தமிழ்நாடு அரசு

மேல்நிலை இரண்டாம் ஆண்டு

வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியியல்

தொகுதி 1

தமிழ்நாடு அரசு விலையில்லாப் பாடநூல் வழங்கும் திட்டத்தின் கீழ் வெளியிடப்பட்டது

பள்ளிக் கல்வித்துறை

தீண்டாமை மனிதநேயமற்ற செயலும் பெருங்குற்றமும் ஆகும்

தமிழ்நாடு அரசு

முதல்பதிப்பு – *2019*

(புதிய பாடத்திட்டத்தின்கீழ்
வெளியிடப்பட்ட நூல்)

விற்பனைக்கு அன்று

பாடநூல் உருவாக்கமும்
தொகுப்பும்

மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி மற்றும்
பயிற்சி நிறுவனம்

நூல் அச்சாக்கம்

தமிழ்நாடு பாடநூல் மற்றும் கல்வியியல்
பணிகள் கழகம்

www.textbooksonline.tn.nic.in

இந்நூலைக் கையாள்வதற்கான வழிகாட்டி

வேலை மற்றும் உயர்கல்வி மேம்பாட்டிற்கான வாய்ப்புகள்	வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியலை ஒரு பாடமாகக் கொண்ட மேல்நிலை வகுப்பு வணிகவியல் மாணவர்களுக்கான மேற்படிப்பு வாயப்புகளின் பட்டியல்.
கற்றலின் நோக்கங்கள்	மாணவர்கள் ஒவ்வொரு அத்தியாயம் , பாடம் அல்லது ஆண்டு இறுதியில் அடைந்திருக்கவேண்டிய கற்றல் இலக்குகளைக் குறிக்கிறது,
குறிப்பு	பாடத்தின் கூடுதல் கருத்துக்களை தருபவை.
உங்களுக்கு தெரியுமா?	மாணவர்களின் கணித சிந்தனைகளை வளர்க்கும் வியத்தகு உண்மைகள், கருத்துக்கள் போன்றவை.
பயிற்சி	மாணவர்களின் நினைவாற்றல் ,சிந்தித்தல் மற்றும் புரிதலை மேம்படுத்த பயிற்சி அளித்தல்.
இணையச் செயல்பாடு	மாணவர்களின் கணினி சார் அறிவுத்திறனை மேம்படுத்துதல்.
இணைய இணைப்புகள்	கணினி வழி மூலங்களுக்கான பட்டியல்.
உடனடி பதில் வினைக் குறியீடு	மாணவர்கள் பாடங்கள் தொடர்பான கருத்துக்களை மேலும் அறிந்துகொள்ள மெய்நிகர் கற்றல் உலகத்துக்கு அழைத்து செல்லும் வழி.
இதர கணக்குகள்	மாணவர்களுக்கான கற்றலை மேம்படுத்த கூடுதல் கணக்குகள்.
கலைச் சொற்கள்	கணித தமிழ் வழிச் சொற்களுக்கான ஆங்கில மொழியாக்கம்
பார்வை நூல்கள்	பாடத் தலைப்போடு தொடர்புடைய மேலும் விவரங்களை அறிந்து கொள்வதற்கான துணைநூற்களின் பட்டியல்

பாடநூலில் உள்ள விரைவு குறியீட்டைப் (QR Code) பயன்படுத்துவோம்! எப்படி?

- உங்கள் திறன்பேசியில், கூகுள் playstore /ஆப்பிள் app store கொண்டு QR Code ஸ்கேனர் செயலியை இலவசமாகப் பதிவிறக்கம் செய்து நிறுவிக்கொள்க.
- செயலியைத் திறந்தவுடன், ஸ்கேன் செய்யும் பொத்தானை அழுத்தித் திரையில் தோன்றும் கேமராவை QR Code–இன் அருகில் கொண்டு செல்லவும்.
- ஸ்கேன் செய்வதன் மூலம் திரையில் தோன்றும் உரலியைச் (URL) சொடுக்க, அதன் விளக்கப் பக்கத்திற்குச் செல்லும்.

வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியியல் பயிலும் மாணவர்களுக்கான வேலை மற்றும் உயர்கல்வி மேம்பாட்டிற்கான வாய்ப்புகள்

வணிகவியல் பாடத்திட்டத்தில் வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியியலை ஒரு பாடமாக கொண்ட பிரிவில் பயிலும் மேல்நிலை வகுப்பு மாணவர்கள், தங்களது மேற்படிப்புக்கு, BCA., B.Com., மற்றும் B.Sc., புள்ளியியல் ஆகிய பிரிவுகளை தேர்வு செய்யலாம்.

வணிக பிரிவு மேல்நிலை வகுப்பு மாணவர்களுக்கு, வங்கி மற்றும், நிதி நிறுவனங்களிலும் வேலை வாய்ப்புகள் சிறப்பாக உள்ளன. கணினியை ஒரு சிறந்த பாடமாகக் கொண்ட B.Com பிரிவை பெரும்பாலான மாணவர்கள் தேர்வு செய்கின்றனர்.

தொழில் முறை மேற்படிப்புக்களான C.A., ICAI., முதலிய படிப்புகளை தேர்ந்தெடுத்து வெற்றி பெறுவதன் மூலம், பட்டயகணக்காளர் (Chartered Accountant) நிறுவனச் செயலர் (Company Secretary) போன்ற சிறந்த பதவிகளை பெற முடியும். மேலும் B.Com., பட்டதாரிகள், M.Com., P.h.D., மற்றும் M.Phil., போன்ற மேற்படிப்பு வகுப்புகளை தொடரலாம். B.Com., பட்டதாரிகளுக்கு பெருமளவில் வேலை வாய்ப்புகள் காத்திருக்கின்றன.

பட்டப்படிப்பு முடித்த பிறகு, MBA., M.A., பொருளியல் M.A., செயல்முறை மற்றும் புள்ளியியல் ஆராய்ச்சி பட்ட மேற்படிப்பு முதலிய பிரிவுகளை தேர்வு செய்யலாம். இவற்றை தவிர, எண்ணற்ற பட்டய படிப்பு, சான்றிதழ் படிப்பு மற்றும் தொழிற் பயிற்சிக் கல்விகள் முதலியனவற்றை மேற்கொள்வதன் மூலம் ஆரம்ப கால வேலை வாய்ப்புகளை பெறலாம்.

வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியலை ஒரு பாடமாகக் கொண்ட மேல்நிலை வகுப்பு வணிகவியல் மாணவர்களுக்கான மேற்படிப்பு வாய்ப்புகளின் பட்டியல்.

படிப்புகள்	கல்வி நிறுவனங்கள்	மேற்படிப்பிற்கான வாய்ப்புகள்
இளைங்கலை வணிகவியல் (B.Com.) / B.Com (Computer) **இளைங்கலை வியாபார நிர்வாகம்** (B.B.A.), **இளைங்கலை வணிக மேலாண்மை** (B.B.M.), **இளைங்கலை கணிணி பயன்பாடுகள்** (B.C.A.), **இளைங்கலை கலை** (B.A.)	• அனைத்து அரசினர் கலை மற்றும் அறிவியல் கல்லூரிகள், அரசு நிதி உதவிபெறும் கல்லூரிகள், சுயநிதி கல்லூரிகள் • ஸ்ரீராம் வணிகவியல் கல்லூரி (SRCC), புதுடெல்லி. • கூட்டுவாழ்வு சமுதாய கலை மற்றும் வணிகவியல் கல்லூரி, பூனே (Symbiosis Society's College of Arts & Commerce, Pune). • புனித சூசையப்பர் கல்லூரி, பெங்களுரூ	C.A., I.C.W.A, C.S.
இளைங்கலை அறிவியல் புள்ளியியல் (B.Sc Statistics)	• மாநில கல்லூரி சேப்பாக்கம், சென்னை. • சென்னை கிறித்தவ கல்லூரி, தாம்பரம் • லயோலா கல்லூரி, சென்னை • D.R.B.C.C இந்து கல்லூரி பட்டாபிராம், சென்னை.	M.Sc.
5 வருட ஒருங்கிணைந்த வியாபார நிர்வாகம், வணிகம் மற்றும் சட்ட படிப்புகள் (Five years integrated Course) B.B.A., LLB, B.A., LLB, B.Com., LL.B.	• அனைத்து அரசு சட்ட கல்லூரிகள். • டாக்டர் அம்பேத்கர் சட்ட பல்கலைகழகத்தின் கீழ் இணைக்கப்பட்ட சிறப்பு சட்டக் கல்வி நிறுவனங்கள்	M.L.
5 வருட ஒருங்கிணைந்த முதுகலை பொருளியல் படிப்புகள் M.A. Economics (Integrated Five Year course) – Admission based on All India Entrance Examination	• சென்னை பொருளியல் கல்லூரி, கோட்டூர்புரம், சென்னை	Ph.D.,
இளங்கலை சமூகப்பணி (B.S.W.)	• சென்னை சமூகப்பணி கல்லூரி, எழும்பூர், சென்னை.	M.S.W

பொருளடக்கம்

1	**அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகள்**	**1-40**
1.1	அணியின் தரம்	2
1.2	கிரேமர் விதி	22
1.3	மாறுதல் நிகழ்தகவு அணிகள்	29
2	**தொகை நுண்கணிதம் – I**	**41-94**
2.1	வரையறாத் தொகையீடுகள்	42
2.2	வரையறுத்த தொகையீடுகள்	67
3	**தொகை நுண்கணிதம் – II**	**95-127**
3.1	கொடுக்கப்பட்ட வளைவரையின் கீழ் அமைந்த அரங்கத்தின் பரப்பு	96
3.2	பொருளாதாரம் மற்றும் வணிகவியலில் தொகையீட்டின் பயன்பாடுகள்	102
4	**வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்**	**128-168**
4.1	வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் அமைத்தல்	129
4.2	முதல் வரிசை மற்றும் முதல் படியுள்ள சாதாரண வகைக்கெழு சமன்பாடுகள்	136
4.3	மாறிலிகளைக் கெழுக்களாகக் கொண்ட இரண்டாம் வரிசை நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்	155
5	**எண்ணியல் முறைகள்**	**169-200**
5.1	திட்டமான வேறுபாடுகள்	169
5.2	இடைச் செருகல்	183
	விடைகள்	201-208
	துணை நூற் பட்டியல்	209

37I5M8
மின்னூல்

F44ZC4
மதிப்பீடு

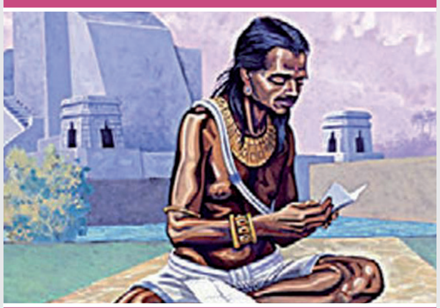
B247_12_BUS_MAT_TM
இணைய வளங்கள்

பாடத்திட்டம்

1.	**வகையீட்டின் பயன்பாடுகள்**	(20 பிரிவேளைகள்)
	அணியின் தரம்: கருத்துரு – அடிப்படை உருமாற்றங்கள் மற்றும் சமான அணிகள் – ஏறுபடி வடிவம் மூலம் வரிசை 3 × 4 வரை உள்ள அணியின் தரம் காணல் – சமச்சீரற்ற நேரிய சமன்பாடுகளின் ஒருங்கமைவுத் தன்மையை தர முறையில் சோதித்தல் (இரண்டு மற்றும் மூன்று மாறிகள்). **கிரேமர் விதி:** மதிப்பிட வேண்டிய மூன்று மாறிகள் வரைக் கொண்ட சமசீரற்ற சமன்பாடுகள். **மாறுதல் நிகழ்தகவு அணிகள்:** தொடக்க பங்கு சந்தை மதிப்பினைக் கொண்டு அடுத்த நிலையினை முன்னறிவித்தல்.	
2.	**தொகை நுண்கணிதம் – I**	(25 பிரிவேளைகள்)
	வரையறாத் தொகையீடுகள்: வரையறாத் தொகையீட்டின் கருத்துரு – சில திட்டமான முடிவுகள் – பிரித்துத் தொகையிடல் – பகுதிப்படுத்தி தொகையிடல் – பிரதியிடல் முறையில் தொகையிடல் – சில சிறப்பு வகை தொகையீடுகள். **வரையறுத்த தொகையீடுகள்:** தொகை நுண்கணிதத்தின் அடிப்படைத் தேற்றங்கள் – வரையறுத்த தொகையீடுகளின் பண்புகள் – காமா தொகையீடு (நிரூபணமின்றி) – வரையறுத்த தொகையீடுக்கான கூட்டல் எல்லை (நிரூபணமின்றி)	
3.	**தொகை நுண்கணிதம் – II**	(21 பிரிவேளைகள்)
	கொடுக்கப்பட்ட வளைவரையின்கீழ் அமைந்த அரங்கத்தின் பரப்பு: வரையறுக்கப் பட்ட தொகையீடலின் வடிவக் கணித விளக்கம். **பொருளாதாரம் மற்றும் வணிகவியலில் தொகையீட்டின் பயன்பாடுகள்:** இறுதிநிலை செலவுச் சார்பிலிருந்து மொத்த செலவுச் சார்பைக் காணுதல் – இறுதிநிலை வருவாய் சார்பிலிருந்து வருவாய்ச்சார்பு மற்றும் தேவைச் சார்பு காணல் – தேவை நெகிழ்ச்சி கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் வருவாய் மற்றும் தேவைச் சார்பைக் காணுதல் – நுகர்வோர் உபரி – உற்பத்தியாளர் உபரி.	
4.	**வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்**	(24 பிரிவேளைகள்)
	வகைக்கெழுச்சமன்பாடுகள்அமைத்தல்: வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரையறை – வரிசை மற்றும் படி – வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் அமைத்தல். **முதல் வரிசை மற்றும் முதல்படியுள்ள சாதாரண வகைக்கெழு சமன்பாடு:** பொதுத்தீர்வு மற்றும் சிறப்புத்தீர்வு – மாறிகள் பிரிபடக் கூடிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் – சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் – வரிசை ஒன்றுடைய நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள். **மாறிலிகளைக் கெழுக்களாகக் கொண்ட இரண்டாம் வரிசை நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்:** $a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=f(x)$.	
5.	**எண்ணியல் முறைகள்**	(15 பிரிவேளைகள்)
	திட்டமான வேறுபாடுகள்: முன்நோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி – பின்நோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி மற்றும் இடப் பெயர்வுச் செயலி – விடுபட்ட உறுப்புகளைக் காணல். **இடைச் செருகல்:** இடைச் செருகலின் முறைகள் – வரைபட முறை – இயற்கணித முறை – கிரிகோரி – நியுட்டனின் முன்நோக்கு மற்றும் பின்நோக்கு சூத்திரங்கள் – இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரம்.	

1

அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகள்



பிரம்மகுப்தா
கி.பி. (பொ.ஆ.) 598 – கி.பி. (பொ.ஆ.) 668)

அறிமுகம்

நம் அன்றாட வாழ்க்கையில் நில அதிர்வு கணக்கெடுப்புகளுக்கு அணிகளைப் பயன்படுத்துகிறோம். வரைபடங்கள் வரைய, புள்ளியியல் மற்றும் அறிவியல் ஆய்வுகளின் பல துறைகளில் இவற்றைப் பயன்படுத்துகிறோம். மக்கள் தொகையின் பண்புகள், அவர்களின் பழக்க வழக்கங்கள் ஆகியவற்றைக் குறிக்கவும் அணிகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

அணிக்கோவைகள் அற்புதமான இயற்கணித பண்புகளை கொண்டுள்ளன. நேரியல் கணிதத்தில் பெருமைமிக்க இடத்தையும் பெற்றுள்ளன. உயர்நிலை இயற்கணிதத்தில் அணிக்கோவைகள் முக்கியமாகக் கருதப்படுகிறது.

பிரம்மகுப்தா (கி.பி. (பொ.ஆ.) 598 – கி.பி. (பொ.ஆ.) 668) என்பவர் பண்டைய இந்தியாவின் முக்கியமான கணிதவியல் மற்றும் வானியல் அறிஞர் ஆவார். பூச்சியத்தைப் பயன்படுத்துவதற்கான முக்கிய விதிகளையும் முதன் முதலில் அளித்தவரும் அவரே. அணிகளில், $B(x\ ,\ y) = \begin{pmatrix} x & y \\ \pm ty & \pm x \end{pmatrix}$ என்ற அணி பிரம்மகுப்தா அணி (Brahmagupta Matrix) என அழைக்கப்படுகிறது.

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தை படித்த பின்பு பின்வரும் பாடக்கருத்துக்களை மாணவர்கள் புரிந்து கொள்ள இயலும்.

- அணியின் தரம் – கருத்துரு.
- அடிப்படை உருமாற்றங்கள் மற்றும் சமான அணிகள்.
- அணியின் ஏறுபடி வடிவம்.
- அணியின் தரம் காணல்.
- சமச்சீரற்ற நேரிய சமன்பாடுகளுக்கு ஒருங்கமைவு தன்மையை ஆராய்தல்.
- நேரிய சமன்பாடுகளின் பயன்பாடுகள்.

RZQU1Z

- சமச்சீரற்ற நேரிய சமன்பாடுகளை கிரேமர் விதியைக்கொண்டு தீர்வு காணல்.
- தொடக்க பங்கு சந்தை பங்கீட்டினைக் கொண்டு அடுத்த நிலையினை முன்னறிவித்தல்

1.1 அணியின் தரம் (Rank of a Matrix)

பொருளாதாரம், வாணிபம் மற்றும் தொழில்துறைகளில் பொதுவாக அணிகள் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

அணிகளின் அடிப்படை பண்புகளை நாம் ஏற்கனவே படித்துள்ளோம். இப்பாடத்தில் அடிப்படை உருமாற்றங்களை பயன்படுத்தி, அணிகளின் பயன்பாடுகளில் புதிய முறைகளை உருவாக்குதலைப் பற்றி படிக்கலாம்.

1.1.1 கருத்துரு (Concept)

ஒவ்வொரு அணியுடனும் தொடர்பு படுத்தக்கூடிய ஒரு குறையற்ற எண், அந்த அணியின் தரம் எனப்படும்.

வரையறை 1.1

A என்கிற அணியின் தரம் 'r' எனில் பின்வரும் நிபந்தனைகள் உண்மையாக இருக்க வேண்டும்.

(i) A ஆனது குறைந்தபட்சம் ஒரு 'r' வரிசை பூச்சியமற்ற சிற்றணிக் கோவையை பெற்றிருத்தல் வேண்டும்.

(ii) A-ன் ஒவ்வொரு $(r+1)$ வரிசை மற்றும் அதைவிட அதிகமான வரிசை கொண்ட சிற்றணிக்கோவைகளின் மதிப்புகள் பூச்சியமாக இருத்தல் வேண்டும்.

குறிப்பு

(i) $\rho(A) \geq 0$

(ii) அணி A-ன் வரிசை $m \times n$ எனில் அதன் தரமானது, $\{m,n\}$ –ன் மீச்சிறு மதிப்புக்குச் சமமாகவோ அல்லது சிறியதாகவோ இருக்கும்.

(iii) பூச்சிய அணியின் தரம் '0' ஆகும்.

(iv) $n \times n$ வரிசை உடைய பூச்சியமற்ற கோவை அணியின் தரம் 'n'ஆகும்,

எடுத்துக்காட்டு 1.1

$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க

தீர்வு:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ என்க

A -ன் வரிசை 2×2 $\quad \therefore \rho(A) \leq 2$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

சங்கேத மொழிகளை உருவாக்குவதற்கு அணியின் கருத்துருக்கள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

இரண்டாம் வரிசை சிற்றணிக்கோவையை கருத, நாம் பெறுவது

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \text{ ஆகும்.}$$

$\Rightarrow$ பூச்சியமற்ற சிற்றணிக்கோவையின் வரிசை 2 ஆகும். $\therefore \rho(A) = 2$.

எடுத்துக்காட்டு 1.2

$\begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

தீர்வு:

$A = \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ என்க.

A -ன் வரிசை 2×2 $\quad \therefore \rho(A) \leq 2$

இரண்டாம் வரிசை சிற்றணிக்கோவையை கருத, நாம் பெறுவது $\begin{vmatrix} -5 & -7 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$ ஆகும்.

இரண்டாம் வரிசை சிற்றணிக்கோவை பூச்சியமாவதால், $\rho(A) \neq 2$

ஒன்றாம் வரிசை கொண்ட ஒரு சிற்றணிக்கோவையை கருத, நாம் பெறுவது $|-5| \neq 0$ ஆகும்.

$\Rightarrow$ பூச்சியமற்ற சிற்றணிக்கோவையின் வரிசை 1 ஆகும். $\quad \therefore \rho\ (A) = 1$

எடுத்துக்காட்டு 1.3

$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

தீர்வு:

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ என்க

A -ன் வரிசை 3×3.

$\therefore \rho(A) \leq 3$

வரிசை மூன்று உடைய சிற்றணிக்கோவையை கருத, நாம் பெறுவது $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$

$\Rightarrow$ பூச்சியமற்ற சிற்றணிக்கோவையின் வரிசை மூன்று ஆகும். $\therefore \rho(A) = 3$.

எடுத்துக்காட்டு 1.4

$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க

தீர்வு:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 8 \end{pmatrix} \text{ என்க.}$$

A -ன் வரிசை 3×3. $\therefore \rho(A) \leq 3$.

வரிசை மூன்று உடைய சிற்றணிக்கோவையை கருத, நாம் பெறுவது, $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 8 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore$ மூன்றாம் வரிசைக் கொண்ட சிற்றணிக்கோவை பூச்சியமாவதால், $\rho(A) \neq 3$ ஆகும்.

இரண்டாம் வரிசை கொண்ட ஒரு சிற்றணிக்கோவையை கருத, நாம் பெறுவது $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$ ஆகும்.

$\Rightarrow$ பூச்சியமற்ற சிற்றணிக்கோவையின் வரிசை 2 ஆகும். $\therefore \rho(A) = 2$.

எடுத்துக்காட்டு 1.5

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

தீர்வு:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & -7 \end{pmatrix} \text{ என்க.}$$

A -ன் வரிசை 3×4

$\therefore \rho(A) \leq 3$.

> உங்களுக்கு தெரியுமா?
>
> A என்ற சதுர அணியின் வரிசை 3. A இன் தரம் 2 எனில், $adj\ A$ இன் தரம் 1 ஆகும்.

மூன்றாம் வரிசை கொண்ட சிற்றணிக்கோவைகளை கருத, நாம் பெறுவது

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -7 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

அனைத்து மூன்றாம் வரிசை கொண்ட சிற்றணிக்கோவைகளின் மதிப்புகளும் பூச்சியமாகும். $\rho(A) \neq 3$.

ஏதேனும் ஒரு இரண்டாம் வரிசை சிற்றணிக்கோவையை கருத, நாம் பெறுவது $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ ஆகும்.

$\Rightarrow$ பூச்சியமற்ற சிற்றணிக்கோவையின் வரிசை 2 ஆகும். $\therefore \rho(A)=2$.

1.1.2 அடிப்படை உருமாற்றங்கள் மற்றும் சமான அணிகள் (Elementary Transformations and Equivalent matrices)

அணிகளின் அடிப்படை உருமாற்றங்கள் பின்வரும் மூன்று செயல்களைப் பொறுத்து அமைகிறது.

(i) ஏதேனும் இரு நிரைகளை (அல்லது நிரல்கள்) பரிமாற்றம் செய்தல்.
$R_i \leftrightarrow R_j$ (அல்லது $C_i \leftrightarrow C_j$)

(ii) ஒரு நிரையில் (அல்லது நிரலில்) உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பையும் ஒரு பூச்சியமற்ற திசையிலி k -ஆல் பெருக்குதல். $R_i \to kR_i$ (அல்லது $C_j \to kC_j$)

(iii) ஒரு நிரையில் (அல்லது நிரலில்) உள்ள உறுப்புகளை மற்றொரு நிரையில் (அல்லது நிரலில்) உள்ள ஒத்த உறுப்புகளுடன் ஒரே மாறிலியால் பெருக்கி கூட்டுதல்.
$R_i \to R_i + kR_j$ (அல்லது $C_i \to C_i + kC_j$)

சமான அணிகள் (Equivalent Matrices)

A மற்றும் B என்பவை சமவரிசைக் கொண்ட அணிகள் என்க. இவற்றில் ஒரு அணியை மற்றொரு அணியிலிருந்து, முடிவுறு எண்ணிக்கையுள்ள அடிப்படை உருமாற்றங்களை மேற்கொள்வதன் மூலம் பெறுவோமாயின், A-யும் B-யும் சமான அணிகள் எனப்படும். இதனை $A \sim B$ அல்லது $B \sim A$ என குறிப்பிடலாம்.

1.1.3 ஏறுபடி வடிவம் மூலம் வரிசை 3×4 வரை உள்ள அணியின் தரம் காணல் (Echelon form and finding the rank of the matrix upto the order of 3×4)

$m\times n$ வரிசை உடைய A என்ற அணியானது ஏறுபடி வடிவில் உள்ளதாயின் அது பின்வரும் நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்தல் வேண்டும்.

(i) அனைத்து உறுப்புகளையும் பூச்சிய உறுப்புகளாய் கொண்ட ஒவ்வொரு நிரையும் பூச்சியமற்ற உறுப்புகளையும் உறுப்புகளாகக் கொண்ட நிரைக்கு கீழே அமைய வேண்டும்.

(ii) பூச்சியமற்ற நிரையில் வரும் முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்பிற்கு முன்பாக இடம்பெறும் பூச்சிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையானது அவ்வாறாகவே அதற்கு அடுத்து வரும் நிரையில் உள்ள பூச்சிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைவிட குறைவாக இருத்தல் வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.6

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

தீர்வு :

A -ன் வரிசை 3×3. $\therefore \rho(A)\le 3$.

அணி A –ஐ, ஏறுபடி வடிவத்திற்கு மாற்றியமைக்க,

அணி A	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$	
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2 - 2R_1$ $R_3 \to R_3 - 3R_1$
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$R_3 \to R_3 - R_2$
கடைசியாக பெறப்பட்ட அணியானது ஏறு படிவ வடிவில் உள்ளது.	

ஏறுபடிவ அணியில் உள்ள பூச்சியமற்ற நிரைகளின் எண்ணிக்கை 2 ஆகும். $\therefore \rho(A)=2$.

குறிப்பு

ஒரு நிரையில் உள்ள உறுப்புகளில் குறைந்தது ஒரு உறுப்பு பூச்சியமற்ற உறுப்பாக அமையுமானால் அந்த நிரை பூச்சியமற்ற நிரை எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.7

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

தீர்வு:

A -ன் வரிசை 3×4. $\therefore \rho(A)\le 3$.

அணி A -ஐ, ஏறுபடி வடிவத்திற்கு மாற்றியமைக்க,

அணி A	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$R_1 \leftrightarrow R_2$

$\sim\begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&1&2&1\\0&-5&-8&-3\end{pmatrix}$	$R_3 \to R_3 - 3R_1$
$\sim\begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&1&2&1\\0&0&2&2\end{pmatrix}$	$R_3 \to R_3 + 5R_2$

ஏறுபடிவ அணியில் உள்ள பூச்சியமற்ற நிரைகளின் எண்ணிக்கை 3 ஆகும். $\therefore \rho(A) = 3$.

எடுத்துக்காட்டு 1.8

$A = \begin{pmatrix}1&1&1&1\\3&4&5&2\\2&3&4&0\end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

தீர்வு:

A -யின் வரிசை 3×4.

$\therefore \rho(A) \le 3$.

அணி A-ஐ, ஏறுபடி வடிவத்திற்கு மாற்றியமைக்க,

அணி A	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$A = \begin{pmatrix}1&1&1&1\\3&4&5&2\\2&3&4&0\end{pmatrix}$	
$\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&-1\\0&1&2&-2\end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2 - 3R_1$ $R_3 \to R_3 - 2R_1$
$\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$	$R_3 \to R_3 - R_2$

ஏறுபடிவ அணியில் உள்ள பூச்சியமற்ற நிரைகளின் எண்ணிக்கை 3 ஆகும். $\therefore \rho(A) = 3$.

சமன்பாடுகளின் ஒருங்கமைவு (Consistency of Equations)

இருமாறிகள் கொண்ட நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு (System of linear equations in two variables) :

இரண்டு நேரிய சமன்பாடுகளை அணியின் நேர்மாறு முறையில் எவ்வாறு தீர்ப்பது என்பதை நாம் அறிவோம்.

மீள்பார்வை

நேரிய சமன்பாடுகளை அணி வடிவத்தில் AX=B என்றவாறு எழுத இயலும் அதன் தீர்வு $|A| \neq 0$ எனும் நிலையில் $X = A^{-1}B$ ஆகும்.

பின்வரும் இரு மாறிகளைக் கொண்ட நேரிய சமன்பாட்டுத் தொகுப்பினைக் எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$ax + by = h$$
$$cx + dy = k \qquad (1)$$

a, b, c, d, h மற்றும் k என்பவை மெய் மாறிலிகள், ஒரே நேரத்தில் a மற்றும் b என்ற இரண்டுமே பூஜ்ஜிமாகவோ அல்லது c மற்றும் d என்ற இரண்டுமே பூச்சியமாகவோ இருக்க இயலாது. கொடுக்கப்பட்ட L_1 , L_2 ஆகிய இரு நேர்கோடுகளில் பின்வரும் ஏதேனும் ஒன்று கிடைக்கலாம்.

L_1 மற்றும் L_2 சரியாக ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்ளும்.

L_1 மற்றும் L_2 ஒன்றின் மீது மற்றொன்று பொருந்தும்.

L_1 மற்றும் L_2 இணையானவை மற்றும் வெவ்வேறானவை.

படம் 1.1–ல் முதல் நிலையில் இரு கோடுகளும் ஒன்றை ஒன்று ஒரே ஒரு புள்ளியில் வெட்டுவதால் சமன்பாட்டு தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு.

இரண்டாவது நிலையில் கோட்டின் மீது உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் அச்சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளாக அமையும். எனவே சமன்பாட்டு தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது, மற்றும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் உண்டு.

மூன்றாவது நிலையில் இருகோடுகளும் இணைகோடுகள் ஆவதால் சமன்பாட்டு தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அற்றது. தீர்வுகள் இல்லை.

ஒவ்வொன்றையும் விளக்கும் வகையில் முதலில் இரு மாறிகளைக் கொண்ட நேரியல் தொகுதிகளைப் பார்ப்போம்.

(a) ஒரே ஒரு தீர்வை மட்டுமே கொண்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு

$2x - y = 1,\ 3x + 2y = 12$ என்ற சமன்பாடுகள் $(2,3)$ என்ற புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. அதாவது $(2,3)$ இருகோடுகளின் மீதும் அமைகின்றது. எனவே இந்த சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையவை மற்றும் ஒரே ஒரு தீர்வு கொண்டவை ஆகும்.

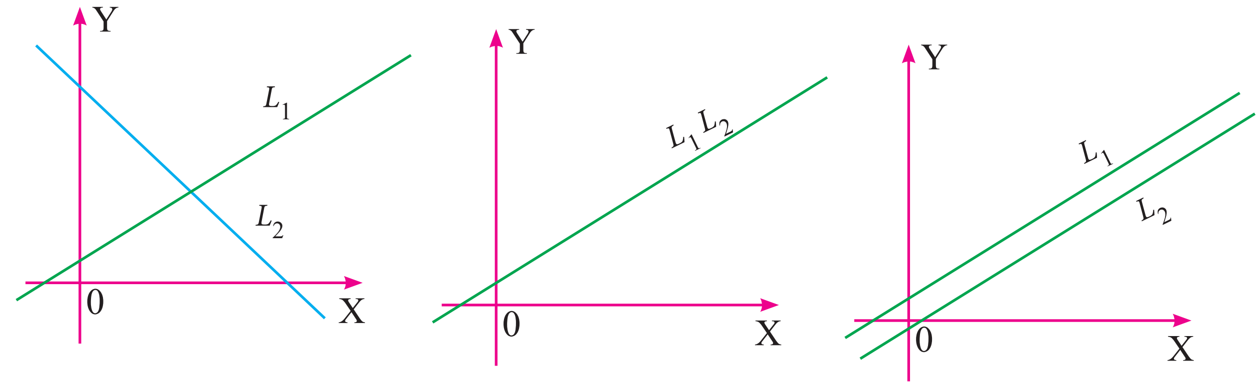
(b) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டுத்தொகுப்பு

$2x - y = 1,\ 6x - 3y = 3$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒன்றன் மீது மற்றொன்றாக அமையும் இரு நேர்க்கோடுகளாகும். மேலும் கோட்டின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் அச்சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளாக அமையக் காண்கிறோம்.

இச்சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையவை மற்றும் $(0,-1),\ (1,1)\ldots$ என எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றுள்ளன.

(c) **தீர்வுகள் அற்ற சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு**

$2x - y = 1, 6x - 3y = 12$ என்ற சமன்பாடுகள் இரு இணையான கோடுகளாகும். இச்சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு அற்றவை.



(a) ஒரே ஒரு தீர்வு (b) எண்ணற்ற தீர்வுகள் (c) தீர்வு இல்லாமை

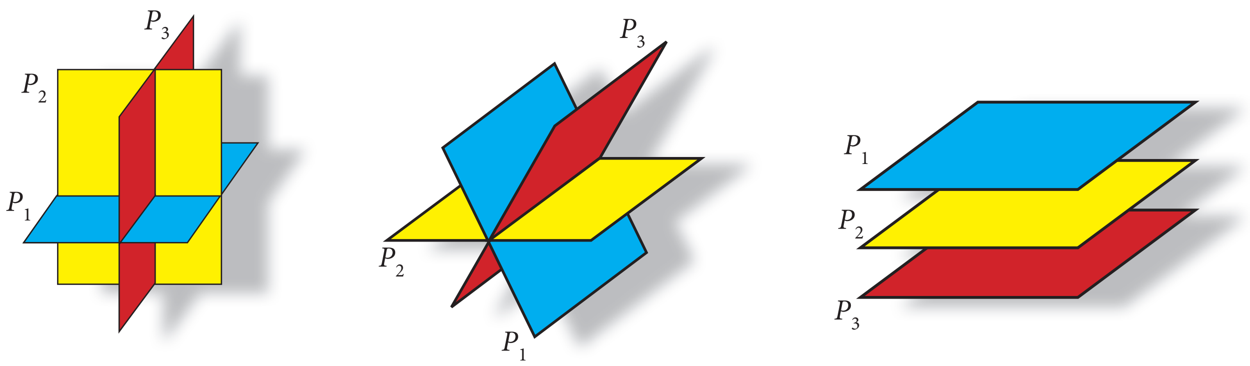
படம் 1.1

மூன்று மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளைக் கொண்ட சமச்சீரற்ற சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு (System of non Homogeneous Equations in three variables)

x, y மற்றும் z ஆகிய மூன்று மாறிகளைக் கொண்ட மூன்று நேரிய சமன்பாடுகளைக் கொண்ட நேரிய தொகுப்பின் பொது வடிவம்

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \qquad (2)$$

$ax + by + cz = d$ $(a, b$ மற்றும் c ஆகியன பூச்சியமற்றவை) என்ற மூன்று மாறிகளைக் கொண்ட நேரிய சமன்பாடு முப்பரிமாண வெளியில் அமைந்த தளத்தைக் குறிக்கும். எனவே தொகுப்பு (2)-ல் அமைந்த ஒவ்வொரு சமன்பாடும், முப்பரிமாண வெளியில் ஒவ்வொரு தளத்தைக் குறிக்கும். மேலும் தொகுப்பின் தீர்வு(கள்), தொகுப்பின் மூன்று சமன்பாடுகள் குறிக்கும் தளங்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி(கள்) ஆகும். ஒவ்வொரு தளமும் ஒன்றை ஒன்று வெட்டிக்கொள்ளும் தன்மையைப் பொறுத்து தொகுப்பு ஆனது ஒரே ஒரு தீர்வு, எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள், அல்லது தீர்வு இல்லாமை என பெற்றிருக்கும்.



(a) ஒரே ஒரு தீர்வு (b) எண்ணற்ற தீர்வுகள் (c) தீர்வு இல்லாமை

படம் 1.2

படம் 1.2 ஆனது ஒவ்வொரு சாத்தியக்கூறுகளையும் விளக்குகின்றது.

படம் 1.2(a)-ல் மூன்று தளங்களும் ஒரு புள்ளியில் வெட்டுகின்றன. எனவே சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு (2) ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெறும்.

படம் 1.2(b)-ல் தொகுப்பிற்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டு என்பதை சித்தரிக்கின்றது. இங்கு மூன்று தளங்களும் ஒரே நேர்க்கோட்டில் வெட்டிக் கொள்வதால், கோட்டின் மீதுள்ள அனைத்து புள்ளிகளும் தீர்வுகளாக கிடைக்கின்றன.

படம் 1.2(c)-ல் மூன்று தளங்களும் ஒன்றுக்கொன்று இணையானவை மற்றும் வெவ்வேறானவை. மூன்று தளங்களுக்கு பொதுவான புள்ளி ஏதும் இல்லை எனவே தொகுப்பு (2) க்கு இந்நிலையில் தீர்வு ஏதும் இல்லை.

குறிப்பு

ஒவ்வொரு நேரிய சமன்பாட்டுத் தொகுப்பும் ஒரே ஒரு தீர்வு அல்லது எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும் அல்லது தீர்வு இல்லாமலும் இருக்கும்.

n மதிப்பிடவேண்டிய மாறிகளைக் கொண்ட 'm' நேரிய சமன்பாடுகளைக் கொண்ட தன்னிச்சையான தொகுப்பினை

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}\;x_n = b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}\;x_n = b_2\\
&\vdots \qquad\;\; \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\; \vdots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}\;x_n = b_m
\end{aligned}$$

என எழுதலாம் $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்பன மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகள் மேலும் a_{ij} மற்றும் b_i $(i = 1,2,3, \ldots, m,\; j = 1,2,3, \ldots, n)$ என்பவை மாறிலிகள் ஆகும்.

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணிகள் (Augmented matrices)

'n' மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளைக் கொண்ட 'm' நேரிய சமன்பாடுகளை கொண்ட தொகுப்பு, செவ்வக வரிசையில் அமைந்த எண்களாக சுருக்கப்படுகின்றது.

$$\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1\\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n
\end{bmatrix}$$

இது தொகுப்பின் விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி ஆகும், மேலும் $\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}
\end{bmatrix}$ என்பது கெழு அணி எனப்படும்.

பின்வரும் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பினை கருதுவோம்.

$$\begin{aligned}
x + y + 2z &= 9\\
2x + 4y - 3z &= 1\\
3x + 6y - 5z &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A \quad X = B$$

இதில் $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$ என்பது கெழு அணி மற்றும்

$[A, B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ என்பது விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி ஆகும்.

1.1.4 சமச்சீரற்ற நேரிய சமன்பாடுகளின் ஒருங்கமைவுத் தன்மையை, தர முறையில் சோதித்தல் (இரண்டு மற்றும் மூன்று மதிப்பிட வேண்டிய) [Testing the consistency of non homogeneous linear equations (two and three variables) by rank method]

n மதிப்பிடவேண்டிய மாறிகளைக் கொண்ட $AX=B$ என்ற அணி சமன்பாட்டில்

(i) $\rho([A, B]) = \rho(A)$ எனில் சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையவை.

(ii) $\rho([A, B]) = \rho(A) = n$ எனில் சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையவை மற்றும் ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு.

(iii) $\rho([A, B]) = \rho(A) < n$ எனில் சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையவை மற்றும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் உண்டு.

(iv) $\rho([A, B]) \neq \rho(A)$ எனில் சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு அற்றது மற்றும் தீர்வு இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 1.9

$x + y = 5, 2x + y = 8$ ஆகிய சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையது எனில் அவற்றைத் தீர்க்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்டதொகுப்பிற்கான அணி சமன்பாடு

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A} \quad X = \mathrm{B}$$

அணி A	விரிவுபடுத்தப்பட்டஅணி $[A,B]$	அடிப்படை உருமாற்றம்
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ $\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2 - 2R_1$
$\rho(A) = 2$	$\rho([A,B]) = 2$	

ஏறுபடிவ அணியில் உள்ள பூச்சியமற்ற நிரைகளின் எண்ணிக்கை 2 ஆகும்.

$\rho(A) = \rho([A,B]) = 2$ = மதிப்பிடவேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பு ஒருங்கமைவுடையது மேலும்ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு.

கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பினை $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ என எழுதலாம்.

$$\Rightarrow \quad x + y = 5 \quad \ldots(1)$$

$$y = 2$$

$$\therefore (1) \Rightarrow x + 2 = 5$$

$$x = 3$$

தீர்வு : $x = 3,\ y = 2$

எடுத்துக்காட்டு 1.10

$2x + y = 5,\ 4x + 2y = 10$ ஆகிய சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையது எனில் அவற்றைத் தீர்க்க.

தீர்வு:

சமன்பாட்டுத் தொகுப்பிற்கான அணிச் சமன்பாடு,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$A \quad X = B$$

அணி A	விரிவுபடுத்தப்பட்டஅணி $[A,B]$	அடிப்படை உருமாற்றம்
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\sim\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix}$ $\sim\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2 - 2R_1$
$\rho(A) = 1$	$\rho([A,B]) = 1$	

ஏறுபடிவ அணியிலுள்ள பூச்சியமற்ற நிரைகளின் எண்ணிக்கை 1 ஆகும்.

இங்கு, $\rho(A)=\rho([A,B]) = 1 <$ மதிப்பிடவேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை.

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டு தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளை பெற்றிருக்கும்.

தொகுப்பிற்கான சமான அணி வடிவம்,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$ ஆகும்.

$$\Rightarrow 2x + y = 5 \qquad \ldots(1)$$

$k \in R$, $y = k$ எனக் கொண்டால்,

$x = \frac{1}{2}(5-k)$ (1) லிருந்து,

$$x = \frac{1}{2}(5-k),\ y = k\ ;\ \ k \in R$$

k -யின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு வெவ்வேறு தீர்வுகளை நாம் பெறலாம். எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.11

$3x - 2y = 6,\ 6x - 4y = 10$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு அற்றது எனக் காட்டுக.

தீர்வு:

அணி சமன்பாடு

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$AX = B$$

அணி A	விரிவுபடுத்தப்பட்டஅணி $[A,B]$	அடிப்படை உருமாற்றம்
$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 6 & -4 & 10 \end{pmatrix}$	
$\sim \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2 - 2R_1$
$\rho(A) = 1$	$\rho([A,B]) = 2$	

$$\therefore \rho([A, B]) = 2, \qquad \rho(A) = 1$$

$$\rho(A) \neq \rho([A,B])$$

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அற்றது.

எடுத்துக்காட்டு 1.12

$2x+y+z=5,\ x+y+z=4,\ x-y+2z=1$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையது எனக்காட்டுக மேலும் அவற்றைத் தீர்க்க.

தீர்வு:

அணி சமன்பாடு

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \qquad X = B$$

விரிவுபடுத்தப்பட்டஅணி $[A,B]$	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	
$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$R_1 \leftrightarrow R_2$
$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2 - 2R_1$ $R_3 \to R_3 - R_1$
$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$	$R_3 \to R_3 - 2R_2$
$\rho(A)=3,\ \ \rho([A,B])=3$	

கடைசி சமான அணி ஏறுபடி வடிவில் உள்ளது. இதில் மூன்று பூச்சியமற்ற நிரைகள் உள்ளன.

$\rho\,(A) = \rho([A,B])=3=$ மதிப்பிடவேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை.

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்டதொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது. மேலும் ஒரே ஒரு தீர்வை பெற்றிருக்கும்:

தீர்வு காண தரப்பட்ட சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்கு சமானமான அணி சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
x+y+z&=4 \quad (1)\\
y+z&=3 \quad (2)\\
3z&=3 \quad (3)
\end{aligned}
$$

$(3) \Rightarrow \quad z=1$

$(2) \Rightarrow \quad y=3-z=2$

$(1) \Rightarrow x=4-y-z$

$x=1$

$\therefore\ x = 1, \quad y = 2, \quad z = 1$

எடுத்துக்காட்டு 1.13

$x+y+z=6,\ x+2y+3z=14,\ x+4y+7z=30$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையது எனக்காட்டுக. மேலும் அவற்றைத் தீர்க்க.

தீர்வு:

அணி சமன்பாடு

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 30 \end{pmatrix}
$$

$$A \quad X = B$$

விரிவுபடுத்தப்பட்டஅணி $[A,B]$	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & 4 & 7 & 30 \end{pmatrix}$	
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & 16 \end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2 - R_1$ $R_3 \to R_3 - R_2$
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$R_3 \to R_3 - 2R_2$
$\rho(A)=2,\ \rho([A,B])=2$	

கடைசி சமான அணி ஏறுபடி வடிவில் உள்ளது. இதில் இரண்டு பூச்சியமற்ற நிரைகள் உள்ளன.

$\therefore \quad \rho([A,B])=2,\ \rho(A)=2$

இங்கு, $\rho(A)=\rho([A,\ B])=2<$ மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை.

எனவே, கொடுக்கப்பட்டதொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது. மேலும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் உண்டு.

கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பிற்கு சமானமான அணிச் சமன்பாடு

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x+y+z=6 \qquad (1)$$

$$y+2z=8 \qquad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \quad y=8-2z,$$

$$(1) \Rightarrow \quad x=6-y-z=6-(8-2z)-z=z-2$$

$z=k,\ k\in R$ எனக் கொண்டால், $x=k-2, y=8-2k$ எனப் பெறலாம்.

k -யின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு வெவ்வேறு தீர்வுகளை நாம் பெறலாம்.

எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பு எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.14

$x-4y+7z=14,\ 3x+8y-2z=13,\ 7x-8y+26z=5$ என்றசமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு அற்றவை எனக்காட்டுக.

தீர்வு:

அணி சமன்பாடு

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 3 & 8 & -2 \\ 7 & -8 & 26 \end{pmatrix}}\underset{X}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}=\underset{B}{\begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

விரிவுபடுத்தப்பட்டஅணி $[A,B]$	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & 14 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 7 & -8 & 26 & 5 \end{pmatrix}$	
$\sim\begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & 14 \\ 0 & 20 & -23 & -29 \\ 0 & 20 & -23 & -93 \end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2-3R_1$ $R_3 \to R_3-7R_1$
$\sim\begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & 14 \\ 0 & 20 & -23 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}$	$R_3 \to R_3-R_2$
$\rho(A)=2,\ \rho([A,B])=3$	

கடைசி சமானமான அணி ஏறுபடி வடிவில் உள்ளது. இதில் மூன்று பூச்சியமற்ற நிரைகள் உள்ளன.

$$\therefore \quad \rho\left(\left[A,\ B\right]\right)=3, \qquad \rho\left(A\right)=2$$

$$\rho\left(A\right)\neq\rho\left(\left[A,\ B\right]\right)$$

எனவே, சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அற்றது மற்றும் தீர்வு ஏதுமில்லை.

எடுத்துக்காட்டு 1.15

பின்வரும் சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையது எனில் k-ன் மதிப்பைக்காண்க. $x+2y-3z=-2,\ 3x-y-2z=1,\ 2x+3y-5z=k$.

தீர்வு:

தரப்பட்ட தொகுப்புக்குரிய அணிச் சமன்பாடானது

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & -1 & -2\\ 2 & 3 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ k\end{pmatrix}$$

$$A \qquad X = B$$

விரிவுபடுத்தப்பட்டஅணி $[A,B]$	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & -2\\ 3 & -1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & -5 & k\end{pmatrix}$	
$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & -2\\ 0 & -7 & 7 & 7\\ 0 & -1 & 1 & 4+k\end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2-3R_1$ $R_3 \to R_3-2R_1$
$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & -2\\ 0 & -7 & 7 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 21+7k\end{pmatrix}$	$R_3 \to 7R_3-R_2$
$\rho\left(A\right)=2,\ \rho\left(\left[A,\ B\right]\right)=2$ (அல்லது) 3	

சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையவை எனில் $\rho\left(\left[A,\ B\right]\right)=\rho\left(A\right)=2$

$$\therefore \quad 21+7k=0$$

$$7k=-21.$$

$$k=-3$$

எடுத்துக்காட்டு 1.16

தரப்பட்ட சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு அற்றவை எனில் k -ன் மதிப்பு காண்க. $x+y+z=7,\ x+2y+3z=18,\ y+kz=6$.

தீர்வு:

தரப்பட்ட தொகுப்புக்குரிய அணிச் சமன்பாடு

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\0&1&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\18\\6\end{pmatrix}$$

$$A \qquad X \quad = \quad B$$

விரிவுபடுத்தப்பட்டஅணி $[A,B]$	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$\begin{pmatrix}1&1&1&7\\1&2&3&18\\0&1&k&6\end{pmatrix}$	
$\sim\begin{pmatrix}1&1&1&7\\0&1&2&11\\0&1&k&6\end{pmatrix}$	$R_2\to R_2-3R_1$ $R_3\to R_3-7R_1$
$\sim\begin{pmatrix}1&1&1&7\\0&1&2&11\\0&0&k-2&-5\end{pmatrix}$	$R_3\to R_3-R_2$
$\rho(A)=2$ அல்லது 3, $\rho([A,B])=3$	

சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு அற்றவை எனில்

$$\rho([A,B])\neq\rho(A)$$

$$k-2=0. \quad \therefore k=2$$

எடுத்துக்காட்டு 1.17

'a' மற்றும் 'b' இன் எம்மதிப்புகளுக்கு $x+y+z=6,\quad x+2y+3z=10,\quad x+2y+az=b$ என்ற சமன்பாடுகள்

(i) எந்த தீர்வும் பெற்றிராது (ii) ஒரே ஒரு தீர்வை பெற்றிருக்கும்

(iii) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும் என ஆராய்க.

தீர்வு:

தரப்பட்ட சமன்பாட்டு தொகுப்புக்குரிய அணிச் சமன்பாடானது

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ b \end{pmatrix}$$

$$A \quad X = B$$

விரிவுபடுத்தப்பட்டஅணி $[A,B]$	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 10 \\ 1 & 2 & a & b \end{pmatrix}$	
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & a-1 & b-6 \end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2 - R_1$ $R_3 \to R_3 - R_1$
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & a-3 & b-10 \end{pmatrix}$	$R_3 \to R_3 - R_2$

கடைசி சமான அணி ஏறுபடிவ வடிவில் உள்ளது

நிலை (i) தீர்வு இல்லை :

$\rho(A) \neq \rho([A,B])$ எனில், தொகுப்பிற்கு தீர்வு இல்லை. $a-3 = 0$ மற்றும் $b-10 \neq 0$ எனும்போது மட்டுமே $\rho(A) \neq \rho([A,B])$ ஆகும்.

$\therefore$ $a = 3$, $b \neq 10$ எனும்போது தொகுப்பிற்கு தீர்வு இல்லை.

நிலை (ii) ஒரே ஒரு தீர்வு :

$\rho(A) = \rho([A,B]) =$ மதிப்பிடவேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை, எனில் தொகுப்பிற்கு ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு.

இங்கு $a-3 \neq 0$ எனில் $\rho(A) = \rho([A,B]) = 3$

$\therefore$ $a \neq 3$ மற்றும் $b \in R$ எனில் தொகுப்பிற்கு ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு.

நிலை (iii) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள்:

$\rho(A) = \rho([A,B]) <$ மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை, எனில் தொகுப்பிற்கு எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் உண்டு

இங்கு $a-3=0$, $b-10=0$ எனில் $\rho(A) = \rho([A,B]) = 2 < 3$

எனவே $a = 3$ மற்றும் $b = 10$ எனும் போது தொகுப்பிற்கு எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் உண்டு.

எடுத்துக்காட்டு 1.18

ஒரு தொழிற்சாலையில் உற்பத்தி செய்யப்படும் மொத்த அலகுகளின் நேரிய சார்பு $P = a + bl + cm$ இங்கு தொழிலாளர்களின் கூடுதல் உழைப்பு நேரம் (மணியில்) l, கூடுதல் இயந்திரம் நேரம் (மணியில்) m மற்றும் வேலையை முடிக்கும் நேரம் a (நிலையானது) எனில் பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து a, b மற்றும் c ஆகிய மாறிலிகளின் மதிப்புகளைக் காண்க

நாள்	உற்பத்தி (P அலகுகள்)	உழைப்பு நேரம் (l மணியில்)	கூடுதல் இயந்திரம் நேரம் (m மணியில்)
திங்கள்	6,950	40	10
செவ்வாய்	6,725	35	9
புதன்	7,100	40	12

மேலும் உழைப்பு நேரம் 50 மணிகள் மற்றும் கூடுதல் இயந்திரம் நேரம் 15 மணிகள் எனில் உற்பத்தியைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு:

$P = a + bl + cm$ என்பது உற்பத்தி சமன்பாடு ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளிலிருந்து

$$6{,}950 = a + 40b + 10c$$

$$6{,}725 = a + 35b + 9c$$

$$7{,}100 = a + 40b + 12c$$

தரப்பட்ட சமன்பாட்டு தொகுப்புக்குரிய அணிச் சமன்பாடானது

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 40 & 10 \\ 1 & 35 & 9 \\ 1 & 40 & 12 \end{pmatrix}} \underset{X}{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}} \underset{=}{=} \underset{B}{\begin{pmatrix} 6950 \\ 6725 \\ 7100 \end{pmatrix}}$$

விரிவுபடுத்தப்பட்டஅணி $[A,B]$	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$\begin{pmatrix} 1 & 40 & 10 & 6950 \\ 1 & 35 & 9 & 6725 \\ 1 & 40 & 12 & 7100 \end{pmatrix}$	
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 40 & 10 & 6950 \\ 0 & -5 & -1 & -225 \\ 0 & 0 & 2 & 150 \end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2 - R_1$ $R_3 \to R_3 - R_1$
$\rho(A) = 3, \rho([A,B]) = 3$	

∴ தரப்பட்ட சமன்பாட்டு தொகுப்புக்குரிய சமானமான அணிச் சமன்பாடு

$$\begin{pmatrix} 1 & 40 & 10 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6950 \\ -225 \\ 150 \end{pmatrix}$$

$$a + 40b + 10c = 6950 \quad (1)$$

$$-5b - c = -225 \quad (2)$$

$$2c = 150 \quad (3)$$

$$\boxed{c = 75}$$

இப்பொழுது, $(2) \Rightarrow -5b - 75 = -225$

$$\boxed{b = 30}$$

மற்றும் $(1) \Rightarrow a + 1200 + 750 = 6950$

$$a = 5000$$

$$a = 5000,\ b = 30,\ c = 75$$

∴ உற்பத்தி சமன்பாடு $P = 5000 + 30l + 75m$

$l = 50,\ m=15$ இல் $P = 5000 + 30(50) + 75(15)$

$$= 7625$$

∴ உற்பத்தி $= 7,625$ அலகுகள்.

பயிற்சி 1.1

1. பின்வரும் அணிகளின் தரம் காண்க.

i) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

iv) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ v) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ vi) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & -7 \end{pmatrix}$

vii) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & 5 & -7 & 2 \end{pmatrix}$ viii) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ எனில் AB மற்றும் BA இவற்றின் தரத்தினைக் காண்க.

3. பின்வரும் சமன்பாட்டு தொகுப்பினை தர முறையில் தீர்க்க

$$x + y + z = 9,\ \ 2x + 5y + 7z = 52,\ \ 2x + y - z = 0$$

4. $5x + 3y + 7z = 4,\ 3x + 26y + 2z = 9,\ 7x + 2y + 10z = 5$ என்ற சமன்பாடுகளை தர முறையில் ஒருங்கமைவுடையது எனக்காட்டுக. மேலும் அவற்றை தீர்க்க.

5. பின்வரும் சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்கு தர முறையில் ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு எனக் காட்டுக:

$$x + y + z = 3,\ x + 2y + 3z = 4,\ \ x + 4y + 9z = 6\,.$$

6. λ -ன் எந்த மதிப்புகளுக்கு பின்வரும் சமன்பாடுகள் ஒரே ஒரு தீர்வை பெற்றிராது என தர முறையில் காண்க: $3x - y + \lambda z = 1,\ 2x + y + z = 2,\ \ x + 2y - \lambda z = -1$.

7. X, Y மற்றும் Z ஆகிய மூன்று பொருள்களின் விலைகள் முறையே x, y மற்றும் z ஆகும். திரு. ஆனந்த் அவர்கள் Z–ல் 6 பொருள்களை வாங்கி, X-ல் 2 பொருள்கள் மற்றும் Y-ல் 3 பொருள்களை விற்கிறார். திரு. அமீர் அவர்கள் Y-ல் ஒரு பொருளை வாங்கி, X-ல் 3 பொருள்கள் மற்றும் Z-ல் 2 பொருள்களை விற்கிறார். திரு. அமித் அவர்கள் X-ல் ஒரு பொருளை வாங்கி Y-ல் மூன்று பொருள்கள் மற்றும் Z-ல் ஒரு பொருளை விற்கிறார். இதன் மூலமாக அவர்கள் மூவரும், முறையே ₹5,000, ₹2,000 மற்றும் ₹5,500 என வருமானம் பெறுகின்றனர் எனில் அம்மூன்று பொருள்களின் விலைகளைக் காண்க.

8. ஒரு தொகை ₹5,000 ஆனது ஆண்டிற்கு 6%, 7% மற்றும் 8% தரக்கூடிய மூன்று பங்குகளில் பிரித்து முதலீடு செய்யப்பட்டு, ஆண்டு மொத்த வருமானமாக ₹358 பெறப்படுகிறது. முதல் இரண்டு முதலீடுகளிலிருந்து கிடைக்கும் வருமானம், மூன்றாவது முதலீட்டிலிருந்து கிடைக்கும் வருமானத்தை விட ₹70 அதிகம் எனில், அம்மூன்று பங்குகளில் செலுத்தப்படும் முதலீடுகளை தரமுறையில் காண்க.

1.2 கிரேமர் விதி (Cramer's Rule)

சுவிஸ் கணித மேதையான கேப்பிரியல் கிரேமர் 1704-ஆம் ஆண்டு ஜூலை 31 ஆம் நாள் ஜெனிவா என்ற நகரத்தில் பிறந்தார். இவர் இரண்டு மூத்த பெர்னோலிகளின் படைப்புகளை தொகுத்தது மட்டுமல்லாது, கிரகங்களின் கோள வடிவத் தன்மையையும், அவற்றிற்கான இயல்பான காரணத்தையும் (1730) மற்றும் நியூட்டன் முப்படி வளைவரை கையாலுதலையும் (1746) தொகுத்து வழங்கினார்.

இவர் 1750-ஆம் ஆண்டில் மதிப்பிடவேண்டிய மாறிகளில் அமைந்த n நேரிய சமன்பாட்டுத் தொகுப்புக்கு அணிக்கோவை முறையில் ஒரே ஒரு தீர்வைத்தரக்கூடிய சூத்திரமான கிரேமரின் விதியை வெளியிட்டார். கிரேமர் விதியின் சிறப்பு என்னவெனில் கண்டுபிடிக்கப்பட வேண்டிய

மாறிகளான x,y,z -ல் எவையேனும் ஒன்றை கண்டுபிடிக்க, மற்ற மாறிகளின் மதிப்புகள் தெரிந்திருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. கிரேமர் விதியை $\Delta \neq 0$ ஆக இருக்கும் போது மட்டுமே பயன்படுத்தி ஒரே ஒரு தீர்வை பெறமுடியும்.

தேற்றம் (நிரூபணமின்றி) கிரேமரின் விதி (Theorem (without proof) Cramer's Rule)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$ என்க.

அதாவது $AX=B$ என்பது n மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளில் அமைந்த சமன்பாட்டுத் தொகுப்புக்கு $\det(A) \neq 0$ எனில் தரப்பட்ட தொகுப்பானது ஒரே ஒரு தீர்வை பெற்றிக்கும்.

இத்தீர்வானது, $$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det A}, \ldots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det A}$$

இங்கு A_j என்ற அணியானது A–ன் j-வது நிரலிலுள்ள உறுப்புகளுக்கு பதிலாக

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$ என்ற அணியிலுள்ள உறுப்புகளை பிரதியிட்டு கிடைக்கும் அணியாகும்.

1.2.1 மதிப்பிட வேண்டிய மூன்று மாறிகள் வரை கொண்ட சமீரற்ற சமன்பாடுகள் (Non Homogeneous linear equations upto three variables).

(a) இரண்டு மதிப்பிடவேண்டிய மாறிகள் அமைந்த இரண்டு நேரிய சமன்பாடுகள் கொண்ட தொகுப்பினை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$a_1x + b_1y = d_1$$
$$a_2x + b_2y = d_2$$

இங்கு $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ $\quad \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}$ $\quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}$ ஆகும்.

கிரேமரின் விதிப்படி, மாறிகளுக்கான தீர்வு,

$\Delta \neq 0$ எனும் நிலையில் $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta}, \quad y = \dfrac{\Delta y}{\Delta}$ ஆகும்.

(b) மூன்று மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகள் அமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

இங்கு $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$ என்க.

கிரேமரின் விதிப்படி, மதிப்பிடவேண்டிய மாறிகளுக்கான தீர்வு, $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta y}{\Delta}, z = \dfrac{\Delta z}{\Delta}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.19

கிரேமரின் விதியை பயன்படுத்தி தீர்வு காண்க : $2x + 3y = 7,\ 3x + 5y = 9.$

தீர்வு:

சமன்பாடுகள் முறையே, $$2x + 3y = 7$$ $$3x + 5y = 9$$

இங்கு $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

ஆதலால் கிரேமர் விதியை பயன்படுத்தலாம்.

இப்பொழுது, $\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = 8 \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -3$

$\therefore$ கிரேமரின் விதிப்படி, $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{8}{1} = 8 \qquad y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = \dfrac{-3}{1} = -3$

$\therefore$ தீர்வு $x = 8, y = -3$

எடுத்துக்காட்டு 1.20

ஜனவரி மற்றும் பிப்ரவரி மாதங்களில் A மற்றும் B என்ற இரு நிறுவனங்களிலும் திரு.ரவி என்பவரால் வாங்கப்பட்ட பங்குகளின் எண்ணிக்கை மற்றும் செய்யப்பட்ட மொத்த முதலீடுகள் (ரூபாயில்) கீழ்காணும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில், இவ்விரு மாதங்களிலும் வாங்கப்பட்ட பங்குகளின் விலையைக் காண்க.

மாதங்கள்	பங்குகளின் எண்ணிக்கை		செய்யப்பட்ட மொத்த முதலீடு (₹)
	A	B	
சனவரி	10	5	125
பிப்ரவரி	9	12	150

தீர்வு:

A-என்ற நிறுவனத்திலிருந்து வாங்கப்பட்ட ஒரு பங்கின் விலை x என்க.

B-என்ற நிறுவனத்திலிருந்து வாங்கப்பட்ட ஒரு பங்கின் விலை y என்க.

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தின்படி

$$10x+5y=125$$
$$9x+12y=150$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}10 & 5\\ 9 & 12\end{vmatrix}=75\neq 0 \qquad \Delta_x=\begin{vmatrix}125 & 5\\ 150 & 12\end{vmatrix}=750 \qquad \Delta_y=\begin{vmatrix}10 & 125\\ 9 & 150\end{vmatrix}=375$$

$\therefore$ கிரேமரின் விதிப்படி, $x=\dfrac{\Delta x}{\Delta}=\dfrac{750}{75}=10 \quad y=\dfrac{\Delta y}{\Delta}=\dfrac{375}{75}=5$

A என்ற நிறுவனத்திலிருந்து வாங்கப்பட்ட ஒரு பங்கின் விலை ₹10 மற்றும் B என்ற நிறுவனத்திலிருந்து வாங்கப்பட்ட ஒரு பங்கின் விலை ₹5 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.21

11 பென்சில்கள் மற்றும் 3 அழிப்பான்களின் மொத்த விலை ₹64. மேலும் 8 பென்சில்கள் மற்றும் 3 அழிப்பான்களின் மொத்த விலை ₹49. கிரேமரின் விதியைப்பயன்படுத்தி ஒரு பென்சில் மற்றும் ஒரு அழிப்பான் விலையைக் காண்க.

தீர்வு:

ஒரு பென்சிலின் விலை ₹ x என்க

ஒரு அழிப்பானின் விலை ₹ y என்க

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் படி பின்வரும் சமன்பாடுகளைக் காணலாம்

$$11x+3y=64$$
$$8x+3y=49$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}11 & 3\\ 8 & 3\end{vmatrix}=9\neq 0.$$ (தொகுப்பு ஒரே ஒரு தீர்வை பெற்றிருக்கும்)

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}64 & 3\\ 49 & 3\end{vmatrix}=45 \qquad \Delta_y=\begin{vmatrix}11 & 64\\ 8 & 49\end{vmatrix}=27$$

$\therefore$ கிரேமரின் விதிப்படி

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{45}{9}=5$$
$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{27}{9}=3$$

$\therefore$ ஒரு பென்சிலின் விலை ₹5 மற்றும் ஒரு அழிப்பானின் விலை ₹3 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.22

கிரேமரின் விதியைப் பயன்படுத்தி தீர்க்க:

$x+y+z=4,\ 2x-y+3z=1,\ 3x+2y-z=1$

தீர்வு:

இங்கு $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & -1\end{vmatrix}=13\neq 0$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$|A|=0$ எனும்பொழுது சமன்பாட்டுத் தொகுப்பானது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட தீர்வுகளை கொண்டதாகவோ அல்லது தீர்வு இல்லாமலோ இருக்கும்.

∴ கிரேமரின் விதிப்படி, தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் ஒரே ஒரு தீர்வை பெற்றிருக்கும்.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -13 \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 39 \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 26$$

∴ கிரேமரின் விதிப்படி

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-13}{13} = -1 \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{39}{13} = 3 \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{26}{13} = 2$$

∴ தீர்வு $\{x, y, z\} = \{-1, 3, 2\}$

எடுத்துக்காட்டு 1.23

3 வணிகக் கணிதப் புத்தகங்கள், 2 கணக்கு பதிவியல் புத்தகங்கள் மற்றும் ஒரு வணிகவியல் புத்தகம் ஆகியவற்றின் மொத்த விலை ₹840. இரண்டு வணிகக் கணித புத்தங்கள், ஒரு கணக்குபதிவியல் மற்றும் ஒரு வணிகவியல் புத்தகத்தின் மொத்த விலை ₹570. ஒரு வணிகக் கணித புத்தகம், ஒரு கணக்குப்பதிவியல் புத்தகம் மற்றும் 2 வணிகவியல் புத்தகங்களின் மொத்தவிலை ₹630 எனில், ஒவ்வொரு புத்தகத்தின் விலையை கிரேமரின் விதியைக் கொண்டுக் காண்க.

தீர்வு:

ஒரு வணிகக் கணித புத்தகத்தின் விலை ₹ x என்க.

ஒரு கணக்குபதிவியல் புத்தகத்தின் விலை ₹ y என்க.

ஒரு வணிகவியல் புத்தகத்தின் விலை ₹ z என்க.

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களைக் கொண்டு, கீழ்காணும் சமன்பாடுகளை பெறலாம்.

$$\therefore\ 3x + 2y + z = 840$$
$$2x + y + z = 570$$
$$x + y + 2z = 630$$

இங்கு $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 840 & 2 & 1 \\ 570 & 1 & 1 \\ 630 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -240$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 840 & 1 \\ 2 & 570 & 1 \\ 1 & 630 & 2 \end{vmatrix} = -300 \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 840 \\ 2 & 1 & 570 \\ 1 & 1 & 630 \end{vmatrix} = -360$$

∴ கிரேமரின் விதிப்படி

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-240}{-2} = 120 \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-300}{-2} = 150 \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-360}{-2} = 180$$

∴ ஒரு வணிகக் கணித புத்தகத்தின் விலை ₹ 120,

ஒரு கணக்குபதிவியல் புத்தகத்தின் விலை ₹150 மற்றும்

ஒரு வணிகவியல் புத்தகத்தின் விலை ₹180.

எடுத்துக்காட்டு 1.24

ஒரு வாகன தயாரிப்பு நிறுவனமானது S_1, S_2 மற்றும் S_3 என்ற மூன்று வகையான எஃகு இரும்புகளையும் பயன்படுத்தி C_1, C_2 மற்றும் C_3 என்ற மூன்று வகையான மகிழுந்து வாகனங்களை உற்பத்தி செய்கிறது. ஒவ்வொரு வகையான வாகனங்ளுக்கு தேவையான எஃகு இரும்பு R டன்களில் மற்றும் மூன்று வகையான மகிழுந்து வாகனங்களுக்கும் தேவையான மொத்த எஃகு இரும்பு விவரம் பின்வரும் அட்டவணையில் தொகுத்து வழங்கப்பட்டுள்ளது.

எஃகு வகைகள்	வாகனங்களின் வகைகள்			இருப்பிலுள்ள மொத்த எஃகு
	C_1	C_2	C_3	
S_1	3	2	4	28
S_2	1	1	2	13
S_3	2	2	1	14

நிறுவனம் தயாரிக்கும் ஒவ்வொரு வகையான வாகனங்களின் எண்ணிக்கையை காண்க.

தீர்வு:

C_1 வகை வாகனங்களின் எண்ணிக்கை x என்க.

C_2 வகை வாகனங்களின் எண்ணிக்கை y என்க.

C_3 வகை வாகனங்களின் எண்ணிக்கை z என்க.

$$\therefore \quad 3x+2y+4z=28$$
$$x+y+2z=13$$
$$2x+2y+z=14$$

இங்கு $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ $\qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 28 & 2 & 4 \\ 13 & 1 & 2 \\ 14 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 28 & 4 \\ 1 & 13 & 2 \\ 2 & 14 & 1 \end{vmatrix} = -9 \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 28 \\ 1 & 1 & 13 \\ 2 & 2 & 14 \end{vmatrix} = -12$$

$\therefore$ கிரேமரின் விதிப்படி

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-6}{-3} = 2 \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-9}{-3} = 3 \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-12}{-3} = 4$$

$\therefore$ உற்பத்தி செய்யப்படும் ஒவ்வொரு வகையான வாகனங்களின் எண்ணிக்கை முறையே 2, 3 மற்றும் 4 ஆகும்.

பயிற்சி 1.2

1. கீழ்காணும் சமன்பாடுகளை கிரேமரின் விதியைப் பயன்படுத்தி தீர்க்க

(i) $2x + 3y = 7, \quad 3x + 5y = 9$

(ii) $5x + 3y = 17, \quad 3x + 7y = 31$

(iii) $2x + y - z = 3, \quad x + y + z = 1, \quad x - 2y - 3z = 4$

(iv) $x + y + z = 6, \quad 2x + 3y - z = 5, \quad 6x - 2y - 3z = -7$

(v) $x + 4y + 3z = 2, \quad 2x - 6y + 6z = -3, \quad 5x - 2y + 3z = -5$

2. 3 அலகுகள் தொழிலாளரின் சம்பளம் மற்றும் 2 அலகுகள் மூலதனம் கொண்டு தயாரிக்கப்படும் உற்பத்தி பொருள்களுக்கான செலவு ₹62 ஆகும். 4 அலகுகள் தொழிலாளரின் சம்பளம் மற்றும் 1 அலகு மூலதனம் கொண்டு பொருள்கள் உற்பத்தி செய்யப்பட்டிருந்தால் அதன் மொத்த செலவு ₹56 எனில், அணிக்கோவை முறையில் தொழிலாளர் மற்றும் மூலதனத்தின் ஒரு அலகுக்கு ஆகும் செலவினைக் காண்க.

3. ₹8,600 ஆனது இரண்டு விதமான கணக்குகளில் முதலீடு செய்யப்பட்டுள்ளது. இதில் ஒரு முதலீடானது $4\frac{3}{4}\%$ -ம், மற்றொரு முதலீடானது $6\frac{1}{2}\%$ -ம் ஆண்டு வருவாயை ஈட்டித் தருகிறது. ஓர் ஆண்டில் இரு முதலீடுகளுக்கான மொத்த வருமானம் ₹431.25 எனில், ஒவ்வொரு கணக்கிலும் செய்யப்பட்ட முதலீட்டு தொகையினைக் காண்க.

4. மெரினா கடற்கரையில் இரண்டு சிறுமிகள் குதிரை சவாரி மற்றும் கிவாட் பைக் சவாரியை மணி நேர வாடகையில் விளையாடுகிறார்கள். மே மாதத்தின் போது சிறுமி கெரன் ₹780-ம் சிறுமி பெனிட்டா ₹560-ம் செலவு செய்தார்கள். அதன் விவரம் கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் கொண்டுக்கப்பட்டுள்ளது.

பெயர்	பயன்படுத்திய காலம் (மணிகளில்)		மொத்த செலவு (₹)
	குதிரை சவாரி	கிவாட் பைக் சவாரி	
கெரன்	3	4	780
பெனிட்டா	2	3	560

இரண்டு விளையாட்டுகளுக்கான ஒரு மணி நேர வாடகையை அணிக்கோவை முறையில் காண்க.

5. ஒரு சந்தை ஆய்விற்காக A, B மற்றும் C ஆகிய பொருட்கள் எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது. குறியீட்டு எண்ணை காண்பதற்காக ஒவ்வொரு பொருளும் மூன்று வித தரங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டு அவற்றிற்கு நிலையான எடைகள் ஒதுக்கப்படுகிறது. மூன்று பொருள்களின் நுகர்வு பற்றிய தகவல்கள் மற்றும் பொருள்களின் மொத்த எடைகள் ஆகியவை கீழேயுள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

பொருள்கள்	தரங்களின் நுகர்கவுகள்			மொத்த எடைகள்
	I	II	III	
A	1	2	3	11
B	2	4	5	21
C	3	5	6	27

மூன்று தரங்களுக்கும் ஒதுக்கப்பட்ட எடைகளை கிரேமரின் விதியைப் பயன்படுத்தி காண்க.

6. மொத்த தொகை ₹8,500 ஆனது வட்டி வருமானம் தரும் மூன்று விதமான கணக்குகளில் முதலீடு செய்யப்பட்டது. ஒவ்வொரு முதலீட்டுக்கான வட்டிவீதம் 2%, 3% மற்றும் 6% ஆகவும், ஒரு வருடத்திற்கான மொத்த வட்டி ₹380 ஆகவும் உள்ளது. மேலும் 6% முதலீட்டு தொகையானது மற்ற இரண்டு முதலீடுகளின் கூட்டுத்தொகைக்கு சமம் எனில், கிரேமரின் விதியைக் கொண்டு ஒவ்வொரு பிரிவிலும் செய்த முதலீட்டுத் தொகை எவ்வளவு?

1.3 மாறுதல் நிகழ்தகவு அணிகள் (Transition Probability Matrices)

1.3.1 தொடக்க பங்கு சந்தை பங்கீட்டினைக் கொண்டு அடுத்த நிலையினை முன்னறிவித்தல் (Forecasting the succeeding state when the initial market share is given)

ஒருநிலை மாறுதல் நிகழ்தகவு (One stage Transition Probability)

ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் நிகழக்கூடிய நிகழ்வு s_n என்ற நிலையில் உள்ளது. ஒரு அலகு நேரம் கழித்து மற்றொரு நிகழ்வு நிகழுமானால், அதாவது அமைப்பு ஒரு நிலை s_n லிருந்து s_{n+1} க்கு நகருமானால், இந்நகர்வு நிகழ்தகவு பரவலுடன் தொடர்புபடுத்தப்படுகின்றது. ஒவ்வொரு நகர்வின் மாற்றமும் s_n லிருந்து s_{n+1} க்கு மாறுவது நிகழ்தகவுடன் தொடர்புபடுத்தப்படுகின்றது. இந்நிகழ்தகவு ஒருநிலை மாறுதல் நிகழ்தகவு என அழைக்கப்படுகின்றது.

மாறுதல் அணி (Transition Matrix)

P_{jk} என்ற மாறுதல் நிகழ்தகவானது $P_{jk} > 0, \sum_k P_{jk} = 1$ என அனைத்து j க்கும் நிறைவு செய்கின்றது.

இந்த நிகழ்தகவுகளை அணிவடிவில் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \cdots \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

இதுவே மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.25

சந்தையில் உள்ள A மற்றும் B ஆகிய தர அடையாளம் கொண்ட பொருள்களுக்கான மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி $\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \end{array}$ எனில், சமநிலையில் தர அடையாளம் கொண்ட ஒவ்வொரு பொருள்களுக்கான சந்தை பங்கீடுகளைக் காண்க.

தீர்வு:

மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி

$$T = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \end{array}$$

சமநிலையில், நாம் பெறுவது $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$ மேலும், இங்கு $A+B=1$ ஆகும்.

$$\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0.9A + 0.3B &= A \\ 0.9A + 0.3(1-A) &= A \\ 0.9A - 0.3A + 0.3 &= A \\ 0.6A + 0.3 &= A \\ 0.4A &= 0.3 \\ A &= \frac{0.3}{0.4} = \frac{3}{4} \\ \Rightarrow \qquad B &= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

எனவே A –ன் சந்தைப்பங்கீடு 75% மற்றும் B-யின் சந்தைப்பங்கீடு 25% ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.26

பரிதி என்பவர் ஒவ்வொரு நாளும் சோகமாகவோ (S) அல்லது மகிழ்ச்சியாகவோ (H) உள்ளார். ஒரு நாள் மகிழ்ச்சியாக இருந்தால், அடுத்த நாள் 5-ல் 4-பங்கு சோகமாக இருப்பார். ஒரு நாள் சோகமாக இருந்தால், அடுத்த நாள் 3-ல் 2 பங்கு மகிழ்ச்சியாக இருப்பார் எனில், நீண்டகால அடிப்படையில் ஏதாவது ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் மகிழ்ச்சியாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு:

மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

சமநிலையில், $\begin{pmatrix} S & H \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & H \end{pmatrix}$ இங்கு $S + H = 1$

$$\frac{1}{3}S + \frac{4}{5}H = S$$

$$\frac{1}{3}(1 - H) + \frac{4}{5}H = 1 - H$$

இதைத் தீர்க்க, நாம் பெறுவது $S = \frac{6}{11}$ மற்றும் $H = \frac{5}{11}$

நீண்ட கால அடிப்படையில், தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட நாளில் மகிழ்ச்சியாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{5}{11}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.27

பின்வரும் வழிமுறைகளில் ஆகாஷ் மட்டைப்பந்து விளையாடுகின்றார். ஒரு முறை வெற்றி பெற்றால் (S) அடுத்த முறை விளையாடும்போது வெற்றிபெற 25% வாய்ப்பு உள்ளது. அவர் தோல்வி (F) அடைந்தால் அடுத்தமுறை விளையாடும்போது 35% வெற்றி பெற வாய்ப்பு உள்ளது. இவ்விவரங்களிலிருந்து மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி மற்றும் நீண்ட கால அடிப்படையில் அவரின் வெற்றி வாய்ப்பின் சராசரி ஆகியவற்றை காண்க.

தீர்வு:

மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி $T = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.35 & 0.65 \end{pmatrix}$

சமநிலையில், $(S \quad F)\begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.35 & 0.65 \end{pmatrix} = (S \quad F)$ இங்கு $S + F = 1$

$$0.25\,S + 0.35\,F = S$$

$$0.25\,S + 0.35\,(1 - S) = S$$

இதை தீர்க்க $S = \frac{0.35}{1.10}$

$$\Rightarrow \quad S = 0.318 \text{ மற்றும் } F = 0.682$$

$\therefore$ ஆகாஷின் வெற்றி வாய்ப்பு சராசரி 31.8% ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.28

ஒரு பாடவேளையில், கணிதம் பயிலும் மாணவர்களில் 80% பேர் அடுத்த பாடவேளையில் கணிதம் பயில்கின்றனர். ஒரு பாடவேளையில், ஆங்கிலம் பயிலும் மாணவர்களில் 30% பேர் அடுத்த பாடவேளையில் ஆங்கிலம் பயில்கின்றனர்.ஆரம்பத்தில் 60 மாணவர்கள் கணிதமும், 40 மாணவர்கள் ஆங்கிலமும் பயில்கின்றனர் எனில்,

(i) மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி

(ii) தொடர்ச்சியாக அடுத்த 2 பாடவேளைகளிலும் கணிதம் மற்றும் ஆங்கிலம் பயிலும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு

(i) மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி

$$T = \begin{array}{c} \\ M \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} M & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} \end{array}$$

முதல் பாடவேளைக்குப் பின்,

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} M & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 60 & 40 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ M \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} M & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} M & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 76 & 24 \end{pmatrix} \end{array}$$

மாற்று முறை

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} M & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 60 & 40 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ M \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} M & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} M & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 60 & 40 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ M \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} M & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.78 & 0.22 \\ 0.77 & 0.23 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= (46.8 + 30.8 \quad 13.2 + 9.2)$$

$$= (77.6 \quad 22.4)$$

எனவே முதல் பாடவேளைக்குப் பின், கணிதம் பயிலும் மாணவர்கள் 76 பேர்களும், ஆங்கிலம் பயிலும் மாணவர்கள் 24 பேர்களும் இருப்பார்கள்.

இரு பாடவேளைகளுக்குப் பின் ,

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} M & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 76 & 24 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ M \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} M & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 60.8+16.8 & 15.2+7.2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 77.6 & 22.4 \end{pmatrix}$$

இரு பாடவேளைகளுக்குப் பின், கணிதம் பயிலும் மாணவர்கள் 78 பேர்களும் (தோராயமாக) மற்றும் ஆங்கிலம் பயிலும் மாணவர்கள் 22 பேர்களும் (தோராயமாக) இருப்பர்.

பயிற்சி 1.3

1. ஒரு வாரப்பத்திரிக்கைக்குச் சந்தா கட்டுமாறு கேட்டுக்கொள்ளப்படும் கடிதம் அந்த பத்திரிக்கை அலுவலகத்திலிருந்து ஏராளமானவர்களுக்கு அனுப்படுகிறது. கடிதம் பெற்றவர்களில், சந்தாதாரர்களாக இருந்து மீண்டும் சந்தா கட்டுபவர் 45% ஆகும். சந்தாதாரர்களாக இல்லாமல் இருந்து புதியதாக சந்தா கட்டுபவர்கள் 30% ஆகும். இதே போல் முன்னர் கடிதம் அனுப்பப்பட்டபோது, கடிதம் பெற்றவர்களில் 40% பேர் சந்தாதாரர்களாகச் சேர்ந்தனர் எனத் தெரிகிறது தற்போது கடிதத்தைப் பெறுபவர்களில் எத்தனை சதவீதம் பேர் சந்தாதாரர்களாவர் என எதிர்பார்க்கலாம்?

2. சென்னை நகரில் ஒரு புதிய போக்குவரத்து வசதி தற்போது செயல்பாட்டிற்கு வந்துள்ளது. அதனை இந்த ஆண்டு பயன்படுத்துபவர்கள் 30% பேர் அடுத்த ஆண்டு பயன்படுத்தாமல் மெட்ரோ ரயில் வண்டிக்கு மாறி விடுவர். மீதி 70% தொடர்ந்து அப்புதிய போக்குவரத்து வசதியைப் பயன்படுத்துவர். இந்த ஆண்டு மெட்ரோ ரயில் வண்டியை பயன்படுத்துபவர்களில்

70% பேர் அடுத்த ஆண்டும் தொடர்ந்து அதையே பயன்படுத்துவர் மீதி 30% பேர் புதிய போக்குவரத்து வசதிக்கு மாறிவிடுவர். சென்னை நகர மக்கள் தொகை மாறாமலிருக்கிறது என்றும் பயணிகளில் அடுத்த ஆண்டில் 60% பேர் புதிய போக்குவரத்து வசதியையும் 40% பேர் மெட்ரோ ரயில் வண்டியையும் பயன்படுத்துவார்கள் எனக் கொண்டால்,

(i) அதற்கு அடுத்த ஆண்டில் எத்தனை சதவீதம் பயணிகள் புதிய போக்குவரத்து வசதியை பயன்படுத்துவார்கள் என எதிர்பார்க்கலாம்?

(ii) காலப்போக்கில் எத்தனை சதவீதம் பேர் புதிய போக்குவரத்து வசதியைப் பயன்படுத்துவர்?

3. சந்தையில் உள்ள A மற்றும் B இருவகையான சோப்புகளின் தற்போதைய சந்தைப் பங்கீடு 15% மற்றும் 85% ஆகும். சென்ற ஆண்டு Aவாங்கியவர்களின் 65% பேர் மீண்டும் அதை இந்த ஆண்டும் வாங்குகிறார்கள். 35% பேர் B-க்கு மாறிவிடுகின்றனர். சென்ற ஆண்டு B வாங்கியவர்களில் 55% பேர் இந்த ஆண்டும் மீண்டும் அதை வாங்குகிறார்கள். 45% பேர் A-க்கு மாறி விடுகிறார்கள் ஒரு ஆண்டுக்குப் பிறகு அவற்றின் சந்தைப் பங்கீடுகளைக் காண்க.மேலும் சந்தையில் சமநிலை எப்போது எட்டப்படும்?

4. A மற்றும் B என்ற இரு விற்பனைப் பொருள்களின் தற்போதைய சந்தை விற்பனை 50% மற்றும் 50% ஆக உள்ளது. நுகர்வோரின் விருப்பங்கள் ஒவ்வொரு வாரமும் மாறுகின்றன. சென்ற வாரம் A -ஐ வாங்கியவர்களில் 60% பேர் மீண்டும் A -ஐ வாங்குகின்றனர். 40% பேர் B-க்கு மாறிவிடுகிறார்கள். சென்ற வாரம் B வாங்கியவர்களில் 80% பேர் அதை மீண்டும் வாங்குகிறார்கள். 20% பேர் A-க்கு மாறி விடுகிறார்கள். இரு வாரங்களுக்குப் பிறகு அவர்களின் சந்தைப் பங்கீடுகளைக் காண்க. இந்த போக்கு தொடருமானால், எப்போது சமநிலை எட்டப்படும்?

பயிற்சி 1.4

பொருத்தமான விடையை தேர்ந்தெடுக்க

1. $A=(1 \;\; 2 \;\; 3)$ எனில், AA^T -ன் தரம்

(a) 0 (b) 2 (c) 3 (d) 1

2. ஒவ்வொரு உறுப்பும் 1 எனக் கொண்ட $m \times n$ வரிசை உடைய அணியின் தரம்

(a) 0 (b) 1 (c) m (d) n

3. $T = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$ என்பது ஒரு மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி எனில், சமநிலையில் A-ன் மதிப்பு

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{1}{8}$

4. $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 8\end{pmatrix}$ எனில், $\rho(A)$ =

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) n

5. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3\\1 & 4 & 9\end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரம்

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d)3

6. வரிசை n உடைய அலகு அணியின் தரம்

(a) $n-1$ (b) n (c) $n+1$ (d) n^2

7. $\rho(A)=r$ எனில், பின்வருவனவற்றில் எது சரி?

(a) r வரிசையுடைய அனைத்து சிற்றணிக்கோவைகளின் மதிப்பும் பூச்சியங்களாக இருக்காது

(b) A ஆனது குறைந்தபட்சம் ஒரு r வரிசை பூச்சிமற்ற சிற்றணிக்கோவையாவது பெற்றிருக்கும்.

(c) A ஆனது குறைந்த பட்சம் $(r+1)$ வரிசை யுடைய சிற்றணிக்கோவையின் மதிப்பு பூச்சியமாக இருக்கும்படியாக பெற்றிருக்கும்.

(d) அனைத்து $(r+1)$ வரிசை மற்றும் அதைவிட அதிகமான வரிசை கொண்ட பூச்சியமற்ற சிற்றணிக்கோவைகள் இருக்கும்.

8. $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ எனில் AA^T -ன் தரம்

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

9. $\begin{pmatrix}\lambda & -1 & 0\\0 & \lambda & -1\\-1 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரம் 2 எனில், λ -ன் மதிப்பு

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) மெய்யெண் மட்டும்

10. மூலைவிட்ட அணி $\begin{pmatrix}1 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & -3 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}$ –ன் தரம்

(a) 0 (b) 2 (c) 3 (d) 5

11. $T = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & x \end{pmatrix} \end{array}$ என்பது மாறுதல் நிகழ்வு அணி எனில் x-ன் மதிப்பு

(a) 0.2 (b) 0.3 (c) 0.4 (d) 0.7

12. பின்வருவனவற்றில் எது ஒரு அணிக்கான அடிப்படை உருமாற்றம் ஆகாது?

(a) $R_i \leftrightarrow R_j$ (b) $R_i \to 2R_i + 2C_j$

(c) $R_i \to 2R_i - 4R_j$ (d) $C_i \to C_i + 5C_j$

13. $\rho(A) = \rho(A, B)$ எனில், தொகுப்பானது

(a) ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் பெற்றுள்ளது

(b) ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் ஒரே ஒரு தீர்வு பெற்றுள்ளது

(c) ஒருங்கமைவு உடையது (d) ஒருங்கமைவு அற்றது

14. $\rho(A) = \rho(A, B) =$ மாறிகளின் எண்ணிக்கை எனில் தொகுப்பானது

(a) ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் பெற்றுள்ளது

(b) ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் ஒரே ஒரு தீர்வு பெற்றுள்ளது

(c) ஒருங்கமைவு அற்றது (d) ஒருங்கமைவு உடையது

15. $\rho(A) \neq \rho(A, B)$ எனில் தொகுப்பானது

(a) ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் பெற்றுள்ளது

(b) ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் ஒரே ஒரு தீர்வு பெற்றுள்ளது

(c) ஒருங்கமைவு அற்றது (d) ஒருங்கமைவு உடையது

16. ஒரு மாறுதல் நிகழ்தகவு அணியில் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளின் மதிப்பும் எந்த எண்ணுக்கு சமமாகவோ அல்லது பெரியதாகவோ இருக்கும்?

(a) 2 (b) 1 (c) 0 (d) 3

17. $AX = B$ என்ற சமச்சீரற்ற சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் மாறிகளின் எண்ணிக்கை n எனில், தொகுப்பானது ஒரே ஒரு தீர்வை எப்போதும் பெறும்?

(a) $\rho(A) = \rho(A, B) > n$ (b) $\rho(A) = \rho(A, B) = n$

(c) $\rho(A) = \rho(A, B) < n$ (d) மேற்கண்ட ஏதுமில்லை

18. $4x + 6y = 5, 6x + 9y = 7$ என்ற சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்கு

(a) ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு (b) தீர்வு இல்லை

(c) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் உண்டு (d) மேற்கண்ட ஏதுமில்லை

19. $x+2y+3z=1,\quad 2x+y+3z=2\ 5x+5y+9z=4$ என்ற சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்கு

(a) ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு (b) எண்ணிகையற்ற தீர்வுகள் உண்டு

(c) தீர்வு இல்லை (d) மேற்கண்ட ஏதுமில்லை

20. $|A| \neq 0$, எனில், A ஒரு

(a) பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணி (b) பூஜ்ஜியக் கோவை அணி

(c) பூஜ்ஜிய அணி (d) மேற்கண்ட ஏதுமில்லை

21. $k \neq$ __ எனில், $x+y+z=2,\ 2x+y-z=3,\ 3x+2y+k=4$ என்ற நேரிய சமன்பாட்டுத் தொகுப்பானது, ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற்றிருக்கும்.

(a) 4 (b) 0 (c) –4 (d) 1

22. கிரேமரின் விதியைக் கொண்டு ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற தேவையான கட்டுப்பாடு,

(a) $\Delta_z \neq 0$ (b) $\Delta_x \neq 0$ (c) $\Delta \neq 0$ (d) $\Delta_y \neq 0$

23. $\frac{a_1}{x}+\frac{b_1}{y}=c_1,\ \frac{a_2}{x}+\frac{b_2}{y}=c_2,\ \Delta_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix};\ \Delta_2=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\ \Delta_3=\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$ எனில், (x,y) -ன் மதிப்பு

(a) $\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1},\frac{\Delta_3}{\Delta_1}\right)$ (b) $\left(\frac{\Delta_3}{\Delta_1},\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)$ (c) $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2},\frac{\Delta_1}{\Delta_3}\right)$ (d) $\left(\frac{-\Delta_1}{\Delta_2},\frac{-\Delta_1}{\Delta_3}\right)$

24. $|A_{n\times n}| = 3\quad |adjA| = 243$ எனில் n-ன்மதிப்பு

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7

25. பூஜ்ஜிய அணியின் தரம்

(a) 0 (b) –1 (c) ∞ (d) 1

இதர கணக்குகள்

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 9 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

2. $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

3. $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

4. $x+y+z=7$, $x+2y+3z=18$, $y+2z=6$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவுடையதா என சோதிக்க.

5. பின்வரும் சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையது எனில் k-ன் மதிப்பைக் காண்க. $2x+3y-z=5$, $3x-y+4z=2$, $x+7y-6z=k$

6. தரப்பட்ட சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு அற்றவை எனில் k-ன் மதிப்பைக் காண்க. $x+y+z=1,\ 3x-y-z=4,\ x+5y+5z=k$

7. $x+2y+z=7,\ 2x-y+2z=4,\ x+y-2z=-1$ என்ற சமன்பாடுகளை கிரேமரின் விதியைப் பயன்படுத்தி தீர்க்க.

8. 2 கிலோ கோதுமை மற்றும் 1 கிலோ சர்க்கரையின் விலை ₹100. 1 கிலோ கோதுமை மற்றும் 1 கிலோ அரிசியின் விலை ₹80. 3 கிலோ கோதுமை, 2 கிலோ சர்க்கரை மற்றும் 1 கிலோ அரிசியின் விலை ₹220 எனில் ஒவ்வொன்றின் ஒரு கிலோ விலையை கிரேமரின் விதியைப் பயன்படுத்திக் காண்க..

9. வெவ்வேறு தரகு வீதங்களையுடைய A, B, C என்ற மூன்று பொருள்களை கடந்த மூன்று மாதங்களில் ஒரு விற்பனையாளர் விற்பனை செய்ததற்கான விவரங்கள் கீழே உள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மாதங்கள்	விற்பனை செய்த அலகுகள்			பெற்ற மொத்த தரகு
	A	B	C	(₹)
ஜனவரி	90	100	20	800
பிப்ரவரி	130	50	40	900
மார்ச்சு	60	100	30	850

கிரேமரின் முறையில், A, B, C என்ற பொருள்களுக்கான தரகு வீதத்தைக் காண்க.

10. ஒரு வாரப் பத்திரிக்கைக்குச் சந்தா கட்டுமாறு கேட்டுக் கொள்ளப்படும் கடிதம் அந்த பத்திரிக்கை அலுவலகத்திலிருந்து ஏராளமானவர்களுக்கு அனுப்பப்படுகிறது. கடிதம் பெற்றவர்களில், சந்தாதாதாரர்களாக இருந்து மீண்டும் சந்தா கட்டுபவர் 60% ஆகும். சந்தாதாதாரர்களாக இல்லாமலிருந்து புதியதாக சந்தா கட்டுபவர்கள் 25% ஆகும். இதே போல் முன்னர் கடிதம் அனுப்பப்பட்ட போது கடிதம் பெற்றவர்களில் 40% பேர் சந்தாதாதாரர்களாகச் சேர்ந்தனர் எனத் தெரிகிறது. தற்போது கடிதத்தைப் பெறுபவர்களில் எத்தனை சதவீதம் பேர் சந்தாதாதாரர்களாவர் என எதிர்பார்க்கலாம்

தொகுப்புரை

- **அணியின் தரம்**

  A என்ற அணியின் தரம், அந்த அணியின் மிகப்பெரிய பூச்சியமற்ற சிற்றணிக் கோவையின் வரிசை ஆகும்.
- $\rho(A)\geq 0$
- அணி A-ன் வரிசை $m\times n$ எனில் அதன் தரமானது, $\{m,n\}$ –ன் மீச்சிறு மதிப்புக்குச் சமமாகவோ அல்லது சிறியதாகவோ இருக்கும்.
- பூச்சிய அணியின் தரம் '0' ஆகும்.

- $n \times n$ வரிசை உடைய பூச்சியமற்ற கோவை அணியின் தரம் 'n' ஆகும்.

- **சமான அணிகள்**

  A மற்றும் B என்பவை சமவரிசை கொண்ட அணிகள் என்க. இவற்றில் ஒரு அணியை மற்றொரு அணியிலிருந்து, முடிவுறு எண்ணிக்கையுள்ள அடிப்படை உருமாற்றங்களை மேற்கொள்வதன் மூலம் பெறுவோமாயின், A-யும் B-யும் சமான அணிகள் எனப்படும். இதனை $A \sim B$ என குறிப்பிடலாம்.

- **ஏறுபடி வடிவம்**

  $m \times n$ வரிசை உடைய A என்ற அணியானது ஏறுபடி வடிவில் உள்ளதாயின் அது பின்வரும் நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்தல் வேண்டும்.

  (i) அனைத்து உறுப்புகளையும் பூச்சிய உறுப்புகளாய் கொண்ட ஒவ்வொரு நிரையும் பூச்சியமற்ற உறுப்புகளையும் உறுப்புகளாகக் கொண்ட நிரைக்கு கீழே அமைய வேண்டும்.

  (ii) பூச்சியமற்ற நிரையில் வரும் முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்பிற்கு முன்பாக இடம்பெறும் பூச்சிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையானது அவ்வாறாகவே அதற்கு அடுத்து வரும் நிரையில் உள்ள பூச்சிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைவிட குறைவாக இருத்தல் வேண்டும்.

- குறைந்த பட்சம் ஒரு தீர்வாவது உண்டு எனில், சமன்பாட்டு தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையது எனப்படும்.

- தீர்வுகள் அற்ற சமன்பாடு தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அற்றது எனப்படும்.

- $\rho\left(\left[A, B\right]\right) = \rho\left(A\right)$ எனில், சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையவை.

- $\rho\left(\left[A, B\right]\right) = \rho\left(A\right) = n$ எனில், சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையவை மற்றும் ஒரே ஒரு தீர்வு மட்டும் உண்டு.

- $\rho\left(\left[A, B\right]\right) = \rho\left(A\right) < n$ எனில், சமன்பாட்டுத் தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு கொண்டது மற்றும் எண்ணிக்கயற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும்.

- $\rho\left(\left[A, B\right]\right) \neq \rho\left(A\right)$ எனில், சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவுத்தன்மை அற்றவை மேலும் தீர்வு இல்லை.

- $|adjA| = |A|^{n-1}$

- $|A| = 0$ எனில், A ஆனது பூஜ்ஜியக் கோவை அணியாகும், இல்லையெனில், A ஆனது பூஜ்ஜியக் கோவை அல்லாத அணியாகும்.

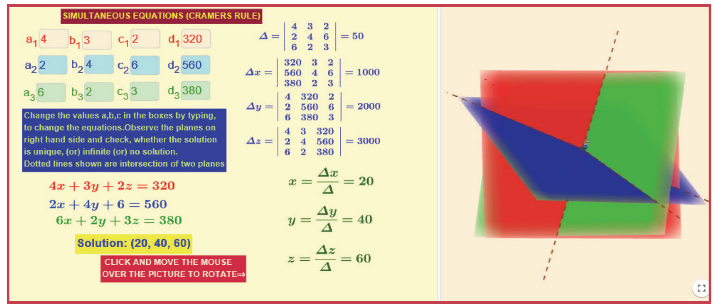
- $AX = B$ என்ற சமன்பாட்டு தொகுப்பில் $|A| \neq 0$ எனில் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் ஒரே ஒரு தீர்வை பெற்றிருக்கும்.

- கிரேமரின் விதி ஆனது $\Delta \neq 0$ ஆக இருக்குபோது மட்டுமே பொருந்தும்.

கலைச்சொற்கள் (GLOSSARY)	
அசமப்படித்தான	Non homogeneous
அடிப்படை உருமாற்றங்கள்	Elementary transformations
அணி	Matrix
அணி சமன்பாடு	Matrix equation
அணிக்கோவை	Determinant
உற்பத்தி	Production
ஏறுபடி வடிவம்	Echelon form
ஒருங்கமைவு	Consistent
ஒருங்கமைவு அற்றது	Inconsistent
ஒருங்கமைவுள்ள	Consistent
ஒரே ஒரு தீர்வு	Unique solution
சதுர அணி	Square matrix
சமநிலை	Equilibrium
சமப்படித்தான	Homogenerous
தரம்	Rank
தெரியாத	Unknown
தொடர்ச்சியான	Subsequent
நிலை மாற்றம்	Transition
நேரிய சமன்பாடுகள்	Linear equations
பயணிகள்	Commuters
பூஜ்ஜியக்கோவை அணி	Singular matrix
பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணி	Non–Singular matrix
பொருள்கள்	Commodities
போக்குவரத்து அமைப்பு	Transit system
மாறிகள்	Variables
மிகுதிப்படுத்திய / விரிவுபடுத்தப்பட்ட	Augmented
வரிசை	Order
வெட்டிக்கொள்ளும்	Intersecting
வெளிப்படைத்தீர்வு	Trivial solution
வெளிப்படையற்ற தீர்வு	Non trivial solution

இணையச் செயல்பாடு

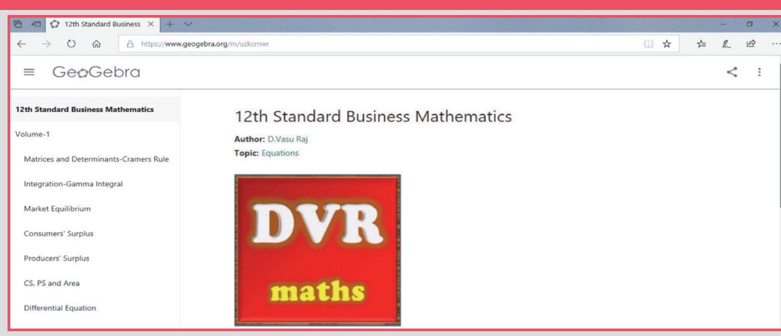
செயல்பாட்டின் இறுதியில் எதிர்பார்க்கப்படும் விளைவு



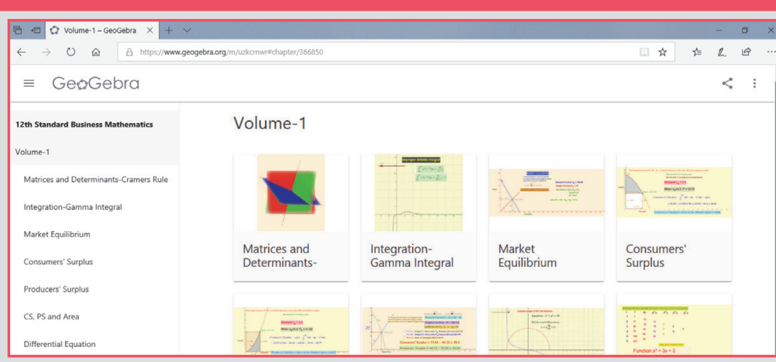
படி – 1 : கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி இச்செயல்பட்டிற்கான இணையப் பக்கத்திற்குச் செல்க. பின்பு "12th Standard Business Mathematics and Statistics" என்னும் திரையில் "Volume–1" யை தெரிவு செய்யவும்..

படி - 2 : "Matrices and Determinants–Cramer's rule" என்னும் பயிற்சித்தாளினை தெரிவு செய்துகொள்ளவும். அதில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள பெட்டியில் X,Y, Z கெழுக்களின் எண்களை மாற்றவும். பின்பு முப்பரிமாண படங்களை நகர்த்தி அதன் உண்மையானத் தீர்வினை காண்க

படி 1



படி 2



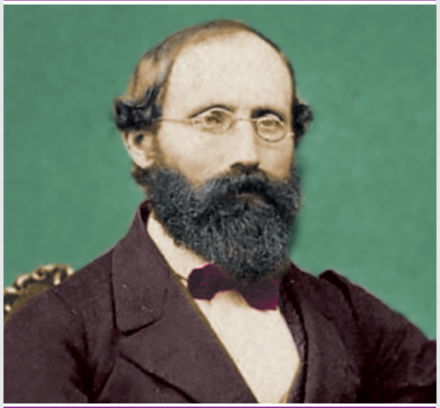
செயல்பாட்டிற்கான உரலி : **https://ggbm.at/uzkcrnwr**

அல்லது விரைவுக் குறியீடு **(QR Code)**

B247_12_BUS_MAT_TM

2 தொகை நுண்கணிதம்–I

GSYIFR



பெர்ன்ஹார்டு ரீமான்
(செப்டம்பர் 17, 1826 -
ஜூலை 20, 1866)

அறிமுகம்

ஜார்ஜ் ஃபிரடெரிக் பெர்ன்ஹார்டு ரீமான் (பத்தொன்பதாம் நூற்றாண்டு) ஒரு எழுச்சியூட்டும் ஜெர்மன் கணிதவியலாளர் ஆவார். இவர் நுண்கணிதத்திற்கான தனது பங்களிப்பிற்காக அனைவராலும் மிகவும் அங்கீகரிக்கப்பட்டவர் ஆவார்.

நுண்கணிதமானது பொதுவாக இரு பிரிவுகளைக் கொண்டுள்ளது. அவையாவன (1) வகை நுண்கணிதம் மற்றும் (2) தொகை நுண்கணிதம் ஆகும். ஒரு சார்பினுடைய வகைக்கெழுக்களை காண உதவும் செயல் முறைகளை பற்றி விவரிப்பது வகை நுண்கணிதம் ஆகும். அதே சமயத்தில் தொகை நுண்கணிதமானது வருவித்தச் சார்பின் எதிர்மறையான வகையிடலை விவரிப்பதாகும். அதாவது காணப்பட வேண்டிய சார்புக்கான உடனடி மாறுவீதத்தை (அல்லது) இறுதி நிலையைக் கொண்டு, அச்சார்பினைக் காண்பதாகும். எனவே தொகையிடல் என்பது வருவித்தச் சார்பிலிருந்து அதன் தொடக்க நிலைச் (அசல்) சார்பை கண்டறியும் உத்தியாகும். இவ்வாறாக பெறப்பட்ட சார்பானது வரையறாத் தொகையீடு என அழைக்கப்படுகிறது. வரையறுத்த தொகையீடு என்பது குறிப்பிடப்பட்ட எல்லைகளுக்கு இடையில் காணப்படும் வரையறாத் தொகையீட்டின் மதிப்பீடு ஆகும். மேலும் இது குறிப்பிடப்பட்ட எல்லைகள், சார்புக்கான வளைவரை மற்றும் அச்சு ஆகியவற்றால் சூழப்பட்ட பரப்பு ஆகும். மேலும் இப்பரப்பானது தோராயமாக அதில் வரையப்படும் ஏராளமான உள்வரை செவ்வகங்களினுடைய பரப்புகளின் கூடுதலுக்கு சமமாகும். இவ்வாறாக வரையறுக்கப்பட்ட உள்வரை செவ்வகங்களின் எண்ணிக்கையின் எல்லை முடிவிலி எனக் கொண்டு, தோராய மதிப்பானது துல்லிய மதிப்பாகக் கணக்கிடப்படுகிறது. ஆகையால் வகை நுண்கணிதமும் மற்றும் தொகை நுண்கணிதமும் எல்லைக் கோட்பாட்டின் அடிப்படையிலானது.

"ஒருங்கிணைப்பு" (integrate) என்ற சொல்லுக்கான எழுத்தியல் ரீதியான பொருள் "கூட்டுத்தொகை காணல்" என்பதாகும். ஆகையால்தான் "தொகை நுண்கணிதம்" என்ற பெயரானது இவ்வகையான கூட்டுத் தொகை செயல்முறையிலிருந்து பெறப்பட்டதாக நம்பப்படுகிறது. நுண்கணிதம் என்பது இப்பிரபஞ்சத்தின் தோற்றம், புயல் மற்றும் சூறாவளிகளின் வளர்ச்சி போன்ற கோட்பாடுகளை சோதிக்கும் கணிதவியல் உத்தியாகும். மேலும் இது வணிகப் பயன்பாட்டில் நுகர்வோர் மற்றும் உற்பத்தியாளரின் உபரிகளை பெறவும், ஒரு தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை அடையாளம் காணவும், இறுதி நிலைச் சார்பிலிருந்து அதன் தொடக்க நிலைச் சார்பினை பெறவும் மற்றும் இது போன்றவைகளை காணப் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

இந்த அத்தியாயத்தில் நாம் தொகையீடு எனும் கருத்துரு, சில வகையைச் சார்ந்த வரையறாத் தொகையீடுகள் மற்றும் வரையறுத்த தொகையீடுகளுக்கான வழிமுறைகளை பற்றி பயில்வோம்.

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தை படித்த பின்னர் பின்வரும் பாடக் கருத்துக்களை மாணவர்களால் புரிந்துக் கொள்ள இயலும்.

- வரையறாத் தொகையீடு.
- கூட்டல், கழித்தல் மற்றும் மாறிலியின் மடங்குகள் சம்பந்தப்பட்ட ஒரு சார்புக்கான வரையறாத் தொகையீட்டினை எவ்வாறு காண்பது.
- பிரதியிடல் எனும் உத்தியை எங்கு மற்றும் எவ்வாறு வரையறாத் தொகையீடுகளில் பயன்படுத்துவது.
- பகுதிப்படுத்தித் தொகையிடல் மற்றும் சில சிறப்பு வகையை சார்ந்த தொகையீடுகளுக்கான உத்திகள்.
- தொகை நுண்கணிதத்தினுடைய அடிப்படைத் தேற்றங்கள்.
- வரையறுத்த தொகையீடுகளின் பண்புகள் மற்றும் அதன் பயன்பாடுகள்.
- காமா தொகையிடலிலுள்ள ஒரு குறிப்பிட்ட வகையின் பயன்பாடு.
- காமா சார்பின் பண்புகள்.
- வரையறுத்த தொகையீடுக்கான கூட்டல் எல்லை.

2.1 வரையறாத் தொகையீடுகள் (Indefinite Integrals)

2.1.1 வரையறாத் தொகையீட்டின் கருத்துரு (Concept of Indefinite Integral)

வகை நுண்கணிதத்தில், கொடுக்கப்பட்டச் சார்பு $f(x)$-க்கான x-ஐ பொறுத்த வகைக் கெழுவான $f'(x)$-ஐ எவ்வாறு கணக்கிடப் படவேண்டும் என்ற செயல் முறையினை அறிந்துக் கொண்டோம். இந்த அத்தியாயத்தில் நாம் கொடுக்கப்பட்ட வருவித்த சார்பான $f'(x)$-க்கு [சார்பின் வகையீட்டிலிருந்து] அதன் தொடக்க நிலை சார்பு $f(x)$-ஐ [அசல் சார்பை] எவ்வாறு காண்பது என்பதனை பற்றி தெரிந்துக் கொள்வோம். வகையிடலின் எதிர்மறையானச் செயல் முறையையே தொகையிடல் அல்லது எதிர் வகையிடல் என்போம்.

∴ தொகையிடல் என்பது வகையிடலின் எதிர் மறைச் செயல் முறையாகும்.

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ என்பதனை நாம் நன்கு அறிவோம். இதில் $\cos x$ என்பது வருவித்தச் சார்பு மற்றும் $\sin x$ என்பது தொடக்க நிலைச் சார்பு ஆகும். [தொடக்க நிலைச் சார்பானது எதிர்மறை வகையீட்டுச் சார்பு அல்லது தொகைச் சார்பு எனவும் அழைக்கப்படுகிறது].

வரையறை 2.1

வருவித்தச் சார்பு $f(x)$-க்கான தொடக்க நிலைச் சார்பு $F(x)$ எனில் $\frac{d}{dx}\left[F(x)\right] = f(x)$ ஆகும்.

இனி நாம், நமக்கு நன்கு தெரிந்த பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\frac{d}{dx}\left(x^3\right)=3x^2,\qquad \frac{d}{dx}\left(x^3+5\right)=3x^2,\qquad \frac{d}{dx}\left(x^3-\tfrac{3}{2}\right)=3x^2,$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^3+e\right)=3x^2,\qquad \frac{d}{dx}\left(x^3-\pi\right)=3x^2,\qquad \ldots$$

மேலே கொடுக்கப்பட்ட அனைத்து எடுத்துக்காட்டுகளிலும் $3x^2$ ஆனது x^3, x^3+5, $x^3-\frac{3}{2}$, x^3+e, $x^3-\pi$, ... போன்ற தொடக்க நிலைச் சார்புகளுக்கான வருவித்த சார்பு என்பதை கவனியுங்கள். மேலும் இதிலிருந்து, வருவித்த சார்பானது ஒருமைத்தன்மையை கொண்டுருப்பினும் அதன் தொடக்க நிலைச் சார்பானது ஒருமைத் தன்மை வாய்ந்ததாக இருக்க வேண்டியதில்லை என்பதை நம்மால் உணர முடிகிறது. ஆகையால், $3x^2$ என்ற வருவித்த சார்புக்கான தொடக்க நிலைச் சார்பு x^3+c என்ற முடிவுக்கு வருகிறோம்.

கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு வருவித்த சார்புக்கான எண்ணற்ற தொடக்க நிலைச் சார்புகள், $\mathbb{R}$ எனும் மெய்யெண்களின் தொகுப்பிலிருந்து c -ஐ தன்னிச்சையாக தேர்வு செய்யப்படுவதன் மூலம் பெறப்படுகிறது. இவ்வகையான தொகையீடுகள் **வரையறாத் தொகையீடுகள்** என அழைக்கப்படுகிறது.

பொதுவாக, $\frac{d}{dx}\left[F(x)\right]=f(x) \Rightarrow \int f(x)\,dx=F(x)+c,$

இதில் c ஆனது தொகையிடல் மாறிலி என அழைக்கப்படுகிறது.

குறிப்புகள்

- $F(x)$ மற்றும் $G(x)$ என்ற இருவேறு தொடக்க நிலைச் சார்புகளானது $f(x)$ எனும் ஒரே வருவித்த சார்பை பெற்றிருக்கும் எனில், அவை மாறிலி உறுப்பில் மட்டும் வேறுபடும்.
- $\int f(x)\,dx$ என்பது வரையறாத் தொகையீடு என அழைக்கப்படுகிறது.
- தொகையிடலுக்கான குறியீடு [$\int$] -ஆனது "summation" என்ற சொல்லின் முதல் எழுத்தான S -ஐ மேலும் கீழுமாக நீட்டித்து பெறப்பட்ட வடிவம் ஆகும்.
- $\int f(x)\,dx$ என்பதனை x-ஐ பொறுத்த $f(x)$ இன் தொகையீடு எனப் படிக்க வேண்டும்.
- $\int f(x)\,dx$ இல் $f(x)$[அதாவது தொகையிடுதலில் தொகையை காண வேண்டியச் சார்பு] ஆனது தொகைக்காண்பான் [தொகைக்காண் சார்பு] என அழைக்கப்படுகிறது..
- $\int f(x)\,dx$ இல் x என்பது தொகையிடல் மாறி என்போம்.
- "தொகையீடுக்கான செயல் முறையையே" தொகையிடல் என்போம்.
- மாறிலிச் சார்பாக கருதப்படும் எந்த ஒரு மெய்யெண் c-ம் தொகையிடல் மாறிலி ஆகும்.

வரையறை 2.2

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு சார்புக்கான தொகையீட்டை காணும் செயல்வழிமுறை, சார்பின் தொகையிடல் என வரையறுக்கப்படுகிறது.

2.1.2 தொகை நுண்கணிதத்தின் இரு முக்கிய பண்புகள் (Two important properties of Integral Calculus)

(i) k என்பது ஏதேனும் ஒரு மாறிலி எனில், $\int k\, f(x)\ dx = k \int f(x)\ dx$ ஆகும்.

(ii) $f(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்பன இரு தொடர்ச்சியுடைய சார்புகள் எனில்,
$\int \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx$ ஆகும்.

தொகையிடல் வழிமுறைகள் (Methods of Integration)

தொகையிடல் வழி முறைகளில் முதன்மையான நான்கு முறைகள் பின்வருமாறு,

(i) பிரித்துத் தொகையிடல்.

(ii) பகுதிப்படுத்தி தொகையிடல்.

(iii) பிரதியிடல் முறையில் தொகையிடல்.

(iv) அடுக்குகளை படிப்படியாகக் குறைத்து தொகையிடல்.

நினைவில் கொள்க !

சார்பு $f(x)$ –ஐ தொகையிடுக என்பது $\frac{d}{dx}\left[F(x)+c\right] = f(x)$ எனுமாறு $F(x)$ எனும் சார்பை காண்பது ஆகும்.

குறிப்பு

இங்கு நாம் மேலுள்ள முதல் மூன்று தொகையிடல் முறைகளை மட்டுமே விவாதிப்போம். ஏனெனில் அடுக்குகளை படிப்படியாகக் குறைத்து தொகையிடும் முறையானது இப்பாடத்திட்டத்தின் நோக்கத்திற்கு அப்பாற்பட்டது.

2.1.3 பிரித்துத் தொகையிடல் (Integration by decomposition)

சில தொகைக்காண்பான்களுக்கு [தொகைக்காண் சார்புகளுக்கு] நேரடியாக அதன் தொகையீட்டை காண இயலாது, ஆனால் அவற்றை கூட்டல் அல்லது கழித்தல் சார்புகளாக பிரித்து தொகையிடுதலுக்கு ஏதுவாக மாற்றியமைத்து, நமக்கு ஏற்கனவே தெரிந்த திட்டமான தொகையீடுகள் வாயிலாக தொகையிட இயலும். அவ்வகையான சார்புகளுக்கு இம் முறையை பயன்படுத்தலாம்.

குறிப்பு

எதிர் வகையிடல் என்ற செயல்முறையால் நேரடியாக பெறப்படும் தொகையீடுகள், தொகையிடலுக்கான திட்டமான முடிவுகள் எனப்படும்.

தொகையிடல்களுக்கான சில திட்டமான முடிவுகள் (Some standard results of integration)

வகை: I

(i) $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\quad n \neq -1$

(ii) $\int (ax+b)^n\, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c,\ n \neq -1$

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

$y = \int f(x)\ dx = F(x) + c$ என்ற சார்பைக் கொண்டு அமையும் வளைவரைகளின் தொகுதிக்கு $x = k$ இல் வரையப்படும் தொடுகோடுகள் இணையாகவே இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.1

மதிப்பிடுக $\int \frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{x}}\,dx$

தீர்வு:

$$\begin{aligned}\int \frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{x}}\,dx &= \int\left(ax^{\frac{3}{2}}+bx^{\frac{1}{2}}+cx^{-\frac{1}{2}}\right)dx\\ &= a\int x^{\frac{3}{2}}dx+b\int x^{\frac{1}{2}}dx+c\int x^{-\frac{1}{2}}dx\\ &= \frac{2ax^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{2bx^{\frac{3}{2}}}{3}+2c\,x^{\frac{1}{2}}+k\end{aligned}$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int dx = x+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.2

மதிப்பிடுக $\int \sqrt{2x+1}\,dx$

தீர்வு:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x+1}\,dx &= \int (2x+1)^{\frac{1}{2}}dx\\ &= \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3}+c\end{aligned}$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\begin{aligned}\int a(ax+b)^n\,dx &= \int (ax+b)^n\,d(ax+b)\\ &= \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+c\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.3

மதிப்பிடுக $\int \frac{dx}{(2x+3)^2}$

தீர்வு:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(2x+3)^2} &= \int (2x+3)^{-2}dx\\ &= -\frac{1}{2(2x+3)}+c\end{aligned}$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

(i) $\int \frac{1}{x^n}dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c\ ,\ n\neq 1$

(ii) $\int \frac{a}{(ax+b)^n}dx = \int \frac{d(ax+b)}{(ax+b)^n}$

$$= -\frac{1}{(n-1)(ax+b)^{n-1}}+c\ ,\ n\neq 1$$

எடுத்துக்காட்டு 2.4

மதிப்பிடுக $\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$

தீர்வு:

$$\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx = \int\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= \int x^2 dx + 2\int dx + \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.5

மதிப்பிடுக $\int (x^3 + 7)(x - 4)\, dx$

தீர்வு:

$$\int (x^3+7)(x-4)\, dx = \int (x^4 - 4x^3 + 7x - 28)\, dx$$

$$= \frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{7x^2}{2} - 28x + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.6

மதிப்பிடுக $\int \frac{2x^2 - 14x + 24}{x-3}\, dx$

தீர்வு:

$$\int \frac{2x^2 - 14x + 24}{x-3}\, dx = \int \frac{(x-3)(2x-8)}{x-3}\, dx$$

$$= \int (2x-8) dx$$

$$= x^2 - 8x + c$$

காரணிகளாக மாற்றியமைக்க,

$2x^2 - 14x + 24 = (x-3)(2x-8)$

எடுத்துக்காட்டு 2.7

மதிப்பிடுக $\int \frac{x+2}{\sqrt{2x+3}} dx$

தீர்வு:

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{2x+3}} dx = \int \frac{1}{2}\left\{(2x+3)^{\frac{1}{2}} + (2x+3)^{-\frac{1}{2}}\right\} dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{(2x+3)^{\frac{3}{2}}}{3} + (2x+3)^{\frac{1}{2}}\right\} + c$$

எளியச் சார்புகளாக பிரித்தெழுத

$$\frac{x+2}{\sqrt{2x+3}} = \frac{\frac{1}{2}(2x+4)}{(2x+3)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{(2x+3)+1}{(2x+3)^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(2x+3)^{\frac{1}{2}} + (2x+3)^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.8

மதிப்பிடுக $\int \frac{1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}} dx$

தீர்வு:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}\,dx$$
$$= \int \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{4}\,dx$$
$$= \frac{1}{6}\left\{ (x+2)^{\frac{3}{2}} + (x-2)^{\frac{3}{2}} \right\} + c$$

காரணக்காரிய முறையில்,

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}} = \frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}} \times \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}$$
$$= \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{4}$$

பயிற்சி 2.1

பின்வருவனவற்றை x -ஐ பொறுத்து தொகையிடுக

1. $\sqrt{3x+5}$
2. $\left(9x^2 - \frac{4}{x^2}\right)^2$
3. $(3+x)(2-5x)$
4. $\sqrt{x}\left(x^3-2x+3\right)$
5. $\frac{8x+13}{\sqrt{4x+7}}$
6. $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$
7. $f'(x) = x+b, f(1)=5$ மற்றும் $f(2)=13$ எனில், $f(x)$ -ஐ காண்க.
8. $f'(x) = 8x^3-2x$ மற்றும் $f(2)=8$ எனில், $f(x)$ -ஐ காண்க.

வகை: II

(i) $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c$

(ii) $\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\log|ax+b| + c$

எடுத்துக்காட்டு 2.9

மதிப்பிடுக $\int \frac{3x^2+2x+1}{x}\,dx$

தீர்வு:

$$\int \frac{3x^2+2x+1}{x}\,dx = \int \left(3x+2+\frac{1}{x}\right)dx$$
$$= \frac{3x^2}{2} + 2x + \log|x| + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.10

மதிப்பிடுக $\int \frac{2}{3x+5}\,dx$

தீர்வு:

$$\int \frac{2}{3x+5}dx = 2\int \frac{1}{3x+5}dx$$
$$= \frac{2}{3}\log|3x+5| + c$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int \frac{a}{ax+b}dx = \int \frac{d(ax+b)}{ax+b}$$
$$= \log|ax+b| + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.11

மதிப்பிடுக $\int \frac{x^2+2x+3}{x+1}dx$

தீர்வு:

$$\int \frac{x^2+2x+3}{x+1}dx = \int\left\{(x+1) + \frac{2}{x+1}\right\}dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + x + 2\log|x+1| + c$$

எளியச் சார்புகளாக பிரித்தெழுத

$$\frac{x^2+2x+3}{x+1} = \frac{(x^2+2x+1)+2}{x+1}$$
$$= (x+1) + \frac{2}{x+1}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.12

மதிப்பிடுக $\int \frac{x^3+5x^2-9}{x+2}dx$

தீர்வு:

$$\int \frac{x^3+5x^2-9}{x+2}dx = \int\left[x^2+3x-6+\frac{3}{x+2}\right]dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 6x + 3\log|x+2| + c$$

எளிய வகுத்தல் முறையில்,

$$\frac{x^3+5x^2-9}{x+2} = x^2+3x-6+\frac{3}{x+2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.13

மதிப்பிடுக $\int \frac{7x-1}{x^2-5x+6}dx$

தீர்வு:

$$\int \frac{7x-1}{x^2-5x+6}dx = \int\left[\frac{20}{x-3} - \frac{13}{x-2}\right]dx$$
$$= 20\int\frac{dx}{x-3} - 13\int\frac{dx}{x-2}$$
$$= 20\log|x-3| - 13\log|x-2| + c$$

பகுதி பின்னமாக்கல் முறையில்,

$$\frac{7x-1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$$
$$\Rightarrow \frac{7x-1}{x^2-5x+6} = \frac{20}{x-3} - \frac{13}{x-2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.14

மதிப்பிடுக $\int \frac{3x+2}{(x-2)^2(x-3)}dx$

தீர்வு:

> **பகுதி பின்னமாக்கல் முறையில்,**
>
> $$\frac{3x+2}{(x-2)^2(x-3)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-3)}$$
>
> $$\Rightarrow \frac{3x+2}{(x-2)^2(x-3)} = -\frac{11}{(x-2)} - \frac{8}{(x-2)^2} + \frac{11}{(x-3)}$$

$$\int \frac{3x+2}{(x-2)^2(x-3)}dx$$

$$= \int \left[-\frac{11}{(x-2)} - \frac{8}{(x-2)^2} + \frac{11}{(x-3)}\right]dx$$

$$= -11\int \frac{dx}{(x-2)} - 8\int \frac{dx}{(x-2)^2} + 11\int \frac{dx}{(x-3)}$$

$$= -11\log|x-2| + \frac{8}{x-2} + 11\log|x-3| + c \;=\; 11\log\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + \frac{8}{x-2} + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.15

மதிப்பிடுக $\displaystyle\int \frac{3x^2+6x+1}{(x+3)(x^2+1)}dx$

தீர்வு:

$$\int \frac{3x^2+6x+1}{(x+3)(x^2+1)}dx = \int \left[\frac{1}{(x+3)} + \frac{2x}{(x^2+1)}\right]dx$$

$$= \int \frac{dx}{(x+3)} + \int \frac{2x}{(x^2+1)}dx$$

$$= \log|x+3| + \log|x^2+1| + c$$

$$= \log\left|(x+3)(x^2+1)\right| + c$$

$$= \log\left|x^3+3x^2+x+3\right| + c$$

> **பகுதி பின்னமாக்கல் முறையில்,**
>
> $$\frac{3x^2+6x+1}{(x+3)(x^2+1)} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)}$$
>
> $$\Rightarrow \frac{3x^2+6x+1}{(x+3)(x^2+1)} = \frac{1}{(x+3)} + \frac{2x}{(x^2+1)}$$

பயிற்சி 2.2

பின்வருவனவற்றை x -ஐ பொறுத்து தொகையிடுக.

1. $\left(\sqrt{2x} - \frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^2$
2. $\frac{x^4-x^2+2}{x-1}$
3. $\frac{x^3}{x+2}$
4. $\frac{x^3+3x^2-7x+11}{x+5}$
5. $\frac{3x+2}{(x-2)(x-3)}$
6. $\frac{4x^2+2x+6}{(x+1)^2(x-3)}$
7. $\frac{3x^2-2x+5}{(x-1)(x^2+5)}$
8. $f'(x) = \frac{1}{x}$ மற்றும் $f(1) = \frac{\pi}{4}$ எனில், $f(x)$ -ஐ காண்க.

வகை: III

(i) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + c$ (ii) $\displaystyle\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c$

(iii) $\int a^x \, dx = \dfrac{1}{\log a} a^x + c$, $a > 0$ மற்றும் $a \neq 1$

(iv) $\int a^{mx+n} dx = \dfrac{1}{m \log a} a^{mx+n} + c$, $a > 0$ மற்றும் $a \neq 1$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int m a^{mx+n} \, dx = \int a^{mx+n} \, d(mx+n)$$

$$= \frac{1}{\log a} a^{mx+n} + c \, ,$$

$a > 0$ மற்றும் $a \neq 1$

எடுத்துக்காட்டு 2.16

மதிப்பிடுக $\int 3^{2x+3} \, dx$

தீர்வு:

$$\int 3^{2x+3} \, dx = \int 3^{2x} \cdot 3^3 \, dx$$

$$= 3^3 \int 3^{2x} \, dx$$

$$= 27 \frac{3^{2x}}{2 \log 3} + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.17

மதிப்பிடுக $\int \dfrac{e^x + 7}{e^x} dx$

தீர்வு:

$$\int \frac{e^x + 7}{e^x} dx = \int \left(1 + 7e^{-x}\right) dx$$

$$= x - 7e^{-x} + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.18

மதிப்பிடுக $\int \dfrac{5 + 5e^{2x}}{e^x + e^{-x}} dx$

தீர்வு:

$$\int \frac{5 + 5e^{2x}}{e^x + e^{-x}} dx = 5 \int \frac{e^x \left(e^{-x} + e^x\right)}{e^x + e^{-x}} dx$$

$$= 5 \int e^x \, dx$$

$$= 5e^x + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.19

மதிப்பிடுக $\int \left(e^x + \dfrac{1}{e^x}\right)^2 dx$

தீர்வு:

$$\int\left(e^{x}+\frac{1}{e^{x}}\right)^{2}dx = \int\left(e^{2x}+\frac{1}{e^{2x}}+2\right)dx$$
$$= \int\left(e^{2x}+e^{-2x}+2\right)dx$$
$$= \frac{e^{2x}}{2}-\frac{e^{-2x}}{2}+2x+c$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int(2ax+b)e^{ax^2+bx+c}\,dx$$
$$=\int e^{ax^2+bx+c}\,d\left(ax^2+bx+c\right)$$
$$=e^{ax^2+bx+c}+k$$

பயிற்சி 2.3

பின்வருவனவற்றை x -ஐ பொறுத்து தொகையிடுக.

1. $e^{x\log a}+e^{a\log a}-e^{n\log x}$
2. $\dfrac{a^{x}-e^{x\log b}}{e^{x\log a}\;b^{x}}$
3. $\left(e^{x}+1\right)^{2}e^{x}$
4. $\dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{e^{x}}$
5. $\dfrac{e^{3x}+e^{5x}}{e^{x}+e^{-x}}$
6. $\left[1-\frac{1}{x^{2}}\right]e^{\left(x+\frac{1}{x}\right)}$
7. $\dfrac{1}{x(\log x)^{2}}$
8. $f'(x)=e^{x}$ மற்றும் $f(0)=2$ எனில், $f(x)$ -ஐ காண்க.

வகை: IV

(i) $\int\sin x\,dx=-\cos x+c$ (ii) $\int\sin(ax+b)\,dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$

(iii) $\int\cos x\,dx=\sin x+c$ (iv) $\int\cos(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$

(v) $\int\sec^{2}x\,dx=\tan x+c$ (vi) $\int\sec^{2}(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}\tan(ax+b)+c$

(vi) $\int\operatorname{cosec}^{2}x\,dx=-\cot x+c$ (viii) $\int\operatorname{cosec}^{2}(ax+b)\,dx=-\frac{1}{a}\cot(ax+b)+c$

எடுத்துக்காட்டு 2.20

மதிப்பிடுக $\int(2\sin x-5\cos x)\,dx$

தீர்வு:

$$\int(2\sin x-5\cos x)\,dx = 2\int\sin x\,dx-5\int\cos x\,dx$$
$$= -2\cos x-5\sin x+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.21

மதிப்பிடுக $\int\sin^{2}x\,dx$

தீர்வு:

$$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int dx - \int \cos 2x\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right] + c$$

> எளியச் சார்புகளாக பிரித்தெழுத
>
> $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$
>
> $\therefore \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

எடுத்துக்காட்டு 2.22

மதிப்பிடுக $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx$

தீர்வு:

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx = \int \left(\operatorname{cosec}^2 x - \sec^2 x\right) dx$$

$$= -\cot x - \tan x + c$$

> எளியச் சார்புகளாக பிரித்தெழுத
>
> $\frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$
>
> $= \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}$
>
> $= \operatorname{cosec}^2 x - \sec^2 x$

எடுத்துக்காட்டு 2.23

மதிப்பிடுக $\int \sqrt{1+\sin 2x}\, dx$

தீர்வு:

$$\int \sqrt{1+\sin 2x}\, dx = \int \sqrt{(\sin x + \cos x)^2}\, dx$$

$$= \int (\sin x + \cos x)\, dx$$

$$= -\cos x + \sin x + c$$

> எளியச் சார்புகளாக பிரித்தெழுத
>
> $1 + \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x$
>
> $= (\sin x + \cos x)^2$

எடுத்துக்காட்டு 2.24

மதிப்பிடுக $\int \cos^3 x\, dx$

தீர்வு:

$$\int \cos^3 x\, dx = \frac{1}{4}\int \cos 3x\, dx + \frac{3}{4}\int \cos x\, dx$$

$$= \frac{\sin 3x}{12} + \frac{3\sin x}{4} + c$$

> எளியச் சார்புகளாக பிரித்தெழுத
>
> $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
>
> $\cos^3 x = \frac{1}{4}[\cos 3x + 3\cos x]$
>
> $= \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$

பயிற்சி 2.4

பின்வருவனவற்றை x-ஐ பொறுத்து தொகையிடுக.

1. $2\cos x - 3\sin x + 4\sec^2 x - 5\operatorname{cosec}^2 x$
2. $\sin^3 x$
3. $\frac{\cos 2x + 2\sin^2 x}{\cos^2 x}$
4. $\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$ [குறிப்பு : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$]
5. $\sqrt{1-\sin 2x}$

2.1.4 பகுதிப்படுத்தித் தொகையிடல் (Integration by parts)

வகை: V

1. u மற்றும் v என்பன x -ல் அமைந்த வகையிடத்தக்க சார்புகள் எனில்

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$ என்பது நமக்கு தெரிந்ததே.

இருபுறமும் x -ஐ பொறுத்து தொகையிட,

$$\int \frac{d}{dx}(uv)\,dx = \int u\frac{dv}{dx}dx + \int v\frac{du}{dx}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du$$

$$uv = \int udv + \int vdu$$

$$\therefore \int udv = uv - \int vdu$$

பொதுவாக, தொகைக்காண்பானை இரு வெவ்வேறு சார்புகளின் பொருக்கலாகவோ அல்லது நேரடியாக தொகையிட முடியாத சார்பாகவோ அமையும்பொழுது, இம்முறையானது மிகவும் பயனுள்ளதாக இருக்கும். இம்முறையை சரியாக கையாள்வது என்பது u என்ற சார்பை தெரிவு செய்வதில் உள்ளது.

எனவே, பின்வரும் வழிக்காட்டுதல்களைப் பயன்படுத்தி u என்ற சார்பை தெரிவு செய்யலாம்.

(i) தொகைக்காண்பான் ஆனது நேரடியாக தொகையிட இயலாத ஒரே ஒரு சார்பை மட்டும் கொண்டு அமையுமானால், அத்தொகைக்காண்பானை u எனக் கொள்க.

(ii) தொகைக்காண்பான் ஆனது நேரடியாக தொகையிட இயலாத சார்புப்பகுதி மற்றும் தொகையிடக் கூடிய சார்புப்பகுதி எனக் கொண்டு அமையும்பொழுது, தொகையிட இயலாத சார்புப்பகுதியை u எனக் கொள்க.

(iii) தொகைக்காண்பான் ஆனது இரு நேரடியாக தொகையிடக் கூடிய சார்புப்பகுதிகளை கொண்டும், அதில் ஒன்றின் வடிவமானது x^n, n ஒரு மிகை முழு எண் என அமையும்பொழுது, அந்த x^n எனும் சார்புப்பகுதியை u எனக் கொள்க.

(iv) மற்ற அனைத்து நிலைகளுக்கும் u-ன் தேர்வானது நம் விருப்பத்தைப் பொறுத்தது.

(அல்லது) நாம் "I L A T E" எனும் சொல்லில் உள்ள எழுத்துகளின் வரிசையின்படி முதலில் வரும் சார்புப்பகுதியை u எனும் சார்பாக நிர்ணயம் செய்யலாம்.

இதில், I என்பது நேர்மாறு திரிகோணமிதிச் சார்பையும் [Inverse trigonometric function],

L என்பது மடக்கைச் சார்பையும் [Logarithmic function],

A என்பது இயற்கணிதச் சார்பையும் [Algebraic function],

T என்பது திரிகோணமிதிச் சார்பையும் [Trigonometric function], E என்பது அடுக்கைச் சார்பையும் [exponential function] குறிக்கின்றது.

மேலும், மீதமுள்ள சார்பையும் மற்றும் dx –ஐயும் சேர்த்து dv என எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும்.

2. u மற்றும் v என்பன x-ல்அமைந்த இரு சார்புகள் எனில், $\int udv = uv - u'v_1 + u''v_2 - u'''v_3 + \ldots$ ஆகும்.

இதில் $u', u'', u''', \ldots$ என்பன u -ன் அடுத்தடுத்த வகையிடல்கள் ஆகும்.

மற்றும் $v_1, v_2, v_3, \ldots$ என்பன v -ல் மீண்டும் மீண்டும் செய்கின்ற தொகையீடுகள் ஆகும்.

குறிப்பு

- 2 –ல் குறிப்பிடப்பட்ட சூத்திரமானது பெர்னோலியின் சூத்திரம் ஆகும்.
- பெர்னோலியின் சூத்திரமானது $u = x^n$, n ஒரு மிகை முழு எண் எனும் போது பயன்படுத்தப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.25

மதிப்பிடுக $\int xe^x\, dx$

தீர்வு:

$$\begin{aligned}\int xe^x\, dx &= \int udv \\ &= uv - \int vdu \\ &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + c \\ &= e^x (x-1) + c\end{aligned}$$

$u = x$ மற்றும் வகையிட $du = dx$	$dv = e^x dx$ என்க. தொகையிட $v = e^x$

எடுத்துக்காட்டு 2.26

மதிப்பிடுக $\int x^3 e^x dx$

தீர்வு:

$$\begin{aligned}\int x^3 e^x dx &= \int udv \\ &= uv - u'v_1 + u''v_2 - u'''v_3 + \ldots \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6e^x + c \\ &= e^x \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right) + c\end{aligned}$$

அடுத்தடுத்து வகையிட	மீண்டும் மீண்டும் தொகையிட
	$dv = e^x dx$ என்க.
$u = x^3$	$v = e^x$
$u' = 3x^2$	$v_1 = e^x$
$u'' = 6x$	$v_2 = e^x$
$u''' = 6$	$v_3 = e^x$

எடுத்துக்காட்டு 2.27

மதிப்பிடுக $\int x^3 \log x \; dx$

தீர்வு:

$$\int x^3 \log x \; dx = \int u dv$$
$$= uv - \int v du$$
$$= \frac{x^4}{4}\log x - \frac{1}{4}\int x^3 dx$$
$$= \frac{x^4}{4}\log x - \frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{4}\right) + c$$
$$= \frac{x^4}{4}\left[\log x - \frac{1}{4}\right] + c$$

$u = \log x$ மற்றும்	$dv = x^3 dx$ என்க.
வகையிட	தொகையிட
$du = \frac{1}{x}dx$	$v = \frac{x^4}{4}$

எடுத்துக்காட்டு 2.28

மதிப்பிடுக $\int (\log x)^2 \; dx$

தீர்வு:

$$\int (\log x)^2 \; dx = \int u dv$$
$$= uv - \int v du$$
$$= x(\log x)^2 - 2\int \log x \, dx \; \ldots (*)$$
$$= x(\log x)^2 - 2\int u dv$$
$$= x(\log x)^2 - 2\left[uv - \int v du\right]$$
$$= x(\log x)^2 - 2\left[x\log x - \int dx\right]$$
$$= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + c$$
$$= x\left[(\log x)^2 - \log x^2 + 2\right] + c$$

$u = (\log x)^2$ மற்றும்	$dv = dx$ என்க.
வகையிட	தொகையிட
$du = (2\log x)\left(\frac{1}{x}dx\right)$	$v = x$

$(*)$ -ல் உள்ள $\int \log x \, dx$ -க்கு	
$u = \log x$ மற்றும்	$dv = dx$ என்க.
வகையிட	தொகையிட
$du = \frac{1}{x}dx$	$v = x$

எடுத்துக்காட்டு 2.29

மதிப்பிடுக $\int (x^2 - 2x + 5)e^{-x} dx$

தீர்வு:

$$\int (x^2 - 2x + 5)e^{-x} dx = \int u dv$$
$$= uv - u'v_1 + u''v_2 - u'''v_3 + \ldots$$

அடுத்தடுத்து வகையிட	மீண்டும் மீண்டும் தொகையிட
	$dv = e^{-x}dx$ என்க.
$u = x^2 - 2x + 5$ மற்றும்	$v = -e^{-x}$
$u' = 2x - 2$	$v_1 = e^{-x}$
$u'' = 2$	$v_2 = -e^{-x}$

$$= \left(x^2 - 2x + 5\right)\left(-e^{-x}\right) - \left(2x - 2\right)e^{-x} + 2\left(-e^{-x}\right) + c$$

$$= e^{-x}\left(-x^2 - 5\right) + c$$

பயிற்சி 2.5

பின்வருவனவற்றை x –ஐ பொறுத்து தொகையிடுக.

1. xe^{-x} 2. $x^3 e^{3x}$ 3. $\log x$ 4. $x \log x$

5. $x^n \log x$ 6. $x^5 e^{x^2}$

2.1.5 பிரதியிடல் முறையில் அல்லது மாறியை மாற்றி அமைக்கும் முறையில் தொகையிடல் (Integration by substitution (or) change of variable method)

குறிப்பிட்ட சில சார்புகளுக்கான தொகையிடலில் அதற்கான தொகையீட்டை நேரடியாக பெற இயலாது, ஏனெனில் அவை மேலே விவாதிக்கப்பட்ட எந்த ஒரு திட்டமான வடிவத்தையும் பெற்றிருக்காது. ஆனால் பொருத்தமான ஒன்றை பிரதியிடுவதன் மூலமாக ஒரு திட்டமான வடிவத்திற்கு மாற்றியமைக்கலாம். பொருத்தமான பிரதியிடல் மூலமாக ஒரு திட்டமான வடிவத்திற்கு மாற்றி தொகையீடு செய்யும் முறையானது பிரதியிடல் முறையில் தொகையிடல் எனப்படும்.

வகை: VI

1. $\displaystyle\int \left[f(x)\right]^n f'(x)\,dx = \frac{\left[f(x)\right]^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$

2. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log\left|f(x)\right| + c$

3. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

4. $\displaystyle\int e^x\left[f(x) + f'(x)\right]dx = e^x f(x) + c$

5. $\displaystyle\int e^{ax}\left[a\,f(x) + f'(x)\right]dx = e^{ax} f(x) + c$

எடுத்துக்காட்டு 2.30

மதிப்பிடுக $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$

தீர்வு:

$f(x) = x^2 + 1$ என்க.

$\therefore \quad f'(x) = 2x$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\log\left[f(x)\right] + c$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|x^2 + 1\right| + c$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int \frac{nax^{n-1}}{ax^n + b}\,dx = \int \frac{d\left(ax^n + b\right)}{ax^n + b}$$

$$= \log\left|ax^n + b\right| + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.31

மதிப்பிடுக $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

தீர்வு:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{f(x)}\right] + c$$

$$= \sqrt{x^2+1} + c$$

$f(x) = x^2 + 1$ என்க.

$\therefore \quad f'(x) = 2x$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int \frac{nax^{n-1}}{\sqrt{ax^n + b}}\,dx = \int \frac{d\left(ax^n + b\right)}{\sqrt{ax^n + b}}$$

$$= 2\sqrt{ax^n + b} + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.32

மதிப்பிடுக $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

தீர்வு:

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\left(2x\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \left[f\left(x\right)\right]^{\frac{1}{2}} f'(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\left[f(x)\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} + c$$

$f(x) = x^2 + 1$ என்க.

$\therefore \quad f'(x) = 2x$

எடுத்துக்காட்டு 2.33

மதிப்பிடுக $\displaystyle\int \frac{x^3}{\left(x^2+1\right)^3}\,dx$

தீர்வு:

$$\int \frac{x^3}{\left(x^2+1\right)^3}\,dx = \int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^3}\,x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{z-1}{z^3}\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}\right]dz$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}\right]+c$$

$$= \frac{1}{4\left(x^2+1\right)^2}-\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}+c$$

$z = x^2+1$ என்க.

$\therefore\ x^2 = z-1$ மற்றும்

$dz = 2x\,dx$ ஆகும்.

$\Rightarrow \dfrac{dz}{2} = x\,dx$

எடுத்துக்காட்டு 2.34

மதிப்பிடுக $\displaystyle\int \frac{dx}{x\left(x^3+1\right)}$

தீர்வு:

$$\int \frac{dx}{x\left(x^3+1\right)} = \int \frac{x^2}{x^3\left(x^3+1\right)}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dz}{z\left(z+1\right)}dz$$

$$= \frac{1}{3}\int \left[\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}\right]dz$$

$$= \frac{1}{3}\left[\log|z|-\log|z+1|\right]+c$$

$$= \frac{1}{3}\log\left|\frac{z}{z+1}\right|+c$$

$$= \frac{1}{3}\log\left|\frac{x^3}{x^3+1}\right|+c$$

$z = x^3$ என்க.

$\therefore\ dz = 3x^2\,dx$

$\Rightarrow \dfrac{dz}{3} = x^2\,dx,$

பகுதி பின்னமாக்கல் முறையில்,

$\dfrac{1}{z(z+1)} = \dfrac{A}{z}+\dfrac{B}{z+1}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{z(z+1)} = \dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z+1}$

எடுத்துக்காட்டு 2.35

மதிப்பிடுக $\displaystyle\int x^3 e^{x^2}\,dx$

தீர்வு:

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx = \int x^2 e^{x^2}\,(x\,dx)$$

$z = x^2$ என்க.

$\therefore\ dz = 2x\,dx$

$\Rightarrow \dfrac{dz}{2} = x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int z e^{z} dz$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{z}(z-1)\right] + c$$ [பகுதிப்படுத்தித் தொகையிடுவதன் மூலமாக]

$$= \frac{1}{2}\left[e^{x^2}(x^2-1)\right] + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.36

மதிப்பிடுக $\int e^{x}\left(x^{2}+2x\right)dx$

தீர்வு:

$$\int e^{x}\left(x^{2}+2x\right)dx = \int e^{x}\left[f(x)+f'(x)\right]dx$$

$$= e^{x} f(x) + c$$

$$= e^{x} x^{2} + c$$

$f(x) = x^{2}$ என்க.
$\therefore \quad f'(x) = 2x$

எடுத்துக்காட்டு 2.37

மதிப்பிடுக $\int \frac{xe^{x}}{(1+x)^{2}}dx$

தீர்வு:

$$\int \frac{xe^{x}}{(1+x)^{2}}dx$$

$$= \int e^{x}\left[\frac{1}{1+x} + \frac{-1}{(1+x)^{2}}\right]dx$$

$$= \int e^{x}\left[f(x)+f'(x)\right]dx$$

$$= e^{x} f(x) + c$$

$$= \frac{e^{x}}{1+x} + c$$

பகுதி பின்னமாக்கல் முறையில்,	மற்றும்
$\frac{x}{(1+x)^{2}} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{(1+x)^{2}}$	$f(x) = \frac{1}{1+x}$ என்க.
$\Rightarrow \frac{x}{(1+x)^{2}} = \frac{1}{1+x} + \frac{-1}{(1+x)^{2}}$	$\therefore \quad f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^{2}}$

எடுத்துக்காட்டு 2.38

மதிப்பிடுக $\int e^{2x}\left[\frac{2x-1}{4x^{2}}\right]dx$

தீர்வு:

$$\int e^{2x}\left[\frac{2x-1}{4x^{2}}\right]dx$$

$$= \frac{1}{4}\int e^{2x}\left[2\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{-1}{x^2}\right]dx$$

$$= \frac{1}{4}\int e^{ax}\left[a\,f(x) + f'(x)\right]dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[e^{ax}\ f(x)\right] + c$$

$$= \frac{1}{4x}\ e^{2x}\ + c$$

இங்கு, $\frac{2x-1}{4x^2} = \frac{1}{2x} + \frac{-1}{4x^2}$ $= \frac{1}{4}\left[2\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{-1}{x^2}\right]$	மற்றும் $a = 2,$ $f(x) = \frac{1}{x}$ என்க. $\therefore\ f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

எடுத்துக்காட்டு 2.39

மதிப்பிடுக $\int\left[\frac{1}{\log x} - \frac{1}{(\log x)^2}\right]dx$

தீர்வு:

$$\int\left[\frac{1}{\log x} - \frac{1}{(\log x)^2}\right]dx \ = \int\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right]e^z dz$$

$$= \int e^z\left[\ f(z) + f'(z)\right]dz$$

$$= e^z f(z) + c$$

$$= e^z\left[\frac{1}{z}\right] + c$$

$$= \frac{x}{\log x}\ + c$$

$z = \log x$ என்க. $\therefore dz = \frac{1}{x}dx$ $\Rightarrow dx = e^z dz \ \left[\because x = e^z\right]$ மற்றும் $f(z) = \frac{1}{z}$ என்க. $\therefore\ f'(z) = -\frac{1}{z^2}$

பயிற்சி 2.6

பின்வருவனவற்றை x –ஐ பொறுத்து தொகையிடுக.

1. $\frac{2x+5}{x^2+5x-7}$
2. $\frac{e^{3\log x}}{x^4+1}$
3. $\frac{e^{2x}}{e^{2x}-2}$
4. $\frac{(\log x)^3}{x}$
5. $\frac{6x+7}{\sqrt{3x^2+7x-1}}$
6. $(4x+2)\sqrt{x^2+x+1}$
7. $x^8\left(1+x^9\right)^5$
8. $\frac{x^{e-1}+e^{x-1}}{x^e+e^x}$
9. $\frac{1}{x\log x}$
10. $\frac{x}{2x^4-3x^2-2}$
11. $e^x(1+x)\log(xe^x)$
12. $\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}$
13. $e^x\left[\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right]$
14. $e^x\left[\frac{x-1}{(x+1)^3}\right]$
15. $e^{3x}\left[\frac{3x-1}{9x^2}\right]$

2.1.6 சில சிறப்பு வகைத் தொகையீடுகள் (Some special types of Integrals)

வகை: VII

$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ மற்றும் $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ ஆகிய வடிவில் உள்ள தொகையீடுகளை மதிப்பிட, முதலாவதாக நாம் ax^2+bx+c -ஐ இரு வர்க்கங்களின் கூடுதலாகவோ அல்லது கழித்தலாகவோ [வர்க்க நிறைவாக்கல் முறையில்] விவரித்து, அதாவது $(x+\alpha)^2+\beta^2$ (அல்லது) $(x+\alpha)^2-\beta^2$ (அல்லது) $\beta^2-(x+\alpha)^2$ என மாற்றியமைத்து கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சூத்திரங்களில் இருந்து பொருத்தமான சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி தொகையீடு காண வேண்டும்.

1. $\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$

2. $\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c$

5. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$

6. $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c$

எடுத்துக்காட்டு 2.40

மதிப்பிடுக $\int \frac{dx}{16-x^2}$

தீர்வு:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{16-x^2} &= \int \frac{dx}{4^2-x^2}\\ &= \frac{1}{2(4)}\log\left|\frac{4+x}{4-x}\right|+c\\ &= \frac{1}{8}\log\left|\frac{4+x}{4-x}\right|+c\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.41

மதிப்பிடுக $\int \frac{dx}{1-25x^2}$

தீர்வு:

$$\int \frac{dx}{1-25x^2} = \frac{1}{25}\int \frac{dx}{\left(\frac{1}{5}\right)^2-x^2}$$

$$= \frac{1}{25}\left[\frac{1}{2\left(\frac{1}{5}\right)}\log\left|\frac{\frac{1}{5}+x}{\frac{1}{5}-x}\right|\right]+c$$

$$= \frac{1}{10}\log\left|\frac{1+5x}{1-5x}\right|+c$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int\frac{m}{a^2-(mx)^2}\,dx = \int\frac{d(mx)}{a^2-(mx)^2}$$

$$= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+mx}{a-mx}\right|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.42

மதிப்பிடுக $\int\frac{dx}{2+x-x^2}$

தீர்வு:

$$\int\frac{dx}{2+x-x^2} = \int\frac{dx}{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2\left(\frac{3}{2}\right)}\log\left|\frac{\frac{3}{2}+\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{2}-\left(x-\frac{1}{2}\right)}\right|+c$$

$$= \frac{1}{3}\log\left|\frac{2+2x}{4-2x}\right|+c$$

$$= \frac{1}{3}\log\left|\frac{1+x}{2-x}\right|+c$$

வர்க்க நிறைவாக்கல் முறையில்,

$$2+x-x^2 = 2-\left[x^2-x\right]$$

$$= 2-\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

எடுத்துக்காட்டு 2.43

மதிப்பிடுக $\int\frac{dx}{4x^2-1}$

தீர்வு:

$$\int\frac{dx}{4x^2-1} = \int\frac{dx}{4\left(x^2-\frac{1}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)}\log\left|\frac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right|\right]+c$$

$$= \frac{1}{4}\log\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|+c$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int\frac{m}{(mx)^2-a^2}\,dx = \int\frac{d(mx)}{(mx)^2-a^2}$$

$$= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{mx-a}{mx+a}\right|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.44

மதிப்பிடுக $\int \frac{x^2}{x^2-25}\,dx$

தீர்வு:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{x^2-25}\,dx &= \int \frac{\left(x^2-25\right)+25}{x^2-25}\,dx \\
&= \int \left\{1+\frac{25}{x^2-25}\right\} dx \\
&= \int dx + 25 \int \frac{dx}{x^2-25} \\
&= x + 25\left[\frac{1}{2(5)} \log\left|\frac{x-5}{x+5}\right|\right] + c \\
&= x + \frac{5}{2}\log\left|\frac{x-5}{x+5}\right| + c
\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.45

மதிப்பிடுக $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$

தீர்வு:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2-3x+2} &= \int \frac{dx}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)} \log\left|\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}}\right| + c \\
&= \log\left|\frac{2x-4}{2x-2}\right| + c \\
&= \log\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + c
\end{aligned}$$

வர்க்க நிறைவாக்கல் முறையில்

$$\begin{aligned}
x^2-3x+2 &= \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 \\
&= \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \\
&= \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.46

மதிப்பிடுக $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}}$

தீர்வு:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4\left[x^2-\frac{9}{4}\right]}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}\right|+c$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-\frac{9}{4}}\right|+c$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|2x+\sqrt{4x^2-9}\right|+c$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int \frac{m}{\sqrt{(mx)^2-a^2}}dx = \int \frac{d(mx)}{\sqrt{(mx)^2-a^2}}$$

$$= \log\left|mx+\sqrt{(mx)^2-a^2}\right|+c$$

குறிப்பு

$m\log n \pm k = c$

எடுத்துக்காட்டு 2.47

மதிப்பிடுக $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

தீர்வு:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$= \log\left|\left(x-\frac{3}{2}\right)+\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right|+c$$

$$= \log\left|\left(x-\frac{3}{2}\right)+\sqrt{x^2-3x+2}\right|+c$$

வர்க்க நிறைவாக்கல் முறையில்

$$x^2-3x+2 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2$$

$$= \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

எடுத்துக்காட்டு 2.48

மதிப்பிடுக $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+25}}$

தீர்வு:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+25}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5^2}}$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2+5^2}\right|+c$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2+25}\right|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.49

மதிப்பிடுக $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}$

தீர்வு:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+2^2}}$$

$$= \log\left|(x+2)+\sqrt{(x+2)^2+2^2}\right|+c$$

$$= \log\left|(x+2)+\sqrt{x^2+4x+8}\right|+c$$

வர்க்க நிறைவாக்கல் முறையில்

$$x^2+4x+8 = (x+2)^2-4+8$$
$$= (x+2)^2+2^2$$

எடுத்துக்காட்டு 2.50

மதிப்பிடுக $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^8+1}}$

தீர்வு:

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^8+1}} = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3dx}{\sqrt{(x^4)^2+1^2}}$$

$$= \frac{1}{4}\log\left|x^4+\sqrt{(x^4)^2+1^2}\right|+c$$

$$= \frac{1}{4}\log\left|x^4+\sqrt{x^8+1}\right|+c$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int \frac{m}{\sqrt{(mx)^2+a^2}}dx = \int \frac{d(mx)}{\sqrt{(mx)^2+a^2}}$$

$$= \log\left|mx+\sqrt{(mx)^2+a^2}\right|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.51

மதிப்பிடுக $\displaystyle\int \sqrt{x^2-16}\ dx$

தீர்வு:

$$\int \sqrt{x^2-16}\ dx = \int \sqrt{x^2-4^2}\ dx$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4^2}-\frac{4^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-4^2}\right|+c$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-16}-8\log\left|x+\sqrt{x^2-16}\right|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.52

மதிப்பிடுக $\displaystyle\int \sqrt{x^2+5}\ dx$

தீர்வு:

$$\int\sqrt{x^2+5}\,dx = \int\sqrt{x^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}+\frac{\left(\sqrt{5}\right)^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}\right|+c$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+5}+\frac{5}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+5}\right|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.53

மதிப்பிடுக $\int\sqrt{4x^2+9}\,dx$

தீர்வு:

$$\int\sqrt{4x^2+9}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\sqrt{(2x)^2+3^2}\,d(2x)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2x}{2}\sqrt{(2x)^2+3^2}+\frac{3^2}{2}\log\left|2x+\sqrt{(2x)^2+3^2}\right|\right]+c$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{4x^2+9}+\frac{9}{4}\log\left|2x+\sqrt{4x^2+9}\right|+c$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int m\sqrt{(mx)^2+a^2}\,dx = \int\sqrt{(mx)^2+a^2}\,d(mx)$$

$$= \frac{mx}{2}\sqrt{(mx)^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\log\left|mx+\sqrt{(mx)^2+a^2}\right|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.54

மதிப்பிடுக $\int\sqrt{x^2-4x+3}\,dx$

தீர்வு:

$$\int\sqrt{x^2-4x+3}\,dx$$

$$= \int\sqrt{(x-2)^2-1^2}\,dx$$

$$= \frac{(x-2)}{2}\sqrt{(x-2)^2-1^2}-\frac{1}{2}\log\left|(x-2)+\sqrt{(x-2)^2-1^2}\right|+c$$

$$= \frac{(x-2)}{2}\sqrt{x^2-4x+3}-\frac{1}{2}\log\left|(x-2)+\sqrt{x^2-4x+3}\right|+c$$

வர்க்க நிறைவாக்கல் முறையில்,

$$x^2-4x+3 = (x-2)^2-4+3$$

$$= (x-2)^2-1^2$$

$$\therefore \sqrt{x^2-4x+3} = \sqrt{(x-2)^2-1^2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.55

மதிப்பிடுக $\int\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\,dx$

தீர்வு:

காரணக்காரிய முறையில்,
$\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} \times \dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$ $= x+\sqrt{x^2-1}$

$$\int \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

$$= \int\left[x+\sqrt{x^2-1}\right]dx$$

$$= \int x\,dx + \int \sqrt{x^2-1}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + c$$

பயிற்சி 2.7

பின்வருவனவற்றை x –ஐ பொறுத்து தொகையிடுக:

1. $\dfrac{1}{9-16x^2}$
2. $\dfrac{1}{9-8x-x^2}$
3. $\dfrac{1}{2x^2-9}$
4. $\dfrac{1}{x^2-x-2}$
5. $\dfrac{1}{x^2+3x+2}$
6. $\dfrac{1}{2x^2+6x-8}$
7. $\dfrac{e^x}{e^{2x}-9}$
8. $\dfrac{1}{\sqrt{9x^2-7}}$
9. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+6x+13}}$
10. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$
11. $\dfrac{x^3}{\sqrt{x^8-1}}$
12. $\sqrt{1+x+x^2}$
13. $\sqrt{x^2-2}$
14. $\sqrt{4x^2-5}$
15. $\sqrt{2x^2+4x+1}$
16. $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

2.2 வரையறுத்த தொகையீடுகள் (Definite integrals)

இதுவரை நாம் வரையறாத் தொகையிடல்களில் அடிப்படை இயற்கணிதச் சார்பு, அடுக்கைச் சார்பு, திரிகோணமிதிச் சார்பு மற்றும் மடக்கைச் சார்பு ஆகியவற்றை பயன்படுத்தி தொகையீடு காணும் முறைகளைப் பற்றித் தெரிந்துக் கொண்டோம். இனி நாம் வரையறுத்த தொகையீடுகளைப் பற்றி படிக்கலாம்.

வடிவியலில், வரையறுத்த தொகையீடான $\int_a^b f(x)\,dx$ ஆனது ஒரு கூட்டுத் தொகையின் எல்லை மதிப்பாகக் குறிக்கப்படுகிறது. மேலும் இது, $y=f(x)$ என்ற சமன்பாட்டிற்குறிய வளைவரை, x-அச்சு மற்றும் $x=a, x=b$ எனும் குத்தாயங்களால் அடைபடும் பரப்பளவு எனவும் குறிப்பிடப்படுகிறது.

2.2.1 தொகை நுண்கணிதத்தின் அடிப்படைத் தேற்றங்கள் (The fundamental theorems of Integral Calculus)

தேற்றம் 2.1 நுண்கணிதத்தின் முதல் அடிப்படைத் தேற்றம் (First fundamental theorem of Integral Calculus):

சார்பு $f(x)$ ஆனது தொடர்ச்சியுடையதாகவும் மற்றும் $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ எனில், $F'(x)=f(x)$ ஆகும்.

தேற்றம் 2.2 நுண்கணிதத்தின் இரண்டாம் அடிப்படைத் தேற்றம் (Second fundamental theorem of Integral Calculus):

$f(x)$ என்ற சார்பு $[a,b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் தொடர்ச்சியுடையதாகவும், மேலும் $f(x)$-ன் எதிர்மறை வகையீடானது $F(x)$ எனில் $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ ஆகும்.

இங்கு a மற்றும் b என்பன வரையறுத்த தொகையீட்டின் கீழ் எல்லை மற்றும் மேல் எல்லை எனப்படும்.

குறிப்பு

$\int_a^b f(x)dx$ ஆனது ஒரு திட்டவட்டமான மாறிலியாகும், அதேசமயத்தில் $\int_a^x f(t)dt$ ஆனது ஒரு மாறிச் சார்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.56

மதிப்பிடுக $\int_0^1 \left(x^3 + 7x^2 - 5x\right)dx$

தீர்வு:

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

இதற்கு முந்தைய பகுதியில் $\int \left(x^3 + 7x^2 - 5x\right)dx$ –ஐ எவ்வாறு தொகையிடுவது என்பதைப் பற்றி தெரிந்துக் கொண்டோம்.

$$\therefore \int \left(x^3 + 7x^2 - 5x\right)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + c$$

இப்போது, $\int_0^1 \left(x^3 + 7x^2 - 5x\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} - \frac{5x^2}{2}\right]_0^1$

$$= \left[\frac{1}{4} + \frac{7}{3} - \frac{5}{2}\right] - \left[\frac{0}{4} + \frac{0}{3} - \frac{0}{2}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{4} + \frac{7}{3} - \frac{5}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{12}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.57

0 மற்றும் 1 -ஐ எல்லை மதிப்புகளாகக் கொண்டு $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{5x^2+1}$ எனும் சார்பை தொகையிடுக.

தீர்வு:

இங்கு, $$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{5x^2+1}$$

$\therefore$ $$y = \int_0^1 \frac{2x}{5x^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{10x}{5x^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{5}\left[\log\left(5x^2+1\right)\right]_0^1 = \frac{1}{5}\left[\log 6 - \log 1\right]$$

$$= \frac{1}{5}\log 6$$

எடுத்துக்காட்டு 2.58

மதிப்பிடுக $\int_0^1 \left(e^x - 4a^x + 2 + \sqrt[3]{x}\right)dx$

தீர்வு:

$$\int_0^1 \left(e^x - 4a^x + 2 + \sqrt[3]{x}\right)dx = \left[e^x - 4\frac{a^x}{\log a} + 2x + 3\frac{x^{\frac{4}{3}}}{4}\right]_0^1$$

$$= e - \frac{4a}{\log a} + 2 + \frac{3}{4} - 1 + \frac{4}{\log a}$$

$$= e + \frac{4(1-a)}{\log a} + \frac{7}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.59

மதிப்பிடுக $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \, dx$

தீர்வு:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= -\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 2.60

மதிப்பிடுக $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$

தீர்வு:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}[1+\cos 2x]\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+0\right] = \frac{\pi}{4}$$

எளியச் சார்புகளாக பிரித்தெழுத,

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\therefore \cos^2 x = \frac{1}{2}[1+\cos 2x]$$

எடுத்துக்காட்டு 2.61

மதிப்பிடுக $\int_0^1 \left[e^{a\log x} + e^{x\log a}\right]dx$

தீர்வு:

$$\int_0^1 \left[e^{a\log x} + e^{x\log a}\right]dx = \int_0^1 \left(x^a + a^x\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^{a+1}}{a+1} + \frac{a^x}{\log a}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{a+1} + \frac{a}{\log a}\right) - \left(0 + \frac{1}{\log a}\right)$$

$$= \frac{1}{a+1} + \frac{a}{\log a} - \frac{1}{\log a}$$

$$= \frac{1}{a+1} + \frac{(a-1)}{\log a}$$

குறிப்பு

$e^{a\log x} = x^a$

எடுத்துக்காட்டு 2.62

மதிப்பிடுக $\int_2^3 \frac{x^4+1}{x^2}dx$

தீர்வு:

$$\int_2^3 \frac{x^4+1}{x^2}dx = \int_2^3 \left(x^2 + x^{-2}\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x}\right]_2^3$$

$$= \left(9 - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{13}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.63

மதிப்பிடுக $\int_{-1}^{1}\left(x^{3}+3x^{2}\right)^{3}\left(x^{2}+2x\right)dx$

தீர்வு:

$$\int_{-1}^{1}\left(x^{3}+3x^{2}\right)^{3}\left(x^{2}+2x\right)dx = \left[\frac{1}{3}\frac{\left(x^{3}+3x^{2}\right)^{4}}{4}\right]_{-1}^{1} \qquad \left[\because \int [f(x)]^{n} f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+c\right]$$

$$=\frac{1}{3}(64-4)$$

$$=20$$

எடுத்துக்காட்டு 2.64

மதிப்பிடுக $\int_{a}^{b}\frac{\sqrt{\log x}}{x}dx \quad a,b>0$

தீர்வு:

$$\int_{a}^{b}\frac{\sqrt{\log x}}{x}dx = \int_{a}^{b}(\log x)^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x} \qquad \left[\because \int [f(x)]^{n} f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+c\right]$$

$$=\left[2\frac{(\log x)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_{a}^{b}$$

$$=\frac{2}{3}\left[(\log b)^{\frac{3}{2}}-(\log a)^{\frac{3}{2}}\right]$$

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

$\log b^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\log b$ ஆனால்,

$(\log b)^{\frac{3}{2}} \neq \frac{3}{2}\log b$ மற்றும்,

$(\log b)^{\frac{3}{2}} - (\log a)^{\frac{3}{2}} \neq \left(\log\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$

எடுத்துக்காட்டு 2.65

மதிப்பிடுக $\int_{-1}^{1}x\sqrt{x+1}\,dx$

தீர்வு:

$t = x+1$ என்க.

$dt = dx$

x	-1	1
t	0	2

$$\int_{-1}^{1}x\sqrt{x+1}\,dx = \int_{0}^{2}(t-1)\sqrt{t}\,dt$$

$$=\int_{0}^{2}\left(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}\right)dt$$

$$=\left[\frac{2t^{\frac{5}{2}}}{5}-\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_{0}^{2}$$

$$= \frac{8\sqrt{2}}{5} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{15}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.66

மதிப்பிடுக $\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}\,dx$

தீர்வு:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}\,dx = -2\left[e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^\infty$$

$$= -2\left[0-1\right] = 2$$

எடுத்துக்காட்டு 2.67

மதிப்பிடுக $\int_0^\infty x^2 e^{-x^3}\,dx$

தீர்வு:

$$\int_0^\infty x^2\, e^{-x^3}\,dx = \int_0^\infty e^{-t}\,\frac{dt}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\left[-e^{-t}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{-1}{3}\left[0-1\right]$$

$$= \frac{1}{3}$$

$x^3 = t$ என்க.

$3x^2\,dx = dt$

$\Rightarrow x^2\,dx = \frac{dt}{3}$

x	0	∞
t	0	∞

எடுத்துக்காட்டு 2.68

மதிப்பிடுக $\int_1^2 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx$

தீர்வு:

$$\int_1^2 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx = \int_1^2\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right]dx$$

$$= \left[\log|x+1| - \log|x+2|\right]_1^2$$

$$= \log\frac{3}{4} - \log\frac{2}{3}$$

$$= \log\frac{9}{8}$$

பகுதி பின்னமாக்கல் முறையில்,

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.69

மதிப்பிடுக $\int_1^e \log x \, dx$

தீர்வு:

$u = \log x$ மற்றும்	$dv = dx$ என்க.
வகையிட,	தொகையிட
$du = \frac{1}{x} dx$	$v = x$

$$\int_1^e \log x \, dx = \int_1^e u \, dv$$

$$= [uv]_1^e - \int_1^e v du$$

$$= [x \log x]_1^e - \int_1^e x \frac{1}{x} \, dx$$

$$= (e \log e - 1 \log 1) - [x]_1^e$$

$$= (e - 0) - (e - 1)$$

$$= 1$$

எடுத்துக்காட்டு 2.70

மதிப்பிடுக $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$

தீர்வு:

$u = x$ மற்றும்	$dv = \sin x \, dx$ என்க.
வகையிட	தொகையிட
$du = dx$	$v = -\cos x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u dv$$

$$= [uv]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} v du$$

$$= [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

$$= 0 + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

எடுத்துக்காட்டு 2.71

$\int_1^a 3x^2 \, dx = -1$ எனில், $a \in R$ எனுமாறு a -ன் மதிப்பைக் காண்க .

தீர்வு:

$\int_1^a 3x^2 \, dx = -1$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\left[x^3\right]_1^a = -1$$

$$a^3 - 1 = -1$$

$$a^3 = 0 \Rightarrow a = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 2.72

$\int_a^b dx = 1$ மற்றும் $\int_a^b x\,dx = 1$ எனில், a மற்றும் b-ன் மதிப்புகளைக் காண்க

தீர்வு:

$\int_a^b dx = 1$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\left[x\right]_a^b = 1$$

$$b - a = 1 \quad \ldots (1)$$

மேலும், $\int_a^b x\,dx = 1$ எனவும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = 1$$

$$b^2 - a^2 = 2$$

$$(b+a)(b-a) = 2$$

$$b + a = 2 \quad \ldots (2) \left[\because\ b - a = 1\right]$$

$(1)+(2) \Rightarrow$ $2b = 3$

$$\therefore\ b = \frac{3}{2}$$

இப்போது, $\frac{3}{2} - a = 1$ [$\because$ (1) லிருந்து]

$$\therefore\ a = \frac{1}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.73

$f(x) = \begin{cases} 7x+3, & 1 \le x \le 3 \\ 8x\quad, & 3 \le x \le 4 \end{cases}$ எனில், $\int_1^4 f(x)\,dx$ -ஐ மதிப்பிடுக.

தீர்வு:

$$\int_1^4 f(x)\,dx = \int_1^3 f(x)\,dx + \int_3^4 f(x)\,dx$$

$$= \int_1^3 (7x+3)\,dx + \int_3^4 8x\,dx$$

$$= \left[\frac{7x^2}{2} + 3x\right]_1^3 + \left[\frac{8x^2}{2}\right]_3^4$$

$$= \frac{63}{2} + 9 - \frac{13}{2} + 64 - 36$$

$$= 62$$

எடுத்துக்காட்டு 2.74

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -2 \le x < 1 \\ x, & 1 \le x < 2 \\ x-4, & 2 \le x \le 4 \end{cases}$$ எனக்கொண்டு பின் வருவனவற்றை மதிப்பிடுக.

(i) $\int_{-2}^{1} f(x)dx$ (ii) $\int_{1}^{2} f(x)dx$ (iii) $\int_{2}^{3} f(x)dx$ (iv) $\int_{-2}^{1.5} f(x)dx$ (v) $\int_{1}^{3} f(x)dx$

தீர்வு:

(i) $$\int_{-2}^{1} f(x)dx = \int_{-2}^{1} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1} = \frac{1}{3} - \left(\frac{-8}{3}\right) = 3$$

(ii) $$\int_{1}^{2} f(x)dx = \int_{1}^{2} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2} = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

(iii) $$\int_{2}^{3} f(x)dx = \int_{2}^{3} (x-4)dx = \left[\frac{x^2}{2} - 4x\right]_{2}^{3} = \left(\frac{9}{2} - 12\right) - \left(\frac{4}{2} - 8\right) = -\frac{15}{2} + 6 = \frac{-3}{2}$$

(iv) $$\int_{-2}^{1.5} f(x)dx = \int_{-2}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{1.5} f(x)dx = 3 + \int_{1}^{1.5} x\,dx$$ (i) லிருந்து

$$= 3 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{1.5} = 3 + \frac{2.25}{2} - \frac{1}{2} = 3 + \frac{1.25}{2} = 3.625$$

(v) $$\int_{1}^{3} f(x)dx = \int_{1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{3} f(x)dx$$

$$= \frac{3}{2} + \left(\frac{-3}{2}\right) = 0$$ (ii) மற்றும் (iii) லிருந்து

பயிற்சி 2.8

I பின் வருவனவற்றை இரண்டாம் அடிப்படைத் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி மதிப்பிடுக,

1. $\int_0^1 e^{2x}dx$ 2. $\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{1-4x}\,dx$ 3. $\int_1^2 \frac{xdx}{x^2+1}$ 4. $\int_0^3 \frac{e^x dx}{1+e^x}$

5. $\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$ 6. $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\log x)^3}$ 7. $\int_{-1}^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+7}dx$ 8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x}\;dx$

9. $\int_1^2 \frac{x-1}{x^2}\,dx$

II பின் வருவனவற்றை தீர்க்க.

1. $f(x)=\begin{cases}4x+3, & 1\le x\le 2\\ 3x+5, & 2<x\le 4\end{cases}$ எனும்பொழுது $\int_1^4 f(x)\,dx$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

2. $f(x)=\begin{cases}3-2x-x^2, & x\le 1\\ x^2+2x-3, & 1<x\le 2\end{cases}$ எனும்பொழுது $\int_0^2 f(x)\,dx$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

3. $f(x)=\begin{cases}x, & x\ge 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ எனும்பொழுது $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

4. $f(x)=\begin{cases}cx, & 0<x<1\\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்}\end{cases}$ மற்றும் $\int_0^1 f(x)dx = 2$ எனில், c -ன் மதிப்புபைக் காண்க

2.2.2 வரையறுத்த தொகையீடுகளின் பண்புகள் (Properties of definite integrals)

(i) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$

(ii) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$\int_a^b dx = b-a$

(iii) $[a,b]$ இல் $f(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்பன தொடர்ச்சியான சார்புகள் எனில்,

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

(iv) $f(x)$ ஆனது $[a,b]$ இல் தொடர்ச்சியான சார்பு மற்றும் $a<c<b$ எனில்,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(v) $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

நிரூபணம் :

$a-x=t$ என்க $dx=-dt$		
x	0	a
t	a	0

வ.ப. [R.H.S.] $= \int_0^a f(a-x)dx$

$= \int_a^0 f(t)(-dt)$

$= \int_0^a f(t)dt$

$$= \int_0^a f(x)dx \qquad [\text{பண்பு (i) இன் படி}]$$

$$= \text{இ.ப. [L.H.S.]}$$

(vi) (a) $f(x)$ ஓர் இரட்டைச் சார்பு எனில், $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

(b) $f(x)$ ஓர் ஒற்றைச் சார்பு எனில், $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

நிரூபணம் :

(a) $f(x)$ ஓர் இரட்டைச் சார்பு எனில் $f(x) = f(-x)$ ...(1)

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

$$= \int_{-a}^{0} f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx \qquad (1) \text{ -ன் படி}$$

$-x = t$ என்க. $dx = -dt$		
x	$-a$	0
t	a	0

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_a^0 f(t)(-dt) + \int_0^a f(x)dx$$

$$= \int_0^a f(t)\,dt + \int_0^a f(x)dx$$

$$= \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \qquad [\text{பண்பு (i) இன் படி}]$$

$$= 2\int_0^a f(x)dx$$

பிரதியிடலை வலது பக்கத்தில் [R.H.S.] உள்ள முதல் தொகையிடலில் மட்டும் பயன்படுத்த,

(b) $f(x)$ ஓர் ஒற்றைச் சார்பு எனில் $f(-x) = -f(x)$ ...(2)

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

$$= \int_{-a}^{0} -f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx \qquad (2) \text{ –ன் படி}$$

$-x = t$ என்க. $dx = -dt$		
x	$-a$	0
t	a	0

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(t)(-dt) + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

பிரதியிடலை வலது பக்கத்தில் [R.H.S.] உள்ள முதல் தொகையிடலில் மட்டும் பயன்படுத்த,

$$= -\int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad \text{[பண்பு (i) இன் படி]}$$

$$= 0$$

(vii) $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(a+b-x)\,dx$

நிரூபணம் :

$a+b-x = t$ மற்றும்

$-dx = dt$

$dx = -dt$

$t = a+b-x$		
x	a	b
t	b	a

$$\therefore \int_{a}^{b} f(a+b-x)\,dx = -\int_{b}^{a} f(t)\,dt = \int_{a}^{b} f(t)\,dt$$

$$= \int_{a}^{b} f(x)\,dx \quad \text{[பண்பு (i) இன் படி]}$$

$$\therefore \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(a+b-x)\,dx$$

பின் வருவனவற்றை வரையறுத்த தொகையீடுகளின் பண்புகளைக் பயன்படுத்தி மதிப்பிடுக:

எடுத்துக்காட்டு 2.75

மதிப்பிடுக $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^5\,dx}{a^2-x^2}$

தீர்வு:

$f(x) = \dfrac{x^5}{a^2-x^2}$ என்க.

$$f(-x) = \frac{(-x)^5}{a^2-(-x)^2} = \frac{-x^5}{a^2-x^2} = -f(x)$$

$$f(x) = -f(x)$$

$\therefore f(x)$ ஓர் ஒற்றைச் சார்பு ஆகும்.

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{x^5\,dx}{a^2-x^2} = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 2.76

மதிப்பிடுக $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$

தீர்வு:

$$f(x) = \cos x \text{ என்க.}$$

$$f(-x) = \cos(-x) \qquad = \cos x$$

$$\Rightarrow \qquad f(x) = -f(x)$$

$\therefore f(x)$ ஓர் இரட்டைச் சார்பு ஆகும்.

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

$$= 2\left[\sin x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\left[\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0\right]$$

$$= 2$$

எடுத்துக்காட்டு 2.77

மதிப்பிடுக $\int_{-1}^{1} \left(x^2 + x\right) dx$

தீர்வு:

$$\int_{-1}^{1} \left(x^2 + x\right) dx = \int_{-1}^{1} x^2 \, dx + \int_{-1}^{1} x \, dx$$

$$= 2\int_{0}^{1} x^2 \, dx + 0 \ \left[\because x^2 \text{ ஓர் இரட்டைச் சார்பு மற்றும் } x \text{ ஓர் ஒற்றைச் சார்பு ஆகும்}\right]$$

$$= 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1}{3} - 0\right]$$

$$= \frac{2}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.78

மதிப்பிடுக $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

தீர்வு:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx \text{ என்க.} \qquad \ldots (1)$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx \qquad \left[\because \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx\right]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx \qquad \ldots (2)$$

$(1)+(2) \Rightarrow$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} + \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\right] dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \quad = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} \quad = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad I = \frac{\pi}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.79

மதிப்பிடுக $\displaystyle\int_2^5 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{7-x}} dx$

தீர்வு:

$$I = \int_2^5 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{7-x}} dx \text{ என்க} \qquad \ldots (1)$$

$$I = \int_2^5 \frac{\sqrt{2+5-x}}{\sqrt{2+5-x} + \sqrt{7-(2+5-x)}} dx \qquad \left[\because \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx\right]$$

$$I = \int_2^5 \frac{\sqrt{7-x}}{\sqrt{7-x} + \sqrt{x}} dx \qquad \ldots (2)$$

$(1)+(2) \Rightarrow$

$$2I = \int_2^5 \left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{7-x}} + \frac{\sqrt{7-x}}{\sqrt{7-x} + \sqrt{x}}\right] dx$$

$$= \int_2^5 \left[\frac{\sqrt{x} + \sqrt{7-x}}{\sqrt{x} + \sqrt{7-x}} \right] dx$$

$$= \int_2^5 dx \quad = [x]_2^5 \quad = 3$$

$$\therefore \qquad I = \frac{3}{2}$$

பயிற்சி 2.9

பின் வருவனவற்றை வரையறுத்த தொகையீடுகளின் பண்புகளைக் பயன்படுத்தி மதிப்பிடுக,

1. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^3 \cos^3 x dx$
2. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \, d\theta$
3. $\int_{-1}^{1} \log\left(\frac{2-x}{2+x}\right) dx$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^7 x}{\sin^7 x + \cos^7 x} dx$
5. $\int_0^1 \log\left(\frac{1}{x} - 1\right) dx$
6. $\int_0^1 \frac{x}{(1-x)^{\frac{3}{4}}} dx$

2.2.3 காமா தொகையீடு (Gamma Integral)

முறைச் சாரா வரையறுத்த தொகையீடுகளில் ஒரு குறிப்பிட்ட வகையை சார்ந்த தொகையீடுகளின் தொகையை மதிப்பிட உதவும் மிகவும் பயனுள்ள மற்றும் முக்கியமான முடிவு காமா தொகையீடு ஆகும்.

முதலில், நாம் வரையறாத் தொகையீடு, முறைசார்ந்த வரையறுத்த தொகையீடு மற்றும் முறைச்சாரா வரையறுத்த தொகையீடுகளுக்கான கருத்துருக்களை அறிந்துக் கொள்வோம்.

வரையறாத் தொகையீடு (Indefinite integral)

ஒரு தன்னிச்சையான மாறிலியை உள்ளடக்கி, எல்லைகள் இல்லாமல் வெளிப்படுத்தப்படும் தொகையிடலுக்கான செயல் முறையை வரையறாத் தொகையீடு என்போம்.

எடுத்துக்காட்டு: $\int e^{-t} dt$

முறைசார்ந்த வரையறுத்த தொகையீடு (Proper definite integral)

தொகைக்காண் சார்பு $f(x)$ ஆனது $[a, b]$ என்ற இடைவெளியில் தொடர்ச்சியுடையதாகவும், a மற்றும் b என்ற எல்லை மதிப்புகளை முடிவுறு எண்களாகவும் கொண்டு அமையும் தொகையிடல்களை முறைசார்ந்த வரையறுத்த தொகையீடு என்போம்.

எடுத்துக்காட்டு: $\int_0^1 e^{-t} dt$

முறைசாரா வரையறுத்த தொகையீடு (Improper definite integral)

ஒரு எல்லை a அல்லது b அல்லது இரு எல்லை மதிப்புகள் a மற்றும் b யையும் முடிவிலியாகக் கொண்டு அமையும் தொகையிடல்கள், அல்லது தொகைக்காண் சார்பு $f(x)$ ஆனது $[a, b]$ என்ற எல்லைகளுக்குள் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட புள்ளிகளில் காண இயலாததாகவும் அமையும் தொகையிடல்களை முறைசாரா வரையறுத்த தொகையீடு என்போம்.

எடுத்துக்காட்டு: $\int_0^{\infty} e^{-t}dt$

வரையறை 2.3

$n > 0$ எனும் போது, $\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx$ –ஐ காமா சார்பு என்போம். இதனை $\Gamma(n)$ [காமா n] எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

குறிப்பு

n ஒரு மிகை முழு எண் எனில், $\int_0^{\infty} x^n e^{-ax}\,dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$ ஆனது காமா தொகையிடலில் ஒரு குறிப்பிட்ட நிலை ஆகும்.

பண்புகள் :

1. $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1),\ n>1$
2. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n),\ n>0$
3. $\Gamma(n+1) = n!,$ n ஒரு மிகை முழு எண்
4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

$\Gamma(1)=1$

எடுத்துக்காட்டு 2.80

மதிப்பிடுக (i) $\Gamma(6)$ (ii) $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$ (iii) $\int_0^{\infty} e^{-2x}x^5dx$ (iv) $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$

தீர்வு:

(i)
$$\Gamma(6) = 5! = 120$$

(ii)
$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$
$$= \frac{5}{2}\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$$

(iii) $\int_0^\infty x^n e^{-ax}\, dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$ என்பதை நாம் அறிவோம்

$$\therefore \int_0^\infty e^{-2x} x^5\, dx = \frac{5!}{2^{5+1}} = \frac{5!}{2^6}$$

(iv) $\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt$ என்பதை நாம் அறிவோம்.

இதில் $t = x^2$ என $dt = 2xdx$ ஆகும்

$$\therefore \quad \Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x^2}\left(x^2\right)^{n-1} 2x\, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n-2} 2x\, dx$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n-1}\, dx$$

$n = \frac{1}{2}$ என, நாம் பெறுவது

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

$$\Rightarrow \sqrt{\pi} = 2\int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

$$\therefore \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

பயிற்சி 2.10

1. பின் வருவனவற்றை மதிப்பிடுக.

(i) $\Gamma(4)$ (ii) $\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)$ (iii) $\int_0^\infty e^{-mx} x^6 dx$ (iv) $\int_0^\infty e^{-4x} x^4 dx$ (v) $\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}} x^5 dx$

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-2x}, x \geq 0 \\ 0, \text{ மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$ எனில், $\int_0^\infty f(x) dx$ –ஐ மதிப்பிடுக.

2.2.4 வரையறுத்த தொகையீடுக்கான கூட்டல் எல்லை (Definite integral as the limit of a sum)

$[a, b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் $f(x)$ ஆனது தொடர்ச்சியான மெய்மதிப்புகளைக் கொண்ட சார்பு என்க. இவ்விடைவெளியானது "h" எனும் சம அகலத்தைக் கொண்ட "n" உள்இடை வெளிகளாக பிரிக்கப்படுமானால்,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ h\to 0}} h\left[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+.....+f(a+(n-1)h)\right] \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு $h=\dfrac{b-a}{n}$ (அல்லது)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ h\to 0}} \sum_{r=1}^{n} h\, f(a+rh) \text{ ஆகும். இங்கு } h=\frac{b-a}{n}$$

வரையறுத்த தொகையீட்டுக்கான கூட்டல் எல்லையை மதிப்பிட பின்வரும் முடிவுகள் மிகவும் உதவிகரமாக அமையும்.

(i) $1+2+3+......n=\dfrac{n(n+1)}{2} = \sum\limits_{r=1}^{n} r$

(ii) $1^2+2^2+3^2+......n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \sum\limits_{r=1}^{r=n} r^2$

(iii) $1^3+2^3+3^3+......n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \sum\limits_{r=1}^{r=n} r^3$

எடுத்துக்காட்டு 2.81

வரையறுத்த தொகையீட்டை ஒரு கூட்டலின் எல்லை எனக் கொண்டு, $\int_0^1 x\,dx$ -ஐ மதிப்பிடுக.

தீர்வு:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ h\to 0}} \sum_{r=1}^{n} h\, f(a+rh) \qquad ...(1)$$

இங்கு $a=0,\ b=1,\ h=\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{1-0}{n}=\dfrac{1}{n}$ மற்றும் $f(x)=x$

இப்போது $f(a+rh)=f\left(0+\dfrac{r}{n}\right)=f\left(\dfrac{r}{n}\right)=\dfrac{r}{n}$

இதை (1) -இல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$\int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{r}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{r=1}^{n} r$$

12th BM Ch 2 Integral calculus –I _TM.indd 84 09-03-2019 09:55:44

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2}$$

$$= \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \qquad \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.82

வரையறுத்த தொகையீட்டை ஒரு கூட்டலின் எல்லை எனக் கொண்டு $\int_1^2 (2x+1)\,dx$ –ஐ மதிப்பிடுக

தீர்வு:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ h\to 0}} \sum_{r=1}^{n} h\, f(a+rh) \qquad \ldots(1)$$

இங்கு $a=1,\ b=2,\ h=\frac{b-a}{n}=\frac{2-1}{n}=\frac{1}{n}$ மற்றும் $f(x)=2x+1$

$$f(a+rh) = f\left(1+\frac{r}{n}\right)$$

$$= 2\left(1+\frac{r}{n}\right)+1$$

$$= 2+\frac{2r}{n}+1$$

$$f(a+rh) = 3+\frac{2r}{n}$$

இதை (1) -இல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$\int_1^2 (2x+1)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{n}\left(3+\frac{2r}{n}\right)$$

$$= \underset{n\to\infty}{lt} \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{3}{n}+\frac{2r}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{3}{n} \sum_{r=1}^{n} 1 + \frac{2}{n^2} \sum_{r=1}^{n} r\right]$$

$$= \lim_{n\leftarrow\infty} \left[\frac{3}{n}\, n + \frac{2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= 3 + \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\therefore \int_1^2 (2x+1)\, dx = 3 + 1 = 4$$

எடுத்துக்காட்டு 2.83

வரையறுத்த தொகையீட்டை ஒரு கூட்டலின் எல்லை எனக் கொண்டு, $\int_1^2 x^2 \; dx$ –ஐ மதிப்பிடுக.

தீர்வு:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ h \to 0}} \sum_{r=1}^{n} h \; f(a + rh)$$

இங்கு $a = 1, \;\; b = 2, \;\; h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$ மற்றும் $f(x) = x^2$

இப்போது $f(a + rh) = f\left(1 + \frac{r}{n}\right) = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^2 = 1 + \frac{2r}{n} + \frac{r^2}{n^2}$

$$\therefore \quad \int_1^2 x^2 \; dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{2r}{n} + \frac{r^2}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{2r}{n^2} + \frac{r^2}{n^3}\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} 1 + \frac{2}{n^2} \sum_{r=1}^{n} r + \frac{1}{n^3} \sum_{r=1}^{n} r^2\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n}(n) + \frac{2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6}\right]$$

$$= \left[1 + 1 + \frac{(1)(2)}{6}\right]$$

$$\therefore \int_1^2 x^2 \; dx = \frac{7}{3}$$

பயிற்சி 2.11

வரையறுத்த தொகையீட்டை ஒரு கூட்டலின் எல்லை எனக் கொண்டு கீழ் காணும் தொகையீடுகளை மதிப்பிடுக.

1. $\int_0^1 (x+4)\; dx$ 2. $\int_1^3 x \; dx$ 3. $\int_1^3 (2x+3)\; dx$ 4. $\int_0^1 x^2 \;\; dx$

Z8CXG9

பயிற்சி 2.12

எற்புடைய விடையைத் தெரிவு செய்க:

1. $\int \frac{1}{x^3} dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

   (a) $\frac{-3}{x^2} + c$ (b) $\frac{-1}{2x^2} + c$ (c) $\frac{-1}{3x^2} + c$ (d) $\frac{-2}{x^2} + c$

2. $\int 2^x dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

   (a) $2^x \log 2 + c$ (b) $2^x + c$ (c) $\frac{2^x}{\log 2} + c$ (d) $\frac{\log 2}{2^x} + c$

3. $\int \frac{\sin 2x}{2 \sin x} dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

   (a) $\sin x + c$ (b) $\frac{1}{2} \sin x + c$ (c) $\cos x + c$ (d) $\frac{1}{2} \cos x + c$

4. $\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\cos 3x} dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

   (a) $-\cos 2x + c$ (b) $-\cos 2x + c$ (c) $-\frac{1}{4}\cos 2x + c$ (d) $-4\cos 2x + c$

5. $\int \frac{\log x}{x} dx \ (x > 0)$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

   (a) $\frac{1}{2}(\log x)^2 + c$ (b) $-\frac{1}{2}(\log x)^2$ (c) $\frac{2}{x^2} + c$ (d) $\frac{2}{x^2} + c$

6. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

   (a) $\frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} + c$ (b) $2\sqrt{1+e^x} + c$ (c) $\sqrt{1+e^x} + c$ (d) $e^x\sqrt{1+e^x} + c$

7. $\int \sqrt{e^x}\, dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

   (a) $\sqrt{e^x} + c$ (b) $2\sqrt{e^x} + c$ (c) $\frac{1}{2}\sqrt{e^x} + c$ (d) $\frac{1}{2\sqrt{e^x}} + c$

8. $\int e^{2x}[2x^2 + 2x]dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

   (a) $e^{2x}x^2 + c$ (b) $xe^{2x} + c$ (c) $2x^2e^2 + c$ (d) $\frac{x^2e^x}{2} + c$

9. $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

   (a) $\log\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right| + c$ (b) $\log\left|\frac{e^x+1}{e^x}\right| + c$ (c) $\log\left|e^x\right| + c$ (d) $\log\left|e^x + 1\right| + c$

10. $\int \left[\frac{9}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right] dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

    (a) $\log|x-3| - \log|x+1| + c$ (b) $\log|x-3| + \log|x+1| + c$

    (c) $9\log|x-3| - \log|x+1| + c$ (d) $9\log|x-3| + \log|x+1| + c$

11. $\int \frac{2x^3}{4+x^4}\,dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

(a) $\log|4+x^4|+c$ (b) $\frac{1}{2}\log|4+x^4|+c$ (c) $\frac{1}{4}\log|4+x^4|+c$ (d) $\log\left|\frac{2x^3}{4+x^4}\right|+c$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-36}}$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

(a) $\sqrt{x^2-36}+c$ (b) $\log\left|x+\sqrt{x^2-36}\right|+c$

(c) $\log\left|x-\sqrt{x^2-36}\right|+c$ (d) $\log\left|x^2+\sqrt{x^2-36}\right|+c$

13. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

(a) $\sqrt{x^2+3x+2}\ +c$ (b) $2\sqrt{x^2+3x+2}+c$

(c) $\log\left(x^2+3x+2\right)+c$ (d) $\frac{2}{3}\left(x^2+3x+2\right)^{\frac{3}{2}}+c$

14. $\int_0^1 (2x+1)\,dx$ -ன் மதிப்பு

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

15. $\int_2^4 \frac{dx}{x}$ -ன் மதிப்பு

(a) log 4 (b) 0 (c) log 2 (d) log 8

16. $\int_0^\infty e^{-2x}\,dx$ -ன் மதிப்பு

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) $\frac{1}{2}$

17. $\int_{-1}^1 x^3\, e^{x^4}\,dx$ -ன் மதிப்பு

(a) 1 (b) $2\int_0^1 x^3\, e^{x^4}\,dx$ (c) 0 (d) e^{x^4}

18. $f(x)$ ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு மற்றும் $a<c<b$ எனில் $\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$ -க்கு சமமான தொகையிடல்,

(a) $\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^c f(x)\,dx$ (b) $\int_a^c f(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx$

(c) $\int_a^b f(x)\,dx$ (d) 0

19. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$ -ன் மதிப்பு

(a) 0 (b) 2 (c) 1 (d) 4

20. $\int_0^1 \sqrt{x^4(1-x)^2} \, dx$ -ன் மதிப்பு

(a) $\frac{1}{12}$ (b) $\frac{-7}{12}$ (c) $\frac{7}{12}$ (d) $\frac{-1}{12}$

21. $\int_0^1 f(x)\, dx = 1$, $\int_0^1 x\, f(x)\, dx = a$ மற்றும் $\int_0^1 x^2\, f(x)\, dx = a^2$ எனில், $\int_0^1 (a-x)^2\, f(x)\, dx$ -ன் மதிப்பு

(a) $4a^2$ (b) 0 (c) $2a^2$ (d) 1

22. $\int_2^3 f(5-x)\, dx - \int_2^3 f(x)\, dx$ -ன் மதிப்பு

(a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) 5

23. $\int_0^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$ -ன் மதிப்பு

(a) $\frac{20}{3}$ (b) $\frac{21}{3}$ (c) $\frac{28}{3}$ (d) $\frac{1}{3}$

24. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \, dx$ -ன் மதிப்பு

(a) log 2 (b) 0 (c) $\log\sqrt{2}$ (d) 2 log 2

25. காமா சார்புக்கான காரணிய பெருக்க அடிப்படையில் $n = 8$ எனும்பொழுது $\Gamma(n)$ -ன் மதிப்பு

(a) 5040 (b) 5400 (c) 4500 (d) 5540

26. $\Gamma(n)$ -ன் மதிப்பு

(a) $(n-1)!$ (b) $n!$ (c) $n\Gamma(n)$ (d) $(n-1)\Gamma(n)$

27. $\Gamma(1)$ -ன் மதிப்பு

(a) 0 (b) 1 (c) n (d) $n!$

28. $n > 0$ எனில், $\Gamma(n)$ –க்கு சமமான தொகையீடு

(a) $\int_0^1 e^{-x}x^{n-1}dx$ (b) $\int_0^1 e^{-x}x^{n}dx$ (c) $\int_0^\infty e^{x}x^{-n}dx$ (d) $\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$

29. $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ –ன் மதிப்பு

(a) $\sqrt{\pi}$ (b) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (c) $2\sqrt{\pi}$ (d) $\frac{3}{2}$

30. $\int_0^\infty x^4 e^{-x} dx$ -ன் மதிப்பு

(a) 12 (b) 4 (c) 4! (d) 64

இதரக் கணக்குகள்

பின் வருவனவற்றை மதிப்பிடுக:

1. $\int \frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}} dx$
2. $\int \frac{dx}{2-3x-2x^2}$
3. $\int \frac{dx}{e^x+6+5e^{-x}}$
4. $\int \sqrt{2x^2-3}\, dx$
5. $\int \sqrt{9x^2+12x+3}\, dx$
6. $\int (x+1)^2 \log x\, dx$
7. $\int \log\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) dx$
8. $\int_0^1 \sqrt{x(x-1)}\, dx$
9. $\int_{-1}^{1} x^2 e^{-2x} dx$
10. $\int_0^3 \frac{x\, dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{5x+1}}$

தொகுப்புரை

- **வருவித்தச் சார்பு மற்றும் தொடக்க நிலைச் சார்புக்கான தொடர்பு:**

  வருவித்தச் சார்பு $f(x)$-க்கான தொடக்க நிலைச் சார்பு $F(x)$ எனில், $\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$ ஆகும்.

- **சார்பின் தொகையீடு:**

  கொடுக்கப்பட்ட ஒரு சார்பினுடைய தொகையிடலை நிர்ணயிக்கும் செயல்பாடானது அச்சார்பின் தொகையீடு என வரையறுக்கப்படுகிறது

- **வரையறாத் தொகையீட்டின் பண்புகள்:**

  $$\int a\, f(x)\, dx = a\int f(x)\, dx$$

  $$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

- **வரையறாத் தொகையீட்டின் சில திட்டமான முடிவுகள்:**

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1$
2. $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$
3. $\int e^x dx = e^x + c$
4. $\int a^x\, dx = \frac{1}{\log a} a^x + c, a > 0$ மற்றும் $a \neq 1$

5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

6. $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

7. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$

8. $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$

9. $\int [f(x)]^n f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$

10. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + c$

11. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

12. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

13. $\int u\,dv = uv - u'v_1 + u''v_2 - u'''v_3 + \ldots$

14. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$

15. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + c$

18. $\int e^x [f(x) + f'(x)]dx = e^x f(x) + c$

19. $\int e^{ax}[a f(x) + f'(x)]dx = e^{ax} f(x) + c$

20. $\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c$

21. $\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + c$

- **வரையறுத்த தொகையீடு:**
  $f(x)$ என்ற சார்பு $[a,b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் தொடர்ச்சியுடையதாகவும், மேலும் $f(x)$-ன் எதிர்மறை வகையீடானது $F(x)$ எனில், $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ ஆகும்.

- **வரையறுத்த தொகையீட்டின் பண்புகள்:**

(i) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$

(ii) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(iii) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

(iv) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

(v) $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

(vi) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

(vii) a) $f(x)$ ஓர் இரட்டைச் சார்பு எனில், $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

b) $f(x)$ ஓர் ஒற்றைச் சார்பு எனில், $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

- **காமா தொகையீட்டில் ஒரு குறிப்பிட்ட நிலை:**
  n ஒரு மிகை முழு எண் எனில், $\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$

- **காமா சார்பின் பண்புகள்:**

(i) $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1), n>1$ (ii) $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n), n>0$

(iii) $\Gamma(n+1) = n!$, n ஒரு மிகை முழு எண் (iv) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

- **வரையறுத்த தொகையீட்டின் கூட்டல் எல்லை :**

$[a, b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் $f(x)$ ஆனது தொடர்ச்சியான மெய்மதிப்புகளைக் கொண்ட சார்பு என்க. இவ்விடைவெளியானது "h" எனும் சம அகலத்தைக் கொண்ட n உள்இடைவெளிகளாக பிரிக்கப்படுமானால்

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{r=1}^{n} h\ f(a+rh) \text{ ஆகும். இங்கு } h = \frac{b-a}{n}$$

- **முடிவுகள் :**

(i) $1+2+3+......n = \dfrac{n(n+1)}{2} = \sum_{r=1}^{n} r$

(ii) $1^2+2^2+3^2+......n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \sum_{r=1}^{r=n} r^2$

(iii) $1^3+2^3+3^3+......n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \sum_{r=1}^{r=n} r^3$

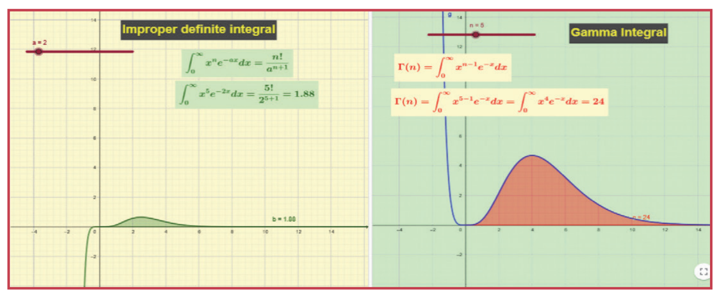
கலைச்சொற்கள் (GLOSSARY)	
அடுக்கு விதி	Power rule
அடுக்கைச் சார்பு / அடுக்குகுறிச் சார்பு	Exponential function
அடுத்தடுத்த / தொடர்ச்சியான	Successive
அணுகுதல் / நெருங்குதல்	Approaches
அறமச் சார்பு / இயற் கணிதச் சார்பு	Algebraic function
அறுதியிடப்படாத தொகையீடு / வரையறாதத் தொகையீடு	Indefinite integral
இணைத் தொடுகோடுகள்	Parallel tangents
இயல் மடக்கை	Natural logarithm
இறுதிநிலைச் சார்பு	Marginal function
உடனடியயாக	Instantaneous
உத்தி / நுட்பம்	Technique
உள்வரை	Inscribe
எதிர் மறை செயல்	Reverse process
எதிர்மறை வகையீடு	Anti derivative
ஏதேனுமொரு / தன்னிச்சையான	Arbitrary
ஏற்புடைய / பொருத்தமான	Suitable
ஒருமைத் தன்மை கொண்ட சார்பு	Unique function
கணியம் / அளவு	Quantity

கருத்துரு	Concept
காரணக்காரிய முறை	Rationalisation method
கீழ் எல்லை	Lower limit
குத்தாயம் / நிலைத் தூரம்	Ordinate
குறிப்பிடப்பட்ட எல்லைகளுக்குள்	Between the specified limits
குறைப்பு / சுருக்கல்	Reduction
கூடுதல் / கூட்டல் தொகை	Summation
திட்ட வடிவம்	Standard form
திறந்த இடைவெளி	Open interval
தொகை / தொகையீடு	Integral
தொகைக்காண் சார்பு / தொகைக் காண்பான்	Integrand
தொகைப்பான்	Integrator
தொகையிடத்தக்கச் சார்பு	Integrable function
தொகையிடல்	Integration
தொகையிடல் மாறி	Variable of integration
தொகையிடல் மாறிலி	Constant of integration
தொகையிடு / தொகையிட	Integrate
தொடர் முறைத் தொகையீடு / மீண்டும் மீண்டும் தொகையிடப்பட்ட	Repeated integral
தொடர் வகையிடல்கள் / அடுத்தடுத்த வகையிடல்கள்	Successive derivatives
தொடர்ச்சியான சார்பு	Continuous function
தோராயமாக	Approximate
நிச்சயமான / உறுதியான	Certain
நுண்ம மதிப்பு / புலனாகாத மதிப்பு	Abstract value
நேரிடையாக தொகையிட	Directly integrate
நேர் மாற்று கோணவியல் சார்பு / நேர்மாறு திரிகோணமிதி சார்பு	Inverse trigonometric function
பகுதிப் படுத்தித் தொகையிடல் / பகுதித் தொகையிடல்	Integration by parts
பகுதிப் பின்னம்	Partial fraction
பிரதியிடல் / ஈடு செய்தல்	Substitution
பிரதியிட்டுத் தொகையிடல்	Integration by substitution
பிரித்தல் / கூறாக்கல்	Decomposition
மடக்கை சார்பு	Logarithmic function
மட்டாயம் / கிடை தூரம்	Abscissa
மாறா உறுப்பு	Constant term
மாறியின் மாற்றம்	Change of variable
மிகை முழு எண்	Positive integer
முக்கோண கணிப்பு சார்பு / திரிகோணமிதிச்சார்பு	Trigonometric function
முடிவிலி / கந்தழி / எண்ணிலி	Infinity
மூடிய இடைவெளி	Closed interval

மூலமுதலான சார்பு / தொடக்க நிலைச் சார்பு	Primitive function
மேல் எல்லை	Upper limit
வகைக்கெழு / வகையீட்டு கெழு	Differential coefficient
வகையிடத்தக்கச் சார்பு	Differentiable function
வகையிடல்	Differentiation
வரம்புள்ள பகுதி	Bounded region
வருவித்தச் சார்பு	Derived function
வரையறுத்த தொகை / வரையறுத்த தொகையீடு	Definite integral
வர்க்க நிறைவாக்கல்	Completing the square
வளைவரைகளின் தொகுதி	Family of curves

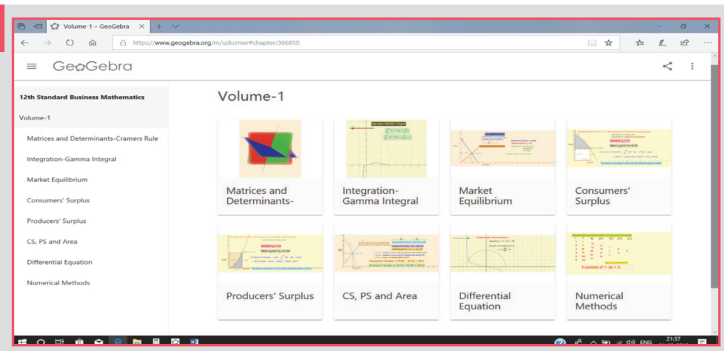
இணையச் செயல்பாடு

செயல்பாட்டின் இறுதியில் எதிர்பார்க்கப்படும் விளைவு



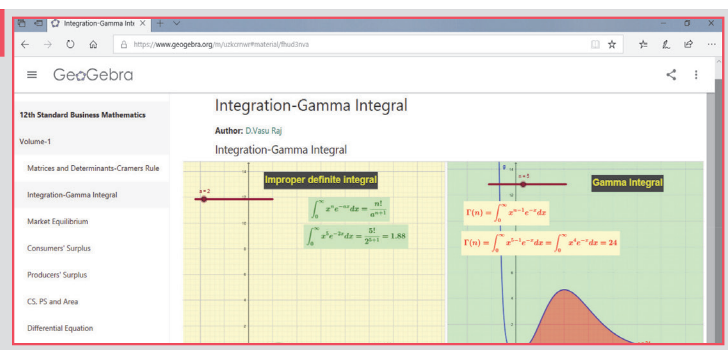
படி 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி இச்செயல்பட்டிற்கான இணையப் பக்கத்திற்குச் செல்க. பின்பு "12th Standard Business Mathematics and Statistics" என்னும் திரையில் "Volume–1" யை தெரிவு செய்யவும்.



படி 2

"Integration–Gamma Integral" என்னும் பயிற்சித்தாளினை தெரிவுசெய்துகொள்ளவும். பின்பு திரையில் தோன்றும் வரைபடத்தில், கொடுக்கப்பட்டுள்ள நழுவானை (slider) பயன்படுத்தி n மதிப்பினை நகர்த்தினால் வரைபடத்தின் தோன்றும் மாற்றத்தை தெரிந்துகொள்ளலாம்.

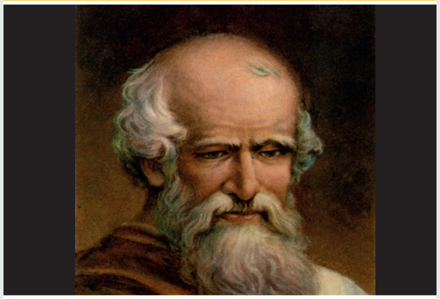


செயல்பாட்டிற்கான உரலி : **https://ggbm.at/uzkcrnwr**

அல்லது விரைவுக் குறியீடு (QR Code)

B247_12_BUS_MAT_TM

3 தொகை நுண்கணிதம்–II



ஆர்க்கிமிடிஸ்

(கி.மு. (பொ.ஆ.மு.) 287 – கி.மு. (பொ.ஆ.மு.) 217)

அறிமுகம்

தொகையீடலின் வரலாறு 2500 ஆண்டுகளுக்கு முன்பிருந்தே தொடங்கப்பட்டு விட்டது. கிரேக்க கணிதவியலார் ஆண்டிஃபான் அவர்கள் (கி.மு. (பொ.ஆ.மு.) 430) எளிய பலகோணங்கள் மற்றும் சிக்கலான வளைவரைகளின் பரப்புகளை "முழுமையாக்கும் முறையில்" காணும் முறையை அறிமுகப்படுத்தினார். (முழுமையாக்கும் முறை என்பது கொடுக்கப்பட்ட பரப்பை எண்ணற்ற முக்கோணங்களாக பிரித்து பரப்பு காணுதல்) சிக்கலான வளைவரைகளால் சூழப்பட்ட பரப்பினை முழுமையாக்கும் முறையில் காணுதலை முதன் முதலில் ஆண்டிஃபன் கண்டுபிடித்திருந்தாலும், கணிதமேதை யுடாக்சஸ் அவர்கள் முழுமையாக்கும் முறையை தர்க்க ரீதியாக மேம்படுத்தினார். பின்வரும் நாள்களில் யூக்ளிட் அவர்கள், வட்டத்தின் பரப்பை காண்பதற்கு முழுமையாக்கும் முறையை பயன்படுத்தினார்.

ஆர்க்கிமிடிஸ் (கி.மு. (பொ.ஆ.மு.) 287 – கி.மு. (பொ.ஆ.மு.) 217) அவர்களும் இதே முழுமையாக்கும் முறையை பயன்படுத்தி, பரவளையத்தால் சூழப்பட்ட பரப்பை கண்டறிந்தார். முழுமையாக்கும் முறையே, தொகையீடல் மூலம் வளைவரைகளால் சூழப்பட்ட பரப்பை காணும் முறையாக மேம்படுத்தப்பட்டது. தொகையீடல் மூலம் பரப்பை காணும் முறையை இந்த அத்தியாத்தில் நாம் காண்போம்.

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தை படித்த பின்பு, பின்வரும் பாடக் கருத்துக்களை மாணவர்கள் நன்கு புரிந்து கொள்ள இயலும்

- வரையறுக்கப்பட்ட தொகையீட்டின் வடிவகணித விளக்கம்
- வளைவரையால் சூழப்பட்ட அரங்கத்தின் பரப்பை தொகையீடலை பயன்படுத்திக் காணல்.
- நுகர்வோர் உபரி மற்றும் உற்பத்தியாளர் உபரியின் கருத்துக்கள்.
- பொருளாதாரம் மற்றும் வணிகவியலில் தொகையீடலின் பயன்பாடுகள்.

C4YS65

3.1 கொடுக்கப்பட்ட வளைவரையின் கீழ் அமைந்த அரங்கத்தின் பரப்பு (The area of the region bounded by the curve)

ஆய அச்சுகளுடன் ஒரு வளைவரை ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பை தொகையீடல் மூலம் நாம் காணலாம். இரு வளைவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட பரப்பை கணக்கிடும் முறையையும் இங்கு நாம் காண்போம்.

3.1.1 வரையறுக்கப்பட்ட தொகையீடலின் வடிவகணித விளக்கம் (Geometrical Interpretation of Definite Integral as Area under a curve):

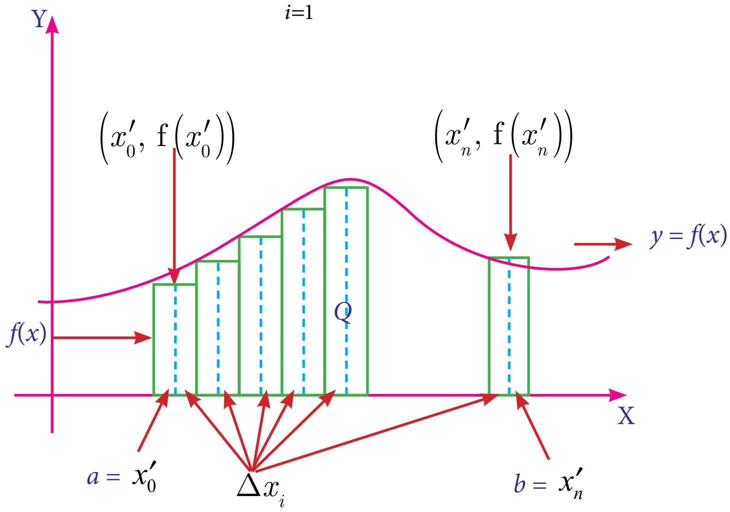
$x = a$ மற்றும் $x = b$ எனும் எல்லைகளுக்குள், x அச்சுடன் $y = f(x)$ எனும் வளைவரை ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பை நாம் காண்பதாகக் கொள்வோம்.

படம் 3.1 லிருந்து. இடைவெளி $[a\ b]$ ஆனது Δx_i அளவுடைய $[x_{i-1}, x_i]$ எனும் n சிறு இடைவெளிகளாக பிரிக்கப்படுகிறது என்க.

அதாவது $x_i - x_{i-1} = \Delta_{xi}$ ஏதேனும் ஒரு $x_i' \in [x_{i-1}, x_i]$க்கு $f(x_i')$ என்பது Δx_i அடிப்பக்கமாக கொண்ட n செவ்வகங்களின் உயரம் என்க.

i வது செவ்வகத்தின் பரப்பு $A_i = \Delta x_i f(x_i')$.

சூழப்பட்ட மொத்தப்பரப்பு $A = \sum_{i=1}^{n} f(x_i')\Delta x_i$



படம் 3.1

வரையறுக்கப்பட்ட தொகையீடலின் வரையரையிலிருந்து $f(x)$ என்பது $[a,b]$, $a < b$ இல் வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு எனில் வரையறுக்கப்பட்ட தொகையீடானது

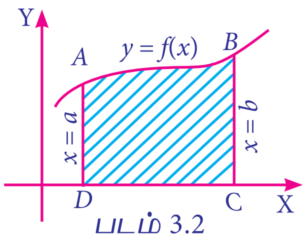
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i')\Delta x_i \text{ ஆகும்.}$$

வளைவரைக்கு கீழ் அமைந்த பரப்பானது, செவ்வகங்களின் எண்ணிக்கையை எண்ணற்றவையாக அதிகரிக்கும் பொழுது முழுமையாகிறது. இதுவே வரையறுக்கப்பட்ட தொகையீடலின் வடிவகணித விளக்கமாகும்.

$y=f(x)$ என்ற வளைவரை, x அச்சு, $x=a$ மற்றும் $x=b$ ஆகியவற்றால் சூழப்பட்ட அரங்கத்தின் பரப்பானது,

$$A=\int_a^b y\,dx$$

$$=\int_a^b f(x)\,dx$$

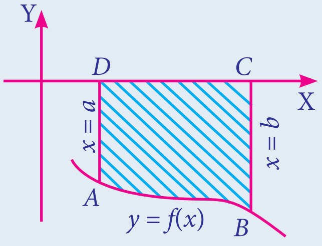


படம் 3.2

குறிப்பு

(i) $y=f(x)$ என்ற வளைவரை, x -அச்சு, $x=a$ மற்றும் $x=b$ எனும் எல்லைக்குள், x –அச்சுடன் ஏற்படுத்தப்படும் அரங்கத்தின் பரப்பு, x அச்சின் கீழ் அமையும் எனில்,

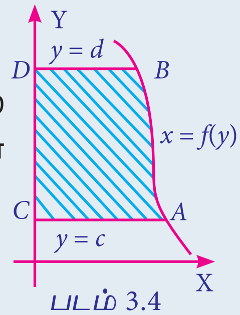
$$A=\int_a^b -y\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$$



படம் 3.3

(ii) $x=f(y)$ என்ற வளைவரை ஆனது $y=c$ மற்றும் $y=d$ என்ற எல்லைக்களுக்குள் y –அச்சுடன் ஏற்படுத்தப்படும் அரங்கத்தின் பரப்பு y –அச்சுக்கு வலப்புறம் அமையும் எனில்,

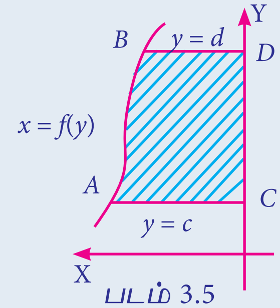
$$A=\int_c^d x\,dy \quad =\int_c^d f(y)\,dy$$



படம் 3.4

(iii) $x=f(y)$ எனும் வளைவரையானது $y=c$ மற்றும் $y=d$ எனும் எல்லைக்குள் y –அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பு y –அச்சுக்கு இடதுபுறம் அமையும் எனில்,

$$A=\int_c^d -x\,dy=-\int_c^d f(y)\,dy$$

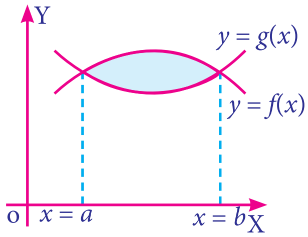


படம் 3.5

இரு வளைவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட பரப்பு (Area between two curves)

$f(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்பன $[a,\ b]$-ல் வறையறுக்கப்பட்ட $f(x)>g(x),\ a\le b$ எனுமாறு உள்ள, தொடர்ச்சியான இரு சார்புகள் என்க.

$x=a$ மற்றும் $x=b$ எனும் எல்லைகளுக்குள் இவ்வளைவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட பரப்பு



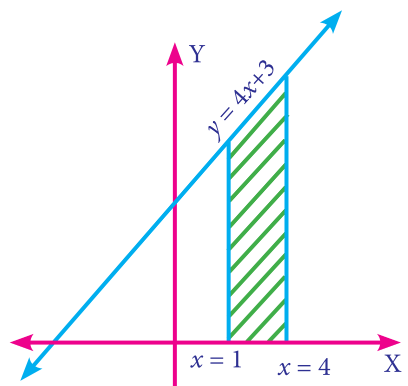
படம் 3.6

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx.$$

எடுத்துக்காட்டு 3.1

$y = 4x+3$ என்ற வளைவரை, x -அச்சு, $x=1$ மற்றும் $x=4$ ஆகியவற்றுடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பைக் காண்க

தீர்வு:



படம் 3.7

$$\text{பரப்பு} = \int_1^4 y\,dx$$

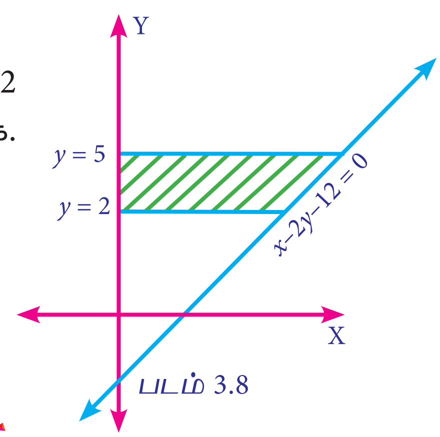
$$= \int_1^4 (4x+3)\,dx$$

$$= \left[2x^2+3x\right]_1^4 = 32+12-2-3$$

$= 39$ சதுர அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 3.2

$x-2y-12=0$ என்ற வளைவரையானது y -அச்சு, $y=2$ மற்றும் $y=5$ என்ற கோடுகளுடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பைக் காண்க.



படம் 3.8

தீர்வு:

$$x-2y-12=0$$
$$x=2y+12$$

தேவைப்படும் பரப்பு

$$= \int_2^5 x\,dy$$

$$= \int_2^5 (2y+12)\,dy = \left[y^2+12y\right]_2^5$$

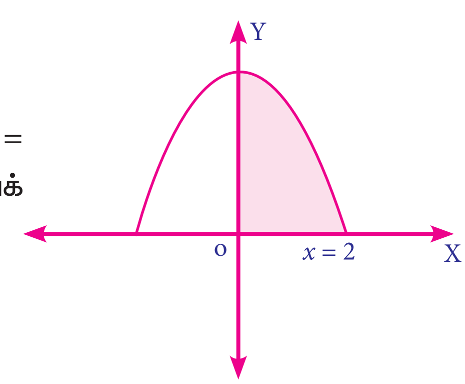
$= (25+60)-(4+24) = 57$ சதுர அலகுகள்.

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

$y = mx+c$ என்ற கோடு $x=0$ மற்றும் $x=a$ எனும் எல்லைகளுக்குள் x-அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பு $= \left|\frac{1}{2}(a)[(x=0\right.$ எனும்போது y -ன் மதிப்பு$)+(x=a$ எனும்போது y -ன் மதிப்பு$)]\big|$

எடுத்துக்காட்டு 3.3

$y=4-x^2$ என்ற பரவளையம், x -அச்சு, $x=0$ மற்றும் $x=2$ என்ற கோடுகளுடன் ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க



படம் 3.9

தீர்வுs:

$$y=4-x^2$$

தேவையான பரப்பளவு $= \int_0^2 y\,dx = \int_0^2 (4-x^2)\,dx$

$$= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 8 - \frac{8}{3}$$

$$= \frac{16}{3}$$ சதுர அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 3.4

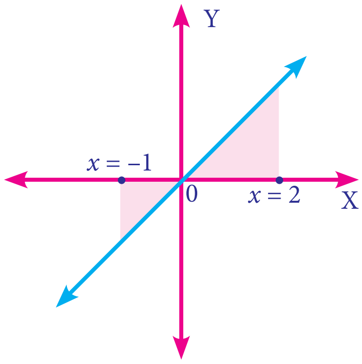
$y = x$ மற்றும் $x=-1$, $x=2$ எனும் எல்லைகளுக்குட்பட்ட அரங்கத்தின் பரப்பு காண்க.

தீர்வு:

தேவைப்படும் பரப்பு $= \int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_0^2 x\,dx$

$$= -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = -\left[0 - \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{4}{2} - 0\right]$$

$$= \frac{5}{2}$$ சதுர அலகுகள்.



படம் 3.10

எடுத்துக்காட்டு 3.5

$y^2 = 8x$ என்ற பரவளையம் அதன் செவ்வகலத்துடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பைப் காண்க.

தீர்வு

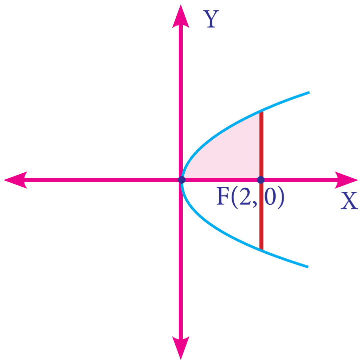
$$y^2 = 8x \qquad (1)$$

திட்ட வடிவம் $y^2 = 4ax$, உடன் ஒப்பிட

$4a = 8$

$a = 2$

செவ்வகலத்தின் சமன்பாடு : $x = 2$



படம் 3.11

சமன்பாடு (1) ஆனது x -அச்சை பொருத்து சமச்சீர் ஆதலால்,

தேவையான பரப்பு = 2 [முதல் கால்பகுதியில் சமன்பாடு 1ஆனது $x = 0$ மற்றும் $x = 2$ எனும் எல்லைகளுக்குள் ஏற்படுத்தும் பரப்பு]

$$= 2\int_0^2 y\,dx$$

$$= 2\int_0^2 \sqrt{8x}\,dx = 2\left(2\sqrt{2}\right)\int_0^2 x^{1/2}\,dx$$

$$= 4\sqrt{2}\left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^2 = 4\sqrt{2} \times 2 \times \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3}$$

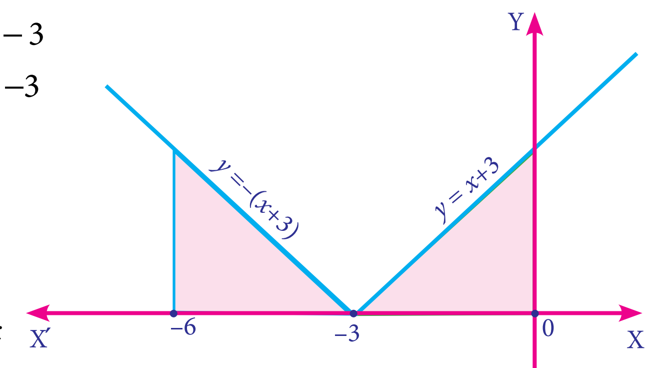
$$= \frac{32}{3} \text{ சதுர அலகுகள்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.6

$y = |x+3|$ என்ற வளைவரையை வரைக. மேலும் $\int_{-6}^{0} |x+3|\, dx$ -இன் மதிப்பைக்காண்க.

தீர்வு:

$$y = |x+3| = \begin{cases} x+3, & x \geq -3 \\ -(x+3), & x < -3 \end{cases}$$



படம் 3.12

$$\text{தேவைப்படும் பரப்பு} = \int_{-6}^{0} y\,dx$$

$$= \int_{-6}^{-3} y\, dx + \int_{-3}^{0} y\,dx$$

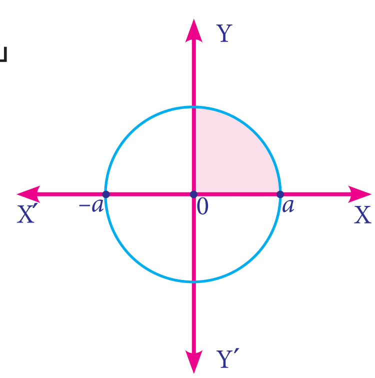
$$= \int_{-6}^{-3} -(x+3)\,dx + \int_{-3}^{0} (x+3)\,dx$$

$$= -\left[\frac{(x+3)^2}{2}\right]_{-6}^{-3} + \left[\frac{(x+3)^2}{2}\right]_{-3}^{0} = -\left[0-\frac{9}{2}\right] + \left[\frac{9}{2}-0\right] = 9 \text{ சதுர அலகுகள்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.7

தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி a அலகு ஆரம் உடைய வட்டத்தின் பரப்பைக்காண்க.

$$\left[\text{குறிப்பு: } \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + c\right]$$



படம் 3.13

தீர்வு

வட்டத்தின் சமன்பாடு, $x^2 + y^2 = a^2 \quad \ldots (1)$

$y = 0$ என (1) -ல் பிரதியிட $x^2 = a^2$

$\Rightarrow \quad x = \pm a$

கொடுக்கப்பட்ட வளைவரை ஆனது இரு அச்சுகளைப் பொறுத்து சமச்சீர் ஆகும். எனவே

தேவைப்படும் பரப்பு $= 4$ [முதல் கால்பகுதியில் $x = 0$, $x = a$ எனும் எல்லைக்குள் வரையறுக்கப்படும் அரங்கத்தின் பரப்பு]

$$= 4\int_0^a y\,dx$$

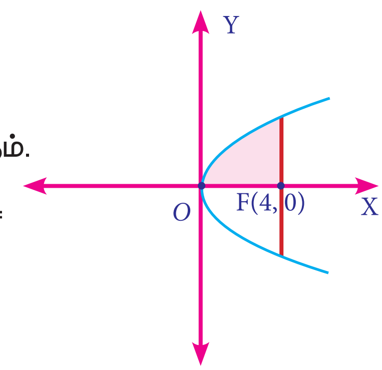
$$= 4\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 4\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

$$= 4\left[0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{a}{a}\right)\right] = 4\left(\frac{a^2}{2}\sin^{-1}(1)\right) = 4\,\frac{a^2}{2}\,\frac{\pi}{2}$$

$= \pi a^2$ சதுர அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 3.8

தொகையிடல் முறையைப் பயன்படுத்தி $y^2 = 16x$ என்ற பரவளையம் $x = 4$ என்ற கோட்டுடன் ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.



படம் 3.14

தீர்வு:

$y^2 = 16x$ என்பது வலதுபுறமாக திறந்திருக்கும் பரவளையமாகும்.

தேவைப்படும் பரப்பு $= 2\int_a^b y dx$ (பரவளையம் x - அச்சை பொருத்து சமச்சீர்)

$$= 2\int_0^4 \sqrt{16x}\,dx$$

$$= 8\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx = 8\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{16}{3}\left((4)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{128}{3}$$ சதுர அலகுகள்.

பயிற்சி 3.1

1. தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி $2y + x = 8$ என்ற கோடு, x -அச்சு மற்றும் $x = 2$, $x = 4$ என்னும் எல்லைக்குள் ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

2. $y - 2x - 4 = 0$ என்ற கோடு, $y=1$ மற்றும் $y=3$ எனும் எல்லைக்குள் y–அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பைக் காண்க.

3. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையம் அதன் செவ்வகலத்துடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பைக் காண்க.

4. $y = x$ எனும் கோடு, x -அச்சு, $x = 1$ மற்றும் $x = 2$ எனும் எல்லைக்குள் ஏற்படுத்தும் பரப்பைக் காண்க.

5. தொகையிடலை பயன்படுத்தி $y - 1 = x$ என்ற கோடு, x -அச்சு, $x = -2$ மற்றும் $x = 3$ என்னும் எல்லைக்குள் ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

6. தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி $y = 4x^2$ என்ற பரவளையம், $x = 0$, $y = 0$ மற்றும் $y = 4$ எனும் கோடுகளுடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பைக் காண்க.

7. $y = x^2$ என்ற பரவளையத்திற்கும் $y = 4$ என்ற கோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட பரப்பைக் காண்க.

3.2 பொருளாதாரம் மற்றும் வணிகவியலில் தொகையீட்டின் பயன்பாடுகள் (Application of Integration in Economics and Commerce).

இதற்கு முந்தைய பாடப்பகுதியில் மொத்த செலவுச் சார்பு, மொத்த வருவாய் சார்பு மற்றும் தேவைச் சார்பு கொடுக்கப்பட்டு இருப்பின் அதற்கான இறுதிநிலை செலவுச்சார்பு, இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு மற்றும் தேவை நெகிழ்ச்சி காணும் முறைகளை(க்) கற்றோம். அதற்கு மாறாக இறுதிநிலைச் சார்பு கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் மொத்த சார்பைக் காணும் முறையை இங்கு காணலாம்.

3.2.1 இறுதிநிலை செலவுச்சார்பிலிருந்து மொத்த செலவுச்சார்பைக் காணுதல் (Cost functions from marginal cost functions)

மொத்த செலவுச் சார்பு C மற்றும் x என்பது உற்பத்தியின் அளவு எனில் இறுதி நிலைச்செலவுச் சார்பு $MC = \dfrac{dC}{dx}$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \text{செலவுச் சார்பு : } C = \int (MC)\, dx + k$$

இங்கு k என்பது தொகையீட்டின் மாறிலி. கணக்கில் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களைப் பயன்படுத்தி k -ன் மதிப்பைக் காணலாம்.

மேலும், சராசரி செலவுச் சார்பு : $AC = \dfrac{C}{x},\ x \neq 0$

எடுத்துக்காட்டு 3.9

காலணிகளின் உற்பத்தியின் எண்ணிக்கை x–ஐ பொறுத்த இறுதிநிலை செலவு $6 + 10x - 6x^2$ என்க. ஒரு ஜோடி காலணிகள் உற்பத்திக்கான செலவு ₹12 எனில், மொத்தச் செலவு மற்றும் சராசரி செலவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட இறுதிநிலை செலவுச் சார்பு : $MC = 6 + 10x - 6x^2$

$$C = \int MC\, dx + k$$

$$= \int \left(6 + 10x - 6x^2\right) dx + k$$

$$= 6x + 5x^2 - 2x^3 + k \qquad (1)$$

$x = 2$ எனும் போது $C = 12$

$$\therefore \quad 12 = 12+20-16+k$$

$$\boxed{k=-4}$$

$$C = 6x+5x^2-2x^3-4$$

சராசரி செலவு : $\dfrac{C}{x} = \dfrac{6x+5x^2-2x^3-4}{x}$

$$= 6+5x-2x^2-\frac{4}{x}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.10

ஒரு நிறுவனத்தில், x அலகு பொருள்கள் தயாரிப்பதற்கான இறுதிநிலைச் செலவு $MC = 125+10x-\dfrac{x^2}{9}$. இதன் மாறாச் செலவு ₹250 எனில் 15 அலகுகள் தயாரிப்பதற்கான செலவைக் காண்க.

தீர்வு:

$$MC = 125+10x-\frac{x^2}{9}$$

$$C = \int MC\, dx + k$$

$$= \int\left(125+10x-\frac{x^2}{9}\right)dx+k$$

$$= 125x+5x^2-\frac{x^3}{27}+k$$

நிலையான செலவு : $k = 250$

$$\therefore C = 125x+5x^2-\frac{x^3}{27}+250$$

$x = 15$ எனில்,

$$C = 125\,(15)+5\,(15)^2-\frac{(15)^3}{27}+250$$

$$= 1875+1125-125+250$$

$$C = ₹\ 3{,}125$$

எடுத்துக்காட்டு 3.11

இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு $MC = 2+5e^x$ எனில்,

(i) $C(0)=100$ எனும் போது C யைக் காண்க. (ii) சராசரிச் செலவு AC -ஐக் காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட $MC = 2+5e^x$

$$C = \int MC\, dx + k$$
$$= \int \left(2 + 5e^{x}\right) dx + k$$
$$= 2x + 5e^{x} + k$$

(i) $x = 0,\ C = 100 \Rightarrow$

$$100 = 2(0) + 5\left(e^{0}\right) + k$$
$$\boxed{k = 95}$$
$$\therefore\ C = 2x + 5\,e^{x} + 95.$$

(ii) சராசரி விலை $= \dfrac{C}{x} = \dfrac{2x + 5e^{x} + 95}{x}$

$$AC = 2 + \frac{5e^{x}}{x} + \frac{95}{x}.$$

வளர்ச்சி வீதம் அல்லது விற்பனை வீதம் (Rate of growth or sale)

ஒரு சார்பின் வளர்ச்சி வீதம் அல்லது விற்பனை வீதமானது t-ல் ஒரு சார்பு என்க. இங்கு t என்பது கால அளவைக் குறிக்கும். எனவே, t கால அளவில் உற்பத்தி பொருளின் மொத்த வளர்ச்சி அல்லது மொத்த விற்பனையானது $\int_{0}^{r} f(t)\,dt,\ 0 \le t \le r$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.12

புதிய உற்பத்தி பொருளின் விகிதச் சார்பு $f(x) = 100 - 90\, e^{-x}$ என்க. இங்கு x என்பது சந்தையில் அப்பொருள் கிடைக்கும் நாள்களின் எண்ணிக்கை என்க. முதல் நான்கு நாள்களில் அந்த பொருளின் மொத்த விற்பனையைக் காண்க. $(e^{-4} = 0.018)$

தீர்வு:

மொத்த விற்பனை $= \int_{0}^{4} \left(100 - 90\,e^{-x}\right) dx$

$$= \left(100\,x + 90\,e^{-x}\right)_{0}^{4}$$
$$= 400 + 90\,e^{-4} - (0 + 90)$$
$$= 400 + 90(0.018) - 90$$

$= 311.62$ அலகுகள்

எடுத்துக்காட்டு 3.13

ஒரு நிறுவனம் 200 தொழிலாளர்களைக் கொண்டு வாரத்திற்கு $50,000$ அலகுப் பொருள்களை உற்பத்தி செய்கிறது. அதிகபடியான x- தொழிலாளர்களை வேலைக்கு அமர்த்துவதன் மூலம் பொருளின் உற்பத்தி வீதச் சார்பு $300-5x^{2/3}$ ஆகும். 64 தொழிலாளர்களை மிகுதியாக வேலைக்கு அமர்த்துவதன் மூலம் அந்நிறுவனம் உற்பத்தி செய்யும் பொருள்களின் எண்ணிக்கையை காண்க.

தீர்வு:

x தொழிலாளர்களைக் கொண்டு அதிகபடியாக உற்பத்தி செய்யும் பொருள்கள் p என்க.

$$\frac{dp}{dx} = 300-5x^{2/3}$$

$$p = \int_0^{64}\left(300-5x^{\frac{2}{3}}\right)dx$$

$$= \left[300x-3x^{\frac{5}{3}}\right]_0^{64}$$

$$= 300\times 64-3(64)^{5/3}$$

$$= 16128$$

$\therefore$ கூடுதலாக உற்பத்தி செய்யப்படும் அலகுகளின் எண்ணிக்கை $16,128$ ஆகும்.

$\Rightarrow 264$ தொழிலாளர்களால் உற்பத்தி செய்யப்படும் மொத்த அலகுகளின் எண்ணிக்கை

$= 50000 + 16128 = 66,128$ அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 3.14

ஒரு நிறுவனத்தின் விளம்பர பிரச்சாரத்திற்குப் பிறகு அதன் விற்பனை விகிதச் சார்பு $f(t)=3000e^{-0.3t}$ ஆகும். இங்கு t என்பது விளம்பரத்திற்கு பிறகு உள்ள மாதங்களின் எண்ணிக்கையை குறிக்கும். 4 மாதங்களுக்குப் பிறகு அந்நிறுவனத்தின் ஒட்டுமொத்த விற்பனையையும் மற்றும் ஐந்தாவது மாதத்தின் விற்பனையையும் காண்க. விளம்பரத்திற்கு பிறகு அந்நிறுவனம் பெறும் மொத்த விற்பனைக் காண்க. $\left[e^{-1.2}=0.3012,\ e^{-1.5}=0.2231\right]$.

தீர்வு:

t மாதங்களுக்குப் பிறகு நிறுவனத்தின் மொத்த விற்பனை $F(t)$ எனில் நிறுவனத்தின் விற்பனை விகிதச் சார்பு $\frac{d}{dt}F(t)=f(t)$

$$\therefore \quad \mathrm{F}(t) = \int_0^t f(t)dt$$

4 மாதங்களுக்குப் பிறகு ஒட்டுமொத்த விற்பனை

$$F(4) = \int_0^4 f(t)\,dt$$

$$= \int_0^4 3000\,e^{-0.3t}\,dt$$

$$= 3000\left[\frac{e^{-0.3t}}{-0.3}\right]_0^4$$

$$=-10000\left[e^{-1.2} - e^{0}\right]$$

$$= -10000[0.3012 - 1]$$

$$= 6988$$

(ii) ஐந்தாவது மாதத்தின் விற்பனை $= \int_4^5 3000\,e^{-0.3t}\,dt$

$$= 3000\left[\frac{e^{-0.3t}}{-0.3}\right]_4^5$$

$$= -10000\left[e^{-1.5} - e^{-1.2}\right]$$

$$= -10000[0.2231 - 0.3012]$$

$= 781$ அலகுகள்

விளம்பரத்திற்கு பிறகு நிறுவனத்தின் மொத்த விற்பனை

$$= \int_0^\infty 3000\,e^{-0.3t}\,dt = \frac{3000}{-0.3}\left[e^{-0.3t}\right]_0^\infty$$

$$= -10000[0-1]$$

$= 10000$ அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 3.15

₹6,40,000 விலையுள்ள ஒரு இயந்திரமானது $f(t) = 20000\,t$ (t -ஆண்டுகளில்) என்ற சேமிப்பு விகிதச் சார்பின் செலவு சேமிப்புடன் ஈடு செய்ய எத்தனை ஆண்டுகளாகும் ?

தீர்வு:

செலவு சேமிப்பு $S(t) = \int_0^t 20000\,t\,dt$

$$= 10000\,t^2$$

மொத்த செலவை ஈடுசெய்வதற்கான காலம்,

$$10000\,t^2 = 640000$$
$$t^2 = 64$$
$$t = 8$$

8 ஆண்டுகளில் இயந்திரத்தின் செலவை ஈடு செய்யலாம்.

3.2.2 இறுதிநிலை வருவாய் சார்பிலிருந்து வருவாய்ச்சார்பு மற்றும் தேவைச்சார்பு (Revenue function and Demand function from Marginal revenue function)

கொடுக்கப்பட்டுள்ள இறுதிநிலை வருவாய் (Marginal revenue) சார்பிலிருந்து மொத்த வருவாய் (Revenue function) மற்றும் தேவைச் சார்பு(Demand function) காணுதல்.

R என்பது வருவாய் சார்பு எனில் இறுதிநிலை வருவாய்ச் சார்வு $MR=\dfrac{dR}{dx}$

x யை பொறுத்து தொகைக் காண,

வருவாய் சார்பு : $R=\int(MR)\,dx+k.$

இதில் k என்பது ஒரு மாறிலி, இம்மாறிலியின் மதிப்பை x=0 மற்றும் R=0 எனப் பிரதியிட்டு காணலாம்.

தேவையானச் சார்பு : $p=\dfrac{R}{x}, \quad x\neq 0.$

எடுத்துக்காட்டு 3.16

இறுதி நிலை வருவாய் சார்பு $MR=35+7x-3x^2$ எனில், வருவாய் சார்பு மற்றும் தேவைச் சார்பு காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட $MR = 35+7x-3x^2$

$$R = \int(MR)\,dx+k$$
$$= \int\left(35+7x-3x^2\right)dx+k$$
$$R = 35x+\frac{7}{2}x^2-x^3+k$$

$x=0$ எனும்பொழுது $R=0$ $\quad\therefore\ k=0$

$$R = 35x+\frac{7}{2}x^2-x^3$$

தேவையானச் சார்பு : $p=\dfrac{R}{x}$

$$p = 35+\frac{7}{2}x-x^2.$$

எடுத்துக்காட்டு 3.17

ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு $MR = \frac{a}{(x+b)^2} - c$. இங்கு x என்பது பொருள்களின் உற்பத்தி மற்றும் a, b, c என்பன மாறிலிகள் எனில், தேவைச் சார்பு $x = \frac{a}{b\,(p+c)} - b$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட $\text{MR} = a\,(x+b)^{-2} - c$

$$R = \int a(x+b)^{-2}\,dx - c\int dx$$

$$R = \frac{a\,(x+b)^{-1}}{-1} - cx + k$$

$$R = -\frac{a}{x+b} - cx + k$$

$x = 0$ எனும்பொழுது $R = 0$

$$\therefore \quad 0 = -\frac{a}{b} - c(0) + k$$

$$k = \frac{a}{b}$$

$$R = -\frac{a}{x+b} - cx + \frac{a}{b}$$

$$= \frac{-ab + a\,(x+b)}{b\,(x+b)} - cx$$

$$R = \frac{ax}{b\,(x+b)} - cx$$

தேவைச் சார்பு : $p = \frac{R}{x}$

$$p = \frac{a}{b\,(x+b)} - c$$

$$p+c = \frac{a}{b\,(x+b)}$$

$$b(x+b) = \frac{a}{p+c}$$

$$x = \frac{a}{b\,(p+c)} - b.$$

கொடுக்கப்பட்ட இறுதிநிலைச் செலவு சார்பு மற்றும் இறுதிநிலை வருவாயிலிருந்து மீப்பெரு இலாபத்தைக் காணுதல்:

'P' என்பது இலாபச் சார்பு எனில், $\dfrac{dP}{dx} = \dfrac{d}{dx}(R-C) = \dfrac{dR}{dx} - \dfrac{dC}{dx} = MR - MC$ இருபுறமும்

x –யைப் பொறுத்து தொகைக் காண, $P = \int \dfrac{dP}{dx} = \int (MR - MC)\, dx + k$

இங்க k என்பது தொகையிடல் மாறிலி ஆகும். கணக்கில் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களைக் கொண்டு k–ன் மதிப்பைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.18

கொடுக்கப்பட்ட இறுதிநிலைச் செலவு மற்றும் வருவாய் சார்புகள் முறையே $C'(x) = 50 + \dfrac{x}{50}$ மற்றும் $R'(x) = 60$. மாறாச்செலவு செலவு ₹ 200 எனில், மீப்பெரு இலாபத்தைக் காண்க.

தீர்வு:

கணக்கின்படி, $\mathrm{C}(x) = \int C'(x)\,dx + k_1$

$$= \int \left(50 + \frac{x}{50}\right) dx + k_1$$

$$\mathrm{C}(x) = 50x + \frac{x^2}{100} + k_1$$

மாறாச் செலவு : $k_1 = 200$ (கணக்கின்படி)

செலவுச்சார்பு : $\mathrm{C}(x) = 50x + \dfrac{x^2}{100} + 200$ ...(1)

இறுதிநிலை வருவாய்ச்சார்பு : $R'(x) = 60$

$$R(x) = \int R'(x)\, dx + k_2$$

$$= \int 60\, dx + k_2$$

$$= 60x + k_2$$

உற்பத்தி அளவு $=0$ எனில் வருவாய் $= 0$ ஆகும்.

அதாவது, $x = 0$ எனும்பொழுது $R = 0 \Rightarrow k_2 = 0$

$\therefore$ வருவாய் : $R(x) = 60x$ (2)

இலாபம் : P = மொத்த வருவாய் – மொத்தச் செலவு

$$= 60x - 50x - \frac{x^2}{100} - 200$$

$$= 10x - \frac{x^2}{100} - 200$$

$$\frac{dP}{dx} = 10 - \frac{x}{50}$$

மீப்பெரு இலாபத்திற்கு, $\frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow \boxed{x = 500}$

$$\frac{d^2P}{dx^2} = \frac{-1}{50} < 0$$

$\therefore$ $x = 500$ இல்,

மீப்பெரு இலாபம் : $P = 10(500) - \frac{(500)^2}{100} - 200$

$$= 5000 - 2500 - 200$$

$$= 2300$$

மீப்பெரு இலாபம் = ₹ 2,300.

எடுத்துக்காட்டு 3.19

ஒரு நிறுவனத்தின் பொருள்களின் இறுதிநிலைச் செலவு மற்றும் இறுதிநிலை வருவாய் முறையே $C'(x) = 8 + 6x$ மற்றும் $R'(x) = 24$ என்க. பொருள்களின் உற்பத்தி பூச்சியம் எனும் பொழுது அதன் மொத்த செலவும் பூச்சியம் எனில் மொத்த இலாபத்தைக் காண்க.

தீர்வு:

கணக்கின்படி $MC = 8 + 6x$

$$C(x) = \int (8 + 6x)\, dx + k_1$$

$$= 8x + 3x^2 + k_1 \qquad (1)$$

$x = 0$ எனும் பொழுது $C = 0 \Rightarrow k_1 = 0$

$\therefore$ $C(x) = 8x + 3x^2 \qquad (2)$

மேலும் $MR = 24$

$$R(x) = \int MR\, dx + k_2$$

$$= \int 24\, dx + k_2$$

$$= 24x + k_2$$

$x = 0$ எனில், வருவாய் = 0 $\Rightarrow$ $k_2 = 0$

$$R(x) = 24x \qquad (3)$$

இலாபச்சார்பு $P(x) = R(x) - C(x)$

$$P(x) = 24x - 8x - 3x^2$$

$$= 16x - 3x^2$$

எடுத்துக்காட்டு 3.20

விற்பனை செய்யப்பட்ட x அலகு பொருள்களின் இறுதிநிலை வருவாய்ச் சார்பு (ரூபாய் ஆயிரங்களில்) $10 + e^{-0.05x}$ எனில், விற்பனை அளவு 100 அலகுகளாக இருக்கும்போது மொத்த வருவாயைக் காண்க $(e^{-5} = 0.0067)$

தீர்வு:

இறுதிநிலை வருவாய் $R'(x) = 10 + e^{-0.05x}$

100 அலகுகளுக்கான விற்பனை வருவாய்

$$R = \int_0^{100} \left(10 + e^{-0.05x}\right) dx$$

$$= \left[10x + \frac{e^{-0.05x}}{-0.05}\right]_0^{100}$$

$$= \left(1000 - \frac{e^{-5}}{0.05}\right) - \left(0 - \frac{100}{5}\right)$$

$$= 1000 + 20 - (20 \times 0.0067)$$

$$= 1019.87$$

$$= 1019.87 \times 1000$$

மொத்த வருவாய் $= ₹\ 10{,}19{,}870$

எடுத்துக்காட்டு 3.21

ஒரு இயந்திரத்தின் ஆயுட் காலம் 12 ஆண்டுகளாக மதிப்பிடப்பட்டுள்ளது. அதன் விலை ₹$5{,}00{,}000$ என்க. இயந்திரத்திற்கான காப்புத்தொகை ₹$30{,}000$. அந்த இயந்திரத்திற்கு, ஒரு வருடத்திற்கான வாடகை ₹$72{,}000$ ஆக உள்ளது. நிகழ்காலத்தில் செலுத்தப்படும் வாடகைக்கான வட்டி விகிதம் 9% எனில், அந்த இயந்திரத்தை வாடகைக்கு பெறுவது ஆதாயமானதா என்பதை ஆராய்க. $(e^{-1.08} = 0.3396)$.

தீர்வு:

t வருடத்திற்கான நிகழ்கால மதிப்பு $= \int_0^t 72000 e^{-0.09t}\, dt$

12 வருடத்திற்கான நிகழ்கால மதிப்பு $= \int_0^{12} 72000 e^{-0.09t}\, dt$

$$= 72000 \left[\frac{e^{-0.09t}}{-0.09}\right]_0^{12}$$

$$= \frac{72000}{-0.09}\left[e^{-0.09(12)} - e^0\right]$$

$$= -800000\left[e^{-1.08} - e^0\right]$$

$$= -800000[0.3396 - 1]$$

$$= 528320$$

இயந்திரத்திற்கான செலவு $= 500000 - 30000$

$$= 470000$$

எனவே இயந்திரத்தை வாடகைக்கு பெறுவது இலாபகரமானது அல்ல.

ஆதலால் இயந்திரத்தை வாங்குவதே சிறந்தது.

சரக்கு தேக்க நிலை (Inventory) :

கொடுக்கப்பட்ட சரக்கின் கையிருப்பு $I(x)$ மற்றும் ஒரு அலகிற்கான சரக்கின் தேக்கச் செலவு (C_1) எனில், T காலத்திற்கான சரக்கின் மொத்த தேக்கச் செலவு = $C_1 \int_0^T I(x)dx$.

எடுத்துக்காட்டு 3.22

ஒரு நிறுவனம் 30 நாள்களுக்கு ஒருமுறை 200 மகிழ்வுந்துகளை பெறுகிறது, அனுபவத்தில், சரக்கு கையிருப்பு, இருப்பு நாள்களுடன் தொடர்புடையது எனத் தெரிகிறது. கடைசியில் பெறப்பட்ட சரக்கு முதலிருந்து $I(x) = 200 - 0.2x$ என்க. தினசரி சரக்கு தேக்கச் செலவு ₹3.5 எனில் 30 நாள்களுக்கான மொத்த தேக்கச் செலவை தொகையீடல் மூலம் காண்க.

தீர்வு:

இங்கு $I(x) = 200 - 0.2x$

$C_1 = \text{Rs. } 3.5$

$T = 30$

மொத்த தேக்கச் செலவு $= C_1 \int_0^T I(x)dx = 3.5 \int_0^{30} (200 - 0.2x)dx$

$$= 3.5\left(200x - \frac{0.2x^2}{2}\right)_0^{30} = ₹\ 20{,}685$$

தவணை பங்கீட்டின் மொத்த தொகை (Amount of an Annuity)

செலுத்தப்பட்ட மொத்த தவணை பங்கீட்டு தொகை மற்றும் அந்த கால கட்டத்தில் செலுத்தப்பட்ட மொத்த வட்டி ஆகியவற்றின் கூடுதல், தவணை பங்கீட்டின் மொத்த தொகை எனப்படும். ஒரு ஆண்டிற்கு r கூட்டு வட்டி வீதத்தில், செலுத்தப்படும் தவணை பங்கீட்டு தொகை ₹ p எனில், N தவணைகளில் செலுத்தப்படும தவணை பங்கீட்டின் மொத்த தொகை

$$A = \int_0^N p e^{rt}\, dt$$

எடுத்துக்காட்டு 3.23

திரு. அருள் என்பவர் ABC வங்கியில், ஒவ்வொரு ஆண்டிற்கும் ₹10,000 -ஐ ஆண்டிற்கு 10% கூட்டு வட்டியில் 5 ஆண்டுகளுக்கு செலுத்துகிறார். 5 ஆண்டுகளின் முடிவில் அவர் வங்கி கணக்கில் உள்ள மொத்த தொகை எவ்வளவு? $\left(e^{0.5} = 1.6487\right)$

தீர்வு:

$$p = 10000 \quad r = 0.1, \quad N = 5$$

$$\text{மொத்த தொகை} = \int_0^5 10000 e^{0.1t}\, dt$$

$$= \frac{10000}{0.1}\left(e^{0.1t}\right)_0^5$$

$$= 100000\left[e^{0.1\times 5} - e^0\right]$$

$$= 100000\left(e^{0.5} - 1\right)$$

$$= 100000\,[0.6487]$$

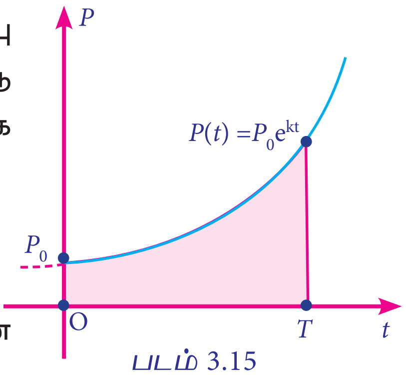
$$= ₹\ 64{,}870$$

இயற்கை வளத்தின் பயன்பாடு (Consumption of a Natural Resource)

t வருடத்தில் இயற்கை வளத்தின் பயன்பாட்டிற்கான சார்பு $p(t)$ என்க. k பெருக்கு வீதத்தில் இயற்கை வளத்தின் பயன்பாடு அதிகரிக்கிறது எனில், Tவருடத்தில் பயன்படுத்தப்படும் இயற்கை வளத்தின் அளவு

$$\int_0^T p_0 e^{kt}\, dt = \frac{p_0}{k}\left(e^{kT} - 1\right)$$

இங்கு p_0 என்பது ($t = 0$ எனும் போது) இயற்கை வளத்தின் தொடக்கப் பயன்பாடு.



படம் 3.15

எடுத்துக்காட்டு 3.24

2000 ஆம் ஆண்டில் உலக தங்க உற்பத்தியின் அளவு 2547 மெட்ரிக் டன்கள் மற்றும் தங்க உற்பத்தி ஆண்டிற்கு 0.6% பெருக்கு வீதத்தில் அதிகரிக்கின்றது. இதே வீதத்தில் தொடர்ந்தால் 2000 -லிருந்து 2013-க்குள் எவ்வளவு டன்கள் தங்கம் உற்பத்தி செய்யப்பட்டிருக்கும்? [$e^{0.078} = 1.0811$)

தீர்வு:

தொடக்க நிலையில் தங்கத்தின் அளவு (t=0 எனும்போது (2000-ஆம் ஆண்டு))

p_0=2,547 மெட்ரிக் டன்கள்.

2000 முதல் 2013 வரை தங்கத்தின் மொத்த உற்பத்தி $= \int_0^{13} 2547\, e^{0.006t}\, dt$

$$= \frac{2547}{0.006}\left[e^{0.006t}\right]_0^{13}$$

$$= 424500\left(e^{0.078} - 1\right)$$

= 34,426.95 மெட்ரிக் டன்கள் (தோராயமாக).

3.2.3 தேவை நெகிழ்ச்சி கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் தேவைச் சார்பைக் காணுதல் (The demand functions from Elasticity of demand)

$y = f(x)$ எனும் சார்பின் நெகிழ்ச்சி (η) என்பது y-ன் சார் மாற்றத்திற்கும் x-ன் சார் மாற்றத்திற்கும் உள்ள விகிதத்தின் வரம்பிடப்பட்ட எல்லை என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$\therefore \qquad \eta = \frac{E_y}{E_x} = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}}$$

$$\Rightarrow \qquad \eta = \frac{x}{y}.\frac{dy}{dx}$$

தேவை நெகிழ்ச்சி $\qquad \eta_d = \dfrac{-p}{x}\dfrac{dx}{dp}$

$$\frac{-dp}{p} = \frac{dx}{x}.\frac{1}{\eta_d}$$

இருபுறமும் தொகைக்கான,

$$-\int \frac{dp}{p} = \frac{1}{\eta_d}\int \frac{dx}{x}$$

இந்தச் சமன்பாடானது 'p' எனும் தேவைச் சார்பை x-ன் சார்பாக விவரிக்கிறது.

மேலும், வருவாய்ச் சார்பு $R = px$ என்ற கோட்பாட்டிலிருந்து காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.25

நெகிழ்ச்சி சார்பு $\frac{E_y}{E_x} = \frac{x}{x-2}$. $x = 6$ மற்றும் $y = 16$ எனும் போது அதன் தொடக்க நிலைச் சார்பைக் காண்க.

தீர்வு:

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{x}{x-2}$$

$$\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x-2}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{x}{x-2}.\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x-2}$$

$$\log y = \log(x-2)+\log k$$

$$y = k(x–2)$$

இங்கு $x = 6$, எனும்போது $y = 16 \quad\Rightarrow\quad 16 = k(6–2)$

$$k = 4$$

$$y = 4\,(x–2)$$

எடுத்துக்காட்டு 3.26

ஒரு பொருளின் விலை p -ஐ பொறுத்து தேவை நெகிழ்ச்சி $\eta_d = \frac{p+2p^2}{100-p-p^2}$ எனில் விலை 5 மற்றும் தேவை 70 எனும் பொழுது அதன் தேவை சார்பு மற்றும் வருவாய்ச் சார்பைக் காண்க.

தீர்வு

$$\eta_d = \frac{p+2p^2}{100-p-p^2}$$

$$\frac{-p}{x}\frac{dx}{dp} = \frac{p(2p+1)}{100-p-p^2}$$

$$\frac{-dx}{x} = \frac{-(2p+1)}{p^2+p-100}dp$$

$$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{2p+1}{p^2+p-100}dp$$

$$\log x = \log(p^2+p-100)+\log k$$

$$\therefore \qquad x = k(p^2 + p - 100)$$

இங்கு $x = 70, \quad p = 5,$

$$70 = k(25 + 5 - 100)$$

$$\Rightarrow k = -1$$

எனவே, $x = 100 - p - p^2$

$$R = px$$

வருவாய் சார்பு : $\text{R} = p(100 - p - p^2)$

பயிற்சி 3.2

1. ஒரு இயந்திரத்தை சரிபார்ப்பதற்கான செலுவானது மணிக்கு ₹10,000 ஆகும். அதன் பரமாரிப்பு செலவு x கி.மீ பயன்பாட்டிற்கு பிறகு, மணிக்கு $f(x) = 2x - 240$ என்க. இயந்திரத்தை சரிப்பார்த்தப்பிறகு, 300 மணி நேரம் பயணிப்பதற்கான மொத்த செலவைக் காண்க.

2. ஒரு நெகிழ்ச்சி சார்பு $\frac{Ey}{Ex}$ என்பது $\frac{Ey}{Ex} = \frac{-7x}{(1-2x)(2+3x)}$ என வரையறுக்கப்படின் $x = 2, y = \frac{3}{8}$ எனும் பொழுது அச்சார்பைக் காண்க.

3. ஒரு பொருளின் தேவை x அலகுகள் எனும் பொழுது விலை p –ஐ பொறுத்து தேவை நெகிழச்சி சார்பு $\frac{(4-x)}{x}$ எனில், விலை 4 மற்றும் பொருளின் தேவை 2 எனும் பொழுது தேவைச் சார்பு மற்றும் வருவாய்ச் சார்பைக் காண்க.

4. ஒரு நிறுவனம், 30 நாள்களுக்கு ஒரு முறை 500 இருசக்கர வாகனங்களை பெறுகிறது. அனுபவத்தில் சரக்கு கையிருப்பு, இருப்பு நாள்களுடன் (x) உடன் தொடர்புடையது என தெரிகிறது. கடைசியில் பெறப்பட்ட சரக்கு முதலில் இருநது $I(x) = 500 - 0.03x^2$, தினசரி சரக்கு தேக்கச் செலவு ₹0.3 எனில் 30 நாள்களுக்கான மொத்த தேக்கச் செலவைக் காண்க.

5. ஒரு வங்கியானது, வங்கி கணக்கிலுள்ள தொகைக்கு ஆண்டுக்கு 5% கூட்டு வட்டி வீதத்தில் வட்டியை அளிக்கின்றது எனில், ஒவ்வொரு ஆண்டுக்கும் ₹1000 செலுத்தும் நபர் ஒருவருக்கு 5 ஆண்டுகளுக்கு கிடைக்கும் தொகை எவ்வளவு?. $(e^{0.25} = 1.284)$.

6. உற்பத்தி செய்யப்படும் x அலகு பொருள்களின் இறுதிநிலைச் செலவுச் சார்பு $\frac{dC}{dx} = 100 - 10x + 0.1x^2$ என்க. அந்நிறுவனத்தின் மாறாச் செலவு ₹500 எனில், அந்நிறுவனத்தின் மொத்தச் செலவுச் சார்பு மற்றும் சராசரி செலவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

7. இறுதிநிலை செலவுச் சார்பு $MC = 300\, x^{\frac{2}{5}}$ மற்றும் மாறாச் செலவு 0 எனில் மொத்தச் செலவு மற்றும் சராசரி செலவு சார்பைக் காண்க.

8. உற்பத்தி செய்யப்படும் x அலகு பொருள்களின் இறுதிநிலைச் செலவு $\dfrac{a}{\sqrt{ax+b}}$ என்க. $x=0$ எனும் பொழுது உற்பத்தி செலவு 0 எனில் மொத்த செலவுச் சார்பைக் காண்க.

9. ஒரு குளிர்சாதனத்தின் இறுதிநிலைச் செலவு $C'(x)=\dfrac{x^2}{200}+4$. 200 குளிர்சாதனங்களின் உற்பத்திச் செலவைக் காண்க.

10. விற்பனை செய்யப்படும் x அலகு பொருள்களின் இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு $5+3\,e^{-0.03\,x}$ எனில், விற்பனை செய்யப்படும் 100 அலகு பொருள்களின் மொத்த வருவாயை தோராயமாக காண்க. ($e^{-3}=0.05$)

11. விற்பனை பொருள்களின் இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு $MR=9-4x^2$ எனில், தேவைச் சார்பைக் காண்க.

12. இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு $\dfrac{4}{(2x+3)^2}-1$ எனில், சராசரி வருவாய் சார்பு $P=\dfrac{4}{6x+9}-1$ எனக் காட்டுக.

13. ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதிநிலை வருவாய்ச் சார்பு $MR=20e^{-x/10}\left(1-\dfrac{x}{10}\right)$ எனில், அதன் தேவைச் சார்பைக் காண்க.

14. ஒரு நிறுவனத்தின் உற்பத்தி பொருள்களின் இறுதிநிலை செலவு சார்பு $C'(x)=5+0.13x$, இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு $R'(x)=18$ மற்றும் மாறாச் செலவு ₹120 எனில், இலாபச் சார்பைக் காண்க.

15. இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு $R'(x)=1500-4x-3x^2$ எனில், வருவாய் சார்பு மற்றும் சராசரி வருவாய் சார்பைக் காண்க.

16. x அலகு பொருள்களுக்கான இறுதிநிலை வருவாய்ச் சார்பு $MR = 10+3x-x^2$ எனில் வருவாய்ச் சார்பு மற்றும் தேவைச் சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

17. உற்பத்தி பொருள்களின் இறுதிநிலைச் செலவு சார்பு $MC=\dfrac{14000}{\sqrt{7x+4}}$ மற்றும் மாறாச் செலவு ₹$18,000$ எனில், மொத்தச் செலவு மற்றும் சராசரி செலவுக் காண்க.

18. ஒரு நிறுவனத்தின் உற்பத்தி பொருள்களின் (x) இறுதிநிலைச் செலவு உற்பத்தி செய்யப்படும் பொருள்களின் எண்ணிக்கைக்கு நேர் விகித்ததில் உள்ளது. மேலும், மாறாச் செலவு ₹$5,000$ மற்றும் 50 அலகு பொருள்களின் உற்பத்தி செலவு ₹$5,625$ எனில், மொத்தச் செலவைக் காண்க.

19. $MR=20-5x+3x^2$ எனில், மொத்த வருவாய்ச் சார்பு காண்க.

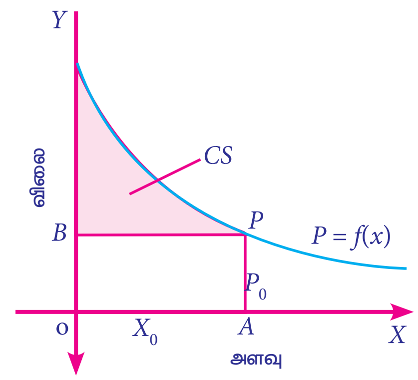
20. $MR = 14-6x+9x^2$ எனில், தேவைச் சார்பு காண்க.

3.2.4 நுகர்வோர் உபரி (Consumer's surplus)

மிகச் சிறந்த பொருளாதார நிபுணர் மார்சல் அவர்களால் உருவாக்கப்பட்ட கருத்துரு நுகர்வோர் உபரி ஆகும். $p = f(x)$ என்ற தேவைச் சார்பு ஆனது மக்களால் வாங்கப்படும் பொருளின் விலை மற்றும் பொருள்களின் அளவு ஆகியவற்றிக்கு இடையே உள்ள தொடர்பைக் குறிக்கும்.

விளக்கமாக, p_0 விலையில் தேவைப்படும் பொருளின் அளவு $x = x_0$ என்க. ஆனால் நிர்ணயிக்கப்பட்ட விலை p_0 யை விட அதிகவிலையான q_0 க்கு அதே அளவான x_0 –ஐ வாங்க விரும்பும் நுகர்வோர் இருக்கக்கூடும். அத்தகைய நுகர்வோர்கள், **நுகர்வோர் உபரி** எனப்படும்.

பின்வரும் படத்தில் மேற்கண்ட விவரங்கள் விளக்கப்பட்டுள்ளது. கணக்கிட்டு முறையின்படி நுகர்வோர் உபரி கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கீடு செய்யப்படுகிறது.



படம் 3.16

நுகர்வோர் உபரி (CS) = (தேவை வளைவரைக்கு கீழ் $x = 0$ முதல் $x = x_0$ என்கின்ற எல்லைக்குப்பட்ட பரப்பு) – (செவ்வகம் $OABC$ பரப்பு)

$$\text{CS} = \int_0^{x_0} f(x)\,dx - x_0 p_0$$

எடுத்துக்காட்டு 3.27

ஒரு பொருளின் தேவைச் சார்பு $y = 36 - x^2$ எனில், $y_0 = 11$ -ல் நுகர்வோர் உபரியைக் காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்டவை : $y = 36 - x^2$ மற்றும் $y_0 = 11$

$$11 = 36 - x_0^2$$

$$x_0^2 = 25$$

$$x_0 = 5$$

> **உங்களுக்கு தெரியுமா?**
> தேவைச் சார்பின் வளைவரை மற்றும் அளிப்புச் சார்பின் வளைவரை ஆகியவற்றின் வெட்டும் புள்ளி சமநிலைப்புள்ளி எனப்படும். சமநிலைப் புள்ளியில் $q_d = q_s$ ஆகும்.

$$\text{CS} = \int_0^{x_0} (\text{தேவைச்சார்பு})\,dx - (\text{விலை} \times \text{தேவையளவு})$$

$$= \int_0^5 \left(36 - x^2\right) dx \; - 5 \times 11$$

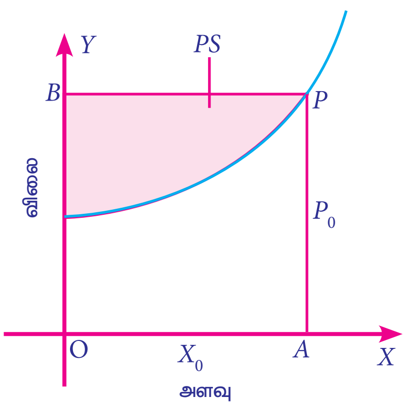
$$= \left[36x - \frac{x^3}{3}\right]_0^5 - 55$$

$$= \left[36(5) - \frac{5^3}{3}\right] - 55$$

$$= 180 - \frac{125}{3} - 55 = \frac{250}{3}$$

நுகர்வோர் உபரி $= \frac{250}{3}$ அலகுகள்.

3.2.5 உற்பத்தியாளர் உபரி (Producer's surplus)



படம் 3.17

சந்தை விலை 'p' யில் வழங்கப்படும் பொருள்கள் அளிப்புச் சார்பு $g(x)$ என்க. சந்தை விலை p_0 க்கு வழங்கப்படும் பொருளின் அளவு x_0 என்க. ஆனால் நிர்ணயிக்கப்பட்ட விலை p_0 க்கு குறைவான விலைக்கு அதே அளவு பொருளை வழங்க விரும்பும் உற்பத்தியாளர்கள் இருக்கக்கூடும். அத்தகைய உற்பத்தியாளர்கள் உற்பத்தியாளரின் உபரி எனப்படும்.

கணக்கீட்டு முறையில் உற்பத்தியாளர் உபரி (PS) கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

PS = (செவ்வகம் OAPB பரப்பு) − ($x = 0$, $x = x_0$ எனும் எல்லைகளுக்குள் அளிப்புச் சார்பு ஏற்படுத்தும் பரப்பு)

$$\text{PS} = x_0\,p_0 - \int_0^{x_0} g(x)dx$$

எடுத்துக்காட்டு 3.28

ஒரு பொருளின் அளிப்பு சார்பு $g(x) = 4x+8$ எனில் 5 அலகுகள் விற்பனை செய்யும்போது உற்பத்தியாளரின் உபரியை காண்க.

தீர்வு:

$$g(x) = 4x + 8,\ x_0 = 5$$

$$p_0 = 4(5) + 8 = 28$$

$$\text{PS} = x_0\,p_0 - \int_0^{x_0} g(x)dx$$

$$= (5 \times 28) - \int_0^5 (4x+8)dx$$

$$= 140 - \left[4\left(\frac{x^2}{2}\right) + 8x\right]_0^5$$

$$= 140 - (50 + 40)$$

$$= 50$$

உற்பத்தியாளரின் உபரி $= 50$ அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 3.29

ஒரு பொருளின் தேவைச் சார்பு மற்றும் அளிப்புச் சார்பு முறையே $p_d = 18 - 2x - x^2$, $p_s = 2x - 3$. சமநிலை விலையில் நுகர்வோர் உபரி மற்றும் உற்பத்தியாளர் உபரியைக் காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்டவை : $P_d = 18 - 2x - x^2$; $P_s = 2x - 3$

சமநிலை விலையில், $p_d = p_s$

$$18 - 2x - x^2 = 2x - 3$$

$$x^2 + 4x - 21 = 0$$

$$(x-3)(x+7) = 0$$

$x = -7$ அல்லது 3 (x ன் மதிப்பானது குறை எண்ணாக இருக்க முடியாது.)

$x_0 = 3$, எனும்போது

$$\therefore \quad p_0 = 18 - 2(3) - (3)^2 = 3$$

$$CS = \int_0^{x_0} f(x)\,dx - x_0\,p_0$$

$$= \int_0^3 (18 - 2x - x^2)\,dx \quad - 3\times 3$$

$$= \left[18x - x^{2-}\frac{x^3}{3}\right]_0^3 - 9$$

$$= 18(3) - (3)^2 - \left(\frac{3^3}{3}\right) - 9$$

$CS = 27$ அலகுகள்.

$$PS = x_0 P_0 - \int_0^{x_0} g(x)\,dx$$

$$= (3\times 3)-\int_0^3 (2x-3)\,dx$$

$$= 9-\left(x^2-3x\right)_0^3$$

$= 9$ அலகுகள்.

சமநிலை விலையில்,

(i) நுகர்வோர் உபரி = 27 அலகுகள் (ii) உற்பத்தியாளர் உபரி =9 அலகுகள்

பயிற்சி 3.3

1. தேவைச்சார்பு $P = 50-2x$ எனில், தேவை $x = 20$ எனும் போது நுகர்வோர் உபரியைக் காண்க.

2. தேவைச்சார்பு $P = 122-5x-2x^2$ மற்றும் $x = 20$ எனும் போது நுகர்வோர் உபரியைக் காண்க.

3. தேவைச் சார்பு $p=85-5x$ மற்றும் அளிப்புச் சார்பு $p=3x-35$. சமநிலை விலை மற்றும் சமநிலை அளவைக் காண்க மற்றும் நுகர்வோர் உபரியைக் காண்க.

4. உற்பத்தி பொருள்களின் தேவைச் சார்பு $p=e^{-x}$. $p=0.5$ எனும் போது நுகர்வோர் உபரியைக் காண்க.

5. அளிப்புச் சார்பு $p=7+x$, $x=5$ எனும் போது உற்பத்தியாளர் உபரியைக் காண்க

6. விற்பனை பொருள்களின் அளிப்புச் சார்பு $p=3x+5x^2$. $x=4$ எனும்போது உற்பத்தியாளரின் உபரியைக் காண்க

7. விற்பனை பொருள்களின் தேவைச் சார்பு $p=\dfrac{36}{x+4}$ க்கு, சந்தை விலை 6 எனும் போது நுகர்வோர் உபரியைக் காண்க.

8. சரியான போட்டியின் கீழ் ஒரு பொருளின் தேவை மற்றும் அளிப்பு சார்புகள் முறையே $p_d=1600-x^2$ மற்றும் $p_s=2x^2+400$ எனில், உற்பத்தியாளரின் உபரியைக் காண்க.

9. சரியான போட்டியின் கீழ் ஒரு பொருளின் தேவை மற்றும் அளிப்புச் சார்ப்புகள் முறையே $p_d=\dfrac{8}{x+1}-2$, $p_s=\dfrac{x+3}{2}$ எனில், நுகர்வோர் மற்றும் உற்பத்தியாளரின் உபரியைக் காண்க.

10. உற்பத்தி பொருள்களின் தேவை சமன்பாடு $x=\sqrt{100-p}$ மற்றும் அளிப்பு சமன்பாடு $x=\dfrac{p}{2}-10$ எனில், சந்தையில் சமநிலையின் கீழ் உற்பத்தியாளர் மற்றும் நுகர்வோரின் உபரியைக் காண்க.

11. தேவைச் சார்பு $p_d=25-3x$ மற்றும் அளிப்புச் சார்பு $p_s=5+2x$ எனில், சமன்நிலையில் நுகர்வோர் உபரி மற்றும் உற்பத்தியாளர் உபரியைக் காண்க.

பயிற்சி 3.4

சரியான விடையை தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக

1. $y = x(4-x)$ என்ற வளைவரையானது 0 மற்றும் 4 எனும் எல்லைகளுக்குள், x -அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பு

   (a) $\frac{30}{3}$ ச.அலகுகள் (b) $\frac{31}{2}$ ச.அலகுகள் (c) $\frac{32}{3}$ ச.அலகுகள் (d) $\frac{15}{2}$ ச.அலகுகள்

2. $y = e^{-2x}$ என்ற வளைவரையானது $0 \le x \le \infty$ எனும் எல்லைகளுக்குள், x -அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பு

   (a) 1 ச.அலகு (b) $\frac{1}{2}$ ச.அலகு (c) 5 ச.அலகுகள் (d) 2 ச.அலகுகள்

3. $y = \frac{1}{x}$ என்ற வளைவரை 1 மற்றும் 2 எனும் எல்லைகளுக்குள் ஏற்படுத்தும் பரப்பு

   (a) log2 ச.அலகுகள் (b) log5 ச.அலகுகள் (c) log3 ச.அலகுகள் (d) log 4 ச.அலகுகள்s

4. ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதிநிலை வருவாய்ச் சார்பு MR= $e^{\frac{-x}{10}}$ எனில், அதன் வருவாய்

   (a) $-10e^{\frac{-x}{10}}$ (b) $1-e^{\frac{-x}{10}}$ (c) $10\left(1-e^{\frac{-x}{10}}\right)$ (d) $e^{\frac{-x}{10}}+10$

5. MR மற்றும் MC என்பன இறுதிநிலை வருவாய் மற்றும் இறுதிநிலைச் செலவு சார்பு என்பதை குறிக்குமெனில் அதன் இலாபச் சார்பு

   (a) $P = \int (MR - MC)\, dx + k$ (b) $P = \int (MR + MC)\, dx + k$

   (c) $P = \int (MR)(MC) dx + k$ (d) $P = \int (R - C) dx + k$

6. தேவை மற்றும் அளிப்பு சார்புகள் முறையே $D(x) = 16 - x^2$, $S(x) = 2x^2 + 4$ எனில், அதன் சமநிலை விலை

   (a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

7. ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதிநிலை வருவாய் மற்றும் இறுதிநிலை செலவுச் சார்பு $MR = 30 - 6x$ மற்றும் $MC = -24 + 3x$. இங்கு x என்பது உற்பத்தி எனில், இலாபச் சார்பு

   (a) $9x^2 + 54x$ (b) $9x^2 - 54x$ (c) $54x - \frac{9x^2}{2}$ (d) $54x - \frac{9x^2}{2} + k$

8. தேவை மற்றும் அளிப்பு சார்புகள் முறையே $D(x) = 20 - 5x$ மற்றும் $S(x) = 4x + 8$ எனில், அதன் சமநிலை விலை

   (a) 40 (b) $\frac{41}{2}$ (c) $\frac{40}{3}$ (d) $\frac{41}{5}$

9. இறுதிநிலை வருவாய் $MR = 35 + 7x - 3x^2$ எனில், அதன் சராசரி வருவாய் $AR =$

(a) $35x + \frac{7x^2}{2} - x^3$ (b) $35 + \frac{7x}{2} - x^2$

(c) $35 + \frac{7x}{2} + x^2$ (d) $35 + 7x + x^2$

10. இலாபச் சார்பு $p(x)$ ஆனது பெருமமடைவது

(a) $MC - MR = 0$ (b) $MC=0$ (c) $MR=0$ (d) $MC+MR=0$

11. தேவை x -க்கு விலை p -ஐ பொருத்து தேவை நெகிழ்ச்சி ஓர் அலகு எனில்,

(a) வருவாய் ஒரு மாறிலி (b) செலவுச்சார்பு ஒரு மாறிலி

(c) இலாபம் ஒரு மாறிலி (d) இவை ஏதும் இல்லை

12. இறுதி நிலைச் சார்பு $MR = 100 - 9x^2$ -ன் தேவைச் சார்பு

(a) $100 - 3x^2$ (b) $100x - 3x^2$ (c) $100x - 9x^2$ (d) $100 + 9x^2$

13. தேவைச் சார்பு $p_d = 28 - x^2$ -க்கு $x_0 = 5$ மற்றும் $p_0 = 3$ எனும் போது நுகர்வோர் உபரி

(a) 250 அலகுகள் (b) $\frac{250}{3}$ அலகுகள் (c) $\frac{251}{2}$ அலகுகள் (d) $\frac{251}{3}$ அலகுகள்

14. அளிப்புச் சார்பு $P_s = 2x^2 + 4$ -க்கு $x_0 = 5$ மற்றும் $P_0 = 12$ எனும் போது உற்பத்தியாளர் உபரி

(a) $\frac{31}{5}$ அலகுகள் (b) $\frac{31}{2}$ அலகுகள் (c) $\frac{32}{3}$ அலகுகள் (d) $\frac{30}{7}$ அலகுகள்

15. y -அச்சு, $y = 1$ மற்றும் $y = 2$ எனும் எல்லைக்குள் அடைப்படும் $y = x$ –ன் பரப்பு

(a) $\frac{1}{2}$ ச.அலகுகள் (b) $\frac{5}{2}$ ச.அலகுகள் (c) $\frac{3}{2}$ ச.அலகுகள் (d) 1 ச.அலகு

16. ஒரு பொருளின் அளிப்புச் சார்பு $P = 3 + x$ மற்றும் $x_0 = 3$ எனில், உற்பத்தியாளர் உபரி

(a) $\frac{5}{2}$ அலகுகள் (b) $\frac{9}{2}$ அலகுகள் (c) $\frac{3}{2}$ அலகுகள் (d) $\frac{7}{2}$ அலகுகள்

17. இறுதிநிலை செலவுச் சார்பு $MC = 100\sqrt{x}$, T.C = 0 மற்றும் வெளியீடு 0 எனில் சராசரிச் சார்பு AC ஆனது

(a) $\frac{200}{3}x^{\frac{1}{2}}$ (b) $\frac{200}{3}x^{\frac{3}{2}}$ (c) $\frac{200}{3x^{\frac{3}{2}}}$ (d) $\frac{200}{3x^{\frac{1}{2}}}$

18. ஒரு சந்தை பொருளின் தேவை மற்றும் அளிப்புச் சார்புகள் முறையே $P(x) = (x-5)^2$ மற்றும் $S(x) = x^2 + x + 3$ எனில், அதன் சமன்நிலை விலை $x_0 =$

(a) 5 (b) 2 (c) 3 (d) 19

19. ஒரு சந்தை பொருளின் தேவை மற்றும் அளிப்புச் சார்புகள் முறையே $D(x)=25-2x$ மற்றும் $S(x)=\dfrac{10+x}{4}$ எனில், அதன் சமநிலை விலை p_0 =

(a) 5 (b) 2 (c) 3 (d) 10

20. MR மற்றும் MC என்பன முறையே இறுதிநிலை வருவாய் மற்றும் இறுதிநிலைச் செலவு மேலும், $MR-MC=36x-3x^2-81$ எனில், x-ல் பெரும இலாபமானது

(a) 3 (b) 6 (c) 9 (d)5

21. ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதிநிலை வருவாய் மாறிலி எனில், அதன் தேவைச் சார்பு

(a) MR (b) MC (c) $C(x)$ (d) AC

22. தேவைச் சார்பு p-க்கு , $\int\dfrac{dp}{p}=k\int\dfrac{dx}{x}$ எனில், k =

(a) η_d (b) $-\eta_d$ (c) $\dfrac{-1}{\eta_d}$ (d) $\dfrac{1}{\eta_d}$

23. $y=e^x$ எனும் வளைவரை 0 யிலிருந்து 1 எனும் எல்லைகளுக்குள் x -அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பு

(a)$(e-1)$ ச.அலகுகள் (b)$(e+1)$ ச.அலகுகள்

(c) $\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$ ச.அலகுகள் (d) $\left(1+\dfrac{1}{e}\right)$ ச.அலகுகள்

24. பரவளையம் $y^2=4x$ ஆனது அதன் செவ்வகலத்துடன் ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பு

(a) $\dfrac{16}{3}$ ச.அலகுகள் (b) $\dfrac{8}{3}$ ச. அலகுகள் (c) $\dfrac{72}{3}$ ச. அலகுகள் (d) $\dfrac{1}{3}$ ச. அலகுகள்

25. $y=|x|$ எனும் வளைவரை, 0 –லிருந்து 2 வரை ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பு

(a) 1 ச.அலகு (b) 3 ச.அலகுகள் (c) 2 ச.அலகுகள் (d) 4 ச.அலகுகள்

இதர கணக்குகள்

1. உற்பத்தியாளரின் இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு $MR=275-x-0.3x^2$ எனில், உற்பத்தியின் மொத்த வருவாயை அதன் உற்பத்தி 10 அலகுகளிலிருந்து 20 அலகுகளாக அதிகரிக்கும் பொழுது காண்க.

2. ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதிநிலை வருவாய் $MC=125+10x-\dfrac{x^2}{9}$. இங்கு x அலகு உற்பத்தியின் செலவு C ஆகும். மாறா செலவு ₹250 எனில், 15 அலகுகள் உற்பத்தியின் மொத்த செலவைக் காண்க.

3. ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதிநிலை வருவாய் MR$=\frac{2}{x+3}-\frac{2x}{(x+3)^2}+5$ எனில், அந்நிறுவனத்தின் தேவைச் சார்பு $P=\frac{2}{x+3}+5$ எனக் காட்டுக.

4. இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு $\text{MR}=6-3x^2-x^3$ எனில், வருவாய் சார்பு மற்றும் தேவைச் சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

5. ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதிநிலைச் செலவு சார்பு $C'(x)=20+\frac{x}{20}$, இறுதிநிலை வருவாய்ச் சார்பு $R'(x)=30$ மற்றும் மாறாச் செலவு ₹100 எனில், இலாபச் சார்பைக் காண்க.

6. ஒரு சந்தை பொருளின் தேவை சமன்பாடு $p_d=20-5x$ மற்றும் அளிப்புச் சமன்பாடு $p_s=4x+8$. சந்தையின் சமநிலை விலையின் கீழ் நுகர்வோர் உபரி மற்றும் உற்பத்தி உபரி ஆகியவற்றைக் காண்க.

7. 500 அலகு பொருள்களை உற்பத்தி செய்வதற்கு தேவைப்படும் மொத்த மணிநேரம் $f(x)=1800x^{-0.4}$ என்ற சார்பால் குறிக்கப்படுகிறது. எனில், கூடுதலாக 400 அலகு பொருள்களை உற்பத்தி செய்வதற்கான மொத்த கால (மணியில்) நேரத்தைக் காண்க. $[(900)^{0.6}=59.22, (500)^{0.6}=41.63]$

8. ஒரு பொருளின் தேவை நெகிழ்ச்சி $\frac{p}{x^3}$. விலை 2 மற்றும் தேவை 3 எனும்போது தேவைச் சார்பைக் காண்க.

9. $y=8x^2-4x+6$ என்ற பரவளையம் y –அச்சு மற்றும் $x=2$ இவற்றிற்கு இடையே அடைப்படும் அரங்கத்தின் பரப்பு காண்க.

10. $y^2=27x^3$ என்ற வளைவரைக்கும் மற்றும் $x=0$, $y=1$, $y=2$ என்ற கோடுகளுக்குள் அடைப்படும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தொகுப்புரை

- $y=f(x)$ என்ற வளைவரை, x -அச்சு, $x=a$ மற்றும் $x=b$ ஆகியவற்றால் சூழப்பட்ட அரங்கத்தின் பரப்பு $\int_a^b y\,dx$.
- $y=f(x)$ என்ற வளைவரை, $x=a$ மற்றும் $x=b$ எனும் எல்லைக்குள், x -அச்சுடன் ஏற்படுத்தப்படும் அரங்கத்தின் பரப்பு x -அச்சின் கீழ் அமையும் எனில், பரப்பு $\int_a^b -y\,dx$
- $x=g(y)$ என்ற வளைவரை ஆனது $y=c$ மற்றும் $y=d$ என்ற எல்லைக்களுக்குள் y -அச்சுடன் ஏற்படுத்தப்படும் அரங்கத்தின் பரப்பு $\int_c^d x\,dy$

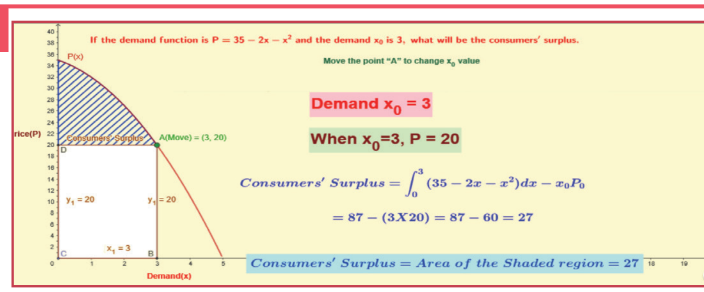
- $x = g(y)$ எனும் வளைவரையானது $y = c$ மற்றும் $y = d$ எனும் எல்லைக்குள் y அச்சால் சூழப்பட்ட பரப்பு y அச்சுக்கு இடதுபுறம் அமையும் எனில் பரப்பு $\int_d^e -x\, dy$
- $y=f(x)$ மற்றும் $y=g(x)$ என்ற வளைவரைகள் x அச்சு $x = a$ மற்றும் $x = b$ ஆகிய கோடுகளுடன் ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பு $\int_a^b f((x) - g(x))\, dx.$
- ஒரு சார்பின் வளர்ச்சி வீதமானது அல்லது விற்பனை வீதமானது t-ல் ஒரு சார்பு என்க. இங்கு t என்பது கால அளவைக் குறிக்கும். எனவே, t கால அளவில் உற்பத்தி பொருளின் மொத்த வளர்ச்ச அல்லது மொத்த விற்பனை $= \int_0^r f(t)dt$
- தேவை நெகிழ்ச்சி $\eta_d = \frac{-p}{x}\frac{dx}{dp}$
- சரக்கின் மொத்த தேக்கச் செலவு $= C_1 \int_0^T I(x)dx$
- தவணை பங்கீட்டின் மொத்த தொகை $A = \int_o^N pe^{rt}\, dt$
- செலவு சார்பு $C = \int (MC)\, dx + k.$
- சராசரி செலவுச் சார்பு $AC = \frac{C}{x}, x \neq 0$
- வருவாய்ச் சார்பு
$$R = \int (MR) dx + k.$$
- தேவைச் சார்பு $p = \frac{R}{x}$
- இலாபச் சார்பு $= MR\text{-}MC = R'(x) - C'(x)$
- நுகர்வோர் உபரி $= \int_0^{x_0} f(x)\, dx - x_0 p_0$
- உற்பத்தியாளர் உபரி $= x_0 p_0 - \int_0^{x_0} p(x)\, dx$

கலைச்சொற்கள்	
அதிகபட்ச இலாபம்	Maximum profit
அளிப்புச் சார்பு	Supply function
இலாபம்	Profit
இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு	Marginal cost function
இறுதி நிலை வருவாய்ச் சார்பு	Marginal revenue function
உற்பத்தி	Production
உற்பத்தியாளர்	Manufacturer
உற்பத்தியாளர் உபரி	Producer's surplus

சமநிலை	Equilibrium
சரக்கு இருப்பு	Inventory
சராசரி செலவுச் சார்பு	Average cost function
செலவுச் சார்பு	Cost function
தேவைச் சார்பு	Demand function
தொகையிடல்	Integration
நுகர்வோர் உபரி	Consumer's surplus
பங்கீட்டு தவணைத் தொகை	Annuity
மாறாச் செலவு	Fixed cost
வருவாய்ச் சார்பு	Reveunue function
வெளியீடு	Out put

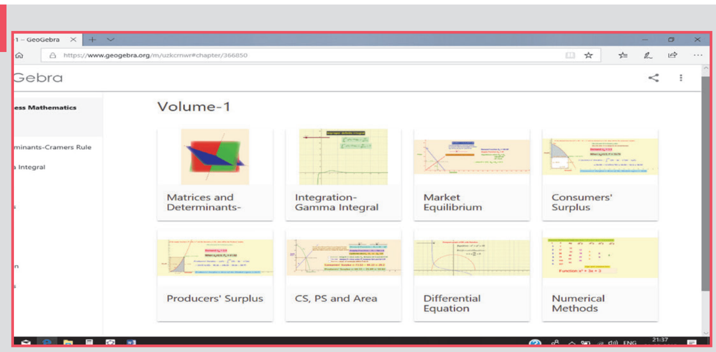
இணையச் செயல்பாடு

செயல்பாட்டின் இறுதியில் எதிர்பார்க்கப்படும் விளைவு



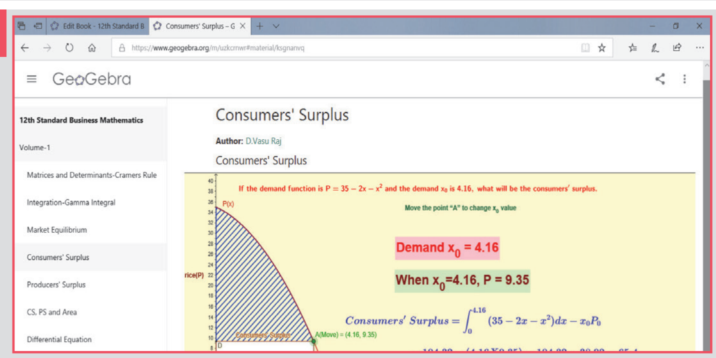
படி 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி இச்செயல்பட்டிற்கான இணையப் பக்கத்திற்குச் செல்க. பின்பு "12th Standard Business Mathematics and Statistics" என்னும் திரையில் "Volume–1" யை தெரிவு செய்யவும்.



படி 2

"Consumer's Surplus" என்னும் பயிற்சித்தாளினை தெரிவு செய்துகொள்ளவும். Consumer's Surplus using Integration என்னும் திரை தோன்றும். அதில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள வரைபடத்தில் வளைவில் உள்ள புள்ளி A வை நகர்த்தினால் வரைபடத்தில் தோன்றும் மாற்றத்தை தெரிந்துகொள்ளலாம்.



செயல்பாட்டிற்கான உரலி :https://ggbm.at/uzkcrnwr

விரைவுக் குறியீடு (QR Code) :

B247_12_BUS_MAT_TM

4

வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

G.H. லெப்னிட்ஸ்

(ஜூலை 1, 1646 – நவம்பர் 14, 1716)

அறிமுகம்

முதலில் ஜெர்மானிய தத்துவமேதை, கணிதவியலாளர் மற்றும் தர்க்கவியலார் G.H. லெப்னிட்ஸ் என்பவரால் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு உருவாக்கப்பட்டது.

இயற்கணித சமன்பாடுகளான $5x-3(x-6)=4x$, $x^2-7x+12=0$, $|18x-5|=3$ போன்றவற்றை முந்தைய வகுப்புகளில் கற்றிருப்பீர்கள். இங்கு சமன்பாட்டை தீர்ப்பது இலக்காக உள்ளது. அதாவது சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் மாறியின் மதிப்பு(கள்) காண்பது நோக்கமாக உள்ளது. எடுத்துக்காட்டாக $x=9$ என்பது முதல் சமன்பாட்டின் தீர்வாக உள்ளது. ஏனெனில் $x=9$ என பிரதியிடும்போது சமன்பாட்டின் இருபுறமும் சமமாக இருக்கும்.

பொதுவாக ஒவ்வொரு இயற்கணித சமன்பாடும் அதற்கேற்ப பிரத்யோகமான தீர்வு காணும் முறையைப் பெற்றிருக்கும், இருபடிச் சமன்பாடுகள் ஒரு முறையிலும், மட்டுகளை பெற்றுள்ள சமன்பாடுகள் வேறொரு முறையிலும் மற்றும் பலவகையான முறைகளில் தீர்க்கப்படுகிறது.

இதே பொதுவான கருத்துக்கள், வகைக்கெழுக்களை பெற்றுள்ள வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் பயன்படுகிறது. பலவகையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் உள்ளன. ஒவ்வொரு வகையும் அதற்கேற்ப பிரத்யேகமான தீர்வு காணும் முறையைப் பெற்றிருக்கும்.

பொருளியல், வணிகவியல் மற்றும் பொறியியல் சார்ந்த பல கணக்குகள் இயல்பில் சிக்கலாகவும் மற்றும் புரிந்து கொள்வது மிகவும் கடினமாகவும் இருக்கும். ஆனால் அவற்றை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டு வடிவில் வரையறுக்கும் போது பகுப்பாய்வு செய்வது எளிதாக இருக்கும்.

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தை படித்த பின்பு பின்வரும் பாடக்கருத்துக்களை மாணவர்கள் புரிந்து கொள்ள இயலும்.

- வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் வரிசை.
- வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் படி.

DTTB9S

- வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் பொதுத்தீர்வு மற்றும் சிறப்புத் தீர்வு.
- வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை அமைத்தல்.
- மாறிகள் பிரிபடக்கூடிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்.
- சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்.
- நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்.
- மாறிலிகளைக் கெழுக்களாகக் கொண்ட இரண்டாம் வரிசை நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்.

ஒரு சார்பு மற்றும் அவற்றின் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட வகைக்கெழுக்களை கொண்ட சமன்பாடு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஆகும். அதாவது $y = f(x)$ சார்பு மற்றும் அதன் வகைக்கெழுக்கள் $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ … கொண்ட சமன்பாடு வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) $\frac{dy}{dx} = x + 5$ (ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2-y^2}}$ (iii) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$ (iv) $\frac{d^2x}{dt^2} + m^2x = 0$

வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் இரு வகைப்படும் அவையாவன (i) சாதாரண வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகள் மற்றும் (ii) பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் ஆகும். நாம் இந்த அத்தியாயத்தில் சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைப் பற்றிய கருத்துக்களை மட்டும் பார்ப்போம்.

4.1 வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் அமைத்தல் (Formation of ordinary differential equations)

4.1.1 சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரையறை (Definition of ordinary differential equation)

$y = f(x)$ வளைவரையின் சாதாரண வகைக்கெழுக்கள் $\left(\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right)$ கொண்ட சமன்பாடு சாதாரண வகைக்கெழு சமன்பாடு ஆகும். இங்கு ஒரே ஒரு சாரா மாறி இடம்பெற்றுள்ளது.

4.1.2 வகைகெழுச்சமன்பாடடின் வரிசை மற்றும் படி (Order and degree of a differential equation)

ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் இடம் பெற்றிருக்கும் வகைக்கெழுவின் மிக உயர்ந்த வரிசையே அவ்வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை (order) எனப்படும்.

வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் படி (degree) என்பது அதிலுள்ள வகைக்கெழுக்களின் உச்ச வரிசையின் படியாகும். குறிப்பாக வகைக்கெழுவில் பின்னங்கள் மற்றும் படி மூலங்கள் இருப்பின் அவற்றை நீக்கிய பின் படி காணப்பட வேண்டும்.

$$\frac{d^3y}{dx^3}+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3+\left(\frac{dy}{dx}\right)^5+y=7$$

என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை கருத்தில் கொள்க. இங்கு உச்ச வரிசை வகைக்கெழு $\frac{d^3y}{dx^3}$ (அதாவது மூன்றாம் வரிசை வகைக்கெழு). எனவே, வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை 3 ஆகும்.

மேலும், உச்ச வரிசை $\frac{d^3y}{dx^3}$ -ன் அடுக்கு 1 ஆகும்.எனவே வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் படி 1 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.1

கீழ்க்காணும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை மற்றும் படி ஆகியவற்றைக் காண்க.

(i) $\frac{d^2y}{dx^2}+3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+4y=0$

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+3y=0$

(iii) $\frac{d^3y}{dx^3}-3\left(\frac{dy}{dx}\right)^6+2y=x^2$

(iv) $\left[1+\frac{d^2y}{dx^2}\right]^{\frac{3}{2}}=a\frac{d^2y}{dx^2}$

(v) $y'+(y'')^2=(x+y'')^2$

(vi) $\frac{d^3y}{dx^3}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{2}}=0$

(vii) $y=2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+4x\frac{dx}{dy}$

தீர்வு

(i) $\frac{d^2y}{dx^2}+3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+4y=0$

உச்சவரிசை வகைக்கெழு $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஆகும்.

$\therefore$ வரிசை $=2$

உச்சவரிசை $\frac{d^2y}{dx^2}$ -ன்படி 1 ஆகும்.

$\therefore$ படி $=1$

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+3y=0$

உச்சவரிசை வகைக்கெழு $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஆகும்.

$\therefore$ வரிசை $=2$

உச்சவரிசை $\frac{d^2y}{dx^2}$ -ன்படி 1 ஆகும்.

$\therefore$ படி $=1$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை மற்றும் படி (வரையறுக்கப்பட்டிருப்பின்) எப்பொழுதும் மிகை முழுக்களாக இருக்கும்.

(iii) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 3\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^6 + 2y = x^2$

$\therefore$ வரிசை $=3$, படி $=1$

(iv) $\left[1+\dfrac{d^2y}{dx^2}\right]^{\frac{3}{2}} = a\dfrac{d^2y}{dx^2}$

மேற்காணும் சமன்பாட்டில் படி மூலத்தினை நீக்க, இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்திய பின் கிடைப்பது

$$\left[1+\frac{d^2y}{dx^2}\right]^3 = a^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

$\therefore$ வரிசை $=2$, படி $=3$

(v) $y' + (y'')^2 = (x+y'')^2$

$$y' + (y'')^2 = x^2 + 2xy'' + (y'')^2$$

$$y' = x^2 + 2xy'' \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^2 + 2x\frac{d^2y}{dx^2}$$

$\therefore$ வரிசை $=2$, படி$=1$

(vi) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{2}} = 0$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{2}}$$

சமன்பாட்டில் உள்ள படி மூலத்தினை நீக்க, இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்தியப்பின் கிடைப்பது

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 = \frac{dy}{dx}$$

$\therefore$ வரிசை$=3$, படி$=2$

(vii) $y = 2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 4x\dfrac{dx}{dy}$

$$y = 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4x\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

$$y\frac{dy}{dx}=2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+4x$$

$\therefore$ வரிசை $=1$, படி $=3$

வளைவரைகளின் குடும்பம் (Family of Curves)

சில சமயங்களில், வளைவரைகளின் குடும்பத்தை ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறத்தக்க மாறிலிகளைக் கொண்ட ஒரே ஒரு சமன்பாட்டின் மூலம் குறிக்கலாம். மாறிலிகளுக்கு வெவ்வேறு மதிப்புகளை அளிப்பதன் மூலம் வளைவரைக் குடும்பத்தின் வெவ்வேறு வளைவரைகளைப் பெறலாம். மாறத்தக்க மாறிலிகளை குடும்பத்தின் துணை அலகு என்போம்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(i) $y^2=4ax$ என்ற சமன்பாடு ஆதியை உச்சியாக கொண்ட பரவளையக் குடும்பத்தைக் குறிக்கிறது. இங்கு a ஒரு துணை அலகு.

(ii) ஆதியை மையமாகக் கொண்ட பொது மைய வட்டங்களின் குடும்பம் $x^2+y^2=a^2$ என்ற சமன்பாட்டால் குறிக்கப்படுகிறது. இங்கு a ஒரு துணை அலகு.

(iii) ஒரு தளத்தில் அமையும் நேர் கோட்டுக் குடும்பத்தின் சமன்பாடு $y=mx+c$ என்ற சமன்பாட்டால் குறிக்கப்படுகிறது. இங்கு m மற்றும் c என்பன துணை அலகுகள்.

4.1.3 வகைக்கெழுச் சமன்பாடு அமைத்தல் (Formation of ordinary differential equation)

$f(x,y,c_1)=0$ -------(1) என்ற சமன்பாட்டை கருத்தில் கொள்க. இங்கு c_1 என்பது மாறத்தக்கமாறிலியாகும். இச்சமன்பாட்டிலிருந்து வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை அமைக்கலாம். அதற்கு சமன்பாடு (1) -ஐ அதிலுள்ள ஒரு சாரா மாறியை பொறுத்து ஒரு முறை வகைப்படுத்த வேண்டும்.

சமன்பாடு (1) மற்றும் அதன் வகைக்கெழுவிலிருந்து c_1 ஐ நீக்குவதன் மூலம் தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை நாம் பெறுகிறோம்..

$f(x,y,c_1,c_2)=0$. இங்கு c_1 மற்றும் c_2 என்பன மாறத்தக்க மாறிலிகள். இச்சமன்பாட்டை இருமுறை வகைப்படுத்த வேண்டும். கொடுக்கப்பட்ட சார்பு மற்றும் இரு தொடர் வகைக்கெழு ஆகியவற்றிலிருந்து c_1 மற்றும் c_2-வை நீக்கியபின் தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை நாம் பெறுகிறோம்.

குறிப்பு

பெறப்படும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசையானது வளைவரைக் குடும்பத்தின் சமன்பாட்டில் உள்ள மாறத்தக்க மாறிலிகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.2

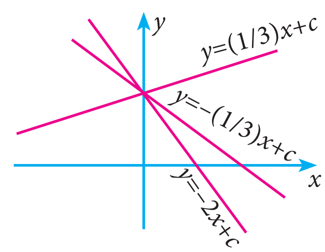
$y = mx + c$ எனும் நேர்கோட்டுத் தொகுப்பில் (i) m ஒரு மாறத்தக்க மாறிலி (ii) c ஒரு மாறத்தக்க மாறிலி (iii) m, c ஆகிய இரண்டுமே மாறத்தக்க மாறிலிகள் எனில் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் அமைக்க.

தீர்வு:

(i) $$y = mx + c \qquad \ldots(1)$$

m மட்டுமே மாறத்தக்க மாறிலி என்பதால், ஒருமுறை வகைப்படுத்த கிடைப்பது

$$\frac{dy}{dx} = m \qquad \ldots(2)$$



படம் 4.1

(1) மற்றும் (2) -லிருந்து m-ஐ நீக்குவதால் கிடைக்கும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

$$y = x\frac{dy}{dx} + c$$

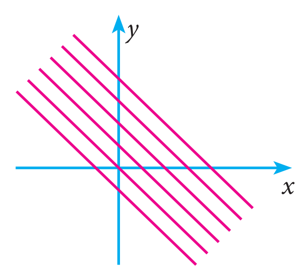
$x\dfrac{dy}{dx} - y + c = 0$ இதுவே தேவையான முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாடு.

(ii) c மாறத்தக்க மாறிலி

சமன்பாடு (1) -ஐ வகைப்படுத்த கிடைப்பது $\dfrac{dy}{dx} = m$

இந்த சமன்பாட்டில் c நீக்கப்பட்டிருப்பதால்,

தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $\dfrac{dy}{dx} = m$ ஆகும்.

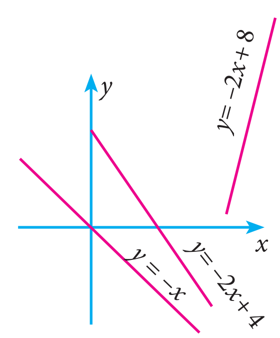


படம் 4.2

(iii) இங்கு m, c ஆகிய இரண்டுமே மாறத்தக்க மாறிலிகள் என்பதால், சமன்பாடு (1) -ஐ இருமுறை வகைப்படுத்த கிடைப்பது

$$\frac{dy}{dx} = m$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$



படம் 4.3

இந்த சமன்பாட்டில் m, c இரண்டுமே நீக்கப்பட்டிருப்பதால்

தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.3

$y = \dfrac{a}{x} + b$ என்ற வளைவரைக் குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச்சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கு a மற்றும் b என்பன மாறத்தக்க மாறிலிகள்.

12th BM Ch 4 DifferentialEqn_TM.indd 133 09-03-2019 10:01:37

தீர்வு:

$$y=\frac{a}{x}+b \qquad \ldots(1)$$

x -ஐ பொறுத்து வகைப்படுத்தக் கிடைப்பது

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-a}{x^2}$$

$$x^2\frac{dy}{dx}=-a$$

மீண்டும் x -ஐ பொறுத்து வகைப்படுத்தக் கிடைப்பது

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}=0$$

$\Rightarrow x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}=0$ இதுவே தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.4

$y=ae^{4x}+be^{-x}$ என்ற வளைவரைக்கு தொடர்புடைய வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கு a மற்றும் b என்பன மாறத்தக்க மாறிலிகள்.

தீர்வு:

$$y=ae^{4x}+be^{-x} \qquad (1)$$

$$\frac{dy}{dx}=4ae^{4x}-be^{-x} \qquad (2)$$

மற்றும் $$\frac{d^2y}{dx^2}=16ae^{4x}+be^{-x} \qquad (3)$$

$(1)+(2) \Rightarrow$ $$y+\frac{dy}{dx}=5ae^{4x} \qquad (4)$$

$(2)+(3) \Rightarrow$ $$\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx^2}=20ae^{4x}$$

$$=4\left(5ae^{4x}\right)$$

$$=4\left(y+\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx^2}=4y+4\frac{dy}{dx}$$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}-4y=0$ என்பது தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.5

$y = e^x (a\cos x + b\sin x)$ என்ற வளைவரைக் குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கு a மற்றும் b என்பன மாறத்தக்க மாறிலிகள்.

தீர்வு :

$$y = e^x (a\cos x + b\sin x) \qquad (1)$$

(1) -ஐ x -ஐ பொறுத்து வகைப்படுத்த, பெறுவது

$$\frac{dy}{dx} = e^x (a\cos x + b\sin x) + e^x (-a\sin x + b\cos x)$$

$$= y + e^x(-a\sin x + b\cos x) \qquad ((1) \text{ -விருந்து})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} - y = e^x(-a \sin x + b\cos x) \qquad (2)$$

மீண்டும் வகைப்படுத்த கிடைப்பது,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = e^x(-a \sin x + b \cos x) + e^x(-a \cos x - b \sin x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = e^x(-a \sin x + b\cos x) - e^x (a\cos x + b\sin x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dx} - y\right) - y \qquad ((1) \text{ மற்றும் } (2) \text{ விருந்து})$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$ என்பது தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

பயிற்சி 4.1

1. பின்வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் வரிசை மற்றும் படி காண்க.

(i) $\frac{dy}{dx} + 2y = x^3$

(ii) $\frac{d^3y}{dx^3} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 2\frac{dy}{dx} = 0$

(iii) $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{y - \frac{dy}{dx}}$

(iv) $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$

(v) $\frac{d^2y}{dx^2} + y + \left(\frac{dy}{dx} - \frac{d^3y}{dx^3}\right)^{3/2} = 0$

(vi) $(2 - y'')^2 = y''^2 + 2y'$

(vii) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y = x - \frac{dx}{dy}$

2. பின்வருவனவற்றிற்கு வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(i) $y = cx + c - c^3$ (ii) $y = c(x - c)^2$ (iii) $xy = c^2$ (iv) $x^2 + y^2 = a^2$

3. $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ -ல் α, β ஆகியவற்றை நீக்கி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை அமைக்க.

4. ஆதி வழிச்செல்லும் அனைத்து நேர்கோட்டுத் தொகுப்பின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை அமைக்க.

5. செவ்வகலம் $4a$ ஆகவும், அச்சினை x -அச்சிற்கு இணையாகவும் கொண்ட பரவளையத் தொகுப்பின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை அமைக்க.

6. ஆதி வழிச் செல்வதும், மையம் y-அச்சின் மீது அமையுமாறும் உள்ள வட்டக் குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

7. ஆதியை குவியமாகவும், x அச்சினை அச்சாகவும் கொண்ட பரவளையத் தொகுப்பின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு (Solution of a Differential Equation)

கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டினை நிறைவு செய்யுமாறு அமையும் சார்ந்த மற்றும் சாரா மாறிகளுக்கிடையேயான வகைக்கெழுக்களற்ற தொடர்பு, அச்சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும்.

வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்விலுள்ள மாறத்தக்க மாறிலிகளின் எண்ணிக்கையானது அவ்வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசைக்குச் சமமாக இருக்க வேண்டும். அத்தீர்வினை சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு (முழுமைத் தீர்வு) என்போம்.

4.2 முதல் வரிசை மற்றும் முதல் படி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (First order and first degree differential equations)

வரிசை ஒன்று மற்றும் படி ஒன்றுடைய வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டினை $f\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}\right) = 0$ என எழுதலாம். இங்கு நாம் சில வகை சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் காண்போம்.

4.2.1 பொதுத்தீர்வு மற்றும் சிறப்புத்தீர்வு (General solution and particular solution)

எந்த ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிற்கும் பொதுத்தீர்வு மற்றும் சிறப்புத்தீர்வு காண இயலும்.

4.2.2 மாறிகள் பிரிபடக்கூடிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடு (Differential Equation in which variables are separable)

ஒரு சமன்பாட்டில் அனைத்து x -ல் அமையும் உறுப்புகள் மற்றும் dx ஒரு புறத்திலும், அனைத்து y -ல் அமையும் உறுப்புகள் மற்றும் dy மறுபுறத்திலும் அமையுமாறு பிரிக்கத்தக்க வகையிலிருப்பின், அவைகள் பிரிபடக்கூடிய மாறிகள் என அழைக்கப்படும். அத்தகைய சமன்பாட்டின் பொதுவடிவம்.

$$f(x)dx = g(y)dy \quad (\text{அல்லது}) \quad f(x)dx + g(y)dy = 0$$

நேரடியாக தொகையிடுவதன் மூலம் நாம் தீர்வைப் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.6

தீர்க்க : $(x^2+x+1)dx+(y^2-y+3)dy=0$

தீர்வு:

$$(x^2+x+1)dx+(y^2-y+3)dy = 0$$

இது, $f(x)dx+g(y)dy = 0$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

தொகையிட நாம் பெறுவது,

$$\int(x^2+x+1)dx+\int(y^2-y+3)\,dy = c$$

$$\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)+\left(\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}+3y\right) = c$$

எடுத்துக்காட்டு 4.7

தீர்க்க : $\frac{dy}{dx}=e^{x-y}+x^2e^{-y}$

தீர்வு :

$$\frac{dy}{dx}=e^{x-y}+x^2e^{-y} = e^{-y}e^x + e^{-y}x^2$$

$$=e^{-y}\left(e^x+x^2\right)$$

மாறிகளை பிரிக்க நாம் பெறுவது, $e^y dy=\left(e^x+x^2\right)dx$

தொகையிட நாம் பெறுவது, $\int e^y dy=\int\left(e^x+x^2\right)dx$

$$e^y=e^x+\frac{x^3}{3}+c$$

எடுத்துக்காட்டு 4.8

தீர்க்க : $3e^x\tan y dx+(1+e^x)\sec^2 y dy=0$, $y(0)=\frac{\pi}{4}$

தீர்வு:

$$3e^x\tan y dx+(1+e^x)\sec^2 y\, dy = 0$$

$$3e^x\tan y\; dx = -(1+e^x)\sec^2 y\; dy$$

$$\frac{3e^x}{1+e^x}dx = -\frac{\sec^2 y}{\tan y}dy$$

தொகையிட நாம் பெறுவது $3\int\frac{e^x}{1+e^x}dx = -\int\frac{\sec^2 y}{\tan y}dy+c$

$$3\log(1+e^x) = -\log\tan y+\log c \quad \left[\because \int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log f(x)\right]$$

$$\log(1+e^x)^3 + \log\tan y = \log c$$

$$\log\left[\left(1+e^x\right)^3 \tan y\right] = \log c$$

$$(1+e^x)^3 \tan y = c \qquad (1)$$

தரவு : $y(0)=\frac{\pi}{4}$ (அதாவது) $x = 0$ எனில் $y=\frac{\pi}{4}$

$$(1) \Rightarrow \qquad (1+e^0)^3 \tan\frac{\pi}{4} = c$$

$$2^3(1) = c$$

$$\Rightarrow \qquad c = 8$$

தேவையான தீர்வு $(1+e^x)^3 \tan y = 8$

எடுத்துக்காட்டு 4.9

தீர்க்க : $\sec^2 x\tan y dx + \sec^2 y\tan x dy = 0$

தீர்வு:

மாறிகளை பிரிக்க, நாம் பெறுவது

$$\frac{\sec^2 x}{\tan x}dx + \frac{\sec^2 y}{\tan y}dy = 0$$

தொகையிட, நாம் பெறுவது

$$\int\frac{\sec^2 x}{\tan x}dx + \int\frac{\sec^2 y}{\tan y}dy = c$$

$$\log\tan x + \log\tan y = \log c$$

$$\log(\tan x\tan y) = \log c$$

$$\tan x \tan y = c$$

எடுத்துக்காட்டு 4.10

தீர்க்க : $ydx - xdy - 3x^2y^2e^{x^3}dx = 0$

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை $\frac{ydx-xdy}{y^2} - 3x^2e^{x^3}dx = 0$ என எழுதலாம்.

தொகையிட, $\int\frac{ydx-xdy}{y^2} - \int 3x^2e^{x^3}dx = c$

$$\int d\left(\frac{x}{y}\right)-\int e^{t}dt = c \qquad (\text{இங்கு } t=x^{3} \text{ மற்றும் } dt=3x^{2}dx\ )$$

$$\frac{x}{y}-e^{t} = c$$

$$\frac{x}{y}-e^{x^{3}} = c$$

எடுத்துக்காட்டு 4.11

தீர்க்க : $x-y\dfrac{dx}{dy}=a\left(x^{2}+\dfrac{dx}{dy}\right)$

தீர்வு:

$$x-y\frac{dx}{dy} = a\left(x^{2}+\frac{dx}{dy}\right)$$

$$x-y\frac{dx}{dy} = ax^{2}+a\frac{dx}{dy}$$

$$x-ax^{2} = a\frac{dx}{dy}+y\frac{dx}{dy}$$

$$x\left(1-ax\right) = (a+y)\,\frac{dx}{dy}$$

மாறிகளை பிரிக்க, நாம் பெறுவது

$$\frac{dx}{x(1-ax)} = \frac{dy}{a+y}$$

$$\left(\frac{a}{1-ax}+\frac{1}{x}\right)dx = \frac{dy}{a+y}$$

தொகையிட, $$\int\left(\frac{a}{1-ax}+\frac{1}{x}\right)dx = \int\frac{dy}{a+y}$$

$$-\log\left(1-ax\right)+\log x = \log(a+y)+\log c$$

$$\log\left(\frac{x}{1-ax}\right) = \log\left(c\left(a+y\right)\right)$$

$$\left(\frac{x}{1-ax}\right) = c\ (a+y)$$

$x =(1-ax)(a+y)c$ என்பது தேவையான தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.12

x கையுறைகளை தயாரிப்பு செய்வதற்கான இறுதிநிலைச் செலவுச்சார்பு $6+10x-6x^{2}$. ஒரு ஜோடி கையுறைகளை உற்பத்தி செய்ய ஆகும் மொத்த செலவு ₹100 எனில், மொத்த செலவுச் சார்பு மற்றும் சராசரி செலவுச்சார்பு ஆகியவற்றை காண்க.

தீர்வு:

$$MC = 6+10x-6x^2$$

அதாவது, $$\frac{dC}{dx} = 6+10x-6x^2$$

$$dC = (6+10x-6x^2)dx$$

$$\int dC = \int(6+10x-6x^2)dx+k$$

$$C = 6x+10\frac{x^2}{2}-6\frac{x^3}{3}+k$$

$$C = 6x+5x^2-2x^3+k \qquad (1)$$

கொடுக்கப்பட்டது : $x=2$ எனில் $C=100$

$\therefore \quad (1) \Rightarrow \quad 100 = 12+5(4)-2(8)+k$

$\Rightarrow \quad k = 84$

$\therefore \quad (1) \Rightarrow \quad C(x) = 6x+5x^2-2x^3+84$

சராசரி செலவுச் சார்பு : $AC = \dfrac{C}{x} = 6+5x-2x^2+\dfrac{84}{x}$

எடுத்துக்காட்டு 4.13

ஒரு வளைவரையின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி (x,y)-இல் வரையப்படும் செங்கோடு $(1,0)$ என்ற புள்ளி வழியேச் செல்கிறது. வளைவரை $(1,2)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லுமாயின், இதனை வகைக்கெழு சமன்பாட்டு வடிவில் மாற்றி, வளைவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு:

$P(x,y)$ என்ற ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் வளைவரைக்கு வரையப்பட்ட செங்கோட்டின் சாய்வு $= -\dfrac{dx}{dy}$

Q, $(1,0)$ என்க.

$\therefore$ செங்கோடு PQ -ன் சாய்வு = $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

அதாவது, $\dfrac{y-0}{x-1} = \dfrac{y}{x-1}$

$$\therefore -\frac{dx}{dy} = \frac{y}{x-1} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{y}{1-x}$$

அதாவது, $(1-x)dx = ydy$

$$\int (1-x)\,dx = \int y\,dy + c$$

$$x - \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + c \qquad (1)$$

இது $(1, 2)$ வழிச் செல்கிறது.

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} + c$$

$$c = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

$c = \frac{-3}{2}$ என (1) –ல் பிரதியிட,

$$x - \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} - \frac{3}{2}$$

$$2x - x^2 = y^2 - 3$$

$\Rightarrow \quad y^2 = 2x - x^2 + 3$ என்பது வளைவரையின் சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.14

₹2000 என்ற தொகைக்கு தொடர்ச்சி கூட்டுவட்டி கணக்கிடப்படுகிறது. வட்டிவீதம் ஆண்டொன்றுக்கு 5% இருப்பின், அத்தொகை எத்தனை ஆண்டுகளில் ஆரம்பத் தொகையைப் போல் இருமடங்காகும்? $(\log_e 2 = 0.6931)$

தீர்வு:

't' நேரத்தில் மூலதனம் P என்க.

$$\frac{dP}{dt} = \frac{5}{100}P = 0.05P$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dP}{P} = \int 0.05\, dt + c$$

$$\log_e P = 0.05t + c$$

$$P = e^{0.05t} e^c$$

$$P = c_1 e^{0.05t} \qquad (1)$$

$t = 0$ எனில் $P = 2000$

$$\Rightarrow \quad c_1 = 2000$$

$$\therefore (1) \Rightarrow \quad P = 2000e^{0.05t}$$

$P = 4000$ எனும் போது t –ஐ காணவேண்டும்.

$$(2) \Rightarrow \quad 4000 = 2{,}000e^{0.05t}$$

$$2 = e^{0.05t}$$

$$0.05t = \log 2$$

$$t = \frac{0.6931}{0.05} = 14$$ ஆண்டுகள் (தோராயமாக).

பயிற்சி 4.2

1. தீர்க்க: (i) $\frac{dy}{dx} = ae^{y}$ (ii) $\frac{1+x^2}{1+y} = xy\frac{dy}{dx}$

2. தீர்க்க : $y(1-x) - x\frac{dy}{dx} = 0$

3. தீர்க்க: (i) $ydx - xdy = 0$ (ii) $\frac{dy}{dx} + e^x + ye^x = 0$

4. தீர்க்க: $\cos x(1+\cos y)dx - \sin y(1+\sin x)dy = 0$

5. தீர்க்க: $(1-x)dy - (1+y)dx = 0$

6. தீர்க்க: (i) $\frac{dy}{dx} = y\sin 2x$ (ii) $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = ax + by$

7. ஆதி வழிச்செல்லும் வளைவரையின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $P(x, y)$ யிடத்து சாய்வு $\frac{x-a}{y-b}$ எனில், அவ்வளைவரையைக் காண்க.

4.2.3 சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (Homogeneous Differential Equations)

$f(x, y)$ மற்றும் $g(x, y)$ என்பன ஒவ்வொன்றும் x, y -இல் அமைந்த ஒரே படியுள்ள சமபடித்தான சார்புகளெனில் $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ என்பது ஒரு சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஆகும். (அல்லது) சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$ என எழுதலாம்.

வரிசை ஒன்று உடைய சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை தீர்க்கும் முறை (Method of solving first order Homogeneous differential equation)

(i) $f(x, y)$ மற்றும் $g(x, y)$ என்பன ஒவ்வொன்றும் ஒரே படியுள்ள சமபடித்தான சார்புகளா எனச்சோதிக்க.

அதாவது, $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$

(ii) $y = vx$ மற்றும் $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ எனப் பிரதியிடுக.

(iii) சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $v + x\frac{dv}{dx} = F(v)$ என உருமாற்றம் பெறும்.

(iv) மாறிகளைப் பிரிக்க, கிடைப்பது $x\frac{dv}{dx} = F(v) - v \Rightarrow \frac{dv}{F(v) - v} = \frac{dx}{x}$ ஆகும்.

(v) தொகையிடுதலுக்குப் பிறகு v மற்றும் x -ல் சமன்பாடு அமையும்.

(vi) v -ஐ $\frac{y}{x}$ என்று மாற்றி தீர்வைக் காணலாம்

குறிப்பு

சில நேரங்களில், சமபடித்தான வகைக்கெழு சமன்பாட்டை $\frac{dx}{dy} = F\left(\frac{x}{y}\right)$. . . (1) என்றவாறு எடுத்து எளிதாக தீர்க்கலாம்.

இந்த முறையில் $x = vy$ மற்றும் $\frac{dx}{dy} = v + x\frac{dv}{dy}$ என (1) -இல் பிரதியிட, வரிசை ஒன்று உடைய சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு மாறிகளை பிரிக்கக்கூடிய சமன்பாடாக மாறிவிடும். தொகையீடுதலுக்குப் பிறகு $v = \frac{x}{y}$ எனப் பிரதியிட்டு தீர்வைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.15

வகைக்கெழு சமன்பாட்டைத் தீர்க்க $y^2dx + (xy + x^2)dy = 0$

தீர்வு

$$y^2dx + (xy + x^2)\,dy = 0$$

$$(xy + x^2)\,dy = -y^2dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2}{xy + x^2} \qquad (1)$$

இது ஒரே படியுள்ள x, y- இல் அமைந்த சமபடித்தான வகைக்கெழு சமன்பாடாகும்.

$y = vx$ மற்றும் $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ என பிரதியிட,

$\therefore$ (1) ஆனது

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{-v^2x^2}{x\,vx + x^2}$$

$$= \frac{-v^2}{v + 1}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-v^2}{v+1} - v$$

$$= \frac{-v^2 - v^2 - v}{v+1}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-\left(v+2v^2\right)}{1+v}$$

மாறிகளை பிரிக்கக் கிடைப்பது,

$$\frac{1+v}{v(1+2v)}dv = \frac{-dx}{x}$$

$$\frac{(1+2v)-v}{v(1+2v)}dv = \frac{-dx}{x} \qquad (\because \; 1+v = 1+2v-v)$$

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{1+2v}dv = \frac{-dx}{x}$$

இருபுறமும் தொகையிட, நாம் பெறுவது

$$\int\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{1+2v}\right)dv = -\int\frac{dx}{x}$$

$$\log v - \frac{1}{2}\log(1+2v) = -\log x + \log c$$

$$\log\left(\frac{v}{\sqrt{1+2v}}\right) = \log\left(\frac{c}{x}\right)$$

$$\frac{v}{\sqrt{1+2v}} = \frac{c}{x}$$

$v = \frac{y}{x}$ என பிரதியிட,

$$\frac{\frac{y}{x}}{\sqrt{1+\frac{2y}{x}}} = \frac{c}{x}$$

$$\frac{y\sqrt{x}}{\sqrt{x+2y}} = c$$

$$\frac{y^2x}{x+2y} = k$$

இங்கு $k = c^2$

குறிப்பு

$\int\frac{1+v}{v^2+2v}dv$ -ஐ பகுதி பின்னமாக்குதல் முறையில் தொகையிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.16

வகைக்கெழு சமன்பாட்டைத் தீர்க்க : $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$.

தீர்வு:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y} \qquad (1)$$

இது ஒரு சமபடித்தான வகைக்கெழு சமன்பாடாகும்.

$y = vx$ மற்றும் $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ என பிரதியிட,

$$\therefore \quad (1) \Rightarrow \qquad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x - vx}{x + vx}$$

$$= \frac{1-v}{1+v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v}{1+v} - v$$

$$= \frac{1-2v-v^2}{1+v}$$

$$\frac{1+v}{v^2+2v-1}dv = \frac{-dx}{x}$$

இருபுறமும் 2 ஆல்பெருக்க,

$$\frac{2+2v}{v^2+2v-1}\,dv = -2\frac{dx}{x}$$

தொகையிட

$$\int\frac{2+2v}{v^2+2v-1}\,dv = -2\int\frac{dx}{x}$$

$$\log(v^2+2v-1) = -2\log x + \log c$$

$$v^2+2v-1 = \frac{c}{x^2}$$

$$x^2\,(v^2+2v-1) = c$$

$v = \frac{y}{x}$ என்பதால்

$$x^2\left[\frac{y^2}{x^2} + \frac{2y}{x} - 1\right] = c$$

$\therefore\ y^2 + 2xy - x^2 = c$ என்பது தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.17

$x=1,\ y=1$ எனும் போது $x^2\,dy + y\left(x+y\right)dx = 0$ என்ற வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வைக் காண்க.

தீர்வு

$$x^2dy + y(x+y)dx = 0$$

$$x^2dy = -y\,(x+y)\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\,(xy+y^2)}{x^2} \qquad (1)$$

$y = vx$ மற்றும் $\dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$ என (1) -இல் பிரதியிட,

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{-\,(x\,vx + v^2x^2)}{x^2}$$

$$= -\left(v+v^2\right)$$

$$x\frac{dv}{dx} = -v^2 - v - v$$

$$= -\,(v^2+2v)$$

மாறிகளை பிரிக்க கிடைப்பது,

$$\frac{dv}{v^2+2v} = \frac{-dx}{x}$$

$$\frac{dv}{v(v+2)} = \frac{-dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(v+2)-v}{v(v+2)}\right]dv = \frac{-dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+2}\right)dv = -\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\left[\log v - \log\,(v+2)\right] = -\log x + \log c$$

$$\frac{1}{2}\log\frac{v}{v+2} = \log\frac{c}{x}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{v}{v+2} = \frac{c^2}{x^2}$$

$v = \dfrac{y}{x}$ எனப் பிரதியிட,

$$\frac{y}{x\left(\dfrac{y}{x}+2\right)} = \frac{k}{x^2} \quad \text{இங்கு } c^2 = k$$

$$\frac{y\,x^2}{y+2x} = k \qquad (2)$$

$x=1$ மற்றும் $y=1$ எனில்,

$$\therefore (2) \Rightarrow \qquad k = \frac{1}{1+2}$$

$$k = \frac{1}{3}$$

$\therefore \quad 3x^2\,y = 2x + y$ என்பது தீர்வாகும்

எடுத்துக்காட்டு 4.18

x காலணிகள் தயாரிப்பதற்கான இறுதிநிலைச் செலவு $(3xy+y^2)\,dx + (x^2+xy)\,dy = 0$ மற்றும் ஒரு ஜோடி காலணிகள் தயாரிப்பதற்கான மொத்த செலவு ₹ 12 எனில், மொத்த செலவுச் சார்பைக் காண்க.

தீர்வு:

இறுதிநிலைச் செலவுச் சார்பு : $(x^2+xy)\,dy + (3xy+y^2)\,dx = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(3xy+y^2)}{x^2+xy} \qquad (1)$$

$y = vx$ மற்றும் $\dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$ என (1) –ல் பிரதியிட,

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{-(3x\;vx + v^2x^2)}{x^2 + x\;vx}$$

$$= \frac{-(3v+v^2)}{1+v}$$

இப்பொழுது,

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-3v-v^2}{1+v} - v$$

$$= \frac{-3v-v^2-v-v^2}{1+v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-4v-2v^2}{1+v}$$

$$\frac{1+v}{4v+2v^2}\,dv = \frac{-dx}{x}$$

தொகையிட,

$$\int \frac{1+v}{4v+2v^2}\,dv = -\int \frac{dx}{x}$$

இருபுறமும் 4 -ஆல் பெருக்கிட,

$$\int \frac{4+4v}{4v+2v^2}\,dv = -4\int \frac{dx}{x}$$

$$\log(4v+2v^2) = -4\log x + \log c$$

$$4v+2v^2 = \frac{c}{x^4}$$

$$x^4(4v+2v^2) = c$$

$v = \dfrac{y}{x}$ என பிரதியிட,

$$x^4\left(4\frac{y}{x}+2\frac{y^2}{x^2}\right) = c$$

$$x^4\left[\frac{4xy+2y^2}{x^2}\right] = c$$

$$c = 2x^2(2xy+y^2) \qquad (2)$$

ஒரு ஜோடி காலணிகளை தயாரிப்பதற்கான செலவு = ₹ 12

$x = 2$ மற்றும் $y = 12$ எனில் $c = 8\,[48+144] = 1536$

செலவுச் சார்பு : $x^2\,(2xy+y^2) = 768$

எடுத்துக்காட்டு 4.19

$\dfrac{dy}{dq} = \dfrac{q^2+3y^2}{2qy}$ என்ற இறுதிநிலை சமன்பாட்டில் வருவாய் 'y' மற்றும் வெளியீடு q என கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. வெளியீடு 1 அலகு இருக்கும் பொழுது வருவாய் ₹ 5 எனில், மொத்த வருவாய்ச் சார்பைக் காண்க.

தீர்வு:

$$MR = \frac{dy}{dq} = \frac{q^2+3y^2}{2qy} \qquad (1)$$

$y = vq$ மற்றும் $\dfrac{dy}{dq} = v + q\dfrac{dv}{dq}$ என (1) -இல் பிரதியிட,

$$(1) \Rightarrow \qquad v+q\frac{dv}{dq} = \frac{q^2+3v^2q^2}{2q\,vq}$$

$$= \frac{1+3v^2}{2v}$$

$$q\frac{dv}{dq} = \frac{1+3v^2}{2v} - v$$

$$= \frac{1+3v^2-2v^2}{2v}$$

$$= \frac{1+v^2}{2v}$$

$$\frac{2v}{1+v^2}\,dv = \frac{dq}{q}$$

தொகையிட,

$$\int \frac{2v}{1+v^2}\,dv = \int \frac{dq}{q}$$

$$\log(1+v^2) = \log q + \log c$$

$$1+v^2 = cq$$

$v = \dfrac{y}{q}$ எனபிரதியிட,

$$1+\frac{y^2}{q^2} = cq$$

$$q^2+y^2 = c\,q^3 \qquad (2)$$

வெளியீடு 1 அலகு இருக்கும் பொழுது வருவாய் ₹ 5 எனில்

$1+25 = c \Rightarrow c = 26$ (2) லிருந்து

$\therefore\ q^2+y^2 = 26q^3$ என்பது மொத்த வருவாய் சார்பு ஆகும்.

பயிற்சி 4.3

கீழ்வரும் சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

1. $x\dfrac{dy}{dx} = x+y$

2. $(x-y)\dfrac{dy}{dx} = x+3y$

3. $x\dfrac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2+y^2}$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x-2y}{2x-3y}$

5. $(y^2 - 2xy)\,dx = (x^2 - 2xy)\,dy$

6. ஒரு வளைவரையில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி (x,y) இடத்து அமையக்கூடிய தொடுகோட்டின் சாய்வு $(y^3 - 2yx^2)\,dx + (2xy^2 - x^3)\,dy = 0$ ஆகும். மேலும் இந்த வளைவரையானது $(1,2)$ புள்ளி வழிச் செல்கிறது எனில், வளைவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

7. மின்சார சாதனங்களை உற்பத்தி செய்யும் நிறுவனம் வீட்டு பயன்பாட்டிற்கான மின் மாற்றிகளை (switches) தயாரிக்கின்றது. இதற்கான இறுதி நிலை வருவாய் சார்பு $(x^2 + y^2)dy = xydx$ என அந்த நிறுவனம் மதிப்பீடு செய்கிறது (இங்கு x என்பது அலகுகளின் எண்ணிக்கை (ஆயிரங்களில்)) எனில், மொத்த வருவாய் சார்பை காண்க.

4.2.4 வரிசை ஒன்றுடைய நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (Linear differential equations of first order)

வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் உள்ள சார்ந்த மாறி மற்றும் அதன் வகைக்கெழுக்களின் படி ஒன்று மற்றும் இவ்விரண்டின் பெருக்கல் பலன் இல்லாமலும் இருக்குமாயின் அச்சமன்பாடு நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடு எனப்படும்.

முதல் வரிசை நேரிய வகைக்கெழுச் சாமன்பாட்டின் பொதுவடிவம் $\dfrac{dy}{dx} + Py = Q \quad \ldots(1)$

இங்கு P மற்றும் Q ஆகியவை x இன் சார்புகள் மட்டுமே. சமன்பாடு (1) ஆனது y -இல் நேரியச் சமன்பாடாகும்.

இதன் தீர்வானது $ye^{\int pdx} = \int Qe^{\int pdx}dx + c$ என அமையும் இங்கு $e^{\int pdx}$ என்பது தொகையீட்டுக் காரணி (Integrating factor) எனப்படும். மேலும், இதனை தொ.கா (I.F) எனச் சுருக்கமாக குறிப்பர்.

குறிப்பு

வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $\dfrac{dx}{dy} + Px = Q$ (x இல் நேரியது) இல் P மற்றும் Q ஆகியவை y இன் சார்புகள் மட்டுமே. இதன் தீர்வானது $xe^{\int pdy} = \int Qe^{\int pdy}dy + c$ என அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.20

தீர்க்க : $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = x^3$

தீர்வு:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = x^3$$

இது $\dfrac{dy}{dx} + Py = Q$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

இங்கு $P = \dfrac{1}{x}, \quad Q = x^3$

$$\int P\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \log x$$

$$I.F = e^{\int p\,dx} = e^{\log x} = x$$

தேவையான தீர்வு : $$y(I.F) = \int Q(I.F)\,dx + c$$

$$yx = \int x^3 . x\ dx + c$$

$$= \int x^4 dx + c$$

$$= \frac{x^5}{5} + c$$

$$\therefore \quad yx = \frac{x^5}{5} + c$$

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடானது எப்பொழுதும் முதல் வரிசையை பெற்றிருக்கும். ஆனால் எல்லா முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாடும் நேரியதாக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{3dy}{dx} + 2y^2 = 0$$

என்பது நேரியதாக இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 4.21

தீர்க்க : $\cos^2 x \dfrac{dy}{dx} + y = \tan x$

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{\cos^2 x} y = \dfrac{\tan x}{\cos^2 x}$ என எழுதலாம்.

அதாவது, $$\frac{dy}{dx} + y\sec^2 x = \tan x \sec^2 x$$

இது $\dfrac{dy}{dx} + Py = Q$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

இங்கு $P = \sec^2 x, Q = \tan x \sec^2 x$

$$\int P\,dx = \int \sec^2 x\ dx = \tan x$$

$$I.F = e^{\int p\,dx} = e^{\tan x}$$

தேவையான தீர்வு : $$y(I.F) = \int Q(I.F)\,dx + c$$

$$ye^{\tan x} = \int \tan x \sec^2 x\, e^{\tan x}\ dx + c$$

$\tan x = t$ என்க.

$$\sec^2 x\,dx = dt$$

$$\therefore\ ye^{\tan x} = \int te^t\ dt + c$$

$$= \int t\,d(e^t) + c$$

$$= te^t - e^t + c$$

$$= \tan x\, e^{\tan x} - e^{\tan x} + c$$

$$ye^{\tan x} = e^{\tan x}(\tan x - 1) + c$$

எடுத்துக்காட்டு 4.22

தீர்க்க : $(x^2+1)\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 4x^2$

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2+1}y = \frac{4x^2}{x^2+1}$$ என்றவாறு மாற்றி அமைக்கலாம்.

இது $\dfrac{dy}{dx} + Py = Q$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

இங்கு $P = \dfrac{2x}{x^2+1}, Q = \dfrac{4x^2}{x^2+1}$

$$\int Pdx = \int \frac{2x}{x^2+1}dx = \log(x^2+1)$$

$$I.F = e^{\int pdx} = e^{\log(x^2+1)} = x^2+1$$

தேவையான தீர்வு $y(I.F) = \int Q(I.F)dx + c$

$$y(x^2+1) = \int \frac{4x^2}{x^2+1}(x^2+1)dx + c$$

$$y(x^2+1) = \frac{4x^3}{3} + c$$

எடுத்துக்காட்டு 4.23

தீர்க்க : $\dfrac{dy}{dx} - 3y\cot x = \sin 2x$, இங்கு $x = \dfrac{\pi}{2}$ எனில், $y = 2$

தீர்வு:

$$\frac{dy}{dx} - (3\cot x).y = \sin 2x$$

இது $\dfrac{dy}{dx} + Py = Q$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

இங்கு $P = -3\cot x,\ Q = \sin 2x$

$$\int P dx = \int -3\cot x dx = -3\log\sin x = -\log\sin^3 x = \log\frac{1}{\sin^3 x}$$

$$\text{I.F.} = e^{\log\frac{1}{\sin^3 x}} = \frac{1}{\sin^3 x}$$

தேவையானதீர்வு : $y\,(I.F) = \int Q(I.F)dx + c$

$$y\frac{1}{\sin^3 x} = \int \sin 2x \frac{1}{\sin^3 x}\, dx + c$$

$$y\frac{1}{\sin^3 x} = \int 2\sin x\cos x \times \frac{1}{\sin^3 x} dx + c$$

$$= 2\int \frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x}\, dx + c$$

$$= 2\int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx + c$$

$$y\frac{1}{\sin^3 x} = -2\operatorname{cosec} x + c \qquad (1)$$

$x = \dfrac{\pi}{2}$ மற்றும் $y = 2$ எனில்,

$$(1) \Rightarrow \qquad 2\left(\frac{1}{1}\right) = -2\times 1 + c \Rightarrow c = 4$$

$$\therefore\ (1) \Rightarrow \qquad y\frac{1}{\sin^3 x} = -2\operatorname{cosec} x + 4$$

எடுத்துக்காட்டு 4.24

ஒரு நிறுவனம் ஒன்றில் குறிப்பிட்ட x டன்கள் பொருளை தயாரிப்பதற்கு ஆகும் செலவு C -ஐ $x\dfrac{dC}{dx} = \dfrac{3}{x} - C$ எனும் சமன்பாட்டினால் குறித்தால் $x = 1$ மற்றும் $C = 2$ எனில், C மற்றும் x ஆகியவற்றிற்கிடையேயான தொடர்பைக் காண்க.

தீர்வு:

$$x\frac{dC}{dx} = \frac{3}{x} - C$$

$$\frac{dC}{dx} = \frac{3}{x^2} - \frac{C}{x}$$

$$\frac{dC}{dx} + \frac{C}{x} = \frac{3}{x^2}$$

அதாவது, $$\frac{dC}{dx} + \frac{1}{x}C = \frac{3}{x^2}$$

இது $\dfrac{dC}{dx} + PC = Q$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

இங்கு, $P=\dfrac{1}{x}, Q=\dfrac{3}{x^2}$

$$\int Pdx = \int \frac{1}{x}dx = \log x$$

$$I.F = e^{\int pdx} = e^{\log x} = x$$

தீர்வு : $C(I.F) = \int Q(I.F)dx + k$, இங்கு k ஒரு மாறிலி

$$Cx = \int \frac{3}{x^2} x dx + k$$

$$= 3\int \frac{1}{x}dx + k$$

$$Cx = 3\log x + k \qquad (1)$$

$x=1$ மற்றும் $C=2$ எனில், $k=2$ ஆகும்.

$\therefore$ C மற்றும் x -க்கான தொடர்பு : $Cx = 3\log x + 2$

பயிற்சி 4.4

பின்வருவனவற்றை தீர்க்க:

1. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = x$

2. $\dfrac{dy}{dx} + y\cos x = \sin x \cos x$

3. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^4$

4. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{3x^2}{1+x^3}y = \dfrac{1+x^2}{1+x^3}$

5. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = xe^x$

6. $\dfrac{dy}{dx} + y\tan x = \cos^3 x$

7. $\dfrac{dy}{dx} + 2y\tan x = \sin x$ மற்றும் $x = \dfrac{\pi}{3}$ எனில் $y=0$ எனும் நிலையில் y-ஐ x-இன் வாயிலாக எழுதுக.

8. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = xe^x$

9. ஒரு வங்கியானது தொடர் கூட்டுவட்டிமுறையில் வட்டியைக் கணக்கிடுகிறது. அதாவது வட்டிவீதத்தை அந்தந்த நேரத்தில் அசலின் மாறுவீதத்தில் கணக்கிடுகிறது. வருடத்திற்கு 8% தொடர் கூட்டு வீதத்தில் ₹ 1,00,000 தொகையை அவ்வங்கியில் ஒருவர் முதலீடு செய்தால் 10 வருடங்களுக்கு பின்னர்அவர்எவ்வளவு தொகையைப் பெறுவார்?

4.3 மாறிலிகளைக் கெழுக்களாகக் கொண்ட இரண்டாம் வரிசை நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்
(Second Order first degree differential equations with constant coefficients)

4.3.1 மாறிலிகளைக் கெழுக்களாகக் கொண்ட இரண்டாம் வரிசை நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம்
(A general second order linear differential equation with constant coefficients)

$$\boxed{a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=f(x)}$$

$aD^2y+bDy+cy=f(x)$, இங்கு $\frac{d}{dx}=D, \frac{d^2}{dx^2}=D^2$

அதாவது, $\phi(D)y=f(x)$ (1)

இங்கு $\phi(D)=aD^2+bD+c$ $(a,b$ மற்றும் c மாறிலிகள்)

சமன்பாடு (1) -ஐ தீர்க்க, முதலில் நாம் $\phi(D)y=0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க வேண்டும். இத்தீர்வானது நிரப்புச் சார்பு (C.F) எனப்படும்.

அடுத்ததாக $f(x)$ன் மீது $\frac{1}{\phi(D)}$ செயல்படுத்தும் போது கிடைக்கும் தீர்வானது சிறப்புச் தொகை $(P.I)$ என அழைக்கப்படுகிறது.

$$\therefore \quad PI=\frac{1}{\phi(D)}f(x)$$

பொதுத் தீர்வு : $y=$ நிரப்புச் சார்பு (C.F) + சிறப்புச் தொகை $(P.I)$

வகை 1 : $f(x)=0$

அதாவது, $\phi(D)y=0$

இதனை தீர்க்க, $\phi(D)=0$

D க்கு பதிலாக m -ஐ பிரதியிடுக, இச்சமன்பாட்டை துணைச் சமன்பாடு என்கிறோம். $\phi(m)=0$ என்பது ஒரு இருபடிச் சமன்பாடாகும். எனவே இதற்கு m_1 மற்றும் m_2 என்ற இரு தீர்வுகள் உள்ளன. இவ்வகைத் தீர்வுகள் பின்வரும் நிலையில் அமையும்.

வ.எண்	தீர்வுகளின் தன்மை	நிரப்புச் சார்பு
1	மெய் மற்றும் வெவ்வேறானவை $(m_1 \neq m_2)$	$Ae^{m_1x}+Be^{m_2x}$
2	மெய் மற்றும் சமமானவை $m_1=m_2=m$ என்க	$(Ax+B)e^{mx}$
3	கலப்பெண்கள் $(\alpha \pm i\beta)$	$e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$

இங்கு A மற்றும் B என்பன ஏதேனும் இருமாறிலிகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.25

தீர்க்க : $(D^2 - 3D - 4)y = 0$

தீர்வு:

$$(D^2 - 3D - 4)y = 0$$

துணைச் சமன்பாடு :

$$m^2 - 3m - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m-4)(m+1) = 0$$

$$m = -1, 4$$

மூலங்கள் மெய் மற்றும் வெவ்வேறானவை.

$\therefore$ நிரப்புச் சார்பு : CF = $Ae^{-x} + Be^{4x}$

பொதுத் தீர்வு : $y = Ae^{-x} + Be^{4x}$

எடுத்துக்காட்டு 4.26

தீர்க்க : $9y'' - 12y' + 4y = 0$

தீர்வு:

$$\left(9D^2 - 12D + 4\right)y = 0$$

துணைச் சமன்பாடு :

$$(3m-2)^2 = 0$$

$$(3m-2)(3m-2) = 0 \quad \Rightarrow m = \frac{2}{3}, \frac{2}{3}$$

மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம்

நிரப்புச் சார்பு : $C.F = (Ax+B)e^{\frac{2}{3}x}$

பொதுத் தீர்வு : $y = (Ax+B)e^{\frac{2}{3}x}$

எடுத்துக்காட்டு 4.27

தீர்க்க : $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$

தீர்வு:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+5y = 0$$

$$\left(D^2-4D+5\right)y = 0$$

துணைச் சமன்பாடு :

$$m^2-4m+5 = 0$$

$$\Rightarrow (m-2)^2-4+5 = 0$$

$$(m-2)^2 = -1$$

$$m-2 = \pm\sqrt{-1}$$

$m = 2\pm i$, $\alpha \pm i\beta$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

$\therefore$ $C.F = e^{2x}\left[A\cos x+B\sin x\right]$

பொதுத் தீர்வு : $y = e^{2x}\left[A\cos x+B\sin x\right]$

எடுத்துக்காட்டு 4.28

தீர்க்க : $\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}+2x=0$. இங்கு $t=0$ எனில் $x=0$ மற்றும் $\frac{dx}{dt}=1$.

தீர்வு:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}+2x = 0$$

$(D^2-3D+2)x = 0$ இங்கு $D=\frac{d}{dt}$ மற்றும் $D^2=\frac{d^2}{dt^2}$

துணைச் சமன்பாடு : $m^2-3m+2=0$

$$(m-1)(m-2) = 0$$

$$m = 1, 2$$

நிரப்புச் சார்பு : $C.F = Ae^t+Be^{2t}$

பொதுத் தீர்வு : $x = Ae^t+Be^{2t}$ $\quad (1)$

$t=0$ மற்றும் $x=0$ எனில்,

$(1) \Rightarrow$ $0 = A+B$ $\quad (2)$

(1) –ல் t-ஐ பொறுத்து வகைக் காண,

$$\frac{dx}{dt} = Ae^{t} + 2Be^{2t}$$

$$t=0 \text{ மற்றும் } \frac{dx}{dt} = 1 \text{ எனில்,}$$

$$A + 2B = 1 \qquad (3)$$

$A + B = 0$ மற்றும் $A + 2B = 1$ –ஐ தீர்க்க, நாம் பெறுவது $A = -1$, $B = 1$ ஆகும்.

$$\therefore\ (1) \Rightarrow \quad x = -e^{t} + e^{2t}$$

$$= e^{2t} - e^{t}$$

வகை II : $f(x) = e^{ax}$ அதாவது, $\phi(\mathrm{D})\,\mathrm{y} = \mathrm{e}^{ax}$

$$\text{P.I} = \frac{1}{\phi(D)} e^{ax}$$

$\mathrm{D} = a$ எனும்பொழுது $\phi(D) \neq 0$ எனில் D க்கு பதிலாக a யை பிரதியிடவும்.

$\mathrm{D} = a$ எனும்பொழுது $\phi(D) = 0$ எனில்,

$$\text{P.I} = x\frac{1}{\phi'(D)} e^{ax}$$

$\mathrm{D} = a$ எனும்பொழுது $\phi'(D) \neq 0$ எனில் Dக்கு பதிலாக a-ஐப் பிரதியிடவும்.

$D = a$ எனும்பொழுது $\phi'(D) = 0$ எனில்

$$\text{P.I} = x^2 \frac{1}{\phi''(D)} e^{ax}$$ இவ்வாறாக தொடரலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.29

தீர்க்க : $\left(D^2 - 4D - 1\right) y = e^{-3x}$

தீர்வு:

$$\left(D^2 - 4D - 1\right) y = e^{-3x}$$

துணைச் சமன்பாடு :

$$m^2 - 4m - 1 = 0$$

$$(m-2)^2 - 4 - 1 = 0$$

$$(m-2)^2 = 5$$

$$m-2 = \pm\sqrt{5}$$

$$m = 2\pm\sqrt{5}$$

$$\text{C.F} = Ae^{\left(2+\sqrt{5}\right)x} + Be^{\left(2-\sqrt{5}\right)x}$$

$$\text{PI} = \frac{1}{\phi(D)} f(x)$$

$$= \frac{1}{D^2-4D-1} e^{-3x}$$

$$= \frac{1}{(-3)^2-4(-3)-1} e^{-3x} \quad (D \text{ க்கு பதிலாக } -3 \text{ஐ பிரதியிட})$$

$$= \frac{1}{9+12-1} e^{-3x}$$

$$= \frac{e^{-3x}}{20}$$

பொதுத் தீர்வு : $y = \text{C.F+P.I}$

$\Rightarrow$ $y = Ae^{\left(2+\sqrt{5}\right)x} + Be^{\left(2-\sqrt{5}\right)x} + \frac{e^{-3x}}{20}$

எடுத்துக்காட்டு 4.30

தீர்க்க: $\left(D^2-2D+1\right)y = e^{2x}+e^{x}$

தீர்வு:

$$\left(D^2-2D+1\right)y = e^{2x}+e^{x}$$

துணைச் சமன்பாடு :

$$m^2-2m+1 = 0$$

$\Rightarrow$ $(m-1)(m-1) = 0$

$$m = 1, 1$$

$$\text{C.F} = (Ax+B)e^{x}$$

$$\text{PI} = \frac{1}{\phi(D)} f(x) = \frac{1}{D^2-2D+1}\left(e^{2x}+e^{x}\right)$$

இங்கு, $P.I_1 = \frac{1}{D^2-2D+1} e^{2x}$

$$= \frac{1}{4-4+1} e^{2x} \quad (D \text{ க்கு பதிலாக } 2 \text{ ஐ பிரதியிட})$$

$$= e^{2x}$$

மற்றும் $$P.I_2 = \frac{1}{D^2-2D+1}e^x$$

$$= \frac{1}{(D-1)^2}e^x$$

D க்கு 1-ஐ பிரதியிட $(D-1)^2 = 0$

$$\therefore \quad P.I_2 = x.\frac{1}{2(D-1)}e^x$$

D க்கு பதிலாக 1-ஐ பிரதியிட, 2(D–1) = 0

$$\therefore \quad P.I_2 = x^2\frac{1}{2}e^x$$

பொதுத் தீர்வு : $y = \text{C.F+P.I}_1\text{+P.I}_2$

$$y = (Ax+B)e^x + e^{2x} + \frac{x^2}{2}e^x$$

எடுத்துக்காட்டு 4.31

தீர்க்க: $(3D^2+D-14)y = 4-13e^{\frac{-7}{3}x}$

தீர்வு:

$$(3D^2+D-14)y = 4-13e^{\frac{-7}{3}x}$$

துணைச் சமன்பாடு :

$$3m^2+m-14 = 0$$

$$(3m+7)(m-2) = 0$$

$$m = \frac{-7}{3}, 2$$

$$\text{C.F} = Ae^{\frac{-7}{3}x} + Be^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad \text{PI} = \frac{1}{\phi(D)}f(x) = \frac{1}{3D^2+D-14}\left(4-13e^{\frac{-7}{3}x}\right)$$

$$= \frac{1}{3D^2+D-14}(4) + \frac{1}{3D^2+D-14}\left(-13e^{\frac{-7}{3}x}\right)$$

$$= PI_1 + PI_2$$

$$\text{P.I}_1 = \frac{1}{3D^2+D-14}4e^{0x}$$

$$= \frac{1}{0+0-14} 4e^{0x} \quad (D \text{ -க்கு பதிலாக } 0 \text{ என பிரதியிட})$$

$$\text{P.I}_1 = \frac{-4}{14}$$

$$P.I_2 = \frac{1}{3D^2+D-14} \times (-13) e^{\frac{-7}{3}x}$$

D -க்கு பதிலாக $\frac{-7}{3}$ என பிரதியிட, $3D^2+D-14=0$

$$\therefore \qquad P.I_2 = x.\frac{1}{6D+1}\left(-13e^{\frac{-7}{3}x}\right)$$

D -க்கு பதிலாக $\frac{-7}{3}$ என பிரதியிட,

$$\therefore \qquad P.I_2 = x\frac{1}{6\left(\frac{-7}{3}\right)+1}\left(-13e^{\frac{-7}{3}x}\right)$$

$$= x\frac{1}{-13}\left(-13e^{\frac{-7}{3}x}\right)$$

$$= xe^{\frac{-7}{3}x}$$

பொதுத் தீர்வு : $y = C.F. + P.I_1 + P.I_2$

$$y = Ae^{\frac{-7}{3}x} + Be^{2x} - \frac{2}{7} + xe^{\frac{-7}{3}x}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.32

$Q_d = 29 - 2p - 5\frac{dp}{dt} + \frac{d^2p}{dt^2}$ மற்றும் $Q_s = 5 + 4p$ என்பன முறையே ஒரு பொருளின் தேவை அளவு மற்றும் அளிப்பு அளவு ஆகியவற்றைக் குறிக்கின்றன.இங்கு P விலையைக் குறிக்கிறது. சந்தை பரிமாற்றத்தில் சமன்நிலை விலையைக் காண்க.

தீர்வு:

சமன்நிலை விலையில், $Q_d = Q_s$

$$\Rightarrow \qquad 29-2p-5\frac{dp}{dt}+\frac{d^2p}{dt} = 5+4p$$

$$\Rightarrow \qquad 24-6p-5\frac{dp}{dt}+\frac{d^2p}{dt^2} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d^2p}{dt^2} - 5\frac{dp}{dt} - 6p = -24$$

$$(D^2 - 5D - 6)\,p = -24$$

துணைச் சமன்பாடு :

$$m^2 - 5m - 6 = 0$$

$$(m-6)(m+1) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad m = 6,\ -1$$

$$\text{C.F} = \text{A}e^{6t} + Be^{-t}$$

$$\text{P.I} = \frac{1}{\phi(D)}\, f(t)$$

$$= \frac{1}{D^2 - 5D - 6}\,(-24)e^{0t}$$

$$= \frac{-24}{-6} \qquad (D\text{-க்கு பதிலாக } 0 \text{ வை பிரதியிட})$$

$$= 4$$

பொதுத் தீர்வு :

$$p = C.F + P.I$$

$$= Ae^{6t} + Be^{-t} + 4$$

பயிற்சி 4.5

கீழ்காணும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை தீர்க்க :

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6\dfrac{dy}{dx} + 8y = 0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$

(3) $\left(D^2 + 2D + 3\right)y = 0$

(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2k\dfrac{dy}{dx} + k^2y = 0$

(5) $\left(D^2 - 2D - 15\right)y = 0$, $x = 0$ எனும்போது $\dfrac{dy}{dx} = 0$ மற்றும் $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2$

(6) $\left(4D^2 + 4D - 3\right)y = e^{2x}$

(7) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 16y = 0$

(8) $x = 0$ மற்றும் $x = \log 2$ எனும்போது $\left(D^2 - 3D + 2\right)y = e^{3x}$ -ன் தீர்வானது பூச்சியமாகிறது எனில், சமன்பாட்டை தீர்க்க.

(9) $\left(D^2 + D - 6\right)y = e^{3x} + e^{-3x}$

(10) $\left(D^2 - 10D + 25\right)y = 4e^{5x} + 5$

(11) $\left(4D^2+16D+15\right)y=4e^{\frac{-3}{2}x}$ (12) $\left(3D^2+D-14\right)y=13e^{2x}$

(13) $Q_d=13-6p+2\dfrac{dp}{dt}+\dfrac{d^2p}{dt^2}$ மற்றும் $Q_s=-3+2p$ என்பன முறையே ஒரு பொருளின் தேவை அளவு மற்றும் அளிப்பு அளவு ஆகியவற்றைக் குறிக்கின்றன. இங்கு p விலையைக் குறிக்கிறது. சந்தை பரிமாற்றத்தில் சமன்நிலை விலையைக் காண்க.

பயிற்சி 4.6

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்

1. $\dfrac{d^4y}{dx^4}-\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^4+\dfrac{dy}{dx}=3$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் படி ஆனது

   (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

2. $\sqrt{\dfrac{d^2y}{dx^2}}=\sqrt{\dfrac{dy}{dx}+5}$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை மற்றும் படி முறையே

   (a) 2 மற்றும் 3 (b) 3 மற்றும் 2 (c) 2 மற்றும் 1 (d) 2 மற்றும் 2

3. $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}-4=0$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை மற்றும் படி முறையே

   (a) 2 மற்றும் 6 (b) 3 மற்றும் 6 (c) 1 மற்றும் 4 (d) 2 மற்றும் 4

4. $\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3+2y^{\frac{1}{2}}=x$ என்றவகைக்கெழுச்சமன்பாடு

   (a) வரிசை 2 மற்றும் படி 1 உடையது (b) வரிசை 1 மற்றும்படி 3 உடையது

   (c) வரிசை 1 மற்றும்படி 6 உடையது (d) வரிசை 1 மற்றும்படி 2 உடையது

5. $y=ae^x+be^{-x}$ என்ற சமன்பாட்டில் a -யையும் b யையும் நீக்கக் கிடைக்கும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

   (a) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-y=0$ (b) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}=0$ (c) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$ (d) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-x=0$

6. $y=cx+c-c^3$ எனில், அதன் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

   (a) $y=x\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dy}{dx}-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3$ (b) $y+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3=x\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{dy}{dx}$

   (c) $\dfrac{dy}{dx}+y=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3-x\dfrac{dy}{dx}$ (d) $\dfrac{d^3y}{dx^3}=0$

7. $\dfrac{dx}{dy}+Px=Q$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தொகையீட்டுக் காரணி

   (a) $e^{\int Pdx}$ (b) $e^{-\int Pdx}$ (c) $\int Pdy$ (d) $e^{\int Pdy}$

8. $\left(D^2+4\right)y=e^{2x}$ இன் நிரப்புச் சார்பு

(a) $\left(Ax+B\right)e^{2x}$ (b) $\left(Ax+B\right)e^{-2x}$ (c) $A\cos 2x+B\sin 2x$ (d) $Ae^{-2x}+Be^{2x}$

9. $y=mx+c$ –இன் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு (m மற்றும் c என்பன மாறத்தக்க மாறிலிகள்)

(a) $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ (b) $y=x\frac{dy}{dx}+c$ (c) $xdy+ydx=0$ (d) $ydx-xdy=0$

10. $\frac{d^2y}{dx^2}-8\frac{dy}{dx}+16y=2e^{4x}$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தொகை

(a) $\frac{x^2e^{4x}}{2!}$ (b) $\frac{e^{4x}}{2!}$ (c) x^2e^{4x} (d) xe^{4x}

11. $\frac{dx}{dy}+px=0$ என்பதன் தீர்வானது

(a) $x=ce^{py}$ (b) $x=ce^{-py}$ (c) $x=py+c$ (d) $x=cy$

12. $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தொகையீட்டுக் காரணி $\sec^2 x$ எனில் $P=$

(a) $2\tan x$ (b) $\sec x$ (c) $\cos^2 x$ (d) $\tan^2 x$

13. $x\frac{dy}{dx}-y=x^2$ -இன் தொகையீட்டுக் காரணி

(a) $\frac{-1}{x}$ (b) $\frac{1}{x}$ (c) $\log x$ (d) x

14. $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ (இங்கு P மற்றும் Q என்பன x –ஐ சார்ந்த சார்புகள்) என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு

(a) $y=\int Qe^{\int Pdx}dx+c$ (b) $y=\int Qe^{-\int Pdx}dx+c$

(c) $ye^{\int Pdx}=\int Qe^{\int Pdx}dx+c$ (d) $ye^{\int Pdx}=\int Qe^{-\int Pdx}dx+C$

15. $y=e^{-2x}\left(A\cos x+B\sin x\right)$-ல் A மற்றும் B யை நீக்குவதன் மூலம் அமைக்கப்படும் வகைக் கெழுச் சமன்பாடு

(a) $y_2-4y_1+5=0$ (b) $y_2+4y-5=0$

(c) $y_2-4y_1-5=0$ (d) $y_2+4y_1+5=0$

16. $f\left(D\right)y=e^{ax}$ இங்கு $f\left(D\right)=\left(D-a\right)^2$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் சிறப்புத்தொகை

(a) $\frac{x^2}{2}e^{ax}$ (b) xe^{ax} (c) $\frac{x}{2}e^{ax}$ (d) x^2e^{ax}

17. $x^2+y^2=a^2$ என்பதன் வகைகெழுச் சமன்பாடு

(a) $xdy+ydx=0$ (b) $ydx-xdy=0$ (c) $xdx-ydx=0$ (d) $xdx+ydy=0$

18. $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=0$ என்பதன் நிரப்புச் சார்பு

(a) $A+Be^x$ (b) $(A+B)e^x$ (c) $(Ax+B)e^x$ (d) Ae^x+B

19. $(3D^2+D-14)y=13e^{2x}$ -ன் சிறப்புத் தொகை

(a) $\frac{x}{2}e^{2x}$ (b) xe^{2x} (c) $\frac{x^2}{2}e^{2x}$ (d) $13xe^{2x}$

20. $\frac{dy}{dx}=\cos x$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு

(a) $y=\sin x+1$ (b) $y=\sin x - 2$

(c) $y=\cos x+c$, c மாறத்தக்க மாறிலி

(d) $y=\sin x+c$, c மாறத்தக்க மாறிலி

21. $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$ என்ற வடிவில் உள்ள சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு தீர்க்கப்பட பயன்படுத்தப்படும் பிரதியிடல்

(a) $y=v\,x$ (b) $v=y\,x$ (c) $x=v\,y$ (d) $x=v$

22. $\frac{dx}{dy}=f\left(\frac{x}{y}\right)$ என்ற வடிவில் உள்ள சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு தீர்க்கப்பட பயன்படுத்தப்படும் பிரதியிடல்,

(a) $x=v\,y$ (b) $y=v\,x$ (c) $y=v$ (d) $x=v$

23. $\frac{dy}{dx}=\frac{y(x-y)}{x(x+y)}$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் $y=v\,x$ மற்றும் $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$ என பிரதியீடு செய்யும் போது கிடைக்கும், மாறிகள் பிரிக்கத்தக்க வகையில் அமைந்த சமன்பாடு

(a) $\frac{2v^2}{1+v}dv=\frac{dx}{x}$ (b) $\frac{2v^2}{1+v}dv=-\frac{dx}{x}$

(c) $\frac{2v^2}{1-v}dv=\frac{dx}{x}$ (d) $\frac{1+v}{2v^2}dv=-\frac{dx}{x}$

24. பின்வருவனவற்றுள் எது சமபடித்தான வகைக்கெழு சமன்பாடாகும்?

(a) $(3x-5)\,dx=(4y-1)\,dy$ (b) $xy\,dx-(x^3+y^3)\,dy=0$

(c) $y^2\,dx+(x^2-xy-y^2)\,dy=0$ (d) $(x^2+y)\,dx=(y^2+x)\,dy$

25. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\dfrac{f\left(\frac{y}{x}\right)}{f'\left(\frac{y}{x}\right)}$ என்ற சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு

(a) $f\left(\frac{y}{x}\right)=kx$ (b) $x\,f\left(\frac{y}{x}\right)=k$ (c) $f\left(\frac{y}{x}\right)=ky$ (d) $y\,f\left(\frac{y}{x}\right)=k$

இதர கணக்குகள்

1. $Q_d=30-5p+2\dfrac{dp}{dt}+\dfrac{d^2p}{dt^2}$ மற்றும் $Q_s=6+3p$ என்பன முறையே ஒரு பொருளின் தேவை அளவு மற்றும் அளிப்பு அளவு ஆகியவற்றைக் குறிக்கின்றன. இங்கு p விலையைக் குறிக்கிறது. சந்தை பரிமாற்றத்தில் சமன்நிலை விலையைக் காண்க.
2. $y=ax^2+bx$ -ஐ பொதுத் தீர்வாக கொண்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டினை அமைக்க.
3. தீர்க்க : $yx^2dx+e^{-x}dy=0$
4. தீர்க்க : $\left(x^2+y^2\right)dx+2xy\,dy=0$
5. தீர்க்க : $x\dfrac{dy}{dx}+2y=x^4$
6. ஒரு தயாரிப்பு நிறுவனத்தில், உபகரணங்களை இயக்கவும் பராமரிக்கவும் ஆகும் செலவு C மற்றும் அடுத்தடுத்த இரு பழுது பார்த்தலுக்குரிய இடைவெளிக்காலம் m ஆகியவற்றை $m^2\dfrac{dC}{dm}+2mC=2$ எனும் சமன்பாட்டினால் குறித்தால், $m=2$ மற்றும் $c=4$ எனில், C மற்றும் m ஆகியவைகளுக்கிடையேயானத் தொடர்பைக் காண்க.
7. தீர்க்க : $\left(D^2-3D+2\right)y=e^{4x}$ இங்கு $x=0$ மற்றும் $x=1$ எனில் $y=0$.
8. தீர்க்க : $\dfrac{dy}{dx}+y\cos x=2\cos x$
9. தீர்க்க $x^2ydx-\left(x^3+y^3\right)dy=0$
10. தீர்க்க : $\dfrac{dy}{dx}=xy+x+y+1$

தொகுப்புரை

- ஒரு சார்பு மற்றும் அவற்றின் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட வகைக்கெழுக்களை கொண்ட சமன்பாடு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஆகும். அதாவது $y=f(x)$ சார்பு மற்றும் அதன் வகைக்கெழுக்கள் $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}\ldots$ கொண்ட சமன்பாடு வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.
- ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் இடம் பெற்றிருக்கும் வகைக்கெழுவின் மிக உயர்ந்த வரிசையே, அவ்வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை எனப்படும்.
- வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் படி என்பது அதில் இடம் பெற்றுள்ள வகைக்கெழுக்களின் உச்ச வரிசையின் படியாகும். குறிப்பாக வகைச்கெழுவின் பின்னங்கள் மற்றும் படி மூலங்கள் இருப்பின் அவற்றை நீக்கியபின் படி காணப்படவேண்டும்.

- கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டினை நிறைவு செய்யுமாறு அமையும் சார்பு அச்சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும். வகைக்கெழுச் சமனபாட்டின் தீர்விலுள்ள மாறத்தக்க மாறிலிகளின் எண்ணிக்கையானது அவ்வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசைக்குச் சமமாக இருக்க வேண்டும். அத்தீர்வினை சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு என்போம்.

- கொடுக்கப்பட்ட சார்பிலிருந்து வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை அமைக்க அதில் இடம் பெற்றிருக்கும் மாறத்தக்க மாறிலிகளின் எண்ணிகைக்கேற்ப அதனை தொடர்ச்சியாக வகைப்படுத்தியபின் அம்மாறத்தக்க மாறிலிகளை நீக்க வேண்டும்.

- ஒரு சமன்பாட்டில் அனைத்து x-ல் அமையும் உறுப்புகள் மற்றும் dx ஒருபுறத்திலும், அனைத்து y-ல் அமையும் உறுப்புகள் மற்றும் dy மறுபுறத்திலும் அமையுமாறு பிரிக்கத்தக்க வகையிலிருப்பின், அவைகள் பிரிபடகூடிய மாறிகள் என அழைக்கப்படும். அத்தகைய சமன்பாட்டின் பொதுவடிவம் $f(x)dx = g(y)dy$ அல்லது $f(x)dx + g(y)dy = 0$ நேரடியாக தொகையிடுவதன் மூலம் நாம் தீர்வைப் பெறலாம்.

- $f(x, y)$ மற்றும் $g(x, y)$ என்பன ஒவ்வொன்றும் பூச்சிய படியுள்ள சமபடித்தான சார்புகளாக இருக்கயில், $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ அல்லது $\frac{dx}{dy} = g(x, y)$ என்பன ஒரு சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஆகும்.

- $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ (இங்கு P மற்றும் Q ஆகியவை மாறிலிகள் அல்லது x -இன் சார்புகள் மட்டும்)

  என்ற வடிவில் உள்ள வகைக்கெழுச் சமன்பாடு முதல் வரிசை நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடு எனப்படும்.

- மாறிலிகளைக் கெழுக்களைக் கொண்ட இரண்டாம் வரிசை நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொதுவடிவம் $a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x)$ ஆகும்.

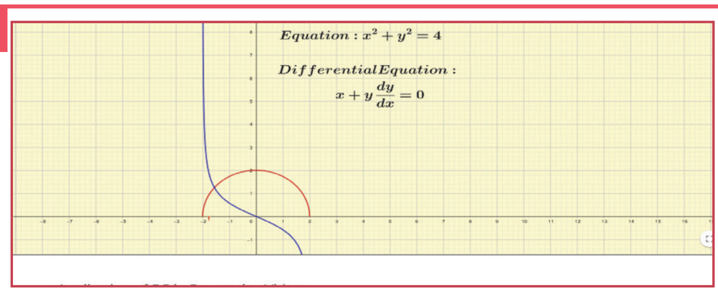
கலைச்சொற்கள்

இரண்டாம் வரிசை நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்	Second order linear differential equations
கிடை அச்சுத் தொலைவு	Abscissa
குத்தாயம்	Ordinate
சமபடித்தான சமன்பாடுகள்	Homogeneous equations
சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்	Ordinary differential equations
சிறப்புத் தொகை	Particular integral
துணைச் சமன்பாடு	Auxiliary equation
நிரப்புச் சார்பு	Complementary function
நிலையான மாறிலி	Fixed constant

நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்	Linear differential equations
பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்	Partial differential equations
படி	Degree
பொதுத் தீர்வு	General solution
மாறத்தக்க மாறிலி	Arbitrary constant
மாறி	Variable
மாறிகள் பிரிக்கக் கூடியன	Variable separable
மாறிலி	Constant
வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்	Differential equations
வரிசை	Order

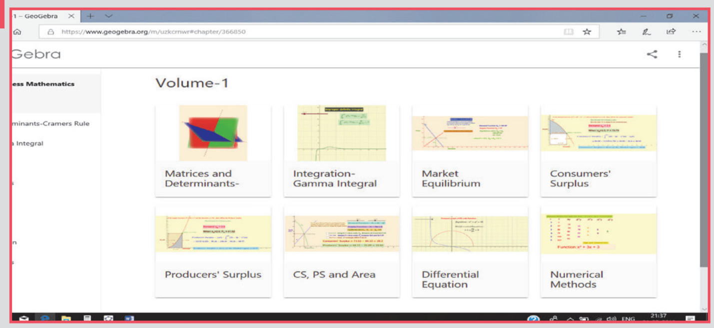
இணையச் செயல்பாடு

செயல்பாட்டின் இறுதியில் எதிர்பார்க்கப்படும் விளைவு



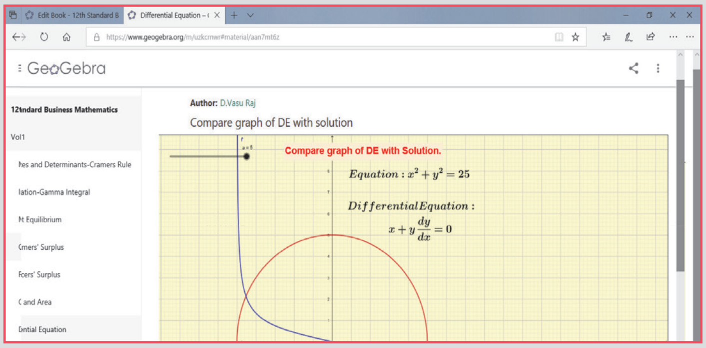
படி 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி இச்செயல்பட்டிற்கான இணையப் பக்கத்திற்குச் செல்க. பின்பு "12th Standard Business Mathematics and Statistic " என்னும் திரையில் "Volume–1" யை தெரிவு செய்யவும்.



படி 2

"Differential Equation" என்னும் திரை தோன்றும். அதில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள வரைபடத்தில் உள்ள புள்ளி a வை நகர்த்தினால் வரைபடத்தில் தோன்றும் மாற்றத்தை தெரிந்துகொள்ளலாம்.

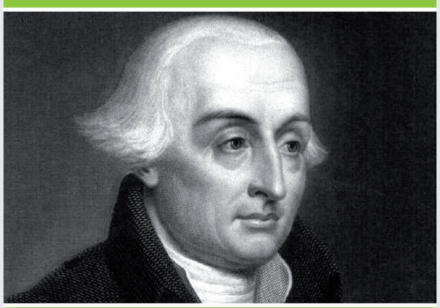


செயல்பாட்டிற்கான உரலி : https://ggbm.at/uzkcrnwr

விரைவுக் குறியீடு (QR Code) :

B247_12_BUS_MAT_TM

5 எண்ணியல் முறைகள்



ஜோசப்– லூயி இலக்ராஞ்சி
(25.01.1736 - 10.04.1813)

அறிமுகம்

எண்ணியல் பகுப்பாய்வு என்பது கணிதத்தின் ஒரு கிளையாகும். அது இயற்கணிதத்தின் அடிப்படை செயலிகளை திரும்பத்திரும்ப பயன்படுத்தப்படும் பொழுது கிடைக்கும் தோராயத் தீர்வுகளுக்கு வழி வகுக்கிறது. எண்ணியல் பகுப்பாய்வினை அறிவதற்கு எண்ணிடத்தக்க வேறுபாடுகளைப் பற்றி அறிந்திருப்பது அவசியமாகும்.

ஜோசப்–லூயி இலக்ராஞ்சி ஒரு இத்தாலிய கணிதவியலாளரும், வானியளலாளரும் ஆவார். இவர் பகுப்பாய்வு, எண் கோட்பாடு மற்றும் வானிய இயக்கவியல் ஆகிய துறைகளில் குறிப்பிடத்தக்க பங்களிப்பை செய்துள்ளார்.

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தை படித்த பின்னர் பின்வரும் பாடக் கருத்துக்களை மாணவர்களால் புரிந்துக் கொள்ள இயலும்

- திட்டமான வேறுபாடுகளை அமைத்தல்.
- திட்டமான வேறுபாடுகளைக் கொண்டு பல்லுறுப்புக் கோவையை காணல்.
- செயலிகளுக்கிடையேயான தொடர்புகளை அறிதல்.
- விடுபட்ட உறுப்புகளைக் காணல்.
- கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடரின் இடை மதிப்புகளை நியூட்டனின் இடைச்செருகல் சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தி காணல்.
- இலக்ராஞ்சியின் இடை மதிப்பு சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துதல்.

95TJZ6

5.1 திட்டமான வேறுபாடுகள் (FINITE DIFFERENCES)

$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ என்ற சார்பின் மாறிகளையும் (arguments) $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n$ என்ற சார்பலன்களையும் (entries) எடுத்துக்கொள்வோம். இங்கு $y = f(x)$ என்பது ஒரு சார்பாகும். x-ன் மதிப்புகள் ஏறுவரிசையில் இருப்பதாகவும் மற்றும் அவை சம இடைவெளிகளில் இருப்பதாகவும்

எடுத்துக்கொள்வோம். சமஇடைவெளிகளின் நீளம் h என்போம். $x_0, x_0+h, x_0+2h, \cdots, x_0+nh$ என்பன x-ன் மதிப்புகள் என்போம். அவற்றிற்குரிய சார்பலன்கள் $f(x_0), f(x_0+h), f(x_0+2h), \cdots, f(x_0+nh)$ என்பனவாகும். இங்கு $y=f(x)$ என்ற சார்புக்கான திட்டமான வேறுபாடுகள் குறித்துக் காண்போம்.

5.1.1 முன்னோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி, பின்னோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி மற்றும் இடப்பெயர்வுச் செயலி (Forward Difference Operator, Backward Difference Operator and Shifting Operator)

முன்நோக்கி வேறுபாட்டுச் செயலி [Δ டெல்டா] (Forward Difference Operator):

$y = f(x)$ என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பு என்க. $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n$ என்பன முறையே $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்ற புள்ளிகளில் y-ன் மதிப்புகள் ஆகும். y_1-y_0, y_2-y_1, $y_3-y_2, \ldots, y_n-y_{n-1}$ என்பன முதல் (முன்நோக்கு) வேறுபாடுகள் . இவைகள் முறையே $\Delta y_0, \Delta y_1, \Delta y_2, \ldots, \Delta y_{n-1}$.

அதாவது, $\Delta y_0 = y_1 - y_0, \Delta y_1 = y_2 - y_1, \Delta y_2 = y_3 - y_2, \ldots, \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$

பொதுவாக , $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n,\ n = 0,1,2,3,\ldots$

குறியீடு Δ என்பது முன்நோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி. Δ என்பது டெல்டா (delta) என அழைக்கப்படும்.

முன்நோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி Δ-வை கீழ்க்கண்டவாறும் வரையறுக்கலாம்.

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x),\ h \text{ என்பது சம இடைவெளி.}$$

பண்புகளின் நிரூபணங்கள் நமது பாடத்திட்டத்தில் சேர்க்கப்படவில்லை.

Δ செயலியின் பண்புகள்:

பண்பு 1: c என்பது மாறிலி எனில் $\Delta c = 0$

நிரூபணம்: $f(x) = c$ என்க

$\therefore f(x+h) = c$ (இங்கு h என்பது சம இடைவெளி)

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$\Delta c = c - c = 0$$

பண்பு 2: Δ பங்கீட்டு பண்பை நிவர்த்தி செய்யும். அதாவது $\Delta[f(x)+g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$

நிரூபணம்: $\Delta[f(x)+g(x)] = [f(x+h)+g(x+h)] - [f(x)+g(x)]$

$$= f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)$$

$$= f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)$$

$$= \Delta f(x) + \Delta g(x)$$

இதேபோன்று $\Delta\left[f(x) - g(x)\right] = \Delta f(x) - \Delta g(x)$

பொதுவாக, $\Delta\left[f_1(x) + f_2(x) \ldots\ldots + f_n(x)\right] = \Delta f_1(x) + \Delta f_2(x) + \ldots. + \Delta f_n(x)$

பண்பு 3: c என்பது ஒரு மாறிலி எனில் $\Delta c\, f(x) = c\, \Delta f(x)$

நிரூபணம்:

$$\begin{aligned} \Delta[c\, f(x)] &= c\, f(x+h) - c\, f(x) \\ &= c[f(x+h) - f(x)] \\ &= c\, \Delta f(x) \end{aligned}$$

நிரூபணமற்ற முடிவுகள்

1. m மற்றும் n என்பது மிகை முழுக்கள் எனில் $\Delta^m . \Delta^n\ f(x) = \Delta^{m+n}\ f(x)$
2. $\Delta\left[f(x)\ g(x)\right] = f(x)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x)$
3. $\Delta\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x).\ g(x+h).}$

முதல்நிலை வேறுபாடுகளின் வேறுபாடுகள் முறையே $\Delta^2 y_0, \Delta^2 y_1, \ldots, \Delta^2 y_n$ என்பன இரண்டாம்நிலை வேறுபாடுகள் ஆகும்.

இங்கு

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_n &= \Delta(\Delta y_n) = \Delta(y_{n+1} - y_n) \\ &= \Delta y_{n+1} - \Delta y_n \\ \Delta^2 y_n &= \Delta y_{n+1} - \Delta y_n,\ n = 0,1,2,\ldots \\ \Delta^2 y_0 &= \Delta y_1 - \Delta y_0 \\ \Delta^2 y_1 &= \Delta y_2 - \Delta y_1 \end{aligned}$$

இதேபோன்று இரண்டாம்நிலை வேறுபாடுகளின் வேறுபாடுகள் மூன்றாம்நிலை வேறுபாடுகள்ஆகும்.

$$\Delta^3 y_n = \Delta^2 y_{n+1} - \Delta^2 y_n,\ n = 0,1,2,\ldots$$

குறிப்பாக,

$$\begin{aligned} \Delta^3 y_0 &= \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 \\ \Delta^3 y_1 &= \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 \end{aligned}$$

குறிப்பு

$$\Delta^k f(x) = \Delta^{k-1} f(x+h) - \Delta^{k-1} f(x)$$

பொதுவாக y_n -இன் k-ம் நிலை வேறுபாடுகள்

$$\Delta^k y_n = \Delta^{k-1} y_{n+1} - \Delta^{k-1} y_n,\ n = 0,1,2,\ldots$$

மேற்கண்ட வேறுபாடுகளைகீழ்கண்ட அட்டவணையில் எளிய முறையில் குறிக்கலாம்.

y-ன் முன்நோக்கு வேறுபாட்டின் அட்டவணை :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
x_0	y_0					
		Δy_0				
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$			
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^5 y_0$
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$	
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$		
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$			
		Δy_4				
x_5	y_5					

$f(x)$–ன் முன்நோக்கு வேறுபாட்டின் அட்டவணை

x	$f(x)$				
		$\Delta\ f(x)$			
$x+h$	$f(x+h)$		$\Delta^2\ f(x)$		
		$\Delta\ f(x+h)$		$\Delta^3 f(x)$	
$x+2h$	$f(x+2h)$		$\Delta^2\ f(x+h)$		$\Delta^4\ f(x)$
		$\Delta\ f(x+2h)$		$\Delta^3\ f(x+h)$	
$x+3h$	$f(x+3h)$		$\Delta^2\ f(x+2h)$		
		$\Delta\ f(x+3h)$			
$x+4h$	$f(x+4h)$				

பின்நோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி [∇ நெப்லா] (Nepla) (Backward difference operator) :

$y = f(x)$ என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பு என்க. y_0, $y_1, \ldots y_n$ என்பன முறையே

$x = x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ என்ற புள்ளிகளில் y -ன் மதிப்புகள் ஆகும். பிறகு

$$y_1 - y_0 = \nabla y_1$$

$$y_2 - y_1 = \nabla y_2$$

பொதுவாக, $$y_n - y_{n-1} = \nabla y_n$$

என்பன முதல்நிலை (பின்நோக்கு) வேறுபாடாகும். குறியீடு ∇ என்பது பின்நோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி.இதனை நாம் நெப்லா (Nepla) எனஅழைக்கிறோம்.

இரண்டாம்நிலை (பின்நோக்கு) வேறுபாடுகள்: $\nabla^2 y_n = \nabla y_n - \nabla y_{n-1}$, $n = 1,2,3,\ldots$

மூன்றாம்நிலை (பின்நோக்கு) வேறுபாடுகள்: $\nabla^3 y_n = \nabla^2 y_n - \nabla^2 y_{n-1}$, $n = 1,2,3,\ldots$

பொதுவாக, k-ம் நிலை வேறுபாடுகள்: $\nabla^k y_n = \nabla^{k-1} y_n - \nabla^{k-1} y_{n-1}$, $n = 1,2,3,\ldots$

பின்நோக்கு வேறுபாட்டுஅட்டவணை:

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
x_0	y_0				
		∇y_1			
x_1	y_1		$\nabla^2 y_2$		
		∇y_2		$\nabla^3 y_3$	
x_2	y_2		$\nabla^2 y_3$		$\nabla^4 y_4$
		∇y_3		$\nabla^3 y_4$	
x_3	y_3		$\nabla^2 y_4$		
		∇y_4			
x_4	y_4				

பின்நோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி பின்வருமாறும் வரையறுக்கப்படுகிறது

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$$

முதல்நிலை (பின்நோக்கு) வேறுபாடு: $\nabla f(x+h) = f(x+h) - f(x)$

$\nabla f(x+2h) = f(x+2h) - f(x+h), h$ என்பது சம இடைவெளி.

இரண்டாம்நிலை (பின்நோக்கு) வேறுபாடு:

$$\nabla^2 f(x+h) = \nabla(\nabla f(x+h)) = \nabla(f(x+h) - f(x))$$

$$= \nabla f(x+h) - \nabla f(x)$$

$$\nabla^2 f(x+2h) = \nabla f(x+2h) - \nabla f(x+h)$$

மூன்றாம்நிலை (பின்நோக்கு) வேறுபாடு:

$$\nabla^3 f(x+h) = \nabla^2 f(x+h) - \nabla^2 f(x)$$

$$\nabla^3 f(x+2h) = \nabla^2 f(x+2h) - \nabla^2 f(x+h)$$

இங்கு,

$$\nabla f(x+h) = f(x+h) - f(x) = \Delta f(x)$$

$$\nabla f(x+2h) = f(x+2h) - f(x+h) = \Delta f(x+h)$$

$$\nabla^2 f(x+2h) = \nabla f(x+2h) - \nabla f(x+h) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x)$$

$$= \Delta^2 f(x)$$

பொதுவாக, $\nabla^n f(x+nh) = \Delta^n f(x)$

இடப்பெயர்வுச் செயலி (E):

$y = f(x)$ கொடுக்கப்பட்ட சார்பாகவும் மற்றும் $x_0, x_0+h, x_0+2h, x_0+3h, \ldots, x_0+nh$ என்பது x-ன் அடுத்தடுத்த சம இடைவெளியிலான மதிப்புகளாகவும் இருக்கும் பட்சத்தில் E என்ற செயலி கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது

$$\mathrm{E}\left[f(x_0)\right] = f(x_0+h)$$

E என்பது இடப்பெயர்வுச் செயலி.

$$E\left[f\left(x_0+h\right)\right] = f(x_0+2h), E[f(x_0+2h)] = f(x_0+3h), \ldots,$$

$$\mathrm{E}[f(x_0+(n-1)h)] = f(x_0+nh)$$

பொதுவாக, $\mathrm{E}\left[f(x)\right] = f(x+h)$, h என்பது சம இடைவெளி

$f(x)$-இல் E என்ற செயலியை இருமுறை பயன்படுத்தும்போது $E^2 f(x)$ என கிடைக்கும்.

அதாவது, $\mathrm{E}^2\ f(x) = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\, f(x)\right] = \mathrm{E}[f(x+h)] = f(x+2h)$

பொதுவாக,

$\mathrm{E}^n f(x) = f(x+nh)$ மற்றும் $\mathrm{E}^{-n} f(x) = f(x-nh)$

செயலி E–ன் பண்புகள்:

1. $\mathrm{E}\left[f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)\right] = \mathrm{E}[f_1(x)] + \mathrm{E}[f_2(x)] + \ldots + \mathrm{E}\left[f_n(x)\right]$

2. $\mathrm{E}\left[c\, f(x)\right] = cE\left[f(x)\right]$, c ஒரு மாறிலி

3. $E^m\left[E^n f(x)\right]=E^n[E^m f(x)] = E^{m+n}[f(x)]$

4. 'n' மிகை முழுக்கள் எனில் $E^n\left[E^{-n}\left(f(x)\right)\right]=f(x)$

குறிப்பு

$y = f(x)$ என்பது x–ன் சார்பு மற்றும் $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n$ என்பது $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ இடத்து y-ன் மதிப்புகள் எனில்

$$Ey_0 = y_1, \quad Ey_1 = y_2, \ldots, Ey_{n-1} = y_n$$

$E\left[Ey_0\right] = Ey_1 = y_2$ பொதுவாக $E^n y_0 = y_n$

Δ, ∇ மற்றும் E ஆகியவற்றிற்கிடையேயான தொடர்புகள்:

1. $\Delta \equiv E-1$

நிரூபணம்: Δ –ன் வரையறைலிருந்து

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

மற்றும் $E[f(x)] = f(x+h)$

இங்கு h என்பது சம இடைவெளியாகும்.

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &= f(x+h) - f(x)\\
\Delta f(x) &= Ef(x) - f(x)\\
\Rightarrow \Delta f(x) &= (E-1)f(x)\\
\Delta &\equiv E-1\\
\therefore \quad E &\equiv 1+\Delta
\end{aligned}$$

2. $E\Delta \equiv \Delta E$

நிரூபணம்:

$$\begin{aligned}
E\left(\Delta f(x)\right) &= E\left[f(x+h) - f(x)\right]\\
&= E\,f(x+h) - E\,f(x)\\
&= f(x+2h) - f(x+h)\\
&= \Delta f(x+h)\\
&= \Delta E f(x)
\end{aligned}$$

$$\therefore E\Delta \equiv \Delta E$$

3. $\nabla \equiv \dfrac{E-1}{E}$

நிரூபணம்:

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$$
$$= f(x) - E^{-1} f(x)$$
$$= (1-E^{-1}) f(x)$$
$$\Rightarrow \quad \nabla \equiv 1 - E^{-1}$$
$$\nabla \equiv 1 - \frac{1}{E}$$
$$\therefore \nabla \equiv \frac{E-1}{E}$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

(i) $(1+\Delta)(1-\nabla)=1$

(ii) $\Delta\nabla \equiv \Delta - \nabla$

(iii) $\nabla \equiv E^{-1}\Delta$

எடுத்துக்காட்டு 5.1

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு முன்நோக்கு வேறுபாட்டின் அட்டவணையை வடிவமைக்கவும்

x	0	10	20	30
y	0	0.174	0.347	0.518

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு முன்நோக்கு வேறுபாட்டின் அட்டவணை

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	0			
		0.174		
10	0.174		-0.001	
		0.173		-0.001
20	0.347		-0.002	
		0.171		
30	0.518			

எடுத்துக்காட்டு 5.2

$x = 1,2,3,4,5$ எனில் $y = f(x) = x^3 + 2x + 1$ என்ற சார்புக்கு முன்நோக்கு வேறுபாட்டின் அட்டவணையை வடிவமைக்கவும்

தீர்வு

$y = f(x) = x^3 + 2x + 1, \quad x = 1,2,3,4,5$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1	4				
		9			
2	13		12		
		21		6	
3	34		18		0
		39		6	
4	73		24		
		63			
5	136				

எடுத்துக்காட்டு 5.3

$8,12,19,29,42, \ldots$ என்ற தொடருக்கான வேறுபாட்டு அட்டவணையில், இரண்டாம்நிலை வேறுபாட்டினை மாறிலி எனக் கொண்டு வேறுபாட்டின் அட்டவணையை பயன்படுத்தி 6–வது உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

k என்பது 6–வது உறுப்பு என்க.

முதலில் முன்நோக்கு வேறுபாட்டினைக் காண்போம்.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
1	8		
		4	
2	12		3
		7	
3	19		3
		10	
4	29		3
		13	
5	42		$k-55$
		$k-42$	
6	k		

இரண்டாம்நிலை வேறுபாடுகளானது மாறிலிகள் என கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

$\therefore \quad k - 55 = 3$

$k = 58$

$\therefore$ 6-வது உறுப்பு 58 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.4

(i) Δe^{ax} (ii) $\Delta^2 e^x$ (iii) $\Delta \log x$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு:

(i) $\Delta e^{ax} = e^{a(x+h)} - e^x$

$= e^{ax} e^h - e^{ax}$ $\quad \left[\because a^{m+n} = a^m a^n\right]$

$= e^{ax}\left[e^h - 1\right]$

(ii) $\Delta^2 e^x = \Delta\left[\Delta e^x\right]$

$= \Delta\left[e^{x+h} - e^x\right] = \Delta\left[e^x e^h - e^x\right]$

$= \Delta e^x\left[e^h - 1\right]$

$= \left(e^h - 1\right)\Delta e^x$

$= \left(e^h - 1\right)\left(e^h - 1\right) e^x$

$= \left(e^h - 1\right)^2 e^x$

(iii) $\Delta \log x = \log(x+h) - \log x$

$= \log \dfrac{x+h}{x}$

$= \log\left(\dfrac{x}{x} + \dfrac{h}{x}\right)$

$= \log\left(1 + \dfrac{h}{x}\right)$

எடுத்துக்காட்டு 5.5

$h = 1$ எனில், $\Delta\left[\dfrac{5x+12}{x^2+5x+6}\right]$ -ஐ மதிப்பிடுக.

தீர்வு:

$$\Delta\left[\frac{5x+12}{x^2+5x+6}\right]$$

பகுதி பின்னமாக பிரித்தல் முறைப்படி

$$\frac{5x+12}{x^2+5x+6} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+2}$$

$$A = \frac{5x+12}{x+2}\left[x=-3\right] = \frac{-15+12}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$B = \frac{5x+12}{x+3}\left[x=-2\right] = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{5x+12}{x^2+5x+6} = \left[\frac{3}{x+3} + \frac{2}{x+2}\right]$$

$$\Delta\left[\frac{5x+12}{x^2+5x+6}\right] = \Delta\left[\frac{3}{x+3} + \frac{2}{x+2}\right]$$

$$= \left[\frac{3}{x+1+3} - \frac{3}{x+3}\right] + \left\{\frac{2}{x+1+2} - \frac{2}{x+2}\right\}$$

$$= 3\left[\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+3}\right] + 2\left[\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+2}\right]$$

$$= \left[\frac{-3}{(x+4)(x+3)} - \frac{2}{(x+3)(x+2)}\right]$$

$$= \frac{-5x-14}{(x+2)(x+3)(x+4)}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.6

$h = 1$ எனில், $\Delta^2\left(\frac{1}{x}\right)$ -ஐ மதிப்பிடுக.

தீர்வு:

இங்கு $\Delta^2\left(\frac{1}{x}\right) = \Delta\left(\Delta\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

$$\Delta\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \text{ s}$$

$$\Delta^2\left(\frac{1}{x}\right) = \Delta\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \Delta\left(\frac{1}{x+1}\right) - \Delta\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\therefore \quad \Delta^2\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x(x+1)(x+2)}$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$h = 1$ எனில்,

$$\Delta^n\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(-1)^n n!}{x(x+1)(x+2)......(x+n)}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.7

$h = 1$ எனில் $f(4) = f(3) + \Delta f(2) + \Delta^2 f(1) + \Delta^3 f(1)$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$f(4) - f(3) = \Delta f(3)$ என்பது நாம் அறிந்த ஒன்று.

$$
\begin{aligned}
f(4) - f(3) &= \Delta f(3) \\
&= \Delta\left[f(2) + \Delta f(2)\right] \quad \left[\because f(3) - f(2) = \Delta f(2)\right] \\
&= \Delta f(2) + \Delta^2 f(2) \\
&= \Delta f(2) + \Delta^2\left[f(1) + \Delta f(1)\right] \\
\therefore f(4) &= f(3) + \Delta f(2) + \Delta^2 f(1) + \Delta^3 f(1).
\end{aligned}
$$

எடுத்துக்காட்டு 5.8

$U_0 = 1, U_1 = 11, U_2 = 21, U_3 = 28$ மற்றும் $U_4 = 29$ எனில் $\Delta^4 U_0$ காண்க.

தீர்வு :

$$
\begin{aligned}
\Delta^4 U_0 &= (E-1)^4 U_0 \\
&= \left(E^4 - 4E^3 + 6E^2 - 4E + 1\right) U_0 \\
&= E^4 U_0 - 4E^3 U_0 + 6E^2 U_0 - 4EU_0 + U_0 \\
&= U_4 - 4U_3 + 6U_2 - 4U_1 + U_0 \\
&= 29 - 4(28) + 6(21) - 4(11) + 1. \\
&= 156 - 156 = 0
\end{aligned}
$$

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1

எடுத்துக்காட்டு 5.9

$y_3 = 2, y_4 = -6, y_5 = 8, y_6 = 9$ மற்றும் $y_7 = 17$ எனில் $\Delta^4 y_3$ கணக்கிடுக

தீர்வு :

$y_3 = 2, y_4 = -6, y_5 = 8, y_6 = 9$ மற்றும் $y_7 = 17$ கொடுக்கப்பட்டவை

$$
\begin{aligned}
\Delta^4 y_3 &= (E-1)^4 y_3 \\
&= (E^4 - 4E^3 + 6E^2 - 4E + 1) y_3
\end{aligned}
$$

$$= E^4 y_3 - 4E^3 y_3 + 6E^2 y_3 - 4E y_3 + y_3$$
$$= y_7 - 4y_6 + 6y_5 - 4y_4 + y_3$$
$$= 17 - 4(9) + 6(8) - 4(-6) + 2$$
$$= 17 - 36 + 48 + 24 + 2 = 55$$

5.1.2 விடுபட்ட உறுப்புகளைக் காணல் (Finding the missing terms)

வேறுபாட்டுச் செயலிகள் மற்றும் இடப்பெயர்வுச் செயலி ஆகியவற்றைக் கொண்டு கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடரின் விடுபட்ட உறுப்புகளைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.10

கீழ்கண்ட விவரங்களைக் கொண்டு விடுபட்ட உறுப்பைக் காண்க.

x	2	3	4	5	6
$f(x)$	45.0	49.2	54.1	-	67.4

தீர்வு:

$f(x)$ -ல் நான்கு மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால், $f(x)$ ஒரு மூன்றாம்படி பல்லுறுப்பைக்கோவை என எடுத்துக் கொள்வோம். எனவே நான்காம்நிலை வேறுபாடுகள் பூச்சியமாகும்.

(ie) $\Delta^4 y_0 = 0, \ \therefore (E-1)^4 y_0 = 0$

$$(E^4 - 4E^3 + 6E^2 - 4E + 1)\, y_0 = 0$$
$$E^4 y_0 - 4E^3 y_0 + 6E^2 y_0 - 4E y_0 + y_0 = 0$$
$$y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0 = 0$$
$$67.4 - 4y_3 + 6(54.1) - 4(49.2) + 45 = 0$$
$$240.2 = 4y_3 \qquad \therefore y_3 = 60.05$$

எடுத்துக்காட்டு 5.11

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு 1964 மற்றும் 1966 ஆம் ஆண்டுகளுக்கான உற்பத்திகளைக் காண்க.

வருடம்	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967
உற்பத்தி	200	220	260	-	350	-	430

தீர்வு:

$f(x)$ -ல் ஐந்து மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால், $f(x)$ ஒரு நான்காம்படி பல்லுறுப்புக்கோவை என எடுத்துக் கொள்வோம். எனவே ஐந்தாம்நிலை வேறுபாடு பூச்சியமாகும்.

$$\Delta^5 y_k = 0 \text{ (ie) } (E-1)^5 y_k = 0$$

i.e., $$(E^5 - 5E^4 + 10E^3 - 10E^2 + 5E - 1)y_k = 0$$

$$E^5 y_k - 5\,E^4 y_k + 10E^3 y_k - 10E^2 y_k + 5Ey_k - y_k = 0 \qquad (1)$$

$k = 0$ என (1)-ல் பிரதியிட

$$E^5 y_0 - 5E^4 y_0 + 10E^3 y_0 - 10E^2 y_0 + 5Ey_0 - y_0 = 0$$

$$y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0 = 0$$

$$y_5 - 5(350) + 10y_3 - 10(260) + 5(220) - 200 = 0$$

$$y_5 + 10y_3 = 3450 \qquad (2)$$

$k = 1$ என (1)-ல் பிரதியிட

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

$$E^5 y_1 - 5E^4 y_1 + 10E^3 y_1 - 10E^3 y_1 - y_1 = 0$$

$$y_6 - 5y_5 + 10y_4 - 10y_3 - y_1 = 0$$

$$430 - 5y_5 + 10(350) - 10y_3 + 5(260) - 220 = 0$$

$$5y_5 + 10y_3 = 5010 \qquad (3)$$

$(3) - (2) \Rightarrow \qquad 4y_5 = 1560$

$$y_5 = 390$$

(2)-ன் படி $\qquad 390 + 10y_3 = 3450$

$$10y_3 = 3450 - 390$$

$$y_3 \cong 306$$

பயிற்சி 5.1

1. மதிப்பிடுக: $\Delta(\log ax)$.

2. $y = x^3 - x^2 + x - 1$ எனில் $x = 0,1,2,3,4,5$ என்பனவற்றுக்கு y-ன் மதிப்புகளைக்கணக்கிட்டு முன்நோக்கு வேறுபாட்டு அட்டவணையை அமைக்க.

3. $h = 1$ எனில் $(E^{-1}\Delta)x^3 = 3x^2 - 3x + 1$ என நிறுவுக.

4. $f(x) = x^2 + 3x$ மற்றும் $h = 1$ எனில் $\Delta f(x) = 2x + 4$ என நிறுவுக.

5. $h = 1$ எனில், $\Delta\left[\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}\right]$ -ஐ மதிப்பிடுக.

6. கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி விடுபட்ட உறுப்பைக் காண்க.

x	0	1	2	3	4
y	1	3	9	-	81

7. ஒரு மாவட்டத்தின் மக்கள்த் தொகை விவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆண்டு (x)	1881	1891	1901	1911	1921	1931
மக்கள்தொகை (y) (ஆயிரத்தில்)	363	391	421	-	467	501

1911 ம் ஆண்டிற்கான மக்கள் தொகையைக் காண்க.

8. பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு விடுபட்ட உறுப்புகளைக் காண்க.

x	0	1	2	3	4	5
$y = f(x)$	0	-	8	15	-	35

5.2 இடைச்செருகல் (Interpolation)

ஒரு உற்பத்தி நிறுவனத்தின் பல்வேறு வருடங்களுக்கான இலாபங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன

வருடம் (x)	1986	1987	1988	1990	1991	1992
வருமானம் (இலட்சத்தில்)	25	29	24	30	32	31

1989 -ஆம் ஆண்டிற்கான இலாபம் கொடுக்கப்படவில்லை. 1989-ஆம் ஆண்டின் இலாபத்தினை மதிப்பீடு செய்வதற்கு நாம் இடைச் செருகல் உத்தியைப் பயன்படுத்துகிறோம். x மற்றும் y என்பவை முறையே வருடம் மற்றும் இலாபத்தினை குறிப்பதாக எடுத்துக்கொள்வோம். சாரா மாறி x என்பது **மாறி (argument)** எனவும் மற்றும் சார்ந்த மாறி (entries) **சார்பலன்** எனவும் அழைக்கப்படும்.

கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பு மதிப்புகளுக்கு உள்ளே அமைந்துள்ள x-ன் மதிப்பிற்கு y-யை மதிப்பீடு செய்வது **இடைச் செருகல்** என அழைக்கப்படும்.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பு மதிப்புகளுக்கு வெளியே அமைந்துள்ள x-ன் மதிப்பிற்கு y-யை மதிப்பீடு செய்வது **புறச் செருகல்** என அழைக்கப்படும்.

5.2.1 இடைச்செருகலின் முறைகள் (Methods of interpolation)

இடைச்செருகலில் இரண்டு முறைகள் உள்ளன. ஒன்று வரைபடம் முறை மற்றொன்று இயற்கணித முறை ஆகும்..

5.2.2 வரைபடம் முறை (Graphical method)

கொடுக்கப்பட்ட சார்பு $y = f(x)$ -க்கு x-ன் n மதிப்புகளும் அதற்கேற்ப y-ன் மதிப்புகளும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். $(x_i, y_i), i = 1,2,3,...,$ n என்ற 'n' புள்ளிகளை குறித்து அதன் வழியாக மென்மையான வளைவரை வரைபடம் வரைய வேண்டும். வரையப்பட்ட வரைபடத்தில் x-ன் எந்தவொரு இடைமதிப்பிற்கும் பொருத்தமான y-ன் மதிப்பை காண்பதே வரைபட முறையாகும். இவ்வாறு பெறப்படும் y-ன் மதிப்பு உண்மையான y-ன் மதிப்பிலிருந்து பெரும்பாலும் மாறுபட்டிருக்கும். வரைபட முறையில் இது ஒரு குறைபாடாக கருதப்படுகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 5.12

வரைபடத்தின் மூலம் $x = 38$ க்கான y-ன் மதிப்பை பின்வரும் அட்டவணையைக் கொண்டு காண்க:

x	10	20	30	40	50	60
y	63	55	44	34	29	22

தீர்வு:

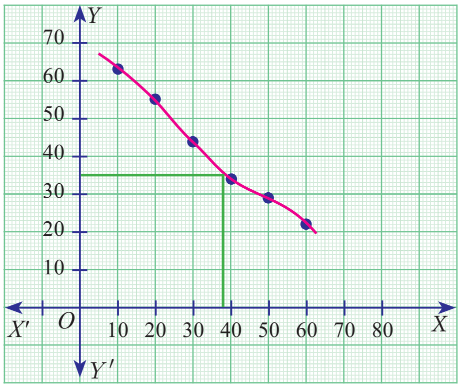
வரைபடத்திலிருந்து, $x = 38$ எனும்போது $y = 32$ ஆகும்.

வரைபட முறையின் படிகள்:

x மற்றும் y மதிப்புகளுக்கு பொறுத்தமான அலகுகளை எடுத்துக் கொண்டு, கொடுக்கப்பட்டுள்ள x, y மதிப்புகளை புள்ளிகளாக வரைபடத்தாளில் குறிக்கவும்.

குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகளின் வழியே செல்லும் மென்மையான வளைவரை வரைக.

$x = 38$ என்ற மதிப்பிற்கு தொடர்புடைய வளைவரை புள்ளியைக் கண்டு, y-அச்சின் மீதுள்ள தொடர்புடைய y-மதிப்பானது தேவையான இடைச்செருகல் மதிப்பாகும்.



படம் 5.1

5.2.3 இயற்கணித முறை (Algebraic method)

கிரிகோரி– நியுட்டனின் முன்நோக்கு இடைச்செருகல் சூத்திரம் (அல்லது) நியுட்டனின் முன்நோக்கு இடைச்செருகல் சூத்திரம் (சம இடைவெளியில்).

$y=f(x)$ என்பது $n+1$ மதிப்புகளைக் கொண்ட n-ம் படி பல்லுறுப்புக்கோவை என்க. $y_0, y_1, y_2, \dots y_n$ என்பன முறையே $x=$ $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ என்ற புள்ளிகளில் y-ன் மதிப்புகளாகும்.

(அதாவது)

$x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h,\ x_3 = x_0 + 3h, \dots, x_n = x_0 + nh$

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

முதல் இரண்டு உறுப்புகளை மட்டும் கொண்டிருந்தால் அது நேரிய இடைச்செருகல் எனவும் முதல் மூன்று உறுப்புகளை மட்டும் கொண்டிருந்தால் அது பரவளைய இடைச்செருகல் எனவும் அழைக்கப்படும்..

x-ன் மதிப்பு $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ என்பன சம இடைவெளியில் உள்ளது.

$x = x_0 + nh$ என்ற இடத்து $f(x)$ -ன் மதிப்பு,

$$f(x_0+nh) = f(x_0) + \frac{n}{1!}\Delta f(x_0) + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0) + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 f(x_0) + \dots$$

(அல்லது) $y_{(x=x_0+nh)} = y_0 + \frac{n}{1!}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots$ இங்கு $n = \frac{x-x_0}{h}$

குறிப்பு

y-ன் தேவையான மதிப்பு x-ன் ஆரம்ப மதிப்புகளுக்கு அருகில் இருந்தால் பொதுவாக நியுட்டனின் முன்நோக்கு சூத்திரம் பயன்படுத்தப் படுகிறது.

கிரிகோரி – நியூட்டனின்பின்நோக்கு இடைச்செருகல் சூத்திரம்.

y-ன் தேவையான மதிப்பு x-ன் இறுதி மதிப்புகளுக்கு அருகில் இருந்தால் நியூட்டனின் முன்நோக்கு சூத்திரத்தை பொதுவாக பயன்படுத்துவது இல்லை. அதற்கு நாம் நியூட்டனின் பின்நோக்கு இடைச்செருகல் சூத்திரத்தை பொதுவாக பயன்படுத்துவோம்.

$x = x_n + nh$ இடத்து , $f(x)$ ன் மதிப்பானது,

$$f(x_n+nh) = f(x_n) + \frac{n}{1!}\nabla f(x_n) + \frac{n(n+1)}{2!}\nabla^2 f(x_n) + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\nabla^3 f(x_n) + \dots$$

(அல்லது) $y_{(x=x_n+nh)} = y_n + \frac{n}{1!}\nabla y_n + \frac{n(n+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\nabla^3 y_n + \dots$ இங்கு $n = \frac{x-x_n}{h}$

குறிப்பு

y-ன் தேவையான மதிப்பு x-ன் முடிவு மதிப்புகளுக்கு அருகில் இருந்தால் பொதுவாக நியூட்டனின் பின்நோக்கு சூத்திரம் பயன்படுத்தப் படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 5.13

நியூட்டனின் இடைச்செருகல் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து 1905 ஆம் ஆண்டின் மக்கள் தொகையைக் காண்க:

வருடம்	1891	1901	1911	1921	1931
மக்கள்தொகை	98,752	1,32,285	1,68,076	1,95,670	2,46,050

தீர்வு

1905 ஆம் ஆண்டின் மக்கள்தொகை காணல் அதாவது, x = 1905-க்கு y-ன் மதிப்பு காணல்.

y-ன் தேவையான மதிப்பு அட்டவணையில் x-ன் ஆரம்ப மதிப்புக்கு அருகில் உள்ளது. எனவே நாம் நியூட்டனின் முன்நோக்கு இடைச்செருகல் சூத்திரத்தை பயன்படுத்துவோம்.

$$y_{(x=x_0+nh)} = y_0 + \frac{n}{1!}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots$$

x = 1905 இடத்து y-ஐ காண வேண்டும். $\therefore x_0 + nh = 1905$, $x_0 = 1891, h = 10$

$1891+n(10)=1905 \quad \Rightarrow n = 1.4$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1891	98752				
		33533			
1901	132285		2258		
		35791		–10435	
1911	168076		-8177		41376
		27614			
1921	195690			30941	
			22764		
		50360			
1931	246050				

$$\begin{aligned} y_{(x=1905)} &= 98752 + (1.4)(33533) + \frac{(1.4)(0.4)}{2}(2258) + \frac{(1.4)(0.4)(-0.6)}{6}(-10435) \\ &\quad + \frac{(1.4)(0.6)(-0.6)(-1.6)}{24}(41376) \\ &= 98752 + 46946.2 + 639.8 + 584.36 + 1390.23 \\ &= 148312.59 \\ &\cong 1,48,313 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.14

$y = f(x)$ என்ற சார்புக்கான, $x = 0, 1, 2, \ldots, 6$ இடத்து மதிப்புகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	2	4	10	16	20	24	38

நான்கு மதிப்புகளை மட்டும் கொண்டு $y\ (3.2)$ ன் தோராய மதிப்பை முன்நோக்கு இடைச்செருகலின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

தீர்வு:

முன்நோக்கு இடைச்செருகலின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த உள்ளதால் $f(x)$-ன் கடைசி நான்கு மதிப்புகளை கருத்தில் கொள்க.[$x = 3$ -லிருந்து எடுத்துக்கொள்க].

முன்நோக்கு இடைச்செருகல் சூத்திரம்

$$y_{(x=x_0+nh)} = y_0 + \frac{n}{1!}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots$$

$$x_0 + nh = 3.2, x_0 = 3, h = 1$$

$$\therefore \quad n = \frac{1}{5}$$

வேறுபாட்டு அட்டவணை

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
3	16			
		4		
4	20		0	
		4		10
5	24		10	
		14		
6	38			

$$y_{(x=3.2)} = 16 + \frac{1}{5}(4) + \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{-4}{5}\right)}{2}(0) + \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{-4}{5}\right)\left(\frac{-9}{5}\right)}{6} \times 10$$

$$= 16 + 0.8 + 0 + 0.48$$

$$= 17.28$$

எடுத்துக்காட்டு 5.15

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு 45-க்கு குறைவான மதிப்பெண்கள் பெற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை காண்க.

மதிப்பெண்கள்	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	31	42	51	35	31

தீர்வு:

x என்பது மதிப்பெண் மற்றும் y என்பது மாணவர்களின் எண்ணிக்கை என்க.

கூட்டு நிகழ்வெண் பரவலில் மாற்றம் செய்த பிறகு கிடைக்கும் வேறுபாட்டு அட்டவணை.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
40-க்குக் குறைவான	31				
		42			
50	73		9		
		51		–25	
60	124		-16		37
		35		12	
70	159		-4		
		31			
80	190				

$$y_{(x=x_0+nh)} = y_0 + \frac{n}{1!}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots$$

$x = 45$ இடத்து y-ஐக் காண வேண்டும். $\therefore x_0 + nh = 45$, $x_0 = 40, h = 10 \quad \Rightarrow n = \dfrac{1}{2}$

$$y_{(x=45)} = 31 + \frac{1}{2} \times 42 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)}{2}(9) + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)}{6}\times(-25)$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)}{24}\times(37)$$

$$= 31 + 21 - \frac{9}{8} - \frac{25}{16} - \frac{37\times 15}{128}$$

$$= 47.867 \cong 48$$

எடுத்துக்காட்டு 5.16

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கான இடைச்செருகல் சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி 60க்கும் 70க்கும் இடைப்பட்ட நிறை கொண்ட மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

நிறை (lbs)	0-40	40-60	60-80	80-100	100-120
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	250	120	100	70	50

தீர்வு:

நிறை $= x$ என்க. மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $= y$ என்க. கூட்டு நிகழ்வெண் பரவலில் மாற்றம் செய்த பிறகு கிடைக்கும் வேறுபாட்டு அட்டவணை.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
40-க்குக் குறைவான	250				
		120			
60	370		−20		
		100		−10	
80	470		−30		20
		70		10	
100	540		−20		
		50			
120	590				

70 க்கு கீழ் நிறை கொண்ட மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை காண நாம் முன்நோக்கு இடைவெளி சூத்திரத்தை பயன்படுத்துவோம்.

$$y_{(x=x_0+nh)} = y_0 + \frac{n}{1!}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots$$

$x = 70$ இடத்து y-ஐ காண வேண்டும். $\therefore\ x_0 + nh = 70,\ x_0 = 40, h = 20$

$$40+n(20) = 70 \Rightarrow n = 1.5$$

$$\therefore \quad y_{(x=70)} = 250 + 1.5(120) + \frac{(1.5)(0.5)}{2!}(-20) + \frac{(1.5)(0.5)(-0.5)}{3!}(-10)$$

$$+ \frac{(1.5)(0.5)(-0.5)(-1.5)}{4!}(20)$$

$$= 250 + 180 - 7.5 - 0.625 + 0.46875$$

$$= 423.59$$

$$\cong 424.$$

60-க்கும் 70-க்கும் இடைப்பட்ட நிறை கொண்ட மாணவர்களின் எண்ணிக்கை

$$= y(70) - y(60) = 424 - 370 = 54$$

எடுத்துக்காட்டு 5.17

ஒரு குறிப்பிட்ட நகரத்தின் மக்கள்தொகை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

வருடம் : x	1941	1951	1961	1971	1981	1991
மக்கள்தொகை (இலட்சத்தில்) : y	20	24	29	36	46	51

இடைக்செருகல் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி 1946 –ம் ஆண்டுக்கான மக்கள் தொகையைக் காண்க.

தீர்வு:

x	1941	1951	1961	1971	1981	1991
y	20	24	29	36	46	51

1946-ஆம் அண்டின் மக்கள்தொகையை கணக்கிடுவதற்கு (அதாவது x=1946க்கு y -ன் மதிப்பை கணக்கட) நாம், நியூட்டனின் முன்நோக்கு இடைச்செருகல் சூத்திரத்தை பயன்படுத்துவோம்.

$$y_{(x=x_0+nh)} = y_0 + \frac{n}{1!}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots$$

$x = 1946 \quad \therefore\ x_0 + nh = 1946,\ x_0 = 1941,\ h = 10$

$1941 + n(10) = 1946 \ \Rightarrow\ n = 0.5$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
1941	20					
		4				
1951	24		1			
		5		1		
1961	29		2		0	
		7		1		-9
1971	36		3		-9	
		10		-8		
1981	46		-5			
		5				
1991	51					

$$\begin{aligned} y_{(x=1946)} &= 20 + \frac{0.5}{1!}(4) + \frac{0.5(0.5-1)}{2!}(1) + \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)}{3!}(1) \\ &\quad + \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)(0.5-3)}{4!}(0) \\ &\quad + \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)(0.5-3)(0.5-4)}{5!}(-9) \\ &= 20 + 2 - 0.125 + 0.0625 - 0.24609 \end{aligned}$$

$= 21.69$ இலட்சங்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 5.18

பின்வரும் விவரங்கள் நீராவி அட்டவணையில் இருந்து எடுக்கப்பட்டது.

வெப்பநிலை ^{0}C	140	150	160	170	180
அழுத்தம் kg f/cm^2	3.685	4.854	6.302	8.076	10.225

வெப்பநிலையானது 175 ^{o}C எனும்பொழுது நீராவியின் அழுத்தத்தைக் காண்க.

தீர்வு:

தேவையான நீராவியின் மதிப்பு அட்டவணையின் இறுதிப் புள்ளிக்கு அருகில் உள்ளதால், நியூட்டனின் பின்நோக்கு இடைச்செருகல் சூத்திரத்தை பயன்படுத்துவோம்.

$$y_{(x=x_n+nh)} = y_n + \frac{n}{1!}\nabla y_n + \frac{n(n+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\nabla^3 y_n + \ldots$$

$x = 175$

$\therefore x_n + nh = 175,\ x_n = 180, h = 10 \quad \Rightarrow \quad n = -0.5$

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
140	3.685				
		1.169			
150	4.854		0.279		
		1.448		0.047	
160	6.032		0.326		0.002
		1.774		0.049	
170	8.076		0.375		
		2.149			
180	10.225				

$$\therefore \quad y_{(x=175)} = 10.225 + (-0.5)(2.149) + \frac{(-0.5)(0-5)}{2!}(0.375)$$

$$+\frac{(-0.5)(0-5)(1.5)}{3!}(0.049) + \frac{(-0-5)(0.5)(1.5)(2.5)}{4!}(0.002)$$

$$= 10.225 - 1.0745 - 0.046875 - 0.0030625 - 0.000078125$$

$$= 9.10048438$$

$$= 9.1$$

எடுத்துக்காட்டு 5.19

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையிலிருந்து $x = 7.5$ எனும்போது y –ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	8	27	64	125	216	343	512

தீர்வு:

இங்கு பின்நோக்கு இடைச்செருகல் சூத்திரத்தை பயன்படுத்துவோம்.

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
1	1				
		7			
2	8		12		
		19		6	
3	27		18		0
		37		6	
4	64		24		0
		61		6	
5	125		30		0
		91		6	
6	216		36		0
		127		6	
7	343		42		
		169			
8	512				

$$y_{(x=x_n+nh)} = y_n + \frac{n}{1!}\nabla y_n + \frac{n(n+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\nabla^3 y_n + \ldots$$

$$x = 7.5 \therefore x_n + nh = 7.5,\ x_n = 8, h = 1 \ \Rightarrow \ n = -0.5$$

$$y_{(x=7.5)} = 512 + \frac{-0.5}{1!}169 + \frac{-0.5(-0.5+1)}{2!}42 + \frac{-0.5(-0.5+1)(-0.5+2)}{3!}6$$

$$= 421.87$$

எடுத்துக்காட்டு 5.20

வெவ்வேறு வயதில் முடியும் முதிர்வுகாலத்திற்கான செலுத்தப்படும் அரைவருட காப்பீட்டுத்தொகை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. 63 வயதில் முதிர்வு காலம் கொண்ட ஒரு பிரிமியத்தின் காப்பீட்டுத் தொகை காண்க.

வயது	45	50	55	60	65
காப்பீட்டுத் தொகை	114.84	96.16	83.32	74.48	68.48

தீர்வு:

வயது $= x$, காப்பீட்டுத்தொகை $= y$ என்க.

இங்கு, நியூட்டனின் பின்நோக்கு சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி y-ன் மதிப்பைக் காண்போம்.

$$y_{(x=x_n+nh)} = y_n + \frac{n}{1!}\nabla y_n + \frac{n(n+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\nabla^3 y_n + \ldots$$

$$x = 63 \quad \therefore x_n + nh = 63,\ x_n = 68.48, h = 5 \Rightarrow n = -\frac{2}{5}$$

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
	114.84				
45					
		-18.68			
50	96.16		5.84		
		-12.84		-1.84	
55	83.32		4		0.68
		-8.84		-1.16	
60	74.48		2.84		
		-6			
65	68.48				

$$\boldsymbol{y}_{(x=63)} = 68.48 + \frac{\frac{-2}{5}}{1!}(-6) + \frac{\frac{-2}{5}\left(\frac{-2}{5}+1\right)}{2!}2.84 + \frac{\frac{-2}{5}\left(\frac{-2}{5}+1\right)\left(\frac{-2}{5}+2\right)}{3!}(-1.16)$$

$$+ \frac{\frac{-2}{5}\left(\frac{-2}{5}+1\right)\left(\frac{-2}{5}+2\right)\left(\frac{-2}{5}+3\right)}{4!}(0.68)$$

$$= 68.48 + 2.4 - 0.3408 + 0.07424 - 0.028288$$

$$y(63) = 70.585$$

எடுத்துக்காட்டு 5.21

கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளிலிருந்து இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காண்க

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	1	2	4	7	11	16	22	29

தீர்வு:

நியுட்டனின் பின்நோக்கு இடைச்செருகலின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காண்போம்.

$$y_{(x=x_n+nh)} = y_n + \frac{n}{1!}\nabla y_n + \frac{n(n+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\nabla^3 y_n + ...$$

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$
0	1			
		1		
1	2		1	
		2		0
2	4		1	
		3		0
3	7		1	
		4		0
4	11		1	
		5		0
5	16		1	
		6		0
6	22		1	
		7		
7	29			

x -ன் வாயிலாக y –ஐ காண, $\therefore x_n + nh = x$, $x_n = 7,\ h = 1 \Rightarrow\ n = x - 7$

$$\begin{aligned} y_{(x)} &= 29 + (x-7)(7) + \frac{(x-7)(x-6)}{2}(1) \\ &= 29 + 7x - 49 + \frac{1}{2}\left(x^2 - 13x + 42\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[58 + 14x - 98 + x^2 - 13x + 42\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[x^2 + x + 2\right] \end{aligned}$$

5.2.4 இலக்ராஞ்சியின் இடைச்செருகல் சூத்திரம் (Lagrange's interpolation formula)

நியூட்டனின் முன்நோக்கு மற்றும் பின்நோக்கு இடைச்செருகலின் சூத்திரம் x-ன் சம இடைவெளிகளுக்கு மட்டுமே பயன்படுத்த முடியும். x-ன் சம மற்றும் சமமற்ற இடைவெளிகளுக்கு இலக்கராஞ்சியின் இடைச்செருகல் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

$y = f(x)$ என்பது x-ன் சார்பாகவும், $x = x_0,\ x_1, x_2, ...,\ x_n$ என்ற சம பிரிவற்ற மதிப்புகளுக்கு முறையே $f(x)$ -ன் மதிப்புகள் $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ ஆகவும் இருந்தால் கொடுக்கப்பட்ட x- க்கான y-ஐ காண இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$y = f(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)...(x_0-x_n)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)...(x_1-x_n)}y_1$$

$$+ ... + \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)...(x_n-x_{n-1})}y_n$$

எடுத்துக்காட்டு 5.22

கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையிலிருந்து $y(10)$-ன் மதிப்பை இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி காண்க:

x	5	6	9	11
y	12	13	14	16

தீர்வு:

இங்கு x -ன் மதிப்புகள் சம பிரிவற்றவை. எனவே இலெக்ராஞ்சியின் சூத்திரத்தை பயன்படுத்தவும்.

$$x_0=5, x_1=6, x_2=9, x_3=11$$

$$y_0=12, y_1=13, y_2=14, y_3=16$$

$$y = f(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}\times y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\times y_1$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\times y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\times y_3$$

$$= \frac{(x-6)(x-9)(x-11)}{(5-6)(5-6)(5-11)}(12)+\frac{(x-5)(x-9)(x-11)}{(6-5)(6-9)(6-9)}(13)$$

$$+\frac{(x-5)(x-6)(x-11)}{(9-5)(9-6)(9-11)}(14)+\frac{(x-5)(x-6)(x-9)}{(11-5)(11-6)(11-9)}(16)$$

$x=10$ என்க.

$$y(10) = f(10) = \frac{4(1)(-1)}{(-1)(-4)(-6)}(12) + \frac{(5)(1)(-1)}{(1)(-3)(-5)}(13)+\frac{5\,(4)(-1)}{4(3)(-2)}(14) + \frac{(5)(4)(1)}{6(5)(2)}(16)$$

$$=\frac{1}{6}(12)-\frac{13}{3}+\frac{5(14)}{3\times 2}+\frac{4\times 16}{12}$$

$$= 14.6663$$

பயிற்சி 5.2

1. வரைபட முறையைப் பயன்படுத்தி x=48 எனில் பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து y-ன் மதிப்பைக் காண்க:

x	40	50	60	70
y	6.2	7.2	9.1	12

2. பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து 350 அலகுகளில் ஏற்படக்கூடிய செலவினத்தை வரைபட முறையைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

மாதம்	ஜனவரி	பிப்ரவரி	மார்ச்	ஏப்ரல்	மே	ஜூன்
வெளியீடு அலகுகள்	200	300	400	640	540	580
மறைமுக உழைப்பூதியச் செலவினம்	2500	2800	3100	3820	3220	3640

3. நியுட்டனின் முன்நோக்கு இடைச்செருகலின் சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி முப்படி பல்லுறுப்பு கோவையைக் காண்க.

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	1	10

4. 10 வருடங்களுக்கு ஒருமுறை எடுக்கப்படும் ஒரு நகரத்தின் மக்கள் தொகை கணக்கெடுப்பின் விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. 1955 வருடத்தின் மக்கள் தொகையை மதிப்பிடுக.

வருடம்	1951	1961	1971	1981
மக்கள் தொகை(இலட்சத்தில்)	35	42	58	84

5. ஒரு தேர்வில் குறிப்பிட்ட இடைவெளிக்குள் மதிப்பெண்கள் பெறும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன:

மதிப்பெண்கள்	0-19	20-39	40-59	60-79	80-99
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	41	62	65	50	17

70-க்கு குறைவான மதிப்பெண்கள் பெறும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை காண்க.

6. கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையைக் கொண்டு $x = 32$ எனில் $f(x)$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	30	35	40	45	50
$f(x)$	15.9	14.9	14.1	13.3	12.5

7. உலோகம் மற்றும் துத்தநாகத்தில் உள்ள காரீயத்தின் உருகும் நிலை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. 'T' என்பது வெப்பநிலை (பாகையில்) மற்றும் P என்பது உலோகத்தில் காரீயத்தின் சதவீதம்.

P	40	50	60	70	80	90
T	180	204	226	250	276	304

84 சதவீத காரீயம் கொண்ட உலோகத்தின் உருகும் நிலையைக் காண்க.

8. கீழ்க்கண்ட அட்டவளையிலிருந்து $f(2.8)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	11	34

9. இடைச்செருகல் முறையைப் பயன்படுத்தி 1986-ஆம் வருடத்திற்கான தொழிற்சாலையின் உற்பத்தியைக் காண்க.

வருடம்	1974	1978	1982	1990
உற்பத்தி (ஆயிரம் டன்களில்)	25	60	80	170

10. கீழ்க்கண்ட விவரங்களிலிருந்து மாத வருமானம் ₹26-க்கு மிகாமல் பெறும் தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கையை இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி காண்க.

வருமானம் மிகாமல் (₹)	15	25	30	35
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	36	40	45	48

11. இடைச்செருகலைப் பயன்படுத்தி 1985–ஆம் வருடத்தின் வியாபாரத்தை மதிப்பிடுக.

வருடம்	1982	1983	1984	1986
வியாபாரம் (இலட்சங்களில்)	150	235	365	525

12. இலக்ராஞ்சியின் இடைச்செருகலைப் பயன்படுத்தி $f(x)$ –ன் மதிப்பை $x = 15$ -ல் காண்க.

x	3	7	11	19
$f(x)$	42	43	47	60

பயிற்சி 5.3

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்க

1. $\Delta^2 y_0 =$

   (a) $y_2 - 2y_1 + y_0$ (b) $y_2 + 2y_1 - y_0$ (c) $y_2 + 2y_1 + y_0$ (d) $y_2 + y_1 + 2y_0$

2. $\Delta f(x) =$

   (a) $f(x+h)$ (b) $f(x) - f(x+h)$ (c) $f(x+h) - f(x)$ (d) $f(x) - f(x-h)$

3. $E \equiv$

   (a) $1+\Delta$ (b) $1-\Delta$ (c) $1+\nabla$ (d) $1-\nabla$

4. $h=1$ எனில் , $\Delta\left(x^2\right) =$

   (a) $2x$ (b) $2x-1$ (c) $2x+1$ (d) 1

5. c ஒரு மாறிலி எனில் $\Delta c =$

   (a) c (b) Δ (c) Δ^2 (d) 0

6. m மற்றும் n என்பவை மிகை முழுக்கள் எனில் $\Delta^m \Delta^n f(x) =$

   (a) $\Delta^{m+n} f(x)$ (b) $\Delta^m f(x)$ (c) $\Delta^n f(x)$ (d) $\Delta^{m-n} f(x)$

7. 'n' மிகை முழு எண் எனில், $\Delta^n\left[\Delta^{-n} f(x)\right]$

   (a) $f(2x)$ (b) $f(x+h)$ (c) $f(x)$ (d) $\Delta f(x)$

8. $E f(x) =$

   (a) $f(x-h)$ (b) $f(x)$ (c) $f(x+h)$ (d) $f(x+2h)$

9. $\nabla \equiv$

   (a) 1+E (b) 1-E (c) $1-E^{-1}$ (d) $1+E^{-1}$

10. $\nabla f(a) =$

(a) $f(a)+f(a-h)$ (b) $f(a)-f(a+h)$

(c) $f(a)-f(a-h)$ (d) $f(a)$

11. $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ என்ற புள்ளிகள் கொடுக்கப்பட்டால் இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரம்

(a) $y(x) = \dfrac{x-x_1}{x_0-x_1} y_0 + \dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} y_1$ (b) $y(x) = \dfrac{x_1-x}{x_0-x_1} y_0 + \dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} y_1$

(c) $y(x) = \dfrac{x-x_1}{x_0-x_1} y_1 + \dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} y_0$ (d) $y(x) = \dfrac{x_1-x}{x_0-x_1} y_1 + \dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} y_0$

12. இலக்ராஞ்சியின் இடைச்செருகலின் சூத்திரம் எப்பொழுது பயன்படுத்தப்படும்

(a) சமமான இடைவெளிகளுக்கு மட்டும் (b) சமமற்ற இடைவெளிகளுக்கு மட்டும்

(c) சம மற்றும் சமமற்ற இடைவெளிகளுக்கு (d) இவற்றுள் ஏதும் கிடையாது.

13. $f(x) = x^2 + 2x + 2$ மற்றும் $h=1$ எனில் $\Delta f(x)$-ன் மதிப்பு

(a) $2x-3$ (b) $2x+3$ (c) $x+3$ (d) $x-3$

14. கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து $\Delta^3 y_0$ –ன் மதிப்பு

x	5	6	9	11
y	12	13	15	18

(a) 1 (b) 0 (c) 2 (d) –1

இதரக் கணக்குகள்

1. $f(x) = e^{ax}$ எனில் $f(0), \Delta f(0), \Delta^2 f(0)$ என்பன பெருக்குத்தொடரில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

2. $i)(1+\Delta)(1-\nabla) = 1$ $ii)\Delta\nabla = \Delta - \nabla$ (iii) $E\nabla = \Delta = \nabla E$ என நிறுவுக.

3. ஒரு இரண்டு படி கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவையானது (1,-1) (2,-1) (3,1) (4,5) என்ற புள்ளிகள் வழிச்செல்கின்றது. பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காண்க.

4. கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையிலிருந்து விடுபட்ட உறுப்புகளைக் காண்க.

x	0	5	10	15	20	25
y	7	11	-	18	-	32

5. $f(-1) = 202,\ f(0) = 175,\ f(1) = 82$ மற்றும் $f(2) = 55$ எனில் $f(0.5)$ காண்க.

6. கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையிலிருந்து $x = 43$ மற்றும் $x = 84$ எனும் புள்ளிகளில் y-ன் மதிப்பு காண்க

x	40	50	60	70	80	90
y	184	204	226	250	276	304

7. 'D' -ஐ விட்டமாகவும் A -ஐ பரப்பாகவும் கொண்ட வட்டத்தின் மதிப்புகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

D	80	85	90	95	100
A	5026	5674	6362	7088	7854

82 மற்றும் 91 என்பனவற்றை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டங்களின் பரப்புகளைக் காண்க.

8. $u_0 = 560,\ u_1 = 556,\ u_2 = 520,\ u_4 = 385,$ எனில் $u_3 = 465$ என நிரூபி

9. பின் வரும் அட்டவணையிலிருந்து நியூட்டனின் பின் நோக்கு சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி படி 4 –ஐ கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காண்க.

x	1	2	3	4	5
y	1	-1	1	-1	1

10. இலக்ராஞ்சியின் இடைமதிப்புத்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $(0, -12), (1, 0), (3, 6)$ மற்றும் $(4,12)$ என்ற புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காண்க

தொகுப்புரை

- $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$
- $\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$
- $\nabla f(x+h) = \Delta f(x)$
- $Ef(x) = f(x+h)$
- $E^n f(x) = f(x+nh)$
- நியூட்டனின் முன்னோக்கு விதி:

$$y_{(x=x_0+nh)} = y_0 + \frac{n}{1!}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots$$

- நியூட்டனின் பின்னோக்கு விதி:

$$y_{(x=x_n+nh)} = y_n + \frac{n}{1!}\nabla y_n + \frac{n(n+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\nabla^3 y_n + \ldots$$

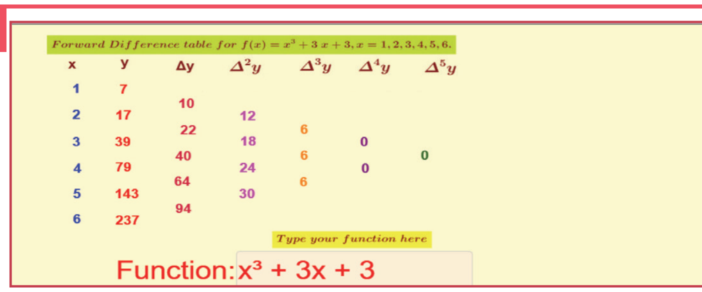
- இலக்ராஞ்சியின் இடைமதிப்புத்தேற்றம்

$$y = f(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}y_1 + \ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}y_n$$

கலைச் சொற்கள் (GLOSSARY)	
இடப்பெயர்வுச் செயலி	Shifting operator
இடைச்செருகல்	Interpolation
இயற்கணித முறைகள்	Algebraic methods
இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரம்	Lagrange's formula
எண்ணியியல்	Numerical
காப்பீடு	Policy
கிரிகோரி–நியுட்டனின் சூத்திரங்கள்	Gregory- Newton's formulae
திட்டமான வேறுபாடுகள்	Finite differences
பின்நோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி	Backward difference operator
புறச்செருகல்	Extrapolation
முன்நோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி	Forward difference operator
வரைபட முறை	Graphic method

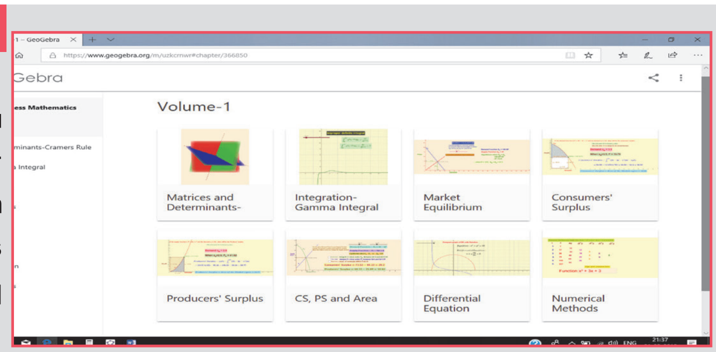
இணையச் செயல்பாடு

செயல்பாட்டின் இறுதியில் எதிர்பார்க்கப்படும் விளைவு



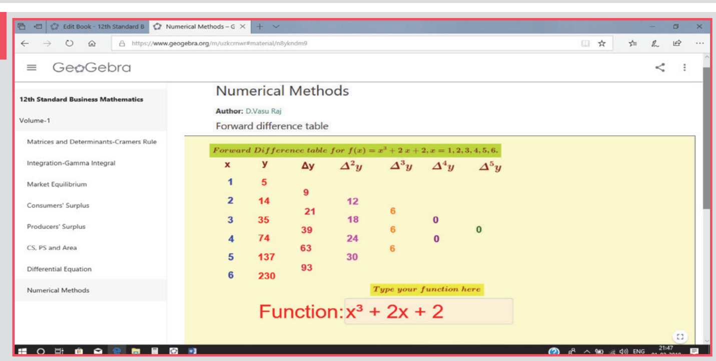
படி 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி இச்செயல்பட்டிற்கான இணையப் பக்கத்திற்குச் செல்க. பின்பு "12th Standard Business Mathematics and Statistics " என்னும் திரையில் "Volume–1" யை தெரிவு செய்யவும்.



படி 2

"Numerical Methods" என்னும் திரை தோன்றும். Forward Difference table என்னும் அட்டவணை தோன்றும், அதில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள பெட்டியில் புதிய சார்புகளை தட்டச்சு செய்க. பின்பு கிடைக்கும் விடையினை அட்டவனையோடு ஒப்பிடுக.



செயல் பாட்டிற்க்கான உரலி : https://ggbm.at/uzkcrnwr

விரைவு குறியீடு (QR Code) :

B247_12_BUS_MAT_TM

விடைகள்

1. அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகள்

பயிற்சி 1.1

1.(i) $\rho(A)=2$ (ii) $\rho(A)=2$ (iii) $\rho(A)=1$ (iv) $\rho(A)=3$

(v) $\rho(A)=3$ (vi) $\rho(A)=3$ (vii) $\rho(A)=2$ (viii) $\rho(A)=3$ (ix) $\rho(A)=2$

2. $\rho(AB)=3,\ \rho(BA)=2$

3. $x=1, y=3, z=5$

4. $x=\frac{1}{11}(7-16k),\ \ y=\frac{1}{11}(3+k),\ \ z=k$

5. $x=2,\ y=1,\ \ z=0$

6. $\lambda=\frac{-7}{2}$

7. $x=1000,\ \ y=2000,\ \ \ z=500$

8. $x=1000,\ y=2200,\ z=1800$

பயிற்சி 1.2

1.(i) $x=8,\ y=-3$ (ii) $x=1,\ y=4$ (iii) $\{x, y, z\} = \{2, -1, 0\}$

(iv) $\{x, y, z\} = \{1, 2, 3\}$ (v) $\{x, y, z\} = \left\{-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$

2. தொழிலாளருக்கான ஒரு அலகு செலவு ₹10 முதலீட்டிற்கான ஒரு அலகு செலவு ₹ 16

3. $4\frac{3}{4}\%$ -ல் முதலீடு செய்யப்பட்ட தொகை ₹ 7,300

   $6\frac{1}{2}\%$-ல் முதலீடு செய்யப்பட்ட தொகை ₹ 1,300

4. குதிரை சவாரிக்கான மணிநேர வாடகை ₹100 மற்றும்

   கிவாட் பைக் சவாரிக்கான மணி நேர வாடகை ₹120

5. $\{x, y, z\}=\{2,3,1\}$

6. 2% -ல் முதலீடு செய்யப்பட்டத் தொகை ₹250

   3% -ல் முதலீடு செய்யப்பட்டத் தொகை ₹4,000

   6% -ல் முதலீடு செய்யப்பட்டத் தொகை ₹4,250

பயிற்சி 1.3

1. 36% 2.(i) 54% , 46% (ii) 50%

3. A= 56.25%, B = 43.75%

4. A = 33%, B = 67%

பயிற்சி 1.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(d)	(b)	(a)	(c)	(d)	(b)	(b)	(d)	(a)	(c)	(c)	(b)	(c)
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
(b)	(c)	(c)	(b)	(b)	(a)	(b)	(b)	(c)	(d)	(c)	(a)	

இதரக் கணக்குகள்

1. $\rho(A)=2$ 2. $\rho(A)=3$ 3. $\rho(A)=3$

4. கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமை அற்றது மேலும் தீர்வு கிடையாது.

5. $k = 8$.

6. $k = 0$ தவிர k-ன் மற்ற மதிப்புகளுக்கு கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அற்றது.

7. $x=1,\ y=2$ மற்றும் $z = 2$

8. ஒரு கிலா கோதுமையின் விலை ₹30, ஒரு கிலோ சர்க்கரையின் விலை ₹40 மற்றும் ஒரு கிலோ அரிசியின் விலை ₹50.

9. A,B மற்றும் C ஆகியவற்றிற்கான தரகு வீதங்கள் முறையே ₹2, ₹4 மற்றும் ₹11 ஆகும்.

10. 39%

2. தொகை நுண்கணிதம் – I

பயிற்சி: 2.1

1. $\frac{2}{9}(3x+5)^{\frac{3}{2}}+c$ 2. $\frac{81x^5}{5}-\frac{16}{3x^3}-72x+c$ 3. $6x-\frac{13x^2}{2}-\frac{5x^3}{3}+c$

4. $\frac{2x^{\frac{9}{2}}}{9}-\frac{4x^{\frac{5}{2}}}{5}+2x^{\frac{3}{2}}+c$ 5. $\frac{(4x+7)^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{(4x+7)^{\frac{1}{2}}}{2}+c$

6. $\frac{1}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}-(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]+c$ 7. $b=\frac{13}{2}, c=-2, f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{13}{2}x-2$

8. $c=-20, f(x)=2x^4-x^2-20$

பயிற்சி: 2.2

1. $x^2+\frac{1}{2}\log|x|-2x+c$ 2. $\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+2\log|x-1|+c$

3. $\frac{x^3}{3}-x^2+4x-8\log|x+2|+c$ 4. $\frac{x^3}{3}-x^2+3x-4\log|x+5|+c$

5. $11\log|x-3|-8\log|x-2|+c$ 6. $\log|x+1|+3\log|x-3|+\frac{2}{(x+1)}+c$

7. $\log\left|x^3-x^2+5x-5\right|+c$

8. $c=\frac{\pi}{4}, f(x)=\log|x|+\frac{\pi}{4}$

பயிற்சி: 2.3

1. $\frac{a^x}{\log a}+a^a x-\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$
2. $\frac{1}{a^x\log a}-\frac{1}{b^x\log b}+c$
3. $e^x+e^{2x}+\frac{e^{3x}}{3}+c$
4. $\frac{e^{2x}}{2}+\frac{e^{-4x}}{4}+c$
5. $\frac{e^{4x}}{4}+c$
6. $e^{\left(x+\frac{1}{x}\right)}+c$
7. $-\frac{1}{\log x}+c$
8. $c=1, f(x)=e^x+1$

பயிற்சி: 2.4

1. $2\sin x+3\cos x+4\tan x+5\cot x+c$
2. $-\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{12}\cos 3x+c$
3. $\tan x+c$
4. $\tan x-\cot x+c$
5. $-[\sin x+\cos x]+c$

பயிற்சி: 2.5

1. $-e^{-x}(x+1)+c$
2. $e^{3x}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{9}-\frac{2}{27}\right]+c$
3. $x(\log x-1)+c$
4. $\frac{x^2}{2}\left[\log x-\frac{1}{2}\right]+c$
5. $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\log x-\frac{1}{n+1}\right)+c$
6. $e^{x^2}\left(x^4-2x^2+2\right)+c$

பயிற்சி: 2.6

1. $\log\left|x^2+5x-7\right|+c$
2. $\frac{1}{4}\log\left|x^4+1\right|+c$
3. $\frac{1}{2}\log\left|e^{2x}-2\right|+c$
4. $\frac{(\log x)^4}{4}+c$
5. $2\sqrt{3x^2+7x-1}+c$
6. $\frac{4}{3}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{3}{2}}+c$
7. $\frac{1}{54}\left(1+x^9\right)^6+c$
8. $\frac{1}{e}\log\left|x^e+e^x\right|+c$
9. $\log|\log x|+c$
10. $\frac{1}{10}\log\left|\frac{x^2-2}{2x^2+1}\right|+c$
11. $xe^x\left[\log\left(xe^x\right)-1\right]+c$
12. $\log|x|-\frac{1}{2}\log\left|x^2+1\right|+c$
13. $\frac{e^x}{x^2}+c$
14. $\frac{e^x}{(x+1)^2}+c$
15. $\frac{e^{3x}}{9x}+c$

பயிற்சி 2.7

1. $\frac{1}{24}\log\left|\frac{3+4x}{3-4x}\right|+c$
2. $\frac{1}{10}\log\left|\frac{9+x}{1-x}\right|+c$
3. $\frac{1}{6\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{2}x-3}{\sqrt{2}x+3}\right|+c$
4. $\frac{1}{3}\log\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+c$
5. $\log\left|\frac{x+1}{x+2}\right|+c$
6. $\frac{1}{10}\log\left|\frac{x-1}{x+4}\right|+c$

7. $\frac{1}{6}\log\left|\frac{e^x-3}{e^x+3}\right|+c$ 8. $\frac{1}{3}\log\left|3x+\sqrt{9x^2-7}\right|+c$ 9. $\log\left|(x+3)+\sqrt{x^2+6x+13}\right|+c$

10. $\log\left|\left(x-\frac{3}{2}\right)+\sqrt{x^2-3x+2}\right|+c$ 11. $\frac{1}{4}\log\left|x^4+\sqrt{x^8-1}\right|+c$

12. $\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2}\sqrt{1+x+x^2}+\frac{3}{8}\log\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{1+x+x^2}\right|+c$

13. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}-\log\left|x+\sqrt{x^2-2}\right|+c$ 14. $\frac{1}{4}\left[2x\sqrt{4x^2-5}-5\log\left|2x+\sqrt{4x^2-5}\right|\right]+c$

15. $\left(\frac{x+1}{2}\right)\sqrt{2x^2+4x+1}-\frac{\sqrt{2}}{4}\log\left|\sqrt{2}(x+1)+\sqrt{2x^2+4x+1}\right|+c$

16. $\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$

பயிற்சி 2.8

I:1. $\frac{1}{2}\left[e^2-1\right]$ 2. $\frac{1}{6}$ 3. $\frac{1}{2}\log\left[\frac{5}{2}\right]$ 4. $\log\left[\frac{1+e^3}{2}\right]$

5. $\frac{1}{2}[e-1]$ 6. $\frac{3}{8}$ 7. $\log\left[\frac{11}{5}\right]$ 8. 2 9. $\frac{1}{2}[2\log 2-1]$

II:1. 37 2. 0 3. 1 4. $c=4$

பயிற்சி 2.9

1. 0 2. $\frac{\pi}{2}$ 3. 0 4. $\frac{\pi}{4}$ 5. 0 6. $\frac{16}{5}$

பயிற்சி 2.10

1.(i) 6 (ii) $\frac{105\sqrt{\pi}}{16}$ (iii) $\frac{6!}{m^7}$ (iv) $\frac{3}{128}$ (v) $\left(2^6\right)5!$ 2. $\frac{1}{4}$

பயிற்சி 2.11

1. $\frac{9}{2}$ 2. $\frac{3}{2}$ 3. 14 4. $\frac{1}{3}$

பயிற்சி 2.12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(b)	(c)	(a)	(a)	(a)	(b)	(b)	(a)	(d)	(c)	(b)	(b)	(b)	(b)	(c)
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
(d)	(c)	(c)	(b)	(a)	(b)	(b)	(c)	(a)	(a)	(a)	(b)	(d)	(b)	(c)

இதரக் கணக்குகள்

1. $\frac{2}{15}\left[(x+2)^{\frac{3}{2}}+(x+3)^{\frac{3}{2}}\right]+c$ 2. $\frac{1}{5}\log\left|\frac{2+x}{1-2x}\right|+c$ 3. $\frac{1}{4}\log\left|\frac{e^x+1}{e^x+5}\right|+c$

4. $\frac{x}{2}\sqrt{2x^2-3}-\frac{3\sqrt{2}}{4}\log\left|\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2-3}\right|+c$

5. $\frac{(3x+2)}{6}\sqrt{9x^2+12x+3}-\frac{1}{6}\log\left|(3x+2)+\sqrt{9x^2+12x+3}\right|+c$

6. $\frac{1}{3}\left[(x+1)^3\log x-\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}-3x-\log|x|\right]+c$

7. $x\log\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)+\sqrt{x^2-1}+c$ 8. 0   9. $\frac{1}{4}\left[\frac{e^4-5}{e^2}\right]$ 10. $\frac{14}{15}$

3. தொகை நுண்கணிதம் – II

பயிற்சி 3.1

1. 5 ச.அலகுகள்   2. 2 ச.அலகுகள்   3. $\frac{8a^2}{3}$ ச.அலகுகள்   4. $\frac{3}{2}$ ச.அலகுகள்

5. $\frac{17}{2}$ ச.அலகுகள்   6. $\frac{8}{3}$ ச.அலகுகள்   7. $\frac{32}{3}$ ச.அலகுகள்

பயிற்சி 3.2

1. ₹28,000   2. $y=\left(\frac{2x-1}{3x+2}\right)$ 3. $P=8-2x,\ R=8x-2x^2$

4. ₹4,419   5. ₹5,680

6. மொத்த செலவுச் சார்பு: $C=100x-5x^2+\frac{0.1x^3}{3}+500$,

   சராசரி செலவுச் சார்பு: $AC=100x-5x+\frac{x^2}{30}+\frac{500}{x}$

7. மொத்த செலவுச் சார்பு: $C=\frac{1500}{7}x^{\frac{7}{5}}$, சராசரி செலவுச் சார்பு: $AC=\frac{1500}{7}x^{\frac{2}{5}}$

8. செலவுச் சார்பு: $C=2\sqrt{ax+b}-2\sqrt{b}$ 9. ₹14,133.33

10. மொத்த வருவாய்: $R=$₹5.95   11. தேவைச் சார்பு: $P=9-\frac{4x^2}{3}$

13. தேவைச் சார்பு: $P=20e^{-\frac{x}{10}}$ 14. வருவாய் சார்பு: $R=13x-0.065x^2-120$

15. வருவாய் சார்பு: $R=1500x-2x^2-x^3$, சராசரி வருவாய் சார்பு: $P=1500-2x-x^2$

16. வருவாய் சார்பு: $R=10x+\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$, தேவை சார்பு: $P=10+\frac{3x}{2}-\frac{x^2}{3}$

17. மொத்த செலவுச் சார்பு: $C = 4000\sqrt{7x+4} + 10000$,

சராசரி செலவு: $AC = \frac{4000}{x}\sqrt{7x+4} + \frac{10000}{x}$

18. மொத்த செலவுச் சார்பு: $C = \frac{x^2}{4} + 5000$ 19. வருவாய் சார்பு: $R = 20x - \frac{5x^2}{2} + x^3$

20. தேவை சார்பு: $P = 14 - 3x + 3x^2$

பயிற்சி 3.3

1. C.S.= 400 அலகுகள் 2. C.S.=378 அலகுகள் 3. C.S.=562.50 அலகுகள்

4. C.S=$\frac{1}{2}\left[1\text{-}\log_e 2\right]$ அலகுகள் 5. P.S=$\frac{25}{2}$ அலகுகள் 6. P.S=237.3 அலகுகள்

7. $C.S = 36\log\frac{3}{2} - 12$ அலகுகள் 8. $\frac{32000}{3}$ அலகுகள்

9. $\text{C.S} = \left(8\log 2 - 4\right)$ அலகுகள் , P.S=$\frac{1}{4}$ அலகுகள்

10. C.S=$\frac{1024}{3}$ அலகுகள், P.S = 64 அலகுகள் 11. C.S=24 அலகுகள், P.S=16 அலகுகள்

பயிற்சி 3.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(c)	(b)	(a)	(c)	(a)	(a)	(d)	(c)	(b)	(a)	(a)	(a)	(b)
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
(c)	(c)	(b)	(a)	(b)	(a)	(c)	(a)	(c)	(a)	(b)	(c)	

இதரக் கணக்குகள்

1. ₹1,900 2. C= ₹3,125 4. $R = 6x - x^3 - \frac{x^4}{4}$, $p = 6 - x^2 - \frac{x^3}{4}$

5. இலாபச் சார்பு: $P = 10x - \frac{x^2}{40} - 100$.

6. $C.S = \frac{40}{9}$ அலகுகள் , $P.S = \frac{32}{9}$ அலகுகள் 7. 52,770 அலகுகள்

8. $P = 11 - \frac{x^3}{3}$ 9. $\frac{76}{3}$ ச.அலகுகள் 10. $\frac{1}{5}\left[(2)^{\frac{5}{3}} - 1\right]$ ச.அலகுகள்

4. வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகள்

பயிற்சி 4.1

1.(i) (1 , 1) (ii) (3 , 1) (iii) (2 , 2) (iv) (3 , 1)
(v) (3 , 3) (vi) (2 , 1) (vii) (1 , 4).

2.(i) $y = x\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ (ii) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4xy\frac{dy}{dx} + 8y^2 = 0$ (iii) $y + x\frac{dy}{dx} = 0$

2.(iv) $x + y\dfrac{dy}{dx} = 0$ 3. $r^2\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^3$ 4. $y = x\dfrac{dy}{dx}$

5. $2a\dfrac{d^2y}{dx^2}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 = 0$ 6. $y^2 = x^2 + 2xy\dfrac{dy}{dx}$ 7. $y = 2x\dfrac{dy}{dx} + y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$

பயிற்சி 4.2

1.(i) $e^{-y} + ax + c = 0$ (ii) $\log x + \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{y^3}{3} + c$ 2. $\log x - x = \log y + c$

3.(i) $x = cy$ (ii) $\log(1+y) = -e^x + c$ 4. $(1+\sin x) = c(1+\cos y)$

5. $(x-1)(y+1) = c$ 6.(i) $\log y = \dfrac{-\cos 2x}{2} + c$ (ii) $\dfrac{e^{ax}}{a} = \dfrac{-e^{by}}{b} + c$

7. $(y-b)^2 = (x-a)^2 + b^2 - a^2$

பயிற்சி 4.3

1. $x = ce^{\frac{y}{x}}$ 2. $x + y = ke^{\frac{-2x}{x+y}}$ 3. $y + \sqrt{x^2+y^2} = x^2c$

4. $3y^2 - 4yx + 3x^2 = x^3c$ 5. $\left(xy - y^2\right)x = c$ 6. $y\sqrt{y^2-x^2} = 2\sqrt{3}\,x^5$ 7. $y = ce^{\frac{x^2}{2y^2}}$

பயிற்சி 4.4

1. $\dfrac{y}{x} = x + c$ 2. $ye^{\sin x} = e^{\sin x}(\sin x - 1) + c$ 3. $x^2y = \dfrac{x^6}{6} + c$

4. $y\left(1+x^3\right) = x + \dfrac{x^3}{3} + c$ 5. $xy = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + c$ 6. $y\sec x = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{\sin 2x}{2}\right) + c$

7. $y\sec^2 x = \sec x - 2$ 8. $x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$ 9. ₹ 2,22,550

பயிற்சி 4.5

1. $y = Ae^{2x} + Be^{4x}$ 2. $y = (Ax+B)e^{2x}$ 3. $y = e^{-x}(A\cos\sqrt{2}\,x + B\sin\sqrt{2}\,x)$

4. $y = (Ax+B)e^{kx}$ 5. $y = \dfrac{e^{-3x}}{12} + \dfrac{e^{5x}}{20}$ 6. $y = Ae^{\frac{1}{2}x} + Be^{\frac{3}{2}x} + \dfrac{e^{2x}}{4}$

7. $y = A\cos 4x + B\sin 4x$ 8. $y = e^x - \dfrac{3}{2}e^{2x} + \dfrac{e^{3x}}{2}$

9. $y = Ae^{-3x} + Be^{2x} + \dfrac{e^{3x}}{6} - \dfrac{x}{5}e^{-3x}$ 10. $y = (Ax+B)e^{5x} + 2xe^{5x} + \dfrac{1}{5}$

11. $y = Ae^{\frac{-3}{2}x} + Be^{\frac{-5}{2}x} + 4xe^{-\frac{3}{2}x}$ 12. $y = Ae^{2x} + Be^{\frac{-7}{3}x} + xe^{2x}$ 13. $p = Ae^{-4t} + Be^{2t} + 2$

பயிற்சி 4.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(a)	(d)	(a)	(b)	(a)	(a)	(d)	(c)	(a)	(c)	(b)	(a)	(b)
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
(c)	(d)	(a)	(d)	(a)	(b)	(d)	(a)	(a)	(d)	(c)	(a)	

இதரக் கணக்குகள்

1. $p = Ae^{-4t} + Be^{2t} + 3$ 2. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ 3. $e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + \log y = c$

4. $x\left(1 + \dfrac{3y^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}} = c$ 5. $yx^2 = \dfrac{x^6}{6} + c$ 6. $cm^2 = 2(m+6)$

7. $6y = \left(e^2 + e\right)e^x - \left(e^2 + e + 1\right)e^{2x} + e^{4x}$ 8. $ye^{\sin x} = 2e^{\sin x} + c$

9. $\log y = \dfrac{x^3}{3y^2} + c$ 10. $\log\left|1 + y\right| = x + \dfrac{x^2}{2} + c$

5. எண்ணியியல் முறைகள்

பயிற்சி 5.1

1. $\log\left(1 + \dfrac{h}{ax}\right)$

2.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	-1					
		1				
1	0		4			
		5		6		
2	5		10		0	
		15		6		0
3	20		16		0	
		31		6		
4	51		22			
		53				
5	104					

5. $\dfrac{-2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

6. 31

7. 445 இலட்சங்கள்

8. 3 மற்றும் 24

பயிற்சி 5.2

1. 6.8 2. ₹ 2,900 3. $f\left(x\right) = 2x^3 - 7x^2 + 6x + 1$

4. 36.784 (இலட்சங்கள்) 5. 197 6. 15.45

7. 286.96 8. 22.0948 9. 100 (ஆயிரம் டன்கள்)

10. 42 நபர்கள் 11. 444.7 இலட்சங்கள் 12. 53

பயிற்சி 5.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
(a)	(c)	(a)	(c)	(d)	(a)	(c)	(c)	(c)	(c)	(a)	(c)	(b)	(b)

இதரக் கணக்குகள்

3. $f\left(x\right) = x^2 - 3x + 1$ 4. 14.25, 23.5 5. 128.5

6. 189.79, 286.96 7. 5281, 6504

9. $y = \dfrac{2}{3}x^4 - 8x^3 + \dfrac{100}{3}x^2 - 56x + 31$ 10. $y = x^3 - 8x^2 + 19x - 12$

Books for Reference

1. Introduction to Matrices, S.P.Gupta , S.Chand & Company
2. Matrices, Shanthi Narayanan,S.Chand & Company
3. Matrices and Determinants,P.N.Arora, S.Chand & Company
4. Stochastic Processes, J. Medhi, New age international publishers
5. A Text Book on differential Calculus – S. K. Goyal -Jai Prakash Nath Publications.
6. A Text Book on Integral Calculus – S. K. Goyal - Jai Prakash Nath Publications.
7. Mathematics for Economics – Mehta, Madnani – Sultan Chand & Sons.
8. Differential and Integral Calculus - N.Piskunov - Mir Publishers,Moscow.
9. Differential and Integral Calculus - Schamum's Outline Series - Frank Ayres.
10. Calculus - S. Narayanan, T. K. Manicavachagom Pillay - S. Viswanathan - Printers and Publishers Pvt. Ltd.
11. Differential Equations and Its Applications - S. Narayanan, T. K. Manicavachagon Pillay
12. Calculus (Volume I & II) - Tom. M. Apostol - John Wiley Publications.
13. Numerical Methods- P.Kandasamy, K.Thilagvathy, K.Gunavathi- S.Chand & Company
14. Finite differences and numerical analysis-H.C.Saxena, S.Chand & Company
15. Applied statistics by A. Chandrasekaran and A. Latha
16. Basic Statistics : B L Agarwal, New Age International Publishers.
17. Business Statistics Problems and solutions: J K Sharma, Vikas Publishing House Pvt Ltd.
18. Comprehensive Statistical Methods : P.N. Arora,Sumeet Arora and S. Arora
19. Elements of statistical methods by P. N. Arora, sumeet arora.
20. Fundamentals of Statistics: S.C.Gupta, Himalaya Publishing House.
21. Fundamentals of Applied Statistics: S.C.Gupta and V.K.Kapoor, Sultan Chand & Sons.
22. Goon, A.M. Gupta M.K. and Das Gupta B (1977) An Outline of Statistical Theory, Vol I, 6/e, World Press, Calcutta.
23. Gupta S.C, Kapoor V.K (2009) Fundamentals of Mathematical Statistics. Sultan Chand & Sons, New Delhi.
24. Handbook of basic c statistical concepts for scientists and pharmacists by shubha rani
25. Hogg. R.V. Craig. A.T. (1978): Introduction to Mathematical Statistics, McGraw Hill Publishing Co. Inc. New York.
26. Introduction to Statistical Quality Control: Douglas C. Montgomery, Wiley Publications.
27. Mood A. M, Graybill F. A, Boes D. C (1983) Introduction to the Theory of Statistics. Third edition, McGraw-Hill International Book Company.
28. Sanjay Arora and Bansilal (1989): New Mathematical Statistics, Satyaprakashan, New Delhi.
29. Statistical Methods: S.P Gupta, Sultan Chand & Sons.
30. Statistical Quality Control: Douglas C. Montgomery, Wiley Publications.
31. Statistical Quality Control: M. Mahajan, Dhanpat Rai & Co Publications
32. Statistics Theory and Practice: R S N Pillai and Bagavathi: S Chand.
33. Operations Research, Dr.S.P.Gupta, P.K. Gupta, Dr.Manmohan, Sultan Chand & Sons
34. Operations Research, A.Ravindran, James J.Solberg, Willey Student Edition
35. Operations Research, Frederick S.Hilton, Gerald J.Lieberman,Mc Graw Hill Education
36. Operations Research –Dr.S.J.Venkatesan, Sri Krishna Publications, Chennai
37. Business Mathematics and Statistics, HSC First Year, Tamilnadu Text Book Corporation.
38. Mathematics, HSC First & Second Year, Tamilnadu Text Book Corporation.
39. Statistics - HSC First & Second Year – Tamil nadu Text Book Corporation.

வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியியல் – மேல் நிலை இரண்டாமாண்டு
வல்லுநர்கள், மேலாய்வாளர்கள் மற்றும் நூலாசிரியர்கள் பெயர் பட்டியல்

பாடத் தயாரிப்புக்குழு தலைவர்

திரு. ந. இரமேஷ்
இணைப் பேராசிரியர் (ஓய்வு), கணிதத்துறை,
அரசு கலைக் கல்லூரி (ஆண்கள்),
நந்தனம், சென்னை – 600 035.

மேலாய்வாளர்கள்

முனைவர் மா.ரெ. சீனிவாசன்
பேராசிரியர் மற்றும் துறைத் தலைவர்
புள்ளியியல் துறை, சென்னை பல்கலைக் கழகம்,
சென்னை – 600 005.

முனைவர் தெ. அறிவுடைநம்பி
பேராசிரியர், கணிதத்துறை,
அண்ணா பல்கலைக் கழகம்,
சென்னை – 600 025.

பாடப் பொருள் வல்லுநர்கள்

முனைவர் வேணு பிரகாஷ்
இணைப் பேராசிரியர் மற்றும் துறை தலைவர்,
புள்ளியியல் துறை,
மாநிலக் கல்லூரி , சென்னை – 600 005.

முனைவர் இரா. திருமலைச்சாமி
இணைப் பேராசிரியர் மற்றும் துறைத் தலைவர்
கணிதத்துறை, அரசு கலைக் கல்லூரி (ஆண்கள்),
நந்தனம், சென்னை – 600 035.

முனைவர் ச. ஜெ. வெங்கடேசன்
இணைப் பேராசிரியர் ,
கணிதத்துறை, அரசு கலைக் கல்லூரி (ஆண்கள்),
நந்தனம், சென்னை – 600 035.

திருமதி கி. கோகிலா
உதவி பேராசிரியர் மற்றும் துறைத் தலைவர்
புள்ளியியல் துறை,
டாக்டர் அம்பேத்கர் அரசினர் கலைக் கல்லூரி,
வியாசர்பாடி, சென்னை.

முனைவர் நா. சுந்தரம்
உதவி பேராசிரியர்,
புள்ளியியல் துறை,
மாநிலக் கல்லூரி , சென்னை – 600 005.

முனைவர் லோ. பாரி தயாள்
உதவி பேராசிரியர், புள்ளியியல் துறை
சென்னை கிருத்துவக் கல்லூரி,
தாம்பரம், சென்னை.

திருமதி மே. திலகம்
உதவிப் பேராசிரியர் ,
புள்ளியியல் துறை,
மாநிலக் கல்லூரி, சென்னை– 600 005.

பாடக்குழு பொறுப்பாளர்

திரு. இரவிக்குமார் ஆறுமுகம்
முதல்வர்
மாவட்ட ஆசிரியர் கல்வி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம்,
மாயனூர், கரூர் மாவட்டம்.

பாட நூல் ஒருங்கிணைப்பாளர்

திரு. பாபு சுப்பிரமணியன்
உதவி பேராசிரியர்
மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி மற்றும் நிறுவனம்,
சென்னை – 600 006.

நூலாசிரியர்கள்

திரு. இரா. வில்லவன்கோதை
தலைமை ஆசிரியர், அரசினர் மேல்நிலைப் பள்ளி,
கொருக்கை, நாகப்பட்டினம் மாவட்டம் – 609 203.

திரு. தி.பி. சுவாமி நாதன்
முதுகலை கணித ஆசிரியர்,
மறைமலை அடிகளார் அரசு மேல்நிலைப் பள்ளி
பல்லாவரம், சென்னை – 600 043.

திரு. ஹரி. வெங்கடேஷ்
முதுகலை கணித ஆசிரியர்,
சர் இராமசாமி முதலியார் மேல்நிலைப்பள்ளி,
அம்பத்தூர், சென்னை – 600 053.

திருமதி சி. பகவதி
முதுகலைப் பட்டதாரி ஆசிரியர்,
ஸ்ரீ அகோபில மடம் ஓரியண்டல் மேல்நிலைப் பள்ளி,
மேற்கு மாம்பலம், சென்னை – 600 033.

திரு. எஸ்.எப். சுலைமான்
முதுகலைப் பட்டதாரி ஆசிரியர்,
மறைமலை அடிகளார் அரசு மேல்நிலைப் பள்ளி
பல்லாவரம், சென்னை – 600 043.

திரு. வீ. கலைச்செல்வன்
முதுகலைப் பட்டதாரி ஆசிரியர்,
அரசு மேல்நிலைப் பள்ளி, திருநின்றவூர், திருவள்ளூர் மாவட்டம்.

திரு. த. ராஜ சேகர்
முதுகலைப் பட்டதாரி ஆசிரியர்,
அரசு ஆண்கள் மேல்நிலைப் பள்ளி
குரோம் பேட்டை, காஞ்சிபுரம் மாவட்டம்.

திருமதி அ. சுகன்யா,
முதுகலை கணித ஆசிரியர், அரசு மேல்நிலைப் பள்ளி,
கோவிலம் பாக்கம், காஞ்சிபுரம் மாவட்டம்.

திரு. வெ. கணேசன்
முதுகலைப் பட்டதாரி ஆசிரியர்,
நேரு அரசினர் ஆண்கள் மேல்நிலைப் பள்ளி,
நங்கைநல்லூர், சென்னை – 600 114.

திரு. ம.கோ. திரிலோகசந்திரன்
முதுகலை கணித ஆசிரியர், அரசு மேல்நிலைப் பள்ளி
மெய்யூர், திருவள்ளூர் மாவட்டம் – 601 103.

ICT ஒருங்கிணைப்பாளர்

தா. வாசுராஜ்
முதுகலை கணித ஆசிரியர் மற்றும் துறைத் தலைவர்
கே. ஆர். எம்.பொதுப் பள்ளி, செம்மியம், சென்னை – 600 011.

விரைவுக்குறியீடு மேலாண்மைக்குழு

இரா. ஜெகநாதன், இ.நி.ஆ, ஊ.ஒ.ந.நி.பள்ளி, கணேசபுரம், போளூர் ,
திருவண்ணாமலை மாவட்டம். .

மு. சரவணன், ப.ஆ, அ.ம.மே.நி.பள்ளி, புதுப்பாளையம்,
வாழப்பாடி, சேலம்.

ம. முருகேசன், ப.ஆ, ஊ.ஒ.ந.நி.பள்ளி,
பெத்தவேளாண்கோட்டகம், முத்துப்பேட்டை, திருவாரூர்.

புத்தக வடிவமைப்பாளர்

ஜாய் கிரா.ஃபிக்ஸ், சென்னை – 600 002.

அட்டை வடிவமைப்பாளர்

கதிர் ஆறுமுகம்.

In-House QC

ராஜேஷ் தங்கப்பன், ஜெரால்டு வில்சன்

ஒருங்கிணைப்பாளர்

ரமேஷ் முனிசாமி

தட்டச்சு

கே. நாகவேலு

இந்நூல் 80ஜி.எஸ்.எம். எலிகண்ட் மேப்லித்தோ தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது.
ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர்: