தமிழ்நாடு அரசு

மேல்நிலை இரண்டாம் ஆண்டு

கணிதவியல்

தொகுதி- II

தமிழ்நாடு அரசு விலையில்லாப் பாடநூல் வழங்கும் திட்டத்தின் கீழ் வெளியிடப்பட்டது

பள்ளிக் கல்வித்துறை

தீண்டாமை மனிதநேயமற்ற செயலும் பெருங்குற்றமும் ஆகும்

தமிழ்நாடு அரசு

முதல் பதிப்பு - 2019

திருத்திய பதிப்பு - 2020

(புதிய பாடத்திட்டத்தின் கீழ்
வெளியிடப்பட்ட நூல்)

விற்பனைக்கு அன்று

பாடநூல் உருவாக்கமும் தொகுப்பும்

**மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி
மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம்**

நூல் அச்சாக்கம்

**தமிழ்நாடு பாடநூல் மற்றும்
கல்வியியல் பணிகள் கழகம்**

www.textbooksonline.tn.nic.in

பொருளடக்கம்

கணிதவியல் தொகுதி-II

J8S2H7

மின்நூல்

M7X9N6

மதிப்பீடு

B225_12_MATHS_TM

இணைய வளங்கள்

2020 QR GUIDE

பாடநூலில் உள்ள விரைவுக் குறியீட்டைப் (QR Code) பயன்படுத்துவோம்! எப்படி?

- உங்கள் திறன் பேசியில் கூகுள் playstore கொண்டு DIKSHA செயலியை பதிவிறக்கம் செய்து நிறுவிக்கொள்க.
- செயலியை திறந்தவுடன், ஸ்கேன் செய்யும் பொத்தானை அழுத்தி பாடநூலில் உள்ள விரைவு குறியீடுகளை ஸ்கேன் செய்யவும்.
- திரையில் தோன்றும் கேமராவை பாடநூலின் QR Code அருகில் கொண்டு செல்லவும்.
- ஸ்கேன் செய்வதன் மூலம். அந்த QR Code உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ள மின் பாட பகுதிகளை பயன்படுத்தலாம்.

குறிப்பு: இணையச்செயல்பாடுகள் மற்றும் இணைய வளங்களுக்கான QR code களை Scan செய்ய DIKSHA அல்லாத ஏதேனும் ஓர் QR code Scanner ஐ பயன்படுத்தவும்.

அத்தியாயம்

7

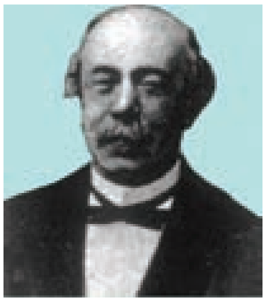
வகை நுண்கணிதத்தின் பயன்பாடுகள்

U8C9E8

"அதிகபட்சம் அல்லது குறைந்தபட்சம்
எனப் பொருள்படாத ஏதும் உலகில் நடைபெறுவதில்லை"
- லியோனார்டு யூலர்

7.1 அறிமுகம் (Introduction)

7.1.1 ஆரம்பகால முன்னேற்றங்கள் (Early Developments)



ரொடால்ஃப் ஓட்டோ
சிகிஸ்மண்ட் லிப்ஸ்சிட்ஸ்
(1832-1903)

வகை நுண்கணிதத்தின் முக்கிய நோக்கமே சிலவற்றை பல நுண்ணியப்பகுதிகளாகப்பகுத்து அதன் மூலம் அவற்றின் மாறுபாடுகளைத் தீர்மானிப்பதாகும். இத்தகு காரணத்தினால்தான் தற்போதைய வகையிடல் கணிதம் **உறுநுண்ணளவு வகை நுண்கணிதம்** (infinitesimal calculus) என அழைக்கப்பட்டது. அறிவியலின் ஆரம்பகாலத்திலிருந்தே இயற்பியல் மற்றும் வானியல் கணக்குகளில் வகை நுண்கணிதம் பயன்படுத்தப்பட்டது. 18–ஆம் நூற்றாண்டு வரை மேற்கண்ட பயன்பாடுகளுக்காகவே வகை நுண்கணிதம் பயன்பட்டது. 18–ஆம் நூற்றாண்டின் இறுதியில் லேப்லெஸ் மற்றும் லெக்ராஞ்சி விசைகளின் ஆய்வினை வகை நுண்கணிதத்தின் வரம்பிற்குள் கொண்டு வந்த பிறகு வகை நுண்கணிதம் புதிய பரிமாணத்தை அடைந்தது.

வகையிடல் பயன்பாட்டின் வளர்ச்சிக்கு லெஜூனே ட்ரிச்லெட், ரீமன், வொன் நியூமென், ஹெய்ன், க்ரோனெகர், லிபிட்சு, கிறிஸ்டோபெல், கிர்க்ஹாஃப், பெல்ட்ராமி மற்றும் பல இயற்பியல் அறிஞர்கள் முக்கிய பங்கு வகித்தனர்.

- வடிவியல் மற்றும் இயக்கவியலில் வகை நுண்கணிதம் பயன்படுத்தப்படுகிறது.
- பொருட்களின் மதிப்பு, திறன், பொருட்களின் இருப்பு, இலாபம் போன்றவற்றின் சார்புகளை வகையிட்டு எழுதுவதால் அவற்றின் ஒரியல்புத்தன்மையையும், அறுதி மதிப்புகளையும் தீர்மானிக்கலாம்.
- பொறியியல் மற்றும் அறிவியல் துறைகளில் உள்ள கணித மாதிரிகளில் சார்பின் வகையிடல் குறிப்பிடத்தக்க பங்கு வகிக்கிறது.
- சமூக அறிவியல் மற்றும் மருத்துவத் துறையிலிலும் வகை நுண்கணிதத்தின் பயன்பாடு உள்ளது.

சார்பு $f(x)$–ன் முதலிரண்டு வகைக் கெழுக்களை மட்டும் பயன்படுத்தி, இந்த அத்தியாயத்தில், $y = f(x)$ என்ற சார்பின் இயல்பு, வளைவரையை வரைதல், மற்றும் $f(x)$–ன் இடஞ்சார் அறுதி மதிப்பு (பெருமம் அல்லது சிறுமம்) போன்றவை தீர்மானிக்கப்படுகின்றன. மேலும், $f(x)$–ன் சில உயர் வகைக்கெழுக்களை (அவை இருந்தால் மட்டுமே) பயன்படுத்தி, ஒரு புள்ளியைப் பொறுத்து $f(x)$–ஐ தொடராக விரிவாக்கம் செய்தல் போன்றவையும் ஆராயப்படுகிறது.

கற்றலின் நோக்கங்கள்

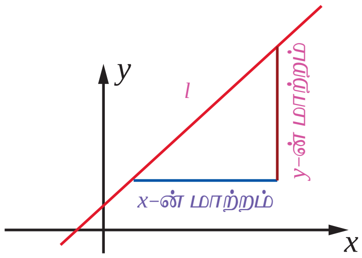
இந்த அத்தியாயத்தின் முடிவில் மாணவர்கள் பின்வருவனவற்றை அறிந்திருப்பர்.

- வடிவியல் கணக்குகளுக்கு வகையிடலைப் பயன்படுத்துதல்
- நடைமுறை கணக்குகளுக்கு வகையிடலைப் பயன்படுத்துதல்
- வளைவரையின் இயல்புகளான ஓரியல்புத் தன்மை, குழிவுத் தன்மை, மற்றும் குவிவுத் தன்மை போன்றவற்றை இனங்காண பயன்படுகின்றது.
- தினசரி வாழ்க்கையில் அறுதிமதிப்பு காண வகைக்கெழுக்களைப் பயன்படுத்துதல்.
- பல்லுறுப்புக் கோவை மற்றும் பல்லுறுப்புக் கோவை அல்லாத சார்புகளின் வளைவரைகளை வரைதல்.

7.2 வகையிடலின் பொருள் (Meaning of Derivatives)

7.2.1 சாய்வினை வகையிடல் மூலம் காணுதல் (Derivative as slope)

ஒரு கோட்டின் சாய்வு அல்லது சரிவு : படத்தில் உள்ளது போல் l என்பது செங்குத்தற்ற கோடு என்க. கொடுக்கப்பட்ட l கோட்டில் துவக்கப் புள்ளியாகக் கொண்டு ஏதேனும் ஒரு அளவு நீளம் கொண்ட முடிவுறு கிடைமட்ட கோட்டுத் துண்டும் இக்கிடைமட்ட கோட்டுத் துண்டின் முடிவுப் புள்ளியினை துவக்கப்புள்ளியாகக் கொண்டு கொடுக்கப்பட்ட கோட்டினைத் தொடுமாறு வரையப்படுகிறது. செங்குத்து நீளமும் கிடைமட்ட நீளமும் விகிதாச்சாரப்படி மாறிலியாக இருப்பதைக் கவனிக்கலாம். இந்த விகிதமே l கோட்டின் சாய்வு எனப்படும். இது m எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது.



படம் 7.1

ஒரு கோட்டின் ஏறுதல் அல்லது இறங்குதல் தன்மையை அளவிட சாய்வினைப் பயன்படுத்தலாம். கோடு ஏறுதல் அல்லது இறங்குதல் முறையே $m>0$ அல்லது $m<0$ பொறுத்து அமையும். $m=0$ எனில், y ஆனது மாறுவதில்லை. கோட்டின் சாய்வினை m என்று குறிப்பிட்டால் XY தளத்தில் $y=mx+c$ ஒரு நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கிறது என்பதை நினைவுகூர்க.

ஒரு வளைவரையின் சாய்வு அல்லது சரிவு : $y=f(x)$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட வளைவரை என்க. $(x, f(x))$ மற்றும் $(x+h, f(x+h))$ என்ற இரு வெவ்வேறு புள்ளிகளை இணைக்கும் ஒரு கோட்டின் சாய்வு

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \text{ (நியூட்டன் ஈவு).} \qquad ...(1)$$

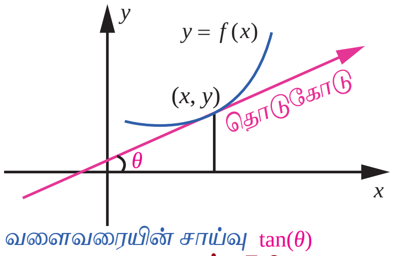
$h \to 0$ எனும்போது எல்லையானது

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x), \text{ (நியூட்டனின் ஈவின் எல்லை)} \qquad ...(2)$$

என்பது (x, y) அல்லது $(x, f(x))$ என்ற புள்ளியில் வளைவரையின் சாய்வாகும்.

குறிப்புரை

$y=f(x)$ என்ற வளைவரையில் (x, y) எனும் புள்ளியைப் பொறுத்து ஏற்படும் வளைவரைக்கான தொடுகோட்டின் தொடுகோணம் θ எனில் (x, y) புள்ளியில் வளைவரையின் சாய்வு $f'(x)=\tan\theta$ ஆகும். இங்கு θ ஆனது, X -அச்சிலிருந்து கடிகார திசைக்கு எதிர் திசையில் அளக்கப்படுகிறது. $f'(x)$ என்பதை $\frac{dy}{dx}$ எனவும் குறிக்கலாம். மேலும் $\frac{dy}{dx}$ ஆனது கணநேர மாறுபாட்டு வீதத்தைக் குறிக்கிறது. நியூட்டனின் ஈவானது கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளியில் சராசரி மாறுபாட்டு வீதத்தைக் குறிக்கிறது.



படம் 7.2

எடுத்துக்காட்டு 7.1

$f(x)=x^2, x\in[0,2]$ எனும் சார்பிற்கு $[0,0.5],[0.5,1],[1,1.5],[1.5,2]$ என்ற உள் இடைவெளிகளில் சராசரி மாறுபாட்டு வீதத்தையும் மற்றும் $x=0.5,1,1.5,2$ புள்ளிகளில் ஏற்படும் கணப்பொழுது மாறுபாட்டு வீதங்களையும் காண்க.

தீர்வு

$[a,b]$ என்ற இடைவெளியில் சராசரி மாறுபாட்டு வீதம் $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ஆகும். அதேசமயத்தில் x புள்ளியில் கணப்பொழுது மாறுபாட்டு வீதம் கொடுக்கப்பட்ட சார்பிற்கு $f'(x)$ ஆகும். அவை முறையே, $b+a$ மற்றும் $2x$ ஆகும்.

மாறுபாட்டு வீதங்கள்

a	b	x	சராசரி மாறுபாட்டு வீதம் $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=b+a$	கணப்பொழுது மாறுபாட்டு வீதம் $f'(x)=2x$
0	0.5	0.5	**0.5**	**1**
0.5	1	1	**1.5**	**2**
1	1.5	1.5	**2.5**	**3**
1.5	2	2	**3.5**	**4**

அட்டவணை 7.1

■

7.2.2 மாறுபடு வீதத்தினை வகையிடல் மூலம் காணுதல் (Derivative as rate of change)

சாய்வைத் தீர்மானிக்க எவ்வாறு வகையிடல் பயன்படுகிறது என்பதைக் கண்டோம். ஒரு மாறி மற்றொன்றைப் பொறுத்து மாறும் வீதத்தைக் கணக்கிடவும் வகையிடல் பயன்படுகிறது. மக்கள் தொகை வளர்ச்சி வீதம், பொருட்களின் வளர்ச்சி வீதம், நீரோட்ட வீதம், திசை வேகம், மற்றும் முடுக்கம் ஆகியவை ஒரு சில எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

மாறுபாட்டு வீதத்தின் பொதுவான பயன்பாடு ஒரு நேர்க்கோட்டில் நகரும் ஒரு பொருளின் இயக்கத்தை விவரிப்பதாகும். அத்தகு கணக்குகளில் பொருளின் இயக்கப்பாதைக்காக ஆதிபுள்ளியைக் கொண்ட ஒரு கிடைமட்ட அல்லது செங்குத்துக் கோட்டினைப் பயன்படுத்துவது வழக்கம். இத்தகைய கோடுகளில், முன்னோக்கிய திசையை மிகை திசை எனவும் பின்னோக்கிய திசையை குறை திசை எனவும் பொருள்படும்.

ஒரு பொருளின் நிலையை (ஆதிப்புள்ளியைச் சார்ந்து) நேரச் சார்பாகத் தரும் சார்பு s என்பது இடச் சார்பு என அழைக்கப் படுகிறது. அதனை $s=f(t)$ எனக் குறிப்பிடலாம். t நேரத்தில் திசைவேகம் $v(t)=\dfrac{ds}{dt}$, மற்றும் முடுக்கம் $a(t)=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2s}{dt^2}$ ஆகும்.

குறிப்புரை

பின்வரும் கருத்துகக்கள் கவனிக்க எளிதானவை :

(1) திசைவேகத்தின் எண்ணளவு வேகம் ஆகும். அதாவது வேகம் திசையைப் பொறுத்து அமைவதில்லை. எனவே,

வேகம் $=|v(t)|=\left|\dfrac{ds}{dt}\right|$.

(2) • ஒரு துகள் ஓய்வு நிலையில் இருக்கும் பொழுது $v(t)=0$ ஆகும்.

• ஒரு துகள் முன்னோக்கி நகரும்பொழுது $v(t)>0$ ஆகும்.

- ஒரு துகள் பின்னோக்கி நகரும்பொழுது $v(t) < 0$ ஆகும்.
- ஒரு துகள் அதன் திசையை மாற்றும்பொழுது $v(t)$ -ன் குறியீடு மாறும்.

(3) t_1 மற்றும் t_2 -க்கு இடையே உள்ள நேரம் t_c -ஐ $(t_1 < t_c < t_2)$ துகள் திசை மாறும் நேரமாகக் கொண்டால் t_1 மற்றும் t_2 -க்கு இடையே உள்ள நேரத்தில் துகள் பயணிக்கும் தொலைவு $|s(t_1) - s(t_c)| + |s(t_c) - s(t_2)|$ எனக் கணிக்கப்படுகிறது.

(4) பூமியின் தரையில் ஒரே மாதிரியான மாறாத முடுக்கத்துடன் அனைத்து பொருட்களும் விழுகின்றன. காற்றின் தடை அறவே இல்லாத சமயத்தில் அல்லது குறிப்பிடத்தக்க அளவு இல்லாத நிலையில் விழுகின்ற பொருளின் மேல் இயங்கும் ஒரே விசை ஈர்ப்பு விசையாகும். இத்தகைய விழுதலைக் கட்டற்ற விழல் என்பர்.

$t = 0$ நேரத்தில் s_0 உயரத்திலிருந்து துவக்க திசைவேகம் v_0 -உடன் எறியப்படும் ஒரு பொருளானது

$$a = -g, \quad v = -gt + v_0, \quad s = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + s_0$$ எனும் சமன்பாடுகளை நிறைவு செய்யும்.

இங்கு, $g = 9.8$ மீ / வி^{2} அல்லது 32 அடி / வி^{2} .

எடுத்துக்காட்டுகள் சிலவற்றைக் காண்போம்.

1. ***கிடைமட்ட நீளத்தைப் பொறுத்து மாறும் செங்குத்து நீளத்தின் வீதம்*** சாய்வு எனப்படும்.
2. ***நேரத்தைப் பொறுத்து இடப்பெயர்ச்சியில் ஏற்படும் மாற்றத்தின் வீதம்*** **திசைவேகம்** ஆகும்.
3. ***நேரத்தைப் பொறுத்து திசைவேகத்தில் ஏற்படும் மாற்றத்தின் வீதம்*** முடுக்கம் ஆகும்.
4. ***கிடைமட்ட தூரத்தைப் பொறுத்து மலையின் செங்குத்து ஏற்றத்தில் ஏற்படும் வீதம்*** மலைப்பகுதியின் சாய்வு ஆகும்.

கீழ்க்காணும் இரு சூழ்நிலைகளைக் கருதுவோம்:

- தர்மபுரிக்கு சென்னையிலிருந்து ஒரு நபர் ஒரு மகிழுந்தை தொடர்ந்து ஓட்டிச் செல்கிறார். பயணித்த தூரம் (கிலோமீட்டரால் அளவிடப்படுகிறது) காலத்தின் (மணி நேரத்தில் அளவிடப்படுகிறது) சார்பாக $D(t)$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது. $D'(3) = 70$ என்பதன் பொருள் என்ன?

  இதன் பொருள், **"$t = 3$ எனும் போது *தூரத்தின் வீதம் மணிக்கு 70 கி.மீ ஆகும்*"**.
- ஒரு நீர் ஆதாரம் t காலத்தைப் பொறுத்து வடிகிறது. t நாட்களில் வடிந்த நீரின் அளவினை $V(t)$ எனக் கொண்டால், $y = V(t)$ எனும் வளைவரையின் தொடுகோட்டின் சாய்வு $t = 7$ எனும்போது -3 ஆகும் என்பதன் பொருள் என்ன?

  "ஏழாம் நாளில் நாளுக்கு 3 அலகுகள் வீதம் நீர் வடிகிறது" என்பதே இதன் பொருளாகும்.

இதேபோன்று நம் அன்றாட வாழ்வியல் கணக்குகளில் மாறுபாட்டு வீதக் கருத்துக்களைப் பயன்படுத்துகிறோம். இன்னும் பல எடுத்துக்காட்டுகளின் வாயிலாக இதனை விளக்குவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 7.2

இருமுனைகளிலும் காப்பிடப்பட்ட 10மீ நீளமுள்ள ஒரு கம்பியின் வெப்பநிலை செல்சியஸில் நீளம் x சார்பாக $T = x(10 - x)$ எனத் தரப்படுகிறது. கம்பியின் மையப்புள்ளியில் வெப்பநிலை மாறுபாட்டு வீதம் பூச்சியம் என்பதை நிரூபிக்க.

தீர்வு

$T = 10x - x^2$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே ஒரு முனையிலிருந்து எந்த அளவு தூரத்திலும் வெப்பநிலை மாறுபாட்டு வீதமானது $\frac{dT}{dx} = 10 - 2x$ ஆகும். கம்பியின் மையப்புள்ளி $x = 5$ -ல் உள்ளது.

$x = 5$ எனப்பிரதியிட, $\frac{dT}{dx} = 0$ எனக்கிடைக்கும். ■

எடுத்துக்காட்டு 7.3

ஒரு ஆங்கிலத்தேர்விற்கு ஒருவர் 100 சொற்களைக் கற்கிறார். கற்றபின், t நாட்களுக்குப் பிறகு அவர் நினைவிலிருக்கும் சொற்களின் எண்ணிக்கை $W(t) = 100 \times (1-0.1t)^2,\ 0 \le t \le 10$ ஆகும். கற்றபின், 2 நாட்களுக்குப் பிறகு அவர் சொற்களை மறப்பதன் வீதம் என்ன?

தீர்வு

$$\frac{d}{dt}W(t) = -20 \times (1-0.1t).$$

எனவே $t = 2$ எனும்போது $\frac{d}{dt}W(t) = -16$.

அதாவது, கற்றபின்னர் 2 நாட்களுக்குப் பிறகு 16 சொற்கள்/நாள் என்ற வீதத்தில் மறப்பார். ■

எடுத்துக்காட்டு 7.4

$s(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 + 3$ எனும் விதிப்படி ஒரு துகள் நகரும் தூரம் அமைகின்றது. எந்தெந்த நேரங்களில் அதன் திசைவேகமும் முடுக்கமும் பூச்சிய மதிப்பை அடையும்?

தீர்வு

$'t'$ நேரத்தில் இடப்பெயர்ச்சி $s = \frac{t^3}{3} - t^2 + 3$ ஆகும்.

$'t'$ நேரத்தில் திசைவேகம் $v = \frac{ds}{dt} = t^2 - 2t$ ஆகும்.

$'t'$ நேரத்தில் முடுக்கம் $a = \frac{dV}{dt} = 2t - 2$ ஆகும்.

$t^2 - 2t = 0$ அதாவது, $t = 0, 2$ எனும்போது திசைவேகம் பூச்சிய மதிப்பை அடையும். $2t - 2 = 0$ அதாவது, $t = 1$ எனும்போது முடுக்கம் பூச்சிய மதிப்பை அடையும். ■

எடுத்துக்காட்டு 7.5

தரையிலிருந்து மேல்நோக்கி சுடப்படும் ஒரு துகள் s அடி உயரத்தை t வினாடிகளில் சென்று அடைகிறது. இங்கு $s(t) = 128t - 16t^2$.

(i) துகள் அடையும் அதிகபட்ச உயரத்தைக் கணக்கிடுக?

(ii) தரையைத் தொடும்போது அதன் திசைவேகம் என்ன?

தீர்வு

(i) அதிகபட்ச உயரத்தை அடையும்போது துகளின் திசைவேகம் $v(t)$–ன் மதிப்பு பூச்சியமாகும்.

நாம் இப்பொழுது, t நேரத்தில் துகளின் திசைவேகத்தைக் காண்போம்.

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 128 - 32t$$

$$v(t) = 0 \Rightarrow 128 - 32t = 0 \Rightarrow t = 4.$$

4 வினாடிக்குப் பின்னர் துகள் அதிகபட்ச உயரத்தை அடைகின்றது.

$t = 4$-ல் உயரமானது $s(4) = 128(4) - 16(4)^2 = 256$ அடிகள் ஆகும்.

(ii) துகள் தரையை தொடும்போது $s = 0$ ஆகும்.

$$s = 0 \Rightarrow 128t - 16t^2 = 0$$

$$\Rightarrow t = 0,\ 8 \text{ வினாடிகள்.}$$

தரையினை துகள் $t = 8$ வினாடிகளில் தொடுகிறது.

அது தரையைத் தொடும்போது அதன் திசை வேகம் $v(8) = -128$ அடி/வி ஆகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 7.6

$t \geq 0$ எனும் எந்நேரத்திலும் ஒரு துகளின் நிலை $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 1$ எனும்படி கிடைமட்டக் கோட்டில் ஒரு துகள் நகர்கிறது. இங்கு s என்பது மீட்டரிலும் t வினாடிகளிலும் கணக்கிடப்படுகிறது.

(i) துகள் ஓய்வடையும் போது நேரம் என்ன?

(ii) துகள் திசை மாறும்போது நேரம் என்ன?

(iii) முதல் இரு வினாடிகளில் துகள் பயணிக்கும் மொத்த தூரம் எவ்வளவு?

தீர்வு

$s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 1$ -ஐ வகையிட, $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$ மற்றும் $a(t) = 6t - 12$ எனக் கிடைக்கிறது.

(i) $v(t) = 0$ எனும்போது துகள் ஓய்வினை அடைகிறது. எனவே, $v(t) = 3(t-1)(t-3) = 0$ என்பதன் மூலம், $t = 1$ மற்றும் $t = 3$ எனக்கிடைக்கிறது.

(ii) $v(t)$ ஆனது குறியினை மாற்றும்போது துகளின் திசை மாறும். இப்பொழுது

$0 \leq t < 1$ எனில் $(t-1)$ மற்றும் $(t-3) < 0$ ஆகையால் $v(t) > 0$ ஆகும்.

$1 < t < 3$ எனில் $(t-1) > 0$ மற்றும் $(t-3) < 0$ ஆகையால் $v(t) < 0$ ஆகும்.

$t > 3$ எனில் $(t-1)$ மற்றும் $(t-3) > 0$ ஆகையால் $v(t) > 0$ ஆகும்.

எனவே $t = 1$ மற்றும் $t = 3$ எனும்போது துகளின் திசை மாறும்.

(iii) $t = 0$ நேரத்திலிருந்து $t = 2$ வரை துகள் பயணிக்கும் மொத்த தூரம்,

$|s(0) - s(1)| + |s(1) - s(2)| = |1-5| + |5-3| = 6$ மீட்டர்கள் ஆகும்.

7.2.3 சார்ந்த வீதங்கள் (Related rates)

சார்ந்த வீதக் கணக்குகளில் குறைந்ததது இரண்டு அளவுகளாவது மாறத்தக்கதாக அமையும். மேலும் தேவையான அனைத்து அளவைகளும் கொடுக்கப்பட்ட நிலையில் ஏதேனும் ஒன்றின் மாறுபாட்டு வீதத்தினை நாம் கணக்கிட வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, இரு வேறு திசையில் பயணிக்கும் இரு வாகனங்கள் விலகிப் போகும் வேகத்தினை அவற்றின் நிலை, திசைவேகங்கள் அறிந்திருந்தால் கணக்கிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 7.7

கோள வடிவில் உள்ள ஒரு ஊதுபையில் காற்றினை வினாடிக்கு 1000 செமீ^{3} எனும் வீதத்தில் நாம் ஊதினால் ஆரம் 7 செமீ எனும்போது ஊதுபையின் ஆரத்தின் மாறுபாட்டு வீதம் என்ன? மேலும் மேற்பரப்பு மாறுபாட்டு வீதத்தையும் கணக்கிடுக.

தீர்வு

r ஆரமுள்ள ஊதுபையின் கன அளவானது $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ஆகும்.

$\frac{dV}{dt} = 1000$ எனக்கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

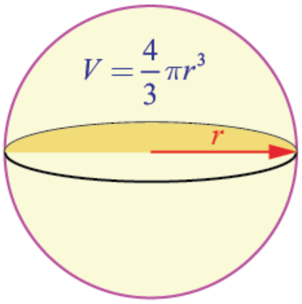
$\frac{dr}{dt}$ -யினை $r = 7$ எனும்போது காணவேண்டும்.

$$\frac{dV}{dt} = 3 \times \frac{4}{3}\pi r^2 \times \frac{dr}{dt}.$$

$r = 7$ மற்றும் $\frac{dV}{dt} = 1000$ எனப்பிரதியிட, $1000 = 4\pi \times 49 \times \frac{dr}{dt}$.

$$\text{ஆகையால், } \frac{dr}{dt} = \frac{1000}{4 \times 49 \times \pi} = \frac{250}{49\pi}.$$

S5J6J5



படம் 7.3

ஊதுபையின் மேற்பரப்பு $S = 4\pi r^2$. எனவே, $\frac{dS}{dt} = 8\pi \times r \times \frac{dr}{dt}$.

$\frac{dr}{dt} = \frac{250}{49\pi}$ மற்றும் $r = 7$ எனப் பிரதியிட,

$$\frac{dS}{dt} = 8\pi \times 7 \times \frac{250}{49\pi} = \frac{2000}{7}$$ எனப் பெறுகிறோம்.

எனவே, ஆரத்தின் மாறுபாட்டு வீதம் $\frac{250}{49\pi}$ செமீ / வினாடி வீதம் மற்றும் பரப்பளவின் மாறுபாட்டு வீதம் $\frac{2000}{7}$ செமீ^{2} / வினாடி ஆகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 7.8

ஒரு பொருளின் விலை அதன் சரக்கு இருப்பைக் கொண்டு $Px + 3P - 16x = 234$ எனும் சமன்பாட்டால் குறிக்கப்படுகிறது. இங்கு P என்பது பொருளின் விலை (ரூபாயில்) மற்றும் x என்பது அலகுகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும். 90 அலகுகள் இருப்பு இருக்கும்போது, வாரத்திற்கு 15 அலகுகள் வீதம் சரக்கு அதிகரிக்கிறது எனில் காலத்தைப் பொறுத்து விலையின் மாறுபாட்டு வீதத்தைக் காண்க.

தீர்வு

$$P = \frac{234 + 16x}{x + 3}$$

எனவே, $$\frac{dP}{dt} = -\frac{186}{(x+3)^2} \times \frac{dx}{dt}.$$

$x = 90$, $\frac{dx}{dt} = 15$ எனப்பிரதியிட, $\frac{dP}{dt} = -\frac{186}{93^2} \times 15 = -\frac{10}{31} \approx -0.32$ ரூபாய் / வாரம் எனக் கிடைக்கிறது.

அதாவது விலையில் மாற்றம் உண்மையில் வாரத்திற்கு 0.32 ரூபாய் எனும் வீதத்தில் குறைகிறது. ■

எடுத்துக்காட்டு 7.9

கொணரிப்பட்டையிலிருந்து நிமிடத்திற்கு 30 கன மீட்டர் வீதத்தில் கொட்டப்படும் உப்பு வட்ட வடிவ அடிமானம் கொண்ட கூம்பு வடிவம் பெறுகிறது. மேலும் கூம்பின் உயரமும் அடிமானத்தின் விட்டமும் சமமாக உள்ளது. 10 மீட்டர் உயரம் எனும்போது கூம்பின் உயரம் எவ்வேகத்தில் அதிகரிக்கும்?

தீர்வு

h மற்றும் r முறையே உயரம் மற்றும் அடிமானத்தின் ஆரம் என்க. எனவே $h = 2r$ ஆகும். V என்பது உப்பு கூம்பின் கன அளவு என்க.

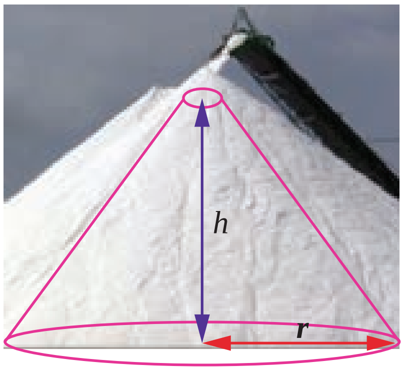
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{12}\pi h^3; \quad \frac{dV}{dt} = 30 \text{ மீ}^3 / \text{நிமிடம்}$$

எனவே, $$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

ஆகையால், $$\frac{dh}{dt} = 4\frac{dV}{dt} \cdot \frac{1}{\pi h^2}$$

அதாவது, $$\frac{dh}{dt} = 4 \times 30 \times \frac{1}{100\pi}$$

$$= \frac{6}{5\pi} \text{ மீ / நிமிடம்.}$$



படம் 7.4

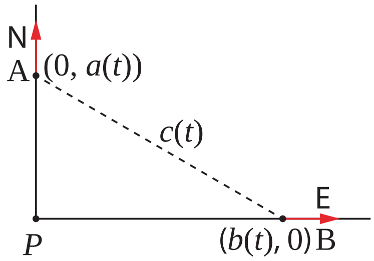
■

எடுத்துக்காட்டு 7.10 (இருமாறி சார்ந்த வீதக் கணக்கு)

வடக்கிலிருந்து தெற்கே செல்லும் பாதையும் கிழக்கிலிருந்து மேற்கே செல்லும் பாதையும் P எனும் புள்ளியில் வெட்டுகிறது. வடக்கு நோக்கிச் செல்லும் மகிழுந்து A முதல் பாதை வழியாகச் செல்கிறது. கிழக்கு நோக்கிச் செல்லும் மகிழுந்து B இரண்டாவது பாதை வழியாகச் செல்கிறது. குறிப்பிட்ட நேரத்தில் மகிழுந்து A ஆனது P –க்கு வடக்கே 10 கிலோமீட்டர்கள் தொலைவில் மணிக்கு 80 கி.மீ வேகத்தில் செல்கிறது. அதே சமயத்தில் மகிழுந்து B ஆனது P –க்கு கிழக்கே 15 கிலோமீட்டர் தொலைவில் மணிக்கு 100 கி.மீ வேகத்தில் செல்கிறது. இரு மகிழுந்துகளுக்கிடையே உள்ள தூரம் எவ்வேகத்தில் மாறுகிறது?

தீர்வு

t நேரத்தில் P –க்கு வடக்கில் மகிழுந்து A இருக்கும் தூரத்தின் அளவு $a(t)$ என்க. மற்றும் t நேரத்தில் P –க்கு கிழக்கில் மகிழுந்து B இருக்கும் தூரத்தின் அளவு $b(t)$ என்க. மேலும் t நேரத்தில் மகிழுந்து A மற்றும் மகிழுந்து B –க்கு இடையே உள்ள தூரத்தின் அளவு $c(t)$ என்க. பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி, $c(t)^2 = a(t)^2 + b(t)^2$ ஆகும்.



படம் 7.5

வகையிட, $2c(t)c'(t) = 2a(t)a'(t) + 2b(t)b'(t)$ எனப் பெறுகிறோம்.

$$\text{எனவே, } c' = \frac{aa' + bb'}{c} = \frac{aa' + bb'}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

தேவையான தருணத்தில் நமக்கு தெரிந்த மதிப்புகளைப் பிரதியிட,

$$c' = \frac{(10\times 80) + (15\times 100)}{\sqrt{10^2 + 15^2}} = \frac{460}{\sqrt{13}} \approx 127.6 \text{ கி.மீ/மணி ஆகும்.}$$ ■

பயிற்சி 7.1

1. ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து t வினாடிகளுக்குப் பிறகு ஒரு துகள் உள்ள தூரத்தின் அளவு $s = 2t^2 + 3t$ மீட்டர் எனும்படி நேர்க்கோட்டில் ஒரு துகள் நகர்கிறது.
   (i) $t = 3$ மற்றும் $t = 6$ வினாடிகளுக்கிடையே உள்ள சராசரி திசைவேகம் என்ன?
   (ii) $t = 3$ மற்றும் $t = 6$ வினாடிகளுக்கிடையே உள்ள கணப்பொழுது திசைவேகம் என்ன?
2. 400 அடி உயர மலை உச்சி முகட்டிலிருந்து தவறுதலாக ஒரு புகைப்படக் கருவி விழுகிறது. t வினாடிகளில் புகைப்படக் கருவி விழும் தூரம் $s = 16t^2$ ஆகும்.
   (i) தரையைத் தொடும் முன்னர் புகைப்படக் கருவி விழ எடுத்துக்கொண்ட நேரம் என்ன?
   (ii) கீழே விழுந்த இறுதி 2 வினாடிகளில் புகைப்படக் கருவியின் சராசரி திசைவேகம் என்ன?
   (iii) தரையைத் தொடும்போது புகைப்படக் கருவியின் கணப்பொழுது திசைவேகம் என்ன?
3. $s(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t - 4$, இங்கு $t \geq 0$ எனும் விதிப்படி ஒரு கோட்டில் ஒரு துகள் நகர்கிறது.
   (i) எந்நேரங்களில் துகளின் திசை மாறுகின்றது?
   (ii) முதல் 4 வினாடிகளில் துகள் பயணித்த தூரம் என்ன?
   (iii) திசைவேகம் பூச்சிய மதிப்பை அடையும் நேரங்களில் எல்லாம் துகளின் முடுக்கம் காண்க?
4. x பக்க அளவு கொண்ட ஒரு கன சதுரத்தின் கன அளவு $v = x^3$ எனில் $x = 5$ அலகுகள் எனும்போது x –ஐப் பொறுத்து கன அளவு மாறுவீதம் காண்க.
5. x நீளமுள்ள (மீட்டரில்) ஒரு மெல்லிய கோலின் நிறை $m(x)$ (கிலோகிராமில்), $m(x) = \sqrt{3x}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில், $x = 3$ மற்றும் $x = 27$ மீட்டர் எனும்போது நீளத்தைப் பொறுத்து நிறையின் மாறுபாட்டு வீதத்தை காண்க.

6. ஒரு குளத்தில் விழுந்த கல்லினால் பொது மைய வட்டங்களின் வடிவத்தில் சிற்றலைகள் ஏற்படுகின்றது. வெளிப்புற சிற்றலையின் ஆரம் r வினாடிக்கு 2 செ.மீ வீதம் அதிகரிக்கிறது. ஆரம் 5 செ.மீ. எனும் போது கலங்கும் நீரின் பரப்பளவு மாறுவீதம் என்ன?
7. கப்பலின் மீதுள்ள சுழலொளி விளக்கு ஒவ்வொரு 10 வினாடிகளுக்கு ஒரு முறை சுற்றுகிறது. கடற்கரையிலிருந்து 5 கி.மீ தூரத்தில் கப்பல் நங்கூரமிடப்பட்டுள்ளது. அவ்விளக்கின் ஒளிக்கற்றை கடற்கரையுடன் 45° கோணத்தை ஏற்படுத்தும் போது கடற்கரையில் ஒளிக்கற்றை எவ்வளவு வேகமாக நகரும்?
8. தலைகீழாக வைக்கப்பட்ட ஒரு நேர்வட்ட கூம்பின் வடிவில் உள்ள ஒரு நீர்நிலைத் தொட்டியின் ஆழம் 12 மீட்டர் மற்றும் மேலுள்ள வட்டத்தின் ஆரம் 5 மீட்டர் என்க. நிமிடத்திற்கு 10 கன மீட்டர் வேகத்தில் நீர் பாய்ச்சப்படுகிறது எனில், 8 மீட்டர் ஆழத்தில் நீர் இருக்கும்போது நீரின் ஆழம் அதிகரிக்கும் வேகம் என்ன?
9. 17 மீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு ஏணி செங்குத்தான சுவரில் சாய்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஏணியின் அடிப்பக்கம் சுவற்றிலிருந்து விலகிச் செல்லும் வீதம் வினாடிக்கு 5 மீட்டர் எனில் ஏணியின் அடிப்பக்கம் சுவற்றிலிருந்து 8 மீட்டர் தொலைவில் இருக்கும்போது,
   (i) அதன் உச்சி என்ன வீதத்தில் கீழ்நோக்கி இறங்கும் என்பதைக் காண்க.
   (ii) எந்த வீதத்தில், ஏணி, சுவர் மற்றும் தரை ஆகியவற்றால் உருவாகும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவு மாறுகிறது?
10. வட திசையிலிருந்து ஒரு செங்கோண சந்திப்பை அணுகும் ஒரு காவல்துறை வாகனம் வேகமாகச் சென்று திரும்பி கிழக்கு நோக்கிச் செல்லும் ஒரு மகிழுந்தை துரத்துகிறது. சாலை சந்திப்பின் வடக்கே 0.6 கி.மீ தொலைவில் காவல்துறையின் வாகனமும் கிழக்கே 0.8 கி.மீ தொலைவில் மகிழுந்தும் உள்ள பொழுது, மின்காந்த அலைக் கருவியின் துணைகொண்டு காவல்துறை தங்களது வாகனத்திற்கும் மகிழுந்துக்கும் இடைப்பட்ட தூரம் மணிக்கு 20 கி.மீ வீதத்தில் அதிகரிக்கிறது எனத் தீர்மானிக்கின்றனர். காவல்துறை வாகனம் மணிக்கு 60 கி.மீ வேகத்தில் நகர்கிறது எனில் மகிழுந்தின் வேகம் என்ன?

7.2.4 தொடுகோடு மற்றும் செங்கோட்டின் சமன்பாடுகள் (Equations of Tangent and Normal)

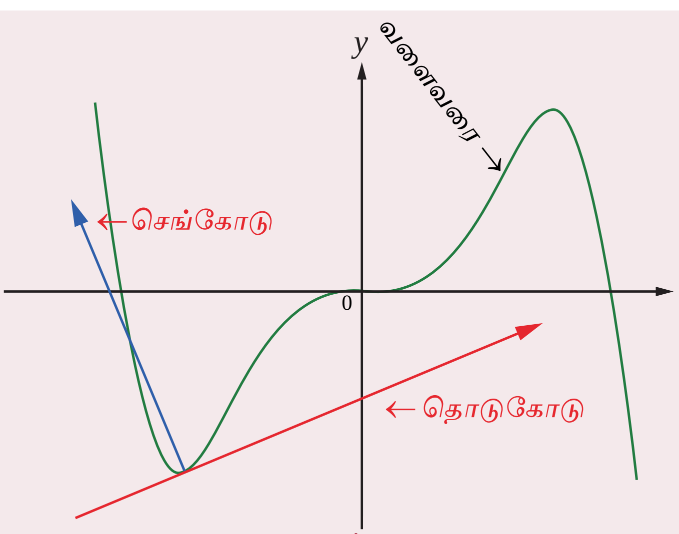
லிபினிட்சை பொருத்தவரை, தொடுகோடு என்பது வளைவரையின் மீதுள்ள மிக நெருங்கிய ஒரு ஜோடிப் புள்ளிகள் வழியே செல்லும் நேர்க்கோடு ஆகும்.

வரையறை 7.1

ஒரு தளத்தில் உள்ள வளைவரைக்கு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியில் தொடுகோடு என்பது வளைவரையில் அப்புள்ளியை தொட்டுக்கொண்டு செல்லும் ஒரு நேர்க்கோடு ஆகும்.

வரையறை 7.2

வளைவரை மீதுள்ள புள்ளியில் வளைவரைக்கு செங்கோடு என்பது அப்புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடுகோட்டிற்கு அப்புள்ளியில் செங்குத்தாக உள்ள நேர்க்கோடு ஆகும்.



படம் 7.6

ஒரு வளைவரைக்கு அதன் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியில் தொடுகோடு மற்றும் செங்கோடு ஆகியவை எவ்வாறு அமையும் என்பது அருகில் உள்ள படம் 7.6 வாயிலாக விளக்கப்பட்டுள்ளது.

$y = f(x)$ என்ற வளைவரையை கருதுக.

வளைவரையின் மீதுள்ள (a,b) என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு என்பது

$$y - b = (x-a)\times\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a,b)} \text{ அல்லது } y - b = f'(a)\cdot(x-a) \text{ ஆகும்.}$$

செங்கோடு என்பது அப்புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடுகோட்டிற்கு செங்குத்து. எனவே, (a,b) என்ற புள்ளியில் செங்கோட்டின் சாய்வானது, தொடுகோட்டின் சாய்வின் தலைகீழ் எதிர்குறி, அதாவது $-\left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)_{(a,b)}$ மதிப்பாகும்.

ஆகவே, (a,b) என்ற புள்ளியில் செங்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$(y-b) = -\left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)_{(a,b)}\times(x-a) \text{ அல்லது } (y-b)\times\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a,b)} = -(x-a) \text{ ஆகும்.}$$

குறிப்புரை

(i) வளைவரைக்கு ஒரு புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோடு கிடைமட்டமாக இருந்தால், அப்புள்ளியில் வகைக்கெழு 0 ஆகும். ஆகவே (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $y = y_1$ மற்றும் செங்கோட்டின் சமன்பாடு $x = x_1$ ஆகும்.

(ii) வளைவரைக்கு ஒரு புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோடு நிலைகுத்தாக இருந்தால், அப்புள்ளியில் வகைக்கெழு காணத்தக்கது மற்றும் முடிவிலி (∞) ஆகும். ஆகவே, (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $x = x_1$ மற்றும் செங்கோட்டின் சமன்பாடு $y = y_1$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.11

$y = x^2 + 3x - 2$ என்ற வளைவரைக்கு $(1,2)$ என்ற புள்ளியில் தொடுகோடு மற்றும் செங்கோட்டின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு

x-ஐப் பொறுத்து வகையிட, $\frac{dy}{dx} = 2x+3$. ஆகவே, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,2)} = 5$.

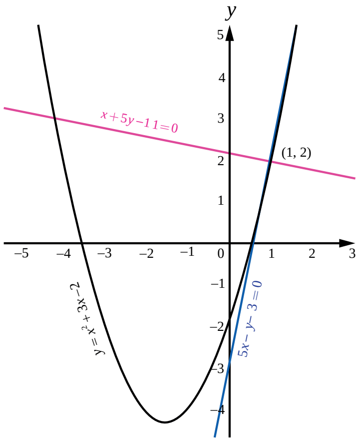
எனவே, தேவையான தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$(y-2) = 5(x-1) \Rightarrow 5x - y - 3 = 0$ ஆகும்.

$(1,2)$ என்ற புள்ளியில் செங்கோட்டின் சாய்வு $-\frac{1}{5}$.

எனவே, தேவையான செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$(y-2) = -\frac{1}{5}(x-1) \Rightarrow x + 5y - 11 = 0$ ஆகும்.



படம் 7.7

எடுத்துக்காட்டு 7.12

$y = x^3 - 3x^2 + x - 2$ என்ற வளைவரைக்கு, எந்தெந்த புள்ளிகளில் வரையப்படும் தொடுகோடு $y = x$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாக இருக்கும்?

தீர்வு

$y = x$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு 1 ஆகும். கொடுக்கப்பட்ட வளைவரைக்கு வரையப்படும் தொடுகோடு, $y = x$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாக இருக்க வேண்டும் எனில் தொடுகோட்டின் சாய்வும் 1 என இருக்க வேண்டும்.

ஆகவே, $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x + 1 = 1$

$$\Rightarrow \; 3x^2 - 6x = 0 .$$

ஆகவே, $x = 0$ மற்றும் $x = 2$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாக இருக்கும்.

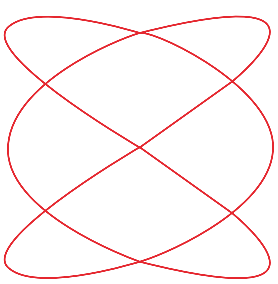
எனவே, (0, –2) மற்றும் (2, –4) என்ற புள்ளிகளில் வரையப்படும் தொடுகோடு $y = x$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாக இருக்கும். ■

எடுத்துக்காட்டு 7.13

$x = 2\cos 3t$ மற்றும் $y = 3\sin 2t, t \in \mathbb{R}$ என்ற லிசஜோஸ் வளைவரையின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் தொடுகோடு மற்றும் செங்கோட்டின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட வளைவரையானது வட்டமோ அல்லது நீள்வட்டமோ அல்ல என்பதைக் கவனிக்க. உங்கள் பார்வைக்காக இந்த வளைவரை படம் 7.8-ல் காட்டப்பட்டுள்ளது.



லிசஜோஸ் வளைவரை

படம் 7.8

இப்பொழுது, $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$= -\frac{6\cos 2t}{6\sin 3t} = -\frac{\cos 2t}{\sin 3t} .$$

எனவே, ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y - 3\sin 2t = -\frac{\cos 2t}{\sin 3t}(x - 2\cos 3t)$$

அதாவது, $$x\cos 2t + y\sin 3t = 3\sin 2t \sin 3t + 2\cos 2t \cos 3t .$$

செங்கோட்டின் சாய்வு என்பது தொடுகோட்டுச் சாய்வின் எதிர்குறி தலைகீழ் மதிப்பு என்பதால் செங்கோட்டின் சாய்வு $\dfrac{\sin 3t}{\cos 2t}$.

ஆகவே, செங்கோட்டின் சமன்பாடு $y - 3\sin 2t = \dfrac{\sin 3t}{\cos 2t}(x - 2\cos 3t)$.

அதாவது, $x\sin 3t - y\cos 2t = 2\sin 3t\cos 3t - 3\sin 2t\cos 2t = \sin 6t - \dfrac{3}{2}\sin 4t$. ■

7.2.5 இரண்டு வளைவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் (Angle between two curves)

வரையறை 7.3

இரண்டு வளைவரைகள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட குறுங்கோணமே, வெட்டும் புள்ளியில் இரண்டு வளைவரைக்கு இடைப்பட்ட கோணமாக வரையறுக்கப்படுகின்றது.

இரண்டு வளைவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தினை, வளைவரைகள் வெட்டும் புள்ளியிடத்து வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் சாய்வுகளின் மதிப்புகளைக் கொண்டு காணலாம். $y = m_1 x + c_1$ மற்றும் $y = m_2 x + c_2$ ஆகிய இரு கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட குறுங்கோணம் θ எனில்,

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| \qquad \dots (3)$$

இங்கு m_1 மற்றும் m_2 ஆகியவை முடிவுற்ற எண்கள்.

குறிப்புரை

(i) (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் இரண்டு வளைவரைகள் இணை எனில், $m_1 = m_2$.

(ii) (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் இரண்டு வளைவரைகள் செங்குத்து மற்றும் m_1, m_2 ஆகியவை காணத்தக்கவை மற்றும் முடிவுற்ற எண்கள் எனில் $m_1 m_2 = -1$.

எடுத்துக்காட்டு 7.14

$y = x^2$ மற்றும் $y = (x-3)^2$ என்ற வளைவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

தீர்வு

இப்பொழுது நாம் வெட்டும் புள்ளியைக் காண்போம். சமப்படுத்த $x^2 = (x-3)^2 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ எனப்பெறலாம். எனவே, வெட்டும் புள்ளி $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ ஆகும். θ என்பது இவ்விரு வளைவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் என்க. வெட்டும் புள்ளியிடத்து வளைவரையின் சாய்வுகள் பின்வருமாறு கணக்கிடப்படுகின்றன :

$y = x^2$ என்ற வளைவரைக்கு,

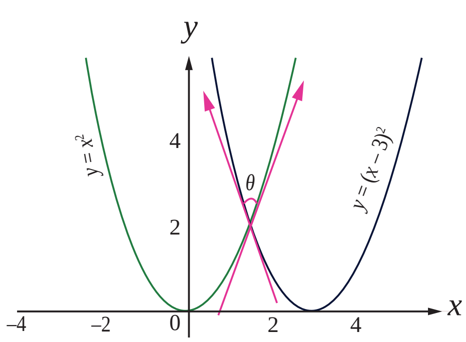
$$\frac{dy}{dx} = 2x \text{ ஆகும்.}$$

$$m_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)} = 3.$$

$y = (x-3)^2$ என்ற வளைவரைக்கு,

$$\frac{dy}{dx} = 2(x-3) \text{ ஆகும்.}$$

$$m_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)} = -3.$$



படம் 7.9

(3)–லிருந்து,

$$\tan\theta = \left|\frac{3-(-3)}{1-9}\right| = \frac{3}{4} \text{ ஆகும்.}$$

$$\text{ஆகவே, } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right).$$

எடுத்துக்காட்டு 7.15

$y = x^2$ மற்றும் $x = y^2$ என்ற வளைவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தினை $(0,0)$ மற்றும் $(1,1)$ என்ற வெட்டும் புள்ளிகளில் காண்க.

தீர்வு

இப்பொழுது நாம் வளைவரைகளின் சாய்வுகளைக் காண்போம்.

$y = x^2$ என்ற வளைவரையின் சாய்வு m_1 என்க.

$$m_1 = \frac{dy}{dx} = 2x.$$

$x = y^2$ என்ற வளைவரையின் சாய்வு m_2 என்க.

$$m_2 = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}.$$

(0,0) மற்றும் (1,1) என்ற புள்ளிகளிடத்து வளைவரைகளுக்கிடைப்பட்ட கோணங்கள் θ_1 மற்றும் θ_2 என்க.

$(0,0)$ என்ற புள்ளியில், $\tan\theta_1 = \left|\dfrac{2x - \dfrac{1}{2y}}{1 + (2x)\left(\dfrac{1}{2y}\right)}\right|$ -ஐ கணக்கிடும்போது பகுதியில் $0 \times \infty$ என்ற தேரப்பெறாத வடிவத்தைப் பெறுகிறோம். எனவே, நாம் எல்லை காணும் முறையை பயன்படுத்துவோம்.

$$\tan\theta_1 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{2x - \dfrac{1}{2y}}{1 + (2x)\left(\dfrac{1}{2y}\right)}\right|$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{4xy - 1}{2(y + x)}\right|$$

$$= \infty$$

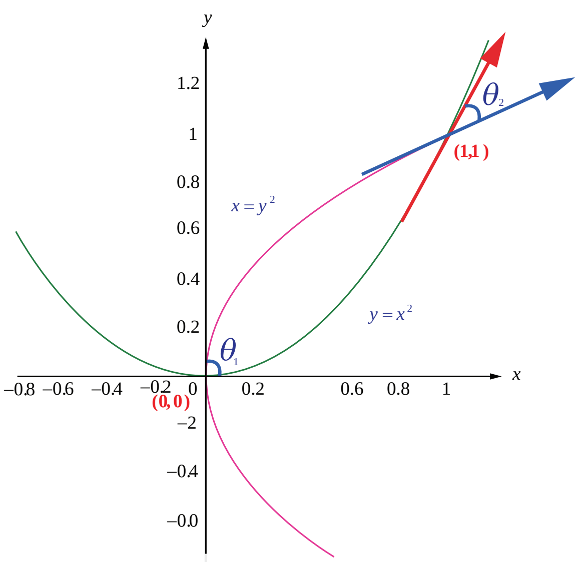
$$\Rightarrow \theta_1 = \tan^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

$(1,1)$ என்ற புள்ளியில், $m_1 = 2,\ m_2 = \dfrac{1}{2}$

$$\tan\theta_2 = \left|\frac{2 - \dfrac{1}{2}}{1 + (2)\left(\dfrac{1}{2}\right)}\right|$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right).$$



படம் 7.10

எடுத்துக்காட்டு 7.16

$y = \sin x$ என்ற வளைவரைக்கும் மிகை x -அச்சிற்கும் இடைப்பட்ட கோணம் காண்க.

தீர்வு

$y = \sin x$ என்ற வளைவரை மிகை x -அச்சை வெட்டும்போது $y = 0 \Rightarrow x = n\pi,\ n = 1, 2, 3, \ldots$.

இப்பொழுது, $\dfrac{dy}{dx} = \cos x$. $x = n\pi$ -ல் சாய்வு $m_1 = \cos(n\pi) = (-1)^n$, x -அச்சின் சாய்வு $m_2 = 0$ ஆகும். இவைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில்,

$$\tan\theta = \left|\frac{(-1)^n - 0}{1 + (-1)^n (0)}\right| = 1, \forall n$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.17

$ax^2+by^2=1$ மற்றும் $cx^2+dy^2=1$ என்ற வளைவரைகள் ஒன்றை ஒன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொண்டால் $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{c}-\frac{1}{d}$ என நிறுவுக.

தீர்வு

(x_0, y_0) என்ற புள்ளியில் இரண்டு வளைவரைகளும் வெட்டிக் கொண்டால் $(a-c)x_0^2+(b-d)y_0^2=0$ எனப்பெறலாம்.

வெட்டும் புள்ளி (x_0, y_0) என்ற புள்ளியில் வளைவரையின் சாய்வுகளைக் காண்போம்:

$$ax^2+by^2 = 1 \text{ என்ற வளைவரைக்கு } \frac{dy}{dx}=-\frac{ax}{by} \text{ மற்றும்}$$

$$cx^2+dy^2 = 1 \text{ என்ற வளைவரைக்கு } \frac{dy}{dx}=-\frac{cx}{dy}.$$

(x_0, y_0) என்ற புள்ளியில் இரண்டு வளைவரைகளும் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொண்டால் சாய்வுகளின் பெருக்கல் பலன் -1 ஆகும். ஆகவே, (x_0, y_0) என்ற புள்ளியில் இரண்டு வளைவரைகளும் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொண்டால்

$$\left(-\frac{ax_0}{by_0}\right)\times\left(-\frac{cx_0}{dy_0}\right) = -1.$$

$$\text{அதாவது, } acx_0^2+bdy_0^2 = 0,$$

$$\text{மேலும் } \quad (a-c)x_0^2+(b-d)y_0^2 = 0$$

$$\text{என்பதில் இருந்து, } \frac{a-c}{ac} = \frac{b-d}{bd} \text{ எனப் பெறலாம்.}$$

$$\text{எனவே, } \frac{1}{c}-\frac{1}{a} = \frac{1}{d}-\frac{1}{b}.$$

$$\text{அதாவது, } \frac{1}{a}-\frac{1}{b} = \frac{1}{c}-\frac{1}{d}.$$

குறிப்புரை

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில், அதன் மறுதலையும் உண்மையாகும். அதாவது $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{c}-\frac{1}{d}$ என்ற கட்டுப்பாட்டைக் கொண்டு, ஒருவர் எளிதில் வளைவரைகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளும் எனவும் நிறுவலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 7.18

$x^2+4y^2=8$ என்ற நீள்வட்டமும் $x^2-2y^2=4$ என்ற அதிபரவளையமும் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளும் என நிறுவுக.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட இரு வளைவரைகளும் வெட்டும் புள்ளியை (a, b) என்க.

$$\text{ஆகவே, } a^2+4b^2 = 8 \text{ மற்றும் } a^2-2b^2=4 \qquad \ldots (4)$$

நாம் (a,b) என்ற புள்ளியில் இவ்விரு வளைவரைகளின் சாய்வுகளின் பெருக்கல் பலன் -1 என நிறுவ வேண்டும்.

$x^2+4y^2=8$-ஐ x-ஐப் பொருத்து வகையிட

$$2x+8y\frac{dy}{dx} = 0.$$

$$\text{எனவே, } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y},$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a,b)} = m_1 = -\frac{a}{4b}.$$

$x^2-2y^2=4$-ஐ x-ஐப் பொருத்து வகையிட

$$2x-4y\frac{dy}{dx} = 0.$$

$$\text{எனவே, } \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y},$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a,b)} = m_2 = \frac{a}{2b}.$$

$$\text{எனவே, } m_1\times m_2 = \left(-\frac{a}{4b}\right)\times\left(\frac{a}{2b}\right) = -\frac{a^2}{8b^2} \qquad \ldots (5)$$

(4)–ல் விகிதச் சமக் கொள்கையை பயன்படுத்த,

$$\frac{a^2}{-16-16} = \frac{b^2}{-8+4} = \frac{1}{-2-4} \text{ எனப்பெறலாம்.}$$

எனவே, $\frac{a^2}{b^2}=\frac{32}{4}=8$ ஆகும். இதனை (5)–ல் பிரதியிட, நாம் $m_1\times m_2=-1$ எனப் பெறலாம். ஆகவே, இவ்விரு வளைவரைகளும் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளும்.

பயிற்சி 7.2

1. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளில் பின்வரும் வளைவரைகளுக்கும் தொடுகோட்டின் சாய்வினைக் காண்க.

   (i) $y=x^4+2x^2-x\ ;\ x=1$ (ii) $x=a\cos^3 t, y=b\sin^3 t\ ;\ t=\frac{\pi}{2}$.

2. $y=x^2-5x+4$ என்ற வளைவரைக்கு எப்புள்ளிகளில் வரையப்படும் தொடுகோடு $3x+y=7$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாக இருக்கும்?

3. $y=x^3-6x^2+x+3$ என்ற வளைவரைக்கு எப்புள்ளிகளில் வரையப்படும் தொடுகோடு $x+y=1729$ என்ற கோட்டிற்கு செங்குத்தாக இருக்கும்?

4. $y^2-4xy=x^2+5$ என்றவளைரைக்குஎப்புள்ளிகளில்வரையப்படும்தொடுகோடுகிடைமட்டமாக இருக்கும்?

5. கீழ்க்கண்ட வளைவரைகளின் மீது கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளில் தொடுகோடு மற்றும் செங்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

   (i) $y=x^2-x^4\ ;\ (1,0)$ (ii) $y=x^4+2e^x\ ;\ (0,2)$

   (iii) $y=x\sin x\ ;\ \left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ (iv) $x=\cos t, y=2\sin^2 t\ ;\ t=\frac{\pi}{3}$

6. $y=1+x^3$ என்ற வளைவரைக்கு $x+12y=12$ என்ற கோட்டிற்கு செங்குத்தாக உள்ள தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

7. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ என்ற வளைவரைக்கு $x+2y=6$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாக உள்ள தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

8. $x=7\cos t$ மற்றும் $y=2\sin t, t\in\mathbb{R}$ என்ற வளைவரைக்கு ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோடு மற்றும் செங்கோட்டின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

9. $xy=2$ என்ற செவ்வக அதிபரவளையத்திற்கும் $x^2+4y=0$ என்ற பரவளையத்திற்கும் இடைப்பட்ட கோணத்தினைக் காண்க.

10. $x^2-y^2=r^2$ மற்றும் $xy=c^2$ என்ற வளைவரைகள் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளும் எனக்காட்டுக. இங்கு c, r ஆகியவை மாறிலிகள்.

7.3 சராசரி மதிப்புத் தேற்றம் (Mean Value Theorem)

ஒரு வளைவரையின் நாணுக்கு இணையாக வரையப்படும் ஒரு தொடுகோட்டின் தொடும் புள்ளி, நாணின் முனைப்புள்ளிகளுக்கு இடையே அமையும் என்பதை சராசரி மதிப்புத் தேற்றம் உறுதி செய்கிறது. நாம் இப்பாடப்பகுதியை இடைநிலை மதிப்புத் தேற்றத்தின் வரையறையிலிருந்து தொடங்கலாம்.

தேற்றம் 7.1 (இடைநிலை மதிப்புத் தேற்றம்)

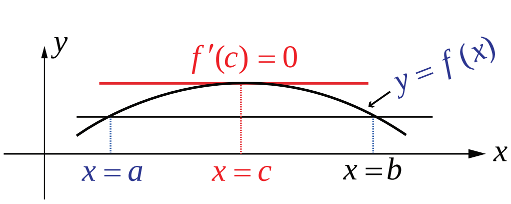
$f(x)$ என்ற சார்பு மூடிய இடைவெளி $[a,b]$-ல் தொடர்ச்சியாக உள்ளது எனவும் $f(a)$ மற்றும் $f(b)$-க்கு இடையில் ($f(a)$ மற்றும் $f(b)$ உள்ளடங்கியது) c என்ற ஏதேனும் ஒரு எண் உள்ளது எனில், $[a,b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் குறைந்தபட்சம் x என்ற ஒரு எண்ணையாவது $f(x)=c$ என்றவாறு காணலாம்.

7.3.1 ரோலின் தேற்றம் (Rolle's Theorem)

தேற்றம் 7.2 (ரோலின் தேற்றம்)

$f(x)$ என்ற சார்பு மூடிய இடைவெளி $[a,b]$-ல் தொடர்ச்சியானதாகவும், திறந்த இடைவெளி (a,b)-ல் வகையிடத்தக்கதாகவும் இருக்கிறது மேலும் $f(a)=f(b)$ எனில், குறைந்தபட்சம் ஒரு புள்ளி $c\in(a,b)$ ஆனது $f'(c)=0$ என்றவாறு இருக்கும்.

$x=a$-யில் இருந்து $x=b$ வரை ஒரு தொடுகோடானது வளைவரை மீது படம்7.11-ல் உள்ளவாறு நகர்ந்தால் $c\in(a,b)$ என்ற எண்ணினை c-யில் வரையப்படும் தொடுகோடு x-அச்சிற்கு இணையாக உள்ளவாறு காணலாம்.



படம் 7.11

எடுத்துக்காட்டு 7.19

$f(x)=x^2(1-x)^2, x\in[0,1]$ என்ற சார்பிற்கு ரோலின் தேற்றத்தை நிறைவு செய்யும் $'c'$-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு

$f(x)$ என்பது மூடிய இடைவெளி $[0,1]$ -ல் தொடர்ச்சியானதாகவும், திறந்த இடைவெளி $(0,1)$ -ல் வகையிடத்தக்கதாகவும், மேலும் $f(0)=0=f(1)$ ஆகவும் உள்ளது.

$$\text{இப்பொழுது, } f'(x) = 2x(1-x)(1-2x).$$

$$\text{எனவே, } f'(c) = 0 \Rightarrow c = 0, 1, \text{ மற்றும் } \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{2} \in (0,1).$$

■

எடுத்துக்காட்டு 7.20

$f(x) = x + \frac{1}{x}, x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ என்ற சார்பிற்கு $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ என்ற இடைவெளியில் ரோலின் தேற்றத்தை நிறைவுச் செய்யும் மதிப்பை காண்க.

தீர்வு

$f(x)$ என்பது மூடிய இடைவெளி $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$-ல் தொடர்ச்சியானதாகவும், திறந்த இடைவெளி $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$-ல் வகையிடத்தக்கதாகவும், மேலும் $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} = f(2)$ ஆகவும் உள்ளது. எனவே ரோலின் தேற்றப்படி $c \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ என்ற எண்ணினை $f'(c) = 0$ எனுமாறு காணலாம்.

இப்பொழுது, $f'(c) = 1 - \frac{1}{c^2} = 0 \Rightarrow c^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \pm 1, \quad 1 \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$, எனவே $c = 1$ என தேர்ந்தெடுக்கலாம். ■

எடுத்துக்காட்டு 7.21

$f(x) = \log\left(\frac{x^2+6}{5x}\right)$ என்ற சார்பிற்கு $[2,3]$ என்ற இடைவெளியில் ரோலின் தேற்றத்தை நிறைவு செய்யும் $'c'$ -ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு

$f(x)$ என்ற சார்பு மூடிய இடைவெளி $[2,3]$-ல் தொடர்ச்சியானதாகவும், திறந்த இடைவெளி $(2,3)$ -ல் வகையிடத்தக்கதாகவும், மற்றும் , $f(2) = 0 = f(3)$ ஆகவும் உள்ளது.

$$\text{இப்பொழுது, } f'(x) = \frac{x^2-6}{x(x^2+6)}$$

$$\text{எனவே, } f'(c) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{c^2-6}{c(c^2+6)} = 0$$

$$\Rightarrow c = \pm\sqrt{6}$$

$$\text{இப்பொழுது, } c = +\sqrt{6} \in (2,3).$$

$-\sqrt{6} \notin (2,3)$ எனவே, $c = +\sqrt{6}$ ஆனது ரோலின் தேற்றத்தை நிறைவு செய்கிறது. ■

ரோலின் தேற்றத்தினை ஒரு இயற்கணிதச் சமன்பாட்டிற்கு கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளியில் எத்தனை தீர்வுகள் இருக்கும் என்பதனை சமன்பாட்டைத்தீர்க்காமல் காணவும் பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 7.22

$x^4+2x^3-2=0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்காமல் $(0,1)$ என்ற இடைவெளியில் ஒரே ஒரு தீர்வுதான் இருக்கும் எனக்காட்டு.

தீர்வு

$f(x)=x^4+2x^3-2$ என்க. $f(x)$ ஆனது $[0,1]$-ல் தொடர்ச்சியானதாகவும், $(0,1)$-ல் வகையிடத்தக்கதாகவும் உள்ளது.

$$\text{இப்பொழுது } f'(x) = 4x^3+6x^2 . \ f'(x)=0 \text{ எனில், } \ 2x^2(2x+3) = 0 .$$

$$\text{எனவே, } x = 0,-\frac{3}{2} \text{ ஆனால் } 0,-\frac{3}{2}\notin(0,1) .$$

$$\text{ஆகவே, } f'(x) > 0, \ \forall x\in(0,1) .$$

எனவே, ரோலின் தேற்றத்தின்படி $a,b\in(0,1)$ என்ற எண்களை $f(a)=0=f(b)$ எனுமாறு காண இயலாது. ஆனால் $f(0)=-2<0$ மற்றும் $f(1)=1>0$ என்பதில் இருந்து $y=f(x)$ ஆவது இடைநிலை மதிப்பு தேற்றப்படி, 0 மற்றும் 1-க்கு இடையில் ஒரே ஒரு முறை x-அச்சை வெட்டும். எனவே, $x^4+2x^3-2=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $(0,1)$ என்ற இடைவெளியில் ஒரே ஒரு தீர்வுதான் இருக்கும். ■

ரோலின் தேற்றத்தின் பயன்பாடாக கீழ்க்கண்டதை நாம் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 7.23

ரோலின் தேற்றப்படி $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் இரு வேறு மெய் பூச்சியமாக்கிகளுக்கு இடையில் $na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒரு பூச்சியமாக்கி அமையும் என நிறுவுக.

தீர்வு

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ என்க. $\alpha<\beta$ என்பன $P(x)$-ன் பூச்சியமாக்கிகள் என்க. எனவே, $P(\alpha)=P(\beta)=0$. $P(x)$ ஆனது $[\alpha,\beta]$-ல் தொடர்ச்சியாகவும், திறந்த இடைவெளி (α,β)-ல் வகையிடத்தக்கதாகவும் இருப்பதால் ரோலின் தேற்றப்படி $\gamma\in(\alpha,\beta)$ ஆனது $P'(\gamma)=0$ எனுமாறு காணலாம்.

$P'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1$ என்பதிலிருந்து தேற்றம் நிரூபணமாகிறது. ■

எடுத்துக்காட்டு 7.24

$x^4-6x^3-11x^2+24x+28$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியமாக்கிகள் 2 மற்றும் 7 எனில், $2x^3-9x^2-11x+12$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒரு பூச்சியம் $(2,7)$ என்ற இடைவெளியில் அமையும் என நிறுவுக.

தீர்வு

$P(x)=x^4-6x^3-11x^2+24x+28$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு $\alpha=2,\ \beta=7$ எனக்கொண்டு எடுத்துக்காட்டு 7.23-ன் முடிவைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

$$\text{இப்பொழுது, } \frac{P'(x)}{2}=2x^3-9x^2-11x+12=Q(x) , \text{ (என்க).}$$

இதிலிருந்து $Q(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒரு பூச்சியம் $(2,7)$ என்ற இடைவெளியில் அமையும் என நிறுவலாம்.

சரிபார்த்தல்,

$$Q(2) = 16-36-22+12=28-58=-30<0$$

$$Q(7) = 686-441-77+12=698-518=180>0$$

இதிலிருந்து $Q(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒரு பூச்சியம் $(2,7)$ என்ற இடைவெளியில் அமையும் என்கிறோம். ■

குறிப்புரை

ரோலின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த இயலாத சார்புகள்

(1) $f(x)=|x|, x\in[-1,1]$ என்ற சார்பு $f(-1)=1=f(1)$ என இருந்த போதிலும் ரோலின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த இயலாது. ஏன் எனில் $x=0$ –வில் $f(x)$ வகையிடத்தக்கதல்ல.

(2) $f(x)=\begin{cases}1 & x=0 \text{ எனில்}\\ x & 0<x\leq 1 \text{ எனில்}\end{cases}$ என்ற சார்பு $f(0)=f(1)=1$ என இருந்த போதிலும் ரோலின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த இயலாது. ஏன் எனில் $f(x)$ ஆனது $x=0$ –வில் தொடர்ச்சியானது இல்லை.

(3) $f(x)=\sin x,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ என்ற சார்பு, மூடிய இடைவெளி $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$–ல் தொடர்ச்சியாகவும், திறந்த இடைவெளி $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$–ல் வகையிடத்தக்கதாக இருந்தாலும் $0=f(0)\neq f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ என்பதால் ரோலின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த இயலாது.

$f(x)$ ஆனது மூடிய இடைவெளி $[a,b]$–ல் தொடர்ச்சியானதாகவும், திறந்த இடைவெளி (a,b)–ல் வகையிடத்தக்கதாகவும் இருந்து $f(a)\neq f(b)$ என இருக்கும் நிலையிலும் ரோலின் தேற்றத்தை கீழ்க்கண்டவாறு பொதுமைப்படுத்தலாம்.

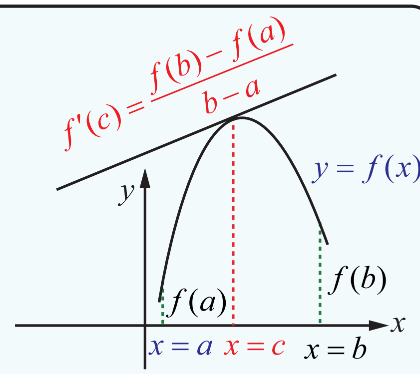
7.3.2 லெக்ராஞ்சியின் சராசரி மதிப்புத் தேற்றம் (Lagrange's Mean Value Theorem)

தேற்றம் 7.3

$f(x)$ ஆனது மூடிய இடைவெளி $[a,b]$–ல் தொடர்ச்சியானதாகவும், திறந்த இடைவெளி (a,b)–ல் வகையிடத்தக்கதாகவும் $(f(a), f(b))$ ஆகியவை சமமாக இருக்க வேண்டிய அவசியம் இல்லை). உள்ளது என்க. அப்போது குறைந்தபட்சம் ஒரு புள்ளி $c\in(a,b)$–யினை

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \ldots (6)$$

எனுமாறு காணலாம்.



படம் 7.12

குறிப்புரை

$f(a)=f(b)$ எனில் லெக்ராஞ்சியின் சராசரி மதிப்புத் தேற்றம் ரோலின் தேற்றத்தைத் தரும். லெக்ராஞ்சியின் சராசரி மதிப்புத் தேற்றத்தினை **சுழன்ற ரோலின் தேற்றம்** என்கிறோம்.

Z3V3W1

குறிப்புரை

இத்தேற்றத்தின் உள்ளார்ந்த விளக்கமானது (a,b) என்ற இடைவெளியில் $f(x)$–ன் சராசரி மாறுவீதத்தை $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$–யும் மற்றும் c–யில் கணநேர மாறுவீதத்தை $f'(c)$ யும் குறிக்கிறது.

லெக்ராஞ்சியின் இடைமதிப்புத் தேற்றத்தின் வடிவக் கணித விளக்கமானது ஒரு இடைவெளியில் சராசரி மாறுபாட்டு வீதமானது, அந்த இடைவெளியின் உள்ளிருக்கும் ஒரு புள்ளியில் கணநேர மாறுவீதத்திற்குச் சமமாக இருக்கும். இதனை கீழ்க்கண்ட எடுத்துக்காட்டின் மூலம் உணரலாம்.

ஒரு மகிழுந்தானது 200 மீ தூரத்தை 8 வினாடி காலத்தில் கடக்கிறது எனில் இதன் சராசரி திசைவேகம் $\frac{200}{8}=25$ மீ/வி ஆகும். இந்த 8 வினாடி கால இடைவெளியினுள் ஏதேனும் ஒரு நேரத்தில் மகிழுந்தின் வேகம் காட்டும் கருவி சரியாக 25 மீ/வி அதாவது 90 கி.மீ/மணியினைக் காட்டும் என்பதை சராசரி மதிப்புத் தேற்றம் உறுதி செய்கின்றது.

தேற்றம் 7.4

$f(x)$ என்ற சார்பானது மூடிய இடைவெளி $[a,b]$-ல் தொடர்ச்சியானதாகவும், திறந்த இடைவெளி (a,b)-ல் வகையிடத்தக்கதாகவும் மற்றும் $f'(x)>0, \forall x \in (a,b)$ ஆகவும் இருந்தால், $x_1, x_2 \in [a,b]$-க்கு, $x_1 < x_2$ எனில் $f(x_1) < f(x_2)$ ஆகும்.

நிரூபணம்

சராசரி மதிப்புத் தேற்றப்படி, $c \in (x_1, x_2) \subset (a,b)$ ஆனது

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) \text{ என்றவாறு காணலாம்}$$

$f'(c) > 0$, மற்றும் $x_2 - x_1 > 0$ என்பதால் $f(x_2)-f(x_1)>0$ ஆகும்.

இதிலிருந்து நாம் $x_1 < x_2$ எனில் $f(x_1) < f(x_2)$ எனப் பெறலாம். ■

குறிப்புரை

$f'(x)<0, \forall x \in (a,b)$ மற்றும் $x_1, x_2 \in [a,b]$-க்கு $x_1 < x_2$ எனில் $f(x_1) > f(x_2)$ ஆகும். இதனையும் மேற்கண்ட முறையிலேயே நிறுவலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 7.25

$f(x) = x - x^2$, $1 \le x \le 2$ என்ற சார்பிற்கு $(1,2)$ என்ற இடைவெளியில் சராசரி மதிப்புத் தேற்றத்தை நிறைவு செய்யும் மதிப்பினைக் காண்க.

தீர்வு

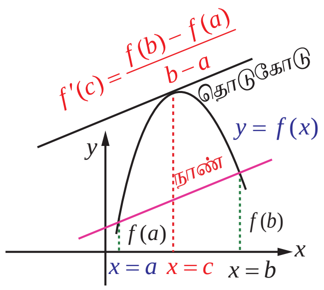
$f(x)$ ஆனது கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளியில் வரையறுக்கப்பட்டு மற்றும் $1<x<2$ என்ற இடைவெளியில் வகையிடத்தக்கதாகவும் உள்ளது. மேலும் $f(1)=0$ மற்றும் $f(2)=-2$. எனவே, சராசரி மதிப்புத் தேற்றப்படி $c \in (1,2)$ ஆனது

$$f'(c) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = 1-2c \text{ என்று இருக்கும்.}$$

$$\text{அதாவது, } 1-2c = -2 \Rightarrow c = \frac{3}{2} \text{ ஆகும்.}$$ ■

வடிவ கணித விளக்கம்

$y = f(x)$ என்ற வளைவரைக்கு சராசரி மதிப்புத் தேற்றத்தின் வடிவ கணித விளக்கமானது முனைப்புள்ளிகள் $x=a$ மற்றும் $x=b$ வழியே செல்லும் நாணுக்கு இணையாக ஒரு தொடுகோட்டின் தொடும் புள்ளியினை $c \in (a,b)$ என்றவாறு காண இயலும்.



படம் 7.13

லெக்ராஞ்சியின் சராசரி மதிப்புத் தேற்றத்தின் விளைவுகள்

சராசரி மதிப்புத் தேற்றத்தின் வாயிலாக நாம் கீழ்க்காணும் மூன்று முக்கிய முடிவுகளைப் பெறலாம்.

(1) கொடுக்கப்பட்ட சார்பின் ஓரியல்புத் தன்மையை தீர்மானம் செய்ய பயன்படுகிறது. (தேற்றம் 7.4)

(2) $f'(x)=0, \forall x \in (a,b)$ எனில், f ஆனது (a,b)-ல் ஒரு மாறிலி ஆகும்.

(3) $f'(x) = g'(x) \ \forall \ x$ எனில், $f(x) = g(x) + C$ ஆகும். (இங்கு C ஏதேனும் ஒரு மாறிலி)

7.3.3 பயன்பாடுகள் (Applications)

எடுத்துக்காட்டு 7.26

ஒரு சுமை ஊர்தி சுங்கச் சாவடி சாலையில் மணிக்கு 80 கி.மீ வேகத்தில் செல்கிறது. அந்த சுமை ஊர்தி 2 மணி நேரத்தில் 164 கி.மீ பயணத்தை நிறைவு செய்கிறது. சுங்கச் சாவடி சாலை முடிவில் வேகக் கட்டுப்பாட்டை மீறியதற்கான அத்தாட்சி சீட்டு ஓட்டுனருக்கு வழங்கப்படுகின்றது. அவர் வேகக் கட்டுப்பாட்டை மீறியதை சராசரி மதிப்புத் தேற்றத்தின் துணை கொண்டு நியாயப்படுத்துக.

தீர்வு

$'t'$ மணிநேரத்தில் ஓட்டுனர் கடந்த தொலைவு $f(t)$ என்க. $f(t)$ ஆனது $[0,2]$ -ல் தொடர்ச்சியானது மற்றும் $(0,2)$ -ல் வகையிடத்தக்கது. மேலும், $f(0)=0$ மற்றும் $f(2)=164$. சராசரி மதிப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த, c என்ற காலத்தை $f'(c)=\dfrac{164-0}{2-0}=82>80$ எனுமாறு காணலாம்.

எனவே, அந்த 2 மணி நேரத்தில் ஏதேனும் ஒரு கண நேரத்தில் அந்த ஓட்டுநர் 80 கி.மீ./ம வேகத்தில் பயணம் செய்திருக்க வேண்டும். ஆகவே, அவருக்கு வேகக் கட்டுப்பாட்டை மீறியதற்கான அத்தாட்சி சீட்டு வழங்கியது நியாயமே. ■

எடுத்துக்காட்டு 7.27

$f(x)$ என்ற வகையிடத்தக்க சார்பு $f'(x)\le 29$ மற்றும் $f(2)=17$ என்றவாறு உள்ளது எனில், $f(7)$ -ன் அதிகபட்ச மதிப்பினைக் காண்க.

தீர்வு

சராசரி மதிப்புத் தேற்றப்படி $'c'\in(2,7)$ -ஐ

$$\frac{f(7)-f(2)}{7-2} = f'(c)\le 29 \text{ எனக் காணலாம்.}$$

ஆகவே, $f(7)\le 5\times 29+17 = 162$

எனவே, $f(7)$ -ன் அதிகபட்ச மதிப்பு 162 ஆகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 7.28

சராசரி மதிப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி,

$$|\sin\alpha-\sin\beta|\le|\alpha-\beta|,\ \alpha,\ \beta\in\mathbb{R} \text{ என நிறுவுக.}$$

தீர்வு

$f(x)=\sin x$ என்பது அனைத்து திறந்த இடைவெளியிலும் வகையிடத்தக்கதாகும். மூடிய இடைவெளி $[\alpha,\beta]$-வை கருதுக. சராசரி மதிப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த $c\in(\alpha,\beta)$ -ஐ

$$\frac{\sin\beta-\sin\alpha}{\beta-\alpha} = f'(c)=\cos(c) \text{ எனக் காணலாம்.}$$

எனவே, $$\left|\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\alpha-\beta}\right| = |\cos(c)|\le 1$$

ஆகவே, $|\sin\alpha-\sin\beta| \le |\alpha-\beta|$. ■

குறிப்புரை

$\beta=0$ எனக் கொண்டால், $|\sin\alpha|\le|\alpha|$ என கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.29

ஒரு உறைவிப்பானில் இருந்து ஒரு வெப்ப நிலைமானி எடுக்கப்பட்டு கொதிக்கும் நீரில் வைக்கப்பட்டது. $-10°C$-லிருந்து $100°C$-க்கு உயர்த்த வெப்பநிலைமானிக்கு 22 வினாடிகள் ஆகிறது. ஏதேனும் ஒரு நேரம் t-யில் வெப்பநிலை மாறுபாட்டு வீதம் $5°C$ / வினாடி ஆக இருக்கும் எனக்காட்டுக.

தீர்வு

t என்ற நேரத்தில் வெப்பநிலையை $f(t)$ என்க. சராசரி மதிப்புத் தேற்றத்தின்படி,

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$= \frac{100-(-10)}{22}$$

$$= \frac{110}{22}$$

$$= 5°C \text{ / வினாடி.}$$

ஆகவே, ஏதேனும் ஒரு நேரம் t-யில் வெப்பநிலை மாறுபாட்டு வீதம் $5°C$/வினாடி ஆகும். ■

பயிற்சி 7.3

1. கொடுக்கப்பட்ட சார்புகளுக்கு கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளியில் ரோலின் தேற்றம் ஏன் பயன்படுத்த முடியாது என்பதை விளக்குக.

   (i) $f(x) = \left|\frac{1}{x}\right|,\ x \in [-1,1]$ (ii) $f(x) = \tan x, x \in [0,\pi]$

   (iii) $f(x) = x - 2\log x, x \in [2,7]$

2. ரோலின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி கீழ்க்காணும் சார்புகளுக்கு x-ன் எம்மதிப்புகளில் வரையப்படும் தொடுகோடு x-அச்சிற்கு இணையாக இருக்கும்?

   (i) $f(x) = x^2 - x,\ x \in [0,1]$ (ii) $f(x) = \frac{x^2-2x}{x+2},\ x \in [-1,6]$

   (iii) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{x}{3},\ x \in [0,9]$

3. கொடுக்கப்பட்ட சார்புகளுக்கு கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளியில் லெக்ராஞ்சியின் சராசரி மதிப்புத் தேற்றம் ஏன் பயன்படுத்த முடியாது என்பதை விளக்குக.

   (i) $f(x) = \frac{x+1}{x}, x \in [-1,2]$ (ii) $f(x) = |3x+1|,\ x \in [-1,3]$

4. லெக்ராஞ்சியின் சராசரி மதிப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி கொடுக்கப்பட்ட சார்புகளுக்கு கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளியின் முனைப்புள்ளிகள் வழியே செல்லும் நாணுக்கு இணையாக ஒரு தொடுகோட்டின் தொடும் புள்ளியின் x-ன் மதிப்பைக் காண்க.

   (i) $f(x) = x^3 - 3x + 2,\ x \in [-2,2]$ (ii) $f(x) = (x-2)(x-7),\ x \in [3,11]$

5. (i) $f(x) = \frac{1}{x}$ என்ற சார்பிற்கு $[a,b]$-யை மிகை முழு எண்களாக கொண்ட மூடிய இடைவெளி $[a,b]$-ல் சராசரி மதிப்புத் தேற்றத்தின்படி இறுதி மதிப்பு $\sqrt{ab}$ என நிறுவுக.

   (ii) $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ என்ற சார்பிற்கு எந்த ஒரு மூடிய இடைவெளி $[a,b]$-ல் சராசரி மதிப்புத் தேற்றத்தின்படி இறுதி மதிப்பு $\frac{a+b}{2}$ என நிறுவுக.

6. ஒரு பந்தய மகிழுந்து ஓட்டுநர் 20-வது கிலோமீட்டர்கல்லில் இருக்கிறார். அவரது மகிழுந்தின் வேகம் 150 கி.மீ/மணி-யை எப்பொழுதும் தாண்டவில்லை எனில், அடுத்த இரண்டு மணி நேரத்தில் அவர் கடக்கும் அதிகபட்ச கி.மீ கல் என்ன?

7. $f(x)$ என்ற சார்பானது, $f'(x) \leq 1$, $1 \leq x \leq 4$ எனில், $f(4) - f(1) \leq 3$ எனக்காட்டுக.

8. $f(x)$ என்ற வகையிடத்தக்க சார்பானது $f(0) = -1, f(2) = 4$ மற்றும் $f'(x) \leq 2 \;\; \forall \; x$ என்றவாறு இருக்க முடியுமா? உனது பதிலுக்கு தகுந்த விளக்கம் தருக.

9. $f(x) = x(x+3)e^{-\frac{\pi}{2}}, -3 \leq x \leq 0$ என்ற வளைவரைக்கு x-அச்சிற்கு இணையாக வரையப்படும் தொடுகோட்டின் தொடும் புள்ளியின் x-மதிப்புத் $(-3, 0)$ என்ற இடைவெளியில் அமையும் என நிறுவுக.

10. சராசரி மதிப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $a > 0, b > 0, |e^{-a} - e^{-b}| < |a - b|$ என நிறுவுக.

7.4 தொடரின் விரிவுகள் (Series Expansions)

முடிவில்லா எண்ணிக்கையிலான முறை வகையிடத்தக்க சார்புகளின் டெய்லர் மற்றும் மெக்லாரின் விரிவுகள்.

தேற்றம் 7.5

(a) டெய்லரின் தொடர்

$f(x)$ என்ற சார்பானது $x = a$-யில் முடிவற்ற எண்ணிக்கையிலான முறை வகையிடத்தக்கது என்க. $(x-a, x+a)$ எனும் இடைவெளியில் $f(x)$-ஐ கீழ்க்காணும் வடிவத்தில் விரிவாக்கலாம் :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots.$$

(b) மெக்லாரனின் தொடர்

$a = 0$ எனில், மேற்கண்ட விரிவின் வடிவம்

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots.$$

நிரூபணம்

$f(x)$-ன் விரிவு, $(x-a)$-ன் அடுக்குகளில், கீழ்க்காணுமாறு விரிவாக்கலாம்:

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (x-a)^n \qquad \ldots (7)$$

$x = a$ எனப்பிரதியிட $A_0 = f(a)$ ஆகும். (7)-ஐ x-ஐப் பொருத்து வகையிட,

$$f'(x) = 1! A_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n A_n (x-a)^{n-1} \qquad \ldots (8)$$

$x = a$ எனப் பிரதியிட $A_1 = f'(a)$ ஆகும். (8)-ஐ x-ஐப் பொருத்து வகையிட,

$$f''(x) = 2! A_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1) A_n (x-a)^{n-2} \qquad \ldots (9)$$

$x = a$ எனப் பிரதியிட $A_2 = \dfrac{f''(a)}{2!}$ ஆகும். (9)-ஐப் பொருத்து வகையிட

$$f'''(x) = 3! A_3 + \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(n-2) A_n (x-a)^{n-3} \qquad \ldots (10)$$

(10)-ஐ x-ஐப் பொருத்து $(k-3)$ முறை வகையிட,

$$f^{(k)}(x) \;=\; k!A_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} n(n-1)...(n-k+1)A_n(x-a)^{n-k} \qquad ...(11)$$

$x = a$ எனப் பிரதியிட $A_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$. ஆகவே மேற்கண்ட தேற்றம் நிறுவப்பட்டது.

ஒரு சார்பை $x = a$ -க்கு அருகில் விரிவாக்கம் செய்வதற்கு, அதாவது $(x-a)$ -ன் அடுக்குகளில் விரிவாக்கம் செய்வதற்கு கொடுக்கப்பட்ட சார்பை தேவையான முறை வகைப்படுத்தி $x = a$ -யில் மதிப்பினைக் காண வேண்டும். இம்மதிப்புகள் $(x-a)$ -ன் அடுக்குகளின் குணகங்களைத் தரும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.30

$\log(1+x)$ -ன் மெக்லாரனின் விரிவை $-1 < x \le 1$-ல் நான்கு பூச்சியமற்ற உறுப்புகள் வரை காண்க.

தீர்வு

$f(x) = \log(1+x)$ என்க. $f(x)$ -ன் மெக்லாரனின் விரிவு $f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n$, இங்கு, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$f(x)$ -ன் வகைக்கெழுக்கள் மற்றும் $x = 0$ -ல் இதன் மதிப்புகள் அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன.

சார்பு மற்றும் அதன் வகைக்கெழுக்கள்	**$\log(1+x)$ மற்றும் அதன் வகைக்கெழுக்கள்**	**$x = 0$ -ல் மதிப்பு**
$f(x)$	$\log(1+x)$	0
$f'(x)$	$\dfrac{1}{1+x}$	1
$f''(x)$	$-\dfrac{1}{(1+x)^2}$	-1
$f'''(x)$	$\dfrac{2}{(1+x)^3}$	2
$f^{(iv)}(x)$	$-\dfrac{6}{(1+x)^4}$	-6

அட்டவணை 7.2

இம்மதிப்புகளைப் பிரதியிட்டுச் சுருக்க, நமக்குத் தேவையான விரிவினை கீழ்க்காணுமாறு பெறலாம்:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad ; -1 < x \le 1.$$

எடுத்துக்காட்டு 7.31

$\tan x$ -ன் விரிவை $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ -ல் x -ன் அடுக்குகளாக 5ஆவது அடுக்குவரை காண்க.

தீர்வு

$f(x) = \tan x$ என்க. $f(x)$ -ன் மெக்லாரனின் விரிவு

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n \text{ , இங்கு , } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} .$$

$f(x)$ –ன் வகைக்கெழுக்கள் மற்றும் $x=0$ –ல் இதன் மதிப்புகள் அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன:

இப்பொழுது,

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2(x)$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(\sec^2(x)) = 2\sec x\cdot\sec x\cdot\tan x = 2\sec^2 x\cdot\tan x$$

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}(2\sec^2(x)\cdot\tan x) = 2\sec^2(x)\cdot\sec^2 x + \tan x\cdot 4\sec x\cdot\sec x\cdot\tan x$$

$$= 2\sec^4 x + 4\sec^2 x\cdot\tan^2 x$$

$$f^{(iv)}(x) = 8\sec^3 x\cdot\sec x\cdot\tan x + 4\sec^2 x\cdot 2\tan x\cdot\sec^2 x + 8\sec x\cdot\sec x\cdot\tan x\cdot\tan^2 x$$

$$= 16\sec^4 x\tan x + 8\sec^2 x\cdot\tan^3 x$$

$$f^{(v)}(x) = 16\sec^4 x\cdot\sec^2 x + 64\sec^3 x\cdot\sec x\cdot\tan x\cdot\tan x + 8\sec^2 x\cdot 3\tan^2 x\cdot\sec^2 x$$
$$+16\sec x\cdot\sec x\cdot\tan x\cdot\tan^3 x$$
$$= 16\sec^6 x + 88\sec^4 x\cdot\tan^2 x + 16\sec^2 x\cdot\tan^4 x\,.$$

சார்பு மற்றும் அதன் வகைக்கெழுக்கள்	**tan x** மற்றும் அதன் வகைக்கெழுக்கள்	$x=0$ –ல் மதிப்பு
$f(x)$	$\tan x$	0
$f'(x)$	$\sec^2 x$	1
$f''(x)$	$2\sec^2 x\tan x$	0
$f'''(x)$	$2\sec^4 x + 4\sec^2 x\cdot\tan^2 x$	2
$f^{(iv)}(x)$	$16\sec^4 x\cdot\tan x + 8\sec^2 x\cdot\tan^3 x$	0
$f^{(v)}(x)$	$16\sec^6 x + 88\sec^4 x\cdot\tan^2 x + 16\sec^2 x\cdot\tan^4 x$	16

அட்டவணை 7.3

இம்மதிப்புகளைப் பிரதியிட்டுச் சுருக்க, நமக்குத் தேவையான விரிவை கீழ்க்காணுமாறு பெறலாம்:

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots \quad ; \; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\,.$$

■

எடுத்துக்காட்டு 7.32

$\frac{1}{x}$ –ன் டெய்லர் தொடரின் விரிவை $x=2$ –ல் முதல் மூன்று பூச்சியமற்ற உறுப்புகள் வரை காண்க.

தீர்வு

$f(x)=\frac{1}{x}$ என்க. $f(x)$ –ன் டெய்லரின் விரிவு

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n (x-2)^n \text{, இங்கு } a_n = \frac{f^{(n)}(2)}{n!}\,.$$

$f(x)$ -ன் வகைக்கெழுக்கள் மற்றும் $x=2$ -வில் இதன் மதிப்புகள் அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டுள்ளன..

சார்பு மற்றும் அதன் வகைக்கெழுக்கள்	$\frac{1}{x}$ மற்றும் அதன் வகைக்கெழுக்கள்	$x=2$ -ல் மதிப்பு
$f(x)$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	$-\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{4}$
$f''(x)$	$\frac{2}{x^3}$	$\frac{1}{4}$
$f'''(x)$	$-\frac{6}{x^4}$	$-\frac{3}{8}$

அட்டவணை 7.4

இம்மதிப்புகளைப் பிரதியிட்டுச் சுருக்க, நமக்குத் தேவையான விரிவை கீழ்க்காணுமாறு பெறலாம்:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{(x-2)}{1!} + \frac{1}{4}\frac{(x-2)^2}{2!} - \frac{3}{8}\frac{(x-2)^3}{3!} + \cdots$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{4} + \frac{(x-2)^2}{8} - \frac{(x-2)^3}{16} + \cdots$$

■

பயிற்சி 7.4

1. கீழ்க்காணும் சார்புகளுக்கு மெக்லாரனின் விரிவைக் காண்க:

   (i) e^x (ii) $\sin x$ (iii) $\cos x$

   (iv) $\log(1-x)\,;\ -1 \le x < 1$ (v) $\tan^{-1}(x)\ ;\ -1 \le x \le 1$ (vi) $\cos^2 x$

2. $\log x,\ x > 0$ என்ற சார்பின் டெய்லர் தொடரின் விரிவை $x=1$ -ஐ பொருத்து முதல் மூன்று பூச்சியமற்ற உறுப்புகள் வரை காண்க.

3. $\sin x$ -ன் விரிவை $x - \frac{\pi}{4}$ -ன் அடுக்குகளாக முதல் மூன்று பூச்சியமற்ற உறுப்புகள் வரை காண்க.

4. $f(x) = x^2 - 3x + 2$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் வரிசை $x - 1$-ன் அடுக்குகளாக காண்க.

7.5 தேரப்பெறா வடிவங்கள் (Indeterminate Forms)

இப்பாடப்பகுதியில் எல்லை மதிப்பினை காணும்பொழுது தேரப்பெறா வடிவங்கள் வரும் நிலையில் எவ்வாறு எல்லை மதிப்பினைக் கணக்கிடுவது என்பதைப் பற்றி காண்போம்.

7.5.1 எல்லை காணும் முறை (A Limit Process)

$R(x)$ எனும் ஒரு சார்பிற்கு $\lim\limits_{x\to\alpha} R(x)$ எனும் எல்லையை காணும்பொழுது நாம்

$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\times\infty,\ \infty-\infty,\ 1^{\infty},\ 0^0,\ \infty^0$ ஆகிய சூழ்நிலைகளை சந்திக்க நேரலாம்.

இம்மாதிரியான வடிவங்களில் உள்ள எண்களை, நாம் சாதாரணமான கூட்டல் மற்றும் பெருக்கலின் விதிகளைக் கொண்டு மதிப்பிட முடியாது. இம்மாதிரியான வடிவங்களை நாம் தேரப்பெறா வடிவங்கள் என்கிறோம். இவ்வடிவங்களை ஒரு எண்ணாக கருத முடியாது என்றபோதிலும், இந்த தேரப்பெறா வடிவங்களின் எல்லை மதிப்புகள் ஒரு முக்கிய பங்கினை வகிக்கிறது.

ஜான் பெர்னோலி என்பவர் தொகுதி மற்றும் பகுதி ஆகியவை இரண்டும் பூச்சியத்தையோ அல்லது ∞-யையோ நெருங்கும்போது வகைக்கெழுக்களை கொண்டு எவ்வாறு எல்லை மதிப்பை காண்பது எனும் முறையை கண்டுபிடித்தார். இந்த விதியை தற்போது லோபிதாலின் விதி என்று அழைக்கிறோம். இவ்விதியானது குய்லூம் டி லோபிதால் என்ற பிரெஞ்சு அறிஞர் எழுதிய வகை நுண்கணிதத்தின் அறிமுகம் (Introductory Differential Calculus) எனும் நூலில்தான் முதன் முதலில் அச்சிடப்பட்டது. அதனாலேயே இவ்விதியை லோபிதாலின் விதி என்று அழைக்கிறோம்.

7.5.2 லோபிதாலின் விதி (The l'Hôpital's Rule)

$f(x)$ மற்றும் $g(x)$ ஆகியவை வகையிடத்தக்க சார்புகள் மற்றும் $g'(x) \neq 0$ மேலும்

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x) \text{ எனில் } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ ஆகும்.}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to a} g(x) \text{ எனில் } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ ஆகும்.}$$

7.5.3 தேரப்பெறா வடிவங்கள் (Indeterminate forms) $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\times\infty, \infty-\infty$

எடுத்துக்காட்டு 7.33

கணக்கிடுக : $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}\right)$.

தீர்வு

$x=1$ என நேரடியாக பிரதியிடும்போது நாம் $\frac{0}{0}$ என்ற தேரப்பெறா வடிவத்தைப் பெறுகிறோம். தொகுதி மற்றும் பகுதி ஆகியவை வரிசை 2 உள்ள பல்லுறுப்புக் கோவை. ஆகவே எனவே வகையிடத்தக்கவை. ஆகவே, லோபிதாலின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{2x-3}{2x-4}\right)$$
$$= \frac{1}{2}.$$

எல்லை மதிப்பை $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)}$ என காரணிப்படுத்தல் முறையிலும் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 7.34

கணக்கிடுக : $\lim_{x\to a}\left(\frac{x^n-a^n}{x-a}\right)$.

தீர்வு

$x=a$ என நேரடியாக பிரதியிடும்போது நாம் $\frac{0}{0}$ என்ற தேரப்பெறா வடிவத்தைப் பெறுகிறோம். தொகுதி மற்றும் பகுதி ஆகியவை பல்லுறுப்புக் கோவைகள். ஆதலால் வகையிடத்தக்கவை. எனவே, லோபிதாலின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த,

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{x^n-a^n}{x-a}\right) = \lim_{x\to a}\left(\frac{n\times x^{n-1}}{1}\right)$$

$$= n\times a^{n-1}.$$

எடுத்துக்காட்டு 7.35

மதிப்பு காண்க : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin mx}{x}\right)$.

தீர்வு

$x=0$ என நேரடியாக பிரதியிடும்போது நாம் $\frac{0}{0}$ என்ற தேரப்பெறா வடிவத்தைப் பெறுகிறோம். ஆகவே, லோபிதாலின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin mx}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{m\times\cos mx}{1}\right)$$

$$= m$$

அடுத்த எடுத்துக்காட்டில் எல்லை இல்லாத் தன்மையை அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 7.36

மதிப்பு காண்க : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x^2}\right)$.

தீர்வு

$x=0$ என நேரடியாக பிரதியிடும்போது நாம் $\frac{0}{0}$ என்ற தேரப்பெறா வடிவத்தைப் பெறுகிறோம். ஆகவே, லோபிதாலின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த,

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos x}{2x}\right)=\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sin x}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\cos x}{2x}\right)=-\infty$$

இடது மற்றும் வலது எல்லைகள் சமமில்லை ஆதலால் எல்லை இல்லை.

குறிப்புரை

$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos x}{2x}\right)$ –க்கு ஒருவர் மீண்டும் லோபிதாலின் விதியைப் பயன்படுத்தி

$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos x}{2x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-\sin x}{2}\right)=0$ எனக் காண்பது சரியானது அல்ல

ஏன் எனில் $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos x}{2x}\right)$ என்பது தேரப்பெறா வடிவத்தில் இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 7.37

$\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{1-\cos m\theta}{1-\cos n\theta}\right)=1$ எனில், $m=\pm n$ என நிறுவுக.

தீர்வு

இது $\left(\frac{0}{0}\right)$ என்ற தேரப்பெறா வடிவத்தில் உள்ளதால், லோபிதாலின் விதியை பயன்படுத்த,

$$\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{1-\cos m\theta}{1-\cos n\theta}\right) = \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{m\sin m\theta}{n\sin n\theta}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 7.35-ஐ பயன்படுத்த,

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{m}{n}\times\left(\frac{\frac{\sin m\theta}{\theta}}{\frac{\sin n\theta}{\theta}}\right) = \frac{m^2}{n^2}$$

ஆகவே, $m^2 = n^2$

அதாவது, $m = \pm n$.

எடுத்துக்காட்டு 7.38

மதிப்பிடுக : $\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\log(1-x)}{\cot(\pi x)}\right)$.

தீர்வு

இது $\frac{\infty}{\infty}$ எனும் தேரப்பெறா வடிவில் உள்ளது. எனவே, எல்லை மதிப்பை காண லோபிதாலின் விதியை நாம் பயன்படுத்தலாம்.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\log(1-x)}{\cot(\pi x)} = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{-\frac{1}{1-x}}{-\pi\operatorname{cosec}^2(\pi x)}\right) \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ வடிவம்}\right)$$

இதனைச் சுருக்க,

$$= \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\sin^2(\pi x)}{\pi(1-x)}\right) \quad \left(\frac{0}{0} \text{ வடிவம்}\right)$$

மீண்டும் லோபிதாலின் விதியை பயன்படுத்த,

$$= \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{2\pi\sin(\pi x)\cdot\cos(\pi x)}{-\pi}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1^-}\left(-2\sin(\pi x)\cdot\cos(\pi x)\right)$$

$$= 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 7.39

மதிப்பிடுக : $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

தீர்வு

இது $\infty-\infty$ எனும் தேரப்பெறா வடிவில் உள்ளது. எல்லையை மதிப்பிட இதனை $\left(\frac{0}{0}\right)$ வடிவத்திற்கு மாற்றி, லோபிதாலின் விதியை பயன்படுத்த வேண்டும்.

ஆகவே, $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-x-1}{x(e^x-1)}\right) \quad \left(\frac{0}{0} \text{ வடிவம்}\right)$$

இப்பொழுது, $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-x-1}{x(e^x-1)}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-1}{xe^x+e^x-1}\right) \quad \left(\frac{0}{0} \text{ வடிவம்}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x}{xe^x+2e^x}\right) = \frac{1}{2}.$$

எடுத்துக்காட்டு 7.40

மதிப்பிடுக : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\log x$.

தீர்வு

இது $(0\times\infty)$ எனும் தேரப்பெறா வடிவில் உள்ளது. எல்லையை மதிப்பிட நாம் இதனை $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ எனும் தேரப்பெறா வடிவத்திற்கு மாற்ற வேண்டும். அதன் பிறகு லோபிதாலின் விதியை பயன்படுத்த வேண்டும்.

ஆகவே,
$$\lim_{x\to 0^+} x\log x = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\log x}{\frac{1}{x}}\right) \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\text{ form}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0\,.$$

எடுத்துக்காட்டு 7.41

மதிப்பிடுக : $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+17x+29}{x^4}\right)$.

தீர்வு

இது $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ எனும் தேரப்பெறா வடிவில் உள்ளது. இந்த எல்லையைக் காண லோபிதாலின் விதியை நாம் பயன்படுத்தலாம்.

ஆகவே,
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+17x+29}{x^4}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+17}{4x^3}\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{12x^2}\right) = 0\,.$$

எடுத்துக்காட்டு 7.42

மதிப்பிடுக : $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{x^m}\right), m\in N$.

தீர்வு

இது $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ எனும் தேரப்பெறா வடிவில் உள்ளது. ஆகவே m முறை லோபிதாலின் விதியை பயன்படுத்த வேண்டும்.

ஆகவே,
$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^m} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{m!}$$
$$= \infty\,.$$

7.5.4 தேரப்பெறா வடிவங்கள் (Indeterminate forms) $0^0, 1^\infty$ மற்றும் ∞^0

இவ்வாறான தேரப்பெறா வடிவங்களை மதிப்பிட, நாம் முதலில் எல்லை மதிப்பிற்கான சேர்ப்பு சார்பு தேற்றத்தை வரையறுப்போம்.

தேற்றம் 7.6

$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ காணத்தக்கது மற்றும் இதன் மதிப்பு L என்க. மேலும் $f(x)$ ஆனது $x=L$ -ல் தொடர்ச்சியானது என்க. ஆகவே,
$$\lim_{x\to\alpha} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to\alpha} g(x)\right).$$

எல்லையை மதிப்பிடும் முறை

(1) $A=\lim\limits_{x\to a} g(x)$ மடக்கைச் சார்பின் தொடர்ச்சித் தன்மைக்காக $A>0$ எனக்கொண்டு, இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க $\log A=\lim\limits_{x\to a}\log(g(x))$ எனப்பெறலாம். எனவே $f(x)=\log x$ -க்கு மேற்கண்ட தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த,

$$\lim_{x\to a}\log(g(x)) = \log\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) \text{ ஆகும்.}$$

(2) நாம் லோபிதாலின் விதியை பயன்படுத்த, $\lim\limits_{x\to a}\log(g(x))$ ஆனது $\left(\frac{0}{0}\right)$ அல்லது $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ வடிவத்தில் இருக்க வேண்டும்.

(3) மதிப்பிடப்பட்ட எல்லை α எனக்கொண்டால் தேவையான எல்லை e^{α} ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.43

லோபிதாலின் விதியை பயன்படுத்தி, $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ என நிறுவுக.

தீர்வு

இது 1^{∞} எனும் தேரப்பெறா வடிவில் உள்ளது. $g(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ என்க. மடக்கை எடுக்க,

$$\log g(x) = \frac{\log(1+x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\log(g(x)) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right) \quad \left(\frac{0}{0} \text{ வடிவம்}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{1+x}}{1}\right) \qquad \text{(லோபிதாலின் விதியின்படி)}$$

$$= 1\,.$$

$$\text{ஆனால், } \lim_{x\to 0^+}\log g(x) = \log\left(\lim_{x\to 0^+} g(x)\right)$$

$$\text{எனவே, } \log\left(\lim_{x\to 0^+} g(x)\right) = 1.$$

ஆகவே அடுக்குப்படுத்த, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=e\,.$ ■

எடுத்துக்காட்டு 7.44

மதிப்பிடுக : $\lim\limits_{x\to\infty}(1+2x)^{\frac{1}{2\log x}}$.

தீர்வு

இது ∞^{0} எனும் தேரப்பெறா வடிவில் உள்ளது.

$$g(x) = (1+2x)^{\frac{1}{2\log x}} \text{ என்க.}$$

மடக்கை எடுக்க,

$$\log g(x) = \frac{\log(1+2x)}{2\log x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\log g(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\log(1+2x)}{2\log x}\right) \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ வடிவம்}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2}{1+2x}}{\frac{2}{x}}\right) \quad \text{(லோபிதாலின் விதிப்படி)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+2x}\right) \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ வடிவம்}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{ஆனால்,}$$

$$\lim_{x\to\infty}\log g(x) = \log\left(\lim_{x\to\infty} g(x)\right).$$

ஆகவே அடுக்குப்படுத்த, நமக்குத் தேவையான எல்லையினை $\sqrt{e}$ எனப் பெறலாம். ■

எடுத்துக்காட்டு 7.45

மதிப்பிடுக : $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

தீர்வு

$x\to 1$ எனில் 1^{∞} எனும் தேரப்பெறாத வடிவில் உள்ளது. $g(x) = x^{\frac{1}{1-x}}$ என்க. மடக்கை எடுக்க

$$\log g(x) = \frac{\log x}{1-x}.$$

$$\text{எனவே, } \lim_{x\to 1}\log g(x) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\log x}{1-x}\right) \quad \left(\frac{0}{0} \text{ வடிவம்}\right)$$

லோபிதாலின் விதியை பயன்படுத்த,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-1}\right) = -1$$

$$\text{ஆனால், } \lim_{x\to 1}\log g(x) = \log\left(\lim_{x\to 1} g(x)\right).$$

ஆகவே, அடுக்குப்படுத்த நாம் பெறுவது,

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$ ■

பயிற்சி 7.5

கீழ்க்காணும் எல்லைகளை, தேவைப்படும் இடங்களில் லோபிதாலின் விதியை பயன்படுத்தி காண்க :

1. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$
2. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3}{x^2-5x+3}$
3. $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\log x}$
4. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sec x}{\tan x}$
5. $\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sqrt{x}$
6. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$
7. $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{x}{x-1}\right)$
8. $\lim_{x\to 0^+} x^x$
9. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
10. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$
11. $\lim_{x\to 0^+}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

12. A_0 எனும் ஆரம்பத் தொகையானது, ஒரு வருடத்திற்கு n முறை r என்ற வட்டி வீதத்தில் கூட்டு வட்டி முறையில் முதலீடு செய்யப்படுகிறது எனில், முதலீடு செய்யப்பட்டு t வருடத்தில் அந்தத் தொகையின் மதிப்பு $A = A_0\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^{nt}$. வட்டியானது தொடர்ச்சியான வட்டி முறையில் (அதாவது $n \to \infty$) கணக்கிடப்பட்டால், t காலத்திற்குப் பின்னர் அந்தத் தொகையின் மதிப்பு $A = A_0 e^{rt}$ எனக் காட்டுக.

7.6 முதலாம் வகைக்கெழுவின் பயன்பாடுகள் (Applications of First Derivative)

முதலாம் வகைக் கெழுவினைப் பயன்படுத்தி ஒரு வளைவரை $f(x)$-ன் ஓரியல்புத் (ஏறும் அல்லது இறங்கும்) தன்மையையும், சார்பகத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் இடம் சார்ந்த அறுதி (பெறும அல்லது சிறும) மதிப்புகளைக் காண்க.

N2Q3P6

7.6.1 சார்புகளின் ஓரியல்புத் தன்மை (Monotonicity of functions)

சார்புகளின் ஓரியல்புத் தன்மை என்பது அவ்வளைவரையின் ஏறும் அல்லது இறங்கும் தன்மையை பற்றி கூறுவதாகும்.

வரையறை 7.4

$f(x)$ என்ற சார்பு I என்ற இடைவெளியில் $a < b \Rightarrow f(a) \le f(b), \forall a, b \in I$ என இருந்தால் அச்சார்பு I என்ற இடைவெளியில் ஏறும்.

வரையறை 7.5

$f(x)$ என்ற சார்பு, I என்ற இடைவெளியில் $a < b \Rightarrow f(a) \ge f(b), \forall a, b \in I$ என இருந்தால், அச்சார்பு I என்ற இடைவெளியில் இறங்கும்.

$f(x) = x$ என்ற சார்பானது மெய் எண் நேர்க்கோடு முழுமையிலும் ஏறுகிறது, ஆனால் $f(x) = -x$ என்ற சார்பானது மெய் எண் நேர்க்கோடு முழுமையிலும் இறங்குகிறது. பொதுவாக, ஒரு சார்பானது ஒரு குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் ஏறும் மற்றும் வேறொரு இடைவெளியில் இறங்கும். உதாரணமாக $f(x) = |x|$ என்ற சார்பு $(-\infty, 0]$ என்ற இடைவெளியில் இறங்கும் மற்றும் $[0, \infty)$ என்ற இடைவெளியில் ஏறும். இச்சார்புகளின் ஓரியல்புத் தன்மையினை உணர்வது எளிது. ஆனால் ஏதேனும் ஒரு கொடுக்கப்பட்ட சார்பிற்கு எவ்வாறு ஓரியல்புத் தன்மையினை மெய்எண் நேர்க்கோட்டில் தீர்மானிப்பது? இதனை கீழ்க்கண்ட தேற்றத்தைப் (நிரூபணம் இல்லாமல்) பயன்படுத்தி செய்யலாம்.

தேற்றம் 7.7

$f(x)$ என்ற சார்பு (a, b) என்ற திறந்த இடைவெளியில் வகையிடத்தக்கது என்க.

(1) $$\frac{d}{dx}(f(x)) \ \ge\ 0, \forall x \in (a, b) \qquad \text{... (1)}$$

எனில், (a, b) என்ற இடைவெளியில் ஏறும்.

(2) $$\frac{d}{dx}(f(x)) \ >\ 0, \forall x \in (a, b) \qquad \text{... (2)}$$

எனில், (a, b) என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ திட்டமாக ஏறும்.

இதன் நிரூபணத்தை தேற்றம் 7.3-ல் காணலாம்.

(3) $$\frac{d}{dx}(f(x)) \le 0, \forall x \in (a,b) \quad ...(3)$$

எனில், (a,b) என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ இறங்கும்.

(4) $$\frac{d}{dx}(f(x)) < 0, \forall x \in (a,b) \quad ...(4)$$

எனில், (a,b) என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ திட்டமாக இறங்கும்.

குறிப்புரை

இதில் மிக முக்கியமாக கவனிக்க வேண்டிய உண்மை என்னவென்றால், $f(x)$ என்ற சார்பு I என்ற இடைவெளியில் வகையிடத்தக்கதாக இருந்து திட்டமாக ஏறுகிறது எனில் $f'(x) > 0 \ \forall \ x \in I$ எனக் கூறுவது தவறானதாகும். உதாரணமாக, $y = x^3, x \in (-\infty, \infty)$ என்ற சார்பை கருதுக. இது $(-\infty, \infty)$ -ல் திட்டமாக ஏறுகிறது. இதனை நிறுவ, $a > b$ எனக்கொண்டு நாம் $f(a) > f(b)$ என நிறுவ வேண்டும். இதற்காக நாம் $a^3 - b^3 > 0$ என நிறுவ வேண்டும். இப்பொழுது,

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) = (a-b)\frac{1}{2}(2a^2+2ab+2b^2) = (a-b)\frac{1}{2}\left((a+b)^2+a^2+b^2\right) > 0$$

ஏன் எனில் $a - b > 0$ மற்றும் அடைப்புக் குறிக்குள் உள்ள உறுப்புகள் > 0.

ஆகவே இந்த இருபடி விரிவு எப்போதும் மிகை (இதன் மதிப்பு $a = b = 0$ என்றால் மட்டுமே பூச்சியமாகும். இது $a < b$ உடன் முரண்படுகிறது). எனவே $y = x^3$ என்ற சார்பு $(-\infty, \infty)$ -ல் திட்டமாக ஏறும். ஆனால் $f'(x) = 3x^2$ -ன் மதிப்பு $x = 0$ -ல் பூச்சியம் ஆகும்.

வரையறை 7.6

$f(x)$ என்ற வகையிடத்தக்க சார்பிற்கு $(x_0, f(x_0))$ ஒரு தேக்கநிலைப்புள்ளி எனில் $f'(x_0) = 0$ ஆகும்.

வரையறை 7.7

$f(x)$ என்ற சார்பிற்கு $(x_0, f(x_0))$ ஒரு நிலைப்புள்ளி எனில் $f'(x_0) = 0$ அல்லது $f'(x_0)$ காணத்தக்கது அல்ல.

குறிப்புரை

$f(x)$ என்ற சார்பின் சார்பாகத்தில் உள்ள x-க்கு, (x,y) ஒரு தேக்க நிலைப்புள்ளி அல்லது நிலைப்புள்ளி எனில் x–ஐ தேக்க நிலை எண் அல்லது நிலை எண் என்கிறோம்.

எல்லா தேக்க நிலைப்புள்ளிகளும் நிலைப்புள்ளிகளாகும். ஆனால் எல்லா நிலைப் புள்ளிகளும் தேக்க நிலைப்புள்ளிகள் ஆகாது. எடுத்துக்காட்டாக $f(x) = |x - 17|$ என்ற சார்பிற்கு $(17, 0)$ ஒரு நிலைப்புள்ளி. ஆனால் $(17, 0)$ தேக்க நிலைப்புள்ளியல்ல. ஏன் எனில் $x = 17$ -ல் சார்பு வகையிடத்தக்கதல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 7.46

$f(x) = x^2 + 2$ என்ற சார்பு $(2, 7)$ என்ற இடைவெளியில் திட்டமாக ஏறும் எனவும், $(-2, 0)$ என்ற இடைவெளியில் திட்டமாக இறங்கும் எனவும் கொள்க.

தீர்வு

$$f'(x) = 2x > 0, \forall x \in (2,7) \text{ மற்றும்}$$
$$f'(x) = 2x < 0, \forall x \in (-2,0)$$

இதிலிருந்து தேவையான முடிவைப் பெறலாம். ■

எடுத்துக்காட்டு 7.47

$f(x) = x^2 - 2x - 3$ என்ற சார்பு $(2, \infty)$ என்ற இடைவெளியில் திட்டமாக ஏறும் என நிறுவுக.

தீர்வு

$f(x) = x^2 - 2x - 3$, $f'(x) = 2x - 2 > 0 \;\forall\, x \in (2, \infty)$ என்பதால் $f(x)$ ஆனது $(2, \infty)$ என்ற இடைவெளியில் திட்டமாக ஏறும்.

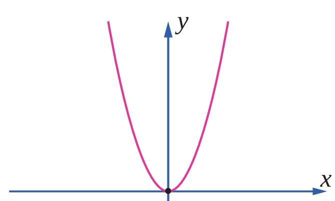
7.6.2 மீப்பெரு பெருமம் மற்றும் மீச்சிறு சிறுமம் (Absolute maxima and minima)

மீப்பெரு பெருமம் மற்றும் மீச்சிறு சிறுமம் ஆகியவை கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளியில் சார்பின் மிகப்பெரிய மற்றும் மிகச்சிறிய மதிப்பை குறிப்பிடுவன ஆகும்.

வரையறை 7.8

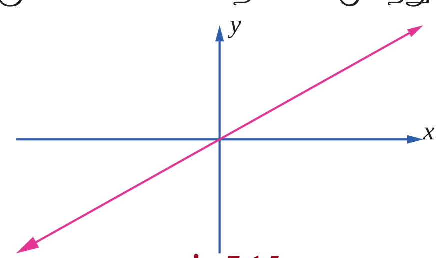
$f(x)$ என்ற சார்பின் சார்பகம் D -யில் உள்ள புள்ளி x_0 என்க. $f(x_0) \geq f(x) \forall x \in D$ எனில் $f(x_0)$ என்பது D-யில் மீப்பெரு பெருமம் மற்றும் $f(x_0) \leq f(x) \forall x \in D$ எனில் $f(x_0)$ என்பது D -யில் மீச்சிறு சிறுமம் ஆகும்.

பொதுவாக ஒரு சார்பிற்கு கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளியில் மீப்பெரு பெருமம் அல்லது மீச்சிறு சிறுமம் இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. கீழ்க்காணும் படங்கள் தொடர்ச்சியான வளைவரைகளுக்கு முடிவற்ற அல்லது முடிவுற்ற இடைவெளிகளில் மீப்பெரு பெருமம் அல்லது மீச்சிறு சிறுமம் இருக்கலாம் அல்லது இல்லாமலும் இருக்கலாம் என்பதைக் காட்டுகிறது.



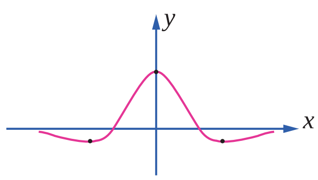
படம் 7.14

$(-\infty, \infty)$ என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ -க்கு மீச்சிறு சிறுமம் உள்ளது. ஆனால் மீப்பெரு பெருமம் இல்லை.



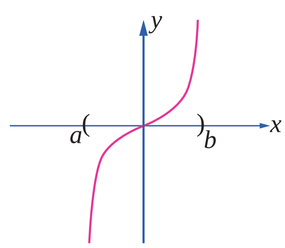
படம் 7.15

$(-\infty, \infty)$ என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ -க்கு மீப்பெரு மற்றும் மீச்சிறு அறுதி மதிப்புகள் இல்லை



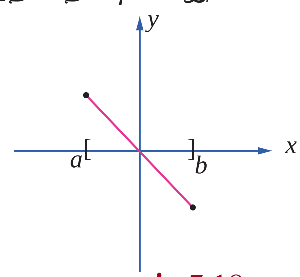
படம் 7.16

$(-\infty, \infty)$ என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ -க்கு மீப்பெரு பெருமம் மற்றும் மீச்சிறு சிறுமம மதிப்புகள் உள்ளது



படம் 7.17

(a, b) என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ -க்கு மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு அறுதி மதிப்புகள் இல்லை.



படம் 7.18

$[a, b]$ என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ -க்கு மீப்பெரு பெருமம் அல்லது மீச்சிறு சிறுமம மதிப்புகள் உள்ளது.

கீழ்க்காணும் தேற்றமானது ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பிற்கு எல்லா மூடிய இடைவெளிகளிலும் மீப்பெரு பெருமம் மற்றும் மீச்சிறு சிறுமம மதிப்புகள் இருக்கும் என்பதை கூறுகிறது.

தேற்றம் 7.8 (அறுதி மதிப்பு தேற்றம்)

$f(x)$ என்ற சார்பானது மூடிய இடைவெளி $[a, b]$ -ல் தொடர்ச்சியாக இருந்தால், f ஆனது $[a, b]$ -ல் ஒரு மீப்பெரு பெரும மதிப்பையும் மற்றும் ஒரு மீச்சிறு சிறும மதிப்பையும் பெறும்.

$f(x)$-ன் மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு அறுதி மதிப்புகள் மூடிய இடைவெளி $[a,b]$-ன் முனைப்புள்ளிகளிலோ அல்லது (a,b) என்ற இடைவெளியின் உட்புறத்திலோ அமையும். மீப்பெறு அல்லது மீச்சிறு அறுதி மதிப்புகள் உட்புறத்தில் அமைந்தால் அது நிலைப்புள்ளிகளில் தான் அமையும். ஆகவே, கீழ்க்கண்ட முறையை பயன்படுத்தி மீப்பெரு பெருமம் மற்றும் மீச்சிறு சிறும மதிப்புகளை மூடிய இடைவெளி $[a,b]$-ல் காணலாம்.

மூடிய இடைவெளி $[a,b]$-ல் தொடர்ச்சியான, சார்பு $f(x)$-க்கு மீப்பெரு மற்றும் மீச்சிறு அறுதி மதிப்புகளை காணும் முறை

படி 1 : $f(x)$-க்கு (a,b)-ல் நிலை எண்களைக் காண்க.

படி 2 : $f(x)$-ன் மதிப்புகளை அனைத்து நிலை எண்கள் மற்றும் முனைப்புள்ளிகள் a மற்றும் b -ல் காண்க.

படி 3 : படி 2-ல் காணப்பட்ட மதிப்புகளில் மிகப்பெரிய எண் மீப்பெரு பெருமம் மற்றும் மிகச்சிறிய எண் மீச்சிறு சிறுமம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.48

$f(x)=2x^3+3x^2-12x$ என்ற சார்பிற்கு $[-3,2]$ என்ற இடைவெளியில் மீப்பெரு பெரும மற்றும் மீச்சிறு சிறும மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சார்பை வகைப்படுத்த,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2+6x-12 \\ &= 6(x^2+x-2) \\ f'(x) &= 6(x+2)(x-1) \end{aligned}$$

ஆகவே, $f'(x)=0 \Rightarrow x=-2,1\in(-3,2)$.

எனவே, $x=-2,1$ ஆகியவை நிலைப்புள்ளிகள். $f(x)$-ன் மதிப்புகளை முனைப்புள்ளிகள் $x=-3,2$ மற்றும் நிலை எண்கள் $x=-2,1$ -ல் காண, நாம் $f(-3)=9$, $f(2)=4$, $f(-2)=20$ மற்றும் $f(1)=-7$ எனப் பெறுகிறோம்

இம்மதிப்புகளில் இருந்து, $x=-2$ -ல் மீப்பெரு பெருமம் 20 மற்றும் $x=1$ -ல் மீச்சிறு சிறுமம் -7 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.49

$f(x)=3\cos x$ என்ற சார்பிற்கு $[0,2\pi]$ என்ற இடைவெளியில் மீப்பெரு பெறும மற்றும் மீச்சிறு சிறும மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சார்பை வகைப்படுத்த, $f'(x)=-3\sin x$.

ஆகவே, $f'(x)=0\Rightarrow \sin x=0\Rightarrow x=\pi\in(0,2\pi)$. $f(x)$-ன் மதிப்புகளை முனைப்புள்ளிகள் $x=0,2\pi$ மற்றும் நிலை எண் $x=\pi$ -ல் காண, நாம் $f(0)=3$, $f(2\pi)=3$, மற்றும் $f(\pi)=-3$ எனப் பெறுகிறோம்.

இம்மதிப்புகளில் இருந்து, $x=0,\ 2\pi$ ஆகிய இடங்களில் மீப்பெரு பெறுமம் 3 மற்றும் $x=\pi$ -ல் மீச்சிறு சிறுமம் -3 ஆகும்.

7.6.3 ஒரு இடைவெளியில் இடம்சார்ந்த அறுதிகள் (Relative Extrema on an Interval)

$f(x)$ என்ற சார்பில், x_0-ஐ கொண்டிருக்கும் ஒரு சிறிய திறந்த இடைவெளியில் $f(x_0)$ தான் மிகப்பெரிய மதிப்பு எனில் x_0-ல் $f(x)$ என்ற சார்பு இடம் சார்ந்த பெறுமத்தை அடையும். இதுபோலவே x_0-ஐ கொண்டிருக்கும் ஒரு சிறிய திறந்த இடைவெளியில் $f(x_0)$ தான் மிகச்சிறிய மதிப்பு எனில் x_0-ல் $f(x)$ என்ற சார்பு இடம் சார்ந்த சிறுமத்தை அடையும்.

முழு சார்பகத்தில் ஒரு இடம் சார்ந்த பெருமம் மீப்பெரு பெருமமாக இருக்க வேண்டியதல்ல, இதுபோலவே ஒரு இடம்சார்ந்த சிறுமம் மீச்சிறு சிறுமமாக இருக்க வேண்டியதல்ல. ஆகவே, ஒரு சார்பிற்கு அதன் முழு சார்பகத்தில் ஒன்றிற்கு மேலான இடம் சார்ந்த பெருமங்களோ அல்லது இடம் சார்ந்த சிறுமங்களோ இருக்கலாம்.

ஒரு சார்பிற்கு இடம் சார்ந்த அறுதி மதிப்புகள் (பெருமம் அல்லது சிறுமம்) என்பது $f(x), \forall x \in I \subset D$ -ன் மதிப்புகளில் அறுதி மதிப்புகள் ஆகும். இங்கு I என்பது திறந்த இடைவெளியாகவோ அல்லது மூடிய இடைவெளியாகவோ இருக்கலாம். இடம் சார்ந்த அறுதி மதிப்புகள் அதன் நிலைப் புள்ளிகளில் அமையும். மலும் ஒரு சார்பிற்கு ஒரு நிலைப்புள்ளி $x = c$ -ல் இடம் சார்ந்த அறுதி மதிப்புகள் அமையாமலும் இருக்கலாம். உதாரணமாக $y = x^3$ மற்றும் $y = x^{\frac{1}{3}}$ ஆகிய சார்புகளுக்கு ஆதி ஒரு நிலைப்புள்ளி, ஆனால் ஆதியில் இடம்சார்ந்த அறுதி மதிப்புகள் அமைவது இல்லை.

தேற்றம் 7.9 (ஃபெர்மார்ட்)

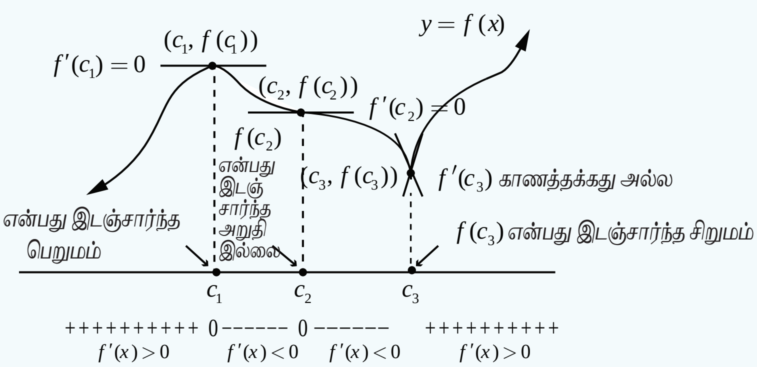
$f(x)$ -க்கு $x = c$ -ல் இடம் சார்ந்த அறுதி உள்ளது எனில் c ஒரு நிலை எண் ஆகும். இந்த நிலை எண்ணினை $f'(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பதன் மூலமாகவும், $f'(x)$ காணத்தக்கதாக உள்ள x-ன் மதிப்புகளை காண்பதன் மூலமாகவும் பெறலாம்.

7.6.4 முதல் வகைக்கெழு சோதனையை பயன்படுத்தி அறுதிகள் (Extrema using First Derivative Test)

ஒரு சார்பிற்கு ஏறும் அல்லது இறங்கும் இடைவெளிகளை கணக்கிட்ட பின் அச்சார்பின் இடம் சார்ந்த அறுதி மதிப்புகளை அறிவது அவ்வளவு கடினமானதல்ல. $y = f(x)$ -ன் வரைபடத்தினைக் கொண்டு அதன் இடஞ்சார்ந்த அகட்டு மதிப்புகளை அறியலாம். எனினும் மிகச்சரியாக எவ்விடத்தில் எப்புள்ளியில் சார்பிற்கு இடஞ்சார்ந்த அறுதிகள் அமைகிறது என்பதை அறிய சில சோதனை செய்யப்படுகிறது. இத்தகைய சோதனைகளில் ஒன்று முதலாம் வகைக்கெழு சோதனை ஆகும். இது பின்வரும் தேற்றத்தில் கூறப்பட்டுள்ளது.

தேற்றம் 7.10 (முதல் வகைக்கெழு சோதனை)

$f(x)$ என்ற தொடர்ச்சியான சார்பிற்கு c -ஐ உள்ளடக்கிய திறந்த இடைவெளி I -யில் $(c, f(c))$ என்பது நிலைப்புள்ளி என்க. $f(x)$ ஆனது c -ஐத் தவிர்த்த இடைவெளியில் வகையிடத்தக்கது எனில் $f(c)$ -ஐ கீழ்க்காணுமாறு வகைப்படுத்தலாம்: (x ஆனது I என்ற இடைவெளியில் இடமிருந்து வலமாக நகரும்போது)



படம் 7.19

(i) $f'(x)$ ஆனது c -ல் குறையிலிருந்து மிகைக்கு மாறினால், $f(x)$ -க்கு $f(c)$ என்பது இடம் சார்ந்த சிறுமம் ஆகும்.

(ii) $f'(x)$ ஆனது c -ன் மிகையிலிருந்து குறைக்கு மாறினால், $f(x)$ -க்கு $f(c)$ என்பது இடம் சார்ந்த பெருமம் ஆகும்.

(iii) $f'(x)$ -ன் குறியானது c -ன் இருபுறமும் மிகையாகவோ அல்லது c -ன் இருபுறமும் குறையாகவோ இருந்தால், $f(c)$ என்பது இடம் சார்ந்த சிறுமமும் இல்லை இடம் சார்ந்த பெருமமும் இல்லை எனலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 7.50

$f(x) = x^2 - 4x + 4$ என்ற சார்பிற்கு ஓரியல்பு இடைவெளிகளைக் கணக்கிட்டு அதிலிருந்து இடம் சார்ந்த அறுதி மதிப்புகளைக் காண்க.

E8E2R1

தீர்வு

$$f(x) = (x-2)^2,$$
$$f'(x) = 2(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2 .$$

ஓரியல்பு இடைவெளிகள் $(-\infty, 2)$ மற்றும் $(2, \infty)$ ஆகும். $f'(x) < 0,\ \forall\ x \in (-\infty, 2)$ என்பதால் $(-\infty, 2)$ -ல் $f(x)$ திட்டமாக இறங்கும். இதுபோலவே $f'(x) > 0,\ \forall\ x \in (2, \infty)$ என்பதால் $(2, \infty)$ -ல் $f(x)$ திட்டமாக ஏறும். $f'(x)$ -ன் குறி $x = 2$ -ஐ கடக்கும்போது (இடமிருந்து வலமாக) குறையிலிருந்து மிகையாக மாறுவதால், $x = 2$ -ல் $f(x)$ -க்கு இடம் சார்ந்த சிறுமம் உள்ளது. இந்த இடம் சார்ந்த சிறும மதிப்பு $f(2) = 0$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.51

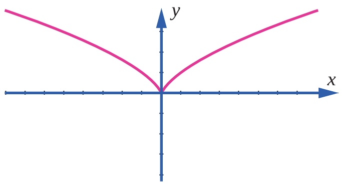
$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ என்ற சார்பிற்கு ஓரியல்பு இடைவெளிகளைக் கணக்கிட்டு அதிலிருந்து இடம் சார்ந்த அறுதி மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, எனவே $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$. $f'(x) \neq 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ மற்றும் $f'(x)$ ஆனது $x = 0$ -வில் காணத்தக்கது அல்ல. எனவே, இச்சார்பிற்கு தேக்கநிலைப் புள்ளிகள் இல்லை. ஆனால் $x = 0$ -வில் நிலைப்புள்ளி உள்ளது.

இடைவெளி	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$ -ன் குறி	$-$	$+$
ஓரியல்புத் தன்மை	திட்டமாக இறங்கும்	திட்டமாக ஏறும்

அட்டவணை 7.5



படம் 7.20

$f'(x)$ -ன் குறி $x = 0$ -ஐ கடக்கும் போது குறையிலிருந்து மிகையாக மாறுவதால், $x = 0$ -ல் $f(x)$ -க்கு இடம் சார்ந்த சிறுமம் உள்ளது. இந்த இடம் சார்ந்த சிறும மதிப்பு $f(0) = 0$ ஆகும். இந்த இடம் சார்ந்த சிறுமம் நிலைப்புள்ளியில் அமைகிறது. ஆனால் இது தேக்கநிலைப் புள்ளி அல்ல என்பது கவனிக்கத்தக்கது.

எடுத்துக்காட்டு 7.52

$f(x) = x - \sin x$ என்ற சார்பு மெய் எண் கோட்டில் ஏறும் என நிறுவுக. மேலும் அதன் இடஞ்சார்ந்த அறுதி மதிப்புகளை ஆராய்க.

தீர்வு

$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ மேலும் $x = 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ -ல் $f'(x)$ பூச்சியம் என்பவைகளில் இருந்து $f(x)$ என்ற சார்பு மெய் எண் கோட்டில் ஏறுகிறது.

$x = 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ -ஐ கடக்கும்போது $f'(x)$ -ன் குறியில் மாற்றம் இல்லாத காரணத்தால் முதலாம் வகைக்கெழு சோதனையின்படி இங்கு இடஞ்சார்ந்த அறுதி மதிப்புகள் இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 7.53

$f(x)=\log(1+x)-\dfrac{x}{1+x}, x>-1$ என்ற சார்பின் ஓரியல்புத் தன்மை மற்றும் இடஞ்சார்ந்த அறுதி மதிப்புகளை ஆராய்க, மேலும் இதிலிருந்து $\log(1+x)>\dfrac{x}{1+x}$ என்றவாறு அமையும் இடைவெளியினைக் காண்க.

தீர்வு

$$f(x) = \log(1+x)-\frac{x}{1+x}$$

$$\text{எனவே,}\quad f'(x) = \frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}.$$

ஆகவே,

$$f'(x) \text{ ஆனது } \begin{cases} <0\ ,\ -1<x<0 & \text{எனில்} \\ =0\ ,\ x=0 & \text{எனில்} \\ >0\ ,\ x>0 & \text{எனில்} \end{cases}$$

எனவே $x>0$ எனில் $f(x)$ ஆனது திட்டமாக ஏறும் $x<0$ எனில் $f(x)$ ஆனது திட்டமாக இறங்கும். $f'(x)$ -ன் குறி $x=0$ -வை கடக்கும்போது குறையிலிருந்து மிகையாக மாறுவதால், முதலாம் வகைக்கெழு சோதனையின்படி $x=0$ -ல் இடஞ்சார்ந்த சிறும மதிப்பு $f(0)=0$ ஆகும். மேலும் $x>0$ -ல், $f(x)>f(0)=0$ என்பதில் இருந்து, $(0,\infty)$ -ல்

$$\log(1+x)-\frac{x}{1+x}>0 \Rightarrow \log(1+x)>\frac{x}{1+x}.$$

■

எடுத்துக்காட்டு 7.54

$f(x)=x\log x+3x$ என்ற சார்பிற்கு ஓரியல்பு இடைவெளிகள் மற்றும் அதிலிருந்து இடஞ்சார்ந்த அறுதி மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சார்பு $x\in(0,\infty)$ -ல் வரையறுக்கப்பட்டு வகையிடத்தக்கதாக உள்ளது.

$$f(x) = x\log x+3x.$$

$$\text{எனவே,}\quad f'(x) = \log x+1+3=4+\log x.$$

தேக்கநிலை எண்களைக் காண $4+\log x = 0$ -ஐ தீர்க்க

நமக்குக் கிடைப்பது $x = e^{-4}$ ஆகும்.

ஆகவே, சார்பு $f(x)$ -ன் ஓரியல்பு இடைவெளிகள் $(0,e^{-4})$ மற்றும் (e^{-4},∞) ஆகும்.

$x=e^{-5}\in(0,e^{-4})$ -ல் $f'(e^{-5})=-1<0$ மேலும் இதிலிருந்து $(0,e^{-4})$ -ல் $f(x)$ திட்டமாக இறங்கும்.

$x=e^{-3}\in(e^{-4},\infty)$ -ல் $f'(e^{-3})=1>0$ மேலும் இதிலிருந்து (e^{-4},∞) -ல் $f(x)$ திட்டமாக ஏறும். $f'(x)$ -ன் குறி $x=e^{-4}$ -ஐ கடக்கும்போது குறையிலிருந்து மிகைக்கு மாறுவதால், முதலாம் வகைக்கெழு சோதனையின்படி $x=e^{-4}$ -ல் இடஞ்சார்ந்த சிறும மதிப்பு $f(e^{-4})=-e^{-4}$ ஆகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 7.55

$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ என்ற சார்பிற்கு ஓரியல்பு இடைவெளிகளைக் கணக்கிட்டு இதிலிருந்து இடஞ்சார்ந்த அறுதி மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சார்பு $x \in (-\infty, \infty)$ -ல் வரையறுக்கப்பட்டு வகையிடத்தக்கதாக உள்ளது.

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

இதிலிருந்து $$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$ எனப்பெறலாம்.

தேக்க நிலை எண்களைக் காண $-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} = 0$ -ஐ தீர்க்க நமக்குக் கிடைப்பது $x=0$ ஆகும்.

ஆகவே சார்பு $f(x)$ -ன் ஓரியல்பு இடைவெளிகள் $(-\infty, 0)$ மற்றும் $(0,\infty)$ ஆகும்.

$f'(x)<0, \forall x \in (0,\infty)$ என்பதால் $f(x)$ ஆனது இவ்விடைவெளியில் திட்டமாக இறங்கும். மேலும் $f'(x)$ -ன் குறி $x=0$ -ஐ கடக்கும்போது மிகையிலிருந்து குறைக்கு மாறுவதால், முதலாம் வகைக்கெழு சோதனையின்படி, $x=0$ -வில் இடஞ்சார்ந்த பெரும மதிப்பு $f(0)=1$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.56

$f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ என்ற சார்பிற்கு ஓரியல்பு இடைவெளிகளைக் கணக்கிட்டு இதிலிருந்து இடஞ்சார்ந்த அறுதி மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சார்பு $x \in (-\infty, \infty)$ -ல் வரையறுக்கப்பட்டு வகையிடத்தக்கதாக உள்ளது.

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

தேக்க நிலை எண்களைக் காண $1-x^2 = 0$ -ஐ தீர்க்க $x=\pm 1$ என நமக்கு கிடைக்கிறது.

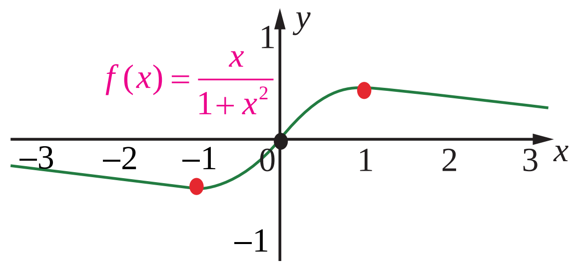
ஆகவே ஓரியல்பு இடைவெளிகள் $(-\infty,-1), (-1,1)$ மற்றும் $(1,\infty)$ ஆகும்.

இடைவெளி	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$ -ன் குறி	$-$	$+$	$-$
ஓரியல்புத் தன்மை	திட்டமாக இறங்கும்	திட்டமாக ஏறும்	திட்டமாக இறங்கும்

அட்டவணை 7.6

எனவே, $(-\infty,-1)$ மற்றும் $(1,\infty)$ இடைவெளிகளில் $f(x)$ திட்டமாக இறங்கும், $(-1,1)$ என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ திட்டமாக ஏறும்.

$f'(x)$-ன் குறி $x=-1$-ஐ கடக்கும்போது குறையிலிருந்து மிகைக்கு மாறுவதால், முதலாம் வகைக்கெழு சோதனையின்படி $x=-1$-ல் இடஞ்சார்ந்த சிறுமத்தை அடையும். இந்த இடஞ்சார்ந்த சிறும மதிப்பு $f(-1)=-\frac{1}{2}$ ஆகும். இதுபோலவே, $f'(x)$-ன் குறி $x=1$-ஐ கடக்கும்போது மிகையிலிருந்து குறைக்கு மாறுவதால், முதலாம் வகைக்கெழு சோதனையின்படி $x=1$-ல் இடஞ்சார்ந்த பெரும மதிப்பு $f(1)=\frac{1}{2}$ ஆகும்.



படம் 7.21

பயிற்சி 7.6

1. கீழ்க்காணும் சார்புகளுக்கு கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளிகளில் மீப்பெரு மற்றும் மீச்சிறு அறுதி மதிப்புகளை காண்க.

   (i) $f(x)=x^2-12x+10$; $[1,2]$ (ii) $f(x)=3x^4-4x^3$; $[-1,2]$

   (iii) $f(x)=6x^{\frac{4}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}$; $[-1,1]$ (iv) $f(x)=2\cos x+\sin 2x$; $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

2. கீழ்க்காணும் சார்புகளுக்கு ஓரியல்பு இடைவெளிகளைக் கணக்கிட்டு அதிலிருந்து இடஞ்சார்ந்த அறுதி மதிப்புகளைக் காண்க:

   (i) $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ (ii) $f(x)=\dfrac{x}{x-5}$ (iii) $f(x)=\dfrac{e^x}{1-e^x}$

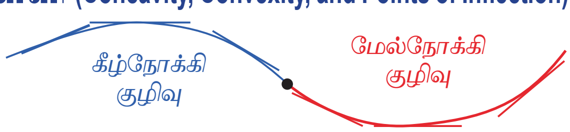
   (iv) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\log x$ (v) $f(x)=\sin x\cos x+5,\ x\in(0,2\pi)$

7.7 இரண்டாம் வகைக்கெழுவின் பயன்பாடுகள் (Applications of Second Derivative)

இரண்டாம் வகைக் கெழுவானது ஒரு சார்பின் குழிவு, குவிவு, வளைவு மாற்றப் புள்ளி மற்றும் இடம் சார்ந்த அறுதி மதிப்புகளை தீர்மானிக்க பயன்படுகின்றது.

7.7.1 குழிவு, குவிவு மற்றும் வளைவு மாற்றப் புள்ளி (Concavity, Convexity, and Points of Inflection)

ஒரு வளைவரைக்கு ஒரு புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோடு வளைவரைக்கு மேற்புறமாக அமைந்தால் அப்புள்ளியில் வளைவரை கீழ்நோக்கி குழிவு (மேல்நோக்கி குவிவு) என்கிறோம். வளைவரைக்கு ஒரு புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோடு வளைவரைக்கு கீழ்புறமாக அமைந்தால் அப்புள்ளியில் வளைவரை மேல்நோக்கி குழிவு (கீழ்நோக்கி குவிவு) என்கிறோம். இதனை அருகில் உள்ள வரைபடத்தின் வாயிலாக எளிதில் அறியலாம்.



படம் 7.22

வரையறை 7.8

$f(x)$ என்ற சார்பிற்கு $I=(a,b)$ என்ற திறந்த இடைவெளியில் இரண்டாம் வகைக்கெழு காணத்தக்கது என்க. அப்பொழுது $f(x)$ ஆனது கீழ்க்கண்டவாறு வகைப்படுத்தப்படுகிறது.

(i) $f'(x)$ ஆனது திறந்த இடைவெளி I-ல் திட்டமாக ஏறும் எனில், $f(x)$ ஆனது I-ல் மேல்நோக்கி குழிவு ஆகும்.

(ii) $f'(x)$ ஆனது திறந்த இடைவெளி I-ல் திட்டமாக இறங்கும் எனில், $f(x)$ ஆனது I-ல் கீழ்நோக்கி குழிவு ஆகும்..

பகுப்பாய்வின்படி, $y = f(x)$ என்ற வகையிடத்தக்க வளைவரையின் குழிவுத் தன்மை கீழ்க்காணும் முடிவில் விளக்கப்பட்டுள்ளது.

தேற்றம் 7.11 (குழிவுத் தன்மை சோதனை)

(i) திறந்த இடைவெளி I -ல் $f''(x) > 0$ எனில், I -ல் $f(x)$ மேல்நோக்கி குழிவு ஆகும்.

(ii) திறந்த இடைவெளி I -ல் $f''(x) < 0$ எனில், I -ல் $f(x)$ கீழ்நோக்கி குழிவு ஆகும்.

குறிப்புரை

(1) $[a,b]$ -ல் மேல்நோக்கி குவிவு வளைவரையின் எந்த ஒரு இடஞ்சார்ந்த பெருமமும் மீப்பெரு பெருமம் ஆகும்.

(2) $[a,b]$ -ல் கீழ்நோக்கி குவிவு வளைவரையின் எந்த ஒரு இடஞ்சார்ந்த சிறுமமும் மீச்சிறு சிறுமம் ஆகும்.

(3) எந்த ஒரு வளைவரைக்கும் ஒரே ஒரு மீப்பெரு பெருமம் (மற்றும் ஒரே ஒரு மீச்சிறு சிறுமம்) மட்டுமே உண்டு. ஆனால் ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட இடஞ்சார்ந்த பெருமம் அல்லது இடஞ்சார்ந்த சிறுமம் இருக்கலாம்.

வளைவு மாற்றப்புள்ளி

வரையறை 7.9

ஒரு சார்பின் வளைவரையானது எப்புள்ளிகளில் **"மேல்நோக்கி குழிவில் இருந்து கீழ்நோக்கி குழிவாகவோ"** அல்லது **"கீழ்நோக்கி குழிவில் இருந்து மேல்நோக்கி குழிவாகவோ"** மாறுகிறதோ அப்புள்ளிகளை $f(x)$ -ன் **வளைவு மாற்றப் புள்ளிகள்** என அழைக்கிறோம்.

தேற்றம் 7.12 (வளைவு மாற்றப்புள்ளி சோதனை)

(i) $f''(c)$ காணத்தக்கது மற்றும் $f''(c)$ -ன் குறி ஆனது $x = c$ -ஐ கடக்கும்போது மாறுகிறது, எனில் $(c, f(c))$ ஆனது f -ன் வளைவு மாற்றப் புள்ளி ஆகும்.

(ii) வளைவு மாற்றப்புள்ளி c–யில் $f''(c)$ காணத்தக்கது எனில், $f''(c) = 0$ ஆகும்.

குறிப்புரை

$y = f(x)$ என்ற வளைவரையின் வளைவு மாற்றப் புள்ளிகளை காண்பதற்கு $f''(x)$ ஆனது எப்புள்ளிகளில் அதன் குறியை மாற்றுகிறது என்பதை அறிவது அவசியமானதாகும். 'வழவழப்பான' வளைவரைகளில் (கூர்முனைகள் அற்ற) கீழ்க்காணும் ஏதேனும் ஒன்று நடக்க வாய்ப்பு உள்ளது :

(i) $f''(x) = 0$ அல்லது

(ii) $f''(x)$ அப்புள்ளியில் காணத்தக்கது அல்ல.

குறிப்புரை

(1) $f''(c)$ காணத்தக்கதாக இல்லாத நிலையிலும், $(c, f(c))$ வளைவு மாற்றப் புள்ளியாக இருக்க வாய்ப்புள்ளது. உதாரணமாக, $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ எனும் வளைவரையில் $c = 0$.

(2) $f''(c) = 0$ எனும் நிலையில் $(c, f(c))$ ஒரு வளைவு மாற்றப் புள்ளியாக இல்லாமலும் இருக்க வாய்ப்புள்ளது. உதாரணமாக, $f(x) = x^4$ எனும் வளைவரையில் $c = 0$.

(3) ஒரு வளைவு மாற்றப் புள்ளி தேக்க நிலைப் புள்ளியாக இருக்க வேண்டிய அவசியம் இல்லை. உதாரணமாக $f(x) = \sin x$ எனில், $f'(x) = \cos x$ மற்றும் $f''(x) = -\sin x$ மேலும் இதிலிருந்து $(\pi, 0)$ ஆனது ஒரு வளைவு மாற்றப் புள்ளி. ஆனால் அது $f(x)$ -ன் தேக்க நிலைப்புள்ளி அல்ல.

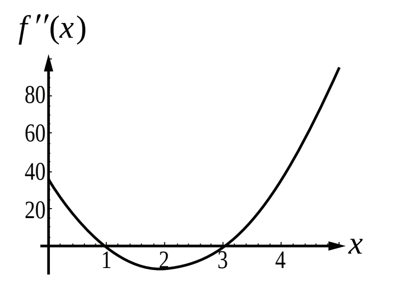
எடுத்துக்காட்டு 7.57

$f(x)=(x-1)^3\cdot(x-5), x\in\mathbb{R}$ என்ற வளைவரையின் குழிவு இடைவெளிகளைக் காண்க மேலும் ஏதேனும் வளைவு மாற்றப்புள்ளிகள் இருப்பின் அவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சார்பு 4-ஆம் வரிசை பல்லுறுப்புக் கோவை ஆகும். இப்பொழுது

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-1)^3+3(x-1)^2\cdot(x-5) \\ &= 4(x-1)^2\cdot(x-4) \\ f''(x) &= 4[(x-1)^2+2(x-1)\cdot(x-4)] \\ &= 12(x-1)\cdot(x-3) \end{aligned}$$



படம் 7.23

இப்பொழுது, $f''(x) = 0 \quad \Rightarrow x=1, x=3$.

குழிவு இடைவெளிகள் அட்டவணை 7.7-ல் அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

இடைவெளி	(-∞, 1)	(1, 3)	(3, ∞)
$f''(x)$ -ன் குறி	+	−	+
குழிவுத் தன்மை	மேல்நோக்கி குழிவு	கீழ்நோக்கி குழிவு	மேல்நோக்கி குழிவு

அட்டவணை 7.7

$(-\infty,1)$ மற்றும் $(3,\infty)$ ஆகிய இடைவெளிகளில் வளைவரை மேல்நோக்கி குழிவு ஆகும்.

$(1,3)$ என்ற இடைவெளியில் வளைவரை கீழ்நோக்கி குழிவு ஆகும்.

$f''(x)$ -ன் குறியானது $x=1$ மற்றும் $x=3$ ஆகியவற்றைக் கடக்கும்போது மாறுகிறது. எனவே, $(1, f(1))=(1,0)$ மற்றும் $(3, f(3))=(3,-16)$ ஆகியவை $y=f(x)$ என்ற வளைவரையின் வளைவு மாற்றப் புள்ளிகள் ஆகும். குறி மாற்றத்தை அருகில் உள்ள $f''(x)$ -ன் வரைபடத்தின் மூலம் அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 7.58

$y=3+\sin x$ என்ற வளைவரையின் குழிவு இடைவெளிகளைக் காண்க.

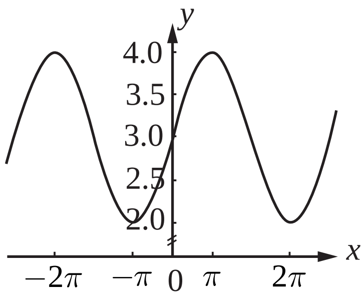
தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சார்பானது 2π பிரிவு இடைவெளி உள்ள சார்பு ஆகும். எனவே இந்த ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளிகளிலும் தேக்க நிலைப் புள்ளிகள் மற்றும் வளைவு மாற்றப் புள்ளிகள் இருக்கும்.

$y=3+\sin x$ என்பதில் இருந்து

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \text{ மற்றும் } \frac{d^2y}{dx^2}=-\sin x$$

இப்பொழுது, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\sin x = 0 \Rightarrow x = n\pi$.



படம் 7.24

$(-\pi,\pi)$ என்ற இடைவெளியினை $(-\pi,0)$ மற்றும் $(0,\pi)$ எனும் உள் இடைவெளிகளாக பிரிக்கலாம்.

$(-\pi, 0)$ எனும் இடைவெளியில், $\dfrac{d^2y}{dx^2} > 0$. மேலும் இதிலிருந்து $(-\pi, 0)$ -ல் சார்பு மேல்நோக்கி குழிவு. $(0, \pi)$ எனும் இடைவெளியில் $\dfrac{d^2y}{dx^2} < 0$, மேலும் இதிலிருந்து $(0, \pi)$ -ல் சார்பு கீழ்நோக்கி குழிவு. ஆகவே, $(0,3)$ என்பது வளைவு மாற்றப்புள்ளி ஆகும் (படம் 7.24ஐ பார்க்க). $(n\pi, (n+1)\pi)$ என்ற பொதுவான இடைவெளிகளைக் கருதும்போது (n ஒரு முழு எண்), இவ்விடைவெளிகளில் குழிவுத்தன்மையை ஆராய வேண்டும். இதனை மேற்கூறியவாறே ஆராய நாம் $(n\pi, 3)$ ஆகியவை வளைவு மாற்றப்புள்ளிகள் என அறியலாம். ■

7.7.2 இரண்டாம் வகைக்கெழு சோதனையை பயன்படுத்தி அறுதி மதிப்புகள் (Extrema using Second Derivative Test)

இரண்டாம் வகைக்கெழு சோதனை: இரண்டாம் வகைக்கெழு சோதனையானது நிலைப்புள்ளிகள்,அறுதி மதிப்புகள் மற்றும் குழிவுத்தன்மை போன்ற கருத்துகளை தொடர்புபடுத்துவது ஆகும். மேலும் இது நிலைப்புள்ளிகளில் சார்பின் இடஞ்சார்ந்த பெரும அல்லது சிறும மதிப்புகளை ஆராய சிறந்த கருவியாக பயன்படுகிறது.

தேற்றம் 7.13 (இரண்டாம் வகைக்கெழு சோதனை)

c எனும் நிலைப்புள்ளியில் $f'(c) = 0$ எனவும், c -ன் அண்மையில் $f'(x)$ காணத்தக்கது எனவும், 'மேலும் $f''(c)$ காணத்தக்கது எனவும் கொண்டால்,' $f''(c) < 0$ எனில் c -யில் f ஆனது இடஞ்சார்ந்த பெருமத்தை அடையும், $f''(c) > 0$ எனில் c -யில் f ஆனது இடஞ்சார்ந்த சிறுமத்தை அடையும். $f''(c) = 0$ எனில், இந்த சோதனையில் இடஞ்சார்ந்த அறுதி மதிப்புகளைப் பற்றிய தகவல் இல்லை என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 7.59

$f(x) = x^4 + 32x$ என்ற சார்பின் இடஞ்சார்ந்த அறுதி மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

$$f'(x) = 4x^3 + 32 = 0 \Rightarrow x^3 = -8 \Rightarrow x = -2$$

மேலும் $f''(x) = 12x^2$.

$f''(-2) > 0$ என்பதால் $x = -2$ -ல் சார்பு இடஞ்சார்ந்த சிறும மதிப்பை அடையும். இந்த இடஞ்சார்ந்த சிறும மதிப்பு $f(-2) = -48$ ஆகும். எனவே, அறுதிப் புள்ளி $(-2, -48)$. ■

எடுத்துக்காட்டு 7.60

$f(x) = 4x^6 - 6x^4$ என்ற சார்பின் இடஞ்சார்ந்த அறுதி மதிப்புகளைக் காண்க.

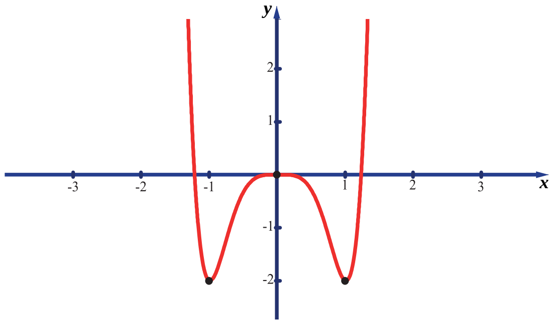
தீர்வு

x-ஐப் பொருத்து வகையிட,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 24x^5 - 24x^3 \\ &= 24x^3(x^2 - 1) \\ &= 24x^3(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, 0, 1$.

ஆகவே நிலை எண்கள் $x = -1, 0, 1$ ஆகும்.



படம் 7.25

இப்பொழுது, $f''(x)=120x^4-72x^2=24x^2(5x^2-3)$.

$\Rightarrow f''(-1)=48$, $f''(0)=0$, $f''(1)=48$.

$f''(-1)$ மற்றும் $f''(1)$ ஆகியவை மிகை. ஆகவே இரண்டாம் வகைக்கெழு சோதனையின்படி, $x=-1,1$-ல் இடஞ்சார்ந்த சிறும மதிப்புகள் இருக்கும். ஆனால், $x=0$ எனில், $f''(0)=0$. $x=0$-ல் இரண்டாம் வகைக்கெழுச் சோதனையானது இடஞ்சார்ந்த அறுதி மதிப்புகளைப் பற்றி எந்த தகவலையும் தருவதில்லை. எனவே, நாம் முதலாம் வகைக்கெழு சோதனையை பயன்படுத்த வேண்டும். ஓரியல்புத் தன்மை இடைவெளிகள் அட்டவணை 7.8-ல் அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

இடைவெளி	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$-ன் குறி	$-$	$+$	$-$	$+$
ஓரியல்புத் தன்மை	திட்டமாக இறங்கும்	திட்டமாக ஏறும்	திட்டமாக இறங்கும்	திட்டமாக ஏறும்

அட்டவணை 7.8

முதலாம் வகைக்கெழு சோதனையின்படி, $x=-1$-ல் $f(x)$ ஆனது இடஞ்சார்ந்த சிறுமத்தை அடையும், அந்த இடஞ்சார்ந்த சிறுமம் -2 ஆகும். $x=0$-ல் $f(x)$ ஆனது இடஞ்சார்ந்த பெருமத்தை அடையும். அந்த இடஞ்சார்ந்த பெருமம் 0 ஆகும். $x=1$-ல் $f(x)$ ஆனது இடஞ்சார்ந்த சிறும மதிப்பினை அடையும். அந்த இடஞ்சார்ந்த சிறுமம் -2 ஆகும். ■

குறிப்புரை

இரண்டாம் வகைக்கெழு மறையும் போது, நாம் இடஞ்சார்ந்த அறுதி மதிப்புகளைப் பற்றிய தகவலைப் பெற முடியாது. ஆகவே நாம் இச்சூழல்களில் முதலாம் வகைக்கெழு சோதனையை பயன்படுத்தலாம்!

எடுத்துக்காட்டு 7.61

x^2y^2-ன் இடஞ்சார்ந்த பெறும மற்றும் சிறும மதிப்புகளை $x+y=10$ என்ற கோட்டின் மீது காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சார்பை நாம் $f(x)=x^2(10-x)^2$ என எழுதலாம்.

இப்பொழுது, $f(x) = x^2(100-20x+x^2)=x^4-20x^3+100x^2$

எனவே, $f'(x) = 4x^3-60x^2+200x=4x(x^2-15x+50)$

$f'(x) = 4x(x^2-15x+50)=0 \Rightarrow x=0,\ 5,\ 10$

மேலும். $f''(x) = 12x^2-120x+200$

$f(x)$-ன் தேக்க நிலை எண்கள் $x=0,\ 5,\ 10$ ஆகும். இவ்வெண்களில் $f''(x)$-ன் மதிப்புகள் முறையே $200, -100$ மற்றும் 200 ஆகும். $x=0$-ல், இடஞ்சார்ந்த சிறும மதிப்பு $f(0)=0$ ஆகும். $x=5$-ல், இடஞ்சார்ந்த பெரும மதிப்பு $f(5)=625$ ஆகும். $x=10$-ல், இடஞ்சார்ந்த சிறும மதிப்பு $f(10)=0$ ஆகும். ■

பயிற்சி 7.7

1. கீழ்க்காணும் சார்புகளுக்கு குழிவு இடைவெளிகள் மற்றும் வளைவு மாற்றுப் புள்ளிகளைக் காண்க:

   (i) $f(x) = x(x-4)^3$ (ii) $f(x) = \sin x + \cos x,\ 0 < x < 2\pi$ (iii) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

2. இரண்டாம் வகைக்கெழு சோதனையை பயன்படுத்தி இடஞ்சார்ந்த அறுதி மதிப்புகளைக் காண்க.

   (i) $f(x) = -3x^5 + 5x^3$ (ii) $f(x) = x\log x$ (iii) $f(x) = x^2 e^{-2x}$

3. $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ என்ற சார்பிற்கு ஓரியல்பு இடைவெளிகள், இடஞ்சார்ந்த அறுதி மதிப்புகள், குழிவு இடைவெளிகள் மற்றும் வளைவு மாற்றுப் புள்ளிகளைக் காண்க.

7.8 உகமக் கணக்குகளில் பயன்பாடுகள்
(Applications in Optimization)

L8T2H3

உகமக் கணக்குகள் என்பது அறுதி மதிப்புகளை (பெருமம் அல்லது சிறுமம்) குறிப்பிட்ட கட்டுப்பாடுகளுடன் காண்பது ஆகும்.

அறுதி மதிப்பு அல்லது உகமக் கணக்குகளை தீர்க்கும் முறை

படி 1 : தேவையான அளவுகளுடன் கூடிய படத்தை வரைக.

படி 2 : எந்த அளவையை பெருமமாக்க அல்லது சிறுமமாக்க வேண்டுமோ அதற்கான சமன்பாட்டினைக் காண்க.

படி 3 : கொடுக்கப்பட்ட கட்டுப்பாடுகளுடன் தேவையான அளவை பெருமமாக அல்லது சிறுமமாக்க வேண்டும்.

படி 4 : கணக்கில் கொடுக்கப்பட்ட கட்டுப்பாடுகளுக்கு ஏற்றவாறு மாறியின் ஏற்கத்தக்க இடைவெளிகளை காணவேண்டும்.

படி 5 : அறுதி மதிப்புகளை காணும் முறையினை கொண்டு (மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு அறுதிகள், முதல் வகைக்கெழு சோதனை அல்லது இரண்டாம் வகைக்கெழு சோதனை) பெருமம் அல்லது சிறுமம் காணவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.62

நம்மிடம் 12 அலகு பக்க அளவுடைய மெல்லிய சதுர தகடு உள்ளது மற்றும் வெளிப்புறத்தின் மூலைகளிலிருந்து சிறிய சதுரங்களை வெட்டி பக்கங்களை மடிப்பதன் மூலம் திறந்த பெட்டியை உருவாக்க விரும்புகிறோம். கேள்வி என்னவென்றால், எந்த வெட்டு அதிகபட்ச கன அளவை உருவாக்கும்?

தீர்வு

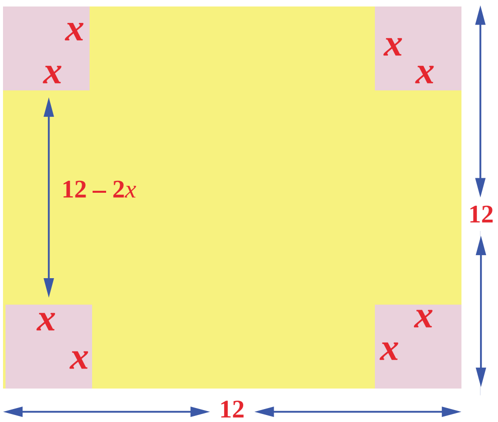
x = வெட்டி எடுக்கப்படும் ஒவ்வொரு சிறிய சதுரங்களின் நீளம் என்க.

V = மடிப்பதன் மூலம் பெறப்படும் பெட்டியின் கன அளவு என்க.

நீளத்தின் இரு மூலைகளிலும் x நீளமுள்ள சதுரத்தை வெட்டிய பின் நீளம் $12-2x$. மடித்த பின்பு பெட்டியின் ஆழம் x. எனவே, கன அளவு $V = x\times(12-2x)^2$ ஆகும். $x=0$ அல்லது 6 -ல் கன அளவு பூச்சியமாவதைக் கவனிக்க. எனவே, $x=0$ அல்லது 6 எனில் பெட்டி கிடைக்காது. எனவே, $V = x\times(12-2x)^2, x\in(0,6)$ -ஐ பெருமப்படுத்த வேண்டும்.

இப்பொழுது,
$$\frac{dV}{dx} = (12-2x)^2 - 4x(12-2x)$$
$$= (12-2x)(12-6x).$$

$\frac{dV}{dx}=0 \quad \Rightarrow \quad x=2,6. \qquad 6 \notin (0,6)$ என்பதால் $x=2 \in (0,6)$ என்பது மட்டுமே தேக்கநிலை எண். மேலும் $\frac{dV}{dx}$-ன் குறி $x=2$-ஐ கடக்கும்போது மிகையிலிருந்து குறைக்கு மாறுகிறது. எனவே $x=2$-ல் V ஆனது இடஞ்சார்ந்த பெரும மதிப்பினை அடையும். இந்த இடஞ்சார்ந்த பெரும கன அளவு $V=128$ அலகுகள். எனவே பெரும கன அளவிற்கு 2 அலகுகள் வெட்ட வேண்டும்.



படம் 7.26

■

எடுத்துக்காட்டு 7.63

$(1,1)$ என்ற புள்ளியில் இருந்து, ஓரலகு வட்டம் $x^2+y^2=1$-ன் மீதுள்ள எப்புள்ளி மிக அருகாமையிலும், எப்புள்ளி மிக அதிகத் தொலைவிலும் இருக்கும்?

தீர்வு

$(1,1)$ என்ற புள்ளியில் இருந்து எந்த ஒரு புள்ளி (x,y)-க்கு உள்ள தூரம் $d=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$.

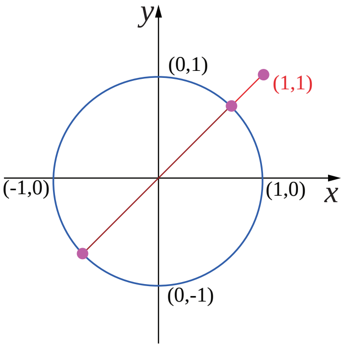
d-ல் கணக்கிடுவதற்குப் பதில், நம் வசதிக்காக $D=d^2=(x-1)^2+(y-1)^2$-ல் கணக்கிடுவோம். இங்கு கட்டுப்பாடானது $x^2+y^2=1$ ஆகும். இப்பொழுது, $\frac{dD}{dx}=2(x-1)+2(y-1)\times\frac{dy}{dx}$, இங்கு $\frac{dy}{dx}$-யினை $x^2+y^2=1$-ஐ வகையிட்டு கணக்கிடலாம். எனவே, $2x+2y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$.

இதனைப் பிரதியிட, நாம் பெறுவது $\frac{dD}{dx}=2(x-1)+2(y-1)\left(-\frac{x}{y}\right)$

$$=\frac{2[xy-y-xy+x]}{y}$$

எனவே, $\frac{dD}{dx}=2\left[\frac{x-y}{y}\right]=0$

$$\Rightarrow x=y$$



படம் 7.27

(x,y) ஆனது $x^2+y^2=1$ என்ற வட்டத்தின் மீது அமைவதால்

$2x^2=1 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. ஆகவே அறுதி தூரங்கள் $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ என்ற புள்ளிகளில் கிடைக்கும்.

இப்பொழுது, $\frac{d^2D}{dx^2}=2\frac{y^2+x^2}{y^3}$.

மேலும் $\left(\frac{d^2D}{dx^2}\right)_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}>0$; $\left(\frac{d^2D}{dx^2}\right)_{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}<0$.

இரண்டாம் வகைக்கெழு சோதனையின்படி மிக அருகாமையில் மற்றும் மிக தொலைவில் உள்ள புள்ளிகள் முறையே $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ மற்றும் $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ஆகும்.

எனவே, மிகக்குறைந்த மற்றும் மிக அதிக தூரங்கள் முறையே $\sqrt{2}-1$ மற்றும் $\sqrt{2}+1$ ஆகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 7.64

ஒரு எஃகு ஆலை ஒரு நாளைக்கு குறைந்த தர எஃகு 'x' டன்னும் மற்றும் உயர்தர எஃகு y டன்னும் உற்பத்தி செய்யும் திறன் கொண்டது. இங்கு $y=\frac{40-5x}{10-x}$. குறைந்த தர எஃகின் சந்தை விலை உயர்தர எஃகின் சந்தை விலையில் பாதி என்றால், அதிக பண வரவைப் பெறுவதற்கு குறைந்த தர எஃகு மற்றும் உயர்தர எஃகு ஆகியவற்றின் உகந்த உற்பத்திகள் என்னவாக இருக்க வேண்டும்?

தீர்வு

ஒரு டன் குறைந்த தர எஃகின் விலை ₹ p என்க. எனவே ஒரு டன் உயர்ந்த தர எஃகின் விலை ₹$2p$ ஆகும்.

நாள் ஒன்றிற்கு பண வரவை $R = px+2py = px+2p\left(\frac{40-5x}{10-x}\right)$. ஆகவே நாம் R -ஐ பெருமமாக்க வேண்டும். R -ஐ x -ஐப் பொருத்து வகையிட,

$$R = p\left(\frac{80-x^2}{10-x}\right)$$

$$\frac{dR}{dx} = p\left(\frac{x^2-20x+80}{(10-x)^2}\right)$$

$$\frac{d^2R}{dx^2} = -\frac{40p}{(10-x)^3}$$

இப்பொழுது, $\frac{dR}{dx} = 0 \Rightarrow x^2-20x+80=0$

மேலும் இதிலிருந்து $x = 10\pm 2\sqrt{5}$ எனப் பெறலாம்.

$x=10-2\sqrt{5}$ -ல் $\frac{d^2R}{dx^2}<0$ மேலும் இதிலிருந்து R பெரும மதிப்பை $x=10-2\sqrt{5}$ -ல் அடையும். $x=10-2\sqrt{5}$ எனில் $y = 5-\sqrt{5}$ ஆகும். எனவே, தரம் குறைந்த மற்றும் தரம் உயர்ந்த எஃகுகளை நாள் ஒன்றிற்கு முறையே $10-2\sqrt{5}$ மற்றும் $5-\sqrt{5}$ டன்கள் உற்பத்தி செய்ய வேண்டும். ■

எடுத்துக்காட்டு 7.65

கொடுக்கப்பட்ட பரப்புடைய செவ்வகங்களுள் சதுரம் மட்டுமே குறைந்த சுற்றளவைக் கொண்டு இருக்கும் என நிறுவுக.

தீர்வு

செவ்வலகத்தின் பக்க நீளங்கள் x, y என்க. எனவே, செவ்வகத்தின் பரப்பு $xy=k$ (கொடுக்கப்பட்டது). செவ்கத்தின் சுற்றளவு $2(x+y)$. நாம் $2(x+y)$ -ஐ $xy=k$ என்ற கட்டுப்பாட்டைக் கொண்டு சிறுமப்படுத்த வேண்டும்.

$P(x)=2\left(x+\frac{k}{x}\right)$ என்க.

$$P'\left(x\right)=2\left(1-\frac{k}{x^2}\right)$$

$$P'\left(x\right)=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{k}$$

x,y ஆகியவை செவ்வகத்தின் பக்க நீளங்கள் என்பதால் $x=\sqrt{k}$ என்பது ஒரு நிலை எண் ஆகும்.

இப்பொழுது,

$P''(x)=\frac{4k}{x^3}$ மற்றும் $P''\left(\sqrt{k}\right)>0$.

$\Rightarrow x=\sqrt{k}$ -வில் $P(x)$ சிறும மதிப்பை அடையும்.

$x=\sqrt{k}$ என $xy=k$ -ல் பிரதியிட $y=\sqrt{k}$ எனப் பெறலாம். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட பரப்புடைய செவ்வகங்களுள் சதுரம் மட்டுமே சிறும சுற்றளவினைப் பெற்றிருக்கும். ■

பயிற்சி 7.8

1. இரண்டு மிகை எண்களின் கூட்டுத் தொகை 12, மேலும் அதன் பெருக்குத் தொகை பெருமம் எனில் அந்த எண்களைக் காண்க.
2. இரண்டு மிகை எண்களின் பெருக்குத்தொகை 20, மேலும் அதன் கூடுதல் சிறுமம் எனில் அந்த எண்களைக் காண்க.
3. x^2+y^2 –ன் குறைந்த மதிப்பினை $x+y=10$ எனக் கொண்டு காண்க.
4. ஒரு தோட்டம் செவ்வக வடிவில் அமைக்கப்பட்டு கம்பி வேலி மூலம் பாதுகாக்கப்பட வேண்டும். 40 மீட்டர் வேலிக் கம்பி மூலம் பாதுகாக்கப்படும் தோட்டத்தின் பெரும பரப்பினைக் காண்க.
5. ஒரு செவ்வக வடிவிலான பக்கத்தில் 24செமீ^{2} அளவிற்கு அச்சிடப்பட்டுள்ளது. மேற்புற மற்றும் கீழ்ப்புற ஓரங்கள் 1.5 செ.மீ அளவிலும் மற்ற பக்கங்களின் ஓரங்கள் 1 செமீ அளவிலும் இடைவெளி விடப்பட்டுள்ளது. காகித பக்கத்தின் குறைந்த பரப்பளவிற்கு அதன் நீள, அகலங்கள் என்னவாக இருக்க வேண்டும்?
6. ஒரு விவசாயி ஒரு நதியை ஒட்டிய செவ்வக மேய்ச்சல் நிலத்திற்கு வேலி அமைக்க திட்டமிட்டுள்ளார். மந்தைகளுக்கு போதுமான புல் வழங்க மேய்ச்சல் நிலம் 1,80,000 சதுர மீட்டர் பரப்பளவு இருக்க வேண்டும். ஆற்றின் குறுக்கே வேலி அமைக்கத் தேவையில்லை. வேலி அமைக்க தேவையான குறைந்தபட்ச வேலிக் கம்பியின் நீளம் என்ன?
7. 10 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டத்தினுள் அமைக்கப்படும் செவ்வகங்களுள் மீப்பெரு பரப்புடைய செவ்வகத்தின் பரிமாணங்களைக் காண்க..
8. கொடுக்கப்பட்ட சுற்றளவுள்ள செவ்வகங்களுள், சதுரம் மட்டுமே பெரும பரப்பைக் கொண்டிருக்கும் என நிறுவுக.
9. r செ.மீ ஆரமுள்ள அறை வட்டத்தினுள் அமைக்கப்படும் செவ்வகங்களுள் மீப்பெரு செவ்வகத்தின் பரிமாணங்களைக் காண்க?
10. ஒரு உற்பத்தியாளர் ஒரு சதுர அடித் தளத்தையும் 108 சதுர செ.மீ வெளிப்புறப் பரப்பையும் கொண்ட திறந்த பெட்டியை வடிவமைக்க விரும்புகிறார். அதிகபட்ச கனஅளவிற்கான பெட்டியின் பரிமாணங்களைக் காண்க.

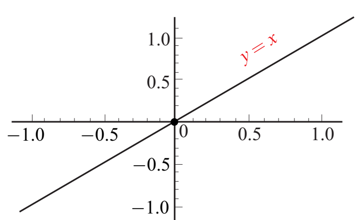
11. ஒரு உருளையின் கன அளவு $V=\pi r^2 h$. மேலும் $r+h=6$ எனில் கன அளவின் மீப்பெரு மற்றும் மீச்சிறு மதிப்புகளைக் காண்க.

12. ஆரம் a செ.மீ மற்றும் உயரம் b செ.மீ கொண்ட ஒரு வெற்றுக் கூம்பு ஒரு மேசையின் மீது வைக்கப்படுகிறது. இதன் அடியில் மறைத்து வைக்கக் கூடிய மிகப்பெரிய உருளையின் கன அளவு கூம்பின் கன அளவைப் போல் $\frac{4}{9}$ மடங்கு என்பதைக் காட்டுக.

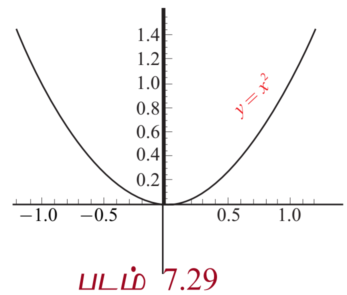
7.9 சமச்சீர் தன்மை மற்றும் தொலைத் தொடுகோடுகள் (Symmetry and Asymptotes)

7.9.1 சமச்சீர் தன்மை (Symmetry)

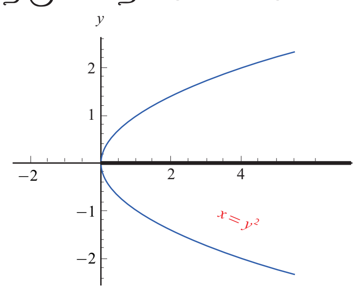
கீழ்க்காணும் வளைவரைகள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு சிறப்புப் பண்பை அதாவது சமச்சீர் பண்பை ஒரு புள்ளியைப் பொருத்தோ அல்லது ஒரு கோட்டை பொருத்தோ பெற்றிருப்பதைக் கவனிக்க.



படம் 7.28



படம் 7.29



படம் 7.30

நாம் இப்பொழுது முறையாக சமச்சீர் தன்மையை கீழ்க்காணுமாறு வரையறுப்போம்:

ஒரு படம் அல்லது ஒரு வளைவரை ஒரு கோட்டைப் பொறுத்து மற்றொரு படத்தின் பிரதிபலிப்பாக இருந்தால், அந்தக் கோட்டைப் பொருத்து படம் அல்லது வளைவரை சமச்சீர் தன்மையை பெற்றுள்ளது என்கிறோம்.

ஒரு வளைவரை ஒரு புள்ளியைப் பொருத்து θ கோணச் சுழற்சியால் வளைவரை மாறாமல் இருந்தால் அந்த வளைவரை அப்புள்ளியைப் பொருத்து θ கோணச் சமச்சீர் கொண்டது என்கிறோம்.

ஒரு வளைவரை பல கோடுகளைப் பொருத்து சமச்சீர் கொண்டதாக இருக்கலாம். குறிப்பாக, நாம் ஆய அச்சுகளுடன் சமச்சீர் தன்மை மற்றும் ஆதியைப் பொருத்து சமச்சீர் தன்மை ஆகியவற்றை கருதுவோம். கணிதத்தின் வாயிலாக, ஒரு வளைவரை $f(x,y)=0$ ஆனது

- ***y*-அச்சைப் பொருத்து சமச்சீர்:** $f(x,y)=f(-x,y)$ $\forall x,y$ எனில் வளைவரை y-அச்சைப் பொருத்து சமச்சீர் ஆகும் அல்லது (x,y) ஆனது வளைவரையின் மீதுள்ள புள்ளி எனில் $(-x,y)$-யும் வளைவரை மீது இருந்தால் வளைவரை y-அச்சைப் பொருத்து சமச்சீர் ஆகும். நாம் y-அச்சில் ஒரு கண்ணாடியை வைத்தால், கண்ணாடியின் ஒரு பக்கத்தில் உள்ள வளைவரையின் பகுதியும் கண்ணாடியின் மறுபக்கத்தில் உள்ள வளைவரையின் பகுதியும் ஒன்றைப் போலவே இருக்கும்.

- ***x*-அச்சைப் பொருத்து சமச்சீர்:** $f(x,y)=f(x,-y)$ $\forall x,y$ எனில் வளைவரை x-அச்சைப் பொருத்து சமச்சீர் ஆகும் அல்லது (x,y) ஆனது வளைவரையின் மீதுள்ள புள்ளி எனில் $(x,-y)$-யும் வளைவரை மீது இருந்தால் வளைவரை x-அச்சைப் பொருத்து சமச்சீர் ஆகும். நாம் x-அச்சில் ஒரு கண்ணாடியை வைத்தால், கண்ணாடியின் ஒரு பக்கத்தில் உள்ள வளைவரையின் பகுதியும் கண்ணாடியின் மறுபக்கத்தில் உள்ள வளைவரையின் பகுதியும் ஒன்றைப் போலவே இருக்கும்.

- **ஆதியைப் பொருத்து சமச்சீர்:** $f(x,y)=f(-x,-y)$ $\forall x,y$ எனில் வளைவரை ஆதியைப் பொருத்து சமச்சீர் ஆகும் அல்லது (x,y) ஆனது வளைவரையின் மீதுள்ள புள்ளி எனில் $(-x,-y)$-யும் வளைவரை மீது இருந்தால் வளைவரை ஆதியைப் பொருத்து சமச்சீர் ஆகும். அதாவது ஆதியைப் பொருத்து $180°$ சுழற்றும்போது வளைவரை மாறாது.

உதாரணமாக, மேற்கண்ட வளைவரைகள் $x=y^2, y=x^2$ மற்றும் $y=x$ ஆகியவை முறையே x-அச்சு, y-அச்சு, மற்றும் ஆதியைப் பொருத்து சமச்சீர் தன்மை கொண்டவை ஆகும்.

7.9.2 தொலைத் தொடுகோடுகள் (Asymptotes)

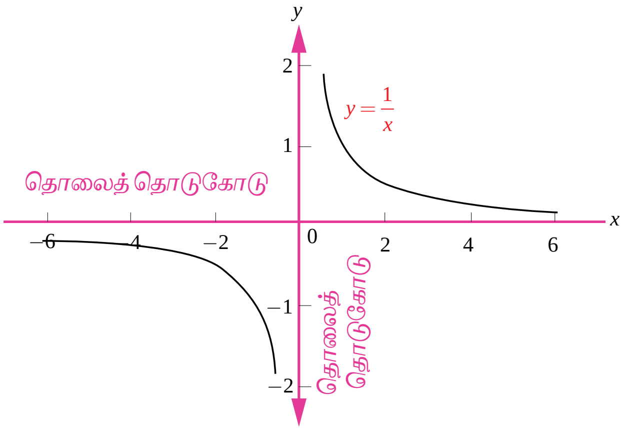
$y=f(x)$ என்ற வளைவரையை ∞-யில் தொடும் தொடுகோடு, தொலைத் தொடுகோடு ஆகும். அதாவது வளைவரை மீதுள்ள புள்ளி கந்தழியை நெருங்கும்போது வளைவரைக்கும் கோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட தூரம் பூச்சியத்தை நெருங்கும் வகையில் உள்ள கோடு தொலைத் தொடுகோடு ஆகும். தொலைத் தொடுகோடுகள் மூன்று வகைப்படும். அவையாவன

1. **கிடைமட்டத் தொலைத் தொடுகோடு**, என்பது x-அச்சிற்கு இணையானதாகும். $y=f(x)$. என்ற வளைவரைக்கு $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ அல்லது $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ எனில் $y=L$ என்ற கோடு கிடைமட்டத் தொலைத் தொடுகோடு ஆகும்.
2. **நிலைக்குத்து தொலைத் தொடுகோடு,** என்பது y-அச்சிற்கு இணையானதாகும். $y=f(x)$ என்ற வளைவரைக்கு $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$ அல்லது $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ எனில் $x=a$ என்ற கோடு நிலைக்குத்து தொலைத் தொடுகோடு ஆகும்.
3. **சாய்ந்த தொலைத் தொடுகோடு**, ஒரு சாய்ந்த தொலைத் தொடுகோடு தொகுதியில் உள்ள பலலுறுப்புக் கோவையின் வரிசைப் பகுதியில் உள்ள பல்லுறுப்புக் கோவையின் வரிசையை விட அதிகமாக இருந்தால் வரும்.

   சாய்ந்த தொலைத் தொடுகோட்டினைப் பெற நாம் தொகுதியை பகுதியால் வகுத்துப் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 7.66

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ என்ற சார்பின் தொலைத் தொடுகோடுகளைக் காண்க.



படம் 7.31

தீர்வு

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$ மற்றும் $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=\infty$. எனவே, தேவையான நிலைக்குத்து தொலைத் தொடுகோடு $x=0$ அல்லது y-அச்சு ஆகும்.

இவ்வளைவரையானது இரு ஆய அச்சுகளைப் பொருத்தும் சமச்சீர் தன்மை வாய்ந்தது என்பதால், $y=0$ அல்லது x-அச்சும் ஒரு தொலைத் தொடுகோடு ஆகும். ஆகவே இவ்வளைவரைக்கு (செவ்வக அதிபரவளையம்) கிடைமட்ட மற்றும் நிலைக்குத்து தொலைத் தொடுகோடுகள் உண்டு. ■

எடுத்துக்காட்டு 7.67

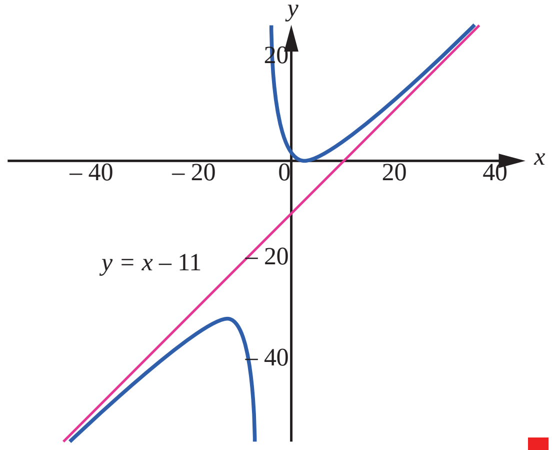
$f(x)=\dfrac{x^2-6x+7}{x+5}$ என்ற சார்பிற்கு சாய்ந்த தொலைத் தொடுகோட்டினைக் காண்க.

தீர்வு

தொகுதியில் உள்ள பல்லுறுப்புக் கோவையின் வரிசையானது (வரிசை 2) பகுதியில் உள்ள பல்லுறுப்புக் கோவையின் வரிசையைவிட (வரிசை 1) அதிகம் என்பதால் இதற்கு சாய்ந்த தொலைத் தொடுகோடு உண்டு. இதனைக் காண தொகுதியை பகுதியைக் கொண்டு வகுக்க வேண்டும்.

$$
\begin{array}{r}
x - 11 \\
x+5\overline{)\,x^2 - 6x + 7} \\
x^2 + 5x \\
\hline
-11x + 7 \\
-11x - 55 \\
\hline
62
\end{array}
$$

நாம் இங்கு மீதியைப் பற்றி கவலைப்பட வேண்டியதில்லை. நமக்கு நேர்க்கோட்டினை உருவாக்கும் உருப்புகள் மட்டுமே அவசியம். எனவே, சாய்ந்த தொலைத் தொடுகோடு $y = x - 11$ ஆகும்.



படம் 7.32

இந்த வளைவரையின் படத்திலிருந்து, வளைவரையும் சாய்ந்த தொலைத் தொடுகோடு $y = x - 11$-ம் ஒன்றை ஒன்று நெருங்குகிறது. ஆனால் வெட்டுவதில்லை என்பதை கவனிக்க.

எடுத்துக்காட்டு 7.68

$f(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 16}$ என்ற வளைவரையின் தொலைத் தொடுகோடுகளைக் காண்க.

தீர்வு

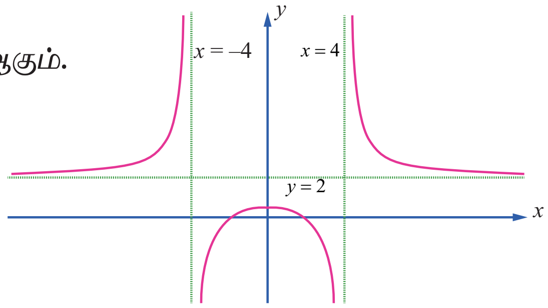
$\lim\limits_{x\to -4^+} \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 16} = -\infty$ மற்றும் $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 16} = \infty$.

எனவே, $x = -4$ மற்றும் $x = 4$

ஆகியவை செங்குத்துத் தொலைத் தொடுகோடுகள் ஆகும்.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 16} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{8}{x^2}}{1 - \frac{16}{x^2}} = 2$$

மற்றும் $$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 16} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2 - \frac{8}{x^2}}{1 - \frac{16}{x^2}} = 2$$



படம் 7.33

என்பதில் இருந்து $y = 2$ என்பது ஒரு கிடைமட்டத் தொலைத் தொடுகோடு ஆகும். நாம் இதனை தொகுதியை பகுதியை கொண்டு வகுத்தும் பெறலாம்.

7.10 வளைவரை வரைதல் (Sketching of Curves)

ஒரு சார்பின் வளைவரையை கையின் துணையுடனோ அல்லது வளைவரையை வரையும் மென்பொருள் துணையுடனோ வரையும்போது நாம் வளைவரை முழுமையையும் காட்ட முடியாது. வளைவரையின் ஒரு பகுதியை மட்டுமே வரைய முடியும். எந்தப் பகுதியை வரைய வேண்டும் மற்றும் அப்பகுதியை எவ்வாறு முடிவு செய்வது என்பது முக்கியமான கேள்வியாகும். நாம் வளைவரையினை சிறந்த முறையில் காணத் தேவைப்படும் செவ்வகத்தை முடிவு செய்ய சில வழிகாட்டுதல்களை கீழே எண்ணிடப்பட்டுள்ளன. அவையாவன :

(i) சார்பின் சார்பகம் மற்றும் வீச்சகம் (ii) வளைவரையின் வெட்டுத்துண்டுகள் (இருந்தால்).

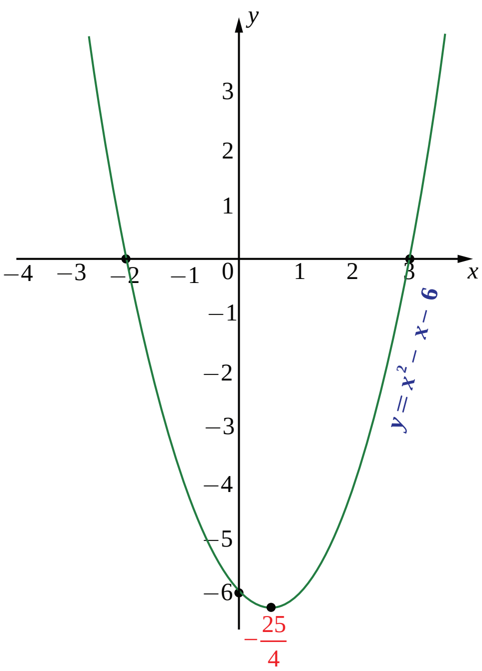
(iii) சார்பின் நிலைப்புள்ளிகள். (iv) இடஞ்சார்ந்த அறுதி மதிப்புகள்.

(v) குழிவு இடைவெளிகள். (vi) வளைவு மாற்றப் புள்ளிகள் (இருந்தால்).

(vii) வளைவரையின் தொலைத் தொடுகோடுகள் (இருந்தால்)

எடுத்துக்காட்டு 7.69

$y = f(x) = x^2 - x - 6$ என்ற வளைவரையை வரைக.



படம் 7.34

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சார்பை காரணிப்படுத்த நமக்குக் கிடைப்பது $y = f(x) = (x-3)(x+2)$.

(1) சார்பு $f(x)$ –ன் சார்பகம் முழு மெய் எண் கோடாகும்.

(2) $y = 0$ எனப் பிரதியிட, $x = -2, 3$ எனப் பெறலாம். எனவே, x-வெட்டுத்துண்டுகள் $(-2, 0)$ மற்றும் $(3, 0)$. $x = 0$ எனப் பிரதியிட $y = -6$ எனப் பெறலாம். எனவே, y-வெட்டுத்துண்டு $(0, -6)$.

(3) $f'(x) = 2x - 1$ மேலும் இதிலிருந்து $x = \frac{1}{2}$ –ல் வளைவரையின் நிலைப்புள்ளி அமையும்.

(4) $f''(x) = 2 > 0, \forall x$. எனவே, $x = \frac{1}{2}$ –ல் வளைவரை இடஞ்சார்ந்த சிறும மதிப்பை அடையும். இதன் மதிப்பு $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{25}{4}$.

(5) சார்பின் வீச்சகம் $y \geq -\frac{25}{4}$

(6) $f''(x) = 2 > 0, \forall x$ என்பதால் இந்த சார்பு மெய் எண் நேர்க்கோடு முழுமையிலும் மேல்நோக்கி குழிவு ஆகும்.

(7) $f(x) = 2 \neq 0, \forall x$ எனவே வளைவரைக்கு வளைவு மாற்றப் புள்ளிகள் இல்லை.

(8) வளைவரைக்கு தொலைத் தொடுகோடுகள் இல்லை.

இவ்வளைவரையின் தோராய வரைபடம் வலது பக்கம் காட்டப்பட்டுள்ளது. ■

எடுத்துக்காட்டு 7.70

$y = f(x) = x^3 - 6x - 9$ என்ற வளைவரையை வரைக.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சார்பை காரணிப்படுத்த,

$$y = f(x) = (x-3)(x^2 + 3x + 3) \text{ ஆகும்.}$$

(1) சார்பு $f(x)$ –ன் சார்பகம் மற்றும் வீச்சகங்கள் முழு மெய் எண் நேர்க்கோடாகும்.

(2) $y = 0$ எனப் பிரதியிட $x = 3$. மற்ற இரண்டு மூலங்களும் கற்பனை. எனவே, x-வெட்டுத்துண்டு $(3, 0)$ ஆகும். $x = 0$ எனப்பிரதியிட $y = -9$ ஆகும். எனவே y–ன் வெட்டுத்துண்டு $(0, -9)$ ஆகும்.

(3) $f'(x) = 3(x^2 - 2)$ மேலும் இதிலிருந்து நிலை எண்கள் $x = \pm\sqrt{2}$ ஆகும்.

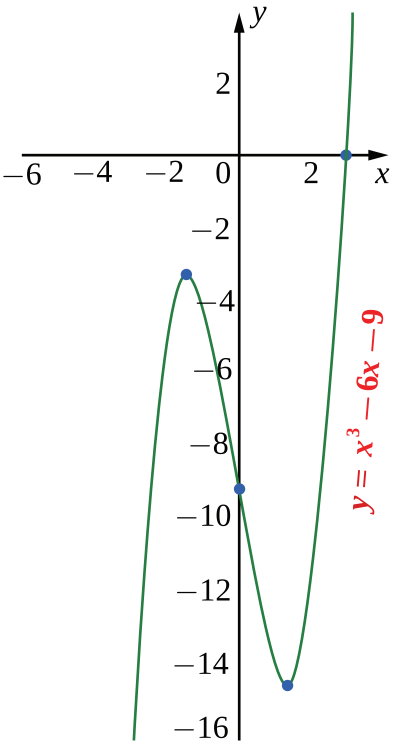
(4) $f''(x) = 6x$. மேலும் $x = \sqrt{2}$ -ல் $f''\left(\sqrt{2}\right) = 6\sqrt{2} > 0$. எனவே $x = -\sqrt{2}$ -ல் வளைவரை இடஞ்சார்ந்த சிறும மதிப்பு $f\left(\sqrt{2}\right) = -4\sqrt{2} - 9$ அடையும். இதுபோலவே $x = -\sqrt{2}$ -ல் $f''\left(-\sqrt{2}\right) = -6\sqrt{2} < 0$. எனவே $x = -\sqrt{2}$ -ல் வளைவரை இடஞ்சார்ந்த பெரும மதிப்பு $f\left(-\sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2} - 9$ -ஐ அடையும்.

(5) $f''\left(x\right) = 6x > 0, \forall\, x > 0$ என்பதால் வளைவரையானது மிகை மெய் எண் நேர்க்கோட்டில் மேல்நோக்கி குழிவானது $f''\left(x\right) = 6x < 0, \forall\, x < 0$ என்பதால் வளைவரையானது கீழ்நோக்கி குழிவானது.

(6) $x = 0$ -வில் $f''\left(x\right) = 0$ மற்றும் $f''(x)$ -ன் குறி $x = 0$ -ஐ கடக்கும்போது மாறுகிறது. எனவே வளைவு மாற்றப் புள்ளி $\left(0, f\left(0\right)\right) = \left(0, -9\right)$.

(7) இவ்வளைவரைக்கு தொலைத் தொடுகோடுகள் இல்லை,

இவ்வளைவரையின் தோராய வரைபடம் வலது பக்கம் காட்டப்பட்டுள்ளது..



படம் 7.35

எடுத்துக்காட்டு 7.71

$y = \dfrac{x^2 - 3x}{(x-1)}$ என்ற வளைவரையை வரைக.

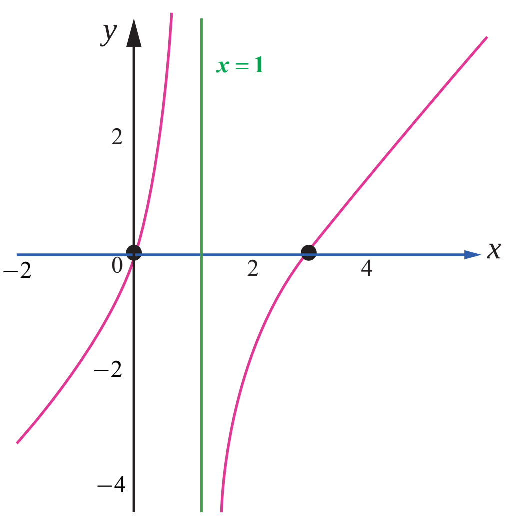
தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சார்பை காரணிப்படுத்த,

$$y = f(x) = \frac{x(x-3)}{(x-1)} \text{ ஆகும்.}$$

(1) $f(x)$ என்ற சார்பின் சார்பகம் $R \setminus \{1\}$ மற்றும் வீச்சகம் முழு மெய் எண் நேர்க்கோடு ஆகும்.

(2) $y = 0$ எனப் பிரதியிட $x = 0, 3$. எனவே x-வெட்டுத்துண்டு $(3, 0)$. $x = 0$ எனப் பிரதியிட, $y = 0$. எனவே வளைவரை ஆதி வழியாகச் செல்லும்.



படம் 7.36

(3) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2}$ மேலும் இதிலிருந்து $f'(1)$ காணத்தக்கதல்ல என்பதால் $x = 1$ -ல் நிலைப்புள்ளி உள்ளது. $x^2 - 2x + 3 = 0$ -விற்கு மெய் தீர்வுகள் இல்லை. ஆகவே, $x = 1$ மட்டுமே நிலை எண் ஆகும்.

(4) $x = 1$ என்பது $f(x)$ -ன் சார்பகத்தில் இல்லை. மேலும் $f'(x) \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ எனவே இதற்கு இடஞ்சார்ந்த பெருமமோ அல்லது இடஞ்சார்ந்த சிறுமமோ இல்லை.

(5) $f''(x) = -\frac{4}{(x-1)^3}\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. எனவே $x<1$ எனில் $f''(x)>0$ ஆகவே $(-\infty,1)$-ல் வளைவரை மேல்நோக்கி குழிவானது. மேலும் $x>1$ எனில் $f''(x)<0$. ஆகவே $(1,\infty)$-ல் வளைவரை கீழ்நோக்கி குழிவானது. $x=1$ சார்பகத்தில் இல்லை மற்றும் $f'(x)\neq 0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ என்பதால் $f'(x)$-க்கு வளைவு மாற்றப் புள்ளிகள் இல்லை.

(6) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x}{(x-1)} = +\infty$ மற்றும் $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-3x}{(x-1)} = -\infty$ என்பதால், $x=1$ என்பது நிலைக்குத்து தொலைத் தொடுகோடு ஆகும்.

வளைவரையின் தோராய வரைபடம் வலப்பக்கம் காட்டப்பட்டுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 7.72

$y=\frac{3x}{x^2-1}$ என்ற வளைவரையை எழுதுக.

தீர்வு

(1) $f(x)$-ன் சார்பகம் $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

(2) $f(-x,-y)=f(x,y)$ என்பதால் வளைவரை ஆதியை பொருத்து சமச்சீரானது.

(3) $y=0$ எனப் பிரதியிட $x=0$ ஆகும். எனவே x-வெட்டுத்துண்டு $(0,0)$ ஆகும்.

(4) $x=0$ எனப் பிரதியிட, $y=0$ ஆகும். எனவே y-வெட்டுத்துண்டு $(0,0)$ ஆகும்.

(5) ஓரியல்புத் தன்மையை ஆராய, நாம் முதலாம் வகைக்கெழுவை காண்போம்.

$$f'(x)=\frac{-3\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

ஆகவே, $x=-1,1$-ல் $f'(x)$ காணத்தக்கது அல்ல. எனவே, $x=-1,1$ ஆகியவை நிலை எண்களாகும். ஓரியல்பு இடைவெளிகளை அட்டவணை 7.9-ல் அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டு உள்ளது.

இடைவெளி	(-∞, -1)	(-1, 1)	(1, ∞)
$f'(x)$-ன் குறி	–	–	–
ஓரியல்புத் தன்மை	திட்டமாக இறங்கும்	திட்டமாக இறங்கும்	திட்டமாக இறங்கும்

அட்டவணை 7.9

(6) நிலை எண்களின் வழியே செல்லும்போது $f'(x)$-ன் குறியில் மாற்றம் இல்லை. எனவே, இடஞ்சார்ந்த அறுதிகள் இல்லை.

(7) குழிவுத் தன்மையை ஆராய நாம் இரண்டாம் வகைக்கெழுவினை காண வேண்டும்.
$f''(x)=\frac{6x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$. $f''(x)=0 \Rightarrow x=0$ மற்றும் $f''(x)$ஆனது $x=-1,1$-ல் காணத்தக்கது அல்ல.

குழிவு இடைவெளிகள் அட்டவணை 7.10–ல் அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

இடைவெளி	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f''(x)$ –ன் குறி	$-$	$+$	$-$	$+$
குழிவுத் தன்மை	கீழ்நோக்கி குழிவு	மேல்நோக்கி குழிவு	கீழ்நோக்கி குழிவு	மேல்நோக்கி குழிவு

அட்டவணை 7.10

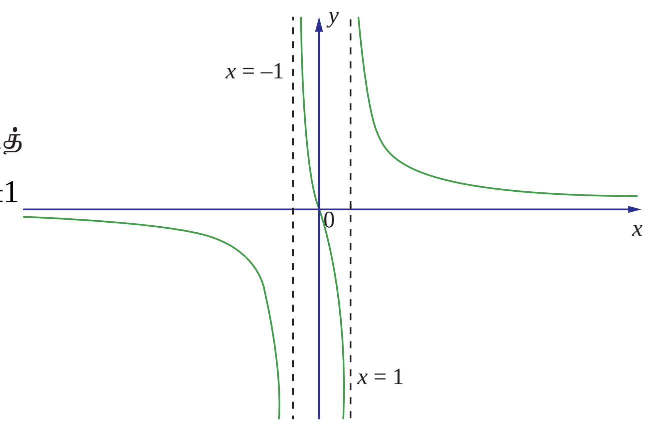
(8) $x=-1$ மற்றும் 1 ஆகியவை $f(x)$ –ன் சார்பகத்தில் இல்லை மற்றும் $x=0$ –வில் இரண்டாம் வகைக்கெழு பூச்சியம் மற்றும் $f''(x)$ –ன் குறி பூச்சியத்தின் வழியே செல்லும்போது மாறுகிறது. எனவே, வளைவு மாற்றப்புள்ளி $\left(0, f(0)\right)=(0,0)$ ஆகும்.

(9) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3}{x-\dfrac{1}{x}} = 0$.

எனவே $y=0$ என்பது கிடைமட்டத் தொலைத் தொடுகோடு. பகுதி $x=\pm1$ எனும்போது பூச்சியம் என்பதால்,

$\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{3x}{x^2-1} = -\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{3x}{x^2-1} = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{3x}{x^2-1} = -\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{3x}{x^2-1} = \infty$.



படம் 7.37

எனவே $x=-1$ மற்றும் $x=1$ ஆகியவை நிலைகுத்து தொலைத் தொடுகோடுகளாகும் வளைவரையின் தோராய படம் வலப்பக்கம் காட்டப்பட்டுள்ளது.

பயிற்சி 7.9

1. கீழ்க்காணும் வளைவரைகளுக்கு தொலைத்தொடுகோடுகளைக் காண்க :

(i) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ (ii) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ (iii) $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+2}}$

(iv) $f(x)=\dfrac{x^2-6x-1}{x+3}$ (v) $f(x)=\dfrac{x^2+6x-4}{3x-6}$

2. கீழ்க்காணும் சார்புகளை வரைக:

(i) $y=-\dfrac{1}{3}(x^3-3x+2)$ (ii) $y=x\sqrt{4-x}$ (iii) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$

(iv) $y=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$

பயிற்சி 7.10

கொடுக்கப்பட்ட நான்கு மாற்று விடைகளிலிருந்து சரியான அல்லது மிகப்பொருத்தமான விடையினை தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக:

P7Y9N2

1. ஒரு கோளத்தின் கன அளவு வினாடிக்கு 3π செமீ^{3} வீதத்தில் அதிகரிக்கிறது. ஆரம் $\frac{1}{2}$ செ.மீ ஆக இருக்கும்போது ஆரத்தின் மாறுபாட்டு வீதம்

   (1) 3 செ.மீ/வி (2) 2 செ.மீ/வி (3) 1 செ.மீ/வி (4) $\frac{1}{2}$ செ.மீ/வி

2. ஒரு பலூனானது செங்குத்தாக மேல்நோக்கி 10 மீ/வி வீதத்தில் செல்கிறது. பலூன் செலுத்தப்பட்ட இடத்திலிருந்து 40 மீ தொலைவில் இடருந்து ஒருவர் இதனைப் பார்க்கிறார். பலூனின் ஏற்றக் கோணத்தில் ஏற்படும் மாறுபாட்டு வீதத்தை பலூன் தரையிலிருந்து 30 மீட்டர் உயரத்தில் இருக்கும்போது காண்க.

   (1) $\frac{3}{25}$ ரேடியன்கள்/வினாடி (2) $\frac{4}{25}$ ரேடியன்கள்/வினாடி

   (3) $\frac{1}{5}$ ரேடியன்கள்/வினாடி (4) $\frac{1}{3}$ ரேடியன்கள்/வினாடி

3. t என்ற காலத்தில் கிடைமட்டமாக நகரும் துகளின் நிலை $s(t) = 3t^2 - 2t - 8$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. துகள் ஓய்வு நிலைக்கு வரும் நேரம்

   (1) $t = 0$ (2) $t = \frac{1}{3}$ (3) $t = 1$ (4) $t = 3$

4. ஒரு கல்லானது செங்குத்தாக மேல்நோக்கி எறியப்படுகின்றது. t நேரத்தில் அது அடைந்த உயரம் $x = 80t - 16t^2$. கல் அதிகபட்ச உயரத்தை t வினாடி நேரத்தில் அடைந்தால் t ஆனது

   (1) 2 (2) 2.5 (3) 3 (4) 3.5

5. $6y = x^3 + 2$ என்ற வளைவரையின் எப்புள்ளியில் y-ஆயத்தொலைவின் மாறுபாட்டு வீதம் x-ஆயத்தொலைவின் மாறுபாட்டு வீதத்தைப் போல் 8 மடங்கு இருக்கும்.

   (1) $(4, 11)$ (2) $(4, -11)$ (3) $(-4, 11)$ (4) $(-4, -11)$

6. $f(x) = \sqrt{8 - 2x}$ என்ற வளைவரையின் எந்த x–ஆயத்தொலைவில் வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் சாய்வு -0.25 இருக்கும்?

   (1) -8 (2) -4 (3) -2 (4) 0

7. $f(x) = 2\cos 4x$ என்ற வளைவரைக்கு $x = \frac{\pi}{12}$ –ல் செங்கோட்டின் சாய்வு

   (1) $-4\sqrt{3}$ (2) -4 (3) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ (4) $4\sqrt{3}$

8. $y^2 - xy + 9 = 0$ என்ற வளைவரையின் தொடுகோடு எப்போது நிலைகுத்தாக இருக்கும்?

   (1) $y = 0$ (2) $y = \pm\sqrt{3}$ (3) $y = \frac{1}{2}$ (4) $y = \pm 3$

9. ஆதியில் $y^2 = x$ மற்றும் $x^2 = y$ என்ற வளைவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்

   (1) $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ (2) $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ (3) $\frac{\pi}{2}$ (4) $\frac{\pi}{4}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)$–ன் மதிப்பு

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) ∞

11. $\sin^4 x+\cos^4 x$ என்ற சார்பு இறங்கும் இடைவெளி

(1) $\left[\frac{5\pi}{8},\frac{3\pi}{4}\right]$ (2) $\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{8}\right]$ (3) $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ (4) $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

12. $x^3-3x^2, x\in[0,3]$ என்ற சார்பிற்கு ரோலின் தேற்றத்தை நிறைவு செய்யும் எண்

(1) 1 (2) $\sqrt{2}$ (3) $\frac{3}{2}$ (4) 2

13. $\frac{1}{x}, x\in[1,9]$ என்ற சார்பிற்கு சராசரி மதிப்புத் தேற்றத்தை நிறைவு செய்யும் எண்

(1) 2 (2) 2.5 (3) 3 (4) 3.5

14. $|3-x|+9$ என்ற சார்பின் குறைந்த மதிப்பு

(1) 0 (2) 3 (3) 6 (4) 9

15. $y=e^x\sin x, x\in[0,2\pi]$ என்ற வளைவரையின் மீப்பெரு சாய்வு எங்கு அமையும்?

(1) $x=\frac{\pi}{4}$ (2) $x=\frac{\pi}{2}$ (3) $x=\pi$ (4) $x=\frac{3\pi}{2}$

16. $x^2e^{-2x}, x>0$ என்ற சார்பின் பெரும மதிப்பு

(1) $\frac{1}{e}$ (2) $\frac{1}{2e}$ (3) $\frac{1}{e^2}$ (4) $\frac{4}{e^4}$

17. $(6,0)$ என்ற புள்ளிக்கும் $x^2-y^2=4$ என்ற வளைவரை மீதுள்ள புள்ளிக்கும் உள்ள தொலைவு குறைந்தபட்சம் எனில் அப்புள்ளி

(1) $(2,0)$ (2) $(\sqrt{5},1)$ (3) $(3,\sqrt{5})$ (4) $(\sqrt{13},-\sqrt{3})$

18. இரண்டு மிகை எண்களின் கூடுதல் 200 மேலும் அவற்றின் பெருக்கல் பலனின் பெரும மதிப்பு

(1) 100 (2) $25\sqrt{7}$ (3) 28 (4) $24\sqrt{14}$

19. $y=ax^4+bx^2$, $ab>0$ என்ற வளைவரை

(1) கிடைமட்டத் தொடுகோடு பெறவில்லை (2) மேற்புறமாக குழிவு

(3) கீழ்புறமாக குழிவு (4) வளைவு மாற்றுப் புள்ளியை பெறவில்லை

20. $y=(x-1)^3$ என்ற வளைவரையின் வளைவு மாற்றுப் புள்ளி

(1) $(0,0)$ (2) $(0,1)$ (3) $(1,0)$ (4) $(1,1)$

பாடச்சுருக்கம்

- $y = f(x)$ எனும்போது $\dfrac{dy}{dx}$ ஆனது y -ஐப் பொறுத்து x -ன் கணநேர மாறுபாட்டு வீதத்தைக் குறிக்கிறது.
- $y = f(g(t))$ எனும்போது $\dfrac{dy}{dt} = f'(g(t))\cdot g'(t)$ ஆகும். இதனை சங்கிலி விதி என்கிறோம்.
- $y = f(x)$ என்ற வளைவரையின் மீதுள்ள (a,b) என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு என்பது $y-b=(x-a)\times\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(a,b)}$ அல்லது $y-b=f'(a)\cdot(x-a)$ ஆகும்.
- ரோலின் தேற்றம்

  $f(x)$ என்ற சார்பு மூடிய இடைவெளி $[a,b]$-ல் தொடர்ச்சியானதாகவும், திறந்த இடைவெளி (a,b)-ல் வகையிடத்தக்கதாகவும் இருக்கிறது மேலும் $f(a)=f(b)$ எனில், குறைந்தபட்சம் ஒரு புள்ளி $c\in(a,b)$ ஆனது $f'(c)=0$ என்றவாறு இருக்கும்.

- லெக்ராஞ்சியின் இடமதிப்புத் தேற்றம்

  $f(x)$ ஆனது மூடிய இடைவெளி $[a,b]$-ல் தொடர்ச்சியானதாகவும், திறந்த இடைவெளி (a,b)-ல் வகையிடத்தக்கதாகவும் ($f(a), f(b)$ ஆகியவை சமமாக இருக்க வேண்டிய அவசியம் இல்லை). உள்ளது என்க. அப்போது குறைந்தபட்சம் ஒரு புள்ளி $c\in(a,b)$ -யினை

  $$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ எனுமாறு காணலாம்.

- டெய்லரின் தொடர்

  $f(x)$ என்ற சார்பானது $x=a$ -ல் முடிவற்ற எண்ணிக்கையிலான முறை வகையிடத்தக்கது என்க. $(x-a, x+a)$ எனும் இடைவெளியில் $f(x)$ -ஐ கீழ்க்காணும் வடிவத்தில் விரிவாக்கலாம் :

  $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots.$$

- மெக்லாரனின் தொடர்

  $a=0$ எனில், மேற்கண்ட விரிவின் வடிவம்

  $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots.$$

- லோபிதாலின் விதி

  $f(x)$ மற்றும் $g(x)$ ஆகியவை வகையிடத்தக்க சார்புகள் மற்றும் $g'(x)\neq 0$ மேலும்

  $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ எனில் $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ஆகும்.

  $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ எனில் $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ஆகும்.

- $f(x)$ என்ற சார்பு (a,b) என்ற திறந்த இடைவெளியில் வகையிடத்தக்கது மற்றும் $\dfrac{d}{dx}(f(x))>0\ \forall x\in(a,b)$ எனில், $f(x)$ ஆனது (a,b) என்ற இடைவெளியில் திட்டமாக ஏறும்.

$\frac{d}{dx}\left(f(x)\right) < 0, \forall x \in (a,b)$ எனில், $f(x)$ ஆனது (a,b) என்ற இடைவெளியில் திட்டமாக இறங்கும்.

- **மூடிய இடைவெளி $[a,b]$-ல் தொடர்ச்சியான, சார்பு $f(x)$-க்கு மீப்பெரு மற்றும் மீச்சிறு அறுதி மதிப்புகளை காணும் முறை**

  படி 1 : $f(x)$-க்கு (a,b)-ல் நிலை எண்களைக் காண்க.

  படி 2 : $f(x)$-ன் மதிப்புகளை அனைத்து நிலை எண்கள் மற்றும் முனைப்புள்ளிகள் a மற்றும் b-ல் காண்க.

  படி 3 : படி 2-ல் காணப்பட்ட மதிப்புகளில் மிகப்பெரிய எண் மீப்பெரு பெருமம் மற்றும் மிகச்சிறிய எண் மீச்சிறு சிறுமம் ஆகும்.

- முதலாம் வகைக்கெழுச் சோதனை

  $f(x)$ என்ற தொடர்ச்சியான சார்பிற்கு c-ஐ உள்ளடக்கிய திறந்த இடைவெளி I-யில் $(c, f(c))$ என்பது நிலைப்புள்ளி என்க. $f(x)$ ஆனது c-ஐத் தவிர்த்த இடைவெளியில் வகையிடத்தக்கது எனில் $f(c)$-ஐ கீழ்க்காணுமாறு வகைப்படுத்தலாம்: (x ஆனது I என்ற இடைவெளியில் இடமிருந்து வலமாக நகரும்போது)

(i) $f'(x)$ ஆனது c-ல் குறையிலிருந்து மிகைக்கு மாறினால், $f(x)$-க்கு $f(c)$ என்பது இடம் சார்ந்த சிறுமம் ஆகும்.

(ii) $f'(x)$ ஆனது c-ன் மிகையிலிருந்து குறைக்கு மாறினால், $f(x)$-க்கு $f(c)$ என்பது இடம் சார்ந்த பெருமம் ஆகும்.

(iii) $f'(x)$-ன் குறியானது c-ன் இருபுறமும் மிகையாகவோ அல்லது c-ன் இருபுறமும் குறையாகவோ இருந்தால், $f(c)$ என்பது இடம் சார்ந்த சிறுமமும் இல்லை இடம் சார்ந்த பெருமமும் இல்லை எனலாம்.

- இரண்டாம் வகைக்கெழுச் சோதனை

  c எனும் நிலைப்புள்ளியில் $f'(c) = 0$ எனவும், c-ன் அண்மையில் $f'(x)$ காணத்தக்கது எனவும், மேலும் $f''(c)$ காணத்தக்கது எனவும் கொண்டால் $f''(c) < 0$ எனில் c-யில் f ஆனது இடஞ்சார்ந்த பெருமத்தை அடையும், மேலும் $f''(c) > 0$ எனில் c-யில் f ஆனது இடஞ்சார்ந்த சிறுமத்தை அடையும். $f''(c) = 0$ எனில், இந்த சோதனையில் இடஞ்சார்ந்த அறுதி மதிப்புகளைப் பற்றிய தகவல் இல்லை என்கிறோம்.

இணையச் செயல்பாடு (ICT CORNER)

https://ggbm.at/dy9kwgbt அல்லது Scan the QR Code

இணைய உலாவியை திறக்கவும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள உரலி/விரைவுக் குறியீட்டை தட்டச்சு செய்யவும், GeoGebra-வின் **"12th Standard Mathematics Vol-2"** பக்கம் தோன்றும். இப்பணித்தாள் புத்தகத்தின் இடதுபக்கம் உங்கள் பாடநூலுடன் தொடர்புடைய பல அத்தியாயங்கள் காணப்படும். அவற்றில் **"Applications of Differential Calculus"** எனும் அத்தியாயத்தைத் தேர்வு செய்க.

B225_12_MATHS_TM

இப்பொழுது இப்பாடம் தொடர்பான பல பணித்தாள்களை இப்பக்கத்தில் காண்பீர்கள். அனைத்துப் பணித்தாள்களையும் செய்து பார்க்கவும்.

அத்தியாயம்

8

வகையீடுகள் மற்றும் பகுதி வகைக்கெழுக்கள்

F6U9G3

"கசப்பைச் சுவைக்காதவர்கள் இனிப்பைப் பெறுவதில்லை"

\- காட்ஃபிரைடு வில்ஹெம் லிபினிட்ஸ்

8.1 அறிமுகம்

ஊக்குவித்தல்

அன்றாட வாழ்வியலில் நாம் பல வகையான சார்புகளைப் பற்றி காண வேண்டியுள்ளது. பல நேரங்களில் சார்பற்ற மாறியின் மாறுதலுக்கு ஏற்ப சார்பின் மதிப்பில் ஏற்படும் மாற்றங்களைக் காண வேண்டியுள்ளது. அதுபோன்ற சில சூழல்களைக் கீழே காண்போம்.

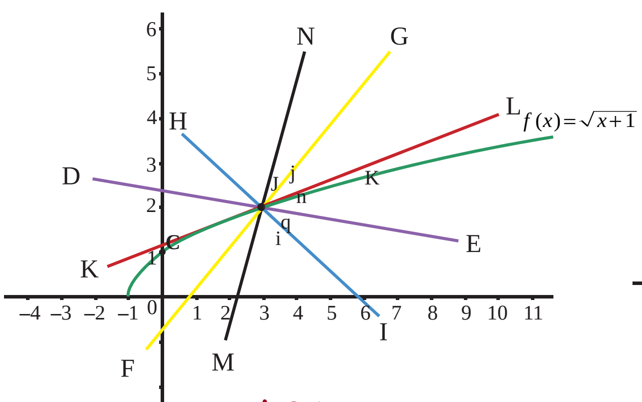
- ஒரு வட்ட வடிவ உலோகத் தகடு சீராக சூடேற்றப்படுகின்றது என்க. அதன் ஆரம் அதிகரிக்கும்போது பரப்பும் அதிகரிக்கின்றது. ஆரத்தில் ஏற்படும் மாற்றத்தை தோராயமாக அளக்க முடியும் எனில் அந்தத் தகட்டின் பரப்பில் ஏற்படும் மாற்றத்தை எவ்வாறு கணக்கிடுவது?
- தலைகீழாக வைக்கப்பட்ட ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பு வடிவத் தொட்டியில் தண்ணீர் நிரப்பப்படுகின்றது என்க. இந்த நிகழ்வில் தண்ணீரின் உயரம், நீர்பரப்பின் ஆரம், நீரின் கன அளவு ஆகியவை காலத்தைப் பொருத்து மாறுகின்றது. ஒரு சிறிய கால இடைவெளியில் ஏற்படும் உயரத்தின் மாற்றம், ஆரத்தின் மாற்றம் இவற்றை அளவிட முடியும் எனில் அந்த கால இடைவெளியில் ஏற்படும் கன அளவின் மாற்றத்தை எவ்வாறு கணக்கிடுவது?
- ஒரு செயற்கைக்கோள் ஏவுதளத்திலிருந்து விண்வெளியில் ஏவப்படுகின்றது. ஏவுதளத்திலிருந்து பாதுகாப்பான தூரத்தில் விண்கலத்தைக் கண்காணிக்க புகைப்படக் கருவி பொருத்தப்பட்டுள்ளது. விண்கலம் மேலெழும்போது புகைப்படக் கருவியின் ஏற்றக் கோணம் மாறுகின்றது. ஒரு குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில், புகைப்படக் கருவியின் இரு ஏற்றக் கோணங்கள் தெரியும் எனில் அந்தக் கால இடைவெளியில் விண்கலம் பயணித்த தூரத்தை எவ்வாறு கணக்கிடுவது?

இதுபோன்ற கேள்விகளுக்கான விடைகளை, அந்தச் சார்புகளின் வகைக்கெழு மற்றும் பகுதி வகைக்கெழுவைப் பயன்படுத்தி நேரியல் தோராய மதிப்பு மற்றும் வகையீடு மூலம் காணலாம்.

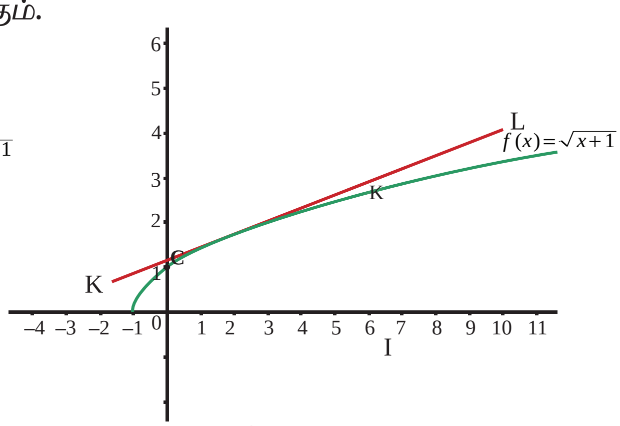
ஒரு மாறியின் மெய்சார்பினது வகைக்கெழுக்கான கருத்துக்களை நாம் முந்தைய அத்தியாயங்களில் பயின்றுள்ளோம். ஒரு சார்பினது சார்பகத்தில் அதன் அறுதி (extremum) காண்பது, மற்றும் சார்பினது வரைபடம் வரைவது போன்ற வகைக்கெழுவின் பயன்பாடுகளைப் பற்றியும் படித்துள்ளோம். இந்த அத்தியாயத்தில் ஒரு சார்பின் மதிப்பை ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் மதிப்பிடுகின்ற மற்றுமொரு பயன்பாட்டின் விளக்கங்களினால் காண்போம். $y = mx + b$ போன்ற நேரியல் சார்பின் மதிப்பினைக் காண்பதை விட, நேரியல் அல்லாத சார்பின் மதிப்பைக் கணக்கிடுவது கடினமானது என்பதை நாம் அறிவோம் .

காட்ஃபிரைடு
வில்ஹெம் லிபினிட்ஸ்
(1646-1716)

உதாரணமாக, $f(x)=\sqrt{x+1},\ g(x)=2x-7$ என்ற இரு சார்புகளை எடுத்துக்கொண்டு. $x=3.25$ இல் இவற்றின் மதிப்புகளைக் கணக்கிட வேண்டுமானால் எது நமக்கு எளிதாக இருக்கும்? $f(3.25)$ –ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுவதைவிட $g(3.25)$ –ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுவது எளிதாக இருக்கும். $f(3.25)$ –ன் மதிப்பை கணக்கிடுவதில் சிறு பிழையை நாம் அனுமதிப்போமானால், $x=3$ –க்கு அருகில் f –ன் தோராய மதிப்புக் காண்பதற்கான நேரியல் சார்பை நாம் காண இயலும். மேலும் அந்த நேரியல் சார்பினை $f(3.25)$ –ன் தோராய மதிப்பை காண பயன்படுத்தலாம். ஒரு சார்பின் வரைபடம் செங்குத்தாக இல்லாமல் இருக்க வேண்டுமானால் அது நேரியல் சார்பாக இருக்க வேண்டும். மேலும் இதன் மறுதலையும் உண்மை என்பது நமக்குத் தெரியும். ஒரு சார்பின் வரைபடத்தில் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி வழியாக எண்ணிலடங்கா நேர்கோடுகள் இருப்பினும் அவற்றில் தொடுகோடு மட்டுமே அந்த சார்பின் சரியான தோராய மதிப்பை அளிக்க இயலும். ஏன் எனில் அப்புள்ளி (3,2)–ன் அருகில் f–ன் வரைபடம் ஒரு நேர்கோடு போல் தோற்றமளிக்கும்.



படம் 8.1



படம் 8.2 **தொடுகோடு**

மேற்கண்ட படங்களிலிருந்து, அவற்றில் உள்ள கோடுகளில் $x=3$ என்ற புள்ளியில் $f(x)$ –ன் வரைபடத்துக்கான தொடுகோடு மட்டுமே $x=3$ –க்கான f–ன் தோராய மதிப்பைத் தர இயலும் என்பது தெளிவாகின்றது. அடிப்படையில் கொடுக்கப்பட்ட சார்பை $x=3$ –ல் நேர்க்கோட்டுச் சார்பாக மாற்றுகின்றோம். இந்தக் கருத்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட புள்ளியின் அருகில், உள்ளீட்டின் மாறுதலுக்கு ஏற்ப சார்பின் மதிப்பில் ஏற்படும் மாறுதலைக் கணக்கிட உதவுகின்றது. வகைக்கெழுவைப் பயன்படுத்தி வகையீடுகளின் கருத்தை அறிமுகப்படுத்துவோம். இது தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட புள்ளியின் அருகில் தோராய மதிப்பைக் கணக்ககிடுவதில் பயனுள்ளதாக இருக்கும். **வகைக்கெழு, உடனடி மாறு வீதத்தை அளிக்கின்றது. ஆனால் வகையீடுகள் ஒரு சார்பின் மதிப்பில் ஏற்படும் தோராய மாற்றத்தைக் காண உதவுகின்றது. மேலும் பிரதியிடல் முறையில் வரையறுத்த தொகையிடலின் மதிப்பு காணவும் மற்றும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும் வகையீடுகள் பயன்படுகின்றன.**

வகையீடுகளைக் கற்ற பின்பு பல மாறிகளைக் கொண்ட மெய்ச் சார்புகளின் மீது கவனம் செலுத்துவோம். பல மாறிகளைக் கொண்ட சார்புகளுக்கு, ஒரு மாறியின் மீதான மெய்ச் சார்பினது "**வகைக்கெழுவின்**" பொதுத்தன்மையாக "**பகுதி வகைக்கெழு**"வை அறிமுகப்படுத்துவோம். நாம் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளையுடைய சார்புகளை ஏன் கருத்தில் கொள்ள வேண்டும்? அந்த தேவைக்கான எளிய சூழலைக் காண்போம். ஒரு நிறுவனம் நோட்டுப் புத்தகங்கள் மற்றும் பேனாக்களையும் உற்பத்தி செய்கின்றது. இந்த நிறுவனத்தின் இலாபம் பெருமமாக இருக்கத் தேவையான உற்பத்தி அளவைக் காணவேண்டியுள்ளது. இந்த நிகழ்வில் (நோட்டுப் புத்தகம், பேனா) இரண்டு மாறிகளின் சார்பான வரவு, செலவு மற்றும் இலாபச் சார்புகளை ஆய்வு செய்ய வேண்டியுள்ளது. இதுபோல் ஒரு பெட்டியின் கன அளவை எடுத்துக் கொண்டால் இது நீளம், அகலம், உயரம் என்ற மூன்று மாறிகளின் சார்பாக உள்ளது. மேலும் ஒரு நாட்டின் பொருளாதாரம் பல துறைகளைச் சார்ந்துள்ளது. எனவே அது பல மாறிகளைச் சார்ந்துள்ளது. இவ்வாறு ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளைக் கொண்ட சார்புகளின் தேவையையும், முக்கியத்துவத்தையும் கருத்தில் கொண்டு அவற்றுக்கான "**வகைக்கெழு கருத்துருக்களை**" உருவாக்குவதும் தேவையான ஒன்றாகின்றது. மேலும் இரண்டு மற்றும் மூன்று மாறிகளையுடைய சார்புகளுக்கான "**வகையீடு**" மற்றும் அவற்றின் பயன்பாடுகளையும் காண்போம். இந்த அத்தியாயத்தில் அன்றாட வாழ்வில் உள்ள பயன்பாடுகளைக் காணலாம்.

கற்றலின் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தின் முடிவில் மாணவர்கள் பின்வருவனவற்றை அறிந்திருப்பர்.

- ஒரு மாறியைக் கொண்ட சார்பின் ஒரு புள்ளியிலான நேரியல் தோராய மதிப்பு கணக்கிடல்
- நேரியல் தோராய மதிப்பைப் பயன்படுத்தி கணிப்பான்கள் இல்லாமலே ஒரு சார்பின் தோராய மதிப்பு காணல்
- ஒரு சார்பின் வகையீடு காணல்
- அன்றாட வாழ்வில் வரும் கணக்குகளுக்கு நேரியல் தோராய மதிப்பு மற்றும் வகையீடுகளைப் பயன்படுத்துதல்
- ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளையுடைய சார்பின் பகுதி வகைக்கெழு காணல்
- இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளையுடைய சார்புகளின் நேரியல் தோராய மதிப்பு காணல்
- ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளையுடைய சார்பு சமபடித்தானதா இல்லையா என தீர்மானித்தல்
- சமபடித்தான சார்புகளுக்கு ஆய்லரின் தேற்றத்தினைப் பயன்படுத்துதல்

8.2 நேரியல் தோராய மதிப்பு மற்றும் வகையீடுகள் (Linear Approximation and Differentials)

8.2.1 நேரியல் தோராய மதிப்பு (Linear Approximation)

இப்பிரிவில், ஒரு புள்ளியில் ஒரு சார்பின் தோராய மதிப்பினை அறிமுகப்படுத்துவோம். நேரியல் தோராய மதிப்பினைப் பயன்படுத்தி கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியின் அருகில் சார்பினை மதிப்பிடுவோம். பின்பு ஒரு மாறியுடைய மெய்ச்சார்பின் வகையீட்டை அறிமுகப்படுத்துவோம். இதுவும் பயன்பாட்டுக்கு உதவியாக இருக்கும்.

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ என்பதை வகையிடத்தக்கச் சார்பாகவும் மற்றும் $x\in(a,b)$ எனவும் கொள்க. x என்ற புள்ளியில் f வகையிடத்தக்கது. எனவே

I4F6C6

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x) \qquad \ldots (1)$$

Δx சிறிய மதிப்பு எனில் (1)–ன் மூலம்

$$f(x+\Delta x)-f(x) \approx f'(x)\Delta x\,; \qquad \ldots (2)$$

$$\text{அதாவது, } f(x+\Delta x) \approx f(x)+f'(x)\Delta x\,, \qquad \ldots (3)$$

இங்கு $\approx$ என்பது **"தோராய மதிப்பிற்குச்"** சமம். மேலும் சாராமாறி x இலிருந்து $x+\Delta x$ க்கு மாறும்போது $f(x)$ சார்பு $f(x+\Delta x)$ க்கு மாறுவதைக் கவனிக்கவும். எனவே Δx சிறிய மாற்றமாகவும் Δf அல்லது Δy வெளியீடாகவும் இருக்கும்போது சமன்பாடு (2)ஐ பின்வருமாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$\text{வெளியீட்டில் ஏற்படும் மாற்றம் } = \Delta y = \Delta f = f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x\,.$$

$f(x)$ மற்றும் $f'(x)\Delta x$ ஐ பயன்படுத்தி $f(x+\Delta x)$–ன் தோராய மதிப்பைக் கணக்கிட சமன்பாடு (3) பயன்படுவதைக் காணலாம். மேலும் ஒரு குறிப்பிட்ட x_0 க்கு $y(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0), x\in\mathbb{R}$, என்பது $(x_0, f(x_0))$ என்ற புள்ளியில் f -க்கான தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டைத் தருகின்றது. இது x_0 க்கு அருகில் f –ன் சிறந்த தோராய மதிப்பைத் தருகின்றது. இது பின்வரும் வரையறைக்கு வழி வகுக்கின்றது.

வரையறை 8.1 (நேரியல் தோராய மதிப்பு)

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ என்பதை வகையிடத்தக்கச் சார்பாகவும், $x_0\in(a,b)$ எனவும் கொள்க. x_0 என்ற புள்ளியில் f –ன் தோராய மதிப்பு L –ன் வரையறை

$$L(x) \;=\; f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0), \quad \forall x\in(a,b) \text{ ஆகும்.} \qquad \text{... (4)}$$

சமன்பாடு (3)–லிருந்து

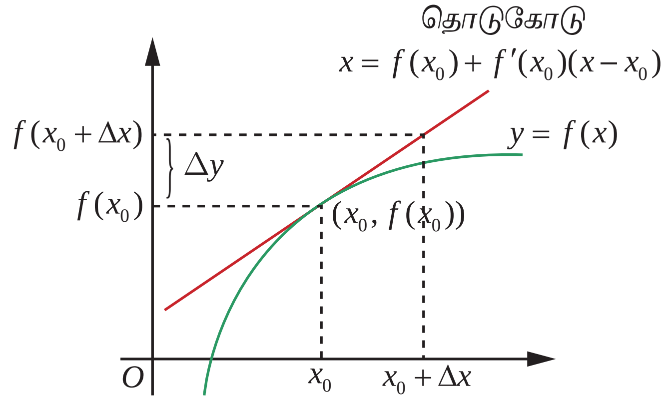
$$f(x+\Delta x) \;\approx\; f(x)+f'(x)\Delta x,$$

என்பதை நாம் காணலாம்.

இது $f(x+\Delta x)$ –ன் தோராய மதிப்பு காண பயனுள்ளதாகும்.

இங்கு x –ன் மதிப்பு x_0 –ஐ நெருங்கும்போது $f(x)$ –க்கான ஒரு சிறந்த தோராய மதிப்பை x_0 என்ற புள்ளியில் f –ன் நேரியல் தோராய மதிப்பு, தருகின்றது.

ஏனெனில், x –ன் மதிப்பு x_0 –ஐ நெருங்கும்போது x_0 இல் f தொடர்ச்சியானது



படம் 8.3
தொடுகோட்டின் வழி
நேரியல் தோராய மதிப்பு

$$\text{பிழை} = f(x)-L(x) = f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) \qquad \text{... (5)}$$

பூச்சியத்தை நெருங்குகின்றது. மேலும் $f(x)=mx+c$, எனில் ஏதேனும் ஒரு $x\in(a,b)$ –க்கு அதன் நேரியல் தோராய மதிப்பு $L(x)=(mx_0+c)+m(x-x_0)=mx+c=f(x)$ ஆகும். இந்த நிலையில் தோராய மதிப்பானது அந்த சார்பாகவே உள்ளது. (இது வியப்பூட்டுவதாக இல்லையா?)

எடுத்துக்காட்டு 8.1

$f(x)=\sqrt{1+x}, x\geq -1$ என்ற சார்பிற்கு நேரியல் தோராய மதிப்பை $x_0=3$ இல் காண்க. இதைப் பயன்படுத்தி $f(3.2)$ –ஐ மதிப்பிடுக.

தீர்வு

சமன்பாடு (4)–இலிருந்து $L(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ என நாம் அறிவோம். $x_0=3, \Delta x=0.2$ மற்றும் $f(3)=\sqrt{1+3}=2$ மேலும்

$$f'(x) \;=\; \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \text{ எனவே } f'(3)=\frac{1}{2\sqrt{1+3}}=\frac{1}{4}.$$

$$L(x) \;=\; 2+\frac{1}{4}(x-3)=\frac{x}{4}+\frac{5}{4}$$ என்பது தேவையான நேரியல் தோராய மதிப்பைத் தருகின்றது.

இப்பொழுது $f(3.2) \;=\; \sqrt{4.2}\approx L(3.2)=\dfrac{3.2}{4}+\dfrac{5}{4}=2.050$.

உண்மையில் கணிப்பானைப் (calculator) பயன்படுத்தினால் $\sqrt{4.2}=2.04939$. ■

8.2.2 பிழைகள் : தனிப்பிழை, சார்பிழை, மற்றும் சதவீத பிழை (Errors: Absolute Error, Relative Error and Percentage Error)

நாம் ஒரு மதிப்பைத் தோராயப்படுத்தும்போது அங்கு பிழை ஏற்படுகின்றது. இந்தப் பிரிவில், சமன்பாடு (4)ஆல் நேரியல் தோராய மதிப்பு மூலம் ஏற்படும் பிழையைக் கருத்தில் கொள்வோம். பிழைகளின் பல வகைகளைப் பற்றியும் காண்போம். $h=x-x_0$ என எடுக்க, $x=x_0+h$ என கிடைக்கும். இதனால் சமன்பாடு (5)

$$E(h) \;=\; f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h \text{ என மாறும்.} \qquad \text{... (6)}$$

$E(0)=0$ என்பதைக் கவனிக்க மற்றும் x_0 என்ற புள்ளியில் f –ன் தொடர்ச்சித் தன்மையினால் $\lim_{h\to 0} E(h)=0$ என்பதை நாம் முன்பே பார்த்துள்ளோம். மேலும் f வகையிடத்தக்கது என்பதால் சமன்பாடு (1)இலிருந்து

$$\lim_{h\to 0}\frac{E(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) = 0 .$$

f என்ற சார்பு x_0 இல் வகையிடத்தக்கது எனில், h பூச்சியத்தை நெருங்குவதைவிட, $E(h)$ வேகமாக பூச்சியத்தை நெருங்குவதைக் காணலாம்.

வரையறை 8.2

ஒரு குறிப்பிட்ட அளவையைத் தீர்மானிக்க வேண்டும் என்க. அதன் துல்லியமான மதிப்பு **மெய்மதிப்பு** எனப்படும். சில நேரங்களில் நாம் அவற்றின் **தோராய மதிப்பை,** தோராய மதிப்பிடல் முறையில் காண்கின்றோம். இந்நிலையில்

தனிப்பிழை = மெய்மதிப்பு – தோராய மதிப்பு என வரையறுக்கப்படுகிறது.

எனவே சமன்பாடு (6) நேரியல் தோராய மதிப்பு முறையில் ஏற்படும் தனிப்பிழையைத் தருகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 8.2

நேரியல் தோராய மதிப்பீட்டு முறை மூலம் $\sqrt{9.2}$ –ன் தோராய மதிப்பைக் கணிப்பான் உதவியில்லாமல் காண்க.

தீர்வு

நேரியல் தோராய மதிப்பீட்டு முறையில் $\sqrt{9.2}$ –ன் தோராய மதிப்பைக் காண வேண்டியுள்ளது. சமன்பாடு (3)–ன் படி $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$ என உள்ளது. இதற்கு நாம் பொருத்தமான f, x_0 மற்றும் Δx ஆகியவற்றைத் தேர்வு செய்ய வேண்டும். நம்முடைய இந்தத் தேர்வு மேற்கண்ட தோராய மதிப்பு சமன்பாட்டின் வலப்பக்கத்தை கணிப்பான் உதவியில்லாமல் கணக்கிடக்கூடிய வகையில் இருக்கவேண்டும். எனவே

$f(x)=\sqrt{x}, x_0=9$ மற்றும் $\Delta x=0.2$ என நாம் தேர்வு செய்வோம். இதனால் $f'(x_0)=\dfrac{1}{2\sqrt{9}}$ மற்றும்

$$\sqrt{9.2} \approx f(9)+f'(9)(0.2) = 3+\frac{0.2}{6} = 3.03333 \text{ என கிடைக்கும்.}$$

தற்போது, ஒப்பிட்டுக் பார்ப்பதற்காக, கணிப்பானைப் பயன்படுத்தினால் $\sqrt{9.2}=3.03315$ என கிடைப்பதைக் காணலாம். நம் தோராய மதிப்பு முதல் மூன்று தசம இடங்களுக்கு சரியாக உள்ளதைக் காணலாம். எனவே பிழை $3.03315-3.03333=-0.00018$. [மேலும் இங்கு ஒருவர் $f(x)=\sqrt{1+x}, x_0=8$ மற்றும் $\Delta x=0.2$ எனவும் தேர்வு செய்யலாம். எனவே f மற்றும் x_0 –ன் தேர்வு தனித்தன்மையுடையதாக இருக்க வேண்டியதில்லை].

எனவே மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் தனிப்பிழை என்பது $3.03315-3.03333=-0.00018$. தனிப்பிழை எந்த அளவு பிழை என்பதைக் குறிக்கின்றது; ஆனால் அது தோராய மதிப்பு எந்த அளவுக்கு மெய்மதிப்பிற்கு அருகாமையில் நன்றாக உள்ளது என்பதைக் கூறாது. இதற்காக இரண்டு எளிய நிலைகளைக் காணலாம்.

நிலை 1 : ஏதோ ஒரு அளவின் மெய்மதிப்பு 5 மற்றும் தோராய மதிப்பு 4 என்க. அதன் தனிப்பிழை $5-4=1$.

நிலை 2 : ஏதோ ஒன்றின் மெய்மதிப்பு 100 மற்றும் தோராய மதிப்பு 95 என்க. தற்போது அதன் தனிப்பிழை $100-95=5$. எனவே முதல் நிலையின் தனிப்பிழை இரண்டாம் நிலையை விடக்குறைவாக உள்ளது.

இந்த இரு தோராய மதிப்புகளில் எது சிறந்த தோராய மதிப்பு மற்றும் ஏன்? ஒரு தோராய மதிப்பு சிறந்ததா இல்லையா என்பது பற்றி தனிப்பிழை சரியாக தெரிவிப்பதில்லை. அதே சமயம் சார்பிழை அல்லது சதவீதப்பிழை (கீழே வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது), கணக்கிடுவோமானால் அந்த தோராய மதிப்பு எவ்வளவு சிறந்தது என்பதைக் காணலாம். மெய்மதிப்பு பூச்சியம் எனில் நம் தோராய மதிப்பு மெய்மதிப்புக்கு எந்த அளவிற்கு நெருக்கமாக உள்ளது என்பது நமக்குத் தெரியும். மெய்மதிப்பு பூச்சியமில்லை எனில் அதைப் பின்வருமாறு வரையறுப்போம்.

வரையறை 8.3

மெய்மதிப்பு பூச்சியமற்றது எனில்

$$\text{சார்பிழை} = \frac{\text{மெய்மதிப்பு} - \text{தோராய மதிப்பு}}{\text{மெய்மதிப்பு}}$$

$$\text{சதவீதப்பிழை} = \text{சார்பிழை} \times 100.$$

குறிப்பு: தனிப்பிழை அளவீட்டிற்கு அலகு உண்டு. அதே சமயம் சார்பிழை, சதவீதப் பிழை ஆகியவற்றிற்கு அலகுகள் இல்லை.

மேற்கண்ட நிலைகளில்

முதல் நிலை : $\text{சார்பிழை} = \frac{1}{5} = 0.2$; $\text{சதவீதப் பிழை} = \frac{1}{5} \times 100 = 20\%$.

இரண்டாம் நிலை : $\text{சார்பிழை} = \frac{5}{100}$; $\text{சதவீதப் பிழை} = \frac{5}{100} \times 100 = 5\%$.

இதிலிருந்து இரண்டாவது தோராய மதிப்பு முதல் தோராய மதிப்பீட்டை விடச் சிறந்தது. சார்பிழை அல்லது சதவீதப் பிழை கணக்கிட எதன் தோராய மதிப்பைக் கணக்கிடுகின்றோமோ அதன் மெய்மதிப்பு தெரிந்திருக்க வேண்டும் என்பதைக் கவனிக்கவும்.

மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகளைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8.3

ஒரு சோப்பு நுரையின் வடிவம் கோளமாக உள்ளது என எடுத்துக் கொள்வோம். ஆரம் 5 செமீ–இலிருந்து 5.2 செமீ–ஆக மாறும் போது ஏற்படும் வளைபரப்பின் தோராய அதிகரிப்பை நேரியல் தோராய மதிப்பு முறையில் காண்க. மேலும் அதன் சதவீதப் பிழையையும் காண்க.

தீர்வு

ஆரம் r உள்ள கோளத்தின் வளைபரப்பு $S(r) = 4\pi r^2$ என்பதை நினைவுகூர்க. நம்மால் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி சரியான மாற்றத்தைக் கணக்கிட முடியும் என்றாலும் நேரியல் தோராய மதிப்பு முறையைப் பயன்படுத்தி தோராய மதிப்பைக் காணலாம். சமன்பாடு (4)–ன்படி

$$\begin{aligned}\text{வளைபரப்பின் தோராய மாற்றம்} &= S(5.2) - S(5) \approx S'(5)(0.2)\\ &= 8\pi(5)(0.2)\\ &= 8\pi \text{ செமீ}^2\end{aligned}$$

சரியான கணக்கீட்டின்படி வளைபரப்பின் மாற்றம்

$$S(5.2) - S(5) = 108.16\pi - 100\pi = 8.16 \text{ செமீ}^2.$$

$$\text{சதவீதப் பிழை} = \text{சார்பிழை} \times 100 = \frac{8.16\pi - 8\pi}{8.16\pi} \times 100 = 1.9607\%$$

எடுத்துக்காட்டு 8.4

ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் ஆரம் $r = 10$ செமீ மற்றும் உயரம் $h = 20$ செமீ. உருளையின் ஆரம் 10 செமீ இலிருந்து 10.1 செமீ–ஆக அதிகரிக்கின்றது என்க. மேலும் உயரம் மாறாமல் உள்ளது எனில் உருளையின் கன அளவில் ஏற்படும் மாற்றத்தைக் கணக்கிடுக. மேலும் அதன் சார்பிழை மற்றும் சதவீதப் பிழையையும் காண்க.

தீர்வு

உருளையின் கன அளவு $V=\pi r^2 h$ என்பதை நினைவு கூர்வோம், இங்கு ஆரம் r மற்றும் உயரம் h ஆகும். $V(r)=\pi r^2 h = 20\pi r^2$.

$$V(10.1)-V(10) \approx \left.\frac{dV}{dr}\right|_{r=10}(10.1-10) = 20\pi\,2(10(0.1)).$$

எனவே கன அளவில் ஏற்படும் மாற்றத்தின் மதிப்பு 40π செமீ^{3}.

கன அளவில் ஏற்படும் துல்லியமான மாற்றம்

Q2R3P2

$$V(10.1)-V(10) = 2040.2\pi - 2000\pi = 40.2\pi \text{ செமீ}^3.$$

$$\text{எனவே சார்பிழை } = \frac{40.2\pi-40\pi}{40.2\pi} = \frac{1}{201} = 0.00497\,;$$

$$\text{மற்றும் சதவீதப் பிழை } = \text{சார்பிழை } \times 100 = \frac{1}{201}\times 100 = 0.497\%.$$

பயிற்சி 8.1

1. $f(x)=\sqrt[3]{x}$ என்க. $x=27$ இல் நேரியல் தோராய மதிப்பைக் காண்க. நேரியல் தோராய மதிப்பை பயன்படுத்தி $\sqrt[3]{27.2}$ ன் மதிப்பைக் காண்க.
2. நேரியல் தோராய மதிப்பீட்டு முறையில் பின்வருவனவற்றின் தோராய மதிப்புகளைக் காண்க.
   (i) $(123)^{\frac{2}{3}}$ (ii) $\sqrt[4]{15}$ (iii) $\sqrt[3]{26}$
3. பின்வரும் சார்புகளுக்கு, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளில் நேரியல் தோராய மதிப்பைக் காண்க.
   (i) $f(x)=x^3-5x+12,\ x_0=2$ (ii) $g(x)=\sqrt{x^2+9},\ x_0=-4$
   (iii) $h(x)=\dfrac{x}{x+1},\ x_0=1$
4. ஒரு வட்ட வடிவ தகட்டின் ஆரம் 12.65 செமீ-க்குப் பதிலாக 12.5 செமீ என அளக்கப்படுகின்றது எனில் அதன் பரப்பு கணக்கிடுவதில் பின்வருவனவற்றை காண்க:
   (i) தனிப்பிழை (ii) சார் பிழை (iii) சதவீதப் பிழை
5. பனிக்கட்டியிலான ஒரு கோளத்தின் ஆரம் 10 செமீ. அதன் ஆரம் 10 செமீலிருந்து 9.8 செமீ-ஆக குறைகின்றது. பின்வருவனவற்றின் தோராய மதிப்பினைக் காண்க:
   (i) கன அளவில் ஏற்படும் மாற்றம் (ii) வளைபரப்பில் ஏற்படும் மாற்றம்
6. l நீளம் உள்ள ஒரு தனி ஊசலின் முழு அலைவு நேரம் T என்பது $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது, இங்கு g ஒரு மாறிலி. l -ல் ஏற்படும் 2 சதவீதப் பிழைக்கு ஏற்ப T -ன் கணக்கீட்டில் ஏற்படும் தோராய சதவீதப் பிழையைக் காண்க.
7. ஒர் எண்ணின் n-ஆம் படி மூலம் கணக்கிடப்படும்போது ஏற்படும் சதவீதப் பிழை தோராயமாக, அந்த எண்ணின் சதவீதப் பிழையின் $\dfrac{1}{n}$ மடங்கு ஆகும் எனக்காட்டுக.

8.2.3 வகையீடுகள் (Differentials)

இங்கு "வகையீடுகள்" பற்றி அறிமுகப்படுத்த மீண்டும் நாம் வகைக்கெழு கருத்துருவைப் பயன்படுத்துவோம். இங்கு சமன்பாடு (1)ஐ கவனிப்போம்.

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}. \qquad ...(7)$$

இங்கு $\frac{df}{dx}$ என்பது வித்தியாசங்களின் விகிதத்தின் எல்லை மதிப்பைக் குறிக்க லிபினிட்ஸ் பயன்படுத்திய குறியீடு ஆகும். இது x-ஐப் பொருத்து y-ன் **வகைக்கெழு** எனப்படும். $\frac{df}{dx}$-ஐ df மற்றும் dx இவற்றின் விகிதமாக (வகுத்தலாக) கருதுவது பொருத்தமுள்ளதாகுமா? வேறுவிதமாக வகைக்கெழு என்பது df மற்றும் dx-ன் வகுத்தலாகுமாறு df-க்கும் dx-க்கும் பொருள் கொள்ள முடியுமா? சில நேரங்களில் ஆம் எனலாம். எடுத்துக்காட்டாக, $f(x) = mx + c$ இங்கு m, c என்பன மாறிலிகள், எனில் $y = f(x)$.

எல்லா $x \in \mathbb{R}$ மற்றும் Δx-க்கு $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = m\Delta x = f'(x)\Delta x$. எனவே சமன்பாடு (2) மற்றும் (3) மெய். இங்கு x மற்றும் $y(=f)$ இவற்றில் ஏற்படும் மாற்றம் நேர்கோட்டின் மீது ஏற்படுகின்றது. இந்நிலையில்

$$\frac{f\text{-ன் மாற்றம்}}{x\text{-ன் மாற்றம}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

இதனால் $df = \Delta f = dy$ மற்றும் $dx = \Delta x$ என எடுத்துக்கொண்டால் வகைக்கெழு $\frac{df}{dx}$ என்பது உண்மையில் df மற்றும் dx-ன் விகிதமாகும். எனவே f-ன் வகையீட்டை பின்வருமாறு வரையறுப்போம்:

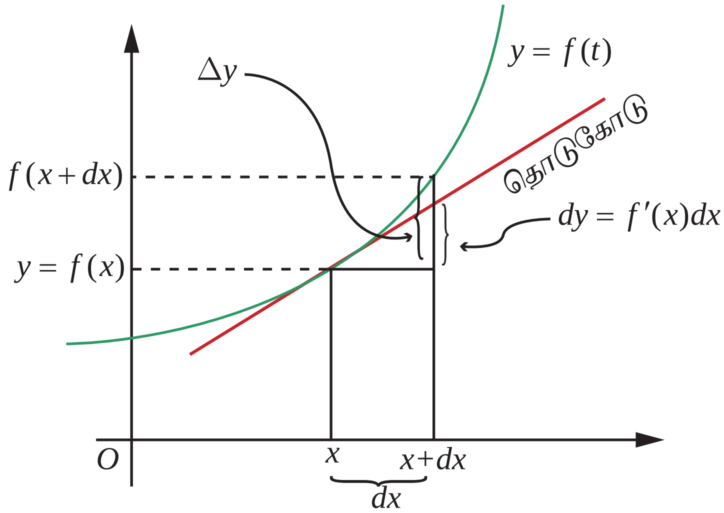
வரையறை 8.4

x-ன் அதிகரிப்பு Δx உடன் மற்றும் எல்லா $x \in (a,b)$-க்கும் $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ ஒரு வகையிடத்தக்க சார்பு என்க. f-ன் வகையீடு

$$df = f'(x)\Delta x. \qquad ... (8)$$

என வரையறுக்கப்படுகின்றது.

$f(x) = x$ எனில் சமன்பாடு (8)-ன் படி $dx = f'(x)\Delta x = 1\Delta x$ அதாவது $dx = \Delta x$, இது x-அச்சில் ஏற்படும் மாற்றம். எனவே சமன்பாடு (8)-ன்படி f-ன் வகையீடு $df = f'(x)dx$. அடுத்து ஏதேனும் ஒரு $y = f(x)$-க்கான வகையீட்டை காண்போம். $\Delta f = f(x+dx) - f(x)$ என்பது $y = f(x)$ என்ற சார்பின் வெளியீட்டில் ஏற்படும் மாற்றத்தைத் தருகின்றது. $f'(x)$ என்பது $(x, f(x))$ என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சாய்வைத் தருகின்றது. தொடுகோட்டுத் திசையில் f இல் ஏற்படும் மாற்றம் dy அல்லது df என்க. எனவே மேற்கண்டபடி $dy = f'(x)dx$ படம் 8.4 இலிருந்து $\Delta f \approx dy = df = f'(x)dx$ என்பது தெளிவு மற்றும் $f'(x)$ என்பது தோராயமாக Δf மற்றும் Δx-ன் விகிதமாகக் காணலாம். எனவே $\frac{df}{dx}$ என்பதை df மற்றும் dx-ன் விகிதமாக பொருள் கொள்ளலாம்.



படம் 8.4

நேரியல் தோராய மதிப்பு மற்றும் வகையீடு

குறிப்புரை

ஒரு சார்பின் வகைக்கெழுவும் ஒரு சார்புதான் என்பது நாம் அறிவோம் . ஒரு சார்பு f -ன் வகையீடு சாரா மாறியின் சார்பாக மட்டுமல்லாமல், உள்ளீட்டில் ஏற்படும் மாற்றம் $dx = \Delta x$ -ஐயும் சார்ந்துள்ளது. எனவே, df என்பது x மற்றும் dx என்ற இரு மாறும் அளவுகளின் சார்பாக உள்ளது. $\Delta f \approx df$ என்பதை படம் 8.4-இலிருந்து காணலாம்.

ஒப்பிட்டுப் பார்க்க சில சார்புகள், அவற்றின் வகைக்கெழுக்கள் மற்றும் வகையீடுகள் கீழே உள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

வ. எண்	சார்பு	வகைக்கெழு	வகையீடுகள்
1	$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$df = nx^{n-1}dx$
2	$f(x) = \cos(x^2 + 7x)$	$f'(x) = -\sin(x^2 + 7x)(2x+7)$	$df = -\sin(x^2 + 7x)(2x+7)dx$
3	$f(x) = \cot(x^2)$	$f'(x) = -\operatorname{cosec}^2(x^2)2x$	$df = -\operatorname{cosec}^2(x^2)2x\ dx$
4	$f(x) = \sin^{-1}(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$df = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
5	$f(x) = \tan^{-1} x$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$df = \dfrac{1}{1+x^2}dx$
6	$f(x) = e^{x^3-5x+7}$	$f'(x) = e^{x^3-5x+7}(3x^2-5)$	$df = e^{x^3-5x+7}(3x^2-5)dx$
7	$f(x) = \log(x^2+1)$	$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$	$df = \dfrac{2x}{x^2+1}dx$

அடுத்து நாம் வகையீடுகளின் பண்புகளைப் பற்றிக் காண்போம். இந்த முடிவுகள் வகைக்கெழுவின் வரையறை மற்றும் வகைக்கெழுவின் விதிகளைப் பின்பற்றி கிடைப்பன. (5)-ம் பண்பிற்குமட்டும் கீழே நிரூபணம் தரப்பட்டுள்ளது. மற்றவை பயிற்சிக்காக விடப்பட்டுள்ளது.

வகையீடுகளின் பண்புகள் (Properties of Differentials)

இங்கு நாம் மெய்மாறிகளாலான மெய்மதிப்புச் சார்புகளை மட்டும் கருத்தில் கொள்வோம்.

(1) f ஒரு மாறிலிச் சார்பு எனில் $df = 0$.

(2) சமனிச் சார்பு $f(x) = x$ எனில் $df = 1dx$.

(3) f வகையிடத்தக்கது மற்றும், $c \in \mathbb{R}$ எனில் $d(cf) = cf'(x)dx$.

(4) f, g என்பன வகையிடத்தக்கன எனில் $d(f+g) = df + dg = f'(x)dx + g'(x)dx$.

(5) f, g என்பன வகையிடத்தக்கன எனில் $d(fg) = fdg + gdf = (f(x)g'(x) + f'(x)g(x))dx$.

(6) f, g என்பன வகையிடத்தக்கன எனில்

$$d(f/g) = \frac{gdf - fdg}{g^2} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}dx, \text{ இங்கு } g(x) \neq 0 .$$

(7) f, g என்பன வகையிடத்தக்கன என்பதுடன் $h = f \circ g$ வரையறுக்கப்பட்டது எனில் $dh = f'(g(x))g'(x)dx$.

(8) $h(x) = e^{f(x)}$ எனில் $dh = e^{f(x)} f'(x)dx$.

(9) எல்லா x -க்கும் $f(x) > 0$ மற்றும் $g(x) = \log(f(x))$ எனில் $dg = \frac{f'(x)}{f(x)}dx$.

எடுத்துக்காட்டு 8.5

$f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ என்பன வகையிடத்தக்க சார்புகள் எனில் $d(fg) = fdg + gdf$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ என்பன வகையிடத்தக்க சார்புகள் என்பதுடன் $h(x) = f(x)g(x)$ என்க. h என்பது வகையிடத்தக்க சார்புகளின் பெருக்கல் என்பதால் (a,b) இல் h -ம் வகையிடத்தக்கது. எனவே வரையறைப்படி $dh = h'(x)dx$.

தற்போது பெருக்கல் விதியைப் பயன்படுத்தி $h'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$.

இதனால் $$dh = h'(x)dx = (f(x)g'(x) + f'(x)g(x))dx = f(x)g'(x)dx + f'(x)g(x)dx$$
$$= f(x)dg + g(x)df = fdg + gdf$$ ■

எடுத்துக்காட்டு 8.6

$g(x) = x^2 + \sin x$ எனில் dg -ஐக் காண்க.

தீர்வு

சார்பு g வகையிடத்தக்கது என்பதைக் கவனிக்கவும். மேலும் $g'(x) = 2x + \cos x$.

இதனால் $dg = (2x + \cos x)dx$. ■

எடுத்துக்காட்டு 8.7

10 செமீ ஆரம் உள்ள கோளத்தின் ஆரம் 0.1 செமீ குறைகின்றது எனில் அதன் கன அளவில் தோராயமாக எவ்வளவு குறையும்?

தீர்வு

கோளத்தின் கன அளவு $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ என நாம் அறிவோம். இங்கு $r > 0$ என்பது ஆரம். எனவே வகையீடு $dV = 4\pi r^2 dr$ மற்றும் $\Delta V \approx dV$ எனவே

$$dV = 4\pi(10)^2(9.9\text{-}10)\,\text{cm}^3$$
$$= 4\pi 10^2(-0.1)\text{cm}^3$$
$$= -40\pi\,\text{cm}^3.$$ ■

ஆரம் 10-இலிருந்து 9.9 ஆக குறைகின்றதால் $dr = (9.9 - 10)$ செமீ எனப் பயன்படுத்தியுள்ளோம். மறுபடியும் விடையில் வரும் '$-$' குறியீடு கோளத்தின் கன அளவு 40π செமீ^{3} குறைவதைக் குறிக்கின்றது.

பயிற்சி 8.2

1. பின்வரும் சார்புகளுக்கு வகையீடு dy காண்க :

   (i) $y = \frac{(1-2x)^3}{3-4x}$ (ii) $y = (3 + \sin(2x))^{2/3}$ (iii) $y = e^{x^2-5x+7}\cos(x^2-1)$

2. $f(x) = x^2 + 3x$ என்ற சார்பிற்கு df காண்க மற்றும்

   (i) $x = 2$, $dx = 0.1$ (ii) $x = 3$ மற்றும் $dx = 0.02$

   எனும்போது df -ஐ மதிப்பிடுக.

3. f என்ற சார்பிற்கு கொடுக்கப்பட்ட $x, \Delta x$ மதிப்புகளுக்கு Δf மற்றும் df காண்க. மேலும் அவற்றை ஒப்பிடுக.
   (i) $f(x) = x^3 - 2x^2; x = 2, \quad \Delta x = dx = 0.5$
   (ii) $f(x) = x^2 + 2x + 3; \ x = -0.5, \ \Delta x = dx = 0.1$
4. $\log_{10} e = 0.4343$ எனக்கொண்டு $\log_{10} 1003$ –ன் தோராய மதிப்பைக் காண்க.
5. ஒரு மரத்தின் அடிப்பகுதியின் விட்டம் 30 செமீ. அடுத்த ஆண்டு அதன் சுற்றளவு 6 செமீ அதிகரிக்கின்றது எனில்
   (i) தோராயமாக மரத்தின் விட்டம் எவ்வளவு வளர்ந்துள்ளது?
   (ii) அதன் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பானது எவ்வளவு சதவீதம் அதிகரித்திருக்கும்?
6. ஒரு குறிப்பிட்ட பறவையின் முட்டை கிட்டத்தட்ட கோள வடிவமாக உள்ளது. முட்டையின் ஆரம் ஓட்டிற்கு உள்ளே 5 மிமீ ஆகவும் ஓட்டிற்கு வெளியே 5.3 மிமீ ஆகவும் உள்ளது எனில் ஓட்டின் தோராய கன அளவைக் காண்க.
7. மனிதனின் இரத்தக் குழாயின் (தமனியின்) குறுக்கு வெட்டானது வட்ட வடிவம் எனக் கொள்க. ஒரு நோயாளிக்கு இரத்தக் குழாய் விரிவடைவதற்கான மருந்து கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இரத்தக் குழாயின் ஆரம் 2 மிமீ இலிருந்து 2.1 மிமீ ஆக அதிகரிக்கும்போது அதன் குறுக்கு வெட்டின் பரப்பு தோராயமாக எந்த அளவு அதிகரிக்கும்?
8. புதிதாக உருவாக்கப்பட்ட ஒரு நகரத்தின் வாக்காளர்களின் எண்ணிக்கையின் (ஆயிரங்களில்) அதிகரிப்பு $V(t) = 30 + 12t^2 - t^3, \ 0 \le t \le 8$ என்பதால் மதிப்பிடப்படுகின்றது. இங்கு t என்பது ஆண்டுகளை குறிக்கின்றது. காலம் 4–இலிருந்து $4\frac{1}{6}$ வருடமாக இருக்கும்போது ஏற்படும் தோராய வாக்காளர்களின் எண்ணிக்கை மாற்றத்தைக் காண்க.
9. ஒரு மனிதன் x மணி நேரத்தில் கற்கும் y வார்த்தைகளுக்கான தொடர்பு $y = 52\sqrt{x}, \ 0 \le x \le 9$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. x –ன் மதிப்பு பின்வருமாறு மாறும்போது கற்றல் வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கையில் ஏற்படும் தோராய மாற்றத்தைக் காண்க.
   (i) 1 இலிருந்து 1.1 மணி? (ii) 4 இலிருந்து 4.1 மணி?
10. ஒரு வட்ட வடிவத் தகடு வெப்பத்தினால் சீராக விரிவடைகின்றது என்க. அதன் ஆரம் 10.5 செமீ–இலிருந்து 10.75 செ.மீ–ஆக அதிகரிக்கும்போது அதன் பரப்பில் ஏற்படும் தோராய அதிகரிப்பு மற்றும் தோராய சதவீத அதிகரிப்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.
11. 10 செமீ பக்க அளவு கொண்ட ஒரு கன சதுரத்தின் பக்கங்களுக்கு 0.2 செமீ கனத்திற்கு வர்ணம் பூசப்படுகின்றது. வகையீடுகளைப் பயன்படுத்தி அந்த கன சதுரத்தின் வர்ணப் பூச்சிற்கு தோராயமாக எத்தனை கன செமீ அளவிற்கு வர்ணம் பயன்படுத்தப்பட்டது எனக் காண்க. மேலும் துல்லியமாக எவ்வளவு வர்ணம் பயன்படுத்தப்பட்டது என்பதையும் காண்க.

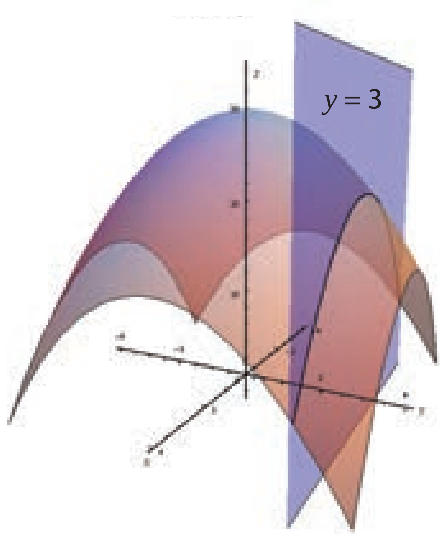
8.3 பல மாறிகளைக் கொண்ட சார்புகள் (Functions of several Variables)

x என்ற மாறியாலான f என்ற சார்பை நினைவு கூர்வோம் ; $y = f(x)$ என்ற சார்பின் தன்மையை நன்கு புரிந்து கொள்ள அதன் வரைபடத்தை வரைவோம். பொதுவாக $y = f(x)$ என்ற சார்பின் வரைபடமானது xy -தளத்தில் அமைந்த ஒரு வளைவரை ஆகும். மேலும் $x = a$ இல் f –ன் வகைக்கெழு $f'(a)$ என்பது $x = a$ இல் f –இன் வளைவரைக்கான தொடுகோட்டுச் சாய்வைக் குறிக்கிறது. அறிமுகத்தில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளையுடைய சார்புகளின் தேவையைப் பற்றி பார்த்தோம். இங்கு ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளையுடைய சார்புகளை அறிந்து கொள்ள சில கோட்பாடுகளை உருவாக்குவோம். முதலில் இரு மாறிகளையுடைய சார்புகளைக் காண்போம். x மற்றும் y இல் அமைந்த சார்பு $F(x, y)$ என்க. F –ன் வரைபடம் வரைய முப்பரிமாணம் xyz இல் $z = F(x, y)$ –ன் வரைபடம் வரைவோம். மேலும் இரு மாறிகள் உடைய சார்பின் தொடர்ச்சித் தன்மை, மற்றும் பகுதி வகைக்கெழுவின் கோட்பாடுகளையும் காண்போம்.

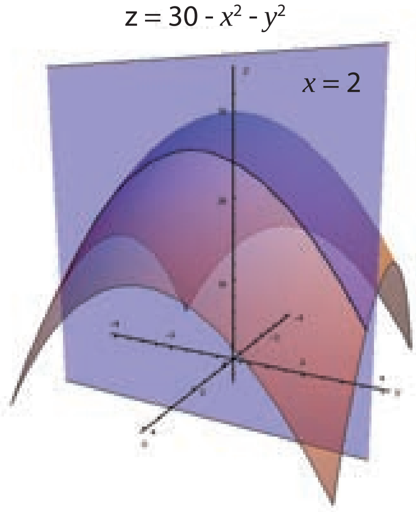
எடுத்துக்காட்டாக $g(x,y)=30-x^2-y^2$, $x,y\in\mathbb{R}$ என்பதைக் காண்போம். கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ எனில் $z=30-x^2-y^2$ என்பது வரைபடத்தில் z அச்சு தூரத்தைத் குறிக்கிறது. எனவே $(x,y,30-x^2-y^2)$ என்ற புள்ளி xy-தளத்தில் (x,y) புள்ளிக்கு $30-x^2-y^2$ உயரத்தில் உள்ளது. உதாரணமாக $(2,3)\in\mathbb{R}^2$ எனில் $(2,3,30-2^2-3^2)=(2,3,17)$ என்பது g-ன் வரைபடத்தின் மீதுள்ளது. நாம் $y=3$ என எடுத்துக்கொண்டால் $g(x,3)=-x^2+21$ என்ற சார்பு x-ஐ மட்டும் சார்ந்துள்ளது. எனவே அது ஒரு வளைவரையாக இருக்க வேண்டும்.

இதுபோல் $x=2$ என எடுத்துக்கொண்டால் $g(2,y)=26-y^2$ என்ற சார்பு y-ஐ மட்டும் சார்ந்துள்ளது. இந்த இரு நிலைகளிலும் கிடைக்கும் சார்புகள் இருபடிச் சார்புகளாக இருப்பதால் வரைபடம் ஒரு பரவளையமாக இருக்கும். $z=g(x,y)$-இலிருந்து கிடைக்கும் வளைபரப்பு ஒரு பரவளையத் திண்மம் (paraboloid) எனப்படும்.

$g(x,3)=21-x^2$ என்பது ஒரு பரவளையம், இது $z=30-x^2-y^2$ என்ற வளைபரப்பும் $y=3$ என்ற தளமும் வெட்டும்போது கிடைப்பது ஆகும். (படம் 8.5-ஐக் காண்க). இதுபோல் $g(2,y)=26-y^2$ என்பது ஒரு பரவளையம் ; இது $z=30-x^2-y^2$ என்ற வளைபரப்பும் $x=2$ என்ற தளமும் வெட்டும்போது கிடைக்கின்றது. (படம் 8.6-ஐக் காண்க). பின்வரும் வரைபடங்கள் மேற்கண்ட விவாதங்களை விவரிக்கின்றன.



படம் 8.5



படம் 8.6

x,y என்ற இரு மாறிகளில் அமைந்த சார்பு F-ஐப் போலவே $z=F(x,y)$ என்ற சமன்பாட்டைக் கொண்டு முப்பரிமாணம் $\mathbb{R}^3$-லும் காணலாம். இது $\mathbb{R}^3$-ல் உள்ள வளைபரப்பைக் குறிக்கும்.

8.3.1 ஒரு மாறியில் அமைந்த சார்புகளின் எல்லை மற்றும் தொடர்ச்சித் தன்மையின் மீள்பார்வை (நினைவு கூர்தல்) (Recall of Limit and Continuity of Functions of One Variable)

இரு மாறிகளில் அமைந்த சார்பின் தொடர்ச்சித் தன்மையைப் பற்றி படிப்பதற்கு முன்னர் ஒரு மாறியில் அமைந்த சார்பின் தொடர்ச்சித் தன்மையை நினைவு கூர்வோம். XI–ஆம் வகுப்பில் பின்வரும் வரையறையை நாம் பார்த்துள்ளோம்.

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ என்ற சார்பு, $x_0\in(a,b)$ என்ற புள்ளியில் தொடர்ச்சியானது எனில் பின்வரும் நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்ய வேண்டும்.

(1) x_0 இல் f வரையறுக்கப்பட்டிருக்கும் (2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ எல்லை மதிப்பு உள்ளது

(3) $L=f(x_0)$

மேற்கண்ட இரண்டாவது நிபந்தனையை சரியாகப் புரிந்து கொள்வதில்தான் தொடர்ச்சித் தன்மையின் முக்கிய கருத்து உள்ளது. x -ன் மதிப்பு x_0 -ஐ நெருங்க நெருங்க $f(x)$ -ன் மதிப்பு L -ஐ நெருங்கி நெருங்கிச் செல்வதை $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ என எழுதுகின்றோம்.

இன்னும் தெளிவாகவும், துல்லியமாகவும் புரிந்து கொள்ள இரண்டாவது நிபந்தனையை அண்மைப் பகுதியைக் கொண்டு மாற்றி எழுதுவோம். இது இரண்டு மாறிகளில் அமைந்த சார்புகளின் தொடர்ச்சியைப் பற்றி அறிய உதவும்.

வரையறை 8.5 (சார்பின் எல்லை)

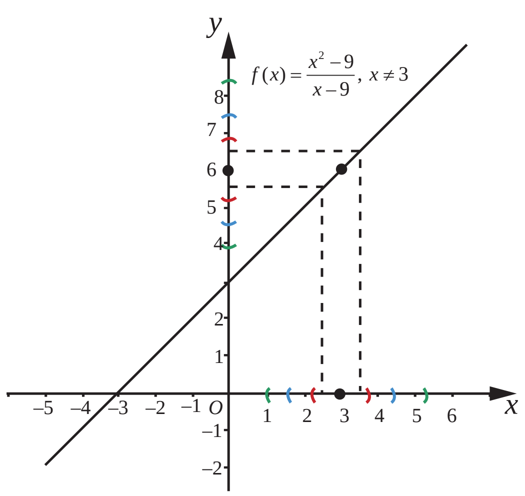
$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ மற்றும் $x_0 \in (a,b)$ என்க. L -ன் ஒவ்வொரு அண்மைப்பகுதி $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ -க்கும் $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$ எனுமாறு x_0 -க்கு ஒரு அண்மைப்பகுதி $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (a,b), \delta > 0$ இருக்குமானால் $x = x_0$ இல் f -ன் எல்லை மதிப்பு L என்கிறோம்.

மேற்கண்ட அண்மைப்பகுதி வழியான நிபந்தனையை மட்டு மதிப்பு பயன்படுத்தியும் கீழ்க்கண்டவாறு கூறலாம் :

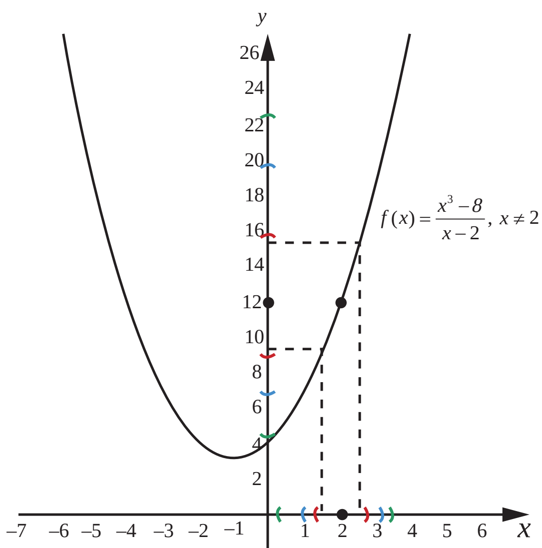
$$\forall \varepsilon > 0, \ |f(x) - L| < \varepsilon \text{ எனுமாறு } \exists\, \delta > 0 \text{ மற்றும் } 0 < |x - x_0| < \delta .$$

இதன் பொருள் $x \neq x_0$ மற்றும் x–ன் மதிப்பு x_0 -இலிருந்து δ தூரத்திற்குள்ளாக இருக்குமானால் $f(x)$ என்பது L -இலிருந்து ε தூரத்திற்குள்ளாக இருக்கும்.

பின்வரும் படங்கள் ε மற்றும் δ -க்கு இடையேயான தொடர்பை விளக்கும்.



படம் 8.7



படம் 8.8

பின்வரும் நிபந்தனைகள் (1) = (2) எனில் x_0 -ஐ தவிர x_0 -ன் அருகாமைப் பகுதியின் f என்ற சார்பின் x_0 -க்கான எல்லை மதிப்பு உள்ளது என்பதை நாம் XI –ஆம் வகுப்பில் படித்துள்ளோம்.

(1) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L_1$ (வலது எல்லை) (2) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L_2$ (இடது எல்லை)

(3) $L_1 = L_2$

x_0 இல் f என்ற சார்பு வரையறுக்கப்பட்டது என்க.

அதாவது $f(x_0)=L$. தற்போது $L=L_1=L_2$ எனில் சார்பு f ஆனது $x=x_0$ இல் தொடர்ச்சியானது ஆகும். ஒரு மாறியை கொண்ட சார்புகளின் எல்லை மற்றும் தொடர்ச்சித் தன்மையில் அண்மைப் பகுதி ஒரு முக்கிய பங்காற்றுகின்றது என்பதைக் கவனிக்க. இந்த நிலையில் $x_0 \in \mathbb{R}$ –ன் அண்மைப் பகுதி (x_0-r, x_0+r), $r>0$ ஆக இருக்கும். இரு மாறிகளைக் கொண்ட சார்புகளின் எல்லை மற்றும் தொடர்ச்சித் தன்மை பற்றி அறிய $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ –ன் அண்மைப் பகுதியை வரையறுக்க வேண்டியுள்ளது. எனவே $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ மற்றும் $r>0$ –க்கு, (u,v) என்ற புள்ளியின் அண்மைப்பகுதி

$$B_r((u,v))=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-u)^2+(y-v)^2<r^2\}$$ என்ற கணமாகும்.

(u,v) என்ற புள்ளியின் r -அண்மைப் பகுதி என்பது மையம் (u,v) மற்றும் ஆரம் $r>0$ கொண்ட ஒரு திறந்த வட்டு ஆகும். அண்மைப் பகுதியிலிருந்து மையம் நீக்கப்பட்டால் அது **துளையிடப்பட்ட அண்மைப்பகுதி** ஆகும்.

8.4 இரு மாறிகள் உடைய சார்புகளின் எல்லை மற்றும் தொடர்ச்சித் தன்மை (Limit and Continuity of Functions of Two Variables)

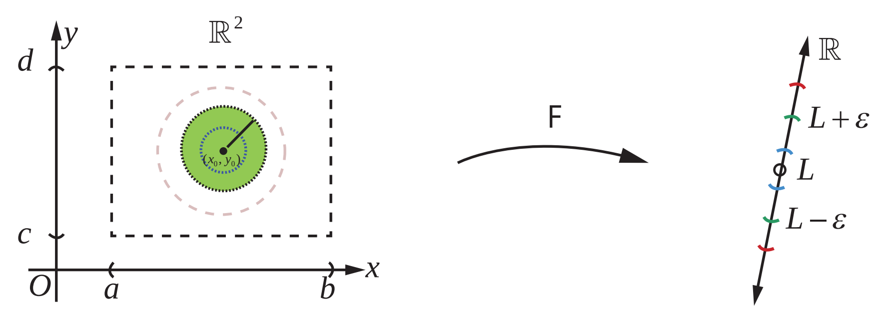
வரையறை 8.6 (சார்பின் எல்லை)

$A=\{(x,y) \mid a<x<b, c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2, F: A\to\mathbb{R}$ என்க. F பின்வரும் நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்யுமானால் (u,v) இல் F –இன் எல்லை L எனப்படும்:

L –ன் ஒவ்வொரு அண்மைப்பகுதி $(L-\varepsilon, L+\varepsilon), \varepsilon>0$ –க்கும்

$(x,y)\in B_\delta((u,v))\setminus\{(u,v)\}, \delta>0 \Rightarrow f(x)\in(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ எனுமாறு (u,v) –ன் ஒரு δ -அண்மைப்பகுதி $B_\delta((u,v))\subset A$ இருக்கும்.

இதை $\lim\limits_{(x,y)\to(u,v)} F(x,y)=L$ என எழுதலாம்.



படம் 8.9 சார்பின் எல்லை

ஒரு மாறியில் அமைந்த சார்புகளை ஒப்பிடும்போது இரு மாறியில் அமைந்த சார்பின் எல்லை காணும் முறை நுட்பமானது ஆகும். இங்கு (u,v) –க்கான **ஒவ்வொரு சாத்தியமான பாதை வழியாகவும்** (x,y) என்பது (u,v) –ஐ நெருங்கும்போது $F(x,y)$ –ன் மதிப்பு, ஒரே மதிப்பு L –ஐ நெருங்க வேண்டும். (நேர்கோடுகளாக இல்லாத பாதைகளையும் சேர்த்து) எல்லை முறையை படம் 8.9 விளக்குகின்றது.

ஒரு மாறியில் அமைந்த சார்புகளுக்கான எல்லை விதிகள் (எல்லை தேற்றங்கள்) பல மாறிகளைக் கொண்ட சார்புகளுக்கும் பொருந்தும்.

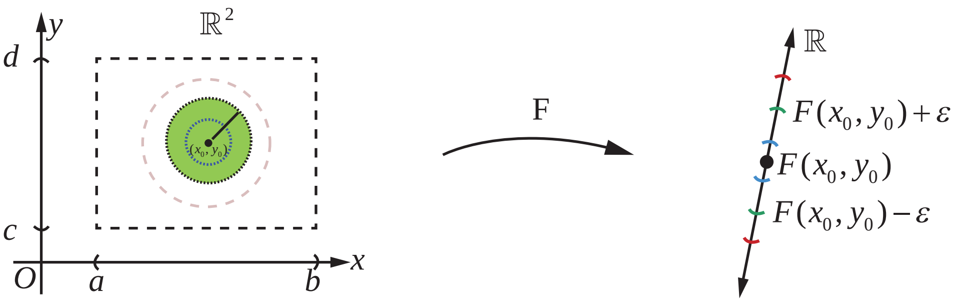
தற்போது ஒரு மாறியில் அமைந்த சார்புகளின் தொடர்ச்சித் தன்மையை பின்பற்றி இரு மாறிகளாலான சார்புகளின் தொடர்ச்சித் தன்மையை வரையறுப்போம்.

வரையறை 8.7 (தொடர்ச்சித் தன்மை)

$A=\{(x,y)\,|\,a<x<b, c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2, F:A\to\mathbb{R}$ என்ற சார்பு F (u,v) இல் தொடர்ச்சியானது எனில் பின்வருவனவற்றை நிறைவு செய்ய வேண்டும் .

(1) (u,v) இல் F வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(u,v)} F(x,y)=L$ இருக்கிறது

(3) $L=F(u,v)$.



படம் 8.10 சார்பின் தொடர்ச்சித்தன்மை

குறிப்புரை

(1) படம் 8.10 இல் $L=F(x_0,y_0)$ என்பது (x_0,y_0) இல் தொடர்ச்சித்தன்மையை விளக்கும்.

(2) $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ -ன் தொடர்ச்சித் தன்மையும் மேற்கூறிய முறையிலேயே வரையறுக்கப்படும்.

இரு மாறிகளுடைய சார்புகளின் தொடர்ச்சித் தன்மை பற்றிய சில எடுத்துக்காட்டுகளைக் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 8.8

அனைத்து $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ -க்கும் $f(x,y)=\dfrac{3x-5y+8}{x^2+y^2+1}$ எனில் $\mathbb{R}^2$ இல் f தொடர்ச்சியானது எனக் காட்டுக.

தீர்வு

$(a,b)\in\mathbb{R}^2$ என்பது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க. (a,b) இல் f -ன் தொடர்ச்சித் தன்மை பற்றி ஆராய்வோம்.

அதாவது (a,b) இல் f -ன் தொடர்ச்சித் தன்மைக்கான மூன்று நிபந்தனைகளையும் சரிபார்க்கலாம்.

$f(a,b)=\dfrac{3a-5b+8}{a^2+b^2+1}$ என்பது வரையறுக்கப்பட்டது. எனவே முதல் நிபந்தனை மெய்யாகின்றது.

அடுத்ததாக $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ எல்லை மதிப்பு உள்ளதா எனப்பார்க்க வேண்டும்.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}(3x-5y+8)=3a-5b+8 \text{ மற்றும் } \lim_{(x,y)\to(a,b)}(x^2+y^2+1)=a^2+b^2+1\neq 0.$$

எனவே எல்லை மதிப்பின் பண்புகள் படி

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=\frac{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}(3x-5y+8)}{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}(x^2+y^2+1)}=\frac{3a-5b+8}{a^2+b^2+1}=f(a,b)=\text{L}$$ என்றிருக்கிறது.

இப்போது $\lim\limits_{x,y\to(a,b)} f(x,y)=L=f(a,b)$ என்பது கவனிக்கத்தக்கது. எனவே (a,b) இல் f -ன் தொடர்ச்சித் தன்மைக்கான மூன்று நிபந்தனைகளையும் f நிறைவு செய்கின்றது.

மேலும் (a,b), என்பது R^2 இல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்பதால் f என்ற சார்பு $\mathbb{R}^2$ –ன் எல்லா புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சித் தன்மையுடையது என முடிவு செய்யலாம். ■

எடுத்துக்காட்டு 8.9

$f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$ மற்றும் $f(0,0)=0$ என்ற சார்பை எடுத்துக் கொள்வோம். இந்தச் சார்பு f, $(0,0)$ –ஐத் தவிர $\mathbb{R}^2$ –ன் மற்ற எல்லா புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சித்தன்மையுடையது என நிறுவுக.

தீர்வு

ஒவ்வொரு $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ –க்கும் f வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதைக் கவனிக்கவும். முதலில் $(a,b)\neq(0,0)$ இல் f–ன் தொடர்ச்சித் தன்மையை சரிபார்ப்போம். எடுத்துக்காட்டாக $(a,b)=(2,5)$ எனில் $f(2,5)=\dfrac{10}{29}$. மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டு போலவே $\lim\limits_{(x,y)\to(2.5)} xy=2(5)=10$ மற்றும் $\lim\limits_{(x,y)\to(2.5)} x^2+y^2=2^2+5^2=29\neq0$.

$$\text{எனவே } \lim_{(x,y)\to(2,5)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{10}{29}.$$

$f(2,5)=\dfrac{10}{29}=\lim\limits_{(x,y)\to(2,5)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, எனவே $(2,5)$ இல் f தொடர்ச்சித் தன்மையுடையது என்பது தெளிவாகிறது.

இதுபோன்ற வாதங்களைக் கொண்டு $(a,b)\neq(0,0)$ ஆக உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் f தொடர்ச்சித் தன்மையுடையது எனலாம். தற்போது $(0,0)$ இல் தொடர்ச்சியைக் காண்போம். வரையறையின்படி $f(0,0)=0$. அடுத்தது நாம் $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ எல்லை மதிப்பு உள்ளதா அல்லது இல்லையா எனப் பார்க்க வேண்டும்.

முதலில் $(0,0)$ வழிச் செல்லும் $y=mx$ நேர்க்கோட்டுப்பாதையில் எல்லை மதிப்பை சரிபார்க்கலாம்.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{mx^2}{(1+m^2)x^2}=\frac{m}{1+m^2}\neq f(0,0),\ \text{if } m\neq0.$$

எனவே m –ன்வெவ்வேறான மதிப்புகளுக்கு வெவ்வேறான $\dfrac{m}{1+m^2}$ –ன் மதிப்புகள் கிடைக்கின்றன.

எனவே $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ –ன் மதிப்பு இல்லை. அதனால் $(0,0)$ இல் f தொடர்ச்சியானது அல்ல.

எனவே $(0,0)$ –ஐத் தவிர மற்ற எல்லா புள்ளிகளிலும் f தொடர்ச்சியானது ஆகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 8.10

$g(x,y)=\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$ மற்றும் $g(0,0)=0$ எனில் $\mathbb{R}^2$ இல் g தொடர்ச்சியானது என நிறுவுக.

தீர்வு

சார்பு g எல்லா $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ க்கும் வரையறுக்கப்பட்டது என்க. மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளைப் போல் $(x,y)\neq(0,0)$ ஆக உள்ள எல்லா புள்ளிகளுக்கும், g தொடர்ச்சியானது என எளிதாக சரிபார்க்கலாம். அடுத்து $(0,0)$ இல் g –ன் தொடர்ச்சித் தன்மையை சரிபார்க்கலாம். $(0,0)$ இல் g –க்கு எல்லை உள்ளது மற்றும் $L=g(0,0)=0$ எனில்

$$|g(x,y)-g(0,0)| = \left|\frac{2x^2y}{x^2+y^2}-0\right|=\frac{2|x^2y|}{|x^2+y^2|}=\frac{2|xy||x|}{x^2+y^2}\leq\frac{(x^2+y^2)|x|}{x^2+y^2}\leq|x| \qquad \dots (9)$$

இங்கு கடைசி வரியில் நாம் $2|xy| \le x^2 + y^2$ என்பதை அனைத்து $x, y \in \mathbb{R}$ எனப் பயன்படுத்தியுள்ளதைக் கவனிக்க. (இது $0 \le (x-y)^2$ -இலிருந்து கிடைப்பது) $(x, y) \to (0,0)$ என்பதால் $|x| \to 0$ எனக் கிடைக்கின்றது. சமன்பாடு (9)-லிருந்து $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2} = 0 = g(0,0)$ எனக் கிடைக்கின்றது. ஆகவே $(0,0)$ இல் g தொடர்ச்சியானது என்பது நிரூபிக்கப்படுகிறது. எனவே $\mathbb{R}^2$ -ன் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் g தொடர்ச்சியானதாகும். ■

பயிற்சி 8.3

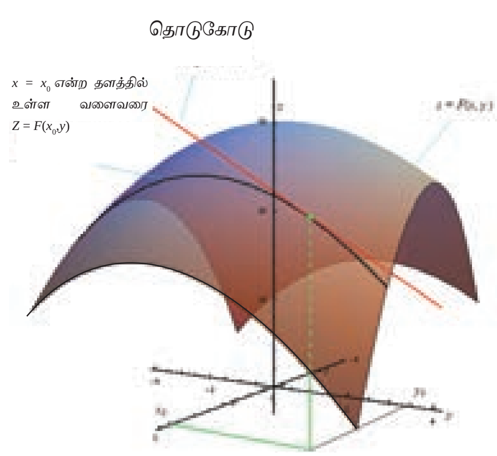
1. சார்பு $g(x, y) = \frac{3x^2 - xy}{x^2 + y^2 + 3}$ -க்கு எல்லை மதிப்பு இருக்குமானால், $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} g(x, y)$ -ஐ மதிப்பிடுக.
2. எல்லை மதிப்பு இருக்குமானால், $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\frac{x^3 + y^2}{x + y + 2}\right)$ -ஐ மதிப்பிடுக.
3. $(x, y) \neq (0,0)$ -க்கு $f(x, y) = \frac{y^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ எனில், $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$ என நிறுவுக.
4. எல்லை மதிப்பு இருக்குமானால், $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\frac{e^x \sin y}{y}\right)$ -ஐ மதிப்பிடுக.
5. $(x, y) \neq (0,0)$ -க்கு $g(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$, மற்றும் $g(0,0) = 0$ என்க.

   (i) ஒவ்வொரு $y = mx, m \in \mathbb{R}$ நேர்கோட்டுப் பாதையிலும் $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = 0$ என நிறுவுக.

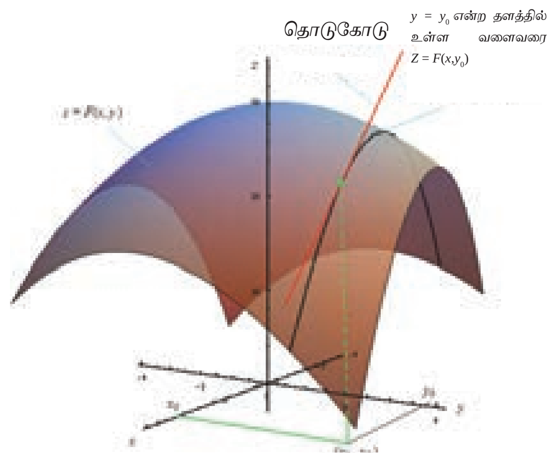
   (ii) ஒவ்வொரு $y = kx^2, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ பரவளையப் பாதையிலும் $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = \frac{k}{1 + k^2}$ என நிறுவுக.
6. சார்பு $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{y^2 + 1}$, ஒவ்வொரு $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ -க்கும் தொடர்ச்சியானது என நிறுவுக.
7. சார்பு $g(x, y) = \frac{e^y \sin x}{x}$, $x \neq 0$ மற்றும் $g(0,0) = 1$ என்க. புள்ளி $(0,0)$ இல் g தொடர்ச்சியானது என நிறுவுக.

8.5 பகுதி வகைக்கெழுக்கள் (Partial Derivatives)

இந்தப் பிரிவில் ஒரு மாறியில் அமைந்த சார்பின் வகைக்கெழுக் கருத்துருவை பல மாறிகளில் அமைந்த மெய் சார்புகளுக்கு எவ்வாறு விரிவுபடுத்துவது என்பது பற்றி காண்போம். முதலில் இரு மாறிகளைக் கொண்ட சார்புகளை எடுத்துக் கொள்வோம். $A = \{(x, y) | a < x < b, c < y < d\} \subset \mathbb{R}^2$ மற்றும் $F : A \to \mathbb{R}$ என்பது ஒரு மெய்ச்சார்பு என்க. $(x_0, y_0) \in A$ என்க; (x_0, y_0) என்ற புள்ளியில் x என்ற மாறியில் மட்டும் ஏற்படும் மாற்றத்திற்கேற்ப F இல் ஏற்படும் மாற்றத்தைக் காண்போம். மேற்கூறியவாறு $F(x, y_0)$ என்பது x -ஐ மட்டும் சார்ந்துள்ள சார்பு ஆகும். மேலும் இது $y = y_0$ என்ற தளமும் $z = F(x, y)$ என்ற வளைபரப்பும் வெட்டும் ஒரு வளைவரையாகும். எனவே $z = F(x, y_0)$ என்ற வளைவரையின் தொடுகோட்டுச் சாய்வை $x = x_0$ இல் $F(x, y_0)$ -ன் x -ஐப் பொருத்த வகைக்கெழுவை $x = x_0$ -ல் காண்பதன் மூலம் காணலாம். இதேபோல் $z = F(x_0, y)$ என்ற வளைவரையின் சாய்வை $F(x_0, y)$ -ன் y -ஐப் பொருத்த வகைக்கெழுவை $y = y_0$ இல் அறிவது மூலம் காணலாம். இந்த முக்கியக் கருத்துக்கள்தான் பின்வரும் பகுதி வகைக்கெழுவின் வரையறைக்கு நம்மை ஊக்குவிப்பதாக அமையும்.



படம் 8.11



படம் 8.12

வரையறை 8.8

$A=\{(x,y)|a<x<b, c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2, F:A\to\mathbb{R}$ மற்றும் $(x_0,y_0)\in A$ என்க.

(i) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x_0+h,y_0)-F(x_0,y_0)}{h}$ –ன் மதிப்பு காணத்தக்கது எனில் $(x_0,y_0)\in A$ இல் F –க்கு x –ஐப் பொருத்த பகுதி வகைக்கெழு உள்ளது எனலாம். இந்த எல்லை மதிப்பு $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)$ எனக் குறிக்கப்படும். ... (10)

(ii) $\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{F(x_0,y_0+k)-F(x_0,y_0)}{k}$ –ன் எல்லை மதிப்பு காணத்தக்கது எனில் $(x_0,y_0)\in A$ இல் F –க்கு y –ஐ பொருத்த பகுதிவகைக்கெழு உள்ளது எனலாம். இந்த எல்லை மதிப்பு $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)$ எனக்குறிக்கப்படும். ... (11)

குறிப்புரை

1. மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளைக் கொண்ட சார்புகளுக்கும் பகுதி வகைக்கெழுவானது இதே முறையில்தான் வரையறுக்கப்படும்.

2. ∂F என்பது “பகுதி F ” என்றும் ∂x என்பதை “பகுதி x” என்றும் படிக்க வேண்டும். எனவே $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ என்பதை “பகுதி F வகுத்தல் பகுதி x” எனப் படிக்க வேண்டும்.

   இதை “தோ F வகுத்தல் தோ x” எனவும் படிக்கலாம்.

3. இதேபோல் $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ என்பதை “பகுதி F வகுத்தல் பகுதி y” அல்லது “தோ F வகுத்தல் தோ y” எனப் படிக்கலாம்.

4. சில நேரங்களில் $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)$ என்பது $F_y(x_0,y_0)$ அல்லது $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}$ எனக் குறிக்கப்படும்.

   இதுபோல் $\dfrac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}$ என்பது $F_y(x_0,y_0)$ அல்லது $\dfrac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}$ எனக் குறிக்கப்படும்.

5. x -ஐப் பொருத்து F -ன் பகுதி வகைக்கெழுவைக் காணும்போது கவனிக்க வேண்டியது, மாறி y -ஐ மாறிலியாகக் கருதி x -ஐப் பொருத்து வகைக்கெழு காண வேண்டும். அதாவது எந்த மாறியைப் பொருத்து பகுதி வகைக்கெழு காண வேண்டுமோ அதைத் தவிர மற்ற அனைத்து மாறிகளும் மாறிலியாகக் கருதப்படும். இதனால்தான் நாம் அவற்றை **"பகுதி வகைக்கெழு"** என்கிறோம்.

6. A -ன் ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் F -க்கு x -ஐப் பொருத்த பகுதி வகைக்கெழு இருக்குமானால் A -க்கு $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ உள்ளது என்கிறோம். இங்கு $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ என்பது மறுபடியும் A மீதான ஒரு மெய் மதிப்பு சார்பாகும்.

7. (4) -ன்படி வகைக்கெழுவின் எல்லா விதிகளும் **(கூட்டல், பெருக்கல் மற்றும் சங்கிலி விதி)** சூத்திரங்களும் பகுதி வகைக்கெழுவிற்கும் பொருந்தும்.

ஒரு மாறியில் அமைந்த சார்பிற்கு ஒரு புள்ளியில் வகைக்கெழு இருக்குமானால் அந்தப் புள்ளியில் சார்பு தொடர்ச்சித் தன்மை பெற்றிருக்கும் என்பதை நினைவு கூர்வோம். x, y என்ற இரு மாறிகளில் அமைந்த சார்பு F -ன் $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ மற்றும் $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ -ஐ வரையறை செய்தோம். (x,y) இல் F -க்கு பகுதி வகைக்கெழு காணத்தக்கது எனில், (x,y) இல் F தொடர்ச்சித் தன்மை உள்ளதாகுமா? இது எப்போதும் மெய்யாக இருக்க வேண்டியது அவசியமில்லை என்பதை பின்வரும் எடுத்துக்காட்டு விளக்குகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 8.11

$xy \neq 0$ எனில் $f(x,y)=0$ மற்றும் $xy=0$ எனில் $f(x,y)=1$ என்க.

(i) மதிப்பிடுக : $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(ii) $(0,0)$ இல் f தொடர்ச்சியற்றது என நிறுவுக.

தீர்வு

$\mathbb{R}^2$ இல் x, y-அச்சுகளின் மீது f -ன் மதிப்பு 1 என்பதையும் மற்ற எல்லா இடங்களிலும் 0 என்பதையும் கவனிக்க.

(i)
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h} = 0;$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{1-1}{k} = 0.$$

(ii) இதனை நிறுவ $y=x$ என்ற நேர்கோட்டுப் பாதையில் $(x,y)\to(0,0)$ எனும்போது f -ன் எல்லை மதிப்பை கணக்கிடுவோம். $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$; ஏனெனில் $y=x$ என்ற நேர்கோட்டுப் பாதையில் $x\neq 0$ எனில் $f(x,y)=0$. ஆனால் $f(0,0)=1\neq 0$; எனவே $(0,0)$ இல் f தொடர்ச்சியற்றது. ■

எடுத்துக்காட்டு 8.12

அனைத்து $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ -க்கும் $F(x,y)=x^3y+y^2x+7$ எனில் $\frac{\partial F}{\partial x}(-1,3)$ மற்றும் $\frac{\partial F}{\partial y}(-2,1)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

முதலில் $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ கணக்கிட்டு அதனை $(-1,3)$ இல் மதிப்பிடுவோம். y -ஐ மாறிலியாகக் கொண்டு x -ஐ பொருத்து வகையிடுவோம்.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial(x^3y+y^2x+7)}{\partial x}=\frac{\partial(x^3y)}{\partial x}+\frac{\partial(y^2x)}{\partial x}+\frac{\partial(7)}{\partial x}$$

$$=3x^2y+y^2+0$$

$$=3x^2y+y^2.$$

எனவே $\frac{\partial F}{\partial x}(-1,3)=3(-1)^2 3+3^2=18$. y -ஐப் பொருத்து பகுதி வகைக்கெழு காண

இதுபோல் $$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial(x^3y+y^2x+7)}{\partial y}=\frac{\partial(x^3y)}{\partial y}+\frac{\partial(y^2x)}{\partial y}+\frac{\partial(7)}{\partial y}$$

$$=x^3+2yx+0$$

$$=x^3+2yx.$$

எனவே $\frac{\partial F}{\partial y}(-2,1)=(-2)^3+2(1)(-2)=-12$. ■

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=3x^2y+y^2$ என்பது மறுபடியும் இரு மாறிகளைக் கொண்ட சார்பாகும். எனவே இந்தச் சார்பின் x -ஐ பொருத்து அல்லது y -ஐ பொருத்து பகுதி வகைக்கெழு காண முடியும். உதாரணமாக $G(x,y)=3x^2y+y^2$ என எடுத்துக் கொண்டால் $\frac{\partial G}{\partial x}=6xy$. $G(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}$ என்பதால் $\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=6xy$ எனக் கிடைக்கிறது. இது $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ எனக் குறிக்கப்படும். இது F -இன் x -ஐப் பொருத்த **இரண்டாம் வரிசைப் பகுதி வகைக்கெழு** என அழைக்கப்படுகிறது.

மேலும் $\frac{\partial G}{\partial y}=3x^2+2y$, $G(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}$ என்பதால் $\frac{\partial G}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=3x^2+2y$. இதை $\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}$ எனக் குறிக்கலாம். இது x,y -ஐப் பொருத்த F -ன் **கலப்புப் பகுதி வகைக்கெழு** என அழைக்கப்படுக்கிறது.

இதுபோல் $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)=3x^2+2y$ எனக் கணக்கிடலாம்.

மேலும் $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ -ஐ y -ஐப் பொருத்து பகுதி வகைக்கெழு காண $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ எனக் கிடைக்கிறது. இது F -ன் y -ஐப் பொருத்த இரண்டாம் வரிசை பகுதி வகைக்கெழு காண எனப்படும். எனவே ஏதேனும் ஒரு உட்கணம் $\{(x,y)\,|\,a<x<b, c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2$ மீது வரையறுக்கப்பட்ட F என்ற சார்பிற்கு பின்வரும் குறியீடுகள் உள்ளன :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=F_{xx},\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)=F_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=F_{yx},\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)=F_{yy}$$

மேற்கண்ட அனைத்தும் F -ன் இரண்டாம் வரிசை பகுதி வகைக்கெழுக்கள் எனப்படும். இவ்வாறு அதிகப்படியான வரிசையுடைய பகுதி வகைக்கெழுக்களையும் வரையறுக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக . $\frac{\partial^3 F}{\partial y^2\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right)$, மற்றும் $\frac{\partial^3 F}{\partial x\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right)$.

பகுதி வகைக்கெழுக்களுக்கான மேலும் ஒரு எடுத்துக்காட்டைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8.13

அனைத்து $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ -க்கும் $f(x, y) = \sin(xy^2) + e^{x^3+5y}$ எனில் $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ -ஐ முதலில் கணக்கிடுவோம். f என்பது இரு சார்புகளின் கூட்டல் எனவே

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\sin(xy^2) + \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x^3+5y}\right)\\ &= \cos(xy^2)\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + e^{x^3+5y}\frac{\partial}{\partial x}(x^3+5y)\\ &= \cos(xy^2)y^2 + e^{x^3+5y}3x^2.\end{aligned}$$

இதுபோல்,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\sin(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x^3+5y}\right)\\ &= \cos(xy^2)\frac{\partial}{\partial y}(xy^2) + e^{x^3+5y}\frac{\partial}{\partial y}(x^3+5y)\\ &= \cos(xy^2)2xy + 5e^{x^3+5y}.\end{aligned}$$

அடுத்து,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\cos(xy^2) + 3x^2e^{x^3+5y}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial y}(y^2\cos(xy^2)) + \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2e^{x^3+5y}\right)\\ &= 2y\cos(xy^2) + y^2\left(-\sin(xy^2)2xy\right) + 3x^2e^{x^3+5y}5\\ &= 2y\cos(xy^2) - 2xy^3\sin(xy^2) + 15x^2e^{x^3+5y}.\end{aligned}$$

இறுதியாக,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos(xy^2)2xy + 5e^{x^3+5y}\right)\\ &= -\sin(xy^2)y^2 2xy + \cos(xy^2)2y + 5e^{x^3+5y}3x^2\\ &= 2y\cos(xy^2) - 2xy^3\sin(xy^2) + 15x^2e^{x^3+5y}.\end{aligned}$$

■

இங்கு முதலில் நாம் கூட்டல் விதியையும் அதையடுத்து சங்கிலி விதியையும் மூன்றாவதாக பெருக்கல் விதியையும் பயன்படுத்தியுள்ளோம் என்பதைக் கவனிக்க. மேலும் $f_{xy} = f_{yx}$ ஆக உள்ளதையும் காணலாம். இது தற்செயலானதா? அல்லது எப்போதும் உண்மையானதா? உண்மையில் சில புள்ளிகளில் சில சார்புகளுக்கு $f_{xy} \neq f_{yx}$ ஆக இருக்கும். பின்வரும் தேற்றம் $f_{xy} = f_{yx}$ ஆக இருப்பதற்கான நிபந்தனையை தரும்.

தேற்றம் 8.1 (கிளெய்ராட்டின் தேற்றம்)

$A = \{(x,y) \mid a < x < b, c < y < d\} \subset \mathbb{R}^2$, $F : A \to \mathbb{R}$ என்ற சார்பு A இல் f_{xy} மற்றும் f_{yx} காணப்பெற்று அவை தொடர்ச்சியானதாகவும் இருக்குமானால் A இல் $f_{xy} = f_{yx}$ என்பதாக இருக்கும்.

இந்நிரூபணம் இப்பாடப்பகுதியில் தவிர்க்கப்படுகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 8.14

அனைத்து $(x,y) \in \mathbb{R}^2$-க்கும் $w(x,y) = xy + \dfrac{e^y}{y^2+1}$ எனில் $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$ மற்றும் $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ காண்க.

தீர்வு

முதலில் $\dfrac{\partial w}{\partial x}(x,y)$ காண்போம்.

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial (xy)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\dfrac{e^y}{y^2+1}\right)}{\partial x}.$$

இதிலிருந்து $\dfrac{\partial w}{\partial x}(x,y) = y + 0$ எனவே $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}(x,y) = 1$ எனக் கிடைக்கின்றது.

மேலும், $$\frac{\partial w}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial (xy)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\dfrac{e^y}{y^2+1}\right)}{\partial y}.$$

$$= x + \frac{(y^2+1)e^y - e^y 2y}{(y^2+1)^2}.$$

எனவே $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(x,y) = 1$ ■

வரையறை 8.9

$A = \{(x,y) \mid a < x < b, c < y < d\} \subset \mathbb{R}^2$ என்க. சார்பு $u : A \to \mathbb{R}^2$ என்பது $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \forall (x,y) \in A$ எனுமாறு இருக்குமானால் u ஆனது A-ல் ***சீரானது*** எனலாம். இது ***இலாபிலாஸின்*** சமன்பாடு எனப்படும்.

இலாபிலாஸின் சமன்பாடு வெப்பக்கடத்தல், மின்னியல்புலம், திரவ ஓட்டம் ஆகியவற்றில் இயல்பாக நிகழ்கின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 8.15

அனைத்து $(x,y) \in \mathbb{R}^2$-க்கும் $u(x,y) = e^{-2y}\cos(2x)$ எனில் $\mathbb{R}^2$ இல் u சீரானது என நிறுவுக.

தீர்வு

இங்கு u என்ற சார்பு இலாபிலாஸின் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கின்றது எனக் காட்ட வேண்டும். $u_x(x,y) = e^{-2y}(-2)\sin(2x)$ எனவே $u_{xx}(x,y) = e^{-2y}(-2)(2)\cos(2x)$ ஆகும்.

இதேபோல் $u_y(x,y) = e^{-2y}(-2)\cos(2x)$ எனவே $u_{yy}(x,y) = (-2)(-2)e^{-2y}\cos(2x)$ ஆகும்.

$u_{xx} + u_{yy} = -4e^{-2y}\cos(2x) + 4e^{-2y}\cos(2x) = 0$. எனவே $\mathbb{R}^2$ இல் u சீரானது. ■

பயிற்சி 8.4

1. பின்வரும் சார்புகளுக்கு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளில் பகுதி வகைக்கெழுக்கள் காண்க.

   (i) $f(x,y)=3x^2-2xy+y^2+5x+2,\quad (2,-5)$ (ii) $g(x,y)=3x^2+y^2+5x+2,\quad (1,-2)$

   (iii) $h(x,y,z)=x\sin(xy)+z^2x,\quad \left(2,\frac{\pi}{4},1\right)$ (iv) $G(x,y)=e^{x+3y}\log(x^2+y^2),(-1,1)$

2. பின்வரும் சார்புகளுக்கு f_x, f_y காண்க. மேலும் $f_{xy}=f_{yx}$ எனக் காட்டுக.

   (i) $f(x,y)=\dfrac{3x}{y+\sin x}$ (ii) $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ (iii) $f(x,y)=\cos(x^2-3xy)$

3. If $U(x,y,z)=\dfrac{x^2+y^2}{xy}+3z^2y$, எனில் $\dfrac{\partial U}{\partial x},\dfrac{\partial U}{\partial y}$, மற்றும் $\dfrac{\partial U}{\partial z}$ -ஐக் காண்க.

4. If $U(x,y,z)=\log(x^3+y^3+z^3)$, எனில் $\dfrac{\partial U}{\partial x}+\dfrac{\partial U}{\partial y}+\dfrac{\partial U}{\partial z}$ -ஐக் காண்க.

5. பின்வரும் சார்புகளுக்கு g_{xy}, g_{xx}, g_{yy} மற்றும் g_{yx} ஆகியவற்றைக் காண்க.

   (i) $g(x,y)=xe^y+3x^2y$ (ii) $g(x,y)=\log(5x+3y)$

   (iii) $g(x,y)=x^2+3xy-7y+\cos(5x)$

6. $w(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},(x,y,z)\neq(0,0,0)$ எனில் $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0$ எனக் காட்டுக.

7. $V(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y)$ எனில் $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0$ என நிறுவுக.

8. $w(x,y)=xy+\sin(xy)$ எனில் $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$ என நிறுவுக.

9. $v(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+3xyz$ எனில் $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial z\partial y}$ என நிறுவுக.

10. ஒரு நிறுவனம் ஒவ்வொரு வாரமும் இரு விதமான கணிப்பான்களை உற்பத்தி செய்கின்றது. அவற்றில் A வகை கணிப்பான்கள் x எண்ணிக்கையும், B வகை கணிப்பான்கள் y எண்ணிக்கையும் உள்ளன. வார வரவு மற்றும் செலவுச் சார்புகள் (ரூபாயில்) முறையே $R(x,y)=80x+90y+0.04xy-0.05x^2-0.05y^2$ மற்றும் $C(x,y)=8x+6y+2000$ எனத் தரப்பட்டுள்ளன.

    (i) இலாபச் சார்பு $P(x,y)$ -ஐக் காண்க.

    (ii) $\dfrac{\partial P}{\partial x}(1200,1800)$ மற்றும் $\dfrac{\partial p}{\partial y}(1200,1800)$ ஆகியவற்றைக் கண்டு முடிவுகளை விளக்குக.

8.6 பல மாறிகள் கொண்ட சார்பின் நேரியல் தோராய மதிப்பு மற்றும் வகையீடு (Linear Approximation and Differential of a function of several variables)

இந்த அத்தியாயத்தில் ஆரம்பத்தில் ஒரு மாறியில் அமைந்த சார்பின் நேரியல் தோராய மதிப்பு மற்றும் வகையீடு பற்றி அறிந்தோம். இங்கு அதே போன்ற கருத்துக்களை இரண்டு மற்றும் மூன்று மாறிகளில் அமைந்த சார்புகளுக்குக் காண்போம். பொதுவாக, இதேபோன்று பல மாறிகளுடைய சார்பிற்கும் வரையறுக்கலாம்.

வரையறை 8.10

$A = \{(x, y) \mid a < x < b, c < y < d\} \subset \mathbb{R}^2, F : A \to \mathbb{R}$, மற்றும் $(x_0, y_0) \in A$ என்க.

(i) $(x_0, y_0) \in A$ என்ற புள்ளியில் F –ன் நேரியல் தோராய மதிப்பு

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} (y - y_0) \qquad \text{... (12)}$$

(ii) F –ன் வகையீடு

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)dy, \qquad \text{... (13)}$$

இங்கு $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

இங்கு மூன்று மாறிகளுடைய சார்பின் நேரியல் தோராய மதிப்பு மற்றும் வகையீடு ஆகியவற்றைப் பற்றி காண்போம். பல மாறிகளுடைய மெய்மதிப்புச் சார்புகளுக்கு நாம் நேரியல் தோராய மதிப்பும் வகையீடும் வரையறுக்க முடியும் எனினும் மூன்று மாறிகள் உடைய சார்போடு நாம் நிறுத்திக் கொள்வோம்.

வரையறை 8.11

$A = \{(x, y, z) \mid a < x < b, c < y < d,\ e < z < f\} \subset \mathbb{R}^3, F : A \to \mathbb{R}$ மற்றும் $(x_0, y_0, z_0) \in A$ என்க.

(i) $(x_0, y_0, z_0) \in A$ என்ற புள்ளியில் F ன் நேரியல் தோராய மதிப்பு

$$F(x, y, z) = F(x_0, y_0, z_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0, z_0)} (x - x_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0, z_0)} (y - y_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(x_0, y_0, z_0)} (z - z_0); \qquad \text{...(14)}$$

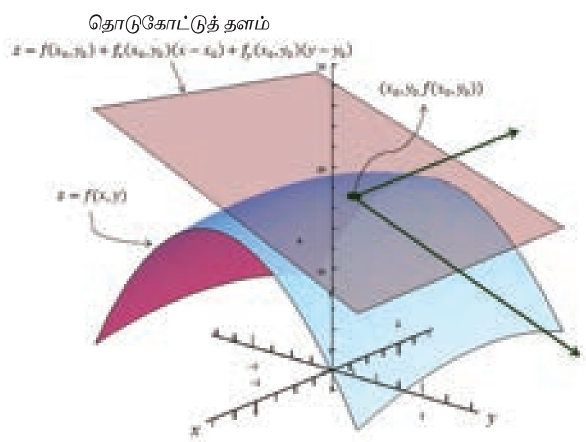
என வரையறுக்கப்படுகிறது

(ii) F –ன் வகையீடு

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z)dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)dy + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)dz, \qquad \text{...(15))}$$

இங்கு $dx = \Delta x, dy = \Delta y$ மற்றும் $dz = \Delta z$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

வடிவக் கணிதத்தின்படி, ஒரு மாறியில் அமைந்த சார்பு f –ன், x_0 என்ற புள்ளிக்கான நேரியல் தோராய மதிப்பு x_0 என்ற புள்ளியில் $y = f(x)$ –ன் வரைபடத்திற்கான தொடுகோட்டைக் குறிக்கின்றது. இதுபோல் இரண்டு மாறிகளில் அமைந்த சார்பு F –ன் (x_0, y_0) என்ற புள்ளிக்கான நேரியல் தோராய மதிப்பு (x_0, y_0) என்ற புள்ளியில் $z = F(x, y)$ என்ற வரைபடத்தின் தொடு தளத்தைக் குறிக்கின்றது.



படம் 8.13
தொடு தளம் மூலம் நேரியல் தோராய மதிப்பு

எடுத்துக்காட்டு 8.16

$w(x,y,z)=x^2y+y^2z+z^2x,\ x,y,z\in\mathbb{R}$, எனில் வகையீடு dw காண்க.

தீர்வு

முதலில் w_x, w_y , மற்றும் w_z காண்போம்.

$w_x=2xy+z^2, w_y=2yz+x^2$ மற்றும் $w_z=2zx+y^2$.

எனவே (15)–ன் படி வகையீடு

$$dw=(2xy+z^2)dx+(2yz+x^2)dy+(2zx+y^2)dz\,. \quad ■$$

எடுத்துக்காட்டு 8.17

$U(x,y,z)=x^2-xy+3\sin z,\ x,y,z\in\mathbb{R}$ எனில் $(2,-1,0)$ இல் U இன் நேரியல் தோராய மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

(14)–ன் படி நேரியல் தோராய மதிப்பு

$$L(x,y,z)=U(x_0,y_0,z_0)+\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0)+\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0)+\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(z-z_0)\,.$$

$U_x=2x-y, U_y=-x$ மற்றும் $U_z=3\cos z$.

$(x_0,y_0,z_0)=(2,-1,0)$, எனவே $U_x(2,-1,0)=5,\ U_y(2,-1,0)=-2$ மற்றும் $U_z(2,-1,0)=3$.

ஆகவே, $L(x,y,z)=6+5(x-2)-2(y+1)+3(z-0)=5x-2y+3z-6$ என்பது $(2,-1,0)$ இல் U –ன் நேரியல் தோராய மதிப்பாகும். ■

பயிற்சி 8.5

1. $w(x,y)=x^3-3xy+2y^2,\ x,y\in\mathbb{R}$ எனில் $(1,-1)$ இல் w –ன் நேரியல் தோராய மதிப்பு காண்க.
2. $z(x,y)=x^2y+3xy^4,\ x,y\in\mathbb{R}$ எனில் $(2,-1)$ இல் z –ன் நேரியல் தோராய மதிப்பு காண்க.
3. $v(x,y)=x^2-xy+\frac{1}{4}y^2+7,\ x,y\in R$ எனில் வகையீடு dv –ஐக் காண்க.
4. $V(x,y,z)=xy+yz+zx,\ x,y,z\in\mathbb{R}$ எனில் வகையீடு dV –ஐக் காண்க.

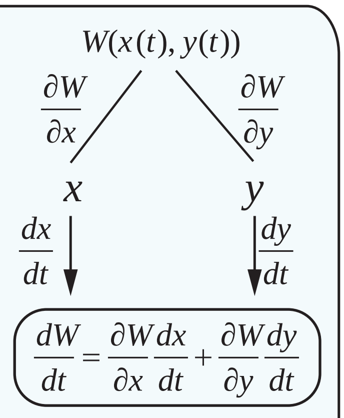
8.6.1 சார்பினது சார்பு விதி (Function of Function Rule)

இரு மாறிகள் x,y இல் அமைந்த சார்பு F என்க. சில நேரங்களில் இந்த மாறிகள் அதே மதிப்பகத்தைக் கொண்ட வேறு ஒரு மாறியின் சார்பாகவும் இருக்கலாம், எனவே சார்பு F ஒரே ஒரு மாறியைத்தான் சார்ந்துள்ளது. எனவே சார்பு F –ஐ நாம் ஒரு மாறி சார்பாகக் கருதி $\frac{dF}{dt}$ –ஐ பற்றிப் படிக்கலாம். இது தற்செயலானது அல்ல, இதை நிரூபிக்க முடியும்.

தேற்றம் 8.2

$W(x, y)$ என்பது $\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}$ என்ற பகுதி வகைக்கெழுக்கள் உள்ள x, y என்ற இரு மாறிகளில் அமைந்த சார்பு என்க. x, y என்ற இரு மாறிகளும் t என்ற ஒரு மாறியைப் பொருத்து வகையிடக்கூடிய சார்புகள் எனில் t-ஐப் பொருத்து W-ம் வகையிடக்கூடிய சார்பாகும்.

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial W}{\partial y}\frac{dy}{dt} \qquad \ldots(16)$$



படம் 8.14

மேற்கண்ட தேற்றத்தை விளக்க ஓர் எடுத்துக்காட்டைக் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 8.18

$F(x, y) = x^2 - 2y^2 + 2xy$ மற்றும் $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t, t \in [0, 2\pi]$ என்ற சார்பிற்கு மேற்கண்ட தேற்றத்தைச் சரிபார்க்கவும்.

தீர்வு

$F(x,y) = x^2 - 2y^2 + 2xy$ மற்றும் $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ என்க.

$F(x, y) = \cos^2 t - 2\sin^2 t + 2\cos t \sin t$ என்பதால் F என்பது t என்ற ஒரு மாறியில் அமைந்த சார்பாகும். சங்கிலி விதியைப் பயன்படுத்த

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= 2\cos t(-\sin t) - 4\sin t\cos t + 2(-\sin^2 t + \cos^2 t) \\ &= -6\cos t \sin t + 2(-\sin^2 t + \cos^2 t). \end{aligned}$$

Z4J4D2

மறுபுறம்

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} &= (2x + 2y)\frac{dx}{dt} + (2x - 4y)\frac{dy}{dt} \\ &= 2(\cos t + \sin t)(-\sin t) + 2(\cos t - 2\sin t)(\cos t) \\ &= -6\cos t \sin t + 2(-\sin^2 t + \cos^2 t) \\ &= \frac{dF}{dt}. \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 8.19

$g(x, y) = x^2 - yx + \sin(x + y)$, $x(t) = e^{3t}$, $y(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$ எனில் $\frac{dg}{dt}$ -ஐக் காண்க.

தீர்வு

கிளை வரைபடத்தைப் பயன்படுத்தி $\frac{dg}{dt}$ -ஐக் காண்போம்.

இதற்கு முதலில் $\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{dx}{dt}$ மற்றும் $\frac{dy}{dt}$ -ஐக் காண்போம்.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x - y + \cos(x + y), \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -x + \cos(x + y), \quad \frac{dx}{dt} = 3e^{3t} \text{ மற்றும் } \frac{dy}{dt} = 2t.$$

எனவே $$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= \left(2x-y+\cos(x+y)\right)3e^{3t}+\left(-x+\cos(x+y)\right)(2t)$$

$$= (2e^{3t}-t^2+\cos(e^{3t}+t^2))3e^{3t}+(-e^{3t}+\cos(e^{3t}+t^2))(2t)$$

$$= 6e^{6t}-3t^2e^{3t}+3e^{3t}\cos(e^{3t}+t^2)-2te^{3t}+2t\cos(e^{3t}+t^2)\,.$$ ■

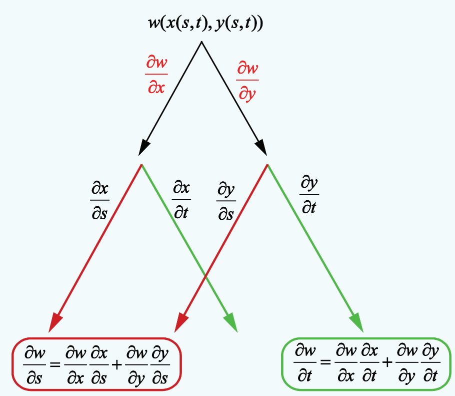
மேலும் $W(x,y)$ என்ற சார்பு சில நேரங்களில் $x = x(s,t)$, மற்றும் $y = y(s,t)$, $s,t \in \mathbb{R}$ எனவும் இருக்கலாம். அப்போது W என்ற சார்பு s மற்றும் t இவற்றைச் சார்ந்துள்ளதாக கருதலாம். x, y என்ற இரு மாறிகளுக்கும் s,t -ஐப் பொருத்து பகுதி வகைக்கெழுவும், W -க்கு x,y ஐப் பொருத்து பகுதி வகைக்கெழுவும் உள்ளது எனில் பின்வரும் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி W -க்கு s மற்றும் t -ஐப் பொருத்து பகுதி வகைக்கெழுவைக் கணக்கிட முடியும்.

தேற்றம் 8.3

$W(x,y)$ என்பது x,y என்ற இரு மாறிகளில் அமைந்த $\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}$ என்ற பகுதி வகைக்கெழுக்கள் கொண்ட சார்பு என்க. $x = x(s,t)$ மற்றும் $y = y(s,t)$, $s,t \in \mathbb{R}$ என்ற இரு மாறிகளுக்கும் s மற்றும் t-ஐப் பொருத்த பகுதி வகைக்கெழுக்கள் உண்டு எனில்,

$$\frac{\partial W}{\partial s} = \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}, \qquad \dots (17)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}. \qquad \dots (18)$$



படம் 8.15

இப்பாடப்பகுதியில் மேற்கண்ட தேற்றத்திற்கு நிரூபணம் தேவையில்லை எனக் கருதி விடப்படுகின்றது. மேற்கண்ட தேற்றம் மிகவும் பயனுள்ளது. எடுத்துக்காட்டாக $x = r\cos\theta$, மற்றும் $y = \sin\theta, r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ என்ற சூழலைக் கருத்தில் கொள்வோம். (கார்டீசியன் வடிவத்திலிருந்து துருவ வடிவத்திற்கு மாற்ற) மேற்கண்ட தேற்றத்தை n மாறிகள் கொண்ட சார்புகளுக்கும் பொதுமைப்படுத்தலாம்.

சில எடுத்துக்காட்டுகளைக் காண்போம் .

எடுத்துக்காட்டு 8.20

சார்பு $g(x,y) = 2y + x^2, x = 2r - s, y = r^2 + 2s, r, s \in \mathbb{R}$ எனில் $\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial s}$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

கிளை வரைபடத்தைப் பயன்படுத்தி $\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial s}$ -ஐக் காண்போம்.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial g}{\partial y} = 2, \ \frac{\partial x}{\partial r} = 2, \ \frac{\partial x}{\partial s} = -1, \ \frac{\partial y}{\partial r} = 2r \ \text{, மற்றும் } \frac{\partial y}{\partial s} = 2\,.$$

தற்போது $$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = 2x(2)+2(2r) = 12r-4s\,.$$

மேலும், $$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = 2x(-1)+(2)2 = 2s-4r+4\,.$$ ■

பயிற்சி 8.6

1. சார்பு $u(x,y)=x^2y+3xy^4$, $x=e^t$ மற்றும் $y=\sin t$, எனில் $\frac{du}{dt}$ -ஐக் காண்க மேலும் $t=0$ -ல் அதன் மதிப்பைக் காண்க.
2. $u(x,y,z)=xy^2z^3$, $x=\sin t$, $y=\cos t$, $z=1+e^{2t}$ எனில் $\frac{du}{dt}$ -ஐக் காண்க
3. $w(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, $x=e^t$, $y=e^t\sin t$ மற்றும் $z=e^t\cos t$, எனில் $\frac{dw}{dt}$ -ஐக் காண்க
4. $U(x,y,z)=xyz$, $x=e^{-t}$, $y=e^{-t}\cos t$, $z=\sin t$, $t\in\mathbb{R}$ எனில் $\frac{dU}{dt}$ -ஐக் காண்க
5. $w(x,y)=6x^3-3xy+2y^2$, $x=e^s$, $y=\cos s$, $s\in\mathbb{R}$ எனில் $\frac{dw}{ds}$ -ஐக் காண்க மற்றும் $s=0$ இல் அதன் மதிப்பைக் காண்க.
6. $z(x,y)=x\tan^{-1}(xy)$, $x=t^2$, $y=se^t$, $s,t\in\mathbb{R}$ எனில் $\frac{\partial z}{\partial s}$ மற்றும் $\frac{\partial z}{\partial t}$ ஆகியவற்றை $s=t=1$ இல் காண்க.
7. $U(x,y)=e^x\sin y$ என்க. இங்கு $x=st^2$, $y=s^2t$, $s,t\in\mathbb{R}$. $\frac{\partial U}{\partial s},\frac{\partial U}{\partial t}$ காண்க மற்றும் $s=t=1$ இல் அவற்றை மதிப்பிடுக.
8. $z(x,y)=x^3-3x^2y^3$ என்க. இங்கு $x=se^t$, $y=se^{-t}$, $s,t\in\mathbb{R}$. $\frac{\partial z}{\partial s}$ மற்றும் $\frac{\partial z}{\partial t}$ -ஐக் காண்க.
9. $W(x,y,z)=xy+yz+zx$, $x=u-v$, $y=uv$, $z=u+v$, $u,v\in\mathbb{R}$ எனில் $\frac{\partial W}{\partial u},\frac{\partial W}{\partial v}$ காண்க மற்றும் $\left(\frac{1}{2},1\right)$ இல் அவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

8.6.2 சமபடித்தான சார்புகள் மற்றும் ஆய்லரின் தேற்றம் (Homogeneous Functions and Euler's Theorem)

வரையறை 8.12

(a) $A=\{(x,y)\mid a<x<b,\ c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2$, $F:A\to\mathbb{R}$ என்க. பொருத்தமாக வரையறுக்கப்பட்ட λ,x,y -க்கு $(\lambda x,\lambda y)\in A$ எனில் $F(\lambda x,\lambda y)=\lambda^pF(x,y)$, $\lambda\in\mathbb{R}$ எனுமாறு p என்ற மாறிலி இருக்குமானால் சார்பு F என்பது A -ன் மீதான சமபடித்தான சார்பாக இருக்கும். இந்த மாறிலி p, சார்பு F -ன் படி எனப்படும்..

(b) $B=\{(x,y,z)\mid a<x<b,\ c<y<d,\ u<z<v\}\subset\mathbb{R}^3$, $G:B\to\mathbb{R}$ என்க. பொருத்தமாக வரையறுக்கப்பட்ட λ,x,y,z -க்கு $(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\in B$ எனில் $G(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^pG(x,y,z)$ $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}$ எனுமாறு p என்ற ஒரு மாறிலி இருக்குமானால் சார்பு G என்பது B -ன் மீதான சமபடித்தான சார்பாக இருக்கும். இந்த மாறிலி p, G -ன் படி எனப்படும்.

குறிப்பு

எந்த மாறியைக் கொண்டும் வகுக்கக் கூடும் என்பதால் பூச்சியத்தால் வகுப்பதைத் தவிர்க்கவே λ,x,y,z என்பன பொருத்தமாக வரையறுக்கப்பட்டதாகக் கூறுகின்றோம்.

இதுபோன்ற சார்புகள் சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளில் (அத்தியாயம் 10) முக்கியமானவைகளாகும். சில எடுத்துக்காட்டுகளைக் காண்போம்

$$F(x, y) = x^3 - 2y^3 + 5xy^2,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ என்க. பின்பு}$$

$$F(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^3 - 2(\lambda y)^3 + 5(\lambda x)(\lambda y)^2 = \lambda^3(x^3 - 2y^3 + 5xy^2)$$

எனவே F என்பது படி 3 உடைய சமபடித்தான சார்பாகும்.

மறுபுறம் $G(x, y) = e^{x^2} + 3y^2$ என்பது சமபடித்தான சார்பு அல்ல

ஏன் எனில் ஏதேனும் $\lambda \neq 1$ மற்றும் ஏதேனும் p -க்கு

$$G(\lambda x, \lambda y) = e^{(\lambda x)^2} + 3(\lambda y)^2 \neq \lambda^p G(x, y)$$

எடுத்துக்காட்டு 8.21

சார்பு $F(x, y) = \dfrac{x^2 + 5xy - 10y^2}{3x + 7y}$ படி 1 உடைய சமபடித்தான சார்பு எனக்காட்டுக.

தீர்வு எல்லா $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2 + 5(\lambda x)(\lambda y) - 10(\lambda y)^2}{3\lambda x + 7\lambda y} = \frac{\lambda^2}{\lambda}\left(\frac{x^2 + 5xy - 10y^2}{3x + 7y}\right) = \lambda F(x, y)$$

எனவே F ஆனது படி 1 உடைய சமபடித்தான சார்பு ஆகும்.

லியோனார்டு ஆய்லரின் சமபடித்தான சார்புகள் மீதான தேற்றத்தைக் கீழே காண்போம்.

வரையறை 8.13 (ஆய்லர்)

$A = \{(x, y) \mid a < b,\ c < y < d\} \subset \mathbb{R}^2$, $F : A \to \mathbb{R}^2$ என்ற சார்பு A-ன் மீது தொடர்ச்சியான பகுதி வகைக்கெழு உடையதாகவும் படி p உடைய சமபடித்தானச் சார்பாகவும் இருக்குமானால்

$$x\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = pF(x, y)\ \forall\ (x, y) \in A.$$

$B = \{(x, y, z) \mid a < x < b,\ c < y < d,\ u < z < v\} \subset \mathbb{R}^3$, $F : B \to \mathbb{R}^3$ என்க. F என்ற சார்பு B-ன் மீது தொடர்ச்சியான பகுதி வகைக்கெழு உடையதாகவும் படி p உடைய சமபடித்தான சார்பாகவும் இருக்குமானால்

$$x\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) + y\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) + z\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = pF(x, y, z)\ \forall\ (x, y, z) \in B.$$

மேற்கண்ட தேற்றம் n மாறிகளைக் கொண்ட எந்தவொரு சமபடித்தான சார்புக்கும் பொருந்தும். இது முதல் வகை பகுதி வகைக்கெழு காண்பதில் பயனுள்ளதாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.22

$u = \sin^{-1}\left(\dfrac{x + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right)$, எனில் $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\tan u$ என நிறுவுக.

தீர்வு

இங்கு கொடுக்கப்பட்ட சார்பு u சமபடித்தானது அல்ல. எனவே ஆய்லரின் தேற்றம் சார்பு u -க்கு பயன்படுத்த முடியாது. இருப்பினும் $f(x, y) = \dfrac{x + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \sin u$ என்பது சமபடித்தானது. ஏனெனில்

$$f(tx, ty) = \frac{tx + ty}{\sqrt{tx} + \sqrt{ty}} = t^{1/2} f(x, y),\ \forall\ x, y, t \geq 0.$$

இங்கு f படி $\frac{1}{2}$ உடைய சமபடித்தான சார்பாகும். எனவே, ஆய்லரின் தேற்றப்படி

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}f(x,y).$$

தற்போது $f=\sin u$ எனப் பிரதியிட,

$$x\frac{\partial(\sin u)}{\partial x}+y\frac{\partial(\sin u)}{\partial y} = \frac{1}{2}\sin u$$

$$x\cos u\frac{\partial u}{\partial x}+y\cos u\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\sin u \qquad \text{... (19)}$$

இருபுறமும் $\cos u$ ஆல் வகுக்க

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\tan u.$$

குறிப்பு :

இந்தக் கணக்கை நேரிடையான கணக்கீடுகள் மூலமும் காணலாம் ; ஆனால் அந்தக் கணக்கீடு நீளமானதாக இருக்கும்.

பயிற்சி 8.7

1. பின்வரும் ஒவ்வொரு சார்பும் சமபடித்தானதா இல்லையா எனக்கண்டு சமபடித்தானது எனில் அதன் படியையும் காண்க.

   (i) $f(x,y)=x^2y+6x^3+7$ (ii) $h(x,y)=\dfrac{6x^2y^3-\pi y^5+9x^4y}{2020x^2+2019y^2}$

   (iii) $g(x,y,z)=\dfrac{\sqrt{3x^2+5y^2+z^2}}{4x+7y}$ (iv) $U(x,y,z)=xy+\sin\left(\dfrac{y^2-2z^2}{xy}\right)$.

2. $f(x,y)=x^3-2x^2y+3xy^2+y^3$ என்ற சார்பு சமபடித்தானது என நிறுவுக. f –ன் படியைக் கணக்கிட்டு f –க்கு ஆய்லரின் தேற்றத்தைச் சரிபார்க்க.

3. $g(x,y)=x\log\left(\dfrac{y}{x}\right)$ என்ற சார்பு சமபடித்தானது என நிறுவுக; g –ன் படியைக் கணக்கிட்டு, g –க்கு ஆய்லரின் தேற்றத்தைச் சரிபார்க்க.

4. $u(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x+y}}$, எனில் $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{3}{2}u$ என நிறுவுக.

5. $v(x,y)=\log\left(\dfrac{x^2+y^2}{x+y}\right)$, எனில் $x\dfrac{\partial v}{\partial x}+y\dfrac{\partial v}{\partial y}=1$ என நிறுவுக.

6. $w(x,y,z)=\log\left(\dfrac{5x^3y^4+7y^2xz^4-75y^3z^4}{x^2+y^2}\right)$, எனில் $x\dfrac{\partial w}{\partial x}+y\dfrac{\partial w}{\partial y}+z\dfrac{\partial w}{\partial z}$ –ஐக் காண்க.

பயிற்சி 8.8

கொடுக்கப்பட்ட நான்கு மாற்று விடைகளிலிருந்து சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினைத் தேர்ந்தெடுக்கவும் :

1. ஒரு வட்ட வடிவ வார்ப்பின் ஆரம் 10 செமீ. ஆரத்தின் அளவில் தோராயமாக 0.02 செமீ பிழை உள்ளது எனில் அதன் பரப்பில் ஏற்படும் தோராய சதவீதப் பிழையைக் காண்க.

   (1) 0.2% (2) 0.4% (3) 0.04% (4) 0.08%

2. 31–ன் 5ஆம் படி மூல சதவீதப் பிழை தோராயமாக, 31–ன் சதவீதப் பிழையைப் போல் எத்தனை மடங்காகும்?

   (1) $\frac{1}{31}$ (2) $\frac{1}{5}$ (3) 5 (4) 31

3. $u(x,y)=e^{x^2+y^2}$, எனில் $\frac{\partial u}{\partial x}$ –ன் மதிப்பு

   (1) $e^{x^2+y^2}$ (2) $2xu$ (3) x^2u (4) y^2u

Z6M6R8

4. $v(x,y)=\log(e^x+e^y)$, எனில் $\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$ –ன் மதிப்பு

   (1) e^x+e^y (2) $\frac{1}{e^x+e^y}$ (3) 2 (4) 1

5. $w(x,y)=x^y, x>0$, எனில் $\frac{\partial w}{\partial x}$ –ன் மதிப்பு

   (1) $x^y \log x$ (2) $y \log x$ (3) yx^{y-1} (4) $x \log y$

6. $f(x,y)=e^{xy}$, எனில் $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ –ன் மதிப்பு

   (1) xye^{xy} (2) $(1+xy)e^{xy}$ (3) $(1+y)e^{xy}$ (4) $(1+x)e^{xy}$

7. ஒரு கன சதுரத்தின் பக்க அளவு 4 செமீ மற்றும் அதன் பிழை 0.1 செமீ எனில் கன அளவு கணக்கீட்டில் ஏற்படும் பிழை

   (1) 0.4 கன செமீ (2) 0.45 கன செமீ (3) 2 கன செமீ (4) 4.8 கன செமீ

8. ஒரு கன சதுரத்தின் பக்க அளவு x_0 –இலிருந்து x_0+dx ஆக மாறும்போது அதன் வளைபரப்பு $S=6x^2$ இல் ஏற்படும் மாற்றம்

   (1) $12x_0+dx$ (2) $12x_0dx$ (3) $6x_0dx$ (4) $6x_0+dx$

9. ஒரு கன சதுரத்தின் பக்க அளவு 1% அதிகரிக்கும்போது அதன் கன அளவில் ஏற்படும் மாற்றம்

   (1) $0.3xdx$ மீ^{3} (2) $0.03x$ மீ^{3} (3) $0.03x^2$மீ^{3} (4) $0.03x^3$மீ^{3}

10. $g(x,y)=3x^2-5y+2y^2, x(t)=e^t$ மற்றும் $y(t)=\cos t$, எனில் $\frac{dg}{dt}$ –ன் மதிப்பு

    (1) $6e^{2t}+5\sin t-4\cos t\sin t$ (2) $6e^{2t}-5\sin t+4\cos t\sin t$

    (3) $3e^{2t}+5\sin t+4\cos t\sin t$ (4) $3e^{2t}-5\sin t+4\cos t\sin t$

11. $f(x)=\frac{x}{x+1}$, எனில் அதன் வகையீடு

    (1) $\frac{-1}{(x+1)^2}dx$ (2) $\frac{1}{(x+1)^2}dx$ (3) $\frac{1}{x+1}dx$ (4) $\frac{-1}{x+1}dx$

12. $u(x,y) = x^2 + 3xy + y - 2019$, எனில் $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(4,-5)}$ -ன் மதிப்பு

(1) -4 (2) -3 (3) -7 (4) 13

13. சார்பு $g(x) = \cos x$ -ன் நேரியல் தோராய மதிப்பு $x = \frac{\pi}{2}$ இல்

(1) $x + \frac{\pi}{2}$ (2) $-x + \frac{\pi}{2}$ (3) $x - \frac{\pi}{2}$ (4) $-x - \frac{\pi}{2}$

14. $w(x,y,z) = x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$, எனில் $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ -ன் மதிப்பு

(1) $xy + yz + zx$ (2) $x(y+z)$ (3) $y(z+x)$ (4) 0

15. $f(x,y,z) = xy + yz + zx$, எனில் $f_x - f_z$ -ன் மதிப்பு

(1) $z - x$ (2) $y - z$ (3) $x - z$ (4) $y - x$

பாடச்சுருக்கம்

- $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ என்பதை வகையிடத்தக்கச் சார்பாகவும், $x_0 \in (a,b)$ எனவும் கொள்க. x_0 என்ற புள்ளியில் f -ன் தோராய மதிப்பு L -ன் வரையறை
$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \forall x \in (a,b)$ எனலாம்.

- மெய்மதிப்பு பூச்சியமற்றது எனில்

$$\text{சார்பிழை} = \frac{\text{மெய்மதிப்பு} - \text{தோராய மதிப்பு}}{\text{மெய்மதிப்பு}}$$

$$\text{சதவீதப்பிழை} = \text{சார்பிழை} \times 100\,.$$

- x -ன் அதிகரிப்பு Δx உடன் மற்றும் எல்லா $x \in (a,b)$ -க்கும் $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ ஒரு வகையிடத்தக்க சார்பு என்க. f -ன் வகையீடு $df = f'(x)\Delta x$

- **ஒரு மாறியில் அமைந்த சார்புகளுக்கான எல்லை விதிகள் (எல்லை தேற்றங்கள்) பல மாறிகளைக் கொண்ட சார்புகளுக்கும் பொருந்தும்.**

- $A = \{(x,y) | a < x < b, c < y < d\} \subset \mathbb{R}^2, F: A \to \mathbb{R}$ மற்றும் $(x_0, y_0) \in A$ என்க.

(i) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0)}{h}$ -ன் மதிப்பு காணப்பெறின் $(x_0, y_0) \in A$ இல் F -க்கு x -ஐப் பொருத்த பகுதி வகைக்கெழு உள்ளது எனலாம். இந்த எல்லை மதிப்பு $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$ எனக் குறிக்கப்படும்.

(ii) $\lim\limits_{k \to 0} \frac{F(x_0, y_0 + k) - F(x_0, y_0)}{k}$ -ன் எல்லை மதிப்பு காணப்பெறின் $(x_0, y_0) \in A$ இல் F -க்கு y -ஐ பொருத்த பகுதிவகைக்கெழு உள்ளது எனலாம். இந்த எல்லை மதிப்பு $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ எனக்குறிக்கப்படும்.

- $A = \{(x,y) | a < x < b, c < y < d\} \subset \mathbb{R}^2$, $F: A \to \mathbb{R}$ என்க. A இல் f_{xy} மற்றும் f_{yx} காணப்பெற்று அவை தொடர்ச்சியானதாகவும் இருக்குமானால் A இல் $f_{xy} = f_{yx}$ A என இருக்கும்.

- $A=\{(x,y)\,|\,a<x<b, c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2$ என்க. சார்பு $u:A\to\mathbb{R}^2$ என்பது $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \forall(x,y)\in A$ எனுமாறு இருக்குமானால் அது A-ல் **சீரானது** எனலாம். இது **லாபிலாஸின்** சமன்பாடு எனப்படும்.
- $A=\{(x,y)\,|\,a<x<b, c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2, F:A\to\mathbb{R}$, மற்றும் $(x_0,y_0)\in A$ என்க.

  (i) $(x_0,y_0)\in A$ என்ற புள்ளியில் F -ன் நேரியல் தோராய மதிப்பு

$$F(x,y)=F(x_0,y_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}(x-x_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}(y-y_0)$$

  (ii) F -ன் வகையீடு $dF=\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)dx+\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)dy$,

  இங்கு $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.
- $W(x,y)$ என்பது $\dfrac{\partial W}{\partial x},\dfrac{\partial W}{\partial y}$ என்றபகுதி வகைக்கெழுக்கள் உள்ள x,y என்ற இரு மாறிகளில் அமைந்த சார்பு என்க. x,y என்ற இரு மாறிகளும் t என்ற ஒரு மாறியைப் பொருத்து வகையிடக்கூடிய சார்புகள் எனில் W -ம் t -ஐப் பொருத்து வகையிடக்கூடிய சார்பாகும்.

$$\frac{dW}{dt}=\frac{\partial W}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

- $W(x,y)$ என்பது x,y என்ற இரு மாறிகளில் அமைந்த $\dfrac{\partial W}{\partial x},\dfrac{\partial W}{\partial y}$ என்ற பகுதி வகைக்கெழுக்கள் கொண்ட சார்பு என்க. $x=x(s,t)$ மற்றும் $y=y(s,t)$, $s,t\in\mathbb{R}$ என்ற இரு மாறிகளுக்கும் s மற்றும் t-ஐப் பொருத்த பகுதி வகைக்கெழுக்கள் உண்டு எனில்,

$$\frac{\partial W}{\partial s}=\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},\quad \frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

- $A=\{(x,y)|\,a<x<b,\ c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2$, $F:A\to\mathbb{R}^2$ என்க. F என்ற சார்பு Aஇன் மீது தொடர்பகுதி வகைக்கெழு உடையதாகவும் படி p உடைய சமபடித்தான சார்பாகவும் இருக்குமானால், $x\dfrac{\partial F}{\partial x}+y\dfrac{\partial F}{\partial y}=pF$ -ஐ நிறைவு செய்யும்.

இணையச் செயல்பாடு (ICT CORNER)

https://ggbm.at/dy9kwgbt அல்லது Scan the QR Code

இணைய உலாவியை திறக்கவும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள உரலி/விரைவுக் குறியீட்டை தட்டச்சு செய்யவும், GeoGebra–வின் “**12th Standard Mathematics Vol-2**” பக்கம் தோன்றும். இப்பணித்தாள் புத்தகத்தின் இடதுபக்கம் உங்கள் பாடநூலுடன் தொடர்புடைய பல அத்தியாயங்கள் காணப்படும். அவற்றில் “**Differential and Partial Derivatives**” எனும் அத்தியாயத்தைத் தேர்வு செய்க.

B262_12_MATHS_EM

இப்பொழுது இப்பாடம் தொடர்பான பல பணித்தாள்களை இப்பக்கத்தில் காண்பீர்கள். அனைத்துப் பணித்தாள்களையும் செய்து பார்க்கவும்.

அத்தியாயம்

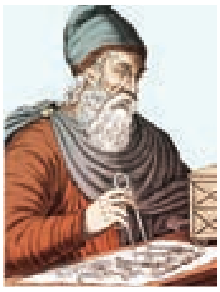
9

தொகை நுண்கணிதத்தின் பயன்பாடுகள்

X3U3W5

"நிற்பதற்கு ஓர் இடம் தந்தால்
பூமியைக் கூட என்னால் நகர்த்த இயலும்"
- ஆர்க்கிமெடிஸ்

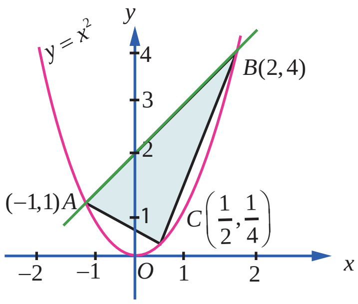
9.1 அறிமுகம் (Introduction)



சிராகுஸைச் சார்ந்த
ஆர்க்கிமெடிஸ்
(288கிமு(பொ. ஆ. மு)-
212கிமு(பொ. ஆ. மு))
ஒரு கிரேக்க கணிதவியலாளர்,
இயற்பியலாளர், பொறியலாளர்,
கண்டுபிடிப்பாளர்

வடிவியல் பொருட்களின் பரப்பளவையையும், கன அளவையையும் கணிக்க வியத்தகுமுறைகளில் கண்டுபிடிப்புகளைத் அளித்த முன்னோடி கணிதவியலாளர்களில் ஆர்க்கிமிடிஸ் ஒருவர் ஆவார். ஒரு பரவளையம் மற்றும் ஒரு நேர்க்கோட்டால் சூழப்பட்ட பரப்பு உள்வரையப்பட்ட முக்கோணத்தின் பரப்பைப் போல் $\frac{4}{3}$ மடங்கு ஆகும் என்பதை நிரூபித்தார். (படம் 9.1 ஐ காண்க).

அவர் பரப்பை எண்ணற்ற பல கூறுகளாகப் பிரித்து அதன் தொகையைக் கணிப்பது மூலம் பரப்பளவை கணித்தார். இத்தகு எல்லைநிலைக் கோட்பாடு நாம் உருவாக்கப்போகும் வரையறுத்த தொகையின் வரையறையில் உள்ளடிங்கி உள்ளது. மேலும் அதன் மூலம் சில வடிவியல் பொருட்களின் பரப்பளவையையும் கன அளவையையும் கண்டறிவோம்.



படம் 9.1

கற்றலின் நோக்கங்கள்

இப்பாடப்பகுதி நிறைவுறும்போது மாணவர்கள் அறிந்திருக்க வேண்டியவை:

- தொகையிடலை தொகையின் எல்லையாக வரையறுத்தல்
- தொகையிடலை வடிவியல் ரீதியாக செயல் விளக்கமளித்தல்
- தொகையிடலின் அடிப்படைத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துதல்
- வரையறுத்த தொகையிடலை எதிர் வகையிடலாக மதிப்பிடுதல்
- வரையறுத்த தொகையிடலின் சிலப் பண்புகளை நிறுவுதல்
- முறையற்ற தொகையிடலை இனங்காணுதல் மற்றும் காமா தொகையிடலைப் பயன்படுத்துதல்
- குறைப்புச் சூத்திரம் தருவித்தல்
- வரையறுத்த தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி தளப்பகுதியின் பரப்பளவைக் கண்டறிதல்
- வரையறுத்த தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி திடப்பொருள் சுழற்சியின் கன அளவை மதிப்பிடுதல்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள $f(x)$ என்ற சார்பின் எதிர் வகையிடலினைப் பற்றிக் கற்றதை சுருக்கமாக நினைவு கூர்வோம். $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$ எனும்படி ஒரு சார்பு அமையுமேயானால் அச்சார்பு $F(x)$ -னை $f(x)$ -ன் **எதிர் வகையிடல்** என்பர்.

இது தனித்தன்மை வாய்ந்தது அல்ல. ஏனெனில், ஏதோ ஒரு பொது மாறிலி C -க்கு, $\frac{d}{dx}[F(x)+C]=\frac{d}{dx}[F(x)]=f(x)$ எனப் பெறப்படுகிறது. அதாவது, $f(x)$ -ன் எதிர் வகையிடல் $F(x)$ என்றால் $F(x)+C$ என்பது அதே சார்பிற்கு எதிர் வகையிடலாகும். $f(x)$ -ன் அனைத்து எதிர் வகையிடல்களும் மாறிலியைப் பொருத்தே வேறுபடுகின்றன. $f(x)$ -ன் எதிர் வகையிடலை x-ஐப் பொருத்து $f(x)$ -ன் **வரையறாத் தொகையிடல்** என்பர். மேலும் அதனை $\int f(x)dx$ எனக் குறிப்பிடுவர்.

வரையறாத் தொகையிடலின் நன்கு அறியப்பட்ட ஒரு பண்பு அதன் **நேரியல் பண்பாகும்** :

$\int[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx$, இங்கு α மற்றும் β ஆகியவை மாறிலிகளாகும்.

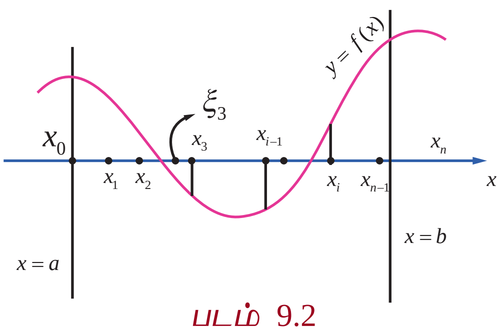
சில சார்புகளையும் அதன் எதிர் வகையிடல்களையும் இங்கே பட்டியலிடுவோம். (வகையறாத் தொகைகள்) :

சார்பு $f(x)$	வரையறா தொகையிடல் $\int f(x)dx$
K, ஒரு மாறிலி	$Kx+C$
$(ax+b)^n$, இங்கு $a\neq 0$ மற்றும் b ஆகியன மாறிலிகள்; மற்றும் $n\neq -1$	$\frac{1}{a}\left[\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}\right]+C$
$\frac{1}{ax+b}$, இங்கு $a\neq 0$ மற்றும் b ஆகியன மாறிலிகள்	$\frac{1}{a}\log_e\lvert(ax+b)\rvert+C$
e^{ax}, இங்கு a ஒரு பூச்சியமற்ற மாறிலியாகும்	$\frac{e^{ax}}{a}+C$
$\sin(ax+b)$, இங்கு $a\neq 0$ மற்றும் b ஆகியன மாறிலிகளாகும்.	$-\frac{\cos(ax+b)}{a}+C$
$\cos(ax+b)$, இங்கு $a\neq 0$ மற்றும் b ஆகியன மாறிலிகளாகும்	$\frac{\sin(ax+b)}{a}+C$
$\tan(ax+b)$, இங்கு $a\neq 0$ மற்றும் b ஆகியன மாறிலிகளாகும்	$\frac{1}{a}\log\lvert\sec(ax+b)\rvert+C$
$\cot(ax+b)$, இங்கு $a\neq 0$ மற்றும் b ஆகியன மாறிலிகளாகும்	$\frac{1}{a}\log\lvert\sin(ax+b)\rvert+C$
$\sec(ax+b)$, இங்கு $a\neq 0$ மற்றும் b ஆகியன மாறிலிகளாகும்	$\frac{1}{a}\log\lvert\sec(ax+b)+\tan(ax+b)\rvert+C$
$\operatorname{cosec}(ax+b)$, இங்கு $a\neq 0$ மற்றும் b ஆகியன மாறிலிகளாகும்	$-\frac{1}{a}\log\lvert\operatorname{cosec}(ax+b)-\cot(ax+b)\rvert+C$

சார்பு $f(x)$	வரையறா தொகையிடல் $\int f(x)dx$
$\frac{1}{a^2+x^2}$, இங்கு $a \neq 0$ ஆகியன மாறிலிகளாகும்	$\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$
$\frac{1}{a^2-x^2}$, இங்கு $a \neq 0$ ஒரு மாறிலியாகும்	$\frac{1}{2a}\log_e\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert+C$
$\frac{1}{x^2-a^2}$, இங்கு $a \neq 0$ ஒரு மாறிலியாகும்	$\frac{1}{2a}\log_e\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$, இங்கு a ஒரு மாறிலியாகும்	$\log_e\left\lvert x+\sqrt{a^2+x^2}\right\rvert+C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$, இங்கு $a \neq 0$ ஒரு மாறிலியாகும்	$\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$, இங்கு a ஒரு மாறிலியாகும்	$\log_e\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert+C$
$\sqrt{a^2+x^2}$, இங்கு a ஒரு மாறிலியாகும்	$\frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\log_e\left\lvert x+\sqrt{a^2+x^2}\right\rvert+C$
$\sqrt{a^2-x^2}$, இங்கு a ஒரு மாறிலியாகும்	$\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$
$\sqrt{x^2-a^2}$, இங்கு a ஒரு மாறிலியாகும்	$\frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2}-\frac{a^2}{2}\log_e\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert+C$

9.2 வரையறுத் தொகையீட்டை ஒரு கூட்டலின் எல்லையாக காணல் (Definite Integral as the Limit of a Sum)

9.2.1 ரீமன் தொகையீடு (Riemann Integral)



படம் 9.2

$[a,b]$, $a<b$ எனும் மூடிய வரம்புக்குட்பட்ட இடைவெளியில் வரையறுக்கப்படும் ஒரு மெய் மதிப்புடைய சார்பு $f(x)$ என்க. $[a,b]$ இடைவெளியில் $f(x)$ சார்பானது ஒரே குறியிடன் இருக்க வேண்டியதில்லை; அதாவது $[a,b]$ -ல் $f(x)$ -ன் மதிப்புகள் மிகையெண்ணாகவோ அல்லது குறையெண்ணாகவோ இருக்கலாம். படம் 9.2 இல் காண்க. $[a,b]$ எனும் இடைவெளியை n உள் இடைவெளிகளாக, $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ எனுமாறு $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-2},x_{n-1}],[x_{n-1},x_n]$ எனப் பிரிக்கவும்.

ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் ξ_i, $x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$ எனும்படி, $[x_{i-1},x_i], i=1,2,\cdots,n$ என்றியிருக்குமாறு தேர்ந்தெடுக்கவும். இதன் கூடுதல்,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) = f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1}) \qquad \ldots(1)$$

என எடுத்து கொள்க. கூடுதல் (1) என்பது $[a,b]$-ல் $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]$ எனும் பிரிவுகளில் $f(x)$ என்பது **ரீமன் கூட்டல்** எனப்படும்.

$x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ எனும் நிபந்தனையை பூர்த்தி செய்யமாறு எண்ணற்ற பல ξ_i மதிப்புகள் இருப்பதால், $[a,b]$-ல் $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]$ எனும் அதே பிரிவினைகளுடைய $f(x)$-க்கு எண்ணற்ற பல ரீமன் கூடுதல் உண்டு. கட்டுப்படுத்தும் செயல்பாட்டின் கீழ் $n \to \infty$ மற்றும் $\max\left(x_i - x_{i-1}\right) \to 0$ எனில், கூட்டுத் தொகை (1) ஆனது, முடிவுறு மதிப்பினை அதாவது A என வைத்துக் கொண்டால், மதிப்பு A-யினை $[a,b]$-ல் x-ஐப் பொருத்து $f(x)$-ன் **ரீமன் தொகையீடு** என்பர். மேலும் a-விருந்து b-க்கு x-ஐப் பொருத்து $\int_a^b f(x)dx$ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது. $a=b$ எனில் $\int_a^a f(x)dx = 0$ ஆகும்.

குறிப்புரை

இந்த அத்தியாயத்தில் $[a,b]$-ல் தொடர்ச்சியான வரம்புக்குட்பட்ட $f(x)$-இன் சார்புகளை மட்டுமே கருத்தில் கொள்கிறோம். இருப்பினும், துண்டுவாரி தொடர்ச்சியான வரம்புக்குட்பட்ட சார்புகளுக்கும் $[a,b]$-ல் $f(x)$-ன் **ரீமன் தொகையீடு** உள்ளதாகும். வரையறுத்த தொகையீட்டிற்கும் எதிர்மறை வகையிடலுக்கும் (வரையறா தொகையீடு) ஒரே குறியீடான $\int$ பயன்படுத்தப்படுகிறது. தொகையீடுக்கான அடிப்படைத் தேற்றத்தை நிறுவிய பிறகே இதன் காரணம் தெளிவாக விளங்கும். மாறிலி x போலியெனும் அர்த்தம் தரும்படி நம் விருப்பப்படி தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. எனவே $\int_a^b f(x)dx$ என்பதனை $\int_a^b f(u)du$ எனவும் எழுதலாம். ஆகையால், $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du$ ஆகும்.
$[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,\cdots,n$ எனும் ஒவ்வொரு பகுதி இடைவெளியிலும் உள்ள x_{i-1},ξ_i மற்றும் x_i ஆகிய மூன்று புள்ளிகளும் $\max\left(x_i - x_{i-1}\right) \to 0$ என்பதால் ஒரே புள்ளியில் குவிகின்றன. $\xi_i = x_{i-1}$, $i=1,2,\cdots,n$ எனத் தேர்ந்தெடுப்பதன் மூலம்

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty \text{ and } \max(x_i - x_{i-1})\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \qquad ..(2)$$

ஆகும். சமன்பாடு (2) ரீமன் தொகையீட்டினை மதிப்பிடுவதற்கான **இடது-முனை விதி** என்பர்.

$\xi_i = x_i$, $i=1,2,\cdots,n$ எனத் தேர்ந்தெடுப்பதன் மூலம்,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty \text{ and } \max(x_i - x_{i-1})\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}). \qquad ...(3)$$

எனக் கிடைக்கிறது. சமன்பாடு (3)-ஐ ரீமன் தொகையீட்டினை மதிப்பிடுவதற்கான **வலது-முனை விதி** என்பர்.

$\xi_i = \dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$, $i=1,2,\cdots,n$ எனத் தேர்ந்தெடுப்பதன் மூலம்

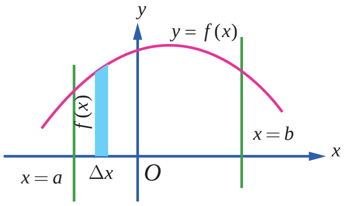
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty \text{ and } \max(x_i - x_{i-1})\to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)(x_i - x_{i-1}). \qquad ...(4)$$

எனக் கிடைக்கிறது. சமன்பாடு (4) ரீமன் தொகையீட்டினை மதிப்பிடுவதற்கான **நடு-முனை விதி** என்பர்.

குறிப்புரை

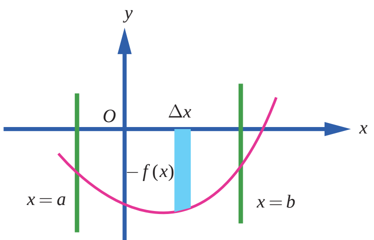
(1) ஒவ்வொரு $x \in [a,b]$ -க்கும் ரீமன் தொகையீடு $\int_a^b f(x)dx$ உள்ளது எனில், ரீமன் தொகையீடு $\int_a^x f(u)du$ என்பது நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட மெய்யெண்ணாகும். எனவே $F(x) = \int_a^x f(u)du, x \in [a,b]$ எனும்படி $[a,b]$ -ல் $F(x)$ -இன் சார்பு வரையறுக்கப்படுகிறது.

(2) அனைத்து $x \in [a,b]$ -க்கும் $f(x) \geq 0$ எனில், ரீமன் தொகையீடான $\int_a^b f(x)dx$ என்பது $x = a$ மற்றும் $x = b$ கோடுகள், $y = f(x)$ எனும் வளைவரை மற்றும் x-அச்சின் வரம்பிற்குட்பட்ட பகுதியின் வடிவியல் பரப்பளவைத் தரும். படம் 9.3 இல் காண்க.



படம் 9.3

(3) அனைத்து $x \in [a,b]$ -க்கும் $f(x) \leq 0$ எனில் ரீமன் தொகையீடான $\int_a^b f(x)dx$ என்பது $x = a$ மற்றும் $x = b$ கோடுகள் $y = f(x)$ எனும் வளைவரை மற்றும் x-அச்சின் வரம்பிற்குட்பட்ட பகுதியில் வடிவியல் பரப்பளவு குறை மதிப்பைத் தரும். படம் 9.4இல் காண்க. இத்தகைய தருணத்தில், $x = a$ மற்றும் $x = b$ கோடுகள், $y = f(x)$ எனும் வளைவரை மற்றும் x-அச்சின் வரம்பிற்குட்பட்ட பகுதியின் வடிவியல் பரப்பளவு $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$ ஆகும்.



படம் 9.4

(4) $[a,b]$ -ல் $f(x)$ மிகை மதிப்புகளையும் அதே சமயத்தில் குறை மதிப்புகளையும் பெறும் எனில், $[a,b]$ எனும் இடைவெளியை $f(x)$ -இன், ஒவ்வொரு உள் இடைவெளியிலும் தொடர்ந்து ஒரே குறியுடன் இருக்குமாறு $[a,c_1]$, $[c_1,c_2], \cdots,$ $[c_k,b]$ எனப் பகுதி இடைவெளிகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. எனவே, $\int_a^b f(x)dx$ -க்கான ரீமன் தொகையீடு

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \cdots + \int_{c_k}^b f(x)dx \text{ ஆகும்.}$$

இத்தருணத்தில் $x = a$ மற்றும் $x = b$ கோடுகள், $y = f(x)$ எனும் வளைவரை மற்றும் x-அச்சின் வரம்பிற்குட்பட்ட பகுதியின் வடிவியல் பரப்பளவு

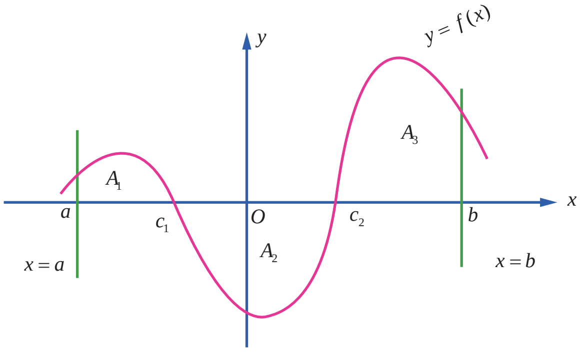
$$\left|\int_a^{c_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| + \cdots + \left|\int_{c_k}^b f(x)dx\right| \text{ ஆகும்.}$$

சான்றாக, சார்பு $f(x), x \in [a,b]$ -க்கான கீழ்க்காணும் வளைவரையைக் கருதுவோம். படம் 9.5 இல் காண்க. இங்கு, A_1, A_2 மற்றும் A_3 ஆகியவை தனித்தனியான வடிவியல் பரப்பளவுகளாகும். எனவே வரையறுத்த தொகையீடு $\int_a^b f(x)dx$ என்பது

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^{b} f(x)dx$$

$$= A_1 - A_2 + A_3.$$

$x = a$ மற்றும் $x = b$ கோடுகள், $y = f(x)$ எனும் வளைவரை மற்றும் $x-$அச்சின் வரம்பிற்குட்பட்ட பகுதியின் வடிவியல் பரப்பளவு $A_1 + A_2 + A_3$ ஆகும். மேற்கண்ட ஆய்விலிருந்து, வடிவியல் பரப்பளவை ரீமன் தொகையீடு குறிக்காது என்பது புலனாகிறது.



படம் 9.5

குறிப்பு

வெளிப்படையாக குறிப்பிடாமல் இருப்பினும் பரப்பளவு சதுர அலகுகளாகவும், கன அளவு கன அலகுகளாகவும் கணக்கிடப்படுகின்றது என்பது நன்கு தெளிவாகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 9.1

5 சம அளவு பகுதி இடைவெளிகளாகப் பிரித்து மற்றும் (i) இடது-முனை விதி (ii) வலது-முனை விதி (iii) நடு-முனை விதி ஆகியவற்றை ரீமன் கூட்டலில் பயன்படுத்தி $\int_0^{0.5} x^2\, dx$ -ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு

$$\text{இங்கு } a = 0, b = 0.5, n = 5, f(x) = x^2$$

எனவே, ஒவ்வொரு பகுதி இடைவெளியின் அகலம்,

$$h = \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{0.5-0}{5} = 0.1 \text{ ஆகும்.}$$

இடைவெளியின் துண்டுகளைத் தரும் புள்ளிகள்,

$$x_0 = 0,$$
$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$$
$$x_2 = x_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2$$
$$x_3 = x_2 + h = 0.2 + 0.1 = 0.3$$
$$x_4 = x_3 + h = 0.3 + 0.1 = 0.4$$
$$x_5 = x_4 + h = 0.4 + 0.1 = 0.5 \text{ ஆகும்.}$$

(i) சம அளவு Δx கொண்ட ரீமன் கூட்டலுக்கான இடது முனை விதியானது,

$$S = \left[f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\right]\Delta x.$$

$$\therefore S = \left[f(0) + f(0.1) + f(0.2) + f(0.3) + f(0.4)\right](0.1)$$

$$= \left[0.00 + 0.01 + 0.04 + 0.09 + 0.16\right](0.1) = 0.03$$

$\therefore \int_0^{0.5} x^2 dx$ -ன் தோராய மதிப்பு 0.03 ஆகும்.

(ii) சம அளவு Δx கொண்ட ரீமன் கூட்டலுக்கான வலது முனை விதியானது

$$S = \left[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\right]\Delta x.$$

$$\therefore S = \left[f(0.1)+f(0.2)+f(0.3)+f(0.4)+f(0.5)\right](0.1)$$

$$= [0.01+0.04+0.09+0.16+0.25](0.1) = 0.055.$$

$\therefore \int_0^{0.5} x^2 dx$ -ன் தோராய மதிப்பு 0.055 ஆகும்.

(iii) சம அளவு Δx கொண்ட ரீமன் கூட்டலுக்கான நடு-முனை விதியானது

$$S = \left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right]\Delta x$$

$$\therefore S = \left[f(0.05)+f(0.15)+f(0.25)+f(0.35)+f(0.45)\right](0.1)$$

$$= [0.0025+0.0225+0.0625+0.1225+0.2025](0.1)$$

$$= 0.04125.$$

$\therefore \int_0^{0.5} x^2 dx$ -ன் தோராய மதிப்பு 0.04125 ஆகும். ■

பயிற்சி 9.1

1. $\{1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5\}$ எனும் பிரிவினையுடன் இடது-முனை விதியைப் பயன்படுத்தி $\int_1^{1.5} x dx$ –க்கு தோராய மதிப்பு காண்க.

2. $\{1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5\}$ எனும் பிரிவினையுடன் வலது-முனை விதியைப் பயன்படுத்தி $\int_1^{1.5} x^2 dx$ –க்கு தோராய மதிப்பு காண்க.

3. $\{1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5\}$ எனும் பிரிவினையுடன் நடு-முனை விதியைப் பயன்படுத்தி $\int_1^{1.5} (2-x) dx$ –க்கு தோராய மதிப்பு காண்க.

9.2.2 $\int_a^b f(x)dx$ -ஐ மதிப்பிட எல்லை சூத்திரம் (Limit Formula to Evaluate $\int_a^b f(x)dx$)

$[a,b]$ எனும் இடைவெளியை $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ எனுமாறு $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-2},x_{n-1}],[x_{n-1},x_n]$ என n சமப்பகுதி இடைவெளிகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. எனவே $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1} = \frac{b-a}{n}$ ஆகும். $h = \frac{b-a}{n}$ என்க. இனி $x_i = a + ih, i = 1,2,\cdots,n$ எனக் கிடைக்கிறது.

வரையறுத்த தொகையீட்டின் வரையறைப்படி

$$\lim_{n\to\infty \text{ and } \max(x_i - x_{i-1})\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \text{ (வலது முனை விதி)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right).$$

$$\therefore \quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left(a + (b-a)\frac{r}{n}\right).$$

குறிப்பு

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{r=0}^{n} f\left(a + (b-a)\frac{r}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{b-a}{n} f(a) + \frac{b-a}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left(a + (b-a)\frac{r}{n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left(a + (b-a)\frac{r}{n}\right)$$

$$= \int_a^b f(x)dx\,.$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left(a + (b-a)\frac{r}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{r=0}^{n} f\left(a + (b-a)\frac{r}{n}\right).$$

$a = 0$ மற்றும் $b = 1$ எனில், $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.2

கூட்டலின் எல்லையாக $\int_0^1 xdx$ -ஐ மதிப்பிடுக.

தீர்வு

இங்கு $f(x) = x,\ a = 0$ மற்றும் $b = 1$. எனவே

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right) \Rightarrow \int_0^1 xdx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \frac{r}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}[1 + 2 + \cdots + n]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.3

கூட்டலின் எல்லையாக $\int_0^1 x^3 dx$ -ஐ மதிப்பிடுக.

தீர்வு

இங்கு $f(x) = x^3,\ a = 0$ மற்றும் $b = 1$. எனவே

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right) \Rightarrow \int_0^1 x^3 dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \frac{r^3}{n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}\left[1^3 + 2^3 + \cdots + n^3\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.4

கூட்டலின் எல்லையாக $\int_1^4 \left(2x^2+3\right)dx$ -ஐ மதிப்பிடுக.

தீர்வு

கீழ்க்காணும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவோம்.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(a+(b-a)\frac{r}{n}\right)$$

இங்கு $f(x)=2x^2+3,\ a=1$ மற்றும் $b=4$.

எனவே,

$$f\left(a+(b-a)\frac{r}{n}\right) = f\left(1+(4-1)\frac{r}{n}\right) = f\left(1+\frac{3r}{n}\right) = 2\left(1+\frac{3r}{n}\right)^2+3 = 5+\frac{18r^2}{n^2}+\frac{12r}{n}.$$

ஆகையால்,

$$\int_1^4 (2x^2+3)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{r=1}^{n}\left(5+\frac{18r^2}{n^2}+\frac{12r}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{15}{n}\sum_{r=1}^{n}1+\frac{54}{n^3}\sum_{r=1}^{n}r^2+\frac{36}{n^2}\sum_{r=1}^{n}r\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{15}{n}n+\frac{54}{n^3}\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right)+\frac{36}{n^2}\left(1+2+\cdots+n\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[15+\frac{54}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{36}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[15+9\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+18\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= 15+9(1+0)(2+0)+18(1+0) = 51.$$

T9W2P6

பயிற்சி 9.2

1. கீழ்க்காணும் தொகையீடுகளை கூட்டலின் எல்லைகளாக கணக்கிடுக:

(i) $\int_0^1 (5x+4)dx$ (ii) $\int_1^2 (4x^2-1)dx$

9.3 தொகை நுண்கணித அடிப்படைத் தேற்றங்கள் மற்றும் அவற்றின் பயன்பாடுகள் (Fundamental Theorems of Integral Calculus and their Applications)

சார்பு மிக எளிமையாக இருப்பினும் $\int_a^b f(x)dx$ -இன் மதிப்பை தொகையீடுகளின் கூட்டலின் எல்லைகளாக தீர்வு காண்பது மிகவும் கடினம் என்பதை மேலே உள்ள எடுத்துக்காட்டுகளில் நாம் கண்டோம் வாயிலாக பார்த்தோம். நியூட்டன் (Newton) மற்றும் லிபினிட்ஸ் (Leibnitz) இருவரும் கிட்டதட்ட ஒரே காலத்தில் வரையறுத்த தொகையிடலை ஓர் எளிய முறையில் காண வழிவகுத்தனர். இம்முறையானது முதல் மற்றும் இரண்டாம் நுண்கணித அடிப்படைத் தேற்றத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டது. இத்தேற்றங்கள் ஒரு சார்பிற்கும் அதன் எதிர் வகையிடலுக்கும் (முடியும்மெனில்) உள்ள தொடர்பை நிலைநிறுத்துகிறது. இத்தேற்றங்கள் வகை நுண்கணிதத்திற்கும் தொகை நுண்கணிதத்திற்கும் உள்ள ஒரு தொடர்பை ஏற்படுத்துகிறது.

பின்வரும் முக்கிய தேற்றங்கள் நிரூபணமின்றி கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன

தேற்றம் 9.1 (முதல் தொகை நுண்கணித அடிப்படைத் தேற்றம்)

$f(x)$ என்பது $[a,b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் வரையறுக்கப்பட்ட தொடர்ச்சியான சார்பு மற்றும் $F(x)=\int_a^x f(u)du,\ a<x<b$ எனில், $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$. அதாவது $F(x)$-ஆனது $f(x)$ -இன் எதிர் வகையீடு ஆகும்.

தேற்றம் 9.2 (இரண்டாவது தொகை நுண்கணித அடிப்படைத் தேற்றம்)

$f(x)$ என்பது $[a,b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் வரையறுக்கப்பட்ட தொடர்ச்சியான சார்பு மற்றும் $F(x)$-ஆனது $f(x)$ -இன் எதிர் வகையீடு எனில், $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

குறிப்பு

$F(b)-F(a)$ ஆனது $\int_a^b f(x)dx$ என்ற வரையறுக்கப்பட்ட தொகையிடலின் (ரீமன் தொகையிடல்) மதிப்பானதால் எதிர்முறை வகையீடு $F(x)$ உடன் சேர்க்கப்படும் தன்னிச்சை மாறி நீக்கப்பட்டு விடும். எனவே வரையறுத்த தொகையிடலின் மதிப்பு காணும்போது எதிர் வகையீடுடன் தன்னிச்சை மாறியை சேர்க்கத் தேவையில்லை. $F(b)-F(a)$-ஐ சுருக்கமாக $\left[F(x)\right]_a^b$ என எழுதலாம். வரையறுத்த தொகையிடலின் மதிப்பு ஒருமைத் தன்மை உடையது.

இரண்டாவது தொகை நுண்கணித தேற்றத்தின் வாயிலாக பின்வரும் வரையறுத்த தொகையிடலின் பண்புகளைப் பெறுகிறோம். அவற்றை நிரூபணமின்றி இங்கு காண்போம்.

பண்பு 1 : $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(u)\,du\,,\ a<b$

அதாவது எல்லைகள் மாறாமல் இருக்கும்போது மாறியை மாற்றுவதால் தொகையிடலின் மதிப்பு மாறாது.

பண்பு 2 : $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

அதாவது வரையறுத்த தொகையிடலில் எல்லைகளை இடமாற்றம் செய்யும்போது வரையறுத்த தொகையிடலின் குறியீடு '−' ஆக மாறும்.

பண்பு 3 : $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx\,,\ a<c<b$

பண்பு 4 : $\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx$ இங்கு, α மற்றும் β மாறிலிகள்.

பண்பு 5 : $x=g(u)$ எனில், $\int_a^b f(x)\,dx=\int_c^d f(g(u))\frac{dg(u)}{du}du$ இங்கு $g(c)=a$ மற்றும் $g(d)=b$.

இப்பண்பானது வரையறுத்த தொகையிடலில் பிரதியிடல் முறையைப் பயன்படுத்த உதவுகிறது. மேற்கூறிய பண்புகளை பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளில் பயன்படுத்துவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 9.5

மதிப்பிடுக : $\int_0^3 (3x^2 - 4x + 5)dx$.

தீர்வு

$$\begin{aligned} \int_0^3 (3x^2 - 4x + 5)dx &= \int_0^3 3x^2 dx - \int_0^3 4x\ dx + \int_0^3 5\,dx \\ &= 3\int_0^3 x^2 dx - 4\int_0^3 x\,dx + 5\int_0^3 dx \\ &= 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 - 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 + 5[x]_0^3 \\ &= (27-0) - 2(9-0) + 5(3-0) \\ &= 27 - 18 + 15 = 24 . \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 9.6

மதிப்பிடுக : $\int_0^1 \frac{2x+7}{5x^2+9}dx$.

தீர்வு

$$\int_0^1 \frac{2x+7}{5x^2+9}dx = \int_0^1 \frac{2x}{5x^2+9} + 7\int_0^1 \frac{dx}{(5x^2)+3^2} = \frac{1}{5}\log[5x^2+9]_0^1 + \frac{7}{5}\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{5}[\log 14 - \log 9] + \frac{7}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{3}\left[\tan^{-1}\frac{x}{\left[\frac{3}{\sqrt{5}}\right]}\right]_0^1 = \frac{1}{5}\log\frac{14}{9} + \frac{7}{3\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{5}}{3} .$$

எடுத்துக்காட்டு 9.7

மதிப்பிடுக : $\int_0^1 [2x]dx$, $[\cdot]$ என்பது மீப்பெரு முழுக்கள் சார்பு.

தீர்வு

$$\int_0^1 [2x]dx = \int_0^{\frac{1}{2}} [2x]dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 [2x]dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 0\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 1\,dx = 0 + [x]_{\frac{1}{2}}^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} .$$

எடுத்துக்காட்டு 9.8

மதிப்பிடுக : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec x \tan x}{1+\sec^2 x}dx$.

தீர்வு

$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec x \tan x}{1+\sec^2 x}dx$ என்க. $\sec x = u$ என்க. எனவே $\sec x \tan x\ dx = du$.

$x = 0$ எனில், $u = \sec 0 = 1$ மற்றும் $x = \frac{\pi}{3}$ எனில் $u = \sec\frac{\pi}{3} = 2$.

$$\therefore I = \int_1^2 \frac{du}{1+u^2} = [\tan^{-1} u]_1^2 = \tan^{-1}(2) - \tan^{-1} 1 = \tan^{-1}(2) - \frac{\pi}{4}.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.9

மதிப்பிடுக : $\int_0^9 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$.

தீர்வு

$\sqrt{x} = u$ என்க. எனவே $x = u^2$, மற்றும் $dx = 2u\,du$.

$x = 0$ எனில், $u = 0$ மற்றும் $x = 9$ எனில், $u = 3$.

$$\therefore \int_0^9 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx = \int_0^3 \frac{1}{u^2+u}(2u)du = 2\int_0^3 \frac{1}{1+u}du = 2\left[\log|1+u|\right]_0^3 = 2[\log 4 - 0] = \log 16.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.10

மதிப்பிடுக : $\int_1^2 \frac{x}{(x+1)(x+2)} dx$.

தீர்வு

$$I = \int_1^2 \frac{x}{(x+1)(x+2)} dx \text{ என்க.}$$

$$I = \int_1^2 \left[\frac{-1}{(x+1)} + \frac{2}{x+2}\right] dx \qquad \text{(பகுதி பின்னமாக்குதல் பயன்படுத்தி)}$$

$$= \left[-\log(x+1) + 2\log(x+2)\right]_1^2$$

$$= \log\left[\frac{(x+2)^2}{x+1}\right]_1^2$$

$$= \log\frac{16}{3} - \log\frac{9}{2}$$

$$= \log\frac{32}{27}.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.11

மதிப்பிடுக : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)(2+\sin\theta)} d\theta$.

தீர்வு

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)(2+\sin\theta)} d\theta \text{ என்க.}$$

$u = 1+\sin\theta$ எனப் பிரதியிடக் கிடைப்பது $du = \cos\theta\, d\theta$.

$$\theta = 0 \text{ எனில் } u=1 \text{ மற்றும் } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ எனில் } u=2.$$

$$\therefore I = \int_1^2 \frac{du}{u(1+u)} = \int_1^2 \frac{(1+u)-u}{u(1+u)}du = \int_1^2 \left(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u}\right)du = \left[\log u - \log(1+u)\right]_1^2$$

$$= (\log 2 - \log 3) - (\log 1 - \log 2) = 2\log 2 - \log 3 = \log\frac{4}{3}.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.12

மதிப்பிடுக : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sin^{-1}x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$.

தீர்வு

$$I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sin^{-1}x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx \text{ என்க.}$$

$$u = \sin^{-1}x \text{ எனப் பிரதியிடக் கிடைப்பது. } , x = \sin u \text{ மற்றும் } du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

$$x = 0 \text{ எனில் } u=0 \text{ மற்றும் } x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ எனில் } u = \frac{\pi}{4}.$$

$$\therefore I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{u}{\cos^2 u}du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u\sec^2 u\, du = [u\tan u]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan u\, du = [u\tan u]_0^{\frac{\pi}{4}} + [\log\cos u]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \log\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.13

மதிப்பிடுக : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}\right)dx$.

தீர்வு

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}\right)dx \text{ என்க.}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}}+\sqrt{\frac{\cos x}{\sin x}}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x\cos x}}dx = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2\sin x\cos x}}dx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x + \cos x)dx}{\sqrt{1-(\sin x - \cos x)^2}}.$$

$$u = \sin x - \cos x \text{ எனப் பிரதியிட, } du = (\cos x + \sin x)dx.$$

$$x = 0 \text{ எனில் } u=-1 \text{ மற்றும் } x = \frac{\pi}{2} \text{ எனில் } u=1.$$

$$\therefore I = \sqrt{2}\int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sqrt{2}[\sin^{-1}u]_{-1}^{1} = \sqrt{2}\left[\sin^{-1}(1)-\sin^{-1}(-1)\right] = \pi\sqrt{2}.$$

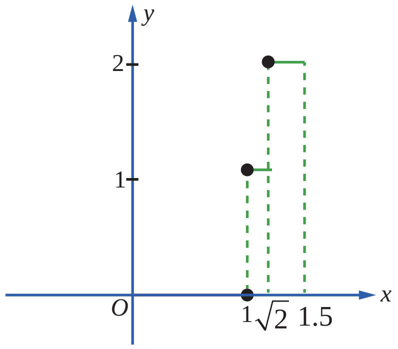
எடுத்துக்காட்டு 9.14

மதிப்பிடுக : $\int_0^{1.5}\left[x^2\right] dx$, இங்கு $[x]$ என்பது மீப்பெரு முழுக்கள் சார்பு.

தீர்வு

மீப்பெரு முழுக்கள் சார்பு $[x]$ என்பது x-ஐ விட மிகைப்படாத அல்லது சமமான மதிப்பை பெறும் சார்பு என நாம் அறிவோம். அதாவது n என்பது ஒரு முழுக்கள் மற்றும் $n \le x < (n+1)$ எனில் $[x]=n$ எனவே, நாம் பெறுவது

$$[x^2]=\begin{cases}0 \;, & 0\le x<1\\ 1 \;, & 1\le x<\sqrt{2}\\ 2 \;, & \sqrt{2}\le x\le 1.5\end{cases}$$



படம் 9.6

இச்சார்பானது $[0,1.5]$ என்ற இடைவெளியில் தொடர்ச்சியற்றது.

ஆனால், ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளி $[0,1)$, $[1,\sqrt{2})$ மற்றும் $[\sqrt{2},1.5]$-களில் தொடர்ச்சி உடையது. அதாவது $[0,1.5]$ என்ற இடைவெளியில் துண்டு வாரியாக (piece-wise) தொடர்ச்சி உடையது. படம் 9.6-ஐ பார்க்கவும்.

$$\int_0^{1.5}\left[x^2\right] dx = \int_0^{1}\left[x^2\right] dx+\int_1^{\sqrt{2}}\left[x^2\right] dx+\int_{\sqrt{2}}^{1.5}\left[x^2\right] dx=\int_0^1 0\, dx+\int_1^{\sqrt{2}} 1\, dx+\int_{\sqrt{2}}^{1.5} 2dx$$

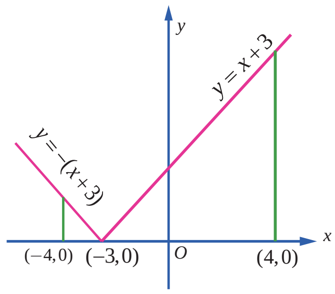
$$= 0+(x)_1^{\sqrt{2}}+(2x)_{\sqrt{2}}^{1.5}=\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(3-2\sqrt{2}\right)=2-\sqrt{2}.$$

■

எடுத்துக்காட்டு 9.15

மதிப்பிடுக : $\int_{-4}^{4}|x+3|\; dx$.

தீர்வு



படம் 9.7

வரையறைப்படி நமக்குக் கிடைப்பது,

$$|x+3|=\begin{cases}x+3 \;, & x\ge -3\\ -x-3 \;, & x<-3\end{cases}$$

$-4\le x\le 4$-ல் $y=|x+3|$ என்பதன் வரைபடத்தை

படம் 9.7-ல் பார்க்கவும்.

$$\therefore \int_{-4}^{4}|x+3|\; dx = \int_{-4}^{-3}|x+3|\; dx+\int_{-3}^{4}|x+3|\; dx=\int_{-4}^{-3}(-x-3)\; dx+\int_{-3}^{4}(x+3)\; dx$$

$$=\left[-\frac{x^2}{2}-3x\right]_{-4}^{-3}+\left[\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-3}^{4}$$

$$=\left(-\frac{9}{2}+9\right)-\left(-\frac{16}{2}+12\right)+\left(\frac{16}{2}+12\right)-\left(\frac{9}{2}-9\right)=\left(\frac{9}{2}\right)-4+20+\left(\frac{9}{2}\right)=25.$$

■

பண்பு 5-இன் பயன்பாட்டிற்கான எடுத்துக்காட்டுகளைப் பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 9.16

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4+5\sin x} = \frac{1}{3}\log_e 2$ எனக்காட்டுக.

தீர்வு

$$u = \tan\frac{x}{2} \text{ என்க. } \sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}, du = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx \Rightarrow dx = \frac{2du}{1+u^2}.$$

$x = 0$ எனில் $u = \tan 0 = 0$ மற்றும் $x = \frac{\pi}{2}$ எனில் $u = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

$$\therefore I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4+5\sin x} = \int_0^1 \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{4+5\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)} = \int_0^1 \frac{du}{2u^2+5u+2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{u^2+\frac{5}{2}u+1}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{\left(u+\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \left[\frac{1}{2}\times\frac{1}{2\times\left(\frac{3}{4}\right)}\log\left(\frac{\left(u+\frac{5}{4}\right)-\frac{3}{4}}{\left(u+\frac{5}{4}\right)+\frac{3}{4}}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left[\log\left(\frac{u+\frac{1}{2}}{u+2}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{3}\log 2.$$

குறிப்பு

$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}$ என்ற அமைப்பில் உள்ள தொகையிடல்களின் மதிப்பு காண $u = \tan\frac{x}{2}$ எனப் பிரதியிட வேண்டும் மற்றும் $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, dx = \frac{2du}{1+u^2}$ என்பதை அறிக.

எடுத்துக்காட்டு 9.17

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x\, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \frac{\pi}{4}$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x\, dx}{\sin^4 x+\cos^4 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x\, dx}{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x\, dx}{1-\frac{1}{2}\left(2\sin x\cos x\right)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin 2x\, dx}{2-\sin^2 2x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin 2x\, dx}{1+\cos^2 2x}.$$

$u = \cos 2x$ என்க. $du = -2\sin 2x\, dx$.

$x = 0$ எனில், $u = \cos 0 = 1$ மற்றும் $x = \frac{\pi}{4}$ எனில் $u = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

$$\therefore I = \int_1^0 \frac{-du}{1+u^2} = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \left[\tan^{-1} u\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.18

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$, இங்கு $a,\ b>0$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x\, dx}{a^2\tan^2 x + b^2}$$ என்க.

$u = \tan x$ என்க. எனவே $du = \sec^2 x\, dx$.

$x = 0$ எனில், $u = \tan 0 = 0$ மற்றும் $x = \frac{\pi}{4}$ எனில், $u = \tan\frac{\pi}{4} = 1$.

$$\therefore I = \int_0^1 \frac{du}{a^2u^2+b^2} = \frac{1}{a^2}\int_0^1 \frac{du}{u^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{a}{b}\tan^{-1}\left(\frac{au}{b}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right).$$

மேலும் சில வரையறுத்த தொகையிடலின் பண்புகளை வருவிப்போம். ■

பண்பு 6

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

நிரூபணம்

$u = a+b-x$ என்க. எனவே, $dx = -du$.

$x = a$ எனில் $u = a+b-a = b$ மற்றும் $x = b$ எனில், $u = a+b-b = a$.

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(a+b-u)(-du) = \int_a^b f(a+b-u)\,du$$

$$= \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$

■

குறிப்பு

a -க்கு பதில் 0 மற்றும் b -க்கு பதில் a என மேலே உள்ள பண்பில் பிரதியிட,

$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ என்ற பண்பு கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.19

மதிப்பிடுக : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x+\cos x}\,dx$.

தீர்வு

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x+\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} dx \quad \left(\because \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x \ dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\log(\sec x + \tan x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\log(\sqrt{2}+1) - \log(1+0) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \log(\sqrt{2}+1).$$

பண்பு 7

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a \left[f(x) + f(2a-x) \right] dx.$$

நிரூபணம்

பண்பு 3–லிருந்து நாம் பெறுவது, $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx$. ... (1)

$x = 2a - u$ என $\int_a^{2a} f(x)\,dx$ என்பதில் பிரதியிடக் கிடைப்பது $dx = -du$.

$x = a$ எனில், $u = 2a - a = a$ மற்றும் $x = 2a$ எனில், $u = 2a - 2a = 0$. எனவே நமக்கு கிடைப்பது,

$$\int_a^{2a} f(x)dx = \int_a^0 f(2a-u)(-du) = \int_0^a f(2a-u)du = \int_0^a f(2a-x)dx. \quad \text{... (2)}$$

சமன்பாடு (2) -ஐ (1)-ல் பயன்படுத்தக் கிடைப்பது,

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$$

$$= \int_0^a \left[f(x) + f(2a-x) \right] dx.$$

பண்பு 8

$f(x)$ ஓர் இரட்டைப்படைச் சார்பு எனில், $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

($f(x)$ ஓர் இரட்டைப்படைச் சார்பு எனில் $f(-x) = f(x)$ என அறிவோம்)

நிரூபணம்

பண்பு 3–ன் படி

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx. \quad \text{... (1)}$$

$x = -u$ என $\int_{-a}^0 f(x)\,dx$ என்பதில் பிரதியிடுவோம். எனவே, $dx = -du$.

$x = -a$ எனில், $u = a$ மற்றும் $x = 0$ எனில் $u = 0$. எனவே நாம் பெறுவது

$$\int_{-a}^0 f(x)\,dx = \int_a^0 f(-u)(-du) = \int_0^a f(-u)\,du = \int_0^a f(-x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx. \quad \text{... (2)}$$

சமன்பாடு (2)–ஐ சமன்பாடு (1)–ல் பிரதியிடக் கிடைப்பது

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

பண்பு 9

$f(x)$ ஓர் ஒற்றைப்படைச் சார்பு எனில், $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

($f(x)$ ஓர் ஒற்றைப்படைச் சார்பு எனில், $f(-x) = -f(x)$ என நாம் அறிவோம்)

நிரூபணம்

பண்பு 3–ன் படி

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx. \qquad \ldots (1)$$

$x = -u$ என $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ என்பதில் பிரதியிடுவோம். எனவே, $dx = -du$.

$x = -a$ எனில், $u = a$ மற்றும் $x = 0$ எனில், $u = 0$. எனவே நாம் பெறுவது

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-u)(-du) = \int_{0}^{a} f(-u)\,du = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx. \qquad \ldots (2)$$

சமன்பாடு (2)–ஐ சமன்பாடு (1)–ல் பிரதியிடக் கிடைப்பது

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx - \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$

■

பண்பு 10

$f(2a-x) = f(x)$ எனில், $\int_{0}^{2a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$

நிரூபணம்

பண்பு 7–ன் படி

$$\int_{0}^{2a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} \left[f(x) + f(2a-x)\right] dx. \qquad \ldots (1)$$

$f(2a-x) = f(x)$ என சமன்பாடு (1)–ல் பிரதியிடக் கிடைப்பது,

$$\int_{0}^{2a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} \left[f(x) + f(x)\right] dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

பண்பு 11

$f(2a-x) = -f(x)$ எனில், $\int_{0}^{2a} f(x)\,dx = 0$ ஆகும்.

நிரூபணம்

பண்பு 7–ன் படி,

$$\int_{0}^{2a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} \left[f(x) + f(2a-x)\right] dx. \qquad \ldots (1)$$

$f(2a-x) = -f(x)$ என சமன்பாடு (1)–ல் பிரதியிட நமக்குக் கிடைப்பது,

$$\int_{0}^{2a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} \left[f(x) - f(x)\right] dx = 0.$$

■

பண்பு 12

$f(a-x) = f(x)$ எனில் $\int_{0}^{a} x f(x)\,dx = \frac{a}{2} \int_{0}^{a} f(x)\,dx$.

நிரூபணம்

$$I = \int_{0}^{a} x f(x)\,dx \text{ என்க.} \qquad \ldots (1)$$

$$I = \int_0^a (a-x)f(a-x)\,dx \quad (\because \int_0^a g(x)\,dx = \int_0^a g(a-x)\,dx)$$

$$= \int_0^a (a-x)f(x)\,dx \quad (\because \quad f(a-x) = f(x)).$$

$$\therefore I = \int_0^a (a-x)f(x)\,dx \qquad \ldots (2)$$

சமன்பாடு (1)-ம், (2)-ம் கூட்ட கிடைப்பது,

$$2I = \int_0^a (x+a-x)f(x)\,dx$$

$$= a\int_0^a f(x)\,dx\,.$$

$$\therefore I = \frac{a}{2}\int_0^a f(x)\,dx\,.$$

■

குறிப்பு

இடது புறத்தில் உள்ள தொகைச்சார்பில் உள்ள x என்ற காரணியை நீக்க இப்பண்பு உதவுகிறது

எடுத்துக்காட்டு 9.20

$\int_0^{\pi} g(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\sin x)dx$ என நிறுவுக. இங்கு $g(\sin x)$ என்பது $\sin x$ -ஐ கொண்ட சார்பு.

தீர்வு

$f(2a-x) = f(x)$ எனில் $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

$2a = \pi$ மற்றும் $f(x) = g(\sin x)$ என எடுத்துக் கொள்க.

எனவே, $f(2a-x) = g(\sin(\pi - x)) = g(\sin x) = f(x)$.

$$\therefore \int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx\,.$$

$$\int_0^{\pi} g(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\sin x)\,dx\,.$$

■

முடிவு

$$\int_0^{\pi} g(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\sin x)\,dx.$$

■

குறிப்பு

$\int_0^{\pi} g(\sin x)\,dx$ என்ற அமைப்பில் உள்ள வரையறுத்த தொகையிடல்களை காண மேலே உள்ள முடிவு பயன்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.21

மதிப்பிடுக : $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\,dx$.

தீர்வு

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\, dx \text{ என்க.}$$

$$= \int_0^{\pi} x \frac{1}{1+\sin x}\, dx$$

$$f(x) = \frac{1}{1+\sin x} \text{ எனில் } f(\pi - x) = \frac{1}{1+\sin(\pi - x)} = \frac{1}{1+\sin x} = f(x)$$

$$\therefore \int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin x}\, dx, \quad f(a-x) = f(x)) \text{ எனில் } \int_0^a x f(x)\, dx = \frac{a}{2}\int_0^a f(x)\, dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}\, dx, \quad (\because \int_0^{\pi} g(\sin x)\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\sin x) dx)$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\, dx \quad (\because \int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a-x)\, dx)$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}}\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^2 \frac{x}{2}\, dx$$

$$= \pi \left[\tan \frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi\left[\tan\frac{\pi}{4} - \tan 0\right] = \pi.$$ ■

எடுத்துக்காட்டு 9.22

$\int_0^{2\pi} g(\cos x)\, dx = 2\int_0^{\pi} g(\cos x)\, dx$ எனக் காட்டுக. இங்கு $g(\cos x)$ என்பது $\cos x$-ல் அமைந்த சார்பு.

தீர்வு

$$2a = 2\pi \text{ மற்றும் } f(x) = g(\cos x) \text{ என்க.}$$

$$\text{எனவே, } f(2a - x) = f(2\pi - x) = g(\cos(2\pi - x)) = g(\cos x) = f(x)$$

$$\therefore \int_0^{2a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx.$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} g(\cos x)\, dx = 2\int_0^{\pi} g(\cos x)\, dx.$$ ■

முடிவு

$$\int_0^{2\pi} g(\cos x)\, dx = 2\int_0^{\pi} g(\cos x)\, dx.$$ ■

குறிப்பு

$\int_0^{2\pi} g(\cos x)\, dx$ என்ற அமைப்பில் உள்ள வரையறுத்த தொகையிடல்களை காண மேலே உள்ள முடிவு பயன்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.23

$f(x)=f(a+x)$ எனில் $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx$

தீர்வு

$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^{a} f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx$ என எழுதுவோம். ... (1)

$\int_a^{2a} f(x)\,dx$ என்பதில்,

$x = a+u$ எனப் பிரதியிடக் கிடைப்பது $dx = du$; $x=a$ எனில் $u=0$, $x=2a$ எனில், $u=a$.

$$\therefore \int_a^{2a} f(x)\,dx = \int_0^{a} f(a+u)\,du = \int_0^{a} f(u)\,du, \ (\because \ f(x)=f(a+x))$$

$$= \int_0^{a} f(x)\,dx. \qquad \text{... (2)}$$

சமன்பாடு (2)-ஐ (1)-ல் பயன்படுத்தக் கிடைப்பது,

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx.$$

■

எடுத்துக்காட்டு 9.24

மதிப்பிடுக : $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx.$

தீர்வு

$f(x) = x\cos x$ என்க. $f(-x)=(-x)\cos(-x) = -x\cos x = -f(x)$

எனவே, $f(x) = x\cos x$ ஓர் ஒற்றைப் படைச் சார்பாகும். $f(x)$ என்ற ஒற்றைப் படை சார்பிற்கு

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ என்ற பண்பை பயன்படுத்தக் கிடைப்பது $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = 0.$

■

எடுத்துக்காட்டு 9.25

மதிப்பிடுக : $\int_{-\log 2}^{\log 2} e^{-|x|}\,dx$.

தீர்வு

$f(x) = e^{-|x|}$ என்க. $f(-x)=e^{-|-x|}=e^{-|x|}=f(x)$

எனவே $f(x)$ என்பது ஓர் இரட்டைப் படைச் சார்பாகும்.

ஆகவே $$\int_{-\log 2}^{\log 2} e^{-|x|}\,dx = 2\int_0^{\log 2} e^{-|x|}\,dx = 2\int_0^{\log 2} e^{-x}\,dx = 2(-e^{-x})_0^{\log 2} = 2(-e^{-\log 2}+e^0) = 2\left(-e^{\log\frac{1}{2}}+1\right)$$

$$= 2\left(-\frac{1}{2}+1\right) = 1.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.26

மதிப்பிடுக : $\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx$.

தீர்வு

$$I = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx \text{ என்க.} \qquad \ldots (1)$$

$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ என்பதை (1)-ல் பயன்படுத்தக் கிடைப்பது,

$$I = \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(a-x)+f(a-(a-x))}dx$$

$$= \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}dx. \qquad \ldots (2)$$

சமன்பாடுகள் (1)-ம் (2)-ம் கூட்டக் கிடைப்பது,

$$2I = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx + \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}dx$$

$$= \int_0^a \frac{f(x)+f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}dx$$

$$= \int_0^a dx = a.$$

எனவே நாம் பெறுவது $\quad I = \frac{a}{2}$.

எடுத்துக்காட்டு 9.27

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)dx = \frac{\pi}{8}\log 2$.

தீர்வு

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)dx \text{ என்க.} \qquad \ldots (1)$$

$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ என்ற பண்பை சமன்பாடு (1)-ல் பயன்படுத்தக் கிடைப்பது,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[1+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x}\right]dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right]dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[\frac{1+\tan x+1-\tan x}{1+\tan x}\right]dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[\frac{2}{1+\tan x}\right]dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\log 2 - \log(1+\tan x)]dx$$

$$= \log 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\log 2 - I$$

$$2I = \frac{\pi}{4}\log 2. \text{ எனவே, } I = \frac{\pi}{8}\log 2.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.28

$\int_0^1 \left(\tan^{-1} x + \tan^{-1}(1-x)\right) dx = \frac{\pi}{2} - \log_e 2$ எனக்காட்டுக.

தீர்வு

$$I = \int_0^1 \left(\tan^{-1} x + \tan^{-1}(1-x)\right) dx$$

$$= \int_0^1 \tan^{-1} x \, dx + \int_0^1 \tan^{-1}(1-x)\, dx$$

$$= \int_0^1 \tan^{-1} x \, dx + \int_0^1 \tan^{-1}(1-(1-x))\, dx, \left(\because \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx\right)$$

$$= \int_0^1 \tan^{-1} x \, dx + \int_0^1 \tan^{-1} x \, dx$$

$$= 2\int_0^1 \tan^{-1} x \, dx$$

$$= \left[2\int u\,dv\right]_0^1, \text{ இங்கு } u = \tan^{-1} x \text{ மற்றும் } dv = dx$$

$$= 2\left[uv - \int v\,du\right]_0^1, \text{ பகுதி தொகையிடலின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த,}$$

$$= 2\left(x\tan^{-1} x - \int x \frac{dx}{1+x^2}\right)_0^1 = 2\left(x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)\right)_0^1 = \frac{\pi}{2} - \log 2$$

எடுத்துக்காட்டு 9.29

மதிப்பிடுக : $\int_2^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x}}\,dx.$

தீர்வு

$$I = \int_2^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x}}\,dx \text{ என்க.} \qquad \ldots (1)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx \text{ என்ற பண்பை பயன்படுத்த,}$$

$$I = \int_2^3 \frac{\sqrt{(2+3-x)}}{\sqrt{5-(2+3-x)}+\sqrt{(2+3-x)}}\,dx = \int_2^3 \frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{5-x}}\,dx \qquad \ldots (2)$$

சமன்பாடு (1)-யும் (2)-யும் கூட்டக் கிடைப்பது,

$$2I = \int_2^3 \frac{\sqrt{x}+\sqrt{5-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{5-x}}\,dx = \int_2^3 dx = [x]_2^3 = 3-2 = 1.$$

எனவே, நாம் பெறுவது $I = \frac{1}{2}$.

எடுத்துக்காட்டு 9.30

மதிப்பிடுக : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+a^x}\,dx$

தீர்வு

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+a^x}\,dx \text{ என்க.} \qquad \ldots (1)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx \text{ என்பதை பயன்படுத்த,}$$

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2(\pi-\pi-x)}{1+a^{\pi-\pi-x}}\,dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2(-x)}{1+a^{-x}}\,dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} a^x\left(\frac{\cos^2 x}{a^x+1}\right)dx \qquad \ldots (2)$$

சமன்பாடு (1)-யும் (2)-யும் கூட்டக் கிடைப்பது

$$2I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{a^x+1}(a^x+1)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,dx$$

$$= 2\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx \quad (\because \cos^2 x \text{ ஓர் இரட்டைப் படைச் சார்பு})$$

எனவே, $$I = \int_0^{\pi} \frac{(1+\cos 2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x+\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}[\pi] = \frac{\pi}{2}.$$

பயிற்சி 9.3

1. பின்வரும் வரையறுத்த தொகையிடலின் மதிப்பு காண்க :

(i) $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{x^2-4}$ (ii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5}$ (iii) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

(iv) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx$ (v) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos\theta}\,\sin^3\theta\,d\theta$ (vi) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx$

2. பின்வரும் வரையறுத்த தொகையிடல்களை, தொகையிடலின் பண்புகளைப் பயன்படுத்தி மதிப்பு காண்க:

(i) $\displaystyle\int_{-5}^{5} x\cos\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)dx$ (ii) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^5+x\cos x+\tan^3 x+1)\,dx$

(iii) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,dx$ (iv) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\log\left(\frac{3+\cos x}{3-\cos x}\right)dx$

(v) $\int_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^3 x \, dx$ (vi) $\int_0^1 |5x-3| \, dx$

(vii) $\int_0^{\sin^2 x} \sin^{-1}\sqrt{t} \, dt + \int_0^{\cos^2 x} \cos^{-1}\sqrt{t} \, dt$ (viii) $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} \, dx$

(ix) $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\sin x} dx$ (x) $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \frac{1}{1+\sqrt{\tan x}} dx$

(xi) $\int_0^{\pi} x\left[\sin^2(\sin x) + \cos^2(\cos x)\right] dx$

9.4 பெர்னோலி சூத்திரம் (Bernoulli's Formula)

$u(x)$ என்பது பல்லுறுப்புக் கோவை சார்பாகவும் (அதாவது, $u(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$) $v(x)$ என்பது எளிதில் தொடர்ச்சியாக தொகையீடு காணக்கூடியதாக சார்பாகவும் இருப்பின் $\int u(x)v(x)dx$ என்ற வடிவில் உள்ள வரையறுக்கப்படாத தொகையிடுதலை எளிதில் மதிப்பிடலாம். இதை தொடர்படுத்தக்கூடிய சூத்திரமானது **பெர்னோலி சூத்திரமாகும்**. இச்சூத்திரமானது உண்மையில் பகுதித் தொகையிடுதலின் (Integration by parts) விரிவாக்கம் ஆகும். இச்சூத்திரத்தை வருவிக்க பின்வரும் குறியீடுகளை நாம் பயன்படுத்துவோம்:

$$u^{(1)} = \frac{du}{dx}, \quad u^{(2)} = \frac{du^{(1)}}{dx}, \quad u^{(3)} = \frac{du^{(2)}}{dx}, \cdots\cdots$$

$$v_{(1)} = \int v dx, \ v_{(2)} = \int v_{(1)} dx, \ v_{(3)} = \int v_{(2)} dx, \cdots\cdots$$

எனவே நாம் பெறுவது

$$dv_{(1)} = v dx, \ dv_{(2)} = v_{(1)} dx, \ dv_{(3)} = v_{(2)} dx, \cdots\cdots$$

பகுதித் தொகையிடுதல் மூலமாக நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned}
\int uv dx &= \int u dv_{(1)} = uv_{(1)} - \int v_{(1)} du = uv_{(1)} - \int v_{(1)} \frac{du}{dx} dx \\
&= uv_{(1)} - \int u^{(1)} dv_{(2)} \\
&= uv_{(1)} - \left(u^{(1)} v_{(2)} - \int v_{(2)} du^{(1)}\right) \\
&= uv_{(1)} - u^{(1)} v_{(2)} + \int v_{(2)} \frac{du^{(1)}}{dx} dx \\
&= uv_{(1)} - u^{(1)} v_{(2)} + \int u^{(2)} dv_{(3)} \\
&= uv_{(1)} - u^{(1)} v_{(2)} + \left(u^{(2)} v_{(3)} - \int v_{(3)} du^{(2)}\right) \\
&= uv_{(1)} - u^{(1)} v_{(2)} + u^{(2)} v_{(3)} - \int v_{(3)} du^{(2)} .
\end{aligned}$$

இதேபோல் தொடர நாம் பெறுவது,

$$\int uv\,dx = uv_{(1)} - u^{(1)}v_{(2)} + u^{(2)}v_{(3)} - u^{(3)}v_{(4)} + \cdots.$$

இச்சூத்திரமானது **தொகையிடுதலில் இரு சார்புகளின் பெருக்கல் பெர்னோலி சூத்திரம்** எனப்படும்.

குறிப்பு

u என்பது x-ன் பல்லுறுப்புக் கோவை சார்பு ஆதலால் $u^{(m)}$ என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட m என்ற முழு எண்ணிற்கு பூச்சியத்தை அடைந்து விடுவதால் அதற்கு மேலே வகையிடல் செய்தால் மதிப்பு பூச்சியம் மட்டுமே கிடைக்கும். எனவே சூத்திரத்தின் வலது புறத்திலுள்ள உறுப்புகள் எண்ணிக்கை ஒரு முடிவுறு எண்ணாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.31

மதிப்பிடுக : $\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\,dx$, n என்பது ஓர் மிகை முழுக்கள் ஆகும் .

தீர்வு

$u = x^2$ மற்றும் $v = \cos nx$ என எடுத்துக் கொண்டு பெர்னோலி சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது.

$$I = \int_0^{\pi} x^2 \cos nx\,dx = \left[\left(x^2\right)\left(\frac{\sin nx}{n}\right) - \left(2x\right)\left(-\frac{\cos nx}{n^2}\right) + (2)\left(-\frac{\sin nx}{n^3}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2\pi(-1)^n}{n^2} \quad (\because \cos n\pi = (-1)^n \text{ மற்றும் } \sin n\pi = 0).$$

எடுத்துக்காட்டு 9.32

மதிப்பிடுக : $\int_0^1 e^{-2x}(1 + x - 2x^3)\,dx$.

தீர்வு

$u = 1 + x - 2x^3$ மற்றுமை $v = e^{-2x}$ என எடுத்துக்கொண்டு பெர்னோலி சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது.

$$I = \int_0^1 e^{-2x}(1 + x - 2x^3)\,dx$$

$$= \left[(1 + x - 2x^3)\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right) - \left(1 - 6x^2\right)\left(\frac{e^{-2x}}{4}\right) + (-12x)\left(\frac{e^{-2x}}{-8}\right) - (-12)\left(\frac{e^{-2x}}{16}\right)\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{e^{-2x}}{16}\left(16x^3 + 24x^2 + 16x\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{7}{2e^2}.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.33

மதிப்பிடுக : $\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx\,dx$, n என்பது ஓர் மிகை முழுக்கள் ஆகும்.

தீர்வு

$u = x^2$ மற்றும் $v = \sin nx$ என எடுத்துக் கொண்டுபெர்னோலி சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது,

$$I = \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx\,dx = \left[\left(x^2\right)\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) - \left(2x\right)\left(-\frac{\sin nx}{n^2}\right) + (2)\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \left[\left(4\pi^2\right)\left(-\frac{1}{n}\right) - 0 + (2)\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] - \left[0 - 0 + (2)\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] \ (\because \ \cos 2n\pi = 1 \text{ மற்றும் } \sin 2n\pi = 0)$$

$$= -\frac{4\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3} - \frac{2}{n^3} = -\frac{4\pi^2}{n}.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.34

மதிப்பிடுக : $\int_{-1}^{1} e^{-\lambda x}(1-x^2)\,dx$.

தீர்வு

$u = 1 - x^2$ மற்றும் $v = e^{-\lambda x}$ என்க. பெர்னோலி சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது

$$I = \int_{-1}^{1} e^{-\lambda x}(1-x^2)\,dx = \left[(1-x^2)\left(\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right) - (-2x)\left(\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2}\right) + (-2)\left(\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda^3}\right)\right]_{-1}^{1}$$

$$= 2\left(\frac{e^{-\lambda}}{\lambda^2}\right) + 2\left(\frac{e^{-\lambda}}{\lambda^3}\right) + 2\left(\frac{e^{\lambda}}{\lambda^2}\right) - 2\left(\frac{e^{\lambda}}{\lambda^3}\right)$$

$$= \frac{2}{\lambda^2}\left(e^{\lambda} + e^{-\lambda}\right) - \frac{2}{\lambda^3}\left(e^{\lambda} - e^{-\lambda}\right).$$

பயிற்சி 9.4

பின்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக:

1. $\int_0^1 x^3 e^{-2x}\,dx$
2. $\int_0^1 \frac{\sin(3\tan^{-1}x)\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$
3. $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{e^{\sin^{-1}x}\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x\,dx$

9.5 முறையற்ற தொகையீடுகள் (Improper Integrals)

ரீமன் தொகையிடுதல் $\int_a^b f(x)dx$ -ஐ வரையறுக்கும்போது $[a,b]$ என்ற இடைவெளியில் தொகையிடுதலின் மதிப்பு முடிவுறு எண்ணாக இருக்கும். $f(x)$ என்பது $[a,b]$-ன் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் முடிவுறு எண்ணாக இருக்கும். இயற்பியல் பயன்பாடுகளில் பல இடங்களில்

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx,\ \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx,\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$ எனும் தொகையீடுகள் வருகின்றன.

இங்கு a என்பது ஒரு மெய் எண் மற்றும் $f(x)$ ஆனது தொகையீடு காணக்கூடிய இடைவெளியில் ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பாகும். இவ்வகை தொகையீடுகளை ரீமன் தொகையிடலின் எல்லைகள் ஆகும். அவை:

(i) $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$ (ii) $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)\,dx$

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,dx$

இவ்வகை தொகையீடுகள் **முறையற்ற தொகையிடுதலின் முதல் வகையாகும். எல்லை காண முடியுமெனில் முறையற்ற தொகையிடல்கள் ஒருங்கும் என்போம்.**

குறிப்பு

அடிப்படைத் தொகை நுண்கணிதத் தேற்றத்தின்படி $F(t)$ எனும் சார்பிற்கு

$$\int_a^t f(x)\,dx = F(t)-F(a) \text{ எனப் பெறலாம்.}$$

$$\therefore \int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}[F(t)-F(a)] = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^\infty .$$

எடுத்துக்காட்டு 9.35

மதிப்பிடுக : $\int\limits_b^\infty \frac{1}{a^2+x^2}\,dx,\ a>0, b\in\mathbb{R}$.

தீர்வு

$$\int\limits_b^\infty \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right]_b^\infty = \frac{1}{a}\tan^{-1}\infty - \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{b}{a} = \frac{1}{a}\left[\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{b}{a}\right].$$

குறிப்பு

மேலே உள்ள எடுத்துக்காட்டிலிருந்து நாம் பெறுவது

(i) $$\int\limits_0^\infty \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\left[\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}0\right] = \frac{\pi}{2a}.$$

(ii) $$\int\limits_a^\infty \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\left[\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}1\right] = \frac{1}{a}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{4a}.$$

(iii) $$\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^t \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}2\int_0^t \frac{1}{a^2+x^2}\,dx,$$

($\because \frac{1}{a^2+x^2}$ என்பது ஓர் இரட்டைப் படைச் சார்பு

$$= 2\int\limits_0^\infty \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = 2\left(\frac{\pi}{2a}\right) = \frac{\pi}{a}.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.36

மதிப்பிடுக : $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4\sin^2 x+5\cos^2 x}$.

தீர்வு

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4x\sin^2 x+5\cos^2 x} \text{ என்க.}$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{4\tan^2 x+5}\,dx$$ $\left\{\begin{array}{l}\text{(தொகுதியையும் பகுதியையும்}\\ \cos^2 x\text{ஆல் வகுக்க)}\end{array}\right.$

$u = \tan x$ என்க. $du = \sec^2 x\,dx$

$x = 0$ எனில் $u = \tan 0 = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$ எனில் $u = \tan\frac{\pi}{2} = \infty$.

$$\therefore I = \int_0^{\infty} \frac{du}{4u^2+5} \text{ (இது ஒரு முறையற்ற தொகையிடல்)}$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\infty} \frac{du}{\left[u^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]} = \frac{1}{4}\times\frac{2}{\sqrt{5}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{u}{\frac{\sqrt{5}}{2}}\right)\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2\sqrt{5}}(\tan^{-1}\infty - \tan^{-1}0) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4\sqrt{5}}.$$

பயிற்சி 9.5

1. பின்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக:

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+5\cos^2 x}$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+4\sin^2 x}$

9.6 குறைப்புச் சூத்திரங்கள் (Reduction Formulae)

சில வரையறுத்த தொகையிடல்களில் தொகையிட வேண்டிய சார்பின் அடுக்கை குறைத்து தொகையிடல் காண முடியும். இப்பகுதியில்

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx$, $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx$ என்ற வரையறுத்த தொகையிடல்களின் மதிப்புகளையும் $\int_0^{\infty} e^{-x} x^n\, dx$ என்ற முறையற்ற தொகையிடலின் மதிப்பையும் காணலாம்.

குறைப்புச் சூத்திரத்தை காண்பதற்குரிய வழிமுறைகள் பின்வரும் படிகளில் காணலாம் :

படி 1 : தொகையிடலுக்குரிய சார்பின் அடுக்கு (மிகை முழு எண்) n -ஐ அடையாளம் காண்க.

படி 2 : தொகையிடலை I_n என்க.

படி 3 : பகுதித் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி I_n சமன்பாட்டை I_{n-1}அல்லது I_{n-2} உடைய உறுப்புகளாக மாற்றுக.

இறுதியாக கிடைக்கும் சமன்பாடு I_n -இன் குறைப்புச் சூத்திரமாகும்.

இங்கு சில குறைப்புச் சூத்திரங்கள் நிரூபணமின்றி பட்டியலிடப்பட்டுள்ளது :

குறைப்புச் சூத்திரம் I : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, எனில் $I_n = \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}, n \geq 2$.

குறைப்புச் சூத்திரம் II : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$, எனில் $I_n = \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}\ n \geq 2$.

குறைப்புச் சூத்திரம் III : $I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx$, எனில் $I_{m,n} = \frac{(n-1)}{m+n} I_{m,n-2}, n \geq 2$.

குறைப்புச் சூத்திரம் IV : $I_{m,n} = \int_0^1 x^m\ (1-x)^n dx$, எனில் $I_{m,n} = \frac{n}{m+n+1} I_{m,n-1}, n \geq 1$.

குறைப்புச் சூத்திரங்கள் I மற்றும் II–களைப் பயன்படுத்தி நாம் பெறும் முடிவானது (நிரூபணமின்றி):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx = \begin{cases} \frac{(n-1)}{n}\times\frac{(n-3)}{(n-2)}\times\cdots\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}, & \text{vdpy;}\quad n = 2,4,6,\cdots \\ \frac{(n-1)}{n}\times\frac{(n-3)}{(n-2)}\times\cdots\times\frac{2}{3}, & \text{vdpy;}\quad n = 3,5,7\cdots \end{cases}$$

குறிப்பு

எடுத்துக்காட்டாக

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\, dx = \frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x\, dx = \frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 9.37

மதிப்பிடுக : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x + \cos^4 x\right) dx$

தீர்வு

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x + \cos^4 x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\, dx = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} + \frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{16}.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.38

மதிப்பிடுக : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{vmatrix} \cos^4 x & 7 \\ \sin^5 x & 3 \end{vmatrix} dx$.

தீர்வு

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3\cos^4 x - 7\sin^5 x\right) dx = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\, dx - 7\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\, dx$$

$$= 3\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} - 7\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3} = \frac{9\pi}{16} - \frac{56}{15}.$$

குறைப்புச் சூத்திரம் III-ஐ திரும்பத் திரும்ப பயன்படுத்தி பின்வரும் முடிவுகளை (நிரூபணமின்றி) நாம் பெறலாம் :

(i) n இரட்டை எண் மற்றும் m இரட்டை எண் எனில்

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{(n-1)}{(m+n)}\frac{(n-3)}{(m+n-2)}\frac{(n-5)}{(m+n-4)}\cdots\frac{1}{(m+2)}\frac{(m-1)}{m}\frac{(m-3)}{(m-2)}\frac{(m-5)}{(m-4)}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$$

(ii) n ஒற்றை எண் மற்றும் m மிகை முழுக்கள் (இரட்டை எண் அல்லது ஒற்றை எண்), எனில்

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{(n-1)}{(m+n)}\frac{(n-3)}{(m+n-2)}\frac{(n-5)}{(m+n-4)}\cdots\frac{2}{(m+3)}\frac{1}{(m+1)}$$

குறிப்பு

m மற்றும் n ஏதாவது ஒன்று ஒற்றை எண் எனில் $\cos x$ சார்பின் பின் அடுக்கினை ஒற்றை எண் ஆக மாற்ற வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக m ஒற்றை எண் மற்றும் n இரட்டை எண் எனில்

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x\, dx = \frac{(m-1)}{(n+m)}\frac{(m-3)}{(n+m-2)}\frac{(m-5)}{(n+m-4)}\cdots\frac{2}{(n+3)}\frac{1}{(n+1)}.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.39

பின்வருபனவற்றின் மதிப்பைக் காண்க:

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^4 x\, dx$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^6 x\, dx$

தீர்வு

(i) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^6 x \, dx = \frac{(6-1)}{(6+4)} \cdot \frac{(6-3)}{(6+4-2)} \cdot \frac{(6-5)}{(6+4-4)} \cdot \frac{(4-1)}{(4)} \cdot \frac{(4-3)}{(4-2)} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(5)}{(10)} \frac{(3)}{(8)} \frac{(1)}{(6)} \frac{(3)}{(4)} \frac{(1)}{(2)} \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{512}$$

மேலும், $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^6 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x \, dx = \frac{(3)}{(10)} \frac{(1)}{(8)} \frac{(5)}{(6)} \frac{(3)}{(4)} \frac{(1)}{(2)} \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{512}$$

(ii) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^4 x \, dx = \frac{(3)}{(9)} \frac{(1)}{(7)} \frac{(4)}{(5)} \frac{(2)}{(3)} = \frac{(4)}{(9)} \frac{(2)}{(7)} \frac{(1)}{(5)} = \frac{8}{315}$$

மேலும், $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^4 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^5 x \, dx = \frac{(4)}{(9)} \frac{(2)}{(7)} \frac{(1)}{(5)} = \frac{8}{315}$$ ■

எடுத்துக்காட்டு 9.40

மதிப்பிடுக : $\int_0^{2a} x^2 \sqrt{2ax - x^2}\, dx$.

தீர்வு

$x = 2a\cos^2\theta$ என்க. $dx = -4a\cos\theta\sin\theta \, d\theta$.

$x = 0$ எனில் $2a\cos^2\theta = 0$ எனவே $\theta = \frac{\pi}{2}$. $x = 2a$ எனில் $2a\cos^2\theta = 2a$. எனவே $\theta = 0$.

$$I = \int_0^{2a} x^2 \sqrt{2ax - x^2}\, dx \text{ என்க.}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 4a^2\cos^2\theta \sqrt{4a^2\cos^2\theta - 4a^2\cos^4\theta}\,(-4a\cos\theta\sin\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4a^2\cos^2\theta \, 2a\cos\theta\sin\theta \,(4a\cos\theta\sin\theta)\, d\theta$$

$$= 32a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \sin^2\theta \, d\theta$$

$$= 32a^4 \times \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \pi a^4.$$ ■

எடுத்துக்காட்டு 9.41

மதிப்பிடுக : $\int_0^1 x^5 \left(1 - x^2\right)^5 dx$.

தீர்வு

$x = \sin\theta$ என்க. $dx = \cos\theta\, d\theta$.

$x = 0$ எனில் $\sin\theta = 0$ மற்றும் $\theta = 0$. $x = 1$ எனில் $\sin\theta = 1$. எனவே $\theta = \frac{\pi}{2}$.

எனவே, $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta \left(1 - \sin^2\theta\right)^5 \cos\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta \cos^{11}\theta \, d\theta = \frac{10}{16} \times \frac{8}{14} \times \frac{6}{12} \times \frac{4}{10} \times \frac{2}{8} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{336}.$$

குறைப்புச் சூத்திரம் III–ஐ திரும்பத் திரும்ப பயன்படுத்தி பின்வரும் முடிவை (நிரூபணமின்றி) நாம் பெறலாம்:

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx = \frac{m! \times n!}{(m+n+1)!},$$ m மற்றும் n என்பன மிகை முழுக்கள். ■

எடுத்துக்காட்டு 9.42

மதிப்பிடுக : $\int_0^1 x^3 (1-x)^4 dx$.

தீர்வு

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \frac{m! \times n!}{(m+n+1)!}.$$

$$\therefore \int_0^1 x^3 (1-x)^4 dx = \frac{3! \times 4!}{(3+4+1)!} = \frac{3! \times 4!}{8!} = \frac{3\times2\times1\times4\times3\times2\times1}{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1} = \frac{1}{280}.$$ ■

பயிற்சி 9.6

1. பின்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக :

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x \, dx$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x \, dx$ (iii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^6 2x \, dx$ (iv) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^5 3x \, dx$

(v) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^4 x \, dx$ (vi) $\int_0^{2\pi} \sin^7 \frac{x}{4} \, dx$ (vii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos^5 \theta \, d\theta$ (viii) $\int_0^1 x^2 (1-x)^3 \, dx$

9.7 காமா தொகையிடல் (Gamma Integral)

இப்பகுதியில் $\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx$, n ஒரு மிகை முழுக்கள் என்ற சிறப்பு வகை முறையற்ற தொகையிடலைப் பற்றி படிப்போம்.

$$e^\infty = \lim_{x\to\infty} e^x = \infty \text{ and } e^{-\infty} = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = \frac{1}{\lim_{x\to\infty} e^x} = \frac{1}{\infty} = 0$$ என நாம் பெறலாம்.

லோபிதாலின் விதிப்படி m என்ற முழுக்களின் ஒவ்வொரு எண்ணிற்கும் நாம் பெறுவது

$$\lim_{x\to\infty} x^m e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^m}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{m!}{e^x} = 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.43

n ஓர் மிகை முழுக்கள் எனில் $\int_0^\infty e^{-x} x^n dx = n!$ என நிறுவுக.

தீர்வு

பகுதித் தொகையிடலைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n dx = \left[x^n \left(-e^{-x}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-e^{-x}\right)\left(nx^{n-1}\right) dx = n\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx.$$

$$I_n = \int_0^\infty e^{-x} x^n dx.$$ எனவே, $I_n = nI_{n-1}$ என்க.

மேலும், $I_n = n(n-1)I_{n-2}$

இதே வழியை பின்பற்ற கடைசியாக நாம் பெறுவது

$$I_n = n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1)I_0 .$$

ஆனால், $I_0 = \int_0^\infty e^{-x}x^0 dx = \left(-e^{-x}\right)_0^\infty = 0+1=1$. எனவே நாம் பெறுவது

$$I_n = n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1) = n!.$$

முடிவு

$\int_0^\infty e^{-x}x^n dx = n!$, n என்பது மிகை முழுக்கள்.

குறிப்பு

$\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$ என்ற தொகையிடலானது ஒரே ஒரு மிகை முழு எண் $n \geq 1$-க்கு வரையறுக்கப்பட்டு உள்ளது.

வரையறை 9.1

$\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$ என்பது **காமா தொகையிடல்** (gamma integral) என அழைக்கப்படும். இதை $\Gamma(n)$ என்ற குறியீட்டில் எழுதுவோம் மற்றும் "காமா n" எனப் படிப்போம்.

குறிப்பு

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n).$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}x^0 dx = \left(-e^{-x}\right)_0^\infty = 0+1=1,$$

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx .$$

$$= (n-1)!, n = 1, 2, 3, ...$$

எடுத்துக்காட்டு 9.44

மதிப்பிடுக : $\int_0^\infty e^{-ax}x^n dx , a>0$.

தீர்வு

$t = ax$ என்க. $dt = adx$. $x=0 \Rightarrow t=0$ மற்றும் $x=\infty \Rightarrow t=\infty$

எனவே, நாம் பெறுவது

$$\int_0^\infty e^{-ax}x^n dx = \int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{t}{a}\right)^n \frac{dt}{a} = \frac{1}{a^{n+1}}\int_0^\infty e^{-t}t^n dt$$

$$= \frac{1}{a^{n+1}}\int_0^\infty e^{-x}x^n dx = \frac{n!}{a^{n+1}}.$$

இவ்வாறாக $\int_0^\infty e^{-ax}x^n dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$

எடுத்துக்காட்டு 9.45

$\Gamma(n) = 2\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n-1}dx$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$x = \sqrt{u}$ எனப் பிரதியிட, நாம் பெறுவது $dx = \frac{1}{2\sqrt{u}}du$.

$x = 0$ எனில், $u=0$ மற்றும் $x=\infty$ எனில் $u=\infty$.

$$\therefore 2\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n-1}dx = 2\int_0^\infty e^{-u}\left(\sqrt{u}\right)^{2n-1}\frac{1}{2\sqrt{u}}du = \int_0^\infty e^{-u}u^{n-1}du = \Gamma(n).$$

எடுத்துக்காட்டு 9.46

மதிப்பிடுக : $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^n}{n^x}\,dx$, n என்பது மிகை முழு எண் ≥ 2.

தீர்வு

$$n = e^{\log_e n} \text{ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி நாம் பெறுவது}$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^n}{n^x}\,dx = \int_0^{\infty} n^{-x} x^n\,dx = \int_0^{\infty} \left(e^{\log n}\right)^{-x} x^n\,dx = \int_0^{\infty} e^{-x\log n} x^n\,dx .$$

$$u = x\log n \text{ எனப் பிரதியிடக் கிடைப்பது } dx = \frac{du}{\log n}.$$

$$x = 0 \text{ எனில், } u = 0 \text{ மற்றும் } x = \infty \text{ எனில் } u = \infty .$$

$$\therefore I = \int_0^{\infty} e^{-u}\left(\frac{u}{\log n}\right)^n \frac{du}{\log n}$$

$$= \frac{1}{(\log n)^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{(n+1)-1}\,du = \frac{\Gamma(n+1)}{(\log n)^{n+1}} = \frac{n!}{(\log n)^{n+1}} .$$

பயிற்சி 9.7

பின்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக :

1. (i) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^5\, e^{-3x}\,dx$ (ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\tan x}}{\cos^6 x}\,dx$

2. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^3\,dx = 32$, $\alpha > 0$, எனில் α -ன் மதிப்பைக் காண்க.

R4R1E9

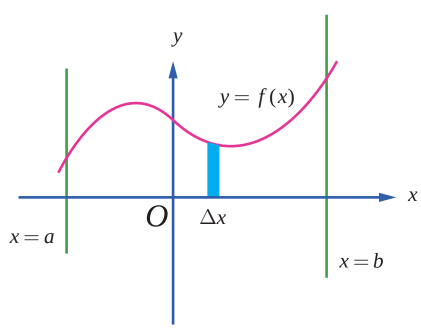
9.8 வரம்பிற்குட்பட்ட தளத்தின் பரப்பை தொகையிடல் மூலம் காணல் (Evaluation of a Bounded Plane Area by Integration)

இந்த அத்தியாயத்தின் தொடக்கத்தில் வரையறுத்த தொகையிடலை வடிவியல் அணுகுமுறை வழியாக அறிமுகப்படுத்தினோம். அவ்வாறு அணுகும்போது தொகையிடலின் தொகைச் சார்பு குறையற்ற எண்ணாக இருந்தால் வரையறுத்த தொகையிடல் மூலம் பரப்பை காணலாம். இப்பாடப் பகுதியில் தளத்தில் உள்ள வளைவரைகளை வரம்பிற்குட்படுத்தும் தளங்களின் பரப்பளவுகளை காண வடிவியல் அணுகுமுறையைக் கடைபிடிப்போம்.

9.8.1 கோடுகள் $x = a$, $x = b$ மற்றும் x − அச்சு ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பு காணல் (Area of the region bounded by a curve, x – axis and the lines $x = a$ and $x = b$)

நிலை (i)

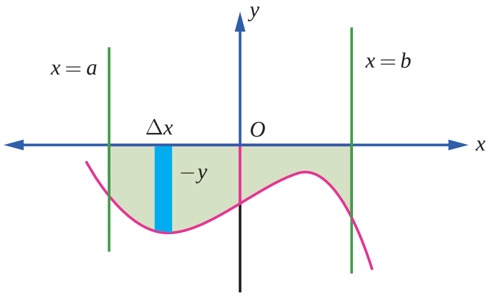
$x = a$ மற்றும் $x = b$ ஆகிய கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட x − அச்சிற்கு மேற்பகுதியில் (அதாவது முதல் அல்லது இரண்டாம் காற்பகுதியில்) உள்ள தொடர்ச்சியான வளைவரையின் சமன்பாடு $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ என்க. படம் 9.8-ல் காண்க. எனவே வளைவரையின் ஒவ்வொரு பகுதியிலும் உள்ள புள்ளிகளில், $y \geq 0$ ஆகும். கோடுகள் $x = a$ மற்றும் $x = b$ x − அச்சு மற்றும் வளைவரையின் வரம்பிற்குட்பட்ட (அரங்கத்தின்) பகுதியினைக் காண்போம். இப்பகுதியில் y -ன் குறி மாறாதிருப்பது குறிப்பிடத்தக்கது. எனவே A -ன் பரப்பை பின்வருமாறு கணிக்கலாம்:



படம் 9.8

$y-$அச்சின் மிகையெண் திசையில் நோக்கும்போது, அரங்கினை சின்னஞ்சிறு பட்டைகளாக(குறுகிய செவ்வகங்களாக) உயரம் y ஆகவும் அகலம் Δx ஆகவும் இருக்குமாறு பகுக்கலாம். எனவே, A என்பது செங்குத்து பட்டைகளின் பரப்புகளின் கூட்டற்தொகையின் எல்லையாகும். எனவே $A = \lim \sum\limits_{a \le x \le b} y\,\Delta x = \int_a^b y\,dx = \int_a^b y\,dx$ எனக் கிடைக்கிறது.

நிலை (ii)

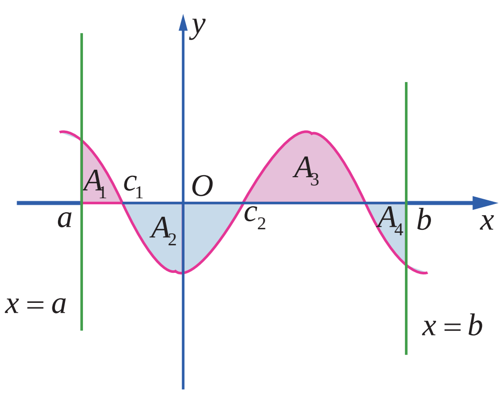


படம் 9.9

$x=a$ மற்றும் $x=b$ ஆகிய கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட, $x-$அச்சிற்கு கீழ்ப்பகுதியில் (அதாவது மூன்றாவது அல்லது நான்காம் காற்பகுதியில்) உள்ள தொடர்ச்சியான வளைவரையின் சமன்பாடு $y = f(x),\ a \le x \le b$ என்க. இங்கு $y \le 0$ என்பது வலைவரையின் பகுதியில் உள்ள அனைத்து புள்ளிகளுக்கும் பொருந்தும். $x=a$ மற்றும் $x=b$ ஆகிய கோடுகள் $x-$அச்சு மற்றும் வளைவரையின் வரம்பிற்குட்பட்ட (அரங்கத்தின்) பகுதியினைக் காண்போம். படம் 9.9-ல் காண்க. இப்பகுதியில் $y \le 0$ மற்றும் y -யின் குறி மாறாதிருப்பது குறிப்பிடத்தக்கது. எனவே, A -யின் பரப்பை பின்வருமாறு கணிக்கலாம்:

$y-$அச்சின் குறையெண் திசையில் நோக்கும்போது, அரங்கினை சின்னஞ்சிறு பட்டைகளாக(குறுகிய செவ்வகங்களாக) உயரம் $|y| = -y$ ஆகவும் அகலம் Δx ஆகவும் இருக்குமாறு பகுக்கலாம். எனவே, A என்பது செங்குத்துப் பட்டைகளின் பரப்புகளின் கூட்டல் தொகையின் எல்லையாகும். எனவே $A = \lim \sum\limits_{a \le x \le b} -y\Delta x = -\int_a^b ydx = \left|\int_a^b ydx\right|$ ஆகும்.

நிலை (iii)



படம் 9.10

$x=a$ மற்றும் $x=b$ ஆகிய கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட, $x-$அச்சிற்கு மேற்பகுதியிலும் அதே சமயத்தில் கீழ்ப்பகுதியிலும் (அதாவது அனைத்து காற்பகுதிகளிலும் இருக்கலாம்) உள்ள தொடர்ச்சியான வளைவரையின் சமன்பாடு $y = f(x),\ a \le x \le b$ என்க. xy-தளத்தில் $y = f(x)$ வளைவரையை வரைக. $x-$அச்சிற்கு மேலும் கீழும் மாறி மாறி அமையும் வளைவரை $x=a$ மற்றும் $x=b$ கோடுகளுக்கிடையே அமைகின்றது. $[a,b]$ எனும் இடைவெளி ஒவ்வொரு பகுதி இடைவெளியிலும் $f(x)$ ஒரே குறியில் இருக்குமாறு $[a,c_1]$, $[c_1,c_2], \cdots, [c_k,b]$ எனும் பகுதி இடைவெளிகளாக வகுக்கப்படுகிறது. நிலை (i) மற்றும் (ii) ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி, பகுதி இடைவெளிகளுக்கான அரங்குகளின் வடிவியல் பரப்பைத் தனித்தனியாக நாம் பெறலாம். எனவே $y = f(x)$, x-அச்சு, $x=a$ மற்றும் $x=b$ கோடுகளால் சூழப்பட்ட பகுதியின் வடிவியல் பரப்பு

$$\left|\int_a^{c_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| + \cdots + \left|\int_{c_k}^{b} f(x)dx\right|.$$

எடுத்துக்காட்டாக படம் 9.10–ல் உள்ள நிழலிடப்பட்டப் பகுதியைக் காண்போம். இங்கு A_1, A_2, A_3, மற்றும் A_4 ஆகியவை தனித்தனிப் பகுதிகளின் பரப்புகளாகும். எனவே மொத்தப் பரப்பானது

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \int_a^{c_1} f(x)dx + \left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| + \int_{c_2}^{c_3} f(x)dx + \left|\int_{c_3}^{b} f(x)dx\right| \text{ ஆகும்.}$$

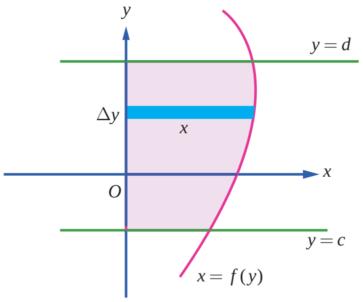
9.8.2 ஒரு வளைவரை, y–அச்சு மற்றும் கோடுகள் $y = c$, $y = d$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பு

(Area of the region bounded by a curve, y– axis and the lines $y = c$ and $y = d$)

நிலை (iv)

y – அச்சிற்கு வலப்பக்கம் அமையும் தொடர்ச்சியான வளைவரையின் பகுதியின் (அதாவது முதலாவது காற்பகுதி அல்லது நான்காவது காற்பகுதியின் பகுதியாகும்) சமன்பாடு $x = f(y),\ c \le y \le d$ என்க. இனி, வளைவரைப் பகுதியின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும $x \ge 0$ ஆகும். இப்பகுதியில் x -ன் குறி மாறாதது குறிப்பிடத்தக்கது.

வளைவரை y – அச்சு, $y = c$ மற்றும் $y = d$ கோடுகளால் சூழப்பட்ட பகுதியினைக் கருதுக. படம் 9.11-ல் காண்க. பகுதி வரையப்பட்டுள்ளது. எனவே பகுதி A -இன் பரப்பளவு கீழ்க்காணுமாறு கணிக்கப்படுகிறது:

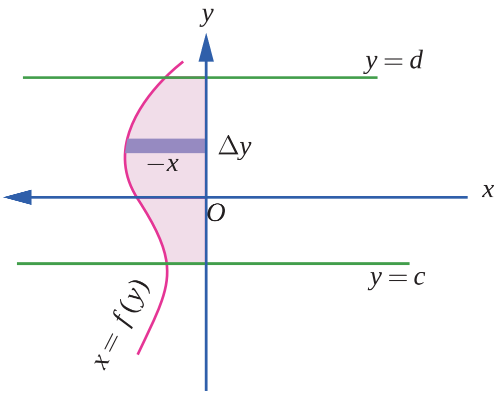


படம் 9.11

x – அச்சின் மிகையெண் திசை வழியாக நோக்கும்போது, அரங்கத்தினை x நீளம் மற்றும் அகலம் Δy ஆகவும் உள்ள கிடைமட்டப் பட்டைகளாக பகுக்கப் (அகலம் குறைந்த நீளமான செவ்வகங்களாக) படுகிறது. இனி A என்பது கிடைமட்ட செவ்வகப் பட்டைகளின் பரப்பளவுகளின் கூட்டல் எல்லையாகும். எனவே, $A = \lim \sum\limits_{c \le y \le d} x\Delta y = \int_c^d x dy$ ஆகும்.

நிலை (v)

y – அச்சிற்கு இடப்பக்கம் அமையும் தொடர்ச்சியான வளைவரையின் பகுதியின் (அதாவது இரண்டாவது காற்பகுதி அல்லது மூன்றாவது காற்பகுதியின் பகுதியாகும்) சமன்பாடு $x = f(y),\ c \le y \le d$ என்க. இனி, வளைவரைப் பகுதியின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் $x \le 0$ ஆகும். இப்பகுதியில் x -ன் குறி மாறாதது குறிப்பிடத்தக்கது. வளைவரை, y – அச்சு, $y = c$ மற்றும் $y = d$ கோடுகளால் சூழப்பட்ட பகுதியினைக் கருதுக. இப்பகுதி படம் 9.12–ல் நிழலிடப்பட்டுள்ளது. எனவே பகுதி A -இன் பரப்பளவு கீழ்க்காணுமாறு கணிக்கப்படுகிறது:



படம் 9.12

x – அச்சின் மிகையெண் திசை வழியாக நோக்கும்போது, அரங்கத்தினை $|x| = -x$ நீளம் மற்றும் அகலம் Δy ஆகவும் உள்ள கிடைமட்டப் பட்டைகளாக பகுக்கப் (அகலம் குறைந்த நீளமான செவ்வகங்களாக)படுகிறது. இனி, A என்பது கிடைமட்ட செவ்வகப் பட்டைகளின் பரப்பளவுகளின் கூட்டல் எல்லையாகும்.

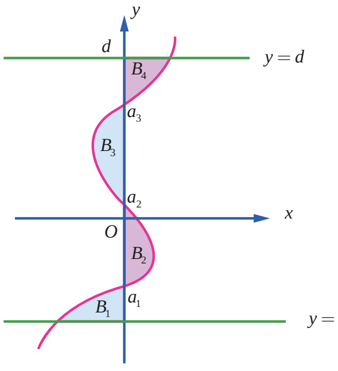
எனவே, $A = \lim \sum\limits_{c \le y \le d} (-x)\Delta y = -\int_c^d x\, dy = \left|\int_c^d x\, dy\right|$ ஆகும்.

நிலை (vi)

y – அச்சிற்கு வலப்பக்கம் அமையும் அதே சமயத்தில் இடப்பக்கமும் அமையும் தொடர்ச்சியான வளைவரையின் பகுதியின் (அதாவது அனைத்து காற்பகுதியிலும் வளைவரை அடையும்) சமன்பாடு $x = f(y),\ c \le y \le d$ என்க. xy-தளத்தில் $x = f(y)$ எனும் வளைவரையை வரைக. y – அச்சுக்கு வலப்பக்கமும் இடப்பக்கமும் மாறி மாறி அமையும் வளைவரையானது $y = c$ மற்றும் $y = d$ கோடுகளால் வெட்டப்படுகிறது. $[c, d]$ இடைவெளியை $[c, a_1],\ [a_1, a_2], \cdots,\ [a_k, d]$ எனும் பகுதி இடைவெளிகளாக, ஒவ்வொரு பகுதி இடைவெளியிலும் $f(y)$ குறி மாறாது இருக்குமாறு பகுக்க வேண்டும். நிலைகள் (iii) மற்றும் (iv) ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி, பகுதி இடைவெளிகளுக்கான அரங்கங்களின் பரப்புகளின் வடிவியல் பரப்புகளைத் தனித்தனியாகப் பெறலாம்.

எனவே $x=f(y)$, y-அச்சு, $y=c$ மற்றும் $y=d$ கோடுகளால் சூழப்பட்ட பகுதியின் வடிவியல் பரப்பு

$$A=\left|\int_c^{a_1} f(y)dy\right|+\left|\int_{a_1}^{a_2} f(y)dy\right|+\cdots+\left|\int_{a_k}^{d} f(y)dy\right| \text{ எனப் பெறுகிறோம்.}$$



படம் 9.13

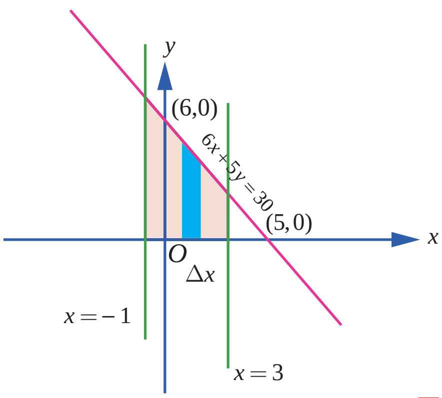
சான்றாக படம் 9.13-ல் உள்ள நிழலிடப்பட்டப் பகுதியினைக் கருதுவோம். இங்கு B_1, B_2, B_3 மற்றும் B_4 ஆகியவை தனித்தனியானப் பகுதிகளின் வடிவியல் பரப்புகளாகும். இனி, வளைவரை $x=f(y)$, y-அச்சு மற்றும் $y=c$ மற்றும் $y=d$ ஆகியவற்றால் சூழப்பட்ட பரப்பின் மொத்த பரப்பளவு

$$\begin{aligned} B &= B_1+B_2+B_3+B_4 \\ &= \left|\int_c^{a_1} f(y)dy\right|+\int_{a_1}^{a_2} f(y)dy+\left|\int_{a_2}^{a_3} f(y)dy\right|+\int_{a_3}^{d} f(y)dy \text{ ஆகும்.} \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 9.47

$6x+5y=30$, $x-$அச்சு, $x=-1$ மற்றும் $x=3$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு



படம் 9.14

தேவையான அரங்கத்தின் பரப்பானது படம் 9.14-ல் நிழலிடப்பட்டுள்ளது. இப்பரப்பானது $x-$அச்சின் மேல் உள்ளது. எனவே தேவையான பரப்பு,

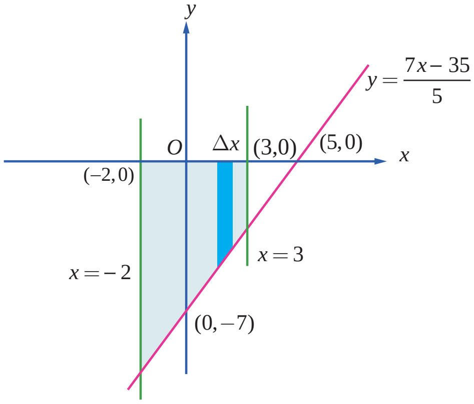
$$A = \int_{-1}^{3} y\,dx = \int_{-1}^{3}\left(\frac{30-6x}{5}\right)dx = \left(\frac{30x-3x^2}{5}\right)_{-1}^{3}$$

$$= \left(\frac{90-27}{5}\right)-\left(\frac{-30-3}{5}\right)=\frac{96}{5}.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.48

$7x-5y=35$, $x-$அச்சு மற்றும் கோடுகள் $x=-2$ மற்றும் $x=3$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு



படம் 9.15

தேவையான அரங்கத்தின் பரப்பானது படம் 9.15-ல் நிழலிடப்பட்டுள்ளது. இப்பரப்பானது $x-$அச்சின் மேல் உள்ளது. எனவே தேவையான பரப்பானது,

$$A = \left|\int_{-2}^{3} y\,dx\right| = \left|\int_{-2}^{3}\left(\frac{7x-35}{5}\right)dx\right|$$

$$= \frac{1}{5}\left|\left(7\left(\frac{x^2}{2}\right)-35x\right)_{-2}^{3}\right|$$

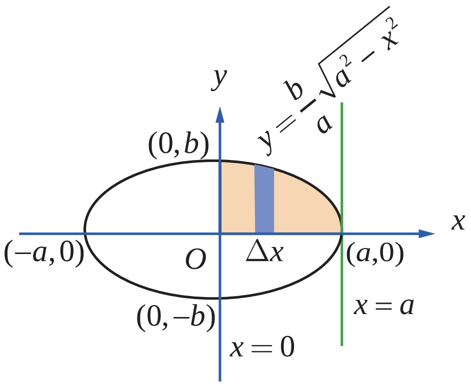
$$= \frac{1}{5}\left|\left(\left(\frac{63}{2}\right)-105\right)-(84)\right| = \frac{63}{2}.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.49

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ என்ற நீள்வட்டத்தினால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு

நீள்வட்டமானது நெட்டச்சு மற்றும் குற்றச்சுகளைப் பொருத்து சமச்சீராக உள்ளது. படம் 9.16-ல் நீள்வட்டம் வரையப்பட்டுள்ளது. y-அச்சின் மிகைப்பகுதியின் திசையில் பார்க்கும்போது தேவையான பரப்பு A ஆனது நீள்வட்டத்தின் முதல் கால் வட்டப் பகுதியில் $\left(y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, 0<x<a\right)$, x-அச்சு, $x=0$ மற்றும் $x=a$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைப் போல் நான்கு மடங்காகும். செங்குத்தான பட்டைகளைப் பயன்படுத்தி பரப்பு காணக் கிடைப்பது,



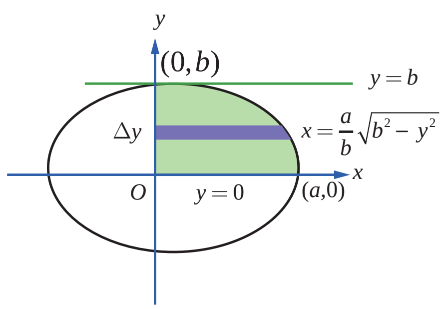
படம் 9.16

$$A = 4\int_0^a y\,dx = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= \frac{4b}{a}\left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^a = \frac{4b}{a}\times\frac{\pi a^2}{4}=\pi ab$$

குறிப்பு

x-அச்சின் மிகைப் பகுதியை திசையில் பார்க்கும்போது தேவையான பரப்பு A ஆனது நீள்வட்டத்தின் முதல் கால் வட்டப் பகுதியில் $\left(x=\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}, 0<y<b\right)$ y-அச்சு, $y=0$ மற்றும் $y=b$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைப் போல் நான்கு மடங்காகும். கிடைமட்டப் பட்டைகளைப் பயன்படுத்தி (படம் 9.17-ல்) பரப்பு காணக் கிடைப்பது,



படம் 9.17

$$A = \int_0^a x\,dy = 4\int_0^b \frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\,dy$$

$$= \frac{4a}{b}\left[\frac{y\sqrt{b^2-y^2}}{2}+\frac{b^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{y}{b}\right)\right]_0^b = \frac{4a}{b}\times\frac{\pi b^2}{4}=\pi ab.$$

குறிப்பு

மேலே உள்ள முடிவில் $b=a$ என பிரதியிடக் கிடைப்பது $x^2+y^2=a^2$ என்ற வட்டத்தால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பு πa^2 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.50

$y^2=4ax$ என்ற பரவளையத்திற்கும் அதன் செவ்வகலத்திற்கும் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு

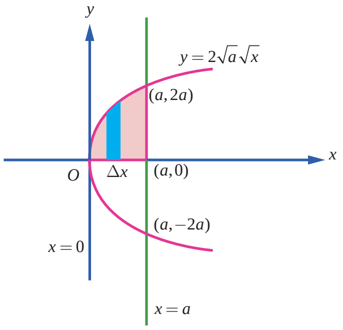
செவ்வகலத்தின் சமன்பாடு $x=a$ ஆகும். இச்செவ்வகலம் பரவளையத்தை $L(a,2a)$ மற்றும் $L_1(a,-2a)$ என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. தேவையான பரப்பு படம் 9.18ல் நிழலிடப்பட்டுள்ளது.

பரவளையம் சமச்சீராக இருப்பதால் தேவையான பரப்பு A ஆனது $y = 2\sqrt{a}\sqrt{x}$ என்ற பரவளையத்தின் பகுதி x-அச்சு, $x = 0$ மற்றும் $x = a$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் பரப்பைப் போல் இரு மடங்காகும்.

எனவே செங்குத்தான பட்டைகளைப் பயன்படுத்தி பரப்பு காண நமக்குக் கிடைப்பது

$$A = 2\int_0^a y\,dx = 2\int_0^a 2\sqrt{a}\sqrt{x}\,dx = 4\sqrt{a}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$$

$$= 4\sqrt{a}\times\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} = \frac{8a^2}{3}.$$



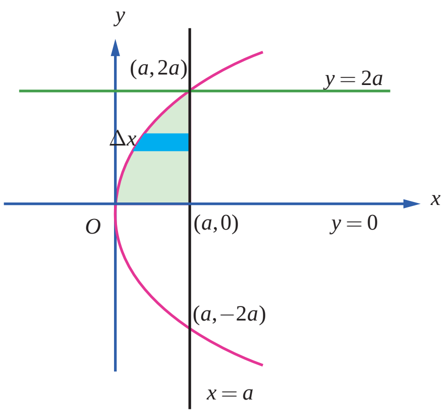
படம் 9.18

குறிப்பு

x-அச்சின் மிகைப் பகுதியின் திசையில், பரப்பு காண கிடைமட்ட பட்டைகளை பயன்படுத்த (படம் 9.19-ல் காண்க) நமக்குக் கிடைக்கும் பரப்பானது

$$A = 2\int_0^{2a}(a-x)dy = 2\int_0^{2a}\left(a-\frac{y^2}{4a}\right)dy$$

$$= 2\left(ay-\frac{y^3}{12a}\right)_0^{2a} = 2\left(2a^2-\frac{8a^3}{12a}\right) = \frac{8a^2}{3}.$$



படம் 9.19

குறிப்பு

மேற்காணும் பரப்பானது பரவளையத்தின் செவ்வகலத்தை அடிப்பக்கமாகவும் மற்றும் பரவளையத்தின் குவியத்திற்கும் முனைக்கும் உள்ள தூரத்தை உயரமாகவும் கொண்ட பரப்பில் மூன்றில் இரண்டு பங்கு ஆகும். இது பரவளையத்திற்கு கீழ் உள்ள பரப்பளவானது இவ்வளைவின் அடிப்பகுதியை நீளமாகவும் வளைவின் உயரத்தை அகலமாகவும் கொண்ட செவ்வகத்தின் பரப்பில் மூன்றில் இரண்டு பங்கு என்ற ஆர்க்கிமிடிஸ் சூத்திரத்தை நிறைவு செய்கிறது. மேலும் இப்பரப்பானது செவ்வகலத்தை அடிப்பக்கமாகவும், முனைக்கும் குவியத்திற்கும் உள்ள தூரத்தை உயரமாகவும் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பில் மூன்றில் நான்கு பங்கிற்குச் சமம்.

எடுத்துக்காட்டு 9.51

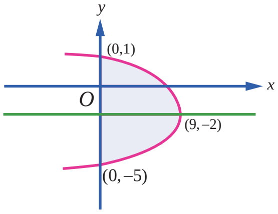
$x = 5-4y-y^2$ என்ற பரவளையத்திற்கும் y-அச்சிற்கும் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு

பரவளையத்தின் சமன்பாடானது $(y+2)^2 = -(x-9)$. இது y-அச்சில் $(0,-5)$ மற்றும் $(0,1)$ வழிச் செல்கிறது. இதன் முனை $(9,-2)$ மற்றும் பரவளையத்தின் அச்சானது $y=-2$. தேவையான பரப்பு படம் 9.20-ல் நிழலிடப்பட்டுள்ளது.

$x-$ அச்சின் மிகைப்பகுதியின் திசையில் நோக்கி பரப்பு காண, கிடைமட்டப் பட்டைகளைப் பயன்படுத் நமக்குக் கிடைக்கும் பரப்பானது,

$$A = \int_{-5}^{1} x\,dy = \int_{-5}^{1}(5-4y-y^2)dy = \left[5y-2y^2-\frac{y^3}{3}\right]_{-5}^{1} = \frac{8}{3}-\left(-\frac{100}{3}\right) = 36.$$



படம் 9.20

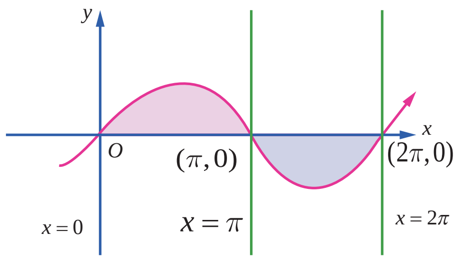
குறிப்பு

பரவளைய வளைவின் பரப்பானது அவ்வளைவின் அடிப்பக்கத்தின் நீளத்தைப் போல் மூன்றில் இரண்டு மடங்கின் உயரத்தின் மடங்கு என மேலே உள்ள கணக்கில் உள்ளது போல் ஆர்க்கிமிடிஸ் சூத்திரத்தை சரி செய்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 9.52

$y = \sin x$ என்ற வளைவரை, $x-$அச்சு, கோடுகள் $x = 0$ மற்றும் $x = 2\pi$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு



படம் 9.21

தேவையான பரப்பு படம் 9.21–ல் நிழலிடப்பட்டுள்ளது. பரப்பின் ஒரு பகுதியானது $x-$அச்சின் மேல் $x = 0$ மற்றும் $x = \pi$ ஆகியவற்றுக்கு இடையில் அமைந்துள்ளது. மற்றொரு பகுதியானது $x-$அச்சின் கீழ் $x = \pi$ மற்றும் $x = 2\pi$ ஆகியவற்றுக்கு இடையே அமைந்துள்ளது. எனவே தேவையான பரப்பானது.

$$A = \int_0^{\pi} y\,dx + \left|\int_{\pi}^{2\pi} y\,dx\right| = \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \left|\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx\right| = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} + \left|\left[-\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}\right|$$

$$= \left[-\cos\pi + \cos 0\right] + \left|\left[-\cos 2\pi + \cos\pi\right]\right| = 2 + |-2| = 4.$$

குறிப்பு

$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$ என்ற தொகையிடலின் மதிப்பு காண்போம்.

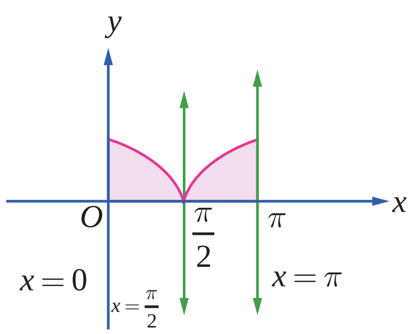
$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{2\pi} = \left[-\cos 2\pi\right] - \left[-\cos 0\right] = 0.$$

எனவே $\int_0^{2\pi} f(x)dx$ என்பது $y = \sin x$, $x-$அச்சு, கோடுகள் $x = 0$ மற்றும் $x = 2\pi$ ஆகியவற்றுக்கு இடையே அமையும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் குறிப்பதில்லை.

எடுத்துக்காட்டு 9.53

$y = |\cos x|$ என்ற வளைவரை $x-$அச்சு, கோடுகள் $x = 0$ மற்றும் $x = \pi$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு



படம் 9.22

கொடுக்கப்பட்ட வளைவரையானது $y = \begin{cases} \cos x, 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ -\cos x, \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$

வளைவரையானது $x-$அச்சின் மேல் உள்ளது. தேவையான பரப்பு, படம் 9.22–ல் நிழலிடப்பட்டுள்ளது. எனவே தேவையான பரப்பு

$$A = \int_0^{\pi} y\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(-\cos x\right) dx = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

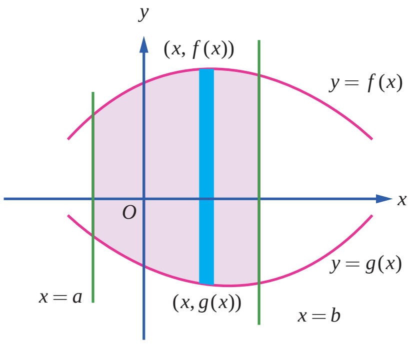
$$= \left[1 - 0\right] - \left[0 - 1\right] = 2.$$

9.8.3 இரு வளைவரைகளால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பு (Area of the region bounded between two curves)

நிலை (i)

$y = f(x)$ மற்றும் $y = g(x)$ என்ற இரு வளைவரைகளின் சமன்பாடுகள் மற்றும் xoy-தளத்தில் $f(x) \geq g(x)\ \forall\ x \in [a,b]$ என்க. இவ்விரு வளைவரைகளுக்கும் $x = a$ மற்றும் $x = b$ என்ற கோடுகளுக்கும் இடையே அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பு A-ஐ நாம் காண்போம்.

தேவையான பரப்பு படம் 9.23–ல் நிழலிடப்பட்டுள்ளது. பரப்பு A-ஐக் காண அரங்கத்தின் பரப்பை அகலம் Δx என இருக்குமாறு சிறு பட்டைகளாகப் பிரித்துக் கொள்வோம். உயரம் $f(x) - g(x)$ எனக் கொள்வோம்.



படம் 9.23

$f(x) - g(x) \geq 0\ \ \forall\ x \in [a,b]$ என்பதை கவனத்தில் கொள்வோம். எல்லைகளின் கூடுதலாக செங்குத்து பட்டைகளைக் கொண்டு முன்பு கணக்கிட்ட முறையில் பரப்பைக் காண்போம். எனவே நாம் பெறுவது, $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$.

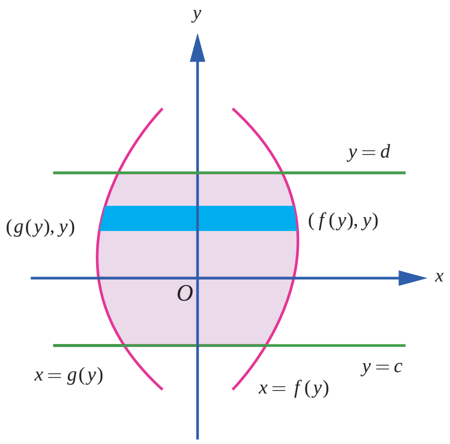
குறிப்பு

$y-$அச்சின் மிகைப் பகுதியின் திசையில் பார்க்கும்போது $y = f(x)$ என்ற வளைவரையை மேல் வளைவரை (U) மற்றும் $y = g(x)$ என்ற வளைவரையை கீழ் வளைவரை (L) என அழைப்போம். இவ்வாறாக நாம் பெறுவது $A = \int_a^b [y_U - y_L]dx$.

நிலை (ii)

$x = f(y)$ மற்றும் $x = g(y)$ என்பன இரு வளைவரைகளின் சமன்பாடுகள் மற்றும் xoy-தளத்தில் $f(y) \geq g(y)\ \forall\ y \in [c,d]$ என்க. இவ்விரு வளைவரைக்கும் $y = c$ மற்றும் $y = d$ என்ற கோடுகளுக்கும் இடையில் உள்ள அரங்கத்தின் பரப்பு A-ஐ நாம் காண்போம். தேவையான பரப்பு படம் 9.24–ல் நிழலிடப்பட்டுள்ளது. பரப்பு A-ஐக் காண அரங்கத்தின் பரப்பை $x-$அச்சின் மிகைப்பகுதியை காண, Δy அகலம் உடைய சிறு பட்டைகளாகப் பிரிப்போம். உயரம் $f(y) - g(y)$ எனக் கொள்வோம்.

$f(y) - g(y) \geq 0\ \forall\ y \in [c,d]$ என்பதை கவனத்தில் கொள்வோம்.



படம் 9.24

எல்லைகளின் கூடுதலாக கிடைமட்டப் பட்டைகளைக் கொண்டு முன்பு கணக்கிட்ட முறையில் பரப்பைக் காண்போம். எனவே நாம் பெறுவது $A = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy$.

குறிப்பு

$x-$அச்சின் மிகைப் பகுதியின் திசையில் பார்க்கும்போது $x = f(y)$ என்ற வளைவரை வலது வளைவரை (R) என்றும், மற்றும் $x = f(y)$ என்ற வளைவரை இடது வளைவரை (L) என்றும் அழைக்கப்படும் . இவ்வாறாக நாம் பெறுவது $A = \int_a^b [x_R - x_L]dy$.

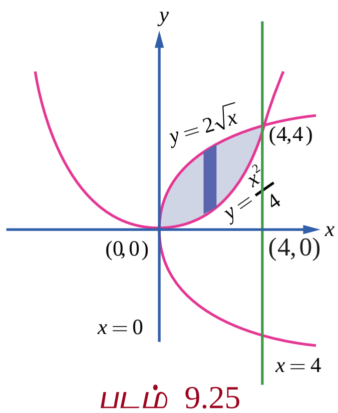
எடுத்துக்காட்டு 9.54

$y^2 = 4x$ மற்றும் $x^2 = 4y$ என்ற பரவளையங்களால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு

முதலில் வளைவரைகள் வெட்டும் புள்ளிகளைக் காண்போம். இதற்கு $y^2 = 4x$ மற்றும் $x^2 = 4y$ என்ற சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க வேண்டும்.

இரு சமன்பாடுகளிலும் y-ஐ நீக்கக் கிடைப்பது $x^4 = 64x$. எனவே $x = 0$ மற்றும் $x = 4$. எனவே வெட்டும் புள்ளிகள் $(0,0)$ மற்றும் $(4,4)$ ஆகும். தேவையான அரங்கத்தின் பரப்பு படம் 9.25–ல் நிழலிடப்பட்டுள்ளது.



படம் 9.25

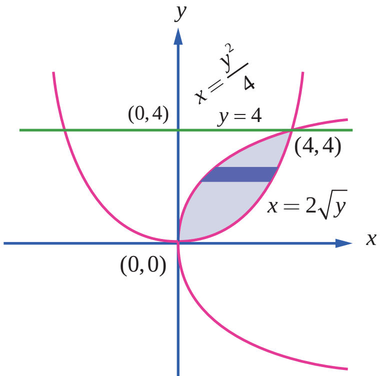
y-அச்சின் மிகைப்பகுதியின் திசையில் பார்க்கும்போது, மேற்புற எல்லையின் சமன்பாடு $y = 2\sqrt{x}$. $0 \le x \le 4$ மற்றும் கீழ் எல்லையின் சமன்பாடு

$y = \frac{x^2}{4}$, $0 \le x \le 4$. எனவே தேவையான பரப்பு,

$$A = \int_0^4 (y_U - y_L)\,dx = \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right)dx = \left[2\left(\frac{2x^{3/2}}{3}\right) - \frac{x^3}{12}\right]_0^4 = \left[2\left(\frac{2\times 8}{3}\right) - \frac{64}{12}\right] - 0 = \frac{16}{3}.$$

குறிப்பு

x-அச்சின் மிகைப்பகுதியின் திசையில் பார்க்கும்போது வலது எல்லையின் வளைவரையின் சமன்பாடு $x^2 = 4y$ மற்றும் இடது எல்லையின் வளைவரையின் சமன்பாடு $y^2 = 4x$. படம் 9.26 பார்க்கவும். வலது எல்லையின் சமன்பாடு $x = 2\sqrt{y}$, $0 \le y \le 4$ மற்றும் இடது எல்லையின் சமன்பாடு $x = \frac{y^2}{4}$. $0 \le y \le 4$. எனவே தேவையான பரப்பு A என்பது



படம் 9.26

$$A = \int_0^4 (x_R - x_L)\,dx = \int_0^4 \left(2\sqrt{y} - \frac{y^2}{4}\right)dy = \left[2\left(\frac{2y^{3/2}}{3}\right) - \frac{y^3}{12}\right]_0^4 = \left[2\left(\frac{2\times 8}{3}\right) - \frac{64}{12}\right] - 0 = \frac{16}{3}.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.55

பரவளையம் $x^2 = y$ மற்றும் வளைவரை $y = |x|$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

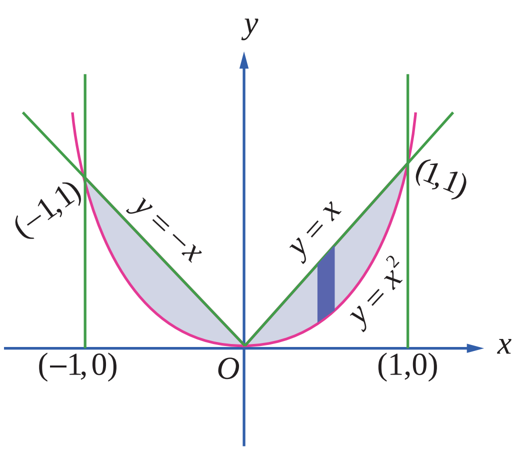
தீர்வு

இரு வளைவரைகளும் y-அச்சைப் பொருத்து சமச்சீராக உள்ளன.

வளைவரை $y = |x|$ ஆனது $y = \begin{cases} x & , x \ge 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$.

இவ்வளைவரையானது பரவளையம் $x^2 = y$-ஐ $(1,1)$ மற்றும் $(-1,1)$ என்ற புள்ளிகளில் வெட்டும்.

இரு வளைவரைகளுக்கும் அடைபட்ட அரங்கத்தின் பரப்பு படம் 9.27–ல் நிழலிடப்பட்டுள்ளது. இப்பரப்பானது முதல் மற்றும் இரண்டாவது கால் வட்டப் பகுதியில் அமைந்துள்ளன. பரவளையம் சமச்சீராக இருப்பதால் தேவையான பரப்பு முதல்கால் பகுதியில் உள்ளதை போல் இரு மடங்காகும்



படம் 9.27

முதல் கால் வட்டப் பகுதியில் $y=x, 0\le x\le 1$ என்ற வளைவரை மேல் உள்ளது மற்றும் $y=x^2, 0\le x\le 1$ என்ற வளைவரை கீழ் உள்ளது. எனவே தேவையான பரப்பானது

$$A = 2\int_0^1 [y_U - y_L]\,dx = 2\int_0^1 [x - x^2]\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

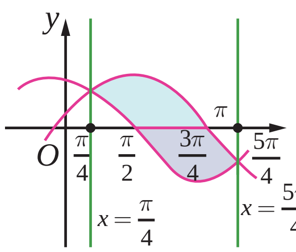
எடுத்துக்காட்டு 9.56

$y=\cos x$ மற்றும் $y=\sin x$ என்ற வளைவரைகள் $x=\frac{\pi}{4}$ மற்றும் $x=\frac{5\pi}{4}$ என்ற கோடுகள் ஆகியவற்றுக்கு இடையே உள்ள அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு

தேவையான அரங்கத்தின் பரப்பு படம் 9.28-ல் நிழலிடப்பட்டுள்ளது. அரங்கத்தின் மேல் எல்லை $y=\sin x,\ \frac{\pi}{4}\le x\le\frac{5\pi}{4}$ மற்றும் அரங்கத்தின் கீழ் எல்லை $y=\cos x$, $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{5\pi}{4}$. தேவையான பரப்பு,

$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (y_U - y_L)\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\,dx = [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$



படம் 9.28

$$= \left(-\sin\frac{5\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{4}\right) - \left(-\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \left(-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) - \left(-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

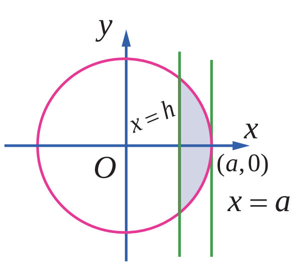
$$= \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.57

$x^2+y^2=a^2$ என்ற வட்டத்தில் உள்ள அரங்கத்தின் பரப்பை $x=h$ என்ற கோடு இரு பகுதிகளாக பிரிக்கின்றது எனில் சிறிய பகுதியின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு

சிறிய பகுதியின் பரப்பு படம் 9.29-ல் நிழலிடப்பட்டுள்ளது. இங்கு $0<h<a$ வட்டம் x-அச்சைப் பொருத்து சமச்சீராக இருப்பதால் சிறிய பகுதியின் பரப்பு,



படம் 9.29

$$A = 2\int_h^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = 2\left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_h^a$$

$$= 2\left[0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}(1)\right] - 2\left[\frac{h\sqrt{a^2-h^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{h}{a}\right)\right]$$

$$= a^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - h\sqrt{a^2-h^2} - a^2\sin^{-1}\left(\frac{h}{a}\right)$$

$$= a^2\left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\left(\frac{h}{a}\right)\right] - h\sqrt{a^2-h^2}$$

$$= a^2\cos^{-1}\left(\frac{h}{a}\right) - h\sqrt{a^2-h^2}\,.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.58

பரவளையம் $y^2 = 4x$, கோடு $x+y=3$ மற்றும் y-அச்சு ஆகியவற்றால் முதல் கால் வட்டப் பகுதியில் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு

முதலில் $x+y=3$ மற்றும் y^2-4x வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகளை காண்போம்.

$$x+y=3 \Rightarrow y=3-x\,.$$

$$\therefore y^2 = 4x \Rightarrow (3-x)^2 = 4x$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1, x = 9\,.$$

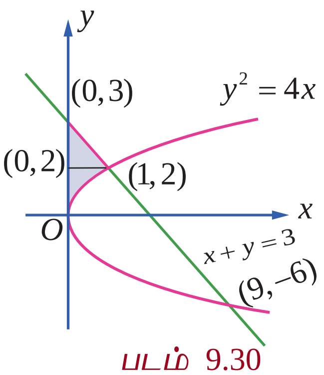
$x=1$ என $x+y=3$-ல் பிரதியிடக் கிடைப்பது $y=2$.

$x=9$ என $x+y=3$ பிரதியிடக் கிடைப்பது $y=-6$

எனவே வெட்டும் புள்ளிகள் $(1,2)$ மற்றும் $(9,-6)$ ஆகும்.

கோடு $x+y=3$ என்பது y-அச்சை $(0,3)$ எனும் புள்ளியில் சந்திக்கின்றது. தேவையான பரப்பு படம் 9.30–ல் நிழலிடப்பட்டுள்ளது

y-அச்சின் மிகைப்பகுதியை நோக்கிப் பார்க்கும்போது வலது எல்லையில் அமைந்துள்ள வளைவரையானது



படம் 9.30

$$x = \begin{cases} \dfrac{y^2}{4}, & 0 \le y \le 2 \\ 3-y, & 2 \le y \le 3 \end{cases}$$

$$\therefore A = \int_0^2 x\,dy + \int_2^3 x\,dy = \int_0^2 \frac{y^2}{4}\,dy + \int_2^3 (3-y)\,dy$$

$$= \left(\frac{y^3}{12}\right)_0^2 + \left(3y - \frac{y^2}{2}\right)_2^3 = \left(\frac{8}{12} - 0\right) + \left(9 - \frac{9}{2}\right) - \left(6 - \frac{4}{2}\right) = \frac{7}{6}\,.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.59

கோடுகள் $5x-2y=15$, $x+y+4=0$ மற்றும் x-அச்சு ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பை தொகையிடல் மூலம் காண்க.

தீர்வு

கோடுகள் $5x-2y=15$, $x+y+4=0$ வெட்டும் புள்ளி $(1,-5)$. $5x-2y=15$ என்ற கோடு x-அச்சை சந்திக்கும் புள்ளி $(3,0)$. கோடு $x+y+4=0$, x-அச்சை $(-4,0)$ -ல் சந்திக்கிறது. தேவையான பரப்பு படம் 9.31-ல் நிழலிடப்பட்டுள்ளது. இப்பரப்பானது x-அச்சின் மேல் பகுதியில் உள்ளது. இப்பரப்பை செங்குத்துப் பட்டைகள் அல்லது கிடைமட்டப் பட்டைகளைப் பயன்படுத்தி கணக்கிடலாம்.

செங்குத்துப் பட்டைகளைப் பயன்படுத்தி அரங்கத்தின் பரப்பு காண அரங்கத்தை $x=1$ கோடு வழியாக இரு பிரிவுகளாகப் பிரிக்க வேண்டும்.

எனவே நமக்கு கிடைப்பது,

$$A = \left|\int_{-4}^{1} y\,dx\right| + \left|\int_{1}^{3} y\,dx\right|$$

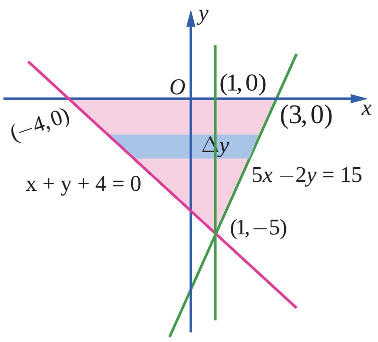
$$= \left|\int_{-4}^{1} (-4-x)\,dx\right| + \left|\int_{1}^{3} \left(\frac{5x-15}{2}\right)dx\right|$$

$$= \left|\left(-4x-\frac{x^2}{2}\right)_{-4}^{1}\right| + \left|\left(\frac{5x^2}{4}-\frac{15x}{2}\right)_{1}^{3}\right|$$

$$= \left|\left(-\frac{9}{2}\right)-(8)\right| + \left|\left(-\frac{45}{4}\right)-\left(-\frac{25}{4}\right)\right|$$

$$= \frac{25}{2}+5$$

$$= \frac{35}{2}.$$



படம் 9.31

கிடைமட்டப் பட்டைகளைப் கொண்டு பரப்பு காணும்போது அரங்கத்தை இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கத் தேவையில்லை. இம்முறையில் பரப்பின் வலது பக்க எல்லை $5x-2y=15$ என்ற கோடு மற்றும் இடது பக்க எல்லை $x+y+4=0$ என்ற கோடு ஆகும். எனவே நமக்கு கிடைப்பது,

$$A = \int_{-5}^{0}[x_R - x_L]\,dy = \int_{-5}^{0}\left[\frac{15+2y}{5} - (-4-y)\right]dy$$

$$= \int_{-5}^{0}\left[7+\frac{7y}{5}\right]dy = \left[7y+\frac{7y^2}{10}\right]_{-5}^{0}$$

$$= 0-\left[-35+\frac{35}{2}\right] = \frac{35}{2}.$$

குறிப்பு

முக்கோண வடிவத்தில் உள்ள அரங்கத்தின் அடிப்பக்கம் 7 அலகுகளாகும் மற்றும் உயரம் 5 அலகுகளாகவும் உள்ளது. எனவே தொகையிடலை பயன்படுத்தாமலே அதன் பரப்பானது $\frac{35}{2}$ என காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 9.60

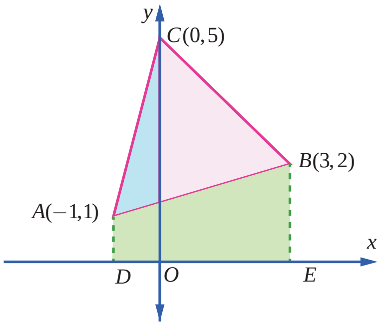
$(-1,1)$, $(3,2)$, $(0,5)$ என்பன A, B, மற்றும் C-யின் புள்ளிகள் எனில் முக்கோணம் ABCஆல் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி காண்க.

தீர்வு

படம் 9.32-ஐ பார்க்க.

AB -யின் சமன்பாடு $\frac{y-1}{2-1} = \frac{x+1}{3+1}$ அல்லது $y = \frac{1}{4}(x+5)$

BC-யின் சமன்பாடு $\frac{y-5}{2-5} = \frac{x-0}{3-0}$ அல்லது $y = -x+5$



படம் 9.32

AC-யின் சமன்பாடு $\dfrac{y-1}{5-1}=\dfrac{x+1}{0+1}$ அல்லது $y=4x+5$

$\therefore$ எனவே ΔABC -யின் பரப்பு

= DACO-யின் பரப்பு+ OCBE-யின் பரப்பு − DABE-யின் பரப்பு

$$= \int_{-1}^{0}(4x+5)\,dx+\int_{0}^{3}(-x+5)\,dx-\frac{1}{4}\int_{-1}^{3}(x+5)\,dx$$

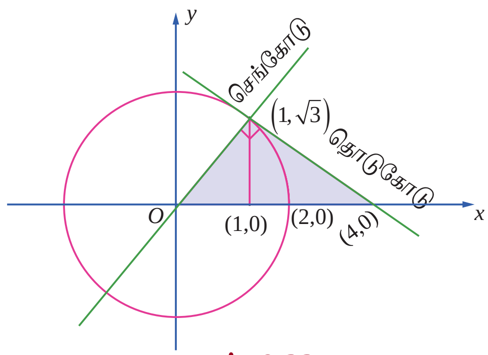
$$= \left[\frac{4x^2}{2}+5x\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^2}{2}+5x\right]_{0}^{3}-\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}+5x\right]_{-1}^{3}$$

$$= 0-(+2-5)+\left(-\frac{9}{2}+15\right)-0-\frac{1}{4}\left[\frac{9}{2}+15\right]+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}-5\right]=\frac{15}{2}$$ ■

எடுத்துக்காட்டு 9.61

$x^2+y^2=4$ என்ற வட்டத்தில் $\left(1,\sqrt{3}\right)$ எனும் புள்ளியில் தொடுகோடு, செங்கோடு மற்றும் x-அச்சு ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பை தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி காண்க.

தீர்வு



படம் 9.33

$x^2+y^2=a^2$ என்ற வட்டத்திற்கு $\left(x_1,y_1\right)$ எனும் புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $xx_1+yy_1=a^2$ என நாம் அறிவோம். எனவே $x^2+y^2=4$ என்ற வட்டத்திற்கு $\left(1,\sqrt{3}\right)$ எனும் புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $x+y\sqrt{3}=4$;

அதாவது $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-4)$. தொடுகோடு (4,0) எனும் புள்ளியில் x–அச்சை சந்திக்கிறது. எனவே தொடுகோட்டின் சாய்வு $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. எனவே செங்கோட்டின் சாய்வு $\sqrt{3}$.செங்கோட்டின் சமன்பாடு $y-\sqrt{3}=\sqrt{3}(x-1)$; அதாவது $y=\sqrt{3}x$. இக்கோடு ஆதி வழிச் செல்கிறது. தேவையான பரப்பானது அருகில் உள்ள படத்தில் நிழலிடப்பட்டுள்ளது. இப்பரப்பினை இரு வழிகளில் காணலாம்.

முறை 1

y-அச்சின் மிகை திசையில் நோக்கி பார்க்கும் போது, தேவையான அரங்கத்தின் பரப்பானது x-அச்சு, $y=\sqrt{3}x$ மற்றும் $x+y\sqrt{3}=4$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் பரப்பாகும். இதற்கு $\int_a^b y\,dx$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவோம். இதற்குத் தேவையான அரங்கத்தின் பரப்பை இரு பகுதிகளாக பிரித்துக் காண்போம். ஒரு பகுதியானது x-அச்சு, செங்கோடு $y=\sqrt{3}x$ மற்றும் $x=1$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பு மற்றொரு பகுதியானது x-அச்சுத் தொடுகோடு $x+y\sqrt{3}=4$ மற்றும் $x=1$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பு ஆகும்.

$$\therefore \text{ தேவையான பரப்பு } = \int_0^1 y\,dx+\int_1^4 y\,dx=\int_0^1\sqrt{3}x\,dx+\int_1^4\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)\right]dx$$

$$=\left[\sqrt{3}\,\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{x^2}{2}-4x\right)\right]_1^4=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{8}{\sqrt{3}}-\frac{7}{2\sqrt{3}}=2\sqrt{3}\,.$$

முறை 2

x-அச்சின் மிகை திசையில் நோக்கி பார்க்கும் போது, தேவையான அரங்கத்தின் பரப்பானது $y=\sqrt{3}x$, $x+y\sqrt{3}=4$, $y=0$ மற்றும் $y=\sqrt{3}$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் பரப்பாகும். இப்பரப்பைக் காண $\int_c^d (x_R - x_L)\,dy$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

இங்கு $c=0$, $d=\sqrt{3}$, x_R என்பது தொடுகோடு $x+y\sqrt{3}=4$ மற்றும் x_L என்பது செங்கோடு $y=\sqrt{3}x$ இன் x மதிப்பாகும்.

$$\therefore \text{ தேவையான பரப்பு } = \int_c^d (x_R - x_L)\,dy = \int_0^{\sqrt{3}} \left(\left(4 - y\sqrt{3}\right) - \frac{y}{\sqrt{3}} \right) dy$$

$$= \left[\left(4y - \frac{y^2}{2}\sqrt{3} \right) - \frac{y^2}{2\sqrt{3}} \right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= 4\sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

$y = f_1(x), y = f_2(x)$ கோடுகள் $x = a$ மற்றும் $x = b$, $a < b$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண வழிமுறைகள்:

y-அச்சுக்கு இணையாக அரங்கத்தின் தளத்தை வெட்டும் வகையில் தன்னிச்சையாக ஒரு கோடு வரைக. முதலில் அரங்கத்திற்குள் நுழையும் கோட்டின் y-புள்ளியைக் காண்க. இதை y_{ENTRY} என அழைக்கவும். அடுத்தாக அரங்கத்திற்குள் இருந்து வெளியேறும் கோட்டின் y-புள்ளியைக் காண்க. இதை y_{EXIT} என அழைக்கவும். வளைவரைகளின் எல்லைச் சமன்பாடுகளைக் கொண்டு y_{ENTRY} மற்றும் y_{EXIT} காண முடியும். எனவே தேவையான பரப்பு $[x_{EXIT} - x_{ENTRY}]$.

$x = g_1(y), x = g_2(y)$ கோடுகள் $y = c$ மற்றும் $y = d$, $c < d$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பை காண வழிமுறைகள்:

x-அச்சுக்கு இணையாக அரங்கத்தின் தளத்தை வெட்டும் வகையில் தன்னிச்சையாக ஒரு கோடு வரைக.

முதலில் அரங்கத்திற்குள் நுழையும் கோட்டின் x-புள்ளியைக் காண்க. இதை x_{ENTRY} என அழைக்கவும்.

அடுத்ததாக அரங்கத்திற்குள் இருந்து வெளியேறும் கோட்டின் x-புள்ளியைக் காண்க. இதை x_{EXIT} என அழைக்கவும். வளைவரைகளின் எல்லைச் சமன்பாடுகளைக் கொண்டு x_{ENTRY} மற்றும் x_{EXIT} காண முடியும். எனவே தேவையான பரப்பு $\int_c^d [x_{EXIT} - x_{ENTRY}]\,dy$.

பயிற்சி 9.8

1. $3x-2y+6=0$, $x=-3$, $x=1$ மற்றும் x-அச்சு ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.
2. $2x-y+1=0$, $y=-1$, $y=3$ மற்றும் y-அச்சு ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.
3. வளைவரை, $2+x-x^2+y=0$, x-அச்சு, $x=-3$ மற்றும் $x=3$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

4. கோடு $y=2x+5$ மற்றும் பரவளையம் $y=x^2-2x$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

5. வளைவரைகள் $y=\sin x$, $y=\cos x$ மற்றும் கோடுகள் $x=0$ மற்றும் $x=\pi$ ஆகியவற்றுக்கு இடையே அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

6. $y=\tan x$, $y=\cot x$ மற்றும் கோடுகள் $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

7. பரவளையம் $y^2=x$ மற்றும் கோடு $y=x-2$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

8. ஒரு குடும்பத் தலைவர், $x=0$, $x=4$, $y=4$ மற்றும் $y=0$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் சதுர நிலத்தின் பரப்பை $y^2=4x$ மற்றும் $x^2=4y$ என்ற வளைவரைகளின் வாயிலாக தன்னுடைய மனைவி, மகள் மற்றும் மகன் ஆகியோர்களுக்கு மூன்று சமபாகங்களாகப் பிரிக்க விரும்புகிறார். அவ்வாறு பிரிக்க இயலுமா? பிரிக்க இயலும் எனில் ஒவ்வொருவருக்கும் கிடைக்கும் பரப்பைக் காண்க.

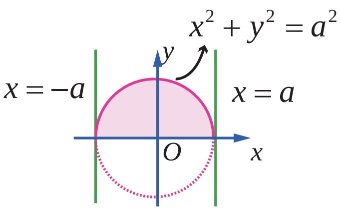
9. P என்பது $y=(x-2)^2+1$ என்ற வளைவரைக்கு ஒரு மீச்சிறு புள்ளி. Q என்ற புள்ளியானது, PQ-ன் சாய்வு 2 உள்ளவாறு வளைவரையின் மேல் உள்ளது எனில் வளைவரைக்கும் நாண் PQ-க்கும் இடையில் அடைபடும் பரப்பைக் காண்க.

10. $x^2+y^2=16$ என்ற வட்டத்திற்கும் $y^2=6x$ என்ற பரவளையத்திற்கும் பொதுவான அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

9.9 ஓர் அச்சைப் பொருத்து பரப்பை சுழற்றுவதால் அடைய பெறும் திடப்பொருளின் கனஅளவு

(Volume of a solid obtained by revolving area about an axis)

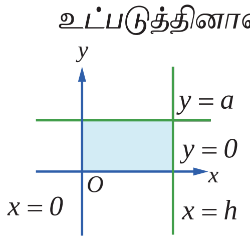
ஒரு நிலையான அச்சைப் பொருத்து சுழற்றுதலில் அடையப்பெறும் திடப்பொருள்களின் கன அளவுகளைக் கண்டறிய வரையறுத்த தொகையிடல் பயன்படுகிறது. ஒரு நிலையான அச்சைப் பொருத்து சுழற்சியால் அடையப் பெறும் திடப்பொருள் என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ள தளத்தில் உள்ள அரங்குப்பகுதியை ஒரு நிலையான அச்சைப் பொருத்து தளத்தில் முழு சுற்று சுற்றுவதால் திடப்பொருள் ஒன்று உருவாகிறது எனப் பொருள்படுகிறது. உதாரணமாக x-அச்சிற்கு மேல் $x^2+y^2=a^2$ எனும் வட்டத்தின் உட்பகுதியில் அமைந்த அரைவட்டப் பகுதியினைக் கருதுவோம். காண்க படம் 9.34.



படம் 9.34

x-அச்சை பொருத்து, இப்பகுதியை ஒரு முழு சுழற்சிக்கு உட்படுத்தினால் ($360°$-க்கான சுழற்சி 2π ஆரையன்கள் ஆகும்) உருவாகும் பொருள் கோளமாகும்.

அதே போல் a ஆரம் மற்றும் h உயரம் கொண்ட ஒரு நேர்வட்ட உருளையைப் பெற xy-தளத்தில் $y=0$, $y=a$, $x=0$ மற்றும் $x=h$ கோடுகளால் சூழப்பட்ட செவ்வகப் பகுதியை கருதுவோம். படம் 9.35-ல் காண்க. இப்பகுதியை x-அச்சைப் பொருத்து ஒரு முழு சுழற்சிக்கு உட்படுத்தினால் ($360°$-க்கான சுழற்சி 2π ஆரையன்கள் ஆகும்) உருளை எனப்படும் திடப்பொருள் உருவாகிறது.



படம் 9.35

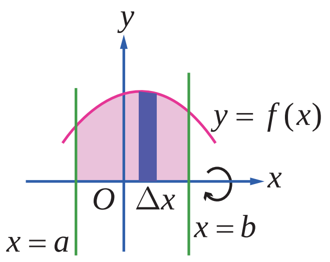
சுழற்சியில் ஏற்படும் திடப்பொருளின் கன அளவினை x-அச்சைப் பொருத்து அல்லது y-அச்சைப் பொருத்து மட்டுமே இப்பாடப்பகுதியில் கண்டறிவோம்.

x-அச்சைப் பொருத்து சுழற்சியால் ஏற்படும் திடப் பொருளைக் கருதும்போதெல்லாம் x-அச்சிற்கு மேல் உள்ள x-அச்சில் சுழலும் தளம் அரங்கமாகும். எனவே, இவ்வரங்கில் $y \geq 0$ ஆகும். y-அச்சைப் பொருத்து சுழற்சியால் ஏற்படும் திடப்பொருளைக் கருதும்போதெல்லாம் y-அச்சிற்கு மேல் உள்ள y-அச்சில் சுழலும் தளம் அரங்கமாகும். எனவே, இவ்வரங்கில் $x \geq 0$ ஆகும். $y = f(x)$, x-அச்சு மற்றும் $x = a$ மற்றும் $x = b > a$ ஆகியவற்றின் வரம்பிற்குட்பட்டு x-அச்சைப் பொருத்து சுழற்சியால் முதல் காற்பகுதியில் ஏற்படும் திடப்பொருளின் கன அளவு காணும் சூத்திரம் காண்போம். r **ஆரமும்** h **உயரமும் கொண்ட ஒரு உருளையின் அனைத்து கனஅளவுகளும் கணக்கிடப்படுகின்றன கனஅளவு சூத்திரம்** $\pi r^2 h$ **என்பதே ஆகும்.**

$x = a$ மற்றும் $x = b > a$ ஆகிய இரு கோடுகளுக்கிடையே y-அச்சிற்கு இணையாக இருக்கும் ஒவ்வொரு கோடும் $y = f(x)$ வளைவரையை முதல் காற்பகுதியில் ஒரே ஒரு புள்ளியில் மட்டுமே வெட்டும் எனக் கருதுவோம். $[a, b]$ இடைவெளியை

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b, \; x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n}, \; i = 1, 2, \ldots, n \text{ எனும்படி}$$

n துண்டுகளாக $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ என வகுப்போம்.

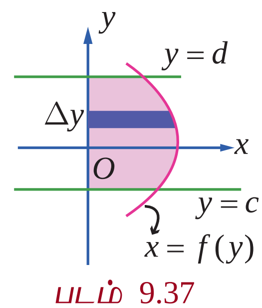


படம் 9.36

xy-தளத்திலுள்ள அரங்கத்திலுள்ள ஒவ்வொரு $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$-க்கும், x_i மற்றும் $x_i + \Delta x$-க்கு இடைப்பட்ட அரங்கமானது தோராயமாக x-அச்சு மற்றும் $y = f(x)$ வளைவரைக்கு இடைப்பட்டு அமைந்த $x = x_i$-ல் உள்ள ஒவ்வொரு எண்ணற்ற சிறு செவ்வகங்களின் சுழற்சியால் ஏற்படும் ஒரு அடிப்படையான திடப்பொருள் தோராயமாக y_i ஆரமாகவும் Δx உயரமாகவும் கொண்டிருக்கும் ஒரு மெல்லிய உருளைத் தட்டினை உருவாக்கும். படம் 9.36-ல் காண்க. $x = x_i$-ல் உள்ளஉருளைத் தட்டின் கன அளவு $\pi y_i^2 \Delta x$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ ஆகும். இந்த அடிப்படையான கன அளவுகள் அனைத்தும் கூட்ட, சுழற்சியால் ஏற்படும் திடப்பொருளின் கன அளவின் தோராய மதிப்பு $\sum_{i=0}^{n-1} \pi y_i^2 \Delta x$ எனக் கிடைக்கும்.

Δx சிறியதாக மேலும் சிறியதாக எனும்படி $(\Delta x \to 0)$, n பெரியதாக மேலும் பெரியதாக ஆகிறது. $(n \to \infty)$ இனி $\sum_{i=0}^{n-1} \pi y_i^2 \Delta x$ என்பது சுழற்சியால் ஏற்படும் திடப்பொருளின் கன அளவை அணுகும்.

எனவே சுழற்சியால் ஏற்படும் திடப் பொருளின் கன அளவு $\pi \int_a^b y^2 dx$ ஆகும்.



படம் 9.37

அதேபோன்று y-அச்சு பொருத்து வளைவரை $x = f(y)$, y-அச்சு, மற்றும் $y = c$ மற்றும் $y = d > c$ கோடுகள் ஆகியவற்றின் வரம்பிற்குட்பட்டு சுழலும் திடப்பொருளின் கன அளவு காணும் சூத்திரம் கண்டறிவோம்.

$y = c$ மற்றும் $y = d > c$ ஆகிய கோடுகளுக்கிடையே வளைவரை $x = f(y)$, yஅச்சிற்கு வலப்பக்கமாக அமைகிறது.

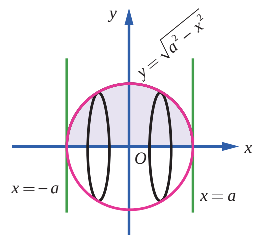
$y = c$ மற்றும் $y = d > c$ ஆகிய கோடுகளுக்கிடையே x–அச்சிற்கு இணையாக இருக்கும் ஒவ்வொரு கோடும் $y = f(x)$ வளைவரையை முதல் காற்பகுதியில் ஒரே ஒரு புள்ளியில் மட்டுமே வெட்டும் எனக் கருதுவோம். படம் 9.37-ல் காண்க. எனவே சுழற்சியால் ஏற்படும் திடப்பொருளின் கன அளவு $\pi \int_c^d x^2 dy$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.62

ஆரம் a உடைய கோளத்தின் கன அளவைக் காண்க.

தீர்வு

$x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்திற்கும் x-அச்சுக்கும் இடையே அமையும் மேல் அரை வட்டத்தின் அரங்கத்தின் பரப்பை x-அச்சைப் பொருத்து சுழற்றினால் ஆரம் a உடைய கோளத்தின் கன அளவைக் காணலாம். படம் 9.38ஐ பார்க்க.



படம் 9.38

அரங்கத்தின் எல்லைகள் $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, x-அச்சு, கோடுகள் $x = -a$ மற்றும் $x = a$.

எனவே கோளத்தின் கன அளவு, $V = \pi\int_{-a}^{a} y^2 dx = \pi\int_{-a}^{a}\left(a^2 - x^2\right)dx$

$$= 2\pi\int_{0}^{a}\left(a^2 - x^2\right)dx \text{, தொகை சார்பு } \left(a^2 - x^2\right) \text{ ஆனது இரட்டைப் படைச் சார்பு}$$

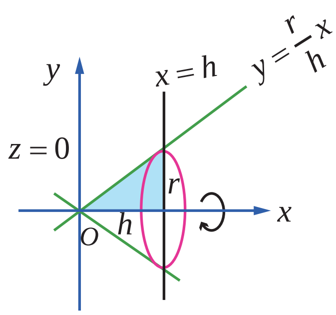
$$= 2\pi\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)_0^a = 2\pi\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi a^3 .$$

எடுத்துக்காட்டு 9.63

ஆரம் r மற்றும் உயரம் h உடைய நேர்வட்டக் கூம்பின் கன அளவைக் காண்க.

தீர்வு

முதல் கால்வட்டப்பகுதியில் உள்ள முக்கோண அரங்கத்தின் பரப்பானது $y = \frac{r}{h}x$, x-அச்சு, கோடுகள் $x = 0$ மற்றும் $x = h$. x-அச்சைப் பொருத்து சுழற்றினால் அடிப்பக்க ஆரம் r மற்றும் உயரம் h உடைய நேர்வட்டக் கூம்பை பெறலாம். படம் 9.39-ல் காண்க.



படம் 9.39

எனவே கூம்பின் கன அளவானது,

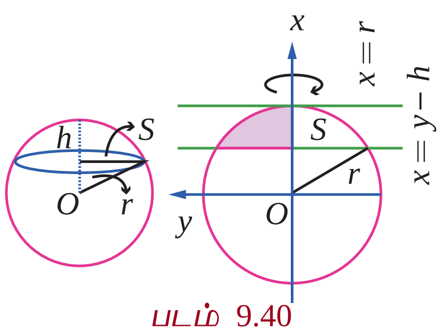
$$V = \pi\int_0^h y^2 dx = \pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \pi\left(\frac{r}{h}\right)^2\int_0^h x^2 dx = \pi\left(\frac{r}{h}\right)^2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 9.64

ஆரம் r மற்றும் உயரம் h உடைய கோள வடிவ தொப்பியின் கன அளவைக் காண்க.

தீர்வு

வட்டம் $x^2 + y^2 = r^2$, x-அச்சு, கோடுகள் $x = r - h$ மற்றும் $x = r$ ஆகியவற்றால் சூழப்பட்ட முதல் கால் வட்டப் பகுதியில் உள்ள அரங்கத்தின் பரப்பை x-அச்சைப் பொருத்து சுழற்றும்போது உருவாகும் திடப்பொருளானது , ஆரம் r, உயரம் h உடைய கோள வடிவத் தொப்பியாகும். படம் 9.40-ல் காண்க. எனவே தேவையான கன அளவு



படம் 9.40

$$V = \pi\int_{r-h}^{r} y^2 dx = \pi\int_{r-h}^{r}\left(r^2 - x^2\right)dx = \pi\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)_{r-h}^{r}$$

$$= \pi\left(r^2\left(r-(r-h)\right) - \frac{\left(r^3 - (r-h)^3\right)}{3}\right) = \pi\left(r^2 h - \frac{\left(r^3 - \left(r^3 - 3r^2 h + 3rh^2 - h^3\right)\right)}{3}\right)$$

$$= \pi\left(\frac{3rh^2 - h^3}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi h^2\left(3r - h\right).$$

குறிப்பு

மேலே உள்ள கோள வடிவத் தொப்பியின் கன அளவை தொப்பியின் ஆரம் மூலமும் எழுதலாம். ρ என்பது கோள வடிவத் தொப்பியின் ஆரம் எனில் $\rho^2+(r-h)^2=r^2$.

எனவே $r=\dfrac{\rho^2+h^2}{2h}$. மேலே உள்ள கன அளவில் r–ன் மதிப்பை பிரதியிட, நாம் பெறுவது

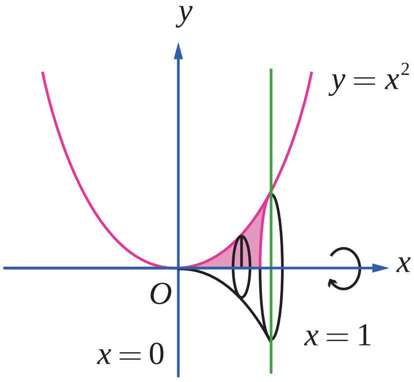
$$V=\frac{1}{3}\pi h^2\left[3\left(\frac{\rho^2+h^2}{2h}\right)-h\right]=\frac{1}{3}\pi h\left[\left(\frac{3\rho^2+h^2}{2}\right)\right]=\frac{1}{6}\pi h\left(3\rho^2+h^2\right).$$

எடுத்துக்காட்டு 9.65

பரவளையம் $y=x^2$, x-அச்சு, கோடுகள் $x=0$ மற்றும் $x=1$ ஆகியவற்றால் அடைப்பட்டுள்ள அரங்கத்தின் பரப்பை x-அச்சைப் பொருத்துச் சுழற்றினால் உருவாகும் திடப்பொருளின் கன அளவைக் காண்க..

தீர்வு

x-அச்சைப் பொருத்துச் சுழற்றப்படும் அரங்கத்தின் பரப்பானது படம் 9.41-ல் நிழலிடப்பட்டுள்ளது. எனவே, தேவையான கன அளவானது



படம் 9.41

$$=\pi\int_0^1 y^2dx=\pi$$

$$=\pi\int_0^1\left(x^2\right)^2dx$$

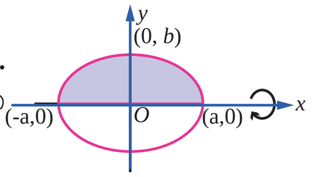
$$=\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$=\pi\left[\frac{1}{5}-0\right]=\frac{\pi}{5}.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.66

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, a>b$ என்ற அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பினை நெட்டச்சைப் பொருத்துச் சுழற்றினால் உருவாகும் திடப்பொருளின் கனஅளவைக் காண்க.

தீர்வு



படம் 9.42

நீள் வட்டமானது இரு அச்சுக்களை பொருத்து சமச்சீர் ஆகும். x-அச்சானது நெட்டச்சு ஆகும். சுழற்றப்படும் அரங்கத்தின் பரப்பானது படம் 9.42–ல் நிழலிடப்பட்டுள்ளது. எனவே தேவையான கன அளவானது,

$$V=\pi\int_{-a}^{a}y^2dx=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)dx$$

$$=\frac{2\pi b^2}{a^2}\int_0^a\left(a^2-x^2\right)dx\ (\because \text{தொகைச் சார்பானது இரட்டைப்படைச் சார்பு})$$

$$=\frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)_0^a=\frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{2\pi b^2}{a^2}\left(\frac{2a^3}{3}\right)=\frac{4\pi ab^2}{3}$$

குறிப்பு

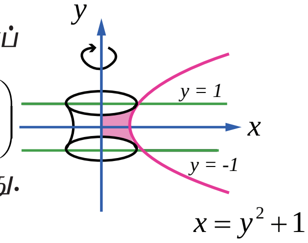
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ என்ற நீள்வட்டத்திற்குள் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பை y-அச்சைப் பொருத்து சுழற்றினால் உருவாகும் திடப்பொருளின் கன அளவானது $\dfrac{4\pi a^2b}{3}$. இத்திடப்பொருள் நீள்வட்ட திண்மம் (ellipsoid) என அழைக்கப்படும்..

எடுத்துக்காட்டு 9.67

பரவளையம் $x = y^2 + 1$, y-அச்சு, மற்றும் கோடுகள் $y = 1$ மற்றும் $y = -1$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பை y-அச்சைப் பொருத்து சுழற்றுவதால் உருவாகும் திடப்பொருளின் கன அளவைத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி காண்க.

தீர்வு

பரவளையம் $x = y^2 + 1$ ஆனது $y^2 = x - 1$ ஆகும். இது x-அச்சைப் பொருத்துச் சமச்சீர் மற்றும் இதன் முனை $(1,0)$ மற்றும் குவியம் $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$ ஆகும். சுழற்றப்படும் அரங்கத்தின் பரப்பு படம் 9.43-ல் நிழலிடப்பட்டுள்ளது.



படம் 9.43

எனவே தேவையான கன அளவு

$$V = \pi \int_{-1}^{1} x^2 dy$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} \left(y^2 + 1\right)^2 dy$$

$$= 2\pi \int_{0}^{1} \left(y^4 + 2y^2 + 1\right) dy, \text{ (}\because\text{ தொகைச் சார்பானது இரட்டைப்படைச் சார்பு)}$$

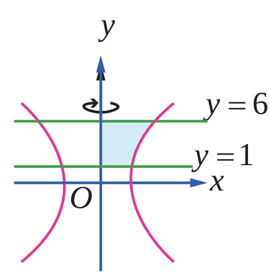
$$= 2\pi \left(\frac{y^5}{5} + 2\frac{y^3}{3} + y\right)_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1\right) = \frac{56}{15}\pi.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.68

வளைவரை $y = \frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 16}$, $x \geq 4$, y-அச்சு, மற்றும் கோடுகள் $y = 1$ மற்றும் $y = 6$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பை y-அச்சைப் பொருத்து சுழற்றுவதால் உருவாகும் திடப்பொருளின் கனஅளவை தொகையிடலைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டது $y = \frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 16} \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. எனவே கொடுக்கப்பட்ட வளைவரையானது அதிபரவளையம் $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ மற்றும் கோடுகள் $y = 1$ மற்றும் $y = 6$ ஆகியவற்றுக்கு இடைப்பட்ட ஒரு பகுதியாகும். இப்பகுதி x-அச்சில் மேல் உள்ளது.



படம் 9.44

சுழற்றப்படும் அரங்கத்தின் பரப்பானது படம் 9.44-ல் நிழலிடப்பட்டுள்ளது.

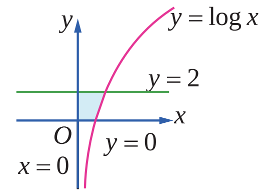
y-அச்சைப் பொருத்து சுழற்றுவதால் அதிபரவளையத்தின் ஒரு பகுதியின் சமன்பாடானது $x = \frac{4}{3}\sqrt{9 + y^2}$. உருவாகும் திடப்பொருளின் கன அளவு

$$V = \pi \int_{1}^{6} x^2 dy = \pi \int_{1}^{6} \left(\frac{4}{3}\sqrt{9 + y^2}\right)^2 dy = \pi \left(\frac{16}{9}\right) \int_{1}^{6} \left(9 + y^2\right) dy$$

$$= \pi \left(\frac{16}{9}\right) \left(9y + \frac{y^3}{3}\right)_1^6 = \pi \left(\frac{16}{9}\right) \left[(54 + 72) - (9 + \frac{1}{3})\right] = \frac{5600}{27}\pi$$

எடுத்துக்காட்டு 9.69

வளைவரை $y=\log x$, $y=0$, $x=0$ மற்றும் $y=2$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பை y-அச்சைப் பொருத்து சுழற்றுவதால் உருவாகும் திடப்பொருளின் கனஅளவைத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்திக் காண்க.



படம் 9.45

தீர்வு

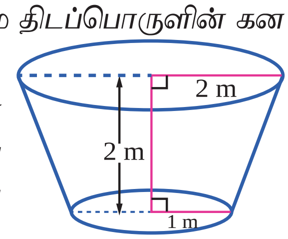
சுழற்றப்படும் அரங்கத்தின் பரப்பு படம் 9.45-ல் நிழலிடப்பட்டுள்ளது.

y-அச்சைப் பொருத்து சுழற்றுவதால் உருவாகும் திடப்பொருளின் கனஅளவானது

$$V=\pi\int_0^2 x^2dy=\pi\int_0^2\left(e^y\right)^2dy=\pi\int_0^2 e^{2y}dy=\pi\left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^2=\frac{\pi}{2}\left(e^4-1\right).$$

பயிற்சி 9.9

1. $y=2x^2$, $y=0$ மற்றும் $x=1$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பை x-அச்சைப் பொருத்துச் சுழற்றுவதால் உருவாகும் திடப்பொருளின் கனஅளவைக் காண்க.
2. $y=e^{-2x}$ $y=0$, $x=0$ மற்றும் $x=1$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பை x-அச்சைப் பொருத்து சுழற்றுவதால் உருவாகும் திடப்பொருளின் கனஅளவைக் காண்க.
3. $x^2=1+y$ மற்றும் $y=3$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பை y-அச்சைப் பொருத்து சுழற்றுவதால் உருவாகும் திடப் பொருளின் கனஅளவைக் காண்க.
4. $y=x$ மற்றும் $y=x^2$ என்ற வளைவரைகளுக்குள் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பு R எனில் பரப்பு R-ஐ, x-அச்சைப் பொருத்து $360°$ சுழற்றும்போது உருவாகும் திடப்பொருளின் கன அளவைக் காண்க.
5. ஒரு கொள்கலன் (container) ஆனது நேர்வட்டக் கூம்பின் இடைக்கண்டம் (frustum of a cone) வடிவில் படம் 9.46-ல் உள்ளவாறு அமைந்துள்ளது எனில் அதன் கனஅளவைத் தொகுதியிடலைப் பயன்படுத்தி காண்க.



படம் 9.46

6. ஒரு தர்பூசணியானது நீள்வட்ட திண்ம வடிவில் (ellipsoid shape) உள்ளது. இந்த நீள்வட்ட தின்மத்தை பெற நெட்டச்சின் நீளம் 20 செ.மீ . குற்றச்சின் நீளம் 10 செ.மீ கொண்ட நீள்வட்டத்தை நெட்டச்சைப் பொருத்து சுழற்ற வேண்டும் எனில் தர்பூசணியின் கனஅளவை தொகுதியிடலைப் பயன்படுத்தி காண்க.

பயிற்சி 9.10

கொடுக்கப்பட்ட நான்கு மாற்று விடைகளிலிருந்து சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினைத் தேர்ந்தெடுக்கவும் :

U3W8K8

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}}\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$ இன் மதிப்பு

(1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{\pi}{2}$ (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) π

2. $\displaystyle\int_{-1}^{2}|x|\,dx$ இன் மதிப்பு

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{2}$ (3) $\frac{5}{2}$ (4) $\frac{7}{2}$

3. ஒவ்வொரு $n \in \mathbb{Z}$-க்கும் $\int_0^{\pi} e^{\cos^2 x} \cos^3 \left[(2n+1)x\right] dx$ இன் மதிப்பு

(1) $\frac{\pi}{2}$ (2) π (3) 0 (4) 2

4. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$ இன் மதிப்பு

(1) $\frac{3}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) 0 (4) $\frac{2}{3}$

5. $\int_{-4}^{4} \left[\tan^{-1}\left(\frac{x^2}{x^4+1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x^4+1}{x^2}\right)\right] dx$ இன் மதிப்பு

(1) π (2) 2π (3) 3π (4) 4π

6. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{2x^7 - 3x^5 + 7x^3 - x + 1}{\cos^2 x}\right) dx$ இன் மதிப்பு

(1) 4 (2) 3 (3) 2 (4) 0

7. $f(x) = \int_0^x t \cos t \, dt$, எனில் $\frac{df}{dx} =$

(1) $\cos x - x \sin x$ (2) $\sin x + x \cos x$ (3) $x \cos x$ (4) $x \sin x$

8. $y^2 = 4x$ என்ற பரவளையத்திற்கும் அதன் செவ்வகலத்திற்கும் இடையே பரப்பானது

(1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{4}{3}$ (3) $\frac{8}{3}$ (4) $\frac{5}{3}$

9. $\int_0^1 x(1-x)^{99} dx$ இன் மதிப்பு

(1) $\frac{1}{11000}$ (2) $\frac{1}{10100}$ (3) $\frac{1}{10010}$ (4) $\frac{1}{10001}$

10. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+5^{\cos x}}$ இன் மதிப்பு

(1) $\frac{\pi}{2}$ (2) π (3) $\frac{3\pi}{2}$ (4) 2π

11. If $\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n)} = 90$ எனில் n இன் மதிப்பு

(1) 10 (2) 5 (3) 8 (4) 9

12. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 3x \, dx$ இன் மதிப்பு

(1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{2}{9}$ (3) $\frac{1}{9}$ (4) $\frac{1}{3}$

13. $\int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx$ இன் மதிப்பு

(1) $\frac{3\pi}{10}$ (2) $\frac{3\pi}{8}$ (3) $\frac{3\pi}{4}$ (4) $\frac{3\pi}{2}$

14. $\int_0^\infty e^{-3x}x^2 dx$ இன் மதிப்பு

(1) $\frac{7}{27}$ (2) $\frac{5}{27}$ (3) $\frac{4}{27}$ (4) $\frac{2}{27}$

15. $\int_0^a \frac{1}{4+x^2}\, dx = \frac{\pi}{8}$ எனில் a இன் மதிப்பு

(1) 4 (2) 1 (3) 3 (4) 2

16. $y^2 = x(a-x)$ என்ற வளைவரையில் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பை x-அச்சைப் பொருத்து சுழற்றுவதால் உருவாகும் திடப்பொருளின் கன அளவு

(1) πa^3 (2) $\frac{\pi a^3}{4}$ (3) $\frac{\pi a^3}{5}$ (4) $\frac{\pi a^3}{6}$

17. If $f(x) = \int_1^x \frac{e^{\sin u}}{u}\, du, x > 1$ மற்றும் $\int_1^3 \frac{e^{\sin x^2}}{x}\, dx = \frac{1}{2}[f(a) - f(1)]$ எனில் a பெறக்கூடிய ஒரு மதிப்பு

(1) 3 (2) 6 (3) 9 (4) 5

18. $\int_0^1 \left(\sin^{-1} x\right)^2 dx$ இன் மதிப்பு

(1) $\frac{\pi^2}{4} - 1$ (2) $\frac{\pi^2}{4} + 2$ (3) $\frac{\pi^2}{4} + 1$ (4) $\frac{\pi^2}{4} - 2$

19. $\int_0^a \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^3 dx$ இன் மதிப்பு

(1) $\frac{\pi a^3}{16}$ (2) $\frac{3\pi a^4}{16}$ (3) $\frac{3\pi a^2}{8}$ (4) $\frac{3\pi a^4}{8}$

20. $\int_0^x f(t)\, dt = x + \int_x^1 t\, f(t)\, dt$ எனில் $f(1)$ இன் மதிப்பு

(1) $\frac{1}{2}$ (2) 2 (3) 1 (4) $\frac{3}{4}$

பாடச்சுருக்கம்

(1) வரையறுத் தொகையிடலின் கூட்டலின் எல்லை

(i) $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(a+(b-a)\frac{r}{n}\right)$

(ii) $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right).$

(2) வரையறுத்த தொகையிடலின் பண்புகள்

(i) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du$

(ii) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(iii) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

(iv) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

(v) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

(vi) $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a [f(x)+f(2a-x)]\,dx.$

(vii) $f(x)$ ஓர் இரட்டைப் படைச் சார்பு எனில் $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$

(viii) $f(x)$ ஓர் ஒற்றைப் படைச் சார்பு எனில் $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$

(ix) $f(2a-x) = f(x)$, எனில் $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$

(x) $f(2a-x) = -f(x)$, எனில் $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 0.$

(xi) $f(a-x) = f(x)$ எனில் $\int_0^a x f(x)\,dx = \frac{a}{2}\int_0^a f(x)\,dx$

(3) பெர்னோலி சூத்திரம்

$$\int uv\,dx = uv_{(1)} - u^{(1)}v_{(2)} + u^{(2)}v_{(3)} - u^{(3)}v_{(4)} + \cdots.$$

(4) குறைப்புச் சூத்திரங்கள்

(i) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \frac{(n-1)}{n}\times\frac{(n-3)}{(n-2)}\times\cdots\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}, & \text{vdpy; } n=2,4,6,\cdots \\ \frac{(n-1)}{n}\times\frac{(n-3)}{(n-2)}\times\cdots\times\frac{2}{3}, & \text{vdpy; } n=3,5,7\cdots \end{cases}$$

(ii) n இரட்டைப்படை எண் மற்றும் m இரட்டைப்படை எனில்

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x\,dx = \frac{(n-1)}{(m+n)}\frac{(n-3)}{(m+n-2)}\frac{(n-5)}{(m+n-4)}\cdots\frac{1}{(m+2)}\frac{(m-1)}{m}\frac{(m-3)}{(m-2)}\frac{(m-5)}{(m-4)}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$$

(iii) n ஒற்றைப்படை எண் மற்றும் m மிகை முழு எண் (இரட்டைப்படை அல்லது ஒற்றைப்படை), எனில்

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{(n-1)}{(m+n)} \frac{(n-3)}{(m+n-2)} \frac{(n-5)}{(m+n-4)} \cdots \frac{2}{(m+3)} \frac{1}{(m+1)}$$

(5) காமா தொகையிடல்கள்

(i) $\Gamma(n) \;=\; \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx \;= (n-1)!$

(ii) $\int_0^{\infty} e^{-ax} x^n dx \;=\; \dfrac{n!}{a^{n+1}}$

(6) ஒரு வளைவரைக்கும் கோடுகளுக்கு இடையே அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பு

(i) ஒரு வளைவரைக்கும் கோடுகள் $x = a$ மற்றும் $x = b$ ஆகியவற்றுக்கும் இடையே அடைபடும் x -அச்சின் மேல் உள்ள பரப்பானது, $A = \int_a^b ydx$.

(ii) ஒரு வளைவரைக்கும் கோடுகள் $x = a$ மற்றும் $x = b$ ஆகியவற்றுக்கும் இடையே அடைபடும் x -அச்சின் கீழ் உள்ள பரப்பானது, $A = -\int_a^b ydx = \left|\int_a^b ydx\right|$.

(iii) ஒரு வளைவரைக்கும் கோடுகள் $y = c$ மற்றும் $y = d$ ஆகியவற்றுக்கும் இடையே அடைபடும் y -அச்சின் வலதுபுறத்தில் உள்ள பரப்பானது, $A = \int_c^d x\,dy$.

(iv) ஒரு வளைவரைக்கும் கோடுகள் $y = c$ மற்றும் $y = d$ ஆகியவற்றுக்கும் இடையே அடைபடும் y -அச்சின் இடது புறத்தில் உள்ள பரப்பானது, $A = -\int_c^d xdy = \left|\int_c^d xdy\right|$.

(7) சுழற்றுவதால் உருவாகும் திடப்பொருளின் கன அளவு

(i) x-அச்சைப் பொருத்து சுழற்றுவதால் உருவாகும் திடப்பொருளின் கன அளவு $V = \pi\int_a^b y^2 dx$

(ii) y-அச்சைப் பொருத்து சுழற்றுவதால் உருவாகும் திடப்பொருளின் கன அளவு $V = \pi\int_c^d x^2 dy$

இணையச் செயல்பாடு (ICT CORNER)

https://ggbm.at/dy9kwgbt அல்லது Scan the QR Code

இணைய உலாவியை திறக்கவும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள உரலி/விரைவுக் குறியீட்டை தட்டச்சு செய்யவும், GeoGebra-வின் **“12th Standard Mathematics Vol-2”** பக்கம் தோன்றும். இப்பணித்தாள் புத்தகத்தின் இடதுபக்கம் உங்கள் பாடநூலுடன் தொடர்புடைய பல அத்தியாயங்கள் காணப்படும். அவற்றில் **“Applications of Integration”** எனும் அத்தியாயத்தைத் தேர்வு செய்க.

B225_12_MATHS_TM

இப்பொழுது இப்பாடம் தொடர்பான பல பணித்தாள்களை இப்பக்கத்தில் காண்பீர்கள். அனைத்துப் பணித்தாள்களையும் செய்து பார்க்கவும்.

அத்தியாயம்

10

சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

K2S8D9

"கணிதவியலானது மனித உணர்வின் மிகவும் அழகான மற்றும் சக்திவாய்ந்த படைப்பாகும்"

- ஸ்டீபன் பானாக்

10.1 அறிமுகம் மற்றும் பாட வளர்ச்சி (Motivation and Early Developments)

அன்றாட வாழ்க்கையில்

- எறியப்பட்ட பொருள், விண்வெளிக்கலன், துணைக்கோள் மற்றும் கோள்கள் ஆகியவற்றின் இயக்கப்பாதை
- மின்சுற்றில் உள்ள மின்னூட்டம் அல்லது மின்னோட்டம்
- ஒரு கோல் அல்லது பலகை வழியாக ஏற்படும் வெப்பக்கடத்தல்
- ஒரு கம்பி அல்லது மெல்லிய தோலில் ஏற்படும் அதிர்வுகள்

ஆகியவற்றை கணக்கிடும் நிகழ்வுகளைக் கருதுவோம். இதுபோன்ற நிகழ்வுகளை கணிதவியல் சமன்பாடுகளாக உருவாக்கும்போது சில அறிவியல் விதிகளின் அடிப்படையில் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் உருவாகின்றன. இவ்விதிகள் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட அளவுகளின் மற்ற அளவுகளைப் பொருத்து மாறுவீதங்களை (வகைக்கெழுக்களை) உள்ளடக்கியுள்ளது. ஆகவே, இந்த அறிவியல் விதிகள் வகைக்கெழுக்களை உள்ளடக்கிய கணிதவியல் சமன்பாடுகளாக அதாவது வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளாக அமைகின்றன.

வடிவக்கணிதம், இயந்திரவியல், இயற்பியல், வேதியியல் மற்றும் பொறியியல் ஆகிய பாடங்களில் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் அதிக அளவில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. முந்தைய வகுப்புகளில் மாறுவீதங்களைப் பற்றி படித்துள்ளோம். இது கணநேர மாறுவீதம் எனவும் அழைக்கப்படும். இதனை $\dfrac{dy}{dx}$ எனக்குறிப்பிடுவோம்.

ஒரு சில அறியப்படாத சார்புகளுக்கும் அவற்றின் மாறு வீதங்களுக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்புகளை கீழே காண்போம்.

(a) x ஐப் பொருத்து y இன் மாறுவீதம் y க்கு நேர் விகிதத்தில் உள்ளது:

$$\frac{dy}{dx} = ky.$$

(b) x ஐப் பொருத்து y இன் மாறுவீதம் y^2 மற்றும் x இன் பெருக்கல் பலனுக்கு நேர்விகிதத்தில் உள்ளது :

$$\frac{dy}{dx} = ky^2x.$$

(c) x ஐப் பொருத்து y இன் மாறுவீதம் y க்கு எதிர் விகிதத்தில் உள்ளது:

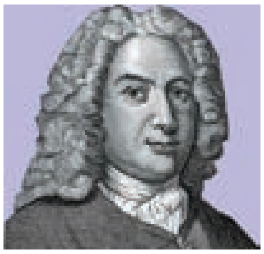
$$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{y}.$$

(d) xஐப் பொருத்து y இன் மாறுவீதம் y^2 க்கு நேர்விகிதத்திலும் மற்றும் $\sqrt{x}$ க்கு எதிர் விகிதத்திலும் உள்ளது :

$$\frac{dy}{dx} = k\frac{y^2}{\sqrt{x}}.$$

ஓர் அறியப்படாத சார்பின் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட வகைக்கெழுக்களை உள்ளடக்கிய ஒரு சமன்பாடு வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

பொதுவாக நேரமானது சாரா மாறியாக எடுத்துக் கொள்ளப்படும்.


ஜோஹன் பெர்னோலி
(1667-1748)

நடைமுறை வாழ்க்கை நிகழ்வுகளில் கணித முறைகளைப் பயன்படுத்த வேண்டும். பெரும்பாலான நடைமுறைக் கணக்குகள் மாறும் அளவுகளுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்புகளை விளக்குவதாகவே அமைந்துள்ளன. மாறு வீதங்கள் கணிதவியலில் வகைக்கெழுக்களால் குறிப்பிடப்படுவதால் கணிதவியல் மாதிரிகள் ஓர் அறியாத சார்பின் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட வகைக்கெழுக்களை உள்ளடக்கிய சமன்பாடுகளாக காணப்படுகின்றன.

அத்தகைய சமன்பாடுகள் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளாகும். அறிவியல், பொறியியல் போன்ற படிப்புகளில் இயற்பியல் விதிகளும் மற்றும் தொடர்புகளும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளாக வடிவமைக்கப்படுவதால், இப்படிப்புகளில் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் அதிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாக கருதப்படுகின்றன. மக்கள் தொகை பெருக்கம் அல்லது கதிர்வீச்சு சிதைவு போன்றவற்றை உள்ளடக்கிய கணிதவியல் மாதிரிகளை உருவாக்கும்போது வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் மிகவும் பயனுள்ளதாகின்றன. மேலும் உயிரியல் மற்றும் பொருளியியல் சார்ந்த படிப்புகள் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் பயன்பாடின்றி முழுமையடையாது.

வடிவக் கணிதம் மற்றும் இயற்பியல் ஆகியவற்றில் உள்ள கணக்குகளின் தீர்வுகளைக் காண்பதற்கு நியூட்டன் மற்றும் லீபினிட்ஸ் ஆகியோரால் நுண்கணிதத்துடன் கண்டுபிடிக்கப்பட்டதுதான் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளாகும்.

பெர்னோலி குடும்பம், ஆய்லர் மற்றும் பலரால் மேம்படுத்தப்பட்ட நியூட்டோனியன் இயற்பியலில் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் மிக முக்கிய பங்காற்றியது. நாம் அன்றாட வாழ்க்கையில் பயன்படுத்தும் அலைபேசி, மகிழ்வுந்து, வானூர்தி, இணையதளம், வானிலை முன்னறிவிப்பு, சுகாதார மேம்பாடு போன்றவற்றின் பயன்பாட்டில் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு அவசியமாகிறது.

இந்த அத்தியாயத்தில், முதல் வரிசை சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் பற்றியும் அவற்றின் தீர்வுகளைக் காணும் சில வழிமுறைகளைப் பற்றியும் காண்போம்.

கற்றலின் நோக்கங்கள்

இப்பாடப்பகுதியை கற்றபின் பின்வருவனவற்றை மாணவர்கள் அறிந்திருப்பர்

- வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை வகைப்படுத்துதல்
- வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை அமைத்தல்
- வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் வரிசை மற்றும் படி காணல்
- மாறிகளைப் பிரித்தல், பிரதியிடல், தொகையீட்டுக் காரணி காணல் போன்ற வழிமுறைகளைப் பயன்படுத்தி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணல்
- வாழ்வியல் கணக்குகளில் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்துதல்,

10.2 வகைக்கெழுச் சமன்பாடு, வரிசை மற்றும் படி
(Differential Equation, Order, and Degree)

வரையறை 10.1

ஏதேனும் ஒரு சமன்பாடு ஒரு சார்பின் குறைந்தபட்சம் ஒரு சாதாரண வகைக்கெழு அல்லது பகுதி வகைக்கெழுவையாவது கொண்டிருக்குமானால் அச்சமன்பாடு **வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.**

எடுத்துக்காட்டாக, $y = f(x)$, இங்கு y ஆனது ஒரு சார்ந்த மாறி (f என்பது தெரியாத ஒரு சார்பு) மற்றும் x என்பது ஒரு சாராமாறி என்க. பின்பு,

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 0$ என்ற சமன்பாடு ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \sin x$ என்ற சமன்பாடு ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

(3) $\dfrac{dy}{dx} + y = 7x + 5$ என்ற சமன்பாடு ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + y = \sin x$ என்ற சமன்பாடு ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

(5) $e^{\frac{dy}{dx}} = \ln x, x > 0$ என்ற சமன்பாடு ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

(6) $\tan^{-1}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2} + y^2 + 2x\right) = \dfrac{dy}{dx}$ என்ற சமன்பாடு ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

வரையறை 10.2

ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் காணப்படும் மிக உயர்ந்த வகைக்கெழுவின் வரிசையே அச்சமன்பாட்டின் வரிசை (order) ஆகும்.

ஆகவே, ஒரு சமன்பாட்டில் காணப்படும் அறியாத சார்பின் மிக உயர்ந்த வரிசையுடைய வகைக்கெழு k ஆவது வகைக்கெழு எனில், அவ்வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை k ஆகும். இங்கு k என்பது ஒரு மிகை முழு எண்ணாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)^{\frac{2}{3}} - 3\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} + 4 = 0$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை மூன்று ஆகும்.

வரையறை 10.3 (வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் படி)

ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை பல்லுறுப்புக் கோவை வடிவில் எழுத இயலுமெனில், அச்சமன்பாட்டில் தோன்றும் மிக உயர்ந்த வரிசையுடைய வகைக்கெழுவின் முழு எண் படியே அச்சமன்பாட்டின் படி எனப்படும்.

மாறாக, பல்லுறுப்புக் கோவை வடிவில் எழுதப்படும் ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு பின்வரும் நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்யுமானால், அச்சமன்பாட்டில் தோன்றும் மிக உயர்ந்த வரிசையுடைய வகைக்கெழுவின் அடுக்கு அவ்வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் படி எனப்படும்.

(i) சமன்பாட்டில் உள்ள அனைத்து வகைக்கெழுக்களின் அடுக்குகளும் பின்னங்களற்றதாக இருக்க வேண்டும்.

(ii) மிக உயர்ந்த வரிசை கொண்ட வகைக்கெழுக்களை மாறியாகக் கொண்ட ஆழ்நிலைச் சார்பு, முக்கோணவியல் சார்பு, விஞ்சிய அல்லது படிக்குறிச் சார்பு போன்ற சார்புகளாக இருக்கக்கூடாது. உயர்ந்த வரிசை உடைய வகைக்கெழுவைக் கொண்ட எந்தவொரு உறுப்பின் கெழுவும் x, y அல்லது குறைவான வரிசைக் கொண்ட வகைக்கெழு ஆகியவற்றில் ஒன்றினை மாறியாகக் கொண்ட சார்பாக இருக்கலாம். ஆனால், வகைக்கழுக்களை மாறியாகக் கொண்ட விஞ்சிய முக்கோணவியல், படிக்குறி, மடக்கைச் சார்புகளாக இருக்கக்கூடாது.

மேற்கூறப்பட்ட நிபந்தனைகளில் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நிபந்தனைகளை ஒரு வகைக்கெழுச்சமன்பாடு நிறைவுசெய்யவில்லைஎனில்,மேற்கூறப்பட்டஅனைத்து நிபந்தனைகளையும் நிறைவு செய்யும் வகையில் பல்லுறுப்புக் கோவை வடிவத்திற்கு அவ்வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை மாற்றி அமைக்க வேண்டும்.

ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை மிக உயர்ந்த வரிசைக் கொண்ட வகைக்கெழுவை முதன்மை உறுப்பாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடாக எழுத இயலவில்லை எனில் அச்சமன்பாட்டின் படியை வரையறுக்க முடியாது.

வவகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் படி காண்பதற்கான நிபந்தனைகளில், கூறப்பட்டுள்ள நுணுக்கங்களை சரியாக புரிந்து கொள்ளவில்லை எனில், அவ்வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் படியை தீர்மானிப்பது அவ்வளவு எளிதானதாக இருக்காது. ஆகவே, கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விளக்க எடுத்துக்காட்டுகளில் விவரிக்கப்பட்டுள்ள முறைகளை கவனித்து வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் படி காணும் நுட்பங்களை அறிந்து கொள்ளலாம்.

படி காண்பதற்கான விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள் :

(1) $3y^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3-\dfrac{d^2y}{dx^2}=\sin x^2$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் கருதுவோம்.

இச்சமன்பாட்டில் இடம் பெற்றுள்ள மிக உயர்ந்த வகைக்கெழுவின் வரிசை 2, மற்றும் அதன் அடுக்கு 1 ஆகும். ஆகவே, இவ்வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை 2 மற்றும் படி 1 ஆகும்.

(2) $\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}=y\dfrac{d^3y}{dx^3}$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை கருதுவோம்.

இச்சமன்பாடு பின்ன அடுக்குகளைப் பெற்றுள்ளதால், முதலில் பின்ன அடுக்குகளை நீக்க வேண்டும். ஆகவே, சமன்பாட்டின் இருபுறமும் வர்க்கம் காண, நாம் பெறுவது

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=y^2\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2.$$

இப்பொழுது, இச்சமன்பாட்டில் இடம்பெற்றுள்ள மிக உயர்ந்த வகைக்கெழுவின் வரிசை 3 எனவும் அதன் அடுக்கு 2 எனவும் தெளிவாகக் காண்கிறோம். ஆகவே இவ்வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை 3 மற்றும் படி 2 ஆகும்.

(3) $\sin\left(\dfrac{dy}{dx}\right)+\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x=0$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை கருதுவோம்.

இங்கு மிக உயர்ந்த வகைக்கெழுவின் வரிசை 2 மற்றும் இவ்வகைக்கெழு எந்த சார்பிலும் உள்ளடங்கியதாக இல்லை. எனவே, இவ்வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை 2 ஆகும். மேலும், இச்சமன்பாடு வகைக்கெழுக்களை கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடல்ல. ஆகவே, இச்சமன்பாட்டின் படி வரையறுக்கப்படவில்லை.

(4) $e^{\frac{d^2y}{dx^2}} + \sin(x)\dfrac{dy}{dx} = 2$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் கருதுக. இச்சமன்பாட்டில் காணப்படும் மிக உயர்ந்த வகைக்கெழுவின் வரிசை 2 மற்றும் இவ்வகைக்கெழு படிக் குறிச் சார்பின் மாறியாக உள்ளது. மேலும், இச்சமன்பாட்டை $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ னும் வகைக்கெழுவை முதன்மை உறுப்பாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவையாக எழுத முடியாது. எனவே, இச்சமன்பாட்டின் படியை வரையறுக்க இயலாது. இச்சமன்பாட்டின் வரிசை 2 ஆகும்.

(5) பின்வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளுக்கு படி காண இயலாது.

(i) $e^{\frac{dy}{dx}} + \dfrac{dy}{dx} = 0$ (ii) $\log\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right) + \dfrac{dy}{dx} = 0$ (iii) $\cos\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right) + 2\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$.

(6) $10(y''')^4 + 7(y'')^5 + \sin(y') + 5 = 0$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை 3 ஆகும். ஆனால், இச்சமன்பாட்டின் படி வரையறுக்கப்படவில்லை.

(7) $\cos(y')y''' + 5y'' + 7y' = \sin x$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை 3 ஆகும். ஆனால், இச்சமன்பாட்டின் படி வரையறுக்கப்படவில்லை.

குறிப்புரை

ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் படி எப்பொழுதும் ஒரு மிகை முழு எண்ணாக இருக்கும் என்பதை கவனத்தில் கொள்க.

எடுத்துக்காட்டு 10.1

பின்வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் வரிசை மற்றும் படி (இருப்பின்) ஆகியவற்றைக் காண்க:

(i) $\dfrac{dy}{dx} = x + y + 5$ (ii) $\left(\dfrac{d^4y}{dx^4}\right)^3 + 4\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^7 + 6y = 5\cos 3x$

(iii) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = x^2\log\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)$ (iv) $3\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right) = \left[4 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$

(v) $dy + \left(xy - \cos x\right)dx = 0$

தீர்வு

(i) இச்சமன்பாட்டில் காணப்படும் மிக உயர்ந்த வரிசை கொண்ட வகைக்கெழு $\dfrac{dy}{dx}$ ஆகும். மேலும் இதன் அடுக்கு 1 ஆகும்.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை 1 மற்றும் படி 1 ஆகும்

(ii) இங்கு, மிக உயர்ந்த வரிசை கொண்ட வகைக்கெழு $\dfrac{d^4y}{dx^4}$ ஆகும். மேலும், இதன் அடுக்கு 3 ஆகும்.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை 4 மற்றும் படி 3 ஆகும்.

(iii) கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் காணப்படும் மிக உயரந்த் வரிசை கொண்ட வகைக்கெழு $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ஆகும். மேலும், இதன் அடுக்கு 1 ஆகும்.

எனவே, இச்சமன்பாட்டின் வரிசை 2 ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை அதனுடைய வகைக்கெழுக்களைக் கொண்டு பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடாக எழுத முடியாது. ஆகவே, இச்சமன்பாட்டின் படி வரையறுக்கப்படவில்லை.

(iv) கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \left[4+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$

இருபுறமும் வர்க்கம் காண, நாம் பெறுவது $9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \left[4+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3$.

இச்சமன்பாட்டில் உள்ள மிக உயர்ந்த வரிசையுடைய வகைக்கெழு $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஆகும். இதன் அடுக்கு 2 ஆகும்.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை 2 மற்றும் படி 2 ஆகும்.

(v) கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை $\frac{dy}{dx} + xy - \cos x = 0$ என எழுதலாம். எனவே, $dy + (xy - \cos x)dx = 0$ என்பது படி 1 கொண்ட முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும். ■

பயிற்சி 10.1

1. பின்வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் ஒவ்வொன்றின் வரிசை மற்றும் படி (இருக்குமானால்) ஆகியவற்றைத் தீர்மானிக்க.

(i) $\frac{dy}{dx} + xy = \cot x$

(ii) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{\frac{2}{3}} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 4 = 0$

(iii) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x\sin\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$

(iv) $\sqrt{\frac{dy}{dx}} - 4\frac{dy}{dx} - 7x = 0$

(v) $y\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{x}{\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$

(vi) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 0$

(vii) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)}$

(viii) $\frac{d^2y}{dx^2} = xy + \cos\left(\frac{dy}{dx}\right)$

(ix) $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + \int y\,dx = x^3$

(x) $x = e^{xy\left(\frac{dy}{dx}\right)}$

10.3 வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை வகைப்படுத்துதல் (Classification of Differential Equations)

வரையறை 10.4: (சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடு)

ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஒரேயொரு சாரா மாறியைப் பொருத்து ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சார்புகளின் சாதாரண வகைக்கெழுக்களைக் கொண்டுள்ளது எனில், அச்சமன்பாடு ***சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடு*** எனப்படும்.

வரையறை 10.5: (பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு)

ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சார்புகளின் பகுதி வகைக்கெழுக்களை மட்டும் கொண்டிருக்கும் எனில், அச்சமன்பாடு ***பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு*** எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, அறியாத சார்பு y எனவும் சாராமாறி x எனவும் கொள்க. பின்னர் $\frac{dy}{dx}+2y=e^{-x}$, $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-5y=0$ மற்றும் $\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=3x-4y$ என்பவை சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளுக்கு சில உதாரணங்களாகும்.

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ மற்றும் $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2\frac{\partial u}{\partial t}$ என்பவை பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளுக்கு சில உதாரணங்களாகும்.

இந்த அத்தியாயத்தில் சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைப் பற்றி மட்டும் காண்போம்.

சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை **நேரியலான** சாதாரண வகைகெழுச் சமன்பாடுகள் மற்றும் **நேரியலற்ற** சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் என இரு வேறுபட்ட பிரிவுகளாக வகைப்படுத்தலாம்.

வரையறை 10.6:

வரிசை n உடைய நேரியலான சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம்

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0y=g(x) \quad \ldots (1)$$

ஆகும். இங்கு, கெழுக்கள் $a_n(x)\neq 0, a_0(x), a_1(x),\ldots,a_{n-1}(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்பன சாரா மாறி x ஐப் பொருத்த சார்புகளாகும் (பூச்சிய சார்பையும் உள்ளடக்கியது)

குறிப்பு

(1) நேரியலான வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளில், ஒரு சார்பு $y(x)$ உடன் அதன் வகைக்கெழுக்கள் பெருக்கலாக இருக்காது. மற்றும் ஒரு சார்பு அல்லது அதன் வகைக்கெழுக்களின் அடுக்கு 1 ஐ விட அதிகமாக இருக்காது என்பது கவனத்தில் கொள்ள வேண்டிய முக்கியமான குறிப்புகளாகும்.

(2) நேரியல் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளில் y ஐப் பொருத்த விஞ்சிய சார்புகள் (முக்கோணவியல், மடக்கை போன்றவை) அல்லது அதனுடைய வகைக்கெழுக்கள் காணப்படாது.

(3) ஒரு சார்போ அல்லது அதனுடைய வகைக்கெழுக்களோ மற்றொரு சார்பினுள் மாறியாக உள்ளடங்கி இருக்காது. உதாரணமாக, $\sqrt{y'}$ அல்லது $e^{y'}$ போன்றவை.

(4) கெழுக்கள் $a_0(x), a_1(x),\ldots,a_{n-1}(x)$ மற்றும் $g(x)$ ஆகியவை பூச்சிய அல்லது பூச்சியமற்ற சார்புகளாகவோ, மாறிலி அல்லது மாறிலிகளற்ற சார்புகளாகவோ, நேரியலான அல்லது நேரியலற்ற சார்புகளாகவோ இருக்கலாம். ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு நேரியலானதா என்பதை உறுதிப்படுத்த, ஒரு சார்பு $y(x)$ மற்றும் அதனுடைய வகைக்கெழுக்கள் மட்டுமே பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

வரையறை 10.7:

நேரியல் அல்லாத ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு நேரியலற்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாடு எனப்படும்.

ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில், $y, y', y'',\ldots,y^{(n)}$ கெழுக்களில் சார்ந்த மாறி y அல்லது அதனுடைய வகைக்கெழுக்கள் அல்லது $y, y', y'',\ldots,y^{(n)}$, $(y')^2$ போன்ற அடுக்குகள் இடம்பெற்றிருந்தால் அவ்வகைக்கெழுச் சமன்பாடு நேரியலற்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக

(1) $\frac{dy}{dx}=ax^3$, $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=0$ மற்றும் $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$ என்பன நேரியலான சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளாகும். ஆனால் $y\frac{dy}{dx}+\sin x=0$ என்பது நேரியல்பற்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

(2) $y'' + 2x^3 y' = 7xy + x^2$ என்பது இரண்டாம் வரிசை நேரியலான சாதாரண இருபடி வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

K9K7M3

(3) $y'' + y' = \sqrt{x}$ என்பது இரண்டாம் வரிசை நேரியலான சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

(4) $y^2 + y' = \sqrt{x}$ என்பது முதல் வரிசை நேரியல்பற்ற சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

(5) $y' = x\sin(y)$ என்பது முதல் வரிசை நேரியல்பற்ற சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

(6) $y'' = y\sin(x)$ என்பது இரண்டாம் வரிசை நேரியலான சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

வரையறை 10.8:

சமன்பாடு (1)இல் $g(x) = 0$ எனில், அச்சமன்பாடு **சமப்படித்தான** சமன்பாடு எனப்படும். அவ்வாறில்லையெனில் அச்சமன்பாடு **சமபடியற்ற** சமன்பாடு எனப்படும்.

குறிப்புரை

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \qquad \ldots(2)$$

எனும் சமன்பாட்டின் இரண்டு தீர்வுகள் $y_i(x),\ i = 1, 2$ எனில்,

$a_n(x)y_i^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y_i^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y_i(x) + a_0(x)y_i(x) = 0,\ i = 1, 2$ ஆகும்.

$u(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, இங்கு $c_1,\ c_2$ என்பன ஏதேனும் இரு மாறிலிகள் என்க. பின்னர், $u(x)$ என்பதும் சமன்பாடு (2)–ன் தீர்வாகும் என்பதை எளிதில் சரிபார்க்கலாம்.

ஆகவே, முதல் வரிசை நேரியலான வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை $y' + p(x)y = f(x)$ என எழுதலாம். அவ்வாறு எழுத முடியாத முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாடு நேரியலற்றதாகும். $y = 0$ என்பது $y' + p(x)y = 0$ எனும் சமபடித்தான சமன்பாட்டின் தீர்வு எனத் தெளிவாக தெரிவதால், இத்தீர்வினை வெளிப்படைத் தீர்வு என அழைக்கிறோம். இச்சமன்பாட்டின் மற்ற தீர்வுகளை வெளிப்படையற்ற தீர்வுகள் என்போம். இது பொதுவான நேரியல் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளுக்கும் உண்மையாகும்.

10.4. வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் உருவாக்கம் (Formation of Differential Equations)

10.4.1 இயற்பியல் சூழ்நிலைகளிலிருந்து வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை உருவாக்குதல் (Formation of Differential equations from Physical Situations)

அன்றாட வாழ்க்கை நிகழ்வுகள் எவ்வாறு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டு மாதிரிகளாக உருவாகின்றன என்பதை விவரிக்க நாம் சில மாதிரிகளை காண்போம்.

மாதிரி 1: (நியூட்டனின் விதி)

நியூட்டனின் இரண்டாம் இயக்க விதிப்படி, m எனும் மாறாத நிறை கொண்ட ஒரு பொருளின் மீது F எனும் விசை செயல்படுவதால் ஏற்படும் கணநேர முடுக்கம் a ஆனது $F = ma$ எனும் சமன்பாட்டால் பெறப்படுகிறது.

தடையின்றி விழும் ஒரு பொருளானது தரைமட்டத்திற்கு மேல் $h(t)$ என்ற உயரத்திலிருந்து விடுவிக்கப்படுகிறது.

பின்னர், நியூட்டனின் இரண்டாவது விதியானது $m\frac{d^2h}{dt^2}=f\left(t,h(t),\frac{dh}{dt}\right)$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டால் விவரிக்கப்படுகிறது. இங்கு m என்பது பொருளின் நிறை, h என்பது தரைமட்டத்திற்கு மேல் உள்ள உயரம் ஆகும். இச்சமன்பாடு காலத்தைப் பொருத்து அறியாத உயரத்தைக் குறிப்பிடும் சார்பின் இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

மாதிரி 2: (மக்கள் தொகைப் பெருக்கம்)

குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்கும்போது மக்கள் தொகையும் அதிகரிக்கும். எடுத்துக்காட்டாக, முயல்களின் பெருக்கத்தை நாம் எடுத்துக் கொள்வோம். முயல்களின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருந்தால், குட்டி முயல்களின் எண்ணிக்கையும் அதிகமாகும். காலம் அதிகரிக்கும்போது முயல்களின் பெருக்கம் அதிகரிக்கிறது. t நேரத்தில் உயிரினத்தொகுதியின் பெருக்கத்தின் வளர்ச்சி வீதம் $N(t)$ ஆனது உயிரினத்தொகுதி பெருக்கத்திற்கு விகிதமாக இருக்குமானால், பெருக்கத்தை தீர்மானிக்கும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $\frac{dN}{dt}=rN$ ஆகும். இங்கு, $r>0$ என்பது வளர்ச்சி விகிதம் ஆகும்.

மாதிரி 3: (லாஜிஸ்டிக் வளர்ச்சி மாதிரி)

ஒரு குறிப்பிட்ட மக்கள் தொகை L இல் நோய் பரவும் வீதமானது (அதாவது, நோய் தொற்று உள்ள மக்களின் எண்ணிக்கை N அதிகரிக்கும் வீதமானது) நோய்தொற்று உள்ள மக்களின் எண்ணிக்கையும் நோய்தொற்று இல்லாதவர்களின் எண்ணிக்கையையும் பெருக்கிக் கிடைக்கும் மதிப்பாகும் :

$$\frac{dN}{dL}=kN(L-N),\ k>0.$$

பயிற்சி 10.2

1. பின்வரும் இயற்பியல் கூற்றுகள் ஒவ்வொன்றையும், வகைக்கெழுச் சமன்பாடாக எழுதுக.
   (i) ரேடியம் சிதைவுறும் வீதமானது காணப்படும் அளவு Q –க்கு நேர்விகிதத்தில் இருக்கும்.
   (ii) ஒரு நகரத்தின் மக்கள் தொகை P ஆனது, மக்கள்தொகை மற்றும் 5,00,000–க்கும் மக்கள் தொகைக்கும் உள்ள வேறுபாடு ஆகியவற்றை பெருக்கிக் கிடைக்கும் மதிப்புக்கு நேர்விகிதத்தில் அதிகரிக்கிறது.
   (iii) ஒரு பொருளின் வெப்பநிலை Tஐப் பொருத்து ஆவி அழுத்தம் P–ன் மாறுவீதமானது, ஆவி அழுத்தத்திற்கு நேர்விகிதத்திலும், வெப்பநிலையின் வர்க்கத்திற்கு எதிர்விகிதத்திலும் உள்ளது.
   (iv) ஒரு சேமிப்புத் தொகைக்கு ஒரு வருடத்திற்கு வழங்கப்படும் 8% வட்டித் தொகையானது தொடர்ச்சியாக அசலுடன் சேர்க்கப்படுகிறது. மேலும், மற்றொரு முதலீட்டிலிருந்து ஒவ்வொரு ஆண்டும் கிடைக்கும் வரவு ₹400 இத்தொகையுடன் தொடர்ச்சியாக சேர்க்கப்படுகிறது.
2. ஒரு கோள வடிவ மழைத்துளியானது அதன் வளைபரப்பின் மாறுவீதத்திற்கு நேர்விகிதத்தில் ஆவியாகிறது. மழைத்துளியின் ஆரத்தின் மாறுவீதத்தை உள்ளடக்கிய வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை உருவாக்குக.

10.4.2 வடிவக் கணிதத்திலிருந்து வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை உருவாக்குதல் (Formation of Differential Equations from Geometrical Problems)

சில மாறிலிகளை துணையலகுகளாகக் கொண்ட கொடுக்கப்பட்ட சார்புகளுக்கு, அச்சார்புகளில் உள்ள மாறிலிகளை நீக்கி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை உருவாக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக, $y = \mathrm{A}\, e^{x} + \mathrm{B}\, e^{-x}$ எனும் சமன்பாட்டிலிருந்து A, B எனும் மாறிலிகளை நீக்குவதால் $\dfrac{d^2 y}{dx^2} - y = 0$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு பெறப்படுகிறது.

n மாறிலிகளைக் கொண்ட ஒரு வளைவரை குடும்பத்தின் சமன்பாட்டைக் கருதுவோம். இம்மாறிலிகள் இல்லாத வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை அமைப்பதற்கான வழிமுறையைக் காண்போம்.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் n தொடர் வகைக்கெழுக்களைக் காண்பதன் மூலம் அச்சமன்பாட்டின் n வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைப் பெறுகிறோம். கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டையும் அச்சமன்பாட்டைத் தொடர்ந்து n முறை வகைப்படுத்துவதால் கிடைக்கும் n புதிய சமன்பாடுகளையும் சேர்த்துக் கிடைக்கும் $(n+1)$ சமன்பாடுகளிலிருந்து n மாறிலிகளை நீக்கிய பின்னர், n வரிசையுள்ள வகைக்கெழுவைக் கொண்ட தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.2

ஆதி வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோடுகளின் தொகுதியின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

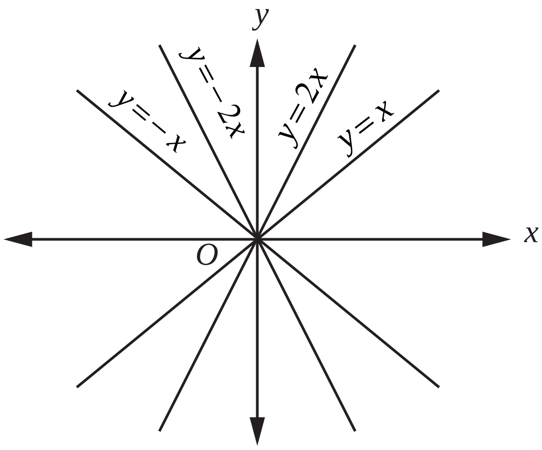
தீர்வு

ஆதி வழிச்செல்லும் நேர்க்கோடுகளின் குடும்பத்தின் சமன்பாடு $y = mx$ ஆகும். இங்கு, m என்பது ஏதேனும் ஒரு மாறிலி. $\quad\ldots(1)$

இருபுறமும் xஐப் பொருத்து வகைக்கெழுக் காண, நாம் பெறுவது,

$$\frac{dy}{dx} = m. \qquad \ldots(2)$$

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) ஆகியவற்றிலிருந்து, நாம் பெறுவது, $y = x\dfrac{dy}{dx}$. இதுவே தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.



படம் 10.1

கொடுக்கப்பட்ட $y = mx$ எனும் சமன்பாடு ஒரேயொரு மாறிலியை மட்டுமே பெற்றுள்ளது. எனவே, நாம் முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைப் பெறுகிறோம் என்பதை கவனத்தில் கொள்க.

எடுத்துக்காட்டு 10.3

$y = \mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x$ எனும் சமன்பாட்டிலிருந்து A, B எனும் மாறிலிகளை நீக்கி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை உருவாக்குக.

தீர்வு

$$y = \mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x \qquad \ldots(1)$$

சமன்பாடு (1)ஐ தொடர்ந்து இருமுறை வகையிட, நாம் பெறுவது

$$\frac{dy}{dx} = -\mathrm{A}\sin x + \mathrm{B}\cos x. \qquad \ldots(2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\mathrm{A}\cos x - \mathrm{B}\sin x = -(\mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x)\,. \qquad \ldots (3)$$

சமன்பாடு (1)ஐ (3)இல் பிரதியிட, $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ எனும் தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை நாம் பெறுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 10.4

$(a,0)$ மற்றும் $(-a,0)$ எனும் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் வட்டக் தொகுதியின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு

$(a,0)$ மற்றும் $(-a,0)$ எனும் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் மையம் y - அச்சின் மீது அமையும்.

வட்டத்தின் மையம் $(0,b)$ என்க. ஆகவே, வட்டத்தின் ஆரம் $\sqrt{a^2+b^2}$ ஆகும்.

எனவே, $(a,0)$ மற்றும் $(-a,0)$ எனும் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் வட்டக் தொகுதியின் சமன்பாடு $x^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2$. ... (1)

இங்கு b என்பது ஏதேனும் ஒரு மாறிலியாகும்.

சமன்பாடு (1)–ன் இருபக்கமும் x–ஐப் பொருத்து வகைக்கெழு காண,

$$2x + 2(y-b)\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y - b = -\frac{x}{\frac{dy}{dx}} \Rightarrow b = \frac{x}{\frac{dy}{dx}} + y\,.$$

b–ன் இம்மதிப்பை சமன்பாடு (1)–ல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$x^2 + \frac{x^2}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = a^2 + \left(\frac{x}{\frac{dy}{dx}} + y\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x^2 = a^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left[x + y\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]^2$$

$$\Rightarrow \left(x^2 - y^2 - a^2\right)\frac{dy}{dx} - 2xy = 0\,,$$ இதுவே தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.5

$y^2 = 4ax$ எனும் பரவளையத் தொகுதியின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கு a என்பது ஏதேனும் ஒரு மாறிலியாகும்.

தீர்வு

பரவளையக் குடும்பத்தின் சமன்பாடு $y^2 = 4ax$,

இங்கு a என்பது ஏதேனும் ஒரு மாறிலியாகும். ... (1)

சமன்பாட்டின் இருபக்கமும் xஐப் பொருத்து வகைக்கெழு காண, நாம் பெறுவது

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{y}{2}\frac{dy}{dx}$$

a இன் மதிப்பை சமன்பாடு (1)–ல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$ எனும் தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.6

x-அச்சின் மீது குவியங்களையும் ஆதிப்புள்ளியில் மையத்தையும் கொண்ட நீள்வட்டக் குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு

x-அச்சின் மீது குவியங்களையும் ஆதிப்புள்ளியில் மையத்தையும் கொண்ட நீள்வட்டக் குடும்பத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \;\; a>b$ ... (1)

இங்கு a, b என்பன ஏதேனுமிரு மாறிலிகள்.

சமன்பாடு (1)–ன் இருபுறமும் xஐப் பொருத்து வகைக்கெழு காண,

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0 \qquad \text{... (2)}$$

சமன்பாடு (2)–ன் இருபக்கமும் xஐப் பொருத்து வகைக்கெழு காண,

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\left[y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=0 \Rightarrow \frac{1}{a^2}=-\frac{1}{b^2}\left[y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$$

$\frac{1}{a^2}$ இன் மதிப்பை சமன்பாடு (2)–ல் பிரதியிட்டு எளிமைப்படுத்தினால் நமக்குக் கிடைப்பது,

$$-\frac{1}{b^2}\left[y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]x+\frac{y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{dy}{dx}=0$$

இதுவே தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும். ■

குறிப்புரை

ஒரு மாறிலியைக் கொண்ட சமன்பாட்டிலிருந்து அம்மாறிலியை நீக்குவதால் முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டையும் மற்றும் இரண்டு மாறிலிகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டிலிருந்து இரண்டு மாறிலிகளையும் நீக்குவதால் இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டையும் மற்றும் இதேபோல் தொடர, நீக்கப்படும் மாறிலிகளின் எண்ணிக்கைகேற்ப வரிசைகளைக் கொண்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைப் பெறலாம்.

பயிற்சி 10.3

1. ஒரு தளத்தில் (i) நேர்க்குத்து அல்லாத நேர்க்கோடுகள் (ii) கிடைமட்டம் அல்லாத நேர்க்கோடுகள் ஆகிய தொகுப்புகளின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
2. $x^2+y^2=r^2$ எனும் வட்டத்தைத் தொடும் எல்லா நேர்க்கோடுகளின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.
3. ஆதிப்புள்ளி வழியாகச் செல்லும், மையத்தினை x-அச்சின் மீது கொண்ட எல்லா வட்டங்களின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.
4. செவ்வகலம் $4a$ மற்றும் x-அச்சுக்கு இணையான அச்சுகளைக் கொண்ட பரவளையத் தொகுப்பின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.
5. முனை $(0,-1)$ மற்றும் y-அச்சை அச்சாகவும் கொண்ட பரவளையக் குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

6. ஆதிப்புள்ளியை மையமாகவும், y -அச்சின் மீது குவியங்களையும் கொண்ட நீள்வட்டத் தொகுதியின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.
7. $y = Ae^{8x} + Be^{-8x}$ எனும் சமன்பாட்டைக் கொண்ட வளைவரைக் குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கு A, B என்பன ஏதேனும் இரு மாறிலிகள்.
8. $xy = ae^{x} + be^{-x} + x^{2}$ எனும் சமன்பாட்டால் குறிப்பிடப்படும் வளைவரையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

10.5 சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு (Solution of Ordinary Differential Equations)

வரையறை 10.9: (வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு)

ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டினை நிறைவு செய்யுமாறு சார்ந்த மாறிகளை சாரா மாறிகளுடன் தொடர்புபடுத்தும் கோவை அச்சமன்பாட்டின் **தீர்வு** ஆகும்.

குறிப்பு

(i) ஒவ்வொரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடும் ஒரு தீர்வினைப் பெற்றிருக்கும் என உறுதியாக கூறமுடியாது.

எடுத்துக்காட்டாக, $(y'(x))^2 + y^2 + 1 = 0$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை கருதுவோம். இங்கு, $(y'(x))^2 = -(y^2+1)$ என்பதால் $y'(x)$ என்பது மெய்மதிப்பாகாது. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிற்கு தீர்வு கிடையாது.

(ii) ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிற்கு தீர்வு இருக்குமானால், அத்தீர்வு ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்ததாகாது.

எடுத்துக்காட்டாக, $y = e^{2x}, y = 2e^{2x}$, $y = \sqrt{8}e^{2x}$ எனும் சார்புகள் $\frac{dy}{dx} - 2y = 0$ எனும் ஒரே வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும். $y = ce^{2x}$, $c \in \mathbb{R}$ எனும் சார்புகள் அனைத்தும் $\frac{dy}{dx} - 2y = 0$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும். ஆகவே, ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வாய்ப்புள்ள எல்லா தீர்வுகளையும் குறிப்பிட, ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு எனும் கருத்தாக்கத்தை காண்போம்.

வரையறை 10.10: (பொதுத் தீர்வு)

ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வில் உள்ள மாறத்தக்க மாறிலிகளின் (எதேச்சை மாறிலிகளின்) எண்ணிக்கையானது, அவ்வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசைக்குச் சமமாக இருப்பின், அத்தீர்வினை அச்சமன்பாட்டின் **பொதுத் தீர்வு** என்கிறோம்.

குறிப்புரை

ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வாய்ப்புள்ள எல்லா தீர்வுகளையும் **பொதுத்தீர்வு** உள்ளடக்கியிருக்கும். பொதுவாக, சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் பொதுத்தீர்வு மாறிலிகளையும், பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் பொதுத்தீர்வு சார்புகளையும் உள்ளடக்கியிருக்கும்.

வரையறை 10.11: (குறிப்பிட்டத் தீர்வு)

ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வில் உள்ள மாறத்தக்க மாறிலிகளுக்கு குறிப்பிட்ட மதிப்புகளைக் கொடுப்பதால் பெறப்படும் தீர்வினை குறிப்பிட்டத் தீர்வு என்போம்.

குறிப்புரை

(i) கூடுதலான நிபந்தனைகளைக் கொடுப்பதன் மூலம் ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் குறிப்பிட்டத் தீர்வினைக் காண்கிறோம்.

(ii) $y' = f(x,y)$ எனும் முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வானது xy -தளத்தில் ஒரு துணையலகினைக் கொண்ட வளைவரைத் தொகுதியைக் குறிப்பிடுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக, $y = ce^{2x}$, $c \in \mathbb{R}$ என்பது $\frac{dy}{dx} - 2y = 0$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வாகும்.

$y = a\cos x + b\sin x$ என்பது $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ எனும் இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கிறது என ஏற்கனவே படித்துள்ளோம். இது இரண்டு மாறிலிகளைப் பெற்றுள்ளதால், $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வாகிறது. $a = 1,\ b = 0$ எனப் பொதுத் தீர்வில் பிரதியிடுவதால் நமக்குக் கிடைக்கும் $y = \cos x$ என்பது $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வாகிறது.

பொதுவாக பயன்பாட்டில், மாறத்தக்க எதேச்சை மாறிலிகளை நீக்குவதால் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் எழுவதில்லை. வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் பொதுவாக பொறியியல், அறிவியல் மற்றும் சமூக அறிவியல் உட்பட அனைத்துப் பிரிவுகளிலும் நடைமுறை நிகழ்வுகளை ஆராயும்போது கிடைக்கிறது.கொடுக்கப்பட்ட கட்டுப்பாடுகளை நிறைவு செய்யுமாறு ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிற்கு ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்த தீர்வு காண, பொதுவாக மாறிலிகளின் மீதான சில நிபந்தனைகள் இச்சமன்பாட்டுடன் கொடுக்கப்பட்டு இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.7

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு $x^2 + y^2 = r^2$ என நிறுவுக. இங்கு r என்பது மாறிலியாகும்.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $x^2 + y^2 = r^2, r \in \mathbb{R}$ ... (1)

இச்சமன்பாடு ஒரேயொரு மாறிலியை மட்டும் பெற்றுள்ளது.

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிற்கு ஒருமுறை மட்டும் வகைக்கெழு காண்போம். சமன்பாடு (1)ஐ x ஐப் பொருத்து வகையிட, நாம் பெறுவது

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

ஆகவே, $x^2 + y^2 = r^2$ என்பது $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கிறது.

எனவே, $x^2 + y^2 = r^2$ என்பது $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வாகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 10.8

$y = mx + \frac{7}{m}, m \neq 0$ என்பது $xy' + 7\frac{1}{y'} - y = 0$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வாகும் எனக்காட்டுக.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சார்பு $y = mx + \frac{7}{m}$, இங்கு m ஏதேனும் ஒரு மாறிலியாகும். ... (1)

சமன்பாடு (1)–ன் இருபுறமும் x ஐப் பொருத்து வகைக்கெழு காண, நாம் பெறுவது $y' = m$ ஆகும்.

y' மற்றும் y –ன் மதிப்புகளைக் கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் பிரதியிட

$xy' + \frac{7}{y'} - y = xm + \frac{7}{m} - mx - \frac{7}{m} = 0$ எனப் பெறுகிறோம்.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சார்பு $xy' + 7\frac{1}{y'} - y = 0$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.9

$y = 2\left(x^2 - 1\right) + Ce^{-x^2}$ என்பது $\frac{dy}{dx} + 2xy - 4x^3 = 0$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வாகும் எனக்காட்டுக.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சார்பு $y = 2\left(x^2 - 1\right) + Ce^{-x^2}$, இங்கு C ஏதேனும் ஒரு மாறிலியாகும். ...(1)

சமன்பாடு (1)–ன் இருபுறமும் x ஐப் பொருத்து வகைக்கெழு காண, $\frac{dy}{dx} = 4x - 2xCe^{-x^2}$.

$\frac{dy}{dx}$ மற்றும் y ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் பிரதியிட,

$\frac{dy}{dx} + 2xy - 4x^3 = 4x - 2xCe^{-x^2} + 2x\left[2\left(x^2 - 1\right) + Ce^{-x^2}\right] - 4x^3 = 0$ எனப் பெறுகிறோம்.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சார்பு $\frac{dy}{dx} + 2xy - 4x^3 = 0$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.10

$y = a\cos(\log x) + b\sin\left(\log x\right), x > 0$ என்பது $x^2y'' + xy' + y = 0$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வாகும் எனக்காட்டுக.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சார்பு $y = a\cos(\log x) + b\sin\left(\log x\right)$ ...(1)

இங்கு a, b என்பன ஏதேனும் இரண்டு மாறிலிகள். இவ்விரு மாறிலிகளையும் நீக்க கொடுக்கப்பட்ட சார்பின் தொடர் வகைக்கெழுக்களை இருமுறை காணவேண்டும்.

சமன்பாடு (1)–ன் இருபக்கமும் x ஐப் பொருத்து வகைக்கெழு காண நாம் பெறுவது,

$$y' = -a\sin\left(\log x\right)\cdot\frac{1}{x} + b\cos\left(\log x\right)\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow xy' = -a\sin\left(\log x\right) + b\cos\left(\log x\right).$$

இச்சமன்பாட்டினை மீண்டும் xஐப் பொருத்து வகையிட,

$$xy'' + y' = -a\cos\left(\log x\right)\cdot\frac{1}{x} - b\sin\left(\log x\right)\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow x^2y'' + xy' + y = 0 .$$

எனவே, $y = a\cos(\log x) + b\sin\left(\log x\right)$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வாகும்.

பயிற்சி 10.4

1. பின்வரும் சமன்பாடுகள் ஒவ்வொன்றும் அவற்றிற்கெதிரே கொடுக்கப்பட்டுள்ள வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வாகும் எனக்காட்டுக.

   (i) $y = 2x^2$; $xy' = 2y$

   (ii) $y = ae^x + be^{-x}$; $y'' - y = 0$

2. $y = e^{mx}$ எனும் சார்பு கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிற்கு தீர்வாக அமையுமாறு m –ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

   (i) $y' + 2y = 0$ (ii) $y'' - 5y' + 6y = 0$

3. ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் ஒரு வளைவரையின் தொடுகோட்டின் சாய்வு, அப்புள்ளியின் y அச்சுத் தொலைவின் 4 மடங்கின் தலைகீழியாகும். மேலும் வளைவரை (2,5) எனும் புள்ளி வழியாகச் செல்கிறது எனில், வளைவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

4. $y = e^{-x} + mx + n$ என்பது $e^x\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right) - 1 = 0$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வாகும் எனக்காட்டுக.

5. $y = ax + \dfrac{b}{x}, x \neq 0$ என்பது $x^2y'' + xy' - y = 0$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வாகும் எனக்காட்டுக.

6. $y = ae^{-3x} + b$ என்பது $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} = 0$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வாகும் எனக்காட்டுக. இங்கு a, b ஏதேனும் இரு எதேச்சை மாறிலிகள்.

7. $y^2 = 2a\left(x + a^{\frac{2}{3}}\right)$ எனும் வளைவரைத் தொகுதியைக் குறிக்கும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $\left(y^2 - 2xy\dfrac{dy}{dx}\right)^3 = 8\left(y\dfrac{dy}{dx}\right)^5$ எனக்காட்டுக. இங்கு a என்பது மிகை மதிப்புடைய துணையலகாகும்.

8. $y = a\cos bx$ என்பது $\dfrac{d^2y}{dx^2} + b^2y = 0$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வாகும் எனக்காட்டுக.

முதல் வரிசை, முதற்படி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகாணும் சில முறைகளை இப்பொழுது காண்போம்.

10.6 முதல் வரிசை, முதற்படி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு (Solution of First Order and First Degree Differential Equations)

10.6.1 மாறிகளைப் பிரிக்கும் முறை (Variables Separable Method)

வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் மாறிகளைப் பிரித்து தீர்வு காணும் முறையானது தொடக்கத்தில் லிபினிட்ஸ் என்பவரால் அறிமுகப்படுத்தப்பட்டது. அதன் பின்னர், 1694–ல் பெர்னோலி என்பவரால் இது முறைப்படுத்தப்பட்டது.

ஒரு முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை $h(y)y' = g(x)$ எனும் வடிவில் எழுத முடியுமானால், அச்சமன்பாட்டின் மாறிகள் பிரிபடக்கூடியனவாகும். இங்கு, y' மற்றும் y –ன் சார்பு ஆகியவற்றின் பெருக்கல் இச்சமன்பாட்டின் இடப்பக்கமும், சார்பு x ஆனது இச்சமன்பாட்டின் வலப்பக்கமும் அமைந்திருக்கும். வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை பிரித்து இவ்வாறு எழுதும் முறை மாறிகள் பிரிக்கக்கூடிய முறை எனப்படும்.

முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் மாறிகளை பிரித்தெழுத முடியுமானால் அச்சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்பது எளிதாகும். $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$ எனும் வடிவில் உள்ள சமன்பாடு **மாறிகள் பிரிபடக்கூடியது** அல்லது **மாறிகள் பிரிபடக்கூடிய சமன்பாடு** எனப்படும்.

கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = -\dfrac{g_2(y)}{g_1(y)}dy$ ...(1)

எனும் அமைப்பில் எழுதுக. சமன்பாடு (1)-ன் இருபுறமும் வகையிட நமக்கு கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு $\displaystyle\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = -\int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy + C$ எனக்கிடைக்கிறது. இங்கு C என்பது மாறிலியாகும்.

குறிப்புரை

1. இரு பக்கமும் உள்ள மாறிலிகளை ஒருங்கிணைத்து ஒரே மாறிலியாக மாற்றுவதால் சமன்பாட்டின் தீர்வு காணும்போது மாறிலிகளை இருபுறமும் சேர்க்கத் தேவையில்லை.
2. இந்த எதேச்சை மாறிலியுடன் காணப்படும் தீர்வு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு எனப்படும்.

ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காணும் முறையில் தொகையிடலும் பயன்படுத்தப்படுவதால் “வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காணல்” என்பதை “வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தொகை காணல்”, எனவும் குறிப்பிடுவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 10.11

தீர்க்க $\left(1+x^2\right)\dfrac{dy}{dx} = 1 + y^2$.

Z1I5G7

தீர்வு

$$\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx} = 1+y^2. \qquad \text{... (1)}$$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மாறிகளைப் பிரித்து

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2} \qquad \text{... (2)}$$

என எழுதலாம்.

சமன்பாடு (2)-ன் இருபக்கமும் தொகையிடக் கிடைப்பது $\tan^{-1} y = \tan^{-1} x + C$. ... (3)

$$\text{ஆனால் } \tan^{-1} y - \tan^{-1} x = \tan^{-1}\left(\frac{y-x}{1+xy}\right). \qquad \text{... (4)}$$

சமன்பாடு (4)ஐ (3)-ல் பயன்படுத்தக் கிடைப்பது

$$\tan^{-1}\left(\frac{y-x}{1+xy}\right) = C \Rightarrow \frac{y-x}{1+xy} = \tan C = a \ \text{(என்க).}$$

ஆகவே, $y - x = a(1+xy)$. இதுவே தேவையான தீர்வு ஆகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 10.12

$y(1) = 2$ எனும் நிபந்தனையை நிறைவு செய்யும் $\left(1+x^3\right)dy - x^2 ydx = 0$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் குறிப்பிட்டத் தீர்வு காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $(1+x^3)dy - x^2 ydx = 0$.

இச்சமன்பாட்டை $\frac{dy}{y}-\frac{x^2}{1+x^3}dx = 0$ என எழுதலாம்.

இருபுறமும் தொகையிடக் கிடைப்பது $\log y-\frac{1}{3}\log(1+x^3) = C_1$

$$\Rightarrow \quad 3\log y-\log(1+x^3) = \log C.$$

$$3\log y = \log(1+x^3)+\log C,$$

அதாவது, $\log y^3 = \log C(1+x^3)$.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு $y^3 = C(1+x^3)$.

$x=1,\ y=2$ எனும்போது, $2^3 = C(1+1) \Longrightarrow C=4$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் குறிப்பிட்ட தீர்வு $y^3 = 4(1+x^3)$. ■

10.6.2 பிரதியிட்டு முறை (Substitution Method)

$\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$ எனும் வடிவில் உள்ள வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை கருதுவோம்.

(i) $a\neq 0$ மற்றும் $b\neq 0$ எனில் $ax+by+c=z$ எனப் பிரதியிட கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு மாறிகள் பிரிக்கக்கூடிய அமைப்புக்கு மாறும்.

(ii) $a = 0$ அல்லது $b=0$ எனில் கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாடு மாறிகள் பிரிக்கக்கூடியதாக இருப்பதைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 10.13

தீர்க்க : $y'=\sin^2(x-y+1)$.

தீர்வு

$$y' = \sin^2(x-y+1)$$

$z = x-y+1$ என்க. எனவே, $\frac{dz}{dx}=1-\frac{dy}{dx}$.

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $1-\frac{dz}{dx} = \sin^2 z$ என மாறுகிறது.

அதாவது, $\frac{dz}{dx} = 1-\sin^2 z=\cos^2 z$.

மாறிகளைப் பிரித்து எழுதக் கிடைப்பது $\frac{dz}{\cos^2 z} = dx$ (அல்லது) $\sec^2 z dz = dx$.

தொகையிட, நாம் பெறுவது $\tan z = x+C$ (அல்லது) $\tan(x-y+1)=x+C$. ■

எடுத்துக்காட்டு 10.14

தீர்க்க : $\frac{dy}{dx}=\sqrt{4x+2y-1}$.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $\frac{dy}{dx}=\sqrt{4x+2y-1}$.

$z = 4x + 2y - 1$ எனப் பிரதியிடக் கிடைப்பது

$$\frac{dz}{dx} = 4 + 2\frac{dy}{dx} = 4 + 2\sqrt{z}$$

$$\text{எனவே, } \frac{dz}{4 + 2\sqrt{z}} = dx.$$

$$\text{தொகையிட, } \int \frac{dz}{4 + 2\sqrt{z}} = x + C.$$

$$z = u^2 \text{ எனப்பிரதியிட,}$$

$$\int \frac{dz}{4 + 2\sqrt{z}} = \int \frac{udu}{u+2} = u - 2\log|u+2| + C,$$

$$\text{அல்லது } \sqrt{z} - 2\log\left|\sqrt{z} + 2\right| = x + C$$

$z = 4x + 2y - 1$ எனப் பிரதியிட, நாம் பெறும் பொதத் தீர்வு

$$\sqrt{4x + 2y - 1} - 2\log\left|\sqrt{4x + 2y - 1} + 2\right| = x + C.$$

■

எடுத்துக்காட்டு 10.15

தீர்க்க : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y + 5}{2(x - y) + 7}$.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y + 5}{2(x - y) + 7}$.

$$z = x - y \text{ என்க.}$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dz}{dx}$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$1 - \frac{dz}{dx} = \frac{z+5}{2z+7} \text{ என மாறும்.}$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{z+5}{2z+7}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z+2}{2z+7}$$

மாறிகளைப் பிரித்து எழுத, நாம் பெறுவது

$$\frac{2z+7}{z+2}dz = dx$$

$$\frac{2(z+2)+3}{z+2} = dx$$

$$\left(2+\frac{3}{z+2}\right)dz = dx$$

இருபக்கமும் தொகையிட, நாம் பெறுவது

$$2z+3\log|z+2| = x+C$$

அதாவது, $2(x-y)+3\log|x-y+2| = x+C$ ■

எடுத்துக்காட்டு 10.16

தீர்க்க : $\frac{dy}{dx}=(3x+y+4)^2$.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $\frac{dy}{dx}=(3x+y+4)^2$

இக் கொடுக்கப்பட்டச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காண $z=3x+y+4$ எனப்பிரதியிடுகிறோம்.

xஐப் பொருத்து வகைக்கெழு காண, நாம் பெறுவது, $\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-3$. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $\frac{dz}{dx}=z^2+3$ என மாறும். இச்சமன்பாட்டில் மாறிகள் பிரிபடக்கூடியன.

எனவே, மாறிகளைப் பிரித்து தொகையிட, கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு $\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{3x+y+4}{\sqrt{3}}\right)=x+C$ என நமக்குக் கிடைக்கிறது. ■

பயிற்சி 10.5

1. நிறை M உடைய ஒரு தானியங்கி இயந்திரத்தின் இயக்கியால் உருவாக்கப்படும் மாறாத விசை F எனில், அதனுடைய திசைவேகம் V என்பது $M\frac{dV}{dt}=F-kV$ எனும் சமன்பாட்டால் குறிக்கப்படுகிறது. k என்பது மாறிலியாகும். $t=0$ எனில் $V=0$ என கொடுக்கப்படும்போது V ஐ t-ன் சார்பாக எழுதுக.
2. செங்குத்தாக விழும் வான்குடை மிதவை (parachute)யின் திசைவேகம் v ஆனது $v\frac{dv}{dx}=g\left(1-\frac{v^2}{k^2}\right)$ எனும் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கிறது. இங்கு g மற்றும் k என்பன மாறிலிகள் ஆகும். ஆரம்ப நிலையில் v மற்றும் x ஆகிய இரண்டும் பூச்சியமானால், v ஐ x-ன் சார்பாகக் காண்க.
3. ஒரு வளைவரையின் சாய்வு $\frac{y-1}{x^2+x}$ ஆகும். வளைவரை $(1,0)$ எனும் புள்ளி வழிச் செல்லுமெனில், அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.
4. பின்வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் காண்க :

   (i) $\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$ (ii) $ydx+\left(1+x^2\right)\tan^{-1}x\,dy=0$

   (iii) $\sin\frac{dy}{dx}=a,\ y(0)=1$ (iv) $\frac{dy}{dx}=e^{x+y}+x^3e^y$

(v) $\left(e^{y}+1\right)\cos x\,dx+e^{y}\sin x\,dy=0$

(vi) $\left(ydx-xdy\right)\cot\left(\frac{x}{y}\right)=ny^{2}dx$

(vii) $\frac{dy}{dx}-x\sqrt{25-x^{2}}=0$

(viii) $x\cos y\,dy=e^{x}\left(x\log x+1\right)dx$

(ix) $\tan y\frac{dy}{dx}=\cos\left(x+y\right)+\cos\left(x-y\right)$

(x) $\frac{dy}{dx}=\tan^{2}\left(x+y\right)$

10.6.3 சமபடித்தான அமைப்பு அல்லது சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (Homogeneous Form or Homogeneous Differential Equation)

வரையறை 10.12 : (n-ஆம் சமபடித்தான சார்பு)

$n\in\mathbb{R}$ மற்றும் பொருத்தமாகக் கட்டுப்படுத்தப்பட்ட x, y மற்றும் t ஆகியவற்றுக்கு $f(tx,ty)=t^{n}f(x,y)$ எனில், x, y ஆகியவற்றை மாறிகளாகக் கொண்ட சார்பு $f(x,y)$ ஆனது n ஆம் படியில் **சமபடித்தான** சார்பு எனப்படும். இது **ஆய்லரின் சமபடித்தன்மை** எனவும் அழைக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) $f(x,y)=6x^{2}+2xy+4y^{2}$ என்பது x, y-ல் அமைந்த படி 2 உடைய சமபடித்தான சார்பாகும்.

(ii) ஆனால் $f(x,y)=x^{3}+\left(\sin x\right)e^{y}$ என்பது சமபடித்தான சார்பு அல்ல.

$f(x,y)$ என்பது படி 0 கொண்ட **சமபடித்தான** சார்பு எனில், $f(x,y)$ என்பதை எப்பொழுதும் $g\left(\frac{y}{x}\right)$ அல்லது $g\left(\frac{x}{y}\right)$ எனும் வடிவில் எழுதுமாறு g எனும் சார்பு இருக்கும்.

வரையறை 10.13 : (சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு)

ஒரு சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை $\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right)$ எனும் அமைப்பில் எழுதமுடியுமானால், அச்சமன்பாடு **சமபடித்தான அமைப்பில்** உள்ள வகைக்கெழுச் சமன்பாடு எனப்படும்.

கவனிக்க

வரையறை 10.8இல் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள "சமபடித்தான" எனும் வார்த்தையும் வரையறை 10.12இல் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள "சமபடித்தான" எனும் வார்த்தையும் வெவ்வேறு பொருள் கொண்டவை என்பதை கவனத்தில் கொள்க.

குறிப்புரை

(i) M மற்றும் N என்பவை **ஒரே படி கொண்ட சமபடித்தான சார்புகள்** எனில், வகையீடு அமைப்பில் உள்ள $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு **சமபடித்தான** வகைக்கெழுச் சமன்பாடு எனப்படும்.

(ii) மேற்கண்ட சமன்பாட்டை, $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ [வகைக்கெழு வடிவம்] என எழுதலாம். இங்கு $f(x,y)=-M(x,y)/N(x,y)$ ஆகும். இச்சார்பு படி 0 கொண்ட சமபடித்தான சார்பு எனத் தெளிவாகக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(1) $\left(x^{2}-3y^{2}\right)dx+2xy\,dy=0$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை கருதுவோம். கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை $\frac{dy}{dx}=\frac{3y^{2}-x^{2}}{2xy}=\frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y/x}\right)$ என எழுதலாம்.

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y/x}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ என எழுதலாம்.

எனவே, $\left(x^2 - 3y^2\right)dx + 2xy\,dy = 0$ எனும் சமன்பாடு சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + y^2}{2x^3 - xy^2}$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு சமப்படித்தான சமன்பாடு அல்ல (சரிபார்!)

$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்பதற்கு $v = \frac{y}{x}$ எனப் பிரதியிடுக.

பின்னர், $y = xv$ மற்றும் $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ ஆகும். ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $x\frac{dv}{dx} = f(v) - v$ என வடிவத்திற்கு மாறும். இச்சமன்பாட்டின் தீர்வினை மாறிகளைப் பிரிக்கும் முறையில் காணலாம். இதிலிருந்து பின்வரும் முடிவினைப் பெறுகிறோம்.

தேற்றம் 10.1

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ என்பது சமபடித்தான சமன்பாடு எனில், $y = vx$ எனப் பிரதியிட்டு மாறியை மாற்றுவதால் இச்சமன்பாடு v மற்றும் x எனும் பிரிபடக்கூடிய மாறிகளைக் கொண்ட சமன்பாடாக உருமாறுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 10.17

தீர்க்க : $\left(x^2 - 3y^2\right)dx + 2xydy = 0$.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு சமபடித்தான சமன்பாடாகும் என்பது நமக்குத் தெரியும்.

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை $\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{2x} - \frac{x}{2y}$ என எழுதலாம்.

$y = vx$ எனில், $v + x\frac{dv}{dx} = \frac{3v}{2} - \frac{1}{2v}$ அல்லது $x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 1}{2v}$.

மாறிகளைப் பிரித்து எழுத $\frac{2vdv}{v^2 - 1} = \frac{dx}{x}$ எனப் பெறுகிறோம்.

இருபுறமும் தொகையிட, $\log\left|v^2 - 1\right| = \log|x| + \log|C|$,

எனவே, $\left|v^2 - 1\right| = |Cx|$, இங்கு C என்பது எதேச்சை மாறிலி

v க்குப் பதிலாக $\frac{y}{x}$ எனப் பிரதியிட, நமக்குக் கிடைப்பது

$$\left|\frac{y^2}{x^2} - 1\right| = |Cx|.$$

$$\text{எனவே, } \left|y^2-x^2\right| = \left|Cx^3\right|.$$
$$\text{ஆகவே, } y^2-x^2 = \pm Cx^3 \text{ (அல்லது) } y^2-x^2=kx^3$$

இதுவே கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.18

தீர்க்க : $\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx - xdy = 0, \quad y(1)=0$.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாடு சமபடித்தான சமன்பாடாகும் (சரிபார்!).

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ எனும் வகைக்கெழு அமைப்பில் எழுதலாம்.

x –ன் ஆரம்ப மதிப்பு 1 என்தால், $x>0$ என கருதுவோம்.

மேலும் $x=\sqrt{x^2}$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

$y=vx$. என்க. பின்னர், $v + x\dfrac{dv}{dx} = v+\sqrt{1+v^2}$, இதிலிருந்து $x\dfrac{dv}{dx} = \sqrt{1+v^2}$ எனப் பெறுகிறோம்.

மாறிகளைப் பிரித்து எழுத, $\dfrac{dv}{\sqrt{v^2+1}} = \dfrac{dx}{x}$.

இச்சமன்பாட்டின் இருபக்கமும் தொகையிட,

$$\log\left|v+\sqrt{v^2+1}\right| = \log|x| + \log|C|$$
$$\text{அல்லது } v+\sqrt{v^2+1} = xC.$$

மேலும் $\dfrac{y}{x}$ க்கு v ஐப் பிரதியிட, கிடைப்பது $\dfrac{y}{x} + \sqrt{\dfrac{y^2}{x^2}+1} = Cx$ (அல்லது) $y+\sqrt{x^2+y^2} = Cx^2$

இதுவே கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வாகும்.

மேலும் $x=1$ எனில், $y=0$ எனும் நிபந்தனையைப் பயன்படுத்தி $C=1$ எனப் பெறுகிறோம்.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் குறிப்பிட்ட தீர்வு $y+\sqrt{x^2+y^2} = x^2$.

எடுத்துக்காட்டு 10.19

தீர்வு காண்க : $(2x+3y)dx + (y-x)dy = 0$.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x+3y}{x-y}$ என எழுதலாம்.

இச்சமன்பாடு சமப்படித்தான சமன்பாடாகும்.

$y = vx$ என்க. பின்னர், $$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{2+3v}{1-v}.$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{2+2v+v^2}{1-v} \text{ அல்லது } \frac{1-v}{(1+v)^2+1}dv = \frac{dx}{x} \text{ அல்லது } -\frac{1}{2}\left[\frac{2v+2}{v^2+2v+2} - \frac{4}{(v+1)^2+1}\right]dv = \frac{dx}{x}.$$

இரு பக்கமும் தொகையிட, $-\frac{1}{2}\log\left|v^2+2v+2\right| + 2\tan^{-1}(v+1) = \log|x| + \log|C|$

அல்லது $\log\left|v^2+2v+2\right| - 4\tan^{-1}(v+1) = -2\log|x| - 2\log|C|$

அல்லது $\log\left|v^2+2v+2\right| + \log|x|^2 - 4\tan^{-1}(v+1) = -2\log|C|$

அல்லது $\log\left|(v^2+2v+2)x^2\right| - 4\tan^{-1}(v+1) = -2\log|C|$.

$v = \frac{y}{x}$ எனப்பிரதியிட, $\log\left|y^2+2xy+2x^2\right| - 4\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{x}\right) = k$, இங்கு $k = -2\log|C|$ ஆகும்.

இதுவே தேவையான தீர்வு ஆகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 10.20

தீர்வு காண்க : $y^2 + x^2\frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx}$.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2}$ என எழுதலாம்.

இச்சமன்பாடு சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

$y = vx$ எனப்பிரதியிட, $x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{v-1}$.

மாறிகளைப் பிரித்து எழுத, $\frac{v-1}{v}dv = \frac{dx}{x}$.

இருபக்கமும் தொகையிட, நாம் பெறுவது $v - \log|v| = \log|x| + \log|C|$ அல்லது $v = \log|vxC|$.

$v = \frac{y}{x}$ எனப் பிரதியிட, $\frac{y}{x} = \log|Cy|$ அல்லது $|Cy| = e^{y/x}$ or $y = ke^{y/x}$ (எப்படி!)

இது கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வாகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 10.21

தீர்வு காண்க : $\left(1+2e^{x/y}\right)dx + 2e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy = 0$.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை $\frac{dx}{dy} = \frac{\left(\frac{x}{y}-1\right)2e^{x/y}}{1+2e^{x/y}} = g\left(\frac{x}{y}\right)$ என எழுதலாம். ...(1)

சமன்பாடு (1)-ல் $\frac{x}{y}$ எனும் உறுப்பு காணப்படுவதால், இச்சமன்பாட்டில் $x = vy$ எனப் பிரதியிடுவது பொருத்தமாக இருக்கும்.

$x = vy$ என சமன்பாடு (1)-ல் பிரதியிட, $y\frac{dv}{dy} = -\frac{2e^v + v}{1+2e^v}$ எனக்கிடைக்கிறது.

மாறிகளைப் பிரித்தெழுத, $\frac{1+2e^v}{v+2e^v}dv = -\frac{dy}{y}$.

இரு பக்கமும் தொகையிட,

$\log|2e^v + v| = -\log|y| + \log|C|$ அல்லது $\log|2ye^v + vy| = \log|C|$ அல்லது $2ye^v + vy = \pm C$.

$v = \frac{x}{y}$ எனப்பிரதியிட, $2ye^{x/y} + x = k$, இங்கு $k = \pm C$ ஆகும்.

இதுவே தேவையான தீர்வு ஆகும்.

பயிற்சி 10.6

பின்வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க:

1. $\left[x + y\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx = x\cos\left(\frac{y}{x}\right)dy$

2. $\left(x^3 + y^3\right)dy - x^2 y dx = 0$

3. $ye^{\frac{x}{y}}dx = \left(xe^{\frac{x}{y}} + y\right)dy$

4. $2xydx + \left(x^2 + 2y^2\right)dy = 0$

5. $\left(y^2 - 2xy\right)dx = \left(x^2 - 2xy\right)dy$

6. $x\frac{dy}{dx} = y - x\cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$

7. $\left(1 + 3e^{\frac{y}{x}}\right)dy + 3e^{\frac{y}{x}}\left(1 - \frac{y}{x}\right)dx = 0$, $x = 1$ எனில் $y = 0$ எனக்கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

8. $\left(x^2 + y^2\right)dy = xy\,dx$. $y(1) = 1$ மற்றும் $y(x_0) = e$ எனக்கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

   x_0 -ன் மதிப்பைக் காண்க.

10.7 முதல் வரிசை நேரியல் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (First Order Linear Differential Equations)

முதல் வரிசை நேரியல் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வடிவம்

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q. \qquad \text{... (1)}$$

ஆகும். இங்கு P மற்றும் Q என்பன x-ல் மட்டுமே உள்ள சார்புகளாகும். இச்சமன்பாட்டில் y மற்றும் அதன் வகைக்கெழு $\frac{dy}{dx}$ இவ்விரண்டின் பெருக்கல் பலன் இருக்காது. மேலும் சார்ந்த மாறி y மற்றும் சாராமாறி x ஐப் பொருத்த அதனுடைய வகைக்கெழு ஆகியவை முதலாம் படியாக மட்டுமே காணப்படும்.

சமன்பாடு (1)-ன் தீர்வு காண்பதற்கு முதலில் $\frac{dy}{dx} + Py = 0 \qquad \text{...(2)}$

எனும் சமபடித்தான சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம்.

சமன்பாடு (2)–ன் தீர்வினை பின்வருமாறு காணலாம்:

$$\text{மாறிலிகளைப் பிரித்து எழுத,}\quad \frac{dy}{y} = -Pdx .$$

$$\text{தொகையிட, நமக்குக் கிடைப்பது}\quad ye^{\int Pdx} = C .$$

$$\text{இப்பொழுது,}\quad \frac{d}{dx}\left(ye^{\int Pdx}\right) = e^{\int Pdx}\frac{dy}{dx} + y.Pe^{\int Pdx}$$

$$= e^{\int Pdx}\left(\frac{dy}{dx} + Py\right) = Qe^{\int Pdx} \quad ...(3)$$

(சமன்பாடு (1)ஐப் பயன்படுத்த)

சமன்பாடு (3)–ன் இருபக்கமும் xஐப் பொருத்து தொகையிட, கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு

$$ye^{\int Pdx} = \int Qe^{\int Pdx}dx + C \quad \text{எனக் கிடைக்கிறது.}$$

இங்கு $e^{\int Pdx}$ என்பது சமன்பாடு (1)–ன் **தொகையீட்டுக் காரணி (தொ.கா)** எனப்படும்.

குறிப்புரை

1. நேரியல் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு
   $y \times (\text{தொ.கா}) = \int Q(\text{தொ.கா})dx + C$ ஆகும். இங்கு C என்பது எதேச்சை மாறிலி.
2. கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் காணப்படும் $\frac{dy}{dx}$–ன் கெழு 1 என இருக்கும்போது, தொகையீட்டுக் காரணி $e^{\int Pdx}$–ல் உள்ள P என்பது y–ன் கெழுவாகும்.
3. $\frac{dx}{dy} + Px = Q$ என்ற முதல் வரிசை நேரியல் சமன்பாட்டில் P மற்றும் Q என்பன y–ல் மட்டுமே உள்ள சார்புகளாகும். இச்சமன்பாட்டில் x மற்றும் $\frac{dx}{dy}$ இவ்விரண்டும் பெருக்கலாக இருக்காது. மேலும் சார்ந்த மாறி x மற்றும் சாராமாறி y ஐப் பொருத்த அதன் வகைக் கெழு ஆகியவற்றின் படி 1 ஆக மட்டுமே காணப்படும்.
   இவ்வகையில், வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு $xe^{\int Pdy} = \int Qe^{\int Pdy}dy + C$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.22

தீர்வு காண்க : $\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-x}$.

தீர்வு

$$\text{கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு}\quad \frac{dy}{dx} + 2y = e^{-x} \quad ...(1)$$

இது $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ என்ற நேரியல் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வடிவில் உள்ளது.

இங்கு $P = 2$; $Q = e^{-x}$ ஆகும்.

$$\int Pdx = \int 2dx = 2x .$$

தொகையீட்டுக்காரணி (தொ.கா) $= e^{\int Pdx} = e^{2x}$.

எனவே, சமன்பாடு (1)–ன் தீர்வு $ye^{\int Pdx} = \int Qe^{\int Pdx} dx + C$.

$ye^{2x} = \int e^{-x}e^{2x}dx + C$ அல்லது $ye^{2x} = e^{x} + C$ or $y = e^{-x} + Ce^{-2x}$

இதுவே சமன்பாடு (1)–ன் தீர்வாகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 10.23

தீர்வு காண்க : $\left[y(1 - x\tan x) + x^2\cos x\right]dx - xdy = 0$.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை $\frac{dy}{dx} + \frac{(x\tan x - 1)}{x} y = x\cos x$ என எழுதலாம்.

இது நேரியல் வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும். இங்கு $P = \frac{(x\tan x - 1)}{x}$; $Q = x\cos x$.

$$\int Pdx = \int \frac{(x\tan x - 1)}{x} dx = -\log|\cos x| - \log|x| = -\log|x\cos x| = \log\frac{1}{|x\cos x|} .$$

தொகையீட்டுக் காரணி $= e^{\int Pdx} = e^{\log\frac{1}{|x\cos x|}} = \frac{1}{x\cos x}$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வு $ye^{\int Pdx} = \int Qe^{\int Pdx} dx + C$

i.e., $y\frac{1}{x\cos x} = \int (x\cos x)\frac{1}{x\cos x} dx + C$

அல்லது $y\frac{1}{x\cos x} = x + C$

அல்லது $y = x^2\cos x + Cx\cos x$

இதுவே தேவையான தீர்வு ஆகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 10.24

தீர்வு காண்க : $\frac{dy}{dx} + 2y\cot x = 3x^2\operatorname{cosec}^2 x$.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $\frac{dy}{dx} + 2y\cot x = 3x^2\operatorname{cosec}^2 x$.

இது நேரியல் வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும். இங்கு $P = 2\cot x$; $Q = 3x^2\operatorname{cosec}^2 x$.

$$\int Pdx = \int 2\cot x dx = 2\log|\sin x| = \log|\sin x|^2 = \log\sin^2 x .$$

தொகையீட்டுக் காரணி $= e^{\int pdx} = e^{\log\sin^2 x} = \sin^2 x$.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வு $ye^{\int Pdx} = \int Qe^{\int Pdx} dx + C$.

$$y\sin^2 x = \int 3x^2 \text{cosec}^2 x \cdot \sin^2 x dx + C = \int 3x^2 dx + C = x^3 + C .$$

எனவே, $y\sin^2 x = x^3 + C$ என்பது தேவையான தீர்வாகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 10.25

தீர்வு காண்க : $\left(1+x^3\right)\dfrac{dy}{dx} + 6x^2 y = 1 + x^2$.

தீர்வு

இங்கு $\dfrac{dy}{dx}$ –ன் கெழுவை 1ஆக மாற்ற சமன்பாட்டின் இருபுறமும் $\left(1+x^3\right)$ஆல் வகுக்க வேண்டும்.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{6x^2 y}{1+x^3} = \dfrac{1+x^2}{1+x^3}$.

இது y–ல் நேரியல் வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

$$\text{இங்கு,} \quad P = \frac{6x^2}{1+x^3}; Q = \frac{1+x^2}{1+x^3}$$

$$\int Pdx = \int \frac{6x^2}{1+x^3} dx = 2\log\left|1+x^3\right| = \log\left|1+x^3\right|^2 = \log\left(1+x^3\right)^2$$

$$\text{தொகையீட்டுக்காரணி} = e^{\int Pdx} = e^{\log\left(1+x^3\right)^2} = \left(1+x^3\right)^2$$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வு $ye^{\int Pdx} = \int Qe^{\int Pdx} dx + C$.

$$y\left(1+x^3\right)^2 = \int \frac{1+x^2}{1+x^3}\left(1+x^3\right)^2 dx + C = \int \left(1+x^2\right)\left(1+x^3\right) dx + C = \int \left(1+x^2+x^3+x^5\right) dx + C$$

அல்லது $y\left(1+x^3\right)^2 = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^6}{6} + C$

மற்றும் $y = \dfrac{1}{(1+x^3)^2}\left[x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^6}{6} + C\right]$. இதுவே தேவையான தீர்வாகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 10.26

தீர்வு காண்க : $ye^y dx = \left(y^3 + 2xe^y\right) dy$.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை $\dfrac{dx}{dy} - \dfrac{2}{y}x = y^2 e^{-y}$ என எழுதலாம்.

இது $\dfrac{dx}{dy} + Px = Q$ என்ற வடிவில் உள்ள நேரியல் வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

இங்கு $P = -\dfrac{2}{y}$; $Q = y^2 e^{-y}$

$$\int pdy = \int -\frac{2}{y} dy = -2\log|y| = \log|y|^{-2} = \log\left(\frac{1}{y^2}\right),$$

$$\text{தொகையீட்டுக்காரணி} = e^{\int Pdy} = e^{\log\left(\frac{1}{y^2}\right)} = \frac{1}{y^2}.$$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வு $xe^{\int Pdy} = \int Qe^{\int Pdy}dy + C$

$$x\left(\frac{1}{y^2}\right) = \int y^2 e^{-y}\left(\frac{1}{y^2}\right)dy + C = \int e^{-y}dy + C = -e^{-y} + C$$

அல்லது $x = -y^2 e^{-y} + Cy^2$

இதுவே தேவையான தீர்வாகும்.

பயிற்சி 10.7

பின்வரும் நேரியல் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க :

1. $\cos x \dfrac{dy}{dx} + y\sin x = 1$
2. $\left(1-x^2\right)\dfrac{dy}{dx} - xy = 1$
3. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = \sin x$
4. $\left(x^2+1\right)\dfrac{dy}{dx} + 2xy = \sqrt{x^2+4}$
5. $\left(2x - 10y^3\right)dy + ydx = 0$
6. $x\sin x\dfrac{dy}{dx} + \left(x\cos x + \sin x\right)y = \sin x$
7. $\left(y - e^{\sin^{-1}x}\right)\dfrac{dx}{dy} + \sqrt{1-x^2} = 0$
8. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{(1-x)\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x}$
9. $\left(1 + x + xy^2\right)\dfrac{dy}{dx} + \left(y + y^3\right) = 0$
10. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x\log x} = \dfrac{\sin 2x}{\log x}$
11. $(x+a)\dfrac{dy}{dx} - 2y = (x+a)^4$
12. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin^2 x}{1+x^3} - \dfrac{3x^2}{1+x^3}y$
13. $x\dfrac{dy}{dx} + y = x\log x$
14. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y - x^2\log x = 0$
15. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{1}{x^2}$, $x = 1$ எனில் $y = 2$

10.8 முதல் வரிசை சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் பயன்பாடுகள் (Applications of First Order Ordinary Differential Equations)

நடைமுறை வாழ்வில் சில நிகழ்வுகளின் தீர்வு காண்பதில் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் பயன்பாடு அதிக முக்கியத்துவம் பெறுகிறது. எதிர்காலத்தில் அல்லது அறியாத ஒரு செயல்பாட்டின் தன்மையை முன்கூட்டியே கணிப்பதில் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் பயன்படுகின்றன. பெரும்பாலான நிகழ்வுகளில் ஒரு அளவின் மாறுவீதமானது அந்த அளவின் காலத்தைப் பொருத்த சார்பாக கொடுக்கப்படும்போது அந்த அளவினைக் காண்பதே நமது குறிக்கோளாகும். t நேரத்தில் ஒரு பொருளின் இருப்பு x எனில், t நேரத்தில் அப்பொருளின் இருப்பின் கணநேர மாறுவீதம் $\dfrac{dx}{dt}$ ஆகும். இதிலிருந்து $\dfrac{dx}{dt} = f(x,t)$ என்ற வடிவில் உள்ள வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைப் பெறுகிறோம். இப்பாடப்பகுதியில் இவ்வாறான கணக்குகளை மட்டுமே நாம் காண உள்ளோம். மேலும் கணநேர மாறுவீதம் என்பதை மாறுவீதம் என்றே நாம் குறிப்பிடுவோம்.

10.8.1 பொருளின் இருப்பின் பெருக்கம் (Population growth)

நாம் பொருளின் இருப்பின் பெருக்கத்தை (எடுத்துகாட்டாக மக்கள்தொகைப் பெருக்கம், விலங்கு இனப்பெருக்கம் அல்லது நுண்ணுயிரிகளின் வளர்ச்சி) நேரம் t –ன் சார்பாக கருதுவோம்.

t நேரத்தில் பொருளின் இருப்பு $x(t)$ என்க. $x(t)$ என்பது முழு எண் மதிப்புடைய சார்பாக இருப்பினும், கிட்டதட்ட (தோராயமாக) $x(t)$ஐ வகைமையுள்ள சார்பாகக் கருதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் உத்திகளைப் பயன்படுத்தி $x(t)$ஐ காண்கிறோம். பொருளின் இருப்பின் மாறுவீதம் அந்நேரத்தில் ஆரம்ப இருப்புக்கு நேர் விகிதத்தில் இருக்கும் எனக் கருதுவோம். பின்னர்

$\frac{dx}{dt} = kx$, இங்கு k என்பது விகிதச் சம மாறிலியாகும். … (1)

மேலும், பொருளின் இருப்பு எப்போதும் அதிகரிப்பதால், $k > 0$ ஆகும். இவ்வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு $x(t) = Ce^{kt}$, இங்கு C என்பது தொகையீட்டு மாறிலியாகும்.

C மற்றும் k ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை ஆரம்ப நிபந்தனைகளைப் பயன்படுத்திக் காணலாம். ஆகவே, இருப்பு $x(t)$ என்பது அடுக்கை வேகத்தில் அதிகரிக்கும். பொருளின் இருப்பு அதிகரிக்கும் இவ்விதி **மால்தாஸ் விதி** எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.27

பொருளின் இருப்பின் பெருக்கமானது அதில் காணப்படும் பொருளின் இருப்பின் எண்ணிக்கையின் விகிதமாக அமைந்துள்ளது. பொருளின் இருப்பு 50 ஆண்டுகளில் இரு மடங்காகிறது எனில், எத்தனை ஆண்டுகளில் பொருளின் இருப்பு மும்மடங்காகும்?

தீர்வு

t நேரத்தில் பொருளின் இருப்பு $x(t)$ என்க. பின்னர் $\frac{dx}{dt} = kx$.

மாறிகளைப் பிரித்து எழுத, $\frac{dx}{x} = kdt$.

இரு பக்கமும் தொகையிட, $\log|x| = kt + \log|C|$ அல்லது $x = Ce^{kt}$,

இங்கு C எதேச்சை மாறிலி.

$t = 0$ எனும்போது பொருளின் இருப்பு x_0 என்க. எனவே, $C = x_0$ ஆகும்.

ஆதலால், $x = x_0 e^{kt}$.

$t = 50$ எனும்போது $x = 2x_0$, என்பதால் $k = \frac{1}{50}\log 2$ ஆகும்.

எனவே, t நேரத்தில் பொருளின் இருப்பு $x = x_0 2^{\frac{t}{50}}$ ஆகும்.

t_1 நேரத்தில் பொருளின் இருப்பு மும்மடங்காகிறது என்க.

அதாவது, $t = t_1$ எனில் $x = 3x_0$ என்பதால் $t_1 = 50\left(\frac{\log 3}{\log 2}\right)$ ஆகும்.

எனவே, $50\left(\frac{\log 3}{\log 2}\right)$ வருடங்களில் பொருளின் இருப்பு மும்மடங்காகும்.

10.8.2 கதிரியக்கச் சிதைவு (Radioactive decay)

ஒரு அணுக்கருவானது புரோட்டான்கள் மற்றும் நியுட்ரான்களின் சேர்வாக உள்ளது. புரோட்டான்கள் மற்றும் நியுட்ரான்களின் இணைவானது பெரும்பாலும் நிலையானதாக இருப்பதில்லை. அதாவது, அவ்வாறான அணுக்கள் சிதைவுறும் அல்லது மற்றொரு பொருளின் அணுவாக உருமாற்றமடையும். இத்தகைய அணுக்கருக்கள் **கதிரியக்கப்** பண்பு கொண்டவையாகும்.

ஒரு பொருளின் அணுக்கரு சிதைவுறும் வீதம் $\frac{dA}{dt}$ ஆனது t நேரத்தில் மீதமுள்ள அப்பொருளின் அளவுக்கு விகிதமாக உள்ளது எனக்கருதுவோம்.

எனவே, தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $\frac{dA}{dt} \propto A$ அதாவது $\frac{dA}{dt} = kA$ ...(2)

இங்கு k என்பது விகிதச்சம மாறிலியாகும். இங்கு சிதைவுறுதல் நடைபெறுவதால், $k < 0$ ஆகும்.■

குறிப்புரை

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) ஆகிய இரண்டு வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளும் ஒன்றேயாகும். ஆனால், அவற்றின் குறியீடுகள் மற்றும் விகிதச் சம மாறிலிகளின் பொருள் விளக்கம் மட்டும் வெவ்வேறாகும். சமன்பாடு (1)-ல் வளர்ச்சியின் போது $k > 0$ எனவும் சமன்பாடு (2)-ல் சிதைவுறுதலின்போது $k < 0$ எனவும் உள்ளது.

ஒரு தனித்த வகைக்கெழுச் சமன்பாடு பல்வேறு மாறுபட்ட நிகழ்வுகளின் கணிதவியல் மாதிரியாகப் பயன்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.28

ஆரம்பத்தில் ஒரு கதிரியக்க ஐசோடோப்பின் நிறை 200 மி.கி. ஆகும். 2 வருடங்களுக்குப் பின்னர் அதன் நிறை 50 மி.கி. ஆக உள்ளது. t நேரத்தில் மீதமுள்ள ஐசோடோப்பின் நிறைக்கான சமன்பாட்டைக் காண்க. அதன் அரை ஆயுட்காலம் எவ்வளவு? (ஒரு குறிப்பிட்ட கதிரியக்க ஐசோடோப்பின் ஆரம்ப அளவு பாதியாகக் குறைய ஆகும் கால அளவு அரை ஆயுட் காலம் எனப்படும்).

தீர்வு

t நேரத்தில் மீதமுள்ள ஐசோடோப்பின் இருப்பு A என்க. $-k$ என்பது விகிதச் சம மாறிலி என்க. இங்கு $k > 0$ ஆகும். பின்னர், கதிரியக்க ஐசோடோப்பின் சிதைவுறும் வீதம் $\frac{dA}{dt} = -kA$ எனும் சமன்பாட்டால் பெறப்படுகிறது. இச்சமன்பாட்டில் உள்ள குறை குறி நிறை குறைவதைக் குறிக்கிறது. மேலும், இச்சமன்பாடு மாறிகள் பிரிபடக்கூடிய சமன்பாடாகும். எனவே, மாறிகளைப் பிரித்தது எழுதக் கிடைப்பது $\frac{dA}{A} = -kdt$ ஆகும்.

இரு பக்கமும் தொகையிடக் கிடைப்பது $\log|A| = -kt + \log|C|$ அல்லது $A = Ce^{-kt}$.

ஆரம்பத்தில் பொருளின் நிறை 200 மி.கி. ஆகும்.

அதாவது $t = 0$ எனும்போது $A = 200$ ஆகும். எனவே, சமன்பாடு (1)லிருந்து, $C = 200$ எனப் பெறுகிறோம்.

$A = 200e^{-kt}$.

மேலும் $t = 2$ எனும்போது $A = 150$ என்பதால், $k = \frac{1}{2}\log\left(\frac{4}{3}\right)$.

எனவே, t வருடங்களுக்குப் பிறகு மீதமுள்ள ஐசோடோப்பின் நிறை $A(t) = 200e^{-\frac{t}{2}\log\left(\frac{4}{3}\right)}$ ஆகும்.

$A = 100$ மி.கிராமாக குறைய ஆகும் காலம் அரை ஆயுட் காலம் t_h ஆகும்.

எனவே, $t_h = \dfrac{2\log\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\log\left(\dfrac{3}{4}\right)}$.

10.8.3 நியூட்டனின் குளிர்ச்சி அல்லது வெப்பம் அடையும் விதி (Newton's Law of cooling/warming)

$80^{\circ}C$ உள்ள ஒரு அறையில் ஒரு கோப்பையில் ஊற்றி வைக்கப்பட்டுள்ள காபியின் வெப்பநிலை $150^{\circ}\ C$ என்க. காபியின் வெப்பநிலை என்னவாகும்? காபியின் வெப்பநிலை அறையின் வெப்பநிலையை அடையும் வரை குறைவதைக் காண்கிறோம்.

இப்பொழுது, வெப்பநிலை $80^{\circ}C$ உள்ள ஒரு அறையில் குளிர் சாதனப் பெட்டியில் இருந்து எடுத்து வைக்கப்பட்ட குளிர்ந்த நீரின் வெப்பநிலை $35^{\circ}\ C$ என்க. குளிர்ந்த நீரின் வெப்பநிலை என்னவாகும்? மேற்கூறியவாறே, நீரின் வெப்பநிலையானது அறையின் வெப்பநிலையை அடையும் வரை அதிகரிப்பதைக் காண்கிறோம்.

நியூட்டனின் குளிர்ச்சி அல்லது வெப்பமடையும் விதிப்படி, ஒரு பொருளின் வெப்பநிலை மாறும் வீதமானது பொருளின் வெப்பநிலைக்கும் சுற்றுப்புற ஊடகத்தின் வெப்பநிலைக்கும் உள்ள வேறுபாட்டிற்கு நேர்விகிதமாக அமையும். t நேரத்தில் பொருளின் வெப்பநிலை $T(t)$ எனவும், சுற்றுப்புற ஊடகத்தின் வெப்பநிலை T_m எனவும், வெப்பநிலையின் மாறுவீதம் $\dfrac{dT}{dt}$ எனவும் இருப்பின் நியூட்டனின் குளிர்ச்சி (அல்லது வெப்பம்) அடையும் விதிப்படி $\dfrac{dT}{dt} \propto T - T_m$ or $\dfrac{dT}{dt} = k\left(T - T_m\right)$, இங்கு k என்பது விகிதச் சம மாறிலியாகும்.

குளிர்ச்சி அல்லது வெப்பம் அடைதல் எனும் இரு நிலைகளிலும் T_m ஒரு மாறிலி எனில், $k < 0$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.29

ஒரு துப்பறிவாளர் ஒரு கொலைக்கான புலன் விசாரணையின் போது, ஒருவரின் உயிரற்ற உடலை சரியாக பிற்பகல் 8 மணிக்கு காண்கிறார். முன்னெச்சரிக்கையாக துப்பறிவாளர் அவ்வுடலின் வெப்பநிலையை அளந்து 70°F எனக் குறித்துக் கொள்கிறார். 2 மணி நேரம் கழித்து அந்த உடலின் வெப்பநிலை 60°F ஆக இருப்பதைக் காண்கிறார். உடல் இருந்த அறையின் வெப்பநிலை 50°F ஆகும். மற்றும் இறப்பதற்கு முன்பு அந்நபரின் உடல் வெப்பநிலை 98.6°F எனில், அந்நபர் கொலை செய்யப்பட்ட நேரம் என்னவாக இருந்திருக்கும்?

$\left[\log(2.43) = 0.88789;\quad \log(0.5) = -0.69315\right]$

தீர்வு

t நேரத்தில் உடலின் வெப்பநிலை T என்க. பிற்பகல் 8 மணி என்பதை $t = 0$ எனக்கொள்க.

நியுட்டனின் குளிர்வு விதிப்படி, $\dfrac{dT}{dt} = k\left(T - 50\right)$ அல்லது $\dfrac{dT}{T-50} = k\,dt$.

இரு பக்கமும் தொகையிட, $\log\left|50 - T\right| = kt + \log C$ அல்லது $50 - T = Ce^{kt}$.

$t = 0$ எனும்போது $T = 70$ என்பதால், $C = -20$

$t=2$ எனும்போது $T=60$ என்பதால், $-10=-20e^{k2}$.

ஆகவே, $k=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right)$.

எனவே, தீர்வு $50-T=-20e^{\frac{1}{2}t\log\left(\frac{1}{2}\right)}$ அல்லது $T=50+20\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$

நாம் இப்பொழுது $T(t)=98.6$ ஆக இருக்கும்போது t-ன் மதிப்பைக் காணவேண்டும்.

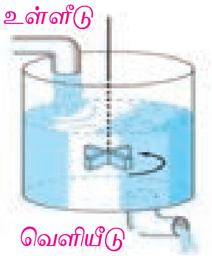
$$t=2\left(\frac{\log\left(\frac{48.6}{20}\right)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)}\right)\approx -2.56$$

எனவே, அந்நபர் இறந்த நேரம் தோராயமாக பிற்பகல் 5.30 மணியாகும். ■

10.8.4 கலவை கணக்குகள் (Mixture problems)

இரசாயனத் தொழில்துறையில் கலவை கணக்குகள் பெருமளவில் பயன்படுத்தப்படுகிறது. ஒரு கொள்கலனை அடிப்படை மாதிரியாகக் கொண்டு கலவைக் கணக்கின் தீர்வு காணும் முறையை விளக்குவோம்.

ஒரு பொருள் S ஆனது ஒரு கொள்கலனில் உள்ள கலவையில் ஒட்ட விகிதம் மாறாதவாறு கலக்கிறது. மேலும் இக்கலவையை தொடர்ந்து கிளறி கலவை சீராக வைக்கப்படுகிறது. அம்மாதிரியான சூழ்நிலையில், இந்த சீரான கலவையானது ஒரே நேரத்தில் மற்றொரு விகிதத்தில் கொள்கலனிலிருந்து வெளியேற்றப்படுகிறது என்க. இப்பொழுது, t நேரத்தில் அக்கலவையில் உள்ள பொருள் S-ன் அளவினை நாம் காண விழைகிறோம்.



படம் 10.2

t நேரத்தில் பொருள் S-ன் x என்க. மற்றும் $\frac{dx}{dt}$ எனும் வகைக்கெழு t ஐப் பொருத்து x-ன் மாறுவீதம் என்க. 'உள்ளீடு' என்பது பொருள் S கொள்கலனில் உள்ள கலவையினுள் கலக்கும் (நுழையும்) வீதம் மற்றும் 'வெளியீடு' என்பது கலவை கொள்கலனிலிருந்து வெளியேறும் வீதம் எனில்,

$\frac{dx}{dt}=$ உள்ளீடு $-$வெளியீடு எனும் சமன்பாட்டைப் பெறுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 10.30

ஒரு தொட்டியில் உள்ள 1000 லிட்டர் நீரில் 100 கிராம் உப்பு கரைந்துள்ளது. பிரைன் என்பது அடர்ந்த அடர்த்திக் கொண்ட உப்புக் கரைசலாகும். வழக்கமாக சோடியம் குளோரைடு கரைசலாகும். பிரைன் ஒரு நிமிடத்திற்கு 10 லிட்டர் வீதம் உட்புகுத்தப்படுகிறது. மேலும், ஒவ்வொரு லிட்டர் நீரிலும் 5 கிராம் உப்பு கரைந்துள்ளது. தொட்டியில் உள்ள நீரானது தொடர்ந்து கலக்கப்பட்டு சீராக வைக்கப்பட்டுள்ளது. பிரைன் ஒரு நிமிடத்திற்கு 10 லிட்டர் வீதம் வெளியேறுகிறது. t நேரத்தில் தொட்டியில் உள்ள உப்பின் அளவைக் காண்க.

தீர்வு

t நேரத்தில் தொட்டியில் உள்ள உப்பின் அளவு $x(t)$ என்க. இதன் மாறுவீதம்

$\frac{dx}{dt}=$ உள் நுழையும் வீதம் $-$ வெளியேறும் வீதம்.

இப்பொழுது ஒரு லிட்டர் நீரில் 5 கிராம் உப்பு கரைக்கப்பட்டு தொட்டியில் உட்புகுத்தப்படுவதால், 10 லிட்டர் நீரில் 50 கிராம் உப்புத் தொட்டியில் உள்ள நீரில் கரைந்திருக்கும். மேலும், தொட்டியில் இருந்து உப்புக் கரைசல் (பிரைன்) ஒரு நிமிடத்திற்கு 10 லிட்டர் வீதம் வெளியேறுகிறது. இது தொட்டியில் உள்ள மொத்த உப்புக் கரைசலின் $10/1000 = 0.01$ மடங்காகும். ஆகவே, t நேரத்தில் உள்ள உப்பின் அளவு $x(t)$ -ன் 0.01 மடங்காகும். அதாவது $0.01x(t)$ ஆகும்.

எனவே, இந்த மாதிரியின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $\frac{dx}{dt} = 50 - 0.01x = -0.01(x - 5000)$

இச்சமன்பாட்டினை $\frac{dx}{x - 5000} = -(0.01)dt$ என எழுதலாம்.

சமன்பாட்டின் இரு பக்கமும் தொகையிட, $\log|x - 5000| = -0.01t + \log C$

அல்லது $x - 5000 = Ce^{-0.01t}$ அல்லது $x = 5000 + Ce^{-0.01t}$

ஆரம்பத்தில், அதாவது $t = 0$ எனும்போது $x = 100$

அதாவது $100 = 5000 + C$. ஆகையால், $C = -4900$.

எனவே t நேரத்தில் தொட்டியில் உள்ள உப்பின் அளவு is $x = 5000 - 4900e^{-0.01t}$. ■

பயிற்சி 10.8

1. நுண்ணுயிர்களின் பெருக்கத்தில், பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கையின் பெருக்க வீதமானது அதில் காணப்படும் பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கையின் விகிதமாக உள்ளது. இப்பெருக்கத்தால் பாக்டீரியாவின் எண்ணிக்கை மும்மடங்காகிறது எனில், 10 மணி நேர முடிவில் பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கை என்னவாக இருக்கும்?

2. ஒரு நகரத்தின் மக்கள் தொகை வளர்ச்சி வீதம் t நேரத்தில் உள்ள மக்கள் தொகையின் விகிதமாக அமைந்துள்ளது. மேலும் நகரத்தின் மக்கள் தொகை 40 ஆண்டுகளில் 3,00,000லிருந்து 4,00,000 ஆக அதிகரித்துள்ளது எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில், t நேரத்தில் அந்நகரத்தின் மக்கள் தொகையைக் காண்க.

3. மின்தடை மற்றும் தன் மின் தூண்டல் கொண்ட ஒரு மின் சுற்றின் மின் இயக்கு விசையின் சமன்பாடு $E = Ri + L\frac{di}{dt}$ ஆகும். இங்கு E என்பது மின் சுற்றுக்கு கொடுக்கப்படும் மின் இயக்கு விசை, R என்பது மின்தடை மற்றும் L என்பது தன் மின் தூண்டல் எண் ஆகும். $E = 0$ எனும்போது t நேரத்தில், மின்சாரம் iஐக் காண்க.

4. வினாடிக்கு 10 மீட்டர் வேகத்தில் இயங்கும் ஒரு மின்விசைப் படகின் இயந்திரம் நிறுத்தப்படுகிறது. அதன் பின்னர் ஏதேனும் ஒரு நேரத்தில் (இயந்திரம் நிறுத்தப்பட்ட பிறகு) மின் விசைப் படகின் வேகம் குறையும் வீதமானது அந்நேரத்தில் அதன் திசைவேகத்திற்கு சமமாக உள்ளது எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இயந்திரம் நிறுத்தப்பட்ட 2 வினாடிகளுக்குப் பிறகு விசைப்படகின் திசைவேகம் காண்க.

5. வருடத்திற்கு 5% தொடர் கூட்டு வீதத்தில் ஒருவர் ₹10,000-த்தை வங்கிக் கணக்கில் முதலீடு செய்கிறார். 18 மாதங்களுக்குப் பின்னர் அவர் வங்கிக் கணக்கில் எவ்வளவு தொகை இருக்கும்?

6. ஒரு மாதிரியில் காணப்படும் கதிரியக்க அணுக்கருக்கள் சிதைவுறும் வீதமானது அந்நேரத்தில் அந்த மாதிரியில் காணப்படும் அணுக்கருக்களின் எண்ணிக்கைக்கு விகிதமாக அமைந்துள்ளது. 100 ஆண்டு கால இடைவெளியில் ஒரு மாதிரியில் ஆரம்பத்தில் காணப்படும் கதிரியக்க அணுக்கருக்களின் எண்ணிக்கையில் 10% சிதைவுறுகிறது. 1000 ஆண்டுகள் முடிவில் ஆரம்பத்தில் காணப்படும் கதிரியக்க அணுக்கருக்களின் எண்ணிக்கையில் எவ்வளவு மீதமிருக்கும்?

7. வெப்பநிலை $25^\circ C$ ஆக உள்ள ஒரு அறையில் வைக்கப்பட்டுள்ள நீரின் வெப்பநிலை $100^\circ C$ ஆகும். 10 நிமிடங்களில் நீரின் வெப்பநிலை $80^\circ C$ ஆகக் குறைந்து விடுகிறது எனில்,
   (i) 20 நிமிடங்களுக்குப் பின்னர் நீரின் வெப்பநிலை
   (ii) வெப்பநிலை $40^\circ C$ ஆக இருக்கும்போது நேரம் காண்க.

$$\left[\log_e \frac{11}{15} = -0.3101;\ \log_e 5 = 1.6094\right]$$

8. காலை 10.00 மணிக்கு பெண் ஒருவர் தன்னுடைய மைக்ரோ அலை சமையல் அடுப்பிலிருந்து சூடான காபியை வெளியில் எடுத்து அது குளிர்வதற்காக அருகில் உள்ள சமையல் அறையில் வைக்கிறார். அந்நேரத்தில் காபியின் வெப்பநிலை $180^\circ F$ ஆகும். மேலும், 10 நிமிடங்களுக்குப் பிறகு அதன் வெப்பநிலை $160^\circ F$ ஆகும். சமையல் அறையின் நிலையான வெப்பநிலை $70^\circ F$ எனில்
   (i) காலை 10.15 மணிக்கு காபியின் வெப்பநிலைக் காண்க. $\left[\log \frac{9}{11} = -0.6061\right]$
   (ii) வெப்பநிலை $130^\circ F$ க்கும் $140^\circ F$ க்கும் இடைப்பட்டதாக இருக்கும்போது அவர் காபியை அருந்த நினைத்தால், எந்நேரத்திற்கு இடையில் அவர் காபியை அருந்த வேண்டும்?

$$\left[\log \frac{6}{11} = -0.2006\right]$$

9. ஒரு பாத்திரத்தில் $100^\circ C$ வெப்பநிலையில் கொதித்துக் கொண்டிருக்கும் நீரானது $t = 0$ எனும் நேரத்தில் அடுப்பின் மீது இருந்து இறக்கி குளிர்வதற்காக சமையலறையில் வைக்கப்படுகிறது. 5 நிமிடங்களுக்குப் பிறகு நீரின் வெப்பநிலை $80^\circ C$ ஆகக் குறைகிறது. மேலும், அடுத்த 5 நிமிடங்களுக்குப் பிறகு நீரின் வெப்பநிலை $65^\circ C$ ஆக குறைகிறது எனில், சமையலறையின் வெப்பநிலையைக் காண்க.

10. ஆரம்பத்தில் ஒரு தொட்டியில் 50 லிட்டர் தூய்மையான தண்ணீர் உள்ளது. தொடக்க நேரம் $t = 0$ -ல் ஒரு லிட்டர் ஒரு லிட்டர் நீரில் 2 கிராம் வீதம் கரைக்கப்பட்ட உப்புக் கரைசலானது ஒரு நிமிடத்திற்கு 3 லிட்டர் வீதம் தொட்டியில் விடப்படுகிறது. இக்கலவையானது தொடர்ந்து கலக்கப்பட்டு சீராக வைக்கப்படுகிறது. மேலும், அதே நேரத்தில் நன்கு கலக்கப்பட்ட இக்கலவையானது அதே வீதத்தில் தொட்டியிலிருந்து வெளியேறுகிறது. $t > 0$ எனும் ஏதேனும் ஒரு நேரத்தில் தொட்டியில் உள்ள உப்பின் அளவினைக் காண்க.

பயிற்சி 10.9

கொடுக்கப்பட்ட நான்கு மாற்று விடைகளிலிருந்து சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினைத் தேர்ந்தெடுக்கவும் :

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{1/3} + x^{1/4} = 0$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை மற்றும் படி முறையே

   (1) 2, 3 (2) 3, 3 (3) 2, 6 (4) 2, 4

2. $y = A\cos(x + B)$, இங்கு A, B என்பன எதேச்சை மாறிலிகள் எனும் சமன்பாட்டைக் கொண்ட வளைவரை குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

   (1) $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ (2) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ (3) $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ (4) $\frac{d^2x}{dy^2} = 0$

3. $\sqrt{\sin x}\,(dx + dy) = \sqrt{\cos x}\,(dx - dy)$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை மற்றும் படி

   (1) 1, 2 (2) 2, 2 (3) 1, 1 (4) 2, 1

4. மையம் (h, k) மற்றும் ஆரம் 'a' கொண்ட எல்லா வட்டங்களின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை

(1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 1

5. $y = Ae^{x} + Be^{-x}$, இங்கு A, B என்பன ஏதேனும் இரு மாறிலிகள், எனும் வளைவரைத் தொகுதியின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

(1) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ (2) $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ (3) $\frac{dy}{dx} + y = 0$ (4) $\frac{dy}{dx} - y = 0$

6. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு

(1) $xy = k$ (2) $y = k\log x$ (3) $y = kx$ (4) $\log y = kx$

7. $2x\frac{dy}{dx} - y = 3$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு குறிப்பிடுவது

(1) நேர்க்கோடுகள் (2) வட்டங்கள் (3) பரவளையம் (4) நீள்வட்டம்

8. $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ -ன் தீர்வு

(1) $y = ce^{\int pdx}$ (2) $y = ce^{-\int pdx}$ (3) $x = ce^{-\int pdy}$ (4) $x = ce^{\int pdy}$

9. $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1+y}{x}$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தொகையீட்டுக் காரணி

(1) $\frac{x}{e^x}$ (2) $\frac{e^x}{x}$ (3) λe^x (4) e^x

10. $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தொகையீட்டுக் காரணி x எனில், $P(x)$ என்பது

(1) x (2) $\frac{x^2}{2}$ (3) $\frac{1}{x}$ (4) $\frac{1}{x^2}$

11. $y(x) = 1 + \frac{dy}{dx} + \frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \ldots.$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் படி

(1) 2 (2) 3 (3) 1 (4) 4

12. p மற்றும் q என்பன முறையே $y\frac{dy}{dx} + x^3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + xy = \cos x$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை மற்றும் படி எனில்,

(1) $p < q$ (2) $p = q$ (3) $p > q$ (4) இவற்றில் எதுவுமில்லை

13. $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு

(1) $y + \sin^{-1}x = c$ (2) $x + \sin^{-1}y = 0$ (3) $y^2 + 2\sin^{-1}x = C$ (4) $x^2 + 2\sin^{-1}y = 0$

14. $\frac{dy}{dx} = 2xy$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு

(1) $y = Ce^{x^2}$ (2) $y = 2x^2 + C$ (3) $y = Ce^{-x^2} + C$ (4) $y = x^2 + C$

15. $\log\left(\frac{dy}{dx}\right)=x+y$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு

(1) $e^{x}+e^{y}=C$ (2) $e^{x}+e^{-y}=C$ (3) $e^{-x}+e^{y}=C$ (4) $e^{-x}+e^{-y}=C$

16. $\frac{dy}{dx}=2^{y-x}$ –ன் தீர்வு

(1) $2^{x}+2^{y}=C$ (2) $2^{x}-2^{y}=C$ (3) $\frac{1}{2^{x}}-\frac{1}{2^{y}}=C$ (4) $x+y=C$

17. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{\phi\left(\frac{y}{x}\right)}{\phi'\left(\frac{y}{x}\right)}$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு

(1) $x\phi\left(\frac{y}{x}\right)=k$ (2) $\phi\left(\frac{y}{x}\right)=kx$ (3) $y\phi\left(\frac{y}{x}\right)=k$ (4) $\phi\left(\frac{y}{x}\right)=ky$

18. $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ எனும் நேரியல் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தொகையீட்டுக் காரணி $\sin x$ எனில், P என்பது

(1) $\log\sin x$ (2) $\cos x$ (3) $\tan x$ (4) $\cot x$

19. வரிசை n மற்றும் $n+1$கொண்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் பொதுத் தீர்வுகளில் உள்ள மாறத்தக்க மாறிலிகளின் எண்ணிக்கை முறையே

(1) $n-1,\ n$ (2) $n,\ \ n+1$ (3) $n+1,\ n+2$ (4) $n+1,\ n$

20. மூன்றாம் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் குறிப்பிட்டத் தீர்வில் உள்ள மாறத்தக்க மாறிலிகளின் எண்ணிக்கை

(1) 3 (2) 2 (3) 1 (4) 0

21. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{x+1}$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தொகையீட்டுக் காரணி

(1) $\frac{1}{x+1}$ (2) $x+1$ (3) $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ (4) $\sqrt{x+1}$

22. ஏதேனும் ஒரு வருடம் t–ல் உள்ள P–ன் பெருக்க வீதமானது மக்கள் தொகைக்கு விகிதமாக அமையும் எனில், பின்னர்

(1) $P=Ce^{kt}$ (2) $P=Ce^{-kt}$ (3) $P=Ckt$ (4) $P=C$

23. t எனும் நேரத்திற்குப் பிறகு மீதமுள்ள ஒரு பொருளின் அளவு P ஆகும். பொருள் ஆவியாகும் வீதமானது அந்நேரத்தில் மீதமிருக்கும் பொருளின் அளவிற்கு விகிதமாக அமைந்துள்ளது எனில், பின்னர்

(1) $P=Ce^{kt}$ (2) $P=Ce^{-kt}$ (3) $P=Ckt$ (4) $Pt=C$

24. $\frac{dy}{dx}=\frac{ax+3}{2y+f}$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்குமானால், a–ன் மதிப்பு

(1) 2 (2) -2 (3) 1 (4) -1

25. $y = f(x)$ எனும் வளைவரையின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியிடத்து சாய்வு $\frac{dy}{dx}=3x^2$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. மேலும் வளைவரையானது (-1,1) புள்ளி வழியாகச் செல்கிறது எனில், வளைவரையின் சமன்பாடு

(1) $y = x^3 + 2$ (2) $y = 3x^2 + 4$ (3) $y = 3x^3 + 4$ (4) $y = x^3 + 5$

பாடச்சுருக்கம்

1. ஏதேனும் ஒரு சமன்பாடு ஒரு சார்பின் குறைந்தபட்சம் ஒரு சாதாரண வகைக்கெழு அல்லது பகுதி வகைக்கெழுவையாவது கொண்டிருக்குமானால் அச்சமன்பாடு **வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.**
2. ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் காணப்படும் மிக உயர்ந்த வகைக்கெழுவின் வரிசையே அச்சமன்பாட்டின் வரிசை (order) ஆகும்.
3. ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை பல்லுறுப்புக் கோவை வடிவில் எழுத இயலுமெனில், அச்சமன்பாட்டில் தோன்றும் மிக உயர்ந்த வரிசையுடைய வகைக்கெழுவின் முழு எண் படியே அச்சமன்பாட்டின் படி எனப்படும்.
4. ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை மிக உயர்ந்த வரிசைக் கொண்ட வகைக்கெழுவை முதன்மை உறுப்பாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடாக எழுத இயலவில்லை எனில் அச்சமன்பாட்டின் படியை வரையறுக்க முடியாது.
5. ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஒரேயொரு சாரா மாறியைப் பொருத்து ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சார்புகளின் சாதாரண வகைக்கெழுக்களைக் கொண்டுள்ளது எனில், அச்சமன்பாடு சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடு எனப்படும்.
6. ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சார்புகளின் பகுதி வகைக்கெழுக்களை மட்டும் கொண்டிருக்கும் எனில், அச்சமன்பாடு பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு எனப்படும்.
7. ஒரு மாறிலியைக் கொண்ட சமன்பாட்டிலிருந்து அம்மாறிலியை நீக்குவதால் முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டையும் மற்றும் இரண்டு மாறிலிகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டிலிருந்து இரண்டு மாறிலிகளையும் நீக்குவதால் இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டையும் மற்றும் இதேபோல் தொடர, நீக்கப்படும் மாறிலிகளின் எண்ணிக்கைகேற்ப வரிசைகளைக் கொண்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைப் பெறலாம்.
8. ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டினை நிறைவு செய்யுமாறு சார்ந்த மாறிகளை சாரா மாறிகளுடன் தொடர்புபடுத்தும் கோவை அச்சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும்.
9. ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வில் உள்ள மாறத்தக்க மாறிலிகளின் (எதேச்சை மாறிலிகளின்) எண்ணிக்கையானது, அவ்வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசைக்குச் சமமாக இருப்பின், அத்தீர்வினை அச்சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு என்கிறோம்.
10. ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வில் உள்ள மாறத்தக்க மாறிலிகளுக்கு குறிப்பிட்ட மதிப்புகளைக் கொடுப்பதால் பெறப்படும் தீர்வினை குறிப்பிட்ட தீர்வு என்போம்.
11. $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$ எனும் வடிவில் உள்ள சமன்பாடு மாறிகள் பிரிபடக்கூடியது அல்லது மாறிகள் பிரிபடக்கூடிய சமன்பாடு எனப்படும்.
12. $n \in \mathbb{R}$ மற்றும் பொருத்தமாகக் கட்டுப்படுத்தப்பட்ட x, y மற்றும் t ஆகியவற்றுக்கு $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ எனில், x, y ஆகியவற்றை மாறிகளாகக் கொண்ட சார்பு $f(x, y)$ ஆனது n ஆம் படியில் சமபடித்தான சார்பு எனப்படும். இது ஆய்லரின் சமபடித்தன்மை எனவும் அழைக்கப்படும்.
13. $f(x, y)$ என்பது படி 0 கொண்ட சமபடித்தான சார்பு எனில், $f(x, y)$ என்பதை எப்பொழுதும் $g\left(\frac{y}{x}\right)$ அல்லது $g\left(\frac{x}{y}\right)$ எனும் வடிவில் எழுதுமாறு g எனும் சார்பு இருக்கும்.
14. ஒரு சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$ எனும் அமைப்பில் எழுதமுடியுமானால், அச்சமன்பாடு சமபடித்தான அமைப்பில் உள்ள வகைக்கெழுச் சமன்பாடு எனப்படும்.

15. M மற்றும் N என்பவை ஒரே படி கொண்ட சமபடித்தான சார்புகள் எனில், வகையீடு அமைப்பில் உள்ள $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு எனப்படும்.

16. முதல் வரிசை நேரியல் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வடிவம்

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q \ldots(1)$$

ஆகும். இங்கு P மற்றும் Q என்பன x–ல் மட்டுமே உள்ள சார்புகளாகும். இச்சமன்பாட்டில் y மற்றும் அதன் வகைக்கெழு $\frac{dy}{dx}$ இவ்விரண்டின் பெருக்கல் பலன் இருக்காது. மேலும் சார்ந்த மாறி y மற்றும் சாராமாறி x ஐப் பொருத்த அதனுடைய வகைக்கெழு ஆகியவை முதலாம் படியாக மட்டுமே காணப்படும். கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு $ye^{\int Pdx}=\int Qe^{\int Pdx}dx+C$ எனக் கிடைக்கிறது. இங்கு $e^{\int Pdx}$ என்பது சமன்பாடு (1)–ன் தொகையீட்டுக் காரணி (தொ.கா) எனப்படும்.

17. $\frac{dx}{dy}+Px=Q$ என்ற முதல் வரிசை நேரியல் சமன்பாட்டில் P மற்றும் Q என்பன y–ல் மட்டுமே உள்ள சார்புகளாகும். இச்சமன்பாட்டில் x மற்றும் $\frac{dx}{dy}$ இவ்விரண்டும் பெருக்கலாக இருக்காது. மேலும் சார்ந்த மாறி x மற்றும் சாராமாறி y ஐப் பொருத்த அதன் வகைக் கெழு ஆகியவற்றின் படி 1 ஆக மட்டுமே காணப்படும். இவ்வகையில், வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு $xe^{\int Pdy}=\int Qe^{\int Pdy}dy+C$ ஆகும்.

18. t நேரத்தில் ஒரு பொருளின் இருப்பு x எனில், t நேரத்தில் அப்பொருளின் இருப்பின் கணநேர மாறுவீதம் $\frac{dx}{dt}$ ஆகும்.

இணையச் செயல்பாடு (ICT CORNER)

https://ggbm.at/dy9kwgbt அல்லது Scan the QR Code

இணைய உலாவியை திறக்கவும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள உரலி/விரைவுக் குறியீட்டை தட்டச்சு செய்யவும், GeoGebra–வின் **"12th Standard Mathematics Vol-2"** பக்கம் தோன்றும். இப்பணித்தாள் புத்தகத்தின் இடதுபக்கம் உங்கள் பாடநூலுடன் தொடர்புடைய பல அத்தியாயங்கள் காணப்படும். அவற்றில் **"Ordinary Differential Equations"** எனும் அத்தியாயத்தைத் தேர்வு செய்க.

B225_12_MATHS_TM

இப்பொழுது இப்பாடம் தொடர்பான பல பணித்தாள்களை இப்பக்கத்தில் காண்பீர்கள். அனைத்துப் பணித்தாள்களையும் செய்து பார்க்கவும்.

அத்தியாயம்

11

நிகழ்தகவு பரவல்கள்

E3Y1X1

"நிகழ்தகவுக் கோட்பாடு என்பது கணிப்புக்கு உட்படுத்தப்பட்ட பொது அறிவு தவிர வேறில்லை"

\- லேப்லஸ்

லேப்லஸ்
(1749-1827)

சமவாய்ப்பு மாறிகளின் வரலாறும், அவை கூறுவெளியிலிருந்து மெய்யெண்களுக்கான சார்பாக பரிணமித்தது எப்படி என்பதும் ஓர் ஆர்வமூட்டும் செய்தியாகும். எரெமென்கோ கூறியது போல சமவாய்ப்பு மாறிகள் முன்னரே பயன்படுத்தப்பட்டிருந்தாலும், கணங்கள் மற்றும் கோர்த்தல் (1900), கண்டுபிடிக்கப்பட்ட பின்னர்தான் நவீன விளக்கங்கள் எழுந்தன எனலாம். சமவாய்ப்பு மாறிகளை கோர்த்தலாக பொருள்கொள்ளவேண்டிய தேவை இருப்பதாக கணிதவியலாளர்கள் உணர்ந்தனர். லேப்லஸ் எனும் கணிதவியலாளர், புள்ளியியலின் பல அடிப்படை முடிபுகளை தனது புத்தகமான *"Theory analytique des probabilities"*-ல் (1812) வகுத்தார். அப்புத்தகத்தில் முற்பாதியில் நிகழ்தகவு முறைகள் மற்றும் அதன் கணக்குகளைப் பற்றியும் பிற்பாதியில் புள்ளியியல் பயன்பாடுகளைப் பற்றியும் விளக்கியுள்ளார்.

கற்றலின் நோக்கங்கள்

இப்பாடப்பகுதி நிறைவுறும்போது மாணவர்கள் அறிந்திருக்க வேண்டியவை

- தனிநிலை மற்றும் தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறிகளை வரையறுத்தல்,
- நிகழ்தகவு நிறைச் (செறிவு) சார்பினை வரையறுத்தல்,
- குவிவுப் பரவல் சார்பிலிருந்து நிகழ்தகவு நிறைச்(செறிவு) சார்பினைத் தீர்மானித்தல்,
- நிகழ்தகவு நிறைச்(செறிவு) சார்பிலிருந்து குவிவுப் பரவல் சார்பினைத் தீர்மானித்தல்,
- சமவாய்ப்பு மாறிகளுக்கான சராசரி மற்றும் பரவற்படியைக் கணக்கிடல்
- பெர்னோலி மற்றும் ஈருறுப்பு பரவல் இனங்காண பயன்படுத்தல்

11.1 அறிமுகம் (Introduction)

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி சோதனையின் சாத்தியமான விளைவுகளை முழுமையாக விவரிக்கும் ஒரு கூறுவெளியின் கோட்பாட்டைப் பற்றி மேல்நிலை முதலாமாண்டு இரண்டாம் தொகுதியில் விளக்கப்பட்டுள்ளது.

ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் கூறுவெளியில் வரையறுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்பு மாறி என அழைக்கப்படும் ஒரு சார்பு, அதன் நிகழ்தகவுப் பரவல் ஆகியவற்றைப் பற்றி இப்பாடப்பகுதியில் கற்போம்.

11.2 சமவாய்ப்பு மாறி (Random Variable)

சமவாய்ப்புச் சோதனையின் முடிவைக் குறியீடுகளால் குறிப்பது அனைத்து நிகழ்வுகளிலும் எளிதானது அல்ல. நாம் கருதும் பல சமவாய்ப்புச் சோதனைகளில் சாத்தியமான முடிவுகளின் விளக்கமாக S எனும் கூறுவெளியே அமைகின்றது.

அதாவது சோதனையின் முடிவு அல்லது S எனும் கூறுவெளியின் கூறுபுள்ளிகள் எண்களாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. உதாரணமாக ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும்போது கிடைக்கும் முடிவுகள் H (தலை) அல்லது T (பூ). ஆகும். சமவாய்ப்புச் சோதனையின் முடிவுகளில் சில தருணங்களில் எண் மதிப்புகளைத்தான் கையாள வேண்டியுள்ளது. எனவே சோதனையின் ஒவ்வொரு முடிவிற்கும் ஓர் எண்ணை ஒதுக்கீடு செய்கிறோம். அதாவது தலைக்கு 1 எனவும் பூவிற்கு 0 எனவும் ஒதுக்கீடு செய்கிறோம். இவ்வாறு S -இல் உள்ள உறுப்புகளுக்கு எண் மதிப்புகளை ஒதுக்கீடு செய்தல் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி என அழைக்கப்படுகிறது. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி என்பது உண்மையில் ஒரு சார்பாகும்.

வரையறை 11.1

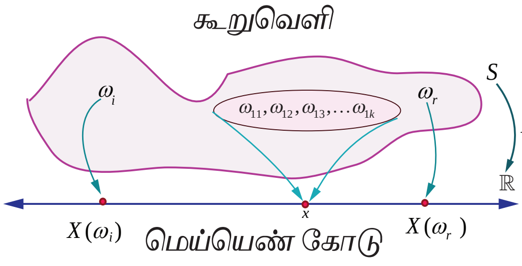
ஒரு *சமவாய்ப்பு மாறி* X என்பது S எனும் கூறுவெளியிலிருந்து $\mathbb{R}$ எனும் மெய்யெண் கணத்தின் மீது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும் சார்பாகும்.

$\mathbb{R}$ -இல் உள்ள இடைவெளி அல்லது உட்கணம் அல்லது கூறுபுள்ளிகளின் நேர்மாறு பிம்பங்கள் S -இல், ஒரு நிகழ்வாக அமைகிறது. ஒவ்வொரு நிகழ்வும் நிகழ்தகவு மதிப்பைக் கொண்டிருக்கும்.

சமவாய்ப்பு மாறிகளைக் குறிப்பிட ஆங்கில எழுத்துகளில் தலைப்பு எழுத்துக்களான X, Y மற்றும் Z போன்றவற்றையும் சமவாய்ப்பு மாறிகளுக்கான சாத்தியமுள்ள மதிப்புகளைக் குறிப்பிட சிறிய எழுத்துக்களான x, y மற்றும் z போன்றவற்றையும் பயன்படுத்துவோம்.

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறிக்கான கூறுவெளி $S = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$ என்க. $\mathbb{R}$ என்பது மெய்யெண் கோட்டைக் குறிக்கிறது. இனி X என்பது S -இல் வரையறுக்கப்பட்ட மெய்மதிப்புச் சார்பு என்க. $X : S \to \mathbb{R}$ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது. ω என்பது S -இல் உள்ள கூறுபுள்ளி என்பதால் $X(\omega)$ என்பது ஒரு மெய்யெண்ணாகும்.

$\omega \in S$ எனுமாறு உள்ள $X(\omega)$ தொகுப்பு வீச்சகமாகும். அதாவது R_x எனக் குறிப்பிடப்படும் வீச்சகமானது $R_x = \{X(\omega) / \omega \in S\}$ ஆகும்.



படம் 11.1

மெய்யெண் கோட்டின் மீதான கூறுவெளி S -இன் சில கூறுபுள்ளிகள் ω_i அல்லது நிகழ்வுகளின் வரைபடத்தை படம் 11.1-ல் காணலாம்.

சான்றாக, $\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}, \ldots \omega_{1k} \in S$ -க்கு x என்பது X -இன் ஒரு சாத்தியமான மதிப்பு எனில் $\{\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}, \ldots \omega_{1k}\}$ என்பது x -இன் நேர்மாறு மதிப்பாகும்.

அதாவது $X^{-1}(x) = \{\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}, \ldots \omega_{1k}\}$ என்பது S-இல் ஒரு நிகழ்வாகும்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 11.1

ஒரு நாணயம் ஒரு முறை சுண்டப்படுகிறது என்க. H(தலை) மற்றும் T(பூ) என இரு கூறுபுள்ளிகள் கூறுவெளியில் உள்ளன.

அதாவது $S = \{T, H\}$

$X : S \to \mathbb{R}$ என்பது தலைகளின் எண்ணிக்கை என்க.

அதாவது $X(T) = 0$, மற்றும் $X(H) = 1$ ஆகும்.

எனவே X எனும் சமவாய்ப்பு மாறி 0 மற்றும் 1 ஆகிய மதிப்புகளைப் பெறுகிறது. $X(\omega)$ என்பது தலைகளின் எண்ணிக்கையைக் குறித்தால்

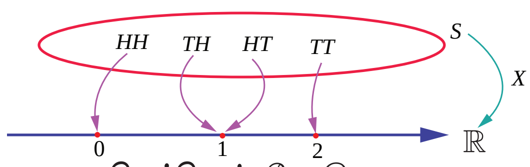
$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega = \text{பூ}(T) \\ 1 & \omega = \text{தலை}(H) \end{cases}$$

எடுத்துக்காட்டு 11.1

இரு நாணயங்கள் ஒரு முறை சுண்டப்படுகின்றன. X என்பது பூக்களின் எண்ணிக்கையைக் குறித்தால், (i) கூறுவெளியை எழுதுக (ii) 1-ன் நேர்மாறு பிம்பத்தைக் காண்க (iii) சமவாய்ப்பு மாறியின் மதிப்புகள், மற்றும் நேர்மாறு பிம்பங்களில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு

கூறுவெளி



மெய்யெண் கோடு

கோர்ப்பு X (.)-இன் படி $S \to \mathbb{R}$

படம் 11.2

(i) கூறுவெளி $S = \{H, T\} \times \{H, T\}$

அதாவது $S = \{TT,\ TH,\ HT,\ HH\}$

(ii) $X : S \to \mathbb{R}$ என்பது பூக்களின் எண்ணிக்கை என்க.

எனவே $X(TT) = 2$ (2 பூக்கள்)

$X(TH) = 1$ (1 பூ)

$X(HT) = 1$ (1 பூ)

மற்றும் $X(HH) = 0$ (0 பூக்கள்).

இனி X என்பது 0, 1 மற்றும் 2 ஆகிய மதிப்புகளைப் பெறும் சமவாய்ப்பு மாறியாகும்.

$X(\omega)$ என்பது பூக்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிப்பிடுகிறது என்க, இதிலிருந்து

$$X(\omega) = \begin{cases} 2 & , \omega = TT \\ 1 & , \omega = HT, TH \\ 0 & , \omega = HH \end{cases}$$ எனப் பெறுகிறோம்.

1-இன் நேர்மாறு பிம்பங்கள் $\{TH,\ HT\}$ ஆகும். அதாவது $X^{-1}(\{1\}) = \{TH, HT\}$.

(iii) நேர்மாறு பிம்பங்களில் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை பட்டியலில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

சமவாய்ப்பு மாறியின் மதிப்புகள்	0	1	2	மொத்தம்
நேர்மாறு பிம்பங்களில் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	1	2	1	4

எடுத்துக்காட்டு 11.2

சீரான இரு பகடைகள் உருட்டப்படுவதாகக் கொள்வோம். X என்பது இரு பகடையில் கிடைக்கும் எண்களின் மொத்தக் கூட்டுத் தொகை எனில், (i) கூறுவெளி (ii) X எனும் சமவாய்ப்பு மாறி எடுக்கும் மதிப்புகள், (iii) 10-இன் நேர்மாறு பிம்பம், மற்றும் (iv) X-ன் நேர்மாறு பிம்பத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

(i) கூறுவெளி

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

36 வரிசைப்படுத்தப்பட்ட சோடிகள் $(\alpha,\ \beta)$-இல் உள்ளன. இங்கு α மற்றும் β ஆகியவை 1 முதல் 6 வரை படத்திலிருப்பது போல் எந்தவொரு முழு எண் மதிப்பையும் பெறும்.

$$S = \left\{\begin{matrix} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6) \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6) \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6) \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6) \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6) \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6) \end{matrix}\right\}$$

ஒவ்வொரு புள்ளி $(\alpha,\ \beta)$ என்பதற்கும் X என்பது பகடையின் மேலுள்ள எண்களின் கூடுதல் என ஒதுக்கீடு செய்யப்படுகிறது.

அதாவது $X(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$ ஆகும்.

எனவே

$$X(1,1) = 1 + 1 = 2$$

$$X(1,2) = X(2,1) = 3$$

$$X(1,3) = X(2,2) = X(3,1) = 4$$
$$X(1,4) = X(2,3) = X(3,2) = X(4,1) = 5$$
$$X(1,5) = X(2,4) = X(3,3) = X(4,2) = X(5,1) = 6$$
$$X(1,6) = X(2,5) = X(3,4) = X(4,3) = X(5,2) = X(6,1) = 7$$
$$X(2,6) = X(3,5) = X(4,4) = X(5,3) = X(6,2) = 8$$
$$X(3,6) = X(4,5) = X(5,4) = X(6,3) = 9$$
$$X(4,6) = X(5,5) = X(6,4) = 10$$
$$X(5,6) = (6,5) = 11$$
$$X(6,6) = 12.$$

(ii) எனவே X எனும் சமவாய்ப்பு மாறி 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 ஆகிய மதிப்புகளைப் பெறுகிறது.

(iii) 10–இன் நேர்மாறு பிம்பம் $\{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$ ஆகும்.

(iv) நேர்மாறு பிம்பங்களில் எண்ணிக்கை கீழே பட்டியலிடப்பட்டுள்ளது.

சமவாய்ப்பு மாறியின் மதிப்புகள்	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	மொத்தம்
நேர்மாறு பிம்பங்களில் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	36

எடுத்துக்காட்டு 11.3

ஒரு ஜாடியில் 2 வெள்ளை பந்துகள் மற்றும் 3 சிவப்பு பந்துகள் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் 3 பந்துகள் ஜாடியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. X என்பது தேர்ந்தெடுக்கும் சிவப்பு பந்துகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிப்பிட்டால், சமவாய்ப்பு மாறி X -இன் மதிப்புகளையும் அதன் நேர்மாறு பிம்பங்களில் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

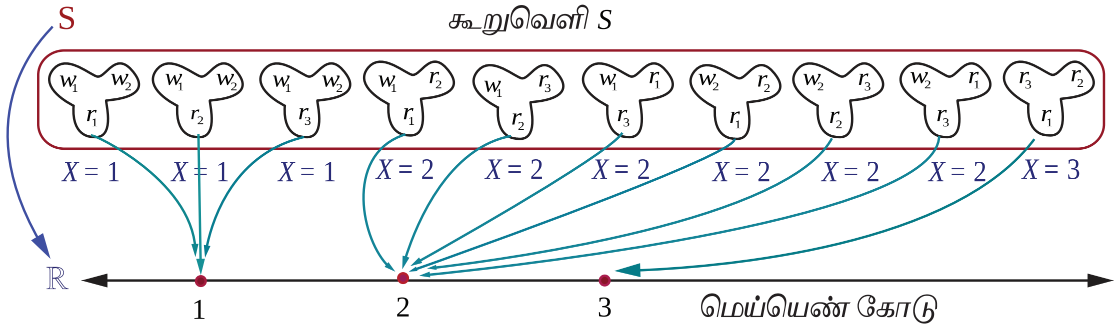
தீர்வு

வெள்ளை மற்றும் சிவப்பு பந்துகளை, w_1, w_2, r_1, r_2 மற்றும் r_3 எனக் குறிப்பிடுவோம்.

கூறுவெளியில் $5c_3 = 10$ வெவ்வேறு 3 எண்ணிக்கை அளவுள்ள கூறுகள் உள்ளன.

அதாவது $S = \{w_1w_2r_1,\ w_1w_2r_2,\ w_1w_2r_3,\ w_1r_1r_2,\ w_1r_2r_3,\ w_1r_1r_3,\ w_2r_1r_2,\ w_2r_2r_3,\ w_2r_1r_3,\ r_1r_2r_3\}$ ஆகும்.

சமவாய்ப்பு மாறி X எடுக்கும் மதிப்புகள் 1, 2, மற்றும் 3 ஆகும்.



கோர்ப்பு X (.)-இன் படி $S \to \mathbb{R}$

படம் 11.3

சமவாய்ப்பு மாறி X-இன் மதிப்புகள்	1	2	3	மொத்தம்
நேர்மாறு பிம்பங்களில் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	3	6	1	10

குறிப்புரை

X என்பது வெள்ளை பந்துகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிப்பிட்டால் X எடுக்கக் கூடிய மதிப்புகள் 0,1, மற்றும் 2 ஆகும். நேர்மாறு பிம்பங்களில் எண்ணிக்கை கீழ்க்காணுமாறு பட்டியலிடப்படுகிறது.

சமவாய்ப்பு மாறி X-இன் மதிப்புகள்	0	1	2	மொத்தம்
நேர்மாறு பிம்பங்களில் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	1	6	3	10

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 11.2

150 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு குழு 4 பேருந்துகளில் சுற்றுலாவிற்குச் செல்கின்றனர். ஒரு பேருந்தில் 38 மாணவர்களும், இரண்டாவது பேருந்தில் 36 மாணவர்களும், மூன்றாவது பேருந்தில் 32 மாணவர்களும், மீதமுள்ள மாணவர்கள் நான்காவது பேருந்திலும் பயணித்தனர். சேருமிடம் வந்ததும் அந்த 150 மாணவர்களில் ஒருவர் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டார்.

X என்பது சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட மாணவன் இருந்த பேருந்திலுள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கிறது என்க. எனவே X என்பது 32, 36, 38, மற்றும் 44 ஆகிய மதிப்புகளைக் கொண்டிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 11. 4

6 வெள்ளை மற்றும் 4 கருப்பு பந்துகள் கொண்ட ஒரு ஜாடியிலிருந்து இரு பந்துகள் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒவ்வொரு கருப்பு பந்திற்கும் ₹ 30 வெல்வதாகவும் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒவ்வொரு வெள்ளை பந்திற்கும் ₹ 20 தோற்பதாகவும் கொள்க. வெல்லும் தொகையை X குறிப்பதாகக் கொண்டால், X -இன் மதிப்புகளையும் மற்றும் அதன் நேர்மாறு பிம்பங்களில் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையும் காண்க.

தீர்வு

சாத்தியமான தீர்வுகள் (i) இரண்டுமே கருப்பாக இருக்கலாம் அல்லது (ii) ஒரு வெள்ளை மற்றும் ஒரு கருப்பு அல்லது (iii) இரண்டுமே வெள்ளையாக இருக்கலாம். எனவே X என்பது பின்வரும் மதிப்புகளைக் கொண்டிருக்கும் சமவாய்ப்பு மாறியாகும்.

$$X\ (\text{இரண்டுமே கருப்பு பந்துகள்}) = ₹\ 2(30) = ₹\ 60$$

$$X\ (\text{ஒரு கருப்பு மற்றும் ஒரு வெள்ளை பந்து}) = ₹\ 30 - ₹\ 20 = ₹\ 10$$

$$X\ (\text{இரண்டுமே வெள்ளை பந்துகள்}) = ₹\ 2(-20) = -₹\ 40$$

எனவே X ஆனது 60,10, மற்றும் $-$ 40 மதிப்புகளைக் கொண்டிருக்கும்.

குறிப்பு : 60-இன் நேர்மாறு பிம்பம் $\{b_1b_2, b_1b_3, b_1b_4, b_2b_3, b_2b_4, b_3b_4.\}$ ஆகும்.

சமவாய்ப்பு மாறி X-இன் மதிப்புகள்	60	10	$-$ 40	மொத்தம்
நேர்மாறு பிம்பங்களில் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	6	24	15	45

$\binom{6}{0}\binom{4}{2}$ $\quad\binom{6}{1}\binom{4}{1}$ $\quad\binom{6}{2}\binom{4}{0}$ $\quad\binom{10}{2}$

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 11.3

தலை நிகழும்வரை ஒரு நாணயம் சுண்டப்படுகிறது. அதன் கூறுவெளி

$S = \{H, TH, TTH, TTTH, \ldots\}$ ஆகும்.

தலை நிகழும்வரை சுண்டப்படும் எண்ணிக்கையை X என்க.

இனி X எனும் சமவாய்ப்பு மாறி $1, 2, 3, \ldots$ முதலிய மதிப்புகளைக் கொண்டிருக்கும்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 11.4

N என்பது ஒரு கால இடைவெளியில் உதவிமையத்திற்குச் சென்று வரிசையில் காத்திருக்கும் நுகர்வோர்களின் எண்ணிக்கை எனில் குறையற்ற எண்களின் கணமாகத்தான் கூறுவெளி அமையும். அதாவது $S = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ மற்றும் N என்பது ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி கொண்டிருக்கும் மதிப்புகள் $0, 1, 2, 3, \ldots$ ஆகும்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 11.5

ஒரு சோதனை மின் விளக்கின் ஆயுளை ஆராயும் எனில் மின்விளக்கின் ஆயுட்காலமாகக் கூறுவெளி அமையும். எனவே கூறுவெளியானது $S = [0, \infty)$ ஆகும். X என்பது மின்விளக்கின் ஆயுட்காலத்தைக் குறித்தால், X எனும் சமவாய்ப்பு மாறி கொண்டிருக்கும் மதிப்புகள் $[0, \infty)$-ல் அமையும்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 11.6

r ஆரமுள்ள ஒரு வட்டு D என்க. D-இல் சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு புள்ளி தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. மையத்திலிருந்து புள்ளி இருக்கும் தொலைவை X என்க. கூறுவெளி $S = D$ மற்றும் X எனும் சமவாய்ப்பு மாறிக் கொண்டிருக்கும் மதிப்புகள் 0 முதல் r வரை ஆகும். அதாவது $\omega \in S$-க்கு $X(\omega) \in [0, r]$ ஆகும்.

பயிற்சி 11.1

1. X என்பது மூன்று சீரான நாணயங்களை ஒரே சமயத்தில் ஒரு முறைச் சுண்டும்போது விழும் பூக்களின் எண்ணிக்கை என்க. சமவாய்ப்பு மாறியான X-இன் மதிப்புகளையும் அதன் நேர்மாறு பிம்பங்களில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.
2. 52 சீட்டுகட்டுகளை உடைய ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து இரு சீட்டுகள் ஒரே சமயத்தில் சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படுகின்றன. அவ்வாறு எடுக்கப்பட்ட சீட்டுகள் கருப்பாக இருப்பின் சமவாய்ப்பு மாறியான X-இன் மதிப்புகளையும் அதன் நேர்மாறு பிம்பங்களில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.
3. ஒரு கூடையில் 5 மாங்கனிகள் மற்றும் 4 ஆப்பிள்கள் உள்ளன. அதிலிருந்து மூன்று பழங்கள் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. அவ்வாறு தேர்ந்தெடுக்கும் பழங்கள் ஆப்பிள்கள் எனில், சமவாய்ப்பு மாறியான X-இன் மதிப்புகளையும் அதன் நேர்மாறு பிம்பங்களில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.
4. 6 சிவப்பு மற்றும் 8 கருப்பு பந்துகள் உள்ள ஒரு கொள்கலனிலிருந்து இரு பந்துகள் சீரான முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. அவ்வாறு தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒவ்வொரு சிவப்பு பந்திற்கும் ₹ 15 வெல்வதாகவும் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒவ்வொரு கருப்பு பந்திற்கும் ₹ 10 தோற்பதாகவும் கொள்க. வெல்லும் தொகையை X குறிப்பதாகக் கொண்டால் X-இன் மதிப்புகளையும் மற்றும் அதன் நேர்மாறு பிம்பங்களில் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.
5. ஆறு பக்க பகடை ஒன்றின் ஒரு பக்கத்தில் '2' எனக் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் இரண்டு பக்கங்களில் '3' எனவும், மீதமுள்ள மூன்று பக்கங்களில் '4' எனவும் உள்ளது. இருமுறை பகடை உருட்டப்படுகிறது. X என்பது இரு உருட்டல்களில் கிடைக்கும் எண்களின் கூட்டுத் தொகையை குறிக்கிறது எனில், X-இன் மதிப்புகளையும் மற்றும் அதன் நேர்மாறு பிம்பங்களில் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

11.3 சமவாய்ப்பு மாறிகளின் வகைகள் (Types of Random Variable)

இந்த அத்தியாயத்தில் இரு வகை சமவாய்ப்பு மாறிகளைப் பற்றி மட்டும் பார்ப்போம். அவற்றில் ஒன்று எண்ணிடதக்க மதிப்புகளைக் கொண்டிருக்கும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி மற்றும் மற்றொன்று தொடர்ச்சியான மதிப்புகளைக் கொண்டிருக்கும் சமவாய்ப்பு மாறியாகும். அதாவது,

(i) தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி (எண்ணத்தக்க அளவை)

(ii) தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி (அளவிடத்தக்க அளவை)

11.3.1 தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறிகள் (Discrete random variables)

இப்பாடப்பகுதியில் நாம் பின்வருவனவற்றைப் பற்றி விவாதிக்கலாம்.

(i) தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி (ii) நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு.

(iii) குவிவு பரவல் சார்பு. (iv) நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பிலிருந்து குவிவு பரவல் சார்பு பெறுதல்.

(v) குவிவு பரவல் சார்பிலிருந்து நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு பெறுதல்.

சமவாய்ப்பு மாறியின் வீச்சு கணமானது எண்களின் தனிநிலை கணம் எனில் சமவாய்ப்பு மாறியின் நேர்மாறு பிம்பம் முடிவுறு அல்லது எண்ணிடத்தக்க முடிவுறு கணமாக அமையும். அத்தகைய சமவாய்ப்பு மாறிகள் தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறிகள் என அழைக்கப்படுகின்றன. தனிநிலை கூறுவெளியில் வரையறுக்கப்படும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி தனிநிலையாக இருக்கும்.

வரையறை 11.2 (தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி)

கூறுவெளி S-லிருந்து மெய்யெண்கள் $\mathbb{R}$ -க்கு வரையறுக்கப்படும் X எனும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி, X -இன் வீச்சு எண்ணிடதக்கதாக இருந்தால் தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறியாகும். அதாவது, முடிவுறு அல்லது எண்ணிடதக்க முடிவுறா எண் மதிப்புகளை மட்டுமே கொண்டிருக்கும். இங்கு S கணத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு மதிப்பின் நிகழ்தகவும் மிகையெண் நிகழ்தகவுக் கொண்டதாகவும், நிகழ்தகவுகளின் மொத்த கூடுதல் ஒன்றாகவும் இருக்கும்.

குறிப்புரை

தொடர் கூறுவெளியில் கூட தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறியை வரையறுக்க இயலும். சான்றாக,

(i) தொடர் கூறுவெளி $S=[0,1]$ -இல், அனைத்து $\omega \in S$ -க்கு, $X(\omega)=10$ என வரையறுக்கப்படும் சமவாய்ப்பு மாறி என்பது ஒரு தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறியாகும்.

(ii) தொடர் கூறுவெளி $S=[0,20]$ -க்கு, வரையறுக்கப்படும் சமவாய்ப்பு மாறி

$X(\omega)=\begin{cases} 1 & , \omega \in [0,10) \\ 2 & , \omega \in [10,20] \end{cases}$ என்பது ஒரு தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறியாகும்.

11.3.2 நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு (Probability Mass Function)

ஒரு தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி குறிப்பிட்ட x, மதிப்பைப் பெறும்போது, அதாவது $P(X=x)$ என்பது $f(x)$ **அல்லது** $p(x)$ எனக் குறிப்பிடப்படும். $f(x)$ எனும் சார்பு நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு என அழைக்கப்படுகிறது. இருப்பினும் சில நூலாசிரியர்கள் இதனை நிகழ்தகவு சார்பு எனவும் நிகழ்வெண் சார்பு எனவும் குறிப்பிடுகின்றனர். இப்பாடப்பகுதியில், சமவாய்ப்பு மாறி தனிநிலையாக இருக்கும்போது, வழக்கமான துறைச் சொல்லான நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு என்பது பயன்படுத்தப்படுகிறது மற்றும் அதன் வழக்கமான சுருக்கம் pmf ஆகும்.

வரையறை 11.3 (நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு)

$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n \ldots,$ என்ற தனி மதிப்புகளைக் கொண்ட X என்பது ஒரு தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறியெனில், சார்பு $f(.)$ அல்லது $p(.)$ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது. மேலும் $f(x_k)=P(X=x_k)$, $k=1,2,3,\ldots n,\ldots$ என்பது நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பாக வரையறுக்கப்படுகிறது.

தேற்றம் 11.1 (நிரூபணமின்றி)

$f(x)$ எனும் சார்பு $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n \ldots$ என்ற மெய்யெண் மதிப்புகளுக்கு நிகழ்தகவுச் சார்பாக தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனைகளாகக் கீழ்க்காணும் பண்புகளைக் கொண்டிருக்க வேண்டும்.

(i) $f(x_k) \geq 0$ $\quad k=1,2,3,\ldots n,\ldots$ -க்கு மற்றும் (ii) $\sum_k f(x_k)=1$

குறிப்பு

(i) $\{f(x_k) = P(X = x_k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots n, \ldots\}$ என்ற நிகழ்தகவுகளின் கணம். ***தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவுப் பரவல்*** என்றும் அழைக்கப்படுகின்றது.

(ii) சமவாய்ப்பு மாறி ஒரு சார்பு என்பதால் அதனை

(a) பட்டியல் முறை (b) வரைபடம் முறை (c) கோவை முறை

ஆகிய முறைகளில் குறிப்பிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 11.5

இரு சீரான நாணயங்கள் ஒரே சமயத்தில் சுண்டி விடப்படுகின்றன. (ஒரு சீரான நாணயம் இரு முறை சுண்டி விடப்படுவதற்கு சமானமானது). கிடைத்த தலைகளின் எண்ணிக்கைக்கு நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு காண்க.

தீர்வு

கூறுவெளி $S = \{H, T\} \times \{H, T\}$

அதாவது $S = \{TT, TH, HT, HH\}$

தலைகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும் சமவாய்ப்பு மாறி X என்க.

எனவே,

$X(TT) = 0$, $X(TH) = 1$,

$X(HT) = 1$, மற்றும் $X(HH) = 2$.

எனவே சமவாய்ப்பு மாறி X –ஆனது 0, 1 மற்றும் 2 ஆகிய மதிப்புகளைக் கொண்டிருக்கும்.

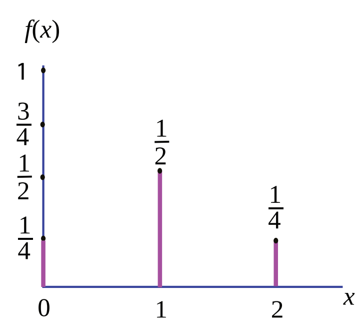
சமவாய்ப்பு மாறியின் மதிப்பு	0	1	2	மொத்தம்
நேர்மாறு பிம்பங்களில் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	1	2	1	4

நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு கீழ்க்காணுமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{1}{4},$$

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

மற்றும் $$f(2) = P(X = 2) = \frac{1}{4}$$



$f(x)$ –இன் நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு

படம் 11.4

சார்பு $f(x)$ கீழ்க்காணும் நிபந்தனைகளைப் பூர்த்தி செய்கிறது

(i) $f(x) \geq 0, \quad x = 0, 1, 2$

(ii) $$\sum_x f(x) = \sum_{x=0}^{x=2} f(x) = f(0) + f(1) + f(2)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

எனவே $f(x)$ என்பது ஒரு நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு ஆகும்.

நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு கீழ்க்காணுமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(அல்லது) $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & , x = 0 \\ \frac{1}{2} & , x = 1 \\ \frac{1}{4} & , x = 2 \end{cases}$$

எடுத்துக்காட்டு 11.6

இரு சீரான பகடைகள் ஒரு முறை உருட்டப்படுகின்றன. கிடைத்த நான்குகளின் எண்ணிக்கைக்கான நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு காண்க.

தீர்வு

நான்குகளின் எண்ணிக்கையை x-இன் மதிப்புகளாகக் கொண்ட சமவாய்ப்பு மாறி X என்க.

கூறுவெளி S அட்டவணையாகத் தரப்பட்டுள்ளது.

$$S=\left\{\begin{matrix}(1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6)\\(2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6)\\(3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6)\\(4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6)\\(5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6)\\(6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6)\end{matrix}\right\}$$

இதனை

$S=\{(i,j)\}$ எனவும் எழுதலாம், இங்கு $i=1,2,3\ldots,6$ மற்றும் $j=1,2,3,\ldots 6$ ஆகும்.

எனவே X –ஆனது 0, 1, மற்றும் 2 ஆகிய மதிப்புகளைக் கொண்டிருக்கும்.

(i) $X=0,\ \forall\,(i,j),\ i\neq 4,\ j\neq 4$ எனில்

(ii) $X=1,\ (1,4),(2,4),(3,4),(5,4),(6,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6)$ என்பவற்றில்

(iii) $X=2,\ (4,4)$–இல்

எனவே,

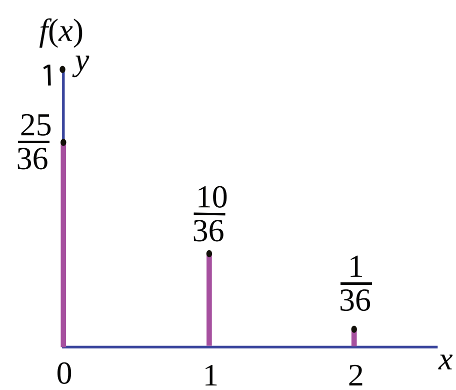
சமவாய்ப்பு மாறி X–இன் மதிப்பு	0	1	2	மொத்தம்
நேர்மாறு பிம்பங்களில் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	25	10	1	36

நிகழ்தகவுகள்

$$f(0) = P(X=0)=\frac{25}{36},$$

$$f(1) = P(X=1)=\frac{10}{36}$$

மற்றும் $f(2) = P(X=2)=\dfrac{1}{36}$ ஆகும்.



$f(x)$ –இன் நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு

படம் 11.5

இங்கு சார்பு $f(x)$ கீழ்க்காணும் நிபந்தனைகளைப் பூர்த்தி செய்கின்றது.

(i) $f(x)\geq 0,\ x=0,1,2$ மற்றும்

(ii) $\displaystyle\sum_x f(x)=\sum_{x=0}^{x=2} f(x)=f(0)+f(1)+f(2)=1$

$$=\frac{25}{36}+\frac{10}{36}+\frac{1}{36}=1$$

நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு கீழ்க்காணுமாறு வழங்கப்படுகிறது.

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

(அல்லது) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{25}{36}, & x=0\\ \dfrac{10}{36}, & x=1\\ \dfrac{1}{36}, & x=2\end{cases}$

11.3.3 குவிப்புப் பரவல் சார்பு அல்லது பரவல் சார்பு (Cumulative Distribution Function or Distribution Function)

பல தருணங்களில் நிகழ்தகவைக் கண்டறியும்பொழுது, சமவாய்ப்பு மாறி X, ஏற்கும் மதிப்புகளானது ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் x–க்கு குறைவாகவோ அல்லது சமமாகவோ இருப்பதைக் காணலாம். ஒவ்வொரு மெய்யெண் x -க்கும் $F(x) = P(X \leq x)$ என்றிருந்தால், $F(x)$-ஐ சமவாய்ப்பு மாறி X -இன் குவிவு பரவல் சார்பு அல்லது பரவல் சார்பு மற்றும் அதன் பொதுவான சுருக்கம் cdf ஆகும்.

வரையறை 11.4 (குவிவு பரவல் சார்பு)

$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$ எனும்படி $x_1, x_2, x_3, \ldots$ மதிப்புகளுக்கு $F(x)$-ஐ நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பாகக் கொண்டிருக்கும் தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி X -இன் குவிவு பரவல் சார்பு $F(x)$-இன் நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு $F(x) = P(X \leq x) = \sum\limits_{x_i \leq x} f(x_i), \quad x \in \mathbb{R}$ ஆகும்.

தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறியின் பரவல் சார்பு தனிநிலை பரவல் சார்பு எனப்படுகிறது. எனினும், நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு $f(x)$ என்பது $x_1, x_2, x_3, \ldots,$ எனும் தனிநிலை மதிப்புகள் கணத்திற்குத்தான் வரையறுக்கப்பட்டது. குவிவு பரவல் சார்பு $F(x)$ என்பது அனைத்து மெய் மதிப்புகளான $x \in \mathbb{R}$ -க்கு வரையறுக்கப்படுகிறது.

நிகழ்தகவு நிறை சார்பினைப் பயன்படுத்தி குவிவு பரவல் சார்பினைக் கணிக்கலாம்.

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

X எனும் சமவாய்ப்பு மாறி, $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n,$ $(x_1 < x_2 < x_3 <, \cdots < x_n)$ என்ற முடிவுறு எண்ணிக்கையிலான மதிப்புகளை மட்டும் கொண்டிருந்தால் , அதன் குவிவு பரவல் சார்பினை கீழ்க்காணுமாறு வரையறுக்கலாம்.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < x_1 \\ f(x_1), & x_1 \leq x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2), & x_2 \leq x < x_3 \\ f(x_1) + f(x_2) + f(x_3), & x_3 \leq x < x_4 \\ \vdots & \vdots \\ f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n), & x_n \leq x < \infty \end{cases}$$

தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி X–க்கு ,குவிவு பரவல் சார்பு கீழ்க்காணும் பண்புகளைப் பூர்த்தி செய்கிறது.

(i) அனைத்து $x \in \mathbb{R}$ -க்கு $0 \leq F(x) \leq 1$,

(ii) $F(x)$, ஒரு மெய் மதிப்புடையக் குறைவுறாச் சார்பு ஆகும் $(x < y,$ எனில் $F(x) \leq F(y))$.

(iii) $F(x)$ ஒரு வலப்பக்கத் தொடர் சார்பு ஆகும் $\left(\lim\limits_{x \to a+} F(x) = F(a)\right)$.

(iv) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$.

(v) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$.

(vi) $P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

(vii) $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$.

(viii) $P(X = x_k) = F(x_k) - F(x_k^-)$.

குறிப்பு

சில நூலாசிரியர்கள் குவிவு பரவல் சார்பு $F(x)$ *-இன் வரையறைக்கு வலப்பக்கத் தொடர்ச்சிக்கு பதிலாக இடப்பக்க தொடர்ச்சியைப் பயன்படுத்துகிறார்கள்.*

11.3.4 நிகழ்தகவு நிறை சார்பிலிருந்து குவிவு பரவல் சார்பு (Cumulative Distribution Function from Probability Mass function)

ஒரு தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி X *-இன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு மற்றும் குவிவு பரவல் சார்பு ஆகிய இரண்டும்* X *-இன் அனைத்து நிகழ்தகவு தகவல்களையும் கொண்டிருக்கும்.* X *-ன் நிகழ்தகவு பரவலை இந்த இரண்டிலொன்று தீர்மானிக்க இயலும். உண்மையில், தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி* X *-இன் பரவல் சார்பு* F*-இனை* X*-இன் நிகழ்தகவு நிறைச்சார்பு* $f(x)$ *மூலமாக விளக்கலாம். அதற்கு நேர்மாறாகவும் விளக்கலாம்.*

எடுத்துக்காட்டு 11.7

சமவாய்ப்பு மாறி X *-இன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு* $f(x)$ *என்பது*

x	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

எனில், (i) *அதன் குவிவு பரவல் சார்பு காண்க. அதன் மூலமாக* (ii) $P(X \le 3)$ *மற்றும்,* (iii) $P(X \ge 2)$ *ஆகியவற்றைக் காண்க*

தீர்வு

(i) *வரையறைப்படி தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறிக்கான குவிவு பரவல் சார்பு*

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i)$$

$$P(X < 1) = 0, \quad -\infty < x < 1.$$

$$F(1) = P(X \le 1) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i) = \sum_{-\infty}^{1} P(X = x) = P(X < 1) + P(X = 1) = 0 + \frac{1}{12} = \frac{1}{12}.$$

$$F(2) = P(X \le 2) = \sum_{-\infty}^{2} P(X = x) = P(X < 1) + P(X = 1) + P(X = 2).$$

$$= 0 + \frac{1}{12} + \frac{5}{12} = \frac{1}{2}.$$

$$F(3) = P(X \le 3) = \sum_{-\infty}^{3} P(X = x) = P(X < 1) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3).$$

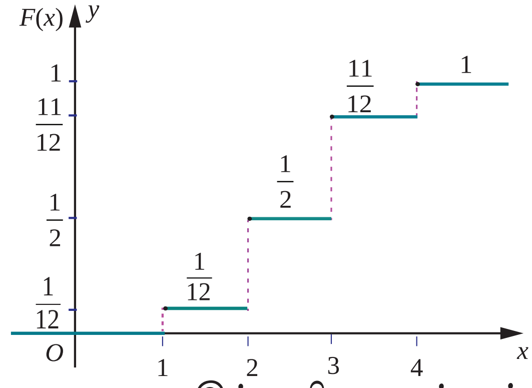
$$= 0 + \frac{1}{12} + \frac{5}{12} + \frac{5}{12} = \frac{11}{12}.$$

$$F(4) = P(X \le 4) = \sum_{-\infty}^{4} P(X = x) = P(X < 1) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4).$$

$$= 0 + \frac{1}{12} + \frac{5}{12} + \frac{5}{12} + \frac{1}{12} = 1.$$

எனவே குவிவு பரவல் சார்பானது

$$F(x)=\begin{cases}0, & -\infty < x < 1\\ \dfrac{1}{12}, & 1 \le x < 2\\ \dfrac{1}{2}, & 2 \le x < 3\\ \dfrac{11}{12}, & 3 \le x < 4\\ 1, & 4 \le x < \infty\end{cases}$$



$F(x)$-இன் குவிவு பரவல் சார்பு

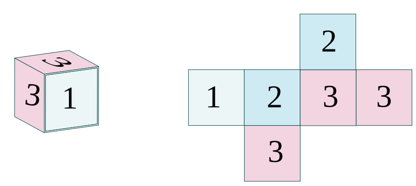
படம் 11.6

(ii) $P(X \le 3) = F(3) = \dfrac{11}{12}$.

(iii) $P(X \ge 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \le 1) = 1 - F(1) = 1 - \dfrac{1}{12} = \dfrac{11}{12}$. ■

எடுத்துக்காட்டு 11.8

ஓர் ஆறு பக்க பகடையின் ஒரு பக்கத்தில் '1' என குறிக்கப்படுகிறது. அதன் இரு பக்கங்களில் '2' எனவும் மீதமுள்ள மூன்று பக்கங்களில் '3' எனவும் குறிக்கப்படுகிறது. இரு முறை பகடை உருட்டப்படுகிறது. இருமுறை எறிதலின் மொத்தத் தொகையை X குறிக்கிறது எனில்



படம் 11.7

(i) நிகழ்தகவு நிறை சார்பு காண்க.

(ii) குவிவு பரவல் சார்பு காண்க.

(iii) $P(3 \le X < 6)$ காண்க (iv) $P(X \ge 4)$ காண்க.

தீர்வு

இருமுறை எறிதலின் மொத்தத் தொகை X –ஐ குறிப்பதால், X –ஆனது 2, 3, 4, 5, மற்றும் 6 ஆகிய மதிப்புகளைக் கொண்டிருக்கும்.

அருகிலுள்ள அட்டவணை **S**-லிருந்து,

சமவாய்ப்பு மாறியின் மதிப்பு	2	3	4	5	6	மொத்தம்
நேர்மாறு பிம்பங்களில் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	1	4	10	12	9	36

கூறுவெளி S

II / I	1	2	2	3	3	3
1	2	3	3	4	4	4
2	3	4	4	5	5	5
2	3	4	4	5	5	5
3	4	5	5	6	6	6
3	4	5	5	6	6	6
3	4	5	5	6	6	6

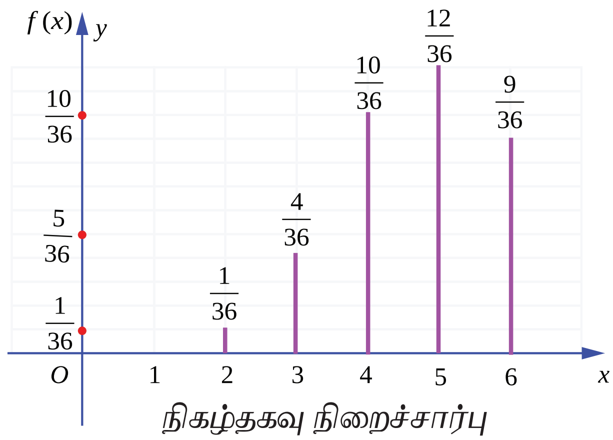
$P(X=2) = \dfrac{1}{36}$, $\quad P(X=3) = \dfrac{4}{36}$

$P(X=4) = \dfrac{10}{36}$, $\quad P(X=5) = \dfrac{12}{36}$,

மற்றும் $\quad P(X=6) = \dfrac{9}{36}$.

(i) நிகழ்தகவு நிறை சார்பானது

x	2	3	4	5	6
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{9}{36}$



படம் 11.8

(ii) குவிவு பரவல் சார்பு

வரையறைப்படி தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறியின் குவிவு பரவல் சார்பானது,

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i),$$

$$P(X < x) = 0, \quad -\infty < X < 2.$$

$$F(2) = P(X \le 2) = \sum_{-\infty}^{2} P(X = x) = P(X < 2) + P(X = 2) = 0 + \frac{1}{36} = \frac{1}{36}.$$

$$F(3) = P(X \le 3) = \sum_{-\infty}^{3} P(X = x) = P(X < 2) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0 + \frac{1}{36} + \frac{4}{36} = \frac{5}{36}.$$

$$F(4) = P\left(X \le 4\right) = \sum_{-\infty}^{4} P(X = x) = P(X < 2) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

$$= 0 + \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{10}{36} = \frac{15}{36}.$$

$$\mathrm{F}(5) = P(X \le 5) = \sum_{-\infty}^{5} P(X = x) = P(X < 2) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

$$= 0 + \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{10}{36} + \frac{12}{36} = \frac{27}{36}.$$

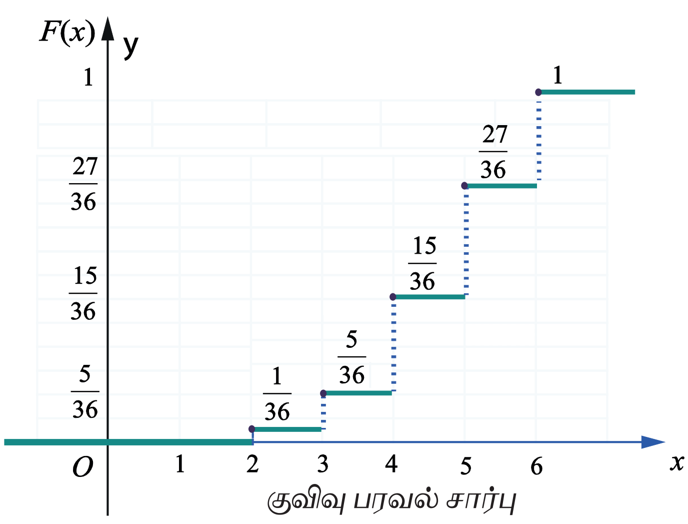
$$F(6) = P(X \le 6) = \sum_{-\infty}^{6} P(X = x)$$

$$= P(X < 2) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$$

$$= 0 + \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{10}{36} + \frac{12}{36} + \frac{9}{36} = 1.$$

எனவே, குவிவு பரவல் சார்பானது,

$$\begin{cases} 0 & , \quad -\infty < x < 2 \\ \frac{1}{36} & , \quad 2 \le x < 3 \\ \frac{5}{36} & , \quad 3 \le x < 4 \\ \frac{15}{36} & , \quad 4 \le x < 5 \\ \frac{27}{36} & , \quad 5 \le x < 6 \\ 1 & , \quad 6 \le x < \infty \end{cases}$$



படம் 11.9

(iii) $P(3 \le X < 6) = \sum_{x=3}^{5} P(X = x_i) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$

$$= \frac{4}{36} + \frac{10}{36} + \frac{12}{36} = \frac{26}{36}.$$

(iv) $P(X \ge 4) = \sum_{x=4}^{\infty} P(X = x_i)$

$$= P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$$

$$= \frac{10}{36} + \frac{12}{36} + \frac{9}{36} = \frac{31}{36}.$$

11.3.5 குவிவு பரவல் சார்பிலிருந்து நிகழ்தகவு நிறை சார்பு (Probability Mass Function from Cumulative Distribution Function)

ஒரு தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி X–க்கு, குவிவு பரவல் சார்பு F ஒவ்வொரு x_i –யிலும் துள்ளல் இருக்கும். மேலும் அடுத்தடுத்த x_i –களில் மாறாமலும் இருக்கும். x_i –இல் இருக்கும் துள்ளலின் உயரம் $f(x_i)$; இதே முறையில் F –லிருந்து x_i –இன் நிகழ்தகவை மீட்டெடுக்கலாம்.

$x_1 < x_2, < x_3 \cdots$ என்றவாறு இருக்கும் $x_1, x_2, x_3 \ldots$ மதிப்புகளைக் கொண்டிருக்கும் தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி X என்க. மற்றும் $F(x_i)$ என்பது பரவல் சார்பாகும். எனவே நிகழ்தகவு நிறை சார்பு $f(x_i)$ ஆனது,

$$f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}), \quad i = 1, 2, 3, \ldots \text{ ஆகும்.}$$

குறிப்பு

$x = a$ -ல் $F(x)$ சார்பின் துள்ளல் $\left|F(a^+) - F(a^-)\right|$ ஆகும். F குறைவுறாமலும் மற்றும் வலப்பக்கமாக தொடர்ச்சியாகவும் இருப்பதால், குவிவு பரவல் சார்பு F –ன் துள்ளல் $P(X = x) = F(x) - F(x^-)$ ஆகும்.

இங்கு துள்ளல் (தொடர்ச்சியில்லாமல் இருப்பதால்) நிகழ்தகவாக நிகழ்கிறது. அதாவது ஒரு குவிவு பரவல் சார்பின் தொடர்ச்சியற்றவைகளின் கணம் எண்ணத்தக்கது!

எடுத்துக்காட்டு 11.9

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள குவிவு பரவல் சார்பு $F(x)$–இன் தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி X –யின் நிகழ்தகவு நிறைசார்பினைக் காண்க.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -2 \\ 0.25 & -2 \le x < -1 \\ 0.60 & -1 \le x < 0 \\ 0.90 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < \infty \end{cases}$$

மேலும் (i) $P(X < 0)$ மற்றும் (ii) $P(X \ge -1)$ காண்க.

தீர்வு

X என்பது ஒரு தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி என்பதால், கொடுக்கப்பட்ட தகவல்களிலிருந்து, X பின்வரும் மதிப்புகளான $-2,-1,0$ மற்றும் 1ஆகியவற்றைப் பெறும்.

வரையறைப்படி தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி X-க்கு, $f(x) = P(X = x)$

எனவே $F(x)$-இன் $x=-2$-ல் இடப்பக்க எல்லை $F(-2^-)$ ஆகும்.

$$f(-2) = P(X=-2) = F(-2) - F(-2^-) = 0.25 - 0 = 0.25.$$

இதே போன்று ஏனைய துள்ளல் புள்ளிகளுக்கும்,

$$f(-1) = P(X=-1) = F(-1) - F(-2) = 0.60 - 0.25 = 0.35.$$

$$f(0) = P(X=0) = F(0) - F(-1) = 0.90 - 0.60 = 0.30,$$

$$f(1) = P(X=1) = F(1) - F(0) = 1 - 0.90 = 0.10$$ எனப் பெறப்படுகிறது.

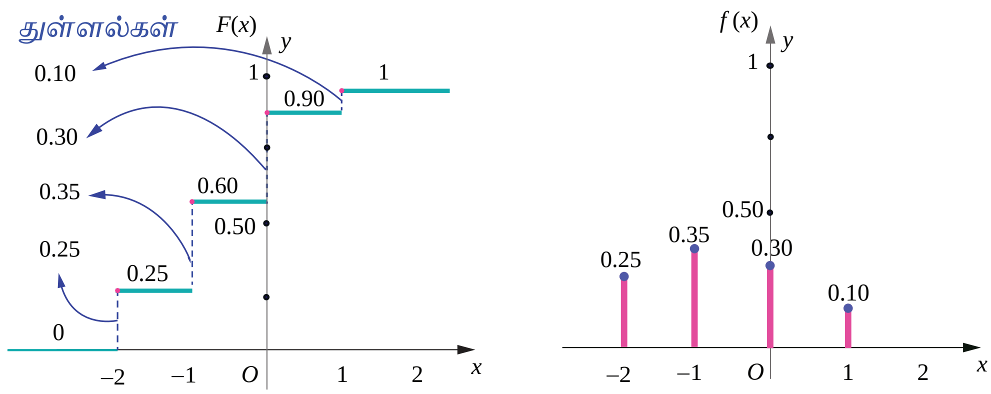
எனவே நிகழ்தகவு நிறை சார்பானது

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	0.25	0.35	0.30	0.10

ஆகும்.

$F(x)$ எனும் பரவல் சார்பிற்கு $x=-2,\ -1,\ 0,$ மற்றும் 1-ல் துள்ளல்கள் உள்ளன. அந்த துள்ளல்கள் முறையே, $0.25,\ 0.35,\ 0.30,$ மற்றும் 0.1 என கீழ்க்காணும் படத்தில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது.

இந்த துள்ளல்களே நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பினைத் தீர்மானிக்கின்றன.



$F(x)$–ன் பரவல் சார்பு மற்றும் x_i –இல் அதன் துள்ளல்கள்

$f(x)$ –இன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு

படம் 11.10

(i) $P(X<0) = \sum_{-\infty}^{-1} P(X=x) = P(X=-2) + P(X=-1) = 0.25 + 0.35 = 0.60.$

(ii) $P(X \geq -1) = \sum_{-1}^{1} P(X=x) = P(X=-1) + P(X=0) + P(X=1) = 0.35 + 0.30 + 0.10 = 0.75$

எடுத்துக்காட்டு 11.10

ஒரு தனிநிலை சார்பு X –ன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பானது

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	k	$2k$	$6k$	$5k$	$6k$	$10k$

எனில், (i) $P(2<X<6)$ (ii) $P(2 \leq X < 5)$ (iii) $P(X \leq 4)$ (iv) $P(3<X)$ என்பவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சார்பு நிகழ்தகவு நிறை சார்பு என்பதால் மொத்த நிகழ்தகவு ஒன்றாகும். அதாவது $\sum_{x} f(x) = 1$ ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்ட தகவல்களிலிருந்து $k + 2k + 6k + 5k + 6k + 10k = 1$

$$30k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{30}$$

எனவே நிகழ்தகவு நிறை சார்பானது,

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{10}{30}$

(i) $P(2 < X < 6) = f(3) + f(4) + f(5) = \frac{6}{30} + \frac{5}{30} + \frac{6}{30} = \frac{17}{30}$.

(ii) $P(2 \le X < 5) = f(2) + f(3) + f(4) = \frac{2}{30} + \frac{6}{30} + \frac{5}{30} = \frac{13}{30}$.

(iii) $P(X \le 4) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = \frac{1}{30} + \frac{2}{30} + \frac{6}{30} + \frac{5}{30} = \frac{14}{30}$.

(iv) $P(3 < X) = f(4) + f(5) + f(6) = \frac{5}{30} + \frac{6}{30} + \frac{10}{30} = \frac{21}{30}$.

பயிற்சி 11.2

1. மூன்று சீரான நாணயங்கள் ஒரே நேரத்தில் சுண்டப்படுகின்றன. கிடைக்கும் தலைகளின் எண்ணிக்கைக்கான நிகழ்தகவு நிறை சார்பினைக் காண்க.
2. ஓர் அறுபக்க பகடையின் ஒரு பக்கத்தில் ‘1’ எனவும், இரு பக்கங்களில் ‘3’ மூன்று எனவும், மற்றும் ஏனைய மூன்று பக்கங்களில் ‘5’ எனவும் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. பகடை இருமுறை வீசப்படுகிறது. இருமுறை வீசப்பட்டதின் மொத்த எண்ணிக்கையை X குறிக்கிறது.

   (i) நிகழ்தகவு நிறை சார்பு (ii) குவிவு பரவல் சார்பு

   (iii) $P(4 \le X < 10)$ (iv) $P(X \ge 6)$
3. மகன் மற்றும் மகளுக்கு சமவாய்ப்பு நிகழ்தகவுகள் எனக் கருதி 4 குழந்தைகள் கொண்ட ஒரு குடும்பத்தில் உள்ள மகள்களின் எண்ணிக்கைக்கு நிகழ்தகவு நிறை சார்பினையும் குவிவு பரவல் சார்பினையும் காண்க.
4. ஒரு தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி 0, 1, மற்றும் 2 மதிப்புகளை மட்டுமே கொள்ளும் என்க.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{k}, & x = 0,1,2 \\ 0 & x\text{-இன் பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$$

   என வரையறுக்கப்பட்ட நிகழ்தகவு நிறை சார்பிற்கு

   (i) k-இன் மதிப்பு (ii) குவிவு பரவல் சார்பு (iii) $P(X \ge 1)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

5. $F(x)=\begin{cases} 0 & -\infty < x < -1 \\ 0.15 & -1 \le x < 0 \\ 0.35 & 0 \le x < 1 \\ 0.60 & 1 \le x < 2 \\ 0.85 & 2 \le x < 3 \\ 1 & 3 \le x < \infty \end{cases}$

எனக் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறியின் குவிவு பரவல் சார்பிற்கு (i) நிகழ்தகவு நிறை சார்பு $(ii) P(X<1)$ மற்றும் (iii) $P(X \ge 2)$ காண்க

6. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X–க்கு நிகழ்தகவு நிறைசார்பானது

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	k^2	$2k^2$	$3k^2$	$2k$	$3k$

எனில் (i) k மதிப்பு (ii) $P(2 \le X < 5)$ (iii) $P(3 < X)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

7. $$F(x)=\begin{cases} 0 & , -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{2} & , 0 \le x < 1 \\ \frac{3}{5} & , 1 \le x < 2 \\ \frac{4}{5} & , 2 \le x < 3 \\ \frac{9}{10} & , 3 \le x < 4 \\ 1 & , 4 \le x < \infty \end{cases}$$

என்பது ஒரு தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறியின் குவிவு பரவல் சார்பு எனில் (i) நிகழ்தகவு நிறை சார்பு (ii) $P(X<3)$ மற்றும் (iii) $P(X \ge 2)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

11.4 தொடர்ச்சியானப் பரவல்கள் (Continuous Distributions)

இப்பகுதியில்

(i) தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி

(ii) நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

(iii) பரவல் சார்பு (குவிவு பரவல் சார்பு).

(iv) நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பிலிருந்து பரவல் சார்பினைத் தீர்மானித்தல்.

(v) பரவல் சார்பிலிருந்து நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பினைத் தீர்மானித்தல்.

ஆகியவற்றைக் கற்போம்.

சில சமயங்களில் செப்பு கம்பியில் உள்ள மின்சாரத்தின் அளவு அல்லது ஒரு மின்விளக்கின் ஆயுட்காலம் போன்றவற்றை அளவிட ஒரு மெய்யெண் இடைவளியில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மதிப்பைக் கருதவேண்டியுள்ளது. அதன்பிறகே அந்த அளவீட்டின் துல்லியம் சாத்தியமாகும். இந்த அளவீடு எடுத்துரைக்கும் சமவாய்ப்பு மாறி தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி எனப்படுகிறது. ஒரு மெய்யெண் இடைவெளியிலுள்ள அனைத்து மதிப்புகளையும் உள்ளடக்கியதாக சமவாய்ப்பு மாறியின் வீச்சு அமையும்; அதாவது, மெய்யெண்களின் தொடரகமாக வீச்சு அமைகிறது எனலாம்.

11.4.1 தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியின் வரையறை (The definition of continuous random variable)

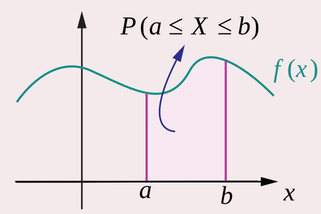
வரையறை 11.5 (தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி)

S என்பது ஒரு கூறுவெளி என்க. $X : S \to \mathbb{R}$ எனும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி $\mathbb{R}$ -ன் ஒரு கணமான I -ல் ஏதேனும் மதிப்பைப் பெறும் என்க. I -இல் உள்ள அனைத்து x -க்கும் $P(X = x) = 0$ என்பது X -இன் ஒரு **தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியாகும்.**

11.4.2 நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு (Probability density function)

வரையறை 11.6 (நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு)

தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியில் $x \in [a,b]$ எனுமாறு உள்ள சாத்தியமான ஒவ்வொரு நிகழ்வு x -ற்கும் $P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$ எனும் பண்பு உள்ளது எனில், $f(x)$ எனும் ஒரு குறையற்ற மெய்யெண் மதிப்புடைய சார்பானது, **நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பாகும்.**



படம் 11.11

தேற்றம் 11.2 (நிரூபணமின்றி)

ஏதேனும் ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X -க்கு, ஒரு சார்பு நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பாகத் தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனைகளாகக் கீழ்க்காணும் பண்புகளைக் கொண்டிருக்க வேண்டும்.

(i) $f(x) \ge 0$, அனைத்து x -க்கும் மற்றும் (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

குறிப்பு

மேற்கண்ட வரையறையிலிருந்து, X ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி எனில்,

$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$, என்பதனால் $P(X = a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$ ஆகும்.

எனவே X குறிப்பிட்ட ஒரு மதிப்பைக் கொண்டால் அதன் நிகழ்தகவு பூச்சியமாகும்.

11.4.3 பரவல் சார்பு (குவிவு பரவல் சார்பு) (Distribution function (Cumulative distribution function))

வரையறை 11.7 (குவிவு பரவல் சார்பு)

$f(x)$ எனும் நிகழ்தகவு அடர்த்தியுடைய ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X–ன் பரவல் சார்பு அல்லது குவிவு பரவல் சார்பு $F(x)$ என்பது

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du, \qquad -\infty < u < \infty .$$

குறிப்புரை

(1) தனி நிலையில், $f(a) = P(X = a)$ என்பது X ஆனது a மதிப்பைக் கொள்வதற்கான நிகழ்தகவாகும்.

தொடர்ச்சியானதில், $x = a$ -இல் $f(x)$ என்பது X ஆனது a மதிப்பைக் கொள்வதற்கான நிகழ்தகவு அல்ல. அதாவது $f(a) \ne P(X = a)$ ஆகும். X தொடர்ச்சியான வகை எனில், அனைத்து $a \in \mathbb{R}$ -க்கு $P(X = a) = 0$ ஆகும்.

(2) சமவாய்ப்பு மாறி தொடர்ச்சியானபோது தனிநிலையில் பயன்படுத்தப்பட்ட கூட்டல் தொகையிடலாக மாற்றம் பெறுகிறது.

(3) தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறிக்கு

$$P(a<X<b)=P(a\le X<b)=P(a<X\le b)=P(a\le X\le b)$$

(4) தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியின் பரவல் சார்பு தொடர்ச்சியான பரவல் சார்பு என அழைக்கப்படுகிறது.

11.4.3.1 பரவல் சார்பின் பண்புகள் (Properties of distribution function)

X எனும் தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறிக்கு, கீழ்க்காணும் பண்புகளை குவிவு பரவல் சார்பு பூர்த்தி செய்கிறது.

(i) $0\le F(x)\le 1$.

(ii) $F(x)$ -ன் குறையற்ற மெய்மதிப்பாகும். அதாவது $x<y$, எனில் $F(x)\le F(y)$.

(iii) $F(x)$ எவ்விடத்திலும் தொடர்ச்சியாகும்.

(iv) $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=F(-\infty)=0$ மற்றும் $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=F(+\infty)=1$.

(v) $P(X>x)=1-P(X\le x)=1-F(x)$.

(vi) $P(a<X<b)=F(b)-F(a)$.

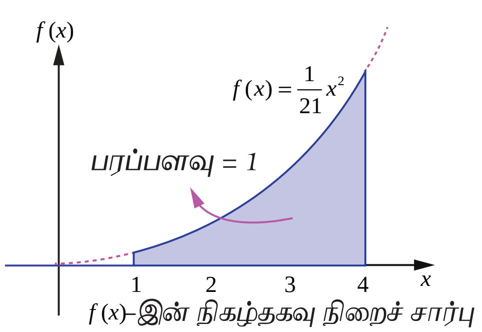
எடுத்துக்காட்டு 11.11

$$f(x)=\begin{cases}Cx^2 & 1<x<4\\ 0 & x\text{-இன் பிற மதிப்புகளுக்கு}\end{cases}$$ எனும் சார்பு ஒரு அடர்த்தி சார்பு எனில் மாறிலி C -இன் மதிப்பு காண்க. மேலும் (i) $P(1.5<X<3.5)$ (ii) $P(X\le 2)$ (iii) $P(3<X)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சார்பு நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு என்பதால்,

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=1.$$



f (x)-இன் நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு

படம் 11.12

அதாவது $$\int_{-\infty}^{1}f(x)\,dx+\int_{1}^{4}f(x)\,dx+\int_{4}^{\infty}f(x)\,dx=1.$$

கொடுக்கப்பட்ட தகவல்களிலிருந்து

$$\int_{-\infty}^{1}0\,dx+\int_{1}^{4}Cx^2\,dx+\int_{4}^{\infty}0\,dx=1.$$

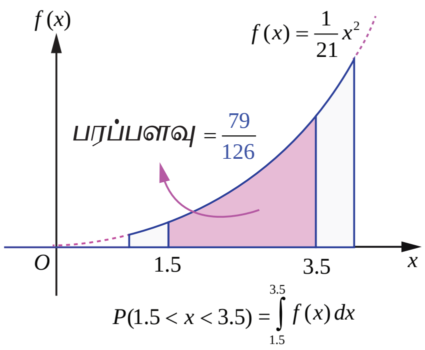
$$0+C\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4+0=1,\quad\Rightarrow C\left[\frac{64-1}{3}\right]=1\quad\Rightarrow 21C=1\quad\Rightarrow C=\frac{1}{21}.$$

எனவே நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பானது

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{21}x^2 & 1<x<4\\ 0 & x\text{-இன் பிற மதிப்புகளுக்கு}\end{cases}$$ ஆகும்.

$f(x)$ தொடர்ச்சியாதலால், குறிப்பிட்ட எந்த மதிப்பிற்கும் X –ன் நிகழ்தகவு பூச்சியமாகும். எனவே சமவாய்ப்பு மாறி தொடர்ச்சியானபோது குறியீடுகளான $<$-ஐ $\le$ ஆகவும் மற்றும் $>$ -ஐ $\ge$ -ஆகவும் ஆகிய இரு ஜோடிக் குறியீடுகளை ஒன்றுக்கொன்று இடமாற்றம் செய்து பயன்படுத்தலாம்.

(i) $P(1.5 < X < 3.5) = P(1.5 \le X < 3.5) = P(1.5 < X \le 3.5) = P(1.5 \le X \le 3.5)$



படம் 11.13

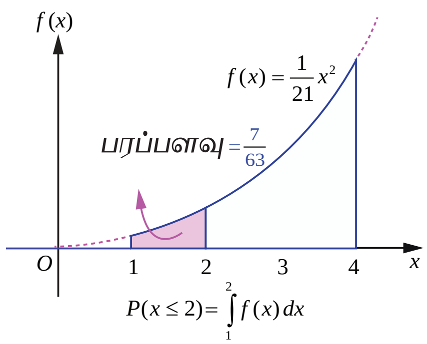
எனவே

$$P(1.5 < X < 3.5) = \int_{1.5}^{3.5} f(x)\,dx = \frac{1}{21}\int_{1.5}^{3.5} x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{21}\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{1}{21}\left(\frac{(3.5)^3 - (1.5)^3}{3}\right)$$

$$= \frac{79}{126}.$$

(ii) $P(X \le 2) = \int_{-\infty}^{2} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\,dx$



படம் 11.14

எனவே

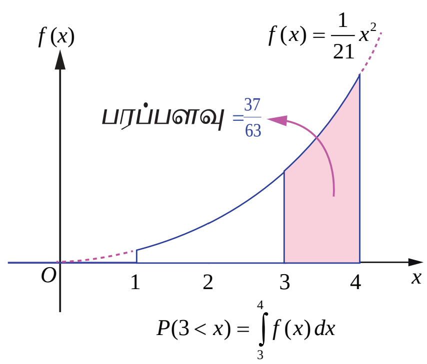
$$P(X \le 2) := 0 + \frac{1}{21}\int_{1}^{2} x^2\,dx = \frac{1}{21}\left(\frac{x^3}{3}\right)_1^2$$

$$= \frac{1}{21}\left(\frac{2^3 - 1^3}{3}\right) = \frac{7}{63}.$$

(iii) $P(3 < X) = \int_{3}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{3}^{4} f(x)\,dx + \int_{4}^{\infty} f(x)\,dx$

$$= \frac{1}{21}\int_{3}^{4} x^2\,dx + 0 = \frac{1}{21}\left(\frac{x^3}{3}\right)_3^4.$$

$$= \frac{1}{21}\left(\frac{4^3 - 3^3}{3}\right) = \frac{37}{63}$$



படம் 11.15

11.4.4 நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பிலிருந்து பரவல் சார்பு (Distribution function from Probability density function)

ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X –இன், நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு மற்றும் குவிவு பரவல் சார்பும் (அல்லது பரவல் சார்பும்) X –இன் அனைத்து நிகழ்தகவு தகவல்களைக் கொண்டிருக்கும். X –இன் நிகழ்தகவு பரவலை இவற்றில் ஏதேனுமொன்று தீர்மானிக்கும். X –இன் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பிலிருந்து தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X –இன் பரவல் சார்பைத் தீர்மானிக்கவும், மற்றும் மறுதலையாகவும் காணும் வழிமுறையைக் கற்போம்.

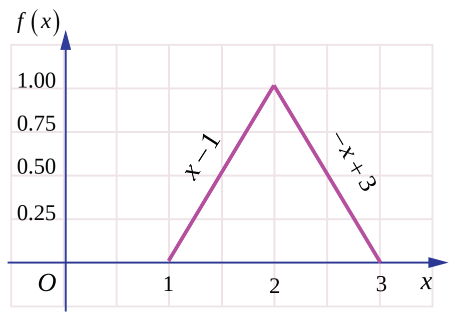
எடுத்துக்காட்டு 11.12

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & 1 \le x < 2 \\ -x+3, & 2 \le x < 3 \\ 0 & x\text{-இன் பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$$

என்பது சமவாய்ப்பு மாறி X –இன் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $f(x)$ எனில்

(i) பரவல் சார்பு $F(x)$ (ii) $P(1.5 \le X \le 2.5)$

ஆகியவற்றைக் காண்க.



நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு
படம் 11.16

தீர்வு

(i) வரையறைப்படி $F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$

$x<1$ எனும்போது, $F(x) = P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} 0\,du = 0\,.$

$1\le x<2$ எனும்போது, $F(x) = P(X\le x)=\int_{-\infty}^{1} 0du+\int_{1}^{x}(u-1)\,du$

$$= 0+\left[\frac{(u-1)^2}{2}\right]_1^x = \frac{(x-1)^2}{2}$$

$2\le x<3$ எனும்போது, $F(x) = P(X\le x)=\int_{-\infty}^{1} 0du+\int_{1}^{2}(u-1)\,du+\int_{2}^{x}(3-u)\,du$

$$= 0+\left[\frac{(u-1)^2}{2}\right]_1^2+\left[-\frac{(3-u)^2}{2}\right]_2^x$$

$$= \frac{1^2-0}{2}+\frac{1-(3-x)^2}{2} = 1-\frac{(3-x)^2}{2}$$

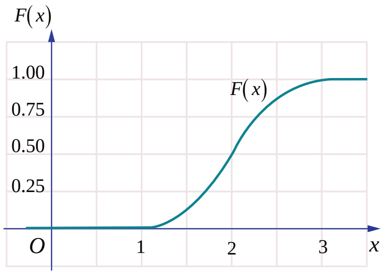
$x\ge 3$ எனும்போது, $F(x) = P(X\le x)=\int_{-\infty}^{1} 0du+\int_{1}^{2}(u-1)\,du+\int_{2}^{3}(3-u)\,du+\int_{3}^{x}0\;du$

$$= \int_{-\infty}^{1} 0du+\int_{1}^{2}(u-1)\,du+\int_{2}^{3}(3-u)\,du+\int_{3}^{x}0\,du$$

$$= 0+\left[\frac{(u-1)^2}{2}\right]_1^2+\left[-\frac{(3-u)^2}{2}\right]_2^3+0$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\,.$$

இவற்றின் மூலம் $F(x)=\begin{cases} 0, & -\infty<x<1 \\ \dfrac{(x-1)^2}{2}, & 1\le x<2 \\ 1-\dfrac{(3-x)^2}{2}, & 2\le x<3 \\ 1 & 3\le x<\infty \end{cases}$



பரவல் சார்பு
படம் 11.17

(ii) $P(1.5\le X\le 2.5) = F(2.5)-F(1.5)$

$$= \left(1-\frac{(3-2.5)^2}{2}\right)-\left(\frac{(1.5-1)^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1.75 - 0.25}{2} = 0.75$$

அல்லது

$$P(1.5 \le X \le 2.5) = \int_{1.5}^{2.5} f(x)\,dx = \int_{1.5}^{2} (x-1)\,dx + \int_{2}^{2.5} (-x+3)\,dx = 0.75$$

சோதிக்க: (i) $F(x)$ அனைத்து இடங்களிலும் தொடர்ச்சியா எனவும்

(ii) படம் 11.16–லிருந்து, முக்கோணத்தின் பரப்பு $= \frac{1}{2} bh = 1$ எனவும் சோதிக்க.

11.4.5 நிகழ்தகவு பரவல் சார்பிலிருந்து நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு (Probability density function from Probability distribution function)

தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X –ன் பரவல் சார்பு $F(x)$–லிருந்து நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பைத் தீர்மானிக்கும் வழிமுறையைக் கற்போம்.

ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X –ன் பரவல் சார்பு $F(x)$ என்க. இனி வகையிடல் இருக்கும் இடத்திலெல்லாம் $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$, என்பது நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பைக் குறிக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 11.13

T4S1E5

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X –இன் பரவல் சார்பு,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x \end{cases}$$ எனில்

(i) நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $f(x)$ (ii) $P(0.2 \le X \le 0.7)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

(i) $f(x)$ –ன் தொடர்ச்சி புள்ளிகளில் x–ஐப் பொறுத்து $F(x)$–ஐ வகையிட

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x \ge 1 \end{cases}$$ எனப் பெறுகிறோம்.

$f(x)$ எனும் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $x = 0$ –ல், அல்லது $x = 1$ –ல் தொடர்ச்சியற்று உள்ளது. $f(0)$ மற்றும் $f(1)$–ஐ எவ்வகையிலும் வரையறுக்கலாம். $f(0) = 1$, மற்றும் $f(1) = 0$ எனத் தெரிவு செய்வோம் .

எனவே $f(x)$ எனும் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x\text{-இன் பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$$

(ii) $$P(0.2 \le X \le 0.7) = F(0.7) - F(0.2)$$
$$= 0.7 - 0.2 = 0.5$$

அல்லது

$$P(0.2 \le X \le 0.7) = \int_{0.2}^{0.7} f(x)\,dx = \int_{0.2}^{0.7} 1\,dx = 0.5$$

குறிப்புரை

வரையறைப்படி, $P(X \le x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$ ஆகும். $F(x)$ அல்லது $f(x)$ ஆகிய இவற்றிலொன்றிலாவது நிகழ்தகவு $P(a < X < b)$ -ஐப் பெறலாம்.

குறிப்பு

மேற்குறிப்பிட்ட நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பினை

$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$ அல்லது $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \le 1 \\ 0, & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$

அல்லது $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$ எனவும் வரையறுக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 11.14

சமவாய்ப்பு மாறி X-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $f(x) = \begin{cases} k & 1 \le x \le 5 \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$ எனில்

(i) பரவல் சார்பு (ii) $P(X < 3)$ (iii) $P(2 < X < 4)$ (iv) $P(3 \le X)$

தீர்வு

$f(x)$ ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு என்பதால், $f(x) \ge 0$ மற்றும் $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

அதாவது $$\int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{5} k\,dx + \int_{5}^{\infty} 0\,dx = 1$$

$$0 + k(x)_1^5 + 0 = 1 \Rightarrow 4k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

எனவே நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பானது

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 1 \le x \le 5 \\ 0, & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$$

(i) பரவல் சார்பு

பரவல் சார்பு $$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du\ .$$

$x < 1$ எனும்போது $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \int_{-\infty}^{x} 0\,du = 0\,.$$

$1 \le x < 5$ எனும்போது $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \int_{-\infty}^{1} 0\,du + \int_{1}^{x} \frac{1}{4}\,du = \frac{1}{4}(x-1)\,.$$

$x \geq 5$ எனும்போது $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \int_{-\infty}^{1} 0du + \int_{1}^{5} \frac{1}{4}du + \int_{5}^{x} 0\,du = 1.$

அதாவது $\quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{x-1}{4}, & 1 \leq x \leq 5 \\ 1, & x > 5. \end{cases}$

(ii) $\quad P(X < 3) = P(X \leq 3) = F(3) = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$ ($F(x)$ தொடர்ச்சியாக இருப்பதால்).

(iii) $\quad P(2 < X < 4) = P(2 \leq X \leq 4) = F(4) - F(2) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$

(iv) $\quad P(3 \leq X) = P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

எடுத்துக்காட்டு 11.15

ஒரு மின்சாதனத்தின் ஆயுட்காலத்தைக் குறிக்கும் சமவாய்ப்பு மாறி X –ன் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} k\,e^{-2x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$ ஆகும்.

(i) k –ன் மதிப்பு காண்க (ii) பரவல் சார்பு (iii) $P(X < 2)$

(iv) X –ன் குறைந்தபட்சம் நான்கு நேர அலகுகளுக்கான நிகழ்தகவு காண்க (v) $P(X = 3)$.

தீர்வு

(i) நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $f(x)$ என்பதால், $f(x) \geq 0$ மற்றும் $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

அதாவது $\quad \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\infty} k\,e^{-2x}dx = 1$

$$0 + k\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)_0^{\infty} = 1 \Rightarrow k\left(\frac{e^{-\infty} - e^{0}}{-2}\right) = 1 \Rightarrow k = 2$$

எனவே நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} 2\,e^{-2x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}.$$

(ii) பரவல் சார்பு

வரையறைப்படி பரவல் சார்பு $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$

$x \leq 0$ எனும்போது $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \int_{-\infty}^{x} 0\,du = 0$

$x > 0$ எனும்போது $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_{0}^{x} 2\,e^{-2u}du = 2\left(\frac{e^{-2u}}{-2}\right)_0^{x} = 1 - e^{-2x}$

இதிலிருந்து பெறுவது $\quad F(x) = \begin{cases} 0, & , x \leq 0 \\ 1 - e^{-2x} & , x > 0 \end{cases}.$

(iii) $P(X < 2) = P(X \leq 2) = F(2) = 1 - e^{-2\times 2} = 1 - e^{-4}$ ($F(x)$ தொடர்ச்சி என்பதால்)

(iv) X குறைந்தபட்சம் நான்கு நேர அலகுகளுக்கான நிகழ்தகவு

$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - F(4) = 1 - (1 - e^{-2\times 4}) = e^{-8}$

(v) தொடர்ச்சியானதில், $x = a$ -ல் $f(x)$ என்பது Xஆனது a மதிப்பைக் கொள்வதற்கான நிகழ்தகவு அல்ல. அதாவது $f(a) \neq P(X = a)$ ஆகும். X தொடர்ச்சியான வகை எனில், அனைத்து $a \in \mathbb{R}$ -க்கு $P(X = a) = 0$ ஆகும். எனவே $P(X = 3) = 0$ ஆகும்.

பயிற்சி 11.3

1. சமவாய்ப்பு மாறி X -யின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $f(x) = \begin{cases} k\,x\,e^{-2x} & , \; x > 0 \\ 0 & , \; x \leq 0 \end{cases}$ எனில் k -ன் மதிப்பைக் காண்க.

2. சமவாய்ப்பு மாறி X -யின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 2 - x & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$.

‘(i) $P(0.2 \leq X < 0.6)$ (ii) $P(1.2 \leq X < 1.8)$ (iii) $P(0.5 \leq X < 1.5)$ ஆகியவற்றைக் காண்க

3. ஒரு பால் விற்பனையகத்தில் வினியோகிக்கப்படும் பாலின் அளவு சமவாய்ப்பு மாறி X என்க. குறைந்தபட்சம் 200 லிட்டர்கள் மற்றும் அதிகபட்சம் 600 லிட்டர்களுடன் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} k & 200 \leq x \leq 600 \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$$

   (i) k மதிப்பு காண்க. (ii) பரவல் சார்பு காண்க.

   (iii) 300 லிட்டர்கள் மற்றும் 500 லிட்டர்களுக்கிடையே தினசரி விற்பனை இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க?

4. சமவாய்ப்பு மாறி X -யின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $f(x) = \begin{cases} k\,e^{-\frac{x}{3}} & , \; x > 0 \\ 0 & , \; x \leq 0 \end{cases}$ எனில்

   (i) k மதிப்பு (ii) பரவல் சார்பு (iii) $P(X < 3)$

   (iv) $P(5 \leq X)$ (v) $P(X \leq 4)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

5. சமவாய்ப்பு மாறி X -யின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு,

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \leq x < 0 \\ -x + 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases} \quad \text{எனில்}$$

   (i) பரவல் சார்பு $F(x)$ (ii) $P(-0.5 \leq X \leq 0.5)$ காண்க.

6. சமவாய்ப்பு மாறி X -யின் பரவல் சார்பு $F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{2}\left(x^2 + x\right) & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < \infty \end{cases}$$

   எனில் (i) நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $f(x)$ (ii) $P(0.3 \leq X \leq 0.6)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

11.5 கணித எதிர்பார்ப்பு (Mathematical Expectation)

சமவாய்ப்பு மாறியின் முக்கியமான சிறப்பியல்புகளில் ஒன்று அதன் கணித எதிர்பார்ப்பு ஆகும். கணித **எதிர்பார்ப்பின்** பிற பெயர்கள் எதிர்பார்ப்பு மதிப்பு, சராசரி, மற்றும் முதல் விலக்கப் பெருக்கத் தொகை முதலியன.

வழக்கமாக எண் சராசரி முறையிலேயே கணித எதிர்பார்ப்பும் அதனையொட்டி வரையறுக்கப்படுகிறது.

n எண்களின் $a_1, a_2, a_2, \ldots, a_n$ –ன் சராசரி எண் மதிப்பு, $\dfrac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}$ ஆகும்.

$a_1, a_2, a_2, \ldots, a_n$ ஆகிய n எண்களின் முழு தொகுப்பையும் தொகுத்து ஒற்றை மதிப்பில் சுருக்கமாகவோ அல்லது வகைப்படுத்தவோ சராசரி உதவுகிறது.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 11.7

$6, 2, 5, 5, 2, 6, 2, -4, 1, 5$ எனும் பத்து எண்களைக் கருதுக.

$$\text{இதன் சராசரி } \frac{6+2+5+5+2+6+2-4+1+5}{10} = 3 \text{ ஆகும்.}$$

$6, 2, 5, 5, 2, 6, 2, -4, 1, 5$ ஆகிய 10 எண்களையும் சமவாய்ப்பு மாறி X–ன் மதிப்புகளாக கருதினால் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு

x	-4	1	2	5	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

ஆகும்.

சராசரிக்கான மேற்கண்ட கணக்கீட்டை

$-4\times\frac{1}{10}+1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{3}{10}+5\times\frac{3}{10}+6\times\frac{2}{10}=3$ எனவும் மாற்றி எழுதலாம்.

இவ்வெடுத்துக்காட்டின் மூலம் சமவாய்ப்பு மாறியின் ஒவ்வொரு மதிப்பையும் அதன் நிகழ்தகவால் பெருக்கி கிடைக்கும் பெருக்கல்களின் கூட்டலாக எந்தவொரு சமவாய்ப்பு மாறியின் சராசரி அல்லது எதிர்பார்ப்பு மதிப்பைப் பெறலாம் என்பது தெளிவாகிறது.

எனவே சராசரி $= \sum(x$ -இன் மதிப்பு $)\times($ நிகழ்தகவு $)$

சமவாய்ப்பு மாறி தனிநிலை எனில் இக்கூற்று மெய்யாகும். தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியைப் பொறுத்தவரையில், கணித எதிர்பார்ப்பும் கூட்டலுக்கு பதிலாக தொகையிடலின் அடிப்படையிலேயே அமையும்.

சமவாய்ப்பு மாறி X -க்கான நிகழ்தகவு பரவலுக்கு தொகுக்க பொதுவாக இரு அளவுகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. புள்ளியியலைப் பொறுத்தவரை ஒன்று மையப்போக்கு மற்றொன்று சிதறல் அல்லது நிகழ்தகவு பரவலின் மாறுபாடு எனலாம். நிகழ்தகவு பரவலின் மையப்போக்கின் அளவையே சராசரி ஆகும். மேலும் சிதறலின் அளவையே பரவற்படி அல்லது பரவலின் மாறுபாடு ஆகும். ஆனால் இவ்விரு அளவைகளும் ஒரு நிகழ்தகவு பரவலினை தனிச்சிறப்புப்பட இனங் காணவில்லை. அதாவது இரு வெவ்வேறு பரவல்களுக்கும் ஒரே சராசரியும் சிதறலும் அமையலாம். இருப்பினும் இத்தகு அளவைகள் எளிதாக கணிக்க இயலும். சமவாய்ப்பு மாறி X -இன் நிகழ்தகவுப் பரவலினைப் பற்றி கற்க உதவுகின்றன.

11.5.1 சராசரி (Mean)

வரையறை 11.8 (சராசரி)

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X -இன் நிகழ்தகவு பரவல் சார்பு $f(x)$ என்க. $E(X)$ அல்லது μ எனக் குறிப்பிடப்படும்

$$E(X)=\begin{cases}\sum\limits_{x} x\,f(x) & X \text{ தனிநிலை மாறி எனில்}\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx & X \text{ தொடர்ச்சியான மாறி எனில்}\end{cases}$$

என்பது எதிர்பார்ப்பின் மதிப்பு அல்லது சராசரி அல்லது X -இன் கணித எதிர்பார்ப்பு என வரையறுக்கப்படுகிறது.

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு பொதுவாக சமவாய்ப்பு மாறி கொள்ளும் மதிப்பாக இருக்காது. பன்முறை சார்பற்று செய்யப்படும் ஒரு சோதனையில் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியின் எதிர்பார்ப்பை புரிந்து கொள்ள இந்த எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு உதவும்.

தேற்றம் 11.3 (நிரூபணமின்றி)

நிகழ்தகவு பரவல் சார்பு $f(x)$ உடைய ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X என்க. $g(X)$ எனும் புதிய சமவாய்ப்பு மாறியின் சார்பின் எதிர்பார்ப்பு மதிப்பு,

$$E(g(X))=\begin{cases}\sum\limits_{x} g(x)\,f(x) & g(x) \text{ தனிநிலை மாறி எனில்}\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\,f(x)\,dx & g(x) \text{ தொடர்ச்சியான மாறி எனில்}\end{cases}$$

$g(X)=x^k$, எனில் மேற்கண்ட தேற்றம் தரும் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு சமவாய்ப்பு மாறி X–ன் ஆதிபுள்ளியில் உள்ள k -வது விலக்கப் பெருக்கத் தொகை எனப்படுகிறது.

$$E(X^k)=\begin{cases}\sum\limits_{x} x^k\,f(x) & X \text{ தனிநிலை மாறி எனில்}\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k\,f(x)\,dx & X \text{ தொடர்ச்சியான மாறி எனில்}\end{cases}$$

குறிப்பு

$k=0$ எனும்போது, வரையறைப்படி,

$$E(1)=\begin{cases}\sum\limits_{x} f(x)=1 & X \text{ தனிநிலை மாறி எனில்}\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1 & X \text{ தொடர்ச்சியான மாறி எனில்}\end{cases}$$

11.5.2 பரவற்படி அல்லது மாறுபாட்டளவை (Variance)

பரவற்படி எனும் புள்ளியியல் அளவை தரவுகளின் தொகுப்பின் சராசரி மதிப்பிலிருந்து அளவிடப்பட்ட தரவு எவ்வாறு மாறுபடுகிறது என்பதைக் கூறுகிறது. கணித ரீதியாக, மாறுபாட்டளவை என்பது ஒரு தரவு தொகுப்பின் எண்கணித சராசரியிலிருந்து விலகல்களின் வர்க்கங்களின் சராசரியாகும். மாறுபாடு, பரவல் மற்றும் சிதறல் ஆகிய சொற்கள் ஒத்தவையாகும், மேலும் பரவல் எவ்வாறு பரவுகிறது என்பதைக் குறிக்கிறது.

வரையறை 11.9 (பரவற்படி)

$V(X)$ or σ^2(or $\sigma_x^{\,2}$) எனக் குறிப்பிடப்படும் சமவாய்ப்பு மாறி X-ன் பரவற்படி

$$V(X) = E(X - E(X))^2 = E(X-\mu)^2 \text{ ஆகும்.}$$

பரவற்படியின் வர்க்கமூலம் திட்ட விலக்கம் எனப்படும். அதாவது திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{V(X)}$ ஆகும். சமவாய்ப்பு மாறியின் பரவற்படியும் திட்டவிலக்கமும் குறையற்ற எண்ணாகத்தான் இருக்கும்.

11.5.3 கணித எதிர்பார்ப்பு மற்றும் பரவற்படியின் பண்புகள் (Properties of Mathematical expectation and variance)

(i) $E(aX+b) = aE(X)+b$, இங்கு a மற்றும் b ஆகியன மாறிலிகள்.

நிரூபணம்

X ஒரு தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி எனில்,

$$E(aX+b) = \sum_{i=1}^{\infty}(ax_i+b)f(x_i) \qquad \text{(வரையறைப்படி)}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}(ax_i f(x_i) + bf(x_i))$$

$$= a\sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i) + b\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$$

$$= aE(X) + b(1) \qquad \left(\because \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1\right)$$

$$E(aX+b) = aE(X)+b.$$

இதேபோன்று, X ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி எனில், கூட்டலை தொகையிடலாக மாற்றி நிரூபிக்கலாம்.

கிளைத்தேற்றம் 1 :	$E(aX) = aE(X)$	($b = 0$ எனும்போது)
கிளைத்தேற்றம் 2 :	$E(b) = b$	($a = 0$ எனும்போது)

(ii) $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

நிரூபணம்

$E(x) = \mu$ என அறிவோம்.

$$Var(X) = E(X-\mu)^2$$

$$= E(X^2 - 2X\mu + \mu^2)$$

$$= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \qquad (\mu \text{ என்பது ஒரு மாறிலி})$$

$$= E(X^2) - 2\mu\mu + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

சமவாய்ப்பு மாறி X -இன் பரவற்படியைக் கணக்கிட ஒரு மாற்று வழி

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

(iii) $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$ **இங்கு a மற்றும் b ஆகியவை மாறிலிகள்.**

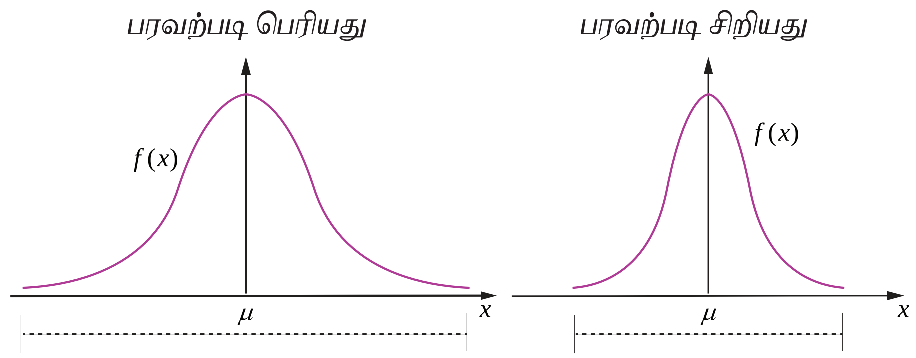
நிரூபணம்

$$\begin{aligned} Var(aX+b) &= E\left((aX+b) - E(aX+b)\right)^2 \\ &= E\left(aX + b - aE(X) - b\right)^2 \\ &= E\left(aX - aE(X)\right)^2 \\ &= E\left(a\left(X - E(X)\right)\right)^2 \\ &= a^2 E\left(X - E(X)\right)^2 . \end{aligned}$$

எனவே $\quad Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

கிளைத்தேற்றம் 3	:	$V(aX) = a^2 V(X)$	($b = 0$ எனும்போது)
கிளைத்தேற்றம் 4	:	$V(b) = 0$	($a = 0$ எனும்போது)

பரவற்படி என்பது சமவாய்ப்பு மாறியின் மதிப்புகளின் சராசரி μ-ஐப் பொறுத்து விலகல் பற்றிய தகவல்களைத் தருகிறது. σ^2 சிறியதாக இருந்தால் சமவாய்ப்பு மாறிகள் சராசரியைப் பொறுத்து அதிகமாகத் திரண்டு குவிந்ததாக அமையும். σ^2 பெரியதாக இருந்தால் சமவாய்ப்பு மாறியின் மதிப்புகள் சராசரியிலிருந்து மிகவும் விலகியிருக்கும் என்பது பொருளாகும்.



ஒரே சராசரியிலிருந்து வெவ்வேறு பரவற்படிகள்

படம் 11.18

ஒரே சராசரியும் ஆனால் வெவ்வேறு பரவற்படி கொண்ட இரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறிகளின் pdf–களை மேற்கண்ட படம் காண்பிக்கிறது. அவற்றின் வளைவரைகள் மணி வடிவில் உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 11.16

கீழ்க்காணும் சார்பு ஒரு நிகழ்தகவு நிறை சார்பினைக் குறிக்கிறது என்க.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	c^2	$2c^2$	$3c^2$	$4c^2$	c	$2c$

(i) c–ன் மதிப்பு (ii) சராசரி மற்றும் பரவற்படி காண்க.

தீர்வு

(i) $f(x)$ ஒரு நிகழ்தகவு நிறை சார்பு என்பதால், அனைத்து x -க்கும், $f(x) \geq 0$ மற்றும் $\sum_x f(x) = 1$.

ஆகையால், $\sum_x f(x) = 1$

$$c^2 + 2c^2 + 3c^2 + 4c^2 + c + 2c = 1$$

$$c = \frac{1}{5} \text{ அல்லது } -\frac{1}{2}.$$

அனைத்து x -க்கும், $f(x) \geq 0$ என்பதால், c -இன் சாத்தியமான மதிப்பு $\frac{1}{5}$ ஆகும்.

எனவே, நிகழ்தகவு நிறை சார்பானது

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

(ii) சராசரி மற்றும் பரவற்படி காண கீழ்க்காணும் அட்டவணையைப் பயன்படுத்துவோம்.

x	$f(x)$	$x\,f(x)$	$x^2 f(x)$
1	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$
2	$\frac{2}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{8}{25}$
3	$\frac{3}{25}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{27}{25}$
4	$\frac{4}{25}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{64}{25}$
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{25}{5}$
6	$\frac{2}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{72}{5}$
	$\sum f(x) = 1$	$\sum x\,f(x) = \frac{115}{25}$	$\sum x^2 f(x) = \frac{585}{25}$

சராசரி: $$E(X) = \sum x\,f(x) = \frac{115}{25} = 4.6$$

பரவற்படி: $$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum x^2 f(x) - \left(\sum x\,f(x)\right)^2$$

$$= \frac{585}{25} - \left(\frac{115}{25}\right)^2 = 23.40 - 21.16 = 2.24$$

எனவே சராசரி மற்றும் பரவற்படி முறையே 4.6 மற்றும் 2.24 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 11.17

8 வெள்ளை மற்றும் 4 கருப்பு பந்துகள் கொண்ட ஒரு கூடையிலிருந்து இரு பந்துகள் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒவ்வொரு கருப்பு பந்துக்கும் ₹.20 வெல்லும் தொகையாகவும் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒவ்வொரு வெள்ளை பந்துக்கும் ₹.10 தோற்கும் தொகையாகவும் கருதுக. எதிர்பார்க்கப்படும் வெல்லும் தொகை மற்றும் பரவற்படி காண்க.

தீர்வு

X என்பது வெல்லும் தொகை என்க. சாத்தியமான தேர்வுகளாவன (i) இரு பந்துகளுமே கருப்பு, அல்லது (ii) ஒரு வெள்ளை மற்றும் ஒரு கருப்பு (iii) இரண்டுமே வெள்ளை. எனவே X எனும் சமவாய்ப்பு மாறி கீழ்க்காணுமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது:

$$X \text{ (இரண்டுமே கருப்பு பந்துகள்)} = ₹\ 2(20) = ₹\ 40$$

$$X \text{ (ஒரு கருப்பு பந்து மற்றும் ஒரு வெள்ளைப் பந்து)} = ₹\ 20 - ₹\ 10 = ₹10$$

$$X \text{ (இரண்டுமே வெள்ளைப் பந்துகள்)} = ₹\ (-20) = -\ ₹\ 20$$

எனவே X கொள்ளும் மதிப்புகள் $40, 10$ மற்றும் -20 ஆகும்.

$$\text{மொத்த பந்துகள் } n = 12$$

$$\text{2 பந்துகள் தேர்ந்தெடுக்க மொத்த வழிகள்} = \binom{12}{2} = \frac{12 \times 11}{1 \times 2} = 66$$

$$\text{2 கருப்பு பந்துகள் தேர்ந்தெடுக்க வழிகள்} = \binom{4}{2} = 6$$

$$\text{ஒரு கருப்பு பந்து மற்றும் ஒரு வெள்ளை பந்து தேர்ந்தெடுக்க} = \binom{8}{1}\binom{4}{1} = 32$$

$$\text{2 வெள்ளை பந்துகள் தேர்ந்தெடுக்க வழிகள்} = \binom{8}{2} = 28$$

சமவாய்ப்பு மாறி X –இன் மதிப்புகள்	40	10	–20	மொத்தம்
நேர்மாறு பிம்பங்களிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	6	32	28	66

நிகழ்தகவு நிறை சார்பானது

X	40	10	–20	மொத்தம்
$f(x)$	$\frac{6}{66}$	$\frac{32}{66}$	$\frac{28}{66}$	1

சராசரி :

$$E(X) = \sum x\, f(x) = 40 \cdot \left(\frac{6}{66}\right) + 10 \cdot \left(\frac{32}{66}\right) + (-20) \cdot \left(\frac{28}{66}\right) = 0$$

அதாவது எதிர்பார்க்கப்படும் வெல்லும் தொகை 0 .

பரவற்படி :

$$E(X^2) = \sum x^2\, f(x) = 40^2 \cdot \left(\frac{6}{66}\right) + 10^2 \cdot \left(\frac{32}{66}\right) + (-20)^2 \cdot \left(\frac{28}{66}\right) = \frac{4000}{11}$$

$$\left(E(X)\right)^2 = 0^2 = 0$$

இதன்படி $V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \frac{4000}{11} - 0 = \frac{4000}{11}$

எனவே $E(X) = 0$ மற்றும் $\text{Var}(X) = \frac{4000}{11}$.

எடுத்துக்காட்டு 11.18

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$$

எனும் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு உள்ள ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X -க்கு சராசரி மற்றும் பரவற்படி காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ள பரவல் தொடர்ச்சியானது என்பதை கவனிக்கவும்.

சராசரி

வரையறைப்படி $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\left(\lambda e^{-\lambda x}\right) dx + \int_{0}^{\infty} x\left(\lambda e^{-\lambda x}\right) dx$$

(பெர்னோலி சூத்திரப்படி அல்லது பகுதி தொகையிடல் முறையினையும் பயன்படுத்தலாம்)

$$= 0 + \lambda \int_{0}^{\infty} x\left(e^{-\lambda x}\right) dx$$

$$= 0 + \lambda\left(\frac{\lfloor 1}{\lambda^2}\right)$$ (மிகை முழு எண் n -க்கு ,காமா தொகையிடல் n, $\int_{0}^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{\lfloor n}{\alpha^{n+1}}$)

$$= \frac{1}{\lambda}$$

பரவற்படி

வரையறைப்படி, $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)\, dx$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\left(\lambda e^{-\lambda x}\right) dx + \int_{0}^{\infty} x^2\left(\lambda e^{-\lambda x}\right) dx$$

(பெர்னோலி சூத்திரப்படி அல்லது பகுதி தொகையிடல் முறையினையும் பயன்படுத்தலாம்)

$$= 0 + \lambda \int_{0}^{\infty} x^2\left(e^{-\lambda x}\right) dx$$

$$= 0 + \lambda\left(\frac{\lfloor 2}{\lambda^3}\right) = \frac{2}{\lambda^2}$$ (காமா தொகையிடல் பயன்படுத்த)

எனவே $Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

ஆகையால் சராசரி மற்றும் பரவற்படி முறையே $\frac{1}{\lambda}$ மற்றும் $\frac{1}{\lambda^2}$.

பயிற்சி 11.4

1. கீழ்க்காணும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X –ன் நிகழ்தகவு நிறை சார்புகளுக்கு சராசரி மற்றும் பரவற்படி காண்க:

(i) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & x = 2, 5 \\ \frac{1}{5} & x = 0, 1, 3, 4 \end{cases}$ (ii) $f(x) = \begin{cases} \frac{4-x}{6} & x = 1, 2, 3 \end{cases}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} 2(x-1) & 1 < x << 2 \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$ (iv) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} & , \; x > 0 \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$

2. நான்கு சிவப்பு பந்துகள் மற்றும் மூன்று கருப்பு பந்துகள் கொண்ட ஒரு கூடையிலிருந்து பதிலீடாக இடாது அடுத்தடுத்து இரு பந்துகள் வெளியில் எடுக்கப்படுகின்றன. சிவப்பு பந்து வெளியில் எடுக்கும் சாத்திய கூறுகளை X என்க. X–ன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பையும் சராசரியையும் காண்க.
3. μ மற்றும் σ^2 ஆகியவை முறையே தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி X –ன் சராசரி மற்றும் பரவற்படி மற்றும் $E(X+3) = 10$ மற்றும் $E(X+3)^2 = 116$, எனில் μ மற்றும் σ^2 காண்க.
4. நான்கு சீரான நாணயங்கள் ஒரு முறை சுண்டப்படுகின்றன. தலைகளின் எண்ணிக்கை நிகழ்விற்கு நிகழ்தகவு நிறை சார்பு, சராசரி, மற்றும் பரவற்படி காண்க.
5. ஒரு பயணிகள் இரயில் ஒவ்வொரு அரை மணி நேரத்திற்கும் ஒரு நிலையத்திற்கு சரியான நேரத்தில் வந்து சேரும். ஒவ்வொரு நாள் காலையிலும், ஒரு மாணவர் தனது வீட்டிலிருந்து இரயில் நிலையத்திற்கு செல்கிறார். மாணவர் ரயில் நிலையத்தை அடையும் நேரத்திலிருந்து ரயிலுக்காக காத்திருக்கும் நேரத்தை X என நிமிடங்களில் குறிக்கலாம். X –ன் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & 0 < x < 30 \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$$

எனில் சமவாய்ப்பு மாறி X –ன் எதிர்பார்ப்பு மதிப்பை கணித்து விளக்குக.

6. கணினி தயாரிக்கப்படும்போது ஆயிரக்கணக்கான மணிநேரம் பயன்படுத்தப்படும் ஒரு மின்னணு சாதனமொன்றின் பழுதடையும் நேரத்தின் அடர்த்தி சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & x > 0 \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}.$$

ஆகும். இம்மின்னணு சாதனத்தின் எதிர்பார்க்கப்படும் ஆயுட்காலத்தை காண்க.

7. சமவாய்ப்பு மாறி X –ன் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} 16xe^{-4x} & , \; x > 0 \\ 0 & , \; x \le 0 \end{cases}$$

ஆகும். சமவாய்ப்பு மாறி X –ன் சராசரி மற்றும் பரவற்படி காண்க.

8. 600 டிக்கெட்டுகள் கொண்ட ஒரு லாட்டரியில் ஒரு பரிசு ₹. 200 –க்கும் நான்கு பரிசுகள் ₹.100 –க்கும், ஆறு பரிசுகள் ₹.50 –க்கும் எனக்கொடுக்கிறது. டிக்கெட் செலவு ₹.2 என்றால், ஒரு டிக்கெட்டின் எதிர்பார்க்கப்படும் வெற்றி தொகையைக் கண்டறியவும்.

11.6 அறிமுறை பரவல்கள் : சில சிறப்பு தனி நிலை பரவல்கள் (Theoretical Distributions: Some Special Discrete Distributions)

சராசரி மற்றும் பரவற்படியுடன் பலவேறு பொதுவான நிகழ்தகவு பரவல்களை முந்தையப் பகுதியில் கற்றோம். சில சிறப்பு வாய்ந்த தனிதிலை நிகழ்தகவு பரவல்களைக் காண்போம்.

இப்பகுதியில் பின்வரும் தனிநிலை பரவல்களைக் காண்போம்.

(i) ஒரு புள்ளி பரவல்

(ii) இருபுள்ளி பரவல்

(iii) பெர்னோலி பரவல்

(iv) ஈருறுப்பு பரவல்.

11.6.1 ஒரு புள்ளி பரவல் (The One point distribution)

$f(x) = P(X = x_0) = 1$ என வரையறுக்கப்படும் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு $f(x)$ –ன்படி ஒரு புள்ளி x_0 இருக்குமானால், சமவாய்ப்பு மாறி X –க்கு, ஒரு புள்ளி பரவற்படி அமையும்.

அதாவது ஒரு புள்ளியில் நிகழ்தகவு நிறை குவிந்துள்ளது.

குவிவு பரவல் சார்பு

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < x_0 \\ 1 & x_0 \le x < \infty \end{cases}$$

சராசரி :

$$E(X) = \sum_x x\,f(x) = x_0 \times 1 = x_0$$

பரவற்படி :

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \sum_x x^2 f(x) - \left(x_0\right)^2 = x_0^{\,2} - x_0^{\,2} = 0$$

எனவே சராசரி மற்றும் பரவற்படி முறையே x_0 மற்றும் 0 ஆகும்.

11.6.2 இரு புள்ளி பரவல் (The Two point distribution)

(a) சமச்சீரற்ற வகை: $f(x) = \begin{cases} p & , x = x_1 \\ 1-p & , x = x_2 \end{cases}$ இங்கு $0 < p < 1$.

என அமையுமாறு இரு மதிப்புகள் x_1 மற்றும் x_2 இருக்குமானால் சமவாய்ப்பு மாறி X –க்கு இரு புள்ளி பரவல் உண்டு.

குவிவு பரவல் சார்பு

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < x_1 \\ p & , x_1 \le x < x_2 \\ 1 & , x \ge x_2 \end{cases}$$

சராசரி :

$$E(X) = \sum_x x\,f(x) = x_1 \times p + x_2 \times (1-p) = px_1 + qx_2 \text{ இங்கு } q = 1-p.$$

பரவற்படி :

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \sum_x x^2 f(x) - \left(px_1 + qx_2\right)^2$$

$$= \left(x_1^{\,2}p + x_2^{\,2}q\right) - \left(px_1 + qx_2\right)^2 = pq\left(x_2 - x_1\right)^2$$

சராசரி மற்றும் பரவற்படி முறையே $px_1 + qx_2$ மற்றும் $pq\left(x_2 - x_1\right)^2$ ஆகும்.

(b) சீரான வகை :

$p = q = \frac{1}{2}$ எனும்போது, இரு புள்ளி பரவல்

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , x = x_1 \\ \frac{1}{2} & , x = x_2 \end{cases}$$

இங்கு $0 < p < 1$ என ஆகும். மேலும் குவிவு பரவல் சார்பு

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < x_1 \\ \frac{1}{2} & , x_1 \le x < x_2 \\ 1 & , x \ge x_2 \end{cases}$$

ஆகும். சராசரி மற்றும் பரவற்படி முறையே $\frac{x_1 + x_2}{2}$ மற்றும் $\frac{(x_2 - x_1)^2}{4}$ ஆகும்.

11.6.3 பெர்னோலி பரவல் (The Bernoulli distribution)

ஜேக்ஸ் பெர்னோலி (1654 - 1705)

வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு p ஆக இருக்கும் சார்பற்ற சோதனைகளை முதலில் ஆராய்ந்தது சுவிஸ் கணிதவியலாளர் ஜேக்ஸ் பெர்னோலி(Jacques Bernoulli) (1654–1705)ஆவார். அவர் காலமாகி எட்டு ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு 1713 இல் அவரது மருமகன் நிக்கோலஸால் வெளியிடப்பட்ட அவரது நூலான ஊகித்தல் கலையில், பெர்னோலி இதுபோன்ற சோதனைகளின் எண்ணிக்கை பெரிதாக இருந்தால், வெற்றிகளின் விகிதம் p க்கு நெருக்கமாக நிகழ்தகவு 1-க்கு அருகில் இருக்கும் எனச் சுட்டிக் காட்டினார்.

நிகழ்தகவு கருத்தியலில் சுவிஸ் கணிதவியலாளர் ஜேக்ஸ் பெர்னோலியின் பெயரால் விளங்கும் பெர்னோலி பரவல் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியின் தனிநிலை நிகழ்தகவு பரவலாகும். ஒன்றையொன்று விலக்கும் மற்றும் யாவுமளாவிய வகைகளில் அதாவது வெற்றி அல்லது தோல்வி (எடுத்துக்காட்டாக: தலைகள் அல்லது பூக்கள், குறைபாடுள்ளவை அல்லது குறைபாடற்ற நல்ல பொருள்கள், பிறப்பு அல்லது இறப்பு அல்லது பல்வேறு சாத்திய ஜோடிகள்) என வகைப்படுத்தப்படும் ஒரு சமவாய்ப்பு சோதனை பெர்னோலி சோதனையாகும். சோதனைக்கு சோதனை மாறாது இருக்கும் வெற்றியின் நிகழ்தகவு அமையுமாறு பலமுறை சார்பற்ற வகையில் மேற்கொள்ளும் பெர்னோலி சோதனை மூலம் பெர்னோலி சோதனைத் தொடர் நேரிடுகிறது.

வரையறை 11.10 (பெர்னோலி பரவல்)

X (வெற்றி) = 1 மற்றும் X (தோல்வி) = 0 என வரையறுக்கப்படும் ஒரு பெர்னோலி சோதனையுடன் இணைந்த சமவாய்ப்பு மாறி X –க்கு ,

$$f(x) = \begin{cases} p & x = 1 \\ q = 1 - p & x = 0 \end{cases}, \text{ இங்கு } 0 < p < 1$$

X என்பது பெர்னோலி சமவாய்ப்பு மாறி எனவும் மற்றும் $f(x)$ என்பது பெர்னோலிபரவல் எனவும் முறையே அழைக்கப்படுகிறது

அல்லது சமானமாக

வெற்றி p ஆகிய நிகழ்தகவு உடைய பெர்னோலி பரவலை பின்பற்றும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி, பண்பளவையாக அழைக்கப்பெறும் p மற்றும் $X \sim Ber(p)$ எனக் குறிப்பிடப்பட்டால், X –இன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு

$$f(x) = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1 \text{ ஆகும்.}$$

பெர்னோலி பரவலின் குவிவு பரவல்

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \ x<0 \\ q=1-p & , \ 0\le x<1 \\ 1 & , \ x\ge 1\end{cases}$$ எனப்படும்.

சராசரி :

$$E(X) = \sum_x x\, f(x) = 1\times p + 0\times(1-p) = p\,,$$

0 மற்றும் 1 மதிப்புகளை மட்டுமே X கொள்வதால் , அதன் எதிர்பார்ப்பு மதிப்பு p என்பதைப் "பார்த்ததில்லை" எனக் கூறலாம்.

பரவற்படி :

$$V(X) = E(X^2)-\left(E(X)\right)^2 = \sum_x x^2 f(x) - p^2$$

$$= \left(1^2 p + 0^2 q\right) - p^2 = p(1-p) = pq \quad \text{இங்கு } q = 1-p$$

> **பண்பளவை p, சராசரி μ மற்றும் பரவற்படி σ^2 ஆகியவை உடைய பெர்னோலி பரவலைப் பின்பற்றும் X ஒரு பெர்னோலி சமவாய்ப்பு மாறி எனில்**
>
> $\mu = p$ **மற்றும்** $\sigma^2 = pq$

$p=q=\dfrac{1}{2}$ எனும்போது, பெர்னோலி பரவல்

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & , \ x=0 \\ \dfrac{1}{2} & , \ x=1\end{cases} \quad \text{இங்கு } 0<p<1.$$

மற்றும் குவிவு பரவல் $F(x)=\begin{cases}0 & , \ x<0 \\ \dfrac{1}{2} & , \ 0\le x<1 \\ 1 & , \ x\ge 1\end{cases}$

ஆகும். சராசரி மற்றும் பரவற்படி முறையே $\dfrac{1}{2}$ மற்றும் $\dfrac{1}{4}$ ஆகும்.

11.6.4 ஈருறுப்பு பரவல் (The Binomial Distribution)

தலைகள் அல்லது பூக்கள், வெற்றி அல்லது தோல்வி, குறைபாடு உடைய பொருள் அல்லது நல்ல பொருள் அல்லது இத்தகைய சாத்தியமான சோடிகள் இருக்கும் இரண்டு சாத்தியக் கூறுகளை மட்டுமே கொண்டிருக்கும் தொடர்ந்து நிகழ்த்தப்படும் சில சோதனைகளில் ஈருறுப்பு பரவல் முக்கியமாக பயன்படுத்தப்படுகிறது. அத்தகைய ஒவ்வொரு கூறுகளின் நிகழ்தகவினையும் பெருக்கல் விதியினைப் பயன்படுத்தி சில சமயங்களில் கிளை வரைபடத்துடன் கணிக்கப்படுகிறது.

ஒரு நாணயம் ஒரு முறை சுண்டப்படுகிறது என்க. தலைகளின் எண்ணிக்கையை X குறிக்கிறது என்க. இனி $X \sim Ber(p)$, ஏனெனில் p அல்லது $1-p$ எனும் நிகழ்தகவுடன் தலை$\left(X=1\right)$ அல்லது பூ $\left(X=0\right)$ ஆகிய இரண்டில் ஒன்று மட்டுமே கிடைக்கிறது.

ஒரு நாணயம் n தடவை சுண்டப்படுகிறது என்க. தலைகளின் எண்ணிக்கையை X குறிக்கிறது என்க. இனி $0,1,2,\ldots,n$ ஆகிய மதிப்புகளை X கொள்கிறது. தலைகளின் எண்ணிக்கை x –க்கான நிகழ்தகவு

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

$X=x$,என்பது n சுண்டல்களில் x தலைகளின் சேர்ப்பிப்பிற்கு ஒத்ததாக, அதாவது $\binom{n}{x}$ வழிகளில் தலைகளும் மற்றும் மீதமுள்ள வழிகளில் $n-x$ பூக்களும் என அமைகிறது. எனவே ஒவ்வொரு விளைவின் நிகழ்தகவு $p^x(1-p)^{n-x}$ ஆகும். n மதிப்பு 30 –க்கும் குறைவாக இருக்கும்போது ஈருறுப்பு தேற்றம் பயன்படுத்துவது பொருத்தமானதாகும்.

வரையறை 11.11 (ஈருறுப்பு சமவாய்ப்பு மாறி)

n –தொடர்ச்சியான முயற்சிகளில் உள்ள வெற்றிகளின் எண்ணிக்கையை X குறித்தால்,

(i) n –தொடர்ச்சியான முயற்சிகள் சார்பற்றவையாகவும் மற்றும் n –எண்ணிடத் தக்கவையாகவும்

(ii) 'வெற்றி' அல்லது 'தோல்வி' எனப் பெயரிடப்பட்ட இரு சாத்தியமான விளைவுகளை மட்டுமே ஒவ்வொரு முயற்சியும் கொண்டிருக்கவும்

(iii) ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் p எனக் குறிக்கப்படும் வெற்றியின் நிகழ்தகவு மாறாது இருக்கவும், அமைந்தால் ஒரு தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி X ஈருறுப்பு சமவாய்ப்பு மாறி என அழைக்கப்படும்.

வரையறை 11.12 (ஈருறுப்பு பரவல்)

ஈருறுப்பு சமவாய்ப்பு மாறி X என்பது n–சார்பற்ற முயற்சிகளில் வெற்றிகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கிறது என்க. வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு p எனக் கொண்டால், தோல்விக்கான நிகழ்தகவு $q=1-p$ ஆகும். ஈருறுப்பு பரவலை $X\sim B(n,p)$ எனக் குறிப்பர்.

X –ன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு $f(x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x},\quad x=0,1,2,...,n.$ ஆகும்.

ஈருறுப்பு விரிவாக்கத்திலிருந்து பரவலின் பெயர் பெறப்பட்டது. a மற்றும் b, மாறிலிகளுக்கு, ஈருறுப்பு விரிவாக்கம்,

$$(a+b)^n=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}a^x b^{n-x} \text{ ஆகும்.}$$

ஒரு தனி முயற்சியில் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு p என்க. இனி, $a=p$ மற்றும் $b=1-p$ என்பதைப் ஈருறுப்பு விரிவாக்கத்தில் பயன்படுத்தும்போது ஈருறுப்பு சமவாய்ப்பு மாறிகளின் நிகழ்தகவுகளின் கூடுதல் 1 எனக் காணலாம். சோதனையில் ஒவ்வொரு முயற்சியும் இரு விளைவுகள், {வெற்றி, தோல்வி} என வகைபடுத்துவதால், பரவல் "ஈர்"–உறுப்பு என அழைக்கப்படுகிறது.

p மற்றும் n எனும் பண்பளவைகளைக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவலினைப் பின்பற்றும் ஓர் ஈருறுப்பு சமவாய்ப்பு மாறி X என்க. சராசரி μ மற்றும் பரவற்படி σ^2 முறையே

$$\mu=np \quad \text{and} \quad \sigma^2=np(1-p)$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு பொதுவாக சமவாய்ப்பு மாறி கொள்ளும் மதிப்பாக இருக்காது. பன்முறை சார்பற்று செய்யப்படும் ஒரு சோதனையில் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியின் எதிர்பார்ப்பைப் புரிந்து கொள்ள இந்த எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு உதவும். $p=0.5$ எனும்போது அல்லது n பெரியதாக இருக்கும்போது ஈருறுப்பு பரவலின் அமைப்பு சமச்சீராக அமையும்.

$p = q = \frac{1}{2}$ எனும்போது, ஈருறுப்பு பரவல்

$$f(x) = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, n. \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது,

$$f(x) = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

சராசரி மற்றும் பரவற்படி முறையே $\frac{n}{2}$ மற்றும் $\frac{n}{4}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 11.19

பின்வருவனவற்றிற்கு ஈருறுப்பு பரவல் காணவும்.

(i) ஐந்து சீரான நாணயங்கள் ஒரு முறை சுண்டப்படுகின்றன மற்றும் தலைகளின் எண்ணிக்கையை X குறிக்கிறது என்க.

(ii) ஒரு சீரான பகடை 10 முறை உருட்டப்படுகிறது மற்றும் எண் 4 தோன்றுவதின் எண்ணிக்கையை X குறிக்கிறது என்க.

தீர்வு

(i) ஐந்து சீரான நாணயங்கள் ஒருமுறை சுண்டப்படுகின்றன. நாணயங்கள் சீரானவை என்பதால் ஓர் ஒற்றை நாணயத்திலிருந்து ஒரு தலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $p = \frac{1}{2}$ மற்றும் $q = 1 - p = \frac{1}{2}$

ஐந்து நாணயங்களிலிருந்து தலைகள் கிடைப்பதற்கான எண்ணிக்கையை X குறிக்கிறது என்க. $0, 1, 2, 3, 4$ மற்றும் 5 ஆகிய மதிப்புகளைக் கொள்ளும் ஈருறுப்பு சமவாய்ப்பு மாறி X என்க. $n = 5$ மற்றும் $p = \frac{1}{2}$ ஆகும். அதாவது $X \sim B\left(5, \frac{1}{2}\right)$ ஆகும்.

எனவே ஈருறுப்பு பரவல்

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

என்பது

$$f(x) = \binom{5}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, 5 \text{ என்றாகும்.}$$

அதாவது,

$$f(x) = \binom{5}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

(ii) ஒரு சீரான பகடை 10 முறை உருட்டப்படுகிறது மற்றும் எண் 4 தோன்றுவதின் எண்ணிக்கையை X குறிக்கிறது என்க. $0, 1, 2, 3, \ldots 10$ எனும் மதிப்புகளைக் கொள்ளும் ஈருறுப்பு சமவாய்ப்பு மாறி X என்க. $n = 10$ மற்றும் $p = \frac{1}{6}$ ஆகும். அதாவது $X \sim B\left(10, \frac{1}{6}\right)$ ஆகும்.

பகடையில் நான்கு கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $p=\frac{1}{6}$ மற்றும் $q=1-p=\frac{5}{6}$ ஆகும்.

எனவே ஈருறுப்பு பரவல்

$$f(x)=\binom{10}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^{x}\left(\frac{5}{6}\right)^{10-x},\qquad x=0,1,2,\ldots,10.$$

■

எடுத்துக்காட்டு 11.20

பத்து வினாக்கள் கொண்ட ஒரு பல்வாய்ப்புத் தேர்வில், ஒவ்வொரு வினாவிற்கும் நான்கு கவனச் சிதறல் விடைகளில் ஒன்று சரியான விடையாகும். ஊகத்தின் அடிப்படையில் ஒரு மாணவர் விடையளிக்கிறார் என்க. சரியான விடைகளின் எண்ணிக்கையை X குறிக்கிறது எனில், (i) ஈருறுப்பு பரவல் (ii) மாணவர் ஏழு சரியான விடைகள் அளிப்பதற்கான நிகழ்தகவு (iii) குறைந்தபட்சம் ஒரு விடை சரியானதாக இருக்க நிகழ்தகவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

(i) வெற்றிகளின் எண்ணிக்கையை X குறிப்பதால், X கொள்ளும் மதிப்புகள் $0,1,2,\ldots,10$ ஆகும்.

வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு $p=\frac{1}{4}$ மற்றும் தோல்விக்கு $q=1-p=\frac{3}{4}$, மற்றும் $n=10$ ஆகும்.

எனவே X ஈருறுப்பு பரவலை அனுசரிக்கிறது. $X\sim B\left(10,\frac{1}{4}\right)$ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது.

இதிலிருந்து பெறுவது , $f(x)=\binom{10}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{10-x}$, $x=0,1,2,\ldots,10$ ஆகும்.

(ii) ஏழு சரியான விடைகளை அளிப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(X=7)=f(7)=\binom{10}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^{7}\left(\frac{3}{4}\right)^{10-7}=120\left(\frac{3^3}{4^{10}}\right)$$

ஒரு மாணவர் ஏழு சரியான விடைகளை அளிப்பதற்கான நிகழ்தகவு $120\left(\frac{3^3}{4^{10}}\right)$ ஆகும்.

(iii) குறைந்தபட்சம் ஒரு சரியான விடையளிப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)$$

$$=1-\binom{10}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^{0}\left(\frac{3}{4}\right)^{10}=1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}.$$

மாணவர் குறைந்தபட்சம் ஒரு சரியான விடையளிப்பதற்கான நிகழ்தகவு $1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$ ஆகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 11.21

ஓர் ஈருறுப்பு மாறி X யின் சராசரி மற்றும் பரவற்படி முறையே 2 மற்றும் 1.5 ஆகும். காண்க (i) $P(X=0)$ (ii) $P(X=1)$ (iii) $P(X\geq 1)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

நிகழ்தகவு கண்டறிய n மற்றும் p ஆகிய பண்பளவைகளின் மதிப்புகளைக் கண்டறியவேண்டும்.

தரப்பட்ட தகவல்களிலிருந்து,

$$\text{சராசரி}=np=2 \text{ மற்றும் பரவற்படி}=npq=1.5$$

இதிலிருந்து பெறுவது $\dfrac{npq}{np}=\dfrac{1.5}{2}=\dfrac{3}{4}$

$$q = \frac{3}{4} \text{ மற்றும் } p = 1 - q = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$np = 2, \text{ என்பதன் மூலம் } n = \frac{2}{p} = 8. \text{ எனவே } X \sim B\left(8, \frac{1}{4}\right).$$

எனவே நிகழ்தகவு பரவலானது

$$P(X = x) = f(x) = \binom{8}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{8-x} \qquad x = 0, 1.2, \ldots 8$$

(i) $$P(X = 0) = f(0) = \binom{8}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^{0}\left(\frac{3}{4}\right)^{8-0} = \left(\frac{3}{4}\right)^{8}$$

(ii) $$P(X = 1) = f(1) = \binom{8}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^{1}\left(\frac{3}{4}\right)^{8-1} = 2\left(\frac{3}{4}\right)^{7}$$

(iii) $$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{8}$$

எடுத்துக்காட்டு 11.22

ABC குழுமம் தயாரிக்கும் பொருட்களில் சராசரியாக, 20% பொருட்கள் குறைபாடுள்ளவை எனக் கண்டறியப்பட்டது. சமவாய்ப்பு முறையில் இதிலிருந்து 6 பொருட்கள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. மேலும் குறைபாடுள்ள பொருட்களின் எண்ணிக்கையை X குறித்தால் (i) இரு பொருட்கள் குறைபாடுள்ளவை (ii) அதிகபட்சம் ஒரு பொருள் குறைபாடுள்ளது (iii) குறைந்தபட்சம் இரு பொருட்கள் குறைபாடுள்ளவை. ஆகியவற்றிற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டது $n = 6$.

குறைபாடுள்ள ஒரு பொருளைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{20}{100}$, அதாவது $p = \frac{1}{5}$.

$q = 1 - p = \frac{4}{5}$ குறைபாடுள்ள பொருட்களின் எண்ணிக்கையை X குறிப்பதால், X கொள்ளும் மதிப்புகள் $0, 1, 2, \ldots, 6$ ஆகும்.

எனவே X ஈருறுப்பு பரவலைப் பின்பற்றுகிறது. அதனை $X \sim B\left(6, \frac{1}{5}\right)$ எனக் குறிப்பிடலாம்.

இதிலிருந்து பெறுவது $$f(x) = \binom{6}{x}\left(\frac{1}{5}\right)^{x}\left(\frac{4}{5}\right)^{6-x}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, 6.$$

(i) இரு குறைபாடுகளுள்ள பொருட்களுக்கான நிகழ்தகவு,

$$P(X = 2) = f(2) = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{6-2} = 15\left(\frac{4^4}{5^6}\right)$$

(ii) அதிகபட்சம் ஒரு பொருள் குறைபாடுள்ளதாக இருக்க நிகழ்தகவு,

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$= \binom{6}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^{0}\left(\frac{4}{5}\right)^{6-0} + \binom{6}{1}\left(\frac{1}{5}\right)^{1}\left(\frac{4}{5}\right)^{6-1}$$

P3I8U2

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^6 + (6)\left(\frac{4^5}{5^6}\right) = 2\left(\frac{4}{5}\right)^5$$

அதிகபட்சம் ஒரு பொருள் குறைபாடுள்ளதாக இருக்க நிகழ்தகவு $2\left(\frac{4}{5}\right)^5$.

(iii) குறைந்தபட்சம் இரு பொருட்கள்குறைபாடுள்ளதாக இருக்க நிகழ்தகவு

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 2\left(\frac{4}{5}\right)^5$$

குறைந்தபட்சம் இரு பொருட்கள்குறைபாடுள்ளதாக இருக்க நிகழ்தகவு $1 - 2\left(\frac{4}{5}\right)^5$.

பயிற்சி 11.5

1. கீ ழ்க்காணும் ஈருறுப்பு பரவல் $B(n, p)$ –க்காக $P(X = k)$ என்பதைக் கணிக்க

   (i) $n = 6,\ p = \frac{1}{3},\ k = 3$ (ii) $n = 10,\ p = \frac{1}{5},\ k = 4$ (iii) $n = 9,\ p = \frac{1}{2},\ k = 7$

2. எந்த முயற்சியிலும் ஒரு இலக்கைத் திரு. Q தாக்க நிகழ்தகவு $\frac{1}{4}$ ஆகும். பத்து முறை இலக்கை அவர் தாக்க முயற்சிக்கிறார் எனக் கொள்க. இலக்கைத் தாக்க (i) சரியாக 4 முறைகள் (ii) குறைந்தபட்சம் ஒரு முறை தாக்குவதற்கு ஆகியவற்றிற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

3. கீழ்க்காணும் சோதனைகளில் ஈருறுப்பு பரவலைப் பயன்படுத்தி சமவாய்ப்பு மாறி X –ன் சராசரி மற்றும் பரவற்படி காண்க.

   (i) 100 தடவை ஒரு சீரான நாணயம் சுண்டப்படுகிறது. தலைகளின் எண்ணிக்கையை X குறிக்கிறது.

   (ii) 240 தடவை ஒரு சீரான பகடை சுண்டப்படுகிறது. எண் நான்கு தோன்றுவதற்கான எண்ணிக்கையை X குறிக்கிறது.

4. ஒரு மின்சோதனையில் ஒரு குறிப்பிட்ட சாதனத்தின் தாங்கும் திறனுக்கான நிகழ்தகவு $\frac{3}{4}$. சோதிக்கப்பட ஐந்தில் சரியாக மூன்று சாதனங்களின் தாங்கு திறனுக்கான நிகழ்தகவைக் கண்டறிக.

5. ஒரு உற்பத்தியாளரிடமிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட மின்வகைக் கருவியை ஒரு விற்பனையாளர் கொள்முதல் செய்கிறார். உற்பத்தியாளர் கருவியின் பழுதாகும் சதவீதம் 5% எனக் கூறுகிறார். கொள்முதல் செய்யப்பட்ட சரக்கிலிருந்து 10 பொருட்களை விற்பனையாளரின் பரிசோதகர் சமவாய்ப்பு முறையில் பரிசோதிக்கிறார். அவற்றுள் (i) குறைந்தபட்சம் ஒரு பழுதான பொருள் (ii) சரியாக இரு பொருட்கள் பழுதாக இருக்க நிகழ்தகவு காண்க.

6. ஒரு பாதரச ஆவி விளக்கின் பயன்படும் காலம் குறைந்தபட்சம் 600 மணித்துளிகளுக்கான நிகழ்தகவு 0.9 எனில் அத்தகைய 12 விளக்குகளில்

   (i) சரியாக 10 விளக்குகளின் பயன்படும் காலம் குறைந்தபட்சம் 600 மணித்துளிகளுக்கான நிகழ்தகவு;

   (ii) குறைந்தபட்சம் 11 விளக்குகளின் பயன்படும் காலம் குறைந்தபட்சம் 600 மணித்துளிகளுக்கான நிகழ்தகவு

   (iii) குறைந்தபட்சம் 2 விளக்குகளின் பயன்படும் காலம் குறைந்தபட்சம் 600 மணித்துளிகள் கூட இல்லாததற்கான நிகழ்தகவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

7. ஓர் ஈருறுப்பு சமவாய்ப்பு மாறி X –ன் சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் முறையே 6 மற்றும் 2 ஆகும். (i) நிகழ்தகவு நிறை சார்பு (ii) $P(X=3)$ (iii) $P(X\geq 2)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

8. $4P(X=4)=P(X=2)$ மற்றும் $n=6$ எனும்படி உள்ள $X\sim B(n,p)$ –ன் பரவல், சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

9. 5 சார்பற்ற சோதனைகளை உடைய ஒரு ஈருறுப்பு பரவலின் 1 மற்றும் 2 வெற்றிக்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.4096 மற்றும் 0.2048 ஆகும். ஈருப்பு பரவலின் சராசரி மற்றும் பரவற்படி காண்க.

பயிற்சி 11.6

கொடுக்கப்பட்ட நான்கு மாற்று விடைகளிலிருந்து சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினைத் தேர்ந்தெடுக்கவும் :

W3X8K4

1. X எனும் சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^3} & x\geq 1\\ 0 & x<1\end{cases}$$

எனில், இவற்றில் எந்த கூற்று சரியானது?

(1) சராசரி மற்றும் பரவற்படி உள்ளது (2) சராசரி உள்ளது ஆனால் பரவற்படி இல்லை

(3) சராசரி ,பரவற்படி இரண்டுமே இல்லை (4) பரவற்படி உள்ளது ஆனால் சராசரி இல்லை

2. $2l$ நீளமுள்ள ஒரு கம்பி சமவாய்ப்பு முறையில் இரு துண்டாக உடைந்தது. இரு துண்டுகளில் குட்டையானதற்கான நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{l} & 0<x<l\\ 0 & l\leq x<2l\end{cases}$$

எனில் குட்டையானப் பகுதிக்கான சராசரி மற்றும் பரவற்படி முறையே,

(1) $\dfrac{l}{2},\ \dfrac{l^2}{3}$ (2) $\dfrac{l}{2},\ \dfrac{l^2}{6}$ (3) $l,\ \dfrac{l^2}{12}$ (4) $\dfrac{l}{2},\ \dfrac{l^2}{12}$

3. ஒரு விளையாட்டில் அறுபக்க பகடையை விளையாடுபவர் உருட்டுகிறார். பகடை எண் 6 –ஐக் காட்டினால், விளையாடுபவர் ₹ 36 வெல்லுவார், இல்லையெனில் ₹ k^2, தோற்பார். இங்கு k என்பது பகடை காட்டும் எண். $k=\{1, 2, 3, 4, 5\}$. விளையாட்டில் எதிர்பார்க்கப்படும் வெல்லும் தொகை ₹

(1) $\dfrac{19}{6}$ (2) $-\dfrac{19}{6}$ (3) $\dfrac{3}{2}$ (4) $-\dfrac{3}{2}$

4. 1, 2, 3, 4, 5, 6 எண்ணிடப்பட்ட அறுபக்க பகடையும் 1, 2, 3, 4 என எண்ணிடப்பட்ட நான்கு பக்க பகடையும் சோடியாக உருட்டப்பட்டு இரண்டும் காட்டும் எண்களின் கூட்டல்தொகை தீர்மானிக்கப்படுகிறது . இந்த கூட்டலைக் குறிக்கும் சமவாய்ப்பு மாறி X என்க. இனி 7 –இன் நேர்மாறு பிம்பத்தின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

5. $n=25$ மற்றும் $p=0.8$ என்று உள்ள ஈருறுப்பு பரவல் கொண்ட சமவாய்ப்பு மாறி X எனில் X –ன் திட்ட விலக்கத்தின் மதிப்பு

(1) 6 (2) 4 (3) 3 (4) 2

6. n முறை சுண்டப்படும் ஒரு நாணயத்தினால் பெறப்படும் தலை மற்றும் பூக்களின் எண்ணிக்கை வேறுபாட்டை X குறிக்கிறது என்க. X -இன் சாத்திய மதிப்புகள்

(1) $i+2n,\ i = 0,1,2...n$ (2) $2i-n,\ i = 0,1,2...n$ (3) $n-i,\ i = 0,1,2...n$ (4) $2i+2n,\ i = 0,1,2...n$

7. $f(x)=\dfrac{1}{12}$, $a<x<b$ எனும் சார்பு ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பினைக் குறிக்கிறது எனில், பின்வருவனவற்றுள் எது a மற்றும் b -இன் மதிப்புகளாக இராது?

(1) 0 மற்றும் 12 (2) 5 மற்றும் 17 (3) 7 மற்றும் 19 (4) 16 மற்றும் 24

8. ஒரு கால்பந்தாட்ட அரங்கிற்கு ஒரே பள்ளியிலிருந்து நான்கு பேருந்துகள் 160 மாணவர்களை ஏற்றிக்கொண்டு வருகிறது. அப்பேருந்துகளில் முறையே $42, 36, 34$, மற்றும் 48 மாணவர்கள் பயணிக்கின்றனர். சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு மாணவர் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறார். அவ்வாறு சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட மாணவர் பயணிக்கும் பேருந்திலுள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை X குறிக்கிறது என்க. நான்கு பேருந்து ஓட்டுனர்களில் ஒருவர் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றனர். அவ்வாறு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஓட்டுநர் ஓட்டி வரும் பேருந்திலுள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை Y குறிக்கிறது என்க. இனி $E(X)$ மற்றும் $E(Y)$ முறையே

(1) $50, 40$ (2) $40, 50$ (3) $40.75, 40$ (4) $41, 41$

9. இரு நாணயங்கள் சுண்டப்படுகின்றன. முதல் நாணயத்தில் தலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.6 மற்றும் இரண்டாவது நாணயத்தின் மூலம் தலை கிடைக்க நிகழ்தகவு 0.5 ஆகும். சுண்டி விடுதலின் முடிவுகள் சார்பற்றவை எனக் கருதுக. X என்பது மொத்த தலைகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கிறது என்க. $E(X)$ -ன் மதிப்பு

(1) 0.11 (2) 1.1 (3) 11 (4) 1

10. பலவுள் தேர்வு ஒன்றில் 5 வினாக்கள் ஒவ்வொன்றிற்கும் 3 சாத்தியமானக் கவனச் சிதறல் விடைகள் உள்ளது. ஊகத்தின் அடிப்படையில் 4 அல்லது அதற்கு மேல் சரியான விடையை ஒரு மாணவர் அளிப்பதற்கான நிகழ்தகவு

(1) $\dfrac{11}{243}$ (2) $\dfrac{10}{243}$ (3) $\dfrac{1}{243}$ (4) $\dfrac{5}{243}$

11. $P(X=0)=1-P(X=1)$ மற்றும் $E(X)=3Var(X)$ எனில், $P(X=0)$ காண்க

(1) $\dfrac{2}{3}$ (2) $\dfrac{2}{5}$ (3) $\dfrac{1}{5}$ (4) $\dfrac{1}{3}$

12. எதிர்பார்ப்பு மதிப்பு 6 மற்றும் பரவற்படி 2.4 கொண்ட ஒரு ஈருறுப்பு சமவாய்ப்பு மாறி X எனில் $P(X=5)$ -இன் மதிப்பு

(1) $\dbinom{10}{5}\left(\dfrac{3}{5}\right)^6\left(\dfrac{2}{5}\right)^4$ (2) $\dbinom{10}{5}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{10}$

(3) $\dbinom{10}{5}\left(\dfrac{3}{5}\right)^4\left(\dfrac{2}{5}\right)^6$ (4) $\dbinom{10}{5}\left(\dfrac{3}{5}\right)^5\left(\dfrac{2}{5}\right)^5$

13. சமவாய்ப்பு மாறி X –ன் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & 0<x<1 \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$$

மற்றும் $E(X)=\frac{7}{12}$,எனில் a மற்றும் b –ன் மதிப்புகள் முறையே

(1) 1 மற்றும் $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ மற்றும்1 (3) 2 மற்றும் 1 (4) 1 மற்றும் 2

14. $0,1$, மற்றும் 2 ஆகிய மதிப்புகளில் ஒன்றை X கொள்கிறது என்க. ஏதோ ஒரு மாறிலி k -விற்கு , $P(X=i)=k\,P(X=i-1)$, $i=1,2$ மற்றும் $P(X=0)=\frac{1}{7}$ எனில் k -இன் மதிப்பு காண்க

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

15. பின்வருவனவற்றுள் எது தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி?

I. ஒரு நாளில் ஒரு குறிப்பிட்ட சமிக்கையைக் கடக்கும் மகிழுந்துகளின் எண்ணிக்கை

II. ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் தொடர்வண்டி பயணச் சீட்டு வாங்க வரிசையில் காத்திருக்கும் பயணிகளின் எண்ணிக்கை.

III. ஒரு தொலைபேசி அழைப்பை நிறைவு செய்யும் காலம்.

(1) I மற்றும் II (2) II மட்டுமே (3) III மட்டுமே (4) II மற்றும் III

16. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $f(x)=\begin{cases} 2x & 0\le x\le a \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$ எனில், a -இன் மதிப்பு

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

17. ஒரு நிகழ்தகவு மாறியின் நிகழ்தகவு சார்பு கீழ்க்காணுமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது:

x	–2	–1	0	1	2
$f(x)$	k	$2k$	$3k$	$4k$	$5k$

எனில், $E(X)$ -க்கு சமமான மதிப்பு

(1) $\frac{1}{15}$ (2) $\frac{1}{10}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{2}{3}$

18. சராசரி 0.4 கொண்ட ஒரு பெர்னோலி பரவல் X எனில் $(2X-3)$ -ன் பரவல்

(1) 0.24 b) 0.48 (3) 0.6 (4) 0.96

19. ஈருறுப்பு மாறி X ஆறு முயற்சிகளில் $9P(X=4)=P(X=2)$ எனும் தொடர்பினை அனுசரிக்கிறது எனில் வெற்றியின் நிகழ்தகவு

(1)0.125 (2) 0.25 (3) 0.375 (4) 0.75

20. ஒரு கணினி விற்பனையாளர் தனது கடந்த கால அனுபவத்திலிருந்து தனது காட்சிகூடத்திற்குள் நுழையும் ஒவ்வொரு இருபது வாடிக்கையாளர்களில் ஒருவருக்கு கணினிகளை விற்கிறார் என்பது தெரியும். அடுத்த மூன்று வாடிக்கையாளர்களில் சரியாக இரண்டு பேருக்கு அவர் ஒரு கணினியை விற்கும் நிகழ்தகவு என்ன?

(1) $\frac{57}{20^3}$ (2) $\frac{57}{20^2}$ (3) $\frac{19^3}{20^3}$ (4) $\frac{57}{20}$

பாடச்சுருக்கம்

- ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X என்பது S எனும் கூறுவெளியிலிருந்து $\mathbb{R}$ எனும் மெய்யெண் கணத்தின் மீது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும் சார்பாகும்.
  $\mathbb{R}$ -இல் உள்ள இடைவெளி அல்லது உட்கணம் அல்லது கூறுபுள்ளிகளின் நேர்மாறு பிம்பங்கள் S -இல், ஒரு நிகழ்வாக அமைகிறது. ஒவ்வொரு நிகழ்வும் நிகழ்தகவு மதிப்பைக் கொண்டிருக்கும்.
- கூறுவெளி S-லிருந்து மெய்யெண்கள் $\mathbb{R}$-க்கு வரையறுக்கப்படும் X எனும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி, X -இன் வீச்சு எண்ணிடதக்கதாக இருந்தால் தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறியாகும். அதாவது, முடிவுறு அல்லது எண்ணிடதக்க முடிவுறா எண் மதிப்புகளை மட்டுமே கொண்டிருக்கும். இங்கு S கணத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு மதிப்பின் நிகழ்தகவும் மிகையெண் நிகழ்தகவுக் கொண்டதாகவும், நிகழ்தகவுகளின் மொத்த கூடுதல் ஒன்றாகவும் இருக்கும்.
- $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n \ldots,$ என்ற தனி மதிப்புகளைக் கொண்ட X என்பது ஒரு தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறியெனில், சார்பு $f(.)$ அல்லது $p(.)$ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது. மேலும் $f(x_k) = P(X = x_k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots n, \ldots$ என்பது நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பாக வரையறுக்கப்படுகிறது.
- $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$ எனும்படி $x_1, x_2, x_3, \ldots$ மதிப்புகளுக்கு $F(x)$-ஐ நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பாகக் கொண்டிருக்கும் தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி X -இன் குவிவு பரவல் சார்பு $F(x)$-இன் நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு $F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} f(x_i), \quad x \in \mathbb{R}$ ஆகும்.
- S என்பது ஒரு கூறுவெளி என்க. $X : S \to \mathbb{R}$ எனும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி $\mathbb{R}$-ன் ஒரு கணமான I -ல் ஏதேனும் மதிப்பைப் பெறும் என்க. I -இல் உள்ள அனைத்து x -க்கும் $P(X = x) = 0$ என்பது X -இன் ஒரு **தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியாகும்**.
- தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியில் $x \in [a, b]$ எனுமாறு உள்ள சாத்தியமான ஒவ்வொரு நிகழ்வு x -ற்கும் $P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\, dx$ எனும் பண்பு உள்ளது எனில், $f(x)$ எனும் ஒரு குறையற்ற மெய்யெண் மதிப்புடைய சார்பானது, **நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பாகும்**.
- $f(x)$ எனும் நிகழ்தகவு அடர்த்தியுடைய ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X–ன் பரவல் சார்பு அல்லது குவிவு பரவல் சார்பு $F(x)$ என்பது

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du, \qquad -\infty < u < \infty .$$

- ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X -இன் நிகழ்தகவு பரவல் சார்பு $f(x)$ என்க. $E(X)$ அல்லது μ எனக் குறிப்பிடப்படும்

$$E(X) = \begin{cases} \sum_x x\, f(x) & X \text{ தனிநிலை மாறி எனில்} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx & X \text{ தொடர்ச்சியான மாறி எனில்} \end{cases}$$

என்பது எதிர்பார்ப்பின் மதிப்பு அல்லது சராசரி அல்லது X -இன் கணித எதிர்பார்ப்பு என வரையறுக்கப்படுகிறது.

- $V(X)$ or σ^2 (or $\sigma_x{}^2$) எனக் குறிப்பிடப்படும் சமவாய்ப்பு மாறி X–ன் பரவற்படி

  $V(X) = E(X - E(X))^2 = E(X-\mu)^2$ ஆகும்.

கணித எதிர்பார்ப்பு மற்றும் பரவற்படியின் பண்புகள்

(i) $E(aX+b) = aE(X)+b$, இங்கு a மற்றும் b ஆகியன மாறிலிகள்.

கிளைத்தேற்றம் 1 :	$E(aX)$	$= aE(X)$	($b = 0$ எனும்போது)
கிளைத்தேற்றம் 2 :	$E(b)$	$= b$	($a = 0$ எனும்போது)

(ii) $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

(iii) $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$ இங்கு a மற்றும் b ஆகியவை மாறிலிகள்.

கிளைத்தேற்றம் 3 :	$V(aX)$	$= a^2 V(X)$	($b = 0$ எனும்போது)
கிளைத்தேற்றம் 4 :	$V(b)$	$= 0$	($a = 0$ எனும்போது)

- X (வெற்றி) = 1 மற்றும் X (தோல்வி) = 0 என வரையறுக்கப்படும் ஒரு பெர்னோலி சோதனையுடன் இணைந்த சமவாய்ப்பு மாறி X –க்கு ,

  $$f(x) = \begin{cases} p & x = 1 \\ q = 1-p & x = 0 \end{cases}, \text{ இங்கு } 0 < p < 1$$

  X என்பது பெர்னோலி சமவாய்ப்பு மாறி எனவும் மற்றும் $f(x)$ என்பது பெர்னோலி பரவல் எனவும் முறையே அழைக்கப்படுகிறது

- X என்பது பெர்னோலி சமவாய்ப்பு மாறி எனவும் மற்றும் $f(x)$ என்பது பெர்னோலி பரவல் எனவும் முறையே அழைக்கப்படுகிறது.
- பண்பளவை p உடைய பெர்னோலி பரவலைப் பின்பற்றும் X ஒரு பெர்னோலி சமவாய்ப்பு மாறி எனில், சராசரி μ மற்றும் பரவற்படி σ^2 ஆகியவை

  $\mu = p$ மற்றும் $\sigma^2 = pq$ ஆகும்.

- n –தொடர்ச்சியான முயற்சிகளில் உள்ள வெற்றிகளின் எண்ணிக்கையை X குறித்தால்,

  (i) n –தொடர்ச்சியான முயற்சிகள் சார்பற்றவையாகவும் மற்றும் n –எண்ணிடத் தக்கவையாகவும்

  (ii) 'வெற்றி' அல்லது 'தோல்வி' எனப் பெயரிடப்பட்ட இரு சாத்தியமான விளைவுகளை மட்டுமே ஒவ்வொரு முயற்சியும் கொண்டிருக்கவும்

  (iii) ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் p எனக் குறிக்கப்படும் வெற்றியின் நிகழ்தகவு மாறாது இருக்கவும், அமைந்தால்ஒரு தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி X ஈருறுப்பு சமவாய்ப்பு மாறி என அழைக்கப்படும்.

- ஈருறுப்பு சமவாய்ப்பு மாறி X என்பது n–சார்பற்ற முயற்சிகளில் வெற்றிகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கிறது என்க. வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு p எனக் கொண்டால், தோல்விக்கான நிகழ்தகவு $q = 1 - p$ ஆகும். ஈருறுப்பு பரவலை $X \sim B(n, p)$ எனக் குறிப்பர்.

  X –ன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு $f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n.$ ஆகும்.

- p மற்றும் n எனும் பண்பளவைகளைக் கொண்ட ஓர் ஈருறுப்பு பரவலின் ஈருறுப்பு சமவாய்ப்பு மாறி X என்க. சராசரி μ மற்றும் பரவற்படி σ^2 முறையே

  $$\mu = np \text{ மற்றும் } \sigma^2 = np(1-p) \text{ ஆகும்.}$$

இணையச் செயல்பாடு (ICT CORNER)

https://ggbm.at/dy9kwgbt அல்லது Scan the QR Code

இணைய உலாவியை திறக்கவும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள உரலி/விரைவுக் குறியீட்டை தட்டச்சு செய்யவும், GeoGebra–வின் "**12th Standard Mathematics Vol-2**" பக்கம் தோன்றும். இப்பணித்தாள் புத்தகத்தின் இடதுபக்கம் உங்கள் பாடநூலுடன் தொடர்புடைய பல அத்தியாயங்கள் காணப்படும். அவற்றில் "**Probability Distributions**" எனும் அத்தியாயத்தைத் தேர்வு செய்க.

B225_12_MATHS_TM

இப்பொழுது இப்பாடம் தொடர்பான பல பணித்தாள்களை இப்பக்கத்தில் காண்பீர்கள். அனைத்துப் பணித்தாள்களையும் செய்து பார்க்கவும்.

அத்தியாயம்

12

தனிநிலைக் கணிதம்

F2E8M3

"இளைஞனே! கணிதத்தின் நுணுக்கங்கள் புரியாதிருப்பினும்
நீ பயன்படுத்தப் பயன்படுத்தப் பழகிக் கொள்வாய்"

- ஜான் ஃபான் நியுமேன்

12.1 அறிமுகம் (Introduction)

ஜான் ஃபான் நியுமேன்
(1903-1957)

கணிதவியலை தொடர்நிலைக் கணிதம் என்றும் தனிநிலைக் கணிதம் என்றும் இரு பெரும் பிரிவுகளாக வகைப்படுத்துவர். அவற்றுள் தொடர்நிலைக் கணிதம் என்பது மெய்யெண்கள் கணத்திலுள்ள எண்ணிடமுடியாத முடிவற்ற எண்களை (uncountably infinite) கொண்ட முடிவுகளின் கூற்றுகளை அடிப்படையாகக் கொண்டதாகும். அதாவது எந்த இரு மெய் எண்களுக்கு இடையே எண்ணிட முடியாத முடிவற்ற கணத்தைக் கொண்டிருக்கும் தன்மையைக் கொண்டது. எடுத்துக்காட்டாக தொடர்நிலைக் கணிதத்தில் அமையும்சார்பானது ஒருதொடர்ச்சியானவளைவரையானது இடைவெளியற்ற புள்ளிகளால் அமையப்பெற்றிருக்கும்.

தனிநிலைக் கணிதத்தில் (Discrete Mathematics) உள்ள உறுப்புகள் முடிவுறு நிலையுடையதாகவும் அல்லது அவ்வுறுப்புகள் முடிவற்றதாயிருந்தால் எண்ணிடத்தக்கதாகவும் (countably infinite), தனித்த நிலையில் இருக்கும். அதாவது எந்த இரு புள்ளிகளுக்கும் இடையே முடிவுறு அல்லது எண்ணிடத்தக்க முடிவற்ற புள்ளிகளைக் கொண்டிருக்கும். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு முடிவுறு கணத்தின் உறுப்புகளைக் கொண்டு அமையும் ஒரு சார்பினை வரையறுத்துப் பெறும் இணைப்பின் வரிசை சோடிகளாக அமைத்து பின் அதனை வரிசை சோடிகள் முழுவதையும் பட்டியலிட்டு காட்டும் வகையில் வரையறுக்க இயலும்.

பத்தொன்பதாம் நூற்றாண்டின் இறுதியிலும், 20ஆம் நூற்றாண்டின் தொடக்கத்திலும் வாழ்ந்த கணித அறிஞர்கள் தனிநிலைக் கணிதம் என்ற ஒரு புதிய பிரிவை உருவாக்கினர். இப்பிரிவில் உள்ள கருத்துகள் இயல் எண்கள் கணத்தைப் போல முடிவுறு அல்லது எண்ணிடத்தக்க முடிவற்ற கணங்களைக் கொண்ட உறுப்புகளை அடிப்படையாகக் கொண்டிருக்கும். இவ்வகை கணங்களை தனிநிலைக் கணங்கள் என்று அழைக்கலாம். மேலும் தனிநிலைக் கணிதத்தின் சிறப்பியல்பானது இக்கணத்திலிருந்து இயல் எண்கள் கணத்திற்கு உறுப்புகளை ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புபடுத்த முடிகிறது. எனவே தனிநிலை உறுப்புகளைக் கொண்ட கணத்தைக் கொண்டு ஒரு வரிசையை (sequence) அமைக்க முடிகிறது. தனிநிலை உறுப்புகளான கணங்களில் இச்சிறப்புத் தன்மையினைக் காண இயலுமேயன்றி எண்ணிட முடியாத இடைவெளிகள் ஏதும் இல்லாததால் வரிசையாக அமைக்கப்பட்ட உறுப்புகளைக் கொண்ட மெய் கணத்தில் காண இயலாது.

கணினிப் பயன்பாடு அனைத்துத் துறைகளிலும் முக்கியப் பங்காற்றி வருதல் பற்றி அனைவரும் அறிவர். தனிநிலைக் கணங்கள் மூலம் கணக்கீடுகளின் பயன்பாடுகள் அதிகரித்ததினால் கணினி அறிவியல், அறிவியலின் ஒரு முக்கியப் பகுதியாகவே மாறியிருப்பதைக் காணலாம்.

மேலும், தனிநிலைக் கணங்கள் பற்றிய கருத்துகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு சுருக்கமானதும், தெளிவானதுமான நவீன கணினி நிரல் மொழிகள் (programming languages) உருவாக்கப்படுகின்றன. அதனால் கணினி அறிஞர்கள், தனிநிலைக் கணங்கள் பற்றி நன்கு கற்று அதன் மூலம் நிரல் நெறிமுறைகள் (computer algorithms) உருவாக்கிடும் நிலை ஏற்பட்டுள்ளது.

தனிநிலைக் கணிதம் கற்பதால் உண்டாகும் நன்மைகளாகக் கூறப்படுவது யாதெனில், பிரச்சினைகளைப் பகுத்தறிதல், அவற்றிற்குத் தீர்வு காணுதல் போன்ற திறன்களை வளர்ப்பதில் தக்க கருவியாக விளங்கி செயல்படுவதே ஆகும்.

தனிநிலைக் கணக்கியலில் சேர்மானங்கள். கணித தர்க்கவியல், பூலியன் இயற்கணிதம், வரைபடக் கோட்பாடு, குறியீட்டுக் கோட்பாடு போன்ற பல பிரிவுகள் உள்ளன. அவற்றுள் தனிநிலைக் கணிதம் சார்ந்த வரிசை மாற்றங்கள், சேர்வுகள் கணிதத் தொகுத்தறிதல் போன்ற தலைப்புகளில் முந்தைய வகுப்பிலேயே கற்றறிந்தோம். இப்பாடத்தில், ஈருறுப்புச் செயல்கள் (Binary operations), தர்க்கக் கணிதம் (Mathematical logic) எனும் இரு பிரிவுகளைப் பற்றி அறிந்து கொள்வோம்.

குறியீடுகள்

$\in$	-	உள்ளது (அ) இருக்கும்.
$\ni$	-	என்றவாறு (அ) எனுமாறு
$\forall$	-	ஒவ்வொரு (அ) அனைத்திற்கும்
$\Rightarrow$	-	தெரிவிப்பது
$\exists$	-	அங்கே உளது (அ) இருத்தல்

பொதுவாக ஒரு கணத்தில் ஒன்று அல்லது ஒன்றுக்கும் மேற்பட்ட உறுப்புகளின் மீது ஒரு செயலியை செயல்படுத்தும் முறையை செயல் (operation) என்று குறிப்பிடப்படும். $\mathbb{Z}$-ல் உள்ள ஓர் உறுப்பின் குறை உறுப்பு (negative element) காணல் என்பது, அச்சமயத்தில் ஒரே ஒரு உறுப்பை மட்டுமே அச்செயலுக்குக் கருதுவதாகும். அவ்வாறான செயல் ஓருறுப்புச் செயல் (unary operation)ஆகும். $\mathbb{Z}$ என்ற கணத்தில் ஏதேனும் இரு உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்பதற்கு இரு உறுப்புகள் தேவையாகிறது. அதாவது கூடுதல் காணல் எனும் செயல் ஈருறுப்புச் செயல் என்று கூறப்படும். கூடுதலுக்கான + என்ற செயலி, ஈருறுப்புச் செயலி (Binary operator) என்று அழைக்கப்படும்.

பொதுவாக, ஒரு கணத்தில் ஒரு செயலுக்கு n உறுப்புகள் பயன்படுத்தப்படும்போது, அது n உறுப்புச் செயலி என்று அழைக்கப்படுகிறது. இப்பிரிவில், ஈருறுப்புச் செயல்கள் பற்றி விரிவாகக் காண்போம்.

கற்றலின் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தின் முடிவில் மாணவர்கள் பின்வருவனவற்றை அறிந்திருப்பர்.

- ஈருறுப்புச் செயலியின் வரையறை மற்றும் அதன் பண்புகளை சோதித்தல்
- பூலியன் அணிகள் மீது ஈருறுப்புச் செயலியை வரையறுத்து அதன் பண்புகளைச் சரிபார்த்தல்
- மட்டு எண் கணித தொகுப்புகளின் மீது ஈருறுப்புச் செயலியை வரையறுத்து அதன் பண்புகளை சோதித்தல்
- தனி மற்றும் கூட்டுக் கூற்றுகளை அடையாளம் காணுதல்
- தர்க்க இணைப்புகளை வரையறை செய்து மெய்மை அட்டவணைகளை அமைத்தல்
- மெய்மம், முரண்பாடு மற்றும் நிச்சயமின்மைகளை அடையாளம் காணுதல்
- தர்க்க சமானமானவைகளை தோற்றுவித்து அவற்றிற்கு இரட்டைக் கோட்பாடுகளைப் பயன்படுத்துதல்

12.2 ஈருறுப்புச் செயலிகள் (Binary Operations)

12.2.1 வரையறைகள் (Definitions)

$\mathbb{R}$ -ன் மீது அடிப்படை எண்கணித ஈருறுப்புச் செயலிகள் **கூட்டல்** $(+)$, **கழித்தல்** $(-)$, **பெருக்கல்** $(\times)$, மற்றும் **வகுத்தல்** $(\div)$ என்பவைகளாகும். 19ஆம் நூற்றாண்டின் இறுதியிலும் மற்றும் 20ஆம் நூற்றாண்டின் தொடக்கத்திலும் வாழ்ந்த கணித அறிஞர்கள் எபேல், கெய்லி, கோஷி போன்றோர் மேற்கூறிய வழக்கமான இயற்கணிதச் செயலிகள் நிறைவு செய்யும் பண்புகளை பொதுமைப்படுத்த முயற்சி செய்தார்கள். அதன் மூலம் அவர்கள் புதிய நுண் இயற்கணித அமைப்புகளைக் **கொள்கை ரீதியான அணுகுமுறை** மூலம் உருவாக்கினார்கள். அவ்வாறு பெறப்பட்ட இந்த புதிய பிரிவு **நுண் இயற்கணிதம்** என்று அழைக்கப்படுகின்றது.

எடுத்துக்காட்டாக ஏதேனும் இரு இயல் எண்களின் கூடுதல் ஓர் இயல் எண் என்றும் அவற்றின் பெருக்கலும் ஓர் இயல் எண் என்றும் அறிவோம். அதாவது, வழக்கமான கூட்டல் (+) மற்றும் (×) பெருக்கல் செயலிகள் $\mathbb{N}$ என்ற கணத்தில் இரு உறுப்புகளைக் கொண்டு செயல்படுத்துவதால் ஈருறுப்புச் செயலி என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

அதையே குறியீட்டு வடிவில், $m+n \in \mathbb{N}$; $m \times n \in \mathbb{N}$, $\forall m, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ என்று எழுதுகிறோம்.

மேற்கூறிய இரண்டு ஈருறுப்புச் செயல்களும் கீழ்க்காணும் விதிகளை நிறைவுச் செய்வதைக் கவனிக்க.

(1) $\mathbb{N}$ -ல் இருந்து ஒரே நேரத்தில் இரண்டு எண்கள் எடுக்கப்பட்டு செயல்படுத்தப்படுகின்றன.

(2) அவைகளின் முடிவில் கிடைக்கும் உறுப்பு மீண்டும் $\mathbb{N}$ என்ற கணத்திலேயே இருக்கிறது.

இவ்வாறாக ஒரு வெற்றற்ற கணம் மீது வரையறுக்கப்படும் எந்த ஒரு செயலையும் நுண்கணிதத்தில் ஒரு **ஈருறுப்பு செயலி** அல்லது **ஈருறுப்புத் தொகுப்பு** எனப்படும்.

வரையறை 12.1

ஒரு வெற்றற்ற கணம் S -இன் மீது வரையறுக்கப்பட்ட $*$ என்ற ஏதேனும் ஒரு செயல், ஓர் **ஈருறுப்புச் செயல்** என அழைக்கப்படவேண்டுமெனில் அது பின்வரும் பண்புகளைக் கொண்டிருக்க வேண்டும்.

(i) $S \times S$ -ல் உள்ள ஒவ்வொரு வரிசைச் சோடி (a, b) -க்கு $*$ என்ற செயல் கண்டிப்பாக வரையறுக்கப்பட்டிருக்க வேண்டும்.

(ii) $S \times S$ -ல் ஒவ்வொரு வரிசைச் சோடி (a, b) -யுடன் S -ல் $a * b$ என்ற **ஒரே ஓர்** உறுப்பு இருக்கும்.

வேறுவிதமாகச் கூறினால், S -ன் மீது வரையறுக்கப்படும் $*$ என்ற ஈருறுப்புச் செயலானது S -ல் உள்ள உறுப்புகளின் **ஒவ்வொரு வரிசைச் சோடியையும்** S -ல் **ஒரே ஓர்** உறுப்பைத் தொடர்புபடுத்தும் ஒரு விதி ஆகும். இதனை ஒரு சார்பாகவும் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

$*: S \times S \to S$; அதாவது, $*(a, b) = a * b \in S$, இங்கு $a * b$ என்பது ஒரே ஓர் உறுப்பாகும்.

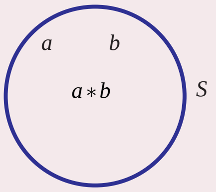
$*$-ன் விளைவு $a * b$ எப்பொழுதும் கண்டிப்பாக S -ல் அமைய வேண்டும் மற்றும் S -க்கு வெளியே அமையக்கூடாது. இந்நிலையில் S -ஆனது $*$-ன் கீழ் **அடைவு பெற்றுள்ளது** எனக் கூறலாம். இப்பண்பை **அடைவுப் பண்பு** என்று கூறுவர்.

வரையறை 12.2

ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட ஈருறுப்புச் செயல்களைப் பொருத்து ஏதேனும் ஒரு வெற்றற்ற கணத்தின் மீது வரையறுக்கப்பட்டால் அது **இயற்கணித அமைப்பு** எனப்படும்.

$*$ என்ற ஈருறுப்புச் செயலை S -இன் மீது பின்வருமாறும் வரையறுக்கலாம்:

$\forall a, b \in S$, $a * b$ என்பது ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்தது, மேலும் $a * b \in S$.



படம் 12.1

குறிப்பு

மேலேயுள்ள வறையறையிலிருந்து ஒவ்வொரு ஈருறுப்புச் செயலும் அடைவுப் பண்பை நிறைவு செய்யும் என்பது தெளிவாகிறது.

குறிப்பு

$*$ என்ற செயல் ஒரு குறியீடுதான். இது $+, \times, -, \div$ அணிக் கூட்டல், அணிப் பெருக்கல், அணிவகுத்தல் ஆகியவை ஈருறுப்புச் செயலியாக இருப்பதோ (அ) இல்லாமலிருப்பதோ அது வரையறுக்கப்படும் கணத்தைப் பொருத்ததாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, வழக்கமான கூட்டல் $+$ மற்றும் பெருக்கல் $\times$ ஆனது $\mathbb{N}$ -ன் மீது ஓர் ஈருறுப்புச் செயல் ஆகும். ஆனால், கழித்தல் $-$ ஆனது $\mathbb{N}$ -ன் மீது ஓர் ஈருறுப்புச் செயல் **ஆகாது**.

இதனை சரிபார்க்க. $(3, 4) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ என்க.

$$* \, (a, b) = - \, (3, 4) = 3 - 4 = -1 \notin \mathbb{N} .$$

எனவே $-$ஆனது $\mathbb{N}$ -ன் மீது ஓர் **ஈருறுப்புச் செயல் ஆகாது**. அதே சமயத்தில் $-$ ஆனது $\mathbb{Z}$ -ன் மீது ஓர் ஈருறுப்புச் செயல் என்பது தெளிவு. எனவே, $\mathbb{Z}$ ஆனது $+, \times$ மற்றும் $-$ ஐ பொருத்து கீழ் அடைவு பெற்றுள்ளது. எனவே, $(\mathbb{Z}, +, \times, -)$ ஓர் இயற்கணித அமைப்பு ஆகும்.

உற்றுநோக்கி அறிந்தவை

ஒரு செயலின் ஈருறுப்புப் பண்பானது அது வரையறுக்கப்படும் கணத்தைப் பொருத்ததாகும்.

(a) $\mathbb{N}$ உடன் 0 மற்றும் குறை முழு எண்களையும் சேர்த்து விரிவுபடுத்தப்பட்ட கணம்தான் $\mathbb{Z}$ எனப்படும் முழு எண் கணம் ஆகும். $\mathbb{Z}$ -ன் மீது $-$ ஆனது ஒரு ஈருறுப்புச் செயலி ஆகும். ஆனால் $\mathbb{N}$ -ன் மீது $-$ ஒரு **ஈருறுப்புச் செயலி ஆகாது**.

(b) செயலி $\div$ ஆனது, $\mathbb{Z}$ -ன் மீது ஓர் **ஈருறுப்புச் செயல் ஆகாது.** எடுத்துக்காட்டாக, $(1,2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ -க்கு $\div\,(1,\ 2)=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$. எனவே, $\mathbb{Z}$ என்ற கணத்தை விரிவுபடுத்தக் கிடைக்கப் பெறும் கணம் $\mathbb{Q}$ ஆகும்.

(c) எண்களைக் கொண்ட அடிப்படைச் செயல்பாடுகளில் '0' ஆல் வகுப்பது வரையறுக்கப்படவில்லை என்ற உண்மையை அறிவோம். எனவே, $\div$ ஆனது $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ -ன் மீது ஓர் ஈருறுப்புச் செயல் ஆகும். இவ்வாறே $+,\times,-$ ஆகியவைகள் $\mathbb{Q}$ -ன் மீது ஈருறுப்புச் செயல்கள் ஆகும் ஆனால் $\div$ ஆனது $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ -ன் மீது அமையும் ஓர் ஈருறுப்புச் செயல் ஆகும்.

மேற்கொண்டு $\mathbb{Q}$ ஐ $\mathbb{R}$ **–க்கும்** மற்றும் $\mathbb{R}$ ஐ $\mathbb{C}$ -க்கும் விரிவுபடுத்துவதற்குக் காரணம் என்ன? என்ற வினா எழுந்துள்ளது. எனவே, $+,-,\times,\div$ ஆகிய அடிப்படையான எண்கணித செயல்களுடன் "$x^2-2=0$" ; "$x^2+1=0$" என்ற சமன்பாட்டு வகைகளின் மூலங்களையும் உள்ளடக்கிய ஒரு எண் தொகுப்பு தேவைப்படுகிறது. எனவே, ஏற்கனவே உள்ள எண் தொகுப்புடன் விகிதமுறா எண்களையும் கற்பனை எண்களையும் திரட்டி [அத்தியாயம் 3ஐப் பார்க்க] உள்ளடக்கும்பொழுது கிடைக்கும் எண் தொகுப்பானது $\mathbb{R}$ -ம் $\mathbb{C}$ -ம் ஆகும். இதில் மிகப்பெரிய எண் தொகுப்பான $\mathbb{C}$ ஆனது முறையே $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ மற்றும் $\mathbb{R}$ ஆகிய எண் தொகுப்புகளை கொண்டிருக்கும் உட்கணங்களாக இருக்கும்.

எண் தொகுப்பு / செயலிகள்	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{Q}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{C}\setminus\{0\}$
$+$	அடைவு பெற்று உள்ளது	அடைவு பெற்று உள்ளது	அடைவு பெற்று உள்ளது	அடைவு பெற்று உள்ளது	அடைவு பெற்று உள்ளது	அடைவு பெற -வில்லை	அடைவு பெற -வில்லை	அடைவு பெற -வில்லை
$-$	அடைவு பெற -வில்லை	அடைவு பெற்று உள்ளது	அடைவு பெற்று உள்ளது	அடைவு பெற்று உள்ளது	அடைவு பெற்று உள்ளது	அடைவு பெற -வில்லை	அடைவு பெற -வில்லை	அடைவு பெற -வில்லை
$\times$	அடைவு பெற்று உள்ளது	அடைவு பெற்று உள்ளது	அடைவு பெற்று உள்ளது	அடைவு பெற்று உள்ளது	அடைவு பெற்று உள்ளது	அடைவு பெற்று உள்ளது	அடைவு பெற்று உள்ளது	அடைவு பெற்று உள்ளது
$\div$	அடைவு பெற -வில்லை	அடைவு பெற -வில்லை	அடைவு பெற -வில்லை	அடைவு பெற -வில்லை	அடைவு பெற -வில்லை	அடைவு பெற்று உள்ளது	அடைவு பெற்று உள்ளது	அடைவு பெற்று உள்ளது

அட்டவணை 12.1

எடுத்துக்காட்டு 12.1

கீழ்க்காணும் ஈருறுப்புச் செயலிகள், அதற்குரிய கணங்களில் அடைவுப் பண்பைப் பெற்றுள்ளதா என்பதைச் சோதிக்க. அவ்வாறில்லாதவற்றிற்கு ஈருப்புச் செயலியின் நிபந்தனையை நிறைவேற்றும் முறையைக் காண்க.

(i) $a*b=a+3ab-5b^2;\forall a,b\in\mathbb{Z}$ (ii) $a*b=\left(\frac{a-1}{b-1}\right),\ \forall a,b\in\mathbb{Q}$

தீர்வு

(i) $\mathbb{Z}$-இன் மீது $\times$ ஆனது ஈருறுப்புச் செயலி என்பதால் $\forall a,\ b\in\mathbb{Z}\Rightarrow a\times b=ab\in\mathbb{Z}$ மற்றும் $b\times b=b^2\in\mathbb{Z}$ ... (1)

$\mathbb{Z}$ -ன் மீது $+$ ஆனது ஈருறுப்புச் செயலி என்பதால் $(1)\Rightarrow 3ab=(ab+ab+ab)\in\mathbb{Z}$ மற்றும் $5b^2=(b^2+b^2+b^2+b^2+b^2)\in\mathbb{Z}$. .... (2)

மேலும், $a\in\mathbb{Z}$ மற்றும் $3ab\in\mathbb{Z}\Rightarrow a+3ab\in\mathbb{Z}$. ... (3)

(2), (3) ஆகியவற்றிலிருந்து $\mathbb{Z}$ -ன் மீது '$-$' ஆனது ஈருறுப்புச் செயலி என்பதாலும் $a*b=(a+3ab-5b^2)\in\mathbb{Z}$ கிடைக்கும். எனவே $a*b\in\mathbb{Z}$ என்பதால் $*$ ஆனது $\mathbb{Z}$ -ன் மீது அடைவு பெற்றுள்ளது.

(ii) இந்த எடுத்துக்காட்டில், $a*b$ ஆனது ஒரு பின்ன வடிவில் உள்ளது. 0 ஆல் வகுப்பது வரையறுக்கப்படாததால் கொடுக்கப்பட்ட பின்னத்தின் பகுதி $b-1$ கண்டிப்பாக பூச்சியமற்றதாக இருக்க வேண்டும்.

$b=1$ எனில், $b-1=0$ என்பது உண்மை. $1\in\mathbb{Q}$ என்பதால் $*$ ஆனது $\mathbb{Q}$ -ன் மீது அடைவு பெறவில்லை. எனவே $\mathbb{Q}$ -ல் இருந்து 1 ஐ நீக்க $a*b$ -ன் விளைவு $\mathbb{Q}\setminus\{1\}$ -ல் இருக்கும். எனவே, $*$ ஆனது $\mathbb{Q}\setminus\{1\}$ -ன் மீது அடைவு பெற்றுள்ளது. ■

12.2.2 ஈருறுப்புச் செயலியின் மேலும் சில பண்புகள் (Some more properties of a binary operation)

பரிமாற்றுப் பண்பு (Commutative property)

ஒரு வெற்றற்ற கணம் S -ன் மீது ஈருறுப்புச் செயலி $*$ ஆனது பரிமாற்றுத் தன்மையுடையதாயின் ஒவ்வொரு $a,b\in S$ -க்கும் $a*b=b*a$, என்பது உண்மையாக வேண்டும்.

சேர்ப்புப் பண்பு (Associative property)

ஒரு வெற்றற்ற கணம் S -ன் மீது ஈருறுப்புச் செயலி $*$ ஆனது சேர்ப்புப் பண்பு உடையதாயின் $a*(b*c)=(a*b)*c,\ \forall a,b,c\in S$ என்பது உண்மையாகவேண்டும்.

சமனிப் பண்பு (Existence of Identity property)

$*$ என்ற ஈருறுப்புச் செயலியின் கீழ் $e\in S$ என்பது S -ன் சமனி உறுப்பு எனில் $\forall a\in S,\ a*e=a$ மற்றும் $e*a=a$ என்பதை நிறைவு செய்யும்.

எதிர்மறைப் பண்பு (Existence of inverse property)

S -ல் e எனும் ஒரு சமனி உறுப்பு இருந்தால் $\forall a\in S\ \exists b\in S,\ \ni a*b=e$ மற்றும் $b*a=e$ எனில், $b\in S$ என்பது a -ன் நேர்மாறு உறுப்பு அல்லது எதிர்மறை உறுப்பு எனப்படும். இதை நாம் $b=a^{-1}$ என எழுதலாம்.

குறிப்பு

a^{-1} ஆனது S–ல் ஒரு உறுப்பாகும். a^{-1}–ஐ a–ன் எதிர்மறை என்று கூறலாமேயன்றி $\dfrac{1}{a}$ என்று கூற இயலாது.

குறிப்பு

(i) $1\in\mathbb{Z}$ என்பது ஒரு பெருக்கல் சமனி. $\mathbb{Z}$ -ல் ஒரே ஓர் உறுப்புதான் இத்தன்மையைப் பெற்றிருக்கும். இவ்வுறுப்பு $n\cdot 1=1\cdot n=n,\ \forall n\in\mathbb{Z}$ என்ற பண்பை நிறைவு செய்யும்.

(ii) ஓர் உறுப்பின் பெருக்கல் எதிர்மறையை விளக்க எடுத்துக்காட்டாக, $2\in\mathbb{Q}$ -ன் பெருக்கல் எதிர்மறை $\frac{1}{2}\in\mathbb{Q}$ ஆகும். $x=\frac{1}{2}$ தவிர வேறு எந்த எண்ணும் $2\cdot x=x\cdot 2=1,\quad 0\neq x\in Q$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் பண்பை பெற்றிருக்காது.

குறிப்பு

ஒரு கணிதக் கூற்றில் 'ஒவ்வொன்றுக்கும்' அல்லது ‘அனைத்திற்கும்’ என்பதை தொடர்புபடுத்தும்பொழுது அது ஒவ்வொரு சோடி அல்லது மூன்று உறுப்புகளுக்கும் நிரூபிக்கப்படவேண்டும். ஒவ்வொரு சோடி அல்லது மூன்று உறுப்புகளுக்கு நிரூபிப்பது என்பது அவ்வளவு எளிதல்ல. ஆனால் இந்த வகையான நிலைமைகளில் இக்கூற்றின் மறுப்பை நிரூபிப்பது சாலச் சிறந்தது. அதாவது “ஒவ்வொன்றுக்கும்” அல்லது “அனைத்திற்கும்” என்பதன் மறுப்பானது "அங்கே உளது (அ) இருத்தல்" என்பதற்கு ஒப்ப ஒரு சோடி அல்லது மூன்று உறுப்புகளாக எடுத்துக் கொண்ட கூற்றை மறுக்குமாறு உருவாக்க முயற்சிக்கலாம். அவ்வாறு காண இயலுமாயின், தரப்பட்டக் கூற்று சரியானது அல்ல என்பது முடிவாகும்.

சமனி மற்றும் எதிர்மறை உறுப்புகளின் ஒருமைத்தன்மை சார்ந்த வினாக்கள் ஆராயப்படவேண்டும்.

பின்வரும் கோட்பாடுகள் மேலே குறிப்பிட்ட முடிவுகளை மிகவும் பொதுவான வடிவத்தில் நிரூபிக்கின்றன.

தேற்றம் 12.1 (சமனி உறுப்பின் ஒருமைத்தன்மை)

ஓர் இயற்கணித அமைப்பில் சமனி உறுப்பானது (உளது எனில்) ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்தது.

நிரூபணம்

$(S,*)$ என்பது ஓர் இயற்கணித அமைப்பு என்க. $*$ ஐ பொருத்து S –ன் சமனி உறுப்பானது S –ல் உள்ளது எனக் கொள்க. மேலும் ஒரே ஒரு சமனி உறுப்பு மட்டுமே உள்ளது என நிரூபிக்க.

S –ன் சமனி உறுப்புகள் e_1, e_2 என இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

முதலில் e_1 ஐ சமனி உறுப்பாகவும், e_2 ஐ S –ன் உறுப்பாகவும் எடுத்துக்கொண்டால்,

$$e_2 * e_1 = e_1 * e_2 = e_2 . \qquad \ldots (1)$$

பிறகு e_2 ஐ சமனி உறுப்பாகவும், e_1 ஐ S –ன் உறுப்பாகவும் எடுத்துக்கொண்டால்,

$$e_1 * e_2 = e_2 * e_1 = e_1 . \qquad \ldots (2)$$

(1), (2) –லிருந்து, $e_1 = e_2$. எனவே, சமனி உறுப்பு ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்தது. ■

தேற்றம் 12.2 (எதிர்மறை உறுப்பின் ஒருமைத்தன்மை)

ஓர் இயற்கணித அமைப்பில் ஓர் உறுப்பின் எதிர்மறை (இருப்பின்) ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்தது.

நிரூபணம்

$(S,*)$ என்பது ஓர் இயற்கணித அமைப்பு என்க. மேலும் $a \in S$ என்க. a –ன் எதிர்மறை S –ல் உள்ளது எனக் கொள்க. S –ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் ஒரே ஒரு எதிர்மறை உறுப்பு மட்டுமே இருக்கும். மேலும் S –ல் எதிர்மறை உறுப்பு இருந்தால் அதில் சமனி உறுப்பு e உறுதியாக இருக்கும்.

$a \in S$ என்க. S –ல் உள்ள உறுப்பு a –ற்கு ஒரே ஒரு எதிர்மறை உறுப்பு மட்டுமே இருக்கும் என நிரூபிக்க.

a –ன் எதிர்மறை உறுப்புகள் a_1, a_2 என்ற இரு உறுப்புகள் இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

a_1 ஐ a –ன் எதிர்மறையாகக் கொள்வோமாயின் $a * a_1 = a_1 * a = e \qquad \ldots (1)$

a_2 ஐ a –ன் எதிர்மறையாகக் கொள்வோமாயின் $a * a_2 = a_2 * a = e \qquad \ldots (2)$

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 * e = a_1 * (a * a_2) \quad ((2) \text{ –ன்படி}) \\ &= (a_1 * a) * a_2 \quad (\text{சேர்ப்புப் பண்பின்படி}) \\ &= e * a_2 ((1) \text{ –ன்படி}) \\ &= a_2 (\text{சமனிப்பண்பின்படி})). \end{aligned}$$

$\Rightarrow a_1 = a_2$. எனவே, S –ல் உள்ள உறுப்பு a –ற்கு ஒரே ஒரு எதிர்மறை உறுப்பு மட்டுமே இருக்கும் என்று அறியலாம்.

குறிப்பு

தேற்றம் 12.1 மற்றும் 12.2–இன் உண்மையான ஒருமைத்தன்மையை விரிவாக மேற்படிப்பில் தெரிந்து கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 12.2

$\mathbb{Z}$ என்ற கணத்தில் '+' என்ற ஈருறுப்புச் செயலி கொண்டு (i) அடைவுப் பண்பு (ii) பரிமாற்றுப் பண்பு (iii) சேர்ப்புப் பண்பு (iv) சமனிப் பண்பு மற்றும் (v) எதிர்மறைப் பண்பு ஆகியவைகளைப் பெற்றுள்ளதா எனச் சரிபார்க்க.

தீர்வு

(i) $m+n \in \mathbb{Z}, \forall m,n \in \mathbb{Z}$. எனவே, '+' ஆனது, $\mathbb{Z}$ –ன் மீது ஓர் ஈருறுப்புச் செயலி ஆகும்.

(ii) மேலும் $m+n = n+m, \forall m,n \in \mathbb{Z}$. எனவே, பரிமாற்றுப் பண்பு உண்மையாகும்.

(iii) $\forall m,n,p \in \mathbb{Z}, m+(n+p)=(m+n)+p$. எனவே, சேர்ப்புப் பண்பு உண்மையாகும்.

(iv) $m+e=e+m=m \Rightarrow e=0$. எனவே, $\exists\ 0 \in \mathbb{Z} \ni (m+0)=(0+m)=m$. எனவே சமனிப்பண்பு உள்ளது.

(v) $m+m'=m'+m=0 \Rightarrow m'=-m$. எனவே, $\forall m \in \mathbb{Z}, \exists\ -m \in \mathbb{Z} \ni$

$m+(-m)=(-m)+m=0$. எனவே, எதிர்மறைப் பண்பும் உள்ளது. இவ்வாறாக, கூட்டல் செயலி $+$ ஆனது, $\mathbb{Z}$ -ன் மீது மேற்கண்ட ஐந்து பண்புகளை நிறைவு செய்யும்.

கூட்டல் சமனி $=0$ மற்றும் ஏதேனும் ஒரு முழு எண் m -ன் கூட்டல் எதிர்மறை $-m$ என்பதைக் கவனத்தில் கொள்வோம். ■

எடுத்துக்காட்டு 12.3

$\mathbb{Z}$ -ன் மீது இயற்கணித செயலி $'-'$ ஆனது

(i) அடைவுப் பண்பு (ii) பரிமாற்றுப் பண்பு (iii) சேர்ப்புப் பண்பு (iv) சமனிப் பண்பு மற்றும் (v) எதிர்மறைப் பண்பு ஆகியவைகளை கொண்டுள்ளதா எனச் சரிபார்க்க.

தீர்வு

(i) கழித்தல் $'-'$ ஆனது $\mathbb{N}$ ன் மீது ஓர் ஈருறுப்புச் செயல் அல்ல. ஆனால் $\mathbb{Z}$ ன் மீது ஓர் ஈருறுப்புச் செயல் ஆகும். எனவே, மேலும் சில பண்புகளை '–' என்ற ஈருறுப்புச் செயலியைக் கொண்டு $\mathbb{Z}$ ன் மீது எளிதான மதிப்புகளுக்குச் சரிபார்ப்பது நல்லது.

(ii) $m=4$, $n=5$ எனில், $(m-n)=(4-5)=-1$ மற்றும் $(n-m)=(5-4)=1$.

இங்கு $(m-n)\neq(n-m)$. எனவே, $'-'$ ஆனது $\mathbb{Z}$ -இன் மீது பரிமாற்றுப் பண்பை நிறைவு செய்யாது.

(iii) $(m-n)-p$ மற்றும் $m-(n-p)$ போன்றவற்றில் $m=4, n=5$ மற்றும் $p=7$ என்ற

$(m-n)-p=(4-5)-7=(-1-7)=-8$ மற்றும் $\quad\ldots(1)$

$m-(n-p)=4-(5-7)=(4+2)=6$. $\quad\ldots(2)$

(1), (2) -லிருந்து $(m-n)-p \neq m-(n-p)$.

எனவே, '–' ஆனது $\mathbb{Z}$ -ன் மீது சேர்ப்புப் பண்பை நிறைவு செய்யாது.

(iv) சமனி உறுப்பு இல்லை. (ஏன்?)

(v) எதிர்மறை உறுப்பு இல்லை (ஏன்?) ■

எடுத்துக்காட்டு 12.4

$\mathbb{Z}_e$ ன் மீது $+$ என்ற ஈருறுப்புச் செயலி (i) அடைவுப் பண்பு (ii) பரிமாற்றுப் பண்பு (iii) சேர்ப்புப் பண்பு (iv) சமனிப் பண்பு மற்றும் (v) எதிர்மறைப் பண்பு ஆகியவைகளை பெற்றுள்ளதா எனச் சரிபார்க்க. இங்கு $\mathbb{Z}_e=$ அனைத்து இரட்டை முழுக்களின் கணம்.

தீர்வு

$\mathbb{Z}_e=\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}=\{\ldots,-6,-4,-2,0,2,4,6,\ldots\}$ என்ற இரட்டை முழுக்களின் கணத்தைக் கருதுக.

$\mathbb{Z}_e$ -ன் மீது கூட்டலின் $'+'$ என்ற ஈருறுப்புச் செயலியைக் கொண்டு பின்வரும் பண்புகளைச் சரிபார்க்கலாம்.

(i) ஏதேனும் இரண்டு இரட்டை முழுக்களின் கூடுதல் ஓர் இரட்டை முழு எண் ஆகும்.

ஏனெனில், $x, y \in \mathbb{Z}_e \Rightarrow x=2m$ மற்றும் $y=2n$, $m,n \in \mathbb{Z}$.

எனவே, $(x+y)=2m+2n=2(m+n) \in \mathbb{Z}_e$. எனவே, $\mathbb{Z}_e$ -ன் மீது $'+'$ ஆனது அடைவுப் பண்பு பெற்றுள்ளது.

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{Z}_e, (x+y)=2(m+n)=2(n+m)=(2n+2m)=(y+x)$.

எனவே, $+$ ஆனது பரிமாற்று விதியை நிறைவு செய்கிறது.

(iii) இதேபோல், $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}_e$, $(x+y)+z=x+(y+z)$.

எனவே, சேர்ப்பு விதியும் உண்மையாகிறது.

(iv) $x = 2k$ எனக் கொள்க. $2k + e = e + 2k = 2k \Rightarrow e = 0$.

எனவே, $\forall x \in \mathbb{Z}_e,\ \exists 0 \in \mathbb{Z}_e \ni x + 0 = 0 + x = x$.

ஆகையால், 0 சமனி உறுப்பாகும்.

(v) $x = 2k$ என எடுத்துக்கொண்டால், இதன் எதிர்மறை x' ஆனது பின்வருமாறு பெறப்படுகிறது.

$2k + x' = 0 = x' + 2k \Rightarrow x' = -2k$. அதாவது $x' = -x$.

எனவே, $\forall x \in \mathbb{Z}_e, \exists -x \in \mathbb{Z}_e \ni x + (-x) = (-x) + x = 0$

எனவே, $-x$ என்பது x -ன் எதிர்மறை ஆகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 12.5

$\mathbb{Z}_0$ = அனைத்து ஒற்றை முழுக்களின் கணம் எனில் $\mathbb{Z}_o$ -ன் மீது இயற்கணித செயலி $+$ ஆனது (i) அடைவுப் பண்பு (ii) பரிமாற்றுப் பண்பு (iii) சேர்ப்புப் பண்பு (iv) சமனிப் பண்பு மற்றும் (v) எதிர்மறைப் பண்பு ஆகியவற்றைப் பெற்றுள்ளதா எனச் சரிபார்க்க.

தீர்வு

$\mathbb{Z}_o = \{2k+1 : k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$ என்ற அனைத்து ஒற்றை முழுக்களைக் கொண்ட கணத்தைக் கருதுக. கூட்டல் $+$ ஆனது $\mathbb{Z}_o$ -இன் மீது ஓர் **ஈருறுப்புச் செயல் ஆகாது**. ஏனெனில், $x = 2m+1, y = 2n+1$ எனும்பொழுது $x + y = 2(m+n)+2$ என்பது அனைத்து m, n -க்கும் இரட்டை எண்ணாகவே அமையும். எடுத்துக்காட்டாக, $3, 7 \in \mathbb{Z}_o$ என்ற இரு ஒற்றை எண்களைக் கருதுக. அவைகளின் கூடுதல் $3 + 7 = 10$ என்பது ஓர் இரட்டை எண்ணாகும். பொதுவாக, $x,\ y \in \mathbb{Z}_0$ எனில், $(x+y) \notin \mathbb{Z}_0$ ஆகும். $+$ ஆனது $\mathbb{Z}_o$ ன் மீது ஓர் ஈருறுப்புச் செயல் அல்லாததால் ஏனையப் பண்புகளைச் சரிபார்க்க வேண்டிய அவசியமில்லை. ■

எடுத்துக்காட்டு 12.6

கொடுக்கப்பட்ட கணத்தின்மீது பின்வரும் செயலியானது (i) அடைவுப் பண்பு (ii) பரிமாற்றுப் பண்பு மற்றும் (iii) சேர்ப்புப் பண்பு ஆகியவைகளைக் கொண்டுள்ளதா எனச் சரிபார்க்க.

$(a * b) = a^b; \forall a, b \in \mathbb{N}$ (அடுக்குக்குறி பண்பு)

தீர்வு

(i) $a * b = a^b \in \mathbb{N}; \forall a, b \in \mathbb{N}$ என்பது உண்மை. எனவே $\mathbb{N}$ ஆனது $*$ -ன் **கீழ் அடைவு** பெற்றுள்ளது.

(ii) $a = 2$, $b = 3$ ஆகிய மதிப்புகளை $a * b = a^b$ மற்றும் $b * a = b^a$ ஆகியவைகளில் பிரிதியிட,

$a * b = 2^3 = 8$ ஆனால் $b * a = 3^2 = 9 \quad \Rightarrow a * b \neq b * a$

எனவே **$*$ ஆனது பரிமாற்றுப் பண்பை நிறைவு செய்யாது.**

(iii) $a * (b * c) = a * (b^c) = a^{(b^c)}$ எனக் கொள்க.

இதில் $a = 2,\ b = 3$ மற்றும் $c = 4$ எனப் பிரதியிடக் கிடைப்பது

$a * (b * c) = 2 * (3 * 4) = 2^{3^4} = 2^{81}$

ஆனால் $(a * b) * c = (a^b) * c = (a^b)^c = a^{(bc)} = a^{bc} = 2^{12}$

$a * (b * c) \neq (a * b) * c$

எனவே, $*$ ஆனது **சேர்ப்புப் பண்பை நிறைவு செய்யாது.** ■

குறிப்பு

இந்த ஈருறுப்பு செயலிக்கு சமனியும் எதிர்மறையும் இல்லை. (காரணத்துடன் விளக்குக)

எடுத்துக்காட்டு 12.7

கொடுக்கப்பட்ட கணத்தின்மீது பின்வரும் செயலானது (i) அடைவுப் பண்பு (ii) பரிமாற்றுப் பண்பு (iii) சேர்ப்புப் பண்பு (iv) சமனிப் பண்பு மற்றும் (v) எதிர்மறைப் பண்பு ஆகியவைகளைப் பெற்றிருக்குமா எனச் சரிபார்க்க.

$m * n = m + n - mn;\ m, n \in \mathbb{Z}$

தீர்வு

(i) $m+n-m\,n$ -ன் விளைவு ஆனது ஒரு முழு எண் என்பது தெளிவாகிறது. எனவே $*$ ஆனது $\mathbb{Z}$ -ன் மீது **அடைவு** பெற்றுள்ளது.

(ii) $m*n = m+n-mn = n+m-nm = n*m,\ \forall m,n \in \mathbb{Z}$. எனவே, $*$ ஆனது **பரிமாற்றுப் பண்பை** நிறைவு செய்கிறது.

(iii) $(m*n)*p = (m+n-mn)*p = (m+n-mn)+p-(m+n-mn)\,p$

$$= m*n = m+n-mn = n+m-nm = n*m, \qquad \ldots (1)$$

இதேபோன்று, $m*(n*p) = m*(n+p-np) \ = \ m+(n+p-np)-m(n+p-np)$

$$= m+n+p-np-mn-mp+mnp \qquad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) -லிருந்து $m*(n*p)=(m*n)*p$. எனவே $*$ ஆனது **சேர்ப்புப் பண்பை** நிறைவு செய்கிறது**.**

(iv) e என்ற ஒரு முழு எண்ணை $m*e = e*m = m,\ \forall m \in \mathbb{Z}$ என்றவாறு காண வேண்டும்.

ஆகவே, $m*e = m \ \Rightarrow m+e-m\,e = m \Rightarrow e\,(1-m) = 0 \Rightarrow e \ = \ 0$ ஏனெனில் $m=1$. இங்கு , m ஆனது ஒரு தன்னிச்சையான முழு எண் என்பதால் $m=1$ என இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. எனவே $e=0$ மட்டும்தான் இருக்கமுடியும். மேலும் $m*0 = 0*m = m$, $\forall m \in \mathbb{Z}$. எனவே 0 என்பது சமனி உறுப்பாகும். எனவே **சமனிப் பண்பு** உறுதிப்படுத்தப்படுகிறது.

(v) $m' \in \mathbb{Z}$ என்ற ஓர் உறுப்பை $m*m' = m'*m = e = 0,\ \forall m \in \mathbb{Z}$ என்றவாறு காணவேண்டும்.

$m*m' = 0 \Rightarrow m+m'-m\,m' = 0 \Rightarrow m' = \dfrac{m}{m-1}$. $m=1$ எனும்போது m' ஐ வரையறுக்க முடியாது.

$m=2$ எனும்பொழுது m' ஒரு முழு எண். ஆனால் $m=2$ தவிர m -ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் m' ஒரு முழு எண்ணாக இருக்கத்தேவையில்லை. எனவே, $\mathbb{Z}$ -ல் **எதிர்மறை உறுப்பு அமையாது.**

12.2.3 பூலியன் அணிகள் மீது சில ஈருறுப்புச் செயல்கள் (Some binary operations on Boolean Matrices)

வரையறை 12.3

ஒரு மெய் அணியின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் 0 அல்லது 1 ஆக இருந்தால் அத்தகைய அணி **பூலியன் அணி** எனப்படும்.

குறிப்பாக பூலியன் பதிவுகளான 0 மற்றும் 1, பல்வேறு விதங்களில் வரையறுக்கமுடியும். மின்சார ஓட்டத்தை நிறுத்த அல்லது ஓடச் செய்யும் சாதனத்தில் “ஓடச் செய்தல் மற்றும் நிறுத்துதல்” என்பதனையும், வரைக்கொள்கையில், சேர்ப்பு அணி போன்ற பல இடங்களில் பூலியன் பதிவுகள் 0 மற்றும் 1 பயன்படுத்தப்படுகின்றன. நாம் அதே வகை பூலியன் அணிகளை விவாதத்திற்கு எடுத்துக் கொள்வோம்.

பூலியன் அணிகளின் தொகுப்பின் மீது பின்வரும் இரு வகையான செயற்பாடுகள் வரையறுக்கப்படுகின்றன.

$A=\left[a_{ij}\right]$ மற்றும் $B=\left[b_{ij}\right]$ என்ற ஒரே வகையான ஏதேனும் இரு பூலியன் அணிகள் என்க. அவைகளின் **இணைப்பு** $\vee$ மற்றும் **சந்திப்பு** $\wedge$ என்றுக் குறிக்கப்பட்டு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

வரையறை 12.4 A மற்றும் B-ன் இணைப்பு

$$A \vee B = \left[a_{ij}\right] \vee \left[b_{ij}\right] = \left[a_{ij} \vee b_{ij}\right] = \left[c_{ij}\right]$$

$$\text{இங்கு } c_{ij} = \begin{cases} 1, & a_{ij} = 1 \text{ அல்லது } b_{ij} = 1 \text{ எனில்} \\ 0, & a_{ij} = 0 \text{ மற்றும் } b_{ij} = 0 \text{ எனில்} \end{cases}$$

வரையறை 12.5 A மற்றும் B-ன் சந்திப்பு

$$A \wedge B = \left[a_{ij}\right] \wedge \left[b_{ij}\right] = \left[a_{ij} \wedge b_{ij}\right] = \left[c_{ij}\right] \text{ இங்கு } c_{ij} = \begin{cases} 1, & a_{ij} = 1 \text{ மற்றும் } b_{ij} = 1 \text{ எனில்} \\ 0, & a_{ij} = 0 \text{ அல்லது } b_{ij} = 0 \text{ எனில்} \end{cases}$$

மேற்கூறியவற்றிலிருந்து , $(a \vee b) = \{a, b\}$ இல் பெரியது; $(a \wedge b) = \{a, b\}$ இல் சிறியது என்பது விளங்கும் $a, b \in \{0, 1\}$.

எடுத்துக்காட்டு 12.8

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ஆகிய இரண்டும் ஒரே வகையான பூலியன் அணிகள் எனில், $A \vee B$ மற்றும் $A \wedge B$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

$$A \vee B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \vee 1 & 1 \vee 1 \\ 1 \vee 0 & 1 \vee 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \wedge B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \wedge 1 & 1 \wedge 1 \\ 1 \wedge 0 & 1 \wedge 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

இணைப்பு மற்றும் சந்திப்பு நிறைவு செய்யும் பண்புகள்

$\mathbb{B}$ என்பது ஒரே வகையான பூலியன் அணிகளின் தொகுப்பு என்க. இணைப்பு மற்றும் சந்திப்பு $\mathbb{B}$-ன் மீது நிறைவு செய்யக்கூடிய பண்புகளைக் காண்போம்

அடைவுப் பண்பு

$A, B \in \mathbb{B},\ A \vee B = [a_{ij}] \vee [b_{ij}] = [a_{ij} \vee b_{ij}] \in \mathbb{B}$

ஏனெனில், $\left(a_{ij} \vee b_{ij}\right) = 0$ அல்லது $1\ \forall i, j$. எனவே $\vee$ என்பது $\mathbb{B}$ -ன் மீது அடைவு பெற்றுள்ளது.

சேர்ப்புப் பண்பு

$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C, \forall A, B, C \in \mathbb{B}$. எனவே, $\vee$ என்பது சேர்ப்புப் பண்பை நிறைவு செய்கிறது.

சமனிப் பண்பு

$\forall A \in \mathbb{B}$, $\exists$ பூச்சிய அணி $0 \in \mathbb{B} \ni A \vee 0 = 0 \vee A = A$, $\vee$ -க்கு சமனி உறுப்பு பூச்சிய அணி ஆகும்.

எதிர்மறைப் பண்பு

எந்த ஓர் அணி $A \in \mathbb{B}$-க்கு, $A \vee B = B \vee A = 0$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும்படி $B \in \mathbb{B}$ என்ற நேர்மாறு அணியைக் காணமுடியாது.

எனவே, எதிர்மறை உறுப்பு $\mathbb{B}$ -ல் இருக்காது. இதுபோலவே, சந்திப்பு $\wedge$ என்ற செயலி ஆனது பின்வருபவைகளை நிறைவு செய்யும் என்பதை சரிபார்க்கமுடியும். (i) அடைவுப் பண்பு (ii) பரிமாற்றுப் பண்பு (iii) சேர்ப்புப் பண்பு (iv) சமனி உறுப்பு $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ என்ற அணி ஆகும் (v) எதிர்மறை உறுப்பு இருப்பதை உறுதிப்படுத்தமுடியாது.

12.2.4 மட்டு எண் கணிதம் (Modular Arithmetic)

இதுவரை வழக்கமான அடிப்படை இயற்கணித செயலிகள், அணிக் கூட்டல், அணிப் பெருக்கல், பூலியன் அணிகளின் இணைப்பு மற்றும் சந்திப்பு ஆகிய ஈருறுப்புச் செயலிகளின் பண்புகளைப் பற்றி விவாதித்தோம். இப்பிரிவில் 'மட்டு எண் கணிதம்' என்ற பிரிவில் ஒரு புதிய ஈருறுப்புச் செயலி பற்றி விவாதிப்போம். $n>1$ ஒரு மிகை முழு எண் என்க. இங்கு n என்பது 'மட்டு எண்' என அழைக்கப்படும்.

a, b ஆகிய இரண்டு முழுக்களுக்கு இடையேயுள்ள வித்தியாசம் n -ன் மடங்கு எனில், மட்டு n -ன் அடிப்படையில் a -ம் b -ம் ஒருங்கிசைவு உடையதாகும். இதனையே குறியீடுகள் மூலம், $a\equiv b(\bmod n)$ எனக்குறிப்பிடுவர்.

இதன்படி $a-b=n\cdot k, k\in\mathbb{Z}$ மற்றும் a - ஐ n ஆல் வகுக்கும்பொழுது கிடைக்கும் மீதி b ஆனது மிகக் குறைந்த மிகை முழு எண் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $25\equiv 4(\bmod 7), -20\equiv -2(\bmod 3)\equiv 1(\bmod 3)$ மற்றும் $15\equiv 0(\bmod 5)$, ... மேலும் முழுக்களின் கணத்தை n ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதிக்கான சாத்தியக் கூறுகள் $0,1,2,\ldots,n-1$ ஆகும். $\mathbb{Z}_5$ -ல்

$$\begin{aligned}
[0] &= \{\ldots,-15,-10,-5,0,5,10,15,\ldots\}\\
[1] &= \{\ldots,-14,-9,-4,1,\ 6,11,\ \ldots\}\\
[2] &= \{\ldots,-13,-8,-3,2,7,12,\ldots]\\
[3] &= \{\ldots,-12,-7,-2,3,8,13,\ldots\}\\
[4] &= \{\ldots,-11,-6,-1,4,9,14,\ldots\}.
\end{aligned}$$
என்பவற்றை

M2T8D5

$\mathbb{Z}_5=\{[0],[1],[2],[3],[4]\}$ என எழுதலாம். ஒவ்வொரு தொகுப்பிலும் ஏதேனும் இரண்டு எண்கள் மட்டு 5க்கு ஒருங்கிசைவு உடையதாகும். குறை எண்கள் தொகுப்பில் இருக்கும். ஆனால் $\mathbb{Z}_5$ யை குறிக்க மிகை எண்களை உபயோகிக்கலாம்.

2007க்கு முன், மட்டு எண்கணிதமானது 10-இலக்க ISBN (சர்வதேச நிலையான தர புத்தக எண்/International Standard Book Number) எண் தொகுப்பில் பயன்படுத்தப்பட்டது. உதாரணமாக, கடைசி இலக்கமானது சமநிலை சோதனைக்கானது ஆகும். இது $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,X\}$ என்ற கணத்திலிருந்து கிடைக்கிறது. 81-7808-755-**3** என்ற ISBN எண்ணில் கடைசி இலக்கமான **3** ஆனது பின்வருமாறு கிடைக்கப்பெறுகிறது.

1*8+2*1+3*7+4*8+5*0+6*8+7*7+8*5+9*5=8+2+21+32+0+48+49+40+45 =245 $\equiv 3$ (மட்டு 11).
மாற்றாக நிறையிட்ட கூடுதல் பின் திருப்புகை முறையில் கணக்கிடப்படுகிறது.

9*8+8*1+7*7+6*8+5*0+4*8+3*7+2*5+1*5=245 = **3** (மட்டு 11).
இரண்டு வழிகளிலும், நாம் ஒரே சரிபார்ப்பு (check) எண் 3 ஐப் பெறுகிறோம்.

2007–க்குப் பிறகு 13-இலக்க ISBN எண் பின்பற்றப்படுகிறது. (இடமிருந்து வலமாக) வலமிருந்து இடமாகத் தொடங்கும் முதல் 12 இலக்கங்களை 3, 1, 3, 1,…. என்கிற நிறைகளால் பெருக்கப்படுகின்றன. பின்னர் நிறையிட்ட கூடுதல் கணக்கிடப்படுகிறது. 10 -ன் அதிக மடங்கு எடுக்கப்படுகிறது. பின்னர் வித்தியாசம் கணக்கிடப்படுகிறது. அதன் கூட்டல் எதிர்மறை மட்டு 10 என்பது பதிமூன்றாவது இலக்கமாகும்.

உதாரணமாக, 978-81-931995-6-**5** என்ற ISBN எண்ணைக் கருதுவோம். இதில் இடமிருந்து வலமாக 12 இலக்கங்களை எடுத்துக்கொள்வோம்.

9	7	8	8	1	9	3	1	9	9	5	6
1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3
9	21	8	24	1	27	3	3	9	27	5	18

இதில் இறுதி நிரையின் கூடுதல் 155 ஆகும். 10 -ன் மடங்குகளில் அருகிலுள்ள (உயர்) முழு எண் 160 ஆகும். 160–க்கும் 155–க்கும் உள்ள வித்தியாசம் 5 ஆகும். எனவே 5–ன் கூட்டல் எதிர்மறை மட்டு 10 -ஐ பொருத்து **5** ஆகும். இது ISBN எண்ணில் 13-வது இலக்கமாகும்.

மட்டு எண்கணிதத்தில், n ஐ விட குறைவான மிகை முழுக்களைக் கொண்ட கணம் $\mathbb{Z}_n$ –ன் மீது "n–ன் **மட்டுக்கு கூட்டல்** $n(+_n)$" மற்றும் "n–ன் **மட்டுக்கு பெருக்கல்** $n(\times_n)$" ஆகிய புதிய இரண்டு செயலிகளை வரையறுப்போம்.

வரையறை 12.6

(i) n –ன் மட்டுக்கு கூட்டலானது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$a, b \in \mathbb{Z}_n$ என்க. பிறகு $a+b$ ஐ n ஆல் வகுக்க கிடைக்கும் மீதி $a +_n b$

(ii) n –ன் மட்டுக்கு பெருக்கலானது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$a, b \in \mathbb{Z}_n$ என்க. பிறகு $a \times b$ ஐ n ஆல் வகுக்க கிடைக்கும் மீதி $a \times_n b$

எடுத்துக்காட்டு 12.9

மட்டுக் கூட்டல் 5 செயலி அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி கணம் $\mathbb{Z}_5$ –ன் மீது $+_5$ என்ற செயலிக்கு (i) அடைவுப் பண்பு (ii) பரிமாற்றுப் பண்பு (iii) சேர்ப்புப் பண்பு (iv) சமனிப் பண்பு மற்றும் (v) எதிர்மறைப் பண்பு ஆகியவைகளைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு

$\mathbb{Z}_5 = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$ மட்டு 5 கூட்டல் செயலி அட்டவணை பின்வருமாறு பெறப்படுகிறது. மீதிகளின் கணமானது $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ $\{[0], [1], [2], [3], [4]\}$ என்ற தொகுப்பு அமைப்பைக் குறிக்கிறது.

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

அட்டவணை 12.2

(i) செயலி அட்டவணையில் உள்ள எல்லா வெற்றிடங்களும் $\mathbb{Z}_5$ –ன் **சரியாக ஓர் உறுப்பு** மூலம் நிரப்பப்பட்டிருந்தால் $a +_5 b$ –ன் விளைவு ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்தது. எனவே, $+_5$ ஆனது $\mathbb{Z}_5$ –ன் மீது **அடைவு** பெற்றுள்ளது.

(ii) அட்டவணையில் உள்ள பதிவுகள் **முதன்மை மூலைவிட்டத்துடன் சமச்சீராக** வைக்கப்பட்டுள்ளதால் $+_5$ ஆனது **பரிமாற்றுப் பண்புடையது**.

(iii) சேர்ப்புப் பண்பை சரிபார்ப்பதற்கு செயலி அட்டவணையை நேரடியாகப் பயன்படுத்த முடியாது. எனவே, இதை வழக்கம்போல ஓர் எடுத்துக்காட்டின் மூலம் சரிபார்க்க வேண்டும்.

$2, 3, 4 \in \mathbb{Z}_5$ எனில், $(2 +_5 3) +_5 4 = 0 +_5 4 = 4$ (மட்டு 5)

$2 +_5 (3 +_5 4) = 2 +_5 2 = 4$ (மட்டு 5)

எனவே, $(2 +_5 3) +_5 4 = 2 +_5 (3 +_5 4)$.

இது போன்று தொடர்ந்தால் எல்லா சாத்தியமான மும்மூன்று உறுப்புகளின் தொகுப்பிற்கும் இதை சரிபார்க்க முடியும். முடிவாக, $+_5$ ஆனது சேர்ப்புப் பண்பை நிறைவு செய்யும் எனக் காட்டலாம்.

(iv) 0 தலைமையிலான நிரை மற்றும் நிரல் ஒரே மாதிரியானவை. எனவே, $0 \in \mathbb{Z}_5$ என்பது சமனி உறுப்பாகும்.

(v) ஒவ்வொரு நிரை மற்றும் நிரலிலும் சமனி உறுப்பு 0 உள்ளதால் எதிர்மறை உறுப்பு உறுதி செய்யப்படுகிறது. எனவே, அட்டவணை 12.2–லிருந்து எதிர்மறைப் பண்பு உண்மை என்பது தெளிவாகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக

* $\mathbb{Z}_5$ –ன் உறுப்புகளில் ஏதேனும் ஓர் உறுப்பு ‘2’ இன் எதிர்மறையைக் காணும் முறை கீழே கோடிட்டுக் காட்டப்பட்டுள்ளது.

* 2 தலைமையிலான III வது நிரையில் சமனி உறுப்பின் நிலையை முதலில் கண்டறியவும். III வது நிரையில் கிடைமட்டமாக நகர்ந்து 0 ஐ அடைந்த பிறகு IV வது நிரலில் 0 –க்கு மேலே நகரும்போது கிடைக்கும் 3–ஐதான் 2–ன் எதிர்மறை உறுப்பாகக் கொள்வர். மேலும் இதற்கு அத்தாட்சியாக $2+3 \equiv 0 \pmod 5$ என்பதும் உண்மையாவதாகக் காணலாம். ஏனெனில், 0 ஆனது III வது நிரை மற்றும் IVவது நிரலை இணைக்கும் உறுப்பாகும். IV வது நிரலில் மிக உயர்ந்த நிலையில் கிடைக்கப்பெற்ற உறுப்பு 3 ஆகும். எனவே 2-ன் எதிர்மறை உறுப்பு 3 ஐத் தவிர வேறில்லை. இதேவழியில் $\mathbb{Z}_5$ –ன் ஒவ்வோர் உறுப்பின் எதிர்மறையைப் பெறலாம்.

* இவ்வாறாக 0–ன் எதிர்மறை $0 \in \mathbb{Z}_5$ 1 –ன் எதிர்மறை $4 \in \mathbb{Z}_5$, 2–ன் எதிர்மறை $3 \in \mathbb{Z}_5$, 3–ன் எதிர்மறை $2 \in \mathbb{Z}_5$, 4 –ன் எதிர்மறை $1 \in \mathbb{Z}_5$ ஆகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 12.10

மட்டு 11ஐப் பொருத்து எச்சத் தொகுதிகளின் கணம் $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ –இன் **உட்கணம்** $A = \{1,3,4,5,9\}$ –ன் மீது $\times_{11}$ என்ற செயலிக்கு (i) அடைவுப் பண்பு (ii) பரிமாற்றுப் பண்பு (iii) சேர்ப்புப் பண்பு (iv) சமனிப் பண்பு (v) எதிர்மறைப் பண்பு ஆகியவைகளைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு

$\times_{11}$ என்ற செயலியின் செயலி அட்டவணை பின்வருமாறு.

$\times_{11}$	1	3	4	5	9
1	1	3	4	5	9
3	3	9	1	4	5
4	4	1	5	9	3
5	5	4	9	3	1
9	9	5	3	1	4

அட்டவணை 12.3

முந்தைய எடுத்துக்காட்டில் விவரித்தபடி $\times_{11}$ என்ற செயலிக்கு A –ன் மீது பின்வரும் பண்புகளைச் சரிபார்த்தல் கீழ்க்கண்டவாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

(i) பெருக்கல் அட்டவணையில் உள்ள எல்லா வெற்றிடங்களும் A–ல் சரியாக ஓர் உறுப்பு மூலம் நிரப்பப்பட்டிருப்பதால் $\times_{11}$, A –ன் மீது **அடைவுப் பண்பு** பெற்றுள்ளது.

(ii) அட்டவணையில் உள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் முதன்மை மூலைவிட்டத்திற்கு சமச்சீராக இருப்பதால், $\times_{11}$ **பரிமாற்றுப் பண்புடையதாகும்.**

(iii) $\times_{11}$ என்பது வழக்கமாக **சேர்ப்புப் பண்புக்கு** கட்டுப்படும்.

(iv) 1 தலைமையிலான நிரை மற்றும் நிரல் ஒரே மாதிரியானவை. எனவே, $1 \in A$ என்பது **சமனி** உறுப்பாகும்.

(v) ஒவ்வொரு நிரை மற்றும் நிரலில் சமனி உறுப்பு 1 இருப்பதால் **எதிர்மறைப் பண்பு** $\times_{11}$ –க்கு உண்மையாகிறது. 1 –ன் எதிர்மறை $1 \in A$, 3 –ன் எதிர்மறை $4 \in A$, 4–ன் எதிர்மறை $3 \in A$, 5 –ன் எதிர்மறை $9 \in A$, 9 –ன் எதிர்மறை $5 \in A$ ஆகும். ■

பயிற்சி 12.1

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணங்களின் மீது வரையறுக்கப்பட்டிருக்கும் $*$ ஓர் ஈருறுப்புச் செயலியா எனத் தீர்மானிக்க.

   (i) $\mathbb{R}$ -ன் மீது $a*b = a.|b|$ (ii) $A=\{1,2,3,4,5\}$ -ன் மீது $a*b=(a,b)$ -ல் சிறியது,

   (iii) $\mathbb{R}$ -ன் மீது $(a*b)=a\sqrt{b}$

2. $\mathbb{Z}$ -ன் மீது $\otimes$ என்ற செயலி பின்வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. $(m\otimes n)=m^n+n^m : \forall m,n\in\mathbb{Z}$ $*$ ஆனது $\mathbb{Z}$ -ன் மீது அடைவுப் பண்பை பெற்றுள்ளதா?

3. $\mathbb{R}$ -ன் மீது $*$ ஆனது $(a*b)=a+b+ab-7$ என வரையறுக்கப்பட்டால் $*$, $\mathbb{R}$ -ன் மீது அடைவு பெற்றுள்ளதா? அவ்வாறெனில், $3*\left(\frac{-7}{15}\right)$ காண்க.

4. $A=\{a+\sqrt{5}b : a,b\in\mathbb{Z}\}$ என்க. வழக்கமான பெருக்கல் A -ன் மீது ஓர் ஈருறுப்புச் செயல் ஆகுமா என பரிசோதிக்க.

5. (i) $*$ என்ற ஓர் ஈருறுப்புச் செயலி $\mathbb{Q}$ -ன் மீது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது இந்த $*$ ஆனது, அடைவுப் பண்பு, பரிமாற்றுப் பண்பு, சேர்ப்புப் பண்பு ஆகியவற்றை நிறைவு செய்கிறதா எனச் சோதிக்க $a*b=\left(\frac{a+b}{2}\right);\ \forall a,b\in\mathbb{Q}$.

   (ii) $*$ ஆனது, சமனிப் பண்பு மற்றும் எதிர்மறைப் பண்பு ஆகியவை, $\mathbb{Q}$ -ன் மீது உண்மையாகுமா எனச் சோதிக்க. $a*b=\left(\frac{a+b}{2}\right);\ \forall\, a,b\in\mathbb{Q}$.

6. $*$ என்ற ஈருறுப்புச் செயலி ஆனது $A=\{a,b,c\}$ என்ற கணத்தின் மீது பரிமாற்று விதிக்கு கட்டுப்பட்டால் பின்வரும் பட்டியலைப் பூர்த்தி செய்க.

$*$	a	b	c
a	b		
b	c	b	a
c	a		c

7. $A=\{a,b,c,d\}$ என்ற கணத்தின் மீது $*$ என்ற ஈருறுப்புச் செயலியை பின்வரும் பட்டியலுடன் கருதுக.

$*$	a	b	c	d
a	a	c	b	d
b	d	a	b	c
c	c	d	a	a
d	d	b	a	c

   இது மாற்றுப்பண்பு மற்றும் சேர்ப்புப் பண்புகளைப் பெற்றுள்ளதா?

8. Let $A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$

என்பவைகள் ஒரே மாதிரியான வகையினை உடைய ஏதேனும் மூன்று பூலியன் அணிகள் எனில், (i) $A\vee B$ (ii) $A\wedge B$ (iii) $(A\vee B)\wedge C$ (iv) $(A\wedge B)\vee C$ ஆகியவைகளைக் காண்க.

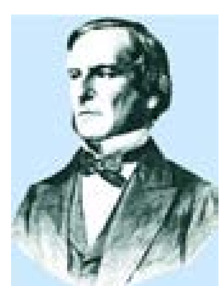
9. (i) $M=\left\{\begin{pmatrix}x&x\\x&x\end{pmatrix}: x\in R-\{0\}\right\}$ என்க. $*$ என்பது அணிப் பெருக்கல் எனக் கொள்க. $*$ ஆனது M -ன் மீது அடைவு பெற்றுள்ளதா எனத் தீர்மானிக்க. அவ்வாறெனில், $*$ ஆனது M -ன் மீது பரிமாற்றுப் பண்பு, சேர்ப்புப் பண்புகளையும் நிறைவு செய்யுமா எனச் சோதிக்க.

(ii) $M=\left\{\begin{pmatrix}x&x\\x&x\end{pmatrix}: x\in R-\{0\}\right\}$ $*$ என்பது அணிப் பெருக்கல் எனக் கொள்க. $*$ ஆனது M -ன் மீது அடைவு பெற்றுள்ளதா எனத் தீர்மானிக்க. அவ்வாறெனில், $*$ ஆனது M -ன் மீது சமனிப்பண்பு மற்றும் எதிர்மறைப் பண்புகளை நிறைவு செய்யுமா எனவும் சோதிக்க.

10. (i) $A=\mathbb{Q}\setminus\{1\}$ என்க. A -ன் மீது $*$ பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது. $x*y=x+y-xy$. $*$ ஆனது A -ன் மீது அடைவு பெற்றுள்ளதா? அவ்வாறெனில், A -ன் மீது $*$ ஆனது பரிமாற்று விதி மற்றும் சேர்ப்பு விதிகளை நிறைவு செய்யுமா எனச் சோதிக்க.

(ii) $A=\mathbb{Q}\setminus\{1\}$ என்க. A -ன் மீது $*$ பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது. $x*y=x+y-xy$ $*$ ஆனது A -ன் மீது அடைவு பெற்றுள்ளதா? அவ்வாறெனில், A -ன் மீது $*$ ஆனது சமனிப்பண்பு மற்றும் எதிர்மறைப் பண்புகளை நிறைவு செய்யுமா எனச் சோதிக்க.

12.3 கணித தர்க்கவியல் (Mathematical Logic)



ஜார்ஜ் பூலே
(1815-1864)

ஜார்ஜ் பூலே ஒரு சுயமாய்க் கற்றுத் தேர்ந்த கணிதமேதை மட்டுமல்ல, ஒரு தத்துவஞானி மற்றும் தர்க்கவியலாளரும் ஆவார். இரும எண்களை உள்ளடக்கிய **பூலியன் இயற்கணிதம்** குறித்த அவரது முடிவுகள் பல்வேறு துறைகளில் முக்கியப் பங்கு வகிக்கின்றன. குறிப்பாக கணினி பயன்பாடுகளில் அதிகமாக பங்கு வகிக்கின்றன. குறியீட்டு தர்க்கத்தின் கருத்தை அவர் அறிமுகப்படுத்தினார் மற்றும் கணித தர்க்கத்தின் விரைவான வளர்ச்சிக்கு நிறைய முடிவுகளை வழங்கினார்.

தர்க்கவியலின் முதல் புத்தகத்தை எழுதியவர் மதிப்பிற்குரிய கிரேக்க தத்துவஞானி அரிஸ்டாடில் (384-322கி.மு (பொ.ஆ.மு)) ஆவார். 17ஆம் நூற்றாண்டில் ஜெர்மானிய தத்துவ ஞானியும் கணித வல்லுநருமான காட்ஃபிரைட் லெபினிட்ஸ் என்பார் தர்க்கவியலில் குறியீடுகளை பயன்படுத்தும் முறையை வித்திட்டார். பின்னர் இந்த முறையை 19ஆம் நூற்றாண்டில் வழிமுறைப்படுத்தியவர்கள் ஜார்ஜ் பூலே மற்றும் அகஸ்டஸ் டீமார்கன் ஆவர். தர்க்கம், குறியீடுகள், இயற்கணிதம் ஆகியவற்றை ஒன்றுபடுத்திப் பார்த்தால் தர்க்கவியல், கணிதவியலோடு அதிகம் ஒத்துப்போகிறது என்ற உண்மையை நிறுவியவர் ஜார்ஜ்பூலே. 19ஆம் நூற்றாண்டின் இறுதியிலும் மற்றும் 20 ஆம் நூற்றாண்டின் தொடக்கத்திலும் கணித தர்க்கவியல் வளர்ச்சி பெற்றது.

1930களில் ஆராய்ச்சியாளர்கள் இரும எண்களான (binary numbers) (நியூமான் தனது மரணப்படுக்கையில் இரும எண்களான 0 மற்றும் 1 இந்த உலகை ஆளப்போகிறது என்றார்.) 0 மற்றும் 1 களைக் கொண்டு மின்சுற்றை அளவிடவும் மற்றும் மின்னணு கணினிகளை வடிவமைக்கவும்

முடியும் என்று கண்டறிந்தனர். இன்று டிஜிட்டல் (மின்னணு) கணினிகள் மற்றும் மின்சுற்றுகள் இந்த இரும எண் கணிதத்தை (binary arithmetic) செயல்படுத்த வடிவமைக்கப்பட்டுள்ளது. நாம் கணிதத் தர்க்கத்தை மொழியாகவும் மற்றும் கணிதம் மற்றும் கணினி அறிவியல் பாடங்களில் உய்த்து அறிதலாகவும் ஆய்வு செய்யலாம்.

பொதுவாக தர்க்கம் என்பது சரியான பகுத்தறிவின் ஆய்வாகும். ஆனால் கணித தர்க்கம் அறிவை ஒரு துல்லியமான கணித வழியில் பிரதிநிதித்துவப்படுத்த அனுமதிக்கிறது. மேலும் இது துல்லியமான விதிகளின் தொகுப்பைப் பயன்படுத்தி சரியான அனுமானங்களைச் செய்ய அனுமதிக்கிறது. இது கணினி அறிவியலுக்கான ஒரு சக்தி வாய்ந்த கருவியாகக் கருதப்படுகிறது. ஏனெனில் இது முக்கியமாக நிகழ்ச்சி நிரல்களின் சரியான தன்மையை சரிபார்க்கப் பயன்படுகிறது.

12.3.1 கூற்று மற்றும் அதன் மெய் மதிப்பு (Statement and its truth value)

கணித தர்க்கவியலின் எளிய பகுதி என்னவென்றால் அதன் **முன்மொழி தர்க்கமாகும்** இப்பகுதியை உருவாக்கஏதுவாக அதன் கூற்றுகள் அல்லது அதன் முன்மொழிவுகள் பயன்படுகின்றன. பெரும்பாலும் கருத்துத் தொடர்பில் நம்முடைய எண்ணங்களை வெளிப்படுத்த மொழி தேவைப்படுகிறது. அவைகள் வாக்கிய வகைகளாக இருக்கின்றன. வெவ்வேறு வகையான வாக்கிய வகைகள்

(1) சாதாரண வாக்கியம் (Assertive type)

(2) கட்டளை வாக்கியம் (A command or a request type)

(3) வியப்பு வாக்கியம் (Emotions, excitement type)

(4) வினா வாக்கியம் (Question type)

(5) திறந்த வாக்கியம் (open type)

B8G7F4

வரையறை 12.7

கூற்று என்பது ஒரு சாதாரண வாக்கியமாகும். இவ்வாக்கியத்தின் பொருள் ஆனது உண்மை அல்லது தவறு. என அமையலாம். ஆனால் இரண்டும் கலந்து இருத்தல் கூடாது.

கட்டளை வாக்கியமோ, வியப்பு வாக்கியமோ, வினா வாக்கியமோ. ஒரு கூற்று ஆகாது.

ஒரு கூற்றின் மெய்மதிப்பு என்பது அதன் 'உண்மை' அல்லது 'தவறினை' குறிப்பதாக அமைவது. ஒரு கூற்று உண்மையாயின் அதன் மெய்மதிப்பை T அல்லது 1 எனக் குறிப்பிடுகிறோம். ஒரு கூற்று தவறு எனில் அதன் மெய்மதிப்பை F அல்லது 0 எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

எந்த ஒரு வாக்கியத்திற்கும் அதன் மெய் மதிப்பு வாக்கியத்தில் கூறப்படாத சில நிபந்தனைகளுக்கு ஏற்ப மாறுபட்டால் அது ஒரு **திறந்த வாக்கியமாகும்**. எடுத்துக்காட்டாக, (i) $x \times 7 = 35$ ஒரு திறந்த வாக்கியம். இதன் மெய் மதிப்பானது x-ன் மதிப்பை பொருத்தது. அதாவது, $x = 5$ எனில் அது உண்மை. $x \neq 5$ எனில் அது தவறு. அவன் ஒரு கெட்டவன். இது திறந்த வாக்கியம் ஏனெனில். உண்மையெனக் கருதப்படும் கருத்து நபருக்கு நபர் மாறுபடும்.

எடுத்துக்காட்டு 12.11

பின்வரும் வாக்கியங்களிலிருந்து சரியான கூற்றுகளை அடையாளம் காணவும்.

தீர்வு

(1) உலகத்தில் மிக உயரமான சிகரம் எவரெஸ்ட் சிகரமாகும்.

(2) $3+4=8$.

(3) $7+5>10$.

(4) அந்தப் புத்தகத்தை எனக்கு கொடு.

(5) $x=3$ என்றிருக்கும் போது $(10-x)=7$.

(6) இந்த மலர் எவ்வளவு அழகாக இருக்கிறது!

(7) நீ எங்கே செல்கின்றாய்?

(8) நீ வெற்றி பெற வாழ்த்துக்கள்.

(9) இது முடிவின் ஆரம்பம்.

(2) ன் மெய்மதிப்பு F ஆகும். (1) மற்றும் (3) ஆவது வாக்கியங்களின் மெய்மதிப்பு T ஆக உள்ளது. எனவே, அவைகள் யாவும் கூற்றுகளாகும்.

(5) வது வாக்கியம் $x = 3$ க்கு உண்மை மற்றும் $x \neq 3$-க்கு தவறு. எனவே இது உண்மையாகவோ அல்லது தவறாகவோ இருக்குமே தவிர ஒரே நேரத்தில் இரண்டுமாக இல்லாமல் இருப்பதால் இதுவும் ஒரு கூற்றாகும்.

(4) வது வாக்கியம் கட்டளையையும் (6) வது ஆச்சரியத்தையும் (7) வது வினாவையும் (8) வது வாழ்த்தையும் குறிப்பதால் (4), (6), (7), (8) மற்றும் (9) ஆகிய வாக்கியங்கள் கூற்றுகளல்ல. (9) ஆனது ஒரு முரண்பாடான (paradox) கூற்றாகும். ■

12.3.2 கூட்டுக் கூற்றுகள், தர்க்க இணைப்புகள் மற்றும் மெய் அட்டவணைகள் (Compound Statements, Logical Connectives and Truth Tables)

வரையறை 12.8 (தனி மற்றும் கூட்டுக் கூற்றுகள்)

ஒரு கூற்றினை இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட கூற்றுகளாக பிரிக்க இயலாவிடில் அக்கூற்றை **தனிக்கூற்று** அல்லது **அணுக்கூற்று** என அழைப்பர். ஒரு கூற்றானது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட கூற்றுகளின் சேர்ப்பாயின் அது ஒரு கூட்டுக் கூற்று என அழைக்கப்படும். எனவே, எந்த ஒரு கூற்றும் **தனிக்கூற்று** அல்லது **கூட்டுக்கூற்று** ஆக இருக்க முடியும் என்பது இதன்மூலம் தெளிவாகிறது.

தனிக்கூற்றுக்கு எடுத்துக்காட்டு

எடுத்துக்காட்டு 12.11 -ல் (1), (2), (3) ஆகிய வாக்கியங்கள் தனிக் கூற்றுகளாகும்.

கூட்டுக் கூற்றுக்கு எடுத்துக்காட்டு

"1 ஒரு பகா எண் அல்ல மற்றும் ஊட்டி கேரளாவில் உள்ளது" என்ற கூற்றைக் கருதுக. மேற்கண்ட கூற்றானது பின்வரும் தனிக் கூற்றுகளின் கூட்டுக் கூற்றாகும்.

p : 1 ஒரு பகா எண் அல்ல.

q : ஊட்டி கேரளாவில் உள்ளது.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட கூற்று ஒரு தனிக் கூற்று அல்ல. அது ஒரு கூட்டுக் கூற்று ஆகும்.

மேலே உள்ள விவாதங்களிலிருந்து, எந்தவொரு எளிய கூற்றும் T அல்லது F -இன் மதிப்பைப் பெறுகிறது. எனவே இது ஒரு மாறியாக கருதப்படலாம். இந்த மாறி, **கூற்று மாறி** அல்லது **முன்மொழிவு மாறி** என அழைக்கப்படுகிறது. முன்மொழிவு மாறிகள் பொதுவாக, p, q, r ,.... எனக் குறிக்கப்படுகின்றன.

வரையறை 12.9 (தர்க்க இணைப்புகள்)

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட கூற்றுகளை இணைத்து புதிய கூற்றுகளை உருவாக்குவதற்கு "மற்றும்", "அல்லது", "எனில்-பின்னர்", "என்றால் மற்றும் என்றால் மட்டுமே" மற்றும் "அல்ல" முதலிய வார்த்தைகளை இணைப்புகளாகப் பயன்படுத்துகிறோம். இவ்வார்த்தைகளை ஆங்கிலத்தில் முறையே 'and', 'or', 'if-then', 'if and only if' மற்றும் 'not' என்கிறோம். இந்த இணைப்பு வார்த்தைகளை '**தர்க்க இணைப்புகள்**' என்று கூறுவர்.

தனிக் கூற்றுகளிலிருந்து ஒரு கூட்டுக் கூற்றை அமைப்பதற்கு சில இணைப்புகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. **மறுப்பு (அல்ல), இணையல் (மற்றும்)** மற்றும் **பிரிப்பிணைவு (அல்லது)** ஆகியவைகள் சில அடிப்படை தர்க்க இணைப்புகள் ஆகும்.

வரையறை 12.10

ஒரு '**கூற்றுக் கோவை**' என்பது ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட கூற்றுகளை சில அடிப்படை தர்க்க இணைப்புகளால் இணைத்து உருவாக்கும் ஒரு கோவை ஆகும்.

வரையறை 12.11 (மெய்மை அட்டவணை)

தனிக் கூற்றுகள் மற்றும் கூட்டுக் கூற்றுகளுக்கு இடையேயான தொடர்பினை அவைகளின் மெய் மதிப்புகள் மூலம் வெளிப்படுத்தும் ஒரு அட்டவணையை '**மெய்மை அட்டவணை**' என்பர்.

வரையறை 12.12

(i) p ஒரு தனிக் கூற்று என்க. p –ன் **மறுப்பு** என்பது p –ன் மெய்மதிப்பின் எதிர்மறையை உடைய கூற்றாகும். அதை $\neg p$ என்ற குறியீட்டால் குறிப்பிடுவர். p –ன் மெய் மதிப்பு 'F' எனில் $\neg p$–ன் மெய்மதிப்பு T ஆகும். அவ்வாறில்லையெனில் அது F ஆகும்.

(ii) p, q ஏதேனும் இரு தனிக் கூற்றுகள் என்க. 'மற்றும்' (and) என்ற வார்த்தையால் இணைக்கப்படும்பொழுது, p மற்றும் q என்ற **கூட்டுக் கூற்றை** அடைகிறோம். இதனை $p \wedge q$ என்ற குறியீட்டால் குறிப்பிடுவர். இதனை 'p இணையல் q' அல்லது 'p தொப்பி q' எனப் படிக்கலாம். p -ம் q -ம் T ஆக மெய் மதிப்பை பெற்றிருந்தால் $p \wedge q$ –ன் மெய் மதிப்பு T ஆகும். அவ்வாறில்லை எனில், அது F ஆகும்.

(iii) இரண்டு தனிக் கூற்றுகள் p மற்றும் q கள் அல்லது (or) என்ற வார்த்தையால் இணைக்கப்படும்பொழுது பெறப்படும் கூட்டுக் கூற்று p, q –ன் **பிரிப்பிணைவு** (disjunction) எனப்படும். இதனை, $p \vee q$ என்ற குறியீட்டால் குறிப்பிடுவர். இதனை 'p பிரிப்பிணைவு q' அல்லது or 'p கிண்ணம் q' எனப் படிக்கலாம். p -ம் q -ம் F என்ற மெய்மதிப்பை பெற்றிருந்தால் $p \vee q$ –ன் மெய்மதிப்பு F ஆகும். அவ்வாறில்லை எனில் அது T ஆகும்.

தர்க்க இணைப்புகள் மற்றும் அதன் மெய்மை அட்டவணைகள்
(Logical Connectives and their Truth Tables)

(1) அல்ல NOT [$\neg$] என்பதற்குரிய மறுப்பின் மெய்மை அட்டவணை

$\neg p$–ன் மெய்மை அட்டவணை

p	$\neg p$
T	F
F	T

அட்டவணை 12.4

(2) மற்றும் AND [$\wedge$] என்பதற்குரிய இணையலின் மெய்மை அட்டவணை

$p \wedge q$ –ன் மெய்மை அட்டவணை

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

அட்டவணை 12.5

(3) அல்லது OR [$\vee$] என்பதற்குரிய பிரிப்பிணைவின் மெய்மை அட்டவணை

$p \vee q$ –ன் மெய்மை அட்டவணை

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

அட்டவணை 12.6

எடுத்துக்காட்டு 12.12

p : 'குளிராக இருக்கிறது', q : 'மழை பெய்கிறது' என்ற கூற்றுகளுக்கு $\neg p$, $p \wedge q$, $p \vee q$ மற்றும் $q \vee \neg p$ ஆகிய வார்த்தைகளுடன் கூடிய வாக்கியங்களை அமைக்க (எழுதுக).

தீர்வு

(1) $\neg p$: குளிராக இல்லை

(2) $p \wedge q$: குளிராக இருக்கிறது மற்றும் மழை பெய்கிறது

(3) $p \vee q$: குளிராக இருக்கிறது அல்லது மழை பெய்கிறது

(4) $q \vee \neg p$: மழை பெய்கிறது அல்லது குளிராக இல்லை

$\neg p$ என்ற கூற்றில் ஒரே ஒரு தனிக்கூற்று p மட்டும் உள்ளதால் அதற்குரிய மெய்மை அட்டவணையில் $2 = (2^1)$ நிரைகள் இருக்கும். $p \wedge q$ மற்றும் $p \vee q$ என்கிற கூட்டுக் கூற்றுகள், p மற்றும் q ஆகிய இரண்டு தனிக் கூற்றுகளைப் பெற்றுள்ளது. எனவே அவைகளுக்குரிய மெய்மை அட்டவணைகளில் $4 = (2^2)$ நிரைகள் இருக்கும். எனவே, இதேபோல ஒரு கூட்டுக் கூற்றில் n வெவ்வேறான உள் கூற்றுகள் இடம்பெறின் மெய்மை அட்டவணையானது 2^n நிரைகளைக் கொண்டிருக்கும். ■

எடுத்துக்காட்டு 12.13

பின்வரும் கூற்றின் வாய்ப்பாடுகளுக்கு எத்தனை நிரைகள் தேவைப்படும்?

(i) $p \vee \neg t \wedge (p \vee \neg s)$ (ii) $((p \wedge q) \vee (\neg r \vee \neg s)) \wedge (\neg t \wedge v)$

தீர்வு

(i) $(p \vee \neg t) \wedge (p \vee \neg s)$ என்ற கூற்றில் p, s, t என்ற மாறிகள் அதாவது 3 உள் கூற்றுகள் இடம்பெறுகின்றன. எனவே, இதன் மெய்மை அட்டவணையில் $2^3 = 8$ நிரைகள் இடம்பெறும்.

(ii) $((p \wedge q) \vee (\neg r \vee \neg s)) \wedge (\neg t \wedge v)$ என்ற கூற்றில் p, q, r, s, t, v என்ற 6 மாறிகள் இடம் பெறுவதால் அதன் மெய்மை அட்டவணையில் $2^6 = 64$ நிரைகள் இடம்பெறும். ■

நிபந்தனைக் கூற்று

வரையறை 12.13

p மற்றும் q ஏதேனும் இரு கூற்றுகளின் நிபந்தனைக் கூற்றானது, " p எனில் q " என்ற கூற்றைக் குறிக்கும். இதை $p \rightarrow q$ எனக் குறிப்பிடுவர். இங்கு p ஐக் **கருதுகோள்** அல்லது **முன்உதாரணம்** என்றும் q ஐ **முடிவு** அல்லது **விளைவு** என்றும் அழைப்பார்கள். p –ன் மெய் மதிப்பு உண்மையாக இருந்து q –ன் மெய்மதிப்பு தவறாக இருப்பின் $p \rightarrow q$ –ன் மெய் மதிப்பு தவறாகும். அவ்வாறில்லை எனில் அது உண்மையாகும்.

$p \to q$ -ன் மெய்மை அட்டவணை

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

அட்டவணை 12.7

எடுத்துக்காட்டு 12.14

இன்று திங்கள் எனில், பிறகு 4 + 4 = 8, என்பதனை $p \to q$ -ஆகக் கருதுக,

இங்கு உள்கூற்றுகள் p மற்றும் q பின்வருமாறு கொடுக்கப்படுகிறது.

p: இன்று திங்கள் கிழமை; q: 4 + 4 = 8.

q -ன் முடிவானது T என்பதால் $p \to q$ -ன் மெய்மதிப்பு T ஆகிறது.

ஒரு முக்கியமான கருத்து என்னவென்றால் p மற்றும் q-ன் வாக்கியங்களின் அர்த்தங்களை கருத்தில் கொண்டு $p \to q$ ஐ செயல்படுத்தக்கூடாது. மேலும் p என்பது q வுடன் தொடர்புடையதாக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை.

விளைவுகள்

$p \to q$ என்ற நிபந்தனைக் கூற்றிலிருந்து மேலும் மூன்று நிபந்தனைக் கூற்றுகள் வருவிக்கப்படுகின்றன. அவைகள் கீழே பட்டியலிடப்படுகிறது.

(i) மறுதலைக் கூற்று (Converse statement) $q \to p$.

(ii) எதிர்மறைக் கூற்று (Inverse statement) $\neg p \to \neg q$.

(iii) நேர்மாறுக் கூற்று (Contrapositive statement) $\neg q \to \neg p$.

எடுத்துக்காட்டு 12.15

கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் இரண்டு கூற்றுகள் p மற்றும் q -க்கு பின்வருபவைகளை எழுதுக.

(i) நிபந்தனைக் கூற்று (ii) மறுதலைக் கூற்று (iii) எதிர்மறைக் கூற்று (iv) நேர்மாறுக் கூற்று

p : பகா எண்களின் எண்ணிக்கை முடிவில்லாதது

q: ஊட்டி கேரளாவில் உள்ளது

தீர்வு

p மற்றும் q சம்பந்தப்பட்ட நான்கு விதமான நிபந்தனைக் கூற்றுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

(i) $p \to q$: (நிபந்தனைக் கூற்று) “பகா எண்களின் எண்ணிக்கை முடிவில்லாதது எனில் பின்னர் ஊட்டி கேரளாவில் உள்ளது”.

(ii) $q \to p$: (மறுதலைக் கூற்று) “ஊட்டி கேரளாவில் உள்ளது எனில், பகா எண்களின் எண்ணிக்கை முடிவில்லாதது”

(iii) $\neg p \to \neg q$ (எதிர்மறைக் கூற்று) “பகா எண்களின் எண்ணிக்கை முடிவில்லாதது அல்ல எனில், ஊட்டி கேரளாவில் இல்லை”.

(iv) $\neg q \to \neg p$ (நேர்மாறுக் கூற்று) “ஊட்டி கேரளாவில் இல்லை எனில், பின்னர் பகா எண்களின் எண்ணிக்கை முடிவில்லாதது அல்ல”.

இரு நிபந்தனைக் கூற்று

வரையறை 12.14

p மற்றும் q என்ற ஏதேனும் இரு கூற்றுகளின் இரு நிபந்தனைக் கூற்று "p இருந்தால் இருந்தால் மட்டுமே q" என்ற கூற்றாகும். இதனை $p \leftrightarrow q$ எனக் குறிப்பிடுவர். p மற்றும் q-க்கு ஒரே மாதிரியான மெய் மதிப்புகள் இருந்தால் மட்டுமே $p \leftrightarrow q$ -ன் மெய்மதிப்பு T ஆகும். அவ்வாறில்லை எனில், அது F ஆகும்.

$p \leftrightarrow q$ –ன் மெய்மை அட்டவணை

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

அட்டவணை 12.8

G1M3H3

விலக்கி வைத்தல் (Exclusive OR (EOR)[$\overline{\vee}$]) (OR (XOR))

வரையறை 12.15

p மற்றும் q ஏதேனும் இரு கூற்றுகள் என்க. p **EOR** q என்பது ஒரு கூட்டுக் கூற்று ஆகும். இதன் மெய்மதிப்பை p அல்லது q சரியாக இருக்கையில் 'சரி' என்றும் அவ்வாறு இல்லையேல் 'தவறு' என்றும் தீர்மானிக்கப்படும். $p \overline{\vee} q$ என இது குறிக்கப்படும். p அல்லது q –ன் மெய் மதிப்பு T எனும்பொழுது $p \overline{\vee} q$ –ன் மெய்மதிப்பு T ஆகும். அவ்வாறில்லை எனில், அது F ஆகும். $p \overline{\vee} q$ –ன் மெய்மை அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

$p \overline{\vee} q$–ன் மெய்மை அட்டவணை

p	q	$p \overline{\vee} q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

அட்டவணை 12.9

எடுத்துக்காட்டு 12.16

$(p \overline{\vee} q) \wedge (p \overline{\vee} \neg q)$ –ன் மெய்மை அட்டவணையைத் தருக.

p	q	$\neg q$	$r : (p \overline{\vee} q)$	$s: (p \overline{\vee} \neg q)$	$r \wedge s$
T	T	F	F	T	F
T	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	F	T	F

அட்டவணை 12.10

மேற்காணும் முடிவை மெய்மை அட்டவணைகளை பயன்படுத்தாமல் நிரூபிக்க முடியும். இதனைத் தர்க்க சமானமானவை பற்றி அறிந்த பிறகே வழங்க முடியும். ■

12.3.3 மெய்மம், முரண்பாடு மற்றும் நிச்சயமின்மை (Tautology, Contradiction, and Contingency)

வரையறை 12.16

ஒரு கூற்றை அதன் கூட்டுக் கூற்றுகளின் மெய் மதிப்பை பொருட்படுத்தாமல் **மெய்மம்** எனக் கூறவேண்டுமானால் அதன் மெய்மதிப்பு எல்லா நிலையிலும் T ஆக இருக்க வேண்டும். இதை $\mathbb{T}$ எனக் குறிப்பிடுவர்.

வரையறை 12.17

ஒரு கூற்றை அதன் கூட்டுக் கூற்றுகளின் மெய் மதிப்பைப் பொருட்படுத்தாமல் "**முரண்பாடு**" எனக் கூற வேண்டுமானால் அதன் மெய்மதிப்பு எப்பொழுதும் F ஆக இருக்கவேண்டும். இதை $\mathbb{F}$ எனக் குறிப்பிடுவர்.

வரையறை 12.18

ஒரு கூற்று மெய்மமுமும் அல்ல மற்றும் முரண்பாடும் அல்ல எனில், அதற்கு "**நிச்சயமின்மை**" என்று பெயர்.

உற்று நோக்கி அறிந்தவை

1. ஒரு மெய்மத்துக்குரிய மெய்மை அட்டவணையில் கூற்றுக் கோவைக்குரிய நிரலில் உள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் T ஆக இருக்கும்.
2. ஒரு முரண்பாடுக்குரிய மெய்மை அட்டவணையில் கூற்றுக் கோவைக்குரிய நிரலில் உள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் F ஆக இருக்கும்.
3. ஒரு மெய்மத்தின் மறுப்பு ஒரு முரண்பாடாகும். ஒரு முரண்பாட்டின் மறுப்பு ஒரு மெய்மம் ஆகும்.
4. மறுப்புடன் கூடிய ஒரு கூற்றின் பிரிப்பிணைவு ஒரு மெய்மம் ஆகும். மறுப்புடன் கூடிய ஒரு கூற்றின் இணையல் ஒரு முரண்பாடாகும். அதாவது $p \vee \neg p$ ஒரு **மெய்மம்** ஆகும். $p \wedge \neg p$ ஒரு **முரண்பாடாகும்**. இவற்றின் மெய்மை அட்டவணைகளை அமைத்து எளிதில் புரிந்து கொள்ளலாம்.

மெய்மத்திற்கு எடுத்துக்காட்டு

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

அட்டவணை 12.11

$p \vee \neg p$ இன் மெய்மை அட்டவணையில் கடைசி நிரலில் T மட்டுமே உள்ளதால் $p \vee \neg p$ ஒரு மெய்மம் ஆகும்.

முரண்பாடுக்கான எடுத்துக்காட்டு

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	F
F	T	F

அட்டவணை 12.12

மேற்காணும் மெய்மை அட்டவணையில் கடைசி நிரலில் F மட்டுமே உள்ளதால், $p \wedge \neg p$ ஒரு முரண்பாடாகும்.

குறிப்பு

அட்டவணை 12.10 ல், கடைசி நிரல் முழுவதும் F ஆக இருப்பதால் $(p \,\bar{\vee}\, q) \wedge (p \,\bar{\vee}\, \neg q)$ ஒரு முரண்பாடாகும்.

நிச்சயமின்மைக்கு எடுத்துக்காட்டு

p	q	$p \leftrightarrow q$	$\neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$\neg(p \rightarrow \neg q)$	$(p \leftrightarrow q) \wedge \neg(p \rightarrow \neg q)$
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	F	F	T	F	F
F	F	T	T	T	F	F

அட்டவணை 12.13

மேற்கண்ட மெய்மை அட்டவணையில் கடைசி நிரலில் T மற்றும் F கலந்து வருவதால் கொடுக்கப்பட்ட கூற்றுகள் மெய்மமும் அல்ல மற்றும் முரண்பாடும் அல்ல. எனவே, இது ஒரு நிச்சயமின்மை.

12.3.4 இருமை இயல்பு அல்லது இரட்டைத் தன்மை (Duality)

வரையறை 12.19

ஒரு கூற்று வாய்பாட்டினுடைய இருமை ஆனது $\vee, \wedge, T$ ஆகியவைகளுக்கு முறையே $\wedge, \vee, F$ களை பதிலிடுவதன் மூலம் பெறப்படுகிறது. ஓர் இருமை ஆனது $\mathbb{T}$ **(tautology / மெய்மம்)** க்கு பதிலாக $\mathbb{F}$-ஐயும், $\mathbb{F}$ **(contradiction / முரண்பாடு)**-க்குப் பதிலாக $\mathbb{T}$ஐயும் பதிலிடுவதன் மூலம் பெறப்படுகிறது.

குறிப்புரை

(1) இருமை காணும்பொழுது $\neg$ என்ற குறியீடு மாற்றப்படாது.

(2) ஓர் இருமத்தின் இருமம் அதே கூற்றுதான் ஆகும்.

(3) சிறப்பு கூற்றுகளான $\mathbb{T}$ (மெய்மம்) மற்றும் $\mathbb{F}$ (முரண்பாடு) ஆகியவைகள் ஒன்றுக்கொன்று இருமம் ஆகின்றன.

(4) T, F ஆக மாற்றப்படுகிறது. இதன் மறுதலையும் உண்மை.

இருமை இயல்பின் கோட்பாடு

ஒரு கூட்டுக் கூற்று S_1 ஆனது $\neg, \wedge$, மற்றும் $\vee$ ஆகியவைகளை மட்டும் கொண்டுள்ளது எனில் S_1 -லிருந்து $\wedge$ -க்குப் பதிலாக $\vee$ -வையும் மற்றும் $\vee$ -க்குப் பதிலாக $\wedge$ -வையும் பதிலிடுதன் மூலம் S_2 என்ற புதிய கூற்று பெறலாம். S_2 என்பது ஒரு முரண்பாடாக இருந்தால் மட்டுமே S_1 என்பது ஒரு மெய்மம் ஆகும்.

Chapter 12 Discrete Mathematics.indd 259 26-02-2020 19:40:31

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) $(p \vee q) \wedge (r \wedge s) \vee \mathbb{F}$-ன் இருமம் $(p \wedge q) \vee (r \vee s) \wedge \mathbb{T}$.

(ii) $p \wedge [\neg q \vee (p \wedge q) \vee \neg r]$ -ன் இருமம் $p \vee [\neg q \wedge (p \vee q) \wedge \neg r]$ ஆகும்.

12.3.5 தர்க்க சமானத் தன்மை (Logical Equivalence)

வரையறை 12.20

A மற்றும் B என்கிற இரண்டு கூட்டுக் கூற்றுகளின் மெய்மை அட்டவணைகளின் கடைசி நிரல்கள் ஒரே மாதிரியான மெய் மதிப்புகளைப் பெற்றிருப்பின் அவை தர்க்க சமானமானவை எனப்படும். இதனை $A \equiv B$ அல்லது $A \Leftrightarrow B$ என்ற குறியீட்டால் குறிப்பிடுவர்.

மேற்கண்ட வரையறையிலிருந்து A-ம் B-ம் தர்க்க சமானமானவை எனில் $A \Leftrightarrow B$ கண்டிப்பாக ஒரு மெய்மம் என்பது தெளிவாகிறது.

சமானமானவைகளின் சில விதிகள்

1. தன்னடக்க விதிகள்

(i) $p \vee p \equiv p$ (ii) $p \wedge p \equiv p$.

நிரூபணம்

p	p	$p \vee p$	$p \wedge p$
T	T	T	T
F	F	F	F

அட்டவணை 12.14

மேற்கண்ட மெய்மை அட்டவணையில் p, $p \vee p$ மற்றும் $p \wedge p$ ஆகியவைகள் ஒரே மெய் மதிப்புகளைப் பெற்றுள்ளது. எனவே, $p \vee p \equiv p$ மற்றும் $p \wedge p \equiv p$. ■

2. பரிமாற்று விதிகள்

(i) $p \vee q \equiv q \vee p$ (ii) $p \wedge q \equiv q \wedge p$.

நிரூபணம்

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

அட்டவணை 12.15

$p \vee q$ மற்றும் $q \vee p$ களின் மெய் மதிப்புகள் ஒரே மாதிரியாக உள்ளன. எனவே, $p \vee q \equiv q \vee p$. இதேபோல, (ii) $p \wedge q \equiv q \wedge p$ என நிரூபிக்கலாம். ■

3. சேர்ப்பு விதிகள்

(i) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ (ii) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$.

நிரூபணம் (i)

சேர்ப்பு விதியை நிரூபிக்க ஏதுவாக மெய்மை அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F

அட்டவணை 12.16

மெய்மை அட்டவணையில் $(p \vee q) \vee r$ மற்றும் $p \vee (q \vee r)$ ஆகியவற்றிற்கான நிரல்கள் ஒரே மாதிரியாக உள்ளன.

எனவே, $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$.

இதேபோல, (ii) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ என நிரூபிக்க முடியும்.

4. பங்கீட்டு விதிகள்

(i) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (ii) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

நிரூபணம் (i)

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

அட்டவணை 12.17

மெய்மை அட்டவணையில் $p \vee (q \wedge r)$ மற்றும் $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ ஆகியவற்றிற்கான நிரல்கள் ஒரே மாதிரியாக உள்ளன. எனவே, $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

இதேபோல, (ii) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ என நிரூபிக்க முடியும்.

5. சமனி விதிகள்

(i) $p \vee \mathbb{T} \equiv \mathbb{T}$ மற்றும் $p \vee \mathbb{F} \equiv p$ (ii) $p \wedge \mathbb{T} \equiv p$ மற்றும் $p \wedge \mathbb{F} \equiv \mathbb{F}$

நிரூபணம்

p	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$p \vee \mathbb{T}$	$p \vee \mathbb{F}$
T	T	F	T	T
F	T	F	T	F

அட்டவணை 12.18

(i) மெய்மை அட்டவணையில் $p \vee \mathbb{T}$ மற்றும் $\mathbb{T}$ ஆகியவற்றிற்கான நிரல்கள் ஒரே மாதிரியுள்ளதால் அவை இரண்டும் தர்க்க சமானமானவை. $p \vee \mathbb{F}$ மற்றும் p ஆகியவற்றிற்கான நிரல்கள் ஒரே மாதிரியுள்ளதால் அவை இரண்டும் தர்க்க சமானமானவை. ■

(ii) $p \wedge \mathbb{T} \equiv p$ மற்றும் $p \wedge \mathbb{F} \equiv \mathbb{F}$ என நிரூபிக்கமுடியும்.

6. நிரப்பு விதிகள்

(i) $p \vee \neg p \equiv \mathbb{T}$ மற்றும் $p \wedge \neg p \equiv \mathbb{F}$ (ii) $\neg\mathbb{T} \equiv \mathbb{F}$ மற்றும் $\neg\mathbb{F} \equiv \mathbb{T}$

நிரூபணம்

p	$\neg p$	$\mathbb{T}$	$\neg\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\neg\mathbb{F}$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T	T	F

அட்டவணை 12.19

(i) மெய்மை அட்டவணையில் $p \vee \neg p$ மற்றும் $\mathbb{T}$ தொடர்பான நிரல்கள் ஒரே மாதிரியுள்ளதால் அவை தர்க்க சமானமானவை ஆகும். $p \wedge \neg p$ மற்றும் $\mathbb{F}$ தொடர்பான நிரல்கள் ஒரே மாதிரியுள்ளதால் அவை தர்க்க சமானமானவை ஆகும்.

(ii) மெய்மை அட்டவணையில் $\neg\mathbb{T}$ மற்றும் $\mathbb{F}$ தொடர்பான நிரல்கள் ஒரே மாதிரியாக உள்ளது. எனவே அவை தர்க்க சமானமானவை ஆகும். இதேபோன்று $\neg\mathbb{F}$ மற்றும் $\mathbb{T}$ தொடர்பான நிரல்கள் ஒரே மாதிரியாக உள்ளன. எனவே, அவை தர்க்க சமானமானவை ஆகும்.

7. உட்சுழற்சி விதி அல்லது இரட்டை மறுப்பு விதி

$\neg(\neg p) \equiv p$

நிரூபணம்

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
T	F	T
F	T	F

அட்டவணை 12.20

மெய்மை அட்டவணையில் $\neg(\neg p)$ மற்றும் p -ன் நிரல்கள் முழுவதும் ஒரே மாதிரியாக உள்ளது. எனவே அவை சமானமானவை ஆகும்.

■

8. டீ மார்கனின் விதிகள்

(i) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ (ii) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

நிரூபணம் (i)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

அட்டவணை 12.21

மெய்மை அட்டவணையில் $\neg(p \wedge q)$ மற்றும் $\neg p \vee \neg q$ ஆகியவற்றிற்கான நிரல்கள் ஒரே மாதிரியாக உள்ளன. எனவே அவை சமானமானவை. $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$.

இருமையாக (ii) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ என்பதை நிரூபிக்க முடியும். ∎

9. ஈர்ப்பு விதிகள்

(i) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ (ii) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

நிரூபணம்

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \vee (p \wedge q)$	$p \wedge (p \vee q)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	F	F

அட்டவணை 12.22

(i) மெய்மை அட்டவணையில் $p \vee (p \wedge q)$ மற்றும் p ஆகியவற்றிற்கான நிரல்கள் முழுவதும் ஒரே மாதிரியாக உள்ளன. எனவே அவை சமானமானவை.

(ii) மெய்மை அட்டவணையில் $p \wedge (p \vee q)$ மற்றும் p ஆகியவற்றிற்கான நிரல்கள் முழுவதும் ஒரே மாதிரியாக உள்ளன. எனவே அவை சமானமானவை. ∎

எடுத்துக்காட்டு 12.17

$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ -க்கு சமானமானவை பண்பை நிறுவுக.

தீர்வு

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

அட்டவணை 12.23

மெய்மை அட்டவணையில் $p \rightarrow q$ மற்றும் $\neg p \vee q$ ஆகியவற்றிற்கான நிரல்கள் முழுவதும் ஒரே மாதிரியாக உள்ளது. எனவே அவை சமானமானவை ஆகும். ∎

எடுத்துக்காட்டு 12.18

இரு நிபந்தனைக் கூற்றை நிபந்தனைக் கூற்றுடன் இணைத்து

$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$ என்ற சமானமானவை பண்பை நிரூபிக்க.

தீர்வு

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

அட்டவணை 12.24

மெய்மை அட்டவணையில் $p \leftrightarrow q$ மற்றும் $(p \to q) \wedge (q \to p)$ ஆகியவற்றிற்கான நிரல்கள் முழுவதும் ஒரே மாதிரியாக உள்ளன. எனவே அவை சமானமானவை. ■

எடுத்துக்காட்டு 12.19

சமானமானவை பண்புகளைப் பயன்படுத்தி $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு

இக்கொள்கையை எடுத்துக்காட்டுகள் 12.17 மற்றும் 12.18ஐப் பயன்படுத்தி தருவிக்க முடியும்.

$$p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \quad \ldots (1)$$

$$\equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \text{ (பரிமாற்றுப் பண்பின்படி)} \quad \ldots (2)$$

$$\equiv (\neg p \wedge (p \vee \neg q)) \vee (q \wedge (p \vee \neg q)) \text{ (பங்கீட்டுப் பண்பின்படி)}$$

$$\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p) \vee (q \wedge \neg q) \text{ (பங்கீட்டுப் பண்பின்படி)}$$

$$\equiv \mathbb{F} \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p) \vee \mathbb{F}; \text{ (நிரப்பு விதிப்படி)}$$

$$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p); \text{ (சமனி விதிப்படி)}$$

$$\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q); \text{ (பரிமாற்று விதிப்படி)}$$

இறுதியாக, $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$. ■

பயிற்சி 12.2

1. p என்பது “ஜூபிடர் ஒரு கோளாகும்” மற்றும் q என்பது “இந்தியா ஒரு தீவு”. பின்வரும் கூற்றுகளுக்குரிய வார்த்தைகளுடன் கூடிய வாக்கியங்களை அமைக்க.

   (i) $\neg p$ (ii) $p \wedge \neg q$ (iii) $\neg p \vee q$ (iv) $p \to \neg q$ (v) $p \leftrightarrow q$

2. p மற்றும் q என்ற கூற்று மாறிகளைக் கொண்டு பின்வரும் ஒவ்வொரு வாக்கியத்தையும் குறியீட்டு அமைப்பில் எழுதுக.

   (i) 19 ஒரு பகா எண் அல்ல மற்றும் ஒரு முக்கோணத்தின் அனைத்து கோணங்கள் சமம்.

   (ii) 19 ஒரு பகா எண் அல்லது ஒரு முக்கோணத்தின் அனைத்து கோணங்களும் சமமல்ல.

   (iii) 19 ஒரு பகா எண் மற்றும் ஒரு முக்கோணத்தின் அனைத்து கோணங்களும் சமம்.

   (iv) 19 ஒரு பகா எண் அல்ல.

3. பின்வரும் கூற்றுகளுக்கு மெய்மதிப்பை தீர்மானிக்க.

(i) $6+2=5$ எனில், பாலின் நிறம் வெண்மை.

(ii) சீனா ஐரோப்பாவில் உள்ளது அல்லது $\sqrt{3}$ ஒரு முழு எண்.

(iii) $5+5=9$ என்பது மெய்யல்ல அல்லது பூமி ஒரு கோள்.

(iv) 11 ஒரு பகா எண் மற்றும் ஒரு செவ்வகத்தின் எல்லா பக்கங்களும் சமம்.

4. பின்வரும் வாக்கியங்களில் எது கூற்று?

(i) $4+7=12$ (ii) நீ என்ன செய்து கொண்டிருக்கிறாய்? (iii) $3^n \le 81, n \in \mathbb{N}$

(iv) மயில் நமது தேசிய பறவை (v) இந்த மலை எவ்வளவு உயரம்!

5. பின்வரும் கூற்றுகள் சம்பந்தமான மறுதலை, எதிர்மறை மற்றும் நேர்மாறுகளை எழுதுக.

(i) x, y என்ற எண்கள் $x=y$ என்றவாறு உள்ளது எனில், பின்னர் $x^2=y^2$.

(ii) ஒரு நாற்கரம் ஒரு சதுரம் எனில், பின்னர் இது ஒரு செவ்வகமாகும்.

6. பின்வரும் கூற்றுகளுக்கு மெய்மை அட்டவணைகளை அமைக்க.

(i) $\neg p \wedge \neg q$ (ii) $\neg(p \wedge \neg q)$ (iii) $(p \vee q) \vee \neg q$ (iv) $(\neg p \rightarrow r) \wedge (p \leftrightarrow q)$

7. பின்வரும் கூட்டு கூற்றுகளில் எவைகள் மெய்மம் அல்லது முரண்பாடுகள் அல்லது நிச்சயமின்மை என்று காண்க.

(i) $(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$ (ii) $\big((p \vee q) \wedge \neg p\big) \rightarrow q$

(iii) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow q)$ (iv) $\big((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)\big) \rightarrow (p \rightarrow r)$

8. (i) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ (ii) $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$ எனக் காட்டுக.

9. $q \rightarrow p \equiv \neg p \rightarrow \neg q$ என நிறுவுக.

10. $p \rightarrow q$ மற்றும் $q \rightarrow p$ ஆகியவைகள் சமானமற்றவை எனக் காட்டுக.

11. $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$ எனக் காட்டுக.

12. மெய்மை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தாமல் $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ என்பது ஒரு மெய்மம் அல்லது ஒரு முரண்பாடு எனச் சோதிக்க.

13. மெய்மை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி $\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q)$ மற்றும் $\neg p$ என்ற கூற்றுகள் தர்க்க சமானமானவை எனச் சோதிக்க.

14. மெய்மை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தாமல் $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$ என நிரூபிக்க.

15. $p \rightarrow (\neg q \vee r) \equiv \neg p \vee (\neg q \vee r)$ என்பதை மெய்மை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி நிறுவுக.

பயிற்சி 12.3

G3Q5V9

கொடுக்கப்பட்ட நான்கு மாற்று விடைகளிலிருந்து சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினை தேர்ந்தெடுக்கவும் :

1. ஓர் ஈருறுப்புச் செயலி S என்ற ஒரு கணத்தின் மீது ஒரு சார்பாக பின்வருவனவற்றிலிருந்து பெறப்படுகிறது

(1) $S \rightarrow S$ (2) $(S \times S) \rightarrow S$ (3) $S \rightarrow (S \times S)$ (4) $(S \times S) \rightarrow (S \times S)$

2. கழித்தலின் கீழ் பின்வரும் கணம் அடைவு பெறவில்லை.

(1) $\mathbb{R}$ (2) $\mathbb{Z}$ (3) $\mathbb{N}$ (4) $\mathbb{Q}$

3. பின்வருபவைகளில் எது $\mathbb{N}$ -ன் மீது ஓர் ஈருறுப்புச் செயலி ஆகும்.

(1) கழித்தல் (2) பெருக்கல் (3) வகுத்தல் (4) அனைத்தும்

4. மெய் எண்களின் கணம் $\mathbb{R}$ -ன் மீது ‘ $*$ ’ பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது. இதில் எது $\mathbb{R}$ -ன் மீது ஈருறுப்புச் செயலி அல்ல?

(1) $a*b=\min(a\cdot b)$ (2) $a*b=\max(a,b)$

(3) $a*b=a$ (4) $a*b=a^b$

5. $*$ என்ற ஈருறுப்புச் செயலி $a*b=\dfrac{ab}{7}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. $*$ எதன் மீது ஈருறுப்புச் செயலி ஆகாது?

(1) $\mathbb{Q}^+$ (2) $\mathbb{Z}$ (3) $\mathbb{R}$ (4) $\mathbb{C}$

6. $\mathbb{Q}$ என்ற கணத்தில் $a\odot b=a+b+ab$ என வரையறு. பின்னர் $3\odot(y\odot 5)=7$ -ன் தீர்வு

(1) $y=\dfrac{2}{3}$ (2) $y=\dfrac{-2}{3}$ (3) $y=\dfrac{-3}{2}$ (4) $y=4$

7. $\mathbb{R}$ -ன் மீது $a*b=\sqrt{a^2+b^2}$ எனில், $*$ ஆனது

(1) பரிமாற்று விதிக்கு கட்டுப்படும் ஆனால் சேர்ப்பு விதியை நிறைவு செய்யாது.

(2) சேர்ப்பு விதிக்கு கட்டுப்படும் ஆனால் பரிமாற்று விதியை நிறைவு செய்யாது.

(3) பரிமாற்று விதி மற்றும் சேர்ப்பு விதிகளை நிறைவு செய்யும்.

(4) பரிமாற்று விதி மற்றும் சேர்ப்பு விதிகளை நிறைவு செய்யாது.

8. பின்வரும் கூற்றுகளில் எது T மெய்மதிப்பை பெற்றிருக்கும்?

(1) $\sin x$ ஓர் இரட்டைச் சார்பு.

(2) ஒவ்வொரு சதுர அணியும் பூச்சியமற்ற கோவை அணி ஆகும்.

(3) ஒரு கலப்பெண் மற்றும் அதன் இணை எண்ணின் பெருக்கற்பலன் முற்றிலும் கற்பனை.

(4) $\sqrt{5}$ ஒரு விகிதமுறா எண்

9. பின்வருபவைகளில் எது மெய்மதிப்பு F ஐ பெற்றிருக்கும்?

(1) சென்னை இந்தியாவில் உள்ளது அல்லது $\sqrt{2}$ ஒரு முழு எண்

(2) சென்னை இந்தியாவில் உள்ளது அல்லது $\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறா எண்

(3) சென்னை சீனாவில் உள்ளது அல்லது $\sqrt{2}$ ஒரு முழு எண்

(4) சென்னை சீனாவில் உள்ளது அல்லது $\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறா எண்

10. ஒரு கூட்டுக் கூற்றில் 3 தனிக் கூற்றுகள் உட்படுத்தப்பட்டிருந்தால் அம்மெய்மை அட்டவணையின் நிரைகளின் எண்ணிக்கை

(1) 9 (2) 8 (3) 6 (4) 3

11. $(p\vee q)\to(p\wedge q)$ -ன் எதிர்மறை கூற்று எது?

(1) $(p\wedge q)\to(p\vee q)$ (2) $\neg(p\vee q)\to(p\wedge q)$

(3) $(\neg p\vee\neg q)\to(\neg p\wedge\neg q)$ (4) $(\neg p\wedge\neg q)\to(\neg p\vee\neg q)$

12. $(p\vee q)\to r$ -ன் நேர்மாறுக் கூற்று எது?

(1) $\neg r\to(\neg p\wedge\neg q)$ (2) $\neg r\to(p\vee q)$

(3) $r\to(p\wedge q)$ (4) $p\to(q\vee r)$

13. $(p \wedge q) \vee \neg q$ -ன் மெய்மை அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

p	q	$(p \wedge q) \vee (\neg q)$
T	T	(a)
T	F	(b)
F	T	(c)
F	F	(d)

பின்வருபவைகளில் எது உண்மை?

	(a)	(b)	(c)	(d)
(1)	T	T	T	T
(2)	T	F	T	T
(3)	T	T	F	T
(4)	T	F	F	F

14. $\neg(p \vee \neg q)$ -ன் மெய்மை அட்டவணையில் கடைசி நிரலில் வரும் மெய் மதிப்பு 'F' விளைவுகளின் எண்ணிக்கை

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

15. பின்வருபவைகளில் எது சரியல்ல? p மற்றும் q ஏதேனும் இரு கூற்றுகளுக்கு பின்வரும் தர்க்க சமானமானவைகள் பெறப்படுகிறது.

(1) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ (2) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

(3) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \vee \neg q$ (4) $\neg(\neg p) \equiv p$

16.

p	q	$(p \wedge q) \to \neg p$
T	T	(a)
T	F	(b)
F	T	(c)
F	F	(d)

$(p \wedge q) \to \neg p$ -ன் மெய்மை அட்டவணைக்கு பின்வருபவைகளில் எது சரி?

	(a)	(b)	(c)	(d)
(1)	T	T	T	T
(2)	F	T	T	T
(3)	F	F	T	T
(4)	T	T	T	F

17. $\neg(p \vee q) \vee [p \vee (p \wedge \neg r)]$ -ன் இருமம்

(1) $\neg(p \wedge q) \wedge [p \vee (p \wedge \neg r)]$ (2) $(p \wedge q) \wedge [p \wedge (p \vee \neg r)]$

(3) $\neg(p \wedge q) \wedge [p \wedge (p \wedge r)]$ (4) $\neg(p \wedge q) \wedge [p \wedge (p \vee \neg r)]$

18. $p \wedge (\neg p \vee q)$ என்ற கூற்று

(1) ஒரு மெய்மம் (2) ஒரு முரண்பாடு

(3) $p \wedge q$ -க்கு தர்க்க சமானமானவை (4) $p \vee q$ -க்கு தர்க்க சமானமானவை

19. பின்வரும் ஒவ்வொரு கூற்றிற்கும் அதன் மெய் மதிப்பை தீர்மானிக்க.

(a) $4+2=5$ மற்றும் $6+3=9$ (b) $3+2=5$ மற்றும் $6+1=7$

(c) $4+5=9$ மற்றும் $1+2=4$ (d) $3+2=5$ மற்றும் $4+7=11$

	(a)	(b)	(c)	(d)
(1)	F	T	F	T
(2)	T	F	T	F
(3)	T	T	F	F
(4)	F	F	T	T

20. பின்வருபவைகளில் எது உண்மையல்ல?

(1) ஒரு கூற்றின் மறுப்பின் மறுப்பு அக்கூற்றேயாகும்.

(2) ஒரு மெய்மை அட்டவணையில் இறுதி நிரல் முழுவதும் T எனில் அது ஒரு மெய்மமாகும்.

(3) ஒரு மெய்மை அட்டவணையில் இறுதி நிரல் முழுவதும் F எனில் அது ஒரு முரண்பாடாகும்.

(4) p மற்றும் q ஏதேனும் இரு கூற்றுகள் எனில் $p \leftrightarrow q$ என்பது ஒரு மெய்மமாகும்.

பாடச்சுருக்கம்

(1) S என்பது வெற்றற்ற கணம் என்க. S -ன் மீது வரையறுக்கப்படும் $*$ என்ற ஈருறுப்புச் செயலியானது S -ல் உள்ள உறுப்புகளின் ஒவ்வொரு வரிசையிட்ட சோடி (a,b) -யுடனும் S -ல் $a*b$ என்ற ஒரே ஒரு உறுப்பை தொடர்புபடுத்தும் ஒரு விதி ஆகும்.

(2) பரிமாற்றுப் பண்பு: ஒரு வெற்றற்ற கணம் S -ன் மீதான ஈருறுப்புச் செயலி $*$ ஆனது பரிமாற்றுத் தன்மையுடையதாயின் $a*b=b*a,\ \forall a,b \in S$ என்பது உண்மையாக வேண்டும்.

(3) சேர்ப்புப் பண்பு: ஒரு வெற்றற்ற கணம் S -ன் மீதான ஈருறுப்புச் செயலி $*$ ஆனது சேர்ப்புப் பண்புடையதாயின், $a*(b*c)=(a*b)*c,\ \forall a,b,c \in S$.

(4) சமனிப் பண்பு: $\forall a \in S\ \exists e \in S\ \ni a*e=a=e*a=a$ இங்கு e என்பது S -ன் சமனி உறுப்பாகும்.

(5) எதிர்மறைப் பண்பு: $\forall a \in S\ \exists b \in S\ \ni a*b=e$ மற்றும் $b*a=e$. இங்கு b ஆனது a -ன் எதிர்மறை உறுப்பு எனப்படும். $b=a^{-1}$ என நாம் எழுதலாம்.

(6) சமனியின் ஒருமைத்தன்மை (uniqueness) : இயற்கணித அமைப்பில் சமனி உறுப்பு (இருப்பின்) ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்தது.

(7) எதிர்மறையின் ஒருமைத்தன்மை (uniqueness) : இயற்கணித அமைப்பில் ஓர் உறுப்பின் எதிர்மறை (இருப்பின்) ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்தது.

(8) 0 அல்லது 1 ஐ உறுப்பாக கொண்ட ஒரு மெய் அணிக்கு பூலியன் அணி (Boolean Matrix) என்று பெயர்.

(9) மட்டு எண்கணிதம்: n ஒரு மிகை முழு எண் >1 என்க. இங்கு n என்பது 'மட்டு எண்' என அழைக்கப்படும். a மற்றும் b ஆகிய இரண்டு முழுக்களுக்கு இடையேயுள்ள வித்தியாசம் n -ன் மடங்கு எனில், மட்டு n -ன் அடிப்படையில் a -ம் b -ம் ஒருங்கிசைவு உடையதாகும். வேறுவிதமாகச் கூறினால் $a \equiv b$ (மட்டு n) என்பதன் பொருள் $a-b=n\cdot k, k \in \mathbb{Z}$ மற்றும் a ஐ n ஆல் வகுக்கும்பொழுது கிடைக்கும் மீதி b ஆனது மிகக் குறைந்த மிகை முழு எண் ஆகும். $(0 \le b \le n-1)$

(10) தர்க்கக் கணிதம் என்பது கணிதக் குறியீடுகள் மூலம் தர்க்க கல்வி அறிவை கற்றல் ஆகும்.

(11) p ஒரு தனிக் கூற்று என்க. p -ன் மறுப்பு என்பது p -ன் மெய் மதிப்பின் எதிர்மறை உடைய கூற்றாகும். இதை $\neg p$ என்ற குறியீட்டால் குறிப்பிடுவர். p -ன் மெய்மதிப்பு F எனில், $\neg p$-ன் மெய்மதிப்பு T ஆகும். அவ்வாறில்லை எனில், அது F ஆகும்.

(12) p , q ஏதேனும் இரு தனிக் கூற்றுகள் என்க. இவற்றை 'மற்றும் (and)' என்ற வார்த்தையால் இணைக்கப்படும்பொழுது 'p மற்றும் q' என்ற கூட்டுக் கூற்றை அடைகிறோம். இதனை $p \wedge q$ என்ற குறியீட்டால் குறிப்பிடுவர். இதனை p இணையல் (conjunction) q அல்லது p தொப்பி (hat) q எனப் படிக்கலாம். p-ம், q-ம் T ஆக இருக்கும்பொழுது $p \wedge q$ -ன் மெய் மதிப்பு T ஆகும். அவ்வாறில்லை எனில் அது F ஆகும்.

(13) இரண்டு தனிக் கூற்றுகள் p மற்றும் q -ஐ அல்லது (or) என்ற வார்த்தையால் இணைத்தலால் பெறப்படும் கூட்டுக் கூற்று. p , q -ன் பிரிப்பிணைவு (disjunction) எனப்படும். இதனை $p \vee q$ என்ற குறியீட்டால் குறிப்பிடுவர். இதனை p பிரிப்பிணைவு (disjunction) q அல்லது p கிண்ணம் (cup) q எனப் படிக்கலாம். p -ம், q-ம் F ஆக இருக்கும்பொழுது $p \vee q$ -ன் மெய் மதிப்பு F ஆகும். அவ்வாறில்லை எனில், அது T ஆகும்.

(14) ஏதேனும் p , q என்ற இரு கூற்றுகளின் நிபந்தனைக் கூற்றானது p எனில், q -வை $p \rightarrow q$ எனக் குறிப்பிடுவர். p -ன் மெய் மதிப்பு T ஆக இருந்து q -ன் மெய் மதிப்பு F ஆகவும் இருந்தால் $p \rightarrow q$ என்ற கூற்றின் மெய் மதிப்பு F ஆகும். அவ்வாறில்லை எனில், அது T ஆகும்.

(15) p மற்றும் q ஏதேனும் இரு கூற்றுகள் என்க. $p \rightarrow q$ மற்றும் $q \rightarrow p$ -ன் கூட்டுக் கூற்று இரு நிபந்தனைக் கூற்று என அழைக்கப்படும். இதனை $p \leftrightarrow q$ எனக் குறிப்பிடுவர். p மற்றும் q -க்கு ஒரே மாதிரியான மெய் மதிப்புகள் இருந்தால் மட்டுமே $p \leftrightarrow q$ -ன் மெய் மதிப்பு T ஆகும். அவ்வாறில்லை எனில், அதன் மெய் மதிப்பு F ஆகும்.

(16) ஒரு கூற்றை அதன் கூட்டுக் கூற்றுகளின் மெய் மதிப்பை பொருட்படுத்தாமல் **மெய்மம்** (tautology) எனக் கூறவேண்டுமானால் அதன் மெய் மதிப்பு எப்பொழுதும் T ஆக இருக்கவேண்டும். இதை $\mathbb{T}$ எனக் குறிப்பிடுவர்.

(17) ஒரு கூற்றை அதன் கூட்டுக் கூற்றுகளின் மெய் மதிப்பை பொருட்படுத்தாமல் **முரண்பாடு** (contradiction) எனக் கூறவேண்டுமானால் அதன் மெய் மதிப்பு எப்பொழுதும் F ஆக இருக்கவேண்டும். இதை $\mathbb{F}$ எனக் குறிப்பிடுவர்.

(18) ஒரு கூற்று, மெய்மமும் அல்ல முரண்பாடும் அல்ல எனில், அதற்கு **நிச்சயமின்மை** (contingency) என்று பெயர்.

(19) A மற்றும் B என்கிற இரண்டு கூட்டுக் கூற்றுகளின் மெய்மை அட்டவணைகளின் கடைசி நிரல்கள் ஒரே மாதிரியான மெய் மதிப்புகளைப் பெற்றிருப்பின் அவை தர்க்க சமானமானவை அல்லது சுருக்கமாக சமானமானவை எனப்படும். இதனை $A \equiv B$ அல்லது $A \Leftrightarrow B$ எனக் குறிப்பிடுவர். மேலும் குறிப்பாக A -ம் B -ம் தர்க்க சமானமானவை எனில், $A \leftrightarrow B$ கண்டிப்பாக ஒரு மெய்மமாக இருக்கும்.

(20) சமானமானவைக்குரிய சில விதிகள் :

தன்னடக்க விதிகள்

Idempotent Laws : (i) $p \vee p \equiv p$ (ii) $p \wedge p \equiv p$.

பரிமாற்று விதிகள்

Commutative Laws: (i) $p \vee q \equiv q \vee p$ (ii) $p \wedge q \equiv q \wedge p$.

சேர்ப்பு விதிகள்

Associative Laws: (i) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

(ii) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$.

பங்கீட்டு விதிகள்

Distributive Laws: (i) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(ii) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

சமனி விதிகள்

Identity Laws: (i) $p \vee \mathbb{T} \equiv \mathbb{T}$ மற்றும் $p \vee \mathbb{F} \equiv p$

(ii) $p \wedge \mathbb{T} \equiv p$ மற்றும் $p \wedge \mathbb{F} \equiv \mathbb{F}$

நிரப்பு விதிகள்

Complement Laws : (i) $p \vee \neg p \equiv \mathbb{T}$ மற்றும் $p \wedge \neg p \equiv \mathbb{F}$

(ii) $\neg \mathbb{T} \equiv \mathbb{F}$ மற்றும் $\neg \mathbb{F} \equiv \mathbb{T}$

உட்சுழற்சி விதி (அ) இரட்டை மறுப்பு விதி

Involution Law or Double Negation Law: $\neg(\neg p) \equiv p$

டீ மார்கன் விதிகள்

de Morgan's Laws: (i) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ (ii) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \vee \neg q$

ஈர்ப்பு விதிகள்

Absorption Laws: (i) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ (ii) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

இணையச் செயல்பாடு (ICT CORNER)

https://ggbm.at/dy9kwgbt அல்லது Scan the QR Code

இணைய உலாவியை திறக்கவும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள உரலி/விரைவுக் குறியீட்டை தட்டச்சு செய்யவும், GeoGebra-வின் "**12th Standard Mathematics Vol-2**" பக்கம் தோன்றும். இப்பணித்தாள் புத்தகத்தின் இடதுபக்கம் உங்கள் பாடநூலுடன் தொடர்புடைய பல அத்தியாயங்கள் காணப்படும். அவற்றில் "**Discrete Mathematics**" எனும் அத்தியாயத்தைத் தேர்வு செய்க.

B225_12_MATHS_TM

இப்பொழுது இப்பாடம் தொடர்பான பல பணித்தாள்களை இப்பக்கத்தில் காண்பீர்கள். அனைத்துப் பணித்தாள்களையும் செய்து பார்க்கவும்.

விடைகள்

அத்தியாயம் 7

பயிற்சி 7.1

(1) (i) 21 மீ/வி (ii) 15 மீ/வி மற்றும் 27 மீ/வி

(2) (2)(i) 5 வினாடிகள் (ii) 128 அடி/வி (iii)160 அடி/வி

(3) (i) 1,2 வினாடிகள் (ii) 34 மீட்டர் (iii) –6 மீ/ வி^{2}, 6 மீ/ வி^{2}

(4) 75 அலகுகள் (5) $\frac{1}{2}$ கி.கி/மீ, $\frac{1}{6}$ கி.கி/மீ (6) 20π சதுர செ.மீ/வி (7) 2π கி.மீ./வி

(8) $\frac{9}{10\pi}$ மீ/நிமிடம் (9) (i) $\frac{-8}{3}$ மீ/வி (ii) 26.83 சதுர மீ/வி (10) 70 கி.மீ/மணி.

பயிற்சி 7.2

(1) (i) 7 (ii) ∞ (2) $(1,0)$ (3) $(0,3)$ மற்றும் $(4,-25)$ (4) $(2,-1)$ மற்றும் $(-2,1)$

(5) (i) $2x+y=2\,;x-2y=1$ (ii) $2x-y=-2\,;x+2y=4$

(iii) $x-y=0\,;x+y=\pi$ (iv) $4x+2y=5\ ;2x-4y=-5$

(6) $12x-y=15;12x-y=-17$ (7) $x+2y=7\,;x+2y=-1$

(8) $(2\cos t)x+(7\sin t)y=14\,;\ (7\sin t)x-(2\cos t)y=45\sin t\cos t$ (9) $\tan^{-1}(3)$

பயிற்சி 7.3

(1) (i) $x=0$ -ல் தொடர்ச்சியற்றது (ii) $x=\frac{\pi}{2}$ -ல் தொடர்ச்சியற்றது (iii) $f(2)\neq f(7)$

(2) (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $-2+2\sqrt{2}$ (iii) $\frac{9}{4}$ (3) (i) $x=0$ -ல் தொடர்ச்சியற்றது

(ii) $x=\frac{-1}{3}$ -ல் வகையிடத்தக்கது அல்ல (4) (i) $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ (ii) 7 (6) 320 கி.மீ

(8) அமையாது. ஏன் எனில் $(0,2)$ -ல் எப்புள்ளிகளுக்கும் $f'(x)$ ஆனது 2.5 ஆகாது.

பயிற்சி 7.4

(1) (i) $e^x=1+\frac{x}{\lfloor 1}+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\cdots$ (ii) $\sin x=x-\frac{x^3}{\lfloor 3}+\frac{x^5}{\lfloor 5}-\frac{x^7}{\lfloor 7}+\cdots$ (iii) $\cos x=1-\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^4}{\lfloor 4}-\frac{x^6}{\lfloor 6}+\cdots$

(iv) $\log(1-x)=-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\right)$ (v) $\tan^{-1}(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$

(vi) $\cos^2 x=1-\frac{2x^2}{\lfloor 2}+\frac{2^3x^4}{\lfloor 4}-\frac{2^5x^6}{\lfloor 6}+\cdots$ (2) $\log x=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+\cdots$

(3) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{1}{\lfloor 1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{\lfloor 2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{\lfloor 3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\cdots\right)$ (4) $f(x)=-(x-1)+(x-1)^2$

பயிற்சி 7.5

(1) $\frac{1}{2}$ (2) 2 (3) ∞ (4) 1 (5) 0 (6) 0

(7) $\frac{-3}{2}$ (8) 1 (9) e (10) 1 (11) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

பயிற்சி 7.6

(1) (i) மீப்பெரு பெருமம் $= -1$, மீச்சிறு சிறுமம் $= -26$

(ii) மீப்பெரு பெருமம் $= 16$, மீச்சிறு சிறுமம் $= -1$

(iii) மீப்பெரு பெருமம் $= 9$, மீச்சிறு சிறுமம் $= -\dfrac{9}{8}$

(iv) மீப்பெரு பெருமம் $= \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, மீச்சிறு சிறுமம் $= 0$

(2) (i) $(-\infty,-2)$ மற்றும் $(1,\infty)$ -ல் திட்டமாக ஏறும், $(-2,1)$ -ல் திட்டமாக இறங்கும்

இடஞ்சார்ந்த பெருமம் $=20$ இடஞ்சார்ந்த சிறுமம் $=-7$

(ii) $(-\infty,5)$ மற்றும் $(5,\infty)$ -ல் திட்டமாக இறங்கும். இடஞ்சார்ந்த அறுதிகள் இல்லை.

(iii) $(-\infty,0),(0,\infty)$ -ல் திட்டமாக ஏறும். இடஞ்சார்ந்த அறுதிகள் இல்லை.

(iv) $(0,1)$ -ல் திட்டமாக இறங்கும், $(1,\infty)$ -ல் திட்டமாக ஏறும். இடஞ்சார்ந்த சிறுமம் $=\dfrac{1}{3}$

(v) $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right),\left(\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right)$, மற்றும் $\left(\dfrac{7\pi}{4},2\pi\right)$ ஆகியவற்றில் திட்டமாக ஏறும்.

$\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$ மற்றும் $\left(\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}\right)$ -ல் திட்டமாக இறங்கும்.

$x=\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{5\pi}{4}$ -ல் இடஞ்சார்ந்த பெருமம் $=\dfrac{11}{2}$. $x=\dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{7\pi}{4}$ -ல் இடஞ்சார்ந்த சிறுமம் $=\dfrac{9}{2}$.

பயிற்சி 7.7

(1) (i) $(-\infty,2)$ மற்றும் $(4,\infty)$ -ல் மேல்நோக்கி குழிவு. $(2,4)$ -ல் கீழ்நோக்கி குழிவு

$(2,-16)$ மற்றும் $(4,0)$ ஆகியவை வளைவு மாற்றுப் புள்ளிகள்

(ii) $\left(\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}\right)$ -ல் மேல்நோக்கி குழிவு. $\left(0,\dfrac{3\pi}{4}\right)$ மற்றும் $\left(\dfrac{7\pi}{4},2\pi\right)$ -ல் கீழ்நோக்கி குழிவு

$\left(\dfrac{3\pi}{4},0\right)$ மற்றும் $\left(\dfrac{7\pi}{4},0\right)$ ஆகியவை வளைவு மாற்றுப் புள்ளிகள்

(iii) $(0,\infty)$ -ல் மேல்நோக்கி குழிவு. $(-\infty,0)$ -ல் கீழ்நோக்கி குழிவு வளைவு மாற்றுப் புள்ளி $(0,0)$

(2) (i) இடஞ்சார்ந்த சிறுமம் $= -2$; இடஞ்சார்ந்த பெருமம் $=2$ (ii) இடஞ்சார்ந்த சிறுமம் $= -\dfrac{1}{e}$

(iii) இடஞ்சார்ந்த சிறுமம் $= 0$; இடஞ்சார்ந்த பெருமம் $=\dfrac{1}{e^2}$

(3) $(-\infty,-1)$ மற்றும் $\left(\dfrac{1}{2},\infty\right)$ -ல் திட்டமாக ஏறும் . $\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$ -ல் திட்டமாக இறங்கும்

இடஞ்சார்ந்த பெருமம் $= 6$, இடஞ்சார்ந்த சிறுமம் $= -\dfrac{3}{4}$

$\left(-\infty,-\dfrac{1}{4}\right)$ -ல் கீழ்நோக்கி குழிவு; $\left(-\dfrac{1}{4},\infty\right)$ -ல் மேல்நோக்கி குழிவு

வளைவு மாற்றுப் புள்ளி $\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{21}{8}\right)$

பயிற்சி 7.8

(1) 6, 6 (2) $2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}$ (3) 50 (4) 100மீ^{2} (5) 9 செ.மீ, 6 செ.மீ (6) 1200 மீ

(7) $10\sqrt{2}$, $10\sqrt{2}$ (9) $\sqrt{2}r$, $\dfrac{r}{\sqrt{2}}$ (10) 6 செ.மீ, 6 செ.மீ, 3 செ.மீ, (11) 32π , 0

பயிற்சி 7.9

(1) (i) $x=-1, x=1, y=1$ (ii) $x=-1, y=x-1$, (iii) $y=-3, y=3$

(iv) $y=x-9, x=-3$

பயிற்சி 7.10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(1)	(2)	(2)	(2)	(1)	(2)	(3)	(4)	(3)	(1)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(3)	(4)	(3)	(4)	(2)	(3)	(3)	(1)	(4)	(3)

அத்தியாயம் 8

பயிற்சி 8.1

1. (i) 3.0074 2. (i) 24.73 (ii) 1.9688 (iii) 2.963 3. (i) $7x-4$ (ii) $\frac{9-4x}{5}$ (iii) $\frac{x+1}{4}$

4. (i)0.0225π செ.மீ^{2} (ii) 0.006செ.மீ^{2} (iii) 0.6%

5. (i) கன அளவு 80π செ.மீ^{3} குறைகிறது. (ii) மேற்பரப்பானது 16π செ.மீ^{2} குறைகிறது 6. 1%

பயிற்சி 8.2

1. (i) $\frac{2(1-2x)^2(8x-7)}{(3-4x)^2}dx$ (ii) $\frac{4}{3}\frac{\cos 2x}{(3+\sin 2x)^{\frac{1}{3}}}dx$ (iii) $e^{x^2-5x+7}[(2x-5)\cos(x^2-1)-2x\sin(x^2-1)]dx$

2. (i) 0.7 (ii) 0.18 3. (i) $\Delta f=3.125$, $df=2.0$ (ii) $\Delta f=0.11$, $df=0.1$

4. 3.0013029 5. (i) $\frac{6}{\pi}$ செ.மீ (ii) $\frac{40}{\pi}\%$ 6. 30π ம.மீ^{3} 7. 0.4π ம.மீ^{2} 8. 8000

9. (i) $\simeq 3$ சொற்கள் (ii) $\simeq 1$ சொல் 10. 5.25π, 4.76% 11. 60 செ.மீ^{3}, 61.2 செ.மீ^{3}

பயிற்சி 8.3

1. $\frac{1}{8}$ 2. 1 4. cos(1)

பயிற்சி 8.4

1. (i) 27, −14 (ii) 11, −4 (iii) 2, 0, 4 (iv) $e^2((\log 2)-1)$, $e^2(1+\log 8)$

3. $\frac{x^2-y^2}{x^2y}$, $\frac{y^2-x^2}{y^2x}+3z^2$, 6yz 4. $\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{(x^3+y^3+z^3)}$

5. (i) e^y+6x, $6y$, xe^y, e^y+6x (ii) $\frac{-15}{(5x+3y)^2}$, $\frac{-25}{(5x+3y)^2}$, $\frac{-9}{(5x+3y)^2}$, $\frac{-15}{(5x+3y)^2}$

(iii) 3, $2-25\cos 5x$, 0, 3 10. (i) $72x+84y+0.04xy-0.05x^2-0.05y^2-2000$

(ii) 24, −48, y ஐ மாறிலியாக வைத்துக் கொண்டு x ஐ அதிகரிக்கும் பொழுது இலாபம் அதிகரிக்கும்.

பயிற்சி 8.5

1. $6x-7y-7$ 2. $-(x+20y+16)$ 3. $(2x-y)dx+\left(-x+\frac{1}{2}y\right)dy$ 4. $(y+z)dx+(x+z)dy+(y+x)dz$

பயிற்சி 8.6

1. $e^t\left(2e^t\sin t+3\sin^4 t+e^t\cos t+12\sin^3 t\cos t\right)$, 1

2. $\left(1+e^{2t}\right)^2\left[\cos^3 t\left(1+e^{2t}\right)-\sin t\sin 2t\left(1+e^{2t}\right)+6e^{2t}\sin t\cos^2 t\right]$

3. $4e^{2t}$ 4. $-e^{-2t}\left[\sin 2t-\cos 2t\right]$ 5. $18e^{3s}-3e^{s}\cos s+3e^{s}\sin s-4\sin s\cos s$, 15

6. $\frac{3e}{1+e^2}+2\tan^{-1}e$, $\frac{e}{1+e^2}$ 7. $te^{st^2}\left[t\sin\left(s^2t\right)+2s\cos\left(s^2t\right)\right]$,

$\frac{du}{dt}=se^{st^2}\left[2t+\sin\left(s^2t\right)+s\cos\left(s^2t\right)\right]$, $e\left[\sin(1)+2\cos(1)\right]$, $e\left[2\sin(1)+\cos(1)\right]$

8. $3s^3(e^{3t}+s^2e^{-t})$, $3s^2e^t(e^{2t}-5e^{-2t}s^2)$ 9. $2u(1+2v)$, $2\left(u^2-v\right)$, 3, $\frac{-3}{2}$

பயிற்சி 8.7

1. (i) சமபடித்தானது அல்ல (ii) சமபடித்தானது, படி .3

(iii) சமபடித்தானது, படி.0 (iv) சமபடித்தானது அல்ல 6. 5

பயிற்சி 8.8

1	2	3	4	5	6	7	8
(2)	(2)	(2)	(4)	(3)	(2)	(4)	(2)
9	10	11	12	13	14	15	
(3)	(1)	(2)	(3)	(2)	(4)	(1)	

அத்தியாயம் 9

பயிற்சி 9.1

1. 0.6 2. 0.855 3. 0.375

பயிற்சி 9.2

1. (i) $\frac{13}{2}$ (ii) $\frac{25}{3}$

பயிற்சி 9.3

1. (i) $\frac{1}{4}\log\frac{5}{3}$ (ii) $\frac{\pi}{8}$ (iii) $\frac{\pi}{2}-1$ (iv) $e^{\frac{\pi}{2}}$ (v) $\frac{8}{21}$ (vi) $\frac{1}{2}$

2.(i) 0 (ii) π (iii) $\frac{\pi-2}{4}$ (iv) 0 (v) 0 (vi) $\frac{13}{10}$ (vii) $\frac{\pi}{4}$ (viii) $\frac{\pi}{8}\log 2$ (ix) $\frac{\pi}{2}(\pi-2)$ (x) $\frac{\pi}{8}$ (xi) $\frac{\pi^2}{2}$

பயிற்சி 9.4

1. $\frac{3}{8}-\frac{19}{8}e^{-2}$ 2. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{12}+\frac{1}{9}\right)$ 3. $1+e^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\pi}{4}-1\right]$ 4. $-\frac{\pi}{4}$

பயிற்சி 9.5

1. (i) $\frac{\pi}{2\sqrt{6}}$ (ii). $\frac{\pi}{6\sqrt{5}}$

பயிற்சி 9.6

1. (i) $\frac{63\pi}{512}$ (ii) $\frac{16}{35}$ (iii) $\frac{5\pi}{64}$ (iv) $\frac{8}{45}$ (v) $\frac{\pi}{32}$ (vi) $\frac{64}{35}$ (vii) $\frac{1}{24}$ (viii) $\frac{1}{60}$

பயிற்சி 9.7

1. (i) $\frac{5!}{3^6}$ (ii) 29 (2) $\frac{1}{8}$

பயிற்சி 9.8

1. 7.5 2. 2 3. 15 4. 36 5. $2\sqrt{2}$ 6. $\log 2$ 7. $\frac{9}{2}$ 8. yes, $\frac{16}{3}$ 9. $\frac{4}{3}$ 10. $\frac{4}{3}\left(4\pi+\sqrt{3}\right)$

பயிற்சி 9.9

1. $\frac{4\pi}{5}$ 2. $\frac{\pi}{4}\left[1-e^{-4}\right]$ 3. 8π 4. $\frac{2\pi}{15}$ 5. $\frac{14}{3}\pi m^3$ 6. $\frac{1000}{3}\pi cm^3$

பயிற்சி 9.10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(1)	(3)	(3)	(4)	(4)	(3)	(3)	(3)	(2)	(1)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(4)	(2)	(2)	(4)	(4)	(4)	(3)	(4)	(2)	(1)

அத்தியாயம் 10

பயிற்சி 10.1

1. (i) 1,1 (ii) 3,2 (iii) 2, இருத்தல் அல்ல (iv) 1, 2 (v) 1,4
(vi) 2,2 (vii) 2,6 (viii) 2, இருத்தல் அல்ல (ix) 3,1 (x) 1, 1

பயிற்சி 10.2

1. (i) $\frac{dQ}{dt}=kQ$ (ii) $\frac{dP}{dt}=kP(500000-P)$ (iii) $\frac{dP}{dT}=\frac{kP}{T^2}$ (iv) $\frac{dx}{dt}=\frac{2x}{25}+400$ 2. $\frac{dr}{dt}=-k$

பயிற்சி 10.3

1. (i) $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ (ii) $\frac{d^2x}{dy^2}=0$ 2. $r^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)^2$

3. $x^2+2xy\frac{dy}{dx}-y^2=0$ 4. $2ay''+y'^3=0$ 5. $xy'-2y-2=0$ 6. $xy'^2+xyy''-yy'=0$

7. $\frac{d^2y}{dx^2}=64y$ 8. $xy''+2y'+x^2-xy-2=0$

பயிற்சி 10.4

2. (i) $m=-2$ (ii) $m=2,3$ 3. $2y^2=x+48$

பயிற்சி 10.5

1. $F=(F-kV)e^{\frac{kt}{M}}$ 2. $k^2\left(1-e^{-\frac{2gx}{k^2}}\right)=v^2$ 3. $y=\frac{1-x}{1+x}$

4. (i) $\sin^{-1}y=\sin^{-1}x+C$ (ii) $y\tan^{-1}x=C$ (iii) $\sin\left(\frac{y-1}{x}\right)=a$ (iv) $e^x+e^{-y}+\frac{x^4}{4}=C$

(v) $\left(e^y+1\right)\sin x=C$ (vi) $\sin\left(\frac{x}{y}\right)=e^{nx+c}$ (vii) $3y=-\left(25-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+3C$ (viii) $\sin y=e^x\log x+C$

(ix) $\sec y=2\sin x+C$ (x) $\frac{1}{2}\left[(x+y)+\sin(x+y)\cos(x+y)\right]=x+C$

பயிற்சி 10.6

1. $\sin\left(\frac{y}{x}\right)=\log|Cx|$ 2. $y=Ce^{\frac{x^3}{3y^3}}$ 3. $e^{\frac{x}{y}}=\log|Cy|$ 4. $3x^2y+2y^3=C$

5. $xy^2-x^2y=C$ 6. $C=xe^{\tan\left(\frac{y}{x}\right)}$ 7. $y+3xe^{\frac{y}{x}}=C$ 8. $x_0=\pm\sqrt{3}e$

பயிற்சி 10.7

1. $y=\sin x+C\cos x$ 2. $y=\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}+C\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ 3. $(y+\cos x)x=\sin x+C$

4. $y\left(x^2+1\right)=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|+C$ 5. $xy^2=2y^5+C$ 6. $xy\sin x+\cos x=C$

7. $ye^{\sin^{-1}x}=\frac{e^{2\sin^{-1}x}}{2}+C$ 8. $y\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)=x+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$ 9. $xy+\tan^{-1}y=C$

10. $y\log x+\frac{\cos 2x}{2}=C$ 11. $2y=(x+a)^4+2C(x+a)^2$ 12. $y\left(1+x^3\right)=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$

13. $4yx=2x^2\log x-x^2+4C$ 14. $x^2y=\frac{x^4}{4}\log x-\frac{x^4}{16}+C$ 15. $2x^3y=x^2+3$

பயிற்சி 10.8

1. 10 மணி நேர முடிவில் பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கை ஆனது தொடக்கத்தில் உள்ளதை விட 9 மடங்காகிறது. 2. $P = 300000\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{t}{40}}$ 3. $i = Ce^{-\frac{Rt}{L}}$ 4. $v = \frac{10}{e^2}$ 5. $P = 10000e^{0.075}$

6. 1000 ஆண்டுகள் முடிவில் ஆரம்பத்தில் காணப்படும் கதிரியக்க அணுக்கருக்களின் எண்ணிக்கையில் $\frac{9^{10}}{10^8}$ % இருக்கும். 7. (i) $65.33°C$ (ii) 51.91 நிமிடங்கள்

8. (i) $T \simeq 151°F$ (ii) $t = 22.523$. 10.22-க்கும் 10.3-க்கும் இடைப்பட்டதாக இருக்கும்போது அவர் காபியை அருந்த வேண்டும். 9. $20°$ 10. $x = 100\left(1 - e^{\frac{-3t}{50}}\right)$

பயிற்சி 10.9

Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	(1)	(2)	(3)	(2)	(2)	(3)	(3)	(2)	(2)	(3)
Q	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	(3)	(3)	(1)	(1)	(2)	(3)	(2)	(4)	(2)	(4)
Q	21	22	23	24	25					
A	(1)	(1)	(2)	(2)	(1)					

அத்தியாயம் 11

பயிற்சி 11.1

(1)

சமவாய்ப்பு மாறியின் மதிப்புகள்	0	1	2	3	மொத்தம்
நேர்மாறு பிம்பங்களில் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	1	3	3	1	8

(2)

சமவாய்ப்பு மாறியின் மதிப்புகள்	0	1	2	மொத்தம்
நேர்மாறு பிம்பங்களில் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	325	676	325	1326

(3)

சமவாய்ப்பு மாறியின் மதிப்புகள்	0	1	2	3	மொத்தம்
நேர்மாறு பிம்பங்களில் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	4	30	40	10	84

(4)

சமவாய்ப்பு மாறியின் மதிப்புகள்	–20	5	30	மொத்தம்
நேர்மாறு பிம்பங்களில் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	28	48	15	91

(5)

சமவாய்ப்பு மாறியின் மதிப்புகள்	4	5	6	7	8	மொத்தம்
நேர்மாறு பிம்பங்களில் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	1	4	10	12	9	36

பயிற்சி 11.2

(1) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & x = 0, 3 \\ \frac{3}{8}, & x = 1, 2 \end{cases}$

(2) (i)

x	2	4	6	8	10	மொத்தம்
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{9}{36}$	1

(2) (ii) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad x < 2 \\ \frac{1}{36} & \text{for} \quad 2 \le x < 4 \\ \frac{5}{36} & \text{for} \quad 4 \le x < 6 \\ \frac{15}{36} & \text{for} \quad 6 \le x < 8 \\ \frac{27}{36} & \text{for} \quad 8 \le x < 10 \\ 1 & \text{for} \quad 10 \le x < \infty \end{cases}$ (iii) $\frac{13}{18}$ (iv) $\frac{31}{36}$

$$(3)\ f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4} & \text{for } x=1,3\\ \frac{1}{16} & \text{for } x=0,4\\ \frac{3}{8} & \text{for } x=2\end{cases},\quad F(x)=\begin{cases}0 & \text{for } x<0\\ \frac{1}{16} & \text{for } 0\le x<1\\ \frac{5}{16} & \text{for } 1\le x<2\\ \frac{11}{16} & \text{for } 2\le x<3\\ \frac{15}{16} & \text{for } 3\le x<4\\ 1 & \text{for } 4\le x<\infty\end{cases}$$

$$(4)\ \text{(i) } 8 \quad \text{(ii) } F(x)=\begin{cases}0 & \text{for } x<0\\ \frac{1}{8} & \text{for } 0\le x<1\\ \frac{3}{8} & \text{for } 1\le x<2\\ 1 & \text{for } 2\le x<\infty\end{cases}\quad \text{(iii) } \frac{7}{8}$$

(5) (i)

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0.15	0.20	0.25	0.25	0.15

(ii) $P(X<1)=0.35$ (iii) $P(X\ge 2)=0.40$

(6)(i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{17}{36}$ (iii) $\frac{5}{6}$ (7) (a)

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

(b) $\frac{4}{5}$ (c) $\frac{2}{5}$

பயிற்சி 11.3

(1) 4 (2) (i)0.16 (ii) 0.3 (iii) 0.75 (3) (i) $\frac{1}{400}$ (ii) $F(x)=\begin{cases}0, & x<200\\ \frac{x}{400}-\frac{1}{2}, & 200\le x\le 600\\ 1 & x>600\end{cases}$ (iii) $\frac{1}{2}$

(4) (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $1-e^{-\frac{x}{3}}$ (iii)$1-e^{-1}$ (iv) $e^{-\frac{5}{3}}$ (v) $1-e^{-\frac{4}{3}}$

$$(5)\ \text{(i) } F(x)=\begin{cases}0 & x\le -1\\ \frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2} & -1\le x<0\\ -\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2} & 0\le x<1\\ 1 & 1\le x\end{cases}\quad \text{(ii) } 0.75$$

$$(6)\ \text{(i) } f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{2}(2x+1) & 0\le x<1\\ 0 & 1\le x\end{cases}\quad \text{(ii) } 0.285$$

பயிற்சி 11.4

(1) (i) $2.3, 2.81$ (ii) $1.67, 0.56$ (iii) $\frac{5}{3}, \frac{1}{18}$ (iv) 2,4

(2) $\frac{8}{7}$

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

(3) $7, 16$ (4) $2, 1$

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

(5) 15 நிமிடங்கள் (6) $\frac{1}{3}$ (7) $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}$ (8) நஷ்டம் ₹. 0.50

பயிற்சி 11.5

(1) (i) $\frac{160}{729}$ (ii) $210\left(\frac{1}{5}\right)^4\left(\frac{4}{5}\right)^6$ (iii) $\binom{9}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^2$ (2) (i) $\binom{10}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^6$ (ii) $1-\frac{3^{10}}{4^{10}}$

(3) (i) 50, 25 (ii) 40, $\frac{100}{3}$ (4) $\frac{270}{1024}$ (5) (i) $1-0.95^{10}$ (ii) $\binom{10}{2}(0.05)^2(0.95)^8$

(6) (i) $\binom{12}{10}(0.9)^{10}(0.1)^2$ (ii) $2.1(0.9)^{11}$ (iii) $1-\left[2.1(0.9)^{11}\right]$

(7) (i) $\binom{18}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{18-x}$ (ii) $\binom{18}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^{15}$ (iii) $1-\frac{20}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{17}$ (8) $\binom{6}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{6-x}$, 2, $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (9) 1, $\frac{4}{5}$

பயிற்சி 11.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(2)	(4)	(2)	(4)	(4)	(2)	(4)	(3)	(2)	(1)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(4)	(4)	(1)	(2)	(1)	(1)	(4)	(4)	(2)	(1)

அத்தியாயம் 12

பயிற்சி 12.1

1. (i) ஆம், $*$ ஆனது $\mathbb{R}$ ன் மீது அடைவு பெற்றுள்ளது

   (ii) ஆம், $*$ ஆனது A ன் மீது அடைவு பெற்றுள்ளது

   (iii) இல்லை, $*$ ஆனது $\mathbb{R}$ ன் மீது அடைவு பெறவில்லை

2. இல்லை, $*$ ஆனது $\mathbb{Z}$ ன் மீது அடைவு பெறவில்லை

3. $\frac{-88}{15}$

4. ஆம், வழக்கமான பெருக்கல் A ன் மீது அடைவு பெற்றுள்ளது

5. (i) கொடுக்கப்பட்ட செயலி $*$ ஆனது $\mathbb{Q}$ ன் மீதுஅடைவுப் பண்பு மற்றும் பரிமாற்றுப்பண்புகளை நிறைவு செய்யும். ஆனால் சேர்ப்பு பண்பை நிறைவு செய்யாது.

   (ii) சமனி பண்பு இல்லை எனவே எதிர்மறை பண்பும் இல்லை.

6.

$*$	a	b	c
a	b	c	a
b	c	b	a
c	a	a	c

7. இல்லை. கொடுக்கப்பட்ட செயலி பரிமாற்றுப் பண்பு மற்றும் சேர்ப்பு பண்புகளை நிறைவு செய்யாது

8. (i) $A \vee B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $A \wedge B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $\left(A \vee B\right) \wedge C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (iv) $\left(A \wedge B\right) \vee C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

10. (i) பரிமாற்றுப்பண்பு மற்றும் சேர்ப்புப்பண்புகளை நிறைவு செய்யும்.

(ii) சமனி உறுப்பு உள்ளது மற்றும் எதிர்மறை பண்பு உள்ளது.

பயிற்சி 12.2

1. (i) $\neg p$: ஜூபிடர் ஒரு கோள் அல்ல

(ii) $p \wedge \neg q$: ஜூபிடர் ஒரு கோள் மற்றும் இந்தியா ஒரு தீவு அல்ல.

(iii) $\neg p \vee q$: ஜூபிடர் ஒரு கோள் அல்ல அல்லது இந்தியா ஒரு தீவு.

(iv) $p \rightarrow \neg q$: ஜூபிடர் ஒரு கோள் எனில் பின்னர் இந்தியா ஒரு தீவு அல்ல.

(v) $p \leftrightarrow q$ ஜூபிடர் ஒரு கோள் என்றால் மட்டுமே இந்தியா ஒரு தீவு.

2. (i) $\neg p \wedge q$ (ii) $p \vee \neg q$ (iii) $p \wedge q$ (iv) $\neg p$

3. (i) $p \rightarrow q$ ன் மெய் மதிப்பு $\mathbb{T}$ (ii) $p \vee q$ ன் மெய் மதிப்பு $\mathbb{F}$

(iii) $\neg p \vee q$ ன் மெய் மதிப்பு $\mathbb{T}$ (iv) $p \wedge q$ ன் மெய் மதிப்பு $\mathbb{F}$

4. (i), (iii) மற்றும் (iv) ஆகியவை கூற்றுகள். மற்றவை கூற்றுகள் அல்ல

5. (i) **மறுதலை:** x மற்றும் y என்ற எண்கள் $x^2 = y^2$ என்றவாறு உள்ளது எனில் பின்னர் $x = y$.

எதிர்மறை: x மற்றும் y என்ற எண்கள் $x \neq y$ என்றவாறு உள்ளது எனில் பின்னர் $x^2 \neq y^2$.

நேர்மாறு: x மற்றும் y என்ற எண்கள் $x^2 \neq y^2$ என்றவாறு உள்ளது எனில் பின்னர் $x \neq y$.

(ii) **மறுதலை:** ஒரு நாற்கரமானது ஒரு செவ்வகம் எனில் பின்னர் அது ஒரு சதுரமாகும்.

எதிர்மறை: ஒரு நாற்கரமானது ஒரு சதுரம் அல்ல எனில் பின்னர் அது ஒரு செவ்வகம் அல்ல.

நேர்மாறு: ஒரு நாற்கரமானது ஒரு செவ்வகம் அல்ல எனில் பின்னர் அது ஒரு சதுரம் அல்ல.

6. (i) $\neg p \wedge \neg q$ ன் மெய்மை அட்டவணை

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

(ii) $\neg\left(\neg p \wedge \neg q\right)$ ன் மெய்மை அட்டவணை

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg\left(\neg p \wedge \neg q\right)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F

F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

(iii) $(p \vee q) \vee \neg q$ ன் மெய்மை அட்டவணை

p	q	$\neg q$	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee \neg q$
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	F	T

(iv) $(\neg p \to r) \wedge (p \leftrightarrow q)$ ன் மெய்மை அட்டவணை

p	q	r	$\neg p$	$(\neg p \to r)$	$p \leftrightarrow q$	$(\neg p \to r) \wedge (p \leftrightarrow q)$
T	T	T	F	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	F	T	F	F
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T	F

7. (i) முரண்பாடு (ii) மெய்மம் (iii) நிச்சயமின்மை (iv) மெய்மம்

12. $p \to (q \to p)$ என்பது ஒரு மெய்மம்.

13. ஆம். தர்க்க சமானமானவை.

பயிற்சி 12.3

Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	(2)	(3)	(2)	(4)	(2)	(2)	(3)	(4)	(3)	(2)
Q	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	(4)	(1)	(3)	(3)	(3)	(2)	(4)	(3)	(1)	(4)

கலைச்சொற்கள்

அத்தியாயம் 7
வகை நுண்கணிதத்தின் பயன்பாடுகள்

சார்ந்த வீதங்கள்	Related rates
இடை மதிப்புத் தேற்றம்	Mean value theorem
தேறப்பெறாத வடிவங்கள்	Indeterminate forms
நிலைப் புள்ளிகள்	Stationary points
மாறுநிலைப் புள்ளிகள்	Critical points
ஓரியல்புச் சார்புகள்	Monotonicity of functions
மீப்பெரு அறுதி	Absolute extremum
இடஞ்சார்ந்த அறுதி	Relative extremum
குழிவு	Concave
குவிவு	Convex
வளைவு மாற்றுப் புள்ளி	Point of inflection
சமச்சீர்த் தன்மை	Symmetry

அத்தியாயம் 8
வகையீடுகள் மற்றும் பகுதி வகைக்கெழுக்கள்

வகையீடு	Differential
பகுதி வகைக்கெழு	Partial derivatives
சீரான	Harmonic
சமபடித்தான	Homogeneous
தனிப் பிழை	Absolute error
சார் பிழை	Relative error
சதவீத பிழை	Percentage error

அத்தியாயம் 9
தொகை நுண்கணிதத்தின் பயன்பாடுகள்

வரையறுத்தத் தொகை	Definite integral
குறைப்பு சூத்திரம்	Reduction formula
காமா தொகையிடல்	Gamma integral
இடைப்பட்ட பகுதி	Bounded region

அத்தியாயம் 10
சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

வரிசை	Order
நேரியல்	Linear
படி	Degree
ஏதேனுமொரு மாறிலி	Arbitrary constant
சார்ந்த மாறி	Dependent variable
சாரா மாறி	Independent variable
தொகையீட்டுக் காரணி	Integrating factor
சமபடித்தான சார்பு	Homogeneous function

அத்தியாயம் 11
நிகழ்தகவு பரவல்கள்

பெர்னோலி சமவாய்ப்பு மாறி	Bernoulli random variable
ஈருறுப்பு பரவல்	Binomial distribution
ஈருறுப்பு சமவாய்ப்பு மாறி	Binomial random variable
தொடர்நிலை சமவாய்ப்பு மாறி	Continuous random variable
குவிவு பரவல் சார்பு	Cumulative distribution function
தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி	Discrete random variable
கணித எதிர்பார்ப்பு	Mathematical expectation
நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு	Probability density function
நிகழ்தகவு நிறைச்(செறிவு) சார்பு	Probability mass function
சமவாய்ப்பு மாறி	Random variable

அத்தியாயம் 12
தனிநிலைக் கணிதம்

ஈர்ப்பு விதி	Absorption law
இயற்கணித அமைப்பு	Algebraic structure
இரு நிபந்தனைக் கூற்று	Biconditional statement
ஈருறுப்பு செயலி	Binary operation
பூலியன் இயற்கணிதம்	Boolean algebra
பூலியன் அணி	Boolean matrix
குறியீட்டுக் கோட்பாடு	Coding theory
கூட்டுக் கூற்று	Compound statement
நிபந்தனைக் கூற்று	Conditional statement
இணையல்	Conjunction
முரண்பாடு	Contradiction
நேர்மாறு	Contra positive
பிரிப்பிணையல்	Disjunction
இருமை இயல்பு (அ) இரட்டைத் தன்மை	Duality
கருதுகோள்	Hypothesis
உட்சுழற்சி விதி	Involution law
தர்க்க இணைப்புகள்	Logical connectives
தர்க்க சமானமானவை	Logical equivalent
மறுப்பு	Negation
முரண்படு மெய்மை	Paradox
தனிக்கூற்று	Simple statement
மெய்மம்	Tautology
மெய்மை அட்டவணை	Truth table

மேற்கோள் நூல்கள்

(1) Larson R.E. Larson, B.H. Edwards, and R.P. Hostetle. *Calculus with Analytical Geometry, Fifth Edition.* D.C. Heath and Company, (1994).

(2) Smith R.T. Smith and R.B. Miltons. *Calculus concepts and connections*. McGraw Hill Company, (2006).

(3) Courant R. Courant and F. John. *Introduction to Calculus and Analysis; Volume One.* Inter Science Publishers, a Division of John Wiley and Sons, (1965).

(4) G.B. Thomas, et.al., *Thoma's Calculus*, Addison Wesley (2004).

(5) G.F. Simmons, *Calculus and Analytic Geometry.*

(6) Ulrich L.Rohde, G.C.Jain & Ajay K.Poddar. *Introduction to Integral Calculus.*

(7) Adrian Banner. *The Calculus*, Princeton University Press.

(8) Jerry Farlow, James E. Hall. Jean Marie McDill, and Beverly H. West, *Differential Equations and Linear Algebra*, (2nd Edition) Pearson Education, Inc, New York, (2007).

(9) Dennis G. Zill, *A First Course in Differential Equations with modeling Applications* (9th Edition), Brooks/Cole. Cengage Learning, Belmont, C.A, 2009.

(10) Shepley L.Ross, *Introduction to Ordinary Differential Equations*, Fourth Edition.

(11) William Feller ,John Wiley and sons., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1, 3rd Edition.

(12) Paul G. Hoel, Sidney C. Port, Charles J. Stone. *Introduction to Probability Theory*, (**1st Edition**) Published by Houghtion Mifflin.

(13) Bernard Kolman & Robert C. Busby; *Discrete Mathematics structured for Computer Science*, Second Edition Prentice hall of India Pvt. Ltd, New Delhi.

(14) Kenneth H.Rosen, *Discrete Mathematics and the Applications*, seventh Edition. Tata McGraw Hill Education Pvt ltd, New Delhi(2011).

(15) Trembly J.P.& Manohar, *Discrete Mathematical Structure with Applications to Computer Science(1st edition)*. Published by Mcgraw Hill.

கணிதவியல் - மேல்நிலை இரண்டாமாண்டு

பாடநூல் உருவாக்கக் குழு – தொகுதி – 2

பாட வல்லுநர்கள்

முனைவர் S. உதயபாஸ்கரன்,
பேராசிரியர், கணிதத் துறை,
வேல் டெக் ரங்கராஜன் முனைவர் சகுந்தலா
அறிவியல் மற்றும் தொழில்நுட்ப ஆராய்ச்சி மற்றும்
மேம்பாட்டு நிறுவனம்,
(நிகர்நிலை பல்கலைக் கழகம்)
ஆவடி, சென்னை.

முனைவர் R. மூர்த்தி,
முதல்வர் (ஓய்வு)
அரசு கலை கல்லூரி,
உத்திரமேரூர், காஞ்சிபுரம்.

முனைவர் E. சந்திரசேகரன்,
பேராசிரியர், கணிதத் துறை,
வேல் டெக் ரங்கராஜன் முனைவர் சகுந்தலா
அறிவியல் மற்றும் தொழில்நுட்ப ஆராய்ச்சி மற்றும்
மேம்பாட்டு நிறுவனம்,
(நிகர்நிலை பல்கலைக் கழகம்)
ஆவடி, சென்னை.

முனைவர் G.P யுவராஜ்,
முன்னால் இயக்குநர் (ஓய்வு), கணிதத் துறை,
RIASM, சென்னை பல்கலைக் கழகம்,
சென்னை.

முனைவர் T.N. சண்முகம்,
பேராசிரியர் (ஓய்வு),
கணிதத்துறை, அண்ணா பல்கலைக் கழகம்,
சென்னை.

முனைவர் A. ரகீம் பாட்சா,
இணைப் பேராசிரியர் (ஓய்வு),
கணிதத் துறை, மாநிலக் கல்லூரி (தன்னாட்சி),
சென்னை.

முனைவர் G. பழனி,
உதவிப் பேராசிரியர், கணிதத் துறை,
டாக்டர் அம்பேத்கார் அரசு கலைக் கல்லூரி,
வியாசர்பாடி, சென்னை.

ஆலோசகர்கள்

முனைவர் V. தங்கராஜ்,
முன்னாள் இயக்குநர்,
RIASM, சென்னை பல்கலைக் கழகம்,
சென்னை.

முனைவர் E.S. ஜம்புலிங்கம்,
முதல்வர்,
அரசு கலைக் கல்லூரி,
திருத்தணி.

முனைவர் P.R. விட்டல்,
முதல்வர் மற்றும் துறைத்தலைவர்,
கணிதத்துறை,
R.K.M, விவேகானந்தா கல்லூரி,
மயிலாப்பூர், சென்னை.

பாட ஒருங்கிணைப்பாளர்

B. தமிழ்செல்வி,
துணை இயக்குநர்,
மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி
மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம், சென்னை.

ஒருங்கிணைப்பாளர்

நிவேதா செல்வராஜ்,
உதவிப் பேராசிரியர்,
மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி
மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம், சென்னை.

பாடநூலாசிரியர்கள்

M. மதிவாணன்,
தலைமை ஆசிரியர்,
அரசு மாதிரி மேல்நிலைப்பள்ளி,
காரிமங்கலம். தருமபுரி,

N. கலைச்செல்வம்,
முதுகலை ஆசிரியர்,
சென்னை பெண்கள் மேல்நிலைப்பள்ளி,
நுங்கம்பாக்கம். சென்னை,

A. பாலமுருகன்,
முதுகலை ஆசிரியர்,
அதியமான் அரசினர்
ஆண்கள் மேல்நிலைப்பள்ளி,
தருமபுரி.

S. பன்னீர்செல்வம்,
முதுகலை ஆசிரியர் (ஓய்வு)
அரசினர் மேல்நிலைப்பள்ளி,
G.K.M. காலனி, சென்னை.

S.P. கார்த்திகேயன்,
முதுகலை ஆசிரியர்,
காந்தி நினைவு மேல்நிலைப்பள்ளி,
திருவெண்ணைநல்லூர்,
விழுப்புரம்.

C.S. வீரராகவன்,
முதுகலை ஆசிரியர்,
ஸ்ரீ கிருஷ்ணா மெட்ரிக் மேல்நிலைப்பள்ளி,
T.V.S. நகர், கோயம்புத்தூர்-25.

இணையச் செயல்பாடு ஒருங்கிணைப்பாளர்

D. வாசுராஜ்,
முதுகலை கணித ஆசிரியர்
மற்றும் துறைத்தலைவர்
K.R.M. பொதுப்பள்ளி, செம்பியம்,
சென்னை.

இணையச் செயல்பாடு ஒருங்கிணைப்பாளர்

R. ஜெகனாதன்
SGT, PUMS - கணேசபுரம், போளூர்,
திருவண்ணாமலை.

A. தேவி ஜெசிந்தா
B.T. Asst., அரசு உயர்நிலைப் பள்ளி,
N.M. கோவில், வேலூர்,

V. பத்மாவதி,
B.T. Asst., அரசு உயர்நிலைப் பள்ளி,
வெற்றியூர், திருமானூர்,
அரியலூர்.

கலை மற்றும் வடிவமைப்புக் குழு

தட்டச்சு. கலை மற்றும் வடிவமைப்பு

S. மனோகரன்,
V.V. கிராபிக்ஸ்
பழவந்தாங்கல்,
சென்னை-114.

அட்டை வடிவமைப்பு

கதிர் ஆறுமுகம்

தரக் கட்டுப்பாடு

ப. யோகேஷ், சென்னை
ப. அருண் காமராஜ், கணக்கன் குப்பம்
ராஜேஷ் தங்கப்பன், சென்னை
வே. ஸ்ரீதர், சென்னை

ஒருங்கிணைப்பு

ரமேஷ் முனிசாமி

இந்நூல் 80 ஜி.எஸ்.எம். எலிகண்ட் மேப்லித்தோ
தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது.
ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர்: