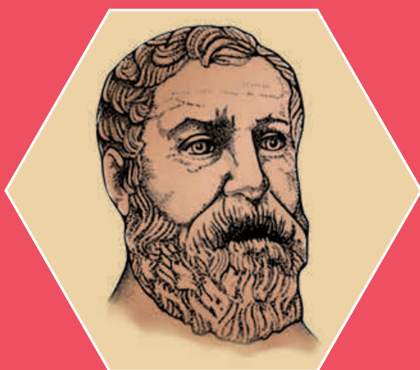
முக்கோணவியல் : https://ggbm.at/hkwnccr6 or Scan the QR Code.

B563_9_MAT_TM_T3

4

அளவியல்

மிக அழகிய தள உருவம் வட்டமாகும்; அது போல, மிக அழகிய திண்ம உருவம் கோளமாகும். - பிதாகரஸ்



ஹெரான்
(கி.பி(பொ.ஆ.) 10-75)

அலெக்ஸாண்டிரியாவைச் சேர்ந்த ஹெரான் (Heron) ஒரு கிரேக்கக் கணித மேதை ஆவார். இவர் கணிதம், இயந்திரவியல் மற்றும் இயற்பியல் தொடர்பான புத்தகங்களை எழுதியுள்ளார். இவரது மெட்ரிகா (Metrica) என்ற பிரபலமான புத்தகம் மூன்று தொகுதிகளைக் கொண்டுள்ளது. இந்தப் புத்தகமானது தள மற்றும் கன உருவங்களின் பரப்பு மற்றும் கன அளவுகளைக் கணக்கிடும் வழிமுறைகளை விளக்குகிறது. ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்க அளவுகள் தரப்பட்டால் அதன் பரப்பினைக் கண்டறியும் சூத்திரத்தை ஹெரான் வருவித்துள்ளார்.

கற்றல் விளைவுகள்

- முக்கோணங்கள் மற்றும் நாற்கரங்களின் பரப்பை ஹெரான் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடுதல்.
- கனச்செவ்வகம் மற்றும் கனச்சதுரத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு, பக்கப் பரப்பு மற்றும் கன அளவு ஆகியவற்றைக் காணல்.

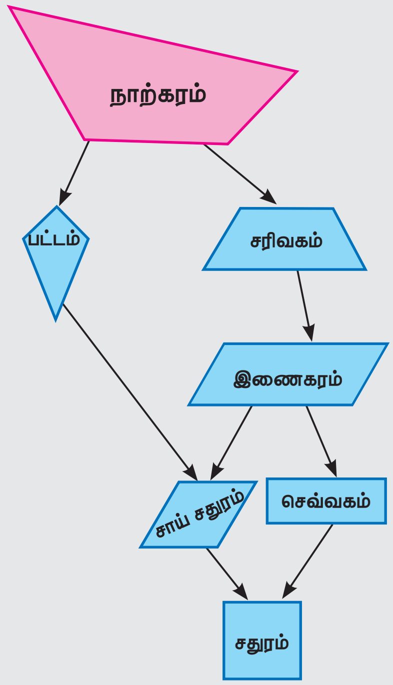
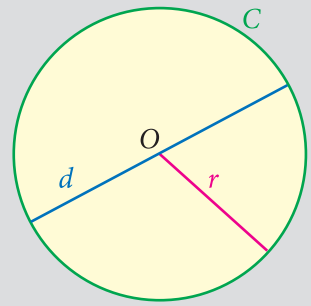
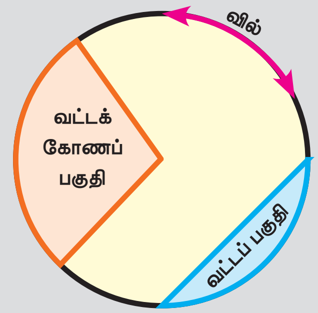
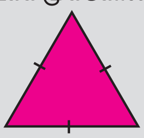
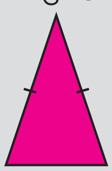
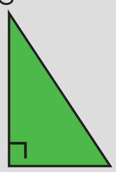
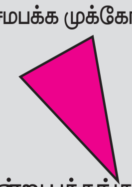
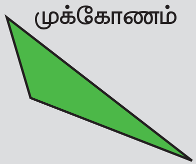
F8AAJX

4.1 அறிமுகம்

பல்வேறு வகையான வடிவியல் உருவங்களின் பரப்பளவு மற்றும் கன அளவுகளைப் பற்றிப் பயிலக்கூடிய கணிதப் பிரிவு அளவியல் எனப்படுகிறது. விரிவாகக் கூறவேண்டுமெனில் இது அளவீட்டுச் செயல்முறைகள் பற்றியது ஆகும்.

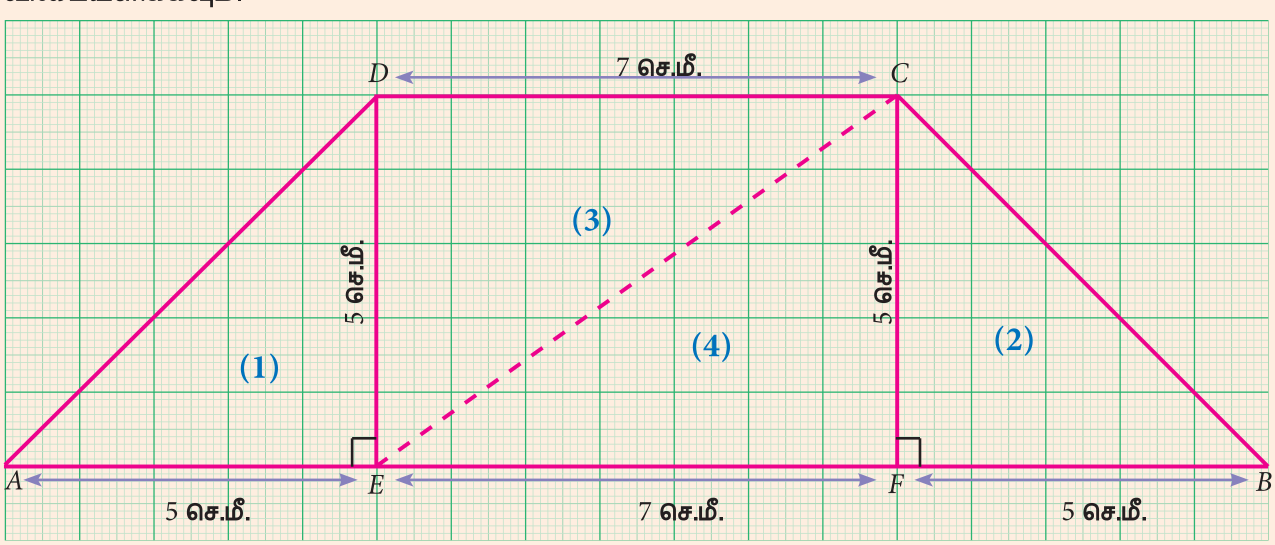
அளவியலானது கட்டடக் கலை, மருத்துவம் மற்றும் கட்டுமானம் ஆகிய துறைகளில் பயன்படுகிறது. அளவியலைக் கற்பதன் மூலம் இரு பரிமாண உருவங்களின் சுற்றளவு மற்றும் பரப்பளவைக் காண்பதற்கான சூத்திரங்கள் பற்றி அறிய முடியும். மேலும் முப்பரிமாண உருவங்களின் புறப்பரப்பு மற்றும் கன அளவுகளைப் பற்றியும் அறிய முடியும். இந்தப் பகுதியில் நாம் முக்கோணங்களின் பரப்புக்கான ஹெரான் சூத்திரம், கனச்செவ்வகம் மற்றும் கனச்சதுரங்களுக்கான புறப்பரப்பு மற்றும் கன அளவுகளைப் பற்றிக் கற்க இருக்கிறோம்.

கடந்த வகுப்புகளில் நாம் ஏற்கனவே பயின்ற பல்வேறு தள உருவங்களை நினைவு கூர்வோமா? இதற்குப் பின்வரும் படங்கள் உதவியாய் இருக்கும்.

மூன்று பக்கங்களை உடையது		நான்கு பக்கங்களை உடையது	வட்டம்
பக்கங்களைப் பொறுத்து	கோணங்களைப் பொறுத்து		 
சமபக்க முக்கோணம்  மூன்று பக்கங்களும் சமம்	குறுங்கோண முக்கோணம்  மூன்று கோணங்களும் 90° விடக் குறைவானது		
இருசமபக்க முக்கோணம்  இரண்டு பக்கங்கள் சம அளவுடையவை	செங்கோண முக்கோணம்  ஒரு கோணம் செங்கோணம்		
அசமபக்க முக்கோணம்  மூன்று பக்கங்களும் அளவில் வேறுபட்டவை	விரிகோண முக்கோணம்  ஒரு கோணம் 90°ஐ விடப் பெரியது		

செயல்பாடு - 1

கீழே தரப்பட்டுள்ள சரிவகத்தைப் பார்த்து அதைத் தொடர்ந்து வரும் வினாக்களுக்கு விடையளிக்கவும்.



படம் 4.1

(i) முக்கோணங்கள் (1), (2), (3) மற்றும் (4) இன் பரப்பளவுகளைக் காண்க.

(ii) செவ்வகம் $CDEF$ இன் மூலைவிட்டம் EC ஆனது, செவ்வகத்தை இரண்டு பகுதிகளாகப் பிரிக்கிறது. இப்போது எந்த வகையான இரு உருவங்களை நாம் பெறுகிறோம்? அவை சமமானவையா?

(iii) முக்கோணங்கள் (1) மற்றும் (2) ஐக் கொண்டு ஒரு சதுரத்தை உருவாக்க இயலுமா?

(iv) முக்கோணங்கள் (1), (2), (3) மற்றும் (4) ஆகியவற்றின் பரப்பளவுகளின் கூடுதலானது சரிவகம் ABCD இன் பரப்பளவிற்குச் சமமாக இருக்கும் என்பதைச் சரிபார்க்க.

(v) வரைபடத்தாளில் உள்ள ஓரலகு சதுரங்களைப் பயன்படுத்திச் சரிவகத்தின் பரப்பளவைக் காண்க

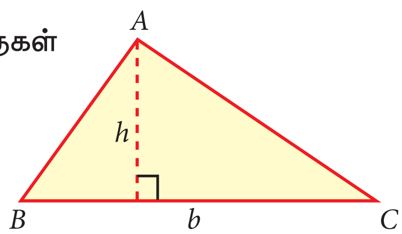
நினைவு கூர்க: நாற்கரம், முக்கோணம் போன்ற மூடிய தள உருவத்தினுடைய எல்லையின் நீளத்தை எவ்வாறு அழைக்கிறோம்? எல்லைக்குள் அடைபட்ட பகுதியின் அளவை எவ்வாறு அழைக்கிறோம்?

பொதுவாக, முக்கோணத்தின் பரப்பளவானது பின்வரும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடப்படுகிறது.

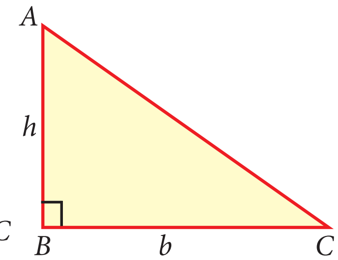
முக்கோணத்தின் பரப்பளவு = $\frac{1}{2}$ × அடிப்பக்கம் × உயரம் சதுர அலகுகள்

அதாவது, $A = \frac{1}{2} \times b \times h$ சதுர அலகுகள்

இங்கு, b மற்றும் h என்பன முறையே முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கம் மற்றும் உயரம் ஆகும்.



படம் 4.2



படம் 4.3

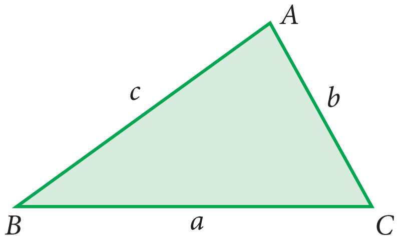
ஒரு முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கம் மற்றும் உயரம் (அதாவது குத்துயரம்) கொடுக்கப்பட்டால், அதன் பரப்பளவை எவ்வாறு காண்பது என்பதை மேற்கண்ட சூத்திரத்திலிருந்து அறிய முடிகிறது.

4.2 ஹெரான் சூத்திரம் (Heron's Formula)

உயரம் தெரியாத ஆனால் மூன்று பக்க அளவுகளும் தெரிந்த ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவை எவ்வாறு காண்பது?

இந்த மாதிரியான நிகழ்வில் ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவை எவ்வாறு காண்பது என்பதற்கான சூத்திரத்தை ஹெரான் கொடுத்துள்ளார்.

a, b மற்றும் c என்பன ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்கள் எனில்,
முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ சதுர அலகுகள். இங்கே, $s = \frac{a+b+c}{2}$, 's' என்பது முக்கோணத்தின் அரைச் சுற்றளவு (semi-perimeter) அதாவது சுற்றளவில் பாதி ஆகும்.



படம் 4.4

குறிப்பு

இங்கு மூன்று பக்கங்களும் சமம் என நாம் எடுத்துக்கொண்டால், அதாவது $a=b=c$ எனில் ஹெரான் சூத்திரப்படி முக்கோணத்தின் பரப்பளவானது $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ சதுர அலகுகள் எனக் கிடைக்கிறது. இது ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பளவு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.1

ஒரு முக்கோண வடிவ வயலின் பக்க நீளங்கள் 28 மீ, 15 மீ மற்றும் 41 மீ எனில் வயலின் பரப்பளவைக் கணக்கிடுக. மேலும் வயலைச் சமப்படுத்த ஒரு சதுர மீட்டருக்கு ₹ 20 செலவாகும் எனில், வயலைச் சமப்படுத்த ஆகும் மொத்தச் செலவைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு

$a = 28$ மீ, $b = 15$ மீ மற்றும் $c = 41$ மீ என்க.

இப்போது, $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{28+15+41}{2} = \frac{84}{2} = 42$ மீ

முக்கோண வயலின் பரப்பளவு $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{42(42-28)(42-15)(42-41)}$

$= \sqrt{42 \times 14 \times 27 \times 1}$

$= \sqrt{2 \times 3 \times 7 \times 7 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 1}$

$= 2 \times 3 \times 7 \times 3$

$= 126$ ச.மீ

1 ச.மீ வயலைச் சமப்படுத்த ஆகும் செலவு = ₹ 20

126 ச.மீ வயலைச் சமப்படுத்த ஆகும் செலவு $= 20 \times 126$ = ₹ 2520.

எடுத்துக்காட்டு 4.2

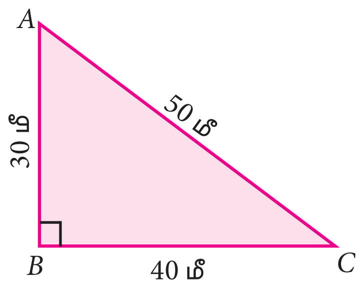
ஓர் இடத்தில் மூன்று வேறுபட்ட முக்கோண வடிவிலான வீட்டு மனைகள் விற்பனைக்கு உள்ளன. ஒவ்வொன்றும் 120 மீ சுற்றளவு கொண்டவை. அவை ஒவ்வொன்றின் பக்க நீளங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

வீட்டு மனையின் வடிவம்	சுற்றளவு	பக்க நீளங்கள்
செங்கோண முக்கோணம்	120 மீ	30 மீ, 40 மீ, 50 மீ
குறுங்கோண முக்கோணம்	120 மீ	35 மீ, 40 மீ, 45 மீ
சமபக்க முக்கோணம்	120 மீ	40 மீ, 40 மீ, 40 மீ

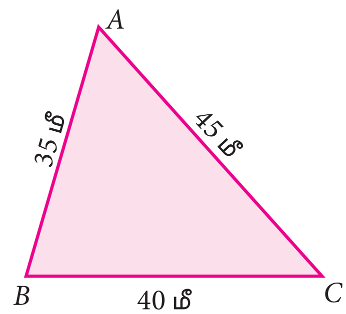
இதில் அதிக இடப்பரப்பு கொண்ட வீட்டு மனை எது என முடிவு செய்ய வாங்குபவருக்கு உதவி செய்க.

தீர்வு

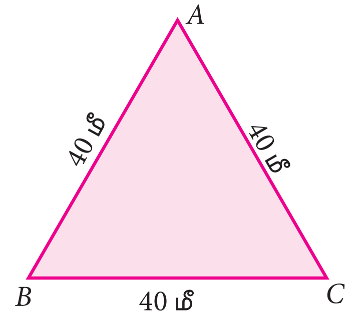
கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவுகளைக் குறிக்கும் உதவிப்படம் வரையலாம்.



படம் 4.5



படம் 4.6



படம் 4.7

(i) படம் 4.5 இல் உள்ள முக்கோணத்தின் அரைச் சுற்றளவு $s = \dfrac{30+40+50}{2} = 60$ மீ

படம் 4.6 இல் உள்ள முக்கோணத்தின் அரைச் சுற்றளவு $s = \dfrac{35+40+45}{2} = 60$ மீ

படம் 4.7 இல் உள்ள முக்கோணத்தின் அரைச் சுற்றளவு $s = \dfrac{40+40+40}{2} = 60$ மீ

இங்கு அனைத்து அரைச் சுற்றளவும் சமமாக உள்ளன என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

(ii) ஹெரான் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி முக்கோணத்தின் பரப்பு

படம் 4.5 இல் உள்ள முக்கோணத்தின் பரப்பு $= \sqrt{60(60-30)(60-40)(60-50)}$

$= \sqrt{60\times30\times20\times10}$

$= \sqrt{30\times2\times30\times2\times10\times10}$

$= 600$ மீ^{2}

படம் 4.6 இல் உள்ள முக்கோணத்தின் பரப்பு $= \sqrt{60(60-35)(60-40)(60-45)}$

$= \sqrt{60\times25\times20\times15}$

$= \sqrt{20\times3\times5\times5\times20\times3\times5}$

$= 300\sqrt{5}$ (ஏனெனில் $\sqrt{5} = 2.236$)

$= 670.8$ மீ^{2}

படம் 4.7 இல் உள்ள முக்கோணத்தின் பரப்பு $= \sqrt{60(60-40)(60-40)(60-40)}$

$= \sqrt{60\times20\times20\times20}$

$= \sqrt{3\times20\times20\times20\times20}$

$= 400\sqrt{3}$ (ஏனெனில் $\sqrt{3} = 1.732$)

$= 692.8$ மீ^{2}

இங்கு சுற்றளவு சமமாக இருந்தபோதிலும், மூன்று முக்கோண வடிவிலான வீட்டு மனையின் பரப்பளவுகள் வெவ்வேறாக இருப்பதைக் காண முடிகிறது. இவற்றில் படம் 4.7 இல் உள்ள

முக்கோணத்தின் பரப்பானது மற்றவற்றைவிட அதிகமாக உள்ளது. இவ்வடிவிலான வீட்டு மனை வாங்குவது அதிக இடப்பரப்பைத் தரும் என்பதால், வாங்குபவருக்கு இதனைப் பரிந்துரைக்கலாம்.

குறிப்பு

கொடுக்கப்பட்ட எந்தச் சமமான சுற்றளவிற்கும், மற்ற எல்லா வகையான முக்கோணங்களையும் விட, சமபக்க முக்கோணமானது அதிகமான பரப்பைக் கொண்டிருக்கும். இது தொடர்பான மீப்பெரு பரப்பளவுகளைப் பற்றி நாம் உயர் வகுப்புகளில் கற்க உள்ளோம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.3 ஒரு முக்கோண வடிவப் பூங்காவின் சுற்றளவு 300 மீ மற்றும் அதன் பக்கங்களின் விகிதம் 9:10:11 எனில் அந்தப் பூங்காவின் பரப்பளவைக் காண்க.

தீர்வு

இங்கு பக்கங்களின் விகிதம் 9:10:11, எனவே அதன் பக்க அளவுகள் $9k$, $10k$, $11k$ என்க

முக்கோண வடிவப் பூங்காவின் சுற்றளவு = 300 மீ

அதாவது, $9k+10k+11k = 300$ மீ

$30k = 300$

$k = 10$ மீ

ஆகவே, பக்கங்கள் a = 90 மீ, b = 100 மீ, c = 110 மீ என்போம்.

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{90+100+110}{2} = \frac{300}{2} = 150 \text{ மீ}$$

முக்கோண வடிவப் பூங்காவின் பரப்பு = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{150(150-90)(150-100)(150-110)}$$

$$= \sqrt{150\times 60\times 50\times 40}$$

$$= \sqrt{3\times 50\times 20\times 3\times 50\times 2\times 20}$$

$$= 50\times 20\times 3\sqrt{2}$$

$$= 3000\times 1.414 = 4242 \text{ மீ}^2$$

பயிற்சி 4.1

1. ஹெரான் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் பக்க அளவுகளைக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க

   (i) 10 செமீ, 24 செமீ, 26 செமீ (ii) 1.8 மீ, 8 மீ, 8.2 மீ

2. ஒரு முக்கோண வடிவ நிலத்தின் பக்கங்கள் முறையே 22 மீ, 120 மீ மற்றும் 122 மீ எனில்

வயலின் பரப்பளவைக் கணக்கிடுக. மேலும் வயலைச் சமப்படுத்த ஒரு சதுர மீட்டருக்கு ₹ 20 செலவாகும் எனில், வயலைச் சமப்படுத்த ஆகும் மொத்தச் செலவைக் கணக்கிடுக.

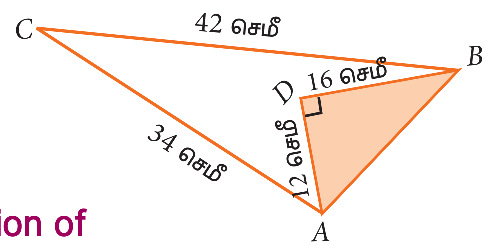
3. ஒரு முக்கோண வடிவிலான மனையின் சுற்றளவு 600 மீ. அதன் பக்கங்கள் 5:12:13 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன எனில் அந்த மனையின் பரப்பளவைக் காண்க.

4. 180 செமீ சுற்றளவு கொண்ட ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

5. இரு சமபக்க முக்கோண வடிவிலுள்ள ஒரு விளம்பரப் பலகையின் சுற்றளவு 36 மீ மற்றும் அதன் ஒவ்வொரு சமபக்கத்தின் நீளம் 13 மீ ஆகும். அதற்கு வண்ணம் பூச ஒரு சதுர மீட்டருக்கு ₹ 17.50 வீதம் ஆகும் செலவைக் காண்க.

6. ஒரு முக்கோணம் மற்றும் இணைகரமானது சமமான பரப்பைக் கொண்டுள்ளன. அந்த முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் முறையே 48 செமீ, 20 செமீ மற்றும் 52 செமீ ஆகும். மேலும் இணைகரத்தின் அடிப்பக்கம் 20 செமீ எனில் (i) ஹெரான் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி முக்கோணத்தின் பரப்பு. (ii) இணைகரத்தின் உயரம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

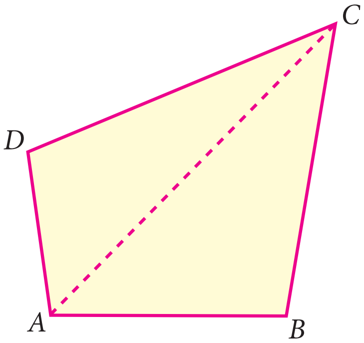
7. படத்தில் நிழலிடப்படாத பகுதியின் பரப்பைக் காண்க.



4.3 நாற்கரங்களின் பரப்புகளைக் காண்பதில் ஹெரான் சூத்திரத்தின் பயன்பாடு (Application of Heron's Formula in Finding Areas of Quadrilaterals)

நான்கு கோட்டுத் துண்டுகளால் அடைபடும் ஒரு தள உருவம் நாற்கரம் என அழைக்கப்படுகிறது.

$ABCD$ என்பது ஒரு நாற்கரம் என்க. ஒரு நாற்கரத்தின் பரப்பைக் காண, அந்த நாற்கரத்தை இரண்டு முக்கோணப் பகுதிகளாகப் பிரித்து, ஹெரான் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி அந்த முக்கோணப் பகுதிகளின் பரப்பைக் காண வேண்டும்.



படம் 4.8

படம் 4.8 இலிருந்து,

நாற்கரம் $ABCD$ இன் பரப்பு = முக்கோணம் ABC இன் பரப்பு + முக்கோணம் ACD இன் பரப்பு.

எடுத்துக்காட்டு 4.4 $AB = 8$ செமீ, $BC = 15$ செமீ, $CD = 12$ செமீ, $AD = 25$ செமீ ஆகியவற்றைப் பக்கங்களாகவும் $\angle B = 90^\circ$ ஐக் கோணமாகவும் உடைய நாற்கரம் $ABCD$ இன் பரப்பைக் காண்க

தீர்வு

நாற்கரம் $ABCD$ இன் மூலைவிட்டங்களில் ஒன்றான AC ஐ இணைக்க.

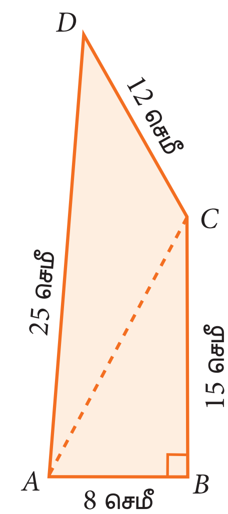
$$\Delta ABC \text{ இன் பரப்பு } = \frac{1}{2} \times \text{அடிப்பக்கம்} \times \text{உயரம்}$$
$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 15 = 60 \text{ செமீ}^2$$

பிதாகரஸ் தேற்றப்படி, செங்கோண முக்கோணம் ABC இல்,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 \text{ செமீ}$$

ஆகவே, $AC = \sqrt{289} = 17$ செமீ



படம் 4.9

இப்பொழுது, $\triangle ACD$ இல் $a = 17$ செமீ, $b = 12$ செமீ, $c = 25$ செமீ என்க.

அரைச் சுற்றளவு $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{17+12+25}{2} = \frac{54}{2} = 27$ செமீ

ΔACD இன் பரப்பு $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{27(27-17)(27-12)(27-25)}$$

$$= \sqrt{27 \times 10 \times 15 \times 2}$$

$$= \sqrt{3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 5 \times 5 \times 3 \times 2}$$

$$= 3 \times 3 \times 2 \times 5 = 90 \text{ செமீ}^2$$

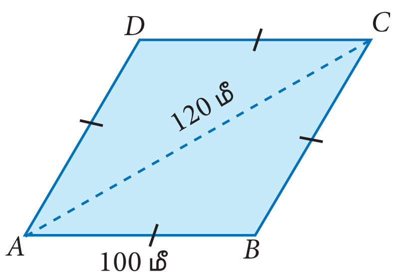
ஆகவே நாற்கரம் $ABCD$ இன் பரப்பு = ΔABC இன் பரப்பு + ΔACD இன் பரப்பு

$$= 60 + 90 = 150 \text{ செமீ}^2$$

எடுத்துக்காட்டு 4.5

விவசாயி ஒருவர் சாய்சதுர வடிவிலான நிலத்தை வைத்துள்ளார். அந்த நிலத்தின் சுற்றளவு 400மீ மற்றும் அதன் ஒரு மூலைவிட்டத்தின் அளவு 120மீ ஆகும். இரண்டு வெவ்வேறு வகையான காய்கறிகளைப் பயிரிட அவர் நிலத்தை இரு சமபகுதிகளாகப் பிரிக்கிறார் எனில் அந்த முழு நிலத்தின் பரப்பைக் காண்க

தீர்வு



படம் 4.10

$ABCD$ என்பது ஒரு சாய்சதுரம் என்க.

அதன் சுற்றளவு $= 4 \times$ பக்கம் $= 400$ மீ

ஆகவே சாய்சதுரத்தின் ஒவ்வொரு பக்கமும் 100 மீ ஆகும்.

இங்கு, மூலைவிட்டம் AC = 120 மீ

ΔABC இல் $a = 100$ மீ, $b = 100$ மீ, $c = 120$ மீ எனில்,

அரைச் சுற்றளவு $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{100+100+120}{2} = 160$ மீ

ΔABC இன் பரப்பு $= \sqrt{160(160-100)(160-100)(160-120)}$

$$= \sqrt{160 \times 60 \times 60 \times 40}$$

$$= \sqrt{40 \times 2 \times 2 \times 60 \times 60 \times 40}$$

$$= 40 \times 2 \times 60 = 4800 \text{ மீ}^2$$

ஆகவே, சாய்சதுர நிலம் $ABCD$ இன் பரப்பு $= 2 \times$ ΔABC இன் பரப்பு $= 2 \times 4800 = 9600$ மீ^{2}

பயிற்சி 4.2

1. $AB = 13$ செமீ, $BC = 12$ செமீ, $CD = 9$ செமீ, $AD = 14$ செமீ ஆகியவற்றைப் பக்கங்களாகவும் $BD = 15$ செமீ ஐ மூலைவிட்டமாகவும் கொண்ட நாற்கரம் $ABCD$ இன் பரப்பைக் காண்க.

2. ஒரு பூங்காவானது நாற்கர வடிவிலுள்ளது. அந்தப் பூங்காவின் பக்க அளவுகள் முறையே 15 மீ, 20 மீ, 26 மீ மற்றும் 17 மீ மற்றும் முதல் இரண்டு பக்கங்களுக்கு இடையேயுள்ள கோணம் செங்கோணம் எனில் பூங்காவின் பரப்பைக் காண்க.

3. ஒரு நிலமானது சாய்சதுர வடிவில் உள்ளது. நிலத்தின் சுற்றளவு 160 மீ மற்றும் அதன் ஒரு மூலைவிட்டத்தின் அளவு 48 மீ எனில் அந்த நிலத்தின் பரப்பைக் காண்க.

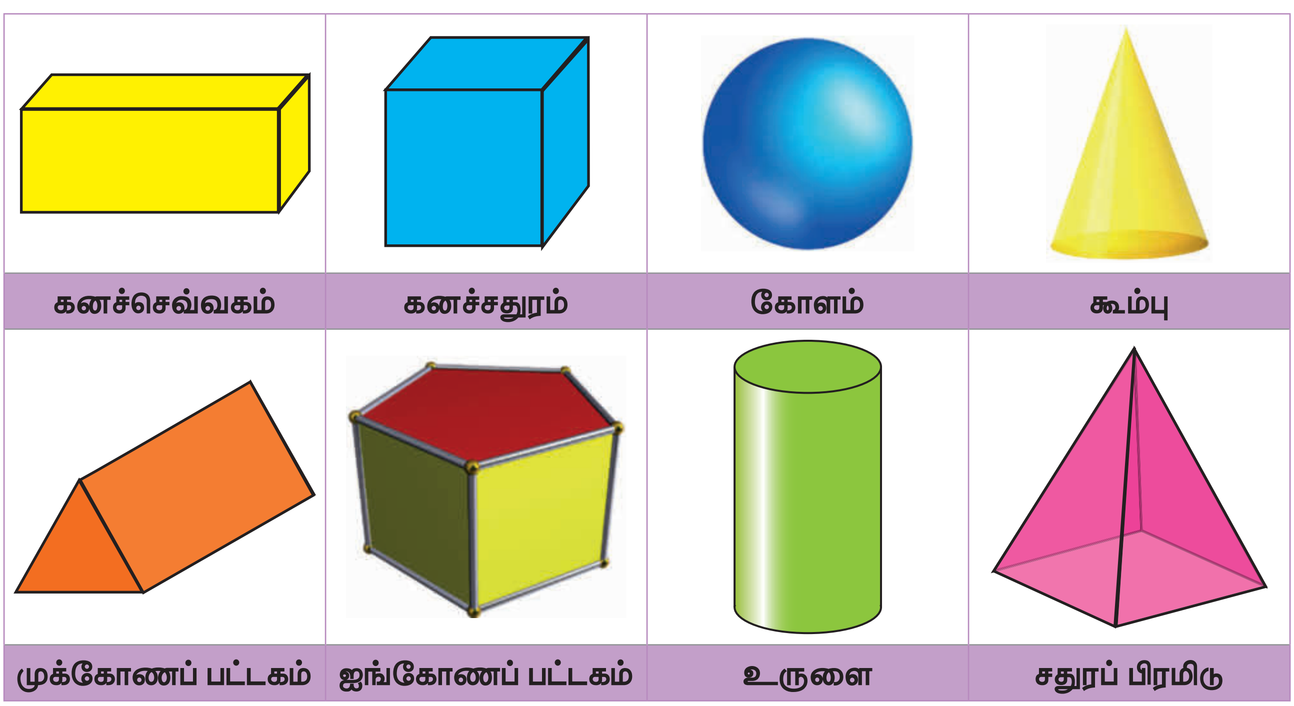
4. ஓர் இணைகரத்தின் அடுத்தடுத்த பக்கங்களின் அளவுகள் 34 மீ, 20 மீ மற்றும் அதன் ஒரு மூலைவிட்டத்தின் அளவு 42 மீ எனில் அந்த இணைகரத்தின் பரப்பைக் காண்க.

5. ஒரு சரிவகத்தின் இணைப் பக்கங்களின் நீளங்கள் 15 மீ, 10 மீ மற்றும் அதன் இணையற்ற பக்கங்களின் நீளங்கள் 8 மீ, 7 மீ எனில் அந்தச் சரிவகத்தின் பரப்பைக் காண்க

4.4 கனச்செவ்வகம் மற்றும் கனச்சதுரத்தின் புறப்பரப்பு (Surface Area of Cuboid and Cube)

F8T2N8

முப்பரிமாண (3D) வடிவங்களைப் பற்றி ஆரம்ப வகுப்புகளில் கற்றிருக்கிறோம். முப்பரிமாண வடிவங்கள் என்பது முழுவதுமாக ஒரு தளத்தில் அமையாத வடிவங்கள் ஆகும். எந்தவொரு முப்பரிமாண வடிவமும் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரம் போன்ற மூன்று பரிமாணங்களைக் கொண்டிருக்கும். சில முப்பரிமாண வடிவங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.



படம் 4.11

கீழே தரப்பட்டுள்ள பொருள்களான செங்கல், கனச்சதுரம், எரிவாயு உருளை, கூம்புப் பனிக்கூழ் மற்றும் பந்து போன்றவை அன்றாட வாழ்வில் நாம் பயன்படுத்தக் கூடிய பல்வேறு வகையான திண்மங்களுக்கான எடுத்துக்காட்டுகள் ஆகும்.

படம் 4.12

நாம் இப்பொழுது கனச்செவ்வகம் மற்றும் கனச்சதுரம் ஆகிய இரண்டு திண்ம உருவங்களுக்கான புறப்பரப்பு மற்றும் கன அளவு பற்றிக் காண்போம்.

சிந்தனைக் களம்

உங்களால் மேலும் சில முப்பரிமாண வடிவங்களைக் கண்டறிய இயலுமா?

4.4.1 கனச்செவ்வகம் மற்றும் அதன் புறப்பரப்பு (Cuboid and its Surface Area)

கனச்செவ்வகம் : ஒரு கனச்செவ்வகம் என்பது ஆறு செவ்வக வடிவிலான தளப்பகுதிகளால் அடைபடும் ஒரு மூடிய திண்ம உருவமாகும்.

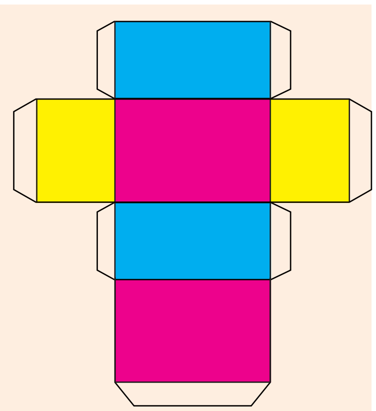
கனச் செவ்வகத்திற்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள்:

			
புத்தகம்	**தீப்பெட்டி**	**செங்கல்**	**வழலை**

படம் 4.13

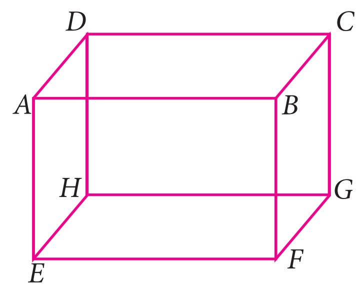
செயல்பாடு - 2

இங்கு கனச்செவ்வகம் உருவாக்க ஒரு வார்ப்புரு (template) பரிந்துரைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு தடிமனான தாளைப் பயன்படுத்தி ஒரு வலையமைப்பைத் தயார் செய்யவும். அதனை படம் 4.14 இல் உள்ளவாறு வண்ணமிட்டு, கத்தரித்து, மடித்துப் பசை கொண்டு ஒன்றாக ஒட்டவும். இதன் பரப்பைப் பற்றி ஆராய்க. (மடிப்புகளைக் கணக்கில் எடுக்கத் தேவையில்லை). வலையமைப்பை மடித்துச் சரியாகக் கனச்செவ்வகம் உருவாக்கும்போது கவனிக்க வேண்டியவை யாவை?



படம் 4.14

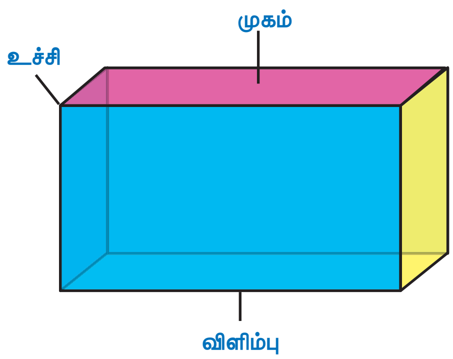
முகம் (Face): படம் 4.15 ஆனது ஒரு கனச்செவ்வகம் ஆகும். இது $ABCD$, $EFGH$, $AEHD$, $BFGC$, $AEFB$ மற்றும் $CDHG$ ஆகிய ஆறு செவ்வகத் தளப்பகுதிகளால் உருவாகிறது. இந்தத் தளப்பகுதிகளே கனச்செவ்வகத்தின் முகங்கள் ஆகும்.



படம் 4.15

விளிம்பு (Edge): ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் எவையேனும் இரு அடுத்தடுத்த முகங்கள் சந்திக்கும் ஒரு கோட்டுத்துண்டே அதன் விளிம்பு எனப்படும்.

உச்சி அல்லது முனை (Vertex): ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் மூன்று விளிம்புகள் சந்திக்கும் புள்ளியே உச்சி அல்லது முனை எனப்படும்.



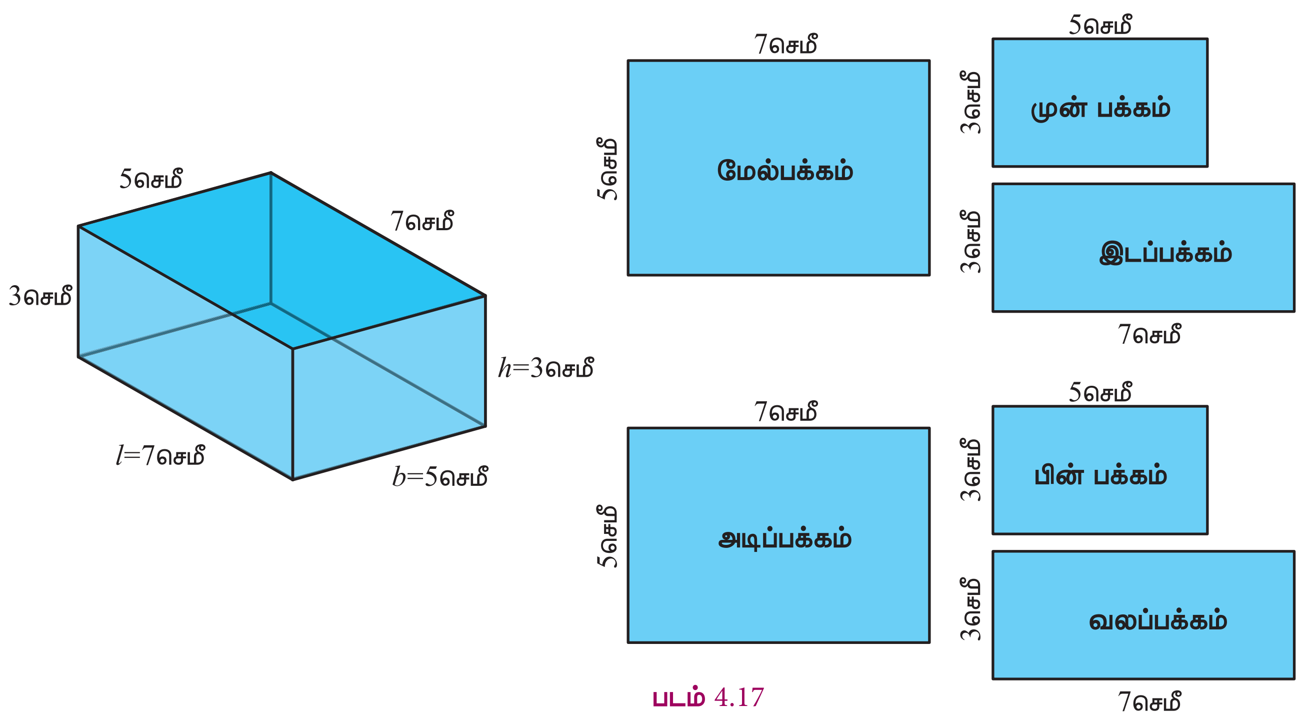
படம் 4.16

ஒரு கனச்செவ்வகமானது 6 முகங்கள், 12 விளிம்புகள் மற்றும் 8 உச்சிகளைக் கொண்டிருக்கும். பொதுவாக, கனச்செவ்வகமானது செவ்வக வடிவப் பெட்டியின் அமைப்பைக் கொண்டிருக்கும்.

ஒரு கனச் செவ்வகத்தின் மொத்தப்பரப்பு அல்லது மொத்தப்புறப்பரப்பு (Total Surface Area–TSA) என்பது அந்தக் கனச்செவ்வகத்தை மூடியுள்ள அனைத்து முகங்களின் பரப்புகளின் கூடுதல் ஆகும். இதிலிருந்து கனச்செவ்வகத்தின் மேல் மற்றும் அடிப்பக்கங்களின் பரப்புகளை நீக்கும்பொழுது கிடைக்கும் பரப்பானது பக்கப்பரப்பு (Lateral Surface Area – LSA) எனப்படுகிறது.

பட விளக்கம்

7 செமீ நீளம் (l), 5 செமீ அகலம் (b) மற்றும் 3 செமீ உயரம் (h) கொண்ட ஒரு கனச் செவ்வக வடிவிலுள்ள மூடிய பெட்டியின் மொத்தப்பரப்பு மற்றும் பக்கப்பரப்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.



படம் 4.17

மொத்தப்பரப்பு $= 2(7)(5) + 2(5)(3) + 2(7)(3)$

$= 70+30+42$

$= 142$ செமீ^{2}.

இது $2[(7)(5) + (5)(3) + (7)(3)]$ செமீ^{2} என்பதற்குச் சமம்.

பக்கப்பரப்பு $= 2(7)(3) + 2(5)(3)$

$= 42+30$

$= 72$ செமீ^{2}

இது $2(7+ 5)3$ செமீ^{2} என்பதற்குச் சமம்.

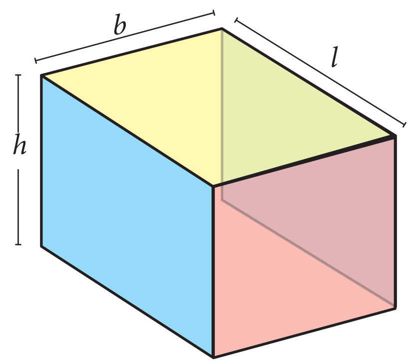
நாம் இப்பொழுது, கனச்செவ்வகத்தின் மொத்தப்பரப்பு மற்றும் பக்கப்பரப்புக்கான சூத்திரத்தை வருவிக்கத் தயாராவோம்.

படம் 4.18 இல் l, b மற்றும் h ஆகியன முறையே நீளம், அகலம் மற்றும் உயரத்தைக் குறிக்கின்றன.

(i) கனச்செவ்வகத்தின் மொத்தப்பரப்பு (TSA)

மேல் மற்றும் அடிப் பக்கங்களின் பரப்பு	$2 \times lb$
முன் மற்றும் பின்பக்கங்களின் பரப்பு	$2 \times bh$
இடது மற்றும் வலது பக்கங்களின் பரப்பு	$2 \times lh$

$= 2\ (lb + bh + lh)$ சதுர அலகுகள்.



படம் 4.18

(iii) கனச்செவ்வகத்தின் பக்கப்பரப்பு (LSA)

முன் மற்றும் பின்பக்கங்களின் பரப்பு	$2 \times bh$
இடது மற்றும் வலது பக்கங்களின் பரப்பு	$2 \times lh$

$= 2\ (l+b)h$ சதுர அலகுகள்.

அன்றாட வாழ்வியல் நிகழ்வுகளில் நாம் மொத்தப்பரப்பு (TSA) மற்றும் பக்கப்பரப்பு (LSA) ஆகிய கருத்துகளைப் பயன்படுத்துகிறோம். வெவ்வேறு நீளம், அகலம் மற்றும் உயரத்தை உடைய கனச்செவ்வக வடிவிலான ஓர் அறையை எடுத்துக்கொள்வோம். அந்த அறையின் தரைத்தளம் மற்றும் மேற்கூரையைத் தவிர்த்துச் சுவர்களின் பரப்பு மட்டும் நமக்குத் தேவையெனில், பக்கப்பரப்பைக் (LSA) காண வேண்டும். நமக்கு அறையின் முழு புறப்பரப்பையும் காண வேண்டுமெனில் மொத்தப்பரப்பைக் (TSA) கணக்கிட வேண்டும்.

ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரம் முறையே l, b மற்றும் h எனில்

(i) மொத்தப்பரப்பு $= 2\ (lb + bh + lh)$ சதுர அலகுகள்.

(ii) பக்கப்பரப்பு $= 2\ (l+b)h$ சதுர அலகுகள்.

குறிப்பு

(i) ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் அடிப்பக்க மற்றும் மேற்பக்கப்பரப்புகளானது உயரத்தோடு தொடர்புடையதல்ல. அடிப்பக்க மற்றும் மேற்பக்கபரப்புகளின் கூடுதல் $2lb$ ஆகும். அதாவது, மொத்தப்பரப்பான $2(lb+bh+lh)$ இலிருந்து $2lb$ ஐ நீக்க நமக்குப் பக்கப்பரப்பு கிடைக்கும்.

(ii) ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் புறப்பரப்பினைக் கணக்கிடும்பொழுது கொடுக்கப்பட்ட நீளம், அகலம் மற்றும் உயரத்தின் அளவுகள் ஒரே அலகுகளில் இருக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.6 ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் நீளம் 7.5 மீ, அகலம் 3 மீ, உயரம் 5 மீ எனில் அதன் மொத்தப்பரப்பு மற்றும் பக்கப்பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு

இங்கு கனச் செவ்வகத்தின் நீளம் $(l) = 7.5$ மீ, அகலம் $(b) = 3$ மீ மற்றும் உயரம் $(h) = 5$ மீ.

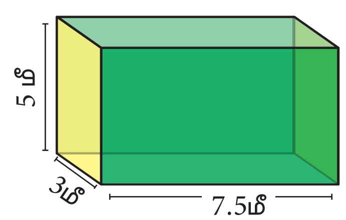
மொத்தப்பரப்பு $= 2(lb+bh+lh)$

$= 2\left[(7.5\times 3)+(3\times 5)+(7.5\times 5)\right]$

$= 2(22.5+15+37.5)$

$= 2\times 75$

$= 150$ மீ^{2}



படம் 4.19

பக்கப்பரப்பு $= 2(l+b)\times h$

$= 2(7.5+3)\times 5$

$= 2\times 10.5\times 5$

$= 105$ மீ^{2}

எடுத்துக்காட்டு 4.7 ஒரு மூடிய மரப்பெட்டியானது கனச்செவ்வக வடிவில் உள்ளது. அதன் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரம் முறையே 6 மீ, 1.5 மீ மற்றும் 300 செமீ ஆகும். இதற்கு வண்ணம் பூசுவதற்கு 1 சதுர மீட்டருக்கு ஆகும் செலவு ₹ 50 எனில், இதன் மொத்தப்புறப்பரப்பு மற்றும் வெளிப்பகுதி முழுவதும் வண்ணம் பூசுவதற்கு ஆகும் செலவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

இங்கு நீளம் $(l) = 6$ மீ, அகலம் $(b) = 1.5$ மீ மற்றும் உயரம் $(h) = \dfrac{300}{100}$ மீ $= 3$ மீ

மரப் பெட்டியானது கனச்செவ்வக வடிவில் உள்ளது.

மரப் பெட்டியின் வண்ணம் பூச வேண்டிய பகுதியின் பரப்பு

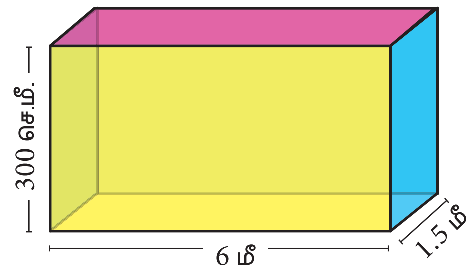
= கனச்செவ்வகத்தின் மொத்தப்புறப்பரப்பு

$= 2(lb + bh + lh)$

$= 2(6\times1.5+1.5\times3+6\times3)$

$= 2(9+4.5+18) \ = 2\times31.5$

$= 63$ ச.மீ



படம் 4.20

1 சதுர மீட்டருக்கு வண்ணம் பூசுவதற்கு ஆகும் செலவு ₹ 50.

ஆகவே, 63 சதுர மீட்டருக்கு வண்ணம் பூச ஆகும் செலவு $= 50\times63$ = ₹ 3150.

எடுத்துக்காட்டு 4.8 ஓர் அறையின் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரம் முறையே 25 மீ, 15 மீ மற்றும் 5 மீ ஆகும். அறையின் தரை மற்றும் நான்கு சுவர்களையும் புதுப்பிக்க 1 சதுர மீட்டருக்கு ₹80 வீதம் ஆகும் எனில், மொத்தச் செலவைக் காண்க.

தீர்வு

இங்கு அறையின் நீளம் (l) = 25 மீ, அகலம் (b) =15 மீ மற்றும் உயரம் (h) = 5 மீ என்க.

நான்கு சுவர்களின் பரப்பு = கனச்செவ்வகத்தின் பக்கப் பரப்பு

$= 2(l+b)\times h$

$= 2(25+15)\times5$

$= 80\times5 = 400$ ச.மீ

தரையின் பரப்பு $= l\times b$

$= 25\times15$

$= 375$ ச.மீ

படம் 4.21

புதுப்பிக்க வேண்டிய பகுதியின் பரப்பு

= (நான்கு சுவர்களின் பரப்பு + தரையின் பரப்பு)

$= (400+375) = 775$ ச.மீ

1 சதுர மீட்டருக்கு ₹80 வீதம் அறையைப் புதுப்பிக்க ஆகும் மொத்தச் செலவு $= 80\times775$

= ₹ 62,000

4.4.2 கனச்சதுரம் மற்றும் அதன் புறப்பரப்பு (Cube and its Surface Area)

கனச்சதுரம் (Cube): நீளம், அகலம் மற்றும் உயரம் ஆகிய அனைத்தும் சமமாக உள்ள ஒரு கனச்செவ்வகமே, கனச்சதுரம் ஆகும். அதாவது ஒரு கனச்சதுரமானது ஆறு சதுரப் பக்கங்களால் அடைபட்ட திண்மம் ஆகும். கனச்சதுரங்களுக்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள்:


பகடைகள்

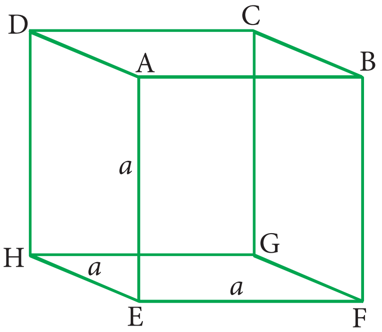

கனச் சதுர பனிக்கட்டிகள்


கனச் சதுர சர்க்கரைக் கட்டிகள்

படம் 4.22

கனச்செவ்வகத்தைப் போலவே, கனச்சதுரமும் 6 முகங்கள், 12 விளிம்புகள் மற்றும் 8 உச்சிகளைக் கொண்டிருக்கும்.

படம் 4.23 இல் உள்ளவாறு a அலகுகள் பக்க அளவு கொண்ட ஒரு கனச்சதுரத்தைக் கருதுவோம். இப்பொழுது



படம் 4.23

கனச்சதுரத்தின் மொத்தப்பரப்பு

$= (ABCD+EFGH+AEHD+BFGC+ABFE+CDHG)$

ஆகிய முகங்களின் பரப்புகளின் கூடுதல்

$= (a^2+a^2+a^2+a^2+a^2+a^2)$

$= 6a^2$ சதுர அலகுகள்

(iii) கனச்சதுரத்தின் பக்கப்பரப்பு

$= (AEHD+BFGC+ABFE+CDHG)$ ஆகிய முகங்களின் பரப்புகளின் கூடுதல்

$= (a^2+a^2+a^2+a^2)$

$= 4a^2$ சதுர அலகுகள்

ஒரு கனச்சதுரத்தின் பக்க அளவு a அலகுகள் எனில்,

(i) மொத்தப்பரப்பு (TSA) $= 6a^2$ சதுர அலகுகள்

(ii) பக்கப்பரப்பு (LSA) $= 4a^2$ சதுர அலகுகள்

சிந்தனைக் களம்

இதனுடன் தொடர்புடைய கனச் செவ்வகத்தின் சூத்திரங்களைக் கொண்டுஇந்தச்சூத்திரங்களைப் பெற முடியுமா?

எடுத்துக்காட்டு 4.9

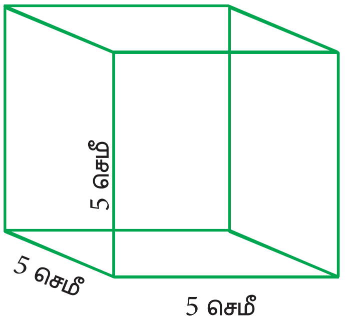
5 செமீ பக்க அளவு கொண்ட கனச்சதுரத்தின் மொத்தப்பரப்பு மற்றும் பக்கப்பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு

கனச்சதுரத்தின் பக்க அளவு (a) $= 5$ செமீ

மொத்தப்பரப்பு $= 6a^2 = 6(5^2) = 150$ ச.செமீ

பக்கப்பரப்பு $= 4a^2 = 4(5^2) = 100$ ச.செமீ



படம் 4.24

எடுத்துக்காட்டு 4.10

ஒரு கனச்சதுரத்தின் மொத்தப்புறப்பரப்பு 486 செமீ^{2} எனில் அதன் பக்கப் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு

இங்கு மொத்தப்புறப்பரப்பு $= 486$ செமீ^{2}

$$6a^2 = 486 \Rightarrow a^2 = \frac{486}{6}, \quad a^2 = 81 \Rightarrow a = 9$$

கனச்சதுரத்தின் பக்க அளவு $= 9$ செமீ

கனச்சதுரத்தின் பக்கப்பரப்பு $= 4a^2 = 4 \times 9^2 = 4 \times 81 = 324$ செமீ^{2}

எடுத்துக்காட்டு 4.11 7 செமீ பக்க அளவுள்ள ஒரே மாதிரியான இரண்டு கனச்சதுரங்கள் ஒன்றுடன் ஒன்று பக்கவாட்டில் இணைக்கப்படும்போது கிடைக்கும் புதிய கனச்செவ்வகத்தின் மொத்தப்பரப்பு மற்றும் பக்கப்பரப்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

கனச்சதுரத்தின் பக்க அளவு = 7 செமீ

புதிய கனச்செவ்வகத்தின் நீளம் (l) = 7+7 =14 செமீ

அகலம் (b) = 7 செமீ, உயரம் (h) = 7 செமீ

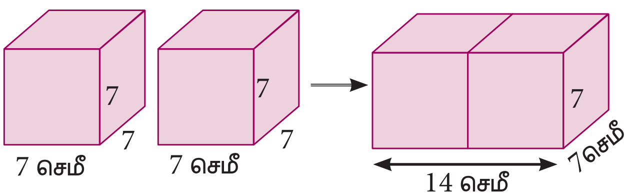
அதன் மொத்தப்பரப்பு $= 2(lb + bh + lh)$

$= 2[(14 \times 7) + (7 \times 7) + (14 \times 7)]$

$= 2(98 + 49 + 98)$

$= 2 \times 245$

$= 490$ செமீ^{2}



படம் 4.25

பக்கப்பரப்பு $= 2(l + b) \times h$

$= 2(14 + 7) \times 7$

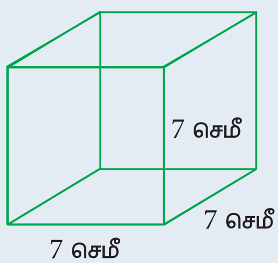
$= 2 \times 21 \times 7$

$= 294$ செமீ^{2}

சிந்தனைக் களம்

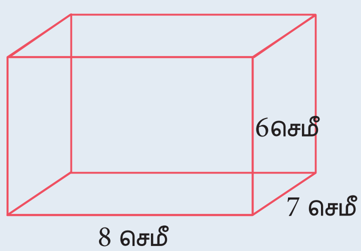
எந்தத் திண்மம் அதிக மொத்தப்பரப்பைப் பெற்றிருக்கும்?

(i)



படம் 4.26

(ii)



படம் 4.27

பயிற்சி 4.3

1. கீழ்க்காணும் அளவுகளைக் கொண்ட கனச்செவ்வகத்தின் மொத்தப்பரப்பு மற்றும் பக்கப் பரப்பைக் காண்க.

   (i) நீளம் = 20 செமீ, அகலம் = 15 செமீ, உயரம் = 8 செமீ

   (ii) நீளம் = 16 மீ, அகலம் = 12 மீ, உயரம் = 8.5 மீ

2. ஒரு கனச்செவ்வக வடிவப் பெட்டியின் அளவுகளானது 6 மீ$\times$ 400 செமீ $\times$ 1.5 மீ ஆகும். அப்பெட்டியின் வெளிப்புறம் முழுவதும் வண்ணம் பூசுவதற்கு 1 சதுர மீட்டருக்கு ₹22 வீதம் ஆகும் எனில், மொத்தச் செலவைக் காண்க.

3. ஒரு கூடத்தின் அளவு 10 மீ $\times$ 9 மீ $\times$ 8 மீ என்றவாறு உள்ளது. அக்கூடத்தின் சுவர்கள் மற்றும் மேற்கூரைக்கு வெள்ளையடிக்க ஒரு சதுர மீட்டருக்கு₹8.50 வீதம் ஆகும் மொத்தச் செலவைக் காண்க.

4. கீழ்க்கண்ட பக்க அளவைக் கொண்ட கனச்சதுரங்களின் மொத்தப்பரப்பு மற்றும் பக்கப்பரப்பைக் காண்க. (i) 8 மீ (ii) 21 செமீ (iii) 7.5 செமீ

5. (i) ஒரு கனச்சதுரத்தின் மொத்தப்பரப்பு 2400 செமீ^{2} எனில், அதன் பக்கப்பரப்பைக் காண்க.

   (ii) ஒரு கனச்சதுரத்தின் ஒரு முகத்தின் சுற்றளவு 36 செமீ எனில், அதன் மொத்தப்பரப்பைக் காண்க.

6. 6.5 மீ பக்க அளவுள்ள ஒரு கனச்சதுரக் கொள்கலனின் மேற்புறம் முழுவதும் வண்ணம் பூசப்படுகிறது. இதற்கு வண்ணம் பூச வேண்டிய பரப்பு மற்றும் 1 சதுர மீட்டருக்கு ₹24 வீதம் வண்ணம் பூச ஆகும் மொத்தச் செலவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

7. 4 செமீ பக்க அளவு உடைய ஒரே மாதிரியான மூன்று கனச்சதுரங்கள் ஒன்றோடு ஒன்று பக்கவாட்டில் இணைக்கப்படும்போது கிடைக்கும் புதிய கனச்செவ்வகத்தின் மொத்தப் பரப்பு மற்றும் பக்கப் பரப்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

F92XPV

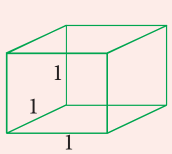
4.5 கனச்செவ்வகம் மற்றும் கனச்சதுரத்தின் கனஅளவு (Volume of Cuboid and Cube)

50 மிலி மற்றும் 100 மிலி அளவுள்ள பனிக்கூழ்களை (Ice cream) அனைவரும் சுவைத்து மகிழ்ந்திருப்போம். அப்படிப்பட்ட 100 மிலி பனிக் கூழ் குவளை (Ice cream cup) ஒன்றை எடுத்துக் கொள்வோம். அதாவது அந்தப் பனிக்கூழ் குவளையின் கொள்ளளவு அல்லது கனஅளவு 100 மிலி ஆகும். இப்படிப்பட்ட 100 மிலி அளவுள்ள எத்தனை குவளைகளைக் கொண்டு ஒரு கூசாவை (jug) நிரப்பலாம் எனக் கண்டறிக. இதில் பத்து 100 மிலி குவளைகளைக் கொண்டு ஒரு கூசாவை நிரப்ப முடியுமானால் அந்தக் கூசாவின் கொள்ளளவு அல்லது கன அளவு 1 லி ஆகும் (10$\times$100 மிலி =1000 மிலி =1 லி).

குறிப்பு

ஓரலகு கனச்சதுரம்:

1 அலகினைப் பக்க அளவாகக் கொண்ட கனச்சதுரம்



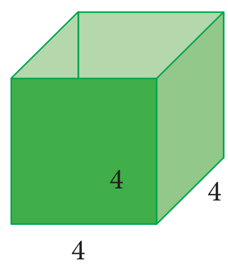
படம் 4.28

மேலும் இப்படிப்பட்ட எத்தனை கூசாக்களைக் கொண்டு ஒரு வாளியை நிரப்பலாம் எனச் சரிபார்க்கவும். இதுவே அந்த வாளியின் கொள்ளளவு அல்லது கனஅளவு ஆகும். இதேபோல் எந்தவொரு பொருளின் கன அளவையும் அல்லது கொள்ளளவையும் நம்மால் கணக்கிட இயலும்.

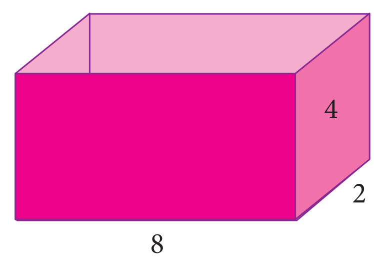
ஒரு முப்பரிமாண உருவம் புறவெளியில் எவ்வளவு இடத்தை அடைத்துக் கொள்கிறதோ, அதுவே அந்தப் பொருளின் கன அளவு ஆகும். கன சென்டிமீட்டர் (செமீ^{3}) மற்றும் கன மீட்டர் (மீ^{3}) என்பன கன அளவை அளக்க உதவும் சில அலகுகள் ஆகும்.

படம் 4.29 மற்றும் படம் 4.30 இல் உள்ளவாறு இரண்டு உள்ளீடற்ற திண்மங்களைக் கருதுவோம். ஒரு பொருளின் கன அளவு என்பது அப்பொருளை முழுவதுமாக நிரப்ப எத்தனை ஓரலகு கன சதுரங்கள் தேவைப்படுகின்றன என்பதிலிருந்து பெறப்படுகிறது. இவ்வாறு ஓர் அளவு கொண்டு ஒரு பொருளின் சரியான கன அளவைத் தீர்மானிப்பது எளிதான செயலாகும்.

படம் 4.29 மற்றும் படம் 4.30 ஐ உற்று நோக்குக. எந்த உருவம் அதிக கன அளவைக் கொண்டுள்ளது? இதை ஆராயும்போது, ஒவ்வொன்றையும் முழுவதுமாக நிரப்ப ஒரே அளவான ஓரலகு கனச்சதுரங்கள் தேவைப்படுகின்றன என்பதை அறிய முடிகிறது. ஒவ்வொன்றையும் முழுவதுமாக நிரப்ப 64 ஓரலகு கனச்சதுரங்கள் தேவைப்படுகின்றன. அதாவது ஒவ்வொன்றின் கன அளவும் 64 கன அலகுகள் ஆகும்.



படம் 4.29

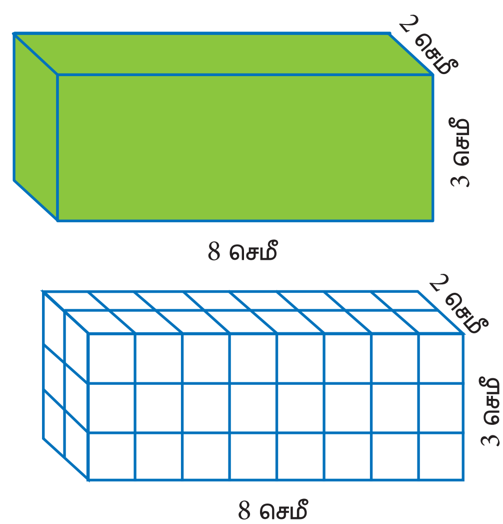


படம் 4.30

இந்தக் கனச்செவ்வகத்தின் (படம் 4.31) கன அளவை எவ்வாறு காணலாம்?

இந்தக் கனச்செவ்வகத் திண்மம் முழுமையையும் ஓரலகு கனச்சதுரத்தால் நிரப்புவது என்பது இயலாத செயல். எனவே இதை நிரப்புவதற்குப் பதிலாக இதையே ஓரலகு கனச்சதுரங்களாகப் பிரித்து அவ்வாறு பிரித்தவற்றை எண்ணி கண்டறியலாம்.

இதை ஓரலகு கனச்சதுரங்களாகப் பிரிக்காமல் செய்ய இயலுமா? ஆம். படம் 4.31 இல் காட்டியுள்ளவாறு சூழ்நிலையைப் படமாக மாற்றி பின் எத்தனை ஒரு சென்டிமீட்டர் கனச்சதுரங்கள் தேவை என்பதைக் கணக்கிடலாம்.



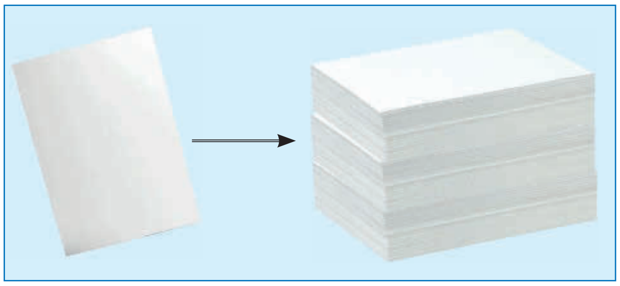
படம் 4.31

இங்கு தேவையான ஒரு சென்டிமீட்டர் கனச் சதுரங்கள் $8\times3\times2=48$ ஆகும். அதாவது இந்த கனச் செவ்வகத்தின் கன அளவு 48 செமீ^{3} ஆகும்.

ஓரலகு கனச்சதுரங்களை எண்ணுதல் என்பது அந்தத் திண்மத்தின் அடிப்பக்கப் பரப்போடு தொடர்புடையது என்பதை நாம் அறிய முடிகிறது. மேற்கண்ட கனச்செவ்வகத்தில் அடிப்பக்கப் பரப்பு

என்பது 8×2 செமீ^{2}. இதை உயரம் 3 செமீ உடன் பெருக்கக் கன அளவு கிடைக்கிறது. ஆகவே கனச்செவ்வகத்தின் கன அளவு என்பது அதன் அடிப்பக்க பரப்பு மற்றும் உயரத்தைப் பெருக்கக் கிடைப்பதாகும்.

இதை அன்றாட வாழ்க்கைச் சூழலில் உள்ள ஓர் எடுத்துக்காட்டு மூலம் எளிதாகப் புரிந்து கொள்ளலாம். நீங்கள் A4 தாள் கட்டுகளைப் பார்த்திருப்பீர்கள். அதில் ஒவ்வொரு தாளும் செவ்வக வடிவமுடையன. மேலும் lb பரப்புடையன. இதை ஒன்றின் மீது மற்றொன்றாக அடுக்கும்போது இது கனச்செவ்வக வடிவக் கட்டாக மாறுகிறது. இங்கு h முறை lb ஆனது கனச்செவ்வகத்தை உருவாக்குகிறது (படம் 4.32).



படம். 4.32

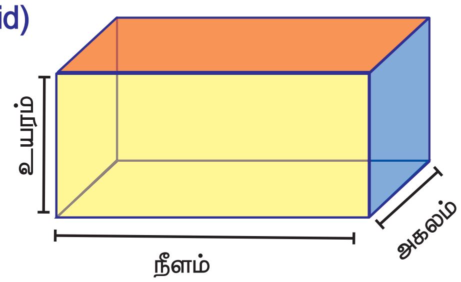
4.5.1 கனச்செவ்வகத்தின் கன அளவு (Volume of a Cuboid)

ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரம் முறையே l, b மற்றும் h அலகுகள் என்க. பிறகு,

கனச்செவ்வகத்தின் கனஅளவு

V = (கனச்செவ்வகத்தின் அடிப்பரப்பு) $\times$ உயரம்

$= (l \times b) \times h = lbh$ கன அலகுகள்



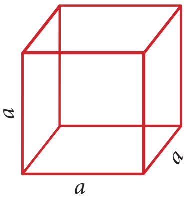
படம் 4.33

குறிப்பு

கனச்செவ்வகத்தின் கன அளவைக் காணும்போது, நீளம், அகலம் மற்றும் உயரத்தின் அளவுகள் ஒரே அலகுகளில் இருக்க வேண்டும்

4.5.2 கனச்சதுரத்தின் கன அளவு (Volume of a Cube)

'a' அலகு பக்க அளவு கொண்ட ஒரு கனச் சதுரத்தின் கன அளவைக் காண்பது எளிதானது. கனச் செவ்வகத்தின் கன அளவிற்கான சூத்திரத்தில் $l = b = h = a$ எனப் பிரதியிட, நமக்குக் கனச் சதுரத்தின் கன அளவானது a^3 கன அலகுகள் எனக் கிடைக்கிறது.



படம் 4.34

ஒரு கனச்சதுரத்தின் பக்க அளவு 'a' அலகுகள் எனில், அதன் கன அளவு $(V) = a^3$ கன அலகுகள்.

குறிப்பு

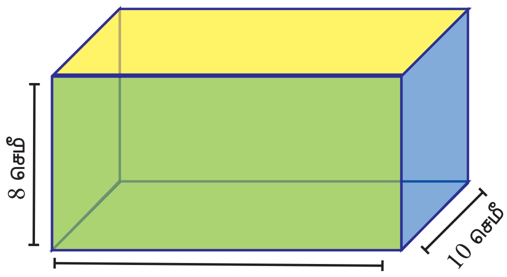
எந்த இரு கனச்சதுரங்களுக்கும் கீழ்க்கண்ட முடிவுகள் பொருந்தும்.

(i) புறப்பரப்புகளின் விகிதம் = (பக்கங்களின் விகிதம்)^2

(ii) கன அளவுகளின் விகிதம் = (பக்கங்களின் விகிதம்)^3

(iii) (புறப்பரப்புகளின் விகிதம்)^3 = (கன அளவுகளின் விகிதம்)^2

எடுத்துக்காட்டு 4.12 ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரம் முறையே 120 மிமீ, 10 செமீ மற்றும் 8 செமீ. இதே அளவுகள் கொண்ட 10 கனச்செவ்வகங்களின் கன அளவைக் காண்க.



படம் 4.35

தீர்வு

இங்கு அகலம் மற்றும் உயரமானது செ.மீ இல் தரப்பட்டுள்ளன. ஆகையால் நீளத்தையும் செ.மீ இல் மாற்றலாம்.

இங்கு, l = 120 மிமீ $= \frac{120}{10} = 12$ செமீ, b = 10 செமீ, h = 8 செமீ

ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் கன அளவு $= l \times b \times h$

$= 12 \times 10 \times 8$

= 960 செமீ^{3}

இதைப் போன்ற 10 கனச்செவ்வகங்களின் கன அளவு $= 10 \times 960$

= 9600 செமீ^{3}

எடுத்துக்காட்டு 4.13 ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரத்தின் விகிதம் 7:5:2 என்க. அதன் கனஅளவு 35840 செமீ^{3} எனில் அதன் பக்க அளவுகளைக் காண்க.

தீர்வு

கனச்செவ்வகத்தின் பக்க அளவுகள் $l = 7x$, $b = 5x$ மற்றும் $h = 2x$ என்க.

இங்குக் கனச்செவ்வகத்தின் கனஅளவு

= 35840 செமீ^{3}

$l \times b \times h = 35840$

$(7x)(5x)(2x) = 35840$

$70x^3 = 35840$

$x^3 = \frac{35840}{70}$

$x^3 = 512$

$x = \sqrt[3]{8 \times 8 \times 8}$

$x = 8$ செமீ

கனச்செவ்வகத்தின் நீளம் $= 7x = 7 \times 8 = 56$ செமீ

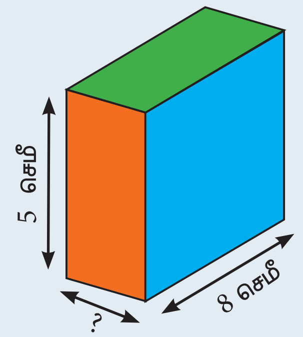
கனச்செவ்வகத்தின் அகலம் $= 5x = 5 \times 8 = 40$ செமீ

கனச்செவ்வகத்தின் உயரம் $= 2x = 2 \times 8 = 16$ செமீ

சிந்தனைக் களம்

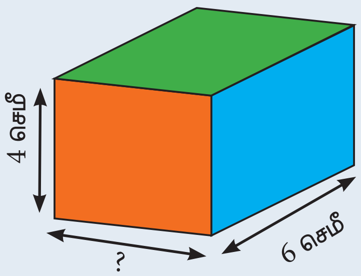
பின்வரும் ஒவ்வொரு கனச் செவ்வகமும் 120 செமீ^{3} கன அளவு உடையன எனில், ஒவ்வொன்றிலும் விடுபட்ட அளவினைக் காண்க

(i)



படம் 4.36

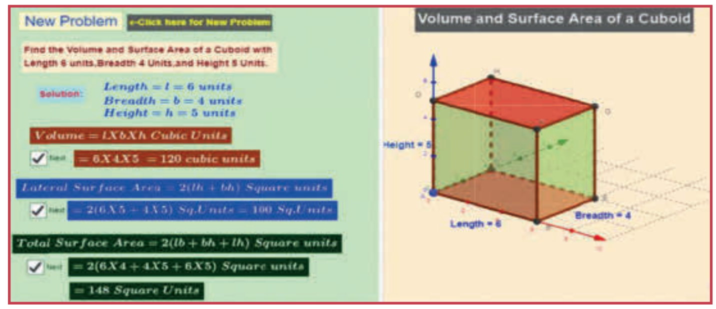
(ii)



படம் 4.37

இணையச் செயல்பாடு

இறுதியில்
கிடைக்கப்பெறும் படம்



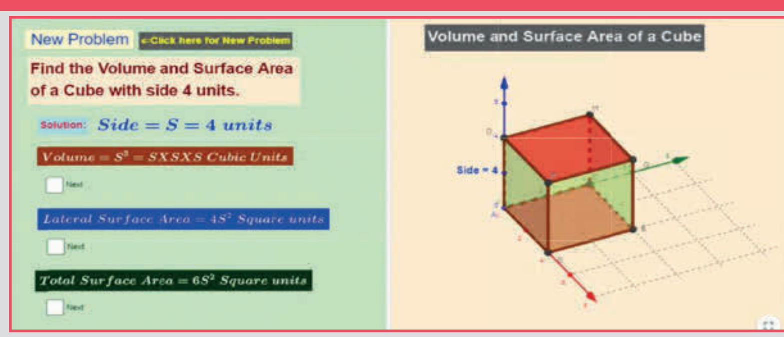
படி – 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி, GeoGebra வின் "Mensuration" பக்கத்திற்குச் செல்க. CUBE மற்றும் CUBOID ஆகிய இரண்டு தலைப்புகளில் பணித்தாள்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

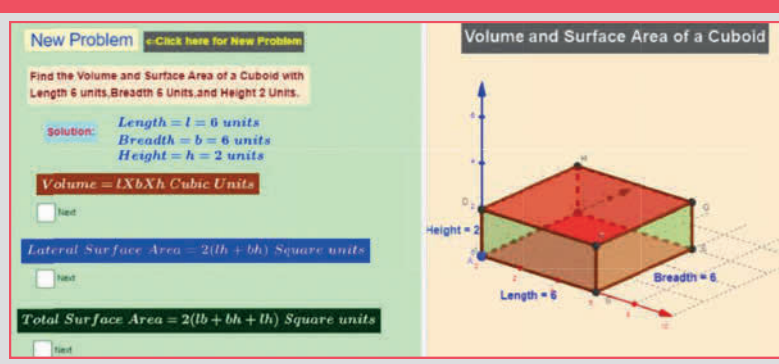
படி - 2

"New Problem" என்பதைச் சொடுக்கவும். அதில் Volume, Lateral surface மற்றும் Total surface area ஆகியவை கேட்கப்பட்டிருக்கும். கணக்குகளைச் செய்து பார்த்து, விடைகளைப் பொருத்தமான தேர்வுக்கட்டங்களைச் சொடுக்கி, சரி பார்க்கவும்.

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

அளவியல் : https://ggbm.at/czsby7ym or Scan the QR Code.

B563_9_MAT_TM_T3

எடுத்துக்காட்டு 4.14 ஒரு மீன் தொட்டியானது 3.8 மீ × 2.5 மீ × 1.6 மீ என்ற அளவுகளை உடையது. இந்தத் தொட்டியானது எத்தனை லிட்டர் தண்ணீர் கொள்ளும்?

தீர்வு

மீன் தொட்டியின் நீளம் l $=3.8$ மீ

மீன் தொட்டியின் அகலம் b $=2.5$ மீ

மீன் தொட்டியின் உயரம் h $=1.6$ மீ

மீன் தொட்டியின் கனஅளவு $= l \times b \times h$

$= 3.8 \times 2.5 \times 1.6$

$= 15.2$ மீ^{3}

$= 15.2 \times 1000$ லிட்டர்

$= 15200$ லிட்டர்

படம் 4.38

குறிப்பு

1 செமீ^{3} $=1$ மிலி, 1000 செமீ^{3} $=1$ லிட்டர், 1மீ^{3} $=1000$ லிட்டர்

எடுத்துக்காட்டு 4.15 ஓர் இனிப்புகள் வைக்கும் பெட்டியானது 22 செமீ × 18 செமீ × 10 செமீ என்ற அளவில் உள்ளது. இதனை 1 மீ × 88 செமீ × 63 செமீ அளவுள்ள ஓர் அட்டைப் பெட்டியில் எத்தனை அடுக்கலாம்?

தீர்வு

இங்கு இனிப்புப் பெட்டியின் நீளம் (l) = 22செமீ, அகலம் (b) = 18செமீ, உயரம் (h) = 10செமீ.

ஓர் இனிப்புப் பெட்டியின் கன அளவு $= l \times b \times h$

$= 22 \times 18 \times 10$ செமீ^{3}

அட்டைப் பெட்டியின் நீளம் (l) = 1மீ= 100 செமீ,

அகலம் (b) = 88 செமீ, உயரம் (h) = 63 செமீ.

அட்டைப் பெட்டியின் கனஅளவு $= l \times b \times h$

$= 100 \times 88 \times 63$ செமீ^{3}

படம் 4.39

அட்டைப் பெட்டியில் அடுக்க இயலும் இனிப்புப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை

$= \dfrac{\text{அட்டைப் பெட்டியின் கனஅளவு}}{\text{இனிப்புப் பெட்டியின் கன அளவு}}$

$= \dfrac{100 \times 88 \times 63}{22 \times 18 \times 10}$

$= 140$ பெட்டிகள்

எடுத்துக்காட்டு 4.16 10 செமீ பக்க அளவுள்ள கனச்சதுரத்தின் கனஅளவைக் காண்க.

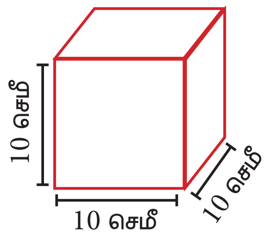
தீர்வு

இங்கு பக்க அளவு a $= 10$ செமீ

கனச்சதுரத்தின் கனஅளவு $= a^3$

$= 10 \times 10 \times 10$

$= 1000$ செமீ^{3}



படம். 4.40

குறிப்பு

கனச்சதுரத்தின் பக்க அளவிற்கும், கன அளவிற்கும் இடையிலான தொடர்பு

கனச்சதுரத்தின் பக்க அளவு (அலகுகளில்)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	எண்
கனச்சதுரத்தின் கன அளவு (அலகுகளில்)	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	அதன் கனம்

எடுத்துக்காட்டு 4.17 ஒரு கனச்சதுரத்தின் மொத்தப்பரப்பு 864 செமீ^{2} எனில் அதன் கன அளவைக் காண்க.

தீர்வு

கனச்சதுரத்தின் பக்க அளவு a என்க.

இங்கு மொத்தப்பரப்பு $= 864$ செமீ^{2}

$$6a^2 = 864$$

$$a^2 = \frac{864}{6}$$

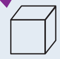
$$a^2 = 144$$

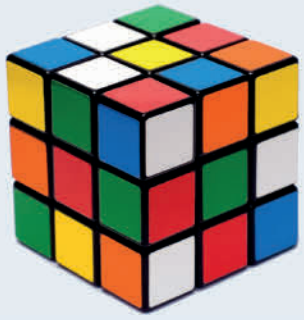
பக்க அளவு $(a) = 12$ செமீ

இப்பொழுது, கனச்சதுரத்தின் கன அளவு $= a^3$

$= 12^3 = 12 \times 12 \times 12 = 1728$ செமீ^{3}

சிந்தனைக் களம்

இங்கு  =1கன அலகு எனில் தரப்பட்டுள்ள திண்மத்தின் கன அளவு என்ன?



படம் 4.41

எடுத்துக்காட்டு 4.18 ஒரு கனச்சதுர வடிவ நீர்த் தொட்டியானது 64,000 லிட்டர் நீர் கொள்ளும் எனில், அந்தத் தொட்டியின் பக்கத்தின் நீளத்தை மீட்டரில் காண்க.

தீர்வு

நீர்த் தொட்டியின் பக்க அளவு a என்க.

இங்கு நீர்த் தொட்டியின் கன அளவு $= 64,000$ லிட்டர்

அதாவது, $a^3 = 64,000 = \frac{64000}{1000}$ [ஏனெனில், 1000 லிட்டர் = 1மீ^{3}]

$$a^3 = 64 \text{ மீ}^3$$

இப்பொழுது, $a = \sqrt[3]{64} = 4$ மீ

அந்த நீர்த் தொட்டியின் பக்கத்தின் நீளம் 4 மீட்டர் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.19 உலோகத்தால் ஆன ஒரு கனச்சதுரத்தின் பக்க அளவு 12 செமீ. அதனை உருக்கி 18 செமீ நீளம் மற்றும் 16 செமீ அகலம் உள்ள ஒரு கனச்செவ்வகம் உருவாக்கப்படுகிறது. அந்தக் கனச்செவ்வகத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

தீர்வு

கனச்சதுரம்	கனச்செவ்வகம்
பக்க அளவு $(a) = 12$ செமீ	நீளம் $(l) = 18$செமீ
	அகலம் $(b) = 16$செமீ
	உயரம் $(h) = ?$

இங்கு, கனச்செவ்வகத்தின் கனஅளவு = கனச்சதுரத்தின் கனஅளவு

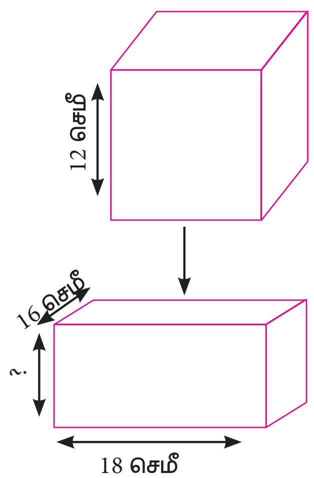
$$l \times b \times h = a^3$$

$$18 \times 16 \times h = 12 \times 12 \times 12$$

$$h = \frac{12 \times 12 \times 12}{18 \times 16}$$

$$h = 6 \text{ செமீ}$$

எனவே, கனச்செவ்வகத்தின் உயரம் 6 செமீ ஆகும்.

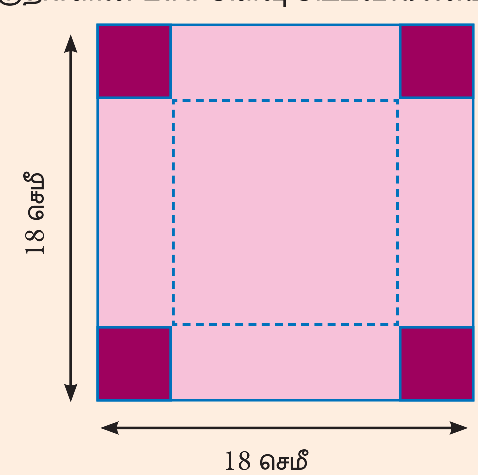


படம் 4.42

செயல்பாடு - 3

18 செமீ×18 செமீ அளவுள்ள ஒரு சதுர வடிவத்தாளை (Paper / Chart paper) எடுத்துக் கொள்ளவும். அதன் ஒவ்வொரு மூலையிலிருந்தும் ஒரே அளவுள்ள சதுரப் பகுதிகளை நீக்கவும். பிறகு தாளில் உள்ள மடிப்புகளை மடித்து ஒரு திறந்த கனச்செவ்வகப் பெட்டி செய்யவும். பிறகு ஒவ்வொரு கனச்செவ்வகப் பெட்டியின் அளவுகளையும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையில் குறிக்கவும். மேலும் ஒவ்வொரு பெட்டிக்கும் அதன் கன அளவினைக் கண்டுபிடித்து அட்டவணையை நிரப்பவும். ஒவ்வொரு முறையும் நீக்க வேண்டிய சதுரப் பகுதிகளின் பக்க அளவு அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

வ. எண்	மூலைகளில் நீக்கும் சதுரத்தின் பக்க அளவு	பெட்டியின் அளவுகள்			கன அளவு
		l	b	h	V
1.	1 செமீ				
2.	2 செமீ				
3.	3 செமீ				
4.	4 செமீ				
5.	5 செமீ				



படம் 4.43

மேற்காணும் அட்டவணையை உற்றுநோக்கி, பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடையளிக்கவும்:

(i) இங்கு கிடைக்கக்கூடிய மிகப் பெரிய கன அளவு என்ன?

(ii) இந்த மிகப் பெரிய கன அளவு கிடைக்க மூலைகளில் நீக்கப்பட வேண்டிய சதுரத்தின் பக்க அளவு என்ன?

பயிற்சி 4.4

1. கீழ்க்கண்ட அளவுகளைக் கொண்ட கனச்செவ்வகத்தின் கன அளவைக் காண்க.
   (i) நீளம் $= 12$ செமீ, அகலம் $= 8$ செமீ, உயரம் $= 6$ செமீ
   (ii) நீளம் $= 60$ மீ, அகலம் $= 25$ மீ, உயரம் $= 1.5$ மீ
   (iii) நீளம் $= 2$ மீ , அகலம் $= 60$ செமீ, உயரம் $= 72$ செமீ

2. ஒரு தீப்பெட்டியின் அளவுகள் 6 செமீ $\times$ 3.5 செமீ $\times$ 2.5 செமீ என உள்ளது. இதே அளவுகளைக் கொண்ட 12 தீப்பெட்டிகள் கொண்ட ஒரு கட்டின் கனஅளவைக் காண்க.

3. ஒரு சாக்லேட் பெட்டியின் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரம் முறையே 5:4:3 என்ற விகிதத்தில் உள்ளது. அதன் கன அளவு 7500 செமீ^{3} எனில் அதன் பக்க அளவுகளைக் காண்க.

4. ஒரு குளத்தின் நீளம், அகலம் மற்றும் ஆழம் முறையே 20.5 மீ, 16 மீ மற்றும் 8 மீ எனில், அந்தக் குளத்தின் கொள்ளளவை லிட்டரில் காண்க.

5. ஒரு செங்கல்லின் அளவுகள் 24 செமீ$\times$ 12 செமீ $\times$ 8 செமீ ஆகும். 20 மீ நீளம், 48 செமீ அகலம் மற்றும் 6 மீ உயரமுள்ள ஒரு சுவர் எழுப்புவதற்கு இது போன்ற எத்தனை செங்கற்கள் தேவை?

6. ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் கன அளவு 1800 செமீ^{3}. அதன் நீளம் 15 செமீ மற்றும் உயரம் 12 செமீ எனில் அதன் அகலத்தைக் காண்க

7. ஒரு கொள்கலனின் (container) கன அளவு 1440 மீ^{3}. அதன் நீளம் மற்றும் அகலம் முறையே 15 மீ மற்றும் 8 மீ எனில் அதன் உயரத்தைக் காண்க.

8. பின்வரும் பக்க அளவைக் கொண்ட கனச்சதுரத்தின் கனஅளவைக் காண்க.
   (i) 5 செமீ (ii) 3.5 மீ (iii) 21 செமீ

9. ஒரு கனச்சதுரத்தின் மொத்தப்பரப்பு 726 செமீ^{2} எனில் அதன் கன அளவைக் காண்க.

10. ஒரு கனச்சதுர வடிவிலான பால் தொட்டியானது 1,25,000 லிட்டர் கொள்ளளவைக் கொண்டுள்ளது. அத்தொட்டியின் பக்க நீளத்தை மீட்டரில் காண்க.

11. 15 செமீ பக்க அளவுள்ள ஓர் உலோகத்தால் ஆன கனச்சதுரமானது உருக்கப்பட்டு ஒரு கனச்செவ்வகமாக உருவாக்கப்படுகிறது. கனச்செவ்வகத்தின் நீளம் மற்றும் உயரம் முறையே 25 செமீ மற்றும் 9 செமீ எனில் அதன் அகலத்தைக் காண்க.

12. ஒரு நீர்த் தொட்டியின் அளவுகள் 12 மீ $\times$ 10 மீ $\times$ 8 மீ என உள்ளது. அந்தத் தொட்டியில் நீரானது 5 மீ வரை நிரம்பியிருக்கிறது எனில் அந்தத் தொட்டியை முழுவதுமாக நிரப்புவதற்கு மேலும் எவ்வளவு நீர் தேவை?

13. ஒரு மூடிய கனச்செவ்வக மரப் பெட்டியின் வெளிப்புற அளவுகள் 30 செமீ × 25 செமீ × 20 செமீ ஆகும். அந்தப் பெட்டியைச் சுற்றிலும் உள்ள மரத்தின் தடிமன் 2 செமீ எனில் அந்தப் பெட்டியைச் செய்யப் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள மரத்தின் கனஅளவைக் காண்க

பயிற்சி 4.5

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. a, b மற்றும் c என்ற பக்க அளவுகள் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பு

   (1) $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}$ சதுர அலகுகள் (2) $\sqrt{s(s+a)(s+b)(s+c)}$ சதுர அலகுகள்

   (3) $\sqrt{s(s\times a)(s\times b)(s\times c)}$ சதுர அலகுகள் (4) $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ சதுர அலகுகள்

2. 15 செமீ, 20 செமீ மற்றும் 25 செமீ பக்க அளவுகள் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தின் அரைச் சுற்றளவு

   (1) 60 செமீ (2) 45 செமீ (3) 30 செமீ (4) 15 செமீ

3. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்க அளவுகள் 3 செமீ, 4 செமீ மற்றும் 5 செமீ எனில் அதன் பரப்பளவு

   (1) 3 செமீ^{2} (2) 6 செமீ^{2} (3) 9 செமீ^{2} (4) 12 செமீ ^{2}

4. ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் சுற்றளவு 30 செமீ எனில், அதன் பரப்பளவு

   (1) $10\sqrt{3}$ செமீ^{2} (2) $12\sqrt{3}$ செமீ^{2} (3) $15\sqrt{3}$ செமீ^{2} (4) $25\sqrt{3}$ செமீ^{2}

5. ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் மொத்தப்பரப்பு

   (1) $4a^2$ சதுர அலகுகள் (2) $6a^2$ சதுர அலகுகள்

   (3) $2(l+b)h$ சதுர அலகுகள் (4) $2(lb+bh+lh)$ சதுர அலகுகள்

6. 12 செமீ பக்க அளவுள்ள ஒரு கனச்சதுரத்தின் பக்கப்பரப்பு

   (1) 144 செமீ^{2} (2) 196 செமீ^{2} (3) 576 செமீ^{2} (4) 664 செமீ^{2}

7. ஒரு கனச்சதுரத்தின் பக்கப்பரப்பு 600 செமீ^{2} எனில், அதன் மொத்தப்பரப்பு

   (1) 150 செமீ^{2} (2) 400 செமீ^{2} (3) 900 செமீ^{2} (4) 1350 செமீ^{2}

8. 10 செமீ × 6 செமீ × 5 செமீ அளவுள்ள ஒரு கனச்செவ்வகப் பெட்டியின் மொத்தப்பரப்பு

   (1) 280 செமீ^{2} (2) 300 செமீ^{2} (3) 360 செமீ^{2} (4) 600 செமீ^{2}

9. இரு கனச்சதுரங்களின் பக்கங்களின் விகிதமானது 2:3 எனில் அதன் புறப்பரப்புகளின் விகிதங்கள்

   (1) 4:6 (2) 4:9 (3) 6:9 (4) 16:36

10. ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் கன அளவு 660 செமீ^{3} மற்றும் அதன் அடிப்பரப்பு 33 செமீ^{2} எனில் அதன் உயரம்

   (1) 10 செமீ (2) 12 செமீ (3) 20 செமீ (4) 22 செமீ

11. 10 மீ $\times 5$ மீ $\times 1.5$ மீ அளவுள்ள ஒரு நீர்த் தொட்டியின் கொள்ளளவு

(1) 75 லிட்டர் (2) 750 லிட்டர் (3) 7500 லிட்டர் (4) 75000 லிட்டர்

12. 5 மீ $\times 3$ மீ $\times 2$ மீ அளவுள்ள ஒரு சுவர் எழுப்ப, 50 செமீ $\times 30$ செமீ $\times$ 20 செமீ அளவு கொண்ட செங்கற்கள் எத்தனை தேவை?

(1) 1000 (2) 2000 (3) 3000 (4) 5000

F9BTRI

நினைவில் கொள்க

- a, b மற்றும் c என்பன ஒரு முக்கோணத்தின் பக்க அளவுகள் எனில் முக்கோணத்தின் பரப்பு $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ சதுர அலகுகள். இங்கு $s=\dfrac{a+b+c}{2}$.
- ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரம் முறையே l, b மற்றும் h எனில்,

  (i) மொத்தப்பரப்பு(TSA) $=2(lb+bh+lh)$ சதுர அலகுகள்

  (ii) பக்கப்பரப்பு (LSA) $=2(l+b)h$ சதுர அலகுகள்
- ஒரு கனச்சதுரத்தின் பக்க அளவு a அலகுகள் எனில் அதன்

  (i) மொத்தப்பரப்பு (TSA) $=6a^2$ சதுர அலகுகள்

  (ii) பக்கப்பரப்பு(LSA) $=4a^2$ சதுர அலகுகள்
- ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரம் முறையே l, b மற்றும் h எனில், கனச் செவ்வகத்தின் கன அளவு $(V) = lbh$ கன அலகுகள்
- ஒரு கனச்சதுரத்தின் பக்க அளவு a அலகுகள் எனில், கனச்சதுரத்தின் கன அளவு $(V) = a^3$ கன அலகுகள்

5

நிகழ்தகவு

நிகழ்தகவுக் கோட்பாடு என்பது நல்லறிவைக் கணக்கீடாகச் சுருக்குவதேயன்றி வேறொன்றுமில்லை - பியரி சைமன் லாப்லாஸ்

ரிச்சர்ட் வான் மைசஸ்
(கி.பி. (பொ.ஆ.) 1883-1953)

நிகழ்தகவிற்கான பண்டைய, பட்டறி அல்லது புள்ளியியல் அணுகுமுறையை ஆர்.எப். பிசர் மற்றும் ஆர். வான் மைசஸ் ஆகியோர் விரிவாக்கம் செய்தனர். ஆர். வான் மைசஸ் என்பவரால் கூறுவெளி என்ற கருத்து அறிமுகப்படுத்தப்பட்டது. இக்கருத்து, அளவீட்டுக் கொள்கையை அடிப்படையாகக் கொண்டு நிகழ்தகவியல் என்ற கணிதக் கருத்தியலை உண்டாக்க ஏதுவாக அமைந்தது. சென்ற நூற்றாண்டில் பற்பலப் படைப்பாளிகளின் முயற்சியால் இந்த அணுகுமுறை படிப்படியாக வளர்ந்தது.

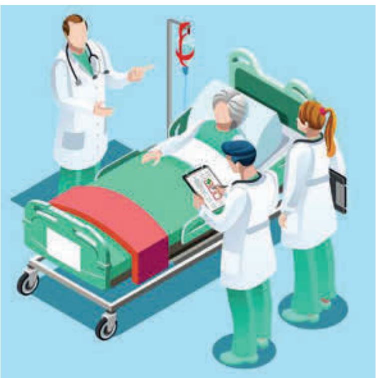
கற்றல் விளைவுகள்

- நிகழ்தகவின் கருத்தைப் புரிந்துகொள்ளுதல்
- தொன்மை நிகழ்தகவு மற்றும் சோதனை நிகழ்தகவு ஆகியவற்றைப் புரிந்துகொள்ளுதல்
- நிகழ்தகவில் நிகழ்ச்சிகளின் பல்வேறு வகைகளைப் பற்றி அறிந்துகொள்ளுதல்

F9KPT6

5.1 அறிமுகம்

நம் வாழ்க்கையின் பல்வேறு சூழல்களில் நிகழ்தகவு இடம் பெற்றுள்ளது. அது எவ்வாறு சில உறுதியற்ற பண்புகளைக் கொண்டுள்ளது எனப் பார்க்கலாம்.



மருத்துவமனையில் அனுமதிக்கப்பட்ட ஒரு நோயாளிக்கு உயிர் காக்கும் மருந்து ஒன்றைக் கொடுக்க இருப்பதாகக் கொள்வோம்.நோயாளியின் உறவினர்கள் அந்த மருந்து எவ்வாறு வேலை செய்யும் என்பதைப் பற்றிய நிகழ்தகவை அறிய விரும்பலாம். 100 நோயாளிகளுக்குக் கொடுக்கப்பட்டதில் 80இக்கும் மேற்பட்ட நோயாளிகளுக்கு மருந்து சிறப்பாக வேலை செய்துள்ளது என மருத்துவர் கூறினால் அவர்கள் மகிழ்ச்சி அடைவார்கள். இந்த வெற்றிச் சதவீதமே நிகழ்தகவு என்ற கருத்தின் விளக்கமாகும். இது

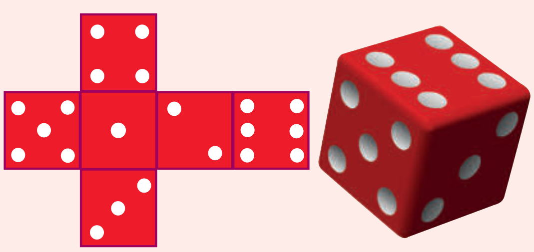
நிகழ்வுகளின் நிகழ்வெண்ணை அடிப்படையாகக் கொண்டது. உறுதியற்ற சூழலில் ஒரு முடிவை எடுப்பதற்கு (அடைவதற்கு) இது உதவி செய்கிறது. ஆகவே நிச்சயமற்றவற்றைக் கணக்கிடும் அல்லது அளவிடும் வழி முறையே நிகழ்தகவு ஆகும்.

சீட்டாட்டக் கட்டின் 52 சீட்டுகளைப் பற்றி நாம் நன்கு அறிந்திருக்கிறோம். அது ஹார்ட், கிளாவர், டைமண்ட், ஸ்பேடு (Hearts ♥, Clover ♣, Diamonds ♦, Spades ♠) என நான்கு வகையாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு வகையும் 13 சீட்டுகளைக் கொண்டது. இதில் ஏதேனும் ஒரு வகையைத் தேர்ந்தெடுப்போம் (ஸ்பேடு எனக் கொள்க). அவற்றை நன்கு கலைத்து அதில் இருந்து ஏதேனும் ஒரு சீட்டை எடுக்க. அது இராசா சீட்டாக இருக்க வாய்ப்பு என்ன? நீங்கள் இராசா சீட்டிற்குப் பதிலாக ஓர் ஏஸ் சீட்டை விரும்புகிறீர்கள் எனில் உங்கள் வாய்ப்பு மாறுமா? இரண்டு வகைகளிலுமே உங்களுக்கான வாய்ப்பு 13 இல் 1 என்பதை உடனடியாகக் காண முடிகிறது (ஏன்?). வேறு ஏதேனும் ஒரு சீட்டை நீங்கள் தேர்ந்தெடுப்பதாக இருந்தாலும் இந்த வாய்ப்பு மாறாது. நிகழ்தகவு என்பது துல்லியமாக வாய்ப்பு எனப் பொருள்படும். மேலும் அதற்கான மதிப்பையே கொண்டிருக்கும். ஆனால் 13இல் 1 என்பதற்குப் பதிலாக நாம் $\frac{1}{13}$ எனப் பின்னமாக எழுதுகிறோம். (நிகழ்தகவுகளை இணைத்துக் கையாளும்போது பின்னமாக எழுதுதல் மிக எளிமையாக இருக்கும்). இது சாதகமான விளைவுகளுக்கும் சாத்தியமான விளைவுகளுக்கும் உள்ள ஒரு விகிதமாகும்.

நீங்கள் பகடையைப் பார்த்திருக்கிறீர்களா? ஒரு தரமான பகடை என்பது கனச் சதுர வடிவில் ஒவ்வொரு பக்கமும் 1 முதல் 6 வரை உள்ள வேறுபட்ட எண்களைக் கொண்டிருக்கும். இது சூதாட்டங்களிலும் வாய்ப்புகளோடு தொடர்புடைய வேறு ஆட்டங்களிலும் உருட்டப்படுகிறது.

குறிப்பு

ஒரு சீரான பகடை என்பது அதன் எதிரெதிர் பக்கங்களில் உள்ள எண்களின் கூடுதல் 7 ஆக இருக்கவேண்டும்.



ஒரு பகடையை உருட்டும்போது 5 பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? இதேபோல் 2 மற்றும் 7 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

மேற்கண்ட அனைத்து வினாக்களுக்கான விடைகளிலும் நிகழ்தகவு என்ற கருத்துக்கான சிறப்புத்தன்மை எதையும் நீங்கள் கவனித்தீர்களா? அதிகபட்ச மதிப்பு மற்றும் குறைந்தபட்ச மதிப்பு என எதையும் நீங்கள் குறிப்பிட முடியுமா? உறுதியாக நடக்கும் ஒரு நிகழ்விற்கான நிகழ்தகவு என்னவாக இருக்க முடியும்? இதைத் தெளிவாக உணரப் பின்வரும் பத்திகளில் முறைப்படுத்துவோம்.

5.2 அடிப்படைக் கருத்துகள்

அறிவியலில் ஒரே மாதிரியான சூழ்நிலையில் நாம் திரும்பத் திரும்பச் சோதனைகளை நடத்தும்போது ஏறத்தாழ ஒரே முடிவையே பெறுகிறோம். இந்தச் சோதனைகள் உறுதியான சோதனைகள் என அறியப்படுகின்றன. ஆர்க்கிமிடிஸ் கொள்கையைச் சரிபார்க்கும் சோதனை மற்றும் ஓம் விதியைச் சரிபார்க்கும் சோதனை போன்றவை உறுதியான சோதனைகளுக்கு எடுத்துக்காட்டாகும். ஆர்க்கிமிடிஸ் கொள்கையை அல்லது ஓம் விதியைச் சரிபார்த்தல் சோதனைகளை எடுத்துக் கொள்வோம். இந்தச் சோதனைகளின் முடிவுகள் முன்னரே அறியப்பட்டவை. ஆனால் ஒரே சூழ்நிலையில் நடத்தப்பட்டாலும் வெவ்வேறு முடிவுகளைத் தரக்கூடிய சோதனைகளும் இருக்கின்றன. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு சீரான பகடையை உருட்டுதல், ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டுதல் அல்லது ஒரு பானையில் இருந்து ஒரு பந்தைத் தேர்ந்தெடுத்தல் போன்ற நிகழ்வுகளைக் கருதுவோம். இவற்றின் முடிவுகளை நாம் முன்கூட்டியே கணிக்க இயலாது. இவை சமவாய்ப்புச் சோதனைகள் (random experiment) ஆகும். ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் ஒவ்வொரு நிகழ்வும் முயற்சி (trail) எனப்படும். முயற்சியின் ஒவ்வொரு விளைவும் முடிவு என அழைக்கப்படும். (குறிப்பு: பெரும்பாலான புள்ளியியலாளர்கள் சோதனை என்பதையும் முயற்சி என்பதையும் ஒரே பொருளிலேயே பயன்படுத்துகின்றனர்).

நாம் இப்பொழுது நிகழ்தகவு தொடர்பான சில முக்கிய கருத்துகளைப் பார்ப்போம்.

முயற்சி (Trial) : ஒரு பகடையை உருட்டுதல், நாணயத்தைச் சுண்டுதல் ஆகியன முயற்சி ஆகும். முயற்சி என்பது ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட விளைவுகளைத் தரக்கூடிய செயல் ஆகும்.

விளைவு (Outcome) : நாணயத்தைச் சுண்டும்போது தலை அல்லது பூ கிடைக்கிறது. தலை மற்றும் பூ என்பன விளைவுகள். ஒரு முயற்சியின் முடிவு விளைவு என அழைக்கப்படுகிறது.

கூறுபுள்ளி (Sample point) : நாணயத்தைச் சுண்டும்போது கிடைக்கும் தலை மற்றும் பூ என்ற ஒவ்வொரு விளைவும் கூறு புள்ளி எனப்படும். ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் ஒவ்வொரு விளைவும் கூறுபுள்ளி என அழைக்கப்படுகிறது.

கூறுவெளி (Sample space) : ஒரு நாணயத்தை ஒரு முறை சுண்டும்போது கிடைக்கும் கூறு புள்ளிகளின் தொகுப்பு $S = \{H, T\}$.

இரு நாணயங்கள் ஒரே நேரத்தில் சுண்டப்படும்போது கிடைக்கும் கூறு புள்ளிகளின் தொகுப்பு $S=\{(HH),(HT),(TH),(TT)\}$.

ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் வாய்ப்புள்ள எல்லா விளைவுகளின் (அல்லது கூறு புள்ளிகளின்) கணம் கூறுவெளி என அழைக்கப்படுகிறது. இது S என்ற ஆங்கில எழுத்தால் குறிக்கப்படுகிறது. இதிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n(S)$ ஆகும்.

நிகழ்ச்சி (Event) : ஒரு பகடையை உருட்டும்போது 4 கிடைக்கிறது எனக் கொள்வோம், இது விளைவு என அழைக்கப்படுகிறது. இதே சோதனையில் ஓர் இரட்டை எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி $\{2, 4, 6\}$ என்ற கணமாகும். கூறுவெளியின் எந்தவொரு உட்கணமும் நிகழ்ச்சி என அழைக்கப்படுகிறது. ஆகவே ஒரு நிகழ்ச்சி என்பது ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட விளைவுகளைக் கொண்டிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்,

(i) சமவாய்ப்புச் சோதனை : நாணயத்தைச் சுண்டுதல்

வாய்ப்புள்ள விளைவுகள் : தலை (H) அல்லது பூ (T)

கூறுவெளி : $S = \{H, T\}$

S ன் உட்கணம் : $A=\{H\}$ or $A=\{T\}$

ஆகவே இந்த எடுத்துக்காட்டில், A என்பது ஒரு விளைவு.

(ii) ஒரு பகடையை உருட்டும்போது கிடைக்கும் கூறுவெளி $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

(iii) ஒரு வாரத்தில் ஒரு நாளைத் தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்வில் கூறுவெளி S = { ஞாயிறு, திங்கள், செவ்வாய், புதன், வியாழன், வெள்ளி, சனி}.

செயல்பாடு - 1

இரு நாணயங்களை ஒரே நேரத்தில் சுண்டுக. சோதனையில் பின்வருவனவற்றை வரிசைப்படுத்துக.	இரு பகடைகளை ஒரே நேரத்தில் சுண்டுக. சோதனையில் பின்வருவனவற்றை வரிசைப்படுத்துக.
சமவாய்ப்புச் சோதனை :	சமவாய்ப்புச் சோதனை :
வாய்ப்புள்ள விளைவுகள் :	வாய்ப்புள்ள விளைவுகள் :
கூறுவெளி :	கூறுவெளி :
S இன் எவையேனும் மூன்று உட்கணங்கள் : (அல்லது எவையேனும் 3 நிகழ்ச்சிகள்)	S இன் எவையேனும் மூன்று உட்கணங்கள் : (அல்லது எவையேனும் 3 நிகழ்ச்சிகள்)

செயல்பாடு - 2

ஒவ்வொரு மாணவரையும் ஒரு நாணயத்தை 10 முறை சுண்டுமாறு கூறிக் கிடைத்த விளைவுகளைப் பின்வருமாறு அட்டவணையில் பட்டியலிடக் கூறவும்.

மொத்தச் சுண்டுதல்கள்	தலை கிடைத்த நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை	பூ கிடைத்த நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை
⋮	⋮	⋮

(i) பின்னம் 1 : $\dfrac{\text{தலை கிடைத்த நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்தச் சுண்டுதல்கள்}}$

(ii) பின்னம் 2 : $\dfrac{\text{பூ கிடைத்த நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்தச் சுண்டுதல்கள்}}$

அதே நாணயத்தை 20, 30, 40, 50 முறை மீண்டும் சுண்டுமாறு கூறி மேற்குறிப்பிட்டவாறு பின்னங்களைக் கண்டறிக.

செயல்பாடு- 3

வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களை இரண்டு பேர் கொண்ட குழுக்களாகப் பிரிக்கவும். ஒவ்வொரு குழுவிலும் முதல் மாணவர் நாணயத்தை 50 முறை சுண்டட்டும், இரண்டாவது மாணவர் விளைவுகளைப் பதிவு செய்து. பின்வருமாறு அட்டவணையைத் தயார் செய்யட்டும்.

குழு	தலை கிடைத்த நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை	பூ கிடைத்த நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை	$\frac{\text{தலை கிடைத்த நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்தச் சுண்டுதல்கள்}}$	$\frac{\text{பூ கிடைத்த நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்தச் சுண்டுதல்கள்}}$
1				
2				
3				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான வாய்ப்பை, எண் மதிப்பால் குறிப்பிடுவதே நிகழ்தகவு எனப்படுகிறது.

5.3 தொன்மை அணுகுமுறை (Classical Approach)

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு பானையில் 4 சிவப்புப் பந்துகள் மற்றும் 6 நீலப் பந்துகள் உள்ளன. சம வாய்ப்பு முறையில் ஒரு பந்தைத் தேர்ந்தெடுக்கும் போது அது சிவப்பு நிறப் பந்தாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

சமவாய்ப்பு என்ற சொல்லானது பானையில் உள்ள 10 பந்துகளும் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான சம வாய்ப்புகளைப் (அதாவது நிகழ்தகவு) பெற்றிருக்கிறது என உறுதியளிக்கிறது.

உங்கள் கண்களானது கட்டப்பட்டு இருப்பதாகவும் பந்துகள் கலைக்கப்பட்டு இருப்பதாகவும் கருதுவோம். இது விளைவுகளைச் சமவாய்ப்பு உடையதாக ஆக்குகிறது

சிவப்புப் பந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{4}{10}$ ஆகும். (இதை $\frac{2}{5}$ அல்லது 0.4 என எழுதலாம்.)

நீல நிறப் பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? இது $\frac{6}{10}$ ஆகும். ($\frac{3}{5}$ அல்லது 0.6).

இரு நிகழ்தகவுகளின் கூடுதல் 1 என்பதைக் காண்க. இதன் பொருள் வேறு ஒரு விளைவு கிடைப்பதற்கான வாய்ப்பு இல்லை என்பதாகும்.

இந்த எடுத்துக்காட்டில் நாம் பயன்படுத்திய அணுகுமுறை தொன்மையானது. இது ஒரு முன்னறி நிகழ்தகவு (Priori probability) கணக்கீடாகும். [இலத்தீன் மொழியில் Priori என்றால் 'ஆராய்வு இல்லாமல்' அல்லது உணர்ச்சி அனுபவம் என்று பொருள்] விளைவுகள் சம வாய்ப்புள்ளவையாக இருந்தால் மட்டுமே மேற்கண்ட செயல் நடக்க இயலும் என்பதைக் கவனிக்க.

சிந்தனைக் களம்

ஒரு சோதனை வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.4 எனில் அது தோல்வி அடைவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

தொன்மை நிகழ்தகவு என்பது 17 மற்றும் 18ஆம் நூற்றாண்டுகளில் கணிதவியலாளர்களால் முதன் முதலில் படிக்கப்பட்ட நிகழ்தகவு ஆகும். எனவேதான் அது அவ்வாறு அழைக்கப்படுகிறது.

S என்பது ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் சமவாய்ப்பு விளைவுகளின் கணம் என்க. (S என்பது அச்சோதனையின் கூறுவெளி என அழைக்கப்படுகிறது).

E என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட விளைவு அல்லது விளைவுகளின் தொகுப்பு என்க. (E என்பது நிகழ்ச்சி என அழைக்கப்படுகிறது).

E என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு $P(E)$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

$$P(E) = \frac{\text{சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்த விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

F9UKUT

ஒரு சோதனையானது திரும்பத்திரும்பப் பலமுறை செய்யப்படும்போது ஒரு குறிப்பிட்ட விளைவானது, ஒரு குறிப்பிட்ட சதவீதத்தில் நிகழும் எனில் அந்தக் குறிப்பிட்ட சதவீதம் அந்த விளைவிற்கான நிகழ்தகவிற்கு மிக அருகில் இருக்கும் என நிகழ்தகவுக்கான ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண் கோட்பாடு கூறுகிறது.

5.4 பட்டறி அணுகுமுறை (Empirical Approach)

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு உற்பத்தியாளர் ஒவ்வொரு மாதமும் 10000 மின் சொடுக்கிகள் (electric switches) தயாரிக்கிறார். அவற்றில் 1000 சொடுக்கிகள் குறைபாடுடையதாகக் கண்டறியப்பட்டன. அந்த உற்பத்தியாளர் ஒரு குறைபாடுடைய மின் சொடுக்கியை ஒவ்வொரு மாதமும் தயாரிப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

குறிப்பு

இந்த நிகழ்தகவைத் தீர்மானிப்பதற்கு முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருக்க வேண்டும். முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருக்கும்போது , நிகழ்தகவின் சிறந்த மதிப்பீடு கிடைக்கும்.

ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண் கருத்துப்படி, தேவையான நிகழ்தகவு 10000இல் 1000 அதாவது 0.1 இக்கு அருகில் இருக்கும்.

நாம் இந்த வரையறையை முறைப்படுத்துவோம்.

அதிக எண்ணிக்கையிலான முயற்சிகளில் (n என்க) E என்ற நிகழ்ச்சியின் r விளைவுகளைப் பெறுகிறோம் எனக் கொண்டால் நிகழ்ச்சி E இன் நிகழ்தகவு ($P(E)$ ஆனது) பின்வருமாறு,

$$P(E) = \frac{r}{n}.$$

முயற்சிகளின் எண்ணிக்கையை அதிகரிக்க அதிகரிக்க இந்த மதிப்பானது ஒரு மாறிலியில் நிலைகொள்ளும் என நம்மால் உறுதியாகக் கூற இயலுமா ? இயலாது ; இது ஒரு சோதனை, சோதனையை ஒவ்வொரு முறை செய்யும்போதும் மாறுபட்ட ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண்ணைப் பெற வாய்ப்பு உள்ளது.

இருந்தபோதிலும், அங்கே ஒரு பாதுகாப்பு எல்லை உள்ளது. நிகழ்தகவின் மதிப்பானது குறைந்தபட்சம் '0' ஆகவும் அதிகபட்சம் '1' ஆகவும் இருக்க முடியும். கணிதத்தில் இதைப் பின்வருமாறு குறிக்கலாம்.

$$0 \leq P(E) \leq 1.$$

நாம் இதை இன்னும் சற்று ஆழமாகப் பார்ப்போம்.

முதலில், r ஆனது n ஐ விட அதிகமாக இருக்க முடியாது என்பது நாம் அறிந்ததே.

எனவே $\frac{r}{n} < 1$. அதாவது $P(E) < 1$. ... (1)

சிந்தனைக் களம்

ஒரு நிகழ்தகவு தொடர்பான வினாவிற்கு மாணவனின் பதில் $\frac{3}{2}$ என இருந்ததைத் தவறு என ஆசிரியர் கூறினார். ஏன்?

அடுத்ததாக, $r = 0$ என்க. இதன் பொருள் இந்த நிகழ்ச்சி நடைபெற இயலாது அல்லது அதிகமான முயற்சிகளில் அது நடைபெறவில்லை என்பதாகும். (ஒரு பகடையை உருட்டும் போது 7 என்ற எண்ணைப் பெற இயலுமா?)

ஆகவே, இங்கு $\frac{r}{n} = \frac{0}{n} = 0$. ... (2)

இறுதியாக, $r = n$ என்க

நிகழ்ச்சி கண்டிப்பாக நடைபெறும். (ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் அல்லது அதிகமான முயற்சிகளிலும்)

(ஒரு பகடையை உருட்டும்போது 1 முதல் 6 வரையில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு எண்ணைப் பெறுதல்)

இந்தச் சூழலில், $\frac{r}{n} = \frac{n}{n} = 1$. ... (3)

(1), (2) மற்றும் (3) இலிருந்து $0 \leq P(E) \leq 1$ எனக் கண்டறிகிறோம்.

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனை நடத்தப்படுகிறது. பின்வருவனவற்றுள் எவை ஒரு விளைவின் நிகழ்தகவாக இருக்க முடியாது?

(i) 1/5 (ii) – 1/7 (iii) 0.40 (iv) – 0.52 (v) 0

(vi) 1.3 (vii) 1 (viii) 72% (ix) 107%

எடுத்துக்காட்டு 5.1 ஒரு பகடை உருட்டப்படும்போது, 4ஐ விடப் பெரிய எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு

விளைவுகளானது, $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

E என்பது 4 ஐ விடப் பெரிய எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

$$E = \{5,6\}$$

$$P(E) = \frac{\text{சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்த விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}}$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{6} = 0.333...$$

FA4GHG

எடுத்துக்காட்டு 5.2 42 நபர்கள் பணி செய்யும் ஓர் அலுவலகத்தில் 7 பணியாளர்கள் மகிழுந்து பயன்படுத்துகிறார்கள், 20 பணியாளர்கள் இரு சக்கர வண்டி பயன்படுத்துகிறார்கள். மீதி 15 பணியாளர்கள் மிதிவண்டி பயன்படுத்துகிறார்கள். ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண் நிகழ்தகவைக் கண்டறிக.

தீர்வு

மொத்த வேலையாட்கள் = 42

மகிழுந்து பயன்படுத்துவோருக்கான ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண் நிகழ்தகவு $= \frac{7}{42} = \frac{1}{6}$

இரு சக்கர வண்டி பயன்படுத்துவோருக்கான ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண் நிகழ்தகவு $= \frac{20}{42} = \frac{10}{21}$

மிதிவண்டி பயன்படுத்துவோருக்கான ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண் நிகழ்தகவு $= \frac{15}{42} = \frac{5}{14}$

இந்த எடுத்துக்காட்டில் நிகழ்தகவுகளின் மொத்தக் கூடுதல் 1ஐ விட அதிகமாகவில்லை என்பதைக் கவனிக்கவும். $\frac{1}{6}+\frac{10}{21}+\frac{5}{14} = \frac{7}{42}+\frac{20}{42}+\frac{15}{42} = 1$

எடுத்துக்காட்டு 5.3 அணி I மற்றும் அணி II ஆகிய இரு அணிகளும் 10 முறை 20 ஓவர் மட்டைப் பந்து (cricket) ஆடுகின்றனர். ஒவ்வோர் ஆட்டத்திலும் அவர்கள் எடுத்த ஓட்டங்கள் பின்வருமாறு பட்டியலிடப்பட்டுள்ளன.

ஆட்டம்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
அணி I	200	122	111	88	156	184	99	199	121	156
அணி II	143	123	156	92	164	72	100	201	98	157

அணி I வெற்றி பெறுவதற்கான ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண் நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு

இந்தச் சோதனையில் ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் அணி I ஆனது அணி II ஐ எதிர்கொள்கிறது. அணி I வெற்றி பெறுவதற்கான நிலையைக் கருதுவோம்.

இங்கே மொத்தம் 10 முயற்சிகள் உள்ளன. அவற்றில் அணி I முதலாவது, ஆறாவது மற்றும் ஒன்பதாவது ஆட்டங்களில் வெற்றி பெற்றுள்ளது. அணி I வெற்றி பெறுவதற்கான ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண் நிகழ்தகவு $= \dfrac{3}{10}$ அல்லது 0.3.

(குறிப்பு : ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண் நிகழ்தகவானது, சோதனையின்போது நாம் உற்றுநோக்கும் தொடர்ச்சியான விளைவுகளைச் சார்ந்தது.).

பயிற்சி 5.1

1. நீங்கள் ஒரு தெருவில் நடந்து செல்கிறீர்கள். நீவிர் சந்தித்தவர்களில் ஒரு புதிய மனிதரைத் தேர்ந்தெடுக்கவும். அந்த மனிதரின் பிறந்த நாள் ஞாயிற்றுக்கிழமையாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

2. 52 சீட்டுகள் கொண்ட ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து ஒரு படச்சீட்டு (அதாவது இராசா, இராணி அல்லது மந்திரி (Jack)?) தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

3. ஒரு சீரான பகடையை உருட்டும்போது ஓர் இரட்டை எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

4. ஒரு பானையில் 24 பந்துகள் உள்ளன, அவற்றில் 3 சிவப்பு, 5 நீலம் மற்றும் மீதி இருப்பவை பச்சை நிறமுடையதாகும். அவற்றில் ஒன்றைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது அது (i) ஒரு நீல நிறப் பந்து (ii) ஒரு சிவப்பு நிறப் பந்து (iii) ஒரு பச்சை நிறப் பந்தாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

5. இரண்டு சீரான நாணயங்களை ஒரே நேரத்தில் சுண்டும்போது, இரு தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

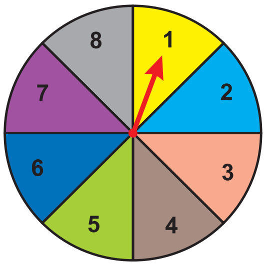
6. இரு பகடைகள் உருட்டப்படும்போது கிடைக்கும் எண்களின் கூடுதல்

   (i) 1இக்குச் சமமாக (ii) 4இக்குச் சமமாக (iii) 13ஐ விடச் சிறியதாக

7. ஓர் உற்பத்தியாளர் 7000 ஒளி உமிழ் இருமுனைய விளக்குகளை (LED lights) சோதனை செய்ததில் அவற்றில் 25 விளக்குகள் குறைபாடுடையதாகக் கண்டறியப்பட்டன. சம வாய்ப்பு முறையில் ஒரு விளக்கைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது அது குறைபாடுடையதாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

8. ஒரு கால்பந்தாட்டத்தில், ஓர் இலக்குக் காப்பாளரால் (Goal – keeper) 40 இல் 32 முயற்சிகளைத் தடுக்க இயலும் எனில், எதிரணியானது ஒரு முயற்சியை இலக்காக மாற்றுவதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

9. கொடுக்கப்பட்ட சுழலட்டையின் (spinner) முள் 3இன் மடங்குகளில் நிலை கொள்ளாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?



10. கொடுக்கப்பட்ட சுழலட்டையை அடிப்படையாகக் கொண்டு நிகழ்தகவைக் கணக்கிடுமாறு எவையேனும் இரு வினாக்களை உருவாக்குக.

5.5 நிகழ்ச்சிகளின் வகைகள் (Types of Events)

நிகழ்ச்சிகளின் சில முக்கியக் கூறுகளை நாம் ஏற்கெனவே பார்த்தோம்,

இரு நிகழ்ச்சிகளும் நிகழ்வதற்குச் சம வாய்ப்புகள் இருந்தால் அவை சம வாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் எனப்படுகின்றன.

- ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும்போது தலை அல்லது பூ கிடைப்பது சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.
- ஒரு பகடையை உருட்டும்போது ஒற்றை எண் அல்லது இரட்டை எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சிகள் சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் ஆகும். ஆனால் இரட்டை எண் அல்லது 1 என்ற எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சிகள் சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் அல்ல.

ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு 1 எனில் அந்த நிகழ்ச்சி நிச்சயமாக நடைபெறும். இவ்வாறான நிகழ்ச்சி உறுதியான நிகழ்ச்சி எனப்படும். ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு 0 எனில் அந்நிகழ்ச்சி இயலா நிகழ்ச்சி ஆகும்.

$P(E) = 1$ எனில் E என்பது உறுதியான நிகழ்ச்சி ஆகும்..

$P(E) = 0$ எனில் E என்பது இயலா நிகழ்ச்சி ஆகும்.

ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும் நிகழ்ச்சியை எடுத்துக்கொள்வோம். ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும்போது அதன் இரு பக்கங்களும் ஒரே நேரத்தில் கிடைக்காது. (சீரான நாணயமாக இருந்தால் அதன் இரு பக்கங்களிலும் தலையாகவோ அல்லது பூவாகவோ இருக்காது) இரு நிகழ்ச்சிகள் ஒரே நேரத்தில் நடக்க இயலாது எனில் அந்நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் ஆகும். மழை பெய்யும் நிகழ்வு மற்றும் கதிரவன் ஒளிரும் நிகழ்வு இரண்டும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளா? ஒரு சீட்டுக்கட்டில் உள்ள 52 சீட்டுகளில் இருந்து இராசா சீட்டு அல்லது ஹார்ட் சீட்டு எடுக்கும் நிகழ்ச்சி எந்த வகையானது?

E என்பது ஒரு பகடையை உருட்டும்போது இரட்டை எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க. அதாவது $2, 4$ மற்றும் 6 கிடைப்பது ஆகும். ஒற்றை எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்பது E என்ற நிகழ்ச்சியின் நிரப்பு நிகழ்ச்சியாகும். அதனை E' எனக் குறிப்பிடுவோம். இங்கு E மற்றும் E' என்பவை நிரப்பு நிகழ்ச்சிகள் ஆகும். E' என்பதை E^c எனவும் குறிப்பிடலாம்.

குறிப்பு

(i) E மற்றும் E' ஆகியவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.(எப்படி)?

(ii) E இன் நிகழ்தகவு + E' இன் நிகழ்தகவு $=1$. மேலும் E மற்றும் E' ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்.

(iii) $P(E)+P(E')=1$, எனவே ஒன்றின் மதிப்பு தெரிந்திருந்தால் மற்றொன்றின் மதிப்பை எளிதாகக் கண்டுபிடிக்கலாம்..

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

கீழ்க்கண்டவற்றுள் எவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்

வ. எண்	சோதனை	நிகழ்ச்சி 1	நிகழ்ச்சி 2
1	ஒரு பகடை உருட்டுதல்	5 கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி	ஒற்றை எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி
2	ஒரு பகடை உருட்டுதல்	5 கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி	இரட்டை எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி
3	சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு எடுத்தல்	ஸ்பேடு சீட்டு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி	கருப்புச் சீட்டு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி
4	சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு எடுத்தல்	படச் சீட்டு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி	5 கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி
5	சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு எடுத்தல்	ஹார்ட் சீட்டு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி	7 கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி

எடுத்துக்காட்டு 5.4 நாளைய மழை பொழிவிற்கான நிகழ்தகவு $\frac{91}{100}$ எனில், மழை பொழியாமல் இருப்பதற்கு நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு

E என்பது நாளை மழை பொழிவிற்கான நிகழ்ச்சி எனில், E' என்பது நாளை மழை பொழியாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி ஆகும்.

$$P(E) = \frac{91}{100}$$

$$P(E) = 0.91$$

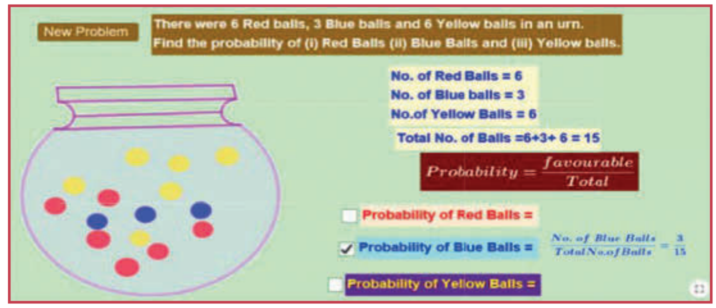
$$P(E') = 1-0.91$$

$$= 0.09$$

எனவே, மழை பொழியாமல் இருக்க நிகழ்தகவு 0.09 ஆகும்.

இணையச் செயல்பாடு

இறுதியில்
கிடைக்கப்பெறும் படம்



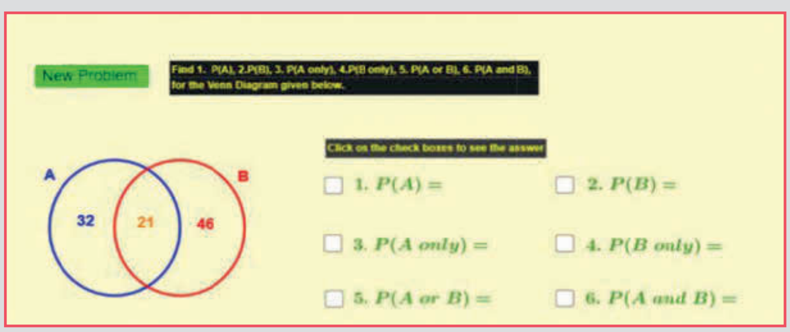
படி 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra பக்கத்தில் “Probability” என்னும் பணித்தாளிற்குச் செல்க. ‘Venn diagram and Basic probability’ என்ற தலைப்பில் இரண்டு பணித்தாள்கள் உள்ளன.

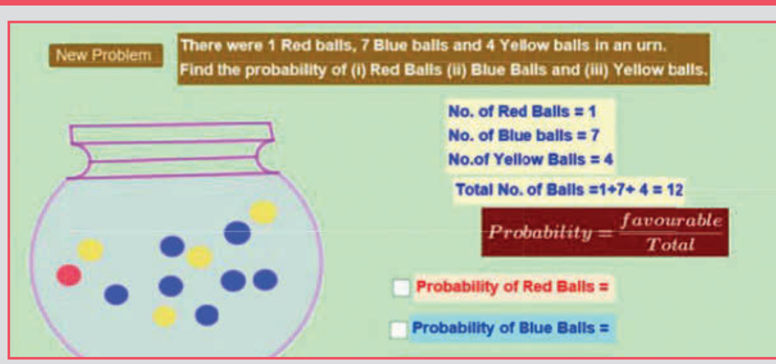
படி - 2

“New Problem” என்ற பகுதியில் சொடுக்கவும். தொடர்புடைய கட்டங்களைச் சொடுக்கி விடைகளை சரிபார்த்துக் கொள்ளலாம்.

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

நிகழ்தகவு : https://ggbm.at/mj887yua or Scan the QR Code.

B563_9_MAT_TM_T3

எடுத்துக்காட்டு 5.5 பத்தாம் வகுப்பு இறுதித் தேர்வில் பல்வேறு பாடங்களில் நூற்றுக்கு நூறு மதிப்பெண்கள் பெற்ற 1184 மாணவர்களில், 233 பேர் கணிதத்திலும், 125 பேர் சமூக அறிவியலிலும், 106 பேர் அறிவியலிலும் நூற்றுக்கு நூறு பெற்றுள்ளனர். சம வாய்ப்பு முறையில் ஒரு மாணவரைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது அந்த மாணவர்

(i) கணிதத்தில் நூற்றுக்கு நூறு மதிப்பெண் பெற்றவராக இருக்க,

(ii) அறிவியலில் நூற்றுக்கு நூறு பெறாதவராக இருக்க

நிகழ்தகவு காண்க

தீர்வு

நூற்றுக்கு நூறு பெற்ற மாணவர்கள் $=1184$

ஆகவே $n = 1184$

(i) E_1 என்பது கணிதத்தில் நூற்றுக்கு நூறு பெற்ற மாணவர்கள் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

ஆகையால் $n(E_1) = 233$, அதாவது, $r_1 = 233$

$$P(E_1) = \frac{r_1}{n} = \frac{233}{1184}$$

(ii) E_2 என்பது அறிவியலில் நூற்றுக்கு நூறு பெற்ற மாணவர்கள் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

ஆகையால் $n(E_2) = 106$, அதாவது, $r_2 = 106$

$$P(E_2) = \frac{r_2}{n} = \frac{106}{1184}$$

ஆகவே, அறிவியலில் நூற்றுக்கு நூறு பெறாதவராக இருக்க நிகழ்தகவு

$$P(E_2') = 1 - P(E_2)$$

$$= 1 - \frac{106}{1184}$$

$$= \frac{1078}{1184}$$

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

1. ஒரு பகடை ஒருமுறை உருட்டப்படுகிறது. கிடைத்த எண் 6இன் காரணியாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

2. 52 சீட்டுகள் கொண்ட ஒரு சீட்டாட்டக் கட்டிலிருந்து ஒரு சோடிச் சீட்டுகள் தேர்ந்தெடுக்கப்படும்போது, பின்வரும் எந்தச் சோடியைத் தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்வு ஒன்றையொன்று சாராதது

   (i) சிவப்புச் சீட்டு எடுத்தல் மற்றும் இராசா சீட்டு எடுத்தல்

   (ii) சிவப்புச் சீட்டு எடுத்தல் மற்றும் கிளாவர் சீட்டு எடுத்தல்

   (iii) கருப்புச் சீட்டு எடுத்தல் மற்றும் ஸ்பேடு சீட்டு எடுத்தல்

   (iv) கருப்புச் சீட்டு எடுத்தல் மற்றும் ஏஸ் சீட்டு எடுத்தல்

FADCY4

3. ஆறு முகங்கள் கொண்ட ஒரு சீரான பகடை உருட்டப்படும்போது, பின்வரும் எந்தச் சோடியைப் பெறும் நிகழ்ச்சி ஒன்றையொன்று சாரா நிகழ்ச்சி அல்ல.
   (i) ஓர் இரட்டை எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி 3இன் மடங்கு.
   (ii) ஓர் இரட்டை எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி 5இன் மடங்கு.
   (iii) ஒரு பகா எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி ஓர் இரட்டை எண்.
   (iv) ஒரு பகு எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி ஓர் ஒற்றை எண்.
4. 1 முதல் 8 வரையுள்ள எண்களில் சம வாய்ப்பு முறையில் ஏதேனும் ஓர் எண் தேர்ந்தெடுக்கப்படும்போது அது இரட்டை எண்ணாக இல்லாமல் இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

பயிற்சி 5.2

1. ஒரு நிறுவனம் ஆறு மாதத்தில் 10000 மடிக்கணினிகளை உற்பத்தி செய்தது. அவற்றில் 25 மடிக்கணினிகள் குறைபாடு உடையனவாகக் கண்டறியப்பட்டன. சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு மடிக்கணினியைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது அது குறைபாடில்லாததாக இருக்க நிகழ்தகவு யாது?
2. 16-20 வயதுக்குட்பட்ட 400 இளைஞர்களிடம் நடத்தப்பட்ட ஓர் ஆய்வில், 191 பேர் வாக்காளர் அடையாள அட்டை வைத்திருப்பதாகக் கண்டறியப்பட்டது. சமவாய்ப்பு முறையில் அவர்களில் ஒருவரைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது அவர் வாக்காளர் அடையாள அட்டை வைத்திருக்கும் நபராக இல்லாமல் இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?
3. ஒரு வினாவிற்கான சரியான விடையை ஊகிப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{x}{3}$ என்க. சரியான விடையை ஊகிக்காமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{x}{5}$ எனில், x இன் மதிப்பு காண்க.
4. ஒரு வரிப்பந்து (tennis) விளையாட்டு வீரர் ஒரு குறிப்பிட்ட ஆட்டத்தில் வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.72 எனில் அவர் அந்த விளையாட்டில் தோல்வியடைவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?
5. 1500 குடும்பங்களில் அவர்கள் வீட்டிலுள்ள பணிப்பெண்கள் (maids) பற்றிய தரவுகள் திரட்டப்பட்டுப் பின்வருமாறு பதிவு செய்யப்பட்டுள்ளது

பணிப்பெண்கள் வகை	பகுதிநேரம் மட்டும்	முழுநேரம் மட்டும்	இரண்டு வகை பணிப்பெண்கள்
குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	860	370	250

சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு குடும்பம் தேர்ந்தெடுக்கப்படும்போது, அக்குடும்பம்

(i) இரு வகைப் பணிப்பெண்களும் வைத்திருக்க (ii) பகுதி நேரப் பணிப்பெண் வைத்திருக்க (iii) பணிப்பெண் வைத்திருக்காமல் இருக்க நிகழ்தகவு காண்க

பயிற்சி 5.3

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. 0 இக்கும் 1 இக்கும் இடைப்பட்ட ஓர் எண்ணைக் கொண்டு உறுதியற்றவற்றை அளவிடுவது எவ்வாறு அழைக்கப்படுகிறது.

   (1) சமவாய்ப்பு மாறி (2) முயற்சி (3) எளிய நிகழ்ச்சி (4) நிகழ்தகவு

2. நிகழ்தகவு மதிப்பின் இடைவெளி

   (1) -1 மற்றும் $+1$ (2) 0 மற்றும் 1 (3) 0 மற்றும் n (4) 0 மற்றும் ∞

3. ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண் கருத்தை அடிப்படையாகக்கொண்ட நிகழ்தகவு எவ்வாறு அழைக்கப்படுகிறது

   (1) பட்டறி நிகழ்தகவு (2) தொன்மை நிகழ்தகவு

   (3) (1) மற்றும் (2) இரண்டும் (4) (1)வும் அல்ல (2) வும் அல்ல

FAN8ZR

4. ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு எவ்வாறு இருக்க முடியாது?

   (1) பூச்சியத்திற்குச் சமம் (2) பூச்சியத்தை விடப் பெரியது

   (3) 1இக்குச் சமம் (4) பூச்சியத்தை விடச் சிறியது

5. ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனை .... ஐக் கொண்டுள்ளது

   (1) குறைந்தபட்சம் ஒரு விளைவு (2) குறைந்தபட்சம் இரண்டு விளைவுகள்

   (3) அதிகபட்சம் ஒரு விளைவு (4) அதிகபட்சம் இரண்டு விளைவுகள்

6. ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையில் வாய்ப்புள்ள அனைத்து விளைவுகளின் நிகழ்தகவு எப்பொழுதும் இதற்குச் சமம்

   (1) ஒன்று (2) பூச்சியம் (3) முடிவிலி (4) மேற்கண்ட அனைத்தும்

7. A என்பது S இன் ஏதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சி எனில் $P(A')$ இன் மதிப்பு

   (1) 1 (2) 0 (3) $1-A$ (4) $1-\mathrm{P}(A)$

8. பின்வருவனவற்றுள் எது ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவாக இருக்க முடியாது

   (1) 0 (2) 0.5 (3) 1 (4) -1

9. ஒரு சோதனையின் குறிப்பிட்ட முடிவு எவ்வாறு அழைக்கப்படுகிறது

   (1) முயற்சி (2) எளிய நிகழ்ச்சி (3) கூட்டு நிகழ்ச்சி (4) விளைவு

10. ஒரு சோதனையின் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட விளைவுகளின் தொகுப்பு ……….. என அழைக்கப்படுகிறது.

(1) நிகழ்ச்சி (2) விளைவு (3) கூறுபுள்ளி (4) மேற்கண்ட எதுவுமில்லை

11. ஒரு பகடையானது ……. இருக்கும்போது, அதன் ஆறு முகங்களும் சமவாய்ப்புடையவை என அழைக்கப்படுகிறது.

(1) சிறியதாக (2) சீரானதாக (3) ஆறு முகம் கொண்டதாக (4)வட்டமாக

12. "STATISTICS" என்ற சொல்லிலிருந்து ஓர் எழுத்து சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும்போது, அது ஆங்கில உயிரெழுத்தாக இருக்க நிகழ்தகவு

(1) $\frac{1}{10}$ (2) $\frac{2}{10}$ (3) $\frac{3}{10}$ (4) $\frac{4}{10}$

நினைவில் கொள்ளத்தக்கவை

- ஒரு சோதனையின் முடிவுகளை நாம் கணிக்க முடிந்தால் அது உறுதியான சோதனை என அழைக்கப்படுகிறது.
- ஒரு சோதனையின் முடிவுகளை நாம் கணிக்க இயலவில்லை எனில் அது சம வாய்ப்புச் சோதனை என அழைக்கப்படுகிறது.
- ஒரு சோதனையின் சமவாய்ப்பு விளைவுகளின் கணம், அச்சோதனையின் கூறுவெளி (S) எனப்படும்.
- ஒரு சோதனையின் ஒரு குறிப்பிட்ட விளைவோ அல்லது விளைவுகளின் தொகுப்போ நிகழ்ச்சி எனப்படும்.
- நிகழ்தகவின் ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண் கோட்பாடு, ஒரு விளைவின் நிகழ்தகவானது அந்த விளைவு நடப்பதற்கான விழுக்காட்டிற்கு அருகில் இருக்கும் எனக் கூறுகிறது.
- நிகழ்ச்சிகள் நடைபெறுவதற்கான வாய்ப்புகள் ஒரே மாதிரியாக இருந்தால் அவை சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் எனப்படுகின்றன.
- இரு நிகழ்ச்சிகள் ஒரே நேரத்தில் நடக்க இயலாது எனில் அவை ஒன்றையொன்று சாரா நிகழ்ச்சிகள் என அழைக்கப்படுகின்றன.
- ஒன்றையொன்று சாராத இரு நிகழ்ச்சிகள் E மற்றும் E' என்க. $P(E)+P(E')=1$ எனில், அவை நிரப்பு நிகழ்ச்சிகள் என அழைக்கப்படுகின்றன.
- ஒரு நிகழ்ச்சி கண்டிப்பாக நடைபெறும் எனில் அது உறுதியான நிகழ்ச்சி என அழைக்கப்படுகிறது. உறுதியான நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு 1 ஆகும்.
- ஒரு நிகழ்ச்சி ஒரு போதும் நடைபெறாது எனில் அது இயலா நிகழ்ச்சி எனப்படுகிறது. இயலா நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு 0 ஆகும்.

விடைகள்

1. இயற்கணிதம்

பயிற்சி 1.1

2. ஆம்   3.(i) $x=-28$ (ii) $x=-\frac{2}{3}$

பயிற்சி 1.3

1.(i) (5,2)   (ii) எண்ணற்ற தீர்வுகள் உள்ளன

(iii) தீர்வு இல்லை   (iv) $(-3,-3)$ (v) தீர்வு இல்லை

(vi) எண்ணற்ற தீர்வுகள் உள்ளன   (vii) (1,3)   (viii) $(-3, 3)$

2. 75கிமீ, 25 கிமீ

பயிற்சி 1.4

1.(i) $(2,-1)$ (ii) (4,2)   (iii) (40,100)   (iv) $\left(\sqrt{8},\sqrt{3}\right)$

(v) (4,9)   (2) 45   (3) 409

பயிற்சி 1.5

1.(i) (2,1)   (ii) (7,2)   (iii) (80,30) (iv) $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ (v) $\left(\frac{1}{3},-1\right)$

(vi) (2,1)   (vii) (2,4)   (viii) $(2,-1)$

(2) ₹30000, ₹40000   (3) 75, 15

பயிற்சி 1.6

1.(i) (3,4)   (ii) $(3,-1)$ (iii) $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

(2) 2 ரூபாய் நாணயங்களின் எண்ணிக்கை 60, 5 ரூபாய் நாணயங்களின் எண்ணிக்கை 20

(3) பெரிய குழாய் 20 மணி நேரம், சிறிய குழாய் 30 மணி நேரம்,

பயிற்சி 1.7

1. 8 சதுர அலகுகள்   2. 64   3. $\frac{5}{7}$
4. மகிழுந்து A யின் வேகம் 40 கிமீ/மணி, மகிழுந்து B யின் வேகம் 40 கிமீ/மணி
5. $\angle A=120^\circ$, $\angle B=70^\circ$, $\angle C=60^\circ$, $\angle D=110^\circ$
6. தொலைக்காட்சிப் பெட்டியின் விலை ₹ 20,000, குளிர் சாதனப்பெட்டியின் விலை ₹ 10,000

7. 5:6 8. 40 9. 180 10. 210, 6

11. 10, 3 12. ஒரு பையன் = 36 நாட்கள், ஒரு மனிதன் = 18 நாட்கள்

பயிற்சி 1.8

1. (4) எண்ணற்ற தீர்வுகள் உள்ளன 2. (2) -23. (3) $3x+5=\frac{2}{3}$

4. (2) $(4,2)$ 5. (2) $5x-7=6-2x$ 6.(4) 13 7.(3) $a=0,\ b=0,\ c\neq 0$

8. (2) $0x+0y+c=0$ 9. (1) $k=3$ 10. (2) $l\,||\,m$ 11.(3) ஒரு தீர்வு

12. (1) தீர்வு இல்லை

2. ஆயத்தொலை வடிவியல்

பயிற்சி 2.1

1.(i) $(-4,-1)$ (ii) $(0,-1)$ (iii) $(a+b,a)$ (iv) $(1,-1)$

2. $(-5,-3)$ 3. $P=-15$ 4. $(9,3)(-5,5)$ மற்றும் $(1,1)$

5. $\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$ 6. $(1,8)$

பயிற்சி 2.2

1. $(7,3)$ 2. $(2,-3)$ 3. 5:2 4. $(3,4)$

5. $(-2,3),(1,0)$ 6. $\left(\frac{19}{2},\frac{13}{2}\right),\left(\frac{-9}{2},\frac{-15}{2}\right)$ 8. $(3,2)$

பயிற்சி 2.3

1.(i) $(2,-3)$ (ii) $\left(\frac{-8}{3},\frac{-11}{3}\right)$ 2. $(4,-6)$ 3. 5 அலகுகள்

4. 20 5. $3\sqrt{\frac{5}{2}}$ அலகுகள் 6. $(1,0)$ 7. $(5,-2)$

பயிற்சி 2.4

1. (4) $(4,6)$ 2. (1) $(-9,7)$ 3. (3) 1:3 4. (4) $(-9,0)$

5. (2) $-b_1:b_2$ 6. (3) 4:7 7. (2) $(4,0)$, $(2,8)$

8. (2) $(-2a,-b)$ 9. (4) 5:2 10. (2) 5 11. (2) $(2,3)$

3. முக்கோணவியல்

பயிற்சி 3.1

1. $\sin B=\frac{9}{41};\cos B=\frac{40}{41};\tan B=\frac{9}{40};\ \text{cosec}B=\frac{41}{9};\sec B=\frac{41}{40};\cot B=\frac{40}{9}$

2. $\sin\theta=\frac{4}{5};\cos\theta=\frac{3}{5};\tan\theta=\frac{4}{3}\ ;\ \text{cosec}\theta=\frac{5}{4};\sec\theta=\frac{5}{3};\cot\theta=\frac{3}{4}$

3.(i) $\sin B=\frac{12}{13}$ (ii) $\sec B=\frac{13}{5}$ (iii) $\cot B=\frac{5}{12}$ (iv) $\cos C=\frac{4}{5}$

(v) $\tan C = \frac{3}{4}$ (vi) $\text{cosec}C = \frac{5}{3}$

4. $\sin\theta = \frac{1}{2}; \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}; \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}};\ \text{cosec}\theta = \frac{2}{1}; \sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}; \cot\theta = \sqrt{3}$

5. $\frac{3}{40}$ 6. $\sin A = \frac{1-x^2}{1+x^2}; \tan A = \frac{1-x^2}{2x}$ 8. $\frac{1}{2}$

9. $\frac{1}{2}$ 10. $\sin\alpha = \frac{4}{5}; \cos\beta = \frac{4}{5}; \tan\phi = \frac{4}{3}$ 11. 7மீ

பயிற்சி 3.2

2.(i) 0 (ii) $\frac{7}{4}$ (iii) 3 3. 0 4. 2

பயிற்சி 3.3

1.(i) 0 (ii) 1 (iii) 1 (iv) 2

பயிற்சி 3.4

1.(i) 0.7547 (ii) 0.2648 (iii) 1.3985 (iv) 0.3641

(v) 0.8302 (vi) 2.7907

2.(i) $85°57'$ (அல்லது) $85°58'$ (அல்லது) $85°59'$ (ii) $47°27'$ (iii) $4°7'$

(iv) $87°39'$ (v) $82°30'$ 3.(i) 1.9970 (ii) 2.8659

4. 18.81 செமீ^{2} 5. $36°52'$ 6. 54.02 மீ^{2}

பயிற்சி 3.5

1. (1) $\frac{1}{2}$ 2. (2) $53°$ 3. (2) 1 4. (3) $\tan 45°$

5. (3) $\tan 60°$ 6. (1) $0°$ 7. (2) $30°$ 8. (3) 5

9. (2) 2 10. (3) 0 11. (4) $\frac{4}{3}$ 12. (1) 0

13. (2) 1 14. (2) $90°$ 15. (3) 1

4. அளவியல்

பயிற்சி 4.1

1.(i) 120 செமீ^{2} (ii) 7.2 மீ^{2} 2. 1320 மீ^{2}, ₹26,400 3. 12000 மீ^{2}

4. 1558.8 செமீ^{2} 5. ₹ 1,050 6.(i) 480 செமீ^{2} (ii) 24 செமீ

7. 240 செமீ^{2}

பயிற்சி 4.2

1. 138 செமீ^{2} 2. 354 செமீ^{2} 3. 1536 மீ^{2} 4. 672 மீ^{2}

5. 86.6 மீ^{2}

பயிற்சி 4.3

1.(i) 1160 செமீ^{2}, 560 செமீ^{2} (ii) 860 மீ^{2}, 476 மீ^{2} 2. ₹1,716 3. ₹3,349

4.(i) 384 மீ^{2}, 256 மீ^{2} (ii) 2646 செமீ^{2}, 1764 செமீ^{2} (iii) 337.5 செமீ^{2}, 225 செமீ^{2}

5.(i) 1600 செமீ^{2} (ii) 486 செமீ^{2} 6. 253.50 மீ^{2}, ₹6,084 7. 224 செமீ^{2}, 128 செமீ^{2}

பயிற்சி 4.4

1.(i) 576 செமீ^{3} (ii) 2250 மீ^{3} (iii) 864000 செமீ^{3} 2. 630 செமீ^{3}

3. 25 செமீ, 20 செமீ, 15 செமீ 4. 2624000 லிட்டர் 5. 25000

6. 10 செமீ 7. 12 மீ 8.(i) 125 செமீ^{3} (ii) 42.875 மீ^{3}

(iii) 9261 செமீ^{3} 9. 1331 செமீ^{3} 10. 5 மீ 11. 15 செமீ

12. 360000 லிட்டர் 13. 6264 மீ^{3}

பயிற்சி 4.5

1. (4) $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ சதுர அலகுகள் 2. (3) 30 செமீ 3. (2) 6 செமீ^{2}

4. (4) $25\sqrt{3}$ செமீ^{2} 5. (4) $2(lb+bh+lh)$ சதுர அலகுகள் 6. (3) 576 செமீ^{2}

7. (3) 900 செமீ^{2} 8. (1) 280 செமீ^{2} 9. (2) 4:9 10. (3) 20 செமீ

11. (4) 75000 லிட்டர் 12. (1) 1000

5. நிகழ்தகவு

பயிற்சி 5.1

1. $\frac{1}{7}$ 2. $\frac{3}{13}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4.(i) $\frac{5}{24}$

(ii) $\frac{1}{8}$ (iii) $\frac{2}{3}$ 5. $\frac{1}{4}$ 6.(i) 0

(ii) $\frac{1}{12}$ (iii) 1 7. $\frac{1}{280}$ 8. $\frac{1}{5}$

9. $\frac{3}{4}$

பயிற்சி 5.2

1. 0.9975 2. $\frac{209}{400}$ 3. $\frac{15}{8}$ 4. 0.28

5.(i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{43}{75}$ (iii) $\frac{1}{75}$

பயிற்சி 5.3

1. (4) நிகழ்தகவு 2. (2) 0 மற்றும் 1 3. (1) பட்டறி நிகழ்தகவு

4. (4) பூச்சியத்தை விடக் குறைவு 5. (2) குறைந்தது இரண்டு விளைவுகள்

6. (1) ஒன்று 7. (4) $1-P(A)$ 8. (4) -1 9. (4) விளைவு

10. (1) நிகழ்ச்சி 11. (2) சீரான 12. (3) $\frac{3}{10}$

கணிதக் கலைச்சொற்கள்	
அடுத்துள்ள பக்கம்	Adjacent side
இணை கோடுகள்	Parallel lines
இயலா நிகழ்ச்சி	Impossible event
உட்புறமாக	Internally
உறுதியற்ற (அ) நிச்சயமற்ற	Uncertainty
உறுதியான சோதனை	Deterministic Experiment
உறுதியான நிகழ்ச்சி	Sure event
எதிர்ப்பக்கம்	Opposite side
ஏற்றக் கோணம்	Angle of elevation
ஒரு திண்மத்தின் முகப்பு	Face of a solid
ஒருங்கமைவற்ற	Inconsistent
ஒருங்கமைவு	Consistent
ஒன்றின் மீது ஒன்று பொருந்தும் கோடுகள்	Coinciding lines
ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்	Mutually exclusive event
கர்ணம்	Hypotenuse side
கன அளவு	Volume
கனச் சதுரம்	Cube
கனச் செவ்வகம்	Cuboid
குறுக்குப் பெருக்கல் முறை	Cross multiplication
கூறுபுள்ளி	Sample point
கூறுவெளி	Sample space
சமநிலை	Equilibrium
சமவாய்ப்பு சோதனை	Random Experiment
சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சி	Equally likely event
பட்டறி நிகழ்தகவு	Empirical probability
தொன்மை நிகழ்தகவு	Classical probability
நடுப்புள்ளி	Mid point
நிகழ்ச்சி	Event
நிகழ்தகவு	Probability
நிரப்பு நிகழ்ச்சிகள்	Complementary events
நிரப்புக் கோணங்கள்	Complementary angles
நீக்கல் முறை	Elimination method
நேரியச் சமன்பாடுகள்	Linear equations
பகடைகள்	Dice
பக்கப் பரப்பு	Lateral surface area
பிரதியிடும் முறை	Substitution method
பிரிவு வாய்ப்பாடு	Section formula
பொது வித்தியாசம்	Mean difference
முக்கோணவியல்	Trigonometry
முக்கோணவியல் அட்டவணை	Trigonometric table
முக்கோணவியல் விகிதங்கள்	Trigonometric ratios
முப்பரிமாணம்	3-dimensional
முயற்சி	Trial
முனை	Vertex
மொத்தப் பரப்பு (அல்லது) மொத்தப் புறப்பரப்பு	Total surface area
விளிம்பு	Edge
விளைவு	Outcome
வெட்டும் கோடுகள்	Intersecting lines
வெளிப்புறமாக	Externally
வெளிவட்ட மையம்	Excentre

இடைநிலைக் கணக்கு – ஒன்பதாம் வகுப்பு
பாடநூல் உருவாக்கக் குழு

மேலாய்வாளர்

- **முனைவர் இரா. இராமானுஜம்,**
  பேராசிரியர்,
  கணித அறிவியல் நிறுவனம்,
  தரமணி, சென்னை.
- **இரா. ஆத்மராமன்,**
  கணிதக் கல்வி ஆலோசகர்,
  இந்திய கணித ஆசிரியர்கள் சங்கம், சென்னை–05.

பாட வல்லுநர்

- **முனைவர். க. குமாரசாமி,**
  இணை பேராசிரியர்,
  ஆர்.கே.எம். விவேகானந்தா கல்லூரி, சென்னை.

பாட ஒருங்கிணைப்பாளர்

- **பா. தமிழ்செல்வி,**
  துணை இயக்குநர்,
  மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம்,
  சென்னை – 06.

ஒருங்கிணைப்பாளர்

- **வீ.பெ. சுமதி,**
  பட்டதாரி ஆசிரியை,
  தி.எ.மு. அரசு மகளிர் மே.நி. பள்ளி
  சோளிங்கர், வேலூர்.

பாடநூல் உருவாக்கம்

- **பெ. பத்மநாபன்,**
  விரிவுரையாளர்,
  மாவட்ட ஆசிரியர் கல்வி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம்,
  கீழ்பென்னாத்தூர், திருவண்ணாமலை மாவட்டம்
- **கோ.செ.அ.முகமது யூசுப் ஜெயினுலாபுதீன்,**
  பட்டதாரி ஆசிரியர்,
  மன்ப உல் உலூம் மே.நி.ப, கோட்டை, கோயம்புத்தூர் –1
- **அ. செந்தில்குமார்,**
  பட்டதாரி ஆசிரியர்,
  அ.மே.நி.ப., திருத்துறையூர், கடலூர் மாவட்டம்.
- **இ. ஷாநவாஸ்,**
  பட்டதாரி ஆசிரியர்,
  மாதிரிப் பள்ளி, காரிமங்கலம், தர்மபுரி மாவட்டம்.
- **கு.பு. கணேஷ்,**
  பட்டதாரி ஆசிரியர் ,
  அவ்வையார் அரசினர் மகளிர் மே.நி.பள்ளி, தருமபுரி.
- **நா. வெங்கட்ராமன்,**
  முதுகலை பட்டதாரி ஆசிரியர்,
  கோபால் நாயுடு மே.நி.ப, பீளமேடு, கோயம்புத்தூர்.
- **பா. கருப்பசாமி**
  பட்டதாரி ஆசிரியர்,
  அரசு ஆதிதிராவிடர் நல உயர்நிலைப் பள்ளி
  இடையன்குளம், விருதுநகர் மாவட்டம்

ஆய்வாளர்கள்

- **முனைவர் கீ. கவிதா,**
  உதவிப் பேராசிரியர்,
  பாரதி மகளிர் கல்லூரி, சென்னை.
- **திருமதி. செ. சோபனா சர்மா,**
  உதவிப் பேராசிரியர், கணிதத்துறை
  பாரதி மகளிர் கல்லூரி (தன்னாட்சி), சென்னை–600108.

ஆய்வாளர்களின் ஒருங்கிணைப்பாளர்

- **ச. விஜயலட்சுமி,**
  பட்டதாரி ஆசிரியர்
  கூவத்தூர், காஞ்சிபுரம் மாவட்டம்

ICT ஒருங்கிணைப்பாளர்

- **தா. வாசுராஜ்,**
  பட்டதாரி ஆசிரியர் (ஓய்வு), ,
  கொசப்பூர், புழல் ஒன்றியம், திருவள்ளூர் மாவட்டம்.

QR Code குழு

- **இரா. ஜெகநாதன், இ.நி.ஆ,**
  ஊ.ஒ.ந.நி.பள்ளி, கணேசபுரம்.
- **ந. ஜெகன், ப.ஆ,**
  அ.ஆ.மே.நி.பள்ளி, உத்திரமேரூர்.
- **அ. இசக்கித்துரை, மு.ஆ,**
  அ.மே.நி.பள்ளி, சிக்கல், இராமநாதபுரம்.

கலை மற்றும் வடிவமைப்புக்குழு

பக்க வடிவமைப்பாளர்

- **ஜாய் கிராபிக்ஸ்,**
  சிந்தாதிரிபேட்டை, சென்னை –02.

In House QC

- **ஜெரால்டு வில்சன்**
- **மதன்ராஜ்**
- **அருண் காமராஜ் பழனிசாமி**

ஒருங்கிணைப்பாளர்

- **ரமேஷ் முனிசாமி,**

அட்டை வடிவமைப்பு

- **கதிர் ஆறுமுகம்**

தட்டச்சர்

- **ஆ. பழனிவேல்,**

80 GSM தாளில் அச்சிட்டோர்: