தமிழ்நாடு அரசு

மேல்நிலை இரண்டாம் ஆண்டு

வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியியல்

தமிழ்நாடு அரசு விலையில்லாப் பாடநூல் வழங்கும் திட்டத்தின் கீழ் வெளியிடப்பட்டது

பள்ளிக் கல்வித்துறை

தீண்டாமை மனிதநேயமற்ற செயலும் பெருங்குற்றமும் ஆகும்

தமிழ்நாடு அரசு

முதல்பதிப்பு – *2019*
திருத்திய பதிப்பு – *2020*

(புதிய பாடத்திட்டத்தின்கீழ்
வெளியிடப்பட்ட நூல்)

விற்பனைக்கு அன்று

பாடநூல் உருவாக்கமும் தொகுப்பும்

மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி மற்றும்
பயிற்சி நிறுவனம்

நூல் அச்சாக்கம்

தமிழ்நாடு பாடநூல் மற்றும் கல்வியியல்
பணிகள் கழகம்
www.textbooksonline.tn.nic.in

இந்நூலைக் கையாள்வதற்கான வழிகாட்டி

வேலை மற்றும் உயர்கல்வி மேம்பாட்டிற்கான வாய்ப்புகள்	வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியலை ஒரு பாடமாகக் கொண்ட மேல்நிலை வகுப்பு வணிகவியல் மாணவர்களுக்கான மேற்படிப்பு வாயப்புகளின் பட்டியல்.
கற்றலின் நோக்கங்கள்	மாணவர்கள் ஒவ்வொரு அத்தியாயம் , பாடம் அல்லது ஆண்டு இறுதியில் அடைந்திருக்கவேண்டிய கற்றல் இலக்குகளைக் குறிக்கிறது,
குறிப்பு	பாடத்தின் கூடுதல் கருத்துக்களை தருபவை.
உங்களுக்கு தெரியுமா?	மாணவர்களின் கணித சிந்தனைகளை வளர்க்கும் வியத்தகு உண்மைகள், கருத்துக்கள் போன்றவை.
பயிற்சி	மாணவர்களின் நினைவாற்றல் ,சிந்தித்தல் மற்றும் புரிதலை மேம்படுத்த பயிற்சி அளித்தல்.
இணையச் செயல்பாடு	மாணவர்களின் கணினி சார் அறிவுத்திறனை மேம்படுத்துதல்.
இணைய இணைப்புகள்	கணினி வழி மூலங்களுக்கான பட்டியல்.
உடனடி பதில் வினைக் குறியீடு	மாணவர்கள் பாடங்கள் தொடர்பான கருத்துக்களை மேலும் அறிந்துகொள்ள மெய்நிகர் கற்றல் உலகத்துக்கு அழைத்து செல்லும் வழி.
இதர கணக்குகள்	மாணவர்களுக்கான கற்றலை மேம்படுத்த கூடுதல் கணக்குகள்.
கலைச் சொற்கள்	கணித தமிழ் வழிச் சொற்களுக்கான ஆங்கில மொழியாக்கம்
பார்வை நூல்கள்	பாடத் தலைப்போடு தொடர்புடைய மேலும் விவரங்களை அறிந்து கொள்வதற்கான துணைநூற்களின் பட்டியல்

பாடநூலில் உள்ள விரைவு குறியீட்டைப் (QR Code) பயன்படுத்துவோம்! எப்படி?

- உங்கள் திறன்பேசியில், கூகுள் playstore /ஆப்பிள் app store கொண்டு QR Code ஸ்கேனர் செயலியை இலவசமாகப் பதிவிறக்கம் செய்து நிறுவிக்கொள்க.
- செயலியைத் திறந்தவுடன், ஸ்கேன் செய்யும் பொத்தானை அழுத்தித் திரையில் தோன்றும் கேமராவை QR Code–இன் அருகில் கொண்டு செல்லவும்.
- ஸ்கேன் செய்வதன் மூலம் திரையில் தோன்றும் உரலியைச் (URL) சொடுக்க, அதன் விளக்கப் பக்கத்திற்குச் செல்லும்.

வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியியல் பயிலும் மாணவர்களுக்கான வேலை மற்றும் உயர்கல்வி மேம்பாட்டிற்கான வாய்ப்புகள்

வணிகவியல் பாடத்திட்டத்தில் வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியியலை ஒரு பாடமாக கொண்ட பிரிவில் பயிலும் மேல்நிலை வகுப்பு மாணவர்கள், தங்களது மேற்படிப்புக்கு, BCA., B.Com., மற்றும் B.Sc., புள்ளியியல் ஆகிய பிரிவுகளை தேர்வு செய்யலாம்.

வணிக பிரிவு மேல்நிலை வகுப்பு மாணவர்களுக்கு, வங்கி மற்றும், நிதி நிறுவனங்களிலும் வேலை வாய்ப்புகள் சிறப்பாக உள்ளன. கணினியை ஒரு சிறந்த பாடமாகக் கொண்ட B.Com பிரிவை பெரும்பாலான மாணவர்கள் தேர்வு செய்கின்றனர்.

தொழில் முறை மேற்படிப்புக்களான C.A., ICAI., முதலிய படிப்புகளை தேர்ந்தெடுத்து வெற்றி பெறுவதன் மூலம், பட்டயகணக்காளர் (Chartered Accountant) நிறுவனச் செயலர் (Company Secretary) போன்ற சிறந்த பதவிகளை பெற முடியும். மேலும் B.Com., பட்டதாரிகள், M.Com., P.h.D., மற்றும் M.Phil., போன்ற மேற்படிப்பு வகுப்புகளை தொடரலாம். B.Com., பட்டதாரிகளுக்கு பெருமளவில் வேலை வாய்ப்புகள் காத்திருக்கின்றன.

பட்டப்படிப்பு முடித்த பிறகு, MBA., M.A., பொருளியல் M.A., செயல்முறை மற்றும் புள்ளியியல் ஆராய்ச்சி பட்ட மேற்படிப்பு முதலிய பிரிவுகளை தேர்வு செய்யலாம். இவற்றை தவிர, எண்ணற்ற பட்டய படிப்பு, சான்றிதழ் படிப்பு மற்றும் தொழிற் பயிற்சிக் கல்விகள் முதலியனவற்றை மேற்கொள்வதன் மூலம் ஆரம்ப கால வேலை வாய்ப்புகளை பெறலாம்.

வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியலை ஒரு பாடமாகக் கொண்ட மேல்நிலை வகுப்பு வணிகவியல் மாணவர்களுக்கான மேற்படிப்பு வாய்ப்புகளின் பட்டியல்.

படிப்புகள்	கல்வி நிறுவனங்கள்	மேற்படிப்பிற்கான வாய்ப்புகள்
இளைங்கலை வணிகவியல் (B.Com.) / B.Com (Computer) **இளைங்கலை வியாபார நிர்வாகம்** (B.B.A.), **இளைங்கலை வணிக மேலாண்மை** (B.B.M.), **இளைங்கலை கணிணி பயன்பாடுகள்** (B.C.A.), **இளைங்கலை கலை** (B.A.)	• அனைத்து அரசினர் கலை மற்றும் அறிவியல் கல்லூரிகள், அரசு நிதி உதவிபெறும் கல்லூரிகள், சுயநிதி கல்லூரிகள் • ஸ்ரீராம் வணிகவியல் கல்லூரி (SRCC), புதுடெல்லி. • கூட்டுவாழ்வு சமுதாய கலை மற்றும் வணிகவியல் கல்லூரி, பூனே (Symbiosis Society's College of Arts & Commerce, Pune). • புனித சூசையப்பர் கல்லூரி, பெங்களூரு	C.A., I.C.W.A, C.S.
இளைங்கலை அறிவியல் புள்ளியியல் (B.Sc Statistics)	• மாநில கல்லூரி சேப்பாக்கம், சென்னை. • டாக்டர் அம்பேத்கார் அரசினர்கலைக் கல்லூரி, வியாசர்பாடி, சென்னை. • அரசினர் கலைக் கல்லூரி, திண்டிவனம், விழுப்புரம் மற்றும் நாகர்கோவில் • சென்னை கிறித்தவ கல்லூரி, தாம்பரம் • லயோலா கல்லூரி, சென்னை. • D.R.B.C.C இந்து கல்லூரி பட்டாபிராம், சென்னை.	M.Sc.
5 வருட ஒருங்கிணைந்த வியாபார நிர்வாகம், வணிகம் மற்றும் சட்ட படிப்புகள் (Five years integrated Course) B.B.A., LLB, B.A., LLB, B.Com., LL.B.	• அனைத்து அரசு சட்ட கல்லூரிகள். • டாக்டர் அம்பேத்கர் சட்ட பல்கலைகழகத்தின் கீழ் இணைக்கப்பட்ட சிறப்பு சட்டக் கல்வி நிறுவனங்கள்	M.L.
5 வருட ஒருங்கிணைந்த முதுகலை பொருளியல் படிப்புகள் M.A. Economics (Integrated Five Year course) – Admission based on All India Entrance Examination	• சென்னை பொருளியல் கல்லூரி, கோட்டூர்புரம், சென்னை.	Ph.D.,
இளங்கலை சமூகப்பணி (B.S.W.)	• சென்னை சமூகப்பணி கல்லூரி, எழும்பூர், சென்னை.	M.S.W

பொருளடக்கம்

பொருளடக்கம்

இந்த புத்தகத்தில் உள்ள புள்ளியியல் பகுதிகள் எண் சார்ந்த கணக்கீடுகளை கொண்டிருப்பதால், வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியியல் பயிலும் மாணவர்கள் அக்கணக்குகளின் தீர்வுகளுக்கு கணிப்பானைப் (கால்குலேட்டரை) பயன்படுத்த அறிவுறுத்தப்படுகிறார்கள்.

ABBLZP

மின் நூல்

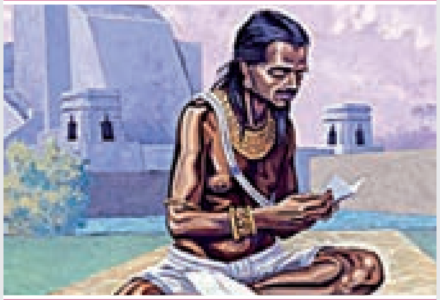
G9M2CM

மதிப்பீடு

B247_12_BUS_MAT_TM

இணைய வளங்கள்

1 அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகள்



பிரம்மகுப்தா
கி.பி. (பொ.ஆ.) 598 – கி.பி. (பொ.ஆ.) 668

அறிமுகம்

நம் அன்றாட வாழ்க்கையில் நில அதிர்வு கணக்கெடுப்புகளுக்கு அணிகளைப் பயன்படுத்துகிறோம். வரைபடங்கள் வரைய, புள்ளியியல் மற்றும் அறிவியல் ஆய்வுகளின் பல துறைகளில் இவற்றைப் பயன்படுத்துகிறோம். மக்கள் தொகையின் பண்புகள், அவர்களின் பழக்க வழக்கங்கள் ஆகியவற்றைக் குறிக்கவும் அணிகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

அணிக்கோவைகள் அற்புதமான இயற்கணித பண்புகளை கொண்டுள்ளன. நேரியல் கணிதத்தில் பெருமை மிக்க இடத்தையும் பெற்றுள்ளன. உயர்நிலை இயற்கணிதத்தில் அணிக்கோவைகள் முக்கியமாகக் கருதப்படுகிறது.

பிரம்மகுப்தா [கி.பி. (பொ.ஆ.) 598 – கி.பி. (பொ.ஆ.) 668] என்பவர் பண்டைய இந்தியாவின் முக்கியமான கணிதவியல் மற்றும் வானியல் அறிஞர் ஆவார். பூச்சியத்தைப் பயன்படுத்துவதற்கான முக்கிய விதிகளையும் முதன் முதலில் அளித்தவரும் அவரே. அணிகளில், $B(x\,,y)=\begin{pmatrix} x & y \\ \pm ty & \pm x \end{pmatrix}$ என்ற அணி பிரம்மகுப்தா அணி (Brahmagupta Matrix) என அழைக்கப்படுகிறது.

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தை படித்த பின்பு பின்வரும் பாடக் கருத்துக்களை மாணவர்கள் புரிந்து கொள்ள இயலும்.

RZQU1Z

- அணியின் தரம் – கருத்துரு.
- அடிப்படை உருமாற்றங்கள் மற்றும் சமான அணிகள்.
- அணியின் ஏறுபடி வடிவம்.
- அணியின் தரம் காணல்.
- சமச்சீரற்ற நேரிய சமன்பாடுகளுக்கு ஒருங்கமைவு தன்மையை ஆராய்தல்.
- நேரிய சமன்பாடுகளின் பயன்பாடுகள்.
- சமச்சீரற்ற நேரிய சமன்பாடுகளை கிரேமர் விதியைக்கொண்டு தீர்வு காணல்.
- தொடக்க பங்கு சந்தை பங்கீட்டினைக் கொண்டு அடுத்த நிலையினை முன்னறிவித்தல்.

1.1 அணியின் தரம் (Rank of a Matrix)

பொருளாதாரம், வாணிபம் மற்றும் தொழில்துறைகளில் பொதுவாக அணிகள் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

அணிகளின் அடிப்படை பண்புகளை நாம் ஏற்கனவே படித்துள்ளோம். இப்பாடத்தில் அடிப்படை உருமாற்றங்களை பயன்படுத்தி,

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 1.indd 1 3/5/2020 10:51:14 AM

அணிகளின் பயன்பாடுகளில் புதிய முறைகளை உருவாக்குதலைப் பற்றி படிக்கலாம்.

1.1.1 கருத்துரு (Concept)

ஒவ்வொரு அணியுடனும் தொடர்பு படுத்தக்கூடிய ஒரு குறையற்ற எண், அந்த அணியின் தரம் எனப்படும்.

வரையறை 1.1

A என்கிற அணியின் தரம் 'r' எனில் பின்வரும் நிபந்தனைகள் உண்மையாக இருக்க வேண்டும்.

(i) A ஆனது குறைந்தபட்சம் ஒரு 'r' வரிசை பூச்சியமற்ற சிற்றணிக் கோவையை பெற்றிருத்தல் வேண்டும்.

(ii) A-ன் ஒவ்வொரு $(r+1)$ வரிசை மற்றும் அதைவிட அதிகமான வரிசை கொண்ட சிற்றணிக்கோவைகளின் மதிப்புகள் பூச்சியமாக இருத்தல் வேண்டும்.

குறிப்பு

(i) $\rho(A) \geq 0$

(ii) அணி A-ன் வரிசை $m \times n$ எனில் அதன் தரமானது, $\{m,n\}$ –ன் மீச்சிறு மதிப்புக்குச் சமமாகவோ அல்லது சிறியதாகவோ இருக்கும்.

(iii) பூச்சிய அணியின் தரம் '0' ஆகும்.

(iv) $n \times n$ வரிசை உடைய பூச்சியமற்ற கோவை அணியின் தரம் 'n'ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.1

$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

தீர்வு:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \text{ என்க.}$$

A -ன் வரிசை 2×2 $\quad \therefore \rho(A) \leq 2$

இரண்டாம் வரிசை சிற்றணிக்கோவையை கருத, நாம் பெறுவது

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \text{ ஆகும்.}$$

$\Rightarrow$ பூச்சியமற்ற சிற்றணிக்கோவையின் வரிசை 2 ஆகும். $\therefore \rho(A) = 2$.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

சங்கேத மொழிகளை உருவாக்குவதற்கு அணியின் கருத்துருக்கள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 1.2

$\begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

தீர்வு:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \text{ என்க.}$$

A -ன் வரிசை 2×2 $\quad \therefore \rho(A) \leq 2$

இரண்டாம் வரிசை சிற்றணிக்கோவையை கருத, நாம் பெறுவது $\begin{vmatrix} -5 & -7 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$ ஆகும்.

இரண்டாம் வரிசை சிற்றணிக்கோவை பூச்சியமாவதால், $\rho(A) \neq 2$.

ஒன்றாம் வரிசை கொண்ட ஒரு சிற்றணிக்கோவையை கருத, நாம் பெறுவது $|-5| \neq 0$ ஆகும்.

$\Rightarrow$ பூச்சியமற்ற சிற்றணிக்கோவையின் வரிசை 1 ஆகும். $\therefore \rho\,(A) = 1$

எடுத்துக்காட்டு 1.3

$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

தீர்வு:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ என்க}$$

A -ன் வரிசை 3×3.

$$\therefore \rho(A) \leq 3$$

வரிசை மூன்று உடைய சிற்றணிக் கோவையை கருத, நாம் பெறுவது

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

$\Rightarrow$ பூச்சியமற்ற சிற்றணிக்கோவையின் வரிசை மூன்று ஆகும். $\therefore \rho(A) = 3.$

எடுத்துக்காட்டு 1.4

$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

தீர்வு:

$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ என்க.

A -ன் வரிசை 3×3. $\therefore \rho(A) \leq 3.$

வரிசை மூன்று உடைய சிற்றணிக் கோவையை கருத, நாம் பெறுவது,

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore$ மூன்றாம் வரிசைக் கொண்ட சிற்றணிக்கோவை பூச்சியமாவதால், $\rho(A) \neq 3$ ஆகும்.

இரண்டாம் வரிசை கொண்ட ஒரு சிற்றணிக் கோவையை கருத, நாம் பெறுவது

$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$ ஆகும்.

$\Rightarrow$ பூச்சியமற்ற சிற்றணிக்கோவையின் வரிசை 2 ஆகும். $\therefore \rho(A) = 2.$

எடுத்துக்காட்டு 1.5

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

தீர்வு:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ என்க.

A -ன் வரிசை 3×4

$\therefore \rho(A) \leq 3.$

மூன்றாம் வரிசை கொண்ட சிற்றணிக் கோவைகளை கருத, நாம் பெறுவது

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0,$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -7 \end{vmatrix} = 0,$ $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0$ ஆகும்.

அனைத்து மூன்றாம் வரிசை கொண்ட சிற்றணிக்கோவைகளின் மதிப்புகளும் பூச்சியமாகும். $\rho(A) \neq 3.$

ஏதேனும் ஒரு இரண்டாம் வரிசை சிற்றணிக்கோவையை கருத, நாம் பெறுவது $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ ஆகும்.

$\Rightarrow$ பூச்சியமற்ற சிற்றணிக்கோவையின் வரிசை 2 ஆகும். $\therefore \rho(A) = 2.$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

A என்ற சதுர அணியின் வரிசை 3. A இன் தரம் 2 எனில், $adj\ A$ இன் தரம் 1 ஆகும்.

1.1.2 அடிப்படை உருமாற்றங்கள் மற்றும் சமான அணிகள் (Elementary Transformations and Equivalent matrices)

அணிகளின் அடிப்படை உருமாற்றங்கள் பின்வரும் மூன்று செயல்களைப் பொறுத்து அமைகிறது.

(i) ஏதேனும் இரு நிரைகளை (அல்லது நிரல்கள்) பரிமாற்றம் செய்தல். [$R_i \leftrightarrow R_j$ (அ) $C_i \leftrightarrow C_j$]

(ii) ஒரு நிரையில் (அல்லது நிரலில்) உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பையும் ஒரு பூச்சியமற்ற திசையிலி k -ஆல் பெருக்குதல். [$R_i \rightarrow kR_i$ (அ) $C_i \rightarrow kC_j$].

(iii) ஒரு நிரையில் (அல்லது நிரலில்) உள்ள உறுப்புகளை மற்றொரு நிரையில் (அல்லது நிரலில்) உள்ள ஒத்த உறுப்புகளுடன் ஒரே மாறிலியால் பெருக்கி கூட்டுதல்.

$[R_i \to R_i + kR_j$ (அ) $C_i \to C_i + kC_j]$

சமான அணிகள் (Equivalent Matrices)

A மற்றும் B என்பவை சமவரிசைக் கொண்ட அணிகள் என்க. இவற்றில் ஒரு அணியை மற்றொரு அணியிலிருந்து, முடிவுறு எண்ணிக்கையுள்ள அடிப்படை உருமாற்றங்களை மேற்கொள்வதன் மூலம் பெறுவோமாயின், A-யும் B-யும் சமான அணிகள் எனப்படும். இதனை $A \sim B$ அல்லது $B \sim A$ என குறிப்பிடலாம்.

1.1.3 ஏறுபடி வடிவம் மூலம் வரிசை 3×4 வரை உள்ள அணியின் தரம் காணல் (Echelon form and finding the rank of the matrix upto the order of 3×4)

$m \times n$ வரிசை உடைய A என்ற அணியானது ஏறுபடி வடிவில் உள்ளதாயின் அது பின்வரும் நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்தல் வேண்டும்.

(i) அனைத்து உறுப்புகளையும் பூச்சிய உறுப்புகளாய் கொண்ட ஒவ்வொரு நிரையும் பூச்சியமற்ற உறுப்புகளையும் உறுப்புகளாகக் கொண்ட நிரைக்கு கீழே அமைய வேண்டும்.

(ii) பூச்சியமற்ற நிரையில் வரும் முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்பிற்கு முன்பாக இடம்பெறும் பூச்சிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையானது அவ்வாறாகவே அதற்கு அடுத்து வரும் நிரையில் உள்ள பூச்சிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைவிட குறைவாக இருத்தல் வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.6

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

தீர்வு :

A -ன் வரிசை 3×3. $\therefore \rho(A) \le 3$.

அணி A – ஐ, ஏறுபடி வடிவத்திற்கு மாற்றியமைக்க,

அணி A	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$	
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2 - 2R_1$ $R_3 \to R_3 - 3R_1$
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$R_3 \to R_3 - R_2$
கடைசியாக பெறப்பட்ட அணியானது ஏறு படிவ வடிவில் உள்ளது.	

ஏறுபடிவ அணியில் உள்ள பூச்சியமற்ற நிரைகளின் எண்ணிக்கை 2 ஆகும். $\therefore \rho(A) = 2$.

குறிப்பு

ஒரு நிரையில் உள்ள உறுப்புகளில் குறைந்தது ஒரு உறுப்பு பூச்சியமற்ற உறுப்பாக அமையுமானால் அந்த நிரை பூச்சியமற்ற நிரை எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.7

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

தீர்வு:

A -ன் வரிசை 3×4. $\therefore \rho(A) \le 3$.

அணி A -ஐ, ஏறுபடி வடிவத்திற்கு மாற்றியமைக்க,

அணி A	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$R_1 \leftrightarrow R_2$

$\sim\begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&1&2&1\\0&-5&-8&-3\end{pmatrix}$	$R_3 \to R_3 - 3R_1$
$\sim\begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&1&2&1\\0&0&2&2\end{pmatrix}$	$R_3 \to R_3 + 5R_2$

ஏறுபடிவ அணியில் உள்ள பூச்சியமற்ற நிரைகளின் எண்ணிக்கை 3 ஆகும். $\therefore \rho(A) = 3.$

எடுத்துக்காட்டு 1.8

$A = \begin{pmatrix}1&1&1&1\\3&4&5&2\\2&3&4&0\end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

தீர்வு:

A -யின் வரிசை 3×4.

$\therefore \rho(A) \le 3.$

அணி A-ஐ, ஏறுபடி வடிவத்திற்கு மாற்றியமைக்க,

அணி A	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$A = \begin{pmatrix}1&1&1&1\\3&4&5&2\\2&3&4&0\end{pmatrix}$	
$\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&-1\\0&1&2&-2\end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2 - 3R_1$ $R_3 \to R_3 - 2R_1$
$\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&-1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$	$R_3 \to R_3 - R_2$

ஏறுபடிவ அணியில் உள்ள பூச்சியமற்ற நிரைகளின் எண்ணிக்கை 3 ஆகும். $\therefore \rho(A) = 3.$

சமன்பாடுகளின் ஒருங்கமைவு (Consistency of Equations)

இருமாறிகள் கொண்ட நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு (System of linear equations in two variables) :

இரண்டு நேரிய சமன்பாடுகளை அணியின் நேர்மாறு முறையில் எவ்வாறு தீர்ப்பது என்பதை நாம் அறிவோம்.

> **மீள்பார்வை**
>
> நேரிய சமன்பாடுகளை அணி வடிவத்தில் $AX=B$ என்றவாறு எழுத இயலும் அதன் தீர்வு $|A| \neq 0$ எனும் நிலையில் $X = A^{-1}B$ ஆகும்.

பின்வரும் இரு மாறிகளைக் கொண்ட நேரிய சமன்பாட்டுத் தொகுப்பினை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= h \\ cx + dy &= k \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$a,\ b,\ c,\ d,\ h$ மற்றும் k என்பவை மெய் மாறிலிகள், ஒரே நேரத்தில் a மற்றும் b என்ற இரண்டுமே பூஜ்ஜிமாகவோ அல்லது c மற்றும் d என்ற இரண்டுமே பூச்சியமாகவோ இருக்க இயலாது. கொடுக்கப்பட்ட L_1 , L_2 ஆகிய இரு நேர்கோடுகளில் பின்வரும் ஏதேனும் ஒன்று கிடைக்கலாம்.

L_1 மற்றும் L_2 சரியாக ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்ளும்.

L_1 மற்றும் L_2 ஒன்றின் மீது மற்றொன்று பொருந்தும்.

L_1 மற்றும் L_2 இணையானவை மற்றும் வெவ்வேறானவை.

படம் 1.1–ல் முதல் நிலையில் இரு கோடுகளும் ஒன்றை ஒன்று ஒரே ஒரு புள்ளியில் வெட்டுவதால் சமன்பாட்டு தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு.

இரண்டாவது நிலையில் கோட்டின் மீது உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் அச்சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளாக அமையும். எனவே சமன்பாட்டு தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது, மற்றும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் உண்டு.

மூன்றாவது நிலையில் இருகோடுகளும் இணைகோடுகள் ஆவதால் சமன்பாட்டு தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அற்றது. தீர்வுகள் இல்லை.

ஒவ்வொன்றையும் விளக்கும் வகையில் முதலில் இரு மாறிகளைக் கொண்ட நேரியல் தொகுதிகளைப் பார்ப்போம்.

(அ) ஒரே ஒரு தீர்வை மட்டுமே கொண்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு

$2x - y = 1,\ 3x + 2y = 12$ என்ற சமன்பாடுகள் $(2,3)$ என்ற புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்கின்றன.

அதாவது (2,3) இருகோடுகளின் மீதும் அமைகின்றது. எனவே இந்த சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையவை மற்றும் ஒரே ஒரு தீர்வு கொண்டவை ஆகும்.

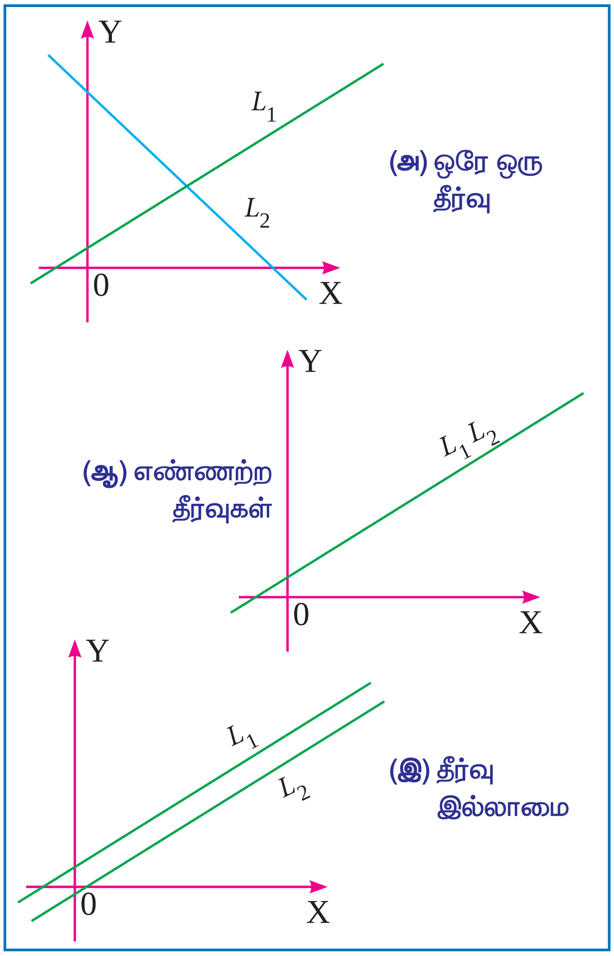
(ஆ) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டுத்தொகுப்பு

$2x - y = 1,\ 6x - 3y = 3$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒன்றன் மீது மற்றொன்றாக அமையும் இரு நேர்க்கோடுகளாகும். மேலும் கோட்டின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் அச்சமன்பாடு களின் தீர்வுகளாக அமையக் காண்கிறோம்.

இச்சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையவை மற்றும் (0,–1), (1, 1)… என எண்ணிக்கையற்றதீர்வுகளைப் பெற்றுள்ளன.

(இ) தீர்வுகள் அற்ற சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு

$2x - y = 1,\ 6x - 3y = 12$ என்ற சமன்பாடுகள் இரு இணையான கோடுகளாகும். இச்சமன் பாடுகள் ஒருங்கமைவு அற்றவை.



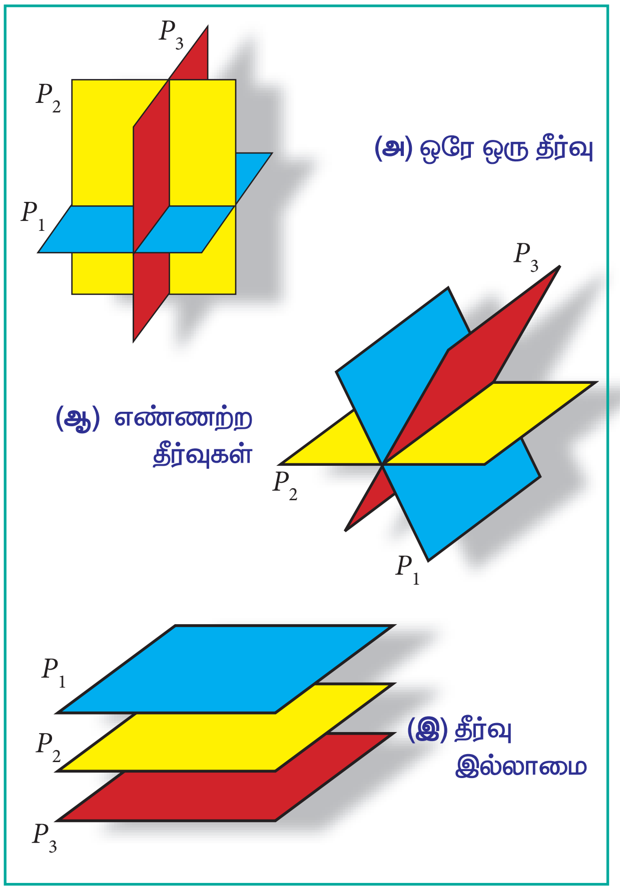
படம் 1.1

மூன்று மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளைக் கொண்ட சமச்சீரற்ற சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு (System of non Homogeneous Equations in three variables)

x, y மற்றும் z ஆகிய மூன்று மாறிகளைக் கொண்ட மூன்று நேரிய சமன்பாடுகளைக் கொண்ட நேரிய தொகுப்பின் பொது வடிவம்

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \qquad (2)$$

$ax + by + cz = d$ (a, b மற்றும் c ஆகியன பூச்சியமற்றவை) என்ற மூன்று மாறிகளைக் கொண்ட நேரிய சமன்பாடு முப்பரிமாண வெளியில் அமைந்த தளத்தைக் குறிக்கும். எனவே தொகுப்பு (2)-ல் அமைந்த ஒவ்வொரு சமன்பாடும், முப்பரிமாண வெளியில் ஒவ்வொரு தளத்தைக் குறிக்கும். மேலும் தொகுப்பின் தீர்வு(கள்), தொகுப்பின் மூன்று சமன்பாடுகள் குறிக்கும் தளங்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி(கள்) ஆகும். ஒவ்வொரு தளமும் ஒன்றை ஒன்று வெட்டிக்கொள்ளும் தன்மையைப் பொறுத்து தொகுப்பு ஆனது ஒரே ஒரு தீர்வு, எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள், அல்லது தீர்வு இல்லாமை என பெற்றிருக்கும்.



படம் 1.2

படம் 1.2 ஆனது ஒவ்வொரு சாத்தியக்கூறு களையும் விளக்குகின்றது.

படம் 1.2(அ)-ல் மூன்று தளங்களும் ஒரு புள்ளியில் வெட்டுகின்றன. எனவே சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு (2) ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெறும்.

படம் 1.2(ஆ)-ல் தொகுப்பிற்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டு என்பதை சித்தரிக்கின்றது. இங்கு மூன்று தளங்களும் ஒரே நேர்க்கோட்டில் வெட்டிக் கொள்வதால், கோட்டின் மீதுள்ள அனைத்து புள்ளிகளும் தீர்வுகளாக கிடைக்கின்றன.

படம் 1.2(இ)-ல் மூன்று தளங்களும் ஒன்றுக்கொன்று இணையானவை மற்றும் வெவ்வேறானவை. மூன்று தளங்களுக்கு பொதுவான புள்ளி ஏதும் இல்லை எனவே தொகுப்பு (2) க்கு இந்நிலையில் தீர்வு ஏதும் இல்லை.

குறிப்பு

ஒவ்வொரு நேரிய சமன்பாட்டுத் தொகுப்பும் ஒரே ஒரு தீர்வு அல்லது எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும் அல்லது தீர்வு இல்லாமலும் இருக்கும்.

n மதிப்பிடவேண்டிய மாறிகளைக் கொண்ட 'm' நேரிய சமன்பாடுகளைக் கொண்ட தன்னிச்சையான தொகுப்பினை

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}\ x_n = b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}\ x_n = b_2\\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}\ x_n = b_m
\end{aligned}$$

என எழுதலாம் $x_1, x_2, .., x_n$ என்பன மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகள் மேலும் a_{ij} மற்றும் b_i $(i = 1,2,3, ..., m,\ j = 1,2,3, ..., n)$ என்பவை மாறிலிகள் ஆகும்.

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணிகள் (Augmented matrices)

'n' மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளைக் கொண்ட 'm' நேரிய சமன்பாடுகளை கொண்ட தொகுப்பு, செவ்வக வரிசையில் அமைந்த எண்களாக சுருக்கப்படுகின்றது.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$$

இது தொகுப்பின் விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி ஆகும், மேலும் $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$ என்பது கெழு அணி எனப்படும்.

பின்வரும் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பினை கருதுவோம்.

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9\\ 2x + 4y - 3z &= 1\\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2\\ 2 & 4 & -3\\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9\\ 1\\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A \qquad X = B$$

இதில் $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2\\ 2 & 4 & -3\\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$ என்பது கெழு அணி மற்றும்

$[A, B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9\\ 2 & 4 & -3 & 1\\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ என்பது

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி ஆகும்.

1.1.4 சமச்சீரற்ற நேரிய சமன்பாடுகளின் ஒருங்கமைவுத் தன்மையை, தர முறையில் சோதித்தல் (இரண்டு மற்றும் மூன்று மதிப்பிட வேண்டிய) [Testing the consistency of non homogeneous linear equations (two and three variables) by rank method]

n மதிப்பிடவேண்டிய மாறிகளைக் கொண்ட $AX=B$ என்ற அணி சமன்பாட்டில்

(i) $\rho([A, B]) = \rho(A)$ எனில் சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையவை.

(ii) $\rho([A, B]) = \rho(A) = n$ எனில் சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையவை மற்றும் ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு.

(iii) $\rho([A, B]) = \rho(A) < n$ எனில் சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையவை மற்றும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் உண்டு.

(iv) $\rho\left(\left[A, B\right]\right) \neq \rho\left(A\right)$ எனில் சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு அற்றது மற்றும் தீர்வு இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 1.9

$x+y=5,\ 2x+y=8$ ஆகிய சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையது எனில் அவற்றைத் தீர்க்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பிற்கான அணி சமன்பாடு

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

A X = B

அணி A	விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி $[A,B]$	அடிப்படை உருமாற்றம்
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$	
$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2 - 2R_1$
$\rho(A)=2$	$\rho([A,B])=2$	

ஏறுபடிவ அணியில் உள்ள பூச்சியமற்ற நிரைகளின் எண்ணிக்கை 2 ஆகும்.

$\rho(A)=\rho([A,B])=2$ = மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பு ஒருங்கமைவுடையது மேலும் ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு.

கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பினை

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$ என எழுதலாம்.

$$\Rightarrow x+y=5 \qquad ...(1)$$

$$y=2$$

$$\therefore (1) \Rightarrow x+2=5$$

$$x=3$$

தீர்வு : $x=3,\ y=2$

எடுத்துக்காட்டு 1.10

$2x+y=5,\ 4x+2y=10$ ஆகிய சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையது எனில் அவற்றைத் தீர்க்க.

தீர்வு:

சமன்பாட்டுத் தொகுப்பிற்கான அணிச் சமன்பாடு,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$A \quad X = B$

அணி A	விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி $[A,B]$	அடிப்படை உருமாற்றம்
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix}$	
$\sim\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\sim\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2 - 2R_1$
$\rho(A)=1$	$\rho([A,B])=1$	

ஏறுபடிவ அணியிலுள்ள பூச்சியமற்ற நிரைகளின் எண்ணிக்கை 1 ஆகும்.

இங்கு, $\rho(A)=\rho([A,B]) = 1 <$ மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை.

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டு தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளை பெற்றிருக்கும்.

தொகுப்பிற்கான சமான அணி வடிவம்,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$ ஆகும்.

$$\Rightarrow 2x+y=5 \qquad ...(1)$$

$k \in R$, $y=k$ எனக் கொண்டால்,

$x=\frac{1}{2}(5-k)$ (1) லிருந்து,

$$x=\frac{1}{2}(5-k),\ y=k;\ k\in R$$

k-யின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு வெவ்வேறு தீர்வுகளை நாம் பெறலாம். எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.11

$3x-2y=6,\ 6x-4y=10$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு அற்றது எனக் காட்டுக.

தீர்வு:

அணி சமன்பாடு

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$AX = B$$

அணி A	விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி $[A,B]$	அடிப்படை உருமாற்றம்
$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 6 & -4 & 10 \end{pmatrix}$	
$\sim\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\sim\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2 - 2R_1$
$\rho(A)=1$	$\rho([A,B])=2$	

$$\therefore \rho([A, B])=2, \qquad \rho(A)=1$$

$$\rho(A) \neq \rho([A,B])$$

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அற்றது.

எடுத்துக்காட்டு 1.12

$2x + y + z = 5,\ x + y + z = 4,\ x - y + 2z = 1$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையது எனக்காட்டுக மேலும் அவற்றைத் தீர்க்க.

தீர்வு:

அணி சமன்பாடு

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \qquad X = B$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி $[A,B]$	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	
$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$R_1 \leftrightarrow R_2$
$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2 - 2R_1$ $R_3 \to R_3 - R_1$
$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$	$R_3 \to R_3 - 2R_2$
$\rho(A)=3,\ \rho([A,B])=3$	

கடைசி சமான அணி ஏறுபடி வடிவில் உள்ளது. இதில் மூன்று பூச்சியமற்ற நிரைகள் உள்ளன.

$\rho(A) = \rho([A,B])=3=$ மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை.

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்டதொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது. மேலும் ஒரே ஒரு தீர்வை பெற்றிருக்கும்:

தீர்வு காண தரப்பட்ட சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்கு சமானமான அணி சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x + y + z = 4 \qquad (1)$$

$$y + z = 3 \qquad (2)$$

$$3z = 3 \qquad (3)$$

$$(3) \Rightarrow \quad z = 1$$

$$(2) \Rightarrow \quad y = 3 - z = 2$$

$$(1) \Rightarrow x = 4 - y - z$$

$$x = 1$$

$$\therefore x = 1, \quad y = 2, \quad z = 1$$

எடுத்துக்காட்டு 1.13

$x + y + z = 6,\ x + 2y + 3z = 14,\ x + 4y + 7z = 30$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையது எனக்காட்டுக. மேலும் அவற்றைத் தீர்க்க.

தீர்வு:

அணி சமன்பாடு

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$A \qquad X = B$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி $[A,B]$	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & 4 & 7 & 30 \end{pmatrix}$	
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & 16 \end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2 - R_1$ $R_3 \to R_3 - R_2$
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$R_3 \to R_3 - 2R_2$
$\rho(A) = 2,\ \rho([A,B]) = 2$	

கடைசி சமான அணி ஏறுபடி வடிவில் உள்ளது. இதில் இரண்டு பூச்சியமற்ற நிரைகள் உள்ளன.

$$\therefore \quad \rho([A,B]) = 2,\ \rho(A) = 2$$

இங்கு, $\rho(A) = \rho([A,\ B]) = 2 <$ மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது. மேலும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் உண்டு.

கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பிற்கு சமானமான அணிச் சமன்பாடு

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x + y + z = 6 \qquad (1)$$

$$y + 2z = 8 \qquad (2)$$

$(2) \Rightarrow \quad y = 8 - 2z,$

$(1) \Rightarrow \quad x = 6 - y - z = 6 - (8 - 2z) - z = z - 2$

$z = k,\ \ k \in R$ எனக்கொண்டால், $x = k - 2, y = 8 - 2k$ எனப் பெறலாம்.

k-யின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு வெவ்வேறு தீர்வுகளை நாம் பெறலாம்.

எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பு எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.14

$x - 4y + 7z = 14,\ 3x + 8y - 2z = 13,\ 7x - 8y + 26z = 5$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு அற்றவை எனக்காட்டுக.

தீர்வு:

அணி சமன்பாடு

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 3 & 8 & -2 \\ 7 & -8 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A \qquad X \quad = \quad B$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி $[A,B]$	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & 14 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 7 & -8 & 26 & 5 \end{pmatrix}$	
$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & 14 \\ 0 & 20 & -23 & -29 \\ 0 & 20 & -23 & -93 \end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2 - 3R_1$ $R_3 \to R_3 - 7R_1$
$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & 14 \\ 0 & 20 & -23 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}$	$R_3 \to R_3 - R_2$
$\rho(A) = 2,\ \rho([A,B]) = 3$	

கடைசி சமானமான அணி ஏறுபடி வடிவில் உள்ளது. இதில் மூன்று பூச்சியமற்ற நிரைகள் உள்ளன.

$$\therefore \quad \rho([A,\ B]) = 3, \qquad \rho(A) = 2$$

$$\rho(A) \neq \rho([A,\ B])$$

எனவே, சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அற்றது மற்றும் தீர்வு ஏதுமில்லை.

எடுத்துக்காட்டு 1.15

பின்வரும் சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையது எனில் k-ன் மதிப்பைக்காண்க.
$x + 2y - 3z = -2,\ 3x - y - 2z = 1,$ மற்றும்

$$2x + 3y - 5z = k$$

தீர்வு:

தரப்பட்ட தொகுப்புக்குரிய அணிச் சமன்பாடானது

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$$
$$A \qquad X = B$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி $[A,B]$	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & k \end{pmatrix}$	
$\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 4+k \end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2 - 3R_1$ $R_3 \to R_3 - 2R_1$
$\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 21+7k \end{pmatrix}$	$R_3 \to 7R_3 - R_2$
$\rho(A) = 2,\ \rho([A,\ B]) = 2$ (அல்லது) 3	

சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையவை எனில் $\rho([A,\ B]) = \rho(A) = 2$

$$\therefore \quad 21 + 7k = 0$$
$$7k = -21.$$
$$k = -3$$

எடுத்துக்காட்டு 1.16

தரப்பட்ட சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு அற்றவை எனில் k -ன் மதிப்பு காண்க. $x + y + z = 7,\ x + 2y + 3z = 18,\ y + kz = 6$.

தீர்வு:

தரப்பட்ட தொகுப்புக்குரிய அணிச் சமன்பாடு

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix}$$
$$A \qquad X = B$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி $[A,B]$	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 18 \\ 0 & 1 & k & 6 \end{pmatrix}$	
$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & k & 6 \end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2 - 3R_1$ $R_3 \to R_3 - 7R_1$
$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & k-2 & -5 \end{pmatrix}$	$R_3 \to R_3 - R_2$
$\rho(A) = 2$ அல்லது 3, $\rho([A, B]) = 3$	

சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு அற்றவை எனில் $\rho([A,\ B]) \neq \rho(A)$

$$\Rightarrow \quad k - 2 = 0. \quad \therefore k = 2$$

எடுத்துக்காட்டு 1.17

'a' மற்றும் 'b' இன் எம்மதிப்புகளுக்கு $x + y + z = 6,\quad x + 2y + 3z = 10,\quad x + 2y + az = b$ என்ற சமன்பாடுகள்

(i) எந்த தீர்வும் பெற்றிராது.

(ii) ஒரே ஒரு தீர்வை பெற்றிருக்கும்.

(iii) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும் என ஆராய்க.

தீர்வு:

தரப்பட்ட சமன்பாட்டு தொகுப்புக்குரிய அணிச் சமன்பாடானது

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ b \end{pmatrix}$$
$$A \qquad X = B$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி $[A,B]$	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 10 \\ 1 & 2 & a & b \end{pmatrix}$	
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & a-1 & b-6 \end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2 - R_1$ $R_3 \to R_3 - R_1$
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & a-3 & b-10 \end{pmatrix}$	$R_3 \to R_3 - R_2$

கடைசி சமான அணி ஏறுபடிவ வடிவில் உள்ளது.

நிலை (i) தீர்வு இல்லை :

$\rho(A) \neq \rho([A,B])$ எனில், தொகுப்பிற்கு தீர்வு இல்லை. $a-3 = 0$ மற்றும் $b-10 \neq 0$ எனும்போது மட்டுமே $\rho(A) \neq \rho([A,B])$ ஆகும்.

$\therefore$ $a = 3$, $b \neq 10$ எனும்போது தொகுப்பிற்கு தீர்வு இல்லை.

நிலை (ii) ஒரே ஒரு தீர்வு :

$\rho(A) = \rho([A,B]) =$ மதிப்பிடவேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை, எனில் தொகுப்பிற்கு ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு.

இங்கு $a-3 \neq 0$ எனில் $\rho(A) = \rho([A,B]) = 3$.

$\therefore$ $a \neq 3$ மற்றும் $b \in R$ எனில் தொகுப்பிற்கு ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு.

நிலை (iii) எண்ணற்ற தீர்வுகள்:

$\rho(A) = \rho([A,B]) <$ மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை, எனில் தொகுப்பிற்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டு.

இங்கு $a-3=0$, $b-10=0$ எனில் $\rho(A) = \rho([A,B]) = 2 < 3$.

எனவே $a = 3$ மற்றும் $b = 10$ எனும் போது தொகுப்பிற்கு எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் உண்டு.

எடுத்துக்காட்டு 1.18

ஒரு தொழிற்சாலையில் உற்பத்தி செய்யப்படும் மொத்த அலகுகளின் நேரிய சார்பு $P = a + bl + cm$ இங்கு தொழிலாளர்களின் கூடுதல் உழைப்பு நேரம் (மணியில்) l, கூடுதல் இயந்திரம் நேரம் (மணியில்) m மற்றும் வேலையை முடிக்கும் நேரம் a (நிலையானது) எனில் பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து a,b மற்றும் c ஆகிய மாறிலிகளின் மதிப்புகளைக் காண்க.

நாள்	உற்பத்தி (P அலகுகள்)	உழைப்பு நேரம் (l மணியில்)	கூடுதல் இயந்திரம் நேரம் (m மணியில்)
திங்கள்	6,950	40	10
செவ்வாய்	6,725	35	9
புதன்	7,100	40	12

மேலும் உழைப்பு நேரம் 50 மணிகள் மற்றும் கூடுதல் இயந்திரம் நேரம் 15 மணிகள் எனில் உற்பத்தியைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு:

$P = a + bl + cm$ என்பது உற்பத்தி சமன்பாடு ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளிலிருந்து

$$6{,}950 = a + 40b + 10c$$
$$6{,}725 = a + 35b + 9c$$
$$7{,}100 = a + 40b + 12c$$

தரப்பட்ட சமன்பாட்டு தொகுப்புக்குரிய அணிச் சமன்பாடானது

$$\begin{pmatrix} 1 & 40 & 10 \\ 1 & 35 & 9 \\ 1 & 40 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6950 \\ 6725 \\ 7100 \end{pmatrix}$$
$$A \quad X = B$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி $[A,B]$	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$\begin{pmatrix} 1 & 40 & 10 & 6950 \\ 1 & 35 & 9 & 6725 \\ 1 & 40 & 12 & 7100 \end{pmatrix}$	
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 40 & 10 & 6950 \\ 0 & -5 & -1 & -225 \\ 0 & 0 & 2 & 150 \end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2 - R_1$ $R_3 \to R_3 - R_1$
$\rho(A) = 3, \rho([A,B]) = 3$	

∴ தரப்பட்ட சமன்பாட்டு தொகுப்புக்குரிய சமானமான அணிச் சமன்பாடு

$$\begin{pmatrix} 1 & 40 & 10 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6950 \\ -225 \\ 150 \end{pmatrix}$$

$$a + 40b + 10c = 6950 \qquad (1)$$

$$-5b - c = -225 \qquad (2)$$

$$2c = 150 \qquad (3)$$

$$\boxed{c = 75}$$

இப்பொழுது, $(2) \Rightarrow -5b - 75 = -225$

$$\boxed{b = 30}$$

மற்றும் $(1) \Rightarrow a + 1200 + 750 = 6950$

$$a = 5000$$

$$a = 5000,\ b = 30,\ c = 75$$

∴ உற்பத்தி சமன்பாடு $P = 5000 + 30l + 75m$

$l = 50,\ m = 15$ இல் $P \quad = 5000 + 30(50) + 75(15)$

$= 7625$

∴ உற்பத்தி $= 7,625$ அலகுகள்.

பயிற்சி 1.1

1. பின்வரும் அணிகளின் தரம் காண்க.

i) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ iv) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

v) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ vi) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & -7 \end{pmatrix}$

vii) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & 5 & -7 & 2 \end{pmatrix}$ viii) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ எனில் AB மற்றும் BA இவற்றின் தரத்தினைக் காண்க.

3. பின்வரும் சமன்பாட்டு தொகுப்பினை தர முறையில் தீர்க்க.

$x + y + z = 9,\ \ 2x + 5y + 7z = 52$ மற்றும்

$2x + y - z = 0$

4. $5x + 3y + 7z = 4,\ 3x + 26y + 2z = 9$ மற்றும் $7x + 2y + 10z = 5$ என்ற சமன்பாடுகளை தர முறையில் ஒருங்கமைவுடையது எனக்காட்டுக. மேலும் அவற்றை தீர்க்க.

5. பின்வரும் சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்கு தர முறையில் ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு எனக் காட்டுக:

$x + y + z = 3,\ x + 2y + 3z = 4$ மற்றும்

$x + 4y + 9z = 6$.

6. λ -ன் எந்த மதிப்புகளுக்கு பின்வரும் சமன்பாடுகள் ஒரே ஒரு தீர்வை பெற்றிராது என தர முறையில் காண்க:

$3x - y + \lambda z = 1,\ 2x + y + z = 2$ மற்றும்

$x + 2y - \lambda z = -1$.

7. X, Y மற்றும் Z ஆகிய மூன்று பொருள்களின் விலைகள் முறையே x, y மற்றும் z ஆகும். திரு. ஆனந்த் அவர்கள் Z–ல் 6 பொருள்களை வாங்கி, X-ல் 2 பொருள்கள் மற்றும் Y-ல் 3 பொருள்களை விற்கிறார். திரு. அமீர் அவர்கள் Y-ல் ஒரு பொருளை வாங்கி, X-ல் 3 பொருள்கள் மற்றும் Z-ல் 2 பொருள்களை விற்கிறார். திரு. அமித் அவர்கள் X-ல் ஒரு பொருளை வாங்கி Y-ல் மூன்று பொருள்கள் மற்றும் Z-ல் ஒரு பொருளை விற்கிறார். இதன் மூலமாக அவர்கள் மூவரும், முறையே ₹5,000, ₹2,000 மற்றும் ₹5,500 என வருமானம் பெறுகின்றனர் எனில் அம்மூன்று பொருள்களின் விலைகளைக் காண்க.

8. ஒரு தொகை ₹5,000 ஆனது ஆண்டிற்கு 6%, 7% மற்றும் 8% தரக்கூடிய மூன்று பங்குகளில் பிரித்து முதலீடு செய்யப்பட்டு, ஆண்டு மொத்த வருமானமாக ₹358 பெறப்படுகிறது. முதல் இரண்டு முதலீடுகளிலிருந்து கிடைக்கும் வருமானம், மூன்றாவது முதலீட்டிலிருந்து கிடைக்கும் வருமானத்தை விட ₹70 அதிகம் எனில், அம்மூன்று பங்குகளில் செலுத்தப்படும் முதலீடுகளை தரமுறையில் காண்க.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 1.indd 13 3/5/2020 10:52:03 AM

1.2 கிரேமர் விதி (Cramer's Rule)

சுவிஸ் கணித மேதையான கேப்ரியல் கிரேமர் 1704-ஆம் ஆண்டு ஜூலை 31 ஆம் நாள் ஜெனிவா என்ற நகரத்தில் பிறந்தார். இவர் இரண்டு மூத்த பெர்னோலிகளின் படைப்புகளை தொகுத்தது மட்டுமல்லாது, கிரகங்களின் கோள வடிவத் தன்மையையும், அவற்றிற்கான இயல்பான காரணத்தையும் (1730) மற்றும் நியூட்டன் முப்படி வளைவரை கையாலுதலையும் (1746) தொகுத்து வழங்கினார்.

இவர் 1750-ஆம் ஆண்டில் மதிப்பிடவேண்டிய மாறிகளில் அமைந்த n நேரிய சமன்பாட்டுத் தொகுப்புக்கு அணிக்கோவை முறையில் ஒரே ஒரு தீர்வைத்தரக்கூடிய சூத்திரமான கிரேமரின் விதியை வெளியிட்டார். கிரேமர் விதியின் சிறப்பு என்னவெனில் கண்டுபிடிக்கப்பட வேண்டிய மாறிகளான x,y,z -ல் எவையேனும் ஒன்றை கண்டுபிடிக்க, மற்ற மாறிகளின் மதிப்புகள் தெரிந்திருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. கிரேமர் விதியை $\Delta \neq 0$ ஆக இருக்கும் போது மட்டுமே பயன்படுத்தி ஒரே ஒரு தீர்வை பெறமுடியும்.

தேற்றம் (நிரூபணமின்றி) கிரேமரின் விதி (Theorem (without proof) Cramer's Rule)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$ என்க.

அதாவது $AX=B$ என்பது n மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளில் அமைந்த சமன்பாட்டுத் தொகுப்புக்கு $\det(A) \neq 0$ எனில் தரப்பட்ட தொகுப்பானது ஒரே ஒரு தீர்வை பெற்றிக்கும்.

இத்தீர்வானது, $x_1 = \dfrac{\det(A_1)}{\det A}$, $x_2 = \dfrac{\det(A_2)}{\det A}$, …, $x_n = \dfrac{\det(A_n)}{\det A}$

இங்கு A_j என்ற அணியானது A–ன் j-வது நிரலிலுள்ள உறுப்புகளுக்கு பதிலாக

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$ என்ற அணியிலுள்ள

உறுப்புகளை பிரதியிட்டு கிடைக்கும் அணியாகும்.

1.2.1 மதிப்பிட வேண்டிய மூன்று மாறிகள் வரை கொண்ட சமசீரற்ற சமன்பாடுகள் (Non Homogeneous linear equations upto three variables).

(a) இரண்டு மதிப்பிடவேண்டிய மாறிகள் அமைந்த இரண்டு நேரிய சமன்பாடுகள் கொண்ட தொகுப்பினை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$a_1x + b_1y = d_1$$
$$a_2x + b_2y = d_2$$

இங்கு $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ $\quad \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}$ ஆகும்.

கிரேமரின் விதிப்படி, மாறிகளுக்கான தீர்வு,

$\Delta \neq 0$ எனும் நிலையில் $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta y}{\Delta}$ ஆகும்.

(b) மூன்று மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகள் அமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

இங்கு

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

என்க.

கிரேமரின் விதிப்படி, மதிப்பிடவேண்டிய மாறிகளுக்கான தீர்வு, $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta y}{\Delta}$, $z = \dfrac{\Delta z}{\Delta}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.19

கிரேமரின் விதியை பயன்படுத்தி தீர்வு காண்க : $2x + 3y = 7$, $3x + 5y = 9$.

தீர்வு:

சமன்பாடுகள் முறையே, $2x+3y=7$

$3x+5y=9$

இங்கு $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{vmatrix}=1\neq 0$

ஆதலால் கிரேமர் விதியை பயன்படுத்தலாம்.

இப்பொழுது, $\Delta_x=\begin{vmatrix}7 & 3\\ 9 & 5\end{vmatrix}=8 \quad \Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 7\\ 3 & 9\end{vmatrix}=-3$

கிரேமரின் விதிப்படி, $x=\dfrac{\Delta x}{\Delta}=\dfrac{8}{1}=8$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{-3}{1}=-3$$

$\therefore$ தீர்வு $x=8, y=-3$

எடுத்துக்காட்டு 1.20

ஜனவரி மற்றும் பிப்ரவரி மாதங்களில் A மற்றும் B என்ற இரு நிறுவனங்களிலும் திரு. ரவி என்பவரால் வாங்கப்பட்ட பங்குகளின் எண்ணிக்கை மற்றும் செய்யப்பட்ட மொத்த முதலீடுகள் (ரூபாயில்) கீழ்காணும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில், இவ்விரு மாதங்களிலும் வாங்கப்பட்ட பங்குகளின் விலையைக் காண்க.

மாதங்கள்	பங்குகளின் எண்ணிக்கை		செய்யப்பட்ட மொத்த முதலீடு (₹)
	A	B	
சனவரி	10	5	125
பிப்ரவரி	9	12	150

தீர்வு:

A-என்ற நிறுவனத்திலிருந்து வாங்கப்பட்ட ஒரு பங்கின் விலை x என்க.

B-என்ற நிறுவனத்திலிருந்து வாங்கப்பட்ட ஒரு பங்கின் விலை y என்க.

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தின்படி

$$10x+5y=125$$
$$9x+12y=150$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}10 & 5\\ 9 & 12\end{vmatrix}=75\neq 0 \quad \Delta_x=\begin{vmatrix}125 & 5\\ 150 & 12\end{vmatrix}=750$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}10 & 125\\ 9 & 150\end{vmatrix}=375$$

$\therefore$ கிரேமரின் விதிப்படி, $x=\dfrac{\Delta x}{\Delta}=\dfrac{750}{75}=10$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{375}{75}=5$$

A என்ற நிறுவனத்திலிருந்து வாங்கப்பட்ட ஒரு பங்கின் விலை ₹10 மற்றும் B என்ற நிறுவனத்திலிருந்து வாங்கப்பட்ட ஒரு பங்கின் விலை ₹5 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.21

11 பென்சில்கள் மற்றும் 3 அழிப்பான்களின் மொத்த விலை ₹64. மேலும் 8 பென்சில்கள் மற்றும் 3 அழிப்பான்களின் மொத்த விலை ₹49. கிரேமரின் விதியைப்பயன்படுத்தி ஒரு பென்சில் மற்றும் ஒரு அழிப்பான் விலையைக் காண்க.

தீர்வு:

ஒரு பென்சிலின் விலை ₹ x என்க

ஒரு அழிப்பானின் விலை ₹ y என்க

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் படி பின்வரும் சமன்பாடுகளைக் காணலாம்.

$$11x+3y=64$$
$$8x+3y=49$$

$\Delta=\begin{vmatrix}11 & 3\\ 8 & 3\end{vmatrix}=9\neq 0.$ (தொகுப்பு ஒரே ஒரு தீர்வை பெற்றிருக்கும்)

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}64 & 3\\ 49 & 3\end{vmatrix}=45 \quad \Delta_y=\begin{vmatrix}11 & 64\\ 8 & 49\end{vmatrix}=27$$

$\therefore$ கிரேமரின் விதிப்படி

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{45}{9}=5$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{27}{9}=3$$

$\therefore$ ஒரு பென்சிலின் விலை ₹5 மற்றும் ஒரு அழிப்பானின் விலை ₹3 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.22

கிரேமரின் விதியைப் பயன்படுத்தி தீர்க்க:

$$x+y+z=4,\ 2x-y+3z=1,\ 3x+2y-z=1$$

தீர்வு:

இங்கு $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & -1\end{vmatrix}=13\neq 0$

∴ கிரேமரின் விதிப்படி, தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் ஒரே ஒரு தீர்வை பெற்றிருக்கும்.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -13$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 39$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 26$$

∴ கிரேமரின் விதிப்படி $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{-13}{13} = -1$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{39}{13} = 3 \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{26}{13} = 2$$

∴ தீர்வு $\{x, y, z\} = \{-1, 3, 2\}$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$|A|=0$ எனும்பொழுது சமன்பாட்டுத் தொகுப்பானது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட தீர்வுகளை கொண்டதாகவோ அல்லது தீர்வு இல்லாமலோ இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.23

3 வணிகக் கணிதப் புத்தகங்கள், 2 கணக்கு பதிவியல் புத்தகங்கள் மற்றும் ஒரு வணிகவியல் புத்தகம் ஆகியவற்றின் மொத்த விலை ₹840. இரண்டு வணிகக் கணித புத்தங்கள், ஒரு கணக்குபதிவியல் மற்றும் ஒரு வணிகவியல் புத்தகத்தின் மொத்த விலை ₹570. ஒரு வணிகக் கணித புத்தகம், ஒரு கணக்குப்பதிவியல் புத்தகம் மற்றும் 2 வணிகவியல் புத்தகங்களின் மொத்தவிலை ₹630 எனில், ஒவ்வொரு புத்தகத்தின் விலையை கிரேமரின் விதியைக் கொண்டுக் காண்க.

தீர்வு:

ஒரு வணிகக் கணித புத்தகத்தின் விலை ₹ x என்க.

ஒரு கணக்குபதிவியல் புத்தகத்தின் விலை ₹ y என்க.

ஒரு வணிகவியல் புத்தகத்தின் விலை ₹ z என்க.

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களைக் கொண்டு, கீழ்காணும் சமன்பாடுகளை பெறலாம்.

$$\therefore\ 3x + 2y + z = 840$$
$$2x + y + z = 570$$
$$x + y + 2z = 630$$

இங்கு $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 840 & 2 & 1 \\ 570 & 1 & 1 \\ 630 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -240$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 840 & 1 \\ 2 & 570 & 1 \\ 1 & 630 & 2 \end{vmatrix} = -300$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 840 \\ 2 & 1 & 570 \\ 1 & 1 & 630 \end{vmatrix} = -360$$

∴ கிரேமரின் விதிப்படி $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{-240}{-2} = 120$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-300}{-2} = 150$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-360}{-2} = 180$$

∴ ஒரு வணிகக் கணித புத்தகத்தின் விலை ₹ 120,

ஒரு கணக்குபதிவியல் புத்தகத்தின் விலை ₹150 மற்றும்

ஒரு வணிகவியல் புத்தகத்தின் விலை ₹180.

எடுத்துக்காட்டு 1.24

ஒரு வாகன தயாரிப்பு நிறுவனமானது S_1, S_2 மற்றும் S_3 என்ற மூன்று வகையான எஃகு இரும்புகளையும் பயன்படுத்தி C_1, C_2 மற்றும் C_3 என்ற மூன்று வகையான மகிழுந்து வாகனங்களை உற்பத்தி செய்கிறது. ஒவ்வொரு வகையான வாகனங்ளுக்கு தேவையான எஃகு இரும்பு R டன்களில் மற்றும் மூன்று வகையான மகிழுந்து வாகனங்களுக்கும் தேவையான மொத்த

எஃகு இரும்பு விவரம் பின்வரும் அட்டவணையில் தொகுத்து வழங்கப்பட்டுள்ளது.

எஃகு வகைகள்	வாகனங்களின் வகைகள்			இருப்பிலுள்ள மொத்த எஃகு
	C_1	C_2	C_3	
S_1	3	2	4	28
S_2	1	1	2	13
S_3	2	2	1	14

நிறுவனம் தயாரிக்கும் ஒவ்வொரு வகையான வாகனங்களின் எண்ணிக்கையை காண்க.

தீர்வு:

C_1 வகை வாகனங்களின் எண்ணிக்கை x என்க.

C_2 வகை வாகனங்களின் எண்ணிக்கை y என்க.

C_3 வகை வாகனங்களின் எண்ணிக்கை z என்க.

$$\therefore \quad 3x+2y+4z=28$$
$$x+y+2z=13$$
$$2x+2y+z=14$$

இங்கு $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 28 & 2 & 4 \\ 13 & 1 & 2 \\ 14 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 28 & 4 \\ 1 & 13 & 2 \\ 2 & 14 & 1 \end{vmatrix} = -9$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 28 \\ 1 & 1 & 13 \\ 2 & 2 & 14 \end{vmatrix} = -12$$

$\therefore$ கிரேமரின் விதிப்படி $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{-6}{-3} = 2$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-9}{-3} = 3 \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-12}{-3} = 4$$

$\therefore$ உற்பத்தி செய்யப்படும் ஒவ்வொரு வகையான வாகனங்களின் எண்ணிக்கை முறையே 2, 3 மற்றும் 4 ஆகும்.

பயிற்சி 1.2

1. கீழ்காணும் சமன்பாடுகளை கிரேமரின் விதியைப் பயன்படுத்தி தீர்க்க.
   (i) $2x + 3y = 7, \quad 3x + 5y = 9$
   (ii) $5x + 3y = 17, \quad 3x + 7y = 31$
   (iii) $2x + y - z = 3, \quad x + y + z = 1, \quad x - 2y - 3z = 4$
   (iv) $x + y + z = 6, \; 2x + 3y - z = 5, \quad 6x - 2y - 3z = -7$
   (v) $x + 4y + 3z = 2 \quad 2x - 6y + 6z = -3, \quad 5x - 2y + 3z = -5$

2. 3 அலகுகள் தொழிலாளரின் சம்பளம் மற்றும் 2 அலகுகள் மூலதனம் கொண்டு தயாரிக்கப்படும் உற்பத்தி பொருள்களுக்கான செலவு ₹62 ஆகும். 4 அலகுகள் தொழிலாளரின் சம்பளம் மற்றும் 1 அலகு மூலதனம் கொண்டு பொருள்கள் உற்பத்தி செய்யப்பட்டிருந்தால் அதன் மொத்த செலவு ₹56 எனில், அணிக்கோவை முறையில் தொழிலாளர் மற்றும் மூலதனத்தின் ஒரு அலகுக்கு ஆகும் செலவினைக் காண்க.

3. ₹8,600 ஆனது இரண்டு விதமான கணக்குகளில் முதலீடு செய்யப்பட்டுள்ளது. இதில் ஒரு முதலீடானது $4\frac{3}{4}\%$ -ம்,மற்றொரு முதலீடானது $6\frac{1}{2}\%$ -ம் ஆண்டு வருவாயை ஈட்டுத் தருகிறது. ஓர் ஆண்டில் இரு முதலீடுகளுக்கான மொத்த வருமானம் ₹431.25 எனில், ஒவ்வொரு கணக்கிலும் செய்யப்பட்ட முதலீட்டு தொகையினைக் காண்க.

4. மெரினா கடற்கரையில் இரண்டு சிறுமிகள் குதிரை சவாரி மற்றும் கிவாட் பைக் சவாரியை மணி நேர வாடகையில் விளையாடுகிறார்கள். மே மாதத்தின் போது சிறுமி கெரன் ₹780-ம் சிறுமி பெனிட்டா ₹560-ம் செலவு செய்தார்கள். அதன் விவரம் கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பெயர்	பயன்படுத்திய காலம் (மணிகளில்)		மொத்த செலவு (₹)
	குதிரை சவாரி	கிவாட் பைக் சவாரி	
கெரன்	3	4	780
பெனிட்டா	2	3	560

இரண்டு விளையாட்டுகளுக்கான ஒரு மணி நேர வாடகையை அணிக்கோவை முறையில் காண்க.

5. ஒரு சந்தை ஆய்விற்காக A, B மற்றும் C ஆகிய பொருட்கள் எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது. குறியீட்டு எண்ணை காண்பதற்காக ஒவ்வொரு பொருளும் மூன்று வித தரங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டு அவற்றிற்கு நிலையான எடைகள் ஒதுக்கப்படுகிறது. மூன்று பொருள்களின் நுகர்வு பற்றிய தகவல்கள் மற்றும் பொருள்களின் மொத்த எடைகள் ஆகியவை கீழேயுள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

பொருள்கள்	தரங்களின் நுகர்வுகள்			மொத்த எடைகள்
	I	II	III	
A	1	2	3	11
B	2	4	5	21
C	3	5	6	27

மூன்று தரங்களுக்கும் ஒதுக்கப்பட்ட எடைகளை கிரேமரின் விதியைப் பயன்படுத்தி காண்க.

6. மொத்த தொகை ₹8,500 ஆனது வட்டி வருமானம் தரும் மூன்று விதமான கணக்குகளில் முதலீடு செய்யப்பட்டது. ஒவ்வொரு முதலீட்டுக்கான வட்டிவீதம் 2%, 3% மற்றும் 6% ஆகவும், ஒரு வருடத்திற்கான மொத்த வட்டி ₹380 ஆகவும் உள்ளது. மேலும் 6% முதலீட்டு தொகையானது மற்ற இரண்டு முதலீடுகளின் கூட்டுத்தொகைக்கு சமம் எனில், கிரேமரின் விதியைக் கொண்டு ஒவ்வொரு பிரிவிலும் செய்த முதலீட்டுத் தொகை எவ்வளவு?

1.3 மாறுதல் நிகழ்தகவு அணிகள் (Transition Probability Matrices)

1.3.1 தொடக்க பங்கு சந்தை பங்கீட்டினைக் கொண்டு அடுத்த நிலையினை முன்னறிவித்தல் (Forecasting the succeeding state when the initial market share is given)

ஒருநிலை மாறுதல் நிகழ்தகவு (One stage Transition Probability)

ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் நிகழக்கூடிய நிகழ்வு s_n என்ற நிலையில் உள்ளது. ஒரு அலகு நேரம் கழித்து மற்றொரு நிகழ்வு நிகழுமானால், அதாவது அமைப்பு ஒரு நிலை s_n லிருந்து s_{n+1} க்கு நகருமானால், இந்நகர்வு நிகழ்தகவு பரவலுடன் தொடர்புபடுத்தப்படுகின்றது. ஒவ்வொரு நகர்வின் மாற்றமும் s_n லிருந்து s_{n+1} க்கு மாறுவது நிகழ்தகவுடன் தொடர்புபடுத்தப்படுகின்றது. இந்நிகழ்தகவு ஒருநிலை மாறுதல் நிகழ்தகவு என அழைக்கப்படுகின்றது.

மாறுதல் அணி (Transition Matrix)

P_{jk} என்ற மாறுதல் நிகழ்தகவானது $P_{jk} > 0, \sum_k P_{jk} = 1$ என அனைத்து j க்கும் நிறைவு செய்கின்றது.

இந்த நிகழ்தகவுகளை அணிவடிவில் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \cdots \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

இதுவே மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.25

சந்தையில் உள்ள A மற்றும் B ஆகிய தர அடையாளம் கொண்ட பொருள்களுக்கான மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி $\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \end{array}$ எனில், சமநிலையில் தர அடையாளம் கொண்ட ஒவ்வொரு பொருள்களுக்கான சந்தை பங்கீடுகளைக் காண்க.

தீர்வு:

மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி

$$T = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \end{array}$$

சமநிலையில், நாம் பெறுவது $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$ மேலும், இங்கு $A + B = 1$ ஆகும்.

$$\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0.9A + 0.3B &= A \\ 0.9A + 0.3(1 - A) &= A \\ 0.9A - 0.3A + 0.3 &= A \\ 0.6A + 0.3 &= A \end{aligned}$$

$$0.4A = 0.3$$

$$A = \frac{0.3}{0.4} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow B = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

எனவே A –ன் சந்தைப்பங்கீடு 75% மற்றும் B-யின் சந்தைப்பங்கீடு 25% ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.26

பரிதி என்பவர் ஒவ்வொரு நாளும் சோகமாகவோ (S) அல்லது மகிழ்ச்சியாகவோ (H) உள்ளார். ஒரு நாள் மகிழ்ச்சியாக இருந்தால், அடுத்த நாள் 5-ல் 4-பங்கு சோகமாக இருப்பார். ஒரு நாள் சோகமாக இருந்தால், அடுத்த நாள் 3-ல் 2 பங்கு மகிழ்ச்சியாக இருப்பார் எனில், நீண்டகால அடிப்படையில் ஏதாவது ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் மகிழ்ச்சியாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு:

மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

சமநிலையில், $\begin{pmatrix} S & H \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & H \end{pmatrix}$

இங்கு $S + H = 1$

$$\frac{1}{3}S + \frac{4}{5}H = S$$

$$\frac{1}{3}(1-H) + \frac{4}{5}H = 1 - H$$

இதைத் தீர்க்க, நாம் பெறுவது $S = \frac{6}{11}$ மற்றும் $H = \frac{5}{11}$.

நீண்ட கால அடிப்படையில், தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட நாளில் மகிழ்ச்சியாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{5}{11}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.27

பின்வரும் வழிமுறைகளில் ஆகாஷ் மட்டைப்பந்து விளையாடுகின்றார். ஒரு முறை வெற்றி பெற்றால் (S) அடுத்த முறை விளையாடும்போது வெற்றிபெற 25% வாய்ப்பு உள்ளது. அவர் தோல்வி (F) அடைந்தால் அடுத்தமுறை விளையாடும்போது 35% வெற்றி பெற வாய்ப்பு உள்ளது. இவ்விவரங்களிலிருந்து மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி மற்றும் நீண்ட கால அடிப்படையில் அவரின் வெற்றி வாய்ப்பின் சராசரி ஆகியவற்றை காண்க.

தீர்வு:

மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி $T = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.35 & 0.65 \end{pmatrix}$

சமநிலையில், $\begin{pmatrix} S & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.35 & 0.65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & F \end{pmatrix}$

இங்கு $S + F = 1$

$$0.25\,S + 0.35\,F = S$$

$$0.25\,S + 0.35\,(1 - S) = S$$

இதை தீர்க்க $S = \frac{0.35}{1.10}$

$\Rightarrow S = 0.318$ மற்றும் $F = 0.682$

$\therefore$ ஆகாஷின் வெற்றி வாய்ப்பு சராசரி 31.8% ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.28

ஒரு பாடவேளையில், கணிதம் பயிலும் மாணவர்களில் 80% பேர் அடுத்த பாடவேளையில் கணிதம் பயில்கின்றனர். ஒரு பாடவேளையில், ஆங்கிலம் பயிலும் மாணவர்களில் 30% பேர் அடுத்த பாடவேளையில் ஆங்கிலம் பயில்கின்றனர். ஆரம்பத்தில் 60 மாணவர்கள் கணிதமும், 40 மாணவர்கள் ஆங்கிலமும் பயில்கின்றனர் எனில்,

(i) மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி

(ii) தொடர்ச்சியாக அடுத்த 2 பாடவேளைகளிலும் கணிதம் மற்றும் ஆங்கிலம் பயிலும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு

(i) மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி

$$T = \begin{array}{c} \\ M \\ E \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} M & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} \end{array}$$

முதல் பாடவேளைக்குப் பின்,

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} M & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 60 & 40 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ M \\ E \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} M & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} M & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 76 & 24 \end{pmatrix} \end{array}$$

எனவே முதல் பாடவேளைக்குப் பின், கணிதம் பயிலும் மாணவர்கள் 76 பேர்களும், ஆங்கிலம் பயிலும் மாணவர்கள் 24 பேர்களும் இருப்பார்கள்.

இரு பாடவேளைகளுக்குப் பின்,

$$\begin{array}{cc} M & E \\ \begin{pmatrix} 76 & 24 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} & M & E \\ M & 0.8 & 0.2 \\ E & 0.7 & 0.3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix}76 & 24\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.8 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 60.8+16.8 & 15.2+7.2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 77.6 & 22.4 \end{pmatrix}$$

இரு பாடவேளைகளுக்குப் பின், கணிதம் பயிலும் மாணவர்கள் 78 பேர்களும் (தோராயமாக) மற்றும் ஆங்கிலம் பயிலும் மாணவர்கள் 22 பேர்களும் (தோராயமாக) இருப்பர்.

மாற்று முறை

$$\begin{array}{cc} M & E \end{array} \qquad \begin{array}{cc} M & E \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 60 & 40 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} M \\ E \end{array}\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}^2$$

$$\begin{array}{cc} M & E \end{array} \qquad \begin{array}{cc} M & E \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} 60 & 40 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} M \\ E \end{array}\begin{pmatrix} 0.78 & 0.22 \\ 0.77 & 0.23 \end{pmatrix}$$

$$= (46.8 + 30.8 \quad 13.2 + 9.2)$$

$$= (77.6 \quad 22.4)$$

பயிற்சி 1.3

1. ஒரு வாரப்பத்திரிக்கைக்குச் சந்தா கட்டுமாறு கேட்டுக்கொள்ளப்படும் கடிதம் அந்த பத்திரிக்கை அலுவலகத்திலிருந்து ஏராளமானவர்களுக்கு அனுப்படுகிறது. கடிதம் பெற்றவர்களில், சந்தாதாரர்களாக இருந்து மீண்டும் சந்தா கட்டுபவர் 45% ஆகும். சந்தாதாரர்களாக இல்லாமல் இருந்து புதியதாக சந்தா கட்டுபவர்கள் 30% ஆகும். இதே போல் முன்னர் கடிதம் அனுப்பப்பட்டபோது, கடிதம் பெற்றவர்களில் 40% பேர் சந்தாதாரர்களாகச் சேர்ந்தனர் எனத் தெரிகிறது தற்போது கடிதத்தைப் பெறுபவர்களில் எத்தனை சதவீதம் பேர் சந்தாதாரர்களாவர் என எதிர்பார்க்கலாம்?

2. சென்னை நகரில் ஒரு புதிய போக்குவரத்து வசதி தற்போது செயல்பாட்டிற்கு வந்துள்ளது. அதனை இந்த ஆண்டு பயன்படுத்துபவர்கள் 30% பேர் அடுத்த ஆண்டு பயன்படுத்தாமல் மெட்ரோ ரயில் வண்டிக்கு மாறி விடுவர். மீதி 70% தொடர்ந்து அப்புதிய போக்குவரத்து வசதியைப் பயன்படுத்துவர். இந்த ஆண்டு மெட்ரோ ரயில் வண்டியை பயன்படுத்துபவர்களில் 70% பேர் அடுத்த ஆண்டும் தொடர்ந்து அதையே பயன்படுத்துவர் மீதி 30% பேர் புதிய போக்குவரத்து வசதிக்கு மாறிவிடுவர். சென்னை நகர மக்கள் தொகை மாறாமலிருக்கிறது என்றும் பயணிகளில் அடுத்த ஆண்டில் 60% பேர் புதிய போக்குவரத்து வசதியையும் 40% பேர் மெட்ரோ ரயில் வண்டியையும் பயன்படுத்துவார்கள் எனக் கொண்டால்,

   (i) அதற்கு அடுத்த ஆண்டில் எத்தனை சதவீதம் பயணிகள் புதிய போக்குவரத்து வசதியை பயன்படுத்துவார்கள் என எதிர்பார்க்கலாம்?

   (ii) காலப்போக்கில் எத்தனை சதவீதம் பேர் புதிய போக்குவரத்து வசதியைப் பயன்படுத்துவர்?

3. சந்தையில் உள்ள A மற்றும் B இருவகையான சோப்புகளின் தற்போதைய சந்தைப் பங்கீடு 15% மற்றும் 85% ஆகும். சென்ற ஆண்டு Aவாங்கியவர்களின் 65% பேர் மீண்டும் அதை இந்த ஆண்டும் வாங்குகிறார்கள். 35% பேர் B-க்கு மாறிவிடுகின்றனர். சென்ற ஆண்டு B வாங்கியவர்களில் 55% பேர் இந்த ஆண்டும் மீண்டும் அதை வாங்குகிறார்கள். 45% பேர் A-க்கு மாறி விடுகிறார்கள் ஒரு ஆண்டுக்குப் பிறகு அவற்றின் சந்தைப் பங்கீடுகளைக் காண்க.மேலும் சந்தையில் சமநிலை எப்போது எட்டப்படும்?

4. A மற்றும் B என்ற இரு விற்பனைப் பொருள்களின் தற்போதைய சந்தை விற்பனை 50% மற்றும் 50% ஆக உள்ளது. நுகர்வோரின் விருப்பங்கள் ஒவ்வொரு வாரமும் மாறுகின்றன. சென்ற வாரம் A -ஐ வாங்கியவர்களில் 60% பேர் மீண்டும் A -ஐ வாங்குகின்றனர். 40% பேர் B-க்கு மாறிவிடுகிறார்கள். சென்ற வாரம் B வாங்கியவர்களில் 80% பேர் அதை மீண்டும் வாங்குகிறார்கள். 20% பேர் A-க்கு மாறி விடுகிறார்கள். இரு வாரங்களுக்குப் பிறகு அவர்களின் சந்தைப் பங்கீடுகளைக் காண்க. இந்த போக்கு தொடருமானால், எப்போது சமநிலை எட்டப்படும்?

பயிற்சி 1.4

பொருத்தமான விடையை தேர்ந்தெடுக்க

1. $A=(1\ \ 2\ \ 3)$ எனில், AA^T -ன் தரம்

   (a) 0 (b) 2 (c) 3 (d) 1

2. ஒவ்வொரு உறுப்பும் 1 எனக் கொண்ட $m \times n$ வரிசை உடைய அணியின் தரம்

   (a) 0 (b) 1 (c) m (d) n

3. $T = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$ என்பது ஒரு மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி எனில், சமநிலையில் A-ன் மதிப்பு

   (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{1}{8}$

4. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ எனில், $\rho(A)$ =

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) n

5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரம்

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d)3

6. வரிசை n உடைய அலகு அணியின் தரம்

   (a) $n-1$ (b) n (c) $n+1$ (d) n^2

7. $\rho(A) = r$ எனில், பின்வருவனவற்றில் எது சரி?

   (a) r வரிசையுடைய அனைத்து சிற்றணிக் கோவைகளின் மதிப்பும் பூச்சியங்களாக இருக்காது.

   (b) A ஆனது குறைந்தபட்சம் ஒரு r வரிசை பூச்சிமற்ற சிற்றணிக்கோவையாவது பெற்றிருக்கும்.

   (c) A ஆனது குறைந்த பட்சம் $(r+1)$ வரிசை யுடைய சிற்றணிக்கோவையின் மதிப்பு பூச்சியமாக இருக்கும்படியாக பெற்றிருக்கும்.

   (d) அனைத்து $(r+1)$ வரிசை மற்றும் அதைவிட அதிகமான வரிசை கொண்ட பூச்சியமற்ற சிற்றணிக்கோவைகள் இருக்கும்.

8. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ எனில் AA^T -ன் தரம்

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

9. $\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரம் 2 எனில், λ -ன் மதிப்பு

   (a) 1 (b) 2

   (c) 3 (d) மெய்யெண் மட்டும்

10. மூலைவிட்ட அணி $\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & -3 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$ –ன் தரம்

    (a) 0 (b) 2 (c) 3 (d) 5

11. $T = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & x \end{pmatrix} \end{array}$ என்பது மாறுதல் நிகழ்வு அணி எனில் x-ன் மதிப்பு

    (a) 0.2 (b) 0.3 (c) 0.4 (d) 0.7

12. பின்வருவனவற்றில் எது ஒரு அணிக்கான அடிப்படை உருமாற்றம் ஆகாது?

    (a) $R_i \leftrightarrow R_j$ (b) $R_i \to 2R_i + 2C_j$

    (c) $R_i \to 2R_i - 4R_j$ (d) $C_i \to C_i + 5C_j$

13. $\rho(A) = \rho(A, B)$ எனில், தொகுப்பானது

    (a) ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் பெற்றுள்ளது

    (b) ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் ஒரே ஒரு தீர்வு பெற்றுள்ளது

    (c) ஒருங்கமைவு உடையது

    (d) ஒருங்கமைவு அற்றது

4WCNQV

14. $\rho(A) = \rho(A, B) =$ மாறிகளின் எண்ணிக்கை எனில் தொகுப்பானது

    (a) ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் பெற்றுள்ளது

(b) ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் ஒரே ஒரு தீர்வு பெற்றுள்ளது

(c) ஒருங்கமைவு அற்றது

(d) ஒருங்கமைவு உடையது

15. $\rho(A) \neq \rho(A,B)$ எனில் தொகுப்பானது

(a) ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் பெற்றுள்ளது

(b) ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் ஒரே ஒரு தீர்வு பெற்றுள்ளது

(c) ஒருங்கமைவு அற்றது

(d) ஒருங்கமைவு உடையது

16. ஒரு மாறுதல் நிகழ்தகவு அணியில் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளின் மதிப்பும் எந்த எண்ணுக்கு சமமாகவோ அல்லது பெரியதாகவோ இருக்கும்?

(a) 2 (b) 1 (c) 0 (d) 3

17. $AX = B$ என்ற சமச்சீரற்ற சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் மாறிகளின் எண்ணிக்கை n எனில், தொகுப்பானது ஒரே ஒரு தீர்வை எப்போதும் பெறும்?

(a) $\rho(A) = \rho(A,B) > n$

(b) $\rho(A) = \rho(A,B) = n$

(c) $\rho(A) = \rho(A,B) < n$

(d) மேற்கண்ட ஏதுமில்லை

18. $4x+6y=5, 6x+9y=7$ என்ற சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்கு

(a) ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு

(b) தீர்வு இல்லை

(c) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் உண்டு

(d) மேற்கண்ட ஏதுமில்லை

19. $x+2y+3z=1, \quad 2x+y+3z=2$
$5x+5y+9z=4$ என்றசமன்பாட்டுதொகுப்பிற்கு

(a) ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு

(b) எண்ணிகையற்ற தீர்வுகள் உண்டு

(c) தீர்வு இல்லை

(d) மேற்கண்ட ஏதுமில்லை

20. $|A| \neq 0$, எனில், A ஒரு

(a) பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணி

(b) பூஜ்ஜியக் கோவை அணி

(c) பூஜ்ஜிய அணி

(d) மேற்கண்ட ஏதுமில்லை

21. $k \neq$ __ எனில், $x+y+z=2, \ 2x+y-z=3, \ 3x+2y+k=4$ என்ற நேரிய சமன்பாட்டுத் தொகுப்பானது, ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற்றிருக்கும்.

(a) 4 (b) 0 (c) -4 (d) 1

22. கிரேமரின் விதியைக் கொண்டு ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற தேவையான கட்டுப்பாடு,

(a) $\Delta_z \neq 0$ (b) $\Delta_x \neq 0$

(c) $\Delta \neq 0$ (d) $\Delta_y \neq 0$

23. $\frac{a_1}{x}+\frac{b_1}{y}=c_1, \frac{a_2}{x}+\frac{b_2}{y}=c_2,$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}; \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

எனில்,

(x, y) -ன் மதிப்பு

(a) $\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_1}\right)$ (b) $\left(\frac{\Delta_3}{\Delta_1}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)$

(c) $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \frac{\Delta_1}{\Delta_3}\right)$ (d) $\left(\frac{-\Delta_1}{\Delta_2}, \frac{-\Delta_1}{\Delta_3}\right)$

24. $|A_{n\times n}| = 3 \quad |adjA| = 243$ எனில் n-ன்மதிப்பு

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7

25. பூஜ்ஜிய அணியின் தரம்

(a) 0 (b) -1 (c) ∞ (d) 1

இதர கணக்குகள்

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 9 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

2. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

3. $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

4. $x+y+z=7$, $x+2y+3z=18$, $y+2z=6$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவுடையதா என சோதிக்க.

5. பின்வரும் சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையது எனில் k-ன் மதிப்பைக் காண்க. $2x+3y-z=5$, $3x-y+4z=2$, $x+7y-6z=k$

6. தரப்பட்ட சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு அற்றவை எனில் k-ன் மதிப்பைக் காண்க. $x+y+z=1$, $3x-y-z=4$, $x+5y+5z=k$.

7. $x+2y+z=7$, $2x-y+2z=4$, $x+y-2z=-1$ என்ற சமன்பாடுகளை கிரேமரின் விதியைப் பயன்படுத்தி தீர்க்க.

8. 2 கிலோ கோதுமை மற்றும் 1 கிலோ சர்க்கரையின் விலை ₹100. 1 கிலோ கோதுமை மற்றும் 1 கிலோ அரிசியின் விலை ₹80. 3 கிலோ கோதுமை, 2 கிலோ சர்க்கரை மற்றும் 1 கிலோ அரிசியின் விலை ₹220 எனில் ஒவ்வொன்றின் ஒரு கிலோ விலையை கிரேமரின் விதியைப் பயன்படுத்திக் காண்க..

9. வெவ்வேறு தரகு வீதங்களையுடைய A, B, C என்ற மூன்று பொருள்களை கடந்த மூன்று மாதங்களில் ஒரு விற்பனையாளர் விற்பனை செய்ததற்கான விவரங்கள் கீழே உள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மாதங்கள்	விற்பனை செய்த அலகுகள் A	B	C	பெற்ற மொத்த தரகு ₹)
ஜனவரி	90	100	20	800
பிப்ரவரி	130	50	40	900
மார்ச்சு	60	100	30	850

கிரேமரின் முறையில், A, B, C என்ற பொருள்களுக்கான தரகு வீதத்தைக் காண்க.

10. ஒரு வாரப் பத்திரிக்கைக்குச் சந்தா கட்டுமாறு கேட்டுக் கொள்ளப்படும் கடிதம் அந்த பத்திரிக்கை அலுவலகத்திலிருந்து ஏராளமானவர்களுக்கு அனுப்பப்படுகிறது. கடிதம் பெற்றவர்களில், சந்தாதாரர்களாக இருந்து மீண்டும் சந்தா கட்டுபவர் 60% ஆகும். சந்தாதாரர்களாக இல்லாமலிருந்து புதியதாக சந்தா கட்டுபவர்கள் 25% ஆகும். இதே போல் முன்னர் கடிதம் அனுப்பப்பட்ட போது கடிதம் பெற்றவர்களில் 40% பேர் சந்தாதாரர்களாகச் சேர்ந்தனர் எனத் தெரிகிறது. தற்போது கடிதத்தைப் பெறுபவர்களில் எத்தனை சதவீதம் பேர் சந்தாதாரர்களாவர் என எதிர்பார்க்கலாம்.

தொகுப்புரை

- **அணியின் தரம்**

  A என்ற அணியின் தரம், அந்த அணியின் மிகப்பெரிய பூச்சியமற்ற சிற்றணிக் கோவையின் வரிசை ஆகும்.
- $\rho(A) \geq 0$.
- அணி A-ன் வரிசை $m \times n$ எனில் அதன் தரமானது, $\{m,n\}$ –ன் மீச்சிறு மதிப்புக்குச் சமமாகவோ அல்லது சிறியதாகவோ இருக்கும்.
- பூச்சிய அணியின் தரம் '0' ஆகும்.
- $n \times n$ வரிசை உடைய பூச்சியமற்ற கோவை அணியின் தரம் 'n' ஆகும்.
- **சமான அணிகள்**

  A மற்றும் B என்பவை சமவரிசை கொண்ட அணிகள் என்க. இவற்றில் ஒரு அணியை மற்றொரு அணியிலிருந்து, முடிவுறு எண்ணிக்கையுள்ள அடிப்படை உருமாற்றங்களை மேற்கொள்வதன் மூலம் பெறுவோமாயின், A-யும் B-யும் சமான அணிகள் எனப்படும். இதனை $A \sim B$ என குறிப்பிடலாம்.

- **ஏறுபடி வடிவம்**

  $m \times n$ வரிசை உடைய A என்ற அணியானது ஏறுபடி வடிவில் உள்ளதாயின் அது பின்வரும் நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்தல் வேண்டும்.

  (i) அனைத்து உறுப்புகளையும் பூச்சிய உறுப்புகளாய் கொண்ட ஒவ்வொரு நிரையும் பூச்சியமற்ற உறுப்புகளையும் உறுப்புகளாகக் கொண்ட நிரைக்கு கீழே அமைய வேண்டும்.

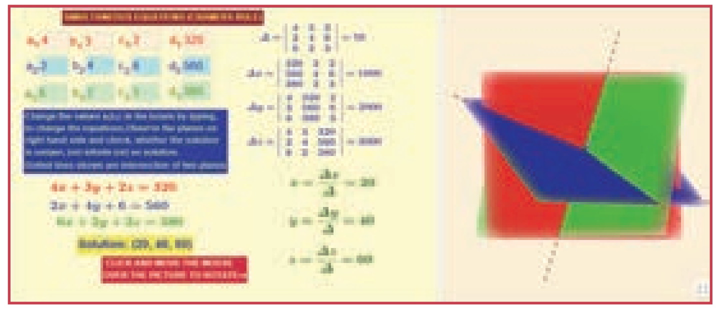
  (ii) பூச்சியமற்ற நிரையில் வரும் முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்பிற்கு முன்பாக இடம்பெறும் பூச்சிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையானது அவ்வாறாகவே அதற்கு அடுத்து வரும் நிரையில் உள்ள பூச்சிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைவிட குறைவாக இருத்தல் வேண்டும்.

- குறைந்த பட்சம் ஒரு தீர்வாவது உண்டு எனில், சமன்பாட்டு தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையது எனப்படும்.
- தீர்வுகள் அற்ற சமன்பாடு தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அற்றது எனப்படும்.
- $\rho\left(\left[A, B\right]\right) = \rho\left(A\right)$ எனில், சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையவை.
- $\rho\left(\left[A, B\right]\right) = \rho\left(A\right) = n$ எனில், சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையவை மற்றும் ஒரே ஒரு தீர்வு மட்டும் உண்டு.
- $\rho\left(\left[A, B\right]\right) = \rho\left(A\right) < n$ எனில், சமன்பாட்டுத் தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு கொண்டது மற்றும் எண்ணிக்கயற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும்.
- $\rho\left(\left[A, B\right]\right) \neq \rho\left(A\right)$ எனில், சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவுத்தன்மை அற்றவை மேலும் தீர்வு இல்லை.
- $\left|adjA\right| = \left|A\right|^{n-1}$.
- $\left|A\right| = 0$ எனில், A ஆனது பூஜ்ஜியக் கோவை அணியாகும், இல்லையெனில், A ஆனது பூஜ்ஜியக் கோவை அல்லாத அணியாகும்.
- $AX = B$ என்ற சமன்பாட்டு தொகுப்பில் $\left|A\right| \neq 0$ எனில் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் ஒரே ஒரு தீர்வை பெற்றிருக்கும்.
- கிரேமரின் விதி ஆனது $\Delta \neq 0$ ஆக இருக்குபோது மட்டுமே பொருந்தும்.

கலைச்சொற்கள் (GLOSSARY)	
அசமப்படித்தான	Non homogeneous
அடிப்படை உருமாற்றங்கள்	Elementary transformations
அணி	Matrix
அணி சமன்பாடு	Matrix equation
அணிக்கோவை	Determinant
உற்பத்தி	Production
ஏறுபடி வடிவம்	Echelon form
ஒருங்கமைவு	Consistent
ஒருங்கமைவு அற்றது	Inconsistent
ஒருங்கமைவுள்ள	Consistent
ஒரே ஒரு தீர்வு	Unique solution
சதுர அணி	Square matrix
சமநிலை	Equilibrium
சமப்படித்தான	Homogenerous
தரம்	Rank
தெரியாத	Unknown
தொடர்ச்சியான	Subsequent
நிலை மாற்றம்	Transition
நேரிய சமன்பாடுகள்	Linear equations
பயணிகள்	Commuters
பூஜ்ஜியக்கோவை அணி	Singular matrix
பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணி	Non–Singular matrix
பொருள்கள்	Commodities
போக்குவரத்து அமைப்பு	Transit system
மாறிகள்	Variables
மிகுதிப்படுத்திய / விரிவுபடுத்தப்பட்ட	Augmented
வரிசை	Order
வெட்டிக்கொள்ளும்	Intersecting
வெளிப்படைத்தீர்வு	Trivial solution
வெளிப்படையற்ற தீர்வு	Non trivial solution

இணையச் செயல்பாடு

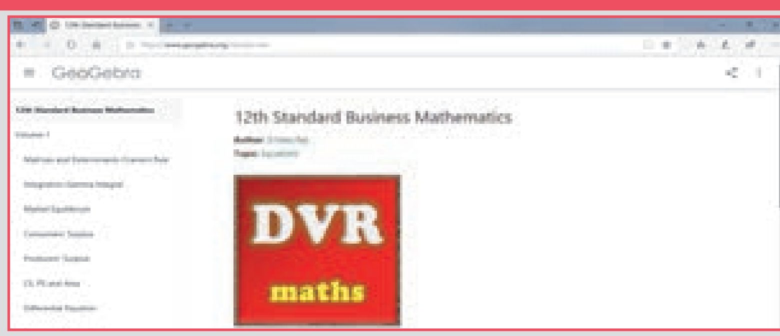
செயல்பாட்டின் இறுதியில் எதிர்பார்க்கப்படும் விளைவு



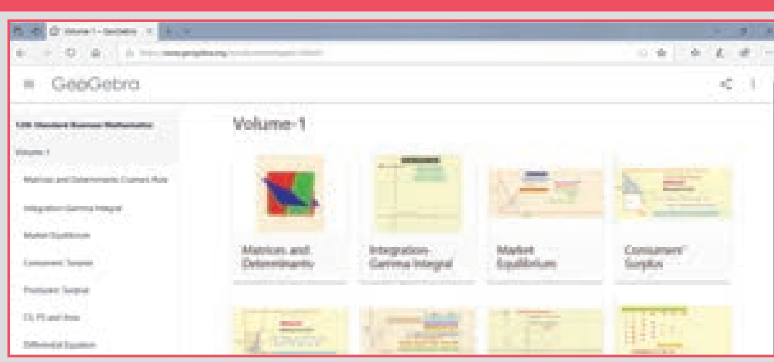
படி – 1 : கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி இச்செயல்பட்டிற்கான இணையப் பக்கத்திற்குச் செல்க. பின்பு "12th Standard Business Mathematics and Statistics" என்னும் திரையில் "Volume–1" யை தெரிவு செய்யவும்..

படி - 2 : "Matrices and Determinants–Cramer's rule" என்னும் பயிற்சித்தாளினை தெரிவு செய்துகொள்ளவும். அதில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள பெட்டியில் X,Y, Z கெழுக்களின் எண்களை மாற்றவும். பின்பு முப்பரிமாண படங்களை நகர்த்தி அதன் உண்மையானத் தீர்வினை காண்க

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி : **https://ggbm.at/uzkcrnwr**

அல்லது விரைவுக் குறியீடு **(QR Code)**

B247_12_BUS_MAT_TM

2 தொகை நுண்கணிதம்–I

பெர்ன்ஹார்டு ரீமான்
(செப்டம்பர் 17, 1826 - ஜூலை 20, 1866)

GSYIFR

அறிமுகம்

ஜார்ஜ் ஃபிரடெரிக் பெர்ன்ஹார்டு ரீமான் (பத்தொன்பதாம் நூற்றாண்டு) ஒரு எழுச்சியூட்டும் ஜெர்மன் கணிதவியலாளர் ஆவார். இவர் நுண்கணிதத்திற்கான தனது பங்களிப்பிற்காக அனைவராலும் மிகவும் அங்கீகரிக்கப்பட்டவர் ஆவார்.

நுண்கணிதமானது பொதுவாக இரு பிரிவுகளைக் கொண்டுள்ளது. அவையாவன (1) வகை நுண்கணிதம் மற்றும் (2) தொகை நுண்கணிதம் ஆகும். ஒரு சார்பினுடைய வகைக்கெழுக்களை காண உதவும் செயல் முறைகளை பற்றி விவரிப்பது வகை நுண்கணிதம் ஆகும். அதே சமயத்தில் தொகை நுண்கணிதமானது வருவித்தச் சார்பின் எதிர்மறையான வகையிடலை விவரிப்பதாகும். அதாவது காணப்பட வேண்டிய சார்புக்கான உடனடி மாறுவீதத்தை (அல்லது) இறுதி நிலையைக் கொண்டு, அச்சார்பினைக் காண்பதாகும். எனவே தொகையிடல் என்பது வருவித்தச் சார்பிலிருந்து அதன் தொடக்க நிலைச் (அசல்) சார்பை கண்டறியும் உத்தியாகும். இவ்வாறாக பெறப்பட்ட சார்பானது வரையறாத் தொகையீடு என அழைக்கப்படுகிறது. வரையறுத்த தொகையீடு என்பது குறிப்பிடப்பட்ட எல்லைகளுக்கு இடையில் காணப்படும் வரையறாத் தொகையீட்டின் மதிப்பீடு ஆகும். மேலும் இது குறிப்பிடப்பட்ட எல்லைகள், சார்புக்கான வளைவரை மற்றும் அச்சு ஆகியவற்றால் சூழப்பட்ட பரப்பு ஆகும். மேலும் இப்பரப்பானது தோராயமாக அதில் வரையப்படும் ஏராளமான உள்வரை செவ்வகங்களினுடைய பரப்புகளின் கூடுதலுக்கு சமமாகும். இவ்வாறாக வரையறுக்கப்பட்ட உள்வரை செவ்வகங்களின் எண்ணிக்கையின் எல்லை முடிவிலி எனக் கொண்டு, தோராய மதிப்பானது துல்லிய மதிப்பாகக் கணக்கிடப்படுகிறது. ஆகையால் வகை நுண்கணிதமும் மற்றும் தொகை நுண்கணிதமும் எல்லைக் கோட்பாட்டின் அடிப்படையிலானது.

"ஒருங்கிணைப்பு" (integrate) என்ற சொல்லுக்கான எழுத்தியல் ரீதியான பொருள் "கூட்டுத்தொகை காணல்" என்பதாகும். ஆகையால்தான் "தொகை நுண்கணிதம்" என்ற பெயரானது இவ்வகையான கூட்டுத் தொகை செயல் முறையிலிருந்து பெறப்பட்டதாக நம்பப்படுகிறது. நுண்கணிதம் என்பது இப்பிரபஞ்சத்தின் தோற்றம், புயல் மற்றும் சூறாவளிகளின் வளர்ச்சி போன்ற கோட்பாடுகளை சோதிக்கும் கணிதவியல் உத்தியாகும். மேலும் இது வணிகப் பயன்பாட்டில் நுகர்வோர் மற்றும் உற்பத்தியாளரின் உபரிகளை பெறவும், ஒரு தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை அடையாளம் காணவும், இறுதி நிலைச் சார்பிலிருந்து அதன் தொடக்க நிலைச் சார்பினை பெறவும் மற்றும் இது போன்றவைகளை காணப் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

இந்த அத்தியாயத்தில் நாம் தொகையீடு எனும் கருத்துரு, சில வகையைச் சார்ந்த வரையறாத் தொகையீடுகள் மற்றும் வரையறுத்த தொகையீடுகளுக்கான வழிமுறைகளை பற்றி பயில்வோம்.

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தை படித்த பின்னர் பின்வரும் பாடக் கருத்துக்களை மாணவர்களால் புரிந்துக் கொள்ள இயலும்.

- வரையறாத் தொகையீடு.
- கூட்டல், கழித்தல் மற்றும் மாறிலியின் மடங்குகள் சம்பந்தப்பட்ட ஒரு சார்புக்கான வரையறாத் தொகையீட்டினை எவ்வாறு காண்பது.
- பிரதியிடல் எனும் உத்தியை எங்கு மற்றும் எவ்வாறு வரையறாத் தொகையீடுகளில் பயன்படுத்துவது.
- பகுதிப்படுத்தித் தொகையிடல் மற்றும் சில சிறப்பு வகையை சார்ந்த தொகையீடு களுக்கான உத்திகள்.
- தொகை நுண்கணிதத்தினுடைய அடிப்படைத் தேற்றங்கள்.
- வரையறுத்த தொகையீடுகளின் பண்புகள் மற்றும் அதன் பயன்பாடுகள்.
- காமா தொகையிடலிலுள்ள ஒரு குறிப்பிட்ட வகையின் பயன்பாடு.
- காமா சார்பின் பண்புகள்.
- வரையறுத்த தொகையீடுக்கான கூட்டல் எல்லை.

2.1 வரையறாத் தொகையீடுகள் (Indefinite Integrals)

2.1.1 வரையறாத் தொகையீட்டின் கருத்துரு (Concept of Indefinite Integral)

வகை நுண்கணிதத்தில், கொடுக்கப்பட்டச் சார்பு $f(x)$-க்கான x -ஐ பொறுத்த வகைக் கெழுவான $f'(x)$-ஐ எவ்வாறு கணக்கிடப் படவேண்டும் என்ற செயல் முறையினை அறிந்துக் கொண்டோம். இந்த அத்தியாயத்தில் நாம் கொடுக்கப்பட்ட வருவித்த சார்பான $f'(x)$-க்கு [சார்பின் வகையீட்டிலிருந்து] அதன் தொடக்க நிலை சார்பு $f(x)$-ஐ [அசல் சார்பை] எவ்வாறு காண்பது என்பதனை பற்றி தெரிந்துக் கொள்வோம். வகையிடலின் எதிர்மறையானச் செயல் முறையையே தொகையிடல் அல்லது எதிர் வகையிடல் என்போம்.

∴ தொகையிடல் என்பது வகையிடலின் எதிர் மறைச் செயல் முறையாகும்.

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ என்பதனை நாம் நன்கு அறிவோம். இதில் $\cos x$ என்பது வருவித்தச் சார்பு மற்றும் $\sin x$ என்பது தொடக்க நிலைச் சார்பு ஆகும். [தொடக்க நிலைச் சார்பானது எதிர்மறை வகையீட்டுச் சார்பு அல்லது தொகைச் சார்பு எனவும் அழைக்கப்படுகிறது].

வரையறை 2.1

வருவித்தச் சார்பு $f(x)$-க்கான தொடக்க நிலைச் சார்பு $F(x)$ எனில் $\frac{d}{dx}\left[F(x)\right] = f(x)$ ஆகும்.

இனி நாம், நமக்கு நன்கு தெரிந்த பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\frac{d}{dx}\left(x^3\right) = 3x^2, \qquad \frac{d}{dx}\left(x^3+5\right) = 3x^2,$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^3-\tfrac{3}{2}\right) = 3x^2, \qquad \frac{d}{dx}\left(x^3+e\right) = 3x^2,$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^3-\pi\right) = 3x^2, \qquad \ldots$$

மேலே கொடுக்கப்பட்ட அனைத்து எடுத்துக்காட்டுகளிலும் $3x^2$ ஆனது x^3, x^3+5, $x^3-\frac{3}{2}$, x^3+e, $x^3-\pi$, ... போன்ற தொடக்க நிலைச் சார்புகளுக்கான வருவித்த சார்பு என்பதை கவனியுங்கள். மேலும் இதிலிருந்து, வருவித்த சார்பானது ஒருமைத் தன்மையை கொண்டுருப்பினும் அதன் தொடக்க நிலைச் சார்பானது ஒருமைத் தன்மை வாய்ந்ததாக இருக்க வேண்டியதில்லை என்பதை நம்மால் உணர முடிகிறது. ஆகையால், $3x^2$ என்ற வருவித்த சார்புக்கான தொடக்க நிலைச் சார்பு x^3+c என்ற முடிவுக்கு வருகிறோம்.

கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு வருவித்த சார்புக்கான எண்ணற்ற தொடக்க நிலைச் சார்புகள், $\mathbb{R}$ எனும் மெய்யெண்களின் தொகுப்பிலிருந்து c -ஐ தன்னிச்சையாக தேர்வு செய்யப்படுவதன் மூலம் பெறப்படுகிறது. இவ்வகையான தொகையீடுகள் வரையறாத் தொகையீடுகள் என அழைக்கப்படுகிறது.

பொதுவாக,

$$\frac{d}{dx}\left[F(x)\right] = f(x) \Rightarrow \int f(x)\,dx = F(x)+c,$$

இதில் c ஆனது தொகையிடல் மாறிலி என அழைக்கப்படுகிறது.

குறிப்புகள்

- $F(x)$ மற்றும் $G(x)$ என்ற இருவேறு தொடக்க நிலைச் சார்புகளானது $f(x)$ எனும் ஒரே வருவித்த சார்பை பெற்றிருக்கும் எனில், அவை மாறிலி உறுப்பில் மட்டும் வேறுபடும்.
- $\int f(x)\, dx$ என்பது வரையறாத் தொகையீடு என அழைக்கப்படுகிறது.
- தொகையிடலுக்கான குறியீடு [$\int$] -ஆனது "summation" என்ற சொல்லின் முதல் எழுத்தான S -ஐ மேலும் கீழுமாக நீட்டித்து பெறப்பட்ட வடிவம் ஆகும்.
- $\int f(x)\, dx$ என்பதனை x-ஐ பொறுத்த $f(x)$ இன் தொகையீடு எனப் படிக்க வேண்டும்.
- $\int f(x)\, dx$ இல் $f(x)$ [அதாவது தொகையிடுதலில் தொகையை காண வேண்டியச் சார்பு] ஆனது தொகைக்காண்பான் [தொகைக்காண் சார்பு] என அழைக்கப்படுகிறது..
- $\int f(x)\, dx$ இல் x என்பது தொகையிடல் மாறி என்போம்.
- "தொகையீடுக்கானசெயல்முறையையே" தொகையிடல் என்போம்.
- மாறிலிச் சார்பாக கருதப்படும் எந்த ஒரு மெய்யெண் c-ம் தொகையிடல் மாறிலி ஆகும்.

வரையறை 2.2

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு சார்புக்கான தொகையீட்டை காணும் செயல்வழிமுறை, சார்பின் தொகையிடல் என வரையறுக்கப்படுகிறது.

2.1.2 தொகை நுண்கணிதத்தின் இரு முக்கிய பண்புகள் (Two important properties of Integral Calculus)

(i) k என்பது ஏதேனும் ஒரு மாறிலி எனில், $\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$ ஆகும்.

(ii) $f(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்பன இரு தொடர்ச்சியுடைய சார்புகள் எனில், $\int \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$ ஆகும்.

தொகையிடல் வழிமுறைகள் (Methods of Integration)

தொகையிடல் வழி முறைகளில் முதன்மையான நான்கு முறைகள் பின்வருமாறு,

(i) பிரித்துத் தொகையிடல்.

(ii) பகுதிப்படுத்தி தொகையிடல்.

(iii) பிரதியிடல் முறையில் தொகையிடல்.

(iv) அடுக்குகளை படிப்படியாகக் குறைத்து தொகையிடல்.

நினைவில் கொள்க!

சார்பு $f(x)$ –ஐ தொகையிடுக என்பது $\frac{d}{dx}\left[F(x)+c\right] = f(x)$ எனுமாறு $F(x)$ எனும் சார்பை காண்பது ஆகும்.

குறிப்பு

இங்கு நாம் மேலுள்ள முதல் மூன்று தொகையிடல் முறைகளை மட்டுமே விவாதிப்போம். ஏனெனில் அடுக்குகளை படிப்படியாகக் குறைத்து தொகையிடும் முறையானது இப்பாடத்திட்டத்தின் நோக்கத்திற்கு அப்பாற்பட்டது.

2.1.3 பிரித்துத் தொகையிடல் (Integration by decomposition)

சில தொகைக்காண்பான்களுக்கு [தொகைக் காண் சார்புகளுக்கு] நேரடியாக அதன் தொகை யீட்டை காண இயலாது, ஆனால் அவற்றை கூட்டல் அல்லது கழித்தல் சார்புகளாக பிரித்து தொகையிடுதலுக்கு ஏதுவாக மாற்றியமைத்து, நமக்கு ஏற்கனவே தெரிந்த திட்டமான தொகையீடுகள் வாயிலாக தொகையிட இயலும். அவ்வகையான சார்புகளுக்கு இம் முறையை பயன்படுத்தலாம்.

குறிப்பு

எதிர் வகையிடல் என்ற செயல்முறையால் நேரடியாக பெறப்படும் தொகையீடுகள், தொகையிடலுக்கான திட்டமான முடிவுகள் எனப்படும்.

தொகையிடல்களுக்கான சில திட்டமான முடிவுகள் (Some standard results of integration)

வகை: I

(i) $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1$

(ii) $\int (ax+b)^n \, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c\,,\; n \neq -1$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$y = \int f(x)\;dx \;= F(x) + c$$

என்ற சார்பைக் கொண்டு அமையும் வளைவரைகளின் தொகுதிக்கு $x = k$ இல் வரையப்படும் தொடுகோடுகள் இணையாகவே இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.1

மதிப்பிடுக $\int \frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{x}} dx$

தீர்வு:

$$\int \frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{x}} dx = \int \left(ax^{\frac{3}{2}} + bx^{\frac{1}{2}} + cx^{-\frac{1}{2}} \right) dx$$

$$= a\int x^{\frac{3}{2}} dx + b\int x^{\frac{1}{2}} dx + c\int x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{2ax^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2bx^{\frac{3}{2}}}{3} + 2c\,x^{\frac{1}{2}} + k$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int dx = x + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.2

மதிப்பிடுக $\int \sqrt{2x+1}\, dx$

தீர்வு:

$$\int \sqrt{2x+1}\, dx = \int (2x+1)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int a(ax+b)^n \, dx = \int (ax+b)^n \, d(ax+b)$$

$$= \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.3

மதிப்பிடுக $\int \frac{dx}{(2x+3)^2}$

தீர்வு:

$$\int \frac{dx}{(2x+3)^2} = \int (2x+3)^{-2} dx$$

$$= -\frac{1}{2(2x+3)} + c$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

(i) $\int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c\;,\; n \neq 1$

(ii) $\int \frac{a}{(ax+b)^n} dx = \int \frac{d(ax+b)}{(ax+b)^n}$

$$= -\frac{1}{(n-1)(ax+b)^{n-1}} + c,\; n \neq 1$$

எடுத்துக்காட்டு 2.4

மதிப்பிடுக $\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

தீர்வு:

$$\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$= \int x^2 dx + 2\int dx + \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.5

மதிப்பிடுக $\int (x^3+7)(x-4)\, dx$

தீர்வு:

$$\int (x^3+7)(x-4)\, dx = \int (x^4 - 4x^3 + 7x - 28)\, dx$$

$$= \frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{7x^2}{2} - 28x + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.6

மதிப்பிடுக $\int \frac{2x^2-14x+24}{x-3} dx$

தீர்வு:

காரணிகளாக மாற்றியமைக்க,

$$2x^2 - 14x + 24 = (x-3)(2x-8)$$

$$\int \frac{2x^2-14x+24}{x-3} dx = \int \frac{(x-3)(2x-8)}{x-3} dx$$

$$= \int (2x-8)\,dx$$
$$= x^2 - 8x + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.7

மதிப்பிடுக $\int \frac{x+2}{\sqrt{2x+3}}\,dx$

தீர்வு:

> எளியச் சார்புகளாக பிரித்தெழுத
>
> $$\frac{x+2}{\sqrt{2x+3}} = \frac{\frac{1}{2}(2x+4)}{(2x+3)^{\frac{1}{2}}}$$
> $$= \frac{1}{2}\left\{\frac{(2x+3)+1}{(2x+3)^{\frac{1}{2}}}\right\}$$
> $$= \frac{1}{2}\left\{(2x+3)^{\frac{1}{2}} + (2x+3)^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{2x+3}}\,dx = \int \frac{1}{2}\left\{(2x+3)^{\frac{1}{2}} + (2x+3)^{-\frac{1}{2}}\right\}dx$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{(2x+3)^{\frac{3}{2}}}{3} + (2x+3)^{\frac{1}{2}}\right\} + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.8

மதிப்பிடுக $\int \frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}\,dx$

தீர்வு:

> காரணக்காரிய முறையில்,
>
> $$\frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}} = \frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}} \times \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}$$
> $$= \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{4}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}\,dx$$
$$= \int \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{4}\,dx$$
$$= \frac{1}{6}\left\{(x+2)^{\frac{3}{2}} + (x-2)^{\frac{3}{2}}\right\} + c$$

பயிற்சி 2.1

பின்வருவனவற்றை x-ஐ பொறுத்து தொகையிடுக.

1. $\sqrt{3x+5}$
2. $\left(9x^2 - \frac{4}{x^2}\right)^2$
3. $(3+x)(2-5x)$
4. $\sqrt{x}\,(x^3 - 2x + 3)$
5. $\frac{8x+13}{\sqrt{4x+7}}$
6. $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$
7. $f'(x) = x + b,\ f(1) = 5$ மற்றும் $f(2) = 13$ எனில், $f(x)$ -ஐ காண்க.
8. $f'(x) = 8x^3 - 2x$ மற்றும் $f(2) = 8$ எனில், $f(x)$ -ஐ காண்க.

வகை: II

(i) $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c$

(ii) $\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\log|ax+b| + c$

எடுத்துக்காட்டு 2.9

மதிப்பிடுக $\int \frac{3x^2+2x+1}{x}\,dx$

தீர்வு:

$$\int \frac{3x^2+2x+1}{x}\,dx = \int \left(3x + 2 + \frac{1}{x}\right)dx$$
$$= \frac{3x^2}{2} + 2x + \log|x| + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.10

மதிப்பிடுக $\int \frac{2}{3x+5}\,dx$

தீர்வு:

$$\int \frac{2}{3x+5}\,dx = 2\int \frac{1}{3x+5}\,dx$$
$$= \frac{2}{3}\log|3x+5| + c$$

> **உங்களுக்கு தெரியுமா?**
>
> $$\int \frac{a}{ax+b}\,dx = \int \frac{d(ax+b)}{ax+b}$$
> $$= \log|ax+b| + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.11

மதிப்பிடுக $\int \frac{x^2+2x+3}{x+1}\,dx$

தீர்வு:

எளியச் சார்புகளாக பிரித்தெழுத

$$\frac{x^2+2x+3}{x+1} = \frac{(x^2+2x+1)+2}{x+1}$$

$$= (x+1)+\frac{2}{x+1}$$

$$\int \frac{x^2+2x+3}{x+1}\,dx = \int\left\{(x+1)+\frac{2}{x+1}\right\}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}+x+2\log|x+1|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.12

மதிப்பிடுக $\int \frac{x^3+5x^2-9}{x+2}\,dx$

தீர்வு:

எளிய வகுத்தல் முறையில்,

$$\frac{x^3+5x^2-9}{x+2} = x^2+3x-6+\frac{3}{x+2}$$

$$\int \frac{x^3+5x^2-9}{x+2}\,dx = \int\left[x^2+3x-6+\frac{3}{x+2}\right]dx$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-6x+3\log|x+2|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.13

மதிப்பிடுக $\int \frac{7x-1}{x^2-5x+6}\,dx$

தீர்வு:

பகுதி பின்னமாக்கல் முறையில்,

$$\frac{7x-1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}$$

$$\Rightarrow \frac{7x-1}{x^2-5x+6} = \frac{20}{x-3}-\frac{13}{x-2}$$

$$\int \frac{7x-1}{x^2-5x+6}\,dx = \int\left[\frac{20}{x-3}-\frac{13}{x-2}\right]dx$$

$$= 20\int\frac{dx}{x-3}-13\int\frac{dx}{x-2}$$

$$= 20\log|x-3|-13\log|x-2|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.14

மதிப்பிடுக $\int \frac{3x+2}{(x-2)^2(x-3)}\,dx$

தீர்வு:

பகுதி பின்னமாக்கல் முறையில்,

$$\frac{3x+2}{(x-2)^2(x-3)} = \frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-3)}$$

$$\Rightarrow \frac{3x+2}{(x-2)^2(x-3)} = -\frac{11}{(x-2)}-\frac{8}{(x-2)^2}+\frac{11}{(x-3)}$$

$$\int \frac{3x+2}{(x-2)^2(x-3)}\,dx$$

$$= \int\left[-\frac{11}{(x-2)}-\frac{8}{(x-2)^2}+\frac{11}{(x-3)}\right]dx$$

$$= -11\int\frac{dx}{(x-2)}-8\int\frac{dx}{(x-2)^2}+11\int\frac{dx}{(x-3)}$$

$$= -11\log|x-2|+\frac{8}{x-2}+11\log|x-3|+c$$

$$= 11\log\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+\frac{8}{x-2}+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.15

மதிப்பிடுக $\int \frac{3x^2+6x+1}{(x+3)(x^2+1)}\,dx$

தீர்வு:

பகுதி பின்னமாக்கல் முறையில்,

$$\frac{3x^2+6x+1}{(x+3)(x^2+1)} = \frac{A}{(x+3)}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2+6x+1}{(x+3)(x^2+1)} = \frac{1}{(x+3)}+\frac{2x}{(x^2+1)}$$

$$\int \frac{3x^2+6x+1}{(x+3)(x^2+1)}\,dx = \int\left[\frac{1}{(x+3)}+\frac{2x}{(x^2+1)}\right]dx$$

$$= \int\frac{dx}{(x+3)}+\int\frac{2x}{(x^2+1)}dx$$

$$= \log|x+3|+\log|x^2+1|+c$$

$$= \log|(x+3)(x^2+1)|+c$$

$$= \log|x^3+3x^2+x+3|+c$$

பயிற்சி 2.2

பின்வருவனவற்றை x-ஐ பொறுத்து தொகையிடுக.

1. $\left(\sqrt{2x} - \dfrac{1}{\sqrt{2x}}\right)^2$
2. $\dfrac{x^4 - x^2 + 2}{x - 1}$
3. $\dfrac{x^3}{x+2}$
4. $\dfrac{x^3 + 3x^2 - 7x + 11}{x+5}$
5. $\dfrac{3x+2}{(x-2)(x-3)}$
6. $\dfrac{4x^2 + 2x + 6}{(x+1)^2(x-3)}$
7. $\dfrac{3x^2 - 2x + 5}{(x-1)(x^2+5)}$
8. $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ மற்றும் $f(1) = \dfrac{\pi}{4}$ எனில், $f(x)$ -ஐ காண்க.

வகை: III

(i) $\int e^x \, dx = e^x + c$

(ii) $\int e^{ax+b} dx = \dfrac{1}{a} e^{ax+b} + c$

(iii) $\int a^x \, dx = \dfrac{1}{\log a} a^x + c$, $a > 0$ மற்றும் $a \neq 1$

(iv) $\int a^{mx+n} dx = \dfrac{1}{m \log a} a^{mx+n} + c$, $a > 0$ மற்றும் $a \neq 1$

எடுத்துக்காட்டு 2.16

மதிப்பிடுக $\int 3^{2x+3} \, dx$

தீர்வு:

$$\int 3^{2x+3} \, dx = \int 3^{2x} \cdot 3^3 \, dx$$
$$= 3^3 \int 3^{2x} dx$$
$$= 27 \frac{3^{2x}}{2 \log 3} + c$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int m a^{mx+n} \, dx = \int a^{mx+n} \, d(mx+n)$$
$$= \frac{1}{\log a} a^{mx+n} + c,$$
$$a > 0 \text{ மற்றும் } a \neq 1$$

எடுத்துக்காட்டு 2.17

மதிப்பிடுக $\int \dfrac{e^x + 7}{e^x} dx$

தீர்வு:

$$\int \frac{e^x + 7}{e^x} dx = \int \left(1 + 7e^{-x}\right) dx$$
$$= x - 7e^{-x} + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.18

மதிப்பிடுக $\int \dfrac{5 + 5e^{2x}}{e^x + e^{-x}} dx$

தீர்வு:

$$\int \frac{5 + 5e^{2x}}{e^x + e^{-x}} dx = 5 \int \frac{e^x \left(e^{-x} + e^x\right)}{e^x + e^{-x}} dx$$
$$= 5 \int e^x dx$$
$$= 5e^x + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.19

மதிப்பிடுக $\int \left(e^x + \dfrac{1}{e^x}\right)^2 dx$

தீர்வு:

$$\int \left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)^2 dx = \int \left(e^{2x} + \frac{1}{e^{2x}} + 2\right) dx$$
$$= \int \left(e^{2x} + e^{-2x} + 2\right) dx$$
$$= \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{2} + 2x + c$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int (2ax + b) e^{ax^2+bx+c} \, dx$$
$$= \int e^{ax^2+bx+c} \, d\left(ax^2 + bx + c\right)$$
$$= e^{ax^2+bx+c} + k$$

பயிற்சி 2.3

பின்வருவனவற்றை x -ஐ பொறுத்து தொகையிடுக.

1. $e^{x \log a} + e^{a \log a} - e^{n \log x}$
2. $\dfrac{a^x - e^{x \log b}}{e^{x \log a} \; b^x}$
3. $\left(e^x + 1\right)^2 e^x$
4. $\dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^x}$

5. $\dfrac{e^{3x}+e^{5x}}{e^{x}+e^{-x}}$ 6. $\left[1-\frac{1}{x^2}\right]e^{\left(x+\frac{1}{x}\right)}$

7. $\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ 8. $f'(x)=e^x$ மற்றும் $f(0)=2$ எனில், $f(x)$ -ஐ காண்க.

வகை: IV

(i) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

(ii) $\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$

(iii) $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

(iv) $\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$

(v) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$

(vi) $\int \sec^2(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+c$

(vii) $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$

(viii) $\int \operatorname{cosec}^2(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+c$

எடுத்துக்காட்டு 2.20

மதிப்பிடுக $\int (2\sin x - 5\cos x)\,dx$

தீர்வு:

$$\int(2\sin x-5\cos x)\,dx = 2\int\sin x\,dx - 5\int\cos x\,dx$$
$$= -2\cos x - 5\sin x + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.21

மதிப்பிடுக $\int \sin^2 x\,dx$

தீர்வு:

எளியச் சார்புகளாக பிரித்தெழுத

$$\cos 2x = 1-2\sin^2 x$$
$$\therefore \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int dx - \int \cos 2x\,dx\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.22

மதிப்பிடுக $\int \dfrac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx$

தீர்வு:

எளியச் சார்புகளாக பிரித்தெழுத

$$\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$= \operatorname{cosec}^2 x - \sec^2 x$$

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx = \int(\operatorname{cosec}^2 x - \sec^2 x)\,dx$$
$$= -\cot x - \tan x + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.23

மதிப்பிடுக $\int \sqrt{1+\sin 2x}\,dx$

தீர்வு:

எளியச் சார்புகளாக பிரித்தெழுத

$$1+\sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x$$
$$= (\sin x + \cos x)^2$$

$$\int\sqrt{1+\sin 2x}\,dx = \int\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}\,dx$$
$$= \int(\sin x + \cos x)\,dx$$
$$= -\cos x + \sin x + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.24

மதிப்பிடுக $\int \cos^3 x\,dx$

தீர்வு:

எளியச் சார்புகளாக பிரித்தெழுத

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$
$$\cos^3 x = \frac{1}{4}[\cos 3x + 3\cos x]$$
$$= \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$$

$$\int\cos^3 x\,dx = \frac{1}{4}\int\cos 3x\,dx + \frac{3}{4}\int\cos x\,dx$$
$$= \frac{\sin 3x}{12} + \frac{3\sin x}{4} + c$$

பயிற்சி 2.4

பின்வருவனவற்றை x-ஐ பொறுத்து தொகையிடுக.

1. $2\cos x - 3\sin x + 4\sec^2 x - 5\operatorname{cosec}^2 x$

2. $\sin^3 x$

3. $\dfrac{\cos 2x + 2\sin^2 x}{\cos^2 x}$

4. $\dfrac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$ [குறிப்பு : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$]

5. $\sqrt{1-\sin 2x}$

2.1.4 பகுதிப்படுத்தித் தொகையிடல் (Integration by parts)

வகை: V

1. u மற்றும் v என்பன x -ல் அமைந்த வகையிடத்தக்க சார்புகள் எனில்
$\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$ என்பது நமக்கு தெரிந்ததே.
இருபுறமும் x -ஐ பொறுத்து தொகையிட,

$$\int \frac{d}{dx}(uv)\,dx = \int u\frac{dv}{dx}dx + \int v\frac{du}{dx}\,dx$$

$$\Rightarrow \int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du$$

$$uv = \int udv + \int vdu$$

$$\therefore \int udv = uv - \int vdu$$

பொதுவாக, தொகைக்காண்பானை இரு வெவ்வேறு சார்புகளின் பொருக்கலாகவோ அல்லது நேரடியாக தொகையிட முடியாத சார்பாகவோ அமையும்பொழுது, இம்முறையானது மிகவும் பயனுள்ளதாக இருக்கும். இம்முறையை சரியாக கையாள்வது என்பது u என்ற சார்பை தெரிவு செய்வதில் உள்ளது.

எனவே, பின்வரும் வழிகாட்டுதல்களைப் பயன்படுத்தி u என்ற சார்பை தெரிவு செய்யலாம்.

(i) தொகைக்காண்பான் ஆனது நேரடியாக தொகையிட இயலாத ஒரே ஒரு சார்பை மட்டும் கொண்டு அமையுமானால், அத்தொகைக்காண்பானை u எனக் கொள்க.

(ii) தொகைக்காண்பான் ஆனது நேரடியாக தொகையிட இயலாத சார்புப்பகுதி மற்றும் தொகையிடக் கூடிய சார்புப்பகுதி எனக் கொண்டு அமையும்பொழுது, தொகையிட இயலாத சார்புப்பகுதியை u எனக் கொள்க.

(iii) தொகைக்காண்பான் ஆனது இரு நேரடியாக தொகையிடக் கூடிய சார்புப்பகுதிகளை கொண்டும், அதில் ஒன்றின் வடிவமானது x^n, n ஒரு மிகை முழு எண் என அமையும்பொழுது, அந்த x^n எனும் சார்புப்பகுதியை u எனக் கொள்க.

(iv) மற்ற அனைத்து நிலைகளுக்கும் u-ன் தேர்வானது நம் விருப்பத்தைப் பொறுத்தது.

(அல்லது) நாம் "I L A T E" எனும் சொல்லில் உள்ள எழுத்துகளின் வரிசையின்படி முதலில் வரும் சார்புப்பகுதியை u எனும் சார்பாக நிர்ணயம் செய்யலாம்.

இதில்,

I என்பது நேர்மாறு திரிகோணமிதிச் சார்பையும் [Inverse trigonometric function],

L என்பது மடக்கைச் சார்பையும் [Logarithmic function],

A என்பது இயற்கணிதச் சார்பையும் [Algebraic function],

T என்பது திரிகோணமிதிச் சார்பையும் [Trigonometric function],

E என்பது அடுக்கைச் சார்பையும் [Exponential function] குறிக்கின்றது.

மேலும், மீதமுள்ள சார்பையும் மற்றும் dx –ஐயும் சேர்த்து dv என எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும்.

2. u மற்றும் v என்பன x -ல் அமைந்த இரு சார்புகள் எனில், $\int udv = uv - u'v_1 + u''v_2 - u'''v_3 + \ldots$ ஆகும்.

இதில் $u', u'', u''', \ldots$ என்பன u -ன் அடுத்தடுத்த வகையிடல்கள் ஆகும்.

மற்றும் $v_1, v_2, v_3, \ldots$ என்பன v -ல் மீண்டும் மீண்டும் செய்கின்ற தொகையீடுகள் ஆகும்.

குறிப்பு

- 2 –ல் குறிப்பிடப்பட்ட சூத்திரமானது பெர்னோலியின் சூத்திரம் ஆகும்.
- பெர்னோலியின் சூத்திரமானது $u = x^n$, n ஒரு மிகை முழு எண் எனும் போது பயன்படுத்தப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.25

மதிப்பிடுக $\int xe^x\,dx$

தீர்வு:

$u = x$ வகையிட $du = dx$	$dv = e^x dx$ தொகையிட $v = e^x$

$$\int xe^x\,dx = \int udv$$
$$= uv - \int vdu$$
$$= xe^x - \int e^x dx$$
$$= xe^x - e^x + c$$
$$= e^x\,(x-1)+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.26

மதிப்பிடுக $\int x^3 e^x dx$

தீர்வு:

அடுத்தடுத்து வகையிட	மீண்டும் மீண்டும் தொகையிட
$u = x^3$ $u' = 3x^2$ $u'' = 6x$ $u''' = 6$	$dv = e^x dx$ $v = e^x$ $v_1 = e^x$ $v_2 = e^x$ $v_3 = e^x$

$$\int x^3 e^x dx = \int udv$$
$$= uv - u'v_1 + u''v_2 - u'''v_3 + \ldots$$
$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6e^x + c$$
$$= e^x\left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right) + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.27

மதிப்பிடுக $\int x^3 \log x\;dx$

தீர்வு:

$u = \log x$ வகையிட $du = \frac{1}{x}dx$	$dv = x^3 dx$ தொகையிட $v = \frac{x^4}{4}$

$$\int x^3 \log x\;dx = \int udv$$
$$= uv - \int vdu$$
$$= \frac{x^4}{4}\log x - \frac{1}{4}\int x^3 dx$$
$$= \frac{x^4}{4}\log x - \frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{4}\right) + c$$
$$= \frac{x^4}{4}\left[\log x - \frac{1}{4}\right] + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.28

மதிப்பிடுக $\int (\log x)^2\;dx$

தீர்வு:

$u = (\log x)^2$ வகையிட $du = (2\log x)\left(\frac{1}{x}dx\right)$	$dv = dx$ தொகையிட $v = x$

$$\int (\log x)^2\;dx = \int udv$$
$$= uv - \int vdu$$
$$= x(\log x)^2 - 2\int \log x\,dx \;\ldots (*)$$

$(*)$ -ல் உள்ள $\int \log x\,dx$ -க்கு	
$u = \log x$ வகையிட $du = \frac{1}{x}dx$	$dv = dx$ தொகையிட $v = x$

$$= x(\log x)^2 - 2\int udv$$
$$= x(\log x)^2 - 2\left[uv - \int vdu\right]$$
$$= x(\log x)^2 - 2\left[x\log x - \int dx\right]$$
$$= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + c$$
$$= x\left[(\log x)^2 - \log x^2 + 2\right] + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.29

மதிப்பிடுக $\int \left(x^2 - 2x + 5\right)e^{-x}dx$

தீர்வு:

அடுத்தடுத்து வகையிட	மீண்டும் மீண்டும் தொகையிட
$u = x^2 - 2x + 5$ $u' = 2x - 2$ $u'' = 2$	$dv = e^{-x}dx$ $v = -e^{-x}$ $v_1 = e^{-x}$ $v_2 = -e^{-x}$

$$\int \left(x^2 - 2x + 5\right)e^{-x}dx = \int udv$$

$$= uv - u'v_1 + u''v_2 - u'''v_3 + \ldots$$

$$= \left(x^2 - 2x + 5\right)\left(-e^{-x}\right) - \left(2x - 2\right)e^{-x}$$

$$+ 2\left(-e^{-x}\right) + c$$

$$= e^{-x}\left(-x^2 - 5\right) + c$$

பயிற்சி 2.5

பின்வருவனவற்றை x –ஐ பொறுத்து தொகையிடுக.

1. xe^{-x} 2. $x^3 e^{3x}$ 3. $\log x$

4. $x\log x$ 5. $x^n \log x$ 6. $x^5 e^{x^2}$

2.1.5 பிரதியிடல் முறையில் அல்லது மாறியை மாற்றி அமைக்கும் முறையில் தொகையிடல் (Integration by substitution (or) change of variable method)

குறிப்பிட்ட சில சார்புகளுக்கான தொகையிடலில் அதற்கான தொகையீட்டை நேரடியாக பெற இயலாது, ஏனெனில் அவை மேலே விவாதிக்கப்பட்ட எந்த ஒரு திட்டமான வடிவத்தையும் பெற்றிருக்காது. ஆனால் பொருத்தமான ஒன்றை பிரதியிடுவதன் மூலமாக ஒரு திட்டமான வடிவத்திற்கு மாற்றியமைக்கலாம். பொருத்தமான பிரதியிடல் மூலமாக ஒரு திட்டமான வடிவத்திற்கு மாற்றி தொகையீடு செய்யும் முறையானது **பிரதியிடல் முறையில் தொகையிடல்** எனப்படும்.

வகை: VI

1. $\int\left[f\left(x\right)\right]^n f'(x)\,dx = \dfrac{\left[f(x)\right]^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$

2. $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx = \log\left|f(x)\right| + c$

3. $\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

4. $\int e^x\left[f(x) + f'(x)\right]dx = e^x f(x) + c$

5. $\int e^{ax}\left[a\,f(x) + f'(x)\right]dx = e^{ax} f(x) + c$

எடுத்துக்காட்டு 2.30

மதிப்பிடுக $\int \dfrac{x}{x^2+1}dx$

தீர்வு:

$f(x) = x^2 + 1$ என்க.

$\therefore\ f'(x) = 2x$

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$$

$$= \frac{1}{2}\log\left[f(x)\right] + c$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|x^2+1\right| + c$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int \frac{nax^{n-1}}{ax^n+b}dx = \int \frac{d\left(ax^n+b\right)}{ax^n+b}$$

$$= \log\left|ax^n+b\right| + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.31

மதிப்பிடுக $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

தீர்வு:

$f(x) = x^2 + 1$ என்க.

$\therefore\ f'(x) = 2x$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{f(x)}\right] + c$$

$$= \sqrt{x^2+1} + c$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int \frac{nax^{n-1}}{\sqrt{ax^n+b}}dx = \int \frac{d\left(ax^n+b\right)}{\sqrt{ax^n+b}}$$

$$= 2\sqrt{ax^n+b} + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.32

மதிப்பிடுக $\int x\sqrt{x^2+1}\ dx$

தீர்வு:

$f(x)=x^2+1$ என்க.

$\therefore\ f'(x)=2x$

$$\int x\sqrt{x^2+1}\ dx = \frac{1}{2}\int\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}(2x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\left[f(x)\right]^{\frac{1}{2}}f'(x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\left[f(x)\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c$$
$$=\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.33

மதிப்பிடுக $\int\frac{x^3}{\left(x^2+1\right)^3}dx$

தீர்வு:

$z=x^2+1$

$\therefore x^2=z-1$

$dz = 2x\,dx$

$\Rightarrow \frac{dz}{2} = x\,dx$

$$\int\frac{x^3}{\left(x^2+1\right)^3}dx=\int\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^3}x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{z-1}{z^3}dz$$
$$=\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}\right]dz$$
$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}\right]+c$$
$$=\frac{1}{4\left(x^2+1\right)^2}-\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.34

மதிப்பிடுக $\int\frac{dx}{x\left(x^3+1\right)}$

தீர்வு:

$z=x^3$ $\therefore dz = 3x^2\,dx$ $\Rightarrow \frac{dz}{3} = x^2\,dx,$	பகுதி பின்னமாக்கல் முறையில், $\frac{1}{z(z+1)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z+1}$ $\Rightarrow\frac{1}{z(z+1)}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}$

$$\int\frac{dx}{x\left(x^3+1\right)}=\int\frac{x^2}{x^3\left(x^3+1\right)}dx$$
$$=\frac{1}{3}\int\frac{dz}{z(z+1)}$$
$$=\frac{1}{3}\int\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}\right]dz$$
$$=\frac{1}{3}\left[\log|z|-\log|z+1|\right]+c$$
$$=\frac{1}{3}\log\left|\frac{z}{z+1}\right|+c$$
$$=\frac{1}{3}\log\left|\frac{x^3}{x^3+1}\right|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.35

மதிப்பிடுக $\int x^3e^{x^2}dx$

தீர்வு:

$z=x^2$

$\therefore\ dz=2x\,dx$

$\Rightarrow\ \frac{dz}{2}=x\,dx$

$$\int x^3e^{x^2}dx = \int x^2e^{x^2}(x\,dx)$$
$$=\frac{1}{2}\int z\,e^z dz$$
$$=\frac{1}{2}\left[e^z(z-1)\right]+c$$ [பகுதிப்படுத்தித் தொகையிடுவதன் மூலமாக]
$$=\frac{1}{2}\left[e^{x^2}(x^2-1)\right]+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.36

மதிப்பிடுக $\int e^x\left(x^2+2x\right)dx$

தீர்வு:

$$f(x)=x^2$$
$$\therefore \quad f'(x)=2x$$

$$\int e^x\left(x^2+2x\right)dx=\int e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx$$
$$= e^x f(x)+c$$
$$= e^x x^2+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.37

மதிப்பிடுக $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$

தீர்வு:

பகுதி பின்னமாக்கல் முறையில், $\frac{x}{(1+x)^2}=\frac{A}{1+x}+\frac{B}{(1+x)^2}$ $\Rightarrow \frac{x}{(1+x)^2}=\frac{1}{1+x}+\frac{-1}{(1+x)^2}$	$f(x)=\frac{1}{1+x}$ $\therefore \quad f'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}$

$$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$$
$$=\int e^x\left[\frac{1}{1+x}+\frac{-1}{(1+x)^2}\right]dx$$
$$=\int e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx$$
$$= e^x f(x)+c$$
$$= \frac{e^x}{1+x}+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.38

மதிப்பிடுக $\int e^{2x}\left[\frac{2x-1}{4x^2}\right]dx$

தீர்வு:

$\frac{2x-1}{4x^2}=\frac{1}{2x}+\frac{-1}{4x^2}$ $=\frac{1}{4}\left[2\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{-1}{x^2}\right]$	$a=2,$ $f(x)=\frac{1}{x}$ $\therefore f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

$$\int e^{2x}\left[\frac{2x-1}{4x^2}\right]dx$$
$$=\frac{1}{4}\int e^{2x}\left[2\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{-1}{x^2}\right]dx$$
$$=\frac{1}{4}\int e^{ax}\left[a\,f(x)+f'(x)\right]dx$$
$$=\frac{1}{4}\left[e^{ax}\;f(x)\right]+c$$
$$=\frac{1}{4x}e^{2x}+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.39

மதிப்பிடுக $\int\left[\frac{1}{\log x}-\frac{1}{(\log x)^2}\right]dx$

தீர்வு:

$$z=\log x$$
$$\therefore dz=\frac{1}{x}dx$$
$$\Rightarrow dx=e^z dz \quad \left[\because x=e^z\right]$$
$$f(z)=\frac{1}{z}$$
$$\therefore f'(z)=-\frac{1}{z^2}$$

$$\int\left[\frac{1}{\log x}-\frac{1}{(\log x)^2}\right]dx=\int\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}\right]e^z dz$$
$$=\int e^z\left[f(z)+f'(z)\right]dz$$
$$=e^z f(z)+c$$
$$=e^z\left[\frac{1}{z}\right]+c$$
$$=\frac{x}{\log x}+c$$

பயிற்சி 2.6

பின்வருவனவற்றை x –ஐ பொறுத்து தொகையிடுக.

1. $\frac{2x+5}{x^2+5x-7}$
2. $\frac{e^{3\log x}}{x^4+1}$
3. $\frac{e^{2x}}{e^{2x}-2}$
4. $\frac{(\log x)^3}{x}$

5. $\dfrac{6x+7}{\sqrt{3x^2+7x-1}}$ 6. $(4x+2)\sqrt{x^2+x+1}$

7. $x^8\left(1+x^9\right)^5$ 8. $\dfrac{x^{e-1}+e^{x-1}}{x^e+e^x}$

9. $\dfrac{1}{x\log x}$ 10. $\dfrac{x}{2x^4-3x^2-2}$

11. $e^x(1+x)\log\left(xe^x\right)$ 12. $\dfrac{1}{x\left(x^2+1\right)}$

13. $e^x\left[\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right]$ 14. $e^x\left[\dfrac{x-1}{(x+1)^3}\right]$

15. $e^{3x}\left[\dfrac{3x-1}{9x^2}\right]$

2.1.6 சில சிறப்பு வகைத் தொகையீடுகள் (Some special types of Integrals)

வகை: VII

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}\ , \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

மற்றும் $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ ஆகிய வடிவில் உள்ள தொகையீடுகளை மதிப்பிட, முதலாவதாக நாம் ax^2+bx+c -ஐ இரு வர்க்கங்களின் கூடுதலாகவோ அல்லது கழித்தலாகவோ [வர்க்க நிறைவாக்கல் முறையில்] விவரித்து, அதாவது $(x+\alpha)^2+\beta^2$ (அல்லது) $(x+\alpha)^2-\beta^2$ (அல்லது) $\beta^2-(x+\alpha)^2$ என மாற்றியமைத்து கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சூத்திரங்களில் இருந்து பொருத்தமான சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி தொகையீடு காண வேண்டும்.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c$

5. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$

6. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c$

எடுத்துக்காட்டு 2.40

மதிப்பிடுக $\displaystyle\int \frac{dx}{16-x^2}$

தீர்வு:

$$\int \frac{dx}{16-x^2}=\int \frac{dx}{4^2-x^2}$$
$$=\frac{1}{2(4)}\log\left|\frac{4+x}{4-x}\right|+c$$
$$=\frac{1}{8}\log\left|\frac{4+x}{4-x}\right|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.41

மதிப்பிடுக $\displaystyle\int \frac{dx}{1-25x^2}$

தீர்வு:

$$\int \frac{dx}{1-25x^2}=\frac{1}{25}\int \frac{dx}{\left(\frac{1}{5}\right)^2-x^2}$$
$$=\frac{1}{25}\left[\frac{1}{2\left(\frac{1}{5}\right)}\log\left|\frac{\frac{1}{5}+x}{\frac{1}{5}-x}\right|\right]+c$$
$$=\frac{1}{10}\log\left|\frac{1+5x}{1-5x}\right|+c$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int \frac{m}{a^2-(mx)^2}\,dx=\int \frac{d(mx)}{a^2-(mx)^2}$$
$$=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+mx}{a-mx}\right|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.42

மதிப்பிடுக $\displaystyle\int \frac{dx}{2+x-x^2}$

தீர்வு:

$$\int \frac{dx}{2+x-x^2}=\int \frac{dx}{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$$

வர்க்க நிறைவாக்கல் முறையில்,

$$2+x-x^2=2-\left[x^2-x\right]$$
$$=2-\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]$$
$$=\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2\left(\frac{3}{2}\right)}\log\left|\frac{\frac{3}{2}+\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{2}-\left(x-\frac{1}{2}\right)}\right|+c$$
$$=\frac{1}{3}\log\left|\frac{2+2x}{4-2x}\right|+c$$
$$=\frac{1}{3}\log\left|\frac{1+x}{2-x}\right|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.43

மதிப்பிடுக $\int\frac{dx}{4x^2-1}$

தீர்வு:

$$\int\frac{dx}{4x^2-1}=\int\frac{dx}{4\left(x^2-\frac{1}{4}\right)}$$
$$=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)}\log\left|\frac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right|\right]+c$$
$$=\frac{1}{4}\log\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|+c$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int\frac{m}{(mx)^2-a^2}\,dx=\int\frac{d(mx)}{(mx)^2-a^2}$$
$$=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{mx-a}{mx+a}\right|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.44

மதிப்பிடுக $\int\frac{x^2}{x^2-25}dx$

தீர்வு:

$$\int\frac{x^2}{x^2-25}dx=\int\frac{\left(x^2-25\right)+25}{x^2-25}dx$$
$$=\int\left\{1+\frac{25}{x^2-25}\right\}dx$$
$$=\int dx+25\int\frac{dx}{x^2-25}$$
$$=x+25\left[\frac{1}{2(5)}\log\left|\frac{x-5}{x+5}\right|\right]+c$$
$$=x+\frac{5}{2}\log\left|\frac{x-5}{x+5}\right|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.45

மதிப்பிடுக $\int\frac{dx}{x^2-3x+2}$

தீர்வு:

வர்க்க நிறைவாக்கல் முறையில்

$$x^2-3x+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2$$
$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$
$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\int\frac{dx}{x^2-3x+2}=\int\frac{dx}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)}\log\left|\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}}\right|+c$$
$$=\log\left|\frac{2x-4}{2x-2}\right|+c$$
$$=\log\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.46

மதிப்பிடுக $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}}$

தீர்வு:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4\left[x^2-\frac{9}{4}\right]}}$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}\right|+c$$

$$=\frac{1}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-\frac{9}{4}}\right|+c$$

$$=\frac{1}{2}\log\left|2x+\sqrt{4x^2-9}\right|+c$$

குறிப்பு

$m\log n \pm k = c$

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

$$\int \frac{m}{\sqrt{(mx)^2-a^2}}dx = \int \frac{d(mx)}{\sqrt{(mx)^2-a^2}}$$

$$=\log\left|mx+\sqrt{(mx)^2-a^2}\right|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.47

மதிப்பிடுக $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

தீர்வு:

வர்க்க நிறைவாக்கல் முறையில்
$x^2-3x+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2$
$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$=\log\left|\left(x-\frac{3}{2}\right)+\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right|+c$$

$$=\log\left|\left(x-\frac{3}{2}\right)+\sqrt{x^2-3x+2}\right|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.48

மதிப்பிடுக $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+25}}$

தீர்வு:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+25}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5^2}}$$

$$=\log\left|x+\sqrt{x^2+5^2}\right|+c$$

$$=\log\left|x+\sqrt{x^2+25}\right|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.49

மதிப்பிடுக $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}$

தீர்வு:

வர்க்க நிறைவாக்கல் முறையில்
$x^2+4x+8=(x+2)^2-4+8$
$=(x+2)^2+2^2$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+2^2}}$$

$$=\log\left|(x+2)+\sqrt{(x+2)^2+2^2}\right|+c$$

$$=\log\left|(x+2)+\sqrt{x^2+4x+8}\right|+c$$

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

$$\int \frac{m}{\sqrt{(mx)^2+a^2}}dx = \int \frac{d(mx)}{\sqrt{(mx)^2+a^2}}$$

$$=\log\left|mx+\sqrt{(mx)^2+a^2}\right|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.50

மதிப்பிடுக $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^8+1}}$

தீர்வு:

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^8+1}} = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3dx}{\sqrt{(x^4)^2+1^2}}$$

$$= \frac{1}{4}\log\left|x^4 + \sqrt{\left(x^4\right)^2 + 1^2}\right| + c$$

$$= \frac{1}{4}\log\left|x^4 + \sqrt{x^8 + 1}\right| + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.51

மதிப்பிடுக $\int \sqrt{x^2 - 16}\ dx$

தீர்வு:

$$\int \sqrt{x^2 - 16}\ dx \ = \int \sqrt{x^2 - 4^2}\ dx$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 4^2} - \frac{4^2}{2}\log\left|x + \sqrt{x^2 - 4^2}\right| + c$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 16} - 8\log\left|x + \sqrt{x^2 - 16}\ \right| + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.52

மதிப்பிடுக $\int \sqrt{x^2 + 5}\ dx$

தீர்வு:

$$\int \sqrt{x^2 + 5}\ dx = \int \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2}\ dx$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2} + \frac{\left(\sqrt{5}\right)^2}{2}\ \log\left|x + \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2}\right| + c$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + 5} + \frac{5}{2}\ \log\left|x + \sqrt{x^2 + 5}\right| + c$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int m\sqrt{(mx)^2 + a^2}\ dx = \int \sqrt{(mx)^2 + a^2}\ d(mx)$$

$$= \frac{mx}{2}\sqrt{(mx)^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ \log\left|mx + \sqrt{(mx)^2 + a^2}\right| + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.53

மதிப்பிடுக $\int \sqrt{4x^2 + 9}\ dx$

தீர்வு:

$$\int \sqrt{4x^2 + 9}\ dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{(2x)^2 + 3^2}\ d(2x)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2x}{2}\sqrt{(2x)^2 + 3^2} + \frac{3^2}{2}\ \log\left|2x + \sqrt{(2x)^2 + 3^2}\right|\right] + c$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{4x^2 + 9} + \frac{9}{4}\ \log\left|2x + \sqrt{4x^2 + 9}\right| + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.54

மதிப்பிடுக $\int \sqrt{x^2 - 4x + 3}\ dx$

தீர்வு:

வர்க்க நிறைவாக்கல் முறையில்,
$x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 4 + 3$
$\qquad = (x-2)^2 - 1^2$
$\therefore \sqrt{x^2 - 4x + 3} = \sqrt{(x-2)^2 - 1^2}$

$$\int \sqrt{x^2 - 4x + 3}\ dx = \int \sqrt{(x-2)^2 - 1^2}\ dx$$

$$= \frac{(x-2)}{2}\ \sqrt{(x-2)^2 - 1^2} - \frac{1}{2}\ \log\left|(x-2) + \sqrt{(x-2)^2 - 1^2}\ \right| + c$$

$$= \frac{(x-2)}{2}\ \sqrt{x^2 - 4x + 3} - \frac{1}{2}\ \log\left|(x-2) + \sqrt{x^2 - 4x + 3}\ \right| + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.55

மதிப்பிடுக $\int \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}\ dx$

தீர்வு:

காரணக்காரிய முறையில்,
$\frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \times \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$
$= x + \sqrt{x^2 - 1}$

$$\int \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}\ dx \ = \int\left[x + \sqrt{x^2 - 1}\right]dx$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 43 3/5/2020 11:05:23 AM

$$= \int x dx + \int \sqrt{x^2 - 1}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\log\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + c$$

பயிற்சி 2.7

பின்வருவனவற்றை x –ஐ பொறுத்து தொகையிடுக:

1. $\dfrac{1}{9-16x^2}$
2. $\dfrac{1}{9-8x-x^2}$
3. $\dfrac{1}{2x^2-9}$
4. $\dfrac{1}{x^2-x-2}$
5. $\dfrac{1}{x^2+3x+2}$
6. $\dfrac{1}{2x^2+6x-8}$
7. $\dfrac{e^x}{e^{2x}-9}$
8. $\dfrac{1}{\sqrt{9x^2-7}}$
9. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+6x+13}}$
10. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$
11. $\dfrac{x^3}{\sqrt{x^8-1}}$
12. $\sqrt{1+x+x^2}$
13. $\sqrt{x^2-2}$
14. $\sqrt{4x^2-5}$
15. $\sqrt{2x^2+4x+1}$
16. $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

2.2 வரையறுத்த தொகையீடுகள் (Definite integrals)

இதுவரை நாம் வரையறாத் தொகையிடல்களில் அடிப்படை இயற்கணிதச் சார்பு, அடுக்கைச் சார்பு, திரிகோணமிதிச் சார்பு மற்றும் மடக்கைச் சார்பு ஆகியவற்றை பயன்படுத்தி தொகையீடு காணும் முறைகளைப் பற்றித் தெரிந்துக் கொண்டோம். இனி நாம் வரையறுத்த தொகையீடுகளைப் பற்றி படிக்கலாம்.

$\int_a^b f(x)\,dx$ வடிவியலில், வரையறுத்த தொகையீடான $\int_a^b f(x)\,dx$ ஆனது ஒரு கூட்டுத் தொகையின் எல்லை மதிப்பாகக் குறிக்கப்படுகிறது. மேலும் இது, $y = f(x)$ என்ற சமன்பாட்டிற்குறிய வளைவரை, x -அச்சு மற்றும் $x = a,\ x = b$ எனும் குத்தாயங்களால் அடைபடும் பரப்பளவு எனவும் குறிப்பிடப்படுகிறது.

2.2.1 தொகை நுண்கணிதத்தின் அடிப்படைத் தேற்றங்கள் (The fundamental theorems of Integral Calculus)

தேற்றம் 2.1 நுண்கணிதத்தின் முதல் அடிப்படைத் தேற்றம் (First fundamental theorem of Integral Calculus):

சார்பு $f(x)$ ஆனது தொடர்ச்சியுடையதாகவும் மற்றும் $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ எனில், $F'(x) = f(x)$ ஆகும்.

தேற்றம் 2.2 நுண்கணிதத்தின் இரண்டாம் அடிப்படைத் தேற்றம் (Second fundamental theorem of Integral Calculus):

$f(x)$ என்ற சார்பு [a,b] என்ற மூடிய இடைவெளியில் தொடர்ச்சியுடையதாகவும், மேலும் $f(x)$-ன் எதிர்மறை வகையீடானது $\mathrm{F}(x)$ எனில் $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ ஆகும்.

இங்கு a மற்றும் b என்பன வரையறுத்த தொகையீட்டின் கீழ் எல்லை மற்றும் மேல் எல்லை எனப்படும்.

குறிப்பு

$\int_a^b f(x)\,dx$ ஆனது ஒரு திட்டவட்டமான மாறிலியாகும், அதேசமயத்தில் $\int_a^x f(\mathrm{t})\,dt$ ஆனது ஒரு மாறிச் சார்பாகும்.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int f(x)\,dx = F(x) + \mathrm{c}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

எடுத்துக்காட்டு 2.56

மதிப்பிடுக $\int_0^1 \left(x^3 + 7x^2 - 5x\right)dx$

தீர்வு:

இதற்கு முந்தைய பகுதியில் $\int \left(x^3 + 7x^2 - 5x\right)dx$ –ஐ எவ்வாறு தொகையிடுவது என்பதைப் பற்றி தெரிந்துக் கொண்டோம்.

$$\therefore \int \left(x^3 + 7x^2 - 5x\right)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + c$$

இப்போது, $\int_0^1 \left(x^3 + 7x^2 - 5x\right) dx$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} - \frac{5x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{1}{4} + \frac{7}{3} - \frac{5}{2}\right] - \left[\frac{0}{4} + \frac{0}{3} - \frac{0}{2}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{4} + \frac{7}{3} - \frac{5}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{12}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.57

0 மற்றும் 1 -ஐ எல்லை மதிப்புகளாகக் கொண்டு $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{5x^2+1}$ எனும் சார்பை தொகையிடுக.

தீர்வு:

இங்கு, $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{5x^2+1}$

$$\therefore\ y = \int_0^1 \frac{2x}{5x^2+1} dx$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{10x}{5x^2+1} dx$$

$$= \frac{1}{5}\left[\log\left(5x^2+1\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{5}\left[\log 6 - \log 1\right]$$

$$= \frac{1}{5}\log 6$$

எடுத்துக்காட்டு 2.58

மதிப்பிடுக $\int_0^1 \left(e^x - 4a^x + 2 + \sqrt[3]{x}\ \right) dx$

தீர்வு:

$$\int_0^1 \left(e^x - 4a^x + 2 + \sqrt[3]{x}\ \right) dx$$

$$= \left[e^x - 4\frac{a^x}{\log a} + 2x + 3\frac{x^{\frac{4}{3}}}{4}\right]_0^1$$

$$= e - \frac{4a}{\log a} + 2 + \frac{3}{4} - 1 + \frac{4}{\log a}$$

$$= e + \frac{4(1-a)}{\log a} + \frac{7}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.59

மதிப்பிடுக $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\, dx$

தீர்வு:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\, dx = \left[-\cos x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= -\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 2.60

மதிப்பிடுக $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$

தீர்வு:

எளியச் சார்புகளாக பிரித்தெழுத,

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\therefore \cos^2 x = \frac{1}{2}[1 + \cos 2x]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}[1 + \cos 2x]\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + 0\right] = \frac{\pi}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.61

மதிப்பிடுக $\int_0^1 \left[e^{a\log x} + e^{x\log a}\right] dx$

தீர்வு:

$$\int_0^1 \left[e^{a\log x}+e^{x\log a}\right]dx = \int_0^1 \left(x^a + a^x\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}+\frac{a^x}{\log a}\right]_0^1$$

குறிப்பு

$e^{a\log x} = x^a$

$$= \left(\frac{1}{a+1}+\frac{a}{\log a}\right)-\left(0+\frac{1}{\log a}\right)$$

$$= \frac{1}{a+1}+\frac{a}{\log a}-\frac{1}{\log a}$$

$$= \frac{1}{a+1}+\frac{(a-1)}{\log a}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.62

மதிப்பிடுக $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^4+1}{x^2}dx$

தீர்வு:

$$\int_2^3 \frac{x^4+1}{x^2}dx = \int_2^3 \left(x^2+x^{-2}\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}\right]_2^3$$

$$= \left(9-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.63

மதிப்பிடுக $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x^3+3x^2\right)^3\left(x^2+2x\right)dx$

தீர்வு:

$$\int_{-1}^{1}\left(x^3+3x^2\right)^3\left(x^2+2x\right)dx = \left[\frac{1}{3}\,\frac{\left(x^3+3x^2\right)^4}{4}\right]_{-1}^{1}$$

$$\left[\because \int\left[f(x)\right]^n f'(x)\,dx = \frac{\left[f(x)\right]^{n+1}}{n+1}+c\right]$$

$$= \frac{1}{3}(64-4)$$

$$= 20$$

எடுத்துக்காட்டு 2.64

மதிப்பிடுக $\displaystyle\int_a^b \frac{\sqrt{\log x}}{x}dx \quad a,b>0$

தீர்வு:

$$\int_a^b \frac{\sqrt{\log x}}{x}dx = \int_a^b (\log x)^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x}$$

$$\left[\because \int\left[f(x)\right]^n f'(x)\,dx = \frac{\left[f(x)\right]^{n+1}}{n+1}+c\right]$$

$$= \left[\frac{2(\log x)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_a^b$$

$$= \frac{2}{3}\left[(\log b)^{\frac{3}{2}}-(\log a)^{\frac{3}{2}}\right]$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$\log b^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\log b$ ஆனால்,

$(\log b)^{\frac{3}{2}} \neq \frac{3}{2}\log b$ மற்றும்,

$(\log b)^{\frac{3}{2}} - (\log a)^{\frac{3}{2}} \neq \left(\log\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$

எடுத்துக்காட்டு 2.65

மதிப்பிடுக $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\sqrt{x+1}\,dx$

$t = x+1$ என்க.
$dt = dx$

x	-1	1
t	0	2

தீர்வு:

$$\int_{-1}^{1} x\sqrt{x+1}\,dx = \int_0^2 (t-1)\sqrt{t}\,dt$$

$$= \int_0^2\left(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}\right)dt$$

$$= \left[\frac{2t^{\frac{5}{2}}}{5}-\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^2$$

$$= \frac{8\sqrt{2}}{5}-\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{15}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.66

மதிப்பிடுக $\int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{2}}\, dx$

தீர்வு:

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{2}}\, dx = -2\left[e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{\infty}$$

$$= -2[0-1] = 2$$

எடுத்துக்காட்டு 2.67

மதிப்பிடுக $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^3}\, dx$

தீர்வு:

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^3}\, dx = \int_0^{\infty} e^{-t}\frac{dt}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\left[-e^{-t}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{-1}{3}[0-1]$$

$$= \frac{1}{3}$$

$x^3 = t$ $3x^2\, dx = dt$ $\Rightarrow x^2\, dx = \frac{dt}{3}$		
x	0	∞
t	0	∞

எடுத்துக்காட்டு 2.68

மதிப்பிடுக $\int_1^{2} \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx$

தீர்வு:

பகுதி பின்னமாக்கல் முறையில்,
$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$ $\Rightarrow \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$

$$\int_1^{2} \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx = \int_1^{2}\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right] dx$$

$$= \left[\log|x+1| - \log|x+2|\right]_1^2$$

$$= \log\frac{3}{4} - \log\frac{2}{3}$$

$$= \log\frac{9}{8}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.69

மதிப்பிடுக $\int_1^{e} \log x\, dx$

தீர்வு:

$u = \log x$ வகையிட, $du = \frac{1}{x}dx$	$dv = dx$ தொகையிட $v = x$

$$\int_1^{e} \log x\, dx = \int_1^{e} u\, dv = [uv]_1^e - \int_1^{e} v du$$

$$= [x\log x]_1^e - \int_1^{e} x\frac{1}{x}\, dx$$

$$= (e\log e - 1\log 1) - [x]_1^e$$

$$= (e-0) - (e-1)$$

$$= 1$$

எடுத்துக்காட்டு 2.70

மதிப்பிடுக $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\, dx$

தீர்வு:

$u = x$ வகையிட $du = dx$	$dv = \sin x\, dx$ தொகையிட $v = -\cos x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} udv$$

$$= [uv]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} vdu$$

$$= [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$$

$$= 0 + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

எடுத்துக்காட்டு 2.71

$\int_1^{a} 3x^2\, dx = -1$ எனில், $a \in R$ எனுமாறு a-ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு: $\int_1^{a} 3x^2\, dx = -1$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\left[x^3\right]_1^a = -1$$

$$a^3 - 1 = -1$$
$$a^3 = 0 \Rightarrow a = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 2.72

$\int_a^b dx = 1$ மற்றும் $\int_a^b x\,dx = 1$ எனில், a மற்றும் b-ன் மதிப்புகளைக் காண்க

தீர்வு:

$\int_a^b dx = 1$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$[x]_a^b = 1$$
$$b - a = 1 \qquad \ldots (1)$$

மேலும், $\int_a^b x\,dx = 1$ எனவும் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது.

$$\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = 1$$
$$b^2 - a^2 = 2$$
$$(b+a)(b-a) = 2$$
$$b + a = 2 \qquad \ldots (2) \left[\because\ b - a = 1\right]$$
$$(1) + (2) \Rightarrow 2b = 3$$
$$\therefore\ b = \frac{3}{2}$$

இப்போது, $\frac{3}{2} - a = 1$ $\quad$ [$\because$ (1) லிருந்து]

$$\therefore\ a = \frac{1}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.73

$f(x) = \begin{cases} 7x+3, & 1 \le x \le 3 \\ 8x \quad, & 3 \le x \le 4 \end{cases}$ எனில், $\int_1^4 f(x)\,dx$ -ஐ மதிப்பிடுக.

தீர்வு:

$$\int_1^4 f(x)\,dx = \int_1^3 f(x)\,dx + \int_3^4 f(x)\,dx$$
$$= \int_1^3 (7x+3)\,dx + \int_3^4 8x\,dx$$
$$= \left[\frac{7x^2}{2} + 3x\right]_1^3 + \left[\frac{8x^2}{2}\right]_3^4$$
$$= \frac{63}{2} + 9 - \frac{13}{2} + 64 - 36$$
$$= 62$$

எடுத்துக்காட்டு 2.74

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -2 \le x < 1 \\ x, & 1 \le x < 2 \\ x-4, & 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

எனக்கொண்டு பின் வருவனவற்றை மதிப்பிடுக.

(i) $\int_{-2}^{1} f(x)dx$ (ii) $\int_1^2 f(x)dx$ (iii) $\int_2^3 f(x)dx$

(iv) $\int_{-2}^{1.5} f(x)dx$ (v) $\int_1^3 f(x)dx$

தீர்வு:

(i) $\int_{-2}^{1} f(x)dx = \int_{-2}^{1} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1}$

$$= \frac{1}{3} - \left(\frac{-8}{3}\right) = 3$$

(ii) $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2$

$$= \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

(iii) $\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 (x-4)dx = \left[\frac{x^2}{2} - 4x\right]_2^3$

$$= \left(\frac{9}{2} - 12\right) - \left(\frac{4}{2} - 8\right) = -\frac{15}{2} + 6 = \frac{-3}{2}$$

(iv) $\int_{-2}^{1.5} f(x)dx = \int_{-2}^{1} f(x)dx + \int_1^{1.5} f(x)dx$

$= 3 + \int_1^{1.5} x dx$ (i) லிருந்து

$$= 3 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{1.5} = 3 + \frac{2.25}{2} - \frac{1}{2} = 3 + \frac{1.25}{2} = 3.625$$

(v) $\int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx$

$= \frac{3}{2} + \left(\frac{-3}{2}\right) = 0$ (ii) மற்றும் (iii) லிருந்து

பயிற்சி 2.8

I. பின் வருவனவற்றை இரண்டாம் அடிப்படைத் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி மதிப்பிடுக.

1. $\int_0^1 e^{2x}dx$
2. $\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{1-4x}\,dx$
3. $\int_1^2 \frac{xdx}{x^2+1}$
4. $\int_0^3 \frac{e^x dx}{1+e^x}$
5. $\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$
6. $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\log x)^3}$
7. $\int_{-1}^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+7}dx$
8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x}\;dx$
9. $\int_1^2 \frac{x-1}{x^2}\,dx$

II. பின் வருவனவற்றை தீர்க்க.

1. $f(x)=\begin{cases}4x+3, 1\le x\le 2\\ 3x+5, 2<x\le 4\end{cases}$ எனும்பொழுது $\int_1^4 f(x)\,dx$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

2. $f(x)=\begin{cases}3-2x-x^2,\ x\le 1\\ x^2+2x-3\ ,\ 1<x\le 2\end{cases}$ எனும்பொழுது $\int_0^2 f(x)\,dx$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

3. $f(x)=\begin{cases}x\ \ ,\ x\ge 0\\ -x,\ x<0\end{cases}$ எனும்பொழுது $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

4. $f(x) = \begin{cases}cx,\ \ 0<x<1\\ 0,\ \text{மற்றெங்கிலும்}\end{cases}$ மற்றும் $\int_0^1 f(x)dx = 2$ எனில், c -ன் மதிப்பைக் காண்க.

2.2.2 வரையறுத்த தொகையீடுகளின் பண்புகள் (Properties of definite integrals)

(i) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$

(ii) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$\int_a^b dx = b-a$

(iii) $[a,b]$ இல் $f(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்பன தொடர்ச்சியான சார்புகள் எனில்,

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

(iv) $f(x)$ ஆனது $[a,b]$ இல் தொடர்ச்சியான சார்பு மற்றும் $a<c<b$ எனில்,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(v) $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

நிரூபணம் :

$a-x=t$ என்க $dx=-dt$		
x	0	a
t	a	0

வ.ப. [R.H.S.] $= \int_0^a f(a-x)dx$

$= \int_a^0 f(t)(-dt)$

$= \int_0^a f(t)dt$

$= \int_0^a f(x)dx$ [பண்பு (i) இன் படி]

= இ.ப. [L.H.S.]

(vi) (அ) $f(x)$ ஓர் இரட்டைச் சார்பு எனில்,

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

(ஆ) $f(x)$ ஓர் ஒற்றைச் சார்பு எனில்,

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

நிரூபணம் :

(அ) $f(x)$ ஓர் இரட்டைச் சார்பு எனில்

$f(x)=f(-x)$ …(1)

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

$$= \int_{-a}^{0} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \qquad (1)\text{ -ன் படி}$$

$-x = t$ என்க. $dx = -dt$		
x	$-a$	0
t	a	0

பிரதியிடலை வலது பக்கத்தில் [R.H.S.] உள்ள முதல் தொகையிடலில் மட்டும் பயன்படுத்த,

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(t)(-dt) + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

[பண்பு (i) இன் படி]

$$= 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

(ஆ) $f(x)$ ஓர் ஒற்றைச் சார்பு எனில்

$$f(-x) = -f(x) \qquad \ldots(2)$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-a}^{0} -f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

(2) –ன் படி

$-x = t$ என்க. $dx = -dt$		
x	$-a$	0
t	a	0

பிரதியிடலை வலது பக்கத்தில் [R.H.S.] உள்ள முதல் தொகையிடலில் மட்டும் பயன்படுத்த,

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(t)(-dt) + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= -\int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad \text{[பண்பு (i) இன் படி]}$$

$$= 0$$

(vii) $$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(a+b-x)\,dx$$

நிரூபணம் :

$a+b-x = t$ மற்றும்

$$-dx = dt$$

$$dx = -dt$$

$t = a+b-x$		
x	a	b
t	b	a

$$\therefore \int_{a}^{b} f(a+b-x)\,dx = -\int_{b}^{a} f(t)\,dt = \int_{a}^{b} f(t)\,dt$$

$$= \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

[பண்பு (i) இன் படி]

$$\therefore \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(a+b-x)\,dx$$

பின்வருவனவற்றை வரையறுத்த தொகையீடுகளின் பண்புகளைப் பயன்படுத்தி மதிப்பிடுக:

எடுத்துக்காட்டு 2.75

மதிப்பிடுக $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^5\,dx}{a^2 - x^2}$

தீர்வு:

$f(x) = \dfrac{x^5}{a^2 - x^2}$ என்க.

$$f(-x) = \frac{(-x)^5}{a^2 - (-x)^2} = \frac{-x^5}{a^2 - x^2} = -f(x)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

$\therefore f(x)$ ஓர் ஒற்றைச் சார்பு ஆகும்.

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{x^5\,dx}{a^2 - x^2} = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 2.76

மதிப்பிடுக $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$

தீர்வு:

$f(x) = \cos x$ என்க.

$f(-x) = \cos(-x) = \cos x$

$\Rightarrow f(-x) = f(x)$

$\therefore f(x)$ ஓர் இரட்டைச் சார்பு ஆகும்.

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

$$= 2\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right]$$

$$= 2$$

எடுத்துக்காட்டு 2.77

மதிப்பிடுக $\int_{-1}^{1} \left(x^2 + x\right) dx$

தீர்வு:

$$\int_{-1}^{1} \left(x^2 + x\right) dx = \int_{-1}^{1} x^2 \, dx + \int_{-1}^{1} x \, dx$$

$= 2\int_0^1 x^2 \, dx + 0$ [$\because x^2$ ஓர் இரட்டைச் சார்பு மற்றும் x ஓர் ஒற்றைச் சார்பு ஆகும்]

$$= 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1}{3} - 0\right]$$

$$= \frac{2}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.78

மதிப்பிடுக $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

தீர்வு:

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ என்க. $\quad \ldots (1)$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx$$

$$\left[\because \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx\right]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx \quad \ldots (2)$$

$(1) + (2) \Rightarrow$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} + \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\right] dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \left[x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.79

மதிப்பிடுக $\int_2^5 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{7-x}} dx$

தீர்வு:

$I = \int_2^5 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{7-x}} dx$ என்க $\quad \ldots (1)$

$$I = \int_2^5 \frac{\sqrt{2+5-x}}{\sqrt{2+5-x} + \sqrt{7-(2+5-x)}} dx$$

$$\left[\because \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx\right]$$

$$I = \int_2^5 \frac{\sqrt{7-x}}{\sqrt{7-x} + \sqrt{x}} dx \quad \ldots (2)$$

$(1) + (2) \Rightarrow$

$$2I = \int_2^5 \left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{7-x}} + \frac{\sqrt{7-x}}{\sqrt{7-x} + \sqrt{x}}\right] dx$$

$$= \int_2^5 \left[\frac{\sqrt{x} + \sqrt{7-x}}{\sqrt{x} + \sqrt{7-x}} \right] dx$$

$$= \int_2^5 dx = [x]_2^5 = 3$$

$$\therefore I = \frac{3}{2}$$

பயிற்சி 2.9

பின் வருவனவற்றை வரையறுத்த தொகையீடு களின் பண்புகளைக் பயன்படுத்தி மதிப்பிடுக,

1. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^3 \cos^3 x dx$
2. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \, d\theta$
3. $\int_{-1}^{1} \log\left(\frac{2-x}{2+x}\right) dx$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^7 x}{\sin^7 x + \cos^7 x} dx$
5. $\int_0^1 \log\left(\frac{1}{x} - 1\right) dx$
6. $\int_0^1 \frac{x}{(1-x)^{\frac{3}{4}}} dx$

2.2.3 காமா தொகையீடு (Gamma Integral)

முறைச் சாரா வரையறுத்த தொகையீடுகளில் ஒரு குறிப்பிட்ட வகையை சார்ந்த தொகையீடுகளின் தொகையை மதிப்பிட உதவும் மிகவும் பயனுள்ள மற்றும் முக்கியமான முடிவு காமா தொகையீடு ஆகும்.

முதலில், நாம் வரையறாத் தொகையீடு, முறைசார்ந்த வரையறுத்த தொகையீடு மற்றும் முறைச்சாரா வரையறுத்த தொகையீடுகளுக்கான கருத்துருக்களை அறிந்துக் கொள்வோம்.

வரையறாத் தொகையீடு (Indefinite integral)

ஒரு தன்னிச்சையான மாறிலியை உள்ளடக்கி, எல்லைகள் இல்லாமல் வெளிப்படுத்தப் படும் தொகையிடலுக்கான செயல் முறையை வரையறாத் தொகையீடு என்போம்.

எடுத்துக்காட்டு: $\int e^{-t} dt$

முறைசார்ந்த வரையறுத்த தொகையீடு (Proper definite integral)

தொகைக்காண் சார்பு $f(x)$ ஆனது $[a, b]$ என்ற இடைவெளியில் தொடர்ச்சியுடையதாகவும், a மற்றும் b என்ற எல்லை மதிப்புகளை முடிவுறு எண்களாகவும் கொண்டு அமையும் தொகையிடல் களை முறைசார்ந்த வரையறுத்த தொகையீடு என்போம்.

எடுத்துக்காட்டு: $\int_0^1 e^{-t} dt$

முறைசாரா வரையறுத்த தொகையீடு (Improper definite integral)

ஒரு எல்லை a அல்லது b அல்லது இரு எல்லை மதிப்புகள் a மற்றும் b யையும் முடிவிலியாகக் கொண்டு அமையும் தொகையிடல்கள், அல்லது தொகைக்காண் சார்பு $f(x)$ ஆனது $[a, b]$ என்ற எல்லைகளுக்குள் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட புள்ளிகளில் காண இயலாததாகவும் அமையும் தொகையிடல்களை முறைசாரா வரையறுத்த தொகையீடு என்போம்.

எடுத்துக்காட்டு: $\int_0^{\infty} e^{-t} dt$

வரையறை 2.3

$n > 0$ எனும் போது, $\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ –ஐ காமா சார்பு என்போம். இதனை $\Gamma(n)$ [காமா n] எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

குறிப்பு

n ஒரு மிகை முழு எண் எனில், $\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$ ஆனது காமா தொகையிடலில் ஒரு குறிப்பிட்ட நிலை ஆகும்.

பண்புகள் :

1. $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1), n > 1$
2. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n), n > 0$
3. $\Gamma(n+1) = n!,$ n ஒரு மிகை முழு எண்
4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$\Gamma(1) = 1$

எடுத்துக்காட்டு 2.80

மதிப்பிடுக (i) $\Gamma(6)$ (ii) $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$

(iii) $\int_0^{\infty} e^{-2x} x^5 dx$ (iv) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

தீர்வு:

(i) $\Gamma(6) = 5!$

$= 120$

(ii) $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$

$= \frac{5}{2}\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$

$= \frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$

(iii) $\int_0^\infty x^n e^{-ax}\, dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$ என்பதை நாம் அறிவோம்

$\therefore \int_0^\infty e^{-2x} x^5\, dx = \frac{5!}{2^{5+1}} = \frac{5!}{2^6}$

(iv) $\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt$ என்பதை நாம் அறிவோம்.

இதில் $t = x^2$ என $dt = 2x dx$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x^2}\left(x^2\right)^{n-1} 2x\, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n-2} 2x\, dx$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n-1}\, dx$$

$n = \frac{1}{2}$ என, நாம் பெறுவது

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

$$\Rightarrow \sqrt{\pi} = 2\int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

$$\therefore \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

பயிற்சி 2.10

1. பின் வருவனவற்றை மதிப்பிடுக.

(i) $\Gamma(4)$ (ii) $\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)$ (iii) $\int_0^\infty e^{-mx} x^6 dx$ (iv) $\int_0^\infty e^{-4x} x^4 dx$ (v) $\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}} x^5 dx$

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-2x}, x \geq 0 \\ 0, \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$ எனில், $\int_0^\infty f(x)dx$ –ஐ மதிப்பிடுக.

2.2.4 வரையறுத்த தொகையீடுக்கான கூட்டல் எல்லை (Definite integral as the limit of a sum)

$[a, b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் $f(x)$ ஆனது தொடர்ச்சியான மெய்மதிப்புகளைக் கொண்ட சார்பு என்க. இவ்விடைவெளியானது "h" எனும் சம அகலத்தைக் கொண்ட "n" உள்இடைவெளிகளாக பிரிக்கப்படுமானால்,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty\\h\to 0}} h\left[f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots.. + f(a+(n-1)h)\right]$$ ஆகும்.

இங்கு $h = \frac{b-a}{n}$ (அல்லது)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty\\h\to 0}} \sum_{r=1}^{n} h\, f(a+rh)$$ ஆகும்.

இங்கு $h = \frac{b-a}{n}$

வரையறுத்த தொகையீட்டுக்கான கூட்டல் எல்லையை மதிப்பிட பின்வரும் முடிவுகள் மிகவும் உதவிகரமாக அமையும்.

(i) $1+2+3+\ldots\ldots n = \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{r=1}^{n} r$

(ii) $1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \sum_{r=1}^{r=n} r^2$

(iii) $1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \sum_{r=1}^{r=n} r^3$

எடுத்துக்காட்டு 2.81

வரையறுத்த தொகையீட்டை ஒரு கூட்டலின் எல்லை எனக் கொண்டு, $\int_0^1 x\, dx$ -ஐ மதிப்பிடுக.

தீர்வு:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty\\h\to 0}} \sum_{r=1}^{n} h\, f(a+rh) \qquad \ldots(1)$$

இங்கு $a=0,\ b=1,\ h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$

மற்றும் $f(x)=x$

இப்போது $f(a+rh)=f\left(0+\frac{r}{n}\right)=f\left(\frac{r}{n}\right)=\frac{r}{n}$

இதை (1) -இல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$\int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{r}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{r=1}^{n} r$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2}$$
$$= \frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$$
$$\therefore \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.82

வரையறுத்த தொகையீட்டை ஒரு கூட்டலின் எல்லை எனக் கொண்டு $\int_1^2 (2x+1)\,dx$ –ஐ மதிப்பிடுக.

தீர்வு:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty\\h\to 0}}\sum_{r=1}^{n} h\, f(a+rh) \qquad \text{...(1)}$$

இங்கு $a=1,\ b=2,\ h=\frac{b-a}{n}=\frac{2-1}{n}=\frac{1}{n}$

மற்றும் $f(x)=2x+1$

$$f(a+rh) = f\left(1+\frac{r}{n}\right)$$
$$= 2\left(1+\frac{r}{n}\right)+1$$
$$= 2+\frac{2r}{n}+1$$
$$f(a+rh) = 3+\frac{2r}{n}$$

இதை (1) -இல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$\int_1^2 (2x+1)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{n}\left(3+\frac{2r}{n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{3}{n}+\frac{2r}{n^2}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{n}\sum_{r=1}^{n}1+\frac{2}{n^2}\sum_{r=1}^{n}r\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{n}n+\frac{2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\right]$$
$$= 3+\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$\therefore \int_1^2 (2x+1)\,dx = 3+1 = 4$$

எடுத்துக்காட்டு 2.83

வரையறுத்த தொகையீட்டை ஒரு கூட்டலின் எல்லை எனக் கொண்டு, $\int_1^2 x^2\,dx$ –ஐ மதிப்பிடுக.

தீர்வு:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty\\h\to 0}}\sum_{r=1}^{n} h\, f(a+rh)$$

இங்கு $a=1,\ b=2,\ h=\frac{b-a}{n}=\frac{2-1}{n}=\frac{1}{n}$

மற்றும் $f(x)=x^2$

இப்போது $f(a+rh) = f\left(1+\frac{r}{n}\right)$

$$= \left(1+\frac{r}{n}\right)^2 = 1+\frac{2r}{n}+\frac{r^2}{n^2}$$

$$\therefore \int_1^2 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1+\frac{2r}{n}+\frac{r^2}{n^2}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{2r}{n^2}+\frac{r^2}{n^3}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}1+\frac{2}{n^2}\sum_{r=1}^{n}r+\frac{1}{n^3}\sum_{r=1}^{n}r^2\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}(n)+\frac{2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[1+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}\right]$$

$$=\left[1+1+\frac{(1)(2)}{6}\right]$$

$$\therefore \int_1^2 x^2\,dx = \frac{7}{3}$$

பயிற்சி 2.11

வரையறுத்த தொகையீட்டை ஒரு கூட்டலின் எல்லை எனக் கொண்டு கீழ் காணும் தொகையீடுகளை மதிப்பிடுக.

1. $\int_0^1 (x+4)\,dx$
2. $\int_1^3 x\,dx$
3. $\int_1^3 (2x+3)\,dx$
4. $\int_0^1 x^2\,dx$

பயிற்சி 2.12

ஏற்புடைய விடையைத் தெரிவு செய்க:

1. $\int \frac{1}{x^3}dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

   (a) $\frac{-3}{x^2}+c$ (b) $\frac{-1}{2x^2}+c$ (c) $\frac{-1}{3x^2}+c$ (d) $\frac{-2}{x^2}+c$

2. $\int 2^x dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

   (a) $2^x\log 2+c$ (b) 2^x+c (c) $\frac{2^x}{\log 2}+c$ (d) $\frac{\log 2}{2^x}+c$

3. $\int \frac{\sin 2x}{2\sin x}dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

   (a) $\sin x+c$ (b) $\frac{1}{2}\sin x+c$ (c) $\cos x+c$ (d) $\frac{1}{2}\cos x+c$

4. $\int \frac{\sin 5x-\sin x}{\cos 3x}dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

   (a) $-\cos 2x+c$ (b) $-\cos 2x+c$ (c) $-\frac{1}{4}\cos 2x+c$ (d) $-4\cos 2x+c$

5. $\int \frac{\log x}{x}dx\ (x>0)$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

   (a) $\frac{1}{2}(\log x)^2+c$ (b) $-\frac{1}{2}(\log x)^2$ (c) $\frac{2}{x^2}+c$ (d) $\frac{2}{x^2}+c$

6. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

   (a) $\frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}+c$ (b) $2\sqrt{1+e^x}+c$ (c) $\sqrt{1+e^x}+c$ (d) $e^x\sqrt{1+e^x}+c$

7. $\int \sqrt{e^x}\,dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

   (a) $\sqrt{e^x}+c$ (b) $2\sqrt{e^x}+c$ (c) $\frac{1}{2}\sqrt{e^x}+c$ (d) $\frac{1}{2\sqrt{e^x}}+c$

8. $\int e^{2x}[2x^2+2x]dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

   (a) $e^{2x}x^2+c$ (b) $xe^{2x}+c$ (c) $2x^2e^2+c$ (d) $\frac{x^2e^x}{2}+c$

9. $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

   (a) $\log\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right|+c$ (b) $\log\left|\frac{e^x+1}{e^x}\right|+c$ (c) $\log\left|e^x\right|+c$ (d) $\log\left|e^x+1\right|+c$

10. $\int\left[\frac{9}{x-3}-\frac{1}{x+1}\right]dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

   (a) $\log|x-3|-\log|x+1|+c$
   (b) $\log|x-3|+\log|x+1|+c$
   (c) $9\log|x-3|-\log|x+1|+c$
   (d) $9\log|x-3|+\log|x+1|+c$

11. $\int \frac{2x^3}{4+x^4}\,dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

(a) $\log\left|4+x^4\right|+c$ (b) $\frac{1}{2}\log\left|4+x^4\right|+c$

(c) $\frac{1}{4}\log\left|4+x^4\right|+c$ (d) $\log\left|\frac{2x^3}{4+x^4}\right|+c$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-36}}$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

(a) $\sqrt{x^2-36}+c$

(b) $\log\left|x+\sqrt{x^2-36}\right|+c$

(c) $\log\left|x-\sqrt{x^2-36}\right|+c$

(d) $\log\left|x^2+\sqrt{x^2-36}\right|+c$

13. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

(a) $\sqrt{x^2+3x+2}\ +c$

(b) $2\sqrt{x^2+3x+2}+c$

(c) $\log\left(x^2+3x+2\right)+c$

(d) $\frac{2}{3}\left(x^2+3x+2\right)^{\frac{3}{2}}+c$

14. $\int_0^1 (2x+1)\,dx$ -ன் மதிப்பு

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

15. $\int_2^4 \frac{dx}{x}$ -ன் மதிப்பு

(a) log 4 (b) 0 (c) log 2 (d) log 8

16. $\int_0^\infty e^{-2x}\,dx$ -ன் மதிப்பு

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) $\frac{1}{2}$

17. $\int_{-1}^1 x^3\, e^{x^4}\,dx$ -ன் மதிப்பு

(a) 1 (b) $2\int_0^1 x^3\, e^{x^4}\,dx$ (c) 0 (d) e^{x^4}

18. $f(x)$ ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு மற்றும் $a<c<b$ எனில் $\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$ -க்கு சமமான தொகையிடல்,

(a) $\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^c f(x)\,dx$

(b) $\int_a^c f(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx$

(c) $\int_a^b f(x)\,dx$

(d) 0

19. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$ -ன் மதிப்பு

(a) 0 (b) 2 (c) 1 (d) 4

20. $\int_0^1 \sqrt{x^4(1-x)^2}\,dx$ -ன் மதிப்பு

(a) $\frac{1}{12}$ (b) $\frac{-7}{12}$ (c) $\frac{7}{12}$ (d) $\frac{-1}{12}$

21. $\int_0^1 f(x)\,dx=1,\ \int_0^1 x\,f(x)\,dx=a$ மற்றும் $\int_0^1 x^2\,f(x)\,dx=a^2$ எனில், $\int_0^1 (a-x)^2\,f(x)\,dx$ -ன் மதிப்பு

(a) $4a^2$ (b) 0 (c) $2a^2$ (d) 1

22. $\int_2^3 f(5-x)\,dx-\int_2^3 f(x)\,dx$ -ன் மதிப்பு

(a) 1 (b) 0 (c) −1 (d) 5

23. $\int_0^4\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ -ன் மதிப்பு

(a) $\frac{20}{3}$ (b) $\frac{21}{3}$

(c) $\frac{28}{3}$ (d) $\frac{1}{3}$

24. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \, dx$ -ன் மதிப்பு

(a) $\log 2$ (b) 0

(c) $\log\sqrt{2}$ (d) $2\log 2$

25. காமா சார்புக்கான காரணிய பெருக்க அடிப்படையில் $n = 8$ எனும்பொழுது $\Gamma(n)$ -ன் மதிப்பு

(a) 5040 (b) 5400 (c) 4500 (d) 5540

26. $\Gamma(n)$ -ன் மதிப்பு

(a) $(n-1)!$ (b) $n!$

(c) $n\Gamma(n)$ (d) $(n-1)\Gamma(n)$

27. $\Gamma(1)$ -ன் மதிப்பு

(a) 0 (b) 1 (c) n (d) $n!$

28. $n > 0$ எனில், $\Gamma(n)$ –க்கு சமமான தொகையீடு

(a) $\int_0^1 e^{-x}x^{n-1}dx$ (b) $\int_0^1 e^{-x}x^{n}dx$

(c) $\int_0^\infty e^{x}x^{-n}dx$ (d) $\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$

29. $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ –ன் மதிப்பு

(a) $\sqrt{\pi}$ (b) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(c) $2\sqrt{\pi}$ (d) $\frac{3}{2}$

30. $\int_0^\infty x^4 e^{-x} dx$ -ன் மதிப்பு

(a) 12 (b) 4 (c) $4!$ (d) 64

இதர கணக்குகள்

பின் வருவனவற்றை மதிப்பிடுக:

1. $\int \frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}} dx$
2. $\int \frac{dx}{2-3x-2x^2}$
3. $\int \frac{dx}{e^x+6+5e^{-x}}$
4. $\int \sqrt{2x^2-3}\, dx$
5. $\int \sqrt{9x^2+12x+3}\, dx$
6. $\int (x+1)^2 \log x \, dx$
7. $\int \log\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) dx$
8. $\int_0^1 \sqrt{x(x-1)}\, dx$
9. $\int_{-1}^1 x^2 e^{-2x} dx$
10. $\int_0^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{5x+1}}$

தொகுப்புரை

- **வருவித்தச் சார்பு மற்றும் தொடக்க நிலைச் சார்புக்கான தொடர்பு:**

  வருவித்தச் சார்பு $f(x)$-க்கான தொடக்க நிலைச் சார்பு $F(x)$ எனில், $\frac{d}{dx}\left[F(x)\right]=f(x)$ ஆகும்.

- **சார்பின் தொகையீடு:**

  கொடுக்கப்பட்ட ஒரு சார்பினுடைய தொகையிடலை நிர்ணயிக்கும் செயல்பாடானது அச்சார்பின் தொகையீடு என வரையறுக்கப்படுகிறது

- **வரையறாத் தொகையீட்டின் பண்புகள்:**

  $$\int a\,f(x)\;dx = a\int f(x)\;dx$$

  $$\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)\;dx \pm \int g(x)\;dx$$

- **வரையறாத் தொகையீட்டின் சில திட்டமான முடிவுகள்:**

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c\,,\; n\neq -1$
2. $\int \frac{1}{x}dx \;=\; \log|x|+c$
3. $\int e^x\,dx = e^x+c$
4. $\int a^x\;dx = \frac{1}{\log a}\,a^x+c, a>0$ மற்றும் $a\neq 1$
5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
6. $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
7. $\int \sec^2 x\,dx \;=\; \tan x + c$
8. $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$
9. $\int\left[f(x)\right]^n f'(x)dx = \frac{\left[f(x)\right]^{n+1}}{n+1}+c, n\neq -1$
10. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)|+c$
11. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)}+c$
12. $\int udv = uv - \int vdu$
13. $\int udv = uv - u'v_1 + u''v_2 - u'''v_3 + \ldots$
14. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$
15. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c$
18. $\int e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx \;=\; e^x f(x)+c$
19. $\int e^{ax}\left[a\,f(x)+f'(x)\right]dx = e^{ax} f(x)+c$
20. $\int\sqrt{x^2-a^2}\;dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$
21. $\int\sqrt{x^2+a^2}\;dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c$

- **வரையறுத்த தொகையீடு:**

  $f(x)$ என்ற சார்பு [a,b] என்ற மூடிய இடைவெளியில் தொடர்ச்சியுடையதாகவும், மேலும் $f(x)$-ன் எதிர்மறை வகையீடானது $F(x)$ எனில், $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ ஆகும்.

- **வரையறுத்த தொகையீட்டின் பண்புகள்:**

  (i) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$

  (ii) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

  (iii) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

  (iv) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

  (v) $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

  (vi) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

  (vii) a) $f(x)$ ஓர் இரட்டைச் சார்பு எனில், $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

  b) $f(x)$ ஓர் ஒற்றைச் சார்பு எனில், $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

- **காமா தொகையீட்டில் ஒரு குறிப்பிட்ட நிலை:**

  n ஒரு மிகை முழு எண் எனில், $\int_0^\infty x^n e^{-ax}\, dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$

- **காமா சார்பின் பண்புகள்:**

  (i) $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1),\ n>1$

  (ii) $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n),\ n>0$

  (iii) $\Gamma(n+1) = n!$, n ஒரு மிகை முழு எண்

  (iv) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

- **வரையறுத்த தொகையீட்டின் கூட்டல் எல்லை :**

  $[a, b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் $f(x)$ ஆனது தொடர்ச்சியான மெய்மதிப்புகளைக் கொண்ட சார்பு என்க. இவ்விடைவெளியானது "h" எனும் சம அகலத்தைக் கொண்ட n உள்இடைவெளிகளாக பிரிக்கப்படுமானால்

  $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{r=1}^{n} h\, f(a+rh) \text{ ஆகும். இங்கு } h = \frac{b-a}{n}$$

- **முடிவுகள் :**

  (i) $1+2+3+......n = \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{r=1}^{n} r$

  (ii) $1^2+2^2+3^2+......n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \sum_{r=1}^{r=n} r^2$

  (iii) $1^3+2^3+3^3+......n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \sum_{r=1}^{r=n} r^3$

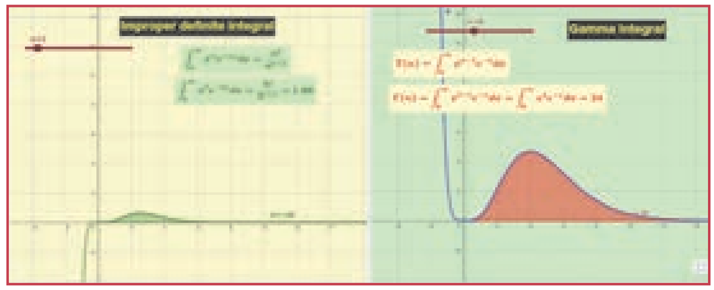
கலைச்சொற்கள் (GLOSSARY)	
அடுக்கு விதி	Power rule
அடுக்கைச் சார்பு / அடுக்குகுறிச் சார்பு	Exponential function
அடுத்தடுத்த / தொடர்ச்சியான	Successive
அணுகுதல் / நெருங்குதல்	Approaches
அறமச் சார்பு / இயற் கணிதச் சார்பு	Algebraic function
அறுதியிடப்படாத தொகையீடு / வரையறாதத் தொகையீடு	Indefinite integral
இணைத் தொடுகோடுகள்	Parallel tangents
இயல் மடக்கை	Natural logarithm
இறுதிநிலைச் சார்பு	Marginal function
உடனடியயாக	Instantaneous
உத்தி / நுட்பம்	Technique
உள்வரை	Inscribe
எதிர் மறை செயல்	Reverse process
எதிர்மறை வகையீடு	Anti derivative
ஏதேனுமொரு / தன்னிச்சையான	Arbitrary
ஏற்புடைய / பொருத்தமான	Suitable
ஒருமைத் தன்மை கொண்ட சார்பு	Unique function
கணியம் / அளவு	Quantity
கருத்துரு	Concept
காரணக்காரிய முறை	Rationalisation method
கீழ் எல்லை	Lower limit
குத்தாயம் / நிலைத் தூரம்	Ordinate
குறிப்பிடப்பட்ட எல்லைகளுக்குள்	Between the specified limits
குறைப்பு / சுருக்கல்	Reduction
கூடுதல் / கூட்டல் தொகை	Summation
திட்ட வடிவம்	Standard form
திறந்த இடைவெளி	Open interval
தொகை / தொகையீடு	Integral
தொகைக்காண் சார்பு / தொகைக் காண்பான்	Integrand
தொகைப்பான்	Integrator
தொகையிடத்தக்கச் சார்பு	Integrable function
தொகையிடல்	Integration
தொகையிடல் மாறி	Variable of integration

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 60 3/5/2020 11:08:00 AM

தொகையிடல் மாறிலி	Constant of integration
தொகையிடு / தொகையிட	Integrate
தொடர் முறைத் தொகையீடு / மீண்டும் மீண்டும் தொகையிடப்பட்ட	Repeated integral
தொடர் வகையிடல்கள் / அடுத்தடுத்த வகையிடல்கள்	Successive derivatives
தொடர்ச்சியான சார்பு	Continuous function
தோராயமாக	Approximate
நிச்சயமான / உறுதியான	Certain
நுண்ம மதிப்பு / புலனாகாத மதிப்பு	Abstract value
நேரிடையாக தொகையிட	Directly integrate
நேர் மாற்று கோணவியல் சார்பு / நேர்மாறு திரிகோணமிதி சார்பு	Inverse trigonometric function
பகுதிப் படுத்தித் தொகையிடல் / பகுதித் தொகையிடல்	Integration by parts
பகுதிப் பின்னம்	Partial fraction
பிரதியிடல் / ஈடு செய்தல்	Substitution
பிரதியிட்டுத் தொகையிடல்	Integration by substitution
பிரித்தல் / கூறாக்கல்	Decomposition
மடக்கை சார்பு	Logarithmic function
மட்டாயம் / கிடை தூரம்	Abscissa
மாறா உறுப்பு	Constant term
மாறியின் மாற்றம்	Change of variable
மிகை முழு எண்	Positive integer
முக்கோண கணிப்பு சார்பு / திரிகோணமிதிச்சார்பு	Trigonometric function
முடிவிலி / கந்தழி / எண்ணிலி	Infinity
மூடிய இடைவெளி	Closed interval
மூலமுதலான சார்பு / தொடக்க நிலைச் சார்பு	Primitive function
மேல் எல்லை	Upper limit
வகைக்கெழு / வகையீட்டு கெழு	Differential coefficient
வகையிடத்தக்கச் சார்பு	Differentiable function
வகையிடல்	Differentiation
வரம்புள்ள பகுதி	Bounded region
வருவித்தச் சார்பு	Derived function
வரையறுத்த தொகை / வரையறுத்த தொகையீடு	Definite integral
வர்க்க நிறைவாக்கல்	Completing the square
வளைவரைகளின் தொகுதி	Family of curves

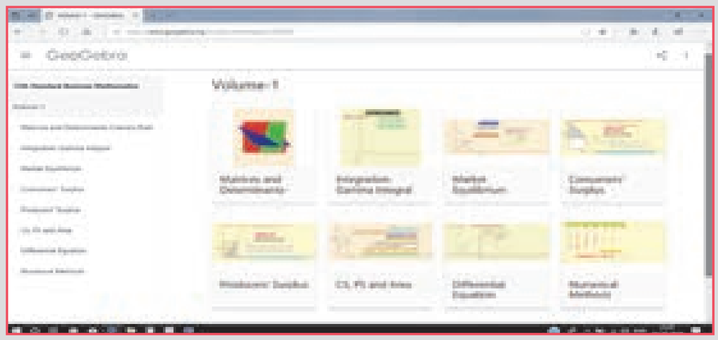
இணையச் செயல்பாடு

செயல்பாட்டின் இறுதியில் எதிர்பார்க்கப்படும் விளைவு



படி 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி இச்செயல்பட்டிற்கான இணையப் பக்கத்திற்குச் செல்க. பின்பு "12th Standard Business Mathematics and Statistics" என்னும் திரையில் "Volume–1" யை தெரிவு செய்யவும்.



படி 2

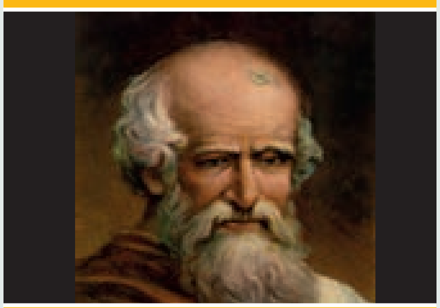
"Integration–Gamma Integral" என்னும் பயிற்சித்தாளினை தெரிவுசெய்துகொள்ளவும். பின்பு திரையில் தோன்றும் வரைபடத்தில், கொடுக்கப்பட்டுள்ள நழுவானை (slider) பயன்படுத்தி n மதிப்பினை நகர்த்தினால் வரைபடத்தின் தோன்றும் மாற்றத்தை தெரிந்துகொள்ளலாம்.

செயல்பாட்டிற்கான உரலி : **https://ggbm.at/uzkcrnwr**

அல்லது விரைவுக் குறியீடு **(QR Code)**

B247_12_BUS_MAT_TM

3 தொகை நுண்கணிதம்–II



ஆர்க்கிமிடிஸ்

[கி.மு. (பொ.ஆ.மு.) 287 – கி.மு. (பொ.ஆ.மு.) 217]

அறிமுகம்

தொகையீடலின் வரலாறு 2500 ஆண்டுகளுக்கு முன்பிருந்தே தொடங்கப்பட்டு விட்டது. கிரேக்க கணிதவியலார் ஆண்டிஃபான் அவர்கள் [கி.மு. (பொ.ஆ.மு.) 430] எளிய பலகோணங்கள் மற்றும் சிக்கலான வளைவரைகளின் பரப்புகளை "முழுமையாக்கும் முறையில்" காணும் முறையை அறிமுகப்படுத்தினார். (முழுமையாக்கும் முறை என்பது கொடுக்கப்பட்ட பரப்பை எண்ணற்ற முக்கோணங்களாக பிரித்து பரப்பு காணுதல்) சிக்கலான வளைவரைகளால் சூழப்பட்ட பரப்பினை முழுமையாக்கும் முறையில் காணுதலை முதன் முதலில் ஆண்டிஃபன் கண்டுபிடித்திருந்தாலும், கணிதமேதை யுடாக்சஸ் அவர்கள் முழுமையாக்கும் முறையை தர்க்க ரீதியாக மேம்படுத்தினார். பின்வரும் நாள்களில் யூக்ளிட் அவர்கள், வட்டத்தின் பரப்பை காண்பதற்கு முழுமையாக்கும் முறையை பயன்படுத்தினார்.

ஆர்க்கிமிடிஸ் [கி.மு. (பொ.ஆ.மு.) 287 – கி.மு. (பொ.ஆ.மு.) 217] அவர்களும் இதே முழுமையாக்கும் முறையை பயன்படுத்தி, பரவளையத்தால் சூழப்பட்ட பரப்பை கண்டறிந்தார். முழுமையாக்கும் முறையே, தொகையீடல் மூலம் வளைவரைகளால் சூழப்பட்ட பரப்பை காணும் முறையாக மேம்படுத்தப்பட்டது. தொகையீடல் மூலம் பரப்பை காணும் முறையை இந்த அத்தியாத்தில் நாம் காண்போம்.

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தை படித்த பின்பு, பின்வரும் பாடக் கருத்துக்களை மாணவர்கள் நன்கு புரிந்து கொள்ள இயலும்.

C4YS65

- வரையறுக்கப்பட்ட தொகையீட்டின் வடிவ கணித விளக்கம்
- வளைவரையால் சூழப்பட்ட அரங்கத்தின் பரப்பை தொகையீடலை பயன்படுத்திக் காணல்.
- நுகர்வோர் உபரி மற்றும் உற்பத்தியாளர் உபரியின் கருத்துக்கள்.
- பொருளாதாரம் மற்றும் வணிகவியலில் தொகையீடலின் பயன்பாடுகள்.

3.1 கொடுக்கப்பட்ட வளைவரையின் கீழ் அமைந்த அரங்கத்தின் பரப்பு (The area of the region bounded by the curve)

ஆய அச்சுகளுடன் ஒரு வளைவரை ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பை தொகையீடல் மூலம் நாம் காணலாம். இரு வளைவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட பரப்பை கணக்கிடும் முறையையும் இங்கு நாம் காண்போம்.

3.1.1 வரையறுக்கப்பட்ட தொகையீடலின் வடிவகணித விளக்கம் (Geometrical Interpretation of Definite Integral as Area under a curve):

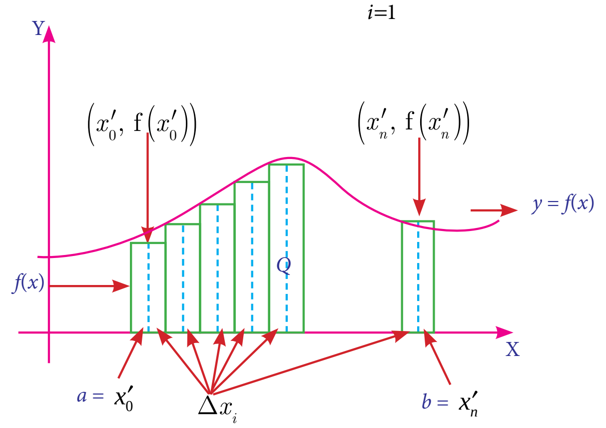
$x=a$ மற்றும் $x=b$ எனும் எல்லைகளுக்குள், x அச்சுடன் $y=f(x)$ எனும் வளைவரை ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பை நாம் காண்பதாகக் கொள்வோம்.

படம் 3.1 லிருந்து. இடைவெளி $[a\ b]$ ஆனது Δx_i அளவுடைய $[x_{i-1},\ x_i]$ எனும் n சிறு இடைவெளிகளாக பிரிக்கப்படுகிறது என்க.

அதாவது $x_i - x_{i-1} = \Delta_{xi}$ ஏதேனும் ஒரு $x_i' \in [x_{i-1},\ x_i]$க்கு $f(x_i')$ என்பது Δx_i அடிப்பக்கமாக கொண்ட n செவ்வகங்களின் உயரம் என்க.

i வது செவ்வகத்தின் பரப்பு $\quad A_i = \Delta x_i f(x_i')$.

சூழப்பட்ட மொத்தப்பரப்பு $A = \sum_{i=1}^{n} f(x_i')\Delta x_i$



படம் 3.1

வரையறுக்கப்பட்ட தொகையீடலின் வரையறையிலிருந்து $f(x)$ என்பது $[a,b]$, $a < b$ இல் வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு எனில் வரையறுக்கப்பட்ட தொகையீடானது

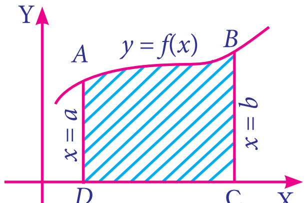
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i')\Delta x_i \text{ ஆகும்.}$$

வளைவரைக்கு கீழ் அமைந்த பரப்பானது, செவ்வகங்களின் எண்ணிக்கையை எண்ணற்றவையாக அதிகரிக்கும் பொழுது முழுமையாகிறது. இதுவே வரையறுக்கப்பட்ட தொகையீடலின் வடிவ கணித விளக்கமாகும்.

$y=f(x)$ என்ற வளைவரை, x அச்சு, $x = a$ மற்றும் $x = b$ ஆகியவற்றால் சூழப்பட்ட அரங்கத்தின் பரப்பானது,

$$A = \int_a^b y dx$$

$$= \int_a^b f(x) dx$$

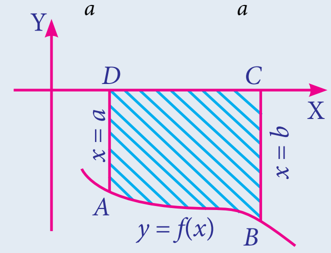


படம் 3.2

குறிப்பு

(i) $y = f(x)$ என்ற வளைவரை, x -அச்சு, $x = a$ மற்றும் $x = b$ எனும் எல்லைக்குள், x –அச்சுடன் ஏற்படுத்தப்படும் அரங்கத்தின் பரப்பு, x அச்சின் கீழ் அமையும் எனில்,

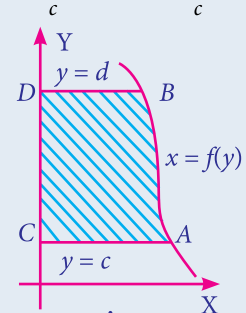
$$A = \int_a^b -y\ dx = -\int_a^b f(x)dx$$



படம் 3.3

(ii) $x = f(y)$ என்ற வளைவரை ஆனது $y=c$ மற்றும் $y=d$ என்ற எல்லைக்களுக்குள் y –அச்சுடன் ஏற்படுத்தப்படும் அரங்கத்தின் பரப்பு y –அச்சுக்கு வலப்புறம் அமையும் எனில்,

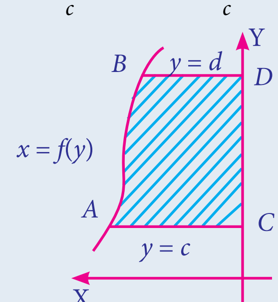
$$A = \int_c^d xdy \quad = \int_c^d f(y)dy$$



படம் 3.4

(iii) $x = f(y)$ எனும் வளைவரையானது $y=c$ மற்றும் $y=d$ எனும் எல்லைக்குள் y –அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பு y–அச்சுக்கு இடதுபுறம் அமையும் எனில்,

$$A = \int_c^d -xdy \ = -\int_c^d f(y)dy$$



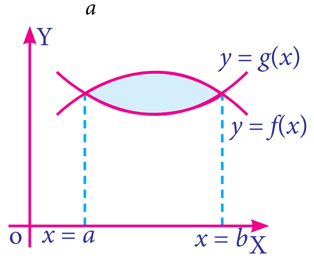
படம் 3.5

இரு வளைவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட பரப்பு (Area between two curves)

$f(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்பன $[a, b]$-ல் வறையறுக்கப்பட்ட $f(x) > g(x),\ a \le b$ எனுமாறு உள்ள, தொடர்ச்சியான இரு சார்புகள் என்க.

$x=a$ மற்றும் $x=b$ எனும் எல்லைகளுக்குள் இவ்வளைவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட பரப்பு

$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx.$$

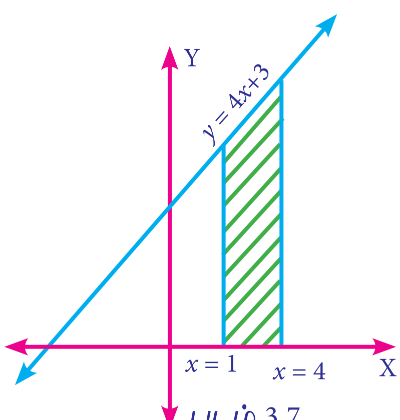


படம் 3.6

எடுத்துக்காட்டு 3.1

$y = 4x + 3$ என்ற வளைவரை, x -அச்சு, $x=1$ மற்றும் $x=4$ ஆகியவற்றுடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு:



படம் 3.7

$$\text{பரப்பு} = \int_1^4 y\,dx$$

$$= \int_1^4 (4x+3)\,dx$$

$$= \left[2x^2 + 3x \right]_1^4 = 32 + 12 - 2 - 3$$

$= 39$ சதுர அலகுகள்.

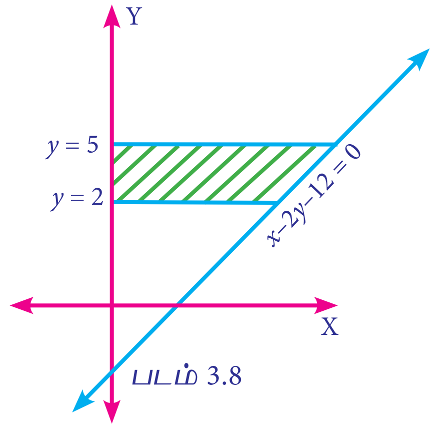
எடுத்துக்காட்டு 3.2

$x - 2y - 12 = 0$ என்ற வளைவரையானது y -அச்சு, $y = 2$ மற்றும் $y = 5$ என்ற கோடுகளுடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

$$x - 2y - 12 = 0$$

$$x = 2y + 12$$



படம் 3.8

தேவைப்படும் பரப்பு

$$= \int_2^5 x\,dy$$

$$= \int_2^5 (2y+12)\,dy = \left[y^2 + 12y \right]_2^5$$

$= (25+60) - (4+24) = 57$ சதுர அலகுகள்.

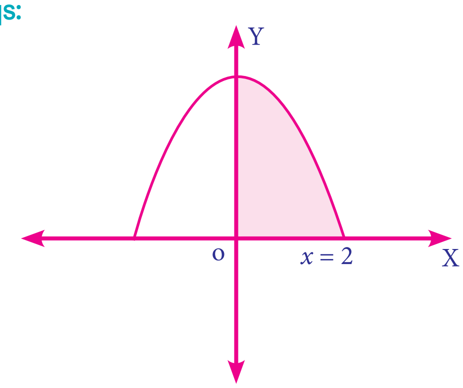
உங்களுக்கு தெரியுமா?

$y = mx+c$ என்ற கோடு $x = 0$ மற்றும் $x = a$ எனும் எல்லைகளுக்குள் x-அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பு $= \left| \frac{1}{2}(a)[(x = 0\right.$ எனும்போது y -ன் மதிப்பு$) + (x = a$ எனும்போது y -ன் மதிப்பு$)]\left.\right|$

எடுத்துக்காட்டு 3.3

$y = 4 - x^2$ என்ற பரவளையம், x -அச்சு, $x = 0$ மற்றும் $x = 2$ என்ற கோடுகளுடன் ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வுs:



படம் 3.9

$$y = 4 - x^2$$

தேவையான பரப்பளவு $= \int_0^2 y\,dx = \int_0^2 (4 - x^2)\,dx$

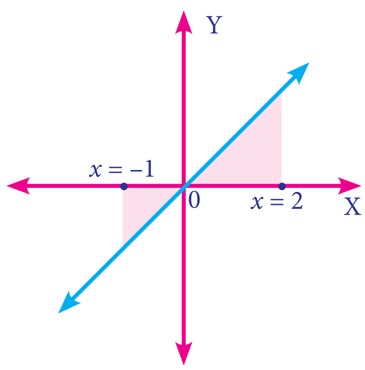
$$= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 8 - \frac{8}{3}$$

$$= \frac{16}{3}$$ சதுர அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 3.4

$y = x$ மற்றும் $x = -1$, $x = 2$ எனும் எல்லைகளுக்குட்பட்ட அரங்கத்தின் பரப்பு காண்க.

தீர்வு:



படம் 3.10

தேவைப்படும் பரப்பு $= \int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_0^2 x\,dx$

$$= -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = -\left[0 - \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{4}{2} - 0\right]$$

$$= \frac{5}{2}$$ சதுர அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 3.5

$y^2 = 8x$ என்ற பரவளையம் அதன் செவ்வகலத்துடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பைப் காண்க.

தீர்வு

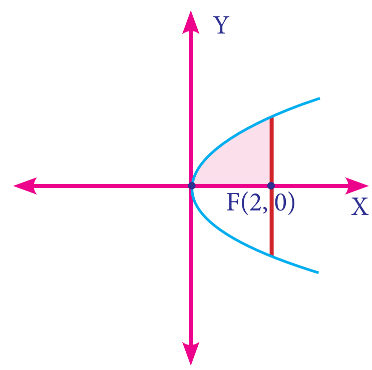
$$y^2 = 8x \qquad (1)$$

திட்ட வடிவம் $y^2 = 4ax$, உடன் ஒப்பிட

$$4a = 8$$

$$a = 2$$

செவ்வகலத்தின் சமன்பாடு : $x = 2$



படம் 3.11

சமன்பாடு (1) ஆனது x -அச்சை பொருத்து சமச்சீர் ஆதலால்,

தேவையான பரப்பு = 2 [முதல் கால்பகுதியில் சமன்பாடு 1ஆனது $x = 0$ மற்றும் $x = 2$ எனும் எல்லைகளுக்குள் ஏற்படுத்தும் பரப்பு]

$$= 2\int_0^2 y\,dx$$

$$= 2\int_0^2 \sqrt{8x}\,dx = 2\left(2\sqrt{2}\right)\int_0^2 x^{1/2}\,dx$$

$$= 4\sqrt{2}\left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^2 = 4\sqrt{2} \times 2 \times \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3}$$

$$= \frac{32}{3}$$ சதுர அலகுகள்.

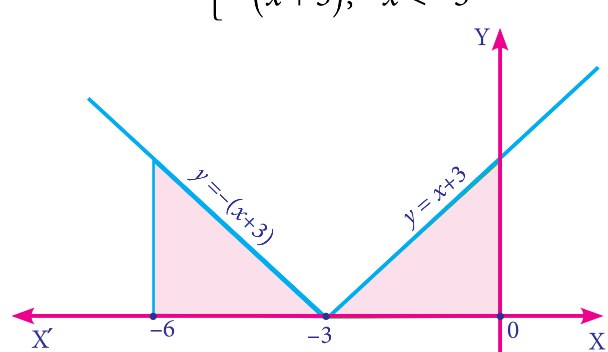
எடுத்துக்காட்டு 3.6

$y = |x + 3|$ என்ற வளைவரையை வரைக.

மேலும் $\int_{-6}^{0} |x + 3|\,dx$ -இன் மதிப்பைக்காண்க.

தீர்வு:

$$y = |x + 3| = \begin{cases} x + 3, & x \geq -3 \\ -(x + 3), & x < -3 \end{cases}$$



படம் 3.12

$$\text{தேவைப்படும் பரப்பு} = \int_{-6}^{0} y\,dx$$

$$= \int_{-6}^{-3} y\,dx + \int_{-3}^{0} y\,dx$$

$$= \int_{-6}^{-3} -(x+3)\,dx + \int_{-3}^{0} (x+3)\,dx$$

$$= -\left[\frac{(x+3)^2}{2}\right]_{-6}^{-3} + \left[\frac{(x+3)^2}{2}\right]_{-3}^{0}$$

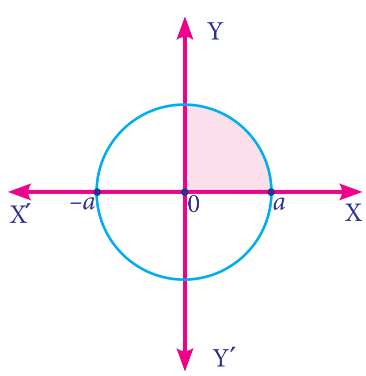
$$= -\left[0-\frac{9}{2}\right] + \left[\frac{9}{2}-0\right] = 9 \text{ சதுர அலகுகள்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.7

தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி a அலகு ஆரம் உடைய வட்டத்தின் பரப்பைக்காண்க.

$\left[\text{குறிப்பு: } \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + c\right]$

தீர்வு



படம் 3.13

வட்டத்தின் சமன்பாடு, $x^2 + y^2 = a^2$ ... (1)

$y = 0$ என (1) -ல் பிரதியிட $x^2 = a^2$

$\Rightarrow \quad x = \pm a$

கொடுக்கப்பட்ட வளைவரை ஆனது இரு அச்சுகளைப் பொறுத்து சமச்சீர் ஆகும். எனவே

தேவைப்படும் பரப்பு $= 4$ [முதல் கால்பகுதியில் $x = 0$, $x = a$ எனும் எல்லைக்குள் வரையறுக்கப்படும் அரங்கத்தின் பரப்பு]

$$= 4\int_0^a y\,dx$$

$$= 4\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = 4\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

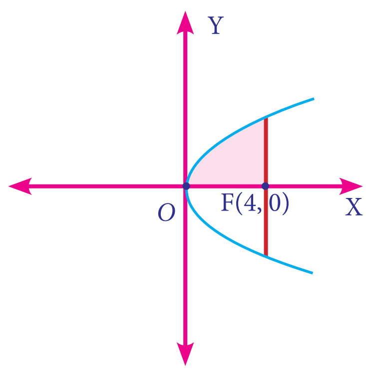
$$= 4\left[0+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{a}{a}\right)\right] = 4\left(\frac{a^2}{2}\sin^{-1}(1)\right) = 4\,\frac{a^2}{2}\,\frac{\pi}{2}$$

$= \pi a^2$ சதுர அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 3.8

தொகையிடல் முறையைப் பயன்படுத்தி $y^2 = 16x$ என்ற பரவளையும் $x = 4$ என்ற கோட்டுடன் ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு:



படம் 3.14

$y^2 = 16x$ என்பது வலது புறமாக திறந்திருக்கும் பரவளையமாகும்.

$$\text{தேவைப்படும் பரப்பு} = 2\int_a^b y\,dx$$

$$= 2\int_0^4 \sqrt{16x}\,dx \qquad \text{(பரவளையம் } x\text{- அச்சை பொருத்து சமச்சீர்)}$$

$$= 8\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx = 8\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$= \frac{16}{3}\left((4)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{128}{3} \text{ சதுர அலகுகள்.}$$

பயிற்சி 3.1

1. தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி $2y + x = 8$ என்ற கோடு, x -அச்சு மற்றும் $x = 2$, $x = 4$ என்னும் எல்லைக்குள் ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

2. $y-2x-4=0$ என்ற கோடு, $y=1$ மற்றும் $y=3$ எனும் எல்லைக்குள் y–அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பைக் காண்க.

3. $y^2=4ax$ என்ற பரவளையம் அதன் செவ்வக லத்துடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பைக் காண்க.

4. $y = x$ எனும் கோடு, x -அச்சு, $x = 1$ மற்றும் $x = 2$ எனும் எல்லைக்குள் ஏற்படுத்தும் பரப்பைக் காண்க.

5. தொகையிடலை பயன்படுத்தி $y-1=x$ என்ற கோடு, x -அச்சு, $x = -2$ மற்றும் $x = 3$ என்னும் எல்லைக்குள் ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

6. தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி $y=4x^2$ என்ற பரவளையம், $x = 0$, $y = 0$ மற்றும் $y = 4$ எனும் கோடுகளுடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பைக் காண்க.

7. $y=x^2$ என்ற பரவளையத்திற்கும் $y = 4$ என்ற கோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட பரப்பைக் காண்க.

3.2 பொருளாதாரம் மற்றும் வணிகவியலில் தொகையீட்டின் பயன்பாடுகள் (Application of Integration in Economics and Commerce).

இதற்கு முந்தைய பாடப்பகுதியில் மொத்த செலவுச் சார்பு, மொத்த வருவாய் சார்பு மற்றும் தேவைச் சார்பு கொடுக்கப்பட்டு இருப்பின் அதற்கான இறுதிநிலை செலவுச்சார்பு, இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு மற்றும் தேவை நெகிழ்ச்சி காணும் முறைகளை(க்) கற்றோம். அதற்கு மாறாக இறுதிநிலைச் சார்பு கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் மொத்த சார்பைக் காணும் முறையை இங்கு காணலாம்.

3.2.1. இறுதிநிலை செலவுச்சார்பிலிருந்து மொத்த செலவுச்சார்பைக் காணுதல் (Cost functions from marginal cost functions)

மொத்த செலவுச் சார்பு C மற்றும் x என்பது உற்பத்தியின் அளவு எனில்,

இறுதி நிலைச்செலவுச் சார்பு: $MC=\dfrac{dC}{dx}$ ஆகும்.

$\therefore$ செலவுச் சார்பு : $C=\int (MC)\,dx+k$

இங்கு k என்பது தொகையீட்டின் மாறிலி. கணக்கில் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களைப் பயன்படுத்தி k -ன் மதிப்பைக் காணலாம்.

மேலும், சராசரி செலவுச் சார்பு : $AC=\dfrac{C}{x},\ x\neq 0$

எடுத்துக்காட்டு 3.9

காலணிகளின் உற்பத்தியின் எண்ணிக்கை x–ஐ பொறுத்த இறுதிநிலை செலவு $6+10x-6x^2$ என்க. ஒரு ஜோடி காலணிகள் உற்பத்திக்கான செலவு ₹12 எனில், மொத்தச் செலவு மற்றும் சராசரி செலவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட இறுதிநிலை செலவுச் சார்பு :

$$MC = 6+10x-6x^2$$

$$\begin{aligned} C &= \int MC\,dx + k \\ &= \int\left(6+10x-6x^2\right)dx+k \\ &= 6x+5x^2-2x^3+k \qquad (1) \end{aligned}$$

$x = 2$ எனும் போது $C = 12$

$$\therefore 12 = 12+20-16+k$$

$$\boxed{k=-4}$$

$$C = 6x+5x^2-2x^3-4$$

சராசரி செலவு : $\dfrac{C}{x}=\dfrac{6x+5x^2-2x^3-4}{x}$

$$=6+5x-2x^2-\frac{4}{x}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.10

ஒரு நிறுவனத்தில், x அலகு பொருள்கள் தயாரிப்பதற்கான இறுதிநிலைச் செலவு $MC=125+10x-\dfrac{x^2}{9}$. இதன் மாறாச் செலவு ₹250 எனில் 15 அலகுகள் தயாரிப்பதற்கான செலவைக் காண்க.

தீர்வு:

$$MC = 125+10x-\frac{x^2}{9}$$

$$\begin{aligned} C &= \int MC\,dx + k \\ &= \int\left(125+10x-\frac{x^2}{9}\right)dx+k \\ &= 125x+5x^2-\frac{x^3}{27}+k \end{aligned}$$

நிலையான செலவு : $k = 250$

$$\therefore C = 125x+5x^2-\frac{x^3}{27}+250$$

$x = 15$ எனில்,

$$C = 125(15) + 5(15)^2 - \frac{(15)^3}{27} + 250$$

$$= 1875 + 1125 - 125 + 250$$

$$C = ₹\,3{,}125$$

எடுத்துக்காட்டு 3.11

இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு $MC = 2 + 5e^x$ எனில், (i) $C(0)=100$ எனும் போது C யைக் காண்க. (ii) சராசரிச் செலவு AC -ஐக் காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட $MC = 2 + 5e^x$

$$C = \int MC\, dx + k$$

$$= \int (2 + 5e^x)\, dx + k$$

$$= 2x + 5e^x + k$$

(i) $x = 0,\ C = 100 \Rightarrow$

$$100 = 2(0) + 5(e^0) + k$$

$$\boxed{k = 95}$$

$$\therefore C = 2x + 5e^x + 95.$$

(ii) சராசரி விலை $= \dfrac{C}{x} = \dfrac{2x + 5e^x + 95}{x}$

$$AC = 2 + \frac{5e^x}{x} + \frac{95}{x}.$$

வளர்ச்சி வீதம் அல்லது விற்பனை வீதம் (Rate of growth or sale)

ஒரு சார்பின் வளர்ச்சி வீதம் அல்லது விற்பனை வீதமானது t-ல் ஒரு சார்பு என்க. இங்கு t என்பது கால அளவைக் குறிக்கும். எனவே, t கால அளவில் உற்பத்தி பொருளின் மொத்த வளர்ச்சி அல்லது மொத்த விற்பனையானது

$\int_0^r f(t)\,dt,\ 0 \le t \le r$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.12

புதிய உற்பத்தி பொருளின் விகிதச் சார்பு $f(x) = 100 - 90e^{-x}$ என்க. இங்கு x என்பது சந்தையில் அப்பொருள் கிடைக்கும் நாள்களின் எண்ணிக்கை என்க. முதல் நான்கு நாள்களில் அந்த பொருளின் மொத்த விற்பனையைக் காண்க. $(e^{-4}=0.018)$

தீர்வு:

மொத்த விற்பனை $= \int_0^4 (100 - 90e^{-x})\,dx$

$$= \left(100x + 90e^{-x}\right)_0^4$$

$$= 400 + 90e^{-4} - (0 + 90)$$

$$= 400 + 90(0.018) - 90$$

$= 311.62$ அலகுகள்

எடுத்துக்காட்டு 3.13

ஒரு நிறுவனம் 200 தொழிலாளர்களைக் கொண்டு வாரத்திற்கு 50,000 அலகுப் பொருள்களை உற்பத்தி செய்கிறது. அதிகபடியான x-தொழிலாளர்களை வேலைக்கு அமர்த்துவதன் மூலம் பொருளின் உற்பத்தி வீதச் சார்பு $300 - 5x^{2/3}$ ஆகும். 64 தொழிலாளர்களை மிகுதியாக வேலைக்கு அமர்த்துவதன் மூலம் அந்நிறுவனம் உற்பத்தி செய்யும் பொருள்களின் எண்ணிக்கையை காண்க.

தீர்வு:

x தொழிலாளர்களைக் கொண்டு அதிகபடியாக உற்பத்தி செய்யும் பொருள்கள் p என்க.

$$\frac{dp}{dx} = 300 - 5x^{2/3}$$

$$p = \int_0^{64} \left(300 - 5x^{\frac{2}{3}}\right) dx$$

$$= \left[300x - 3x^{\frac{5}{3}}\right]_0^{64}$$

$$= 300 \times 64 - 3(64)^{5/3}$$

$$= 16128$$

$\therefore$ கூடுதலாக உற்பத்தி செய்யப்படும் அலகுகளின் எண்ணிக்கை 16,128 ஆகும்.

$\Rightarrow 264$ தொழிலாளர்களால் உற்பத்தி செய்யப்படும் மொத்த அலகுகளின் எண்ணிக்கை.

$= 50000 + 16128 = 66{,}128$ அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 3.14

ஒரு நிறுவனத்தின் விளம்பர பிரச்சாரத்திற்குப் பிறகு அதன் விற்பனை விகிதச் சார்பு $f(t) = 3000e^{-0.3t}$ ஆகும். இங்கு t என்பது விளம்பரத்திற்கு பிறகு உள்ள மாதங்களின்

எண்ணிக்கையை குறிக்கும். 4 மாதங்களுக்குப் பிறகு அந்நிறுவனத்தின் ஒட்டுமொத்த விற்பனையையும் மற்றும் ஐந்தாவது மாதத்தின் விற்பனையையும் காண்க. விளம்பரத்திற்கு பிறகு அந்நிறுவனம் பெறும் மொத்த விற்பனைக் காண்க. $\left[e^{-1.2}=0.3012,\ e^{-1.5}=0.2231\right]$.

தீர்வு:

t மாதங்களுக்குப் பிறகு நிறுவனத்தின் மொத்த விற்பனை $F(t)$ எனில் நிறுவனத்தின் விற்பனை விகிதச் சார்பு $\frac{d}{dt}F(t)=f(t)$

$$\therefore \mathrm{F}(t) = \int_0^t f(t)dt$$

4 மாதங்களுக்குப் பிறகு ஒட்டுமொத்த விற்பனை

$$\mathrm{F}(4) = \int_0^4 f(t)dt$$

$$= \int_0^4 3000e^{-0.3t}\,dt$$

$$=3000\left[\frac{e^{-0.3t}}{-0.3}\right]_0^4$$

$$=-10000\ \left[e^{-1.2}-e^{0}\right]$$

$$=-10000[0.3012-1]$$

$$= 6988$$

(ii) ஐந்தாவது மாதத்தின் விற்பனை

$$= \int_4^5 3000e^{-0.3t}\,dt$$

$$=3000\left[\frac{e^{-0.3t}}{-0.3}\right]_4^5$$

$$=-10000\left[e^{-1.5}-e^{-1.2}\right]$$

$$= -10000[0.2231-0.3012]$$

$= 781$ அலகுகள்

விளம்பரத்திற்கு பிறகு நிறுவனத்தின் மொத்த விற்பனை

$$=\int_0^\infty 3000e^{-0.3t}\,dt=\frac{3000}{-0.3}\left[e^{-0.3t}\right]_0^\infty$$

$$= -10000[0-1]$$

$= 10000$ அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 3.15

₹6,40,000 விலையுள்ள ஒரு இயந்திரமானது $f(t) = 20000\ t$ (t-ஆண்டுகளில்) என்ற சேமிப்பு விகிதச் சார்பின் செலவு சேமிப்புடன் ஈடு செய்ய எத்தனை ஆண்டுகளாகும் ?

தீர்வு:

செலவு சேமிப்பு $S(t) = \int_0^t 20000\,t\,dt$

$= 10000\ t^2$

மொத்த செலவை ஈடுசெய்வதற்கான காலம்,

$$10000\ t^2 = 640000$$

$$t^2 = 64$$

$$t = 8$$

8 ஆண்டுகளில் இயந்திரத்தின் செலவை ஈடு செய்யலாம்.

3.2.2 இறுதிநிலை வருவாய் சார்பிலிருந்து வருவாய்ச்சார்பு மற்றும் தேவைச்சார்பு (Revenue function and Demand function from Marginal revenue function)

கொடுக்கப்பட்டுள்ள இறுதிநிலை வருவாய் (Marginal revenue) சார்பிலிருந்து மொத்த வருவாய் (Revenue function) மற்றும் தேவைச் சார்பு(Demand function) காணுதல்.

R என்பது வருவாய் சார்பு எனில்

இறுதிநிலை வருவாய்ச் சார்பு: $MR=\frac{dR}{dx}$

x யை பொறுத்து தொகைக் காண,

வருவாய் சார்பு : $R=\int(MR)\,dx+k.$

இதில் k என்பது ஒரு மாறிலி, இம்மாறிலியின் மதிப்பை $x=0$ மற்றும் $R=0$ எனப் பிரதியிட்டு காணலாம்.

தேவையானச் சார்பு : $p=\frac{R}{x},\quad x\neq 0.$

எடுத்துக்காட்டு 3.16

இறுதி நிலை வருவாய் சார்பு $MR=35+7x-3x^2$ எனில், வருவாய் சார்பு மற்றும் தேவைச் சார்பு காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட $MR = 35+7x-3x^2$

$$R = \int (MR)\, dx + k$$

$$= \int \left(35+7x-3x^2\right) dx + k$$

$$R = 35x + \frac{7}{2}x^2 - x^3 + k$$

$x=0$ எனும்பொழுது $R = 0 \quad \therefore\ k=0$

$$R = 35x + \frac{7}{2}x^2 - x^3$$

தேவையானச் சார்பு : $p = \dfrac{R}{x}$

$$p = 35 + \frac{7}{2}x - x^2.$$

எடுத்துக்காட்டு 3.17

ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு $MR = \dfrac{a}{(x+b)^2} - c$. இங்கு x என்பது பொருள்களின் உற்பத்தி மற்றும் a, b, c என்பன மாறிலிகள் எனில், தேவைச் சார்பு $x = \dfrac{a}{b\,(p+c)} - b$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட $MR = a\,(x+b)^{-2} - c$

$$R = \int a\left(x+b\right)^{-2} dx - c\int dx$$

$$R = \frac{a\,(x+b)^{-1}}{-1} - c\,x + k$$

$$R = -\frac{a}{x+b} - c\,x + k$$

$x = 0$ எனும்பொழுது $R = 0$

$$\therefore\ 0 = -\frac{a}{b} - c(0) + k$$

$$k = \frac{a}{b}$$

$$R = -\frac{a}{x+b} - c\,x + \frac{a}{b}$$

$$= \frac{-ab + a\,(x+b)}{b\,(x+b)} - c\,x$$

$$R = \frac{ax}{b\,(x+b)} - c\,x$$

தேவைச் சார்பு : $p = \dfrac{R}{x}$

$$p = \frac{a}{b\,(x+b)} - c$$

$$p+c = \frac{a}{b\,(x+b)}$$

$$b(x+b) = \frac{a}{p+c}$$

$$x = \frac{a}{b\,(p+c)} - b\,.$$

கொடுக்கப்பட்ட இறுதிநிலைச் செலவு சார்பு மற்றும் இறுதிநிலை வருவாயிலிருந்து மீப்பெரு இலாபத்தைக் காணுதல்:

'P' என்பது இலாபச் சார்பு எனில்,

$$\frac{dP}{dx} = \frac{d}{dx}\left(R-C\right) = \frac{dR}{dx} - \frac{dC}{dx} = MR - MC$$

இருபுறமும் x –யைப் பொறுத்து தொகைக் காண,

$$P = \int \frac{dP}{dx} = \int \left(MR - MC\right) dx + k$$

இங்க k என்பது தொகையிடல் மாறிலி ஆகும். கணக்கில் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களைக் கொண்டு k–ன் மதிப்பைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.18

கொடுக்கப்பட்ட இறுதிநிலைச் செலவு மற்றும் வருவாய் சார்புகள் முறையே $C'(x) = 50 + \dfrac{x}{50}$ மற்றும் $R'(x) = 60$. மாறாச்செலவு செலவு ₹ 200 எனில், மீப்பெரு இலாபத்தைக் காண்க.

தீர்வு:

கணக்கின்படி, $C(x) = \int C'(x)\,dx + k_1$

$$= \int \left(50 + \frac{x}{50}\right) dx + k_1$$

$$C(x) = 50x + \frac{x^2}{100} + k_1$$

மாறாச் செலவு : $k_1 = 200$ (கணக்கின்படி)

செலவுச்சார்பு : $C(x) = 50x + \dfrac{x^2}{100} + 200$ ...(1)

இறுதிநிலை வருவாய்ச்சார்பு : $R'(x) = 60$

$$R(x) = \int R'(x)\, dx + k_2$$

$$= \int 60\, dx + k_2$$
$$= 60x + k_2$$

உற்பத்தி அளவு $= 0$ எனில் வருவாய் $= 0$ ஆகும்.

அதாவது, $x = 0$ எனும்பொழுது $R = 0 \Rightarrow k_2 = 0$

$\therefore$ வருவாய் : $R(x) = 60x$ (2)

இலாபம் : P = மொத்த வருவாய் – மொத்தச் செலவு

$$= 60x - 50x - \frac{x^2}{100} - 200$$
$$= 10x - \frac{x^2}{100} - 200$$
$$\frac{dP}{dx} = 10 - \frac{x}{50}$$

மீப்பெரு இலாபத்திற்கு, $\frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow \boxed{x = 500}$

$$\frac{d^2P}{dx^2} = \frac{-1}{50} < 0$$

$\therefore x = 500$ இல்,

மீப்பெரு இலாபம் : $P = 10(500) - \frac{(500)^2}{100} - 200$

$= 5000 - 2500 - 200$

$= 2300$

மீப்பெரு இலாபம் = ₹ 2,300.

எடுத்துக்காட்டு 3.19

ஒரு நிறுவனத்தின் பொருள்களின் இறுதிநிலைச் செலவு மற்றும் இறுதிநிலை வருவாய் முறையே $C'(x) = 8 + 6x$ மற்றும் $R'(x) = 24$ என்க. பொருள்களின் உற்பத்தி பூச்சியம் எனும் பொழுது அதன் மொத்த செலவும் பூச்சியம் எனில் மொத்த இலாபத்தைக் காண்க.

தீர்வு:

கணக்கின்படி $MC = 8 + 6x$

$$C(x) = \int (8 + 6x)\, dx + k_1$$
$$= 8x + 3x^2 + k_1 \quad (1)$$

$x = 0$ எனும் பொழுது $C = 0 \Rightarrow k_1 = 0$

$$\therefore C(x) = 8x + 3x^2 \quad (2)$$

மேலும் $MR = 24$

$$R(x) = \int MR\, dx + k_2$$
$$= \int 24\, dx + k_2$$
$$= 24x + k_2$$

$x = 0$ எனில், வருவாய் $= 0 \Rightarrow k_2 = 0$

$$R(x) = 24x \quad (3)$$

இலாபச்சார்பு $P(x) = R(x) - C(x)$

$$P(x) = 24x - 8x - 3x^2$$
$$= 16x - 3x^2$$

எடுத்துக்காட்டு 3.20

விற்பனை செய்யப்பட்ட x அலகு பொருள்களின் இறுதிநிலை வருவாய்ச் சார்பு (ரூபாய் ஆயிரங்களில்) $10 + e^{-0.05x}$ எனில், விற்பனை அளவு 100 அலகுகளாக இருக்கும்போது மொத்த வருவாயைக் காண்க $(e^{-5} = 0.0067)$

தீர்வு:

இறுதிநிலை வருவாய் $R'(x) = 10 + e^{-0.05x}$

100 அலகுகளுக்கான விற்பனை வருவாய்

$$R = \int_0^{100} \left(10 + e^{-0.05x}\right) dx$$
$$= \left[10x + \frac{e^{-0.05x}}{-0.05}\right]_0^{100}$$
$$= \left(1000 - \frac{e^{-5}}{0.05}\right) - \left(0 - \frac{100}{5}\right)$$
$$= 1000 + 20 - (20 \times 0.0067)$$
$$= 1019.87$$
$$= 1019.87 \times 1000$$

மொத்த வருவாய் = ₹ 10,19,870

எடுத்துக்காட்டு 3.21

ஒரு இயந்திரத்தின் ஆயுட் காலம் 12 ஆண்டுகளாக மதிப்பிடப்பட்டுள்ளது. அதன் விலை ₹5,00,000 என்க. இயந்திரத்திற்கான காப்புத்தொகை ₹30,000. அந்த இயந்திரத்திற்கு, ஒரு வருடத்திற்கான வாடகை ₹72,000 ஆக உள்ளது. நிகழ்காலத்தில் செலுத்தப்படும் வாடகைக்கான வட்டி விகிதம் 9%

எனில், அந்த இயந்திரத்தை வாடகைக்கு பெறுவது ஆதாயமானதா என்பதை ஆராய்க. $(e^{-1.08} = 0.3396)$

தீர்வு:

t வருடத்திற்கான நிகழ்கால மதிப்பு $= \int_0^t 72000 e^{-0.09t}\, dt$

12 வருடத்திற்கான நிகழ்கால மதிப்பு $= \int_0^{12} 72000 e^{-0.09t}\, dt$

$$= 72000\left[\frac{e^{-0.09t}}{-0.09}\right]_0^{12}$$

$$= \frac{72000}{-0.09}\left[e^{-0.09(12)} - e^0\right]$$

$$= -800000\left[e^{-1.08} - e^0\right]$$

$$= -800000[0.3396 - 1]$$

$$= 528320$$

இயந்திரத்திற்கான செலவு $= 500000 - 30000$

$= 470000$

எனவே இயந்திரத்தை வாடகைக்கு பெறுவது இலாபகரமானது அல்ல.

ஆதலால் இயந்திரத்தை வாங்குவதே சிறந்தது.

சரக்கு தேக்க நிலை (Inventory) :

கொடுக்கப்பட்ட சரக்கின் கையிருப்பு $I(x)$ மற்றும் ஒரு அலகிற்கான சரக்கின் தேக்கச் செலவு (C_1) எனில், T காலத்திற்கான சரக்கின் மொத்த தேக்கச் செலவு $= C_1 \int_0^T I(x)dx$.

எடுத்துக்காட்டு 3.22

ஒரு நிறுவனம் 30 நாள்களுக்கு ஒருமுறை 200 மகிழ்வுந்துகளை பெறுகிறது, அனுபவத்தில், சரக்கு கையிருப்பு, இருப்பு நாள்களுடன் தொடர்புடையது எனத் தெரிகிறது. கடைசியில் பெறப்பட்ட சரக்கு முதலிருந்து $I(x) = 200 - 0.2x$ என்க. தினசரி சரக்கு தேக்கச் செலவு ₹3.5 எனில் 30 நாள்களுக்கான மொத்த தேக்கச் செலவை தொகையீடல் மூலம் காண்க.

தீர்வு:

இங்கு $I(x) = 200 - 0.2x$

C_1 = Rs. 3.5

$T = 30$

மொத்த தேக்கச் செலவு $= C_1 \int_0^T I(x)dx = 3.5 \int_0^{30} (200 - 0.2x)dx$

$$3.5\left(200x - \frac{0.2x^2}{2}\right)_0^{30} = ₹\ 20,685$$

தவணை பங்கீட்டின் மொத்த தொகை (Amount of an Annuity)

செலுத்தப்பட்ட மொத்த தவணை பங்கீட்டு தொகை மற்றும் அந்த கால கட்டத்தில் செலுத்தப்பட்ட மொத்த வட்டி ஆகியவற்றின் கூடுதல், தவணை பங்கீட்டின் மொத்த தொகை எனப்படும். ஒரு ஆண்டிற்கு r கூட்டு வட்டி வீதத்தில், செலுத்தப்படும் தவணை பங்கீட்டு தொகை ₹ p எனில், N தவணைகளில் செலுத்தப்படும தவணை பங்கீட்டின் மொத்த தொகை

$$A = \int_0^N p e^{rt}\, dt$$

எடுத்துக்காட்டு 3.23

திரு. அருள் என்பவர் ABC வங்கியில், ஒவ்வொரு ஆண்டிற்கும் ₹10,000 -ஐ ஆண்டிற்கு 10% கூட்டு வட்டியில் 5 ஆண்டுகளுக்கு செலுத்துகிறார். 5 ஆண்டுகளின் முடிவில் அவர் வங்கி கணக்கில் உள்ள மொத்த தொகை எவ்வளவு? $(e^{0.5} = 1.6487)$

தீர்வு:

$p = 10000 \quad r = 0.1, \quad N = 5$

மொத்த தொகை $= \int_0^5 10000 e^{0.1t}\, dt$

$$= \frac{10000}{0.1}\left(e^{0.1t}\right)_0^5$$

$$= 100000\left[e^{0.1\times 5} - e^0\right]$$

$$= 100000\left(e^{0.5} - 1\right)$$

$$= 100000[0.6487]$$

= ₹ 64,870

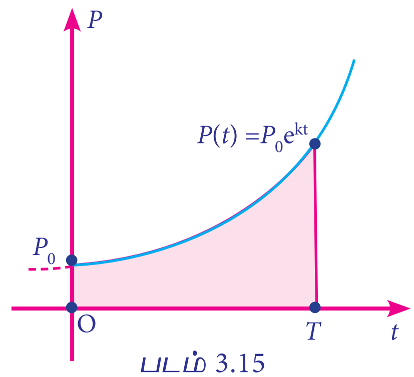
இயற்கை வளத்தின் பயன்பாடு (Consumption of a Natural Resource)

t வருடத்தில் இயற்கை வளத்தின் பயன்பாட்டிற்கான சார்பு $p(t)$ என்க. k பெருக்கு வீதத்தில் இயற்கை வளத்தின் பயன்பாடு

அதிகரிக்கிறது எனில், T வருடத்தில் பயன்படுத்தப் படும் இயற்கை வளத்தின் அளவு

$$\int_0^T p_0 e^{kt}\,dt = \frac{p_0}{k}\left(e^{kT}-1\right)$$

இங்கு p_0 என்பது ($t = 0$ எனும் போது) இயற்கை வளத்தின் தொடக்கப் பயன்பாடு.



படம் 3.15

எடுத்துக்காட்டு 3.24

2000 ஆம் ஆண்டில் உலக தங்க உற்பத்தியின் அளவு 2547 மெட்ரிக் டன்கள் மற்றும் தங்க உற்பத்தி ஆண்டிற்கு 0.6% பெருக்கு வீதத்தில் அதிகரிக்கின்றது. இதே வீதத்தில் தொடர்ந்தால் 2000 -லிருந்து 2013-க்குள் எவ்வளவு டன்கள் தங்கம் உற்பத்தி செய்யப்பட்டிருக்கும்? $[e^{0.078} = 1.0811)$

தீர்வு:

தொடக்க நிலையில் தங்கத்தின் அளவு (t=0 எனும்போது (2000-ஆம் ஆண்டு))

p_0=2,547 மெட்ரிக் டன்கள்.

2000 முதல் 2013 வரை தங்கத்தின் மொத்த

$$\text{உற்பத்தி} = \int_0^{13} 2547\, e^{0.006t}\,dt$$

$$= \frac{2547}{0.006}\left[e^{0.006t}\right]_0^{13}$$

$$= 424500\left(e^{0.078}-1\right)$$

= 34,426.95 மெட்ரிக் டன்கள் (தோராயமாக).

3.2.3 தேவை நெகிழ்ச்சி கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் தேவைச் சார்பைக் காணுதல் (The demand functions from Elasticity of demand)

$y = f(x)$ எனும் சார்பின் நெகிழ்ச்சி (η) என்பது y-ன் சார் மாற்றத்திற்கும் x-ன் சார் மாற்றத்திற்கும் உள்ள விகிதத்தின் வரம்பிடப்பட்ட எல்லை என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$\therefore \quad \eta = \frac{E_y}{E_x} = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}}$$

$$\Rightarrow \quad \eta = \frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\text{தேவை நெகிழ்ச்சி } \eta_d = \frac{-p}{x}\frac{dx}{dp}$$

$$\frac{-dp}{p} = \frac{dx}{x}\cdot\frac{1}{\eta_d}$$

இருபுறமும் தொகைக்கான,

$$-\int\frac{dp}{p} = \frac{1}{\eta_d}\int\frac{dx}{x}$$

இந்தச் சமன்பாடானது 'p' எனும் தேவைச் சார்பை x-ன் சார்பாக விவரிக்கிறது.

மேலும், வருவாய்ச் சார்பு $R = px$ என்ற கோட்பாட்டிலிருந்து காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.25

நெகிழ்ச்சி சார்பு $\frac{E_y}{E_x} = \frac{x}{x-2}$. $x = 6$ மற்றும் $y = 16$ எனும் போது அதன் தொடக்க நிலைச் சார்பைக் காண்க.

தீர்வு:

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{x}{x-2}$$

$$\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x-2}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{x}{x-2}\cdot\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x-2}$$

$$\log y = \log(x-2)+\log k$$

$$y = k(x-2)$$

இங்கு $x = 6$, எனும்போது $y = 16 \Rightarrow 16 = k(6-2)$

$$k = 4$$

$$y = 4\,(x-2)$$

எடுத்துக்காட்டு 3.26

ஒரு பொருளின் விலை p -ஐ பொறுத்து தேவை நெகிழ்ச்சி $\eta_d = \dfrac{p+2p^2}{100-p-p^2}$ எனில் விலை 5 மற்றும் தேவை 70 எனும் பொழுது அதன் தேவை சார்பு மற்றும் வருவாய்ச் சார்பைக் காண்க.

தீர்வு

$$\eta_d = \frac{p+2p^2}{100-p-p^2}$$

$$\frac{-p}{x}\frac{dx}{dp} = \frac{p(2p+1)}{100-p-p^2}$$

$$\frac{-dx}{x} = \frac{-(2p+1)}{p^2+p-100}dp$$

$$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{2p+1}{p^2+p-100}dp$$

$$\log x = \log(p^2+p-100)+\log k$$

$$\therefore \quad x = k(p^2+p-100)$$

இங்கு $x=70, \quad p=5,$

$$70 = k(25+5-100)$$

$$\Rightarrow k = -1$$

எனவே, $x = 100-p-p^2$

$$R = px$$

வருவாய் சார்பு :$R = p(100-p-p^2)$

பயிற்சி 3.2

1. ஒரு இயந்திரத்தை சரிபார்ப்பதற்கான செலுவானது மணிக்கு ₹10,000 ஆகும். அதன் பராமாரிப்பு செலவு x கி.மீ பயன்பாட்டிற்கு பிறகு, மணிக்கு $f(x) = 2x-240$ என்க. இயந்திரத்தை சரிப்பார்த்தப்பிறகு, 300 மணி நேரம் பயணிப்பதற்கான மொத்த செலவைக் காண்க.

2. ஒரு நெகிழ்ச்சி சார்பு $\dfrac{Ey}{Ex}$ என்பது $\dfrac{Ey}{Ex} = \dfrac{-7x}{(1-2x)(2+3x)}$ என வரையறுக்கப் படின் $x=2, y=\dfrac{3}{8}$ எனும் பொழுது அச் சார்பைக் காண்க.

3. ஒரு பொருளின் தேவை x அலகுகள் எனும் பொழுது விலை p –ஐ பொறுத்து தேவை நெகிழச்சி சார்பு $\dfrac{(4-x)}{x}$ எனில், விலை 4 மற்றும் பொருளின் தேவை 2 எனும் பொழுது தேவைச் சார்பு மற்றும் வருவாய்ச் சார்பைக் காண்க.

4. ஒரு நிறுவனம், 30 நாள்களுக்கு ஒரு முறை 500 இருசக்கர வாகனங்களை பெறுகிறது. அனுபவத்தில் சரக்கு கையிருப்பு, இருப்பு நாள்களுடன் (x) உடன் தொடர்புடையது என தெரிகிறது. கடைசியில் பெறப்பட்ட சரக்கு முதலில் இருநது $I(x)=500-0.03x^2$, தினசரி சரக்கு தேக்கச் செலவு ₹0.3 எனில் 30 நாள்களுக்கான மொத்த தேக்கச் செலவைக் காண்க.

5. ஒரு வங்கியானது, வங்கி கணக்கிலுள்ள தொகைக்கு ஆண்டுக்கு 5% கூட்டு வட்டி வீதத்தில் வட்டியை அளிக்கின்றது எனில், ஒவ்வொரு ஆண்டுக்கும் ₹1000 செலுத்தும் நபர் ஒருவருக்கு 5 ஆண்டுகளுக்கு கிடைக்கும் தொகை எவ்வளவு?. ($e^{0.25} = 1.284$).

6. உற்பத்தி செய்யப்படும் x அலகு பொருள்களின் இறுதி நிலைச் செலவுச் சார்பு $\dfrac{dC}{dx} = 100-10x+0.1x^2$ என்க. அந்நிறுவனத்தின் மாறாச் செலவு ₹500 எனில், அந்நிறுவனத்தின் மொத்தச் செலவுச் சார்பு மற்றும் சராசரி செலவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

7. இறுதிநிலை செலவுச் சார்பு $MC = 300\,x^{\frac{2}{5}}$ மற்றும் மாறாச் செலவு 0 எனில் மொத்தச் செலவு மற்றும் சராசரி செலவு சார்பைக் காண்க.

8. உற்பத்தி செய்யப்படும் x அலகு பொருள்களின் இறுதிநிலைச் செலவு $\dfrac{a}{\sqrt{ax+b}}$ என்க. $x = 0$ எனும் பொழுது உற்பத்தி செலவு 0 எனில் மொத்த செலவுச் சார்பைக் காண்க.

9. ஒரு குளிர்சாதனத்தின் இறுதிநிலைச் செலவு $C'(x) = \dfrac{x^2}{200}+4$. 200 குளிர்சாதனங்களின் உற்பத்திச் செலவைக் காண்க.

10. விற்பனை செய்யப்படும் x அலகு பொருள்களின் இறுதிநிலை வருவாய் (₹ ஆயிரங்களில்) சார்பு $5+3\,e^{-0.03\,x}$ எனில், விற்பனை செய்யப்படும்

100 அலகு பொருள்களின் மொத்த வருவாயை தோராயமாக காண்க. ($e^{-3}=0.05$)

11. விற்பனை பொருள்களின் இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு $MR=9-4x^2$ எனில், தேவைச் சார்பைக் காண்க.

12. இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு $\frac{4}{(2x+3)^2}-1$ எனில், சராசரி வருவாய் சார்பு $P=\frac{4}{6x+9}-1$ எனக் காட்டுக.

13. ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதிநிலை வருவாய்ச் சார்பு $MR=20e^{-x/10}\left(1-\frac{x}{10}\right)$ எனில், அதன் தேவைச் சார்பைக் காண்க.

14. ஒரு நிறுவனத்தின் உற்பத்தி பொருள்களின் இறுதிநிலை செலவு சார்பு $C'(x)=5+0.13x$, இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு $R'(x)=18$ மற்றும் மாறாச் செலவு ₹120 எனில், இலாபச் சார்பைக் காண்க.

15. இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு $R'(x)=1500-4x-3x^2$ எனில், வருவாய் சார்பு மற்றும் சராசரி வருவாய் சார்பைக் காண்க.

16. x அலகு பொருள்களுக்கான இறுதிநிலை வருவாய்ச் சார்பு $MR = 10+3x-x^2$ எனில் வருவாய்ச் சார்பு மற்றும் தேவைச் சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

17. உற்பத்தி பொருள்களின் இறுதிநிலைச் செலவு சார்பு $MC=\frac{14000}{\sqrt{7x+4}}$ மற்றும் மாறாச் செலவு ₹18,000 எனில், மொத்தச் செலவு மற்றும் சராசரி செலவுக் காண்க.

18. ஒரு நிறுவனத்தின் உற்பத்தி பொருள்களின் (x) இறுதிநிலைச் செலவு உற்பத்தி செய்யப்படும் பொருள்களின் எண்ணிக்கைக்கு நேர் விகித்ததில் உள்ளது. மேலும், மாறாச் செலவு ₹5,000 மற்றும் 50 அலகு பொருள்களின் உற்பத்தி செலவு ₹5,625 எனில், மொத்தச் செலவைக் காண்க.

19. $MR=20-5x+3x^2$ எனில், மொத்த வருவாய்ச் சார்பு காண்க.

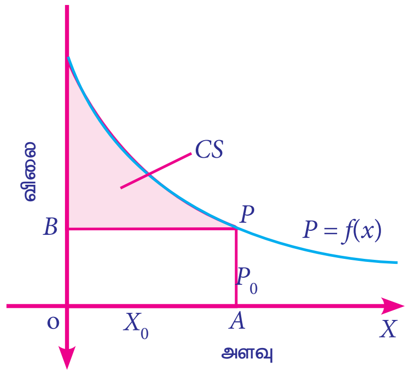
20. $MR = 14-6x+9x^2$ எனில், தேவைச் சார்பு காண்க.

3.2.4 நுகர்வோர் உபரி (Consumer's surplus)

மிகச் சிறந்த பொருளாதார நிபுணர் மார்சல் அவர்களால் உருவாக்கப்பட்ட கருத்துரு நுகர்வோர் உபரி ஆகும். $p=f(x)$ என்ற தேவைச் சார்பு ஆனது மக்களால் வாங்கப்படும் பொருளின் விலை மற்றும் பொருள்களின் அளவு ஆகியவற்றிக்கு இடையே உள்ள தொடர்பைக் குறிக்கும்.

விளக்கமாக, p_0 விலையில் தேவைப்படும் பொருளின் அளவு $x=x_0$ என்க. ஆனால் நிர்ணயிக்கப்பட்ட விலை p_0 யை விட அதிகவிலையான q_0 க்கு அதே அளவான x_0–ஐ வாங்க விரும்பும் நுகர்வோர் இருக்கக்கூடும். அத்தகைய நுகர்வோர்கள், **நுகர்வோர் உபரி** எனப்படும்.

பின்வரும் படத்தில் மேற்கண்ட விவரங்கள் விளக்கப்பட்டுள்ளது. கணக்கிட்டு முறையின்படி நுகர்வோர் உபரி கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கீடு செய்யப்படுகிறது.



படம் 3.16

நுகர்வோர் உபரி (CS) = (தேவை வளைவரைக்கு கீழ் x = 0 முதல் $x=x_0$ என்கின்ற எல்லைக்குப்பட்ட பரப்பு) – (செவ்வகம் $OABC$ பரப்பு)

$$CS = \int_0^{x_0} f(x)\,dx - x_0p_0$$

எடுத்துக்காட்டு 3.27

ஒரு பொருளின் தேவைச் சார்பு $y=36-x^2$ எனில், $y_0 = 11$ -ல் நுகர்வோர் உபரியைக் காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்டவை :

$y=36-x^2$ மற்றும் $y_0 = 11$

$11 = 36-x_0^2$

$x_0^2 = 25$

$x_0 = 5$

$$CS = \int_0^{x_0} (\text{தேவைச்சார்பு})dx - (\text{விலை} \times \text{தேவையளவு})$$

$$= \int_0^5 \left(36 - x^2\right) dx - 5 \times 11$$

$$= \left[36x - \frac{x^3}{3}\right]_0^5 - 55$$

$$= \left[36(5) - \frac{5^3}{3}\right] - 55$$

$$= 180 - \frac{125}{3} - 55 = \frac{250}{3}$$

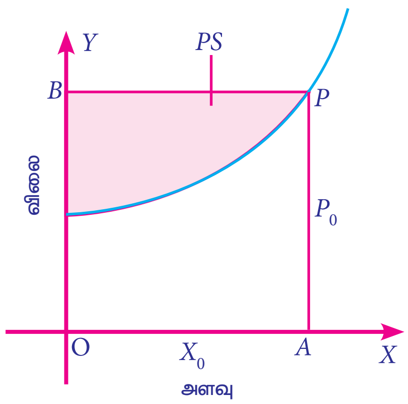
நுகர்வோர் உபரி $= \frac{250}{3}$ அலகுகள்.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

தேவைச் சார்பின் வளைவரை மற்றும் அளிப்புச் சார்பின் வளைவரை ஆகியவற்றின் வெட்டும் புள்ளி சமநிலைப்புள்ளி எனப்படும். சமநிலைப் புள்ளியில் $q_d = q_s$ ஆகும்.

3.2.5 உற்பத்தியாளர் உபரி (Producer's surplus)

சந்தை விலை 'p' யில் வழங்கப்படும் பொருள்கள் அளிப்புச் சார்பு $g(x)$ என்க. சந்தை விலை p_0 க்கு வழங்கப்படும் பொருளின் அளவு x_0 என்க. ஆனால் நிர்ணயிக்கப்பட்ட விலை p_0 க்கு குறைவான விலைக்கு அதே அளவு பொருளை வழங்க விரும்பும் உற்பத்தியாளர்கள் இருக்கக்கூடும். அத்தகைய உற்பத்தியாளர்கள் **உற்பத்தியாளரின் உபரி** எனப்படும்.



படம் 3.17

கணக்கீட்டு முறையில் உற்பத்தியாளர் உபரி (PS) கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

PS = (செவ்வகம் OAPB பரப்பு) − ($x = 0$, $x = x_0$ எனும் எல்லைகளுக்குள் அளிப்புச் சார்பு ஏற்படுத்தும் பரப்பு)

$$PS = x_0 p_0 - \int_0^{x_0} g(x)dx$$

எடுத்துக்காட்டு 3.28

ஒரு பொருளின் அளிப்பு சார்பு $g(x) = 4x+8$ எனில் 5 அலகுகள் விற்பனை செய்யும்போது உற்பத்தியாளரின் உபரியை காண்க.

தீர்வு:

$$g(x) = 4x + 8, \; x_0 = 5$$

$$p_0 = 4(5) + 8 = 28$$

$$PS = x_0 p_0 - \int_0^{x_0} g(x)dx$$

$$= (5 \times 28) - \int_0^5 (4x+8)dx$$

$$= 140 - \left[4\left(\frac{x^2}{2}\right) + 8x\right]_0^5$$

$$= 140 - (50 + 40)$$

$$= 50$$

உற்பத்தியாளரின் உபரி = 50 அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 3.29

ஒரு பொருளின் தேவைச் சார்பு மற்றும் அளிப்புச் சார்ப்பு முறையே $p_d = 18 - 2x - x^2$, $p_s = 2x - 3$. சமநிலை விலையில் நுகர்வோர் உபரி மற்றும் உற்பத்தியாளர் உபரியைக் காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்டவை :

$$P_d = 18 - 2x - x^2 \; ; P_s = 2x - 3$$

சமநிலை விலையில், $p_d = p_s$

$$18 - 2x - x^2 = 2x - 3$$

$$x^2 + 4x - 21 = 0$$

$$(x - 3)(x + 7) = 0$$

$x = -7$ அல்லது 3 (x ன் மதிப்பானது குறை எண்ணாக இருக்க முடியாது.)

$x_0 = 3$, எனும்போது

$\therefore\ p_0 = 18-2(3) - (3)^2 = 3$

$$\begin{aligned}
CS &= \int_0^{x_0} f(x)\,dx - x_0\,p_0 \\
&= \int_0^{3} (18-2x-x^2)\,dx \quad -3\times 3 \\
&= \left[18x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 - 9 \\
&= 18(3) - (3)^2 - \left(\frac{3^3}{3}\right) - 9
\end{aligned}$$

CS = 27 அலகுகள்.

$$\begin{aligned}
PS &= x_0P_0 - \int_0^{x_0} g(x)\,dx \\
&= (3\times 3) - \int_0^{3} (2x-3)\,dx \\
&= 9 - \left(x^2 - 3x\right)_0^3
\end{aligned}$$

= 9 அலகுகள்.

சமநிலை விலையில்,

(i) நுகர்வோர் உபரி = 27 அலகுகள்

(ii) உற்பத்தியாளர் உபரி =9 அலகுகள்

பயிற்சி 3.3

1. தேவைச்சார்பு $P = 50-2x$ எனில், தேவை $x = 20$ எனும் போது நுகர்வோர் உபரியைக் காண்க.
2. தேவைச்சார்பு $P = 122-5x-2x^2$ மற்றும் $x = 20$ எனும் போது நுகர்வோர் உபரியைக் காண்க.
3. தேவைச் சார்பு $p = 85-5x$ மற்றும் அளிப்புச் சார்பு $p = 3x-35$. சமநிலை விலை மற்றும் சமநிலை அளவைக் காண்க மற்றும் நுகர்வோர் உபரியைக் காண்க.
4. உற்பத்தி பொருள்களின் தேவைச் சார்பு $p = e^{-x}$. $p = 0.5$ எனும் போது நுகர்வோர் உபரியைக் காண்க.
5. அளிப்புச் சார்பு $p = 7+x$, $x = 5$ எனும் போது உற்பத்தியாளர் உபரியைக் காண்க.
6. விற்பனை பொருள்களின் அளிப்புச் சார்பு $p = 3x+5x^2$. $x = 4$ எனும்போது உற்பத்தியாளரின் உபரியைக் காண்க.
7. விற்பனை பொருள்களின் தேவைச் சார்பு $p = \dfrac{36}{x+4}$ க்கு, சந்தை விலை 6 எனும் போது நுகர்வோர் உபரியைக் காண்க.
8. சரியான போட்டியின் கீழ் ஒரு பொருளின் தேவை மற்றும் அளிப்பு சார்புகள் முறையே $p_d = 1600 - x^2$ மற்றும் $p_s = 2x^2 + 400$ எனில், உற்பத்தியாளரின் உபரியைக் காண்க.
9. சரியான போட்டியின் கீழ் ஒரு பொருளின் தேவை மற்றும் அளிப்புச் சார்ப்புகள் முறையே $p_d = \dfrac{8}{x+1} - 2$, $p_s = \dfrac{x+3}{2}$ எனில், நுகர்வோர் மற்றும் உற்பத்தியாளரின் உபரியைக் காண்க.
10. உற்பத்தி பொருள்களின் தேவை சமன்பாடு $x = \sqrt{100-p}$ மற்றும் அளிப்பு சமன்பாடு $x = \dfrac{p}{2} - 10$ எனில், சந்தையில் சமநிலையின் கீழ் உற்பத்தியாளர் மற்றும் நுகர்வோரின் உபரியைக் காண்க.
11. தேவைச் சார்பு $p_d = 25 - 3x$ மற்றும் அளிப்புச் சார்பு $p_s = 5 + 2x$ எனில், சமன்நிலையில் நுகர்வோர் உபரி மற்றும் உற்பத்தியாளர் உபரியைக் காண்க.

பயிற்சி 3.4

சரியான விடையை தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக.

1. $y = x(4-x)$ என்ற வளைவரையானது 0 மற்றும் 4 எனும் எல்லைகளுக்குள், x -அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பு

   (a) $\dfrac{30}{3}$ ச.அலகுகள் (b) $\dfrac{31}{2}$ ச.அலகுகள்

   (c) $\dfrac{32}{3}$ ச.அலகுகள் (d) $\dfrac{15}{2}$ ச.அலகுகள்

2. $y = e^{-2x}$ என்ற வளைவரையானது $0 \le x \le \infty$ எனும் எல்லைகளுக்குள், x -அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பு

   (a) 1 ச.அலகு (b) $\dfrac{1}{2}$ ச.அலகு

   (c) 5 ச.அலகுகள் (d) 2 ச.அலகுகள்

3. $y=\frac{1}{x}$ என்ற வளைவரை 1 மற்றும் 2 எனும் எல்லைகளுக்குள் ஏற்படுத்தும் பரப்பு

(a) log2 ச.அலகுகள் (b) log5 ச.அலகுகள்

(c) log3 ச.அலகுகள் (d) log 4 ச.அலகுகள்s

4. ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதிநிலை வருவாய்ச் சார்பு MR= $e^{\frac{-x}{10}}$ எனில், அதன் வருவாய்

(a) $-10e^{\frac{-x}{10}}$

(b) $1-e^{\frac{-x}{10}}$

(c) $10\left(1-e^{\frac{-x}{10}}\right)$

(d) $e^{\frac{-x}{10}}+10$

P1KLV1

5. MR மற்றும் MC என்பன இறுதிநிலை வருவாய் மற்றும் இறுதிநிலைச் செலவு சார்பு என்பதை குறிக்குமெனில் அதன் இலாபச் சார்பு

(a) $P=\int(MR-MC)\,dx+k$

(b) $P=\int(MR+MC)\,dx+k$

(c) $P=\int(MR)(MC)dx+k$

(d) $P=\int(R-C)dx+k$

6. தேவை மற்றும் அளிப்பு சார்புகள் முறையே $D(x)=16-x^2,\ S(x)=2x^2+4$ எனில், அதன் சமநிலை விலை

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

7. ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதிநிலை வருவாய் மற்றும் இறுதிநிலை செலவுச் சார்பு $MR=30-6x$ மற்றும் $MC=-24+3x$. இங்கு x என்பது உற்பத்தி எனில், இலாபச் சார்பு

(a) $9x^2+54x$ (b) $9x^2-54x$

(c) $54x-\frac{9x^2}{2}$ (d) $54x-\frac{9x^2}{2}+k$

8. தேவை மற்றும் அளிப்பு சார்புகள் முறையே $D(x)=20-5x$ மற்றும் $S(x)=4x+8$ எனில், அதன் சமநிலை விலை

(a) 40 (b) $\frac{41}{2}$ (c) $\frac{40}{3}$ (d) $\frac{41}{5}$

9. இறுதிநிலை வருவாய் $MR=35+7x-3x^2$ எனில், அதன் சராசரி வருவாய் $AR=$

(a) $35x+\frac{7x^2}{2}-x^3$ (b) $35+\frac{7x}{2}-x^2$

(c) $35+\frac{7x}{2}+x^2$ (d) $35+7x+x^2$

10. இலாபச் சார்பு $p(x)$ ஆனது பெருமமடைவது

(a) $MC-MR=0$ (b) $MC=0$

(c) $MR=0$ (d) $MC+MR=0$

11. தேவை x -க்கு விலை p -ஐ பொருத்து தேவை நெகிழ்ச்சி ஓர் அலகு எனில்,

(a) வருவாய் ஒரு மாறிலி

(b) செலவுச்சார்பு ஒரு மாறிலி

(c) இலாபம் ஒரு மாறிலி

(d) இவை ஏதும் இல்லை

12. இறுதி நிலைச் சார்பு $MR=100-9x^2$ -ன் தேவைச் சார்பு

(a) $100-3x^2$ (b) $100x-3x^2$

(c) $100x-9x^2$ (d) $100+9x^2$

13. தேவைச் சார்பு $p_d=28-x^2$ -க்கு $x_0=5$ மற்றும் $p_0=3$ எனும் போது நுகர்வோர் உபரி

(a) 250 அலகுகள் (b) $\frac{250}{3}$ அலகுகள்

(c) $\frac{251}{2}$ அலகுகள் (d) $\frac{251}{3}$ அலகுகள்

14. அளிப்புச் சார்பு $P_s=2x^2+4$ -க்கு $x_0=5$ மற்றும் $P_0=12$ எனும் போது உற்பத்தியாளர் உபரி

(a) $\frac{31}{5}$ அலகுகள் (b) $\frac{31}{2}$ அலகுகள்

(c) $\frac{32}{3}$ அலகுகள் (d) $\frac{30}{7}$ அலகுகள்

15. y-அச்சு, $y=1$ மற்றும் $y=2$ எனும் எல்லைக்குள் அடைப்படும் $y=x$ –ன் பரப்பு

(a) $\frac{1}{2}$ ச.அலகுகள் (b) $\frac{5}{2}$ ச.அலகுகள்

(c) $\frac{3}{2}$ ச.அலகுகள் (d) 1 ச.அலகு

16. ஒரு பொருளின் அளிப்புச் சார்பு $P = 3 + x$ மற்றும் $x_0 = 3$ எனில், உற்பத்தியாளர் உபரி

(a) $\frac{5}{2}$ அலகுகள் (b) $\frac{9}{2}$ அலகுகள்

(c) $\frac{3}{2}$ அலகுகள் (d) $\frac{7}{2}$ அலகுகள்

17. இறுதிநிலை செலவுச் சார்பு $MC = 100\sqrt{x}$, T.C = 0 மற்றும் வெளியீடு 0 எனில் சராசரிச் சார்பு AC ஆனது

(a) $\frac{200}{3}x^{\frac{1}{2}}$ (b) $\frac{200}{3}x^{\frac{3}{2}}$

(c) $\frac{200}{3x^{\frac{3}{2}}}$ (d) $\frac{200}{3x^{\frac{1}{2}}}$

18. ஒரு சந்தை பொருளின் தேவை மற்றும் அளிப்புச் சார்புகள் முறையே $P(x) = (x-5)^2$ மற்றும் $S(x) = x^2 + x + 3$ எனில், அதன் சமன்நிலை விலை $x_0 =$

(a) 5 (b) 2 (c) 3 (d) 19

19. ஒரு சந்தை பொருளின் தேவை மற்றும் அளிப்புச் சார்புகள் முறையே $D(x) = 25 - 2x$ மற்றும் $S(x) = \frac{10+x}{4}$ எனில், அதன் சமநிலை விலை $p_0 =$

(a) 5 (b) 2 (c) 3 (d) 10

20. MR மற்றும் MC என்பன முறையே இறுதிநிலை வருவாய் மற்றும் இறுதிநிலைச் செலவு மேலும், $MR - MC = 36x - 3x^2 - 81$ எனில், x-ல் பெரும இலாபமானது

(a) 3 (b) 6 (c) 9 (d)5

21. ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதிநிலை வருவாய் மாறிலி எனில், அதன் தேவைச் சார்பு

(a) MR (b) MC (c) $C(x)$ (d) AC

22. தேவைச் சார்பு p-க்கு, $\int \frac{dp}{p} = k \int \frac{dx}{x}$ எனில், $k =$

(a) η_d (b) $-\eta_d$ (c) $\frac{-1}{\eta_d}$ (d) $\frac{1}{\eta_d}$

23. $y = e^x$ எனும் வளைவரை 0 யிலிருந்து 1 எனும் எல்லைகளுக்குள் x -அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பு

(a) $(e-1)$ ச.அலகுகள்

(b) $(e+1)$ ச.அலகுகள்

(c) $\left(1-\frac{1}{e}\right)$ ச.அலகுகள்

(d) $\left(1+\frac{1}{e}\right)$ ச.அலகுகள்

24. பரவளையம் $y^2 = 4x$ ஆனது அதன் செவ்வகலத்துடன் ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பு

(a) $\frac{16}{3}$ ச.அலகுகள் (b) $\frac{8}{3}$ ச. அலகுகள்

(c) $\frac{72}{3}$ ச. அலகுகள் (d) $\frac{1}{3}$ ச. அலகுகள்

25. $y = |x|$ எனும் வளைவரை, 0 –லிருந்து 2 வரை ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பு

(a) 1 ச.அலகு (b) 3 ச.அலகுகள்

(c) 2 ச.அலகுகள் (d) 4 ச.அலகுகள்

இதர கணக்குகள்

1. உற்பத்தியாளரின் இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு $MR = 275 - x - 0.3x^2$ எனில், உற்பத்தியின் மொத்த வருவாயை அதன் உற்பத்தி 10 அலகுகளிலிருந்து 20 அலகுகளாக அதிகரிக்கும் பொழுது காண்க.

2. ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதிநிலை வருவாய் $MC = 125 + 10x - \frac{x^2}{9}$. இங்கு x அலகு உற்பத்தியின் செலவு C ஆகும். மாறா செலவு ₹250 எனில், 15 அலகுகள் உற்பத்தியின் மொத்த செலவைக் காண்க.

3. ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதிநிலை வருவாய் $MR = \frac{2}{x+3} - \frac{2x}{(x+3)^2} + 5$ எனில், அந் நிறுவனத்தின் தேவைச் சார்பு $P = \frac{2}{x+3} + 5$ எனக் காட்டுக.

4. இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு $MR = 6 - 3x^2 - x^3$ எனில், வருவாய் சார்பு மற்றும் தேவைச் சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

5. ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதிநிலைச் செலவு சார்பு $C'(x) = 20 + \frac{x}{20}$, இறுதிநிலை வருவாய்ச் சார்பு $R'(x) = 30$ மற்றும் மாறாச் செலவு ₹100 எனில், இலாபச் சார்பைக் காண்க.

6. ஒரு சந்தை பொருளின் தேவை சமன்பாடு $p_d = 20 - 5x$ மற்றும் அளிப்புச் சமன்பாடு $p_s = 4x + 8$. சந்தையின் சமநிலை விலையின் கீழ் நுகர்வோர் உபரி மற்றும் உற்பத்தி உபரி ஆகியவற்றைக் காண்க.

7. 500 அலகு பொருள்களை உற்பத்தி செய்வதற்கு தேவைப்படும் மொத்த மணிநேரம் $f(x) = 1800x^{-0.4}$ என்ற சார்பால் குறிக்கப் படுகிறது. எனில், கூடுதலாக 400 அலகு பொருள்களை உற்பத்தி செய்வதற்கான மொத்த கால (மணியில்) நேரத்தைக் காண்க. $[(900)^{0.6}=59.22, (500)^{0.6}=41.63]$

8. ஒரு பொருளின் தேவை நெகிழ்ச்சி $\frac{p}{x^3}$. விலை 2 மற்றும் தேவை 3 எனும்போது தேவைச் சார்பைக் காண்க.

9. $y = 8x^2 - 4x + 6$ என்ற பரவளையம் y –அச்சு மற்றும் x =2 இவற்றிற்கு இடையே அடைப்படும் அரங்கத்தின் பரப்பு காண்க.

10. $y^2 = 27x^3$ என்ற வளைவரைக்கும் மற்றும் $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$ என்ற கோடுகளுக்குள் அடைப்படும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தொகுப்புரை

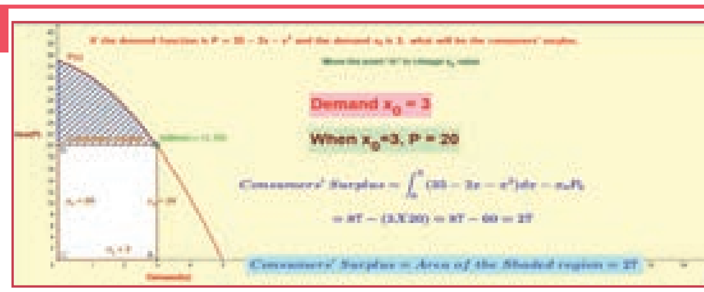
- $y = f(x)$ என்ற வளைவரை, x -அச்சு, $x = a$ மற்றும் $x = b$ ஆகியவற்றால் சூழப்பட்ட அரங்கத்தின் பரப்பு $\int_a^b y\, dx$.
- $y = f(x)$ என்ற வளைவரை, $x = a$ மற்றும் $x = b$ எனும் எல்லைக்குள், x -அச்சுடன் ஏற்படுத்தப்படும் அரங்கத்தின் பரப்பு x -அச்சின் கீழ் அமையும் எனில், பரப்பு $\int_a^b -y dx$
- $x = g(y)$ என்ற வளைவரை ஆனது $y = c$ மற்றும் $y = d$ என்ற எல்லைக்களுக்குள் y -அச்சுடன் ஏற்படுத்தப்படும் அரங்கத்தின் பரப்பு $\int_c^d x\, dy$
- $x = g(y)$ எனும் வளைவரையானது $y = c$ மற்றும் $y = d$ எனும் எல்லைக்குள் y அச்சால் சூழப்பட்ட பரப்பு y அச்சுக்கு இடதுபுறம் அமையும் எனில் பரப்பு $\int_d^e -x\, dy$
- $y=f(x)$ மற்றும் $y=g(x)$ என்ற வளைவரைகள் x அச்சு $x = a$ மற்றும் $x = b$ ஆகிய கோடுகளுடன் ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பு $\int_a^b f((x) - g(x))\, dx.$
- ஒரு சார்பின் வளர்ச்சி வீதமானது அல்லது விற்பனை வீதமானது t-ல் ஒரு சார்பு என்க. இங்கு t என்பது கால அளவைக் குறிக்கும். எனவே, t கால அளவில் உற்பத்தி பொருளின் மொத்த வளர்ச்ச அல்லது மொத்த விற்பனை $= \int_0^r f(t)dt$
- தேவை நெகிழ்ச்சி $\eta_d = \frac{-p}{x}\frac{dx}{dp}$
- சரக்கின் மொத்த தேக்கச் செலவு $= C_1 \int_0^T I(x)dx$
- தவணை பங்கீட்டின் மொத்த தொகை $A = \int_o^N pe^{rt}\, dt$

- செலவு சார்பு $C = \int (MC)\, dx + k.$
- சராசரி செலவுச் சார்பு $AC = \frac{C}{x}, x \neq 0$
- வருவாய்ச் சார்பு $R = \int (MR)\, dx + k.$
- தேவைச் சார்பு $p = \frac{R}{x}$
- இலாபச் சார்பு $= MR\text{-}MC = R'(x) - C'(x)$
- நுகர்வோர் உபரி $= \int_0^{x_0} f(x)\, dx - x_0 p_0$
- உற்பத்தியாளர் உபரி $= x_0 p_0 - \int_0^{x_0} p(x)\, dx$

கலைச்சொற்கள் (GLOSSARY)	
அதிகபட்ச இலாபம்	Maximum profit
அளிப்புச் சார்பு	Supply function
இலாபம்	Profit
இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு	Marginal cost function
இறுதி நிலை வருவாய்ச் சார்பு	Marginal revenue function
உற்பத்தி	Production
உற்பத்தியாளர்	Manufacturer
உற்பத்தியாளர் உபரி	Producer's surplus
சமநிலை	Equilibrium
சரக்கு இருப்பு	Inventory
சராசரி செலவுச் சார்பு	Average cost function
செலவுச் சார்பு	Cost function
தேவைச் சார்பு	Demand function
தொகையிடல்	Integration
நுகர்வோர் உபரி	Consumer's surplus
பங்கீட்டு தவணைத் தொகை	Annuity
மாறாச் செலவு	Fixed cost
வருவாய்ச் சார்பு	Reveunue function
வெளியீடு	Out put

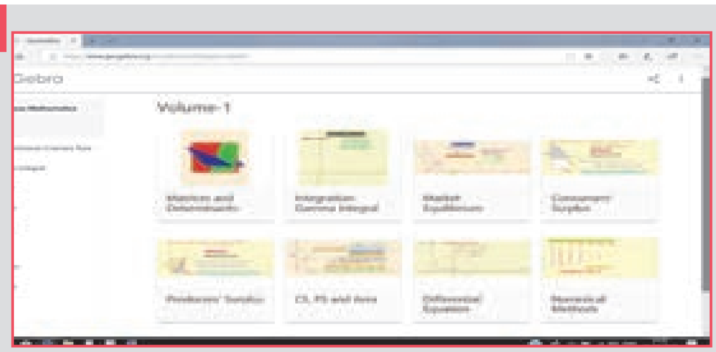
இணையச் செயல்பாடு

செயல்பாட்டின் இறுதியில் எதிர்பார்க்கப்படும் விளைவு



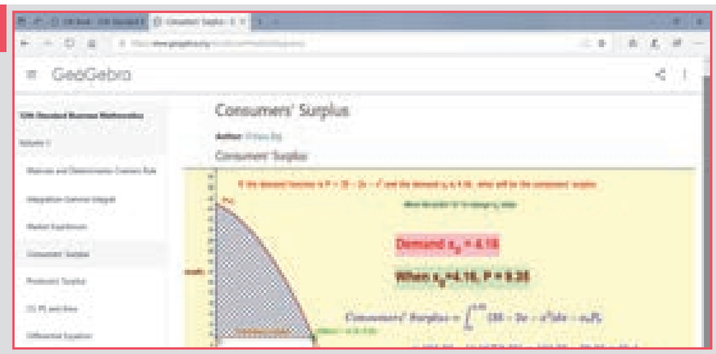
படி 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி இச்செயல்பட்டிற்கான இணையப் பக்கத்திற்குச் செல்க. பின்பு "12th Standard Business Mathematics and Statistics" என்னும் திரையில் "Volume–1" யை தெரிவு செய்யவும்.



படி 2

"Consumer's Surplus" என்னும் பயிற்சித்தாளினை தெரிவு செய்துகொள்ளவும். Consumer's Surplus using Integration என்னும் திரை தோன்றும். அதில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள வரைபடத்தில் வளைவில் உள்ள புள்ளி A வை நகர்த்தினால் வரைபடத்தில் தோன்றும் மாற்றத்தை தெரிந்துகொள்ளலாம்.



செயல்பாட்டிற்கான உரலி :https://ggbm.at/uzkcrnwr

விரைவுக் குறியீடு (QR Code) :

B247_12_BUS_MAT_TM

4

வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

G.H. லெப்னிட்ஸ்
(ஜூலை 1, 1646 –
நவம்பர் 14, 1716)

அறிமுகம்

முதலில் ஜெர்மானிய தத்துவமேதை, கணிதவியலாளர் மற்றும் தர்க்கவியலார் G. H. லெப்னிட்ஸ் என்பவரால் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு உருவாக்கப்பட்டது.

இயற்கணித சமன்பாடுகளான $5x-3(x-6)=4x$, $x^2-7x+12=0$, $|18x-5|=3$போன்றவற்றை முந்தைய வகுப்புகளில் கற்றிருப்பீர்கள். இங்கு சமன்பாட்டை தீர்ப்பது இலக்காக உள்ளது. அதாவது சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் மாறியின் மதிப்பு(கள்) காண்பது நோக்கமாக உள்ளது. எடுத்துக்காட்டாக $x=9$ என்பது முதல் சமன்பாட்டின் தீர்வாக உள்ளது. ஏனெனில் $x=9$ என பிரதியிடும்போது சமன்பாட்டின் இருபுறமும் சமமாக இருக்கும்.

பொதுவாக ஒவ்வொரு இயற்கணித சமன்பாடும் அதற்கேற்ப பிரத்யோகமான தீர்வு காணும் முறையைப் பெற்றிருக்கும், இருபடிச் சமன்பாடுகள் ஒரு முறையிலும், மட்டுகளை பெற்றுள்ள சமன்பாடுகள் வேறொரு முறையிலும் மற்றும் பலவகையான முறைகளில் தீர்க்கப்படுகிறது.

இதே பொதுவான கருத்துக்கள், வகைக்கெழுக்களை பெற்றுள்ள வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் பயன்படுகிறது. பலவகையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் உள்ளன. ஒவ்வொரு வகையும் அதற்கேற்ப பிரத்யேகமான தீர்வு காணும் முறையைப் பெற்றிருக்கும்.

பொருளியல், வணிகவியல் மற்றும் பொறியியல் சார்ந்த பல கணக்குகள் இயல்பில் சிக்கலாகவும் மற்றும் புரிந்து கொள்வது மிகவும் கடினமாகவும் இருக்கும். ஆனால் அவற்றை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டு வடிவில் வரையறுக்கும் போது பகுப்பாய்வு செய்வது எளிதாக இருக்கும்.

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தை படித்த பின்பு பின்வரும் பாடக்கருத்துக்களை மாணவர்கள் புரிந்து கொள்ள இயலும்.

- வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் வரிசை.
- வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் படி.
- வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் பொதுத்தீர்வு மற்றும் சிறப்புத் தீர்வு.
- வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை அமைத்தல்.
- மாறிகள் பிரிபடக்கூடிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்.
- சமபடித்தான வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகள்.
- நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்.
- மாறிலிகளைக் கெழுக்களாகக் கொண்ட இரண்டாம் வரிசை நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்.

DTTB9S

ஒரு சார்பு மற்றும் அவற்றின் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட வகைக்கெழுக்களை கொண்ட சமன்பாடு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஆகும். அதாவது $y = f(x)$ சார்பு மற்றும் அதன் வகைக்கெழுக்கள் $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots$ கொண்ட சமன்பாடு வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) $\frac{dy}{dx} = x + 5$ (ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2-y^2}}$

(iii) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$ (iv) $\frac{d^2x}{dt^2} + m^2x = 0$

வகைக்கெழுச்சமன்பாடுகள் இரு வகைப்படும் அவையாவன (i) சாதாரண வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகள் மற்றும் (ii) பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் ஆகும். நாம் இந்த அத்தியாயத்தில் சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைப் பற்றிய கருத்துக்களை மட்டும் பார்ப்போம்.

4.1 வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் அமைத்தல் (Formation of ordinary differential equations)

4.1.1 சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரையறை (Definition of ordinary differential equation)

$y = f(x)$ வளைவரையின் சாதாரண வகைக்கெழுக்கள் $\left(\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right)$ கொண்ட சமன்பாடு சாதாரண வகைக்கெழு சமன்பாடு ஆகும். இங்கு ஒரே ஒரு சாரா மாறி இடம்பெற்றுள்ளது.

4.1.2 வகைகெழுச்சமன்பாடடின் வரிசை மற்றும் படி (Order and degree of a differential equation)

ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் இடம் பெற்றிருக்கும் வகைக்கெழுவின் மிக உயர்ந்த வரிசையே அவ்வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை (order) எனப்படும்.

வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் படி (degree) என்பது அதிலுள்ள வகைக்கெழுக்களின் உச்ச வரிசையின் படியாகும். குறிப்பாக வகைக்கெழுவில் பின்னங்கள் மற்றும் படி மூலங்கள் இருப்பின் அவற்றை நீக்கிய பின் படி காணப்பட வேண்டும்.

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + y = 7$$

என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை கருத்தில் கொள்க. இங்கு உச்ச வரிசை வகைக்கெழு $\frac{d^3y}{dx^3}$ (அதாவது மூன்றாம் வரிசை வகைக்கெழு). எனவே, வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை 3 ஆகும்.

மேலும், உச்ச வரிசை $\frac{d^3y}{dx^3}$ -ன் அடுக்கு 1 ஆகும். எனவே வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் படி 1 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.1

கீழ்க்காணும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை மற்றும் படி ஆகியவற்றைக் காண்க.

(i) $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4y = 0$

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 3y = 0$

(iii) $\frac{d^3y}{dx^3} - 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^6 + 2y = x^2$

(iv) $\left[1 + \frac{d^2y}{dx^2}\right]^{\frac{3}{2}} = a\frac{d^2y}{dx^2}$

(v) $y' + (y'')^2 = (x + y'')^2$

(vi) $\frac{d^3y}{dx^3} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{2}} = 0$

(vii) $y = 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4x\frac{dx}{dy}$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை மற்றும் படி (வரையறுக்கப்பட்டிருப்பின்) எப்பொழுதும் மிகை முழுக்களாக இருக்கும்.

தீர்வு

(i) $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4y = 0$

உச்சவரிசை வகைக்கெழு $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஆகும்.

$\therefore$ வரிசை $= 2$

உச்சவரிசை $\frac{d^2y}{dx^2}$ -ன்படி 1 ஆகும்.

$\therefore$ படி $= 1$

(ii) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0$

உச்சவரிசை வகைக்கெழு $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ஆகும்.

$\therefore$ வரிசை = 2

உச்சவரிசை $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ -ன்படி 1 ஆகும்.

$\therefore$ படி $= 1$

(iii) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 3\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^6 + 2y = x^2$

$\therefore$ வரிசை $= 3$, படி $= 1$

(iv) $\left[1 + \dfrac{d^2y}{dx^2}\right]^{\frac{3}{2}} = a\dfrac{d^2y}{dx^2}$

மேற்காணும் சமன்பாட்டில் படி மூலத்தினை நீக்க, இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்திய பின் கிடைப்பது

$$\left[1 + \frac{d^2y}{dx^2}\right]^3 = a^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

$\therefore$ வரிசை = 2, படி = 3

(v) $y' + (y'')^2 = (x + y'')^2$

$$y' + (y'')^2 = x^2 + 2xy'' + (y'')^2$$

$$y' = x^2 + 2xy'' \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^2 + 2x\frac{d^2y}{dx^2}$$

$\therefore$ வரிசை = 2, படி = 1

(vi) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{2}} = 0$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{2}}$$

சமன்பாட்டில் உள்ள படி மூலத்தினை நீக்க, இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்தியப்பின் கிடைப்பது

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 = \frac{dy}{dx}$$

$\therefore$ வரிசை = 3, படி = 2

(vii) $y = 2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 4x\dfrac{dx}{dy}$

$$y = 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4x\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

$$y\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 4x$$

$\therefore$ வரிசை $=1$, படி $= 3$

வளைவரைகளின் குடும்பம் (Family of Curves)

சில சமயங்களில், வளைவரைகளின் குடும்பத்தை ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறத்தக்க மாறிலிகளைக் கொண்ட ஒரே ஒரு சமன்பாட்டின் மூலம் குறிக்கலாம். மாறிலிகளுக்கு வெவ்வேறு மதிப்புகளை அளிப்பதன் மூலம் வளைவரைக் குடும்பத்தின் வெவ்வேறு வளை வரைகளைப் பெறலாம். மாறத்தக்க மாறிலிகளை குடும்பத்தின் துணை அலகு என்போம்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(i) $y^2 = 4ax$ என்ற சமன்பாடு ஆதியை உச்சியாக கொண்ட பரவளையக் குடும்பத்தைக் குறிக்கிறது. இங்கு a ஒரு துணை அலகு.

(ii) ஆதியை மையமாகக் கொண்ட பொது மைய வட்டங்களின் குடும்பம் $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற சமன்பாட்டால் குறிக்கப்படுகிறது. இங்கு a ஒரு துணை அலகு.

(iii) ஒரு தளத்தில் அமையும் நேர் கோட்டுக் குடும்பத்தின் சமன்பாடு $y = mx + c$ என்ற சமன்பாட்டால் குறிக்கப்படுகிறது. இங்கு m மற்றும் c என்பன துணை அலகுகள்.

4.1.3 வகைக்கெழுச் சமன்பாடு அமைத்தல் (Formation of ordinary differential equation)

$f(x, y, c_1) = 0$ --------(1) என்ற சமன்பாட்டை கருத்தில் கொள்க. இங்கு c_1 என்பது மாறத்தக்கமாறிலியாகும். இச்சமன்பாட்டிலிருந்து வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை அமைக்கலாம். அதற்கு சமன்பாடு (1) -ஐ அதிலுள்ள ஒரு சாரா மாறியை பொறுத்து ஒரு முறை வகைப்படுத்த வேண்டும்.

சமன்பாடு (1) மற்றும் அதன் வகைக்கெழு விலிருந்து c_1 ஐ நீக்குவதன் மூலம் தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை நாம் பெறுகிறோம்.

$f(x, y, c_1, c_2) = 0$. இங்கு c_1 மற்றும் c_2 என்பன மாறத்தக்க மாறிலிகள். இச்சமன்பாட்டை இருமுறை வகைப்படுத்த வேண்டும். கொடுக்கப்பட்ட சார்பு மற்றும் இரு தொடர் வகைக்கெழு ஆகியவற்றிலிருந்து c_1 மற்றும் c_2-வை நீக்கியபின் தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை நாம் பெறுகிறோம்.

குறிப்பு

பெறப்படும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசையானது வளைவரைக் குடும்பத்தின் சமன்பாட்டில் உள்ள மாறத்தக்க மாறிலிகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.2

$y = mx + c$ எனும் நேர்கோட்டுத் தொகுப்பில் (i) m ஒரு மாறத்தக்க மாறிலி (ii) c ஒரு மாறத்தக்க மாறிலி (iii) m, c ஆகிய இரண்டுமே மாறத்தக்க மாறிலிகள் எனில் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் அமைக்க.

தீர்வு:

(i) $y = mx + c$ ...(1)

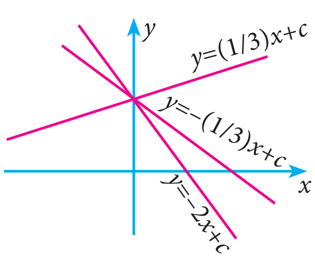
m மட்டுமே மாறத்தக்க மாறிலி என்பதால், ஒருமுறை வகைப்படுத்த கிடைப்பது

$$\frac{dy}{dx} = m \quad ...(2)$$

(1) மற்றும் (2) -லிருந்து m-ஐ நீக்குவதால் கிடைக்கும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

$$y = x\frac{dy}{dx} + c$$

$x\dfrac{dy}{dx} - y + c = 0$ இதுவே தேவையான முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாடு.



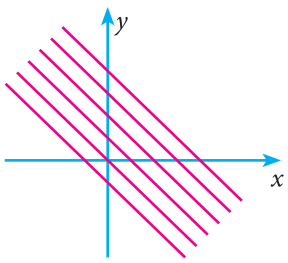
படம் 4.1

(ii) c மாறத்தக்க மாறிலி

சமன்பாடு (1) -ஐ வகைப்படுத்த கிடைப்பது

$$\frac{dy}{dx} = m$$

இந்த சமன்பாட்டில் c நீக்கப்பட்டிருப்பதால், தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $\dfrac{dy}{dx} = m$ ஆகும்.



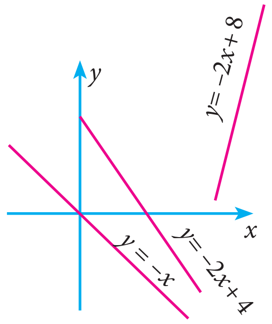
படம் 4.2

(iii) இங்கு m,c ஆகிய இரண்டுமே மாறத்தக்க மாறிலிகள் என்பதால், சமன்பாடு (1) -ஐ இருமுறை வகைப்படுத்த கிடைப்பது

$$\frac{dy}{dx} = m$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

இந்த சமன்பாட்டில் m,c இரண்டுமே நீக்கப் பட்டிருப்பதால் தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$ ஆகும்.



படம் 4.3

எடுத்துக்காட்டு 4.3

$y = \dfrac{a}{x} + b$ என்ற வளைவரைக் குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச்சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கு a மற்றும் b என்பன மாறத்தக்க மாறிலிகள்.

தீர்வு:

$$y = \frac{a}{x} + b \quad ...(1)$$

x-ஐ பொறுத்து வகைப்படுத்தக் கிடைப்பது

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-a}{x^2}$$

$$x^2\frac{dy}{dx} = -a$$

மீண்டும் x-ஐ பொறுத்து வகைப்படுத்தக் கிடைப்பது

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0$$

இதுவே தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்

எடுத்துக்காட்டு 4.4

$y = ae^{4x} + be^{-x}$ என்ற வளைவரைக்கு தொடர்புடைய வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கு a மற்றும் b என்பன மாறத்தக்க மாறிலிகள்.

தீர்வு:

$$y = ae^{4x} + be^{-x} \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = 4ae^{4x} - be^{-x} \quad (2)$$

மற்றும் $$\frac{d^2y}{dx^2} = 16ae^{4x} + be^{-x} \quad (3)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow \quad y + \frac{dy}{dx} = 5ae^{4x} \quad (4)$$

$$(2)+(3) \Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} = 20ae^{4x}$$

$$= 4\left(5ae^{4x}\right)$$

$$= 4\left(y + \frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} = 4y + 4\frac{dy}{dx}$$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - 4y = 0$ என்பது தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.5

$y = e^x\left(a\cos x + b\sin x\right)$ என்ற வளைவரைக் குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கு a மற்றும் b என்பன மாறத்தக்க மாறிலிகள்.

தீர்வு :

$$y = e^x\left(a\cos x + b\sin x\right) \quad (1)$$

(1)-ஐ x-ஐ பொறுத்து வகைப்படுத்த, பெறுவது

$$\frac{dy}{dx} = e^x\left(a\cos x + b\sin x\right) + e^x\left(-a\sin x + b\cos x\right)$$

$$= y + e^x(-a\sin x + b\cos x) \quad ((1)\text{-லிருந்து})$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - y = e^x(-a\sin x + b\cos x) \quad (2)$$

மீண்டும் வகைப்படுத்த கிடைப்பது,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = e^x(-a\sin x + b\cos x) + e^x(-a\cos x - b\sin x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = e^x(-a\sin x + b\cos x) - e^x(a\cos x + b\sin x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dx} - y\right) - y$$

((1) மற்றும் (2) லிருந்து)

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ என்பது தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

பயிற்சி 4.1

1. பின்வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் வரிசை மற்றும் படி காண்க.

(i) $\frac{dy}{dx} + 2y = x^3$

(ii) $\frac{d^3y}{dx^3} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 2\frac{dy}{dx} = 0$

(iii) $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{y - \frac{dy}{dx}}$

(iv) $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$

(v) $\frac{d^2y}{dx^2} + y + \left(\frac{dy}{dx} - \frac{d^3y}{dx^3}\right)^{3/2} = 0$

(vi) $\left(2-y''\right)^2 = {y''}^2 + 2y'$

(vii) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 + y = x - \dfrac{dx}{dy}$

2. பின்வருவனவற்றிற்கு வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(i) $y = cx + c - c^3$ (ii) $y = c\left(x-c\right)^2$

(iii) $xy = c^2$ (iv) $x^2 + y^2 = a^2$

3. $\left(x-\alpha\right)^2 + \left(y-\beta\right)^2 = r^2$ -ல் α, β ஆகியவற்றை நீக்கி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை அமைக்க.

4. ஆதி வழிச்செல்லும் அனைத்து நேர்கோட்டுத் தொகுப்பின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை அமைக்க.

5. செவ்வகலம் $4a$ ஆகவும், அச்சினை x -அச்சிற்கு இணையாகவும் கொண்ட பரவளையத் தொகுப்பின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை அமைக்க.

6. ஆதி வழிச் செல்வதும், மையம் y-அச்சின் மீது அமையுமாறும் உள்ள வட்டக் குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

7. ஆதியை குவியமாகவும், x அச்சினை அச்சாகவும் கொண்ட பரவளையத் தொகுப்பின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு (Solution of a Differential Equation)

கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டினை நிறைவு செய்யுமாறு அமையும் சார்ந்த மற்றும் சாரா மாறிகளுக்கிடையேயான வகைக்கெழுக்களற்ற தொடர்பு, அச்சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும்.

வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்விலுள்ள மாறத்தக்க மாறிலிகளின் எண்ணிக்கையானது அவ்வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசைக்குச் சமமாக இருக்க வேண்டும். அத்தீர்வினை சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு (முழுமைத் தீர்வு) என்போம்.

4.2 முதல் வரிசை மற்றும் முதல் படி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (First order and first degree differential equations)

வரிசை ஒன்று மற்றும் படி ஒன்றுடைய வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டினை $f\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}\right) = 0$ என எழுதலாம். இங்கு நாம் சில வகை சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் காண்போம்.

4.2.1 பொதுத்தீர்வு மற்றும் சிறப்புத் தீர்வு (General solution and particular solution)

எந்த ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிற்கும் பொதுத்தீர்வு மற்றும் சிறப்புத்தீர்வு காண இயலும்.

4.2.2 மாறிகள் பிரிபடக்கூடிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடு (Differential Equation in which variables are separable)

ஒரு சமன்பாட்டில் அனைத்து x -ல் அமையும் உறுப்புகள் மற்றும் dx ஒரு புறத்திலும், அனைத்து y -ல் அமையும் உறுப்புகள் மற்றும் dy மறுபுறத்திலும் அமையுமாறு பிரிக்கத்தக்க வகையிலிருப்பின், அவைகள் பிரிபடக்கூடிய மாறிகள் என அழைக்கப்படும். அத்தகைய சமன்பாட்டின் பொதுவடிவம்.

$f(x)dx = g(y)dy$ (அல்லது) $f(x)dx + g(y)dy = 0$

நேரடியாக தொகையிடுவதன் மூலம் நாம் தீர்வைப் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.6

தீர்க்க : $(x^2+x+1)dx + (y^2-y+3)dy = 0$

தீர்வு: $(x^2+x+1)dx + (y^2-y+3)dy = 0$

இது, $f(x)dx + g(y)dy = 0$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

தொகையிட நாம் பெறுவது,

$$\int (x^2+x+1)dx + \int (y^2-y+3)\, dy = c$$

$$\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right) + \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 3y\right) = c$$

எடுத்துக்காட்டு 4.7

தீர்க்க : $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$

தீர்வு : $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y} = e^{-y} e^{x} + e^{-y} x^2$

$$= e^{-y}\left(e^{x}+x^{2}\right)$$

மாறிகளை பிரிக்க நாம் பெறுவது,

$$e^{y}dy = \left(e^{x}+x^{2}\right)dx$$

தொகையிட நாம் பெறுவது, $\int e^{y}dy = \int\left(e^{x}+x^{2}\right)dx$

$$e^{y} = e^{x}+\frac{x^{3}}{3}+c$$

எடுத்துக்காட்டு 4.8

தீர்க்க : $3e^{x}\tan y dx+(1+e^{x})\sec^{2} y dy = 0$, $y(0)=\frac{\pi}{4}$

தீர்வு:

$$3e^{x}\tan y dx+(1+e^{x})\sec^{2}y\, dy = 0$$

$$3e^{x}\tan y\ dx = -(1+e^{x})\sec^{2}y\ dy$$

$$\frac{3e^{x}}{1+e^{x}}dx = -\frac{\sec^{2}y}{\tan y}dy$$

தொகையிட நாம் பெறுவது $3\int\frac{e^{x}}{1+e^{x}}dx = -\int\frac{\sec^{2}y}{\tan y}dy+c$

$$3\log(1+e^{x}) = -\log\tan y+\log c$$

$$\left[\because \int\frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log f(x)\right]$$

$$\log(1+e^{x})^{3}+\log\tan y = \log c$$

$$\log\left[\left(1+e^{x}\right)^{3}\tan y\right] = \log c$$

$$(1+e^{x})^{3}\tan y = c \qquad (1)$$

தரவு : $y(0)=\frac{\pi}{4}$ (அதாவது) $x=0$ எனில் $y=\frac{\pi}{4}$

$$(1) \Rightarrow (1+e^{0})^{3}\tan\frac{\pi}{4} = c$$

$$2^{3}(1) = c$$

$$\Rightarrow c = 8$$

தேவையான தீர்வு $(1+e^{x})^{3}\tan y = 8$

எடுத்துக்காட்டு 4.9

தீர்க்க : $\sec^{2}x\tan y dx+\sec^{2}y\tan x dy = 0$

தீர்வு:

மாறிகளை பிரிக்க, நாம் பெறுவது

$$\frac{\sec^{2}x}{\tan x}dx+\frac{\sec^{2}y}{\tan y}dy = 0$$

தொகையிட, நாம் பெறுவது

$$\int\frac{\sec^{2}x}{\tan x}dx+\int\frac{\sec^{2}y}{\tan y}dy = c$$

$$\log\tan x+\log\tan y = \log c$$

$$\log(\tan x\tan y) = \log c$$

$$\tan x\ \tan y = c$$

எடுத்துக்காட்டு 4.10

தீர்க்க : $ydx-xdy-3x^{2}y^{2}e^{x^{3}}dx = 0$

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை

$\frac{ydx-xdy}{y^{2}}-3x^{2}e^{x^{3}}dx = 0$ என எழுதலாம்.

தொகையிட, $\int\frac{ydx-xdy}{y^{2}}-\int 3x^{2}e^{x^{3}}dx = c$

$\int d\left(\frac{x}{y}\right)-\int e^{t}dt = c$ (இங்கு $t=x^{3}$ மற்றும் $dt = 3x^{2}dx$)

$$\frac{x}{y}-e^{t} = c$$

$$\frac{x}{y}-e^{x^{3}} = c$$

எடுத்துக்காட்டு 4.11

தீர்க்க : $x-y\frac{dx}{dy} = a\left(x^{2}+\frac{dx}{dy}\right)$

தீர்வு:

$$x-y\frac{dx}{dy} = a\left(x^{2}+\frac{dx}{dy}\right)$$

$$x-y\frac{dx}{dy} = ax^{2}+a\frac{dx}{dy}$$

$$x-ax^{2} = a\frac{dx}{dy}+y\frac{dx}{dy}$$

$$x(1-ax) = (a+y)\frac{dx}{dy}$$

மாறிகளை பிரிக்க, நாம் பெறுவது

$$\frac{dx}{x(1-ax)} = \frac{dy}{a+y}$$

$$\left(\frac{a}{1-ax}+\frac{1}{x}\right)dx = \frac{dy}{a+y}$$

தொகையிட, $\int\left(\frac{a}{1-ax}+\frac{1}{x}\right)dx = \int\frac{dy}{a+y}$

$$-\log(1-ax)+\log x = \log(a+y)+\log c$$

$$\log\left(\frac{x}{1-ax}\right) = \log\left(c(a+y)\right)$$

$$\left(\frac{x}{1-ax}\right) = c\,(a+y)$$

$x = (1-ax)(a+y)c$ என்பது தேவையான தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.12

x கையுறைகளை தயாரிப்பு செய்வதற்கான இறுதிநிலைச் செலவுச்சார்பு $6+10x-6x^2$. ஒரு ஜோடி கையுறைகளை உற்பத்தி செய்ய ஆகும் மொத்த செலவு ₹100 எனில், மொத்த செலவுச் சார்பு மற்றும் சராசரி செலவுச்சார்பு ஆகியவற்றை காண்க.

தீர்வு:

$$MC = 6+10x-6x^2$$

அதாவது, $\frac{dC}{dx} = 6+10x-6x^2$

$$dC = (6+10x-6x^2)dx$$

$$\int dC = \int(6+10x-6x^2)dx+k$$

$$C = 6x+10\frac{x^2}{2}-6\frac{x^3}{3}+k$$

$$C = 6x+5x^2-2x^3+k \quad (1)$$

கொடுக்கப்பட்டது : $x = 2$ எனில் $C = 100$

$\therefore \quad (1) \Rightarrow \quad 100 = 12+5(4)-2(8)+k$

$\Rightarrow \quad k = 84$

$\therefore \quad (1) \Rightarrow C(x) = 6x+5x^2-2x^3+84$

சராசரி செலவுச் சார்பு: $AC = \frac{C}{x} = 6+5x-2x^2+\frac{84}{x}$

எடுத்துக்காட்டு 4.13

ஒரு வளைவரையின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி (x,y)-இல் வரையப்படும் செங்கோடு $(1,0)$ என்ற புள்ளி வழியேச் செல்கிறது. வளைவரை $(1,2)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லுமாயின், இதனை வகைக்கெழு சமன்பாட்டு வடிவில் மாற்றி, வளைவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு:

$P(x,y)$ என்ற ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் வளைவரைக்கு வரையப்பட்ட செங்கோட்டின் சாய்வு $= -\frac{dx}{dy}$

Q, $(1,0)$ என்க.

$\therefore$ செங்கோடு PQ -ன் சாய்வு $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

அதாவது, $\frac{y-0}{x-1} = \frac{y}{x-1}$

$$\therefore \quad -\frac{dx}{dy} = \frac{y}{x-1} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{y}{1-x}$$

அதாவது, $(1-x)dx = ydy$

$$\int(1-x)dx = \int ydy+c$$

$$x-\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2}+c \quad (1)$$

இது $(1, 2)$ வழிச் செல்கிறது.

$$1-\frac{1}{2} = \frac{4}{2}+c$$

$$c = \frac{1}{2}-2 = -\frac{3}{2}$$

$c = \frac{-3}{2}$ என (1) –ல் பிரதியிட,

$$x-\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2}-\frac{3}{2}$$

$$2x-x^2 = y^2-3$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = 2x-x^2+3$$

என்பது வளைவரையின் சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.14

₹2000 என்ற தொகைக்கு தொடர்ச்சி கூட்டுவட்டி கணக்கிடப்படுகிறது. வட்டிவீதம்

ஆண்டொன்றுக்கு 5% இருப்பின், அத்தொகை எத்தனை ஆண்டுகளில் ஆரம்பத் தொகையைப் போல் இருமடங்காகும்? $(\log_e 2 = 0.6931)$

தீர்வு:

't' நேரத்தில் மூலதனம் P என்க.

$$\frac{dP}{dt} = \frac{5}{100}P = 0.05P$$

$$\Rightarrow \int \frac{dP}{P} = \int 0.05\, dt + c$$

$$\log_e P = 0.05t + c$$

$$P = e^{0.05t}e^{c}$$

$$P = c_1 e^{0.05t} \qquad (1)$$

$t = 0$ எனில் $P = 2000$

$$\Rightarrow \quad c_1 = 2000$$

$$\therefore (1) \Rightarrow \quad P = 2000e^{0.05t}$$

$P = 4000$ எனும் போது t–ஐ காணவேண்டும்.

$$(2) \Rightarrow \quad 4000 = 2{,}000e^{0.05t}$$

$$2 = e^{0.05t}$$

$$0.05t = \log 2$$

$t = \dfrac{0.6931}{0.05}$ = 14 ஆண்டுகள் (தோராயமாக).

பயிற்சி 4.2

1. தீர்க்க: (i) $\dfrac{dy}{dx} = ae^{y}$ (ii) $\dfrac{1+x^2}{1+y} = xy\dfrac{dy}{dx}$

2. தீர்க்க : $y(1-x) - x\dfrac{dy}{dx} = 0$

3. தீர்க்க: (i) $ydx - xdy = 0$

   (ii) $\dfrac{dy}{dx} + e^{x} + ye^{x} = 0$

4. தீர்க்க: $\cos x(1+\cos y)dx - \sin y(1+\sin x)dy = 0$

5. தீர்க்க: $(1-x)dy - (1+y)dx = 0$

6. தீர்க்க: (i) $\dfrac{dy}{dx} = y\sin 2x$

   (ii) $\log\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = ax + by$

7. ஆதி வழிச்செல்லும் வளைவரையின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $P(x, y)$ யிடத்து சாய்வு $\dfrac{x-a}{y-b}$ எனில், அவ்வளைவரையைக் காண்க.

4.2.3 சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (Homogeneous Differential Equations)

$f(x, y)$ மற்றும் $g(x, y)$ என்பன ஒவ்வொன்றும் x, y -இல் அமைந்த ஒரே படியுள்ள சமபடித்தான சார்புகளெனில் $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ என்பது ஒரு சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஆகும். (அல்லது) சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$ என எழுதலாம்.

வரிசை ஒன்று உடைய சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை தீர்க்கும் முறை (Method of solving first order Homogeneous differential equation)

(i) $f(x, y)$ மற்றும் $g(x, y)$ என்பன ஒவ்வொன்றும் ஒரே படியுள்ள சமபடித்தான சார்புகளா எனச்சோதிக்க.

அதாவது, $\dfrac{dy}{dx} = F\left(\dfrac{y}{x}\right)$

(ii) $y = vx$ மற்றும் $\dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$ எனப் பிரதியிடுக.

குறிப்பு

சில நேரங்களில், சமபடித்தான வகைக்கெழு சமன்பாட்டை $\dfrac{dx}{dy} = F\left(\dfrac{x}{y}\right)$ ... (1) என்றவாறு எடுத்து எளிதாக தீர்க்கலாம்.

இந்த முறையில் $x = vy$ மற்றும் $\dfrac{dx}{dy} = v + x\dfrac{dv}{dy}$ என (1) -இல் பிரதியிட, வரிசை ஒன்று உடைய சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு மாறிகளை பிரிக்கக்கூடிய சமன்பாடாக மாறிவிடும்.

தொகையீடுதலுக்குப் பிறகு $v = \dfrac{x}{y}$ எனப் பிரதியிட்டு தீர்வைக் காணலாம்.

(iii) சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

$v + x\dfrac{dv}{dx} = F(v)$ என உருமாற்றம் பெறும்.

(iv) மாறிகளைப் பிரிக்க, கிடைப்பது

$x\dfrac{dv}{dx} = F(v) - v \Rightarrow \dfrac{dv}{F(v)-v} = \dfrac{dx}{x}$

ஆகும்.

(v) தொகையிடுதலுக்குப் பிறகு v மற்றும் x -ல் சமன்பாடு அமையும்.

(vi) v -ஐ $\dfrac{y}{x}$ என்று மாற்றி தீர்வைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.15

வகைக்கெழு சமன்பாட்டைத் தீர்க்க

$y^2dx + (xy + x^2)dy = 0$

தீர்வு

$$y^2dx + (xy+x^2)\,dy = 0$$

$$(xy+x^2)\,dy = -y^2dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2}{xy+x^2} \qquad (1)$$

இது ஒரே படியுள்ள x, y-இல் அமைந்த சமபடித்தான வகைக்கெழு சமன்பாடாகும்.

$y = vx$ மற்றும் $\dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$ என பிரதியிட,

$\therefore$ (1) ஆனது

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{-v^2x^2}{x\ vx + x^2}$$

$$= \frac{-v^2}{v+1}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-v^2}{v+1} - v$$

$$= \frac{-v^2 - v^2 - v}{v+1}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-\left(v+2v^2\right)}{1+v}$$

மாறிகளை பிரிக்கக் கிடைப்பது,

$$\frac{1+v}{v(1+2v)}\,dv = \frac{-dx}{x}$$

$$\frac{(1+2v)-v}{v(1+2v)}\,dv = \frac{-dx}{x}$$

$$(\because \ 1+v = 1+2v-v)$$

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{1+2v}\,dv = \frac{-dx}{x}$$

இருபுறமும் தொகையிட, நாம் பெறுவது

$$\int\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{1+2v}\right)dv = -\int\frac{dx}{x}$$

$$\log v - \frac{1}{2}\log(1+2v) = -\log x + \log c$$

$$\log\left(\frac{v}{\sqrt{1+2v}}\right) = \log\left(\frac{c}{x}\right)$$

$$\frac{v}{\sqrt{1+2v}} = \frac{c}{x}$$

$v = \dfrac{y}{x}$ என பிரதியிட,

$$\frac{\frac{y}{x}}{\sqrt{1+\frac{2y}{x}}} = \frac{c}{x}$$

$$\frac{y\sqrt{x}}{\sqrt{x+2y}} = c$$

$$\frac{y^2x}{x+2y} = k$$

இங்கு $k = c^2$

எடுத்துக்காட்டு 4.16

வகைக்கெழு சமன்பாட்டைத் தீர்க்க :

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y}{x+y}$.

தீர்வு:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y} \qquad (1)$$

இது ஒரு சமபடித்தான வகைக்கெழு சமன்பாடாகும்.

$y = vx$ மற்றும் $\dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$ என பிரதியிட,

$$\therefore (1) \Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x-vx}{x+vx} = \frac{1-v}{1+v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v}{1+v} - v$$
$$= \frac{1-2v-v^2}{1+v}$$
$$\frac{1+v}{v^2+2v-1}dv = \frac{-dx}{x}$$

இருபுறமும் 2 ஆல்பெருக்க,

$$\frac{2+2v}{v^2+2v-1}dv = -2\frac{dx}{x}$$

தொகையிட

$$\int\frac{2+2v}{v^2+2v-1}dv = -2\int\frac{dx}{x}$$
$$\log(v^2+2v-1) = -2\log x + \log c$$
$$v^2+2v-1 = \frac{c}{x^2}$$
$$x^2\,(v^2+2v-1) = c$$

$v = \dfrac{y}{x}$ என்பதால்

$$x^2\left[\frac{y^2}{x^2}+\frac{2y}{x}-1\right] = c$$

$\therefore\ y^2+2xy-x^2 = c$ என்பது தீர்வாகும்.

குறிப்பு

$\displaystyle\int\frac{1+v}{v^2+2v}dv$ -ஐ பகுதி பின்னமாக்குதல் முறையில் தொகையிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.17

$x=1,\ y=1$ எனும் போது $x^2\,dy + y\,(x+y)\,dx = 0$ என்ற வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வைக் காண்க.

தீர்வு

$$x^2dy + y(x+y)dx = 0$$
$$x^2dy = -y\,(x+y)\,dx$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(xy+y^2)}{x^2} \qquad (1)$$

$y = vx$ மற்றும் $\dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$ என (1)-இல் பிரதியிட,

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{-(x\,vx+v^2x^2)}{x^2}$$
$$= -\left(v+v^2\right)$$
$$x\frac{dv}{dx} = -v^2-v-v$$
$$= -(v^2+2v)$$

மாறிகளை பிரிக்க கிடைப்பது,

$$\frac{dv}{v^2+2v} = \frac{-dx}{x}$$
$$\frac{dv}{v(v+2)} = \frac{-dx}{x}$$
$$\frac{1}{2}\left[\frac{(v+2)-v}{v(v+2)}\right]dv = \frac{-dx}{x}$$
$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{v+2}\right)dv = -\int\frac{dx}{x}$$
$$\frac{1}{2}\left[\log v - \log(v+2)\right] = -\log x + \log c$$
$$\frac{1}{2}\log\frac{v}{v+2} = \log\frac{c}{x}$$
$$\Rightarrow \frac{v}{v+2} = \frac{c^2}{x^2}$$

$v = \dfrac{y}{x}$ எனப் பிரதியிட,

$$\frac{y}{x\left(\frac{y}{x}+2\right)} = \frac{k}{x^2} \quad \text{இங்கு } c^2 = k$$
$$\frac{y\,x^2}{y+2x} = k \qquad (2)$$

$x = 1$ மற்றும் $y = 1$ எனில்,

$$\therefore (2) \Rightarrow \quad k = \frac{1}{1+2}$$
$$k = \frac{1}{3}$$

$\therefore\ 3x^2\,y = 2x + y$ என்பது தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.18

x காலணிகள் தயாரிப்பதற்கான இறுதிநிலைச் செலவு $(3xy+y^2)\,dx+(x^2+xy)\,dy=0$ மற்றும் ஒரு ஜோடி காலணிகள் தயாரிப்பதற்கான மொத்த செலவு ₹ 12 எனில், மொத்த செலவுச் சார்பைக் காண்க.

தீர்வு:

இறுதிநிலைச் செலவுச் சார்பு :

$(x^2+xy)\,dy+(3xy+y^2)\,dx=0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(3xy+y^2)}{x^2+xy} \qquad (1)$$

$y=vx$ மற்றும் $\dfrac{dy}{dx}=v+x\dfrac{dv}{dx}$ என (1) –ல் பிரதியிட,

$$v+x\frac{dv}{dx} = \frac{-(3x\ vx+v^2x^2)}{x^2+x\ vx}$$

$$= \frac{-(3v+v^2)}{1+v}$$

இப்பொழுது, $$x\frac{dv}{dx} = \frac{-3v-v^2}{1+v}-v$$

$$= \frac{-3v-v^2-v-v^2}{1+v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-4v-2v^2}{1+v}$$

$$\frac{1+v}{4v+2v^2}\,dv = \frac{-dx}{x}$$

தொகையிட,

$$\int\frac{1+v}{4v+2v^2}\,dv = -\int\frac{dx}{x}$$

இருபுறமும் 4 -ஆல் பெருக்கிட,

$$\int\frac{4+4v}{4v+2v^2}\,dv = -4\int\frac{dx}{x}$$

$$\log\,(4v+2v^2) = -4\log x+\log c$$

$$4v+2v^2 = \frac{c}{x^4}$$

$$x^4\,(4v+2v^2) = c$$

$$v = \frac{y}{x} \text{ என பிரதியிட,}$$

$$x^4\left(4\frac{y}{x}+2\frac{y^2}{x^2}\right) = c$$

$$x^4\left[\frac{4\,xy+2y^2}{x^2}\right] = c$$

$$c = 2x^2\,(2xy+y^2) \qquad (2)$$

ஒரு ஜோடி காலணிகளை தயாரிப்பதற்கான செலவு = ₹ 12.

$x=2$ மற்றும் $y=12$ எனில் $c=8\left[48+144\right]=1536$

செலவுச் சார்பு : $x^2\,(2xy+y^2) = 768.$

எடுத்துக்காட்டு 4.19

$\dfrac{dy}{dq}=\dfrac{q^2+3y^2}{2qy}$ என்ற இறுதிநிலை சமன்பாட்டில் வருவாய் 'y' மற்றும் வெளியீடு q என கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. வெளியீடு 1 அலகு இருக்கும் பொழுது வருவாய் ₹ 5 எனில், மொத்த வருவாய்ச் சார்பைக் காண்க.

தீர்வு:

$$MR=\frac{dy}{dq} = \frac{q^2+3y^2}{2qy} \qquad (1)$$

$y=vq$ மற்றும் $\dfrac{dy}{dq}=v+q\dfrac{dv}{dq}$ என (1) -இல் பிரதியிட,

$$(1) \Rightarrow \quad v+q\frac{dv}{dq} = \frac{q^2+3v^2q^2}{2q\ vq}$$

$$= \frac{1+3v^2}{2v}$$

$$q\frac{dv}{dq} = \frac{1+3v^2}{2v}-v$$

$$= \frac{1+3v^2-2v^2}{2v}$$

$$= \frac{1+v^2}{2v}$$

$$\frac{2v}{1+v^2}\,dv = \frac{dq}{q}$$

தொகையிட,

$$\int \frac{2v}{1+v^2}\,dv = \int \frac{dq}{q}$$

$$\log\,(1+v^2) = \log q + \log c$$

$$1+v^2 = cq$$

$$v = \frac{y}{q}$$ என பிரதியிட,

$$1+\frac{y^2}{q^2} = cq$$

$$q^2+y^2 = c\,q^3 \qquad (2)$$

வெளியீடு 1 அலகு இருக்கும் பொழுது வருவாய் ₹ 5 எனில்

$1+25=c \Rightarrow c=26$ (2) லிருந்து

$\therefore\; q^2+y^2=26q^3$ என்பது மொத்த வருவாய் சார்பு ஆகும்.

பயிற்சி 4.3

கீழ்வரும் சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

1. $x\dfrac{dy}{dx}=x+y$ 2. $(x-y)\dfrac{dy}{dx}=x+3y$

3. $x\dfrac{dy}{dx}-y=\sqrt{x^2+y^2}$

4. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x-2y}{2x-3y}$

5. $(y^2-2xy)dx=(x^2-2xy)dy$

6. ஒரு வளைவரையில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி (x,y) இடத்து அமையக்கூடிய தொடுகோட்டின் சாய்வு $(y^3-2yx^2)dx+(2xy^2-x^3)\,dy=0$ ஆகும். மேலும் இந்த வளைவரையானது $(1,2)$ புள்ளி வழிச் செல்கிறது எனில், வளைவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

7. மின்சார சாதனங்களை உற்பத்தி செய்யும் நிறுவனம் வீட்டு பயன்பாட்டிற்கான மின் மாற்றிகளை (switches) தயாரிக்கின்றது. இதற்கான இறுதி நிலை வருவாய் சார்பு $(x^2+y^2)dy=xydx$ என அந்த நிறுவனம் மதிப்பீடு செய்கிறது (இங்கு x என்பது அலகுகளின் எண்ணிக்கை (ஆயிரங்களில்)) எனில், மொத்த வருவாய் சார்பை காண்க.

4.2.4 வரிசை ஒன்றுடைய நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (Linear differential equations of first order)

வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் உள்ள சார்ந்த மாறி மற்றும் அதன் வகைக்கெழுக்களின் படி ஒன்று மற்றும் இவ்விரண்டின் பெருக்கல் பலன் இல்லாமலும் இருக்குமாயின் அச்சமன்பாடு நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடு எனப்படும்.

முதல் வரிசை நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொதுவடிவம் $\dfrac{dy}{dx}+Py=Q$ ....(1)

இங்கு P மற்றும் Q ஆகியவை x இன் சார்புகள் மட்டுமே. சமன்பாடு (1) ஆனது y -இல் நேரியச் சமன்பாடாகும்.

இதன் தீர்வானது $ye^{\int pdx}=\int Qe^{\int pdx}dx+c$

என அமையும் இங்கு $e^{\int pdx}$ என்பது தொகையீட்டுக் காரணி (Integrating factor) எனப்படும். மேலும், இதனை தொ.கா (I.F) எனச் சுருக்கமாக குறிப்பர்.

குறிப்பு

வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $\dfrac{dx}{dy}+Px=Q$ (x இல் நேரியது) இல் P மற்றும் Q ஆகியவை y இன் சார்புகள் மட்டுமே. இதன் தீர்வானது $xe^{\int pdy}=\int Qe^{\int pdy}dy+c$ என அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.20

தீர்க்க : $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=x^3$

தீர்வு:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=x^3$$

இது $\dfrac{dy}{dx}+Py=Q$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

இங்கு $P=\dfrac{1}{x},\quad Q=x^3$

$$\int Pdx = \int \frac{1}{x}dx=\log x$$

$$I.F = e^{\int pdx}=e^{\log x}=x$$

தேவையான தீர்வு :

$$y(I.F) = \int Q(I.F)dx+c$$

$$yx = \int x^3 . x\, dx + c$$
$$= \int x^4 dx + c$$
$$= \frac{x^5}{5} + c$$
$$\therefore \quad yx = \frac{x^5}{5} + c$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடானது எப்பொழுதும் முதல் வரிசையை பெற்றிருக்கும். ஆனால் எல்லா முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாடும் நேரியதாக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{3dy}{dx} + 2y^2 = 0$$

என்பது நேரியதாக இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 4.21

தீர்க்க : $\cos^2 x \dfrac{dy}{dx} + y = \tan x$

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{\cos^2 x} y = \dfrac{\tan x}{\cos^2 x}$ என எழுதலாம்.

அதாவது, $\dfrac{dy}{dx} + y \sec^2 x = \tan x \sec^2 x$

இது $\dfrac{dy}{dx} + Py = Q$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

இங்கு $P = \sec^2 x, Q = \tan x \sec^2 x$

$$\int Pdx = \int \sec^2 x\, dx = \tan x$$
$$I.F = e^{\int pdx} = e^{\tan x}$$

தேவையான தீர்வு :

$$y(I.F) = \int Q(I.F)dx + c$$
$$ye^{\tan x} = \int \tan x \sec^2 x\, e^{\tan x}\, dx + c$$

$\tan x = t$ என்க.

$\sec^2 x dx = dt$

$$\therefore \quad ye^{\tan x} = \int te^t \, dt + c$$
$$= \int td(e^t) + c$$
$$= te^t - e^t + c$$
$$= \tan x\, e^{\tan x} - e^{\tan x} + c$$
$$ye^{\tan x} = e^{\tan x}(\tan x - 1) + c$$

எடுத்துக்காட்டு 4.22

தீர்க்க : $(x^2+1)\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 4x^2$

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை

$\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2x}{x^2+1} y = \dfrac{4x^2}{x^2+1}$ என்றவாறு மாற்றி அமைக்கலாம்.

இது $\dfrac{dy}{dx} + Py = Q$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

இங்கு $P = \dfrac{2x}{x^2+1}, Q = \dfrac{4x^2}{x^2+1}$

$$\int Pdx = \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \log(x^2+1)$$

$$I.F = e^{\int pdx} = e^{\log(x^2+1)} = x^2+1$$

தேவையான தீர்வு:

$$y(I.F) = \int Q(I.F)dx + c$$
$$y(x^2+1) = \int \frac{4x^2}{x^2+1}(x^2+1)dx + c$$
$$y(x^2+1) = \frac{4x^3}{3} + c$$

எடுத்துக்காட்டு 4.23

தீர்க்க : $\dfrac{dy}{dx} - 3y \cot x = \sin 2x$, இங்கு $x = \dfrac{\pi}{2}$ எனில், $y = 2$

தீர்வு:

$$\frac{dy}{dx} - (3\cot x).y = \sin 2x$$

இது $\dfrac{dy}{dx} + Py = Q$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

இங்கு $P = -3\cot x,\ Q = \sin 2x$

$$\int P dx = \int -3\cot x dx = -3\log \sin x =$$
$$-\log \sin^3 x = \log \frac{1}{\sin^3 x}$$

$$\text{I.F.} \quad = e^{\log \frac{1}{\sin^3 x}} = \frac{1}{\sin^3 x}$$

தேவையான தீர்வு : $y\ (I.F) = \int Q(I.F)dx + c$

$$y\frac{1}{\sin^3 x} = \int \sin 2x \frac{1}{\sin^3 x}\ dx + c$$

$$y\frac{1}{\sin^3 x} = \int 2\sin x \cos x \times \frac{1}{\sin^3 x} dx + c$$

$$= 2\int \frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x}\ dx + c$$

$$= 2\int \operatorname{cosec} x \cot x dx + c$$

$$y\frac{1}{\sin^3 x} = -2\operatorname{cosec} x + c \qquad (1)$$

$x = \frac{\pi}{2}$ மற்றும் $y = 2$ எனில்,

$$(1) \Rightarrow 2\left(\frac{1}{1}\right) = -2\times 1 + c \Rightarrow c = 4$$

$$\therefore (1) \Rightarrow y\frac{1}{\sin^3 x} = -2\operatorname{cosec} x + 4$$

எடுத்துக்காட்டு 4.24

ஒரு நிறுவனம் ஒன்றில் குறிப்பிட்ட x டன்கள் பொருளை தயாரிப்பதற்கு ஆகும் செலவு C -ஐ $x\frac{dC}{dx} = \frac{3}{x} - C$ எனும் சமன்பாட்டினால் குறித்தால் $x = 1$ மற்றும் $C = 2$ எனில், C மற்றும் x ஆகியவற்றிற்கிடையேயான தொடர்பைக் காண்க.

தீர்வு:

$$x\frac{dC}{dx} = \frac{3}{x} - C$$

$$\frac{dC}{dx} = \frac{3}{x^2} - \frac{C}{x}$$

$$\frac{dC}{dx} + \frac{C}{x} = \frac{3}{x^2}$$

அதாவது, $\frac{dC}{dx} + \frac{1}{x}C = \frac{3}{x^2}$

இது $\frac{dC}{dx} + PC = Q$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

இங்கு, $P = \frac{1}{x},\ Q = \frac{3}{x^2}$

$$\int P dx = \int \frac{1}{x} dx = \log x$$

$$I.F = e^{\int pdx} = e^{\log x} = x$$

தீர்வு : $C(I.F) = \int Q\left(I.F\right)dx + k$, இங்கு k ஒரு மாறிலி

$$Cx = \int \frac{3}{x^2} x dx + k$$

$$= 3\int \frac{1}{x} dx + k$$

$$Cx = 3\log x + k \qquad (1)$$

$x = 1$ மற்றும் $C = 2$ எனில், $k = 2$ ஆகும்.

$\therefore$ C மற்றும் x -க்கான தொடர்பு : $Cx = 3\log x + 2$

பயிற்சி 4.4

பின்வருவனவற்றை தீர்க்க:

1. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$
2. $\frac{dy}{dx} + y\ \cos x = \sin x \cos x$
3. $x\frac{dy}{dx} + 2y = x^4$
4. $\frac{dy}{dx} + \frac{3x^2}{1+x^3}y = \frac{1+x^2}{1+x^3}$
5. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = xe^x$
6. $\frac{dy}{dx} + y\tan x = \cos^3 x$
7. $\frac{dy}{dx} + 2y\tan x = \sin x$ மற்றும் $x = \frac{\pi}{3}$ எனில் $y = 0$ எனும் நிலையில் y-ஐ x-இன் வாயிலாக எழுதுக.
8. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = xe^x$

9. ஒரு வங்கியானது தொடர் கூட்டுவட்டிமுறையில் வட்டியைக் கணக்கிடுகிறது. அதாவது வட்டிவீதத்தை அந்தந்த நேரத்தில் அசலின் மாறுவீதத்தில் கணக்கிடுகிறது. வருடத்திற்கு 8% தொடர் கூட்டு வீதத்தில் ₹ 1,00,000 தொகையை அவ்வங்கியில் ஒருவர் முதலீடு செய்தால் 10 வருடங்களுக்கு பின்னர் அவர் எவ்வளவு தொகையைப் பெறுவார்?

4.3 மாறிலிகளைக் கெழுக்களாகக் கொண்ட இரண்டாம் வரிசை நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (Second Order first degree differential equations with constant coefficients)

4.3.1 மாறிலிகளைக் கெழுக்களாகக் கொண்ட இரண்டாம் வரிசை நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் (A general second order linear differential equation with constant coefficients)

$$\boxed{a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=f(x)}$$

$$aD^2y+bDy+cy=f(x),$$

இங்கு $\dfrac{d}{dx}=D,\dfrac{d^2}{dx^2}=D^2$

அதாவது, $\phi(D)y=f(x)$ (1)

இங்கு $\phi(D)=aD^2+bD+c$ (a,b மற்றும் c மாறிலிகள்)

சமன்பாடு (1) -ஐ தீர்க்க, முதலில் நாம் $\phi(D)y=0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க வேண்டும். இத்தீர்வானது நிரப்புச் சார்பு (C.F) எனப்படும்.

அடுத்ததாக $f(x)$ ன் மீது $\dfrac{1}{\phi(D)}$ செயல்படுத்தும் போது கிடைக்கும் தீர்வானது சிறப்புச் தொகை (P.I) என அழைக்கப்படுகிறது.

$$\therefore \qquad PI=\frac{1}{\phi(D)}f(x)$$

பொதுத் தீர்வு : $y=$ நிரப்புச் சார்பு (C.F) + சிறப்புச் தொகை (P.I)

வகை 1 : $f(x)=0$

அதாவது, $\phi(D)y=0$

இதனை தீர்க்க, $\phi(D)=0$

D க்கு பதிலாக m -ஐ பிரதியிடுக, இச்சமன்பாட்டை துணைச் சமன்பாடு என்கிறோம். $\phi(m)=0$ என்பது ஒரு இருபடிச் சமன்பாடாகும். எனவே இதற்கு m_1 மற்றும் m_2 என்ற இரு தீர்வுகள் உள்ளன.

இவ்வகைத் தீர்வுகள் பின்வரும் நிலையில் அமையும்.

வ. எண்	தீர்வுகளின் தன்மை	நிரப்புச் சார்பு
1.	மெய் மற்றும் வெவ்வேறானவை $(m_1\neq m_2)$	$Ae^{m_1x}+Be^{m_2x}$
2.	மெய் மற்றும் சமமானவை $m_1=m_2=m$ என்க	$(Ax+B)e^{mx}$
3.	கலப்பெண்கள் $(\alpha\pm i\beta)$	$e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$

இங்கு A மற்றும் B என்பன ஏதேனும் இருமாறிலிகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.25

தீர்க்க : $(D^2-3D-4)y=0$

தீர்வு:

$(D^2-3D-4)y=0$

துணைச் சமன்பாடு :

$m^2-3m-4=0$

$\Rightarrow (m-4)(m+1)=0$

$m=-1,4$

மூலங்கள் மெய் மற்றும் வெவ்வேறானவை.

$\therefore$ நிரப்புச் சார்பு : CF $=Ae^{-x}+Be^{4x}$

பொதுத் தீர்வு : $y=Ae^{-x}+Be^{4x}$

எடுத்துக்காட்டு 4.26

தீர்க்க : $9y''-12y'+4y=0$

தீர்வு:

$(9D^2-12D+4)y=0$

துணைச் சமன்பாடு :

$(3m-2)^2=0$

$$(3m-2)(3m-2)=0 \quad \Rightarrow m=\frac{2}{3},\frac{2}{3}$$

மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம்

நிரப்புச் சார்பு : $C.F = (Ax+B)e^{\frac{2}{3}x}$

பொதுத் தீர்வு : $y = (Ax+B)e^{\frac{2}{3}x}$

எடுத்துக்காட்டு 4.27

தீர்க்க : $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4\dfrac{dy}{dx}+5y=0$

தீர்வு:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+5y = 0$$

$$(D^2-4D+5)y = 0$$

துணைச் சமன்பாடு :

$$m^2-4m+5 = 0$$

$$\Rightarrow (m-2)^2-4+5 = 0$$

$$(m-2)^2 = -1$$

$$m-2 = \pm\sqrt{-1}$$

$m = 2\pm i$, $\alpha \pm i\beta$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

$$\therefore C.F = e^{2x}\left[A\cos x + B\sin x\right]$$

பொதுத் தீர்வு : $y=e^{2x}\left[A\cos x + B\sin x\right]$

எடுத்துக்காட்டு 4.28

தீர்க்க : $\dfrac{d^2x}{dt^2}-3\dfrac{dx}{dt}+2x=0$. இங்கு $t=0$ எனில் $x=0$ மற்றும் $\dfrac{dx}{dt}=1$.

தீர்வு:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}+2x = 0$$

$(D^2-3D+2)x = 0$ இங்கு $D=\dfrac{d}{dt}$ மற்றும் $D^2=\dfrac{d^2}{dt^2}$

துணைச் சமன்பாடு : $m^2-3m+2 = 0$

$$(m-1)(m-2) = 0$$

$$m = 1, 2$$

நிரப்புச் சார்பு : $C.F = Ae^t + Be^{2t}$

பொதுத் தீர்வு : $x = Ae^t + Be^{2t}$ (1)

$t = 0$ மற்றும் $x = 0$ எனில்,

$(1) \Rightarrow 0 = A+B$ (2)

(1) –ல் t-ஐ பொறுத்து வகைக் காண,

$$\frac{dx}{dt} = Ae^t + 2Be^{2t}$$

t=0 மற்றும் $\dfrac{dx}{dt} = 1$ எனில்,

$A+2B = 1$ (3)

$A+B=0$ மற்றும் $A+2B=1$–ஐ தீர்க்க, நாம் பெறுவது $A=-1, B=1$ ஆகும்.

$$\therefore (1) \Rightarrow x = -e^t+e^{2t}$$

$$= e^{2t}-e^t$$

வகை II : $f(x)=e^{ax}$ அதாவது, $\phi(D)\,y = e^{ax}$

$$P.I = \frac{1}{\phi(D)}e^{ax}$$

$D = a$ எனும்பொழுது $\phi(D)\neq 0$ எனில் D க்கு பதிலாக a யை பிரதியிடவும்.

$D = a$ எனும்பொழுது $\phi(D)=0$ எனில்,

$$P.I = x\frac{1}{\phi'(D)}e^{ax}$$

$D = a$ எனும்பொழுது $\phi'(D)\neq 0$ எனில் Dக்கு பதிலாக a-ஐப் பிரதியிடவும்.

$D = a$ எனும்பொழுது $\phi'(D)=0$ எனில்

$$P.I = x^2\frac{1}{\phi''(D)}e^{ax}$$

இவ்வாறாக தொடரலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.29

தீர்க்க : $(D^2-4D-1)y=e^{-3x}$

தீர்வு:

$$(D^2-4D-1)y=e^{-3x}$$

துணைச் சமன்பாடு :

$$m^2-4m-1 = 0$$

$$(m-2)^2-4-1 = 0$$

$$(m-2)^2 = 5$$

$$m-2 = \pm\sqrt{5}$$

$$m = 2 \pm \sqrt{5}$$

$$\text{C.F} = Ae^{(2+\sqrt{5})x} + Be^{(2-\sqrt{5})x}$$

$$\text{PI} = \frac{1}{\phi(D)} f(x)$$

$$= \frac{1}{D^2 - 4D - 1} e^{-3x}$$

$$= \frac{1}{(-3)^2 - 4(-3) - 1} e^{-3x}$$

(D க்கு பதிலாக -3ஐ பிரதியிட)

$$= \frac{1}{9 + 12 - 1} e^{-3x}$$

$$= \frac{e^{-3x}}{20}$$

பொதுத் தீர்வு : $y = \text{C.F+P.I}$

$$= Ae^{(2+\sqrt{5})x} + Be^{(2-\sqrt{5})x} + \frac{e^{-3x}}{20}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.30

தீர்க்க: $(D^2 - 2D + 1)y = e^{2x} + e^x$

தீர்வு:

$$(D^2 - 2D + 1)y = e^{2x} + e^x$$

துணைச் சமன்பாடு :

$$m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (m-1)(m-1) = 0$$

$$m = 1, 1$$

$$\text{C.F} = (Ax + B)e^x$$

$$\text{PI} = \frac{1}{\phi(D)} f(x)$$

$$= \frac{1}{D^2 - 2D + 1}(e^{2x} + e^x)$$

இங்கு, $P.I_1 = \dfrac{1}{D^2 - 2D + 1} e^{2x}$

$$= \frac{1}{4 - 4 + 1} e^{2x}$$ (Dக்கு பதிலாக 2 ஐ பிரதியிட)

$$= e^{2x}$$

மற்றும் $P.I_2 = \dfrac{1}{D^2 - 2D + 1} e^x$

$$= \frac{1}{(D-1)^2} e^x$$

D க்கு 1-ஐ பிரதியிட $(D-1)^2 = 0$

$$\therefore \quad P.I_2 = x.\frac{1}{2(D-1)} e^x$$

D க்கு பதிலாக 1-ஐ பிரதியிட, 2(D−1) = 0

$$\therefore \quad P.I_2 = x^2 \frac{1}{2} e^x$$

பொதுத் தீர்வு : $y = \text{C.F+P.I}_1\text{+P.I}_2$

$$= (Ax + B)e^x + e^{2x} + \frac{x^2}{2} e^x$$

எடுத்துக்காட்டு 4.31

தீர்க்க: $(3D^2 + D - 14)y = 4 - 13e^{\frac{-7}{3}x}$

தீர்வு:

$$(3D^2 + D - 14)y = 4 - 13e^{\frac{-7}{3}x}$$

துணைச் சமன்பாடு :

$$3m^2 + m - 14 = 0$$

$$(3m + 7)(m - 2) = 0$$

$$m = \frac{-7}{3}, 2$$

$$\text{C.F} = Ae^{\frac{-7}{3}x} + Be^{2x}$$

$$\Rightarrow \text{PI} = \frac{1}{\phi(D)} f(x)$$

$$= \frac{1}{3D^2 + D - 14}\left(4 - 13e^{\frac{-7}{3}x}\right)$$

$$= \frac{1}{3D^2 + D - 14}(4) + \frac{1}{3D^2 + D - 14}\left(-13e^{\frac{-7}{3}x}\right)$$

$$= PI_1 + PI_2$$

$$\text{P.I}_1 = \frac{1}{3D^2 + D - 14} 4e^{0x}$$

$$= \frac{1}{0 + 0 - 14} 4e^{0x}$$ (D-க்கு பதிலாக 0 என பிரதியிட)

$$\mathrm{P.I}_1 = \frac{-4}{14}$$

$$P.I_2 = \frac{1}{3D^2+D-14} \times (-13) e^{\frac{-7}{3}x}$$

D-க்கு பதிலாக $\frac{-7}{3}$ என பிரதியிட, $3D^2+D-14=0$.

$$\therefore\ P.I_2 = x.\frac{1}{6D+1}\left(-13e^{\frac{-7}{3}x}\right)$$

D -க்கு பதிலாக $\frac{-7}{3}$ என பிரதியிட,

$$\therefore\ P.I_2 = x\frac{1}{6\left(\frac{-7}{3}\right)+1}\left(-13e^{\frac{-7}{3}x}\right)$$

$$= x\frac{1}{-13}\left(-13e^{\frac{-7}{3}x}\right)$$

$$= xe^{\frac{-7}{3}x}$$

பொதுத் தீர்வு : $y = C.F.+P.I_1+P.I_2$

$$y = Ae^{\frac{-7}{3}x}+Be^{2x}-\frac{2}{7}+xe^{\frac{-7}{3}x}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.32

$Q_d = 29-2p-5\frac{dp}{dt}+\frac{d^2p}{dt^2}$ மற்றும் $Q_s = 5+4p$ என்பன முறையே ஒரு பொருளின் தேவை அளவு மற்றும் அளிப்பு அளவு ஆகியவற்றைக் குறிக்கின்றன. இங்கு P விலையைக் குறிக்கிறது. சந்தை பரிமாற்றத்தில் சமன்நிலை விலையைக் காண்க.

தீர்வு:

சமன்நிலை விலையில், $Q_d = Q_s$

$$\Rightarrow\ 29-2p-5\frac{dp}{dt}+\frac{d^2p}{dt}=5+4p$$

$$\Rightarrow\ 24-6p-5\frac{dp}{dt}+\frac{d^2p}{dt^2}=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{d^2p}{dt^2}-5\frac{dp}{dt}-6p=-24$$

$$(D^2-5D-6)\,p=-24$$

துணைச் சமன்பாடு :

$$m^2-5m-6=0$$

$$(m-6)(m+1) = 0$$

$$\Rightarrow\ m = 6, -1$$

$$\mathrm{C.F} = Ae^{6t}+Be^{-t}$$

$$\mathrm{P.I} = \frac{1}{\phi(D)}f(t)$$

$$= \frac{1}{D^2-5D-6}(-24)e^{0t}$$

$$= \frac{-24}{-6}$$ (D-க்கு பதிலாக 0வை பிரதியிட)

$$= 4$$

பொதுத் தீர்வு : $p = C.F+P.I$

$$= Ae^{6t}+Be^{-t}+4$$

பயிற்சி 4.5

கீழ்க்காணும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை தீர்க்க :

1. $\frac{d^2y}{dx^2}-6\frac{dy}{dx}+8y=0$
2. $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=0$
3. $\left(D^2+2D+3\right)y=0$
4. $\frac{d^2y}{dx^2}-2k\frac{dy}{dx}+k^2y=0$
5. $\left(D^2-2D-15\right)y=0$, $x = 0$ எனும்போது $\frac{dy}{dx}=0$ மற்றும் $\frac{d^2y}{dx^2}=2$
6. $\left(4D^2+4D-3\right)y=e^{2x}$
7. $\frac{d^2y}{dx^2}+16y=0$
8. $x = 0$ மற்றும் $x = \log 2$ எனும்போது $\left(D^2-3D+2\right)y=e^{3x}$ -ன் தீர்வானது பூச்சிய மாகிறது எனில், சமன்பாட்டை தீர்க்க.
9. $\left(D^2+D-6\right)y=e^{3x}+e^{-3x}$
10. $\left(D^2-10D+25\right)y=4e^{5x}+5$
11. $\left(4D^2+16D+15\right)y=4e^{\frac{-3}{2}x}$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 4.indd 102 3/5/2020 11:29:22 AM

12. $\left(3D^2+D-14\right)y=13e^{2x}$

13. $Q_d=13-6p+2\dfrac{dp}{dt}+\dfrac{d^2p}{dt^2}$ மற்றும் $Q_s=-3+2p$ என்பன முறையே ஒரு பொருளின் தேவை அளவு மற்றும் அளிப்பு அளவு ஆகியவற்றைக் குறிக்கின்றன. இங்கு p விலையைக் குறிக்கிறது. சந்தை பரிமாற்றத்தில் சமன்நிலை விலையைக் காண்க.

பயிற்சி 4.6

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்

1. $\dfrac{d^4y}{dx^4}-\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^4+\dfrac{dy}{dx}=3$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் படி ஆனது

   (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

2. $\sqrt{\dfrac{d^2y}{dx^2}}=\sqrt{\dfrac{dy}{dx}+5}$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன் பாட்டின் வரிசை மற்றும் படி முறையே

   (a) 2 மற்றும் 3 (b) 3 மற்றும் 2

   (c) 2 மற்றும் 1 (d) 2 மற்றும் 2

3. $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}-4=0$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை மற்றும் படி முறையே

   (a) 2 மற்றும் 6 (b) 3 மற்றும் 6

   (c) 1 மற்றும் 4 (d) 2 மற்றும் 4

4. $\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3+2y^{\frac{1}{2}}=x$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

   (a) வரிசை 2 மற்றும் படி 1 உடையது

   (b) வரிசை 1 மற்றும்படி 3 உடையது

   (c) வரிசை 1 மற்றும்படி 6 உடையது

   (d) வரிசை 1 மற்றும்படி 2 உடையது

5. $y=ae^x+be^{-x}$ என்ற சமன்பாட்டில் a -யையும் b யையும் நீக்கக் கிடைக்கும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

   (a) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-y=0$ (b) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}=0$

   (c) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$ (d) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-x=0$

6. $y=cx+c-c^3$ எனில், அதன் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

   (a) $y=x\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dy}{dx}-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3$

   (b) $y+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3=x\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{dy}{dx}$

   (c) $\dfrac{dy}{dx}+y=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3-x\dfrac{dy}{dx}$

   (d) $\dfrac{d^3y}{dx^3}=0$

7. $\dfrac{dx}{dy}+Px=Q$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தொகையீட்டுக் காரணி

   (a) $e^{\int Pdx}$ (b) $e^{-\int Pdx}$ (c) $\int Pdy$ (d) $e^{\int Pdy}$

8. $\left(D^2+4\right)y=e^{2x}$ இன் நிரப்புச் சார்பு

   (a) $\left(Ax+B\right)e^{2x}$

   (b) $\left(Ax+B\right)e^{-2x}$

   (c) $A\cos 2x+B\sin 2x$

   (d) $Ae^{-2x}+Be^{2x}$

9. $y=mx+c$ –இன் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு (m மற்றும் c என்பன மாறத்தக்க மாறிலிகள்)

   (a) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$ (b) $y=x\dfrac{dy}{dx}+c$

   (c) $xdy+ydx=0$ (d) $ydx-xdy=0$

10. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-8\dfrac{dy}{dx}+16y=2e^{4x}$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தொகை

   (a) $\dfrac{x^2e^{4x}}{2!}$ (b) $\dfrac{e^{4x}}{2!}$ (c) x^2e^{4x} (d) xe^{4x}

11. $\dfrac{dx}{dy}+px=0$ என்பதன் தீர்வானது

   (a) $x=ce^{py}$ (b) $x=ce^{-py}$

   (c) $x=py+c$ (d) $x=cy$

12. $\dfrac{dy}{dx}+Py=Q$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தொகையீட்டுக் காரணி $\sec^2 x$ எனில் $P=$

   (a) $2\tan x$ (b) $\sec x$ (c) $\cos^2 x$ (d) $\tan^2 x$

13. $x\dfrac{dy}{dx} - y = x^2$ -இன் தொகையீட்டுக் காரணி

(a) $\dfrac{-1}{x}$ (b) $\dfrac{1}{x}$ (c) $\log x$ (d) x

14. $\dfrac{dy}{dx} + Py = Q$ (இங்கு P மற்றும் Q என்பன x –ஐ சார்ந்த சார்புகள்) என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு

(a) $y = \int Qe^{\int Pdx} dx + c$

(b) $y = \int Qe^{-\int Pdx} dx + c$

(c) $ye^{\int Pdx} = \int Qe^{\int Pdx} dx + c$

(d) $ye^{\int Pdx} = \int Qe^{-\int Pdx} dx + C$

15. $y = e^{-2x}\left(A\cos x + B\sin x\right)$-ல் A மற்றும் B யை நீக்குவதன் மூலம் அமைக்கப்படும் வகைக் கெழுச் சமன்பாடு

(a) $y_2 - 4y_1 + 5 = 0$

(b) $y_2 + 4y - 5 = 0$

(c) $y_2 - 4y_1 - 5 = 0$

(d) $y_2 + 4y_1 + 5 = 0$

16. $f(D)y = e^{ax}$ இங்கு $f(D) = (D-a)^2$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் சிறப்புத்தொகை

(a) $\dfrac{x^2}{2}e^{ax}$ (b) xe^{ax} (c) $\dfrac{x}{2}e^{ax}$ (d) x^2e^{ax}

17. $x^2 + y^2 = a^2$ என்பதன் வகைகெழுச் சமன்பாடு

(a) $xdy+ydx=0$ (b) $ydx-xdy=0$

(c) $xdx-ydx=0$ (d) $xdx+ydy=0$

18. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = 0$ என்பதன் நிரப்புச் சார்பு

(a) $A + Be^x$ (b) $(A+B)e^x$

(c) $(Ax+B)e^x$ (d) $Ae^x + B$

19. $(3D^2 + D - 14)y = 13e^{2x}$ -ன் சிறப்புத் தொகை

(a) $\dfrac{x}{2}e^{2x}$ (b) xe^{2x} (c) $\dfrac{x^2}{2}e^{2x}$ (d) $13xe^{2x}$

20. $\dfrac{dy}{dx} = \cos x$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு

(a) $y = \sin x + 1$

(b) $y = \sin x - 2$

(c) $y = \cos x + c$, c மாறத்தக்க மாறிலி

(d) $y = \sin x + c$, c மாறத்தக்க மாறிலி

21. $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ என்ற வடிவில் உள்ள சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு தீர்க்கப்பட பயன்படுத்தப்படும் பிரதியிடல்

(a) $y = v\,x$ (b) $v = y\,x$

(c) $x = v\,y$ (d) $x = v$

22. $\dfrac{dx}{dy} = f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ என்ற வடிவில் உள்ள சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு தீர்க்கப்பட பயன்படுத்தப்படும் பிரதியிடல்,

(a) $x = v\,y$ (b) $y = v\,x$ (c) $y = v$ (d) $x = v$

23. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(x-y)}{x(x+y)}$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் $y = v\,x$ மற்றும் $\dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$ என பிரதியீடு செய்யும் போது கிடைக்கும், மாறிகள் பிரிக்கத்தக்க வகையில் அமைந்த சமன்பாடு

(a) $\dfrac{2v^2}{1+v}dv = \dfrac{dx}{x}$ (b) $\dfrac{2v^2}{1+v}dv = -\dfrac{dx}{x}$

(c) $\dfrac{2v^2}{1-v}dv = \dfrac{dx}{x}$ (d) $\dfrac{1+v}{2v^2}dv = -\dfrac{dx}{x}$

24. பின்வருவனவற்றுள் எது சமபடித்தான வகைக் கெழு சமன்பாடாகும்?

(a) $(3x-5)\,dx = (4y-1)\,dy$

(b) $xy\,dx - (x^3 + y^3)\,dy = 0$

(c) $y^2\,dx + (x^2 - xy - y^2)\,dy = 0$

(d) $(x^2 + y)\,dx = (y^2 + x)\,dy$

25. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\dfrac{f\left(\frac{y}{x}\right)}{f'\left(\frac{y}{x}\right)}$ என்ற சமபடித்தான வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு

(a) $f\left(\frac{y}{x}\right)=kx$ (b) $x\,f\left(\frac{y}{x}\right)=k$

(c) $f\left(\frac{y}{x}\right)=ky$ (d) $y\,f\left(\frac{y}{x}\right)=k$

இதர கணக்குகள்

1. $Q_d=30-5p+2\dfrac{dp}{dt}+\dfrac{d^2p}{dt^2}$ மற்றும் $Q_s=6+3p$ என்பன முறையே ஒரு பொருளின் தேவை அளவு மற்றும் அளிப்பு அளவு ஆகியவற்றைக் குறிக்கின்றன. இங்கு p விலையைக் குறிக்கிறது. சந்தை பரிமாற்றத்தில் சமன்நிலை விலையைக் காண்க.
2. $y=ax^2+bx$ -ஐ பொதுத் தீர்வாக கொண்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டினை அமைக்க.
3. தீர்க்க : $yx^2dx+e^{-x}dy=0$
4. தீர்க்க : $\left(x^2+y^2\right)dx+2xy\,dy=0$
5. தீர்க்க : $x\dfrac{dy}{dx}+2y=x^4$
6. ஒரு தயாரிப்பு நிறுவனத்தில், உபகரணங்களை இயக்கவும் பராமரிக்கவும் ஆகும் செலவு C மற்றும் அடுத்தடுத்த இரு பழுது பார்த்தலுக் குரிய இடைவெளிக்காலம் m ஆகியவற்றை $m^2\dfrac{dC}{dm}+2mC=2$ எனும் சமன்பாட்டினால் குறித்தால், $m = 2$ மற்றும் $c = 4$ எனில், C மற்றும் m ஆகியவைகளுக்கிடையேயானத் தொடர்பைக் காண்க.
7. தீர்க்க : $\left(D^2-3D+2\right)y=e^{4x}$ இங்கு $x = 0$ மற்றும் $x = 1$ எனில் $y = 0$.
8. தீர்க்க : $\dfrac{dy}{dx}+y\cos x=2\cos x$
9. தீர்க்க $x^2y\,dx-\left(x^3+y^3\right)dy=0$
10. தீர்க்க : $\dfrac{dy}{dx}=xy+x+y+1$

தொகுப்புரை

- ஒரு சார்பு மற்றும் அவற்றின் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட வகைக்கெழுக்களை கொண்ட சமன்பாடு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஆகும். அதாவது $y=f(x)$ சார்பு மற்றும் அதன் வகைக்கெழுக்கள் $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}\cdots$ கொண்ட சமன்பாடு வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.
- ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் இடம் பெற்றிருக்கும் வகைக்கெழுவின் மிக உயர்ந்த வரிசையே, அவ்வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை எனப்படும்.
- வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் படி என்பது அதில் இடம் பெற்றுள்ள வகைக்கெழுக்களின் உச்ச வரிசையின் படியாகும். குறிப்பாக வகைச்கெழுவின் பின்னங்கள் மற்றும் படி மூலங்கள் இருப்பின் அவற்றை நீக்கியபின் படி காணப்படவேண்டும்.
- கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டினை நிறைவு செய்யுமாறு அமையும் சார்பு அச்சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும். வகைக்கெழுச் சமனபாட்டின் தீர்விலுள்ள மாறத்தக்க மாறிலிகளின் எண்ணிக்கையானது அவ்வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசைக்குச் சமமாக இருக்க வேண்டும். அத்தீர்வினை சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு என்போம்.
- கொடுக்கப்பட்ட சார்பிலிருந்து வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை அமைக்க அதில் இடம் பெற்றிருக்கும் மாறத்தக்க மாறிலிகளின் எண்ணிகைக்கேற்ப அதனை தொடர்ச்சியாக வகைப்படுத்தியபின் அம்மாறத்தக்க மாறிலிகளை நீக்க வேண்டும்.
- ஒரு சமன்பாட்டில் அனைத்து x-ல் அமையும் உறுப்புகள் மற்றும் dx ஒருபுறத்திலும், அனைத்து y-ல் அமையும் உறுப்புகள் மற்றும் dy மறுபுறத்திலும் அமையுமாறு பிரிக்கத்தக்க வகையிலிருப்பின்,

அவைகள் பிரிபடகூடிய மாறிகள் என அழைக்கப்படும். அத்தகைய சமன்பாட்டின் பொதுவடிவம் $f(x)dx = g(y)dy$ அல்லது $f(x)dx + g(y)dy = 0$ நேரடியாக தொகையிடுவதன் மூலம் நாம் தீர்வைப் பெறலாம்.

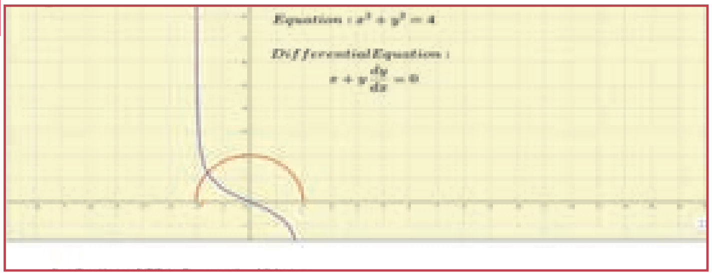
- $f(x,y)$ மற்றும் $g(x,y)$ என்பன ஒவ்வொன்றும் பூச்சிய படியுள்ள சமபடித்தான சார்புகளாக இருக்கயில், $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ அல்லது $\frac{dx}{dy} = g(x,y)$ என்பன ஒரு சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஆகும்.
- $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ (இங்கு P மற்றும் Q ஆகியவை மாறிலிகள் அல்லது x -இன் சார்புகள் மட்டும்) என்ற வடிவில் உள்ள வகைக்கெழுச் சமன்பாடு முதல் வரிசை நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடு எனப்படும்.
- மாறிலிகளைக் கெழுக்களைக் கொண்ட இரண்டாம் வரிசை நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொதுவடிவம் $a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x)$ ஆகும்.

கலைச்சொற்கள் (GLOSSARY)

இரண்டாம் வரிசை நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்	Second order linear differential equations
கிடை அச்சுத் தொலைவு	Abscissa
குத்தாயம்	Ordinate
சமபடித்தான சமன்பாடுகள்	Homogeneous equations
சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்	Ordinary differential equations
சிறப்புத் தொகை	Particular integral
துணைச் சமன்பாடு	Auxiliary equation
நிரப்புச் சார்பு	Complementary function
நிலையான மாறிலி	Fixed constant
நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்	Linear differential equations
பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்	Partial differential equations
படி	Degree
பொதுத் தீர்வு	General solution
மாறத்தக்க மாறிலி	Arbitrary constant
மாறி	Variable
மாறிகள் பிரிக்கக் கூடியன	Variable separable
மாறிலி	Constant
வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்	Differential equations
வரிசை	Order

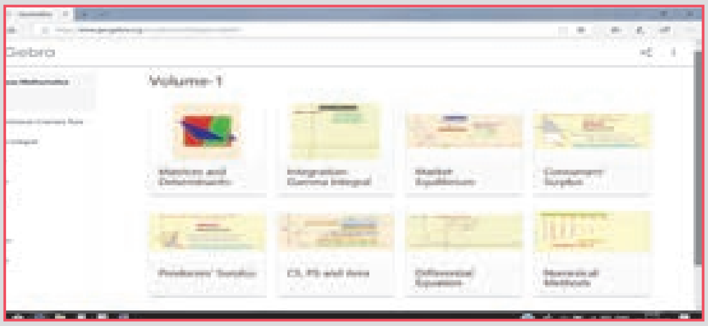
இணையச் செயல்பாடு

செயல்பாட்டின் இறுதியில் எதிர்பார்க்கப்படும் விளைவு



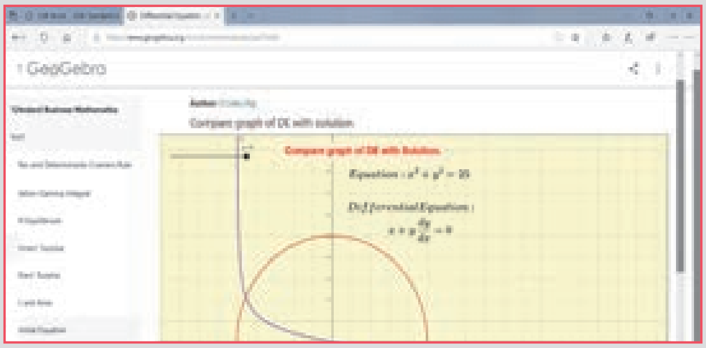
படி 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி இச்செயல் பட்டிற்கான இணையப் பக்கத்திற்குச் செல்க. பின்பு "12th Standard Business Mathematics and Statistic " என்னும் திரையில் "Volume–1" யை தெரிவு செய்யவும்.



படி 2

"Differential Equation" என்னும் திரை தோன்றும். அதில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள வரைபடத்தில் உள்ள புள்ளி a வை நகர்த்தினால் வரைபடத்தில் தோன்றும் மாற்றத்தை தெரிந்துகொள்ளலாம்.

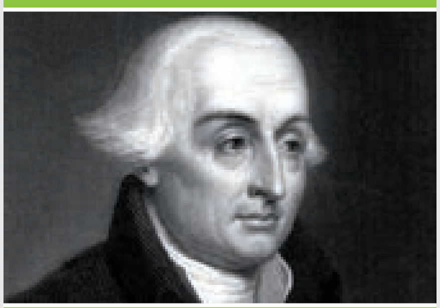


செயல்பாட்டிற்கான உரலி : https://ggbm.at/uzkcrnwr

விரைவுக் குறியீடு (QR Code) :

B247_12_BUS_MAT_TM

5 எண்ணியல் முறைகள்



ஜோசப்– லூயி இலக்ராஞ்சி
(25.01.1736 - 10.04.1813)

அறிமுகம்

எண்ணியல் பகுப்பாய்வு என்பது கணிதத்தின் ஒரு கிளையாகும். அது இயற்கணிதத்தின் அடிப்படை செயலிகளை திரும்பத்திரும்ப பயன்படுத்தப்படும் பொழுது கிடைக்கும் தோராயத் தீர்வுகளுக்கு வழி வகுக்கிறது. எண்ணியல் பகுப்பாய்வினை அறிவதற்கு எண்ணிடத்தக்க வேறுபாடுகளைப் பற்றி அறிந்திருப்பது அவசியமாகும்.

ஜோசப்–லூயி இலக்ராஞ்சி ஒரு இத்தாலிய கணிதவியலாளரும், வானியளலாளரும் ஆவார். இவர் பகுப்பாய்வு, எண் கோட்பாடு மற்றும் வானிய இயக்கவியல் ஆகிய துறைகளில் குறிப்பிடத்தக்க பங்களிப்பை செய்துள்ளார்.

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தை படித்த பின்னர் பின்வரும் பாடக் கருத்துக்களை மாணவர்களால் புரிந்துக் கொள்ள இயலும்.

- திட்டமான வேறுபாடுகளை அமைத்தல்.
- திட்டமான வேறுபாடுகளைக் கொண்டு பல்லுறுப்புக் கோவையை காணல்.
- செயலிகளுக்கிடையே யான தொடர்புகளை அறிதல்.
- விடுபட்ட உறுப்புகளைக் காணல்.
- கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடரின் இடை மதிப்புகளை நியூட்டனின் இடைச்செருகல் சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தி காணல்.
- இலக்ராஞ்சியின் இடை மதிப்பு சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துதல்.

95TJZ6

5.1 திட்டமான வேறுபாடுகள் (FINITE DIFFERENCES)

$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ என்ற சார்பின் மாறிகளையும் (arguments) $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n$ என்ற சார்பலன் களையும் (entries) எடுத்துக்கொள்வோம். இங்கு $y = f(x)$ என்பது ஒரு சார்பாகும். x-ன் மதிப்புகள் ஏறுவரிசையில் இருப்பதாகவும் மற்றும் அவை சம இடைவெளிகளில் இருப்பதாகவும் எடுத்துக் கொள்வோம். சமஇடைவெளிகளின் நீளம் h என்போம். $x_0, x_0+h, x_0+2h, \cdots, x_0+nh$ என்பன x-ன் மதிப்புகள் என்போம். அவற்றிற்குரிய சார்பலன்கள் $f(x_0), f(x_0+h),\ f(x_0+2h), \cdots, f(x_0+nh)$ என்பனவாகும். இங்கு $y = f(x)$ என்ற சார்புக்கான திட்டமான வேறுபாடுகள் குறித்துக் காண்போம்.

5.1.1 முன்னோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி, பின்னோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி மற்றும் இடப்பெயர்வுச் செயலி (Forward Difference Operator, Backward Difference Operator and Shifting Operator)

முன்நோக்கி வேறுபாட்டுச் செயலி [Δ டெல்டா] (Forward Difference Operator):

$y = f(x)$ என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பு என்க. $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n$ என்பன முறையே $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்ற புள்ளிகளில் y -ன் மதிப்புகள் ஆகும், $y_1 - y_0,\ y_2 - y_1,\ y_3 - y_2, \ldots,\ y_n - y_{n-1}$ என்பன முதல்(முன்நோக்கு)வேறுபாடுகள். இவைகள் முறையே $\Delta y_0, \Delta y_1, \Delta y_2, \ldots, \Delta y_{n-1}$.

அதாவது, $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta y_1 = y_2 - y_1$

$\Delta y_2 = y_3 - y_2, \ldots, \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$

பொதுவாக , $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n,\ n = 0,1,2,3,\ldots$

குறியீடு Δ என்பது முன்நோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி. Δ என்பது டெல்டா (delta) என அழைக்கப்படும்.

முன்நோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி Δ-வை கீழ்க்கண்டவாறும் வரையறுக்கலாம்.

$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$, h என்பது சம இடைவெளி.

பண்புகளின் நிரூபணங்கள் நமது பாடத்திட்டத்தில் சேர்க்கப்படவில்லை.

Δ செயலியின் பண்புகள்:

பண்பு 1: c என்பது மாறிலி எனில் $\Delta c = 0$

நிரூபணம்: $f(x) = c$ என்க.

$\therefore f(x+h) = c$ (இங்கு h என்பது சம இடைவெளி)

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$\Delta c = c - c = 0$$

பண்பு 2: Δ பங்கீட்டு பண்பை நிவர்த்தி செய்யும்.
அதாவது $\Delta[f(x)+g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$

நிரூபணம்: $\Delta[f(x)+g(x)]$

$= [f(x+h)+g(x+h)] - [f(x)+g(x)]$

$= f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)$

$= f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)$

$= \Delta f(x) + \Delta g(x)$

இதேபோன்று $\Delta[f(x)-g(x)] = \Delta f(x) - \Delta g(x)$

பொதுவாக, $\Delta[f_1(x)+f_2(x) \ldots\ldots + f_n(x)]$
$= \Delta f_1(x) + \Delta f_2(x) + \ldots . + \Delta f_n(x)$

பண்பு 3: c என்பது ஒரு மாறிலி எனில்

$\Delta c\, f(x) = c\,\Delta f(x)$

நிரூபணம்: $\Delta[c\, f(x)] = c\, f(x+h) - c\, f(x)$

$= c[f(x+h) - f(x)]$

$= c\,\Delta f(x)$

நிரூபணமற்ற முடிவுகள்

1. m மற்றும் n என்பது மிகை முழுக்கள் எனில் $\Delta^m . \Delta^n\ f(x) = \Delta^{m+n}\ f(x)$

2. $\Delta[f(x)\ g(x)] = f(x)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x)$

3. $\Delta\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x).\ g(x+h).}$

முதல்நிலை வேறுபாடுகளின் வேறுபாடுகள் முறையே $\Delta^2 y_0, \Delta^2 y_1, \ldots, \Delta^2 y_n$ என்பன இரண்டாம்நிலை வேறுபாடுகள் ஆகும்.

இங்கு $\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta(y_{n+1} - y_n)$

$= \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$

$\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n,\ n = 0,1,2,\ldots$

$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$

$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$

இதேபோன்று இரண்டாம்நிலை வேறுபாடுகளின் வேறுபாடுகள் மூன்றாம்நிலை வேறுபாடுகள் ஆகும்.

$\Delta^3 y_n = \Delta^2 y_{n+1} - \Delta^2 y_n,\ n = 0,1,2,\ldots$

குறிப்பாக, $\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$

$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1$

குறிப்பு

$$\Delta^k f(x) = \Delta^{k-1} f(x+h) - \Delta^{k-1} f(x)$$

பொதுவாக y_n -இன் k-ம் நிலை வேறுபாடுகள்

$$\Delta^k y_n = \Delta^{k-1} y_{n+1} - \Delta^{k-1} y_n,\ n = 0,1,2,\ldots$$

மேற்கண்ட வேறுபாடுகளை கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் எளிய முறையில் குறிக்கலாம்.

y-ன் முன்நோக்கு வேறுபாட்டின் அட்டவணை :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
x_0	y_0					
		Δy_0				
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$			
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^5 y_0$
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$	
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$		
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$			
		Δy_4				
x_5	y_5					

$f(x)$–ன் முன்நோக்கு வேறுபாட்டின் அட்டவணை

x	$f(x)$				
		$\Delta\ f(x)$			
$x+h$	$f(x+h)$		$\Delta^2\ f(x)$		
		$\Delta\ f(x+h)$		$\Delta^3 f(x)$	
$x+2h$	$f(x+2h)$		$\Delta^2\ f(x+h)$		$\Delta^4\ f(x)$
		$\Delta\ f(x+2h)$		$\Delta^3\ f(x+h)$	
$x+3h$	$f(x+3h)$		$\Delta^2\ f(x+2h)$		
		$\Delta\ f(x+3h)$			
$x+4h$	$f(x+4h)$				

பின்நோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி [∇ நெப்லா] (Nepla) (Backward difference operator) :

$y = f(x)$ என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பு என்க. y_0, $y_1, \dots y_n$ என்பன முறையே $x = x_0, x_1$, $x_1, x_2, \dots x_n$ என்ற புள்ளிகளில் y -ன் மதிப்புகள் ஆகும். பிறகு

$$y_1 - y_0 = \nabla y_1$$

$$y_2 - y_1 = \nabla y_2$$

பொதுவாக, $y_n - y_{n-1} = \nabla y_n$

என்பன முதல்நிலை (பின்நோக்கு) வேறுபாடாகும். குறியீடு ∇ என்பது பின்நோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி. இதனை நாம் நெப்லா (Nepla) எனஅழைக்கிறோம்.

இரண்டாம்நிலை (பின்நோக்கு) வேறுபாடுகள்:

$$\nabla^2 y_n = \nabla y_n - \nabla y_{n-1},\ n = 1,2,3,\dots$$

மூன்றாம்நிலை (பின்நோக்கு) வேறுபாடுகள்:

$$\nabla^3 y_n = \nabla^2 y_n - \nabla^2 y_{n-1},\ n = 1,2,3,\ldots$$

பொதுவாக, k-ம் நிலை வேறுபாடுகள்:

$$\nabla^k y_n = \nabla^{k-1} y_n - \nabla^{k-1} y_{n-1},\ n = 1,2,3,\ldots$$

பின்நோக்கு வேறுபாட்டுஅட்டவணை:

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
x_0	y_0				
		∇y_1			
x_1	y_1		$\nabla^2 y_2$		
		∇y_2		$\nabla^3 y_3$	
x_2	y_2		$\nabla^2 y_3$		$\nabla^4 y_4$
		∇y_3		$\nabla^3 y_4$	
x_3	y_3		$\nabla^2 y_4$		
		∇y_4			
x_4	y_4				

பின்நோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி பின்வருமாறும் வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$$

முதல்நிலை (பின்நோக்கு) வேறுபாடு:

$$\nabla f(x+h) = f(x+h) - f(x)$$

$$\nabla f(x+2h) = f(x+2h) - f(x+h)$$

இங்கு h என்பது சம இடைவெளி.

இரண்டாம்நிலை (பின்நோக்கு) வேறுபாடு:

$$\nabla^2 f(x+h) = \nabla(\nabla f(x+h)) = \nabla(f(x+h) - f(x))$$

$$= \nabla f(x+h) - \nabla f(x)$$

$$\nabla^2 f(x+2h) = \nabla f(x+2h) - \nabla f(x+h)$$

மூன்றாம்நிலை (பின்நோக்கு) வேறுபாடு:

$$\nabla^3 f(x+h) = \nabla^2 f(x+h) - \nabla^2 f(x)$$

$$\nabla^3 f(x+2h) = \nabla^2 f(x+2h) - \nabla^2 f(x+h)$$

இங்கு, $\nabla f(x+h) = f(x+h) - f(x) = \Delta f(x)$

$$\nabla f(x+2h) = f(x+2h) - f(x+h) = \Delta f(x+h)$$

$$\nabla^2 f(x+2h) = \nabla f(x+2h) - \nabla f(x+h)$$

$$= \Delta f(x+h) - \Delta f(x)$$

$$= \Delta^2 f(x)$$

பொதுவாக, $\nabla^n f(x+nh) = \Delta^n f(x)$

இடப்பெயர்வுச் செயலி (E):

$y = f(x)$ கொடுக்கப்பட்ட சார்பாகவும் மற்றும் $x_0, x_0+h, x_0+2h, x_0+3h, \ldots, x_0+nh$ என்பது x-ன் அடுத்தடுத்த சம இடைவெளியிலான மதிப்புகளாகவும் இருக்கும் பட்சத்தில் E என்ற செயலி கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$E\left[f(x_0)\right] = f(x_0+h)$$

E என்பது இடப்பெயர்வுச் செயலி.

$$E\left[f(x_0+h)\right] = f(x_0+2h),$$

$$E[f(x_0+2h)] = f(x_0+3h), \ldots,$$

$$E[f(x_0+(n-1)h)] = f(x_0+nh)$$

பொதுவாக, $E\left[f(x)\right] = f(x+h)$, h என்பது சம இடைவெளி

$f(x)$-இல் E என்ற செயலியை இருமுறை பயன்படுத்தும்போது $E^2 f(x)$ என கிடைக்கும்.

அதாவது, $E^2\ f(x) = E\left[E\ f(x)\right]$

$$= E[f(x+h)]$$

$$= f(x+2h)$$

பொதுவாக,

$E^n f(x) = f(x+nh)$ மற்றும்
$E^{-n} f(x) = f(x-nh)$

செயலி E–ன் பண்புகள்:

1. $E\left[f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)\right] = E\left[f_1(x)\right] + E\left[f_2(x)\right] + \ldots + E\left[f_n(x)\right]$
2. $E\left[c\,f(x)\right] = cE\left[f(x)\right]$ c ஒரு மாறிலி
3. $E^m\left[E^n f(x)\right] = E^n\left(E^m f(x)\right) = E^{m+n} f(x)$
4. If 'n' மிகை முழுக்கள் எனில், $E^n\left[E^{-n}\left(f(x)\right)\right] = f(x)$.

குறிப்பு

$y = f(x)$ என்பது x–ன் சார்பு மற்றும் $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n$ என்பது $x = x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ இடத்து y-ன் மதிப்புகள் எனில்

$$\mathrm{E}y_0 = y_1,\ \mathrm{E}y_1 = y_2, ..., \mathrm{E}y_{n-1} = y_n$$

$E[\mathrm{E}y_0] = Ey_1 = y_2$ பொதுவாக $E^n y_0 = y_n$

Δ, ∇ மற்றும் E ஆகியவற்றிற்கிடையேயான தொடர்புகள்:

1. $\Delta \equiv E - 1$

நிரூபணம்: Δ–ன் வரையறையிலிருந்து

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

மற்றும் $E[f(x)] = f(x+h)$

இங்கு h என்பது சம இடைவெளியாகும்.

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$\Delta f(x) = Ef(x) - f(x)$$

$$\Rightarrow \Delta f(x) = (E-1)f(x)$$

$$\Delta \equiv E - 1$$

$$\therefore \mathrm{E} \equiv 1 + \Delta$$

2. $E\Delta \equiv \Delta E$

நிரூபணம்: $\mathrm{E}(\Delta f(x)) = E[f(x+h) - f(x)]$

$$= E\,f(x+h) - E\,f(x)$$

$$= f(x+2h) - f(x+h)$$

$$= \Delta f(x+h)$$

$$= \Delta E f(x)$$

$$\therefore E\Delta \equiv \Delta E$$

3. $\nabla \equiv \dfrac{E-1}{E}$

நிரூபணம்: $\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$

$$= f(x) - \mathrm{E}^{-1} f(x)$$

$$= (1 - E^{-1}) f(x)$$

$$\Rightarrow \nabla \equiv 1 - E^{-1}$$

$$\text{i.e., } \nabla \equiv 1 - \frac{1}{E}$$

$$\therefore \nabla \equiv \frac{E-1}{E}$$

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

(i) $(1+\Delta)(1-\nabla) = 1$

(ii) $\Delta\nabla \equiv \Delta - \nabla$

(iii) $\nabla \equiv \mathrm{E}^{-1}\Delta$

எடுத்துக்காட்டு 5.1

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு முன்நோக்கு வேறுபாட்டின் அட்டவணையை வடிவமைக்கவும்.

x	0	10	20	30
y	0	0.174	0.347	0.518

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு முன்நோக்கு வேறுபாட்டின் அட்டவணை

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	0			
		0.174		
10	0.174		–0.001	
		0.173		–0.001
20	0.347		–0.002	
		0.171		
30	0.518			

எடுத்துக்காட்டு 5.2

$x = 1,2,3,4,5$ எனில் $y = f(x) = x^3 + 2x + 1$ என்ற சார்புக்கு முன்நோக்கு வேறுபாட்டின் அட்டவணையை வடிவமைக்கவும்

தீர்வு

$y = f(x) = x^3 + 2x + 1$, $x = 1,2,3,4,5$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1	4				
		9			
2	13		12		

		21		6	
3	34		18		0
		39		6	
4	73		24		
		63			
5	136				

எடுத்துக்காட்டு 5.3

$8,12,19,29,42, \ldots$என்ற தொடருக்கான வேறுபாட்டு அட்டவணையில், இரண்டாம்நிலை வேறுபாட்டினை மாறிலி எனக் கொண்டு வேறுபாட்டின் அட்டவணையை பயன்படுத்தி 6–வது உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

k என்பது 6–வது உறுப்பு என்க.

முதலில் முன்நோக்கு வேறுபாட்டினைக் காண்போம்.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
1	8		
		4	
2	12		3
		7	
3	19		3
		10	
4	29		3
		13	
5	42		k–55
		k–42	
6	k		

இரண்டாம்நிலை வேறுபாடுகளானது மாறிலிகள் என கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

$\therefore \quad k - 55 = 3$

$k = 58$

$\therefore$ 6 -வது உறுப்பு 58 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.4

(i) Δe^{ax} (ii) $\Delta^2 e^x$ (iii) $\Delta \log x$

ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு:

(i) $\Delta e^{ax} = e^{a(x+h)} - e^{ax}$

$$= e^{ax}.e^{ah} - e^{ax} \quad \left[\because a^{m+n} = a^m.a^n\right]$$

$$= e^{ax}\left[e^{ah} - 1\right]$$

(ii) $\Delta^2 e^x = \Delta.\left[\Delta e^x\right]$

$$= \Delta\left[e^{x+h} - e^x\right]$$

$$= \Delta\left[e^x e^h - e^x\right]$$

$$= \Delta e^x\left[e^h - 1\right]$$

$$= \left(e^h - 1\right)\Delta e^x$$

$$= \left(e^h - 1\right).\left(e^h - 1\right).e^x$$

$$= \left(e^h - 1\right)^2 .e^x$$

(iii) $\Delta \log x = \log(x+h) - \log x$

$$= \log\frac{x+h}{x}$$

$$= \log\left(\frac{x}{x} + \frac{h}{x}\right)$$

$$= \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 5.5

$h = 1$ எனில், $\Delta\left[\dfrac{5x+12}{x^2+5x+6}\right]$ -ஐ மதிப்பிடுக.

தீர்வு:

பகுதி பின்னமாக பிரித்தல் முறைப்படி

$$\frac{5x+12}{x^2+5x+6} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+2}$$

$$A = \frac{5x+12}{x+2}\left[x=-3\right] = \frac{-15+12}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$B = \frac{5x+12}{x+3}\left[x=-2\right] = \frac{2}{1} = 2$$

$$\therefore \quad \frac{5x+12}{x^2+5x+6} = \left[\frac{3}{x+3} + \frac{2}{x+2}\right]$$

$$\Delta\left[\frac{5x+12}{x^2+5x+6}\right] = \Delta\left[\frac{3}{x+3}+\frac{2}{x+2}\right]$$

$$=\left[\frac{3}{x+1+3}-\frac{3}{x+3}\right]+\left\{\frac{2}{x+1+2}-\frac{2}{x+2}\right\}$$

$$=3\left[\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+3}\right]+2\left[\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+2}\right]$$

$$=\left[\frac{-3}{(x+4)(x+3)}-\frac{2}{(x+3)(x+2)}\right]$$

$$=\frac{-5x-14}{(x+2)(x+3)(x+4)}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.6

$h=1$ எனில், $\Delta^2\left(\frac{1}{x}\right)$ -ஐ மதிப்பிடுக.

தீர்வு:

$$\Delta^2\left(\frac{1}{x}\right) = \Delta\left(\Delta\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

இங்கு $\Delta\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$

$$\therefore \quad \Delta^2\left(\frac{1}{x}\right) = \Delta\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}\right)$$

$$= \Delta\left(\frac{1}{1+x}\right)-\Delta\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta^2\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x(x+1)(x+2)}$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$h = 1$ எனில்,

$$\Delta^n\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{(-1)^n n!}{x(x+1)(x+2)......(x+n)}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.7

$h=1$ எனில் $f(4)=f(3)+\Delta f(2)+\Delta^2 f(1)+\Delta^3 f(1)$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$f(4)-f(3)=\Delta f(3)$ என்பது நாம் அறிந்த ஒன்று.

$$f(4)-f(3) = \Delta f(3)$$

$$= \Delta\left[f(2)+\Delta f(2)\right] \quad \because \left[f(3)-f(2)=\Delta f(2)\right]$$

$$=\Delta f(2)+\Delta^2 f(2)$$

$$=\Delta f(2)+\Delta^2\left[f(1)+\Delta f(1)\right]$$

$$\Rightarrow f(4)=f(3)+\Delta f(2)+\Delta^2 f(1)+\Delta^3 f(1).$$

எடுத்துக்காட்டு 5.8

$U_0=1, U_1=11, U_2=21, U_3=28$ மற்றும் $U_4=29$ எனில் $\Delta^4 U_0$ காண்க.

தீர்வு :

$$\Delta^4 U_0 = (E-1)^4 U_0$$

$$=\left(E^4-4E^3+6E^2-4E+1\right)U_0$$

$$=E^4U_0-4E^3U_0+6E^2U_0-4EU_0+U_0$$

$$=U_4-4U_3+6U_2-4U_1+U_0$$

$$=29-4(28)+6(21)-4(11)+1.$$

$$=156-156=0$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

எடுத்துக்காட்டு 5.9

$y_3=2, y_4=-6, y_5=8, y_6=9$ மற்றும் $y_7=17$ எனில் $\Delta^4 y_3$ கணக்கிடுக.

தீர்வு :

$y_3=2, y_4=-6, y_5=8, y_6=9$ மற்றும் $y_7=17$ கொடுக்கப்பட்டவை.

$$\Delta^4 y_3 = (E-1)^4 y_3$$

$$= (E^4-4E^3+6E^2-4E+1)y_3$$

$$= E^4y_3-4E^3y_3+6E^2y_3-4Ey_3+y_3$$

$$= \quad y_7 - 4y_6 + 6y_5 - 4y_4 + y_3$$

$$= \quad 17 - 4(9) + 6(8) - 4(-6) + 2$$

$$= \quad 17 - 36 + 48 + 24 + 2 = 55$$

5.1.2 விடுபட்ட உறுப்புகளைக் காணல் (Finding the missing terms)

வேறுபாட்டுச் செயலிகள் மற்றும் இடப்பெயர்வுச் செயலி ஆகியவற்றைக் கொண்டு கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடரின் விடுபட்ட உறுப்புகளைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.10

கீழ்கண்ட விவரங்களைக் கொண்டு விடுபட்ட உறுப்பைக் காண்க.

x	2	3	4	5	6
$f(x)$	45.0	49.2	54.1	-	67.4

தீர்வு:

$f(x)$-ல் நான்கு மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால், $f(x)$ ஒரு மூன்றாம்படி பல்லுறுப்பைக்கோவை என எடுத்துக் கொள்வோம். எனவே நான்காம் நிலை வேறுபாடுகள் பூச்சியமாகும்.

$$\text{(ie)} \quad \Delta^4 y_0 = 0, \qquad \therefore (E-1)^4 y_0 = 0$$

$$(E^4 - 4E^3 + 6E^2 - 4E + 1)\, y_0 = 0$$

$$E^4 y_0 - 4E^3 y_0 + 6E^2 y_0 - 4Ey_0 + y_0 = 0$$

$$y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0 = 0$$

$$67.4 - 4y_3 + 6(54.1) - 4(49.2) + 45 = 0$$

$$240.2 = 4y_3 \qquad \therefore y_3 = 60.05$$

எடுத்துக்காட்டு 5.11

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு 1964 மற்றும் 1966 ஆம் ஆண்டுகளுக்கான உற்பத்திகளைக் காண்க.

வருடம்	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967
உற்பத்தி	200	220	260	-	350	-	430

தீர்வு:

$f(x)$-ல் ஐந்து மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால், $f(x)$ ஒரு நான்காம்படி பல்லுறுப்புக் கோவை என எடுத்துக் கொள்வோம். எனவே ஐந்தாம்நிலை வேறுபாடு பூச்சியமாகும்.

$$\Delta^5 y_k = 0 \quad \text{(ie)} \quad (E-1)^5 y_k = 0$$

$$\text{i.e.,} \ (E^5 - 5E^4 + 10E^3 - 10E^2 + 5E - 1) y_k = 0$$

$$E^5 y_k - 5E^4 y_k + 10E^3 y_k - 10E^2 y_k + 5Ey_k - y_k = 0 \quad (1)$$

$k = 0$ என (1)-ல் பிரதியிட

$$E^5 y_0 - 5E^4 y_0 + 10E^3 y_0 - 10E^2 y_0 + 5Ey_0 - y_0 = 0$$

$$y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0 = 0$$

$$y_5 - 5(350) + 10y_3 - 10(260) + 5(220) - 200 = 0$$

$$y_5 + 10y_3 = 3450 \quad (2)$$

$k = 1$ என (1)-ல் பிரதியிட

$$E^5 y_1 - 5E^4 y_1 + 10E^3 y_1 - 10E^3 y_1 - y_1 = 0$$

$$y_6 - 5y_5 + 10y_4 - 10y_3 - y_1 = 0$$

$$430 - 5y_5 + 10(350) - 10y_3 + 5(260) - 220 = 0$$

$$5y_5 + 10y_3 = 5010 \quad (3)$$

$$(3) - (2) \Rightarrow \qquad 4y_5 = 1560$$

$$y_5 = 390$$

(2)–ன் படி $\qquad 390 + 10y_3 = 3450$

$$10y_3 = 3450 - 390$$

$$y_3 \cong 306$$

1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

பயிற்சி 5.1

1. மதிப்பிடுக: $\Delta(\log ax)$.

2. $y = x^3 - x^2 + x - 1$ எனில், $x = 0,1,2,3,4,5$ என்பனவற்றுக்கு y-ன்மதிப்புகளைக்கணக்கிட்டு முன்நோக்கு வேறுபாட்டு அட்டவணையை அமைக்க.

3. $h = 1$ எனில், $(E^{-1}\Delta)x^3 = 3x^2 - 3x + 1$ என நிறுவுக.

4. $f(x) = x^2 + 3x$ மற்றும் $h = 1$ எனில் $\Delta f(x) = 2x + 4$ என நிறுவுக.

5. $h = 1$ எனில், $\Delta\left[\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}\right]$ -ஐ மதிப்பிடுக.

6. கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி விடுபட்ட உறுப்பைக் காண்க.

x	0	1	2	3	4
y_x	1	3	9	-	81

7. ஒரு மாவட்டத்தின் மக்கள்த் தொகை விவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆண்டு (x)	1881	1891	1901	1911	1921	1931
மக்கள்தொகை (y) (ஆயிரத்தில்)	363	391	421	-	467	501

1911ம் ஆண்டிற்கான மக்கள் தொகையைக் காண்க.

8. பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு விடுபட்ட உறுப்புகளைக் காண்க.

x	0	1	2	3	4	5
$y = f(x)$	0	-	8	15	-	35

5.2 இடைச்செருகல் (Interpolation)

ஒரு உற்பத்தி நிறுவனத்தின் பல்வேறு வருடங்களுக்கான இலாபங்கள் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

வருடம் (x)	1986	1987	1988	1990	1991	1992
வருமானம் (இலட்சத்தில்)	25	29	24	30	32	31

1989 -ஆம் ஆண்டிற்கான இலாபம் கொடுக்கப் படவில்லை. 1989-ஆம் ஆண்டின் இலாபத்தினை மதிப்பீடு செய்வதற்கு நாம் இடைச் செருகல் உத்தியைப் பயன்படுத்துகிறோம். x மற்றும் y என்பவை முறையே வருடம் மற்றும் இலாபத்தினை குறிப்பதாக எடுத்துக்கொள்வோம். சாரா மாறி x என்பது மாறி (argument) எனவும் மற்றும் சார்ந்த மாறி (entries) சார்பலன் எனவும் அழைக்கப்படும்.

கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பு மதிப்புகளுக்கு உள்ளே அமைந்துள்ள x-ன் மதிப்பிற்கு y-யை மதிப்பீடு செய்வது இடைச் செருகல் என அழைக்கப்படும்.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பு மதிப்புகளுக்கு வெளியே அமைந்துள்ள x-ன் மதிப்பிற்கு y-யை மதிப்பீடு செய்வது புறச் செருகல் என அழைக்கப்படும்.

5.2.1 இடைச்செருகலின் முறைகள் (Methods of interpolation)

இடைச்செருகலில் இரண்டு முறைகள் உள்ளன. ஒன்று வரைபடம் முறை மற்றொன்று இயற்கணித முறை ஆகும்.

5.2.2 வரைபடம் முறை (Graphical method)

கொடுக்கப்பட்ட சார்பு $y = f(x)$ -க்கு x-ன் n மதிப்புகளும் அதற்கேற்ப y-ன் மதிப்புகளும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். $(x_i, y_i), i = 1, 2, 3, ..., n$ என்ற 'n' புள்ளிகளை குறித்து அதன் வழியாக மென்மையான வளைவரை வரைபடம் வரைய வேண்டும். வரையப்பட்ட வரைபடத்தில் x-ன் எந்தவொரு இடைமதிப்பிற்கும் பொருத்தமான y-ன் மதிப்பை காண்பதே வரைபட முறையாகும். இவ்வாறு பெறப்படும் y-ன் மதிப்பு உண்மையான y-ன் மதிப்பிலிருந்து பெரும்பாலும் மாறுபட்டிருக்கும். வரைபட முறையில் இது ஒரு குறைபாடாக கருதப் படுகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 5.12

வரைபடத்தின் மூலம் $x = 38$ க்கான y-ன் மதிப்பை பின்வரும் அட்டவணையைக் கொண்டு காண்க:

x	10	20	30	40	50	60
y	63	55	44	34	29	22

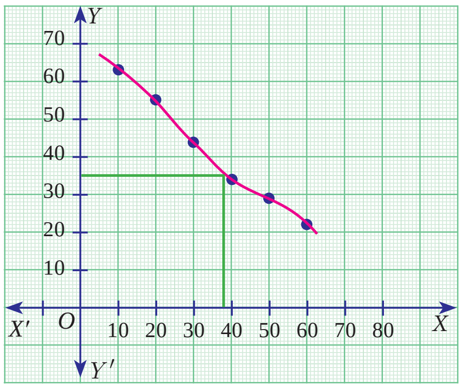
தீர்வு:

வரைபட முறையின் படிகள்:

x மற்றும் y மதிப்புகளுக்கு பொறுத்தமான அலகுகளை எடுத்துக் கொண்டு, கொடுக்கப்பட்டுள்ள x, y மதிப்புகளை புள்ளிகளாக வரைபடத்தாளில் குறிக்கவும்.

குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகளின் வழியே செல்லும் மென்மையான வளைவரை வரைக.

$x = 38$ என்ற மதிப்பிற்கு தொடர்புடைய வளைவரை புள்ளியைக் கண்டு, y -அச்சின் மீதுள்ள தொடர்புடைய y -மதிப்பானது தேவையான இடைச்செருகல் மதிப்பாகும்.



படம் 5.1

வரைபடத்திலிருந்து, $x = 38$ எனும்போது $y = 32$ ஆகும்.

5.2.3 இயற்கணித முறை (Algebraic method)

கிரிகோரி – நியுட்டனின் முன்நோக்கு இடைச்செருகல்சூத்திரம்(அல்லது) நியுட்டனின் முன்நோக்கு இடைச்செருகல் சூத்திரம் (சம இடைவெளியில்).

உங்களுக்கு தெரியுமா?

முதல் இரண்டு உறுப்புகளை மட்டும் கொண்டிருந்தால் அது நேரிய இடைச்செருகல் எனவும் முதல் மூன்று உறுப்புகளை மட்டும் கொண்டிருந்தால் அது பரவளைய இடைச்செருகல் எனவும் அழைக்கப்படும்.

$y = f(x)$ என்பது $n+1$ மதிப்புகளைக் கொண்ட n-ம் படி பல்லுறுப்புக்கோவை என்க. $y_0, y_1, y_2, \ldots y_n$ என்பன முறையே $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்ற புள்ளிகளில் y-ன் மதிப்புகளாகும்.

அதாவது $x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h,$

$$x_3 = x_0 + 3h, \ldots, x_n = x_0 + nh$$

x-ன் மதிப்பு $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்பன சம இடைவெளியில் உள்ளது.

$x = x_0 + nh$ என்ற இடத்து $f(x)$ -ன் மதிப்பு,

$$f(x_0 + nh) = f(x_0) + \frac{n}{1!}\Delta f(x_0) + \frac{n(n-1)}{2!}$$

$$\Delta^2 f(x_0) + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 f(x_0) + \ldots$$

(அல்லது)

$$y_{(x=x_0+nh)} = y_0 + \frac{n}{1!}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots \text{ இங்கு } n = \frac{x - x_0}{h}$$

குறிப்பு

y-ன் தேவையான மதிப்பு x-ன் ஆரம்ப மதிப்புகளுக்கு அருகில் இருந்தால் பொதுவாக நியுட்டனின் முன்நோக்கு சூத்திரம் பயன்படுத்தப் படுகிறது.

கிரிகோரி – நியூட்டனின் பின்நோக்கு இடைச் செருகல் சூத்திரம்.

y-ன் தேவையான மதிப்பு x-ன் இறுதி மதிப்புகளுக்கு அருகில் இருந்தால் நியூட்டனின் முன்நோக்கு சூத்திரத்தை பொதுவாக பயன் படுத்துவது இல்லை. அதற்கு நாம் நியூட்டனின் பின்நோக்கு இடைச்செருகல் சூத்திரத்தை பொதுவாக பயன்படுத்துவோம்.

$x = x_n + nh$ இடத்து , $f(x)$ ன் மதிப்பானது,

$$f(x_n + nh) = f(x_n) + \frac{n}{1!}\nabla f(x_n) + \frac{n(n+1)}{2!}$$

$$\nabla^2 f(x_n) + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\nabla^3 f(x_n) + \ldots$$

(அல்லது)

$$y_{(x=x_n+nh)} = y_n + \frac{n}{1!}\nabla y_n + \frac{n(n+1)}{2!}\nabla^2 y_n$$

$$+ \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\nabla^3 y_n + \ldots \text{ இங்கு } n = \frac{x - x_n}{h}$$

குறிப்பு

y-ன் தேவையான மதிப்பு x-ன் முடிவு மதிப்புகளுக்கு அருகில் இருந்தால் பொதுவாக நியூட்டனின் பின்நோக்கு சூத்திரம் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 5.13

நியூட்டனின் இடைச்செருகல் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து 1905 ஆம் ஆண்டின் மக்கள் தொகையைக் காண்க:

வருடம்	1891	1901	1911	1921	1931
மக்கள்தொகை	98,752	1,32,285	1,68,076	1,95,670	2,46,050

தீர்வு

1905 ஆம் ஆண்டின் மக்கள்தொகை காணல் அதாவது, x = 1905-க்கு y-ன் மதிப்பு காணல்.

y-ன் தேவையான மதிப்பு அட்டவணையில் x-ன் ஆரம்ப மதிப்புக்கு அருகில் உள்ளது. எனவே நாம் நியூட்டனின் முன்நோக்கு இடைச்செருகல் சூத்திரத்தை பயன்படுத்துவோம்.

$$y_{(x=x_0+nh)} = y_0 + \frac{n}{1!}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots$$

x = 1905 இடத்து y-ஐ காண வேண்டும்.

$\therefore x_0 + nh = 1905$, $x_0 = 1891, h = 10$

$$1891 + n(10) = 1905 \quad \Rightarrow n = 1.4$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1891	98,752				
		33,533			
1901	1,32,285		2,258		
		35,791		−10,435	
1911	1,68,076		-8,177		41,358
		27,614		30,293	
1921	1,95,690		22,746		
		50,360			
1931	2,46,050				

$$y_{(x=1905)} = 98,752 + (1.4)(33533) + \frac{(1.4)(0.4)}{2}(2258) + \frac{(1.4)(0.4)(-0.6)}{6}(-10435) + \frac{(1.4)(0.6)(-0.6)(-1.6)}{24}(41358)$$

= 98752 + 46946.2 + 632.24 + 584.36 + 1389.63

= 148304.43

≅ 1,48,304

எடுத்துக்காட்டு 5.14

$y = f(x)$ என்ற சார்புக்கான, $x = 0, 1, 2, \ldots, 6$ இடத்து மதிப்புகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	2	4	10	16	20	24	38

நான்கு மதிப்புகளை மட்டும் கொண்டு y (3.2) -ன் தோராய மதிப்பை முன்நோக்கு இடைச் செருகலின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

தீர்வு:

முன்நோக்கு இடைச்செருகலின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த உள்ளதால் $f(x)$-ன் கடைசி நான்கு மதிப்புகளை கருத்தில் கொள்க. [x = 3 -லிருந்து எடுத்துக்கொள்க].

முன்நோக்கு இடைச்செருகல் சூத்திரம்

$$y_{(x=x_0+nh)} = y_0 + \frac{n}{1!}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots$$

$$x_0 + nh = 3.2, x_0 = 3, h = 1$$

$$\therefore n = \frac{1}{5}$$

வேறுபாட்டு அட்டவணை

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
3	16			
		4		
4	20		0	
		4		10
5	24		10	
		14		
6	38			

$$y_{(x=3.2)} = 16 + \frac{1}{5}(4) + \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{-4}{5}\right)}{2}(0) + \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{-4}{5}\right)\left(\frac{-9}{5}\right)}{6} \times 10$$

$$= 16 + 0.8 + 0 + 0.48 = 17.28$$

எடுத்துக்காட்டு 5.15

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு 45-க்கு குறைவான மதிப்பெண்கள் பெற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை காண்க.

மதிப்பெண்கள்	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	31	42	51	35	31

தீர்வு:

x என்பது மதிப்பெண் மற்றும் y என்பது மாணவர்களின் எண்ணிக்கை என்க.

கூட்டு நிகழ்வெண் பரவலில் மாற்றம் செய்த பிறகு கிடைக்கும் வேறுபாட்டு அட்டவணை.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
40-க்குக் குறைவான	31				
		42			
50	73		9		
		51		-25	
60	124		-16		37
		35		12	
70	159		-4		
		31			
80	190				

$$y_{(x=x_0+nh)} = y_0 + \frac{n}{1!}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots$$

$x = 45$ இடத்து y-ஐக் காண வேண்டும்.

$$\therefore x_0 + nh = 45,\ x_0 = 40, h = 10 \quad \Rightarrow n = \frac{1}{2}$$

$$y_{(x=45)} = 31 + \frac{1}{2} \times 42 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)}{2}(9) + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)}{6}\times(-25) + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)}{24}\times(37)$$

$$= 31 + 21 - \frac{9}{8} - \frac{25}{16} - \frac{37\times 15}{384}$$

$$= 47.867 \cong 48$$

எடுத்துக்காட்டு 5.16

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கான இடைச்செருகல் சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி 60க்கும் 70க்கும் இடைப்பட்ட நிறை கொண்ட மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

நிறை (lbs)	0-40	40-60	60-80	80-100	100-120
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	250	120	100	70	50

தீர்வு:

நிறை $= x$ என்க. மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $= y$ என்க. கூட்டு நிகழ்வெண் பரவலில் மாற்றம் செய்த பிறகு கிடைக்கும் வேறுபாட்டு அட்டவணை.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
40-க்குக் குறைவான	250				
		120			
60	370		-20		
		100		-10	
80	470		-30		20
		70		10	
100	540		-20		
		50			
120	590				

70 க்கு கீழ் நிறை கொண்ட மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை காண நாம் முன்நோக்கு இடைவெளி சூத்திரத்தை பயன்படுத்துவோம்.

$$y_{(x=x_0+nh)} = y_0 + \frac{n}{1!}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots$$

$x = 70$ இடத்து y-ஐ காண வேண்டும்.

$$\therefore\ x_0 + nh = 70,\ x_0 = 40, h = 20$$

$$40 + n(20) = 70 \quad \Rightarrow n = 1.5$$

$$\therefore\ y_{(x=70)} = 250 + 1.5(120) + \frac{(1.5)(0.5)}{2!}(-20)$$

$$+\frac{(1.5)(0.5)(-0.5)}{3!}(-10)$$

$$+\frac{(1.5)(0.5)(-0.5)(-1.5)}{4!}(20)$$

$= 250 + 180 - 7.5 + 0.625 + 0.46875$

$= 423.59$

$\cong 424$

60-க்கும் 70-க்கும் இடைப்பட்ட நிறை கொண்ட மாணவர்களின் எண்ணிக்கை.$= y(70) - y(60)$

$= 424 - 370 = 54$

எடுத்துக்காட்டு 5.17

ஒரு குறிப்பிட்ட நகரத்தின் மக்கள்தொகை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

வருடம் : x	1941	1951	1961	1971	1981	1991
மக்கள்தொகை (இலட்சத்தில்) : y	20	24	29	36	46	51

இடைக்செருகல் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி 1946–ம் ஆண்டுக்கான மக்கள் தொகையைக் காண்க.

தீர்வு:

x	1941	1951	1961	1971	1981	1991
y	20	24	29	36	46	51

1946-ஆம் அண்டின் மக்கள்தொகையை கணக்கிடுவதற்கு (அதாவது x=1946க்கு y -ன் மதிப்பை கணக்கட) நாம், நியூட்டனின் முன்நோக்கு இடைச்செருகல் சூத்திரத்தை பயன்படுத்துவோம்.

$$y_{(x=x_0+nh)} = y_0 + \frac{n}{1!}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots$$

$x = 1946 \therefore\ x_0 + nh = 1946,$

$x_0 = 1941,\ h = 10$

$1941 + n(10) = 1946 \Rightarrow n = 0.5$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
1941	20					
		4				
1951	24		1			
		5		1		
1961	29		2		0	
		7		1		-9
1971	36		3		−9	
		10		−8		
1981	46		−5			
		5				
1991	51					

$$y_{(x=1946)} = 20 + \frac{0.5}{1!}(4) + \frac{0.5(0.5-1)}{2!}(1) +$$

$$+\frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)}{3!}(1)$$

$$+\frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)(0.5-3)}{4!}(0) +$$

$$\frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)(0.5-3)(0.5-4)}{5!}(-9)$$

$= 20 + 2 - 0.125 + 0.0625 - 0.24609$

$= 21.69$ இலட்சங்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 5.18

பின்வரும் விவரங்கள் நீராவி அட்டவணையில் இருந்து எடுக்கப்பட்டது.

வெப்பநிலை C^0	140	150	160	170	180
அழுத்தம் $kg\,f/cm^2$	3.685	4.854	6.302	8.076	10.225

வெப்பநிலையானது 175 °C எனும்பொழுது நீராவியின் அழுத்தத்தைக் காண்க.

தீர்வு:

தேவையான நீராவியின் மதிப்பு அட்டவணையின் இறுதிப் புள்ளிக்கு அருகில் உள்ளதால், நியூட்டனின் பின்நோக்கு இடைச்செருகல் சூத்திரத்தை பயன்படுத்துவோம்.

$$y_{(x=x_n+nh)} = y_n + \frac{n}{1!}\nabla y_n + \frac{n(n+1)}{2!}\nabla^2 y_n$$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\nabla^3 y_n + \ldots$$

$x = 175$

$\therefore x_n + nh = 175,\ x_n = 180, h = 10 \Rightarrow n = -0.5$

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
140	3.685				
		1.169			
150	4.854		0.279		
		1.448		0.047	
160	6.032		0.326		0.002
		1.774		0.049	
170	8.076		0.375		
		2.149			
180	10.225				

$$y_{(x=175)} = 10.225 + (-0.5)(2.149) + \frac{(-0.5)(0-5)}{2!}(0.375) + \frac{(-0.5)(0-5)(1.5)}{3!}(0.049) + \frac{(-0-5)(0.5)(1.5)(2.5)}{4!}(0.002)$$

$$= 10.225 - 1.0745 - 0.046875 - 0.0030625 - 0.000078125$$

$$= 9.10048438 = 9.1$$

எடுத்துக்காட்டு 5.19

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையிலிருந்து $x = 7.5$ எனும்போது y –ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	8	27	64	125	216	343	512

தீர்வு:

இங்கு பின்நோக்கு இடைச்செருகல் சூத்திரத்தை பயன்படுத்துவோம்.

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
1	1				
		7			
2	8		12		
		19		6	
3	27		18		0
		37		6	
4	64		24		0
		61		6	
5	125		30		0
		91		6	
6	216		36		0
		127		6	
7	343		42		
		169			
8	512				

$$y_{(x=x_n+nh)} = y_n + \frac{n}{1!}\nabla y_n + \frac{n(n+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\nabla^3 y_n + \ldots$$

$x = 7.5 \therefore x_n + nh = 7.5,\ x_n = 8, h = 1 \Rightarrow$

$n = -0.5$

$$y_{(x=7.5)} = 512 + \frac{-0.5}{1!}169 + \frac{-0.5(-0.5+1)}{2!}42 + \frac{-0.5(-0.5+1)(-0.5+2)}{3!}6$$

$$= 421.88$$

எடுத்துக்காட்டு 5.20

வெவ்வேறு வயதில் முடியும் முதிர்வு காலத்திற்கான செலுத்தப்படும் அரைவருட காப்பீட்டுத் தொகை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. 63 வயதில் முதிர்வு காலம் கொண்ட ஒரு பிரிமியத்தின் காப்பீட்டுத் தொகை காண்க.

வயது	45	50	55	60	65
காப்பீட்டுத் தொகை	114.84	96.16	83.32	74.48	68.48

தீர்வு:

வயது $= x$, காப்பீட்டுத்தொகை $= y$ என்க.

இங்கு, நியூட்டனின் பின்நோக்கு சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி y-ன் மதிப்பைக் காண்போம்.

$$y_{(x=x_n+nh)} = y_n + \frac{n}{1!}\nabla y_n + \frac{n(n+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\nabla^3 y_n + \ldots$$

$x = 63 \quad \therefore x_n + nh = 63,$

$x_n = 65,\ h = 5 \Rightarrow n = -\frac{2}{5}$

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
45	114.84				
		-18.68			
50	96.16		5.84		
		-12.84		-1.84	
55	83.32		4		0.68
		-8.84		-1.16	
60	74.48		2.84		
		-6			
65	68.48				

$$y_{(x=63)} = 68.48 + \frac{\frac{-2}{5}}{1!}(-6) + \frac{\frac{-2}{5}\left(\frac{-2}{5}+1\right)}{2!}2.84$$

$$+\frac{\frac{-2}{5}\left(\frac{-2}{5}+1\right)\left(\frac{-2}{5}+2\right)}{3!}(-1.16)$$

$$+\frac{\frac{-2}{5}\left(\frac{-2}{5}+1\right)\left(\frac{-2}{5}+2\right)\left(\frac{-2}{5}+3\right)}{3!}(0.68)$$

$$= 68.48 + 2.4 - 0.3408 + 0.07424 - 0.028288$$

$$y(63) = 70.585$$

எடுத்துக்காட்டு 5.21

கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளிலிருந்து இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காண்க.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	1	2	4	7	11	16	22	29

தீர்வு:

நியுட்டனின் பின்நோக்கு இடைச்செருகலின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காண்போம்.

$$y_{(x=x_n+nh)} = y_n + \frac{n}{1!}\nabla y_n + \frac{n(n+1)}{2!}\nabla^2 y_n$$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\nabla^3 y_n + \ldots$$

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$
0	1			
		1		
1	2		1	
		2		0
2	4		1	
		3		0
3	7		1	
		4		0
4	11		1	
		5		0
5	16		1	
		6		0
6	22		1	
		7		
7	29			

x-ன் வாயிலாக y–ஐ காண, $\therefore x_n + nh = x$, $x_n = 7,\ h = 1 \Rightarrow n = x-7$

$$y_{(x)} = 29 + (x-7)(7) + \frac{(x-7)(x-6)}{2}(1)$$

$$= 29 + 7x - 49 + \frac{1}{2}\left(x^2 - 13x + 42\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[58 + 14x - 98 + x^2 - 13x + 42\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2 + x + 2\right]$$

5.2.4 இலக்ராஞ்சியின் இடைச்செருகல் சூத்திரம் (Lagrange's interpolation formula)

நியூட்டனின் முன்நோக்கு மற்றும் பின்நோக்கு இடைச்செருகலின் சூத்திரம் x-ன் சம இடைவெளிகளுக்கு மட்டுமே பயன்படுத்த முடியும். x-ன் சம மற்றும் சமமற்ற இடைவெளிகளுக்கு இலக்ராஞ்சியின் இடைச்செருகல் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

$y = f(x)$ என்பது x-ன் சார்பாகவும், $x = x_0,\ x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்ற சம பிரிவற்ற மதிப்புகளுக்கு முறையே $f(x)$ -ன் மதிப்புகள் $y_0, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ ஆகவும் இருந்தால் கொடுக்கப்பட்ட x- க்கான y-ஐ காண இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$y = f(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}y_0$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}y_1 + \ldots +$$

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}y_n$$

எடுத்துக்காட்டு 5.22

கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையிலிருந்து $y(10)$-ன் மதிப்பை இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி காண்க:

x	5	6	9	11
y	12	13	14	16

தீர்வு:

இங்கு x-ன் மதிப்புகள் சம பிரிவற்றவை. எனவே இலெக்ராஞ்சியின் சூத்திரத்தை பயன்படுத்தவும்.

$$x_0 = 5, x_1 = 6, x_2 = 9, x_3 = 11$$

$$y_0 = 12, y_1 = 13, y_2 = 14, y_3 = 16$$

$$y = f(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \times y_0$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \times y_1$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \times y_2$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \times y_3$$

$$= \frac{(x-6)(x-9)(x-11)}{(5-6)(5-6)(5-11)}(12)+$$

$$\frac{(x-5)(x-9)(x-11)}{(6-5)(6-9)(6-9)}(13)$$

$$+\frac{(x-5)(x-6)(x-11)}{(9-5)(9-6)(9-11)}(14)+$$

$$\frac{(x-5)(x-6)(x-9)}{(11-5)(11-6)(11-9)}(16)$$

$x = 10$ என்க.

$$y(10) = f(10) = \frac{4(1)(-1)}{(-1)(-4)(-6)}(12) + \frac{(5)(1)(-1)}{(1)(-3)(-5)}$$

$$(13) + \frac{5(4)(-1)}{4(3)(-2)}(14) + \frac{(5)(4)(1)}{6(5)(2)}(16)$$

$$= \frac{1}{6}(12) - \frac{13}{3} + \frac{5(14)}{3\times 2} + \frac{4\times 16}{12}$$

$$= 14.6663$$

பயிற்சி 5.2

1. வரைபட முறையைப் பயன்படுத்தி x=48 எனில் பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து y-ன் மதிப்பைக் காண்க:

x	40	50	60	70
y	6.2	7.2	9.1	12

2. பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து 350 அலகுகளில் ஏற்படக்கூடிய செலவினத்தை வரைபட முறையைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

மாதம்	ஜனவரி	பிப்ரவரி	மார்ச்
வெளியீடு அலகுகள்	200	300	400
மறைமுக உழைப்பூதியச் செலவினம்	2500	2800	3100

மாதம்	ஏப்ரல்	மே	ஜூன்
வெளியீடு அலகுகள்	640	540	580
மறைமுக உழைப்பூதியச் செலவினம்	3820	3220	3640

3. நியுட்டனின் முன்நோக்கு இடைச்செருகலின் சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி முப்படி பல்லுறுப்பு கோவையைக் காண்க.

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	1	10

4. 10 வருடங்களுக்கு ஒருமுறை எடுக்கப்படும் ஒரு நகரத்தின் மக்கள் தொகை கணக்கெடுப்பின் விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. 1955 வருடத்தின் மக்கள் தொகையை மதிப்பிடுக.

வருடம்	1951	1961	1971	1981
மக்கள் தொகை (இலட்சத்தில்)	35	42	58	84

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 5.indd 123 3/5/2020 11:39:56 AM

5. ஒரு தேர்வில் குறிப்பிட்ட இடைவெளிக்குள் மதிப்பெண்கள் பெறும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன:

மதிப்பெண்கள்	0-19	20-39	40-59	60-79	80-99
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	41	62	65	50	17

70-க்கு குறைவான மதிப்பெண்கள் பெறும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை காண்க.

6. கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையைக் கொண்டு $x = 32$ எனில் $f(x)$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	30	35	40	45	50
$f(x)$	15.9	14.9	14.1	13.3	12.5

7. உலோகம் மற்றும் துத்தநாகத்தில் உள்ள காரீயத்தின் உருகும் நிலை கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளது. 'T' என்பது வெப்பநிலை (பாகையில்) மற்றும் P என்பது உலோகத்தில் காரீயத்தின் சதவீதம்.

P	40	50	60	70	80	90
T	180	204	226	250	276	304

84 சதவீத காரீயம் கொண்ட உலோகத்தின் உருகும் நிலையைக் காண்க.

8. கீழ்க்கண்ட அட்டவளையிலிருந்து $f(2.8)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	11	34

9. இடைச்செருகல் முறையைப் பயன்படுத்தி 1986-ஆம் வருடத்திற்கான தொழிற்சாலையின் உற்பத்தியைக் காண்க.

வருடம்	1974	1978	1982	1990
உற்பத்தி (ஆயிரம் டன்களில்)	25	60	80	170

10. கீழ்க்கண்ட விவரங்களிலிருந்து மாத வருமானம் ₹26-க்கு மிகாமல் பெறும் தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கையை இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி காண்க.

வருமானம் மிகாமல் (₹)	15	25	30	35
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	36	40	45	48

11. இடைச்செருகலைப் பயன்படுத்தி 1985–ஆம் வருடத்தின் வியாபாரத்தை மதிப்பிடுக.

வருடம்	1982	1983	1984	1986
வியாபாரம் (இலட்சங்களில்)	150	235	365	525

12. இலக்ராஞ்சியின் இடைச்செருகலைப் பயன் படுத்தி $f(x)$ –ன் மதிப்பை $x = 15$ -ல் காண்க.

x	3	7	11	19
$f(x)$	42	43	47	60

பயிற்சி 5.3

L2FEP2

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்க.

1. $\Delta^2 y_0 =$

(a) $y_2 - 2y_1 + y_0$

(b) $y_2 + 2y_1 - y_0$

(c) $y_2 + 2y_1 + y_0$ (d) $y_2 + y_1 + 2y_0$

2. $\Delta f(x) =$

(a) $f(x+h)$ (b) $f(x) - f(x+h)$

(c) $f(x+h) - f(x)$ (d) $f(x) - f(x-h)$

3. $E \equiv$

(a) $1+\Delta$ (b) $1-\Delta$

(c) $1+\nabla$ (d) $1-\nabla$

4. $h=1$ எனில், $\Delta(x^2) =$

(a) $2x$ (b) $2x-1$

(c) $2x+1$ (d) 1

5. c ஒரு மாறிலி எனில் $\Delta c =$

(a) c (b) Δ

(c) Δ^2 (d) 0

6. m மற்றும் n என்பவை மிகை முழுக்கள் எனில் $\Delta^m \Delta^n f(x) =$

(a) $\Delta^{m+n} f(x)$ (b) $\Delta^m f(x)$

(c) $\Delta^n f(x)$ (d) $\Delta^{m-n} f(x)$

7. 'n' மிகை முழு எண் எனில், $\Delta^n \left[\Delta^{-n} f(x)\right]$

(a) $f(2x)$ (b) $f(x+h)$

(c) $f(x)$ (d) $\Delta f(x)$

8. $Ef(x) =$

(a) $f(x-h)$ (b) $f(x)$

(c) $f(x+h)$ (d) $f(x+2h)$

9. $\nabla \equiv$

(a) 1+E (b) 1-E

(c) $1-E^{-1}$ (d) $1+E^{-1}$

10. $\nabla f(a) =$

(a) $f(a)+f(a-h)$

(b) $f(a)-f(a+h)$

(c) $f(a)-f(a-h)$

(d) $f(a)$

11. (x_0, y_0), (x_1, y_1) என்ற புள்ளிகள் கொடுக்கப் பட்டால் இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரம்

(a) $y(x) = \dfrac{x-x_1}{x_0-x_1} y_0 + \dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} y_1$

(b) $y(x) = \dfrac{x_1-x}{x_0-x_1} y_0 + \dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} y_1$

(c) $y(x) = \dfrac{x-x_1}{x_0-x_1} y_1 + \dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} y_0$

(d) $y(x) = \dfrac{x_1-x}{x_0-x_1} y_1 + \dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} y_0$

12. இலக்ராஞ்சியின் இடைச்செருகலின் சூத்திரம் எப்பொழுது பயன்படுத்தப்படும்

(a) சமமான இடைவெளிகளுக்கு மட்டும்

(b) சமமற்ற இடைவெளிகளுக்கு மட்டும்

(c) சம மற்றும் சமமற்ற இடைவெளிகளுக்கு

(d) இவற்றுள் ஏதும் கிடையாது.

13. $f(x) = x^2 + 2x + 2$ மற்றும் h=1 எனில் $\Delta f(x)$-ன் மதிப்பு

(a) $2x-3$ (b) $2x+3$

(c) $x+3$ (d) $x-3$

14. கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து $\Delta^3 y_0$ –ன் மதிப்பு

x	5	6	9	11
y	12	13	15	18

(a) 1 (b) 0

(c) 2 (d) –1

இதர கணக்குகள்

1. $f(x) = e^{ax}$ எனில் $f(0), \Delta f(0), \Delta^2 f(0)$ என்பன பெருக்குத்தொடரில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

2. $i)(1+\Delta)(1-\nabla) = 1$ $ii)\Delta\nabla = \Delta - \nabla$
(iii) $E\nabla = \Delta = \nabla E$ என நிறுவுக.

3. ஒரு இரண்டு படி கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவையானது (1,-1) (2,-1) (3,1) (4,5) என்ற புள்ளிகள் வழிச்செல்கின்றது. பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காண்க.

4. கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையிலிருந்து விடுபட்ட உறுப்புகளைக் காண்க.

x	0	5	10	15	20	25
y	7	11	-	18	-	32

5. $f(-1) = 202$, $f(0) = 175$, $f(1) = 82$ மற்றும் $f(2) = 55$ எனில் $f(0.5)$ காண்க.

6. கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையிலிருந்து x = 43 மற்றும் x = 84 எனும் புள்ளிகளில் y-ன் மதிப்பு காண்க

x	40	50	60	70	80	90
y	184	204	226	250	276	304

7. 'D'-ஐ விட்டமாகவும் A-ஐ பரப்பாகவும் கொண்ட வட்டத்தின் மதிப்புகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

D	80	85	90	95	100
A	5026	5674	6362	7088	7854

82 மற்றும் 91 என்பனவற்றை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டங்களின் பரப்புகளைக் காண்க.

8. $u_0 = 560$, $u_1 = 556$, $u_2 = 520$, $u_4 = 385$, எனில் $u_3 = 465$ என நிரூபி

9. பின் வரும் அட்டவணையிலிருந்து நியூட்டனின் பின் நோக்கு சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி படி 4 –ஐ கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காண்க.

x	1	2	3	4	5
y	1	–1	1	–1	1

10. இலக்ராஞ்சியின் இடைமதிப்புத்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி (0, –12), (1, 0), (3, 6) மற்றும் (4,12) என்ற புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காண்க

தொகுப்புரை

- $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$
- $\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$
- $\nabla f(x+h) = \Delta f(x)$
- $Ef(x) = f(x+h)$
- $E^n f(x) = f(x+nh)$
- நியூட்டனின் முன்னோக்கு விதி:

$$y_{(x=x_0+nh)} = y_0 + \frac{n}{1!}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots$$

- நியூட்டனின் பின்னோக்கு விதி:

$$y_{(x=x_n+nh)} = y_n + \frac{n}{1!}\nabla y_n + \frac{n(n+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\nabla^3 y_n + \ldots$$

- இலக்ராஞ்சியின் இடைமதிப்புத்தேற்றம்

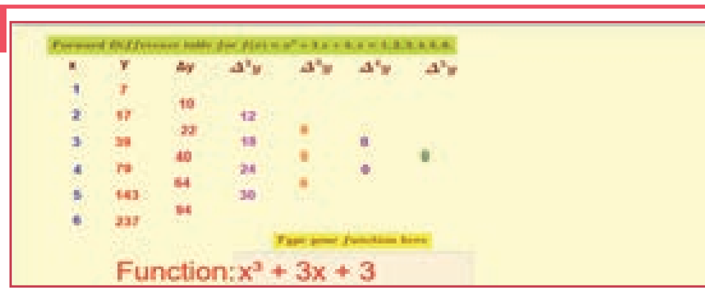
$$y = f(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}y_1 + \ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}y_n$$

கலைச் சொற்கள் (GLOSSARY)

இடப்பெயர்வுச் செயலி	Shifting operator
இடைச்செருகல்	Interpolation
இயற்கணித முறைகள்	Algebraic methods
இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரம்	Lagrange's formula
எண்ணியியல்	Numerical
காப்பீடு	Policy
கிரிகோரி–நியுட்டனின் சூத்திரங்கள்	Gregory- Newton's formulae
திட்டமான வேறுபாடுகள்	Finite differences
பின்நோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி	Backward difference operator
புறச்செருகல்	Extrapolation
முன்நோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி	Forward difference operator
வரைபட முறை	Graphic method

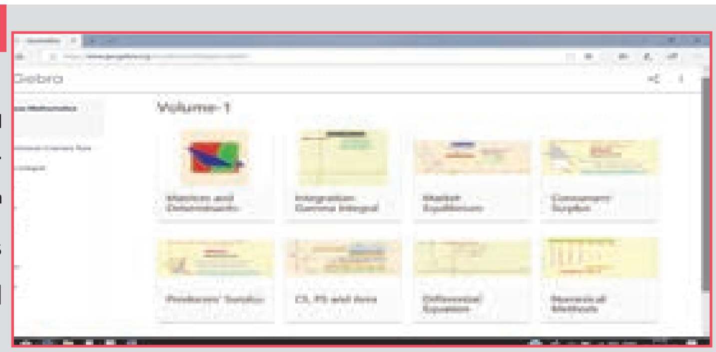
இணையச் செயல்பாடு

செயல்பாட்டின் இறுதியில் எதிர்பார்க்கப்படும் விளைவு



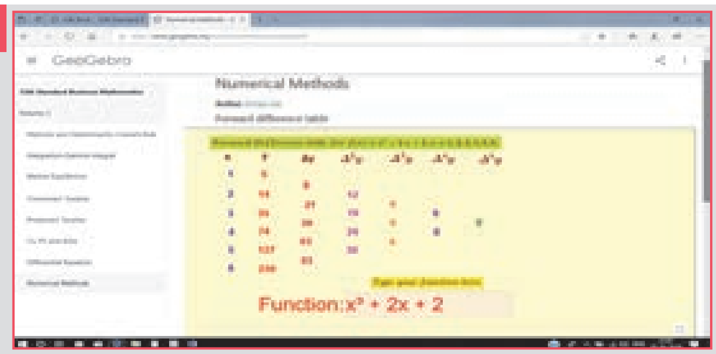
படி 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி இச்செயல்பட்டிற்கான இணையப் பக்கத்திற்குச் செல்க. பின்பு "12th Standard Business Mathematics and Statistics " என்னும் திரையில் "Volume–1" யை தெரிவு செய்யவும்.



படி 2

"Numerical Methods" என்னும் திரை தோன்றும். Forward Difference table என்னும் அட்டவணை தோன்றும், அதில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள பெட்டியில் புதிய சார்புகளை தட்டச்சு செய்க. பின்பு கிடைக்கும் விடையினை அட்டவனையோடு ஒப்பிடுக.



செயல் பாட்டிற்க்கான உரலி : https://ggbm.at/uzkcrnwr

விரைவு குறியீடு (QR Code) :

B247_12_BUS_MAT_TM

6

சமவாய்ப்பு மாறி மற்றும் கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல்

சைமன் டெனிஸ் பாய்சான்

(ஜுன் 21, 1781–ஏப்ரல்25, 1840)

அறிமுகம்

சில்வெஸ்ட்ரே பிரான்கோஸ் லாக்ரோய்ஸ் (1816) மற்றும் லூயிஸ் பேச்சிலியர் (1914) ஆகியோரின் காலங்களுக்கு இடைப்பட்ட காலத்தில் சமவாய்ப்பு மாறி மற்றும் சமவாய்ப்பு மாறிக்கான சராசரி எனும் கருத்துக்கள் உருவாக்கப்பட்டன. சில நூல் ஆசிரியர்கள் சைமன் டெனிஸ் பாய்சான் அவர்களால் சமவாய்ப்பு மாறி மற்றும் எதிர்பார்த்தலுக்கான மதிப்பு எனும் கருத்துக்கள் கண்டுபிடித்ததாக கூறுகின்றனர். சைமன் டெனிஸ் பாய்சான் ஒரு பிரஞ்சு கணிதவியலாளர் ஆவார். இவர் நிகழ்தகவு கருத்தியலின் பணிக்காக நன்கு அறியப்பட்டவர். பாய்சானின் மிகப்பெரிய ஆய்வானது நிகழ்தகவைப் பற்றியதாகும். 1838 ஆம் ஆண்டில் பாய்சான் தனது கருத்துக்களை நிகழ்தகவு கோட்பாட்டின் மூலம் வெளியிட்டார். இது தற்போது பாய்சான் பரவல் என அறியப்படுகிறது. இவர் மின்சாரம் மற்றும் காந்தவியல், மற்றும் வானியல் பயன்பாடு உள்ளிட்ட 300–க்கும் மேற்பட்ட கணிதபடைப்புகளை வெளியிட்டுள்ளார்.

M7XGPK

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தைப் படித்தப் பின்பு பின்வரும் பாடக்கருத்துகளை மாணவர்கள் புரிந்துகொள்ள இயலும்.

- சமவாய்ப்பு மாறியினை ஏன் பயன்படுத்து கிறோம்?
- சமவாய்ப்பு மாறியினை நாம் ஏன் வரையறுக்க வேண்டும்?
- சமவாய்ப்பு மாறியின் வகைகள்.
- நிகழ்தகவு சார்பு.
- பரவல் சார்பு.
- கணக்கின் இயல்பு (தன்மை).
- எண்ணியல் ரீதியாக விவரிக்கக்கூடிய வெளியீடுகளுடன் சமவாய்ப்பு சோதனைகளைப் படிப்பதற்கான முறைகளை மேம்படுத்துதல்.
- உண்மை நிகழ்தகவை கணக்கிடுதல்.
- தனித்த மற்றும் தொடர்ச்சி யான சமவாய்ப்பு மாறியின் கணக்கியல் எதிர்பாத்தலின் கருத்துரு.
- தனித்த மற்றும் தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியின் கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலின் பண்புகள்.
- தனித்த மற்றும் தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியின் சராசரி மற்றும் மாறுபாடு ஆகியவற்றை கணக்கிடுதல்.
- தனித்த மற்றும் தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியின் கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலின் நடைமுறை பயன்பாடுகள்.

6.1 சமவாய்ப்பு மாறி (Random variable)

அறிமுகம்

ஒரு நாணயம் சுண்டுவதை சமவாய்ப்பு மாறியாக எடுத்துக் கொள்வோம். 'n' நாணயங்களை சுண்டும் பொழுது கிடைக்கக்கூடிய தலைகளின் எண்ணிக்கையைத் தெரிந்து கொள்ள ஒருவருக்கு ஆர்வம் இருக்கலாம். இதே போல, ஒரு ஜோடி பகடைகளை உருட்டும் பொழுது கிடைக்கக்கூடிய ஒவ்வொரு கூறு புள்ளிகளின் கூடுதல் பற்றிய தகவலைப் பெற ஆர்வம் காட்டலாம். இவ்வாறாக, ஒரு சோதனையின் ஒவ்வொரு வெளிப்பாட்டிற்கும், ஒரு மெய்யெண்ணை நாம் தொடர்பு படுத்துகிறோம். இதனை வேறுவகையில் கூறுவதனால், நாம் ஒரு சார்பைக் கருத்தில் கொண்டால் அவற்றின் சார்பகம் என்பது வெளிப்பாட்டின் தொகுப்பாகும். அவற்றின் வீச்சுகம் என்பது மெய்யெண்கள் தொகுப்பின் உட்கணமாகும். அத்தகைய ஒரு சார்பு சமவாய்ப்பு மாறி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

இயற்கணிதத்தில், X அல்லது Y அல்லது வேறு எதாவது எழுத்தை ஒரு குறிப்பிட்ட கணக்கில் நீங்கள் வெவ்வேறு மாறிகளாகப் பயன்படுத்திக் கற்றிருப்பீர்கள். எனவே, அடிப்படை கணிதத்தில், ஒரு மாறி என்பது ஒரு தெரியாத எண்ணை பிரதிபலிக்கும் ஒரு அகரவரிசை எழுத்தாகும். சமவாய்ப்பு மாறி என்பதும் ஒரு மாறி, அது மேலும் சமவாய்ப்பிற்கு உட்பட்டது என்பது அதன் பொருள். அதாவது இது வெவ்வேறான மதிப்புகளைப் பெற்றிருக்கும். புள்ளியியலில், X–ஐக் கொண்டு சமவாய்ப்பு மாறியைக் குறிப்பது மிகவும் பொது வானது ஆகும். மேலும் அது சோதனைத் தன்மையைப் பொறுத்து வெவ்வேறு மதிப்புகளைப் பெற்றிருக்கும்.

சமவாய்ப்பு மாறிக்கான சில உதாரணங்கள்:

(i) ஒரு நாணயம் 8 முறை சுண்டப்படுவதால் கிடைக்கக்கூடிய தலைகளின் எண்ணிக்கை.

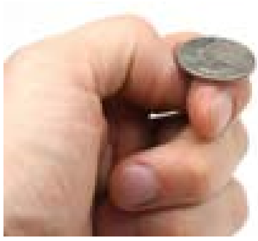
(ii) ஒரு வருடத்தில், ஒரு கால அளவில் ஒரு முதலீட்டில் இருந்து பெறப்படும் வருமானம்

(iii) உருட்டிய பகடையின் மீதுள்ள முகங்கள்.

(iv) திங்கள்கிழமை முதல் வெள்ளிக்கிழமை வரை காலை 9.00 மணி முதல் மாலை 4.30 மணி வரை வழக்கமான ஒவ்வொரு ஒரு மணி நேர இடைவெளியில் ஒரு வங்கிக்கு வருகை புரியும் வாடிக்கையாளர்களின் எண்ணிக்கை.

(v) ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் கடையில் நடைபெற்ற விற்பனை அளவு.

எடுத்துக்காட்டாக, சமவாய்ப்பு சோதனை 'E' என்பது ஒரு நாணயத்தை மூன்று முறை சுண்டு வதைக் குறிக்கட்டும். இந்த சோதனையின் வெளிப் பாடுகள் கூறுவெளி 'S'–ஐ உருவாக்கிறது. 'X' என்பது பெறப்பட்ட தலைகளின் எண்ணிக்கை குறிக்கட்டும். இங்கு X ஆனது ஒரு சமவாய்ப்பு சோதனை 'E'–இன் வெளிப்பாட்டுகளுடன் இணைக்கப்பட்ட மெய்யெண்கள் ஆகும். இதன் விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.



நாணயம் சுண்டுதல்

படம் 6.1

வெளிப்பாடுகள் (ω) :							
(HHH)	(HHT)	(HTH)	(THH)	(HTT)	(THT)	(TTH)	(TTT)
$X = x$ ன் மதிப்புகள் :							
3	2	2	2	1	1	1	0

அதாவது, $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$

மேற்குறிப்பிட்ட எடுத்துக்காட்டில், ஒவ்வொரு வெளிப்பாடும் அதனுடன் தொடர்புடைய மெய்யெண் $X(\omega)$ உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கூறுவெளி 'S' என்பதை சோதனை வெளிப்பாட்டிற்கு தொடர் புடைய ஒவ்வொரு புள்ளி $\omega \in S$ என வரையறுக்கலாம்.

6.1.1 சமவாய்ப்பு மாறியின் வரையறை (Definition of a random variable)

வரையறை 6.1

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X என்பது 'S' என்ற கூறுவெளியின் மீது வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு மெய்மதிப்பீட்டுச் சார்பு என வரையறுக்கப்படுகிறது. மேலும் இது $(-\infty, \infty)$ இல் மதிப்புகளைப் பெற்றிருக்கும் அல்லது இது ஒரு சமவாய்ப்பு சோதனையின் சாத்தியமுள்ள மதிப்புகளின் எண் வெளிப்பாடுகள் எனவும் கூறலாம்.

சமவாய்ப்பு மாறியின் வகைகள் (Types of Random Variable)

சமவாய்ப்பு மாறிகளை இரு வகைகளாக வகைப்படுத்தலாம், அவை தனித்த மற்றும் தொடர்ச்சி யான சமவாய்ப்பு மாறிகள் ஆகும். இவை, கணிதம் மற்றும் புள்ளியியல் துறையில் நடைமுறைப் பயன் பாடுகளுக்கு முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவையாக

இருக்கின்றன. மேற்குறிப்பிட்ட சமவாய்ப்பு மாறிகளை எடுத்துக்காட்டுகளுடன் பின்வருமாறு வரையறுப்போம்.

குறிப்பு

x ஒரு மெய்யெண் எனில் , S இல் உள்ள அனைத்து ω தொகுப்புகளுடன் $X(\omega)=x$ எனுமாறு , $X=x$ என குறிக்கப்படுகிறது. எனவே $P(X = x) = P\{\omega:X(\omega) = x\}$.

(vi) $P(X \leq a) = P\{\omega:X(\omega)\in(-\infty, a]\}$ மற்றும் $P(a < X \leq b) = P\{\omega: X(\omega)\in(a, b]\}$.

(vii) ஒரு பரிமாண சமவாய்ப்பு மாறிகள், $X,Y,Z,\ldots$ என்ற பெரிய எழுத்துக்கள் மூலம் குறிக்கப்படும். பொதுவாக, ஒரு சோதனையின் வெளிப்பாடுகள் ω ஆல் குறிக்கப்படும். இவ்வாறாக, $b\in X(\omega)$ என்பது ஒரு மெய்யெண்ணை குறிக்கும் சமவாய்ப்பு மாறி X உடன் தொடர்புடைய வெளிப்பாடு ω ஆகும். $X,Y,Z,\ldots$ போன்றவைகள் கொண்டிருக்கும் மதிப்புகளைச் சிறிய எழுத்துக்களைக் கொண்டு, அதாவது $x,y,z,\ldots$ போன்றவற்றால் குறிக்கலாம்.

6.1.2 தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி (Discrete random variable)

தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியின் எடுத்துக்காட்டுகள்:

- ஒரு தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்கள்.
- ஒரு ஜாடியில் உள்ள சிவப்பு பளிங்குகளின் எண்ணிக்கை.
- ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில், தொலைபேசி அழைப்புகளின் எண்ணிக்கை.
- ஒரு மாதத்தில், ஒரு மகிழுந்து விற்பனை யாளரால் விற்கப்படும் மகிழுந்துகளின் எண்ணிக்கை முதலியன.

வரையறை 6.2

சாத்தியமான மதிப்புகளால் வரையறுக்கப்பட்ட எண்களை ஏற்றுக்கொள்ளக் கூடிய ஒரு மாறி அல்லது ஒரு எண்ணத்தக்க மெய்யெண்களின் முடிவிலாத் தொடரானது **தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி** என வரையறுக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக P_1, P_2 மற்றும் P_3 ஆகியோர் ஒரு குறிப்பிட்ட மாவட்டத்தில் ஒரு மாதிரி பள்ளியை உருவாக்குவதற்காக சில நபர்களின் கருத்துக் களைப் பதிவு செய்கிறார்கள். ஒவ்வொரு நபரின் பதிவும் ஆம் (Y) அல்லது இல்லை (N) என பதிவு செய்யப்படுகிறது.

இது தொடர்பான தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியைத் தீர்மானிக்கும் சாத்தியக்கூறுகள் பின்வருமாறு அமையலாம்.

அட்டவணை 6.1

சாத்திய கூறுகள்	P_1	P_2	P_3	சமவாய்ப்பு மாறியின் மதிப்புகள் (ஆம் என்று கொடுக்கப்பட்டவர்களின் எண்ணிக்கை)
1.	Y	Y	Y	3
2.	Y	Y	N	2
3.	Y	N	Y	2
4.	Y	N	N	1
5.	N	Y	Y	2
6.	N	Y	N	1
7.	N	N	Y	1
8.	N	N	N	0

மேலே உள்ள அட்டவணையிலிருந்து பெறக்கூடிய தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியின் மதிப்புகள் 0, 1, 2 மற்றும் 3 ஆகும்.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

(i) X_1 மற்றும் X_2 ஆகியவை சமவாய்ப்பு மாறிகள் மற்றும் c என்பது மாறிலி எனில், $cX_1,\ X_1+X_2,\ X_1X_2,\ X_1-X_2$ என்பனவும் சமவாய்ப்பு மாறிகளாகும்.

(ii) X என்பது சமவாய்ப்பு மாறி எனில், $(i)\frac{1}{X}$ மற்றும் $(ii)|X|$ ஆகியவை களும் சமவாய்ப்பு மாறிகளாகும்.

நிகழ்தகவு நிறை சார்பு (Probability Mass function)

வரையறை 6.3

X என்ற தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியின் தனித்த மதிப்புகள் $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ என்க. மேலும் இதன் நிகழ்தகவு சார்பு $P_X(x)$ எனக் குறியிடப்படுகிறது எனில்,

$$P_X(x)=\mathrm{p}(x)$$

$$=\begin{cases}\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_\mathrm{i})=p_i=p(x_i) & ,x=x_i, i=1,2,...,n,...\\ 0 & ,x\neq x_i\end{cases}$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது.

இது, X இன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு அல்லது தனித்த நிகழ்தகவு சார்பு என்றும் அழைக்கப் படுகிறது.

இந்த நிகழ்தகவு நிறை சார்பு $P_X(x)$ ஆனது பின்வரும் நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்ய வேண்டும்.

(i) $p(x_i)\geq 0\ \forall\ i$ மற்றும்

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i)=1$

எடுத்துக்காட்டு 6.1

சில குடும்பங்களில் உள்ள மகிழுந்துகளின் எண்ணிக்கை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

மகிழுந்துகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4
குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	30	320	380	190	80

இவ் விவரங்களைக் கொண்டு நிகழ்தகவு நிறை சார்பை மதிப்பிடுக, மேலும் $p(x_i)$ ஒரு நிகழ்தகவு நிறை சார்பு என்பதையும் சரிபார்க்க.

தீர்வு:

மகிழுந்துகளின் எண்ணிக்கை X என்க.

அட்டவணை 6.2

$X=x_i$	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	$p(x_i)$
0	30	0.03
1	320	0.32
2	380	0.38
3	190	0.19
4	80	0.08
மொத்தம்	1000	1.00

(i) $p(x_i)\geq 0\ \forall\ i$ மற்றும்

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i)$

$$= p(0)+p(1)+p(2)+p(3)+p(4)$$

$$= 0.03+0.32+0.38+0.19+0.08 \ = 1$$

எனவே, $p(x_i)$ ஒரு நிகழ்தகவு நிறை சார்பு ஆகும்.

குறிப்பு

$X=0$ -க்கான நிகழ்தகவு 0.03 ஆனது 30/1000 -லிருந்து பெறப்படுகிறது. மற்ற நிகழ்தகவுகளும் இதேபோல் மதிப்பிடப்படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 6.2

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X ஆனது பின்வரும் நிகழ்தகவு சார்பை பெற்றுள்ளது எனில்,

X ன் மதிப்புகள்	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(x)$	0	a	$2a$	$2a$	$3a$	a^2	$2a^2$	$7a^2+a$

(i) a வை கண்டுபிடிக்கவும், மேலும் (ii) $P(X<3)$, (iii) $P(X>2)$ மற்றும் (iv) $P(2<X\leq 5)$ –ஐ மதிப்பிடவும்.

தீர்வு:

(i) நிகழ்தகவு நிறை சார்பின் நிபந்தனையிலிருந்து,

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

$$\therefore \sum_{i=0}^{7} p(x_i) = 1$$

$$0+a+2a+2a+3a+a^2+2a^2+7a^2+a = 1$$

$$10a^2+9a-1 = 0$$

$$(10a-1)(a+1) = 0$$

$$a=\frac{1}{10} \text{ அல்லது } -1$$

ஆனால் $p(x)$ ஆனது குறை மதிப்பைக் கொண்டிருக்கமுடியாது என்பதால், $a = -1$ ஆனது பொருந்தாது எனவே, $a = \frac{1}{10}$ ஆகும்.

(ii) $P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$$= 0+a+2a$$

$$=3a$$

$$= \frac{3}{10} \qquad \left(\because a=\frac{1}{10}\right)$$

(iii) $P(X>2)=1-P(X\leq 2)$

$$=1-\left[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\right]$$

$$= 1-\frac{3}{10}$$

$$= \frac{7}{10}$$

(iv) $P(2<X\leq 5)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$

$$= 2a+3a+a^2$$

$$= 5a+a^2$$

$$= \frac{5}{10}+\frac{1}{100}$$

$$= \frac{51}{100}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.3

$$p(x)=\begin{cases} \frac{x}{20}, & x = 0,1,2,3,4,5 \\ 0 & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$

எனில், (i) $P(X<3)$ மற்றும் (ii) $P(2<X\leq 4)$ ஆகியவற்றைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு:

(i) $P(X<3) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$$= 0+\frac{1}{20}+\frac{2}{20}$$

$$= \frac{3}{20}$$

(ii) $P(2<X\leq 4) = P(X=3)+P(X=4)$

$$= \frac{3}{20}+\frac{4}{20}$$

$$= \frac{7}{20}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.4

நீங்கள் ஒரு பிழையற்ற நாணயத்தை மூன்று முறை சுண்டுவதாகக் கருதுவோம். இந்த சோதனையின் வெளிப்பாடு சமவாய்ப்பு மாறியாக கருதப்பட்டு, மேலே திருப்பப்பட்ட முகங்களில் உள்ள தலைகளின் எண்ணிக்கை கணக்கிடப் படுகிறது. இதன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பை கண்டு பிடிக்கவும். மேலும் நிகழ்தகவு நிறை சார்பின் பண்புகளையும் சரிபார்.

தீர்வு:

மேலே திருப்பப்பட்ட முகங்களில் உள்ள தலைகளின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடும் சமவாய்ப்புமாறியை X என்க. இதன் வெளிப்பாடுகள் கீழே குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது.

வெளிப்பாடுகள்	X இன் மதிப்புகள்	வெளிப்பாடுகள்	X இன் மதிப்புகள்
(HHH)	3	(HTT)	1
(HHT)	2	(THT)	1
(HTH)	2	(TTH)	1
(THH)	2	(TTT)	0

இதன் மதிப்பீடுகள் பின்வரும் நிகழ்தகவு அட்டவணை 6.3–இல் தரப்பட்டுள்ளன.

அட்டவணை 6.3

X ன் மதிப்புகள்	0	1	2	3	மொத்தம்
$p(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\sum_{i=0}^{3} p(x_i)=1$

(i) $p(x_i) \geq 0 \ \forall\ i$ மற்றும் (ii) $\sum_{i=0}^{3} p(x_i)=1$

எனவே, $p(x_i)$ ஒரு நிகழ்தகவு நிறை சார்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.5

இரண்டு பகடைகள் ஒரே சமயத்தில் வீசப்படுகிறது. இதில் மேலே திருப்பப்பட்ட முகங்களின் கூடுதல் சமவாய்ப்பு மாறியாகக் கருதப்படுகிறது எனில், அதன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பை உருவாக்கவும்.

படம் 6.2

தீர்வு:

$$\text{கூறுவெளி } (S)=\begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

மொத்த வெளிப்பாடு : $n(S) = 36$

அட்டவணை 6.4

வெளிப்போடுகள்	(1,1)	(1,2) (2,1)	(1,3) (2,2) (3,1)	(1,4) (2,3) (3,2) (4,1)	(1,5) (2,4) (3,3) (4,2) (5,1)	(1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1)	(2,6) (3,5) (4,4) (5,3) (6,2)	(3,6) (4,5) (5,4) (6,3)	(4,6) (5,5) (6,4)	(5,6) (6,5)	(6,6)
திருப்பிய முகங்களின் கூடுதல் (X)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P_X(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

தனித்த பரவல் சார்பு (Discrete distribution function)

வரையறை 6.4

$x_1, x_2, ..., x_n, ...$ என்ற எண்ணத்தக்க மெய்மதிப்புகளை உடைய தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி X -இன் நிகழ்த்தகவுகள் $p(x_1), p(x_2), p(x_3), ...,$ $p(x_n),...$ எனில், இதன் தனித்த திரள் பரவல் சார்பு அல்லது பரவல் சார்பு பின்வருமாறு வரையறுக்கப் படுகிறது.

அனைத்து $x \in R$ -க்கு, $F_X(x)= P(X \leq x)$. அதாவது, $F_X(x)= \sum_{x<x_i} P(x_i)$

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு குடும்பத்தில் இரண்டு குழந்தைகள் உள்ளனர் எனக் கருதுவோம். அவ்வாறாயின் அதன் கூறுவெளி $(S) = \{bb, bg, gb, gg\}$ ஆகும். இங்கு b = சிறுவன் (boy) மற்றும் g= சிறுமி (girl) என்பதனை குறிக்கிறது.

குழந்தைகளின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடும் சமவாய்ப்பு மாறி X என்க.

$\therefore$ கூறுவெளிக்குத் தொடர்புடைய X இன் மதிப்புகள் 2,1,1 மற்றும் 0 ஆகும்.

எனவே, நிகழ்தகவு நிறை சார்பு $p(x)$ -ஐ பின்வருமாறு அமைக்கலாம்.

$X = x$	0	1	2
$p(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

மேலும் இந்த X இன் திரள் பரவல் சார்பானது பின்வருமாறு கணக்கிடப்படுகிறது.

$X = x$	0	1	2
$p(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$F_X(x)=P(X \leq x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$

எடுத்துக்காட்டு 6.6

ஒரு நாணயம் மூன்று முறை சுண்டப் படுகிறது. X என்பது கணக்கிடப்பட்ட தலைகளின் எண்ணிக்கை எனில், X இன் திரள் பரவல் சார்பைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு:

கூறுவெளி (S) ={(HHH), (HHT), (HTH), (HTT), (THH), (THT), (TTH), (TTT)}

X ஏற்கும் மதிப்புகள் : 3, 2, 2, 1, 2, 1, 1 மற்றும் 0.

X–இன் வீச்சு(R_X)	0	1	2	3
$P_X(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
$F_X(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	1

இவ்வாறாக,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{1}{8}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{4}{8}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{7}{8}, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x \le 3 \end{cases}$$ என்பதைப் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 6.7

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவுப் பரவலுக்கான பரவல் சார்பை அமைக்கவும்.

$X = x$	1	2	3	4	5	6	7
$P(x)$	0.10	0.12	0.20	0.30	0.15	0.08	0.05

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்தகவு பரவல் $p(x)$ இன் மதிப்பிலிருந்து நாம் பெறுவது,

$$F(1) = P(X \le 1) = P(1) = 0.10$$

$$F(2) = P(X \le 2) = P(1) + P(2) = 0.10 + 0.12 = 0.22$$

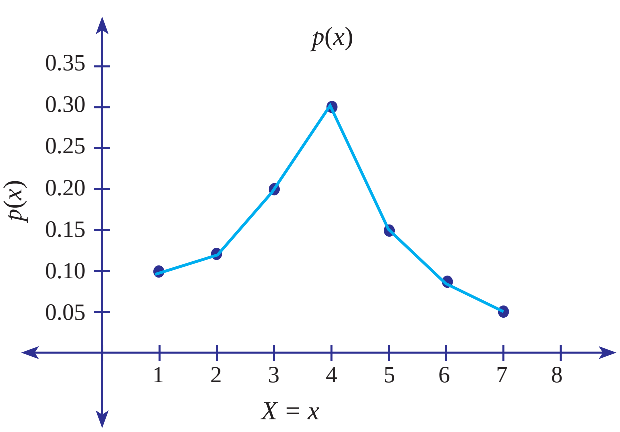
$$F(3) = P(X \le 3) = P(1) + P(2) + P(3)$$
$$= F(2) + P(3)$$
$$= 0.22 + 0.20$$
$$= 0.42$$

$$F(4) = F(3) + P(4)$$
$$= 0.42 + 0.30$$
$$= 0.72$$

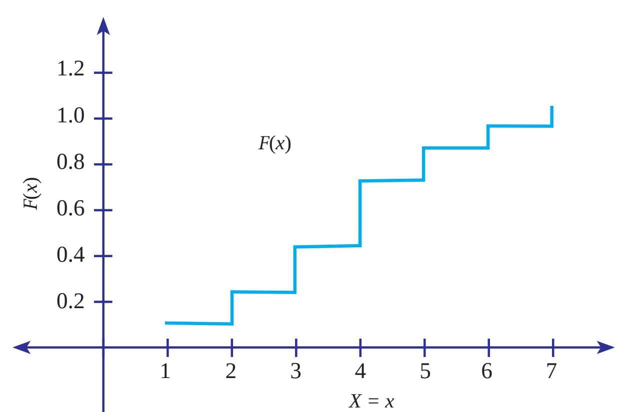
$$F(5) = F(4) + P(5)$$
$$= 0.72 + 0.15$$
$$= 0.87$$

$$F(6) = F(5) + P(6)$$
$$= 0.87 + 0.08$$
$$= 0.95$$

$$F(7) = F(6) + P(7)$$
$$= 0.95 + 0.05$$
$$= 1.00$$



படம் 6.3



படம் 6.4

எனவே,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<1 \\ 0.10, & x \le 1 \\ 0.22, & x \le 2 \\ 0.42, & x \le 3 \\ 0.72, & x \le 4 \\ 0.87, & x \le 5 \\ 0.95, & x \le 6 \\ 1, & x \le 7 \end{cases}$$ ஆகும்.

6.1.3 தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி (Continuous random variable)

வரையறை 6.5

ஓர் இடைவெளியில் உள்ள அனைத்து மெய் மதிப்புகளையும் (முழுக்களாகவோ, பின்னங்களாகவோ) ஏற்கும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X ஆனது தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியின் எடுத்துக்காட்டுகள்:

- ஒரு 10 அவுன்ஸ் பாட்டிலில் உள்ள தண்ணீரின் அளவு.
- ஒரு மகிழுந்தின் வேகம்.
- மின் நுகர்வு கிலோவாட் மணி நேரத்தில்.
- மக்கள் தொகையில் மக்களின் உயரம்.
- ஒரு வகுப்பில் மாணவர்களின் எடை.
- சென்னையிலிருந்து மதுரைக்குச் செல்ல ஒரு சரக்குவண்டி ஒட்டுநர் எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம்.

நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு (Probability density function)

வரையறை 6.6

தொகையிடக்கூடிய ஓர் இடைவெளி $[t_1, t_2]$ இல் (திறந்த அல்லது மூடிய) அமையும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவு $f_X(x)$ ஆனது நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு என்று வரையறுக்கப் படுகிறது.

$$P(t_1 \le X \le t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f_X(x)\,dx$$

நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f_X(x)$ அல்லது சுருக்கமாக, $f(x)$ ஆனது பின்வரும் நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்ய வேண்டும்.

(i) $f(x) \ge 0 \ \forall\, x$ மற்றும் (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பிற்குப் பதிலாகப் பயன்படுத்தப்படும் பிற பெயர்களாவன அடர்த்திச் சார்பு, தொடர்ச்சியான நிகழ்தகவு சார்பு, தொகை அடர்த்திச் சார்பு ஆகியவை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.8

ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X -இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ பின்வருமாறு உள்ளது

$$f(x) = ax \quad , \quad 0 \le x \le 1$$ எனில்,

மாறிலி a வைக் கண்டுபிடிக்கவும். மேலும் $P\left[X \le \frac{1}{2}\right]$ இன் மதிப்பையும் காண்க.

தீர்வு:

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ என்பதை நாம் அறிவோம்.

$$\int_0^1 ax\,dx = 1 \Rightarrow a\int_0^1 x\,dx = 1$$

$$\Rightarrow a\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^1 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2}(1-0) = 1$$

$$\Rightarrow a = 2$$

$$P\left[x \le \frac{1}{2}\right] = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} ax\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.9

ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X -இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு (p.d.f)

$f(x) = 5x^4, 0 \le x \le 1$ எனில்,

(i) $P[X \le a_1] = P[X > a_1]$ மற்றும்

(ii) $P[X > a_2] = 0.05$ என்பவற்றைக் கொண்டு a_1 மற்றும் a_2 ஆகியவற்றைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு :

(i) $P[X \le a_1] = P[X > a_1]$ இதிலிருந்து,

$$P[X \le a_1] = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{a_1} f(x)dx = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{a_1} 5x^4 dx = \frac{1}{2}$$

$$5\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{a_1} = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = (0.5)^{\frac{1}{5}}$$

(ii) $$P[X > a_2] = 0.05$$

$$\int_{a_2}^{1} f(x)dx = 0.05$$

$$\int_{a_2}^{1} 5x^4 dx = 0.05$$

$$5\left[\frac{x^5}{5}\right]_{a_2}^{1} = 0.05$$

$$a_2 = [0.95]^{\frac{1}{5}}$$

தொடர்ச்சியான பரவல் சார்பு (Continuous distribution function)

வரையறை 6.7

தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f_X(x)$ எனில், சார்பு $F_X(x)$ பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$F_X(x) = P[X \le x] = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, -\infty < x < \infty$$

இது தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X– இன் **பரவல் சார்பு** அல்லது (சில நேரங்கள்) **திரள் பரவல் சார்பு** என்று அழைக்கப்படுகிறது.

திரள் பரவல் சார்பின் பண்புகள் (Properties of cumulative distribution function)

சார்பு $F_X(x)$ அல்லது சுருக்கமாக $F(x)$ ஆனது பின்வரும் பண்புகளைப் பெற்றுள்ளது.

(i) $0 \le F(x) \le 1, -\infty < x < \infty$

(ii) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ மற்றும்

$F(+\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1.$

(iii) $F(\cdot)$ என்பது ஓரியல்புத் தன்மைக் கொண்ட குறையாச் சார்பு.

அதாவது $a < b$ –க்கு $F(a) \le F(b)$

(iv) $F(\cdot)$ என்பது வலப்புறத்திலிருந்து தொடர்ச்சியானது, அதாவது $\lim\limits_{h \to 0} F(x+h) = F(x).$

(v) $F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = f(x) \ge 0$

(vi) $F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = f(x) \Rightarrow dF(x) = f(x)dx$

$dF(x)$ என்பது X–இன் நிகழ்தகவு வகையீடு என அறியப்படுகிறது.

(vii) $P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$

$$= P(X \le b) - P(X \le a)$$

$$= F(b) - F(a)$$

எடுத்துக்காட்டு 6.10

ஒரு வானொலிக் குழாயின் ஆயுட்காலமானது (மணி நேரங்களில்) பின்வரும் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை கொண்டிருக்கிறது

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{100}{x^2}, & x \ge 100 \\ 0, & x < 100 \end{cases}$$

எனில், அதன் பரவல் சார்பை காண்க.

தீர்வு:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$= \int_{100}^{x} \frac{100}{t^2} dt, x \ge 100$$

$$= \left[\frac{100}{-t}\right]_{100}^{x}, x \ge 100$$

$$F(x) = \left[1 - \frac{100}{x}\right], x \geq 100$$

எடுத்துக்காட்டு 6.11

ஒரு குறிப்பிட்ட அடுமனையில் ஒரு நாளில் விற்று முடிந்த ரொட்டி X–இன் அளவுகள் (நூறு பவுண்டுகளில்) ஒரு எண் சார்ந்த சமவாய்ப்பு நிகழ்வாகக் கண்டறியப்பட்டது. அதன் நிகழ்தக வானது, $f(x)$ என்ற நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பின் மூலம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில்,

$$f(x) = \begin{cases} Ax, & 0 \leq x < 10 \\ A(20 - x), & 10 \leq x < 20 \\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$

(a) A -இன் மதிப்பை காண்க.

(b) மறுநாளைக்கு விற்கப்படவிருக்கும் ரொட்டிகளின் எண்ணிக்கைக்கான பவுண்டுகளின் நிகழ்தகவு என்ன ?

(i) 10 பவுண்டுகளுக்கு அதிகமாக.

(ii) 10 பவுண்டுகளுக்குக்குறைவாக.

(iii) 5 மற்றும் 15 பவுண்டுகளுக்கு இடையில்.

தீர்வு:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ என்பது நமக்குத் தெரியும்.

$$\int_0^{10} Axdx + \int_{10}^{20} A(20 - x)dx = 1$$

$$A\left\{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{10} + \left[20x - \frac{x^2}{2}\right]_{10}^{20}\right\} = 1$$

$$A\left[(50 - 0) + (400 - 200) - (200 - 50)\right] = 1$$

$$A = \frac{1}{100}$$

(b) (i) மறுநாளைக்கு விற்கப்படவிருக்கும் ரொட்டிகளின் எண்ணிக்கை 10 பவுண்டுகளுக்கு அதிகமாக இருப்பதற் கான நிகழ்தகவு:

$$P(10 \leq X \leq 20) = \int_{10}^{20} \frac{1}{100}(20 - x)dx$$

$$= \frac{1}{100}\left[20x - \frac{x^2}{2}\right]_{10}^{20}$$

$$= \frac{1}{100}\left[(400 - 200) - (200 - 50)\right]$$

$$= 0.5$$

(ii) மறுநாளைக்கு விற்கப்படவிருக்கும் ரொட்டி களின் எண்ணிக்கை 10 பவுண்டுகளுக்கு குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு:

$$P(0 \leq X < 10) = \int_0^{10} \frac{1}{100} xdx$$

$$= \frac{1}{100}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{10}$$

$$= \frac{1}{100}(50 - 0)$$

$$= 0.5$$

(iii) மறுநாளைக்கு விற்கப்படவிருக்கும் ரொட்டி களின் எண்ணிக்கை 5 மற்றும் 15 பவுண்டு களுக்கு இடையில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு:

$$P(5 \leq X \leq 15) = \int_5^{10} \frac{1}{100} xdx + \int_{10}^{15} \frac{1}{100}(20 - x)dx$$

$$= \frac{1}{100}\left[\frac{x^2}{2}\right]_5^{10} + \frac{1}{100}\left[20x - \frac{x^2}{2}\right]_{10}^{15}$$

$$= 0.75$$

பயிற்சி 6.1

1. கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிகழ்தகவுப் பரவலுக்கான திரள் பரவல் சார்பை அமைக்கவும்.

X	0	1	2	3
$P(X = x)$	0.3	0.2	0.4	0.1

2. X என்ற தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு ஆனது

$$p(x) = \begin{cases} 0.3 & , x = 3 \\ 0.2 & , x = 5 \\ 0.3 & , x = 8 \\ 0.2 & , x = 10 \\ 0 & , \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$

எனில், X -இன் திரள் பரவல் சார்பைக் கண்டுபிடிக்கவும். மேலும் வரைபடம் வரையவும்.

3. தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி X ஆனது பின்வரும் நிகழ்தகவு சார்பை பெற்றுள்ளது

$$P(X=x)=\begin{cases} kx & , \quad x=2,4,6 \\ k(x-2) & , \quad x=8 \\ 0 & , \quad \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$

இங்கு ஒரு k மாறிலி எனில், $k=\frac{1}{18}$ என நிறுவுக.

4. தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி X ஆனது பின்வரும் நிகழ்தகவுச் சார்பைப் பெற்றுள்ளது எனில், $k=0.1$ என காண்பிக்கவும்.

X	1	2	3	4
$P(X=x)$	k	$2k$	$3k$	$4k$

5. இரண்டு நாணயங்கள் ஒரே சமயத்தில் சுண்டப்படுகிறது. தலை பெறுவது வெற்றி யாகக் கருதப்படுகிறது எனில், வெற்றிகளின் எண்ணிக்கைக்கான நிகழ்தகவுப் பரவலை கண்டுபிடிக்கவும்.

6. ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X ஆனது பின்வரும் நிகழ்தகவுச் சார்பைப் பெற்றுள்ளது எனில்,

Value of $X=x$	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(x)$	0	k	$2k$	$2k$	$3k$	k^2	$2k^2$	$7k^2+k$

(i) k ன் மதிப்பைக் காண்க.

(ii) $p(x<6)$, $p(x\geq 6)$ மற்றும் $p(0<x<5)$ ஐக் காண்க.

(iii) $P(X\leq x)>\frac{1}{2}$க்கான x இன் குறைந்தபட்ச மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

7. ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X ஆனது வீச்சு$[-3, 3]$ உடைய நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{16}(3+x)^2, & -3\leq x\leq -1 \\ \frac{1}{16}(6-2x^2), & -1\leq x\leq 1 \\ \frac{1}{16}(3-x)^2, & 1\leq x\leq 3 \end{cases}$$ எனில்,

வளைவரையின் பரப்பு ஒன்று என்பதை சரிபார்க்கவும்.

8. ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி Xஆனது பின்வரும் பரவல் சார்பை பெற்றுள்ளது

$$F(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x\leq 1 \\ k(x-1)^4 & , \quad 1<x\leq 3 \\ 1 & , \quad x>3 \end{cases}$$

எனில், (i) k மற்றும் (ii) நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பைக் காண்க.

9. ஒரு குறிப்பிட்ட நபர் தொலைபேசியில் பேசும் நேரம் (நிமிடங்களில்) சமவாய்ப்பு நிகழ்வாகக் கண்டறியப்பட்டது, அதன் நிகழ்தகவுச் சார்பு, நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஆல் குறிப்பிடப்படுகிறது. மேலும்,

$$f(x)=\begin{cases} Ae^{-x/5}, & x\geq 0 \\ 0 & , \quad \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$

எனில், (a) $f(x)$ ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை உருவாக்கும் எனில் A- இன் மதிப்பைக் காண்க.

(b) ஒரு நபர் தொலைபேசியில் (i) 10 நிமிடங்களுக்கு மேல் (ii) 5 நிமிடங்களுக்குக் குறைவாக (iii) 5 மற்றும் 10 நிமிடங்களுக்கு இடையில்பேசும்நிமிடங்களில்எண்ணிக்கைகளின் நிகழ்தகவு என்ன ?

10. ஒரு நபர் ஒரு குறிப்பிட்ட தொடர்வண்டி நிலையத்தில் காத்திருக்க வேண்டிய நேரம் நிமிடங்களில் கண்டறியப்பட்டு அதை ஒரு சமவாய்ப்பு நிகழ்வாக வைத்துக் கொள்வோம். அதன் நிகழ்தகவுச் சார்பின் பரவல் சார்பால் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\leq 0 \\ \frac{x}{2}, & 0\leq x<1 \\ \frac{1}{2}, & 1\leq x<2 \\ \frac{x}{4}, & 2\leq x<4 \\ 1, & x\geq 4 \end{cases}$$ எனில்,

(a) பரவல் சார்பு தொடர்ச்சியாக இருக்குமா? அப்படியானால், அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை எழுதுக.

(b) ஒரு நபர் (i) 3 நிமிடங்களுக்கு மேல் (ii) 3 நிமிடங்களுக்குக் குறைவாக (iii) 1 மற்றும் 3 நிமிடங்களுக்கு இடையில் காத்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

11. சமவாய்ப்பு மாறி வரையறுக்கவும்.

12. சமவாய்ப்பு மாறியின் வகைகள் யாவை? அவற்றை விளக்கவும்.

13. தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியை வரையறுக்கவும்.

14. தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி பற்றி நீங்கள் என்ன புரிந்து கொள்கிறீர்கள்?

15. சமவாய்ப்பு மாறியின் பொருள் என்ன என்பதனை விவரிக்கவும்.

16. தனித்த மற்றும் தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறிகளை வேறுபடுத்தவும்.

17. சமவாய்ப்பு மாறியின் பரவல் சார்பை விளக்கவும்.

18. சொற்றொடர்கள், (i) நிகழ்தகவு நிறை சார்பு (ii) நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு மற்றும் (iii) நிகழ்தகவு பரவல் சார்பு ஆகியவற்றை விளக்கவும்.

19. (i) தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி மற்றும் (ii) தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி ஆகியவற்றின் பண்புகள் யாவை?

20. பரவல் சார்பின் பண்புகளைக் கூறவும்.

6.2 கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல் (Mathematical Expectation)

அறிமுகம்

சமவாய்ப்பு மாறிகள் அல்லது பரவல்கள் சம்பந்தப்பட்ட கணக்குகளில் மிகவும் பயனுள்ள கருத்தை எதிர்பார்த்தல் கொண்டுள்ளது. அளவீடுகளைக் கருத்தில் கொண்டு நடைமுறை நோக்கங்களுக்காகச் சமவாய்ப்பு மாறிப்பண்புகள் உருவாக்கப்பட்டு திறம்பட கையாளுவதையே அவற்றின் எதிர்பார்த்தல் என்றழைக்கப்படுகிறது. விளையாட்டுகள் தொடர்பான வெற்றி வாய்ப்புகளில் கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலின் கருத்து எழுந்தது. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு விளையாட்டு வீரர், ஒரு போட்டியில் அவரின் சராசரி வெற்றியைக் காண, ஒரு தொழிலதிபர் ஒரு உற்பத்தியில் அவரின் சராசரி இலாபம் காண ஆர்வமாக இருக்கலாம். ஒரு சமவாய்ப்பு நிகழ்வின் சராசரி மதிப்பானது அதன் **கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல்** அல்லது எதிர்பார்க்கும் மதிப்பாக குறிப்பிடப்படுகிறது. பின்வரும் பிரிவுகளில், தனித்த மற்றும் தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறிகளுக்கான கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலின் கருத்தை நாம் வரையறுத்துப் படிப்போம்.

6.2.1 எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு மற்றும் மாறுபாட்டு அளவை (Expected value and Variance)

எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு

எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு என்பது ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி மதிப்பின் எடையிட்ட சராசரி என கருதப்படுகிறது. இங்கு நிகழ்தகவுகள் எடைகளாக இருக்கின்றன.

வரையறை 6.8

ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு $p(x)$ எனில், அதன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு

$$E(X)=\sum_{x} x\,p(x) \qquad \ldots (1)$$

ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ எனில், அதன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx \quad \ldots (2) \text{ என}$$

வரையறுக்கப்படுகிறது.

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

- $E(X)$ என்பது அலகு நிறை புவி ஈர்ப்பு விசையின் மையம் அல்லது நடுமம் (centroid) ஆகும். இது X–இன் அடர்த்தி சார்பின் மூலம் தீர்மானிக்கப்படுகிறது. எனவே X -இன் சராசரி என்பது சமவாய்ப்பு மாறி Xக்கான மதிப்புகளின் "மையப்படுத்தப்பட்ட" அளவாகும்.
- X –இன் சராசரி φ_x அல்லது $E(X)$ ஆல் குறிக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு

- (1) இல், $E(X)$ என்பது குறிப்பிடப்பட்ட தொடர் முழுவதிலும் குவிதலியல்புடைய (absolutely convergent) தொடராக இருக்க வேண்டும் என்ற நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு வரையறுக்கப்படுகிறது. இல்லையெனில், சராசரி காணத்தக்கது அல்ல என்று கூறுகிறோம்.
- (1) இல், $E(X)$ என்பது சமவாய்ப்பு மாறி பெறும் மதிப்புகளின் "சராசரி" ஆகும். ஒவ்வொரு சமவாய்ப்பு மாறி மதிப்பும், அம்மதிப்பின் நிகழ்தகவு மூலம் நிறையிடப்படுகிறது. சாத்தியமான நிகழ்தகவு மதிப்புகள் அதிக நிறையைப் பெறும்.
- (2) இல், குறிப்பிடப்பட்ட தொகுப்பு தொகையிடத்தக்கது எனில், $E(X)$ என்பது அமைவுறு தொகுப்பாக வரையறுக்கப்படுகிறது இல்லையெனில், சராசரி காணத்தக்கது அல்ல என்று கூறுகிறோம்.
- (2) இல், $E(X)$ என்பது சமவாய்ப்புமாறி பெறும் மதிப்புகளின் "சராசரி" ஆகும். ஒவ்வொரு x மதிப்பும் X –இன் தோராய நிகழ்தகவு $f_X(x)$ மூலம் பெருக்கப்படுகிறது, பின்னர் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் தொகுப்பாக்கப்படுகிறது.

மாறுபாட்டு அளவை (Variance)

மாறுபாட்டு அளவை என்பது ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியிலிருந்து அதன் சராசரியின் வர்க்க விலக்கங்களின் எடையிட்ட சராசரி ஆகும். இங்கு நிகழ்தகவுகள் எடைகளாக இருக்கும். ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X-இன் சராசரி (1) மற்றும் (2) -இல் வரையறுக்கப்பட்ட X-இன் அடர்த்தி மையநிலை அளவு ஆகும். ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X-இன் மாறுபாடானது X-இன் அடர்த்தியின் சிதறல் அல்லது பரவல் அளவையாக இருக்கும் அல்லது சுருக்கமாக, ஒரு சீரற்ற மாறி மதிப்புகளின் மாறுபாடு ஆகும்.

வரையறை 6.9

X–இன் மாறுபாட்டு அளவை பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி X–இன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு $p(x)$ எனில்,

$$Var(X)=\sum\left[x-E(X)\right]^2 p(x) \quad \dots (3)$$

தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X–இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f_X(x)$ எனில்,

$$Var(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[x-E(X)\right]^2 f_X(x)\,dx \quad \dots (4)$$

ஆகும்.

வரையறை 6.10

$[X-E(X)]^2$ இன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பானது சமவாய்ப்பு மாறியின் மாறுபாட்டு அளவை என்று அழைக்கப்படுகிறது.

அதாவது,

$$Var(X)=E\left[X-E(X)\right]^2=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2 \quad \dots (5)$$

இங்கு $E\left(X^2\right)=\begin{cases}\sum_x x^2\,p(x) & , X \text{ ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி எனில்}\\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx & , X \text{ ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி எனில்}\end{cases}$

குறிப்பு

- பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளில், மாறுபாட்டு அளவையானது வரையறை 6.10–ஐ பயன்படுத்திக் கண்டறியப்பட்டிக்கும்.
- (3)–இல் தொடரானது குவிதலியல்புடையதாகவும் அல்லது (4)–இல் தொகுப்புடையனவாகவும் இருந்தால் மட்டுமே மாறுபாடுகள் வரையறுக்கப்படுகின்றன.
- X ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி எனில், X –இன் திட்டவிலக்கம் σ_X என்று குறியிடப்பட்டு $+\sqrt{Var[X]}$ என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.
- X இன் மாறுபாடு, $\sigma_X{}^2$ அல்லது $Var(X)$ அல்லது $V(X)$ என்றும் குறிக்கப்படுகிறது.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

சராசரி என்பது ஒரு அடர்த்தி புவிஈர்ப்பு விசையின் மையம் ஆகும். இதேபோல், மாறுபாட்டு அளவையானது புவிஈர்ப்பு விசை மையத்தின் செங்குத்து அச்சைப் பொறுத்து அதே அடர்த்தி கொண்ட திருப்புத்திறனை பிரதிபலிக்கிறது.

6.2.2 கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலின் பண்புகள் (Properties of Mathematical expectation)

(i) $E(a)=a$, 'a'என்பது ஒரு மாறிலி.

(ii) $E(aX)=aE(X)$

(iii) $E(aX+b)=aE(X)+b$, 'a' மற்றும் 'b' ஆகியவை மாறிலிகள்.

(iv) $X\geq 0$ எனில், $E(X)\geq 0$ ஆகும்.

(v) $V(a)=0$, a ஒரு மாறிலி.

(vi) X என்பது ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி எனில்,

$$V(aX+b)=a^2V(X)$$

விலக்கப் பெருக்குத்தொகையின் கருத்தாக்கம் (Concept of moments)

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியின் அல்லது ஒரு பரவலின் விலக்கப்பெருக்குத்தொகை (அல்லது சீர்படா விலக்கப்பெருக்குத்தொகை) என்பது கொடுக்கப்பட்ட பரவலுக்குரிய சமவாய்ப்பு மாறியின் அடுக்குகளின் எதிர்பார்த்தலாகும்.

வரையறை 6.11

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X–ஆக இருந்தால் X –இன் r–வது விலக்கப்பெருக்குத்தொகை, பொதுவாக $\tilde{\varphi}_r$ மூலம் குறிக்கப்பட்டு பின்வருமாறு வரையறுக்கப் படுகிறது.

$$\tilde{\varphi}_r = E\left(X^r\right)=\begin{cases}\sum\limits_x x^r p(x) & , \quad X \text{ ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி எனில்} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx, & X \text{ ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி எனில்}\end{cases}$$

இங்கு எதிர்பார்த்தல் காணத்தக்கதாக இருத்தல் வேண்டும்.

வரையறை 6.12

X ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி எனில் a–ஐ பொருத்த X–இன் r–வது சீர்படா விலக்கபெருக்குத்தொகை $E\left[(X-a)^r\right]$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. $a=\varphi_X$ எனில், φ_x –ஐ பொருத்த X–இன் r–வது மைய விலக்கபெருக்குத்தொகையை φ_r மூலம் குறிக்கப் பட்டு, பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$\varphi_r = E[(X-\varphi_X)^r]$$

குறிப்பு

- $\varphi_1' = E(X) = \varphi_X$, X –இன் சராசரி.
- $\varphi_1 = E[X-\varphi_X] = 0.$
- $\varphi_2 = E[(X-\varphi_X)^2]$, X –இன் மாறுபாடு
- X இன் விலக்கபெருக்குத்தொகை காணத் தக்கது மற்றும் அதன் அடர்த்தி சார்பு φ_X ஐ பொருத்து சமச்சீராக இருந்தால், φ_X–ஐ பொருத்த X–இன் அனைத்து ஒற்றை விலக்கபெருக்குத்தொகைகளும் பூஜ்ஜியமாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.12

பின்வரும் நிகழ்தகவுப் பரவலைக் கொண்ட சமவாய்ப்பு மாறியின் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

$X=x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(x)$	0.15	0.10	0.10	0.01	0.08	0.01	0.05	0.02	0.28	0.20

தீர்வு:

சமவாய்ப்பு மாறி X–இன் சராசரி :

$$E(X)=\sum_x x\,P_X(x)$$

$$= (1 \times 0.15) + (2 \times 0.10) + (3 \times 0.10) + (4 \times 0.01) + (5 \times 0.08) + (6 \times 0.01) + (7 \times 0.05) + (8 \times 0.02) + (9 \times 0.28) + (10 \times 0.20)$$

$$E(X)=6.18$$

$$E\left(X^2\right)=\sum_x x^2\,P_X(x)$$

$$= (1^2 \times 0.15) + (2^2 \times 0.10) + (3^2 \times 0.10) + (4^2 \times 0.01) + (5^2 \times 0.08) + (6^2 \times 0.01) + (7^2 \times 0.05) + (8^2 \times 0.02) + (9^2 \times 0.28) + (10^2 \times 0.20)$$

$$E(X^2) = 50.38$$

சமவாய்ப்பு மாறியின் மாறுபாட்டளவு :

$$V(X) = E\left(X^2\right) - \left[E(X)\right]^2 = 50.38 - (6.18)^2$$
$$= 12.19$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட தனித்த பரவலின் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டு அளவை முறையே 6.18 மற்றும் 12.19 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.13

ஆறு ஆண்கள் மற்றும் ஐந்து பெண்கள், ஒரு சிறிய நிறுவனத்தில் ஒரு நிர்வாக நிலைக்கு விண்ணப்பிக்கின்றனர். இரண்டு விண்ணப்ப தாரர்கள் நேர்காணலுக்குத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டனர். நேர்க்காணல் குழுவில் உள்ள பெண்களின் எண்ணிக்கை X எனக் குறிக்கப்பட்டு. X இன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு பின்வருமாறு கண்டறியப் பட்டுள்ளது.

$X = x$	0	1	2
$P(x)$	$\frac{2}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{4}{11}$

நேர்காணல் குழுவில் எத்தனை பெண்களை நீங்கள் எதிர்பார்க்கிறீர்கள்?

தீர்வு:

நேர்காணல் குழுவில் உள்ள பெண்களின் எதிர்பார்ப்பு எண்ணிக்கை :

$$E(X) = \sum_x x\,P_X(x)$$

$$= \left[\left(0\times\frac{2}{11}\right) + \left(1\times\frac{5}{11}\right) + \left(2\times\frac{4}{11}\right)\right]$$

$$= \frac{13}{11}$$ (தோராயமாக ஒரு பெண்)

எடுத்துக்காட்டு 6.14

ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியின் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டு அளவையைக் கண்டுபிடிக்கவும். இதன் பரவல் சார்பானது பின்வருமாறு பெறப் பட்டுள்ளது.

$X = x$	1	2	3	4	5	6
$F_x(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	1

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட விவரத்திலிருந்து, நீங்கள் முதலில் சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு பரவலைக் கணக்கிடவும். அதைப் பயன்படுத்தி சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டளவையைக் கணக்கிடவேண்டும்.

X	$p(x)$
1	$F(1) = \frac{1}{6}$
2	$F(2) - F(1) = \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$
3	$F(3) - F(2) = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$
4	$F(4) - F(3) = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$
5	$F(5) - F(4) = \frac{5}{6} - \frac{4}{6} = \frac{1}{6}$
6	$F(6) - F(5) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$

நிகழ்தகவு நிறை சார்பு :

$X = x$	1	2	3	4	5	6
$P(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

சமவாய்ப்பு மாறி X–இன் சராசரி:

$$= E(X) = \sum_x x\,P_X(x)$$

$$= \left(1\times\frac{1}{6}\right) + \left(2\times\frac{1}{6}\right) + \left(3\times\frac{1}{6}\right) + \left(4\times\frac{1}{6}\right) + \left(5\times\frac{1}{6}\right) + \left(6\times\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(1+2+3+4+5+6\right)$$

$$= \frac{7}{2}$$

$$E\left(X^2\right) = \sum_x x^2\,P_X(x)$$

$$= \left(1^2\times\frac{1}{6}\right) + \left(2^2\times\frac{1}{6}\right) + \left(3^2\times\frac{1}{6}\right) + \left(4^2\times\frac{1}{6}\right) + \left(5^2\times\frac{1}{6}\right) + \left(6^2\times\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2\right)$$

$$= \frac{91}{6}$$

சமவாய்ப்பு மாறியின் மாறுபாட்டளவு :

$$V(X) = E\left(X^2\right) - \left[E(X)\right]^2$$

$$= \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$= \frac{35}{12}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.15

பின்வரும் தகவல் வெற்றிகளின் நிகழ்தகவு பரவலைக் குறிக்கிறது எனில், வெற்றியின் எதிர்பார்த்தல் எண்ணிக்கையைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை $X=x$	0	1	2
நிகழ்தகவு $p(x)$	$\frac{6}{11}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{22}$

தீர்வு:

வெற்றியின் எதிர்பார்த்தல் எண்ணிக்கை :

$$E(X) = \sum_x x\, P_X(x)$$

$$= \left(0 \times \frac{6}{11}\right) + \left(1 \times \frac{9}{22}\right) + \left(2 \times \frac{1}{22}\right)$$

$$= \frac{11}{22} = 0.5$$

எனவே, வெற்றியின் எதிர்பார்த்தல் எண்ணிக்கை 0.5 ஆகும். (தோராயமாக ஒரு வெற்றி)

எடுத்துக்காட்டு 6.16

ஒரு குடுவையில் சிவப்பு, கருப்பு, பச்சை, மற்றும் நீலம் ஆகிய நான்கு நிற பந்துகள் உள்ளன. எந்த நிற பந்தையும் பெற சமமான நிகழ்தகவு வழங்கப் பட்டுள்ளது. முப்பது சோதனைகளில் பந்துகள் திரும்பி வைக்கும் முறையில், நீலநிற பந்து பெறுவதற் கான எதிர்பார்க்கத்தக்க மதிப்பு என்ன?

தீர்வு:

நீலபந்து பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு : $p = \frac{1}{4} = 0.25$

மொத்த சோதனைகள் : $\mathrm{N} = 30$

சோதனைகளின் மதிப்பு = சோதனைகளின் எண்ணிக்கை X நிகழ்தகவு

$$= N \times p$$

$$= 30 \times 0.25$$

$$= 7.50$$

எனவே, நீலப்பந்தைப் பெறுவதற்கான எதிர் பார்க்கத்தக்க மதிப்பு தோரயமாக 8 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.17

ஒரு நடுநிலையான பகடை உருட்டப்படுகிறது எனில், அதன் விளைவுகளில் எதிர்பார்க்கப்பட்ட மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு:

உருட்டப்பட்ட ஒரு நடுநிலையான ஆறு முகங்கள் உள்ள பகடையின் (மேல்பக்கம்) சமவாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு

$$P_X(x) = \frac{1}{6}, \quad x = 1,2,3,4,5 \text{ மற்றும் } 6 \text{ எனில்}$$

உருட்டப்பட்டதின் சராசரி, அதாவது X -இன் எதிர்பார்த்தல் :

$$E(X) = \sum_x x\, P_X(x)$$

$$\mathrm{E(X)} = \left(1 \times \frac{1}{6}\right) + \left(2 \times \frac{1}{6}\right) + \left(3 \times \frac{1}{6}\right) + \left(4 \times \frac{1}{6}\right) + \left(5 \times \frac{1}{6}\right) + \left(6 \times \frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)$$

$$= \frac{7}{2}$$

$$= 3.5$$

எனவே ஒரு நடுநிலையான ஆறு பக்கமுள்ள பகடையின் எதிர்பார்த்தல் 3.5 ஆகும்

எடுத்துக்காட்டு 6.18

தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு நிறை சார்பானது,

$X = x$	0	1	2	3
$p(x)$	0.2	0.1	0.4	0.3

எனில், $E(3X + 2X^2)$ இன் மதிப்பைக் காண்க?

தீர்வு:

$$E(X) = \sum_x x\, P_X(x)$$

$$= (0 \times 0.2) + (1 \times 0.1) + (2 \times 0.4) + (3 \times 0.3)$$

$$= 1.8$$

$$E\left(X^2\right) = \sum_x x^2\, P_X(x)$$

$= (0^2 \times 0.2) + (1^2 \times 0.1) + (2^2 \times 0.4) + (3^2 \times 0.3)$

$= 4.4$

$E(3X + 2X^2) = 3E(X) + 2E(X^2)$

$= (3 \times 1.8) + (2 \times 4.4)$

$= 14.2$

எடுத்துக்காட்டு 6.19

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X–க்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பானது

$$f(x)=\begin{cases} 4x^3, & 0<x<1 \\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$

எனில், $E(X)$ மற்றும் $V(X)$ கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு:

$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$ என்பது நமக்குத் தெரியும்.

$$=\int_0^1 x\,4x^3\,dx$$

$$=4\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$E(X)=\frac{4}{5}$$

$$E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$$

$$=\int_0^1 x^2\,4x^3\,dx$$

$$=4\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1$$

$$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$V(X)=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2$$

$$=\frac{2}{3}-\left[\frac{4}{5}\right]^2$$

$$=\frac{2}{75}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.20

$f\,(x)$ மூலம் வரையறுக்கப்படும் சார்பு $f(x)=ke^{-2x}, 0\le x<\infty$ ஆனது ஒரு அடர்த்திச் சார்பு எனில், மாறிலி k மற்றும் சராசரி ஆகியவற்றைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

தீர்வு:

$f(x)$ என்பது ஒரு அடர்த்திச் சார்பு எனில்,

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$ என்பது நமக்குத் தெரியும்.

$$\int_0^{\infty} k\,e^{-2x}\,dx=1$$

$$k\int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx=1$$

$$k\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^{\infty}=1$$

$$\Rightarrow k=2$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$$

$$=\int_0^{\infty} xk\,e^{-2x}\,dx$$

$$=2\int_0^{\infty} xe^{-2x}\,dx$$

$$=2\left\{\left[\frac{xe^{-2x}}{-2}\right]_0^{\infty}-\int_0^{\infty}\frac{e^{-2x}}{-2}\,dx\right\}$$

$$\left(\because \int u\,dv=uv-\int v\,du\right)$$

$$=\int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.21

தயாரிக்கப்பட்ட DVD இயக்கியில் பயன்படுத்தப் படும் மின்னணு உபகரணங்களின் முக்கிய பகுதியின் செயலிழப்பிற்கான நேரம் (ஆயிரத்தில்) அடர்த்திச் சார்பாக கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$f(x)=\begin{cases} 3e^{-3x}, & x>0 \\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$

இந்த உபகரண பகுதியின் எதிர்பார்க்கத்தக்க செயல் வாழ்வை கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு:

$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$ என்பது நமக்குத் தெரியும்.

$$=\int_0^{\infty} x\,3e^{-3x}dx$$

$$=3\int_0^{\infty} x\,e^{-3x}dx$$

$$=3\left\{\left[x\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^{\infty}-\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-3x}}{-3}\right)dx\right\}$$

$$\left(\because \int u\,dv=uv-\int v\,du\right)$$

$$=\int_0^{\infty} e^{-3x}dx$$

$$=\frac{1}{3}$$

எனவே, உபகரணபகுதியின் எதிர்பார்க்கத் தக்க செயல் வாழ்வு $\frac{1}{3}$ மணி நேரம் (ஆயிரத்தில்) ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.22

ஒரு பயணிகள் இரயில் ஒவ்வொரு 25 நிமிடங்களுக்கும், ஒரு இரயில் நிலையத்திற்கு வந்து செல்கிறது. ஒரு பயணி ஒவ்வொரு காலையும் அவரது வீட்டைவிட்டு வெளியேறி சாதாரணமாக நடந்து இரயில் நிலையத்திற்கு செல்கிறார். அவர் இரயில் நிலையத்தை அடைந்த நேரத்திலிருந்து இரயிலுக்குக் காத்திருக்கும் நேரஅளவு (நிமிடங்களில்) X எனக் குறிக்கப்பட்டு அது X-இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாக அறியப்படுகிறது.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{25}, & 0<x<25\\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்}\end{cases}$$

எனில்,

சமவாய்ப்பு மாறி X –இன் எதிர்பார்க்கத்தக்க மதிப்பை பெறவும் மற்றும் விளக்கவும்.

தீர்வு:

சமவாய்ப்பு மாறியின் எதிர்பார்க்கத்தக்க மதிப்பு:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$$

$$=\int_0^{25} x\frac{1}{25}dx$$

$$=\frac{1}{25}\int_0^{25} x\,dx \qquad =\frac{1}{25}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{25}$$

$$=12.5$$

எனவே, பயணி எதிர்ப்பார்க்கத்தக்க காத்திருப்பு நேரம் 12.5 நிமிடங்கள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.23

ஒரு வானொலி குழலின் (Valve) வாழ்நாள் (மணி நேரங்களில்) பின்வரும் நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பைக் கொண்டிருப்பதாக வைத்துக்கொள்ளுங்கள்.

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{x}{100}}, & x\geq 100\\ 0, & x<100\end{cases}$$ எனில்,

வானொலி குழலின் வாழ்நாளின் சராசரியை கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு:

சமவாய்ப்பு மாறியின் எதிர்பார்த்தல் :

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$$

$$=\int_{100}^{\infty} x\,e^{-\frac{x}{100}}dx$$

$$=\left\{\left[x\left(\frac{e^{-\frac{x}{100}}}{-\frac{1}{100}}\right)\right]_{100}^{\infty}-\int_{100}^{\infty}\left(\frac{e^{-\frac{x}{100}}}{-\frac{1}{100}}\right)dx\right\}$$

$$\left(\because \int u\,dv=uv-\int v\,du\right)$$

$$=\left[(10000)\left(e^{-1}\right)+(10000)\left(e^{-1}\right)\right]$$

$$=\left[(10000)(0.3679)+(10000)(0.3679)\right]$$

$$= 7358 \text{ மணிகள்}$$

எனவே, வானொலி குழலின் சராசரி வாழ்நாள் 7,358 மணிகள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.24

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X –இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$f(x)=ke^{-|x|}, -\infty < x < \infty$ எனில், k–இன் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கவும் மற்றும் சமவாய்ப்பு மாறியின் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டு அளவையைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ என்பது நமக்குத் தெரியும்

$$\int_{-\infty}^{\infty} k e^{-|x|} dx = 1$$

$$k\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx = 1$$

$$2k\int_{0}^{\infty} e^{-x} dx = 1 \quad (\because \; e^{-|x|} \text{ ஒரு இரட்டை சார்பு})$$

$$2k\left[\frac{e^{-x}}{-1}\right]_0^{\infty} = 1$$

$$\therefore \quad k = \frac{1}{2}$$

சமவாய்ப்பு மாறியின் சராசரி :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,k\,e^{-|x|} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-|x|} dx$$

$(\because \; xe^{-|x|}$ ஒரு ஒற்றைச் சார்பு)

$$= 0$$

$$E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 k\, e^{-|x|} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x|} dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x} dx$$

$(\because \; x^2 e^{-|x|}$ ஒரு இரட்டைச் சார்பு)

$$= \Gamma(3) \qquad \left(\because \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha > 0; \Gamma(n) = (n-1)!\right)$$

$$= 2$$

$$V(X) = E\left(X^2\right) - \left[E(X)\right]^2$$

$$= 2 - [0]^2$$

$$= 2$$

பயிற்சி 6.2

1. ஒரு நடுநிலையான பகடையினசமவாய்ப்பு மாறிகளுக்கான எதிர்பார்த்தல் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கவும்.
2. மாணவர்கள் A தரநிலையை பெறுவதற்கான எண்ணிக்கையை வரையறுக்கும் சமவாய்ப்பு மாறியாக X இருக்கட்டும். கொடுக்கப்பட்ட அட்டவணை யிலிருந்து X–இன் எதிர்பார்த்தல் மதிப்பைக் கண்டறியவும்.

$X = x$	0	1	2	3
$P(X = x)$	0.2	0.1	0.4	0.3

3. பின்வரும் அட்டவணை சமவாய்ப்பு மாறி X–இன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பை பற்றி விவரிக்கிறது எனில்,

x	3	4	5
$P(x)$	0.2	0.3	0.5

x–இன் திட்ட விலக்கத்தைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

4. X என்பது ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி என்க. அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பானது

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$

எனில், X–இன் எதிர்பார்த்தல் மதிப்பை கண்டு பிடிக்கவும்.

5. X என்பது ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி என்க. அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பானது

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x^4}, & x \ge 1 \\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$

எனில், X –இன் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டை கண்டுபிடிக்கவும்.

6. ஒருவர், ஒரு முதலீட்டில் ₹ 5,000 இலாபம் ஈட்டுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.62 அல்லது ₹ 8,000 இழப்பு வருவதற்கான நிகழ்தகவு 0.38 எனில், இதில் எதிர்பார்க்கப்பட்ட ஆதாயத்தைக் கண்டறியவும்.

7. கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலின் பண்புகள் யாவை?

8. கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலில் மூலம் நீங்கள் என்ன புரிந்து கொண்டீர்கள்?

9. கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலில் அடிப்படையில் மாறுபாட்டு அளவையை நீங்கள் எவ்வாறு வரையறுக்க வேண்டும்?

10. தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியின் கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலை வரையறுக்கவும்.

11. தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியைப் பயன்படுத்தி கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலின் வரையறையைக் கூறவும்.

12. ஒரு வியாபார முயற்சியில் ஒருவர் ₹ 2,000 இலாபம் ஈட்டுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.4 அல்லது ₹ 1,000 இழப்பை பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.6 எனில், அவரது எதிர்பார்த்தல், மாறுபாடு மற்றும் திட்டவிலக்கம் இலாபம் என்ன?

13. ஒரு மோட்டார் வண்டிச்சக்கர டயரின் (Motor cycle tyre) இறுதி அடிப்பகுதி தேய்மானத்தை எதிர்த்து தாங்கும் திறனானது ஒரு நெருக்கடியான தருவாயை அடையும்வரை கடந்த மைல்களின் எண்ணிக்கை ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பின் மூலம் குறிக்கப்படுகிறது

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{30}e^{-\frac{x}{30}}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$$

எனில், வண்டிச்சக்கர டயரின் இறுதி அடிப்பகுதி தேய்மானத்தை எதிர்த்து தாங்குத் திறனானது ஒரு நெருக்கடியான தருவாயை அடையும் வரைக்கான எதிர்பார்க்கத்தக்க மைல்கள் (ஆயிரத்தில்) எண்ணிக்கையைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

14. ஒரு நபர் ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டுகிறார், தலை எனில், ₹ 4-ஐப் பெறுகிறார் மற்றும் பூ எனில், ₹ 2-ஐ செலுத்துகிறார். அவரது இலாபத்தின் எதிர்பார்ப்பு மற்றும் மாறுபாட்டு அளவையைக் கண்டறியவும்.

15. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X ஆக இருக்கட்டும் மற்றும் $Y=2X+1$. சமவாய்ப்பு மாறி X-இன் மாறுபாட்டளவு 5 என்றால் Y-இன் மாறுபாட்டளவு என்ன?

பயிற்சி 6.3

ஏற்புடைய விடையைத் தெரிவு செய்க:

1. நிகழ்வின் நிகழ்தகவு கொண்ட சமவாய்ப்பு மாறியின் சாத்தியமுள்ள மதிப்புகளைப் பெருக்குவதன் மூலம் பெறப்பட்ட எந்த மதிப்பு எடையிட்ட சராசரிக்கு சமம் என அழைக்கப்படுகிறது.

   (a) தனித்த மதிப்பு

   (b) எடையிட்ட மதிப்பு

   (c) எதிர்பார்த்தல் மதிப்பு

   (d) திரள் மதிப்பு

2. நாள் ஒன்றுக்கு பொருள்களின் தேவையானது, மூன்று நாள்களுக்கு முறையே 21, 19, 22 அலகுகள் ஆகும். அவற்றின் நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.29, 0.40, 0.35 ஆகும். அலகு ஒன்றுக்கு இலாபம் 0.50 பைசாக்கள் எனில், மூன்று நாள்களுக்கான எதிர்பார்க்கப்பட்ட இலாபம்.

   (a) 21, 19, 22 (b) 21.5, 19.5, 22.5

   (c) 0.29, 0.40, 0.35 (d) 3.045, 3.8, 3.85

3. x-ஐ விவரிக்கும் நிகழ்தகவு குறிப்பிட்ட மதிப்பை விட சமமாகவோ அல்லது குறைவாகவோ உள்ள நிகழ்தகவு

   (a) தனித்த நிகழ்தகவு

   (b) திரள் நிகழ்தகவு

   (c) விளிம்பு நிகழ்தகவு

   (d) தொடர்ச்சியான நிகழ்தகவு

4. $E(X) = 5$ மற்றும் $E(Y) = -2$ எனில், $E(X - Y)$ –ன் மதிப்பானது

   (a) 3 (b) 5 (c) 7 (d) –2

5. இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடையில் எந்தவிதமான மதிப்பும் அனுமானிக்கலாம் எனும் மாறியானது

   (a) தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி

   (b) தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி

   (c) தனித்த கூறுவெளி

   (d) சமவாய்ப்பு மாறி

6. ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ் தகவு பரவலைப் குறிக்கும் ஒரு சூத்திரம் அல்லது சமன்பாடு
   (a) நிகழ்தகவு பரவல்
   (b) பரவல் சார்பு
   (c) நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு
   (d) கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல்

7. ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி X மற்றும் X -இன் நிகழ்தகவு $p(x)$ எனில், சமவாய்ப்பு மாறியின் எதிர்பார்த்தல் மதிப்பானது
   (a) $\sum f(x)$ (b) $\sum[x+f(x)]$
   (c) $\sum f(x)+x$ (d) $\sum xp(x)$

8. நிகழ்தகவு பரவலில் பின்வரும் எந்த ஒன்று சாத்தியமில்லை
   (a) $\sum p(x)\geq 0$ (b) $\sum p(x)=1$
   (c) $\sum x\,p(x)=2$ (d) $p(x)=-0.5$

9. c ஒரு மாறிலி எனில், $E(c)$ இன் மதிப்பு
   (a) 0 (b) 1 (c) $c\,f(c)$ (d) c

10. ஒரு தனித்த நிகழ்தகவுப் பரவல் இதன் மூலமும் குறிப்பிடப்படலாம்.
   (a) அட்டவணை
   (b) வரைபடம்
   (c) கணிதவியல் சமன்பாடு
   (d) இவை அனைத்தும்

11. ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு இதன் மூலமும் குறிப்பிடப்படலாம்.
   (a) அட்டவணை
   (b) வரைபடம்
   (c) கணிதவியல் சமன்பாடு
   (d) (b) மற்றும் (c)

12. ஒரு தொடர்ச்சியான நிகழ்தகவு பரவலில் c என்பது ஒரு மாறிலி என்றால் $P(X=c)$ எப்போதும் எதற்கு சமமாக இருக்கும்
   (a) பூஜ்ஜியம் (b) ஒன்று
   (c) எதிர்மறை (d) காணஇயலாது.

13. $E\left[X-E(X)\right]$ என்பது
   (a) $E(X)$ (b) $V(X)$
   (c) 0 (d) $E(X)-X$

14. $E\left[X-E(X)\right]^2$ என்பது
   (a) $E(X)$ (b) $E(X^2)$
   (c) $V(X)$ (d) $S.D(X)$

15. சமவாய்ப்பு மாறியானது குறை மதிப்புகளை பெறும் எனில், அந்த குறை மதிப்புகள் பெறுவது
   (a) நேர்மறை நிகழ்தகவுகள்
   (b) எதிர்மறை நிகழ்தகவுகள்
   (c) நிலையான நிகழ்தகவுகள்
   (d) சொல்வது கடினம்

16. $f(x)=2x, 0\leq x\leq 1$ எனில், $f(x)$ ஒரு
   (a) நிகழ்தகவு பரவல்
   (b) நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு
   (c) பரவல் சார்பு
   (d) தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி.

17. $f(x)$ ஆனது ஒரு அடர்த்திச் சார்பு எனில், $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ஆனது எப்போதும் இதற்கு சமமாக இருக்கும்
   (a) பூஜ்யம் (b) ஒன்று
   (c) $E(X)$ (d) $f(x)+1$

18. ஒரு சோதனையின் அனைத்து வெளிப்பாடு களின் பட்டியல் மற்றும் ஒவ்வொரு வெளிப் பாட்டிற்கும் தொடர்புடைய நிகழ்தகவானது இவ்வாறு அழைக்கப்படுகிறது.
   (a) நிகழ்தகவு பரவல்
   (b) நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு
   (c) பண்புக் கூறுகள்
   (d) பரவல் சார்பு

19. எந்த ஒன்று சமவாய்ப்பு சோதனைக்கான உதாரணம் அல்ல?
   (a) ஒரு நாணயம் சுண்டப்பட்டது மற்றும் வெளிப்பாடு ஒரு தலை அல்லது ஒரு பூ ஆகும்.

(b) ஆறு பக்கமுள்ள பகடை உருட்டப்பட்டது.

(c) ஒரு மருத்துவமனையின் அவசர அறையில் அனுமதிக்கப்பட்ட சில நபர்களின் எண்ணிக்கை.

(d) குறிப்பிட்ட வருடத்திற்கு ஒரு நிறுவனத்தால் பெறப்பட்ட அனைத்து மருத்துவகாப்பீட்டு உரிமைக் கோரிக்கைகள்.

20. கூறுவெளிக்கு ஒதுக்கப்பட்டுள்ள எண்ணியல் மதிப்புகளின் தொகுப்பு

(a) சமவாய்ப்பு கூறு

(b) சமவாய்ப்பு மாறி

(c) சமவாய்ப்பு எண்கள்

(d) சமவாய்ப்பு சோதனை

21. முடிவுறு அல்லது கணக்கிடத்தக்க முடிவுறா எண் மதிப்புகளை பெறும் ஒரு மாறி

(a) தொடர்ச்சியானது

(b) தனித்தது

(c) பண்பார்ந்தது

(d)இதில் எதுவும் இல்லை

22. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு சார்பு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது

$X=x$	-1	-2	0	1	2
$P(x)$	k	$2k$	$3k$	$4k$	$5k$

எனில், k-இன் மதிப்பானது

(a) பூஜ்யம் (b) $\frac{1}{4}$

(c) $\frac{1}{15}$ (d) ஒன்று

23. $p(x)=\frac{1}{10}$, $x=10$ எனில், $E(X)$ மதிப்பானது.

(a) பூஜ்யம் (b) $\frac{6}{8}$

(c) 1 (d) -1

24. ஒரு தனித்த நிகழ்தகவுச் சார்பு $p(x)$ ஆனது எப்போதும்

(a) எதிர்மறை அல்லாதது

(b) எதிர்மறையானது

(c) ஒன்று

(d) பூஜ்யம்

25. ஒரு தனித்த பரவல் சார்பில் அனைத்து நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுத்தொகையானது

(a) பூஜ்யம் (b) ஒன்று

(c) மீச்சிறுமம் (d) மீப்பெருமம்

26. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியின் எதிர்பார்க்கத்தக்க மதிப்பு என்பது

(a) மாறுபாடு

(b) திட்டவிலக்கம்

(c) சராசரி

(d) இணை மாறுபாடு

27. ஒரு தனித்த நிகழ்தகவுச் சார்பு $p(x)$ எப்போதும் குறையற்றது மற்றும் அது அமையும் இடைவெளி யானது

(a) 0 மற்றும் ∞

(b) 0 மற்றும் 1

(c) -1 மற்றும் $+1$

(d) $-\infty$ மற்றும் $+\infty$

28. நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $p(x)$ –ன் மீப்பெரு மதிப்பானது

(a) பூஜ்ஜீயம்

(b) ஒன்று

(c) சராசரி

(d) முடிவற்றநிலை

29. ஒரு நாட்டில் உள்ள நபர்களின் உயரத்தை கொண்டு அமையும் சமவாய்ப்பு மாறியின் வகை யானது

(a) தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி

(b) தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி

(c) (a) மற்றும் (b)

(d) (a) யும் அல்ல (b) யும் அல்ல

30. பரவல் சார்பு $F(x)$ ஆனது

(a) $P(X=x)$

(b) $P(X\le x)$

(c) $P(X\ge x)$

(d) இவையனைத்தும்

இதர கணக்குகள்

1. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X - இன் நிகழ்தகவு சார்பு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & x=-2\\ \frac{1}{4}, & x=0\\ \frac{1}{2}, & x=10\\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்}\end{cases}$$

எனில், பின்வரும் நிகழ்தகவுகளை மதிப்பிடவும்

(i) $P(X\le 0)$ (ii) $P(X<0)$

(iii) $P(|X|\le 2)$ (iv) $P(0\le X\le 10)$

2. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X - ஆக இருக்கட்டும் அதன் திரள் பரவல் சார்பானது.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x}{8}, & 0\le x<1\\ \frac{1}{4}+\frac{x}{8}, & 1\le x<2\\ \frac{3}{4}+\frac{x}{12}, & 2\le x<3\\ 1, & 3\le x.\end{cases}$$

எனில்,

(a) (i) $P(1\le X\le 2)$ மற்றும் (ii) $P(X=3)$ கணக்கிடவும்

(b) X ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியா? உங்கள் பதிலை நியாயப்படுத்தவும்.

3. X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது எனில்,

$$f(x)=\begin{cases}k, & 0<x\le 4\\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்}\end{cases}$$

k இன் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கவும், மேலும் $P(2\le X\le 4)$ -ஐ கண்டுபிடிக்கவும்.

4. ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவு பரவல் சார்பு

$$f(x)=\begin{cases}2k, & x=1\\ 3k, & x=3\\ 4k, & x=5\\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்}\end{cases}$$

இங்கு k ஒரு மாறிலி எனில்,

(a) k –ன் மதிப்பு யாது ? ™மற்றும்

(b) $P(X>2)$ -ஐ காண்க.

5. ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X - இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x)=\begin{cases}a+bx^2, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்}\end{cases}$$

இதில் a மற்றும் b ஆகியவை மாறிலிகள் எனில்,

(i) $E(X)=\frac{3}{5}$ எனக்கொண்டு a மற்றும் b– ஐ காண்க.

(ii) $Var(X)$ ஐ காண்க.

6. $E(X)=0$ எனில், $V(X)=E(X^2)$ என நிரூபிக்கவும்.

7. பின்வருமாறு செயலாற்றும் ஒரு விளையாட்டுக்கான எதிர்பார்த்தல் மதிப்பு என்ன? நான் ஒரு நாணயத்தை சுண்டுகிறேன், பூ என்றால் ₹ 2 -ஐ நீங்கள் செலுத்தவேண்டும். தலை என்றால் ₹1-ஐ நீங்கள் செலுத்தவேண்டும். எந்த நிகழ்ச்சியாக இருந்தாலும் நான் உங்களுக்கு ₹ 0.50 -ஐ தருகிறேன்.

8. நிரூபிக்கவும்: (i) $V(aX)=a^2V(X)$ மற்றும் (ii) $V(X+b)=V(X)$

9. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X- இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு பின்வருமாறு

$$f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1\\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்}\end{cases}$$

எனில், $E(X)$ மற்றும் $V(3X-2)$ –ஐ காண்க.

10. தயாரிக்கப்பட்ட DVD இயக்கியில் பயன்படுத்தப்படும் மின்னணு உபகரணங்களின் முக்கிய பகுதியின் செயலிழப்பிற்கான நேரம் (ஆயிரத்தில்) அடர்த்திச் சார்பாக பெறப்பட்டது

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்}\end{cases}$$

எனில், உபகரணப் பகுதியின் எதிர்பார்க்கத்தக்க செயல் வாழ்வை கண்டுபிடிக்கவும்.

தொகுப்புரை

- **தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி (Discrete random variable)** சாத்தியமான மதிப்புகளால் வரையறுக்கப்பட்ட எண்களை ஏற்றுக்கொள்ளக் கூடிய ஒரு மாறி அல்லது எண்ணத்தக்க மெய்யெண்களின் முடிவிலாத் தொடரை ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி என அழைக்கலாம்.

- நிகழ்தகவு நிறை சார்பு **(Probability mass function)** (p.m.f.)

$$P_X(x)=\text{p}(x)=\begin{cases}\text{P}(\text{X}=x_{\text{i}})=p_i=p(x_i); & x=x_i\,,\ i=1,2,\ldots,n,\ldots\\ 0 & ;\quad x\neq x_i\end{cases}$$

நிபந்தனைகள்:

  - $p(x_i)\geq 0\ \forall\, i$ மற்றும்
  - $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p(x_i)=1$

- **தனித்த பரவல் சார்பு** (Discrete distribution function) (d.f.):

அனைத்து $x\in R$ -க்கு, $F_X(x)=P\left(X\leq x\right)$. அதாவது $F_X(x)=\sum\limits_{x\leq x_i} p(x_i)$

- ஓர் இடைவெளியில் உள்ள அனைத்து மெய் மதிப்புகளையும் (முழுக்களாகவோ, பின்னங்களாகவோ) ஏற்கும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X ஆனது தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

- **நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு** (Probability density function (p.d.f.))

தொகையிடக்கூடிய ஓர் இடைவெளி $[t_1,t_2]$ இல் (திறந்த அல்லது மூடிய) அமையும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவு $f_X(x)$ ஆனது நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு என்று அழைக்கப்படும்.

$$P\left(t_1\leq X\leq t_2\right)=\int_{t_1}^{t_2} f_X(x)dx\,.$$

நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f_X(x)$ அல்லது சுருக்கமாக $f(x)$ பின்வரும் நிபந்தனைகளை பூர்த்தி செய்ய வேண்டும்.

நிபந்தனைகள்:

  - $f(x)\geq 0\ \forall\, x$
  - $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$

நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பிற்கு பதிலாகப் பயன்படுத்தப்படும் பிற பெயர்களாவன அடர்த்திச் சார்பு, தொடர்ச்சியான நிகழ்தகவு சார்பு, தொகை அடர்த்திச் சார்பு ஆகியவை ஆகும்.

- **தொடர்ச்சியான பரவல் சார்பு** (Continuous distribution function)

தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f_X(x)$, எனில் சார்பு $F_X(x)$ பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$F_X(x)=P[X\leq x]=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt,\ -\infty<x<\infty$$

இது தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X – இன் பரவல் சார்பு $F_X(x)$ அல்லது (சில நேரங்கள்) திரள் பரவல் சார்பு என்று அழைக்கப்படுகிறது.

- திரள் பரவல் சார்பின் பண்புகள் (Properties of cumulative distribution function)

சார்பு $F_X(x)$ அல்லது சுருக்கமமாக $F(x)$ பின்வரும் பண்புகளைப் பெற்றுள்ளது.

(i) $0\leq F(x)\leq 1,\ -\infty<x<\infty$

(ii) $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$ மற்றும் $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=1.$

(iii) $F(\cdot)$ என்பது ஓரியல்புத் தன்மைக் கொண்ட குறையா சார்பு
அதாவது $a<b$ க்கு $F(a)\leq F(b)$

(iv) $F(\cdot)$ என்பது வலது புறத்திலிருந்து தொடர்ச்சியானது அதாவது $\lim_{h\to 0} F(x+h)=F(x)$.

(v) $F'(x)=\dfrac{d}{dx}F(x)=f(x)\geq 0$

(vi) $F'(x)=\dfrac{d}{dx}F(x)=f(x)\Rightarrow dF(x)=f(x)dx$

(vii) $dF(x)$ என்பது X இன் நிகழ்தகவு வகையீடு என அறியப்படுகிறது.

(viii)
$$P(a\leq x\leq b)=\int_a^b f(x)dx=\int_{-\infty}^{b} f(x)dx-\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$
$$=P(X\leq b)-P(X\leq a)$$
$$=F(b)-F(a)$$

- **எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு** (Expected value)
  எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு என்பது ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியின் மதிப்பின் எடையிட்ட சராசரி என கருதப் படுகிறது. இங்கு நிகழ்தகவுகள் எடைகளாக இருக்கிறது.

- ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு X–எனில் அதன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பை பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

  $E(X)=\sum_x x\,p(x)$ ஆகும்.

- ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X மற்றும் $f(x)$ என்பது அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு எனில் X -இன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு

  $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$ ஆகும்.

- X இன் சராசரி அல்லது எதிர்பார்த்தல் என்பது φ_X அல்லது E(X) ஆல் குறிக்கப்படுகிறது.

- மாறுபாட்டளவை (Variance)
  மாறுபாட்டு அளவை என்பது ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியிலிருந்து அதன் சராசரியின் வர்க்க விலக்கங்களின் எடையிட்ட சராசரி ஆகும்.

- தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி X-இன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு $p(x)$ எனில், $Var(X)=\sum\left[x-E(X)\right]^2 p(x)$

- தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X-இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f_X(x)$ எனில்,
  $Var(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[X-E(X)\right]^2 f_X(x)\,dx$ ஆகும்.

- $[X-E(X)]^2$ இன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பானது சமவாய்ப்பு மாறியின் மாறுபாட்டளவை என்று அழைக்கப்படுகிறது. அதாவது, $Var(X)=E\left[X-E(X)\right]^2=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2$

  இங்கு $E\left(X^2\right)=\begin{cases}\sum_x x^2\,p(x), & X \text{ ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி எனில்}\\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx, & X \text{ ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி எனில்}\end{cases}$

- X ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி எனில், X–இன் திட்டவிலக்கம் σ_X எனக் குறியிடப்பட்டு $+\sqrt{Var[X]}$ என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.

- X –இன் மாறுபாடு, $\sigma_X{}^2$ அல்லது $Var(X)$ அல்லது $V(X)$ ஆல் குறிக்கப்படுகிறது.
- **கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலின் பண்புகள்:**

(i) $E(a) = a$, 'a' என்பது ஒரு மாறிலி.

(ii) $E(aX) = aE(X)$

(iii) $E(aX+b) = aE(X)+b$, 'a' மற்றும் 'b' ஆகியவை மாறிலிகள்.

(iv) $X \geq 0$ எனில், $E(X) \geq 0$

(v) $V(a) = 0$

(vi) X என்பது ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி எனில், $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$.

- விலக்கப் பெருக்குத்தொகையின் கருத்தாக்கம்

$$\varphi'_r = E\left(X^r\right) = \begin{cases} \sum\limits_x x^r p(x) \ , & X \text{ ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி எனில்} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx, & X \text{ ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி எனில்} \end{cases}$$

- **விலக்கப் பெருக்குத்தொகை :**

$\varphi_r = E[(X-\varphi_X)^r]$

$\varphi_1' = E(X) = \varphi_X$, X–இன் சராசரி

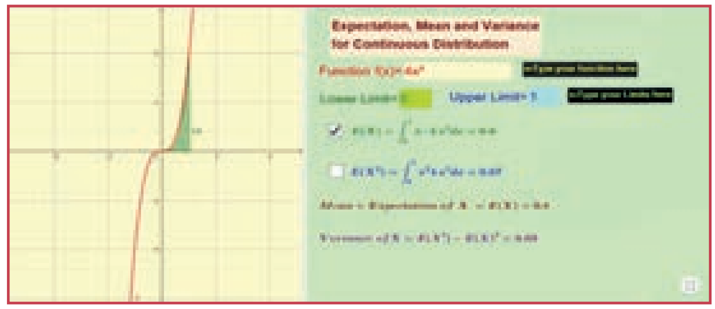
$\varphi_1 = E[X-\varphi_X] = 0.$

$\varphi_2 = E[(X-\varphi_X)^2]$, X–இன் மாறுபாட்டளவை

கலைச்சொற்கள் (Glossary)	
எதிர்பார்க்கத்தக்க மதிப்பு / எதிர்பார்த்தல் மதிப்பு	Expected value
எதிர்பார்த்தல்	Expectation
கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல்	Mathematical expectation
குடுவை, கலசம்	Urn
சமவாய்ப்பு மாறி	Random variable
சராசரி	Mean
திட்ட விலக்கம், நியமச்சாய்வு	Standard deviation
திரள், குவிந்த	Cumulative
தொடர்ச்சியற்ற சமவாய்ப்பு மாறி	Discrete random variable
தொடர்ச்சியற்ற பரவல் சார்பு	Discrete distribution function
தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி	Continuous random variable
தொடர்ச்சியான பரவல் சார்பு	Continuous distribution function
நடுநிலையற்ற	Biased
நடுநிலையான	Unbiased
நிகழ்தகவு நிறை சார்பு	Probability mass function
நிகழ்தகவுச் சார்பு	Probability function
நிகழ்வு, நிகழ்ச்சி	Event
நிறை சராசரி	Weighted average
பரவல் சார்பு	Distribution function
மாறுபாட்டு அளவை / பரவற்படி	Variance
முற்றிலும் குவிதல் இயல்புடைய	Absolutely Convergent
மையநிலை விலக்கப் பெருக்கம்	Central moments
விலக்கப் பெருக்கங்கள்	Moments

இணையச் செயல்பாடு

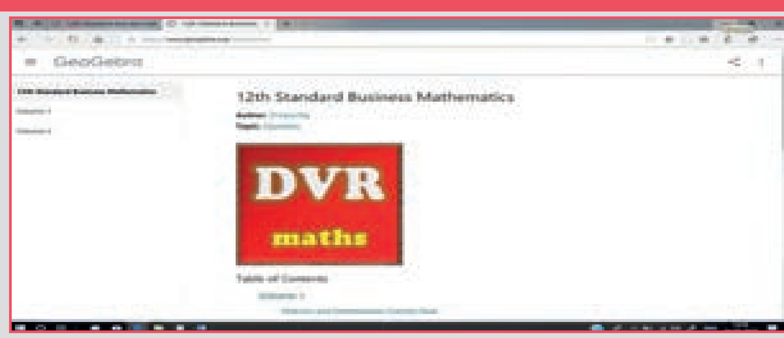
எதிர்பார்க்கப்படும் விளைவு



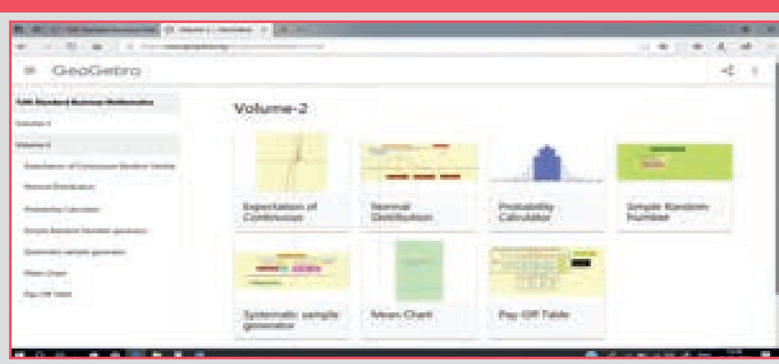
படி – 1 : கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி இச்செயல்பட்டிற்கான இணையப் பக்கத்திற்குச் செல்க. பின்பு "12th Standard Business Mathematics and Statistics" என்னும் திரையில் "Volume–2" யை தெரிவு செய்யவும்.

படி - 2 : "Expectation of continuous Random Variable" என்னும் பயிற்சித்தாளினை தெரிவு செய்துகொள்ளவும். பின்பு வலது பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள பெட்டியில் Function f(X), Limits ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை தட்டச்சு செய்தால் Mean , Variance மதிப்பினை பெறலாம்.

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி : **https://ggbm.at/uzkcrnwr**

அல்லது விரைவுக் குறியீடு **(QR Code)**

B247_12_BUS_MAT_TM

7 நிகழ்தகவு பரவல்கள்

ஜோகன் கார்ல் பிரெட்ரிக் காஸ்
(ஏப்ரல் 30, 1777 – பிப். 23, 1855)

அறிமுகம்

அலைவெண் பரவலானது இரண்டு வகைப்படும். அவை கண்டறிந்த அலைவெண் பரவல் மற்றும் அறிமுறை அலைவெண் பரவல் எனப்படும். சரியான தரவுகள் அல்லது பரிசோதனைகளை மையமாக கொண்ட பரவலாக இருப்பின் அதனைக் கண்டறிந்த அலைவெண் பரவல் என்று அழைக்கப்படும். மேலும் முந்தைய அனுபவம் ஏற்படுத்தும் எதிர்பார்ப்பினை சார்ந்த பரவலை அறிமுறை அலைவெண் பரவல் அல்லது நிகழ்தகவு பரவல் என அழைக்கப்படும்.இப்பகுதியில் தனித்த பரவலான ஈருறுப்புப் பரவல் பாய்சான் பரவல் மற்றும் தொடர்ச்சியான பரவலான இயல்நிலை பரவல் ஆகியவற்றை பற்றி விவாதிப்போம்.

ஜோகன் கார்ல் பிரெட்ரிக் காஸ் (1777–1855) என்பவர் ஜெர்மனியைச் சேர்ந்த கணிதவியலாளரும், இயற்பியலாளரும் ஆவார். கணிதத்திலும் அறிவியலிலும் அவர் குறிப்பிடத்தக்க கண்டுபிடிப்புகளைத் தந்துள்ளார். அவர் கணித வரலாற்றில் மிக உயர்ந்த இடத்தைப் பிடித்துள்ளார்.

கற்றல் நோக்கங்கள்

மாணவர்கள் இந்த அத்தியாத்தை கற்ற பிறகு கீழ்க்கண்ட பாடபகுதிகளை புரிந்துகொள்ள இயலும்.

- பெர்னோலி முயற்சியின் கருத்துரு.
- ஈருறுப்பு, பாய்சான் மற்றும் இயல்நிலை அடர்த்திச் சார்பு.
- ஈருறுப்பு மற்றும் பாய்சான் பரவலின் சராசரி மற்றும் மாறுபாடு.
- இயல்நிலை நிகழ்தகவு வளைவரையின் பண்புகள்.

7.1 பரவல் (Distribution)

அறிமுறைக்குறிய பரவல் இரண்டு வகைப்படும் அவை :

1. தனித்த பரவல்
2. தொடர்சியான பரவல் ஆகும்.

Z4JBEG

தனித்த பரவல்

ஈருறுப்பு மற்றும் பாய்சான் பரவல்கள், தொடர்ச்சியற்ற மாறிகளுக்கான மிகவும் பயனுள்ள அறிமுறை பரவல்களாகும்.

7.1.1 ஈருறுப்புப் பரவல் (Binomial distribution)

கி.பி. (பொ.ஆ.) 1700 ஆம் ஆண்டு ஜேம்ஸ் பெர்னோலி(1654 – 1705) என்பவர் ஈருறுப்புப் பரவலைக் கண்டுபிடித்தார். அவர் இறந்து 8 வருடங்கள் கழிந்த பின்பு, 1713இல் முதல் முறையாக ஈருறுப்புப் பரவல் வெளியிடப்பட்டது.

ஒரு சமவாய்ப்பு சோதனை இரண்டு விளைவுகளை ஏற்படுத்தும். அவ்விளைவானது இரு வகைப்படும் அவை வெற்றி (S) மற்றும் தோல்வி (F) ஆகும். அதனுடைய நிகழ்தகவுகள் முறையே p மற்றும் q எனக் குறிக்கப்படும். அது பெர்னோலி சோதனை (அல்லது முயற்சி) என்று அழைக்கப்படும்.

பெர்னோலி முயற்சிக்கான சில உதாரணங்கள்

(i) நாணயத்தினைச் சுண்டுதல் (தலை அல்லது பூ)

(ii) பகடை உருட்டுதல் (ஒற்றைப் படை எண் அல்லது இரட்டைப் படை எண்)

'n' சார்பற்ற பெர்னோலியின் முயற்சிகள் கொண்ட ஒரு கணத்தினைக் கொண்டு அதில் இருந்து கிடைக்கும் முடிவுகளில் p என்பது வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு மற்றும் மாறிலியாக இருக்கும். மேலும் q என்பது தோல்வியின் நிகழ்தகவினைக் குறிப்பதாகும். சார்பற்ற சோதனையில் x என்பது வெற்றியின் நிகழ்தகவாகக் கொண்டால் அதனுடைய தொடர்சியாக $(n-x)$ எனும் தோல்வியின் நிகழ்தகவு கீழ்கண்டவாறு அமையும். ஒருங்கிணைக்கப்பட்ட தேற்றத்தின்படி ஒரு வரிசையில் SSFSFFFS.... FSF என்று விவரிக்க முடியும்.

$$\begin{aligned}
P(SSFSFFFS.....FSF) &= P(S)P(S)P(F)P(S) \ldots P(F) P(S)P(F) \\
&= p.p.q.p \ldots q.p.q \\
&= p.p.p.p \ldots q.q.q.q.q.q \ldots \\
&= \{x \text{ காரணிகள்}\} \{(n-x) \text{ காரணிகள்}\} \\
&= p^x q^{(n-x)}
\end{aligned}$$

'n' முயற்சியில் x வெற்றி என்பது ^nC_x என்ற வழியில் கிடைக்கும் மற்றும் அதனுடைய நிகழ்தகவானது $p^x q^{n-x}$ ஆகும்.

வெற்றியின் எண்ணிக்கையினை இவ்வாறாக பெறப்படின் அதனை ஈருறுப்பு நிகழ்தகவு பரவல் மற்றும் ஈருறுப்பு பெருக்கம் $(q+p)^n$ எனப்படும்.

வரையறை 7.1

X என்ற சமவாய்ப்பு மாறி ஈருறுப்புப் பரவலைப் பின்பற்றி அதனுடைய பண்பளவைகளான n மற்றும் p ஆகியவை குறையற்ற மதிப்பினைக் கொண்டிருப்பின், அதன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு

$P(X=x) = p(x)$

$$= \begin{cases} ^nC_x p^x q^{n-x}, & x = 0,1,2,\ldots..n; q = 1-p \\ 0 & \text{, மற்றபடி} \end{cases}$$

குறிப்பு

ஈருறுப்புப் பரவலைக் கொண்டுள்ள X எனும் சமவாய்ப்பு மாறி ஈருறுப்பு மாறி எனப்படும். அதாவது $X \sim B(n,p)$ என்பது ஈருறுப்பு மாறி ஆகும்.

ஈருறுப்புப்பரவலைக்காணும்நிபந்தனைகளின்படி நாம் பயன்படுத்துகின்றோம் :

1. முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை 'n' என்பது ஒரு முடிவுறு எண்ணாக இருத்தல் வேண்டும்.
2. முயற்சிகள் ஒன்றுக்கொன்று சார்பற்றவையாக இருத்தல் வேண்டும்.
3. வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு p என்பது ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் மாறிலியாக இருக்க வேண்டும்.
4. ஒவ்வொரு முயற்சிக்கும் இரண்டு விளைவுகளே சாத்தியமானது. அவை வெற்றி அல்லது தோல்வி மட்டுமே.

ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டின் நிரூபணம்:

ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= p \sum_{x=1}^{n} x. \left(\frac{n}{x}\right) \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} q^{n-x}$$

$$= np\,(q+p)^{n-1} \qquad [\text{since } p+q=1]$$

$$= np$$

$$E(X) = np$$

$\therefore$ ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி என்பது np ஆகும்

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

இங்கு, $E(X^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$

$$\sum_{x=0}^{n} \{x(x-1)+x\} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \{x(x-1)\} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} + \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$=\sum_{x=2}^{n}\{x(x-1)\}p^2\left(\frac{n(n-1)}{x(x-1)}\right)\binom{n-2}{x-2}p^{x-2}q^{n-x}$$
$$+\sum_{x=0}^{n}x\binom{n}{x}p^xq^{n-x}$$
$$= n(n-1)\,p^2\left\{\sum_{x=2}^{n}\binom{n-2}{x-2}p^{x-2}q^{n-x}\right\} + np$$
$$= n(n-1)p^2(q+p)^{(n-2)} + np$$
$$= n(n-1)p^2 + np$$
$\therefore$ மாறுபாடு $= E(X^2) - \{E(X)\}^2$
$$= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2$$
$$= np(1-p) = npq$$

ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி np மற்றும் மாறுபாடு npq ஆகும்.

ஈருறுப்புப் பரவலின் பண்புகள்

1. $p = q = 0.5$ என இருக்கும்பொழுது ஈருறுப்புப் பரவலானது சமச்சீரானது.
2. $p \neq q$ எனும்பொழுது சமச்சீர் அற்றதாக இருக்கும்.
3. $p < 0.5$ எனில், ஈருறுப்புப் பரவல் மிகை கோட்ட அளவையாக இருக்கும்.
4. $p > 0.5$ எனில், ஈருறுப்புப் பரவல் குறை கோட்ட அளவையாக இருக்கும்.
5. ஈருறுப்புப் பரவலில் மாறுபாட்டளவையின் மதிப்பு, சராசாரியின் மதிப்பைவிடக் குறைவானதாக இருக்கும். அதாவது குறியீட்டின்படி
6. மாறுபாட்டளவை $npq = (np)q < np$

எடுத்துக்காட்டு 7.1

A என்ற விளையாட்டு வீரரும் B எனும் மற்றொரு விளையாட்டு வீரரும் கலந்து கொள்ளும் விளையாட்டில் வெற்றி பெறுவதற்கான வாய்ப்பு விகிதம் 3:2 ஆகும். ஐந்து முறை விளையாடும் விளையாட்டில் A எனும் விளையாட்டு வீரர் குறைந்த பட்சம் 3 முறை வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

தீர்வு:

p என்பது A என்பவர் வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு ஆகும். ஈருறுப்புப் பரவலின் பண்பளவைகள் n மற்றும் p என்பனவாகும். இங்கு முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை $n = 5$, $p = 3/5$, $q = 1-\frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ என்பதாகும். ($\because\ q = 1-p$)

5 முறை விளையாடும் விளையாட்டில் A எனும் வீரர் வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(X=x) = p(x) = 5Cx\left(\frac{3}{5}\right)^x\left(\frac{2}{5}\right)^{5-x}$$

A என்பவர் குறைந்தபட்சம் 3 முறை வெற்றி பெறுவதற்கான வாய்ப்பின் நிகழ்தகவு

$$P(X\geq 3) = P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$$
$$=5C_3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^2+5C_4\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right)^1+5C_5\left(\frac{3}{5}\right)^5\left(\frac{2}{5}\right)^0$$
$$= 0.6826$$

எடுத்துக்காட்டு 7.2

பிழையற்ற ஒரு நாணயம் 6 முறை சுண்டப்படுகின்றது. அவற்றில் சரியாக 2 தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு :

ஓர் ஈருறுப்புப் பரவல் சமச்சீர் பரவலாக இருப்பின் $p = q = 1/2$

சரியாக 2 தலைகள் மட்டும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(X=2) = \binom{6}{x}p^xq^{n-x}$$
$$= \binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2}$$
$$= \frac{15}{64}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.3

ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி 12 அதனுடைய திட்டவிலக்கம் 4 எனும் கூற்றினைப்பற்றி உன் கருத்தைத் தருக.

தீர்வு:

ஈருறுப்புப் பரவலின் பண்பளவைகள் n மற்றும் p ஆகும்.

ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி $np = 12$

திட்டவிலக்கம் $\text{SD} = \sqrt{npq} = 4$

மாறுபாட்டளவை $= npq$

சராசரியின் மதிப்பு / மாறுபாட்டின் மதிப்பு

$$= \frac{np}{npq} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

$=> q = {}^{4}\!/_{3} > 1$ என்பது சாத்தியமில்லை

எனவே கொடுக்கப்பட்ட கூற்று தவறானதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.4

ஒரு மாணவன் பட்டம் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.4 ஆகும். இவ்வாறாக இருப்பின் ஐந்து மாணவர்களுள் (அ) ஒருவர் மட்டும் பட்டதாரியாக (ஆ) குறைந்தபட்சம் ஒருவர் பட்டதாரியாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவை காண்க.

தீர்வு:

பட்டம் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $p= 0.4$

$$\therefore \quad q = 1- p$$
$$= 1 - 0.4$$
$$= 0.6$$

(i) ஒருவர் மட்டும் பட்டதாரியாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= P(X = 1) = 5C_1\,(0.4)(0.6)^4$

$$= 0.2592$$

(ii) குறைந்தபட்சம் ஒருவர் பட்டதாரியாக இருக்க நிகழ்தகவு $= P(x \geq 1)$

$$= 1-P(x=0)$$
$$= 1 - 5C_0 (P^0)(q)^{5-0}$$
$$= 1 - 5C_0 (0.4)^0\,(0.6)^5$$
$$= 1 - 0.0777$$
$$= 0.9222$$

எடுத்துக்காட்டு 7.5

பிழையற்ற ஐந்து நாணயங்கள் ஒரே சமயத்தில் சுண்டப்படுகின்றன. அவற்றில் சரியாக 3 தலைகள் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு :

$n = 5$, தலை பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $p = q = 1/2$

X என்ற சமவாய்ப்பு மாறியானது , கிடைக்கும் தலைகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிப்பதாகக் கொண்டால், n முயற்சியில் கிடைக்கும் வெற்றியின் நிகழ்தகவு சார்பானது $p = q = 1/2$

3 தலைகள் மட்டும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= 5C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{5-x}$$
$$= 5C_3 \left({}^{1}\!/_{2}\right)^3 \left({}^{1}\!/_{2}\right)^{5-3}$$
$$= 5C_3 \left({}^{1}\!/_{2}\right)^5$$
$$= {}^{5}\!/_{16}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.6

ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி மதிப்பு 20 எனவும், திட்டவிலக்கத்தின் மதிப்பானது 4 எனவும் கொண்டால், 'n' இன் மதிப்பினைக் காண்க.

தீர்வு

ஈருறுப்புப் பரவலின் பண்பளவைகள் n மற்றும் p ஆகும்.

ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரியின் மதிப்பு $np = 20$

திட்டவிலக்கம்$= \sqrt{npq} = 4$

$$\therefore \quad npq = 16$$
$$\Rightarrow \quad \frac{npq}{np} = 16/20 = \frac{4}{5}$$
$$q = {}^{4}\!/_{5}$$
$$\Rightarrow \; p = 1-q = 1-(4/5) = \frac{1}{5}$$
$$np = 20$$
$$n = \frac{20}{p}$$
$$n = 100$$

எடுத்துக்காட்டு 7.7

சமவாய்ப்பு மாறி X என்பது ஈருறுப்புப் பரவலாகும். மேலும் அதன் சராசரி மதிப்பு $E(x) = 2$ மற்றும் மாறுபாட்டளவை மதிப்பு $\frac{4}{3}$ எனில் $P(x=5)$ இன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு:

ஈருறுப்புப் பரவலின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$p(x) = {}^{n}C_{x} p^{x} / q^{n-x}$$

ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி np மற்றும் மாறுபாடு npq என்பதாகும்.

$$np = 2 \qquad \ldots (1)$$

$$npq = \frac{4}{3} \qquad \ldots (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{npq}{np} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$q = \frac{2}{3} \quad \text{மற்றும்} \quad p = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$n = 6$$

$$P(X{=}5) = 6C_{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{6-5} = 0.0108$$

எடுத்துக்காட்டு 7.8

ஒவ்வொரு முப்பது நாள்களிலும் சராசரியாக ஒன்பது நாள்கள் மழை பொழிகின்றது. குறைந்த பட்சம் வாரத்தில் இரண்டு நாள்கள் மழை பொழிவதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

தீர்வு :

மழை பொழிவதற்கான நிகழ்தகவு $p = \dfrac{9}{30} = \dfrac{3}{10}$

மற்றும் $q = 1-p = \dfrac{7}{10}$.

$$P(X = x) = {}^{n}C_{x} p^{x} q^{n-x}$$

ஒரு வாரத்திற்கு ஏழு நாள்கள் எனில்

$$P(X = x) = \binom{7}{x}\left(\frac{3}{10}\right)^{x}\left(\frac{7}{10}\right)^{7-x}$$

குறைந்தபட்சம் இரண்டு நாள்கள் மழைபொழிவதற்கான நிகழ்தகவுகள்,

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$

$$= 1 - \left[P(X=0) + P(X=1)\right]$$

$$P(X=0) = \binom{7}{0}\left(\frac{3}{10}\right)^{0}\left(\frac{7}{10}\right)^{7-0}$$

$$= 0.0823 \text{ மற்றும்}$$

$$P(X=1) = \binom{7}{1}\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right)^{7-1}$$

$$= 0.2471$$

எனவே , தேவையான நிகழ்தகவு

$$= 1- [P(x = 0) + P(x = 1)]$$

$$= 1- [0.082+ 0.247]$$

$$= 0.6706$$

எடுத்துக்காட்டு 7.9

பலவாய்ப்பு வினாக்கள் கொண்ட தேர்வில் பத்து வினாக்களுக்கு ஆறு சரியான பதில்களைக் கணிப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

தீர்வு :

p என்பது சரியான பதிலைக் கணிப்பதாகும் $p = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

பத்து வினாக்களில் சரியான பதிலைக் கணிப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(X = x) = p(x) = {}^{n}C_{x}\, p^{x} q^{n-x}$$

$$= 10Cx\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{10-x}$$

சரியான 6 பதில்களை கணிப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$P(X \geq 6)$

$$= P(6) + P(7) + P(8) + P(9) + P(10)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left[10C_{6} + 10C_{7} + 10C_{8} + 10C_{9} + 10C_{10}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{1024}\right]\left[210 + 120 + 45 + 10 + 1\right]$$

$$= \frac{193}{512}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.10

அட்டவணைப்படி பேருந்து சேவை இயக்கத்திற்கு உண்டான நிகழ்தகவு 0.8 ஆகும். அட்டவணைப் படி பத்து பேருந்து இயக்கப்படுமாயின் அதில் (அ) சரியாக ஒரு பேருந்து தாமதமாக (ஆ) குறைந்தபட்சம் ஒரு பேருந்து தாமதமாக இயக்கப்படுவதற்கான நிகழ் தகவினைக் காண்க.

தீர்வு :

பேருந்து தாமதமாக வருவதற்கான நிகழ்தகவு p எனக்குறிக்கப்படுகின்றது ,

அதன் மதிப்பு $p = 1-0.8 = 0.2$

பேருந்து சரியாக இயக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு

$q = 0.8$

$n = 10$

ஈருறுப்புப் பரவல் $p(x) = 10C_x\,(0.2)^x\,(0.8)^{10-x}$

(i) சரியாக ஒரு பேருந்து தாமதமாக இயக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(x=1) = 10C_1\,pq^9$$
$$= 10C_1\,(0.2)(0.8)^9$$

(ii) குறைந்தபட்சம் ஒரு பேருந்து தாமதமாக இயக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு

= 1 – தாமதமாக எந்த ஒரு பேருந்தும் இயக்கப்படவில்லை

$= 1 - p(x=0)$

$= 1-(0.8)^{10}$

எடுத்துக்காட்டு 7.11

ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டளவையின் கூட்டுத் தொகை மற்றும் பெருக்குத் தொகையின் மதிப்பு முறையே 24,128 எனில் பரவலைக் காண்க.

தீர்வு:

ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி np மற்றும் மாறுபாடு npq ஆகும்.

$np + npq = 24; \quad np(1 + q) = 24 \qquad \ldots (1)$

$np \times npq = 128; \quad n^2p^2q = 128 \qquad \ldots (2)$

(1) லிருந்து $np = 24/(1+q) \Rightarrow n^2p^2 = (24/(1+q))^2$

(2) ல் பிரதியிட

$$\left(\frac{24}{1+q}\right)^2 q = 128 \qquad \Rightarrow 9q = 2(1+2q+q^2)$$

$$\Rightarrow (2q-1)(q-2) = 0$$

இங்கு $q = \frac{1}{2}$ மற்றும் $p = \frac{1}{2}$

(1) ல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது $n = 32$

ஈருறுப்புப் பரவல் $32C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{32-x}$

எடுத்துக்காட்டு 7.12

A என்ற விளையாட்டு வீரர் மற்றும் B எனும் விளையாட்டு வீரர் இருவரும் சரிசமமான மேசை பந்தாட்ட வீரர்களாவர்.

கீழ்வருவனவற்றுள் எந்த நிகழ்வுகளுக்கு அதிகமான சாத்தியக்கூறுகள் இருக்கிறது :

(a) A எனும் வீரர் B எனும் வீரரைத் தோற்கடிப்பதற்குச் சரியாக நான்கு முறை விளையாடும் விளையாட்டில் மூன்று முறை வெற்றி பெற வேண்டும் அல்லது

(b) A எனும் வீரர் B என்ற வீரரைத் தோற்கடிப்பதற்குச் சரியாக எட்டு முறை விளையாடும் விளையாட்டில் ஐந்து முறை வெற்றி பெற வேண்டும்.

தீர்வு :

$$p = q = \frac{1}{2}$$

(a) விளையாடும் விளையாட்டில் மூன்று முறை வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{4-3}$$

$$= \frac{1}{4} = 25\%$$

(b) A எனும் வீரர் B என்ற வீரரை தோற்கடிப்பதற்காக சரியாக எட்டு முறை விளையாடும் விளையாட்டில் ஐந்து முறை வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \binom{8}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^{8-5}$$

$$= \frac{7}{32} = 21.875\%$$

எனவே, முதல் நிகழ்ச்சி அதிக சாத்தியமுடையதாக உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 7.13

ஒரு சோடி பகடை நான்கு முறை உருட்டப் படுகிறது. வெற்றி என்பது ஒரே எண்ணை குறிக்கின்றது எனில் இரண்டு முறை வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவினை கண்டுபிடி.

தீர்வு :

இரண்டு பகடைகள் உருட்டப்படும்போது கிடைக்கும் இரட்டைகளாவன

\(1,1) (2,2) (3,3) (4,4) (5,5) (6,6)

இரட்டைகள் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு

$p = 6/36 = 1/6$

ஆகையால் $q = 1 - p = 5/6$ மற்றும் $n = 4$

$$P(X = x) = \binom{4}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^{x}\left(\frac{5}{6}\right)^{4-x}$$

இரண்டு வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு

$$P(X = 2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{4-2}$$

$$= 6 \times \frac{1}{36} \times \frac{25}{36}$$

$$= \frac{25}{216}$$

பயிற்சி 7.1

1. ஈருறுப்புப் பரவல்: வரையறு.
2. பெர்னோலி முயற்சி : வரையறு
3. ஈருறுப்புப் பரவலின் விலக்கப்பெருக்குத் தொகைகளைத் தருவி
4. ஈருறுப்புப் பரவலில் பயன்படுத்தப்படும் கட்டுப் பாடுகளை எழுதுக.
5. ஈருறுப்புப் பரவலின் பண்புகளைக் குறிப்பிடுக.
6. தயாரிக்கப்படும் பொருள்களில் 5 சதவிகிதம் குறைபாடுள்ளவை. சமவாய்ப்பு முறையில் 20 பொருள்கள் தேர்ந்தெடுக்கும் பொழுது
   (i) மூன்று மட்டும் குறைபாடுள்ளதாக
   (ii) குறைந்தபட்சம் இரண்டு பொருள் குறைபாடுள்ளதாக
   (iii) நான்கு மட்டும் குறைபாடுள்ளதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினை காண்க.
   (iv) சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டினைக் கண்டுபிடி.
7. பல்கலைக்கழகத்தில் 40 சதவீத மாணவர்கள் நூலகத்தைப் பயன்படுத்தும் பழக்கம் கொண்டவர்கள். நூலகத்தைப் பயன்படுத்தும் நோக்கத்தினை அறிய ஒன்பது மாணவர்கள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறார்கள் எனில் அதில்
   (i) ஒருவர் கூட படிக்கவில்லை
   (ii) அனைவரும் படிக்கின்றனர்
   (iii) மூன்றில் இரண்டு பங்கு மாணவர்கள் படிப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.
8. மூன்று குழந்தைகள் கொண்ட ஒரு குடும்பத்தில் சரியாக இரண்டு பெண் குழந்தைகள் இருப்பதற் கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.
9. உள்ளூர் ஆலையில் உற்பத்தி செய்யப் படும் நூலில் சராசரியாக ஒவ்வொரு 6 மீட்டர் நூலிற்கும் 1.2 குறைபாடுகள் இருக்கும். இரண்டுக்கும் குறைவாக குறைபாடுகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினை வரையறு.
10. ஒரு குறிப்பிட்ட இயந்திரம் வாயிலாக உற்பத்தி செய்யப்படும் திருகுமறையில் உள்ள குறைபாடுகள் 18 சதவிகிதம் எனில் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் நான்கு திருகுமறையில்
    (i) சரியாக ஒரு குறைபாடுள்ள திருகுமறை
    (ii) குறைபாடு இல்லா திருகுமறை
    (iii) அதிகபட்சம் 2 குறைபாடுகள் உள்ள திருகுமறை இருப்பதற்கான நிகழ் தகவு காண்க.
11. வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு 0.09–ஐ கொண்ட ஓர் ஈருறுப்பு சோதனையில் குறைந்தபட்சம் ஒரு வெற்றிக்கான நிகழ்தகவானது $\frac{1}{3}$ அல்லது அதைவிட அதிகமாகப் பெற குறைந்தது எத்தனை முயற்சிகள் மேற்கொள்ளப்பட வேண்டும்.
12. 28 பேராசிரியர்களைக் கொண்ட ஒரு துறையில் 18 பேராசிரியர்கள் வெளிநாட்டி லிருந்து தருவிக்கப்பட்ட மகிழுந்து (Car) மற்றும் 10 பேராசிரியர்கள் உள்ளூர் தயாரிப்பு

மகிழுந்தை பயன்படுத்துகிறார்கள். சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் 5 பேராசிரியர்களில் குறைந்தபட்சம் 3 நபர்கள் வெளிநாட்டு மகிழுந்தை இயக்குவதற்கான நிகழ்தகவினை காண்க.

13. நான்கு குழந்தைகள் கொண்ட 750 குடும்பங்களில்

    (i) குறைந்தபட்சம் ஓர் ஆண் குழந்தை

    (ii) அதிகபட்சம் இரண்டு பெண் குழந்தைகள்

    (iii) மற்றும் இரு பாலின குழந்தைகளும் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினை காண்க.

(ஆண் மற்றும் பெண் குழந்தைகளின் பிறப்பு சமமான நிகழ்தகவாக எடுத்துக்கொள்க).

14. வியாபார நிமித்தமாக பயணிக்கும் 40 சதவீத பயணிகள் தங்களுடன் மடிக்கணினி எடுத்துச் செல்லும் பழக்கம் உடையவர்கள். அவர்களுள் 15 நபர்களை கூறு எடுத்தால்

    (i) 3 நபர்கள் மடிக்கணினி வைத்திருத்தல்

    (ii) 12 நபர்களிடத்தில் மடிக்கணினி இல்லை

    (iii) குறைந்தபட்சம் 3 நபர்களாவது மடிக்கணினி உபயோகப்படுத்துவதற்கான நிகழ்தகவினை கணக்கிடுக.

15. இரண்டு சீரான பகடைகள் ஒரே சமயத்தில் 4 முறை உருட்டப்படுகின்றன. அதன் விளைவு இரட்டைத் தன்மையாக இருப்பின் அதனை வெற்றி என்று கருத்தில் கொண்டு 2 வெற்றி வருவதற்கான நிகழ்தகவினை கண்டுபிடி.

16. ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி 5 மற்றும் திட்டவிலக்கமானது 2 எனில், பரவலை தீர்மானிக்கவும்.

17. ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி 4 மற்றும் திட்ட விலக்கமானது 2 ஆக இருப்பின் பரவலை தீர்மானித்து மேலும் $P\,(x=15)$ கண்டுபிடி.

18. ஒரு மருந்து 100 நோயாளிகளில் மூன்று நோயாளிகளுக்கு தீவிர பக்க விளைவுகளை ஏற்படுத்துகிறது என அனுமானம் செய்க. சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கும் 10 நோயாளிகளில் அதிகபட்சம் ஒருவருக்கு பக்க விளைவினை ஏற்படுத்துவதற்கான நிகழ்தகவினை கணக்கிடுக.

19. வைட்டமின் A குறைபாடுள்ள 5 எலிகளை ஒரே கூண்டில் இருந்து எடுக்கப்பட்டு அதற்கு அளவாக கேரட் ஊட்டப்படுகிறது. நோயிலிருந்து மீண்டு வருவது என்பது நேர்மறை எதிர்வினையாகும். அதனுடைய நிகழ்தகவானது 0.73 ஆகும். அவ்வாறெனில் குறைந்தபட்சம் மூன்று எலிகள் குறைபாடுகளில் இருந்து மீண்டு வருவதற்கான நிகழ்தகவினை கூறுக.

20. ஒரு சோதனையில் வெற்றிக்காண வாய்ப்பு தோல்விக்கான வாய்ப்பைபோல் இருமடங்கு எனில் அடுத்து வரும் ஐந்து முயற்சிகளில் (i) சரியாக மூன்று வெற்றிகள் (ii) குறைந்தபட்சம் மூன்று வெற்றிகள் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன

7.1.2 பாய்சான் பரவல் (Poisson Distribution)

பிரெஞ்சு கணித மேதையான சைமன் டெனிஸ் பாய்சான் எனபவர் 1837 ஆம் வருடம் பாய்சான் பரவலை வரையறுத்தார். ஈருறுப்புப் பரவலில் வரும் 'n'இன் மதிப்பு பெரியதாக இருக்குமெனில் நிகழ்தகவு கணக்கீடு செய்வது மிகவும் சிக்கலாக இருக்கும். இம்மாதிரியான சூழலில் ஈருறுப்புப் பரவல் நிகழ்தகவுகளில் ஓர் எளிய உத்தேச கணக்கீட்டினைப் பயன்படுத்தலாம். அந்த ஈருறுப்புப் பரவலின் உத்தேசக் கணக்கீடு என்பது 'n' பெரிதாக மற்றும் p என்பது பூஜ்யத்திற்கு நெருக்கமாக இருப்பதாக நிறுவினார். அதனைப் பாய்சான் பரவல் என்று அழைக்கின்றோம்.

பாய்சான் பரவலின் நிகழ்வுகள் திட்டவட்டமான எண்ணிக்கையினைக் கொண்ட சோதனையில் நடைபெறாது. அரிதான சோதனையில் நிகழக்கூடியதாகும். மேலும், கீழ்க்காணும் எடுத்துக்காட்டுகள் சிலவற்றினை ஆய்வு செய்யலாம் :

(i) ஒரு கன செ.மீ இல் உள்ள நுண்ணுயிர்களின் எண்ணிக்கை.

(ii) தட்டச்சு செய்யப்பட்ட ஒரு பக்கத்தில் உள்ள தட்டச்சுப்பிழைகளின் எண்ணிக்கை.

(iii) ஒரு நொடிக்குள் கதிரியக்கப் பொருளிலிருந்து வெளிப்படுகின்ற ஆல்ஃபா துகள்களின் எண்ணிக்கை.

(iv) ஒரு நாளில் குறிப்பிட்ட இடைவெளி நேரத்தில் கடக்கும் பேருந்துகளின் எண்ணிக்கை.

(v) ஒரு வினாடியில் ஏற்படும் மின்னலின் எண்ணிக்கை.

பாய்சான் பரவல் ஈருறுப்புப் பரவலின் எல்லையாக இருப்பதற்கான நிபந்தனைகள்

(i) முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை வரையறுக்க இயலாத நிலையில் அதிகமாக இருக்கும். அதாவது $n \to \infty$.

(ii) ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு மிகவும் சிறியதாக இருக்கும். அதாவது $p \to 0$

(iii) $np = \lambda$ இது ஒரு முடிவுறு எண். $p = \dfrac{\lambda}{n}$, $q = 1 - \left(\dfrac{\lambda}{n}\right)$ மேலும் λ என்பது நேர்மறை மெய்யெண் ஆகும்.

வரையறை 7.2

X என்ற சமவாய்ப்பு மாறி பாய்சான் பரவலை பின்பற்றி அதனுடைய பண்பளவையான λ என்பது குறையற்ற மதிப்பினைப் பெற்றிருப்பின், அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பினை பின்வருமாறு வரையறை செய்யலாம்.

$P(x, \lambda) = P(X=x)$

$$= \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, & x = 0,1,2\ldots\ldots;\lambda > 0 \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

பாய்சான் பரவலின் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டினை வருவித்தல்

சராசரி $E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x\, p(x,\lambda)$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\left\{\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}\right)\right\}$$

$$= \lambda e^{-\lambda}(1 + \lambda + \lambda^2/2! + \ldots\ldots)$$

$$= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda}$$

$$= \lambda$$

மாறுபாட்டளவை $(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 p(x,\lambda)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 p(x,\lambda)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \{x(x-1) + x\}\, p(x,\lambda)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \{x(x-1) + x\} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\, \lambda^x/x! + \sum_{x=0}^{\infty} x\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda$$

மாறுபாட்டளவை $(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$= \lambda^2 + \lambda - (\lambda)^2$$

$$= \lambda$$

பாய்சான் பரவலின் பண்பு :

1. சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டளவை சமமாக உள்ள ஒரே பரவல், பாய்சான் பரவல் மட்டுமே.

எடுத்துக்காட்டு 7.14

பாய்சான் பரவலின் முதல் நிகழ்தகவு மதிப்பு 0.2725 எனில் அதற்கு அடுத்த நிகழ்தகவு மதிப்பினைக் காண்க.

தீர்வு :

$p(0) = 0.2725$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$$\frac{e^{-\lambda}\lambda^{0}}{0!} = 0.2725$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda} = 0.2725$$

$$\lambda = 1.3$$

(அடுக்கு அட்டவணையை பயன்படுத்தி)

$$\therefore p(X=1) = e^{-1.3}(1.3)/1!$$

$$= e^{-1.3}(1.3)$$

$$= 0.2725 \text{ x } 1.3$$

$$= 0.3543$$

எடுத்துக்காட்டு 7.15

520 பக்கங்களைக் கொண்ட புத்தகத்தில், 390 தட்டச்சுப் பிழைகள் உள்ளன. பாய்சான் வழியினை அனுமானித்து சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப் பட்ட 5 பக்கங்களில் பிழையே இல்லாமல் இருப்பதற் கான நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு :

புத்தகத்தில் சராசரியாக ஒரு பக்கத்திற்கு ஏற்படும் தட்டச்சுப் பிழைகள்

$$\lambda = (390/520) = 0.75.$$

பாய்சான் நிகழ்தகவு விதிப்படி, பக்கத்திற்கு x பிழைக்கான நிகழ்தகவு

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} =$$

$$e^{-0.75}\frac{(0.75)^{x}}{x!}, \; x = 0,1,2,3\ldots\ldots$$

5 பக்கங்களில் பிழையே இல்லாமல் இருப்பதற்குத் தேவையான நிகழ்தகவு :

$$[P(X{=}0)]^{5} = \left(e^{-0.75}\right)^{5} = e^{-3.75}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.16

ஒரு காப்பீட்டு நிறுவனம், 0.1 சதவீத மக்கள் மட்டுமே ஒவ்வொரு வருடமும் விபத்துக்கு உட்படு கிறார்கள் என்பதைக் கணிக்கின்றனர். காப்பீடு செய்துள்ள 10,000 பாலிசிதாரர்களை சம வாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கும் பட்சத்தில் அடுத்து வரக் கூடிய ஆண்டில் 5–க்கு மிகாமல் வாடிக்கையாளர்கள் விபத்துக்குள்ளாவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? ($e^{-10} = .000045$)

தீர்வு :

p = வாடிக்கையாளர் ஒருவர் ஒரு வருடத்தில் விபத்துக்குள்ளாவதற்கான நிகழ்தகவு

$$= 0.1/100 = 1/1000$$

இங்கு $n = 10{,}000$

ஆகையால், $\lambda = np = 10000\left(\frac{1}{1000}\right) = 10$

5-க்கு மிகாமல் வாடிக்கையாளர்கள் விபத்துள்ளா வதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(X \le 5) = P(X{=}0)+P(X{=}1)+P(X{=}2)+P(X{=}3)+P(X{=}4)+P(X{=}5)$$

$$= e^{-10}\left[1+\frac{10}{1!}+\frac{10^{2}}{2!}+\frac{10^{3}}{3!}+\frac{10^{4}}{4!}+\frac{10^{5}}{5!}\right]$$

$$= 0.06651$$

எடுத்துக்காட்டு 7.17

1/5 சதவீத பிளேடுகள் பழுதானவை என்று பிளேடுகளின் உற்பத்தியாளர் தெரிவிக்கிறார். ஒவ்வொரு அட்டை பெட்டியிலும் 10 பிளேடு அடைத்து விற்பனைக்கு வருகிறது. சரக்குப் பெட்டியில் இருக்கும் 1,00,000 பாக்கெட்டுகளை பாய்சான் பரவலைக் கொண்டு தோராயமாக எத்தனை பாக்கெட்டுகள்

(i) பழுதற்ற பிளேடுகள்

(ii) பழுதுள்ள ஒரு பிளேடு

(iii) பழுதுள்ள இரண்டு பிளேடுகள் கொண்டிருக்கும் என்பதனை கணக்கிடுக.

($e^{-0.02}$ =.9802)

தீர்வு :

$P = 1/5/100 = 1/500 = 0.002 \quad n = 10. \quad \lambda = np = 0.02$

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \frac{e^{-0.02}(0.02)^{x}}{x!}$$

(i) பழுதற்ற பிளேடுகளைக் கொண்ட அட்டை பெட்டி களின் எண்ணிக்கை

$= N \times p(o) = 1,00,000 \times e^{-0.02}$

$= 98020$

(ii) பழுதுள்ள ஒரு பிளேடு கொண்ட அட்டைப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை

$= N \times p(1) = 1,00,000 \times 0.9802 \times 0.02$

$= 1960$

(iii) பழுதற்ற இரண்டு பிளேடுகள் கொண்ட பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை

$= N \times p(2) =$ 1,00,0007 x .0002

$= 20$

எடுத்துக்காட்டு 7.18

ஒரு மனிதனுக்கு ஊசியின் மூலமாக செலுத்தப்படும் மருந்து எதிர் விளைவினை ஏற்படுத்துவதற்கான நிகழ்தகவு 0.001 ஆகும். 2000 நபர்களில் (அ) மூன்று நபருக்கு மட்டும் (ஆ) இரண்டு நபருக்குக் குறைவில்லாமல் மாறுபட்ட விளைவுகள் ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவினைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

ஊசிமூலம் மருந்து எடுத்துக்கொள்ளும் 2000 தனிநபர்களைக் கருத்தில் கொள்க. $n = 2000$

x=0,1,2,...2000

தனிநபர் எதிர்விளைவால் பாதிக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு p என்க. $p = 0.001$

$\therefore\ q = 1 - p = 1 - 0.001 = 0.999$

இங்கு n பெரியதாகவும் p சிறியதாகவும் உள்ளதால் இது பாய்சான் பரவலுக்கு உட்பட்டுள்ளது.

$$\lambda = np = 2000 \times 0.001 = 2$$

(i) 2000, பேரில் சரியாக, 3 நபர்கள் எதிர்விளைவால் பாதிக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(X=3) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-2}2^3}{3!} = 0.1804$$

(ii) 2000, பேரில் 2 தனி நபர்களுக்கு மேல் எதிர் விளைவால் பாதிக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$= P(X > 2)$$

$$= 1 - [(P(X \le 2)]$$

$$= 1 - [P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)]$$

$$= 1 - \left[\frac{e^{-2}2^0}{0!} + \frac{e^{-2}2^1}{1!} + \frac{e^{-2}2^2}{2!}\right]$$

$$= 1 - e^{-2}\left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!}\right)$$

$$= 0.323$$

எடுத்துக்காட்டு 7.19

இரத்தத்தில் சிவப்பு அணுக்களின் எண்ணிக்கையினைக் கணக்கிடுவதற்கு ஒரு சதுர கட்டத்தில் ஒரு துளி இரத்த மாதிரி சீராக பரப்பப்படுகிறது. நுண்நோக்கியின் வழியாக கண்காணித்ததில் சராசரியாக 8 சிவப்பு அணுக்கள் ஒரு சதுரத்தில் இருப்பதாக உறுதி செய்யபபடுகிறது. அவ்வாறு இருப்பின் சரியாக 5 சிவப்பு அணுக்கள் ஒரு சதுரத்தில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு :

இரத்த சிவப்பு அணுக்களின் எண்ணிக்கை சமவாய்ப்பு மாறி X என்க.

சராசரி $\lambda = 8$ சிவப்பு அணுக்கள் / ஒரு சதுரத்திற்கு

P (ஒரு சதுரத்தில் சரியாக 5 சிவப்பணுக்கள்)

$$= P(X=5) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-8}8^5}{5!}$$

$$= \frac{0.000335 \times 32768}{120}$$

$$= 0.0916$$

ஒரு சதுரத்தில் சரியாக 5 சிவப்பணுக்கள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.0916. அதாவது ஒரு சதுரத்தில் சரியாக 5 சிவப்பணுக்கள் இருப்பதற்கான வாய்ப்பு 9.16% ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.20

இரட்டை குழந்தைகள் பிறப்பதற்கான வாய்ப்பு 80 பிறப்புகளில் ஒன்று எனக்கொண்டால், ஒரு நாளில் பிறக்கும் 30 குழந்தைகளில் இரண்டு அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட இரட்டையர் பிறப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

P (இரட்டை குழந்தைகள்) $= p = 1/80 = 0.0125$

மற்றும் $n = 30$

$$\lambda = np = 30 \times 0.0125 = 0.375$$

X ஆனது பாய்சான் பரவலை பின்பற்றுகிறது

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

P (2 அல்லது அதற்கு மேல்) $= 1 - [p\,(x = 0) +$

$$p(x=1)] = 1 - \left[\frac{e^{-0.375}(0.375)^{0}}{0!} + \frac{e^{-0.375}(0.375)^{1}}{1!}\right]$$

$$= 1 - e^{-0.375}\ [1+0.375]$$

$$= 1 - (0.6873 \times 1.375)$$

$$= 0.055$$

பயிற்சி 7.2

1. வரையறு: பாய்சான் பரவல்.
2. பாய்சான் பரவலுக்கான இரு எடுத்துக்காட்டு களை எழுதுக.
3. பாய்சான் பரவலானது ஈருறுப்புப் பரவலின் எல்லையாக அமைவதற்கான கட்டுப்பாடுகளை எழுதுக.
4. பாய்சான் பரவலின் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டை வருவி.
5. பாய்சான் பரவலின் பண்புளைக் குறிப்பிடுக.
6. நோய் தாக்கத்தினால் இறப்பின் விகிதம் 1000 பேருக்கு 7 நபர் வீதம் என்று இருக்குமானால் 400 நபருக்கு 2 நபர் வீதம் நோயின் தாக்கம் ஏற்படுத்தும் இறப்பிற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க ($e^{-2.8} = 0.06$)
7. ஒரு நிறுவன தயாரிப்புகளில் 5% குறைபாடுள்ள மின்விளக்குகள் தயாரிக்கப்படுவதாக அறிகிறார்கள். பாய்சான் பரவலை பயன்படுத்தி, 120 மின்விளக்குகள் கொண்ட கூறு தொகுதியில் குறைபாடற்ற மின்விளக்குகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் கணக்கிடுக.
8. மகிழுந்துகளை வாடகைக்கு அனுப்பும் ஒரு நிறுவனம், இரண்டு மகிழுந்துகளைக் கொண்டுள்ளது. ஒவ்வொரு நாள் வாடகைக்கும் தேவைப்படும் மகிழுந்து பாய்சான் பரவலைப் பின்பற்றுகின்றது. அதன் சராசரி 1.5 என்று கணக்கிடப் பட்டுள்ளது எனில்,
   (i) இரண்டு மகிழுந்துகளும் தேவை இல்லை.
   (ii) சில தேவைகள் ஏற்க்கப்படவில்லை என்ற நிலைகளில் நாள்களின் விகிதத்தை கணக்கிடுக.
9. ஒரு நிறுவனதிற்கு காலை 10.00 மணியில் இருந்து மதியம் 2.30 மணி வரை வரும் தொலைபேசி அழைப்புகளின் எண்ணிக்கை சராசரியாக ஒரு நிமிடத்திற்கு 2.5 ஆகும். ஒரு குறிப்பிட்ட நிமிடத்தில் (i) அழைப்புகள் இல்லை (ii) சரியாக 3 அழைப்புகள் மட்டும் (iii) குறைந்த பட்சம் 5 அழைப்புகள் வருவதற்கான நிகழ் தகவினை காண்க.
10. ஒரு நகரத்தில் நடக்கும் சாலை விபத்துகளின் எண்ணிக்கை பாய்சான் பரவலைக் கொண்டுள்ளது. விபத்துக்களின் சராசரி 4 ஆகும். நூறு நாள்களில் (i) விபத்து இல்லாத நாள்கள் (ii) குறைந்தபட்சம் 2 விபத்துக்கள் ஏற்படும் நாள்கள் (iii) அதிக பட்சம் 3 விபத்துக்கள் ஏற்படும் நாள்கள் ஆகிய வற்றுக்கான நிகழ்தகவினைக் கணக்கிடுக.
11. ஒரு தொழிற்சாலையில் நடக்கும் அபாயகர மான விபத்துகளின் எண்ணிக்கை 1/1200 ஆகும். 300 தொழிலாளர்கள் வேலை செய்யும் தொழிற்சாலையில் குறைந்தபட்சம் 2 அபாய கரமான விபத்து ஒரு வருடத்தில் ஏற்படுவதற் கான நிகழ்தகவினைக் கூறுக.
12. வங்கிக்கு வரும் வாடிக்கையாளர்களின் எண்ணிக்கை சராசரியாக ஒரு நிமிடத்திற்கு இரண்டு ஆகும். ஒரு நிமிடத்தில் (i) வாடிக்கை யாளர் எவரும் வரவில்லை (ii) 3 அல்லது அதற்கு மேல் வாடிக்கையாளர் வருவதற்கான நிகழ்தகவினைக் கண்டறிக.

தொடர்ச்சியான பரவல்

தனித்த மாறிப் பரவல்களான ஈருறுப்புப் பரவல் மற்றும் பாய்சான் பரவல் இரண்டையும் இதற்கு முந்தைய பகுதியில் நாம் விளக்கமாக அறிந்தோம். இப்பகுதியில் முக்கியமான தொடர் மாறிப் பரவலைப் பற்றி காண்போம். இத்தொடர் மாறிப்பரவலை இயல்நிலை நிகழ்தகவுப் பரவல் அல்லது இயல்நிலைப் பரவல் என்று அழைக்கிறோம். புள்ளியியல் கோட்பாடுகளில் முக்கியப்பங்கு வகிப்பதால் இப்பரவல் மிகவும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது. முதன்முதலாக 1733 இல் ஆங்கில கணிதமேதை டீ மாய்வர் என்பவர் ஈருறுப்புப் பரவலின் எல்லை நிலையாகக் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலைக் கண்டுபிடித்தார். பின்னர் பிரஞ்சுக் கணிதமேதை லாப்லாஸ் (1749 – 1827) எனபவரும் கார்ல் பிரிடெரிக் காஸியன் (1827 -1855) என்பவரும் சேர்ந்து உருவாக்கி இயல்நிலைப் பரவல் என்று அழைத்தனர்.

7.1.3 இயல்நிலைப் பரவல்

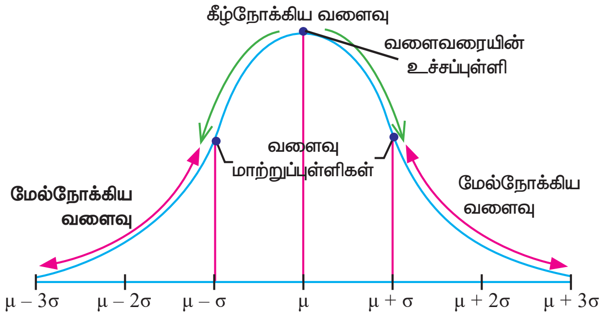
வரையறை 7.3

சராசரி μ மற்றும் மாறுபாட்டளவை σ^2 ஆகியவற்றைப் பண்பளவைகளாகக் கொண்ட x என்ற சமவாய்ப்பு மாறி இயல்நிலைப் பரவலைப் பெற்றிருக்கிறது எனில் அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x : \mu, \sigma)$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} \quad \begin{array}{r} -\infty < x < \infty, \\ -\infty < \mu < \infty, \\ \sigma > 0 \end{array}$$

என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.

இயல்நிலைப் பரவலின் வரைபடம் பின்வருமாறு :



இயல்நிலை பரவலின் வரைபடம்

படம் 7.1

ஆகையால் இயல்நிலை வளைவரையானது மணி வடிவ வளைவரை என அழைக்கப்படுகிறது.

(i) முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை 'n' ஆனது மிகப் பெரிய முடிவுறா எண்ணாக ($n \to \infty$)அமைகிறது.

(ii) p, q ஆகியவை மிகச்சிறியவை அல்ல.

வரைபடம் வாயிலாகக் குறிக்கப்படும் இயல் நிலைப் பரவலானது இருபுறமும் சமச்சீர் வடிவம் பெற்று இயல்நிலை நிகழ்தகவு வளைவரை என்றழைக்கப்படும். மேலும் X – அச்சில் வளை வரையானது தொலைத் தொடுகோடாக இருபுறமும் வலது மற்றும் இடது புறமாகச் செல்லும்.

இயல்நிலை நிகழ்தகவுப் பரவல் மற்றும் இயல்நிலை நிகழ்தகவு வளைவரை ஆகியவற்றின் முதன்மை சிறப்பியல்புகள் அல்லது பண்புகள்

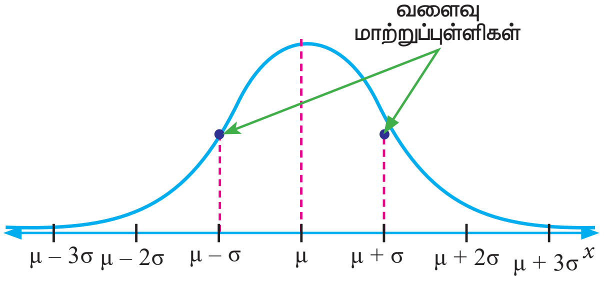
இயல்நிலை நிகழ்தகவு வளைவரை அதன் சராசரி μ மற்றும் திட்டவிலக்கம் σ கீழ்க்காணும் பண்புகளைப் பெற்றிருக்கின்றது :

(i) இயல்நிலைப் பரவலின் வளைவரையானது மணி வடிவில் உள்ளது மேலும் $x=\mu$ என்பதனைப் பொருத்து சமச்சீரானது.

(ii) பரவலின் சராசரி, இடைநிலை மற்றும் முகடு மூன்றும் ஒன்றுகின்றன.

(iii) x – அச்சானது வளைவரைக்கு ஒரு தொலைத் தொடுகோடாக அமைகிறது. (வளைவரை யானது X– அச்சினைத் தொடர்ந்து சென்றாலும் X – அச்சினைத் தொடாமல் இணையாகச் செல்லும்)

(iv) $f(x)$ என்பது நிகழ்தகவு சார்பாக உள்ளதால் வளைவரையின் எப்பகுதியும் x–அச்சின் கீழ்ப்புறம் அமையாது.



படம் 7.2

(v) வளைவரையின் வளைவு மாற்றுப் புள்ளிகள் $x = \mu \pm \sigma$ இல் அமையும்.

(vi) இயல்நிலைப் பரவலின் வளைவரைக்கு ஒற்றை உயரம், அதாவது அந்த புள்ளியில் ஒரு முகடு மட்டும் இருக்கும்.

(vii) x இன் மதிப்பு எண்ணளவில் அதிகரிக்கும்போது $f(x)$ ஆனது வேகமாகக் குறைந்து $x = \mu$ இல் மீப்பெரு நிகழ்தகவு நிகழ்ந்து நிலைத் தூரம் (உயரம்) $[p(x)]\max = 1/\sigma\sqrt{2\pi}$ கிடைக்கிறது.

(i) இயல்நிலை வளைவரையின் கீழ் அமையும் மொத்த பரப்பு ஒன்று மற்றும் இயல்நிலை வளைவரையின் கீழ் அமையும் சதவீத பங்கீடு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

(a) $\mu - \sigma$ மற்றும் $\mu + \sigma$ –க்கு இடையில் அமையும் பரப்பு 68.27% (தோராயமாக)

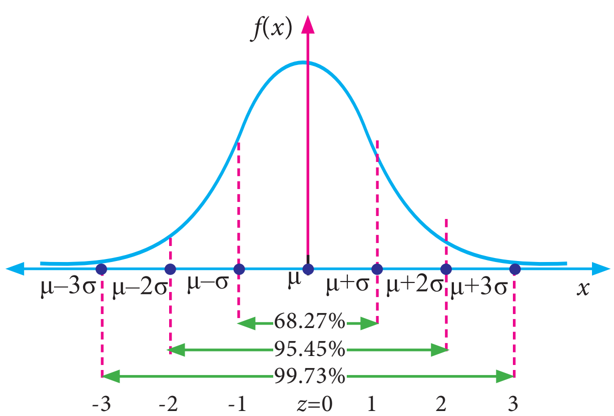
$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6826$$

(b) $\mu - 2\sigma$ மற்றும் $\mu + 2\sigma$ –க்கு இடையில் அமையும் பரப்பு 95.5% (தோராயமாக)

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9544$$

(c) $\mu - 3\sigma$ மற்றும் $\mu + 3\sigma$ –க்கு இடையில் அமையும் பரப்பு 99.7% (தோராயமாக)

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9973$$



படம் 7.3

திட்ட இயல்நிலை பரவல்

சமவாய்ப்பு மாறி $Z = (X-\mu)/\sigma$ என்பது திட்ட இயல்நிலை பரவலைப் பின்பற்றுமானால் Z என்பது திட்ட இயல்நிலை மாறி என அழைக்கப்படுகிறது. மேலும் அதனுடைய சராசரி 0 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 1 ஆகும் அதாவது $Z \sim N(0,1)$

அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு :

$$(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad -\infty < z < \infty$$

1. திட்ட இயல்நிலை வளைவரையின் கீழ் அமையும் பரப்பு ஒன்று.
2. திட்ட இயல்நிலை வளைவரையின் கீழ் $z = -1$ இலிருந்து $z = 1$ வரை அமையும் பரப்பு 68.26% ஆகும்.

   $Z = -2$ இலிருந்து $Z = 2$ வரை அமையும் பரப்பு 95.44% ஆகும்.

   $Z = -3$ இலிருந்து $Z = 3$ வரை அமையும் பரப்பு 99.74% ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.21

கீழ்க்காணும் இயல்நிலை மாறியின் நிகழ்தகவினைக் காண்க.

(i) $Z = 1.09$ க்கு வலப்புறம் அமையும் பரப்பு காண்க

(ii) $Z = -1.65$ க்கு இடப்புறம் அமையும் பரப்பைக் காண்க.

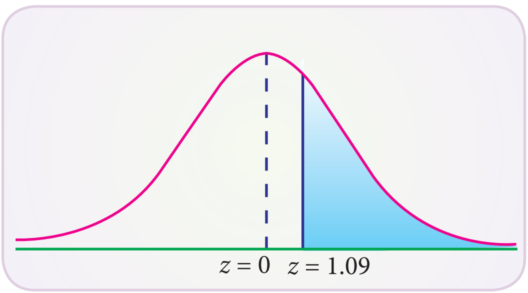
(iii) திட்ட இயல்நிலை மாறியின் மதிப்பு $Z = -1.00$ மற்றும் $Z = 1.96$ க்கு இடைப்பட்ட பரப்பைக் காண்க.

(iv) திட்ட இயல்நிலை மாறியின் மதிப்பு $Z = -1.00$ மற்றும் $Z = 1.96$ க்கு இடைப்பட்ட பரப்பைக் காண்க

(v) திட்ட இயல்நிலை மாறியின் மதிப்பு $Z = 1.25$ மற்றும் $Z = 2.75$ க்கு இடைப்பட்ட பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

(i) 1.09 க்கு மேலாக



படம் 7.4

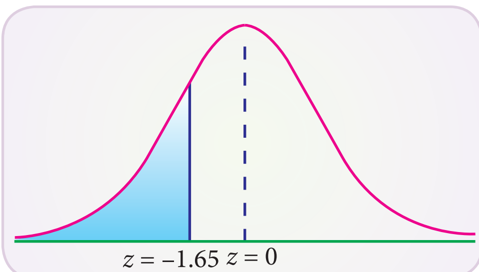
வளைவரையின் கீழ் அமையும் மொத்த பரப்பு 1 என்பதால் $Z = 0$ –க்கு வலது புறம் அமையும் பரப்பு 0.5 (வளைவரை சமச்சீரானது)

$Z = 0$ மற்றும் 1.09 –க்கு இடைப்பட்ட பரப்பு 0.3621 (அட்டவணையிலிருந்து)

$P(Z > 1.09) = 0.5000 - 0.3621 = 0.1379$

$Z = 1.09$–க்கு வலதுபுறமாக நிழலிடப்பட்ட பரப்பு என்பது $P(Z > 1.09)$

(ii) -1.65 –க்கு குறைவாக



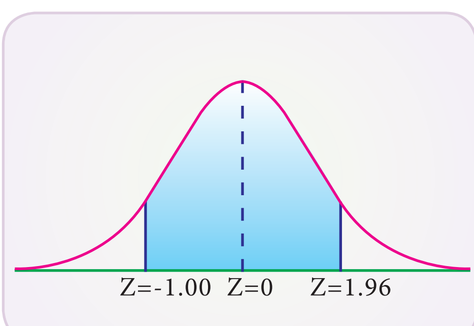
படம் 7.5

-1.65 மற்றும் 0–க்கு இடைப்பட்ட பரப்பும் 0- மற்றும் 1.65 -க்கு இடைப்பட்ட பரப்பும் சமம். அட்டவணையில் 0 மற்றும் 1.65 இடைப்பட்டபரப்பு 0.4505 ஆகும்.

$Z = 0$–க்கு இடப்புறம் உள்ள பரப்பு 0.5 என்பதால்,

$P(Z<-1.65) = 0.5000 - 0.4505 = 0.0495.$

(iii) -1.00 மற்றும் 1.96–க்கு இடையே



படம் 7.6

$Z = -1.00$ மற்றும் 1.96–க்கு இடையே அமையும் சமவாய்ப்பு மாறி Z–ன் நிகழ்தகவை ஒத்த பரப்புகளைக் கூட்டுவதன் மூலம் காணலாம்.:

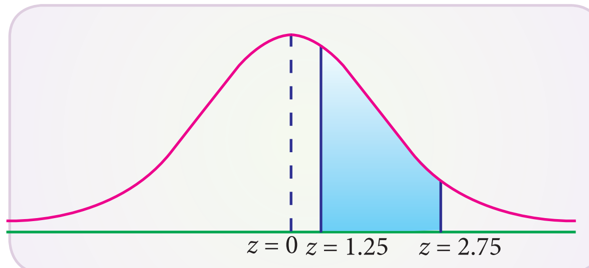
-1.00 மற்றும் 1.96–க்கு இடைப்பட்ட பரப்பு = -1.00 மற்றும் 0–க்கு இடைப்பட்ட பரப்பு + 0 மற்றும் 1.96-க்கு இடைப்பட்ட பரப்பு

$P(-1.00 < Z < 1.96) = P(-1.00 < Z < 0) + P(0 < Z < 1.96)$

$= 0.3413 + 0.4750$ (அட்டவணையிலிருந்து)

$= 0.8163$

(iv) 1.25 மற்றும் 2.75 –க்கு இடையே



படம் 7.7

$Z = 1.25$ மற்றும் 2.75–க்கு இடைப்பட்ட பரப்பு =

($z = 0$ மற்றும் $z = 2.75$ –க்கு இடைப்பட்ட பரப்பு)

– (z=0 மற்றும் $z = 1.25$) க்கு இடைப்பட்ட பரப்பு

$P(1.25 < Z < 2.75) = P(0 < Z < 2.75) - P(0 < Z < 1.25)$

$= 0.4970 - 0.3944 = 0.1026$

எடுத்துக்காட்டு 7.22

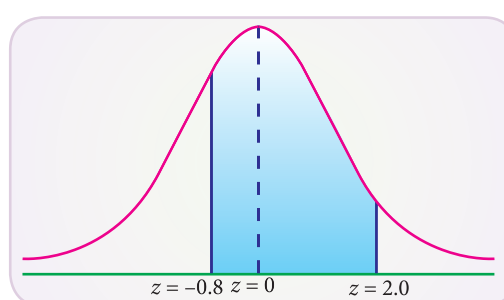
இயல்நிலைப் பரவலின் சராசரி 30 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 5 எனில் (i) $26 \le X \le 40$ (ii) $X > 45$ ஆகிய பரப்பினை காண்க.

தீர்வு :

இங்கு சராசரி $\mu = 30$ மற்றும் திட்டவிலக்கம் $\sigma = 5$

(i) $X = 26$ எனில், $Z = (X - \mu)/\sigma = (26 - 30)/5$
$= -0.8$

மற்றும் $X = 40$ எனில், $Z = \dfrac{40 - 30}{5} = 2$



படம் 7.8

ஆகையால்,

$P(26<X<40)\,) = P(-0.8 \le Z < 2)$

$= P(-0.8 \le Z \le 0) + p(0 \le Z \le 2)$

$= P(0 \le Z \le 0.8) + P(0 \le Z \le 2)$

$= 0.2881 + 0.4772$

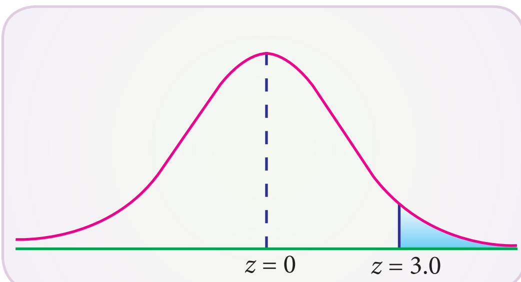
(அட்டவணையிலிருந்து)

$= 0.7653$

(ii) $X \ge 45$ எனும் போது நிகழ்தகவு

$X = 45$ எனில்,

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{45-30}{5} = 3$$



படம் 7.9

$P(X \ge 45) = P(Z \ge 3)$

$= 0.5 - 0.49865$

$= 0.00135$

எடுத்துக்காட்டு 7.23

ஒரு நிறுவனத்தின் 550 கிளை அலுவலகத்தின் சராசரி வியாபாரமானது தினமும் ₹150 ஆயிரம் மற்றும் திட்டவிலக்கம் ₹ 15 ஆயிரமாகும். இயல்நிலைப் பரவலைக் கொண்டு எத்தனை கிளைகளில் எவ்வளவு விற்பனை நடைபெற்றது என்பதனை அறிக.

(i) ₹ 1,25,000 மற்றும் ₹ 1,45,000

(ii) ₹ 1,40,000 மற்றும் ₹ 1,60,000

தீர்வு :

சராசரி $\mu = 150$ மற்றும் திட்டவிலக்கம் $\sigma = 15$

(i) $X = 125$ ஆயிரம் எனில்

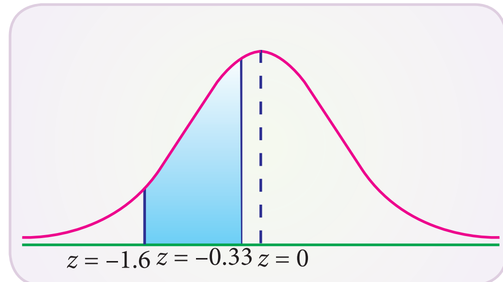
$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{125-150}{15} = -1.667$$

$X = 145$ ஆயிரத்தில் எனில்

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{145-150}{15} = -0.33$$

$Z = 0$ மற்றும் $Z = -1.67$ –க்கு இடைப்பட்ட பரப்பளவு 0.4525

$Z = 0$ மற்றும் $Z = -0.33$ –க்கு இடைப்பட்ட பரப்பளவு 0.1293.



படம் 7.10

$P(-1.667 \le Z \le -0.33) = 0.4525 - 0.1293$

$= 0.3232$

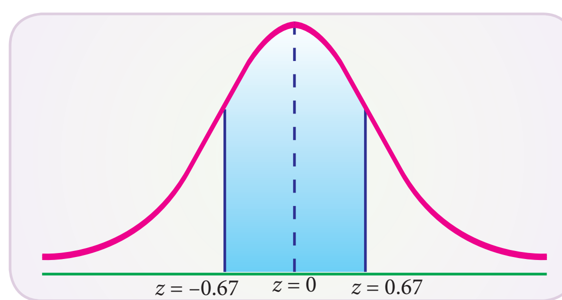
125 ஆயிரத்திற்கு மற்றும் 145 ஆயிரத்திற்கும் இடைப்பட்ட விற்பனையைப் பெற்ற கிளைகளின் எண்ணிக்கை $550 \times 0.3232 = 178$

(ii) $X = 140$ ஆயிரம் எனில்

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{140-150}{15} = -0.67$$

$X = 160$ ஆயிரம் எனில்

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{160-150}{15} = 0.67$$



படம் 7.11

$P(-0.67 < Z < 0.67) = P(-0.67 < Z < 0) + P(0 < Z < 0.67)$

$= P(0 < Z < 0.67) + P(0 < Z < 0.67)$

$= 2\,P(0 < Z < < 0.67)$

$= 2 \times 0.2486$

$= 0.4972$

₹ 140 ஆயிரத்திற்கு மற்றும் ₹ 160 ஆயிரத்திற்கும் இடைப்பட்ட விற்பனையைப் பெற்ற கிளைகளின் எண்ணிக்கை $= 550 \times 0.4972 = 273$.

எடுத்துக்காட்டு 7.24

ஒரு பள்ளியில் பயிலும் குழந்தைகளின் சராசரி உயரமானது 69.25 செ.மீ மற்றும் மாறுபாட்டளவை 10.8 செ.மீ எனக் கொண்டால் 1200 குழந்தைகளில் 74 செ.மீ க்கும் அதிக உயரம் கொண்ட குழந்தைகள் எத்தனை பேர் இருப்பார்கள் என்பதனை கணக்கிடுக.

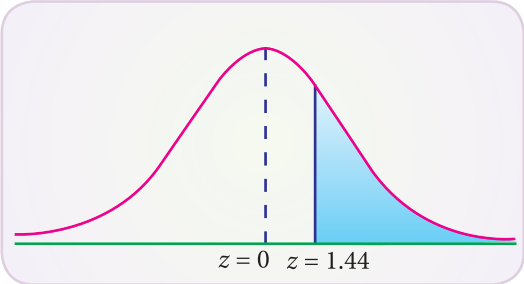
தீர்வு

உயரங்களின் பரவல் இயல்நிலைப்பரவலை ஒத்துள்ளது என்க. சராசரி 69.25 மற்றும் திட்ட விலக்கம் 3.286.

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-69.25}{3.286}$$

எனில் , $X = 74$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{74-69.25}{3.286} = 1.4455$$



படம் 7.12

இப்பொழுது $P(Z > 74) \quad = P(Z > 1.44)$

$= 0.5 - 0.4251$

$= 0.0749$

1200 குழந்தைகளில் 74 செ.மீட்டருக்கு மேலாக உள்ள குழந்தைகளில் எதிர்பார்க்கபடும் எண்ணிக்கை.

$= 1200 \times 0.0749 \approx 90$ குழந்தைகள் (தோராயமாக)

எடுத்துக்காட்டு 7.25

ஒரு தேர்வில் மதிப்பெண் பெறுதல் என்பதனை இயல்நிலை பரவல் கொண்டு பார்க்கபடுமானால் அதன் சராசரி 45 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 10 ஆகும். 1300 மாணவர்கள் தேர்வு எழுதுகிறார்கள் எனில், எத்தனை மாணவர்கள் (i) 35 மதிப்பெண்ணிற்கும் குறைவாக (ii) 65 மதிப்பெண்ணிற்கும் அதிகமாக, தேர்ச்சி பெறுகிறார்கள் என்பதனைக் கணக்கிடுக.

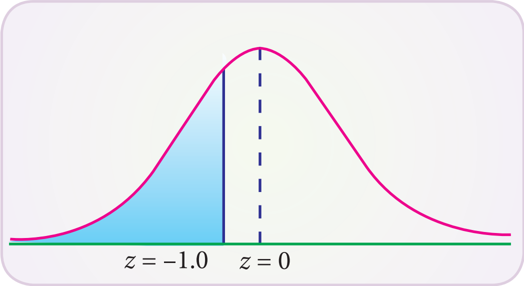
தீர்வு :

X என்ற இயல்நிலைமாறி மாணவர்களின் மதிப்பெண்களின் சராசரி 45 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 10 என காட்டுகிறது என்க.

(i) 35 மதிப்பெண்களுக்கும் குறைவாக

$X = 35$ எனும்போது

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{35-45}{10} = -1$$



படம் 7.13

$P(X < 35) = P(Z < -1)$

$P(Z > 1) = 0.5 - P(0 < Z < 1)$

$= 0.5 - 0.3413$

$= 0.1587$

35 மதிப்பெண்களுக்கும் குறைவாக பெறும் மாணவர்களின் எதிர்பார்க்கப்படும் எண்ணிக்கை

$0.1587 \times 1300 \quad = 206.31$

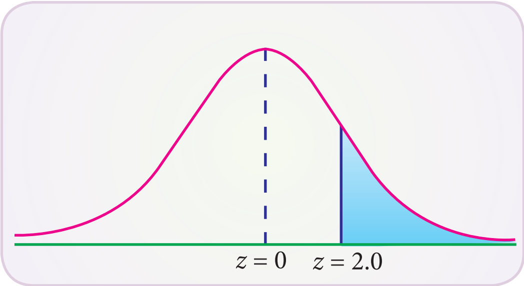
$= 206$ மாணவர்கள் (தோராயமாக)

(ii) 65 மதிப்பெண்களுக்கும் மேலாக

$X = 65$ எனும்போது

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{65-45}{10} = 2.0$$

$P(X > 65) = P(Z > 2.0)$



படம் 7.14

$0.5 - P(0 < Z < 2.0)$

$0.5 - 0.4772$

$= 0.0228$

65 மதிப்பெண்களுக்கு மேலாக பெறும் மாணவர்களின் எதிர்பார்க்கப்படும் எண்ணிக்கை $0.0228 \times 1300 = 30$ மாணவர்கள் (தோராயமாக).

எடுத்துக்காட்டு 7.26

புதிய தொழிற்சாலையில் 900 மின்விளக்குகள் பொருத்தப்படுகிறது. இயல்நிலை பரவலை கொண்ட அதனுடைய் சராசரி வாழ்நாள் என்பது 125 நாள் களாகும் மற்றும் திட்டவிலக்கமானது 18 நாள்களாகும். 95க்கும் குறைவான நாள்களில் பயனற்று போகும் என்று எதிர்பார்க்கப்படும் விளக்குகள் எத்தனை?

தீர்வு :

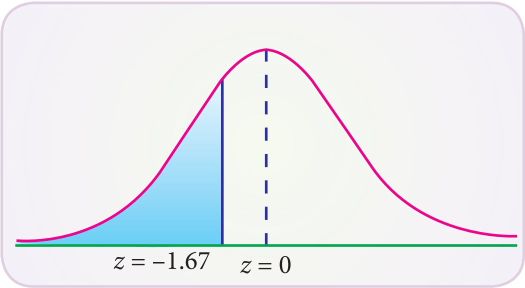
சராசரி 125 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 18 கொண்ட மின்விளக்குகளின் வாழ்நாள்.

(i) 95 நாள்களுக்கும் குறைவாக

$X = 95$ எனில்,

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{95-125}{18} = -1.667$$

$P(X < 95) = P(Z < -1.667)$



படம் 7.15

$= P(Z > 1.667)$

$= 0.5 - P(0 < Z < 1.67)$

$= 0.5 - 0.4525$

$= 0.0475$

900 மின்விளக்குகளில் 95 நாள்களுக்குள்ளாகப் பயனற்றுப்போகும் மின் விளக்குகளின் எதிர்பார்க்கப் படும் எண்ணிக்கை $900 \times .0475 = 43$ விளக்குகள்

எடுத்துக்காட்டு 7.27

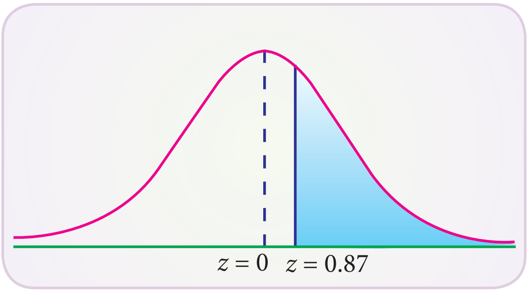
படை வீரர்களின் சராசரி உயரமானது 69.25 அங்குலம் மற்றும் மாறுபாடு 9.8 அங்குலமாகும். 6000 வீரர்கள் கொண்ட படைத்தளத்தில் 6 அடிக்கும் மேலாக உயரம் கொண்ட வீரர்களின் எதிர்ப்பார்க்கப் படும் எண்ணிக்கை யாது?

தீர்வு :

படைவீரர்களின் உயரத்தை இயல்நிலை மாறி X குறிக்கும். சராசரி = 69.25 அங்குலங்கள், திட்டவிலக்கம் = 3.13. அங்குலங்கள்

திட்ட இயல்நிலை மாறி

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{72-69.25}{3.13} = 0.8786$$



படம் 7.16

$P(X > 72) = P(Z > 0.8786) = 0.5 - P(0 < Z < 0.88) = 0.5 - 0.3106 = 0.1894$

= 6000 வீரர்களில் 6 அடிக்கு மேலாக உயரம் உள்ளவர்கள் எண்ணிக்கை

$= 6000 \times 0.1894 = 1136$ வீரர்கள் (தோராயமாக)

எடுத்துக்காட்டு 7.28

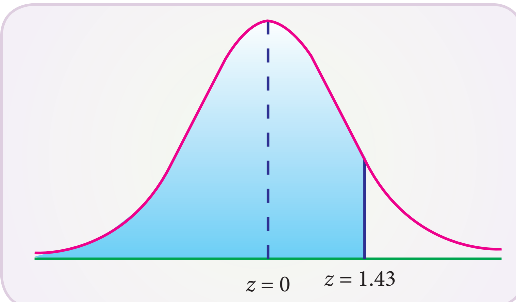
வங்கியின் மேலாளர் கண்காணித்ததில் வங்கியின் வாடிக்கையாளர்கள் காசாளரின் சேவையை பெறுவதற்குக் காத்திருக்கும் நேரமானது இயல்நிலை பரவலைக் கொண்டு சராசரியாக 5 நிமிடமும், அதன் திட்டவிலக்கமானது 0.7 நிமிடமாகும் என்று கணக்கிடப்படுகிறது. ஒரு வாடிக்கையாளர் சேவை பெறுவதற்கான (i) 6 நிமிடத்திற்கும் குறைவாக (ii) 3.5 நிமிடத்திற்கும் மற்றும் 6.5 நிமிடத்திற்கும் இடையே காத்திருப்பதற் கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

தீர்வு :

வாடிக்கையாளர்கள் வரிசையில் காத்திருக்கும் நேரத்தை X குறிக்கட்டும் இது இயல்நிலை பரவலை ஒத்த சராசரி 5 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 0.7 என்க.

(i) 6 நிமிடங்களுக்குக் குறைவாக

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{6-5}{0.7} = 1.4285$$



படம் 7.17

$P(X < 6) = P(Z < 1.43)$

$= 0.5 + 0.4236$

$= 0.9236$

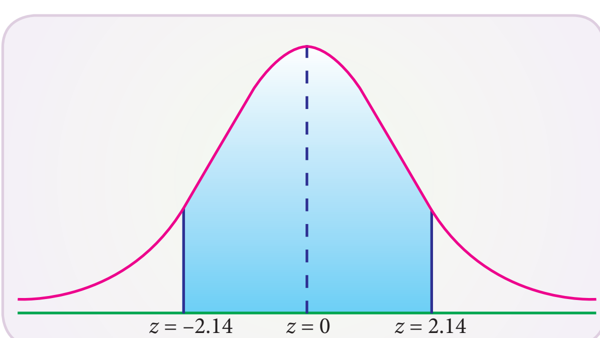
(ii) 3.5 மற்றும் 6.5 நிமிடங்களுக்கு இடையே

$X = 3.5$ எனில்

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{3.5-5}{0.7} = -2.1429$$

$X = 6.5$ எனில்

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{6.5-5}{0.7} = 2.1429$$



படம் 7.18

$P(3.5 < X < 6.5)$

$= P(-2.1429 < Z < 2.1429)$

$= P(0 < Z < 2.1429) + P(0 < Z < 2.1429)$

$= 2\,P(0 < Z < 2.1429)$

$= 2 \times .4838$

$= 0.9676$

எடுத்துக்காட்டு 7.29

ஒரு கூறில் இருந்து எடுத்த 125 உலர்ந்த மின்கலங்கள் அதனுடை ஆயுட்காலம் எத்தனை மணி நேரம் என்பதனை சோதனை முடிவுகளில் சராசரியாக 12 மணி நேரம் மற்றும் அதன் திட்ட விலக்கம் 3 மணி நேரம் என்று கணக்கிடப்பட்டுள்ளது. அதன் தரவுகள் இயல்நிலைப் பரவலைக் கொண்டது எனில், எத்தனை சதவீத மின்கலங்கள்

(i) 13 மணி நேரத்திற்கும் அதிகமாக

(ii) 5 மணி நேரத்திற்கும் குறைவாக

9 மணி நேரத்திற்கும் 14 மணி நேரத்திற்கும் இடைப்பட்ட நேரத்தில் ஒளிரும் என்பதனைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

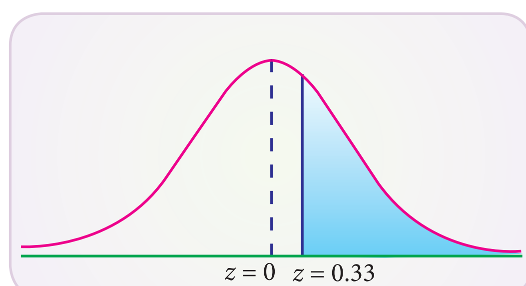
உலர் மின்கலங்களின் ஆயுட்காலம் X என்க. இது இயல்நிலைப் பரவலைப் பின்பற்றி சராசரி 12 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 3 மணி என்க.

(i) 13 மணி நேரத்திற்கும் மேலாக

$P(X > 13)$

$X = 13$ எனில்

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{13-12}{3} = 0.333$$



படம் 7.19

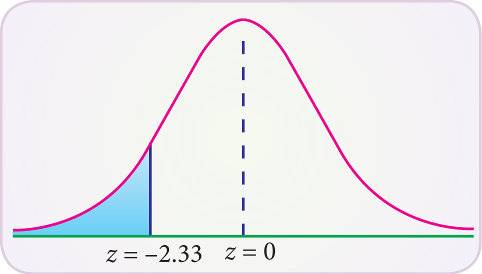
$P(X > 13) = P(Z > 0.333) = 0.5 - 0.1293 = 0.3707$

13 மணி நேரத்திற்கும் மேலாக ஆயுட்காலம் கொண்ட உலர்மின்கலங்களின் எதிர்பாக்காக்கப் படும் சதவீதம் $= 125 \times 0.3707 = 46.34\%$

(ii) 5 மணி நேரத்திற்கும் குறைவாக

$P(X < 5)$

$X = 5$ எனில், $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{5-12}{3} = -2.333$



படம் 7.20

$P(X < 5) = P(Z < -2.333) = P(Z > 2.333)$

$= 0.5 - 0.4901 = 0.0099$

5 மணி நேரத்திற்கும் குறைவாக ஆயுட்காலம் கொண்ட உலர் மின்கலங்களின் எதிர்பார்க்கப்படும் சதவீதம் $125 \times 0.0099 = 1.23\%$

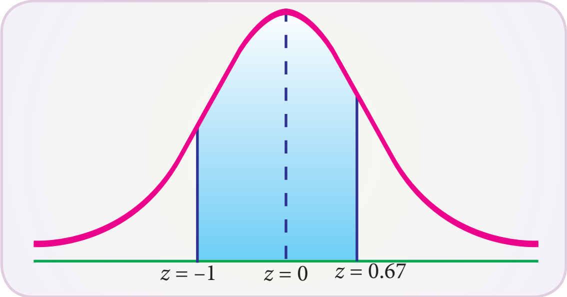
(iii) 9 மற்றும் 14 மணி நேரத்திற்கு இடையில்

$X = 9$ எனில்,

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{9-12}{3} = -1$$

$X = 14$ எனில்,

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{14-12}{3} = 0.667$$



படம் 7.21

$P(9 < X < 14) = P(-1 < Z < 0.667)$

$= P(0 < Z < 1) + P(0 < Z < 0.667)$

$= 0.3413 + 0.2486$

$= 0.5899$

9 மற்றும் 14 மணி நேரத்திற்கிடையில் ஆயுட்காலம் கொண்ட உலர் மின்கலங்களின் எதிர்பார்க்கப்படும் சதவீதம் 125 x 0.5899 =73.73%

எடுத்துக்காட்டு 7.30

ஒரு வழிப்போக்கன் பிடித்த மீனின் எடையானது தோராயமாக இயல்நிலைப்பரவலைச் சார்ந்து சராசரியாக 2.25 கிலோ மற்றும் திட்ட விலக்கம் 0.25 கிலோ பெற்றுள்ளது. மீனின் எடையானது 2 கிலோவைவிட குறைவாக இருப்பதற்கான சதவீதம் என்ன?

தீர்வு :

சராசரி $\mu = 2.25$ மற்றும் திட்டவிலக்கம் $\sigma = 0.25$. மீனின் எடை 2 கிலோக்கு குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $P(X < 2.0)$

$x = 2.0$ எனில், $\quad Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{2.0-2.25}{0.25} = -1.0$

$P(Z< -1.0) = P(Z >1.0) = 0.5 - 0.3413 = 0.1587$

ஆகையால் 15.87% மீன்களின் எடை 2 கிலோ விற்கும் குறைவாக இருக்கும்

எடுத்துக்காட்டு 7.31

கிராம கூட்டுறவு சங்கத்தின் வாயிலாகக் கொள்முதல் செய்யப்படும் பாலின் அளவு 800 லிட்டர் மற்றும் திட்டவிலக்கம் 100 லிட்டர் ஆகும். ஒரு நாள் 800 லிட்டர் முதல் 1000 லிட்டர் வரை கூட்டுறவு சங்கத்தின் வாயிலாகக் கொள்முதல் செய்வதற்கான விகிதசாரத்தினைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

சராசரி $\mu = 800$ மற்றும் திட்டவிலக்கம் $\sigma = 100$, நாள் ஒன்றுக்கு கொள்முதல் செய்யப்படும் பாலின் அளவு 800 லிட்டருக்கும், 1000 லிட்டருக்கும் இடையில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$P(800 < X < 1000)$

$$= P\left(\frac{800-800}{100} < z < \frac{1000-800}{100}\right)$$

$= P(0 < Z < 2) = 0.4772$

எனவே பாலின் அளவு 800 லிட்டருக்கும், 1000 லிட்டருக்கும் இடையில் கொள்முதல் செய்யும் சங்கங்களின் சதவீதம் 47.72 ஆகும்.

பயிற்சி 7.3

1. வரையறு: இயல்நிலைப் பரவல்.
2. வரையறு: திட்ட இயல்நிலை மாறி.

3. இயல்நிலைப்பரவல் ஈருறுப்புப்பரவலின் எல்லையாக அமைவதற்கான கட்டுப்பாடுகளை எழுதுக.

4. இயல்நிலை நிகழ்தகவு வளைவரையின் ஏதேனும் ஐந்து முதன்மைப் பண்புகளை எழுதுக.

5. 2000 மின்விளக்குகள் சோதனைக்கு உட்படுத்தப்படுகிறது. சோதனையின் முடிவில் ஒரு குறிப்பிட்ட தயாரிப்புகள் சராசரியாக எரியும் நேரமானது இயல்நிலைப் பரவலில் 2040 மணி நேரமும் திட்டவிலக்கமானது 60 மணி நேரமும் உள்ளதாக கணக்கிடப்படுகிறது.

   (i) 2150 மணி நேரத்திற்கு மேலாக

   (ii) 1950 மணி நேரத்திற்கும் குறைவாக

   (iii) 1920 மற்றும் 2100 மணி நேரத்திற்கும் இடைப்பட்ட நேரத்தில் எத்தனை மின்விளக்குகள் ஒளிரும் என்பதனை மதிப்பீடு செய்க.

6. ஒரு பரவலில் 30 சதவீத பொருள்கள் 50க்கும் குறைவாக மற்றும் 10 சதவீத பொருள்கள் 86 க்கும் அதிகமாக இருப்பின் அதனுடைய சராசரி , திட்டவிலக்கம் காண்க.

7. X எனும் மாறி இயல்நிலைப் பரவலின் சராசரி 12 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 4 எனில் $P(X < 20)$ மற்றும் $P(0 \le X \le 12)$ மதிப்பினை காண்க.

8. 500 மாணவர்களின் உயரமானது இயல்நிலைப் பரவலில் சராசரியாக 68 அங்குலமும் அதன் திட்ட விலக்கம் 3 அங்குலமாக கணக்கிடப்படுகிறது.

   (i) 72 அங்குலத்திற்கும் அதிகமாக

   (ii) 64 அங்குலத்திற்கும் குறைவாக

   (iii) 65 மற்றும் 71 அங்குலத்திற்கும் இடைப் பட்ட மாணவர்களின் எண்ணிக்கையினை கணக்கிடுக.

9. புகைப்பட பிரதி உருவாக்குவதற்கு ஆகும் புகைப்பட செயல்முறையின் நேரமானது இயல்நிலை பரவலில் சராசரியாக 16.28 வினாடிகள் மற்றும் திட்டவிலக்கம் 0.12 வினாடிகள் தேவைப்படுகிறது. புகைப்படம் உருவாக்குவதற்கு 16.35 வினாடிகளுக்கும் குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினை காண்க.

10. ஒரு கட்டுமான நிறுவனம் மேம்பாலம் கட்டுவதற்கு இயல்நிலைப் பரவலில் சராசரியாக 400 வேலை நாள்கள் மற்றும் திட்டவிலக்கமாக 100 வேலை நாள்களாக நேரத்தை வரையறுக்கிறது. 450 அல்லது அதற்கும் குறைவான வேலை நாள்களுக்குள் மேம்பாலம் கட்டும் பணியினை நிறைவு செய்வதாக உறுதி அளிக்கின்றது. மேலும் அந்நிறுவனம் உறுதி தவறும் நிலையில் 450 நாள்களுக்கும் அதிகமாக ஆகும் ஒவ்வொரு நாள்களுக்கும் அபராதமாக ₹ 10,000 அளிப்பதாக ஒப்பந்தம் செய்கிறது.

    (i) கட்டுமான நிறுவனம் குறைந்தபட்சம் 2 லட்சம் அபராதமாக கொடுப்பதற்கும்

    (ii) அதிகபட்சம் 500 நாள்கள் மேம்பாலம் கட்டி முடிப்பதற்கும் நிகழ்தகவினை கணக்கிடுக.

பயிற்சி 7.4

ஏற்புடைய விடையைத் தெரிவு செய்க:

1. இயல்நிலைப் பரவலைக் கண்டுபிடித்தவர்

   (a) லாப்லேஸ்

   (b) டீ மாய்வர்

   (c) காஸ்

   (d) அனைத்தும்

62UQRE

2. X ~N(9,81) எனில் திட்ட இயல்நிலைப் பரவலின் மாறி Z என்பது

   (a) $Z = \dfrac{X-81}{9}$ (b) $Z = \dfrac{X-9}{81}$

   (c) $Z = \dfrac{X-9}{9}$ (d) $Z = \dfrac{9-X}{9}$

3. Z என்பது திட்ட இயல்நிலை மாறி எனில் $Z = -0.5$ லிருந்து $Z = -3.0$ வரை அமையும் உருப்படிகளின் விகிதமானது.

   (a) 0.4987 (b) 0.1915

   (c) 0.3072 (d) 0.3098

4. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, இயல்நிலை பரவலின் வளைவு மாற்றுப்புள்ளியில் மீப்பெரு நிகழ்தகவானது

(a) $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)e^{\frac{1}{2}}$ (b) $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)e^{\left(-\frac{1}{2}\right)}$

(c) $\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)e^{\left(-\frac{1}{2}\right)}$ (d) $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$

5. சராசரியும் மாறுபாட்டளவையும் சமமாக இருக்கும் நிகழ்தகவுப் பரவலானது.

(a) ஈருறுப்பு (b) இயல்நிலை

(c) பாய்சான் (d) அனைத்தும்

6. பொம்மைகள் தயாரிக்கும் நிறுவனம் சராசரியாக 1% குறைபாடுள்ள தயாரிப்புகளை அளிக்கின்றது. கூறெடுத்தலில் 100 பொம்மைக்கு 3 பொம்மைகள் குறைபாடுள்ளவைகளாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவின் மதிப்பானது

(a) 0.0613 (b) 0.613

(c) 0.00613 (d) 0.3913

7. $$f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{72\pi}}\right)\frac{e^{-(x-10)^2}}{72} \qquad -\infty < x < \infty$$

என்ற இயல்நிலை பரவலின் பண்பளவை களானது

(a) (10,6) (b) (10,36)

(c) (6,10) (d) (36,10)

8. ஒரு உற்பத்தியாளர் தயாரிக்கும் மின் விசை மாற்றுக்குமிழ்களில் (Switches) 2 சதவீத தயாரிப்புகள் குறைபாடுள்ளவை என்று அறியப்படுகிறது. ஒரு பேழையில் இருக்கும் 50 மின்விசை மாற்றுக்குமிழ்களில் அதிக பட்சமாக 2 குறைபாடுகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவானது.

(a) 2.5 e^{-1} (b) e^{-1}

(c) 2 e^{-1} (d) இவை ஏதுமில்லை

9. ஒவ்வொரு சோதனையிலும் வெற்றி என்பது தோல்விக்கான வாய்ப்பைப் போல் இருமடங்கு எனில் அடுத்து வரும் 6 முயற்சிகளில் குறைந்த பட்சம் நான்கு முறை வெற்றி பெறுவதற்கான வாயப்பானது.

(a) 240/729 (b) 489/729

(c) 496/729 (d) 251/729

10. ஈருறுப்புப் பரவலின் பண்பளவைகளான $B(n,p)$-க்கு சராசரியின் மதிப்பு 4 மற்றும் மாறுபாடு 4/3 எனில் $P(X \geq 5)$ இன் மதிப்பானது.

(a) $(2/3)^6$ (b) $(2/3)^5(1/3)$

(c) $(1/3)^6$ (d) $4(2/3)^6$

11. சராசரியாக ஒரு தேர்வில் 40% மாணவர்கள் தோல்வி அடைகின்றனர். ஒரு குழுவிலுள்ள 6 மாணவர்களில் குறைந்தபட்சம் 4 நபர் வெற்றி அடைவதற்கான நிகழ்தகவானது.

(a) 0.5443 (b) 0.4543

(c) 0.5543 (d) 0.4573

12. ஒரு குறிப்பிட்ட வழிதடத்தில் செல்லும் விமானத்தில் பயணிக்கும் 40 சதவீத பயணிகள் பயணிக்கும் நேரத்தில் தங்களுடன் எந்த ஒரு உடைமைகளையும் எடுத்துச் செல்வதில்லை. அவ்வழித்தடத்தில் செல்லும் விமானங்கள் 15 இருக்கைகள் கொண்டது எனில், உடமைகள் இல்லாமல் பயணிக்கும் பயணிகளின் சராசரி எண்ணிக்கையானது.

(a) 6.00 (b) 6.45

(c) 7.20 (d) 7.50

13. பின்வரும் கூற்றில் (கூற்றுகளில்) எவை இயல்நிலைப் பரவல் வளைவரை தொடர்புடைய தாக இருக்கும்?

(a) இது சமச்சீரானது மற்றும் மணிவடிவம் உடையது.

(b) இது தொலைத்தொடுகோட்டை உடையது. அதாவது வளைவரை கிடைஅச்சினை தொடர்ந்து சென்றாலும் அதனை தொடாமல் இணையாக செல்லும்.

(c) இதன் சராசரி, இடைநிலை மற்றும் முகடு ஆகியன ஒன்றுகின்றன.

(d) மேற்கண்ட கூற்றுகள் அனைத்தும் உண்மை.

14. பின்வருவனவற்றுள் எவை பாய்சான் பரவலை உருவாக்காது?

(a) 10 நிமிட இடைவெளியில் பெறப்படும் தொலைபேசி அழைப்புகள்

(b) பெட்ரோல் நிலையத்திற்கு வந்து சேரும் வாடிக்கையாளர்களின் எண்ணிக்கை

(c) கனஅடி மண்ணில் காணப்படும் பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கை

(d) ஒரு பக்கத்தின் அச்சுப் பிழைகளின் எண்ணிக்கை.

15. சராசரி 70 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 10 எனக் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலை சமவாய்ப்பு மாறி X தழுவுகிறது. X ஆனது 72 மற்றும் 84–க்கு இடையில் உள்ளபோது அதன் நிகழ்தகவானது

(a) 0.683 (b) 0.954

(c) 0.271 (d) 0.340

16. புதிதாக தேர்ச்சிபெற்ற பட்டயக் கணக்கரின் ஆரம்பகால வருடாந்திர ஊதியம் இயல்நிலைப் பரவலைப் பின்பற்றுகிறது. இதன் சராசரி 1,80,000 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 10,000 ஆகும். சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் புதிதாக தேர்ச்சிபெற்ற பட்டயக் கணக்கர் வருடத்திற்கு ₹ 1,65,000 லிருந்து ₹ 1,75,000 வரை ஈட்டுவதற்கு உண்டான நிகழ்தகவானது.

(a) 0.819 (b) 0.242

(c) 0.286 (d) 0.533

17. புள்ளியியல் வகுப்பில் பயிலும் மாணவர்களின் உயரமானது இயல்நிலை பரவலை பின்பற்றி சராசரி 172 செ.மீ மற்றும் மாறுபாடு 25 செ.மீ பெற்றுள்ளது, எனில் 165 செ.மீ மற்றும் 181 செ.மீ க்கும் இடைப்பட்ட உயரத்தில் இருக்கும் மாணவர்களின் விகிதமானது.

(a) 0.954 (b) 0.601

(c) 0.718 (d) 0.883

18. புள்ளிவிவர ஆய்வில் தொலை தூரத்தில் இருப்பவர்களின் உரையாடல்களின் நேரமானது இயல்நிலை பரவலைபின்பற்றி சராசரி 240 நொடிளாகவும், திட்ட விலக்கம் 40 நொடிகளாகவும் உள்ளதாக அறியப்படுகிறது, எனில் 180 நொடிகளுக்கும் குறைவாக உரையாடல் நேரத்தை முடிப்பவர்களின் விகிதமானது.

(a) 0.214 (b) 0.094

(c) 0933 (d) 0.067

19. கேப் நகர மக்கள் தொகையில் 21 சதவீத மக்கள் DSTV எனும் செயற்கைகோள் தொலைக்காட்சி சேவைக்கு சந்தாதாரர்களாக தங்களை இணைத்துக் கொண்டனர் மாதிரிக்கூறாக நான்கு வீட்டினைத் தேர்ந்தெடுக்கும் பட்சத்தில் அனைத்து வீடுகளும் DSTV சேவையினை பயன்படுத்துவதற்கான நிகழ்தகவானது.

(a) 0.2100 (b) 0.5000

(c) 0.8791 (d) 0.0019

20. திட்ட இயல்நிலை அட்டவணையை பயன் படுத்துகையில் $z = 2.18$ –க்கு வலப்புறம் மற்றும் $z = -1.75$ –க்கு இடதுபுறம் அமையும் மதிப்புகளுக்கான நிகழ்தகவுகளின் கூடுதலானது.

(a) 0.4854 (b) 0.4599

(c) 0.0146 (d) 0.0547

21. ஒரு மைத்தரை அச்சு இயந்திரம் (Inkjet Printer) முதல் முறை பழுது ஏற்படுவதற்கான காலஅளவு இயல்நிலைப் பரவலை ஒத்துள்ளது. இதன் சராசரி 1500 மணி நேரம் மற்றும் திட்டவிலக்கம் 200 மணி நேரம் எனில் 1000 மணி நேரத்திற்கு முன்பாக அவ்வியந்திரம் பழுதடைவதற்கான விகிதமானது

(a) 0.0062 (b) 0.0668

(c) 0.8413 (d) 0.0228

22. புதிதாகப் பிறந்த குழந்தையின் எடையானது இயல்நிலைப் பரவலை பின்பற்றி சராசரியாக 3.2 கிலோ மற்றும் திட்டவிலக்கமாக 1.1 கிலோ பெற்றுள்ளது. சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்தெடுக்கப்படும் புதிதாகப் பிறந்த ஒரு

குழந்தையின் எடையில் 2.0 கிலோவுக்கும் குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவானது.

(a) 0.138 (b) 0.428

(c) 0.766 (d) 0.262

23. ஒரு குறிப்பிட்ட வங்கியின் கடன் அட்டை தாரர்கள், தங்களது கடன் அட்டையைப் பயன் படுத்தி செலவு செய்யும் மாதாந்திர செலவு இயல் நிலைப் பரவலை ஒத்துள்ளது. சராசரி ₹ 1295.00 மற்றும் திட்டவிலக்கம் ₹ 750.00 எனில், கடன் அட்டைதாரர்கள் தங்களின கடன் அட்டையின் மூலம் மாதம் ₹ 1500-க்கு மேலாக செலவழிக்கும் கடன் அட்டைதாரர்களின் விகிதாச்சாரமானது.

(a) 0.487 (b) 0.392

(c) 0.500 (d) 0.791

24. z ஒரு திட்ட இயல்நிலைமாறி என்க. z–க்கு வலப்புறம் உள்ள பரப்பு 0.8413 எனில், z–ன் மதிப்பானது

(a) 1.00 (b) –1.00

(c) 0.00 (d) –0.41

25. z–க்கு இடப்புறம் அமையும் (z– என்பது திட்ட இயல்நிலை பரவலை கொண்டுள்ளது) பரப்பு 0.0793, எனில் z–ன் மதிப்பானது.

(a) -1.41 (b) 1.41

(c) –2.25 (d) 2.25

26. $P(Z > z) = 0.8508$ எனில் z–ன் (z–என்பது திட்ட இயல்நிலை பரவலை கொண்டுள்ளது) மதிப்பானது

(a) –0.48 (b) 0.48

(c) –1.04 (d) 1.04

27. $P(Z > z) = 0.5832$ எனில் z–ன் (z–என்பது திட்ட இயல்நிலை பரவலை கொண்டுள்ளது) மதிப்பானது

(a) –0.48 (b) 0.48

(c) 1.04 (d) –0.21

28. ஈருறுப்புப் பரவலில் வெற்றிக்கான நிகழ் தகவானது தோல்விக்கான நிகழ்தகவைப் போல் இருமடங்கு எனில் நான்கு முயற்சிகளில் பூஜ்ஜிய வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு

(a) 16/81 (b) 1/16

(c) 2/27 (d) 1/81

இதர கணக்குகள்

1. சராசரி 12 சதவீத பம்புகள் அளவில் சிறியதாக அல்லது பெரியதாக தயாரிக்கப்படுவதாக கண்டு நிராகரிப்படுவதை பம்பு தயாரிப்பாளர்கள் காண்கின்றனர். ஒரு தொகுதியில் உள்ள 10 பம்புகளில்

   (a) இரண்டிற்கும் மேற்படாமல் நிராகரிக்கப்பட்ட பம்புகள்.

   (b) குறைந்தபட்சம் இரண்டு நிராகரிக்கப்பட்ட பம்புகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினை காண்க.?

2. குறிப்பிட்ட நோயின் தாக்கத்தினால் 75 சதவீத நோயாளிகள் இறந்து போவதாக மருத்துவ அறிக்கை கூறுகிறது. அவர்களில் 6 நபரைத் தேர்ந்தெடுப்பின் அதில் 4 நோயாளிகள் நலமடைவதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க?

3. மின்சாரத் தடை சராசரியாக ஒவ்வொரு 20 வாரத்தில் மூன்று முறை நிகழ்வது பாய்சான் பரவலை பின்பற்றினால் மின்சார தடையானது ஒரு குறிப்பிட்ட வாரத்தில் ஒரு முறைக்கு மிகாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினை கணக்கிடுக.

4. ஒரு பரபரப்பான சாலை சந்திப்பில் சராசரியாக 300 வாகனங்கள் ஒரு மணி நேரத்தில் கடக்கின்றன எனில்,

   (i) ஒரு நிமிடத்திற்கு எந்த வாகனமும் கடந்து செல்லாததற்கான நிகழ் தகவினை கணக்கிடுக.

   (ii) இரண்டு நிமிடங்களில் கடந்து போகும் வாகனங்களின் எதிர்ப்பார்க்கப்படும் எண்ணிக்கை என்ன?

5. ஒரு குறிப்பிட்ட பல்கலைகழகத்தில் மாணவர் சேர்க்கை என்பது மாநில அளவிளான தேர்வின் மூலமாக தீர்மானிக்கப் படுகிறது. தேர்வின் மதிப்பெண்கள் இயல்நிலைப் பரவலை பின்பற்றி சராசரி 500 மற்றும் மாறுபாடு 100 பெற்றுள்ளது. ராகுல் என்ற மாணவர்

இப்பல்கலைகழகத்தில் சேர விரும்புகிறார். மேலும் மொத்த தேர்வு எழுதுபவர்களில் குறைந்த பட்சம் 70 சதவீத மாணவர்களின் மதிப்பெண்களுக்கு மேலாக அவர் பெற்றாக வேண்டும் என்பதை அறிகிறார். ராகுல் தேர்வு எழுதி அதில் 585 மதிப்பெண்களைப் பெறுகிறார் எனில், அவர் பல்கலைகழகத்தால் தேர்ந்தெடுக்கப் படுவாரா?

6. ஒரு குறிப்பிட்ட தொழிற்சாலையில் மகிழுந்து பொருத்துவது இயல்நிலைப் பரவலைப் பின்பற்றி சராசரியாக 20 மணி நேரமும் திட்ட விலக்கம் 2 மணி நேரமாகவும் கணக்கிடப் பட்டுள்ளது. தொழிற்சாலையில், மகிழுந்து பொருத்துவதற்கான கால அளவு
   (i) 19.5 மணி நேரத்திற்கு குறைவாக மற்றும்
   (ii) 20 மற்றும் 22 மணி நேரத்திற்குள்ளாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினை கணக்கிடுக?

7. நிறுவனத்தின் தொழிலாளர்களின் ஆண்டு வருமானம் இயல்நிலை பரவலை பின்பற்றி யுள்ளது. இதன் சராசரி \$. 50,000 மற்றும் திட்டவிலக்கம் \$. 20,000 எனில்
   (a) \$.40,000–க்கும் குறைவாக ஈட்டுபவர் களின் சதவீதம் என்ன?
   (b) \$.45,000 மற்றும் \$.65,000–க்கும் இடைப் பட்ட நிலையில் ஈட்டுபவர்களின் சதவீதம் என்ன?
   (c) \$.70,000/-க்கும் அதிகமாக சம்பாதிப்பவர் களின் சதவீதம் என்ன?

8. X எனும் மாறியானது இயல்நிலை பரவலை பின்பற்றி அதன் சராசரி $\mu = 30$ மற்றும் திட்டவிலக்கம் $\sigma = 4$ எனில்
   (a) $P(x < 40)$ (b) $P(x > 21)$
   (c) $P(30 < x < 35)$ என்பனவற்றைக் காண்க

9. பிறந்த குழந்தைகளின் எடையானது இயல்நிலைப் பரவலைப் பின்பற்றி சராசரியாக 3500 கிராம் மற்றும் திட்டவிலக்கம் 500 கிராமம் பெற்றுள்ளது எனில், பிறக்கும் குழந்தையின் எடை 3100 கிராமுக்கு குறைவாக இருப்பதற்வான நிகழ்தகவு என்ன?

10. மாதாந்திர மின்சாரக் கட்டணமாக சென்னையில் வசிக்கும் மக்கள் செலுத்தும் கட்டணம் இயல்நிலைப் பரவலைப் பின்பற்றுகிறது. இதன் சராசரி ₹ 225 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 55. 500 நபர் கொண்ட ஒரு குழுவில் ₹ 100 அல்லது அதற்கும் குறைவான கட்டணம் செலுத்துபவர்களின் எதிர்ப்பார்க்கப் படும் எண்ணிக்கை யாது?

தொகுப்புரை

- ஈறுருப்பு நிகழ்தகவு பரவலின் கட்டுப்பாடுகளாவன
  (i) முயற்சிகள் சார்பற்றவை
  (ii) முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை முடிவானவை
  (iii) ஒவ்வொரு முயற்சியும் வெற்றி மற்றும் தோல்வி என்ற இரு வாய்ப்புகள் மட்டுமே பெற்றிருக்கும்.
  (iv) ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு மாறிலியாகும்.
- n சார்பற்ற முயற்சிகளில் சரியாக x வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \text{ இங்கு } x = 0,1,2,3\ldots..n \text{ மற்றும் } q = 1 - p$$

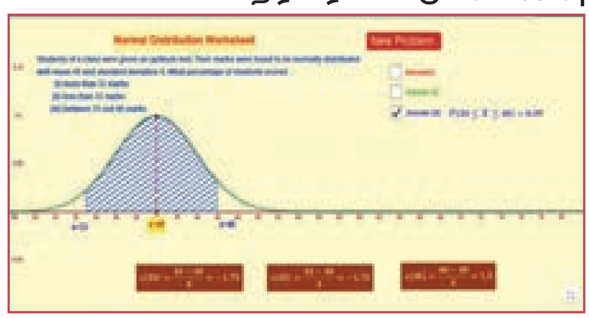
- n மற்றும் p என்பன ஈருறுப்புப் பரவலின் பண்பளவைகள் ஆகும்.
- ஈறுருப்பு பரவலின் சராசரி np மற்றும் மாறுபாடு npq ஆகும்.
- பாய்சான் பரவலை ஈருறுப்புப் பரவலின் எல்லையாக பின்வரும் நிபந்தனைகளில் பெறலாம்.n ஆனது மிகப்பெரிய முடிவுறா எண் மற்றும் p மிகச்சிறியது மற்றும் np முடிவுறு எண்.
- பாய்சான் நிகழ்தகவு பரவலானது $p(x) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^x}{x!}$ $x = 0,1,2,3\ldots$ இங்கு $\lambda = np$
- பாய்சான் பரவலின் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டளவை λ ஆகும்.
- பாயசான் பரவலின் பண்பளவை λ மட்டுமே.
- பாய்சான் பரவல் ஒரு போதும் சமச்சீராக இருக்காது
- இது அரிதாக நடக்கும் நிகழச்சிக்கான பரவலாகும்.
- n ஆனது மிகப்பெரிய முடிவுறா எண் மற்றும் p –ம் q–ம் மிகச் சிறியவை அல்ல என்ற நிபந்தகைளின் கீழ் இயல்நிலைப் பரவலானது ஈருறுப்புப் பரவலின் எல்லையாக உள்ளது.
- இயல்நிலை நிகழ்தகவு பரவல் $f(x) = \left(\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)(e^{-1/2\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2})$
- பரவலின் சராசரி μ ஆகும்.
- பரவலின் திட்ட விலிக்கம் σஆகும்.
- இது ஒரு சமச்சீர் பரவலாகும்.
- பரவலின் வரைபடம் மணிவடிவம் உடையது.
- இயல்நிலைப்பரவலில் சராசரி, இடைநிலை மற்றும் முகடு ஆகியவை சமமாக இருக்கும்.
- வளைவு மாற்றுப் புள்ளிகள் $\mu - \sigma$ மற்றும் $\mu + \sigma$–ல் அமையும்.
- இயல்நிலை வளைவரை கிடைஅச்சினை தொடர்ந்து சென்றாலும் கிடைஅச்சினை தொடமல் இணையாக செல்லும்.
- பரப்பளவு பண்புகள் : இயல்நிலை பரவலின் 68% சதவீத (தோராயமாக) உருப்படிகள் $\mu - \sigma$ மற்றும் $\mu + \sigma$–க்கு இடையில் அமைகிறது. 95% சதவீத (தோராயமாக) உருப்படிகள் $\mu - 2\sigma$ மற்றும் $\mu + 2\sigma$–க்கு இடையில் அமைகிறது. 99% சதவீத (தோராயமாக) உருப்படிகள் $\mu - 3\sigma$ மற்றும் $\mu + 3\sigma$ இடையில் அமைகிறது.
- திட்ட இயல்நிலை சமவாய்ப்பு மாறி $Z = (X - \mu)/\sigma$ என குறிப்பிடபடுகிறது.
- திட்ட இயல்நிலை நிகழ்தகவு பரவல் $1/\sqrt{2\pi}(e^{\frac{-z^2}{2}})$ ஆகும்.
- பரவலின் சராசரி பூச்சியம் மற்றும் திட்ட விலக்கம் 1 ஆகும்.
- வளைவு மாற்று புள்ளிகள் $z = -1$ மற்றும் $z = +1$–ல் அமையும்

கலைச்சொற்கள் (GLOSSARY)	
இயல்நிலை	Normal
ஈருறுப்பு	Binomial
கூறுவெளி	Sample Space
கோட்ட அளவை	Skewness
சமச்சீர்	Symmetry

சமவாய்ப்பு சோதனை	Random Experiment
சமவாய்ப்பு மாறி	Random Variable
சார்பற்ற	Independent
திட்ட விலக்கம்	Standard Deviation
தொடர்ச்சியற்ற பரவல்	Discrete Distribution
தொடர்ச்சியான பரவல்	Continuous Distribution
பண்பளவை	Parameter
மணிவடிவ வளைவரை	Bell shaped Curve
வளைவு மாற்றுப் புள்ளி	Point of Inflexion

இணையச் செயல்பாடு

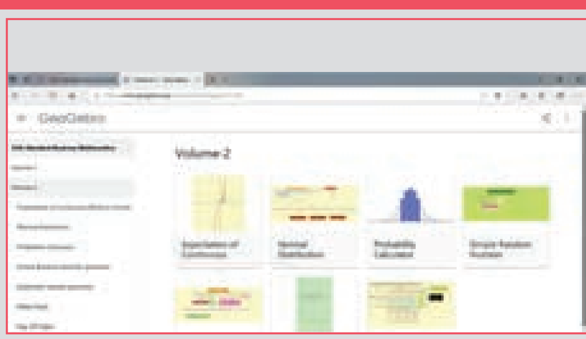
எதிர்பார்க்கப்படும் விளைவு



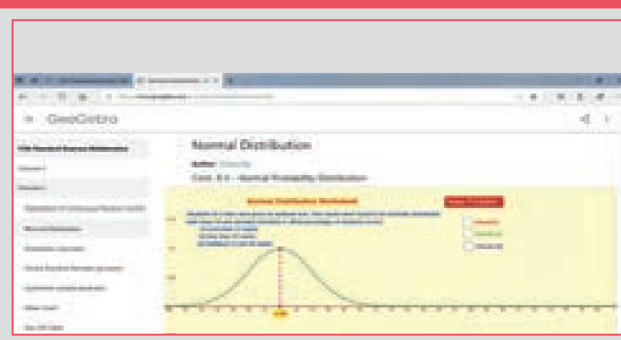
படி – 1 : கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி இச்செயல்பட்டிற்கான இணையப் பக்கத்திற்குச் செல்க. பின்பு "12th Standard Business Mathematics and Statistics" என்னும் திரையில் "Volume–2" யை தெரிவு செய்யவும்.

படி - 2 : "Normal Distribution" என்னும் பயிற்சித்தாளினை தெரிவு செய்துகொள்ளவும். வலது பக்கத்தில் உள்ள "New Problem" என்னும் பொத்தானை சொடுக்கவும் பின்பு Answer – I, Answer – II, Answer – III யை சொடுக்கினால் அதற்க்கான சரியான விடைகளைப் பெறலாம்.

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி : **https://ggbm.at/uzkcrnwr**

அல்லது விரைவுக் குறியீடு **(QR Code)**

B247_12_BUS_MAT_TM

8

கூறெடுப்பு முறைகளும் புள்ளியியல் அனுமானித்தலும்

பாண்டுரங்க வாசுதேவ் சுகாத்மி
(ஜூலை 27, 1911 - ஜனவரி 28, 1997)

அறிமுகம்

பாண்டுரங்க வாசுதேவ் சுகாத்மி (1911-1997) என்பவர் பத்மபூஷண் விருது வென்ற இந்திய புள்ளியியல் நிபுணர் ஆவர். 1940–ம் ஆண்டுகளில் சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு முறைகளை விவசாய புள்ளியியல் மற்றும் காலம் சார்ந்த புள்ளியியலில் முதன்முதலாக பயன்படுத்தினார். இந்திய விவசாய புள்ளியியல் ஆராய்ச்சி நிறுவனம் தொடங்குவதற்கு காரணமாக இருந்தவர். அவருடைய பணியின் ஒரு பகுதியாக ரோம் நாட்டில் அமைந்துள்ள உணவு மற்றும் விவசாய கழகத்தில், உலகில் நிலவும் பசிக்கொடுமையின் பல்வேறு பரிமாணங்களை தீர்மானித்து அதற்கேற்ப உணவு வழங்குவதற்கான பல புள்ளியியல் முறைகளை உருவாக்கினார். புரதச்சத்து இடைவெளிக்கான அளவு மற்றும் தன்மையை அளவிடுவதற்கான புள்ளியியல் முறைகளையும் உருவாக்கினார்.

ஒவ்வொரு புள்ளியியல் ஆய்விலும், ஒரு குழுவைச் சார்ந்த, உறுப்புகளின் பண்புகளைப் பற்றி அறிவதே நமது நோக்கமாகும். ஒரு தொகுதி அல்லது குழுவில் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளையும், புள்ளியியல் ஆய்வுக்கு உட்படுத்துவது, முழுமைக் கணக்கிடல் முறை எனப்படும். சில சமயங்களில் ஆய்வில் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளையும் ஆராய்ந்து அறிவது கடினமான ஒன்றாகும். ஆகையால், கூறெடுத்தல் என்ற முறையைப் பயன்படுத்தி ஆய்வில் உள்ள ஒரு பகுதி உறுப்புகளை மட்டும் தேர்ந்தெடுத்து, அவற்றின் சிறப்பியல்புகளை மதிப்பிடுவதன் மூலம் முழுமைத் தொகுதியைப் பற்றி அறிந்து கொள்ளலாம்.

(i) இல்லத்தரசி, சமையல் செய்யும் பொழுது, எதை சமைத்தாலும். அதன் சுவைப்பற்றி அறிய ஒரு தேக்கரண்டி அளவு சுவைப்பது.

(ii) நோயின் தன்மை அறிய, சில துளி ரத்தத்தின் மூலம் சோதித்து அறிவது.

(iii) ஒரு தானிய வியாபாரி, மொத்த தானியத்தின் தரம் அறிய ஒரு கைப்பிடி அளவு தானியத்தை சோதிப்பது

போன்றவை கூறெடுத்தலுக்கான பொருத்தமான எடுத்துக்காட்டுகள் ஆகும். இங்கு, கூறுகளின் மூலம் பெறப்படும் விவரங்களைப் பொறுத்து, முடிவுகள் எடுக்கப்படுகின்றன. எனவே, கூறெடுத்தல் என்பது முழுமைத் தொகுதியின் தன்மையை பிரதிபலிக்கும், ஒரு சிறிய பகுதியை தெரிவு செய்வது ஆகும்.

C1664C

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தைப் படித்த பின்பு பின்வரும் பாடக்கருத்துக்களை மாணவர்கள் புரிந்து கொள்ள இயலும்.

- கூறெடுப்பு முறைகள்
- சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு
- எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு முறை
- படுகை சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு
- முறைபடுத்திய கூறெடுப்பு
- கூறெடுப்பு முறைசார்ந்த மற்றும் முறைசாரா பண்புகள் கூறெடுப்பு பரவல்
- புள்ளியியல் அனுமானங்கள்
- மதிப்பிடும் முறை
- கருதுகோள் சோதனை

8.1 கூறெடுத்தல் (Sampling)

ஒரு முழுமை தொகுதியிலிருந்து, ஒரு சிறிய பகுதியை கூறுகளாக (மாதிரியாக) தெரிவு செய்யும் முறை கூறெடுத்தல் (Sampling) அல்லது மாதிரி எடுத்தல் என்று அழைக்கப்படுகிறது. இது நம் அன்றாட வாழ்க்கையில் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

8.1.1 கூறெடுத்தலின் அடிப்படை கருத்துருக்கள் (Basic concepts of sampling)

முழுமைத் தொகுதி (Population)

முழுமைத் தொகுதி என்பது ஆய்விற்கு தேவையான அனைத்து கூறுகள் அல்லது அனைத்து உறுப்புகளின் தொகுப்பைக் குறிக்கும். முழுமைத் தொகுதிக்கு எடுத்துக்காட்டுகளாக ஒரு நாளில் / வாரத்தில் / மாதத்தில் தயாரிக்கப்படும் இரு சக்கர வாகனங்களின் எண்ணிக்கை, நான்கு சக்கர வாகனங்களின் எண்ணிக்கை, மின்விசிறிகள், தொலைக்காட்சி பெட்டிகள், எழுதும் சுண்ணாம்பு துண்டுகள் தயாரிப்பு ஆகியவற்றின் எண்ணிக்கை மற்றும் மாணவர்கள், பெண்கள், ஆண்கள் ஆகியோரின் எண்ணிக்கை, போன்றவற்றைக் குறிப்பிடலாம்.

முடிவுறு மற்றும் முடிவுறா முழுமைத் தொகுதி (Finite and infinite population):

ஒரு குழுவில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை எண்ணிடத்தக்கதாக இருப்பின், அது முடிவுறு முழுமைத் தொகுதி எனப்படும்.

ஒரு பள்ளியில் பயிலும் பன்னிரெண்டாம் வகுப்பு மாணவர்களின் எடை அல்லது உயரம் ஆகியவற்றை முடிவுறு தொகுதிக்கு எடுத்துக்காட்டாக கூறலாம்.

ஒரு முழுமைத்தொகுதியிலுள்ள உறுப்புகள் எண்ணற்றவையாக இருப்பின், அம்முழுமைத் தொகுதி முடிவுறா முழுமைத் தொகுதி எனப்படும், ஒரு மூட்டையில் உள்ள தானியங்களின் எண்ணிக்கை அளவையும், ஒரு நோயாளியின் உடலில் உருவாகியுள்ள கிருமிகளின் எண்ணிக்கை அளவையும் முடிவுறா முழுமைத்தொகுதிக்கு எடுத்துக்காட்டுகளாகக் கூறலாம்.

கூறு மற்றும் கூறின் அளவு (Sample and sample size)

முழுமைத் தொகுதியின் தன்மையைப் பிரதிபலிக்கும் வகையில், முழுமை தொகுதியில் தெரிவு செய்யப்படும் ஒரு பகுதி, மாதிரி அல்லது கூறு (Sample) என்று அழைக்கப்படுகிறது. அக்கூறிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை, கூறின் அளவு (Sample size) என்று அழைக்கப்படுகிறது.

முழுமைத் தொகுதி பண்பளவை மற்றும் கூறு பண்பளவை (Parameter and statistic)

முழுமைத் தொகுதி பண்பளவை: முழுமைத் தொகுதியின் புள்ளியியல் மாறிகளான சராசரி (μ), பரவற்படி (σ^2) ஆகியன முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவைகளாகும். அவற்றைத் தொகுதிப் பண்பளவை (Parameter) என்று அழைப்பர்.

கூறு பண்பளவை : கூறுகளிலிருந்து கணக்கிடப் பட்ட எந்தவொரு புள்ளிவிவர அளவையும் கூறு பண்பளவை (Statistic) அல்லது மாதிரிப் பண்பளவை என்று அழைக்கப்படும்.

கூறு சராசரி $\bar{x}$, கூறுபரவற்படி (s^2) போன்றவை கூறுபண்பளவைகள் ஆகும்.

குறிப்பு

நடைமுறையில், தொகுதிப் பண்பளவைகளின் மதிப்புகள் தெரியாதபோது, கூறு பண்பளவை (மாதிரி) மதிப்புகளின் அடிப்படையில் தொகுதி பண்பளவைகளின் மதிப்புகள் கணக்கிடப் பட்டு பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

கூறெடுத்தலின் வகைகள் (Types of sampling)

முழுமை தொகுதியிலிருந்து கூறுகளை தேர்ந்தெடுக்கும் உத்தி அல்லது முறையானது, கூறு (மாதிரி) எடுத்தல் கருத்தியலில் அடிப்படை முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது ஆகும். இது பொதுவாக விவரங்களின் தன்மை மற்றும் விசாரணையின் வகை ஆகியவற்றைப் பொறுத்தே அமையும். கூறுகளைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நடைமுறைகள் பரவலாகக் கீழ்க்கண்டவாறு வகைப்படுத்தப் படுகிறது.

1. சமவாய்ப்பு அற்ற கூறெடுப்பு அல்லது நிகழ்தகவு சாரா கூறெடுப்பு
2. சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு அல்லது நிகழ்தகவு சார்ந்த கூறெடுப்பு

சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு அல்லது நிகழ்தகவு சார்ந்த கூறெடுப்பு (Random sampling or Probability sampling)

சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு என்பது முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து கூறுகளை சமவாய்ப்பு முறையில்

தேர்ந்தெடுப்பதைக் குறிக்கிறது. சமவாய்ப்பு மாறி என்பது முழுமை தொகுதியில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும், கூறு அல்லது மாதிரியாக தேர்ந்தெடுக்கப் படுவதற்கான வாய்ப்பு சமமாக உள்ளது என்பதாகும்.

"முழுமை தொகுதியின் ஒவ்வோர் உறுப்பும் சமவாய்ப்பின்படி சேர்க்கப்பட வாய்ப்பைப் பெற்றுள்ளது".

– டாக்டர். யேட்ஸ்

"சமவாய்ப்பு கூறானது முழுமை தொகுதியில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் மாதிரியில் இடம் பெறுவதற்கு சமவாய்ப்பைப் பெற்றிருப்பதாகும்".

– ஹார்பர்

நிகழ்தகவு சார்ந்த கூறெடுப்பின் முறைகள் பின்வரு மாறு வகைப்படுத்தப்படுகிறது:

(i) எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு முறை

(ii) படுகை சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு முறை

(iii) முறைபடுத்திய கூறெடுப்பு முறை

(i) எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு முறை (Simple random sampling)

எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு முறையில் கூறு களைத் தெரிவு செய்யும் முறையானது முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் சமமான மற்றும் சார்பற்ற வாய்ப்பைப் பெற வழி வகுக்கிறது.

எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பினை, உறுப்பு களைத் திரும்பவும் வைக்கும் முறை (With Replacement) அல்லது திரும்ப வைக்கா முறை (Without replacement) என்னும் வகைகளில் நிகழ்த்தலாம். எளிய சமவாய்ப்புக் கூறெடுப்பை, திருப்பி வைக்கும் முறையில் தெரிவு செய்யும்போது ஏற்கனவே தெரிவு செய்யப்பட்ட ஒரு கூறு, பல முறை கூறெடுத்தலில் இடம்பெற வாய்ப்பு உள்ளது. எனவே எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பில், திரும்ப வைக்கா முறையினைப் பின்பற்றலாம்:

N உறுப்புகளைக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு, திரும்ப வைக்கா முறையில் முதல் உறுப்பை தெரிவு செய்வதற்கான நிகழ் தகவு $\frac{1}{N}$ ஆகவும், இரண்டாவது உறுப்பை, மீதமுள்ள $(N-1)$ உறுப்புகளிலிருந்து தெரிவு செய்வதற்கான நிகழ் தகவு $\frac{1}{(N-1)}$ ஆகவும் காணலாம். எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு முறையில் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து கூறினைத் தெரிவு செய்ய பல முறைகள் இருந்தாலும் பின்வரும் இரண்டு முறைகள் பொதுவாகப் பயன்படுத்தப் படுகிறது. அவை கீழே விவரிக்கப்பட்டுள்ளது.

(A) குலுக்கல் முறை (Lottery method)

குலுக்கல் முறையானது நடைமுறையில் உள்ளதும், எளிதானதும் ஆகும். இம்முறையில், N உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு முடிவுறு முழுமைத் தொகுதியில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளையும் தனித் தனி எண்களால் குறிப்பிடவேண்டும். பிறகு முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள அனைத்து அலகுகளின் எண்ணிக் கைக்கு ஏற்ப ஒரே அளவு, வடிவம் மற்றும் நிறம் இருக்குமாறு காகிதங்கள் தனித்தனித் துண்டுகளாக வெட்டப்பட்டுஅவற்றில்எண்கள்குறிக்கப்படுகின்றன. இவற்றை ஒரே மாதிரியாக மடித்து ஒரு கொள்கலனில் இட்டு நன்றாகக் குலுக்க வேண்டும். இதிலிருந்து தேவையான கூறின் அளவிற்கு ஏற்ப, தேவையான சீட்டுகளைத் தெரிவுசெய்யவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக, 100 மாணவர்களிலிருந்து 10 மாணவர்களைத் தேர்ந்தெடுப்பதாக வைத்துக் கொண்டால் ஒரே அளவுள்ள 100 துண்டு சீட்டுகளில் மாணவர்களின் பெயர் அல்லது பதிவு எண்ணை எழுதி, நன்றாகக் குலுக்கி, அதிலிருந்து பத்து சீட்டுகளை எடுத்து, அதன் மூலம் பத்து மாணவர் களைத் தேர்வு செய்ய வேண்டும். இம்முறையில் கூறுகள் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து கட்டுப்பாடற்ற முறையில் தெரிவு செய்யப்படுவதால், இதனைக் கட்டுப்பாடற்ற சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு என அழைக்கலாம்.

இவ்வகையான முறை பெரும்பாலும் குலுக்கல் பரிசுகள் வழங்குவதற்கு மிக அதிகமாகப் பயன் படுத்தப்படுகிறது. இருப்பினும் முழுமைத் தொகுதி யிலுள்ள உறுப்புகள் முடிவுறா எண்ணிக்கையில் இருந்தால் இம்முறையைப் பயன்படுத்த இயலாது.

(B) சமவாய்ப்பு எண்களின் அட்டவணை மூலம் கூறெடுக்கும் முறை (Table of Random Number)

முழுமைத்தொகுதியின் அளவு மிக அதிகமாக இருப்பின், குலுக்கல் முறைப்படி துண்டு சீட்டுகளில் எல்லா எண்களையும் குறிப்பது மிகவும் கடினமான ஒன்றாகும்.

இவ்வாறான சூழ்நிலையில் சமவாய்ப்பு எண்களால் ஆகிய அட்டவணை முறையினைப்

பயன்படுத்துவது மாற்றுவழி ஆகும். நடைமுறையில் அதிகம் பயனுள்ளதாகவும் எளிய மற்றும் செலவற்ற முறையில் கூறுகளைச் சமவாய்ப்பு முறையில், சமவாய்ப்பு எண்களின் அட்டவணையைக் கொண்டு தெரிவு செய்ய முடியும். $0,1,2,\ldots,9$ என்ற இலக்கங்களைக் கொண்டு வடிவமைக்கப்படும் சமவாய்ப்பு எண் அட்டவணையில் உள்ள எண்கள், ஒன்றையொன்று சார்ந்திராமலும் எண்களின் அமைப்பு ஏறத்தாழ அதே நிகழ்வெண் எண்ணிக்கையில் இருப்பதற்கேற்ப அமைக்கப் பட்டுள்ளன.

சமவாய்ப்பு எண் அட்டவணைகள் சில கிழே தரப்பட்டுள்ளன:

(a) L.H.C. டிப்பெட்டின் சமவாய்ப்பு எண் தொடர்

(b) பிஸர் மற்றும் யேட்ஸ்ஸின் சமவாய்ப்பு எண் தொடர்

(c) கென்டல் மற்றும் ஸ்மித் இன் சமவாய்ப்பு எண் தொடர்

(d) ராண்ட் கார்ப்பரேஷனின் சமவாய்ப்பு எண் தொடர்

நடைமுறையில், டிப்பெட்டின் சமவாய்ப்பு எண் அட்டவணை பரவலாக பயன்படுத்தப்படுகிறது. டிப்பெட்டின் அட்டவணையில் இடம்பெற்றுள்ள முதல் 40 சமவாய்ப்பு எண்களின் தொகுப்பு கீழே உள்ள அட்டவணையில் விளக்கப்பட்டுள்ளது.

2952	6641	3992	9792	7969	5911	3170	5624
4167	9524	1545	1396	7203	5356	1300	2693
2670	7483	3408	2762	3563	1089	6913	7991
0560	5246	1112	6107	6008	8125	4233	8776
2754	9143	1405	9025	7002	6111	8816	6446

ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள அளவிலிருந்து $N(\leq 99)$ இரண்டு இலக்க சமவாய்ப்பு எண்ணைத் தெரிவு செய்வதாக வைத்துக் கொண்டால், மேலே உள்ள சமவாய்ப்பு எண் அட்டவணையில் 00 முதல் 99 வரை எந்த எண்ணையும் தெரிவு செய்யலாம்.

இதேபோல், முழுமைத் தொகுதியின் அளவு $N(\leq 999)$ அல்லது $N(\leq 9999)$, எனில் மூன்று இலக்க சமவாய்ப்பு எண்களை 000 முதல் 999 வரை உள்ள எண்களையும் அல்லது நான்கு இலக்க சமவாய்ப்பு எண்களை 0000 முதல் 9999 வரை உள்ள எண்களையும் அட்டவணையிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

சமவாய்ப்பு கூறுகளைத் தேர்ந்தெடுக்கும் செயல் முறையின் படிநிலைகள் கீழ்க்கண்டவாறு:

1. முழுமைத்தொகுதியின் அலகுகளைக் கண்டறிந்து அதற்கு 1 முதல் N வரை எண்களைக் குறிப்பிடவும்.
2. சமவாய்ப்பு எண் அட்டவணையின் ஏதாவது ஒரு பக்கத்தினை சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கவும்.
3. தேவையான கூறுகளை நிரல்கள், நிறைகள் அல்லது மூலைவிட்டவாரியாகத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

இந்த இலக்கங்கள் எவ்வாறு சமவாய்ப்பாக இருக்க முடியும் என கேள்வி எழலாம். அட்டவணையில் உள்ள இலக்கங்களை ஒழுங்கு முறையின்றி தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட போதிலும் அவற்றின் சமவாய்ப்பு தன்மையின் உத்திரவாதம் நடைமுறை சோதனையில் உள்ளது என்று சுட்டிக் காண்பிக்கலாம்.

டிப்பெட்ஸின் அட்டவணை

டிப்பெட்ஸின் அட்டவணை, பல சோதனைகளுக்கு உட்படுத்தப்பட்டு, பல ஆய்வுகளில் பயன்படுத்தப்பட்டு அதனுடைய சமவாய்ப்புத்தன்மை நடைமுறை நோக்கங்களுக்காக நன்கு நிறுவப் பட்டுள்ளது.

டிப்பெட்ஸின் சமவாய்ப்பு எண்கள் அட்டவணையை எவ்வாறு பயன்படுத்தலாம் என்பதை விளக்கும் ஒரு எடுத்துக்காட்டு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. 6000 அளவுகள் கொண்ட தொகுதியிலிருந்து 20 உறுப்புகள் மட்டும் எடுக்கப்படவேண்டும். 6000 அளவுகளையும் 1 முதல் 6000 வரை எண்ணிடப்பட வேண்டும். டிப்பெட்ஸின் அட்டவணையின் ஏதேனும் ஒரு பக்கத்தை தெரிவு செய்து முதல் 20 எண்களைத் தெரிவு செய்ய வேண்டும். நாம் எடுத்துக்கொண்ட பக்கத்தில் 6000க்கு மேல் எண்கள் இருப்பின் அதைத் தவிர்த்து 1 முதல் 6000 வரையிலான அடுத்த எண்ணைத் தேர்ந்தெடுக்கவும். அந்த எண்களைக் கொண்டிருக்கும் உறுப்புகள் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்ட (தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட) கூறுகள் ஆகும். சமவாய்ப்பு அட்டவணையின் ஒரு பகுதி மட்டும் தெரிவு செய்யப்பட்டுத் தேவையான கூறுகள் நிழலிடப்பட்டுள்ளது. நாம் இதற்கு கூறுகளை தெரிவு செய்ய நிறைவாரியான தேர்வினை மேற்கொண்டுள்ளோம்.

2952	6641	3992	9792	7969	5911	3170	5624
4167	9524	1545	1396	7203	5356	1300	2693
2670	7483	3408	2762	3563	1089	6913	7991
0560	5246	1112	6107	6008	8125	4233	8776
2754	9143	1405	9025	7002	6111	8816	6446

முழுமைத் தொகுயின் அளவு 1000த்திலிருந்து நாம் 15 கூறுகளைத் தெரிவு செய்ய வேண்டுமெனில் முழுமைத் தொகுதி உறுப்புகளை 0001 முதல் 1000 வரை எண்ணிடப்பட வேண்டும். பின்பு 15 எண்களைக் சமவாய்ப்பு அட்டவணையிலிருந்து தெரிவு செய்யலாம்.

டிப்பெட்ஸின் அட்டவணையில் நான்கு இலக்க எண்கள் இடம் பெற்றுள்ளதால் இவ்வெண் களை (கூறுகளை) தேர்ந்தெடுக்கும் முறை மாறுபடுகிறது, அதாவது நாம் முதல் மூன்று இலக்கங்களை அட்டவணையிலுள்ள நான்கு இலக்க எண்ணிலிருந்து எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.கொடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்பு எண் அட்டவணையின் ஒரு பகுதியை பயன்படுத்தி தேவையான சமவாய்ப்பு கூறுகளானது சிவப்பு நிறத்தில் நிழலிடப்பட்டுள்ளன. இங்கு நிறைவாரி யான சமவாய்ப்பு எண்ணை தேர்ந்தெடுக்கும் முறை கையாளப்படுகிறது,

2952	6641	3992	9792	7969	5911	3170	5624
4167	9524	1545	1396	7203	5356	1300	2693
2670	7483	3408	2762	3563	1089	6913	7991
0560	5246	1112	6107	6008	8125	4233	8776
2754	9143	1405	9025	7002	6111	8816	6446

முழுமைத் தொகுயின் அளவு 100லிருந்து நாம் 10 கூறுகளைத் தெரிவு செய்ய வேண்டுமெனில் முழுமைத் தொகுதி உறுப்புகளை 001 முதல் 100 வரை எண்ணிடப்பட வேண்டும். பின்பு 10 எண்களைக் சமவாய்ப்பு அட்டவணையிலிருந்து தெரிவு செய்யலாம்.

டிப்பெட்ஸின் அட்டவணையில் நான்கு இலக்க எண்கள் இடம் பெற்றுள்ளதால் இவ்வெண்களை (கூறுகளை) தேர்ந்தெடுக்கும் முறை மாறுபடுகிறது, அதாவது நாம் முதல் இரண்டு இலக்கங்களை அட்டவணையிலுள்ள நான்கு இலக்க எண்ணிலிருந்து எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். கொடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்பு எண் அட்டவணையின் ஒரு பகுதியை பயன்படுத்தி, தேவையான சமவாய்ப்பு கூறுகளானது சிவப்பு நிறத்தில் நிழலிடப்பட்டுள்ளன. இங்கு நிறைவாரி யான சமவாய்ப்பு எண்ணை தெரிவு செய்யும் முறை கையாளப்படுகிறது.

2952	6641	3992	9792	7969	5911	3170	5624
4167	9524	1545	1396	7203	5356	1300	2693
2670	7483	3408	2762	3563	1089	6913	7991
0560	5246	1112	6107	6008	8125	4233	8776
2754	9143	1405	9025	7002	6111	8816	6446

எளிய சம வாய்ப்பு கூறெடுப்பு முறையின் நிறைகள் மற்றும் குறைகள் (Merits and Demerits of Simple Random Sampling):

நிறைகள்

1. தனிப்பட்ட நபரின் விருப்பு, வெறுப்பு தவிர்க்கப் படுகிறது.
2. இது சிக்கனமான முறையாகும் ஏனெனில், பொருள் விரையம், காலவிரையம் மற்றும் அதிக உழைப்பு விரையமாவதை தவிர்க்கிறது.
3. முழுமைத் தொகுதியைப் பற்றி குறைந்தபட்ச தெளிவு முன்கூட்டியே தெரிந்திருப்பது இம்முறைக்கு போதுமானதாகும்.

குறைகள்

1. மாதிரியைத் தெரிவு செய்ய முழுமைத் தொகுதியின் முழுமையான விவரங்கள் தேவைப்படும், ஆனால் சமீபத்திய விவரங்கள் விசாரணைகளில் கிடைப்பதில்லை.
2. மாதிரியின் அளவு சிறியதாக இருக்கும் போது அவை முழுமைத் தொகுதியைப் பிரதிபலிப்ப தில்லை.

எடுத்துக்காட்டு 8.1

கேண்டல் – பாபிங்டன் ஸ்மித் (பி.பி. ஸ்மித்) வாய்ப்பு எண் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி 5–உறுப்புக்கள் கொண்ட வாய்ப்பு மாதிரியைத் தெரிவு செய்க.

23	15	75	48	59	01	83	72	59	93	76	24	97	08	86	95	23	03	67	44
05	54	55	50	43	10	53	74	35	08	90	61	18	37	44	10	96	22	13	43
14	87	16	03	50	32	40	43	62	23	50	05	10	03	22	11	54	36	08	34
38	97	67	49	51	94	05	17	58	53	78	80	59	01	94	32	42	87	16	95
97	31	26	17	18	99	75	53	08	70	94	25	12	58	41	54	88	21	05	13

தீர்வு:

23	15	75	48	59	01	83	72	59	93	76	24	97	08	86	95	23	03	67	44
05	54	55	50	43	10	53	74	35	08	90	61	18	37	44	10	96	22	13	43
14	87	16	03	50	32	40	43	62	23	50	05	10	03	22	11	54	36	08	34
38	97	67	49	51	94	05	17	58	53	78	80	59	01	94	32	42	87	16	95
97	31	26	17	18	99	75	53	08	70	94	25	12	58	41	54	88	21	05	13

கேண்டல் – பாபிங்டன் ஸ்மித்தின் சமவாய்ப்பு எண் அட்டவணையிலிருந்து 5 மாதிரிகளை பல முறைகளில் தெரிவு செய்யலாம். மேற்கண்ட பட்டியலிருந்து நமக்கு தேவையான எண்களைத் தெரிவு செய்ய ஏதாவது ஒரு நிரையிலிருந்தோ அல்லது ஏதாவது ஒரு நிரலிலிருந்தோ நாம் தொடங்கலாம். இங்கு நாம் 3–ஆம் நிரலில் உள்ள எண்களை தெரிவு செய்வதாகக் கொண்டால் முதல் எண் 75 ஆகவும் 3- ஆவது நிரலில் உள்ள மற்ற எண்களான 55,16,67 மற்றும் 26 ஆகியவை மற்ற உறுப்புகளாகும். எனவே 75,55,16,67 மற்றும் 26 ஆகிய எண்களைச் சமவாய்ப்பு மாதிரியாகத் தெரிவு செய்யலாம். மேலும் மாற்று வழிகள் மூலம் தெரிவு செய்யப்பட்ட 5– சமவாய்ப்பு மாதிரிகள் அட்டவணையில் நிழலிட்டுக் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 8.2

கீழ்க்கண்ட டிப்பெட்டின் சமவாய்ப்பு எண் அட்டவணையை பயன்படுத்தி காவேரி தெருவில் உள்ள 83 வீடுகளிலிருந்து 15 வீடுகள் கொண்ட ஒரு சமவாய்ப்பு மாதிரியை தெரிவு செய்க.

2952	6641	3992	9792	7969	5911	3170	5624
4167	9524	1545	1396	7203	5356	1300	2693
2670	7483	3408	2762	3563	1089	6913	7991
0560	5246	1112	6107	6008	8125	4233	8776
2754	9143	1405	9025	7002	6111	8816	6446

தீர்வு:

மாதிரி அளவு 15 உள்ள ஒரு மாதிரியை டிப்பெட்டின் சமவாய்ப்பு அட்டவணையிலிருந்து பல வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம். முழுமைத் தொகுதியின் அளவு 83 (இரண்டு இலக்க எண்) ஆதலால் தொகுதியிலுள்ள 83 வீடுகளுக்கும் கதவு எண்கள் 1 முதல் 83 வரை உள்ள எண்களைக் கொண்டு குறியிட வேண்டும்.இப்போது இரண்டாம் நிரலிலிருந்து எண்களைத் தெரிவு செய்யத் தொடங்குவோம். அவை 66,74,52,39,15,34,11,14,13, 27,61,79,72,35,60 ஒருவேளை நாம் எடுக்கும் எண் 83 ஐ விட அதிகம் எனில் அவ்வெண்ணை விடுத்து 1 முதல் 83 வரை உள்ள அடுத்த எண்ணைத் தெரிவு செய்யவேண்டும்.

2952	6641	3992	9792	7969	5911	3170	5624
4167	9524	1545	1396	7203	5356	1300	2693
2670	7483	3408	2762	3563	1089	6913	7991
0560	5246	1112	6107	6008	8125	4233	8776
2754	9143	1405	9025	7002	6111	8816	6446

எடுத்துக்காட்டு 8.3

கீழ்க்கண்ட சமவாய்ப்பு எண் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி,

டிப்பெட்டின் சம வாய்ப்பு எண் அட்டவணை							
2952	6641	3992	9792	7969	5911	3170	5624
4167	9524	1545	1396	7203	5356	1300	2693
2670	7483	3408	2762	3563	1089	6913	7991
0560	5246	1112	6107	6008	8125	4233	8776
2754	9143	1405	9025	7002	6111	8816	6446

கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் வகைப்படுத்தப் பட்டுள்ள, ஒரு முழுமைத் தொகுதியில் உள்ள 8585 குழந்தைகளிலிருந்து 10 குழந்தைகளைக் கொண்ட மாதிரியை உருவாக்குக.

உயரம்(செ.மீ.)	105	107	109	111	113	115	117	119	121	123	125
குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை	2	4	14	41	83	169	394	669	990	1223	1329
உயரம்(செ.மீ.)	127	129	131	133	135	137	139	141	143	145	
குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை	1230	1063	646	392	202	79	32	16	5	2	

தீர்வு:

முதலாவதாக முழுமை தொகுதிலுள்ள 8585 குழந்தைகளுக்கும் கொடுக்கப்பட்ட அலைவெண் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி வரிசை எண் குறிப்பிட வேண்டும். உயரம் 105 செ.மீ. இல் 2 குழந்தைகள் உள்ளதால், இவ்விரு குழந்தைகளுக்கு 1, 2 என எண்கள் குறிப்பிடவேண்டும்.107 செ.மீ. உயரமுள்ள அடுத்த நான்கு குழந்தைகளுக்கு 3, 4, 5 மற்றும் 6 ஆகிய வரிசை எண்களை குறிக்க வேண்டும். இதேபோல் மற்ற உயரங்கள் கொண்ட

குழந்தைகளுக்கும் தொடர் வரிசை எண்களைக் கொண்டு குறியிட வேண்டும். கடைசியாக 145 செ.மீ. உயரமுள்ள குழுவில் இரண்டு குழந்தைகளுக்கு 8584 மற்றும் 8585 ஆகிய எண்களை குறியீடாக வழங்கலாம்.

உயரம் (செ.மீ.)	குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை	குவிவு நிகழ்வெண்(f)
105	2	2
107	4	6
109	14	20
111	41	61
113	83	144
115	169	313
117	394	707
119	669	1376
121	990	2366
123	1223	3589
125	1329	4918
127	1230	6148
129	1063	7211
131	646	7857
133	392	8249
135	202	8451
137	79	8530
139	32	8562
141	16	8578
143	5	8583
145	2	8585
மொத்தம்	8585	

முழுமைத் தொகுதியின் அளவு நான்கிலக்க எண் ஆதலால் நமக்கு தேவையான 10 மாதிரிகளை அட்டவணையிலிருந்து பெறலாம். அட்டவணையின் முதல் நிரலிருந்து தொடங்கி முழுமை தொகுதியின் அளவான 8585–க்கு மிகாமல் எண்களை தேர்வு செய்து கீழ்கண்டவாறு நிழலிடப்படுகிறது.

டிப்பெட்டின் சமவாய்ப்பு எண் அட்டவணை							
2952	6641	3992	9792	7969	5911	3170	5624
4167	9524	1545	1396	7203	5356	1300	2693
2670	7483	3408	2762	3563	1089	6913	7991
0560	5246	1112	6107	6008	8125	4233	8776
2754	9143	1405	9025	7002	6111	8816	6446

2952 என்ற எண் குறியிட்டுள்ள குழந்தையின் உயரத்தை காண வேண்டுமாயின் குவிவு நிகழ் வெண் நிரலில் 2952–க்கு அடுத்த அதிககுவிவு நிகழ்வெண் 3589–க்கு உரிய உயரமான 123 செ.மீட்டரை தேர்வு செய்யவும். இதேபோல் மற்ற எண்களுக்கு உரிய குழந்தையின் உயரத்தை கண்டு தேவையான 10 குழந்தைகள் மற்றும் அவர்களின் உயரங்கள் மாதிரியை கீழ்கண்ட அட்டவணையை உள்ளவாறு காணலாம்.

குழந்தைகளின் குறியீட்டு எண்	2952	4167	2670	0560	2754
குழந்தைகள் உயரம் (செ.மீ.)	123	125	123	117	123
குழந்தைகளின் குறியீட்டு எண்	6641	7483	5246	3992	1545
குழந்தைகள் உயரம் (செ.மீ.)	129	131	127	125	121

எடுத்துக்காட்டு 8.4

கீழ்க்கண்ட கேண்டல்– பாபிங்டன்ஸ்மித் சமவாய்ப்பு எண் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி.

23	15	75	48	59	01	83	72	59	93	76	24	97	08	86	95	23	03	67	44
05	54	55	50	43	10	53	74	35	08	90	61	18	37	44	10	96	22	13	43
14	87	16	03	50	32	40	43	62	23	50	05	10	03	22	11	54	36	08	34
38	97	67	49	51	94	05	17	58	53	78	80	59	01	94	32	42	87	16	95
97	31	26	17	18	99	75	53	08	70	94	25	12	58	41	54	88	21	05	13

1550 முதல் 8000 வரையிலான 4 இலக்க எண் கொண்ட 10 சமவாய்ப்பு மாதிரியை தேர்ந்தெடுக்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட 2 இலக்க எண்களைக்கொண்ட சமவாய்ப்பு அட்டவணையிலிருந்து 1550 முதல் 8000 வரையிலான 4 இலக்கம் கொண்ட 10 மாதிரிகளை தேர்ந்தெடுக்க முதலில் இரண்டு இலக்க எண்களை மற்ற

இரண்டிலக்க எண்களும் இணைந்து 4–இலக்க எண்களாக மாற்ற வேண்டும். அதாவது, அட்டவணையின் 5–வது மற்றும் 6–வது நிரல்களை நிழலிட்டவாறு இணைத்து முதல் ஐந்து மாதிரியையும் 8வது மற்றும் 9வது நிரல்களை இணைத்து அடுத்த ஐந்து மாதிரிகளையும் கொண்டு தேவையான 10 மாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம். கீழ்கண்ட அட்டவணையில் இரு நிரல்களை இணைத்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்பு மாறிகளைக் காணலாம்.

23	15	75	48	59	01	83	72	59	93	76	24	97	08	86	95	23	03	67	44
05	54	55	50	43	10	53	74	35	08	90	61	18	37	44	10	96	22	13	43
14	87	16	03	50	32	40	43	62	23	50	05	10	03	22	11	54	36	08	34
38	97	67	49	51	94	05	17	58	53	78	80	59	01	94	32	42	87	16	95
97	31	26	17	18	99	75	53	08	70	94	25	12	58	41	54	88	21	05	13

எனவே, தேவையான 10 மாதிரிகளை கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

5901	4310	5032	5194	1899
7259	7435	4362	1758	5308

(ii) படுகை சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு முறை (Stratified Random Sampling)

வரையறை 8.1

படுகை சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு முறையில் முழுமைத்தொகுதி பல துணை முழுமைத் தொகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. இவற்றை படுகை (Strata) என அழைக்கிறோம். பிறகு ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் சமவாய்ப்பு முறையில் கூறுகள் (மாதிரிகள்) தெரிவு செய்யப்படுகிறது. எல்லா படுகைகளிலிருந்தும் பெறப்பட்ட கூறுகளின் தொகுப்பே படுகை கூறெடுப்பாகும்.

முழுமைத்தொகுதியானது அதன் பண்புகளைப் பொறுத்து அதாவது ஒத்த பண்பற்றவையாகவோ (heterogeneous), அல்லது வெவ்வேறு பகுதி களாகவோ (துண்டுகளாகவோ) அல்லது பிரிவு களாகவோ இருக்கும் போது படுகை கூறெடுப்பு முறை பயன்படுகிறது. படுகை கூறெடுப்பு முறையின் மூலம் கூறுகளை தெரிவு செய்வதற்கு முன், முழுமைத்தொகுதியை ஒத்த பண்புகள் (homogeneous) உடைய துணைப் பிரிவுகளாக அல்லது படுகைகளாக (Strata) பிரிக்கப்பட்டு ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் கூறுகள் தெரிவு செய்யப்படவேண்டும். படுகை கூறெடுப்பு முறையில் சமவாய்ப்பு மாதிரிகளை தெரிவுசெய்யும் போது பின்பற்ற வேண்டிய படிநிலைகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

(a) முழுமைத்தொகுதியானது ஏறத்தாழ ஒத்த பண்புகளைக் கொண்ட உறுப்புகளாலான வெவ்வேறு படுகைகளாகப் பிரிக்கப்பட வேண்டும். படுகைகள் ஒன்றோடொன்று சேராதவாறு வடிவமைக்கப்படவேண்டும்.

(b) முழுமைத்தொகுதி, படுகைகளாகப் பிரிக்கப்பட்டப் பின் ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் குறிப்பிட்ட அளவு கொண்ட கூறுகளைச் சமவாய்ப்பு முறையில், குலுக்கல் முறையில் அல்லது சமவாய்ப்பு எண் அட்டவணையிலிருந்து பெறலாம்.

ஒரு மாநிலத்தில் தேர்தலுக்காக, வெவ்வேறு சட்டமன்றப் பகுதிகளை பிரிப்பது மாநிலத்திலிருந்து மாவட்டங்களை பிரிப்பது படுகைகளுக்கான எடுத்துக்காட்டுகள்,இதுபோன்றமற்றநிகழ்வுகளிலும் படுகை கூறெடுப்பு முறை பயன்படுத்தப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 8.5

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள, ஒத்த பண்பற்ற 500 அளவு கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து 68 கூறு அளவு கொண்ட சமவாய்ப்பு மாதிரியை தெரிவு செய்யவும் படுகைகள் கீழ்கண்டவாறு வகைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

சமவாய்ப்பு மாதிரியை தேர்ந்தெடுக்கவும்

வகை (1) குறைந்த வருமான வகுப்பினர் 39%

வகை (2) நடுத்தர வருமான வகுப்பினர் 38%

வகை (3) உயர் வருமான வகுப்பினர் 23%

தீர்வு

படுகைகள்	ஒத்த தொகுதிகள்	முழுமைத் தொகுதியில் சதவிகிதம்	ஒவ்வொரு படுகையில் உள்ள மக்கள் எண்ணிக்கை	சமவாய்ப்பு மாதிரிகள்
வகை 1	குறைந்த வருமான வகுப்பினர்	39	$\frac{39}{100}\times 500 = 195$	$195\times\frac{68}{500} = 26.5 \sim 26$
வகை 2	நடுத்தர வருமான வகுப்பினர்	38	$\frac{38}{100}\times 500 = 190$	$190\times\frac{68}{500} = 26.5 \sim 26$
வகை 3	உயர் வருமான வகுப்பினர்	23	$\frac{23}{100}\times 500 = 115$	$115\times\frac{68}{500} = 15.6 \sim 16$
மொத்தம்		**100**	**500**	**68**

படுகை கூறெடுப்பின் நிறை மற்றும் குறைகள்

நிறைகள்

(a) படுகை கூறெடுப்பு முறையானது, எளிய சமவாய்ப்பு முறையை விட மேம்பட்டதாகும். ஏனெனில் கூறெடுப்பில் எல்லா படுகை களிலிருந்தும் முழுமைத் தொகுதியின் பிரதிநிதிகள் பங்குபெறுகின்றன.

(b) படுகை கூறெடுப்பில், கூறுகளின் எண்ணிக்கை சிறிய அளவுள்ளதாக இருப்பினும் அதன் துல்லியத்தன்மை குறைவதில்லை.

(c) முழுமைத்தொகுதி பகுக்கப்பட்டிருந்தால் எளிதில் நிர்வகிக்க முடியும்.

(d) அரசானது, புவியியல் அடிப்படையில் நிலப் பகுதிகளை இடம் மற்றும் பரப்பளவைப் பொறுத்து படுகைகளாக பிரித்துள்ளதால் நேரம் மற்றும் செலவைக் குறைக்க முடிகிறது.

குறைகள்

(a) ஒத்த பண்பற்ற முழுமைத் தொகுதிகளை ஒத்த பண்புள்ள படுகைகளாக பிரிப்பது கடினமான ஒன்றாகும். அதற்கு செலவு, அதிக நேரம் மற்றும் புள்ளியியல் அனுபவம் தேவைப் படுகிறது

(b) படுகைகள் சரியான முறையில் பிரிக்கப்படாத போது துல்லியத் தன்மையை இழக்க நேரிடும்.

(c) சரியான முறையில் படுகைகள் பிரிக்கப் படுவதில் தவறுகள் நிகழ வாய்ப்பு இருப்பதால் மாறுபாடு அதிகரிக்கும்.

(iii) முறைப்படுத்திய கூறெடுப்பு (Systematic Sampling)

வரையறை 8.2

முதல் கூறெடுப்பானது சமவாய்ப்பு முறையில் முதல் kஅலகுகளிலிருந்து தெரிவு செய்யப்பட்டு, முதல் கூறிலிருந்து ஒவ்வொரு k ஆவது உறுப்புகளை அடுத்த கூறுகளாக தெரிவு செய்யப்பட்டு பெறப்படும் கூறெடுப்பு, முறைப் படுத்திய கூறெடுப்பு அல்லது முறை சார்ந்த மாதிரி எடுத்தல் முறை என அழைக்கப்படுகிறது. .

முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள உறுப்புகளின் முழுபட்டியலும் இருக்கும்போது முறைபடுத்திய கூறெடுப்பு முறை பரவலாக பயன்படுத்தப்படுகிறது. இம்முறையைப் பயன்படுத்துவதற்கு ஏதுவாக உறுப்புகளை ஏறுவரிசையிலோ, அகரவரிசையிலோ, புவியியல் அடிப்படையிலோ அல்லது இதுபோன்ற மற்ற ஏனைய வரிசைகளிலிருந்து ஏதாவது ஒரு வரிசையில் அமைத்தல் வேண்டும். இம்முறையில் மாதிரிகளைத் தெரிவு செய்யும் போது, முதல் உறுப்பை சமவாய்ப்பு முறையில் தெரிவு செய்து பிறகு மற்றைய உறுப்புகளை நாம் வரையறுத்த வடிவத்திற்கு உட்பட்டு முதல் உறுப்பு சார்ந்த முறையாகவும் தொடர்ச்சியாகவும் தெரிவுசெய்யப்ப டுகின்றன. இம்முறையில் முழுமைத் தொகுதி யிலுள்ள ஒவ்வொரு kஆவது உறுப்பு மாதிரியில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. இங்கு k என்பது மாதிரி

எடுத்தலின் இடைவெளி ஆகும். இடைவெளி k என்பது முழுமைத் தொகுதியின் அளவுக்கும் (N) மாதிரிகளின் அளவுக்கும் (n) உள்ள விகிதமாகும்.

கூறுஇடைவெளி $k=\dfrac{N}{n}$

N –முழுமை தொகுதி அளவு , k– .ஒரு முழு எண் , n = மாதிரியின் அளவு.

முறைபடுத்திய கூறெடுப்பு முறையில் கூறுகளைத் தெரிவு செய்யும் வழிமுறைகளாவன:

(i) 100 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு வகுப்பிலிருந்து 10 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு மாதிரியை தேர்வு செய்ய வேண்டுமெனில்.

மாதிரி இடைவெளி $k=\dfrac{N}{n}=\dfrac{100}{10}=10$.

எனவே இங்கு மாதிரி இடைவெளி k= 10 என்பது ஒவ்வொரு 10 மாதிரிகளிலிருந்தும் ஒரு மாதிரியானது தெரிவு செய்வதைக் குறிக்கும்.

(ii) சமவாய்ப்பு முறையில் முதல் கூறெடுப்பானது முதல் 10 மாணவர்களிலிருந்து ஏதாவது ஒரு மாணவரைத் தெரிவு செய்ய வேண்டும்.

(iii)முதல் கூறானது 5 வது இடத்திலுள்ள மாணவர் எனில், மற்ற கூறுகள் முதல் கூறுடன் கூறு இடைவெளி (k= 10) கூட்டப்பட்டு, அதாவது 5, 15 , 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95 எனப்பெறலாம்.

உதாரணத்திற்கு :

6,000 உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு முழுமை தொகுதியிலிருந்து 20 உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு மாதிரியை முறைபடுத்திய கூறெடுப்பு முறையில் தேர்வு செய்வதாக எடுத்துக்கொள்வோம். முதலில் 1 முதல் 6000 வரையிலான எண்களை அனைத்து 6000 உறுப்புகளுக்கும் குறியிட வேண்டும்.

மாதிரி இடைவெளி $k=\dfrac{N}{n}=\dfrac{6000}{20}=300$.

மாதிரி இடைவெளி k= 300 என்பது 6000 உறுப்புகள் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு 300 மாதிரியிலும் ஒரு மாதிரியைத் தெரிவு செய்யலாம். முதல் மாதிரி 50 வது எண்ணாகத் தெரிவு செய்வோமாயின் மற்ற உறுப்புகளை முதல் உறுப்பிலிருந்து இடைவெளி 300 ஐக் கூட்டிப் பெற வேண்டும் அதாவது (k=300) 50, 350, 650, 950, 1250, 1550, 1850, 2150, 2450, 2750, 3050, 3350, 3650, 3950, 4250, 4550, 4850, 5150, 5450, 5750. இவ்வெண்களை உறுப்புகளாக கொண்ட மாதிரிகளை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தெரிவு செய்யலாம்.

முறைபடுத்திய கூறெடுப்பின் நிறைகள் மற்றும் குறைகள்

நிறைகள்

1. இம்முறையானது எளிதானதும் பயன்படுத்துவதற்கு வசதியானதுமாகும்.
2. இம்முறையில் கூறுகள் முழுமைத்தொகுதி முழுவதும் சீராக பரவி இருக்கும்.
3. நேரமும் வேலையும் பெருமளவில் குறைகிறது.

குறைகள்

1. முறைப்படுத்திய கூறெடுப்பானது சமவாய்ப்பு முறையில் தெரிவு செய்யப்படுவதில்லை.
2. முழுமைத்தொகுதியன் அளவு N ஆனது மாதிரித்தொகுதி அளவு n இன் பெருக்கற் பலனாக இல்லாதிருப்பின் இடைவெளி k–இன் மதிப்பானது முழு எண்ணாக இருக்க வாய்ப்பில்லை. இவ்வாறான தருணங்களில் கூறுகளைத் தெரிவு செய்வது கடினம்.

8.1.2 கூறெடுப்புமுறை சார்ந்த மற்றும் சாரா பிழைகள் (Sampling and Non-Sampling Errors)

கூறு என்பது முழுமைத்தொகுதியின் ஒரு பகுதியாகும். முழுமைத் தொகுதிலிருந்து எடுக்கப்படும் கூறுகள் சமவாய்ப்பினைச் சாந்துள்ளதால் முழுமைத் தொகுதியின் அனைத்து சிறப்பியல்புகளையும் பெற்றிருக்கும் எனக்கூற இயலாது. விவரங்களை சேகரித்தல், முறைப்படுத்துதல், பகுத்தாய்தல் ஆகிய வற்றை மேற்கொள்ளும் போது ஏற்படும் பிழைகள் இருவகையாக வகைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. அவை,

(i) கூறெடுப்பு சார்ந்த பிழைகள் (Sampling Errors)
(ii) கூறெடுப்பு சாரா பிழைகள் (Non–Sampling Errors)

(i) கூறெடுப்பு சார்ந்த பிழைகள் (Sampling Errors)

கூறுகளை வாய்ப்பு முறையில் தெரிவு செய்வதிலும், அவற்றின் விவரங்களை சேகரிப்பதிலும் ஏற்படும் பிழைகள் கூறெடுப்பு சார்ந்த பிழைகள் எனப்படும். இப்பிழைகள் கூறினைத் தேர்ந்தெடுக்கும் முறையினை உள்ளடக்கியாதாகும். இப்பிழை தற்செயலாகவும், சார்பற்றதாகவும், பாரபட்சம் இல்லாமலும் ஏற்படலாம்.

கூறெடுப்பு சார்ந்த பிழைகள் ஏற்படுவதற்கு முக்கிய காரணங்கள் பின்வருமாறு

(a) குறைபாடுள்ள உத்தியின் மூலம் சரியான கூறுக்கு பதில், தகுதியற்ற கூறு தேர்வு செய்யப்படும் போது.

(b) ஆய்வாளர் கூறெடுத்தலின் போது உகந்த உறுப்பு கிடைக்காதபோது அதற்கு பதிலாக தமக்கு தேவையான உறுப்பினைத் தெரிவு செய்யும்போது.

(c) நில அளவீடுகளின்போது எல்லைக் கோட்டினைக் கூறில் தேர்ந்தெடுப்பதா அல்லது தவிர்ப்பதா என்பது ஒவ்வொரு ஆய்வாளரைப் பொறுத்த தாகும். இவ்வாறு கூறெடுப்பது, தவறான வரையறை கொண்ட மாதிரி அலகுகள் (Faulty demarcation of sampling) எனப்படுகிறது.

(ii) கூறெடுப்பு சாரா பிழைகள் (Non-Sampling Errors)

களப்பணி ஆய்வில் விவரங்களைச் சேகரிக்கும் போது, மதிப்பிடும் போது அல்லது கருவிகளைக் (நாடா, அளவுகோல்) கொண்டு அளவிடும் போதும் ஆய்வாளர் களுக்கிடையே விவரங்கள் வேறுபடுகிறது. இவ்வாறாக மனித காரணிகளால் எழும் பிழைகள் கூறெடுப்பு சாராபிழைகளாகும். இப்பிழை ஏற்படுவதற் கான காரணங்களாவன:

(a) ஆய்வு மேற்கொள்பவரின் அல்லது பதிலளிப்பவரின் அலட்சியம் மற்றும் கவனக்குறைவு.

(b) மாதிரி கணிப்பில் ஈடுபடும் ஆய்வாளர்களின் அனுபவமின்மை மற்றும் தகுதி குறைவு.

(c) தவறான வினாப்பட்டியல் அமைப்பு.

(d) தவறான புள்ளிவிவர அளவைகளைப் பயன்படுத்துவது.

(e) மாதிரி கணக்கெடுத்தல் முடிவடையாத ஆய்வு.

8.1.3 கூறெடுப்பு பரவல் (Sampling distribution)

வரையறை 8.3

ஒரே முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்ட ஒரே அளவு கொண்ட அனைத்து மாதிரிகளின் புள்ளியியல் அளவைகள் கணக்கிடப்பட்டு, ஒரு நிகழ்வெண் (அலைவெண்) பரவல் அமைப்பதே கூறெடுப்பு பரவல் அல்லது மாதிரிப் பரவல் (Sampling distribution) என அழைக்கப்படுகிறது.

உதாரணமாக, N அளவுள்ள ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து n அளவுடைய சமவாய்ப்பு மாதிரி எடுக்கப்படுகின்றது எனில், கிடைக்கப்பெறும் மொத்த மாதிரிகளின் எண்ணிக்கை

$$^{N}C_n = \frac{N!}{n!(N-n)!} = k \text{ ஆகும்.}$$

இவ்வாறாக பெறப்பட்ட k மாதிரிகள் ஒவ்வொன்றிக்கும், $t = t(x_1, x_2, x_3, \ldots x_k)$, என்ற புள்ளியியல் அளவைகளான சராசரி $\overline{x}$, பரவற்படி s^2, முதலானவற்றைக் கண்டுபிடித்துப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

கூறெடுப்பு பரவல்			
கூறு எண்	கூறுஅளவை		
	t	$\overline{x}$	s^2
1	t_1	$\overline{x}_1$	s_1^2
2	t_2	$\overline{x}_2$	s_2^2
3	t_3	$\overline{x}_3$	s_3^2
⋮	⋮	⋮	⋮
k	t_k	$\overline{x}_k$	s_k^2

ஒவ்வொரு கூறுலிருந்தும் புள்ளியியல் அளவைகள் கணக்கிடப்பட்டு அவை கூறெடுப்புப் பரவலாக அமைக்கப்படுகிறது.

திட்டப்பிழை (Standard Error)

ஒரு புள்ளியியல் அளவையின் கூறெடுப்பு பரவலின் திட்டவிலக்கமே திட்டப்பிழை எனப்படும். இதனை S.E. எனச் சுருக்கமாகக் குறிப்பிடுகிறோம். பெருங்கூறுகளின் அதிக அளவில் அறியப்பட்ட சில திட்டப் பிழைகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இதில் n என்பது மாதிரியின் அளவு, σ^2 என்பது முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாட்டளவை (பரவற்படி) ஆகும்.

வ.எண்	கூறு அளவைகள்	திட்டப்பிழை
1.	மாதிரி சராசரி ($\overline{x}$)	$\sigma/\sqrt{n}$
2.	கண்டறியப்பட்ட மாதிரி விகித சமம் (p)	$\sqrt{PQ/n}$
3.	மாதிரியின் திட்டவிலக்கம் (s)	$\sqrt{\sigma^2/2n}$
4.	மாதிரியின் பரவற்படி (s^2)	$\sigma^2\sqrt{2/n}$
5.	மாதிரி கால்மான அளவு	$\dfrac{1.36263}{\sigma/\sqrt{n}}$
6.	மாதிரியின் இடைநிலை	$\dfrac{1.25331}{\sigma/\sqrt{n}}$
7.	மாதிரியின் ஒட்டுறவுக்கெழு (r)	$(1-\rho^2)/\sqrt{n}$

8.1.4 திட்டப்பிழை கணக்கிடுதல் (Computing standard error)

எடுத்துக்காட்டு 8.6

ஒரு சேவையகம் வழங்கும் அலைவரிசை ஒரு மணி நேரம் கண்காணிக்கப்பட்டு, சராசரியாக நிமிடத்திற்கு 20 பரிவர்த்தனைகள் நடத்தப்படுவதாக மதிப்பிடப்படுகிறது. அதன் பரவற்படி 4 எனில் திட்டப்பிழையைக் காண்க.

தீர்வு:

பரவற்படி $\sigma^2 = 4$

$\sigma = 2$, $n = 1$ மணிநேரம் = 60 நிமிடங்கள், $\bar{X} = 20$ /நிமிடம்.

திட்டப்பிழை = $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{2}{\sqrt{60}} = 0.2582$

எடுத்துக்காட்டு 8.7

திட்ட விலக்கம் 10 மற்றும் மாதிரியைப் பொறுத்து திட்டப்பிழை 3 எனில் மாதிரியின் அளவைக் காண்க.

தீர்வு:

திட்டவிலக்கம் $\sigma = 10$, S.E. $\bar{X}$ =3, S.E = $\sigma / \sqrt{n}$

எனவே , $3 = \dfrac{10}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \dfrac{10}{3}$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த,

$$n = \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{100}{9} = 11.11 \cong 11,$$

$\therefore$ தேவையான மாதிரியின் அளவு $n = 11$.

எடுத்துக்காட்டு 8.8

ஒரு பகடை 9000 முறை வீசப்படும்போது அதன் மேல் உள்ள எண்கள் 3 அல்லது 4 ஆக 3240 முறை கிடைக்கின்றன. பிழையற்ற பகடையின் திட்டப் பிழை விகிதத்தைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

ஒரு பகடையை உருட்டும்போது எண் 3 அல்லது 4 கிடைக்கப்பெறுவது வெற்றியாக கருதப்படுகிறது.

கூறுகளின் எண்ணிக்கை n = 9000; வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை = 3240

மாதிரி விகித சமம்: $p = \dfrac{3240}{9000} = 0.36$

முழுமைத் தொகுதி விகித சமம் ஒரு பகடை உருட்டும்போது எண் 3 அல்லது 4 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $=P$ (3 அல்லது 4)

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.3333$$

எனவே $Q = 1 - \text{P} = 1 - 0.3333 = 0.6667$

மாதிரி விகித சமத்திற்கான திட்டப்பிழை

$$S.E. = \sqrt{\frac{PQ}{n}} = \sqrt{\frac{(0.3333)(0.6667)}{9000}} = 0.00496$$

மாதிரி விகித சமத்திற்கான திட்டப்பிழை S.E=0.00496.

எடுத்துக்காட்டு 8.9

ஒரு கூறின் அளவு 50 உடைய ஒரு மாதிரியின் திட்டவிலக்கம் 6.3. அதற்குரிய முழுமைத்தொகையின் திட்டவிலக்கம் 6 எனில் மாதிரியின் திட்டப்பிழை காண்க.

தீர்வு:

கூறின் அளவு $n = 50$

மாதிரியின் திட்டவிலக்கம் S.D $s = 6.3$

முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் S.D $\sigma = 6$

மாதிரியின் திட்டப்பிழை

$$S.E. = \sqrt{\frac{\sigma^2}{2n}} = \frac{6}{\sqrt{2(50)}} = \frac{6}{\sqrt{100}} = 0.6$$

$\therefore$ மாதிரியின் திட்டப்பிழை S.D = 0.6

எடுத்துக்காட்டு 8.10

அதிக எண்ணிக்கையிலான மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து 100 மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு மாதிரி தெரிவு செய்யப்படுகிறது. மாணவர்களின் சராசரி உயரம் 162 செ.மீ. மற்றும் திட்ட விலக்கம் 8 செ.மீ. முழுமைத்தொகுதியின் சராசரி உயரம் 160 செ.மீ. எனில் அதன் திட்டப் பிழையைக் காண்க

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தின்படி மாதிரிகளின் எண்ணிக்கை $n = 100$, $\bar{x}$ =162 செ.மீ., s = 8 செ.மீ.

மாதிரி சராசரி φ= 160 செ.மீ.

திட்டப்பிழை $S.E. = \dfrac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \dfrac{s}{\sqrt{n}} = \dfrac{8}{\sqrt{100}} = 0.8$

(முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் தரப்படாத நிலையில் $\hat{\sigma} = s$ எனக் கொள்வோம்)

எனவே, சராசரி உயரம் 160 செ.மீ. உள்ள பெரிய குழுவிலுள்ள மாணவர்களின் திட்டப்பிழை 0.8 ஆகும்.

பயிற்சி 8.1

1. முழுமைத் தொகுதி என்றால் என்ன?
2. கூறு என்றால் என்ன?
3. கூறுஅளவை (Statistic) அல்லது மாதிரிப்பண் பளவை என்றால் என்ன?
4. பண்பளவையை (Parameter) – வரையறு.
5. கூறு அளவையின் மாதிரிப் பரவல் என்றால் என்ன?
6. திட்டப்பிழை என்றால் என்ன?
7. எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பைத் தகுந்த எடுத்துக்காட்டுடன் விளக்குக.
8. படுகை கூறெடுப்பை தகுந்த எடுத்துக்காட்டு களுடன் விளக்குக.
9. முறைபடுத்திய கூறெடுப்பை தகுந்த எடுத்துக்காட்டுகளுடன் விளக்குக.
10. கூறெடுப்பு சார்ந்தபிழையைப் பற்றி விளக்குக.
11. கூறெடுப்பு சாரா பிழையைப் பற்றி விளக்குக.
12. எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பின் நன்மைகள் எவையேனும் இரண்டினை எழுதுக.
13. படுகை கூறெடுப்பின் நிறைகள் எவையேனும் மூன்றினை எழுதுக.
14. முறைபடுத்திய கூறெடுப்பின் குறைகள் இரண்டினைக் கூறுக.
15. முறைபடுத்திய கூறெடுப்பின் நிறைகள் இரண்டினைக் கூறுக.
16. கீழ்காணும் டிப்பெட்டின் வாய்ப்பு அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி

2952	6641	3992	9792	7969	5911	3170	5624
4167	9524	1545	1396	7203	5356	1300	2693
2670	7483	3408	2762	3563	1089	6913	7991
0560	5246	1112	6107	6008	8125	4233	8776
2754	9143	1405	9025	7002	6111	8816	6446

மூன்றிலக்க இரட்டை எண்களாக 10 எண்களைக் கொண்ட ஒரு மாதிரியைத் தெரிவு செய்க.

17. மொத்த வணிகம் செய்யும் ஒருவர், தான் விற்பனை செய்த மொத்த ஆப்பிள்களில், 4% ஆப்பிள்கள் குறைப்பாடுள்ளவை எனக் கூறுகிறார். சமவாய்ப்பு முறையில் தெரிவு செய்யப்பட்ட 600 ஆப்பிள்களில், 36 ஆப்பிள்கள் குறைபாடுள்ளவை எனில், நல்ல ஆப்பிள்கள் குறித்த திட்டப் பிழையைக் காண்க.
18. தமிழ்நாட்டிலுள்ள ஒரு பள்ளியில், 1000 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு மாதிரியில் அவர்களது சராசரி எடை 119 பவுண்டுகளாக (lbs) உள்ளது. தமிழ்நாட்டிலுள்ள மொத்த மாணவர் களின் சராசரி எடை 120 பவுண்டுகளாகவும், (lbs) திட்டவிலக்கம் 30 பவுண்டுகளாவும் (lbs) இருக்குமானால், சராசரிக்கான திட்டப்பிழையைக் கணக்கிடுக.
19. ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து 60 உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு பெருங்கூறு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு அதன் திட்ட விலக்கம் 2.5 ஆக கணக்கிடப்பட்டது. திட்டவிலக்கம் 3 கொண்ட முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப் பட்ட மாதிரியின் பொருத்தமான திட்டப்பிழையை கணக்கிடுக.
20. ஒரு கிராமத்தில், 400 நபர்களைக் கொண்ட ஒரு கூறில் சைவ உணவு உண்பவர்கள் 230 நபர்கள், மற்றவர்கள் அசைவ உணவு உண்பவர்கள் என்க. அந்த கிராமத்தில் சைவ மற்றும் அசைவ உணவுகள் உண்பவர்களின் எண்ணிக்கை சமம் எனில் திட்டப்பிழையைக் காண்க.

புள்ளியியல் அனுமானம் (Statistical Inference)

ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் மாதிரிகளை எடுத்துக்கொண்டு அவற்றைப் பகுப்பாய்வு செய்து, அவற்றிலிருந்து முழுமைத்தொகுதியின் பண்புகளை அனுமானிப்பதே ஒரு புள்ளியியல் ஆய்வின் முக்கிய நோக்கமாகும். மேலும், மாதிரியிலிருந்து எவ்வாறு முழுமைத்தொகுதியின் அளவைகளைப் பற்றி மதிப்பீடு செய்வது மற்றும் அம்மதிப்பீட்டினை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்டதா என்பதை சோதிப்பது ஆகியவற்றைப் பற்றி புள்ளியியல் அனுமானமானது வழங்குகிறது.

புள்ளியியல் அனுமானத்திற்கான செயல்பாட்டில் (i) மதிப்பிடுதல் (ii) கருதுகோள் சோதனை எனும் இரண்டு முக்கிய பகுதிகள் உள்ளன. அவற்றை இங்கு விரிவாகக் காண்போம்.

8.2 மதிப்பீட்டு முறை (Estimation):

மாதிரிப்பரவல்களிலிருந்து முழுமைத் தொகுதி யிலுள்ள தொகுதிப் பண்பளவைகளின் (Population Paramaters) பொருந்தக் கூடிய மதிப்புகளிலிருந்து முடிவுகளைப் பெறலாம். மதிப்பீட்டு முறையின்

மூலம், தெரியாத முழுமைத்தொகுதிப் பண்பளவை களான, தொகுதி சராசரி , தொகுதி திட்டவிலக்கம் போன்றவற்றின் மதிப்புகளை முழுமைத் தொகுதியி லிருந்து பெறப்பட்ட பொருத்தமான மாதிரிப் பண்பளவையின் (Statistic) மூலம் கணக்கிடலாம்.

மதிப்பீட்டு முறை (Estimation):

வரையறை 8.4

மாதிரிப்பண்பளவைகளைப் பயன்படுத்தி தொகுதிப் பண்பளவையின் மிகச்சிறந்த மதிப்பை பெறும் முறையே மதிப்பீட்டு முறை (Estimation) என்று அழைக்கப்படுகிறது.

மதிப்பீட்டு பண்பளவை (Estimator):

வரையறை 8.5

மதிப்பு தெரியாத ஒரு தொகுதிப் பண்பளவையினை அளவிட பயன்படுத்தபடும் மாதிரிப் பண்பளவையே மதிப்பீட்டு பண்பளவை (Estimator) எனப்படும். அதாவது மதிப்பீட்டு பண்பளவை என்பது ஒரு மாதிரிப் பண்பளவையே, இது முழுமைத்தொகுதிப் பண்பளவையை மதிப்பிடப் பயன்படுகிறது.

மதிப்பீட்டு அளவை (Estimate):

வரையறை 8.6

மதிப்பீட்டு பண்பளவையின் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பு, மதிப்பீட்டு அளவை (Estimate) எனப்படும். மாறாக, கண்டறிந்த புள்ளியியல் அளவையின் மதிப்பே மதிப்பீட்டு அளவை ஆகும்.

சிறந்த மதிப்பீட்டு பண்பளவையின் பண்புகள் (Characteristic of a good estimator)

ஒரு சிறந்த மதிப்பீட்டு பண்பளவையின் பண்புகளாகக் கீழ்கண்டவற்றைக் கூறலாம்.

(i) பிழையற்ற தன்மை (ii) நிலைத்தன்மை (iii) திறன்தன்மை (iv) நிறைவுத்தன்மை

(i) பிழையற்றதன்மை : ஒரு மதிப்பீட்டு பண்பளவை $T_n = T(x_1, x_2, ..., x_n)$ என்பது ஒரு பிழையற்ற மதிப்பீட்டு பண்பு அளவையாக $\gamma(\theta)$ இருக்க வேண்டுமாயின், $E(T_n) = \gamma(\theta)$ என்பதை நிறைவு செய்யவேண்டும். அதாவது, எதிர்பார்த்தல் (Expectation) மதிப்பும், தொகுதிப் பண்பளவை (Population parameter) மதிப்பும் சமமாக இருக்கவேணடும். எடுத்துக்காட்டாக $E(\bar{x}) = \varphi$ என்பதாகும்.

(ii) நிலைத்தன்மை: ஒரு மதிப்பீட்டு பண்பளவை $T_n = T(x_1, x_2, ..., x_n)$ என்பது ஒரு நிலைத் தன்மையுடைய மதிப்பீட்டு பண்பளவையாக $\gamma(\theta)$ இருக்க வேண்டுமாயின், T_n என்பது $\gamma(\theta)$ க்கு நிகழ்தகவு குவிவு பெற்றிருக்க வேண்டும், அதாவது $T_n \xrightarrow{P} \gamma(\theta)\, as\, n \to \infty$, $\theta \varepsilon \Theta$.

(iii) திறன்தன்மை: T_1 என்பது மாறுபாட்டுஅளவை (variance) V_1 னின் திறத்தன்மையும், T_2 என்பது மாறுபாட்டு பண்பளவை (estimator) V_2 வின் திறத்தன்மையையும் குறிக்கும் எனில், T_2 இன் திறத்தன்மை E என்பது, $E = \frac{V_1}{V_2}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.மேலும் E இன் மதிப்பு 1 ஐ விட அதிகமாக இருக்க கூடாது.

(iv) நிறைவுத்தன்மை : $f(x, \theta)$ என்ற அடர்த்திச் சார்பு கொண்ட முழுமைத் தொகுயிலிருந்து பெறப்பட்ட n மாதிரிகள் $x_1, x_2, ..., x_n$ இன் பண்பளவையின் மதிப்பீட்டு பண்பளவை $T = t(x_1, x_2, ..., x_n)$ எனில் $x_1, x_2, ..., x_n$ மற்றும் T இன் நிபந்தனை பரவலானதும் θ-வை சாராததாகவும் இருப்பின், T–என்பதை θ –இன் நிறைவுத் தன்மையுடைய மதிப்பீட்டு பண்பளவை எனலாம்.

8.2.1 மதிப்பீட்டு முறையின் வகைகள் (Point and Interval Estimation):

ஒரு முழுமைத்தொகுதியின் தெரியாத தொகுதிப் பண்பளவையை மதிப்பிடுவதற்கு, மதிப்பீட்டு முறை கோட்பாடுகளைப் பயன்படுத்த வேண்டியுள்ளது. அவை (i) புள்ளி மதிப்பீட்டு முறை, (ii) இடைவெளி மதிப்பீட்டு முறை என இரு வகைப்படும்.

1.புள்ளி மதிப்பீட்டு முறை (Point Estimation)

ஒரே ஒரு மதிப்பை, மதிப்பீட்டு அளவையாகப் (Estimate) பயன்படுத்தி, தொகுதிப்பண்பளவையின் மதிப்பைப் பெறமுடியுமானால், அம்முறை புள்ளி மதிப்பீட்டு முறை (Point estimation) என்று அழைக்கப்படுகிறது. மாறாக தொகுதிப் பண்பளவையின் மதிப்பு ஒரு தனி எண்ணாக

இருக்குமாயின் அதனை புள்ளி மதிப்பீட்டு முறை எனலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) 100 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு வகுப்பில், 5 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு மாதிரியின் சராசரி மதிப்பெண் 55 என்போம். இந்த மதிப்பெண் முழுவகுப்பின் சராசரி மதிப்பெண் எனக் கருதினால், இந்த 55 என்ற ஒரு மதிப்பையே, புள்ளி மதிப்பீட்டில் பெற்ற மதிப்பாகக் கருதலாம்.

(ii) 100 மாணவர்கள் உள்ள ஒரு வகுப்பில், 10 மாணவர்கள் உள்ள ஒரு மாதிரியின் சராசரி எடை 50கி.கி என்பதையே, அவ்வகுப்பிலுள்ள அனைத்து மாணவர்களின் சராசரியாகக் கருதப்படுமேயானால், அந்த 50 கிலோ கிராம் என்ற தனி மதிப்பு, புள்ளி மதிப்பீட்டில் பெற்றதாகக் கருதலாம்.

குறிப்பு

மாதிரி சராசரி $(\overline{x})$ ஆனது முழுமைத்தொகுதி சராசரி (μ) இன் மதிப்பீட்டு அளவையாக பயன்படும் மாதிரிப்புள்ளியியல் அளவையாகும்.

ஒரு தனிமதிப்பை தொகுதிப்பண்பளவையின் மதிப்பீட்டு அளவையாக பயன்படுத்துவதற்கு பதிலாக ஓர் இடைவெளியினைக் கருத்தில் எடுத்துக்கொள்ளலாம். இம்முறை இடைவெளி மதிப்பீட்டு முறை எனப்படும். இதுபற்றிக் கீழே விவரிக்கப்பட்டுள்ளது.

2. இடைவெளி மதிப்பீட்டு முறை (Interval Estimation)

புள்ளி மதிப்பீட்டு முறையை ஏற்க இயலாத சூழ்நிலைகளில், தொகுதிப் பண்பளவை மதிப்புகள் குறிப்பிட்ட இடைவெளிகளில் அமையுமாறு எல்லைகளைக் கண்டறியும் முறை இடைவெளி மதிப்பீட்டு முறை (Interval Estimation) என வரையறுக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக,

திட்டவிலக்கத்தின் பொதுவான பண்பின் அடிப்படையில் T என்பது திட்டப்பிழை S கொண்ட θ–இன் சிறந்த மதிப்பீட்டு பண்பளவையாகவும், θ என்பது T–இன் நிச்சயமற்ற மதிப்பீட்டு பண்பளவையாகவும் இருந்தால், θ என்பதன் தெரியாத மதிப்பு, 95% நம்பிக்கையில் (T-2s, T+2s) என்ற இடைவெளிகளுக்குள் அமையும் என்றும், 99% நம்பிக்கையில் (T-3s, T+3s) என்ற இடைவெளிகளுக்குள் அமையும் எனில், இந்த இடைவெளிகளை நம்பிக்கை இடைவெளிகள் என்கிறோம். இதனைப்பற்றி கீழே விவரிக்கப் பட்டுள்ளது.

நம்பிக்கை இடைவெளிகள் (Confidence interval)

ஒரு கூறிலிருந்து, மாதிரிப் பண்பளவை (statistic $'t'$) மதிப்பைப் பெற்றபின், தெரியாத தொகுதி பண்பளவை θ வைப்பற்றி நியாயமான நிச்சயமற்ற கூற்றை உருவாக்க முடியுமா ? என்ற வினா எழுகிறது. இவ்வினாவிற்கான விடையானது நம்பிக்கை இடைவெளி என்ற நுட்பத்திலிருந்து கிடைக்கப்பெறுகிறது. ஒரு சிறு மதிப்பான α என்பதை எடுத்துக்கொண்டு அதை மிகைகாண் நிலை அல்லது மிகைகாண் மட்டம் (Level of significance) (1% அல்லது 5%) என்று கூறுகிறோம். அதற்குரிய இரு மாறிலிகள் c_1 , c_2 என்க. அது $P(c_1 < \theta < c_2 | t) = 1-\alpha$ என்று அமையும்.

c_1 , c_2 எனும் இரு அளவுகளும் நம்பிக்கை எல்லைகள் (confidence limits) என்றும் $[c_1, c_2]$ என்ற எல்லைகளுக்குள் முழுமைத் தொகுதியின் தொகுதிப் பண்பளவை (Population Parameter) மதிப்பு அமையுமானால், அவ்விடைவெளி நம்பிக்கை இடைவெளி (Confidence Interval) என்றும் அழைக்கப்படும் . இங்கு $(1-\alpha)$ என்பது நம்பிக்கை கெழு என்று அழைக்கப்படுகிறது.

பெருங்கூறுகளில் முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள சராசரிக்கான நம்பிக்கை இடைவெளிகள் (தொகுதி திட்டவிலக்கம் σ தெரிந்த நிலையில்) Confidence Interval for the population mean for Large Samples (when σ is known)

ஒன்றை ஒன்று சாராத n அளவுள்ள சமவாய்ப்பு கூறுகளை கொண்ட ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விளக்கம் (σ) கொடுக்கப் பட்டிருந்தால் அதன் சராசரி அமையும் முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி (φ& இடைவெளிக்குள் அமைவதற்கான நிகழ்தகவு $(1-\alpha)$ ஆகும்.

அதாவது,

$$P = \left(\overline{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

= $(1-\alpha)$ ஆகும்.

எனவே, முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் (σ) கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் போது, சராசரி (φ) க்கான நம்பிக்கை இடைவெளி , $\bar{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ என்பதாகும்.

நம்பிக்க இடைவெளி காண்பதற்கும் சிறப்புக்காண் சோதனைக்குமான வெவ்வேறு மிகைக்காண் நிலையில் தீர்மான மதிப்புக்கள் Z_{α} கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

இயல்நிலை நிகழ்தகவுடைய அட்டவணை

தீர்மான மதிப்புகள் Z_{α}	மிகைகாண் நிலை (α)			
	1%	2%	5%	10%
இருமுனை சோதனை	$\lvert Z_{\alpha} \rvert = 2.58$	$\lvert Z_{\alpha} \rvert = 2.33$	$\lvert Z_{\alpha} \rvert = 1.96$	$\lvert Z_{\alpha} \rvert = 1.645$
வலமுனை சோதனை	$Z_{\alpha} = 2.33$	$Z_{\alpha} = 2.055$	$Z_{\alpha} = 1.645$	$Z_{\alpha} = 1.28$
இடமுனை சோதனை	$Z_{\alpha} = -2.33$	$Z_{\alpha} = -2.055$	$Z_{\alpha} = -1.645$	$Z_{\alpha} = -1.28$

நம்பிக்கை இடைவெளிக்கான எடுத்துக்காட்டுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 8.11

ஒரு இயந்திரம் தயாரிக்கும் உற்பத்தி பொருளின் உதிரிபாகங்களின் திட்டவிலக்கம் 1.6 செ.மீ. சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 64 மாதிரிகளின் சராசரி உயரம் 90 செ.மீ. ஆகும். உதிரிபாகங்களின் உயரம் 88 செ.மீட்டருக்கு குறைவாகவோ அல்லது 92 செமீக்கு அதிகமாகவோ இருக்கும் போது அப்பாகங்களை வாடிக்கையாளர் நிராகரிக்கிறார். உற்பத்தி செய்யப்பட்ட சராசரி உயரம் கொண்ட உதிரிபாகங்கள், 95% நம்பிக்கை இடைவெளியில்அமையும்என வாடிக்கையாளருக்கு உறுதிபடுத்த முடியுமா?

தீர்வு:

இங்கு μ என்பது உதிரிபாகங்களின் முழுமைத் தொகுதி சராசரி உயரம் ஆகும்.

μ–ஐ மதிப்பீடு செய்வதற்கான 95% எல்லைகள்

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

இங்கு $\sigma = 1.6$, $Z_{\alpha/2} = 1.96$, $\bar{x} = 90$ மற்றும் $n = 64$

திட்டப்பிழை $S.E. = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1.6}{\sqrt{64}} = 0.2$

எனவே, $90 - (1.96 \times 0.2) \leq \varphi \leq 90 + (1.96 \times 0.2)$

$$(89.61 \leq \varphi \leq 90.39)$$

உதிரிபாகங்களின் முழுமைத்தொகுதி சராசரி உயரங்களின் உண்மை மதிப்பு (89.61, 90.39) என்ற 95% நம்பிக்கை இடைவெளியில் உள்ளது. எனவே 95% நம்பிக்கை இடைவெளியில் உள்ள உதிரிப்பாகங்களை வாடிக்கையாளர்கள் ஏற்றுக் கொள்வார்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 8.12

பருத்தி நூலின் வலிமை (அறும் தன்மை) அறிய 100 அளவீடுகள் கொண்ட ஒரு தொகுதியினைத் தெரிவு செய்து அவற்றின் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் முறையே 7.4 கிராம் மற்றும் 1.2 கிராம் எனில், பருத்தி நூலின் சராசரி வலிமையின் 95% நம்பிக்கை இடைவெளியை காண்க.

தீர்வு:

மாதிரியின் அளவு= 100, $\bar{x} = 7.4$, σ –ன் மதிப்பு தெரியாத நிலையில் உள்ளது.

ஆனால் $\hat{\sigma} = s = 1.2$

$\hat{\sigma} = s$, $Z_{\alpha/2} = 1.96$

$$S.E. = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{1.2}{\sqrt{100}} = 0.12$$

95% நம்பிக்கை இடைவெளியில் முழுமைத்தொகுதியின் சராசரியானது.

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$7.4-(1.96\times0.12)\le\mu\le7.4+(1.96\times0.12)$$

$$7.4-0.2352\le\mu\le7.4+0.2352$$

$$7.165\le\mu\le7.635$$

முழுமைத்தொகுதியின் சராசரி வலிமைத் திறனாது $(7.165, 7.635)$ என்ற 95% நம்பிக்கை இடைவெளிக்குள் உள்ளது .

எடுத்துக்காட்டு 8.13

மின்விளக்குகள் தயாரிக்கும் நிறுவனம் ஒன்றிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 169 விளக்குகள் கொண்ட கூறின் சராசரி ஆயுட்காலம் 1350 மணி நேரம், அதன் திட்டவிலக்கம் 100 மணி நேரம் எனில், மின் விளக்குகளின் சராசரி ஆயுட்கால இடைவெளிகளை 90% நம்பிக்கை இடைவெளியில் காண்க.

தீர்வு:

கணக்கின்படி: $n=169$, $\bar{x}=1350$ மணி, $\sigma=100$ மணி மிகைக்காண் $(100\text{-}90)\%=10\%$ ஆகும். α is 0.1, 10% இல் மிகைக்காண்

$$Z_{\alpha/2}=1.645$$

$$S.E.=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{100}{\sqrt{169}}=7.69$$

முழுமைத்தொகுதியின் சராசரியின் 90% நம்பிக்கை எல்லைகள்

$$\bar{x}-Z_{\alpha/2}SE<\mu<\bar{x}+Z_{\alpha/2}SE$$

$$1350-(1.645\times7.69)\le\mu<1350+(1.645\times7.69)$$

$$1337.35\le\mu\le1362.65$$

மின் விளக்கு சராசரி ஆயுட்காலமானது 90% நம்பிக்கை இடைவெளியில் (1337.35, 1362.65) என்று அமைகிறது.

8.3 கருதுகோள் சோதனை (Hypothesis Testing)

கருதுகோள் சோதனை என்பது, புள்ளியியல் பகுப்பாய்வில் முக்கிய பங்கு வகிக்கும் பகுதியாகும். வழக்கமான நடைமுறை வாழ்க்கையில், பெரும்பாலும் மாதிரிகளை வைத்தே முழுமைத்தொகுதி பற்றி முடிவெடுக்க வேண்டியுள்ளது. கருதுகோள் சோதனை என்பதை புள்ளியியல் மூலம் முடிவுகளைப் பெறுதல் என்ற வகையிலும் குறிப்பிட முடியும்.

மாதிரியின் அளவு தீர்மானிக்கப்பட்ட நிலையில், சில சமயங்களில் மாதிரிகளைப் பொறுத்து ஒரு நிலையற்ற தன்மை நிலவும்போது, புள்ளியியல் நுட்பங்கள் மூலம் கருதுகோள் சோதனை செய்து ஒரு முடிவைப்பெற முடிகிறது. இவ்வாறு ஒரு முடிவெடுக்கும் திறன் பெறுவதற்குத் துணைபுரியும் புள்ளியியல் முறையைக் கருதுகோள் சோதனை என்று அழைக்கிறோம். இது ஜே. நேமன் என்பவராலும் இ.எஸ். பியர்சான் என்பவராலும் தொடங்கப்பட்டு இப்போது பரவலாக எல்லா துறைகளிலும் பயன்பட்டு வருகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக, மாதிரிகளின் மூலம்

(i) புதிய தடுப்புமருந்து, நோயைத் தீர்ப்பதில் பயனுள்ளதாக இருக்கிறது.

(ii) தற்போதுள்ள பயிற்சி முறையைவிட புதிய பயிற்சிமுறை சிறந்ததாக உள்ளது.

(iii) விளைச்சலில், பழைய உரத்தைவிட புதிய உரம் அதிக விளைச்சல் தரக்கூடியது.

போன்றவற்றைக் கருதுகோள் சோதனை மூலம் தீர்வு கண்டு முடிவெடுக்கலாம்.

8.3.1 இன்மை கருதுகோள், மாற்று கருதுகோள், மிகைகாண் நிலை, பிழைகளின் வகைகள் (Null Hypothesis and Alternative Hypothesis - Level of Significants and Type of Errors)

புள்ளியியல் கருதுகோள் (Statistical Hypothesis)

முழுமைத் தொகுதி அளவை பற்றிய தற்கோள் அல்லது கூற்றை உண்மையானதாகவோ அதற்கு மாறாகவோ இருக்குமாறு எடுத்து கொள்வதே புள்ளியியல் கருதுகோள் அல்லது புள்ளியியல் எடுகோள் ஆகும்.

புள்ளியியல் கருதுகோள்களை இருவகையாகப் பிரிக்கலாம் அவை:

(i) இன்மை கருதுகோள் (Null hypothesis)

(ii) மாற்று கருதுகோள் (Alternative hypothesis)

இன்மை கருதுகோள் (Null Hypothesis)

வரையறை 8.7

F.A பிஷரின் கூற்றுப்படி உண்மை என எடுக்கப்பட்ட எடுகோளை அனுமானத்தின் கீழ் நிராகரிக்க சாத்தியமான சோதனைக்குரிய எடுகோளே "இன்மை கருதுகோள்" (Null hypothesis) ஆகும். இது வழக்கமாக H_0 எனக் குறிக்கப்படும்.

உதாரணமாக குறிப்பிட்ட மதிப்பு μ_0 ஐ முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி என அறிய விரும்பும்போது இன்மை கருதுகோள் H_0 என்பதை $H_0 : \mu = \mu_0$ என அமைத்துக் கொள்கிறோம்.

மாற்று கருதுகோள் (Alternative Hypothesis)

இன்மை கருதுகோளுக்கு நிரப்புப் பண்பாக (complementary) அதாவது எதிராக அமையும் கருதுகோள் "மாற்று கருதுகோள்" எனப்படும். இதனை வழக்கமாக H_1 என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

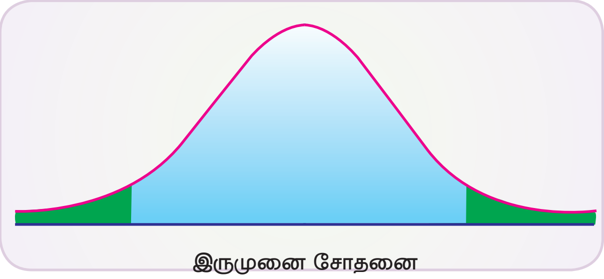
உதாராணமாக முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி (μ) யின் குறிப்பிட்ட மதிப்பு μ_0 என்றுள்ளவாறு இன்மை கருதுகோள் சோதனையை $H_0 : \mu = \mu_0$ செய்யலாம் என்பதை நாம் அறிவோம். இதற்கு மாற்றாக, மாற்று கருதுகோள் (H_1) ஐ கீழ்க்கண்ட எவையேனும் ஒன்றின் வழியாகச் சோதனையை மேற்கொள்ளலாம்.

(i) $H_1 : \mu \neq \mu_0$ ($\mu >$ அல்லது $\mu < \mu_0$)

(ii) $H_1 : \mu > \mu_0$

(iii) $H_1 : \mu < \mu_0$

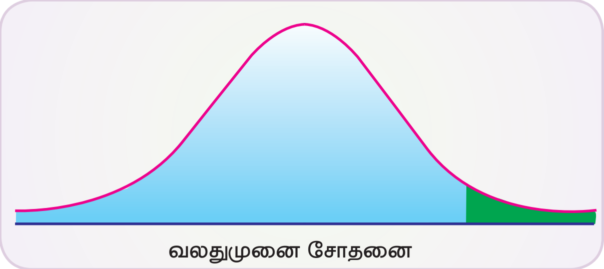
இவைகளில் $H_1 : \mu \neq \mu_0$ இல் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள மாற்று கருதுகோளானது இருமுனை மாற்று கருதுகோள் என அழைக்கப் படுகிறது. கூறு அளவையின் மதிப்பானது மாதிரிப் பரவலின் வலது மற்றும் இடது தீர்வு கட்ட பகுதியில் அமைவதால் முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவை பற்றிய கருதுகோள் நிராகரிக்கப்படும் நிகழ்வே **இருமுனை சோதனை** என்கிறோம். கூறு அளவையின் சராசரியானது, மாதிரிப்பரவலின் தீர்வு கட்டப்பகுதி முழுவதும் வலது முனையில் அமைந்தால் வலதுமுனை சோதனை எனவும் இடது முனையில் அமைந்தால் **இடதுமுனை சோதனை** எனவும் அழைக்கிறோம். அதாவது $H_1 : \mu > \mu_0$ என்ற கருதுகோளுக்கு எதிரான மாற்று கருதுகோள்களான $H_1 : \mu > \mu_0$ (வலமுனை) அல்லது $H_1 : \mu < \mu_0$ (இட முனை) ஆகியன ஒரு முனை சோதனையாக அமைகிறது என அறிவோம்.



படம் 8.1

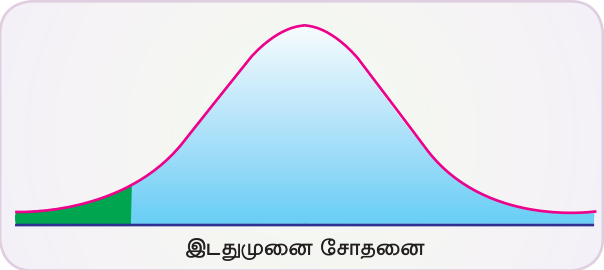
வலதுமுனை சோதனை (Right tailed test):

$H_1 : \mu > \mu_0$ மறுக்கப்படும் பகுதி அல்லது நிராகரிப்புப் பகுதி இயல்நிலை பரவலின் வலது முனையில் முழுவதும் அமையுமானால் $H_1 : \mu > \mu_0$ ஐ வலதுமுனை சோதனை என அழைக்கிறோம்.



படம்8.2

இடது முனை சோதனை நிராகரிப்புப் பகுதியானது இயல்நிலைப்பரவலின் இடது புறம் முழுவதும் அமையும் போது $H_1 : \mu < \mu_0$ஐ இடது முனை சோதனை என அழைக்கிறோம்.



படம்8.3

கருதுகோள் சோதனைப் பிழைகளின் வகைகள் (Types of Errors in Hypothesis testing)

இன்மை கருதுகோள் (Null Hypothesis) உண்மையாகவோ, தவறாகவோ இருக்கும் போது அவற்றைப் பற்றி எடுக்கும் முடிவுகளில் பிழைகள் நிகழ வாய்ப்புகள் அமைவதைக் காண்கிறோம் அவை.

முதல் வகைப் பிழை (Type I error): இன்மை கருதுகோள் (H_0) உண்மையாக இருக்கும்போது அதனை நிராகரிப்பது முதல் வகைப்பிழை எனப்படும்.

இரண்டாம் வகைப் பிழை (Type II error): இன்மை கருகோள் (H_0) தவறாக இருக்கும் போது அதனை ஏற்பது இரண்டாம் வகைப்பிழை எனப்படும்.

மறுக்கப்படும் பகுதி (Critical region or Rejection region)

கூறுவெளியில் இன்மை கருதுகோள் (H_0) எப்பகுதியில் மறுக்கப்படுகிறதோ அந்த பகுதியை மறுக்கப்படும் பகுதி என்கிறோம்.

குறிப்பு

மறுக்கப்படும் பகுதியின் நிரப்பு பண்பாக அமையும்பகுதி ஏற்கும் பகுதி என அழைக்கப் படுகிறது.

மிகைகாண் மட்டம் அல்லது மிகைகாண் நிலை (Level of significance)

மிகைகாண் மட்டம் என்பது முதல் வகை பிழைக்கான நிகழ்தகவினைக் குறிப்பதாகும். இது α என குறிக்கப்படுகிறது. வழக்கமாக 5% மற்றும் 1% நிலைகளை மிகைகாண் நிலைகளாக கருதுகோள் சோதனையில் எடுத்துக்கொள்வோம். மாதிரிகள் எடுப்பதற்கு முன்னதாகவே மிகைகாண் நிலை எனக்குறிப்பிடப்படுகிறது.

தீர்மான மதிப்பு (அல்லது) தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு (Critical values or significant values)

கூறுபண்பளவை சோதனை அளவையில் எந்த மதிப்பானது ஏற்கப்படும் மற்றும் மறுக்கப்படுவதற்கான பகுதியினைப் பிரிக்கிறதோ அம்மதிப்பே தீர்மான மதிப்பு அல்லது தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு என அழைக்கப்படுகிறது. இது கீழ்க்கண்டவற்றை பொறுத்து அமைகிறது.

(i) மிகைகாண் நிலை அல்லது மிகைகாண் மட்டம்

(ii) மாற்று கருதுகோளின் இருமுனை சோதனை மற்றும் ஒருமுனை சோதனை

பெருங்கூறுகளில், t கூறுபண்பளவையின் திட்ட இயல்நிலை மாறியானது,

$$Z = \frac{t - E(\mathrm{t})}{\sqrt{Var(t)}} = \frac{t - E(t)}{S.E.(t)} \sim N(0,1)$$

$n \to \infty$ க்கு ... (1)

என வரையறுக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு

கூறின் அளவு $n > 30$ எனும்போது பெரும் கூறாகக் கருதுகிறோம்.

இன்மை கருதுகோளின் கீழ், (1) லிருந்து பெறப்படும் Z இன் மதிப்பே கூறுபண்பளவைச் சோதனை அளவை எனப்படும். மிகைகாண் மட்டத்தில் இருமுனை மற்றும் ஒரு முனை சோதனைகளில் பயன்படுத்தப்படும் Z ன் தீர்மான மதிப்பு ஆனது இயல்நிலை நிகழ்தகவு அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. (இயல்நிலை அட்டவணையைப் பார்க்கவும்)

கூறின் அளவு (n) பெரியதாக இருக்கும் போது ஈருறுப்பு, பாய்சன் போன்ற பரவல்கள் இயல்நிலைப் பரவலாக தோராயமாக்கப்படுகின்றன. எனவேதான் நாம் மிகைகாண் சோதனையில் இயல்நிலை சோதனையை பெருங்கூறுகளுக்கு பயன் படுத்துகிறோம்.

8.3.2 கருதுகோள் சோதனைக்கான வழிமுறைகள் (Testing Procedure : Large sample theory and test of significants for single mean)

கருதுகோள் சோதனை மேற்கொள்ளும்போது பயன்படுத்தப்படும் படிநிலைகள் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளது.

1. **இன்மை கருதுகோள் (Null hypothesis):** இன்மை கருதுகோள் H_0 ஐ அமைக்கவும்.

2. **மாற்றுக் கருதுகோள் (Alternative hypothesis):** மாற்று கருதுகோள் H_1ஐ அமைக்கவும். இது இருமுனைகள் சோதனையா அல்லது ஒருமுனை சோதனையா (வலது அல்லது இடது முனை) என்பதைக்காண உதவும்.

3. **மிகைகாண் நிலை அல்லது மிகைகாண் மட்டம் (Level of significance):** மதிப்பீட்டு அளவையின் நம்பகத்தன்மை மற்றும் அதை அனுமதிப்பதில் உள்ள அபாயம் (ஆபத்து) ஆகியவற்றை பொறுத்து, மிகைக்காண் நிலை மதிப்பை (α) கூறு எடுப்பதற்கு முன்னதாக தீர்மானிக்க வேண்டும்.

4. **கூறுபண்பளவை சோதனை (Test statistic) :**
$$Z = \frac{t-E(t)}{\sqrt{Var(t)}} = \frac{t-E(t)}{S.E.(t)} \sim N(0,1) \text{ க்கு}$$
$n \to \infty$ யை பயன்படுத்தி கூறுபண்பளவை சோதனையைக் கணக்கிடலாம்.

5. தீர்மானம் : படி (4)ன் படி கணக்கிடப்பட்ட Z இன் மதிப்பை கொடுக்கப்பட்ட மிகைக்காண் நிலை மதிப்பு அல்லது தீர்மான மதிப்பு அல்லது Z_α -யின் அட்டவணை மதிப்பு ஆகியவற்றுடன் ஒப்பிட்டு கீழ்க்கண்டவாறு முடிவு மேற்கொள்ள வேண்டும்.

   (i) $|Z| < Z_\alpha$ அதாவது, கண்டறியப்பட்ட Z –இன் மதிப்பானது, தீர்மான மதிப்பு Z_α ஐ விடக் குறைவாக இருக்கும் போது, இன்மை கருதுகோளை, மிகைகாண் நிலையில் ஏற்க வேண்டும்.

   (ii) $|Z| > Z_\alpha$ எனில் இன்மை கருது கோள் மிகைகாண் நிலைக்கேற்ப (α) மறுக்கப்படுகிறது.

சராசரிக்கான மிகைகாண் சோதனை (Test of significance for single mean)

சராசரி μ மற்றும் மாறுபாட்டளவை σ^2 கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து $x_i, (i=1,2,3,...,n)$ என்ற n அளவுள்ள ஒரு மாதிரியைத் தெரிவு செய்து அதன் கூறு சராசரி μ ஆகவும், மாறுபாட்டளவை $\frac{\sigma^2}{n}$ உள்ளது எனில், அதாவது $\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$. எனில் பெருங்கூறுக்கு திட்ட இயல்நிலை மாறி ஆனது.

$$Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,\,1) \text{ ஆகும்.}$$

சராசரி μ மற்றும் மாறுபாட்டளவை σ^2 என உள்ள முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து n கூறுகள் எடுக்கப்பட்டு அக்கூறுகளின் சராசரி (μ) க்கும் முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி ($\bar{x}$) க்கும் குறிப்பிடத்தக்க வித்தியாசம் இல்லாத போது இன்மை கருதுகோள் H_0 –இன் கீழ் பெருங்கூறின் கூறுபண்பளவைச் சோதனை அளவையானது கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கிடப்படுகிறது :

$$Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

குறிப்பு (Remark):

முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் σ கிடைக்காத போது (தெரியாத போது) கூறுகளின் மாறுபாட்டளவையைப் பயன்படுத்தி $\hat{\sigma}^2 = s^2$ $\Rightarrow \hat{\sigma} = s$ எனக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8.14

ஒரு மகிழுந்து தயாரிக்கும் நிறுவனம் தற்போது உபயோகத்தில் உள்ள மகிழுந்தை விட எரிபொருள் சிக்கனப்படுத்தும் நோக்கில் புதிய ஆறு உருளைத் திறன் உள்ள மகிழுந்தை அறிமுகம் செய்கிறது. 50 புதிய மகிழுந்துகள் மாதிரியாக எடுத்து அதன் பெட்ரோல் உபயோகம் குறித்து சோதனை செய்யப்பட்ட போது அது சராசரியாக ஒரு லிட்டருக்கு 10 கி.மீ. மற்றும் அதன் திட்ட விலக்கம் 3.5 கி.மீ என அறியப்பட்டது. புதிய மகிழுந்தின் சராசரி பெட்ரோல் உபயோகம் லிட்டருக்கு 9.5 கி.மீ என்ற நிறுவனத்தின் அறிவிப்பை ஏற்று கொள்ளலாமா என்பதை 5% மிகைகாண் நிலையில் சோதிக்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து, கூறு அளவு $n=50$, கூறு சராசரி $\overline{x}=10$ கி.மீ,

கூறின் திட்டவிலக்கம் $s=3.5$ கி.மீ

முழுமைத்தொகுதி சராசரி $\mu=9.5$ கி.மீ

முழுமைத்தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் σ கொடுக்கப்படவில்லையாதலால் $\sigma=s$ எனக் கொள்வோம்.

இது பெருங்கூறாதலால் Z – சோதனையைப் பயன்படுத்தலாம். சோதனை அளவை Z ஆனது திட்ட இயல்நிலை மாறியாகும்.

இன்மை கருதுகோள், கூறு சராசரிக்கும் முழுமைத் தொகுதி சராசரிக்கும் இடையே குறிப்பிடத்தக்க சிறப்பான வித்தியாசம் இல்லை அதாவது $H_0 : \mu = 9.5$ என்பதாகும்.

மாற்று எடுகோள் : கூறு சராசரி மற்றும் நிறுவனத்தின் சராசரிக்கும் வித்தியாசம் உள்ளது. அதாவது $H_1 : \mu \neq 9.5$ (இருமுனை சோதனை)

மிகைகாண் நிலை $\alpha = 5\% = 0.05$

கூறுபண்பளவைச் சோதனை கணக்கிடுதல்

$$Z=\frac{\overline{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1);\ Z=\frac{10-9.5}{\frac{3.5}{\sqrt{50}}}\sim N(0,1)=\frac{0.5}{0.495}=1.01$$

கணக்கிடப்பட்ட Z–ன் மதிப்பு $Z=1.01$ மற்றும் எதிர்பாக்கப்படும் மதிப்பு அல்லது அட்டவணை மதிப்பு $Z_{\alpha/2}=1.96$. கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பை அட்டவணை மதிப்போடு ஒப்பிடும்போது $Z<Z_{\alpha/2}$ அதாவது $1.01<1.96$.

முடிவு: கணக்கிடப்பட்ட Z மதிப்பானது அட்டவணை மதிப்பை $Z_{\alpha/2}$ விட குறைவாக உள்ளதால் $Z<Z_{\alpha/2}$. 5% மிகைகாண் நிலையில் இன்மைகருதுகோள் H_0 ஏற்றுக்கொள்ளப்படுகிறது. ஆகவே நிறுவனத்தின் அறிவிப்பின்படி புதிய மகிழுந்தின் எரிபொருள் பயன்பாடு 9.5 கி.மீ/லி என்பதை ஏற்றுக்கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8.15

பந்து முனை பேனா தயாரிக்கும் நிறுவனமானது, தான் தயாரிக்கும் பேனாவின் (எழுதும்) ஆயுள், சராசரியாக 400 பக்கங்களாகவும், திட்டவிலக்கம் 20 பக்கங்கள் எனக் கூறுகிறது.ஒரு முகவர் 100 பேனாக்களைக் கொள்முதல் செய்து சோதனைக்கு உட்படுத்துகின்றார். அதன சராசரி (எழுதும்) ஆயுள் 390 பக்கங்கள் எனக் கண்டறிகிறார். கொள்முதல் முகவர் நிறுவனத்தின் கூற்றை 1% மிகைகாண் நிலையில் நிராகரிக்கலாமா?

தீர்வு:

கூறின் அளவு $n=100$, கூறின் சராசரி $\overline{x}=390$ பக்கங்கள் ,

முழுமைத்தொகுதி சராசரி $\mu=400$ பக்கங்கள்

முழுமைத்தொகுதி திட்டவிலக்கம் SD $\sigma=20$ பக்கங்கள்

பெருங்கூறானதால் Z சோதனையை பயன் படுத்துகிறோம்.

இன்மை கருதுகோள் : நிறுவனம் தயாரித்த போனாவின் (எழுதும்) ஆயுளின் கூறு சராசரிக்கும், முழுமைத்தொகுதி சராசரிக்கும் குறிப்பாக வித்தியாசம் இல்லை. $H_0 : \mu = 400$ என்க.

மாற்று கருதுகோள் : நிறுவனம் தயாரித்த போனாவின் எழுதும் ஆயுளின் கூறு சராசரிக்கும் முழுமைத் தொகுதி சராசரிக்கும். குறிப்பிடத்தக்க வித்தியாசம் உள்ளது. $H_1 : \mu \neq 400$ (இருமுனை சோதனை)

மிகைகாண் நிலை $\alpha=1\%=0.01$

கூறுபண்பளவை சோதனைக்கேற்ப கணக்கிடல்

$$Z=\frac{\overline{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1);\ Z=\frac{390-400}{\frac{20}{\sqrt{100}}}=\frac{-10}{2}=-5,\ \therefore |Z|=5$$

$$Z_{\alpha/2}=2.58$$

கண்டறியப்பட்ட மதிப்பு $|Z|=5$ மற்றும் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு (அல்லது) அட்டவணை மதிப்பு $Z_{\alpha/2}=2.58$, கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பை அட்டவணை மதிப்போடு ஒப்பிடும்போது $Z>Z_{\alpha/2}$ அதாவது $5>2.58$.

முடிவு : கணக்கிடப்பட்ட Z–இன் மதிப்பானது, அட்டவணைமதிப்பு $Z_{\alpha/2}$ விட அதிகமாக உள்ளதால், $Z>Z_{\alpha/2}$ முதல் 1% மிகைகாண் நிலையில்,

இன்மை கருதுகோள் H_0 நிராகரிக்கப்படுகிறது. எனவே $\mu \neq 400$ என தீர்மானித்து நிறுவனத்தின் கூற்றை 1% நிலையில் நிராகரிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8.16

(i) 900 பேர் கொண்ட ஒரு கூறின் சராசரி 3.4 செ.மீ. ஆகவும், திட்டவிலக்கம் 2.61 செ.மீ. ஆகவும் உள்ளது. சராசரி 3.25 செ.மீ. மற்றும் திட்டவிலக்கம் 2.62 செ.மீ. கொண்ட ஒரு பெரிய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து அக்கூறு எடுக்கப்பட்டதா? என 95% நம்பிக்கை எல்லையைக் கொண்டு சோதிக்க.

(ii) இயல் நிலையில் உள்ள ஒரு முழுமைக் தொகுதியின் சராசரி தெரியாத நிலையில், உண்மை சராசரியின் 95% மற்றும் 98% நம்பிக்கை எல்லைகளை காண்க.

தீர்வு:

(i) கணக்கின்படி

கூறு அளவு : n =900, கூறு சராசரி $\overline{x}$ = 3.4 செ.மீ,

கூறு திட்டவிலக்கம் (SD) $s = 2.61$ செ.மீ.

முழுமைத்தொகுதி சராசரி $\mu = 3.25$ செ.மீ,

முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் (SD): $\sigma = 2.61$ செ.மீ.

இன்மை கருதுகோள் $\mathrm{H}_0 : \mu = 3.25$ செ.மீ. (சராசரி μ = 3.25 மற்றும் திட்டவிலக்கம் σ = 2.61 செ.மீ. உடைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து கூறு எடுக்கப் பட்டிருகிறது).

மாற்று கருதுகோள் $\mathrm{H}_1 : \mu \neq 3.25$ செ.மீ. (இருமுனை சோதனை l) அதாவது சராசரி $\mu = 3.25$ செ.மீ. மற்றும் திட்டவிலக்கம் σ = 2.61 செ.மீ. கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து கூறு எடுக்கப்படவில்லை.

மிகைகாண் நிலை $\alpha = 5\% = 0.05$

கூறுபண்பளவை சோதனைக்கு ஏற்பக் கணக்கிடல்:

$$Z = \frac{3.4 - 3.25}{\frac{2.61}{\sqrt{900}}} = \frac{0.15}{0.087} = 1.724$$

$$\therefore\ Z = 1.724$$

கணக்கிடப்பட்ட $\therefore\ Z = 1.724$ மற்றும் அட்டவணை மதிப்பு $Z_{\alpha/2} = 1.96$

இவற்றை ஒப்பிடுகையில் $Z < Z_{\alpha/2}$

அதாவது $1.724 < 1.96$.

முடிவு: கணக்கிடப்பட்ட 5% மதிப்பானது, அட்டவணை மதிப்பை விட குறைவாக உள்ளது. அதாவது 5% மிகைகாண் நிலையில் $Z < Z_{\alpha/2}$ ஆக உள்ளதால். இன்மை கருதுகோள் ஆனது ஏற்றுக்கொள்ளப்படுகிறது.

எனவே, சராசரி μ = 3.25 செ.மீ. மற்றும் திட்டவிலக்கம், σ = 2.61 செ.மீ. உடைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து கூறானது எடுக்கப்பட்டது என முடிவு செய்யப்படுகிறது.

(ii) நம்பிக்கை எல்லைகள் (Confidence limits)

முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி µவிற்கான 95% நம்பிக்கை எல்லைகள் :

$$\overline{x} - Z_{\alpha/2} SE \leq \mu \leq \overline{x} + Z_{\alpha/2} SE$$

$$3.4 - (1.96 \times 0.087) \leq \mu \leq 3.4 + (1.96 \times 0.087)$$

$$3.229 \leq \mu \leq 3.571$$

முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி µவிற்கான 98% நம்பிக்கை எல்லைகள் :

$$\overline{x} - Z_{\alpha/2} SE \leq \mu \leq \overline{x} + Z_{\alpha/2} SE$$

$$3.4 - (2.33 \times 0.087) \leq \mu \leq 3.4 + (2.33 \times 0.087)$$

$$3.197 \leq \mu \leq 3.603$$

எனவே, $\mu-$ இன் 95% நம்பிக்கை இடைவெளி (3.229,3.571) மற்றும் 98% நம்பிக்கை இடைவெளி (3.197,3.603) ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.17

ஒரு பல்பொருள் அங்காடியில் ஒரு வாரத்தில் விற்பனை செய்யப்பட்ட சோப்பின் சராசரி 146.3 ஆக உள்ளது. விளம்பரத்திற்கு பிறகு 400 கடைகளை மாதிரி எடுத்ததில் வாராந்திர சராசரி விற்பனை 153.7 மற்றும் அதன் திட்டவிலக்கம் 17.2 எனில், 0.05 மிகைகாண் நிலையில் விளம்பர பிரச்சாரம் வெற்றியடைந்ததாக கருதலாமா?

தீர்வு:

கூறின் அளவு $n = 400$ கடைகள்

கூறு சராசரி $\overline{x} = 153.7$ சோதனைகள்

கூறு திட்டவிலக்கம் SD $s = 17.2$ சோப்புகள்

முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் $m = 146.3$

சோப்புகள்

முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் கொடுக்கப் படாததால் கூறு திட்டவிலக்கம் $s = \sigma$ என கொள்வோம்.

இன்மை கருதுகோள் : விளம்பர பிரச்சாரம் வெற்றியாக இல்லை. $H_0 : \mu = 146.3$ (விளம்பரத்திற்கு முன்னும் பின்னும் வாராந்திர சோப்பு விற்பனையில் சிறப்பான வித்தியாசம் இல்லை)

மாற்று கருதுகோள் $H_0 : \mu > 146.3$ (வலதுமுனை சோதனை) விளம்பர பிரச்சாரம் வெற்றிகரமானதாக உள்ளது)

மிகைகாண் நிலை $\alpha = 0.05$

கூறுபண்பளவைசோதனைக்கு ஏற்பக் கணக்கிடல்

$$Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

$$Z = \frac{153.7-146.3}{\frac{17.2}{\sqrt{400}}}$$

$$= \frac{7.4}{0.86} = 8.605$$

$$\therefore Z = 8.605$$

கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பு $Z = 8.605$ மற்றும் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு அல்லது அட்டவணை மதிப்பு $Z_\alpha = 1.645$ ஆகியவற்றிலிருந்து $8.605 > 1.645$ என பெறுகிறோம்.

கண்டறியப்பட்ட மதிப்பானது அட்டவணை மதிப்பை விட அதிகமாக உள்ளதால் $Z > Z_\alpha$, 5% மிகைகாண் நிலையில் இன்மை கருதுகோள் H_0 மறுக்கப்படுகிறது. எனவே விளம்பர பிரச்சாரம் சோப்பு விற்பனையை அதிகரித்துள்ளது என கருதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8.18

இயல்நிலை பரவலில் உள்ள ஒரு தொழிற்சாலை ஊழியர்களின் ஊதியங்களின் சராசரி μ மற்றும் மாறுபாட்டளவை 25 என்க. 50 பணியாளர்கள் கொண்ட ஒரு கூறில் உள்ளவர்களின் மொத்த ஊதியம் ₹ 2,550 என்க. கருதுகோள், $\mu = 52$, என்பதையும் அதற்கு மாறான கருதுகோள் $\mu = 49$ யையும் 1% மிகைகாண் நிலையில் சோதனை செய்க.

தீர்வு:

கூறு அளவு $n = 50$ ஊழியர்கள்

மொத்த ஊதியம் $\sum x = 2550$

$$\text{கூறு சராசரி } \bar{x} = \frac{\text{மொத்த ஊதியம்}}{n} = \frac{\sum x}{n} = \frac{2550}{50} = 51$$

அலகுகள்

முழுமைத் தொகுதி சராசரி $\mu = 52$

முழுமைத் தொகுதி மாறுபட்டளவை $\sigma^2 = 25$

முழுமைத் தொகுதி திட்டவிலக்கம் SD $\sigma = 5$

இன்மை கருதுகோள் $H_0 : \mu = 52$

மாற்று கருதுகோள் $H_1 : \mu \neq 52$ (இருமுனை)

மிகைகாண் நிலை $\alpha = 0.01$

$$\text{கூறுபண்பளவை சோதனை } Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

$$Z = \frac{51-52}{\frac{5}{\sqrt{50}}} = \frac{-1}{0.7071} = -1.4142$$

மாற்று கருதுகோள் இருமுனை சோதனையாகும், எனவே $|Z| = 1.4142$ எனப் பெறுகிறோம்

தீர்மான மதிப்பு 1% மிகைகாண் நிலையில் $Z_{\alpha/2} = 2.58$

முடிவு: கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பானது அட்டவணை மதிப்பை விட குறைவாக உள்ளது. $Z < Z_{\alpha/2}$, 1% மிகைகாண் நிலையில் இன்மை கருதுகோள் H_0 ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது.

எனவே கூறு சராசரிக்கும் தொகுதி சராசரி $\mu = 52$, திட்டவிலக்கம் $\sigma = 5$ –க்கும் குறிப்பிடத்தக்க வித்தியாசம் இல்லை என்பதால் $\mu = 49$ என்பது நிராகரிக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 8.19

அவசர மருத்துவ சிகிச்சை வாகன சேவை வழங்கும் ஒரு நிறுவனம், தங்களுக்கு கிடைக்கப் பெறும் அவசர அழைப்பின் போது சராசரியாக 8.9 நிமிடங்களில் அழைப்பிடத்தை சென்றவடைவதாக கூறுகிறது. அவர்களின் கூற்றை சோதிக்க, எடுக்கப் பட்ட 50 அவசர அழைப்பின் மாதிரி தேர்வுகளில் அதன் சராசரி 9.3 நிமிடங்கள், திட்டவிலக்கம் 1.6 நிமிடங்கள் என அறியப்படுகிறது. 5% மிகைகாண் நிலையில் நிறுவனத்தின் கூற்று சரியானதா?

தீர்வு:

கூறு அளவு $n = 50$

கூறு சராசரி $\bar{x} = 9.3$ நிமிடங்கள்

கூறு திட்டவிலக்கம் $s = 1.6$ நிமிடங்கள்

முழுமைத் தொகுதி சராசரி $\mu = 8.9$ நிமிடங்கள்

இன்மை கருதுகோள் $H_0 : \mu = 8.9$

மாற்று கருதுகோள் $H_1 : \mu \neq 8.9$(Two tail)

மிகைகாண் நிலை $\alpha = 0.05$

கூறுபண்பளவை சோதனைக்கு

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

$$Z = \frac{9.3 - 8.9}{\frac{1.6}{\sqrt{50}}} = \frac{0.4}{0.2263} = 1.7676$$

கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பு $Z = 1.7676$

5% மிகைகாண் நிலையில் தீர்மான மதிப்பு $Z_{\alpha/2} = 1.96$

முடிவு: கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பானது அட்டவணை மதிப்பை விட குறைவாக உள்ளது. அதாவது, $Z < Z_{\alpha/2}$ 5% மிகைகாண் நிலையில் இன்மை கருதகோள் ஏற்கப்படுகிறது எனவே நோயுற்றோரை ஏற்றிச் செல்லும் வண்டிசேவை சராசரி 8.9 நிமிடங்களில் அவசர அழைப்பிடத்தை சேரும் என்ற கூற்று உண்மையாகிறது.

பயிற்சி 8.2

1. புள்ளியியல் அனுமானத்தின் இரண்டு பகுதிகளை எழுதுக?
2. மதிப்பீட்டுப் பண்பளவை என்றால் என்ன?
3. மதிப்பீட்டு அளவை என்றால் என்ன?
4. புள்ளி மதிப்பீட்டு முறை என்றால் என்ன?
5. இடைவெளி மதிப்பீட்டு முறை என்றால் என்ன?
6. நம்பிக்கை இடைவெளி என்றால் என்ன?
7. இன்மை கருதுகோள் என்றால் என்ன? எடுத்துக்காட்டு தருக.
8. மாற்று கருதுகோள் – வரையறு.
9. மறுக்கும் பகுதியை – வரையறு.
10. மறுக்கும் அளவு – வரையறு.
11. மிகைகாண் நிலை – வரையறு.
12. முதல்வகை பிழை என்றால் என்ன?
13. ஒருமுனை சோதனை என்றால் என்ன?.
14. சராசரி மதிப்பு 4 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 3 உடைய ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 100 உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு கூறின் சராசரி 63.5 எனில் 0.05 மிகைகாண் நிலையில் சராசரியின் மாறுபாடு குறிப்பிட்டத்தக்கதா?
15. 400 தனிநபர்களைக் கொண்ட ஒரு கூறில் உள்ளவர்களின் சராசரி உயரம் 67.47 அங்குலம் எனில், 0.05 மிகைகாண் நிலையில் அக்கூறானது சராசரி உயரம் 67.39 அங்குலமும் திட்டவிலக்கம் 1.30 அங்குலமும் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியி லிருந்து எடுக்கப்பட்டதாக கருதலாமா?
16. ஒரு தேசிய நிர்வாக திறன் தேர்வில் மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் 76 மற்றும் திட்ட விலக்கம் 8 என்க. மாநிலத்தின் கல்வி முறையினை மதிப்பீடு செய்ய சமவாய்ப்பு முறையில் 100 மாணவர்கள் தெரிவு செய்யப்பட்டனர். அவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் 72 எனில் தேசிய மற்றும் மாநில அளவில் மாணவர்களின் மதிப்பெண்களில் குறிப்பிடத்தக்க வித்தியாசம் உள்ளதா என்பதை 0.05 மிகைக்காண் நிலையில் சோதிக்க.
17. ஒரு தயாரிப்பாளர் வழங்கிய கம்பி வடத்தின் சராசரி முறியும் வலிமை 1800 ஆகவும் திட்ட விலக்கம் 100 ஆகவும் உள்ளது. கம்பி வடத்தின் முறிவு வலிமை புதிய தொழில் நுட்பம் மூலம் அதிகரித்துள்ளது என உரிமையாளர் கூறுகிறார். அவர் கூற்றைச் சோதிக்க, 50 கம்பி வடம் மாதிரியாக எடுக்கப் பட்டு அதன் சராசரி முறியும் வலிமை 1850 என்று கண்டறியப்படுகிறது. தயாரிப்பாளரின் கூற்றை 0.01 என்ற மிகைகாண் நிலை சோதனையில் ஆதரிக்கலாமா?

பயிற்சி 8.3

ஏற்புடைய விடையைத் தெரிவு செய்க:

1. முடிவுறு அல்லது முடிவுறா __________ என்பது அதில் உள்ள முடிவுறு அல்லது முடிவுறா உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைப் பொறுத்தாகும்.

   (a) முழுமைத்தொகுதி
   (b) முழுமைக்கணிப்பு
   (c) தொகுதிப் பண்பளவை
   (d) மேற்கூறிய எதுவுமில்லை

HYGKGA

2. ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் .... கூறு என அழைக்கப்படுகிறது.

(a) முடிவுறா கணம்
(b) முடிவுறு உட்கணம்
(c) முடிவுறு கணம்
(d) முழுமை கணம்

3. ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் முடிவுறு உட்கணத்தை ………………என கூறலாம்.
(a) கூறு
(b) முழுமைத்தொகுதி
(c) முழுமை
(d) முழுமைக் கணிப்பு

4. கூறுகளிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட எந்தவொரு புள்ளியியல் அளவைகளும்……… எனப்படும்.
(a) தொகுதிபண்பளவை
(b) கூறு பண்பளவை
(c) முடிவுள்ள அளவை
(d) எண்ணத்தக்கதற்ற அளவை

5. …………….. என்பது முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கு ஒரு சமமான வாய்ப்பை அளிக்கும் ஒன்றாகும்.
(a) பண்பளவை
(b) சமவாய்ப்பு கூறு
(c) புள்ளியியல் அளவை
(d) முழுமைத் தொகுதி

6. சமவாய்ப்பு கூறானது முழுமைத்தொகுதியில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் மாதிரியில் இடம்பெறுவதற்கான சமவாய்ப்பைப் பெற்றிருக்கும் உறுப்புகளால் ஆனது என கூறியவர்.
(a) ஹார்பர் (b) ஃபிஷர்
(c) கார்ல் பியார்ஸன் (d) டாக்டர் யேட்ஸ்

7. கீழ்க்காண்பவற்றில் எது நிகழ்தகவு கூறெடுப்பு வகையைச் சார்ந்தது .
(a) நோக்கமுள்ள மாதிரித்தேர்வு
(b) கருத்து கணிப்புமுறை
(c) எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு
(d) ஏதுவான முறை

8. Nஅளவுள்ள ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு முறையில் முதன் முறை ஒரு உறுப்பு தேர்வு செய்யும்போது அதன் நிகழ்தகவு
(a) $\dfrac{n}{N}$ (b) $\dfrac{1}{N}$
(c) $\dfrac{N}{n}$ (d) 1

9. ……………..யில் ஒரு சீரற்ற முழுமைத் தொகுதியானது சீரான துணை முழுமைத் தொகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது.
(a) நிகழ்தகவு சாரா கூறெடுப்பு முறை
(b) எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு முறை
(c) படுகை வாய்ப்பு கூறெடுப்பு முறை
(d) முறைப்படுத்திய கூறெடுப்பு முறை

10. கூறெப்பில் உள்ள பிழைகள் ___________
(a) இருவகை (b) மூன்று வைக
(c) நான்கு வகை (d) ஐந்து வகை

11. கூறு அளவையைப் பயன்படுத்தி முழுமைத் தொகுதி பண்பளவைக்கான மிக சிறந்த மதிப்பை பெற முற்படும் முறையே……………
(a) மதிப்பீட்டு முறை
(b) மதிப்பீட்டு அளவை
(c) பிழற்சியான மதிப்பீடு
(d) திட்டப் பிழை

12. மதிப்பீட்டு அளவையானது மாதிரி புள்ளியியல் அளவையின்_____________ஐ மதிப்பிட பயன்படுகிறது.
(a) முழுமைத்தொகுதி பண்பளவை
(b) பிழையான மதிப்பீட்டு
(c) மாதிரி அளவு
(d) முழுமைக் கணிப்பு

13. …………..என்ற பண்பானது ஒரு மதிப்பீட்டு அளவையானது மற்றொரு மதிப்பீட்டு அளவையை ஒப்பிடும்போது திறன் வாய்ந்தது என வரையறுக்கப்படுகிறது.
(a) திறன்தன்மை
(b) நிறைவுத்தன்மை
(c) பிழையற்றதன்மை
(d) நிலைத்தன்மை

14. $P[|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon]\to 1,\ n\to\infty,\ \varepsilon>0,$ எனில் $\hat{\theta}$ என்பது θ –ன்______________உடைய மதிப்பீட்டு அளவையாகும்.
(a) திறன்தன்மை
(b) நிறைவுத்தன்மை

(c) பிழையற்ற தன்மை
(d) நிலைத்தன்மை

15. மதிப்பீட்டு அளவையானது பண்பளவையில் குறித்த அனைத்து மதிப்பீடுகளையும் உள்ளடக்கிய தரவுகளைப் பெற்றிருந்தால் அது ___________ வாய்ந்தது ஆகும்.
(a) திறன்தன்மை
(b) நிறைவுத்தன்மை
(c) பிழையற்ற தன்மை
(d) நிலைத்தன்மை

16. முழுமைத் தொகுதி பண்பளவை கொடுக்கப் பட்ட இரு எண்களுக்கிடையே அமைந்துள்ளது என எதிர்பார்க்கப்படும் இடைவெளி பண்பளவையின் ______ இடைவெளியாகும்.
(a) புள்ளி மதிப்பீடு
(b) இடைவெளி மதிப்பீடு
(c) திட்டப்பிழை
(d) நம்பிக்கை

17. முழுமைத் தொகுதி பண்பளவையைக்குறித்த கருதுகோள் அல்லது கூற்றை உண்மை அல்லது அதற்கு மாறாக எடுத்துக்கொள்வது ________ ஆகும்.
(a) கருதுகோள்
(b) புள்ளியியல் அளவை
(c) கூறு
(d) முழுமைக் கணிப்பு

18. முதல் வகைப்பிழை என்பது
(a) H_0 உண்மை எனில் ஏற்கப்படுவது
(b) H_0 தவறு எனில் ஏற்படுவது
(c) H_0 உண்மை எனில் மறுக்கப்படுவது
(d) H_0 தவறு எனில் மறுக்கப்படுவது.

19. இரண்டாவது வகைப்பிழை என்பது _________ ஆகும்.
(a) H_0 தவறு எனில் ஏற்பது
(b) H_0 உண்மை எனில் ஏற்பது
(c) H_0 உண்மை எனில் மறுப்பது
(d) H_0 தவறு எனில் மறுப்பது

20. கூறுசராசரியின் திட்டப்பிழையானது
(a) $\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$ (b) $\frac{\sigma}{n}$
(c) $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (d) $\frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}$

இதர கணக்குகள்

1. கூறெடுத்தலின் வகைகளை விவரி.
2. கூறெடுப்புப் பரவல் மற்றும் திட்டப்பிழை சிறுகுறிப்பு வரைக.
3. கருதுகோள் சோதனை செய்வதன் வழிமுறைகளை விவரி.
4. கூட்டு சராசரிக்கான சிறப்புகாண் சோதனையை விவரி.
5. ஒரு பெரிய தொகுதியிலிருந்து 500 எண்ணிக்கையுள்ள அன்னாசிப்பழம் எடுக்கப் பட்டன. அவற்றில் 65 வீணானவை எனில், விகிதத்திற்கான திட்டப்பிழையைக் காண்க.
6. ஒரு பள்ளியிலிருந்து 100 மாணவர்கள் மாதிரியாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டனர். மாதிரியின் சராசரி எடை மற்றும் மாறுபாடு முறையே 67.45 கிகி மற்றும் 9 கிகி எனில் (அ) 95% மற்றும் (ஆ) 99%–ல் மாணவர்களின் சராசரியின் அமையும் நம்பிக்கை இடைவெளி காண்க
7. 1600 மாணவர்களை உடைய மாதிரியில், மாணவர்களின் சராசரி நுண்ணறிவு ஈவு 99. சராசரி 100 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 15 கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து அக்கூறு எடுக்கப் பட்டதா எனச் சோதிக்க. (5% மிகைநிலை சோதனையில்)

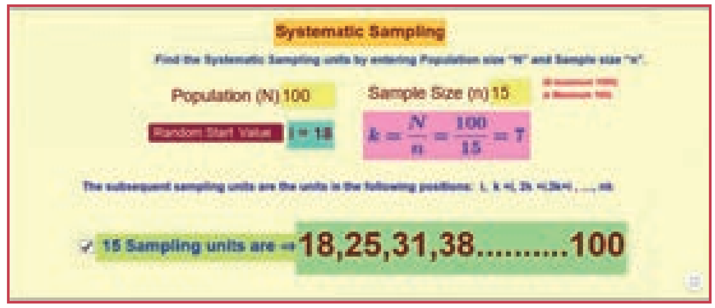
தொகுப்புரை

- **கூறெடுத்தல்:** முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து கூறினைத் தெரிவு செய்யும் முறையாகும்.
- **முழுமைத்தொகுதி:** கணக்கிடத் தேவையான அனைத்து உறுப்புகளைக் கொண்ட முழுமையான தொகுதியாகும்.
- **கூறு:** முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டதொகுதி.
- **கூறுஅளவு:** கூறில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை.
- **எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்புமுறை:** முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் சமமான மற்றும் சார்பற்ற வாய்ப்பைப் பெறுமாறு கூறுகளை தெரிவு செய்யும் முறை.
- **படுகை கூறெடுப்பு:** முழுமைத் தொகுதி பல துணை முழுமைத் தொகுதிகளாக பிரிக்கப்படுகிறது. இவற்றை படுகை (Strata) என அழைக்கிறோம்.
- **முறைப்படுத்திய கூறெடுப்பு:** முதல் கூறெடுப்பானது சமவாய்ப்பு முறையில் முதல் kஅலகுகளிலிருந்து தெரிவு செய்யப்பட்டு, முதல் கூறிலிருந்து ஒவ்வொரு k-வது உறுப்புகளை அடுத்த கூறுகளாக தெரிவு செய்யப்படுவது முறைப்படுத்திய கூறெடுப்பு என அழைக்கப்படுகிறது.
- **கூறெடுப்பு பரவல்:** ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்ட ஒரே அளவு கொண்ட அனைத்து கூறுகளின் புள்ளியியல் அளவைகள் கணக்கிடப்பட்டு ஒரு அலைவெண் பரவல் அமைப்பதே கூறெடுப்பு பரவல் அல்லது மாதிரிப் பரவல் (Sampling Distribution) என அழைக்கப்படுகிறது.
- **திட்டப்பிழை:** ஒரு புள்ளியியல் அளவையின் கூறெடுப்பு பரவலின் திட்டவிலக்கமே திட்டப்பிழை எனப்படும்
- **புள்ளியியல் அனுமானங்கள்:** ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் மாதிரிகளை எடுத்துக்கொண்டு அவற்றைப் பகுப்பாய்வு செய்து, அவற்றிலிருந்து முழுமைத்தொகுதியின் பண்புகளை ஆராய்வதே புள்ளியியல் அனுமானங்கள் ஆகும்.
- **மதிப்பீட்டு முறை:** மாதிரிப்பண்பளவையைப் பயன்படுத்தி தொகுதிப் பண்பளவைகளை மதிப்பீடு முறையே மதிப்பீட்டு முறை (Estimation) எனப்படும்.
- **புள்ளி மதிப்பீட்டுமுறை:** ஒரே ஒரு மதிப்பை, மதிப்பீட்டு அளவையாகப் (estimate) பயன்படுத்தி, தொகுதிப்பண்பளவையின் மதிப்பைப் பெறமுடியுமானால், அம்முறை புள்ளி மதிப்பீட்டு முறை (point estimation) என்று அழைக்கப்படுகிறது.
- **இடைவெளி மதிப்பீட்டு முறை:** புள்ளி மதிப்பீட்டு முறையை செயல்படுத்த இயலாத சூழ்நிலைகளில், தொகுதிப் பண்பளவை மதிப்புகள் குறிப்பிட்ட இடைவெளிகளில் அமையுமாறு எல்லைகளைக் கண்டறியும் முறை இடைவெளி மதிப்பீட்டு முறை (Interval Estimation) என்று அழைக்கப்படுகிறது.
- **கருது கோள் சோதனை:** ஒரு முடிவெடுக்கும் திறன் பெறுவதற்குத் தேவையான புள்ளியியல் முறையைக் கருதுகோள் சோதனை என்று அழைக்கிறோம்.
- **இன்மை கருதுகோள்:** உண்மை என கருதப்பட்ட எடுகோளை அனுமானத்தின் கீழ் நிராகரிக்க சாத்தியமான சோதனை எடுகோளே இன்மை கருதுகோள் ஆகும்.
- **மாற்று கருதுகோள்:** இன்மை எடுகோளுக்கு நிரப்புப் பண்பாக (complementary) அதாவது எதிராக அமையும் கருதுகோள் "மாற்று கருதுகோள் அல்லது மாற்று எடுகோள்" எனப்படும்.
- **முதல்வகை பிழை:** இன்மை கருதுகோள் H_0 உண்மையாக இருக்கும்போது நமது சோதனை மறுக்கப்படும்போது ஏற்படும் பிழை முதல் வகைப்பிழை என்கிறோம்.
- **இரண்டாம்வகை பிழை:** இன்மை கருகோள் H_0 தவறாக இருந்து நமது சோதனை ஏற்கப்படும் போது பிழை நிகழலாம் அவ்வகைப்பிழையை இரண்டாம் வகைப்பிழை என்கிறோம்.
- **கூட்டு சராசரிக்கான சிறப்புக்காண் சோதனை :** $Z = \dfrac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

கலைச்சொற்கள் (GLOSSARY)	
இடைவெளி மதிப்பீடு	Interval Estimation
இன்மை எடுகோள்	Null hypothesis
எளிய சம வாய்ப்பு கூறெடுப்பு	Simple Random Sampling
கூறற்ற பிழை	Non-Sampling Errors
கூறின் அளவு	Sample size
கூறு	Sample
கூறுபண்பளவை/மாதிரிப்பண்பளவை	Statistic
கூறுபரவல்	Sampling distribution
கூறுபிழை	Sampling Errors
கூறெடுப்பு	Sampling
திட்டபிழை	Standard Error
தீர்மானிக்கும் பகுதி/ மறுக்கும் பகுதி	Critical Region
தொகுதிப்பண்பளவை	Parameter
நம்பிக்கை இடைவெளி	Confidence interval
படுகை சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு	Stratified Random Sampling
புள்ளி மதிப்பீடு	Point Estimation
புள்ளியியல் உய்த்துணர்வு/புள்ளியியல் அனுமானங்கள்	Statistical Inference
மதிப்பீடு	Estimation
மாற்று எடுகோள்	Alternative hypothesis
மிகைகாண் நிலை/மிகைகாண் மட்டம்	Level of Significance
முழுமைத்தொகுதி	Population
முறையுடை கூறெடுப்பு	Systematic Sampling

இணையச் செயல்பாடு

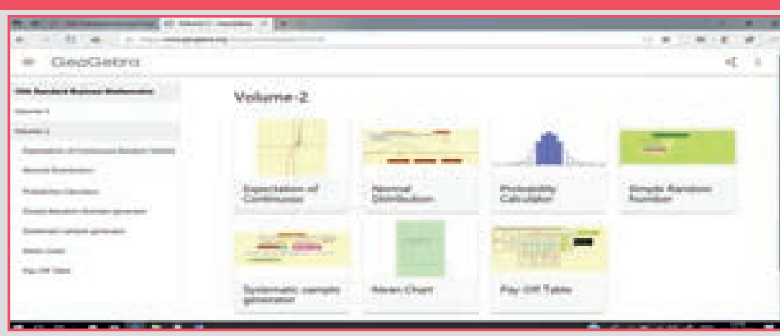
எதிர்பார்க்கப்படும் விளைவு



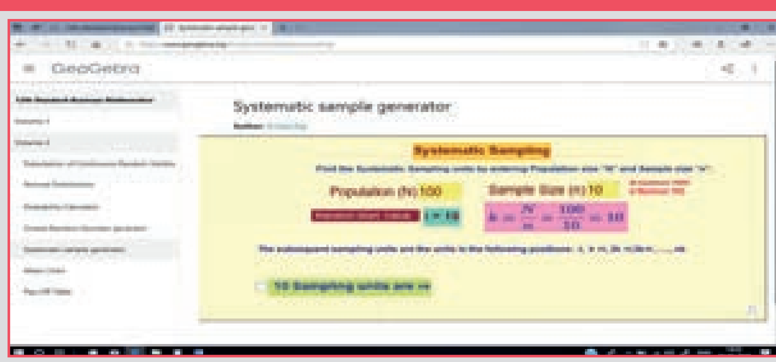
படி – 1 : கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி இச்செயல்பட்டிற்கான இணையப் பக்கத்திற்குச் செல்க. பின்பு "12th Standard Business Mathematics and Statistics" என்னும் திரையில் "Volume–2" யை தெரிவு செய்யவும்.

படி - 2 : "Normal Distribution" என்னும் பயிற்சித்தாளினை தெரிவு செய்துகொள்ளவும். வலது பக்கத்தில் உள்ள "New Problem" என்னும் பொத்தானை சொடுக்கவும் பின்பு Answer – I, Answer – II, Answer – III யை சொடுக்கினால் அதற்க்கான சரியான விடைகளைப் பெறலாம்.

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி : **https://ggbm.at/uzkcrnwr**

அல்லது விரைவுக் குறியீடு **(QR Code)**

B247_12_BUS_MAT_TM

9

பயன்பாட்டுப் புள்ளியியல்

வால்டர் ஆண்ட்ரிவ் ஷுவார்ட்
(மார்ச் 18, 1891-மார்ச் 11, 1967)

அறிமுகம்

அன்றாட வாழ்க்கையில் பல்வேறு துறைகளில் எடுக்கப்படும் நடவடிக்கைகளுக்குப் புள்ளியியல் கோட்பாடுகளைச் செயல்படுத்துவதற்கு பயன்பாட்டுப் புள்ளியியல் (Applied Statistics) பெரிதும் உதவுகிறது. தற்போது, ஒவ்வொரு துறையிலும் புள்ளியியலின் பயன்பாடானது தவிர்க்க இயலாத ஒன்றாகும். வணிக முடிவெடுத்தல், நிதி, வியாபாரம், பொருளாதாரம், சமூக அறிவியல், தொழில் மற்றும் விவசாயம் போன்ற துறைகளில் புள்ளியியல் கருத்தாக்கத்தின் பங்களிப்பு பெரிதும் செயல்படுத்தப்படுகிறது. ஒரு தொழிற்துறையில் தொடர்ச்சியாக மேற்கொள்ள வேண்டிய நடிவடிக்கைகள் அதாவது இன்றைய மற்றும் எதிர்கால சூழல் பற்றிய ஆய்வு செய்ய பயன்பாட்டுப் புள்ளியியல் ஒரு முக்கிய அம்சமாக திகழ்கிறது.

வால்டர் ஆண்ட்ரிவ் ஷுவார்ட் என்பவர் அமெரிக்க இயற்பியலாளர் பொறியாளர் மற்றும் புள்ளியியலாளர் ஆவர். புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாட்டின் தந்தை என அறியப்பட்டவர் மற்றும் ஸ்வார்ட் சுழற்சி கருத்தியலிலும் தொடர்பு கொண்டிருந்தார்.

காலம்சார் தொடர்வரிசை, குறியீட்டெண் மற்றும் புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாடு போன்ற புள்ளியியல் முறைகள் பற்றிய கோட்பாடு மற்றும் பயன்பாடு ஆகியவற்றை இந்த அத்தியாயத்தில் நாம் படிப்போம். அவை ஒவ்வொன்றும் அதன் துறை சார்ந்த பயன்பாட்டில் முக்கியத்துவத்தைக் கொண்டுள்ளன. புள்ளியியலின் பகுப்பாய்வானது அறிவியல் ஆராய்ச்சி, கணக்கெடுப்பு மற்றும் சோதனைகள் என பலவகைகளில் பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. புள்ளியியல் பகுப்பாய்வு விளக்கத்தின் நம்பகத் தன்மையானது, சேகரிக்கபட்ட தகவல் மற்றும் அவற்றை முன்னிலைப் படுத்தும் செயலைப் பொறுத்தே அமைகிறது.

கற்றல் நோக்கங்கள்

மாணவர்கள் இந்த அத்தியாத்தை கற்ற பிறகு கீழ்க்கண்ட பாடப்பகுதிகளை புரிந்து கொள்ள இயலும்.

- காலம்சார் தொடர் வரிசை புள்ளி விவரங்கள்
- காலம்சார் தொடர் வரிசையின் கூறுகள்
- நகரும் சராசரிகள் முறை
- பருவகால மாறுபாடு
- குறியீட்டெண்கள்
- நிறையிட்ட குறியீட்டு எண்கள்

DAGU6N

- சீரான குறியீட்டு எண்களுக்கான சோதனைகள்
- புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாடு
- மாறுபாடுகளுக்கான காரணங்கள்
- செயல்முறை கட்டுப்பாடு மற்றும் உற்பத்தி கட்டுப்பாடு,

9.1 காலம்சார் தொடர் வரிசை பகுப்பாய்வு (Time Series Analysis)

காலம்சார் தொடர் வரிசையின் பகுப்பாய்வு என்பது ஒரு கால கட்டத்தில் சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களின் வடிவங்களைத் தீர்மானிக்க பயன் படுத்தப்படும் ஒரு புள்ளியியல் முறை ஆகும். கடந்தகால மற்றும் தற்போது நடந்துள்ள மாற்றங்களைக் கவனிக்கவும், புரிந்துகொள்ளவும் கடந்தகால விவரங்களை பற்றி நாம் ஒவ்வொரும் அறிந்திருக்க வேண்டும். காலம்சார் தொடரின் ஒரு குறிப்பிட்ட காலப் பகுதியில் எந்தவொரு குறிப்பிட்ட அம்சத்தின் வழக்கமான அல்லது ஒழுங்கற்ற நிகழ்வையும் அடையாளம் காணமுடியும். பெரும்பாலான காலம்சார் தொடர் புள்ளி விவரங்கள், பொருளாதாரம், வணிகம், வாணிபம் போன்ற துறைகளுடன் தொடர்புடையது. உதாரணமாக, ஒரு பொருளின் உற்பத்தி, பொருளின் விலை, விற்பனை, ஒரு நாட்டின் வருமானம், ஒரு தனிநபர் வருமானம் போன்றவைகள் ஆகும். காலம்சார் தொடர் வரிசையின் புள்ளி விவரங்களைக் கூர்ந்து கண்காணிப்பதன் மூலம், தொழில் மற்றும் பிறதுறைகளில் எதிர்கால நடவடிக்கைகளை முன்னெடுக்க மற்றும் திட்டமிடத் தீர்மானிக்கப் படுகிறது.

வரையறை 9.1

ஒரு காலம்சார் புள்ளி விவரங்கள் காலவரிசைப்படி வடிவமைக்கப்படுகிறது.

– காக்ஸ்டன் & கவ்வுடன்.

அளவிடக் கூடிய புள்ளி விவரங்களை அதன் நிகழ்வுகளின்படி வரிசைப்படுத்துவதின் முடிவில் கிடைக்க கூடிய தொடரானது காலம்சார் தொடர் வரிசை ஆகும். – வெஸ்ல் & வாலட்.

9.1.1 காலம்சார் தொடரின் பொருள், பயன்கள் மற்றும் அடிப்படைக் கூறுகள் (Meaning, Uses and Basic Components)

பொருள்:

ஒரு காலம்சார் தொடரானது கண்டறிந்த பதிவுகளின் தொகுப்பை காலவரிசையில் (ஏறுவரிசையில் அல்லது இறங்குவரிசையில்) உள்ளடக்கியதாகும். காலம்சார் வரிசையின் முக்கிய நோக்கமானது விவரங்களின் வேறுபாடு களைக் கண்டறிந்து வேறுபாடுகளை நீக்க முயற்சிப்பதற்கும், எதிர்கால மதிப்பீடுகளை மதிப்பிடு வதற்கும் மற்றும் அவற்றைக் கணிக்கவும் உதவுகிறது.

நாம் ஏன் காலம்சார் தொடரைக் கற்றுக் கொள்ளவேண்டும்?

- கடந்த கால நடவடிக்கைகளை பகுப்பாய்வு செய்வதற்கு.
- எதிர்கால அம்சங்களை கணிப்பதற்கும் மற்றும் திட்டமிடுவதற்க்கும் உதவுகிறது.
- நிகழ்கால செயல்பாடுகளை மதிப்பீடு செய்வதற்கு.

காலம்சார் தொடரானது ஒரு குறிப்பிட்ட கால வரைவுகளை மற்ற கால வரைவுகளுடன் ஒப்பிட்டு ஆய்வுகள் செய்ய உதவுகிறது.

எனவே காலம்சார் தொடர் வரிசையானது வணிகத்துறை, பொருளாதாரம், தொழிற்சாலை ஆகிய துறைகளின் காலம் தொடர்புடைய புள்ளி விவரங்களைப் படிப்பதற்கும் மற்றும் பகுப்பாய்வு செய்வதற்கும் நமக்கு உதவுகிறது.

காலம்சார் தொடரின் கூறுகள் (Components of Time Series)

ஒரு காலம்சார் தொடரில் நான்கு வகைக் கூறுகள் உள்ளன. அவை பின்வருமாறு;

(i) நீள் காலப்போக்கு

(ii) பருவகால மாறுபாடுகள்

(iii) சுழற்சி மாறுபாடுகள்

(iv) சீரற்ற மாறுபாடுகள்

(i) நீள் காலப்போக்கு (Secular Trend)

நீள் காலப்போக்கு என்பது ஒரு நீண்டகால இடைவெளியில் அதிகரிக்கும் அல்லது குறையும் அல்லது தேக்கமளிக்கும் ஒரு காலம்சார் தொடரின் பொதுவான போக்கு ஆகும். பொதுவாக, நாட்டின் மக்கள் தொகை, தொழிற்சாலைகளின் உற்பத்தி விற்பனை, பொருளின் விலை, தனி நபரின்

வருமானம் போன்றவைகள் அதிகரிக்கக் கூடியப்போக்கைக் கொண்டிருக்கும். மரணம், தொற்றுநோய், மின்னலை இயந்திரகருவிகள், நீர் ஆதாரங்கள், இறப்பு விகிதம் போன்றவற்றில் இப்போக்கானது ஒரு கீழ்நோக்குப் போக்காக காணப்படுகிறது. கொடுக்கப்பட்ட காலப்பகுதியில் ஏற்ற அல்லது இறக்கங்கள் ஒரே திசையில் இருக்க வேண்டும் என்பது அவசியமில்லை.

(ii) பருவகால மாறுபாடு (Seasonal Variations)

பருவகால வேறுபாடு என்பது ஒவ்வொரு பருவத்திலும் குறிப்பிட்டகால முறையில் மீண்டும் மீண்டும் உருவாகிறது. இந்த வேறுபாடுகள் ஒரு வருடத்திற்கும் குறைவான காலத்திற்குள் மீண்டும் மீண்டும் ஏற்படுகின்றன. இது குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில் அளவிடப்படுகிறது. பருவ காலவேறுபாடுகள் இயற்கை சக்திகள், சமூகபழக்கங்கள் மற்றும் மரபுகள் ஆகியவற்றால் பாதிக்கப்படலாம். இந்த மாறுபாடுகள் அதன் காரணிகளின் முடிவுகளாகும். இது சீராக மற்றும் வழக்கமாக அதிகரித்தும், வீழ்ச்சியுற்றும் காணப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, மழைக் காலங்களில் குடைகள் மற்றும் மழைக்குப் பயன்படுத்தப்படும் உடைகள் (Raincoat) விற்பனை, கோடைப் பருவத்தில் குளிர்பானங்களின் விற்பனை, தீபாவளிப் பண்டிகை நாள்களில் பட்டாசு விற்பனை, பண்டிகை காலங்களில் ஆடைகள் வாங்குதல், பொங்கல் திருநாள்களில் கரும்பு விற்பனை.

(iii) சுழற்சி மாறுபாடு (Cyclic Variations)

பொதுவாக, இந்த மாறுபாடுகள் சீரான காலம்சார் ஒழுங்கிற்கு அமையத் தேவையில்லை. அதாவது சுழற்சி மாறுபாடு சமமான இடைவெளி களுக்குப் பின்னர் அல்லது இதே போன்ற சரியான வடிவங்களை பின்பற்றாமல் இருக்கலாம். பொதுவாக ஒரு சுழற்சிகாலம் என்பது 7 முதல் 9 ஆண்டுகள் வரையிலானது. சுழற்சிக்கான காலப் பகுதியை ஆண்டுகளின் நிலைப்பாட்டில் கட்டாயப் படுத்த முடியாது.

எடுத்துக்காட்டாக, அரசு நிதிக் கொள்கைகளின் மாற்றங்கள், வட்டி விகிதங்களில் மாற்றங்கள் ஆகியவற்றிற்கான ஒவ்வொரு வர்த்தக சுழற்சியும் துவக்கம் – அபிவிருத்தி – வீழ்ச்சி – மீட்சி – பராமரிப்பு போன்றவைகளை பெற்றிருக்கும்.

(iv) சீரற்ற மாறுபாடு (Irregular Variations)

சீரற்ற மாறுபாடுகளுக்கு குறிப்பிட்ட வடிவமைப்பு கிடையாது மற்றும் இவற்றின் நிகழ்வுகளுக்கு வழக்கமான நேரத்திற்கான காலஅளவு என எதுவும் கிடையாது. இவை தற்செயலாக நிகழும் மாற்றங்கள் ஆகும். இவை முற்றிலும் ஒழுங்கற்ற, கணிக்க முடியாத குறுகிய கால மாறுபாடுகள் ஆகும். சிலசமயங்களில் அதன் நிகழ்வில் புதிய சுழற்சிகளையோ அல்லது மாறுபாடுகளின் மற்ற இயக்கங்களை அதிகரிக்கச் செய்வதாலேயே அதன் விளைவு மிகவும் தீவிர மாகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக, வெள்ளம், போர்கள், பூகம்பங்கள், சுனாமி, வேலை நிறுத்தங்கள், கதவடைப்புகள் போன்றவைகள்.

காலம்சார் தொடருக்கான கணித வடிவமைப்பு (Mathematical Model for a Time Series)

காலம்சார் தொடரின் கூறுகளை பொதுவாக அதன் பயன்பாட்டுக்காக இரண்டு வகைகளாகப் பிரிக்கலாம். அவை (i) கூட்டு வடிவமைப்பு, (ii) பெருக்கல் வடிவமைப்பு.

(i) கூட்டு வடிவமைப்பு:

இந்த வடிவமைப்பானது காலம்சார் தொடரில் மதிப்பிடப்பட்ட மதிப்புகளின் நான்கு கூறுகளின் கூட்டுத்தொகை மதிப்பு ஆகும். அதாவது, $Y= T+S+C+I$

இங்கு Y = அசல் மதிப்பு,
T = போக்கு மதிப்பு (Trend Value)
S = பருவகால கூறு (Seasonal Component)
C = சுழற்சி கூறு (Cyclic Component)
I = சீர்ற்ற கூறு (Irregular Component)

கூட்டு வடிவமைப்பின் அனைத்து நான்கு கூறுகளும் சுதந்திரமாகச் செயல்படுகின்றன எனக்கருதலாம். மேலும், கூறுகளின் நடத்தை ஒரு கூட்டுத்தன்மையைக் குறிக்கிறது.

(ii) பெருக்கல் வடிவமைப்பு:

இந்த வடிவமைப்பானது, போக்குமதிப்புடன் (T) மற்ற மூன்று கூறுகளின் விகிதங்களைப் பெருக்குவதன் மூலம் கண்டறிந்த மதிப்பு ஆகும்.

$$Y = T \times S \times C \times I$$

இங்கு, Y = அசல் மதிப்பு
T = போக்கு கூறு
S = பருவக்கால கூறு
C = சுழற்சி கூறு
I = சீரற்ற கூறு

பல்வேறு காரண கூறுகள் இருக்க வேண்டும் என்பது அவசியமில்லை என இந்த வடிவமைப்பு அனுமானிக்கிறது. மற்றும் ஒன்று, மற்ற கூற்றினைப் பாதிக்கக் கூடியது. மேலும் கூறுகளின் செயல்பாடுகள் ஒரு பெருக்கல் தன்மையைக் குறிக்கிறது என்றும் அனுமானம் செய்யமுடியும்.

9.1.2 போக்கினை அளவிடுதல் (Measurements of Trend)

கீழ்க்காணும் முறைகளின் மூலம் நாம் போக்கு மதிப்பை அளவிட முடியும்.

(i) வரைபட முறை (Freehand or Graphic Method).

(ii) பகுதி சராசரி முறை (Method of Semi-Averages).

(iii) நகரும் சராசரி முறை (Method of Moving Averages).

(iv) மீச்சிறு வர்க்க முறை (Method of Least Squares).

(i) வரைபட முறை (Freehand or Graphic Method)

வரைபட முறையானது ஒரு போக்கினை மதிப்பிடுவதற்கு இலகுவான முறையாகும். இந்த முறையின் செயல்முறைகளை இங்கு காண்போம்.

செயல்முறைகள் (Procedure):

(a) வரைபடத்தின் மீது காலம்சார் தொடரின் புள்ளி விவரங்களைக் குறிக்கவும்.

(b) குறிக்கப்பட்ட அனைத்து புள்ளிகளுக்கும் மிகப் பொருத்தமான வளைவரையை வரையவும்.

(c) குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகளின் அடிப்படையிலான போக்குகளின் திசையை ஆராயவும்.

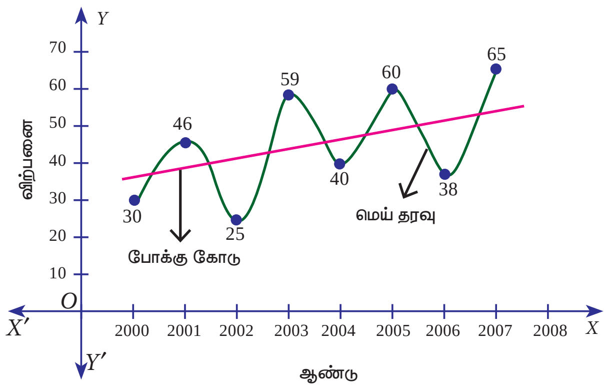
(d) அதிகபட்சமாக குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் வழியே செல்லகூடிய ஒரு நேர்க்கோட்டை வரையவும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.1

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு வரைபட முறையின் போக்குக் கோட்டைப் பொருத்துக.

ஆண்டு	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
விற்பனை (டன்களில்)	30	46	25	59	40	60	38	65

தீர்வு:



படம் 9.1

குறிப்பு:

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களைக் கொண்டு எதிர்கால மதிப்புகளை முன்கணிப்பதற்கு வரைபட முறை மூலம் வரையப்பட்ட போக்கினை நீட்டிக்க முடியும். இருப்பினும், இந்த முறை சார்புடைய இயல்பில் உள்ளது. இந்த முறையில் பெறப்பட்ட கணிப்புகள் ஒருதலைபட்சமாகவும் மற்றும் புள்ளி விவர ஆய்வாளரின் தனிப்பட்ட முடிவினைச் சார்ந்துள்ளது.

(ii) பகுதிச் சராசரி முறை (Method of Semi-Averages)

பகுதிச் சராசரி முறையில் பகுதிச் சராசரிகள் கணக்கிடப்பட்டு போக்கு மதிப்புகள் கண்டுபிடிக்கப் படுகின்றது. இந்த முறையின் செயல் முறைகளைக் காண்போம்.

செயல்முறைகள்:

(i) கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்கள் இரு சம பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்பட வேண்டும். புள்ளி விவரமானது ஒற்றைப்படை எண்ணிக்கையில் இருக்குமாயின் நடுவில் உள்ள ஆண்டுக்கான புள்ளி விவரத்தை நீக்குவதன் மூலம் எளிமையான இரண்டு சம பகுதியை உருவாக்கலாம்.

(ii) ஒவ்வொரு பகுதிக்கும் சராசரி கணக்கிடுவதன் மூலம் இரண்டு புள்ளிகளைப் பெறலாம்.

(iii) ஒவ்வொரு புள்ளியும் ஒவ்வொரு அரை பகுதியின் நடுப்புள்ளியாக (ஆண்டு) குறிக்கப்படுகிறது.

(iv) குறிக்கப்பட்ட இரு புள்ளிகளையும் ஒரு நேர்க்கோட்டைக் கொண்டு இணைக்கவும்.

(v) நேர்க்கோட்டை இரு பக்கங்களிலும் நீட்டிக்கலாம்.

(vi) பகுதிச் சராசரி முறையின் மூலம் பெறப்பட்ட நேர்க்கோடானது போக்குக் கோடு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.2

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிவிவரங்களைக் கொண்டு, பகுதிச் சராசரி முறையில் ஒரு போக்கு கோட்டை பொருத்துக.

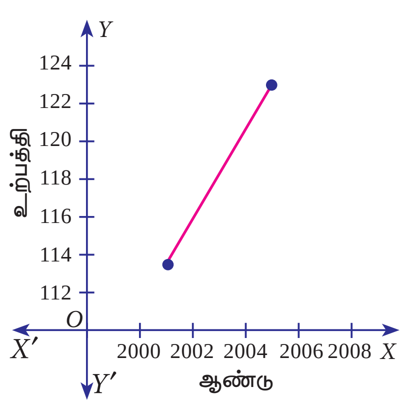
ஆண்டு	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
உற்பத்தி ('000)	105	115	120	100	110	125	135

தீர்வு:

ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை ஒற்றைப்படை (ஏழு) என்பதால், நாம் நடுவில் உள்ள ஆண்டு (2003) உற்பத்தியை விட்டு விடுவோம் பிறகு முதல் மூன்று ஆண்டுகளின் உற்பத்தி சராசரி மற்றும் கடைசி மூன்று ஆண்டுகளின் உற்பத்தி சராசரியைப் பெற வேண்டும்.

ஆண்டு	உற்பத்தி	சராசரி
2000	105	
2001	115	$\frac{105+115+120}{3}=113.33$
2002	120	
2003	100–ஐ விடுத்து	
2004	110	
2005	125	$\frac{110+125+135}{3}=123.33$
2006	135	

அட்டவணை 9.1



படம் 9.2

எடுத்துக்காட்டு 9.3

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களுக்கு பகுதிச் சராசரி முறையின் ஒரு போக்குக்கோட்டைப் பொருத்துக.

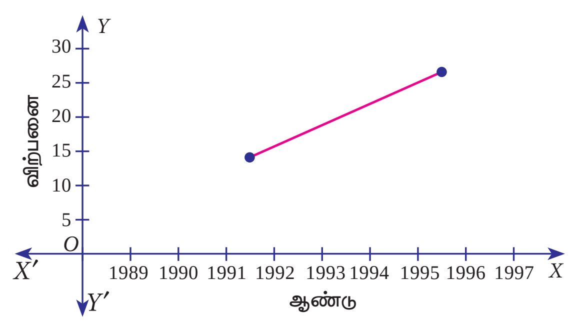
ஆண்டு	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
விற்பனை (டன்களில்)	15	11	20	10	15	25	35	30

தீர்வு:

ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை (எட்டு) என்பதால், கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களை இரண்டு சம பாகங்களாகப் பிரிக்கலாம் அதிலிருந்து முதல் நான்கு ஆண்டுகள் மற்றும் கடைசி நான்கு ஆண்டுகளின் விற்பனை சராசரியைப் பெறலாம்.

ஆண்டு	விற்பனை	சராசரி
1990	15	
1991	11	$\frac{15+11+20+10}{4}=14$
1992	20	
1993	10	
1994	15	
1995	25	
1996	35	$\frac{15+25+35+30}{4}=26.25$
1997	30	

அட்டவணை 9.2



படம்: 9.3

குறிப்பு:

(i) எதிர்கால மதிப்புகளைக் கணிக்க முடியும்.

(ii) இந்த முறை மூலம் போக்கு மதிப்பைப் பெறலாம். ஆனால் கணித்துப் பெறப்பட்ட மதிப்புகள் துல்லியமானவை அல்ல.

9.1.3 நகரும் சராசரி முறை (Method of Moving Averages)

நகரும் சராசரி முறையானது நியாயமான மற்றும் துல்லியமான போக்கு மதிப்புகள் வழங்கக் கூடியதாகும்.

செயல்முறைகள்:

(i) நகரும் சராசரிக்கான கால இடைவெளியைத் தீர்மானிக்கவும். (மூன்று ஆண்டு, நான்கு ஆண்டு)

(ii) ஒற்றைப்படை (மூன்று) ஆண்டுகளில் இருப்பின்,

$$\frac{a+b+c}{3}, \frac{b+c+d}{3}, \frac{c+d+e}{3}, \frac{d+e+f}{3}, \ldots$$

இவற்றின் மூலம் கணக்கீட்டு சராசரியைப் பெற முடியும்.

(iii) நகரும் சராசரியானது ஒற்றைப்படை எண்ணாக இருந்தால், அதை மையப்படுத்துவதில் எந்த பிரச்சனையும் இல்லை, சராசரியாக ஒவ்வொரு மூன்று ஆண்டுகளுக்கும் அதனுடைய இரண்டாம் ஆண்டில் மையமதிப்பு இருக்கும்.

(iv) இரட்டைப்படை (நான்கு) ஆண்டுகளில் இருப்பின்,

$$\frac{a+b+c+d}{4}, \frac{b+c+d+e}{4}, \frac{c+d+e+f}{4}, \frac{d+e+f+g}{4}, \ldots$$

(v) நகரும் சராசரியானது, இரட்டைப்படை எண்ணாக இருந்தால் முதல் நான்கு மதிப்புகளின் சராசரி இரண்டாம் மற்றும் மூன்றாம் ஆண்டுகளுக்கு இடையில் குறிப்பிட வேண்டும். அதே போல் இரண்டாவது நான்கு மதிப்புகளின் சராசரியானது 3வது மற்றும் 4வது ஆண்டுகளுக்கு இடையில் குறிக்கப்பட வேண்டும்.மேற்கண்ட இரண்டு சராசரிக்கும் மீண்டும் சராசரி கணக்கிட்டு 3வது ஆண்டுகளுக்கு எதிரே குறிப்பிடவும். மீதமுள்ள மதிப்புகளுக்கு மேற்கண்ட முறை போல் தொடர்ந்து கணக்கிடவும்.இம்முறைக்கு சராசரி மையப்படுத்துதல் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.4

ஒரு குறிப்பிட்ட கிராமத்தில் உள்ள மேல்நிலைப் பள்ளியில் பயிலும் மாணவர்களின் புள்ளி விவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவற்றின் மூன்று ஆண்டு நகரும் சராசரியைக் காண்க.

ஆண்டு	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
1995	332
1996	317
1997	357
1998	392
1999	402
2000	405
2001	410
2002	427
2003	435
2004	438

தீர்வு:

மூன்று ஆண்டு நகரும் சராசரியை கணக்கிடுதல்.

ஆண்டு	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	மூன்று ஆண்டு நகரும் கூடுதல்	மூன்று ஆண்டு நகரும் சராசரி
1995	332	---	---
1996	317	1006	335.33
1997	357	1066	355.33
1998	392	1151	383.67
1999	402	1199	399.67
2000	405	1217	405.67
2001	410	1242	414.00
2002	427	1272	424.00
2003	435	1300	433.33
2004	438	---	---

அட்டவணை 9.3

எடுத்துக்காட்டு 9.5

ஒரு குறிப்பிட்ட நகரத்தில் உள்ள உயர்நிலைப்பள்ளியில் படிக்கும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை நான்கு வருடாந்திர நகரும் சராசரியைப் பின்வரும் தரவுகளிலிருந்து கணக்கிடுக.

ஆண்டு	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
2001	124
2002	120
2003	135
2004	140
2005	145
2006	158
2007	162
2008	170
2009	175

தீர்வு:

நான்கு ஆண்டு நகரும் சராசரியை கணக்கிடுதல். (ஒற்றைப்படை ஆண்டு).

ஆண்டு	விற்பனை	4 ஆண்டு மைய கூட்டுத்தொகை	4 ஆண்டு நகரும் சராசரி	4 ஆண்டு மையப்படுத்தப்பட்ட நகரும் சராசரி
2001	124	--	--	--
2002	120	--	--	--
		519	129.75	
2003	135	--		132.37

		540	135.00	
2004	140	--		139.75
		578	144.50	
2005	145	--		147.87
		605	151.25	
2006	158	--		155.00
		635	158.75	
2007	162	--		162.50
		665	166.25	
2008	170	--	--	-
2009	175	--	--	-

அட்டவணை 9.4

குறிப்பு:

கணக்கிடப்பட்ட 4 ஆண்டு மைய நகரும் சராசரியானது குறிப்பிட்ட நிரலின் வருடத்திற்கு உள்ள மதிப்பாகும். உதாரணத்திற்கு 132.37 என்ற மதிப்பு 2003 ஆம் ஆண்டிற்கு உரியதாகும்.

9.1.4 மீச்சிறு வர்க்க முறை (Method of Least Squares)

ஒரு கோட்டிலிருந்து பல்வேறு புள்ளிகளின் விலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை பூஜ்ஜியமாக இருந்தால் அக்கோடானது, பொருத்தமான கோடு ஆகும். இம்முறையானது, போக்கு மதிப்பைக் காண்பதற்கான சிறந்த முறையாகும். காலம்சார் தொடர் வரிசைக்கான பொருத்தமான கோட்டை கணக்கிடுவதற்கான ஒரு வசதியான அடிப்படை முறையாகும். இங்கு கணித முறையில் போக்கை அளவிட முடியும் மேலும் பிற பொருத்துதல் வடிவமைப்பைவிட இந்த முறையில் மாறுபாடுகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் மீச்சிறு மதிப்பாக இருக்கும். ஆகையால் இது மீச்சிறு வர்க்க முறை எனப் படுகிறது. அது கீழ்க்காணும் நிபந்தனைகளை பூர்த்தி செய்யும்.

(i) உண்மையான மதிப்பு Yக்கும் மதிப்பிடப்பட்ட மதிப்பு $\hat{Y}$ க்கும் உள்ள மாறுபாடுகளின் கூட்டுத்தொகை பூஜ்ஜியமாக இருக்கும். அதாவது, $\Sigma(Y-\hat{Y}) = 0$.

(ii) உண்மையான மதிப்பு Yக்கும் மதிப்பிடப்பட்ட மதிப்பு $\hat{Y}$ க்கும் கூடுதல் மீச்சிறு மதிப்பாக இருக்கும் அதாவது $\Sigma(Y-\hat{Y})^2$ என்பது மீச்சிறு மதிப்பு ஆகும்.

செயல்முறை:

(i) ஒரு நேர்க்கோட்டு போக்கானது $Y = a + bX$ ...(1) என்ற சமன்பாட்டின் மூலம் குறிப்பிடலாம்.

Y என்பது உண்மையான மதிப்பு, X என்பது காலம், a, b என்பது மாறிலிகள் ஆகும்.

(ii) கீழ்க்காணும் இயல்நிலை சமன்பாடுகள் மற்றும் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரத்தில் உள்ள ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை n–ஐ கொண்டு தீர்ப்பதன் மூலம் மாறிலிகள் 'a' மற்றும் 'b' மதிப்பை காணலாம்.

$$\Sigma Y = n\,a + b\,\Sigma X \qquad ...(2)$$

$$\Sigma XY = a\,\Sigma X + b\,\Sigma X^2 \qquad ...(3)$$

'n' = மொத்த ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை.

(iii) மொத்த ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை (ΣX) கணக்கிட்டால் அம்மதிப்பு பூஜ்ஜியம் ஆகும். அதாவது $\Sigma X = 0$.

(iv) $\Sigma X = 0$, ஆக இருக்கும் போது, இரு இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள் கீழ்க்கண்டவாறு உருமாற்றம் அடையும்.

$$\Sigma Y = n\,a + b\,(0) \quad ; a = \frac{\sum Y}{n} = \overline{Y}$$

$$\Sigma XY = a(0) + b\,\Sigma X^2 \quad ; b = \frac{\sum XY}{\sum X^2}$$

மாறிலி 'a' என்பது Y இன் சராசரி மற்றும் 'b' என்பது மாறுவீதம் (சாய்வு) ஆகும்.

(v) போக்கு சமன்பாட்டில் 'a' மற்றும் 'b' இன் மதிப்புகளைப் பிரதியிடுவதன் மூலம் பொருத்தமான கோட்டை பெற முடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.6

ஒரு மாவட்டத்தில் கரும்பு உற்பத்தி தொடர்பான புள்ளி விவரங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. மீச்சிறு வர்க்க முறை மூலம் நேர்க்கோட்டுப் போக்கினைப் பொருத்துக. மேலும் போக்கு மதிப்பை அட்டவணைப்படுத்துக.

ஆண்டு	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
கரும்பு உற்பத்தி (டன்களில்)	40	45	46	42	47	50	46

தீர்வு:

மீச்சிறு வர்க்க முறை மூலம் போக்கு மதிப்புகளைப் கணக்கிடலாம். (ஒற்றைப்படை ஆண்டு).

ஆண்டு (x)	கரும்பு உற்பத்தி (Y)	$X=(x{-}2003)$	X^2	XY	போக்கு மதிப்புகள் (Yt)
2000	40	–3	9	–120	42.04
2001	45	–2	4	–90	43.07
2002	46	–1	1	–46	44.11
2003	42	0	0	0	45.14
2004	47	1	1	47	46.18
2005	50	2	4	100	47.22
2006	46	3	9	138	48.25
$N=7$	$\Sigma Y=316$	$\Sigma X=0$	$\Sigma X^2=28$	$\Sigma XY=29$	$\Sigma Yt=316$

அட்டவணை 9.5

$$a=\frac{\sum Y}{n}=\frac{316}{7}=45.143\,;$$

$$b=\frac{\sum XY}{\sum X^2}=\frac{29}{28}=1.036$$

எனவே, தேவையான நேர்க்கோட்டுப் போக்குச் சமன்பாடானது,

$$Y = a + bX$$

$$Y = 45.143 + 1.036\,(x-2003)$$

$X=2000$, $Yt = 45.143 + 1.036(2000-2003) = 42.035$

$X = 2001$, $Yt = 45.143 + 1.036(2001-2003) = 43.071$, எனும் போக்கு மதிப்புக்களைப் பெற முடியும். இதே போல் மற்ற மதிப்புகளையும் பெற முடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.7

ஒரு மாவட்டத்தில் ஓர் உற்பத்திப் பொருளின் விற்பனையைப் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. மீச்சிறு வர்க்க முறை மூலம் நேர்க்கோட்டுப் போக்கினைப் பொருத்துக மேலும் போக்கு மதிப்பை அட்டவணைப்படுத்துக.

ஆண்டு	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
விற்பனை	6.7	5.3	4.3	6.1	5.6	7.9	5.8	6.1

தீர்வு:

போக்கு மதிப்பை மீச்சிறு வர்க்க முறையில் கணக்கிட்டுச் செய்யலாம். ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை இரட்டைப்படையாக இருப்பதால், X-ஐக் கான பின்வரும் சூத்திரத்தை பயன்படுத்துவோம்.

$$X=\frac{x\text{–மத்திய இரண்டு வருடங்களுக்கான கூட்டு சராசரி}}{0.5}$$

ஆண்டு (x)	விற்பனை (Y)	$X=\frac{(x-1998.5)}{0.5}$	XY	X^2	போக்கு மதிப்பு (Y_t)
1995	6.7	–7	–46.9	49	5.6167
1996	5.3	–5	–26.5	25	5.7190
1997	4.3	–3	–12.9	9	5.8214
1998	6.1	–1	–6.1	1	5.9238
1999	5.6	1	5.6	1	6.0262
2000	7.9	3	23.7	9	6.1286
2001	5.8	5	29.0	25	6.2310
2002	6.1	7	42.7	49	6.3333
$N=8$	47.8	$\Sigma X=0$	8.6	168	

அட்டவணை 9.6

$$a=\frac{\sum Y}{n}=\frac{47.8}{8}=5.975\,;$$

$$b=\frac{\sum XY}{\sum X^2}=\frac{8.6}{168}=0.05119$$

எனவே,

$$Y = a + bX \quad ; \quad Y = 5.975 + 0.05119\,X.$$

$$X=1995,\ Y_t = 5.975 + 0.05119\left(\frac{1995-1998.5}{0.5}\right) = 5.6167$$

$$X=1996,\ Y_t = 5.975 + 0.05119\left(\frac{1996-1998.5}{0.5}\right) = 5.7190$$

இதே போல் மற்ற மதிப்புகளைப் பெறலாம்.

குறிப்பு:

(i) இந்த முறையால் உருவாக்கப்பட்ட எதிர்கால முன்னறிவிப்பு, போக்குகளின் மதிப்புகளைச் சார்ந்தவை.

(ii) மற்ற முறைகளை விட இந்த முறையில் கணிக்க கூடிய மதிப்புகள் அதிக நம்பக மானவை ஆகும்.

9.1.5 பருவகால மாறுபாடுகளை அளவிடுவதற்கான முறைகள் (Methods of measuring Seasonal Variations By Simple Averages)

பருவகால மாறுபாடுகள் எளிய சராசரி முறையால் அளவிடப்பட முடியும். புள்ளி விவரங்களானது, வாரங்கள், காலாண்டுகள் போன்ற காலம் சார்ந்த நிலைகளில் கிடைக்கின்றன.

எளிய சராசரி முறை (Method of Simple Averages):

பருவகால மாறுபாடுகள் அறிவதற்கு இம்முறை எளிமையாக இருக்கும்.

இம்முறையின் செயல்முறைகள் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன:

(i) கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களை வாரங்கள், மாதங்கள், காலாண்டுகள் என்ற வரிசையில் அமைக்க வேண்டும்.

(ii) ஒவ்வொரு மாதங்கள், காலாண்டுகள் அல்லது ஆண்டுகளின் கூடுதலைக் காண வேண்டும்.

(iii) ஒவ்வொரு மாதங்கள், காலாண்டுகள் அல்லது ஆண்டு ஆகியவற்றிற்குச் சராசரி காண வேண்டும்.

(iv) சராசரிகளுக்கான சராசரி காண வேண்டும் இதனை மொத்த சராசரி (G) என அழைக்கலாம்.

(v) ஒவ்வொரு பருவத்திற்கும் பருவகாலக் குறியீட்டைக் கணக்கிடுக. மாதங்கள், காலாண்டுகள் அல்லது ஆண்டு கொடுக்கப்பட்டால்

$$\text{பருவகால குறியீடு (S.I)} = \frac{\text{பருவகால சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

(vi) புள்ளி விவரங்கள் மாதந்தோறும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால்

$$\text{பருவகால குறியீடு ஜனவரி (S.I)} = \frac{\text{மாத சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

$$\text{பருவகால குறியீடு பிப்ரவரி (S.I)} = \frac{\text{மாத சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

இதே போல் மற்ற எல்லா மாதங்களுக்கும் பருவகால குறியீட்டெண்கள் கணக்கிட முடியும்.

(vii) புள்ளி விவரங்கள் காலாண்டுகளாக கொடுக்கப்பட்டால்,

முதல் காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு(S.I)

$$= \frac{\text{முதல் காலாண்டு சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

இரண்டாம் காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு (S.I)

$$= \frac{\text{இரண்டாம் காலாண்டு சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

மூன்றாம் காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு (S.I)

$$= \frac{\text{மூன்றாம் காலாண்டு சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

நான்காம் காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு (S.I)

$$= \frac{\text{நான்காம் காலாண்டு சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

எடுத்துக்காட்டு 9.8

எளிய சராசரி முறையைப் பயன்படுத்தி ஒரு பொருளின் மாதாந்திர விற்பனைக்கு, பருவகால குறியீட்டைக் கணக்கிடுக.

மாதங்கள்	ஆண்டு		
	2001	2002	2003
ஜனவரி	15	20	18
பிப்ரவரி	41	21	16
மார்ச்	25	27	20
ஏப்ரல்	31	19	28
மே	29	17	24
ஜூன்	47	25	25
ஜூலை	41	29	30
ஆகஸ்ட்	19	31	34
செப்டம்பர்	35	35	30
அக்டோபர்	38	39	38
நவம்பர்	40	30	37
டிசம்பர்	30	44	39

தீர்வு:

எளிய சராசரியின் மூலம் பருவகால குறியீட்டை கணக்கிடுதல்.

மாதங்கள்	ஆண்டு			மாதாந்திர மொத்தம்	மாதாந்திர சராசரி
	2001	2002	2003		
ஜன	15	20	18	53	17.67
பிப்	41	21	16	78	26
மார்ச்	25	27	20	72	24
ஏப்	31	19	28	78	26
மே	29	17	24	70	23.33
ஜுன்	47	25	25	97	32.33
ஜுலை	41	29	30	100	33.33
ஆகஸ்	19	31	34	84	28
செப்	35	35	30	100	33.33
அக்	38	39	38	115	38.33
நவம்	40	30	37	107	35.67
டிசம்	30	44	39	113	37.67

அட்டவணை 9.7

$$\text{பருவகால குறியீடு (ஜனவரி)} = \frac{\text{மாத சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

$$\text{மொத்த சராசரி} = \frac{355.66}{12} = 29.64$$

$$\text{பருவகால குறியீடு (ஜனவரி)} = \frac{17.67}{29.64} X100 = 59.62$$

$$\text{பருவகால குறியீடு (பிப்ரவரி)} = \frac{26}{29.64} X100 = 87.72$$

இதேபோல் மற்ற பருவகாலக் குறியீட்டு மதிப்புகள் பெறமுடியும்.

மாதங்கள்	பருவகால குறியீட்டு
ஜனவரி	59.62
பிப்ரவரி	87.72
மார்ச்	80.97
ஏப்ரல்	87.72
மே	78.71
ஜுன்	109.08
ஜுலை	112.45
ஆகஸ்ட்	94.47
செப்டம்பர்	112.45
அக்டோபர்	129.32
நவம்பர்	120.34
டிசம்பர்	127.09

எடுத்துக்காட்டு 9.9

எளிய சராசரி முறையைப் பயன்படுத்தி ஒரு பொருளின் உற்பத்தியின் காலாண்டு பருவகாலக் குறியீட்டை கணக்கிடுக.

ஆண்டு	I காலாண்டு	II காலாண்டு	III காலாண்டு	IV காலாண்டு
2005	255	351	425	400
2006	269	310	396	410
2007	291	332	358	395
2008	198	289	310	357
2009	200	290	331	359
2010	250	300	350	400

தீர்வு :

எளிய சராசரியின் மூலம் பருவகாலக் குறியீட்டை கணக்கிடுதல்.

ஆண்டு	I காலாண்டு	II காலாண்டு	III காலாண்டு	IV காலாண்டு
2005	255	351	425	400
2006	269	310	396	410
2007	291	332	358	395
2008	198	289	310	357
2009	200	290	331	359
2010	250	300	350	400
காலாண்டு கூடுதல்	1463	1872	2170	2321
காலாண்டு சராசரி	243.83	312	361.67	386.83

அட்டவணை 9.8

முதல் காலண்டிற்கான பருவகால குறியீடு (S.I)

$$= \frac{\text{முதல் காலாண்டு சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

$$\text{மொத்த சராசரி} = \frac{1304.333}{4} = 326.0833$$

முதல் காலண்டிற்கான பருவகால குறியீடு (S.I)

$$= \frac{243.8333}{326.0833} \times 100 = 74.77$$

இரண்டாம் காலண்டிற்கான பருவகால குறியீடு (S.I)

$$= \frac{312}{326.0833} \times 100 = 95.68$$

மூன்றாம் காலண்டிற்கான பருவகால குறியீடு (S.I)

$$= \frac{361.6667}{326.0833} \times 100 = 110.91$$

நான்காம் காலண்டிற்கான பருவகால குறியீடு (S.I)

$$= \frac{386.833}{326.0833} \times 100 = 118.63$$

பயிற்சி 9.1

1. காலம்சார் தொடர் வரிசையை வரையறு.
2. காலம்சார் தொடர் வரிசையைக் கற்பதன் அவசியம் என்ன?
3. காலம்சார் தொடர் வரிசையின் பயன்பாட்டை குறிப்பிடுக.
4. காலம்சார் தொடர் வரிசையின் கூறுகளைக் குறிப்பிடுக.
5. நீள்காலப்போக்கு வரையறு.
6. பருவகால மாறுபாட்டின் மீது ஒரு சுருக்கமான குறிப்பு எழுதுக.
7. சூழல் மாறுபாடுகள் என்பதை விளக்குக.
8. ஒழுங்கற்ற மாறுபாடுகள் பற்றி விவாதிக்கவும்
9. பருவகால குறியீட்டை வரையறுக்க
10. ஒரு நேர்க்கோட்டைப் பொருத்தும் முறையை விளக்குக.
11. நேர்க்கோடு பொருத்துதலில் பயன்படுத்தப்படும் இரு இயல்நிலைச் சமன்பாடுகளை கூறுக.
12. போக்கினை அளவிடுவதற்கான வெவ்வெறு முறைகளை குறிப்பிடுக.
13. கீழ்க்கண்ட தொடருக்கு சராசரி பருவகாலப் போக்கைக் கணக்கிடுக.

வருடம்	காலாண்டு உற்பத்தி			
	I	II	III	IV
2002	3.5	3.8	3.7	3.5
2003	3.6	4.2	3.4	4.1
2004	3.4	3.9	3.7	4.2
2005	4.2	4.5	3.8	4.4
2006	3.9	4.4	4.2	4.6

14. எட்டு ஆண்டுகளுக்கான வர்த்தக சம்பந்தமான இலாபங்களுடன் தொடர்புடைய புள்ளி விவரங்கள் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆண்டுகள்	இலாபம் (₹)
1986	15,420
1987	15,470
1988	15,520
1989	21,020
1990	26,500
1991	31,950
1992	35,600
1993	34,900

மூன்று ஆண்டு காலத்தைக் கொண்ட நகரும் சராசரி முறையைப் பயன்படுத்தி போக்கு மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

15. ஐந்து ஆண்டு காலத்தைக் கொண்ட நகரும் சராசரிகளின் மூலம் பின்வரும் புள்ளி விவரங்களுக்கான உற்பத்தி போக்கு மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

ஆண்டுகள்	உற்பத்தி('000)
1979	126
1980	123
1981	117
1982	128
1983	125
1984	124
1985	130
1986	114
1987	122
1988	129
1989	118
1990	123

16. தொழில்துறையில் 1985 மற்றும் 1991 இடைப்பட்ட ஆண்டுகளில் பதிவு செய்யப்பட்ட சிறுதொழில் நிறுவனங்களின் எண்ணிக்கை பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. போக்குக்கோட்டின் மீது இதன் வளர்ச்சியை வரைபட முறையில் காட்டுக.

ஆண்டுகள்	அலகுகளின் எண்ணிக்கை ('000)
1985	10
1986	22
1987	36
1988	62
1989	55
1990	40
1991	34
1992	50

17. ஒரு பொருளின் ஆண்டு உற்பத்தி கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

ஆண்டுகள்	உற்பத்தி ('000)
1995	155
1996	162
1997	171
1998	182
1999	158
2000	180
2001	178

மீச்சிறு வர்க்க முறையில் நேர்க்கோட்டுப் போக்கினை பொருத்துக.

18. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரங்களுக்கு பொருத்தமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைத் தீர்மானிக்க. மேலும், 2000–இலிருந்து 2004 வரை உள்ள எல்லா ஆண்டுகளுக்கும் போக்கு மதிப்பை கணக்கிடுக.

வருடம்	2000	2001	2002	2003	2004
விற்பனை (.'000)	35	36	79	80	40

19. ஒரு பொருளின் விலை (டன்னில்) ஜனவரி 2010 முதல் டிசம்பர் 2010 வரை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. புள்ளி விவரங்களுக்குப் பகுதி சராசரி முறையில் போக்குக் கோட்டைப் பொருத்துக:

2010 ஆம் ஆண்டில்	விற்பனை (டன்)
ஜனவரி	280
பிப்ரவரி	240
மார்ச்	270
ஏப்ரல்	300
மே	280
ஜுன்	290
ஜுலை	210
ஆகஸ்ட்	200
செப்டம்பர்	230
அக்டோபர்	200
நவம்பர்	230
டிசம்பர்	210

20. மாதாந்திர சராசரி முறையில் 2002, 2003 மற்றும் 2004 ஆண்டுகளுக்கான கீழ்க்காணும் பொருள்களின் உற்பத்தி புள்ளி விவரங்களுக்கு மாதாந்திர குறியீடுகளை காண்க.

2002	2003	2004
15	20	18
18	18	25
17	16	21
19	13	11
16	12	14
20	15	16
21	22	19
18	16	20
17	18	17
15	20	16
14	17	18
18	15	20

21. எளிய சராசரி முறையின் மூலம் கீழ்க்கண்ட புள்ளி விவரங்களுக்கு பருவகால குறியீடுகளைக் காண்க:

வருடம்	I காலாண்டு	II காலாண்டு	III காலாண்டு	IV காலாண்டு
2008	72	68	62	76
2009	78	74	78	72
2010	74	70	72	76
2011	76	74	74	72
2012	72	72	76	68

22. ஒரு குறிப்பிட்ட நிறுவனத்தில் பணி புரியும் விற்பனையாளர்களின் எண்ணிக்கை கீழே உள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

ஆண்டு	1992	1993	1994	1995	1996
விற்பனையாளர்களின் எண்ணிக்கை	46	48	42	56	52

இப்புள்ளி விவரங்களுக்கு மீச்சிறு வர்க்க முறையில் ஒரு நேர்க்கோட்டைப் பொருத்துக மேலும் 1997 ஆம் ஆண்டில் விற்பனையாளர்களின் எண்ணிக்கையை மதிப்பிடுக.

9.2 குறியீட்டு எண்கள் (Index Number)

அறிமுகம்:

குறியீட்டு எண்கள் என்பது பல்வேறு பொருள்களின் விலை, உற்பத்தி, விற்பனை, வாழ்க்கைச் செலவு ஆகியவற்றில் ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் ஏற்படும் மாற்றங்களைப் பிரதிபலிக்கும் குறிகாட்டிகளாகும். அவை மாறி அல்லது மாறிகளின் தொகுப்பில் ஏற்படும் மாற்றத்தை அதன் நேரம், புவியியல் அமைப்பு, வருமானம் மற்றும் தொழில் போன்ற பிற பண்புகளை ஒப்பிட்டுப் பார்த்து அளவிடும் புள்ளியியல் முறைகள் ஆகும்.

இம்மாறிகள் என்பது கீழ்க்கண்டவாறு இருக்கலாம்,

(i) ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளின் விலை. உதாரணமாக தங்கம், வெள்ளி, இரும்பு (அல்லது) பொருள்களின் தொகுப்பு. உதாரணமாக நுகர்வோர் பொருள்கள், வீட்டு உணவு பொருள்கள் போன்றவை.

(ii) ஏற்றுமதி மற்றும் இறக்குமதி பொருளின் அளவு, விவசாய மற்றும் தொழில்துறை உற்பத்தி.

(iii) ஒரு நாட்டின் தேசிய வருமானம், ஒரு குறிப்பிட்ட வருமான வரம்பில் உள்ள நபர்களின் வாழ்க்கைச் செலவு.

9.2.1 பொருள், வகைப்பாடு மற்றும் பயன்கள் (Meaning, Classifications and Uses)

நுகர்வோர் பொருள்களின் விலையில் ஏற்படும் பொதுவான மாற்றங்களை நாம் நேரிடையாக அளவிட முடியாது. ஏனெனில், நுகர்வோர் பொருள்களின் அளவுகள் வெவ்வேறு அலகுகளில் இருக்கும். எடுத்துக்காட்டாக அரிசி, கோதுமை மற்றும் சர்க்கரை ஆகிய பொருள்கள் கிலோகிராமிலும், பால், பெட்ரோல், எண்ணெய் ஆகிய பொருள்கள் லிட்டரிலும் மற்றும் ஆடைகள் மீட்டரிலும் அளவிடபடுகின்றன. மேலும் சில பொருள்களின் விலை மற்றும் அளவு இரண்டு காலக்கட்டங்களில் அதிகரிக்க அல்லது கணிசமாகக் குறைய வாய்ப்பு உண்டு. எனவே, குறியீட்டு எண்ணானது, ஒரு குறிப்பிட்ட கால கட்டத்தில் கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பிலுள்ள அனைத்துப் பொருட்களின் விலையையும் பிரதிபலிக்கும் ஓர் ஒற்றை எண்ணாகும்.

வரையறை 9.2

“ஒரு குறியீட்டு எண் என்பது துல்லியமான அளவுகளில் அளக்க முடியாத அல்லது வழக்கத்தில் நேரடி மதிப்பீடு செய்ய முடியாத எண் அளவிலான மாறுபாடுகளில் உள்ள வேறுபாடுகளை காண்பிக்க கூடிய ஒரு கருவியாகும்”.

– வெல்டன்

“ஒரு குறியீட்டு எண் என்பது தொடர் அமைப்பில் வரிசை படுத்தப்பட்ட ஒரு மாறியில் காணப்படும் ஏற்ற இறக்கங்களை காணும் புள்ளியியல் அளவிடுகளாகும் மேலும் அடிப்படை கால இடைவெளியை பயன்படுத்தி ஒப்பீடு செய்வதாகும். ”

– லாரன்ஸ் ஜெ கல்பன்

குறியீட்டு எண்களின்வகைப்பாடுகள்:

குறியீட்டு எண்களை பின்வருமாறு வகைப்படுத்த முடியும்,

(i) **விலைக் குறியீட்டு எண்** (Price Index Number)

சில்லறை அல்லது மொத்த விலையில் ஏற்படும் ஒரு குறிப்பிட்ட மாற்றத்தை அல்லது தொகுப்பு பொருள்களின் விலை குறியீட்டு எண்ணின் பொதுவான மாற்றங்களை அளவிடுவதற்கான குறியீடு ஆகும்.

(ii) **எண்ணளவு குறியீட்டு எண்** (Quantity Index Number)

ஒரு தொழிற்சாலையில் தயாரிக்கப்படும் பொருள்களின் அளவுகளில் ஏற்படும் மாற்றங்களை அளவிடுவதற்கான குறியீடு ஆகும்.

(iii) **வாழ்க்கைத்தர குறியீட்டு எண்** (Cost of living Index Number)

வெவ்வேறு வர்க்க மக்களின் வாழ்க்கைத் தர செலவில் விலை சார்ந்த மாற்றத்தின் விளைவுகளை அறிவதற்காக இவை உருவாக்கப்பட்டுள்ளன.

குறியீட்டு எண்ணின் பயன்கள்: (Uses of Index number)

(i) முடிவுகள் மற்றும் நிர்வாகக் கொள்கைகளை அமைப்பதற்கு இது ஒரு முக்கியமான கருவியாகும்.

(ii) இது போக்குகள் மற்றும் போக்கு அளவைகளை அறிய உதவுகிறது.

(iii) இது ஒரு பொருளாதாரத்தின் வீக்கம் மற்றும் பணவாட்டத்தைத் தீர்மானிக்கிறது

குறியீட்டுஎண் அமைக்கும் விதம்: (Construction of Index Number)

குறியீட்டு எண்ணின் கட்டுமானத்தில் இரண்டு வகைகள் உள்ளன.

(i) நிறையிடா குறியீட்டு எண் (Unweighted Index Number)

(ii) நிறையிட்ட குறியீட்டு எண் (Weighted Index Number)

இங்கு, நிறையிட்ட குறியீட்டு எண்களை பற்றி மட்டும் நாம் படிப்போம்.

9.2.2 நிறையிட்ட குறியீட்டு எண் (Weighted Index Number)

பொதுவாக, அனைத்துப் பொருள்களுக்கும் சமமான முக்கியத்துவத்தை வழங்க முடியாது. எனவே, ஒவ்வொரு பொருளுக்கும் அதன் முக்கியத்துவத்தைப் பொருத்து நிறைகளை நம்மால் வழங்க முடியும். இந்த நிறையிலிருந்து கணக்கிடப்படும் குறியீட்டு எண், நிறையிட்ட குறியீட்டு எண் என்று அழைக்கப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக உற்பத்தி, நுகர்வு மதிப்புகள் போன்றவை நிறைகள் ஆகும். ‘w’ என்பது ஒரு பொருளுக்கு இணைக்கப்பட்ட நிறை எனில், விலை குறியீட்டுஎண் பின்வருமாறு வழங்கப்படுகிறது,

விலைகுறியீட்டு எண்: $P_{01} = \dfrac{\sum p_1 w}{\sum p_0 w} \times 100$ இங்கு,

p_1 - நடப்பு ஆண்டின்விலை

p_0 - அடிப்படைஆண்டின் விலை

q_1 - நடப்பு ஆண்டின்அளவு

q_0 - அடிப்படைஆண்டின் அளவு

‘0’ என்பது அடிப்படை ஆண்டையும் மற்றும் ‘1’ என்பது நடப்பு ஆண்டையும் குறிக்கிறது.

லாஸ்பியர் விலைக் குறியீட்டு எண் (Laspeyre’s price index number)

$$P_{01}^{L} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100$$

பாசி விலைக் குறியீட்டு எண் (Paasche’s price index number)

$$P_{01}^{P} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \times 100$$

ஃபிஷர் விலைக் குறியீட்டு எண் (Fisher’s price index number)

$$P_{01}^{F} = \sqrt{P_{01}^{L} \times P_{01}^{P}}$$

$$P_{01}^{F} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0 \times \sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0 \times \sum p_0 q_1}} \times 100$$

குறிப்பு:

(i) சரியான ஃபிஷர் விலை குறியீட்டு எண்ணைப் பெறுவதற்கு, $P_{01}^{F} = \sqrt{P_{01}^{L} \times P_{01}^{P}}$ -ஐ பயன்படுத்துவதற்குப் பதிலாகசூத்திர முறையைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

(ii) லாஸ்பியரின் விலை குறியீட்டு எண்ணில், அடிப்படை ஆண்டின் அளவைகள், நிறையாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

(iii) பாசியின் விலை குறியீட்டு எண்ணில், நடப்பு ஆண்டின் அளவைகள், நிறையாக பயன்படுத்தப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 9.10

லாஸ்பியர், பாசி மற்றும் ஃபிஷர் விலைக் குறியீட்டு எண்களைக் கீழ்க்கண்ட தரவுகளுக்கு கண்டுபிடித்து மற்றும் அவற்றிக்கான கருத்து விளக்கம் தருக.

பொருள்கள்	விலை		அளவு	
	2000	2010	2000	2010
அரிசி	38	35	6	7
கோதுமை	12	18	7	10
வாடகை	10	15	10	15
எரிபொருள்	25	30	12	16
இதரசெலவுகள்	30	33	8	10

தீர்வு:

பொருள்கள்	விலை		அளவு		p_0q_0	p_0q_1	p_1q_0	p_1q_1
	2003 (p_0)	2009 (p_1)	2003 (q_0)	2009 (q_1)				
அரிசி	38	35	6	7	228	266	210	245
கோதுமை	12	18	7	10	84	120	126	180
வாடகை	10	15	10	15	100	150	150	225
எரிபொருள்	25	30	12	16	300	400	360	480
இதரசெலவுகள்	30	33	8	10	240	300	264	330
				மொத்தம்	**952**	**1236**	**1110**	**1460**

அட்டவணை 9.9

லாஸ்பியரின் விலைக் குறியீட்டு எண்

$$P_{01}^{L}=\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}\times 100=\frac{1110}{952}\times 100=116.60$$

சராசரியாக, 2000 ஆம் ஆண்டுடன் ஒப்பிடுகையில் 2010 ஆம் ஆண்டில் பொருள்களின் விலை 16.60% அதிகரித்துள்ளது.

பாசியின் விலைக் குறியீட்டுஎண்

$$P_{01}^{P}=\frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}\times 100=\frac{1460}{1236}\times 100=118.12$$

சராசரியாக, 2000 ஆம் ஆண்டுடன் ஒப்பிடுகையில் 2010 ஆம் ஆண்டில் பொருள்களின் விலை 18.12% அதிகரித்துள்ளது.

ஃபிஷர் விலைக் குறியீட்டு எண்

$$P_{01}^{F}=\sqrt{\frac{\sum p_1q_0\times\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0\times\sum p_0q_1}}\times 100=\sqrt{\frac{1110\times 1460}{952\times 1236}}\times 100=117.36$$

சராசரியாக, 2000 ஆம் ஆண்டுடன் ஒப்பிடுகையில் 2010 ஆம் ஆண்டில் பொருள்களின் விலை 17.36% அதிகரித்துள்ளது.

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

ஃபிஷர் விலை குறியீட்டு எண் என்பது லாஸ்பியர் மற்றும் பாசி விலை குறியீட்டு எண்களுக்கு இடையேயான பெருக்கு சராசரி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.11

லாஸ்பியர், பாசி மற்றும் ஃபிஷர் விலைக் குறியீட்டு எண்களை உருவாக்கவும். மேலும் முடிவின் மீதான கருத்தினைத் தருக.

பொருள்கள்	அடிப்படை ஆண்டு		நடப்பு ஆண்டு	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
அரிசி	15	5	16	8
கோதுமை	10	6	18	9
வாடகை	8	7	15	8
எரிபொருள்	9	5	12	6
போக்குவரத்து	11	4	11	7
இதரசெலவுகள்	16	6	15	10

தீர்வு:

பொருள்கள்	அடிப்படை ஆண்டு		நடப்பு ஆண்டு		p_0q_0	p_0q_1	p_1q_0	p_1q_1
	விலை (p_0)	அளவு (p_0)	விலை	அளவு				
அரிசி	15	5	16	8	75	120	80	128
கோதுமை	10	6	18	9	60	90	108	162
வாடகை	8	7	15	8	56	64	105	120
எரிபொருள்	9	5	12	6	45	54	60	72
போக்குவரத்து	11	4	11	7	44	77	44	77
இதரசெலவுகள்	16	6	15	10	96	160	90	150
				Total	376	565	487	709

அட்டவணை 9.10

லாஸ்பியரின் விலைக் குறியீட்டு எண்

$$P_{01}^{L}=\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}\times 100=\frac{487}{376}\times 100=129.5212$$

பாசியின் விலைக்குறியீட்டுஎண்

$$P_{01}^{P}=\frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}\times 100=\frac{709}{565}\times 100=125.4867$$

ஃபிஷர் விலைக் குறியீட்டு எண்

$$P_{01}^{F}=\left(\sqrt{\frac{\sum p_1q_0\times\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0\times\sum p_0q_1}}\right)\times 100$$

$$=\left(\sqrt{\frac{487\times 709}{376\times 565}}\right)\times 100=127.4879$$

லாஸ்பியர், பாசி, ஃபிஷரின் விலைக் குறியீட்டு எண்கள் அடிப்படை ஆண்டோடு நடப்பு ஆண்டை ஒப்பிடும்பொழுது பொருள்களின் விலையானது முறையே சராசரியாக, 29.52%, 25.48% மற்றும் 27.48% ஆக அதிகரித்துள்ளது.

9.2.3 குறியீட்டு எண்களின் (போதுமான தன்மை) சோதனை: (Test of adequacy for an Index Number)

குறியீட்டு எண்களானது ஏதேனும் இரண்டு ஆண்டுகளை ஒப்பிடும் போது, விலை மற்றும் அளவு ஆகியவற்றில் காணப்படும் மாற்றங்களை அறிந்து கொள்வதற்கு பயன்படுகின்றன. ஒரு குறியீட்டு எண்ணின் போதுமான தன்மையை சோதிப்பதற்கு இரண்டு சோதனைகள் உள்ளன. அவை பின்வருமாறு:

(i) காலமாற்றுச் சோதனை (Time Reversal Test)

(ii) காரணி மாற்றுச் சோதனை (Factor Reversal Test)

ஒரு சிறந்த குறியீட்டு எண்ணின் அளவுகோல் என்பது மேலே உள்ள இரண்டு சோதனைகளை நிறைவு செய்வது என்பதாகும்.

காலமாற்றுச் சோதனை (Time Reversal Test)

காலமாற்றுச் சோதனை என்பது ஒரு சிறந்த குறியீட்டு எண்ணின் நிலைத் தன்மையை சோதிக்கும் ஒரு முக்கியமான சோதனை ஆகும். இச்சோதனையானது நேரத்தின், நிலைத் தன்மையைப் பராமரிக்க முன்னோக்கிய மற்றும் பின்னோக்கிய காலத்தைப் பொறுத்து செயல்படும். (இங்கு நேரம் என்பது அடிப்படை ஆண்டு மற்றும் நடப்பு ஆண்டு ஆகியவற்றைக் குறிக்கிறது) இது, பின்வரும் தொடர்பினை நிறைவு செய்ய வேண்டும், $P_{01} \times P_{10} = 1$.

ஃபிஷரின் குறியீட்டு எண் சூத்திரம் மேலே உள்ள தொடர்பை பூர்த்தி செய்கிறது.

$$P_{01}^{F} = \sqrt{\frac{\sum p_1q_0 \times \sum p_1q_1}{\sum p_0q_0 \times \sum p_0q_1}}$$

அடிப்படை ஆண்டு மற்றும் நடப்பு ஆண்டினைப் பரிமாற்றம் செய்யும் போது, நாம் பெறுவது

$$P_{10}^{F} = \sqrt{\frac{\sum p_0q_1 \times \sum p_0q_0}{\sum p_1q_1 \times \sum p_1q_0}}$$

$$P_{01}^{F} \times P_{10}^{F} = 1$$

குறிப்பு

ஒவ்வொரு குறியீட்டு எண்ணிலும் காரணி 100ஐப் புறக்கணியுங்கள்.

காரணி மாற்றுச் சோதனை (Factor Reversal Test)

காரணி மாற்றுச் சோதனை என்பது ஒரு சிறந்த குறியீட்டு எண்ணின் நிலைத்தன்மையை சோதிக்கும் மற்றொரு சோதனை ஆகும். உண்மை மதிப்பு விகிதமானது அடிப்படை ஆண்டு முதல் நடப்பு ஆண்டு வரை உள்ள விலை குறியீட்டு எண் மற்றும் எண் அளவு குறியீட்டு எண்ணின் பெருக்குத் தொகைக்கு சமம் ஆகும். அதாவது, நடப்புக்காலத்தின் மொத்த மதிப்பு மற்றும் அடிப்படை காலத்தின் மொத்த மதிப்பின் விகிதமாக, உண்மை மதிப்பு விகிதம் (true value ratio) கண்டறியப்படுகிறது. காரணி மாற்றுச் சோதனை பின்வருமாறு வழங்கப்படுகிறது,

$$P_{01} \times Q_{01} = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}$$

இங்கே, $P_{01} = \sqrt{\dfrac{\sum p_1q_0 \times \sum p_1q_1}{\sum p_0q_0 \times \sum p_0q_1}}$

இப்போது, P க்கு பதிலாக Q வை பரிமாற்றம் செய்தால், நாம் பெறுவது

$$Q_{01} = \sqrt{\frac{\sum q_1p_0 \times \sum q_1p_1}{\sum q_0p_0 \times \sum q_0p_1}}$$

இங்கே, P_{01} விலை ஒப்பீட்டு மாற்றம் ஆகும்

Q_{01} அளவு ஒப்பீட்டு மாற்றம் ஆகும்.

ஃபிஷரின் விலை குறியீட்டு எண் காலமாற்றுச் சோதனை (TRT) மற்றும் காரணி மாற்றுச் சோதனை (FRT) ஆகிய இரண்டு சோதனைகளை நிறைவு செய்வதால் தனித்த குறியீட்டு எண் எனப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 9.12

பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஃபிஷர்விலை குறியீட்டு எண்ணைக் கண்டுபிடிக்கவும், மேலும் காலமாற்றுச் சோதனை, காரணி மாற்றுச் சோதனை ஆகியவற்றை நிறைவு செய்வதை சரிபார்க்கவும்.

பொருள்கள்	விலை		அளவு	
	2003	2009	2003	2009
அரிசி	10	13	4	6
கோதுமை	15	18	7	8
வாடகை	25	29	5	9
எரிபொருள்	11	14	8	10
இதரசெலவுகள்	14	17	6	7

தீர்வு:

பொருள்கள்	விலை 2003 (p_0)	விலை 2009 (p_1)	அளவு 2003 (q_0)	அளவு 2009 (q_1)	p_0q_0	p_0q_1	p_1q_0	p_1q_1
அரிசி	10	13	4	6	40	60	52	78
கோதுமை	15	18	7	8	105	120	126	144
வாடகை	25	29	5	9	125	225	145	261
எரிபொருள்	11	14	8	10	88	110	112	140
இதரசெலவுகள்	14	17	6	7	84	98	102	119
				மொத்தம்	442	613	537	742

அட்டவணை 9.11

ஃபிஷர்விலை குறியீட்டுஎண் (Fisher's price index number)

$$P_{01}^{F}=\left(\sqrt{\frac{\sum p_1q_0\times\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0\times\sum p_0q_1}}\right)\times100=\left(\sqrt{\frac{537\times742}{442\times613}}\right)\times\ 100=121.2684$$

காலமாற்றுச் சோதனை: $P_{01}\times P_{10}=1$

$$P_{01}\times P_{10}=\sqrt{\left(\frac{\sum p_1q_0\ \times\sum p_1q_1\times\sum p_0q_1\times\sum p_0q_0}{\sum p_0q_0\times\sum p_0q_1\times\sum p_1q_1\times\sum p_1q_0}\right)}$$

$$P_{01}\times P_{10}\ =\sqrt{\left(\frac{537\times742\times613\times442}{442\times613\times742\times537}\right)}$$

$$P_{01}\times P_{10}\ =1$$

காரணி மாற்றுச் சோதனை

$$P_{01}\ \times Q_{01}=\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}$$

$$P_{01}\ \times Q_{01}=\sqrt{\left(\frac{\sum p_1q_0\ \times\sum p_1q_1\times\sum q_1p_0\ \times\sum q_1p_1}{\sum p_0q_0\times\sum p_0q_1\times\sum q_0p_0\ \times\sum q_0p_1}\right)}$$

$$P_{01}\ \times Q_{01}=\sqrt{\left(\frac{537\times742\times613\times742}{442\times613\times442\times537}\right)}$$

$$P_{01}\ \times Q_{01}=\sqrt{\left(\frac{742\times742}{442\times\ 442}\right)}\ =\frac{742}{442}$$

$$\Rightarrow\ \ P_{01}\times Q_{01}=\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}$$

எனவே, ஃபிஷர்விலைக் குறியீட்டு எண்ணானது காலமாற்றுச் சோதனை, காரணி மாற்றுச் சோதனை ஆகியவற்றை நிறைவு செய்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 9.13

பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஃபிஷரின் விலை குறியீட்டு எண்ணை கண்டுபிடிக்கவும். மேலும் காலமாற்றுச் சோதனை, காரணி மாற்றுச் சோதனை ஆகியவற்றை நிறைவு செய்வதைச் சரிபார்க்கவும்.

பொருள்கள்	அடிப்படைஆண்டு		நடப்பு ஆண்டு	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
அரிசி	10	5	11	6
கோதுமை	12	6	13	4
வாடகை	14	8	15	7
எரிபொருள்	16	9	17	8
போக்குவரத்து	18	7	19	5
இதரசெலவுகள்	20	4	21	3

தீர்வு:

பொருள்கள்	அடிப்படை ஆண்டு விலை (p_0)	அடிப்படை ஆண்டு அளவு (q_0)	நடப்பு ஆண்டு விலை (p_1)	நடப்பு ஆண்டு அளவு (q_1)	p_0q_0	p_0q_1	p_1q_0	p_1q_1
அரிசி	10	5	11	6	50	60	55	66
கோதுமை	12	6	13	4	72	48	78	52
வாடகை	14	8	15	7	112	98	120	105
எரிபொருள்	16	9	17	8	144	128	153	136
போக்குவரத்து	18	7	19	5	126	90	133	95
இதரசெலவுகள்	20	4	21	3	80	60	84	63
				மொத்தம்	584	484	623	517

அட்டவணை 9.12

ஃபிஷர்விலைக் குறியீட்டுஎண்

$$P_{01}^{F}=\left(\sqrt{\frac{\sum p_1q_0\ \times\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0\times\sum p_0q_1}}\right)\times100$$

$$=\left(\sqrt{\frac{623\times517}{584\times484}}\right)\times100=106.74$$

காலமாற்றுச் சோதனை: $P_{01}\times P_{10}\ =1$

$$P_{01}\times P_{10}=\sqrt{\left(\frac{\sum p_1q_0\ \times\sum p_1q_1\times\sum p_0q_1\times\sum p_0q_0}{\sum p_0q_0\times\sum p_0q_1\times\sum p_1q_1\times\sum p_1q_0}\right)}$$

$$P_{01}\times P_{10}\ =\sqrt{\left(\frac{623\times517\times484\times584}{584\times484\times517\times623}\right)}$$

$$P_{01}\times P_{10}\ =1$$

காரணி மாற்றுச் சோதனை: $P_{01} \times Q_{01} = \dfrac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$

$$P_{01} \times Q_{01} = \sqrt{\left(\frac{\sum p_1 q_0 \times \sum p_1 q_1 \times \sum q_1 p_0 \times \sum q_1 p_1}{\sum p_0 q_0 \times \sum p_0 q_1 \times \sum q_0 p_0 \times \sum q_0 p_1}\right)}$$

$$P_{01} \times Q_{01} = \sqrt{\left(\frac{623 \times 517 \times 484 \times 517}{584 \times 484 \times 584 \times 623}\right)}$$

$$P_{01} \times Q_{01} = \sqrt{\left(\frac{517 \times 517}{585 \times 584}\right)} = \frac{517}{584}$$

$$P_{01} \times Q_{01} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

எனவே, ஃபிஷர்விலை குறியீட்டு எண்ணானது காலமாற்றுச் சோதனை, காரணி மாற்றுச் சோதனை ஆகியவற்றை நிறைவு செய்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 9.14

பின்வரும் விவரங்களுக்கு, ஃபிஷர் விலைக் குறியீட்டு எண்ணைக் கட்டமைக்கவும் மேலும் அது காலமாற்றுச்சோதனை, காரணிமாற்றுச் சோதனை ஆகியவற்றைப் பூர்த்திசெய்யும் என நிரூபிக்கவும்.

பொருள்கள்	அடிப்படை ஆண்டு		நடப்பு ஆண்டு	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
அரிசி	40	5	48	4
கோதுமை	45	2	42	3
வாடகை	90	4	95	6
எரிபொருள்	85	3	80	2
போக்குவரத்து	50	5	65	8
இதரசெலவுகள்	65	1	72	3

தீர்வு:

பொருள்கள்	அடிப்படை ஆண்டு		நடப்பு ஆண்டு		p_0q_0	p_0q_1	p_1q_0	p_1q_1
	விலை (p_0)	அளவு (q_0)	விலை (p_1)	அளவு (q_1)				
அரிசி	40	5	48	4	200	160	240	192
கோதுமை	45	2	42	3	90	135	84	126
வாடகை	90	4	95	6	360	540	380	570
எரிபொருள்	85	3	80	2	255	170	240	160
போக்குவரத்து	50	5	65	8	250	400	325	520
இதரசெலவுகள்	65	1	72	3	65	195	72	216
				மொத்தம்	1220	1600	1341	1784

அட்டவணை 9.13

ஃபிஷர்விலை குறியீட்டுஎண்

$$P_{01}^{F} = \left(\sqrt{\frac{\sum p_1 q_0 \times \sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0 \times \sum p_0 q_1}}\right) \times 100$$

$$= \left(\sqrt{\frac{1341 \times 1784}{1220 \times 1600}}\right) \times 100 = 110.706$$

காலமாற்றுச் சோதனை: $P_{01} \times P_{10} = 1$

$$P_{01} \times P_{10} = \sqrt{\left(\frac{\sum p_1 q_0 \times \sum p_1 q_1 \times \sum p_0 q_1 \times \sum p_0 q_0}{\sum p_0 q_0 \times \sum p_0 q_1 \times \sum p_1 q_1 \times \sum p_1 q_0}\right)}$$

$$P_{01} \times P_{10} = \sqrt{\left(\frac{1341 \times 1784 \times 1600 \times 1220}{1220 \times 1600 \times 1784 \times 1341}\right)}$$

$$\Rightarrow P_{01} \times P_{10} = 1$$

காரணி மாற்றுச் சோதனை: $P_{01} \times Q_{01} = \dfrac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$

$$P_{01} \times Q_{01} = \sqrt{\left(\frac{\sum p_1 q_0 \times \sum p_1 q_1 \times \sum q_1 p_0 \times \sum q_1 p_1}{\sum p_0 q_0 \times \sum p_0 q_1 \times \sum q_0 p_0 \times \sum q_0 p_1}\right)}$$

$$P_{01} \times Q_{01} = \sqrt{\left(\frac{1341 \times 1784 \times 1600 \times 1784}{1220 \times 1600 \times 1220 \times 1341}\right)}$$

$$P_{01} \times Q_{01} = \sqrt{\left(\frac{1784 \times 1784}{1220 \times 1220}\right)} = \frac{1784}{1220}$$

$$\Rightarrow P_{01} \times Q_{01} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

எனவே, ஃபிஷர்விலைக் குறியீட்டு எண்ணானது காலமாற்றுச் சோதனை, காரணி மாற்றுச் சோதனை ஆகியவற்றைப் பூர்த்திசெய்யும் என நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளன.

9.2.4 வாழ்க்கைத்தர குறியீட்டு எண் (Construction of Cost of Living Index Number)

அடிப்படை காலத்துடன் ஒப்பிடுகையில் தற்போதைய காலத்திற்கு நுகர்வோர்கள் மற்றும் சேவைகளின் விலையில் ஏற்படும் மாற்றங்களின் விளைவுகளை ஆய்வு செய்ய வாழ்க்கைத் தரகுறியீட்டு எண் கட்டமைக்கபட்டுள்ளது. ஏதேனும் இரண்டு காலத்திற்கு இடையே வாழ்க்கைத்தர குறியீட்டு எண்ணின் மாற்றம் என்பது இரு காலங்களில் அதே வாழ்க்கைத் தரத்தை பராமரிக்க அவசியமான வருமான மாற்றமே ஆகும். எனவே வாழ்க்கைத்தர குறியீட்டு எண், அதே வாழ்க்கைத் தரத்தை பராமரிக்கக் கூடிய சராசரி வருமான அதிகரிப்பை அளவிடக் கூடியதாகும். மேலும், மக்களின் நுகர்வு பழக்கம் பரவலாக வேறுபடுகிறது. (பணக்காரர், ஏழை, நடுத்தர வர்க்கம்) மேலும் இடத்திற்கு இடம் வேறுபடுகிறது. விலையில் ஏற்படும் மாற்றங்களானது பல்வேறு வகைப்பட்ட மக்களை பாதிக்கிறது, இதன் விளைவாக பொது விலைக் குறியீட்டு எண்கள், வெவ்வேறு வர்க்க மக்களின் வாழ்க்கை செலவில் மாற்றங்களின் விளைவுகளை ஏதிரொலிக்கத் தவறுகிறது. எனவே, வாழ்க்கை தர குறியீட்டு எண் ஆனது பல்வேறு மக்கள் நுகரும் பொருள்களின் பொதுவான விலையில் ஏற்படும் மாற்றங்களை அளவிடப் பயன்படுகிறது.

நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டெண்ணானது வாழ்க்கைக் குறியீட்டு செலவு என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.

வாழ்க்கைத் தரகுறியீட்டு எண்ணின் பயன்கள் (Uses of Cost of Living Index Number)

(i) ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் பணியாளர்களின் ஊதியம் உண்மையாக அதிகரிக்கிறதா அல்லது வீழ்ச்சி அடைகிறதா என்பதை அறிய பயன்படுகிறது.

(ii) நிர்வாகமானது, தொழிலாளர்களின் ஊதியத்திற்கான அகவிலைப்படியை சீர்படுத்த அல்லது ஊக்கத்தொகை வழங்க பயன்படுகிறது.

வாழ்க்கைத்தர குறியீட்டு எண்ணை அமைக்கும் முறைகள் (Methods of constructing Cost of Living Index Number)

பின்வரும் வழிமுறைகளால் வாழ்க்கைத் தரகுறியீட்டு எண்ணை அமைக்க முடியும்,

(i) மொத்த செலவு முறை அல்லது நிறையிட்ட மொத்தமுறை (Aggregate Expenditure Method (or) Weighted Aggregative Method).

(ii) குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட முறை (Family Budget Method)

மொத்த செலவுமுறை (Aggregate Expenditure Method)

மொத்த செலவு முறையானது வாழ்க்கைத் தரக் குறியீட்டு எண்ணை கணக்கிடப் பயன்படுத்தப் படும் மிகவும் பொதுவான முறை ஆகும். இம் முறையில் அடிப்படை ஆண்டின் அளவுகள் நிறைகளாக பயன்படுத்தப்படுகின்றன. அதற்கான சூத்திரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

வாழ்க்கைத் தரக்குறியீட்டு எண்:

$$\text{C L I} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100$$

> **குறிப்பு:**
>
> வாழ்க்கைத் தரக்குறியீட்டு எண்ணைக் கணக்கிட உதவும் சூத்திரமும், லாஸ்பியர் விலைக்குறியீட்டு எண் சூத்திரமும் ஒன்றே ஆகும்.

குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட முறை (Family Budget Method)

குடும்ப வரவு செலவு திட்ட முறையில், அடிப்படை ஆண்டின் விலைகள் மற்றும் அளவை பெருக்குவதன் மூலம் நிறைகள் கணக்கிடப்படுகின்றன. அதாவது $V = \sum p_0 q_0$ அதன் சூத்திரம் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளது.

வாழ்க்கைத்தர குறியீட்டு எண் $= \dfrac{\sum PV}{\sum V}$

இங்கு தொடர்பு விலை: $P = \dfrac{p_1}{p_0} \times 100$

உருப்படியின் நிறை மதிப்பு: $V = \sum p_0 q_0$

> **குறிப்பு**
>
> குடும்ப வரவு செலவுத் திட்டமுறையானது தொடர்பு விலைகளின் நிறையிட்ட சராசரி முறைக்கு ஒப்பாகும்.

குறியீட்டு எண்களை எந்தச் சூழலில் பயன்படுத்தலாம்?

விலைகள் மற்றும் அளவுகள் கொடுக்கப்பட்டு இருந்தால், மொத்த செலவு முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

விலைகள் மற்றும் நிறைகள் கொடுக்கப்பட்டு இருந்தால், குடும்ப வரவு செலவுத்திட்ட முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 9.15

கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரங்களுக்கு வாழ்க்கைத் தரக்குறியீட்டு எண்ணை கணக்கிடுக.

பொருள்கள்	அளவு 2005	விலை 2005	விலை 2010
A	10	7	9
B	12	6	8
C	17	10	15
D	19	14	16
E	15	12	17

தீர்வு:

பொருள்கள்	அளவு 2005 (Q_0)	விலை 2005 (P_0)	விலை 2010 (P_1)	P_1Q_0	P_0Q_0
A	10	7	9	90	70
B	12	6	8	96	72
C	17	10	15	255	170
D	19	14	16	304	266
E	15	12	17	255	180
			மொத்தம்	1000	758

அட்டவணை 9.14

$$\text{வாழ்க்கைத் தரக்குறியீட்டுஎண்} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100$$

$$= \frac{1000}{758} \times 100 = 131.926$$

எடுத்துக்காட்டு 9.16

பின்வரும் விவரங்களுக்கு, 2010 அடிப்படை ஆண்டை பொறுத்து 2015 ஆம் ஆண்டிற்கான வாழ்க்கைக் குறியீட்டு எண்ணை கணக்கிடுக.

பொருள்கள்	அலகுகள் எண்ணிக்கை (2010)	விலை (2010)	விலை (2015)
அரிசி	5	1500	1750
சர்க்கரை	3.5	1100	1200
பருப்பு	3	800	950
துணி	2	1200	1550
நெய்	0.75	550	700
வாடகை	12	2500	3000
எரிபொருள்	8	750	600
இதரசெலவுகள்	10	3200	3500

தீர்வு:

இங்கே, அடிப்படை ஆண்டு அளவு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே மொத்த செலவு முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

பொருள்கள்	அலகுகள் எண்ணிக்கை (2010) q_0	விலை (2010) p_0	விலை (2015) p_1	p_0q_0	p_1q_0
அரிசி	5	1500	1750	7500	8750
சர்க்கரை	3.5	1100	1200	3850	4200
பருப்பு	3	800	950	2400	2850
துணி	2	1200	1550	2400	3100
நெய்	0.75	550	700	412.5	525
வாடகை	12	2500	3000	30000	36000
எரிபொருள்	8	750	600	6000	4800
இதரசெலவுகள்	10	3200	3500	32000	35000
			மொத்தம்	84562.5	95225

அட்டவணை 9.15

$$\text{வாழ்க்கை குறியீட்டுஎண்} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100$$

$$= \frac{95225}{84562.5} \times 100 = 112.609$$

எனவே, 2015 ஆம் ஆண்டை, 2010 ஆண்டு உடன் ஒப்பிடுகையில், வாழ்க்கை குறியீட்டுஎண் 12.609% அதிகரித்துள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 9.17

பின்வரும் விவரங்களுக்கு, 2011 அடிப்படை ஆண்டைப் பொறுத்து 2016-ஆம் ஆண்டிற்கான நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டு எண் மூலம் வாழ்க்கை குறியீட்டு எண்ணை கணக்கிடுக.

பொருள்கள்	விலை		அளவு
	அடிப்படை ஆண்டு	நடப்பு ஆண்டு	
அரிசி	32	48	25
சர்க்கரை	25	42	10
எண்ணெய்	54	85	6
காப்பி	250	460	1
தேயிலை	175	275	2

தீர்வு:

இங்கே, அடிப்படை ஆண்டு அளவு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே மொத்த செலவு முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

பொருள்கள்	விலை		அளவு (q_0)	p_0q_0	p_1q_0
	அடிப்படை ஆண்டு (p_0)	நடப்பு ஆண்டு (p_1)			
அரிசி	32	48	25	800	1200
சர்க்கரை	25	42	10	250	420
எண்ணெய்	54	85	6	324	510
காப்பி	250	460	1	250	460
தேயிலை	175	275	2	350	550
			மொத்தம்	1974	3140

அட்டவணை 9.16

$$\text{வாழ்க்கை குறியீட்டு எண்} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}\times 100$$

$$= \frac{3140}{1974}\times 100 = 159.0679$$

எனவே, 2016 ஆம் ஆண்டை, 2011 ஆண்டு உடன் ஒப்பிடுகையில், வாழ்க்கை குறியீட்டுஎண் 59.0679% அதிகரித்துள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 9.18

2007 ஆம் ஆண்டின்அடிப்படையில் 2011 ஆம் ஆண்டிற்கான வாழ்க்கை குறியீட்டு எண்ணைக் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு குடும்ப வரவு செலவு முறையைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடுக.

பொருள்கள்	விலை		நிறைகள்
	2007	2011	
A	350	400	40
B	175	250	35
C	100	115	15
D	75	105	20
E	60	80	25

தீர்வு:

பொருள்கள்	விலை		நிறைகள் (V)	$P=\frac{P_1}{P_0}\times 100$	PV
	2007 (P_0)	2011 (P_1)			
A	350	400	40	114.286	4571.44
B	175	250	35	142.857	4999.995
C	100	115	15	115	1725
D	75	105	20	140	2800
E	60	80	25	133.333	3333.325
மொத்தம்			135		17429.76

அட்டவணை 9.17

$$\text{வாழ்க்கை குறியீட்டு எண்} = \frac{\sum PV}{\sum V}$$

$$= \frac{17429.76}{135} = 129.1093$$

எனவே, 2011–ஆம் ஆண்டை, 2007 ஆண்டு உடன் ஒப்பிடுகையில், வாழ்க்கை குறியீட்டு எண் 29.1093% அதிகரித்துள்ளது.

பயிற்சி 9.2

1. குறியீட்டு எண் என்பதை வரையறுக்க.
2. குறியீட்டு எண்ணின் பயன்பாட்டைக் விவரிக்க.
3. குறியீட்டு எண் வகைப்படுத்தலைக் குறிப்பிடவும்.
4. லாஸ்பியரின் விலை குறியீட்டு எண் என்பதை வரையறுக்க.
5. பாசியின் விலை குறியீட்டு எண்ணை விளக்கவும்.
6. ஃபிஷரின் விலை குறியீட்டு எண் பற்றி குறிப்பு எழுதுக.

7. குறியீட்டு எண்ணின் போதுமான தன்மையை சோதிக்கும் சோதனைகளை எழுதுக.

8. காலமாற்றுச் சோதனை வரையறுக்க.

9. காரணி மாற்றுச் சோதனை விளக்கவும்.

10. உண்மை மதிப்பீட்டு விகிதத்தை வரையறுக்கவும்.

11. வாழ்க்கை குறியீட்டு எண்ணை பற்றி விளக்குக..

12. குடும்ப வரவுசெலவுத் திட்ட முறை வரையறுக்க.

13. வாழ்க்கை குறியீட்டு எண்ணின் பயன் பாட்டைக் எழுதுக.

14. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரங் களுக்குப் பொருத்தமான முறையில் விலைக் குறியீட்டு எண்ணை கணக்கிடுக.

பொருள்கள்	2002		2012	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
A	10	20	16	10
B	12	34	18	42
C	15	30	20	26

15. 2005ஆம் ஆண்டிற்கு (i) லாஸ்பியரின் முறை (ii) பாசியின் முறை மூலம் விலைக் குறியீட்டு எண்களைக் கணக்கிக.

பொருள்கள்	1995		2005	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
A	5	60	15	70
B	4	20	8	35
C	3	15	6	20

16. 2010ஆம் ஆண்டிற்கு (i) லாஸ்பியர் (ii) பாசி (iii) ஃபிஷர் விலைக் குறியீட்டு எண்களை பின்வரும் புள்ளி விவரங்களுக்குக் கணக்கிக.

பொருள்கள்	2002		2012	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
A	12	14	18	16
B	15	16	20	15
C	14	15	24	20
D	12	12	29	23

17. பின்வரும் விவரங்களுக்கு, ஃபிஷர் விலைக் குறியீட்டு எண்ணைக் கட்டமைக்கவும் மேலும் அது காலமாற்றுச் சோதனை, காரணி மாற்றுச் சோதனை ஆகியன வற்றைப் பூர்த்தி செய்யும் என நிரூபிக்கவும்.

பொருள்கள்	யூனிட்ஒன்றுக்கு விலை (ரூ)		அலகுகளின் எண்ணிக்கை	
	அடிப்படை ஆண்டு	நடப்பு ஆண்டு	அடிப்படை ஆண்டு	நடப்பு ஆண்டு
A	6	10	50	56
B	2	2	100	120
C	4	6	60	60
D	10	12	50	24
E	8	12	40	36

18. பின்வரும் விவரங்களுக்கு, ஃபிஷர் விலைக் குறியீட்டு எண்ணைக் கட்டமைக்கவும் மேலும் அது காலமாற்றுச் சோதனை, காரணி மாற்றுச் சோதனை ஆகியன வற்றைப் பூர்த்தி செய்யும் என நிரூபிக்கவும்.

ஆண்டு	பொருள்: A		பொருள்: B		பொருள்: C	
	விலை (₹)	அளவு (கி.கி)	விலை (₹)	அளவு (கி.கி)	விலை (₹)	அளவு (கி.கி)
1996	5	10	8	6	6	3
1999	4	12	7	7	5	4

19. பின்வரும் விவரங்களுக்கு, ஃபிஷர் விலை குறியீட்டு எண்ணைக் கண்டுபிடிக்க. மேலும் அது கால மாற்றுச் சோதனையை பூர்த்தி செய்யும் என நிரூபிக்க.

பொருள்கள்	2016		2017	
	விலை (₹)	அளவு (கி.கி)	விலை (₹)	அளவு (கி.கி)
உணவு	40	12	65	14
எரிபொருள்	72	14	78	20
ஆடை	36	10	36	15
கோதுமை	20	6	42	4
மற்றவை	46	8	52	6

20. பின்வரும் குழு குறியீட்டு எண்கள் மற்றும் சராசரி தொழிலாளர் வர்க்க குடும்பத்தின் பட்ஜெட்டின் குழு நிறைகளுக்கான வாழ்க்கை குறியீட்டு எண்ணை கட்டமைக்கவும்.

குழுக்கள்	உணவு	எரிபொருள்	ஆடை	வாடகை	இதர
குறியீட்டு எண்கள்	2450	1240	3250	3750	4190
எடை	48	20	12	15	10

21. குடும்ப வரவு செலவுத்திட்ட முறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் விவரங்களுக்கு 2012ஆம் ஆண்டை அடிப்படை ஆண்டாகக் கொண்டு 2015–க்கான வாழ்க்கை குறியீட்டு எண்ணைக் கட்டமைக்கவும்.

பொருள்கள்	விலை		நிறைகள்
	2012	2015	
அரிசி	250	280	10
கோதுமை	70	85	5
சோளம்	150	170	6
எண்ணெய்	25	35	4
பருப்பு	85	90	3

22. மொத்த செலவுமுறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் விவரங்களுக்கு வாழ்க்கை குறியீட்டு எண்ணைக் கண்டுபிடி.

பொருள்கள்	நிறைகள் 2010	விலை (₹)	
		2010	2015
P	80	22	25
Q	30	30	45
R	25	42	50
S	40	25	35
T	50	36	52

9.3 புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாடு (Statistical Quality Control (SQC))

முன்னுரை

புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாடானது தொழிற்சாலைகளில் பயன்படுத்த கூடிய மிகமுக்கியமான புள்ளியியல் உத்தியாகும். ஒரு பொருளின் தரமானது அதன் மூலப்பொருள்கள், இயந்திரங்கள், மனித ஆற்றல் மற்றும் மேலாண்மை ஆகியவற்றை சார்ந்தது. இது உற்பத்திப் பொருளின் அளவுகோல் அல்லது தரநிலையைக் குறிக்கிறது. புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாடானது மூலப்பொருளை தருவிப்பதிலிருந்து இறுதிப்பொருள் தயாரிக்கப்படும் வரை தரத்தை உறுதி செய்கிறது.

9.3.1 பொருள் (Meaning)

தரக்கட்டுப்பாடு என்பது பொருள்கள், செயலாக்கம், இயந்திரங்கள் ஆகியவற்றில் காணப்படும் தரக்குறைப்பாட்டைக் கண்டுபிடிக்க உதவும் வலிமை வாய்ந்த உத்தியாகும். உற்பத்தி செய்யப்பட்ட இறுதி பொருள்கள் நுகர்வோரிடமிருந்து எதிர்பார்க்கக்கூடிய தரத்தைப் பெற்றிருப்பது அவசியமாகும்.

இந்த உத்தியானது அனைத்து உற்பத்தி தொழிற்சாலைகளிலும் அதாவது, மின் உபகரணங்கள், பிஸ்கட், சோப்பு, ரசாயனங்கள், பெட்ரோலிய பொருள்கள் மற்றும் இதர பொருள்களின் தரக் கட்டுப்பாட்டை நிர்ணயிக்க உதவுகிறது.

9.3.2 மாறுபாட்டின் காரணங்கள் (Causes of Variation)

ஒரு பொருளின் தரத்தை நிர்ணயிக்கும் மாறுபாட்டின் காரணங்கள் இரண்டு வகை படுகிறது. அவை

1. வாய்ப்பு காரணங்கள்
2. குறிப்பிட்ட காரணங்கள்

வாய்ப்பு காரணங்கள் (அல்லது சீரற்ற காரணங்கள்) (Chance Causes)

வாய்ப்பு காரணங்கள் என்பது உற்பத்தி செயல் முறைகளில் இயற்கையாகவோ அல்லது இயல்பாகவோ ஏற்படும் சிறிய மாறுபாடுகள் ஆகும். இந்த காரணங்களால் ஏற்படும் மாறுபாடுகள் மனித கட்டுப்பாட்டிற்கு அப்பாற்பட்டதாகும் இதைத் தடுக்கவோ, அகற்றவோ எந்த சூழ்நிலைகளிலும் முடியாது.

பொருள்களின் தரத்திற்கு எந்தவித பாதிப்பையும் ஏற்படுத்தாத சிறிய விளைவுகள், வாய்ப்பு காரணங்கள் என அழைக்கப்படுகிறது. உதாரணமாக மழை, வெள்ளம், மின்தடை போன்றவை ஆகும்.

குறிப்பிட்ட காரணங்கள் (Assignable Causes)

குறிப்பிட்ட காரணங்கள் என்பது எந்தவொரு உற்பத்தி செயல்களிலும் ஏற்படும் இரண்டாவது வகை மாறுபாடாகும். இந்த குறிப்பிட்ட காரணங்கள் மூலப்பொருள்கள் பெறுவதிலிருந்து இறுதியாக உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருள் நுகர்வோரிடம் அளிக்கும் வரை செயல் முறையின் எந்த

கட்டத்திலும் நிகழலாம். உதாரணமாக குறைபாடுள்ள மூலப்பொருள்கள், இயந்திரங்களில் தவறு, திறமையற்ற மனித ஆற்றல், பழுதடைந்த கருவிகள், புதிய செயல்பாடு ஆகியவை குறிப்பிட்ட காரணங்களின் முக்கிய காரணிகள் ஆகும்.

புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாட்டின் முக்கிய நோக்கம் குறிப்பிட்ட காரணங்களை நீக்குவது மற்றும் உற்பத்தி கட்டுப்பாட்டின் கீழ் கொண்டு வருவதற்கான புள்ளியியல் உத்திகளை வழங்குவதாகும்.

9.3.3 செயல்முறை கட்டுப்பாடு மற்றும் உற்பத்தி கட்டுப்பாடு (Process Control and Product Control)

உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருளின் நிறைவான தர அளவை கட்டுபடுத்துவது மற்றும் பராமரிப்பது ஆகியவை உற்பத்தி செயல் முறையின் முக்கிய நோக்கம் ஆகும். இது செயல்முறைக் கட்டுப்பாட்டின் மூலமே சாத்திய மாகும். செயல்முறை கட்டுப்பாட்டில், உற்பத்தி செயல்முறை மூலம் குறைபாடுள்ள பொருள்களின் விகிதம் குறைக்கப்படவேண்டும். இது கட்டுப்பாட்டு வரைபடங்களின் உத்தியின் மூலம் பெறப்படுகிறது. உற்பத்தி கட்டுப்பாடு என்பது ஆய்வு திட்டங்களின் வாயிலாக உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருளின் தரத்தை கூறெடுத்தல் முறையில் சோதனை செய்வதாகும். உற்பத்தி கட்டுப்பாட்டின் நோக்கம் தமது வாடிக்கை யாளர்களுக்கு ஒரு குறிப்பிட்ட தர அளவை உத்தரவாதத்துடன் கொடுப்பதாகும். விற்கப்பட்ட பொருள்களில், குறைபாடுள்ள பொருள்கள் மிகுதியாக இருக்காது என்பதை உறுதிப்படுத்த முயற்சிக்கிறது. இம்முறையானது மூலப்பொருள் களை, முழுமை பெறாத பொருள்கள் அல்லது முழுமை பெற்ற பொருள்கள் என வகைப்படுத்தி, அதனை ஏற்பதா அல்லது நிராகரிக்கப்பதா என தீர்மானிக்கிறது.

கட்டுப்பாட்டு வரைபடங்கள் (Control Charts)

ஒரு தொழிற்சாலையானது, இரு வகையான இடர்பாடுகளை எதிர் கொள்ளவேண்டி உள்ளது, அவை

(i) செயல்முறையானது அதன் திட்ட அளவிற்கு ஒத்துப்போகிறதா என்பதை சோதிப்பதற்கு.

(ii) திட்டநிலைகளை மேம்படுத்த மற்றும் மாறுபாட்டை குறைப்பதற்கு.

ஷேவார்ட்டின் கட்டுப்பாட்டு வரைபடங்கள் இவை இரண்டிற்கும் பதில் அளிக்கின்றன. தரவுகளில் உள்ள வடிவ மாறுபாடுகளைக் கண்டறிவதற்கு இது ஒரு எளிய உத்தியாகும். கட்டுப்பாட்டு விளக்கப்படங்கள் எளிமையாக வடிவமைக்ககூடியது மற்றும் எளிதாக விளக்கக் கூடியது ஒரு வழக்கமான கட்டுப்பாட்டு வரைபடத்தில் பின்வரும் மூன்று கோடுகள் உள்ளன.

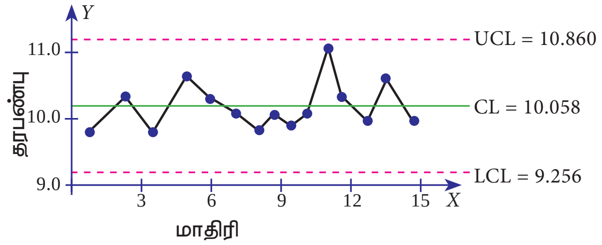
(i) மைய கோடு (CL) செயல் முறையின் தேவையான தரநிலை நிலையைக் குறிக்கிறது.

(ii) மேல் நிலை கட்டுப்பாடு கோடு (UCL) ஏற்றுக்கொள்ளக் கூடிய மேல் வரம்பைக் குறிக்கிறது.

(iii) கீழ் நிலை கட்டுப்பாட்டுக் கோடு (LCL) ஏற்றுக் கொள்ளக் கூடிய கீழ் வரம்பைக் குறிக்கிறது.

தரவுப் புள்ளிகள் கட்டுப்பாட்டு வரம்புக்குள் விழும்போது, செயல்முறையானது கட்டுப்பாட்டில் இருப்பதாக நாம் கூறலாம், அதற்குப் பதிலாக ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட தரவுப் புள்ளிகள் கட்டுப்பாட்டு வரம்புக்கு வெளியே விழுமாயின், செயல்முறையானது கட்டுப்பாட்டிற்கு அப்பால் இருப்பதாக நாம் கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக பின்வரும் வரைபடம் குறிக்கப்பட்ட தரவுப்புள்ளிகளைக் கொண்ட மூன்று கட்டுப்பாட்டுக் கோடுகளைக் காண்பிக்கிறது, இதில் எல்லா புள்ளிகளும் கட்டுப்பாட்டு எல்லைக்குள் விழுகின்றன, எனவே, செயல்முறையானது கட்டுப்பாட்டில் இருப்பதாக நாம் கருதலாம்.



படம் 9.4

மாறிகளுக்கான கட்டுப்பாடு வரைபடங்கள் (Control Charts for Variables)

மாறிகளுக்கான கட்டுப்பாடு வரைபடங்கள் என்பது உற்பத்தி செய்யபட்ட ஒரு பொருளின் தரத்தை அளவிட பயன்படுகிறது. ஒரு எண் மதிப்பின் மூலம் வெளிப்படுத்தக்கூடிய ஒரு

உற்பத்தி பொருளின் தர பண்பினை மாறி (Variable) என அழைக்கலாம். உற்பத்தி தர பண்புகளானது நீளம், அகலம், வெப்பநிலை மற்றும் இழுவிசைபலம் ஆகியவற்றை அளவிடத்தக்கவையாகும். இவை ஒரு குறிப்பிட்ட அலகுகளில் வெளிப்படுத்தப்படுகின்றன. மாறிகளானது இயல் நிலை நிகழ்தகவு விதியைப் பின்பற்றக் கூடியதாக இருக்கிறது. அத்தகைய தரவின் தரக்கட்டுப்பாட்டுக்காக இரண்டு வகையான கட்டுப்பாட்டு வரைபடங்கள் பயன்படுத்தப் படுகின்றன. அவை பின்வருமாறு,

(i) சராசரி வரைபடங்கள் ($\overline{X}$)

(ii) வீச்சு வரைபடங்கள்(R)

9.3.4 $\overline{X}$ மற்றும் R வரைபடங்கள் கட்டமைத்தல் (Construction of $\overline{X}$ and R charts)

ஒரு உற்பத்தி செயல்முறையைக் கொண்டு அனைத்து பொருள்களையும் ஒரே மாதிரியாக உற்பத்தி செய்ய முடியாது. ஒவ்வொரு உற்பத்தி செயல்முறையிலும் ஒரு குறிப்பிட்ட மாறுபாடு காணப்படும். மாறுபாடு என்பது மூலப்பொருள்கள், இயந்திர அமைப்பு, இயந்திரம் இயக்குபவர்கள், புதிய செயல்பாடுகள் மற்றும் புதிய இயந்திரங்கள் கையாளுபவர்கள் ஆகிய எல்லாவற்றையும் உள்ளடக்கிய உற்பத்தி செயல்முறை பண்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கை ஆகும். கொடுக்கப்பட்ட செயல்பாட்டில் இருந்து பெறப்பட்ட கூறுகளின் சராசரி தரத்தைக் காண்பதற்கு இந்த $\overline{X}$ விளக்கப்படம் பயன்படுத்தப்படுகிறது. வீச்சு (R) விளக்கப்படம் கொடுக்கப்பட்ட செயல்முறையில் இருந்து பெறப்பட்ட கூறுகளின் மாறுபாடு அல்லது சிதறலைக் காண்பிக்க இவ்வரைபடம் பயன் படுகிறது. ஒரு உற்பத்தி செயலில் குறிப்பிட்ட விளைவுகள் இருக்கின்றதா அல்லது இல்லையா என்பதனை $\overline{X}$ மற்றும் R வரைபடங்களின் கட்டுப்பாட்டு வரம்புகள் காண்பிக்கிறது. ஒரு செயல்முறையை ஏற்பதா அல்லது நிராகரிப்பதா என முடிவெடுப்பதற்கு $\overline{X}$ மற்றும் R என இரண்டு வரைபடங்கள் பொதுவாக தேவைப்படுகின்றன.

$\overline{X}$ மற்றும் R வரைபடங்கள் அமைப்பதற்கான செயல்முறை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$\overline{X}$ வரைபடத்தின் செயல்முறை

(i) நாம் $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ஆகியவை தேர்ந்தெடுக்கப் பட்ட கூறுகள் என்க. ஒவ்வொரு கூறும் 'n' கண்டறிவு பதிவுகளைக் கொண்டு உள்ளது. பொதுவாக (n = 4,5 அல்லது 6).

(ii) $\overline{X_i} = \dfrac{\sum X_i}{n}, i = 1, 2, 3, 4, \ldots.$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி, ஒவ்வொரு மாதிரிகளுக்கும் சராசரி $\overline{X_1}, \overline{X_2}, \overline{X_3} \ldots$–ஐ கணக்கிடுக. இங்கு $\sum X_i$ என்பது கூறில் சேர்க்கப்பட்ட 'n' மதிப்புகளின் மொத்தம் ஆகும்.

(iii) கூறு சராசரிகளின் சராசரியைக் கண்டறியவும் $\left(\overline{\overline{X}}\right)$. அதாவது $\overline{\overline{X}} = \dfrac{\sum \overline{X}}{n}$. இங்கு $\sum \overline{X}$ என்பது அனைத்து கூறு சராசரிகளின் மொத்தம் மற்றும் n என்பது கூறு சராசரிகளின் எண்ணிக்கை ஆகும்.

R வரைபடத்தின் செயல்முறை (Procedure for *R* -Charts)

$R = x_{\max} - x_{\min}$ –ஐ கண்டுபிடிக்கவும்.

$R_1, R_2, R_3 \ldots$ என்பன 'n' கூறுகளின் வீச்சுகள் என்க.

வீச்சு சராசரி $\overline{R} = \dfrac{\sum R}{n}$ மூலம் பெறப்படுகிறது.

$\overline{X}$ வரைபடங்களின் கட்டுப்பாட்டின் வரம்புகளைக் கீழ்க்கண்ட இரண்டு வகைகளில் கணக்கிடலாம்.

வகை (i) $\overline{X}$ மற்றும் திட்டவிலக்கம் கொடுக்கப்படும் போது	வகை (ii) $\overline{X}$ மற்றும் திட்டவிலக்கம் கொடுக்கப்படாத போது
$UCL = \overline{\overline{X}} + 3\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$UCL = \overline{\overline{X}} + A_2\overline{R}$
$CL = \overline{\overline{X}}$	$CL = \overline{\overline{X}}$
$LCL = \overline{\overline{X}} - 3\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$LCL = \overline{\overline{X}} - A_2\overline{R}$

அட்டவணை 9.18

இரு வேறுபட்ட சூழ்நிலைகளில், வீச்சு வரைபடங்களின் (R) வரம்புகளைக் கணக்கிடுவது.

வகை (i) திட்டவிலக்கம் கொடுக்கப்படும் போது	வகை (ii) திட்டவிலக்கம் கொடுக்கப்படாத போது
$UCL = \overline{R} + 3\sigma_R$	$UCL = D_4\overline{R}$
$CL = \overline{R}$	$CL = \overline{R}$
$LCL = \overline{R} - 3\sigma_R$	$LCL = D_3\overline{R}$

அட்டவணை 9.19

A_2, D_3 மற்றும் D_4 ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 9.19

ஓர் இயந்திரம், குழாயை 0.532 செ.மீ. சராசரியான விட்டத்துடன் திட்டவிலக்கம் 0.002 செ.மீ அளவிலும் துளையிடுகிறது. கட்டுப்பாடு சராசரிக்கான வரம்புகளை 5 கூறுகளுக்குக் கணக்கிடுக.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட தகவல்கள் $\overline{\overline{X}} = 0.532$, $\sigma = 0.002$, $n = 5$

$\overline{X}$ வரைபடத்தின் கட்டுப்பாடு வரம்புகள்

$$UCL = \overline{\overline{X}} + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.532 + 3\frac{0.002}{\sqrt{5}} = 0.5346$$

$$CL = \overline{\overline{X}} = 0.532$$

$$UCL = \overline{\overline{X}} - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.532 - 3\frac{0.002}{\sqrt{5}} = 0.5293$$

எடுத்துக்காட்டு 9.20

ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளுக்கான உற்பத்தியில் 6 அளவு கொண்ட 8 கூறுகளின் அளவுகள் கொடுக்கபட்டுள்ளன. சராசரி வரைபடத்தைப் பயன்படுத்தி கட்டுப்பாடு வரம்புகளை கணக்கிடுக.

கூறு	1	2	3	4	5	6
சராசரி	300	342	351	319	326	333
வீச்சு	25	37	20	28	30	22

$n = 6$, $A_2 = 0.483$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

தீர்வு:

கூறு	1	2	3	4	5	6	மொத்தம்
சராசரி	300	342	351	319	326	333	**1971**
வீச்சு	25	37	20	28	30	22	**162**

அட்டவணை 9.20

$\overline{X}$ **வரைபடத்தின் கட்டுப்பாடு வரம்புகள்:**

$$\overline{\overline{X}} = \frac{\sum \overline{X}}{n} = \frac{1971}{6} = 328.5$$

$$\overline{R} = \frac{\sum R}{n} = \frac{162}{6} = 27$$

இங்கு 'n' என்பது கூறுகளின் எண்ணிக்கை ஆகும்.

$$UCL = \overline{\overline{X}} + A_2\overline{R} = 328.5 + 0.483(27) = 341.54$$

$$CL = \overline{\overline{X}} = 328.5$$

$$LCL = \overline{\overline{X}} - A_2\overline{R} = 328.5 - 0.483(27) = 315.45$$

எடுத்துக்காட்டு 9.21

பின்வரும் விவரங்கள் ஒவ்வொன்றும் 5 அளவுகொண்ட 10 கூறுகளின் சராசரி மற்றும் வீச்சு ஆகியவற்றைக் காண்பிற்கிறது. சராசரி வரைபடம் மற்றும் வீச்சு வரைபடம் ஆகிய வற்றுக்கான கட்டுப்பாடு வரம்புகளைக் கணக்கிடுக.

கூறு	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
சராசரி	21	26	23	18	19	15	14	20	16	10
வீச்சு	5	6	9	7	4	6	8	9	4	7

தீர்வு:

கூறு	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	மொத்தம்
சராசரி	21	26	23	18	19	15	14	20	16	10	**182**
வீச்சு	5	6	9	7	4	6	8	9	4	7	**65**

அட்டவணை 9.21

$\overline{X}$ **வரைபடத்தின் கட்டுப்பாடு வரம்புகள்:**

$$\overline{\overline{X}} = \frac{\sum \overline{X}}{n} = \frac{182}{10} = 18.2$$

$$\bar{R} = \frac{\sum R}{n} = \frac{65}{10} = 6.5$$

$$UCL = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R} = 18.2 + 0.577(6.5) = 21.95$$

$$CL = \bar{\bar{X}} = 18.2$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R} = 18.2 - 0.577(6.5) = 14.5795$$

வீச்சு வரைபடக் கட்டுப்பாடு வரம்புகள்:

$$UCL = D_4\bar{R} = 2.114(6.5) = 13.741$$

$$CL = \bar{R} = 6.5$$

$$LCL = D_3\bar{R} = 0(6.5) = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 9.22

ஒரு குறிப்பிட்ட உற்பத்திப் பொருளின் 6 அளவுகொண்ட 10 கூறுகளின் அளவுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. சராசரி மற்றும் வீச்சு கட்டுப்பாடு வரம்புகளைக் கணக்கிடுக.

கூறு	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
சராசரி	383	508	505	582	557	337	514	614	707	753
வீச்சு	95	128	100	91	68	65	148	28	37	80

தீர்வு:

கூறு	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	மொத்தம்
சராசரி	383	508	505	582	557	337	514	614	707	753	**5460**
வீச்சு	95	128	100	91	68	65	148	28	37	80	**840**

அட்டவணை 9.22

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum \bar{X}}{10} = \frac{5460}{10} = 546$$

$$\bar{R} = \frac{\sum R}{n} = \frac{840}{10} = 84$$

$\bar{X}$ **வரைபட கட்டுப்பாடு வரம்புகள்:**

$$UCL = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R} = 546 + 0.483(84) = 586.57$$

$$CL = \bar{\bar{X}} = 546$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R} = 546 - 0.483(84) = 505.43$$

வீச்சு கட்டுப்பாடு வரம்புகள்:

$$UCL = D_4\bar{R} = 2.004(84) = 168.336$$

$$CL = \bar{R} = 84$$

$$LCL = D_3\bar{R} = 0(84) = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 9.23

5 அளவுகொண்ட 10 மாதிரிகளின் சராசரி மற்றும் வீச்சு அளவீடுகள் உங்களுக்காகக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. சராசரி வரம்பு வரை படங்களை வரையவும். மற்றும் செயல்முறை கட்டுப்பாட்டின் நிலைகுறித்து உமது கருத்தைக் விவரிக்கவும்.

கூறு	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{X}$	43	49	37	44	45	37	51	46	43	47
R	5	6	5	7	7	4	8	6	4	6

$n = 5,\ A_2 = 0.58,\ D_3 = 0$ மற்றும் $D_4 = 2.115$

என கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

தீர்வு:

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum \bar{X}}{10} = \frac{442}{10} = 44.2$$

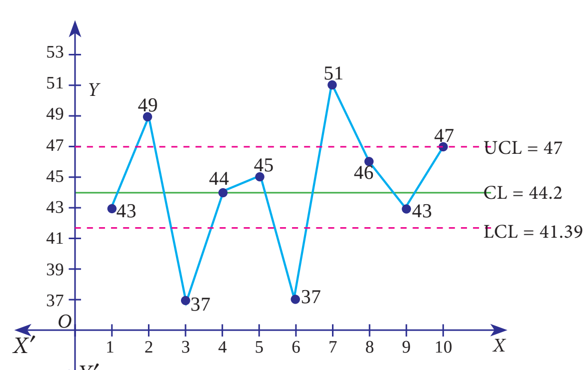
$$\bar{R} = \frac{\sum R}{n} = \frac{58}{10} = 5.8$$

$$UCL = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R}$$

$$= 44.2 + 0.483(5.8) = 47.00$$

$$CL = \bar{\bar{X}} = 44.2$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R} = 44.2 - 0.483(5.8) = 41.39$$



படம் 9.5

மேலே சுட்டிக் காட்டப்பட்ட விளக்கப்படம், மூன்று கட்டுப்பாட்டு கோடுகள் புள்ளிகளால் குறிக்கப்படுகிறது. நான்கு புள்ளிகள் கட்டுப்பாட்டு வரம்புகளிலிருந்து வெளியேறுவதால், செயல் முறையானது கட்டுப்பாட்டில் இல்லை என்று சொல்லலாம்.

பயிற்சி 9.3

1. புள்ளிவிவர தரக்கட்டுப்பாடு என்பதை வரையறு.
2. உற்பத்தி செயல்முறையில் மாறுபாட்டிற் கான காரணங்களின் வகைகளைக் குறிப்பிடுக.
3. தற்செயல் காரணங்கள் என்பதை வரையறு.
4. குறிப்பட்ட காரணங்கள் என்பதை வரையறு.
5. உற்பத்தி கட்டுப்பாட்டைப் பற்றி நீங்கள் என்ன கருதுகிறீர்கள்?
6. நீங்கள் செயல்முறை கட்டுப்பாட்டைப் பற்றி நீங்கள் என்ன கருதுகிறீர்கள்?
7. கட்டுப்பாட்டு வரைபடங்கள் என்பதை வரையறுக்கவும்.
8. மாறிகளுக்கான கட்டுப்பாட்டு வரைபடங் களைக் குறிப்பிடுக.
9. சராசரி வரைபடங்கள் என்பதை வரையறு.
10. வீச்சு வரைபடங்கள் வரையறு.
11. புள்ளியியல் தரக் கட்டுப்பாடடின் பயன்கள் யாவை?
12. சராசரி விளக்கப் படத்திற்கான கட்டுப்பாடு வரம்புகளை எழுதுக.
13. வீச்சு விளக்கப் படத்திற்கான கட்டுப்பாட்டு வரம்புகளை எழுதுக.
14. ஓர் இயந்திரம், கொடுக்கப்பட்ட எடையுடன் பாக்கெட்டுகளை வழங்க வடிவமைக்கப் பட்டுள்ளது. 5 அளவு கொண்ட 10 மாதிரிகளின் அளவீடுகள் பதிவு செய்யப் பட்டுக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள:

மாதிரி	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\overline{X}$	15	17	15	18	17	14	18	15	17	16
R	7	7	4	9	8	7	12	4	11	5

சராசரி மற்றும் வீச்சு கட்டுப்பாடு வரம்புகளைக் கண்டுபிடி. மேலும் கட்டுப்பாட்டின் நிலை குறித்துக் கருத்து தருக.

($n=5$, $A_2 = 0.58$, $D_3 = 0$ மற்றும் $D_4 = 2.115$) க்கான மாற்றகாரணிகள்)

15. உற்பத்தி செய்முறையிலிருந்து வழக்கமான இடைவெளியில் 5 அளவுகொண்ட 10 மாதிரிகளின் அளவீடுகள் தேர்ந்தெடுக்கப் பட்டு அதன் மாதிரி சராசரி ($\overline{X}$) மற்றும் வீச்சு (R) ஆகியவை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

மாதிரி	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\overline{X}$	49	45	48	53	39	47	46	39	51	45
R	7	5	7	9	5	8	8	6	7	6

சராசரி கட்டுப்பாடு வரம்புகளைக் கண்டு பிடிக்க, மேலும் கட்டுப்பாட்டின் நிலை குறித்து கருத்து தருக. (கொடுக்கப்பட்ட தகவல் $A_2 = 0.58$, $D_3 = 0$ மற்றும் $D_4 = 2.115$)

16. பின்வரும் தரவிற்காக சராசரி ($\overline{X}$) மற்றும் வீச்சு (R) கட்டுப்பாடு வரம்புகளைக் கண்டுபிடி.

மாதிரி எண்	கூறுகள்		
1	32	36	42
2	28	32	40
3	39	52	28
4	50	42	31
5	42	45	34
6	50	29	21
7	44	52	35
8	22	35	44

(கொடுக்கப்பட்ட தகவல் $n = 3$,
$A_2 = 0.58$, $D_3 = 0$ மற்றும் $D_4 = 2.115$)

17. சராசரி ($\overline{X}$) மற்றும் அதன் வீச்சு (R)க்கான மதிப்புகள் 5 அளவு கொண்ட 10 மாதிரிகளுக்கான அளவுகள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. சராசரி மற்றும் வீச்சுக் கட்டுப்பாடு வரம்புகளைக் கண்டுபிடி, மேலும் கட்டுப்பாட்டின் நிலை குறித்து கருத்து தருக.

மாதிரி எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
சராசரி	11.2	11.8	10.8	11.6	11.0	9.6	10.4	9.6	10.6	10.0
வீச்சு	7	4	8	5	7	4	8	4	7	9

(கொடுக்கப்பட்டதகவல் $n = 5,\ A_2 = 0.58\ , D_3 = 0$ மற்றும் $D_4 = 2.115$)

18. ஒரு தரக்கட்டுப்பாட்டு ஆய்வாளர், ஓர் உருளைக்கிழங்கு சில்லுகள் (chips) தயாரிக்கும் நிறுவனத்தில் இருந்து நான்கு அளவுகொண்ட பத்து மாதிரிப் பாக்கெட்டுகள் எடுத்துள்ளார். மாதிரி உள்ளடக்கங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. சராசரி மற்றும் வீச்சு கட்டுப்பாடு வரம்புகளைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

மாதிரி எண்	கூறுகள்			
	1	2	3	4
1	12.5	12.3	12.6	12.7
2	12.8	12.4	12.4	12.8
3	12.1	12.6	12.5	12.4
4	12.2	12.6	12.5	12.3
5	12.4	12.5	12.5	12.5
6	12.3	12.4	12.6	12.6
7	12.6	12.7	12.5	12.8
8	12.4	12.3	12.6	12.5
9	12.6	12.5	12.3	12.6
10	12.1	12.7	12.5	12.8

(கொடுக்கப்பட்டதகவல் $n = 5,\ A_2 = 0.58\ , D_3 = 0$ மற்றும் $D_4 = 2.115$)

19. பின்வரும் தரவு, சராசரி ($\overline{X}$) மற்றும் அதன் வீச்சு (R) மதிப்புகள் 4 அளவுகொண்ட பத்து மாதிரியினைக் காட்டுகின்றன. சராசரி மற்றும் வீச்சுக் கட்டுப்பாட்டு விளக்கப்படம் ஒன்றை உருவாக்குக.

மாதிரி எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\overline{X}$	29	26	37	34	14	45	39	20	34	23
R	39	10	39	17	12	20	05	21	23	15

20. ஓர் உற்பத்தி செயல்முறையில், 4 அளவு கொண்ட எட்டு மாதிரிகள் சேகரிக்கப்பட்டு, அதனுடைய சராசரி மற்றும் வீச்சு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. சராசரி மற்றும் வீச்சுக் கட்டுப்பாட்டு விளக்கப்படத்துடன் கட்டுப்பாடு வரம்புகளையும் கண்டுபிடிக்க.

மாதிரி எண்	1	2	3	4	5	6	7	8
$\overline{X}$	12	13	11	12	14	13	16	15
R	2	5	4	2	3	2	4	3

21. ஒரு குறிப்பிட்ட குவளை தயாரிக்கும் துறையில், தரகட்டுப்பாட்டு ஆய்வாளர் காலையில் ஒவ்வொரு மணி நேரத்திலும் சீரற்ற முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 5 குவளைகளின் ஒவ்வொரு எடையையும் பதிவு செய்தார்.

நேரம்	எடைகள் (ml)				
8:00 AM	43	41	42	43	41
9:00 AM	40	39	40	39	44
10:00 AM	42	42	43	38	40
11:00 AM	39	43	40	39	42

சராசரி மற்றும் வீச்சுக் கட்டுப்பாடு வரம்புகளை கண்டுபிடிக்க.

பயிற்சி 9.4

ஏற்புடைய விடையைத் தெரிவு செய்க:

1. ஒரு காலம்சார் தொடரின் தரவுத் தொகுப்பு விவரங்களை பதிவு செய்யப்படும் இடைவெளி

   (a) சமகால இடைவெளி

   (b) வாரம் ஒருமுறை

   (c) தொடர்ச்சியான கால புள்ளிகள்

   (d) மேற்கண்ட அனைத்தும்

2. ஒரு காலம்சார் தொடரில் ______________ உள்ளன.

   (a) ஐந்து கூறுகள்

   (b) நான்கு கூறுகள்

   (c) மூன்று கூறுகள்

   (d) இரண்டு கூறுகள்

J8S9IL

3. குறுகிய கால, ஏற்ற இறக்கத்துடன் அமையக் கூடிய ஒரு காலம்சார் தொடரின் கூறுகள்

   (a) நீள் காலப்போக்கு

   (b) பருவகால மாறுபாடு

   (c) சுழற்சி மாறுபாடு

   (d) சீரற்ற மாறுபாடு

4. பருவகால மாறுபாடுகளின் உகந்த காரணிகள்
   (a) வானிலை
   (b) விழாக்காலங்கள்
   (c) சமூக பழக்கவழக்கங்கள்
   (d) மேற்கண்ட அனைத்தும்

5. T, S, C மற்றும் I ஆகிற கூறுகளைக் கொண்டக் காலம்சார் தொடரின் கூட்டு வடிவமைப்பானது
   (a) $y=T+S+C\times I$ (b) $y=T+S\times C\times I$
   (c) $y=T+S+C+I$ (d) $y=T+S\times C+I$

6. போக்கை பொறுத்துவதற்கான மீச்சிறு வர்க்க முறையானது
   (a) மிகவும் துல்லியமானது
   (b) மிகக் குறைந்த துல்லியத் தன்மை கொண்டது
   (c) முழுமையான கருத்தேற்பு கொண்டது
   (d) கணக்கியல் மூலம் தீர்க்கப்படாதது

7. $y=a+bx$ என்ற போக்கு கோட்டில் 'b' இன் மதிப்பானது
   (a) எப்போதும் மிகை
   (b) எப்போதும் குறை
   (c) மிகை அல்லது குறை
   (d) பூஜ்ஜியம்

8. ஒரு காலம்சார் தொடருடன் சார்ந்த நீண்டகால மாறுபாடுகளின் கூறுகளின் போக்கானது.
   (a) சுழற்சி மாறுபாடு
   (b) நீள்போக்கு மாறுபாடு
   (c) சீரற்ற மாறுபாடு
   (d) பருவகால மாறுபாடு

9. பருவகால மாறுபாடு என்ற வேறுபாடுகள் நிகழ
   (a) சில ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கையில்
   (b) ஒரு ஆண்டிற்குள்ளாக
   (c) ஒரு மாதத்திற்குள்ளாக
   (d) ஒரு வாரத்திற்குள்ளாக

10. நுகர்வோர் விலைக்குறியீட்டு எண்ணின் மற்றொரு பெயர்
   (a) மொத்தவிலைக் குறியீட்டு எண்
   (b) வாழ்க்கை செலவீட்டுக் குறியீட்டு எண்
   (c) வளைவு குறியீட்டு எண்
   (d) இவற்றில் எதுவும் இல்லை

11. இரு வேறு நகரங்களின் வாழ்க்கைத் தரக் குறியிட்டு எண்ணை ஒப்பிட்டுப் பயன்படுவது
   (a) நுகர்வோர் விலைகுறியீட்ட எண்
   (b) மதிப்பு குறியீட்ட எண்
   (c) கொள்ளவு குறியீட்டு எண்
   (d) நிரையிடப்படா குறியீட்டு எண்

12. லாஸ்பியர் குறியீட்டு எண் = 110, பாசி குறியீட்டு எண் =108 எனில், ஃபிஷர் தனித்த குறியீட்டு எண் =
   (a) 110 (b) 108 (c) 100 (d) 109

13. பொதுவாக பெரும்பாலும் பயன்படுத்தப்படும் குறியீட்டு எண்
   (a) கொள்ளவு குறியீட்டு எண்
   (b) மதிப்பு குறியீட்ட எண்
   (c) விலை குறியீட்டு எண்
   (d) எளிய குறியீட்ட எண்

14. நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்ட எண்ணை அளிக்கக் கூடியது
   (a) பாசியின் முறை
   (b) ஃபிஷரின் தனித்த முறை
   (c) மார்ச்சல் எட்ஜ்வொர்த் முறை
   (d) குடும்ப வரவு செலவு முறை

15. கீழ்க்கண்ட எந்த குறியீட்டு எண் கால மாற்று சோதனையை நிறைவு செய்கிறது
   (a) லாஸ்பியர் குறியீட்டு எண்
   (b) பாசியின் குறியீட்டு எண்
   (c) ஃபிஷர் தனித்தகுறியீட்டு எண்
   (d) அனைத்தும்

16. நிறை குறியீட்டு எண் கணக்குகளில் நிகழ்கால அளவுகள் பயன்படுவது
   (a) லாஸ்பியர் முறை
   (b) பாசியின்முறை
   (c) மார்ச்சல் எட்ஜ்வொர்த் முறை
   (d) ஃபிஷர் தனித்த முறை

17. எண் வடிவில் அளவிடக்கூடிய அளவுகள் குறிக்கபடுவது
   (a) p - வரைபடம் (b) c – வரைபடம்
   (c) $\overline{X}$ வரைபடம் (d) np – வரைபடம்

18. உற்பத்திப் பொருளின் தரத்தை பாதிக்கக் கூடிய மாறுபாடுகள் எத்தனை?
   (a) 4 (b) 3
   (c) 2 (d) 1

19. ஒழுங்கற்ற இயற்கை ஏற்படுத்தும் மாறுபாடுகள் என்பது

(a) தற்செயல் விளைவு
(b) தற்செயலற்ற விளைவு
(c) மனிதனால் ஏற்படக்கூடிய விளைவு
(d) அனைத்தும்

20. குறிப்பிடக்கூடிய விளைவுகள் ஏற்படுத்துவது

(a) குறைபாடுள்ள மூலப்பொருள்கள்
(b) திறமையற்ற வேலை ஆட்கள்
(c) குறைபாடுள்ள இயந்திரங்கள்
(d) அனைத்தும்

21. கட்டுபாட்டு வரைபடங்கள் பெற்றிருப்பவை

(a) CL, UCL (b) CL, LCL
(c) CL, LCL, UCL (d) UCL, LCL

22. $\overline{X}$ வரைபடம் என்பது

(a) பண்புகளையுடைய கட்டுபாட்டு வரைபடம்
(b) மாறிகளைக் கொண்ட கட்டுப்பாட்டு வரைபடம்
(c) பண்புகள் மற்றும் மாறி இல்லா கட்டுப்பாட்டு வரைபடம்
(d) பண்புகள் மற்றும் மாறிகள் கொண்ட கட்டுப்பாடு வரைபடம்

23. R –ஐ கணக்கிடப் பயன்படும் சூத்திரம்

(a) $x_{max} - x_{min}$ (b) $x_{min} - x_{max}$
(c) $\overline{x}_{max} - \overline{x}_{min}$ (d) $\overline{\overline{x}}_{max} - \overline{\overline{x}}_{min}$

24. $\overline{X}$ – வரைபடத்தின் மேல் கட்டுபாட்டு எல்லையை அளிக்க கூடியது

(a) $\overline{X} + A_2\overline{R}$ (b) $\overline{\overline{X}} + A_2 R$
(c) $\overline{\overline{X}} + A_2\overline{R}$ (d) $\overline{\overline{X}} + A_2\overline{\overline{R}}$

25. R வரைபடத்தின் கீழ் கட்டுபாட்டு எல்லையை அளிக்ககூடியது

(a) $D_2\overline{R}$ (b) $D_2\overline{\overline{R}}$
(c) $D_3\overline{\overline{R}}$ (d) $D_3\overline{R}$

இதர கணக்குகள்

1. பின்வரும் புள்ளி விவரங்களுக்கு, மூன்று ஆண்டுகாலத்தைக் கொண்ட நகரும் சராசரி முறையைப் பயன்படுத்தி போக்குமதிப்பு காண்க.

ஆண்டுகள்	இலாபம்	ஆண்டுகள்	இலாபம்
2001	142	2007	241
2002	148	2008	263
2003	154	2009	280
2004	146	2010	302
2005	157	2011	326
2006	202	2012	353

2. பின்வரும் புள்ளி விவரங்களுக்கு, 4 ஆண்டுகாலத்தைக் கொண்ட நகரும் சராசரி முறையைப் பயன்படுத்தி போக்கு மதிப்புகளைக் காண்க.

ஆண்டுகள்	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
விற்பனை	506	620	1036	673	588	696	1116	738	663

3. பின்வரும் புள்ளி விவரங்களுக்கு மீச்சிறு வர்க்க முறை மூலம் நேர்க்கோட்டுப் போக்கினைப் பொருத்துக.

ஆண்டுகள்	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
விற்பனை	50.3	52.7	49.3	57.3	56.8	60.7	62.1	58.7

4. லாஸ்பியர், பாசி மற்றும் ஃபிஷர் விலைக் குறியீட்டு எண்ணைப் பின்வரும் தரவிற்குக் கண்டுபிடித்து கருத்து விளக்கம் தருக.

பொருள்கள்	அடிப்படைஆண்டு		நடப்பு ஆண்டு	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
A	170	562	72	632
B	192	535	70	756
C	195	639	95	926
D	187	128	92	255
E	185	542	92	632
F	150	217	180	314
7	12.6	12.7	12.5	12.8
8	12.4	12.3	12.6	12.5
9	12.6	12.5	12.3	12.6
10	12.1	12.7	12.5	12.8

5. பின்வரும் தரவைப் பயன்படுத்ததி, ஃபிஷர் விலைக் குறியீட்டு எண்ணை கட்டமைக்கவும் மேலும் அது காலமாற்றுச்சோதனை, காரணி மாற்றுச் சோதனையை பூர்த்திசெய்யும் என நிரூபிக்கவும்.

பொருள்கள்	விலை		அளவு	
	அடிப்படைஆண்டு	நடப்பு ஆண்டு	அடிப்படைஆண்டு	நடப்பு ஆண்டு
கோதுமை	6	10	50	56
நெய்	2	2	100	120
விறகு	4	6	60	60
சர்க்கரை	10	12	30	24
ஆடைகள்	8	12	40	36

6. பின்வரும் தரவுகளிலிருந்து 2014 இன் அடிப்படையில் 2015 க்கான நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டு எண்ணைக் கணக்கிடுக.

பொருள்கள்	அளவு	விலை 2015	விலை 2016
A	6	5.75	6.00
B	6	5.00	8.00
C	1	6.00	9.00
D	6	8.00	10.00
E	4	2.00	1.50
F	1	20.00	15.00

7. ஒரு நகரத்தில் நடுத்தர வர்க்க குடும்பங்களின் வரவு–செலவுத் திட்டங்களில் ஒரு விசாரணை நடைபெற்று பின்வரும் தகவல் கொடுக்கப்பட்டது.

செலவுகள்	உணவு	வாடகை	ஆடை	எரிபொருள்	அரிசி
விலை (2010)	150	50	100	20	60
விலை (2011)	174	60	125	25	90
நிறைகள்	35	15	20	10	20

நகரத்தின் நடுத்தரவர்க்கக் குடும்பங்களில் வாழ்க்கைச் செலவுகளில் என்ன மாற்றங்கள் ஏற்பட்டுள்ளன எனக் காட்டுக.

8. பின்வரும் தரவிற்கான சராசரி மற்றும் வீச்சு கட்டுப்பாட்டு வரம்புகளைக் கண்டுபிடி.

மாதிரி எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
மாதிரி உறுப்புகள்	50	51	50	48	46	55	45	50	47	56
	55	50	53	53	50	51	48	56	53	53
	52	53	48	50	44	56	53	54	49	55
	49	50	52	51	48	47	48	53	52	54
	54	46	47	53	47	51	51	57	54	52

9. 5 மின் விளக்குகள் கொண்ட 12 மாதிரிகளின் சராசரி எரியும் காலம் (நேரங்களில்) மற்றும் வீச்சு ஆகியவற்றின் தரவானது கீழே கொடுக்கபட்டுள்ளது.

மாதிரி எண்	1	2	3	4	5	6
மாதிரி சராசரி	1080	1390	1460	1380	1230	1370
மாதிரி வீச்சு	410	670	180	320	690	450
மாதிரி எண்	7	8	9	10	11	12
மாதிரி சராசரி	1310	1630	1580	1510	1270	1200
மாதிரி வீச்சு	380	350	270	660	440	310

சராசரி மற்றும் வீச்சு கட்டுப்பாட்டு வரம்புகளைக் கணக்கிடுக. கட்டுப்பாட்டின் நிலை குறித்துக் கருத்து தெரிவிக்கவும்.

10. 5 அளவு கொண்ட 10 மாதிரிகளின் சராசரி மற்றும் வீச்சு அளவீடுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. சராசரி மற்றும் வீச்சு கட்டுப்பாடு வரம்புகளைக் கணக்கிடுக. செயல்முறைக் கட்டுப்பாட்டின் நிலைகுறித்து கருத்து தெரிவிக்கவும்.

மாதிரி	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
சராசரி	5.10	4.98	5.02	4.96	4.96	5.04	4.94	4.92	4.92	4.98
வீச்சு	0.3	0.4	0.2	0.4	0.1	0.1	0.8	0.5	0.3	0.5

கட்டுப்பாட்டு அட்டவணை			
கூறு அளவு	A2	D3	D4
2	1.880	0	3.267
3	1.023	0	2.574
4	0.729	0	2.282
5	0.577	0	2.114
6	0.483	0	2.004
7	0.419	0.076	1.924
8	0.373	0.136	1.864
9	0.337	0.184	1.816
10	0.308	0.223	1.777
11	0.285	0.256	1.744
12	0.266	0.283	1.717
13	0.249	0.307	1.693
14	0.235	0.328	1.672
15	0.223	0.347	1.653
16	0.212	0.363	1.637
17	0.203	0.378	1.622
18	0.194	0.391	1.608
19	0.187	0.403	1.597
20	0.180	0.415	1.585
21	0.173	0.425	1.575
22	0.167	0.434	1.566
23	0.162	0.443	1.557
24	0.157	0.451	1.548
25	0.153	0.459	1.541

அட்டவணை 9.23

தொகுப்புரை

- **நகரும் சராசரி முறை (Method of Moving Averages)**

மூன்று ஆண்டு நகரும் சராசரி : $\frac{a+b+c}{3}, \frac{b+c+d}{3}, \frac{c+d+e}{3}, \frac{d+e+f}{3}, \ldots\ldots$

நான்கு ஆண்டு நகரும் சராசரி : $\frac{a+b+c+d}{4}, \frac{b+c+d+e}{4}, \frac{c+d+e+f}{4}, \frac{d+e+f+g}{4}, \ldots$

- **மீச்சிறுவர்க்க முறை (Method of Least Squares)**

நேர்க்கோட்டு (போக்கு) சமன்பாடு: $Y = a + bX$

இரு இயல்நிலை சமன்பாடுகள்: $\Sigma Y = n a + b \Sigma X$; $\Sigma XY = a \Sigma X + b \Sigma X^2$

- **பருவகால மாறுபாடுகளை அளவிடுவதற்கான முறைகள்**

(அ) எளிய சராசரி முறை:

$$\text{பருவகால குறியீடு (S.I)} = \frac{\text{பருவகால சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

(ஆ) புள்ளி விவரங்கள் மாதந்தோறும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால்

$$\text{ஜனவரி மாத பருவகால குறியீடு (S.I)} = \frac{\text{மாத சராசரி (ஜனவரி)}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

(இ) புள்ளி விவரங்கள் காலாண்டுதோறும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால்

$$\text{K–வது காலாண்டுக்கான (S.I)} = \frac{\text{K–வது காலாண்டு சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

- **நிறையிட்ட குறியீட்டு எண்**

விலை குறியீட்டு எண்: $P_{01} = \frac{\sum p_1 w}{\sum p_0 w} x 100$

லாஸ்பியர் விலை குறியீட்டு எண்: $P_{01}^{L} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} X 100$

பாசி விலை குறியீட்டு எண்: $P_{01}^{P} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} X 100$

ஃபிஷர் விலை குறியீட்டு எண் $P_{01}^{F} = \sqrt{P_{01}^{L} \, x \, P_{01}^{P}} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0 \;\; X \sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0 \;\; X \sum p_0 q_1}} \, X 100$

- **காலமாற்றுச் சோதனை:** $P_{01} \times P_{10} = 1.$

- **காரணிமாற்றுச் சோதனை:** $P_{01} \; X \; Q_{01} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$

- **வாழ்க்கைத்தர குறியீட்டு எண்**

மொத்த செலவு முறை $= \dfrac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} X 100$.

குடும்ப வரவு செலவுத்திட்ட முறை $= \dfrac{\sum PV}{\sum V}$

- **மாறுபாட்டின் காரணங்கள்**

1. வாய்ப்பு காரணங்கள் அல்லது சீரற்ற காரணங்கள்

2. குறிப்பிட்டகாரணங்கள்

- **கட்டுப்பாட்டு வரைபடங்கள்**

(i) மையக்கோடு (CL) செயல்முறையின் தேவையான தரநிலை நிலையை குறிக்கிறது.

(ii) மேல்நிலை கட்டுப்பாட்டுக்கோடு (UCL) ஏற்றுக்கொள்ளக் கூடியமேல் வரம்பை குறிக்கிறது.

(iii) கீழ்நிலை கட்டுப்பாட்டுக்கோடு (LCL) ஏற்றுக்கொள்ளக் கூடிய கீழ்வரம்பை குறிக்கிறது.

$\overline{X}$ வரைபடங்களின் கட்டுப்பாட்டின் வரம்புகளின் இரண்டுவகைகள்

வகை (i) $\overline{X}$ மற்றும்திட்ட விலக்கம் கொடுக்கப்படும்போது	வகை $\overline{X}$ மற்றும்திட்ட விலக்கம் கொடுக்கப்படாதபோது
$UCL = \overline{\overline{X}} + 3\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$UCL = \overline{\overline{X}} + A_2 \overline{R}$
$CL \ = \overline{\overline{X}}$	$CL \ = \overline{\overline{X}}$
$LCL = \overline{\overline{X}} - 3\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$LCL = \overline{\overline{X}} - A_2 \overline{R}$

R வரைபடங்களின் கட்டுப்பாட்டின் வரம்புகளின் இரண்டு வகைகள்

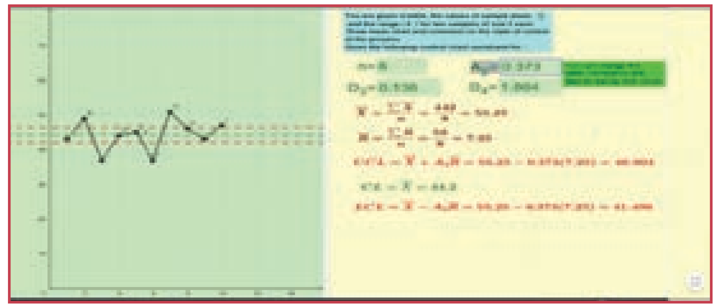
வகை (i) திட்டவிலக்கம் கொடுக்கப்படும்போது	வகை (ii) திட்டவிலக்கம் கொடுக்கப்படாதபோது
$UCL = \overline{R} + 3\sigma_R$	$UCL = D_4 \overline{R}$
$CL \ = \overline{R}$	$CL \ = \overline{R}$
$LCL = \overline{R} - 3\sigma_R$	$LCL = D_3 \overline{R}$

கலைச்சொற்கள் (GLOSSARY)

உற்பத்தி கட்டுப்பாடு	Product control
ஒழுங்கற்ற மாறுபாடு	Irregular variation
கட்டுப்பாட்டு எல்லை	Control limit
கட்டுப்பாட்டு விளக்கப்படங்கள்	Control charts
கண்டறிபதிவு / கூர்நோக்கு	Observation
காரணி மாற்று சோதனை	Factor reversal test
காலமாற்று சோதனை	Time reversal test
காலம்சார் தொடர்வரிசை	Time series
கீழ்க் கட்டுப்பாட்டு எல்லை	Lower control limit
குடும்ப வரவு– செலவுத் திட்டம்	Family budget
குறியீட்டெண்கள்	Index numbers
சராசரி வரைவுகள்	Mean charts
சுழல் மாறுபாடு	Cyclical variation
செயல்பாட்டு கட்டுப்பாடு (அல்லது) செயலாக்கக் கட்டுபாடு	Process control
நகரும் சராசரி	Moving average
நிறையிடா குறியீடு	Unweighted Index
நிறையிட்ட குறியீடு	Weighted index
நீள் காலப்போக்கு	Secular trend
பகுதி சராசரி	Semi–vverage
பருவகால குறியீடு	Seasonal Index
பருவகால மாறுபாடு	Seasonal variation
பாசியின் குறியீடு	Paasche's index
பிஷரின் குறியீடு	Fisher's index
புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாடு	Statistical quality control
போக்கு	Trend
மீச்சிறு வர்க்கம்	Least square
மேல் கட்டுப்பாட்டு எல்லை	Upper control limit
லாஸ்பியரின் குறியீடு	Laspeyre's index
வீச்சு வரைபடங்கள்	Range charts

இணையச் செயல்பாடு

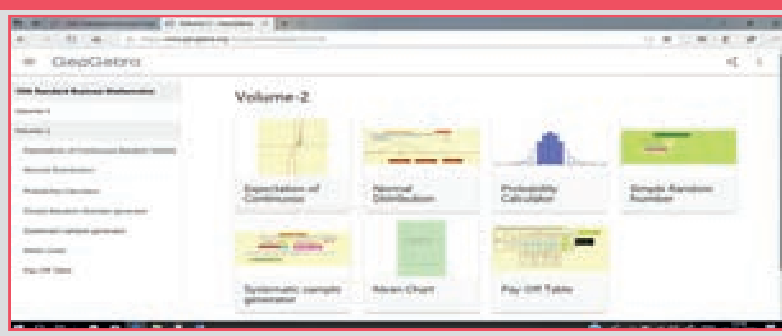
எதிர்பார்க்கப்படும் விளைவு



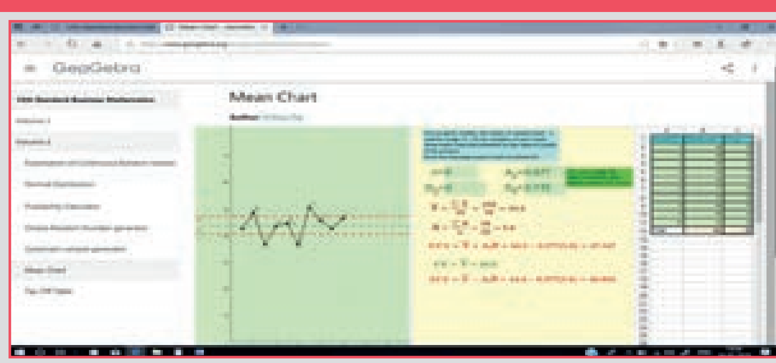
படி - 1 : கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி இச்செயல்பட்டிற்கான இணையப் பக்கத்திற்குச் செல்க. பின்பு "12th Standard Business Mathematics and Statistics" என்னும் திரையில் "Volume–2" யை தெரிவு செய்யவும்.

படி - 2 : "Mean Chart" என்னும் பயிற்சித்தாளினை தெரிவு செய்துகொள்ளவும். வலது பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விரிதாளில் தரவுகளை பதிவு செய்யவும். பின்பு n, A2, D3 மற்றும் D4 ன் மதிப்புகளை கொடுக்கப்பட்டுள்ள பெட்டியில் பதிவு செய்தால் UCL, CL மற்றும் LCL மதிப்பினையும் அதற்கான வரைபடத்தினையும் காணலாம்.

படி 1



படி 2



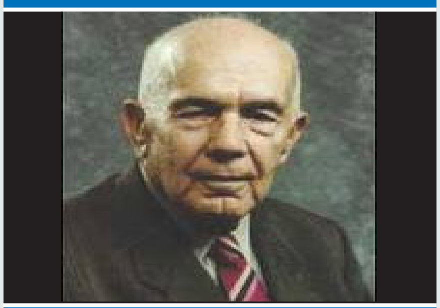
செயல்பாட்டிற்கான உரலி : **https://ggbm.at/uzkcrnwr**

அல்லது விரைவுக் குறியீடு **(QR Code)**

B247_12_BUS_MAT_TM

10

செயல்முறைகள் ஆராய்ச்சி



ஃபிராங்க் லாரன் ஹிட்ச்காக்
(1875-1957)

அறிமுகம்

செயல்முறை ஆராய்ச்சி (Operations Research) என்பது நிறுவனங்களில் ஏற்படும் பிர்ச்சனைகளை பகுப்பாய்வு செய்து உகந்த தீர்வினை முடிவெடுக்கும் திறனை அளிக்கும் வழிமுறைகளாகும். இது மேலாண்மை நிறுவனங்களில் பெரிதும் பயன்படுகிறது. செயல்முறை ஆராய்ச்சிகளில் உள்ள கணக்குகளில் போக்குவரத்து கணக்குகள் முக்கிய இடத்தைப் பெறுகின்றன.

போக்குவரத்து கணக்கு என்பது ஒரே மாதிரியான பொருள்களை உற்பத்தி செய்கின்ற தொழிற்சாலைகள் எனும் ஆதார இடங்களையும், உற்பத்தியான பொருள்களைத் தேவை அளிக்கக்கூடிய சேரும் இடங்களையும் இணைப்பதாகும். ஒவ்வொரு தொழிற்சாலைக்கும் ஒரு குறிப்பிட்ட திறன் கட்டுப்பாடு மற்றும் ஒவ்வொரு சேரும் இடத்திற்கும் (விநியோகிப்பவர் / வாடிக்கையாளர்) ஒரு தேவைக் கட்டுப்பாடு இருக்கும் தொழிற்சாலையிலிருந்து (விநியோகிப்போர்/ வாடிக்கையாளருக்கு) அனுப்பக் கூடிய ஒரு அலகிற்கான போக்குவரத்துச் செலவு தெரிந்திருக்கும். இவற்றைப் பற்றி ஃபிராங்க் லாரன் ஹிட்ச்காக் என்ற அமெரிக்க கணிதவியல் மற்றும் இயற்பியலாளர் என்பரால் 1941–ஆம் ஆண்டு போக்குவரத்து கணக்குகளை உருவாக்கியுள்ளார் எனத் தெரியவருகிறது.

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தைப் படித்த பின்பு பின்வரும் பாடக்கருத்துகளை மாணவர்கள் புரிந்து கொள்ள இயலும்.

- போக்குவரத்து மற்றும் ஒதுக்கீடு கணக்குகளை அமைத்தல்
- போக்குவரத்து கணக்கிற்கும் ஒதுக்கீட்டுக் கணக்கிற்கும் இடையேயான வித்தியாசத்தை காணல்.
- போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்ப அடிப்படை உகந்த தீர்வை காணல்
- போக்குவரத்து கணக்கில், மாறுப்பட்ட மற்றும் மாறுப்பாடற்ற தீர்வுகளை அடையாளம் காணுதல்.
- ஹங்கேரி முறையில் ஒதுக்கீட்டு கணக்கின் தீர்வு காணல்
- உத்திகள் மற்றும் மூலஉத்தி முடிவுகளை வேறுபடுத்தல்.
- மீப்பெரு சிறுமம் மற்றும் மீச்சிறு பெருமம் முறையில் சிறந்த மாற்று முடிவுகளை தீர்மானித்தல்

Q73NVJ

10.1 போக்குவரத்து கணக்குகள் (Transportation Problem)

மொத்த போக்குவரத்துச் செலவை குறைக்கும் வகையில் ஒவ்வொரு ஆதியிலிருந்து ஒவ்வொரு சேரும் இடத்திற்கு அனுப்பக் கூடிய பொருள்களின் அளவை தீர்மானிப்பது நமது நோக்கமாகும்.

10.1.1 வரையறை மற்றும் அமைப்பு (Definition and formulation)

m தொழிற்சாலைகள் மற்றும் n சேரும் இடங்கள் உள்ளன எனக் கருதுக. i எனும் ஆதியின் அளிப்புகள் ai அலகுகள் என்க. j எனும் சேருமிடத்தின் தேவைகள் bj அலகுகள் என்க.

ஒரு அலகு பொருளை ஆதி i யிலிருந்து சேருமிடம் j வுக்கு கொண்டு செல்ல ஆகும் போக்குவரத்து செலவு c_{ij} என்க மற்றும் இதனுடைய எல்லா சேர்வுகள் (i,j) எனத் தெரியும். ஆதி i யிலிருந்து சேருமிடம் j க்கு கொண்டு செல்லும் பொருள்களின் அளவு x_{ij} என்க.

மொத்த போக்குவரத்து செலவு குறைக்கக் கூடிய (i,j) எனும் அனைத்து வழிகளிலும் கொண்டு செல்லும் பொருள்களின் அளவு x_{ij} –ஐ கணக்கிடுவதே நமது குறிக்கோள் ஆகும். ஆதியின் வளங்கள் அளவு மற்றும் சேருமிடத்தின் தேவைகள் பூர்த்தி செய்யப்பட வேண்டும்.

மேற்கூறிய போக்குவரத்து கணக்கை கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் குறிக்கலாம்.

மேற்கண்ட போக்குவரத்து கணக்குகளை நேரிய திட்டமிடல் கணக்கு வடிவில் கீழ்க்கண்ட வாறு எழுதலாம்.

$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கிணங்க என்ற குறிக்கோள் சார்பின் சிறுமம் காணுதல்.

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i$, $i=1,2,\ldots\ldots.m$ (அளிப்பு கட்டுப்பாடுகள்)

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j$, $j=1,2,\ldots\ldots.n$ (தேவை கட்டுப்பாடுகள்)

$x_{ij}\geq 0$ for all i,j (குறை குறியற்ற நிபந்தனைகள்)

வரையறைகள்

ஏற்புடையத் தீர்வுகள்: கட்டுப்பாடுகளைப் பூர்த்தி செய்யக்கூடிய குறை குறியற்ற $x_{ij}(i=1,2,..,m, j=1,2,\ldots n)$ இன் மதிப்புகள் போக்குவரத்து கணக்குகளின் ஏற்புடையத் தீர்வுகளாகும். $x_{ij}(i=1,2,..,m,\ j=1,2,\ldots n)$ இன் மதிப்புகள் போக்குவரத்து கணக்குகளின் ஏற்புடையத் தீர்வுகளாகும்.

அடிப்படை ஏற்புடையத் தீர்வுகள் : m நிரைகள் மற்றும் n நிரல்கள் கொண்ட போக்குவரத்து கணக்கின் ஏற்புடையத் தீர்வு $m+n$-1 ஒதுக்கீடுகளுக்கு மிகாமல் இருந்தால் அது அடிப்படை ஏற்புடையத் தீர்வு எனப்படும்.

உகந்த தீர்வு: மொத்த போக்குவரத்து செலவினைக் குறைக்கக் கூடிய ஏற்புடையத் தீர்வு என்பது உகந்த தீர்வு எனப்படும்.

சிதைவற்ற அடிப்படை ஏற்புடையத் தீர்வு: சிதைவற்ற அடிப்படை தீர்வு என்பது போக்குவரத்து கணக்கின் ஏற்புடையத் தீர்வில் சரியாக $m+n$-1 ஒதுக்கீடுகள் ஒன்றை ஒன்று சாரா நிலையில் அமைந்ததாகும். இங்கு m, n என்பது முறையே நிரை மற்றும் நிரலைக் குறிக்கிறது.

		சேருமிடம்					
		1	2	3	…	n	அளிப்பு
ஆதிகள்	1	(x_{11}) C_{11}	(x_{12}) C_{12}	(x_{13}) C_{13}	…	(x_{1n}) C_{1n}	a_1
	2	(x_{21}) C_{21}	(x_{22}) C_{22}	(x_{23}) C_{23}	…	(x_{2n}) C_{2n}	a_2
	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	m	(x_{m1}) C_{m1}	(x_{m2}) C_{m2}	(x_{m3}) C_{m3}	…	(x_{mn}) C_{mn}	a_m
	தேவை	b_1	b_2	b_3	…	b_n	

அட்டவணை-10.1

சிதைந்த தீர்வு: போக்குவரத்து கணக்கின் ஏற்புடையத் தீர்ப்பில் ஒதுக்கீடுகளின் எண்ணிக்கை $m+n-1$ க்கு குறைவாக இருந்தால் அது சிதைந்த தீர்வு எனப்படும். இங்கு m, n என்பது முறையே நிரை மற்றும் நிரலைக் குறிக்கிறது.

10.1.2 ஆரம்ப அடிப்படை ஏற்புடையத் தீர்வைக் காணும் முறைகள் (Methods of finding initial Basic Feasible Solutions)

போக்குவரத்து கணக்குகளின் ஆரம்ப அடிப்படை ஏற்புடையத் தீர்வுகளைக் காண பல முறைகள் இருந்தாலும், கீழ்க்கண்ட மூன்று முறைகளை எவ்வாறு காணலாம் என்பதை கற்போம். ஆரம்ப அடிப்படை ஏற்புடையத் தீர்வைக் காண மொத்த அளிப்புகளும், மொத்த தேவைகளும் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

அதாவது, $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

முறை 1: வட மேற்கு மூலை முறை (North-West Corner Rule (NWC))

இம்முறையானது ஆரம்ப அடிப்படை ஏற்புடையத் தீர்வுகள் காண்பதற்கான எளிய மற்றும் திறமையான முறையாகும். இந்த முறையில் தீர்வைக் காண பல்வேறு படிகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

படி 1: போக்குவரத்து அட்டவணையை வட மேற்கு மூலையிலுள்ள சிற்றறை(cell) யைத் தேர்ந்தெடுத்து அங்கு சாத்தியமான அளவுகளை ஒதுக்கீடு செய்க. அதாவது, $x_{11} = \min(a_1, b_1)$ ன் சிறும மதிப்பு.

படி 2: தேவைகள் பூர்த்தி செய்யப்பட்டால் $(b_1 < a_1)$, வலது புறத்தில் கிடைமட்டமாக இரண்டாவது நிரலுக்கு நகர்ந்து அங்குள்ள சிற்றறையில் அளவுகள் ஒதுக்கீடு செய்ய வேண்டும். அதாவது, $x_{12} = \min(a_1 - x_{11}, b_2)$ ன் சிறும மதிப்பு.

அளிப்புகள் பூர்த்தி செய்யப்பட்டால் $(b_1 > a_1)$, கீழே செங்குத்தாக இரண்டாவது நிரைக்கு நகர்ந்து அங்குள்ள சிற்றறையில் அளவுகள் ஒதுக்கீடு செய்ய வேண்டும். அதாவது, $x_{21} = \min(a_2, b_1 - x_{11})$ன் சிறும மதிப்பு அளிப்புகள் மற்றும் தேவைகள் இரண்டும் ஒரே நேரத்தில் பூர்த்தி செய்யப்பட்டால், மூலைவிட்டமாக அடுத்த சிற்றறைக்கு நகர்ந்து அங்கு அளவுகள் ஒதுக்கீடு செய்யப்பட வேண்டும். அதாவது $x_{21} = (a_1, b_2)$ இன் சிறும மதிப்பு.

படி 3: அனைத்து ஒதுக்கீடுகளையும் செய்து முடிக்கும் வரையில் இம்முறையைத் தொடர வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.1

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்பத் தீர்வைக் காண்க.

		சேருமிடம் A	B	C	அளிப்பு
ஆதிகள்	1	2	7	4	5
	2	3	3	1	8
	3	5	4	7	7
	4	1	6	2	14
தேவை		7	9	18	

தீர்வு:

இங்கு, மொத்த அளிப்புகள் = 5+8+7+14=34,

மொத்த தேவைகள் = 7+9+18=34

அதாவது, மொத்த அளிப்புகள் = மொத்த தேவைகள் கொடுக்கப்பட்ட கணக்கானது சமநிலை போக்குவரத்து கணக்காகும்.

∴ எனவே, ஆரம்ப அடிப்படை ஏற்புடையத் தீர்வு உள்ளது.

மேலே கூறப்பட்ட அட்டவணையில் வடமேற்கு மூலையில் உள்ள சிற்றறை $(1, A)$ யைத் தேர்ந்தெடுத்து அதிகபட்ச சாத்தியமான ஒதுக்கீடுகளைச் செய்யவும்.

அதாவது (5,7) இன் சிறும மதிப்பு 5

	A	B	C	அளிப்பு (a_i)
1	(5) 2	7	4	5/0
2	3	3	1	8
3	5	4	7	7
4	1	6	2	14
தேவை (b_j)	7/2	9	18	

குறைக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை,

	A	B	C	a_i
2	3	3	1	8
3	5	4	7	7
4	1	6	2	14
b_j	2	9	18	

தற்போது $(2, A)$ என்ற சிற்றறை வடமேற்கு மூலையில் உள்ளது.

அங்கு (8,2) இன் சிறும மதிப்பான 2 அலகுகளை ஒதுக்கீடு செய்யவும்.

x_{12} = சிறும (2,8) = 2

	A	B	C	a_i
2	(2) 3	3	1	8/6
3	5	4	7	7
4	1	6	2	14
b_j	2/0	9	18	

குறைக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை,

	B	C	a_i
2	3	1	6
3	4	7	7
4	6	2	14
b_j	9	18	

தற்போது $(2, B)$ என்ற சிற்றறை வடமேற்கு மூலையில் உள்ளது.

அங்கு (6,9)ன் சிறும மதிப்பான 6 அலகுகளை ஒதுக்கீடு செய்யவும்.

x_{22} = சிறும (6,9) = 6

	B	C	a_i
2	(6) 3	1	6/0
3	4	7	7
4	6	2	14
b_j	9/3	18	

குறைக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை,

	B	C	a_i
3	4	7	7
4	6	2	14
b_j	3	18	

தற்போது $(3,B)$ என்ற சிற்றறை வடமேற்கு மூலையில் உள்ளது.

அங்கு (7,3) ன் சிறும மதிப்பான 3 அலகுகளை ஒதுக்கீடு செய்யவும்.

x_{32} = சிறும (7,3) = 3

	B	C	a_i
3	(3) 4	7	4
4	6	2	14
b_j	3/0	18	

குறைக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை,

	C	a_i
3	7	7/4
4	2	14
b_j	18	

தற்போது (3,C) என்ற சிற்றறை வடமேற்கு மூலையில் உள்ளது.

அங்கு (4,18) -ன் சிறும மதிப்பான 4 அலகுகளை ஒதுக்கீடு செய்யவும்.

x_{33} = சிறும (4,18) = 4

	C	a_i
3	(4) 7	4/0
4	2	14
b_j	18/14	

குறைக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை மற்றும் இறுதி ஒதுக்கீடு, $x_{44} = 14$

	C	a_i
4	(14) 2	14/0
b_j	14/0	

அனைத்து ஒதுக்கீடுகளைக் கொண்ட அட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

	A	B	C	a_i
1	(5) 2	7	4	5
2	(2) 3	(6) 3	1	8
3	5	(3) 4	(4) 7	7
4	1	6	(14) 2	14
b_j	7	9	18	

போக்குவரத்து விவரம் $1 \rightarrow A, 2 \rightarrow A,\ 2 \rightarrow B,\ 3 \rightarrow B,\ 3 \rightarrow C,\ 4 \rightarrow C$

மொத்த போக்குவரத்து செலவு

$$= (5\times2) + (2\times3) + (6\times3) + (3\times4) + (4\times7) + (14\times2) = ₹\ 102$$

எடுத்துக்காட்டு 10.2

வடமேற்கு மூலை முறையைப் பயன்படுத்தி கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள போக்குவரத்து கணக்கின் அடிப்படைத் தீர்வைக் காண்க.

	D_1	D_2	D_3	D_4	இருப்பு
O_1	6	4	1	5	14
O_2	8	9	2	7	16
O_3	4	3	6	2	5
தேவை	6	10	15	4	35

இங்கு O_i மற்றும் D_j என்பன i ஆவது ஆதி மற்றும் j ஆவது சேருமிடம் முறையே ஆகும்.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை

	D_1	D_2	D_3	D_4	இருப்பு (a_i)
O_1	6	4	1	5	14
O_2	8	9	2	7	16
O_3	4	3	6	2	5
தேவை (b_j)	6	10	15	4	35

அதாவது, மொத்த இருப்புகள் = மொத்த தேவைகள். எனவே கொடுக்கப்பட்ட கணக்கானது சமநிலை போக்குவரத்து கணக்காகும்.

முதல் ஒதுக்கீடு :

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	(6) 6	4	1	5	14/8
O_2	8	9	2	7	16
O_3	4	3	6	2	5
b_j	6/0	10	15	4	35

இரண்டாம் ஒதுக்கீடு:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	(6) 6	(8) 4	1	5	14/8/0
O_2	8	9	2	7	16
O_3	4	3	6	2	5
b_j	6/0	10/2	15	4	35

மூன்றாவது ஒதுக்கீடு:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	(6) 6	(8) 4	1	5	14/8/0
O_2	8	(2) 9	2	7	16/14
O_3	4	3	6	2	5
b_j	6/0	10/2/0	15	4	35

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 253 3/5/2020 1:20:49 PM

நான்காம் ஒதுக்கீடு:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	(6) 6	(8) 4	1	5	14/8/0
O_2	8	(2) 9	(14) 2	7	16/14/0
O_3	4	3	6	2	5
b_j	6/0	10/2/0	15/1	4	35

ஐந்தாவது ஒதுக்கீடு:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	(6) 6	(8) 4	1	5	14/8/0
O_2	8	(2) 9	(14) 2	7	16/14/0
O_3	4	3	(1) 6	2	5/4
b_j	6/0	10/2/0	15/1/0	4	35

இறுதி ஒதுக்கீடு:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	(6) 6	(8) 4	1	5	14/8/0
O_2	8	(2) 9	(14) 2	7	16/14/0
O_3	4	3	(1) 6	(4) 2	5/4/0
b_j	6/0	10/2/0	15/1/0	4/0	35

போக்குவரத்து விவரம் :$O_1 \rightarrow D_1$, $O_1 \rightarrow D_2$, $O_2 \rightarrow D_2$, $O_2 \rightarrow D_3$, $O_3 \rightarrow D_3$, $O_3 \rightarrow D_3$.

மொத்த போக்குவரத்து செலவு

$$= (6\times 6)+(8\times 4)+(2\times 9)+(14\times 2)+(1\times 6)+(4\times 2) = ₹128$$

முறை : 2 மீச்சிறு செலவு முறை (Least Cost Method (LCM))

வடமேற்கு மூலை முறையை விட மீச்சிறு செலவு முறையில் காணும் போக்குவரத்து கணக்கின் செலவு குறைவாக இருக்கும். இம்முறையிலான பல்வேறு படிகள் கீழே தொகுக்கப்பட்டுள்ளன..

படி 1: போக்குவரத்து அட்டவணையில் கொடுக்கப் பட்டுள்ள செலவுகளில் மீச்சிறு செலவுக் கொண்ட சிற்றறையை தேர்ந்தெடுக்க.

படி 2: தேர்ந்தெடுத்த சிற்றறையில் சாத்தியமான ஒதுக்கீடுகள் செய்யவும்.

படி 3: ஒதுக்கீடுகள் நிறைவுபெற்ற நிரை மற்றும் நிரல்களை நீக்குக.

படி 4: அனைத்து ஒதுக்கீடுகளும் செய்து முடிக்கும் வரை மேற்கண்ட மூன்று படிகளையும் தொடர வேண்டும்.

குறிப்பு

மீச்சிறு செலவு ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட சிற்றறைகள் ஒரே மீச்சிறு செலவைக் கொண்டிருந்தால் சிற்றறையை நமது விருப்பப்படி தேர்ந்தெடுத்து ஒதுக்கீடு செய்யவும். அவ்வாறு செய்யும் பட்சத்தில், வெவ்வேறான போக்குவரத்து செலவு கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.3

மீச்சிறு செலவு முறையை பயன்படுத்திக் கீழ்க்கண்ட போக்குவரத்துக் கணக்கின் ஆரம்ப அடிப்படை தீர்வு காண்க.

	D_1	D_2	D_3	D_4	அளிப்பு
O_1	1	2	3	4	6
O_2	4	3	2	5	8
O_3	5	2	2	1	10
தேவை	4	6	8	6	

இங்கு O_i மற்றும் D_j ஆகியவை முறையே i ஆவது ஆதி மற்றும் j ஆவது சேருமிடத்தைக் குறிக்கும்.

தீர்வு:

அதாவது, மொத்த இருப்புகள் = மொத்த தேவைகள். எனவே கொடுக்கப்பட்ட கணக்கானது சமநிலை போக்குவரத்து கணக்காகும்.

கொடுக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை

	D_1	D_2	D_3	D_4	அளிப்பு (a_i)
O_1	1	2	3	4	6
O_2	4	3	2	5	8
O_3	5	2	2	1	10
தேவை (b_j)	4	6	8	6	

மீச்சிறுசெலவு 1 ஆனது சிற்றறைகள் (O_1, D_1), (O_3, D_4) –இல் உள்ளது.

நாம் சிற்றறை (O_1, D_1) தேர்ந்தேடுப்போம்.

(6,4) இன் சிறும மதிப்பு = 4 அலகுகளை இங்கு ஒதுக்கீடு செய்க.

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	(4) 1	2	3	4	6/2
O_2	4	3	2	5	8
O_3	5	2	2	1	10
b_j	4/0	6	8	6	

குறைக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை

	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2	3	4	2
O_2	3	2	5	8
O_3	2	2	1	10
b_j	6	8	6	

மீச்சிறுசெலவு 1 ஆனது சிற்றறை (O_3, D_4)–ல் உள்ளது.

(10,6) இன் சிறும மதிப்பு = 6 அலகுகளை இங்கு ஒதுக்கீடு செய்க.

	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2	3	4	2
O_2	3	2	5	8
O_3	2	2	(6) 1	10/4
b_j	6	8	6/0	

குறைக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை

	D_2	D_3	a_i
O_1	2	3	2
O_2	3	2	8
O_3	2	2	4
b_j	6	8	

மீச்சிறுசெலவு 2 ஆனது சிற்றறைகள் (O_1, D_2), (O_2, D_3), (O_3, D_2), (O_3, D_3)–ல் உள்ளது. நாம் சிற்றறை (O_1, D_2) தேர்ந்தேடுப்போம். (2,6) இன் சிறும மதிப்பு = 2 அலகுகளை இங்கு ஒதுக்கீடு செய்க.

குறைக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை

	D_2	D_3	a_i
O_1	(2) 2	3	2/0
O_2	3	2	8
O_3	2	2	4
b_j	6/4	8	

$\longrightarrow$

	D_2	D_3	a_i
O_2	3	2	8
O_3	2	2	4
bj	4	8	

மீச்சிறுசெலவு 2 ஆனது சிற்றறைகள் (O_2, D_3), (O_3, D_2), (O_3, D_3) –ல் உள்ளது.

நாம் சிற்றறை (O_2, D_3) தேர்ந்தெடுப்போம். (8,8) இன் சிறும மதிப்பு = 8 அலகுகளை இங்கு ஒதுக்கீடு செய்க.

	D_2	D_3	a_i
O_2	3	(8) 2	8/0
O_3	2	2	4
b_j	4	8/0	

குறைக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை

	D_2	a_i
O_3	2	4
b_j	4	

குறைக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை மற்றும் இறுதி ஒதுக்கீடு

	D_2	a_i
O_3	(4) 2	4/0
b_j	4/0	

அனைத்து ஒதுக்கீடுகளும் ஒரே அட்டவணையில் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	(4) 1	(2) 2	3	4	6/2/0
O_2	4	3	(8) 2	5	8/0
O_3	5	(4) 2	2	(6) 1	10/4/0
b_j	4/0	6/4/0	8/0	6/0	

போக்குவரத்து விவரம்

$O_1 \rightarrow D_1, O_1 \rightarrow D_2, O_2 \rightarrow D_3, O_3 \rightarrow D_2, O_3 \rightarrow D_4$

மொத்த போக்குவரத்து செலவு

$$= (4\times1)+(2\times2)+(8\times2)+(4\times2)+(6\times1)$$
$$= 4+4+16+8+6$$
$$= ₹\,38.$$

எடுத்துக்காட்டு 10.4

ஒவ்வொரு தொழிற்சாலையிலிருந்தும் ஒவ்வொரு சேருமிடத்திற்கும் எவ்வளவு அலகு பொருள்களைக் கொண்டுசெல்ல முடியும் என்பதை மீறுச்சிறு செலவு முறையில் காண்க.

சேருமிடம்

		C	H	K	P	இருப்பு
தொழிற்சாலை	T	6	8	8	5	30
	B	5	11	9	7	40
	M	8	9	7	13	50
	தேவை	35	28	32	25	

ஓர் அலகு, பொருளைக் கொண்டு செல்ல ஆகும் செலவு ரூபாயில் தரப்பட்டுள்ளது.

தீர்வு:

அதாவது, மொத்த இருப்புகள் = மொத்த தேவைகள். எனவே கொடுக்கப்பட்ட கணக்கானது சமநிலை போக்குவரத்து கணக்காகும்.

கொடுக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை

சேருமிடம்

		C	H	K	P	இருப்பு (a_i)
தொழிற்சாலை	T	6	8	8	5	30
	B	5	11	9	7	40
	M	8	9	7	13	50
	தேவை (b_j)	35	28	32	25	

முதல் ஒதுக்கீடு:

	C	H	K	P	a_i
T	6	8	8	(25) 5	30/5
B	5	11	9	7	40
M	8	9	7	13	50
b_j	35	28	32	25/0	

இரண்டாவது ஒதுக்கீடு:

	C	H	K	P	a_i
T	6	8	8	(25) 5	30/5
B	(35) 5	11	9	7	40/5
M	8	9	7	13	50
b_j	35/0	28	32	25/0	

மூன்றாவது ஒதுக்கீடு:

	C	H	K	P	a_i
T	6	8	8	(25) 5	30/5
B	(35) 5	11	9	7	40/5
M	8	9	(32) 7	13	50/18
b_j	35/0	28	32/0	25/0	

நான்காவது ஒதுக்கீடு:

	C	H	K	P	a_i
T	6	(5) 8	8	(25) 5	30/5/0
B	(35) 5	11	9	7	40/5
M	8	9	(32) 7	13	50/18
b_j	35/0	28/23	32/0	25/0	

ஐந்தாவது ஒதுக்கீடு:

	C	H	K	P	a_i
T	6	(5) 8	8	(25) 5	30/5/0
B	(35) 5	11	9	7	40/5
M	8	(18) 9	(32) 7	13	50/18/0
b_j	35/0	28/23/5	32/0	25/0	

இறுதி ஒதுக்கீடு:

	C	H	K	P	a_i
T	6	(5) 8	8	(25) 5	30/5/0
B	(35) 5	(5) 11	9	7	40/5/0
M	8	(18) 9	(32) 7	13	50/18/0
b_j	35/0	28/23/5/0	32/0	25/0	

போக்குவரத்து விவரம்

$T \rightarrow H, T \rightarrow P, B \rightarrow C, B \rightarrow H, M \rightarrow H, M \rightarrow K$

மொத்த போக்குவரத்து செலவு

$= (5\times8) + (25\times5) + (35\times5) + (5\times11) + (18\times9) + (32\times7)$

$= 40+125+175+55+162+224$

$=$ ₹ 781

வோகலின் தோராய முறை (Vogel's Approximation Method(VAM))

வோகலின் தோராய முறையில் காணும் போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்ப அடிப்படைத்தீர்வு ஏறக்குறைய உகந்த தீர்வுக்கு அருகில் இருக்கும். எனவே மற்ற இரண்டு முறைகளை விட இம்முறையில் தீர்வு காண்பது சிறந்தாகும். இம்முறையில் உள்ளடக்கிய பல்வேறு படிகள் கீழே தொகுக்கப்பட்டுள்ளன.

படி 1: ஒவ்வொரு நிரை மற்றும் நிரலில் காணப்படும் இரு வெவ்வேறான சிறிய எண்களின் வித்தியாசத்தைக் (Penalty) கண்டுபிடித்து அதற்குரிய நிரை மற்றும் நிரலுக்கு நேராக எழுதவும்.

படி 2: அதிக வித்தியாசம் கொண்ட நிரை அல்லது நிரலைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்

படி 3: தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட நிரை அல்லது நிரலில் உள்ள சிற்றறைகளில் மிகச்சிறிய மதிப்பு கொண்ட சிற்றறையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும். அங்கு எவ்வளவு ஒதுக்கீடு செய்ய முடியுமோ அவ்வளவு ஒதுக்கீடு செய்ய வேண்டும்.

படி 4: அனைத்துஒதுக்கீடுகளுக்கும்,நிறைவடைந்த நிரை அல்லது நிரலை நீக்குக.

படி 5: நீக்கிய நிரை அல்லது நிரல் இல்லாத குறைக்கப்பட்ட புதிய போக்குவரத்து அட்டவணையை எழுதுக.

படி 6: அனைத்து ஒதுக்கீடுகளும் செய்து முடிக்கும் வரை மேற்கண்டபடிகளைத் தொடரவும்.

குறிப்பு

நிரை அல்லது நிரலில் உள்ள இரு வெவ்வேறான சிறிய எண்களுக்கிடையே உள்ள வேறுபாடு அந்த நிரை அல்லது நிரலின் வித்தியாசம் (Penalty) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.5

வோகலின் தோராய முறையைக் கொண்டு கீழ்க்கண்ட போக்குவரத்து கணக்கின் அடிப்படை ஆரம்பத் தீர்வை காண்க.

விநியோக மையம் இருப்பு a_i

		D_1	D_2	D_3	D_4	
ஆதி	S_1	11	13	17	14	250
	S_2	16	18	14	10	300
	S_3	21	24	13	10	400
	தேவை b_j	200	225	275	250	

தீர்வு:

இங்கு $\sum a_i = \sum b_j = 950$

அதாவது, மொத்த இருப்புகள் = மொத்த தேவைகள் . எனவே கொடுக்கப்பட்ட கணக்கானது சமநிலை போக்குவரத்து கணக்காகும்.

முதலில் ஒவ்வொரு நிரை மற்றும் நிரலில் காணப்படும் அடுத்தடுத்த இரண்டு சிறிய எண்களின் வித்தியாசத்தை கண்டுபிடித்து அதற்குறிய நிரை மற்றும் நிரலுக்கு நேராக அடைப்புக்குறிக்குள் எழுதவும்.

	D_1	D_2	D_3	D_4	இருப்பு a_i	நிரை வித்தியாசம்
S_1	(200) 11	13	17	14	250/50	2
S_2	16	18	14	10	300	4
S_3	21	24	13	10	400	3
b_j	200/0	225	275	250		
நிரல் வித்தியாசம்	5	5	1	4		

அதிக வித்தியாசமான 5–ஆனது நிரல் D_1 மற்றும் D_2.–க்கு நேராக உள்ளது.இங்கு நமது விருப்படி D_1 தேர்ந்தெடுக்கவும். தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட D_1 நிரலில்குறைந்த செலவு கொண்ட சிற்றறை (S_1, D_1) தேர்ந்தெடுத்து அங்கு அதிக பட்சமாக அதாவது $(250,200)$ –ன் சிறும மதிப்பான 200 அலகுகளை ஒதுக்கீடு செய்யவும்.

குறைக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை

	D_2	D_3	D_4	a_i	நிரை வித்தியாசம்
S_1	(50) 13	17	14	50/0	1
S_2	18	14	10	300	4
S_3	24	13	10	400	3
b_j	225/175	275	250		
நிரல் வித்தியாசம்	5	1	4		

வித்தியாசமான 5–ஆனது நிரல் D_2.–க்கு நேராக உள்ளது. தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட D_2 நிரலில்குறைந்த செலவு கொண்ட சிற்றறை (S_1, D_2) தேர்ந்தெடுத்து அங்கு அதிக பட்சமாக அதாவது (50,175) –ன் சிறும மதிப்பான 50 அலகுகளை ஒதுக்கீடு செய்யவும்.

குறைக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை

	D_2	D_3	D_4	a_i	நிரை வித்தியாசம்
S_2	(175) 18	14	10	300/125	4
S_3	24	13	10	400	3
b_j	175/0	275	250		
நிரல் வித்தியாசம்	6	1	—		

வித்தியாசமான 6–ஆனது நிரல் D_2–க்கு நேராக உள்ளது. தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட D_2. நிரலில்குறைந்த செலவு கொண்ட சிற்றறை (S_2, D_2) தேர்ந்தெடுத்து அங்கு அதிக பட்சமாக அதாவது (300, 175) –ன் சிறும மதிப்பான 175 அலகுகளை ஒதுக்கீடு செய்யவும்.

குறைக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை

	D_3	D_4	a_i	நிரை வித்தியாசம்
S_2	14	(125) 10	125/0	4
S_3	13	10	400	3
b_j	275	250/125		
நிரல் வித்தியாசம்	1	—		

வித்தியாசமான 4–ஆனது நிரை S_2 நேராக உள்ளது. தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட S_2 நிரையில் குறைந்த செலவு கொண்ட சிற்றறை (S_2, D_4) தேர்ந்தெடுத்து அங்கு அதிக பட்சமாக அதாவது (125,250) இன் சிறும மதிப்பான 125 அலகுகளை ஒதுக்கீடு செய்யவும்.

குறைக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை மற்றும் ஒதுக்கீடுகள்

	D_3	D_4	a_i	நிரை வித்தியாசம்
S_3	13	10	400	3
b_j	275	125		
நிரல் வித்தியாசம்	—	—		

	D_3	D_4	a_i
S_3	(275) 13	(125) 10	400/275/0
b_j	275/0	125/0	

அனைத்து ஒதுக்கீடுகளும் ஒரே அட்டவணையில் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன

		D_1	D_2	D_3	D_4	a_i	
	S_1	(200) 11	(50) 13	17	14	250	
மொத்த செலவு	S_2	16	(175) 18	14	(125) 10	300	போக்குவரத்து
	S_3	21	24	(275) 13	(125) 10	400	
	b_j	200	225	275	250		

போக்குவரத்து விபரம் :

$S_1 \rightarrow D_1, S_1 \rightarrow D_2, S_2 \rightarrow D_2, S_2 \rightarrow D_4, S_3 \rightarrow D_3, S_3 \rightarrow D_4$

போக்குவரத்து செலவு

$$= (200 \times 11) + (50 \times 13) + (175 \times 18) + (125 \times 10) + (275 \times 13) + (125 \times 10)$$

= ₹ 12,075

எடுத்துக்காட்டு 10.6

வோகலின் தோராய முறையை கொண்டு கீழ்க்கண்ட போக்குவரத்து கணக்கின் அடிப்படை ஆரம்பத் தீர்வை காண்க.

கிடங்குகள் கடைகள்

	I	II	III	IV	இருப்பு (a_i)
A	5	1	3	3	34
B	3	3	5	4	15
C	6	4	4	3	12
D	4	1	4	5	19
தேவை (b_j)	21	25	17	17	

தீர்வு:

இங்கு $\sum a_i = \sum b_j = 80$

அதாவது, மொத்த இருப்புகள் = மொத்த தேவைகள். எனவே கொடுக்கப்பட்ட கணக்கானது சமநிலை போக்குவரத்து கணக்காகும்.

முதல் ஒதுக்கீடு :

	I	II	III	IV	இருப்பு a_i	நிரை வித்தியாசம்
A	5	1	3	3	34	2
B	3	3	5	4	15	1
C	6	4	4	3	12	1
D	4	(19) 1	4	5	19/0	3
தேவை b_j	21	25/6	17	17		
நிரல் வித்தியாசம்	1	2	1	1		

இரண்டாவது ஒதுக்கீடு:

	I	II	III	IV	a_i	நிரை வித்தியாசம்
A	5	(6) 1	3	3	34/28	2
B	3	3	5	4	15	1
C	6	4	4	3	12	1
b_j	21	6/0	17	17		
நிரல் வித்தியாசம்	2	2	1	1		

மூன்றாவது ஒதுக்கீடு :

	I	III	IV	a_i	நிரை வித்தியாசம்
A	5	(17) 3	3	28/11	2
B	3	5	4	15	1
C	6	4	3	12	1
b_j	21	17/0	17		
நிரல் வித்தியாசம்	2	1	1		

நான்காவது ஒதுக்கீடு :

	I	IV	a_i	நிரை வித்தியாசம்
A	5	3	11	2
B	3	4	15	1
C	6	(12) 3	12/0	3
b_j	21	17/5		
நிரல் வித்தியாசம்	2	1		

ஐந்தாவது ஒதுக்கீடு :

	I	IV	a_i	நிரை வித்தியாசம்
A	5	(5) 3	11/6	2
B	3	4	15	1
b_j	21	5/0		
நிரல் வித்தியாசம்	2	1		

ஆறாவது ஒதுக்கீடு :

	I		நிரை வித்தியாசம்
A	(6) 5	6/0	—
B	(15) 3	15/0	—
	21/0		
நிரல் வித்தியாசம்	2		

அனைத்து ஒதுக்கீடுகளும் ஒரே அட்டவணையில் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன:

	I	II	III	IV	a_i
A	(6) 5	(6) 1	(17) 3	(5) 3	34
B	(15) 3	3	5	4	15
C	6	4	4	(12) 3	12
D	4	(19) 1	4	5	19
b_j	21	25	17	17	

போக்குவரத்து விவரம்

$A \rightarrow I, A \rightarrow II, A \rightarrow III, A \rightarrow IV, B \rightarrow I, C \rightarrow IV, D \rightarrow II$

மொத்த போக்குவரத்து செலவு

$$= (6\times5)+(6+1)+(17\times3)+(5\times3)$$

$$(15\times3)+(12\times3)+(19\times1)$$

$$= 30+6+51+15+45+36+19$$

$$= ₹\ 202$$

பயிற்சி 10.1

1. போக்குவரத்து கணக்குகள் என்றால் என்ன?
2. போக்குவரத்து கணக்கின் கணித வடிவத்தை எழுதுக.
3. போக்குவரத்து கணக்கின் ஏற்புடையத் தீர்வு மற்றும் சிதைவற்ற தீர்வு என்றால் என்ன ?
4. சமநிலை போக்குவரத்து கணக்கு என்பதன் பொருள் யாது?
5. வடமேற்கு மூலை முறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்ப அடிப்படை சாத்தியமானத் தீர்வை காண்க.

	D_1	D_2	D_3	D_4	அளிப்பு
O_1	5	3	6	2	19
O_2	4	7	9	1	37
O_3	3	4	7	5	34
தேவை	16	18	31	25	

6. வடமேற்கு மூலை முறையை பயன்படுத்தி பின்வரும் போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்ப அடிப்படை சாத்தியமானத் தீர்வை காண்க.

	பெங்களூரு	நாசிக்	போபால்	டில்லி	இருப்பு
சென்னை	6	8	8	5	30
மதுரை	5	11	9	7	40
திருச்சி	8	9	7	13	50
தேவை (அலகுகள்/நாள்)	35	28	32	25	

7. மீச்சிறு செலவு முறையை பயன்படுத்தி பின்வரும் போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்ப அடிப்படைத் தீர்வைக் காண்க.

	D_1	D_2	D_3	அளிப்பு
O_1	9	8	5	25
O_2	6	8	4	35
O_3	7	6	9	40
தேவை	30	25	45	

8. வோகலின் தோராய முறையை பயன்படுத்தி பின்வரும் போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்ப அடிப்படை சாத்தியமானத் தீர்வை காண்க.

	D_1	D_2	D_3	D_4	அளிப்பு
O_1	2	3	11	7	6
O_2	1	0	6	1	1
O_3	5	8	15	9	10
தேவை	7	5	3	2	

9. வோகலின் தோராய முறையை பயன்படுத்தி பின்வரும் போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்ப அடிப்படை சாத்தியமானத் தீர்வை காண்க.

	D_1	D_2	D_3	D_4	இருப்பு
O_1	5	8	3	6	30
O_2	4	5	7	4	50
O_3	6	2	4	6	20
தேவை	30	40	20	10	

10. வடமேற்கு மூலை முறையை பயன்படுத்தி பின்வரும் போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்ப அடிப்படை சாத்தியமானத் தீர்வை காண்க.

		தொட்டி					அளிப்பு
		A	B	C	D	E	
	P	2	11	10	3	7	4
ஆதி	Q	1	4	7	2	1	8
	R	3	9	4	8	12	9
தேவை		3	3	4	5	6	

11. கொடுக்கப்பட்டுள்ள போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்ப அடிப்படைத் தீர்வை கீழ்க்கண்ட முறைகளில் காண்க:

	I	II	III	அளிப்பு
A	1	2	6	7
B	0	4	2	12
C	3	1	5	11
தேவை	10	10	10	

(i) வடமேற்கு மூலை முறை

(ii) மீச்சிறு செலவு முறை

(iii) வோகலின் தோராய முறை

12. வடமேற்கு மூலை முறையை பயன்படுத்தி பின்வரும் போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்ப அடிப்படை சாத்தியமானத் தீர்வை காண்க.

	D	E	F	C	அளிப்பு
A	11	13	17	14	250
B	16	18	14	10	300
C	21	24	13	10	400
தேவை	200	225	275	250	

10.2 ஒதுக்கீட்டுக் கணக்குகள் (Assignment Problems)

அறிமுகம்

ஒதுக்கீட்டு கணக்கு என்பது போக்குவரத்து கணக்கின் ஒரு தனிப்பட்ட கணக்காகும். ஒதுக்கீட்டு கணக்கு தீர்ப்பதில் மற்ற முறைகளை விட குன் (Kuhn, 1956) ஃபிளட் (Flood, 1956) ஆகியோர் கண்டுபிடித்த முறையானது நேரத்தைக் குறைவாகப் பயன்படுத்துகிறது. ஹங்கேரியன் கணிதவியலாளர்கள் கோனிக் (Koneig, 1950) மற்றும் ஈஜ்வரி (Egervary, 1953) இந்த முறையை நியாயப்படுத்தினார்கள். ஆதலால் இந்த முறை ஹங்கேரியன் முறை என்று பெயரிடப்பட்டது.

'm' வேலைகள் மற்றும் 'n' இயந்திரங்கள் (மனிதர்கள்) இருப்பதாக எடுத்துக் கொள்வோம். வேலைகளின் எண்ணிக்கையும் இயந்திரங்களின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருக்க வேண்டும். ஒரு இயந்திரத்திற்கு ஒரு வேலை என்ற அடிப்படையில் ஒதுக்கீடு செய்ய வேண்டும். i என்ற வேலையை j என்ற இயந்திரத்திற்கு ஒதுக்கீடு செய்யப்பட்டால் ஆகும் செலவு C_{ij} $(i = 1,2,\ldots,m$ and $j = 1,2,\ldots,n)$. நமது நோக்கமானது மொத்த ஒதுக்கீட்டு செலவை குறைக்குமாறு ஒவ்வொரு இயந்திரத்திற்கும் ஒரே ஒரு வேலையை மட்டும் ஒதுக்கீடு செய்வதாகும்.

ஒதுக்கீட்டு கணக்கு என்பது போக்குவரத்து கணக்கின் ஒரு தனிப்பட்ட கணக்காகும். இங்கு ஆதிகள் வேலைகளையும் சேருமிடம் இயந்திரங் களையும் குறிக்கும். ஒவ்வொரு ஆதிக்கும் வழங்கல் அளவு ஒரு அலகு. அதேபோல, ஒவ்வொரு சேரு மிடத்திற்கும் தேவை ஒரு அலகு மட்டுமே.

10.2.1 ஒதுக்கீட்டு கணக்கின் கணித வடிவம்:

n வேலைகளை n இயந்திரங்களுக்கு ஒதுக்கீடு செய்வதாக கொள்வோம் (ஒரு இயந்திரத்திற்கு ஒரு வேலை). C_{ij} என்பது i –வது வேலையை j –வது இயந்திரத்திற்கு ஒதுக்கீடு செய்ய ஆகும் செலவு என்க.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & i\text{-வது வேலையை } j\text{-வது இயந்திரத்திற்கு ஒதுக்கீடு செய்யப்பட்டால்} \\ 0, & i\text{-வது வேலையை } j\text{-வது இயந்திரத்திற்கு ஒதுக்கீடு செய்யவில்லையெனில்} \end{cases}$$

இயந்திரங்கள்

வேலைகள்	1	2	…	n	அளிப்பு
1	(x_{11}) C_{11}	(x_{12}) C_{12}	…	(x_{1n}) C_{1n}	1
2	(x_{21}) C_{21}	(x_{22}) C_{22}	…	(x_{2n}) C_{2n}	1
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
m	(x_{ij}) C_{n1}	(x_{ij}) C_{n2}	…	(x_{ij}) C_{nn}	1
தேவை	1	1	…	1	

எந்த ஒரு சிற்றறையிலாவது x_{ij} விடுபட்டு இருந்தால் அங்கு ஒதுக்கீடு செய்யப்படவில்லை என்பதாகும். அதாவது, $x_{ij} = 0$.

எந்த சிற்றறையில் x_{ij} இடம் பெற்றிருக்கும் அங்கு ஒதுக்கீடு செய்யப்பட்டிருக்கிறது என்பதாகும். அதாவது, $x_{ij} = 1$

ஒதுக்கீடு கணக்கை நேரிய திட்டமிடல் கணக்காக கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \, x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \; j = 1, 2, ...n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \; i = 1, 2, ...n$$

மற்றும் $x_{ij} = 0$ (அல்லது) 1 அனைத்து (i, j) என்ற கட்டுபாடுகளுக்கினங்க

10.2.2 ஒதுக்கீடு கணக்கின் தீர்வைக் காணும் வழிமுறைகள் (ஹங்கேரியன் முறை) (Solution of assignment problems (Hungarian Method))

கொடுக்கப்பட்ட அணி சதுர அணியாக இருக்க வேண்டும். அவ்வாறு இல்லையெனில் தகுந்த ஒப்புக்கான நிரல் அல்லது நிரையை சேர்த்து சதுர அணியாக மாற்ற வேண்டும். அவ்வாறு சேர்க்கப்படும் நிரல் அல்லது நிரையில் உள்ள சிற்றறைகளில் செலவு 0 என்க.

படி : 1 ஒவ்வொரு நிரையின் மீச்சிறு மதிப்பை அந்த நிரையின் எல்லா மதிப்புகளிலிருந்தும் கழிக்க வேண்டும்.

படி : 2 படி (1)–ல் கிடைத்த அணியில் ஒவ்வொரு மீச்சிறு மதிப்பையும் அந்தந்த நிரலின் அனைத்து மதிப்புகளிலிருந்தும் கழிக்க வேண்டும்.

படி : 3 ஒவ்வொரு நிரல் மற்றும் நிரையில் குறைந்தபட்சம் ஒரு பூஜ்யமாவது இருக்கிறதா என்பதை சரிபார்க்க.

(i) ஒவ்வொரு நிரையாக ஒரே ஒரு பூஜ்யம் உள்ளதா என சோதிக்கவும். அந்த பூஜ்யத்தை சுற்றி $\square$,வரைக. அந்த சிற்றறையின் நிரலிலுள்ள மற்ற அனைத்து பூஜ்யங்களையும் $(\times)$ அடித்துவிடுக.

(ii) மேற்கண்ட முறையை ஒவ்வொரு நிரலுக்கும் செய்யவும். அதாவது, ஒவ்வொரு நிரலாக ஒரே ஒரு பூஜ்யம் உள்ளதா என சோதிக்கவும். அந்த பூஜ்யத்தை சுற்றி $\square$ வரைக. அந்த சிற்றறையின் நிரையிலுள்ள மற்ற அனைத்து பூஜ்யங்களையும் $(\times)$ அடித்துவிடுக

படி 4 : ஒவ்வொரு நிரை மற்றும் நிரலிரும் ஒரே ஒரு ஒதுக்கீடு செய்யப்பட்டிருந்தால், அது உகந்த தீர்வாகும்.

குறிப்பு

(1) ஒரு நிரை(நிரல்)–ல் உள்ள அனைத்து எண்களுடனும் ஒரு எண்ணைக் கூட்டினாலும் கழித்தாலும் ஒதுக்கீடு கணக்கின் உகந்த தீர்வு மாறாது.

(2) $C_{ij} > 0$ எனில், $\sum C_{ij} \, x_{ij} = 0$ என்பது x_{ij} ஆல் பூர்த்தி செய்யப்பட்டால் அது உகந்த தீர்வாகும்.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

ஒதுக்கீடு கணக்குகளுக்கான உகந்த ஒதுக்கீடு முறையை ஹங்கேரியன் முறை நமக்கு அளிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 10.7

கீழ்க்கண்ட ஒதுக்கீட்டு கணக்கை தீர்க்க. சிற்றறைகளிலுள்ள மதிப்பானது A, B, C மற்றும் D என்ற வேலைகளை I, II, III, IV என்ற இயந்திரங்களுக்கு ஒதுக்கீடு செய்ய ஆகும் செலவு.

		இயந்திரங்கள்			
		I	II	III	IV
வேலைகள்	A	10	12	19	11
	B	5	10	7	8
	C	12	14	13	11
	D	8	15	11	9

தீர்வு:

இங்கு நிரல்களின் எண்ணிக்கையும், நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமமாக உள்ளன. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட கணக்கானது சமசீரான ஒதுக்கீடு கணக்காகும்.

தற்போது அதன் தீர்வைக் காணலாம்.

படி 1: ஒவ்வொரு நிரையில் உள்ள மீச்சிறு மதிப்பை அந்த நிரையில் உள்ள அனைத்து மதிப்புகளிலிருந்தும் கழிக்க வேண்டும்.

	I	II	III	IV
A	0	2	9	1
B	0	5	2	3
C	1	3	2	0
D	0	7	3	1

ஒவ்வொரு நிரல் மற்றும் நிரையில் குறைந்தபட்சம் ஒரு பூஜ்யமாவது இருக்கிறதா என்பதை பார்க்க. இல்லையெனில் படி 2 க்கு செல்க.

படி 2: படி (1)–ல் கிடைத்த அணியில், ஒவ்வொரு நிரலில் உள்ள மீச்சிறு மதிப்பை அந்த நிரலில் உள்ள அனைத்து மதிப்புகளிலிருந்தும் கழிக்க வேண்டும்.

	I	II	III	IV
A	0	0	7	1
B	0	3	0	3
C	1	1	0	0
D	0	5	1	1

ஒவ்வொரு நிரை மற்றும் நிரலிலும் குறைந்தபட்சம் ஒரு பூஜ்ஜியம் உள்ளதால் ஒதுக்கிடுகளை செய்யலாம்.

படி 3 (ஒதுக்கீடு):

ஒவ்வொரு நிரையாக ஒரே ஒரு பூஜ்யம் உள்ளதா என சோதிக்கவும். முதல் மூன்று நிரை களிலும் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பூஜ்ஜியங்கள் உள்ளன. நிரை *D*–ல் ஒரே ஒரு பூஜ்ஜியம் உள்ளது. அந்த பூஜ்யத்தை □ ஆல் குறியிடுக. □ குறியிட்ட நிரலிலுள்ள மற்ற அனைத்து பூஜ்யங்களையும் × ஆல் குறியிடுக.

	I	II	III	IV
A	$\cancel{0}$	0	7	1
B	$\cancel{0}$	3	0	3
C	1	1	0	0
D	$\boxed{0}$	5	1	2

படி 4: ஒவ்வொரு நிரலாக ஒரே ஒரு பூஜ்யம் உள்ளதா என சோதிக்கவும். நிரல் I–ல் ஏற்கனவே ஒதுக்கீடு செய்யப்பட்டுள்ளதால் நிரல் II–க்குச் செல்லவும். அங்கு ஒரே ஒரு பூஜ்ஜியம் உள்ளது. அந்த பூஜ்யத்தை □ –ஆல் குறியிடுக. □ குறியிட்ட நிரையில் உள்ள மற்ற அனைத்து பூஜ்யங்களையும் × ஆல் குறியிடுக..

	I	II	III	IV
A	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	7	1
B	$\cancel{0}$	3	0	3
C	1	1	0	0
D	$\boxed{0}$	5	1	2

நிரல் III –ல் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பூஜ்ஜியங்கள் உள்ளன. நிரல் IV–ல் ஒரே ஒரு பூஜ்ஜியம் உள்ளதால் , அந்த பூஜ்யத்தை □ ஆல் குறியிடுக.. □ குறியிட்ட நிரையில் உள்ள மற்ற அனைத்து பூஜ்யங்களையும் × ஆல் குறியிடுக.

	I	II	III	IV
A	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	7	1
B	$\cancel{0}$	3	0	3
C	1	1	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$
D	$\boxed{0}$	5	1	2

படி 5: மீண்டும் ஒவ்வொரு நிரையாக மேற்கண்ட முறையை தொடரவும். நிரை *A*–ல் ஏற்கனவே ஒதுக்கீடு செய்யப்பட்டுள்ளது. நிரை *B* –ல் ஒரே ஒரு பூஜ்ஜியம் உள்ளது. அந்த பூஜ்யத்தை □ –ஆல் குறியிடுக □ குறியிட்ட நிரையில் உள்ள மற்ற அனைத்து பூஜ்யங்களையும் × ஆல் குறியிடுக.

	I	II	III	IV
A	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	7	1
B	$\cancel{0}$	3	$\boxed{0}$	3
C	1	1	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$
D	$\boxed{0}$	5	1	2

அனைத்து ஒதுக்கீடுகளும் செய்யப்பட்டுள்ளன. உகந்த ஒதுக்கீடு மற்றும் மொத்த செலவு (சிறுமசெலவு):

வேலைகள்	இயந்திரங்கள்	செலவு
A	II	12
B	III	7
C	IV	11
D	I	8
மொத்த செலவு		38

உகந்த ஒதுக்கீடு செலவு (சிறும செலவு) = ₹ 38

எடுத்துக்காட்டு 10.8

5 வேலைகளை 5 நபர்களுக்கு ஒதுக்கீடு செய்யும் கணக்கைக் கருத்தில் கொள்க.

ஒதுக்கீடு செலவுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. உகந்த ஒதுக்கீடு மற்றும் மொத்த சிறும செலவைக் காண்க.

வேலை

		1	2	3	4	5
	A	8	4	2	6	1
நபர்	*B*	0	9	5	5	4
	C	3	8	9	2	6
	D	4	3	1	0	3
	E	9	5	8	9	5

தீர்வு:

இங்கு நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமமாக உள்ளன. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட கணக்கானது சமச்சீரான ஒதுக்கீடு கணக்காகும். தற்போது அதன் தீர்வைக் காணலாம்.

படி 1: ஒவ்வொரு நிரையில் உள்ள மீச்சிறு மதிப்பை அந்த நிரையில் உள்ள அனைத்து மதிப்புகளிலிருந்தும் கழிக்க வேண்டும்.

வேலை

		1	2	3	4	5
	A	7	3	1	5	0
நபர்	*B*	0	9	5	5	4
	C	1	6	7	0	4
	D	4	3	1	0	3
	E	4	0	3	4	0

ஒவ்வொரு நிரை மற்றும் நிரலிலும் குறைந்தபட்சம் ஒரு பூஜ்ஜியமாவது உள்ளதா என்பதை சோதிக்க. அவ்வாறு இல்லையெனில் படி 2 –க்கு செல்லவும்.

படி 2: படி (1)–ல் கிடைத்த அணியில், ஒவ்வொரு நிரலில் உள்ள மீச்சிறு மதிப்பை அந்த நிரலில் உள்ள அனைத்து மதிப்புகளிலிருந்தும் கழிக்க வேண்டும்.

வேலை

		1	2	3	4	5
	A	7	3	0	5	0
	B	0	9	4	5	4
நபர்	*C*	1	6	6	0	4
	D	4	3	0	0	3
	E	4	0	2	4	0

ஒவ்வொரு நிரை மற்றும் நிரலிலும் குறைந்தபட்சம் ஒரு பூஜ்ஜியம் உள்ளதால் ஒதுக்கிடுகளைச் செய்யலாம்.

படி 3 (ஒதுக்கீடு): (Assignment):

ஒவ்வொரு நிரையாக ஒரே ஒரு பூஜ்யம் உள்ளதா என சோதிக்கவும். முதல் நிரை *A*–ல் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பூஜ்ஜியங்கள் உள்ளன. நிரை *B*–ல் ஒரே ஒரு பூஜ்ஜியம் உள்ளது. அந்த பூஜ்யத்தை □–ஆல் குறியிடுக. □ குறியிட்ட நிரலில் உள்ள மற்ற அனைத்து பூஜ்யங்களையும் ×–ஆல் குறியிடுக.

வேலை

		1	2	3	4	5
	A	7	3	0	5	0
நபர்	*B*	$\boxed{0}$	9	4	5	4
	C	1	6	6	0	4
	D	4	3	0	0	3
	E	4	0	2	4	0

நிரை *C*–ல் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பூஜ்ஜியங்கள் உள்ளன. அந்த பூஜ்யத்தை □–ஆல் குறியிடுக. □ குறியிட்ட நிரலில் உள்ள மற்ற அனைத்து பூஜ்யங்களையும் ×–ஆல் குறியிடுக.

வேலை

		1	2	3	4	5
	A	7	3	0	5	0
	B	$\boxed{0}$	9	4	5	4
நபர்	C	1	6	6	$\boxed{0}$	4
	D	4	3	0	$\cancel{0}$	3
	E	4	0	2	4	0

நிரை D–ல் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பூஜ்ஜியங்கள் உள்ளன. அந்த பூஜ்யத்தை ▭–ஆல் குறியிடுக. ▭ குறியிட்ட நிரலில் உள்ள மற்ற அனைத்து பூஜ்யங்களையும் ×–ஆல் குறியிடுக.

வேலை

		1	2	3	4	5
	A	7	3	$\cancel{0}$	5	0
	B	$\boxed{0}$	9	4	5	4
நபர்	C	1	6	6	$\boxed{0}$	4
	D	4	3	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	3
	E	4	0	2	4	0

நிரை E–ல் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பூஜ்ஜியங்கள் உள்ளன. எனவே அடுத்து நாம் நிரலில் ஒதுக்கீடு செய்யலாம். நிரல் 1 ஒதுக்கீடு உள்ளது. நிரல் இரண்டில் ஒரே ஒரு பூச்சியம் உள்ளதால். அந்த பூஜ்யத்தை ▭–ஆல் குறியிடுக. ▭ குறியிட்ட நிரலில் உள்ள மற்ற அனைத்து பூஜ்யங்களையும் ×–ஆல் குறியிடுக.

வேலை

		1	2	3	4	5
	A	7	3	$\cancel{0}$	5	0
	B	$\boxed{0}$	9	4	5	4
நபர்	C	1	6	6	$\boxed{0}$	4
	D	4	3	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	3
	E	4	$\boxed{0}$	2	4	$\cancel{0}$

நிரல் 3 மற்றும் நிரல் 4–கில் ஒதுக்கீடு உள்ளது. எனவே 5–வது நிரலில் ஒரே ஒரு பூஜ்யம் உள்ளது. அந்த பூஜ்யத்தை ▭–ஆல் குறியிடுக. ▭ குறியிட்ட நிரையில் உள்ள மற்ற அனைத்து பூஜ்யங்களையும் ×–ஆல் குறியிடுக.

வேலை

		1	2	3	4	5
	A	7	3	$\cancel{0}$	5	$\boxed{0}$
	B	$\boxed{0}$	9	4	5	4
நபர்	C	1	6	6	$\boxed{0}$	4
	D	4	3	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	3
	E	4	$\boxed{0}$	2	4	$\cancel{0}$

அனைத்து ஒதுக்கீடுகளும் செய்யப்பட்டுள்ளன.
உகந்த ஒதுக்கீடு மற்றும் மொத்த சிறும செலவு:

நபர்	வேலை	செலவு
A	5	1
B	1	0
C	4	2
D	3	1
E	2	5
மொத்த செலவு		9

உகந்த ஒதுக்கீடு மொத்த செலவு (சிறும செலவு) = ₹ 9

எடுத்துக்காட்டு 10.9

கீழ்க்கண்ட ஒதுக்கீடுகணக்கினை தீர்க்க.

நபர்

		1	2	3
வேலை	P	9	26	15
	Q	13	27	6
	R	35	20	15
	S	18	30	20

தீர்வு:

நிரைகளின் எண்ணிக்கையைவிட நிரல்களின் எண்ணிக்கை குறைவாக உள்ளதால், கொடுக்கப் பட்ட கணக்கானது சமசீரற்ற ஒதுக்கீடு கணக்காகும். இதனை சமச்சீராக மாற்ற எல்லா மதிப்புகளும் பூச்சியமுள்ள ஒப்புக்கான நிரலை உருவாக்கவும். மாற்றியமைக்கப்பட்ட ஒதுக்கீடு கணக்கானது

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{நபர்} \\
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & d \end{array} \\
\text{வேலை} \begin{array}{c} P \\ Q \\ R \\ S \end{array} &
\left[\begin{array}{cccc}
9 & 26 & 15 & 0 \\
13 & 27 & 6 & 0 \\
35 & 20 & 15 & 0 \\
18 & 30 & 20 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

இங்கு 3 வேலையாட்களுக்கு 3 வேலைகளை ஒதுக்கவேண்டும்.

படி 1: ஒவ்வொரு நிரையிலும் பூச்சியம் இருப்பதால் படி 1 தேவையில்லை.

படி 2 : ஒவ்வொரு நிரலில் உள்ள மீச்சிறு மதிப்பை அந்த நிரலில் உள்ள அனைத்து மதிப்புகளிலிருந்தும் கழிக்க வேண்டும்.

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{நபர்} \\
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & d \end{array} \\
\text{வேலை} \begin{array}{c} P \\ Q \\ R \\ S \end{array} &
\left[\begin{array}{cccc}
0 & 6 & 9 & 0 \\
4 & 7 & 0 & 0 \\
26 & 0 & 9 & 0 \\
9 & 10 & 14 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

படி 3 ஒதுக்கீடு (Assignment) :

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{நபர்} \\
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & d \end{array} \\
\text{வேலை} \begin{array}{c} P \\ Q \\ R \\ S \end{array} &
\left[\begin{array}{cccc}
\boxed{0} & 6 & 9 & \cancel{0} \\
4 & 7 & \boxed{0} & \cancel{0} \\
26 & \boxed{0} & 9 & \cancel{0} \\
9 & 10 & 14 & \boxed{0}
\end{array}\right]
\end{array}
$$

ஒவ்வொரு நிரை மற்றும் நிரலில் சரியாக ஒரே ஒரு ஒதுக்கீடு உள்ளது. அனைத்து ஒதுக்கீடுகளும் செய்யப்பட்டுள்ளன. மூன்று நபர்களுக்கும் வேலைகள் ஒதுக்கப்பட்டுள்ளன. S என்ற வேலைக்கு எந்த நபரும் ஒதுக்கப்படவில்லை.

வேலை	நபர்	செலவு
P	1	9
Q	3	6
R	2	20
S	*d*	0
மொத்த செலவு		35

உகந்த ஒதுக்கீடு செலவு(சிறும செலவு) = ₹ 35

பயிற்சி 10.2

1. ஒதுக்கீடு கணக்கு என்றால் என்ன?

2. ஒதுக்கீடு கணக்கின் கணித வடிவம் தருக.

3. ஒதுக்கீடு கணக்கிற்கும், போக்குவரத்து கணக்கிற்கும் இடையேயான வேறுபாடு என்ன?

4. A, B, C மூன்று வேலைகள் U, V, W என்ற இயந்திரங்களுக்கு ஒதுக்கீடு செய்யப்பட வேண்டும். ஒவ்வொரு இயந்திரமும் ஒவ்வொரு வேலையை முடிக்க ஆகும் செலவு அணியானது கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. மொத்த செலவை குறைக்குமாறு உகந்த ஒதுக்கீடுகளை காண்க.

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{இயந்திரம்} \\
 & \begin{array}{ccc} U & V & W \end{array} \\
\text{வேலை} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} &
\left[\begin{array}{ccc}
17 & 25 & 31 \\
10 & 25 & 16 \\
12 & 14 & 11
\end{array}\right]
\end{array}
$$

(ஒரு அலகுக்கான செலவு ₹–ல்)

5. ஒரு கணினி மையத்தில் மூன்று திட்டமிடும் நிபுணர்கள் உள்ளனர். அந்த மையத்தில் மூன்று பயன்பாட்டு திட்டங்கள் ஏற்படுத்தப் படவேண்டும். மையத்தின் தலைவர் திட்டங்களை கவனமாக பரிசீலித்து, மூன்று திட்டமிடல் நிபுணர்கள் எடுத்துக் கொள்ளும் கணினி நேரத்தை மதிப்பீடு செய்கிறார்.

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{திட்டங்கள்} \\
 & \begin{array}{ccc} P & Q & R \end{array} \\
\text{திட்டநிபுணர்} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} &
\left[\begin{array}{ccc}
120 & 100 & 80 \\
80 & 90 & 110 \\
110 & 140 & 120
\end{array}\right]
\end{array}
$$

மொத்த கணினி நேரத்தை குறைக்குமாறு திட்டங்களுக்கான திட்டநிபுணர்களை ஒதுக்கீடு செய்க.

6. ஒரு பல்பொருள் அங்காடியின் தலைவரின் கீழ் பணிபுரியும் நான்கு பணியாளர்கள் நான்கு வேலைகளை செய்ய வேண்டும். ஒவ்வொரு பணியாளரும் ஒவ்வொரு வேலையையும் முடிக்கும் வேலைத்திறனில் மாறுபட்டுள்ளனர். ஒவ்வொரு பணியாளரும் ஒவ்வொரு வேலையையும் முடிக்க ஆகும் நேரம் (மணியில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன

வேலை

பணியாளர்கள்	1	2	3	4
P	8	26	17	11
Q	13	28	4	26
R	38	19	18	15
S	9	26	24	10

மொத்த நேரத்தை குறைக்குமாறு ஒவ்வொரு பணியாளருக்கும் எவ்வாறு பணிகளை ஒதுக்க வேண்டும்.

7. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள போக்குவரத்து கணக்கின் செலவு அணிக்கான உகந்த தீர்வை காண்க.

இடம்

விற்பனையாளர்	1	2	3	4
P	11	17	8	16
Q	9	7	12	6
R	13	16	15	12
S	14	10	12	11

8. A, B, C, D, E மற்றும் F என்ற திறந்தவெளி இடங்களுக்கு 1, 2, 3, மற்றும் 4 ஆகிய நான்கு வண்டிகள் சென்று நிறுத்த இடங்களை ஒதுக்கவேண்டும். நான்கு வண்டிகள் கொண்டு சென்று நிறுத்த ஆகும் பயண செய்த தூரம் குறைக்குமாறு ஒதுக்கீடு செய்க. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அணியானது தூரத்தை குறிக்கிறது.

	1	2	3	4
A	4	7	3	7
B	8	2	5	5
C	4	9	6	9
D	7	5	4	8
E	6	3	5	4
F	6	8	7	3

10.3 தீர்மானக் கோட்பாடு (Decision Theory)

அறிமுகம்

தீர்மானக் கோட்பாட்டின் முதன்மையான தொடர்பானது மக்கள் மற்றும் அமைப்புகள் மேற்கொள்ளப்படும் தீர்வுகளுக்கு உதவி புரிதலாகும். இது தீர்வுகளுக்கான முக்கிய முடிவுகளை மேற்கொள்ள பொருள் தருகின்ற கருத்து உணர்வுகளை திரட்டித் தருகிறது. தீர்மானித்தல் என்பது எதனை குறிப்பிடுகிறது எனில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சூழ்நிலையில் பல்வேறான செயற்பாங்குகளில் சிறந்ததொரு செயற்பாங்கினை தேர்வு செய்வதாகும்.

திட்டமிடுதல், அமைப்புகள், வழிகாட்டுதல், உத்திர விடுதல் மற்றும் கட்டுப்படுத்துதல் என பல்வேறான தோற்றங்களை மேலாண்மையாளர்கள் கருத்தில் கொள்ள வேண்டும். பலவிதமான செயற் பாங்குகளைச் செயல்படுத்தும் போது மேலாண்மை யாளர்கள் பல்வேறான சூழ்நிலைகளை எதிர் கொண்டு அவற்றில் சிறந்த ஒன்றைத் தேர்வு செய்தல் வேண்டும். இவ்வாறு சிறந்த ஒன்றைத் தேர்வு செய்தல் என்பதை தொழில் நுட்ப சொல்லால் கூறும் பொழுது தீர்மானம் மேற்கொள்வது அல்லது தீர்மானம் எடுத்துக் கொள்வது எனப்படும். தீர்மானம் மேற்கொள்வது என்பது "பல்வேறான செயற்பாங்குகளின் தொகுதியிலிருந்து சிறந்த செயற்பாங்கை தேர்வு செய்வதாகும்" என வரையறுக்கப்படுகிறது. அவ்வாறு தேர்வு செய்யப் பட்ட செயற்பாங்கு தீர்மானம் மேற்கொள்பவரின் நோக்கங்களைத் திருப்தி செய்வதாக எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது.'

சிறந்த செயற்பாங்கினைத் தேர்வு செய்வதற்கு புள்ளியியல் அறிவு உத்திமுறை உதவி புரிகின்றது. ஐயப்பாட்டு நிலையில் உகந்ததொரு தீர்வினை தேர்வு செய்ய புள்ளியியல் தீர்மானக் கோட்பாடு வழிகாட்டுகிறது. இத்தகைய சூழ்நிலையில் நிகழ்தகவுக் கொள்கை இன்றியமையாத பங்கு வைக்கின்றது. ஐயப்பாட்டு நிலை மற்றும் இடையூறு உள்ள நிலையில் தீர்மானக் கோட்பாடு நிலைக்கு நிகழ்தகவு கொள்கை மிக அதிக அளவில் அடிக்கடி பயன்படுகிறது.

புள்ளியியல் தீர்மானக் கோட்பாடானது காரண காரியத் தொடர்புடைய பிரச்சினை அமைப்புகளை செயற்பாங்கின் மாற்று நடவடிக்கை, சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடுகள், நிகழக்கூடிய விளைவுகள் மற்றும் ஒவ்வொரு விளைவுக்கான நிகழக் கூடிய அளித்தல்களையும் வெளிப்படுத்துகிறது. தற்பொழுது பிரச்சினைக்கான தீர்வினை தீர்மானக் கோட்பாடு அணுகு முறையில் தீர்வு காண அதன் தொடர்புடைய கருத்துக்களை விளக்குவோம்.

10.3.1 பொருள்

முடிவு எடுப்பவர் : முடிவு எடுப்பவர் என்பது ஒரு தனி நபரோ அல்லது ஒரு குழுவிலுள்ள நபர்களோ, கிடைக்கக் கூடிய செயற்பாங்கு நடவடிக்கைகளில் தகுந்ததொரு செயற்பாங்கு நடவடிக்கையை தேர்ந்தெடுப்பதற்கு பொறுப்பான வரை குறிப்பது ஆகும்.

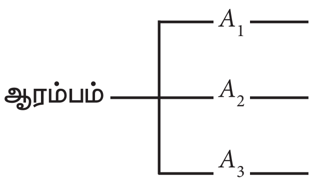
செயற்பாங்கு (அல்லது செயற்பாங்கின் நடவடிக்கைகள்) : பிரச்சினைகளுக்கு தீர்மானக் கோட்பாட்டின் பங்கானது, மாற்று நடவடிக்கை களைக் கொண்ட செயற்பாங்குகளிலிருந்து ஒரு செயற்பாங்கினைத் தேர்வு செய்தலாகும். இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட செயற்பாங்குகளைக் கொண்ட பிரச்சனை சூழ்நிலையில் தீர்மானக் கோட்பாட்டைக் கொண்டு ஒரு செயற்பாங்கு நடவடிக்கையை தேர்வு செய்ய அவசியமாகிறது. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ எனக் கொண்டுள்ள செயற்பாங்குகள் அல்லது செயல்கள் என எடுத்துக் கொண்டால், அனைத்து செயற்பாங்குகளின் மொத்தமானது 'செயற்பாங்குவெளி' (Action space) எனவும், இதனை A என குறிப்பிடப்படுகிறது. மூன்று செயற்பாங்குகள்e $a_1, a_2, a_3, \ldots$ எனில் A = செயற்பாங்குவெளி $= a_1, a_2, a_3)$ அல்லது $A = (A_1, A_2, A_3)$. செயற்பாங்குவெளி அல்லது செயற்பாங்குகளைக் கீழ்க்கண்ட அணி வாயிலாக நிரையாகவோ அல்லது நிரல்களாகவோ தெரிவு செய்யலாம்.

செயற்பாங்கு
A_1
A_2
$\ldots$
A_n

(அ)

செயற்பாங்கு	A_1	A_2	$\ldots$	A_n

செயற்பாங்கு அல்லது செயற்பாங்குகளை ஒரு மர வடிவ விளக்கப்படம் மூலமாகவும் காண்பிக்கலாம்.



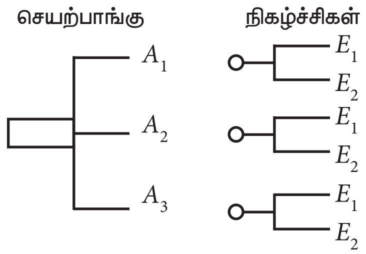
நிகழ்ச்சிகள் (அல்லது சூழ்நிலைகளின் நிலைப்பாடு):

தீர்மானித்தலின் முடிவு எடுப்பவரின் கட்டுப் பாட்டிற்கு வெளியே உள்ள பொழுது கொடுக்கப் பட்டுள்ள செயற்பாங்கு எந்த அளவு வெற்றி அடைந்துள்ளது என்பதை நிர்ணயம் செய்ய நிகழ்கின்ற நிகழ்ச்சிகள் அடையாளம் காண்பிக் கின்றது. இத்தகைய நிகழ்ச்சிகளை சூழ்நிலைகளின் நிலைப்பாடு அல்லது விளைவுகள் என அழைக்கின்றோம். ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளுக்கு நிர்ணயிக்கப்பட்ட கால அளவில் சந்தையில் தேவையின் அளவை நிகழ்ச்சி அல்லது சூழ்நிலையின் நிலைப்பாட்டிற்கு ஓர் எடுத்துக் காட்டாகும்.

ஒரு கணத்தின் வாயிலாக சூழ்நிலைகளின் நிலைப்பாட்டைக் கீழ்க்கண்ட ஏதேனும் ஒரு முறையில் தெரிவு செய்யலாம்.

$S = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ அல்லது $E = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ அல்லது $\Omega = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$

எடுத்துக்காட்டாக ஒரு சந்தையில் சலவைத்தூள் விற்பனைக்கு வருகையில் அதனை அதிகப்படியான அளவில் விரும்புகின்றவர் களின் விளைவுகள் செல்லாதது (விளைவு θ_1) அல்லது வெளிப்பாடு வாடிக்கையாளர்கள் கவனத்திற்கு (விளைவு θ_2) அல்லது ஒரு சிறிய விகிதாச்சாரா வாடிக்கையாளர்களால் விரும்பப் படுவது அதனை 25% என்போம். (விளைவு θ_3)



ஆகவே $\Omega = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$. மர வடிவ விளக்கப்படத்தில் செயற்பாங்குகளுக்கு அடுத்த இடத்தில் குறிக்கப்படுகிறது. ஏற்படுகின்ற நிகழ்ச்சிகள் மூலம் மற்றொரு செயற்பாங்கு நமக்குக் கிடைப்பதை கீழ்க்கண்டவாறு குறிப்பிடலாம்.

இதனை அணி வாயிலாக, இரு வழிகளில், ஏதேனும் ஒரு வழியில் தெரிவு செய்யலாம்.

சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடுகள் → செயற்பாடுகள் ↓	S_1	S_2
A_1 A_2		

அல்லது

செயற்பாடுகள் → சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடுகள் ↓	$A_1\, A_2, \ldots A_n$
S_1 S_2	

அளித்தல்கள் (Pay-off): அளித்தல் என்பது ஒவ்வொரு சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடுகளின் செயற்பாங்கு சேர்வுகளின் முடிவானது ஒவ்வொரு சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடுகளின் விளைவு மற்றும் கணநேரமே நிலைக்கின்ற ஒவ்வொரு விளைவின் ஆதாயம் அல்லது இழப்பு ஆகும். இதை எண் அளவையில் குறிப்பிடப்பட வேண்டும் எனக் குறிக்கின்றது.

அளித்தல்கள் பண சேமிப்பு அல்லது நேர சேமிப்பு எனவும் குறிப்பிடப்படுகிறது. பொதுவாக மாற்று நடவடிக்கைகள் மற்றும் n சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடுகள் இருக்குமானால் அதன் விளைவுகளானது $k \times n$ எண்ணிக்கை அல்லது அளித்தல்கள் ஆகும். இத்தகைய $k{\times}n$ அளித்தல்களை, மிக வசதியாக $k \times n$ அளித்தல்கள் அட்டவணையாகத் தெரிவு செய்யலாம்.

சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடுகள்	தீர்மானத்தின் மாற்ற நடவடிக்கை			
	A_1	A_2	....	A_k
E_1	a_{11}	a_{12}	....	a_{1k}
E_2	a_{21}	a_{22}	....	a_{2k}
.	.	.	....	.
.	. .	. .	....	. .
E_n	a_{n1}	a_{n2}	....	a_{nk}

மேற்கண்ட அளித்தல் அட்டவணையை அளித்தல் அணி எனக்கூறலாம். இங்கு a_{ij} என்பது j வது மாற்று உத்தியை தேர்வு செய்யும் பொழுது i வது நிகழ்வின் நிபந்தனை வெளிப்பாடாகும்.

10.3.2 சூழ்நிலை – நிச்சயமான சூழ்நிலை மற்றும் நிச்சமற்ற சூழ்நிலை (Situations- Certainty and uncertainty)

தீர்மானம் மேற்கொள்வதின் வகைகள் : கிடைக்கக்கூடிய நிகழ்ச்சிகளுக்கான விவரங்களை அடிப்படையாகக் கொண்டும் மற்றும் தீர்மானத்தின் சூழ்நிலைக்கு ஏற்றவாறும் தீர்மானம் மேற்கொள்ளப் படுகிறது. இரண்டு வகையான சூழ்நிலைகளில் தீர்மானம் மேற்கொள்ளப்படுகிறது. நிச்சயமான நிலை, நிச்சயமற்ற நிலை

நிச்சயமான சூழ்நிலையில் தீர்மானம் மேற்கொள்வது: இங்கு தீர்மானம் மேற் கொள்பவருக்கு தான் தேர்வு செய்யும் தீர்மானங் களுக்கு அதனால் ஏற்படும் விளைவுகளை பற்றிய முழுமையான தகவல்களை நிச்சயமாக தெரிந்திருப்பார். இத்தகைய தீர்மான அமைப்பில் ஒரே ஒரு சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடு மட்டுமே நிகழக்கூடும் என அனுமானிக்கப்படுகிறது.

நிச்சயமற்ற நிலையில் தீர்மானம் எடுத்தல் (நிகழ்தகவு கொடுக்கப்படாமல் இருக்கையில்): நிபந்தனைகளின் அடிப்படையில் நிச்சயமற்ற நிலையில் அளித்தல்கள் மட்டுமே தெரியும் மற்றும் ஒவ்வொரு சூழ்நிலைப்பாட்டின் நிகழ்தகவுத் தன்மை தெரிவதில்லை. இத்தகைய சூழ்நிலை ஒரு புதிய பொருளை சந்தையில் அறிமுகப்படுத்தும் பொழுது அல்லது புதியதாக தொழிற்சாலையிலுள்ள ஒரு இயந்திரத் தொகுதியை நிறுவும் பொழுது ஏற்படலாம். நிபந்தனைகளின் அடிப்படையில் பல வகையான தீர்மானித்தல் அளவைகள் கீழ்க்கண்டவாறு நமக்கு கிடைக்கின்றது.

10.3.3 மீச்சிறுவின் மீப்பெரு மதிப்பு மற்றும் மீப்பெருவின் மீச்சிறு மதிப்பு (Maximin and Minimax strategy)

மீச்சிறுவின் மீப்பெரு மதிப்பு (Maximin criteria)

இந்த தீர்மான அளவையானது எடுக்கப்பட்ட செயற்பாங்கின் நடவடிக்கையில் நிகழக் கூடிய அளித்தல்களின் மீப்பெரு மதிப்புகளில் மீச்சிறு மதிப்பாகும். இத்தீர்மான அளவை மாற்று உத்திகளால் நிகழக் கூடிய மிகக் குறைந்த மதிப்பு குறிக்கின்றது. அதனால் இதனை பாதகமான தீர்மான அளவை எனவும் கூறப்படுகிறது. இதன் செயல் முறையானது

(i) ஒவ்வொரு மாற்று நடவடிக்கைக்கும் குறைந்த பட்ச விளைவை தீர்மானிக்க வேண்டும்.

(ii) இவற்றில் சிறந்தொரு தொடர்புடைய மாற்று நடவடிக்கையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

மீப்பெரு மதிப்பின் மீச்சிறு மதிப்பு (Minimax criteria)

இந்த தீர்மான அளவையானது எடுக்கப்பட்ட செயற்பாங்கின் நடவடிக்கையில் நிகழக் கூடிய அளித்தல்களில் மீச்சிறு மதிப்புகளில் மீப்பெரு மதிப்பாகும். இத்தீர்மான அளவை மாற்று உத்திகளால் நிகழக் கூடிய மிக அதிக மதிப்பு குறிக்கின்றது. இதன் செயல் முறையானது

(i) ஒவ்வொரு செயற்பாட்டிற்கும் (உத்திக்கும்) அதிக பட்ச மதிப்பை கண்டறிக.

(ii) இவைகளில் மிகச்சிறிய மதிப்பைக் கொண்ட செயற்பாட்டை (மாறுபட்ட) தேர்வு செய்க.

எடுத்துக்காட்டு 10.10

கீழ்க்கண்ட அளித்தல் (இலாபம்) அணியை கருதுக.

செயற்பாடு	சூழ்நிலை (S_1)	(S_2)	(S_3)	(S_4)
A_1	5	10	18	25
A_2	8	7	8	23
A_3	21	18	12	21
A_4	30	22	19	15

சூழ்நிலைப்பாட்டின் நிகழ்வுகளுக்கு மீச்சிறுவின் மீப்பெரு விதியின்படி சிறந்த செயல்பாட்டை காண்க.

தீர்வு:

செயற்பாடு	சூழ்நிலை				மீச்சிறுமதிப்பு
	(S_1)	(S_2)	(S_3)	(S_4)	
A_1	5	10	18	25	5
A_2	8	7	8	23	7
A_3	21	18	12	21	12
A_4	30	22	19	15	15

(5,7,12,15) –இன் மீப்பெரு மதிப்பு = 15 எனவே சிறந்த செயல்பாடு A4 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.11

ஒரு வியாபாரி மூன்று மாற்று நடவடிக்கைகளைத் தேர்வு செய்வதற்கான வாய்ப்பு உள்ளது. ஒவ்வொரு மாற்று நடவடிக்கைக்கும் இயலக் கூடிய நான்கு நிகழ்வுகள் உள்ளன. ஒவ்வொரு செயல்–நிகழ்வு சேர்கைக்கான நிபந்தனை பங்களிப்பு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மாற்று நடவடிக்கை	அளித்தல்கள் – நிபந்தனை நிகழ்வுகள்			
	A	B	C	D
X	8	0	-10	6
Y	-4	12	18	-2
Z	14	6	0	8

வியாபாரி மீச்சிறுவின் மீப்பெரு கோட்பாட்டினை பின்பற்றுகிறார் எனில் அவர் எந்த மாற்று நடவடிக்கையை தேர்ந்தெடுக்கிறார் என்பதை கண்டுப்பிடிக்கவும்.

தீர்வு:

மாற்று நடவடிக்கை	அளித்தல்கள் – நிபந்தனை நிகழ்வுகள்				மீச்சிறு அளித்தல் கட்டுபாடு
	A	B	C	D	
X	8	0	-10	6	-10
Y	-4	12	18	-2	-4
Z	14	6	0	8	**0**

$(-10,-4,\ 0)$ இன் மீப்பெரு மதிப்பு = 0. எனவே Z என்ற மாற்று நடவடிக்கையை வியாபாரி தேர்ந்தெடுப்பார்.

எடுத்துக்காட்டு 10.12

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளித்தல் கட்டுபாடு அணி

மாற்று நடவடிக்கை	அளித்தல்கள் – நிபந்தனை நிகழ்வுகள்			
	A_1	A_2	A_3	A_4
E_1	7	12	20	27
E_2	10	9	10	25
E_3	23	20	14	23
E_4	32	24	21	17

மீப்பெருவின் மீச்சிறு விதிப்படி சிறந்த மாற்று நடவடிக்கையை காண்க.

தீர்வு:

மாற்று நடவடிக்கை	அளித்தல்கள் – நிபந்தனை நிகழ்வுகள்				மீப்பெரு அளித்தல் கட்டுபாடு
	A_1	A_2	A_3	A_4	
E_1	7	12	20	27	27
E_2	10	9	10	25	25
E_3	23	20	14	23	23
E_4	32	24	21	17	32

(27, 25, 23, 32) இன் மீச்சிறு மதிப்பு = 23. எனவே $E3$ என்பது சிறந்த மாற்று நடவடிக்கையாகும்.

பயிற்சி 10.3

1. கொடுக்கப்பட்டுள்ள அணிக்கான உகந்த வியூகத்தை (i) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு மற்றும் (ii) மீப்பெருவின் மீச்சிறு ஆகியவற்றை பயன்படுத்தி காண்க.

வியூகம்	சூழ்நிலைகளின் நிலைப்பாடுகள்	
	E_1	E_2
S_1	40	60
S_2	10	–20
S_3	–40	150

2. ஒரு விவசாயி தனது 100 ஏக்கர் பண்ணையில் மூன்று வகையான பயிர்களைப் பயிரிடத் திட்டமிட்டுள்ளார். இலாபமானது மழை மற்றும் பருவ நிலையைப் சார்ந்திருக்கும். அந்த விவசாயி மழை அளவை அதிகம், சராசரி மற்றும் குறைவு என மூன்று வகையாக வகைப் படுத்துகிறார். ஒவ்வொரு வகையான பயிரிலும் அவர் எதிர்பார்க்கும் இலாபம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மழையளவு	மதிப்பிடப்பட்ட விற்பனை (அலகுகளில்)		
	பயிர் A	பயிர் B	பயிர் C
அதிகம்	8000	3500	5000
சராசரி	4500	4500	5000
குறைவு	2000	5000	4000

எந்த வகையான பயிரை அவர் பயிரிடுவார் என்பதை முடிவு செய்ய (i) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு மற்றும் (ii) மீப்பெருவின் மீச்சிறு ஆகியவற்றை பயன்படுத்தி காண்க.

3. ஹிந்துஸ்தான் நிறுவனத்தின் ஆராய்ச்சி துறை மூன்று வகையான ஷாம்புகளை அறிமுகபடுத்த சந்தைப்படுத்தும் துறைக்கு நிதி ஒதுக்க பரித்துரைக்கிறது. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள வெவ்வேறான விற்பனை நிலையில் எதிர்பார்க்கப்படும் அளித்தல்களுக்கு ஏற்ப சாம்புகளை சந்தைப்படுத்துகிறது.

ஷாம்புகளின் வகைகள்	மதிப்பிடப்பட்ட விற்பனை (அலகுகளில்)		
	15000	10000	5000
முட்டை ஷாம்பு	30	10	10
கிளினிக் ஷாம்பு	40	15	5
டீலக்ஸ் ஷாம்பு	55	20	3

சந்ததைப்படுத்தும் மேலாளரின் முடிவு என்ன என்பதை (i) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு மற்றும் (ii) மீப்பெருவின் மீச்சிறு ஆகியவற்றை பயன்படுத்தி காண்க.

4. கொடுக்கப்பட்ட அளித்தல் அணியின் உகந்த தீர்வை (i) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு மற்றும் (ii) மீப்பெருவின் மீச்சிறு ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி காண்க.

செயற்பாங்கு	சூழ்நிலைகளின் நிலைப்பாடுகள்			
	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	14	9	10	5
A_2	11	10	8	7
A_3	9	10	10	11
A_4	8	10	11	13

பயிற்சி 10.4

ஏற்புடைய விடையைத் தெரிவு செய்க:

1. போக்குவரத்து கணக்கு எப்பொழுது சமநிலை யற்றது?
   (a) மொத்த வழங்கல் $\neq$ மொத்த தேவை
   (b) மொத்த வழங்கல் = மொத்த தேவை
   (c) $m = n$
   (d) $m+n-1$

2. சீரற்ற தீர்வில் ஒதுக்கீட்டு அறைகளின் எண்ணிக்கை ஆனது.
   (a) $m+n-1$ –க்கு சமம்
   (b) $m+n+1$–க்கு சமம்
   (c) $m+n-1$–க்கு சமமற்றது
   (d) $m+n+1$–க்கு சமமற்றது

3. சீரான தீர்வில் ஒதுக்கீட்டு அறைகளின் எண்ணிக்கை ஆனது
   (a) $m+n-1$–க்கு சமம்
   (b) $m+n+1$ –க்கு சமமற்றது
   (c) $m+n-1$ –ஐ விட சிறியது
   (d) $m+n+1$ –ஐ விட பெரியது

4. வோகலின் தோராய முறையில் உள்ள பெனாலிட்டி என்பது அந்த நிரை/நிரலுள்ள எதன் வித்தியாசத்தை குறிக்கிறது.
   (a) மிகப்பெரிய இரண்டு எண்கள்
   (b) மிகப்பெரிய மற்றும் மிகச்சிறிய எண்கள்
   (c) மிகச்சிறிய இரண்டு எண்கள்
   (d) இவற்றில் ஏதுவுமில்லை

5. ஒதுக்கீடு கணக்கில் எந்த ஒரு நிரை மற்றும் நிரலிலும் அடிப்படை ஒதுக்கீடுகளின் எண்ணிக்கை
   (a) ஒன்றும் மட்டும்
   (b) ஒன்றிக்கு மேல்
   (c) ஒன்றைவிட குறைவாக
   (d) இவற்றில் ஏதுவுமில்லை

6. வடமேற்கு மூலை என்பதனை குறிப்பது ________
   a) மேல் இடது மூலை
   (b) மேல் வலது மூலை
   (c) கீழ் வலது மூலை
   (d) கீழ் இடது மூலை

W5E48H

7. சில நேரங்களில் ________________ முறையானது போக்குவரத்து கணக்கின் உகந்த தீர்வாக அமையும்
   (a)வடமேற்கு மூலை முறை
   (b) மீச்சிறு மதிப்பு முறை
   (c) வோகலின் தோராய முறை
   (d) நிரையின் சிறும முறை

8. ஒதுக்கீட்டு கணக்கில் தீர்மான மாறி x_{ij} மதிப்பு _________.
   (a) 1
   (b) 0
   (c) 1 அல்லது 0
   (d) மேற்கூறிய எதுவுமில்லை

9. ஒதுக்கீடு கணக்கில் வழங்கல் மற்றும் சேருமிடம் சமமாக இல்லாவிட்டால் அவை
   (a) சமமானது (b) சமச்சீரற்றது
   (c) சமச்சீர்ரானது (d) சமநிலையற்றது

10. ஒதுக்கீடு கணக்கில் ஒப்புக்கான நிரை அல்லது ஒப்புக்கான நிரல் உருவாக்கு வதற்கான நோக்கம்
    (a) தீர்வை சீர்குலைப்பதிலிருந்து தடுக்கிறது
    (b) மொத்த செயல்கள் மற்றும் மொத்த வளங்களை சமப்படுத்த
    (c) ஒப்புக்கான பிரச்சினையை பிரதிநிதிப் படுத்துவதற்கான ஒரு வழிமுறையை வழங்குகிறது
    (d) மேலே கூறிய அனைத்தும்

11. ஒரு ஒதுக்கீடு கணக்கின் தீர்வானது உகந்த தீர்வாக இருக்க
    (a) ஒவ்வொரு நிரை மற்றும் நிரலில் ஒதுக்கீடு இல்லை
    (b) ஒவ்வொரு நிரை மற்றும் நிரலானது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட ஒதுக்கீடு
    (c) ஒவ்வொரு நிரை மற்றும் நிரலானது ஒன்றுக்கு குறைவான ஒதுக்கீடு
    (d) ஒவ்வொரு நிரை மற்றும் நிரலில் ஒரே ஒரு ஒதுக்கீடு

12. மூன்று வேலைகள் மற்றும் நான்கு வேலையாட்கள் உள்ளடக்கிய ஒதுக்கீட்டு கணக்கில் சாத்தியமான ஒதுக்கீடுகளின் எண்ணிக்கை
    (a) 4 (b) 3 (c) 7 (d) 12

13. தீர்மான கோட்பாடு எதன் தொடர்புடையது
   (a) கிடைக்ககூடிய தகவல்களின் அளவு
   (b) நம்பகத்தன்மைகொண்டதீர்மானத்தை அளவீடு செய்வது
   (c) வரிசைத் தொடர் பிரச்சினைகளுக்கு உகந்த தீர்மானங்களை தேர்ந்தெடுப்பது
   (d) மேற்கூறிய அனைத்தும்

14. சூழ்நிலைகளில் தீர்மானம் மேற்கொள்வதின் வகை.
   (a) நிச்சயமான
   (b) நிச்சயமற்ற
   (c) இடர்பாடு
   (d) மேலே கூறிய அனைத்தும்

இதர கணக்குகள்

1. S_1, S_2, S_3, S_4 என்ற நான்கு தொழிற்சாலைகளிலிருந்து $D1$, $D2$, $D3$ என்ற கிடங்களுக்கு அனுப்படும் பொருள்களுக்கான செலவு, அளிப்பு மற்றும் தேவை விவரங்கள் கீழே உள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

	D_1	D_2	D_3	அளிப்பு
S_1	2	7	14	5
S_2	3	3	1	8
S_3	5	4	7	7
S_4	1	6	2	14
தேவை	7	9	18	

ஆரம்பத் தீர்வினை வடமேற்கு மூலை முறையை பயன்படுத்தி காண்க. இந்த தீர்வுக்கான மொத்த செலவையும் காண்க.

2. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்ப அடைப்படை ஏற்புடைய தீர்வினை (அ) மீச்சிறு செலவு முறை (ஆ) வோகலின் தோராயா முறையில் காண்க.

சேருமிடம்

	D_1	D_2	D_3	D_4	கிடைக்க பெறுவது
O_1	5	8	3	6	30
O_2	4	5	7	4	50
O_3	6	2	4	6	20
தேவை	30	40	20	10	

3. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்ப அடிப்படை ஏற்புடைய தீர்வினை அ) வடமேற்கு மூலை விதி முறை (ஆ) மீச்சிறு செலவு முறை ஆகியவற்றில் காண்க.

சேருமிடம்

வளங்கள்	D_1	D_2	D_3	அளிப்பு
S_1	9	8	5	25
S_2	6	8	4	35
S_3	7	6	9	40
தேவை	30	25	45	

4. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள போக்குவரத்து கணக்கில் ஆரம்ப அடிப்படை ஏற்புடைய தீர்வினை வோகலின் தோராய முறையில் காண்க.

சேருமிடம்

ஆரம்பிக்கு மிடம்	D_1	D_2	D_3	D_4	அளிப்பு
O_1	2	3	11	7	6
O_2	1	0	6	1	1
O_3	5	8	15	9	10
தேவை	7	5	3	2	

5. ஒரு வாடகை மகிழுந்து நிறுவனம் ஒரு மகிழுந்து நிறுத்த a, b, c, d மற்றும் e என்ற பணிமனைகள் உள்ளன. A, B, C, D மற்றும் E என்ற ஐந்து வளாகங்களில் உள்ள வடிக்கையாளர்கள் ஒவ்வொருக்கும் ஒரு மகிழுந்து தேவைப்படுகிறது. கீழே உள்ள தொலைவு அணியானது பணிமனை (ஆரம்பிக்குமிடம்) மற்றும் வளாகங்கள் (சென்றடையுமிடம்) ஆகியவற்றின் தொலைவு கொடுக்கப்படடுள்ளது.

	a	b	c	d	e
A	160	130	175	190	200
B	135	120	130	160	175
C	140	110	155	170	185
D	50	50	80	80	110
E	55	35	70	80	105

பயணதூரத்தைக் குறைக்கும் வகையில் வடிகையாளர்களுக்கு மகிழுந்துகளை எவ்வாறு ஒதுக்கவேண்டும்.

6. வாடகை டிரக் சேவை நிறுவனமானது நகரங்கள் 1,2,3,4,5 மற்றும் 6 என்ற நகரங்களில் தேவைக்கு அதிகமாக ஒரு டிரக் உள்ளது. மேலும் 7,8,9,10,11 மற்றும் 12 என்ற நகரங்களில் ஒரு டிரக் பற்றாக்குறை உள்ளது. டிரக் அதிகமாக உள்ள நகரங்களிலிருந்து பற்றாக்குறை உள்ள நகரங்களுக்கிடையான தொலைவு (கிலோ மீட்டரில்) கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளது.

வரை

இருந்து	7	8	9	10	11	12
1	31	62	29	42	15	41
2	12	19	39	55	71	40
3	17	29	50	41	22	22
4	35	40	38	42	27	33
5	19	30	29	16	20	33
6	72	30	30	50	41	20

பயணத்தின் மொத்த தூரத்தைக் குறைக்குமாறு டிரக் எவ்வாறு பிரிக்கப்படவேண்டும்

7. ஒரு நபர் பங்கு, பத்திரங்கள், மற்றும் கடன் பத்திரங்கள் ஆகிய மாற்று முதலீட்டுத் திட்டங்களில் ஏதேனும் ஒன்றில் முதலீடு செய்ய விரும்புகிறார். மூன்று சாத்தியமான பொருளாதார நிலைமைகளில் அடிப்படையில் பணம் செலுத்தும் அணி பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மாற்று	பொருளாதார நிலைமைகள்		
	அதிக வளர்ச்சி (₹)	இயல்பான வளர்ச்சி (₹)	மெதுவான வளர்ச்சி (₹)
பங்குகள்	10000	7000	3000
பத்திரங்கள்	8000	6000	1000
கடன் பத்திரங்கள்	6000	6000	6000

பின்வரும் அளவுகோல்களைப் பயன்படுத்தி சிறந்த முதலீடு திட்டத்தைத் தீர்மானிக்க.

(i) சிறுமத்தில் பெருமம்

(ii) பெருமத்தில் சிறுமம்.

தொகுப்புரை

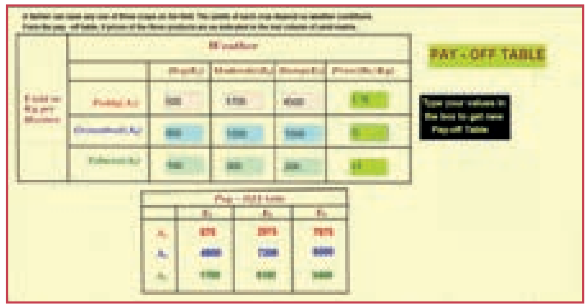
- ஒரு போக்குவரத்து கணக்கில் மொத்த அளிப்புகளும், மொத்த தேவைகளும் சமமாக இருந்தால் அது சமநிலை போக்குவரத்து கணக்காகும்.அவ்வாறு இல்லையெனில் அது சமநிலையற்ற போக்குவரத்து கணக்காகும்.
- **ஏற்புடையத் தீர்வுகள்**: கட்டுப்பாடுகளை பூர்த்தி செய்யக்கூடிய குறை குறியற்ற $x_{ij}(i=1,2,..,m, j=1,2,\ldots n)$ ன் மதிப்புகள் போக்குவரத்து கணக்குகளின் ஏற்புடையத் தீர்வுகளாகும்.
- **அடிப்படை ஏற்புடையத் தீர்வு**: m நிரைகள் மற்றும் n நிரல்கள் கொண்ட போக்குவரத்து கணக்கின் ஏற்புடையத் தீர்வு $m+n$-1 ஒதுக்கீடுகளுக்கு மிகாமல் இருந்தால் அது அடிப்படை ஏற்புடையத் தீர்வு எனப்படும்.
- **உகந்த தீர்வு**: மொத்த போக்குவரத்து செலவினை குறைக்கக் கூடிய ஏற்புடையத் தீர்வு என்பது உகந்த தீர்வு எனப்படும்.
- **சிதைவற்ற அடிப்படை ஏற்புடையத் தீர்வு:** சிதைவற்ற அடிப்படை தீர்வு என்பது போக்குவரத்து கணக்கின் ஏற்புடையத் தீர்வில் சரியாக ஒதுக்கீடுகள் ஒன்றை ஒன்று சாரா நிலையில் அமைந்ததாகும்.
- **சிதைந்த தீர்வு:** போக்குவரத்து கணக்கின் ஏற்புடையத் தீர்ப்பில் ஒதுக்கீடுகளின் எண்ணிக்கை m+n–1க்கு குறைவாக இருந்தால் அது சிதைந்த தீர்வு எனப்படும்
- ஒதுக்கீட்டு கணக்கில் நிரைகளின் எண்ணிக்கை மற்றும் நிரல்களின் எண்ணிக்கை சமமாக இருக்கவேண்டும்.
- ஒரு நிரை(நிரல்)–ல் உள்ள அனைத்து எண்களுடனும் ஒரு எண்ணைக் கூட்டினாலும் கழித்தாலும் ஒதுக்கீடு கணக்கின் உகந்த தீர்வு மாறாது.
- $C_{ij} > 0$ எனில், $\sum C_{ij}\, x_{ij} = 0$ என்பது (x_{ij}) ஆல் பூர்த்தி செய்யப்பட்டால் அது உகந்த தீர்வாகும்.

கலைச்சொற்கள் (GLOSSARY)

ஆரம்ப அடிப்படை ஏற்புடையத் தீர்வு	Initial basic feasible solution
இழப்பு ஈட்டியப்பு	Pay off
உகந்த தீர்வு	Optimum solution
உத்தி	Strategy
ஏற்புடையத் தீர்வு	Feasible solution
ஒதுக்கீடு கணக்குகள்	Assignment problems
குறைந்த விலை முறை	Least cost method
சிதைந்த	Degenerate
சிதைவற்ற	Non–degenerate
சேருமிடம்	Destination
தோராயமாக	Approximation
போக்குவரத்து செலவு	Transportation cost
போக்குவரத்து கணக்குகள்	Transportation problems
முடிவு கோட்பாடுகள்	Decision theory
வட மேற்கு மூலை முறை	North West–Conner method

இணையச் செயல்பாடு

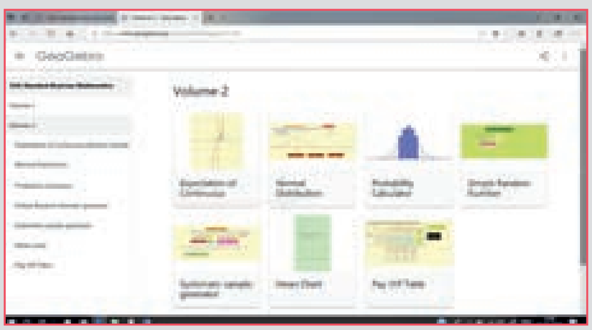
எதிர்பார்க்கப்படும் விளைவு



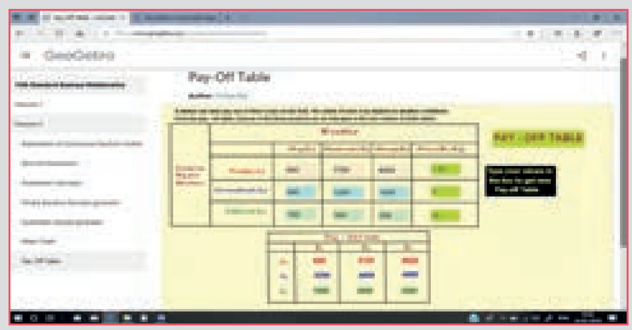
படி - 1 : கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி இச்செயல்பட்டிற்கான இணையப் பக்கத்திற்குச் செல்க. பின்பு "12th Standard Business Mathematics and statistics" என்னும் திரையில் "Volume–2" யை தெரிவு செய்யவும்.

படி - 2 : "Pay–Off Table " என்னும் பயிற்சித்தாளினை தெரிவு செய்துகொள்ளவும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள பெட்டியில் தரவுகளை பதிவு செய்யவும். Pay–Off Table ஒன்று உருவாகும் அதனை கணக்கீடு செய்து கிடைக்கப்பெறும் விடையினை சரிபார்த்துக்கொள்ளவும்.

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி : **https://ggbm.at/uzkcrnwr**

அல்லது விரைவுக் குறியீடு **(QR Code)**

B247_12_BUS_MAT_TM

விடைகள்

1. அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகள்

பயிற்சி 1.1

1.(i) $\rho(A)=2$ (ii) $\rho(A)=2$ (iii) $\rho(A)=1$ (iv) $\rho(A)=3$

(v) $\rho(A)=2$ (vi) $\rho(A)=2$ (vii) $\rho(A)=3$ (viii) $\rho(A)=2$

2. $\rho(AB)=2, \rho(BA)=2$

3. $x=1, y=3, z=5$

4. $x=\frac{1}{11}(7-16k),\ y=\frac{1}{11}(3+k),\ z=k$

5. $x=2,\ y=1,\ z=0$

6. $\lambda=\frac{-7}{2}$

7. $x=1000,\ y=2000,\ z=500$

8. $x=1000,\ y=2200,\ z=1800$

பயிற்சி 1.2

1.(i) $x=8,\ y=-3$ (ii) $x=1, y=4$ (iii) $\{x, y, z\}=\{2, -1, 0\}$

(iv) $\{x, y, z\}=\{1, 2, 3\}$ (v) $\{x, y, z\}=\left\{-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$

2. தொழிலாளருக்கான ஒரு அலகு செலவு ₹10 முதலீட்டிற்கான ஒரு அலகு செலவு ₹ 16

3. $4\frac{3}{4}\%$ -ல் முதலீடு செய்யப்பட்ட தொகை ₹ 7,300

   $6\frac{1}{2}\%$-ல் முதலீடு செய்யப்பட்ட தொகை ₹ 1,300

4. குதிரை சவாரிக்கான மணிநேர வாடகை ₹100 மற்றும்

   கிவாட் பைக் சவாரிக்கான மணி நேர வாடகை ₹120

5. $\{x, y, z\}=\{2,3,1\}$

6. 2% -ல் முதலீடு செய்யப்பட்டத் தொகை ₹250

   3% -ல் முதலீடு செய்யப்பட்டத் தொகை ₹4,000

   6% -ல் முதலீடு செய்யப்பட்டத் தொகை ₹4,250

பயிற்சி 1.3

1. 36% 2.(i) 54% , 46% (ii) 50%

3. A= 56.25%, B = 43.75%

4. A = 33%, B = 67%

பயிற்சி 1.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(d)	(b)	(a)	(c)	(d)	(b)	(b)	(b)	(a)	(c)	(c)	(b)	(c)
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
(b)	(c)	(c)	(b)	(b)	(a)	(a)	(b)	(c)	(d)	(c)	(a)	

இதர கணக்குகள்

1. $\rho(A)=2$ 2. $\rho(A)=3$ 3. $\rho(A)=3$

4. கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமை அற்றது மேலும் தீர்வு கிடையாது.

5. $k=8$.

6. $k=0$ தவிர k-ன் மற்ற மதிப்புகளுக்கு கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அற்றது.

7. $x=1,\ y=2$ மற்றும் $z=2$

8. ஒரு கிலா கோதுமையின் விலை ₹30, ஒரு கிலோ சர்க்கரையின் விலை ₹40 மற்றும் ஒரு கிலோ அரிசியின் விலை ₹50.

9. A,B மற்றும் C ஆகியவற்றிற்கான தரகு வீதங்கள் முறையே ₹2, ₹4 மற்றும் ₹11 ஆகும்.

10. 39%

2. தொகை நுண்கணிதம் – I

பயிற்சி: 2.1

1. $\frac{2}{9}(3x+5)^{\frac{3}{2}}+c$ 2. $\frac{81x^5}{5}-\frac{16}{3x^3}-72x+c$ 3. $6x-\frac{13x^2}{2}-\frac{5x^3}{3}+c$

4. $\frac{2x^{\frac{9}{2}}}{9}-\frac{4x^{\frac{5}{2}}}{5}+2x^{\frac{3}{2}}+c$ 5. $\frac{(4x+7)^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{(4x+7)^{\frac{1}{2}}}{2}+c$

6. $\frac{1}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}-(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]+c$ 7. $b=\frac{13}{2}, c=-2, f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{13}{2}x-2$

8. $c=-20, f(x)=2x^4-x^2-20$

பயிற்சி: 2.2

1. $x^2+\frac{1}{2}\log|x|-2x+c$ 2. $\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+2\log|x-1|+c$

3. $\frac{x^3}{3}-x^2+4x-8\log|x+2|+c$ 4. $\frac{x^3}{3}-x^2+3x-4\log|x+5|+c$

5. $11\log|x-3|-8\log|x-2|+c$ 6. $\log|x+1|+3\log|x-3|+\frac{2}{(x+1)}+c$

7. $\log\left|x^3-x^2+5x-5\right|+c$

8. $c=\frac{\pi}{4}, f(x)=\log|x|+\frac{\pi}{4}$

பயிற்சி: 2.3

1. $\frac{a^x}{\log a}+a^a x-\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$
2. $\frac{1}{a^x\log a}-\frac{1}{b^x\log b}+c$
3. $e^x+e^{2x}+\frac{e^{3x}}{3}+c$
4. $\frac{e^{2x}}{2}+\frac{e^{-4x}}{4}+c$
5. $\frac{e^{4x}}{4}+c$
6. $e^{\left(x+\frac{1}{x}\right)}+c$
7. $-\frac{1}{\log x}+c$
8. $c=1, f(x)=e^x+1$

பயிற்சி: 2.4

1. $2\sin x+3\cos x+4\tan x+5\cot x+c$
2. $-\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{12}\cos 3x+c$
3. $\tan x+c$
4. $\tan x-\cot x+c$
5. $-[\sin x+\cos x]+c$

பயிற்சி: 2.5

1. $-e^{-x}(x+1)+c$
2. $e^{3x}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{9}-\frac{2}{27}\right]+c$
3. $x(\log x-1)+c$
4. $\frac{x^2}{2}\left[\log x-\frac{1}{2}\right]+c$
5. $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\log x-\frac{1}{n+1}\right)+c$
6. $\frac{e^{x^2}}{2}\left(x^4-2x^2+2\right)+c$

பயிற்சி: 2.6

1. $\log\left|x^2+5x-7\right|+c$
2. $\frac{1}{4}\log\left|x^4+1\right|+c$
3. $\frac{1}{2}\log\left|e^{2x}-2\right|+c$
4. $\frac{(\log x)^4}{4}+c$
5. $2\sqrt{3x^2+7x-1}+c$
6. $\frac{4}{3}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{3}{2}}+c$
7. $\frac{1}{54}\left(1+x^9\right)^6+c$
8. $\frac{1}{e}\log\left|x^e+e^x\right|+c$
9. $\log\left|\log x\right|+c$
10. $\frac{1}{10}\log\left|\frac{x^2-2}{2x^2+1}\right|+c$
11. $xe^x\left[\log\left(xe^x\right)-1\right]+c$
12. $\log|x|-\frac{1}{2}\log\left|x^2+1\right|+c$
13. $\frac{e^x}{x^2}+c$
14. $\frac{e^x}{(x+1)^2}+c$
15. $\frac{e^{3x}}{9x}+c$

பயிற்சி 2.7

1. $\frac{1}{24}\log\left|\frac{3+4x}{3-4x}\right|+c$
2. $\frac{1}{10}\log\left|\frac{9+x}{1-x}\right|+c$
3. $\frac{1}{6\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{2}x-3}{\sqrt{2}x+3}\right|+c$
4. $\frac{1}{3}\log\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+c$
5. $\log\left|\frac{x+1}{x+2}\right|+c$
6. $\frac{1}{10}\log\left|\frac{x-1}{x+4}\right|+c$

7. $\frac{1}{6}\log\left|\frac{e^x-3}{e^x+3}\right|+c$ 8. $\frac{1}{3}\log\left|3x+\sqrt{9x^2-7}\right|+c$ 9. $\log\left|(x+3)+\sqrt{x^2+6x+13}\right|+c$

10. $\log\left|\left(x-\frac{3}{2}\right)+\sqrt{x^2-3x+2}\right|+c$ 11. $\frac{1}{4}\log\left|x^4+\sqrt{x^8-1}\right|+c$

12. $\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2}\sqrt{1+x+x^2}+\frac{3}{8}\log\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{1+x+x^2}\right|+c$

13. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}-\log\left|x+\sqrt{x^2-2}\right|+c$ 14. $\frac{1}{4}\left[2x\sqrt{4x^2-5}-5\log\left|2x+\sqrt{4x^2-5}\right|\right]+c$

15. $\left(\frac{x+1}{2}\right)\sqrt{2x^2+4x+1}-\frac{\sqrt{2}}{4}\log\left|\sqrt{2}(x+1)+\sqrt{2x^2+4x+1}\right|+c$

16. $\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$

பயிற்சி 2.8

I:1. $\frac{1}{2}\left[e^2-1\right]$ 2. $\frac{1}{6}$ 3. $\frac{1}{2}\log\left[\frac{5}{2}\right]$ 4. $\log\left[\frac{1+e^3}{2}\right]$

5. $\frac{1}{2}[e-1]$ 6. $\frac{3}{8}$ 7. $\log\left[\frac{11}{5}\right]$ 8. 2 9. $\frac{1}{2}[2\log 2-1]$

II:1. 37 2. 4 3. 1 4. $c=4$

பயிற்சி 2.9

1. 0 2. $\frac{\pi}{2}$ 3. 0 4. $\frac{\pi}{4}$ 5. 0 6. $\frac{16}{5}$

பயிற்சி 2.10

1.(i) 6 (ii) $\frac{105\sqrt{\pi}}{16}$ (iii) $\frac{6!}{m^7}$ (iv) $\frac{3}{128}$ (v) $\left(2^6\right)5!$ 2. $\frac{1}{4}$

பயிற்சி 2.11

1. $\frac{9}{2}$ 2. 4 3. 14 4. $\frac{1}{3}$

பயிற்சி 2.12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(b)	(c)	(a)	(a)	(a)	(b)	(b)	(a)	(d)	(c)	(b)	(b)	(b)	(b)	(c)
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
(d)	(c)	(c)	(b)	(a)	(b)	(b)	(c)	(a)	(a)	(a)	(b)	(d)	(b)	(c)

இதர கணக்குகள்

1. $\frac{2}{15}\left[(x+2)^{\frac{3}{2}}+(x+3)^{\frac{3}{2}}\right]+c$ 2. $\frac{1}{5}\log\left|\frac{2+x}{1-2x}\right|+c$ 3. $\frac{1}{4}\log\left|\frac{e^x+1}{e^x+5}\right|+c$

4. $\frac{x}{2}\sqrt{2x^2-3}-\frac{3\sqrt{2}}{4}\log\left|\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2-3}\right|+c$

5. $\frac{(3x+2)}{6}\sqrt{9x^2+12x+3}-\frac{1}{6}\log\left|(3x+2)+\sqrt{9x^2+12x+3}\right|+c$

6. $\frac{1}{3}\left[(x+1)^3\log x-\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}-3x-\log|x|\right]+c$

7. $x\log\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)+\sqrt{x^2-1}+c$ 8. 0 9. $\frac{1}{4}\left[\frac{e^4-5}{e^2}\right]$ 10. $\frac{14}{15}$

3. தொகை நுண்கணிதம் – II

பயிற்சி 3.1

1. 5 ச.அலகுகள் 2. 2 ச.அலகுகள் 3. $\frac{8a^2}{3}$ ச.அலகுகள் 4. $\frac{3}{2}$ ச.அலகுகள்

5. $\frac{17}{2}$ ச.அலகுகள் 6. $\frac{8}{3}$ ச.அலகுகள் 7. $\frac{32}{3}$ ச.அலகுகள்

பயிற்சி 3.2

1. ₹28,000 2. $y=\left(\frac{2x-1}{3x+2}\right)$ 3. $P=8-2x,\ R=8x-2x^2$

4. ₹4,419 5. ₹5,680

6. மொத்த செலவுச் சார்பு: $C=100x-5x^2+\frac{0.1x^3}{3}+500$,

சராசரி செலவுச் சார்பு: $AC=100x-5x+\frac{x^2}{30}+\frac{500}{x}$

7. மொத்த செலவுச் சார்பு: $C=\frac{1500}{7}x^{\frac{7}{5}}$, சராசரி செலவுச் சார்பு: $AC=\frac{1500}{7}x^{\frac{2}{5}}$

8. செலவுச் சார்பு: $C=2\sqrt{ax+b}-2\sqrt{b}$ 9. ₹14,133.33

10. மொத்த வருவாய்: R = ₹5,95,000 11. தேவைச் சார்பு: $P=9-\frac{4x^2}{3}$

13. தேவைச் சார்பு: $P=20e^{-\frac{x}{10}}$ 14. வருவாய் சார்பு: $R=13x-0.065x^2-120$

15. வருவாய் சார்பு: $R=1500x-2x^2-x^3$, சராசரி வருவாய் சார்பு: $P=1500-2x-x^2$

16. வருவாய் சார்பு: $R=10x+\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$, தேவை சார்பு: $P=10+\frac{3x}{2}-\frac{x^2}{3}$

17. மொத்த செலவுச் சார்பு: $C = 4000\sqrt{7x+4} + 18000$,

சராசரி செலவு: $AC = \frac{4000}{x}\sqrt{7x+4} + \frac{18000}{x}$

18. மொத்த செலவுச் சார்பு: $C = \frac{x^2}{4} + 5000$

19. வருவாய் சார்பு: $R = 20x - \frac{5x^2}{2} + x^3$

20. தேவை சார்பு: $P = 14 - 3x + 3x^2$

பயிற்சி 3.3

1. C.S.= 400 அலகுகள்
2. C.S.=378 அலகுகள்
3. C.S.=562.50 அலகுகள்
4. C.S=$\frac{1}{2}\left[1\text{-}\log_e 2\right]$ அலகுகள்
5. P.S=$\frac{25}{2}$ அலகுகள்
6. P.S=237.3 அலகுகள்
7. $C.S = 36\log\frac{3}{2} - 12$ அலகுகள்
8. $\frac{32000}{3}$ அலகுகள்
9. C.S $= \left(8\log 2 - 4\right)$ அலகுகள் , P.S=$\frac{1}{4}$ அலகுகள்
10. C.S=$\frac{1024}{3}$ அலகுகள், P.S = 64 அலகுகள்
11. C.S=24 அலகுகள், P.S=16 அலகுகள்

பயிற்சி 3.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(c)	(b)	(a)	(c)	(a)	(a)	(d)	(c)	(b)	(a)	(a)	(a)	(b)
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
(c)	(c)	(b)	(a)	(b)	(a)	(c)	(a)	(c)	(a)	(b)	(c)	

இதர கணக்குகள்

1. ₹1,900
2. C= ₹3,125
4. $R = 6x - x^3 - \frac{x^4}{4}$, $p = 6 - x^2 - \frac{x^3}{4}$
5. இலாபச் சார்பு: $P = 10x - \frac{x^2}{40} - 100.$
6. $C.S = \frac{40}{9}$ அலகுகள் , $P.S = \frac{32}{9}$ அலகுகள்
7. 52,770 அலகுகள்
8. $P = 11 - \frac{x^3}{3}$
9. $\frac{76}{3}$ ச.அலகுகள்
10. $\frac{1}{5}\left[(2)^{\frac{5}{3}} - 1\right]$ ச.அலகுகள்

4. வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகள்

பயிற்சி 4.1

1.(i) (1 , 1) (ii) (3 , 1) (iii) (2 , 2) (iv) (3 , 1)
(v) (3 , 3) (vi) (2 , 1) (vii) (1 , 4).

2.(i) $y = x\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ (ii) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4xy\frac{dy}{dx} + 8y^2 = 0$ (iii) $y + x\frac{dy}{dx} = 0$

2.(iv) $x + y\dfrac{dy}{dx} = 0$ 3. $r^2\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^3$ 4. $y = x\dfrac{dy}{dx}$

5. $2a\dfrac{d^2y}{dx^2}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 = 0$ 6. $y^2 = x^2 + 2xy\dfrac{dy}{dx}$ 7. $y = 2x\dfrac{dy}{dx} + y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$

பயிற்சி 4.2

1.(i) $e^{-y} + ax + c = 0$ (ii) $\log x + \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{y^3}{3} + c$ 2. $\log x - x = \log y + c$

3.(i) $x = cy$ (ii) $\log(1+y) = -e^x + c$ 4. $(1+\sin x) = c(1+\cos y)$

5. $(x-1)(y+1) = c$ 6.(i) $\log y = \dfrac{-\cos 2x}{2} + c$ (ii) $\dfrac{e^{ax}}{a} = \dfrac{-e^{by}}{b} + c$

7. $(y-b)^2 = (x-a)^2 + b^2 - a^2$

பயிற்சி 4.3

1. $x = ce^{\frac{y}{x}}$ 2. $x + y = ke^{\frac{-2x}{x+y}}$ 3. $y + \sqrt{x^2+y^2} = x^2c$

4. $3y^2 - 4yx + 3x^2 = x^3c$ 5. $\left(xy - y^2\right)x = c$ 6. $y\sqrt{y^2 - x^2} = 2\sqrt{3}\,x^5$ 7. $y = ce^{\frac{x^2}{2y^2}}$

பயிற்சி 4.4

1. $\dfrac{y}{x} = x + c$ 2. $ye^{\sin x} = e^{\sin x}(\sin x - 1) + c$ 3. $x^2y = \dfrac{x^6}{6} + c$

4. $y\left(1+x^3\right) = x + \dfrac{x^3}{3} + c$ 5. $xy = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + c$ 6. $y\sec x = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{\sin 2x}{2}\right) + c$

7. $y\sec^2 x = \sec x - 2$ 8. $x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$ 9. ₹ 2,22,550

பயிற்சி 4.5

1. $y = Ae^{2x} + Be^{4x}$ 2. $y = (Ax+B)e^{2x}$ 3. $y = e^{-x}(A\cos\sqrt{2}\,x + B\sin\sqrt{2}\,x)$

4. $y = (Ax+B)e^{kx}$ 5. $y = \dfrac{e^{-3x}}{12} + \dfrac{e^{5x}}{20}$ 6. $y = Ae^{\frac{1}{2}x} + Be^{\frac{-3}{2}x} + \dfrac{e^{2x}}{21}$

7. $y = A\cos 4x + B\sin 4x$ 8. $y = e^x - \dfrac{3}{2}e^{2x} + \dfrac{e^{3x}}{2}$

9. $y = Ae^{-3x} + Be^{2x} + \dfrac{e^{3x}}{6} - \dfrac{x}{5}e^{-3x}$ 10. $y = (Ax+B)e^{5x} + 2x^2e^{5x} + \frac{1}{5}$

11. $y = Ae^{\frac{-3}{2}x} + Be^{\frac{-5}{2}x} + xe^{-\frac{3}{2}x}$ 12. $y = Ae^{2x} + Be^{\frac{-7}{3}x} + xe^{2x}$ 13. $p = Ae^{-4t} + Be^{2t} + 2$

பயிற்சி 4.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(a)	(d)	(a)	(b)	(a)	(a)	(d)	(c)	(a)	(c)	(b)	(a)	(b)
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
(c)	(d)	(a)	(d)	(a)	(b)	(d)	(a)	(a)	(d)	(c)	(a)	

இதர கணக்குகள்

1. $p = Ae^{-4t} + Be^{2t} + 3$
2. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$
3. $e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + \log y = c$
4. $x\left(1 + \dfrac{3y^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}} = c$
5. $yx^2 = \dfrac{x^6}{6} + c$
6. $cm^2 = 2(m+6)$
7. $6y = \left(e^2 + e\right)e^x - \left(e^2 + e + 1\right)e^{2x} + e^{4x}$
8. $ye^{\sin x} = 2e^{\sin x} + c$
9. $\log y = \dfrac{x^3}{3y^2} + c$
10. $\log|1 + y| = x + \dfrac{x^2}{2} + c$

5. எண்ணியியல் முறைகள்

பயிற்சி 5.1

1. $\log\left(1 + \dfrac{h}{x}\right)$

2.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	-1					
		1				
1	0		4			
		5		6		
2	5		10		0	
		15		6		0
3	20		16		0	
		31		6		
4	51		22			
		53				
5	104					

5. $\dfrac{-2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$
6. 31
7. 445 இலட்சங்கள்
8. 3 மற்றும் 24

பயிற்சி 5.2

1. 6.8
2. ₹ 2,900
3. $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 6x + 1$
4. 36.784 (இலட்சங்கள்)
5. 197
6. 15.45
7. 286.96
8. 27.992
9. 108.75 (ஆயிரம் டன்கள்)
10. 41 நபர்கள்
11. 476.25 இலட்சங்கள்
12. 53

பயிற்சி 5.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
(a)	(c)	(a)	(c)	(d)	(a)	(c)	(c)	(c)	(c)	(a)	(c)	(b)	(b)

இதர கணக்குகள்

3. $f(x) = x^2 - 3x + 1$
4. 14.25, 23.5
5. 128.5
6. 189.79, 286.96
7. 5281, 6504
9. $y = \dfrac{2}{3}x^4 - 8x^3 + \dfrac{100}{3}x^2 - 56x + 31$
10. $y = x^3 - 8x^2 + 19x - 12$

6. சமவாய்ப்பு மாறி மற்றும் கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல்

பயிற்சி 6.1

1.

$P(X \le k)$	0.3	0.5	0.9	1

2. $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 3 \\ P_X(3) = 0.3 & , 3 \le x < 5 \\ P_X(3) + P_X(5) = 0.5 & , 5 \le x < 8 \\ P_X(3) + P_X(5) + P_X(8) = 0.8 & , 8 \le x < 10 \\ 1 & , x \ge 10 \end{cases}$$

5.

$X = x_1$	0	1	2
$P(X = x_1)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

6. (i) 1/10, (ii) 81/100, 19/100, 8/10 (iii) 4

7. குறிப்பு : $\int_{-3}^{3} f(x)dx = \int_{-3}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{3} f(x)dx$

8. $(i) k = \frac{1}{16}, (ii)\ f(x) = \frac{1}{4}(x-1)^3, 1 < x \le 3$ 9. $A = \frac{1}{5}, (i) \frac{1}{e^2}, (ii) \frac{e-1}{e}, (iii) \frac{e-1}{e^2}$

10. (a) ஆம், $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \le x < 1 \\ 0, & 1 \le x < 2 \\ \frac{1}{4}, & 2 \le x < 4 \\ 0, & x \ge 4 \end{cases}$ b(i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $\frac{1}{4}$

பயிற்சி 6.2

1. 3.5 2. 1.8 3. 0.78 4. $\frac{2}{3}$ 5. $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}$ 6. ₹ 60

12. எதிர்பார்த்தல்: ₹ 200; மாறுபாடு: ₹ 21, 60,000; திட்ட விலக்கம்: ₹ 1,469.69

13. 30 (அல்லது 30,000 மைல்கள்) 14. எதிர்பார்த்தல்: 1; மாறுபாடு : 9 15. 20

பயிற்சி 6.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(c)	(d)	(b)	(c)	(b)	(c)	(d)	(d)	(d)	(d)	(d)	(a)	(c)	(c)	(a)
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
(b)	(b)	(a)	(d)	(b)	(b)	(c)	(c)	(a)	(b)	(c)	(b)	(b)	(b)	(b)

இதர கணக்குகள்

1. (i) ½ (ii) ¼ (iii) ½ (iv) ¾

2. (a) (i) 13/24 (ii) 0

(b) F ஆனது படிச்சார்பு இல்லை என்பதால் X என்பது சமவாய்ப்பு மாறியாக இருக்ககாது.

3. $\frac{1}{4};\frac{1}{2}$ 4. (a) $\frac{1}{9}$ (b) $\frac{7}{9}$ 5. (i) $\frac{3}{5},\frac{6}{5}$ (ii) $\frac{2}{25}$ 7. 1 9. $\frac{3}{4},\frac{27}{80}$ 10. $\frac{1}{2}$

7. நிகழ்தகவு பரவல்கள்

பயிற்சி: 7.1

6. (a) 0.059 (b) 0.2642 (c) 0.0133 (d) சராசரி = 1 மற்றும் மாறுபாடு = 0.95

7. (i) 0.01008 (ii) 0.000262 (iii) 0.09935 8. 0.375 9. 0.65536

10. (i) 0.3969 (ii) 0.45212 (iii) 0.9797

11. 5 அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சோதனைகள் 12. 0.7530

13. (i) 703 (ii) 516 (iii) 656 14. (i) 0.0634 (ii) 0.0634 (iii) 0.9729

15. 25/216 16. $\binom{25}{x}\left(\frac{1}{5}\right)^{x}\left(\frac{4}{5}\right)^{(25-x)}$ 17. $\frac{3}{4^{14}}$ 18. 0.2626 19. 0.8743

20. (i) $\frac{80}{243}$ (ii) $\frac{192}{243}$

பயிற்சி: 7.2

6. 0.2352 7. 0.0025 8. (i) 0.2231 (ii) 0.1912

9. (i)0.08208 (ii) 0.2138 (iii) 0.1089

10. (i) 2 நாள்கள் (ii) 91 நாள்கள் (iiii) 43 நாள்கள்

11. 0.0265 12. (i) 0.1353 (ii) 0.3235

பயிற்சி: 7.3

5. (i) 67 (ii) 134 (iii) 1637 6 (i) சராசரி = 60.48 (ii) திட்டவிலக்கம் = 19.78

7. (i) 0.9772 (ii) 0.49865 8. (a) 46 (b) 46 (c) 342

9. 0.719 10. (i) 0.2420 (ii) 0.8413

பயிற்சி 7.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
(b)	(c)	(c)	(c)	(c)	(a)	(b)	(a)	(c)	(d)	(a)	(a)	(d)	(b)
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
(d)	(b)	(d)	(d)	(d)	(d)	(a)	(a)	(b)	(b)	(a)	(c)	(d)	(d)

இதர கணக்குகள்

1. (i) 0.89131 (ii) 0.34173 2. 0.03295 3. 0.98981

4. 0.0067379 அல்லது 6.7379×10^{-3} 5. 80.33%

6. a) 0.4013 (b) 0.3413 7. a) 30.85% b) 37.20% c) 10.56%

8. a) 0.9938 (b) 0.9878 (c) 0.3944 9. 0.2119 10. 7

8. கூறெடுப்பு முறைகளும் புள்ளியியல் அனுமானித்தலும்

பயிற்சி 8.1

17. 0.008 18. 0.9487 19. 0.2739 20. 0.025

பயிற்சி 8.2

14. $|z| = 1.667$ 15. 1.2308 16. $|z| = 5$ 17. 3.536

பயிற்சி 8.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(a)	(b)	(a)	(b)	(b)	(a)	(c)	(b)	(c)	(a)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(a)	(a)	(a)	(d)	(b)	(b)	(a)	(c)	(a)	(c)

இதர கணக்குகள்

5. 0.015 6. (a) (66.86, 68.04) (b) (66.67,68.22) 7. $|z| = 2.67$

9. பயன்பாட்டுப் புள்ளியியல்

பயிற்சி 9.1

13. பருவகால குறியீடுகள்

	I	II	III	IV
மொத்தம்	18.6	20.8	18.8	20.8
சராசரி	3.72	4.16	3.76	4.16
பருவகால குறியீடுகள்	94.1772	105.3165	95.1899	105.3165

மொத்த சராசரி = 3.95

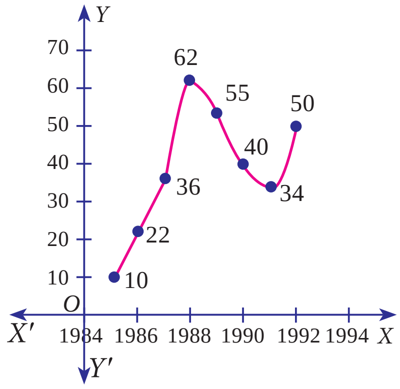
14. மூன்று ஆண்டு காலத்தைக் கொண்ட நகரும் சராசரி

ஆண்டு	1987	1988	1989	1990	1991	1992
மூன்று ஆண்டு நகரும் கூடுதல்	46410	52010	63040	79470	94050	102450
மூன்று ஆண்டு நகரும் சராசரி	15470	17336.666	21013.333	26490	31350	34150

15. ஐந்து ஆண்டு காலத்தைக் கொண்ட நகரும் சராசரி

ஆண்டு	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988
ஐந்து ஆண்டு நகரும் கூடுதல்	619	617	624	621	615	619	613	606
ஐந்து ஆண்டு நகரும் சராசரி	123.8	123.4	124.8	124.2	123	123.8	122.6	121.2

16. போக்குக்கோட்டின் வரைபட முறை



17. $a = 169.428$; $b = 3.285$; $Y = 169.428 + 3.285\,X$

18. $a = 54$; $b = 5.4$; $Y = 54 + 5.4\,X$

$X = 2000$ எனில், $\hat{Y} = 54 + 5.4\,(2000\text{-}2002) = 43.2$

$X = 2001$ எனில், $\hat{Y} = 54 + 5.4\,(2001\text{-}2002) = 48.6$

$X = 2002$ எனில், $\hat{Y} = 54 + 5.4\,(2002\text{-}2002) = 54$

$X = 2003$ எனில், $\hat{Y} = 54 + 5.4\,(2003\text{-}2002) = 59.4$

$X = 2004$ எனில், $\hat{Y} = 54 + 5.4\,(2004\text{-}2002) = 64.8$

19. பகுதி சராசரி I = 276.666

பகுதி சராசரி II = 213.333

20. மாதாந்திர சராசரி குறியீடுகள்

	ஜனவரி	பிப்ரவரி	மார்ச்	ஏப்ரல்	மே	ஜூன்	ஜூலை	ஆகஸ்ட்	செப்டம்பர்	அக்டோபர்	நவம்பர்	டிசம்பர்
மாதாந்திர மொத்தம்	53	61	54	43	42	51	62	54	52	51	49	53
மாதாந்திர சராசரி	17.7	20.3	18	14.3	14	17	20.7	18	17.3	17	16.3	17.7
பருவகால குறியீட்டு	101.7	116.7	103.4	82.2	80.5	97.7	119.0	103.4	99.4	97.7	93.7	101.7

மொத்த சராசரி = 17.4

21. பருவ கால குறியீடுகள்

	I	II	III	IV
மொத்தம்	372	358	362	364
சராசரி	74.4	71.6	72.4	72.8
பருவகால குறியீடுகள்	102.19	98.35	99.45	100

மொத்த சராசரி = 72.8

22. $a = 48.8$; $b = 2$; $Y = 48.8 + 2X$

$X = 1992$ எனில், $\hat{Y} = 48.8 + 2\,(1992\text{-}1994) = 44.8$

$X = 1993$ எனில், $\hat{Y} = 48.8 + 2\,(1993\text{-}1994) = 46.8$

$X = 1994$ எனில், $\hat{Y} = 48.8 + 2\,(1994\text{-}1994) = 48.8$

$X = 1995$ எனில், $\hat{Y} = 48.8 + 2\,(1995\text{-}1994) = 50.8$

$X = 1996$ எனில், $\hat{Y} = 48.8 + 2\,(1996\text{-}1994) = 52.8$

$X = 1997$ எனில், $\hat{Y} = 48.8 + 2\,(1997\text{-}1994) = 54.8$

பயிற்சி 9.2

14. லாஸ்பியர் குறியீட்டு எண் = 144.8 பாசி குறியீட்டு எண் = 144.4

15. லாஸ்பியர் குறியீட்டு எண் = 164.5 பாசி குறியீட்டு எண் = 162.4

16. லாஸ்பியர் குறியீட்டு எண் = 106.6 பாசி குறியீட்டு எண் = 106.8

ஃபிஷர் குறியீட்டு எண்= 106.7

17. ஃபிஷர் குறியீட்டு எண் = 138.5 காலமாற்றுச் சோதனை= 1

காரணி மாற்றுச் சோதனை $= \dfrac{1880}{1560}$

18. ஃபிஷர் குறியீட்டு எண் = 83.6

19. ஃபிஷர் குறியீட்டு எண் = 122.314 காலமாற்றுச் சோதனை = 1

20. வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டு எண் =2662.38

21. வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டு எண் = 117.31

22. வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டு எண் = 130.6192

பயிற்சி 9.3

14.	$\overline{\overline{X}} = 16.2,$	UCL = 20.49,	CL = 16.2,	LCL = 11.91
	$\overline{R} = 7.4,$	UCL = 15.65,	CL = 7.4,	LCL = 0
15.	$\overline{\overline{X}} = 46.2,$	UCL = 50.14,	CL = 46.2,	LCL = 42.26
	$\overline{R} = 6.8,$	UCL = 14.38,	CL = 6.8,	LCL = 0
16.	$\overline{\overline{X}} = 37.7,$	UCL = 48.14,	CL = 37.7,	LCL = 27.26
	$\overline{R} = 18,$	UCL = 38.07,	CL = 18,	LCL = 0
17.	$\overline{\overline{X}} = 10.66,$	UCL = 14.31,	CL = 10.66,	LCL = 7.006
	$\overline{R} = 6.3,$	UCL = 13.32,	CL = 6.3,	LCL = 0
18.	$\overline{\overline{X}} = 12.5,$	UCL = 12.71,	CL = 12.5,	LCL = 12.28
	$\overline{R} = 0.37,$	UCL = 0.78,	CL = 0.37,	LCL = 0
19.	$\overline{\overline{X}} = 30.1,$	UCL = 44.75,	CL = 30.1,	LCL = 15.45
	$\overline{R} = 20.1,$	UCL = 45.87,	CL = 20.1,	LCL = 0
20.	$\overline{\overline{X}} = 13.25,$	UCL = 15.53,	CL = 13.25,	LCL = 10.97
	$\overline{R} = 3.12,$	UCL = 7.12,	CL = 3.12,	LCL = 0
21.	$\overline{\overline{X}} = 41,$	UCL = 43.31,	CL = 41,	LCL = 38.7
	$\overline{R} = 4,$	UCL = 8.46,	CL = 4,	LCL = 0

பயிற்சி 9.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(d)	(b)	(d)	(d)	(c)	(a)	(c)	(b)	(b)	(b)	(a)	(d)	(c)
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
(d)	(c)	(b)	(c)	(c)	(a)	(d)	(c)	(b)	(a)	(c)	(d)	

இதர கணக்குகள்

1. மூன்று ஆண்டு நகரும் சராசரி 148, 149.33, 152.33, 168.33, 253.33, 261.33, 281.67, 302.67, 327.
2. நான்கு ஆண்டு நகரும் சராசரி
   708.75, 729.25, 748.25, 768.25, 784.5
3. Y = 55.975+ 0.825X
4. லாஸ்பியர்= 49.9 பாசி = 50.32 பிஷர் = 50.09
5. பிஷர் =139.8
6. நுகர்வோர் விலை குறியீட்டு எண் = 118.77
7. வாழ்க்கைத்தர குறியீட்டுஎண் CLI = 126·10, 2011ஆம் ஆண்டை 2010 ஆண்டுடன் ஒப்பிடுகையில், வாழ்க்கை குறியீட்டு எண் 26.10% ஆக அதிகரித்துள்ளது.
8. சராசரி வரைபட கட்டுப்பாடு வரம்புகள்
   LCL = 47.56
   CL = 51.2
   UCL = 54.84
   வீச்சு விளக்கப்பட கட்டுப்பாடு வரம்புகள்
   LCL = 0
   CL = 6.3
   UCL = 13.32
9. சராசரி வரைபட கட்டுப்பாடு வரம்புகள்
   LCL = 1120.83
   CL = 1367.5
   UCL = 1614.17
   வீச்சு விளக்கப்பட கட்டுப்பாடு வரம்புகள்
   LCL = 0
   CL = 427.5
   UCL = 904.16
10. சராசரி வரைபட கட்டுப்பாடு வரம்புகள்
    LCL = 4.774
    CL = 4.982
    UCL = 5.19
    வீச்சு விளக்கப்பட கட்டுப்பாடு வரம்புகள்
    LCL = 0
    CL = 0.36
    UCL = 0.7614

10. செயல்முறைகள் ஆராய்ச்சி

பயிற்சி 10.1

5. $x_{11} = 16,\ x_{12} = 3, x_{22} = 15,\ x_{23} = 22, x_{33} = 9,\ x_{34} = 25$

   மொத்த செலவு = ₹ 580

6. $x_{11} = 30,\ x_{21} = 5, x_{22} = 28,\ x_{23} = 7,\ x_{33} = 25,\ x_{34} = 25$

   மொத்த செலவு = ₹ 1,076

7. $x_{11} = 15,\ x_{13} = 10, x_{23} = 35,\ x_{31} = 15,\ x_{32} = 25,$

   மொத்த செலவு = ₹ 580

8. $x_{11} = 1,\ x_{12} = 5, x_{24} = 1,\ x_{31} = 6,\ x_{33} = 3,\ x_{34} = 1,$

   மொத்த செலவு = ₹ 102

9. $x_{11} = 10,\ x_{13} = 20, x_{21} = 20,\ x_{22} = 20,\ x_{24} = 10,\ x_{32} = 20$

   மொத்த செலவு = ₹ 370

10. $x_{11} = 3,\ x_{12} = 1, x_{22} = 2,\ x_{23} = 4,\ x_{24} = 2,\ x_{34} = 3, x_{35} = 6$

    மொத்த செலவு = ₹ 153

11. (i) $x_{11} = 7,\ x_{21} = 3, x_{22} = 9,\ x_{32} = 1,\ x_{33} = 10,$

    மொத்த செலவு = ₹ 94

    (ii) $x_{13} = 7,\ x_{21} = 10, x_{23} = 2,\ x_{32} = 10,\ x_{33} = 1,$

    மொத்த செலவு = ₹ 61

    (iii) $x_{11} = 7,\ x_{21} = 2, x_{23} = 10,\ x_{31} = 1,\ x_{32} = 10,$

    மொத்த செலவு = ₹ 40

12. $x_{11} = 200, x_{21} = 50, x_{22} = 175, x_{23} = 125, x_{32} = 150, x_{33} = 250$

    மொத்த செலவு = ₹ 12,200

பயிற்சி 10.2

4. 46 5. 280 6. 41 மணிகள் 7. 37 8. 12

பயிற்சி 10.3

1. (i) S_1 (ii) S_2 2. (a) பயிர் C (b) பயிர் B மற்றும் பயிர் C

3. (i) முட்டை ஷாம்பு (ii) முட்டை ஷாம்பு 4. (i) A_3 (ii) A_2 மற்றும் A_3

பயிற்சி 10.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
(a)	(a)	(c)	(c)	(a)	(a)	(c)	(c)	(d)	(b)	(d)	(b)	(d)	(d)

இதர கணக்குகள்

1. $x_{11} = 5\ x_{21} = 2, x_{22} = 6,\ x_{32} = 3,\ x_{33} = 4, x_{43} = 14$

   மொத்த செலவு = ₹ 102

2. (a) $x_{12} = 10\ x_{13} = 20, x_{21} = 30,\ x_{22} = 20,\ x_{24} = 10\ , x_{32} = 20$

   (b) $x_{11} = 10\ x_{13} = 20, x_{21} = 20,\ x_{22} = 20,\ x_{24} = 10\ , x_{32} = 20$

   மொத்த செலவு = ₹ 370

3. $x_{11} = 15\ x_{13} = 10, x_{23} = 35,\ x_{31} = 15,\ x_{32} = 25\ , x_{32} = 20$

   மொத்த செலவு = ₹ 560

4. $x_{12} = 1\ x_{12} = 5, x_{24} = 1,\ x_{31} = 6,\ x_{33} = 3\ , x_{34} = 1$

   மொத்த செலவு = ₹ 102

5. $\text{A} \to \text{e},\ \text{B} \to \text{c},\ \text{C} \to \text{b},\ \text{D} \to \text{a}, \text{E} \to \text{d}$

   குறைந்தபட்சம் தொலைவு =570 மைல்கள்

6. $1 \to 11,\ 2 \to 8,\ 3 \to 7,\ 4 \to 9, 5 \to 10, 6 \to 12$

   குறைந்தபட்சம் தொலைவு=125 கி.மீ

7. (i) கடன்பத்திரங்கள் : 6000

   (ii) பங்குகள் : 1000

											Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0.0000	0.0043	0.0086	0.0128	0.0170	0.0212	0.0253	0.0294	0.0334	0.0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
1.1	0.0414	0.0453	0.0492	0.0531	0.0569	0.0607	0.0645	0.0682	0.0719	0.0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
1.2	0.0792	0.0828	0.0864	0.0899	0.0934	0.0969	0.1004	0.1038	0.1072	0.1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
1.3	0.1139	0.1173	0.1206	0.1239	0.1271	0.1303	0.1335	0.1367	0.1399	0.1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
1.4	0.1461	0.1492	0.1523	0.1553	0.1584	0.1614	0.1644	0.1673	0.1703	0.1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
1.5	0.1761	0.1790	0.1818	0.1847	0.1875	0.1903	0.1931	0.1959	0.1987	0.2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
1.6	0.2041	0.2068	0.2095	0.2122	0.2148	0.2175	0.2201	0.2227	0.2253	0.2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
1.7	0.2304	0.2330	0.2355	0.2380	0.2405	0.2430	0.2455	0.2480	0.2504	0.2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
1.8	0.2553	0.2577	0.2601	0.2625	0.2648	0.2672	0.2695	0.2718	0.2742	0.2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
1.9	0.2788	0.2810	0.2833	0.2856	0.2878	0.2900	0.2923	0.2945	0.2967	0.2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
2.0	0.3010	0.3032	0.3054	0.3075	0.3096	0.3118	0.3139	0.3160	0.3181	0.3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
2.1	0.3222	0.3243	0.3263	0.3284	0.3304	0.3324	0.3345	0.3365	0.3385	0.3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
2.2	0.3424	0.3444	0.3464	0.3483	0.3502	0.3522	0.3541	0.3560	0.3579	0.3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
2.3	0.3617	0.3636	0.3655	0.3674	0.3692	0.3711	0.3729	0.3747	0.3766	0.3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
2.4	0.3802	0.3820	0.3838	0.3856	0.3874	0.3892	0.3909	0.3927	0.3945	0.3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
2.5	0.3979	0.3997	0.4014	0.4031	0.4048	0.4065	0.4082	0.4099	0.4116	0.4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
2.6	0.4150	0.4166	0.4183	0.4200	0.4216	0.4232	0.4249	0.4265	0.4281	0.4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
2.7	0.4314	0.4330	0.4346	0.4362	0.4378	0.4393	0.4409	0.4425	0.4440	0.4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
2.8	0.4472	0.4487	0.4502	0.4518	0.4533	0.4548	0.4564	0.4579	0.4594	0.4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
2.9	0.4624	0.4639	0.4654	0.4669	0.4683	0.4698	0.4713	0.4728	0.4742	0.4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
3.0	0.4771	0.4786	0.4800	0.4814	0.4829	0.4843	0.4857	0.4871	0.4886	0.4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
3.1	0.4914	0.4928	0.4942	0.4955	0.4969	0.4983	0.4997	0.5011	0.5024	0.5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
3.2	0.5051	0.5065	0.5079	0.5092	0.5105	0.5119	0.5132	0.5145	0.5159	0.5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
3.3	0.5185	0.5198	0.5211	0.5224	0.5237	0.5250	0.5263	0.5276	0.5289	0.5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
3.4	0.5315	0.5328	0.5340	0.5353	0.5366	0.5378	0.5391	0.5403	0.5416	0.5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
3.5	0.5441	0.5453	0.5465	0.5478	0.5490	0.5502	0.5514	0.5527	0.5539	0.5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
3.6	0.5563	0.5575	0.5587	0.5599	0.5611	0.5623	0.5635	0.5647	0.5658	0.5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
3.7	0.5682	0.5694	0.5705	0.5717	0.5729	0.5740	0.5752	0.5763	0.5775	0.5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3.8	0.5798	0.5809	0.5821	0.5832	0.5843	0.5855	0.5866	0.5877	0.5888	0.5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3.9	0.5911	0.5922	0.5933	0.5944	0.5955	0.5966	0.5977	0.5988	0.5999	0.6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
4.0	0.6021	0.6031	0.6042	0.6053	0.6064	0.6075	0.6085	0.6096	0.6107	0.6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
4.1	0.6128	0.6138	0.6149	0.6160	0.6170	0.6180	0.6191	0.6201	0.6212	0.6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.2	0.6232	0.6243	0.6253	0.6263	0.6274	0.6284	0.6294	0.6304	0.6314	0.6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.3	0.6335	0.6345	0.6355	0.6365	0.6375	0.6385	0.6395	0.6405	0.6415	0.6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.4	0.6435	0.6444	0.6454	0.6464	0.6474	0.6484	0.6493	0.6503	0.6513	0.6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.5	0.6532	0.6542	0.6551	0.6561	0.6571	0.6580	0.6590	0.6599	0.6609	0.6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.6	0.6628	0.6637	0.6646	0.6656	0.6665	0.6675	0.6684	0.6693	0.6702	0.6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
4.7	0.6721	0.6730	0.6739	0.6749	0.6758	0.6767	0.6776	0.6785	0.6794	0.6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
4.8	0.6812	0.6821	0.6830	0.6839	0.6848	0.6857	0.6866	0.6875	0.6884	0.6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
4.9	0.6902	0.6911	0.6920	0.6928	0.6937	0.6946	0.6955	0.6964	0.6972	0.6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
5.0	0.6990	0.6998	0.7007	0.7016	0.7024	0.7033	0.7042	0.7050	0.7059	0.7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
5.1	0.7076	0.7084	0.7093	0.7101	0.7110	0.7118	0.7126	0.7135	0.7143	0.7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
5.2	0.7160	0.7168	0.7177	0.7185	0.7193	0.7202	0.7210	0.7218	0.7226	0.7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
5.3	0.7243	0.7251	0.7259	0.7267	0.7275	0.7284	0.7292	0.7300	0.7308	0.7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
5.4	0.7324	0.7332	0.7340	0.7348	0.7356	0.7364	0.7372	0.7380	0.7388	0.7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

											Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	0.7404	0.7412	0.7419	0.7427	0.7435	0.7443	0.7451	0.7459	0.7466	0.7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.6	0.7482	0.7490	0.7497	0.7505	0.7513	0.7520	0.7528	0.7536	0.7543	0.7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.7	0.7559	0.7566	0.7574	0.7582	0.7589	0.7597	0.7604	0.7612	0.7619	0.7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.8	0.7634	0.7642	0.7649	0.7657	0.7664	0.7672	0.7679	0.7686	0.7694	0.7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
5.9	0.7709	0.7716	0.7723	0.7731	0.7738	0.7745	0.7752	0.7760	0.7767	0.7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
6.0	0.7782	0.7789	0.7796	0.7803	0.7810	0.7818	0.7825	0.7832	0.7839	0.7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
6.1	0.7853	0.7860	0.7868	0.7875	0.7882	0.7889	0.7896	0.7903	0.7910	0.7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
6.2	0.7924	0.7931	0.7938	0.7945	0.7952	0.7959	0.7966	0.7973	0.7980	0.7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
6.3	0.7993	0.8000	0.8007	0.8014	0.8021	0.8028	0.8035	0.8041	0.8048	0.8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.4	0.8062	0.8069	0.8075	0.8082	0.8089	0.8096	0.8102	0.8109	0.8116	0.8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.5	0.8129	0.8136	0.8142	0.8149	0.8156	0.8162	0.8169	0.8176	0.8182	0.8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.6	0.8195	0.8202	0.8209	0.8215	0.8222	0.8228	0.8235	0.8241	0.8248	0.8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.7	0.8261	0.8267	0.8274	0.8280	0.8287	0.8293	0.8299	0.8306	0.8312	0.8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.8	0.8325	0.8331	0.8338	0.8344	0.8351	0.8357	0.8363	0.8370	0.8376	0.8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
6.9	0.8388	0.8395	0.8401	0.8407	0.8414	0.8420	0.8426	0.8432	0.8439	0.8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
7.0	0.8451	0.8457	0.8463	0.8470	0.8476	0.8482	0.8488	0.8494	0.8500	0.8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
7.1	0.8513	0.8519	0.8525	0.8531	0.8537	0.8543	0.8549	0.8555	0.8561	0.8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.2	0.8573	0.8579	0.8585	0.8591	0.8597	0.8603	0.8609	0.8615	0.8621	0.8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.3	0.8633	0.8639	0.8645	0.8651	0.8657	0.8663	0.8669	0.8675	0.8681	0.8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.4	0.8692	0.8698	0.8704	0.8710	0.8716	0.8722	0.8727	0.8733	0.8739	0.8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.5	0.8751	0.8756	0.8762	0.8768	0.8774	0.8779	0.8785	0.8791	0.8797	0.8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
7.6	0.8808	0.8814	0.8820	0.8825	0.8831	0.8837	0.8842	0.8848	0.8854	0.8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
7.7	0.8865	0.8871	0.8876	0.8882	0.8887	0.8893	0.8899	0.8904	0.8910	0.8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
7.8	0.8921	0.8927	0.8932	0.8938	0.8943	0.8949	0.8954	0.8960	0.8965	0.8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
7.9	0.8976	0.8982	0.8987	0.8993	0.8998	0.9004	0.9009	0.9015	0.9020	0.9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.0	0.9031	0.9036	0.9042	0.9047	0.9053	0.9058	0.9063	0.9069	0.9074	0.9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.1	0.9085	0.9090	0.9096	0.9101	0.9106	0.9112	0.9117	0.9122	0.9128	0.9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.2	0.9138	0.9143	0.9149	0.9154	0.9159	0.9165	0.9170	0.9175	0.9180	0.9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.3	0.9191	0.9196	0.9201	0.9206	0.9212	0.9217	0.9222	0.9227	0.9232	0.9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.4	0.9243	0.9248	0.9253	0.9258	0.9263	0.9269	0.9274	0.9279	0.9284	0.9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.5	0.9294	0.9299	0.9304	0.9309	0.9315	0.9320	0.9325	0.9330	0.9335	0.9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.6	0.9345	0.9350	0.9355	0.9360	0.9365	0.9370	0.9375	0.9380	0.9385	0.9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.7	0.9395	0.9400	0.9405	0.9410	0.9415	0.9420	0.9425	0.9430	0.9435	0.9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
8.8	0.9445	0.9450	0.9455	0.9460	0.9465	0.9469	0.9474	0.9479	0.9484	0.9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
8.9	0.9494	0.9499	0.9504	0.9509	0.9513	0.9518	0.9523	0.9528	0.9533	0.9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.0	0.9542	0.9547	0.9552	0.9557	0.9562	0.9566	0.9571	0.9576	0.9581	0.9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.1	0.9590	0.9595	0.9600	0.9605	0.9609	0.9614	0.9619	0.9624	0.9628	0.9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.2	0.9638	0.9643	0.9647	0.9652	0.9657	0.9661	0.9666	0.9671	0.9675	0.9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.3	0.9685	0.9689	0.9694	0.9699	0.9703	0.9708	0.9713	0.9717	0.9722	0.9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.4	0.9731	0.9736	0.9741	0.9745	0.9750	0.9754	0.9759	0.9763	0.9768	0.9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.5	0.9777	0.9782	0.9786	0.9791	0.9795	0.9800	0.9805	0.9809	0.9814	0.9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.6	0.9823	0.9827	0.9832	0.9836	0.9841	0.9845	0.9850	0.9854	0.9859	0.9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.7	0.9868	0.9872	0.9877	0.9881	0.9886	0.9890	0.9894	0.9899	0.9903	0.9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.8	0.9912	0.9917	0.9921	0.9926	0.9930	0.9934	0.9939	0.9943	0.9948	0.9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.9	0.9956	0.9961	0.9965	0.9969	0.9974	0.9978	0.9983	0.9987	0.9991	0.9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

											Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.00	1.000	1.002	1.005	1.007	1.009	1.012	1.014	1.016	1.019	1.021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
0.01	1.023	1.026	1.028	1.030	1.033	1.035	1.038	1.040	1.042	1.045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
0.02	1.047	1.050	1.052	1.054	1.057	1.059	1.062	1.064	1.067	1.069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
0.03	1.072	1.074	1.076	1.079	1.081	1.084	1.086	1.089	1.091	1.094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
0.04	1.096	1.099	1.102	1.104	1.107	1.109	1.112	1.114	1.117	1.119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
0.05	1.122	1.125	1.127	1.130	1.132	1.135	1.138	1.140	1.143	1.146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
0.06	1.148	1.151	1.153	1.156	1.159	1.161	1.164	1.167	1.169	1.172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
0.07	1.175	1.178	1.180	1.183	1.186	1.189	1.191	1.194	1.197	1.199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
0.08	1.202	1.205	1.208	1.211	1.213	1.216	1.219	1.222	1.225	1.227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
0.09	1.230	1.233	1.236	1.239	1.242	1.245	1.247	1.250	1.253	1.256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
0.10	1.259	1.262	1.265	1.268	1.271	1.274	1.276	1.279	1.282	1.285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
0.11	1.288	1.291	1.294	1.297	1.300	1.303	1.306	1.309	1.312	1.315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
0.12	1.318	1.321	1.324	1.327	1.330	1.334	1.337	1.340	1.343	1.346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
0.13	1.349	1.352	1.355	1.358	1.361	1.365	1.368	1.371	1.374	1.377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.14	1.380	1.384	1.387	1.390	1.393	1.396	1.400	1.403	1.406	1.409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.15	1.413	1.416	1.419	1.422	1.426	1.429	1.432	1.435	1.439	1.442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.16	1.445	1.449	1.452	1.455	1.459	1.462	1.466	1.469	1.472	1.476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.17	1.479	1.483	1.486	1.489	1.493	1.496	1.500	1.503	1.507	1.510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.18	1.514	1.517	1.521	1.524	1.528	1.531	1.535	1.538	1.542	1.545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.19	1.549	1.552	1.556	1.560	1.563	1.567	1.570	1.574	1.578	1.581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
0.20	1.585	1.589	1.592	1.596	1.600	1.603	1.607	1.611	1.614	1.618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
0.21	1.622	1.626	1.629	1.633	1.637	1.641	1.644	1.648	1.652	1.656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
0.22	1.660	1.663	1.667	1.671	1.675	1.679	1.683	1.687	1.690	1.694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
0.23	1.698	1.702	1.706	1.710	1.714	1.718	1.722	1.726	1.730	1.734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
0.24	1.738	1.742	1.746	1.750	1.754	1.758	1.762	1.766	1.770	1.774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
0.25	1.778	1.782	1.786	1.791	1.795	1.799	1.803	1.807	1.811	1.816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
0.26	1.820	1.824	1.828	1.832	1.837	1.841	1.845	1.849	1.854	1.858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
0.27	1.862	1.866	1.871	1.875	1.879	1.884	1.888	1.892	1.897	1.901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
0.28	1.905	1.910	1.914	1.919	1.923	1.928	1.932	1.936	1.941	1.945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.29	1.950	1.954	1.959	1.963	1.968	1.972	1.977	1.982	1.986	1.991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.30	1.995	2.000	2.004	2.009	2.014	2.018	2.023	2.028	2.032	2.037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.31	2.042	2.046	2.051	2.056	2.061	2.065	2.070	2.075	2.080	2.084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.32	2.089	2.094	2.099	2.104	2.109	2.113	2.118	2.123	2.128	2.133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.33	2.138	2.143	2.148	2.153	2.158	2.163	2.168	2.173	2.178	2.183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.34	2.188	2.193	2.198	2.203	2.208	2.213	2.218	2.223	2.228	2.234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.35	2.239	2.244	2.249	2.254	2.259	2.265	2.270	2.275	2.280	2.286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.36	2.291	2.296	2.301	2.307	2.312	2.317	2.323	2.328	2.333	2.339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.37	2.344	2.350	2.355	2.360	2.366	2.371	2.377	2.382	2.388	2.393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.38	2.399	2.404	2.410	2.415	2.421	2.427	2.432	2.438	2.443	2.449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.39	2.455	2.460	2.466	2.472	2.477	2.483	2.489	2.495	2.500	2.506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
0.40	2.512	2.518	2.523	2.529	2.535	2.541	2.547	2.553	2.559	2.564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
0.41	2.570	2.576	2.582	2.588	2.594	2.600	2.606	2.612	2.618	2.624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
0.42	2.630	2.636	2.642	2.649	2.655	2.661	2.667	2.673	2.679	2.685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
0.43	2.692	2.698	2.704	2.710	2.716	2.723	2.729	2.735	2.742	2.748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
0.44	2.754	2.761	2.767	2.773	2.780	2.786	2.793	2.799	2.805	2.812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
0.45	2.818	2.825	2.831	2.838	2.844	2.851	2.858	2.864	2.871	2.877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
0.46	2.884	2.891	2.897	2.904	2.911	2.917	2.924	2.931	2.938	2.944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
0.47	2.951	2.958	2.965	2.972	2.979	2.985	2.992	2.999	3.006	3.013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
0.48	3.020	3.027	3.034	3.041	3.048	3.055	3.062	3.069	3.076	3.083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
0.49	3.090	3.097	3.105	3.112	3.119	3.126	3.133	3.141	3.148	3.155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

எதிர் மடக்கை அட்டவணை

											Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.50	3.162	3.170	3.177	3.184	3.192	3.199	3.206	3.214	3.221	3.228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
0.51	3.236	3.243	3.251	3.258	3.266	3.273	3.281	3.289	3.296	3.304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
0.52	3.311	3.319	3.327	3.334	3.342	3.350	3.357	3.365	3.373	3.381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
0.53	3.388	3.396	3.404	3.412	3.420	3.428	3.436	3.443	3.451	3.459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
0.54	3.467	3.475	3.483	3.491	3.499	3.508	3.516	3.524	3.532	3.540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
0.55	3.548	3.556	3.565	3.573	3.581	3.589	3.597	3.606	3.614	3.622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
0.56	3.631	3.639	3.648	3.656	3.664	3.673	3.681	3.690	3.698	3.707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
0.57	3.715	3.724	3.733	3.741	3.750	3.758	3.767	3.776	3.784	3.793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
0.58	3.802	3.811	3.819	3.828	3.837	3.846	3.855	3.864	3.873	3.882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
0.59	3.890	3.899	3.908	3.917	3.926	3.936	3.945	3.954	3.963	3.972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
0.60	3.981	3.990	3.999	4.009	4.018	4.027	4.036	4.046	4.055	4.064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
0.61	4.074	4.083	4.093	4.102	4.111	4.121	4.130	4.140	4.150	4.159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.62	4.169	4.178	4.188	4.198	4.207	4.217	4.227	4.236	4.246	4.256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.63	4.266	4.276	4.285	4.295	4.305	4.315	4.325	4.335	4.345	4.355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.64	4.365	4.375	4.385	4.395	4.406	4.416	4.426	4.436	4.446	4.457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.65	4.467	4.477	4.487	4.498	4.508	4.519	4.529	4.539	4.550	4.560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.66	4.571	4.581	4.592	4.603	4.613	4.624	4.634	4.645	4.656	4.667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
0.67	4.677	4.688	4.699	4.710	4.721	4.732	4.742	4.753	4.764	4.775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
0.68	4.786	4.797	4.808	4.819	4.831	4.842	4.853	4.864	4.875	4.887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
0.69	4.898	4.909	4.920	4.932	4.943	4.955	4.966	4.977	4.989	5.000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
0.70	5.012	5.023	5.035	5.047	5.058	5.070	5.082	5.093	5.105	5.117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
0.71	5.129	5.140	5.152	5.164	5.176	5.188	5.200	5.212	5.224	5.236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
0.72	5.248	5.260	5.272	5.284	5.297	5.309	5.321	5.333	5.346	5.358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
0.73	5.370	5.383	5.395	5.408	5.420	5.433	5.445	5.458	5.470	5.483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
0.74	5.495	5.508	5.521	5.534	5.546	5.559	5.572	5.585	5.598	5.610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
0.75	5.623	5.636	5.649	5.662	5.675	5.689	5.702	5.715	5.728	5.741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
0.76	5.754	5.768	5.781	5.794	5.808	5.821	5.834	5.848	5.861	5.875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
0.77	5.888	5.902	5.916	5.929	5.943	5.957	5.970	5.984	5.998	6.012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
0.78	6.026	6.039	6.053	6.067	6.081	6.095	6.109	6.124	6.138	6.152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
0.79	6.166	6.180	6.194	6.209	6.223	6.237	6.252	6.266	6.281	6.295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
0.80	6.310	6.324	6.339	6.353	6.368	6.383	6.397	6.412	6.427	6.442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
0.81	6.457	6.471	6.486	6.501	6.516	6.531	6.546	6.561	6.577	6.592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
0.82	6.607	6.622	6.637	6.653	6.668	6.683	6.699	6.714	6.730	6.745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
0.83	6.761	6.776	6.792	6.808	6.823	6.839	6.855	6.871	6.887	6.902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
0.84	6.918	6.934	6.950	6.966	6.982	6.998	7.015	7.031	7.047	7.063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
0.85	7.079	7.096	7.112	7.129	7.145	7.161	7.178	7.194	7.211	7.228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
0.86	7.244	7.261	7.278	7.295	7.311	7.328	7.345	7.362	7.379	7.396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
0.87	7.413	7.430	7.447	7.464	7.482	7.499	7.516	7.534	7.551	7.568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
0.88	7.586	7.603	7.621	7.638	7.656	7.674	7.691	7.709	7.727	7.745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
0.89	7.762	7.780	7.798	7.816	7.834	7.852	7.870	7.889	7.907	7.925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
0.90	7.943	7.962	7.980	7.998	8.017	8.035	8.054	8.072	8.091	8.110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
0.91	8.128	8.147	8.166	8.185	8.204	8.222	8.241	8.260	8.279	8.299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
0.92	8.318	8.337	8.356	8.375	8.395	8.414	8.433	8.453	8.472	8.492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
0.93	8.511	8.531	8.551	8.570	8.590	8.610	8.630	8.650	8.670	8.690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
0.94	8.710	8.730	8.750	8.770	8.790	8.810	8.831	8.851	8.872	8.892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
0.95	8.913	8.933	8.954	8.974	8.995	9.016	9.036	9.057	9.078	9.099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
0.96	9.120	9.141	9.162	9.183	9.204	9.226	9.247	9.268	9.290	9.311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
0.97	9.333	9.354	9.376	9.397	9.419	9.441	9.462	9.484	9.506	9.528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
0.98	9.550	9.572	9.594	9.616	9.638	9.661	9.683	9.705	9.727	9.750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
0.99	9.772	9.795	9.817	9.840	9.863	9.886	9.908	9.931	9.954	9.977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

அடுக்குச்சார்புக்கான அட்டவணை

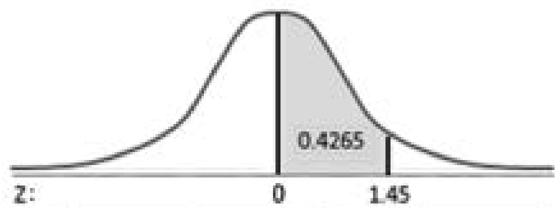
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.00	1.00000000	2.71828183	7.38905610	20.08553692	54.59815003	148.41315910	403.42879349	1096.63315843	2980.95798704	8103.08392758
0.01	1.01005017	2.74560102	7.46331735	20.28739993	55.14687056	149.90473615	407.48332027	1107.65450490	3010.91711288	8184.52127494
0.02	1.02020134	2.77319476	7.53832493	20.49129168	55.70110583	151.41130379	411.57859573	1118.78661775	3041.17733294	8266.77708126
0.03	1.03045453	2.80106583	7.61408636	20.69723259	56.26091125	152.93301270	415.71502938	1130.03061019	3071.74167327	8349.85957218
0.04	1.04081077	2.82921701	7.69060920	20.90524324	56.82634281	154.47001503	419.89303489	1141.38760663	3102.61319033	8433.77705601
0.05	1.05127110	2.85765112	7.76790111	21.11534442	57.39745705	156.02246449	424.11303004	1152.85874278	3133.79497129	8518.53792457
0.06	1.06183655	2.88637099	7.84596981	21.32755716	57.97431108	157.59051632	428.37543686	1164.44516577	3165.29013436	8604.15065402
0.07	1.07250818	2.91537950	7.92482312	21.54190268	58.55696259	159.17432734	432.68068157	1176.14803425	3197.10182908	8690.62380571
0.08	1.08328707	2.94467955	8.00446891	21.75840240	59.14546985	160.77405593	437.02919472	1187.96851851	3229.23323664	8777.96602703
0.09	1.09417428	2.97427407	8.08491516	21.97707798	59.73989170	162.38986205	441.42141115	1199.90780061	3261.68757023	8866.18605226
0.10	1.10517092	3.00416602	8.16616991	22.19795128	60.34028760	164.02190730	445.85777008	1211.96707449	3294.46807528	8955.29270348
0.11	1.11627807	3.03435839	8.24824128	22.42104440	60.94671757	165.67035487	450.33871517	1224.14754609	3327.57802989	9045.29489144
0.12	1.12749685	3.06485420	8.33113749	22.64637964	61.55924226	167.33536962	454.86469450	1236.45043347	3361.02074508	9136.20161642
0.13	1.13882838	3.09565650	8.41486681	22.87397954	62.17792293	169.01711804	459.43616068	1248.87696691	3394.79956514	9228.02196918
0.14	1.15027380	3.12676837	8.49943763	23.10386686	62.80282145	170.71576832	464.05357086	1261.42838910	3428.91786799	9320.76513183
0.15	1.16183424	3.15819291	8.58485840	23.33606458	63.43400030	172.43149032	468.71738678	1274.10595517	3463.37906548	9414.44037876
0.16	1.17351087	3.18993328	8.67113766	23.57059593	64.07152260	174.16445561	473.42807483	1286.91093291	3498.18660376	9509.05707757
0.17	1.18530485	3.22199264	8.75828404	23.80748436	64.71545211	175.91483748	478.18610609	1299.84460280	3533.34396362	9604.62469001
0.18	1.19721736	3.25437420	8.84630626	24.04675355	65.36585321	177.68281099	482.99195635	1312.90825825	3568.85466082	9701.15277293
0.19	1.20924960	3.28708121	8.93521311	24.28842744	66.02279096	179.46855293	487.84610621	1326.10320561	3604.72224646	9798.65097920
0.20	1.22140276	3.32011692	9.02501350	24.53253020	66.68633104	181.27224188	492.74904109	1339.43076439	3640.95030733	9897.12905874
0.21	1.23367806	3.35348465	9.11571639	24.77908622	67.35653981	183.09405819	497.70125129	1352.89226737	3677.54246627	9996.59685944
0.22	1.24607673	3.38718773	9.20733087	25.02812018	68.03348429	184.93418407	502.70323202	1366.48906071	3714.50238251	10097.06432815
0.23	1.25860001	3.42122954	9.29986608	25.27965697	68.71723217	186.79280352	507.75548350	1380.22250409	3751.83375209	10198.54151171
0.24	1.27124915	3.45561346	9.39333129	25.53372175	69.40785184	188.67010241	512.85851094	1394.09397087	3789.54030817	10301.03855791
0.25	1.28402542	3.49034296	9.48773584	25.79033992	70.10541235	190.56626846	518.01282467	1408.10484820	3827.62582144	10404.56571656
0.26	1.29693009	3.52542149	9.58308917	26.04953714	70.80998345	192.48149130	523.21894011	1422.25653720	3866.09410048	10509.13334045
0.27	1.30996445	3.56085256	9.67940081	26.31133934	71.52163562	194.41596245	528.47737788	1436.55045304	3904.94899215	10614.75188643
0.28	1.32312981	3.59663973	9.77668041	26.57577270	72.24044001	196.36987535	533.78866383	1450.98802511	3944.19438198	10721.43191645
0.29	1.33642749	3.63278656	9.87493768	26.84286366	72.96646850	198.34342541	539.15332908	1465.57069720	3983.83419453	10829.18409859
0.30	1.34985881	3.66929667	9.97418245	27.11263892	73.69979370	200.33680997	544.57191013	1480.29992758	4023.87239382	10938.01920817
0.31	1.36342511	3.70617371	10.07442466	27.38512547	74.44048894	202.35022839	550.04494881	1495.17718919	4064.31298371	11047.94812878
0.32	1.37712776	3.74342138	10.17567431	27.66035056	75.18862829	204.38388199	555.57299245	1510.20396976	4105.16000827	11158.98185341
0.33	1.39096813	3.78104339	10.27794153	27.93834170	75.94428657	206.43797416	561.15659385	1525.38177199	4146.41755226	11271.13148552
0.34	1.40494759	3.81904351	10.38123656	28.21912671	76.70753934	208.51271029	566.79631138	1540.71211367	4188.08974147	11384.40824018
0.35	1.41906755	3.85742553	10.48556972	28.50273364	77.47846293	210.60829787	572.49270901	1556.19652784	4230.18074313	11498.82344515
0.36	1.43332941	3.89619330	10.59095145	28.78919088	78.25713442	212.72494645	578.24635639	1571.83656296	4272.69476640	11614.38854204
0.37	1.44773461	3.93535070	10.69739228	29.07852706	79.04363170	214.86286770	584.05782889	1587.63378304	4315.63606270	11731.11508747
0.38	1.46228459	3.97490163	10.80490286	29.37077111	79.83803341	217.02227542	589.92770766	1603.58976783	4359.00892620	11849.01475419
0.39	1.47698079	4.01485005	10.91349394	29.66595227	80.64041898	219.20338555	595.85657969	1619.70611293	4402.81769423	11968.09933225
0.40	1.49182470	4.05519997	11.02317638	29.96410005	81.45086866	221.40641620	601.84503787	1635.98443000	4447.06674770	12088.38073022
0.41	1.50681779	4.09595540	11.13396115	30.26524426	82.26946350	223.63158768	607.89368106	1652.42634686	4491.76051155	12209.87097633
0.42	1.52196156	4.13712044	11.24585931	30.56941502	83.09628536	225.87912250	614.00311413	1669.03350774	4536.90345519	12332.58221972
0.43	1.53725752	4.17869919	11.35888208	30.87664275	83.93141691	228.14924542	620.17394801	1685.80757337	4582.50009296	12456.52673161
0.44	1.55270722	4.22069582	11.47304074	31.18695817	84.77494167	230.44218346	626.40679981	1702.75022115	4628.55498456	12581.71690655
0.45	1.56831219	4.26311452	11.58834672	31.50039231	85.62694400	232.75816591	632.70229281	1719.86314538	4675.07273551	12708.16526367
0.46	1.58407398	4.30595953	11.70481154	31.81697651	86.48750910	235.09742437	639.06105657	1737.14805735	4722.05799763	12835.88444790
0.47	1.59999419	4.34923514	11.82244685	32.13674244	87.35672301	237.46019276	645.48372697	1754.60668558	4769.51546949	12964.88723127
0.48	1.61607440	4.39294568	11.94126442	32.45972208	88.23467268	239.84670737	651.97094627	1772.24077593	4817.44989687	13095.18651418
0.49	1.63231622	4.43709552	12.06127612	32.78594771	89.12144588	242.25720686	658.52336322	1790.05209184	4865.86607325	13226.79532664
0.50	1.64872127	4.48168907	12.18249396	33.11545196	90.01713130	244.69193226	665.14163304	1808.04241446	4914.76884030	13359.72682966

அடுக்குச்சார்புக்கான அட்டவணை

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.51	1.66529119	4.52673079	12.30493006	33.44826778	90.92181851	247.15112707	671.82641759	1826.21354282	4964.16308832	13493.99431650
0.52	1.68202765	4.57222520	12.42859666	33.78442846	91.83559798	249.63503719	678.57838534	1844.56729405	5014.05375679	13629.61121401
0.53	1.69893231	4.61817682	12.55350614	34.12396761	92.75856108	252.14391102	685.39821149	1863.10550356	5064.44583482	13766.59108401
0.54	1.71600686	4.66459027	12.67967097	34.46691919	93.69080012	254.67799946	692.28657804	1881.83002516	5115.34436165	13904.94762458
0.55	1.73325302	4.71147018	12.80710378	34.81331749	94.63240831	257.23755591	699.24417382	1900.74273134	5166.75442718	14044.69467150
0.56	1.75067250	4.75882125	12.93581732	35.16319715	95.58347983	259.82283632	706.27169460	1919.84551337	5218.68117245	14185.84619960
0.57	1.76826705	4.80664819	13.06582444	35.51659315	96.54410977	262.43409924	713.36984313	1939.14028156	5271.12979019	14328.41632413
0.58	1.78603843	4.85495581	13.19713816	35.87354085	97.51439421	265.07160579	720.53932925	1958.62896539	5324.10552531	14472.41930224
0.59	1.80398842	4.90374893	13.32977160	36.23407593	98.49443016	267.73561971	727.78086990	1978.31351375	5377.61367541	14617.86953434
0.60	1.82211880	4.95303242	13.46373804	36.59823444	99.48431564	270.42640743	735.09518924	1998.19589510	5431.65959136	14764.78156558
0.61	1.84043140	5.00281123	13.59905085	36.96605281	100.48414964	273.14423800	742.48301872	2018.27809772	5486.24867780	14913.17008727
0.62	1.85892804	5.05309032	13.73572359	37.33756782	101.49403213	275.88938323	749.94509711	2038.56212982	5541.38639368	15063.04993840
0.63	1.87761058	5.10387472	13.87376990	37.71281662	102.51406411	278.66211763	757.48217064	2059.05001984	5597.07825281	15214.43610708
0.64	1.89648088	5.15516951	14.01320361	38.09183673	103.54434758	281.46271848	765.09499302	2079.74381657	5653.32982444	15367.34373205
0.65	1.91554083	5.20697983	14.15403865	38.47466605	104.58498558	284.29146582	772.78432554	2100.64558942	5710.14673375	15521.78810420
0.66	1.93479233	5.25931084	14.29628910	38.86134287	105.63608216	287.14864256	780.55093713	2121.75742858	5767.53466250	15677.78466809
0.67	1.95423732	5.31216780	14.43996919	39.25190586	106.69774243	290.03453439	788.39560446	2143.08144525	5825.49934952	15835.34902351
0.68	1.97387773	5.36555597	14.58509330	39.64639407	107.77007257	292.94942992	796.31911202	2164.61977185	5884.04659134	15994.49692704
0.69	1.99371553	5.41948071	14.73167592	40.04484696	108.85317981	295.89362064	804.32225214	2186.37456223	5943.18224271	16155.24429358
0.70	2.01375271	5.47394739	14.87973172	40.44730436	109.94717245	298.86740097	812.40582517	2208.34799189	6002.91221726	16317.60719802
0.71	2.03399126	5.52896148	15.02927551	40.85380653	111.05215991	301.87106828	820.57063945	2230.54225819	6063.24248804	16481.60187677
0.72	2.05443321	5.58452846	15.18032224	41.26439411	112.16825267	304.90492296	828.81751148	2252.95958057	6124.17908811	16647.24472945
0.73	2.07508061	5.64065391	15.33288702	41.67910816	113.29556235	307.96926838	837.14726595	2275.60220079	6185.72811120	16814.55232047
0.74	2.09593551	5.69734342	15.48698510	42.09799016	114.43420168	311.06441098	845.56073585	2298.47238312	6247.89571226	16983.54138073
0.75	2.11700002	5.75460268	15.64263188	42.52108200	115.58428453	314.19066029	854.05876253	2321.57241461	6310.68810809	17154.22880929
0.76	2.13827622	5.81243739	15.79984295	42.94842598	116.74592590	317.34832892	862.64219579	2344.90460528	6374.11157799	17326.63167502
0.77	2.15976625	5.87085336	15.95863401	43.38006484	117.91924196	320.53773265	871.31189399	2368.47128836	6438.17246436	17500.76721836
0.78	2.18147227	5.92985642	16.11902095	43.81604174	119.10435004	323.75919042	880.06872411	2392.27482054	6502.87717335	17676.65285301
0.79	2.20339643	5.98945247	16.28101980	44.25640028	120.30136866	327.01302438	888.91356183	2416.31758219	6568.23217547	17854.30616767
0.80	2.22554093	6.04964746	16.44464677	44.70118449	121.51041752	330.29955991	897.84729165	2440.60197762	6634.24400628	18033.74492783
0.81	2.24790799	6.11044743	16.60991822	45.15043887	122.73161752	333.61912567	906.87080695	2465.13043529	6700.91926702	18214.98707751
0.82	2.27049984	6.17185845	16.77685067	45.60420832	123.96509078	336.97205363	915.98501008	2489.90540804	6768.26462527	18398.05074107
0.83	2.29331874	6.23388666	16.94546082	46.06253823	125.21096065	340.35867907	925.19081248	2514.92937342	6836.28681562	18582.95422504
0.84	2.31636698	6.29653826	17.11576554	46.52547444	126.46935173	343.77934066	934.48913473	2540.20483383	6904.99264036	18769.71601992
0.85	2.33964685	6.35981952	17.28778184	46.99306323	127.74038985	347.23438048	943.88090667	2565.73431683	6974.38897011	18958.35480204
0.86	2.36316069	6.42373677	17.46152694	47.46535137	129.02420211	350.72414402	953.36706749	2591.52037541	7044.48274457	19148.88943544
0.87	2.38691085	6.48829640	17.63701820	47.94238608	130.32091690	354.24898027	962.94856581	2617.56558819	7115.28097317	19341.33897375
0.88	2.41089971	6.55350486	17.81427318	48.42421507	131.63066389	357.80924171	972.62635979	2643.87255970	7186.79073580	19535.72266207
0.89	2.43512965	6.61936868	17.99330960	48.91088652	132.95357405	361.40528437	982.40141722	2670.44392068	7259.01918349	19732.05993893
0.90	2.45960311	6.68589444	18.17414537	49.40244911	134.28977968	365.03746787	992.27471561	2697.28232827	7331.97353916	19930.37043823
0.91	2.48432253	6.75308880	18.35679857	49.89895197	135.63941441	368.70615541	1002.24724229	2724.39046634	7405.66109828	20130.67399118
0.92	2.50929039	6.82095847	18.54128746	50.40044478	137.00261319	372.41171388	1012.31999453	2751.77104573	7480.08922969	20332.99062831
0.93	2.53450918	6.88951024	18.72763050	50.90697767	138.37951234	376.15451382	1022.49397962	2779.42680452	7555.26537625	20537.34058145
0.94	2.55998142	6.95875097	18.91584631	51.41860130	139.77024956	379.93492954	1032.77021496	2807.36050830	7631.19705565	20743.74428576
0.95	2.58570966	7.02868758	19.10595373	51.93536683	141.17496392	383.75333906	1043.14972818	2835.57495047	7707.89186111	20952.22238178
0.96	2.61169647	7.09932707	19.29797176	52.45732595	142.59379590	387.61012424	1053.63355724	2864.07295251	7785.35746218	21162.79571750
0.97	2.63794446	7.17067649	19.49191960	52.98453084	144.02688737	391.50567075	1064.22275054	2892.85736422	7863.60160548	21375.48535043
0.98	2.66445624	7.24274299	19.68781664	53.51703423	145.47438165	395.44036816	1074.91836700	2921.93106408	7942.63211550	21590.31254971
0.99	2.69123447	7.31553376	19.88568249	54.05488936	146.93642350	399.41460993	1085.72147619	2951.29695948	8022.45689535	21807.29879823

திட்ட இயல்நிலை பரவல் அட்டவணை

இந்த அட்டவணையானது $Z = 0$ மற்றும் Z ன் எந்த மதிப்பிற்கும் இடையிலான பரப்பினை நிகழ்தகவு மதிப்பாக தருகிறது.
எடுத்துக்காட்டாக, $Z = 1.45$ எனில்,
பரப்பானது 0.4265 ஆகும்.



Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

துணை நூற்பட்டியல்

1. Introduction to Matrices, S.P. Gupta , S. Chand & Company
2. Matrices, Shanthi Narayanan, S. Chand & Company
3. Matrices and Determinants, P.N. Arora, S. Chand & Company
4. Stochastic Processes, J. Medhi, New Age International Publishers
5. A Text Book on differential Calculus – S.K. Goyal - Jai Prakash Nath Publications.
6. A Text Book on Integral Calculus – S.K. Goyal - Jai Prakash Nath Publications.
7. Mathematics for Economics – Mehta, Madnani – Sultan Chand & Sons.
8. Differential and Integral Calculus - N.P. Iskunov - Mir Publishers, Moscow.
9. Differential and Integral Calculus - Schamum's Outline Series - Frank Ayres.
10. Calculus - S. Narayanan, T.K. Manicavachagon Pillay - S. Viswanathan - Printers and Publishers Pvt. Ltd.
11. Differential Equations and Its Applications - S. Narayanan, T.K. Manicavachagon Pillay
12. Calculus (Volume I & II) - Tom. M. Apostol - John Wiley Publications.
13. Numerical Methods- P. Kandasamy, K. Thilagvathy, K. Gunavathi- S. Chand & Company.
14. Finite Differences and Numerical Analysis - H.C. Saxena, S. Chand & Company.
15. Applied Statistics by A. Chandrasekaran and A. Latha.
16. Basic Statistics : B.L. Agarwal, New Age International Publishers.
17. Business Statistics Problems and Solutions: J.K. Sharma, Vikas Publishing House Pvt. Ltd.
18. Comprehensive Statistical Methods: P.N. Arora, Sumeet Arora and S. Arora.
19. Elements of Statistical Methods by P.N. Arora, Sumeet Arora.
20. Fundamentals of Statistics: S.C. Gupta, Himalaya Publishing House.
21. Fundamentals of Applied Statistics: S.C. Gupta and V.K. Kapoor, Sultan Chand & Sons.
22. Goon, A.M. Gupta M.K. and Das Gupta B. (1977) An Outline of Statistical Theory, Vol I, 6/e, World Press, Calcutta.

துணை நூற்பட்டியல்

23. Gupta S.C, Kapoor V.K (2009) Fundamentals of Mathematical Statistics. Sultan Chand & Sons, New Delhi.
24. Handbook of Basic Statistical Concepts for Scientists and Pharmacists by Shubha Rani.
25. Hogg. R.V. Craig. A.T. (1978): Introduction to Mathematical Statistics, McGraw Hill Publishing Co. Inc. New York.
26. Introduction to Statistical Quality Control: Douglas C. Montgomery, Wiley Publications.
27. Mood A. M, Graybill F.A, Boes D.C. (1983) Introduction to the Theory of Statistics. Third Edition, McGraw - Hill International Book Company.
28. Sanjay Arora and Bansilal (1989): New Mathematical Statistics, Satyaprakashan, New Delhi.
29. Statistical Methods: S.P. Gupta, Sultan Chand & Sons.
30. Statistical Quality Control: Douglas C. Montgomery, Wiley Publications.
31. Statistical Quality Control: M. Mahajan, Dhanpat Rai & Co Publications.
32. Statistics Theory and Practice: R.S.N. Pillai and Bagavathi: S. Chand.
33. Operations Research, Dr. S.P. Gupta, P.K. Gupta, Dr. Manmohan, Sultan Chand & Sons.
34. Operations Research, A. Ravindran, James J. Solberg, Willey Student Edition.
35. Operations Research, Frederick S. Hilton, Gerald J. Lieberman, Mc Graw Hill Education.
36. Operations Research – Dr. S.J. Venkatesan, Sri Krishna Publications, Chennai.
37. Business Mathematics and Statistics, HSC First Year, Tamil Nadu Text Book Corporation.
38. Mathematics, HSC First & Second Year, Tamil Nadu Text Book Corporation.
39. Statistics - HSC First & Second Year – Tamil Nadu Text Book Corporation.

வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியியல் – மேல்நிலை இரண்டாமாண்டு
வல்லுநர்கள், மேலாய்வாளர்கள் மற்றும் நூலாசிரியர்கள் பெயர் பட்டியல்

பாடத் தயாரிப்புக்குழு தலைவர்

திரு. ந. இரமேஷ்
இணைப் பேராசிரியர் (ஓய்வு), கணிதத்துறை,
அரசு கலைக் கல்லூரி (ஆண்கள்),
நந்தனம், சென்னை.

மேலாய்வாளர்கள்

முனைவர் மா.ரெ. சீனிவாசன்
பேராசிரியர் மற்றும் துறைத் தலைவர்
புள்ளியியல் துறை, சென்னை பல்கலைக் கழகம்,
சென்னை.

முனைவர் தெ. அறிவுடைநம்பி
பேராசிரியர், கணிதத்துறை,
அண்ணா பல்கலைக் கழகம்,
சென்னை.

பாடப் பொருள் வல்லுநர்கள்

முனைவர் வேணு பிரகாஷ்
இணைப் பேராசிரியர் மற்றும் துறை தலைவர்,
புள்ளியியல் துறை,
மாநிலக் கல்லூரி , சென்னை.

முனைவர் இரா. திருமலைச்சாமி
இணைப் பேராசிரியர் மற்றும் துறைத் தலைவர்
கணிதத்துறை, அரசு கலைக் கல்லூரி (ஆண்கள்),
நந்தனம், சென்னை.

முனைவர் ச. ஜெ. வெங்கடேசன்
இணைப் பேராசிரியர்,
கணிதத்துறை, அரசு கலைக் கல்லூரி (ஆண்கள்),
நந்தனம், சென்னை.

திருமதி கி. கோகிலா
உதவி பேராசிரியர் மற்றும் துறைத் தலைவர்
புள்ளியியல் துறை,
டாக்டர் அம்பேத்கர் அரசினர் கலைக் கல்லூரி,
வியாசர்பாடி, சென்னை.

முனைவர் நா. சுந்தரம்
உதவி பேராசிரியர்,
புள்ளியியல் துறை,
மாநிலக் கல்லூரி , சென்னை.

முனைவர் லோ. பாரி தயாள்
உதவி பேராசிரியர், புள்ளியியல் துறை
சென்னை கிருத்துவக் கல்லூரி,
தாம்பரம், சென்னை.

திருமதி மே. திலகம்
உதவிப் பேராசிரியர் ,
புள்ளியியல் துறை,
மாநிலக் கல்லூரி, சென்னை.

பாடக்குழு பொறுப்பாளர்

திரு. இரவிக்குமார் ஆறுமுகம்
முதல்வர்
மாவட்ட ஆசிரியர் கல்வி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம்,
மாயனூர், கரூர் மாவட்டம்.

பாட நூல் ஒருங்கிணைப்பாளர்

திரு. பாபு சுப்பிரமணியன்
உதவி பேராசிரியர்
மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி மற்றும் நிறுவனம்,
சென்னை.

நூலாசிரியர்கள்

திரு. இரா. வில்லவன்கோதை
தலைமை ஆசிரியர், அரசினர் மேல்நிலைப் பள்ளி,
கொருக்கை, நாகப்பட்டினம் மாவட்டம்.

திரு. தி.பி. சுவாமி நாதன்
முதுகலை கணித ஆசிரியர்,
மறைமலை அடிகளார் அரசு மேல்நிலைப் பள்ளி
பல்லாவரம், சென்னை.

திரு. ஹரி. வெங்கடேஷ்
முதுகலை கணித ஆசிரியர்,
சர் இராமசாமி முதலியார் மேல்நிலைப்பள்ளி,
அம்பத்தூர், சென்னை.

திருமதி சி. பகவதி
முதுகலைப் பட்டதாரி ஆசிரியர்,
ஸ்ரீ அகோபில மடம் ஓரியண்டல் மேல்நிலைப் பள்ளி,
மேற்கு மாம்பலம், சென்னை.

திரு. எஸ்.எப். சுலைமான்
முதுகலைப் பட்டதாரி ஆசிரியர்,
மறைமலை அடிகளார் அரசு மேல்நிலைப் பள்ளி
பல்லாவரம், சென்னை.

திரு. வீ. கலைச்செல்வன்
முதுகலைப் பட்டதாரி ஆசிரியர்,
அரசு மேல்நிலைப் பள்ளி, திருநின்றவூர், திருவள்ளூர் மாவட்டம்.

திரு. த. ராஜ சேகர்
முதுகலைப் பட்டதாரி ஆசிரியர்,
அரசு ஆண்கள் மேல்நிலைப் பள்ளி
குரோம் பேட்டை, காஞ்சிபுரம் மாவட்டம்.

திருமதி அ. சுகன்யா,
முதுகலை கணித ஆசிரியர், அரசு மேல்நிலைப் பள்ளி,
கோவிலம் பாக்கம், காஞ்சிபுரம் மாவட்டம்.

திரு. வெ. கணேசன்
முதுகலைப் பட்டதாரி ஆசிரியர்,
நேரு அரசினர் ஆண்கள் மேல்நிலைப் பள்ளி,
நங்கைநல்லூர், சென்னை.

திரு. ம.கோ. திரிலோகசந்திரன்
முதுகலை கணித ஆசிரியர், அரசு மேல்நிலைப் பள்ளி
மெய்யூர், திருவள்ளூர் மாவட்டம்.

ICT ஒருங்கிணைப்பாளர்

தா. வாசுராஜ்
முதுகலை கணித ஆசிரியர் மற்றும் துறைத் தலைவர்
கே. ஆர். எம்.பொதுப் பள்ளி, செம்மியம், சென்னை.

விரைவுக்குறியீடு மேலாண்மைக்குழு

இரா. ஜெகநாதன், இ.நி.ஆ., ஊ.ஒ.ந.நி.பள்ளி, கணேசபுரம், போளூர், திருவண்ணாமலை மாவட்டம். .

மு. சரவணன், ப.ஆ, அ.ம.மே.நி.பள்ளி, புதுப்பாளையம், வாழப்பாடி, சேலம்.

ம. முருகேசன், ப.ஆ, ஊ.ஒ.ந.நி.பள்ளி, பெத்தவேளாண்கோட்டகம், முத்துப்பேட்டை, திருவாரூர்.

புத்தக வடிவமைப்பாளர்

ஜாய் கிராஃபிக்ஸ், சென்னை.

அட்டை வடிவமைப்பாளர்

கதிர் ஆறுமுகம்.

In-House QC

ராஜேஷ் தங்கப்பன், ஜெரால்டு வில்சன்

ஒருங்கிணைப்பாளர்

ரமேஷ் முனிசாமி

தட்டச்சு

கே. நாகவேலு

இந்நூல் 80ஜி.எஸ்.எம். எலிகண்ட் மேப்லித்தோ தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது.
ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர்:

குறிப்புகள்

குறிப்புகள்

குறிப்புகள்