வணிகக் கணிதம்

மேல்நிலை இரண்டாம் ஆண்டு

தமிழ்நாடு அரசு
இலவசப் பாடநூல் வழங்கும்
திட்டத்தின் கீழ் வெளியிடப்பட்டது
(விற்பனைக்கு அன்று)

தீண்டாமை ஒரு பாவச்செயல்
தீண்டாமை ஒரு பெருங்குற்றம்
தீண்டாமை மனிதத்தன்மையற்ற செயல்

தமிழ்நாடு பாடநூல் மற்றும்
கல்வியியல் பணிகள் கழகம்
கல்லூரிச் சாலை, சென்னை – 600 006

திருத்தி பதிப்பு – 2009
மறுபதிப்பு – 2017

பாடநூல் குழு

தலைவர்

முனைவர் **ச.அந்தோணிராஜ்**
முதல்வர்
அரசு திருமகள் ஆலை கல்லூரி,
குடியாத்தம், வேலூர் மாவட்டம்.

மேலாய்வாளர்

முனைவர் **மா.ரெ.சீனிவாசன்**
இணைப்பேராசிரியர், புள்ளியியல் துறை,
சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்
சென்னை – 5.

மேலாய்வாளர்கள் – நூலாசிரியர்கள்

திரு. **ந. ரமேஷ்**
தேர்வுநிலை விரிவுரையாளர்
கணிதத்துறை
அரசு ஆடவர் கலைக் கல்லூரி
நந்தனம், சென்னை – 35..

முனைவர். **இரா. மூர்த்தி**
இணைப்பேராசிரியர்
கணிதத்துறை
மாநிலக் கல்லூரி
சென்னை – 5.

நூலாசிரியர்கள்

முனைவர். **வேணு. பிரகாஷ்**
புள்ளியியல் விரிவுரையாளர் (தே.நி.)
மாநிலக் கல்லூரி
சென்னை – 5.

திரு. **சு. இராமச்சந்திரன்**
தலைமை ஆசிரியர்
சிந்தாதிரிப்பேட்டை மேல்நிலைப்பள்ளி
சிந்தாதிரிப்பேட்டை, சென்னை–2.

திரு. **சங்.திவே. பத்மநாபன்**
உதவித் தலைமை ஆசிரியர்
இந்து மேல்நிலைப்பள்ளி
திருவல்லிக்கேணி, சென்னை–5.

திரு. **சா. இராமன்**
முதுகலைப் பட்டதாரி ஆசிரியர்
ஜெயகோபால் கரோடியா தேசிய மேல்நிலைப் பள்ளி, கிழக்கு தாம்பரம், சென்னை–59.

திரு. **அமலி ராஜா**
முதுகலைப் பட்டதாரி ஆசிரியர்
நல்ல ஆயன் மெட்ரிக். மேல்நிலைப்பள்ளி
கல்லூரிச்சாலை, சென்னை–6.

திருமதி. **மு. மாலினி**
முதுகலைப் பட்டதாரி ஆசிரியர்
பெ.சு.மேல்நிலைப் பள்ளி (மையம்)
மைலாப்பூர், சென்னை – 4.

விலை : ரூ.

பாடங்கள் தயாரிப்பு :
தமிழ்நாடு அரசுக்காக பள்ளிக் கல்வி இயக்ககம், தமிழ்நாடு.

இந்நூல் 60 ஜி.எஸ்.எம். தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது.

ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர் :

முகவுரை

''எந்த ஓர் உண்மையின் மிகத் தெளிவான மற்றும் அழகான கூற்று இறுதியில் கணித வடிவத்தையே அடைய வேண்டும்'' – தொரவ்.

பொருளியலுக்கான நோபல் பரிசு பெற்றவர்களில் அறுபது விழுக்காட்டிற்கும் மேற்பட்டோர் கணிதத்துவ பொருளியலில் மூலமுதலான சாதனைகள் செய்தவர்கள். அத்தகைய பொருளியல் வல்லுநர்கள் உயர் கணிதத்தை ஆழ்ந்து பயின்றதோடு அதனைப் பெருப்பொருளியல் மற்றும் கணிதப் பொருளியல் ஆகியவற்றின் உயர் ஆய்வுகளுக்கு வெற்றிகரமாகப் பயன்படுத்தினர்.

ஸ்டான்ஃபோர்டு பல்கலைக் கழக நிதித்துறைப் பேராசிரியர் முனைவர் ஸ்கோல்ஸ் என்பவரும் பொருளியல் வல்லுனர் முனைவர் மெர்டன் என்பவரும் இணைந்து 1970ஆம் ஆண்டு, காலப்போக்கில் ஏற்படும் மாற்றத்தைக் குறிக்கும் வகைக்கெழு சமன்பாட்டுச் சூத்திரம் ஒன்றைக் கண்டுபிடித்து பொருளாதாரத்திற்கென 1997ஆம் ஆண்டு நோபல் பரிசு பெற்றனர். இச்சூத்திரம் தெரிவுநிலைக் காலம், விலைகள், வட்டி வீதம் மற்றும் சந்தையில் மாறும் தன்மை என்ற நான்கு மாறிகளின் அடிப்படையில் விலையைத் தீர்மானிக்கும் வகையில் அமைந்திருந்தது. இச்சூத்திரம் நடைமுறையில் பெரிதும் பயன்பட்டதோடல்லாமல், அமெரிக்க பங்குச் சந்தையையே மாற்றமடையச் செய்தது.

பொருளியல் என்பது சில வெளிப்படை உண்மைகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு தருக்க முறையைப் பயன்படுத்தி வருவிக்கப்படுவனவற்றை சார்ந்த அறிவியல் என்று கருதப்பட்டது. ஆனால் இன்று பொருளியல் முற்றிலும் உருமாறிவிட்டது. வரைபடங்கள, சமன்பாடுகள் மற்றும் புள்ளியியல் ஆகியவற்றின் ஏராளமான பயன்பாடுகள், பொருளியல் தன்மையை மாற்றிவிட்டன. சில மாறிகளில் துவங்கி படிப்படியாக மற்ற மாறிகளைப் புகுத்தி பின்னர் அவற்றிற்கிடையேயான தொடர்பையும், மற்றும் பொருளாதாரக் கட்டமைப்பின் உள் அமைப்புத் தத்துவத்தை ஆராயவும் கணிதம் பயன்படுத்தப்படுகிறது. இவ்வதிமாக புதிய பொருளியல் உண்மைகளைக் கண்டு அவற்றைப் பெருமளவில் பயன்படுத்த கணிதவழி அமைப்புகள் பயன்படுகின்றன.

ஆயுள் காப்பீடு, பங்கு வர்த்தகம் மற்றும் முதலீடு போன்றவைகளை உள்ளடக்கிய இடர்–நேர்வு மேலாண்மை கணதிவியலைச் சார்ந்துள்ளது. எதிர்காலத்தை மிகத் துல்லியமாக கணிக்க, கணிதத்தைச் சாதகமாகப் பயன்படுத்த முடியும் ; ஆனாலும் துல்லியத் தன்மை நூறு விழுக்காடாக இருக்காது என்பது உண்மைதான். எனினும் ஒருவர் தன் பணத்தை எவ்வாறு முதலீடு செய்வது என்று புத்திசாலித்தனமாகவும் துல்லியமாகவும் முடிவெடுக்க கணிதம் பயன்படும். பதினேழாம் நூற்றாண்டைச் சேர்ந்த பாஸ்கல் மற்றும் ஃபெர்மாட் என்ற இரு கணித வல்லுனர்கள் கணிதத்தைப் பயன்படுத்தி எதிர்கால நிகழ்வுகளைக் கணிக்கும் முறையை உருவாக்கினர். இரு பகடைகளை குறிப்பிட்ட தடவைகள் வீசும் விளையாட்டின் பல்வேறு நிகழ்வுகளின் நிகழ்தகவுகளை அவர்கள் கணக்கிட்டனர்.

நவீன பொருளாதாரப் பிரச்சனைகளின் சிக்கல்களின் கடுமை அதிகரித்துக் கொண்டே போவதால் புதிய முறைகளை ஏற்பதற்கும் ஆராய்வதற்குமான தேவை மேன்மேலும் கூடிக்கொண்டே போகிறது. கணிதம் மற்றும் புள்ளியியல் அடிப்படையில் அமைந்த வழிமுறைகளைத் தக்கபடி பயன்படுத்தினால் அவை குறிப்பாக பொருளியல், வாணிபம் மற்றும்

தொழில் ஆகிய துறைகளில் சுருக்கமான, ஒப்புமைத் தன்மையுடைய மற்றும் திறன்மிக்க கருவிகளாக அமையும். மேலும் இம்முறைகள் ஆய்வு செய்யப்படும் கோட்பாட்டை ஆழமாக அலசி ஆராய உதவுவதோடல்லாமல் சரியான மற்றும் பகுத்தறியும் அடிப்படையில் தீர்வுகளைப் பெறவும் வழிவகுக்கின்றன.

2005–2006 கல்வி ஆண்டு முதல் அறிமுகப்படுத்தப்படும் இப்பாடப் புத்தகம் பன்னிரெண்டாம் வகுப்பு வணிகக் கணிதத்தின் பாடத்திட்டத்திற்கிணங்க எழுதப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு பாடமும் அடிப்படைக் கருத்தில் துவங்கி படிப்படியாக கருத்துச் செறிவு பெறும் வண்ணம் அமைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு நிலையிலும் ஏராளமான எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. கருத்துருக்களையும் கலைச் சொற்களின் பொருளை–ளயும் மாணவர்கள் நன்கு கற்றுணர்ந்து மேலும் பல கணக்குகளைத் தாமாகவே எதிர்கொள்ள அவ்வெடுத்துக்காட்டுகள் உதவும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள பயிற்சி கணக்குகள் மாணவர்களுக்குப் போதுமான பயிற்சியை அளிக்கும். கணக்குகளைத் தாங்களே தீர்க்கத் தேவையான தன்னம்பிக்கையை வளர்ப்பதாக அவை அமையும். மாணவர்கள் இப்புத்தகத்தைப் பயன்படுத்தும்பொழுது, உடனுக்குடன் அந்தந்த கணக்குகளை ஓரோர்படியாகப் போட்டுப் பார்க்க வேண்டும் என விரும்புகிறோம். இப்புத்தகத்தின் புள்ளியியல் பகுதிகளில் எண்கள் சார்ந்த கணக்கீடுகள் இருப்பதால் வணிகக் கணித மாணவர்கள் அக்கணக்குகளின் தீர்வுகளுக்கு கணிப்பான்களை (calculators) பயன்படுத்துமாறு அறிவுறுத்தப்படுகிறார்கள். தங்களின் சொந்த முயற்சியால் பல கணக்குகளைத் தீர்ப்பதில் வெற்றி பெறும் மாணவர்கள், புதிய கணக்குகளின் அடிப்படையை உணர்ந்து அவற்றைத் தீர்க்கும் அவர்தம் திறன் பெருமளவில் பெருகுவதை உறுதியாக அறிய முடியும். பொதுத் தேர்வுகளில் விடைகளை எளிதில் அளிக்க அவர்களால் இயலும்.

இம்முயற்சிக்கு ஆசி வழங்கி வழி நடத்திய எல்லாம் வல்ல இறைவனைப் போற்றுகின்றோம். இப்புத்தகம் கல்விச் சமூகத்தினரிடையே வணிகக் கணிதப் பாடத்திற்கான ஆர்வத்தைக் கிளர்ந்தெழச் செய்யும் என நம்புகிறோம்.

''அண்மைக் காலத்தில் பொருளியல் தத்துவங்களைக் கண்டுபிடிப்பதில் கணிதவியல் யுக்திகளை நேரடியாகப் பயன்படுத்தும் முறைகள் கணித வல்லுநர்களின் கரங்களில் மிகச்சிறந்த சேவை ஆற்றியுள்ளன.'' – ஆல்ஃப்ரட் மார்ஷல்

மாலினி	**அமலி ராஜா**	**இராமன்**	**பத்மநாபன்**	**இராமச்சந்திரன்**
பிரகாஷ்	**மூர்த்தி**	**ரமேஷ்**	**சீனிவாசன்**	**அந்தோணிராஜ்**

பொருளடக்கம்

7 முதல் 10 வரையிலான பாடங்களில் உள்ள கணக்குகளைத் தீர்வு செய்ய கணிப்பான்களைப் பயன்படுத்த வேண்டும்

அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகள் 1

அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகள் பொருளாதாரம், வாணிபம், தொழில் போன்ற பல துறைகளில் மிகுந்து உள்ளன. நாம் இந்தப் பாடத்தில் அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகள் பற்றிய சில புதிய நுட்பங்களைப் பயின்று அவற்றின் பயன்பாடுகளை அறியலாம்.

1.1 ஓர் அணியின் நேர்மாறு (Inverse of a matrix)

1.1.1 ஓர் அணிக்கோவையின் உறுப்புகளின் சிற்றணிகள் மற்றும் இணைக் காரணிகள்

A என்ற அணிக்கோவையின் a_{ij} என்ற ஓர் உறுப்பின் சிற்றணி (Minor) என்பது A இல் இருந்து a_{ij} உள்ள நிரை, நிரல்களை விடுத்துப் பெறப்படும் அணிக்கோவை ஆகும். அதை M_{ij} எனக் குறிப்போம். M_{ij} என்பது a_{ij} இன் சிற்றணி எனில் a_{ij} - இன் இணைக் காரணி (cofactor) C_{ij} என்பது கீழ்கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$C_{ij} = \begin{cases} M_{ij}, & i + j \text{ இரட்டைப்படை எண் எனில்} \\ -M_{ij}, & i + j \text{ ஒற்றைப்படை எண் எனில்} \end{cases}$$

அதாவது இணைக் காரணிகள், குறியிடப்பட்ட சிற்றணிகள் ஆகும்.

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ என்ற அணிக்கோவையில்

$$M_{11} = a_{22}, \quad M_{12} = a_{21}, \quad M_{21} = a_{12}, \quad M_{22} = a_{11}$$

மேலும் $C_{11} = a_{22}, \quad C_{12} = -a_{21}, \quad C_{21} = -a_{12}, \quad C_{22} = a_{11}$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ என்ற அணிக்கோவையில்

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad C_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad C_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \qquad C_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad C_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

இன்னபிற உள்ளன.

1.1.2 ஒரு சதுர அணியின் சேர்ப்பு அணி (Adjoint of a square matrix)

A என்ற சதுர அணியின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் அணிக்கோவை | A | இல் அந்த உறுப்பின் இணைக் காரணியால் பதிலீடு செய்து பெறப்படும் அணியின் நிரை நிரல் மாற்று அணி, A யின் **சேர்ப்பு அணி** ஆகும். அதனை Adj A என்று குறிப்போம்.

அதாவது $\text{Adj } A = A^t_c$

குறிப்பு :

(i) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ எனில், $A_c = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

$\therefore \text{Adj } A = A^t_c = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

எனவே $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ என்ற 2×2 சதுர அணியின்

சேர்ப்பு அணியை $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ என உடனடியாக எழுதலாம்.

(ii) Adj I = I, இதில் I என்பது ஓரலகு அணி.

(iii) $A (\text{Adj } A) = (\text{Adj } A) A = |A| I$

(iv) $\text{Adj } (AB) = (\text{Adj } B) (\text{Adj } A)$

(v) A என்பது வரிசை 2 உடைய சதுர அணியெனில், $|\text{Adj } A| = |A|$

A என்பது வரிசை 3 உடைய சதுர அணியெனில், $|\text{Adj } A| = |A|^2$

எடுத்துக்காட்டு 1

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் சேர்ப்பு அணியை எழுதவும்.

தீர்வு :

$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

எடுத்துக்காட்டு 2

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் சேர்ப்பு அணியைக் காண்க.

தீர்வு :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Adj } A = A_c^t$$

இதில்,

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \ C_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8, \ C_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \ C_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6, \ C_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \ C_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2, \ C_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\therefore A_c = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -5 \\ 1 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

எனவே, $\text{Adj } A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -5 \\ 1 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

1.1.3 பூச்சியக் கோவை அணியாக இல்லாத அணியின் நேர்மாறு (Inverse of a non - singular matrix)

A என்ற பூச்சியக்கோவை அணியாக இல்லாத அணியின் **நேர்மாறு அணி** என்பது AB = BA = I என அமையும். B என்ற அணி ஆகும். B ஐ A^{-1} எனக் குறிப்போம்.

குறிப்பு :

(i) சதுர அணி அல்லாத அணிக்கு நேர்மாறு கிடையாது.

(ii) $|A| \neq 0$ என இருந்தால் மட்டுமே A என்ற அணிக்கு நேர்மாறு இருக்கும். அதாவது A ஒரு பூச்சியக் கோவை அணி எனில் A^{-1} கிடையாது.

(iii) B என்பது A இன் நேர்மாறு எனில் A என்பது B இன் நேர்மாறு ஆகும். அதாவது $B = A^{-1}$ எனில் $A = B^{-1}$ ஆகும்.

(iv) $A A^{-1} = I = A^{-1} A$

(v) ஓர் அணிக்கு நேர்மாறு இருக்குமானால் அது ஒருமைத் தன்மை வாய்ந்ததாகும். அதாவது எந்த அணிக்கும் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட நேர்மாறுகள் இருக்காது.

(vi) A^{-1} இன் வரிசையும் A இன் வரிசையும் சமமாக இருக்கும்.

(vii) $I^{-1} = I$

(viii) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$, **(நேர்மாறுகள் இருக்குமானால்)**

(ix) $A^2 = I$ எனில் $A^{-1} = A$ ஆகும்.

(x) $AB = C$ எனில்

(a) $A = CB^{-1}$ (b) $B = A^{-1}C$, **(நேர்மாறுகள் இருக்குமானால்)**

(xi) $A(\text{Adj } A) = (\text{Adj } A)\,A = |A|\,I$ என்பது நாம் அறிந்ததே.

$$\therefore A\frac{1}{|A|}(\text{Adj } A) = \frac{1}{|A|}(\text{Adj } A)A = 1 \qquad (|A|) \neq 0$$

எனவே, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj } A)$ அதாவது, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^t{}_c$

(xii) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $|A| = ad - bc \neq 0$ என்க.

எனவே, $A_c = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$. $A^t{}_c = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\therefore$ 2×2 வரிசையுடைய $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ என்ற சதுர அணியின் நேர்மாறு $ad - bc \neq 0$ எனில்,
$\frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ என்று உடனடியாக எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3

$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, என்ற அணிக்கு நேர்மாறு அணி இருக்குமானால் அதனைக் காண்க.

தீர்வு :

$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \therefore A^{-1}$ உள்ளது.

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 4

(i) $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$ **(ii)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ **என்ற அணிகளுக்கு நேர்மாறு அணிகள் கிடையாது எனக் காட்டுக.**

தீர்வு :

(i) $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = 0$ $\quad \therefore A^{-1}$ கிடையாது.

(ii) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 6 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$ $\quad \therefore A^{-1}$ கிடையாது.

எடுத்துக்காட்டு 5

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$**, என்ற அணிக்கு நேர்மாறு இருக்குமானால், அதனைக் காண்க.**

தீர்வு :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$$ $\therefore A^{-1}$ உள்ளது.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^t{}_c$$

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5, \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 7, \quad C_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 10, \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -8, \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 10, \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

எனவே,

$$A_c = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 10 & -8 & 1 \\ -5 & 10 & -5 \end{pmatrix}, \; A^t{}_c = \begin{pmatrix} -5 & 10 & -5 \\ 7 & -8 & 10 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \; \therefore A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -5 & 10 & -5 \\ 7 & -8 & 10 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 6

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{17} & \frac{5}{17} & \frac{1}{17} \\ \frac{8}{17} & \frac{6}{17} & -\frac{9}{17} \\ \frac{10}{17} & -\frac{1}{17} & -\frac{7}{17} \end{pmatrix}$ **என்ற அணிகள் ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறு ஆகும் என்று காட்டுக.**

தீர்வு : $AB = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{17} & \frac{5}{17} & \frac{1}{17} \\ \frac{8}{17} & \frac{6}{17} & -\frac{9}{17} \\ \frac{10}{17} & -\frac{1}{17} & -\frac{7}{17} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 8 & 6 & -9 \\ 10 & -1 & -7 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

A மற்றும் B சதுர அணிகளாகவும் AB = I என்றும் இருப்பதால் அவை ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறு ஆகும்.

பயிற்சி 1.1

1. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் சேர்ப்பு அணியை எழுதுக.

2. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் சேர்ப்பு அணியைக் காண்க.

3. $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் சேர்ப்பு அணி அதே அணி தான் என்று காட்டுக.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ என்ற அணிக்கு, A (Adj A) = (Adj A) A = | A | I என்பதைச் சரிபார்க்க.

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, என்ற அணிகளுக்கு Adj (AB) = (Adj B) (Adj A) என்பதைச் சரிபார்க்கவும்.

6. $A = (a_{ij})$ என்ற வரிசை இரண்டு உடைய அணியில் $a_{ij} = i + j$, எனில், அணிA யை எழுதி $|\text{Adj } A| = |A|$ என்பதைச் சரிபார்க்கவும்.

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ என்ற அணிக்கு $|\text{Adj } A| = |A|^2$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

8. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் நேர்மாறு அணியை எழுதுக.

9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் நேர்மாறு காண்க.

10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் நேர்மாறு காண்க.

11. $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$, இங்கு a_1, a_2, a_3 என்பன பூச்சியமல்ல எனில், A^{-1} ஐக் காண்க.

12. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ எனில், A இன் நேர்மாறு A தான் என்று காட்டுக.

13. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ எனில், A ஐக் காண்க.

14. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{18} & -\frac{5}{18} & \frac{7}{18} \\ \frac{7}{18} & \frac{1}{18} & -\frac{5}{18} \\ -\frac{5}{18} & \frac{7}{18} & \frac{1}{18} \end{pmatrix}$ என்பன ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறு என்று காட்டுக.

15. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ எனில் A^{-1} ஐக் காண்க. அதன் வாயிலாக $4A^{-1} = 10\,I - A$ எனக் காட்டுக.

16. $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ எனில் $(A^{-1})^{-1} = A$ என்பதைச் சரிபார்க்கவும்.

17. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ எனில், $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, என்பதைச் சரிபார்க்கவும்.

18. $\begin{pmatrix} 6 & 7 & -1 \\ 3 & \lambda & 5 \\ 9 & 11 & \lambda \end{pmatrix}$ என்ற அணிக்கு நேர்மாறு இல்லையெனில் λ இன் மதிப்பு காண்க.

19. $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & p & q \end{pmatrix}$ எனில் $Y = X^{-1}$ என்று அமையுமாறு, p, q இன் மதிப்புகளைக் காண்க.

20. $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 14 \\ 29 \end{pmatrix}$, எனில் அணி X ஐக் காண்க.

1.2 நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுதிகள்
(SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS)

1.2.1 ஓர் அணியின் உள் அணிகள் (submatrices) மற்றும் சிற்றணிகள் (minors)

A என்ற ஓர் அணியிலிருந்து அதன் சில நிரைகளையும் நிரல்களையும் தவிர்த்துக் கிடைக்கும் அணிகள் A இன் **உள் அணிகள்** ஆகும்.

எ.கா. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ எனில், அதன் சில உள் அணிகள் :

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ மற்றும் $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

சதுர உள் அணிகளின் அணிக்கோவைகள் அந்த அணியின் **சிற்றணிகள்** என்றழைக்கப்படும். A இன் சிற்றணிகளில் சில :

$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ மற்றும் $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

1.2.2 அணியின் தரம் (Rank of matrix)

A என்ற பூச்சிய அணி அல்லாத ஓர் அணியின் $\rho(A)$ என குறிக்கப்படும் தரம் 'r' என்ற மிகை முழு எண்ணாக இருக்க

(i) A இன் 'r' வரிசையுடைய ஏதேனும் ஓர் சிற்றணியாவது பூச்சியமற்று இருக்க வேண்டும். மேலும்

(ii) 'r' வரிசையை விட அதிக வரிசையுடைய A இன் எல்லா சிற்றணிகளும் பூச்சியமாக இருக்க வேண்டும்.

குறிப்பு :

(i) A என்ற அணியின் தரம் என்பது அந்த அணியின் பூச்சிய மதிப்பில்லாத சிற்றணிகளின் வரிசைகளில் மீப்பெரு எண் ஆகும்.

(ii) A இன் வரிசை $m \times n$ எனில் $\rho(A) \leq \{$m, n களில் சிறிய எண்$\}$

(iii) பூச்சிய அணியின் தரம் பூச்சியமாகும்.

(iv) பூச்சிய அணி அல்லாத அணி A–ன் தரம் $\rho(A) \geq 1$ ஆகும்.

(v) $n \times n$ வரிசையுடைய பூச்சியக் கோவை அணி அல்லாத அணியின் தரம் n ஆகும்.

(vi) $\rho(A) = \rho(A^t)$

(vii) $\rho(I_2) = 2, \rho(I_3) = 3$

எடுத்துக்காட்டு 7

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$ **என்ற அணியின் தரம் காண்க.**

தீர்வு :

A இன் வரிசை 3×3. $\therefore$ $\rho(A) \leq 3$. A –யில் உள்ள ஒரே ஒரு மூன்றாம் வரிசை சிற்றணி

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

வரிசை மூன்று உடைய சிற்றணி பூச்சியமாக இல்லை.

$\therefore\ \rho(A) = 3.$

எடுத்துக்காட்டு 8

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$ **என்ற அணியின் தரம் காண்க.**

தீர்வு :

A இன் வரிசை 3×3. $\therefore\ \rho(A) \leq 3$. A– யில் உள்ள ஒரே ஒரு மூன்றாம் வரிசை சிற்றணி

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

A–யில் உள்ள ஒரே ஒரு மூன்றாம் வரிசை உடைய சிற்றணியும் பூச்சியமாக உள்ளது.

$\therefore\ \rho(A) \leq 2$

வரிசை இரண்டு உடைய சிற்றணிகளைக் காண்போம்.

அவற்றில் $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

பூச்சியம் அல்லாத இரண்டாம் வரிசை சிற்றணி உள்ளது.

$\therefore\ \rho(A) = 2$

எடுத்துக்காட்டு 9

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{8} & \mathbf{10} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{-12} & \mathbf{-15} \end{pmatrix}$ **என்ற அணியின் தரம் காண்க.**

தீர்வு :

A யின் வரிசை 3×3. $\therefore\ \rho(A) \leq 3$

A–யில் உள்ள வரிசை மூன்று உடைய ஒரே ஒரு சிற்றணி

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 10 \\ -6 & -12 & -15 \end{vmatrix} = 0 \qquad\qquad (R_1 \propto R_2)$$

எனவே $\rho(A) \leq 2$

வரிசை இரண்டு உடைய சிற்றணிகளைக் காண்போம். அவை அனைத்தும் பூச்சிய மதிப்புடையன என்பது வெளிப்படை.

$\therefore\ \rho(A) \leq 1$

A என்பது பூச்சிய அணி அல்ல. $\qquad \therefore\ \rho\ (A) = 1$

எடுத்துக்காட்டு 10

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{4} & \mathbf{7} \\ \mathbf{9} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ **என்ற அணியின் தரம் காண்க.**

தீர்வு :

A இன் வரிசை 2×4. $\qquad \therefore\ \rho(A) \leq 2$

வரிசை இரண்டு உடைய சிற்றணிகளைக் காண்போம். அவற்றில்

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 28 \neq 0$$

வரிசை இரண்டு உடைய பூச்சியம் அல்லாத சிற்றணி உள்ளது.

$\therefore\ \rho(A) = 2$

எடுத்துக்காட்டு 11

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{6} \\ \mathbf{8} & \mathbf{1} & \mathbf{9} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$ **என்ற அணியின் தரம் காண்க.**

தீர்வு :

A இன் வரிசை 3×4. $\qquad \therefore\ \rho(A) \leq 3$

வரிசை மூன்று உடைய சிற்றணிகளைக் காண்போம் அவற்றில்

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 8 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -40 \neq 0$$

வரிசை மூன்று உடைய பூச்சியம் அல்லாத சிற்றணி உள்ளது.

$\therefore\ \rho(A) = 3.$

1.2.3 அடிப்படைச் செயல்களும், சமான அணிகளும் (Elementary operations and equivalent matrices)

ஓர் அணியின் தரம் காண நாம் விழையும் போது துவக்கத்திலேயே பூச்சியமற்ற சிற்றணி கிடைக்கப் பெறாவிடில் தரம் காணும் முயற்சி கடினமானதாகிவிடும். இந்தப் பிரச்சனையைத் தீர்க்க **அடிப்படைச் செயல்கள்** வாயிலாக அணியில் பல பூச்சியங்களைப் புகுத்தி சிற்றணிகளின் மதிப்புகளைக் காணும் வேலையை எளிதாக்குகிறோம். அடிப்படைச் செயல்களை செயல்படுத்துவதால் ஓர் அணியின் தரம் மாறாது என நிருபிக்க முடியும்.

பின்வருவன அடிப்படைச் செயல்களாகும்.

(i) இரு நிரைகளைப் பரிமாற்றம் செய்தல்.

(ii) ஒரு நிரையை பூச்சியம் அல்லாத எண்ணால் பெருக்குதல்.

(iii) ஒரு நிரையின் மடங்குகளை மற்றொரு நிரையுடன் கூட்டுதல்.

A என்ற அணியில் குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கை உள்ள அடிப்படைச் செயல்கள் மூலம் B என்ற அணி பெறப்படுமாயின் A மற்றும் B அணிகள் **சமான அணிகள்** எனப்படும். இதை $A \sim B$ என்று குறிப்போம்.

மேலும் கொடுக்கப்பட்ட அணியில் பல பூச்சியங்களை புகுத்தும் போது அணியை ஒரு **முக்கோண அமைப்புக்கு** (triangular form) மாற்றுவது நல்லது. ஆனால் இவ்வாறு தான் செய்ய வேண்டுமென்பதில்லை.

$A = (a_{ij})$ என்ற அணியில் $i > j$ எனும் போது $a_{ij} = 0$ எனில் அணி, ஒரு முக்கோண அமைப்பில் இருப்பதாகச் சொல்லப்படும்.

எ.கா $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ என்ற அணி ஒரு முக்கோண அமைப்பில் உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 12

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{14} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ **என்ற அணியின் தரம் காண்க.**

தீர்வு :

A இன் வரிசை 3×4. $\quad \therefore \rho(A) \leq 3$

அணியை ஒரு முக்கோண அமைப்பிற்கு மாற்றம் செய்வோம்.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 14 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_1 \leftrightarrow R_3$ –ஐ செயல்படுத்தினால்

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 14 & 4 \end{pmatrix}$$

$R_3 \rightarrow R_3 - 5R_1$ ஐ செயல்படுத்தினால்

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$R_3 \rightarrow R_3 - 8R_2$ ஐ செயல்படுத்தினால்

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & -4 \end{pmatrix}$$

இது ஒரு முக்கோண அமைப்பில் உள்ளது.

இதில் $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -12 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$

வரிசை மூன்றுடைய பூச்சியம் அல்லாத சிற்றணி உள்ளது. $\therefore\ \rho(A) = 3.$

எடுத்துக்காட்டு 13

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ **என்ற அணியின் தரம் காண்க.**

தீர்வு :

A இன் வரிசை 3×4. $\therefore\ \rho(A) \leq 3$

அணியை ஒரு முக்கோண அமைப்பிற்கு மாற்றம் செய்வோம்.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$R_2 \rightarrow R_2 - R_1,$

$R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1$ இவைகளைச் செயல்படுத்தினால்

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 2 & -3 & 0\\0 & -2 & -5 & 0\end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + R_2$ ஐ செயல்படுத்தினால்

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 2 & -3 & 0\\0 & 0 & -8 & 0\end{pmatrix}$$

இது ஒரு முக்கோண அமைப்பில் உள்ளது.

இதில்,

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 2 & -3\\0 & 0 & -8\end{vmatrix} = -16 \neq 0$$

வரிசை மூன்று உடைய பூச்சியம் அல்லாத சிற்றணி உள்ளது.

$\therefore\ \rho(A) = 3$

எடுத்துக்காட்டு 14

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}\mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{2}\\\mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{6}\\\mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{8} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$ **என்ற அணியின் தரம் காண்க.**

தீர்வு :

A இன் வரிசை 3×4. $\therefore\ \rho(A) \leq 3$

அணியை ஒரு முக்கோண அமைப்பிற்கு மாற்றுவோம்.

$$A = \begin{pmatrix}4 & 5 & 2 & 2\\3 & 2 & 1 & 6\\4 & 4 & 8 & 0\end{pmatrix}$$

$R_3 \to \dfrac{R_3}{4}$ ஐ செயல்படுத்தினால்

$$\sim\begin{pmatrix}4 & 5 & 2 & 2\\3 & 2 & 1 & 6\\1 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$R_1 \leftrightarrow R_3$ ஐ செயல்படுத்தினால்

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1$,

$R_3 \rightarrow R_3 - 4R_1$ இவைகளைச் செயல்படுத்தினால்

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$R_3 \rightarrow R_3 + R_2$ ஐ செயல்படுத்தினால்

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & -11 & 8 \end{pmatrix}$$

இது ஒரு முக்கோண அமைப்பில் உள்ளது.

இதில், $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$

மூன்று வரிசை உடைய பூச்சியம் அல்லாத சிற்றணி உள்ளது.

$\therefore \rho(A) = 3$

1.2.4 நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுதிகள்

மாறிகள் ஒன்றாம் படியில் மட்டும் இருக்கும் (ஒருங்கமை) சமன்பாடுகளின் தொகுதி **நேரியல்** சமன்பாடுகளின் தொகுதி எனப்படும்.

நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுதியை AX = B என்று எழுதலாம். எடுத்துக்காட்டாக $x - 3y + z = -1,\ 2x + y - 4z = -1,\ 6x - 7y + 8z = 7$ என்ற சமன்பாடுகளை

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$ என்று அணி அமைப்பில் எழுதலாம்.

$$A \qquad X = B$$

A க்கு **குணக அணி** (coefficient matrix) என்று பெயர். A உடன் அதன் வலதுபுறம் B

அணியை ஒரு நிரலாக இணைத்துப் பெறும் அணி,

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & \vdots & -1 \\ 2 & 1 & -4 & \vdots & -1 \\ 6 & -7 & 8 & \vdots & 7 \end{pmatrix}$$ என்ற **மிகைப்படுத்தப்பட்ட அணி (augmented matrix)** ஆகும்.

இதை (A, B) எனக் குறிப்போம்.

நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுதி ஒன்றில் உள்ள ஒவ்வொரு சமன்பாட்டின் தனி உறுப்பும் பூச்சியமாக இருந்தால் அத்தொகுதி **சம படித்தான தொகுதி (homogeneous system)** ஆகும். ஒரு நேரியல் சம படித்தான சமன்பாடுகளின் தொகுதியை AX = O என எழுதலாம். எடுத்துக்காட்டாக $3x + 4y - 2z = 0,\ 5x + 2y = 0,$ $3x - y + z = 0$ என்ற சமன்பாடுகளை

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ என்று அணி அமைப்பில் எழுதலாம்.

$$A \qquad X = O$$

1.2.5 சமன்பாடுகளின் ஒப்புமைத் தன்மை (Consistency of equations)

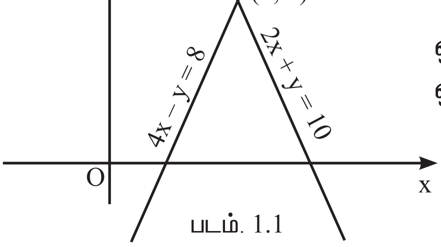
ஒரு சமன்பாட்டுத் தொகுதிக்கு குறைந்தது ஒரு தீர்வேனும் இருக்குமானால் அத்தொகுதி **ஒப்புமைத்தன்மை உடைய தொகுதி** எனப்படும். இல்லையெனில் **ஒப்புமைத்தன்மை அற்ற தொகுதி** எனப்படும்.

ஒப்புமைத் தன்மை உடைய சமன்பாட்டுத் தொகுதிக்கு

(i) ஒரே ஒரு தீர்வு (unique solution) அல்லது (ii) எண்ணற்ற தீர்வுகள் (infinite sets of solution) இருக்கலாம்.

இதை விளக்கும் வகையில் முதலில் இரு மாறிகளைக் கொண்ட நேரியல் தொகுதிகளைப் பார்ப்போம்.

$4x - y = 8,\ 2x + y = 10$ என்ற சமன்பாடுகள் (3, 4) என்ற புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்ளும் இரு நேர்கோடுகளைக் குறிக்கின்றன. அவை $x = 3,\ y = 4$ என்ற ஒரே ஒரு தீர்வைக் கொண்ட ஒப்புமைத் தன்மை உடையனவாகும். (படம். 1.1)

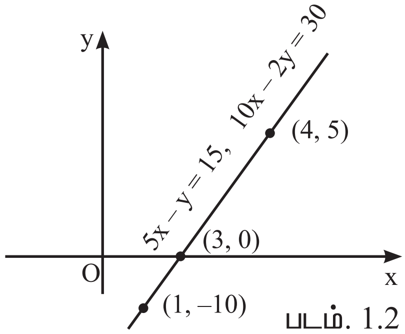


படம். 1.1

ஒப்புமைத்தன்மை உடையன ;
ஒரே ஒரு தீர்வு.

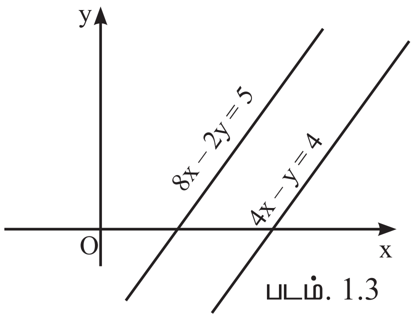
$5x - y = 15$, $10x - 2y = 30$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒன்றன் மீது மற்றொன்றாக அமையும் இரு நேர் கோடுகளாகும். அக்கோட்டின் மீது உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் அச்சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளாக அமையக் காண்கிறோம். இச்சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத் தன்மை உடையன, $x = 1$, $y = -10$; $x = 3$, $y = 0$; $x = 4$, $y = 5$ போன்ற எண்ணற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றுள்ளன.

ஒப்புமைத்தன்மை உடையன ;
எண்ணற்ற தீர்வுகள்.



படம். 1.2

$4x - y = 4$, $8x - 2y = 5$ என்பன இரு இணைகோடுகளைக் குறிக்கின்றன. அவைகள் ஒப்புமைத் தன்மை அற்ற சமன்பாடுகள் ஆகும். அவற்றிற்கு தீர்வுகளே கிடையாது. (படம் 1.3)



படம். 1.3

ஒப்புமைத்தன்மை அற்றவை
தீர்வுகளே கிடையாது.

இப்போது மூன்று மாறிகளில் அமையும் நேரியல் தொகுதியைக் காண்போம். எடுத்துக்காட்டாக $2x + 4y + z = 5$, $x + y + z = 6$, $2x + 3y + z = 6$ என்பன ஒப்புமைத் தன்மை உடையவை. இவை $x = 2$, $y = -1$, $z = 5$ என்ற ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற்றுள்ளன. $x + y + z = 1$, $x + 2y + 4z = 1$, $x + 4y + 10z = 1$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத் தன்மை உள்ளவை தான், ஆனால் $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$; $x = 3$, $y = -3$, $z = 1$ போன்ற எண்ணற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றுள்ளன. அத்தகைய எண்ணற்ற தீர்வுகள் அனைத்தும் $x = 1 + 2\text{k}$, $y = -3\text{k}$, $z = \text{k}$ என்பதில் அடங்கும் (இதில் k என்பது ஒரு மெய்யெண் ஆகும்).

$x + y + z = -3$, $3x + y - 2z = -2$, $2x + 4y + 7z = 7$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு ஒரு தீர்வு கூட இல்லை. அவை ஒப்புமைத் தன்மை அற்ற சமன்பாடுகள் ஆகும்.

எல்லா சமபடித்தான சமன்பாடுகளுக்கும் $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. என்ற **பூச்சியத் தீர்வுகள் (trivial solutions)** உண்டு. எனவே எல்லா சமபடித்தான சமன்பாடுகளும் ஒப்புமைத் தன்மை உடையன. சமபடித்தான சமன்பாடுகளைப் பொறுத்தவரையில் ஒப்புமைத் தன்மை உடையனவா இல்லையா என்ற கேள்விக்கே இடமில்லை. சமபடித்தான சமன்பாடுகளுக்கு பூச்சிய தீர்வுகளோடு மற்ற தீர்வுகளும் இருக்கலாம் அல்லது இல்லாமலும் இருக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக $x + 2y + 2z = 0$, $x - 3y - 3z = 0$, $2x + y - z = 0$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ என்ற பூச்சிய தீர்வுகள் மட்டுமே உள்ளன. ஆனால் $x + y - z = 0$, $x - 2y + z = 0$, $3x + 6y - 5z = 0$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$;

$x = 3, y = 6, z = 9$ போன்ற எண்ணற்ற தீர்வுகள் உள்ளன. அவை அனைத்தும் $x = t, y = 2t, z = 3t$ என்பதில் அடங்கும். (t என்பது ஒரு மெய்யெண் ஆகும்).

1.2.6 அணியின் தரம் வாயிலாக சமன்பாடுகளின் ஒப்புமைத் தன்மையை ஆராய்தல் (Testing the consistency of equations by rank method)

'n' மாறிகளில் உள்ள $AX = B$ என்ற சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

1. $\rho(A, B) = \rho(A)$ எனில், சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத் தன்மை உடையனவாக இருக்கும்.
2. $\rho(A, B) \neq \rho(A)$ எனில், சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத் தன்மை அற்றவையாக இருக்கும்.
3. $\rho(A, B) = \rho(A) = n$ எனில், சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத்தன்மையில் ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற்றிருக்கும்.
4. $\rho(A, B) = \rho(A) < n$ எனில், சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத் தன்மையில் எண்ணற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும்.

'n' மாறிகளில் $AX = 0$ என்ற சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

1. $\rho(A) = n$ எனில், சமன்பாடுகளுக்கு பூச்சியத் தீர்வுகள் மட்டுமே உண்டு.
2. $\rho(A) < n$ எனில், சமன்பாடுகளுக்கு பூச்சியத் தீர்வுகளுடன் மற்ற தீர்வுகளும் உண்டு.

எடுத்துக்காட்டு 15

$2x - y + z = 7, 3x + y - 5z = 13, x + y + z = 5$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத் தன்மையுடையன என்றும், தீர்வுகள் ஒருமைத் தன்மையுடையவை என்றும் காட்டுக.

தீர்வு :

சமன்பாடுகளின் அணி வடிவம்

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A \qquad X = B$$

இதில்,

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & \vdots & 7 \\ 3 & 1 & -5 & \vdots & 13 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 5 \end{pmatrix} \; R_1 \leftrightarrow R_3 \text{ ஐ செயல்படுத்தினால்}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 3 & 1 & -5 & \vdots & 13 \\ 2 & -1 & 1 & \vdots & 7 \end{pmatrix} \; R_2 \to R_2 - 3R_1,$$

$R_3 \to R_3 - 2R_1$ இவைகளைச் செயல்படுத்தினால்

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & -2 & -8 & \vdots & -2 \\ 0 & -3 & -1 & \vdots & -3 \end{pmatrix} \; R_3 \to R_3 - \frac{3}{2} R_2 \text{ ஐ செயல்படுத்தினால்}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & -2 & -8 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 11 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\rho(A, B) = 3$, $\rho(A) = 3$ என்பது வெளிப்படை.

மாறிகளின் எண்ணிக்கை 3,

எனவே

$\rho(A, B) = \rho(A) =$ மாறிகளின் எண்ணிக்கை.

∴ இந்தச் சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத் தன்மை உடையன. மேலும் தீர்வுகள் ஒருமைத் தன்மையுடையன.

எடுத்துக்காட்டு 16

$x + 2y = 3$, $y - z = 2$, $x + y + z = 1$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத்தன்மை உடையன என்றும் எண்ணற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றுள்ளன என்றும் காட்டுக.

தீர்வுகள் :

சமன்பாடுகளின் அணி அமைப்பு

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \quad X = B$$

இதில், $(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$

$R_3 \to R_3 - R_1$ ஐ செயல்படுத்தினால்

$$(A, B) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & -2 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + R_2$ ஐ செயல்படுத்தினால்

$$(A, B) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\rho(A, B) = 2$, $\rho(A) = 2$ என்பது வெளிப்படை. மாறிகளின் எண்ணிக்கை 3.

எனவே $\rho(A, B) = \rho(A) <$ மாறிகளின் எண்ணிக்கை.

$\therefore$ இந்தச் சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத் தன்மை உடையன. மேலும் எண்ணற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 17

$x - 3y + 4z = 3$, $2x - 5y + 7z = 6$, $3x - 8y + 11z = 1$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத் தன்மை அற்றவை என்று காட்டுக.

தீர்வு :

சமன்பாடுகளின் அணி வடிவம்

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -5 & 7 \\ 3 & -8 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \quad X = B$$

இதில்,

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & \vdots & 3 \\ 2 & -5 & 7 & \vdots & 6 \\ 3 & -8 & 11 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 2R_1$,

$R_3 \to R_3 - 3R_1$ இவைகளைச் செயல்படுத்தினால்

$$(A, B) \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 8 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - R_2$ ஐ செயல்படுத்தினால்

$$(A, B) \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -8 \end{pmatrix}$$

$\rho(A, B) = 3$, $\rho(A) = 2$ என்பது வெளிப்படை

எனவே $\rho(A, B) \neq \rho(A)$

$\therefore$ சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத்தன்மை அற்றவை.

எடுத்துக்காட்டு 18

$x + y + z = 0$, $2x + y - z = 0$, $x - 2y + z = 0$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு பூச்சியத் தீர்வுகள் மட்டுமே உள்ளன எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

சமன்பாடுகளின் அணி வடிவம்

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \quad X = O$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 2R_1$

$R_3 \to R_3 - R_1$ இவைகளைச் செயல்படுத்தினால்

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - 3R_2$ ஐச் செயல்படுத்தினால்

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$\rho(A) = 3$ என்பது வெளிப்படை.

மாறிகளின் எண்ணிக்கை 3.

எனவே $\rho(A) =$ மாறிகளின் எண்ணிக்கை

$\therefore$ இந்தச் சமன்பாடுகளுக்கு பூச்சியத் தீர்வுகள் மட்டுமே உண்டு.

எடுத்துக்காட்டு 19

$3x + y + 9z = 0$, $3x + 2y + 12z = 0$, $2x + y + 7z = 0$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு பூச்சியத் தீர்வுகளோடு மற்ற தீர்வுகளும் உண்டு எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

சமன்பாடுகளின் அணி வடிவம்

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 12 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \quad X = O$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 12 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 12 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

$\therefore \rho(A) = 2$

மாறிகளின் எண்ணிக்கை 3.

எனவே $\rho(A) <$ மாறிகளின் எண்ணிக்கை

$\therefore$ இந்தச் சமன்பாடுகளுக்கு பூச்சியத் தீர்வுகளோடு மற்ற தீர்வுகளும் உண்டு.

எடுத்துக்காட்டு 20

$2x + 3y - z = 5$, $3x - y + 4z = 2$, $x + 7y - 6z = k$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத் தன்மையுடைய சமன்பாடுகளில் எனில் k இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$(A,B) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & \vdots & 5 \\ 3 & -1 & 4 & \vdots & 2 \\ 1 & 7 & -6 & \vdots & k \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 7 & -6 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 7 & -6 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$$

$\rho(A) = 2.$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத் தன்மை உடையனவாக இருக்க வேண்டுமெனில், $\rho(A, B)$ யும் **2** ஆக இருக்க வேண்டும். எனவே (A, B) இன் வரிசை மூன்று உடைய ஒவ்வொரு சிற்றணியும் பூச்சியமாக வேண்டும்.

$$\therefore \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \\ 7 & -6 & k \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad k = 8.$$

எடுத்துக்காட்டு 21

***x + y + z* = 3, *x* + 3*y* + 2*z* = 6, *x* + 5*y* + 3*z* = *k* என்பன ஒப்புமைத் தன்மை அற்ற சமன்பாடுகள் எனில் *k* இன் மதிப்பைக் காண்க.**

தீர்வு :

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 1 & 3 & 2 & \vdots & 6 \\ 1 & 5 & 3 & \vdots & k \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0, \; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$\rho(A) = 2$ என்பது வெளிப்படை

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத் தன்மை அற்ற சமன்பாடுகளாக இருக்க வேண்டுமெனில் $\rho(A, B)$ என்பது **2** ஆக இருக்கக் கூடாது.

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 1 & 3 & 2 & \vdots & 6 \\ 1 & 5 & 3 & \vdots & k \end{pmatrix}$$

$R_2 \rightarrow R_2 - R_1$,

$R_3 \rightarrow R_3 - R_1$ இவைகளைச் செயல்படுத்தினால்

$$(A, B) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 4 & 2 & \vdots & k-3 \end{pmatrix}$$

$R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2$ ஐ செயல்படுத்தினால்

$$(A, B) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & k-9 \end{pmatrix}$$

$k \neq 9$ எனில் $\rho(A, B)$ என்பது **2** ஆக இருக்காது.

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத் தன்மை அற்றவையாக இருக்க k ஆனது **9** அல்லாத ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண்ணாக இருக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 22

$kx + 3y + z = 0, 3x - 4y + 4z = 0, kx - 2y + 3z = 0$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு பூச்சியத் தீர்வுகளோடு மற்ற தீர்வுகளும் இருக்குமாறு k இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$A = \begin{pmatrix} k & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

சமபடித்தான சமன்பாடுகளுக்கு பூச்சியத் தீர்வுகளோடு மற்ற தீர்வுகளும் இருக்க வேண்டுமெனில் $\rho(A)$ என்பது மாறிகளின் எண்ணிக்கையைவிடக் குறைவாக இருக்க வேண்டும்.

$\therefore \ \rho(A) \neq 3$

எனவே $\begin{pmatrix} k & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ k = \dfrac{11}{4}$

எடுத்துக்காட்டு 23

$x + 2y + 2z = 0, x - 3y - 3z = 0, 2x + y + kz = 0$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு பூச்சியத் தீர்வுகள் மட்டுமே உண்டெனில் k இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix}$$

சமபடித்தான சமன்பாடுகளுக்கு பூச்சியத் தீர்வுகள் மட்டுமே இருக்க $\rho(A)$ மாறிகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & k \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow k \neq 1$ அதாவது k ஆனது **1** அல்லாத ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண்ணாக இருக்க வேண்டும்.

பயிற்சி 1.2

1) பின்வரும் ஒவ்வொரு அணியின் தரம் காண்க.

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ (v) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ -1 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ (vi) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -4 & -7 \end{pmatrix}$

(vii) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 9 & 12 & 9 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ (viii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (ix) $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ எனில் A + B மற்றும் AB ஆகியவற்றின் தரம் காண்க.

3) $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரம் **3** க்குக் குறைவாக இருப்பின் (x_1, y_1), (x_2, y_2) மற்றும் (x_3, y_3) என்ற புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் அமையும் எனக் காட்டுக.

4) $2x + 8y + 5z = 5$, $x + y + z = -2$, $x + 2y - z = 2$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒரே ஒரு தீர்வுடன் ஒப்புமைத் தன்மை கொண்டவை எனக் காட்டுக.

5) $x - 3y - 8z = -10$, $3x + y - 4z = 0$, $2x + 5y + 6z = 13$ என்ற சமன்பாடுகள் எண்ணற்ற தீர்வுகளுடன் ஒப்புமைத்தன்மை கொண்டவை எனக் காட்டுக.

6) $4x - 5y - 2z = 2$, $5x - 4y + 2z = -2$, $2x + 2y + 8z = -1$ என்ற சமன்பாடுகளின் ஒப்புத்தன்மையை ஆராய்க.

7) $4x - 2y = 3$, $6x - 3y = 5$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத் தன்மை அற்றவை எனக் காட்டுக.

8) $x + y + z = -3$, $3x + y - 2z = -2$, $2x + 4y + 7z = 7$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத் தன்மை அற்றவை எனக் காட்டுக.

9) $x + 2y + 2z = 0$, $x - 3y - 3z = 0$, $2x + y - z = 0$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு $x = 0$, $y = 0$ மற்றும் $z = 0$ என்ற தீர்வுகளைத் தவிர்த்து வேறு தீர்வுகள் கிடையாது எனக் காட்டுக.

10) $x + y - z = 0$, $x - 2y + z = 0$, $3x + 6y - 5z = 0$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு பூச்சியத் தீர்வுகளுடன் மற்ற தீர்வுகளும் உண்டு எனக் காட்டுக.

11) $x + 2y - 3z = -2$, $3x - y - 2z = 1$, $2x + 3y - 5z = k$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத் தன்மை உடைய சமன்பாடுகளெனில் k இன் மதிப்பைக் காண்க.

12) $x + y + z = 1$, $3x - y - z = 4$, $x + 5y + 5z = k$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத் தன்மை அற்ற சமன்பாடுகளெனில் k இன் மதிப்பைக் காண்க.

13) $2x - 3y + z = 0$, $x + 2y - 3z = 0$, $4x - y + kz = 0$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு பூச்சியத் தீர்வுகளோடு மற்ற தீர்வுகளும் இருக்குமாறு k இன் மதிப்பைக் காண்க.

14) $x + 2y + 3z = 0$, $2x + 3y + 4z = 0$, $7x + ky + 9z = 0$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு பூச்சியத் தீர்வு அல்லாத வேறு தீர்வுகள் இல்லையெனில் k இன் மதிப்பைக் காண்க.

1.3 நேரியல் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள்
(SOLUTIONS OF LINEAR EQUATIONS)

1.3.1 அணிகளைப் பயன்படுத்தித் தீர்வு காணல் (Solution by Matrix method)

$|A| \neq 0$, எனும் போது $AX = B$ என்ற சமன்பாடுகளின் ஒரே தீர்வு $X = A^{-1}B$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 24

$2x - y = 3$, $5x + y = 4$ என்ற சமன்பாடுகளை அணி முறையில் தீர்க்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் அணி வடிவம்

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A \qquad X \;=\; B$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

$\therefore$ சமன்பாடுகளின் ஒரே தீர்வு $X = A^{-1}B$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \therefore x = 1, \; y = -1$$

எடுத்துக்காட்டு 25

$2x + 8y + 5z = 5,\ x + y + z = -2,\ x + 2y - z = 2$ **என்ற சமன்பாடுகளை அணிகளைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்க.**

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் அணி வடிவம்

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

இணைக் காரணிகள்

$$\begin{array}{lll} +(-1-2), & -(-1-1), & +(2-1) \\ -(-8-10), & +(-2-5), & -(4-8) \\ +(8-5), & -(2-5), & +(2-8) \end{array}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$$

சமன்பாடுகளின் ஒரே தீர்வு

$X = A^{-1}B$ ஆகும்.

இப்போது A^{-1} ஐக் காண்போம்.

$$A_c = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 18 & -7 & 4 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A^1{}_c = \begin{pmatrix} -3 & 18 & 3 \\ 2 & -7 & 3 \\ 1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^t{}_c = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -3 & 18 & 3 \\ 2 & -7 & 3 \\ 1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

எனவே,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -3 & 18 & 3 \\ 2 & -7 & 3 \\ 1 & 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -45 \\ 30 \\ -15 \end{pmatrix} \text{ ie., } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$x = -3, \quad y = 2, \quad z = -1$

எடுத்துக்காட்டு 26

ஒரு பெண்மணி 8%, $8\frac{3}{4}$% மற்றும் 9%, தனி வட்டி வீதங்களில் வெவ்வேறு முதலீடுகள் செய்தார். அவர் மொத்தத்தில் ரூ.40,000 முதலீடு செய்துள்ளார். ஆண்டுக்கு ரூ.3,455 வட்டி பெறுகிறார். அவர் 9% இல் 8% விட ரூ.4,000 அதிகமாக முதலீடு செய்துள்ளார் எனில் ஒவ்வொரு சதவீதத்திலும் முதலீடு செய்துள்ளது எவ்வளவு ? தீர்வை அணி முறையில் கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு :

8%, $8\frac{3}{4}$% மற்றும் 9% இல் செய்யப்பட்ட முதலீடுகள் முறையே ரூ. x, ரூ. y, மற்றும் ரூ. z என்க.

கணக்கின் படி $x + y + z = 40,000$

$$\frac{x\times 8\times 1}{100}+\frac{35\times y\times 1}{400}+\frac{9\times z\times 1}{100}=3455 \quad \text{மற்றும்}$$

$z - x = 4,000$

$\Rightarrow$ $x + y + z = 40,000$

$32x + 35y + 36z = 13,82,000$

$x - z = -4,000$

இச்சமன்பாடுகளின் அணி அமைப்பு

$$\underset{A}{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 32 & 35 & 36\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}}\underset{X}{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}}=\underset{B}{\begin{pmatrix}40,000\\ 13,82,000\\ -4,000\end{pmatrix}}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 32 & 35 & 36\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=-2\neq 0$$

$\therefore$ சமன்பாடுகளின் ஒரே தீர்வு $X = A^{-1}B$

நாம் இப்போது A^{-1} ஐக் காணலாம்.

$$A_c=\begin{pmatrix}-35 & 68 & -35\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & -4 & 3\end{pmatrix}$$

இணைக் காரணிகள்		
$+(-35-0)$,	$-(-32-36)$,	$+(0-35)$
$-(-1-0)$,	$+(-1-1)$,	$-(0-1)$
$+(36-35)$,	$-(36-32)$,	$+(35-32)$

$$A^t_c=\begin{pmatrix}-35 & 1 & 1\\ 68 & -2 & -4\\ -35 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^t_c=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}-35 & 1 & 1\\ 68 & -2 & -4\\ -35 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -35 & 1 & 1 \\ 68 & -2 & -4 \\ -35 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 40,000 \\ 13,82,000 \\ -4,000 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -22,000 \\ -28,000 \\ -30,000 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11,000 \\ 14,000 \\ 15,000 \end{pmatrix}$$

எனவே 8%, $8\frac{3}{4}$% மற்றும் 9% இல் செய்த முதலீடுகள் முறையே ரூ.11,000, ரூ.14,000 மற்றும் ரூ14,000 மற்றும் ரூ.15,000 ஆகும்.

1.3.2 அணிக்கோவை முறையில் தீர்வு காணல் (Solution by Determinant method)

கிராமரின் விதி (Cramer's rule)

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$, $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$, $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ என்ற சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

என்க

$\Delta \neq 0$, எனும் போது ஒரே தீர்வு

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 27

$x + 2y + 5z = 23$, $3x + y + 4z = 26$, $6x + y + 7z = 47$ என்ற சமன்பாடுகளை அணிக்கோவை முறையில் தீர்க்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள்

$x + 2y + 5z = 23$

$3x + y + 4z = 26$

$6x + y + 7z = 47$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \; ; \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 23 & 2 & 5 \\ 26 & 1 & 4 \\ 47 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -24$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 23 & 5 \\ 3 & 26 & 4 \\ 6 & 47 & 7 \end{vmatrix} = -12 \; ; \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 23 \\ 3 & 1 & 26 \\ 6 & 1 & 47 \end{vmatrix} = -18$$

கிராமரின் விதிப்படி

$$\therefore x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-24}{-6} = 4 \quad ; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-12}{-6} = 2$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-18}{-6} = 3 \quad ; \quad \Rightarrow x = 4,\; y = 2,\; z = 3$$

எடுத்துக்காட்டு 28

2x – 3y – 1 = 0, 5x + 2y – 12 = 0 என்ற சமன்பாடுகளை கிராமரின் விதியைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள் $2x – 3y = 1, 5x + 2y = 12$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 19 \neq 0 \quad ; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 38$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 19$$

கிராமரின் விதிப்படி,

$$\therefore x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{38}{19} = 2, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{19}{19} = 1$$

$$\Rightarrow x = 2, \quad y = 1$$

எடுத்துக்காட்டு 29

வெவ்வேறு தரகு வீதங்களையுடைய A, B, C என்ற மூன்று பொருள்களை கடந்த மூன்று மாதங்களில் ஒரு விற்பனையாளர் விற்பனை செய்ததற்கான விவரங்கள் கீழேயுள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

மாதங்கள்	விற்பனை செய்த அலகுகள்			பெற்ற மொத்த தரகு (ரூபாயில்)
	A	B	C	
சனவரி	**90**	**100**	**20**	**800**
பிப்ரவரி	**130**	**50**	**40**	**900**
மார்ச்	**60**	**100**	**30**	**850**

A, B, C என்ற பொருள்களுக்கான தரகு வீதத்தைக் காண்க. கிராமரின் முறையில் தீர்க்கவும்.

தீர்வு :

A, B மற்றும் C இன் தரகு வீதங்கள் ஓர் அலகுக்கு முறையே x, y மற்றும் z ரூபாய்கள் என்க.

கணக்கின் படி,

$$90x + 100y + 20z = 800$$

$$130x + 50y + 40z = 900$$

$$60x + 100y + 30z = 850$$

ஒவ்வொரு சமன்பாட்டையும் முழுவதும் 10 ஆல் வகுப்பதால்

$$9x + 10y + 2z = 80$$

$$13x + 5y + 4z = 90$$

$$6x + 10y + 3z = 85$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & 10 & 2 \\ 13 & 5 & 4 \\ 6 & 10 & 3 \end{vmatrix} = -175 \neq 0 \; ; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 80 & 10 & 2 \\ 90 & 5 & 4 \\ 85 & 10 & 3 \end{vmatrix} = -350$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 9 & 80 & 2 \\ 13 & 90 & 4 \\ 6 & 85 & 3 \end{vmatrix} = -700 \quad ; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 9 & 10 & 80 \\ 13 & 5 & 90 \\ 6 & 10 & 85 \end{vmatrix} = -1925$$

கிராமரின் விதிப்படி,

$$\therefore x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-350}{-175} = 2 \qquad ; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-700}{-175} = 4$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-1925}{-175} = 11$$

எனவே A, B மற்றும் Cக்கான தரகு வீதங்கள் முறையே ரூ.2, ரூ.4 மற்றும் ரூ.11 ஆகும்.

பயிற்சி 1.3

1) அணி முறையில் பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க :

$2x + 3y = 7, 2x + y = 5.$

2) பின்வரும் சமன்பாடுகளை அணி முறையில் தீர்க்க :

$x - 2y + 3z = 1, 3x - y + 4z = 3, 2x + y - 2z = -1$

3) பின்வரும் சமன்பாடுகளை கிராமரின் விதிப்படித் தீர்க்க :

$6x - 7y = 16, 9x - 5y = 35.$

4) அணிக்கோவை முறையில் தீர்க்க :

$2x + 2y - z - 1 = 0, x + y - z = 0, 3x + 2y - 3z = 1.$

5) கிராமரின் விதிப்படித் தீர்க்க :

$x + y = 2, y + z = 6, z + x = 4.$

6) ஒரு சிறிய தொழிற்கூடத்தில் P, Q என்ற இருவிதமான வானொலிப் பெட்டிகள் தயாரிக்கப்படுகின்றன. அதற்கு A, B என்ற இரு விதமான வால்வுகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. P என்ற வானொலிப் பெட்டிக்கு இரண்டு A வால்வுகளும், மூன்று B வால்வுகளும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. Q என்ற வானொலிப் பெட்டிக்கு மூன்று A வால்வுகளும் நான்கு B வால்வுகளும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. மொத்தத்தில் 130 A வால்வுகளும், 180 B வால்வுகளும் அந்த தொழிற்கூடத்தில் பயன்படுத்தப்பட்டிருப்பின் தயாரிக்கப்பட்ட வானொலிப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கையை அணி முறையில் காண்க.

7) 2 கிலோ கோதுமை மற்றும் 1 கிலோ சர்க்கரையின் விலை ரூ. 7 : 1 கிலோ கோதுமை மற்றும் 1 கிலோ அரிசியின் விலை ரூ. 7 : 3 கிலோ கோதுமை, 2 கிலோ சர்க்கரை மற்றும் 1 கிலோ அரிசியின் விலை ரூ. 17 எனில் ஒவ்வொன்றின் விலையையும் அணி முறையில் காண்க.

8) X, Y மற்றும் Z என்ற மூன்று பொருள்களை A, B மற்றும் C என்ற மூன்று வியாபாரிகள் வாங்கி விற்கிறார்கள். A என்பவர் X இன் 2 அலகுகளையும் Z இன் 5 அலகுகளையும் வாங்கி, Y இன் 3 அலகுகளை விற்கிறார். B என்பவர் X இன் 5 அலகுகளையும், Y இன் 2 அலகுகளையும் வாங்கி, Z இன் 7 அலகுகளை விற்கிறார். C என்பவர் Y இன் 3 அலகுகளையும் Z இன் 1 அலகையும் வாங்கி, X இன் 4 அலகுகளை விற்கிறார். இந்த செயல்பாடுகளில் A, ரூ. 11 பெறுகிறார். C, ரூ. 5 பெறுகிறார். ஆனால், B ரூ. 12 இழக்கிறார். பொருட்கள் X, Y மற்றும் Z ஒவ்வொன்றின் விலையைக் காண்க. அணிக் கோவைகளைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்க.

9) ஒரு தொழிற்சாலையில் நாள்தோறும் மூன்று பொருட்கள் உற்பத்தியாகின்றன. ஒரு நாளில் அதன் மொத்த உற்பத்தி 45 டன்களாக உள்ளது. முதல் பொருளின் உற்பத்தியை விட மூன்றாம் பொருளின் உற்பத்தி 8 டன்கள் அதிகமாக உள்ளது. முதல் பொருள் மற்றும் மூன்றாம் பொருளின் மொத்த உற்பத்தி இரண்டாம் பொருளின் உற்பத்தியைப் போல் இரு மடங்கு உள்ளது. கிராமரின் விதியைப் பயன்படுத்தி ஒவ்வொரு பொருளின் உற்பத்தி அளவைக் காண்க.

1.4 உள்ளீடு – வெளியீடு பகுப்பாய்வு
(INPUT - OUTPUT ANALYSIS)

A_1 மற்றும் A_2 என்ற இரு தொழிற்சாலைகளைக் கொண்ட எளிமையான பொருளாதாரக் கட்டமைப்பு ஒன்றைக் கருதுவோம். அந்த தொழிற்சாலைகள் ஒவ்வொன்றும் ஒரே ஒரு விதமான பொருளை மட்டுமே உற்பத்திச் செய்வதாகக் கொள்வோம். ஒவ்வொரு தொழிற்சாலையும் தனது செயல்பாட்டிற்கு, தன் உற்பத்தியில் ஒரு பகுதியையும், ஏனையவற்றிற்கு மற்ற தொழிற்சாலையின் உற்பத்தியையும் பயன்படுத்திக் கொள்கிறது. இவ்விதமாக அவை ஒன்றையொன்று சார்ந்து செயல்படுகின்றன. மேலும் உற்பத்தி முழுவதும் நுகரப்படுவதாகக் கொள்கிறோம். அதாவது ஒவ்வொரு தொழிற்சாலையின் மொத்த உற்பத்தியும் அதன் தேவையையும், மற்ற தொழிற்சாலையின் தேவையையும், வெளியாரின் தேவை அதாவது இறுதித் தேவையையும் சரியாக நிறைவு செய்யுமாறு அமைவதாகக் கொள்வோம்.

பொருளாதாரக் கட்டமைப்பு மாறாதிருக்கும் போது, இரு தொழிற்சாலைகளின் தற்போதைய உற்பத்தி அளவுகளின் விவரங்களின் அடிப்படையில், வெளியாரின் தேவையின் மாற்றத்திற்கு ஏற்றபடி உற்பத்தி அளவுகள் எந்த அளவில் இருக்க வேண்டும் என்பதைக் காணுவதே நமது நோக்கமாகும்.

a_{ij} என்பது A_j ஆல் பயன்படுத்தப்படும் A_i இன் உற்பத்தியின் ரூபாய் மதிப்பு என்க. இதில் $i,j = 1, 2$.

x_1 மற்றும் x_2 என்பன முறையே A_1 மற்றும் A_2 இன் தற்போதைய உற்பத்திகளின் ரூபாய் மதிப்புகள் என்க.

d_1 மற்றும் d_2 என்பன முறையே A_1 மற்றும் A_2 இன் உற்பத்திக்கான இறுதித் தேவைகளின் ரூபாய் மதிப்புகள் காண்க.

இவற்றின் வாயிலாக நாம் அமைக்கும் சமன்பாடுகள்

$$a_{11} + a_{12} + d_1 = x_1$$

$$a_{21} + a_{22} + d_2 = x_2 \qquad \text{— (1)}$$

மேலும் $b_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{x_j}, i,\ j = 1,2$ என்க

அதாவது $b_{11} = \dfrac{a_{11}}{x_1}$, $b_{12} = \dfrac{a_{12}}{x_2}$, $b_{21} = \dfrac{a_{21}}{x_1}$, $b_{22} = \dfrac{a_{22}}{x_2}$,
எனவே சமன்பாடுகள் **(1)** ஐக் கீழ்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$b_{11}\, x_1 + b_{12}\, x_2 + d_1 = x_1$$

$$b_{21}\, x_1 + b_{22}\, x_2 + d_2 = x_2$$

இவற்றைக் கீழ்கண்டவாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$(1 - b_{11})\, x_1 - b_{12}x_2 = d_1$$

$$- b_{21}\, x_1 + (1 - b_{22})\, x_2 = d_2.$$

இவற்றின் அணி அமைப்பு,

$$\begin{pmatrix} 1-b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & 1-b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

அதாவது (1 – B) X = D

இதில் $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ மற்றும் $D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$

$X = (1 - B)^{-1} D$ ஆகும்.

அதில் அணி B **தொழில் நுட்ப அணி (Technology matrix)** என்று பெயர்.

இந்த பொருளாதாரக் கட்டமைப்பு செயல்படும் வகையில் இருக்க **ஹாக்கின்–சைமன்** என்பவர்களது இரு நிபந்தனைகள் நிறைவு செய்யப்பட வேண்டும்.

B என்பது தொழில்நுட்ப அணி எனில் ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் நிபந்தனைகள் :

(i) I – B அணியின் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் மிகை எண்களாக இருக்க வேண்டும். மேலும்

(ii) | I – B | மிகை எண்ணாக இருக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 30

P என்ற Q இரு தொழிற்சாலைகளைக் கொண்ட பொருளாதாரக் கட்டமைப்பின் விவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இங்குள்ள மதிப்புகள் இலட்ச ரூபாய்களைக் குறிக்கும்.

உற்பத்தியாளர்	உபயோகிப்போர்		இறுதித் தேவை	மொத்த உற்பத்தி
	P	Q		
P	16	12	12	40
Q	12	8	4	24

தொழில் நுட்ப அணியைக் கண்டுபிடித்து, இந்த பொருளாதாரக் கட்டமைப்பு ஹாக்கின்–சைமன் நிபந்தனைகள் படி செயல்படும் வகையில் உள்ளதா என ஆராய்க.

தீர்வு :

வழக்கமான குறியீட்டில்

$a_{11} = 16,\quad a_{12} = 12,\quad x_1 = 40$

$a_{21} = 12,\quad a_{22} = 8,\quad x_2 = 24$

$$\therefore \quad b_{11} = \frac{a_{11}}{x_1} = \frac{16}{40} = \frac{2}{5},\quad b_{12} = \frac{a_{12}}{x_2} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2},$$

$$b_{21} = \frac{a_{21}}{x_1} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10},\quad b_{22} = \frac{a_{22}}{x_2} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}.$$

எனவே தொழில்நுட்ப அணி

$$B = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$I - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{10} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளான $\frac{3}{5}$ மற்றும் $\frac{2}{3}$ என்பன மிகை எண்களாக உள்ளன.

மேலும் $|I - B| = \begin{vmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{10} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}$ $\quad \therefore \; |I - B|$ என்பது மிகை எண்ணாக உள்ளன.

$\therefore$ ஹாக்கின்–சைமனின் இரு நிபந்தனைகளும் நிறைவு செய்யப்படுகின்றன. எனவே இந்த பொருளாதாரக் கட்டமைப்பு செயல்படும் வகையில் உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 31

ஒரு பொருளாதார அமைப்பில் P மற்றும் Q என்ற இரு தொழிற்சாலைகள் உள்ளன. அவற்றின் தேவை மற்றும் அளிப்பு நிலவரம் (ரூபாய் கோடிகளில்) கீழ்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

உற்பத்தியாளர்	உபயோகிப்போர்		இறுதித் தேவை	மொத்த உற்பத்தி
	P	Q		
P	**10**	**25**	**15**	**50**
Q	**20**	**30**	**10**	**60**

P இன் இறுதித் தேவையானது 35க்கும் Q - இன் இறுதித் தேவை 42க்கும் மாறும் போது உற்பத்திகளைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

வழக்கமான குறியீட்டில்,

$a_{11} = 10, \quad a_{12} = 25, \quad x_1 = 50$

$a_{21} = 20, \quad a_{22} = 30, \quad x_2 = 60$

எனவே

$$b_{11} = \frac{a_{11}}{x_1} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}, \quad b_{12} = \frac{a_{12}}{x_2} = \frac{25}{60} = \frac{5}{12},$$

$$b_{21} = \frac{a_{21}}{x_1} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}, \quad b_{22} = \frac{a_{22}}{x_2} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ தொழில் நுட்ப அணி

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{5}{12} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$I - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{5}{12} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$|I - B| = \begin{vmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{7}{30}$$

$$(I - B)^{-1} = \frac{1}{\frac{7}{30}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{12} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{30}{7} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{12} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 15 & \frac{25}{2} \\ 12 & 24 \end{pmatrix}$$

$$X = (I - B)^{-1} D$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 15 & \frac{25}{2} \\ 12 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & \frac{25}{2} \\ 12 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 204 \end{pmatrix}$$

P இன் உற்பத்தி ரூ. 150 கோடி மதிப்புள்ளதாயும் Q இன் உற்பத்தி ரூ.204 கோடி மதிப்புள்ளதாயும் இருக்க வேண்டும்.

பயிற்சி 1.4

1) இரு தொழிற்சாலைகளையுடைய பொருளாதார அமைப்பின் தொழில் நுட்ப அணி $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ எனில் ஹாக்கின்–சைமன் நிபந்தனைகளின் படி அது செயல்படும் வகையில் உள்ளதா என்று கண்டுபிடிக்க.

2) இரு தொழிற்சாலைகளின் பொருளாதார அமைப்பில் தொழில் நுட்ப அணி $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{9}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ எனில் அந்த அமைப்பு ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் நிபந்தனைகளின் படி அது செயல்படும் வகையில் உள்ளதா என ஆய்வு செய்க.

3) இரு தொழிற்சாலைகளின் பொருளாதார கட்டமைப்பின் தொழில் நுட்ப அணி $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{7}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ ஆகும். இறுதித் தேவைகள் 34, 51 அலகுகளாக மாறும் போது உற்பத்தி அளவுகளைக் காண்க.

4) P மற்றும் Q என்ற இரு தொழிற்சாலைகளின் பொருளாதார அமைப்பின் விவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது (மதிப்புகள் ரூபாய் மில்லியன்களில்)

உற்பத்தியாளர்	உபயோகிப்போர்		இறுதித் தேவை	மொத்த உற்பத்தி
	P	Q		
P	14	6	8	28
Q	7	18	11	36

இறுதித் தேவைகள் P,20 ஆகவும், Q,30 ஆகவும் மாறுகிறது எனில் தொழிற்சாலைகளின் வெளியீடுகளைக் காண்க.

5) P மற்றும் Q என்ற இரு தொழிற்சாலைகளில் உற்பத்திகளுக்கிடையேயான தொடர்பு பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. மதிப்புகள் இலட்ச ரூபாய்களில் உள்ளன.

உற்பத்தியாளர்	உபயோகிப்போர்		இறுதித் தேவை	மொத்த உற்பத்தி
	P	Q		
P	15	10	10	35
Q	20	30	15	65

இறுதித் தேவைகள்

(i) P, 12 ஆகவும் Q, 18 ஆகவும் மாறும் போது

(ii) P, 8 ஆகவும் Q, 12 ஆகவும் மாறும் போது

தொழிற்சாலைகளின் உற்பத்திகளைக் காண்க.

6) P மற்றும் Q என்ற இரு தொழிற்சாலைகளின் பொருளாதார அமைப்பில் தேவை மற்றும் அளிப்பு விவரங்கள் கீழே மில்லியன் ரூபாய்களில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

உற்பத்தியாளர்	உபயோகிப்போர்		இறுதித் தேவை	மொத்த உற்பத்தி
	P	Q		
P	16	20	4	40
Q	8	40	32	80

இறுதித் தேவைகள் P, 18 ஆகவும் Q, 44 ஆகவும் மாறும் போது அவற்றின் வெளியீடுகளைக் காண்க.

7) P மற்றும் Q என்ற இரு தொழிற்சாலைகளின் பொருளாதார அமைப்பின் விவரங்கள் (ரூபாய் கோடிகளில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

உற்பத்தியாளர்	உபயோகிப்போர்		இறுதித் தேவை	மொத்த உற்பத்தி
	P	Q		
P	50	75	75	200
Q	100	50	50	200

P –இன் இறுதித் தேவை 300 ஆகவும் Q–இன் இறுதித் தேவை 600 ஆகவும் மாறும் போது அவற்றின் உற்பத்தி அளவுகளைக் காண்க.

8) P மற்றும் Q என்ற இரு தொழிற்சாலைகளின் உற்பத்திகளுக்கான தொடர்பு கோடி ரூபாய்களில் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

உற்பத்தியாளர்	உபயோகிப்போர்		மொத்த உற்பத்தி
	P	Q	
P	300	800	2,400
Q	600	200	4,000

P - க்கான மற்றும் Q –க்கான இறுதித் தேவைகள் முறையே 5,000 மற்றும் 4,000 ஆக இருக்கும் போது அந்த தொழிற்சாலைகளின் உற்பத்திகளைக் காண்க.

1.5 மாறுதல் நிகழ்தகவு அணிகள் (TRANSITION PROBABILITY MATRICES)

இவ்வகை அணிகளின் உறுப்புகள் யாவும் ஒரு நிலையிலிருந்து மற்றொரு நிலைக்கு மாறுதலின் நிகழ்தகவுகளாக இருக்கும். பல மாற்றங்களின் நிகழ்தகவுகளை, துவக்க நிலைக்கு, அணிப் பெருக்கல் மூலம் செயல்படுத்தினால் அடுத்த நிலையினை ஊகிக்கலாம். பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் இதை விளக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 32

A மற்றும் B என்ற இரு விற்பனைப் பொருள்களின் சந்தை விற்பனை முறையே 60% மற்றும் 40 % ஆக உள்ளது. ஒவ்வொரு வாரமும் சில நுகர்வோரின் விருப்பங்கள் மாறுகின்றன. சென்ற வாரம் A வாங்கியவர்களில் 70% பேர்கள் மீண்டும் A வாங்குகின்றனர். 30% பேர் B–க்கு மாறி விடுகிறார்கள். சென்ற வாரம் B வாங்கியவர்களில் 80% பேர் அதை மீண்டும் வாங்குகிறார்கள். 20% பேர் A–க்கு மாறி விடுகிறார்கள். இரு வாரங்களுக்குப் பிறகு அவர்களின் சந்தைப் பங்கீடுகளைக் காண்க. இந்த போக்கு தொடருமானால் எப்போது சமநிலை எட்டப்படும் ?

தீர்வு :

மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி $T = \begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$

ஒரு வாரத்திற்குப் பிறகு பங்கீடுகள்

$$\begin{array}{cc} A & B \\ (0.6 & 0.4) \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} A & B \\ (0.5 & 0.5) \end{array}$$

A = 50%, B = 50%

இரு வாரங்களுக்குப் பிறகு பங்கீடுகள்

$$\begin{array}{cc} A & B \\ (0.5 & 0.5) \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} A & B \\ (0.45 & 0.55) \end{array}$$

A = 45%, B = 55%

சமநிலை

சமநிலையில் $(A \quad B)\, T = (A\ B)$ இதில் $A + B = 1$

$$\Rightarrow (A\ \ B) \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = (A\ \ B)$$

$$\Rightarrow 0.7\,A + 0.2\,B = A$$

$$\Rightarrow 0.7\,A + 0.2\,(1 - A) = A \qquad \Rightarrow A = 0.4$$

$\therefore$ A இன் பங்கீடு 40% ஆகவும் B இன் பங்கீடு 60% ஆகவும் இருக்கும் போது சமநிலை எட்டப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 33

ஒரு நகரில் ஒரு புதிய போக்குவரத்து வசதி தற்போது செயல்பாட்டிற்கு வந்துள்ளது. அதனை இந்த ஆண்டு பயன்படுத்துபவர்களில் 10% பேர் அடுத்த ஆண்டு பயன்படுத்தாமல் தங்களின் சொந்த வாகனங்களுக்கு மாறி விடுவர். மீதி 90% பேர் தொடர்ந்து அப்புதிய போக்குவரத்து வசதியைப் பயன்படுத்துவர். இந்த ஆண்டு தங்களின் சொந்த வாகனங்களைப் பயன்படுத்துபவர்களில் 80% பேர் அடுத்த ஆண்டும் தொடர்ந்து அவற்றையே பயன்படுத்துவர். மீதி 20% பேர் புதிய போக்குவரத்து வசதிக்கு மாறி விடுவர். நகரத்தின் ஜனத்தொகை மாறாமலிருக்கிறது என்றும் பயணிகளின் இந்த ஆண்டு 50% பேர் புதிய போக்குவரத்து வசதியையும் 50% பேர் தங்களின் சொந்த வாகனங்களையும் பயன்படுத்துகின்றனர் என்றும் கொண்டால்

(i) **ஓராண்டிற்கு பிறகு எத்தனை சதவீதம் பயணிகள் புதிய போக்குவரத்து வசதியைப் பயன்படுத்துவர் ?**

(ii) **காலப்போக்கில் எத்தனை சதவீதம் பேர் புதிய போக்குவரத்து வசதியைப்ப பயன்படுத்துவர் ?**

தீர்வு :

மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி

$$T = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} S & C \end{array} \\ \begin{array}{c} S \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

ஓராண்டிற்கு பிறகு

$$\begin{array}{cc} S & C \\ (0.5 & 0.5) \end{array} \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} S & C \end{array} \\ \begin{array}{c} S \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} A & B \\ (0.55 & 0.45) \end{array}$$

$S = 55\%, \qquad C = 45\%$

காலப்போக்கில் சமநிலை எட்டப்படும்

$(S \quad C)\, T = (S \quad C)$ இதில் $S + C = 1$

$$\Rightarrow (S \ \ C) \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = (S \quad C)$$

$$\Rightarrow 0.9\,S + 0.2\,C = S$$

$$\Rightarrow 0.9\,S + 0.2\,(1 - S) = S \ \Rightarrow \ S = 0.67$$

$\therefore$ காலப்போக்கில் 67% பயணிகள் புதிய போக்குவரத்து வசதியைப் பயன்படுத்துவர்.

பயிற்சி 1.5

1) தற்போது P மற்றும் Q என்ற இரு விற்பனைப் பொருள்களின் சந்தை விற்பனை முறையே 70% மற்றும் 30% ஆக உள்ளது. ஒவ்வொரு வாரமும் சில நுகர்வோரின் விருப்பங்கள் மாறுகின்றன. சென்ற வாரம் P – வாங்கியவர்களில் 80% பேர் மீண்டும் அதை வாங்குகின்றனர். 20% பேர் Q –க்கு மாறிவிடுகின்றனர். சென்ற வாரம், Q வாங்கியவர்களில் 40% பேர் மீண்டம் அதை வாங்குகின்றனர். 60% பேர் P–க்கு மாறி விடுகின்றனர். இரண்டு வாரங்களுக்குப் பிறகு அவர்களின் சந்தைப் பங்கீடுகளைக் காண்க. இந்த போக்கு தொடருமானால் எப்போது சமநிலை எட்டப்படும் ?

2) ஒரு வாரப் பத்திரிக்கைக்குச் சந்தா கட்டுமாறு கேட்டுக் கொள்ளப்படும் கடிதம் அந்த பத்திரிக்கை அலுவலகத்திலிருந்து ஏராளமானவர்களுக்கு அனுப்பப்படுகிறது. கடிதம் பெற்றவர்களில், சந்தாதாரர்களாக இருந்து மீண்டும் சந்தா கட்டுபவர் 60% ஆகும். சந்தாதாரர்களாக இல்லாமலிருந்து புதியதாக சந்தா கட்டுபவர்கள் 25% ஆகும். இதே போல் முன்னர் கடிதம் அனுப்பப்பட்ட போது கடிதம் பெற்றவர்களில்

40% பேர் சந்தாதாரர்களாகச் சேர்ந்தனர் எனத் தெரிகிறது. தற்போதை கடிதத்தைப் பெறுபவர்களில் எத்தனை சதவீதம் பேர் சந்தாதாரரர்களாவர் என எதிர்பார்க்கலாம் ?

3) ஒரு நகரில் A, B என்ற இரு செய்தித்தாள்கள் வெளிவருகின்றன. அவைகளின் தற்போதைய சந்தைப் பங்கீடு A, 15% மற்றும் B, 85% ஆகும். சென்ற ஆண்டு A வாங்கியவர்களில் 65% பேர் மீண்டும் அதை இந்தாண்டும் வாங்குகிறார்கள். 35% பேர் Bக்கு மாறி விடுகின்றனர். சென்ற ஆண்டு B வாங்கியவர்களில் 55% பேர் இந்தாண்டும் மீண்டும் அதை வாங்குகிறார்கள். 45% பேர் A–க்கு மாறி விடுகிறார்கள். இரண்டு ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு அவற்றின் சந்தைப் பங்கீடுகளைக் காண்க.

பயிற்சி 1.6

ஏற்புடைய விடையைத் தெரிவு செய்க.

1) $|a_{ij}|$ என்ற அணிக்கோவையில் a_{23} இன் சிற்றணி a_{23} இன் இணைக் காரணிக்குச் சமம் எனில் சிற்றணி a_{23} இன் மதிப்பு

a) 1 b) 2 c) 0 d) 3

2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ இன் சேர்ப்பு அணி

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ இன் சேர்ப்பு அணி

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

4) AB = BA = | A | I எனில் அணி B என்பது

a) A –இன் நேர்மாறு b) A இன் நிரை நிரல் மாற்று

c) A இன் சேர்ப்பு d) 2A

5) A என்பது 3 வரிசை உள்ள சதுர அணி எனில் | Adj A | இன் மதிப்பு

a) $|A|^2$ b) $|A|$ c) $|A|^3$ d) $|A|^4$

6) $|A| = 0$ எனில் $|\text{Adj } A|$ இன் மதிப்பு

a) 0 b) 1 c) – 1 d) ± 1

7) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ இன் நேர்மாறு

a) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

8) $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ -0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$ எனில் $A^{-1} =$

a) $\begin{pmatrix} -0.8 & 0.6 \\ -0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \\ -0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$

9) k இன் எம்மதிப்பிற்கு $A = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ என்ற அணிக்கு நேர்மாறு இருக்காது **?**

a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{10}{3}$ c) 3 d) 10

10) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ எனில் $A^{-1} A =$

a) 0 b) A c) 1 d) A^2

11) ஒவ்வொரு உறுப்பும் **1** ஆக உள்ள ஒரு $n \times n$ அணியின் தரம்

a) 1 b) 2 c) n d) n^2

12) ஒவ்வொரு உறுப்பும் **2** ஆக உள்ள ஒரு $n \times n$ அணியின் தரம்

a) 1 b) 2 c) n d) n^2

13) பூச்சிய அணியின் தரம்

a) 0 b) 1 c) – 1 d) ∞

14) ஒரு $n \times n$ வரிசையுள்ள பூச்சியக் கோவை அணியாக இல்லாத அணியின் தரம்

a) n b) n^2 c) 0 d) 1

15) நேரியல் சமபடித்தான சமன்பாடுகளுக்கு குறைந்த பட்சம் இருப்பது

a) ஒரு தீர்வு b) இரு தீர்வுகள்

c) மூன்று தீர்வுகள் d) நான்கு தீர்வுகள்

16) AX = B என்ற சமன்பாடுகளை கிராமரின் முறையில் தீர்க்க நிறைவு செய்யப்பட வேண்டிய நிபந்தனை

a) $|A| = 0$ b) $|A| \neq 0$ c) $A = B$ d) $A \neq B$

17) உள்ளீடு – வெளியீடு பகுப்பாய்வின் செயல்படும் வாய்ப்பிற்கான ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் நிபந்தனைகளின் எண்ணிக்கை

a) 1 b) 3 c) 4 d) 2

18) $T = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ x & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$ என்பது மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி எனில் $x =$

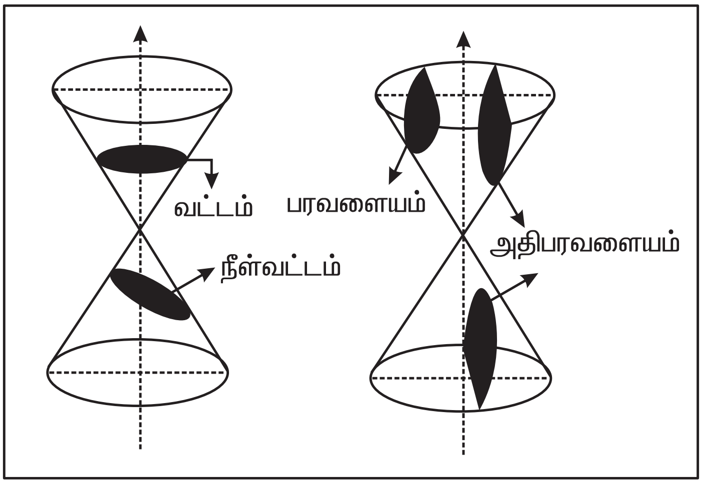
a) 0.3 b) 0.2 c) 0.3 d) 0.7

பகுமுறை வடிவ கணிதம் 2

2.1 கூம்பு வெட்டிகள் (CONICS)

கூம்பை தளத்தால் வெட்டுவதால் கிடைக்கும் வளை வரைகள்

பரவளையம், நீள்வட்டம், மற்றும் அதிபரவளையம் என்பன கூம்பு வெட்டிகள் என்று அழைக்கப்படும் வளைவரைத் தொகுதிகளின் உறுப்புகளாகும் ஒரு கூம்பினை ஒரு தளத்தால் வெட்டுவதால் மேற்கூறிய வளைவரைகளைப் பெறலாம். எனவே தான் அவை கூம்பு வெட்டிகள் என்றழைக்கப்படுகின்றன.



படம் 2.1

ஒரு தளத்திலுள்ள நகரும் புள்ளி ஒன்றிற்கும் அதே தளத்திலுள்ள நிலைப் புள்ளிக்கும் உள்ள தொலைவு மற்றும் அந்த நகரும் புள்ளிக்கு அதே தளத்திலுள்ள ஒரு நிலைக்கோட்டிற்கும் உள்ள தொலைவுகளின் விகிதம் மாறிலி எனில், அந்த நகரும் புள்ளியின் நியமப்பாதை **கூம்பு வெட்டியாகும்.**

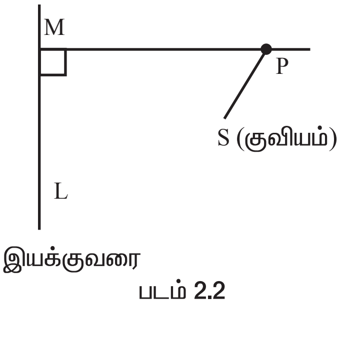
குவியம், இயக்குவரை, மையத்தொலைத் தகவு விகிதம்

மேற்கண்ட வரையரையில், நிலையான புள்ளியைக் **குவியம்**, நிலையான கோட்டை **இயக்குவரை**, மாறிலியான விகிதத்தை மையத்தொலைத் தகவு என்கிறோம்.

மையத்தொலைத் தகவு வழக்கமாக 'e' என்ற எழுத்தால் குறிக்கப்படும்.

படம் 2.2 இல், S என்பது குவியம், LM என்பது இயக்குவரை, மற்றும்

$$\frac{SP}{PM} = e$$



படம் 2.2

ஒரு கூம்பு வெட்டியில்

$e = 1$ எனில் அது பரவளையமாகும்

$e < 1$ எனில் அது நீள்வட்டமாகும்

மற்றும் $e > 1$ எனில்

அது அதிபரவளையமாகும்.

குறிப்பு :

கற்றல் திறனை மேம்படுத்துவதற்காக கூம்பு வெட்டிகளின் திட்ட சமன்பாடுகளின் (2.2.1, 2.3.1, 2.4.1, 2.4.5) தருவித்தல் முறையும் வளைவரைகளை (2.2.2, 2.3.2, 2.4.2) வரையும் முறையும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவைகள் தேர்வில் கேட்கப்படமாட்டாது.

2.1.1 கூம்பு வெட்டியின் பொதுச் சமன்பாடு

கூம்பு வெட்டிக்கு குவியம் $S(x_1, y_1)$ இயக்குவரையின் சமன்பாடு $Ax + By + C = 0$ மையத்தொலைவு *'e'* என்க.

$P(x, y)$ கூம்பு வெட்டியின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.

$$SP = \sqrt{(x-x_1)^2 - (y-y_1)^2}$$

$Ax + By + C = 0$ இலிருந்து $P(x, y)$ இன் குத்துத் தொலைவு

$$PM = \pm\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$\frac{SP}{PM} = e \quad \Rightarrow \frac{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}}{\pm\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}} = e$$

அல்லது $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2 = e^2\left[\frac{(Ax+By+C)^2}{(A^2+B^2)}\right]$

இதை சுருக்கினால் $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற வடிவில், x, y இல் உள்ள இருபடிச் சமன்பாடு கிடைக்கும். இதுவே கூம்பு வெட்டியின் பொதுச் சமன்பாடு ஆகும்.

குறிப்பு :

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற சமன்பாடு

(i) $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$ எனில், இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும்.

(ii) a = b, h = 0 எனில், ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும். மேற்கூறிய இரண்டு நிபந்தனைகளும் நிறைவு செய்யப்படாவிடில்,

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ஆனது

(iii) $h^2 - ab = 0$ எனில், ஒரு பரவளையத்தைக் குறிக்கும்.

(iv) $h^2 - ab < 0$ எனில், ஒரு நீள்வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

(v) $h^2 - ab > 0$ எனில், ஒரு அதிபரவளையத்தைக் குறிக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1

$4x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 32y + 16 = 0$ என்ற சமன்பாடு ஒரு கூம்பு வெட்டியைக் குறிக்கிறது. அதன் வகையைக் குறிப்பிடுக.

தீர்வு :

$4x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 32y + 16 = 0$ என்ற சமன்பாட்டை,

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிடும் பொழுது, நாம் பெறுவது, $a = 4, 2h = 4, b = 1$

$\therefore\ h^2 - ab = (2)^2 - 4(1) = 4 - 4 = 0$

$\therefore$ எனவே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூம்பு வெட்டி ஒரு பரவளையமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2

$16x^2 + 25y^2 - 118x - 150y - 534 = 0$ என்ற சமன்பாடு குறிக்கும் கூம்பு வெட்டியின் வகையைக் குறிப்பிடுக.

தீர்வு :

இங்கு, $a = 16, 2h = 0, b = 25$

$\therefore\ h^2 - ab = 0 - 16 \times 25 = -400 < 0$

எனவே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூம்பு வெட்டி ஒரு நீள்வட்டமாகும்.

பயிற்சி 2.1

பின்வரும் சமன்பாடுகள் குறிக்கும் கூம்பு வெட்டிகளின் வகையைக் காண்க.

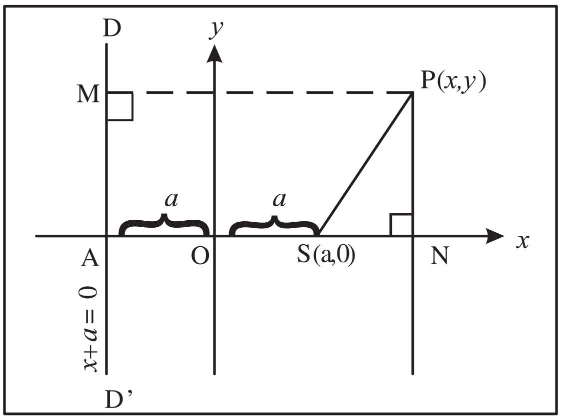
1) $x^2 - 6xy + 9y^2 + 26x - 38y + 49 = 0$

2) $7x^2 + 12xy - 2y^2 + 22x + 16y - 7 = 0$

3) $7x^2 + 2xy + 7y^2 - 60x - 4y + 44 = 0$

2.2 பரவளையம்

2.2.1 பரவளையத்தின் திட்ட வடிவம்



படம் 2.3

S ஐ குவியம், DD′ ஐ இயக்குவரை என்க. S இல் இருந்து DD′ க்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடு, DD′ ஐ A இல் சந்திக்கட்டும். SA = $2a$ என்க. AS ஐ, x அச்சாகவும், AS இன் மையப்புள்ளி O வழியாக AS க்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடு OY ஐ y அச்சாகவும் தெரிவு செய்க.

எனவே S $(a,0)$ எனவும், இயக்குவரை DD′ இன் சமன்பாடு $x + a = 0$ எனவும் பெறுகிறோம்.

P(x, y) பரவளையத்தின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. PM ஐ DD′ க்கும் PN ஐ Ox க்கும் செங்குத்தாக வரைக.

$$PM = NA = NO + OA = x + a.$$

$$SP^2 = (x-a)^2 + y^2$$

$$\frac{SP}{PM} = e$$ [P பரவளையத்தின் மீது ஒரு புள்ளி]

(அ–து), $SP^2 = e^2(PM)^2$

(அ–து), $(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2 \qquad (e = 1)$

(அ–து), $y^2 = 4ax$

இதுவே பரவளையத்தின் திட்ட வடிவமாகும்.

குறிப்பு :

(i) பரவளையத்தின் குவியம் வழியாக மற்றும் இயக்குவரைக்கு செங்குத்தாக அமைந்துள்ள கோடு, பரவளையத்தின் **அச்சு** எனப்படும். பரவளையமும், அதன் அச்சும் சந்திக்கும் புள்ளி பரவளையத்தின் **முனை** எனப்படும்.

(ii) பரவளையத்தின் அச்சுக்கு செங்குத்தாக, குவியத்தின் வழியாக செல்லும் நாண் பரவளையத்தின் **செவ்வகலம்** எனப்படும்.

2.2.2 $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்தை வரைதல்

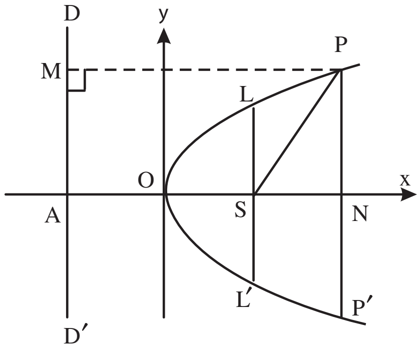
1) (a) $y = 0$ எனில், x பெறும் மதிப்பு பூச்சியம் மட்டுமே.

$\therefore$ பரவளையம் x - அச்சை $(0,0)$ இல் மட்டுமே வெட்டுகிறது.

(b) $x < 0$ எனில், y கற்பனையானது. எனவே வளைவரை x இன் குறை மதிப்புகளுக்கு அமையாது.

(c) y க்கு $-y$ பிரதியிட பரவளையத்தின் சமன்பாடு மாறாது. எனவே பரவளையம் x அச்சுக்கு சமச்சீரானது.

(d) x அதிகரிக்க, $|y|$ ம் அதிகரிக்கிறது. $x \to \infty$ எனில் $y \to \pm\infty$. எனவே வளைவரை விரிந்து மற்றும் படம் **2.4** இல் உள்ள வடிவத்தைப் பெறுகிறது.



படம் 2.4

2) **இயக்குவரை :** இயக்குவரை y அச்சுக்கு இணையான ஒரு கோடு. இயக்குவரையின் சமன்பாடு $x + a = 0$.

3) **அச்சு :** x அச்சு பரவளையத்தின் அச்சாகவும், y அச்சு பரவளையத்தின் முனையில் வரையப்படும் தொடு கோடாகவும் உள்ளன.

4) **செவ்வகலம்:** S ன் வழியாக, LSL′ ஐ AS க்கு செங்குத்தாக வரைக.

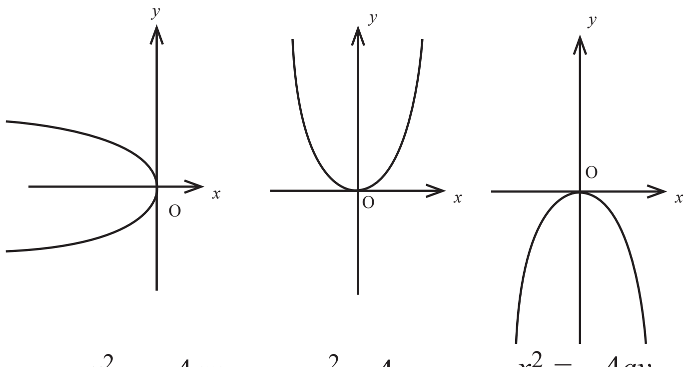
$x = a$ எனில், $y^2 = 4a^2$ அல்லது $y = \pm 2a$. $SL = SL' = 2a$.

எனவே $LL' = 4a$, LL′ பரவளையத்தின் செவ்வகலம் ஆகும்.

SL (அல்லது SL′) அரை செவ்வகலம் ஆகும். $OS = \frac{1}{4}(LL') = a$

குறிப்பு

$y^2 = -4ax$ என்ற பரவளையம், x அச்சின் குறைப் பகுதியில் அமைகிறது. y அச்சினை சமச்சீராகக் கொண்ட பரவளையம் $x^2 = 4ay$ ஆனது y அச்சின் மிகைப் பகுதியில் அமைகிறது. $x^2 = -4ay$ எனும் பரவளையம் y அச்சின் குறைப் பகுதியில் அமைகிறது.



படம் 2.5

சமன்பாடு	$y^2 = 4ax$	$y^2 = -4ax$	$x^2 = 4ay$	$x^2 = -4ay$
குவியம்	$(a, 0)$	$(-a, 0)$	$(0, a)$	$(0, -a)$
முனை	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
இயக்குவரை	$x = -a$	$x = a$	$y = -a$	$y = a$
செவ்வகலம்	$4a$	$4a$	$4a$	$4a$
அச்சு	$y = 0$	$y = 0$	$x = 0$	$x = 0$

எடுத்துக்காட்டு 3

(2, 1) என்ற குவியமும், $2x + y + 1 = 0$ என்ற இயக்குவரையும் கொண்ட பரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு :

P (x, y) என்பது பரவளையத்தின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி.

PM ஐ இயக்குவரைக்கு செங்குத்தாக வரைக.

$\frac{SP}{PM} = 1$ (இங்கு S குவியமாகும்) $\therefore \; SP^2 = PM^2$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = \left(\frac{2x+y+1}{\sqrt{2^2+1^2}}\right)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = \frac{(2x+y+1)^2}{5}$$

$$5x^2 + 5y^2 - 20x - 10y + 25 = 4x^2 + y^2 + 1 + 4xy + 2y + 4x$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 24x - 12y + 24 = 0$$

இதுவே தேவையான சமன்பாடு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4

$y^2 - 8x - 2y + 17 = 0$ என்ற பரவளையத்தின் குவியம், செவ்வகலம், முனை, இயக்குவரை ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

$$y^2 - 8x - 2y + 17 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 2y = 8x - 17$$

$$\Rightarrow \quad y^2 - 2y + 1 = 8x - 16 \quad \Rightarrow \quad (y-1)^2 = 8(x-2)$$

ஆதியை (2,1) க்கு மாற்றி, $x - 2 = X$,

$y - 1 = Y$ எனில் பரவளையத்தின் சமன்பாடு $Y^2 = 8X$ ஆகும்.

$\therefore$ புதிய ஆதி (2, 1) என்பது முனை ஆகும். செவ்வலகம் = 8.

X, Y அச்சுகளைப் பொறுத்து, (2, 0) குவியம், இயக்குவரையின் சமன்பாடு $X + 2 = 0$ ஆகும்.

எனவே x, y, அச்சுகளைப் பொறுத்து, (4, 1) குவியம் ஆகும். $x - 2 + 2 = 0$ அல்லது $x = 0$ இயக்குவரை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5

$4y^2 + 12x - 20y + 67 = 0$ என்ற பரவளையத்தின் முனை, குவியம், அச்சு, இயக்குவரை, அரைச் செவ்வகலம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

$$4y^2 + 12x - 20y + 67 = 0$$

அல்லது $\quad 4y^2 - 20y = -12x - 67$

$$4(y^2 - 5y) = -12x - 67$$

$$4\left\{y^2 - 5y + \frac{25}{4} - \frac{25}{4}\right\} = -12x - 67$$

$$4\left[\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right] = -12x - 67$$

$$4\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 25 - 12x - 67$$

$$= -12\left(x + \frac{7}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 3\left(-x - \frac{7}{2}\right)$$

இதனை $Y^2 = 4aX$ என்ற திட்ட வடிவத்திற்கு கொணர,

$X = -x - \frac{7}{2}$ மற்றும் $Y = y - \frac{5}{2}$ என்க.

$Y^2 = 3X$. இங்கு $4a = 3$ $\quad \therefore \; a = \frac{3}{4}$

இப்போது விடைகளை பட்டியிடலாம்.

	(X, Y) ஐப் பொறுத்தது	**(x, y) ஐப் பொறுத்தது** $\boldsymbol{x = -X - \frac{7}{2}, y = Y + \frac{5}{2}}$
முனை	$(0, 0)$	$\left(0 - \frac{7}{2}, 0 + \frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$
அச்சு	Y=0 (X-axis)	$y - \frac{5}{2} = 0$ or $y = \frac{5}{2}$
குவியம்	$(a, 0) = \left(\frac{3}{4}, 0\right)$	$\left(-\frac{3}{4} - \frac{7}{2}, 0 + \frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{17}{4}, \frac{5}{2}\right)$
இயக்குவரை	$X = -a \Rightarrow X = \frac{-3}{4}$	$-x - \frac{7}{2} = \frac{-3}{4}$ அல்லது $x = -\frac{11}{4}$
அரைச்செவ்வகலம்	$2a = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$

குறிப்பு

இதே கணக்கை $X = x + \frac{7}{2}$, $Y = y - \frac{5}{2}$ என்று மாற்றம் செய்து, $Y^2 = -3X$ எனப் பெற்று, அதை $y^2 = -4ax$ என்ற சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிட்டும் தீர்வு காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 6

ஓர் உலோகத்தை தயாரிக்கும் நிறுவனத்தின் மாதாந்திர உற்பத்தி x கிலோகிரோம்களின் சராசரி விலை y–ஐ ரூ. $(\frac{1}{10}x^2 - 3x + 50)$. என்பது கொடுக்கிறது. சராசரி விலையின் வளைவரை ஒரு பரவளையம் என காட்டுக. வளைவரையின் முனையில் சராசரி விலை மற்றும் உற்பத்தியைக் காண்க.

தீர்வு :

சராசரி விலையின் வளைவரை

$$y = \frac{1}{10}x^2 - 3x + 50$$

$$10y = x^2 - 30x + 500$$

$$10y = (x-15)^2 + 275$$

$$(x-15)^2 = 10y - 275$$

$$(x-15)^2 = 10(y-27.5)$$

$X^2 = 10Y$ இதில்

$X = x - 15,\ Y = y - 27.5$

$4a = 10 \quad \Rightarrow \quad a = 2.5$

எனவே சராசரி விலையின் வளைவரை ஒரு பரவளையமாகும்.

அதன் முனை $(X = 0, Y = 0)$ (அ – து) $(x = 15, y = 27.5)$

பரவளையத்தின் முனைப்புள்ளியில், உற்பத்தி 15 கி.கிராம்கள், சராசரி விலை ரூ.27.50 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7

ஒரு விற்பனை பொருளின் விலைக்கும் அளிப்புக்கும் உள்ள தொடர்பு $x = 5\sqrt{2p-10}$ ஆகும். அளிப்பின் வளைவரை ஒரு பரவளையம் என காட்டுக. அதன் முனையைக் காண்க. எந்த விலைக்குக் கீழ் அளிப்பு பூச்சியம் ஆகும் ?

தீர்வு :

விலைக்கும் அளிப்பிற்கும் உள்ள தொடர்பு,

$x^2 = 25\,(2p - 10) \Rightarrow x^2 = 50\,(p - 5)$

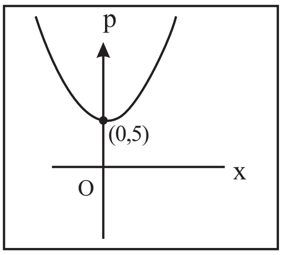
$\Rightarrow$ $X^2 = 4aP$ இதில் $X = x$

மற்றும் $P = p - 5$

$\Rightarrow$ அளிப்பு வளைவரை ஒரு பரவளையம்

இதன் முனை $(X = 0, P = 0)$.

$\Rightarrow (x = 0, p = 5) \Rightarrow (0, 5)$



படம் 2.6

எனவே $p = 5$ க்கு கீழ் அளிப்பு பூச்சியமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8

ஒரு இருப்புப் பாதை அமைந்த பாலத்தின் மேல் வளைவு (Girder), பரவளையத்தின் வடிவில் உள்ளது. பாலத்திலிருந்து 15 மீட்டர் உயரத்திலுள்ள மேல் வளைவின் உச்சியானது பரவளையத்தின் முனையாகும். மேல்வளைவின் தொடக்க மற்றும் முடிவுப் புள்ளிகளை இணைக்கும் 150 மீ, நீளமுள்ள நேர்கோட்டின் (span) மையப் புள்ளியிலிருந்து 30 மீட்டர் தொலைவில் மேல்வளைவின் உயரத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

பரவளையத்தின் சமன்பாடு $x^2 = -4ay$ என்க.

பரவளையத்தின் முனையை ஆதியாகக் கருதுக.

பரவளையம் A (75, – 15) வழியாகச் செல்கின்றது

$\Rightarrow (-4a)(-15) = 75$

$$4a = \frac{(75)^2}{15} = 375$$

எனவே பரவளையத்தின்

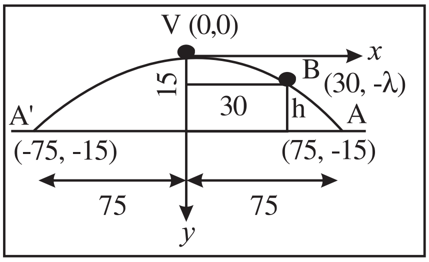
சமன்பாடு $x^2 = -375\,y$

இப்பொழுது B $(30, -\lambda)$

பரவளையத்தின் மீது அமைந்துள்ளது.

$\Rightarrow \quad (-375)(-\lambda) = 30^2$

$$\lambda = \frac{900}{375} = \frac{12}{5} = 2.4 \text{ மீ.}$$



படம் 2.7

தேவையான உயரம் = 15 – 2.4 = 12.6 மீ.

எடுத்துக்காட்டு 9

'x' மாதங்களில் சேரும் இலாபம் ரூ. 'y' –ஐ (இலட்சங்களில்) $y = -4x^2 + 28x - 40$ என்ற சமன்பாடு கொடுக்கிறது. எப்பொழுது அந்த வியாபார முயற்சியை நிறுத்தி விடுவது உகந்தது எனக் கண்டுபிடி.

தீர்வு :

$$4x^2 - 28x = -40 - y$$

$$4(x^2 - 7x) = -40 - y$$

$$4\left(x^2 - 7x + \frac{49}{4}\right) = -40 - y + 49$$

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(9 - y)$$

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}(y - 9)$$

தேவையான காலம் $= \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$ மாதங்கள்

பயிற்சி 2.2

1) பின்வரும் குவியங்களையும், இயக்குவரைகளையும் கொண்டு அமையும் பரவளையங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(i) $(1, 2)$; $x + y - 2 = 0$ (ii) $(1, -1)$; $x - y = 0$

(iii) $(0, 0)$; $x - 2y + 2 = 0$ (iv) $(3,4)$; $x - y + 5 = 0$

2) பின்வரும் சமன்பாடுகளைக் கொண்ட பரவளையங்களின் முனை, அச்சு, குவியம், இயக்குவரை ஆகியவற்றைக் காண்க.

(i) $x^2 = 100y$ (ii) $y^2 = 20x$ (iii) $y^2 = -28x$ (iv) $x^2 = -60y$

3) பின்வரும் பரவளையங்களின், குவியம், செவ்வகலம், முனை, இயக்குவரை ஆகியவற்றைக் காண்க.

(i) $y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$ (ii) $y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$

(iii) $y^2 - 8x - 9 = 0$ (iv) $x^2 - 3y + 3 = 0$

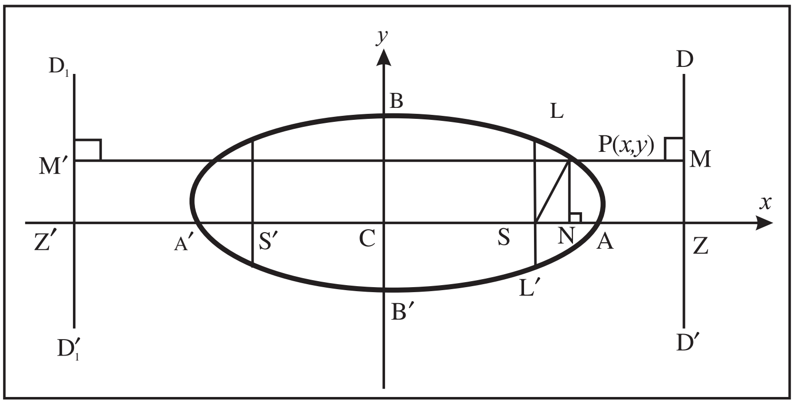
4) ஓர் உலோகத்தை தயாரிக்கும் நிறுவனத்தின் மாதாந்திர உற்பத்தி x டன்களின் சராசரி விலை y ஐ ரூ. $\frac{1}{10}x^2 - 3x + 62.5$ என்பது கொடுக்கிறது. சராசரி விலையின் வளைவரை, ஒரு பரவளையம் எனக் காட்டுக. வளைவரையின் முனையில் உற்பத்தி மற்றும் சராசரி விலையைக் காண்க.

குறிப்பு :

$y_1^2 - 4ax_1$ என்பது பூச்சியத்திற்கு அதிகமாக, சமமாக, குறைவாக இருக்கும் போது (x_1, y_1) என்ற புள்ளி, பரவளையத்திற்கு முறையே வெளியே, மேல், உள்ளே அமையும்.

2.3 நீள்வட்டம்

2.3.1 நீள்வட்டத்தின் திட்ட வடிவம்



படம் 2.8

S ஐ குவியம் மற்றும் DD’ ஐ இயக்குவரை என்க.

SZ ஐ DD′ க்கு செங்குத்தாக வரைக. A, A′ முறையே SZ ஐ உட்புறமாகவும், வெளிப்புறமாகவும் e:1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கட்டும். A, A′ நீள்வட்டத்தின் மீது அமைந்த புள்ளிகளாகும். இங்கு e ஆனது மையத் தொலைத் தகவு.

C ஐ AA′ இன் மையப்புள்ளி மற்றும் AA′ = 2a என்க. CA ஐ x அச்சாகவும் CA க்கு செங்குத்துக்கோடு Cy ஐ y அச்சாகவும் கொள்க. C ஆதியாகும்.

$$\therefore \frac{SA}{AZ} = e, \frac{SA'}{A'Z} = e$$

$$\therefore \quad SA = e(AZ) \qquad ....(1)$$

$$A'S = e(A'Z) \qquad ....(2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow SA + A'S = e(AZ + A'Z)$$

$$AA' = e(CZ - CA + A'C + CZ)$$

$$2a = e(2CZ) \qquad (CA = CA')$$

$$\Rightarrow CZ = \frac{a}{e}$$

$$(2)-(1) \quad \Rightarrow A'S - SA = e\,(A'Z - AZ)$$

$$A'C + CS - (CA - CS) = e\,(AA')$$

அல்லது $2CS = e.2a \qquad \Rightarrow CS = ae$

எனவே, S $(ae, 0)$ ஆகும்.

P (x, y) நீள்வட்டத்தின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.

$PM \perp DD'$ மற்றும் $PN \perp CZ$ என வரைக.

$$\Rightarrow \quad PM = NZ = CZ - CN$$

$$= \frac{a}{e} - x$$

$\frac{SP}{PM} = e$ (P நீள்வட்டத்தின் மீது ஒரு புள்ளி)

$$SP^2 = e^2\, PM^2$$

$$(x-ae)^2 + y^2 = e^2\left(\frac{a}{e} - x\right)^2 = (a-ex)^2$$

$$x^2 - 2aex + a^2e^2 + y^2 = a^2 - 2aex + e^2x^2$$

$$x^2(1-e^2) + y^2 = a^2(1-e^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

$b^2 = a^2(1-e^2)$ என்க

எனவே, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a > b)$

இது நீள்வட்டத்தின் திட்ட வடிவமாகும்.

2.3.2 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ என்ற நீள்வட்டத்தை வரைதல்

(i) வளைவரை ஆதிப்புள்ளி வழியாக செல்லாது. $y = 0$ எனில், $x = \pm a$. $\therefore$ நீள்வட்டம் x அச்சை $(\pm a, 0)$ என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றது. y அச்சை $(0, \pm b)$ என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றது.

(ii) சமன்பாடு x, y களில் இரட்டைப்படியுடையது. எனவே வளைவரையானது x, y அச்சுகளைப் பொறுத்து சமச்சீர் உடையது. நீள்வட்டத்தில் (x, y) ஒரு புள்ளி எனில் $(-x, y)$, $(x, -y)$ மற்றும் $(-x, -y)$ என்பனவும் அதன் புள்ளிகளாகும்.

(iii) நீள்வட்டத்தின் சமன்பாட்டை, $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ என்ற வடிவில் எழுதலாம். $|x| > a$ எனில், அதாவது $x > a$ அல்லது $x < -a$, எனில் $a^2 - x^2 < 0$ $\therefore$ $\sqrt{a^2-x^2}$ கற்பனை. எனவே, $x = a$ என்ற கோட்டின் வலப்புறத்திலும் $x = -a$ என்ற கோட்டின் இடப்புறத்திலும் வளைவரை அமையாது.

$|x| \leq a$ எனில், $a^2 - x^2 \geq 0$. எனவே ஒவ்வொரு x –க்கும் இரு சம ஆனால் மாறுபட்டட குறிகளையுடைய y மதிப்புகள் கிடைக்கும்.

வளைவரை, $x = a$ மற்றும் $x = -a$ என்ற இரண்டு கோடுகளுக்குள் அடங்கும். $x = a$ என்பது A $(a, 0)$ இல் தொடுகோடு என்பதையும் மற்றும் $x = -a$ என்பது A' $(-a, 0)$ இல் தொடுகோடு என்பதையும் கவனிக்கவும்.

(iv) வளைவரையின் சமன்பாட்டை, $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$ என்ற வடிவத்தில் எழுதலாம். வளைவரை $y=b$ என்ற கோட்டிற்கு மேற்புறமும் $y=-b$ என்ற கோட்டிற்கு கீழ்புறமும் அமையாது. வளைவரை $y = b$ மற்றும் $y = -b$ என்ற கோடுகளுக்கு இடையில் முழுவதுமாக அமைந்துள்ளது. இந்த இரண்டுக் கோடுகளும் முறையே, B மற்றும் B' இல் வரையப்படும் தொடுகோடுகளாகும்.

(v) x ஆனது 0 முதல் a வரை கூடும் பொழுது, y ஆனது b முதல் 0 வரை குறைகிறது.

(vi) **செவ்வகலம் (Latus rectum):** S இன் வழியாக, LSL' ஐ AS –க்குச் செங்குத்தாக வரைக.

$x = ae$ எனில் $\dfrac{a^2e^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

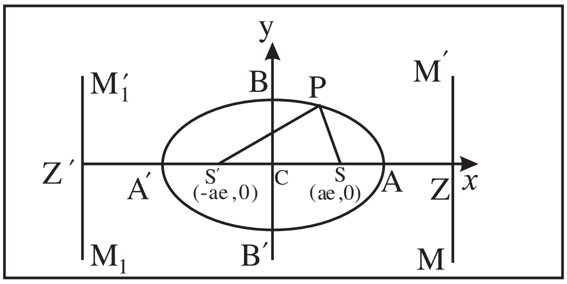
$$\Rightarrow\ y^2=b^2(1-e^2)=b^2\left(\frac{b^2}{a^2}\right)=\frac{b^4}{a^2}$$

(அ–து) $y = \pm\dfrac{b^2}{a} \Rightarrow SL = SL' = \dfrac{b^2}{a}$.

எனவே, $LL' = \dfrac{2b^2}{a}$ நீள்வட்டத்தின் செவ்வகலம்.

வளைவரையின் வடிவம் பற்றிய மேற்காணும் கருத்துகளைக் கொண்டு, வளைவரையை படம் **2.9** இல் உள்ளது போல் வரைய முடியும். பரவளையம் போல் அல்லாமல், நீள்வட்டம் ஓர்

மூடிய வளைவரையாகும்.



படம் 2.9

நீள்வட்டத்தின் முக்கிய பண்பு

S மற்றும் S′ ஐ குவியங்களாக கொண்ட நீள்வட்டத்தின் மீது P ஏதேனும் ஓர் புள்ளி எனில், SP + S′P = $2a$ இங்கு $2a$ நெட்டச்சின் நீளம் ஆகும்.

2.3.3 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் மையம், முனைகள், குவியங்கள், அச்சுகள் மற்றும் இயக்கு வரைகள்.

(i) மையம் (Centre)

$(x\ ,\ y)$ வளைவரையின் மீது ஒரு புள்ளி எனில் $(-\ x\ ,\ -\ y)$ என்பதும் வளைவரையின் மீது ஒரு புள்ளி ஆகும். மேலும் $(x,\ -\ y)$ வளைவரையின் மீது ஒரு புள்ளி எனில், $(-\ x\ ,\ y)$ என்பதும் வளைவரையின் மீது ஒரு புள்ளியாகும். இது, C வழியாக செல்லும் ஒவ்வொரு கோடும் C இலிருந்து சமதூரத்தில், வளைவரையை இரண்டு புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது என்பதைத் தெளிவாக்குகிறது. எனவே C என்ற புள்ளி, நீள்வட்டத்தின் மையப்புள்ளி என அழைக்கப்படுகிறது. C(0,0) ஆனது AA′ ன் மையப்புள்ளி ஆகும்.

(ii) முனைகள் (Vertices)

S மற்றும் S′ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு வளைவரையை வெட்டும் புள்ளிகளான A மற்றும் A′ என்பன நீள்வட்டத்தின் முனைகள் என அழைக்கப்படுகின்றன. A $(a, 0)$ மற்றும் A′ $(-\ a, 0)$ ஆகும்.

(iii) குவியங்கள் (Foci)

S$(ae, 0)$ மற்றும் S′ $(-\ ae\ , 0)$ என்ற புள்ளிகள் நீள்வட்டத்தின் குவியங்களாகும்.

(iv) அச்சுகள் (Axes)

வளைவரை AA′ மற்றும் BB′ என்ற கோடுகளைப் பொறுத்துச் சமச்சீருடையது. AA′ மற்றும் BB′ என்பன நீள்வட்டத்தின் **நெட்டச்சு (major axis)** மற்றும் **குற்றச்சு (minor axis)** எனப்படும்.

$$e < 1 \Rightarrow 1 - e^2 < 1$$

$$\therefore\ b^2 = a^2\,(1 - e^2) < a^2 \Rightarrow b < a.$$

$$\therefore\ BB' < AA'.$$

எனவே AA' நெட்டச்சு எனவும், BB' குற்றச்சு எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன. அரை நெட்டச்சு $CA = a$ மற்றும் அரை குற்றச்சு $CB = b$ ஆகும்.

(v) இயக்குவரைகள் (Directrices)

படம் **2.9** இல், இயக்குவரை MZ ன் சமன்பாடு, $x = \frac{a}{e}$

இயக்குவரை M_1'Z' –ன் சமன்பாடு $x = -\frac{a}{e}$

(vi) $b^2 = a^2 (1 - e^2)$ $\therefore$ $\boldsymbol{e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}}$

எடுத்துக்காட்டு 10

(-1, 1) ஐ ஒரு குவியமாகவும், அதையொத்த இயக்குவரை $x - y + 3 = 0$ எனவும், மையத் தொலைவு தகவு $\frac{1}{2}$ எனவும் கொண்ட நீள்வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

குவியம் $S(-1,1)$ இயக்குவரை $x - y + 3 = 0$, $e = \frac{1}{2}$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

$P(x_1, y_1)$, நீள்வட்டத்தின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க. எனவே $SP^2 = e^2\ PM^2$ இங்கு PM என்பது P யிலிருந்து $x - y + 3 = 0$ கோட்டிற்கு உள்ள செங்குத்துத் தொலைவு ஆகும்.

$$(x_1 + 1)^2 + (y_1 - 1)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{x_1 - y_1 + 3}{\sqrt{1+1}}\right)^2$$

$$8(x_1 + 1)^2 + 8\,(y_1 - 1)^2 = (x_1 - y_1 + 3)^2$$

$$7x_1^2 + 2x_1y_1 + 7y_1^2 + 10x_1 - 10y_1 + 7 = 0$$

(x_1, y_1) இன் நியமப்பாதை, அதாவது நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு

$7x^2 + 2xy + 7y^2 + 10x - 10y + 7 = 0$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 11

(2,0) மற்றும் (– 2, 0) என்ற புள்ளிகளைக் குவியங்களாகவும் மையத்தொலைத் தகவு $\frac{1}{2}$ எனவும் கொண்ட நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.(a>b)

தீர்வு :

$S\,(ae, 0)$ மற்றும் $S'\,(-ae, 0)$ என்ற புள்ளிகள், நீள்வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ இன் குவியங்கள் $(2,0)$, $(-2, 0)$ $(a > b)$ மற்றும் $e = \frac{1}{2}$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$\Rightarrow ae = 2$ மற்றும் $e = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $a = 4$ அல்லது $a^2 = 16$

மையப்புள்ளி C, SS' இன் நடுப்புள்ளியாகும்.

எனவே $C\,(0,0)$ ஆகும். S மற்றும் S', x அச்சின் மீது உள்ளன.

நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

இங்கு $b^2=a^2(1-e^2)=16\left(1-\frac{1}{4}\right)=12$

எனவே நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

எடுத்துக்காட்டு 12

$9x^2 + 16y^2 = 144$ என்ற நீள்வட்டத்தின், மையத் தொலைத்தகவு, குவியங்கள், செவ்வகலம் முதலியன காண்க.

தீர்வு :

நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$9x^2+16y^2=144 \qquad \therefore \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் வடிவம் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. இங்கு $a = 4$ மற்றும் $b = 3$.

$$\therefore \quad e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

S $(ae, 0)$ மற்றும் S′ $(-ae, 0)$ குவியங்கள்

(அ–து) S $(\sqrt{7}, 0)$ மற்றும் S′ $(-\sqrt{7}, 0)$

செவ்வகலம் $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(3^2)}{4}=\frac{9}{2}$

எடுத்துக்காட்டு 13

$3x^2 + 4y^2 - 6x + 8y - 5 = 0$ என்ற நீள்வட்டத்தின் மையம், மையத்தொலைத் தகவு, குவியங்கள், இயக்குவரைகள் முதலியனவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடு

$(3x^2-6x)+(4y^2+8y) = 5$

$3(x-1)^2+4(y+1)^2 = 5+3+4=12$

$$\Rightarrow \qquad \frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{3}=1$$

இதில் $X = x - 1$ மற்றும் $Y = y + 1$ எனில், $\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{3} = 1$

இதை $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிட,

$$b^2 = a^2(1 - e^2) \Rightarrow 3 = 4(1 - e^2) \quad \Rightarrow e = \frac{1}{2}$$

இப்போது விடைகளை பட்டியலிடலாம் :

	(X, Y) ஐ பொறுத்து	**(x, y) ஐ பொறுத்து** $\boldsymbol{x = X + 1, y = Y - 1}$
மையம்	$(0, 0)$	$(0 + 1, 0 - 1) = (1, -1)$
குவியங்கள்	$(\pm ae, 0) = (1, 0)$ மற்றும் $(-1, 0)$	$(2, -1)$ மற்றும் $(0, -1)$
இயக்கு வரைகள்	$X = \pm \frac{a}{e}$ (அ) $X = \pm 4$	$x - 1 = \pm 4$ (அ) $x = 5$ மற்றும் $x = -3$

பயிற்சி 2.3

1) பின்வரும் விபரங்களுக்கு நீள்வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(i) குவியம் $(1, 2)$ இயக்குவரை $2x - 3y + 6 = 0$ மற்றும் மையத் தொலைத்தகவு $\frac{2}{3}$

(ii) குவியம் $(0, 0)$ இயக்குவரை $3x + 4y - 1 = 0$ மற்றும் மையத் தொலைத்தகவு $\frac{5}{6}$

(iii) குவியம் $(1, -2)$ இயக்குவரை $3x - 2y + 1 = 0$ மற்றும் $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2) பின்வரும் விபரங்களுக்கு நீள்வட்டத்தின் சமன்பாட்டை காண்க.

(i) குவியங்கள் $(4, 0)$, $(-4, 0)$ மற்றும் $e = \frac{1}{3}$

(ii) குவியங்கள் $(3, 0)$, $(-3, 0)$ மற்றும் $e = \sqrt{\frac{3}{8}}$

(iii) முனைகள் $(0, \pm 5)$ மற்றும் குவியங்கள் $(0, \pm 4)$.

3) பின்வரும் நீள்வட்டத்தின் மையம், முனைகள், மையத்தொலைத் தகவு, குவியங்கள், செவ்வகலம் மற்றும் இயக்குவரைகளைக் காண்க.

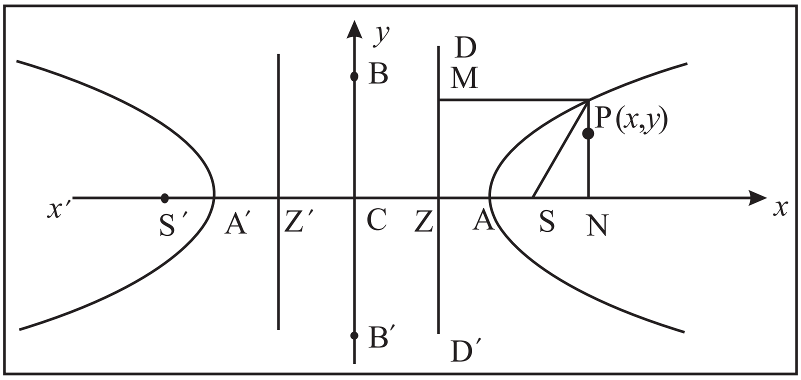
(i) $9x^2 + 4y^2 = 36$

(ii) $7x^2 + 4y^2 - 14x + 40y + 79 = 0$

(iii) $9x^2 + 16y^2 + 36x - 32y - 92 = 0$

2.4 அதிபரவளையம்

2.1 அதிபரவளையத்தின் திட்ட வடிவம்



படம் 2.10

S ஐ குவியம் மற்றும் DD′ ஐ இயக்குவரை என்க. SZ ⊥ DD′ என வரைக. A, A′ என்ற புள்ளிகள் முறையே SZ ஐ உட்புறமாகவும், வெளிப்புறமாகவும் e:1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கட்டும். இங்கு 'e' மையத் தொலைத்தகவு ஆகும். A, A′ அதிபரவளையத்தின் மீது உள்ளன. AA′ ன் மையப்புள்ளி C ஐ ஆதியாகவும், CZ ஐ x அச்சாகவும் CZ –க்கு செங்குத்துக்கோடு Cy ஐ y அச்சாகவும் எடுத்துக் கொள்க.

AA′ = 2a என்க. $\frac{SA}{AZ} = e, \ \frac{SA'}{A'Z} = e.$

$$\therefore \quad SA = e\,(AZ) \quad ....(1)$$

$$\text{மற்றும்} \quad SA' = e\,(A'Z) \quad ....(2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow SA + SA' = e\,(AZ + A'Z)$$

$$CS - CA + CS + CA' = e\,.\,AA$$

$$2CS = e\,.\,2a \quad \Rightarrow \quad CS = ae$$

$$(2) - (1) \Rightarrow SA' - SA = e\,(A'Z - AZ)$$

$$AA' = e\,(CZ + CA' - CA + CZ)$$

$$2a = e\,.\,2CZ \qquad \therefore\ CZ = \frac{a}{e}$$

P(x, y) ஆனது அதிபரவளையத்தில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க. PM ⊥ DD′ மற்றும் PN ⊥ CA என வரைக.

$$\therefore \quad \frac{SP}{PM} = e \text{ அல்லது } SP^2 = e^2 PM^2$$

$$\Rightarrow \quad (x-ae)^2 + (y-0)^2 = e^2[CN - CZ]^2$$

$$= e^2\left(x - \frac{a}{e}\right)^2 = (xe-a)^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2(e^2-1) - y^2 = a^2e^2 - a^2$$

$$x^2(e^2-1) - y^2 = a^2(e^2-1)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1$$

$b^2 = a^2(e^2-1)$ என்க.

$$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

இதுவே அதிபரவளையத்தின் திட்ட வடிவமாகும். கோடு AA' ஐ **குறுக்கச்சு (transverse axis)** மற்று AA' க்கு செங்குத்தாக C இன் வழியாகச் செல்லும் கோடு **துணையச்சு (conjugate axis)** என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.

2.4.2 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதிபரவளையத்தை வரைதல்

(i) வளைவரை ஆதிபுள்ளி வழியாக செல்லவில்லை. $y = 0$ எனில் $x = \pm a$. $\therefore$ வளைவரை, x அச்சை $(\pm a, 0)$ என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றது. மையத்திலிருந்து சம தொலைவுகளில் x அச்சினை, A மற்றும் A' புள்ளிகளில் வளைவரை வெட்டுகின்றது. எனவே $CA = CA' = a$ மற்றும் $AA' = 2a$.

$x = 0$ எனில், y கற்பனையாகிறது. எனவே வளைவரை y அச்சை சந்திக்காது. y அச்சின் மீது B மற்றும் B' என்ற புள்ளிகளை $CB = CB' = b$ என எடுத்துக் கொள்க. எனவே $BB' = 2b$.

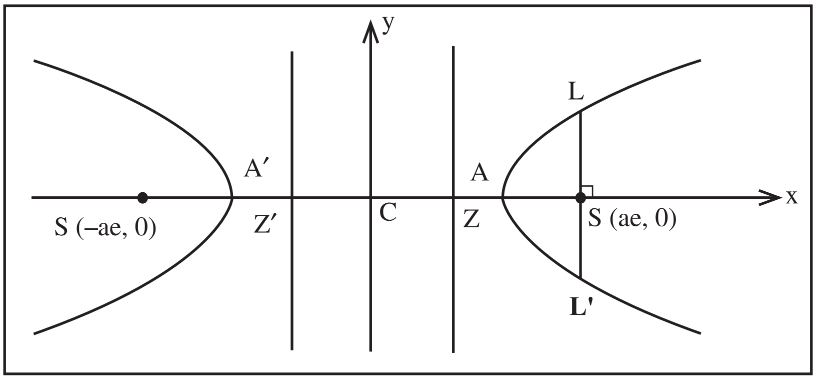
(ii) சமன்பாட்டில் x, y கள் இரட்டைபடிகளில் உள்ளமையால், x மற்றும் y அச்சுகளைப் பொறுத்து வளைவரையானது சமச்சீருடையது.

(iii) அதிபரவளையத்தின் சமன்பாட்டை $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ என்ற வடிவில் எழுதலாம். $|x| \geq a$ எனில், $x^2 - a^2 \geq 0$ ஒவ்வொரு x க்கும் இரு சம ஆனால் எதிரிடையான y மதிப்புகள் கிடைக்கும். இதில் $x \to \infty$ எனில், $|y| \to \infty$.

$|x| < a$ எனில், $x^2 - a^2 < 0$ எனவே y கற்பனையாகிறது. அதனால் வளைவரை $x = -a$ மற்றும் $x = a$ என்று கோடுகளுக்கு இடையில் அமையவில்லை. வளைவரை $x = -a$ என்ற கோட்டிற்கு இடப்புறமும், மற்றும் $x = a$ என்ற கோட்டிற்கு வலபுறமும் அமைந்துள்ளது.

(iv) வளைவரையின் சமன்பாட்டை, $x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}$ என்ற வடிவில் எழுதலாம். இதிலிருந்து எந்தவிதக் கட்டுப்பாடுமின்றி எல்லா மெய் மதிப்புகளையும் y ஏற்க முடியும் என்றும்

ஒவ்வொரு y–ன் மதிப்பிற்கும் சமமான மற்றும் எதிரிடையான இரு மதிப்புகள் x –க்கு கிடைக்கின்றன என்றும் நாம் அறிகிறோம். இந்தக் கருத்துகள் வளைவரையின் வடிவத்தை அறிவதற்கு போதுமானவையாகும். எனவே வளைவரையை படம் 2.11 இல் காட்டியபடி வரைய முடிகிறது.



படம் 2.11

(v) **செவ்வகலம்:**

S இன் வழியாக, $LSL' \perp AS$ என வரைக.

$x = ae$, எனில் $\frac{a^2e^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

அல்லது $y^2 = b^2(e^2 - 1) = b^2\left(\frac{b^2}{a^2}\right) = \frac{b^4}{a^2}$

அல்லது $y = \pm\frac{b^2}{a} \Rightarrow SL = SL' = \frac{b^2}{a}$.

எனவே $LL' = \frac{2b^2}{a}$ அதிபரவளையத்தின் செவ்வகலமாகும்.

முக்கிய பண்பு :

S மற்றும் S' களைக் குவியங்களாகக் கொண்ட அதிபரவளையத்தில் P ஏதேனும் ஒரு புள்ளி எனில், $SP \sim S'P = 2a$. இங்கு $2a$ ஆனது குறுக்கச்சின் நீளம்.

2.4.3 வளைவரையின் தொலைத் தொடுகோடு

ஒரு வளைவரையின் தொலைத் தொடுகோடு என்பது, முழுவதும் கந்தழியில் இல்லாமல், வளைவரையைக் கந்தழியில் சந்திக்கும் தொடுகோடு ஆகும்.

குறிப்பு

$ax^2 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் இரு மூலங்களும் பூச்சியம் எனில், $b = c = 0$ ஆகும். இரு மூலங்களும் கந்தழியெனில் $a = b = 0$ ஆகும்.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதிபர வளையத்தின் தொலைத் தொடுகோடுகள்

$y = mx + c$ என்ற கோடும் மற்றும் அதிபரவளையம் வெட்டும் புள்ளி, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx+c)^2}{b^2} = 1$ ஆல் கொடுக்கப்படுகிறது.

(அ –து) $$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{m^2}{b^2}\right)-\frac{2mc}{b^2}x-\frac{c^2}{b^2}-1=0$$

$$x^2(b^2-a^2m^2)-2ma^2cx-a^2c^2-a^2b^2=0$$

$y = mx + c$ ஆனது தொலைத் தொடுகோடு எனில், இந்த சமன்பாட்டின் இரு தீர்வுகளுமே கந்தழியாகும்.

$\therefore$ x –ன் கெழு $= 0$ மற்றும் x^2 ன் கெழு $= 0$.

$\Rightarrow$ $-2ma^2c=0$ மற்றும் $b^2-a^2m^2=0$. $\therefore c=0,\ m=\pm\frac{b}{a}$

எனவே இரு தொலைத் தொடுகோடுகள் உள்ளன.

அவைகள், $y=\frac{b}{a}x$ மற்றும் $y=-\frac{b}{a}x$

(அ–து) $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ மற்றும் $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$

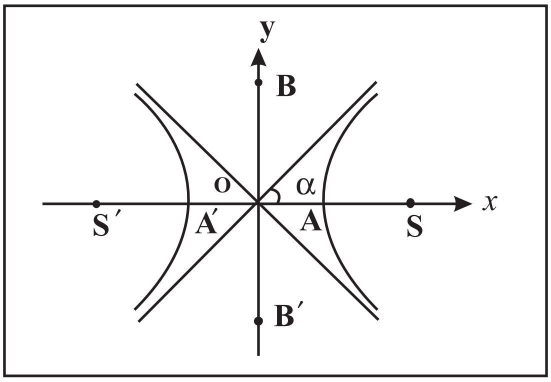
தொலைத் தொடுகோடுகளின் சேர்ப்புச் சமன்பாடு

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=0 \text{ அல்லது } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

குறிப்பு

(i) அதிபரவளையத்தின் தொலை தொடுகோடுகள், மையம் $C(0,0)$ வழியாக செல்கின்றன (படம் 2.12) என்பது வெளிப்படை.

(ii) தொலைத் தொடுகோடுகளின் சாய்வுகள் $\frac{b}{a}$, $-\frac{b}{a}$. ஆகவே, தொலைத் தொடுகோடுகள் அதிபரவளையத்தின் குறுக்கச்சுடன் சமமான கோணங்களை உண்டாக்குகின்றன. அதாவது குறுக்கச்சும், துணையச்சும், தொலைத் தொடுகோடுகளுக்கு இடைப்பட்டக் கோணங்களை இருசமக் கூறிடுகின்றன (படம் 2.12).



படம் 2.12

(iii) 2 α என்பது தொலைத் தொடுகோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் எனில் $\tan\alpha = \frac{b}{a}$

$\therefore$ தொலைத்தொடுகோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் $= 2\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

(iv) தொலைத் தொடுகோடுகளின் சேர்ப்பு சமன்பாடானது அதிபரவளையத்தின் சமன்பாட்டிலிருந்து மாறிலி உறுப்பால் மட்டுமே வேறுபடுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 14

மையத் தொலைத் தகவு $\sqrt{2}$ மற்றும் இரு குவியங்களுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு 16 எனக் கொண்டுள்ள அதிபரவளையத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டுள்ளது $e = \sqrt{2}$

S மற்றும் S′ குவியங்கள் என்க. எனவே $S'S = 16$

ஆனால் $S'S = 2ae$

$\therefore 2ae = 16 \quad \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$

மேலும் $b^2 = a^2(e^2 - 1)$

$= (4\sqrt{2})^2(2-1) = 32$

அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு,

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{32} = 1$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = 32$$

2.4.4 செவ்வக அதிபரவளையம் (Rectangular Hyperbola)

ஓர் அதிபரவளையத்தில் தொலைத் தொடுகோடுகள் ஒன்றையொன்று செங்கோணத்தில் வெட்டிக் கொண்டால், அதனை செவ்வக அதிபரவளையம் என்போம்.

தொலைத் தொடுகோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் 2α எனில் $\tan\alpha = \frac{b}{a}$ எனவே $a = 45^o \quad \Rightarrow a = b$.

$\therefore$ செவ்வக அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $x^2 - y^2 = a^2$.

$\Rightarrow$ ஒரு பரவளையத்தில் குறுக்கச்சின் நீளமும், துணையச்சின் நீளமும் சமம் எனில் அது செவ்வக அதிபரவளையம் எனப்படும்.

$\therefore$ $b^2 = a^2(e^2 - 1) \Rightarrow a^2 = a^2(e^2 - 1)$. or $e = \sqrt{2}$

2.4.5 செவ்வக அதிபரவளையத்தின் திட்ட சமன்பாடு

செவ்வக அதிபரவளையத்தின் தொலைத் தொடுகோடுகளை x, y அச்சுகளாக எடுத்துக் கொள்க. தொலைத்தொடு கோடுகளின் சமன்பாடுகள் $x = 0$ மற்றும் $y = 0$.

அவற்றின் சேர்ப்புச் சமன்பாடு $xy = 0$.

அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு, தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாட்டிலிருந்து மாறிலி உறுப்பால் மட்டுமே வேறுபடுவதால், அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு

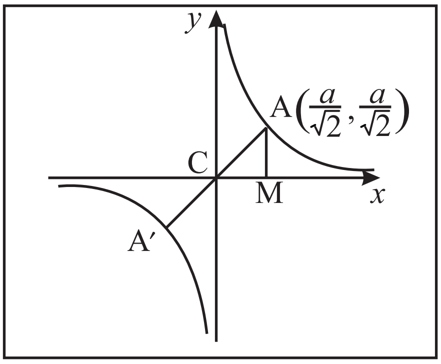
$xy = k$ (k ஒரு மாறிலி) ------------- (1)

குறுக்கச்சு $AA' = 2a$. x அச்சுக்கு செங்குத்தாக AM வரைக. $\angle ACM = 45^o$ இங்கு C மையம்.

எனவே $CM = CA \cos 45^o = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$MA = CA \sin 45^o = \frac{a}{\sqrt{2}}$

எனவே A ஆனது $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$



படம் 2.13

இது செவ்வக அதிபரவளையத்தின் ஒரு புள்ளி.

$$k = \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^2}{2}$$

செவ்வக அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $xy = \frac{a^2}{2}$

இதிலிருந்து $xy = c^2$, இங்கு $c^2 = \frac{a^2}{2}$

இதுவே செவ்வக அதிபரவளையத்ததின் திட்டச் சமன்பாடு.

எடுத்துக்காட்டு 15

மையத் தொலைத்தகவு $\sqrt{3}$ குவியம் (1, 2) இயக்குவரை $2x + y = 1$ என்றும் கொண்ட அதிபரவளையத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

குவியம் (1, 2), இயக்குவரை $2x + y = 1$, $e = \sqrt{3}$.

$P(x_1, y_1)$ என்பது அதிபரவளையத்தின் மீது ஒரு புள்ளி எனில், $SP^2 = e^2PM^2$, இங்கு PM என்பது $2x + y = 1$ க்கு குத்துக்கோடு.

$\Rightarrow \quad (x_1 - 1)^2 + (y_1 - 2)^2 = 3\frac{(2x_1 + y_1 - 1)^2}{5}$

$\Rightarrow \quad 5(x_1^2 - 2x_1 + 1 + y_1^2 - 4y_1 + 4) = 3(2x_1 + y_1 - 1)^2$

$\Rightarrow \quad 7x_1^2 + 12x_1y_1 - 2y_1^2 - 2x_1 + 14y_1 - 22 = 0$

$\therefore \quad (x_1, y_1)$ இன் நியமப்பாதை

$7x^2 + 12xy - 2y^2 - 2x + 14y - 22 = 0$

எடுத்துக்காட்டு 16

$2x^2+5xy+2y^2-11x-7y-4=0$ என்ற பரவளையத்தின் தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு :

தொலைத் தொடுகோடுகளின் சேர்ப்பு சமன்பாடு, அதிபரவளையத்தின் சமன்பாட்டிலிருந்து மாறிலி உறுப்பால் மட்டுமே வேறுபடுகிறது.

எனவே தொலைத் தொடுகோடுகளின் சேர்ப்பு சமன்பாடு

$2x^2 + 5xy + 2y^2 - 11x - 7y + k = 0$ (இங்கு k ஒரு மாறிலி) .... (1)

தொலைத் தொடுகோடுகள் இரட்டை நேர்கோடுகள், இரட்டைநேர்கோடுகளுக்கான கட்டுப்பாடு

$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$ .... (2)

சமன்பாடு (1) இல், $a = 2,\ h = \frac{5}{2},\ b = 2,\ f = \frac{-7}{2},\ g = -\frac{11}{2},\ c = k$

(2) இல் பிரதியிட, $k = 5$.

தொலைத் தொடுகோடுகளின் சேர்ப்பு சமன்பாடு

$$2x^2 + 5xy + 2y^2 - 11x - 7y + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (2x^2 + 5xy + 2y^2) - 11x - 7y + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (2x + y)(x + 2y) - 11x - 7y + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (2x + y + l)(x + 2y + m) = 0$$

$\Rightarrow \quad l + 2m = -11$ (x –ன் கெழு)

$2l + m = -7$ (y-ன் கெழு)

$$\Rightarrow \quad l = -1,\ m = -5$$

$\therefore$ தொலை தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$2x + y - 1 = 0$ மற்றும் $x + 2y - 5 = 0$.

எடுத்துக்காட்டு 17

$9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$ என்ற அதிபரவளையத்தின் மையம், மையத் தொலைவு தகவு, குவியங்கள் மற்றும் செவ்வகலம் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டை

$9(x^2 - 2x) - 16(y^2 + 4y) = 199$ என எழுதலாம்.

$$\Rightarrow \quad 9(x-1)^2 - 16(y+2)^2 = 199 + 9 - 64 = 144$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

$X = x - 1$ மற்றும் $Y = y + 2$ எனில், $\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{9} = 1$

$$b^2 = a^2(e^2 - 1) \quad \Rightarrow e^2 = \frac{9}{16} + 1 = \frac{25}{16} \Rightarrow e = \frac{5}{4}$$

இப்போது விடைகளைப் பட்டியலிடலாம்.

	(X, Y) ஐ பொறுத்து	**(x, y) ஐ பொறுத்து** **$x = X + 1, y = Y - 2$**
மையம்	$(0, 0)$	$(0 + 1, 0 - 2) = (1, -2)$
குவியங்கள்	$(\pm ae, 0)$ $= (5, 0)$ மற்றும் $(-5, 0)$	$(5 + 1, 0 - 2)$ மற்றும் $(-5 + 1 , (0 - 2)$ $(6, -2)$ மற்றும் $(-4, -2)$
செவ்வகலம்	$= \frac{2b^2}{a} = \frac{2\times 9}{4} = \frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$

எடுத்துக்காட்டு 18

$x + 4y - 5 = 0$ and $2x - 3y + 1 = 0$ என்ற தொலைவுத் தொடுகோடுகளைக் கொண்டதும் மற்றும் (1, 2) என்ற புள்ளி வழி செல்வதுமான அதிபரவளையத்தின் சமன்பாட்டை காண்க.

தீர்வு :

தொலைத் தொடுகோடுகளி சேர்ப்பு சமன்பாடு

$$(x + 4y - 5)\,(2x - 3y + 1) = 0$$

அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு, தொலைத் தொடுகோடுகளின் சேர்ப்பு சமன்பாட்டிலிருந்து மாறிலி உறுப்பால் மட்டுமே வேறுபடுகிறது. அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு

$(x + 4y - 5)\,(2x - 3y + 1) = k$, k ஒரு மாறிலி

$\therefore$ அதிபரவளையம் (1, 2) என்ற புள்ளி வழியாக செல்வதால்

$$[1 + 4(2) - 5]\,[2(1) - 3(2) + 1] = k \quad \Rightarrow \quad k = -12$$

அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $(x + 4y - 5)\,(2x - 3y + 1) = -12$

அல்லது $2x^2 + 5xy - 12y^2 - 9x + 19y + 7 = 0$

எடுத்துக்காட்டு 19

A மற்றும் B என்ற இரு இடங்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு 100 கி.மீ. A –இல் ஒரு பொருளின் ஓரலகு உற்பத்திச் செலவு B–இல் அதே பொருளின் உற்பத்திச் செலவை விட ரூ. 12 குறைவாக உள்ளது. உற்பத்திச் செய்யப்பட்ட பொருட்கள் நேர்க்கோட்டுப் பாதையில் அனுப்பப்பட்டு அளிக்கப்படுகின்றன என்றும், அனுப்பும் செலவு ஒரு அலகுக்கு ஒரு கிலோ மீட்டருக்கு 20 பைசா என்றும் கொள்க. எந்தெந்த இடங்களுக்கு A –இல் இருந்து அனுப்பி வைத்தாலும், B–இல் இருந்து அனுப்பி வைத்தாலும் மொத்த செலவு சமமாக இருக்குமோ அவ்விடங்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகள் அமையும் வளைவரையைக் காண்க.

தீர்வு :

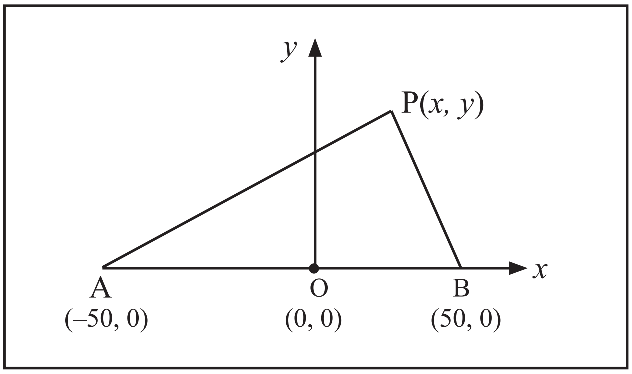
AB –இன் மையப்புள்ளியை ஆதிப்புள்ளி O என தெரிவு செய்க.

தேவையான வளைவரையின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி P என்க. எனவே A–இல் இருந்தோ அல்லது B–இல் இருந்தோ பொருளை P –க்கு அனுப்பி வைக்கும் மொத்த செலவு சமமாக இருக்கும்.

B–இல் ஓரலகின் விலை = C என்க

$\therefore$ A–இல், ஓரலகின் விலை = C – 12

A–இல் இருந்து P–க்கு ஓரலகுக்கு அனுப்பப்படும் செலவு = $\dfrac{20}{100}$ (AP)



படம் **2.14**

B –இல் இருந்து P–க்கு ஓரலகுக்கு அனுப்பப்படும் செலவு = $\dfrac{20}{100}$ (BP)

A –இல் இருந்து அனுப்பி வைத்தாலும், B –இல் இருந்து அனுப்பி வைத்தாலும் மொத்தச் செலவு சமம்.

$$\therefore \quad (C-12)+\frac{20}{100}(AP)=C+\frac{20}{100}(BP)$$

$$\therefore \quad \frac{AP}{5}-\frac{BP}{5}=12 \qquad \text{i.e. } AP-BP=60$$

$$\sqrt{(x+50)^2+y^2}-\sqrt{(x-50)^2+y^2}=60$$

$$\sqrt{x^2+y^2+100x+2500}-\sqrt{x^2+y^2-100x+2500}=60$$

$$\Rightarrow \quad 6400x^2-3600y^2=5760000$$

$$\therefore \quad 16x^2-9y^2=14400$$

$$\frac{x^2}{900}-\frac{y^2}{1600}=1 \qquad \therefore \frac{x^2}{(30)^2}-\frac{y^2}{(40)^2}=1$$

இவ்வாறு நாம் பெறும் வளைவரை ஓர் அதிபரவளையம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 20

ஓர் இயந்திரம் ரூ. p விலைக்கு விற்கப்படுகிறது. அதன் ஓராண்டிற்கான தேவை x (நூறுகளில்), $x = \dfrac{90}{p+5} - 6$. ஆகும். இந்த தேவை விதியைக் குறிக்கும் தேவை வளைவரை யாது ? எந்த விலை அளவில் தேவையானது பூச்சியத்தை அணுகும் ?

தீர்வு :

தேவை வளைவரை

$$x+6=\frac{90}{p+5} \quad \Rightarrow (x+6)\,(p+5)=90$$

$\Rightarrow$ XP = 90 இங்கு X = $x + 6$, P = $p + 5$

$\therefore$ தேவை வளைவரை ஒரு செவ்வக அதிபரவளையம் ஆகும்.

$x = 0 \;\Rightarrow 6\,(p + 5) = 90$

$\Rightarrow$ p = ரூ.10.

பயிற்சி 2.4

1) அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

(i) குவியம் (2, 2), மையத் தொலைத்தகவு $\frac{3}{2}$ மற்றும் இயக்குவரை $3x - 4y = 1$.

(ii) குவியம் (0, 0), மையத் தொலைத்தகவு $\frac{5}{4}$ மற்றும் இயக்குவரை $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$.

2) குவியங்கள் (6, 4), (-4, 4) மற்றும் மையத் தெதாலைத் தகவு 2 எனில் அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

3) அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

(i) மையம் (1, 0), ஒரு குவியம் (6, 0) மற்றும் குறுக்கச்சின் நீளம் 6.

(ii) மையம் (3, 2), ஒரு குவியம்(5, 2) மற்றும் ஒரு முனை (4, 2).

(iii) மையம் (6, 2), ஒரு குவியம் (4, 2) மற்றும் $e = 2$.

4) கொடுக்கப்பட்ட அதிபரவளையத்தின் மையம், மையத்தொலைத் தகவு, குவியங்கள் மற்றும் இயக்குவரைகளைக் காண்க.

(i) $9x^2 - 16y^2 = 144$ (ii) $\dfrac{(x+2)^2}{9} - \dfrac{(y+4)^2}{7} = 1$ (iii) $12x^2 - 4y^2 - 24x + 32y - 127 = 0$

5) கொடுக்கப்பட்ட அதிபரவளையத்தின் தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(i) $3x^2 - 5xy - 2y^2 + 17x + y + 14 = 0$ (ii) $8x^2 + 10xy - 3y^2 - 2x + 4y - 2 = 0$

6) $4x + 3y - 7 = 0$, $x - 2y = 1$ என்ற கோடுகளை தொலைத் தொடுகோடுகளாகக் கொண்டு மற்றும் (2, 3) என்ற புள்ளி வழிச் செல்லும் அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

7) $3x - 4y + 7 = 0$, $4x + 3y + 1 = 0$ என்ற கோடுகளை தொலைத் தொடுகோடுகளாகக் கொண்டு, மற்றும் ஆதிப்புள்ளி வழிச் செல்லும் அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

பயிற்சி 2.5

ஏற்புடைய விடையைத் தெரிவு செய்க.

1) பரவளையத்தின் மையத் தொலைத் தகவு

(a) 1 (b) 0 (c)2 (d) -1

2) ஒரு கூம்பு வெட்டியின் மையத் தொலைத்தகவு $\frac{1}{\sqrt{2}}$ எனில் அவ்வளைவரை

(a) ஒரு பரவளையம் (b) ஒரு நீள்வட்டம்

(c) ஒரு வட்டம் (d) ஒரு அதிபரவளையம்

3) $y^2 = 4ax$ இன் செவ்வகலம்

(a) $2a$ (b) $3a$ (c) $4a$ (d) a

4) $y^2 = -4ax$ இன் குவியம்

(a) $(a, 0)$ (b) $(0, a)$ (c) $(0, -a)$ (d) $(-a, 0)$

5) $x^2 = 4ay$ இன் இயக்குவரை

(a) $x + a = 0$ (b) $x - a = 0$ (c) $y + a = 0$ (d) $y - a = 0$

6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்பது ஒரு நீள்வட்டத்தைக் குறிக்கும் $(a > b)$ எனில்

(a) $b^2 = a^2 (1 - e^2)$ (b) $b^2 = -a^2 (1 - e^2)$

(c) $b^2 = \frac{a^2}{1-e^2}$ (d) $b^2 = \frac{1-e^2}{a^2}$

7) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$ என்ற நீள்வட்டத்தின் செவ்வகலம்

(a) $\frac{2a^2}{b}$ (b) $\frac{a^2}{2b}$ (c) $\frac{2b^2}{a}$ (d) $\frac{b^2}{2a}$

8) $y^2 = 16x$ இன் குவியம்

(a) (2, 0) (b) (4, 0) (c) (8, 0) (d) (2, 4)

9) $y^2 = -8x$ இன் இயக்குவரை

(a) $x + 2 = 0$ (b) $x - 2 = 0$ (c) $y + 2 = 0$ (d) $y - 2 = 0$

10) $3x^2 + 8y = 0$ இன் செவ்வகலத்தின் நீளம்

(a) $\frac{8}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) 8 (d) $\frac{3}{8}$

11) $x^2 + 16y = 0$ என்ற பரவளையம் அமையும் பகுதி

(a) x-அச்சுக்கு மேல் (b) x-அச்சுக்கு கீழ்

(c) y-அச்சுக்கு இடப்புறம் (d) y-அச்சுக்கு வலப்புறம்

12) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ இன் அரை நெட்டச்சு மற்றும் அரை குற்றச்சு நீளங்கள் முறையே

(a) (4, 5) (b) (8, 10) (c) (5, 4) (d) (10, 8)

13) $4x^2 + 9y^2 = 36$ இன் செவ்வகல நீளம்

(a) $\frac{4}{3}$ (b) $\frac{8}{3}$ (c) $\frac{4}{9}$ (d) $\frac{8}{9}$

14) ஒரு நீள்வட்டத்தின் $e = \frac{3}{5}$ எனவும், அரைக்குற்றச்சின் நீளம் **2** எனவும் அமைகிறது. அதன் நெட்டச்சின் நீளம்

(a) 4 (b) 5 (c) 8 (d) 10

15) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ என்ற அதிபரவளையத்தின் மையத் தொலைத் தகவு

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{9}{4}$ (c) $\frac{5}{4}$ (d) 4

16) நீள் வட்டத்தின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் குவித்தொலைவுகளின் கூடுதல் எந்த நீளத்ததிற்குச் சமம்

(a) குற்றச்சு (b) அரைக் குற்றச்சு

(c) நெட்டச்சு (d) அரை நெட்டச்சு

17) அதிபரவளையத்தின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் குவித்தொலைவுகளின் வித்தியாசம் எதற்குச் சமம் **?**

(a) குறுக்கச்சு (b) அரைக்குறுக்கச்சு

(c) துணையச்சு (d) அரைத் துணையச்சு

18) அதிபரவளையத்தின் தொலைத் தொடுகோடுகள் செல்லும் புள்ளி,

(a) குவியங்களில் ஒன்று (b) முனைகளில் ஒன்று

(c) அதிபரவளையத்தின் மையம் (d) செவ்வகலத்ததின் ஒரு முனை

19) செவ்வக அதிபரவளையத்ததின் மையத் தொலைத்தகவு

(a) 2 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\sqrt{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

20) $xy = c^2$ என்ற செவ்வக அதிபரவளையத்தின் அரை குறுக்கச்சு நீளம் a எனில் c^2 இன் மதிப்பு

(a) a^2 (b) $2a^2$ (c) $\frac{a^2}{2}$ (d) $\frac{a^2}{4}$

வகையீட்டின் பயன்பாடுகள் - I   3

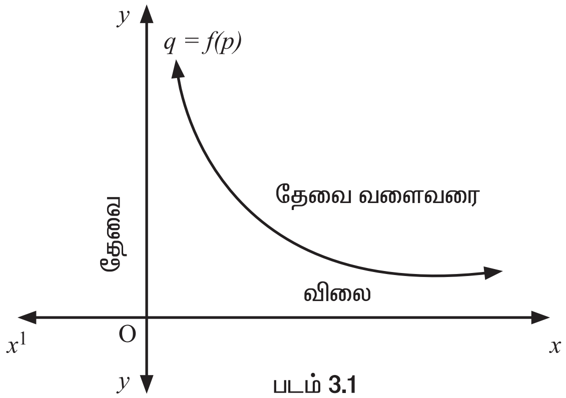
பொருளியல் மற்றும் வணிகவியல் பாடங்களில் வகையீட்டின் பயன்பாடு இன்றியமையாதது ஆகும். இந்த துறைகளில் வகையீட்டின் பயன்பாடுகளைப் பற்றி அறிவதற்கு முன் நாம் இங்கு பொருளியலில் உள்ள முக்கிய சொற்றொடர்களை அதன் வழக்கமான குறியீட்டின் மூலம் அறிமுகப்படுத்துவோம்.

3.1 பொருளியல் மற்றும் வணிகவியல்களில் உள்ள சார்புகள்

3.1.1 தேவைச் சார்பு (Demand Function)

ஒரு பொருளின் தேவை (அல்லது அளவு) q என்க. அதன் விலையை p என்க. தேவைச் சார்பானது $q = f(p)$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. பொதுவாக p–யும் q–வும் மிகை எண்கள் மற்றும் இவைகள் ஒன்றுக்கொன்று எதிர்விகிதத்தில் இருக்கும்.

தேவைச் சார்பு $q = f(p)$ –ன் வரைபடத்தைக் கவனிக்க.



படம் 3.1

வரைபடத்திலிருந்து நாம் பெறுவன (படம் 3.1) :

(i) p –யும் q –வும் மிகை எண்களாக இருப்பதால் வரைபடத்தில் தேவைச் சார்பு, முதல் கால் பகுதியில் மட்டும் இடம் பெற்றுள்ளது.

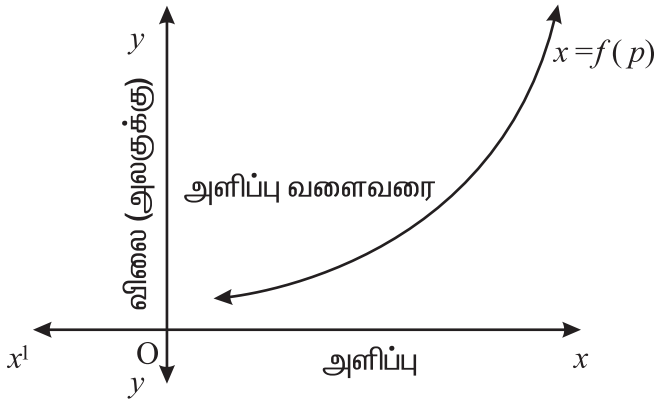
(ii) தேவைச் சார்பின் சாய்வு ஒரு குறை எண் ஆகும்.

3.1.2 அளிப்புச் சார்பு (Supply Function)

சந்தையில் ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளின் விலை p என்க. விற்கப்படும் பொருளின் அளவு x எனில், அப்பொருளின் அளிப்புச் சார்பு $x = f(p)$ ஆகும். இங்கு p ஒரு மாறி.

பொதுவாக x, p நேர் விகிதத்தில் இருக்கும்.

அளிப்புச் சார்பு $x = f\,(p)$ –ன் வரைபடத்தைக் கவனிக்க.



படம் 3.2

வரைபடத்திலிருந்து நாம் பெறுவன (படம் 3.2) :

(i) q, p என்பன மிகை எண்கள் ஆதலால் வரைபடத்தில் அளிப்பு சார்பானது முதல் கால் பகுதியில் மட்டும் இடம் பெற்றுள்ளது.

(ii) அளிப்பு சார்பின் சாய்வு ஒரு மிகை எண்.

3.1.3 செலவுச் சார்பு (Cost Function)

பொதுவாக மொத்த செலவு இரண்டு பிரிவுகளாகும்.

(i) மாறும் செலவு (ii) மாறாச் செலவு. மாறும் செலவு உற்பத்தியின் ஒரு மதிப்புச் சார்பாக இருக்கும். ஆனால் மாறாச் செலவு உற்பத்தியைச் சாராமல் இருக்கும்.

$f(x)$ என்பதை மாறும் செலவு, k என்பதை மாறாச் செலவு என்க. x என்பது உற்பத்தியின் அலகு எனில் மொத்த செலவுச் சார்பானது $C(x) = f(x) + k$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. இங்கு x என்பது மிகை எண்ணாகும்.

$f(x)$ எனும் சார்பிற்கு மாறிலி உறுப்பு கிடையாது என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

நாம் சராசரி செலவு (Average Cost), சராசரி மாறும் செலவு (Average Variable Cost), சராசரி மாறாச் செலவு (Average Fixed Cost), இறுதி நிலைச் செலவு (Marginal Cost), மற்றும் இறுதி நிலைச் சராசரி செலவு (Marginal Average Cost) இவைகளை வரையறுப்போம்.

(i) சராசரி செலவு (AC) $= \dfrac{f(x)+k}{x} = \dfrac{\text{மொத்தச் செலவு}}{\text{உற்பத்தி}}$

(ii) சராசரி மாறும் செலவு (AVC) $= \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\text{மாறும் செலவு}}{\text{உற்பத்தி}}$

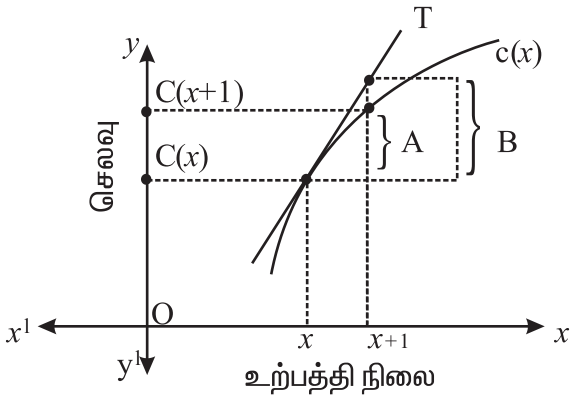
(iii) சராசரி மாறாச் செலவு (AFC) $= \dfrac{k}{x} = \dfrac{\text{மாறாச் செலவு}}{\text{உற்பத்தி}}$

(iv) இறுதி நிலைச் செலவு (MC) $= \dfrac{d}{dx}\, C(x) = C'(x)$

(v) இறுதி நிலைச் சராசரி செலவு (MAC) = $\frac{d}{dx}$ (AC)

குறிப்பு

C(x) என்பது ஒரு பொருளை x அலகுகள் உற்பத்தி செய்ய ஆகும் மொத்தச் செலவு எனில், C′(x) என்பது இறுதி நிலைச் செலவு ஆகும். அதாவது உற்பத்தியின் அளவு x அலகுகள் இருக்கும் பொழுது மேலும் ஓர் அலகு உற்பத்தி செய்ய ஆகும் தோராயமான செலவே இறுதி நிலைச் செலவாகும். இது படம் **3.3**–ல் விளக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் **3.3**

A = C(x + 1) – C(x)

B = C′(x)

= இறுதி நிலைச் சார்பு

3.1.4 வருவாய்ச் சார்பு (Revenue Function)

x அலகுகள் ரூ. p வீதம் விற்கப்படுகின்றன என்க. மொத்த வருவாய் சார்பானது R(x) = px என வரையறுக்கப்படுகிறது. இங்கு p, x என்பன மிகை எண்கள்.

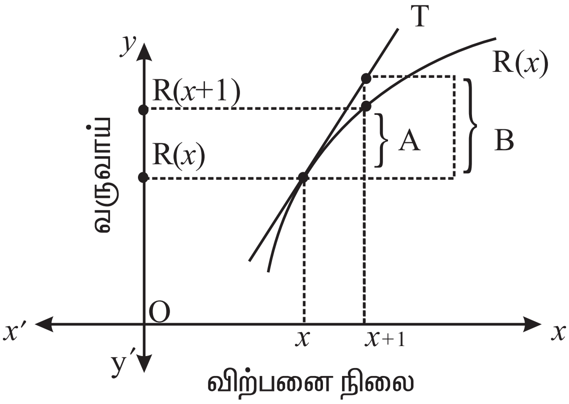
$$\text{சராசரி வருவாய் (AR)} = \frac{\text{மொத்த வருவாய்}}{\text{விற்பனை அளவு}} = \frac{px}{x} = p$$

(அதாவது சராசரி வருவாயும், விலையும் சமமாக உள்ளன.)

இறுதி நிலை வருவாய் (MR) = $\frac{d}{dx}$ (R) = R′(x)

குறிப்பு

உற்பத்தி செய்யப்பட்டு, விற்கப்பட்ட x அலகுகளிலிருந்து கிடைக்கும் மொத்த வருவாய் R(x) என்க. விற்கும் அளவு x அலகுகள் இருக்கும் பொழுது மேலும் ஓர் அலகு உற்பத்தி செய்யப்பட்டு விற்கப்பட்டதால் கிடைக்கும் தோராயமான வருவாயானது, இறுதி நிலை வருவாய் R′(x) ஆகும். இது படம் **3.4**–ல் விளக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் 3.4

$A = R(x + 1) - R(x)$

$B = R'(x) =$ இறுதி நிலைச் சார்பு

3.1.5 இலாபச் சார்பு (Profit Function)

மொத்த வருவாய், மொத்த செலவு இவைகளின் வித்தியாசம் இலாபச் சார்பாகும். அதாவது, இலாபச் சார்பு $P(x) = R(x) - C(x)$ ஆகும்.

3.1.6. நெகிழ்ச்சி (Elasticity)

x –ஐ பொறுத்து, $y = f(x)$ என்ற சார்பின் நெகிழ்ச்சி

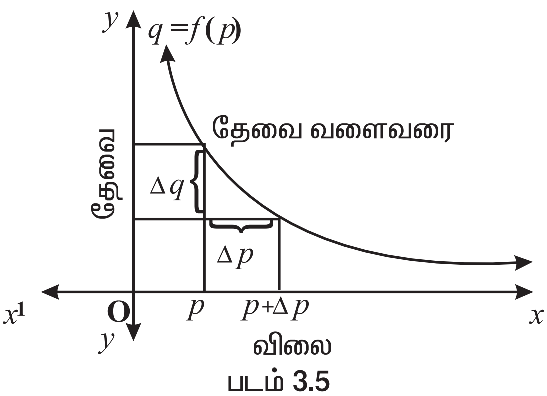
$$\eta = \frac{Ey}{Ex} = \underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}$$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

x ஐ பொறுத்து y–ன் நெகிழ்ச்சியானது, $\Delta x \to 0$ எனும் பொழுது y–ன் ஒப்ப மாறும் வீதம் x–ன் ஒப்ப மாறும் வீதத்திற்கு உள்ள விகிதத்தின் எல்லையே ஆகும். (η ஒரு மிகை எண்).

3.1.7 தேவை நெகிழ்ச்சி (Elasticity of Demand)

$q = f(p)$ என்பது தேவைச் சாா்பு என்க. q என்பது தேவை, p என்பது விலை எனில், தேவை நெகிழ்ச்சி

$$\eta_d = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$$ ஆகும் (படம் 3.5)



படம் 3.5

$$\text{தேவை நெகிழ்ச்சி} = \underset{\Delta p \to 0}{\text{Lt}} \frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$$

தேவை வளைவரையின் சாய்வு குறை எண் மற்றும் நெகிழ்வு ஒரு மிகை ஆகையால் தேவையின் நெகிழ்ச்சியானது

$\eta_d = -\frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$ ஆகும்.

3.1.8. அளிப்பு நெகிழ்ச்சி (Elasticity of Supply)

$x = f(p)$ என்பது அளிப்புச் சார்பு என்க. இங்கு x என்பது தேவை, p என்பது விலையாகும். அளிப்பு நெகிழ்ச்சியானது

$\eta_s = \frac{p}{x}\frac{dx}{dp}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

3.1.9 சமன் நிலை விலை (Equilibrium Price)

தேவையின் அளவும், அளிப்பின்அளவும் சமமாக இருக்கும் நிலையில் உள்ள விலையைச் சமன் நிலை என்று கூறுகிறோம்.

3.1.10 சமன் நிலை அளவு (Equilibrium Quantity)

சமன் நிலை விலையை, தேவை சார்பு அல்லது அளிப்பு சார்பில் பிரதியிட கிடைப்பது சமன் நிலை அளவாகும்.

3.1.11 இறுதி நிலை வருவாய்க்கும் தேவையின் நெகிழ்ச்சிக்கும் உள்ள தொடர்பு

விலை p ஆக இருக்கும் பொழுது q அலகுகள் தேவைப்படுகின்றன என்க. $\therefore p = f(q)$ (f – ஆனது வகையிடத்தக்கதாக இருக்க வேண்டும்)

வருவாயானது $R(q) = qp = q\,f(q)$ $\qquad [p = f(q)]$

q ஐ பொறுத்து $\mathrm{R}(q)$ –வை வகையிட கிடைப்பது இறுதி நிலை வருவாயாகும்.

$$\therefore \mathrm{R}'(q) = q\,f'(q) + f(q)$$

$$= q\frac{dp}{dq} + p$$

$$\mathrm{R}'(q) = p\left(1 + \frac{q}{p}\frac{dp}{dq}\right)$$

$$= p\left[\frac{dp}{dq} = f'(q)\right]$$

$$= p\left[1 + \frac{1}{\frac{p}{q}\frac{dq}{dp}}\right]$$

$$= p\left[1+\left\{\frac{-1}{-\frac{p}{q}\frac{dq}{dp}}\right\}\right]$$

இறுதி நிலை வருவாய் = $R'(q) = p\left[1-\frac{1}{\eta_d}\right]$ $\quad [\eta_d = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}]$

எடுத்துக்காட்டு 1

ஒரு நிறுவனம் x டன்கள் உற்பத்தி செய்யும் பொழுது அதன் மொத்தச் செலவு சார்பு $C(x) = \frac{1}{10}x^3 - 4x^2 + 20x + 5$.

எனில் (i) சராசரி செலவு (ii) சராசரி மாறும் செலவு (iii) சராசரி மாறாச் செலவு (iv) இறுதி நிலைச் செலவு (v) இறுதிநிலைச் சராசரி செலவு என்பனவற்றைக் காண்க.

தீர்வு : $C(x) = \frac{1}{10}x^3 - 4x^2 + 20x + 5$

(i) சராசரி செலவு $= \dfrac{\text{மொத்தச் செலவு}}{\text{உற்பத்தி}}$

$$= \left(\frac{1}{10}x^2 - 4x + 20 + \frac{5}{x}\right)$$

(ii) சராசரி மாறும் செலவு $= \dfrac{\text{மாறும் செலவு}}{\text{உற்பத்தி}}$

$$= \frac{1}{10}x^2 - 4x + 20$$

(iii) சராசரி மாறாச் செலவு $= \dfrac{\text{மாறாச் செலவு}}{\text{உற்பத்தி}} = \dfrac{5}{x}$

(iv) இறுதி நிலைச் செலவு $= \dfrac{d}{dx}\, C(x)$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{10}x^3 - 4x^2 + 20x + 5\right)$$

$$= \left(\frac{3}{10}x^2 - 8x + 20\right)$$

(v) இறுதி நிலை சராசரிச் செலவு $= \dfrac{d}{dx}\,(\mathrm{AC})$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{10}x^2 - 4x + 20 + \frac{5}{x}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{5}x - 4 - \frac{5}{x^2}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 2

x அலகுகள் உற்பத்திக்கான மொத்த செலவு $C = 0.00005x^3 - 0.06x^2 + 10x + 20{,}000$ எனில், 1000 அலகுகள் உற்பத்திக்கான இறுதிநிலைச் செலவைக் காண்க.

தீர்வு :

$C = 0.00005x^3 - 0.06x^2 + 10x + 20{,}000$

இறுதி நிலைச் செலவு $\dfrac{dC}{dx} = (0.00005)\,(3x^2) - (0.06)\,2x + 10$

$= 0.00015\,x^2 - 0.12x + 10$

x = 1000 அலகுகள் எனில்,

$\dfrac{dC}{dx} = (0.00015)(1000)^2 - (0.12)(1000) + 10$

$= 150 - 120 + 10 = 40$

= 1000 அலகுகள் உற்பத்திக்கு இறுதி நிலைச் செலவு ரூ. 40

எடுத்துக்காட்டு 3

$x = 100 - p - p^2$ என்ற சார்பின் $p = 5$ –ல் தேவை நெகிழ்ச்சியைக் காண்க.

தீர்வு :

$x = 100 - p - p^2$

$$\frac{dx}{dp} = -1 - 2p.$$

தேவை நெகிழ்ச்சி

$$\eta_d = -\frac{p}{x}\frac{dx}{dp}$$

$$= -\frac{p(-1-2p)}{100 - p - p^2} = \frac{p + 2p^2}{100 - p - p^2}$$

$p = 5$ எனில், $\eta_d = \dfrac{5 + 50}{100 - 5 - 25} = \dfrac{55}{70} = \dfrac{11}{14}$

எடுத்துக்காட்டு 4

$x = 2p^2 + 8p + 10$ என்ற அளிப்புச் சார்பின் அளிப்பு நெகிழ்ச்சியைக் காண்க.

தீர்வு :

$$x = 2p^2 + 8p + 10 \qquad \Rightarrow \frac{dx}{dp} = 4p + 8$$

அளிப்பு நெகிழ்ச்சி $\eta_s = \dfrac{p}{x}\dfrac{dx}{dp}$

$$= \frac{4p^2 + 8p}{2p^2 + 8p + 10} = \frac{2p^2 + 4p}{p^2 + 4p + 5}$$

எடுத்துக்காட்டு 5

$y = 4x - 8$ என்ற சார்பின் நெகிழ்ச்சியைக் காண்க. மேலும் $x = 6$ ஆக இருக்கும் பொழுது அதன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$y = 4x - 8 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4$$

நெகிழ்ச்சி $\quad \eta = \dfrac{x}{y}\dfrac{dy}{dx}$

$$\Rightarrow \eta = \frac{x}{4x-8}(4) = \frac{x}{x-2}$$

$x = 6$ எனில் $\quad \eta = \dfrac{6}{6-2} = \dfrac{3}{2}$

எடுத்துக்காட்டு 6

$y = \dfrac{1-2x}{2+3x}$ எனில், $\dfrac{Ey}{Ex}$ –க் காண்க. η –ன் மதிப்பை $x = 0$ மேலும் $x = 2$ எனும் பொழுது காண்க.

தீர்வு :

$$y = \frac{1-2x}{2+3x}$$

x ஐ பொறுத்து வகையிட

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2+3x)(-2) - (1-2x)(3)}{(2+3x)^2}$$

$$= \frac{-4 - 6x - 3 + 6x}{(2+3x)^2} = \frac{-7}{(2+3x)^2}$$

$$\eta = \frac{Ey}{Ex} = \frac{x}{y}\ \frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{x(2+3x)}{(1-2x} \times \frac{-7}{(2+3x)^2}$$

$$\eta = \frac{-7x}{(1-2x)\ (2+3x)}$$

$x = 0$ எனில், $\eta = 0$ $\qquad$ $x = 2$ எனில், $\eta = \frac{7}{12}$

எடுத்துக்காட்டு 7

***$xp^n = k$*, என்ற தேவைச் சார்பில் n மற்றும் k மாறிலிகள் எனில், விலையின் தேவை நெகிழ்ச்சியைக் காண்க.**

தீர்வு :

$xp^n = k$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது) $\Rightarrow$ $x = k\,p^{-n}$

$$\frac{dx}{dp} = -nk\ p^{-n-1}$$

தேவை நெகிழ்ச்சி

$$\eta_d = -\frac{p}{x}\ \frac{dx}{dp}$$

$$= -\frac{p}{kp^{-n}}(-nk\ p^{-n-1})$$

$= n,$ ஓர் மாறிலி

எடுத்துக்காட்டு 8

$xy^2 = c$ ($c,$ மாறிலி) எனும் வளைவரையில் தேவை நெகிழ்ச்சி எல்லா புள்ளிகளிலும் 2 என்ற எண்ணாக இருக்கும் என நிறுவுக. இங்கு y என்பது விலையைக் குறிக்கிறது.

தீர்வு :

$xy^2 = \mathrm{c}$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$$x = \frac{c}{y^2} \quad \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{2c}{y^3}$$

தேவை நெகிழ்ச்சி $\eta_d = -\frac{y}{x}\ \frac{dx}{dy} = \frac{-y}{\frac{c}{y^2}}\left(\frac{-2c}{y^3}\right) = 2$

எடுத்துக்காட்டு 9

ஒரு முற்றுரிமையாளரின் தேவைச் சார்பு $x = 100 - 4p$ எனில்,

(i) மொத்த வருவாய், சராசரி வருவாய் மற்றும் இறுதிநிலை வருவாய் ஆகியனவற்றைக் காண்க.

(ii) x –ன் எம்மதிப்பிற்கு இறுதிநிலைவருவாய் பூச்சியத்திற்கு சமமாகும் ?

தீர்வு :

$$x = 100 - 4p \Rightarrow p = \frac{100 - x}{4}$$

மொத்த வருவாய் $R = px$

$$= \left(\frac{100 - x}{4}\right)x = \frac{100x - x^2}{4}$$

சராசரி வருவாய் $= p = \dfrac{100 - x}{4}$

இறுதி நிலை வருவாய் $= \dfrac{d}{dx}(\mathrm{R})$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{100x - x^2}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}[100 - 2x] = \frac{50 - x}{2}$$

(ii) இறுதிநிலை வருவாய் பூச்சியம் எனில்,

$\dfrac{50 - x}{2} = 0 \Rightarrow x = 50$ அலகுகள்

எடுத்துக்காட்டு 10

எந்த ஒரு உற்பத்தி நிலையிலும் AR மற்றும் MR என்பன சராசரி வருவாய் மற்றும் இறுதிநிலை வருவாயைக் குறித்தால், தேவை நெகிழ்ச்சியானது $\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AR - MR}}$ –க்குச் சமம் என நிறுவுக. இதை $p = a + bx$, என்ற தேவை கோடு விதிக்கு சரிபார்க்க.

தீர்வு :

மொத்த வருவாய் $\mathrm{R} = px$

சராசரி வருவாய் $\mathrm{AR} = p$

இறுதி நிலை வருவாய் $\mathrm{MR} = \dfrac{d}{dx}(\mathrm{R}) = \dfrac{d}{dx}(px)$

$$= p + x\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{\mathrm{AR}}{(\mathrm{AR - MR})} = \frac{p}{p - \left(p + x\dfrac{dp}{dx}\right)}$$

இப்பொழுது $= -\dfrac{p}{x}\dfrac{dx}{dp}$

$$\therefore \frac{\mathrm{AR}}{(\mathrm{AR - MR})} = \eta_d$$

= தேவை நெகிழ்ச்சி η_d

$p = a + bx$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

$$\frac{dp}{dx} = b$$

$$R = px = ax + bx^2$$

$$AR = a + bx$$

$$\therefore \frac{AR}{(AR - MR)} = \frac{a+bx}{a+bx-a-2bx} = -\frac{(a+bx)}{bx} \qquad ....(1)$$

$$\eta_d = -\frac{p}{x}\,\frac{dx}{dp}$$

$$= -\frac{(a+bx)}{x}\,\frac{1}{b} = -\frac{(a+bx)}{bx} \qquad ......(2)$$

(AR = விலை)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து $\frac{AR}{(AR - MR)} = \eta_d$ என அறிய முடிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 11

கீழ்வரும் தேவை மற்றும் அளிப்புச் சார்புகளின் சமன்நிலை விலையையும் சமன்நிலை தேவையயும் காண்க. $Q_d = 4-0.06p$ மேலும் $Q_s = 0.6 + 0.11p$.

தீர்வு :

சமன் நிலை விலையில்,

$$Q_d = Q_s$$

$$\Rightarrow 4 - 0.06p = 0.6 + 0.11p$$

$$\Rightarrow 0.17p = 3.4$$

$$\Rightarrow p = \frac{3.4}{0.17}$$

$$p = 20$$

$p = 20$ எனில், $Q_d = 4 - (0.06)(20) = 4 - 1.2 = 2.8$

$\therefore$ சமன்நிலை விலை $= 20$ மற்றும்

சமன்நிலை தேவை $= 2.8$ அலகுகள்

எடுத்துக்காட்டு 12

ஒரு பொருளின் தேவைச் சார்பு $q = \frac{p}{p-5}$ (p > 5), p என்பது ஓர் அலகு பொருளின் விலை என்க. $p = 7$ எனில், தேவை நெகிழ்ச்சியைக் காண்க. விடைக்கு விளக்கம் கூறுக.

தீர்வு :

தேவைச் சார்பு $q = \dfrac{p}{p-5}$

p –ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{dq}{dp} = \frac{(p-5)(1)-p(1)}{(p-5)^2} = \frac{-5}{(p-5)^2}$$

தேவை நெகிழ்ச்சி $\eta_d = -\dfrac{p}{q}\dfrac{dq}{dp} = \dfrac{-p(p-5)}{p}\left\{-\dfrac{5}{(p-5)^2}\right\} = \dfrac{5}{p-5}$

p = 7 எனில் $\eta_d = \dfrac{5}{7-5} = 2.5$

அதாவது $p = 7$ எனில் விலையானது 1% அதிகரித்தால் தேவையின் அளவு தோராயமாக 2.5% குறைகிறது. அவ்வாறே $p = 7$ எனில் விலையானது1% குறைந்தால், தேவையின் அளவு தோராயமாக 2.5% அதிகரிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 13

ஒரு பொருளின் தேவை $q = -60p + 480$, $(0 < p < 7)$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு p என்பது விலையைக் குறைக்கிறது. $p = 6$ ஆக இருக்கும் பொழுது தேவை நெகிழ்ச்சி மற்றும் இறுதி நிலை வருவாய் ஆகியனவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

தேவைச்சார்பு $q = -60p + 480$

p–ஐ பொறுத்து வகையிட, $\dfrac{dq}{dp} = -60$

தேவை நெகிழ்ச்சி $\eta_d = -\dfrac{p}{q}\dfrac{dq}{dp} = \dfrac{-p}{-60p+480}(-60) = -\dfrac{p}{p-8}$

$p = 6$ எனில், $\eta_d = \dfrac{-6}{6-8} = 3$

இறுதி நிலை வருவாய் $= p\left(1-\dfrac{1}{\eta_d}\right) = 6\left(1-\dfrac{1}{3}\right) = 4$

$\therefore$ இறுதி நிலை வருவாய் = ரூ. 4

பயிற்சி 3.1

1) x –டன்கள் உற்பத்தி செய்ய ஒரு நிறுவனத்தின் மொத்த உற்பத்திச் செலவு C(x) =ரூ. $(\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 25x + 8)$ எனில் (i) சராசரி செலவு, (ii) சராசரி மாறும் செலவு (iii) சராசரி மாறாச் செலவு ஆகியவைகளைக் காண்க. மேலும் உற்பத்தி நிலை 10 டன்களாக இருக்கும் பொழுது இவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

2) x –அலகுகள் உற்பத்திக்கான மொத்த செலவு $C(x) = 25 + 3x^2 + \sqrt{x}$ எனில் 100 அலகுகளின் உற்பத்திக்கான இறுதி நிலைச் செலவினைக் காண்க.

3) x - அலகுகள் உற்பத்திக்கான மொத்த செலவு $C(x) = 50 + 5x + 2\sqrt{x}$ எனில், 100 அலகுகள் உற்பத்திக்கான இறுதி நிலைச் செலவு யாது ?

4) x –அலகுகள் உற்பத்திக்கான செலவு $C = \frac{1}{2}x + 26\sqrt{x+4}$ எனில், 96 அலகுகளின் உற்பத்திக்கான இறுதி நிலைச் செலவினைக் காண்க.

5) x – டன்கள் உற்பத்தி செய்யும் பொழுது உற்பத்திக்கான செலவு $C = 10 + 30\sqrt{x}$ எனில் 100 டன்கள் உற்பத்திக்கான இறுதிநிலைச் செலவைக் காண்க. மேலும் ஒரு டன்னுக்கு ரூ.0.40 என இறுதி நிலை செலவு இருக்கும் பொழுது அதன் உற்பத்தியைக் காண்க.

6) x அலகுகள் உற்பத்திக்கான செலவுச் சார்பு $C = \frac{1}{10}x^3 - 4x^2 + 8x + 4$ எனில் (i) சராசரி செலவு (ii) இறுதி நிலைச் செலவு (iii) இறுதி நிலைச் சராசரி செலவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

7) x அலகுகள் உற்பத்திக்கான மொத்த செலவு $C = 50 + 10x + 5x^2$ எனில் $x = 1.3$ என்ற புள்ளியில் சராசரி மற்றும் இறுதிநிலைச் செலவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

8) x அலகுகள் கொண்ட பொருளின் உற்பத்திக்கான மொத்தச் செலவு $C = 0.00004x^3 - 0.002x^2 + 3x + 10{,}000$ எனில் 1000 அலகுகள் உற்பத்திக்கான இறுதிநிலைச் செலவைக் காண்க.

9) $xy = c^2$ எனும் வளைவரையில் தேவை நெகிழ்ச்சி அனைத்து புள்ளிகளிலும் 1 என்ற எண்ணாக இருக்கும் என நிறுவுக. y என்பது விலையைக் குறிக்கிறது (c, மாறிலி)

10) தேவை விதி $q = \frac{20}{p+1}$, $p = 3$ எனில் தேவை நெகிழ்ச்சியைக் காண்க. விடைக்கு விளக்கம் தருக.

11) தேவைச் சார்பு $q = 165 - 3p - 2p^2$ என இருப்பின் விலை $p = 5$ எனில் தேவை நெகிழ்ச்சிசயைக் காண்க. விடைக்கு விளக்கம் தருக.

12) q –ன் எம்மதிப்பிற்கும், தேவைச் சார்பு $p = \frac{100}{q}$ இன் நெகிழ்ச்சியானது ஒன்று என்ற எண்ணாக இருக்கும் என நிறுவுக.

13) கீழ்வரும் தேவைச் சார்புகளின் தேவை நெகிழ்ச்சியை அதன் விலையைப் பொறுத்து காண்க.

(i) $p = \sqrt{a - bx}$, a மற்றும் b என்பன மாறிலிகள் (ii) $x = \frac{8}{p^{3/2}}$

14) தேவை வளைவரை $xp^m = b$, m, b முறையே மாறிலிகள் எனில், விலையின் தேவை நெகிழ்ச்சியைக் காண்க.

15) அளிப்புச் சார்பு $x = 2p^2 + 5$ எனில் அளிப்பு நெகிழ்ச்சியைக் காண்க.

16) ஒரு குறிப்பிட்ட உருப்படிகளின் அளிப்புச் சார்பானது $x = a\sqrt{p-b}$, p என்பது விலை, a, b என்பன மிகை மாறிலிகள் ($p > b$) எனில், அளிப்பு நெகிழ்ச்சி η_s –யைக் காண்க. விலையானது $2b$ ஆக இருக்கும் பொழுது அளிப்பு நெகிழ்ச்சி ஒன்று என்ற எண்ணாகும் என நிறுவுக.

17) தேவைச் சார்பு $p = 550 - 3x - 6x^2$ இங்கு x ஆனது தேவையின் அளவையும் p –ஆனது ஓர் அலகின் விலையையும் குறிக்கிறது. சராசரி வருவாய் மற்றும் இறுதி நிலை வருவாய் இவைகளைக் காண்க.

18) S என்பது ஒரு பொருளின் விற்பனையையும், x அதன் விலையையும் குறிக்கிறது. $S = 20{,}000\, e^{-0.6x}$ எனில்,

(i) மொத்த விற்பனை வருவாய் ($R = xS$)

(ii) இறுதிநிலை வருவாய், இவைகளைக் காண்க.

19) ஒரு பொருளின் தேவை x மற்றும் அதன் விலை p இவைகளை இணைக்கும் சமன்பாடு $x = 30 - 4p - p^2$. தேவை நெகிழ்ச்சி மற்றும் இறுதி நிலை வருவாய் இவைகளைக் காண்க.

20) கீழ்வரும் தேவை மற்றும் அளிப்புச் சார்புகளின் சமன்நிலை விலையையும், சமன்நிலை தேவையையும் காண்க.

$q_d = 4 - 0.05p$, $q_s = 0.8 + 0.11p$

21) வருவாய்ச் சார்பு $R(x) = 100x + \dfrac{x^2}{2}$ –க்கு $x = 10$ இல் இறுதி நிலை வருவாயைக் காண்க.

22) ஒரு பொருளின் தேவை q மற்றும் விலை இவைகளை இணைக்கும் சமன்பாடு $q = 32 - 4p - p^2$ எனில், $p = 3$ –இல் தேவை நெகிழ்ச்சி மற்றும் இறுதி நிலை வருவாய் இவைகளைக் காண்க.

3.2 வகையீடு – மாறுவீதம்

$y = f(x)$ என்ற சார்பு, x மற்றும் y என்ற இரண்டு மாறிகள் வாயிலாக உள்ளது என்க. x–இல் சிறு மாற்றம் Δx எனும் பொழுது, y–ல் சிறு மாற்றம் Δy என்க.

x ஐப் பொறுத்து y–இன் சராசரி மாறு வீதமானது $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. இங்கு $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ மேலும் $\underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{dy}{dx}$

$\dfrac{dy}{dx}$ ஆனது, x ஐப் பொறுத்து y –ல் ஏற்படக் கூடிய உடனடி மாறுவீதம் என வரையறுக்கப்படுகிறது.

3.2.1 ஒரு அளவின் மாறு வீதம்

x மற்றும் y என்ற இரண்டு அளவுகள் $y = f(x)$ என்ற உறவு முறைப்படி இணைக்கப்பட்டுள்ளன என்க. $f'(x_0)$ என்பது x –ஐ பொறுத்து $x = x_0$ –இல் y –இன் மாறு வீதமாகும் என்பதைக் குறிக்கிறது.

3.2.2 தொடர்புள்ள மாறுவீதங்கள்

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேல் t–ன் மாறிகளில் உள்ள உள்ளார்ந்த (implicit) சார்புகளைக் கொண்ட சமன்பாடுகளின் மூலம் கணக்குகளின் தீர்வுகளைக் காண்போம். வழக்கமாக இந்த மாறிகள் நேரத்தின் உறுப்புகளாக வெளிப்படைச் சார்புகளாக வரையறுக்கப்படுவதில்லை. ஆகவே நாம் உள்ளார்ந்த சார்புகளை நேரம் 't' –ஐ பொறுத்து வகையிட்டு நேரம் – மாறு வீதம் இவைகளைத் தொடர்புபடுத்தி தீர்மானிக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 14

$y = \frac{300}{x}$ x –ஐ பொறுத்து, x –ஆனது 10 –லிருந்து 10.5 –க்கு கூடும் பொழுது y –ன் சராசரி மாறுவீதம் காண்க. மேலும் $x = 10$ –இல் y–ன் உடனடி மாறுவீதம் யாது ?

தீர்வு :

(i) x –ஐ பொறுத்து y–ன் சராசரி மாறு வீதமானது $x = x_0$ –இல்

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

இங்கு $f(x) = \frac{300}{x}$, $x = 10$, $\Delta x = 0.5$

$x = 10$–இல் y –இன் சராசரி மாறு வீதம்

$$\frac{f(10.5) - f(10)}{0.5} = \frac{28.57 - 30}{0.5} = \frac{-1.43}{0.5}$$

$= -2.86$ அலகுகள் / x –ன் ஓர் அலகு மாற்றம்

இங்கு குறை குறியானது x கூடும் பொழுது y – ஒவ்வொரு அலகுக்கும் குறைகிறது என்பதை உணர்த்துகிறது.

(ii) y –இன் உடனடி மாற்றமானது $\frac{dy}{dx}$

$$y = \frac{300}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-300}{x^2}$$

$x = 10$ –இல், $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-300}{(10)^2} = -3$

$\Rightarrow$ $x = 10$ -இல் உடனடி மாற்றமானது $-\ 3$ அலகுகள் குறை குறியானது x–இன் மாற்று வீதத்தைப் பொறுத்து, y குறைகிறது என்பதை உணர்த்துகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 15

$xy = 35$ எனும் வளைவரையில் ஒரு புள்ளியானது நகருகிறது. புள்ளி (5, 7) –இல் x ஆயத் தொலைவானது 3 அலகுகள்/வினாடி என்ற வீதத்தில் கூடுகிறது எனில் அந்நிலையில் y ஆயத் தொலைவு மற்றும் வீதத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

$x\,y = 35$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

இங்கு x, y –கள் t –ல் உள்ள சார்புகளாகும்.

't' –ஐ பொறுத்து வகையிட

$$\frac{d}{dt}(xy) = \frac{d}{dt}(35)$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{y}{x}\,\frac{dx}{dt}$$

$x = 5, y = 7$ மற்றும் $\dfrac{dx}{dt} = 3$ எனும் பொழுது,

$\therefore\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{7}{5} \times 3 = -\ 4.2$ அலகுகள் / வினாடி

அதாவது y –ஆயத் தொலைவானது 4.2 அலகுகள்/வினாடி வீதம் மாறுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 16

ஒரு பொருளின் ஓர் அலகு விலையையும், அலகுகளின் விற்பனை எண்ணிக்கை x யையும் தொடர்புபடுத்தும் தேவைச் சார்பு $p = 400 - \dfrac{x}{1000}$, இந்த பொருளின் x அலகுகள் உற்பத்தி செய்ய ஆகும் செலவு $C(x) = 50x + 16{,}000$. உற்பத்தி செய்யப்பட்ட அலகுகள் விற்கப்பட்டன. x – ஆனது வாரத்திற்கு 200 அலகுகள் வீதம் கூடுகின்றன. 10000 எண்ணிக்கைக் கொண்ட அலகுகள் உற்பத்தி செய்யப்பட்டு விற்கப்படும் பொழுது காலம் t –ஐ (வாரங்களில்) பொறுத்து (i) வருவாய் (ii) செலவு (iii) இலாபம், இவற்றில் ஏற்படும் உடனடி மாற்றங்களைக் காண்க.

தீர்வு :

(i) வருவாய் $R = px$

$$= \left(400 - \frac{x}{1000}\right)x$$

$$R = 400x - \frac{x^2}{1000}$$

$$\frac{d}{dt}(R) = \frac{d}{dt}(400x) - \frac{d}{dt}\left(\frac{x^2}{1000}\right)$$

$$\frac{dR}{dt} = \left(400 - \frac{x}{500}\right)\frac{dx}{dt}$$

$x = 10,000$, and $\frac{dx}{dt} = 200$ எனில்

$$\frac{dR}{dt} = \left(400 - \frac{10,000}{500}\right)(200)$$

= ரூ. 76,000 / வாரம்

வருவாய் வாரத்திற்கு ரூ.76,000 வீதம் அதிகரிக்கிறது.

(ii) $C(x) = 50x + 16,000.$

$$\frac{d}{dt}(C) = \frac{d}{dt}(50x) + \frac{d}{dt}(16,000)$$

$$\frac{dC}{dt} = 50\frac{dx}{dt} + 0$$

$$= 50\frac{dx}{dt}$$

$\frac{dx}{dt} = 200$ எனில், $\frac{dC}{dt} = 50 \times 200$

= ரூ. 10,000 / வாரம்

(iii) இலாபம் $P = R - C$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dR}{dt} - \frac{dC}{dt}$$

$$= 76,000 - 10,000$$

= ரூ. 66,000 / வாரம்

(அ–து) இலாபமானது வாரத்திற்கு ரூ.66,000 வீதம் அதிகரிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 17

ஒரு வட்டத்தின் சுற்றளவானது மாறா வீதத்தில் கூடுகிறது. அதன் பரப்பளவு கூடும் வீதமானது அதன் ஆரத்திற்கு நேர் விகிதத்தில் இருக்கும் என நிறுவுக.

தீர்வு :

r அலகு ஆரமுள்ள ஒரு வட்டத்தின் சுற்றளவு P மற்றும் பரப்பளவு A காண்க.

$P = 2\pi r$ மற்றும் $A = \pi r^2$

$$\frac{dP}{dt} = 2\pi\frac{dr}{dt} \qquad \text{........(1)}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt} \qquad \text{........(2)}$$

(1) மற்றும் (2) –ஐ பயன்படுத்த,

$$\frac{dA}{dt} = r\frac{dP}{dt}$$

சுற்றளவு P ஆனது மாறா வீதத்தில் கூடுவதால் $\frac{dP}{dt}$ ஓர் மாறிலி.

$\therefore\ \frac{dA}{dt} \propto r$ (அ–து) A இன் கூடும் வீதமானது அதன் ஆரத்தின் நேர் விகிதத்தைப் பொறுத்துள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 18

ஓர் உலோக உருளையை வெப்பப்படுத்தும் பொழுது, ஆரம் (அதன் வடிவம் மாறாமல்) 0.4 செமீ/நிமிடம் மற்றும் அதன் உயரம் 0.3 செ.மீ/நிமிடம் எனும் வீதத்தில் கூடுகின்றன. எனில் ஆரம் 20 செ.மீ உயரம் 40 செ.மீ என இருக்கும் பொழுது அதன் வளைபரப்பில் ஏற்படும் மாறுவீதம் யாது ?

தீர்வு :

உருளையின் வளைபரப்பு

$A = 2\pi rh.$

't' –ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi\left[r\frac{dh}{dt} + h\frac{dr}{dt}\right]$$

$r = 20, \quad h = 40, \quad \frac{dr}{dt} = 0.4, \quad \frac{dh}{dt} = 0.3$ எனில்

$$\therefore\ \frac{dA}{dt} = 2\pi\,[20 \times 0.30 + 40 \times 0.40]$$

$= 2\pi\ [6 + 16] = 44\pi$ செமீ ^{2} / நிமிடம்

எடுத்துக்காட்டு 19

x –இன் எம்மதிப்புகளுக்கு, $y = x^3 + 21$ எனும் சார்பில் x – அதிகரிக்கும் பொழுது y ஆனது அதை போல் 75 மடங்கு அதிகரிக்கும் ?

தீர்வு :

$y = x^3 + 21$

't' ஐ பொறுத்து வகையிட

$$\frac{dy}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt} + 0$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt}$$

மேலும் $\frac{dy}{dt} = 75\frac{dx}{dt}$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

$$3x^2\frac{dx}{dt} = 75\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = 75$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 5$$

எடுத்துக்காட்டு 20

ஒரு பொருளின் தேவை $y = \frac{12}{x}$, (இங்கு x ஆனது விலை) விலை ரூ. 4 என இருக்கும் பொழுது தேவை மாறு வீதம் யாது ?

தீர்வு :

விலையைப் பொறுத்து, தேவை y –ன் மாறு வீதம் = $\frac{dy}{dx}$.

$y = \frac{12}{x}$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

$\therefore$ x –ஐ பொறுத்து, தேவையின் மாறு வீதமானது $\frac{dy}{dx} = -\frac{12}{x^2}$

விலை ரூ.4 எனில், தேவையின் மாறுவீதம் $\frac{-12}{16} = -\frac{3}{4}$

(அ–து) விலை ரூ. 4–ஆக இருக்கும் பொழுது, விலையில் 1% –ஐ கூட்டும் பொழுது தேவை 0.75% ஆக குறைகிறது.

பயிற்சி 3.2

1) $y = \frac{500}{x}$ –இல் x –ஐ பொறுத்து x ஆனது 20 லிருந்து 20.5–க்கு கூடும் பொழுது, y –ன் சராசரி மாறுவீதம் காண்க. மேலும் $x = 20$ –ல் y –ன் உடனடி மாறு வீதம் யாது ?

2) $xy = 8$ என்ற வளைவரையில் ஒரு புள்ளி நகரும் பொழுது, 2 அலகு/வினாடி எனும் வீதத்தில் y-ஆயத் தொலைவு கூடுகிறது. அந்நிலையில் x–ஆயத் தொலைவு மாறும் வீதத்தை புள்ளி (2, 4)–ல் காண்க.

3) $4x^2 + 2y^2 = 18$ எனும் வளைவரையில் ஒரு புள்ளியானது நகரும் பொழுது 3 அலகுகள்/ வினாடி எனும் வீதத்தில் x – ஆயத் தொலைவு குறைகிறது. அந்நிலையில் y–ஆயத் தொலைவு மாறும் வீதத்தை புள்ளி (2, 1)–இல் காண்க.

4) $y^2 = 12x$ எனும் வளைவரையில ஒரு புள்ளி நகருகின்றது. அப்புள்ளி x –ஆயத் தொலைவானது $5\sqrt{2}$ அலகுகள்/வினாடி எனும் வீதத்தில் மாறுகிறது எனில் (3, 6) –இல் y –ஆயத் தொலைவின் மாறுவீதம், x –ஆயத் தொலைவின் மாறுவீதத்திற்கு சமம் எனக் காட்டுக.

5) வருவாய், செலவு மற்றும் இலாபச் சமன்பாடுகள் முறையே $R = 800x - \frac{x^2}{10}$, $C = 40x + 5{,}000$, $P = R - C$, இங்கு ஒவ்வொரு மாதத்திலும் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட x அலகுகள் விற்கப்படுகின்றன. உற்பத்தி, மாதத்திற்கு 100 அலகுகள் வீதம் கூடுகிறது. 2000 அலகுகள் உற்பத்திக்கு, (i) வருவாய் (ii) செலவு (iii) இலாபம் ஆகியனவற்றின் மாதாந்தி மாறு வீதங்களைக் காண்க.

6) ஒரு பொருளின் ஓர் அலகு விலை p –யையும், அலகுகளின் விற்பனை எண்ணிக்கை x–யையும் தொடர்புபடுத்தும் தேவைச் சார்பு $p = 200 - \frac{x}{1000}$ இந்தப் பொருளை x அலகுகள் உற்பத்தி செய்ய ஆகும் செலவு $C = 40x + 12{,}000$. உற்பத்தி செய்யப்பட்ட அலகுகள் விற்கப்பட்டன. x –ஆனது வாரத்திற்கு 300 அலகுகள் வீதம் கூடுகின்றது. 20000 எண்ணிக்கை கொண்ட அலகுகள் உற்பத்தி செய்யப்பட்டு விற்கப்படும் பொழுது காலம் 't' ஐ (வாரங்களில்) பொறுத்து உடனடி மாற்றத்தை (i) வருவாய் (ii) செலவு (iii) இலாபம் ஆகியனவற்றைக் காண்க.

7) வகையிடுதலை மாறுவீத அளவாகப் பயன்படுத்தி கீழ்வரும் கூற்றை நிறுவுக. ''ஒரு வட்டத்தின் பரப்பளவு சீராக கூடும் பொழுது அதன் சுற்றளவில் கூடும் மாற்றமானது வட்டத்தின் ஆரத்திற்கு எதிர் விகிதத்தில் இருக்கும்.''

8) ஒரு வட்ட வடிவத் தட்டின் ஆரமானது 0.2 செ.மீ/விநாடி என்ற வீதத்தில் கூடுகிறது. அதன் ஆரமானது 25 செ.மீ இருக்கும் பொழுது பரப்பளவில் ஏற்படக் கூடிய மாறு வீதம் காண்க.

9) ஒரு உலோக உருளையை வெப்பப்படுத்தும் பொழுது (அதன் வடிவம் மாறாமல்) அதன் ஆரம் 0.2 செ.மீ/ நிமிடம், உயரம் 0.15 செ.மீ/நிமிடம் எனும் வீதத்தில் கூடுகின்றன எனில், ஆரம் 10 செ.மீ, உயரம் 25 செ.மீ ஆக இருக்கும் பொழுது, அதன் கனஅளவில் ஏற்படும் மாறு வீதத்தை கணக்கிடுக.

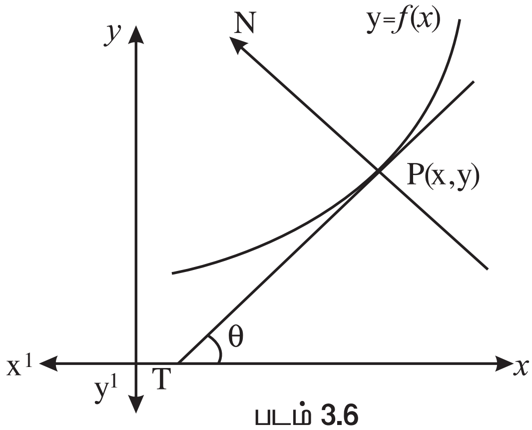
10) x –இன் எம்மதிப்புகளுக்கு, $x^3 - 5x^2 + 5x + 8$ இன் கூடும் வீதமானது x இன் கூடும் வீதத்தைப் போல் இரு மடங்காகும் ?

3.3 வகையிடுதலின் வாயிலாக சரிவை (சாய்வை) அளவிடுதல்

3.3.1 தொடுகோட்டின் சாய்வு

$\frac{dy}{dx}$ ஆனது, $y = f(x)$ என்ற வளைவரையில் $P(x, y)$ –இல் வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் சாய்வு அல்லது சரிவு என்று வடிவ கணித விளக்கத்தின் மூலம் அறியலாம். x அச்சின் மிகை திசையில் தொடுகோட்டிற்கும், x –அச்சுக்கும் இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில், தொடுகோட்டின் சாய்வானது (படம் 3.6).

$P(x, y)$ –இல் $m = \tan\theta = \frac{dy}{dx}$ ஆகும்.



படம் 3.6

குறிப்பு

(i) வளைவரையின் தொடுகோடானது x–அச்சுக்கு இணையாக இருந்தால் $\theta = 0$ ஆகும். அதாவது $\tan\theta = 0$ $\therefore$ அந்த புள்ளியில் $\frac{dy}{dx} = 0$ ஆகும்.

(ii) வளைவரையின் தொடுகோடானது y–அச்சுக்கு இணையாக இருந்தால் $\theta = 90^o$ ஆகும் அதாவது $\tan\theta = \infty$.

$\therefore$ அந்தப் புள்ளியில் $\frac{dy}{dx} = \infty$ அல்லது $\frac{dx}{dy} = 0$ ஆகும்.

3.3.2 தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

பகுமுறை வடிவ கணிதத்தின் படி $y = f(x)$ என்ற வளைவரைக்கு $P(x_1, y_1)$ –இல் வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் சமன்பாடானது

$y - y_1 = \frac{dy}{dx} = (x - x_1)$, இங்கு $\frac{dy}{dx}$ என்பது

P–ல் வரையப்பட்ட தொடுகோடு கோட்டின் சாய்வாகும்.

(அ–து) $y - y_1 = m(x - x_1)$ இங்கு $m = \frac{dy}{dx}$

P -ஆனது தொடும்புள்ளி எனப்படும்.

குறிப்பு :

$y = f(x)$ என்ற வளைவரைக்கு இரு தொடுகோடுகள்

(i) இணையாக இருக்குமானால் அதன் சாய்வுகள் சமமாகும்.

(ii) ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருந்தால் அவற்றின் சாய்வுகளின் பெருக்கல் பலன் -1 ஆக இருக்கும்.

3.3.3 செங்கோட்டின் சமன்பாடு

தொடும்புள்ளி $P(x, y)$ –லிருந்து தொடுகோட்டிற்கு செங்குத்தாக வரையப்பட்ட கோடு செங்கோடாகும்.

$\therefore$ செங்கோட்டின் சமன்பாடு (x_1, y_1) –இல்

$$y - y_1 = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(x - x_1), \quad \text{இங்கு } \frac{dy}{dx} \neq 0$$

(அ–து) $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$ இங்கு m ஆனது,

புள்ளி (x_1, y_1) –ல் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் குறிக்கும்

எடுத்துக்காட்டு 21

$y = \frac{x^2 - 12}{x - 4}$ என்ற வளைவரைக்கு (0, 3) –இல் சாய்வைக் காண்க. மேலும் எந்த புள்ளியில் தொடுகோடானது x –அச்சுக்கு இணையாக இருக்கும் எனக் காண்க.

தீர்வு :

$$y = \frac{x^2 - 12}{x - 4}$$

x –ஐ பொறுத்து வகையிட

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-4)(2x) - (x^2 - 12)(1)}{(x-4)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 8x + 12}{(x-4)^2}$$

$\therefore$ (0, 3) –இல் வளைவரையின் சாய்வு $= \frac{dy}{dx}$ at (0, 3) –இல் $= \frac{3}{4}$

தொடுகோடு x–அச்சுக்கு இணையாக உள்ளது.

$\therefore \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 8x + 12 = 0$

$\Rightarrow \quad (x - 2)(x - 6) = 0 \qquad \therefore x = 2, 6$

$x = 2$ எனில் $y = 4$ மேலும் $x = 6$ எனில் $y = 12$

$\therefore$ (2, 4), (6, 12) எனும் புள்ளிகளிலிருந்து வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள் x –அச்சுக்கு இணையாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 22

$y = lx^2 + 3x + m$ என்ற வளைவரையானது (0, 1) என்ற புள்ளி வழியாக செல்கிறது மேலும் $x = 0.75$ –இல் அதன் தொடுகோடானது x –அச்சுக்கு இணையாக உள்ளது எனில் l, m இன் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$y = l x^2 + 3x + m$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

x –ஐ பொறுத்து வகையிட

$$\frac{dy}{dx} = 2lx + 3.$$

$$x = 0.75 \text{ –இல் } \frac{dy}{dx} = 2l\,(0.75) + 3$$
$$= 1.5l + 3.$$

$x = 0.75$ இல் தொடுகோடு x –அச்சுக்கு இணையாக உள்ளது.

$$x = 0.75 \text{ –இல் } \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 1.5l + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad l = -\frac{3}{1.5} = -2.$$

வளைவரையானது (0, 1)–ன் வழியாக செல்லுவதால், கிடைப்பது

$$1 = l(0)^2 + 3(0) + m \Rightarrow m = 1.$$

$l = -2$ and $m = 1$.

எடுத்துக்காட்டு 23

செலவுச் சார்பு $y = 2x\left(\frac{x+4}{x+3}\right) + 3$, க்கு இறுதி நிலைச் செலவானது, உற்பத்தி x அதிகரிக்கும் பொழுது தொடர்ச்சியாக குறைகிறது என நிறுவுக.

தீர்வு :

$y = 2x\left(\frac{x+4}{x+3}\right) + 3$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$$y = \frac{2x^2 + 8x}{x+3} + 3 \qquad \text{........(1)}$$

இறுதி நிலைச் செலவு $\frac{dy}{dx}$

$\therefore$ x –ஐ பொறுத்து, (1) –ஐ வகையிட

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+3)(4x+8) - (2x^2+8x)(1)}{(x+3)^2} + 0$$

$$= \frac{2(x^2+6x+12)}{(x+3)^2} = \frac{2(x^2+6x+9+3)}{(x+3)^2}$$

$$= 2\left(\frac{(x+3)^2+3}{(x+3)^2}\right) = 2\left(1+\frac{3}{(x+3)^2}\right)$$

இதிலிருந்து உற்பத்தி x அதிகரிக்கும் பொழுது இறுதி நிலைச் செலவு $\frac{dy}{dx}$ ஆனது குறைகிறது என அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 24

செலவுச் சார்பு $C = 100 + x + 2x^2$ –க்கு, இங்கு x என்பது உற்பத்தியைக் குறித்தால், AC க்கான வளைவரையின் சாய்வு = $\frac{1}{x}$ (MC-AC) என நிறுவுக.

(MC இறுதிநிலைச் சார்பு, AC சராசரிச் செலவு)

தீர்வு :

செலவுச் சார்பு C $= 100 + x + 2x^2$

சராசரி செலவு (AC) $= \frac{100 + x + 2x^2}{x}$

$$= \frac{100}{x} + 1 + 2x$$

AC–ன் சாய்வு $= \frac{d}{dx}(\text{AC})$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{100}{x} + 1 + 2x\right) = -\frac{100}{x^2} + 2 \qquad ......(1)$$

இறுதிநிலைச் செலவு MC $= \frac{d}{dx}(\text{C})$

$$= \frac{d}{dx}(100 + x + 2x^2) = 1 + 4x$$

$$\text{MC} - \text{AC} = (1+4x) - \left(\frac{100}{x} + 1 + 2x\right)$$

$$= -\frac{100}{x} + 2x$$

$$\frac{1}{x}(\text{MC} - \text{AC}) = \frac{1}{x}\left(-\frac{100}{x} + 2x\right)$$

$$= -\frac{100}{x^2} + 2 \qquad ....(2)$$

(1) மற்றும் (2) களிலிருந்து

$$\text{AC–ன் சாய்வு} = \frac{1}{x}\ (\text{MC} - \text{AC})$$

எடுத்துக்காட்டு 25

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ = 1 என்ற நீள்வட்டத்திற்கு புள்ளி (acosθ, bsinθ) இல் தொடுகோடு, செங்கோடு இவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

x–ஐ பொறுத்து வகையிட

$$\frac{1}{a^2}(2x)+\frac{1}{b^2}2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

$(a\cos\theta, b\sin\theta)$ இல் $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b\cos\theta}{a\sin\theta}=m.$

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு,

$$y-y_1=m\,(x-x_1)$$

$$\Rightarrow\quad y-b\sin\theta=-\frac{b\cos\theta}{a\sin\theta}(x-a\cos\theta)$$

$$\Rightarrow\quad ay\sin\theta-ab\sin^2\theta=-bx\cos\theta+ab\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow\quad bx\cos\theta+ay\sin\theta=ab(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=ab$$

இருபுறமும் 'ab' ஆல் வகுக்க கிடைப்பது,

$$\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=1$$

$\therefore$ தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $\dfrac{x}{a}\cos\theta+\dfrac{y}{b}\sin\theta=1$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y-y_1=-\frac{1}{m}(x-x_1)$$

$$\Rightarrow\quad y-b\sin\theta=-\frac{a\sin\theta}{b\cos\theta}(x-a\cos\theta)$$

$$\Rightarrow\quad by\cos\theta-b^2\sin\theta\cos\theta=ax\sin\theta-a^2\sin\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow\quad ax\sin\theta+by\cos\theta=\sin\theta\cos\theta(a^2-b^2)$$

இருபுறமும் $\sin\theta\cos\theta$ $(\sin\theta\cos\theta\neq 0)$ ஆல் வகுக்க கிடைப்பது,

$$\frac{ax}{\cos\theta}-\frac{by}{\sin\theta}=a^2-b^2$$

$\therefore$ செங்கோட்டின் சமன்பாடு $\dfrac{ax}{\cos\theta}-\dfrac{by}{\sin\theta}=a^2-b^2$

எடுத்துக்காட்டு 26

தேவைச் சார்பு $y = 10 - 3x^2$ க்கு(1, 7) இல் தொடுகோடு, செங்கோட்டின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு :

தேவை வளைவரை $y = 10 - 3x^2$

x –ஐ பொறுத்து வகையிட

$\frac{dy}{dx} = -6x$ புள்ளி (1, 7) இல் $\frac{dy}{dx} = -6 = m.$

தொடுகோட்டின் சமன்பாடானது

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$\Rightarrow \quad y - 7 = -6\,(x - 1)$$

$$\Rightarrow \quad 6x + y - 13 = 0$$

செங்கோட்டின் சமன்பாடானது

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}\,(x - x_1)$$

$$\Rightarrow \quad y - 7 = -\frac{1}{-6}\,(x - 1)$$

$$y - 7 = \frac{1}{6}\,(x - 1)$$

$$6y - 42 = x - 1$$

$$\Rightarrow \quad x - 6y + 41 = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 27

$y = (x - 1)\,(x - 2)$ என்ற வளைவரையின் எப்புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோடு x –அச்சுடன் 135^{o} கோணத்தை ஏற்படுத்தும் ?

தீர்வு :

$y = (x - 1)\,(x - 2)$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

x –ஐ பொறுத்து வகையிட

$$\frac{dy}{dx} = (x - 1)\,(1) + (x - 2)\,(1)$$

$$= 2x - 3 \qquad \text{............ (1)}$$

தொடுகோடானது x –அச்சுடன் 135^{o} –யை ஏற்படுத்துகிறது.

$$m = \frac{dy}{dx} = \tan\theta \qquad \tan 135^o = \tan(180^o - 45^o)$$
$$= \tan 135^o \qquad = -\tan 45^o$$
$$= -1 \quad ....(2) \qquad = -1$$

(1) மற்றும் **(2)** ஐ சமப்படுத்த கிடைப்பது

$2x - 3 = -1$ அல்லது $2x = 2 \quad \Rightarrow \; x = 1$

$x = 1$ எனில், $y = (1 - 1)\,(1 - 2) = 0 \quad \therefore$ புள்ளி $(1, 0)$ ஆகும்.

பயிற்சி 3.3

1) $y = \frac{1}{3}(x^2 + 10x - 15)$ என்ற வளைவரையின் தொடுகோட்டின் சாய்வை **(0, 5)** என்ற புள்ளியில் காண்க. வளைவரையில் எந்த புள்ளியில் தொடுகோடு வரைந்தால், அந்த தொடுகோட்டின் சாய்வு $\frac{8}{5}$ ஆக இருக்கும் ?

2) $y = ax^2 - 6x + b$ எனும் வளைவரையானது **(0, 2)** என்ற புள்ளி வழியாக செல்கிறது. மேலும் $x = 1.5$ இல் அதன் தொடுகோடானது x –அச்சுக்கு இணையாக உள்ளது எனில், a மற்றும் b –ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

3) செலவுச் சார்பு $y = 3x\left(\frac{x+7}{x+5}\right) + 5$ –க்கு உற்பத்தி x அதிகரிக்கும் பொழுது அதன் இறுதிநிலைச் செலவு தொடர்ச்சியாக வீழ்ச்சி அடைகிறது என நிறுவுக.

4) கீழ்காணும் வளைவரைகளுக்கு தொடுகோடு மற்றும் செங்கோட்டின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

   (i) $y^2 = 4x$ க்கு புள்ளி $(1, 2)$ இல்   (ii) $y = \sin 2x$ க்கு $x = \frac{\pi}{6}$ இல்

   (iii) $x^2 + y^2 = 13$ க்கு புள்ளி $(-3, -2)$ இல்   (iv) $xy = 9$ க்கு புள்ளி $x = 4$ இல்

   (v) $y = x^2 \log x$ க்கு புள்ளி $x = e$ இல்   (vi) $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ க்கு $\theta = \frac{\pi}{4}$ இல்

5) $y = x^2 + x + 2$ க்கு $x = 6$ எனும் புள்ளியில் தொடுகோடு மற்றும் செங்கோடு இவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

6) தேவைச் சார்பு $y = 36 - x^2$ க்கு $y = 11$ எனும் புள்ளியில் தொடுகோடு மற்றும் செங்கோட்டின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

7) $3y = x^3$ எனும் வளைவரையின் மீது எந்த புள்ளிகளில் தொடுகோடு வரைந்தால் அது x –அச்சுடன் 45^o கோணத்தை ஏற்படுத்தும் ?

8) $y = b\, e^{-x/a}$ என்ற வளைவரை y –அச்சை வெட்டும் புள்ளியிடத்து $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ எனும் கோட்டை தொடுகிறது என நிறுவுக.

9) $y(x - 2)\,(x - 3) - x + 7 = 0$ எனும் வளைவரைக்கு, x –அச்சை வெட்டும் புள்ளியிடத்து தொடுகோடு, செங்கோட்டின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

10) $y = x^2 - 3x + 1$ மற்றும் $x(y + 3) = 4$ எனும் வளைவரைகள் $(2, -1)$ என்ற புள்ளியில் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்கின்றன என்று நிறுவுக.

11) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதி பரவளையத்திற்கு தொடுகோடு மற்றும் செங்கோட்டின் சமன்பாடுகளை $(a \sec\theta, b \tan\theta)$ என்ற புள்ளியில் காண்க.

12) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ எனும் வட்டத்திற்கு எப்புள்ளியில் தொடுகோடு அமைந்தால் அது (i) x–அச்சுக்கு (ii) y–அச்சுக்கு இணையாக இருக்கும் ?

பயிற்சி 3.4

ஏற்புடைய விடையைத் தெரிவு செய்க.

1) $C = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 8$ எனும் சார்பின் சராசரி மாறாச் செலவானது

a) $\dfrac{2}{x}$ b) $\dfrac{4}{x}$ c) $\dfrac{-3}{x}$ d) $\dfrac{8}{x}$

2) ஒரு நிறுவனம் ஒரு பொருளின் அளவில் 60 மற்றும் 40 அலகுகள் தயார் செய்ய ஆகும் செலவு முறையே ரூ.1400 மற்றும் ரூ. 1200 எனில் ஒவ்வொரு அலகுக்கும் மாறும் செலவானது

a) ரூ. 100 b) ரூ. 2600 c) ரூ. 10 d) ரூ. 5

3) ஒரு பொருளின் அளவில் 20 அலகுகள் உற்பத்தி செய்ய ஆகும் செலவு ரூ. 2500 மற்றும் 50 அலகுகள் உற்பத்தி செய்ய ஆகும் செலவு ரூ. 3400 எனில் அதன் செலவுச் சார்பானது

a) $y = 30x + 1900$ b) $y = 20x + 5900$

c) $y = 50x + 3400$ d) $y = 10x + 900$

4) மாறும் செலவு ஓர் அலகுக்கு ரூ. 40, மாறாச் செலவு ரூ. 900 மற்றும் ஓர் அலகு விற்பனை விலை ரூ. 70 எனில் இலாபச் சார்பானது

a) $P = 30x - 900$ b) $P = 15x - 70$

c) $P = 40x - 900$ d) $P = 70x + 3600$

5) செலவுச் சார்பு $c = \dfrac{1}{10}e^{2x}$ இன் இறுதி நிலைச் செலவானது

a) $\dfrac{1}{10}$ b) $\dfrac{1}{5}e^{2x}$ c) $\dfrac{1}{10}e^{2x}$ d) $\dfrac{1}{10}e^{x}$

6) தேவைச் சார்பு $p = -x + 10$; $(0 \le x \le 10)$ இங்கு p என்பது ஓர் அலகு விற்பனை விலை. அந்த பொருளின் தேவைப்படும் அலகுகளின் எண்ணிக்கை x என்க. $x = 3$ அலகுகள் எனில், அதன் இறுதி நிலை வருவாயானது

a) ரூ. 5 b) ரூ. 10 c) ரூ. 4 d) ரூ. 30

7) ஒரு பொருளின் தேவைச் சார்பு $q = -3p + 15$ $(0 < p < 5)$ இங்கு p என்பது ஓர் அலகு விற்பனை விலையைக் குறிக்கிறது எனில் தேவை நெகிழ்ச்சியானது

a) $\dfrac{9p^2+15}{p}$ b) $\dfrac{9p-45}{p}$ c) $\dfrac{15p-9}{p}$ d) $\dfrac{p}{-p+5}$

8) $y = 3x + 2$ என்ற சார்புக்கு x–ஆனது 1.5 லிருந்து 1.6க்கு அதிகரிக்கும் போது y–ன் சராசரி மாறு வீதமானது

a) 1 b) 0.5 c) 0.6 d) 3

9) $y = 2x^2 + 3x$ என்ற சார்பில் $x = 4$ எனில், y –ன் உடனடி மாறு வீதமானது

a) 16 b) 19 c) 30 d) 4

10) x –ஐ பொறுத்து y–இன் மாறு வீதம் 6 ஆகும். x –ஆனது 4 அலகுகள்/வினாடி என்ற வீதத்தில் மாறுகிறது எனில் y ஆனது 1 வினாடிக்கு மாறும் வீதமானது

a) 24 b) 10 c) 2 d) 22

11) சட்டை தயாரிக்கும் ஒரு நிறுவனத்தின் வாராந்திர இலாபம் (ரூபாய்களில்) P ஆனது, சட்டை வாரத்தில் தயாரிக்கும் x சட்டைகளைப் பொறுத்தது. $P = 2000x - 0.03x^2 - 1000$ என்ற அடிப்படையில் இலாபமானது கணக்கிடப்படுகிறது. உற்பத்தியின் அளவு x ஆனது ஒரு வாரத்திற்கு 1000 சட்டைகள் எனில், இலாபத்தில் ஏற்படக்கூடிய மாற்றத்தின் மாறும் வீதமானது.

a) ரூ. 140 b) ரூ. 2000 c) ரூ.1500 d) ரூ. 1940

12) செவ்வக வடிவ நீச்சல் குளத்தின் அடிபாகமானது 25மீ × 40மீ அளவு கொண்டுள்ளது. தண்ணீரானது 500 மீ ^{3}/நிமிடம் என்ற வீதத்தில் குளத்தில் ஊற்றப்படுகிறது எனில் குளத்தில் எந்த அளவுக்கு தண்ணீரின் மட்டம் உயருகிறது ?

a) 0.5மீ/நிமிடம் b) 0.2மீ/நிமிடம் c) 0.05மீ/நிமிடம் d) 0.1மீ/நிமிடம்

13) $y = x^3$ என்ற வளைவரைக்கு (2, 8) எனும் புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சாய்வானது

a) 3 b)12 c) 6 d) 8

14) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ என்ற வளைவரைக்கு (9, 4) –இல் செங்கோட்டின் சாய்வு

a) $\dfrac{2}{3}$ b) $-\dfrac{2}{3}$ c) $\dfrac{3}{2}$ d) $-\dfrac{3}{2}$

15) $y = 1 + ax - x^2$ என்ற வளைவரையில் $(1, -2)$ என்ற புள்ளியில் வரைந்த தொடுகோடானது x–அச்சுக்கு இணை எனில் 'a' –ன் மதிப்பானது

a) –2 b) 2 c) 1 d) –1

16) $y = \cos t$ மேலும் $x = \sin t$ எனும் வளைவரைக்கு $t = \frac{\pi}{4}$ யிடத்து தொடுகோட்டின் சாய்வானது

a) 1 b) 0 c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ d) – 1

17) $y^2 = x$ என்ற வளைவரையின் தொடுகோடு x – அச்சுடன் $\frac{\pi}{4}$ கோணத்தை உருவாக்கும் புள்ளியானது

a) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ b) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ c) $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ d) $(1, -1)$

18) $y = 2x^2 - x + 1$ என்ற வளைவரைக்கு $(1,2)$ என்ற புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடுகோடு, எந்த கோட்டிற்கு இணையாக இருக்கும்.

a) $y = 3x$ b) $y = 2x + 4$ c) $2x + y + 7 = 0$ d) $y = 5x - 7$

19) $y = x^2 - \log x$ என்ற வளைவரைக்கு $x = 2$ ல் தொடுகோட்டின் சாய்வு

a) $\frac{7}{2}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $-\frac{7}{2}$ d) $-\frac{2}{7}$

20) $x = y^2 - 6y$ என்ற வளைவரை y –அச்சை கடக்கும் இடத்தில் அதன் சாய்வானது

a) 5 b) – 5 c) $\frac{1}{6}$ d) $-\frac{1}{16}$

வகையீட்டின் பயன்பாடுகள் – II 4

இலாபத்தை பெரும அளவில் அதிகரிப்பது (Profit maximisation) சரக்கு நிலை கட்டுபாடு (Inventory control) மற்றும் மிகு ஆதாய கோருதல் அளவு (Economic order quantity) ஆகியனவற்றினை பெரும மற்றும் சிறும கருத்துருவின் அடிப்படையில் காண்போம்.

பகுதிவகையிடலையும், அதனைக் கணக்கிடும் முறையினையும் காண்போம். உற்பத்திச் சார்பு, தொழிலாளர் மற்றும் மூலதனத்தின் இறுதி நிலை உற்பத்திகள் மேலும் தேவையின் பகுதி நெகிழ்ச்சி ஆகியனவற்றை பகுதி வகையிடல் மூலம் அறிவோம்.

4.1 பெருமம் மற்றும் சிறுமம் (Maximum and Minimum)

4.1.1 கூடும் மற்றும் குறையும் சார்புகள்

இடைவெளி $a \le x \le b$ இல் x ன் மதிப்பு அதிகரிக்கும் பொழுது $y = f(x)$ என்ற சார்பின் மதிப்பு அதிகரித்தால் சார்பு $f(x)$ ஆனது $[a, b]$ இல் ஒரு கூடும் சார்பு எனப்படும்.

(அ–து) $a \le x_1 < x_2 \le b \;\Rightarrow\; f(x_1) \le f(x_2)$ எனில்

$f(x)$ ஆனது ஒரு கூடும் சார்பாகும்.

இடைவெளி $a \le x \le b$ –இல் x –ன் மதிப்பு அதிகரிக்கும் பொழுது $y = f(x)$ என்ற சார்பின் மதிப்பு குறையுமானால் சார்பு $f(x)$ ஆனது $[a, b]$ –இல் ஒரு குறையும் சார்பு எனப்படும்.

(அ–து) $a \le x_1 < x_2 \le b \;\Rightarrow\; f(x_1) \ge f(x_2)$ எனில் $f(x)$ ஆனது ஒரு குறையும் சார்பாகும்.

4.1.2 வகைக்கெழுவின் குறி

$[a, b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் f ஆனது ஒரு கூடும் சார்பு என்க. $[a, b]$ –இல் எந்த இரு மெய்யெண்கள் x_1, x_2 களுக்கும் $x_1 < x_2$ எனில் $f(x_1) \le f(x_2)$ ஆகும்.

(அ–து) $f(x_1) \le f(x_2),\ x_2 - x_1 > 0$

$$\therefore \qquad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \ge 0$$

எனவே $\displaystyle \mathop{\mathrm{Lt}}_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \ge 0,$ (எல்லை உண்டு எனில்)

$\Rightarrow \quad f'(x) \ge 0 \text{ for all } x \in [a,b]$ –இல் உள்ள அனைத்து x –களுக்கும்.

இதே போல், f ஆனது $[a, b]$ –ல் குறையுமானால் $f'(x) \le 0$ ஆக இருக்கும் (வகைபடுத்த முடியுமானால்). f ஆனது $[a, b]$ –ல் தொடர்ச்சியுடையது என்றால் இதன் மறுதலையும் உண்மையாகும்.

குறிப்பு

$[a, b]$ –ல் சார்பு f தொடர்ச்சியாக இருந்து (a, b) –ல் வகையீடு காணதக்கதாயின்,

(i) திறந்த இடைவெளி (a, b) –ல் உள்ள ஒவ்வொரு x –க்கும் $f'(x) > 0$ ஆக இருந்தால், சார்பு f ஆனது $[a, b]$ –இல் கண்டிப்பாகக் கூடும் சார்பாகும்.

(ii) $[a, b]$ –இல் உள்ள அனைத்து x–க்கும் $f'(x) < 0$ ஆக இருந்தால் சார்பு f ஆனது $[a, b]$ –இல் கண்டிப்பாகக் குறையும் சார்பாகும்.

(iii) $[a, b]$ –இல் உள்ள ஒவ்வொரு x–க்கும் $f'(x) = 0$ ஆக இருந்தால் $[a, b]$ –இல் சார்பு f, ஒரு மாறிலி ஆகும்.

(iv) $[a, b]$ –இல் உள்ள ஒவ்வொரு x–க்கும் $f'(x) \geq 0$ ஆக இருக்கும் பொழுது சார்பு f, $[a, b]$, –இல் கூடும் சார்பாகும்.

(v) $[a, b]$ –இல் உள்ள ஒவ்வொரு x–க்கும் $f'(x) \leq 0$ ஆக இருக்கும் பொழுது சார்பு f, $[a, b]$ –இல் குறையும் சார்பாகும்.

ஒரு சார்பு கூடும் சார்பா அல்லது குறையும் சார்பா என அறிய மேற்கொண்ட முடிவுகளைப் பயன்படுத்தலாம்.

4.1.3 சார்பின் தேக்க நிலை மதிப்பு

$[a, b]$ என்ற இடைவெளியில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி x–இல் $y = f(x)$ என்ற சார்பு, கூடும் சார்பாகவோ அல்லது குறையும் சார்பாகவோ இல்லாமல் இருக்கலாம். அந்த நிலையில் $y = f(x)$ – யை அந்த புள்ளி x–இல் தேக்க நிலையைப் பெறுகிறது எனலாம். தேக்க நிலைப் புள்ளியில் $f'(x) = 0$ வாகவும் மற்றும் தொடுகோடானது x–அச்சுக்கு இணையாகவும் இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1

$y = x - \frac{1}{x}$ எனில், x –ன் எல்லா மெய் எண் மதிப்புகளுக்கும் $(x \neq 0)$ y ஆனது ஒரு கண்டிப்பாகக் கூடும் சார்பாகும் என நிறுவுக.

தீர்வு :

$y = x - \frac{1}{x}$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

x ஐ பொறுத்து வகையிட

$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$, x இன் எல்லா மெய் எண் மதிப்புகளுக்கும் $(x \neq 0)$

$\therefore$ y ஒரு கண்டிப்பாக கூடும் சார்பாக அமைகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2

$y = 1 + \frac{1}{x}$ எனில் x ன் எல்லா மெய் எண் மதிப்புகளுக்கும் $(x \neq 0)$ y - ஆனது ஒரு கண்டிப்பாக குறையும் சார்பாகும் என நிறுவுக.

தீர்வு :

$y = 1 + \dfrac{1}{x}$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$\dfrac{dy}{dx} = 0 - \dfrac{1}{x^2} < 0$ x, இன் எல்லா மெய் எண் மதிப்புகளுக்கும் $(x \neq 0)$

$\therefore$ y ஒரு கண்டிப்பாக குறையும் சார்பாக அமைகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3

எந்தெந்த இடைவெளிகளில் $2x^3 - 9x^2 + 12x + 4$ எனும் சார்பு கண்டிப்பாகக் கூடும் சார்பாகவும் மற்றும் கண்டிப்பாகக் குறையும் சார்பாகவும் இருக்கும் எனக் காண்க.

தீர்வு :

$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 4$ என்க

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 6x^2 - 18x + 12 \\ &= 6\,(x^2 - 3x + 2) \\ &= 6\,(x - 2)\,(x - 1) \end{aligned}$$

$x < 1$ அல்லது $x > 2$ எனில் $\dfrac{dy}{dx} > 0$

x ஆனது $(1, 2)$ என்ற இடைவெளிக்கு வெளியில் உள்ளது.

மேலும் $1 < x < 2$ எனும் பொழுது $\dfrac{dy}{dx} < 0$

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பு $[1, 2]$ இடைவெளிக்கு வெளியே கண்டிப்பாகக் கூடும் சார்பாகவும், $(1, 2)$ என்ற இடைவெளியில் கண்டிப்பாகக் குறையும் சார்பாகவும் உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 4

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ எனும் சார்புக்கு தேக்க நிலைப் புள்ளிகளையும் தேக்க நிலை மதிப்புகளையும் காண்க.

தீர்வு :

$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ என்க

$\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 9$

தேக்க நிலைப் புள்ளியில், $\dfrac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Rightarrow (x + 1)\,(x - 3) = 0$

$x = -1$ மற்றும் $x = 3$ களில் தேக்க நிலைப் புள்ளிகள் கிடைக்கின்றன.

$x = -1$ எனில், $y = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 5 = 10$

$x = 3$ எனில், $y = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 5 = -22$

$\therefore$ தேக்க நிலை மதிப்புகள் 10 மற்றும் – 22

தேக்க நிலைப் புள்ளிகள் (– 1, 10) மற்றும் (3, –22)

எடுத்துக்காட்டு 5

செலவுச் சார்பு $C = 2000 + 1800x - 75x^2 + x^3$ க்கு எப்பொழுது அதன் மொத்த செலவு கூடுகிறது மற்றும் எப்பொழுது குறைகிறது என்பதனைக் காண்க. இறுதி நிலை செலவின் (MC) தன்மையைப் பற்றியும் சோதிக்க.

தீர்வு :

$$C = 2000 + 1800x - 75x^2 + x^3$$

$$\frac{dC}{dx} = 1800 - 150x + 3x^2$$

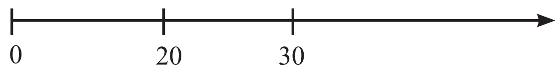
$$\frac{dC}{dx} = 0 \quad \Rightarrow 1800 - 150x + 3x^2 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 150x + 1800 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 50x + 600 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 20)(x - 30) = 0$$

$$\Rightarrow x = 20 \text{ or } x = 30$$



(i) $0 < x < 20$, $\frac{dC}{dx} > 0$	(i) $x = 10$ எனில் $\frac{dC}{dx} = 600 > 0$
(ii) $20 < x < 30$, $\frac{dC}{dx} < 0$	(ii) $x = 25$ எனில் $\frac{dC}{dx} = -75 < 0$
(iii) $x > 30$; $\frac{dC}{dx} > 0$	(iii) $x = 40$ எனில் $\frac{dC}{dx} = 600 > 0$

$\therefore$ $0 < x < 20$ மற்றும் $x > 30$ எனும் இடைவெளிகளில் C கூடுகிறது.

$20 < x < 30$ –ல் C குறைகிறது.

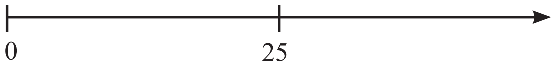
$$MC = \frac{d}{dx}(C)$$

$$\therefore \quad MC = 1800 - 150x + 3x^2$$

$$\frac{d}{dx}(\text{MC}) = -150 + 6x$$

$$\frac{d}{dx}(\text{MC}) = 0 \quad \Rightarrow 6x = 150$$

$$\Rightarrow \quad x = 25.$$



(i) $0 < x < 25$, $\frac{d}{dx}$ (MC) < 0	(i) $x = 10$ எனில் $\frac{d}{dx}$ (MC) $= -90 < 0$
(ii) $x > 25$, $\frac{d}{dx}$(MC) > 0	(ii) $x = 30$ எனில் $\frac{d}{dx}$ (MC) $= 30 > 0$

$\therefore$ $x < 25$ –இல் MC குறைகிறது.

மற்றும் $x > 25$ –இல் MC கூடுகிறது.

4.1.4 பெரும மதிப்பும் சிறும மதிப்பும்

$[a, b]$ இல் சார்பு f வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. (a, b) –ல் c ஒரு புள்ளி என்க.

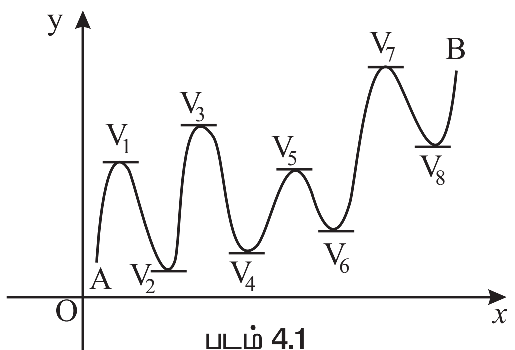
(i) c –இன் அண்மையகம் $(c - \delta, c + \delta)$ –இல் c தவிர x –இன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் $f(c) > f(x)$ என இருந்தால் $f(c)$ என்பது $x = c$ இல் f இன் சார்ந்த பெருமம் அல்லது பெருமம் என்கிறோம்.

(ii) புள்ளி c இன் அண்மையகம் $(c - \delta, c + \delta)$ –இல் c தவிர x–இன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் $f(c) < f(x)$ என இருந்தால் $x = c$ என்ற இடத்தில் f இன் சார்ந்த சிறுமம் அல்லது சிறுமம் என்போம்.

(iii) சார்பு f ஆனது புள்ளி c –இல் சிறும மதிப்பை அல்லது பெரும மதிப்பை அடைந்தால், $f(c)$ ஒரு அறுதி மதிப்பு (extremum value) எனப்படும்.

4.1.5 இடம் சார்ந்த மற்றும் முழுதளாவிய (தனித்த) பெருமம் மற்றும் முழுதளாவிய சிறுமம் (Local and Global Maxima and Minima)

$y = f(x)$ என்ற சார்பின் வரைபடத்தை (படம் 4.1) கவனிக்க.



படம் 4.1

$y = f(x)$ க்கு பல பெரும மற்றும் சிறும புள்ளிகள் உள்ளன. புள்ளிகள் $V_1, V_2, \ldots\ldots V_8$ இடத்து $\frac{dy}{dx} = 0$. உண்மையில் இந்த சார்பானது, V_1, V_3, V_5, V_7 எனும் இடத்தில் பெருமமாகவும் மேலும் V_2, V_4, V_6, V_8 –இல் சிறுமமாகவும் உள்ளது. V_5 –இல் இருக்கும் பெரும மதிப்பானது V_8–இல் இருக்கும் சிறும மதிப்பை விட குறைவாக உள்ளது என்பதை கவனிக்க. இந்த பெருமங்கள் மற்றும் சிறுமங்கள் இடஞ்சார்ந்த பெருமங்கள் அல்லது சிறுமங்கள் என்று அழைக்கப்படும். A, B –களுக்கு இடையில் வளைவரையை நோக்குங்கால், சார்பானது V_7 –இல் தனித்த பெருமம் அல்லது முழுதளாவிய பெருமத்தைப் பெறுகிறது. V_2 –இல் தனித்த சிறுமம் அல்லது முழுதளாவிய சிறுமத்தைப் பெறுகிறது.

குறிப்பு

இடஞ்சார்ந்த பெருமம் அல்லது இடஞ்சார்ந்த சிறுமம் என்பதை நாம் பெருமம் அல்லது சிறுமம் என்று அழைக்கிறோம்.

4.1.6 பெருமங்கள் மற்றும் சிறுமங்களுக்கான நிபந்தனைகள்

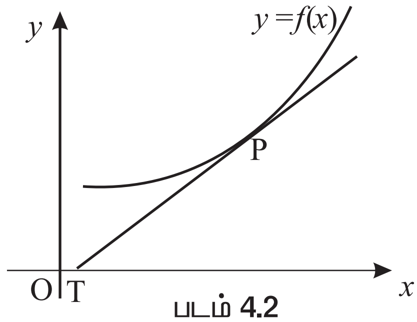
	பெருமம்	**சிறுமம்**
தேவையான நிபந்தனை	$\frac{dy}{dx} = 0$	$\frac{dy}{dx} = 0$
போதுமான நிபந்தனை	$\frac{dy}{dx} = 0\ ;\ \frac{d^2y}{dx^2} < 0$	$\frac{dy}{dx} = 0\ ;\ \frac{d^2y}{dx^2} > 0$

4.1.7 குழிவு மற்றும் குவிவு (Concavity and Convexity)

$y = f(x)$ என்ற சார்பின் வரைபடத்தை (படம் 4.2) கவனிக்க.

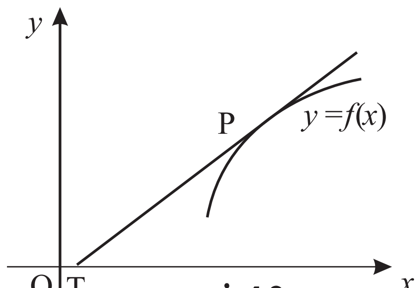
$y = f(x)$ என்ற வளைவரைக்கு P–லிருந்து வரையப்பட்ட தொடுகோட்டை PT என்க.

வளைவரையானது (அல்லது வளைவரையின் வில்) PTஎன்ற தொடுகோட்டிற்கு மேலே இருந்தால் $y = f(x)$ மேல்நோக்கி குழிவு அல்லது கீழ்நோக்கி குவிவு ஆகும்.



படம் 4.2

வளைவரையானது (அல்லது வளைவரையின் வில்) PT என்ற தொடுகோட்டிற்கு கீழாக இருந்தால் $y = f(x)$ மேல்நோக்கி குவிவு அல்லது கீழ்நோக்கி குழிவு ஆகும். (படம் 4.3).



படம் 4.3

4.1.8 குழிவு மற்றும் குவிவுக்கான நிபந்தனைகள்

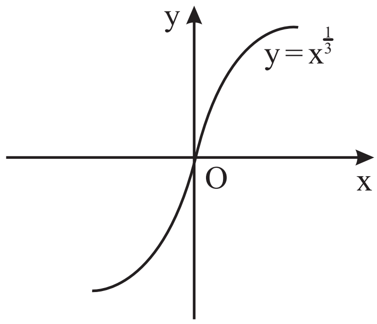
$f(x)$ இருமுறை வகையிடத்தக்கது என்க. ஏதேனும் ஓர் இடைவெளியில்,

(i) $f''(x) > 0$ எனில், வளைவரை $f(x)$ ஆனது மேல்நோக்கி குழிவாகும்.

(ii) $f''(x) < 0$ எனில், வளைவரை $f(x)$ ஆனது மேல்நோக்கி குவிவாகும்.

4.1.9 வளைவு மாற்றப் புள்ளி (Point of Inflection)

$y = f(x)$ எனும் வளைவரையின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியில் வளைவரையானது மேல்நோக்கி **குழிவிலிருந்து** மேல்நோக்கி **குவிவாகவோ** அல்லது மேல்நோக்கி **குவிவுயிலிருந்து** மேல்நோக்கி **குழிவுவாகவோ** மாறுமானால் அப்புள்ளியை வளைவரையின் வளைவு மாற்றப் புள்ளி என அழைக்கிறோம்.



படம் 4.4

4.1.10 வளைவு மாற்றப்புள்ளிகளுக்கான நிபந்தனைகள்

வளைவரை $y = f(x)$ அதனுடைய ஒரு புள்ளி $x = c$ –யில்

(i) $f''(c) = 0$ அல்லது வரையறுக்கப்படவில்லை மற்றும்

(ii) x ஆனது c வழியே பெருக, $f''(x)$ - குறி மாறுகிறது (அதாவது $f'''(x)$ உளதாகும் பொழுது $f'''(c) \neq 0$)எனில் $x = c$ ஒரு வளைவு மாற்றப்புள்ளி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6

$2x^3 + 3x^2 - 36x + 10$ என்ற சார்பின் பெரும மற்றும் சிறும மதிப்புக்களைக் காண்க.

தீர்வு :

$y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 10$ என்க

x –ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 6x - 36 \qquad ....(1)$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow 6x^2 + 6x - 36 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 3)(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x = -3, 2$$

x–ஐ பொறுத்து மறுபடியும் வகையிட,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x + 6$$

$x = -3$ எனில் $\frac{d^2y}{dx^2} = 12(-3) + 6 = -30 < 0$

$\therefore$ அந்த சார்பு $x = -3$ ல் பெரும மதிப்பைப் பெறுகிறது.

$\therefore$ பெரும மதிப்பு $y = 2(-3)^3 + 3(-3)^2 - 36(-3) + 10 = 91$

$x = 2$ எனில் $\frac{d^2y}{dx^2} = 12(2) + 6 = 30 > 0$

$\therefore$ அந்த சார்பு $x = 2$ –ல் சிறும மதிப்பைப் பெறுகிறது.

$\therefore$ சிறும மதிப்பு $y = 2(2)^3 + 3(2)^2 - 36(2) + 10 = -34$

எடுத்துக்காட்டு 7

$f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x + 1$ என்ற சார்புக்கு $[-2, 1]$ என்ற இடைவெளியில் தனித்த (முழுதளாவிய) பெரும மற்றும் சிறும மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$$f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x + 1$$

$$f'(x) = 15x^4 - 75x^2 + 60$$

பெரும மதிப்பை மற்றும் சிறும மதிப்பை அடையத் தேவையான நிபந்தனை

$$f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow 15x^4 - 75x^2 + 60 = 0$$

$$\Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^4 - 4x^2 - x^2 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$$

$\therefore \quad x = \pm 1, -2, \qquad (2 \notin [-2, 1])$

$f''(x) = 60x^3 - 150x$

$f''(-2) = 60(-2)^3 - 150(-2) = -180 < 0$

$\therefore$ $x = -2$ –இல் $f(x)$ பெரும மதிப்பைப் பெறுகிறது.

$f''(1) = 60(1)^3 - 150(1) = -90 < 0$

$\therefore$ $x = -1$ –இல் $f(x)$ சிறும மதிப்பைப் பெறுகிறது.

$f''(1) = 60(1)^3 - 150(1) = -90 < 0$

$\therefore$ $x = 1$ –இல் $f(x)$ பெரும மதிப்பைப் பெறுகிறது.

$x = -2$ –ல் பெரும மதிப்பு

$f(-2) = 3(-2)^5 - 25(-2)^3 + 60(-2) + 1 = -15$

$x = -1$ –ல் சிறும மதிப்பு

$f(-1) = 3(-1)^5 - 25(-1)^3 + 60(-1) + 1 = -37$

$x = 1$ –ல் பெரும மதிப்பு

$f(1) = 3(1)^5 - 25(1)^3 + 60(1) + 1 = 39$

$\therefore$ தனித்த (முழுதளாவிய) பெரும மதிப்பு = 39

மற்றும் தனித்த (முழுதளாவிய) சிறும மதிப்பு = –37

எடுத்துக்காட்டு 8

$y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 27$ எனும் வளைவரையின் பெரும சாய்வு என்ன ? எப்புள்ளியில் இருக்கும் ?

தீர்வு :

$y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 27$

x–ஐ பொறுத்து வகைக் காண,

$$\frac{dy}{dx} = -3x^2 + 6x + 9$$

தொடுகோட்டின் சாய்வு $-3x^2 + 6x + 9$ ஆகும்.

Let $M = -3x^2 + 6x + 9$

x–ஐ பொறுத்து வகைக் காண,

$$\frac{dM}{dx} = -6x + 6 \qquad \text{..........(1)}$$

சாய்வு, பெரும மதிப்பைப் பெற $\frac{dM}{dx} = 0$ மற்றும் $\frac{d^2M}{dx^2} < 0$

$$\frac{dM}{dx} = 0 \Rightarrow -6x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1$$

(1) –ஐ மறுபடியும் x–ஐப் பொறுத்து வகைக் காண,

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -6 < 0, \quad \therefore\ x = 1$$ –ல் M பெரும மதிப்பை அடைகிறது.

$\therefore\ x = 1$ –ல் M –ன் பெரும மதிப்பு

$$M = -3(1)^2 + 6(1) + 9 = 12$$

$x = 1$ எனும் பொழுது ; $y = -(1)^3 + 3(1)^2 + 9(1) - 27 = -16$

$\therefore$ பெரும சாய்வு = 12

எனவே தேவையான புள்ளி $(1, -16)$

எடுத்துக்காட்டு 9

$y = 2x^4 - 4x^3 + 3$ எனும் வளைவரையின் வளைவு மாற்றப் புள்ளிகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$$y = 2x^4 - 4x^3 + 3$$

x–ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{dy}{dx} = 8x^3 - 12x^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 24x^2 - 24x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad \Rightarrow 24x(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow\ x = 0, 1$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 48x - 24$$

$x = 0, 1$ –ல் $\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$

$\therefore$ வளைவு மாற்ற புள்ளிகள் $f(x)$ –க்கு இருக்கின்றன.

$x = 0$ எனில், $y = 2(0)^4 - 4(0)^3 + 3 = 3$

$x = 1$ எனில், $y = 2(1)^4 - 4(1)^3 + 3 = 1$

$\therefore$ வளைவு மாற்ற புள்ளிகள் $(0, 3)$ மற்றும் $(1, 1)$.

எடுத்துக்காட்டு 10

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$ என்ற வளைவரை எந்தெந்த இடைவெளிகளில் மேல்நோக்கி குவிவாகவும் மற்றும் கீழ்நோக்கி குவிவாகவும் உள்ளது எனக் காண்க.

தீர்வு :

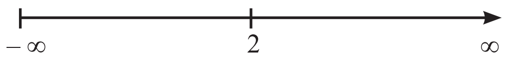
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

x –ஐ பொறுத்து வகையிட,

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f''(x) = 6x - 12$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6(x-2) = 0 \quad \therefore x = 2$



(i) $-\infty < x < 2, f''(x) < 0$	(i) $x = 0$ எனில் $f''(x) = -12 < 0$
(ii) $2 < x < \infty, f''(x) > 0$	(ii) $x = 3$ எனில் $f''(x) = 6 > 0$

$\therefore$ $(-\infty, 2)$ எனும் இடைவெளியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள வளைவரையானது மேல்நோக்கி குவிவாக உள்ளது.

$(2, \infty)$ எனும் இடைவெளியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள வளைவரையானது கீழ்நோக்கி குவிவாக உள்ளது.

பயிற்சி 4.1

1) $x^3 + 3x^2 + 3x + 7$ என்ற சார்பு x –இன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் கூடும் சார்பாகிறது என நிறுவுக.

2) x அதிகரிக்கும் போது $75 - 12x + 6x^2 - x^3$ என்பது எப்பொழுதும் குறைகிறது என நிறுவுக.

3) $x^3 + 8x^2 + 5x - 2$ என்ற சார்பு எந்தெந்த இடைவெளிகளில் கூடும் சார்பாக அல்லது குறையும் சார்பாக உள்ளது என்பதைக் காட்டுக.

4) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$ என்ற சார்புக்கு தேக்க நிலை புள்ளிகளையும், தேக்க நிலை மதிப்புகளையும் காண்க.

5) கீழ்வரும் மொத்த வருவாய் சார்புகளுக்கு எப்பொழுது அதன் மொத்த வருவாய் (R) கூடுகிறது. மற்றும் எப்போது குறைகிறது என்பதனைக் காண்க. இறுதி நிலை வருவாயின் (MR) தன்மையைப் பற்றியும் விவாதிக்க.

(i) $R = -90 + 6x^2 - x^3$ (ii) $R = -105x + 60x^2 - 5x^3$

6) கீழ்வரும் செலவு சார்புகளுக்கு எப்பொழுது அதன் மொத்த செலவு (C) கூடுகிறது மற்றும் எப்பொழுது குறைகிறது என்பதனைக் காண்க. இறுதிநிலை செலவின் (MC) தன்மையைப் பற்றியும் விவாதிக்க.

(i) $C = 2000 + 600x - 45x^2 + x^3$ (ii) $C = 200 + 40x - \frac{1}{2}x^2$.

7) கீழ்வரும் சார்புகளுக்கு பெரும மற்றும் சிறும மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $x^3 - 6x^2 + 7$ (ii) $2x^3 - 15x^2 + 24x - 15$ (iii) $x^2 + \frac{16}{x}$ (iv) $x^3 - 6x^2 + 9x + 15$

8) $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x + 15$ என்ற வளைவரைக்கு $\left[-\frac{3}{2}, 3\right]$ என்ற இடைவெளியில் தனித்த (முழுதளாவிய) பெரும மற்றும் சிறும மதிப்புகளைக் காண்க.

9) $y = x^4 - 4x^3 + 2x + 3$ என்ற வளைவரையின் வளைவு மாற்றப் புள்ளிகளைக் காண்க.

10) $f(x) = x^3 - 27x + 108$ என்ற சார்பின் பெரும மதிப்பானது அதன் சிறும மதிப்பை விட 108 கூடுதலாக உள்ளது என நிறுவுக.

11) $y = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 5x + 1$ எனும் வளைவரை எந்த இடைவெளிகளில் மேல்நோக்கி, கீழ்நோக்கி குவிவுடையது என்பதைக் காண்க.

12) உற்பத்தி q –ன் எம்மதிப்பிற்கு செலவு சார்பு $C = q^2 - 6q + 120$ ஆனது சிறும மதிப்பை பெறுகிறது என்பதனைக் காண்க.

13) $x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$ எனும் சார்பின் பெரும மேலும் சிறும மதிப்புகளைக் காண்க. $x = 0$ இடத்து அதன் தன்மையை விவாதிக்க.

14) $f(x) = x^2 + \frac{250}{x}$ எனும் சார்பு $x = 5$ எனும் போது மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறுகிறது என நிறுவுக.

15) x எனும் ஒரு பொருளின் மொத்த வருவாய் (TR) ஆனது $TR = 12x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ எனில், சராசரி வருவாயின் (AR) –ன் உச்ச புள்ளியில் AR = MR (MR என்பது இறுதி நிலை வருவாய்) என நிறுவுக.

4.2 பெருமங்கள் மற்றும் சிறுமங்களின் பயன்பாடுகள்

இலாபத்தை பெருமமாக்கல், செலவைக் குறைத்தல் போன்றவற்றைகளைத் தீர்மானிக்க ‘பூச்சிய சாய்வின்’ கருத்துரு நமக்கு மிகவும் உதவியாக உள்ளது. இந்த பகுதியில் வணிகவியலில் பெருமம் மற்றும் சிறுமங்களின் பயன்பாடுகளைக் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 11

ஒரு நிறுவனம் x டன்கள் உற்பத்தி செய்ய ஆகும் மொத்த செலவு $C = (\frac{1}{10}x^3 - 5x^2 + 10x + 5)$. இறுதி நிலைச் செலவு மற்றும் சராசரி மாறும் செலவு ஆகியன சிறும மதிப்பைப் பெறுவதற்கான உற்பத்தியின் அளவைக் காண்க.

தீர்வு :

மொத்த செலவு $C(x) = \text{Rs.}(\frac{1}{10}x^3 - 5x^2 + 10x + 5)$

இறுதிநிலைச் செலவு $= \frac{d}{dx}$ (C)

(அ–து) MC $= \frac{3}{10}x^2 - 10x + 10$

சராசரி மாறும் செலவு $= \frac{\text{மாறும் செலவு}}{x}$

(அ–து) AVC $= (\frac{1}{10}x^2 - 5x + 10)$

(i) $y = \text{MC} = \frac{3}{10}x^2 - 10x + 10$ என்க.

x –ஐ பொறுத்து வகையிட, $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{5}x - 10$

இறுதிநிலை செலவு சிறும மதிப்பைப் பெற,

$\frac{dy}{dx} = 0$ மற்றும் $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{3}{5}x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{50}{3}$

$x = \frac{50}{3}$ எனில், $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{5} > 0$

$\therefore$ MC ஆனது சிறும மதிப்பைப் பெறுகிறது.

(அ–து) $x = \frac{50}{3}$ அலகுகள் எனில், இறுதிநிலைச் செலவு சிறும மதிப்பைப் பெறுகிறது.

(ii) $z = \text{AVC} = \frac{1}{10}x^2 - 5x + 10$ என்க.

x –ஐ பொறுத்து வயிட, $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{5}x - 5$

.

AVC சிறும மதிப்பைப் பெற $\frac{dz}{dx} = 0$ மற்றும் $\frac{d^2z}{dx^2} > 0$

$\frac{dz}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{1}{5}x - 5 = 0 \Rightarrow x = 25$

$x = 25$ எனில்,

$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{5} > 0$

$\therefore$ AVC சிறும மதிப்பைப் பெறுகிறது. எனவே $x = 25$ அலகுகள் எனும் பொழுது சராசரி மாறும் செலவு சிறும மதிப்பைப் பெறுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 12

ஒரு தொழில் நிறுவனத்தின் மொத்த செலவுச் சார்பு $C = 15 + 9x - 6x^2 + x^3$ எனில் எப்பொழுது மொத்த செலவு சிறும மதிப்பைப் பெறும் ?

தீர்வு :

செலவு $C = 15 + 9x - 6x^2 + x^3$

x–ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{dC}{dx} = 9 - 12x + 3x^2 \qquad \text{............(1)}$$

செலவு சிறும மதிப்பைப் பெறும் பொழுது $\frac{dC}{dx} = 0$ மற்றும் $\frac{d^2C}{dx^2} > 0$

$$\frac{dC}{dx} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = 3, \quad x = 1$$

(1) –x ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{d^2C}{dx^2} = -12 + 6x$$

$x = 1$ எனில், $\frac{d^2C}{dx^2} = -12 + 6 = -6 < 0$

$\therefore x = 1$ –இல் C பெரும மதிப்பைப் பெறுகிறது.

$x = 3$ எனில், $\frac{d^2C}{dx^2} = -12 + 18 = 6 > 0$

$\therefore x = 3$ –இல் C சிறும மதிப்பைப் பெறுகிறது.

$x = 3$ அலகுகள் எனில், மொத்த செலவு, சிறும மதிப்பைப் பெறுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 13

$P = \frac{4000x}{500 + x} - x$ என்பது இலாபம் மற்றும் விளம்பர செலவைக் குறிக்கும் சமன்பாடாகும். இதில் x–ன் எம்மதிப்பிற்கு P ஆனது பெருமம் அடையும் ?

தீர்வு :

இலாபம் $P = \frac{4000x}{500 + x} - x$

x–ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{dP}{dx} = \frac{(500 + x)4000 - (4000x)(1)}{(500 + x)^2} - 1$$

$$= \frac{2000000}{(500 + x^2)} - 1 \qquad \text{..............(1)}$$

இலாபம் பெருமம் எனில், $\frac{dP}{dx} = 0$ மற்றும் $\frac{d^2P}{dx^2} < 0$

$$\frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{2000000}{(500+x)^2} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2000000 = (500+x)^2$$

$$\Rightarrow 1000 \times \sqrt{2} = 500 + x$$

$$1000 \times 1.414 = 500 + x$$

$$x = 914$$

x –ஐப் பொறுத்து (1)–ஐ வகையிட,

$$\frac{d^2P}{dx^2} = -\frac{4000000}{(500+x)^3}$$

$x = 914$ எனில் $\frac{d^2P}{dx^2} < 0$ $\therefore$ இலாபம் பெருமம் அடைகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 14

ஒரு நிறுவனத்தின் மொத்த உற்பத்தி செலவு மற்றும் வருவாய் ஆகியன $C = x^3 - 12x^2 + 48x + 11$ மற்றும் $R = 83x - 4x^2 - 21$ என உள்ளன. (i) வருவாய் பெரும மதிப்பை அடையும் பொழுது (ii) இலாபம் பெரும மதிப்பை பெறும் பொழுதும் அதன் உற்பத்தி என்ன ?

தீர்வு :

(i) வருவாய் $R = 83x - 4x^2 - 21$

x –ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{dR}{dx} = 83 - 8x$$

$$\frac{d^2R}{dx^2} = -8$$

வருவாய் பெரும மதிப்பை அடையும் பொழுது $\frac{dR}{dx} = 0$ மற்றும் $\frac{d^2R}{dx^2} < 0$

$$\frac{dR}{dx} = 0 \Rightarrow 83 - 8x = 0 \quad \therefore x = \frac{83}{8}$$

மேலும் $\frac{d^2R}{dx^2} = -8 < 0.$ $\therefore$ வருவாய் பெரும மதிப்பை அடைகிறது.

$\therefore x = \frac{83}{8}$ எனில், வருவாய் பெரும மதிப்பை அடைகிறது.

(ii) இலாபம் $P = R - C$

$$= (83x - 4x^2 - 21) - (x^3 - 12x^2 + 48x + 11)$$

$$= -x^3 + 8x^2 + 35x - 32$$

x –ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{dP}{dx} = -3x + 16x + 35$$

$$\frac{d^2P}{dx^2} = -6x + 16$$

இலாபம் பெரும மதிப்பை பெறும் பொழுது $\frac{dP}{dx} = 0$ மற்றும் $\frac{d^2P}{dx^2} < 0$

$\therefore \frac{dP}{dx} = 0 \quad \Rightarrow -3x + 16x + 35 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 16x - 35 = 0$

$\Rightarrow (3x + 5)(x - 7) = 0$

$\Rightarrow x = \frac{-5}{3}$ or $x = 7$

$x = \frac{-5}{3}$ எனில், $\frac{d^2P}{dx^2} = -6\left(\frac{-5}{3}\right) + 16 = 26 > 0$

$x = \frac{-5}{3}$ –ல் P மீச்சிறு மதிப்பை பெறுகிறது.

$x = 7$ எனில், $\frac{d^2p}{dx^2} = -6\ (7) + 16 = -\ 26 > 0$

$\therefore x = 7$ எனில், P பெரும மதிப்பை பெறுகிறது.

$\therefore x = 7$ அலகுகள் எனில், இலாபம் பெரும மதிப்பை பெறுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 15

ஒரு நிறுவனத்தின் மொத்த செலவு சார்பானது $C = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 28x + 10$ இங்கு x ஆனது உற்பத்தி ஆகும். உற்பத்தியின் ஒவ்வொரு அலகிற்கும் ரூ.2 வீதம் விதிக்கப்பட்ட வரியை உற்பத்தியாளர் தன் செலவுடன் சேர்த்துக் கொள்கிறார். வியாபார சந்தையின் தேவைச் சார்பு $p = 2530 - 5x$ எனக் கொடுக்கப்பட்டால், பெரும இலாபத்தை ஈட்டும் உற்பத்தியின் அளவையும், விலையும் காண்க. இங்கு p என்பது உற்பத்தியின் ஒவ்வொரு அலகின் விலையைக் குறிக்கிறது.

தீர்வு :

x அலகுகள் உற்பத்திக்கான மொத்த வருவாய் $(R) = px$

$= (2530 - 5x)x = 2530x - 5x^2$

வரி விதிக்கப்பட்ட பின் மொத்த செலவு சார்

$$C + 2x = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 28x + 10 + 2x$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 30x + 10$$

இலாபம் = வருவாய் – செலவு

$$= (2530x - 5x^2) - (\frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 30x + 10)$$

$$P = -\frac{1}{3}x^3 + 2500x - 10$$

x –ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{dP}{dx} = -x^2 + 2500 \qquad \text{----------(1)}$$

பெரும இலாபத்திற்கான நிபந்தனைகள்

$$\frac{dP}{dx} = 0 \text{ and } \frac{d^2\text{P}}{dx^2} < 0$$

$$\frac{dP}{dx} = 0 \qquad \Rightarrow 2500 - x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \; x^2 = 2500 \text{ அல்லது } x = 500$$

மறுபடியும் (1)–ஐ, x –ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{d^2\text{P}}{dx^2} = -2x$$

$x = 50$ எனில், $\dfrac{d^2\text{P}}{dx^2} = -100 < 0$ $\quad \therefore$ P -யானது $x = 50$ பெரும மதிப்பை பெறுகின்றது.

$\therefore$ பெரும இலாபத்தை ஈட்டும் உற்பத்தியின் அளவு $x = 50$ அலகுகள்

$x = 50$ எனில், விலை $p = 2530 - (5 \times 50)$

$= 2530 - 250$

$=$ ரூ. 2280

4.2.1 சரக்கு நிலை கட்டுப்பாடு (Inventory Control)

சரக்கு நிலை கட்டுப்பாடு என்பது எதிர்கால தேவைக்கேற்ப பொருள்களை கையிருப்பு செய்தல் ஆகும். வணிகத்தை சுமூகமாகவும், இலாபகரமாகவும் நடத்தி செல்ல கச்சாப் பொருட்களைச் சேமித்து வைத்தல் இன்றியமையாததாகும்.

4.2.2 சரக்கு நிலை கணக்கில் விலைக் காரணிகளின் பங்கு

(Costs Involved in Inventory Problems)

(i) சரக்கு தேக்க செலவு (Inventory carrying cost) C_1

பொருள்களை கையிருப்பு செய்வதின் தொடர்பாக ஆகும் செலவே சரக்கு தேக்க செலவாகும். இந்த செலவு ஓர் அலகுக்கு ஒரு கால அளவிற்கு என குறிக்கப்படும்.

(ii) குறைபாடு விலை (Shortage cost) C_2

சரக்கு நிலை அமைப்பில் கொள்முதல் செய்யப்படும் ஒரு பொருளானது தீர்ந்து போன பின்னரும் ஏற்படும் தேவையின் அளவினால் இத்தகைய விலைகள் ஏற்படுகின்றன.

(iii) கோருதல் செலவு (Ordering cost) C_3

பொருள்களை வாங்கும் பொழுது பெறும் விலைகள் அல்லது ஒரு தொழிலகத்திற்கு ஏற்படும் ஒரு பொருளின் தேவையானது அத்தொழிலகத்தாலேயே பூர்த்தி செய்யப்படும் பொழுது ஏற்படும் செலவுகள், கோருதல் செலவு என்று அழைக்கப்படும்.

4.2.3 மிகு ஆதாய கோருதல் அளவு (Economic Order Quantity)

வருடாந்திர சரக்குத் தேக்க செலவு மற்றும் நிலைத்த சூழ்நிலையில் வருடாந்திர தேவைக்கேற்ப நிறுவன அமைப்புச் செலவு இவைகளை குறைப்பதற்குத் தகுந்தாற்போல், கோருதல் அளவை, சீர்படுத்துவதே **மிகு ஆதாய கோருதல் அளவு** ஆகும்.

4.2.4 வில்சனின் மிகு ஆதாய கோருதல் அளவு வாய்பாடு

குறிப்பு :

சூத்திரத்தை தருவிக்கும் முறை கற்றல் திறனை மேம்படுத்துவதற்காக கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. தருவிக்கும் முறை தேர்வில் கேட்கப்படமாட்டாது.

தேவை தெரிந்தும், குறைபாடுகளின்றியும், சீரானதாகவும் உள பொழுது, பொருளாதார நோக்கின் கீழ் அமைந்த கோருதல் அளவையும், அடுத்தடுத்த சாதகமான இடைவெளிகளில் கோருதல் அளவைத் தீர்மானிப்பதற்கும் இந்த வாய்பாடு பயன்படுகிறது.

EOQ –ஐப் பெற பின்வருவனவற்றைக் கருதுவோம்.

(i) ஒரு கால அளவிற்குச் சீரான தேவை R என்க.

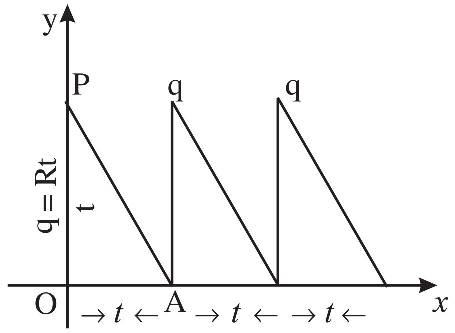
(ii) சரக்கு நிலை உருபடிகளின் அளிப்பு அல்லது உற்பத்தி உடனடியாகப் பெறப்படுகிறது.

(iii) சரக்குத் தேக்கச் செலவு ரூ. C_1

(iv) ஓர் ஆண்டில் கோரப்படும் எண்ணிக்கை n என்க. ஒவ்வொரு முறையும் q அலகுகள் கோரப்படுகின்றன (உற்பத்தி செய்யப்படுகின்றன).

(v) ஒவ்வொரு கோருதலுக்கும் கோருதல் செலவு ரூ. C_3 அடுத்தடுத்த இரு கோருதல்களுக்கு இடைப்பட்ட கால அளவு t என்க.

இந்த கட்டமைப்பின் விளக்க படமானது கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது (Model)



படம் 4.5

ஓர் உற்பத்தி ஓட்டமானது t இடைவெளிகளில் அமைகிறது எனில், ஒரு தேவையின் அளவு $q = Rt$ –யானது ஒவ்வொரு ஓட்டத்திற்கும் உற்பத்தி செய்ய வேண்டும். சிறிய கால அளவு dt –இல் கையிருப்பானது $Rt\ dt$. எனவே, t கால அளவில் கையிருப்பு

$$\int_0^t Rt\ dt = \frac{1}{2}Rt^2$$

$$= \frac{1}{2}qt \quad \text{(இங்கு } Rt = q\text{)}$$

= சரக்கு நிலை முக்கோணம் OAP–ன் பரப்பளவு (படம் 4.5)

ஒவ்வொரு உற்பத்தி ஓட்டத்தின் சரக்குத் தேக்க செலவு $= \frac{1}{2} C_1Rt^2$.

ஒவ்வொரு உற்பத்தி ஓட்டத்தின் கோருதல் செலவு $= C_3$.

ஒவ்வொரு உற்பத்தி ஓட்டத்தின் மொத்த செலவு $= \frac{1}{2} C_1Rt^2 + C_3$

ஒரு கால அளவிற்கான மொத்த சராசரி செலவு

$$C(t) = \frac{1}{2}C_1Rt + \frac{C_3}{t} \qquad \text{.............(1)}$$

C(t) –ஆனது சிறும மதிப்பைப் பெற,

$$\frac{d}{dt}C(t) = 0, \quad \frac{d^2}{dt^2}C(t) > 0$$

(1) –ஐ t –யைப் பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{d}{dt}C(t) = \frac{1}{2}C_1R - \frac{C_3}{t^2} \qquad \text{............(2)}$$

$$\frac{d}{dt}C(t) = 0 \quad \Rightarrow \frac{1}{2}C_1R - \frac{C_3}{t^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}$$

(2)–ஐ t –யைப் பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{d^2}{dt^2}C(t) = \frac{2C_3}{t^3} > 0, \text{ when } t = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}$$

உகமம் (optimum) கால இடைவெளி $t_0 = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}$ –இல்

C(t) –ஆனது சிறும மதிப்பைப் பெறுகிறது.

∴ ஒவ்வொரு உற்பத்தி ஓட்டத்திலும் உகமம் அளவு q_0 –ஐ உற்பத்தி செய்ய வேண்டும்.

எனவே $q_0 = Rt_0$

∴ மிகு ஆதாய கோருதல் அளவு (EOQ) $= q_0 = R\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}$

இதுவே வில்சனின் மிகு ஆதாய கோருதல் அளவு வாய்பாடாகும்.

குறிப்பு

(i) ஓர் ஆண்டிற்கு உகம கோருதலின் எண்ணிக்கை

$$n_0 = \frac{\text{தேவை}}{\text{EOQ}} = R\sqrt{\frac{C_1}{2C_3R}} = \sqrt{\frac{RC_1}{2C_3}} = \frac{1}{t_0}$$

(ii) ஓர் அலகு காலத்தில் சராசரி சிறும செலவு $C_0 = \sqrt{2C_1C_3R}$

(iii) சரக்குத் தேக்கச் செலவு $= \frac{q_0}{2} \times C_1$

கோருதல் செலவு $= \frac{R}{q_0} \times C_3$

(iv) EOQ –இல் கோருதல் செலவும், சரக்கு தேக்கச் செலவும் சமமாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 16

ஒரு நிறுவனத்தார் தன் நுகர்வோருக்கு ஒரு பொருளை ஆண்டுக்கு 12,000 அலகுகள் அளிப்பு செய்கிறார். தேவை தெரிந்தது மற்றும் மாறாதது ஆகும். குறைபாடுகள் அனுமதிக்கப்படுவதில்லை. தேக்கச் செலவு ஒரு மாதத்திற்கு ஒரு அலகுக்கு 20 பைசாக்கள், கோருதல் செலவு ஒரு ஓட்டத்திற்கு ரூ.350 எனில் (i) மிகு ஆதாயக் கோருதல் அளவு q_0 (ii) உகம கால அளவு t_0 (iii) வருடாந்திர சிறும மாறும் செலவு ஆகியனவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

அளிப்பு வீதம் R $= \frac{12,000}{12} = 1,000$ அலகுகள் / மாதம்

C_1 = 20 பைசாக்கள் / அலகு / மாதம்

C_3 = Rs.350 / ஓட்டம்

(i) $q_0 = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}} = \sqrt{\frac{2 \times 350 \times 1000}{0.20}}$

= 1, 870 அலகுகள் / ஓட்டம்

(ii) $t_0 = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}} = \sqrt{\frac{2 \times 350}{0.20 \times 1000}} = 56$ நாட்கள்

(iii) $C_0 = \sqrt{2C_1C_3R} = \sqrt{2 \times 0.20 \times 12 \times 350 \times (1000 \times 12)}$

= ரூ. 4,490 / ஆண்டு

எடுத்துக்காட்டு 17

ஒரு நிறுவனம் வருடத்திற்கு 24,000 அலகுகள் கச்சாப் பொருள்களைப் பயன்படுத்துகிறது. அவைகளில் ஓர் அலகின் விலை ரூ. 1.25. ஒரு கோருதலுக்கான கோருதல் செலவு ரூ. 22.50 ஓர் ஆண்டிற்கு தேக்க செலவு கையிருப்பின் சராசரியில் 5.4% ஆகும் எனில், EOQ, ஒவ்வொரு கோருதலுக்கும் இடைப்பட்ட கால அளவு, வருடாந்திர கோருதலின் எண்ணிக்கை இவைகளைக் காண்க. மேலும் EOQ–இல் சரக்குத் தேக்கச் செலவும், கோருதல், செலவும் சமம் என்பதனைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு :

தேவை $= 24,000$ அலகுகள் / வருடம்

கோருதல் செலவு (C_3) $=$ ரூ. 22.50

சரக்குத் தேக்க செலவு(C_1) $= 5.4\%$ ஓர் அலகின் விலை மதிப்பில்

$$= \frac{5.4}{100} \times 1.25$$

$= 0.0675$ / அலகு / வருடம்

$$EOQ = \sqrt{\frac{2RC_3}{C_1}} = \sqrt{\frac{2 \times 2400 \times 22.5}{0.0675}} = 4000 \text{ அலகுகள்}$$

ஒவ்வொரு கோருதலுக்கும் இடைப்பட்ட கால அளவு $= t_0 = \dfrac{q_0}{R} = \dfrac{4000}{24000} = \dfrac{1}{6}$

வருடம் ஒன்றுக்கு கோரப்படும் எண்ணிக்கை $= \dfrac{R}{q_0} = \dfrac{24000}{4000} = 6$

EOQ –இல் சரக்குத் தேக்க செலவு $= \dfrac{q_0}{2} \times C_1 = \dfrac{4000}{2} \times 0.0675 =$ ரூ.135

கோருதல் செலவு $= \dfrac{R}{q_0} \times C_3 = \dfrac{24000}{4000} \times 22.50 =$ ரூ.135

EOQ –இல் கோருதல் செலவு = சரக்குத் தேக்கச் செலவு

எடுத்துக்காட்டு 18

ஒரு தயாரிப்பு நிறுவனம் தன்னுடைய வருடாந்திர தேவைக்காக ஒரு இயந்திரத்திற்கு 9000 உதிரி பாகங்களை வாங்குகிறது. ஒவ்வொரு உதிரி பாகத்தின் விலை ரூ. 20. ஒவ்வொரு கோருதலின் கோருதல் செலவு ரூ.15 ஓர் ஆண்டிற்கு தேக்க செலவானது கையிருப்பின் சராசரியில் 15% ஆகும் எனில்,

(i) EOQ

(ii) ஒவ்வொரு கோருதலுக்கும் இடைப்பட்ட கால அளவு

(iii) வருடாந்திர குறும சராசரி செலவு ஆகியனவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

தேவை R $= 9,000$ உதிரி பாகங்கள் / ஆண்டு

C_1 $= 15\%$ அலகின் விலை மதிப்பில்

$= \dfrac{15}{100} \times 20 =$ ரூ. **3** ஒவ்வொரு உதிரிபாகம் / ஆண்டு

$C_3 \quad = \text{Rs.}15$ / கோருதல்

$$EOQ = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}} = \sqrt{\frac{2 \times 15 \times 9000}{3}}$$ = **300** அலகுகள்

$$t_0 = \frac{q_0}{R} = \frac{300}{9000} = \frac{1}{30}$$ ஆண்டு

$$= \frac{365}{30} = 12$$ நாட்கள்

சிறும சராசரி $= \sqrt{2C_1C_3R}$

$$= \sqrt{2 \times 3 \times 15 \times 9000}$$

= ரூ.900

பயிற்சி 4.2

1) ஒரு குறிப்பிட்ட உற்பத்தி நிறுவனத்தின் மொத்த செலவுச் சார்பு $C = \frac{1}{5} x^2 - 6x + 100$ எனில் மொத்த செலவு எப்பொழுது சிறும மதிப்பைப் பெறும் **?**

2) ஒரு நிறுவனம் ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளை x –டன்கள் உற்பத்திச் செய்ய ஆகும் மொத்த செலவு $C = 300x - 10x^2 + \frac{1}{3}x^3$ எனில், எந்த உற்பத்தியில் சராசரி செலவு சிறுமம் அடையும் என்பதையும் அந்த நிலையில் சராசரி செலவையும் காண்க.

3) x அலகுகள் உற்பத்தி செய்வதற்கான செலவுச் சார்பு $C = x\,(2e^x + e^{-x})$ எனில், சிறும சராசரி செலவு $2\sqrt{2}$ எனக் காண்க.

4) ஒரு மதிப்புமிக்க உலோகத்தை ஒரு நிறுவனம் மாதத்திற்கு x டன்கள் உற்பத்தி செய்யும் பொழுது அதன் மொத்த செலவுச் சார்பு C = ரூ.$(\frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 75x + 10)$ ஆக உள்ளது. உற்பத்தியின் எந்த அளவிற்கு, அதன் இறுதிநிலைச் செலவு சிறுமம் அடையும் **?**

5) ஒரு நிறுவனம் ஒரு வாரத்திற்கு x அலகுகள் உற்பத்தி செய்ய ஆகும் மொத்த செலவு ரூ. $(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5x + 3)$ எனில், இறுதி நிலைச் செலவு மற்றும் சராசரி மாறும் செலவு என்பன உற்பத்தியின் எந்த நிலையில் சிறுமமாக இருக்கும் **?**

6) தொழிலாளர் எண்ணிக்கை x –ம், மொத்த உற்பத்தி செலவு C–ம் $C = \frac{3}{2(x-4)} + \frac{3}{32}x$ என்றவாறு தொடர்புடையன. x –ன் எம்மதிப்பிற்கு செலவு சிறும மதிப்பைப் பெறும் **?**

7) ஒரு நிறுவனத்தின் மொத்த வருவாய் $R = 21x - x^2$ மற்றும் அதன் மொத்த செலவுச் சார்பு $C = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x + 16$. இதில் உற்பத்தி x அலகுகள் விற்கப்படுகிறது எனில்,

(i) வருவாய் பெரும மதிப்பைப் பெறுவதற்கான உற்பத்தி யாது ? அந்த புள்ளியில் மொத்த வருவாய் யாது ?

(ii) சிறும இறுதி நிலைச் செலவு என்ன ?

(iii) பெரும இலாபம் ஈட்ட உற்பத்தி என்ன ?

8) ஒரு நிறுவனத்தின் வருவாய் சார்பு $R = 8x$ மற்றும் உற்பத்தியின் செலவு சார்பு $C = 150000 + 60\left(\frac{x^2}{900}\right)$. மொத்த இலாப சார்பையும், பெரும இலாபம் கிடைக்க எத்தனை உற்பத்தி அலகுகள் விற்க வேண்டும் என்பதையும் காண்க.

9) ஒரு வானொலி தயாரிப்பாளர் ஒரு வாரத்திற்கு x வானொலிகளை ஒவ்வொன்றும் ரூ. p வீதம் விற்கிறார். $p = 2(100 - \frac{x}{4})$ என கணக்கிடப்படுகிறது. வாரந்தோறும் x வானொலிகளை உற்பத்தி செய்ய ஆகும் உற்பத்தி செலவு ரூ. $(120x + \frac{x^2}{2})$ ஆகும். வாரந்தோறும் 40 வானொலிகள் உற்பத்தி செய்தால் பெரும இலாபத்தை அடையலாம் என காண்க. மேலும் வாராந்திர பெரும இலாபத்தையும் கணக்கிடுக.

10) ஒரு தயாரிப்பாளர் வாரந்தோறும் x உருப்படிகளை $p = 600 - 4x$ என விற்கிறார். x உருபடிகளை உற்பத்தி செய்ய ஆகும் செலவு $C = 40x + 2000$ உற்பத்தியானது எந்த அளவில் இருந்தால் பெரும இலாபத்தை ஈட்டலாம் ?

11) ஒரு நிறுவனத்தின் மொத்த வருவாய், மொத்த செலவு சார்புகள் முறையே $R = 30x - x^2$ மற்றும் $C = 20 + 4x$. இங்கு x என்பது உற்பத்தி எனில், மீப்பெரு இலாபம் கிடைக்க உற்பத்தியின் அளவு என்ன ?

12) பின்வரும் விவரங்களுக்கு, EOQ–வைக் காண்க. EOQ –இல் கோருதல் செலவு = தேக்கச் செலவு என்பனைச் சரிபார்.

உருபடிகள்	மாதாந்திர பண்டத்தின் அளவு	ஒரு கோருதலுக்கு கோருதல் செலவு	ஒரு அலகிற்கு தேக்கச் செலவு
A	9000	ரூ. 200	ரூ. 3.60
B	25000	ரூ. 648	ரூ. 10.00
C	8000	ரூ. 100	ரூ. 0.60

13) கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு EOQ –யையும் மற்றும் மொத்த மாறும் செலவையும் காண்க. கோருதல் செலவு ரூ.5 மற்றும் தேக்கச் செலவு 10% எனக் கொள்க.

உருபடிகள்	வருடாந்திர தேவை	ஓர் அலகின் விலை (ரூ.)
A	460 அலகுகள்	1.00
B	392 அலகுகள்	8.60
C	800 அலகுகள்	0.02
D	1500 அலகுகள்	0.52

14) ஒரு தயாரிப்பாளர் தன்னுடைய நுகர்வோருக்கு ஆண்டுதோறும் தன்னுடைய தயாரிப்பில் 600 அலகுகள் அளிப்பு செய்கிறார். குறைபாடுகள் எதுவும் அனுமதிக்கப்படவில்லை. சரக்கு தேக்கச் செலவு ஒவ்வொரு அலகுக்கும் ஒவ்வொரு ஆண்டும் 60 பைசாக்கள், அமைப்புச் செலவு ரூ. 80 எனில் கீழ்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) EOQ

(ii) சிறும வருடாந்திர சராசரி செலவு

(iii) ஒவ்வொரு வருடத்திற்கும் உகந்த கோருதலின் எண்ணிக்கை

(iv) ஒவ்வொரு உகந்த கோருதலுக்கும் உகந்த அளிப்பு காலம்

15) ஒரு உருப்படியின் வருடாந்திர தேவை 3200 அலகுகள். ஓர் அலகின் விலை ரூ.6 மற்றும் ஒவ்வொரு வருடத்திற்கும் சரக்குத் தேக்கச் செலவு 25% . ஒரு கொள்முதலின் விலை ரூ.150 எனில், (i) EOQ (ii) அடுத்தடுத்த கோருதல்களுக்கு இடைப்பட்ட கால அளவு (iii) வருடாந்திர கோருதலின் எண்ணிக்கை வருடாந்திர சிறும சராசரி செலவு ஆகியனவற்றைக் காண்க.

4.3 பகுதி வகையீடுகள்

இதுவரை வகைக்கெழு காணும் பொழுது $y = f(x)$ என்ற வடிவில் ஒரு மாறிச் சார்பை மட்டும் எடுத்துக் கொண்டோம். ஆனால், ஒரு சார்பினை பல மாறிகளின் சார்பாக அமைக்க முடியும். உதாரணமாக உற்பத்தி சார்பை தொழிலாளர் செலவு, மூலதனம் வாயிலாகவும், விலைச் சார்பை அளிப்பு, தேவை வாயிலாகவும் வெளிப்படுத்தலாம். பொதுவாக செலவு, இலாபச் சார்புகள் பல சாரா மாறிகளைப் பொருத்தே மதிப்புகளைப் பெறுகின்றன. உதாரணமாக கச்சா பொருள்களின் விலை, தொழிலாளர்களின் ஊதியம், சந்தையின் நிலவரம் என்பது போல பல சாராமாறிகளைப் பெற்று அமைகிறது. எனவே y என்ற சார்ந்த மாறியானது $x_1, x_2, x_3 .. x_n$ என்ற சாரா மாறிகளை பொருத்தே மதிப்புகளைப் பெற்றிருக்கும். இதனை $y = f(x_1, x_2, x_3 .. x_n)$ எனக் குறிப்போம். இருந்த போதிலும் சாரா மாறிகளை இரண்டு அல்லது மூன்றாகக் குறைத்து அமைந்த சார்புகளை மட்டும் எடுத்துக் கொள்வோம். அதன் வகையீடு செய்யும் முறையைப் பற்றிக் காண்போம்.

4.3.1 வரையறை

$u = f(x, y)$ என்பது x, y எனும் இரண்டு சாரா மாறிகளைக் கொண்ட சார்பு என்க. y–ஐ மாறிலியாகக் கொண்டு x –ஐ பொறுத்து $u = f(x, y)$ –ஐ வகையீடு செய்து கிடைப்பது x –ஐ பொறுத்த u–ன் பகுதி

வகைக்கெழு ஆகும். இதை $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, f_x, u_x எனும் குறியீட்டில் குறிப்பது வழக்கம். இதே போல் y–ஐ பொறுத்து f –ன் பகுதி வகையீடலையும் வரையறுக்கலாம்.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$ இந்த எல்லை இருந்தால்

(இங்கு y என்பது மாறாதது, Δx என்பது x–ல் ஏற்படும் சிறு மாற்றமாகும்)

இதே போல் : $\underset{\Delta y \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$ இந்த எல்லை இருந்தால் (இங்கு x என்பது மாறாதது, Δy என்பது y–இல் ஏற்படும் சிறு மாற்றமாகும்)

4.3.2 தொடர் பகுதி வகைக் கெழுக்கள்

பொதுவாக, $\frac{\partial f}{\partial x}$ மேலும் $\frac{\partial f}{\partial y}$ என்பன x, y –ன் சார்புகளாக இருக்கும். ஆகையால் நாம் $\frac{\partial f}{\partial x}$ மற்றும் $\frac{\partial f}{\partial y}$ எனும் சார்புகளுக்கு x, y –யைப் பொறுத்து பகுதி வகைக் கெழுக்களைக் காணலாம். இந்த பகுதி வகைக் கெழுக்கள் $f(x, y)$ –இன் இரண்டாம் வரிசை பகுதி வகைக் கெழுக்கள் ஆகும். இரண்டாம் வரிசை பகுதி வகைக் கெழுக்களை

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}$$

எனக் குறிப்பது வழக்கம்.

குறிப்பு

f, f_x, f_y என்பன தொடர்ச்சியாக இருந்தால், $f_{xy} = f_{yx}$ ஆகும்.

4.3.3 சமபடித்தான சார்புகள் (Homogeneous Function)

$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$, $t > 0$ எனில் $f(x, y)$ என்பதை x, y –இல் அமைந்த n படியுள்ள சமபடித்தான சார்பு என்கிறோம்.

4.3.4 சமபடித்தான சார்பிற்கு ஆயிலரின் தேற்றம்

தேற்றம் : f என்பது x, y –இல் அமைந்த n படியுள்ள சமபடித்தான சார்பு எனில்,

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = n\ f.$$

கிளைத் தேற்றம் : பொதுவாக $f(x_1, x_2, x_3 .. x_m)$ என்பது $x_1, x_2, x_3 .. x_m$, என்ற m மாறிகளால் அமைந்த n படியுள்ள சமபடித்தான சார்பு எனில்,

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial f}{\partial x_3} + ... + x_m\frac{\partial f}{\partial x_m} = n\,f.$$

எடுத்துக்காட்டு 19

$u(x, y) = 1000 - x^3 - y^2 + 4x^3y^6 + 8y$, எனில் கீழ்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) $\frac{\partial u}{\partial x}$ **(ii)** $\frac{\partial u}{\partial y}$ **(iii)** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ **(iv)** $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ **(v)** $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ **(vi)** $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

தீர்வு :

$$u(x, y) = 1000 - x^3 - y^2 + 4x^3y^6 + 8y$$

(i) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(1000 - x^3 - y^2 + 4x^3y^6 + 8y)$$

$$= 0 - 3x^2 - 0 + 4(3x^2)y^6 + 0$$

$$= -3x^2 + 12x^2y^6$$

(ii) $$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(1000 - x^3 - y^2 + 4x^3y^6 + 8y)$$

$$= 0 - 0 - 2y + 4x^3(6y^5) + 8$$

$$= -2y + 24x^3y^5 + 8$$

(iii) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(-3x^2 + 12x^2y^6)$$

$$= -6x + 12(2x)y^6$$

$$= -6x + 24xy^6$$

(iv) $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\ (-2y + 24x^3y^5 + 8)$$

$$= -2 + 24x^3(5y^4) + 0$$

$$= -2 + 120x^3y^4$$

(v) $$\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(-2y + 24x^3y^5 + 8)$$

$$= 0 + 24(3x^2)y^5 + 0$$

$$= 72x^2y^5$$

(vi) $$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(-3x^2 + 12x^2y^6)$$

$$= 0 + 12x^2(6y^5) = 72x^2y^5$$

எடுத்துக்காட்டு 20

$f(x, y) = 3x^2 + 4y^3 + 6xy - x^2y^3 + 5$ எனில், (i) $f_x(1, -1)$ (ii) $f_{yy}(1, 1)$ (iii) $f_{xy}(2, 1)$ **இவைகளைக் காண்க.**

தீர்வு :

(i) $f(x, y) = 3x^2 + 4y^3 + 6xy - x^2y^3 + 5$

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}(f) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 4y^3 + 6xy - x^2y^3 + 5)$$

$$= 6x + 0 + 6(1)y - (2x)y^3 + 0$$

$$= 6x + 6y - 2xy^3$$

$$f_x(1,-1) = 6(1) + 6(-1) - 2(1)(-1)^3 = 2$$

(ii) $$f_y = \frac{\partial}{\partial y}(f) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 4y^3 + 6xy - x^2y^3 + 5)$$

$$= 12y^2 + 6x - 3x^2y^2$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(12y^2 + 6x - 3x^2y^2)$$

$$= 24y - 6x^2y$$

$$f_{yy}(1,1) = 18$$

(iii) $$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(12y^2 + 6x - 3x^2y^2)$$

$$= 6 - 6xy^2$$

$$f_{xy}(2,1) = -6$$

எடுத்துக்காட்டு 21

$u = \log \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ எனில் $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$ **என நிறுவுக.**

தீர்வு :

$$u = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2 + z^2) \qquad ....(1)$$

x –ஐ பொறுத்து பகுதி வகையிட,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{(x^2+y^2+z^2)(1) - x(2x)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

y –ஐ பொறுத்து பகுதி வகையிட

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}} = \frac{y}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{(x^2+y^2+z^2)(1) - y(2y)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$= \frac{-y^2+z^2+x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

z –ஐப் பொறுத்து பகுதி வகையிட

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{(x^2+y^2+z^2)(1) - z(2z)}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{-z^2+x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{-x^2+y^2+z^2-y^2+z^2+x^2-z^2+x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

எடுத்துக்காட்டு 22

ஆயிலரின் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி $u = \log \dfrac{x^4+y^4}{x-y}$ எனில் $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 3$. நிறுவுக.

$$u = \log \frac{x^4+y^4}{x-y}$$

$$\Rightarrow e^u = \frac{x^4+y^4}{x-y}$$

இங்கு x, y –ல் உள்ள **3–ம் படி சார்பாகும்.**

தீர்வு :

∴ ஆயிலரின் தேற்றத்தின் படி,

$$x\frac{\partial}{\partial x}(e^u) + y\frac{\partial}{\partial y}(e^u) = 3e^u$$

$$x\, e^{u} \frac{\partial u}{\partial x} + y e^{u} \frac{\partial u}{\partial y} = 3e^{u}$$

dividing by e^{u} we get $x\frac{\partial u}{\partial x}$

e^{u} ஆல் வகுக்க கிடைப்பது $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 3$

எடுத்துக்காட்டு 23

x கணிப்பான், y கூட்டும் சாதனங்கள், விற்பனை செய்வதன் மூலம் கிடைக்கும் வருவாயானது $R(x, y) = -x^2 + 8x - 2y^2 + 6y + 2xy + 50$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. தற்பொழுது 4 கணிப்பான்களும், 3 கூட்டும் சாதனங்களும் விற்கப்பட்டால், (i) அதிகப்படியாக ஒரு கணிப்பானை விற்பதாலும் (ii) அதிகப்படியாக ஒரு கூட்டல் சாதனத்தை விற்பதாலும் கிடைக்கும் இறுதி நிலை வருவாயைக் காண்க.

தீர்வு :

(i) அதிகப்படியாக ஒரு கணிப்பானை விற்பதால் கிடைக்கும் இறுதி நிலை வருவாயானது R_x ஆகும்.

$$R_x = \frac{\partial}{\partial x}(R) = \frac{\partial}{\partial x}(-x^2 + 8x - 2y^2 + 6y + 2xy + 50)$$
$$= -2x + 8 - 0 + 0 + 2(1)(y)$$
$$R_x(4,3) = -2(4) + 8 + 2(3) = 6$$

$\therefore$ (4,3) **–**இல் வருவாயானது ஒவ்வொரு கணிப்பானுக்கும் ரூ.**6** வீதம் கூடுகிறது.

$\therefore$ இறுதி நிலை வருவாய் = ரூ. 6.

(ii) அதிகப்படியாக ஒரு கூட்டல் சாதனம் விற்பதால் கிடைக்கும் இறுதி நிலை வருவாயானது R_y ஆகும்.

$$R_y = \frac{\partial}{\partial y}(R) = \frac{\partial}{\partial y}(-x^2 + 8x - 2y^2 + 6y + 2xy + 50)$$
$$= 0 + 0 - 4y + 6 + 2x(1)$$
$$= -4y + 6 + 2x$$
$$R_y(4,3) = -4(3) + 6 + 2(4) = 2$$

(4, 3) **–**இல் வருவாயானது ஒவ்வொரு கூட்டல் சாதனத்திற்கும் ரூ. **2** வீதம் கூடுகிறது.

இறுதிநிலை வருவாய் = ரூ. **2.**

பயிற்சி 4.3

1) $u = 4x^2 - 3y^2 + 6xy$, எனில், $\frac{\partial u}{\partial x}$ மற்றும் $\frac{\partial u}{\partial y}$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

2) $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ எனில் $x\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{y}\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{z}\frac{\partial u}{\partial z} = 3\mathrm{u}$ என நிறுவுக.

3) $z = 4x^6 - 8x^3 - 7x + 6xy + 8y + x^3y^5$ எனில், கீழ்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) $\frac{\partial u}{\partial x}$ (ii) $\frac{\partial u}{\partial y}$ (iii) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ (iv) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ (v) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ (vi) $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

4) $f(x, y) = 4x^2 - 8y^3 + 6x^5y^2 + 4x + 6y + 9$ எனில், கீழ்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) f_x (ii) $f_x(2, 1)$ (iii) f_y (iv) $f_y(0, 2)$ (v) f_{xx}

(vi) $f_{xx}(2, 1)$ (vii) f_{yy} (viii) $f_{yy}(1, 0)$ (ix) f_{xy} (x) $f_{xy}(2, 3)$

(xi) $f_{yx}(2, 3)$

5) $u = x^2y + y^2z + z^2x$ எனில் $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = (x + y + z)^2$ என நிறுவுக.

6) $u = \log\sqrt{x^2 + y^2}$ எனில் $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{x^2 + y^2}$ என நிறுவுக.

7) $u = x^3 + 3xy^2 + y^3$ எனில் $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ என நிறுவுக.

8) $u = \log(x^2 + y^2 + z^2)$ எனில் $x\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = y\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = z\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ என நிறுவுக.

9) ஆயிலரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி

(i) $u = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x + y}}$ எனில் $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3}{2}u$ என நிறுவுக.

(ii) $z = e^{x^3 + y^3}$ எனில் $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 3z \log z$ என நிறுவுக.

(iii) $f = \log\left(\frac{x^2 + y^2}{x + y}\right)$ எனில் $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ என நிறுவுக.

(iv) $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^2 + y^2}{x - y}\right)$ எனில் $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\sin 2u$ என நிறுவுக.

10) x வாஷர்கள், y உலர்த்தும் பாண்டங்களை தயாரிக்கும் பொழுது செலவு $C(x, y) = 40x + 200y + 10xy + 500$. தற்பொழுது 50 வாஷர்களும் 90 உலர்த்தும் பாண்டங்களும் தயாரிக்கப்படுகின்றன. (i) கூடுதலாக ஒரு வாஷர் (ii) கூடுதலாக ஓர் உலர்த்தும் பாண்டம் தயாரிக்க ஆகும் இறுதிநிலைச் செலவைக் காண்க.

11) x –பேனாக்கள், y நோட்டு புத்தகங்கள் விற்பதால் கிடைக்கும் வருவாயானது $R(x, y) = 2x^2 + y^2 + 4x + 5y + 800$ தற்பொழுது 30 பேனாக்களையும், 50 நோட்டு புத்தகங்களையும் ஒரு சில்லறை வியாபாரி விற்கிறார். தன்னுடைய வருவாயை அதிகரிக்க இந்த இரண்டில் எந்த வர்த்தகத்தை அபிவிருத்தி செய்ய வேண்டும் ?

12) ஒரு உணவு விடுதியின் வருடாந்திர இலாபமானது

$P(x, y) = 100x^2 + 4y^2 + 2x + 5y + 10000$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு x என்பது வாடகைக்கு கிடைக்கும் அறைகளின் எண்ணிக்கையையும் y என்பது மாதாந்திர விளம்பர செலவையும் குறிக்கின்றன. தற்பொழுது உணவு விடுதியில் 90 அறைகள் உள்ளன. விளம்பரத்திற்காக மாதம் ரூ.1000 செலவிடப்படுகிறது.

(i) கூடுதலாக ஒரு அறை கட்டப்பட்டால், வருடாந்திர இலாபத்தில் ஏற்படும் மாற்றம் என்ன ?

(ii) விளம்பரத்திற்காக மாதம் ஒரு ரூபாய் கூடுதலாக செலவழித்தால் வருடாந்திர இலாபத்தில் ஏற்படும் மாற்றம் என்ன ?

4.4 பகுதி வகையிடலின் பயன்பாடுகள்

பகுதி வகையிடல் என்ற கருத்துரு எவ்வாறு வணிகவியல் மற்றும் பொருளியலில் பயன்படுகிறது என்பதைப் பற்றி இந்த பகுதியில் நாம் காணலாம்.

4.4.1 உற்பத்திச் சார்பு (Production Function)

ஒரு நிறுவனத்தின் உற்பத்தி P –ஆனது பல பொருளாதார காரணிகளைச் சார்ந்ததாக உள்ளது. உதாரணமாக முதலீடு அல்லது மூலதனம் (K), தொழிலாளர் சம்பளம் (L), கச்சா பொருட்கள் (R) என்பன போன்ற பல காரணிகள். ஆகவே உற்பத்திச் சார்பை $P = f(K, L, R, \ldots)$ எனக் கொள்ளலாம். P –ஆனது தொழிலாளர் சம்பளம் (L) மற்றும் மூலதனம் (K) என்ற காரணிகளை மட்டும் சார்ந்திருந்தால், அதை $P = f(L, K)$ என எழுதலாம்.

4.4.2 இறுதி நிலை உற்பத்திகள்

உற்பத்திச் சார்பு $P = f(L, K)$ என்பது L மற்றும் K எனும் இரண்டு மாறிகளைச் சார்ந்த சார்பு என்க.

$\frac{\partial P}{\partial L}$ –ஐ தொழிலாளரின் சம்பளத்தைப் பொறுத்த இறுதி நிலை உற்பத்தி சார்பு மேலும் $\frac{\partial P}{\partial K}$ –ஐ மூலதனத்தைப் பொறுத்த இறுதிநிலை உற்பத்தி சார்பு என அழைக்கலாம்.

4.4.3 பகுதி தேவை நெகிழ்ச்சிகள் (Partial Elasticity of Demand)

A, B ஆகிய பொருள்களின் விலைகள் முறையே p_1 மற்றும் p_2. p_1, p_2 ஆகியவற்றைப் பொறுத்து A என்ற பொருளின் தேவை $q_1 = f(p_1, p_2)$.

p_1 –ஐ பொறுத்து, q_1 இன் பகுதி தேவை நெகிழ்ச்சி

$-\frac{p_1}{q_1}\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \frac{Eq_1}{Ep_1}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

இதே போல், p_2 –ஐ பொறுத்து, q_2 இன் பகுதி தேவை நெகிழ்ச்சி

$-\frac{p_2}{q_1}\frac{\partial q_1}{\partial p_2} = \frac{Eq_1}{Ep_2}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 24

$P = 10K - K^2 + KL$ என்பது உற்பத்திச் சார்பு. இதில் L என்பது தொழிலாளர் சம்பளம் மற்றும் K என்பது மூலதனம் எனில், K = 2, L = 6 –களில் மூலதனம் மற்றும் தொழிலாளர் சம்பளம் ஆகியனவற்றினை பொறுத்த இறுதிநிலை உற்பத்திகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$P = 10K - K^2 + KL$ ....(1)

மூலதனம் பொறுத்த இறுதிநிலை உற்பத்தியானது $\frac{\partial P}{\partial K}$

$\therefore$ (1)–ஐ, K –யைப் பொறுத்து பகுதி வகைப்படுத்த

$$\frac{\partial P}{\partial K} = 10 - 2K + (1)\,L$$

$$= 10 - 2K + L$$

K = 2, L = 6, $\frac{\partial P}{\partial K} = 10 - 2(2) + 6 = 12$

தொழிலாளர் சம்பளம் L–ஐப் பொறுத்த இறுதிநிலை உற்பத்தியானது $\frac{\partial P}{\partial L}$

$\therefore$ (1) –ஐ L–ஐ பொறுத்து பகுதி வகைப்படுத்த

$$\frac{\partial P}{\partial L} = K$$

K = 2, L = 6 எனில் $\frac{\partial P}{\partial L} = 2$.

$\therefore$ மூலதனத்தைப் பொறுத்து இறுதிநிலை உற்பத்தி = 12 அலகுகள்

$\therefore$ தொழிலாளரைப் பொறுத்து இறுதிநிலை உற்பத்தி = 2 அலகுகள்

எடுத்துக்காட்டு 25

ஒரு நிறுவனமானது x அலகுகள் தொழிலாளரின் சம்பளத்தையும் y அலகுகள் மூலதனத்தையும் பயன்படுத்தி உற்பத்தி செய்யப்படும் அலகுகளின் எண்ணிக்கையை உற்பத்தி சார்பு $f(x, y) = 80\ x^{\frac{1}{4}}\ y^{\frac{3}{4}}$ –இன் வாயிலாக குறிக்கப்படுகிறது எனில், (i) இரண்டு இறுதிநிலை உற்பத்திகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. (ii) 625 அலகுகள் தொழிலாளரின் சம்பளத்தையும் 81 அலகுகள் மூலதனத்தையும் பயன்படுத்தும் பொழுது அவற்றை மதிப்பிடுக. உன் விடைக்கு விளக்கம் தருக.

தீர்வு :

$f(x, y) = 80\ x^{\frac{1}{4}}\ y^{\frac{3}{4}}$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது) .... (1)

தொழிலாளரின் சம்பளத்தை பொறுத்து இறுதி நிலை உற்பத்தியானது $f_x(x, y)$

$\therefore$ (1) –ஐ, x –ஐ பொறுத்து பகுதி வகையிட,

$$f_x = 80\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}} = 20x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}}$$

மூலதனத்தைப் பொறுத்து இறுதிநிலை உற்பத்தியானது $f_y(x, y)$

$\therefore$ (1) –ஐ, y –ஐ பொறுத்து பகுதி வகையிட,

$$f_y = 80\ x^{\frac{1}{4}}\left(\frac{3}{4}\right)y^{-\frac{1}{4}} = 60x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}}$$

(ii) $f_x(625, 81)\ 20(625)^{-\frac{3}{4}}(81)^{\frac{3}{4}}$

$$= 20\left(\frac{1}{125}\right)(27) = 4.32$$

அதாவது, 625 அலகுகள் தொழிலாளரின் சம்பளத்தையும், 81 அலகுகள் மூலதனத்தையும் பயன்படுத்தும் பொழுது, ஓர் அலகு தொழிலாளரின் சம்பளத்தை அதிகப்படுத்தினால், உற்பத்தியின் அளவானது 4.32 அலகுகள் அதிகமாகின்றது.

$$f_y(625,81) = 60(625)^{\frac{1}{4}}(81)^{-\frac{1}{4}}$$

$$= 60(5)\left(\frac{1}{3}\right) = 100$$

அதாவது 625 அலகுகள் தொழிலாளரின் சம்பளத்தையும் 81 அலகுகள் மூலதனத்தையும் பயன்படுத்தும் பொழுது ஓர் அலகு மூலதனத்தையும் அதிகப்படுத்தினால், உற்பத்தியின் அளவானது 100 அலகுகள் அதிகமாகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 26

A என்ற பொருளின் தேவை $q_1 = 240 - p^2{}_1 + 6p_2 - p_1 p_2$ எனில் $\frac{Eq_1}{Ep_1}$ மற்றும் $\frac{Eq_1}{Ep_2}$ என்ற பகுதி நெகிழ்ச்சிகளை $p_1 = 5$ and $p_2 = 4$ எனும் பொழுது காண்க.

தீர்வு :

$$q_1 = 240 - p^2{}_1 + 6p_2 - p_1p_2$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = -2p_1 - p_2$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} = 6 - p_1$$

(i) $$\frac{Eq_1}{Ep_1} = -\frac{p_1}{q_1}\frac{\partial q_1}{\partial p_1}$$

$$= \frac{-p_1}{240 - p_1{}^2 + 6p_2 - p_1p_2}(-2p_1 - p_2)$$

$p_1 = 5, p_2 = 4$ எனில்

$$\left(\frac{Eq_1}{Ep_1}\right) = \frac{-(5)\,(-10-4)}{240-25+24-20} = \frac{70}{219}$$

(ii) $$\frac{\mathrm{E}q_1}{\mathrm{E}p_2} = \frac{-p_2}{q_1}\frac{\partial q_1}{\partial p_2}$$

$$= \frac{-p_2(6-p_1)}{240 - p_1{}^2 + 6\mathrm{p}_2 - p_1p_2}$$

$p_1 = 5, p_2 = 4$ எனில்

$$\left(\frac{Eq_1}{Ep_2}\right) = \frac{-4(6-5)}{240-25+24-20} = \frac{-4}{219}$$

பயிற்சி 4.4

1) ஒரு பொருளின் உற்பத்திச் சார்பு $P = 10L + 5K - L^2 - 2K^2 + 3KL$ எனில்

(i) தொழிலாளரின் சம்பளத்தைப் பொறுத்த இறுதி நிலை உற்பத்தி

(ii) மூலதனத்தைப் பொறுத்த இறுதி நிலை உற்பத்தி

(iii) இரண்டு இறுதிநிலை உற்பத்திகளையும் $L = 1$ மற்றும் $K = 2$ எனும் பொழுது காண்க.

2) ஒரு நிறுவனத்தின் உற்பத்திச் சார்பு $P = 3K^2L^2 – 2L^4 – K^4$ எனில்

$L \frac{\partial P}{\partial L} + K \frac{\partial P}{\partial K} = 4P$ என நிறுவுக.

3) $Z = y^2 - xy + x^2$ என்பது உற்பத்திச் சார்பு. இதில் x என்பது தொழிலாளர் சம்பளம் மற்றும் y என்பது மூலதனம் எனில் $x = 2$ and $y = 3$ –இல் x மற்றும் y–ன் இறுதிநிலை உற்பத்திகளைக் காண்க.

4) x அலகுகள் தொழிலாளர்களின் சம்பளத்தையும் y – அலகுகள் மூலதனத்தையும் பயன்படுத்தும் ஓர் நிறுவனத்தின் ஒரு குறிப்பிட்ட அலகுகள் உற்பத்தி செய்ய அமையும் உற்பத்தியின் சார்பு $f(x, y) = 100x^{\frac{1}{5}} \quad y^{\frac{4}{5}}$ எனில்

(i) இரண்டு இறுதிநிலை உற்பத்திகளைக் காண்க.

(ii) 243 அலகுகள் தொழிலாளர்களின் சம்பளத்தையும் மற்றும் 32 அலகுகள் மூலதனத்தையும் பயன்படுத்தும் பொழுது ஏற்படக் கூடிய மாற்றத்தைக் கண்டு, உன் விடைக்கு விளக்கம் தருக.

5) $p = 5(L)^{0.7} (K)^{0.3}$ எனில் தொழிலாளர் சம்பளம் மற்றும் மூலதனத்தை பொறுத்து இறுதிநிலை உற்பத்திகளை $L = 10$ மற்றும் $K = 3$ என இருக்கும் பொழுது காண்க.

6) $P = C(L)^{\alpha} (K)^{\beta},$ C என்பது ஓர் மிகை எண் மற்றும் $\alpha + \beta = 1$ எனில் $K \frac{\partial P}{\partial K} + L \frac{\partial P}{\partial L} = P$ என நிறுவுக.

7) A என்ற பொருளின் தேவை $q_1 = 16 – 3p_1 – 2p^2_2$ எனில்,

(i) $\frac{Eq_1}{Ep_1}, \frac{Eq_1}{Ep_2}$ என்ற பகுதி நெகிழ்ச்சிகளைக் காண்க.

(ii) $p_1 = 2$ மற்றும் $p_2 = 1$ –இல் பகுதி நெகிழ்ச்சிகளைக் காண்க.

8) A என்ற பொருளின் தேவை $q_1 = 10 – 3p_1 – 2p_2$ எனில் $p_1 = p_2 = 1$–இல் பகுதி நெகிழ்ச்சிகளைக் காண்க.

9) X என்ற பொருளின் தேவை $q_1 = 15 – p^2_1 – 3p_2$ எனில், $p_1 = 3$ மற்றும் $p_2 = 1$ எனும் பொழுது பகுதி நெகிழ்ச்சிகளைக் காண்க.

10) Y என்ற பொருளின் தேவை $q_1 = 12 – p_1^2 + p_1p_2$ எனில் $p_1 = 10$ மற்றும் $p_2 = 4$ –இல் பகுதி நெகிழ்ச்சிகளைக் காண்க.

பயிற்சி 4.5

ஏற்புடைய விடையை தெரிவு செய்க.

1) $f(x) = 3(x-1)(x-2)$ ஆனது தேக்க நிலை மதிப்பு பெற வேண்டுமாயின் x–ன் மதிப்பு

a) 3 b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{-3}{2}$

2) $f(x) = \cos x$ என்ற சார்பின் மீப்பெருமதிப்பானது

a) 0 b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 1

3) $y = x^3$ எனும் சார்பு எப்பொழுதும்

a) ஒரு கூடும் சார்பு b) ஒரு குறையும் சார்பு

c) ஒரு மாறிலி d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

4) $y = 4 - 2x - x^2$ எனும் வளைவரையானது

a) மேல்நோக்கி குழிவானது b) கீழ்நோக்கி குழிவானது

c) ஒரு நேர்கோடு d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

5) $u = e^{x^2+y^2}$ எனில் $\frac{\partial u}{\partial x}$ ஆனது

a) y^2u b) x^2u c) $2xu$ d) $2yu$

6) $u = \log(e^x + e^y)$ எனில் $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ ஆனது

a) $\frac{1}{e^x+e^y}$ b) $\frac{e^x}{e^x+e^y}$ c) 1 d) $e^x + e^y$

7) $u = x^y$ $(x > 0)$ எனில் $\frac{\partial u}{\partial y}$ ஆனது

a) $x^y \log x$ b) $\log x$ c) $y^x \log x$ d) $\log y^x$

8) $f(x,y) = \dfrac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}}$ எனும் சமபடித்தான சார்பின் படியானது

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{5}$

9) $f(x, y) = 2x + ye^{-x}$ எனில் $f_y(1, 0)$ –ன் மதிப்பு

a) e b) $\frac{1}{e}$ c) e^2 d) $\frac{1}{e^2}$

10) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ எனில் f_{xy} ஆனது

a) $6x$ b) $6y$ c) 2 d) 3

11) இறுதி நிலை வருவாய் ரூ.25 மேலும் விலையைப் பொறுத்து அதன் தேவையின் நெகிழ்ச்சி 2 எனில் சராசரி வருவாயானது

a) ரூ.50 b) ரூ.25 c) ரூ.27 d) ரூ.12.50

12) இறுதிநிலை வருவாய் பூச்சியம் எனில் தேவை நெகிழ்ச்சியானது

a) 1 b) 2 c) – 5 d) 0

13) இறுதிநிலை வருவாய் ரூ.40 மேலும் சராசரி வருவாய் ரூ.60 எனில் விலையைப் பொறுத்து தேவை நெகிழ்ச்சியானது

a) 1 b) 0 c) 2 d) 3

14) $u = x^2 - 4xy + y^2$ எனில் $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} =$

a) 2 b) $2xy$ c) $2x^2y$ d) $2xy^2$

15) $z = x^3 + 3xy^2 + y^3$ எனில் x –இன் இறுதிநிலை உற்பத்தியானது

a) $x^2 + y^2$ b) $6xy + 3$ c) $3(x^2 + y^2)$ d) $(x^2 + y^2)^2$

16) $q_1 = 2000 + 8p_1 - p_2$ எனில் $\dfrac{\partial q_1}{\partial p_1} =$

a) 8 b) – 1 c) 2000 d) 0

17) உற்பத்தி சார்பு $P = 15K - L^2 + 2KL$ எனில் தொழிலாளர் சம்பளத்தைப் பொறுத்த இறுதிநிலை உற்பத்தி $L = 3, K = 4$ ஆக இருக்கும் பொழுது

a) 21 b) 12 c) 2 d) 3

18) ஒரு நிறுவனத்தின் உற்பத்தி சார்பு $P = 3L^2 - 5KL + 2k^2$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது, எனில் அதன் மூலதனத்தைப் பொறுத்த இறுதிநிலை உற்பத்தியானது $L = 2, K = 3$ என இருக்கும் பொழுது

a) 5 b) 3 c) 6 d) 2

19) செலவுச் சார்பு $y = 40 - 4x + x^2$ எப்பொழுது சிறும மதிப்பை அடையும் ?

a) $x = 2$ b) $x = -2$ c) $x = 4$ d) $x = -4$

20) R = 5000 அலகுகள் / வருடம், $C_1 = 20$ பைசாக்கள், $C_3 =$ ரூ.20 எனில் EOQ =

a) 1000 b) 5000 c) 200 d) 100

தொகையீட்டின் பயன்பாடுகள் 5

வரையறுக்கப்பட்ட தொகைகளின் பண்புகள், வடிவ கணித விளக்கம், இறுதி நிலை சார்புகளிலிருந்து மொத்த மற்றும் சராசரி சார்புகளைக் காணுதல் ஆகியனவற்றை இப்பாடப் பகுதியில் காண்போம். மேலும் தேவையின் நெகிழ்ச்சி, விலை கொடுக்கப்படின், தேவையின் சார்பைக் கண்டுபிடித்தல் பற்றியும் காணலாம். இறுதியாக நுகர்வோர் மற்றும் உற்பத்தியாளர்களின் எச்சப்பாடு (surplus) பற்றியும் ஆய்ந்தறிவோம்.

5.1 தொகை நுண்கணிதத்தின் அடிப்படைத் தேற்றம்

$[a, b]$ இல் $f(x)$ ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு. மேலும் $f(x)$ க்கு, $\mathrm{F}(x)$ ஆனது ஒரு முற்படு சார்பு எனில்,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

5.1.1 வரையறுத்த தொகையின் பண்புகள்

1) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

நிரூபணம் :

$\mathrm{F}(x)$ என்பது $f(x)$ இன் முற்படு சார்பு என்க.

$$\int_a^b f(x)\,dx = [\mathrm{F}(x)]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = -[\mathrm{F}(a) - \mathrm{F}(b)] = -\int_b^a f(x)\,dx$$

2) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ இங்கு $a < c < b$.

நிரூபணம் :

a, b, c என்பன மெய்யெண்களைக் குறிக்கட்டும் இங்கு $a < c < b$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) \qquad \text{............. (1)}$$

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \mathrm{F}(c) - \mathrm{F}(a) + \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(c) = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) \qquad \text{............. (2)}$$

(1), (2) லிருந்து $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

3) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

நிரூபணம் :

$a + b - x = t$ என்க. $\quad\therefore -dx = dt$

$x = a$ எனில் $t = b$; $x = b$ எனில் $t = a$

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(a+b-t)\,dt$$

$$= \int_a^b f(a+b-t)\,dt \qquad \text{[பண்பு (1) ன் படி]}$$

$$= \int_a^b f(a+b-x)\,dx \quad \left[\text{since} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt\right]$$

4) $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

நிரூபணம் :

$a - x = t \qquad \therefore -dx = dt$

$x = 0$ எனில் $t = a$; $x = a$ எனில் $t = 0$

$$\therefore \int_0^a f(x)\,dx = \int_a^0 f(a-t)(-dt) = \int_0^a f(a-t)\,dt$$

$$= \int_0^a f(a-x)\,dx$$

5) (i) $f(x)$ ஓர் இரட்டைச் சார்பு எனில், $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

(ii) $f(x)$ ஓர் ஒற்றைச் சார்பு எனில், $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

நிரூபணம் :

(i) $f(x)$ என்பது இரட்டை சார்பு எனில் $f(-x) = f(x)$.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \qquad \text{[பண்பு (2) ன் படி]}$$

$t = -x$ எனில் $dt = -dx$ [முதல் தொகையில் மட்டும்]

$x = -a$ எனில் $t = a$; $x = 0$ எனில் $t = 0$

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_a^0 f(-t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \qquad [f(x) \text{ ஓர் இரட்டைச் சார்பு}]$$

$$= 2\int_0^a f(x)\,dx$$

(ii) $f(x)$ என்பது ஒற்றைச் சார்பு எனில்

$f(-x) = -f(x)$

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

$t = -x$ எனில் $dt = -dx$ [முதல் தொகையில் மட்டும்]

$x = -a$ எனில் $t = a$; $x = 0$ எனில் $t = 0$

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_a^0 f(-t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= -\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \qquad [f(x) \text{ ஓர் ஒற்றைச் சார்பு }]$$

$$= 0$$

எடுத்துக்காட்டு 1

மதிப்பிடுக : $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^3 + x)\,dx$

தீர்வு :

$x^3 + x$ என்பது ஓர் ஒற்றைச் சார்பு

$$\therefore \int_{-1}^{1} (x^3 + x)\,dx = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 2

மதிப்பிடுக : $\displaystyle\int_{-2}^{2} (x^4 + x^2)\,dx$

தீர்வு :

$x^4 + x^2$ ஓர் இரட்டைச் சார்பு

$$\therefore \int_{-2}^{2} (x^4 + x^2)\, dx = 2\int_{0}^{2} (x^4 + x^2)\, dx$$

$$= 2\left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$= 2\left[\frac{2^5}{5} + \frac{2^3}{3}\right] = \frac{272}{15}$$

எடுத்துக்காட்டு 3

மதிப்பிடுக : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin^3 x}}{\sqrt{\sin^3 x} + \sqrt{\cos^3 x}}\, dx$

தீர்வு :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin^3 x}}{\sqrt{\sin^3 x} + \sqrt{\cos^3 x}}\, dx \quad \text{-------(1)}$$

பண்பு (4)–ன் படி, $\displaystyle\int_0^{a} f(x)\, dx = \int_0^{a} f(a-x)\, dx$

மேலும், $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin^3 (\frac{\pi}{2}-x)}}{\sqrt{\sin^3 (\frac{\pi}{2}-x)} + \sqrt{\cos^3 (\frac{\pi}{2}-x)}}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos^3 x}}{\sqrt{\cos^3 x} + \sqrt{\sin^3 x}}\, dx \quad \text{-------(2)}$$

$(1) + (2) \Rightarrow$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin^3 x} + \sqrt{\cos^3 x}}{\sqrt{\sin^3 x} + \sqrt{\cos^3 x}}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin^3 x}}{\sqrt{\sin^3 x} + \sqrt{\cos^3 x}}\, dx = \frac{\pi}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 4

மதிப்பிடுக : $\int_0^1 x(1-x)^5\,dx$

தீர்வு :

பண்பு (4)–ன் படி, $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

$$\therefore \int_0^1 x(1-x)^5\,dx = \int_0^1 (1-x)(1-1+x)^5\,dx = \int_0^1 (1-x)\,x^5\,dx$$

$$= \int_0^1 (x^5 - x^6)\,dx = \left[\frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{7}\right]_0^1 = \frac{1}{42}$$

$$\therefore \int_0^1 x(1-x)^5\,dx = \frac{1}{42}$$

எடுத்துக்காட்டு 5

மதிப்பிடுக : $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$

தீர்வு :

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos x}\,dx}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} \qquad \text{--------(1)}$$

பண்பு (3)–ன் படி, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

$$\therefore I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x)}}{\sqrt{\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x)}+\sqrt{\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x)}}\,dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos(\frac{\pi}{2}-x)}}{\sqrt{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}+\sqrt{\cos(\frac{\pi}{2}-x)}}\,dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}\,dx \qquad \text{--------(2)}$$

$(1) + (2) \Rightarrow$

$$2\,I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dx = [x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{12} \qquad \therefore \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}} = \frac{\pi}{12}$$

பயிற்சி 5.1

வரையறுத்தத் தொகையின் பண்புகளைப் பயன்படுத்தி கீழ்கண்ட தொகைகளின் மதிப்புகளைக் காண்க.

1) $\int_{-10}^{10} (4x^5 + 6x^3 + \frac{2}{3}\,x)\,dx$ 2) $\int_{-2}^{2} (3x^2 + 5x^4)\,dx$

3) $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$ 4) $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$ 5) $\int_0^2 x\sqrt{2-x}\,dx$

6) $\int_0^1 x(1-x)^3\,dx$ 7) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sqrt{\cot x}}$ 8) $\int_0^2 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}$

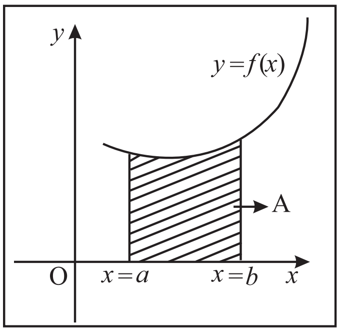
9) $\int_0^{\pi} x\sin^2 x\,dx$ 10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\sin x + b\cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$

5.2 வரையறுத்த தொகையின் வடிவ கணித விளக்கம் வளைவரையால் அமையும் பரப்பு

$y = f(x)$ என்ற சமன்பாட்டின் வரைப்படம் x அச்சு மற்றும் $x = a$, $x = b$ என்ற நிலைத் தொலைவுகள் இவற்றால் அடைபடும் பரப்பளவை

$$A = \int_a^b y\,dx$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx$$ எனக் குறிக்கலாம்.



படம் 5.1

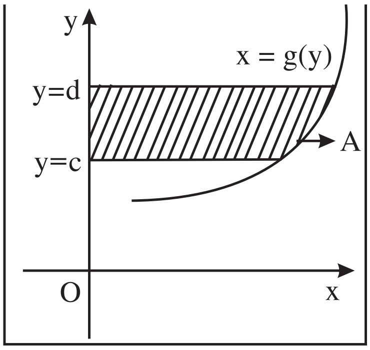
குறிப்பு :

$y = f(x)$ என்ற சமன்பாட்டின் வரைபடம் x அச்சை $x = a$, $x = b$ –க்கு இடைப்பட்ட பகுதியை கடக்கக் கூடாது.

இதே போல், $x = g(y)$ என்ற வளைவரை y அச்சு மற்றும் கிடைத் தொலைவுகள் $y = c$, $y = d$ இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட பரப்பளவு,

$$A = \int_c^d x \; dy$$

$$= \int_c^d g(y) \; dy$$



படம் 5.2

குறிப்பு :

$x = g(y)$ என்ற சமன்பாட்டின் வரைபடம் y அச்சில், $y = c$, $y = d$ க்கு இடைப்பட்ட பகுதியின் வழியே செல்லக் கூடாது.

எடுத்துக்காட்டு 6

$y^2 = 4x$ என்ற பரவளையத்திற்கும், x அச்சு, $x = 1$ மற்றும் $x = 4$ என்ற கோடுகளுக்கும் இடைப்பட்ட பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

தேவையான பரப்பு

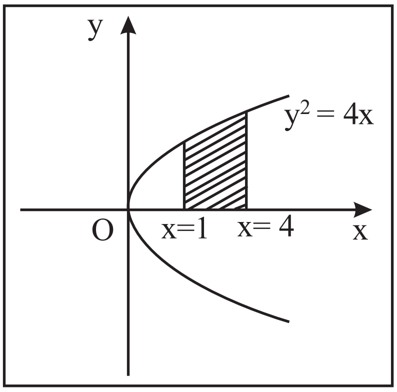
$$A = \int_a^b y \, dx$$

$$= \int_1^4 \sqrt{4x} \, dx$$

$$= 2\int_1^4 \sqrt{x} \, dx = 2\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$$= 2 \times \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right)$$

$= \dfrac{28}{3}$ சதுர அலகுகள்.



படம் 5.3

எடுத்துக்காட்டு 7

$x^2 = 4y$ என்ற பரவளையத்திற்கும், y அச்சு, மற்றும் $y = 2$, $y = 4$ எனும் கோடுகளுக்கும் இடைப்பட்ட பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

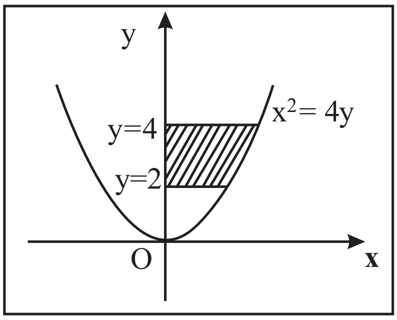
வளைவரையின் கீழ் அமையும் பரப்பு

$$A = \int_c^d x\, dy$$

$$= \int_2^4 \sqrt{4y}\, dy$$

$$= 2\int_2^4 \sqrt{y}\, dy = 2\left[\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_2^4$$

$$= 2\times\frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{32-8\sqrt{2}}{3}$$ சதுர அலகுகள்.



படம் 5.4

எடுத்துக்காட்டு 8

$y = 4x^2 - 8x + 6$ என்ற வளைவரையின், y அச்சு, மற்றும் $x = 2$ இவற்றுக்கு இடையே உள்ள பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

y அச்சின் சமன்பாடு, $x = 0$. எனவே கொடுக்கப்பட்ட வளைவரைக்கும், $x = 0$, $x = 2$ என்ற கோடுகளுக்கும் இடைப்பட்ட தேவையான பரப்பு,

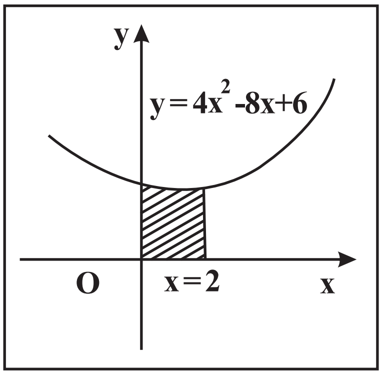
$$A = \int_a^b y\, dx$$

$$= \int_0^2 (4x^2 - 8x + 6)\, dx$$

$$= \left[4\frac{x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} + 6x\right]_0^2$$

$$= \frac{4}{3}(2)^3 - 4(2)^2 + 6(2) - 0$$

$$= \frac{20}{3}$$ சதுர அலகுகள்.



படம் 5.5

எடுத்துக்காட்டு 9

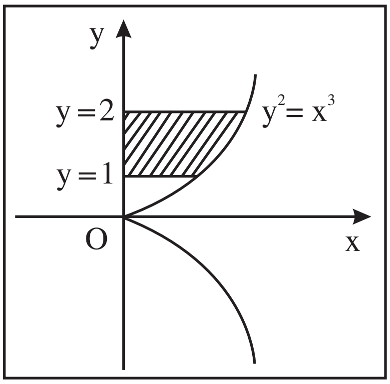
$y^2 = x^3$ எனும் அரைமுப்படி பரவளையம் $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$ எனும் கோடுகளால் அடைபடும் பரப்பினைக் காண்க.

தீர்வு :

தேவையான பரப்பு, $A = \int_c^d x\, dy$

$$= \int_1^2 y^{\frac{2}{3}}\, dy = \left[\frac{y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} \right]_1^2$$

$$= \frac{3}{5}\left[2^{\frac{5}{3}} - 1 \right]$$ சதுர அலகுகள்.



படம் 5.6

எடுத்துக்காட்டு 10

$y = \sin ax$ என்ற வளைவரையின் ஒரு வில்லிற்கும் x அச்சுக்கும் இடைப்பட்ட பரப்பு காண்க.

தீர்வு :

$y = \sin ax$ வளைவரை x அச்சை வெட்டும் புள்ளி

காண $y = 0$ என்க.

எனவே, ஒரு வில்லுக்கான எல்லைகள்,

$x = 0, x = \frac{\pi}{a}$ தேவையான பரப்பு,

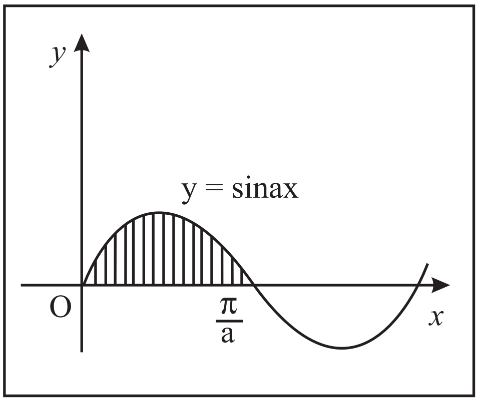
$$A = \int_a^b y\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{a}} \sin ax\, dx$$

$$= \left[-\frac{\cos ax}{a} \right]_0^{\frac{\pi}{a}}$$

$$= -\frac{1}{a}[\cos \pi - \cos 0]$$

$$= \frac{2}{a}$$ சதுர அலகுகள்.



படம் 5.7

எடுத்துக்காட்டு 11

$y^2 = x^2\ (4 - x^2)$ என்ற வளைவரையின் ஒரே ஒரு சுழல் வளையின் பரப்பைக் காண்க. (எல்லைகள் $x = 0, x = 2$).

தீர்வு :

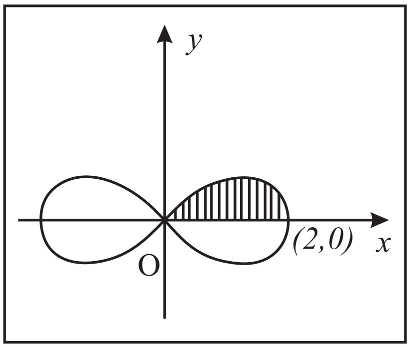
வளைவரையின் சமன்பாடு $y^2 = x^2\ (4 - x^2)$

$\therefore\ y = \pm x\sqrt{4 - x^2}$

தேவையான பரப்பு, $A = \int_a^b y\, dx$

$= 2$ (முதல் கால் பகுதியில் அமையும் பரப்பு)

$= 2\int_0^2 x\sqrt{4 - x^2}\, dx$



படம் 5.8

$\therefore A = 2\int_4^0 \sqrt{t}\ \frac{(-dt)}{2} = \int_0^4 \sqrt{t}\ dt$

$= \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4$

$= \frac{16}{3}$ சதுர அலகுகள்.

$t = 4 - x^2$ என்க.

$dt = -2x dx$

$-\frac{dt}{2} = x\, dx$

$x = 0$ எனில் $t = 4$

$x = 2$ எனில் $t = 0$

பயிற்சி 5.2

1) $y = 4x - x^2$ என்ற வளைவரைக்கும் x அச்சு, $x = 0$ மற்றும் $x = 3$ கோடுகளுக்கும் இடைப்பட்ட பரப்பைக் காண்க.

2) $y = 3x^2 - 4x + 5$ என்ற வளைவரைக்கும் x அச்சு மற்றும் நேர்கோடு $x = 1, x = 2$ இவற்றிற்கிடையே அமையும் பகுதியின் பரப்பைக் காண்க.

3) $y = \frac{1}{1 + x^2}$ எனும் வளைவரைக்கும் $y = 0, x = -1$ மற்றும் $x = 1$ கோடுகளுக்கும் இடைப்பட்ட பரப்பினைக் காண்க.

4) $y = \cos x$ என்ற வளைவரையின் ஒரு வில்லுக்கும், $x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}$ மற்றும் x –அச்சு, இவற்றிற்கு இடையிலுள்ள பரப்பைக் காண்க.

5) $y^2 = x^2\ (1 - x^2)$ என்ற வளைவரையின் ஒரே ஒரு சுழல் வளையின் $x = 0, x = 1$ என்ற புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட பரப்பைக் காண்க.

6) $xy = 1$ என்ற தேவை வளைவரைக்கும் $x = 3$, $x = 9$ எனும் கோடுகளுக்கும் இடைப்பட்ட பரப்புக் காண்க.

7) $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்திற்கும் அதன் செவ்வகலத்திற்கும் இடையேயுள்ள பரப்பைக் காண்க.

8) $x = 3y^2 - 9$ எனும் வளைவரைக்கும் கோடுகள் $x = 0$, $y = 0$ மற்றும் $y = 1$ கோடுகளுக்கும் இடைப்பட்டப் பரப்புக் காண்க.

9) $y = \frac{4}{x}$ என்ற வளைவரையின் x அச்சுக்கு மேல் $x = 1$, $x = 4$ என்ற கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட பரப்பினைக் காண்க.

10) 'a' அலகு ஆரம் கொண்ட வட்டத்தின் பரப்பைக் காண்க.

11) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் பரப்பைக் காண்க.

5.3 பொருளாதாரம் மற்றும் வணிகவியலில் தொகையீட்டின் பயன்பாடுகள்

இதற்கு முந்தைய பாடப்பகுதியில் மொத்த செலவுச் சார்பு, மொத்த வருவாய் சார்பு மற்றும் தேவைச் சார்பு கொடுக்கப்பட்டு இருப்பின் அதற்கான இறுதிநிலை செலவுச் சார்பு, இறுதி நிலை வருவாய் சார்பு, தேவை நெகிழ்ச்சி காணும் முறைகளைக் கண்டோம். அதற்கு மாறாக இறுதிநிலை சார்பு கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் மொத்த சார்பைக் காணும் முறையை இங்கு காணலாம்.

5.3.1 இறுதி நிலை செலவுச் சார்பிலிருந்து (Marginal cost function) செலவு, மற்றும் சராசரி செலவுச் சார்புகளைக் (Average cost function) காணுதல்

C என்பது மொத்த செலவுச் சார்பு. இதில் x என்பது உற்பத்தியின் அளவு எனில் இறுதி நிலைச் செலவுச் சார்பு,

$\text{MC} = \frac{dC}{dx}$. தொகை காணல் என்பது வகைக்கெழு முற்படு என்பதால்

செலவு சார்பு, $C = \int (\text{MC})\, dx + k$

இதில் k என்பது தொகை காணலின் மாறிலி. குறிப்பிட்ட அளவு உற்பத்தியின் செலவு கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் அதனைப் பயன்படுத்தி k-இன் மதிப்பு காணலாம்.

சராசரி செலவுச் சார்பு, $\text{AC} = \frac{C}{x}$, $x \neq 0$

எடுத்துக்காட்டு 12

x அலகுகள் உற்பத்தியின் இறுதி நிலை செலவு $\text{MC} = 6 + 10x - 6x^2$ மற்றும் 1 அலகு உற்பத்திக்கான மொத்த செலவு 15, எனில் மொத்த செலவுச் சார்பு மற்றும் சராசரி செலவு ஆகியவற்றை காண்க.

தீர்வு :

இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு,

$\text{MC} = 6 + 10x - 6x^2$

$$C = \int (MC)\, dx + k$$
$$= \int (6 + 10x - 6x^2)\, dx + k$$
$$= 6x + \frac{10x^2}{2} - \frac{6x^3}{3} + k$$
$$= 6x + 5x^2 - 2x^3 + k \quad .... (1)$$

$x = 1, \quad C = 15$

$\therefore \; (1) \Rightarrow \; 15 = 6 + 5 - 2 + k$

$\Rightarrow \; 15\text{-}9 = k$

$\Rightarrow \; k = 6$

$\therefore$ மொத்த செலவுச் சார்பு $C = 6x + 5x^2 - 2x^3 + 6$

சராசரி செலவுச் சார்பு $AC = \dfrac{C}{x}$

$$= 6 + 5x - 2x^2 + \frac{6}{x}$$

எடுத்துக்காட்டு 13

ஒரு பொருளின் இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு $3x^2 - 2x + 8$. மாறாச் செலவு இல்லை எனில் மொத்த செலவுச் சார்பு மற்றும் சராசரி செலவுச் சார்பு ஆகியவற்றை காண்க.

தீர்வு :

இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு,

$MC = 3x^2 - 2x + 8$

$$C = \int (MC)\, dx + k$$
$$= \int (3x^2 - 2x + 8)\, dx + k$$
$$= x^3 - x^2 + 8x + k \quad .... (1)$$

மாறாச் செலவு இல்லை $\Rightarrow k = 0$ $\quad \therefore \; (1) \Rightarrow C = x^3 - x^2 + 8x$

சராசரி செலவுச் சார்பு $AC = \dfrac{C}{x} = x^2 - x + 8$

எடுத்துக்காட்டு 14

x அலகு தயாரிப்பதற்கான ஒரு பொருளின் இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு $3 - 2x - x^2$. மாறாச் செலவு 200 எனில் மொத்தச் செலவுச் சார்பு மற்றும் சராசரி செலவுச் சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு,

$$\text{MC} = 3 - 2x - x^2$$

$$\text{C} = \int (\text{MC})\, dx + k$$

$$= \int (3 - 2\text{x} \ \ \text{x}^2)\, dx + k$$

$$= 3x - x^2 - \frac{x^3}{3} + k \qquad ....(1)$$

$k = 200$ [கொடுக்கப்பட்டுள்ளது]

$$\therefore (1) \Rightarrow \text{C} = 3x - x^2 - \frac{x^3}{3} + 200$$

சராசரி செலவுச் சார்பு $\text{AC} = \dfrac{\text{C}}{x}$

$$= 3 - x - \frac{x^2}{3} + \frac{200}{x}$$

5.3.2 கொடுக்கப்பட்டுள்ள இறுதிநிலை வருவாய் (Marginal revenue) சார்பிலிருந்து மொத்த வருவாய் (Revenue function) மற்றும் தேவைச் சார்பு (Demand function) ஆகியவற்றைக் காணுதல் :

R என்பது வருவாய் சார்பு எனில் இறுதி நிலை வருவாய்ச் சார்பு $\text{MR} = \dfrac{d\text{R}}{dx}$ இதில் 'x' என்பது உற்பத்தியின் அளவு இருபுறமும் x ஐப் பொருத்து தொகை காண,

வருவாய்ச் சார்பு, $\text{R} = \int (\text{MR})\, dx + k$ இதில் k என்பது ஒரு மாறிலி இம்மாறிலியின் மதிப்பை $x = 0$ மற்றும் R= 0 எனப்பிரதியிட்டு காணலாம். அதாவது உற்பத்தி இல்லாமல் இருக்கும் போது வருவாய் R= 0.

வருவாய் சார்பு, $\text{R} = px$ $\therefore$ தேவைச் சார்பு, $p = \dfrac{\text{R}}{x}$, $(x \neq 0)$

எடுத்துக்காட்டு 15

இறுதி நிலை வருவாய் சார்பு $\text{MR} = 9 - 6x^2 + 2x$ எனில் மொத்த வருவாய் சார்பு மற்றும் தேவைச் சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

இறுதி நிலை வருவாய் சார்பு,

$$\text{MR} = 9 - 6x^2 + 2x$$

$$\text{R}(x) = \int (\text{MR})\, dx + k$$

$$= \int (9 - 6x^2 + 2x)\, dx + k$$

$$= 9x - \frac{6x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + k = 9x - 2x^3 + x^2 + k$$

பொருள்கள் விற்பனை இல்லையெனில் வருவாய் பூச்சியமாகும்

அதாவது $x = 0$, R = 0 $\therefore\ k = 0$

$\therefore$ $R = 9x - 2x^3 + x^2$

தேவைச் சார்பு, $p = \dfrac{R}{x} = 9 - 2x^2 + x$

எடுத்துக்காட்டு 16

இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு MR = 3 – 2x – x^2 எனில் அதன் வருவாய்ச் சார்பு மற்றும் தேவைச் சார்பை காண்க.

தீர்வு :

இறுதி நிலை வருவாய் சார்பு,

$$MR = 3 - 2x - x^2$$

$$R = \int (MR)\, dx + k$$

$$= \int (3 - 2x - x^2)\, dx + k$$

$$= 3x - x^2 - \frac{2x^3}{3} + k$$

$$= 3x - x^2 - \frac{x^3}{3} + k$$

பொருள்கள் விற்பனை இல்லை எனில் R = 0 அதாவது,

$x = 0$ எனில் R = 0 $\therefore\ k = 0$

$\therefore$ $R = 3x - x^2 - \dfrac{x^3}{3}$

$p = \dfrac{R}{x}$,

தேவைச் சார்பு $p = R / x = 3 - x - \dfrac{x^2}{3}$

எடுத்துக்காட்டு 17

ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதிநிலை வருவாய்ச் சார்பு MR = $\dfrac{e^x}{100} + x + x^2$ எனில் அதன் வருவாய்ச் சார்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\text{MR} = \frac{e^x}{100} + x + x^2$$

$$\text{R} = \int (\text{MR})\, dx + k$$

$$= \int \left(\frac{e^x}{100} + x + x^2 \right) dx + k$$

$$= \frac{e^x}{100} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + k$$

பொருள்கள் விற்பனை இல்லையெனில் R = 0

அதாவது $x = 0$ எனில் R = 0.

$$\therefore (1) \Rightarrow \; 0 = \frac{e^0}{100} + 0 + 0 + k \quad \therefore k = -\frac{1}{100}$$

$\therefore$ வருவாய், $\text{R} = \dfrac{e^x}{100} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{1}{100}$

5.3.3 தேவை நெகிழ்ச்சி (Elasticity of demand) கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் வருவாய் மற்றும் தேவைச் சார்பு காணுதல்

தேவை நெகிழ்ச்சி $\eta_d = \dfrac{-p}{x} \dfrac{dx}{dp}$

$$\Rightarrow \frac{-dp}{p} = \frac{dx}{x} \frac{1}{\eta_d}$$

இருபுறமும் தொகை காண,

$$-\int \frac{dp}{p} = \frac{1}{\eta_d} \int \frac{dx}{x}$$

இந்த சமன்பாடு 'p' எனும் தேவைச் சார்பை x –ன் சார்பாக தெரிவிக்கிறது.

வருவாய் சார்பை, $\text{R} = px$ என்ற கோட்பாட்டிலிருந்து காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 18

ஒரு பொருளின் தேவை x எனும் பொழுது விலையைப் பொருத்த தேவை நெகிழ்ச்சி $\dfrac{x-5}{x}$, $x > 5$ எனில், விலை 2 தேவை 7 எனும்பொழுது தேவைச் சார்பு மற்றும் வருவாய்ச் சார்பு காண்க.

தீர்வு :

தேவை நெகிழ்ச்சி, $\eta_d = \dfrac{x-5}{x}$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

i.e. $-\frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = \frac{x-5}{x}$

$\Rightarrow \frac{dx}{x-5} = -\frac{dp}{p}$

இருபுறமும் தொகைக் காண,

$\int\frac{dx}{x-5} = -\int\frac{dp}{p} + \log k$

$\Rightarrow \log(x-5) = -\log p + \log k$

$\Rightarrow \log(x-5) + \log p = \log k$

$\Rightarrow \log p(x-5) = \log k$

$\Rightarrow p(x-5) = k$ .... (1)

$p = 2$ எனில் $x = 7$

$\therefore \quad k = 4$

தேவை சார்பு $p = \frac{4}{x-5}, \ x > 5$

வருவாய், $R = px = \frac{4x}{x-5}$

எடுத்துக்காட்டு 19

ஒரு பொருளின் விலையைப் பொருத்த தேவை நெகிழ்ச்சி ஒரு மாறிலி. அது 2க்கு சமம். தேவை 4 எனும் போது விலை 1 எனில் தேவைச் சார்பு மற்றும் வருவாய்ச் சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

தேவை நெகிழ்ச்சி $\eta_d = 2$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

$\Rightarrow -\frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = 2$

$\Rightarrow \frac{dx}{x} = -2\frac{dp}{p}$

இருபுறமும் தொகை காண

$\Rightarrow \int\frac{dx}{x} = -2\int\frac{dp}{p} + \log k$

$\Rightarrow \log x = -2\log p + \log k$

$\log x + \log p^2 = \log k$

$p^2 x = k$ .... (1)

தேவை **4** எனில் விலை **1.** $x = 4, \; p = 1$

$\therefore \; (1) \Rightarrow 4 = k$ எனவே $p^2 x = 4$ $\quad p^2 = \dfrac{4}{x}$

$p = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$; வருவாய், $R = px = \dfrac{2x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$

எடுத்துக்காட்டு 20

ஒரு நிறுவனத்தில் ஒரு பொருளின் இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு மற்றும் இறுதி நிலை வருவாய் முறையே $C'(x) = 4 + 0.08\,x$ மற்றும் $R'(x) = 12$. உற்பத்தி ஏதும் இல்லாததால் மொத்த செலவு பூச்சியம் எனில் மொத்த இலாபம் காண்க.

தீர்வு :

இறுதி நிலை செலவு,

$MC = 4 + 0.08\,x \Rightarrow C(x) = \int (MC)\, dx + k_1$

$= \int (4 + 0.08\,x)\, dx + k_1 \qquad = 4x + 0.08\dfrac{x^2}{2} + k_1$

$= 4x + 0.04\,x^2 + k_1$ .... (1)

$x = 0$ எனில் $C = 0$

$\therefore \; (1) \Rightarrow 0 = 0 + 0 + k_1$

$\therefore \quad k_1 = 0$

செலவுச் சார்பு $C = 4x + 0.04x^2$ .... (2)

இறுதி நிலை வருவாய்,

$MR = 12$

$\therefore \quad R(x) = \int MR\, dx + k_2$

$= \int 12\, dx + k_2$

$= 12x + k_2$

விற்பனை இல்லை எனில் வருவாய் பூச்சியமாகும்.

அதாவது $x = 0$ எனில் $R = 0$

$\therefore \quad k_2 = 0$

வருவாய், $R = 12x$ .... (3)

மொத்த இலாபச் சார்பு, $P = R - C$

$= 12x - 4x - 0.04x^2$

$= 8x - 0.04x^2$

எடுத்துக்காட்டு 21

ஒரு பொருளின் இறுதிநிலை வருவாய்ச் சார்பு (ரூபாய் ஆயிரங்களில்) $7 + e^{-0.05x}$ (x அலகு என்பது விற்பனையைக் குறிக்கும்) எனில் 100 அலகு விற்பனையில் மொத்த வருவாய் காண்க. ($e^{-5} = 0.0067$)

தீர்வு :

இறுதி நிலை வருவாய்ச் சார்பு $R'(x) = 7 + e^{-0.05\,x}$

எனவே 100 அலகு விற்பனையில் வருவாய் சார்பு,

$$R = \int_0^{100} (7 + e^{-0.05x})\ dx$$

$$= \left[\ 7x + \frac{e^{-0.05\,x}}{-0.05}\ \right]_0^{100}$$

$$= 700 - \frac{100}{5}(e^{-5} - 1)$$

$$= 700 - 20\,(0.0067 - 1)$$

$$= 700 + 20 - 0.134$$

$= (720 - 0.134)$ ஆயிரங்கள்

$$= 719.866 \times 1000$$

வருவாய் $R =$ ரூ. 7,19,866.

எடுத்துக்காட்டு 22

இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு மற்றும் இறுதி நிலை வருவாய்ச் சார்பு முறையே $C'(x) = 20 + \frac{x}{20}$, $R'(x) = 30$ நிலையான செலவு ரூ.200 எனில், மீப்பெரு இலாபத்தைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு :

$$C'(x) = 20 + \frac{x}{20}$$

$$\therefore C(x) = \int C'(x)\,dx + k_1$$

$$= \int \left(20 + \frac{x}{20}\right) dx + k_1$$

$$= 20x + \frac{x^2}{40} + k_1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots. (1)$$

உற்பத்தி பூச்சியம் எனில் நிலையான செலவு ரூ.200

அதாவது $x = 0$, C = 200,

$(1) \Rightarrow \quad 200 = 0 + 0 + k_1 \Rightarrow k_1 = 200$

செலவுச் சார்பு $\quad C(x) = 20x + \frac{x^2}{40} + 200$

மொத்த வருவாய், $\quad R'(x) = 30$

$$\therefore R(x) = \int R'(x)\,dx + k_2$$
$$= \int 30\,dx + k_2$$
$$= 30x + k_2 \quad .... (2)$$

பொருள்கள் ஏதும் விற்பனை ஆகவில்லையெனில் வருவாய் பூச்சியமாகும்.

அதாவது $x = 0$, R = 0 எனில், $\quad (1) \Rightarrow 0 = 0 + k_2$

$\therefore k_2 = 0 \quad \therefore R(x) = 30x$

இலாபம், $\quad$ P = மொத்த வருவாய் – மொத்த செலவு

$$= 30x - 20x - \frac{x^2}{40} - 200 = 10x - \frac{x^2}{40} - 200$$

$$\frac{dP}{dx} = 10 - \frac{x}{20} \;;\; \frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow x = 200$$

$$\frac{d^2P}{dx^2} = \frac{-1}{20} < 0$$

$\therefore \quad x = 200$ –ல் இலாபம் மீப்பெரு மதிப்பை அடையும்.

$\therefore$ மீப்பெரு இலாபம், $P = 2000 - \frac{40000}{40} - 200$ = ரூ.800

எடுத்துக்காட்டு 23

இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு $C'(x) = 10.6x$. இதில் x என்பது உற்பத்தியின் அளவு, மாறாச் செலவு ரூ.50. ஒரு அலகு உற்பத்தியின் விற்பனை விலை ரூ.5 எனில் (i) மொத்த வருவாய்ச் சார்பு (ii) மொத்த செலவுச் சார்பு (iii) இலாப சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

மொத்த செலவுச் சார்பு $\quad C'(x) = 10.6\,x$

$$\therefore C(x) = \int C'(x)\,dx + k = \int 10.6\,x\,dx + k$$

$$= 10.6\frac{x^2}{2} + k$$

$$= 5.3x^2 + k \quad .... (1)$$

மாறாச் செலவு = ரூ. 50

அதாவது $x = 0$ எனில் C = 50 $\quad \therefore k = 50$

$\therefore$ (1) $\Rightarrow$ செலவுச் சார்பு, $C = 5.3\, x^2 + 50$

மொத்த வருவாய் = விற்பனை செய்யப்பட்ட அலகுகள் × ஓர் அலகின் விலை

x என்பது விற்பனை அளவு. ஒரு அலகு விற்பனை விலை ரூ.**5** எனில் வருவாய் $R(x) = 5x$.

(iii) இலாபம், P = மொத்த வருவாய் **–** மொத்த செலவு

$$= 5x - (5.3\, x^2 + 50)$$

$$= 5x - 5.3\, x^2 - 50$$

எடுத்துக்காட்டு 24

ஓர் அலகுக்கான ஒரு பொருளின் இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு $C'(x) = \dfrac{x}{3000} + 2.50$ எனில் 3000 அலகுகள் தயாரிக்க ஆகும் செலவைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு :

இறுதி நிலை செலவு, $C'(x) = \dfrac{x}{3000} + 2.50$

$$\therefore C(x) = \int C'(x)\, dx + k = \int\left(\frac{x}{3000} + 2.50\right) dx + k$$

$$= \frac{x^2}{6000} + 2.50\, x + k$$

$x = 0$ எனில் $C = 0 \;\therefore\; k = 0$

$$\Rightarrow C(x) = \frac{x^2}{6000} + 2.50\, x$$

$x = 3000$ எனில்,

$$C(x) = \frac{(3000)^2}{6000} + 2.50\,(3000)$$

$$= \frac{9000}{6} + 7500 = 1500 + 7500$$

= ரூ.9000

$\therefore$ **3000** அலகுகள் தயாரிக்க ஆகும் செலவு = ரூ.**9000**

எடுத்துக்காட்டு 25

x அலகுகள் உற்பத்தி நிலையில் உள்ள இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு $C'(x) = 85 + \dfrac{375}{x^2}$ எனில் 15 அலகுகள் உற்பத்தி செய்த பின் அதிகப்படியாக 10 அலகுகள் உற்பத்தி செய்யத் தேவையான செலவைக் காண்க.

தீர்வு :

$$C'(x) = 85 + \frac{375}{x^2} \qquad \therefore \quad C(x) = \int C'(x)\,dx + k$$

(15 அலகுகள் உற்பத்திக்கு பின் 10 அலகுகள் அதிகப்படி உற்பத்தி)

$$= \int_{15}^{25} C'(x)\,dx = \int_{15}^{25}\left(85 + \frac{375}{x^2}\right)dx$$

$$= \left[85\,x - \frac{375}{x}\right]_{15}^{25} = \left[85\,(25) - \frac{375}{25}\right] - \left[85\,(15) - \frac{375}{15}\right]$$

$= (2125 - 15) - (1275 - 25) = 2110 - 1250 =$ ரூ. 860

$\therefore$ 15 அலகுகள் உற்பத்தி செய்த பின் 10 அலகுகள் அதிகப்படியாக உற்பத்தி செய்ய ஆகும் செலவு = ரூ.860

பயிற்சி 5.3

1. x அலகு உற்பத்தியின் இறுதிநிலைச் செலவுச் சார்பு $MC = 10 + 24x - 3x^2$ மற்றும் 1 அலகு உற்பத்திக்கான மொத்த செலவு ரூ.25 எனில் மொத்தச் செலவுச் சார்பு மற்றும் சராசரி செலவுச் சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

2. இறுதி நிலைச் செலவுச் சார்பு $MC = \frac{100}{x}$. $C(16) = 100$ எனில் செலவுச் சார்பு மற்றும் சராசரி செலவுச் சார்புகளைக் கண்டுபிடிக்க.

3. ஒரு பொருளின் இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு $MC = 3x^2 - 10x + 3$ இதில் x என்பது உற்பத்தியளவு. 1 அலகு உற்பத்திக்கான செலவு ரூ.7 எனில் மொத்த செலவுச் சார்பு மற்றும் சராசரி செலவுச் சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

4. இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு $MC = 5 - 6x + 3x^2$, இதில் x என்பது உற்பத்தியளவு. 10 அலகுகள் பொருளை தயாரிக்க ஆகும் செலவு ரூ.850 எனில் மொத்த செலவுச் சார்பு மற்றும் சராசரி செலவுச் சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

5. இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு $MC = 20 - 0.04x + 0.003\,x^2$ இதில் x என்பது உற்பத்தியளவு. உற்பத்தியின் நிலையான செலவு ரூ.7,000 எனில் மொத்த செலவுச் சார்பு மற்றும் சராசரி செலவுச் சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

6. இறுதி நிலை வருவாய்ச் சார்பு $R'(x) = 15 - 9x - 3x^2$ எனில் வருவாய்ச் சார்பு மற்றும் சராசரி வருவாய்ச் சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

7. ஒரு பொருளின் இறுதி நிலை வருவாய்ச் சார்பு $MR = 9 - 2x + 4x^2$, எனில் தேவைச் சார்பு மற்றும் வருவாய்ச் சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

8. இறுதி நிலை வருவாய்ச் சார்பு $MR = 100 - 9x^2$ எனில் அதன் மொத்த வருவாய்ச் சார்பு மற்றும் தேவைச் சார்புகளைக் கண்டுபிடிக்க.

9. இறு நிலை வருவாய்ச் சார்பு $MR = 2 + 4x - x^2$ எனில் அதன் மொத்த வருவாய் சார்பு மற்றும் தேவை சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

10. ஒரு பொருளின் இறுதி நிலை வருவாய்ச் சார்பு $MR = 4 - 3x$ எனில் வருவாய் சார்பு மற்றும் தேவை சார்பு ஆகியவற்றை காண்க.

11. ஒரு பொருளின் விலையைப் பொருத்த தேவை நெகிழ்ச்சி $\frac{3-x}{x}$, $x < 3$. x என்பது தேவை எனும்போது விலை p ஆகும். விலை 2 மற்றும் தேவை 1 ஆக இருக்கும் போது தேவைச் சார்பு காண்க. மேலும் வருவாய்ச் சார்பையும் காண்க.

12. தேவை x எனும்போது விலை p உள்ள ஒரு பொருளின் விலையைப் பொருத்த தேவை நெகிழ்ச்சி $\frac{p}{x^2}$ விலை 3 எனும் போது தேவை 2 எனில் தேவைச் சார்பைக் காண்க.

13. தேவை நெகிழ்ச்சி 1 எனில் அதன் தேவைச் சார்பைக் காண்க.

14. ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு $2 + 3e^{3x}$ இதில் x என்பது உற்பத்தி அளவு. நிலையான செலவு ரூ.500 எனில் மொத்தச் செலவு, சராசரி செலவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

15. இறுதி நிலை வருவாய்ச் சார்பு $R'(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x}$, $R(1) = 6$ எனில் வருவாய்ச் சார்பு மற்றும் தேவைச் சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

16. இறுதி நிலை வருவாய் சார்பு $R'(x) = 16 - x^2$ எனில், வருவாய்ச் சார்பு மற்றும் தேவைச் சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

17. ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதி நிலைச் செலவு மற்றும் இறுதி நிலை வருவாய்ச் சார்பு முறையே $C'(x) = 5 + 0.13x$, $R'(x) = 18$. நிலையான செலவு ரூ.120 எனில் இலாப சார்பினைக் காண்க.

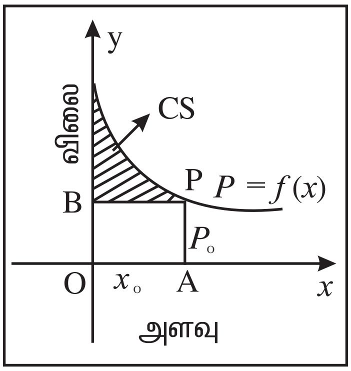
18. ஒரு பொருளின் இறுதி நிலை வருவாய் (ரூபாய் ஆயிரங்களில்) $R'(x) = 4 + e^{-0.03x}$, (x என்பது விற்பனையைக் குறிக்கும்) எனில் 100 அலகு விற்பனையில் மொத்த வருவாயினைக் காண்க. ($e^{-3} = 0.05$).

5.4 நுகர்வோரின் எச்சப்பாடு (Consumers' Surplus)

ஒரு விற்பனைப் பொருளின் விலை p ஆக இருக்கும் போது வாங்கப்படும் அப்பொருளின் அளவைக் குறிப்பது தேவையின் வளைவரை ஆகும். சந்தையில் தற்போதைய விலை p_0 என்க. அந்த விலையில் விற்பனையாகும் பொருளின் அளவு x_0 என்பது தேவை வளைவரையின் அடிப்படையில் தீர்மானிக்கப்படும். எனினும் p_0 விலையை விட அதிகமான விலைக்கு வாங்க விரும்பும் நுகர்வோர்கள் இருக்கக் கூடும். சந்தையில் தற்போதைய நிலவரவிலை p_0 மட்டுமே, இருப்பதால் அத்தகைய நுகர்வோர்கள் ஆதாயமடைவர். இந்த ஆதாயம் ''நுகர்வோர் எச்சப்பாடு'' எனப்படும். இது $p = f(x)$ என்ற தேவை வளைவரைக்குக் கீழ் $p = p_0$ என்ற கோட்டிற்கு மேல் அமையும் பரப்பைக் குறிக்கும்.

நுகர்வோர் எச்சப்பாடு, CS =[தேவைச் சார்புக்கு கீழ் $x = 0$, $x = x_0$ மற்றும் x அச்சுவரையுள்ள மொத்தப் பரப்பு – OAPB என்ற செவ்வகத்தின் பரப்பு]

$$\therefore \text{CS} = \int_0^{x_0} f(x)\,dx - p_0 x_0$$



படம் 5.9

எடுத்துக்காட்டு 26

தேவைச் சார்பு $p = 25 - x - x^2$, $p_0 = 19$ எனில் நுகர்வோர் எச்சப்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

தேவைச் சார்ப $p = 25 - x - x^2$

$p_0 = 19$ எனில் $19 = 25 - x - x^2$

$\Rightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$

$\Rightarrow \quad (x+3)(x-2) = 0$

$\Rightarrow \quad x = 2$ (or) $x = -3$

ஆனால் தேவை குறை எண்ணாக இருக்க முடியாது.

$\therefore \quad x_0 = 2 \qquad \therefore \quad p_0\, x_0 = 19 \times 2 = 38$

நுகர்வோர் எச்சப்பாடு, $\text{CS} = \int_0^{x_0} f(x)\,dx - p_0 x_0$

$$= \int_0^2 (25 - x - x^2)\,dx - 38$$

$$= \left[25x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 - 38$$

$$= \left[25(2) - 2 - \frac{8}{3}\right] - 38 = \frac{22}{3}$$ அலகுகள்

எடுத்துக்காட்டு 27

ஒரு பொருளின் தேவைச் சார்பு $p = 28 - x^2$, $x_0 = 5$ எனில் நுகர்வோர் எச்சப்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

தேவைச் சார்பு, $p = 28 - x^2$

$$x_0 = 5 \; ; \quad p_0 = 28 - 25 = 3 \qquad \therefore p_0 x_0 = 15$$

நுகர்வோர் எச்சப்பாடு, $\text{CS} = \int_0^{x_0} f(x)\,dx - p_0 x_0$

$$= \int_0^5 (28 - x^2)\,dx - 15$$

$$= \left[28x - \frac{x^3}{3}\right]_0^5 - 15$$

$$= \left[28 \times 5 - \frac{125}{3}\right] - 15 = \frac{250}{3} \text{ அலகுகள்}$$

எடுத்துக்காட்டு 28

ஒரு பொருளின் தேவைச் சார்பு $p = \dfrac{12}{x+3}$. வியாபாரச் சந்தையில் விலை $p_0 = 2$ எனும் போது நுகர்வோர் எச்சப்பாடு காண்க.

தீர்வு :

தேவைச் சார்பு, $p = \dfrac{12}{x+3}$ மற்றும் $p_0 = 2$ எனில் $2 = \dfrac{12}{x+3}$

$2x + 6 = 12$ அல்லது $x = 3 \quad \therefore x_0 = 3 \Rightarrow p_0 x_0 = 6$

$$\text{CS} = \int_0^{x_0} f(x)\,dx - p_0 x_0 \quad = \int_0^3 \frac{12}{x+3}\,dx - 6$$

$$= 12\left[\log(x+3)\right]_0^3 - 6$$

$$= 12[\log 6 - \log 3] - 6 = 12 \log \frac{6}{3} - 6 = 12 \log 2 - 6$$

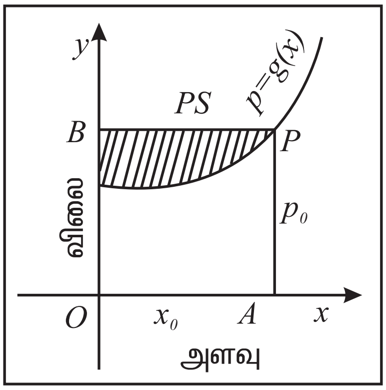
5.5 உற்பத்தியாளரின் எச்சப்பாடு (PRODUCERS' SURPLUS)

சந்தை விலையில் வழங்கும் ஒரு பொருளின் விலை p ஆக இருக்கும் போது வழங்கப்படும் அப்பொருளின் அளவைக் குறிப்பது அளிப்பு வளைவரை ஆகும். சந்தையில் தற்போதைய விலை p_0 என்க. அந்த விலையில் வழங்கப்படும் பொருளின்அளவு x_0 என்பது அளிப்பு வளைவரையில் அடிப்படையில் தீர்மானிக்கப்படும் எனினும் p_0 விலையை விட குறைவான விலைக்கு வழங்க முன்வரும் உற்பத்தியாளர்கள் இருக்கக்கூடும். சந்தையில் தற்போதைய நிலவர விலை p_0 மட்டுமே இருப்பதால் அத்தகைய உற்பத்தியாளர்கள் ஆதாயம் அடைவர். இந்த ஆதாயமே ‘‘உற்பத்தியாளர் எச்சப்பாடு’’ எனப்படும். இது $p = g(x)$ என்ற அளிப்பு வளைவரைக்கு மேல் $p = p_0$ என்ற கோட்டிற்கு கீழ் அமையும் பரப்பைக் குறிக்கும்.

உற்பத்தியாளர் எச்சப்பாடு,

PS = [செவ்வகம் OAPB–ன் பரப்பு – அளிப்பு வளைவரைக்கு கீழ் $x = 0$, $x = x_0$ மற்றும் x - அச்சு வரையுள்ள பரப்பு]

$$\therefore \text{ PS } = p_0 x_0 - \int_0^{x_0} g(x)\,dx$$



படம் 5.10

எடுத்துக்காட்டு 29

ஒரு பொருளின் அளிப்புச் சார்பு $p = x^2 + 4x + 5$ இதில் x என்பது அளிப்பு ஆகும். விலை $p = 10$ எனும் பொழுது உற்பத்தியாளர் எச்சப்பாடு காண்க.

தீர்வு :

அளிப்புச் சார்பு $p = x^2 + 4x + 5$

$p_0 = 10$ எனில்,

$10 = x^2 + 4x + 5 \quad \Rightarrow \; x^2 + 4x - 5 = 0$

$\Rightarrow \quad (x + 5)(x - 1) = 0 \;\Rightarrow\; x = -5 \;\text{ or }\; x = 1$

அளிப்பு குறை எண்ணாக இருக்க முடியாது.

$\therefore \quad x = 1$

$\therefore p_0 = 10,\; x_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad p_0 x_0 = 10$

உற்பத்தியாளர் எச்சப்பாடு

$$\text{PS} = p_0 x_0 - \int_0^{x_0} g(x)\,dx$$

$$= 10 - \int_0^1 (x^2 + 4x + 5)\,dx$$

$$= 10 - \left[\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 5x\right]_0^1$$

$$= 10 - \left[\frac{1}{3} + 2 + 5\right] = \frac{8}{3} \text{ அலகுகள்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 30

அளிப்புச் சார்பு $p = x^2 + x + 3$ –க்கு $x_0 = 4$ எனும் பொழுது உற்பத்தியாளரின் எச்சப்பாடு காண்க.

தீர்வு :

அளிப்புச் சார்பு $p = x^2 + x + 3$

$x_0 = 4$ எனும் போது, $p_0 = 4^2 + 4 + 3 = 23$

$\therefore p_0 x_0 = 92$

உற்பத்தியாளர் எச்சப்பாடு,

$$\text{PS} = p_0 x_0 - \int_0^{x_0} g(x)\,dx = 92 - \int_0^4 (x^2 + x + 3)\,dx$$

$$= 92 - \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x\right]_0^4$$

$$= 92 - \left[\frac{64}{3} + \frac{16}{2} + 12\right] = \frac{152}{3}$$ அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 31

அளிப்புச் சார்பு $p = 3 + x^2$ க்கு விலை $p = 12$ எனும் போது உற்பத்தியாளரின் எச்சப்பாடு காண்க.

தீர்வு :

அளிப்புச் சார்பு $p = 3 + x^2$

$p_0 = 12$ எனில் $12 = 3 + x^2$ அல்லது $x^2 = 9$ or $x = \pm 3$

அளிப்பு குறை எண்ணாக இருக்க முடியாது.

$x = 3$, i.e. $x_0 = 3$,

$\therefore p_0 x_0 = 36.$

உற்பத்தியாளர் எச்சப்பாடு

$$\text{PS} = p_0 x_0 - \int_0^{x_0} g(x)\,dx$$

$$= 36 - \int_0^3 (3 + x^2)\,dx = 36 - \left[3x + \frac{x^3}{3}\right]_0^3$$

$$= 36 - \left[9 + \frac{27}{3} - 0\right] = 18$$ அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 32

ஒரு போட்டி வியாபாரத்தில் தேவை மற்றும் அளிப்புச் சார்புகள் முறையே $p_d = 16 - x^2$ மற்றும் $p_s = 2x^2 + 4$ சமான விலையில் நுகர்வோர் எச்சப்பாடு மற்றும் உற்பத்தியாளர் எச்சப்பாடு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

ஒரு போட்டி வியாபாரத்தில் வியாபாரச் சந்தை சமான நிலை காண, தேவை மற்றும் அளிப்புச் சார்பு ஆகியவற்றை சமப்படுத்த வேண்டும்.

$\Rightarrow \quad 16 - x^2 = 2x^2 + 4 \qquad \Rightarrow 3x^2 = 12$

$\Rightarrow \quad x^2 = 4 \qquad \Rightarrow x = \pm 2$ ஆனால் $x = -2$ சாத்தியமில்லை

$\therefore \quad x = 2 \qquad \Rightarrow \; x_0 = 2$

$\therefore \quad p_0 = 16 - (2)^2 \; = 12$

$\therefore \quad p_0 x_0 = 12 \times 2 = 24$

நுகர்வோரின் எச்சப்பாடு

$$\text{CS} = \int_0^{x_0} f(x)\,dx - p_0 x_0$$

$$= \int_0^{2} (16 - x^2)\,dx - 24$$

$$= \left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 - 24 = 32 - \frac{8}{3} - 24 = \frac{16}{3} \text{ அலகுகள்.}$$

உற்பத்தியாளர் எச்சப்பாடு

$$\text{PS} = p_0 x_0 - \int_0^{x_0} g(x)\,dx$$

$$= 24 - \int_0^{x_0} (2x^2 + 4)\,dx \quad = 24 - \left[\frac{2x^3}{3} + 4x\right]_0^2$$

$$= 24 - \frac{2 \times 8}{3} - 8 = \frac{32}{3} \text{ அலகுகள்.}$$

பயிற்சி 5.4

1) தேவைச் சார்பு $p = 35 - 2x - x^2$ எனில் தேவை $x_0 = 3$ எனும் போது நுகர்வோர் எச்சப்பாடு காண்க.

2) ஒரு பொருளின் தேவைச் சார்பு $p = 36 - x^2$, $p_0 = 11$ எனில் நுகர்வோர் எச்சப்பாடு காண்க.

3) ஒரு பொருளின் தேவைச் சார்பு $p = 10 - 2x$ எனில் (i) $p = 2$ (ii) $p = 6$ எனும் போது நுகர்வோர் எச்சப்பாடு காண்க.

4) $p = 80 - 4x - x^2$ என்ற தேவைச் சார்பின் $p = 20$ எனும் போது நுகர்வோர் எச்சப்பாடு காண்க.

5) அளிப்புச் சார்பு $p = 3x^2 + 10$ மற்றும் $x_0 = 4$ எனில் உற்பத்தியாளர் எச்சப்பாட்டைக் காண்க.

6) அளிப்பு விதி $p = 4 - x + x^2$ –க்கு விலை $p = 6$ எனும் போது உற்பத்தியாளர் எச்சப்பாட்டைக் காண்க.

7) ஒரு பொருளின் அளிப்புச் சார்பு $p = 3 + x$ எனில் (i) $x_0 = 3$ (ii) $x_0 = 6$ எனும் போது உற்பத்தியாளர் எச்சப்பாடு காண்க.

8) ஒரு பொருளின் அளிப்புச் சார்பு $p = \frac{x^2}{2} + 3$ மற்றும் $p_0 = 5$ எனில் உற்பத்தியாளர் எச்சப்பாட்டைக் காண்க.

9) தேவைச் சார்பு $p_d = 16 - 2x$ மற்றும் அளிப்புச் சார்பு, $p_s = x^2 + 1$ எனில் வியாபாரச் சந்தையின் சமான நிலையின் கீழ் உற்பத்தியாளர் மற்றும் நுகர்வோர் எச்சப்பாடுகளைக் காண்க.

10) சரியான போட்டியின் கீழ் ஒரு பொருளின் தேவை மற்றும் அளிப்பு விதிகள் ஆகியன முறையே $p_d = 23 - x^2$ மற்றும் $p_s = 2x^2 - 4$ விலை சமான நிலையில் இருக்கும் போது நுகர்வோர் எச்சப்பாடு, மற்றும் உற்பத்தியாளர் எச்சப்பாடுகளைக் காண்க.

11) சரியான போட்டியின் கீழ் ஒரு பொருளின் தேவை மற்றும் அளிப்பு விதிகள் ஆகியன முறையே $p_d = 56 - x^2$ மற்றும் $p_s = 8 + \frac{x^2}{3}$ விலை சமான நிலையில் இருக்கும் போது நுகர்வோர் எச்சப்பாடு மற்றும் உற்பத்தியாளர் எச்சப்பாடுகளைக் காண்க.

12) ஒரு பொருளின் தேவை மற்றும் அளிப்பு ஆகியவற்றின் சார்புகள் $p_d = 20 - 3x - x^2$ மற்றும் $p_s = x - 1$ எனில் வியாபாரச் சந்தையின் சமான நிலையின் கீழ் உற்பத்தியாளர் மற்றும் நுகர்வோர் எச்சப்பாடுகளைக் காண்.

13) தேவைச் சார்பு $p_d = 40 - x^2$ மற்றும் அளிப்புச் சார்பு $p_s = 3x^2 + 8x + 8$ எனில் வியாபாரச் சந்தையில் சமான நிலையின் கீழ் உற்பத்தியாளர் மற்றும் நுகர்வோர் எச்சப்பாடுகளைக் காண்.

14) ஒரு பொருளின் தேவை மற்றும் அளிப்புச் சார்பு $p_d = 15 - x$ மற்றும் $p_s = 0.3x + 2$ எனில் வியாபாரச் சந்தையில் சமான நிலையின் கீழ் உற்பத்தியாளர் மற்றும் நுகர்வோர் எச்சப்பாடுகளைக் காண்க.

15) தேவை மற்றும் அளிப்புச் சார்புகளின் வளைவரைகள் $p_d = \frac{16}{x+4}$ மற்றும் $p_s = \frac{x}{2}$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. வியாபாரச் சந்தையில் சமான நிலையின் கீழ் நுகர்வோர் மற்றும் உற்பத்தியாளர் எச்சப்பாடுகளைக் காண்க.

பயிற்சி 5.5

ஏற்புடைய விடையைத் தெரிவு செய்க.

1) $f(x)$ ஒரு ஒற்றை சார்பு எனில் $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx =$

a) 1 b) 2a c) 0 d) a

2) $f(x)$ ஒரு இரட்டைச் சார்பு எனில் $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx =$

a) $2\int_{0}^{a} \boldsymbol{f(x)\, dx}$ b) $\int_{0}^{a} f(x)\, dx$ c) –2a d) 2a

3) $\int_{-3}^{3} x\, dx =$

a) 0 b) 2 c) 1 d) –1

4) $\int_{-2}^{2} x^4\, dx =$

a) $\frac{32}{5}$ b) $\frac{64}{5}$ c) $\frac{16}{5}$ d) $\frac{8}{5}$

5) $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx =$

a) 0 b) –1 c) 1 d) $\frac{}{2}$

6) $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx =$

a) 2 b) –2 c) –1 d) 1

7) $y = f(x)$ என்ற வளைவரை x-அச்சு மற்றும் நிலைத் தொலைவுகள் $x = a$, $x = b$ இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட பரப்பு

a) $\int_{a}^{b} y\, dx$ b) $\int_{a}^{b} y\, dy$ c) $\int_{a}^{b} x\, dy$ d) $\int_{a}^{b} \pi x\, dx$

8) $x = g(y)$ என்ற வளைவரை, y அச்சு மற்றும் கோடுகள், $y = c$, $y = d$ இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட பரப்பு

a) $\int_{c}^{d} y\, dy$ b) $\int_{c}^{d} x\, dy$ c) $\int_{c}^{d} y\, dx$ d) $\int_{c}^{d} x\, dx$

9) $y = e^x$ என்ற வளைவரைக்கும் x - அச்சு, கோடுகள் $x = 0$ மற்றும் $x = 2$ இவற்றால் அடைபடும் பரப்பு

a) $e^2 - 1$ b) $e^2 + 1$ c) e^2 d) $e^2 - 2$

10) $y = x$, y அச்சு மற்றும் $y = 1$ எனும் கோடுகளால் அடைபடும் பரப்பு

a) 1　　b) $\frac{1}{2}$　　c) log 2　　d) 2

11) $y = x + 1$ எனும் கோடு, x –அச்சு, $x = 0$ மற்றும் $x = 1$ இவற்றால் அடைபடும் பரப்பு

a) $\frac{1}{2}$　　b) 2　　c) $\frac{3}{2}$　　d) 1

12) $xy = 1$ என்ற வளைவரைக்கும் x - அச்சு, $x = 1$ மற்றும் $x = 2$ க்கும் இடைப்பட்ட பரப்பு

a) log 2　　b) $\log \frac{1}{2}$　　c) 2 log 2　　d) $\frac{1}{2}\log 2$

13) இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு MC = $3e^{3x}$ எனில் செலவுச் சார்பு

a) $\frac{e^{3x}}{3}$　　b) $e^{3x} + k$　　c) $9e^{3x}$　　d) $3e^{3x}$

14) இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு MC = 2 - 4x , எனில் செலவுச் சார்பு

a) $2x - 2x^2 + k$　　b) $2 - 4x^2$　　c) $\frac{2}{x} - 4$　　d) $2x - 4x^2$

15) இறுதி நிலை வருவாய் சார்பு MR = 15 - 8x எனில் வருவாய் சார்பு

a) $15x - 4x^2 + k$　　b) $\frac{15}{x} - 8$　　c) -8　　d) $15x - 8$

16) இறுதி நிலை வருவாய் சார்பு $R'(x) = \frac{1}{x+1}$ எனில் வருவாய் சார்பு

a) $\log|x + 1| + k$　　b) $-\frac{1}{(x+1)}$　　c) $\frac{1}{(x+1)^2}$　　d) $\log \frac{1}{x+1}$

17) தேவைச் சார்பு $p = f(x)$ –ல் x_0 தேவை, p_0 –விலை எனும் போது நுகர்வோர் எச்சப்பாடு

a) $\int_0^{x_0} f(x)\,dx - p_0x_0$　　b) $\int_0^{x_0} f(x)\,dx$

c) $p_0x_0 - \int_0^{x_0} f(x)\,dx$　　d) $\int_0^{p_0} f(x)\,dx$

18) அளிப்புச் சார்பு $p = g(x)$ –ல் x_0 அளிப்பு p_0 விலை எனும் போது உற்பத்தியாளர் எச்சப்பாடு

a) $\int_0^{x_0} g(x)\,dx - p_0x_0$　　b) $p_0x_0 - \int_0^{x_0} g(x)\,dx$

c) $\int_0^{x_0} g(x)\,dx$　　d) $\int_0^{p_0} g(x)\,dx$

வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் 6

நடைமுறை பிரச்சினைகளை கணிதவடிவில் நெறிமுறைப்படுத்தும் பொழுது, அவை வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகளின் வடிவம் பெறும். பொருளாதாரம், வணிகவியல், பொறியியல் போன்ற துறைகளில் ஏற்படும் சிறப்பு நிகழ்வுகளைக் குறிக்கும் மாதிரிகள் (models) வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளாக அமைகின்றன. அத்தகைய நிகழ்வுகளில் பெரும்பாலானவை சிக்கலாகவும் மற்றும் கடினமாகவும் இருக்கும். ஆனால் இவற்றை வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டின் மூலம் வெளிப்படுத்தினால் அவைப்பற்றி ஆராய்தல் மிக எளிதாகிவிடும். எடுத்துக்காட்டாக x உற்பத்தி பொருட்களுக்கான செலவின் மாறுவீதம் செலவிற்கு நேரிடை விகிதமாயிருப்பின் இந்நிகழ்வை கீழ்வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டினால் குறிக்கலாம்.

$\frac{dC}{dx} = k\,C$, இங்கு C என்பது செலவு மற்றும் k ஒரு மாறிலி இதன் தீர்வானது $C = C_0\, e^{kx}$ $x = 0$, என இருப்பின் $C = C_0$ ஆகும்.

6.1 வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை அமைத்தல் (Formation of differential equations)

ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சாரா மாறிகள், ஒரு சார்ந்த மாறி மற்றும் இவற்றின் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட வகைக்கெழுக்களை கொண்டு அமைக்கப்படும் சமன்பாடு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஆகும்.

வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகள் இரு வகைப்படும்.

(i) ஒரேயொரு சாரா மாறியும், சாரா மாறியைப் பொறுத்த சார்ந்த மாறியின் வகைக்கெழு இவைகளை தன்னகத்தே கொண்ட சமன்பாடு **சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.**

(ii) ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட சாரா மாறிகள் மற்றும் சார்ந்த மாறிகளின் பகுதி வகைக் கெழுக்கள் இவற்றைக் கொண்டு அமையும் சமன்பாட்டிற்கு **பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு** (Partial differential equation) என்று பெயர்.

கீழ்வருவன வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளுக்கு எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

(1) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$ (2) $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 3y = 0$ (3) $\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}} = k\frac{d^2y}{dx^2}$

(4) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ (5) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ (6) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x + y$

மேலே உள்ள சமன்பாடுகளில்

(1), (2) மற்றும் (3) இவைகள் சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளாகும்.

(4), (5) மற்றும் (6) இவைகள் பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளாகும்.

இப்பாடத்தில் சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைப் பற்றி மட்டுமே படிப்போம்.

6.1.1 வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை மற்றும் படி

(Order and Degree of a Differential Equation)

ஒரு வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டில் இடம் பெற்றிருக்கும் வகைக்கெழுவின் மிக உயர்ந்த வரிசையே அச்சமன்பாட்டின் **வரிசை** (order) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3+3\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2+7\frac{dy}{dx}-4y=0$$

என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை கருத்தில் கொள்க. $\frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^2y}{dx^2}$ மற்றும் $\frac{dy}{dx}$ இவற்றின் வரிசைகள் முறையே 3, 2 மற்றும் 1 ஆகும். எனவே மிக உயர்ந்த வரிசை 3. ஆகையால் மேற்கண்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை 3 என அறியலாம்.

ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் இடம் பெற்றிருக்கும் மிக உயர்ந்த வரிசை கொண்ட வகைக்கெழுவின் படியே அச்சமன்பாட்டின் படி (degree) எனப்படும். இதனைக் காண, வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் உள்ள வகைக்கெழுக்களின் அடுக்குக் குறி, பின்னமாக இல்லாமலிருக்குமாறு உறுதி செய்து கொள்ள வேண்டும்.

$x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3+3\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2+7\frac{dy}{dx}-4y=0$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் படி 2 என அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1

பின்வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் வரிசை படி காண்க.

(i) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-4\left(\frac{dy}{dx}\right)+y=3e^x$ (ii) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3+7\left(\frac{dy}{dx}\right)^4=3\sin x$

(iii) $\frac{d^2x}{dy^2}+a^2x=0$ (iv) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-3\frac{d^3y}{dx^3}+7\frac{d^2y}{dx^2}+4\left(\frac{dy}{dx}\right)-\log x=0$

(v) $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=4x$ (vi) $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{2}{3}}=\frac{d^2y}{dx^2}$

(vii) $\frac{d^2y}{dx^2}-\sqrt{\frac{dy}{dx}}=0$ (viii) $\sqrt{1+x^2}=\frac{dy}{dx}$

தீர்வு :

வரிசை மற்றும் படி முறையே

(i) 1 ; 3 (ii) 2 ; 3 (iii) 2 ; 1 (iv) 3 ; 1
(v) 1 ; 2 (vi) 2 ; 3 (vii) 2 ; 2 (viii) 1 ; 1

குறிப்பு

(v), (vi) மற்றும் (vii) இவற்றின் படி மற்றும் வரிசைகளைக் காண்பதற்கு முன்பு வகைக்கெழுக்களின் பின்ன அடுக்குகளை நீக்க வேண்டும்.

6.1.2 வளைவரைகளின் குடும்பம் (Family of curves)

சில சமயங்களில், வளைவரைகளின் குடும்பத்தை ஒரேயொரு சமன்பாட்டின் மூலம் குறிக்கலாம். வளைவரைக் குடும்பத்தின் சமன்பாட்டில் c என்ற யாதேனும் ஒரு மாறிலி இருக்கும். c–ன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு வளைவரைக் குடும்பத்தின் வெவ்வேறு வளைவரைகளைப் பெறலாம். இங்கு c –ஐ **துணை அலகு** (parameter) என்போம். இது ஏதேனும் ஒரு மாறிலியாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

(i) $y = mx$ என்ற சமன்பாடு ஆதிவழிச் செல்லும் நேர்க்கோடுகளின் குடும்பத்தைக் குறிக்கிறது. இங்கு m ஒரு துணை அலகு.

(ii) ஆதியை மையமாகக் கொண்ட பொது மைய வட்டங்களின் குடும்பம் $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற சமன்பாட்டால் குறிக்கப்படுகிறது. இங்கு a ஒரு துணை அலகு.

(iii) ஒரு தளத்தில் அமையும் நேர்கோட்டுக் குடும்பத்தின் சமன்பாடு $y = mx + c$ என்ற சமன்பாட்டால் குறிக்கப்படுகிறது. இங்கு m மற்றம் c என்பன துணை அலகுகள்.

6.1.3 சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை அமைத்தல் (Formation of Ordinary Differential Equations)

$y = mx + \lambda$ ----(1) என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுக. இங்கு m ஒரு மாறிலி. λ ஒரு துணை அலகு ஆகும். இச்சமன்பாடு சமமான சாய்வுகளைக் கொண்ட இணைக் கோடுகளின் குடும்பத்தைக் குறிக்கும்.

(1) x –யைப் பொறுத்து வகையிட, $\dfrac{dy}{dx} = m$ என கிடைக்கும். இது நேர்க்கோட்டு குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் குறிக்கிறது. இதே போன்று $y = Ae^{5x}$ என்ற சமன்பாடு $\dfrac{dy}{dx} = 5y$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை உருவாக்கும்.

மேற்குறிப்பிட்ட சார்புகள் ஒரே ஒரு துணை அலகைக் கொண்ட குடும்பங்களைக் குறிக்கும். ஒவ்வொரு குடும்பத்திற்கும் ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு உண்டு. இவ்வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டை பெற குடும்பத்தின் சமன்பாட்டை x யைப் பொறுத்து, துணை அலகை மாறிலியாகக் கருதி வகையீடு காண வேண்டும். வகையீடு செய்த சமன்பாடு துணை அலகுகளின்றி இருக்கும் பொழுது, குடும்பத்தின் வகைக்கெழு சமன்பாடாக அமையும்.

குறிப்பு

(i) இரு துணை அலகுகள் கொண்ட குடும்பத்தின் சமன்பாட்டை இருமுறை வகையீடு செய்து துணை அலகுகளை நீக்கி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை பெறலாம்.

(i) பெறப்படும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசையானது வளைவரைக் குடும்பத்தின் சமன்பாட்டில் உள்ள மாறிலிகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 2

y = A cos 5x + B sin 5x என்ற வளைவரைக் குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை அமைக்க. இங்கு A மற்றும் B துணை அலகுகளாகும்.

தீர்வு :

$y = \mathrm{A}\cos 5x + \mathrm{B}\sin 5x$ (கொடுக்கப்பட்டது)

$$\frac{dy}{dx} = -5\mathrm{A}\sin 5x + 5\mathrm{B}\cos 5x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -25(\mathrm{A}\cos 5x) - 25(\mathrm{B}\sin 5x) = -25y$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} + 25y = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 3

$y = \mathrm{ae}^{3x} + \mathrm{be}^{x}$ என்ற வளைவரைக் குடும்பத்தின் வகைக்கெழு சமன்பாட்டை காண்க. a மற்றும் b என்பன துணை அலகுகளாகும்.

தீர்வு :

$$y = ae^{3x} + be^{x} \qquad ......(1)$$

$$\frac{dy}{dx} = 3ae^{3x} + be^{x} \qquad ......(2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 9ae^{3x} + be^{x} \qquad ......(3)$$

$$(2)-(1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} - y = 2ae^{3x} \qquad ......(4)$$

$$(3)-(2) \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 6ae^{3x} = 3\left(\frac{dy}{dx} - y\right)$$ [(4) யை பயன்படுத்தி]

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 4

$y = a$ cos $(mx + b)$, a மற்றும் b களை ஏதேனும் மாறிலிகளாகக் கொண்ட வளைவரைக் குடும்பத்தின் வகைக்கெழு சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

$$y = a\cos(mx + b) \qquad .... (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = -ma\sin(mx+b)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -m^2 a\cos(mx+b) = -m^2 y \quad \text{[(1) யை பயன்படுத்தி]}$$

$\therefore \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} + m^2 y = 0$ என்பது தேவையான வகைக்கெழு சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5

***y = a* tan *x* + *b* sec *x* என்ற சமன்பாட்டில் உள்ள மாறிலிகள் *a* மற்றும் *b* இவற்றை நீக்குவதன் மூலம் வகைகெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.**

தீர்வு :

$$y = a\tan x + b\sec x$$

இருபுறமும் $\cos x$ –ஆல் பெருக்க,

$$y\cos x = a\sin x + b$$

x –யைப் பொறுத்து வகையீடு செய்ய,

$$y(-\sin x) + \frac{dy}{dx}\cos x + a\cos x$$

$$\Rightarrow \quad -y\tan x + \frac{dy}{dx} = a \qquad \text{......(1)}$$

(1) யை x யைப் பொறுத்து வகையீடு செய்ய

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\tan x - y\sec^2 x = 0$$

பயிற்சி 6.1

1) கீழ்வருவனவற்றின் வரிசை மற்றும் படி காண்க.

(i) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + y = \cos x$ (ii) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 3\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 5\dfrac{dy}{dx} = 0$

(iii) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \sqrt{\dfrac{dy}{dx}} = 0$ (iv) $\left(1 + \dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{dy}{dx}$

(v) $\left(1 + \dfrac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ (vi) $\sqrt{1 + \dfrac{d^2y}{dx^2}} = x\dfrac{dy}{dx}$

(vii) $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ (viii) $3\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 - 3y = e^x$

(ix) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$ (x) $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2} + 1\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{3}}$

2) கீழ்வருவனவற்றின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(i) $y = mx$ (ii) $y = cx - c + c^2$

(iii) $y = mx + \dfrac{a}{m}$, இங்கு m ஒரு ஏதேனும் மாறிலியாகும்

(iv) $y = mx + c$ இங்கு m மற்றும் c என்பன ஏதேனும் மாறிலிகளாகும்.

3) x, y அச்சுக்களைத் தொலைத் தொடுகோடுகளாகக் கொண்ட அதிபரவளைய குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

4) ஆதிவழிச் செல்லும் மற்றும் x அச்சின் மீது மையங்களைக் கொண்ட $x^2 + y^2 + 2gx = 0$ எனும் வட்டங்களின் குடும்பத்தைக் குறிக்கும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

5) $y^2 = 4a\ (x + a)$ இன் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கு a ஒரு துணை அலகு.

6) $y = a \cos 3x + b \sin 3x$ –ன் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கு a மற்றும் b என்பன துணை அலகுகளாகும்.

7) $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற பொது மைய வட்டங்களின் வகைக்கெழு சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கு a ஒரு துணை அலகு.

6.2 வரிசை ஒன்றுடைய வகைக்கெழு சமன்பாடுகள் (First order differential equations)

6.2.1 வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு (Solution of first order differential equation)

கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழு சமன்பாட்டினை நிறைவு செய்யுமாறு அமையும் மாறிகளுக்கிடையேயான வகைக்கெழுக்களற்ற சார்பு அச்சமன்பாட்டின் **தீர்வு** ஆகும்.

தீர்விலுள்ள மாறிலிகளின் எண்ணிக்கையானது, வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசைக்குச் சமமாக இருப்பின், அத்தீர்வினை சமன்பாட்டின் **பொதுத் தீர்வு** (General solution) என்போம்.

பொதுத்தீர்வில் உள்ள மாறிலிகளுக்கு குறிப்பிட்ட மதிப்புகள் கொடுத்து பெறப்படும் தீர்விற்கு **சிறப்புத் தீர்வு** (Particular solution) என்று பெயர் எடுத்துக்காட்டாக,

வகைக்கெழுச் சமன்பாடு	பொதுத் தீர்வு	சிறப்புத் தீர்வு
(i) $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$	y = tan x + c (c ஒரு மாறிலியாகும்)	$y = \tan x - 5$
(ii) $\frac{dy}{dx} = x^2 + 2x$	$y = \frac{x^3}{3} + x^2 + c$	$y = \frac{x^3}{3} + x^2 + 8$
(iii) $\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 0$	$y = \mathrm{A}e^{3x} + \mathrm{B}e^{-3x}$	$y = 5e^{3\mathrm{x}} - 7e^{-3\mathrm{x}}$

6.2.2 பிரிக்கத்தக்க மாறிகள் (Variables Separable)

வரிசை 1 மற்றும் படி 1 ஆக உள்ள வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டில் மாறிகள் தனித்தனியே இரு பிரிவுகளாக அமையுமாறு பிரிக்கத் தக்க வகையிலிருப்பின், அவைகள் பிரிக்கத்தக்க மாறிகள் என அழைக்கப்படும்.

மாறிகள் பிரிக்கப்பட்ட பின்பு, வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $f(x)\ dx + g(y)\ dy = 0$ என்ற வடிவைப் பெறும். இங்கு $f(x)$ என்பது x யை மட்டும் மாறியாகக் கொண்டதும் $g(y)$ என்பது y மட்டுமே மாறியாகக் கொண்டதுமான சார்புகளாக அமையும்.

இதன் பொதுத் தீர்வானது $\int f(x)\ dx + \int g\ (y)\ dy = c$ ஆகும். (c ஒரு தொகையிடலின் மாறிலியாகும்)

எடுத்துக்காட்டாக, $x\frac{dy}{dx} - y = 0$ என்ற சமன்பாட்டை கருதுக.

$x\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ (மாறிகளை பிரிப்பதால்)

$\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + k$ k, ஒரு தொகையிடலின் மாறிலி

$\Rightarrow \quad \log y = \log x + k$

k ஆனது $-\infty$ முதல் ∞ வரையிலான மதிப்புகளைப் பெறலாம்.

k–ன் மதிப்பு $-\infty$ முதல் ∞ வரை அமைவதைப் போன்று $\log c$ –ன் மதிப்பும் அமைவதால் தொகையிடலின் மாறிலி k–க்கு பதிலாக $\log c$ என்ற மாறிலியை பொதுத் தீர்வில் மாற்றியமைப்பதின் மூலம் தீர்வு புதுப்பொலிவு பெறுகிறது.

$$\log y - \log x = \log c \Rightarrow \log\left(\frac{y}{x}\right) = \log c$$

(அ–து) $\frac{y}{x} = c \quad \Rightarrow \quad y = cx$

குறிப்பு

(i) வரிசை ஒன்றுடைய நேரியல் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் y இல்லாமலிருப்பின் இவ்வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $\frac{dy}{dx} = f(x)$ என்ற வடிவைப் பெற்று இதன் தீர்வு $y = \int f(x)\, dx + c$ என அமையும்.

(ii) x இல்லாமலிருக்கையில், $\frac{dy}{dx} = g(y)$ என்ற வடிவைப்பெற்று, தீர்வானது $\int \frac{dy}{g(y)} = \int dx + c$ என அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 6

$xdy + ydx = 0$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

தீர்வு :

$xdy + ydx = 0,$ [xy ஆல் வகுக்க]

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0. \text{ Then } \int \frac{dy}{y} + \int \frac{dx}{x} = c_1$$

$$\therefore \quad \log y + \log x = \log c \Rightarrow xy = c$$

குறிப்பு

(i) $xdy + ydx = 0 \Rightarrow d(xy) = 0 \quad \Rightarrow xy = c,$

(ii) $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2} \quad \therefore \int \frac{ydx - xdy}{y^2} = \int d\left(\frac{x}{y}\right) + c = \frac{x}{y} + c$

எடுத்துக்காட்டு 7

தீர்க்க : $\frac{dy}{dx} = e^{3x+y}$

தீர்வு :

$$\frac{dy}{dx} = e^{3x} e^{y} \Rightarrow \frac{dy}{e^y} = e^{3x} dx$$

$$\int e^{-y} dy = \int e^{3x} dx + c$$

$$\Rightarrow -e^{-y} = \frac{e^{3x}}{3} + c \Rightarrow \frac{e^{3x}}{3} + e^{-y} = c$$

எடுத்துக்காட்டு 8

தீர்வு காண்க : $(x^2 - ay)\, dx = (ax - y^2)\, dy$

தீர்வு :

கொடுத்த சமன்பாட்டிலிருந்து

$$x^2dx + y^2dy = a(xdy + ydx)$$
$$\Rightarrow \quad x^2dx + y^2dy = a\,d\,(xy)$$
$$\therefore \quad \int x^2dx + \int y^2dy = a\int d\,(xy) + c$$
$$\Rightarrow \quad \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} = a(xy) + c$$

$x^3 + y^3 = 3axy + c$ என்பது பொதுத்தீர்வு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9

தீர்வு காண்க : $(\sin x + \cos x)\,dy + (\cos x - \sin x)\,dx = 0$

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை கீழ்வருமாறு எழுத :

$$dy + \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}dx = 0$$
$$\Rightarrow \quad \int dy + \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}dx = c$$
$$\Rightarrow \quad y + \log(\sin x + \cos x) = c$$

எடுத்துக்காட்டு 10

$x = \sqrt{2}$ எனும் பொழுது $y = \dfrac{\pi}{4}$ எனில் $x\dfrac{dy}{dx} + \cos y = 0$ தீர்க்க.

தீர்வு : $\quad x\,dy = -\cos y\,dx$

$\therefore \quad \int \sec y\;dy = -\int \frac{dx}{x} + k,$ k தொகையிடலின் மாறிலி

$\log(\sec y + \tan y) + \log x = \log c$, இங்கு $k = \log c$

$\Rightarrow \quad x(\sec y + \tan y) = c$

$x = \sqrt{2}, y = \frac{\pi}{4},$ எனில்

$$\sqrt{2}\left(\sec\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{4}\right) = c \text{ or } c = \sqrt{2}(\sqrt{2}+1) = 2 + \sqrt{2}$$

$\therefore \quad$ சிறப்புத் தீர்வானது $x(\sec y + \tan y) = 2 + \sqrt{2}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 11

ஒரு தானியக் கிடங்கை பராமரிப்பதற்கான செலவு c மற்றும் அதில் சேமித்து வைக்கக் கூடிய பொருளின் அளவு x ஆகியவற்றை தொடர்புபடுத்தும் சமன்பாடு $\dfrac{dC}{dx} = ax + b$, $x = 0$ எனும் போது $C = C_0$ எனில் C –ஐ x –ன் சார்பாகக் காண்க.

தீர்வு : $\dfrac{dC}{dx} = ax + b \quad \therefore dC = (ax+b)\,dx$

$$\int dC = \int (ax+b)\,dx + k,$$

$$\Rightarrow \; C = \frac{ax^2}{2} + bx + k, \; (k \text{ ஒரு மாறிலி}) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$x = 0$ எனில் $C = C_0 \; \therefore (1) \Rightarrow C_0 = \frac{a}{2}(0) + b(0) + k$

$$\Rightarrow \; k = C_0$$

எனவே செலவுச் சார்பு $C = \dfrac{a}{2}x^2 + bx + C_0$

எடுத்துக்காட்டு 12

ஒரு வளைவரையின் எந்த ஒரு புள்ளியிலும் அதன் சாய்வு அப்புள்ளியின் y ஆயத்தொலையின் இருமடங்கின் தலைகீழி ஆகும். வளைவரை (4, 3) வழிச் செல்லுகிறது எனில் அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

ஒரு புள்ளியிடத்து வளைவரையின் சாய்வு என்பது அப்புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சாய்வாகும்.

$$\therefore \; \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y} \quad \Rightarrow 2y\,dy + dx$$

$$\int 2y\;dy = \int dx + c \;\; \Rightarrow y^2 = x + c$$

வளைவரை (4, 3) என்ற புள்ளி வழியே செல்வதால்

$9 = 4 + c \Rightarrow c = 5$

$\therefore$ வளைவரையின் சமன்பாடு $y^2 = x + 5$.

பயிற்சி 6.2

1) தீர்க்க :

(i) $\dfrac{dy}{dx} + \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$ (ii) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$ (iii) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y+2}{x-1}$

2) தீர்க்க : $(1 - e^x)\sec^2 y\,dy + 3e^x \tan y\,dx = 0$

3) தீர்க்க : (i) $\dfrac{dy}{dx} = 2xy + 2ax$ (ii) $x\,(y^2 + 1)\,dx + y\,(x^2 + 1)\,dy = 0$

4) P (x, y) என்ற புள்ளியிடத்து ஒரு வளைவரையின் சாய்வு $3x^2 + 2$ ஆகும். வளைவரை $(1, -1)$ வழிச்செல்லுமெனில் அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

5) (x, y) என்ற ஒரு புள்ளியில் அதன் சாய்வு அப்புள்ளியின் x ஆயத்தொலைவுக்கு நேர் விகிதசமத்தில் உள்ளது. வளைவரை $(0, 0)$ மற்றும் $(1, 1)$ எனும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லுகிது எனில் அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

6) x அலகுகளின் உற்பத்திக்கான இறுதிநிலை செலவுச் சார்பு MC = $e^{3x + 7}$. உற்பத்தி ஏதும் இல்லாத போது மொத்தச் செலவு இல்லை எனக் கொண்டு, மொத்தச் செலவு மற்றும் சராசரிச் செலவு சார்புகளைக் காண்க.

6.2.3 சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (Homogeneous differential equations)

$f(x, y)$ மற்றும் $g(x, y)$ என்பன ஒவ்வொன்றும் ஒரே படியுள்ள சமபடித்தான சார்புகளெனில் $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ என்பது x, y இல் ஒரு சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஆகும்.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 y}{x^3 + y^3}$$

மற்றும் $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x}$

என்பன வரிசை ஒன்று உடைய சமபடித்தான வகைக்கெழு சமன்பாடுகளுக்கு சில எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

6.2.4 வரிசை ஒன்று உடைய சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை தீர்க்கும் முறை (Solving first order homogeneous differential equations)

$y = vx$ எனில் $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ ஆகும். எனவே வரிசை ஒன்று உடைய சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடானது மாறிகளைப் பிரிக்கக் கூடிய சமன்பாட்டின் வடிவம் பெறும். தொகையீடுதலுக்குப் பிறகு v ஐ $\frac{y}{x}$ என்று மாற்றி தீர்வைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 13

பின்வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை தீர்க்க. $(x^2 + y^2)\, dx = 2xy\,dy$.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$ என்று எழுதலாம். .... (1)

இது ஒரு சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஆகும்.

$y = vx$ என்க $\therefore \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ .... (2)

(1) ஐ **(2)** இல் பிரதியிட

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2 + v^2x^2}{2x(vx)} = \frac{1+v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2v} - v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v^2}{dv}$$

$$2v$$

மாறிகளைப் பிரிப்பதால்,

$$\frac{2v}{1-v^2}dv = \frac{dx}{x} \text{ or } \int\frac{-2v}{1-v^2}dv = \int\frac{-dx}{x} + c_1$$

$$\log(1-v^2) = -\log x + \log c \quad \left[\because \int\frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log f(x)\right]$$

or $\quad \log(1 - v^2) + \log x = \log c$

$\Rightarrow (1 - v^2)\, x = c$

v ஐ $\dfrac{y}{x}$ என மாற்றினால்

$\left(1 - \dfrac{y^2}{x^2}\right)x = c$ அல்லது $x^2 - y^2 = cx$ என அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 14

தீர்க்க : $(x + y)\, dy + (x - y)\, dx = 0$

தீர்வு :

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{x-y}{x+y}\right) \qquad \text{.... (1)}$$

$y = vx$ என்க. $\therefore \dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$

எனவே $\nu + x\dfrac{d\nu}{dx} = -\dfrac{x-\nu x}{x+\nu x} \Rightarrow \nu + x\dfrac{d\nu}{dx} = -\dfrac{1-\nu}{1+\nu}$

(அ–து) $x\dfrac{dv}{dx} = -\left(\dfrac{1-v}{1+v} + v\right) \quad \Rightarrow x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{-(1-v+v+v^2)}{1+v}$

$$\therefore \quad \frac{1+v}{1+v^2}dv = -\frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow \quad \int\frac{dv}{1+v^2}dv + \frac{1}{2}\int\frac{2v}{1+v^2}dv = \int -\frac{1}{x}dx + c$$

$$\tan^{-1}v + \frac{1}{2}\log(1+v^2) = -\log x + c$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right)=-\log x+c$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)-\frac{1}{2}\log x^2=-\log x+c$$

$$\therefore \quad \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)=c$$

எடுத்துக்காட்டு 15

இலாபம் p மற்றும் கோரப்படும் தேவை அளவு x ஆகியவை $\frac{dp}{dx}=\frac{2p^3-x^3}{3xp^2}$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கின்றன. $x = 10$ எனும் போது $p = 20$ எனில், இலாபம் மற்றும் கோரப்படும் தேவை ஆகியவற்றுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\frac{dp}{dx}=\frac{2p^3-x^3}{3xp^2} \qquad .....(1)$$

என்பது x, p இல் சமபடித்தான வகைக்கெழு சமன்பாடு ஆகும்.

$p = vx$ எனில் $\frac{dp}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$

(1) $\quad \Rightarrow v+x\frac{dv}{dx}=\frac{2v^3-1}{3v^2} \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{2v^3-1}{3v^2}-v$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=-\left[\frac{1+v^3}{3v^2}\right]$$

$$\frac{3v^2}{1+v^3}dv=-\frac{dx}{x} \quad \therefore \quad \int\frac{3v^2}{1+v^3}dv=-\int\frac{dx}{x}=k$$

$\log(1+v^3)=-\log x+\log k,$ இங்கு k ஒரு மாறிலி

$$\log(1+v^3)=\log\frac{k}{x} \quad \Rightarrow \quad 1+v^3=\frac{k}{x}$$

v ஐ $\frac{p}{x}$ என மாற்றினால்,

$$\Rightarrow \quad x^3+p^3=kx^2$$

ஆனால் $x = 10$ எனில் $p = 20$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது,

$\therefore \quad (10)^3+(20)^3=k(10)^2 \Rightarrow k=90 \qquad \therefore \; x^3+p^3=90x^2$

(அ-து) $p^3 = x^2(90-x)$ என்பது தேவையான தொடர்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 16

பொருட்களின் கோருதல் அளவு q அதிகரிக்கும் பொழுது, கோருதல் மற்றும் அவைகளை இருப்பு வைப்பதற்குமான செலவு C–ன் அதிகரிக்கும் வீதம் $\frac{dC}{dq} = \frac{C^2 + 2Cq}{q^2}$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டினால் தரப்பட்டுள்ளது. C மற்றும் q க்கு இடையே உள்ள தொடர்பை C = 1 மற்றும் q = 1 எனும் நிலையில் காண்க.

தீர்வு :

C மற்றும் q–ல் உள்ள சமபடித்தான சமன்பாடு

$$\frac{dC}{dq} = \frac{C^2 + 2Cq}{q^2} \qquad \text{....(1)}$$

C = vq என்க $\quad \therefore \ \frac{dC}{dq} = v + q\frac{dv}{dq}$

$$(1) \Rightarrow v + q\frac{dv}{dq} = \frac{v^2q^2 + 2vq^2}{q^2} = v^2 + 2v$$

$$\Rightarrow \quad q\frac{dv}{dq} = v^2 + v = v(v+1) \Rightarrow \frac{dv}{v(v+1)} = \frac{dq}{q}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{(v+1) - v}{v(v+1)} dv = \int \frac{dq}{q} + k,$$ k ஒரு மாறிலி

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} - \int \frac{dv}{v+1} = \int \frac{dq}{q} + \log k,$$

$$\Rightarrow \quad \log v - \log(v+1) = \log q + \log k$$

$$\Rightarrow \quad \log \frac{v}{v+1} = \log qk$$ அல்லது $\frac{v}{v+1} = kq$

v = $\frac{C}{q}$ எனும் போது, $C = kq(C+q)$

C = 1 மற்றும் q = 1 எனும் போது

$$C = kq(C+q) \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$\therefore \quad C = \frac{q(C+q)}{2}$ என்பது C மற்றும் qவிற்கு இடையிலான தொடர்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 17

மொத்த உற்பத்திச் செலவு y மற்றும் உற்பத்தியின் அளவு x ஆகியவை $(6x^2 + 2y^2)\, dx - (x^2 + 4xy)\, dy = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் வாயிலாக இறுதி நிலை உற்பத்தி செலவுடன் தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளன. $x = 1$ எனும் பொழுது $y = 2$ எனில், மொத்த செலவிற்கும் உற்பத்திக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பினைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டுள்ளது $(6x^2 + 2y^2)\, dx = (x^2 + 4xy)\, dy$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{6x^2 + 2y^2}{x^2 + 4xy} \qquad ....(1)$$

இது x மற்றும் y –யில் உள்ள சமபடித்தான சமன்பாடு ஆகும்.

$y = vx$ என்க. $\therefore \dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$

$$(1) \Rightarrow \quad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{6x^2 + 2y^2}{x^2 + 4xy} \Rightarrow \frac{1 + 4v}{6 - v - 2v^2}\, dv = \frac{1}{x}\, dx$$

$\therefore \qquad -\displaystyle\int \frac{-1 - 4v}{6 - v - 2v^2}\, dv = \int \frac{1}{x}\, dx + k,$ k ஒரு மாறிலி

$$\Rightarrow \qquad -\log(6 - v - 2v^2) = \log x + \log k = \log kx$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{6 - v - 2v^2} = kx$$

$\Rightarrow \quad x = c(6x^2 - xy - 2y^2)$ இங்கு $c = \dfrac{1}{k}$ மற்றும் $v = \dfrac{y}{x}$

x = 1 மற்றும் y = 2 எனில், $\quad 1 = c(6 - 2 - 8) \Rightarrow c = -\dfrac{1}{4}$

$$\therefore \qquad 4x = (2y^2 + xy - 6x^2)$$

பயிற்சி 6.3

1) பின்வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(i) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} - \dfrac{y^2}{x^2}$ (ii) $2\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} - \dfrac{y^2}{x^2}$

(iii) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - 2xy}{x^2 - 2xy}$ (iv) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$

2) பொருட்களின் கோருதல் அளவு q அதிகரிக்கும் பொழுது, கோருதல் மற்றும் அவைகளை இருப்பு வைப்பதற்குமான செலவு C–ன் அதிகரிக்கும் வீதம் $\dfrac{dC}{dq} = \dfrac{C^2 + q^2}{2Cq}$

எனும் வகைக்கெழு சமன்பாட்டினால் தரப்பட்டுள்ளது. C மற்றும் q க்கு இடையே உள்ள தொடர்பை C = 4 மற்றும் $q = 2$ எனும் நிலையில் காண்க.

3) மொத்த உற்பத்திச் செலவு y மற்றும் உற்பத்தியின் அளவு x ஆகியவை $\frac{dy}{dx} = \frac{24x^2 - y^2}{xy}$ என்ற வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் வாயிலாக இறுதி நிலை உற்பத்தி செலவுடன் தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளது. $x = 2$ எனும் பொழுது $y = 4$ எனில், மொத்த செலவுச் சார்பு யாது ?

6.2.5 வரிசை ஒன்றுடைய நேரியல் வகைக்கெழு சமன்பாடு

(First order linear differential equation)

வரிசை ஒன்று உள்ள வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் உள்ள சார்ந்த மாறி மற்றும் அதன் வகைக் கெழுக்களின் படி 1 மற்றும் இவ்விரண்டின் பெருக்கல் பலன் இல்லாமலும் இருக்குமாயின் அச்சமன்பாடு வரிசை ஒன்றுடைய நேரியியல் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு எனப்படும்.

வரிசை 1 உள்ள நேரியியல் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வடிவம் $\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q}$ என அமையும். இங்கு P மற்றும் Q என்பன x ல் மட்டுமே உள்ள சார்புகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) $\frac{dy}{dx} + 3y = x^3$; இங்கு P = 3, Q = x^3

(ii) $\frac{dy}{dx} + y\tan x = \cos x, \quad \mathrm{P} = \tan x, \mathrm{Q} = \cos x$

(iii) $\frac{dy}{dx}x - 3y = xe^x, \quad \mathrm{P} = -\frac{3}{x},\ \mathrm{Q} = e^x$

(iv) $(1+x^2)\frac{dy}{dx} + xy = (1+x^2)^3,\ \mathrm{P} = \frac{x}{1+x^2},\ \mathrm{Q} = (1+x^2)^2$

என்பன வரிசை 1 உள்ள நேரியியல் வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகளாகும்.

6.2.6 தொகையீட்டுக் காரணி (I.F)

கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாடு, நேரிடையாக தொகையீடு காணத்தக்க வகையில் இல்லாமல் இருக்கலாம். ஆனால் இதை ஒரு சார்பின் மூலம் பெருக்குவதால் தொகையீடு காணத்தக்கதாக மாறலாம். இத்தகைய சார்பிற்கு **தொகையீட்டுக் காரணி Integrating Factor (I.F)** என்று பெயர். ஆகையால், வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை நேரிடையாக தொகையீடு காணத்தக்க வகையில் மாற்றுவதற்கு உதவும் சார்பு தொகையீட்டுக் காரணியாகும்.

$\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q}$ ..... (1) எனும் சமன்பாட்டிற்கு $e^{\int Pdx}$ என்பது தொகையீட்டுக் காரணி என நிறுவுவோம். இங்கு P மற்றும் Q என்பன x இல் சார்புகள்.

$$\frac{d}{dx}(ye^{\int \mathrm{P}dx}) = \frac{dy}{dx}e^{\int \mathrm{P}dx} + y\frac{d}{dx}(e^{\int \mathrm{P}dx})$$
$$= \frac{dy}{dx}e^{\int \mathrm{P}dx} + ye^{\int \mathrm{P}dx}\frac{d}{dx}\int \mathrm{P}dx$$
$$= \frac{dy}{dx}e^{\int \mathrm{P}dx} + ye^{\int \mathrm{P}dx}\ \mathrm{P} = \left(\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y\right)e^{\int \mathrm{P}dx}$$

(1) யை $e^{\int Pdx}$ ஆல் பெருக்க

$$\left(\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y\right)e^{\int \mathrm{P}dx} = \mathrm{Q}e^{\int \mathrm{P}dx}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(ye^{\int \mathrm{P}dx}) = \mathrm{Q}\,e^{\int \mathrm{P}dx}$$

தொகையீடு செய்ய,

$$y\,e^{\int \mathrm{P}dx} = \int \mathrm{Q}\,e^{\int \mathrm{P}dx}\,dx + c \qquad ....(2)$$

ஆகையால் $e^{\int Pdx}$ என்பது தொகையீட்டுக் காரணியாகும்.

குறிப்பு

(i) $\mathrm{e}^{\log f(x)} = f(x)$ when $f(x) > 0$

(ii) $\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q}$ –ல் $\mathrm{Q} = 0$ எனில் பொதுத் தீர்வு $y\,(\mathrm{I.F}) = c$, இங்கு c ஒரு மாறிலி.

(iii) $\frac{dx}{dy} + \mathrm{P}x = \mathrm{Q}$ என்ற சமன்பாட்டின் P மற்றும் Q என்பன y –யின் சார்புகளாயின் இச்சமன்பாட்டின் (I.F) $e^{\int \mathrm{P}dy}$ ஆகும். மற்றும் தீர்வானது $x\,(\mathrm{I.F}) = \int Q(\mathrm{I.F})\,dy + c$ என அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 18

$(1 - x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 1$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

தீர்வு :

$$(1 - x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 1$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{x}{1 - x^2}y = \frac{1}{1 - x^2}$$

இது $\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q}$, என்ற வடிவில் உள்ளது.

இங்கு $\mathrm{P} = \frac{-x}{1 - x^2}$; $\mathrm{Q} = \frac{1}{1 - x^2}$

$$\text{I.F} \quad = e^{\int \text{P}dx} = e^{\int \frac{-x}{1-x^2}dx} = \sqrt{1-x^2}$$

பொதுத் தீர்வு :

$$y\,(\text{I.F}) = \int \text{Q}\ (\text{I.F})\ dx + c$$

$$y\sqrt{1-x^2} = \int \frac{1}{1-x^2}\sqrt{1-x^2}\,dx + c$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + c$$

$$y\sqrt{1-x^2} = \sin^{-1} x + c$$

எடுத்துக்காட்டு 19

தீர்க்க $\dfrac{dy}{dx} + ay = e^x$ (இங்கு $a \neq -1$)

தீர்வு :

இங்கு $\text{P} = a$; $\text{Q} = e^x$

$\therefore$ $\text{I.F} = e^{\int Pdx} = e^{ax}$

பொதுத் தீர்வு

$$y(\text{I.F}) = \int \text{Q}\ (\text{I.F})\ dx + c$$

$$\Rightarrow \quad y\ e^{ax} = \int e^x e^{ax} dx + c = \int e^{(a+1)x} dx + c$$

$$y\ e^{ax} = \frac{e^{(a+1)x}}{a+1} + c$$

எடுத்துக்காட்டு 20

தீர்க்க $\cos x\ \dfrac{dy}{dx} + y \sin x = 1$

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை கீழ்வரும் முறையில் எழுத

$$\frac{dy}{dx} + y\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} \quad \text{or} \quad \frac{dy}{dx} + y \tan x = \sec x$$

இங்கு $\text{P} = \tan x$; $\text{Q} = \sec x$

$$\text{I.F} = e^{\int \tan x\ dx} = e^{\log \sec x} = \sec x$$

பொதுத் தீர்வு

$$y(\text{I.F}) = \int \text{Q (I. F)}\, dx + c$$

$$y \sec x = \int \sec^2 x \; dx + c$$

$$\therefore \quad y \sec x = \tan x + c$$

எடுத்துக்காட்டு 21

ஒரு வங்கி, முதலீட்டின் உடனடி மாறு வீதமும், அம்முதலின் ஓராண்டு வட்டியும் சம அளவில் இருக்குமாறு கணக்கிட்டு வட்டியளிக்கிறது. வருடத்திற்கு 6.5% தொடர் கூட்டு வீதத்தில் ரூ.50,000–த்தை அவ்வங்கியில் ஒருவர் முதலீடு செய்தால் 10 வருடங்களுக்கு பின்னர் அவர் பெறும் முதிர்வு தொகையைக் கணக்கிடுக. ($e^{.65} = 1.9155$)

தீர்வு :

t என்ற காலத்தில் $\text{P}(t)$ என்பது கணக்கில் இருக்கும் தொகை எனக் கொள்க. பணத்தின் வளர்ச்சியைக் குறிக்கும் வகைக்கெழு சமன்பாடாது

$$\frac{d\text{P}}{dt} = \frac{6.5}{100}\text{P} = 0.065\text{P} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d\text{P}}{\text{P}} = \int (0.065)\; dt + c$$

$$\log_e \text{P} = 0.065t + c \qquad \therefore \; \text{P} = e^{0.065t}\; e^c$$

$$\text{P} = c_1 \; e^{0.065t} \qquad \text{...........(1)}$$

$t = 0, \; \text{P} = 50000.$ எனில்

$$(1) \Rightarrow \quad 50000 = c_1\, e^0 \quad \text{or} \quad c_1 = 50000$$

$$\therefore \quad \text{P} = 50000\, e^{0.065t}$$

$t = 10,$ எனில் $\text{P} = 50000\, e^{0.065 \times 10} = 50000\, e^{0.65}$

$= 50000 \times (1.9155) =$ ரூ.95,775.

எடுத்துக்காட்டு 22

தீர்க்க: $\dfrac{dy}{dx} + y \cos x = \dfrac{1}{2} \sin 2x$

தீர்வு :

இங்கு $\text{P} = \cos x \quad ; \quad \text{Q} = \frac{1}{2} \sin 2x$

$$\int \text{P}\, dx = \int \cos x \; dx = \sin x$$

$$\text{I.F} = e^{\int \text{P} dx} = e^{\sin x}$$

பொதுத் தீர்வு

$$\begin{aligned} y(\text{I.F}) &= \int \text{Q}\,(\text{I.F})\,dx + c \\ &= \int \frac{1}{2}\sin 2x \,.\, e^{\sin x} dx + c \\ &= \int \sin x \cos x \,.\, e^{\sin x} dx + c \\ &= \int t\, e^{t}\; dt + c = e^{t}(t-1) + c \\ &= e^{\sin x}(\sin x - 1) + c \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 23

தயாரிப்பு நிறுவனம் ஒன்றில் உபகரணங்களை இயக்கவும் பராமரிக்கவும் ஆகும் செலவு C மற்றும் அடுத்தடுத்த இரு பழுது பார்த்தலுக்குரிய இடைவெளிக் காலம் m ஆகியவற்றை $m^2 \frac{dC}{dm} + 2mC = 2$, $m = 2$ எனில் $C = 4$ எனும் சமன்பாட்டினால் குறித்தால், C மற்றும் m களுக்கிடையேயான தொடர்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$m^2 \frac{dC}{dm} + 2mC = 2 \;\Rightarrow\; \frac{dC}{dm} + \frac{2C}{m} = \frac{2}{m^2}$$

இது வரிசை 1 உள்ள நேரியியல் வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

$\frac{dy}{dx} + \text{P}y = \text{Q}$, இங்கு $\text{P} = \frac{2}{m}$; $\quad \text{Q} = \frac{2}{m^2}$

$$\text{I.F} = e^{\int \text{P}dx} = e^{\int \frac{2}{m} dm} = e^{\log m^2} = m^2$$

பொதுத் தீர்வு :

$\text{C (I. F)} = \int \text{Q (I. F)}\; dm + k$, $\quad k$ ஒரு மாறிலி

$$\text{C}m^2 = \int \frac{2}{m^2} m^2 dm + k$$

$$\text{C}m^2 = 2m + k$$

$\text{C} = 4$ மற்றும் $m = 2$ எனில்

$16 = 4 + k \quad \Rightarrow \quad k = 12$

C மற்றும் m –க்கான தொடர்பு

$\text{C}m^2 = 2m + 12 = 2\,(m + 6)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 24

தயாரிப்பு நிறுவனம் ஒன்றில் உபகரணங்களை இயக்கவும் பராமரிக்கவும் ஆகும் செலவு C மற்றும் அடுத்தடுத்த இரு பழுது பார்த்தலுக்குரிய இடைவெளிக் காலம் x ஆகியவற்றை $x^2 \frac{dC}{dx} - 10x\text{C} = -10$ என்ற சமன்பாட்டினால் குறிக்கப்படின், $x = x_0$ எனில் $\text{C} = \text{C}_0$ எனக் கொண்டு C –ஐ x –ன் சார்பாகக் காண்க.

தீர்வு :

$$x^2 \frac{d\text{C}}{dx} - 10x\text{C} = -10 \;\Rightarrow\; \frac{d\text{C}}{dx} - \frac{10\text{C}}{x} = -\frac{10}{x^2}$$

இது வரிசை 1 உள்ள நேரியியல் வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்

$$\text{P} = -\frac{10}{x} \text{ மற்றும் } \text{Q} = -\frac{10}{x^2}$$

$$\int \text{P}\, dx = \int -\frac{10}{x}\, dx = -10 \log x = \log\left(\frac{1}{x^{10}}\right)$$

$$\text{I.F} = e^{\int \text{P} dx} = e^{\log\left(\frac{1}{x^{10}}\right)} = \frac{1}{x^{10}}$$

பொதுத் தீர்வு :

$$\text{C (I.F)} = \int \text{Q (I.F)}\, dx + k, \; k \text{ ஒரு மாறிலி}$$

$$\frac{\text{C}}{x^{10}} = \int \frac{-10}{x^2}\left(\frac{1}{x^{10}}\right) dx + k \quad \text{or} \quad \frac{\text{C}}{x^{10}} = \frac{10}{11}\left(\frac{1}{x^{11}}\right) + k$$

எனவே $\text{C} = \text{C}_0$ மற்றும் $x = x_0$ எனில்

$$\frac{\text{C}_0}{x_0^{10}} = \frac{10}{11}\left(\frac{1}{x_0^{11}}\right) + k \Rightarrow k = \frac{\text{C}}{x_0^{10}} - \frac{10}{11x_0^{11}}$$

∴ தீர்வு

$$\frac{\text{C}}{x^{10}} = \frac{10}{11}\left(\frac{1}{x^{11}}\right) + \left[\frac{\text{C}}{x_0^{10}} - \frac{10}{11x_0^{11}}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\text{C}}{x^{10}} - \frac{\text{C}}{x_0^{10}} = \frac{10}{11}\left(\frac{1}{x^{11}} - \frac{1}{x_0^{11}}\right)$$

பயிற்சி 6.4

1) பின்வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(i) $\frac{dy}{dx} + y \cot x = \operatorname{cosec} x$

(ii) $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 4x \operatorname{cosec} x$, ($x = \frac{\pi}{2}$ எனில் $y = 0$)

(iii) $x\frac{dy}{dx} - 3y = x^2$

(iv) $\frac{dy}{dx} + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ ($x = 1$ எனில் $y = 0$)

(v) $\frac{dy}{dx} - y \tan x = e^x \sec x$

(vi) $\log x \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \sin 2x$

2) தொடர்ச்சிக் கூட்டு வட்டி வீதம் 12% கொண்ட சிறு சேமிப்பு திட்டத்தில் ஒருவர் 5 வருடங்களுக்கு ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையை முதலீடு செய்ய திட்டமிடுகிறார். 5 வருடங்களுக்கு பிறகு ரூ.25,000 கிடைப்பதற்கு இத்திட்டத்தில் அவர் எவ்வளவு பணம் முதலீடு செய்ய வேண்டும் என்பதைக் காண்க. ($e^{-0.6} = 0.5488$)

3) பொருளின் அளவு q மாறும் பொழுது, கோருதல் மற்றும் இருப்பு வைத்தல் ஆகியவற்றிற்கான செலவு C–ன் மாறுதலை $\frac{dC}{dq} = a - \frac{C}{q}$, ($a$ ஒரு மாறிலி) எனும் சமன்பாட்டினால் குறித்தால்,

$q = q_0$ எனும் பொழுது $C = C_0$ எனக் கொண்டு C–யை q –ன் சார்பாகக் கருதுக.

6.3 மாறிலி குணகங்களைக் கொண்ட வரிசை இரண்டுடைய நேரியியல் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (Second order linear differential equations with constant co-efficients)

வரிசை 2 உள்ள, மாறிலி குணகங்களைக் கொண்ட, நேரியியல் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் :

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x).$$

$\sin x = t$, என்க

$\cos x \, dx = dt$

இப்பகுதியில் (i) $f(x) = 0$ (ii) $f(x) = ke^{\lambda x}$ என அமையும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை மட்டுமே கருதுவோம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) $3\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$ (or) $3y - 5y + 6y = 0$

(ii) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 3y = e^{5x}$ (or) $(\mathrm{D}^2 - 4\mathrm{D} + 3)y = e^{5x}$

(iii) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - y = 7$ (or) $(\mathrm{D}^2 + \mathrm{D} - 1)\ y = 7$

என்பன வரிசை இரண்டுடைய நேரியியல் சமன்பாடுகளாகும்.

6.3.1 துணைச் சமன்பாடு மற்றும் நிரப்புச் சார்பு

(Auxiliary equation and Complementary function)

$a\dfrac{d^2y}{dx^2} + b\dfrac{dy}{dx} + cy = f(x)$, என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிற்கு $am^2 + bm + c = 0$ என்பதை, துணைச் சமன்பாடு (auxiliary equation) என்கிறோம். இது m –ல் இருபடிச் சமன்பாடாகும். இச்சமன்பட்டின் தீர்வுகளான m_1 மற்றும் m_2 வின் தன்மைக்கு ஏற்ப நிரப்புச் சார்புகள் (complementary function) பின்வரும் விதத்தில் அமையும்.

தீர்வுகளின் தன்மை	நிரப்புச் சார்பு
(i) மெய் மற்றும் வெவ்வேறு $(m_1 \neq m_2)$	$\mathrm{A}e^{m_1 x} + \mathrm{B}e^{m_2 x}$
(ii) மெய் மற்றும் சமமானது ($m_1 = m_2 = m$ எனில்)	$(\mathrm{A}x + \mathrm{B})\ e^{mx}$
(iii) கலப்பு எண்கள் $(\alpha \pm i\beta)$	$e^{\alpha x}\ (\mathrm{A} \cos \beta x + \mathrm{B} \sin \beta x)$
(A மற்றும் B என்பன ஏதேனும் மாறிலிகளாகும்)	

6.3.2 சிறப்புத் தொகை (P.I)

$(a\mathrm{D}^2 + b\mathrm{D} + c)\ y = e^{\lambda x}$ என்பதை கருதுக

$f(\mathrm{D}) = a\mathrm{D}^2 + b\mathrm{D} + c$ என்க.

வகை 1 : $f(\lambda) \neq 0$ எனில் துணைச் சமன்பாடு $f(m) = 0$ –க்கு λ ஒரு மூலம் அல்ல.

விதிமுறை : $\mathrm{P.I} = \dfrac{1}{f(\mathrm{D})} e^{\lambda x} = \dfrac{1}{f(\lambda)} e^{\lambda x}$

வகை 2 : $f(\lambda) = 0$ எனில், $f(m) = 0$ இன் மூலம் λ ஆகும். இந்நிலையில்,

(i) துணைச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் m_1 மற்றும் m_2 என்க. மேலும் $\lambda = m_1$ எனக் கொள்க.

$f(m) = a\ (m - m_1)\ (m - m_2) = a\ (m - \lambda)\ (m - m_2)$

விதிமுறை : $\mathrm{P.I} = \dfrac{1}{a(\mathrm{D} - \lambda)\ (\mathrm{D} - m_2)} e^{\lambda x} = \dfrac{1}{a(\lambda - m_2)} xe^{\lambda x}$

(ii) துணைச் சமன்பாடு ஆனது இரண்டு சமமான தீர்வுகளைப் பெற்றிருப்பின் (அ–து) $m_1 = m_2 = \lambda$ எனில்

$\therefore f(m) = a\,(m-\lambda)^2$

விதிமுறை **:** $\therefore$ $\text{P.I} = \dfrac{1}{a(\text{D}-\lambda)^2} e^{\lambda x} = \dfrac{1}{a}\dfrac{x^2}{2!} e^{\lambda x}$

6.3.3 பொதுத் தீர்வு

வரிசை 2 உள்ள நேரியியல் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு y = நிரப்புச் சார்பு (C.F) + சிறப்புத் தொகை (P.I) ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 25

தீர்க்க : $3\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

தீர்வு :

துணைச் சமன்பாடு $3m^2 - 5m + 2 = 0$

$\Rightarrow (3m-2)(m-1) = 0$

தீர்வுகள் $m_1 = \dfrac{2}{3}$ மற்றும் $m_2 = 1$ **(மெய் மற்றும் வெவ்வேறு)**

$\therefore$ நிரப்புச் சார்பு

$$\text{C.F} = \text{A}e^{\frac{2}{3}x} + \text{B}e^{x}$$

பொதுத் தீர்வு

$$y = \text{A}e^{\frac{2}{3}x} + \text{B}e^{x}$$

எடுத்துக்காட்டு 26

தீர்க்க : $(16\text{D}^2 - 24\text{D} + 9)\,y = 0$

தீர்வு :

துணைச் சமன்பாடு $16m^2 - 24m + 9 = 0.$

$\Rightarrow \quad (4\text{m}-3)^2 = 0 \Rightarrow \text{m} = \dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{4}$ **(தீர்வுகள் சமம்)**

$\therefore$ $\text{C.F} = (\text{A}x+\text{B})\,e^{\frac{3}{4}x}$

பொதுத் தீர்வு $y = (\text{A}x+\text{B})\,e^{\frac{3}{4}x}$

எடுத்துக்காட்டு 27

தீர்க்க : $(\text{D}^2 - 6\text{D} + 25)\,y = 0.$

தீர்வு :

துணைச் சமன்பாடு $m^2 - 6m + 25 = 0$

$$\Rightarrow \qquad m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 100}}{2} = \frac{6 \pm 8i}{2} = 3 \pm 4i$$

தீர்வுகள் $\alpha \pm i\beta$ வடிவிலுள்ள கலப்பு எண்கள். இங்கு $\alpha = 3$ மற்றும் $\beta = 4$ ஆகும்.

C.F $= e^{ax}$ (A cos βx + B sin βx)

நிரப்புச் சார்பு $= e^{3x}$ (A cos $4x$ + B sin $4x$)

பொதுத் தீர்வு :

$$y = e^{3x} (\text{A} \cos 4x + \text{B} \sin 4x)$$

எடுத்துக்காட்டு 28

தீர்க்க : $\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = e^{5x}}$

தீர்வு :

துணைச் சமன்பாடு $m^2 - 5m + 6 = 0 \Rightarrow m = 3, 2$

$\therefore$ நிரப்புச் சார்பு C.F $= \text{A}e^{3x} + \text{B}e^{2x}$

சிறப்புத் தொகை P.I $= \dfrac{1}{\text{D}^2 - 5\text{D} + 6} e^{5x} = \dfrac{1}{6} e^{5x}$

$\therefore$ பொதுத் தீர்வு

$$\text{y} = \text{C.F} + \text{P.I}$$

$$\text{y} = \text{A}e^{3x} + \text{B}e^{2x} + \frac{e^{5x}}{6}$$

எடுத்துக்காட்டு 29

தீர்க்க : $\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 2e^{-3x}}$

தீர்வு :

துணைச் சமன்பாடு $m^2 + 4m + 4 = 0 \Rightarrow m = -2, -2$

$\therefore$ நிரப்புச் சார்பு C.F $= (\text{A}x + \text{B})\, e^{-2x}$

சிறப்புத் தொகை $\quad P.I = \dfrac{1}{D^2+4D+4} 2e^{-3x}$

$$= \frac{1}{(-3)^2+4(-3)+4} 2e^{-3x} = 2e^{-3x}$$

$\therefore$ பொதுத் தீர்வு

$y = C.F + P.\ I$

$y = (Ax + B)\ e^{-2x} + 2e^{-3x}$

எடுத்துக்காட்டு 30

தீர்க்க : $\boldsymbol{\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 4y = 5 + 3e^{-x}}$

தீர்வு :

துணைச் சமன்பாடு $m^2 - 2m + 4 = 0$

$$\Rightarrow \qquad m = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = \frac{2 \pm i2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3}$$

$$C.F = e^x(A\cos\sqrt{3}x + B\sin\sqrt{3}x)$$

சிறப்புத் தொகை $\quad P.\ I_1 = \dfrac{1}{D^2-2D+4} 5\ e^{0x} = \dfrac{1}{4} 5\ e^{0x} = \dfrac{5}{4}$

சிறப்புத் தொகை $\quad P.\ I_2 = \dfrac{1}{D^2-2D+4} 3\ e^{-x}$

$$= \frac{1}{(-1)^2-2(-1)+4} 3e^{-x} = \frac{3e^{-x}}{7}$$

$\therefore$ பொதுத் தீர்வு

$y = C.\ F + P.\ I_1 + P.\ I_2$

$y = e^x(A\ \cos\sqrt{3}x + B\sin\sqrt{3}x) + \dfrac{5}{4} + \dfrac{3}{7}e^{-x}$

எடுத்துக்காட்டு 31

தீர்க்க : $\boldsymbol{(4D^2 - 8D + 3)\ y = e^{\frac{1}{2}x}}$

தீர்வு :

துணைச் சமன்பாடு $4m^2 - 8m + 3 = 0$

$$m_1 = \frac{3}{2},\ m_2 = \frac{1}{2}$$

நிரப்புச் சார்பு $\quad \text{C.F} = \text{A}\,e^{\frac{3}{2}x} + \text{B}\,e^{\frac{1}{2}x}$

சிறப்புத் தொகை $\quad \text{P. I} = \dfrac{1}{4\text{D}^2 - 8\text{D} + 3} e^{\frac{1}{2}x} = \dfrac{1}{4\left(\text{D} - \frac{3}{2}\right)\left(\text{D} - \frac{1}{2}\right)} e^{\frac{1}{2}x}$

$$= \frac{1}{4\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)\left(\text{D} - \frac{1}{2}\right)} e^{\frac{1}{2}x} = \frac{x}{-4} e^{\frac{1}{2}x}$$

$\therefore$ பொதுத் தீர்வு

$y = \text{C.F} + \text{P. I}$

$y = \text{A}e^{\frac{3}{2}x} + \text{B}e^{\frac{1}{2}x} - \dfrac{x}{4} e^{\frac{x}{2}}$

எடுத்துக்காட்டு 32

தீர்க்க : $(\text{D}^2 + 10\text{D} + 25)\ y = \dfrac{5}{2} + e^{-5x}$

தீர்வு :

துணைச் சமன்பாடு $m^2 + 10m + 25 = 0$

$\Rightarrow (m + 5)^2 = 0$

$\Rightarrow m = -5, -5$

நிரப்புச் சார்பு $\quad \text{C.F} = (\text{A}x + \text{B})\ e^{-5x}$

சிறப்புத் தொகை $\ \text{P. I}_1 = \dfrac{1}{\text{D}^2 + 10\text{D} + 25} \dfrac{5}{2} e^{0x} = \dfrac{1}{25}\left(\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{1}{10}$

சிறப்புத் தொகை $\ \text{P. I}_2 = \dfrac{1}{\text{D}^2 + 10\text{D} + 25} e^{-5x} = \dfrac{1}{(\text{D} + 5)^2} e^{-5x}$

$$= \frac{x^2}{2!}\text{e}^{-5x} = \frac{x^2}{2}(\text{e}^{-5x})$$

$\therefore$ பொதுத் தீர்வு

$y = \text{C.F} + \text{P. I}_1 + \text{P. I}_2$

$y = (\text{A}x + \text{B})e^{-5x} + \dfrac{1}{10} + \dfrac{x^2}{2}\ e^{-5x}$

எடுத்துக்காட்டு 33

$Q_d = 42 - 4p - 4\dfrac{dp}{dt} + \dfrac{d^2p}{dt^2}$ மற்றும் $Q_s = -6 + 8p$ என்பன முறையே ஒரு பொருளின் தேவை அளவு மற்றும் அளிப்பு அளவு ஆகியனவற்றைக் குறிக்கிறது. (இங்கு p விலையைக் குறிக்கிறது) சந்தைப் பரிமாற்றத்தில் சமன்நிலை விலையை (equilibrium price) க் காண்க.

தீர்வு :

சமன்நிலை விலையில், $Q_d = Q_s$ ஆக இருக்கும்.

$$\therefore \quad 42 - 4p - 4\frac{dp}{dt} + \frac{d^2p}{dt^2} = -6 + 8p$$

$$\Rightarrow \quad 48 - 12\,\text{p} - 4\frac{dp}{dt} + \frac{d^2p}{dt^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2p}{dt^2} - 4\frac{dp}{dt} - 12p = -48$$

துணைச் சமன்பாடு $m^2 - 4m - 12 = 0$

$$\Rightarrow \quad \text{m} = 6,\ -2$$

$$\therefore \quad \text{C.F} = \text{A}e^{6\text{t}} + \text{B}e^{-2\text{t}}$$

$$\text{P. I} = \frac{1}{\text{D}^2 - 4\text{D} - 12}(-48)\,e^{0\text{t}} = \frac{1}{-12}(-48) = 4$$

பொதுத் தீர்வு

$p = \text{C.F} + \text{P. I}$

$\therefore\ p = \text{Ae}^{6\text{t}} + \text{Be}^{-2\text{t}} + 4$

பயிற்சி 6.5

1) **பின்வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.**

(i) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 10\dfrac{dy}{dx} + 24y = 0$ (ii) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} = 0$

(iii) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$ (iv) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$

2) தீர்க்க :

(i) $(3\text{D}^2 + 7\text{D} - 6)\,y = 0$ (ii) $(4\text{D}^2 - 12\text{D} + 9)\,y = 0$ (iii) $(3\text{D}^2 - \text{D} + 1)\,y = 0$

3) தீர்க்க :

(i) $(D^2 - 13D + 12)\, y = e^{-2x} + 5e^{x}$

(ii) $(D^2 - 5D + 6)\, y = e^{-x} + 3e^{-2x}$

(iii) $(D^2 - 14D + 49)\, y = 3 + e^{7x}$

(iv) $(15D^2 - 2D - 1)\, y = e^{\frac{x}{3}}$

4) $Q_d = 30 - 5P + 2\dfrac{dP}{dt} + \dfrac{d^2P}{dt^2}$ மற்றும் $Q_s = 6 + 3P$ என்பன முறையே ஒரு பொருளின் தேவை அளவு மற்றும் அளிப்பு அளவு ஆகியனவற்றைக் குறிக்கின்றன. இங்கு p விலையைக் குறிக்கிறது. சந்தை பரிமாற்றத்தில் சமன்நிலை விலையைக் காண்க.

பயிற்சி 6.6

ஏற்புடைய விடையைத் தெரிவு செய்க.

1) ஆதி வழிச் செல்லும் நேர்க்கோடுகளின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

(a) $x\dfrac{dy}{dx} = y$ (b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$ (c) $\dfrac{dy}{dx} = 0$ (d) $x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y}$

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6\sqrt{\dfrac{dy}{dx}} = 0$ என்ற வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் படி மற்றும் வரிசை முறையே

(a) 2 மற்றும் 1 (b) 1 மற்றும் 2 (c) 2 மற்றும் 2 (d) 1 மற்றும் 1

3) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 3\dfrac{d^3y}{dx^3} + 7\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} = x + \log x$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை மற்றும் படி முறையே

(a) 1 மற்றும் 3 (b) 3 மற்றும் 1 (c) 2 மற்றும் 3 (d) 3 மற்றும் 2

4) $\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{2}{3}} = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ என்ற சமன்பாட்டின் வரிசை மற்றும் படி முறையே

(a) 3 மற்றும் 2 (b) 2 மற்றும் 3 (c) 3 மற்றும் 3 (d) 2 மற்றும் 2

5) $x\,dy + y\,dx = 0$ ன் தீர்வு

(a) $x + y = c$ (b) $x^2 + y^2 = c$ (c) $xy = c$ (d) $y = cx$

6) $x\,dx + y\,dy = 0$ ன் தீர்வு

(a) $x^2 + y^2 = c$ (b) $\frac{x}{y} = c$ (c) $x^2 - y^2 = c$ (d) $xy = c$

7) $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$ ன் தீர்வு

(a) $e^y e^x = c$ (b) $y = \log ce^x$ (c) $y = \log(e^x + c)$ (d) $e^{x+y} = c$

8) $\frac{dP}{dt} = ke^{-t}$ (k ஒரு மாறிலி) ன் தீர்வு

(a) $c - \frac{k}{e^t} = p$ (b) $p = ke^t + c$ (c) $t = \log\frac{c-p}{k}$ (d) $t = \log_c p$

9) $(x^2 - y^2)\,dy = 2xy\,dx$, என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் $y = vx$ என பிரதியிடும் பொழுது சமன்பாடு கீழ்கண்டவைகளில் எதுவாக மாறும் **?**

(a) $\frac{1+v^2}{v+v^3}dv = \frac{dx}{x}$ (b) $\frac{1-v^2}{v(1+v^2)}dv = \frac{dx}{x}$

(c) $\frac{dv}{v^2-1} = \frac{dx}{x}$ (d) $\frac{dv}{1+v^2} = \frac{dx}{x}$

10) $x\frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2}$ என்ற சமன்பாட்டில் $y = vx$ என பிரதியிட சமன்பாடு கீழ்கண்டவைகளில் எதுவாக மாறும் **?**

(a) $\frac{dv}{\sqrt{v^2-1}} = \frac{dx}{x}$ (b) $\frac{v\,dv}{\sqrt{v^2+1}} = \frac{dx}{x}$

(c) $\frac{dv}{\sqrt{v^2+1}} = \frac{dx}{x}$ (d) $\frac{v\,dv}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{dx}{x}$

11) $\frac{dy}{dx} + Py = 0$, என்ற வடிவுடைய சமன்பாட்டின் தீர்வு (P ஆனது x இல் சார்பு)

(a) $y\,e^{\int P dx} = c$ (b) $y\int P dx = c$ (c) $x\,e^{\int P dx} = y$ (d) $y = cx$

12) $\frac{dx}{dy} + Px = Q$ என்ற வடிவுடைய சமன்பாட்டின் தீர்வு (P மற்றும் Q என்பன y இல் சார்பு)

(a) $y = \int Q\, e^{\int P dx} dy + c$ (b) $ye^{\int P dx} = \int Q\, e^{\int P dx} dx + c$

(c) $x e^{\int P dy} = \int Q\, e^{\int P dy} dy + c$ (d) $x\, e^{\int P dy} = \int Q\, e^{\int P dx} dx + c$

13) $x\dfrac{dy}{dx} - y = e^x$ –ன் தொகையீட்டுக் காரணி

(a) $\log x$ (b) $e^{\frac{-1}{x}}$ (c) $\dfrac{1}{x}$ (d) $\dfrac{-1}{x}$

14) $(1 + x^2)\dfrac{dy}{dx} + xy = (1 + x^2)^3$ –ன் தொகையீட்டுக் காரணி

(a) $\sqrt{1+x^2}$ (b) $\log (1 + x^2)$ (c) $e^{\tan^{-1} x}$ (d) $\log^{(\tan^{-1} x)}$

15) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = x^3$ –என்ற சமன்பாட்டின் தொகையீட்டுக் காரணி

(a) $2 \log x$ (b) e^{x^2} (c) $3 \log (x^2)$ (d) x^2

16) $(D^2 - D)\, y = e^x$ –என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் நிரப்புச் சார்பு

(a) $A + B\, e^x$ (b) $(Ax + B)\, e^x$ (c) $A + Be^{-x}$ (d) $(A + Bx)\, e^{-x}$

17) $(D^2 - 2D + 1)y = e^{2x}$ –என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் நிரப்புச் சார்பு

(a) $Ae^x + Be^{-x}$ (b) $A + Be^x$ (c) $(Ax + B)e^x$ (d) $A+Be^{-x}$

18) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = e^{5x}$ –என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தொகை

(a) $\dfrac{e^{5x}}{6}$ (b) $\dfrac{xe^{5x}}{2!}$ (c) $6e^{5x}$ (d) $\dfrac{e^{5x}}{25}$

19) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6\dfrac{dy}{dx} + 9y = e^{3x}$ –என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தொகை

(a) $\dfrac{e^{3x}}{2!}$ (b) $\dfrac{x^2e^{3x}}{2!}$ (c) $\dfrac{xe^{3x}}{2!}$ (d) $9e^{3x}$

20) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ –என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு

(i) $(A + B)\, e^x$ (b) $(Ax + B)\, e^{-x}$ (c) $Ae^x + \dfrac{B}{e^x}$ (d) $(A + Bx)\, e^{-x}$

இடைச்செருகல் மற்றும் நேர்க்கோடு பொருத்துதல் 7

7.1 இடைச்செருகல் (INTERPOLATION)

இடைச்செருகல் என்பது அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு, கொடுக்கப்படாத ஒரு மதிப்பினைக் காணுகின்ற கலையாகும். அதாவது கொடுக்கப்பட்ட சார்பின் மதிப்புகளைக் கொண்டு அம்மதிப்புகளுக்கு இடைப்பட்ட மதிப்புகளைக் காண்பதையோ அல்லது நிரப்புவதையோ இடைச்செருகல் என்கிறோம். பின்வரும் அட்டவணையில் ஒரு நகரத்தின் பத்து ஆண்டுக்கு ஒரு முறை கணக்கிடப்படும் மக்கள் தொகை விவரம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆண்டு x	:	1910	1920	1930	1940	1950
மக்கள் தொகை $f(x)$	:	12	15	20	27	39

(ஆயிரங்களில்)

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு 1914, 1923, 1939, 1947 ஆகிய ஆண்டுகளின் மக்கள் தொகையைக் காணும் முறை **இடைச்செருகல்** எனப்படும். 1955, 1960 ஆகிய ஆண்டுகளின் மக்கள் தொகையைக் காணும் முறை புறச் செருகல் எனப்படும்.

இடைச் செருகலைக் காண பின்வருவனவற்றைக் கருத்தில் கொள்க :

(i) $f(x)$ –ன் மதிப்புகள் ஏறு வரிசையிலோ அல்லது இறங்கு வரிசையிலோ இருக்க வேண்டும்.

(ii) $f(x)$ –ன் மதிப்புகள் சீராக இருக்க வேண்டும். அதாவது x - ன் ஏதாவது இரண்டு மதிப்புகளுக்கிடையே $f(x)$ –ன் மதிப்புகளில் திடீர் ஏற்றமோ அல்லது திடீர் இறக்கமோ இருக்கக் கூடாது.

பின்வரும் முறைகளில் இடைச்செருகலைக் காணலாம் :

1) வரைபட முறை, 2) இயற்கணித முறை

7.1.1 வரைபட முறையில் இடைச்செருகல் காணல் (Graphic method of interpolation)

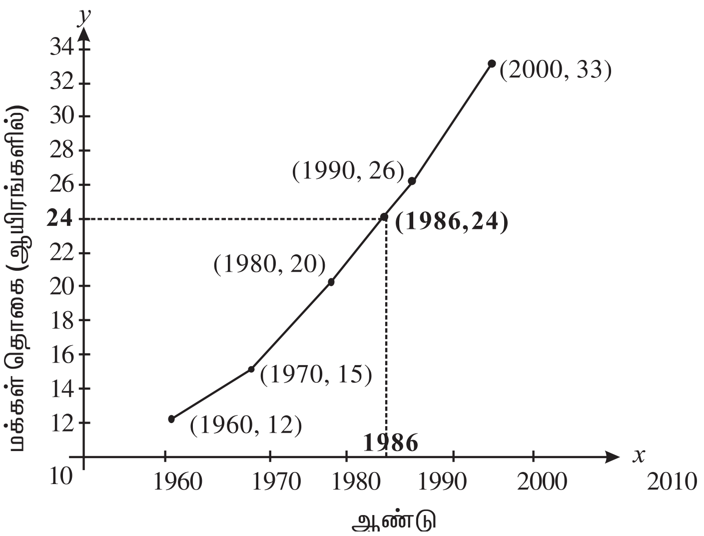
$y = f(x)$ என்க. x –ன் மதிப்புகளுக்கும் அதற்கு ஏற்ற y –ன் மதிப்புகளுக்கும் ஏற்ப வரைபடத்தில் புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். இந்த வரைபடத்தின் மூலம் கொடுக்கப்பட்ட x –க்கு ஏற்ற y –ன் மதிப்பைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1

பின்வரும் விவரங்களைக் கெண்டு 1986 ஆம் ஆண்டின் மக்கள் தொகையை வரைபடத்தின் மூலம் மதிப்பிடுக.

ஆண்டு :	1960	1970	1980	1990	2000
மக்கள் தொகை (ஆயிரங்களில்) :	12	15	20	26	33

தீர்வு :



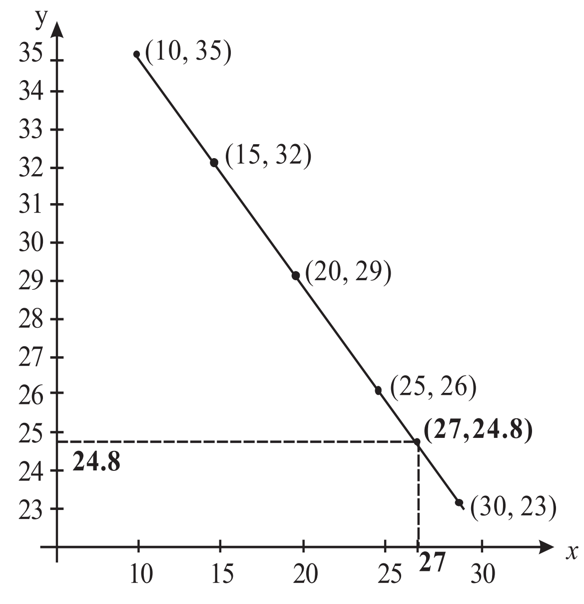
வரைபடத்திலிருந்து 1986–ம் ஆண்டின் மக்கள் தொகை 24 ஆயிரம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2

வரைபடத்தின் மூலம், $x = 27$ ஆக இருக்கும் பொழுது y–ன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	10	15	20	25	30
y :	35	32	29	26	23

தீர்வு :



$x = 27$ ஆக இருக்கும் பொழுது $y = 24.8$ ஆகும்.

7.1.2 இடைச் செருகலுக்கான இயற்கணித முறைகள்

இடைச்செருகல் காண்பதற்கான கணித முறைகள் பல உள்ளன. அவற்றுள் பின்வரும் சில முறைகளைக் காண்போம்.

(i) திட்டமான வேறுபாடுகள்(Finite differences)

(ii) கிரிகோரி–நியூட்டனின் சூத்திரங்கள் (Gregory-Newton's formulae)

(iii) இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரம் (Lagrange's formula)

7.1.3 திட்டமான வேறுபாடுகள்

$x_0, x_1, x_2, \ldots x_{\mathrm{n}}$ என்ற சார்பின் மாறிகளையும் (arguments) $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ என்ற சார்பலன்களையும் (entries) எடுத்துக் கொள்வோம். இங்கு $y = f(x)$ என்பது இடைச்செருகலில் பயன்படுத்தப்படும் ஒரு சார்பு ஆகும்.

x –ன் மதிப்புகள் ஏறு வரிசையில் இருப்பதாகவும் மற்றும் அவை சம இடைவெளிகளில் இருப்பதாகவும் எடுத்துக் கொள்வோம். சம இடைவெளிகளின் நீளம் h என்போம்.

$x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \ldots x_0 + nh$ என்பன x –ன் மதிப்புகள் என்போம். அவற்றிற்குரிய சார்பலன்கள் $f(x_0), f(x_0 + \mathrm{h}), f(x_0 + 2\mathrm{h}), \ldots, f(x_0 + nh)$ என்பனவாகும்.

முன் நோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி (Forward difference operator)

x –ன் எந்த ஒரு மதிப்பிற்கும், முன்நோக்குச் செயலி Δ (டெல்டா)வை

$\Delta f(x) = f(x + \mathrm{h}) - f(x)$ என வரையறுக்கலாம்.

குறிப்பாக, $\Delta y_0 = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \mathrm{h}) - f(x_0) = y_1 - y_0$

$\Delta f(x), \Delta[f(x + \mathrm{h})], \Delta[f(x + 2\mathrm{h})], \ldots$ என்பன $f(x)$ –ன் முதல்நிலை வேறுபாடுகள் ஆகும்.

$$\begin{aligned}
\Delta^2 f(x) &= \Delta[\Delta\{f(x)\}] \\
&= \Delta[f(x + \mathrm{h}) - f(x)] \\
&= \Delta[f(x + \mathrm{h})] - \Delta[f(x)] \\
&= [f(x + 2\mathrm{h}) - f(x + \mathrm{h})] - [f(x + \mathrm{h}) - f(x)] \\
&= f(x + 2\mathrm{h}) - 2f(x + \mathrm{h}) + f(x).
\end{aligned}$$

$\Delta^2 f(x), \Delta^2 [f(x + \mathrm{h})], \Delta^2 [f(x + 2\mathrm{h}))] \ldots$ என்பன $f(x)$ –ன் இரண்டாம் நிலை வேறுபாடுகள் ஆகும்.

இதே போல் $\Delta^3 f(x), \Delta^4 f(x), \ldots \Delta^{\mathrm{n}} f(x), \ldots$ என்பன வரையறுக்கப்படுகின்றன.

பின்நோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி (Backward difference operator)

x –ன் எந்த ஒரு மதிப்பிற்கும், பின்நோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி ∇ (நெப்லா) வை

$\nabla f(x) = f(x) - f(x - \mathrm{h})$ என வரையறுக்கலாம்.

குறிப்பாக, $\nabla y_n = \nabla f(x_n) = f(x_n) - f(x_n - h) = y_n - y_{n-1}$

$\nabla f(x)$, $\nabla[f(x+\text{h})]$, $\nabla[f(x+2\text{h})]$, ... என்பன $f(x)$ –ன் முதல் நிலை வேறுபாடுகள் ஆகும்.

$$\nabla^2 f(x) = \nabla[\nabla\{f(x)\}] = \nabla\,[f(x) - f(x-\text{h})]$$
$$= \nabla[f(x)] - \nabla\,[f(x-\text{h})]$$
$$= f(x) - 2f(x-\text{h}) + f(x-2\text{h})$$

$\nabla^2 f(x)$, $\nabla^2[f(x+\text{h})]$, $\nabla^2[f(x+2\text{h})]$ ... என்பன $f(x)$ ன் இரண்டாம் நிலை வேறுபாடுகள் ஆகும்.

இதே போல் $\nabla^3 f(x)$, $\nabla^4 f(x)$,...$\nabla^n f(x)$, ... என்பன வரையறுக்கப்படுகின்றன.

இடப்பெயர்வுச் செயலி (Shifting operator)

x –ன் எந்த ஒரு மதிப்பிற்கும், இடப்பெயர்வுச் செயலி E ஐ

$\text{E}[f(x)] = f(x+\text{h})$ என வரையறுக்கலாம்.

குறிப்பாக, $\text{E}(y_0) = \text{E}[f(x_0)] = f(x_0+\text{h}) = y_1$

மேலும், $\text{E}^2\,[f(x)] = \text{E}[\text{E}\{f(x)] = \text{E}[f(x+h)] = f(x+2h)$

இதேபோல் $\text{E}^3[f(x)] = f(x+3h)$

பொதுவாக $\text{E}^n\,[f(x)] = f(x+nh)$

Δ –க்கும் E –க்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு

வரையறையின் படி $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$

$$= \text{E}\,f(x) - f(x)$$
$$\Delta f(x) = (\text{E}-1)\,f(x)$$
$$\Rightarrow \quad \Delta = \text{E} - 1$$

(அ–து) $\quad \text{E} = 1 + \Delta$

முடிவுகள்

1. மாறிலிச் சார்பின் வேறுபாடுகள் பூச்சியமாக இருக்கும்.
2. $f(x)$ என்பது n ஆம் படி பல்லுறுப்புக் கோவை எனில் $f(x)$ன் n ஆம் நிலை வேறுபாடுகள் மாறிலியாகும் மற்றும் $\Delta^{n+1} f(x) = 0$.

எடுத்துக்காட்டு 3

பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு விடுபட்ட உறுப்பைக் காண்க.

x :	**1**	**2**	**3**	**4**
$f(x)$:	**100**	**–**	**126**	**157**

தீர்வு :

$f(x)$ –ன் மூன்று மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால், $f(x)$ ஒரு இரண்டாம் படி பல்லுறுப்புக் கோவை என எடுத்துக் கொள்வோம்.

எனவே மூன்றாம் நிலை வேறுபாடுகள் பூச்சியமாகும்.

$\Rightarrow \quad \Delta^3 [f(x_0)] = 0$

அல்லது $\quad \Delta^3(y_0) = 0$

$\therefore \quad (E-1)^3 y_0 = 0 \qquad$ (இங்கு $\Delta = E - 1$)

$(E^3 - 3E^2 + 3E - 1) y_0 = 0$

$\Rightarrow \quad y^3 - 3y^2 + 3y_1 - y_0 = 0$

$157 - 3(126) + 3y_1 - 100 = 0$

$\therefore \quad y_1 = 107$

எடுத்துக்காட்டு 4

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு 1962 மற்றும் 1965 ஆம் ஆண்டுகளுக்கான உற்பத்திகளைக் காண்க.

ஆண்டு :	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967
உற்பத்தி :	200	–	260	306	–	390	430

(டன்களில்)

தீர்வு :

$f(x)$ –ன் ஐந்து மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால் $f(x)$ ஒரு நான்காம் படி பல்லுறுப்புக் கோவை என எடுத்துக் கொள்வோம். எனவே ஐந்தாம் நிலை வேறுபாடுகள் பூச்சியமாகும்.

$\therefore \quad \Delta^5 [f(x_0)] = 0$

(அ–து) $\quad \Delta^5 (y_0) = 0$

$\therefore \quad (E-1)^5 (y_0) = 0$

(அ–து) $\quad (E^5 - 5E^4 + 10E^3 - 10E^2 + 5E - 1) y_0 = 0$

$y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0 = 0$

$390 - 5y_4 + 10(306) - 10(260) + 5y_1 - 200 = 0$

$\Rightarrow \quad y_1 - y_4 = -130 \qquad$ --------------(1)

ஐந்தாம் நிலை வேறுபாடுகள் பூச்சியமாக இருப்பதால், மேலும்

$\Delta^5 [f(x_1)] = 0$

(அ—து) $\Delta^5 (y_1) = 0$

$(E-1)^5 (y_1) = 0$

(அ—து) $(E^5 - 5E^4 + 10E^3 - 10E^2 + 5E - 1)\, y_1 = 0$

$y_6 - 5y_5 + 10y_4 - 10y_3 + 5y_2 - y_1 = 0$

$430 - 5(390) + 10y_4 - 10(306) + 5(260) - y_1 = 0$

$\Rightarrow \quad 10y_4 - y_1 = 3280 \qquad$ --------------(2)

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) களைத் தீர்க்கும் பொழுது நமக்குக் கிடைப்பது

$y_1 = 220$ மற்றும் $y_4 = 350$

$\therefore$ 1962 மற்றும் 1965 ஆம் ஆண்டுகளின் உற்பத்திகள் முறையே 220 டன்கள் மற்றும் 350 டன்கள் ஆகும்.

7.1.4 கிரிகோரி—நியூட்டனின் முன்நோக்கு சூத்திரத்தை தருவிக்கும் முறை

குறிப்பு :

சூத்திரத்தை தருவிக்கும் முறை கற்றல் திறனை மேம்படுத்துவதற்காக கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. தருவிக்கும் முறை தேர்வில் கேட்கப்படமாட்டாது.

$y = f(x)$ என்பது n ஆம் படி பல்லுறுப்புக் கோவை என்க. x ஆனது $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ என்கின்ற சம இடைவெளியிலும், ஏறு வரிசையிலும் உள்ள மதிப்புகளைப் பெறும் பொழுது y ஆனது முறையே $f(x_0), f(x_1), f(x_2) \ldots f(x_n)$ ஆகிய $(n+1)$ மதிப்புகளை அடைகின்றது.

$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = x_n - x_{n-1} = h$ என்க

(h ஒரு மிகை எண்)

இங்கு $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \ldots f(x_n) = y_n$

இப்பொழுது $f(x)$ ஐ பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$+ a_n (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) \qquad \text{----------(1)}$$

$x = x_0$, எனில் , $(1) \Rightarrow$

$f(x_0) = a_0$ அல்லது $a_0 = y_0$

$x = x_1$, எனில், $(1) \Rightarrow$

$f(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$ (அ—து) $y_1 = y_0 + a_1 h$

$$\therefore \quad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{\Delta y_0}{h}$$

$x = x_2$ எனில், $(1) \Rightarrow$

$$f(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$y_2 = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(2h) + a_2(2h)\,(h)$$

$$2h^2 a_2 = y_2 - y_0 - 2\Delta y_0$$

$$= y_2 - y_0 - 2(y_1 - y_0)$$

$$= y_2 - 2y_1 + y_0 = \Delta^2 y_0$$

$$\therefore\ a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}$$

இதே போல்,

$$a_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3!\,h^3},$$

$$a_4 = \frac{\Delta^4 y_0}{4!\,h^4}, \ldots., a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}$$ எனக் கிடைக்கும்

$a_0, a_1, \ldots\ldots., a_n$ என்பதன் மதிப்புகளை **(1)** ல் பிரதியிட,

$$f(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)\,(x - x_1) + \ldots$$

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x - x_0)\,(x - x_1)\ldots.(x - x_{n-1}) \qquad \ldots\ldots(2)$$

$u = \dfrac{x - x_0}{h}$ என எடுத்துக் கொண்டால்

$$x - x_0 = hu$$

$$x - x_1 = (x - x_0) - (x_1 - x_0) = hu - h = h(u - 1)$$

$$x - x_2 = (x - x_0) - (x_2 - x_0) = hu - 2h = h(u - 2)$$

$$x - x_3 = h(u - 3)$$

பொதுவாக, $x - x_{n-1} = h\,\{u - (n-1)\}$

ஆதலால் **(2)** ஐ பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= y_0 + \frac{u}{1!}\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots.. \\ &\qquad + \frac{u(u-1)(u-2)\ldots.(u-\overline{n-1})}{n!}\Delta^n y_0 \\ &\text{இங்கு } u = \frac{x - x_0}{h}. \end{aligned}}$$

இதுவே கிரிகோரி–நியூட்டனின் முன்நோக்கு சூத்திரமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5

x :	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
y :	**176**	**185**	**194**	**202**	**212**

எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் பொழுது, $x = 0.2$ எனில் y –ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

0.2 என்பது (x_0, x_1) என்ற முதல் இடைவெளியில் உள்ளது. (அ–து) (0, 1) க்கு இடையில் உள்ளது. எனவே இடைச்செருகலுக்கான கிரிகோரி–நியூட்டன் முன்நோக்கு சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவோம். ஐந்து மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால் இடைச்செருக்கலுக்கான சூத்திரம்,

$$y = y_0 + \frac{u}{1!}\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$+\frac{u(u-1)(u-2)(u-3)}{4!}\Delta^4 y_0$$

இங்கு $u = \dfrac{x - x_0}{h}$

$h = 1, x_0 = 0$ மற்றும் $x = 0.2$ ஆகும்.

$$\therefore u = \frac{0.2-0}{1} = 0.2$$

முன்நோக்கு வேறுபாட்டு அட்டவணை :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	**176**				
		9			
1	185		**0**		
		9		**-1**	
2	194		–1		**4**
		8		3	
3	202		2		
		10			
4	212				

$$\therefore\ y = \mathbf{176} + \frac{0.2}{!!}(\mathbf{9}) + \frac{0.2(0.2-1)}{2!}(\mathbf{0})$$

$$+\frac{(0.2)(0.2-1)(0.2-2)}{3!}(\mathbf{-1}) + \frac{(0.2)(0.2-1)(0.2-2)(0.2-3)}{4!}(\mathbf{4})$$

$$= 176 + 1.8 - 0.048 - 0.1344$$

$$= 177.6176$$

$x = 0.2$ எனில், $y = 177.6176$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6

$y_{75} = 2459, y_{80} = 2018, y_{85} = 1180$ மற்றும்

$y_{90} = 402$ எனில் y_{82} ஐக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

x :	75	80	85	90
y :	2459	2018	1180	402

82 என்பது (80, 85) என்ற இடைவெளியில் உள்ளது. எனவே இடைச்செருகலுக்கான கிரிகோரி–நியூட்டன் முன்நோக்கு சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவோம். நான்கு மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால் இடைச்செருகலுக்கான சூத்திரம்,

$$y = y_0 + \frac{u}{1!}\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

இங்கு $u = \dfrac{x - x_0}{h}$

$h = 5,\ x_0 = 75\ \ x = 82$

$$\therefore u = \frac{82-75}{5} = \frac{7}{5} = 1.4$$

முன்நோக்கு வேறுபாட்டு அட்டவணை :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
75	**2459**			
		– 441		
80	2018		**– 397**	
		– 838		**457**
85	1180		60	
		– 778		
90	402			

$$\begin{aligned} \therefore \quad y &= 2459 + \frac{1.4}{1!}(-441) + \frac{1.4(1.4-1)}{2!}(-397) + \frac{1.4(1.4-1)(1.4-2)}{3!}(457) \\ &= 2459 - 617.4 - 111.6 - 25.592 \end{aligned}$$

$x = 82$ எனில், $y = 1704.408$

எடுத்துக்காட்டு 7

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு $e^{1.75}$ –ன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	**1.7**	**1.8**	**1.9**	**2.0**	**2.1**
e^x :	**5.474**	**6.050**	**6.686**	**7.389**	**8.166**

தீர்வு :

ஐந்து மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பால், இடைச் செருக்கலுக்கான சூத்திரம்.

$$y_x = y_0 + \frac{u}{1!}\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)(u-3)}{4!}\Delta^4 y_0$$

இங்கு $u = \frac{x-x_0}{h}$

$h = 0.1,\ x_0 = 1.7 \quad x = 1.75$

$$\therefore\ u = \frac{1.75-1.7}{0.1} = \frac{0.05}{0.1} = 0.5$$

முன்நோக்கு வேறுபாட்டு அட்டவணை :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1.7	**5.474**				
		0.576			
1.8	6.050		**0.060**		
		0.636		**0.007**	
1.9	6.686		0.067		**0**
		0.703		0.007	
2.0	7.389		0.074		
		0.777			
2.1	8.156				

$$\therefore\ y = 5.474 + \frac{0.5}{1!}(0.576) + \frac{0.5(0.5-1)}{2!}(0.06) + \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)}{3!}(0.007)$$
$$= 5.474 + 0.288 - 0.0075 + 0.0004375$$

$x = 1.75$ எனில், $y = 5.7549375$

எடுத்துக்காட்டு 8

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு 80 செ.மீ லிருந்து 90 செ.மீ வரை உயரமுள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கையினைக் காண்க.

உயரம் (செ.மீ) x :	**40-60**	**60-80**	**80-100**	**100-120**	**120-140**
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை y :	**250**	**120**	**100**	**70**	**50**

தீர்வு :

முன்நோக்கு வேறுபாட்டு அட்டவணை

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$

('க்கு கீழ் உள்ளோர்)

60	**250**				
		120			
80	370		**– 20**		
		100		**– 10**	
100	470		– 30		**20**
		70		10	
120	540		– 20		
		50			
140	590				

90 செ.மீ.க்குக் குறைவான உயரம் உடைய மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்போம்.

இங்கு $x = 90$ $\quad u = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{90 - 60}{20} = 1.5$

$$y(90) = 250 + (1.5)(120) + \frac{(1.5)(1.5-1)}{2!}(-20) + \frac{(1.5)(1.5-1)(1.5-2)}{3!}(-10) + \frac{(1.5)(1.5-1)(1.5-2)(1.5-3)}{4!}\,(20)$$

$$= 250 + 180 - 7.5 + 0.625 + 0.46875$$

$$= 423.59 \simeq 424$$

80 செ.மீ. லிருந்து **90** செ.மீ. வரை உயரமுள்ள மாணவர்களின்

எண்ணிக்கை $\qquad y(90) - y(80)$

$$\Rightarrow \quad 424 - 370 = 54.$$

எடுத்துக்காட்டு 9

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு ரூ.30 லிருந்து ரூ.35 வரை கூலி பெறுபவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

கூலி	x	**:**	**20-30**	**30-40**	**40-50**	**50-60**
நபர்களின் எண்ணிக்கை	y	**:**	**9**	**30**	**35**	**42**

தீர்வு :

முன்நோக்கு வேறுபாட்டு அட்டவணை

x ('க்கு குறைவாக)	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
30	**9**			
		30		
40	39		**5**	
		35		**2**
50	74		7	
		42		
60	116			

ரூ.**35**க்கும் குறைவாக கூலி பெறுபவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்போம்.

இங்கு $x = 35, \quad u = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{35-30}{10} = 0.5$

கிரிகோரி–நியூட்டனின் முன்நோக்கு சூத்திரத்தின் படி,

$$
\begin{aligned}
y(35) &= 9 + \frac{(0.5)}{1}(30) + \frac{(0.5)(0.5-1)}{2!}(5) + \frac{(0.5)(0.5-1)(0.5-2)}{3!}(2) \\
&= 9 + 15 - 0.6 + 0.1 \\
&= 24 \text{ (தோராயமாக)}
\end{aligned}
$$

ரூ.30 லிருந்து ரூ.35 வரை கூலி பெறுபவர்களின் எண்ணிக்கை $y(35) - y(30)$

$\Rightarrow \quad 24 - 9 = 15.$

7.1.5 கிரிகோரி–நியூட்டனின் பின்நோக்கு சூத்திரத்தைத் தருவிக்கும் முறை

குறிப்பு :

சூத்திரத்தை தருவிக்கும் முறை கற்றல் திறனை மேம்படுத்துவதற்காக கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. தருவிக்கும் முறை தேர்வில் கேட்கப்படமாட்டாது.

$y = f(x)$ என்பது n ஆம் படி பல்லுறுப்புக்கோவை என்க. x ஆனது $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என்கின்ற சம இடைவெளியிலும், ஏறு வரிசையிலும் உள்ள மதிப்புகளைப் பெறும் பொழுது y ஆனது முறையே $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots f(x_n)$ ஆகிய $(n+1)$ மதிப்புகளை அடைகின்றது.

$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots\ldots x_n - x_{n-1} = h$ என்க (h ஒரு மிகை எண்)

இங்கு $f(x)$ என்பதை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$
\begin{aligned}
f(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots\ldots \\
+ a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1) \qquad \ldots\ldots.(1)
\end{aligned}
$$

$x = x_n$ எனில், $(1) \Rightarrow f(x_n) = a_0$ அல்லது $a_0 = y_n$

$x = x_{n-1}$ எனில், $(1) \Rightarrow \quad f(x_{n-1}) = a_0 + a_1(x_{n-1} - x_n)$

அல்லது $y_{n-1} = y_n + a_1(-h)$ அல்லது $a_1 = \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} \Rightarrow a_1 = \dfrac{\nabla y_n}{h}$

$x = x_{n-2}$ எனில், $(1) \Rightarrow$

$$f(x_{n-2}) = a_0 + a_1(x_{n-2} - x_n) + a_2(x_{n-2} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1})$$

$$y_{n-2} = y_n + \frac{\nabla y_n}{h}(-2h) + a_2(-2h)\,(-h)$$

$$2h^2 a_2 = (y_{n-2} - y_n) + 2\nabla y_n$$
$$= y_{n-2} - y_n + 2(y_n - y_{n-1})$$
$$= y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n = \nabla^2 y_n$$
$$\therefore\ a_2 = \frac{\nabla^2 y_n}{2!\,h^2}$$

இதே போன்று பின்வருவனவற்றை நாம் பெறலாம்.

$$a_3 = \frac{\nabla^3 y_n}{3!\,h^3},\quad a_4 = \frac{\nabla^4 y_n}{4!\,h^4} .....a_n = \frac{\nabla^n y_n}{n!}$$

$$\therefore\quad f(x) = y_n + \frac{\nabla y_n}{h}(x - x_n) + \frac{\nabla^2 y_n}{2!\,h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + ...$$
$$+ \frac{\nabla^n y_n}{n!}(x - x_n)(x - x_{n-1})...(x - x_1) \qquad .....(2)$$

மேலும், $u = \frac{x - x_n}{h}$ எனில்,

$$x - x_{\mathrm{n}} = hu$$
$$x - x_{\mathrm{n-1}} = (x - x_{\mathrm{n}})(x_{\mathrm{n}} - x_{\mathrm{n-1}}) = hu + h = h(u+1)$$
$$x - x_{\mathrm{n-2}} = (x - x_{\mathrm{n}})(x_{\mathrm{n}} - x_{\mathrm{n-2}}) = hu + 2h = h(u+2)$$
$$x - x_{\mathrm{n-3}} = h(\mathrm{u} + 3)$$

பொதுவாக

$$x - x_{n\text{-}k} = h(u + k)$$

ஆதலால் (2) ஐ பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= y_n + \frac{u}{1!}\nabla y_n + \frac{u(u+1)}{2!}\nabla^2 y_n + ... \\ &\quad + \frac{u(u+1)....\{u+(n-1)\}}{n!}\nabla^n y_n \text{ where } u = \frac{x - x_n}{h} \end{aligned}}$$

இதுவே கிரிகோரி–நியூட்டனின் பின்நோக்கு சூத்திரமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 10

ஒரு நகரத்தின் மக்கள் தொகை விவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆண்டு	x :	**1961**	**1971**	**1981**	**1991**	**2001**
மக்கள் தொகை (ஆயிரங்களில்)	y :	**46**	**66**	**81**	**93**	**101**

கிரிகோரி–நியூட்டன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி **1995** ஆம் ஆண்டின் மக்கள் தொகையைக் காண்க.

தீர்வு :

1995 என்பது கடைசி இடைவெளி **(1991, 2001)**ல் உள்ளது. எனவே கிரிகோரி– நியூட்டனின் பின்நோக்குச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவோம். ஐந்து மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால் இடைச் செருகலுக்கான சூத்திரம்,

$$y = y_4 + \frac{u}{1!}\nabla y_4 + \frac{u(u+1)}{2!}\nabla^2 y_4 + \frac{u(u+1)(u+2)}{3!}\nabla^3 y_4$$

$$+\frac{u(u+1)(u+2)(u+3)}{4!}\nabla^4 y_4$$

இங்கு $u = \dfrac{x - x_4}{h}$

$h = 10,\ x_4 = 2001 \quad x = 1995$

$$\therefore\ u = \frac{1995 - 2001}{10} = -0.6$$

பின்நோக்கு வேறுபாட்டு அட்டவணை :

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
1961	46				
		20			
1971	66				
		15	– 5		
1981	81			2	**– 3**
		12	– 3		
1991	93			**– 1**	
		8	**– 4**		
2001	**101**				

$$\therefore\ y = 101 + \frac{(-0.6)}{1!}(8) + \frac{(-0.6)(-0.6+1)}{2!}(-4) + \frac{(-0.6)(-0.6+1)(-0.6+2)}{3!}(-1) +$$

$$\frac{(-0.6)(-0.6+1)(-0.6+2)(-0.6+3)}{4!}(-3)$$

$$= 101 - 4.8 + 0.48 + 0.056 + 0.1008 \qquad \therefore y = 96.8368$$

$\therefore$ **1995 ஆம் ஆண்டின் மக்கள் தொகை 96.837 ஆயிரங்கள்.**

எடுத்துக்காட்டு 11

பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு 58 வயதில் முதிர்ச்சியடைக் கூடிய காப்பீடு (policy) ஒன்றின் காப்பீட்டுத் தொகையைக் (premium) காண்க.

வயது	x	:	**40**	**45**	**50**	**55**	**60**
காப்பீட்டுத் தொகை	y	:	**114.84**	**96.16**	**83.32**	**74.48**	**68.48**

தீர்வு :

ஐந்து மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால் இடைச் செருகலுக்கான சூத்திரம்,

$$y = y_4 + \frac{u}{1!}\nabla y_4 + ... + \frac{u(u+1)(u+2)(u+3)}{4!}\nabla^4 y_4$$

இங்கு $u = \frac{58-60}{5} = -0.4$

பின்நோக்கு வேறுபாட்டு அட்டவணை :

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
40	114.84				
		– 18.68			
45	96.16				
		– 12.84	5.84		
50	83.32			– 1.84	**0.68**
		– 8.84	4.00		
55	74.48			**– 1.16**	
		– 6.00	**2.84**		
60	68.48				

$$\therefore \quad y = 68.48 + \frac{(-0.4)}{1!}(-6) + \frac{(-0.4)(0.6)}{2}(2.84) + \frac{(-0.4)(0.6)(1.6)}{6}(-1.16)$$

$$+ \frac{(-0.4)(0.6)(1.6)(2.6)}{24}(0.68)$$

$$= 68.48 + 2.4 - 0.3408 + 0.07424 - 0.028288$$

$\therefore \quad y = 70.5851052$ அல்லது $y \simeq 70.59$

$\therefore$ 58 வயதில் முதிர்ச்சியடையக் கூடிய காப்பீடு ஒன்றின் காப்பீட்டுத் தொகை 70.59

எடுத்துக்காட்டு 12

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு $x = 4.5$ க்கு y –ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	**:**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
y	**:**	**1**	**8**	**27**	**64**	**125**

தீர்வு :

ஐந்து மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்தால் இடைச் செருகலுக்கான சூத்திரம்,

$$y = y_4 + \frac{u}{1!}\nabla y_4 + ... + \frac{u(u+1)(u+2)(u+3)}{4!}\nabla^4 y_4$$

இங்கு $u = \frac{x - x_4}{h}$

$$u = \frac{4.5-5}{1} = -0.5$$

பின்நோக்கு வேறுபாட்டு அட்டவணை :

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
1	1				
		7			
2	8				
		19	12		
				6	
3	27				**0**
		37	18		
				6	
4	64				
		61	**24**		
5	**125**				

$$\therefore\ y = 125 + \frac{(-0.5)}{1}(61) + \frac{(-0.5)(0.5)}{2}(24) + \frac{(-0.5)(0.5)(1.5)}{6}$$

$x = 4.5$ எனில், $y = 91.125$

7.1.6 இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரம்

$y = f(x)$ என்பது n ஆம் படி பல்லுறுப்புக்கோவை என்க. x(6)ஆனது $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ என்கின்ற ஏறு வரிசையில் உள்ள மதிப்புகளைப் பெறும் பொழுது y முறையே $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$ ...., $f(x_n)$ ஆகிய $(n + 1)$ மதிப்புகளை அடைகின்றது. (x என்பது சம இடைவெளியில் இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை).

இங்கு $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, ..., f(x_n) = y_n$.

இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரம்

$$\begin{aligned} f(x) = {} & y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} \\ & + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} \\ & + \ldots + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})} \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 13

பின்வரும் அட்டவணையில் $x = 42$ ஆக இருக்கும் பொழுது y–ன் மதிப்பை இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

x :	**40**	**50**	**60**	**70**
y :	**31**	**73**	**124**	**159**

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து,

$x_0 = 40, x_1 = 50, x_2 = 60, \quad x_3 = 70$ மற்றும் $x = 42$

$y_0 = 31, y_1 = 73, y_2 = 124, y_3 = 159$

இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த நமக்குக் கிடைப்பது,

$$\begin{aligned} y = \; & y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \\ & + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\ & + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \\ & + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(42) &= 31\frac{(-8)(-18)(-28)}{(-10)(-20)(-30)} + 73\frac{(2)(-18)(-28)}{(10)(-10)(-20)} \\ &\quad + 124\frac{(2)(-8)(-28)}{(20)(10)(-10)} + 159\frac{(2)(-8)(-18)}{(30)(20)(10)} \\ &= 20.832 + 36.792 - 27.776 + 7.632 \\ y &= 37.48 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 14

பின்வரும் அட்டவணையைக் கொண்டு இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $x = 4$ ஆக இருக்கும் பொழுது y –ன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	**0**	**3**	**5**	**6**	**8**
y :	**276**	**460**	**414**	**343**	**110**

தீர்வு :

$x_0 = 0, x_1 = 3, x_2 = 5, \quad x_3 = 6, x_4 = 8$ மற்றும் $x = 4$

$y_0 = 276, y_1 = 460, y_2 = 414, y_3 = 343, y_4 = 110$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி நமக்குக் கிடைப்பது,

$$\begin{aligned} y = \; & y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} \\ & + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} \end{aligned}$$

$$+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}$$
$$+ y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}$$
$$+ y_4 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}$$
$$= 276\frac{(1)(-1)(-2)(-4)}{(-3)(-5)(-6)(-8)} + 460\frac{(4)(-1)(-2)(-4)}{(3)(-2)(-3)(-5)} + 414\frac{(4)(1)(-2)(-4)}{(5)(2)(-1)(-3)}$$
$$+343\frac{(4)(1)(-1)(-4)}{(6)(3)(1)(-2)} + 110\frac{(4)(1)(-1)(-2)}{(8)(5)(3)(2)}$$
$$= -3.066 + 163.55 + 441.6 - 152.44 + 3.666$$
$$y = 453.311$$

எடுத்துக்காட்டு 15

பின்வரும் அட்டவணையைக் கொண்டு இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $y(11)$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	**6**	**7**	**10**	**12**
y :	**13**	**14**	**15**	**17**

தீர்வு :

$x_0 = 6,\ x_1 = 7,\ x_2 = 10,\ x_3 = 12$ மற்றும் $x = 11$

$y_0 = 13, y_1 = 14, y_2 = 15,\ y_3 = 17$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த நமக்குக் கிடைப்பது

$$= 13\frac{(4)(1)(-1)}{(-1)(-4)(-6)} + 14\frac{(5)(1)(-1)}{(1)(-3)(-5)} + 15\frac{(5)(4)(-1)}{(4)(3)(-2)} + 17\frac{(5)(4)(1)}{(6)(5)(2)}$$
$$= 2.1666 - 4.6666 + 12.5 + 5.6666$$
$$y = 15.6666$$

பயிற்சி 7.1

1) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு $x = 42$ ஆக இருக்கும் போது y –ன் மதிப்பை வரைபடத்தின் மூலம் காண்க.

x :	20	30	40	50
y :	51	43	34	24

2) ஒரு நகரத்தின் மக்கள் தொகை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆண்டு	x :	1940	1950	1960	1970	1980	1990
மக்கள்தொகை (இலட்சங்களில்)	y :	20	24	29	36	46	50

1976ம் ஆண்டின் மக்கள் தொகையை வரைபடத்தின் மூலம் காண்க.

3) கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு $f(3)$ ஐக் காண்க.

x :	1	2	3	4	5
$f(x)$:	2	5	-	14	32

4) கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு விடுபட்ட எண்ணைக் காண்க.

x :	0	5	10	15	20	25
y :	7	11	14	-	24	32

5) கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு 2000 ஆம் ஆண்டின் ஏற்றுமதியை மதிப்பிடுக.

ஆண்டு	x :	1999	2000	2001	2002	2003
ஏற்றுமதி (டன்களில்)	y :	443	-	369	397	467

6) கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு $x = 145$ ஆக இருக்கும் பொழுது y –ன் மதிப்பை கிரிகோரி–நியூட்டன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

x :	140	150	160	170	180
y :	46	66	81	93	101

7) கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு $y(8)$ –ன் மதிப்பை கிரிகோரி–நியூட்டன் சூத்திரத்தைப் பயனப்டுத்திக் காண்க.

x :	0	5	10	15	20	25
y :	7	11	14	18	24	32

8) 1975 ஆம் ஆண்டின் மக்கள் தொகையை கிரிகோரி–நியூட்டன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி கணக்கிடுக.

வருடம்	1961	1971	1981	1991	2001
மக்கள்தொகை	98572	132285	168076	198690	246050

9) கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு விட்டம் 96 அலகுகள் உள்ள வட்டத்தின் பரப்பை கிரிகோரி–நியூட்டன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

விட்டம்	x :	80	85	90	95	100
பரப்பு	y :	5026	5674	6362	7088	7854

10) கிரிகோரி–நியூட்டன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $x = 85$ ஆக இருக்கும் பொழுது y –ன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	50	60	70	80	90	100
y :	184	204	226	250	276	304

11) கிரிகோரி–நியூட்டன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி y (22.4) –ன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	19	20	21	22	23
y :	91	100	110	120	131

12) கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $y(25)$ –ன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	20	30	40	50
y :	512	439	346	243

13) $f(0) = 5$, $f(1) = 6$, $f(3) = 50$, $f(4) = 105$, எனில் இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $f(2)$ –ன் மதிப்பைக் காண்க.

14) கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு, இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $x = 5$ எனில், y –ன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	1	2	3	4	7
y :	2	4	8	16	128

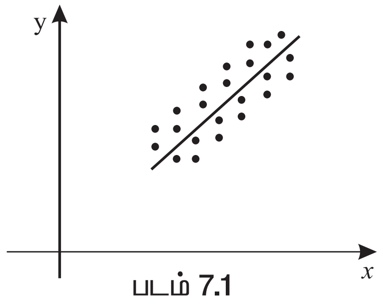
7.2 நேர்க்கோடு பொருத்துதல்

பொதுவாக பல துறைகளில் இரண்டு (அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட) மாறிகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்புகள் குறித்து ஆராய வேண்டிய அவசியம் உள்ளது.

உதாரணமாக ஒரு குழந்தையின் எடையானது அதன் வயதுடன் தொடர்புடையது. ஒரு பொருளின் விலையானது அப்பொருளின் தேவையோடு தொடர்புடையது. ஒரு வாகனத்தின் பராமரிப்புச் செலவானது அது பயன்படுத்தப்பட்ட காலத்தோடு தொடர்புடையது.

7.2.1 சிதறல் வரைபடம் (Scatter diagram)

இரு மாறிகள் x மற்றும் y என்பன ஒரு ஆணின் வயது மற்றும் எடையைக் குறிக்கின்றது என எடுத்துக் கொண்டால், $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ என்பன n ஆண்களின் வயதையும் $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ என்பன முறையே அவர்களின் எடையையும் குறிக்கின்றன என்போம். $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \ldots.. (x_n, y_n)$ என்ற புள்ளிகளை ஒரு செவ்வகல ஆயத்தொலைகளில் குறியிடுவோம். இவ்வாறு குறியிடுவதால் வரைபடத்தில் கிடைக்கும் புள்ளிகளின் கணத்தை **சிதறல் வரைபடம்** என்போம்.



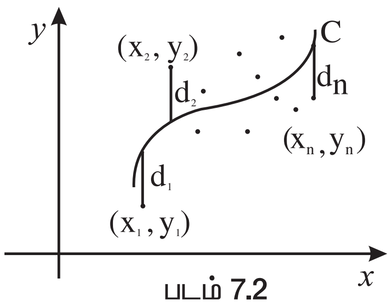
படம் 7.1

சிதறல் வரைபடம் மூலம் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளுக்கான புள்ளிகளை அணுகி வருமாறு ஒரு சீரான வளைவரை இருக்கக்கூடும் என்பதை நாம் காணலாம். இத்தகைய வளைவரையை **அணுகி வருகின்ற வளைவரை** என்போம். மேலே உள்ள படம் 7.1 ல் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகள் ஒரு நேர்க்கோட்டை அணுகி வருகின்றன என்பதையும் மற்றும் இரண்டு மாறிகளுக்கிடையே ஒரு நேரியல் தொடர்பு இருப்பதையும் உணரலாம்.

7.2.2 மீச்சிறு வர்க்கக் கொள்கை (Principle of least squares)

பொதுவாக கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளுக்கு ஒன்றுக்கும் மேற்பட்ட வளைவரைகள் பொருந்துவது போல் தோன்றும். எனவே நேர்க்கோடுகள் வரையும் பொழுது மிகச் சிறந்த பொருத்தமான ஒரு நோர்க்கோட்டிற்குரிய வரையறையைக் கவனத்தில் கொள்வது அவசியமாகும்.

மதிப்புகள் $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ ..... (x_n, y_n) என்பனவற்றை புள்ளிகளாக எடுத்துக் கொள்வோம். கொடுக்கப்பட்ட $x = x_1$ என்ற மதிப்பிற்கு ஏற்ற y –ன் மதிப்பிற்கும் வளைவரை C –ன் மூலம் கிடைக்கக் கூடிய அதே y–ன் மதிப்பிற்கும் வித்தியாசம் இருக்கக் கூடும். (படம் 7.2)



படம் 7.2

இந்த வித்தியாசத்தை d_1 என்க. d_1 ஐ விலக்கம் அல்லது பிழை எனக் கூறலாம். இங்கு d_1 என்பது மிகை எண், குறை எண் அல்லது பூச்சியமாக இருக்கலாம். அதே போன்று $x_2, x_3, \ldots x_n$ –களுக்கான விலக்கங்கள் முறையே $d_2, d_3, \ldots d_n$ எனக் கிடைக்கும்.

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளுக்கு ஏற்ற மிகச் சிறந்த பொருத்தமான வளைவரையின் அளவை $d_1^2, d_2^2, \ldots d_n^2$ –களிலிருந்து பெறலாம்.

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளை அணுகி வருகின்ற அனைத்து வளைவரைகளிலும் $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \ldots + d_n^2$ ஆனது எவ்வளைவரைக்கு மீச்சிறு மதிப்பைக் கொண்டுள்ளதோ அவ்வளைவரையே மிகச் சிறந்த பொருத்தமான வளைவரை என்போம். அவ்வாறு அணுகி வருகின்ற வளைவரையானது நேர்க்கோடாக இருப்பின் அதனை மிகச் சிறந்த பொருத்தமான நேர்க்கோடு (line of best fit) என்போம்.

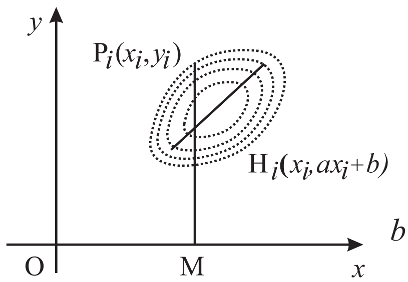
7.2.3 மீச்சிறு வர்க்கக் கொள்கை மூலம் இயல்நிலைச் சமன்பாடுகளைத் தருவித்தல்

கொடுக்கப்பட்ட $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$ என்ற n புள்ளிகளுக்கு பொருந்தும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y = ax + b \qquad \text{------------(1)}$$

a மற்றும் b –களின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு (1) ஆனது நேர்க்கோட்டுக் குடும்பம் ஒன்றைக் குறிக்கும். (1)–ற்கு சிறந்ததாகவும் பொருத்தமானதாகவும் உள்ள a மற்றும் b களின் மதிப்புகளை நாம் காண வேண்டும். இம்மதிப்புகளைக் காண மீச்சிறு வர்க்கக் கொள்கையினைப் பயன்படுத்துகின்றோம்.

$P_i\ (x_i, y_i)$ என்பது சிதறல் வரைபடத்தில் (படம் 7.3) பொதுவான ஒரு புள்ளி என்க. P_iM ஐ x–அச்சுக்கு செங்குத்தாகவும், $y = ax + b$ ஐ H_i ல் வெட்டுமாறும் வரைக. H_i ன் x அச்சுத் தொலைவு x_i மற்றும் y –அச்சுத் தொலைவு $ax_i +$ b ஆகும்.



படம் 7.3

$P_iH_i = P_iM - H_iM$

$= y_i - (ax_i + b)$ என்பது y_i –ன் விலக்கம் ஆகும்.

மீச்சிறு வர்க்கக் கொள்கையின் படி a மற்றும் b களின் மதிப்புகளைக் காண வேண்டும். எனவே,

$$E = \sum_{i=1}^{n} P_iH_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2$$ என்பது சிறும மதிப்பைப் பெற வேண்டும்.

பெறும அல்லது சிறும மதிப்பிற்கான நிபந்தனைகளின் படி a மற்றும் b இவற்றைப் பொறுத்து E –ன் பகுதி வகைக்கெழுக்கள் தனித்தனியே பூச்சியமாகும்.

$$\therefore \frac{\partial E}{\partial b} = 0 \;\Rightarrow\; -2\sum_{i=1}^{n} x_i[y_i - (ax_i + b)] = 0$$

$$\boldsymbol{a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i} \qquad \textbf{...(2)}$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 0 \;\Rightarrow\; -2\sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)] = 0$$

i.e., $\sum y_i - a\sum x_i - nb = 0$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i} \qquad \textbf{...(3)}$$

சமன்பாடுகள் (2) மற்றும் (3) ஆகியவை இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள் எனப்படும். இயல்நிலைச் சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதன் மூலம் a மற்றும் b களின் மதிப்புகளைக் காணலாம்.

குறிப்பு

$\boldsymbol{y = a + bx}$ என்ற வடிவில் உள்ள சமன்பாடு மிகப் பொருத்தமான நேர்கோடாக அமைவதற்கான இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள்

$$\boldsymbol{na + b\sum x_i = \sum y_i}$$

$$\boldsymbol{a\sum x_i + b\sum x_i^2 = \sum x_i y_i}$$

எடுத்துக்காட்டு 16

$\sum x = 10$, $\sum y = 19$, $\sum x^2 = 30$, $\sum xy = 53$ மற்றும் $n = 5$ என்பனவற்றுக்கு ஒரு நேர்க்கோட்டைப் பொருத்துக.

தீர்வு :

மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோடு $y = ax + b$ என்க.

$\sum y = a\sum x + nb$

$\sum xy = a\sum x^2 + b\sum x$

$\Rightarrow \quad 10a + 5b = 19 \qquad ... (1)$

$30a + 10b = 53 \qquad ... (2)$

(1) மற்றும் (2) களைத் தீர்ப்பதன் வாயிலாக $a = 1.5$ மற்றும் $b = 0.8$ எனப் பெறலாம்.

$\therefore$ எனவே மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$y = 1.5x + 0.8$

எடுத்துக்காட்டு 17

$\sum x = 10$, $\sum y = 16.9$, $\sum x^2 = 30$, $\sum xy = 47.4$ மற்றும் $n = 7$ என்பனவற்றுக்கு தக்கபடி வரையப்பட்ட மிகப் பொருத்தமான கோட்டில் x - அச்சின் வெட்டுத் துண்டைக் காண்க.

தீர்வு :

மிகப் பொருத்தமான நேர்கோடு $y = ax + b$ என்க.

இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள்

$\sum y = a\sum x + nb$

$\sum xy = a\sum x^2 + b\sum x$

$\Rightarrow \quad 10a + 7b = 16.9 \qquad \ldots (1)$

$30a + 10b = 47.4 \qquad \ldots (2)$

(1) மற்றும் (2)களைத் தீர்ப்பதன் மூலம்,

$a = 1.48$ மற்றும் $b = 0.3$ எனக் கிடைக்கும்.

$\therefore$ மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$y = 1.48x + 0.3$

$\therefore$ எனவே x-அச்சின் வெட்டுத்துண்டு $-\dfrac{0.3}{1.48}$

எடுத்துக்காட்டு 18

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு ஒரு நேர்க்கோடு பொருத்துக.

x :	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
y :	**1**	**1**	**3**	**4**	**6**

தீர்வு :

மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோடு $y = ax + b$

இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள்

$a\sum x + nb = \sum y \qquad \ldots (1)$

$a\sum x^2 + b\sum x = \sum xy \qquad \ldots (2)$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து

x	y	x^2	xy
0	1	0	0
1	1	1	1
2	3	4	6
3	4	9	12
4	6	16	24
10	**15**	**30**	**43**

இம்மதிப்புகளை சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) களில் பிரதியிட நமக்குக் கிடைப்பது,

$$10a + 5b = 15 \qquad \dots (3)$$

$$30a + 10b = 43 \qquad \dots (4)$$

இவற்றைத் தீர்க்க, நமக்குக் கிடைப்பது,

$a = 1.3$ மற்றும் $b = 0.4$

$\therefore$ மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $y = 1.3x + 0.4$.

எடுத்துக்காட்டு 19

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு ஒரு நேர்க்கோடு பொருத்துக.

x :	**4**	**8**	**12**	**16**	**20**	**24**
y :	**7**	**9**	**13**	**17**	**21**	**25**

தீர்வு :

ஆதியை $\frac{12+16}{2} = 14$ என்ற இடத்தில் எடுத்துக் கொள்வோம்.

$u_i = \frac{x_i - 14}{2}$ என்க. இங்கு $n = 6$

மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோடு $y = au + b$ என்க.

இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள்,

$$a\sum u + nb = \sum y \qquad \dots (1)$$

$$a\sum u^2 + b\sum u = \sum uy \qquad \dots (2)$$

x	y	u	u^2	uy
4	7	-5	25	-35
8	9	-3	9	-27
12	13	-1	1	-13
16	17	1	1	17
20	21	3	9	63
24	25	5	25	125
மொத்தம்	**92**	**0**	**70**	**130**

இம்மதிப்புகளை (1) மற்றும் (2) களில் பிரதியிட நமக்குக் கிடைப்பது,

$a = 1.86$ மற்றும் $b = 15.33$

$\therefore$ மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோடு

$$y = 1.86\left(\frac{x-14}{2}\right) + 15.33 = 0.93x + 2.31$$

எடுத்துக்காட்டு 20

பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஒரு நேர்க்கோடு பொருத்துக.

x :	**100**	**200**	**300**	**400**	**500**	**600**
y :	**90.2**	**92.3**	**94.2**	**96.3**	**98.2**	**100.3**

தீர்வு :

$u = \dfrac{x_i - 350}{50}$ மற்றும் $v_i = y_i - 94.2$ என்க. இங்கு $n = 6$

மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோடு $v = au + b$

இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள் $a\sum u + nb = \sum v$ ... (1)

$a\sum u^2 + b\sum u = \sum uv$ ... (2)

x	y	u	v	u^2	uv
100	90.2	-5	-4	25	20
200	92.3	-3	-1.9	9	5.7
300	94.2	-1	0	1	0
400	96.3	1	2.1	1	2.1
500	98.2	3	4	9	12
600	100.3	5	6.1	25	30.5
மொத்தம்		**0**	**63**	**70**	**70.3**

இம்மதிப்புகளை சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) களில் பிரதியிட நமக்குக் கிடைப்பது

$a = 1.0043$ மற்றும் $b = 1.05$

மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோடு $v = 1.0043\,u + 1.05$

$\Rightarrow \quad y = 0.02x + 88.25$

பயிற்சி 7.2

1) சிதறல் வரைபடம் – விளக்குக.

2) மீச்சிறு வர்க்கக் கொள்கையைக் கூறுக.

3) $\sum x = 75$, $\sum y = 115$, $\sum x^2 = 1375$, $\sum xy = 1875$ மற்றும் n = 6 எனில், ஒரு மிகச் சிறந்த நேர்க்கோடு பொருத்துக.

4) $\sum x = 10$, $\sum y = 25$, $\sum x^2 = 30$, $\sum xy = 90$ மற்றும் n = 5 எனில், ஒரு மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோட்டினைப் பொருத்தி அதன் சாய்வு மற்றும் y-அச்சின் வெட்டுத்துண்டு ஆகியவற்றைக் காண்க.

5) பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு மீச்சிறு வர்க்கக் கொள்கையைப் பயன்படுத்தி $y = ax + b$ எனும் நேர்க்கோட்டைப் பொருத்துக.

x :	0	1	3	6	8
y :	1	3	2	5	4

6) 5 மாணவர்களைக் கொண்ட குழு ஒன்று ஒரு பயிற்சிக்கு முன்பும் அதன் பின்பும் பெற்ற மதிப்பெண்களின் விவரம்.

பயிற்சிக்கு முன்பு பெற்ற மதிப்பெண்கள்	3	4	4	6	8
பயிற்சிக்கு பின்பு பெற்ற மதிப்பெண்கள்	4	5	6	8	10

மீச்சிறு வர்க்கக் கொள்கையைப் பயன்படுத்தி பொருத்தமான நேர்க்கோட்டினைக் காண்க.

7) பின்வரும் விவரங்களுக்கு மீச்சிறு வர்க்கக் கொள்கையைப் பயன்படுத்தி மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோட்டினைக் காண்க.

x :	100	120	140	160	180	200
y :	0.45	0.55	0.60	0.70	0.80	0.85

8) பின்வரும் விவரங்களுக்கு மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோட்டினைக் காண்க. மேலும் $x = 3.5$ எனில் y –ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

x :	0	1	2	3	4
y :	1	1.8	3.3	4.5	6.3

9) பின்வரும் விவரங்களுக்கு மீச்சிறு வர்க்கக் கொள்கையைப் பயன்படுத்தி மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோடு காண்க.

பயன்படுத்தப்பட்ட நீரின் ஆழம் (செ.மீ.களில்)	x :	0	12	24	36	48
சராசரி விளைச்சல் (டன்கள்/ஏக்கர்)	y :	35	55	65	80	90

10) மாதிரிக்காக எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட ஆறு மருந்துக் கடைகளின் விளம்பரச் செலவுகள் (மொத்தச் செலவின் விழுக்காட்டில்) மற்றும் நிகர லாபங்கள் (மொத்த விற்பனையின் விழுக்காட்டில்) பின்வருமாறு தரப்பட்டுள்ளது.

விளம்பரச் செலவு	:	0.4	1.0	1.3	1.5	2.0	2.8
நிகர இலாபம்	:	1.90	2.8	2.9	3.6	4.3	5.4

மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோட்டைப் பொருத்துக.

11) பத்து மாணவர்கள் ஆங்கிலப் பாடம் படித்த நேரம் (மணிகளில்) மற்றும் அவர்கள் தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் விவரம் பின்வருமாறு தரப்பட்டுள்ளது.

படித்த நேரம் (மணிகளில்)	x	:	4	9	10	12	14	22
தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்கள்	y	:	31	58	65	68	73	91

(i) $y = ax + b$ என்ற நேர்க்கோட்டைப் பொருத்துக.

(ii) 17 மணி நேரம் படித்த ஒரு மாணவர் பெறும் மதிப்பெண்ணைக் காண்க.

பயிற்சி 7.3

1) $\Delta f(x) =$

(a) $f(x + h)$ (b) $f(x) - f(x + h)$ (c) $f(x + h) - f(x)$ (d) $f(x) - f(x - h)$

2) $E^2 f(x) =$

(a) $f(x + h)$ (b) $f(x + 2h)$ (c) $f(2h)$ (d) $f(2x)$

3) E =

(a) $1 + \Delta$ (b) $1 - \Delta$ (c) $\nabla + 1$ (d) $\nabla - 1$

4) $\nabla f(x + 3h) =$

(a) $f(x + 2h)$ (b) $f(x + 3h) - f(x + 2h)$

(c) $f(x + 3h)$ (d) $f(x + 2h) - f(x - 3h)$

5) $h = 1$ எனில், $\Delta(x^2) =$

(a) $2x$ (b) $2x - 1$ (c) $2x + 1$ (d) 1

6) $y = ax + b$ என்பது மிகச் சிறந்த பொருத்தமான நேர்கோடாக அமைவதற்கான a மற்றும் b என்பனவற்றைக் கணக்கிட தேவையான இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள்

(a) $a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum x_i y_i$ மற்றும் $a\sum x_i + nb = \sum y_i$

(b) $a\sum x_i + b\sum x_i^2 = \sum x_i y_i$ மற்றும் $a\sum x_i^2 + nb = \sum y_i$

(c) $a\sum x_i + nb = \sum x_i y_i$ மற்றும் $a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum y_i$

(d) $a\sum x_i^2 + nb = \sum x_i y_i$ மற்றும் $a\sum x_i + b\sum x_i = \sum y_i$

7) மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோடான $y = 5.8\,(x - 1994) + 41.6$ –ல் $x = 1997$ எனில், y ன் மதிப்பு

(a) 50 (b) 54 (c) 59 (d) 60

8) ஓர் நேர்க்கோட்டைப் பொருத்துவதற்கான ஐந்து மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன மேலும் $\sum x = 0$ மற்றும் $\sum y = 15$ ஆகும். இப்பொழுது மிகச் சிறந்த பொருத்தமான நேர்க்கோட்டின் y-அச்சின் வெட்டுத்துண்டு

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

9) $y = ax + b$ என்ற நேர்க்கோட்டைப் பொருத்துவதற்கான இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள் $10a + 5b = 15$ மற்றும் $30a + 10b = 43$ ஆகும். இப்பொழுது மிகப்பொருத்தமான நேர்க்கோட்டின் சாய்வு,

(a) 1.2 (b) 1.3 (c) 13 (d) 12

10) n புள்ளிகள் (x, y) ஐ மீச்சிறு வர்க்க முறையில் $y = ax + b$ எனும் நேர்க்கோட்டில் பொருத்தும் பொழுது $4 = 4a + b$ மற்றும் $\sum xy = 120a + 24b$ என்ற இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன எனில், $n =$

(a) 30 (b) 5 (c) 6 (d) 4

நிகழ்தகவு பரவல்கள் 8

8.1 சமவாய்ப்பு மாறி மற்றும் நிகழ்தகவு சார்பு

(Random variable and probability function)

சமவாய்ப்பு மாறி

சமவாய்ப்பு மாறி என்பது கூறுவெளி S–ன் மீது வரையறுக்கப்பட்டுள்ள மெய் மதிப்புடைய ஒரு சார்பாகும் மற்றும் இம்மாறி $-\infty$ லிருந்து ∞ வரையிலான மெய்மதிப்புகளை பெறும்.

8.1.1 தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி

X என்ற மாறி முடிவுறு அல்லது முடிவுறா ஆனால் எண்ணிடத்தக்க மதிப்புகள் பெறுமாயின் அம்மாறி ஒரு **தனித்த சமவாய்ப்பு** மாறியாகும்.

உதாரணங்கள்

(i) ஒரு நாணயத்தை இருமுறை சுண்டுதலை ஒரு சோதனையாக கருதுவோம். இச்சோதனையின் கூறுப்புள்ளிகள் s_1 = (H, H), s_2 = (H, T), s_3 = (T, H) மற்றும் s_4 = (T, T) ஆகும்.

சமவாய்ப்பு மாறி X : இருமுறை சுண்டும் பொழுது கிடைத்த “தலைகளின் எண்ணிக்கை”

எனவே $X(s_1) = 2$ $\quad$ $X(s_2) = 1$

$X(s_3) = 1$ $\quad$ $X(s_4) = 0$

$R_X = \{0, 1, 2\}$

s என்பது கூறுவெளியில் உள்ள ஒரு உறுப்பாகும். இவ்வாறாக $X(s)$ என்பது வெளிப்பாடு s –யை தொடர்பு கொண்ட சமவாய்ப்பு மாறி X–யை குறிக்கின்ற மெய் எண்ணாகும்.

X–ன் எல்லா மதிப்புகளையும் கொண்ட கணம் R_X , X –ன் **வீச்சுக் கணம்** என அழைக்கப்படுகிறது.

(ii) ஒரு சோடி பகடைகளை உருட்டுவதை சோதனையாகக் கொள்வோம். எனவே கூறுவெளி

$$\begin{array}{llll} S = \{(1, 1) & (1, 2) & \ldots\ldots\ldots\ldots & (1, 6) \\ \quad . & . & & . \\ \quad . & . & & . \\ \quad . & . & & . \\ \quad (6, 1) & (6, 2) & \ldots\ldots\ldots\ldots & (6, 6)\} \end{array}$$

சமவாய்ப்பு மாறி X : இரு பகடைகளின் மீது காணும் எண்களின் கூடுதல் என்பது ஆகும். எனவே $R_X = \{2, 3, 4, ..., 12\}$.

(iii) ஒரே நேரத்தில் 3 நாணயங்களை சுண்டுவதை சோதனையாக கொள்வோம்.

சமவாய்ப்பு மாறி X : இச்சோதனையில் கிடைக்கும் தலைகளின் எண்ணிக்கையை குறிப்பதாயின், இங்கு 0, 1, 2, 3 என்கிற மதிப்புகளை X ஏற்கிறது.

$$S = \{HHH, HHT, HTT, TTT, TTH, THH, HTH, THT\}$$

$$R_X = \{0, 1, 2, 3\}$$

(iv) ஒரே நேரத்தில் 4 நாணயங்களை சுண்டுகின்ற ஒரு சமவாய்ப்பு சோதனையில், கிடைக்கப் பெறுகின்ற தலைகளின் எண்ணிக்கையை குறிப்பிடுகையில்

$R_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ என்பதாகும்.

ஒரு புத்தகத்தில் ஒவ்வொரு பக்கத்தில் காணப்படும் அச்சுப்பிழைகளின் எண்ணிக்கை, ஒரு நிறுவனத்தின் தொலைபேசி பணியாளரால் பெறப்படும் தொலைபேசி அழைப்புகளின் எண்ணிக்கை ஆகியவை தனித்த சமவாய்ப்பு மாறிகளுக்கான சில உதாரணங்களாகும்.

8.1.2 தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு சார்பு மற்றும் நிகழ்தகவு பரவல்

X என்ற தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி பெறும் மதிப்புகள் $x_1, x_2, x_3...$ என்க. $p(x_i) = P[X = x_i]$ என்றவாறு உள்ள சார்பு p ஆனது

(i) $p(x_i) \geq 0 \quad i = 1, 2, ...$

(ii) $\sum_i p\,(x_i) = 1$

என்ற நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்யுமாயின், p நிகழ்தகவு சார்பு அல்லது நிகழ்தகவு **திண்மச் சார்பு** என்று அழைக்கப்படுகிறது.

$(x_i, p(x_i))$ என்கிற எல்லா சோடிகளின் தொகுப்பு X –ன் நிகழ்தகவு பரவல் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1

இரு நாணயங்களை சுண்டுகிற சோதனையை கருதுவோம். X என்கிற சமவாய்ப்பு மாறி சோதனையில் பெறப்படும் தலைகளின் எண்ணிக்கையை குறிப்பதாக கொள்வோம்.

X	**:**	**0**	**1**	**2**
p (x_i)	**:**	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$p(x_i)$ ஒரு நிகழ்தகவு திண்மச் சார்பா என அறிக.

தீர்வு :

(i) இங்கு ஒவ்வொரு $p(x_i) > 0$ மற்றும்

(ii) $\sum p(x_i) = p\,(0) + p\,(1) + p\,(2)$ என்பதனை எளிதில் காணலாம்.

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

எனவே $p(x_i)$ நிகழ்தகவு திண்மச் சார்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2

இரு பகடைகளை உருட்டும் போது கிடைக்கும் எண்களின் கூடுதல் தொகையை X என்கிற சமவாய்ப்பு மாறி குறிப்பதாக கொள்வோம். X –ன் நிகழ்தகவு பரவலானது

X :	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
p (x_i) :	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

p(x_i) ஒரு நிகழ்தகவு திண்மச் சார்பா என ஆராய்க ?

தீர்வு :

இங்கு ஒவ்வொரு $p(x_i) > 0$ மற்றும்

(ii) $\sum p(x_i) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + ... + \frac{1}{36} = 1$ எனவும் இருப்பது கவனிக்கத்தக்கது.

எனவே $p(x_i)$ நிகழ்தகவு திண்மச்சார்பாகும்.

8.1.3 குவிப்புப் பரவல் சார்பு (c.d.f.)

X ஒரு தனித்த சமவாய்ப்புமாறி என்க.

$F(x) = P(X \leq x)$

$= \sum^{i} p(x_i)$ i –ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $x_i \leq x$ என அமையுமாறு கூட்டுத்தொகை கணக்கிடப்படுகிறது எனில் சார்பு $F(x)$ –யை X–ன் குவிப்புப் பரவல் சார்பு என அழைக்கிறோம்.

குறிப்பு : $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

எடுத்துக்காட்டு 3

X என்கிற சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு சார்பு பின்வருமாறு.

X ன் மதிப்பு, x :	**– 2**	**– 1**	**0**	**1**	**2**	**3**
$p(x)$:	**0.1**	***k***	**0.2**	**2*k***	**0.3**	***k***

(i) k –ன் மதிப்பைக் காண்க.

(ii) X–ன் குவிப்புப் பரவல் சார்பைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

(i) $\sum_{i} p(x_i) = 1$ ஆகையால்

$p\,(-2) + p\,(-1) + p\,(0) + p\,(1) + p\,(2) + p\,(3) = 1$

$0.1 + k + 0.2 + 2k + 0.3 + k = 1$

$0.6 + 4k = 1 \Rightarrow 4k = 1 - 0.6$

$4k = 0.4 \qquad \therefore k = \frac{.4}{4} = 0.1$

எனவே கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிகழ்தகவு சார்பு பின்வருமாறு மாறுகிறது.

x :	-2	-1	0	1	2	3
$p(y)$:	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.1

(ii) குவிப்புப் பரவல் சார்பு $F(x) = P\,(X \le x)$

x	$F(x) = P(X \le x)$
-2	$F\,(-2) = P(X \le -2) \quad = 0.1$
-1	$F\,(-1) = P(X \le -1) \quad = P(X = -2) + P(X = -1)$
	$= 0.1 + 0.1 \quad = 0.2$
0	$F(0) \quad = P(X \le 0) \quad = P(X = -2) + P(X = -1) + P(X = 0)$
	$= 0.1 + 0.1 + 0.2 = 0.4$
1	$F(1) \quad = P(X \le 1) \quad = 0.6$
2	$F(2) \quad = P(X \le 2) \quad = 0.9$
3	$F(3) \quad = P(X \le 3) \quad = 1$

எனவே $F(x) = 0$, $x < -2$ எனில்

$= 0.1$, $-2 \le x < -1$ எனில்

$= 0.2$, $-1 \le x < 0$ எனில்

$= 0.4$, $0 \le x < 1$ எனில்

$= 0.6$, $1 \le x < 2$ எனில்

$= 0.9,$, $2 \le x < 3$ எனில்

$= 1$, $x \ge 3$ எனில்

எடுத்துக்காட்டு 4

X என்கிற சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு சார்பு பின்வருமாறு.

X	**:**	**0**	**1**	**2**	**3**
p (*x*)	**:**	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

(i) P (X ≤ 1) (ii) P (X ≤ 2) (iii) P (0 < X < 2) இவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

(i) $$P\,(X \le 1) = P\,(X = 0) + P(X = 1)$$
$$= p(0) + p(1)$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

(ii) $$P\,(X \le 2) = P\,(X = 0) + P(X = 1) + P\,(X = 2)$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{3}{10} = \frac{29}{30}$$

பிரிதொரு முறை

$$P\,(X \le 2) = 1 - P(X > 2)$$
$$= 1 - P\,(X = 3) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$$

(iii) $$P\,(0 < X < 2) = P\,(X = 1) = \frac{1}{2}$$

8.1.4 தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி

தொடர்ச்சியான (continuous) மதிப்புகளை ஏற்கும், அதாவது வரையறுக்கப்பட்ட ஓர் இடைவெளியிலுள்ள எல்லா மதிப்புகளையும் பெறவல்ல சமவாய்ப்பு மாறியே, **தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி** எனப்படும்.

உதாரணமாக,

(i) மழைநாளில் பொழியும் மழையின் அளவு

(ii) தனிநபர்களின் உயரங்கள் (iii) தனிநபர்களின் எடைகள்

8.1.5 நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு (Probability density function)

சார்பு f ஆனது X என்கிற தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியின் **நிகழ்தகவு சார்பு அல்லது நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாக (p.d.f)** இருக்க வேண்டுமானால் கீழ்கண்ட நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்ய வேண்டும்.

(i) $f(x) \geq 0$ (x–ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்)

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

குறிப்பு :

(i) சமவாய்ப்பு மாறி X, (a, b) என்ற இடைவெளியில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(ii) $P(X = a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$

(iii) $P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$

8.1.6 தொடர் பரவல் சார்பு

X என்பது $f(x)$ என்கிற நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பை உடைய ஒரு தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி எனில் $F_X(x) = P(X \leq x)$

$$= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

என்ற சார்பு X –ன் பரவல் சார்பு அல்லது **குவிப்புப் பரவல் சார்பு** என அழைக்கப்படுகிறது.

பண்புகள் :

குவிப்பு பரவல் சார்பு கீழ்கண்ட பண்புகளை பெற்றுள்ளது.

(i) $\underset{x \to -\infty}{\text{Lt}} F(x) = 0$ அதாவது $F(-\infty) = 0$

(ii) $\underset{x \to \infty}{\text{Lt}} F(x) = 1$ அதாவது $F(\infty) = 1$

(iii) தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி X –ன் குவிப்புப் பரவல் சார்பு F மற்றும் நிகழ்தகவு சார்பு f எனில் F வகையிடத்தக்க புள்ளிகளில்

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$$

எடுத்துக்காட்டு 5

தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி X –ன் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} k(2-x) & ;\ 0 < x < 2 \text{ எனில்} \\ 0 & ;\ \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

எனில் k –ன் மதிப்பை காண்க.

தீர்வு :

$f(x)$ என்பது நிகழ்தகவு சார்பு $\therefore \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\Rightarrow \quad 0 + \int_{0}^{2} f(x)\,dx + 0 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \int_{0}^{2} k(2-x)\,dx = 1$$

$$k\left(\int_{0}^{2} 2dx - xdx\right) = 1 \qquad \therefore \quad k = \frac{1}{2}$$

எனவே $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2-x); & 0 < x < 2 \\ 0 \quad ; & \text{மற்றபடி} \end{cases}$ எனில்

எடுத்துக்காட்டு 6

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 3x^2 & ;\ 0 < x < 1 \text{ எனில்} \\ 0 & ; \quad \text{மற்றபடி} \end{cases}}$$

$f(x)$ ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு என்று சரிபார்க்கவும்

(i) $P(X \le \frac{1}{3})$ (ii) $P(\frac{1}{3} \le X \le \frac{1}{2})$

தீர்வு :

x –ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும், $f(x) > 0$ என்பது தெளிவாகிறது.

மற்றும்

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} 3x^2\,dx = 1$$

எனவே தரப்பட்ட சார்பு ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு ஆகும்.

(i) $P(X \le \frac{1}{3}) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{3}} f(x)\,dx$ Since $P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$$= \int_{0}^{\frac{1}{3}} 3x^2\,dx = \frac{1}{27}$$

(ii) $P(\frac{1}{3} \le X \le \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$

$$= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} 3x^2\,dx = \frac{1}{8} - \frac{1}{27} = \frac{19}{216}$$

எடுத்துக்காட்டு 7

ஒரு தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி X –ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} kx(1-x) & ;\ 0 < x < 1 \text{ எனில்} \\ 0 & ; \quad \text{மற்றபடி} \end{cases}}$$

எனில் k மற்றும் குவிப்புப் பரவல் சார்பைக் காண்க.

தீர்வு :

X என்பது $f(x)$ என்கிற நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை கொண்ட ஒரு தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி எனில்

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\int_{0}^{1} k\,x(1-x) = 1$$

$$k\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1 \qquad \therefore\ k = 6$$

எனவே தரப்பட்ட நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & ;\ 0 < x < 1 \text{ எனில்} \\ 0 & ; \quad \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

என்று பெறுகிறோம். குவிப்புப் பரவல் சார்பு $f(x)$ ஐக் காண,

$F(x) = 0 \;;\; x \leq 0$ எனில்

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$$

$$= \int_{0}^{x} 6x(1-x)\, dx = 3x^2 - 2x^3; \;\; 0 < x < 1 \text{ எனில்}$$

$F(x) = 1 \;;\; x \geq 1$ எனில்

$\therefore$ X –ன் குவிப்புப் பரவல் சார்பு :

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 & ;\quad & x \leq 0 \text{ எனில்} \\ &= 3x^2 - 2x^3 & ;\quad & 0 < x < 1 \text{ எனில்} \\ &= 1 & ;\quad & x \geq 1 \text{ எனில்} \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 8

வானொலி குழலின் ஒரு குறிப்பிட்ட பகுதியின் ஆயுள் காலத்தை (மணிகளில்) தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி எனக் கொண்டு அதனுடைய நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{100}{x^2} & ;\; x \geq 100 \text{ எனில்} \\ 0 & ;\; \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

(i) முதல் 150 மணி நேர இயக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்ட வானொலி பெட்டியில் உள்ள மூன்று குழல்களையும் மாற்றுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

(ii) முதல் 150 மணிநேர இயக்கத்தில் மூன்று குழல்களில் ஒன்றைக்கூட மாற்றாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

தீர்வு :

(i) வானொலி பெட்டியில் உள்ள ஒரு குழல் மாற்றப்பட வேண்டுமெனில், அக்குழலின் ஆயுள் 150 மணி நேரத்திற்கு குறைவானதாக இருக்க வேண்டும் (< 150) எனவே, முதல் 150 மணி நேரத்தில் ஒரு குழல் மாற்றுவதற்கான நிகழ்தகவு 'p' என்பது

$$p = P(X \leq 150) = \int_{100}^{150} f(x)\, dx$$

$$= \int_{100}^{150} \frac{100}{x^2}\, dx = \frac{1}{3}$$

எனவே முதல் 150 மணி நேரத்தில் மூன்று குழல்களையும் மாற்றுவதற்கான நிகழ்தகவு =

$$p^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

(ii) முதல் 150 மணி நேர இயக்கத்தில் ஒரு குழல் மாற்றம் செய்யப்படாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$P(X > 150) = 1 - P(X \leq 150) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$\therefore$ முதல் 150 மணி நேர இயக்கத்தில் மூன்று குழல்களில் ஒன்றைக் கூட மாற்றாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

பயிற்சி 8.1

1) கீழ்கண்ட சார்புகளுள் எவை $S = [x_1, x_2, x_3]$ –ன் மீது நிகழ்தகவு பரவலை வரையறுக்கிறது ?

(i) $p(x_1) = \frac{1}{3}$ $p(x_2) = \frac{1}{2}$ $p(x_3) = \frac{1}{4}$

(ii) $p(x_1) = \frac{1}{3}$ $p(x_2) = \frac{1}{6}$ $p(x_3) = \frac{1}{2}$

(iii) $p(x_1) = 0$ $p(x_2) = \frac{1}{3}$ $p(x_3) = \frac{2}{3}$

(iv) $p(x_1) = p(x_2) = \frac{2}{3}$ $p(x_3) = \frac{1}{3}$

2) ஒரு பகடையை உருட்டுகின்ற சோதனையை கருத்தில் கொள்வோம். பகடையின் மீதுள்ள எண் X என்ற சமவாய்ப்பு மாறி கீழ்கண்ட மதிப்புகளைப் பெறுகிறது.

X	:	1	2	3	4	5	6
$p(x_i)$	:	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$p(x_i)$ என்பது ஒரு நிகழ்தகவு சார்பா ?

3) ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி கீழ்கண்ட நிகழ்தகவு பரவலைப் பெற்றுள்ளது. X –ன் மதிப்புகள்

X–ன் மதிப்புகள், x	:	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(x)$	:	a	$3a$	$5a$	$7a$	$9a$	$11a$	$13a$	$15a$	$17a$

(i) a –ன் மதிப்பைக் காண்க.

(ii) $P(X < 3)$, $P(X > 3)$ மற்றும் $P(0 < X < 5)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

4) கீழ்கண்ட சார்பு நிகழ்தகவு திண்மச் சார்பு என்பதைச் சரிபார்க்க. அவ்வாறு எனில், குவிப்பு பரவலைக் காண்க.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} \; ; x = 1 \text{ எனில்} \\ \frac{2}{3} \; ; x = 2 \text{ எனில்} \\ 0 \quad \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

5) கீழ்கண்ட சார்பு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பெனில், k –ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{k}{6} \; ; x = 0 \text{ எனில்} \\ \frac{k}{3} \; ; x = 2 \text{ எனில்} \\ \frac{k}{2} \; ; x = 4 \text{ எனில்} \\ 0 \quad \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

6) ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X கீழ்கண்ட நிகழ்தகவுச் சார்பைப் பெற்றுள்ளது

X–ன் மதிப்புகள், x	:	-2	0	5
$p(x)$	:	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

(a) P $(X \le 0)$ (b) P $(X < 0)$ (c) P $(0 \le X \le 10)$

ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

7) ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X கீழ்கண்ட நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பைப் பெற்றுள்ளது.

X–ன் மதிப்புகள், x	:	0	1	2	3
$p(x)$	:	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$	k	$\frac{5}{16}$

(i) k –ன் மதிப்பைக் காண்க. (ii) X –ன் குவிப்புப் பரவலைக் காண்க.

8) ஒரு தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி கீழ்கண்ட நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பைப் பெற்றிருக்கிறது.

$f(x) = kx^2, \quad 0 \le x \le 10$ எனில்

$= 0$ மற்றபடி

k–ன் மதிப்பைக் காண்க (i) P $(0.2 \le X \le 0.5)$ (ii) P $(X \le 3)$ ஆகியவற்றை மதிப்பிடுக.

9) $f(x)$ ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு எனில், c –ன் மதிப்பைக் காண்க.

$f(x) = ce^{-x}, \qquad 0 \le x < \infty$

10) தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி கீழ்கண்ட நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை பெற்றுள்ளது எனில்,

$$f(x)=\begin{cases} ax, & 0<x\le 1 \\ a, & 1\le x\le 2 \\ -ax+3a, & 2\le x\le 3 \\ 0 & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

(i) a–ன் மதிப்பைக் காண்க.

(ii) P $(X \le 1.5)$ மதிப்பைக் காண்க.

11) ஒரு குறிப்பிட்ட வகை மின் விளக்குகளின் எரியும் காலத்தை (மணிகளில்) X குறிக்கிறது.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a}{x^2}, \quad 1000 \le x \le 2000 \text{ எனில்} \\ &= 0 \quad, \text{ மற்றபடி} \end{aligned}$$

என்பது அதன் நிகழ்தகவு பரவலாக இருக்க 'a' இன் மதிப்பைக் காண்க.

12) ஒரு குறிப்பிட்ட கார்டயரை பயன்படுத்தக் கூடிய தொலைவை (ஆயிரம் கிலோமீட்டரில்) X என்ற சமவாய்ப்பு குறிக்கிறது. அதன் p.d.f.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{20}e^{-\frac{x}{20}}, \quad x>0 \text{ எனில்} \\ &= 0 \qquad\qquad x\le 0 \text{ எனில்} \end{aligned}$$

ஒரு டயர் பின்வரும் தொலைவுகள் பயன்பட நிகழ்தகவு காண்க.

(i) அதிகபட்சம் 10,000 கி.மீ.

(ii) 16,000 இல் இருந்து 24,000 கி.மீ. வரை

(iii) குறைந்தபட்சம் 30,000 கி.மீ.

8.2 கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல்

கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல் (Mathematical expectation) என்கிற கருத்துப்படிவம், புள்ளியியலில் மிக முக்கிய பங்கு வகிக்கின்றது. ஒரு சம வாய்ப்பு மாறியின் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு என்பது, ஒரு சோதனையின் நிகழக்கூடிய எல்லா வெளிப்பாடுகளின் நிறையிட்ட சராசரி ஆகும்.

ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி X: $x_1, x_2, \ldots x_n$ என்ற மதிப்புகளை முறையே நிகழ்தகவுகள் $p(x_i) = P[X = x_i]$; i = 1, 2 ... n எனக் கொண்டிருந்தால் அம்மாறியின் கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல்,

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$, (இங்கு $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$) என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.

X என்பது $f(x)$ என்கிற நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பை உடைய, தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி எனில்,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f(x) \, dx$$

குறிப்பு

E(X) என்பது, ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X –ன் சராசரி என்றும் கூறலாம்.

பண்புகள்

1) $E(c) = c$, இங்கு c என்பது மாறிலியாகும்.

2) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

3) $E(aX + b) = aE(X) + b$, இங்கு a மற்றும் b மாறிலியாகும்.

4) $E(XY) = E(X) E(Y)$ எனில், X மற்றும் Y என்பன சாரா மாறிகள்.

குறிப்பு

மேற்கண்ட பண்புகள் தனித்த மற்றும் தொடர் ஆகிய இரு சமவாய்ப்பு மாறிகளுக்கும் பொருந்தும்.

பரவற்படி (Variance)

X ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி எனக் கொள்க. Var (X) அல்லது σ^2_x என்கிற குறியீட்டால் குறிக்கப்படும், X–ன் **பரவற்படி**

$$\text{Var}(X) = \sigma^2_x = E[X - E(X)]^2$$

$$= E(X^2) - [E(X)]^2$$ என்று வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

பரவற்படியின் மிகை வர்க்கமூல மதிப்பு X –ன் **திட்டவிலக்கம்** ஆகும். அதனை σ_x எனக்குறிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 9

ஒரு பண்ணாட்டு வங்கி, தன்னுடைய வாடிக்கையாளர்கள் ஏ.டி.எம் ATM வசதியை பயன்படுத்துவதற்கு முன்பு காத்திருக்கும் நேரத்தை கணக்கிட (நிமிடங்களில்) விரும்பியது. சமவாய்ப்பு கூறாக எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட 500 வாடிக்கையாளர்களை கவனித்த பொழுது கிடைக்கப்பெற்ற நிகழ்தகவுப் பரவல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

X	**:**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
$p(x)$	**:**	**.20**	**.18**	**.16**	**.12**	**.10**	**.09**	**.08**	**.04**	**.03**

வாடிக்கையாளர் காத்திருக்கும் காலம் X –ன் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

ஒரு வாடிக்கையாளர் காத்திருக்கும் காலத்தை (நிமிடங்களில்) X என்க.

X	:	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(x)$	:	.20	.18	.16	.12	.10	.09	.08	.04	.03

எனவே $E(X) = \sum x\, p(x)$

$$= (0 \times .2) + (1 \times 0.18) + \dots\dots + (8 \times 0.03) = 2.71$$

X –ன் எதிர்பார்க்கப்படும் காலம் 2.71 நிமிடங்களாகும். இவ்வாறாக, ATM வசதியை பயன்படுத்துவதற்கு முன் வாடிக்கையாளர்களின் சராசரி காத்திருக்கும் நேரம் **2.71** நிமிடங்களாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 10

சீரான இரு நாணயங்களை சுண்டும் பொழுது, விழும் தலைகளின் எண்ணிக்கைகளின் எதிர்பார்த்தலைக் காண்க.

தீர்வு :

இரு நாணயங்களை ஒரு முறை சுண்டும் பொழுதுது கிடைக்கும் தலைகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும் சமவாய்ப்பு மாறி X என்க.

X –ன் ஏற்கக் கூடிய மதிப்புகள் :		0	1	2
நிகழ்தகவுகள்	$p(x_i)$:	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

எனவே X –ன் எதிர்பார்த்தலின் மதிப்பு

$$E(X) = x_1 p(x_1) + x_2 p(x_2) + x_3 p(x_3)$$

$$= 0\left(\frac{1}{4}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right) = 1$$

ஆகையால் இரு நாணயங்களை சுண்டும் பொழுது விழும் தலைகளின் எண்ணிக்கைகளின் எதிர்பார்த்தல் **1** ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 11

ஒரு நபர் ஓர் குறிப்பிட்ட இடத்தில் 1, 2, 3 மற்றும் 4 மீன்களை பிடிப்பதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.4, 0.3, 0.2 மற்றும் 0.1 ஆகும். பிடிபடும் மீன்களின் எண்ணிக்கைகளின் எதிர்பார்த்தல் யாது ?

தீர்வு :

X –ன் ஏற்கக் கூடிய மதிப்புகள் :		1	2	3	4
நிகழ்தகவுகள்	$p(x_i)$:	0.4	0.3	0.2	0.1

$$\therefore \quad E(X) = \sum_i x_i p(x_i)$$
$$= x_1 p(x_1) + x_2 p(x_2) + x_2 p(x_3) + x_4 p(x_4)$$
$$= 1(.4) + 2(.3) + 3(.2) + 4(.1)$$
$$= .4 + .6 + .6 + .4 = 2$$

எடுத்துக்காட்டு 12

ஒரு சீரான பகடையை உருட்டும் போது விழும் எண்ணின் வர்க்கத்தின் மதிப்பிற்கு ஈடான பணத்தை ஒருவர் பெறுகிறார் எனில் அவர் பெறும் தொகையின் எதிர்பார்த்தல் யாது ?

தீர்வு :

சமவாய்ப்பு மாறி X: பகடையில் தோன்றும் எண்ணின் வர்க்கத்திற்கு ஈடான பணம்

X –ன் ஏற்கக் கூடிய மதிப்புகள்	:	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2
நிகழ்தகவுகள் $p(x_i)$	:	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

அவர் பெறக்கூடிய பணத்தின் எதிர்பார்த்தல்

$$E(X) = 1^2\left(\frac{1}{6}\right) + 2^2\left(\frac{1}{6}\right) + ... + 6^2\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \text{ரூ}.\frac{91}{6}$$

$$= \text{ரூ}.\ 15.17$$

எடுத்துக்காட்டு 13

ஒரு விளையாட்டு வீரர் இரு நாணயங்களை சுண்டும் பொழுது இரு தலைகள் விழுந்தால் ரூ.5 –ம், 1 தலை விழுந்தால் ரூ. 2 ம் பெறுகிறார். தலை விழாமல் இருந்தால் 1 ரூபாயை பெறுகிறார். அவர் பெறும் தொகையின் எதிர்பார்த்தலைக் காண்க.

தீர்வு :

இரு நாணயங்களை சுண்டும் சோதனையைக் கருத்தில் கொள்வோம்.

இங்கு S = {HH, HT, TH, TT}

விளையாட்டு வீரர் பெறும் தொகையை X எனும் சமவாய்ப்பு மாறியால் குறிப்போம்.

ஆகவே,

X ஏற்கக்கூடிய மதிப்புகள் (ரூ.)	:	5	2	1
நிகழ்தகவுகள் $p(x_i)$	:	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$E(X) = 5\left(\frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{5}{4} + 1 + \frac{1}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

= ரூ. **2.50**

எனவே எதிர்பார்க்கப்படும் தொகை ரூபாய் 2.50

எடுத்துக்காட்டு 14

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X கீழ்கண்ட நிகழ்தகவு சார்பைப் பெற்றுள்ளது

X–ன் மதிப்புகள்	:	**– 1**	**0**	**1**
நிகழ்தகவுகள்	:	**0.2**	**0.3**	**0.5**

(i) E(3X +1) **(ii) $E(X^2)$** **(iii) Var(X)**

ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை காண்க.

தீர்வு :

X	:	– 1	0	1
$p(x_i)$	:	0.2	0.3	0.5

(i) $E(3X + 1)= 3E(X) + 1$

$E(X) = – 1 \times 0.2 + 0 \times 0.3 + 1 \times 0.5$

$= – 1 \times 0.2 + 0 + 0.5 = 0.3$

$E(3X + 1) = 3(0.3) + 1 = 1.9$

(ii) $E(X^2) = \sum x^2 \, p(x)$

$= (–1)^2 \times 0.2 + (0)^2 \times 0.3 + (1)^2 \times 0.5$

$= 0.2 + 0 + 0.5 = 0.7$

(iii) $Var(X) = E(X^2) – [E(X)]^2$

$= .7 - (.3)^2 = .61$

எடுத்துக்காட்டு 15

கீழ்கண்ட நிகழ்தகவு பரவலுக்கான சராசரி, பரவற்படி மற்றும் திட்டவிலக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

X–ன் மதிப்புகள்	***x***	:	**1**	**2**	**3**	**4**
நிகழ்தகவுகள்,	***p*(*x*)**	:	**0.1**	**0.3**	**0.4**	**0.2**

தீர்வு :

$$\text{சராசரி} = E(X) = \sum x\, p(x)$$

$$= 1(0.1) + 2(0.3) + 3(0.4) + 4(0.2) = 2.7$$

$$\text{பரவற்படி} = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \sum x^2\, p(x)$$

$$= 1^2(0.1) + 2^2(0.3) + 3^2(0.4) + 4^2(0.2) = 8.1$$

$$\therefore \quad \text{பரவற்படி} = 8.1 - (2.7)^2$$

$$= 8.1 - 7.29 = 0.\ 81$$

$$\text{திட்டவிலக்கம்} = \sqrt{0.81} = 0.9$$

எடுத்துக்காட்டு 16

ஒரு தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி X கீழ்கண்ட நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பைப் பெற்றுள்ளது.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & , -1 < x < 1 \text{ எனில்} \\ 0 & , \text{ மற்றபடி} \end{cases}$$

(i) E(X) (ii) E(X²) (iii) Var(X) ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

(i) $$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$ (வரையறையின் படி)

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x\ dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0$$

(ii) $$E(X^2) = \int_{-1}^{1} x^2 f(x)\ dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x^2 \frac{1}{2}\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$

(iii) $$\mathrm{Var}(X) = E(X)^2 - [E(X)]^2$$

$$= \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

பயிற்சி 8.2

1) ஒரு சீரான பகடை உருட்டப்படுகிறதுது. 1, 3 மற்றும் 5 ஆகிய எண்களில் ஏதேனும் ஒன்று தோன்றினால் ஒருவர் ரூ.10 ஐ பெறுகிறார். 2, 4 மற்றும் 6 ஆகிய எண்களில் ஏதேனும் ஒன்று தோன்றினால் ரூ.5 ஐ இழக்கின்றார். பகடையை பல தடவைகள் உருட்டும் பொழுது சராசரியாக ஒரு உருட்டலுக்கு அவர் எவ்வளவு தொகையை எதிர்பார்க்கிறார் ?

2) இரண்டு சீரான பகடைகள் ஒரே சமயத்தில் உருட்டப்படுகின்றன. தோன்றும் எண்களின் கூடுதலுக்கான எதிர்பார்த்தல் மதிப்பைக் காண்க.

3) ஒரு நபர் இரு நாணயங்களைச் சுண்டுகிறார். இரு தலைகள் விழுநத்ால் ரூ. 4 பெறுகிறார். ஒரு தலை விழுந்தால் ரூ. 2 பெறுகிறார். ஆனால் இரண்டு பூ விழுந்தால் ரூபாய் 3–ஐ அவர் அபராதமாக செலுத்துகிறார். அவர் பெறும் தொகையின் எதிர்பார்த்தலைக் காண்க.

4) ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளின் தினத்தேவை D–ன் நிகழ்தகவு பரவல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. E(D) –ஐ மதிப்பிடுக.

D :	1	2	3	4	5
$P[D=d]$:	0.1	0.1	0.3	0.3	0.2

5) கீழ்கண்ட நிகழ்தகவு பரவலுக்கான $E(2X-7)$ மற்றும் $E(4X+5)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

X :	−3	−2	−1	0	1	2	3
$p(x)$:	.05	.1	.3	0	.3	.15	.1

6) கீழ்கண்ட நிகழ்தகவு பரவலுக்கான சராசரி, பரவற்படி மற்றும் திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

X–ன் மதிப்புகள் :	−3	−2	−1	0	1	2	3
நிகழ்தகவு $p(x)$:	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$

7) கீழ்கண்ட நிகழ்தகவு பரவலுக்கான சராசரி மற்றும் பரவற்படி ஆகியவற்றைக் காண்க.

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0\quad , & x\le 0\end{cases}$$

8.3 தனித்த நிகழ்தகவு பரவல்கள்

நாம் நிகழ்வெண் பரவல் பற்றி அறிந்திருக்கின்றோம். சேகரிக்கப்பட்ட கூறுகளின் தகவல்களிலிருந்து கண்டறிந்த விவரத்தின் அடிப்படையில் நிகழ்வெண் பரவல்கள் அமைந்திருக்கின்றன. உதாரணமாக, ஓர் வகுப்பில் உள்ள மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பின்வரும் நிகழ்வெண் பரவலில் அமைக்கப்பட்டிருக்கிறது

மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
0 - 20	10
20 - 40	12
40 - 60	25
60 - 80	15
80 - 100	18
மொத்தம்	**80**

கண்டறிந்த நிகழ்வெண் பரவல்கள் தொகுக்கப்பட்ட விவரங்களின் அடிப்படையில் அமைகின்றது என்பதனை மேற்கண்ட உதாரணம் தெளிவாக காட்டுகிறது. சராசரி, சிதறல், ஒட்டுறவு போன்ற அளவைகள் கண்டறிந்த விவரங்கள் அனைத்தையும் பற்றி ஒர ஒட்டு மொத்த கண்ணோட்டத்தை அளிக்கின்றது. ஒரு முழுவிவர தொகுப்பின் குணாதிசயங்களைப் பற்றி கருத்துக்கள் உருவாக்க மேற்கண்ட அளவைகள் நன்கு பயன்படுத்தப்படுகின்றது.

மற்றொரு வகை பரவல், அறிமுறை நிகழ்தகவு பரவல் என்று அழைக்கப்படுகிறது. இப்பரவலில் மாறிகள் சில நிகழ்தகவு விதி மற்றும் கணிதவியலின் படி விவரிக்கக் கூடிய விதத்தில பரவியிருக்கும்.

நிகழ்தகவு பரவல் என்பது, ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி ஏற்றுக் கொள்ளும் வெவ்வேறு மதிப்புகள் மற்றும் அம்மதிப்புகளோடு தொடர்புடைய நிகழ்தகவுகள் ஆகியவற்றின் மொத்த பட்டியலாகும். ஓர் உற்பத்தி செய்யப்படும் நிறுவனத்தில் இயந்திரக் கோளாரின் பரவல் வகை ஒரு உதாரணமாகும். சமவாய்ப்பு மாறி இயந்திரக் கோளாரின் வெவ்வேறு மதிப்புகள் ஏற்க இயலும். இயற்திரக் கோளாரின் ஒவ்வொரு மதிப்புடனும் தொடர்புடைய நிகழ்தகவு என்பது இயந்திரக் கோளாறு ஏற்படுவதற்கான சார்கின்ற அலை எண்ணாகும் (Relative frequency). உண்மையில் ஏற்படக் கூடிய இயந்திரக் கோளாரைப் பற்றி, வெவ்வேறு காலக்கட்டங்களில் விவரித்து, இந்நிகழ்தகவு பரவலை அமைக்கலாம்.

அடிப்படையில் அறிமுறை நிகழ்தகவு பரவல்கள் இரண்டு வகைப்படும்.

(i) தனித்த பரவல்கள் (random distribution)

(ii) தொடர் பரவல்கள் (Continuous distribution)

இப்பகுதியில் நாம் தனித்த பரவல்களான, ஈருறுப்பு பரவல் மற்றும் பாய்ஸான் பரவல் இவைகளைப் பற்றி கற்றறிவோம்.

8.3.1 ஈருறுப்பு பரவல் (Binomial Distribution)

இப்பரவல் ஒரு சோதனையின் திரும்பத் திரும்ப செய்யும் சார்பற்ற முயற்சிகளோடு தொடர்புடையது. வெற்றி அல்லது தோல்வி என்பது பொதுவாக அழைக்கப்படும், இரண்டு ஏற்கக் கூடிய வெளிப்பாடுகளை ஒவ்வொரு முயற்சியும் பெற்றிருக்கும். அம்முயற்சி “பெர்னோலியன் முயற்சி” எனப்படும்.

(i) ஒரு நாணயத்தை ஒரு முறை சுண்டுதல் (பூ அல்லது தலை)

(ii) ஒரு பகடையை உருட்டுதல் (இரட்டை அல்லது ஒற்றை எண்)

ஆகியவை பெர்னோலி முயற்சியின் சில உதாரணங்களாகும்.

திரும்பத் திரும்பச் செய்யும் பெர்னோலி முயற்சிகளின் எண்ணிக்கையை உள்ளடக்கிய சோதனை, ஈருறுப்பு சோதனை என அழைக்கப்படுகிறது.

ஒரு ஈருறுப்புச் சோதனை கீழ்கண்ட பண்புகளைப் பெற்றிருக்கும்.

(i) முயற்சிகள் நிலையான எண்ணிக்கையில் இருக்கும்.

(ii) எல்லா முயற்சிகளின் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு (p) ஒரே மாதிரியாக இருக்கும். அதாவது, இரு வெளிப்பாடுகள் "வெற்றி" அல்லது "தோல்வி" என்று நாம் கூறினால் (p) என்கிற வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு சோதனை முழுவதிலும் மாறிலி ஆக இருக்கும்.

(iii) ஒவ்வொரு முயற்சியும், மற்றவற்றிக்கு சார்பற்றதாக இருக்கும். ஒரு முயற்சியின் முடிவு, முந்தைய முயற்சியின் முடிவால் பாதிக்கப்படாது.

ஈருறுப்பு சேசாதனையின் 'n' முயற்சிகளில் பெற்ற வெற்றிகளை, X என்ற மாறி குறிக்கிறது எனில் X, n, p என்கிற பண்பளவைகளோடு **ஈருறுப்பு பரவலை** பின்பற்றுகிறது. $X \sim B(n, p)$ என்கிற குறியீட்டால் குறிக்கப்படுகிறது.

X என்கிற சமவாய்ப்பு மாறி குறை எண் அல்லாத மதிப்புகளை ஏற்கும் எனில், அது ஈருறுப்பு பரவலை n, p என்கிற பண்பளவைகேளாடு பின்பற்றுகிறது. அவற்றின் நிகழ்தகவு திண்மச் சார்பு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$P[X = x] = p(x) = {}^nC_x\, p^x\, q^{n-x}\ ;\ x = 0, 1, 2, ..n\ ;\ q = 1 - p$$

குறிப்பு

(i) $$\sum_{x=0}^{n} p(x) = \sum_{x=0}^{n} {}^nC_x p^x q^{n-x} = (q+p)^n = 1$$

(ii) $${}^nC_r = \frac{n(n-1)\dots(n-\overline{r-1})}{1.2.3\dots.\ r}$$

சராசரி மற்றும் பரவற்படி

ஈருறுப்பு பரவலுக்கான **சராசரி** $= np$

பரவற்படி $= npq;$

திட்டவிலக்கம் $= \sqrt{npq}$ என்பதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 17

சீரான ஒரு நாணயத்தை 8 முறை சுண்டும் பொழுது, சரியாக 3 தலைகள் விழுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது ?

தீர்வு :

p தலை விழுவதற்கான நிகழ்தகவை குறிப்பதாக கொள்க. X என்பது 8 முறை சுண்டும் பொழுது விழும் தலைகளின் எண்ணிக்கை எனக் கொள்க. ஆகையால்,

$p = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{1}{2}$ மற்றும் $n = 8$

சரியாக 3 தலைகள் விழுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(X = 3) = {}^{8}C_{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}$$

$$= \frac{8\times7\times6}{1\times2\times3}\left(\frac{1}{2}\right)^{8} = \frac{7}{32}$$

எடுத்துக்காட்டு 18

சராசரி 20 மற்றும் பரவற்படி 4. இவற்றின் ஈருறுப்பு பரவலை எழுதவும்.

தீர்வு :

சராசரி, $np = 20$; பரவற்படி, $npq = 4$ ஆகியவை கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$q = \frac{npq}{np} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \qquad \therefore \qquad p = 1 - q = \frac{4}{5}$$

$np = 20$ இதிலிருந்து

$n = \frac{20}{p} = \frac{20}{\frac{4}{5}} = 25$ என்பதைப் பெறலாம்.

எனவே ஈருறுப்பு பரவல் என்பது

$$p(x) = {}^{n}C_{x}p^{x}q^{n-x} = {}^{25}C_{x}\left(\frac{4}{5}\right)^{x}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-x}, \; x = 0, 1, 2, ..., 25$$

எடுத்துக்காட்டு 19

ஒவ்வொரு பத்து கப்பல்களிலும் சராசரியாக ஒரு கப்பல் மூழ்குகிறது எனில், மீதிக் கப்பல்கள் கரையை சேரும் என்று எதிர்பார்க்கப்படும் 5 கப்பல்களில் குறைந்தபட்சம் 4 கப்பல்கள் பாதுகாப்பாக கரையை சேர்வதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

தீர்வு :

ஒரு கப்பல் பாதுகாப்பாக கரையை சேருவதற்கான நிகழ்தகவு $p = \frac{9}{10}$ எனில் ஒரு கப்பல் மூழ்குவதற்கான நிகழ்தகவு $q = 1 - p = \frac{1}{10}$

கப்பல்களின் எண்ணிக்கை $n = 5$

எனவே 5 கப்பல்களில் குறைந்த பட்சம் 4 கப்பல்கள் பாதுகாப்பாக கரையை சேர்வதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5)$$

$$= {}^5C_4\left(\frac{9}{10}\right)^4\frac{1}{10} + {}^5C_5\left(\frac{9}{10}\right)^5$$

$$= 5(.9)^4(.1) + (.9)^5 = .91854$$

எடுத்துக்காட்டு 20

$n = 5, p = 0.3$ என்ற பண்பளவைகளை கொண்ட ஈருறுப்பு பரவலின் (i) குறைந்த பட்சம் 3 வெற்றிகள் (ii) அதிகபட்சமாக 3 வெற்றிகள் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு :

$n = 5, \; p = 0.3 \qquad \therefore q = 0.7$

வெற்றிகளின் எண்ணிக்கையை X என்க.

(i) குறைந்தபட்சம் 3 வெற்றிகள் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

$$= {}^5C_3\,(0.3)^3\,(0.7)^2 + {}^5C_4\,(0.3)^4\,(0.7) + {}^5C_5\,(.3)^5\,(7)^0$$

$$= .1631$$

(ii) அதிகபட்சம் 3 வெற்றிகள் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$= (.7)^5 + {}^5C_1\,(.7)^4\,(.3) + {}^5C_2\,(.7)^3\,(.3)^2 + {}^5C_3\,(.7)^2\,(.3)^3$$

$$= 0.9692$$

8.3.2 பாய்சான் பரவல் (Poisson distribution)

பாய்சான் பரவலும் ஒரு தனித்த நிகழ்தகவு பரவல் ஆகும் மற்றும் இப்பரவல் புள்ளியியலில் அதிக அளவில் பயன்படுத்தப்படுகின்றது. ஒரு சோதனையின் முடிவுற்ற முயற்சிகளின் எண்ணிக்கையின் வெளிப்பாடுகளாக அல்லாமல் அதே சமயம் சமவாய்ப்புள்ள நேரத்திலும் இடத்திலும் நிகழ்கின்ற நிகழ்ச்சிகள் பாய்சான் பரவலை குறிக்கின்றது. ஆனால் நாம் நடைபெறுகின்ற நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கையில் தான் ஆர்வம் கொண்டுள்ளோம். நடைபெறாத நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கையில் நாம் ஆர்வம் கொண்டிருப்பதில்லை.

அரிய நிகழ்ச்சிகளான,

(i) சாலை விபத்துகளின் எண்ணிக்கை

(ii) ஒரு புத்தகத்திலுள்ள அச்சுப்பிழைகளின் எண்ணிக்கை

(iii) ஒரு நகரத்தில் பதிவான தற்கொலைகளின் எண்ணிக்கை

ஆகியவற்றின் போக்குகளை விவரிப்பதற்காக இப்பரவல் பயன்படுகிறது.

முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை n மிகப்பெரியதாகவும், வெற்றியின் நிகழ்தகவு p பூஜ்ஜியத்திற்கு வெகு அருகிலும் இருக்கும் போது **பாய்சான் பரவல்** என்கிற தனித்த மாறிப்பரவல் சராசரி = np என்கிற மாறிலி பண்பளவையுடன் ஈருறுப்புப் பரவலின் நெருக்கமாகப் பெறப்படுகிறது.

X என்கிற சமவாய்ப்பு மாறி குறை எண்கள் அற்ற மதிப்புகளை ஏற்று கீழ்கண்ட நிகழ்தகவு சார்பை

$$\text{P}\,(\text{X} = x] = p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}; \quad x = 0, 1, 2, ...$$

பெற்றிருக்குமெனில், அம்மாறி $\lambda > 0$ என்ற பண்பளவையோடு **பாய்சான் பரவலை** பின்பற்றுகிறது என்று கூறப்படுகிறது.

குறிப்பு

$\sum\limits_{x=0}^{\infty} \text{P}\,[\text{X} = x] = \sum\limits_{x=0}^{\infty} p(x) = 1$ என்பது கவனிக்கதக்கது.

சராசரி மற்றும் பரவற்படி

சமவாய்ப்பு மாறி X, λ என்ற பண்பளவையோடு பாய்சான் பரவலை பின்பற்றுவதாக எடுத்துக் கொண்டால்,

சராசரி $\text{E(X)} = \lambda$, **பரவற்படி** $\text{Var(X)} = \lambda$, **திட்டவிலக்கம்** $= \sqrt{\lambda}$

குறிப்பு

பாய்சான் பரவலில் சராசரி மற்றும் பரவற்படி ஆகிய இரண்டும் சமமாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 21

அனுபவரீதியாக 2 விழுக்காடு உருகு இழைகள் (fuses) குறைபாடுள்ளதாக இருக்கும் என்பதை உணரும் பட்சத்தில், 200 உருகு இழைகள் உள்ள ஒரு பெட்டியில் அதிகபட்சமாக 5 உருகு இழைகள் பழுதுள்ளவையாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ? ($e^{-4} = 0.0183$)

தீர்வு :

p = உருகு இழை குறையுள்ளதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \frac{2}{100}$$

$$n = 200$$

$$\therefore \lambda = np = \frac{2}{100} \times 200 = 4$$

ஒரு பெட்டியில் காணப்படும் குறையுள்ள உருகு இழைகளின் எண்ணிக்கையை X குறிக்கிறது.

பரவல் $P[X=x] = p(x) = \frac{e^{-4}4^x}{x!}$

ஆகவே, **200** உருகு இழைகள் கொண்ட பெட்டியில் அதிகபட்சமாக **4** பழுதுள்ள உருகு இழைகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு.

$$= P(X \le 5)$$
$$= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$
$$= e^{-4} + \frac{e^{-4}4}{1!} + \frac{e^{-4}4^2}{2!} + \frac{e^{-4}4^3}{3!} + \frac{e^{-4}4^4}{4!} + \frac{e^{-4}4^5}{5!}$$
$$= e^{-4}(1 + \frac{4}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \frac{4^5}{5!})$$
$$= 0.0183 \times \frac{643}{15} = 0.785$$

எடுத்துக்காட்டு 22

குறிப்பிட்ட நகரத்தில் ஒரு வருடத்தில் சராசரியாக 1000 –ல் 1 வீட்டிற்கு தீ விபத்து ஏற்படுகிறது. அந்த நகரத்தில் 2000 வீடுகள் உள்ளதெனில், ஒரு வருடத்தில் சரியாக 5 வீடுகளில் தீ விபத்து ஏற்பட நிகழ்தகவு யாது ? ($e^{-2} = .13534$)

தீர்வு :

p = ஒரு வீட்டில் தீ விபத்து ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு = $\frac{1}{1000}$

இங்கு $n = 2000$ $\quad\therefore \lambda = np = 2000 \times \frac{1}{1000} = 2$

தீ விபத்துக்கு உள்ளான வீடுகளின் எண்ணிக்கையை X குறிப்பதாக கொள்க.

$P(X=x] = \frac{e^{-2}2^x}{x!}, x = 0, 1, 2, ...$

ஒரு வருடத்தில் சரியாக **5** வீடுகளில் தீ விபத்து ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P(X=5) = \frac{e^{-2}2^5}{5!}$$
$$= \frac{.13534 \times 32}{120} = .0361$$

எடுத்துக்காட்டு 23

கார் ஓட்டுநர்கள் ஒரு ஆண்டில் ஏற்படுத்தும் விபத்துக்களின் எண்ணிக்கை, சராசரி 3ஐ உடைய பாய்சான் பரவலை பின் தொடர்கிறது. கார் ஓட்டுநர்கள் 1000 பேரில்

(i) ஓர் ஆண்டில் ஒரு விபத்தை கூட ஏற்படுத்தாத

(ii) ஓர் ஆண்டில் 3க்கும் மேற்பட்ட விபத்துக்கள் ஏற்படுத்திய

கார் ஓட்டுநர்களின் எண்ணிக்கையை தோராயமாக காண்க. **($e^{-3} = 0.04979$)**

தீர்வு :

இங்கு $\lambda = np = 3$ எனில்

$N = 1000$

$P[X = x] = \dfrac{e^{-3}3^x}{x!}$ X விபத்துக்களின் எண்ணிக்கையை குறிக்கிறது.

(i) P (ஒரு ஆண்டில் ஒரு விபத்து கூட இல்லை) = P (X = 0)

$= e^{-3} = 0.05$

$\therefore$ விபத்துகள் ஏற்படுத்தாத ஓட்டுநரின் எண்ணிக்கை $= 1000 \times 0.05 = 50$

(ii) P (ஒரு ஆண்டில் 3க்கு மேற்பட்ட விபத்துகள் ஏற்படுகின்றன)

$= P(X > 3)$

$= 1 - P(X \leq 3)$

$= 1 - \left[e^{-3} + \dfrac{e^{-3}3^1}{1!} + \dfrac{e^{-3}3^2}{2!} + \dfrac{e^{-3}3^3}{3!}\right]$

$= 1 - e^{-3}[1 + 3 + 4.5 + 4.5]$

$= 1 - e^{3}(13) = 1 - .65 = 0.35$

$\therefore$ மூன்றுக்கும் மேற்பட்ட விபத்துகள் ஏற்படுத்திய ஓட்டுநரின் எண்ணிக்கை

$= 1000 \times 0.35 = 350$

பயிற்சி 8.3

1) ஒரே சமயத்தில் 10 நாணயங்கள் சுண்டப்படுகின்றன. குறைந்தபட்சம் 7 தலைகள் விழுவதற்கான நிகழ்தகவை கண்டுபிடிக்கவும்.

2) சார்பற்ற 5 முயற்சிகளை உள்ளடக்கிய ஒரு ஈருறுப்பு பரவலில் 1 மற்றும் 2 வெற்றிகளுக்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.4096, 0.2048 ஆகும். பரவலின் பண்பளவை 'p' –யைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

3) ஓர் ஈருறுப்பு பரவலின் சராசரி 6 மற்றும் திட்ட விலக்கம் $\sqrt{2}$. இப்பரவலின் அனைத்து உறுப்புகளையும் எழுதுக.

4) ஒரு குறிப்பிட்ட தேர்வின் சராசரி தோல்வியின் விழுக்காடு 40 ஆகும். ஒரு தொகுப்பில் உள்ள 6 நபர்களில் குறைந்த பட்சம் 4 பேர் தேர்ச்சி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

5) ஒரு சீரான நாணயம் ஆறு முறை சுண்டப்படுகிறது. நான்கு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட தலைகள் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது ?

6) 2% பிளேடுகள் பழுதானவை என்று அப்பிளேடுகளின் உற்பத்தியாளர் தெரிவிக்கிறார். ஒரு தொகுப்பிலிருந்து சமவாய்ப்பு மாதிரிகளாக 200 பிளேடுகள் எடுக்கப்படுகின்றன 3 அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பிளேடுகள் பழுதுள்ளவையாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க. ($e^{-4} = 0.01832$)

7) 2% திருகு மறைகள் பழுதுள்ளவை என்று எதிப்பார்க்கப்படும் எனில், 200 திருகு மறைகள் கொண்ட ஒரு பெட்டிகளில், அதிகப்படியாக 5 பழுதுள்ள திருகு மறைகள் காணப்படுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க ? ($e^{-4} = 0.01832$)

8) கார் விபத்தில் ஒருவர் தம் இரு கண்களையும் இழந்தால் இழப்பினை ஈடு செய்வதற்காக ஒரு காப்பீட்டு நிறுவனம் 4,000 நபர்களுக்கு காப்பீடு செய்துள்ளது. முந்தைய விவரங்களின் படி 1,00,000 பேரில் சராசரி 10 பேர் ஒவ்வொரு வருடமும் கார் விபத்தில் இம்மாதிரி ஊனம் ஏற்படுவதாக வைத்துக் கொண்டு காப்பீட்டு தொகை வீதங்கள் கணக்கீடு செய்யப்பட்டுள்ளது. 3 பேருக்கு மேல் ஊனமுற்றவர்கள் ஒரு வருடத்தில் காப்பீட்டு தொகையை பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது ? ($e^{-0.4} = 0.6703$)

9) ஒரு நிறுவனம் உற்பத்தி செய்யும் மின்விளக்குகளில் 3% பழுதுள்ளவை என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது 100 மின்விளக்குகள் உள்ள ஒரு கூறில், (i) ஒன்றும் பழுது அடையவில்லை (ii) சரியாக ஒன்று பழுதுள்ளவை என்பதற்கான நிகழ்கதவு என்ன ?

($e^{-3} = 0.0498$) .

10) ஒரு குறிப்பிட்ட இயந்திரம் தயாரிக்கும் பொருட்களில் பழுதுள்ளவையாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு .2 ஆகும். அந்த இயந்திரம் தயாரிக்கும் பொருட்களிலிருந்து 10 பொருட்கள் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டால், ஒன்றுக்கு மிகாத பொருள் பழுதுள்ளதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ? ($e^{-2} = 0.13534$)

8.4 தொடர் பரவல்

முன் பகுதியில் கண்டறிந்த ஈருறுப்பு பரவல், பாய்சான் பரவல் அறிமுறை பரவல்கள் ஆகும். தனிமனிதனின் உயரம் எடை போன்ற தொடர்ச்சியாக மாறிக் கொண்டிருக்கும் அளவுகளின் கணிதப் பரவலுக்கு உகந்த ஓர் தொடர்பரவல் தேவைப்படுகிறது. இயல்நிலை பரவல் என்பது வெகுவாக பயன்படுத்தப்படும் ஒரு தொடர் பரவலாகும்.

8.4.1 இயல்நிலை பரவல் (Normal Distribution)

புள்ளியியலில் பயன்படுத்தப்படுகின்ற அனைத்து பரவல்களுள் இயல்நிலை பரவல், ஒரு மிக முக்கிய மற்றும் ஆற்றல் மிக்க பரவலாக கருதப்படுகிறது. நிகழ்தகவு இயலின் வளர்ச்சிக்காக இப்பரவலை முதன் முதலில் “டீ மாய்வர்” (De Moivre) என்பவர் 1733 ஆண்டு அறிமுகப்படுத்தினார். லாப்லாஸ் (Laplace) (1749 - 1827) மற்றும் ஃகாஸ் (Gauss) (1827 - 1855) ஆகியோரும் இயல்நிலைப் பரவலின் வளர்ச்சியில் தங்களை ஈடுபடுத்திக் கொண்டார்கள்.

சராசரி μ மற்றும் பரவற்படி σ^2 ஆகியவற்றை கொண்ட ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X கீழ்கண்ட நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$$

பெற்றிருக்குமெனில், அம்மாறி **இயல்நிலை பரவலை** பெறுகிறது எனலாம். அது $X \sim (\mu, \sigma^2)$ என்ற குறியீட்டால் குறிக்கப்படுகிறது.

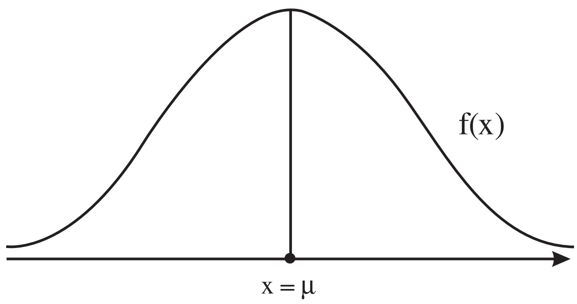
குறிப்பு :

பண்பளவைகள் μ மற்றும் σ^2 இயல்நிலைப் பரவல் முழுவதையும் விவரிக்கின்றது. கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகளில், இயல்நிலைப் பரவல் ஈருறுப்பு பரவலின் நெருங்கிய எல்லை என்று கருத முடியும் :

(i) n, முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை மிகப்பெரியது (அ–து) $n \to \infty$

(ii) p அல்லது q மிகச்சிறியதல்ல.

இயல்நிலை பரவலுக்கான அடர்த்திச் சார்பின் வரைபடம், **இயல்நிலை வளைவரை** என்று அழைக்கப்படுகிறது மற்றும் அது கீழ்க்கண்ட வரைபடத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



இயல்நிலை நிகழ்தகவு பரவல்

8.4.2 இயல்நிலைப் பரவலின் பண்புகள்

இயல்நிலை வளைவரை மற்றும் இயல்நிலைப் பரவலின் முக்கியமான பண்புகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

(i) வளைவரை "ஆலயமணி" போன்ற வடிவத்திலும், $x = \mu$ என்ற கோட்டை பொறுத்து இருபுறமும் சமச்சீர் உடையதாகவும் இருக்கும்.

(ii) இப்பரவலின் சராசரி, இடைநிலை, முகடு ஆகிய மூன்றும் ஒரே புள்ளியில் அமைகின்றன.

(iii) வளைவரையின் ஒரே பெருமப்புள்ளி சராசரி μ–ல் அமையும். வளைவரையின் சராசரி கோட்டை விலகி செல்ல செல்ல வளைவரையின் உயரம் இருபுறமும் குறைவதைக் காணலாம்.

(iv) வளைவரையின் இருபுறமும் உள்ள கடைசி பகுதிகள் முடிவில்லாமல் கிடைமட்ட கோட்டை (x அச்சு) தொடாமல் அணுகி செல்கிறது.

(v) ஒரே ஒரு பெருமப்புள்ளியை பெற்றிருப்பதால் இயல்நிலைப் பரவலுக்கு ஒரு முகடு தான் உண்டு.

(vi) நிகழ்தகவு $f\ (x)$ எப்பொழுதும் குறை மதிப்புகளை பெற முடியாது. ஆகையால் வளைவரையின் எவ்வித பகுதியும் x – அச்சுக்கு கீழே அமையாது.

(vii) வளைவரையின் வளைவு மாற்றுப் புள்ளி $x = \mu \pm \sigma$ என்ற இடங்களில் அமையும்.

(viii) சராசரியைப் பொருத்து சராசரி விலக்கம் $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma = \frac{4}{5}\sigma$

(ix) சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் தெரிந்திருந்தால், வளைவரையின் சமன்பாட்டை கண்டறியலாம். (அ–து) கொடுக்கப்பட்டுள்ள சராசரி μ, திட்டவிலக்கம் σ–க்கும் ஒரே ஒரு இயல்நிலை பரவல் தான் உண்டு.

(x) பரப்பளவு பண்பு : சராசரி μ, திட்டவிலக்கம் σ ஆகியவற்றை கொண்ட இயல்நிலை வளைவரையின் கீழ் அமையும், பரப்பு ஒன்று ஆகும்.

(a) $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6826$

(அ–து) (சராசரி) $\pm 1\sigma$, 68.27% பரப்பை உள்ளடக்குகிறது.

(b) $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9544$

(அ–து) (சராசரி) $\pm 2\sigma$, 95.45% பரப்பை உள்ளடக்குகிறது.

(c) $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9973$

(அ–து) (சராசரி) $\pm 3\sigma$, 99.73% பரப்பை உள்ளடக்குகிறது.

8.4.3 திட்ட இயல்நிலைப் பரவல்

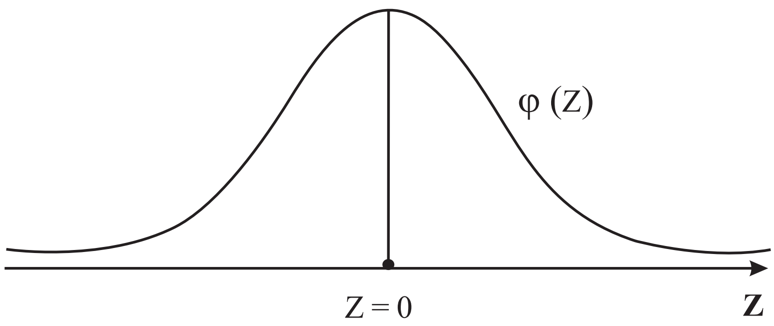
ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X சராசரி $\mu = 0$ திட்டவிலக்கம் $\sigma = 1$ என்கிற இயல்நிலை பரவலை பெற்றிருந்தால் அம்மாறி **திட்ட இயல்நிலைப் பரவல்** என்றழைக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு

(i) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ எனில் $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ என்பது **திட்ட இயல்நிலை மாறி** ஆகும். இங்கு $E(Z) = 0$, $var(Z) = 1$ என அமையும்.

$\mathbf{Z \sim N(0, 1)}$ என்ற குறியீட்டால் குறிக்கலாம்.

(ii) திட்ட இயல்நிலைப் பரவல், மற்ற இயல்நிலைப் பரவல்களின் வடிவத்தோடு ஒத்திருக்கும். ஆனால் $\mu = 0$, $\sigma = 1$ என்கிற சிறப்பு பண்புகளை திட்ட இயல்நிலைப் பரவல் பெற்றிருக்கும்.



ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி Z –ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$\varphi(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \; -\infty < z < \infty$ என்று அமையுமாயின் இம்மாறி **திட்ட இயல்நிலைப் பரவலை** பெற்றிருக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 24

Z என்ற திட்ட இயல்நிலை மாறியானது

(a) 0 மற்றும் 1.83 க்கு இடையே அமைந்தால்

(b) 1.54 ஐ விடப் பெரியது எனில்

(c) – 0.86 ஐ விடப் பெரியது எனில்

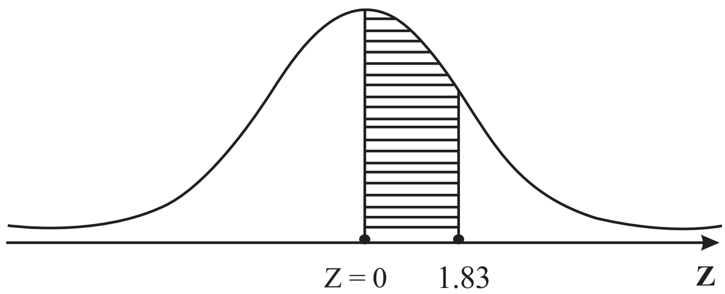
(d) 0.43 மற்றும் 1.12 க்கு இடையே அமைந்தால்

(e) 0.77 ஐ விட சிறியது

எனில் நிகழ்தகவு என்ன ?

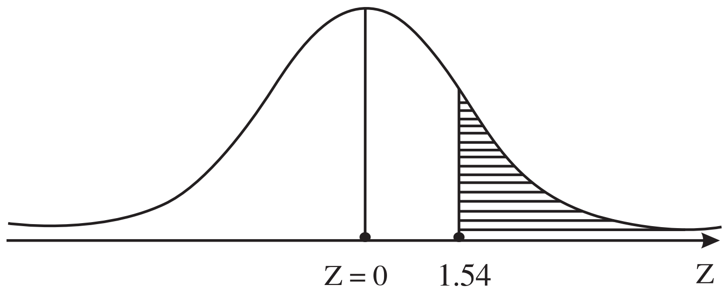
தீர்வு :

(a) **0 மற்றும் 1.83 க்கு இடையே Z உள்ளது.**



$P(0 \le Z \le 1.83) = 0.4664$ (அட்டவணையிலிருந்து)

(b) 1.54 ஐ விட Z பெரியது (அ–து) $P(Z \ge 1.54)$

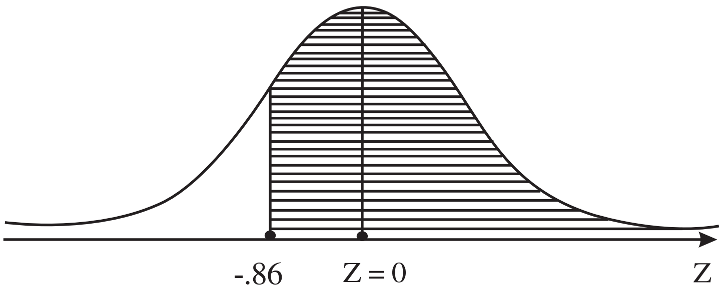


Z = 0 ன் வலப்பக்க முழுபரப்பு 0.5, Z = 0 மற்றும் 1.54 க்கு இடையே பரப்பு (அட்டவணையிலிருந்து) 0.4382

$P(Z \geq 1.54) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.54)$

$= 0.5 - .4382 = .0618$

(c) – 0.86 ஐ விட Z பெரியது (அ–து) P(Z ≥ -0.86)



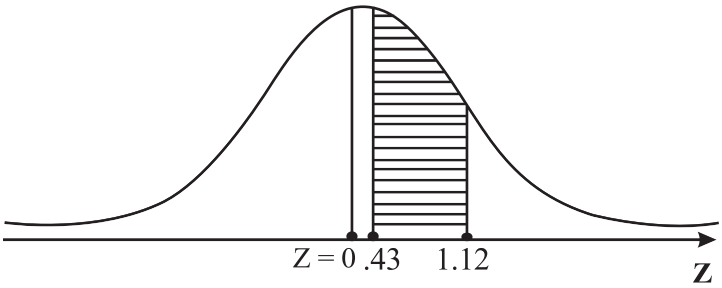
இங்கு தேவையான பரப்பு $P(Z \geq -0.86)$ இரு பகுதிகளாகும்.

(i) $Z = -0.86$ மற்றும் $Z = 0$ க்கு இடைப்பட்ட பரப்பு = 0.3051 (அட்டவணையிலிருந்து)

(ii) $Z > 0$, (அ–து) பரப்பு = 0.5

$\therefore P(Z \geq -0.86) = 0.3051 + 0.5 = 0.8051$

(d) 0.43 மற்றும் 1.12 க்கு இடையே Z உள்ளது.

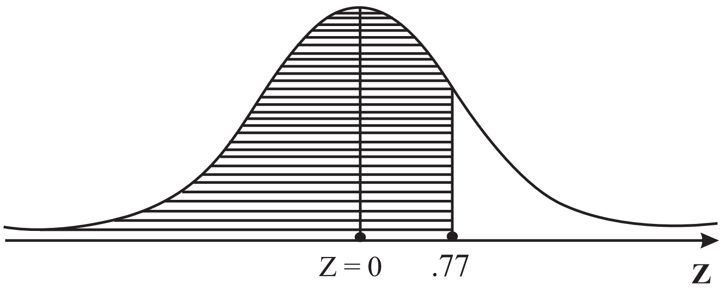


$\therefore P(0.43 \leq Z \leq 1.12) = P(0 \leq Z \leq 1.12) - P(0 \leq Z \leq 0.43)$

$= 0.3686 - 0.1664$ (அட்டவணையிலிருந்து)

$= 0.2022.$

(e) **0.77 ஐ விட Z சிறியது**



$P(Z \leq 0.77) = 0.5 + P(0 \leq Z \leq 0.77)$

$= 0.5 + .2794 = .7794$ (அட்டவணையிலிருந்து)

எடுத்துக்காட்டு 25

சராசரி 100 மற்றும் பரவற்படி 36 ஆகியவற்றை கொண்ட X என்பது ஒரு இயல்நிலை சமவாய்ப்பு மாறி எனில் (i) P(X > 112) (ii) P(X < 106) (iii) P(94 < X < 106) ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

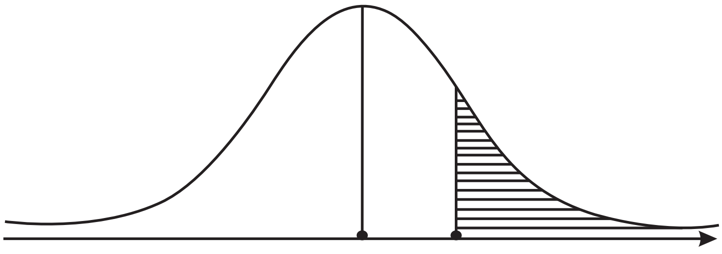
சராசரி $\mu = 100$; பரவற்படி $\sigma^2 = 36$; திட்டவிலக்கம் $\sigma = 6$

எனவே திட்ட இயல்நிலை மாறி Z

$Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} = \dfrac{X - 100}{6}$ என்பது ஆகும்.

(i) $X = 112$, எனில் $Z = \dfrac{112 - 100}{6} = 2$.

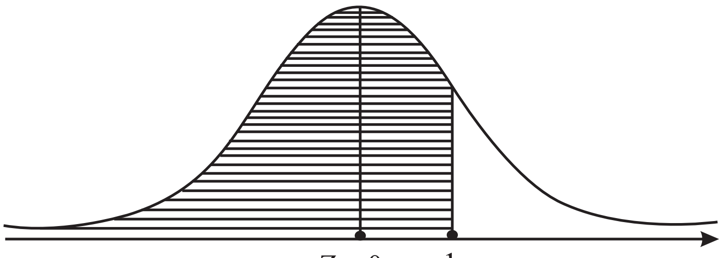
$\therefore P(X > 112) = P(Z > 2)$



$= P(0 < Z < \infty) - P(0 \le Z \le 2)$

$= 0.5 - 0.4772 = 0.0228$ (அட்டவணையிலிருந்து)

(ii) கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்பு $X = 106$, $Z = \dfrac{106 - 100}{6} = 1$



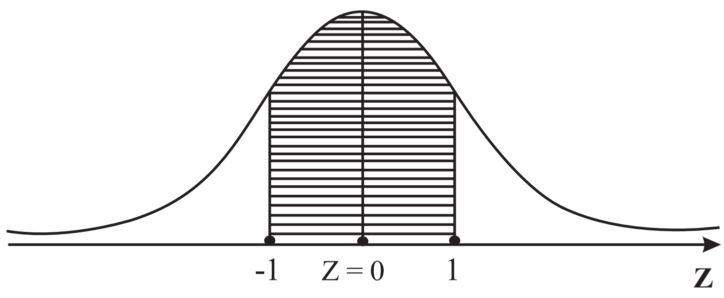
$P(X < 106) = P(Z < 1)$

$= P(-\infty < Z \le 0) + P(0 \le Z \le 1)$

$= 0.5 + 0.3413 = 0.8413$ (அட்டவணையிலிருந்து)

(iii) $X = 94$, எனில் $Z = \dfrac{94-100}{6} = -1$

$X = 106$, $Z = \dfrac{106-100}{6} = +1$



$\therefore$ $P(94 < X < 106) = P(-1 < Z < 1)$

$= P(-1 < Z < 0) + P(0 < Z < 1)$

$= 2\ P(0 < Z < 1)$ (சமச்சீராதலால்)

$= 2\ (0.3413)$

$= 0.6826$

எடுத்துக்காட்டு 26

தேர்வு எழுதியவர்களிலிருந்து 1000 நபர்களைக் கொண்ட கூறு எடுத்தலில் சராசரி மதிப்பெண்கள் 45 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 15 என உள்ளது. இப்பரவல், இயல்நிலையில் உள்ளது எனக் கொண்டு, கீழ்கண்டவற்றைக் காண்க.

(i) 40 மற்றும் 60க்கும் இடையில் மதிப்பெண் பெற்றவர்கள் எத்தனை பேர் ?

(ii) 50க்கும் மேல் மதிப்பெண் பெற்றவர்கள் எத்தனை பேர் ?

(iii) 30க்கும் கீழ் மதிப்பெண் பெற்றவர்கள் எத்தனை பேர் ?

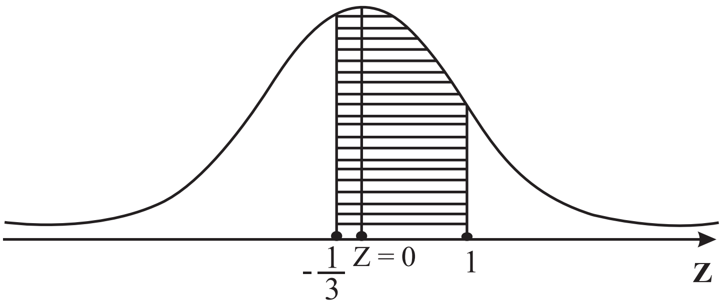
தீர்வு :

சராசரி $= \mu = 45$ மற்றும் திட்டவிலக்கம் $= \sigma = 15$

எனவே $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-45}{15}$

(i) $P(40 < X < 60) = P\left(\dfrac{40-45}{15} < Z < \dfrac{60-45}{15}\right)$

$= P\left(-\dfrac{1}{3} < Z < 1\right)$



$= P(-\frac{1}{3} \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 1)$

$= P(0 \le Z \le 0.33) + P(0 \le Z \le 1)$

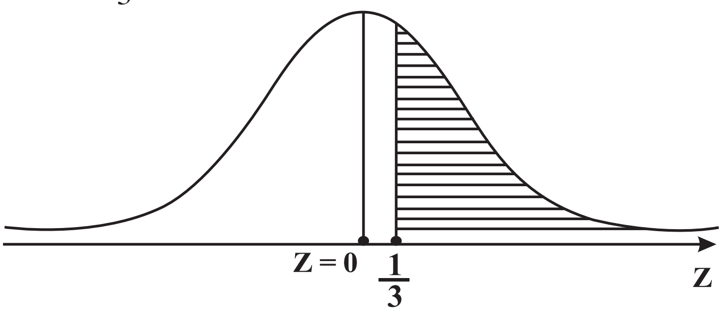
$= 0.1293 + 0.3413$ (அட்டவணையிலிருந்து)

$P(40 < X < 60) = 0.4706$

எனவே **40** மற்றும் **60**க்கு இடையில் மதிப்பெண் பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கை

$= 1000 \times 0.4706 = 470.6 \simeq 471$

(ii) $P(X > 50) = P(Z > \frac{1}{3})$



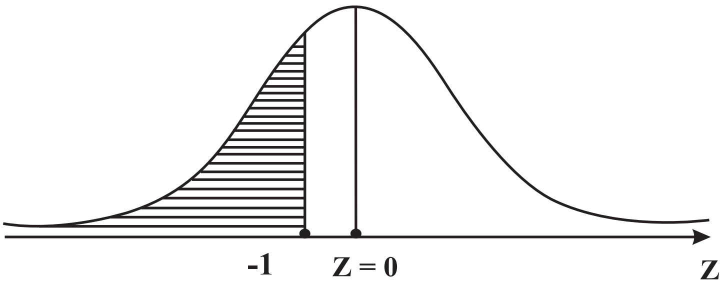
$= 0.5 - P(0 < Z < \frac{1}{3}) = 0.5 - P(0 < Z < 0.33)$

$= 0.5 - 0.1293 = 0.3707$ (அட்டவணையிலிருந்து)

எனவே **50**க்கும் மேல் மதிப்பெண் பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கை

$= 1000 \times 0.3707 = 371.$

(iii) $P(X < 30) = P(Z < -1)$



$= 0.5 - P(-1 \le Z \le 0)$

$= 0.5 - P(0 \le Z \le 1)$

$= 0.5 - 0.3413 = 0.1587$ (அட்டவணையிலிருந்து)

$\therefore$ எனவே **30**க்கு கீழ் மதிப்பெண் பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கை

$= 1000 \times 0.1587 = 159$

எடுத்துக்காட்டு 27

1000 பள்ளிக் குழந்தைகளின் நுண்ணறிவு ஈவின் சராசரி 96 ஆகவும் மற்றும் திட்டவிலக்கம் 12 ஆகவும் இருக்கிறது. பள்ளிக் குழந்தைகளின் நுண்ணறிவு ஈவு பரவல் இயல்நிலை எனக் கொண்டு

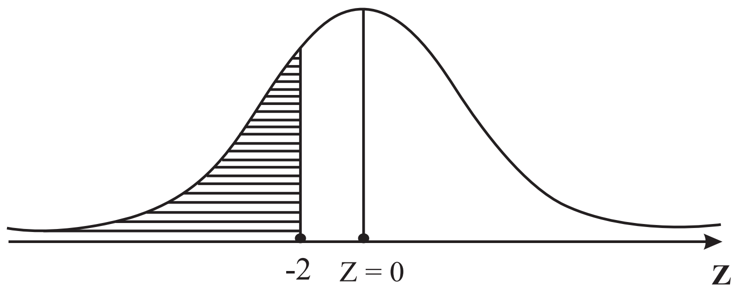
(i) 72 க்கு குறைவாக (ii) 80 மற்றும் 120 க்கு இடையில் நுண்ணறிவு ஈவு கொண்ட மாணவர்களின் எண்ணிக்கையினை தோராயமாக காண்க.

தீர்வு :

N = 1000, $\mu = 96$ மற்றும் $\sigma = 12$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 96}{12}$$

(i) $P(X < 72) = P(Z < -2)$



$= P(-\infty < Z \le 0) - P(-2 \le Z \le 0)$

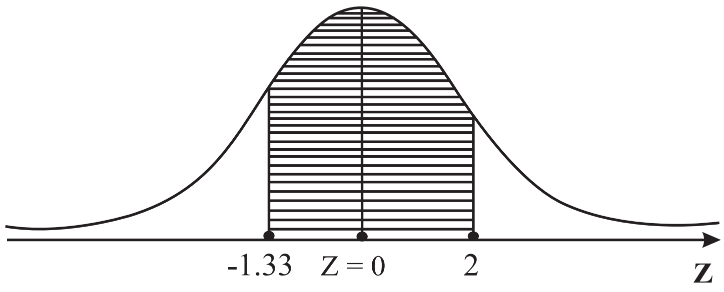
$= P(0 \le Z < \infty) - P(0 \le Z \le 2)$

$= 0.5 - 0.4772 = 0.0228$ (அட்டவணையிலிருந்து).

$\therefore$ 72 க்கு குறைவான நுண்ணறிவு ஈவு கொண்ட குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை

$= 1000 \times 0.0228 = 22.8 \simeq 23$

(ii) $P(80 < X < 120) = P(-1.33 < Z < 2)$



$= P(-1.33 \leq Z < 0) + P(0 \leq Z \leq 2)$

$= P(0 \leq Z \leq 1.33) + P(0 \leq Z \leq 2)$

$= 0.4082 + 0.4772$ (அட்டவணையிலிருந்து)

$= 0.8854$

$\therefore$ 80 மற்றும் 120 க்கு இடையில் நுண்ணறிவு ஈவு கொண்ட குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை

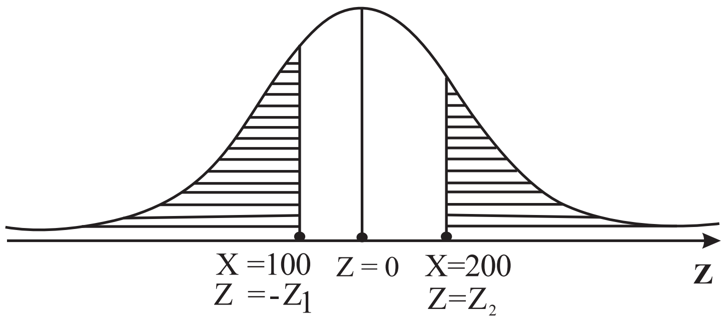
$= 1000 \times .8854 = 885.$

எடுத்துக்காட்டு 28

ஒரு இயல்நிலைப் பரவலில் 20 விழுக்காடு உருப்படிகள் 100க்கு குறைவாகவும், 30 விழுக்காடு உருப்படிகள் 200க்கும் மேலே உள்ளது எனில் அப்பரவலின் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை வரைபடத்தில் காண்க.



வரைபடத்திலிருந்து

$P(-Z_1 < Z < 0) = 0.3$

(அ–து) $P(0 < Z < Z_1) = 0.3$

$\therefore$ Z1 = 0.84 (அட்டவணையிலிருந்து)

எனவே $-0.84 = \dfrac{100-\mu}{\sigma}$

(அ–து) $100 - \mu = -0.84\,\sigma$ ...... (1)

$P(0 < Z < Z_2) = 0.2$

$\therefore$ $Z_2 = 0.525$ (அட்டவணையிலிருந்து)

எனவே $0.525 = \dfrac{200 - \mu}{\sigma}$

(அ–து) $200 - \mu = 0.525\,\sigma$ .... (2)

(1) மற்றும் (2) ஐ தீர்வு செய்ய, $\mu = 161.53$

$\sigma = 73.26$

பயிற்சி 8.4

1) திட்ட இயல்நிலை வளைவரையின் கீழ் அமையும் பரப்பினை

   (i) $Z = 2.70$ ன் வலதுபுறம் மற்றும்

   (ii) $Z = 1.73$ ன் இடதுபுறம் – காண்க.

2) திட்ட இயல்நிலை வளைவரையின் கீழ் அமையும் பரப்பினை

   (i) $Z = 1.25$ மற்றும் $Z = 1.67$ க்கு இடையில்,

   (ii) $Z = -0.90$ மற்றும் $Z = -1.85$ க்கு இடையில் – காண்க.

3) ஒரு குழுவில் உள்ள மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் பரவல் இயல்நிலையில் உள்ளதாக கருதப்படுகிறது. அதன் சராசரி 50 மதிப்பெண்கள் மற்றும் திட்டவிலக்கம் 15 மதிப்பெண்கள் எனில் 35 க்கு குறைவான மதிப்பெண்கள் பெற்ற மாணவர்களின் விகித அளவை மதிப்பிடுக.

4) ஒரு பொதுத்தேர்வில் பொருளியியல் பாடத்தில் மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் சராசரி 45 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 3 ஆகியவற்றோடு திட்ட இயல்நிலைப் பரவலை பின்பற்றுகிறது என்று கருதப்படுகிறது. இப்பாடத்தை பயிலும் ஒரு மாணவன் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறார். அம்மாணவரின் மதிப்பெண்கள் 70 க்கு மேல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

5) இராணுவ வீரர்களின் சராசரி உயரம் மற்றும் பரவற்படி முறையே 68.22″, 10.8″ ஆகும். 1000 பேர் உடைய ஒரு படையணியில் 6 அடி உயரத்திற்கு மேல் எத்தனை வீரர்கள் உள்ளனர் என்பதை கணக்கிடுக.

6) ஒரு ஏக்கர் பரப்புள்ள நிலப்பகுதியின் விளைச்சலின் சராசரி 663 கி.கி மற்றும் திட்ட விலக்கம் 32 கி.கி. ஆகும். இவ்விவரத்தை இயல்நிலை பரவலாக கருதி 1000 நிலப் பகுதிகளை கொண்ட தொகுதியில், (i) 700 கி.கி.விற்கு மேல் (ii) 650 கி.கி.விற்கு கீழ் விளைச்சலை ஏற்படுத்தக் கூடிய ஒரு ஏக்கர் பரப்புள்ள நிலங்களின் எண்ணிக்கை யாது ?

7) நிறைய எண்ணிக்கையில் உள்ள அளவுகள் சராசரி 65.5" மற்றும் திட்டவிலக்கம் 6.2" ஆகியவற்றை கொண்டு இயல்நிலைப் பரவலில் அமைந்துள்ளன. 54.8" மற்றும் 68.8" ஆகியவற்றிற்கிடையில் அமையும் அளவுகளின் விழுக்காடு காண்க.

8) ஒரு தொழிற்சாலை உற்பத்தி செய்யும் இயந்திர சுழல் தண்டுகளின் விட்டம் இயல்நிலைப் பரவலாக உள்ளது. சுழல் தண்டுகளில் 31% , 45 மி.மீ.க்கு குறைவான விட்டத்தையும், 8% 64 மி.மீக்கு மேலான விட்டத்தையும் கொண்டுள்ளன. சுழல் தண்டுகளின் விட்டத்தின் சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் காண்க.

9) ஒரு குறிப்பிட்டத் தேர்வின் முடிவுகள் சுருக்கமாக கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

முடிவுகள்	மாணவர்களின் விழுக்காடு
1. சிறப்புடன் வெற்றிப் பெற்றவர்	10
2. வெற்றிப் பெற்றவர்	60
3. தோல்வியடைந்தவர்	30

40க்கு கீழ் மதிப்பெண் பெற்றவர்கள், தேர்வில் தோல்வியடைந்தவர்கள் என்றும் 75க்கு மேல் மதிப்பெண் பெற்றவர்கள் தேர்வில் சிறப்புடன் வெற்றிப் பெற்றவர் என்றும் தெரிகிறது. பரவலை இயல்நிலை பரவலாகக் கொண்டு சராசரி, திட்டவிலக்கம் காண்க.

பயிற்சி 8.5

ஏற்புடைய விடையைத் தெரிவு செய்க.

1) ஒரு சீரரான நாணயம் மூன்று முறை சுண்டப்படுகிறது எனில் தலை கிடைப்பதற்கான எண்ணிக்கை x –ன் நிகழ்தகவு சார்பானது

(a)

x	0	1	2	3
$p(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$

(b)

x	0	1	2	3
$p(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

(c)

x	0	1	2	3
$p(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$

(d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

2) ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு திண்மச் சார்பு

x	0	1	2	3
$p(x)$	k	$2k$	$3k$	$5k$

எனில் k –ன் மதிப்பு

(a) $\frac{1}{11}$ (b) $\frac{2}{11}$ (c) $\frac{3}{11}$ (d) $\frac{4}{11}$

3) X என்ற ஒரு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $f(x) = Cx(2 - x)$, $0 < x < 2$ என வரையறுக்கப்பட்டால் C –ன் மதிப்பு

(a) $\frac{4}{3}$ (b) $\frac{6}{4}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{3}{5}$

4) ஈருறுப்பு பரவலின் சராசரி மற்றும் பரவற்படி முறையே

(a) np, npq (b) pq, npq (c) $np, \sqrt{npq}$ (d) np, nq

5) $X \sim N(\mu, \sigma)$, என்ற திட்ட இயல் மாறியின் பரவலானது,

(a) N(0, 0) (b) N(1, 0) (c) N(0, 1) (d) N(1, 1)

6) இயல்நிலை பரவலின் வளைவரையானது

(a) இரு முகடு உடையது

(b) ஒரு முகடு உடையது

(c) கோட்டம் உடையது (Skewed)

(d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

7) X ஒரு பாய்சான் மாறி மற்றும் $P(X = 1) = P(X = 2)$ எனில் அதன் சராசரியானது

(a) 1 (b) 2 (c) – 2 (d) 3

8) ஒரு பாய்சான் மாறியின் திட்டவிலக்கம் 2 எனில், அதன் சராசரி

(a) 2 (b) 4 (c) $\sqrt{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

9) X, Y என்ற சமவாய்ப்பு மாறிகள் சார்பற்றவை எனில்

(a) $E(X Y) = 1$ (b) $E(XY) = 0$

(c) $E(X Y) = E(X) E(Y)$ (d) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

10) ஈருறுப்பு பரவலின் சராசரி மற்றும் பரவற்படி முறையே 8 மற்றும் 4 $P(X = 1)$ ன் மதிப்பானது

(a) $\frac{1}{2^{12}}$ (b) $\frac{1}{2^4}$ (c) $\frac{1}{2^6}$ (d) $\frac{1}{2^{10}}$

11) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ எனில், இயல்நிலை பரவலின் வளைவு மாற்றப் புள்ளிகள்

(a) $\pm \mu$ (b) $\mu \pm \sigma$ (c) $\sigma \pm \mu$ (d) $\mu \pm 2\sigma$

12) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ எனில் இயல்நிலை பரவலின் வளைவு மாற்றுப் புள்ளியில் ஏற்படும் பெரும நிகழ்தகவு

(a) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}}$ (c) $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

13) சமவாய்ப்பு X –ன் நிகழ்தகவு பரவல்

X	–1	–2	1	2
$p(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

எனில் X–ன் எதிர்பார்த்தலானது

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{3}$

14) $X \sim N(5, 1)$ எனில் இயல்நிலை மாறி X –ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பானது

(a) $\frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{5}\right)^2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{5}\right)^2}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-5)^2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-5)^2}$

15) $X \sim N(8, 64)$ எனில், திட்ட இயல் நிலை மாறி $Z =$

(a) $\frac{X-64}{8}$ (b) $\frac{X-8}{64}$ (c) $\frac{X-8}{8}$ (d) $\frac{X-8}{\sqrt{8}}$

கூறெடுப்பு உத்திகள் மற்றும் புள்ளியியல் உய்த்துணர்தல் 9

9.1 கூறெடுத்தல் மற்றும் பிழைகளின் வகைகள் (Sampling and types of errors)

கூறெடுத்தல் நம் அன்றாட வாழ்வில் பயன்படுத்தப்படுகிறது. சமைக்கும் பொழுது ஒரு சில சோற்றை பதம் பார்த்து அவைகள் நன்றாக சமைக்கப்பட்டுள்ளனவா என ஒருவர் சோதிப்பதும் மற்றும் தானிய வகை ஒன்றினை வாங்க விரும்பும் வியாபாரி ஒருவர், சிறு அளவில் தானியத்தை சோதிப்பதும் கூறெடுத்தலுக்கான உதாரணங்களாகும். நமது பெரும்பான்மையான முடிவுகள் ஒரு சில உருபடிகளை சோதித்தறிந்து எடுக்கப்படுகின்றன.

குழு ஒன்றினைச் சார்ந்த உறுப்புகளின் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சிறப்பியல்புகளின் மாறுபாட்டையோ, அவைகளின் அளவை மதிப்பிடுதலிலோ தான் புள்ளியியல் ஆய்வு ஒன்றின் மையக் கருத்தாக உள்ளது. புள்ளியல் ஆய்விற்கு உட்படுத்தப்படும் இத்தகைய உறுப்புக்களின் அல்லது அலகுகளின் (units) தொகுதியை **முழுமைத் தொகுதி** (Population) என்போம். எனவே ஆராய்தலுக்குரிய இத்தகைய உறுப்புக்களின் சேர்ப்பு அல்லது தொகுப்பினை புள்ளியியலில் முழுமைத் தொகுதி எனப்படுகிறது. முழுமைத் தொகுதி ஆனது முடிவுறு அல்லது முடிவுறா தொகுதியாக இருக்கலாம்.

9.1.1 கூறெடுத்தல் மற்றும் கூறுகள்

புள்ளியியலில் ஆய்வுக்கான முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையில் அலகுகளை (உதாரணமாக குடும்பங்கள், நுகர்வோர், நிறுவனங்கள் போன்றவற்றை) ஆராய்வதற்கு எடுத்துக் கொள்ளும் முறையானது கூறெடுப்பு (sampling) முறையாகும். புள்ளியியல் முறைமை **(statistical regularity)** யைப் பின்பற்றியே கூறெடுப்பு முறைகள் கையாளப்படுகின்றன. இந்த கொள்கையின் படி ஒரு பெரிய தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படும் தேவையான எண்ணிக்கையில் அமைந்த ஒரு கூறிலுள்ள உறுப்புகள், சராசரியாக அந்த தொகுதியிலுள்ள உறுப்புகளின் சிறப்பியல்புகளைப் பெற்றிருப்பது அநேகமாக உறுதி ஆகும்.

முழுமைத் தொகுதியின் பிரிக்க இயலாத மிகச்சிறியப் பகுதியை **அலகு** அல்லது **உறுப்பு** (unit) என்கிறோம். உறுப்பை சரியாகவும், தெளிவாகவும் வரையறுக்கப்படல் வேண்டும். உதாரணமாக குடும்பம் என்ற உறுப்பை வரையறுக்கும் பொழுது, ஒரு நபர் இரு குடும்பங்களைச் சேர்ந்தவராக இருத்தல் கூடாது. மேலும் ஒரு குடும்பத்தில் உள்ள எந்த நபரும் விடுபடாமலிருக்க வேண்டும்.

ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் முடிவுறு உபகணத்தை **கூறு** (sample) எனவும், கூறிலுள்ள உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையை **கூறின் அளவு** (sample size) எனவும் வரையறுப்போம்.

கூறிலிருந்து பெறப்பட்ட விவரங்களை பகுத்தறிந்து அதன் மூலம் நாம் முழுமைத் தொகுதியைப் பற்றி அறிந்து கொள்ளலாம்.

9.1.2 முழுமைத் தொகுதி அளவை மற்றும் கூறு அளவை (Parameter and Statistic)

முழுமைத் தொகுதியின் புள்ளியியல் மாறிகளான சராசரி (μ), பரவற்படி (σ^2), விகித சமம் (proportion) (P) என்பன முழுமைத்தொகுதியின் அளவைகளாகும். கூறெடுத்தலில் இருந்து கிடைக்கப்படும் புள்ளியியல் அளவுகளான சராசரி ($\bar{X}$), பரவற்படி (σ^2), விகித சமம் (p) என்பன **கூறு அளவைகள்** எனப்படும்.

கூறெடுப்பு முறைகள் முழுமைத் தொகுதியின் அளவைகளைப் பற்றி அறிந்து கொள்ள உதவும் கருவியாக உள்ளன. முழுமைத்தொகுதி அளவைகளைப் பற்றி உயத்துணர, கூறெடுப்பு விவரங்கள் அடிப்படையில் மதிப்பிடுவதே கூறு அளவையாகும்.

9.1.3 கூறெடுத்தலின் அவசியம் (Need for Sampling)

ஒரு கம்பெனியின் கச்சா பொருட்கள் துறையானது உருபடிகளை அதிக அளவில் தருவித்து அதை தன் உற்பத்தி துறைக்கு எப்பொழுது தேவையோ அப்பொழுது தருகிறது என்க. அந்த உருபடிகளை எடுத்துக் கொள்வதற்கு முன் ஆய்வுத் துறையானது அதனை ஆய்வு அல்லது சோதனை செய்து தங்களுடைய தேவைக்கேற்ற தரம் கொண்டுள்ளவைகளாக உள்ளனவா என சோதிக்கிறது. அப்பொழுது

(i) தருவிக்கப்பட்ட எல்லா உருபடிகளையும் சோதிக்கலாம் அல்லது

(ii) அதிலிருந்து கூறு ஒன்றை எடுத்து, அதிலுள்ள குறைபாடுகளுடைய உருபடிகளை ஆய்வு செய்து கண்டறிவதின் மூலம், முழுமைத் தொகுதியில் குறைபாடுகள் உள்ள உருபடிகளின் எண்ணிக்கையை தோராயமாக கணக்கிடலாம்.

முதல் வகையானது **முழுக் கணக்கிடல்** முறை (census) எனப்படும். இந்த முறையில் உள்ள இரண்டு குறைபாடுகளாவன :

(i) நேரம் வீணாகுதல் (ii) செலவுகள் அதிகமாதல்

இரண்டாவது கூறெடுப்பு முறையில் இரண்டு நன்மைகள் உள்ளன. (i) குறைந்த செலவு (ii) குறைவான ஏற்புடைய நேரத்தில் நல்ல முடிவுகள்.

தேவையில்லாதவைகளை ஒதுக்க வேண்டிய சமயத்தில் கூறெடுப்பு முறை மிகவும் பயன்படக் கூடியதாக உள்ளது. நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட புள்ளியியல் கூறெடுப்பு முறையிலிருந்து, குறைந்த நேரத்தில், குறைந்த செலவில், மிக துல்லியமான முடிவுகளைப் பெறலாம். ஆகவே நல்ல முடிவுகளை எதிர்பார்க்கும் இடங்களில் மிகச்சிறந்த கருவியாக கூறெடுப்பு முறை உள்ளது எனில் அது மிகையாகாது.

9.1.4 கூறெடுப்பு முறை திட்டத்தில் உள்ள படிகள் (Elements of Sampling Plan)

கூறெடுத்தலை திட்டமிடுவதிலும் அதை நிறை வேற்றுவதிலும் உள்ள முக்கியமான படிகள் பின்வருமாறு :

(i) நோக்கங்கள் (Objectives)

புள்ளியியல் கணக்கெடுப்பிற்கான அடிப்படை நோக்கங்களை திட்டவட்டமாகவும் தெளிவாகவும் முதலில் முடிவு செய்ய வேண்டும். அவ்வாறு சரியாக வரையறுக்கப்படவில்லை எனில், புள்ளியியல் ஆய்வின் நோக்கம் வீணாகிவிடும். உதாரணமாக, தேசிய மயமாக்கப்பட்ட வங்கி ஒன்று, தன்னிடம் சேமிப்புக் கணக்கு வைத்துள்ள வாடிக்கையாளர்களுக்கு ஓராண்டு

காலத்தில் அது வழங்கிய சேவையின் தரத்தை அறிய விரும்புகிறது எனக் கொள்க. வாடிக்கையாளர்களிடமிருந்து, தன்னுடைய சேவையின் தரத்தை அறிந்து ஆராய்தல் என்பதையே கூறெடுத்தலின் நோக்கமாகக் கொள்ள வேண்டும்.

(ii) கருத்தில் கொள்ள வேண்டிய முழுமைத் தொகுதி (Population to be covered)

புள்ளியியல் கணக்கெடுப்பின் அடிப்படை நோக்கங்களைப் பொறுத்து, முழுமைத் தொகுதி நன்றாக வரையறை செய்யப்பட வேண்டும். சோதிக்கப்படும் முழுமைத் தொகுதியின் சிறப்பியல்புகளையும் தெளிவாக வரையறுத்தல் வேண்டும். உதாரணமாக, தன் சேவையின் தரத்தைப் பற்றி சோதிக்க, ஒரு வங்கி தன் சேமிப்புக் கணக்கு வாடிக்கையாளர்களின் கருத்துணர்வுகளை ஆராயும் பொழுது, அவ்வங்கியிலுள்ள எல்லா சேமிப்புக் கணக்கு வாடிக்கையாளர்களையும் கருத்தில் கொள்ள வேண்டும். வங்கியிலுள்ள சேமிப்புக் கணக்கு வாடிக்கையாளர்கள்அனைவரையும் சோதிக்கப்படக்கூடிய முழுமைத் தொகுதியாக (population) கருத வேண்டும்.

(iii) கூறெடுப்பின் வடிவம் (Sampling frame)

தீர்மானித்த முழுமைத் தொகுதியைப் பெறுவதற்கு வழிகாட்டுதலாக பட்டியல், படம் அல்லது நாம் ஏற்கத் தக்க வடிவில் ஏதேனும் ஒன்று இருத்தல் அவசியம். இத்தகைய பட்டியல் அல்லது படம் போன்றவற்றையே நாம் கூறெடுப்பின் வடிவம் (frame) என்கிறோம். பட்டியல் அல்லது படம் ஆனது முடிந்த வரையில் குறைகளற்றதாக இருத்தல் வேண்டும். இந்த வடிவம், நமக்கு கூறின் உறுப்புக்களைத் தெரிவு செய்ய உதவும். ஒரு வங்கி தான் வழங்கிய சேவையைப் பற்றி சேமிப்புக் கணக்கு வாடிக்கையாளர்களின் கருத்துக்களை அறியும் சோதனையில், அனைத்து வாடிக்கையாளர்களின் சேமிப்புக் கணக்கு எண்களை கூறெடுப்பு வடிவமாகக் கொள்வோம்.

(iv) கூறெடுத்தலின் ஓர் அலகு அல்லது உறுப்பு (Sampling unit)

கூறு ஒன்றினை தெரிவு செய்வதற்கு ஏதுவாக முழுமைத் தொகுதியை அலகுகளாகப் பிரிக்க வேண்டும். இத்தகைய பிரிப்பு தெளிவாக இருத்தல் அவசியம். முழுமைத் தொகுதியின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் ஏதேனும் ஒரேயொரு கூறில் தான் இருக்க வேண்டும். ஒரு வங்கியிலுள்ள அனைத்து சேமிப்புக் கணக்கு வாடிக்கையாளர்களையும் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து கூறெடுத்தால், அக்கூறுள்ள ஒவ்வொரு சேமிப்புக் கணக்கு வாடிக்கையாளரும் ஓர் உறுப்பு அல்லது அலகு என அழைக்கப்படுவர்.

(v) கூறு தேர்வு செய்தல் (Sampling selection)

புள்ளியியல் சோதனைக்கான அடிப்படை நோக்கங்களைக் கருத்திற் கொண்டே, ஒரு கூறின் உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையையும் மற்றும் உறுப்புக்களைத் தேர்வு செய்யும் முறையையும் முடிவு செய்தல் வேண்டும். மதிப்பீடு செய்ய உள்ள முழுமைத் தொகுதியின் அளவைப் பொறுத்தே கூறினைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும்.

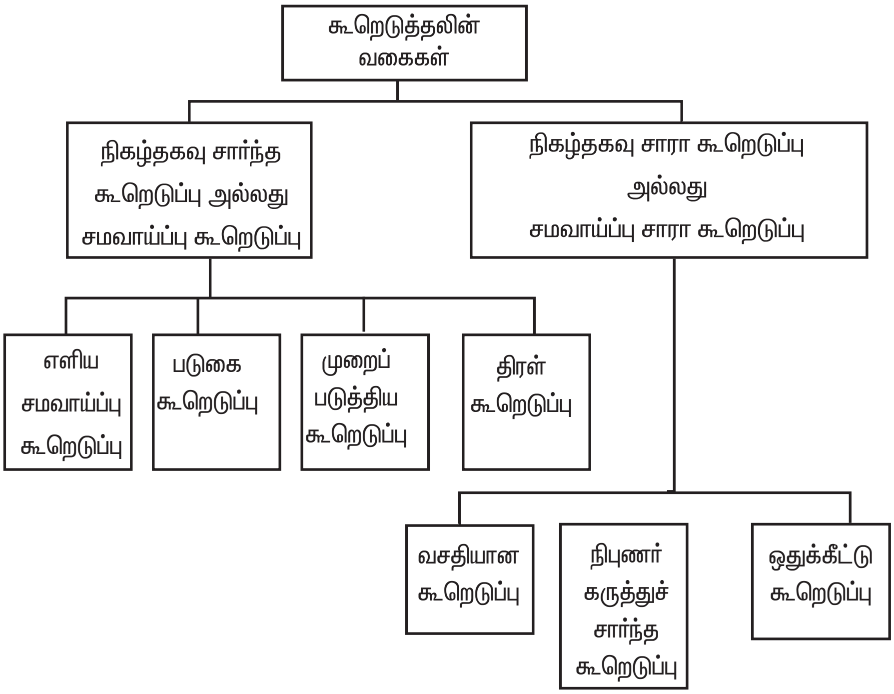
(vi) விவரங்களைச் சேகரித்தல் (Collection of data)

செலவினங்களைக் கருத்தில் கொண்டும், எதிர்பார்க்கும் மதிப்பீட்டின் துல்லியத்தைப் பொறுத்தும், விவரங்களை சேகரிக்கும் முறையை தீர்மானித்தல் வேண்டும். விவரங்களை நேரிடையாகக் கண்டறிதல், விடையளிப்பவரிடம் நேர்காணல் மற்றும் அஞ்சல் மூலம் விவரங்களைச் சேகரித்தல் போன்ற சில முறைகளில் விவரங்களை சேகரிக்கலாம்.

(vii) விவரங்களை பகுத்தாய்தல் (Analysis of data)

சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களை முறையாக வகைப்படுத்திய பின்னர், உகந்த ஆய்வு முறைக்கு உட்படுத்த வேண்டும். பகுத்தாய்வின் முடிவுகளைப் பொறுத்தே, முழுமைத் தொகுதியின் அளவைப் பற்றி இறுதி முடிவு காண வேண்டும்.

9.1.5 கூறெடுத்தலின் வகைகள்



விவரங்களின் தன்மை மற்றும் விசாரணையின் வகை ஆகியனவற்றைப் பொறுத்தே, முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து, கூறு ஒன்றினைத் தேர்ந்தெடுக்கும் முறை அமையும். கூறெடுத்தலை பின்வருமாறு இரண்டு தலைப்புகளில் வகைப்படுத்தலாம்.

(i) நிகழ்தகவு சார்ந்த கூறெடுப்பு அல்லது சமவாய்ப்புக் கூறெடுப்பு

(ii) நிகழ்தகவு சார்ந்திராத கூறெடுப்பு அல்லது சமவாய்ப்பு சார்ந்திராத கூறெடுப்பு.

(i) நிகழ்தகவு சார்ந்த கூறெடுப்பு (Probability sampling)

நிகழ்தகவு சார்ந்த கூறெடுப்பு முறையில் முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் ஒரு கூறுக்குள் சேர்க்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு பூச்சியமற்றதாக (non-zero chance) இருக்க வேண்டும்.

நிகழ்தகவு சார்ந்த கூறெடுப்பின் வகைகள் :

(a) எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு (Simple Random Sampling)

நிகழ்தகவு சார்ந்த கூறெடுப்பின் அடிப்படை எளிய வாய்ப்புக் கூறெடுப்பாகும். எளிய சமவாய்ப்புக் கூறெடுப்பானது நிகழ்தகவு சார்ந்த கூறெடுப்பின் வகைகளில் அடிப்படையானதாகும். எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு முறையில், முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் கூறு ஒன்றில் சேர்க்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு சமமாக இருக்கும். இம்முறையில் முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள தேவைப்படும் எண்ணிக்கையில் உறுப்புகளின்

சேர்ப்புக்களை கூறெடுத்தலுக்குப் பயன்படுத்தக் கூடிய வாய்ப்பு சம அளவில் இருக்கும். உறுப்புக்களை, முழுமைத் தொகுதியில் மீள இடல் (replacement) அல்லது மீள இடாதிருத்தல் (without replacement) எனும் வகையில் கூறெடுப்பினை நிகழ்த்தலாம். கூறெடுப்பானது, மீள இடல் முறையில் இருப்பின், ஒரு உறுப்பினைத் தேர்வு செய்த பின்னர், அந்த உறுப்பினை வேறொரு உறுப்பினைத் தேர்வு செய்வதற்கு முன்பாகவே மீண்டும் முழுமைத் தொகுதியில் சேர்க்கப்படுதல் வேண்டும். எனவே கூறெடுப்பு மீள இடல் முறையில், முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை ஒரு மாறிலியாக இருக்கும். அதாவது முழுமைத் தொகுதியின் அளவு மாறாதிருக்கும்.

N உறுப்புகளைக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து n உறுப்புகளை மீள இடாதிருத்தல் முறையில் தெரிவு செய்ய ஒருவர் விரும்புகிறார் எனில் ஒவ்வொரு தெரிவு செய்யப்பட்ட n உறுப்புகளாலான கூறுக்கும் சமமான நிகழ்தகவு இருந்தாக வேண்டும். ஆகவே N கூறுகள் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து n உறுப்புக்கள் கொண்டு கூறினை எடுக்க ${}^{N}c_{n}$ வழிகள் உள்ளன. n உறுப்புக்களைக் கொண்ட கூறு ஒன்று N அளவுள்ள முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தெரிவு செய்யப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{{}^{N}c_{n}}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு வங்கியானது ஓராண்டு காலத்தில் தான் வழங்கிய சேவையின் தரம் பற்றி கருத்தினை சேமிப்புக் கணக்கு வாடிக்கையாளர்களிடமிருந்து அறிய விரும்புகிறது எனக் கொள்வோம். சேமிப்புக் கணக்கு வாடிக்கையாளர்கள் பட்டியலிலுள்ள நபர்களின் எண்ணிக்கை 500 என்க. இந்த 500 லிருந்து 50 நபர்களைக் கொண்ட கூறு ஒன்றினை தெரிவு செய்து, நேர்காணலை நடத்துவதற்கு பல வழிமுறைகள் உள்ளன. அவைகளில் பொதுவான இரண்டு வழிகள் பின்வருமாறு :

(1) **குலுக்கல் முறை (Lottery method) :** சேமிப்புக் கணக்கு வைத்திருப்பவர்களின் கணக்கு பதிவு எண்களை ஒவ்வொன்றாக 500 துண்டு காகிதத்தில் எழுதி அதை ஒரு பெட்டியில் இட்டு நன்றாக குலுக்கி அதிலிருந்து 50 துண்டு சீட்டுக்களைத் தெரிந்தெடுக்கலாம். முழுமைத் தொகுதியில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை குறைவாகவும் அதை எடுத்தாள போதுமானதாகவும் இருந்தால் மட்டுமே இந்த முறையைப் பின்படுத்தலாம்.

(2) **சம வாய்ப்பு எண்கள் முறை (Random numbers method) :** முழுமைத் தொகுதியின் அளவு பெரியதாக இருந்தால், மிகச் சிக்கனமாக நடைமுறைப்படுத்தக் கூடிய முறை வாய்ப்பு எண்கள் முறை ஆகும். வாய்ப்பு அட்டவணையை இந்த முறைக்கு நாம் பயன்படுத்தி கூறு ஒன்றினைத் தெரிவு செய்யலாம்.

(b) படுகை கூறெடுப்பு (Stratified Random Sampling)

இம்முறையில், முழுமைத் தொகுதியானது, பல பிரிவுகளாக அல்லது படுகைகளாகப் **(strata)** பிரிக்கப்படுகின்றது. ஒவ்வொரு படுகையிலுள்ள உறுப்புகள் ஒரே படித்தானவையாக (homogeneous) இருக்கும் (hetrogeneous). வெவ்வேறு படுகைகளிலுள்ள உறுப்புகள் பல படித்தானவைகளாக இருக்கும். இதற்கு அடுத்தபடியாக ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் தேவையான அளவு கொண்ட எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பை தெரிந்தெடுக்க வேண்டும். ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் கூறு எடுக்கும் பொழுது அக்கூறிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை பின்வரும் இரண்டு வழிகளில் முடிவு செய்யலாம் (i) அனைத்துக் கூறுகளும்

சம அளவு எண்ணிக்கையிலிருத்தல் (ii) படுகையிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கைக்கு சம விகிதத்திலிருத்தல்.

உதாரணமாக, ஒரு நுகர்பொருள் தயாரிக்கும் நிறுவனத்தின் மேலாளர், விற்பனையை அதிகரிக்கும் நோக்கில், புதிய தயாரிப்புப் பொருளைப் பற்றிய நுகர்வோரின் நாட்டத்தினை அறிய விரும்புகின்றார். விற்பனையில் மாற்றத்தினை ஏற்படுத்தக் கூடிய மூன்று நகரங்களை, மூன்று படுகைகளாகக் கருதுகின்றார். நுகர்வோர்கள் ஒரு நகரத்தில் ஒரே மாதிரியாகவும், நகரகங்களுக்கிடையே மாறுபட்டும் உள்ளனர். ஒவ்வொரு நகரத்திலிருந்தும் நுகர்வோர்களைத் தெரிவு செய்து, அவர்களைக் கொண்டு ஒரே சமவாய்ப்புக் கூறெடுத்து ஆய்வு செய்யலாம். கூறெடுத்தலின் முடிவுளைக் கொண்டு முழுமைத் தொகுதியான அனைத்து நுகர்வோர்களின் நாட்டத்தைத் தீர்மானிக்கலாம்.

(c) முறைப்படுத்திய கூறெடுப்பு :

முறைப்படுத்திய கூறெடுத்தல் ஆனது கூறு ஒன்றினை தெரிவு செய்வதற்கு ஏதுவான முறை ஆகும். எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுத்தலுடன் ஒப்பிடுகையில், இம்முறைக்கு ஆகும் காலமும், செலவும் குறைவாக இருக்கும்.

இந்த முறையில் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து உறுப்புகள் சீரான இடைவெளிகளில் தெரிந்தெடுக்கப்படுகின்றன. இதற்கு ஏதுவாக, உறுப்புகளை எண்கள், அகரவரிசை, இடஞ்சார்ந்த போன்ற ஏதாவது ஒரு வரிசையில் அமைத்தல் வேண்டும். முழுமைத் தொகுதியின் பட்டியல் முழுமையாக கிடைக்கப் பெறின் இந்த முறை பயன்படுத்தப்படுகின்றது.

N அளவுள்ள முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து n அளவுள்ள கூறு ஒன்றினை முறைப்படுத்திய கூறெடுத்தலில் தெரிவு செய்ய வேண்டுமானால், முதலில் $1 \leq j \leq k$ எனுமாறு j ஆவது உறுப்பினை வாய்ப்பு முறையில் எடுக்கவும். இங்கு $k = \dfrac{N}{n+1}$ மற்றும் k ஐ முழு எண்ணாக மாற்ற வேண்டும். $j, j + k, j + 2k, \dots, j + (n-1)k$ – ஆவது உறுப்புகள் முறைப்படுத்திய கூறு ஒன்றினை அமைக்கின்றன.

உதாரணமாக, 1, 2, ..., 105 என்றவாறு வரிசையாயுள்ள 105 மாணவர்களிலிருந்து **9** மாணவர்களை முறைப்படுத்திய கூறெடுத்தலில் முறையில் தெரிவு செய்வதாகக் கொள்வோம். எனவே $k = \frac{105}{10} = 10.5 \simeq 11$ ஆகும். முதலில் 1, 2, ... 11 க்குள் உள்ள ஒரு மாணவனை தெரிவு செய்ய வேண்டும். இம்மாணவன் **3** ஆம் இடத்தில் உள்ளதாகக் கொள்வோம். 3, 14, 25, 36, 47, 58, 69, 80, 91 ஆகிய இடங்களிலுள்ள 9 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு கூறினை இம்முறையில், தெரிவு செய்யலாம்.

(d) திரள் கூறெடுப்பு (Cluster sampling)

ஒவ்வொரு திரளும் முழுமைத் தொகுதியின் பிரதிநிதியாக அமையும் வண்ணம், முழுமைத் தொகுதியை பல திரள்களாகப் பிரிக்கும் பொழுது, திரள்முறைக் கூறெடுத்தல் பயன்படுத்தப் படுகிறது.

சென்னை மாநகரத்தில் ஒவ்வொரு குடும்பத்திலுள்ள குழந்தைகளின் எண்ணிக்கையைக் காணும் பொருட்டு ஓர் ஆய்வு மேற்கொள்ளப்படுகிறது என்க. இந்நகரத்தினை பலத் திரள்களாகப் பிரித்து, அவைகளில் இருந்து வாய்ப்பு முறையில் ஒரு சில திரள்களைத் தெரிவு செய்யலாம். இவ்வாறு தெரிவு செய்யப்பட்ட திரள்களிலுள்ள ஒவ்வொரு குடும்பமும் சேர்ந்து கிடைப்பது ஒரு கூறாகும்.

திரள் கூறெடுத்தலின் பொழுது பின்வருவனவற்றைக் கருத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

(i) துல்லியமான முடிவுகளைப் பெறுவதற்கு திரள்கள் சிறிய அளவுகளில் இருத்தல் வேண்டும்.

(ii) ஒவ்வொருத் திரளிலும் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை கூடிய வரை சமமாக இருக்க வேண்டும்.

(ii) நிகழ்தகவு சாரா கூறெடுப்பு (Non-Probability Sampling)

நிகழ்தகவு சார்ந்த கூறெடுப்பு மற்றும் நிகழ்தகவு சாரா கூறெடுப்பு ஆகியவைகளுக்கிடையே உள்ள மிக முக்கியமான வேறுபாடு, நிகழ்தகவு சாரா கூறெடுப்பில், முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஒரு உறுப்பு, கூறு ஒன்றில் சேர்க்கப்படுவதற்கான வாய்ப்பினை கூற இயலாது என்பதாகும். இம்முறையில் நிகழ்தகவுக் கொள்கை (principle of probability) யைப் பயன்படுத்தாமல் கூறெடுத்தலுக்காக உறுப்புகள் தெரிவு செய்யப்படுகின்றன. குறைந்த செலவு, விரைவாக ஆராய்தல் செயலாக்கத்தில் வசதி போன்ற நிறைகள் நிகழ்தகவு சாராக் கூறெடுத்தலில் காணப்பட்டாலும், தெரிவு செய்வதிலுள்ள சாதகத்தன்மையால் துல்லியமான முடிவுகளைப் பெற இயலாது. முதலாய்வில் (pilot studies) நிகழ்தகவு சாராக் கூறெடுத்தல் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

நிகழ்தகவு சாராக் கூறெடுப்பின் முறைகள் :

(a) நோக்கமுள்ள கூறெடுப்பு (Purposive sampling)

இவ்வகை கூறெடுத்தலில், வரையறுக்கப்பட்ட நோக்கத்தோடு கூறு தெரிவு செய்யப்படுகிறது. கூறிலுள்ள உறுப்புகள், ஆய்வு செய்பவரின் விருப்பத்திற்கேற்ப அமைகின்றன.

உதாரணமாக, மதுரை நகர மக்களிடையே வாழ்க்கைத் தரம் உயர்ந்துள்ளதாக தம் ஆய்வில் சொல்ல விரும்பும் ஒரு ஆய்வாளர், மதுரை நகரில் ஏழைகள் வசிக்கும் பகுதியை ஒதுக்கி விட்டு, வசதி படைத்தோர் வாழும் பகுதியிலிருந்து நபர்களைத் தெரிவு செய்து கூறு அமைப்பார். இவ்வாறு கூறெடுத்தலை தம் வசதிக்கேற்ப செய்து கொள்ளும் நிலை, நோக்கமுள்ள கூறெடுத்தல் வகையில் ஏற்படும்.

(b) ஒதுக்கீட்டு கூறெடுப்பு (Quota sampling)

நோக்கமுள்ள கூறெடுத்தலின் கட்டுப்படுத்தப்பட்ட வகைக் கூறெடுப்பே, ஒதுக்கீட்டு கூறெடுப்பாகும். முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள பல குழுக்களிலிருந்து எடுக்கப்படவிருக்கும் கூறுகளுக்கு ஒதுக்கீடு செய்த பின்னர், அக்குழுக்களிலிருந்து தேவையான கூறுகளை நோக்கமுள்ள கூறெடுப்பு முறையில் எடுக்கலாம். கருத்துக்கணிப்பு மற்றும் சந்தை ஆய்வு கணக்கெடுப்பு ஆகியவற்றில் ஒதுக்கீட்டு கூறெடுப்பு பயன்படுத்தப்படுகிறது.

(c) நிபுணர் கருத்துச் சார்ந்த கூறெடுப்பு (Expert opinion sampling or expert sampling)

முடிவுகளை மேற்கொள்வதற்கு ஏதுவாக உள்ள துறையைச் சார்ந்த நிபுணர்களின் அனுபவங்கள் மற்றும் கருத்துக்களைக் கொண்டு கூறெடுத்தல் அமைந்தால், அது நிபுணர் கருத்தின் பேரில் ஏற்படுத்தப்பட்ட கூறெடுத்தலாகும். விவரங்கள் சரிவர அமையப் பெறாத சமயங்களில் இம்முறை பயனளிக்கும். நிபுணர்கள் பாரபட்சமாக இருந்தாலும், முடிவுகளை பாதிக்குமாறு அவர்களின் விருப்பு வெறுப்புகள் அமைந்தாலும் இவ்வகை கூறெடுத்தலில் குறை ஏற்படும்.

9.1.6 கூறெடுப்பு முறை சார்ந்த மற்றும் சாரா பிழைகள் (Sampling and non-sampling errors)

விவரங்களை சேகரித்தல், விவரங்களை முறைப்படுத்துதல், விவரங்களை பகுத்தாய்தல் ஆகியனவற்றில் ஏற்படும் பிழைகளை (i) கூறெடுப்பு முறை சார்ந்த பிழைகள் (sampling errors) (ii) கூறெடுப்பு முறை சாரா பிழைகள் (non-sampling errors) என இருவகைகளாக பிரிக்கலாம்.

(i) கூறெடுப்பு முறை சார்ந்த பிழைகள் (Sampling errors)

முழுமைத் தொகுதியின் அளவைகளை மதிப்பீடு செய்யவும், அவைகளைப் பற்றி ஆய்ந்தறியவும், முழுமைத் தொகுதியின் ஒரு பகுதியை மட்டுமே கூறெடுத்து ஆய்வு செய்வதால் கூறெடுப்பு முறை சார்ந்த பிழைகள் ஏற்படுகின்றன. கூறின் அளவு அதிகரிக்கப்படுமானால், கூறெடுப்பு முறை சார்ந்த பிழைகள் குறையும்.

கூறெடுப்பு முறை சார்ந்த பிழைகள் ஏற்படுவதற்கான காரணங்களில் சிலவற்றைக் காண்போம் :

(a) குறைபாடு முறையில் கூறெடுத்தல் (Faulty selection of the sample)

குறைபாடுள்ள உத்தியைக் கையாண்டு, ஆய்வாளர் ஒருவர் சுயவிருப்பின் அடிப்படையில் கூறொன்றினைத் தெரிவு செய்யும் பொழுது பிழைகள் ஏற்படும்.

(b) பிரதியிடல் (Substitution)

சமவாய்ப்புக் கூறில் உள்ள ஒரு உறுப்பினால் சிக்கல் ஏற்படும் பொழுது, அதற்கு மாற்றாக முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள வேறொரு சாதகமான உறுப்பினை கூறில் சேர்க்கலாம். இவ்வாறு ஒரு உறுப்பிற்கு பதிலாக வேறொரு சாதகப் பிரதியிடுவதால் கூறெடுப்பு முறை சார்ந்த பிழை ஏற்படும்.

(c) கூறெடுப்பு உறுப்புகளை குறைபாடு முறையில் பிரித்தல் (Faulty demarcation of sampling units)

கூறெடுப்பு உறுப்புகளைக் குறைபாடுகளுடன் பிரித்தல் காரணமாகக் குறிப்பாக விவசாயச் சோதனைகளில் பிழை ஏற்பட வாய்ப்புள்ளது.

(ii) கூறெடுப்பு முறை சாரா பிழைகள் (Non-sampling errors)

விவரங்களைக் கூர்ந்து நோக்குதல், வகைப்படுத்தல், பகுத்தாய்தல் ஆகிய நிலைகளில் கூறெடுப்பு முறை சாரா பிழைகள் எழுகின்றன.

மாதிரி அளவிடல் (sample survey) அல்லது முழு கணக்கெடுப்பின் (census) திட்டமிடல் மற்றும் செயலாக்கம் ஆகியவற்றின் ஒவ்வொரு நிலைகளிலும் கூறெடுப்பு முறை சாரா பிழைகள் ஏற்பட வாய்ப்பு உள்து.

கூறெடுப்பு முறை சாரா பிழைகள் ஏற்படுவதற்கான காரணங்கள்.

(a) குறைபாடுடன் திட்டமிடல் மற்றும் வரையறைகளினால் ஏற்படும் பிழைகள் (Errors due to faulty planning and definitions)

பயிற்சி பெற்ற ஆய்வாளர்கள் குறைந்த எண்ணிக்கையிலிருத்தல், உறுப்புகளை அளவிடலில் உள்ள பிழைகள், உறுப்புகளின் இடஞ்சார்ந்த பிழைகள், விவரங்களை சரியற்ற முறையில் குறித்தல் போன்ற காரணங்களினால் இத்தகைய பிழைகள் ஏற்படுகின்றன.

(b) கேட்டறிதலால் பிழைகள் (Response errors)

விடையளிப்பவர்கள் தரும் விடைகளின் காரணமாக இவ்வகை பிழைகள் ஏற்படுகின்றன.

(c) முழுமை பெறா தகவல்களினால் ஏற்படும் பிழைகள் (Non-response bias)

கூறுகளின் அனைத்து உறுப்புகளைப் பற்றிய தகவல்கள் அல்லது விவரங்கள் முழுமையாக இல்லாதிருப்பின் இத்தகைய பிழைகள் ஏற்படுகின்றன.

(d) விடுபடுதலின் பிழைகள் (Errors in coverage)

கூறுகளிலுள்ள அனைத்து அலகுகளையும் அல்லது உறுப்புகளையும் கருத்தில் கொள்ளாமையால் உண்டாகும் பிழைகள், இவ்வகையை சார்ந்தவைகளாகும்.

(e) தொகுத்தலின் பிழைகள் (Compiling errors)

கேட்டுப்பெறும் விவரங்களை தொகுக்கும் பொழுது, இவ்வகை பிழைகள் ஏற்படுகின்றன.

9.2 மதிப்பிடுதல் (Estimation)

புள்ளியியலின் முக்கிய பிரிவுகளில் ஒன்றான புள்ளியியல் உய்த்துணரல் (statistical inference) மூலமாக கூறுகளின் முடிவுகளை முழுமைத் தொகுதிக்கு பொதுமைப்படுத்தும் நுட்பம் கிடைக்கின்றது. புள்ளியியல் உய்த்துணரலியலில், (i) **மதிப்பிடுதல்** (estimation) (ii) **எடுகோள் சோதனை** (testing of hypothesis) ஆகிய இரண்டு முக்கியமான பிரிவுகள் இடம் பெற்றுள்ளன.

புள்ளியியலில் மதிப்பிடுதல் என்பது கூறுகள் வாயிலாகப் பெறும் விவரங்களிலிருந்து முழுமைத் தொகுதியின் அளவைகள் பற்றி உய்த்துணர்தல் ஆகும். முடிவுகள் எடுக்கும் முறைமைக்கு அளவை மதிப்பிடுதல் மிகவும் அவசியமாகிறது.

முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி, பரவற்படி மற்றும் விகித அளவு ஆகியனவற்றை அவைகளுக்கு கூறுகளின் உரிய அளவைகளிலிருந்து மதிப்பிடுதல் புள்ளியியல் உய்த்துணருதலின் முக்கிய பங்கு ஆகும்.

9.2.1 மதிப்பீட்டு அளவை (Estimator)

முழுமைத் தொகுதியின் அளவை ஒன்றை மதிப்பிட பயன்படும் கூறு அளவையினை (statistic) **மதிப்பீட்டளவை** எனப்படும்.

முழுமைத் தொகுதி அளவையின் உண்மை மதிப்பிற்கு மிக அருகில் அமையும் மதிப்பீட்டு அளவையினை, **சிறந்த மதிப்பீட்டளவை** (good estimator) என்போம். சிறந்த மதிப்பீட்டு அளவைக்குரிய பண்புகளாவன :

(i) பிறழ்ச்சியற்ற தன்மை (Unbiasedness)

ஓர் அளவையின் எதிர்பார்த்தல் மதிப்பு (expected value), முழுமைத் தொகுதியின் அளவைக்கு சமமெனில் அந்த அளவையினை **பிறழ்ச்சியற்ற தன்மையுடைய** அளவை என்போம்.

உதாரணமாக $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum x$ ஆனது முழுமைத் தொகுதி சராசரி μ–க்கு பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீட்டளவை ஆகும். N அளவுள்ள முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து n அளவுகொண்ட கூறு ஒன்றினை எடுத்தால், $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x-\bar{x})^2$ ஆனது முழுமைத் தொகுதி பரவற்படியின் பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீட்டளவையாகும். எனவே தான் மதிப்பீடலிலும் மற்றும் எடுகோள் சோதனையிலும் s^2 ஐ பயன்படுத்துகின்றோம்.

(ii) ஒப்புமைத் தன்மை (Consistency)

ஓர் அளவையின் மதிப்பானது, கூறுகளின் அளவு அதிகரிக்கும் பொழுது முழுமைத் தொகுதியின் அளவையின் மதிப்பிற்கு நெருங்குமாயின், அந்த அளவை **ஒப்புமைத் தன்மை** உடையது என்போம்.

(iii) திறன் தன்மை (Efficiency)

முழுமைத் தொகுதி அளவை ஒன்றிற்குரிய இரு பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீட்டு அளவைகளைக் கருதுவோம். முதல் மதிப்பீட்டு அளவையின் திட்டப்பிழையானது இரண்டாம் மதிப்பீட்டு அளவையின் திட்டப்பிழையை விடக் குறைவாக இருப்பின் முதல் மதிப்பீட்டளவை, இரண்டாவதை விட திறன் மிக்கது என்போம்.

(iv) போதுமான தன்மை (Sufficiency)

முழுமைத் தொகுதி அளவைப் பற்றிய அனைத்து விவரங்களையும் மதிப்பீட்டளவை ஒன்று தன்னகத்தே கொண்டிருப்பின், அதனை ஒரு போதுமான தன்மையுடைய மதிப்பீட்டளவை எனக் கூறுவோம்.

9.2.2 புள்ளி மதிப்பீடு மற்றும் இடைவெளி மதிப்பீடு

முழுமைத் தொகுதி அளவைக்கு இருவிதமான மதிப்பீடுகளைக் காணலாம். அவை **புள்ளி மதிப்பீடு** மற்றும் **இடைவெளி மதிப்பீடு** ஆகும்.

புள்ளி மதிப்பீடு (Point Estimate)

முழுமைத் தொகுதியின் அளவைக்குரிய மதிப்பிடலை **ஓர் எண்ணால்** குறித்தால், அதனை முழுமைத் தொகுதி அளவையின் புள்ளி மதிப்பீடு என்போம். சராசரி $(\bar{x})$ மற்றும் கூறு பரவற்படி $\left[s^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x-\bar{x})^2\right]$ என்பன புள்ளி மதிப்பீடுகளுக்கு உதாரணங்களாகும்.

புள்ளி மதிப்பீடு ஆனது முழுமைத் தொகுதி அளவையின் உண்மை மதிப்பிற்கு சமமாகப் பொருந்துவது மிகவும் அரிது.

இடைவெளி மதிப்பீடு (Interval Estimate)

இரண்டு எண்களுக்கு இடையில் முழுமைத் தொகுதி அளவையின் மதிப்பு அமையலாம் என எதிர்பார்த்து, முழுமைத் தொகுதி அளவையின் மதிப்பீடாக அவ்விரு எண்களைத் தரப்படுவதை இடைவெளி மதிப்பீடு என்போம்.

இடைவெளி மதிப்பீடானது, மதிப்பீடலின் துல்லியத் தன்மையைக் குறிக்கிறது. எனவே தான் புள்ளி மதிப்பீடலை விட இடைவெளி மதிப்பீடல் விரும்பப்படுகிறது.

உதாரணமாக, ஒரு தொலைவு 5.28 மி.மீ என அளக்கப்படின், நாம் கொடுப்பது புள்ளி மதிப்பீடாகும். மாறாக 5.28 ± 0.03 மி.மீ. என தொலைவுத் தரப்பட்டால், அதாவது தொலைவானது 5.25 மற்றும் 5.31 மி.மீக்கு இடையேயுள்ளது எனத் தரப்பட்டால், தொலைவானது இடைவெளி மதிப்பீடலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்போம்.

9.2.3 முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி மற்றும் விகித அளவிற்கான நம்பிக்கை இடைவெளி (Confidence Interval for population mean and proportion)

முழுமைத் தொகுதியின் அளவையின் மதிப்பு எந்த இடைவெளிக்குள் அமையுமென எதிர்பார்க்கலாமோ அந்த இடைவெளி, **நம்பிக்கை இடைவெளி** ஆகும். இவ்வாறு தீர்மானிக்கப்படும் எல்லைகள் **நம்பிக்கை எல்லைகள்** என்றழைக்கப்படும்.

முழுமைத் தொகுதியின் அளவை குறிப்பிட்ட வீச்சில் அமைவதற்கான நிகழ்தகவை, நம்பிக்கை இடைவெளிகள் எடுத்துக்காட்டும்.

நம்பிக்கை இடைவெளியை காணுதல் (Computation of confidence interval)

நம்பிக்கை இடைவெளியைக் காண நமக்கு தேவையானவை.

(i) குறிப்பிட்ட கூறு அளவை

(ii) குறிப்பிட்ட கூறு அளவையின் கூறெடுப்புப் பரவலின் திட்டப்பிழை (S.E) மற்றும்

(iii) தேவைப்படும் துல்லியத்தன்மையின் அளவு

கூறு அளவு பெரியதாக இருக்குமானால் கூறெடுப்புப் பரவல் ஏறக்குறைய இயல்நிலை பரவலாக அமையும். எனவே திட்டப்பிழையின் மதிப்பீட்டைக் காண, முழுமைத் தொகுதி மதிப்பிற்கு பதிலாக கூறு அளவு மதிப்பையே பயன்படுத்தலாம். பெருங்கூறுகளைக் கையாளும் போது, நம்பிக்கை எல்லைகளைக் காண Z –பாவல் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

நம்பிக்கை எல்லைகள் சிலவற்றிற்கு உரிய Z மதிப்புகளாவன :

நம்பக மட்டம் (Confidence Levels)	99%	98%	96%	95%	80%	50%
Z மதிப்புகள், Zc	2.58	2.33	2.05	1.96	1.28	0.674

(i) சராசரிக்கான நம்பிக்கை இடைவெளி (Confidence interval estimates for means)

μ மற்றும் σ என்பன முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் என்க. $\overline{X}$ மற்றும் s என்பன கூறு சராசரி மற்றும் கூறெடுப்புப் பரவலின் திட்ட விலக்கம் என்க.

Z_c என்பது நம்பிக்கை அளவுகளுக்கு உரிய Z மதிப்பு என்க.

μ –க்கான நம்பிக்கை எல்லைகள்

முழுமைத் தொகுதியின் அளவு	கூறு அளவு	μ –ன் நம்பிக்கை எல்லைகள்
முடிவுறா எண்	n	$\overline{X} \pm (Z_C)\dfrac{s}{\sqrt{n}}$, z_c ஆனது நம்பிக்கை மட்டத்தில் Z ன் மதிப்பு
முடிவுறு எண் N	n	$\overline{X} \pm (Z_C)\dfrac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}$

(ii) விகித அளவின் நம்பிக்கை எல்லைகள் (Confidence intervals for proportions)

வெற்றிகளின் விகித அளவு P உள்ள முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட n அளவு கொண்ட கூறில் வெற்றிகளின் விகித அளவு p எனில், P –க்கான நம்பிக்கை இடைவெளியை பின்வரும் அட்டவணையில் காணலாம்.

முழுமைத் தொகுதியின் அளவு	கூறு அளவு	P–ன் நம்பிக்கை எல்லைகள்
முடிவுறா எண்	n	$p \pm (Z_C)\sqrt{\dfrac{pq}{n}}$
முடிவுறு எண் N	n	$p \pm (Z_C)\sqrt{\dfrac{pq}{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}$

எடுத்துக்காட்டு 1

ஒரு தோல் பொருளுக்கான தேவையின் போக்கு குறைவதை உணர்ந்து நிதிமேலாளர் தன் நிறுவன ஆதாரங்களை புதியதோர் பொருளை உற்பத்தி செய்வதற்கு பயன்படுத்தலாமா எனக் கருதுகிறார். அவர் தோல் தொழில் நிறுவனங்கள் 10 கொண்ட கூறு ஒன்றைத் தெரிவு செய்து, அவைகளின் முதலீட்டுக்கான சதவீத வருவாய்களைக் காண்கிறார்.

பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து அந்த முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி மற்றும் பரவற்படி இவற்றின் புள்ளி மதிப்பீட்டைக் காண்க.

21.0 25.0 20.0 16.0 12.0 10.0 17.0 18.0 13.0 11.0

தீர்வு :

X	$\overline{X}$	$X-\overline{X}$	$(X-\overline{X})^2$
21.0	16.3	4.7	22.09
25.0	16.3	8.7	75.69
20.0	16.3	3.7	13.69
16.0	16.3	-0.3	0.09
12.0	16.3	-4.3	18.49
10.0	16.3	-6.3	39.69
17.0	16.3	0.7	0.49
18.0	16.3	1.7	2.89
13.0	16.3	-3.3	10.89
11.0	16.3	-5.3	28.09
163.0			212.10

கூறு சராசரி $\overline{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{163}{10} = 16.3$

கூறு பரவற்படி $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum(X-\overline{X})^2$

$= \frac{212.10}{n-1} = 23.5$ (சிறுங்கூறு என்பதால்)

கூறு திட்டவிலக்கம் $= \sqrt{23.5} = 4.85$

எனவே **16.3** மற்றும் **23.5** என்பன முறையே முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி மற்றும் பரவற்படி இவைகளுக்கான புள்ளி மதிப்பீடுகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2

ஒரு பள்ளியின் மாணவர்களிலிருந்து 100 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு கூறு எடுக்கப்படுகிறது. கூறின் சராசரி எடை மற்றும் பரவற்படி முறையே 67.45 கி.கி. மற்றும் 9 கி.கி. ஆகும். அப்பள்ளி மாணவர்களின் சராசரி எடையின் மதிப்பீட்டினை (i) 95% (ii) 99% நிலைகளில் நம்பிக்கை எல்லைகளைக் காண்க.

தீர்வு :

கூறு அளவு $n = 100$

கூறு சராசரி $\overline{X} = 67.45$

கூறு பரவற்படி $s^2 = 9$

கூறு திட்டவிலக்கம் $s = 3$

μ என்பது முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி

(i) μ க்கான 95% நம்பிக்கை எல்லைகள்

$$\overline{X} \pm (Z_C)\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow 67.45 \pm (1.96)\frac{3}{\sqrt{100}}$$

(95% நம்பிக்கை மட்டத்தில் $Z_C = 1.96$)

$$\Rightarrow 67.45 \pm 0.588$$

எனவே μ க்கான 95% நம்பிக்கை இடைவெளி (66.86, 68.04)

(ii) μ க்கான 99% நம்பிக்கை எல்லைகள்

$$\overline{X} \pm (Z_C)\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow 67.45 \pm (2.58)\frac{3}{\sqrt{100}}$$

(99% நம்பிக்கை மட்டத்தில் $Z_C = 2.58$)

$$\Rightarrow 67.45 \pm 0.774$$

எனவே μ க்கான 99% நம்பிக்கை இடைவெளி (66.67, 68.22)

எடுத்துக்காட்டு 3

ஓர் இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட அளவு 50 கொண்ட கூறு ஒன்றின் சராசரி 67.9 ஆகும். கூறு சராசரியின் திட்டப்பிழை $\sqrt{0.7}$ எனத் தெரிய வந்தால், முழுமைத் தொகுதியின் சராசரிக்கான 95% நம்பிக்கை இடைவெளியைக் காண்க.

தீர்வு :

$n = 50$, கூறு சராசரி $\overline{X} = 67.9$

முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி μ–க்கான 95% நம்பிக்கை எல்லைகள் :

$$\overline{X} + (Z_c)\{S.E(\overline{X})\}$$

$$\Rightarrow \quad 67.9 \pm (1.96)(\sqrt{0.7})$$

$$\Rightarrow \quad 67.9 \pm 1.64$$

எனவே μ ஐ மதிப்பீடு செய்வதற்குரிய 95% நம்பிக்கை எல்லைகள் (66.2, 69.54) ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4

ஆப்பிள் குவியலிலிருந்து 500 ஆப்பிள்களைக் கொண்ட ஒரு சமவாய்ப்பு கூறு எடுத்ததில் 45 ஆப்பிள்கள் அழுகியிருந்தன. முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள அழுகிய ஆப்பிள்களுக்குரிய எல்லைகளை 99% நம்பிக்கை மட்டத்தில் காண்க.

தீர்வு :

அழுகிய ஆப்பிள்களின் விகித அளவிற்குரிய நம்பிக்கை எல்லைகளைக் காண்போம்.

கூறு அளவு $n = 500$

கூறிலுள்ள அழுகிய ஆப்பிள்களின் விகித அளவு $= \frac{45}{500} = 0.09$

$p = 0.09$

$\therefore$ கூறிலுள்ள அழுகாத (நல்ல நிலையிலுள்ள) ஆப்பிள்களின் விதிக அளவு

$q = 1\text{-}p = 0.91.$

முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள அழுகிய ஆப்பிள்களின் விகித அளவு P ன் நம்பிக்கை எல்லைகள்

$$p \pm (Z_c)\left(\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

$$\Rightarrow 0.09 \pm (2.58)\sqrt{\frac{(0.09)(0.91)}{500}} \Rightarrow 0.09 \pm 0.033$$

(0.057, 0.123) இதுவே தேவையான இடைவெளி ஆகும்.

எனவே மொத்தக் குவியலில் அழுகிய ஆப்பிள்களின் சதவிகிதம் 5.7% லிருந்து 12.3% வரையில் இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 5

தொலைக்காட்சி நிகழ்ச்சிகளைப் பார்ப்போர்களில் 1000 பேரில், 320 பேர்கள் ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சியைப் பார்த்தனர். தொலைக்காட்சி காண்போர் அனைவரையும் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து அந்த நிகழ்ச்சியைப் பார்த்தவர்களின் எண்ணிக்கைக்கான 95% நம்பிக்கை எல்லைகளைக் காண்க.

தீர்வு :

கூறு அளவு $n = 1000$

கூறு விகித அளவு $p = \frac{x}{n} = \frac{320}{1000}$

$= 0 \cdot 32$

$\therefore \quad q \quad = 1 - p = 0.68$

$$\text{S.E}\,(p) \quad = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

$$= 0.0147$$

முழுமைத் தொகுதியின் விகித அளவு P க்கான 95% நம்பிக்கை எல்லைகள் :

$$p \pm (1.96)\ \text{S.E}\,(p) = 0.32 \pm 0.028$$

$$\Rightarrow \quad 0.292 \ \text{மற்றும்}\ 0.348$$

$\therefore$ இக்குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சியைப் பார்த்தவர்களின் சதவீதம் 29.2% லிருந்து 34.8% வரை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6

பள்ளி மாணவர்கள் 1500 பேர்களிலிருந்து 150 பேர் கொண்ட கூறு ஒன்றினைத் தேர்ந்தெடுத்து வணிகக் கணிதத்திலுள்ள கணக்கு ஒன்றிற்குத் தீர்வு காணும் திறன் அறிய சோதனை செய்ததில் 10 மாணவர்கள் தவறிழைத்தனர். முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள 1500 மாணவர்களில் தவறிழைப்போரின் எண்ணிக்கைக்கான 99% நிலையில் நம்பிக்கை எல்லைகளைக் காண்க.

தீர்வு :

முழுமைத் தொகுதி, $\text{N} = 1500$

கூறு அளவு, $n = 150$

கூறு விகிதம், $p = \dfrac{10}{150} = 0.07$

$q = 1 - p = 0.93$

p-ன் திட்டப்பிழை, $\text{SE}\,(p) = \sqrt{\dfrac{pq}{n}} = 0.02$

முழுமைத் தொகுதி விகிதம் P ன் 99% நம்பிக்கை எல்லைகள்

$$p \pm (\text{Z}_\text{c})\sqrt{\frac{pq}{n}}\sqrt{\frac{\text{N}-n}{\text{N}-1}}$$

$$\Rightarrow \quad 0.07 \pm (2.58)(0.02)\sqrt{\frac{1500-150}{1500-1}}$$

$$\Rightarrow \quad 0.07 \pm 0.048$$

$\therefore$ P ன் நம்பிக்கை இடைவெளி (0.022 , 0.0118) ஆகும்.

$\therefore$ 1500 மாணவர்களில் தவறாக கணக்கினைச் செய்தவர்களின் எண்ணிக்கையானது $0.022 \times 1500 = 33$ மற்றும் $0.0118 \times 1500 = 177$ இவை இரண்டிற்குமிடையே அமையும்.

பயிற்சி 9.1

1) கோளம் ஒன்றின் விட்டத்தினை விஞ்ஞானியின் ஒருவரால் அளவிடப்பட்டு பதிவு செய்யப்படுகிறது. 6.33, 6.37, 6.36, 6.32 மற்றும் 6.37 மி.மீ. என்ற **5** பதிவுகளைக் கொண்டக் கூறு ஒன்றின் (i) சராசரி, (ii) பரவற்படி இவைகளுக்கான புள்ளி மதிப்பீடலைக் காண்க.

2) இயந்திரம் ஒன்றினால் ஒரு வாரத்தில் தயாரிக்கப்பட்ட இரும்பு உருண்டைகளிலிருந்து 200 உருண்டைகளைக் கொண்ட ஒரு கூறு எடுக்கப்படுகிறது. அக்கூறிலுள்ள உருண்டைகளின் சராசரி எடை 0.824 நியூட்டன் மற்றும் திட்டவிலக்கம் 0.042 நியூட்டன்கள் எனில் (i) 95% (ii) 99% ஆகிய நிலைகளில் உருண்டைகளின் சராசரி எடைக்கு நம்பிக்கை எல்லைகளைக் காண்க.

3) ஓர் மாவட்டத்திலுள்ள 200 பாரத ஸ்டேட் வங்கிக் கிளைகளில் 50 வங்கிக் கிளைகளை ஒரு சமவாய்ப்பு கூறாகத் தேர்ந்தெடுத்து ஆய்வு செய்ததில், வருடாந்திர சராசரி இலாபம் ரூ.75 இலட்சம் மற்றும் திட்டவிலக்கம் ரூ.10 இலட்சம் என அறியப்பட்டது. 200 கிளைகளுக்குமான சராசரி இலாபம் அமையும் நம்பிக்கை எல்லைகளை 95% நிலையில் காண்க.

4) 200 மாணவர்கள் கணித பாடத்தில் பெற்ற மதிப்பெண்களிலிருந்து 50 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களை ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறாகத் தெரிவு செய்ததில், சராசரி மதிப்பெண்கள் 75 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 10 என அறியப்பட்டது. முழுமைத் தொகுதியின் சராசரிக்கு நம்பிக்கை எல்லைகளை 95% நிலையில் காண்க.

5) 10000 வாடிக்கையாளர்களின் கணக்குப் பதிவேடுகளில் உள்ள வரவு செலவு பதிவுகளை சரி பார்க்கும் பொருட்டு, 200 வாடிக்கையாளர்களின் கணக்குப் பதிவேடுகளைக் கொண்ட ஒரு கூறினை சோதனை செய்ததில், 35 பதிவுகள் தவறானவை எனக் கண்டறியப்பட்டது. மொத்தப் பதிவேடுகளிலுள்ள தவறான பதிவுகளின் எண்ணிக்கை அமையும் நம்பிக்கை இடைவெளியை 95% நிலையில் காண்க.

6) ஓர் மாவட்டத்திலுள்ள அனைத்து வாக்காளர்களிலிருந்து100 வாக்காளர்களைக் கொண்ட ஒரு கூறினை சமவாய்ப்பு முறையில் தெரிவு செய்து சோதனை மேற்கொண்டதில், 55% பேர்கள் ஒரு குறிப்பிட்ட வேட்பாளரை ஆதரித்தது தெரிய வந்தது. அனைத்து வாக்காளர்களில் அக்குறிப்பிட்ட வேட்பாளரை ஆதரிப்போரின் விகித எண்ணிக்கை அமையும் நம்பிக்கை எல்லைகளை (i) 95%, (ii) 99% ஆகிய நிலைகளில் காண்க.

9.3 எடுகோள் சோதனை (Hypothesis Testing)

ஓர் முழுமைத் தொகுதியின் அளவையை மதிப்பீடல் செய்வதோடு மட்டுமின்றி அளவையைப் பற்றிக் கூற்று உண்மையானதா என சோதிப்பதும் அவசியமாகிறது. அதாவது அளவையைப் பற்றிய எடுகோளை சோதிக்க வேண்டியுள்ளது.

சோதித்தறிந்த பின்னர் முடிவுகளை எடுக்க உதவும் கருத்துக்களை விளக்கும் வகையில் ஓர் உதாரணத்தினைக் காண்போம்.

மின் விளக்குகளை தயாரிக்கும் ஒருவர், அவர் தயாரிக்கும் பல்புகளின் சராசரி ஒளிரும் கால அளவு (life time) 200 மணி நேரம் எனக் கூறுகின்றார். நுகர்வோர் பாதுகாப்பு மன்றம் ஒன்று அவரின் கூற்றினை சோதனை செய்ய விரும்புகின்றது. சராசரி ஒளிரும் கால அளவு 180 மணி நேரத்திற்கு குறைவாகவிருப்பின் தயாரிப்பாளரின் கூற்றினை ஏற்பதில்லை எனவும், அவ்வாறின்றி சராசரி ஒளிரும் கால அளவு அதிகமானால், அவரின் கூற்றினை ஏற்பது எனவும் தீர்மானிக்கிறது. சமவாய்ப்பு முறையில் தெரிவு செய்யப்பட்ட 50 மின் விளக்குகளின் ஒளிரும் கால அளவை தொடர்ச்சியாக சோதனை செய்யப்பட்டது. இந்த உதாரணத்தில், ஒளிரும் கால அளவு 200 மணி நேரம் என்ற கூற்றினை சோதனைக்கான எடுகோளாகக் கொள்வோம்.

எனவே எடுகோள் (Hypothesis) என்பது ஓர் முழுமைத் தொகுதியின் அளவையைப் பற்றியக் கூற்று ஆகும். ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து கூறு ஒன்றினைச் சமவாய்ப்பு முறையில் தெரிவு செய்து, கூறின் அளவைக் கணக்கிடுதலின் மூலம் முழுமைத் தொகையின் அளவையைப் பற்றிய எடுகோள் உண்மையானதா என அறியலாம்.

9.3.1 மறுக்கத்தக்க எடுகோள் மற்றும் மாற்று எடுகோள் (Null Hypothesis and Alternative Hypothesis)

எடுகோள் சோதனையறிதலில், எடுகோளுக்குரிய கூற்று அல்லது முழுமைத் தொகுதி அளவையின் தோராய மதிப்பினை (assumed value) கூறெடுத்தலுக்கு முன்பே குறிப்பிடல் வேண்டும்.

கூறு புள்ளி விவரங்களைக் கொண்டு சோதனை அடிப்படையில் பெறப்படும் முடிவைக் கொண்டு, நிராகரிக்க ஏதுவாகக் கூறெடுத்தலுக்கு முன்பாகவே யூகிக்கப்படும் முழுமைத் தொகுதி அளவையைப் பற்றிய புள்ளியியல் சார்ந்த கூற்றினை **மறுக்கத்தக்க எடுகோள்** (null hypothesis) என்போம்.

கூறு அளவைக்கும், முழுமைத் தொகுதியின் அளவைக்கும் வேறுபாடில்லை என்பதையும், அவ்வாறின்றி வேறுபாடிருப்பின் அது கூறெடுத்தலின் பிழையினால் தான் என்பதையும் மறுக்கத்தக்க எடுகோள் உணர்த்துகின்றது.

மறுக்கத்தக்க எடுகோளுக்கு மாற்றான எடுகோளை **மாற்று எடுகோள்** (alternative hypothesis) என்போம்.

அதாவது மாற்று எடுகோளானது மறுக்கத்தக்க எடுகோளுக்கு நிரப்பு (Complementary) ஆகும்.

மறுக்கத்தக்க எடுகோளை H_0 எனவும் மாற்று எடுகோளை H_1 எனவும் குறிப்போம்.

உதாரணமாக, இராணுவ வீரர்களின் சராசரி உயரம் 173 செ.மீ. எனும் மறுக்கத்தக்க எடுகோளைச் சோதிக்க வேண்டுமானால்,

$H_0 : \mu = 173 = \mu_0$

$H_1 : \mu \neq 173 \neq \mu_0$ எனக் குறிப்போம்.

9.3.2 பிழைகளின் வகைகள் (Types of Errors)

ஒரு எடுகோளைச் சோதிக்க முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து கூறு ஒன்றினைக் கருதுவோம். அதிலிருந்து பெறப்படும் முடிவிற்கேற்ப, அந்த எடுகோளை ஏற்கவோ அல்லது

நிராகரிக்கவோ செய்வோம். அப்பொழுது இரு வகையான பிழைகள் நிகழலாம். மறுக்கத்தக்க எடுகோள் உண்மையாக இருக்கும் பொழுது அது நிராகரிக்கப்படலாம். இத்தகைய பிழையை, **முதல்வகைப் பிழை (Type I error)** என்போம். முதல் வகை பிழை ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவினை α எனக் குறிப்போம்.

மாறாக, மறுக்கத்தக்க எடுகோள் உண்மையற்றதாக (false) இருக்கும் பொழுது, அதனை உண்மை என ஏற்றுக் கொள்வதால் பிழை நிகழலாம். இப்பிழையை **இரண்டாம் வகைப் பிழை (Type II error)** பிழை என்போம். இரண்டாம் வகைப் பிழை ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவினை β எனக் குறிப்போம்.

பிழைகள் ஏற்படுதலை பின்வரும் அட்டவணையில் விளக்கலாம்.

உண்மையான	கூறெடுத்தலால் கிடைக்கும் முடிவு	பிழைகள் மற்றும் அவைகளின் நிகழ்தகவுகள்
H_0 ஆனது உண்மை	H_0 ஐ நிராகரித்தல்	முதல் வகை பிழை ; $\alpha = P\{H_1 / H_0\}$
H_0 ஆனது தவறு	H_0 ஐ ஏற்றுக் கொள்ளுதல்	இரண்டாம் வகை பிழை ; $\beta = P\{H_0 / H_1\}$

9.3.3 நிராகரிப்புப் பகுதி அல்லது தீர்வு காட்டும் பகுதி (Critical region) மற்றும் முக்கியத்துவ மட்டம் (level of significance)

கூறுவெளியில் எப்பகுதியில் மறுக்கத்தக்க எடுகோள் நிராகரிக்கப்படுகின்றதோ, அப்பகுதியை நிராகரிப்புப் பகுதி (critical region) என்போம்.

முழுமைத் தொகுதியின் அளவையைப் பற்றிய மறுக்கத்தக்க மற்றும் மாற்று எடுகோள்களை அமைத்த பிறகு, முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து கூறு ஒன்றினை எடுப்போம். கூறின் அளவையின் மதிப்பினைக் கணக்கிட்டு அம்மதிப்பினை, கருத்தில் கொள்ளப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியின் அளவையோடு ஒப்பிடுவோம்.

பின்னர், மறுக்கத்தக்க எடுகோளை ஏற்க அல்லது நிராகரிக்க வேண்டி, சில விதிகளை (criteria) தீர்மானிக்க வேண்டும். இந்த விதிகள் மதிப்புகளின் வீச்சாக (a, b) போன்ற இடைவெளி வாயிலாக குறிக்கப்படுகின்றது. கூறு அளவையின் மதிப்பு (a, b) எனும் இடைவெளிக்கு வெளியே அமைந்தால், மறுக்கத்தக்க எடுகோள் நிராகரிக்கப்படும்.

கூறு அளவையின் மதிப்பானது இடைவெளி (a, b) க்கு உள்ளே அமைந்தால் H_0 ஏற்கப்படுகிறது. அதாவது மறுக்கத்தக்க எடுகோள் ஏற்கப்படுகிறது. இத்தகைய கட்டுப்பாடுகளை முக்கியத்துவ மட்டத்திற்கேற்ப (Level of significance) முடிவு செய்ய வேண்டும்.

5% முக்கியத்துவ நிலை ஆனது கூறுகளிலிருந்து பெறப்படும் அளவையின் மதிப்புகளில் 5% மதிப்புகள் (a, b) இடைவெளிக்கு வெளியேயும் 95% மதிப்புகள் (a, b) இடைவெளிக்கு உள்ளேயும் அமைகின்றன என்பதைக் குறிக்கும்.

எனவே முக்கியத்துவ நிலை ஆனது முதல்வகைப் பிழைக்கான நிகழ்தகவினைக் குறிக்கும். வழக்கமாக 5% மற்றும் 1% நிலைகளை, முக்கியத்துவ நிலைகளாக எடுகோள் சோதனையில் எடுத்துக் கொள்வோம்.

எடுகோள் சோதனையில் உயர் முக்கியத்துவ நிலையை எடுத்துக் கொள்வது, மறுக்கத்தக்க எடுகோள் உண்மையாக இருக்கும் பொழுது நிராகரிப்பதற்கான நிகழ்தகவு அதிகமாகும் என்பதைக் குறிக்கும்.

9.3.4 முக்கியத்துவச் சோதனை (Test of significance)

முக்கியத்துவச் சோதனைகளை (i) பெருங்கூறுகளுக்கான சோதனை (ii) சிறுங் கூறுகளுக்கான சோதனை என இரு வகைகளாகப் பிரிக்கலாம்.

கூறின் அளவு பெரியதாக ($n > 30$), இருக்கும் பொழுது, ஈருறுப்பு, பாய்சன் போன்ற பரவல்கள் இயல்நிலை பரவலுக்குத் தோராயமாக்கப்படுகின்றன. எனவே இயல்நிலைப் பரவலை எடுகோள் சோதனைக்குப் பயன்படுத்த இயலும்.

திட்ட இயல்நிலைப் பரவல் மாறி Z ன் 5% நிலையில் நிராகரிப்பு பகுதி $|Z| \geq 1.96$ மற்றும் ஏற்புப் பகுதி $|Z| < 1.96$ ஆகும். மேலும் Z க்கு 1% நிலையில் நிராகரிப்புப் பகுதி $|Z| \geq 2.58$ மற்றும் ஏற்புப் பகுதி $|Z| < 2.58$ ஆகும்.

எடுகோள் சோதனைக்கு மேற்கொள்ள வேண்டிய 5 படிகள் :

(i) மறுக்கத்தக்க எடுகோள் மற்றும் மாற்று எடுகோளை அமைத்தல்.

(ii) ஏற்புடைய முக்கியத்துவ நிலை (level of significance) அமைத்தல்.

(iii) புள்ளியியல் சோதனைக்கான கட்டுப்பாடுகளைக் கொண்டு சோதனை அளவையை (testing statistic) தீர்மானித்தல்.

(iv) மறுக்கத்தக்க எடுகோளுக்குரிய நிராகரிப்புப் பகுதியை அமைத்தல்.

(v) முடிவு காணல்.

எடுத்துக்காட்டு 7

தொழிற்சாலை ஒன்றினால் தயாரிக்கப்பட்ட 50 மின்விளக்குகளின் சராசரி ஒளிரும் கால அளவு (life time) 825 மணி நேரம் மற்றும் திட்டவிலக்கம் 110 மணி நேரம் என மதிப்பிடப்படுகிறது. தொழிற்சாலையில் தயாரிக்கப்படும் அனைத்து மின் விளக்குகளுக்கும் சராசரி ஒளிரும் கால அளவு μ எனில் μ = 900 மணி நேரம் என்ற எடுகோளை 5% முக்கியத்துவ மட்டத்தில் சோதிக்க.

தீர்வு :

மறுக்கத்தக்க எடுகோள் $H_0 : \mu = 900$

மாற்று எடுகோள் $H_1 : \mu \neq 900$

சோதனை அளவை Z ஆனது திட்ட இயல்நிலை மாறியாகும்.

H_0 –க்கு $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ இங்கு கூறு சராசரி $\overline{X}$ ஆகும் σ ஆனது முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம்.

$$= \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$ பெறுங்கூறுக்கு $\sigma = s$ எனக் கருதலாம்

$$= \frac{825 - 900}{\frac{110}{\sqrt{50}}} = -4.82$$

$$\therefore \quad |Z| = 4.82$$

முக்கியத்துவ மட்டம், $\alpha = 0.05$ அல்லது 5%

நிராகரிப்புப் பகுதி $|Z| \geq 1.96$

ஏற்புப் பகுதி $|Z| < 1.96$

கணக்கிடப்பட்ட Z ன் மதிப்பு 1.96 ஐ விட பெரிய எண்ணாகும்.

முடிவு : கணக்கிடப்பட்ட Z ன் மதிப்பு 4.82 ஆனது நிராகரிப்புப் பகுதியில் உள்ளது. எனவே மறுக்கத்தக்க எடுகோள் நிராகரிக்கப்படுகிறது.

$\therefore$ ஆகவே முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள மின் விளக்குகளின் சராசரி ஒளிரும் கால அளவு **900** மணி நேரம் என்ற கூற்றினை ஏற்க இயலாது.

எடுத்துக்காட்டு 8

ஓர் நிறுவனம் கார் டயர்களை தயாரித்து, விற்பனை செய்கிறது. டயர்களின் ஆயுட்காலம் சராசரி 50000 கி.மீ. மற்றும் திட்ட விலக்கம் 2000 கி.மீ. எனக் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலாக உள்ளது. டயர்களை புதிய முறையில் தயாரித்தால் விற்பனை பெருக வாய்ப்புள்ளதாக அந்நிறுவனம் கருதுகிறது. சோதனை முறையில் 64 புதிய டயர்களின் சராசரி ஆயுட்காலம் 51250 கி.மீ. எனக் கண்டறியப்படுகிறது. கூறு சராசரியானது முழுமைத் தொகுதி சராசரியிலிருந்து குறிப்பிடத்தக்க வகையில் மாறுபட்டுள்ளதா என 5% நிலையில் சோதிக்க.

தீர்வு :

கூறு அளவு, $n = 64$

கூறு சராசரி $\overline{X} = 51250$

H_0 : முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி $\mu = 50000$

H_1 : $\mu \neq 50000$

H_0 க்கு சோதனை அளவை $Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

$$Z = \frac{51250 - 50000}{\frac{2000}{\sqrt{64}}} = 5$$

கணக்கிடப்பட்ட Z –ன் மதிப்பு **1.96** ஐ விட பெரிய எண்ணாக இருப்பதால் Z–ன் மதிப்பு முக்கியமாகிறது.

$\therefore$ $H_0 : \mu = 50000$ நிராகரிக்கப்படுகிறது.

அதாவது கூறு சராசரியானது முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியிலிருந்து குறிப்பிடத்தக்க அளவில் மாறுபடுகிறது.

$\therefore$ நிறுவனத்தின் கூற்றான புதிய தயாரிப்புகள் தற்போதைய தயாரிப்புகளை விட சிறந்தது என்பதை ஏற்றுக் கொள்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 9

400 மாணவர்களைக் கொண்ட கூறிலிருந்து, அவர்களின் சராசரி உயரம் 171.38 செ.மீ. என அறியப்பட்டது. சராசரி உயரம் 171.17 செ.மீ. மற்றும் திட்டவிலக்கம் 3.3 செ.மீ எனக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து அக்கூறு எடுக்கப்பட்டதாகக் கருதலாமா என ஆராய்க. (5% முக்கியத்துவ மட்டத்தில் சோதிக்க)

தீர்வு :

கூறின் அளவு, $n = 400$

கூறு சராசரி $\overline{X} = 171.38$

முழுமைத் தொகுதி சராசரி $\mu = 171.17$

கூறின் திட்ட விலக்கம் = s.

முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம், $\sigma = 3.3$

$H_0 : \mu = 171.17$ எனக் கொள்வோம்.

சோதனை அளவை $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

$$= \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{171.38 - 171.17}{\frac{3.3}{\sqrt{400}}} = 1.273$$

Since $|Z| = 1.273 < 1.96$

எனவே 5% முக்கியத்துவ நிலையில் மறுக்கத்தக்க எடுகோளை ஏற்றுக் கொள்கிறோம்.

ஆகவே சராசரி உயரம் 171.17 செ.மீ உடைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து 400 உறுப்புகளைக் கொண்ட கொடுக்கப்பட்டக் கூறு எடுக்கப்பட்டதாகக் கருதலாம்.

பயிற்சி 9.2

1) 1600 சிறுவர்களைக் கொண்ட கூறு ஒன்றிலிருந்து அவர்களின் சராசரி நுண்ணறிவு ஈவு (I.Q) 99 ஆகும். சராசரி நுண்ணறிவு ஈவு 100 மற்றும் திட்ட விலக்கம் 15 எனவும் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து அக்கூறு எடுக்கப்பட்டதா என சோதிக்கவும். (5% முக்கியத்துவ மட்டத்தில்)

2) ஒரு குறிப்பிட்ட கிராமத்தில் உள்ளவர்களின் சராசரி வருமானம் ரூ. 6000 மற்றும் பரவற்படி ரூ. 32400 ஆகும். சராசரி வருமானம் ரூ. 5950 எனக் கொண்ட 64 நபர்கள் அடங்கிய கூறு ஒன்று அந்த முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்டதா என 5% மற்றும் 1% முக்கியத்துவ நிலைகளில் சோதிக்கவும்.

3) புதிய போனஸ் திட்டத்தை 60% தொழிலாளர்கள் ஆதரிக்கின்றனர் என்ற நிர்வாகத்தின் கூற்றினை சோதித்தறியும் பொருட்டு 150 பேர்களடங்கிய சமவாய்ப்புக் கூறு ஒன்றினைத் தெரிவு செய்து, அவர்களின் கருத்துக் கேட்கப்பட்டது. 150 பேர்களில் 55 தொழிலாளர்கள் மட்டுமே புதிய போனஸ் திட்டத்தை ஆதரிப்பது தெரிய வந்தது எனில் நிர்வாகத்தின் கூற்றை 1% முக்கியத்துவ மட்டத்தில் சோதிக்க.

பயிற்சி 9.3

ஏற்புடைய விடையைத் தெரிவு செய்க.

1) கூறெடுப்பு முறை எதனடிப்படையில் செயல்படுகிறது ?

(a) கூறு அளவு (b) கூறு அலகு

(c) புள்ளியியல் முறைமை (d) முழுமைத் தொகுதி அளவு

2) மறுக்கத்தக்க எடுகோளுக்கு நிரப்பியாக அமைவது

(a) முதன்மை எடுகோள் (b) புள்ளியியல் கூற்று

(c) மாற்று எடுகோள் (d) நம்பிக்கை எடுகோள்

3) Z –க்கு 1% நிலையில் நிராகரிப்புப் பகுதி

(a) $|Z| \leq 1.96$ (b) $|Z| \geq 2.58$ (c) $|Z| < 1.96$ (d) $|Z| > 2.58$

4) முழுமைத் தொகுதி அளவையை மதிப்பீடு செய்யும் பொழுது 95% நம்பக இடைவெளியைப் பெற பயன்படுத்தப்படும் Z–ன் மதிப்பு

(a) 1.28 (b) 1.65 (c) 1.96 (d) 2.58

5) மறுக்கத்தக்க எடுகோள் உண்மையாக இருந்து, நிராகரிக்கப்படுவதற்குரிய நிகழ்தகவு

(a) முதல்வகைப் பிழை (b) இரண்டாம் வகைப்பிழை

(c) கூறெடுப்புப் பிழை (d) திட்டப் பிழை

6) பின்வருவனவற்றுள் எது உண்மை ?

(a) புள்ளி மதிப்பீடு ஆனது, பல மதிப்புக்களைக் கொண்ட ஒரு வீச்சாக தரப்படுகிறது.

(b) கூறு அளவையை மதிப்பிடவே கூறெடுத்தல் செய்யப்படுகிறது.

(c) முழுமைத் தொகுதி அளவையை மதிப்பிட கூறெடுப்பு செய்யப்படுகிறது.

(d) முடிவுறா தொகுதியில் கூறெடுத்தல் இயலாது.

7) 10 நுகர்வோர்களிலிருந்து 2 நுகர்வோர்களைத் தெரிவு செய்யும் வழிகளின் எண்ணிக்கை

(a) 90 (b) 60 (c) 45 (d) 50

பயன்பாட்டுப் புள்ளியியல் 10

10.1 நேரிய திட்டமிடல் (Linear Programming)

தொழிலாளர்கள், மூலப்பொருள்கள், இயந்திரங்கள், மூலதனம் போன்ற ஓர் அளவுக்கு உட்பட்ட வள ஆதாரங்களைக் கொண்டு பொருள்களின் உற்பத்தி, சேவைகள், குறிப்பிட்ட வேலைகள், திட்ட செயல்பாடுகளுக்கு அவற்றின் ஆதாய முக்கியத்துவ அடிப்படையில் அதிகப்படியான ஆதாயம் பெறும் வகையில் பகிர்ந்தளிக்கும் பொதுவான உத்தி **நேரிய திட்டமிடல்** ஆகும். திட்டமிடும் காலத்தில் ஆதாரங்கள் கிடைப்பது அரிதாக இருப்பதை ஓர் அளவுக்கு உட்பட்ட ஆதாரங்கள் என்று குறிப்பிடுகிறோம். ஆதாய முக்கியத்துவ அடிப்படை என்பது செயல் ஆக்கம், முதலீட்டின் பலன், பயன்பாடு, நேரம், தூரம் போன்றவற்றைக் குறிக்கும். நேரியல் என்ற சொல் ஓர் வடிவமைப்பில் உள்ள இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளின் சரிசமவீத தொடர்பைக் குறிக்கும். பல்வேறு செயல்திட்டங்களிலிருந்து ஒன்றைத் தெரிவு செய்யும் முறையைத் திட்டமிடல் என்கிறோம். மேலாண்மை செயல்பாடுகளில் சிறந்த தீர்மானங்கள் எடுக்க நேரியல் திட்டமிடல் பெரிதும் பயனுள்ள உத்தியாகும்.

10.1.1 நேரிய திட்டமிடல் கணக்கின் (LPP) கட்டமைப்பு

“நேரிய திட்டமிடல்’ என்ற வடிவமைப்பு கீழ்வரும் மூன்று அடிப்படைக் கூறுகளை கொண்டுள்ளது :

(i) தேவையான தீர்மான மாறிகள் (Decision variables)

(ii) உகம (பெரும அல்லது சிறும) மதிப்புப் பெறும் குறிக்கோள் (objective)

(iii) நிறைவு செய்யப்பட வேண்டிய கட்டுப்பாடுகள் (constraints)

10.1.2 நேரிய திட்டமிடல் கணக்கை உருவாக்குதல்

நேரிய திட்டமிடல் கணக்கை ஒரு கணித மாதிரியாக அமைப்பதற்கு கீழ்வரும் வழிமுறைகளைக் கையாளுவோம்.

படி 1 : தேவையான முக்கிய தீர்மானங்கள் கிடைத்திட கொடுக்கப்பட்ட சூழ்நிலையை ஆய்ந்தறிய வேண்டும்.

படி 2 : அதிலுள்ள மாறிகளை கண்டறிந்து அவைகளை x_j (j = 1, 2 ...) எனக் குறித்தல் வேண்டும்.

படி 3 : கணக்கியல் வாயிலாக ஏற்புடையத் தீர்வுகளைக் குறிக்க, பொதுவாக இந்த மாறிகளை $x_j > 0$ (எல்லா j க்களுக்கும்) என குறிப்பது வழக்கம்.

படி 4 : கணக்கில் உள்ள கட்டுப்பாடுகளுக்கு ஏற்றாற்போல் தீர்மான மாறிகளைக் கொண்டு அசமன்பாடுகளை அல்லது சமன்பாடுகளை அமைக்க வேண்டும்.

படி 5 : குறிக்கோள் சார்பை இனம் கண்டு அதை தீர்மான மாறிகளின் நேரியச் சார்பாக எழுத வேண்டும்.

10.1.3 நேரிய திட்டமிடலின் பயன்பாடுகள்

நேரிய திட்டமிடல் பல துறைகளில் பயன்படுகிறது. அவைகளில் சிலவற்றைக் காண்போம்.

(i) **போக்குவரத்து :** உற்பத்தி செய்யப்பட்ட இடத்திலிருந்து உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருளை தேவையான வெவ்வேறு இடங்களுக்கு பகிர்ந்து அளிப்பதற்காக திட்டம் வகுத்தல்.

(ii) **ஒப்படைப்பு :** அதிகபட்ச அளவு திறன் வெளிப்படுமாறு, நபர்களிடையே வேலையைப் பகிர்தல்.

(iii) **விற்பனைச் செலவு :** மொத்தச் செலவை சிறுமமாக இருக்கும் வகையில் பல்வேறு இடங்களுக்கு செல்ல வேண்டிய விற்பனையாளருக்கு மீச்சிறு தொலைவு கொண்ட வழித்தடத்தைக் காணல்.

(iv) **முதலீடு :** இடர்பாடுகளைக் குறைத்து ஆதாயத்தை அதிகபடுத்த மூலதனத்தை வெவ்வேறு செயல்பாடுகளுக்குப் பகிர்தல்.

(v) **விவசாயம் :** உற்பத்தியின் அளவை பெருமமாக்க நிலங்களை வெவ்வேறு பகுதிகளாகப் பிரித்து கொடுத்தல்.

10.1.4 சில முக்கிய வரையறைகள்

ஏற்புடைய தீர்வு (feasible solution) என்பது கணக்கில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள எல்லா கட்டுப்பாடுகளையும் நிறைவு செய்யும் தீர்வாகும்.

ஏற்புடைய தீர்வுகளைக் கொண்ட பகுதியே **ஏற்புடைய பகுதியாகும்.**

குறிக்கோள் சார்பின் உகம (பெரும அல்லது சிறும) மதிப்பைத் தரும் ஏற்புடைய தீர்வு **உகமத் தீர்வு** என்றழைக்கப்படும்.

குறிப்பு

உகமத் தீர்வு தனித் தன்மை உடையது அல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 1

மரப்பொருட்கள் தயாரிக்கும் ஒரு நிறுவனம் தங்களிடம் உள்ள ஒரு வகை மரத்தாலான 400 அடி பலகையையும் மற்றும் 450 மணி மனித உழைப்பு நேரத்தையும் கொண்டு நாற்காலிகள் மற்றும் மேசைகளைத் தயாரிக்க திட்டமிடுகிறது. ஒரு நாற்காலி செய்வதற்கு 5 அடி பலகையும் 10 மணி மனித உழைப்பு நேரம் தேவை மற்றும் அதன் மூலம் கிடைக்கும் இலாபம் ரூ.45, ஒரு மேசை செய்ய 20 அடி பலகையும் 15 மணி மனித நேரம் தேவை மற்றும் அதன் மூலம் கிடைக்கும் இலாபம் ரூ.80 என்பதை அந்த நிறுவனம் அறிகிறது. தன்னிடம் உள்ள சரக்கைக் கொண்டும் கட்டுப்பாடுகளைக் கொண்டும் பெரும இலாபம் கிடைக்க எத்தனை நாற்காலிகள், மேசைகளை உற்பத்தி செய்ய வேண்டும் ? மேற்கண்டவைகளை நேரிய திட்டமிடல் முறையில் வடிவாக்குக.

தீர்வு :

கணிதமுறை வடிவாக்கம் :

கணக்கில் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் சுருக்கமாகக் கீழே கொடுக்கப்படுகின்றன.

உற்பத்தி	கச்சா பொருட்கள் (ஓர் அலகுக்கு)	உழைப்பு (ஓர் அலகுக்கு)	இலாபம் (ஓர் அலகுக்கு)
நாற்காலி	5	10	ரூ. 45
மேசை	20	15	ரூ. 80
மொத்த இருப்பு	400	450	

படி 1 : நாற்காலிகளின் உற்பத்தி எண்ணிக்கையையும் மேசையின் உற்பத்தி எண்ணிக்கையையும் தீர்மானிக்க வேண்டும்.

படி 2 : x_1 , x_2 முறையே நாற்காலிகளின் எண்ணிக்கையையும், மேசைகளின் எண்ணிக்கையையும் குறிக்கட்டும்.

படி 3 : குறை எண்களில் உற்பத்தி செய்ய முடியாது ஆகையால் $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

படி 4 : கச்சாப் பொருட்கள், உழைப்பு இவற்றிற்கு ஏற்றார் போல் கட்டுப்பாடுகள் ஓர் எல்லைக்குள் அமையும். ஒரு நாற்காலிக்கு 5 அடி மர பலகையும், ஒரு மேசைக்கு 20 அடி மர பலகையும் தேவைப்படுகிறது. x_1, x_2 என்பன நாற்காலி மற்றும் மேசையின் அளவுகள் எனில் மொத்த கச்சாப் பொருட்களின் தேவையானது $5x_1 + 20x_2$, இது கை இருப்பு கச்சா பொருளான 400 அடி மரப்பலகைக்கு அதிகமாகாமல் இருக்க வேண்டும். எனவே கச்சாப் பொருளின் கட்டுப்பாடானது :

$$5x_1 + 20x_2 \leq 400$$

இதே போல், உழைப்பின் கட்டுப்பாடானது :

$$10x_1 + 15x_2 \leq 450$$

படி 5 : குறிக்கோளானது, அந்த நிறுவனம் நாற்காலி மற்றும் மேசை இவைகளை விற்பதால் கிடைக்கும் இலாபத்தை பெரும மதிப்பை அடையச் செய்வதாகும். இதை நேரிய சார்பாக எழுத கிடைப்பது :

$$Z = 45x_1 + 80x_2.$$

இந்த நேரிய திட்டமிடல் கணக்கை நாம் கணித வடிவில் அமைப்போம்.

$$5x_1 + 20x_2 \leq 400$$

$$10x_1 + 15x_2 \leq 450$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க, குறிக்கோள் சார்பு

$Z = 45x_1 + 80x_2$ –ன் பெரும மதிப்பைக் காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 2

ஒரு நிறுவனம் A மற்றும் B என்ற இரு அளவில் தலைவலி மாத்திரைகளை தயார் செய்கிறது. A –இல் 2 மில்லிகிராம் ஆஸ்பிரினும் 5 மில்லிகிராம் பை–கார்பனேட்டும் மற்றும் 1 மில்லி கிராம் கொடைனும் உள்ளது. B –இல் 1 மில்லிகிராம் ஆஸ்பிரினும் 8 மில்லிகிராம் பை–கார்பனேட் மற்றும் 6 மில்லி கிராம் கொடைனும் உள்ளது. உடனடி வலி நிவாரணத்திற்கு குறைந்த பட்சம் 12 மில்லிகிராம் ஆஸ்பிரினும், 74 மில்லிகிராம் பைகார்பனேட்டும் மற்றும் 24 மில்லி கிராம் கொடைனும் தேவை என உணரப்படுகிறது. ஒரு நோயாளி உடனடி நிவாரணம் பெற குறைந்தது எத்தனை மாத்திரைகளை உட்கொள்ள வேண்டும் என்பதைத் தீர்மானிக்க. இந்த கணக்கை நேரிய திட்டமிடல் முறையில் எழுதுக.

தீர்வு :

விவரங்கள் பின்வருமாறு சுருக்கி எழுதப்படுகின்றது.

தலைவலி மாத்திரைகள்	ஒரு மாத்திரைக்கு ஆஸ்பிரின்	பைகார்பனேட்	கொடைன்
A அளவு	2	5	1
B அளவு	1	8	6
குறைந்தபட்ச தேவை	12	74	24

தீர்மான மாறிகள் :

A அளவு மாத்திரையின் எண்ணிக்கை x_1

B அளவு மாத்திரையின் எண்ணிக்கை x_2

நேரிய திட்டமிடல் கணக்கானது கீழ்க்கண்ட கணித வடிவத்தைப் பெறுகிறது.

$$2x_1 + x_2 \geq 12$$

$$5x_1 + 8x_2 \geq 74$$

$$x_1 + 6x_2 \geq 24$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க, குறிக்கோள் சார்பு

$Z = x_1 + x_2$ –ன் பெரும மதிப்பைக் காண்க.

10.1.5 வரைபடம் மூலம் தீர்வு காணல்

இரு மாறிகளைக் கொண்ட நேரிய திட்டமிடல் கணக்கிற்கு வரைபடம் மூலம் எளிதாகத் தீர்வு காணலாம். வரைபடம் மூலம் தீர்வு காணும் முறை :

படி 1 : கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணக்கை கணித முறையில் கூறுதல்.

படி 2 : கணக்கில் உள்ள கட்டுப்பாடுகளை வரைபடமாக்குதல் மற்றும் ஏற்புடைய

பகுதியை (தீர்வுப் பகுதி) தெரிந்து கொள்ளுதல். கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணக்கின் கட்டுப்பாடுகளைக் குறிக்கும் கோடுகள் வெட்டிக் கொள்வதால் உண்டாகும் பொதுவான பகுதி தீர்வுப் பகுதியாகும். நமக்கு தேவையான தீர்வுப் பகுதி முதல் கால் பகுதியிலேயே $(x_1, x_2 \geq 0)$ அமையும் என அறியலாம்.

படி 3 : தீர்வுப் பகுதியின் மூலைப் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைவு தூரங்களை நிர்ணயம் செய்க.

படி 4 : படி 3–ல் கண்டறிந்த ஒவ்வொரு மூலைப் புள்ளியிலும் குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பைக் காண்க.

படி 5 : குறிக்கோள் சார்பின் இறுதித் தீர்வை (பெருமம் அல்லது சிறுமம்) நிர்ணயம் செய்யும் மூ லைப் புள்ளியைக் காண்க. அந்த புள்ளியில் தான் ஏற்புடைய தீர்வு கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 3

ஒரு நிறுவனம் P_1 மற்றும் P_2 என்ற இரு பொருட்களைத் தயாரிக்கிறது. இந்த இரண்டு பொருட்களை தயாரிக்க அந்த நிறுவனத்திடம் A, B என்ற இரண்டு இயந்திரங்கள் உள்ளன. P_1 என்ற பொருளை தயாரிக்க A இயந்திரம் 2 மணி நேரத்தையும் B இயந்திரம் 4 மணி நேரத்தையும் எடுத்துக் கொள்கிறது. P_2 என்ற பொருளை தயாரிக்க A இயந்திரம் 5 மணி நேரத்தையும் B இயந்திரம் 2 மணி நேரத்தையும் எடுத்துக் கொள்கிறது. P_1 பொருளை ஓர் அலகு விற்பதால் இலாபம் ரூ. 3 மற்றும் P_2 பொருளை ஓர் அலகு விற்பதால் இலாபம் ரூ. 4 கிடைக்கும் என எதிர்பார்க்கப்படுகிறது. A, B இயந்திரங்கள் முறையே 24 மணி நேரம் மற்றும் 16 மணி நேரம் செயல்பட்டால், வரைபடத்தின் மூலம் பெரும இலாபம் கிடைக்க ஒவ்வொரு பொருளின் வராந்திர உற்பத்தியின் அளவைக் காண்க.

தீர்வு :

கணக்கில் உள்ள விவரங்கள் சுருக்கி கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

பொருட்கள்	நேரம்		இலாபம்
	இயந்திரம் A	இயந்திரம் B	(ஓர் அலகுக்கு)
P_1	2	4	3
P_2	5	2	4
பெரும நேரம் / வாரம்	120	80	

x_1, x_2 முறையே உற்பத்தியான P_1 மற்றும் P_2 –ன் அலகுகளின் எண்ணிக்கை என்க.

கணித முறை வடிவாக்கமானது :

$$2x_1 + 5x_2 \leq 120$$
$$4x_1 + 2x_2 \leq 80$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

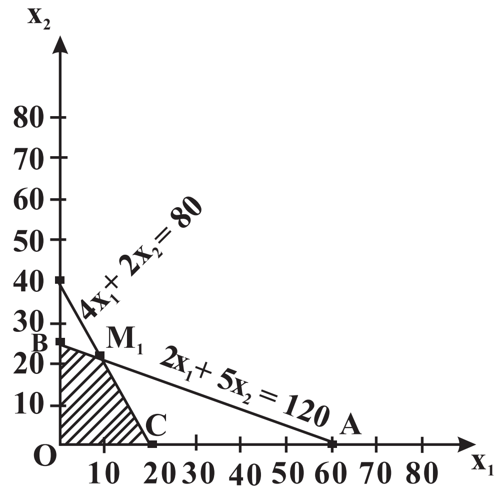
என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க குறிக்கோள் சார்பு

$Z = 3x_1 + 4x_2$ –ன் பெரும மதிப்பைக் காண்க.

வரைபடத்தின் மூலம் தீர்வு

$2x_1 + 5x_2 = 120$ மற்றும் $4x_1 + 2x_2 = 80$ என்ற சமன்பாடுகளைக் கருதுக. நேர்க்கோடு $2x_1 + 5x_2 = 120$ –ல் (0, 24) மற்றும் (60, 0) என்பன இரு புள்ளிகள். இவ்விரு புள்ளிகளையும் இணைக்க $2x_1 + 5x_2 = 120$ என்ற கோட்டினைப் பெறலாம். இதே போன்று $4x_1 + 2x_2 = 80$ என்ற நேர்கோட்டை (20, 0) மற்றும் (0, 40) ஆகியவற்றை இணைப்பதன் மூலம் பெறலாம். (படம் 10.1)

வரைபடத்தின் மூலம் எல்லா கட்டுப்பாடுகளும் உருவமைக்கப்படுகிறது.



படம் 10.1

தீர்வு பகுதி என்றழைக்கப்படும், கட்டுப்பாடுகள் அனைத்தும் உள்ளடக்கிய பரப்பு வரைபடத்தில் (படம் 10.1) OCM_1B பகுதியாக நிழலிட்டு காட்டப்பட்டுள்ளது.

குறிக்கோள் சார்பின் உகம மதிப்பானது தீர்வு பகுதியில் உள்ள ஒரு மூலையில் அமைகிறது.

மூலைப்புள்ளிகள் முறையே

O = (0, 0), C = (20, 0), M_1 = (10, 20), B = (0, 24)

Z–ன் மதிப்பை மூலைப்புள்ளிகளில் காண்போம் :

மூலைப்புள்ளி	(x_1, x_2)	$Z = 3x_1 + 4x_2$
O	(0, 0)	0
C	(20, 0)	60
M_1	(10, 20)	110
B	(0, 24)	96

குறிக்கோள் சார்பு அடையும் பெரும மதிப்பு புள்ளியே உகம தீர்வுப் புள்ளி ஆகும். எனவே உகம தீர்வுப் பெறும் புள்ளி M_1 ஆகும். அதாவது $x_1 = 10$ மற்றும் $x_2 = 20$.

P_1 மற்றும் P_2 முறையே வாரத்திற்கு 10 அலகுகள் மற்றும் 20 அலகுகள் உற்பத்தி செய்து பெரும இலாபம் ரூ.110–யை பெறலாம்.

குறிப்பு

குறிக்கோள் சார்பின் மூலைப்புள்ளி ஒன்றிலிருந்து கிடைக்கும் பெரும மதிப்பே, பெருமதிப்பைக் காணல் என்ற கணக்கின் உகம தீர்வாக அமையும் குறிக்கோள் சார்பின் மூலைப்புள்ளி ஒன்றிலிருந்து கிடைக்கும் சிறும மதிப்பே, சிறும மதிப்பைக் காணல் என்ற கணக்கின் உகம தீர்வாக அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 4

வரைபடம் மூலம் தீர்க்க :

$$36x_1 + 6x_2 \geq 108$$

$$3x_1 + 12x_2 \geq 36$$

$$20x_1 + 10x_2 \geq 100$$

$$x_1 , x_2 > 0$$

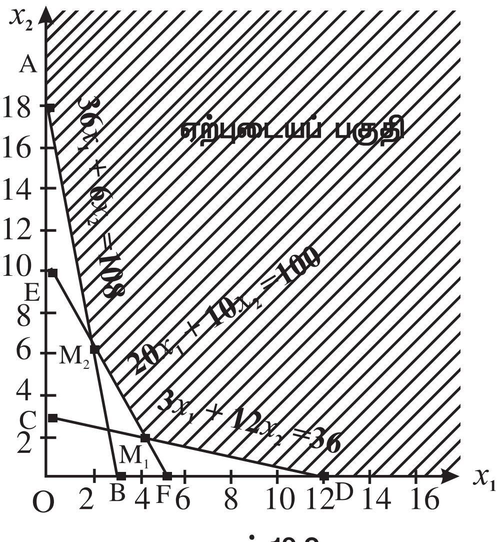
என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கிணங்க,

$Z = 20x_1 + 40x_2$ –ன் சிறும மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

வரைபடத்தில் தீர்வுப் பகுதியைக் குறித்தல்

A(0, 18) மற்றும் B(3, 0) ; C(0, 3) மற்றும் D(12, 0) ; E(0, 10) மற்றும் F(5, 0) என்பன முறையே $36x_1 + 6x_2 = 108$, $3x_1 + 12x_2 = 36$ மற்றும் $20x_1 + 10x_2 = 100$ என்ற கோடுகளைத் தீர்மானிக்கிறது. (படம் 10.2)



படம் 10.2

கணக்கில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள கட்டுப்பாடுகளுக்குக்கிணங்க வரைபடமானது வரையப்பட்டுள்ளது. நிழலிட்ட பகுதியே தீர்வுப் பகுதி நிழலிட்ட பகுதியில் உள்ள எந்த ஒரு புள்ளியும் கொடுக்கப்பட்ட கட்டுப்பாடுகளை நிறைவேற்றும். தீர்வுப் பகுதியின் மூலைப் புள்ளிகள்

முறையே, A = (0, 18), M_2 = (2, 6), M_1 = (4, 2), D = (12, 0)

இந்த புள்ளிகளில் Z –ன் மதிப்பைக் காண்போம்.

மூலைப்புள்ளி	(x_1, x_2)	$z = 20x_1 + 40x_2$
A	(0, 18)	720
M_1	(4, 2)	160
M_2	(2, 6)	280
D	(12, 0)	240

குறிக்கோள் சார்பின் சிறும மதிப்பானது எந்த புள்ளியில் கிடைக்கிறதோ அந்த புள்ளியே உகமத் தீர்வைப் பெற்று தரும். ஆகவே, M_1 –ல் உகமத் தீர்வு கிடைக்கிறது. (அ–து) $x_1 = 4$ மற்றும் $x_2 = 2$ குறிக்கோள் சார்பு Z–ன் மதிப்பு 160

$\therefore$ $x_1 = 4$ மற்றும் $x_2 = 2$ –ல் குறும மதிப்பு Z = 160 ஆகும்

எடுத்துக்காட்டு 5

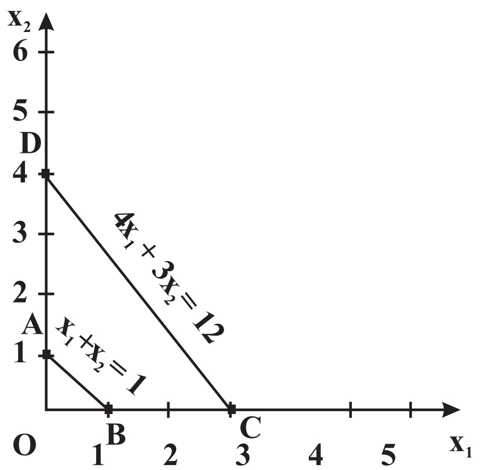
$$x_1 + x_2 \le 1$$

$$4x_1 + 3x_2 \ge 12$$

$x_1, x_2 \ge 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கிணங்க,

$Z = x_1 + x_2$ –ன் பெரும மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :



படம் 10.3

மேற்கண்ட வரைபடத்தில் தீர்வுப் பகுதி இல்லை ஆதலால், கொடுக்கப்பட்ட கணக்கிற்கு தீர்வுகள் இல்லை.

பயிற்சி 10.1

1) A மற்றும் B என்ற இருவகையான பொருட்களை ஒரு நிறுவனம் உற்பத்தி செய்கிறது. இந்த இருவகையான பொருட்களின் மூலம் இலாபம் ரூ.30/- மற்றும் ரூ.40/- ஒவ்வொரு கி.கிராமுக்கும் கிடைக்கிறது. மூலப் பொருட்களின் விவரங்களும் அதன் இருப்புத் தன்மை பற்றியும் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

	தேவைகள்		இருப்பின் அளவு மாதத்திற்கு
	பொருள் A	பொருள் B	
கச்சா பொருட்கள் (கி.கி.)	60	120	12000
இயந்திர இயங்கும் நேரம்/அலகு	8	5	600
உருப்படி செய்தல் (மனித நேரம்)	3	4	500

பெரும இலாபத்தை ஈட்ட இந்த கணக்கை நேரிய திட்டமிடல் அமைப்பில் எழுதுக.

2) ஒரு நிறுவனம் A மற்றும் B என்ற இருவகைப் பொருட்களைத் தயார் செய்து, முறையே ரூ.3 மற்றும் ரூ.4 என இலாபம் ஈட்டுகிறது. M_1 மற்றும் M_2 என்ற இயந்திரங்கள் இந்த இரண்டு பொருட்களைத் தயார் செய்கின்றன. A என்ற பொருளைத் தயாரிக்க M_1 –க்கு ஒரு நிமிடமும் மற்றும் M_2 –க்கு இரண்டு நிமிடங்களும் ஆகின்றன. B என்ற பொருளைத் தயாரிக்க M_1 க்கு ஒரு நிமிடமும் மற்றும் M_2 –க்கு ஒரு நிமிடமும் ஆகின்றன. ஒரு வேலை நாளில் M_1 7 மணி 30 நிமிடங்களுக்கு மேல் வேலை செய்வதில்லை. M_2 இயந்திரம் 10 மணி நேரம் தான் வேலை செய்கிறது. பெரும இலாபம் கிடைக்க இந்த கணக்கை நேரிய திட்டமிடல் அமைப்பில் எழுதுக.

3) $$5x_1 + 20x_2 \le 400$$
$$10x_1 + 15x_2 \le 450$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கிணங்க $Z = 45x_1 + 80x_2$ –ன் பெரும மதிப்பை வரைபடத்தின் மூலம் காண்க.

4) $$2x_1 + x_2 \le 40$$
$$2x_1 + 5x_2 \le 180$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கிணங்க $Z = 3x_1 + 4x_2$ –ன் பெரும மதிப்பை வரைபடத்தின் மூலம் காண்க.

5) $$5x_1 + x_2 \ge 10$$
$$2x_1 + 2x_2 \ge 12$$
$$x_1 + 4x_2 \ge 12$$

$x_1, x_2 \geq 0$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கிணங்க $Z = 3x_1 + 4x_2$ –ன் சிறும மதிப்பை வரைபடத்தின் மூலம் காண்க.

10.4 ஒட்டுறவு மற்றும் தொடர்புப் போக்கு

10.2.1 ஒட்டுறவின் பொருள்

ஒட்டுறவு என்பது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பின் அளவைக் குறிக்கின்றது. ஒரு மாறியின் மாற்றம் மற்ற மாறியைப் பாதித்து அதையும் மாற்றினால் அவ்விரு மாறிகளையும் ஒட்டுறவு மாறிகள் (தொடர்புள்ள மாறிகள்) என்கிறோம். அடிப்படையில் நேரிடை ஒட்டுறவு, எதிரிடை ஒட்டுறவு மற்றும் சார்பற்ற ஒட்டுறவு என்று மூன்று வகையான ஒட்டுறவுகள் உள்ளன.

நேரிடை ஒட்டுறவு (Positive correlation)

இரு மாறிகளின் மதிப்புகளும் ஒரே திசையில் மாறுபட்டால், அதாவது, ஒரு மாறியின் மதிப்பு அதிகரிக்கும் பொழுது (அல்லது குறையும் பொழுது) மற்ற மாறியின் மதிப்பு அதிகரித்தாலோ (அல்லது குறைந்தாலோ) அவ்விரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பை **நேரிடை ஒட்டுறவு** என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(i) தனி மனிதர்களின் உயரம் மற்றும் எடை

(ii) வருவாய் மற்றும் செலவு

(iii) அனுபவம் மற்றும் ஊதியம்

எதிரிடை ஒட்டுறவு (Negative Correlation)

இரு மாறிகளின் மதிப்புக்கள் எதிர்த்திசையில் மாறுபட்டால், அதாவது ஒரு மாறியின் மதிப்பு அதிகரிக்கும் பொழுது (அல்லது குறையும் பொழுது) மற்ற மாறியின் மதிப்பு குறைந்தாலோ (அல்லது அதிகரித்தாலோ), அவ்விரு மாறிகளுக்கிடையே **எதிரிடை ஒட்டுறவு** உள்ளது என்கிறோம்.

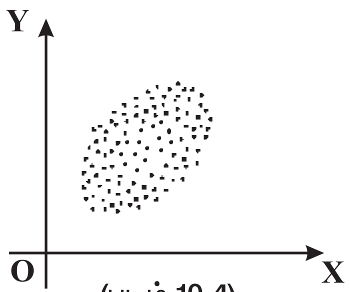
எடுத்துக்காட்டுகள் :

(i) விலை மற்றும் தேவை

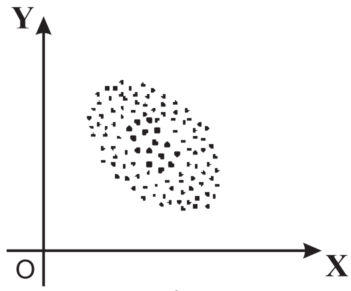
(ii) திருப்பிச் செலுத்தும் காலம் மற்றும் சம மாதத் தவணை

10.2.2 சிதறல் விளக்கப்படம் (Scatter Diagram)

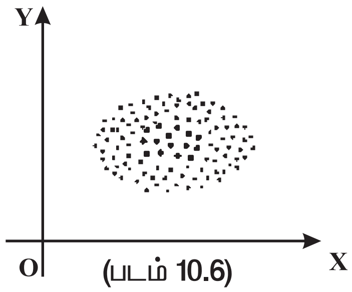
$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots (x_n, y_n)$ என்பவை x மற்றும் y மாறிகளின் n சோடி மதிப்புகள் என்க. x –ன் மதிப்புக்களை x–அச்சுத் திசையிலும், y –ன் மதிப்புக்களை y–அச்சுத் திசையிலும் குறிக்கும் பொழுது கிடைக்கப் பெறும் வரைபடம் சிதறல் விளக்கப்படம் என அழைக்கப்படுகிறது. x மற்றும் y மாறிகளின் மதிப்புக்களுக்கிடையே உள்ள ஒட்டுறவை இவ்விளக்கப் படம் அளிக்கிறது. நேர்கோட்டு ஒட்டுறவிற்கான சிதறல் விளக்கப்படங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.



(படம் 10.4)
நேரிடை ஒட்டுறவு



(படம் 10.5)
எதிரிடை ஒட்டுறவு



(படம் 10.6)
சார்பற்ற ஒட்டுறவு

(i) குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் மேல்நோக்கிய போக்கை காண்பித்தால், மாறிகளுக்கிடையே நேரிடை ஒட்டுறவு உள்ளது (படம் 10.4).

(ii) குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் கீழ்நோக்கிய போக்கை காண்பித்தால், மாறிகளுக்கிடையே எதிரிடை ஒட்டுறவு உள்ளது (படம் 10.5).

(iii) குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் எவ்வித போக்கையும் காண்பிக்கவில்லையெனில் ஒட்டுறவு இல்லை எனக் கூறப்படுகிறது. (படம் 10.6).

10.2.3 ஒட்டுறவுக்கெழு (Co-efficient of Correlation)

பிரிட்டன் நாட்டைச் சார்ந்த ஒரு உயிர் நுட்பவியலார் கார்ல் பியர்சன் (1867-1936) என்பவர் இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள நேர்க்கோட்டு தொடர்பின் அளவை விவரிக்க கூடிய, "ஒட்டுறவுக் கெழுவை" உருவாக்கினார். $r(\mathrm{X, Y})$ என்று குறிக்கப்படும், இரு சமவாய்ப்பு மாறிகளுக்கிடையேயான ஒட்டுறவுக்கெழு

$$r(\mathrm{X, Y}) = \frac{\mathrm{Cov\ (X, Y)}}{\mathrm{SD\ (X)\ SD\ (Y)}}$$ என்று தரப்படுகின்றது.

இங்கு $\mathrm{Cov\ (X, Y)} = \frac{1}{n}\sum_i (\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}})\ (\mathrm{Y}_i - \overline{\mathrm{Y}})$ (X மற்றும் Yக்கான உடன் மாறுபாடு)

$$\mathrm{SD\ (X)} = \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_i (\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}})^2}$$ (X–ன் திட்ட விலக்கம்)

$$\text{SD (Y)} = \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_i (Y_i - \overline{Y})^2} \quad \text{(Y−ன் திட்டவிலக்கம்)}$$

எனவே, கார்ல்பியர்சனின் ஒட்டுறவுக் கெழுவை காணும் சூத்திரம் :

$$r(X, Y) = \frac{\frac{1}{n}\sum_i (X_i - \overline{X})\,(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_i (X_i - \overline{X})^2}\;\sqrt{\frac{1}{n}\sum_i (Y_i - \overline{Y})^2}}$$

$$= \frac{\sum_i (X_i - \overline{X})\,(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_i (X_i - \overline{X})^2}\;\sqrt{\sum_i (Y_i - \overline{Y})^2}} = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2}\;\sqrt{\sum y^2}}$$

குறிப்பு

X மற்றும் Y மாறிகளுக்கிடையிலான ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் காண, கீழ்காணும் சூத்திரங்களையும் பயன்படுத்தலாம் :

(i) $$r(X, Y) = \frac{N\sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{N\sum X^2 - (\sum X)^2}\;\sqrt{N\sum Y^2 - (\sum Y)^2}}$$

(i) $$r(X, Y) = \frac{N\sum dx\,dy - \sum dx \sum dy}{\sqrt{N\sum dx^2 - (\sum dx)^2}\;\sqrt{N\sum dy^2 - (\sum dy)^2}}$$

இங்கு $dx = x - A$; $dy = y - B$ முறையே A மற்றும் B என்ற ஏதேனும் இரு மதிப்புகளிலிருந்து பெறப்பட்ட விலக்கங்கள்.

10.2.4 ஒட்டுறவுக் கெழுவின் எல்லைகள்

ஒட்டுறவுக் கெழு –1 லிருந்து +1 க்கு இடையே ஓர் மதிப்பை பெற்றிருக்கும்

(அ−து) $-1 \le r\,(x, y) \le 1.$

(i) $r(X\ ,\ Y) = +1$ எனில், X மற்றும் Y என்ற இரு மாறிகளுக்கிடையே நேரிடை நிறைவு ஒட்டுறவு உள்ளது என்கிறோம்.

(ii) $r\ (X\ ,\ Y) = -1$ எனில், X மற்றும் Y என்ற இரு மாறிகளுக்கிடையே எதிரிடை நிறைவு ஒட்டுறவு உள்ளது என்கிறோம்.

(iii) $r(X, Y) = 0$ எனில், X மற்றும் Y என்ற இரு மாறிகளுக்கிடையே ஒட்டுறவு இல்லை என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 6

தந்தையர் (X) மற்றும் அவர்களின் மகன்கள் (Y) ஆகியோரின் உயரத்திற்கான (அங்குலங்களின்) ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

X :	**65**	**66**	**67**	**67**	**68**	**69**	**70**	**72**
Y :	**67**	**68**	**65**	**68**	**72**	**72**	**69**	**71**

தீர்வு :

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{544}{8} = 68$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y}{n} = \frac{552}{8} = 69$$

X	Y	$x = X - \overline{X}$	$y = Y - \overline{Y}$	x^2	y^2	xy
65	67	-3	-2	9	4	6
66	68	-2	-1	4	1	2
67	65	-1	-4	1	16	4
67	68	-1	-1	1	1	1
68	72	0	3	0	9	0
69	72	1	3	1	9	3
70	69	2	0	4	0	0
72	71	4	2	16	4	8
544	**552**	**0**	**0**	**36**	**44**	**24**

கார்ல் பியர்சன் ஒட்டுறவுக் கெழு,

$$r(x, y) = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2}\ \sqrt{\sum y^2}} = \frac{24}{\sqrt{36}\ \sqrt{44}} = 0.603$$

எனவே X, Y மாறிகள் நேரிடை ஒட்டுறவு கொண்டுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 7

பின்வரும் விவரங்களுக்கான ஒட்டுறவுக் கெழுவை கணக்கிடுக :

X :	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Y :	**9**	**8**	**10**	**12**	**11**	**13**	**14**	**16**	**15**

தீர்வு :

X	Y	X^2	Y^2	XY
1	9	1	81	9
2	8	4	64	16
3	10	9	100	30
4	12	16	144	48
5	11	25	121	55
6	13	36	169	78
7	14	49	196	98
8	16	64	256	128
9	15	81	225	135
45	**108**	**285**	**1356**	**597**

$$r(X, Y) = \frac{N\sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{N\sum X^2 - (\sum X)^2}\ \sqrt{N\sum Y^2 - (\sum Y)^2}}$$

$$= \frac{9(597) - (45)\ (108)}{\sqrt{9(285) - (45)^2}\ \sqrt{9(1356) - (108)^2}} = 0 \cdot 95$$

$\therefore$ X, Y மிகுதியாக நேரிடை ஒட்டுறவு கொண்டுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 8

கணவர் (X) மற்றும் மனைவி (Y) ஆகியோரின் வயதிற்கான ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

X :	**23**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**33**	**35**	**36**	**39**
Y :	**18**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**28**	**29**	**30**	**32**

தீர்வு :

A = 30 மற்றும் B = 26 எனில் $dx = X - A \quad dy = Y - B$

X	Y	d_x	d_y	d^2_x	d^2_y	$d_x d_y$
23	18	-7	-8	49	64	56
27	22	-3	-4	9	16	12
28	23	-2	-3	4	9	6
29	24	-1	-2	1	4	2
30	25	0	-1	0	1	0
31	26	1	0	1	0	0
33	28	3	2	9	4	6
35	29	5	3	25	9	15
36	30	6	4	36	16	24
39	32	9	6	81	36	54
		11	**– 3**	**215**	**159**	**175**

$$r(X, Y) = \frac{N\sum dxdy - \sum dx \sum dy}{\sqrt{N\sum d_x^{\,2} - (\sum dx)^2}\ \sqrt{N\sum d_y^{\,2} - (\sum dy)^2}}$$

$$= \frac{10(175) - (11)(-3)}{\sqrt{10(215) - (11)^2}\ \sqrt{10(159) - (-3)^2}}$$

$$= \frac{1783}{1790.8} = 0.99$$

$\therefore$ X மற்றும் Y மிகுதியாக நேரிடை ஒட்டுறவு கொண்டுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 9

பின்வரும் விவரங்களுக்கான ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக :

$N = 25, \qquad \sum X = 125, \qquad \sum Y = 100$

$\sum X^2 = 650 \qquad \sum Y^2 = 436, \qquad \sum XY = 520$

தீர்வு :

ஒட்டுறவுக் கெழு,

$$r(\mathrm{X, Y}) = \frac{\mathrm{N}\sum \mathrm{XY} - \sum \mathrm{X} \sum \mathrm{Y}}{\sqrt{\mathrm{N}\sum \mathrm{X}^2 - (\sum \mathrm{X})^2}\ \sqrt{N\sum \mathrm{Y}^2 - (\sum \mathrm{Y})^2}}$$

$$= \frac{25(520) - (125)\ (100)}{\sqrt{25(650) - (125)^2}\ \sqrt{25(436) - (100)^2}}$$

$$= 0.667$$

10.2.5 தொடர்புப் போக்கு (Regression)

சர் பிரான்ஸிஸ் கால்டன் (1822 - 1911) என்ற ஒரு பிரிட்டன் உயிர்நுட்பவியலார், மரபுவழித் தொடர்கிற குணாதிசயங்களை ஆராயும் பொழுது தொடர்புப் போக்கு என்பதை வரையரை செய்தார். தொடர்புப் போக்கு என்பதன் உண்மையான பொருள் யாதெனில் "சராசரியை நோக்கி பின் செல்தல்" என்பதாகும்.

தொடர்புப் போக்கு என்பது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள சராசரி தொடர்பை அறியும் ஓர் கணக்கியல் அளவு ஆகும்.

தொடர்புப் போக்கு பகுப்பாய்வில் சார்புள்ள மாறி மற்றும் சார்பற்ற மாறி எனப்படும் இருவகை மாறிகள் உள்ளன.

10.2.6 சார்புள்ள மாறி (Dependent Variable)

கொடுக்கப்பட்ட சார்பற்ற மாறிகளைக் கொண்டு மற்ற ஒரு மாறியின் மதிப்பு கணக்கிடப்பட வேண்டுமெனில் அந்த மாறியை சார்புள்ள மாறி என்று கூறி Y எனக் குறிக்கிறோம். எடுத்துக்காட்டாக, விளம்பரச் செலவும் (X) விற்பனை அளவும் (Y) ஒட்டுறவில் உள்ளன, எனில் கொடுக்கப்பட்ட விளம்பர செலவிற்கு (X) எதிர்பார்க்கப்படும் விற்பனையின் அளவை (Y) கணிக்கலாம். ஆகையால் Y சார்புள்ள மாறியாகும்.

10.2.7 சார்பற்ற மாறி (Independent Variable)

ஒரு மாறியின் மதிப்பைக் கணிப்பதற்காக பயன்படுத்தப்படும் மாறி சார்பற்ற மாறி என்று அழைக்கப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, X மற்றும் Y ஒட்டுறவு கொண்டுள்ளது எனில் கொடுக்கப்பட்ட விற்பனையை (Y) அடைவதற்கு தேவையான செலவை (X) கணிக்க முடியும். இங்கு Y ஒரு சார்பற்ற மாறி ஆகும். தொடர்புப் போக்கில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட சார்பற்ற மாறிகள் இருக்கலாம்.

ஒரு மாறியின் குறிப்பிட்ட மதிப்பிற்கு மற்றொரு மாறியின் மதிப்பை மிகச் சிறப்பாக கணித்துத் தரும் நேர்கோட்டை **தொடர்புப் போக்கு நேர்க்கோடு** என்கிறோம்.

இவ்வாறாக, தொடர்புப் போக்கு நேர்கோடு என்பது, **மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோடு** (line of best fit) ஆகும். அது **மீச்சிறு வர்க்கக் கொள்கை** மூலமாக பெறப்படுகின்றது (பாடம் 7ல் பார்க்கவும்).

10.2.8 இரு தொடர்புப் போக்கு கோடுகள்

சார்பற்ற மாறி X மற்றும் சார்புள்ள மாறி Y ஆகியவற்றைக் கொண்ட, (X, Y) என்ற சோடியின் மதிப்புகளுக்கு,

X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்கு கோடு

$$Y - \overline{Y} = b_{yx} (X - \overline{X})$$

இங்கு b_{yx} = X –ன் மீது Y –ன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு,

$$= r \frac{\sigma_y}{\sigma x}$$ (r என்பது X, Y க்கிடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழு)

r, σ_y மற்றும் σ_x ஆகியவற்றை b_{yx} –ல் பதிலீடு செய்தால்,

$$b_{yx} = \frac{\sum xy}{\sum x^2} \qquad (x = X - \overline{X}\ ;\ y = Y - \overline{Y})$$

இதைப் போலவே, Y சார்பற்ற மாறியாகவும், X சார்புள்ள மாறியாகவும் எடுத்துக் கொண்டால்,

Y –ன் மீது X –ன் தொடர்புப் போக்கு கோடு :

$$(X - \overline{X}) = b_{xy} (Y - \overline{Y})$$

இங்கு $b_{xy} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\sum xy}{\sum y^2}$

குறிப்பு

ஒரு தொடர்புப் போக்குக் கோட்டை மாற்றி எழுதி மற்றொரு தொடர்பு போக்குக் கோட்டை பெற இயலாது. ஏனெனில் அவை வெவ்வேறு அடிப்படைகளில் பெறப்படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 10

பின்வரும் விவரங்களுக்கு Y –ன் மீதான X உடன் தொடர்புப் போக்குக் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

X :	**10**	**12**	**13**	**12**	**16**	**15**
Y :	**40**	**38**	**43**	**45**	**37**	**43**

தீர்வு :

X	Y	$x = X - \overline{X}$	$y = Y - \overline{Y}$	x^2	y^2	xy
10	40	-3	-1	9	1	3
12	38	-1	-3	1	9	3
13	43	0	2	0	4	0
12	45	-1	4	1	16	-4
16	37	3	-4	9	16	-12
15	43	2	2	4	4	4
78	**246**	**0**	**0**	**24**	**50**	**- 6**

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{78}{6} = 13 \qquad \overline{Y} = \frac{\sum Y}{n} = \frac{246}{6} = 41$$

$$b_{xy} = \frac{\sum xy}{\sum y^2} = \frac{-6}{50} = -0.12$$

Y ன் மீது X இன் தொடர்புப் போக்குக் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$(X - \overline{X}) = b_{xy} (Y - \overline{Y})$$

(அ–து) $X - 13 = -0.12 (Y - 41) \Rightarrow X = 17.92 - 0.12 Y$

எடுத்துக்காட்டு 11

பொருளியியல் மற்றும் புள்ளியியலில் 10 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பொருளியியல் மதிப்பெண்கள் X :	**25**	**28**	**35**	**32**	**31**	**36**	**29**	**38**	**34**	**32**
புள்ளியியல் மதிப்பெண்கள் Y :	**43**	**46**	**49**	**41**	**36**	**32**	**31**	**30**	**33**	**39**

(i) **X–ன் மீதான Y–ன் தொடர்புப் போக்குக் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடிக்க.**

(ii) **பொருளியியலில் 30 மதிப்பெண்கள் பெற்றிருந்தால் புள்ளியியலில் பெறும் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.**

தீர்வு :

X	Y	$x = X - \overline{X}$	$y = Y - \overline{Y}$	x^2	y^2	xy
25	43	-7	5	49	25	-35
28	46	-4	8	16	64	-32
35	49	3	11	9	121	33
32	41	0	3	0	9	0
31	36	-1	-2	1	4	2
36	32	4	-6	16	36	-24
29	31	-3	-7	9	49	21
38	30	6	-8	36	64	-48
34	33	2	-5	4	25	-10
32	39	0	1	0	1	0
320	**380**	**0**	**0**	**140**	**398**	**-93**

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{320}{10} = 32 \qquad \overline{Y} = \frac{\sum Y}{n} = \frac{380}{10} = 38$$

$$b_{yx} = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{-93}{140} = -0.664$$

(i) X –ன் மீதான Y –ன் தொடர்புப் போக்குக் கோட்டுச் சமன்பாடு

$$Y - \overline{Y} = b_{yx}(X - \overline{X})$$

$$Y - 38 = -0.664(X - 32)$$

$$\Rightarrow \quad Y = 59.25 - 0.664X$$

(ii) கொடுக்கப்பட்டுள்ள பொருளியியலின் மதிப்பெண்ணிற்கு, புள்ளியியல் மதிப்பெண்கள் காண, X = 30 என்பதை மேலுள்ள சமன்பாட்டில் பதிலீடு செய்ய,

$Y = 59.25 - 0.664(30) = 59.25 - 19.92 = 39.33$ அல்லது 39

எடுத்துக்காட்டு 12

பின்வரும் விவரங்களுக்கான தொடர்புப் போக்கு நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகள் இரண்டையும் காண்க.

X :	**4**	**5**	**6**	**8**	**11**
Y :	**12**	**10**	**8**	**7**	**5**

தீர்வு :

மேற்கண்ட மதிப்புகள் சிறிய அளவுகளில் இருப்பதால் தொடர்பு போக்குக் கெழுக்களை கணக்கிட பின்வரும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

$$b_{xy} = \frac{N\sum XY - \sum X \sum Y}{N\sum Y^2 - (\sum Y)^2}$$

$$b_{yx} = \frac{N\sum XY - \sum X \sum Y}{N\sum X^2 - (\sum X)^2}$$

X	Y	X^2	Y^2	XY
4	12	16	144	48
5	10	25	100	50
6	8	36	64	48
8	7	64	49	56
11	5	121	25	55
34	**42**	**262**	**382**	**257**

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{34}{5} = 6.8 \qquad \overline{Y} = \frac{\sum Y}{n} = \frac{42}{5} = 8.4$$

$$b_{xy} = \frac{5(257) - (34)(42)}{5(382) - (42)^2} = -0.98$$

$$b_{yx} = \frac{5(257) - (34)(42)}{5(262) - (34)^2} = -0.93$$

Y இன் மீது X இன் தொடர்புப் போக்குக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$(X - \overline{X}) = b_{yx}\,(Y - \overline{Y})$$

$$\Rightarrow \quad X - 6.8 = -0.98\,(Y - 8.4)$$

$$X = 15.03 - 0.98Y$$

X இன் மீது Y இன் தொடர்புப் போக்குக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$Y - \overline{Y} = b_{yx}\,(X - \overline{X})$$

$$Y - 8.4 = -0.93\,(X - 6.8)$$

$$\Rightarrow \quad Y = 14.72 - 0.93X$$

பயிற்சி 10.2

1) பின்வரும் விவரங்களுக்கான ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

X :	12	9	8	10	11	13	7
Y :	14	8	6	9	11	12	3

2) பின்வரும் விவரங்களுக்கான ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கண்டுபிடி.

X :	10	12	18	24	23	27
Y :	13	18	12	25	30	10

3) பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் காண்க.

X :	46	54	56	56	58	60	62
Y :	36	40	44	54	42	58	54

4) ஒரு பொருளின் விலை (ரூபாயில்) மற்றும் தேவை (டன்னில்)க்கான விவரங்களிலிருந்து, ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் காண்க.

விலை (X) :	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
தேவை (Y) :	60	58	58	50	48	48	48	42	36	32

5) கீழ்க்காணும் விவரங்களுக்கு ஒட்டுவுக் கெழுவைக் காண்க.

$N = 11, \sum X = 117, \sum Y = 260, \sum X^2 = 1313$

$\sum Y^2 = 6580, \quad \sum XY = 2827$

6) கீழ்க்கண்டவற்றிலிருந்து இரு தொடர்புப் போக்குக் கோடுகள் காண்க.

X :	6	2	10	4	8
Y :	9	11	5	8	7

7) கீழ் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு தொடர்புப் போக்குக் கோட்டின் உதவியுடன் Y = 20 என்கிற பொழுது X ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

X :	10	12	13	17	18
Y :	5	6	7	9	13

8) ஒரு வருடத்தின் **12** மாதங்களுக்கான பருத்தி (X) மற்றும் கம்பளி (Y) ஆகியவற்றிற்கான விலைக் குறியீடுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. குறியீடுகளிடையிலான தொடர்புப் போக்கு கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

X :	78	77	85	88	87	82	81	77	76	83	97	93
Y :	84	82	82	85	89	90	88	92	83	89	98	99

9) கீழ்காணும் விவரங்களுக்கு தொடர்புப் போக்குக் கோடுகள் காண்க.

X :	40	38	35	42	30
Y :	30	35	40	36	29

10.3 காலம்சார் தொடர் வரிசையின் பகுப்பாய்வு

தொடர் இடைவெளிக் காலங்கள் அல்லது காலப் புள்ளிகளோடு (time points) தொடர்புடைய புள்ளியியல் விவரங்களை, **காலம்சார் தொடர்வரிசை** (time series) என்போம்.

காலம்சார் தொடர் வரிசையின் சில உதாரணங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

(i) ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளின் காலாண்டு உற்பத்தி, அரையாண்டு உற்பத்தி மற்றும் ஆண்டு உற்பத்தி.

(ii) 10 வருடங்களில் பொழிந்த மழையின் அளவுகள்.

(iii) பல்வேறு நேரங்களில் காணப்படுகின்ற ஒரு பொருளின் விலை.

காலம்சார் தொடர் வரிசை, பொதுவாக பொருளியியல் விவரங்களை மட்டும் குறிப்பதாக பெரிதும் நம்பப்படுகிறது. ஆனால் காலம்சார் தொடர் வரிசை, ஏனைய இயற்கையாகவும் மற்றும் சமூக அறிவியலில் எழும் விவரங்களுக்கும் பயன்படுத்தப்படுகிறது. இங்கு காலம்சார் தொடர்கள் மிக முக்கிய பங்கு வகிப்பதோடு மட்டுமல்லாமல், அதன் பகுப்பாய்விற்கு சிறப்பான உத்திகள் தேவைப்படுகிறது. காலம்சார் தொடர் பகுப்பாய்வின் மூலம், கடந்த காலத்தை பகுப்பாய்வு செய்து வருங்காலத்தைப் பற்றி சிறப்பாக புரிந்து கொள்ள முடிகிறது.

10.3.1 காலம்சார் தொடர் வரிசை பகுப்பாய்வின் பயன்கள்

(i) கடந்த கால நிலையைப் பற்றி அறியவும், நிகழ்கால சாதனைகளை மதிப்பீடு செய்யவும், மற்றும் வருங்காலத்திற்கான திட்டங்களை வகுக்கவும் காலம்சார் தொடர் வரிசை பயன்படுகிறது.

(ii) நம்பத்தகுந்த முன்கணிப்புகளை (forcasts) அளிக்கின்றது.

(iii) ஒப்புமை செய்வதற்கான வசதியை அளிக்கின்றது.

எனவே, பொருளியியல், வணிகம், ஆராய்ச்சி மற்றும் திட்டமிடல் ஆகியவற்றில் தரப்பட்ட காலம் சார்ந்த விவரங்களை, சரியான நோக்கில் ஆராய, காலம்சார் தொடர் வரிசை பகுப்பாய்வு பயன்படுகின்றது.

10.3.2 காலம்சார் தொடர்வரிசையின் கூறுகள் (Components of Time Series)

காலம்சார் தொடர் வரிசை விவரங்களைக் குறிக்கும் ஒரு வரைபடம், காலப்போக்கில் ஏற்படுகின்ற மாற்றங்களை (மாறுபாடுகளை) காட்டுகிறது. இம்மாற்றங்கள், காலம்சார் தொடர் வரிசையின் முதன்மைக் கூறுகள் என வழங்கப்படுகிறது. அவைகளாவன,

(i) நீள்காலப் போக்கு (Secular trend)

(ii) பருவகால மாறுபாடுகள் (Seasonal variation)

(iii) சுழல் மாறுபாடுகள் (Cyclical variation)

(iv) ஒழுங்கற்ற மாறுபாடுகள் (Irregular variation)

நீள் காலப் போக்கு

போதுமான நீண்ட காலத்தில் விவரங்களின் மாற்றங்களைக் கருத்தில் கொள்ளும் பொழுது, அவைகள் சுமூகமாகவும் ஒழுங்கு முறையாகவும் இருப்பதையே நீள்காலப் போக்கு உணர்த்துகின்றது. மாற்றங்களின் போக்கு ஏற்றமாகவோ அல்லது இறங்குமுகமாகவோ இருக்கும். காலப்போக்கில் விவரங்களில் ஏற்படும் மாற்றங்கள் கூடிக் கொண்டோ அல்லது குறைந்து கொண்டோ இருக்கும். உதாரணமாக, மக்கள் தொகை, விலைவாசி, உற்பத்தி, கல்வியறிவு ஆகியவற்றோடு தொடர்புடைய காலம்சார் தொடர் வரிசை அதிகரிக்கக்கூடிய போக்கையும், பிறப்பு விகிதம், இறப்பு விகிதம், வறுமை ஆகியவற்றோடு தொடர்புடைய காலம்சார் தொடர்வரிசை குறையக்கூடிய போக்கையும் கொண்டிருக்கும்.

பருவகால மாறுபாடு

இது ஒரு குறுகிய கால மாறுபாடு ஆகும். ஓராண்டிற்கு குறைவாக கால அளவு உள்ளபொழுது காலம்சார் தொடர் வரிசையில் உள்ள காலவட்ட அசைவுகளை (periodic movement), பருவகால மாறுபாடு குறிக்கின்றது. பருவகால மாறுபாடுகளுக்கான உதாரணங்கள் பின்வருமாறு :

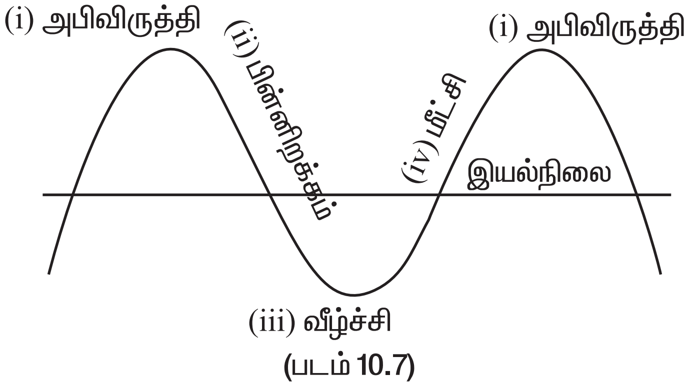
(i) ஒரு நாளின் 24 மணிநேரத்தில் ஏற்படுகின்ற பயணிகளின் போக்குவரத்து

(ii) ஒரு வாரத்தின் 7 நாட்களில், பல்பொருள் அங்காடியில் நடைபெறுகின்ற விற்பனை.

வேறுபட்ட பருவங்களில் ஏற்படும் தட்பவெப்ப மாறுதல்கள் மற்றும் மக்களின் பழக்க வழக்கங்கள் ஆகியவற்றால், பருவ கால மாறுபாடுகள் நிகழ்கின்றன. கோடையில் அதிக அளவில் ஐஸ்கிரீம் விற்பனையாவதும் மழைக்காலத்தில் அதிக எண்ணிக்கையில் குடைகள் விற்கப்படுவதும் பருவகால மாறுபாடுகளுக்கு உதாரணமாகக் கொள்ளலாம்.

சுழல் மாறுபாடு

இதுவும் ஒரு குறுகிய கால மாறுபாடாகும். அளவு காலம் ஓராண்டிற்கு அதிகமாக உள்ள பொழுது, காலம்சார் தொடர் வரிசையிலுள்ள ஊசல் தன்மை கொண்ட அசைவினைக் குறிப்பதே சுழற்சி மாறுபாடாகும். ஒரு முழுமையானக் கால அளவே சுழல் (cycle) எனப்படும். அலை போன்று அசைவுகளைக் கொண்ட காலம்சார் தொடர் வரிசையை வணிகச் சூழல் (business cycle) என்போம். வணிகச் சுழலில் (i) அபிவிருத்தி (prosperity) (ii) பின்னிறக்கம் (recession) (iii) வீழ்ச்சி (depression) (iv) மீட்சி (recovery) எனும் 4 கட்டங்களும் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக தொடர்ந்து நடைபெற்று வருகின்றன.



(படம் 10.7)

சீரற்ற மாறுபாடு

இவ்வித மாறுபாடுகள் எவ்வித ஒழுங்கையும் பின்பற்றுவதில்லை. இவ்வகை மாறுபாடுகள் முழுவதும் கணக்கிட முடியாத அல்லது எதிர்பாராத நிகழ்வுகளான போர், வெள்ளப் பெருக்கு, தீ, வேலை நிறுத்தம் ஆகியவற்றால் ஏற்படுகின்றது. சீரற்ற மாறுபாடு (erratic variation) ஆனது எதிர்பாரா மாறுபாடு என்றும் அழைக்கப்படுகின்றது.

10.3.3 வடிவமைப்பு (Models)

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு காலம்சார் தொடர்வரிசையில் அதன் கூறுகளான நீள் காலப்போக்கு, பருவகால மாறுபாடு, சுழற்சி மாறுபாடு மற்றும் சீரற்ற மாறுபாடு ஆகிய அனைத்து கூறுகளும் அல்லது இவற்றுள் ஏதேனும் சில கூறுகளும் இருக்கும். காலம்சார் தொடர் வரிசையில் காணப்படுகின்றன வேறுபட்ட கூறுகளை பிரிப்பது முக்கியமானது. ஏனெனில், நம்முடைய ஆர்வம் ஒரு குறிப்பிட்ட கூறின் மீதோ அல்லது ஒரு குறிப்பிட்ட கூறின் விளைவை நீக்கியபின் அத்தொடரை பற்றி அறியவோ இருக்கலாம். பல வடிவமைப்புகள் உருப்பெற்றிருந்தாலும், இங்கு இரு மாதிரிகளை மட்டும் கருத்தில் கொள்வோம்.

பெருக்கல் வடிவமைப்பு (Multiplicative Model)

காலம்சார் தொடர் வரிசையின் நான்கு கூறுகளுக்குமிடையே ஒரு பெருக்குத் தொடர்பு அமையும் வடிவமைப்பை பெருக்கல் வடிவமைப்பு என்கிறோம்.

எனவே $y_t = T_t \times S_t \times C_t \times I_t$ ஆகும்.

இங்கு y_t ஆனது t நேரத்தில் கண்டறியப்பட்ட விவரத்தின் மதிப்பு அல்லது மாறியின் மதிப்பு. T_t ஆனது நீள்காலப்போக்கு, S_t என்பது பருவகால மாறுபாடு, C_t என்பது சுழற்சி மாறுபாடு மற்றும் I_t என்பது சீரற்ற மாறுபாடாகும்.

கூட்டு வடிவமைப்பு (Additive Model)

கூட்டு வடிவமைப்பின்படி y_t ஆனது நான்கு கூறுகளின் கூட்டற்பலனாக அமையும்.

(அ–து) $y_t = T_t + S_t + C_t + I_t$,

10.3.4 நீள்காலப் போக்கினை அளவிடுதல் (Measurement of secular trend)

நீள்காலம் போக்கை மதிப்பீடு செய்வதற்கு கீழ்கண்ட நான்கு முறைகள் உள்ளன.

(i) வரைபட முறை அல்லது

(ii) பகுதி சராசரி முறை (Method of Semi - Averages)

(iii) நகரும் சராசரி முறை (Method of Moving Averages)

(iv) மீச்சிறு வர்க்க முறை (Method of least squares)

(i) வரைபட முறை

காலம்சார் தொடர் வரிசையின் விவரங்களின் போக்கினை வரைபட முறையின் மூலம் எளிதாக அறியலாம். நேரம் அல்லது காலத்தைக் குறிக்க x - அச்சையும் கண்டறிந்த விவரங்களைக் குறிக்க y-அச்சையும் கருதுவோம். காலம் மற்றும் அப்பொழுது கண்டறிந்த விவரம் ஆகியனவற்றைக் கொண்டு ஒரு புள்ளியை வரைபடத்தில் குறிக்கலாம். இவ்வாறு பெறப்பட்ட அனைத்து புள்ளிகளுக்கும் மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோடு ஒன்றினை வரையலாம்.

தோராயமாக ஒரு திசையில் காணப்படுகின்ற ஏற்ற இறக்கங்கள் (fluctuations) மற்றொரு திசையில் காணப்படுகின்ற ஏற்ற இறக்கங்களுக்கு சமமாக இருக்கும்படி நேர்கோட்டை குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகளுக்கு இடையே செல்லுமாறு வரைய வேண்டும் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

வரைபட முறை மூலமாக போக்குக் கோட்டை பொருத்தும் பொழுது கீழ்வருவனவற்றைக் கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

(i) முடிந்த வரையில் கோட்டிற்கு மேல் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை, கோட்டிற்கு கீழ் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கைக்கு சமமாக இருக்க வேண்டும்.

(ii) ஆண்டு விவரங்களின் போக்கிலிருந்து பெறப்பட்ட செங்குத்து விலக்கங்களின் மொத்தம் போக்கிற்கு மேலேயும், கீழேயும் சமமாக இருத்தல் வேண்டும்.

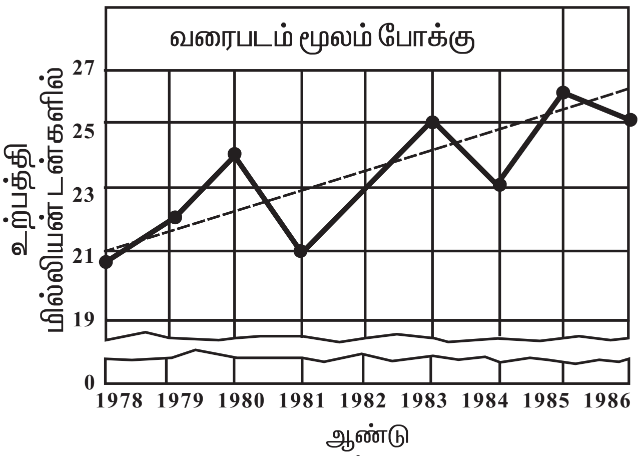
(iii) விவரங்களின் போக்கிலிருந்து பெறப்பட்ட செங்குத்து விலக்கங்களுடைய வர்க்கங்களின் கூடுதல் இயன்றவரை சிறியதாக இருத்தல் வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 13

கீழ்கண்ட விவரங்களுக்கு வரைபட முறையில் போக்குகோடு பொருத்துக.

ஆண்டு	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
ஸ்டீல் உற்பத்தி	20	22	24	21	23	25	23	26	25

தீர்வு :



(படம் 10.8)

குறிப்பு

(i) வரைபடம் மூலம் வரையக் கூடிய போக்குக் கோட்டினை நீட்டி எதிர்கால மதிப்புகளை கணக்கிட இயலும். எனினும் வரைபட முறையின் மூலம் பொருத்தப்படும் கோடு வரைபவரின் அணுகு முறைக்கு ஏற்ப மாறுபடும் தன்மை உடையதால், பொதுவாக இதனை எதிர்கால கணிப்பிற்கு பயன்படுத்தப்படுவதில்லை.

(ii) மேலுள்ள வரைபடத்தில் **உண்மையற்ற அடிப்படை கோடு** (false base line) பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

(a) விவரங்களில் உள்ள மாறுபாடுகளை துல்லியமாக காண்பிக்கவும்.

(b) வரைபடத்தின் பெரும்பகுதி வீணாகாமல் இருக்கவும்

(c) படத்தின் மூலம் தெளிவாக தகவல்களை அறியவும்

பொதுவாக மேற்கண்ட நோக்கங்களுக்காக உண்மையற்ற அடிப்படை கோடு பயன்படுத்தப்படுகிறது.

(ii) பகுதிச் சராசரி முறை

இம்முறை எளிய கணக்கீடுகளை கொண்டதாகவும், எளிதில் ஏற்றுக் கொள்ளக் கூடிய வகையிலும் உள்ளது. இம்முறை பயன்படுத்தப்படும் பொழுது, கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களை சமமாக இரு பகுதிகளாக பிரித்துக் கொள்ள வேண்டும். உதாரணமாக 1980ஆம் ஆண்டிலிருந்து 1999 வரையிலான, அதாவது 20 வருடங்களுக்கான விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், 1980லிருந்து 1989 வரையுள்ள முதல் 10 ஆண்டுகள், 1990லிருந்து 1999 வரையுள்ள அடுத்த 10 ஆண்டுகள், ஆகியவை இரு சம பகுதிகளாகும். 7,11,13 ஆகிய ஒற்றைப்படை எண்ணிக்கையில் ஆண்டுகள் கொடுக்கப்பட்டால், மத்தியில் வரும் ஆண்டை நீக்கிவிட்டு இரு பகுதிகளாக அமைத்துக் கொள்ளலாம். உதாரணமாக 1980லிருந்து 1986 வரையிலான 7 ஆண்டுகளின் விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், 1980லிருந்து 1982 வரை மற்றும் 1984லிருந்து 1986 வரை இரண்டு சமபகுதிகளாக அமையும். மத்திய ஆண்டு 1983 நீக்கப்பட்டுவிடும்.

விவரங்களை இரு பகுதிகளாகப் பிரித்தப்பிறகு, ஒவ்வொரு பகுதிக்கான கூட்டு சராசரியை கணக்கிட வேண்டும். இவ்வாறு பெறப்படும் பகுதிச் சராசரிகளிலிருந்து, போக்கில் ஏற்படும் ஏற்ற, இறக்கங்களைக் கணக்கிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 14

பகுதிச் சராசரி முறை மூலம் கீழ்கண்ட விவரங்களுக்கு போக்கு மதிப்புகளை கண்டுபிடிக்கவும்.

ஆண்டு	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
விற்பனை	102	105	114	110	108	116	112

தீர்வு :

ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை ஒற்றைப்படை (7) என்பதால் மத்திய ஆண்டு 1983ன் விவரத்தை கருத்தில் கொள்ளாமல், நாம் பெறுவது,

ஆண்டு	விற்பனை	பகுதி மொத்தம்	பகுதி சராசரி
1980	102		
1981	105	321	107
1982	114		
1983	110		
1984	108		
1985	116	336	112
1986	112		

மத்திய கால அளவுகளில் உள்ள வித்தியாசம் = 1985 - 1981 = 4

பகுதி சராசரிகளின் வித்தியாசம் = 112 - 107 = 5

போக்கில் ஆண்டுதோறும் ஏற்படும் அதிகரிப்பு = $\frac{5}{4}$ = 1.25

ஆண்டு	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
போக்கு	105.75	107	108.25	109.50	110.75	112	113.25

எடுத்துக்காட்டு 15

1994 ஆண்டிலிருந்து 2001 ஆண்டு வரையிலான ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளின் விற்பனை (டன்னில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன

ஆண்டு	**1994**	**1995**	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**	**2000**	**2001**
விற்பனை	**270**	**240**	**230**	**230**	**220**	**200**	**210**	**200**

பகுதிச் சராசரி முறை மூலம் போக்கு மதிப்புகளை கணக்கிடுக. 2005ஆம் ஆண்டிற்கான விற்பனை அளவை மதிப்பிடுக.

தீர்வு :

ஆண்டு	விற்பனை		பகுதி மொத்தம்		பகுதிச் சராசரி
1994	270				
1995	240	$\rightarrow$	970	$\rightarrow$	242.5
1996	230				
1997	230				
1998	220				
1999	200	$\rightarrow$	830	$\rightarrow$	207.5
2000	210				
2001	200				

மத்திய கால அளவுகளில் உள்ள வித்தியாசம் = 1999.5 – 1995.5 = 4

பகுதி சராசரிகளின் வித்தியாசம் = 242.5 – 207.5 = 35

போக்கின் ஆண்டுதோறும் ஏற்படும் குறைவு $= \frac{35}{4} = 8.75$

போக்கின் அரையாண்டு தோறும் ஏற்படும் குறைவு = 4.375

ஆண்டு	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
விற்பனை போக்கு	255.625	246.875	238.125	229.375	220.625	211.875	203.125	194.375

2005ஆம் ஆண்டிற்கான போக்கின் மதிப்பு $= 194.375 - (8.75 \times 4)$

$= 159.375$

(iii) நகரும் சராசரிகள் முறை

இம்முறை, போக்கினை அளவிட ஓர் எளிய மற்றும் இயற்கணித முறையாகும். நகரும் சராசரி முறையானது ஏற்ற இறக்கங்களை நீக்கவும் மற்றும் போக்கு மதிப்புகளை துல்லியமாக கூறவும் பயன்படுகின்ற ஒரு எளிய முறையாகும். நகரும் சராசரி முறையில் கையாளப்படுகின்ற உத்திகள் (techniques) சில மாறுதல்களுடன் கூடிய கூட்டுச் சராசரி முறையின் அடிப்படையில் அமைந்துள்ளது. கூட்டுச் சராசரி முறையில், நாம் அனைத்து உறுப்புகளையும் கூட்டி, வரும் மதிப்பை மொத்த உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையால் வகுக்குகிறோம். ஆனால் நகரும் சராசரி முறையில், எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கையப் பொறுத்து, பல்வேறு சராசரிகள் ஒரு தொடரில் அமைகின்றன. இம்முறையை பயன்படுத்தும் பொழுது, 3 ஆண்டுகளுக்கான நகரும் சராசரி, 4 ஆண்டுகளுக்கான நகரும் சராசரி என்பதைப் போன்று நகரும் சராசரிக்கான கால அளவை (period) வரையறுக்கப்பட வேண்டும்.

ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை ஒற்றைப்படையிலிருப்பின் நகரும் சராசரிகள் காணல் (3 ஆண்டுகள் என்க).

3 ஆண்டு நகரும் சராசரி முறையில் போக்கு மதிப்புகளைக் காண கீழ்கண்ட வழி முறைகளை பின்பற்ற வேண்டும்.

1) முதல் மூன்று ஆண்டுகளின் விவரங்களைக் கூட்டி வரும் தொகையை, அம்மூன்று ஆண்டுகளின் இடையில் காணும் ஆண்டிற்கு அதாவது 2ம் ஆண்டிற்கு எதிரே எழுத வேண்டும்.

2) முதல் ஆண்டு மதிப்பை தவிர்த்து அடுத்த மூன்று ஆண்டுகளுக்கான மதிப்பை அதாவது 2வது ஆண்டிலிருந்து 4வது ஆண்டு வரையுள்ள மதிப்பை கூட்டி (நகரும் மொத்தம்) வரும் தொகையை 3வது ஆண்டிற்கு எதிரே எழுத வேண்டும்.

3) முதல் இரண்டு ஆண்டுகளுக்கான மதிப்பை தவிர்த்து அடுத்த மூன்று ஆண்டுகளுக்கான அதாவது 3வது ஆண்டிலிருந்து 5வது ஆண்டு வரையுள்ள மதிப்பை கூட்டி வரும் தொகையை 4வது ஆண்டிற்கு எதிரே எழுத வேண்டும்.,

4) நகரும் சராசரியை கணக்கிட கடைசி விவரத்தை எடுத்துக் கொள்ளும் வரை, இம்முறையை தொடர்ந்து செய்து வர வேண்டும்.

5) ஒவ்வொரு 3 ஆண்டு நகரும் மொத்தத்தையும் 3 ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கப்பெறுவது நகரும் சராசரிகளாகும். இவைகள் தான் நமக்குத் தேவையான போக்கு மதிப்புகளாகும்.

குறிப்பு

5 ஆண்டுகள், 7 ஆண்டுகள் மற்றும் ஆண்டுகளுக்குரிய நகரும் சராசரிகளைக் கணக்கிட மேலேக் குறிப்பிட்ட 5 வழிகளையும் பின்பற்றலாம்.

ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை இரட்டைப்படையிலிருப்பின் நகரும் சராசரிகள் காணல் (4 ஆண்டுகள் என்க).

1) முதல் நான்கு ஆண்டுகளுக்கான மதிப்பை கூட்டி வரும் தொகையை 2 மற்றும் 3ஆம் ஆண்டின் மையத்திற்கு (நடுவே) எதிராக எழுத வேண்டும்.

2) முதல் ஆண்டின் மதிப்பை தவிர்த்து 2ஆம் ஆண்டிலிருந்து 5ஆம் ஆண்டு வரையிலான மதிப்புகளை கூட்டி பெறும் தொகையை (நகரும் மொத்தம்) 3 மற்றும் 4 ஆம் ஆண்டு மதிப்புகளின் மையத்திற்கு எதிராக எழுதவேண்டும்.

3) முதல் இரண்டு ஆண்டிற்கான மதிப்புகளை தவிர்த்து அடுத்த 4 ஆண்டுகளில் அதாவது 3ஆம் ஆண்டிலிருந்து 6ஆம் ஆண்டு வரையிலான மதிப்புகளை கூட்ட வேண்டும். பின்பு அக்கூடுதல் தொகையை 4 மற்றும் 5ஆம் ஆண்டு மதிப்புகளின் மையத்திற்கு எதிராக எழுத வேண்டும்.

4) இம்முறையை இறுதி விவரத்தை கணக்கில் எடுத்துக் கொள்ளும் வரை தொடர்ந்து செய்து வர வேண்டும்.

5) முதல் இரண்டு 4 ஆண்டுகளுக்கான நகரும் மொத்தத்தை (Moving total) கூட்டி வரும் தொகையை 3வது ஆண்டிற்கு எதிராக எழுத வேண்டும்.

6) முதல் 4 ஆண்டுகளுக்கான நகரும் கூடுதலை தவிர்த்து அடுத்த இரு 4 ஆண்டுகளுக்கான நகரும் மொத்தங்களைக் கூட்ட வேண்டும். இக்கூடுதல் தொகையை 4வது ஆண்டிற்கு எதிராக எழுத வேண்டும்.

7) அனைத்து நகரும் மொத்தங்களை கூட்டி மையப்படுத்தும் (centered) வரையிலும் இம்முறையை தொடர்ந்து செய்ய வேண்டும்.

8) இவ்வாறு மையப்படுத்தப்பட்ட 4 வருடங்களுக்கான நகரும் கூடுதலை 8ஆல் வகுத்து கிடைக்கப்பெறும் ஈவுத்தொகையை புதிய நிறையில் எழுத வேண்டும். இவைகளே நமக்குத் தேவையான போக்கு மதிப்புகளாகும்.

குறிப்பு

6–வருடங்கள், 8–வருடங்கள், 10–வருடங்கள் ஆகியவற்றிற்கான நகரும் சராசரியைக் காண மேற்கண்ட வழி முறைகள் பின்பற்றப்பட வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 16

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள உற்பத்தி அளவுகளுக்கு (மெட்ரிக் டன்களில்) 3 ஆண்டு காலத்தைக் கொண்டு நகரும் சராசரிகளைக் கணக்கிடுக.

ஆண்டு	**1973**	**1974**	**1975**	**1976**	**1977**	**1978**	**1979**	**1980**	**1981**
உற்பத்தி	**15**	**21**	**30**	**36**	**42**	**46**	**50**	**56**	**63**
ஆண்டு	**1982**	**1983**	**1984**	**1985**	**1986**	**1987**			
உற்பத்தி	**70**	**74**	**82**	**90**	**95**	**102**			

தீர்வு :

3 ஆண்டு காலத்திற்கான நகரும் சராசரிகள்

ஆண்டு	உற்பத்தி y	3-ஆண்டு நகரும் மொத்தம்	3-ஆண்டு நகரும் சராசரி
1973	15	---	---
1974	21	66	22.00
1975	30	87	29.00
1976	36	108	36.00
1977	42	124	41.33
1978	46	138	46.00
1979	50	152	50.67
1980	56	169	56.33
1981	63	189	63.00
1982	70	207	69.00
1983	74	226	75.33
1984	82	246	82.00
1985	90	267	89.00
1986	95	287	95.67
1987	102	---	---

எடுத்துக்காட்டு 17

4 ஆண்டு காலத்தை கொண்ட நகரும் சராசரி முறையை பயன்படுத்தி கீழ்கண்ட விவரங்களுக்கான போக்கு மதிப்புகளை காண்க.

ஆண்டு	**1974**	**1975**	**1976**	**1977**	**1978**	**1979**	**1980**	**1981**	**1982**
மதிப்பு	**12**	**25**	**39**	**54**	**70**	**37**	**105**	**100**	**82**
ஆண்டு	**1983**	**1984**	**1985**	**1986**	**1987**				
மதிப்பு	**65**	**49**	**34**	**20**	**7**				

தீர்வு :

ஆண்டு	மதிப்பு	4 ஆண்டு நகரும் மொத்தம்	4 ஆண்டு நகரும் மொத்தம் (மையமாக்கப்பட்ட மதிப்பு)	இரு 4 ஆண்டு நகரும் சராசரி (போக்கு மதிப்பு)
1974	12	---	---	---
1975	25		---	---
		→ 130		
1976	39		318	39.75
		→ 188		
1977	54		388	48.50
		→ 200		
1978	70		466	58.25
		→ 266		
1979	37		578	72.25
		→ 312		
1980	105		636	79.50
		→ 324		
1981	100		676	84.50
		→ 352		
1982	82		648	81.00
		→ 296		
1983	65		526	65.75
		→ 230		
1984	49		398	49.75
		→ 168		
1985	34		278	34.75
		→ 110		
1986	20		---	---
1987	7		---	---

பருவகால மாறுபாட்டினை அளவிடுதல் (Measurement of seasonal variation)

பருவகால மாறுபாட்டினை சாதாரண சராசரி (simple average) முறையைக் கொண்டு அளவிடலாம்.

சாதாரண சராசரி முறை

இம்முறை, பருவகால குறியீடுகள் பெறுவதற்கான ஒரு எளிய முறையாகும். இம்முறையில் கீழ்கண்ட வழிமுறைகைள பின்பற்றி பருவகால குறியீட்டெண்களை கண்டுபிடிக்கலாம்.

(i) கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை ஆண்டுகள், மாதங்கள் அல்லது காலாண்டுகள் ஆகிய ஏதாவது ஒன்றின் அமைத்துக் கொள்ளவும்.

(ii) ஒவ்வொரு மாதத்திற்கான அல்லது காலாண்டிற்கான கூடுதலைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(iii) ஒவ்வொரு கூடுதலையும், விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கையில் வகுத்தால் பருவகால (மாதங்கள் அல்லது காலாண்டுகள்) சராசரிகளைப் பெறலாம்.

(iv) பருவகால சராசரிகளின் சராசரியை கணக்கிட வேண்டும். இது மொத்த சராசரி (grand average) எனப்படும்.

(v) ஒவ்வொரு பருவத்திற்கான (மாதங்கள் அல்லது காலாண்டுகள்) பருவகால குறியீடுகள் கீழ்கண்டவாறு கணக்கிடப்படுகிறது.

$$\text{பருவகால குறியீடு (S. I)} = \frac{\text{பருவகால சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

குறிப்பு

(i) விவரங்கள் மாதந்தோறும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால்

$$\text{பருவகால குறியீடு} = \frac{\text{மாதாந்திர சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

(ii) விவரங்கள் காலாண்டுதோறும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால்

$$\text{பருவகால குறியீடு} = \frac{\text{காலாண்டு சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

எடுத்துக்காட்டு 18

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து பருவகால குறியீடுகளைக் காண்க.

	வருடம்				
காலாண்டு	**1984**	**1985**	**1986**	**1987**	**1988**
I	**40**	**42**	**41**	**45**	**44**
II	**35**	**37**	**35**	**36**	**38**
III	**38**	**39**	**38**	**36**	**38**
IV	**40**	**38**	**40**	**41**	**42**

தீர்வு :

	காலாண்டு			
ஆண்டு	**I**	**II**	**III**	**IV**
1984	40	35	38	40
1985	42	37	39	38
1986	41	35	38	40
1987	45	36	36	41
1988	44	38	38	42
மொத்தம்	**212**	**181**	**189**	**201**
சராசரி	**42.4**	**36.2**	**37.8**	**40.2**

$$\text{மொத்த சராசரி} = \frac{42.4+36.2+37.8+40.2}{4} = 39.15$$

பருவகால குறியீடு (S. I) $= \dfrac{\text{காலாண்டு சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$

எனவே, முதல் காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு $= \dfrac{42.4}{39.15} \times 100 = 108.30$

இரண்டாம் காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு $= \dfrac{36.2}{39.15} \times 100 = 92.54$

மூன்றாம் காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு $= \dfrac{37.8}{39.15} \times 100 = 96.55$

நான்காம் காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு $= \dfrac{40.2}{39.15} \times 100 = 102.68$

பயிற்சி 10.3

1) வரைபட முறையின் மூலம் போக்குக் கோட்டினை வரைக.

ஆண்டு	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
உற்பத்தி	20	22	25	26	25	27	30

2) வரைபட முறையின் மூலம் போக்குக் கோட்டினை வரைக.

ஆண்டு	1997	1998	1999	2000	2001
உற்பத்தி	20	24	25	38	60

3) பகுதிச் சராசரி முறையின் மூலம் போக்கு மதிப்புகளைக் காண்க.

ஆண்டு	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
உற்பத்தி (டன்னில்)	90	110	130	150	100	150	200

4) பகுதிச் சராசரி முறையின் மூலம் போக்கு மதிப்புகளைக் காண்க.

ஆண்டு	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
நிகரலாபம் (இலட்சத்தில்)	38	39	41	43	40	39	35	25

5) மூன்று ஆண்டு காலத்தைக் கொண்ட நகரும் சராசரி முறையை பயன்படுத்தி கீழ்வரும் விவரங்களுக்கு போக்கு மதிப்புக் காண்க.

ஆண்டு	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
உற்பத்தி (டன்னில்)	21	22	23	25	24	22	25	26	27	26

6) ஒரு சர்க்கரை ஆலையின் உற்பத்தி (டன்களில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. **3** வருட காலத்தைக் கொண்ட நகரும் சராசரி முறையின் மூலம் போக்கு மதிப்புகளைக் காண்க.

ஆண்டு	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
உற்பத்தி	80	90	92	83	94	99	92

7) நான்கு ஆண்டு காலத்தைக் கொண்ட நகரும் சராசரிகளின் மூலம் போக்கு மதிப்புகளைக் காண்க.

ஆண்டு	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
உற்பத்தி	464	515	518	467	502	540	557	571	586	612

8) நான்கு ஆண்டு காலத்தைக் கொண்ட நகரும் சராசரிகள் மூலம் போக்கு மதிப்புகளைக் காண்க.

ஆண்டு	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988
உற்பத்தி	614	615	652	678	681	655	717	719	708	779	757

9) சாதாரண சராசரி முறையின் மூலம் கீழ்கண்ட விவரங்களுக்கு பருவகால குறியீடுகளை காண்க.

ஆண்டு	காலாண்டு			
	I	II	III	IV
1985	68	62	61	63
1986	65	58	66	61
1987	68	63	63	67

10) சாதாரண சராசரி முறையின் மூலம் கீழ்கண்ட விவரங்களுக்கு பருவகால குறியீடுகளை காண்க.

ஆண்டு	காலாண்டு			
	I	II	III	IV
1994	78	66	84	80
1995	76	74	82	78
1996	72	68	80	70
1997	74	70	84	74
1998	76	74	86	82

11) சாதாரண சராசரி முறையின் மூலம் கீழ்கண்ட விவரங்களுக்கு பருவகால குறியீடுகளை காண்க.

ஆண்டு	காலாண்டு I	II	III	IV
1982	72	68	80	70
1983	76	70	82	74
1984	74	66	84	80
1985	76	74	84	78
1986	78	74	86	82

10.4 குறியீட்டெண்கள் (INDEX NUMBERS)

"குறியீட்டெண் என்பது, வேறுபட்ட இரண்டு காலங்கள், இடங்கள் மற்றும் சூழ்நிலைகளுக்கு இடையில் பல மாறிகளில் ஏற்படக்கூடிய மாறுதலை அளப்பதற்கு பயன்படும் ஒரு விகிதம் (பொதுவாக விழுக்காடுகளில்) ஆகும்" - Alva. M. Tuttle.

இரண்டு வெவ்வேறான சூழ்நிலைகளில், தொடர்புடைய மாறிகளின் தொகுப்பில் காணப்படும் அலகுகளின் வித்தியாசத்தை அளப்பதற்கு உகந்த கருவியாக குறியீட்டெண் அமைகிறது. அல்லது இரண்டு வெவ்வேறான சூழ்நிலைகளில், தொடர்புடைய மாறிகளின் தொகுப்பில் காணப்படும் சராசரி மாறுதலின் வித்தியாசத்தை அளப்பதே குறியீட்டெண் என்று வரையறுக்கப்படுகிறது. உதாரணமாக ஒரே இடத்தின் இரு மையங்களில் அல்லது இரு காலங்களில் நிலவும் பண்டங்களின் விலைகளில் ஏற்படும் மாறுதலை அளவிட குறியீட்டெண் பயன்படுகிறது. இரு வெவ்வேறு காலங்களின் அல்லது இரு வெவ்வேறு இடங்களின் வாழ்க்கை தர செலவை ஒப்பீடு செய்வதற்கு, நமக்கு குறியீட்டெண்கள் தேவைப்படுகிறது.

10.4.1 குறியீட்டு எண்களின் வகைகள்

எவற்றை அளவிடுகின்றோமோ அதற்கு ஏற்றவாறு குறியீட்டெண்களை வகைப்படுத்தலாம்.

(i) விலை குறியீட்டு எண்

(ii) எண்ணளவை குறியீட்டு எண்

(iii) மதிப்பு குறியீட்டு எண்

(iv) சிறப்பு நோக்கம் கொண்ட குறியீட்டு எண்

இங்கு நாம் (i) மற்றும் (ii) ஆகியனவற்றை மட்டும் கற்றறிவோம்.

10.4.2 குறியீட்டு எண்களின் பயன்கள்

(i) வியாபாரக் கொள்கைகளை உருவாக்க குறியீட்டு எண்கள் பயன்படுகின்றன.

(ii) பொருளாதாரத்தில் பணவீக்கம் மற்றும் பண தளர்வு இவற்றை அளவிட குறியீட்டெண் பயன்படுகிறது.

(iii) வெவ்வேறு இடங்கள் அல்லது வருடங்களில், மாணவர்களின் நுண்ணறிவுத் திறனை ஒப்பிடுவதற்காக குறியீட்டெண்கள் பயன்படுகின்றன.

(iv) பொருளாதாரத்தின் தன்மையை அளக்க உதவும் கருவியாக குறியீட்டெண்கள் உள்ளது.

10.4.3 குறியீட்டு எண் அமைக்கும் விதம்

(i) நிறையிடா குறியீடு (Unweighted Index)

(ii) நிறையிட்ட குறியீடு (Weighted Index)

நிறையிட்ட குறியீட்டு எண்களைப் பற்றி நாம் காணலாம்.

10.4.4 நிறையிட்ட குறியீட்டு எண்கள்

நிறையிட்ட குறியீட்டு எண்களை அமைக்கும் முறைகள்

(a) நிறையிட்ட மொத்தக் குறியீட்டெண் காணும் முறை

(b) சார்புகளின் நிறையிட்ட சராசரிகளைக் கொண்டு குறியீட்டெண் காணல்.

நிறையிட்ட மொத்தக் குறியீட்டெண்கள்

p_1 மற்றும் p_0 என்பன முறையே நடப்பு ஆண்டின் விலை மற்றும் அடிப்படை ஆண்டின் (base year) விலையைக் குறிக்கின்றன. q_1 மற்றும் q_0 என்பன முறையே நடப்பு ஆண்டின் அளவு மற்றும் அடிப்படை ஆண்டின் அளவைக் குறிக்கின்றன. குறியீட்டெண்கள் கணக்கிடுவதற்கு பயன்படுத்தப்படும் சில சூத்திரங்கள் வருமாறு :

(i) லாஸ்பியரின் விலை குறியீட்டு எண் (Laspeyre's Price Index)

$P_{01}^{L} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100$, இங்கு $w = p_0 q_0$ என்பது உருப்படிகளுக்குரிய நிறைகள் மற்றும் P_{01} என்பது விலை குறியீட்டெண்.

(ii) பாசியின் விலைக் குறியீட்டு எண் (Paasche's price index)

$$P_{01}^{P} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \times 100$$

$W = p_0 q_1$ என்பது நடப்பு ஆண்டுக்குரிய அளவுகள்.

(iii) பிஷரின் விலைக் குறியீட்டு எண் (Fisher's price Index)

$$P_{01}^{F} = \sqrt{P_{01}^{L} \times P_{01}^{P}} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}} \times 100$$

குறிப்பு

லாஸ்பியரின் விலைக் குறியீட்டெண் மற்றும் பாசியின் விலைக் குறியீட்டெண் ஆகியவற்றின் பெருக்குச் சராசரியே (G.M) பிஷரின் விலைக் குறியீட்டெண் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 19

பின்வரும் அட்டவணையிலிருந்து 2000ஆம் ஆண்டுக்கான (i) லாஸ்பியர் (ii) பாசி மற்றும் (iii) பிஷர் ஆகியோரின் குறியீட்டு எண்களைக் கணக்கிடுக :

பொருள்	விலை 1990	விலை 2000	அளவு 1990	அளவு 2000
A	**2**	**4**	**8**	**6**
B	**5**	**6**	**10**	**5**
C	**4**	**5**	**14**	**10**
D	**2**	**2**	**19**	**13**

தீர்வு :

பொருள்	விலை அடிப்படை ஆண்டு p_0	விலை நடப்பு ஆண்டு p_1	அளவு அடிப்படை ஆண்டு q_0	அளவு நடப்பு ஆண்டு q_1	p_0q_0	p_1q_0	p_0q_1	p_1q_1
A	2	4	8	6	16	32	12	24
B	5	6	10	5	50	60	25	30
C	4	5	14	10	56	70	40	50
D	2	2	19	13	38	38	26	26
					160	**200**	**103**	**130**

(i) லாஸ்பியரின் விலைக் குறியீட்டெண் :

$$P_{01}^{L} = \frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times 100$$
$$= \frac{200}{160} \times 100 = 125$$

(ii) பாசியின் விலைக் குறியீட்டெண் :

$$P_{01}^{P} = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1} \times 100$$
$$= \frac{130}{103} \times 100 = 126.21$$

(iii) பிஷரின் விலைக் குறியீட்டெண் :

$$P_{01}^{F} = \sqrt{P_{01}^{L} \times P_{01}^{P}}$$
$$= 125.6$$

எடுத்துக்காட்டு 20

பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து (a) லாஸ்பியர் (b) பாசி மற்றும் (c) பிஷர் ஆகிய முறைகளின் மூலம் விலைக் குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடுக.

பொருள்	**அடிப்படை ஆண்டு**		**நடப்பு ஆண்டு**	
	விலை	**அளவு**	**விலை**	**அளவு**
A	**2**	**40**	**6**	**50**
B	**4**	**50**	**8**	**40**
C	**6**	**20**	**9**	**30**
D	**8**	**10**	**6**	**20**
E	**10**	**10**	**5**	**20**

தீர்வு :

பொருள்	அடிப்படை ஆண்டு		நடப்பு ஆண்டு					
	விலை p_0	அளவு p_1	விலை q_0	அளவு q_1	p_0q_0	p_1q_0	p_0q_1	p_1q_1
A	2	40	6	50	80	240	100	300
B	4	50	8	40	200	400	160	320
C	6	20	9	30	120	180	180	270
D	8	10	6	20	80	60	160	120
E	10	10	5	20	100	50	200	100
					580	**930**	**800**	**1110**

(i) லாஸ்பியரின் விலைக் குறியீட்டெண் :

$$P_{01}^{L} = \frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times 100$$

$$= \frac{930}{580} \times 100 = 160.34$$

(ii) பாசியின் விலைக் குறியீட்டெண் :

$$P_{01}^{P} = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1} \times 100$$

$$= \frac{1100}{800} \times 100 = 137.50$$

(iii) பிஷரின் விலைக் குறியீட்டெண் :

$$P_{01}^{F} = \sqrt{P_{01}^{L} \times P_{01}^{P}} = 148.48$$

10.4.5 குறியீட்டு எண்களுக்கான சோதனைகள்

ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தின் விலைகள் அளவுகள் போன்றவற்றை மற்றொரு காலத்தின் விலைகள் மற்றும் அளவுகளுடன் ஒப்பிடும் போது, காணப்படுகின்ற தொடர்புடைய மாற்றங்களை அறிய குறியீட்டெண்கள் அமைக்கப்படுகின்றன. குறியீட்டெண்கள் அமைப்பதற்கு கொடுக்கப்பட்ட சூழ்நிலைக்கேற்ற ஒரு சூத்திரத்தை தெரிவு செய்தல் அவசியமாகிறது. அப்பொருத்தமான குறியீட்டெண்ணை தேர்ந்தெடுப்பதற்குரிய சோதனைகளாவன.

1) கால மாற்றுச் சோதனை (Time reversal test)

2) காரணி மாற்றுச் சோதனை (Factor reversal test)

கால மாற்றுச் சோதனை

கொடுக்கப்பட்ட முறை, காலத்தின் இரு வழிகளிலும் முன்முகமாகவும், பின் முகமாகவும் இயங்கும் தன்மையுடையதா என்பதைக் கண்டறிவதே கால மாற்றுச் சோதனை ஆகும். ஏதேனும் இரண்டு ஆண்டுகளுக்கு உரிய விவரங்களைக் கொண்டு ஒரே முறையில் ஆனால் அடிப்படை ஆண்டுகளை மாற்றி பெறப்படும் இரண்டு குறியீட்டெண்களில் ஒன்றானது மற்றொன்றின் தலைகீழாக இருக்கும். ஆகவே அவைகளின் பெருக்கல் பலன் 1 ஆகும்.

$\therefore \mathbf{P_{01} \times P_{10} = 1}$ என்பது நிறைவு செய்யப்பட வேண்டும்.

காரணி மாற்றுச் சோதனை

காரணி மாற்றுச் சோதனையில் விலைக் குறியீடு மற்றும் அளவுக் குறியீடு ஆகியவற்றின் பெருக்கல் பலன் ஆனது அவற்றிற்கு ஏற்ற மதிப்புக் குறியீட்டுக்குச் சமமாகும். இச்சோதனையில் விலையின் மாற்றம் மற்றும் அளவின் மாற்றம் ஆகியவற்றின் பெருக்கல் பலன் ஆனது மதிப்பின் மொத்த மாற்றத்திற்குச் சமமாக இருக்கும்.

$\therefore \mathbf{P_{01} \times Q_{01}} = \dfrac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$ (ஒவ்வொரு குறியீட்டிலும் உள்ள காரணி 100ஐ தவிர்க்கவும்)

P_{01} விலைகளில் ஏற்படக்கூடிய சார்ந்த மாற்றத்தையும் Q_{01} அளவுகளில் ஏற்படக்கூடிய சார்ந்த மாற்றத்தையும் குறிக்கிறது. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு ஆண்டில் கொடுக்கப்பட்ட பண்டத்தின் மொத்த மதிப்பு என்பது ஒரு அலகின் அளவு மற்றும் விலை ஆகியவற்றின் பெருக்கல் தொகைக்கு சமமாகும்.

$\dfrac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$ என்பது நடப்பாண்டின் மொத்த மதிப்பு மற்றும் அடிப்படை ஆண்டின் மொத்த மதிப்பு ஆகியவற்றின் விகிதம். இவ்விகிதம் **உண்மை மதிப்பின் விகிதம்** (True value ratio) என்று அழைக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு :

பிஷரின் குறியீட்டெண், இரு மாற்றுச் சோதனைகளையும் நிறைவு செய்வதால் அது விழுமிய குறியீட்டெண் (Ideal Index Number) என்று அழைக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 21

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிடுக. மேலும் இக்காரணி மாற்றுச் சோதனை ஆகியவற்றை நிறைவு செய்வதைச் சரிபார்க்கவும்.

பொருள்	விலை		அளவு	
	1985	1986	1985	1986
A	8	20	50	60
B	2	6	15	10
C	1	2	20	25
D	2	5	10	8
E	1	5	40	30

தீர்வு :

பொருள்	1985		1986					
	p_0	q_0	p_1	q_1	p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
A	8	50	20	60	1000	400	1200	480
B	2	15	6	10	90	30	60	20
C	1	20	2	25	40	20	50	25
D	2	10	5	8	50	20	40	16
E	1	40	5	30	200	40	150	30
					1380	**510**	**1500**	**571**

பிஷமரின் விழுமிய குறியீட்டெண்

$$= \sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{1380}{510} \times \frac{1500}{571}} \times 100$$

$$= 2.6661 \times 100 = 266.61$$

கால மாற்றுச் சோதனை

$P_{01} \times P_{10} = 1$ என நிறுவ வேண்டும்.

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}} = \sqrt{\frac{1380}{510} \times \frac{1500}{571}}$$

$$P_{10} = \sqrt{\frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_1 q_1} \times \frac{\sum p_0 q_0}{\sum p_1 q_1}} = \sqrt{\frac{571}{1500} \times \frac{510}{1380}}$$

$$P_{01} \times P_{10} = \sqrt{\frac{1380}{510} \times \frac{1500}{571} \times \frac{571}{1500} \times \frac{510}{1380}}$$
$$= \sqrt{1} = 1$$

எனவே பிஷரின் விழுமிய குறியீடு காலமாற்றுச் சோதனையை நிறைவு செய்கின்றது.

காரணி மாற்றுச் சோதனை

$P_{01} \times Q_{01} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$ என நிறுவ வேண்டும்.

$$Q_{01} = \sqrt{\frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \times \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1}} = \sqrt{\frac{571}{510} \times \frac{1500}{1380}}$$

$$\therefore \; \mathbf{P}_{01} \times \mathbf{Q}_{01} = \sqrt{\frac{1380}{510} \times \frac{1500}{571} \times \frac{571}{510} \times \frac{1500}{1380}}$$

$$= \frac{1500}{510} = \frac{\sum \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{q}_1}{\sum \boldsymbol{p}_0 \boldsymbol{q}_0}$$

எனவே பிஷரின் விழுமிய குறியீடு காரணி மாற்றுச் சோதனையை நிறைவு செய்கின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 22

பிஷரின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி குறியீட்டு எண்ணைக் கணக்கிடுக. இவ்வெண் காலமாற்று மற்றும் காரணிமாற்று சோதனைகளை நிறைவு செய்கின்றது எனக் காண்க.

பொருள்	அடிப்படை ஆண்டு		நடப்பு ஆண்டு	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
A	10	12	12	15
B	7	15	5	20
C	5	24	9	20
D	16	5	14	5

தீர்வு :

பொருள்	அடிப்படை ஆண்டு		நடப்பு ஆண்டு					
	p_0	q_0	p_1	q_1	p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
A	10	12	12	15	144	120	180	150
B	7	15	5	20	75	105	100	140
C	5	24	9	20	216	120	180	100
D	16	5	14	5	70	80	70	80
					505	**425**	**530**	**470**

பிஷரின் விழுமிய குறியீடு

$$= \sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{505}{425} \times \frac{530}{470}} \times 100 = 115.75$$

கால மாற்றுச் சோதனை

$P_{01} \times P_{10} = 1$ என நிறுவ வேண்டும்.

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma\ p_1q_0}{\Sigma\ p_0q_0} \times \frac{\Sigma\ p_1q_1}{\Sigma\ p_0q_1}} = \sqrt{\frac{505}{425} \times \frac{530}{470}}$$

$$P_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma\ p_0q_1}{\Sigma\ p_1q_1} \times \frac{\Sigma\ p_0q_0}{\Sigma\ p_1q_0}} = \sqrt{\frac{470}{530} \times \frac{425}{505}}$$

$$P_{01} \times P_{10} = \sqrt{\frac{505}{425} \times \frac{530}{470} \times \frac{470}{530} \times \frac{425}{505}}$$

$$= \sqrt{1} = 1$$

எனவே பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் கால மாற்றுச் சோதனையை நிறைவு செய்கிறது.

காரணி மாற்றுச் சோதனை

$P_{01} \times Q_{01} = \dfrac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}$ என நிறுவ வேண்டும்.

$$Q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma q_1p_0}{\Sigma q_0p_0} \times \frac{\Sigma q_1p_1}{\Sigma q_0p_1}} = \sqrt{\frac{470}{530} \times \frac{425}{505}}$$

$$P_{01} \times Q_{01} = \sqrt{\frac{505}{425} \times \frac{530}{470} \times \frac{470}{425} \times \frac{530}{505}}$$

$$= \frac{530}{425} = \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}$$

எனவே பிஷரின் விழுமிய குறியீடு, காரணி மாற்றுச் சோதனையை நிறைவு செய்கிறது.

10.4.6 வாழ்க்கைத்தர குறியீட்டெண் (Cost of Living Index (CLI))

ஒரு குறிப்பிட்ட அளவு பண்டங்கள் மற்றும் சேவைகள் ஆகியவற்றிற்கு வாடிக்கையாளர் செலுத்தும் விலைகளில், காலப்போக்கில் ஏற்படும் சராசரி மாற்றத்தினைக் குறிக்கும் வகையில் வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண்கள் வடிவமைக்கப்படுகின்றன. வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டு எண் ஆனது நுகர்வோர் விலை குறியீட்டெண் (Consumer price index number) எனவும் அழைக்கப்படுகின்றது.

சில்லரை விலைகளின் நிலைகளில் ஏற்படக்கூடிய மாற்றங்கள், பலவகை மக்களின் வாழ்க்கை செலவை பல்வேறு நிலைகளில் பாதிக்கிறது என்பது அறிந்த ஒன்றாகும். பொதுவாக குறியீட்டெண்ணால் இதை வெளிப்படுத்துவதென்பது இயலாதது ஆகும். ஆகவே பலப்பகுதிகளில் வசிக்கக்கூடிய பல பிரிவு மக்களின் மேல் திணிக்கப்படும் விலை ஏற்றங்களால் ஏற்படும் விளைவுகளைக் கண்டறிய வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண் அமைப்பது அவசியமாகிறது. ஊதிய உயர்விற்கான கோரிக்கைகள் வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண்ணை அடிப்படையாகக் கொண்டவை என்பது குறிப்பிடத்தக்கதாகும். பல நாடுகளில், ஊதியம் மற்றும் சம்பளம் ஆகியவைகள் வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண்களை கருத்தில் கொண்டு மாற்றங்கள் செய்யப்படுகின்றன.

10.4.7 வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண்ணை அமைக்கும் முறைகள்

கீழ்கண்ட முறைகளில் வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண் அமைக்கப்படுகிறது.

(i) மொத்த செலவு முறை அல்லது நிறையிட்ட மொத்த முறை

(Aggregate expenditure method or weighted aggregative method)

(ii) குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட முறை (Family budget method)

மொத்த செலவு முறை

இம்முறையில் அடிப்படை ஆண்டில் ஒரு குறிப்பிட்ட பிரிவினரால் வாங்கப்படும் பொருள்களின் அளவுகளை நிறைகளாக பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இந்த நிறைகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு, மொத்த செலவை அடிப்படை ஆண்டு மற்றும் நடப்பு ஆண்டுகளுக்கு கணக்கிட்டு சதவீத மாற்றங்களும் கணக்கிடப்படுகின்றன.

$\therefore$ வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டு எண் (C.L.I) $= \dfrac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times 100$

வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண்ணை அமைப்பதில், மொத்த செலவு முறை அனைவராலும் நன்கு அறிந்ததாகும்.

குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட முறை

இம்முறையில் விலைகளை வாங்கப்படும் அளவுகளால் பெருக்கக் கிடைக்கும் மதிப்புகளை (அதாவது p_0q_0) நிறைகளாக எடுத்துக் கொள்ளப்படுகின்றன. தொடர்பு விலைகளை நிறை மதிப்புகளோடு பெருக்கக் கிடைக்கும் மொத்தத்தை, நிறைமதிப்புகளின் மொத்தத்தால் வகுக்க கிடைக்கும் மதிப்பு, வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண் ஆகும்.

$\therefore$ வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண் $= \dfrac{\sum \mathrm{PV}}{\sum \mathrm{V}}$

இங்கு $P = \frac{p_1}{p_0} \times 100$ ஆனது தொடர்பு விலைகள் (price relatives) மற்றும்

$V = p_0 q_0$ ஆனது ஒவ்வொரு உருப்படியின் நிறை மதிப்பு.

இம்முறை தொடர்பு விலைகளின் நிறை சராசரி முறைக்கு ஒப்பாகும்.

10.4.8 வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண்ணின் பயன்கள்

(i) ஊதிய நிர்ணயம் மற்றும் ஊதிய ஒப்பந்தம் இவற்றிற்கு வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண் முக்கியமாக பயன்படுத்தப்படுகிறது.

(ii) தொழிலாளர்களின் ஊதியத்திற்கான அகவிலைப்படியைக் கணக்கிட இது பயன்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 23

மொத்த செலவு குறியீட்டெண் முறை மூலம் வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண்ணை காண்க.

பொருள்	**அளவு**	**விலை (ரூ)**	
	2000	**2000**	**2003**
A	**100**	**8**	**12.00**
B	**25**	**6**	**7.50**
C	**10**	**5**	**5.25**
D	**20**	**48**	**52.00**
E	**65**	**15**	**16.50**
F	**30**	**19**	**27.00**

தீர்வு :

பொருள்	அளவு	விலை			
	2000	2000	2003		
	q_0	p_0	p_1	p_1q_0	p_0q_0
A	100	8	12.00	1200.00	800
B	25	6	7.50	187.50	150
C	10	5	5.25	52.50	50
D	20	48	52.00	1040.00	960
E	65	15	16.50	1072.50	975
F	30	19	27.00	810.00	570
				4362.50	**3505**

$$\text{C.L.I} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100$$

$$= \frac{4362.50}{3505} \times 100 = 124.46$$

எடுத்துக்காட்டு 24

2000ஆம் ஆண்டை அடிப்படையாகக் கொண்டு குடும்ப வரவு செலவு திட்ட முறையின் மூலம் கீழ்கண்ட விவரங்களுக்கு 2003ஆம் ஆண்டிற்கான வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண்ணை கணக்கிடுக.

உருப்படிகள்	விலை		நிறை
	2000	2003	
உணவு	200	280	30
வாடகை 100	100	200	20
உடை	150	120	20
எரிபொருள் மற்றும் மின்சாரம்	50	100	10
இதர செலவுகள்	100	200	20

தீர்வு :

குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட முறையில் CLI கணக்கிடல் :

உருப்படிகள்	p_0	p_1	நிறை V	$P = \frac{p_1}{p_0} \times 100$	PV
உணவு	200	280	30	140	4200
வாடகை	100	200	20	200	4000
உடை	150	120	20	80	1600
எரிபொருள் மற்றும் மின்சாரம்	50	100	10	200	2000
இதர செலவுகள்	100	200	20	200	4000
			100		**15800**

வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண் $(\text{C.L.I}) = \frac{\sum PV}{\sum V} = \frac{15800}{100} = 158$

எனவே 2000ஆம் ஆண்டுடன் ஒப்பிடுகையில் 2003ஆம் ஆண்டு வாழ்க்கைச் செலவானது 58% அதிகரித்துள்ளது.

பயிற்சி 10.4

1) (i) லாஸ்பியர் (ii) பாசி (iii) பிஷர் ஆகிய குறியீட்டு எண்களை பின்வரும் விவரங்களுக்கு கணக்கிடுக.

பொருள்	விலை		அளவு	
	அடிப்படை ஆண்டு	நடப்பு ஆண்டு	அடிப்படை ஆண்டு	நடப்பு ஆண்டு
A	6	10	50	50
B	2	2	100	120
C	4	6	60	60
D	10	12	30	25

2) பின்வரும் விவரங்களுக்கு விலைக் குறியீட்டு எண்ணை

(i) லாஸ்பியர் (ii) பாசி (iii) பிஷர் ஆகிய முறைகளில் கணக்கிடுக.

பொருள்	1999		1998	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
A	4	6	2	8
B	6	5	5	10
C	5	10	4	14
D	2	13	2	19

3) (i) லாஸ்பியர் (ii) பாசி (iii) பிஷர் ஆகிய குறியீட்டு எண்களை பின்வரும் விவரங்களுக்கு கணக்கிடுக.

பொருள்	விலை		அளவு	
	1980	1990	1980	1990
A	2	4	8	6
B	5	6	10	5
C	4	5	14	10
D	2	2	19	13

4) பின்வரும் விவரங்களுக்கு விலைக் குறியீட்டு எண்ணை

(i) லாஸ்பியர் (ii) பாசி (iii) பிஷர் ஆகிய முறைகளில் கணக்கிடுக.

பொருள்	அடிப்படை ஆண்டு		நடப்பு ஆண்டு	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
A	5	25	6	30
B	10	5	15	4
C	3	40	2	50
D	6	30	8	35

5) பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிடுக. மேலும் இது, காரணி மாற்றுச் சோதனை மற்றும் கால மாற்றுச் சோதனை ஆகியவற்றை நிறைவு செய்கிறது எனக் காட்டுக.

பொருள்	விலை		அளவு	
	அடிப்படை ஆண்டு	நடப்பு ஆண்டு	அடிப்படை ஆண்டு	நடப்பு ஆண்டு
A	6	10	50	56
B	2	2	100	120
C	4	6	60	60
D	10	12	30	24
E	8	12	40	36

6) பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிடுக. மேலும் இது, காரணி மாற்றுச் சோதனை மற்றும் கால மாற்றுச் சோதனை ஆகியவற்றை நிறைவு செய்கிறது எனக் காட்டுக.

பொருள்	அடிப்படை ஆண்டு (1997)		நடப்பு ஆண்டு (1998)	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
A	10	10	12	8
B	8	12	8	13
C	12	12	15	8
D	20	15	25	10
E	5	8	8	8
F	2	10	4	6

7) **1999**ஆம் ஆண்டை அடிப்படையாகக் கொண்டு **2000**ஆம் ஆண்டிற்கு பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு மொத்தச் செலவு முறையில் வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண்ணைக் காண்க.

பொருள்	அளவு (கிகி) 1999	விலை	
		1999	2000
A	6	5.75	6.00
B	1	5.00	8.00
C	6	6.00	9.00
D	4	8.00	10.00
E	2	2.00	1.80
F	1	20.00	15.00

8) குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட முறையில் வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிடுக.

பொருள்	A	B	C	D	E	F	G	H
அடிப்படை ஆண்டில் அளவு (அலகு)	20	50	50	20	40	50	60	40
அடிப்படை ஆண்டில் விலை (ரூ.)	10	30	40	200	25	100	20	150
நடப்பு ஆண்டில் விலை (ரூ.)	12	35	50	300	50	150	25	180

9) 1995ஐ அடிப்படை ஆண்டாகக் கொண்டு, குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட முறையில் பின்வரும் விவரங்களுக்கு வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டு எண்ணைக் கணக்கிடுக.

பொருள்	நிறை	விலை (ஒரு அலகிற்கு)	
		1995	1996
A	40	16.00	20.00
B	25	40.00	60.00
C	5	0.50	0.50
D	20	5.12	6.25
E	10	2.00	1.50

10) 1976ஐ அடிப்படை ஆண்டாகக் கொண்டு, 1986 ஆம் ஆண்டிற்கு பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட முறையில் வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிடுக.

பொருள்	P	Q	R	S	T	U
அடிப்படை ஆண்டு 1976ல் அளவு	50	25	10	20	30	40
1976ல் விலை (ரூ.) (ஒரு அலகிற்கு)	10	5	8	7	9	6
1986ல் விலை (ரூ.) (ஒரு அலகிற்கு)	6	4	3	8	10	12

10.5 புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாடு (SQC)

உற்பத்தி செய்யப்படும் பொருட்கள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு குறிப்பிட்ட பயன்பாட்டுக்குத் தேவைப்படும். ஒரு பொருள் அதற்கான பயன்பாட்டின் நியதிகளை நிறைவு செய்வதாக அமையுமானால் அப்பொருளின் தரம் சிறப்பாக இருப்பதாகவும் இல்லையெனில் அதன் தரம் குறைவாக இருப்பதாகவும் கொள்ளலாம்.

எவ்வளவுதான் கவனமாக செயல்படுத்தினாலும் திரும்பத் திரும்பச் செய்யப்படும் செயல்கள் ஒரே மாதிரியாக இருக்காது. வேறுபாடுகள் இருக்கதான் செய்யும். சில உயர் நுட்பங்களையுடைய இயந்திரங்கள் தயாரிக்கும் பொருள்களின் பல்வேறு அலகுகளுக்கிடையே வேறுபாடுகள் காணப்படுவது அசாதாரணமானதல்ல. எடுத்துக்காட்டாக தக்கை அடைப்பான்கள், குப்பிகள் முதலானவற்றை திறன்மிக்க இயந்திரங்களைக் கொண்டு தயாரித்தாலும் பல்வேறு உற்பத்தி அலகுகளுக்கிடையே சிறிதளவு வேறுபாடுகள் இருப்பதைக் காணலாம். வேறுபாடுகள் பெரிய அளவில் இல்லையெனில் அவ்வேறுபாடுகளைப் பொருட்படுத்தாமல் அவ்வுற்பத்திப் பொருள்களின் அளவுகள் கொடுக்கப்பட்ட நியதிகளுக்கு உட்பட்டுள்ளன எனக் கொள்ளலாம். ஆனால் மாறுபாடுகள் ஒரு குறிப்பிட்ட அளவுக்கு மேல் இருக்குமானால் அந்த உற்பத்திப் பொருட்களை நிராகரிக்க வேண்டும் மற்றும் அம்மாறுபாடுகளுக்கான காரண விளைவுகளை ஆய்வு செய்ய வேண்டும்.

10.5.1 மாறுபாடுகளுக்கான காரணங்கள் (Causes for variation)

மாறுபாடுகள் ஏற்படுவதற்கான இரண்டு வகை விளைவுகளாவன
(i) தற்செயல் காரணங்கள் (ii) குறிப்பிட்ட காரணங்கள்

(i) தற்செயல் காரணங்கள்(Chance causes)

காரணமின்றி இயல்பாகவே தற்செயல் காரணமாக ஏற்படும் மாறுபாடுகள் தற்செயல் மாறுபாடுகள் (அ) தன்னிச்சை மாறுபாடுகள் ஆகும். தற்செயல் மாறுபாடுகள் ஏற்கக்கூடியவை, அனுமதிக்கக்கூடியவை மற்றும் தவிர்க்க முடியாதவை. அவை உற்பத்திப் பொருளின் தரத்தை வெகுவாக பாதிப்பதில்லை.

(ii) குறிப்பிட்ட காரணங்கள் (Assignable causes)

தவறான திட்டம் மற்றும் செயல்பாடுகள் காரணமாக ஏற்படும் மாறுபாடுகள் குறிப்பிட்ட காரணங்களால் ஏற்படும் மாறுபாடுகளாகும். இவை தற்செயலாக நடப்பவை அல்ல. தற்செயல் மாறுபாடுகளின் காரணங்களை அறியமுடியாது. ஆனால் குறிப்பிட்ட காரணங்களால் ஏற்படும் பிழைகளைக் கண்டறிந்து, செயல்பாட்டைச் சீர் செய்ய முடியும்.

10.5.2 புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாட்டின் பங்கு மற்றும் அதன் பயன்கள்

ஒரு செயல்பாடு, புள்ளியியல் தரக்கட்டுபாட்டிற்கு இணங்க செயல்படுகிறதா என்பதைக் கண்டுபிடிக்கத் தேவையான விவரங்களைச் சேகரிப்பதும் அவற்றை ஆராய்வதும் புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாட்டின் பங்காகும். ஒரு செயல்பாட்டின், குறிப்பிட்ட காரண விளைவுகளால் ஏற்படும் மாறுபாடுகளை விரைந்து கண்டுபிடிக்க புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாடு உதவுகிறது என்பது அதன் சிறப்பாகும். உற்பத்தியாகும் பொருள் குறையுள்ளவையாக மாறும் முன்னரே மாறுபாடுகளைக் கண்டுபிடித்து அவற்றைக் களைய முடியும்.

புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாடு என்பது நன்கு ஏற்றுக் கொள்ளப்பட்டு பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படும் செயல்முறை ஆகும். மாறுபாடுகளின் அடிப்படையில் முடிவுகள் எடுப்பதற்கான நோக்கங்கள் மற்றும் உத்திகள் ஆகியவற்றை நன்கு புரிந்து கொள்வதற்கான அடிப்படையே புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாடு ஆகும். புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாடு என்பது கோளாறுகளை கண்டுபிடிக்கும் முறை மட்டுமே ஆகும். தரம் பராமரிக்கப்படுகிறதா இல்லையா என்பதை இது நமக்கு கூறுகிறது. தகுந்த சீர்படுத்தும் வழிமுறைகளை கையாண்டு தொடர்ந்து உற்பத்தியாகும் பொருள்களின் தரத்தைச் சீராக வைத்திருப்பது சம்பந்தப்பட்ட தொழில் நுட்ப வல்லுனர்களிடம் உள்ளது.

புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாட்டின் பயன்பாடு இருவகைப்படும் (a) செயல்பாட்டுத் தரக்கட்டுப்பாடு (Process control) (b) உற்பத்தி பொருளின் தரக் கட்டுப்பாடு (Product control)

செயல்பாட்டு கட்டுப்பாட்டினால் குறிப்பிட்ட செயல்பாடு கட்டுப்பாட்டில் உள்ளதா இல்லையா என அறிய முயல்கிறோம். உற்பத்தி பொருளின் தரக்கட்டுப்பாடு என்பது எதிர்கால செயல்பாட்டைப் பற்றி அறிவதற்கு உதவுகிறது.

10.5.3 செயல்பாட்டுத் தரக் கட்டுப்பாடு மற்றும் உற்பத்தி பொருளின் தரக் கட்டுப்பாடு

உற்பத்தி செய்யப்படும் பொருள்களின் தரம் குறிப்பிட்ட தர நியதிகளுக்கு ஏற்ப இருக்குமாறு செய்வது உற்பத்திச் செயல்முறையின் முக்கிய நோக்கமாகும். அதாவது உற்பத்தி செய்யப்படும் பொருட்களில் குறைபாடுடைய பொருட்களின் விகித அளவு பெரிய அளவில் இல்லாமலிருக்குமாறு செய்ய விழைகிறோம். இதற்கு செயல்பாட்டு தரக் கட்டுப்பாடு என்று பெயர். தரக் கட்டுப்பாட்டுப் படங்கள் (control charts) மூலம் இதனை நாம் சாதிக்கிறோம்.

உற்பத்தி பொருளின் தரக் கட்டுப்பாடு என்பது உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருட்களின் தரத்தை முக்கியமான கட்டங்களில் கடுமையாக ஆய்வு செய்து தரத்தை நிலை நிறுத்துவதாகும். டாஜ் மற்றும் ரோமிக் (Dodge and Romig) ஆகியோரால் உருவாக்கப்பட்ட கூறெடுத்தல் ஆய்வு திட்டங்கள் (sampling inspection plans) உற்பத்தி பொருளின் தரக் கட்டுப்பாடு செயல்படுத்தப்படுகிறது. உற்பத்தியாளர் எந்த அளவில் தரத்தைப் பராமரித்தாலும், நுகர்வோருக்கு ஒரு குறிப்பிட்ட அளவு தரத்தில் பொருட்கள் கிடைக்கச் செய்வது உற்பத்தி பொருளின் தரக் கட்டுப்பாட்டின் நோக்கமாகும். சந்தைக்கு அனுப்பப்படும் பொருட்களில் பெரிய

அளவில் குறைபாடுகளையுடைய பொருட்கள் இல்லாமலிருக்குமாறு உற்பத்தி பொருளின் தரக் கட்டுப்பாடு உறுதி செய்கிறது.

10.5.4 தரக் கட்டுப்பாட்டுப் படங்கள் (Control Charts)

செயல்பாட்டுத் தரக் கட்டுப்பாட்டில் பயன்படும் புள்ளியியல் கருவியானது தரக் கட்டுப்பாட்டுப் படங்கள் ஆகும். மாறுபாடுகளின் பல்வேறு அமைப்புகளை விளக்கும் வகையில் அவை அமையும். 1924ஆம் ஆண்டு பெல் தொலைபேசி நிறுவனத்தைச் சார்ந்த இயற்பியல் அறிஞர் வால்டர் A. ஸ்டீவார்ட் (Walter A. Stewart) என்பவரால் தரக் கட்டுப்பாட்டு படங்கள் உருவாக்கப்பட்டு மேம்படுத்தப்பட்டன. கட்டுப்பாட்டு படங்கள் மூன்று வழிகளில் பயன்படுமென அவர் குறிப்பிட்டார். முதலாவதாக நிறுவனம் நிறை நிறுத்த விரும்பும் தரத்தின் அளவை அறுதியிட்டு குறிப்பிட கட்டுப்பாட்டு படங்கள் பயன்படும். இரண்டாவதாக அந்த அறுதியிட்ட தரத்தை எட்டுவதற்கான கருவியாகப் பயன்படும். மூன்றாவதாக, செயல்பாடுகள், எட்ட விழையும் தரத்தை அடையும் வண்ணம் அமைந்துள்ளனவா என அறிய உதவும், தரக்கட்டுப்பாடு என்பது நியதிகள் அமைக்கவும் அதற்கேற்ப உற்பத்தி செய்யவும் மற்றும் அதனை சோதனை செய்யவும் பயன்படும் ஒரு கருவியாகும்.

குறிப்பிட்ட தரத்திலிருந்து மாறுபாடுகள் எத்தனை முறைகள் மற்றும் எந்த அளவுகளில் ஏற்படுகின்றன என்பதை வரைபடம் வாயிலாக விளக்குவதே ஒரு தரக் கட்டுப்பாட்டு படத்தின் அடிப்படையாகும் தரக் கட்டுப்பாட்டு படங்களை உருவாக்குவது எளிது. அதனடிப்படையில் விளக்கமளிப்பதும் எளிது. செயல்பாடுகள் கட்டுப்பாட்டில் இருக்கிறதா இல்லையா என்பதை மேலோட்டமாக நோக்கும்பொழுது மேலாளர் புரிந்து கொள்ளத் தரக் கட்டுப்பாட்டு படங்கள் உதவுகிறது.

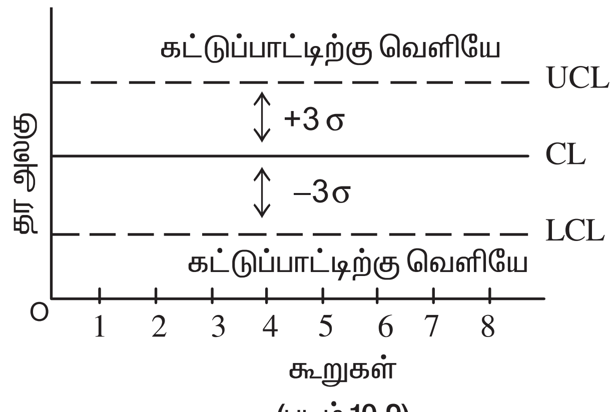
பொதுவாகத் தரக் கட்டுப்பாட்டு படம் மூன்று கிடைமட்டக் கோடுகளைக் கொண்டிருக்கும்.

(i) செயல்பாட்டில் நிலை நிறுத்த விரும்பும் தரத்தின் அளவைக் குறிக்கும் மத்தியக் கோடு (CL)

(ii) மேல்மட்ட கட்டுப்பாட்டு எல்லைக் கோடு (UCL) மற்றும்

(iii) கீழ்மட்ட கட்டுப்பாட்டு எல்லைக் கோடு (LCL)

தரக் கட்டுப்பாட்டின் விளக்கப்படம்



(படம் 10.9)

அவ்வப்போது ஒரு கூறு எடுக்கப்பட்டு அதற்கான விபரங்கள் வரைபடத்தில் குறிக்கப்படுகின்றன. எல்லா கூறுப் புள்ளிகளும் மேல்மட்ட மற்றும் கீழ்மட்ட கட்டுப்பாட்டு எல்லைக்கோடுகளுக்கிடையே அமையுமானால் செயல்பாடு ‘‘கட்டுப்பாட்டில்’ இருப்பதாகக் கொள்ளப்படும் மற்றும் தற்செயல் காரணங்கள் மட்டுமே காணப்படுகின்றன எனக் கொள்ளலாம். ஒரு கூறு புள்ளி கட்டுப்பாட்டு எல்லைகளுக்கு வெளியே அமையுமானால் மாறுபாடுகள் குறிப்பிட்ட காரணங்களால் ஏற்படுகின்றன என்று கொள்ளலாம்.

தரக் கட்டுப்பாட்டு படங்களின் வகைகள்

பொதுவாக தரக் கட்டுப்பாட்டுப் படங்கள் இரு வகைப்படும்

(i) மாறிகளின் கட்டுப்பாட்டுப் படங்கள்

(ii) பண்புகளின் கட்டுப்பாட்டுப் படங்கள்

தொடர்ந்து மாறும் தன்மையுள்ள மாறிகளின் கட்டுப்பாட்டுப் படங்கள் $\overline{X}$ மற்றும் R படங்களைப் பயன்படுத்துகின்றன.

c, *np* மற்றும் *p* போன்ற பண்புகள் பற்றிய கட்டுப்பாட்டுப் படங்கள், அளவிட முடியாத தரகுணாதிசயங்களை அல்லது பண்புகளை (குறையுள்ள அல்லது குறையற்ற உற்பத்திப் பொருள்) பற்றித் தெரிவிக்கிறது.

இப்பாடத்தில் நாம் மாறிகளின் கட்டுப்பாட்டுப் படங்களான $\overline{\mathbf{X}}$ மற்றும் **R** கட்டுப்பாட்டுப் படங்கள் பற்றி மட்டும் படிக்கவிருக்கிறோம்.

R-படம் (வீச்சு படம்)

ஒரு செயல்பாட்டில் தரத்தின் சிதறல் அல்லது மாறுபாடுகளைக் குறிக்க R படம் (range chart) பயன்படுத்தப்படுகிறது. R படம் $\overline{X}$ படத்தின் துணைப் படமாகும். நாம் எடுத்துக்கொண்ட செயல்பாட்டினை போதுமான அளவு ஆய்வு செய்ய இரு படங்களுமே தேவைப்படும். பொதுவாக R படம் $\overline{X}$ படத்துடன் கொடுக்கப்படும். R படம் தயார் செய்வது $\overline{X}$ படம் தயார் செய்வது போன்றதே, R படம் வரையத் தேவையான மதிப்புகள் :

(i) ஒவ்வொரு கூறின் வீச்சு, R.

(ii) வீச்சுகளின் சராசரி, $\overline{R}$

(iii) $U.C.L = D_4\overline{R}$

$L.C.L = D_3\overline{R}$

என்பன எல்லைக்கோடுகளாகும். D_4 மற்றும் D_3 மதிப்புகளை அட்டவணையிலிருந்து பெறலாம்.

$\overline{\mathbf{X}}$ படம் ($\overline{\mathbf{X}}$ Chart)

ஒரு செயல்பாட்டின் கூறுகளின் தரக் கட்டுப்பாடு சராசரிகளை காட்டுவதற்காக $\overline{X}$ படம் பயன்படுத்தப்படுகிறது. $\overline{X}$ படம் வரைவதற்கு பின்வரும் விவரங்களைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

1) $\overline{X}_i$: i = 1, 2 ... *n* என்ற கூறுகள் ஒவ்வொன்றின் சராசரி

2) அனைத்து கூறு சராசரிகளின் சராசரி

$$\overline{\overline{X}} = \frac{\overline{X}_1 + \overline{X}_2 + \ldots + \overline{X}_n}{n}$$

இதில் n என்பது கூறுகளின் எண்ணிக்கை

3) U.C.L. = $\overline{\overline{X}} + A_2\overline{R}$

LCL = $\overline{\overline{X}}$ - $A_2\overline{R}$, இதில் $\overline{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i}{n}$, என்பது கூறுவீச்சுகள் R_i ,இன் சராசரி ஆகும்.

n இன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கான A_2 மதிப்புகளை அட்டவணையிலிருந்து பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 25

மின் விளக்குகள் உற்பத்தி செய்யப்படும் செயல்பாட்டில் ஒரு மணிக்கு ஒரு மின் விளக்கு வீதம் 6 மின்விளக்குகள் எடுக்கப்படுகின்றன. இதேபோல் 10 கூறுகள் எடுக்கப்படுகின்றன. பின்வரும் விவரங்கள் அவற்றின் பயன்பாட்டுக் காலத்தை (மணியில்) குறிக்கின்றன எனில் $\overline{X}$ மற்றும் R படங்கள் வரைந்து அதிலிருந்து உன் முடிவுகளைக் குறிப்பிடுக.

கூறு எண்	பயன்பாட்டு காலம் (மணியில்)					
1	620	687	666	689	738	686
2	501	585	524	585	653	668
3	673	701	686	567	619	660
4	646	626	572	628	631	743
5	494	984	659	643	660	640
6	634	755	625	582	683	555
7	619	710	664	693	770	534
8	630	723	614	535	550	570
9	482	791	533	612	497	499
10	706	524	626	503	661	754

(**n = 6** எனில் **A_2 = 0.483, D_3 = 0, D_4 = 2.004** என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

தீர்வு :

கூறுகள்	கூடுதல்	கூறு சராசரி $\overline{X}$	கூறு வீச்சு R
1	4086	681	118
2	3516	586	167
3	3906	651	134
4	3846	641	171
5	4080	680	490
6	3834	639	200
7	3990	665	236
8	3622	604	188
9	3414	569	309
10	3774	629	251
கூடுதல்		6345	2264

மத்தியக்கோடு $\overline{\overline{X}}$ = கூறுகளின் சராசரிகளின் சராசரி = **634.5**

$\overline{R}$ = கூறுகளின் வீச்சுகளின் சராசரி = **226.4**

$$U.C.L. = \overline{\overline{X}} + A_2\overline{R}$$
$$= 634.5 + 0.483 \times 226.4$$
$$= 634.5 + 109.35 = 743.85$$
$$L.C.L. = \overline{\overline{X}} - A_2\overline{R}$$
$$= 634.5 - 0.483 \times 226.4$$
$$= 634.5 - 109.35 = 525.15$$

மத்தியக் கோடு

$$\overline{R} = 226.4$$
$$U.C.L. = D_4\overline{R} = 2.004 \times 226.4$$
$$= 453.7056$$
$$L.C.L. = D_3\overline{R} = 0 \times 226.4 = 0$$

தீர்வு :

R படத்தில் கூறுவீச்சுகளின் ஒரு புள்ளி UCLக்கு வெளியில் உள்ளது. எனவே செயல்பாடு கட்டுப்பாட்டில் இல்லை

எடுத்துக்காட்டு 26

ஒவ்வொன்றும் அளவு 5 உள்ள பத்து கூறுகளின் சராசரி மற்றும் வீச்சுகள் பற்றிய விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. சராசரி மற்றும் வீச்சு படங்களுக்கான மத்தியக் கோடு மற்றும் கட்டுப்பாட்டுக் கோடுகளின் எல்லைகளைக் கண்டு செயல்பாடு கட்டுப்பாட்டில் உள்ளதா என்று கண்டுபிடி.

கூறுகள்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
சராசரி $\overline{X}$	11.2	11.8	10.8	11.6	11.0	9.6	10.4	9.6	10.6	10.0
வீச்சு (R)	7	4	8	5	7	4	8	4	7	9

($n = 5$, எனில் $A_2 = 0.577$, $D_3 = 0$, $D_4 = 2.115$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

தீர்வு :

$\overline{X}$ படத்தில் கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள்

$$\overline{\overline{X}} = \frac{1}{n}\sum \overline{X}$$

$$= \frac{1}{10}(11.2 + 11.8 + 10.8 + ... + 10.0) = 10.66$$

$$\overline{R} = \frac{1}{n}\sum R = \frac{1}{10}(63) = 6.3$$

$$U.C.L = \overline{\overline{X}} + A_2\overline{R}$$
$$= 10.66 + (0.577 \times 6.3) = 14.295$$

$$L.C.L = \overline{\overline{X}} + A_2\overline{R}$$
$$= 10.66 - (0.577 \times 6.3) = 7.025$$

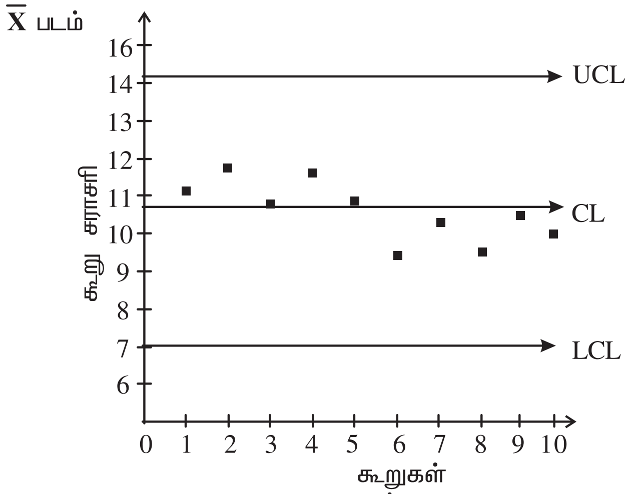
$$CL = \text{மத்தியகோடு} = \overline{\overline{X}} = 10.66$$

வீச்சு படம்

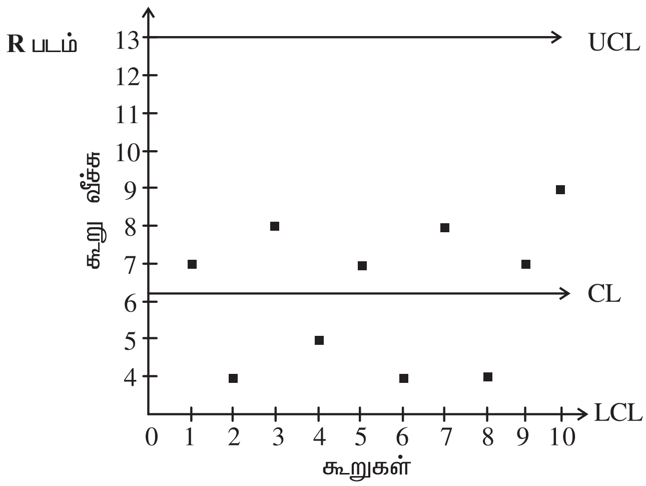
$$U.C.L = D_4\overline{R} = 2.115 \times 6.3 = 13.324$$

$$L.C.L = D_3\overline{R} = 0$$

$$C.L = \overline{R} = 6.3$$



(படம் 10.12)



(படம் 10.13)

முடிவு :

கூறுகளின் சராசரிகள் மற்றும் வீச்சுகளின் அனைத்து புள்ளிகளும் தரக்கட்டுப்பாட்டு எல்லைகளுக்குள்ளேயே இருப்பதால் செயல்பாடு கட்டுப்பாட்டில் உள்ளது எனக் கூறலாம்.

பயிற்சி 10.5

1) பின்வருவன 5 பதிவுகளுடைய 20 கூறுகளின் $\overline{X}$ மற்றும் R மதிப்புகள் ஆகும். $\overline{X}$ மற்றும் R படங்களை வரைந்து முடிவுகளைத் தருக.

கூறுகள்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\overline{X}$	34	31.6	30.8	33	35	33.2	33	32.6	33.8	37.8
(R)	4	4	2	3	5	2	5	13	19	6

கூறுகள்	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\overline{X}$	35.8	38.4	34	35	38.8	31.6	33	28.2	31.8	35.6
(R)	4	4	14	4	7	5	5	3	9	6

(n = 5 எனில், $A_2 = 0.58$, $D_3 = 0$, $D_4 = 2.12$)

பயிற்சி 10.6

ஏற்புடைய விடையைத் தெரிவு செய்க.

1) காலம்சார் தொடர் வரிசை என்கிற தொகுப்பு விவரங்கள் பதிவு செய்யப்படுவது

(a) காலவரம்பிற்கேற்ப (b) சமகால இடைவெளியில்

(c) தொடர்ச்சியான காலப் புள்ளிகளில் (d) மேற்கண்ட அனைத்தும்

2) காலம் சார் தொடர் வரிசையில் இருப்பது

(a) இரண்டு கூறுகள் (b) மூன்று கூறுகள்

(c) நான்கு கூறுகள் (d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

3) நீண்ட கால மாறுபாட்டுடன் தொடர்புடைய காலம்சார் தொடர் வரிசையின் ஒரு கூறு பின்வருமாறு அழைக்கப்படுகிறது

(a) சுழற்சி மாறுபாடு (b) நீள்கால போக்கு

(c) சீரற்ற மாறுபாடு (d) மேற்கண்டவை அனைத்தும்

4) குறுகிய கால ஏற்ற இறக்கங்களைக் கொண்ட காலம்சார் தொடர் வரிசையின் ஒரு கூறு என்பது

(a) பருவகால மாறுபாடு (b) சுழற்சி மாறுபாடு

(c) சீரற்ற மாறுபாடு (d) மேற்கண்டவை அனைத்தும்

5) காலம்சார் தொடர் வரிசையில் சுழற்சி மாறுபாடுகள் ஏற்படுவதற்கான காரணம்

(a) ஒரு தொழிற்சாலையில் கதவடைப்பு (b) ஒரு நாட்டில் நடக்கும் போர்

(c) ஒரு நாட்டில் ஏற்படும் வெள்ளம் (d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

6) அபிவிருத்தி, பின்னிறக்கம், வீழ்ச்சி மற்றும் மீட்சி ஆகியவை குறிப்பாக இதனோடு தொடர்புடையது

(a) சுழற்சி மாறுபாடு (b) பருவ மாறுபாடு

(c) சுழற்சி அசைவுகள் (d) சீரற்ற மாறுபாடு

7) கூறுகள் T, S, C மற்றும் I இவற்றைக் கொண்ட கூட்டு வடிவமைப்பு

(a) Y = T + S + C - I (b) Y = T + S X C + I

(c) Y = T + S + C + I (d) Y = T + S + C X I

8) நவம்பர் முதல் மார்ச் வரையிலான காலத்தில் ஐஸ் கிரீம் விற்பனை அளவின் வீழ்ச்சி இதனோடு தொடர்பு கொண்டதாகும்.

(a) பருவ மாறுபாடு (b) சுழற்சி மாறுபாடு

(c) சீரற்ற மாறுபாடு (d) நீள்கால போக்கு

9) குறியீட்டு எண் என்பது

(a) ஒப்பீட்டு மாறுதல்களின் அளவை (b) சராசரியின் ஒரு சிறப்பு வகை

(c) விழுக்காட்டின் ஒப்பீடு (d) மேற்கண்டவை அனைத்தும்

10) குறியீட்டு எண்கள் விவரிக்கப்படுவது

(a) விழுக்காடுகளில் (b) விகிதங்களில்

(c) திசையிலா எண் மதிப்புகளில் (d) மேற்கண்டவை அனைத்தும்

11) பெரும்பான்மையாக பயன்படுத்தப்படும் குறியீட்டு எண்கள்

(a) பரவல் குறியீட்டு எண் (b) விலை குறியீட்டு எண்

(c) மதிப்பு குறியீட்டு எண் (d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

12) அதிக அளவில் பயன்படுத்தப்படும் குறியீட்டு எண்களின் சூத்திரங்கள்

(a) நிறையிட்ட சூத்திரங்கள் (b) நிறையிடா சூத்திரங்கள்

(c) நிலையான எடையுடைய சூத்திரங்கள் (d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

13) லாஸ்பியரின் குறியீட்டு எண்ணில் பயன்படுத்தப்படும் எடைகள்

(a) அடிப்படை ஆண்டின் அளவுகள் (b) நடப்பு ஆண்டின் அளவுகள்

(c) பல ஆண்டுகளின் அளவுகளின் சராசரி (d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

14) பாசியின் குறியீட்டு எண்ணில் பயன்படும் எடைகள்

(a) அடிப்படை ஆண்டைச் சேர்ந்தவை (b) கொடுக்கப்பட்ட ஆண்டைச் சேர்ந்தவை

(c) ஏதேனும் ஒரு ஆண்டைச் சேர்ந்தவை (d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

15) ஒரு தொழிற்சாலையில் உற்பத்தி செய்யப்படும் பொருள்களின் மாறுபாடுகளுக்கு இவை காரணமாகும்

(a) தற்செயல் மாறுபாடுகள் (b) குறிப்பிட்ட மாறுபாடுகள்

(c) (a) மற்றும் (b) இரண்டும் (d) (a) மற்றும் (b) இல்லை

16) உற்பத்தி செய்யப்படும் பொருள்களில் காணப்படும் தற்செயல் காரணங்களால் ஏற்படும் மாறுபாடுகள்

(a) கட்டுபடுத்தக் கூடியன (b) கட்டுப்படுத்த முடியாதவை

(c) (a) மற்றும் (b) இரண்டும் (d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

17) உற்பத்தி பொருள்களின் தர நியதிகளில் ஏற்படும் பெறுமம் மாறுபாடுகளுக்கு பொதுவான காரணம்

(a) சமவாய்ப்பு செயல்பாடுகள் (b) குறிப்பிட்ட காரண விளைவுகள்

(c) கண்டுபிடிக்க முடியாத காரண விளைவுகள் (d) மேற்கண்ட அனைத்தும்

18) உற்பத்தி பொருள்களில் குறிப்பிட்ட காரணங்களால் ஏற்படும் மாறுபாடுகளுக்கு காரணம்

(a) தவறான செயல்பாடு (b) இயக்குபவர்களின் அலட்சியத் தன்மை

(c) கச்சா பொருட்களின் தரக்குறைவு (d) மேற்கண்ட அனைத்தும்

19) தரக் கட்டுப்பாட்டு படங்கள்

(a) மூன்று கட்டுப்பாட்டுக் கோடுகளைக் கொண்டது

(b) மேல் மட்டும் கீழ் கட்டுப்பாட்டு எல்லைகளைக் கொண்டது

(c) செயல்பாட்டின் எல்லைகளைக் கொண்டது

(d) மேற்கண்ட அனைத்தும்

20) ஒட்டுறவுக் கெழுவின் எல்லைகள்

(a) 0 இல் இருந்து ∞ வரை (b) $-\infty$ இல் இருந்து ∞ வரை

(c) -1இல் இருந்து 1 வரை (d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

21) X மற்றும் Y என்பன இரு மாறிகளெனில் அதிக பட்சம் இருக்கக் கூடியது

(a) ஒரு தொடர்பு போக்குக் கோடு (b) இரு தொடர்பு போக்குக் கோடுகள்

(c) மூன்று தொடர்பு போக்குக் கோடுகள் (d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

22) Xஇன் மீது Yஇன் தொடர்பு போக்குக் கோட்டில் X என்பது

(a) சாரா மாறி (b) சார்புடைய மாறி

(c) (a) மற்றும் (b) (d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

23) (X, Y) என்ற மாறிகளின் சிதறல் படம் குறிப்பது

(a) அவற்றின் சார்புத் தொடர்பு (b) தொடர்பு போக்கு வடிவமைப்பு

(c) பிழைகளின் பரவல் (d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

24) தொடர்பு போக்குக் கோடுகள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி

(a) (X, Y) (b) $(\overline{X}, \overline{Y})$

(c) (0, 0) (d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

25) தொடர்பு போக்கு என்ற சொல்லை அறிமுகப்படுத்தியவர்

(a) R.A.பிஷர் (b) சர் ஃபிரான்சிஸ் கல்பான்

(c) கால் பியர்சன் (d) இவர்களில் எவரும் இல்லை

விடைகள்

அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகள்

பயிற்சி 1.1

1) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 8) $\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

9) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 10) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

11) $\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} \end{pmatrix}$ 13) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 10 \\ 1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$

18) 4, –2 19) –1, 0 20) $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

பயிற்சி 1.2

1) (i) 3 (ii) 2 (iii) 1 (iv) 3 (v) 2 (vi) 3 (vii) 1 (viii) 2 (ix) 2

2) 2, 0. 6) ஒப்புமைத் தன்மை அற்றவை

11) $k = -3$

12) k ஆனது 0 அல்லாத ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண்

13) $k = -3$

14) k ஆனது 8 அல்லாத ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண்

பயிற்சி 1.3

1) 2, 1 2)0, 1, 1 3) 5, 2 4) 2, -1, 1

5) 0, 2, 4 6) 20, 30 7) ரூ.2, ரூ.3, ரூ.5.

8) ரூ.1, ரூ.2, ரூ.3 9) 11 டன்கள், 15 டன்கள், 19 டன்கள்

பயிற்சி 1.4

1) செயல்படும் வகையில் உள்ளது
2) செயல்படும் வகையில் இல்லை
3) 110 அலகுகள், 320 அலகுகள்
4) ரூ.72 மில்லியன், ரூ.96 மில்லியன்
5) (i) ரூ.42 இலட்சங்கள், ரூ.78 இலட்சங்கள் (ii) ரூ.28 இலட்சங்கள், ரூ.52 இலட்சங்கள்
6) ரூ.80 மில்லியன்கள், ரூ.120 மில்லியன்கள்
7) ரூ.1200 கோடி, ரூ.1600 கோடி
8) ரூ.7104 கோடி, ரூ.6080 கோடி

பயிற்சி 1.5

1) 74.8%, 25.2% ; 75%, 25% 2) 39% 3) 54.6%, 45.4%

பயிற்சி 1.6

1) c 2) b 3) c 4) c 5) a 6) a 7) b 8) b 9) b 10) c 11) a 12) a
13) a 14) a 15) a 16) b 17) d 18) b

பகுமுறை வடிவ கணிதம்

பயிற்சி 2.1

1) பரவளையம் 2) அதிபரவளையம் 3) நீள்வட்டம்

பயிற்சி 2.2

1) (i) $x^2 + y^2 - 2xy - 4y + 6 = 0$

(ii) $x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4y + 4 = 0$

(iii) $4x^2 + 4xy + y^2 - 4x + 8y - 4 = 0$

(iv) $x^2 + 2xy + y^2 - 22x - 6y + 25 = 0$

2) (i) $(0, 0), (0, 25), x = 0, y + 25 = 0$

(ii) $(0, 0), (5, 0), y = 0, x + 5 = 0$

(iii) $(0, 0), (-7, 0), y = 0, x - 7 = 0$

(iv) $(0, 0), (0, -15), x = 0, y + 15 = 0$

3) (i) $\left(-\frac{1}{2}, 1\right), \left(-\frac{3}{2}, 1\right),\ 2x - 1 = 0, 4$

(ii) $(-1, -1), (0, -1), x + 2 = 0, 4$

(iii) $\left(-\frac{9}{8}, 0\right), \left(\frac{7}{8}, 0\right), 8x + 25 = 0, 8$

(iv) $(0, 1), \left(0, \frac{-7}{4}\right), 4y - 1 = 0, 3$

4) 15 டன்கள், ரூ. 40

பயிற்சி 2.3

1) (i) $101x^2 + 48xy + 81y^2 - 330x - 324y + 441 = 0$

(ii) $27x^2 + 20y^2 - 24xy + 6x + 8y - 1 = 0$

(iii) $17x^2 + 22y^2 + 12xy - 58x + 108y + 129 = 0$

2) (i) $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{128} = 1$ (ii) $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{15} = 1$

(iii) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

3) (i) $(0, 0), (0, \pm 3)\ ;\ \frac{\sqrt{5}}{3}\ ;\ (0, \pm\sqrt{5})\ ;\ \frac{8}{3}$

(ii) $(1, -5), (1, \pm\sqrt{7} - 5)\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\ ;\ (1, \pm\sqrt{3} - 5)\ ;\ \frac{8}{\sqrt{7}}\ ;\ y = \frac{7}{\sqrt{3}} - 5, y = \frac{-7}{\sqrt{3}} - 5.$

(iii) $(-2, 1), (2, 1); (-6, 1))\ ;\ \frac{\sqrt{7}}{4}\ ;\ (\pm\sqrt{7} - 2, 1)\ ;\ \frac{9}{2}; x = \frac{16}{\sqrt{7}} - 2, x = \frac{-16}{\sqrt{7}} - 2.$

பயிற்சி 2.4

1) (i) $19x^2 + 216xy - 44y^2 - 346x - 472y + 791 = 0$

(ii) $16(x^2 + y^2) = 25(x \cos\alpha + y \sin\alpha - p)^2$

2) $12x^2 - 4y^2 - 24x + 32y - 127 = 0$

3) (i) $16x^2 - 9y^2 - 32x - 128 = 0$

(ii) $3x^2 - y^2 - 18x + 4y + 20 = 0$

(iii) $3x^2 - y^2 - 36x + 4y + 101 = 0$

4) (i) $(0, 0)$; $\frac{5}{4}$; $(\pm 5, 0)$; $5x \pm 16 = 0$

(ii) $(-2, -4)$; $\frac{4}{3}$; $(2, -4), (-6, -4)$; $4x - 1 = 0, 4x + 17 = 0$

(iii) $(1, 4)$; 2 ; $(6, 4), (-4, 4)$; $4x - 9 = 0, 4x + 1 = 0$

5) (i) $3x + y + 2 = 0, \quad x - 2y + 5 = 0$;

(ii) $4x - y + 1 = 0, \quad 2x + 3y - 1 = 0$

6) $4x^2 - 5xy - 6y^2 - 11x + 11y + 57 = 0$

7) $12x^2 - 7xy - 12y^2 + 31x + 17y = 0$

பயிற்சி 2.5

1) a 2) b 3) c 4) d 5) c 6) a 7) c 8) b 9) b 10) a 11) b 12) c

13) b 14) b 15) a 16) c 17) a 18) c 19) c 20) c

வகையீட்டின் பயன்பாடுகள் - I

பயிற்சி 3.1

1) (i) $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 25 + \frac{8}{x}$ (ii) $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 25$

(iii) $\frac{8}{x}$, AC = ரூ.35.80, AVC = ரூ.35, AFC = ரூ.0.80

2) ரூ.600.05 3) ரூ.5.10 4) ரூ.1.80 5) ரூ.1.50, ரூ.1406.25

6) (i) $\frac{1}{10}x^2 - 4x + 8 + \frac{4}{x}$ (ii) $\frac{3}{10}x^2 - 8x + 8$ (iii) $\frac{1}{5}x - 4 - \frac{4}{x^2}$

7) ரூ.55, ரூ.23 8) ரூ.119 10) 0.75 11) 1.15

13) (i) $\frac{2(a-bx)}{bx}$ (ii) $\frac{3}{2}$ 14) m 15) $\frac{4p^2}{2p^2+5}$ 16) $\frac{p}{2(p-6)}$

17) AR = p, MR = $550 - 6x - 18x^2$

18) (i) $R = 20{,}000\, x\, e^{-0.6x}$ (ii) $MR = 20{,}000\, x\, e^{-0.6x}\,[1 - 0.6x]$

19) $\frac{4p+2p^2}{30-4p-p^2}, \frac{3p^2+8p-30}{2(p+2)}$

20) 20, 3 21) ரூ.110 22) $\frac{30}{11}$, ரூ. 1.90

பயிற்சி 3.2

1) – 1.22, – 1.25 2) – 1 அலகு/வினாடி 3) 12 அலகு/வினாடி

5) (i) வருமானம் மாதத்திற்கு ரூ.40,000 வீதம் கூடுகிறது.

(ii) செலவு மாதத்திற்கு ரூ.4,000 வீதம் கூடுகிறது.

(iii) இலாபம் மாதத்திற்கு ரூ.36,000 வீதம் கூடுகிறது.

6) (i) வருமானம் வாரத்திற்கு ரூ.48,000 வீதம் கூடுகிறது.

(ii) செலவு வாரத்திற்கு ரூ.12,000 வீதம் கூடுகிறது.

(iii) இலாபம் வாரத்திற்கு ரூ.36,000 வீதம் கூடுகிறது.

8) 10π செ.மீ ^{2} / வினாடி 9) 115π செ.மீ ^{3} / நிமிடம் 10) $x = \frac{1}{3}, 3$

பயிற்சி 3.3

1) $\frac{10}{3}, \frac{-13}{5}$ 2) $a = 2, b = 2$

4) (i) $x - y + 1 = 0, x + y - 3 = 0$

(ii) $2x - 2y + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} = 0 ; 2x + 2y - \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} = 0$

(iii) $3x + 2y + 13 = 0 ; 2x - 3y = 0$

(iv) $9x + 16y - 72 = 0; 64x - 36y - 175 = 0$

(v) $3ex - y - 2e^2 = 0; x + 3ey - 3e^3 - e = 0$

(vi) $\sqrt{2}\,bx + \sqrt{2}\,ay - 2ab = 0$; $\sqrt{2}\,ax - \sqrt{2}\,by - a^2 + b^2 = 0$

5) $13x - y - 34 = 0; x + 13y - 578 = 0$

6) $10x + y - 61 = 0; x - 10y + 105 = 0$

7) $\left(1, \frac{1}{3}\right), \left(-1, \frac{-1}{3}\right)$ 9) $x - 20y - 7 = 0; 20x + y - 140 = 0$

11) $\frac{x}{a}\sec\theta - \frac{y}{b}\tan\theta = 1$; $\frac{ax}{\sec\theta} + \frac{by}{\tan\theta} = a^2 + b^2$

12) (i) (1, 0) மற்றும் (1, 4) (ii) (3, 2) மற்றும் (–1, 2)

பயிற்சி 3.4

1) d 2) c 3) a 4) a 5) b 6) c 7) d 8) d 9) b 10) a

11) d 12) a 13) b 14) c 15) b 16) d 17) c 18) a 19) a 20) c

வகையீட்டின் பயன்பாடுகள்-II

பயிற்சி 4.1

3) $(-\infty, -5)$ மற்றும் $\left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$ இல் கூடும், $\left(-5, -\frac{1}{3}\right)$ இல் குறையும்

4) (-2, 27), (1, 0)

5) (i) R என்பது $0 < x < 4$ இல் கூடும், $x > 4$ க்கு குறையும். MR என்பது $0 < x < 2$ இல் கூடும் $x > 2$ க்கு குறையும்

(ii) R என்பது $1 < x < 7$ இல் கூடும், $0 < x < 1$ மற்றும் $x > 7$ இல் குறையும். MR என்பது $0 < x < 4$ மற்றும் $x > 4$ இல் குறையும்

6) (i) TC, $0 < x < 10$, $x > 20$ இல் கூடுகிறது. $10 < x < 20$. MC, $0 < x < 15$ இல் குறைகிறது $x > 15$ இல் கூடுகிறது.

(ii) TC, $0 < x < 40$ இல் கூடுகிறது. $x > 40$ இல் குறைகிறது. MC எப்பொழுதும் குறைகிறது.

7) (i) $x = 0$ இல் பெரும மதிப்பு = 7, $x = 4$ இல் சிறும மதிப்பு = –25

(ii) $x = 1$ இல் பெரும மதிப்பு = –4, $x = 4$ இல் சிறும மதிப்பு = –31

(iii) $x = 2$ இல் சிறும மதிப்பு = 12

(iv) $x = 1$ இல் பெரும மதிப்பு = 19, $x = 3$ இல் சிறும மதிப்பு = 15

8) $x = 1$ இல் பெரும மதிப்பு = 53, $x = -1$ இல் சிறும மதிப்பு = –23. 9) (0, 3), (2, -9)

11) $\frac{1}{2} < x < 1$ மேல்நோக்கி குவிவாகவும் $-\infty < x < \frac{1}{2}$ மற்றும் $1 < x < \infty$ இல் கீழ்நோக்கி குவிவாகவும் உள்ளது.

12) q = 3.

13) $x = 1$ இல் பெரும மதிப்பு = 0

$x = 3$ இல் சிறும மதிப்பு = – 28

$x = 0$ இல் வளைவு மாற்றப் புள்ளி

பயிற்சி 4.2

1) $x = 15$ 2) 15, 225 4) $x = 5$ 5) 1, $\frac{3}{2}$

6) $x = 8$ 7) (i) 10.5, ரூ.110.25 (ii) 3, 0 (iii) $x = 6$

8) $x = 60$ 9) ரூ.1600 10) $x = 70$ 11) $x = 13$

12) A : 1000, B : 1800, C : 1633

13) A : 214.476, ரூ.21.44, B : 67.51, ரூ.58.06 C : 2000, ரூ.4, D : 537.08, ரூ.27.93

14) (i) 400 (ii) ரூ.240 (iii) $\frac{3}{2}$ கோருதல்/ஆண்டு (iv) ஓர் ஆண்டின் $\frac{2}{3}$ பாகம்

15) (i) 800 (ii) ஓர் ஆண்டின் $\frac{1}{4}$ பாகம் (iii) 4 (iv) ரூ.1200

பயிற்சி 4.3

1) $8x + 6y; 6x - 6y$

3) (i) $24x^5 + 3x^2y^5 - 24x^2 + 6y - 7$

(ii) $5x^3y^4 + 6x + 8$

(iii) $120x^4 - 48x + 6xy^5$

(iv) $20x^3y^3$

(v) $15x^2y^4 + 6$

(vi) $15x^2y^4 + 6$

4) (i) $30x^4y^2 + 8x + 4$ (ii) 500

(iii) $12x^5y - 24y^2 + 6$ (iv) – 90

(v) $120x^3 y^2 + 8$ (vi) 968

(vii) $12x^5 - 48y$ (viii) 12

(ix) $60x^4y$ (x) 2880 (xi) 2880

14) (i) 940 (ii) 700

15) நோட்டுப் புத்தகம் (16) (i) ரூ.18,002 (ii) ரூ.8005

பயிற்சி 4.4

1) (i) 10 - 2L + 3K, (ii) 5 - 4K + 3L (iii) 14, 0

3) 1, 4 4) 3.95, 120 5) 2.438, 3.481

7) (i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{1}{2}$ 8) $\frac{3}{5}, \frac{2}{5}$ 9) 6, 1 10) $-\frac{10}{3}, \frac{5}{6}$

பயிற்சி 4.5

1) b 2) d 3) a 4) b 5) c 6) c 7) a 8) c 9) b 10) d

11) a 12) a 13) d 14) a 15) c 16) a 17) c 18) d 19) a 20) a

தொகையீட்டின் பயன்பாடுகள்

பயிற்சி 5.1

1) 0 2) 80 3) $\frac{\pi}{2}$ 4) 2 5) $\frac{16}{15}\sqrt{2}$ 6) $\frac{1}{20}$ 7) $\frac{\pi}{12}$

8) 1 9) $\frac{\pi^2}{4}$ 10) $(a+b)\ \frac{\pi}{4}$

பயிற்சி 5.2

விடைகள் சதுர அலகுகளில் உள்ளன

1) 9 2) 6 3) $\frac{\pi}{2}$ 4) 2 5) $\frac{2}{3}$ 6) log 3

7) $\frac{8a^2}{3}$ 8) 8 9) 4log4 10) πa^2 11) πab

பயிற்சி 5.3

1) $C = 10x + 12x^2 - x^3 + 4$, $AC = 10 + 12x - x^2 + \frac{4}{x}$

2) $C = 100 (\log \frac{x}{16} + 1)$, $AC = \frac{100}{x} (\log \frac{x}{16} + 1)$

3) $C = x^3 - 5x^2 + 3x + 8$, $AC = x^2 - 5x + 3 + \frac{8}{x}$

4) $C = 5x - 3x^2 + x^3 + 100$, $AC = 5 - 3x + x^2 + \frac{100}{x}$

5) $C = 20x - 0.02x^2 + 0.001x^3 + 7000$

$AC = 20 - 0.02x + 0.001x^2 + \frac{7000}{x}$

6) $R = 15x - \frac{9x^2}{2} - x^3$, $AR = 15 - \frac{9x}{2} - x^2$

7) $R = 9x - x^2 + \frac{4x^3}{3}$, $p = 9 - x + \frac{4x^2}{3}$

8) $R = 100x - 3x^3$, $p = 100 - 3x^2$

9) $R = 2x + 2x^2 - \frac{x^3}{3}$, $p = 2 + 2x - \frac{x^2}{3}$

10) $R = 4x - \frac{3x^2}{2}$, $p = 4 - \frac{3x}{2}$

11) $p = 3 - x$, $R = 3x - x^2$

12) $p = 5 - \frac{x^2}{2}$, $R = 5x - \frac{x^3}{2}$

13) $p = \frac{k}{x}$, k ஒரு மாறிலி.

14) $C = 2x + e^{3x} + 500$, $AC = 2 + \frac{e^{3x}}{x} + \frac{500}{x}$

15) $R = -\frac{3}{x} - \log x^2 + 9$, $p = -\frac{3}{x^2} - \frac{\log x^2}{x} + \frac{9}{x}$

16) $R = 16x - \frac{x^3}{3}$, $p = 16 - \frac{x^2}{3}$ 17) $13x - 0.065x^2 - 120$

18) R = ரூ.4,31,667

பயிற்சி 5.4

விடைகள் அலகுகளில் உள்ளன.

1) 27 2) $\frac{250}{3}$ 3) (i) 16 (ii) 4

4) 216 5) 128 6) $\frac{10}{3}$ 7)) (i) $\frac{9}{2}$

(ii) 18 8) $\frac{8}{3}$ 9) 9 ; 18

10) 18 ; 36 11) 144 ; 48

12) $\frac{63}{2}$; $\frac{9}{2}$ 13) $\frac{16}{3}$; 32

14) 50 ; 15 15) 16 log2 – 8 ; 4

பயிற்சி 5.5

1) (c)	2) (a)	3) (a)	4) (b)	5) (a)	6) (a)
7) (a)	8) (b)	9) (a)	10) (b)	11) (c)	12) (a)
13) (b)	14) (a)	15) (a)	16) (a)	17) (a)	18) (b)

வகைக்கெழு சமன்பாடுகள்

பயிற்சி 6.1

1) (i) 2 மற்றும் 1 (ii) 3 மற்றும் 1 (iii) 2 மற்றும் 2 (iv) 2 மற்றும் 1

(v) 2 மற்றும் 3 (vi) 2 மற்றும் 1 (vii) 2 மற்றும் 3 (viii) 2 மற்றும் 1

(ix) 2 மற்றும் 1 (x) 2 மற்றும் 2

2) (i) $x\frac{dy}{dx} - y = 0$ (ii) $y = x\left(\frac{dy}{dx}\right) - \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

(iii) $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} + a = 0$ (iv) $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

3) $x\frac{dy}{dx} + y = 0$ 4) $2xy\frac{dy}{dx} + x^2 - y^2 = 0$ 5) $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0$

6) $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$ 7) $y\frac{dy}{dx} + x = 0$

பயிற்சி 6.2

1) (i) $\sin^{-1}y + \sin^{-1}x = c$ (ii) $y - x = c\,(1 + xy)$ (iii) $y + 2 = c\,(x - 1)$

2) $\tan y = c\,(1 - e^x)^3$ 3) (i) $\log(y + a) = x^2 + c$ (ii) $(x^2 + 1)(y^2 + 1) = c^2$

4) $y = x^3 + 2x - 4$ 5) $y = x^2$

6) செலவுச் சார்பு $C = \frac{e^7}{3}\,(e^{3x} - 1)$

சராசரி செலவுச் சார்பு $= \frac{e^7}{3}\,\frac{e^{3x} - 1}{x}$

பயிற்சி 6.3

1) (i) $\frac{x}{y} = \log x + c$ (ii) $\frac{y + x}{y} = c\sqrt{x}$ (iii) $\frac{y}{x}\left(\frac{y}{x} - 1\right)x^3 = c$ (iv) $\log y + \frac{x^2}{2y^2} = c$

2) $c^2 = q^2 + 6q$ 3) $y^2 = 12x^2 - \frac{128}{x^2}$

பயிற்சி 6.4

1) (i) $y \sin x = x + c$ (ii) $y \sin x = 2x^2 - \frac{\pi^2}{2}$ (iii) $\frac{y}{x^3} = \frac{-1}{x} + c$

(iv) $y(1+x^2) = \tan^{-1} x - \frac{\pi}{4}$ (v) $y \cos x = e^x + c$ (vi) $y \log x = -\frac{\cos 2x}{2} + c$

2) Rs,13,720 3) $cq = \frac{a}{2}(q^2 - {q_0}^2) + c_0 q_0$

பயிற்சி 6.5

1) (i) $y = Ae^{4x} + Be^{6x}$ (ii) $y = A + Be^{-x}$ (iii) $y = A \cos 2x + B \sin 2x$ (iv) $y = (Ax + B)e^{-2x}$

2) (i) $y = Ae^{\frac{2}{3}x} + Be^{-3x}$ (ii) $y = (Ax+B)\, e^{\frac{3}{2}x}$ (iii) $y = e^{\frac{1}{6}x}\left(A\cos \frac{\sqrt{11}}{6} x + B \sin \frac{\sqrt{11}}{6} x\right)$

3) (i) $y = Ae^{12x} + Be^{x} + \frac{1}{42} e^{-2x} - \frac{5}{11} x e^{x}$ (ii) $y = Ae^{2x} + Be^{3x} + \frac{e^{-x}}{12} + \frac{3}{20} x e^{-2x}$

(iii) $y = (Ax+B)e^{7x} + \frac{3}{49} + \frac{x^2}{2} e^{7x}$ (iv) $y = Ae^{\frac{-x}{5}} + e^{\frac{x}{3}}(B + \frac{x}{8})$

4) $P = Ae^{-4t} + Be^{2t} + 3$

பயிற்சி 6.6

1) a 2) c 3) b 4) b 5) c 6) a 7) c 8) a 9) b 10) c 11) a 12) c

13) c 14) a 15) d 16) a 17) c 18) a 19) b 20) c

இடைச்செருகல் மற்றும் நேர்க்கோடு பொருத்துதல்

பயிற்சி 7.1

1) 33	2) 41 இலட்சங்கள்	3) 7	4) 18	5) 384 டன்கள்
6) 56.8672	7) 12.7696	8) 147411.99	9) 7237.87	10) 262.75
11) 124.1568	12) 478.625	13) 19	14) 32.93	

பயிற்சி 7.2

3) $y = x + 6.66$ 4) 4 ; – 3 5) $y = 0.38x + 1.65$ 6) $y = 1.19x + 0.66$

7) $y = 0.0041x + 0.048$ 8) $y = 1.33x + 0.72$; $y = 5.375$ 9) $y = 1.125x + 38$

10) $y = 1.48x + 1.26$ 11) $y = 3.14x + 27.34$; $y = 81$ (தோராயமாக)

பயிற்சி 7.3

1) c 2) b 3) a 4) b 5) c 6) a 7) c 8) c 9) b 10) c

நிகழ்தகவு பரவல்கள்

பயிற்சி 8.1

1) (ii) மற்றும் (iii) 2) ஆம் 3) (i) $\frac{1}{81}$; (ii) $\frac{9}{81}, \frac{65}{81}, \frac{24}{81}$

4) (i) ஆம்

(ii)$F(x) \begin{cases} 0 \text{ if } x < 1 \\ \frac{1}{3} \text{ if } 1 \le x < 2 \\ 1 \text{ if } x \ge 2 \end{cases}$

5) 1 6) (a) $\frac{1}{2}$; (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{3}{4}$

7) (i) $\frac{1}{4}$

(ii) $F(x) \begin{cases} \frac{1}{16} \text{ if } 0 \le x < 1 \\ \frac{7}{16} \text{ if } 0 \le x < 2 \\ \frac{11}{16} \text{ if } 0 \le x < 3 \\ 1 \text{ if } x \ge 3 \end{cases}$

8) $k = 0.003$; (i) 0.00012 ; (ii) 0.027 9) 1

10) (i) $\frac{1}{2}$; (ii) $\frac{1}{2}$ 11) 2000

12) (i) 0.3935 (ii) 0.1481 (iii) 0.2231

பயிற்சி 8.2

1) 2.50 2) 7 3) 1.25 4) 3.4 5) – 6.5, 6 6) 0 ; 4 ; 2

7) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$

பயிற்சி 8.3

1) $\frac{176}{1024}$ 2) 0.2 3) $n = 9, p = \frac{2}{3}, q = \frac{1}{3}$

4) 0.544320 5) 0.345 6) 0.762 7) 0.264 8) 0.0008

9) (i) 0.04979 (ii) 0.14937 10) 0.4060

பயிற்சி 8.4

1) (i) 0.0035 (ii) 0.9582 2) (i) 0.0581 (ii) 0.1519 3) 0.1587

4) 0 5) 125 6) (i) 123 (ii) 341

7) 66.01 8) $\mu = 50, \sigma = 10$ 9) $\mu = 50.09, \sigma = 19.4$

பயிற்சி 8.5

1) b 2) a 3) c 4) a 5) c 6) b 7) b 8) b 9) c 10) a 11) b 12) c

13) b 14) c 15) c

கூறெடுப்பு உத்திகள் மற்றும் புள்ளியியல் உய்த்துணர்தல்

பயிற்சி 9.1

1) (a) 6.35 மிமீ ; (b) 0.00055 மிமீ^{2} 2) (a) (0.818, 0.829) ; (b) (0.816, 0.832)

3) சராசரி இலாபம் 72.6 இலட்சத்திற்கும் மற்றும் 77.4 இலட்சத்திற்கும் இடையில் இருக்கும்

4) சராசரி மதிப்பெண்கள் 72.6க்கும் மற்றும் 77.4 க்கு இடையில் இருக்கும்.

5) குறைபாடுள்ள பொருள்களின் எண்ணிக்கை 1230க்கும் மற்றும் 2270க்கும் இடையில் இருக்கும்.

6) (a) 45% மற்றும் 65% ; (b) 42% மற்றும் 68%

பயிற்சி 9.2

1) H_0 : குறிப்பிடப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியில் இருந்து எடுக்கப்பட்ட கூறு ; $|Z| = 2.67$, H_0 ஆனது நிராகரிக்கப்பட்டது.

2) H_0 : குறிப்பிடப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியில் இருந்து எடுக்கப்பட்ட கூறு ; 5% மட்டத்தில், $|Z| = 2.2$; H_0 ஆனது நிராகரிக்கப்பட்டது.

1% மட்டத்தில், $| Z | = 2.2$; H_0 ஆனது ஏற்கப்பட்டது.

3) $H_0 : \mu=10$, $| Z | = 5.91$ ஆனது 5% மட்டத்தில் நிராகரிக்கப்பட்டது.

4) $H_0 : P = 0.60$, $| Z | = 5.9$; H_0 ஆனது 1% மட்டத்தில் நிராகரிக்கப்பட்டது.

பயிற்சி 9.3

1) c 2) c 3) b 4) c 5) a 6) c 7) c

பயன்பாட்டுப் புள்ளியியல்

பயிற்சி 10.1

1) $60x_1 + 120x_2 \leq 12000$

$8x_1 + 5x_2 \leq 600$,

$3x_1 + 4x_2 \leq 500$,

$x_1 + x_2 \geq 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க

$Z = 30x_1 + 40x_2$ ன் பெரும மதிப்பைக் காண்க.

2) $x_1 + x_2 \leq 450$,

$2x_1 + x_2 \leq 600$,

$x_1, x_2 \geq 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க

$Z = 3x_1 + 4x_2$ ன் பெரும மதிப்பைக் காண்க.

3) $x_1 = 24, x_2 = 14, Z = 2200$

4) $x_1 = 2.5, x_2 = 3.5, Z = 147.5$

5) $x_1 = 1, x_2 = 5, Z = 13$

பயிற்சி 10.2

1) 0.9485 2) 0.2555 3) 0.7689 4) – 0.9673 5) 0.3566

6) $y = -0.65x + 11.90$; $x = -1.30y + 16.40$

7) $x = y + 6$, $x = 26$

8) $y = 0.5932x + 38.79$; $x = 0.7954y + 13.34$

9) $y = 0.25x + 24.75$; $x = 0.2683y + 27.88$

பயிற்சி 10.3

3) 100, 110, 120, 130, 140, 150, 160

4) 42.31, 40.94, 39.56, 38.19, 36.81, 35.44, 34.06, 32.69

5) –, 22, 23.33, 24, 23.67, 24.33, 26, 26.33, – .

6) – , 87.33, 88.33, 89.67, 92, 95, –.

7) –, –, 495.75, 503.63, 511.63, 529.50, 553, 572.50, –, –.

8) –, –, 648.125, 661.500, 674.625, 687.875, 696.375, 715.250, 735.750, –, –.

9) 105.10, 95.68, 99.35, 99.87

10) 98.4, 92.2, 108.9, 100.5

11) 98.4, 92.14, 108.9, 100.52

பயிற்சி 10.4

1) 136.54, 135.92, 136.23
2) 125, 126.21, 125.6
3) 125, 126.21, 125.6
4) 114.74, 112.73, 113.73
5) 139.79
6) 124.34
7) 119.09
8) 137.27
9) 124.41
10) 101.1

பயிற்சி 10.5

1) $\overline{\overline{X}} = 33.6, \overline{R} = 6.2$

$\overline{X}$ படம் : UCL = 37.446, LCL = 30.254

$\overline{R}$ படம் : LCL = 0, UCL = 13.14

பயிற்சி 10.6

1) d 2) c 3) b 4) d 5) d 6) c 7) c 8) a 9) d 10) a 11) d 12) a

13) a 14) b 15) c 16) d 17) b 18) d 19) a 20) c 21) b 22) a 23) a 24) b

25) b

திட்ட இயல்நிலைப் பரவல் அட்டவணை

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2258	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2996	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.3219
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.46708	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4719	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936

2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4983	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.49865	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.49903	.4990	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993129	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995166	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4996631	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998	.4998
3.5	.4997674	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998
3.6	.4998409	.4998	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.7	.4998922	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.8	.4999277	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.5000	.5000	.5000
3.9	.4999519	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000