தமிழ்நாடு அரசு

ஒன்பதாம் வகுப்பு

இரண்டாம் பருவம்

தொகுதி 2

கணக்கு

விற்பனைக்கு அன்று

தீண்டாமை மனிதநேயமற்ற செயலும் பெருங்குற்றமும் ஆகும்

தமிழ்நாடு அரசு
இலவசப்பாடநூல் வழங்கும்
திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்பட்டது

பள்ளிக் கல்வித்துறை

முதல் பதிப்பு – 2013
மறுபதிப்பு – 2014
(பொதுப் பாடத்திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்பட்ட முப்பருவ நூல்)

பாடநூல் உருவாக்கம்

மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம்

கல்லூரிச் சாலை, சென்னை – 600 006.

நூல் அச்சாக்கம்

தமிழ்நாடு பாடநூல் மற்றும் கல்வியியல் பணிகள் கழகம்

கல்லூரிச் சாலை, சென்னை – 600 006.

இந்நூல் 80 ஜி. எஸ். எம். மேப்லித்தோ தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது.

விலை : ரூ.

வெப் ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர் :

பாடநூல் வலைதளம்
www.textbooksonline.tn.nic.in

முன்னுரை

தமிழ்நாட்டில் முப்பருவக் கல்வி முறை அறிமுகப்படுத்தியது என்பது பள்ளிக் கல்வித்துறை வரலாற்றில் ஒரு மைல்கல்லாகும். இம்முறையால் ஒன்பதாம் வகுப்பு கணிதப் பாடப்பகுதிகள் மூன்றாகப் பகுக்கப்பட்டு, பருவத்திற்கு ஒரு சிறு புத்தகமாக வழங்குவதால் கணிதக் கருத்துகளை மாணவர்கள் எளிதில் புரிந்து கொள்ள இயலும். முதல் பருவத்திற்கான பாடப்புத்தகங்கள் தயாரித்து அனைத்துப் பள்ளிகளுக்கும் ஏற்கனவே வழங்கப்பட்டுள்ளன. இதில் கணவியல், மெய்யெண்கள், இயற்கணிதம், வடிவியல், ஆயத்தொலை வடிவக் கணிதம் மற்றும் செய்முறை வடிவியல் போன்ற இயல்கள் இடம் பெற்றிருந்தன. இவற்றுள் கணவியல் மற்றும் ஆயத்தொலை வடிவக்கணிதப் பகுதிகள் முழுமையாக அளிக்கப்பட்டிருந்தன. மற்ற பாடப்பகுதிகள் முதல் பருவத்தின் தொடர்ச்சியாக இரண்டாம் மற்றும் மூன்றாம் பருவத்தில் பயில்வதற்காக வழங்கப்பட்டுள்ளது.

இரண்டாம் பருவத்திற்கான பாடப்பகுதிகளுள் இயற்கணிதம், முக்கோணவியல், புள்ளியியல் மற்றும் செய்முறை வடிவியல் போன்றவை இடம்பெற்றுள்ளன. இவற்றுள் இயற்கணிதம் மற்றும் செய்முறை வடிவியல் பாடப்பகுதிகள், முதல் பருவத்தின் தொடர்ச்சியாக இரண்டாம் பருவத்தில் இடம் பெறுவதால், முதல் பருவப் பாடப்பகுதிகளை ஆசிரியர் மாணவர்களுக்கு நினைவுகூர்தல் இன்றியமையாததாகிறது.

ஒவ்வொரு அலகின் இறுதியிலும், வளரறி மதிப்பீடு (அ) விற்கான செயல்பாடுகள் வழங்கப்பட்டுள்ளன. ஆசிரியர் ஒரு குறிப்பிட்ட கருத்தை தெளிவாக விளக்கவும் மற்றும் வலுவூட்டவும், தொடர்புடைய செயல்பாட்டைத் தெரிவுச் செய்தல் வேண்டும். இத்தகைய செயல்பாடுகளையே வளரறி மதிப்பீடு (அ) விற்குப் பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம். கணிதத்தின் அழகியல் உணர்வுடன் கற்றல் நோக்கத்தை அடைய மாணவர்களுக்கேற்ற அல்லது பள்ளிக்கேற்ற வகையில் புதிய செயல்பாடுகளை ஆசிரியர் உருவாக்கிக் கொள்ளலாம்.

–பாடநூல் குழு

குறியீடுகள்

$=$	சமம் (equal to)
$\neq$	சமமில்லை (not equal to)
$<$	விடக்குறைவு (less than)
$\leq$	குறைவு அல்லது சமம் (less than or equal to)
$>$	விட அதிகம் (greater than)
$\geq$	அதிகம் அல்லது சமம் (greater than or equal to)
$\approx$	சமானமான (equivalent to)
$\cup$	சேர்ப்பு (union)
$\cap$	வெட்டு (intersection)
$\mathbb{U}$	அனைத்துக் கணம் (universal Set)
$\in$	உறுப்பு (belongs to)
$\notin$	உறுப்பல்ல(does not belong to)
$\subset$	தகு உட்கணம் (proper subset of)
$\subseteq$	உட்கணம் (subset of or is contained in)
$\not\subset$	தகு உட்கணமல்ல (not a proper subset of)
$\not\subseteq$	உட்கணமல்ல (not a subset of or is not contained in)
A' (or) A^c	A இன் நிரப்புக்கணம் (complement of A)
$\varnothing$ (or) $\{\ \}$	வெற்றுக்கணம் அல்லது இன்மை கணம் (empty set or null set or void set)
$n(A)$	ஆதிஎண் அல்லது செவ்வெண் (number of elements in the set A)
$P(A)$	A இன் அடுக்குக் கணம் (power set of A)
$\|\|\|^{ly}$	இதே போன்று (similarly)
$\mathrm{P}(A)$	A என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு (probability of the event A)
Δ	சமச்சீர் வித்தியாசம் (symmetric difference)
$\mathbb{N}$	இயல் எண்கள் (natural numbers)

$\mathbb{W}$	முழுஎண்கள் (whole numbers)
$\mathbb{Z}$	முழுக்கள் (integers)
$\mathbb{R}$	மெய்யெண்கள் (real numbers)
$\triangle$	முக்கோணம் (triangle)
$\angle$	கோணம் (angle)
$\perp$	செங்குத்து (perpendicular to)
$\parallel$	இணை (parallel to)
$\Longrightarrow$	உணர்த்துகிறது (implies)
$\therefore$	எனவே (therefore)
$\because$	ஏனெனில் (since (or) because)
$\vert \quad \vert$	தனிமதிப்பு (absolute value)
$\simeq$	தோராயமாகச் சமம் (approximately equal to)
$\vert$ (or) :	அதன்படி அல்லது என்றவாறு (such that)
$\equiv$ (or) $\cong$	சர்வசமம் (congruent)
$\equiv$	முற்றொருமை (identically equal to)
π	பை (pi)
$\pm$	மிகை அல்லது குறை (plus or minus)
$\blacksquare$	தேற்றம் முடிவு (end of the proof)

பொருளடக்கம்

1 இயற்கணிதம்

Mathematics is as much an aspect of culture as it is a collection of algorithms

\- CARL BOYER

முதன்மைக் குறிக்கோள்கள்

- இயற்கணித முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்துதல்.
- பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காரணிப்படுத்துதல்.
- இரு மாறிகளில் உள்ள நேரியச் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்.
- ஒரு மாறியில் உள்ள அசமன்பாட்டைத் தீர்த்தல்.

1.1 அறிமுகம்

முதல் பருவத்தில் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை வகைப்படுத்துதல், மீதித்தேற்றத்தின் பயன்பாடுகள், காரணித்தேற்றத்தின் பயன்பாடுகள், பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியம், பல்லுறுப்புக் கோவைச்சமன்பாடுகளின் மூலங்கள், பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வகுத்தல் ஆகியவற்றைப் பற்றி விரிவாகப்படித்தோம். இயற்கணித முற்றொருமைகளை எட்டாம் வகுப்பில் பயன்படுத்தித் தீர்வு கண்டோம். இப்பருவத்தில் முற்றொருமைகளின் மூன்றாம் படியில் உள்ள மூவுறுப்புக் கோவைகளுக்குத் தீர்வு காணும் முறைகளைக் காண்போம். மேலும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துதல், நேரியச் சமன்பாடுகளைப் பிரதியிடுதல் முறை மூலம் தீர்த்தல், ஒரு மாறியில் உள்ள நேரிய அசமன்பாடுகளின் தீர்வு காணுதல் ஆகியவற்றை இப்பருவத்தில் காண்போம்.

பியரி டி ஃபெர்மாட்
1601 – 1665

பியரி டி ஃபெர்மாட், டெஸ்கார்ட்ஸ் காலத்தில் வாழ்ந்த செல்வாக்கு மிகுந்த மிகச் சிறந்த கணித மேதை ஆவார். கணிதம் அவரது பொழுது போக்கு (ஏனெனில் அவர் ஒரு அரசு வழக்கறிஞர்) ஆகும். ஃபெர்மாட் நடைமுறை எண் கோட்பாட்டை அளித்ததோடு, பகுமுறை வடிவியல் மற்றும் நுண்கணிதம் ஆகியவற்றை கண்டறிவதில் பெரிதும் பங்காற்றினார். அவர் மிகச் சிறந்த வடிவியலாளர் மட்டுமின்றி, முக்கோணத்தின் ஃபெர்மாட் புள்ளி கண்டுபிடிப்பு மற்றும் (பிளாசி பாஸ்கலுடன் இணைந்து) நிகழ்தகவு கோட்பாட்டை கண்டுபிடித்தவர். அவர் பொதுவான பல்லுறுப்பு கோவைக்கான தொகை நுண்கணித சூத்திரத்தை கண்டுபிடித்த முதல் ஐரோப்பியர் ஆவார். மேலும் அவரது நுண்கணிதத்தை பயன்படுத்தி ஈர்ப்பு மையம் போன்றவற்றையும் கண்டுபிடித்தார்.

1.2 இயற்கணித முற்றொருமைகள் (Algebraic Identities)

முக்கிய கருத்து	இயற்கணித முற்றொருமைகள்
ஒரு சமன்பாடு அதிலுள்ள மாறிகளின் எம்மதிப்புக்கும் உண்மையாகவே இருக்குமானால், அச்சமன்பாடு ஒரு முற்றொருமை எனப்படும்.	

பின்வரும் முற்றொருமைகளை எட்டாம் வகுப்பில் கற்றிருக்கிறோம். முதலில் அவற்றை பயன்படுத்தி சில கணக்குகளைத் தீர்ப்போம். இம்முற்றொருமைகளை விரிவாக்கி மூன்றாம் படியில் உள்ள மூவுறுப்புக் கோவைகளுக்குத் தீர்வு காண்போம்.

$$(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$$

$$(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2 \qquad (x+a)(x+b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab$$

எடுத்துக்காட்டு 1.1

முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றை விரித்தெழுதுக.

(i) $(2a+3b)^2$ (ii) $(3x-4y)^2$ (iii) $(4x+5y)(4x-5y)$ (iv) $(y+7)(y+5)$

தீர்வு

(i) $(2a+3b)^2 = (2a)^2 + 2(2a)(3b) + (3b)^2$
$= 4a^2 + 12ab + 9b^2$

(ii) $(3x-4y)^2 = (3x)^2 - 2(3x)(4y) + (4y)^2$
$= 9x^2 - 24xy + 16y^2$

(iii) $(4x+5y)(4x-5y) = (4x)^2 - (5y)^2$
$= 16x^2 - 25y^2$

(iv) $(y+7)(y+5) = y^2 + (7+5)y + (7)(5)$
$= y^2 + 12y + 35$

1.2.1 $(x \pm y \pm z)^2$ இன் விரிவாக்கம்

(i) $(x+y+z)^2 = (x+y+z)(x+y+z)$

$= x(x+y+z) + y(x+y+z) + z(x+y+z)$

$= x^2 + xy + xz + yx + y^2 + yz + zx + zy + z^2$

$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

$$\boxed{(x+y+z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx}$$

(ii) $(x-y+z)^2 = [x+(-y)+z]^2$

$= x^2+(-y)^2+z^2+2(x)(-y)+2(-y)(z)+2(z)(x)$

$= x^2+y^2+z^2-2xy-2yz+2zx$

$(x-y+z)^2 \equiv x^2+y^2+z^2-2xy-2yz+2zx$

இதேபோன்று, பின்வரும் விரிவாக்கங்களும் கிடைக்கின்றன.

(iii) $(x+y-z)^2 \equiv x^2+y^2+z^2+2xy-2yz-2zx$

(iv) $(x-y-z)^2 \equiv x^2+y^2+z^2-2xy+2yz-2zx$

எடுத்துக்காட்டு 1.2

விரித்தெழுதுக (i) $(2x+3y+5z)^2$ (ii) $(3a-7b+4c)^2$ (iii) $(3p+5q-2r)^2$ (iv) $(7l-9m-6n)^2$

தீர்வு

(i) $(2x+3y+5z)^2 = (2x)^2+(3y)^2+(5z)^2+2(2x)(3y)+2(3y)(5z)+2(5z)(2x)$

$= 4x^2+9y^2+25z^2+12xy+30yz+20zx$

(ii) $(3a-7b+4c)^2$

$= (3a)^2+(-7b)^2+(4c)^2+2(3a)(-7b)+2(-7b)(4c)+2(4c)(3a)$

$= 9a^2+49b^2+16c^2-42ab-56bc+24ca$

(iii) $(3p+5q-2r)^2$

$= (3p)^2+(5q)^2+(-2r)^2+2(3p)(5q)+2(5q)(-2r)+2(-2r)(3p)$

$= 9p^2+25q^2+4r^2+30pq-20qr-12rp$

(iv) $(7l-9m-6n)^2$

$= (7l)^2+(-9m)^2+(-6n)^2+2(7l)(-9m)+2(-9m)(-6n)+2(-6n)(7l)$

$= 49l^2+81m^2+36n^2-126lm+108mn-84nl$

1.2.2 முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி $(x+a)(x+b)(x+c)$ இன் பெருக்கற்பலன் காணல்

$(x+a)(x+b)(x+c) = [(x+a)(x+b)](x+c)$

$= [x^2+(a+b)x+ab](x+c)$

$= x^3+(a+b)x^2+abx+cx^2+c(a+b)x+abc$

$= x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

$$\boxed{(x+a)(x+b)(x+c) \equiv x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc}$$

கணிதம்

1.2.3 $(x \pm y)^3$ இன் விரிவாக்கம்

மேலே உள்ள முற்றொருமையில் $a = b = c = y$ எனப் பிரதியிட,

$$(x+y)(x+y)(x+y) = x^3 + (y+y+y)x^2 + [(y)(y)+(y)(y)+(y)(y)]x + (y)(y)(y)$$
$$(x+y)^3 = x^3 + (3y)x^2 + (3y^2)x + y^3$$
$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^3 \equiv x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

(அல்லது) $(x+y)^3 \equiv x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$

மேலே உள்ள முற்றொருமையில் y க்குப் பதில் $-y$ என எடுத்துக்கொள்ள,

$$(x-y)^3 \equiv x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

(அல்லது) $(x-y)^3 \equiv x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$

1.2.2 மற்றும் 1.2.3 இல் உள்ள முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் கணக்குகளைத் தீர்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.3

பெருக்கற் பலன் காண்க.

(i) $(x+2)(x+5)(x+7)$ (ii) $(a-3)(a-5)(a-7)$ (iii) $(2a-5)(2a+5)(2a-3)$

தீர்வு

(i) $(x+2)(x+5)(x+7)$

$$= x^3 + (2+5+7)x^2 + [(2)(5)+(5)(7)+(7)(2)]x + (2)(5)(7)$$
$$= x^3 + 14x^2 + (10+35+14)x + 70$$
$$= x^3 + 14x^2 + 59x + 70$$

(ii) $(a-3)(a-5)(a-7) = [a+(-3)][a+(-5)][a+(-7)]$

$$= a^3 + (-3-5-7)a^2 + [(-3)(-5)+(-5)(-7)+(-7)(-3)]a + (-3)(-5)(-7)$$
$$= a^3 - 15a^2 + (15+35+21)a - 105$$
$$= a^3 - 15a^2 + 71a - 105$$

(iii) $(2a-5)(2a+5)(2a-3) = [2a+(-5)][2a+5][2a+(-3)]$

$$= (2a)^3 + (-5+5-3)(2a)^2 + [(-5)(5)+(5)(-3)+(-3)(-5)](2a) + (-5)(5)(-3)$$
$$= 8a^3 + (-3)4a^2 + (-25-15+15)2a + 75$$
$$= 8a^3 - 12a^2 - 50a + 75$$

எடுத்துக்காட்டு 1.4

$a+b+c=15$ மற்றும் $ab+bc+ca=25$ எனில், $a^2+b^2+c^2$ ஐ காண்க.

தீர்வு $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$.

எனவே, $15^2 = a^2+b^2+c^2+2(25)$

$225 = a^2+b^2+c^2+50$

$\therefore a^2+b^2+c^2 = 225-50 = 175$

எடுத்துக்காட்டு 1.5

விரித்தெழுதுக. (i) $(3a+4b)^3$ (ii) $(2x-3y)^3$

தீர்வு

(i) $(3a+4b)^3 = (3a)^3+3(3a)^2(4b)+3(3a)(4b)^2+(4b)^3$

$= 27a^3+108a^2b+144ab^2+64b^3$

(ii) $(2x-3y)^3 = (2x)^3-3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2-(3y)^3$

$= 8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$

எடுத்துக்காட்டு 1.6

தகுந்த முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் ஒவ்வொன்றினையும் மதிப்பிடுக.

(i) $(105)^3$ (ii) $(999)^3$

தீர்வு

(i) $(105)^3 = (100+5)^3$

$=(100)^3+(5)^3+3(100)(5)(100+5)$ $(\because (x+y)^3 = x^3+y^3+3xy(x+y))$

$= 1000000+125+1500(105)$

$= 1000000+125+157500 = 1157625$

(ii) $(999)^3 = (1000-1)^3$

$=(1000)^3-(1)^3-3(1000)(1)(1000-1)$

$(\because (x-y)^3 = x^3-y^3-3xy(x-y))$

$= 1000000000-1-3000(999)$

$= 1000000000-1-2997000 = 997002999$

x மற்றும் y இன் கூட்டல், கழித்தல் மற்றும் பெருக்கலை உள்ளடக்கிய சில பயனுள்ள முற்றொருமைகள்.

$$x^3+y^3 \equiv (x+y)^3-3xy(x+y)$$
$$x^3-y^3 \equiv (x-y)^3+3xy(x-y)$$

மேலே உள்ள முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி சில கணக்குகளைத் தீர்ப்போம்.

கணக்கு

எடுத்துக்காட்டு 1.7

$x+y=4$ மற்றும் $xy=5$ எனில், x^3+y^3 ஐக் காண்க.

தீர்வு $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ என நமக்குத் தெரியும்.

$\therefore \quad x^3+y^3=(4)^3-3(5)(4)=64-60=4$

எடுத்துக்காட்டு 1.8

$x-y=5$ மற்றும் $xy=16$ எனில், x^3-y^3 ஐக் காண்க.

தீர்வு $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$ என நமக்குத் தெரியும்.

$\therefore \quad x^3-y^3=(5)^3+3(16)(5)=125+240=365$

எடுத்துக்காட்டு 1.9

$x+\frac{1}{x}=5$ எனில், $x^3+\frac{1}{x^3}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ என நமக்குத் தெரியும்.

$y=\frac{1}{x}$ எனப் பிரதியிட, $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=(5)^3-3(5)=125-15=110$

எடுத்துக்காட்டு 1.10

$y-\frac{1}{y}=9$ எனில், $y^3-\frac{1}{y^3}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$ என நமக்குத் தெரியும்.

$x=y, y=\frac{1}{y}$ எனப் பிரதியிட, $y^3-\frac{1}{y^3}=\left(y-\frac{1}{y}\right)^3+3\left(y-\frac{1}{y}\right)$

$=(9)^3+3(9)=729+27=756$

பின்வரும் முற்றொருமை மேற்படிப்புகளில் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

$$x^3+y^3+z^3-3xyz\equiv(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

குறிப்பு $x+y+z=0$ எனில், $x^3+y^3+z^3=3xyz$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.11

சுருக்குக $(x+2y+3z)(x^2+4y^2+9z^2-2xy-6yz-3zx)$

தீர்வு $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=x^3+y^3+z^3-3xyz$ என நமக்குத் தெரியும்.

$\therefore \quad (x+2y+3z)(x^2+4y^2+9z^2-2xy-6yz-3zx)$

$$= (x+2y+3z)[x^2+(2y)^2+(3z)^2-(x)(2y)-(2y)(3z)-(3z)(x)]$$
$$= (x)^3+(2y)^3+(3z)^3-3(x)(2y)(3z)$$
$$= x^3+8y^3+27z^3-18xyz$$

எடுத்துக்காட்டு 1.12

மதிப்பிடுக $12^3+13^3-25^3$

தீர்வு $x = 12,\ y = 13,\ z = -25$ என்க. பின்னர்,

$$x+y+z = 12+13-25 = 0$$

$x+y+z = 0$ எனில், $x^3+y^3+z^3 = 3xyz$ என நமக்குத் தெரியும்.

$$\therefore\ 12^3+13^3-25^3 = 12^3+13^3+(-25)^3 = 3(12)(13)(-25) = -11700$$

பயிற்சி 1.1

1. பின்வருவனவற்றை விரித்தெழுதுக.

   (i) $(5x+2y+3z)^2$ (ii) $(2a+3b-c)^2$ (iii) $(x-2y-4z)^2$ (iv) $(p-2q+r)^2$

2. விரிவுக் காண்க.

   (i) $(x+1)(x+4)(x+7)$ (ii) $(p+2)(p-4)(p+6)$

   (iii) $(x+5)(x-3)(x-1)$ (iv) $(x-a)(x-2a)(x-4a)$

   (v) $(3x+1)(3x+2)(3x+5)$ (vi) $(2x+3)(2x-5)(2x-7)$

3. இயற்கணித முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி x^2இன் கெழு, x இன் கெழு மற்றும் மாறிலி உறுப்புகளைக் காண்க.

   (i) $(x+7)(x+3)(x+9)$ (ii) $(x-5)(x-4)(x+2)$

   (iii) $(2x+3)(2x+5)(2x+7)$ (iv) $(5x+2)(1-5x)(5x+3)$

4. $(x+a)(x+b)(x+c) \equiv x^3-10x^2+45x-15$ எனில், $a+b+c$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ மற்றும் $a^2+b^2+c^2$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

5. விரித்தெழுதுக : (i) $(3a+5b)^3$ (ii) $(4x-3y)^3$ (iii) $\left(2y-\frac{3}{y}\right)^3$

6. மதிப்புக் காண்க : (i) 99^3 (ii) 101^3 (iii) 98^3 (iv) 102^3 (v) 1002^3

7. $2x+3y = 13$ மற்றும் $xy = 6$ எனில், $8x^3+27y^3$ ஐக் காண்க.

8. $x-y = -6$ மற்றும் $xy = 4$ எனில், x^3-y^3 இன் மதிப்பைக் காண்க.

9. $x+\frac{1}{x} = 4$ எனில், $x^3+\frac{1}{x^3}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

10. $x - \frac{1}{x} = 3$ எனில், $x^3 - \frac{1}{x^3}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

11. சுருக்குக : (i) $(2x + y + 4z)(4x^2 + y^2 + 16z^2 - 2xy - 4yz - 8zx)$

(ii) $(x - 3y - 5z)(x^2 + 9y^2 + 25z^2 + 3xy - 15yz + 5zx)$

12. மதிப்புக் காண்க : (i) $6^3 - 9^3 + 3^3$ (ii) $16^3 - 6^3 - 10^3$

1.3 பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துதல் (Factorization of Polynomials)

இயற்கணித கோவைகளின் பெருக்கற் பலனைக் கோவைகளின் கூடுதலாகவோ அல்லது வித்தியாசமாகவோ எவ்வாறு பங்கீட்டு பண்பைப் பயன்படுத்தி பிரித்து எழுதுவதைப் பற்றி கண்டோம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) $x(x + y) = x^2 + xy$

(ii) $x(y - z) = xy - xz$

(iii) $a(a^2 - 2a + 1) = a^3 - 2a^2 + a$

இனி, கோவைகளின் கூடுதல் அல்லது வித்தியாசங்களை எவ்வாறு பெருக்கற் பலனாக மாற்றுவது என்பதைக் கற்போம்.

இப்போது, $ab + ac$ -ஐ எடுத்துக்கொள்க. பங்கீட்டு விதியைப் பயன்படுத்தி $a(b + c) = ab + ac$ என்பதை மாற்றுமுறையில் $ab + ac = a(b + c)$ என எழுதலாம். இம்முறையில் $ab + ac$ என்பதை $a(b + c)$ என எழுதுவது காரணிபடுத்துதல் எனப்படும். ab மற்றும் ac என்ற இரண்டு உறுப்புகளில் a என்பது ஒரு பொதுக் காரணி. இதேபோன்று,

$5m + 15 = 5(m) + 5(3) = 5(m + 3)$.

$b(b - 5) + g(b - 5)$ ல் $(b - 5)$ என்பது பொதுக் காரணி.

$b(b - 5) + g(b - 5) = (b - 5)(b + g)$

எடுத்துக்காட்டு 1.13

பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக.

(i) $pq + pr - 3ps$ (ii) $4a - 8b + 5ax - 10bx$ (iii) $2a^3 + 4a^2$ (iv) $6a^5 - 18a^3 + 42a^2$

தீர்வு

(i) $pq + pr - 3ps = p(q + r - 3s)$

(ii) $4a - 8b + 5ax - 10bx = (4a - 8b) + (5ax - 10bx)$

$= 4(a - 2b) + 5x(a - 2b) = (a - 2b)(4 + 5x)$

(iii) $2a^3 + 4a^2$

$2a^2$ என்பது $2a^3$ மற்றும் $4a^2$ ஆகியவற்றின் மீப்பெரு பொதுக் காரணி.

$\therefore 2a^3 + 4a^2 = 2a^2(a+2)$.

(iv) $6a^5 - 18a^3 + 42a^2$

$6a^2$ என்பது $6a^5$, $-18a^3$ மற்றும் $42a^2$ ஆகியவற்றின் மீப்பெரு பொதுக் காரணி.

$\therefore 6a^5 - 18a^3 + 42a^2 = 6a^2(a^3 - 3a + 7)$

1.3.1 முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்திக் காரணிப்படுத்துதல்.

(i) $a^2 + 2ab + b^2 \equiv (a+b)^2$

(ii) $a^2 - 2ab + b^2 \equiv (a-b)^2$ **(அல்லது)** $a^2 - 2ab + b^2 \equiv (-a+b)^2$

(iii) $a^2 - b^2 \equiv (a+b)(a-b)$

(iv) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \equiv (a+b+c)^2$

எடுத்துக்காட்டு 1.14

காரணிப்படுத்துக (i) $4x^2 + 12xy + 9y^2$ (ii) $16a^2 - 8a + 1$ (iii) $9a^2 - 16b^2$
(iv) $(a+b)^2 - (a-b)^2$ (v) $25(a+2b-3c)^2 - 9(2a-b-c)^2$ (vi) $x^5 - x$

தீர்வு

(i) $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 = (2x+3y)^2$

(ii) $16a^2 - 8a + 1 = (4a)^2 - 2(4a)(1) + (1)^2 = (4a-1)^2$ **(அல்லது)** $(1-4a)^2$

(iii) $9a^2 - 16b^2 = (3a)^2 - (4b)^2 = (3a+4b)(3a-4b)$

(iv) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = [(a+b)+(a-b)][(a+b)-(a-b)]$

$= (a+b+a-b)(a+b-a+b) = (2a)(2b) = (4)(a)(b)$

(v) $25(a+2b-3c)^2 - 9(2a-b-c)^2 = [5(a+2b-3c)]^2 - [3(2a-b-c)]^2$

$= [5(a+2b-3c) + 3(2a-b-c)][5(a+2b-3c) - 3(2a-b-c)]$

$= (5a+10b-15c+6a-3b-3c)(5a+10b-15c-6a+3b+3c)$

$= (11a+7b-18c)(-a+13b-12c)$

(vi) $x^5 - x = x(x^4-1) = x[(x^2)^2 - (1)^2]$

$= x(x^2+1)(x^2-1) = x(x^2+1)[(x)^2 - (1)^2]$

$= x(x^2+1)(x+1)(x-1)$

1.3.2 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \equiv (a+b+c)^2$ என்ற முற்றொருமையைப் பயன்படுத்திக் காரணிப்படுத்துதல்.

எடுத்துக்காட்டு 1.15

காரணிப்படுத்துக $a^2+4b^2+36-4ab-24b+12a$

தீர்வு $a^2+4b^2+36-4ab-24b+12a$

$$= (a)^2+(-2b)^2+(6)^2+2(a)(-2b)+2(-2b)(6)+2(6)(a) = (a-2b+6)^2$$

குறிப்பு :
$(a-2b+6)^2 = [(-1)(-a+2b-6)]^2 = (-1)^2(-a+2b-6)^2 = (-a+2b-6)^2$

எடுத்துக்காட்டு 1.16

காரணிப்படுத்துக $4x^2+y^2+9z^2-4xy+6yz-12zx$

தீர்வு $4x^2+y^2+9z^2-4xy+6yz-12zx$

$$= (2x)^2+(-y)^2+(-3z)^2+2(2x)(-y)+2(-y)(-3z)+2(-3z)(2x)$$

$$= (2x-y-3z)^2 \text{ (அல்லது) } (-2x+y+3z)^2$$

1.3.3 x^3+y^3 மற்றும் x^3-y^3 ஆகியவற்றைக் காரணிப்படுத்துதல்

$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 = (x+y)^3$ என நமக்குத் தெரியும்.

அதாவது, $x^3+y^3+3xy(x+y) = (x+y)^3$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow x^3+y^3 &= (x+y)^3-3xy(x+y) \\ &= (x+y)[(x+y)^2-3xy] \\ &= (x+y)(x^2+2xy+y^2-3xy) \\ &= (x+y)(x^2-xy+y^2) \end{aligned}$$

$$\boxed{x^3+y^3 \equiv (x+y)(x^2-xy+y^2)}$$

$x^3-3x^2y+3xy^2-y^3 = (x-y)^3$ என நமக்குத் தெரியும்.

அதாவது, $x^3-y^3-3xy(x-y) = (x-y)^3$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow x^3-y^3 &= (x-y)^3+3xy(x-y) \\ &= (x-y)[(x-y)^2+3xy] \end{aligned}$$

$$= (x-y)(x^2-2xy+y^2+3xy)$$
$$= (x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$\boxed{x^3-y^3 \equiv (x-y)(x^2+xy+y^2)}$$

மேலே உள்ள முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.17

காரணிப்படுத்துக (i) $8x^3+125y^3$ (ii) $27x^3-64y^3$

தீர்வு

(i) $8x^3+125y^3 = (2x)^3+(5y)^3$

$= (2x+5y)[(2x)^2-(2x)(5y)+(5y)^2]$

$= (2x+5y)(4x^2-10xy+25y^2)$

(ii) $27x^3-64y^3 = (3x)^3-(4y)^3$

$= (3x-4y)[(3x)^2+(3x)(4y)+(4y)^2]$

$= (3x-4y)(9x^2+12xy+16y^2)$

பயிற்சி 1.2

1. பின்வரும் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துக.

(i) $2a^3-3a^2b+2a^2c$ (ii) $16x+64x^2y$ (iii) $10x^3-25x^4y$

(iv) $xy-xz+ay-az$ (v) $p^2+pq+pr+qr$

2. பின்வரும் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துக.

(i) x^2+2x+1 (ii) $9x^2-24xy+16y^2$

(iii) b^2-4 (iv) $1-36x^2$

3. பின்வரும் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துக.

(i) $p^2+q^2+r^2+2pq+2qr+2rp$ (ii) $a^2+4b^2+36-4ab+24b-12a$

(iii) $9x^2+y^2+1-6xy+6x-2y$ (iv) $4a^2+b^2+9c^2-4ab-6bc+12ca$

(v) $25x^2+4y^2+9z^2-20xy+12yz-30zx$

4. பின்வரும் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துக.

(i) $27x^3+64y^3$ (ii) m^3+8 (iii) a^3+125

(iv) $8x^3-27y^3$ (v) x^3-8y^3

1.3.4 $ax^2 + bx + c;\ a \neq 0$ என்ற வடிவில் உள்ள இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துதல்

இதுவரை பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் குறிப்பிட்ட வகைகளை, முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி காரணிப்படுத்துதலைப் பார்த்தோம். இப்பகுதியில் (i) $a = 1$ மற்றும் (ii) $a \neq 1$ எனும்போது, $ax^2 + bx + c$ என்ற இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவையை முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தாமல் எவ்வாறு இரு நேரியப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளாகப் பிரிப்பது என்பதைப் பார்ப்போம்.

(i) $x^2 + bx + c$ என்ற வடிவில் உள்ள இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்தல்.

$(x+p)$ மற்றும் $(x+q)$ என்பன $x^2 + bx + c$-ன் இரண்டு காரணிகள் எனில், நாம் பெறுவது,

$$\begin{aligned} x^2 + bx + c &= (x+p)(x+q) \\ &= x(x+p) + q(x+p) \\ &= x^2 + px + qx + pq \\ &= x^2 + (p+q)x + pq \end{aligned}$$

இதிலிருந்து, $x^2 + bx + c = (x+p)(x+q)$ எனக் காரணிப்படுத்த p , q என்ற இரு எண்களை $c = pq$ மற்றும் $b = p + q$ என்றவாறு காண வேண்டும்.

பின்வரும் கணக்குகளைக் காரணிப்படுத்த இந்த அடிப்படை யுக்தியைப் பயன்படுத்துவோம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(1) $x^2 + 8x + 15 = (x+3)(x+5)$

இங்கு $c = 15 = 3 \times 5$ மற்றும் $3 + 5 = 8 = b$

(2) $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

இங்கு $c = 6 = (-2) \times (-3)$ மற்றும் $(-2) + (-3) = -5 = b$

(3) $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$

இங்கு $c = -2 = (+2) \times (-1)$ மற்றும் $(+2) + (-1) = 1 = b$

(4) $x^2 - 4x - 12 = (x-6)(x+2)$

இங்கு $c = -12 = (-6) \times (+2)$ மற்றும் $(-6) + (+2) = -4 = b$

மேலே உள்ள எடுத்துக்காட்டுகளில் மாறிலி உறுப்பின் இரு காரணிகள், அவற்றின் கூடுதல் x இன் கெழுவிற்குச் சமமாக உள்ளவாறு கண்டுபிடிக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1.18

பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக.

(i) $x^2 + 9x + 14$ (ii) $x^2 - 9x + 14$ (iii) $x^2 + 2x - 15$ (iv) $x^2 - 2x - 15$

தீர்வு

(i) $x^2 + 9x + 14$

காரணிப்படுத்த p, q என்ற இரு எண்களை $pq = 14$ மற்றும் $p + q = 9$ என்றவாறு நாம் காணவேண்டும்.

$$x^2 + 9x + 14 = x^2 + 2x + 7x + 14$$
$$= x(x+2) + 7(x+2)$$
$$= (x+2)(x+7)$$
$$\therefore\ x^2 + 9x + 14 = (x+7)(x+2)$$

14 இன் காரணிகள்	காரணிகளின் கூடுதல்
1, 14	15
2, 7	9
தேவையான காரணிகள் 2, 7	

(ii) $x^2 - 9x + 14$

காரணிப்படுத்த p, q என்ற இரு எண்களை $pq = 14$ மற்றும் $p + q = -9$ என்றவாறு நாம் காணவேண்டும்.

$$x^2 - 9x + 14 = x^2 - 2x - 7x + 14$$
$$= x(x-2) - 7(x-2)$$
$$= (x-2)(x-7)$$
$$\therefore\ x^2 - 9x + 14 = (x-2)(x-7)$$

14 இன் காரணிகள்	காரணிகளின் கூடுதல்
–1, –14	–15
–2, –7	–9
தேவையான காரணிகள்–2, –7	

(iii) $x^2 + 2x - 15$

காரணிப்படுத்த p, q என்ற இரு எண்களை $pq = -15$ மற்றும் $p + q = 2$ என்றவாறு நாம் காணவேண்டும்.

$$x^2 + 2x - 15 = x^2 - 3x + 5x - 15$$
$$= x(x-3) + 5(x-3)$$
$$= (x-3)(x+5)$$
$$\therefore\ x^2 + 2x - 15 = (x-3)(x+5)$$

–15 இன் காரணிகள்	காரணிகளின் கூடுதல்
–1, 15	14
–3, 5	2
தேவையான காரணிகள் –3, 5	

(iv) $x^2 - 2x - 15$

காரணிப்படுத்த p, q என்ற இரு எண்களை $pq = -15$ மற்றும் $p + q = -2$ என்றவாறு நாம் காணவேண்டும்.

$$x^2 - 2x - 15 = x^2 + 3x - 5x - 15$$
$$= x(x+3) - 5(x+3)$$
$$= (x+3)(x-5)$$
$$\therefore\ x^2 - 2x - 15 = (x+3)(x-5)$$

–15 இன் காரணிகள்	காரணிகளின் கூடுதல்
1, –15	–14
3, –5	–2
தேவையான காரணிகள் 3, –5	

(ii) ax^2+bx+c என்ற வடிவில் உள்ள இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துதல்

$a \neq 1$ என்பதால் $ax^2 + bx + c$-ன் நேரிய காரணிகள் $(rx + p)$ மற்றும் $(sx + q)$ என்ற வடிவில் இருக்கும்.

எனவே, $ax^2 + bx + c = (rx + p)(sx + q)$
$= rsx^2 + (ps + qr)x + pq$

இருபுறமும் x^2 இன் கெழுக்களை ஒப்பிட, நாம் பெறுவது $a = rs$ இதேபோன்று x இன் கெழுக்களை ஒப்பிட, நாம் பெறுவது $b = ps + qr$ மற்றும் மாறிலி உறுப்புக்களை ஒப்பிட, பெறுவது $c = pq$

இவை நமக்குத் தெரிவிப்பது என்னவெனில், ps மற்றும் qr என்ற இரு மெய்யெண்களின் கூடுதல் b மற்றும் அவ்வெண்களின் பெருக்கல் $(ps)\times(qr) = (pr)\times(sq) = ac$

எனவே, $ax^2 + bx + c$ ஐக் காரணிப்படுத்த, நாம் இரு எண்களின் கூடுதல் b க்கு சமமாகவும் அவற்றின் பெருக்கற்பலன் ac க்குச் சமமாகவும் இருக்குமாறு காணவேண்டும்.

$ax^2 + bx + c$ ஐக் காரணிப்படுத்த பின்பற்ற வேண்டிய படிகள் பின்வருமாறு.

படி 1 : x^2 இன் கெழுவை மாறிலி உறுப்புடன் பெருக்க வேண்டும்.

படி 2 : இப்பெருக்கற்பலனை இருகாரணிகளாகப் பிரிக்க வேண்டும். அவ்வாறு பிரிக்கும் போது காரணிகளின் கூடுதல் x இன் கெழுவிற்குச் சமமாக இருக்கவேண்டும்.

படி 3 : இப்பெருக்கற்பலனை இரு சோடிகளாகப் பிரித்து காரணிப்படுத்தவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.19

பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக.

(i) $2x^2 + 15x + 27$ (ii) $2x^2 - 15x + 27$

(iii) $2x^2 + 15x - 27$ (iv) $2x^2 - 15x - 27$

தீர்வு

(i) $2x^2 + 15x + 27$

x^2 இன் கெழு $= 2$; மாறிலி உறுப்பு $= 27$

$\therefore$ அவற்றின் பெருக்கல் $= 2 \times 27 = 54$

x இன் கெழு $= 15$

அதாவது, நாம் காண வேண்டிய இரு எண்களின் பெருக்கல் 54 மற்றும் அவற்றின் கூடுதல் 15

அவ்விரு எண்கள் 6 மற்றும் 9

$$2x^2 + 15x + 27 = 2x^2 + 6x + 9x + 27$$
$$= 2x(x + 3) + 9(x + 3)$$
$$= (x + 3)(2x + 9)$$
$$\therefore 2x^2 + 15x + 27 = (x + 3)(2x + 9)$$

54 இன் காரணிகள்	காரணிகளின் கூடுதல்
1, 54	55
2, 27	29
3, 18	21
6, 9	15
தேவையான காரணிகள் 6, 9	

கணக்கு

(ii) $2x^2 - 15x + 27$

x^2 இன் கெழு = 2 ; மாறிலி உறுப்பு = 27

அவற்றின் பெருக்கல் = $2 \times 27 = 54$

x இன் கெழு = –15

$\therefore$ இரு எண்களின் பெருக்கல் = 54;
அவற்றின் கூடுதல் = –15

54 இன் காரணிகள்	காரணிகளின் கூடுதல்
–1, –54	–55
–2, –27	–29
–3, –18	–21
–6, –9	–15
தேவையான காரணிகள்	–6, –9

$$\begin{aligned} 2x^2 - 15x + 27 &= 2x^2 - 6x - 9x + 27 \\ &= 2x(x-3) - 9(x-3) \\ &= (x-3)(2x-9) \end{aligned}$$

$$\therefore\ 2x^2 - 15x + 27 = (x-3)(2x-9)$$

(iii) $2x^2 + 15x - 27$

x^2 இன் கெழு = 2 ; மாறிலி உறுப்பு = – 27

அவற்றின் பெருக்கல்= $2 \times - 27 = -54$

x இன் கெழு = 15

$\therefore$ இரு எண்களின் பெருக்கல் = –54;

அவற்றின் கூடுதல் = 15

–54 இன் காரணிகள்	காரணிகளின் கூடுதல்
–1, 54	53
–2, 27	25
–3, 18	15
தேவையான காரணிகள்	–3, 18

$$\begin{aligned} 2x^2 + 15x - 27 &= 2x^2 - 3x + 18x - 27 \\ &= x(2x-3) + 9(2x-3) \\ &= (2x-3)(x+9) \end{aligned}$$

$$\therefore\ 2x^2 + 15x - 27 = (2x-3)(x+9)$$

(iv) $2x^2 - 15x - 27$

x^2 இன் கெழு = 2 ; மாறிலி உறுப்பு = –27

அவற்றின் பெருக்கல்= $2 \times - 27 = -54$

x இன் கெழு = –15

$\therefore$ இரு எண்களின் பெருக்கல் = –54;
அவற்றின் கூடுதல் = –15

–54 இன் காரணிகள்	காரணிகளின் கூடுதல்
1, –54	–53
2, –27	–25
3, –18	–15
தேவையான காரணிகள்	3, –18

$$\begin{aligned} 2x^2 - 15x - 27 &= 2x^2 + 3x - 18x - 27 \\ &= x(2x+3) - 9(2x+3) \\ &= (2x+3)(x-9) \end{aligned}$$

$$\therefore\ 2x^2 - 15x - 27 = (2x+3)(x-9)$$

எடுத்துக்காட்டு 1.20

காரணிப்படுத்துக $(x+y)^2+9(x+y)+8$

தீர்வு $x+y=p$ என்க.

பின்னர் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு p^2+9p+8 என மாறுகிறது.

p^2 இன் கெழு $=1$; மாறிலி உறுப்பு $=8$

அவற்றின் பெருக்கல் $=1\times 8=8$

p இன் கெழு $=9$

$\therefore$ இரு எண்களின் பெருக்கல் $=8$;

அவற்றின் கூடுதல் $=9$

8 இன் காரணிகள்	காரணிகளின் கூடுதல்
1, 8	9
தேவையான காரணிகள்	1, 8

$$p^2+9p+8 = p^2+p+8p+8$$
$$= p(p+1)+8(p+1)$$
$$= (p+1)(p+8)$$

$p=x+y$ எனப் பிரதியிடக் கிடைப்பது,

$$(x+y)^2+9(x+y)+8=(x+y+1)(x+y+8)$$

எடுத்துக்காட்டு 1.21

காரணிப்படுத்துக (i) x^3-2x^2-x+2 (ii) x^3+3x^2-x-3

தீர்வு

(i) $p(x)=x^3-2x^2-x+2$ என்க.

$p(x)$ என்பது முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை, எனவே இதற்கு மூன்று நேரிய காரணிகள் இருக்கலாம். மாறிலி உறுப்பு 2. 2 இன் காரணிகள் -1, 1, -2 மற்றும் 2 ஆகும்.

$$p(-1)=(-1)^3-2(-1)^2-(-1)+2=-1-2+1+2=0$$

$\therefore$ $(x+1)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி ஆகும்.

$$p(1)=(1)^3-2(1)^2-1+2=1-2-1+2=0$$

$\therefore$ $(x-1)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி ஆகும்.

$$p(-2)=(-2)^3-2(-2)^2-(-2)+2=-8-8+2+2=-12\neq 0$$

$\therefore$ $(x+2)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி ஆகாது.

$$p(2)=(2)^3-2(2)^2-2+2=8-8-2+2=0$$

$\therefore$ $(x-2)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி ஆகும்.

$p(x)$ இன் மூன்று காரணிகள் $(x+1),(x-1)$ மற்றும் $(x-2)$ ஆகும்.

$$\therefore\ x^3-2x^2-x+2=(x+1)(x-1)(x-2).$$

கணக்கு

மாற்று முறை

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2(x-2) - 1(x-2)$$
$$= (x-2)(x^2-1)$$
$$= (x-2)(x+1)(x-1) \qquad [\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)]$$

(ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ என்க.

$p(x)$ என்பது முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை, எனவே இதற்கு மூன்று நேரிய காரணிகள் இருக்கலாம். மாறிலி உறுப்பு –3. –3 இன் காரணிகள் –1, 1,–3 மற்றும் 3 ஆகும்.

$$p(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - (-1) - 3 = -1 + 3 + 1 - 3 = 0$$

$\therefore (x+1)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி ஆகும்.

$$p(1) = (1)^3 + 3(1)^2 - 1 - 3 = 1 + 3 - 1 - 3 = 0$$

$\therefore (x-1)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி ஆகும்.

$$p(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - (-3) - 3 = -27 + 27 + 3 - 3 = 0$$

$\therefore (x+3)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி ஆகும்.

$p(x)$ இன் மூன்று காரணிகள் $(x+1), (x-1)$ மற்றும் $(x+3)$ ஆகும்.

$$\therefore x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x+1)(x-1)(x+3).$$

பயிற்சி 1.3

1. பின்வரும் ஒவ்வொன்றினையும் காரணிப்படுத்துக.

(i) $x^2 + 15x + 14$	(ii) $x^2 + 13x + 30$	(iii) $y^2 + 7y + 12$
(iv) $x^2 - 14x + 24$	(v) $y^2 - 16y + 60$	(vi) $t^2 - 17t + 72$
(vii) $x^2 + 14x - 15$	(viii) $x^2 + 9x - 22$	(ix) $y^2 + 5y - 36$
(x) $x^2 - 2x - 99$	(xi) $m^2 - 10m - 144$	(xii) $y^2 - y - 20$

2. பின்வரும் ஒவ்வொன்றினையும் காரணிப்படுத்துக.

(i) $3x^2 + 19x + 6$	(ii) $5x^2 + 22x + 8$	(iii) $2x^2 + 9x + 10$
(iv) $14x^2 + 31x + 6$	(v) $5y^2 - 29y + 20$	(vi) $9y^2 - 16y + 7$
(vii) $6x^2 - 5x + 1$	(viii) $3x^2 - 10x + 8$	(ix) $3x^2 + 5x - 2$
(x) $2a^2 + 17a - 30$	(xi) $11 + 5x - 6x^2$	(xii) $8x^2 + 29x - 12$
(xiii) $2x^2 - 3x - 14$	(xiv) $18x^2 - x - 4$	(xv) $10 - 7x - 3x^2$

3. பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக.

(i) $(a+b)^2 + 9(a+b) + 14$ (ii) $(p-q)^2 - 7(p-q) - 18$

4. பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக.

(i) $x^3 + 2x^2 - x - 2$ (ii) $x^3 - 3x^2 - x + 3$

(iii) $x^3 + x^2 - 4x - 4$ (iv) $x^3 + 5x^2 - x - 5$

கணிதம்

1.4 நேரியச் சமன்பாடுகள் (Linear Equations)

a, b ஆகியன மாறிலிகளாகவும் மற்றும் $a \neq 0$ எனவும் கொண்ட $ax + b = 0$ என்றமைந்த ஒரு மாறியில் உள்ள நேரியச் சமன்பாடுகளை நினைவு கூர்வோம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $3x + 2 = 8$ ஐ தீர்ப்போம்.

$$3x = 8 - 2 \implies 3x = 6 \implies x = \frac{6}{3} \implies x = 2$$

உண்மையில், ஒரு மாறியைக் கொண்ட நேரியச்சமன்பாட்டுக்கு ஒரே ஒரு (தனித்த) தீர்வு மட்டுமே உண்டு.

1.4.1 இரு மாறிகளில் ஒரு சோடி நேரியச் சமன்பாடுகள்

இரு மாறிகளில் உள்ள நேரியச் சமன்பாட்டின் பொதுவடிவம் $ax + by = c$, இங்கு a, b மற்றும் c என்பன மாறிலிகள் மேலும் $a \neq 0,\ b \neq 0$.

x, y என்ற இருமாறிகளில் அமைந்த ஒரு சோடி நேரியச் சமன்பாடுகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad (1)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \qquad (2)$$

இங்கு, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 மற்றும் c_2 என்பன மாறிலிகள் மற்றும் $a_1 \neq 0,\ b_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0$ மற்றும் $b_2 \neq 0$.

இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் (x_0, y_0) நிவர்த்தி செய்தால், (x_0, y_0) என்பது இவ்விரு சமன்பாடுகளின் ஒரு தீர்வு ஆகும். ஆகவே, இவ்விரு சமன்பாடுகளுக்கும் தீர்வு காண்பது அவற்றை நிறைவு செய்யும் வரிசைச் சோடி (x_0, y_0) ஐக் கண்டுபிடிப்பதாகும்.

பிரதியிடும் முறை, நீக்கல் முறை மற்றும் குறுக்குப் பெருக்கல் முறை ஆகியன சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்குத் தீர்வு காணும் சில முறைகள் ஆகும்.

இப்பாடப்பகுதியில் பிரதியிடும் முறையை மட்டுமே எடுத்துக்கொண்டு இருமாறிகளில் உள்ள நேரியச் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காண்போம்.

பிரதியிடும் முறை (Substitution Method)

இந்த முறையில், ஒரு சமன்பாட்டில் உள்ள இரு மாறிகளில் ஒன்றை மற்றதின் சார்பாகக் கண்டுபிடித்து பின்னர் அதை அடுத்த சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டுத் தீர்வு காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.22

பின்வரும் ஒருசோடி சமன்பாடுகளைப் பிரதியிடும் முறையில் தீர்க்க.

$2x + 5y = 2$ மற்றும் $x + 2y = 3$

தீர்வு $\quad 2x + 5y = 2 \qquad (1)$

$x + 2y = 3 \qquad (2)$

சமன்பாடு (2) இல் இருந்து, $x = 3 - 2y \qquad (3)$

எனக் கிடைக்கிறது.

x இன் மதிப்பை (1) இல் பிரதியிட, $2(3-2y)+5y=2$

$$\Longrightarrow 6-4y+5y=2$$
$$-4y+5y=2-6$$
$\therefore\ y=-4$ எனக் கிடைக்கிறது.

$y=-4$ என (3) இல் பிரதியிட,

$x=3-2(-4)=3+8=11$ எனக் கிடைக்கிறது.

$\therefore$ தீர்வு $x=11$ மற்றும் $y=-4$

எடுத்துக்காட்டு 1.23

$x+3y=16,\ 2x-y=4$ ஐப் பிரதியிடும் முறையில் தீர்.

தீர்வு

$$x+3y=16 \qquad (1)$$
$$2x-y=4 \qquad (2)$$

சமன்பாடு (1) இல் இருந்து, $x=16-3y$ (3)

எனக் கிடைக்கிறது.

x இன் மதிப்பை (2) இல் பிரதியிட,

$$2(16-3y)-y=4$$
$$\Longrightarrow 32-6y-y=4$$
$$-6y-y=4-32$$
$$-7y=-28$$
$y=\dfrac{-28}{-7}=4$ எனக் கிடைக்கிறது.

$y=4$ என (3) இல் பிரதியிட, $x=16-3(4)$

$=16-12=4$ எனக் கிடைக்கிறது.

$\therefore$ தீர்வு $x=4$ மற்றும் $y=4$.

எடுத்துக்காட்டு 1.24

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=4$ மற்றும் $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=7\ (x\neq 0, y\neq 0)$ என்பதைப் பிரதியிடும் முறையில் தீர்.

தீர்வு

$\dfrac{1}{x}=a$ மற்றும் $\dfrac{1}{y}=b$ என்க.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள் பின்வருமாறு மாறுகின்றன.

$$a+b=4 \qquad (1)$$
$$2a+3b=7 \qquad (2)$$

கணக்கு

சமன்பாடு (1) இல் இருந்து, $b = 4 - a$ (3)

எனக் கிடைக்கிறது.

b இன் மதிப்பை (2) இல் பிரதியிட, $2a + 3(4 - a) = 7$

$\Longrightarrow 2a + 12 - 3a = 7$

$2a - 3a = 7 - 12$

$-a = -5 \Longrightarrow a = 5$ எனக் கிடைக்கிறது.

$a = 5$ என (3) இல் பிரதியிட, $b = 4 - 5 = -1$

ஆனால், $\frac{1}{x} = a \Rightarrow x = \frac{1}{a} = \frac{1}{5}$

$\frac{1}{y} = b \Rightarrow y = \frac{1}{b} = \frac{1}{-1} = -1$

$\therefore$ தீர்வு $x = \frac{1}{5}$, $y = -1$

எடுத்துக்காட்டு 1.25

ஒரு பேனா மற்றும் ஒரு நோட்டுப் புத்தகம் சேர்ந்து விலை ₹ 60. பேனாவின் விலை நோட்டுப் புத்தகத்தின் விலையை விட ₹ 10 குறைவு எனில், ஒவ்வொன்றின் விலையைக் காண்க.

தீர்வு ஒரு பேனாவின் விலை ₹ x என்க.

ஒரு நோட்டுப் புத்தகத்தின் விலை ₹ y என்க.

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் படி, $x + y = 60$ (1)

$x = y - 10$ (2)

x இன் மதிப்பை (1) இல் பிரதியிட, $y - 10 + y = 60$

$\Longrightarrow y + y = 60 + 10 \Longrightarrow 2y = 70$

$\therefore y = \frac{70}{2} = 35$

$y = 35$ ஐ (2) இல் பிரதியிட, $x = 35 - 10 = 25$

ஒரு பேனாவின் விலை ₹ 25.

ஒரு நோட்டுப் புத்தகத்தின் விலை ₹ 35.

எடுத்துக்காட்டு 1.26

மூன்று கணிதப் புத்தகங்கள் மற்றும் நான்கு அறிவியல் புத்தகங்களின் மொத்த விலை ₹ 216. மூன்று கணிதப் புத்தகங்களின் விலையும் நான்கு அறிவியல் புத்தகங்களின் விலையும் சமம் எனில், ஒவ்வொரு புத்தகத்தின் விலையைக் காண்க.

தீர்வு

ஒரு கணிதப் புத்தகத்தின் விலை ₹ x மற்றும் ஒரு அறிவியல் புத்தகத்தின் விலை ₹ y என்க.

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் படி,

$3x + 4y = 216$ (1)

$3x = 4y$ (2)

சமன்பாடு (2) இல் இருந்து, $x = \frac{4y}{3}$ (3)

x இன் மதிப்பை (1) இல் பிரதியிட, $3\left(\frac{4y}{3}\right) + 4y = 216$

$$\Longrightarrow 4y + 4y = 216 \Longrightarrow 8y = 216$$

$$\therefore y = \frac{216}{8} = 27$$

$y = 27$ என (3) இல் பிரதியிட, $x = \frac{4(27)}{3} = 36$

$\therefore$ ஒரு கணிதப் புத்தகத்தின் விலை ₹ 36.

ஒரு அறிவியல் புத்தகத்தின் விலை ₹ 27.

எடுத்துக்காட்டு 1.27

தருமபுரி பேருந்து நிலையத்திலிருந்து பாலக்கோட்டிற்கு இரண்டு பயணச்சீட்டுகளும், காரிமங்கலத்திற்கு மூன்று பயணச்சீட்டுகளும் வாங்க மொத்தக் கட்டணம் ₹ 32. பாலக்கோட்டிற்கு மூன்று பயணச்சீட்டுகளும், காரிமங்கலத்திற்கு ஒரு பயணச்சீட்டும் வாங்க மொத்தக் கட்டணம் ₹ 27. தருமபுரியிலிருந்து பாலக்கோடு மற்றும் காரிமங்கலம் செல்ல கட்டணங்களைக் காண்க.

தீர்வு

தருமபுரியிலிருந்து பாலக்கோட்டிற்குக் கட்டணம் ₹ x எனவும் மற்றும் காரிமங்கலத்திற்கு கட்டணம் ₹ y எனவும் கொள்க.

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் படி,

$2x + 3y = 32$ (1)

$3x + y = 27$ (2)

சமன்பாடு (2) இல் இருந்து, $y = 27 - 3x$ (3)

y இன் மதிப்பை (1) இல் பிரதியிட, $2x + 3(27 - 3x) = 32$

$$\Longrightarrow 2x + 81 - 9x = 32$$

$$2x - 9x = 32 - 81$$

$$-7x = -49$$

$$\therefore x = \frac{-49}{-7} = 7$$

$x = 7$ என (3) இல் பிரதியிட, $y = 27 - 3(7) = 27 - 21 = 6$

$\therefore$ தருமபுரியிலிருந்து பாலக்கோட்டிற்குக் கட்டணம் ₹ 7, காரிமங்கலத்திற்குக் கட்டணம் ₹ 6.

எடுத்துக்காட்டு 1.28

இரு எண்களின் கூடுதல் 55, அவற்றின் வித்தியாசம் 7 எனில், அந்த எண்களைக் காண்க.

தீர்வு

இரு எண்கள் x, y என்க. இங்கு $x > y$ என்போம்.

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் படி, $x + y = 55$ (1)

$x - y = 7$ (2)

சமன்பாடு (2) இல் இருந்து, $x = 7 + y$ (3)

x இன் மதிப்பை (1) இல் பிரதியிட, $7 + y + y = 55$

$$\Longrightarrow 2y = 55 - 7 = 48$$

$$\therefore y = \frac{48}{2} = 24$$

$y = 24$ என (3) இல் பிரதியிட, $x = 7 + 24 = 31$.

$\therefore$ தேவையான இரு எண்கள் 31 மற்றும் 24.

எடுத்துக்காட்டு 1.29

ஒரு இரண்டு இலக்க எண்ணின் இலக்கங்களின் கூடுதல் 11. இலக்கங்களை இடமாற்றி அமைக்கும் போது கிடைக்கும் எண் முந்தைய எண்ணை விட 9 குறைவு எனில், அந்த எண்ணைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு

ஒரு இரண்டிலக்க எண்ணின் பத்தாம் இலக்கம் x எனவும் ஒன்றாம் இலக்கம் y எனவும் கொள்க. பிறகு அந்த எண் $10x + y$.

இலக்கங்களின் கூடுதல் $x + y = 11$ (1)

இலக்கங்களை இடமாற்றி அமைக்க கிடைக்கும் எண் $10y + x$.

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின்படி, $(10x + y) - 9 = 10y + x$

$$\Longrightarrow 10x + y - 10y - x = 9$$

$$9x - 9y = 9$$

இருபுறமும் 9 ஆல் வகுக்க, $x - y = 1$ (2)

சமன்பாடு (2) இல் இருந்து, $x = 1 + y$ (3)

x இன் மதிப்பை (1) இல் பிரதியிட, $1 + y + y = 11$

$$\Longrightarrow 2y + 1 = 11$$

$$2y = 11 - 1 = 10$$

$\therefore y = \frac{10}{2} = 5$, $y = 5$ என (3) இல் பிரதியிட, $x = 1 + 5 = 6$

$\therefore$ அந்த எண் $10x + y = 10(6) + 5 = 65$

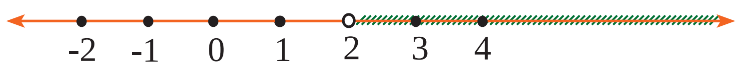
1.5 ஒரு மாறியில் உள்ள நேரிய அசமன்பாடுகள் (Linear Inequations in One Variable)

$x + 4 = 6$ என்பது ஒரு மாறியில் அமைந்த நேரியச் சமன்பாடு ஆகும். இச்சமன்பாட்டைத் தீர்க்க $x = 2$ என கிடைக்கும். ஒரு மாறியில் உள்ள நேரியச்சமன்பாட்டில் மாறிக்கு ஒரே ஒரு மதிப்பு மட்டும் உண்டு.

$x + 4 > 6$ என்ற அசமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம்.

அதாவது, $x > 6 - 4$

$x > 2$



ஆகவே **2**-க்குஅதிகமான எந்த மெய்யெண்ணும் இந்த அசமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும். நிழலிடப்படாத வட்டப் பகுதி குறிக்கும் எண்ணைத் தீர்வு கணத்தில் சேர்க்கக் கூடாது என்பதைக் குறிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1.30

தீர்க்க $4(x - 1) \leq 8$

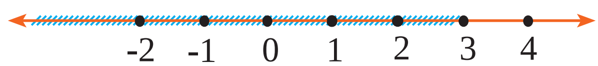
தீர்வு

$4(x - 1) \leq 8$

இருபுறமும் 4 ஆல் வகுக்க,

$x - 1 \leq 2$

$\Longrightarrow \quad x \leq 2 + 1 \Longrightarrow x \leq 3$



மூன்று மற்றும் மூன்றுக்கு குறைவான அனைத்து மெய்யெண்களும் கொடுக்கப்பட்ட அசமன்பாட்டின் தீர்வுகள் ஆகும்.

நிழலிடப்பட்ட வட்டப்பகுதி குறிக்கும் எண்ணைத் தீர்வு கணத்தில் சேர்க்க வேண்டும் என்பதைக் குறிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1.31

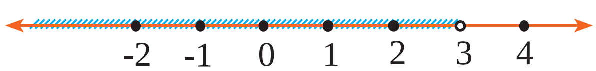
தீர்க்க $3(5 - x) > 6$

தீர்வு $3(5 - x) > 6$

இருபுறமும் 3 ஆல் வகுக்க, $5 - x > 2$

$\Longrightarrow - x > 2 - 5 \Longrightarrow - x > - 3$

$\therefore\ x < 3$ (கீழே கொடுத்துள்ள குறிப்புரையைப் பார்க்க)



மூன்றைவிட குறைவான அனைத்து மெய்யெண்களும் கொடுக்கப்பட்ட அசமன்பாட்டின் தீர்வுகள் ஆகும்.

குறிப்புரை

(i) $-a > -b \Longrightarrow a < b$ (ii) $a < b \Longrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; $a \neq 0, b \neq 0$

(iii) $a < b \Longrightarrow ka < kb$ for $k > 0$ (iv) $a < b \Longrightarrow ka > kb$; $k < 0$

எடுத்துக்காட்டு 1.32

தீர்க்க $3 - 5x \leq 9$

தீர்வு $3 - 5x \leq 9$

$\Longrightarrow -5x \leq 9 - 3 \Longrightarrow -5x \leq 6$

$\Longrightarrow 5x \geq -6 \Longrightarrow x \geq -\frac{6}{5} \Longrightarrow x \geq -1.2$

-1.2 மற்றும் -1.2 க்கு அதிகமான அனைத்து மெய்யெண்களும் கொடுக்கப்பட்ட அசமன்பாட்டின் தீர்வுகள் ஆகும்.

பயிற்சி 1.4

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளைப் பிரதியிடும் முறையில் தீர்க்க.

   (i) $x + 3y = 10;\ 2x + y = 5$ (ii) $2x + y = 1;\ 3x - 4y = 18$

   (iii) $5x + 3y = 21;\ 2x - y = 4$ (iv) $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 9;\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 12 \quad (x \neq 0, y \neq 0)$

   (v) $\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 7;\ \frac{5}{x} - \frac{4}{y} = 6\ (x \neq 0, y \neq 0)$

2. கூடுதல் 24 மற்றும் வித்தியாசம் 8 என்றவாறு உள்ள இரு எண்களைக் காண்க.

3. ஒரு இரண்டிலக்க எண்ணின் இலக்கங்களின் கூடுதல் 9. இலக்கங்களை இடமாற்ற கிடைக்கும் இரு இலக்க எண், முந்தைய எண்ணின் இருமடங்கைக் காட்டிலும் 18 அதிகம் எனில், அவ்வெண்ணைக் காண்க.

4 கவியிடமும் குறளிடமும் ஆப்பிள் பழங்கள் உள்ளன. “ நீ எனக்கு 4 பழங்களைத் தந்தால், என்னிடம் உள்ள பழங்களின் எண்ணிக்கை உன்னிடம் உள்ளதைப் போல மூன்று மடங்கு”, எனக் கவி குறளிடம் கூறினார். “நீ எனக்கு 26 பழங்களைத் தந்தால் என்னிடம் உள்ள பழங்களின் எண்ணிக்கை, உன்னிடம் உள்ளதைப் போல இருமடங்காகும்”, என குறள் பதிலளித்தார். ஒவ்வொருவரிடமும் எத்தனை பழங்கள் உள்ளன ?

5. பின்வரும் அசமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

   (i) $2x + 7 > 15$ (ii) $2(x - 2) < 3$ (iii) $2(x + 7) \leq 9$ (iv) $3x + 14 \geq 8$

பயிற்சி 1.5

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடு

1. $(x + 2)(x - 1)$ இன் விரிவு

   (A) $x^2 - x - 2$ (B) $x^2 + x + 2$ (C) $x^2 + x - 2$ (D) $x^2 - x + 2$

2. $(x+1)(x-2)(x+3)$ இன் விரிவு

(A) x^3+2x^2-5x-6 (B) x^3-2x^2+5x-6

(C) x^3+2x^2+5x-6 (D) x^3+2x^2+5x+6

3. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ என்பதற்குச் சமமானது

(A) x^3+y^3 (B) x^2+y^2 (C) x^2-y^2 (D) x^3-y^3

4. x^2+2x-8 இன் காரணிகள்

(A) $(x+4)(x-2)$ (B) $(x-4)(x+2)$ (C) $(x+4)(x+2)$ (D) $(x-4)(x-2)$

5. $x^2-6x-16$ இன் காரணிகளில் ஒன்று $(x+2)$ எனில், மற்றொரு காரணி

(A) $x+5$ (B) $x-5$ (C) $x+8$ (D) $x-8$

6. ax^2-5x+c இன் காரணிகள் $(2x+1)$ மற்றும் $(x-3)$ எனில், a மற்றும் c இன் மதிப்புகள் முறையே

(A) 2,3 (B) –2,3 (C) 2,–3 (D) 1,–3

7. $x+y=10$ மற்றும் $x-y=2$ எனில், x இன் மதிப்பு

(A) 4 (B) –6 (C) –4 (D) 6

8. $2-x<5$ இன் தீர்வு

(A) $x>-3$ (B) $x<-3$ (C) $x>3$ (D) $x<3$

நினைவில் கொள்க...

- $(x+y+z)^2 \equiv x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$
- $(x+y)^3 \equiv x^3+y^3+3xy(x+y)$ $x^3+y^3 \equiv (x+y)(x^2-xy+y^2)$
- $(x-y)^3 \equiv x^3-y^3-3xy(x-y)$ $x^3-y^3 \equiv (x-y)(x^2+xy+y^2)$
- $x^3+y^3+z^3-3xyz \equiv (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$
- $(x+a)(x+b)(x+c) \equiv x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

செயல் 1

நோக்கம் : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ என்ற முற்றொருமையை வடிவியல் வாயிலாக விளக்குதல்.

தேவையான பொருள்கள் : ஓரலகு கனச்சதுரங்கள்

செய்முறை : $a = 3$ மற்றும் $b = 1$ என எடுத்துக்கொள்வோம்.

படி 1 :

a^3 ஐக் குறிக்க, $a \times a \times a$ ஐப் பரிமாணமாக உடைய ஒரு கனச்சதுரத்தை உருவாக்கு. இங்கு $3 \times 3 \times 3$ ஓரலகு கனச்சதுரங்கள்

படி 2 :

b^3 ஐக் குறிக்க $b \times b \times b$ ஐப் பரிமாணமாக உடைய ஒரு கனச்சதுரத்தை உருவாக்கு. இங்கு $1 \times 1 \times 1$ உடைய ஒரு கனச்சதுரம்

படி 3 :

$a^3 - b^3$ ஐப் பின்வருமாறு காணலாம்.

 −  = 

படி 4 :

$(a-b)a^2$ ஐக் குறிக்க, $(a-b) \times a \times a$ பரிமாணமாக உடைய ஒரு கனச் செவ்வகத்தை உருவாக்குக. $2 \times 3 \times 3$ ஓரலகு கனச்சதுரங்கள்.

படி 5 :

$(a-b)ab$, ஐக் குறிக்க, $(a-b) \times a \times b$ பரிமாணமுடைய ஒரு கனச்செவ்வகத்தை உருவாக்குக. $2 \times 3 \times 1$ ஓரலகு கனச்சதுரங்கள்

படி 6 :

$(a-b)b^2$ ஐக் குறிக்க, $(a-b) \times b \times b$. பரிமாணமுடைய ஒரு கனச் செவ்வகத்தை உருவாக்குக. $2 \times 1 \times 1$ ஓரலகு கனச்சதுரங்கள்.

படி 7 :

படி 4, 5 மற்றும் 6 இல் இடம்பெற்றுள்ள கனச்சதுரங்கள் ஒன்றிணைக்க கிடைக்கும் $(a-b)a^2+(a-b)ab+(a-b)b^2=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, கனச் செவ்வகம்.

 +  +  = 

உற்று நோக்கியதிலிருந்து,

(i) a^3 ஐக் குறிக்கத் தேவையான ஓரலகு கனச்சதுரங்களின் எண்ணிக்கை 27.

(ii) b^3 ஐக் குறிக்கத் தேவையான ஓரலகு கனச்சதுரங்களின் எண்ணிக்கை 1.

(iii) a^3-b^3 ஐக் குறிக்கத் தேவையான ஓரலகு கனச்சதுரங்களின் எண்ணிக்கை 26.

(iv) $(a-b)a^2$ ஐக் குறிக்கத் தேவையான ஓரலகு கனச்சதுரங்களின் எண்ணிக்கை 18.

(v) $(a-b)ab$ ஐக் குறிக்கத் தேவையான ஓரலகு கனச்சதுரங்களின் எண்ணிக்கை 6.

(vi) $(a-b)b^2$ ஐக் குறிக்கத் தேவையான ஓரலகு கனச்சதுரங்களின் எண்ணிக்கை 2.

(vii) $(a-b)a^2+(a-b)ab+(a-b)b^2$ ஐக் குறிக்கத் தேவையான ஓரலகு கனச்சதுரங்களின் எண்ணிக்கை 18+6+2 = 26.

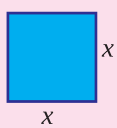
கற்றல் அடைவு

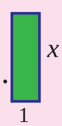
a^3-b^3 ஐக் குறிக்க தேவைப்படும் ஓரலகு கனச்சதுரங்களின் எண்ணிக்கையும் $(a-b)a^2+(a-b)ab+(a-b)b^2=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ ஐக் குறிக்கத் தேவைப்படும் ஓரலகு கனச்சதுரங்களின் எண்ணிக்கையும் சமம் என்பதைக் காணலாம்.

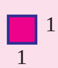
செயல் 2

நோக்கம் : தாளைப் பயன்படுத்தி பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காரணிப்படுத்துதல்.

செய்முறை : தாளை மூன்று வகையில் பின்வருமாறு கத்தரித்துக் கொள்ளவும்.

வகை 1 : x^2 சதுர அலகுகள் பரப்புடைய சதுரத்தாள்கள் 

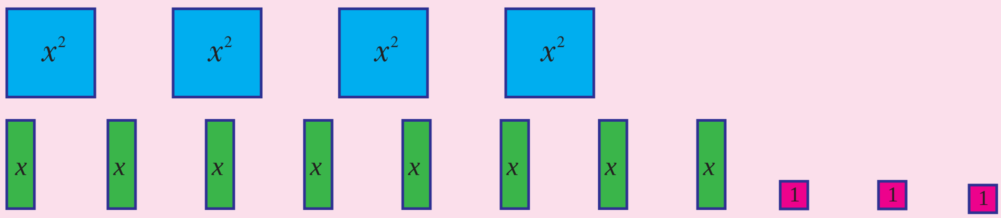
வகை 2 : x சதுர அலகுகள் பரப்புடைய செவ்வகத்தாள்கள் (நீளம் x, அகலம் 1). 

வகை 3 : ஓரலகு பரப்புடைய சதுரத்தாள்கள். 

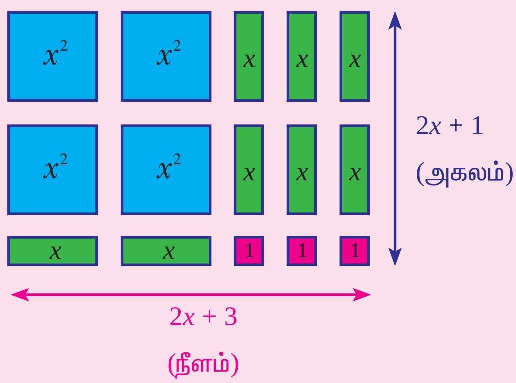
எடுத்துக்காட்டாக,

$4x^2 + 8x + 3$ ஐக் காரணிப்படுத்த, நான்கு x^2 தாள்கள், எட்டு x தாள்கள், மூன்று ஓரலகு தாள்களை எடுத்துக்கொள்வோம்.

தெரிவு செய்யப்பட்ட தாள்கள் பின்வருமாறு.



தெரிவுச் செய்த தாள்களைப் பின்வருமாறு ஒன்றிணைத்தால் அவை ஒரு செவ்வகத்தை அமைக்கிறது. இங்குச் செவ்வகத்தின் நீளமும் அகலமும் காரணிகளாக அமைவதைப் பின்வரும் படத்தின் மூலம் விளக்கலாம்.



செவ்வகத்தின் பக்கங்கள் $(2x + 3)$ மற்றும் $(2x + 1)$ ஆகும்.

$$\therefore\ 4x^2 + 8x + 3 = (2x + 3)(2x + 1)$$

கற்றல் விளைவு

பல்லுறுப்புக் கோவைகளைத் தாள்களைப் பயன்படுத்தி எளிய முறையில் காரணிப்படுத்துவதோடு, அப்பல்லுறுப்புக் கோவைகளால் உருவாக்கப்படும் செவ்வகத்தின் நீளமும் அகலமும் காரணிகளாக அமைவதைக் காணலாம்.

தாள்களைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துக.

(i) $2x^2 + 5x + 3$ (ii) $3x^2 + 4x + 1$ (iii) $x^2 + 5x + 6$

செயல் 3

கீழ்க்கண்ட அட்டவணையை நிறைவு செய்க. (கொடுக்கப்பட்ட எடுத்துக்காட்டைப் போல்)

வ. எண்	இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$	இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையின் காரணிகள்		இருபடி சமன்பாடு $p(x) = 0$	இருபடி சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்
1	$x^2 - 6x - 27$	$x-9$	$x + 3$	$x^2 - 6x - 27 = 0$	9, –3
2	$x^2 + 11x + 24$	$x + 8$			
3	$2x^2 + 7x + 6$		$x + 2$		
4					–3, –2
5	$6x^2 - 31x + 35$		$2x-7$		
6	$x^2 + 19x - 70$	$x - 5$			
7					4, –6
8	$x^2 - 3x - 18$	$x + 3$			
9	$10x^2 - 19x - 117$		$5x + 13$		

செயல் 4

சரியான காரணிகளைக் கண்டறிதல்

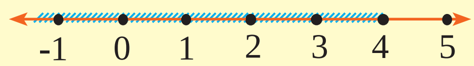
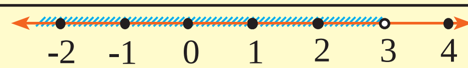
பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கு எதிராக இடம்பெற்றுள்ள சரியான காரணிகளைக் (✓) குறியீட்டால் குறிக்க வேண்டும்.

வ. எண்	பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$	$p(x)$ இன் காரணிகள்					
		$x-1$	$x+1$	$x-2$	$x+2$	$x-3$	$x+3$
1	$x^3 - 2x^2 - x + 2$						
2	$x^3 + x^2 - 4x - 4$						
3	$x^3 + 3x^2 - 3x - 3$						
4	$x^3 - 3x^2 - 4x + 12$						
5	$x^3 + 2x^2 - 5x - 6$						
6	$x^3 - 2x^2 - 5x - 6$						
7	$x^3 + 2x^2 - x - 2$						
8	$x^3 - x^2 - 4x + 4$						
9	$x^3 - 3x^2 - x + 3$						
10	$x^3 + 3x^2 - 4x - 12$						

செயல் 5

அசமன்பாடுகளை எழுதுதல் மற்றும் வரைதல்

அட்டவணையைப் பூர்த்தி செய் (முதல் இரண்டு நிரைகள் உங்களுக்காகச் செய்தது)

விளக்கம்	அசமன்பாடு	வரைபடம்
x என்பது 4 மற்றும் 4 ஐ விட சிறியது	$x \leq 4$	
$-3x$ என்பது 12 ஐ விட சிறியது	$-3x < 12$ ie., $x > -4$	
$3-4x$ என்பது 11 ஐ விட பெரியது		
	$-2x-6 > -8$	
		
	$x \geq 0$	

பயிற்சி 1.1

1. (i) $25x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 20xy + 12yz + 30zx$ (ii) $4a^2 + 9b^2 + c^2 + 12ab - 6bc - 4ca$ (iii) $x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 4xy + 16yz - 8zx$ (iv) $p^2 + 4q^2 + r^2 - 4pq - 4qr + 2rp$

2. (i) $x^3 + 12x^2 + 39x + 28$ (ii) $p^3 + 4p^2 - 20p - 48$ (iii) $x^3 + x^2 - 17x + 15$ (iv) $x^3 - 7ax^2 + 14a^2x - 8a^3$ (v) $27x^3 + 72x^2 + 51x + 10$ (vi) $8x^3 - 36x^2 - 2x + 105$

3. (i) 19, 111, 189 (ii) –7, 2, 40 (iii) 60, 142, 105 (iv) –100, –5, 6 **4.** –10, –3, 10

5. (i) $27a^3 + 135a^2b + 225ab^2 + 125b^3$ (ii) $64x^3 - 144x^2y + 108xy^2 - 27y^3$ (iii) $8y^3 - 36y + \frac{54}{y} - \frac{27}{y^3}$ **6.** (i) 970299 (ii) 1030301 (iii) 941192 (iv) 1061208 (v) 1006012008 **7.** 793 **8.** –288 **9.** 52 **10.** 36

11. (i) $8x^3 + y^3 + 64z^3 - 24xyz$ (ii) $x^3 - 27y^3 - 125z^3 - 45xyz$ **12.** (i) –486 (ii) 2880

பயிற்சி 1.2

1. (i) $a^2(2a - 3b + 2c)$ (ii) $16x(1 + 4xy)$ (iii) $5x^3(2 - 5xy)$
   (iv) $(y - z)(x + a)$ (v) $(p + q)(p + r)$
2. (i) $(x + 1)^2$ (ii) $(3x - 4y)^2$ (iii) $(b + 2)(b - 2)$ (iv) $(1 + 6x)(1 - 6x)$
3. (i) $(p + q + r)^2$ (ii) $(a - 2b - 6)^2$ (iii) $(3x - y + 1)^2$
   (iv) $(2a - b + 3c)^2$ (v) $(5x - 2y - 3z)^2$
4. (i) $(3x + 4y)(9x^2 - 12xy + 16y^2)$ (ii) $(m + 2)(m^2 - 2m + 4)$
   (iii) $(a + 5)(a^2 - 5a + 25)$ (iv) $(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$
   (v) $(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$

பயிற்சி 1.3

1. (i) $(x + 1)(x + 14)$ (ii) $(x + 3)(x + 10)$ (iii) $(y + 3)(y + 4)$
   (iv) $(x - 2)(x - 12)$ (v) $(y - 6)(y - 10)$ (vi) $(t - 8)(t - 9)$
   (vii) $(x - 1)(x + 15)$ (viii) $(x - 2)(x + 11)$ (ix) $(y - 4)(y + 9)$
   (x) $(x + 9)(x - 11)$ (xi) $(m + 8)(m - 18)$ (xii) $(y + 4)(y - 5)$
2. (i) $(3x + 1)(x + 6)$ (ii) $(5x + 2)(x + 4)$ (iii) $(x + 2)(2x + 5)$
   (iv) $(14x + 3)(x + 2)$ (v) $(5y - 4)(y - 5)$ (vi) $(9y - 7)(y - 1)$
   (vii) $(3x - 1)(2x - 1)$ (viii) $(3x - 4)(x - 2)$ (ix) $(3x - 1)(x + 2)$
   (x) $(2a - 3)(a + 10)$ (xi) $(x + 1)(11 - 6x)$ (xii) $(8x - 3)(x + 4)$
   (xiii) $(x + 2)(2x - 7)$ (xiv) $(9x + 4)(2x - 1)$ (xv) $(1 - x)(3x + 10)$
3. (i) $(a + b + 2)(a + b + 7)$ (ii) $(p - q + 2)(p - q - 9)$
4. (i) $(x + 1)(x - 1)(x + 2)$ (ii) $(x + 1)(x - 1)(x - 3)$
   (iii) $(x + 1)(x + 2)(x - 2)$ (vi) $(x + 1)(x - 1)(x + 5)$

பயிற்சி 1.4

1. (i) $x = 1, y = 3$ (ii) $x = 2, y = -3$ (iii) $x = 3, y = 2$ (iv) $x = \frac{1}{5}, y = \frac{1}{2}$
   (v) $x = \frac{1}{2}, y = 1$
2. 16, 8
3. 27
4. 50, 22
5. (i) $x > 4$ (ii) $x < 3.5$ (iii) $x \leq -2.5$ (iv) $x \geq -2$

பயிற்சி 1.5

1. C 2. A 3. D 4. A 5. D 6. C 7. D 8. A

கணக்கு

2 முக்கோணவியல்

There is perhaps nothing which so occupies the middle position of mathematics as trigonometry.

– J.F. HERBART

முதன்மைக் குறிக்கோள்கள்

- முக்கோணவியல் விகிதங்களை அறிதல்
- நிரப்புக் கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்களை அறிதல்
- முக்கோணவியல் அட்டவணையைப் பயன்படுத்துதல்

2.1 அறிமுகம்

முக்கோணவியலின் ஆங்கில மொழியாக்கமான ***Trigonometry*** என்ற சொல் கிரேக்க மொழியிலிருந்து பெறப்பட்டது. இதன் பொருள் முக்கோணத்தின் அளவுகள் என்பதாகும். ஆரம்ப காலங்களில் முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கும், அதன் கோணங்களுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பினை அறிய முக்கோணவியல் பயன்பட்டது. *ஹிப்பார்க்கஸ் (Hipparchus)* எனும் கிரேக்க வானவியல் மற்றும் கணித வல்லுநர் முதன் முதலில் முக்கோணவியல் விகித அட்டவணையைக் கட்டமைத்து, முக்கோணவியலின் முன்னேற்றத்திற்கு வித்திட்டார். எனவே, இவர் *முக்கோணவியலின் தந்தை* என அழைக்கப்படுகிறார். முக்கோணவியலானது தற்காலத்தில் பெருமளவில் பயன்படுத்தப்பட்டு வரும் பல பயன்பாடுகளை உள்ளடக்கிய மிகப்பழமையான கணித யுக்தியாகும். பண்டைக்காலங்களில் நிலஅளவை மற்றும் வானவியலில் கோணங்கள் மற்றும் தூரங்கள் அளவிட செங்கோண முக்கோணவியலை பயன்படுத்தினர். கப்பல் பயணத்தின் போது வழி காணவும், வான்வெளியில் கோள்களின் இயங்கு பாதைகள் மற்றும் அதிர்வுகளை (ஒலி அலைகள், கிடார் கம்பியின் அதிர்வுகள்) காணவும் முக்கோணவியல் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

2.2 முக்கோணவியல் விகிதங்கள்

2.2.1 கோணம் (*Angle*)

நாம் இப்பாடப்பிரிவைக் கோணத்தின் வரையறையை அறிவதன் மூலம் தொடங்குவோம். இவ்வரையறை பல்வேறு விதிகளை உள்ளடக்கியது ஆகும்.

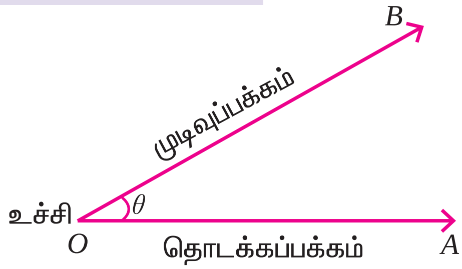
ஆரியபட்டா
(A.D. 476 – 550)

நாம் இப்போது *sine* எனும் குறியீட்டை எவ்வாறு பயன்படுத்துகிறோமோ, அதே பொருளில் முதன் முதலில் உபயோகித்தவர் ஆரியபட்டா (*Aryabhatta*). கி. பி 500-ல் அவர் எழுதிய ஆரியபட்டியம் எனும் கணித நூலில் *sine* எனும் குறியீடு காணப்படுகிறது. ஆரியபட்டர் இந்தியாவின் மிகச்சிறந்த முற்காலக் கணித மேதைகளில் முதன்மையானவர். இவர் பீகார் மாநிலம் பாட்னாவில் உள்ள பாடலிபுத்திரம் எனும் இடத்தில் வாழ்ந்தவர் ஆவர். இவர் கி.பி 476 ஆம் ஆண்டு மார்ச் 21 மேச சங்கராந்தி அன்று பிறந்தார். இவர் தனது 23ஆவது வயதில் வானவியல் பற்றி குறைந்தபட்சம் ஆரியபட்டா, ஆரியபட்டா சித்தாந்தா எனும் இரு நூல்களை எழுதினார். இதில் ஆரியபட்டா எனும் நூல் கணிதம் மற்றும் வானவியலைப் பற்றியது.

முக்கிய கருத்து **கோணம்**

இருபரிமாண தளத்தில் திசையிட்ட இரு கோட்டுப் பகுதிகளுக்கு இடைப்பட்ட பகுதி கோணம் எனப்படும். கோணம் ஆரம்பிக்கும் பகுதி கோணத்தின் தொடக்கப்பக்கம் எனவும் அது முடியும் பகுதி முடிவுப்பக்கம் எனவும் அழைக்கப்படும். திசையிட்ட இரு கோட்டுப் பகுதிகள் ஆரம்பிக்கும் புள்ளி கோணத்தின் உச்சி எனப்படும்.

படம் 2.1 ஆனது கோணத்திற்கான வரைபட உதாரணமாகும்.



படம் 2.1

இங்கு O-வைப் பொறுத்துக் கதிர் OA ஆனது OB வரை சுழற்றப்படுவதால் கோணம் AOB உருவாகிறது. இதனை $\angle AOB$ எனக் குறிப்போம். இங்கு OA என்பது தொடக்கப்பக்கம் எனவும், OB என்பது முடிவுப்பக்கம் எனவும் மற்றும் O என்பது அக்கோணத்தின் உச்சி எனவும் அழைக்கப்படுகிறது. நாம் கோணங்களைக் குறிக்க θ, α, β போன்ற கிரேக்க எழுத்துக்களைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

ஒரு கோணத்தின் அளவைப் பாகை என்ற அலகால் குறிக்கிறோம். இது கி.மு 1000 ஆம் ஆண்டிற்கு முன்பே பாபிலோனியர்களால் பயன்படுத்தப்பட்டது. ஒரு பாகை (1° எனக் குறியிடுவோம்) என்பது ஒரு சுழற்சியில் உண்டாகும் கோணத்தின் $\frac{1}{360}$ மடங்கு ஆகும்.

2.2.2 பிதாகரஸ் தேற்றம் (*Pythagoras Theorem*)

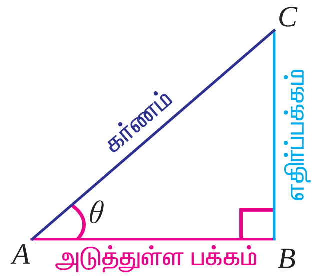
ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் தெரியாத பக்க அளவைக் காண பிதாகரஸ் தேற்றம் பயன்படுகிறது.

பிதாகரஸ் தேற்றம்: ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் கர்ணத்தின் மீது வரையப்படும் சதுரத்தின் பரப்பளவானது, மற்ற இரண்டு பக்கங்களின் மீது வரையப்படும் சதுரங்களின் பரப்பளவுகளின் கூடுதலுக்குச் சமம்.

பிதாகரஸ் தேற்றம் முக்கோணவியல் கருத்துகளை மேம்படுத்தவும், பல கணக்குகளுக்குத் **தீர்வு** காணவும் பயன்படுகிறது.

2.2.3 முக்கோணவியல் விகிதங்கள் (*Trigonometric Ratios*)

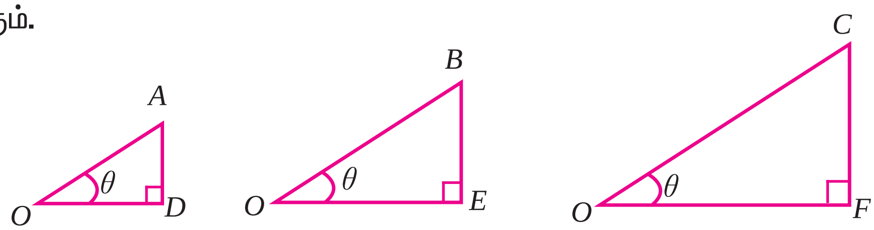
படம் 2.2-ல் உள்ள செங்கோண முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்கள் கோணம் θ-விற்கு எங்ஙனம் தொடர்பு பெற்று அமைந்துள்ளது எனக் காண்போம்.



படம் 2.2

- செங்கோணத்திற்கு நேர் எதிரே அமைந்துள்ள பக்கம் கர்ணம் எனப்படும். இது செங்கோண முக்கோணத்தின் மிக நீளமான பக்கம் ஆகும்.
- கோணம் θ விற்கு நேர் எதிரே அமைந்துள்ள பக்கம் எதிர்ப்பக்கம் ஆகும்.
- θ விற்கு அருகிலுள்ள கர்ணம் அல்லாத பக்கம் அடுத்துள்ள பக்கம் ஆகும்.

வடிவொத்த செங்கோண முக்கோணங்களை அடிப்படையாகக் கொண்டே முக்கோணவியல் விகிதங்கள் (*Trigonometrical Ratios*) முதலில் உருவாக்கப்பட்டது. பொதுவான குறுங்கோணத்தைக் கொண்ட எல்லாச் செங்கோண முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவை ஆகும். கீழ்க்காணும் செங்கோண முக்கோணங்களின் குறுங்கோணங்கள் ஒரே அளவினை உடையதாகும்.



எனவே, மேற்காணும் முக்கோணங்களில் ஒத்த பக்கங்களின் விகிதங்கள் சமமாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\dfrac{AD}{OA} = \dfrac{BE}{OB} = \dfrac{CF}{OC}$; $\quad \dfrac{OD}{OA} = \dfrac{OE}{OB} = \dfrac{OF}{OC}$

இம்முக்கோணங்களின் பக்கங்களின் விகிதங்கள் θ வின் அளவைப் பொறுத்து அமைகிறதே தவிர குறிப்பிட்ட எந்த ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தைப் பொறுத்தும் அமைவதில்லை. இதன் மூலம் நாம் ஆறு முக்கோணவியல் விகிதங்களைப் பெறுகிறோம். இந்த விகிதங்களுக்கு வெகுகாலத்திற்கு முன்பே பெயரிட்டுள்ளனர்.

$\dfrac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$ என்ற விகிதம் கோணம் θ வின் *sine* என அழைக்கப்படுகிறது. மேலும் இது $\sin\theta$ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது.

$\dfrac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$ என்ற விகிதம் கோணம் θ-வின் *cosine* என அழைக்கப்படுகிறது. மேலும் இது $\cos\theta$ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது.

$\dfrac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$ என்ற விகிதம் கோணம் θ-வின் *tangent* என அழைக்கப்படுகிறது. மேலும் இது $\tan\theta$ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது.

$\dfrac{\text{கர்ணம்}}{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}$ என்ற விகிதம் கோணம் θ-வின் *cosecant* என அழைக்கப்படுகிறது. மேலும் இது $\operatorname{cosec}\theta$ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது.

$\dfrac{\text{கர்ணம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$ என்ற விகிதம் கோணம் θ-வின் *secant* என அழைக்கப்படுகிறது. மேலும் இது $\sec\theta$ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது.

$\dfrac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}$ என்ற விகிதம் கோணம் θ-வின் *cotangent* என அழைக்கப்படுகிறது. மேலும் இது $\cot\theta$ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது.

முக்கிய கருத்து **முக்கோணவியல் விகிதங்கள்**

செங்கோண முக்கோணத்தில் θ ஒரு குறுங்கோணம் என்க. கோணம் θ வைப் பொறுத்து ஆறு முக்கோணவியல் விகிதங்கள் பின்வருமாறு

$$\sin\theta = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}$$

தலைகீழ் தொடர்புகள்

$\operatorname{cosec}\theta$, $\sec\theta$ மற்றும் $\cot\theta$ ஆகிய முக்கோணவியல் விகிதங்கள் முறையே $\sin\theta$, $\cos\theta$ மற்றும் $\tan\theta$ ஆகியவற்றின் தலைகீழ் விகிதங்கள் ஆகும்.

$$\sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

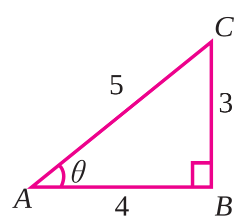
$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

குறிப்புரை

1. அடிப்படை விகிதங்களாகிய $\sin\theta$, $\cos\theta$ மற்றும் $\tan\theta$ ஆகியன $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ என்பதன் மூலம் தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளன.
2. குறுங்கோணம் θ வின் முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் கணக்கிட, கோணம் θ வைக் கொண்ட எவ்விதச் செங்கோண முக்கோணத்தையும் பயன்படுத்தலாம்.
3. முக்கோணவியல் விகிதங்கள் பக்கங்களின் விகிதங்களாக வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதால் முக்கோணவியல் விகிதங்கள் அலகு அற்றது.

எடுத்துக்காட்டு 2.1

படத்தில் காணும் செங்கோண முக்கோணம் ABC இல், கோணம் θ வைப் பொறுத்து ஆறு முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் காண்க.



படம் 2.3

தீர்வு படம் 2.3 லிருந்து, எதிர்ப்பக்கம் $BC = 3$, அடுத்துள்ள பக்கம் $AB = 4$, கர்ணம் $AC = 5$

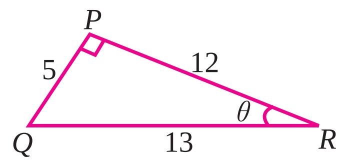
$$\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5} \qquad \sec\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{4}$$

$$\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4} \qquad \cot\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.2

படத்தில் காணும் செங்கோண முக்கோணம் PQR இல், கோணம் θ வைப் பொறுத்து ஆறு முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் காண்க.



படம் 2.4

தீர்வு படம் 2.4-லிருந்து, எதிர்ப்பக்கம் $PQ = 5$, அடுத்துள்ள பக்கம் $PR = 12$, கர்ணம் $QR = 13$

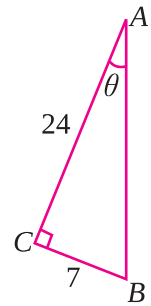
$$\sin\theta = \frac{PQ}{RQ} = \frac{5}{13} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{RQ}{PQ} = \frac{13}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{PR}{RQ} = \frac{12}{13} \qquad \sec\theta = \frac{RQ}{PR} = \frac{13}{12}$$

$$\tan\theta = \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{12} \qquad \cot\theta = \frac{PR}{PQ} = \frac{12}{5}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.3

படம் 2.5 இலிருந்து, கோணம் θ வின் ஆறு முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் காண்க.



படம் 2.5

தீர்வு படம் 2.5 இலிருந்து, $AC = 24$ மற்றும் $BC = 7$. பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி,

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 = 7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$$

$$\therefore AB = \sqrt{625} = 25$$

நாம் இப்பொழுது மூன்று பக்கங்களின் அளவுகளைப் பயன்படுத்தி, கோணம் θ வைப் பொறுத்து ஆறு முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் காணலாம்

$$\sin\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{7}{25} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{25}{7}$$

$$\cos\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{24}{25} \qquad \sec\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{25}{24}$$

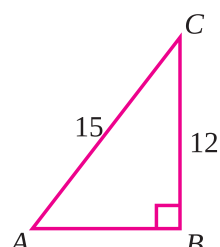
$$\tan\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{24} \qquad \cot\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{24}{7}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.4

செங்கோண முக்கோணம் ABC இல், B செங்கோணம் மற்றும் $15 \sin A = 12$ எனில், கோணம் A இன் மற்ற ஐந்து முக்கோணவியல் விகிதங்களையும், கோணம் C இன் ஆறு முக்கோணவியல் விகிதங்களையும் காண்க.

தீர்வு $15 \sin A = 12$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே, $\sin A = \frac{12}{15}$.

$BC = 12$, $AC = 15$ மற்றும் B ஐ செங்கோணமாக கொண்ட ΔABC ஐ (படம் 2.6) கருதுக. பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி,



படம் 2.6

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$15^2 = AB^2 + 12^2$$
$$AB^2 = 15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81$$
$$\therefore AB = \sqrt{81} = 9$$

நாம் இப்பொழுது மூன்று பக்கங்களின் அளவுகளைப் பயன்படுத்தி, கோணம் A மற்றும் C இன் முக்கோணவியல் விகிதங்களைப் பின்வருமாறு காணலாம்.

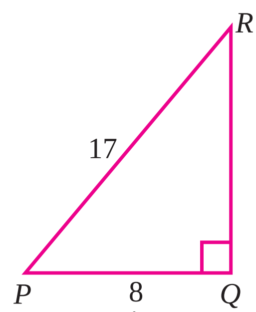
$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \qquad \sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$
$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \qquad \cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$
$$\operatorname{cosec} A = \frac{AC}{BC} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} \qquad \tan C = \frac{AB}{BC} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$
$$\sec A = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} \qquad \operatorname{cosec} C = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$
$$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \qquad \sec C = \frac{AC}{BC} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$
$$\cot C = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.5

$\triangle PQR$-ல், Q செங்கோணம், $PQ = 8$ மற்றும் $PR = 17$ எனில், கோணம் P இன் ஆறு முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் காண்க.

தீர்வு செங்கோண முக்கோணம் PQR இல், Q செங்கோணம் (படம் 2.7ஐப் பார்க்க), $PQ = 8$ மற்றும் $PR = 17$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி,

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2$$
$$17^2 = 8^2 + QR^2$$
$$QR^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$$
$$\therefore \quad QR = \sqrt{225} = 15$$



படம் 2.7

நாம் இப்பொழுது மூன்று பக்கங்களின் அளவுகளைப் பயன்படுத்தி, கோணம் P இன் ஆறு முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் காணலாம்.

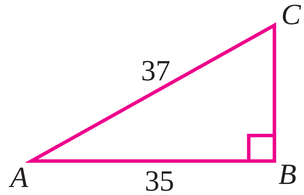
$$\sin P = \frac{RQ}{PR} = \frac{15}{17} \qquad \operatorname{cosec} P = \frac{PR}{RQ} = \frac{17}{15}$$
$$\cos P = \frac{PQ}{PR} = \frac{8}{17} \qquad \sec P = \frac{PR}{PQ} = \frac{17}{8}$$
$$\tan P = \frac{RQ}{PQ} = \frac{15}{8} \qquad \cot P = \frac{PQ}{RQ} = \frac{8}{15}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.6

$\cos A = \dfrac{35}{37}$ எனில், $\dfrac{\sec A + \tan A}{\sec A - \tan A}$ ஐக் காண்க.

தீர்வு $\cos A = \dfrac{35}{37}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. $AB = 35$ மற்றும் $AC = 37$, $\angle B = 90^\circ$ கொண்ட செங்கோண முக்கோணம் ABC ஐக் (படம் 2.8) கருதுக. பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி, நாம் பெறுவது

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$37^2 = 35^2 + BC^2$$
$$BC^2 = 37^2 - 35^2$$
$$= 1369 - 1225 = 144$$
$$\therefore BC = \sqrt{144} = 12$$



படம் 2.8

$$\sec A = \frac{AC}{AB} = \frac{37}{35}, \qquad \tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{35}$$

எனவே, $\sec A + \tan A = \dfrac{37}{35} + \dfrac{12}{35} = \dfrac{49}{35}$, $\quad \sec A - \tan A = \dfrac{37}{35} - \dfrac{12}{35} = \dfrac{25}{35}$

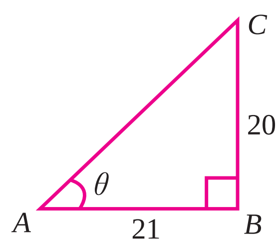
$$\therefore \frac{\sec A + \tan A}{\sec A - \tan A} = \frac{\frac{49}{35}}{\frac{25}{35}} = \frac{49}{35} \times \frac{35}{25} = \frac{49}{25}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.7

$\tan\theta = \dfrac{20}{21}$ எனில், $\dfrac{1 - \sin\theta + \cos\theta}{1 + \sin\theta + \cos\theta} = \dfrac{3}{7}$ என நிறுவுக.

தீர்வு $\tan\theta = \dfrac{20}{21}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. $AB = 21$ மற்றும் $BC = 20$ அளவுகள் கொண்ட செங்கோண முக்கோணம் ABC ஐ (படம் 2.9) கருதுக. பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி, நாம் பெறுவது

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 20^2 + 21^2 = 400 + 441 = 841.$$
$$\therefore AC = \sqrt{841} = 29.$$



படம் 2.9

$$\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{20}{29}, \qquad \cos\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{21}{29}$$

$$1 - \sin\theta + \cos\theta = 1 - \frac{20}{29} + \frac{21}{29} = \frac{29 - 20 + 21}{29} = \frac{30}{29}$$

$$1 + \sin\theta + \cos\theta = 1 + \frac{20}{29} + \frac{21}{29} = \frac{29 + 20 + 21}{29} = \frac{70}{29}$$

$$\frac{1 - \sin\theta + \cos\theta}{1 + \sin\theta + \cos\theta} = \frac{\frac{30}{29}}{\frac{70}{29}} = \frac{30}{29} \times \frac{29}{70} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}$$

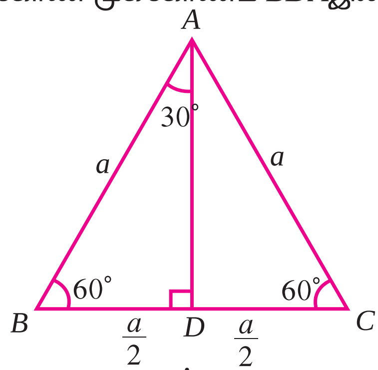
கணக்கு

2.3 சில சிறப்பு கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்கள்

சிலவகை சிறப்புக் கோணங்களான $30^\circ, 45^\circ$ மற்றும் 60° இன் விகிதங்களைக் காண வடிவியல் முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

2.3.1 30° மற்றும் 60°–ன் முக்கோணவியல் விகிதங்கள்

$\triangle ABC$ என்பது a அலகு பக்க அளவு கொண்ட சமபக்க முக்கோணம் (படம் 2.10ஐ பார்க்க) என்க. $AD \perp BC$ ஐ வரைக. எனவே, D என்பது BC இன் மையப்புள்ளி ஆகும். ஆதலால், $BD = DC = \frac{a}{2}$ மற்றும் $\angle BAD = \angle DAC = 30^\circ$. இப்போது, செங்கோண முக்கோணம் BDAஇல், $\angle BAD = 30^\circ$ மற்றும் $BD = \frac{a}{2}$. பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி,



படம் 2.10

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$a^2 = AD^2 + \left[\frac{a}{2}\right]^2$$

$$AD^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \quad = \frac{3a^2}{4}$$

$$\therefore AD = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

ஆகவே, செங்கோண முக்கோணம் BDA இல் கோணம் 30° இன் முக்கோணவியல் விகிதங்களை நாம் பின்வருமாறு காணலாம்.

$$\sin 30^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}$$

$\triangle BDA$-ல், $\angle ABD = 60^\circ$. எனவே, நாம் கோணம் 60° இக்கான முக்கோணவியல் விகிதங்களைப் பின்வருமாறு காணலாம்.

$$\sin 60^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} \qquad \sec 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ} = 2$$

$$\tan 60^\circ = \frac{AD}{BD} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} \qquad \cot 60^\circ = \frac{1}{\tan 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

கணக்கு

2.3.2 45°–ன் முக்கோணவியல் விகிதங்கள்

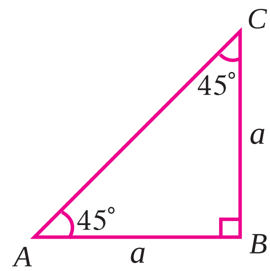
ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் ஒரு குறுங்கோணம் 45° எனில், மற்றொரு குறுங்கோணமும் 45° ஆகும். எனவே, அம்முக்கோணம் ஒரு இருசமபக்கச் செங்கோண முக்கோணமாகும். $\angle B = 90^\circ$ கொண்ட ஒரு இருசமபக்க முக்கோணம் ABC ஐக் கருதுக. இங்கு $\angle A = \angle C = 45^\circ$, எனவே, $AB = BC$.

$AB = BC = a$ என்க. பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$\therefore AC = a\sqrt{2}$$



படம் 2.11

படம் 2.11 இலிருந்து, கோணம் 45° இன் முக்கோணவியல் விகிதங்கள் பின்வருமாறு

$\sin 45^\circ = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\operatorname{cosec} 45^\circ = \dfrac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}$
$\cos 45^\circ = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\sec 45^\circ = \dfrac{1}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}$
$\tan 45^\circ = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{a}{a} = 1$	$\cot 45^\circ = \dfrac{1}{\tan 45^\circ} = 1$

2.3.3 0° மற்றும் 90° இன் முக்கோணவியல் விகிதங்கள்

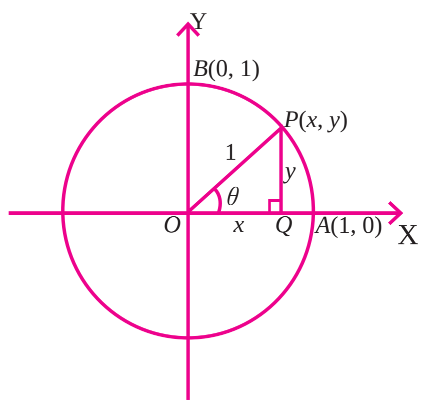
ஆதியை மையமாகவும் ஓரலகு ஆரமும் கொண்ட வட்டத்தை (படம் 2.12) கருதுக. $P(x, y)$ என்பது முதல் கால்பகுதியில் வட்டத்தின் மீதமைந்த ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.

P யிலிருந்து x அச்சுக்குச் செங்குத்துக்கோடு PQஐ வரைக. இது செங்கோண முக்கோணம் OQPஐ அமைக்கிறது. மேலும் $\angle POQ = \theta$ என்க. எனவே,

$\sin\ \theta = \dfrac{PQ}{OP} = \dfrac{y}{1} = y$ (P இன் y அச்சுத்தொலைவு)

$\cos\ \theta = \dfrac{OQ}{OP} = \dfrac{x}{1} = x$ (P இன் x அச்சுத்தொலைவு)

$\tan\ \theta = \dfrac{PQ}{OQ} = \dfrac{y}{x}$



படம் 2.12

OP ஆனது OA -வுடன் ஒன்றும் போது $\theta = 0^\circ$ ஆகும். A இன் ஆயத்தொலைவுகள் $(1, 0)$ என்பதால், நாம் பெறுவது

கணக்கு

$\sin 0^\circ = 0$ (A இன் y அச்சுத்தொலைவு) cosec 0° வரையறுக்கப்படவில்லை

$\cos 0^\circ = 1$ (A இன் x அச்சுத்தொலைவு) $\sec 0^\circ = 1$

$\tan 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0$ cot 0° வரையறுக்கப்படவில்லை

OP ஆனது OB-யுடன் ஒன்றும் போது $\theta = 90^\circ$ ஆகும். B இன் ஆயத்தொலைவுகள் $(0, 1)$ என்பதால், நாம் பெறுவது

$\sin 90^\circ = 1$ (B இன் y அச்சுத்தொலைவு) $\text{cosec}\, 90^\circ = 1$

$\cos 90^\circ = 0$ (B இன் x அச்சுத்தொலைவு) sec 90° வரையறுக்கப்படவில்லை

$\tan 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0}$ வரையறுக்கப்படவில்லை $\cot 90^\circ = 0$

கோணம் $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ மற்றும் 90° ஆகிய கோணங்களுக்கான ஆறு முக்கோணவியல் விகிதங்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

கோணம் θ / விகிதம்	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	வரையறுக்கப் படவில்லை
$\text{cosec}\,\theta$	வரையறுக்கப் படவில்லை	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	வரையறுக்கப் படவில்லை
$\cot\theta$	வரையறுக்கப் படவில்லை	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

எடுத்துக்காட்டு 2.8

மதிப்புக் காண்க : $\sin^2 45^\circ + \tan^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ$

தீர்வு $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan 45^\circ = 1$ மற்றும் $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ என நமக்குத் தெரியும்.

$$\therefore\ \sin^2 45^\circ + \tan^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (1)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2$$

குறிப்பு $(\sin\theta)^2$ ஐ $\sin^2\theta$ என எழுதுவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.9

மதிப்புக் காண்க : $\dfrac{12\cos^2 30^\circ - 2\tan^2 60^\circ}{4\sec^2 45^\circ}$

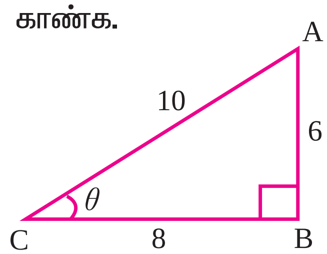
தீர்வு $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ மற்றும் $\sec 45^\circ = \sqrt{2}$ என நமக்குத் தெரியும்.

$$\therefore\ \frac{12\cos^2 30^\circ - 2\tan^2 60^\circ}{4\sec^2 45^\circ} = \frac{\left(12\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) - (2\times(\sqrt{3})^2)}{4\times(\sqrt{2})^2}$$

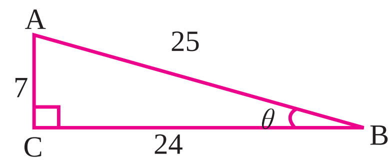
$$= \frac{\left(12\times\frac{3}{4}\right) - (2\times 3)}{4\times 2} = \frac{9-6}{8} = \frac{3}{8}$$

பயிற்சி 2.1

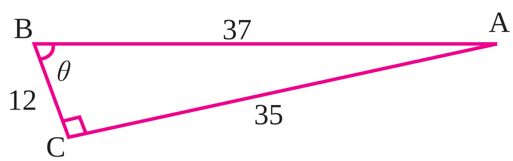
1. பின்வரும் படங்களிலிருந்து, கோணம் θ வைப் பொறுத்து முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் காண்க.



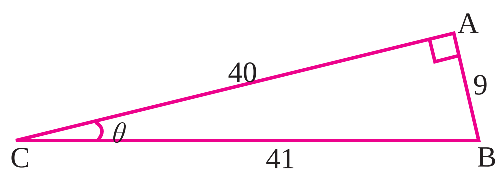
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

2. பின்வருவனவற்றிலிருந்து மற்ற முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் காண்க.

(i) $\sin A = \dfrac{9}{15}$ (ii) $\cos A = \dfrac{15}{17}$ (iii) $\tan P = \dfrac{5}{12}$

(iv) $\sec\theta = \dfrac{17}{8}$ (v) $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{61}{60}$ (vi) $\sin\theta = \dfrac{x}{y}$.

3. பின்வருவனவற்றில் θ-ன் மதிப்பைக் காண்க.

   (i) $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\sin\theta = 0$ (iii) $\tan\theta = \sqrt{3}$ (iv) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. $\triangle ABC$-ல், B செங்கோணம், $AB = 10$ மற்றும் $AC = 26$ எனில், கோணம் A மற்றும் Cஐப் பொறுத்து ஆறு முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் காண்க.

5. $5\cos\theta - 12\sin\theta = 0$ எனில், $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{2\cos\theta - \sin\theta}$ மதிப்பைக் காண்க.

6. $29\cos\theta = 20$ எனில், $\sec^2\theta - \tan^2\theta$ மதிப்பைக் காண்க.

7. $\sec\theta = \frac{26}{10}$ எனில், $\frac{3\cos\theta + 4\sin\theta}{4\cos\theta - 2\sin\theta}$ மதிப்பைக் காண்க.

8. $\tan\theta = \frac{a}{b}$ எனில், $\sin^2\theta + \cos^2\theta$ மதிப்பைக் காண்க.

9. $\cot\theta = \frac{15}{8}$ எனில், $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$ மதிப்பைக் காண்க.

10. முக்கோணம் PQR-ல், Q செங்கோணம் மற்றும் $\tan P = \frac{1}{\sqrt{3}}$ எனில், பின்வருவனவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

    (i) $\sin P \cos R + \cos P \sin R$ (ii) $\cos P \cos R - \sin P \sin R$.

11. $\sec\theta = \frac{13}{5}$ எனில், $\frac{2\sin\theta - 3\cos\theta}{4\sin\theta - 9\cos\theta} = 3$ என நிருபி.

12. $\sec A = \frac{17}{8}$ எனில், $1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 - 1$ என நிருபி.

13. மதிப்புக் காண்க :

    (i) $\sin 45^\circ + \cos 45^\circ$

    (ii) $\sin 60^\circ \tan 30^\circ$

    (iii) $\frac{\tan 45^\circ}{\tan 30^\circ + \tan 60^\circ}$

    (iv) $\cos^2 60^\circ \sin^2 30^\circ + \tan^2 30^\circ \cot^2 60^\circ$

    (v) $6\cos^2 90^\circ + 3\sin^2 90^\circ + 4\tan^2 45^\circ$

    (vi) $\frac{4\cot^2 60^\circ + \sec^2 30^\circ - 2\sin^2 45^\circ}{\sin^2 60^\circ + \cos^2 45^\circ}$

    (vii) $\frac{\tan^2 60^\circ + 4\cos^2 45^\circ + 3\sec^2 30^\circ + 5\cos^2 90^\circ}{\mathrm{cosec}\, 30^\circ + \sec 60^\circ - \cot^2 30^\circ}$

    (viii) $4(\sin^4 30^\circ + \cos^4 60^\circ) - 3(\cos^2 45^\circ - \sin^2 90^\circ)$.

14. பின்வருவனவற்றைச் சரிபார்க்க.

    (i) $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1$

    (ii) $1 + \tan^2 45^\circ = \sec^2 45^\circ$

    (iii) $\cos 60^\circ = 1 - 2\sin^2 30^\circ = 2\cos^2 30^\circ - 1$

    (iv) $\cos 90^\circ = 1 - 2\sin^2 45^\circ = 2\cos^2 45^\circ - 1$

(v) $\dfrac{\cos 60^\circ}{1+\sin 60^\circ} = \dfrac{1}{\sec 60^\circ + \tan 60^\circ}$

(vi) $\dfrac{1-\tan^2 60^\circ}{1+\tan^2 60^\circ} = 2\cos^2 60^\circ - 1$

(vii) $\dfrac{\sec 30^\circ + \tan 30^\circ}{\sec 30^\circ - \tan 30^\circ} = \dfrac{1+\sin 30^\circ}{1-\sin 30^\circ}$

(viii) $\tan^2 60^\circ - 2\tan^2 45^\circ - \cot^2 30^\circ + 2\sin^2 30^\circ + \dfrac{3}{4}\operatorname{cosec}^2 45^\circ = 0$

(ix) $4\cot^2 45^\circ - \sec^2 60^\circ + \sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ = 1$

(x) $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ = \sin 90^\circ$.

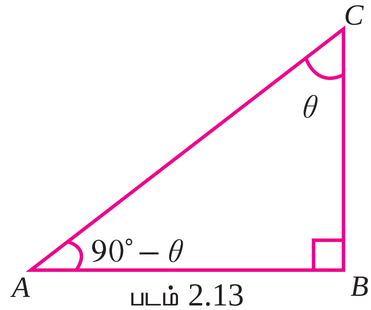
2.4 நிரப்புக் கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்கள்
(Trigonometric Ratios for Complementary Angles)

இரண்டு குறுங்கோணங்களின் கூடுதல் 90° எனில் ஒன்று மற்றொன்றின் நிரப்புக் கோணமாகும். செங்கோண முக்கோணத்தில் இரண்டு குறுங்கோணங்களின் கூடுதல் 90°. எனவே, செங்கோண முக்கோணத்தில் உள்ள இரு குறுங்கோணங்களும் எப்பொழுதும் ஒன்றுக்கொன்று நிரப்புக் கோணங்களாகும்.

செங்கோண முக்கோணம் ABC இல், B செங்கோணம் என்க (படம் 2.13ஐ பார்க்க). $\angle ACB = \theta$ எனில், $\angle BAC = 90^\circ - \theta$. ஆகவே, கோணங்கள் $\angle BAC$ மற்றும் $\angle ACB$ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று நிரப்புக் கோணங்களாகும்.

கோணம் θ-விற்கான விகிதங்கள்

$$\left.\begin{array}{llll} \sin\theta = \dfrac{AB}{AC} & & \operatorname{cosec}\theta = \dfrac{AC}{AB} \\ \cos\theta = \dfrac{BC}{AC} & & \sec\theta = \dfrac{AC}{BC} \\ \tan\theta = \dfrac{AB}{BC} & & \cot\theta = \dfrac{BC}{AB} \end{array}\right\} \quad (1)$$



படம் 2.13

இதே போன்று, கோணம் $(90^\circ - \theta)$-விற்கான விகிதங்கள்

$$\left.\begin{array}{llll} \sin(90^\circ-\theta) = \dfrac{BC}{AC} & & \operatorname{cosec}(90^\circ-\theta) = \dfrac{AC}{BC} \\ \cos(90^\circ-\theta) = \dfrac{AB}{AC} & & \sec(90^\circ-\theta) = \dfrac{AC}{AB} \\ \tan(90^\circ-\theta) = \dfrac{BC}{AB} & & \cot(90^\circ-\theta) = \dfrac{AB}{BC} \end{array}\right\} \quad (2)$$

(1) மற்றும் (2)-ல் உள்ள விகிதங்களை ஒப்பிட நாம் பெறுவது,

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC} = \cos(90^\circ-\theta) \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{AC}{AB} = \sec(90^\circ-\theta)$$

$$\cos\theta = \frac{BC}{AC} = \sin(90^\circ-\theta) \qquad \sec\theta = \frac{AC}{BC} = \operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)$$

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \cot(90^\circ-\theta) \qquad \cot\theta = \frac{BC}{AB} = \tan(90^\circ-\theta)$$

முக்கியக் கருத்து — நிரப்புக் கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்கள்

செங்கோண முக்கோணத்தில் θ என்பது ஒரு குறுங்கோணம் எனில், நிரப்புக் கோணங்களுக்கான முக்கோணவியல் விகிதங்களின் முற்றொருமைகளை நாம் பின்வருமாறு பெறுகிறோம்.

$$\sin\theta = \cos(90^\circ - \theta) \qquad \operatorname{cosec}\theta = \sec(90^\circ - \theta)$$
$$\cos\theta = \sin(90^\circ - \theta) \qquad \sec\theta = \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta)$$
$$\tan\theta = \cot(90^\circ - \theta) \qquad \cot\theta = \tan(90^\circ - \theta)$$

எடுத்துக்காட்டு 2.10

மதிப்புக் காண்க : $\dfrac{\cos 56^\circ}{\sin 34^\circ}$

தீர்வு கோணங்கள் 56° மற்றும் 34° ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று நிரப்புக்கோணங்கள். ஆகவே, நிரப்புக் கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்களைப் பயன்படுத்த, $\cos 56^\circ = \cos(90^\circ - 34^\circ) = \sin 34^\circ$. ஆகவே, $\dfrac{\cos 56^\circ}{\sin 34^\circ} = \dfrac{\sin 34^\circ}{\sin 34^\circ} = 1$

எடுத்துக்காட்டு 2.11

மதிப்புக் காண்க : $\dfrac{\tan 25^\circ}{\cot 65^\circ}$

தீர்வு $\tan 25^\circ = \tan(90^\circ - 65^\circ) = \cot 65^\circ$ என எழுதலாம். ஆகவே,

$$\frac{\tan 25^\circ}{\cot 65^\circ} = \frac{\cot 65^\circ}{\cot 65^\circ} = 1$$

எடுத்துக்காட்டு 2.12

மதிப்புக் காண்க : $\dfrac{\cos 65^\circ \sin 18^\circ \cos 58^\circ}{\cos 72^\circ \sin 25^\circ \sin 32^\circ}$

தீர்வு நிரப்புக் கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்களைப் பயன்படுத்த, நாம் பெறுவது

$$\cos 65^\circ = \cos(90^\circ - 25^\circ) = \sin 25^\circ,$$
$$\sin 18^\circ = \sin(90^\circ - 72^\circ) = \cos 72^\circ$$
$$\cos 58^\circ = \cos(90^\circ - 32^\circ) = \sin 32^\circ.$$
$$\therefore \frac{\cos 65^\circ \sin 18^\circ \cos 58^\circ}{\cos 72^\circ \sin^\circ 25^\circ \sin 32^\circ} = \frac{\sin 25^\circ \cos 72^\circ \sin 32^\circ}{\cos 72^\circ \sin 25^\circ \sin 32^\circ} = 1$$

எடுத்துக்காட்டு 2.13

$\tan 35^\circ \tan 60^\circ \tan 55^\circ \tan 30^\circ = 1$ என நிறுவுக.

தீர்வு $\tan 35^\circ = \tan(90^\circ - 55^\circ) = \cot 55^\circ,$

$\tan 60^\circ = \tan(90^\circ - 30^\circ) = \cot 30^\circ$ என எழுதலாம்.

$$\therefore \tan 35^\circ \tan 60^\circ \tan 55^\circ \tan 30^\circ = \cot 55^\circ \cot 30^\circ \tan 55^\circ \tan 30^\circ$$
$$= \frac{1}{\tan 55^\circ} \times \frac{1}{\tan 30^\circ} \times \tan 55^\circ \times \tan 30^\circ = 1$$

எடுத்துக்காட்டு 2.14

$\operatorname{cosec} A = \sec 25^\circ$ எனில், A ஐக் காண்க.

தீர்வு $\operatorname{cosec} A = \sec(90^\circ - A)$ என நமக்குத் தெரியும். எனவே,

$$\sec(90^\circ - A) = \sec 25^\circ \implies 90^\circ - A = 25^\circ$$

$$\therefore\ A = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$$

குறிப்பு எடுத்துக்காட்டு 2.14 இன் தீர்வில், A இன் மதிப்பைப் பெற இருபுறமும் sec ஆல் வகுக்ககூடாது. மாறாக குறுங்கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்களின் ஒருமைப் பண்பின் அடிப்படையில் A இன் மதிப்பைக் கணக்கிடவேண்டும். அதாவது, α மற்றும் β ஆகியவை குறுங்கோணங்கள் எனில்,

$$\sin\alpha = \sin\beta \implies \alpha = \beta$$

$$\cos\alpha = \cos\beta \implies \alpha = \beta, \cdots$$

எடுத்துக்காட்டு 2.15

$\sin A = \cos 33^\circ$ எனில், A ஐக் காண்க.

தீர்வு $\sin A = \cos(90^\circ - A)$ என நமக்குத் தெரியும். எனவே,

$$\cos(90^\circ - A) = \cos 33^\circ \implies 90^\circ - A = 33^\circ$$

$$\therefore\ A = 90^\circ - 33^\circ = 57^\circ$$

பயிற்சி 2.2

1. மதிப்புக் காண்க.

(i) $\dfrac{\sin 36^\circ}{\cos 54^\circ}$ (ii) $\dfrac{\operatorname{cosec} 10^\circ}{\sec 80^\circ}$ (iii) $\sin\theta\sec(90^\circ - \theta)$

(iv) $\dfrac{\sec 20^\circ}{\operatorname{cosec} 70^\circ}$ (v) $\dfrac{\sin 17^\circ}{\cos 73^\circ}$ (vi) $\dfrac{\tan 46^\circ}{\cot 44^\circ}$.

2. சுருக்குக.

(i) $\cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ$ (ii) $\dfrac{\cos 80^\circ}{\sin 10^\circ} + \cos 59^\circ \operatorname{cosec} 31^\circ$

(iii) $\dfrac{\sin 36^\circ}{\cos 54^\circ} - \dfrac{\tan 54^\circ}{\cot 36^\circ}$ (iv) $3\dfrac{\tan 67^\circ}{\cot 23^\circ} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin 42^\circ}{\cos 48^\circ} + \dfrac{5}{2}\dfrac{\operatorname{cosec} 61^\circ}{\sec 29^\circ}$

(v) $\dfrac{\cos 37^\circ}{\sin 53^\circ} \times \dfrac{\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ}$ (vi) $2\dfrac{\sec(90^\circ - \theta)}{\operatorname{cosec}\theta} + 7\dfrac{\cos(90^\circ - \theta)}{\sin\theta}$

(vii) $\dfrac{\sec(90^\circ - \theta)}{\sin(90^\circ - \theta)} \times \dfrac{\cos\theta}{\tan(90^\circ - \theta)} - \sec\theta$ (viii) $\dfrac{\sin 35^\circ}{\cos 55^\circ} + \dfrac{\cos 55^\circ}{\sin 35^\circ} - 2\cos^2 60^\circ$

(ix) $\cot 12^\circ \cot 38^\circ \cot 52^\circ \cot 60^\circ \cot 78^\circ$.

3. பின்வருவனவற்றில் A இன் மதிப்பைக் காண்க.

(i) $\sin A = \cos 30^\circ$ (ii) $\tan 49^\circ = \cot A$ (iii) $\tan A \tan 35^\circ = 1$

(iv) $\sec 35^\circ = \operatorname{cosec} A$ (v) $\operatorname{cosec} A \cos 43^\circ = 1$ (vi) $\sin 20^\circ \tan A \sec 70^\circ = \sqrt{3}$.

4. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $\cos 48^\circ - \sin 42^\circ = 0$ (ii) $\cos 20^\circ \cos 70^\circ - \sin 70^\circ \sin 20^\circ = 0$

(iii) $\sin(90^\circ - \theta)\tan\theta = \sin\theta$ (iv) $\dfrac{\cos(90^\circ - \theta)\tan(90^\circ - \theta)}{\cos\theta} = 1$.

2.5 முக்கோணவியல் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தும் முறை

நாம் இதுவரை 0°, 30°, 45°, 60° மற்றும் 90° ஆகியவற்றின் முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் கணக்கீடு செய்தோம். செங்கோண முக்கோணத்தின் தீர்வைக் காண இவை அல்லாத மாறுபட்ட மற்ற குறுங்கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்களும் நமக்குத் தேவைப்படுகிறது. அனைத்துக் குறுங்கோணங்களின் sine, cosine மற்றும் tangent இன் தோராய மதிப்புகள் இப்புத்தகத்தின் பின்பகுதியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

பாகையின் பின்னங்களை, ஒரு பாகை என்பதை 60 நிமிடங்களாகவும், ஒரு நிமிடம் என்பதை 60 வினாடிகளாகவும் பிரித்து எழுதுகிறோம். ஒரு நிமிடம் என்பது $1'$ எனவும் ஒரு வினாடி என்பது $1''$ எனவும் குறிக்கப்படுகிறது. ஆகவே,

$1^\circ = 60'$ மற்றும் $1' = 60''$.

sine, cosine மற்றும் tangent இன் 0° முதல் 90° வரையிலான அனைத்துக் கோணங்களின் மதிப்புகளும் $6'$ இடைவெளி அளவில் நான்கு தசம இடத் திருத்தமாக அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. மேலும், முக்கோணவியல் அட்டவணை மூன்று பகுதிகளை உடையது.

(i) அட்டவணையில் இடது கோடியில் உள்ள நிரலில் பாகை 0° முதல் 90° வரை குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது.

(ii) அட்டவணையில் அடுத்துள்ள பத்து நிரல்கள் முறையே $0'$, $6'$, $12'$, $18'$, $24'$, $30'$, $36'$, $42'$, $48'$ மற்றும் $54'$ என்ற தலைப்பில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

(iii) பொதுவித்தியாசம் *(Mean Difference)* என்ற தலைப்பின் கீழ் ஐந்து நிரல்கள் உள்ளன. அந்த ஐந்து நிரல்களுக்கு $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ மற்றும் $5'$ என தலைப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

கோணங்கள் sine, cosine மற்றும் tangent இன் மதிப்புகள் (ii) இல் குறிப்பிட்டுள்ளவாறு $6'$ இன் மடங்குகளில் பத்து நிரல்களாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. மற்ற நிமிடங்களில் கொடுக்கப்பட்ட கோணங்களின் மதிப்புகளைக் காண பொதுவித்தியாச அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளைக் கொண்டு சரிசெய்து கொள்ளவேண்டும்.

sine மற்றும் tangent அட்டணையில் மதிப்பைக் காணும்போது பொதுவித்தியாசத்தைக் கூட்ட வேண்டும், அதே சமயம் cosine அட்டணையில் பொதுவித்தியாசத்தைக் கழிக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.16

$\sin 46^\circ 51'$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு *sine* அட்டவணையிலிருந்து தேவையான பகுதி கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Diff.
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1 2 3 4 5
46°									0.7290		6

$46^\circ 51' = 46^\circ 48' + 3'$ என எழுதுக. அட்டவணையிலிருந்து நாம் பெறுவது,

$$\sin 46^\circ 48' = 0.7290$$

$3'$ இன் பொது வித்தியாசம் $= 0.0006$

$\therefore \sin 46^\circ 51' = 0.7290 + 0.0006 = 0.7296$

எடுத்துக்காட்டு 2.17

$\cos 37^\circ 16'$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Diff.
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1 2 3 4 5
37°			0.7965								7

$37^\circ 16' = 37^\circ 12' + 4'$ என எழுதுக. அட்டவணையிலிருந்து,

$$\cos 37^\circ 12' = 0.7965$$

$4'$ இன் பொது வித்தியாசம் $= 0.0007$

θ இன் மதிப்பு 0°லிருந்து 90°இக்கு அதிகரிக்கும்போது $\cos\theta$ வின் மதிப்பு 1லிருந்து 0 விற்குக் குறைவதால், பொது வித்தியாசத்தைக் கழிக்க வேண்டும்.

$\therefore \cos 37^\circ 16' = 0.7965 - 0.0007 = 0.7958$

எடுத்துக்காட்டு 2.18

$\tan 25^\circ 15'$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Diff.
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1 2 3 4 5
25°			0.4706								11

$25^\circ 15' = 25^\circ 12' + 3'$ என எழுதுக. அட்டவணையிலிருந்து,

$$\tan 25^\circ 12' \quad = 0.4706$$

$3'$இன் பொது வித்தியாசம் $= 0.0011$

$\therefore \tan 25^\circ 15' = 0.4706 + 0.011 = 0.4717$

எடுத்துக்காட்டு 2.19

$\sin\theta = 0.0958$ எனில், கோணம் θ வைக் காண்க.

தீர்வு 0.0958 இக்கு எதிராக sine அட்டவணையிலிருந்து, நாம் காணும் மதிப்பு $\sin 5^\circ 30'$.

$\Longrightarrow \sin 5^\circ 30' = 0.0958$

$\therefore \theta = 5^\circ 30'$

எடுத்துக்காட்டு 2.20

$\sin\theta = 0.0987$ எனில், கோணம் θ வைக் காண்க.

தீர்வு sine அட்டவணையிலிருந்து, $\sin\theta = 0.0993$ இக்கு ஒத்த θவின் மதிப்பு $5^\circ 42'$ மற்றும் 0.0006 க்கு எதிரான மதிப்பு $2'$. ஆகவே,

$\sin\theta = 0.0987 = 0.0993 - 0.0006$

$= \sin 5^\circ 42' - (2'$ இன் பொது வித்தியாசம்)

$\sin\theta = \sin 5^\circ 40'$

$\therefore \theta = 5^\circ 40'$

எடுத்துக்காட்டு 2.21

$\tan\theta = 0.4040$ எனில், கோணம் θ இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு 0.4040 க்கு எதிராக tangent அட்டவணையிலிருந்து, நாம் காணும் மதிப்பு $\tan 22^\circ 0'$.

$\Longrightarrow \tan 22^\circ = 0.4040$

$\therefore \theta = 22^\circ$

எடுத்துக்காட்டு 2.22

சுருக்குக. $\sin 30^\circ 30' + \cos 5^\circ 33'$

தீர்வு sine அட்டவணையிலிருந்து, $\sin 30^\circ 30' = 0.5075$. cosine அட்டவணையிலிருந்து, $\cos 5^\circ 30' = 0.9954$ மற்றும் பொது வித்தியாசம் $3' = 0.0001$. ஆகவே,

$$\cos 5^\circ 33' = 0.9954 - 0.0001 = 0.9953$$

$$\therefore \sin 30^\circ 30' + \cos 5^\circ 33' = 0.5075 + 0.9953 = 1.5028$$

எடுத்துக்காட்டு 2.23

சுருக்குக. $\cos 70°12' + \tan 48°54'$

தீர்வு cosine மற்றும் tangent அட்டவணையிலிருந்து, நாம் காண்பது

$$\cos 70°12' = 0.3387$$

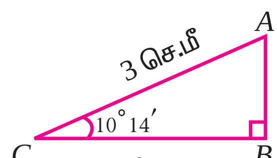
$$\tan 48°54' = 1.1463$$

$$\therefore \cos 70°12' + \tan 48°54' = 0.3387 + 1.1463$$

$$= 1.4850$$

எடுத்துக்காட்டு 2.24

படம் 2.14இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.



படம் 2.14

தீர்வு படம் 2.14 இலிருந்து, $\sin\theta = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \sin 10°14' = \frac{AB}{3}$

sine அட்டவணையிலிருந்து, $\sin 10°12' = 0.1771$ மற்றும் பொது வித்தியாசம் $2' = 0.0006$

$$\therefore \sin 10°14' = 0.1777$$

$$0.1777 = \frac{AB}{3}$$

$$\therefore AB = 0.1777 \times 3 = 0.5331$$

$$\cos\theta = \frac{BC}{AC} \Longrightarrow \cos 10°14' = \frac{BC}{3}$$

cosine அட்டவணையிலிருந்து, $\cos 10°12' = 0.9842$ மற்றும் பொது வித்தியாசம் $2' = 0.0001$

$$\therefore \cos 10°14' = 0.9842 - 0.0001 = 0.9841$$

$$0.9841 = \frac{BC}{3}$$

$$\therefore BC = 0.9841 \times 3 = 2.9523$$

செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2} \times 2.9523 \times 0.5331$

$$= 0.786935565$$

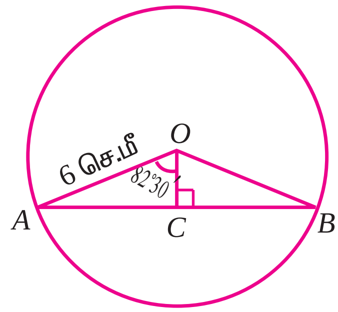
$\therefore$ செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $= 0.7869$ ச.செ.மீ (தோராயமாக)

எடுத்துக்காட்டு 2.25

6 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டத்தின் மையத்தில் $165°$ கோணஅளவைத் தாங்கும் நாணின் நீளத்தைக் காண்க.

தீர்வு O வை மையமாக உடைய 6 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டத்தின் மையத்தில் 165° கோண அளவைத் தாங்கும் நாண் AB என்க. $OC \perp AB$ ஐ வரைக, ஆகவே C என்பது AB இன் மையப்புள்ளி. எனவே,

$$\angle AOC = \frac{165^\circ}{2} = 82^\circ 30'$$



படம் 2.15

செங்கோண முக்கோணம் ACO-வில்,

$$\sin 82^\circ 30' = \frac{AC}{OA} \Longrightarrow AC = \sin 82^\circ 30' \times OA$$

$$AC = 0.9914 \times 6 = 5.9484 \text{ செ.மீ}$$

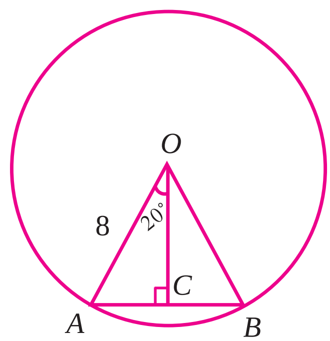
$\therefore$ நாணின் நீளம் $AB = AC \times 2 = 5.9484 \times 2 = 11.8968$ செ.மீ

எடுத்துக்காட்டு 2.26

8 அலகு ஆரமுடைய வட்டத்தினுள் அமைந்த 9 பக்கங்களைக் கொண்ட ஒழுங்கு பலகோணத்தின் பக்கத்தின் நீளம் காண்க.

தீர்வு AB என்பது 8 அலகு ஆரமுடைய வட்டத்தினுள் அமைந்த 9 பக்கங்கள் கொண்ட ஒழுங்கு பலகோணத்தின் ஒரு பக்கம் என்க. O என்பது வட்டத்தின் மையம் எனில், $\angle AOB = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$. $OC \perp AB$ ஐ வரைக. எனவே,

$$\angle AOC = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$$



படம் 2.16

$$\sin 20^\circ = \frac{AC}{OA} = \frac{AC}{8}$$

$$0.3420 = \frac{AC}{8}$$

$$AC = 0.3420 \times 8 = 2.736$$

$\therefore$ பக்கம் AB இன் நீளம் $= 2 \times AC = 2 \times 2.736 = 5.472$ அலகுகள்

எடுத்துக்காட்டு 2.27

6 செ.மீ பக்க அளவு கொண்ட ஒழுங்கு அறுங்கோணத்தில் அமைந்துள்ள உள்வட்டத்தின் ஆரம் காண்க.

தீர்வு AB என்பது ஒழுங்கு அறுங்கோணத்தின் ஒரு பக்கம் மற்றும் O என்பது உள்வட்ட மையம் என்க. $OC \perp AB$ ஐ வரைக. r என்பது வட்டத்தின் ஆரம் எனில், $OC = r$. மேலும்,

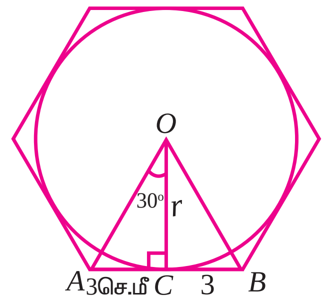
$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

$$\therefore \angle AOC = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

$$\tan 30^\circ = \frac{AC}{r}$$

$$\text{i.e., } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{r}$$

$\therefore r = 3 \times 1.732 = 5.196$ செ.மீ



படம் 6.17

ஆகவே, உள்வட்டத்தின் ஆரம் = 5.196 செ.மீ

பயிற்சி 2.3

1. பின்வருவனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $\sin 26^\circ$ (ii) $\cos 72^\circ$ (iii) $\tan 35^\circ$ (iv) $\sin 75^\circ 15'$

(v) $\sin 12^\circ 12'$ (vi) $\cos 12^\circ 35'$ (vii) $\cos 40^\circ 20'$ (viii) $\tan 10^\circ 26'$

(ix) $\cot 20^\circ$ (x) $\cot 40^\circ 20'$

2. பின்வருவனவற்றில் θ இன் மதிப்பைக் காண்க.

(i) $\sin \theta = 0.7009$ (ii) $\cos \theta = 0.9664$ (iii) $\tan \theta = 0.3679$

(iv) $\cot \theta = 0.2334$ (v) $\tan \theta = 63.6567$

3. முக்கோணவியல் அட்டவணையைப் பயன்படுத்திச் சுருக்குக.

(i) $\sin 30^\circ 30' + \cos 40^\circ 20'$ (ii) $\tan 45^\circ 27' + \sin 20^\circ$

(iii) $\tan 63^\circ 12' - \cos 12^\circ 42'$ (iv) $\sin 50^\circ 26' + \cos 18^\circ + \tan 70^\circ 12'$

(v) $\tan 72^\circ + \cot 30^\circ$

4. கர்ணம் 20 செ.மீ மற்றும் ஒரு குறுங்கோணம் 48° கொண்ட செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

5. கர்ணம் 8 செ.மீ மற்றும் ஒரு குறுங்கோணம் 57° கொண்ட செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

6. அடிப்பக்கம் 16 செ.மீ மற்றும் உச்சிக்கோணம் $60^\circ 40'$ கொண்ட இருசமபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

7. அடிப்பக்கம் 15 செ.மீ மற்றும் உச்சிக்கோணம் 80° கொண்ட இருசமபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

8. ஒரு ஏணி 30° கோண அளவில் சுவற்றில் சாய்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் அடிப்பக்கம் சுவற்றிலிருந்து 12 மீ தொலைவில் உள்ளது எனில், ஏணியின் நீளம் காண்க.

9. 4 மீ நீளமுள்ள ஏணி சுவற்றின் அடிபாகத்திலிருந்து 2 மீ தொலைவில் சாய்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது எனில், ஏணி சுவருடன் ஏற்படுத்தும் கோணத்தைக் காண்க.

10. 5 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டத்தின் மையத்தில் 108° கோணஅளவைத் தாங்கும் நாணின் நீளத்தைக் காண்க.

11. 6 செ.மீ ஆரமுடைய வட்டத்தினுள் அமைந்த 12 பக்கங்களைக் கொண்ட ஒழுங்கு அறுங்கோணத்தின் பக்கத்தின் நீளம் காண்க.

12. 24 செ.மீ பக்க அளவு கொண்ட ஒழுங்கு அறுங்கோணத்தில் அமைந்துள்ள உள்வட்டத்தின் ஆரம் காண்க.

பயிற்சி 2.4

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடு

1. $\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ$ க்குச் சமமான மதிப்பு

(A) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ$ (B) $\tan^2 45^\circ + \cot^2 45^\circ$

(C) $\sec^2 90^\circ$ (D) 0

2. $x = \dfrac{2\tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ}$ எனில், x இன் மதிப்பு

(A) $\tan 45^\circ$ (B) $\tan 30^\circ$ (C) $\tan 60^\circ$ (D) $\tan 90^\circ$

3. $\sec^2 45^\circ - \tan^2 45^\circ$ க்குச் சமமானது

(A) $\sin^2 60^\circ - \cos^2 60^\circ$ (B) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ$

(C) $\sec^2 60^\circ - \tan^2 60^\circ$ (D) 0

4. $2\sin 30^\circ \cos 30^\circ$ க்குச் சமமானது

(A) $\tan 30^\circ$ (B) $\cos 60^\circ$ (C) $\sin 60^\circ$ (D) $\cot 60^\circ$

5. $\operatorname{cosec}^2 60^\circ - 1$ க்குச் சமமானது

(A) $\cos^2 60^\circ$ (B) $\cot^2 60^\circ$ (C) $\sec^2 60^\circ$ (D) $\tan^2 60^\circ$

6. $\cos 60^\circ \cos 30^\circ - \sin 60^\circ \sin 30^\circ$ க்குச் சமமானது

(A) $\cos 90^\circ$ (B) $\operatorname{cosec} 90^\circ$ (C) $\sin 30^\circ + \cos 30^\circ$ (D) $\tan 90^\circ$

கணக்கு

7. $\frac{\sin 27^\circ}{\cos 63^\circ}$ இன் மதிப்பு

(A) 0 (B) 1 (C) $\tan 27^\circ$ (D) $\cot 63^\circ$

8. $\cos x = \sin 43^\circ$ எனில் x இன் மதிப்பு

(A) 57° (B) 43° (C) 47° (D) 90°

9. $\sec 29^\circ - \operatorname{cosec} 61^\circ$ இன் மதிப்பு

(A) 1 (B) 0 (C) $\sec 60^\circ$ (D) $\operatorname{cosec} 29^\circ$

10. $3x \operatorname{cosec} 36^\circ = \sec 54^\circ$ எனில், x இன் மதிப்பு

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$

11. $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ$ இக்குச் சமமானது

(A) $\sec 90^\circ$ (B) $\tan 90^\circ$ (C) $\cos 60^\circ$ (D) $\sin 90^\circ$

12. $\cos A \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$ எனில், கோணம் A இன் அளவு

(A) 90° (B) 60° (C) 45° (D) 30°

13. $\tan 26^\circ \cot 64^\circ$ இன் மதிப்பு

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) 0 (D) 1

14. $\sin 60^\circ - \cos 30^\circ$ இன் மதிப்பு

(A) 0 (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 1

15. $\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ$ இன் மதிப்பு

(A) $\cos 60^\circ$ (B) $\sin 60^\circ$ (C) 0 (D) 1

கணக்கு

நினைவில் கொள்க...

- **பிதாகரஸ் தேற்றம்:**

  ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் கர்ணத்தின் மீது வரையப்படும் சதுரத்தின் பரப்பளவானது, மற்ற இரண்டு பக்கங்களின் மீது வரையப்படும் சதுரங்களின் பரப்பளவுகளின் கூடுதலுக்கு சமம்.

- **முக்கோணவியல் விகிதங்கள்:**

  செங்கோண முக்கோணத்தில் θ ஒரு குறுங்கோணம் என்க. θ வைப் பொறுத்து ஆறு முக்கோணவியல் விகிதங்கள் பின்வருமாறு

$$\sin\theta = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}$$

- **முக்கோணவியல் விகிதங்களின் தலைகீழ் தொடர்புகள்:**

$$\sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

- **நிரப்பு கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்கள்:**

  செங்கோண முக்கோணத்தில் θ என்பது ஒரு குறுங்கோணம் எனில், நிரப்பு கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்களிலிருந்து நாம் பின்வரும் முற்றொருமைகளைப் பெறுகிறோம்.

$$\sin\theta = \cos(90^\circ - \theta) \qquad \operatorname{cosec}\theta = \sec(90^\circ - \theta)$$

$$\cos\theta = \sin(90^\circ - \theta) \qquad \sec\theta = \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta)$$

$$\tan\theta = \cot(90^\circ - \theta) \qquad \cot\theta = \tan(90^\circ - \theta)$$

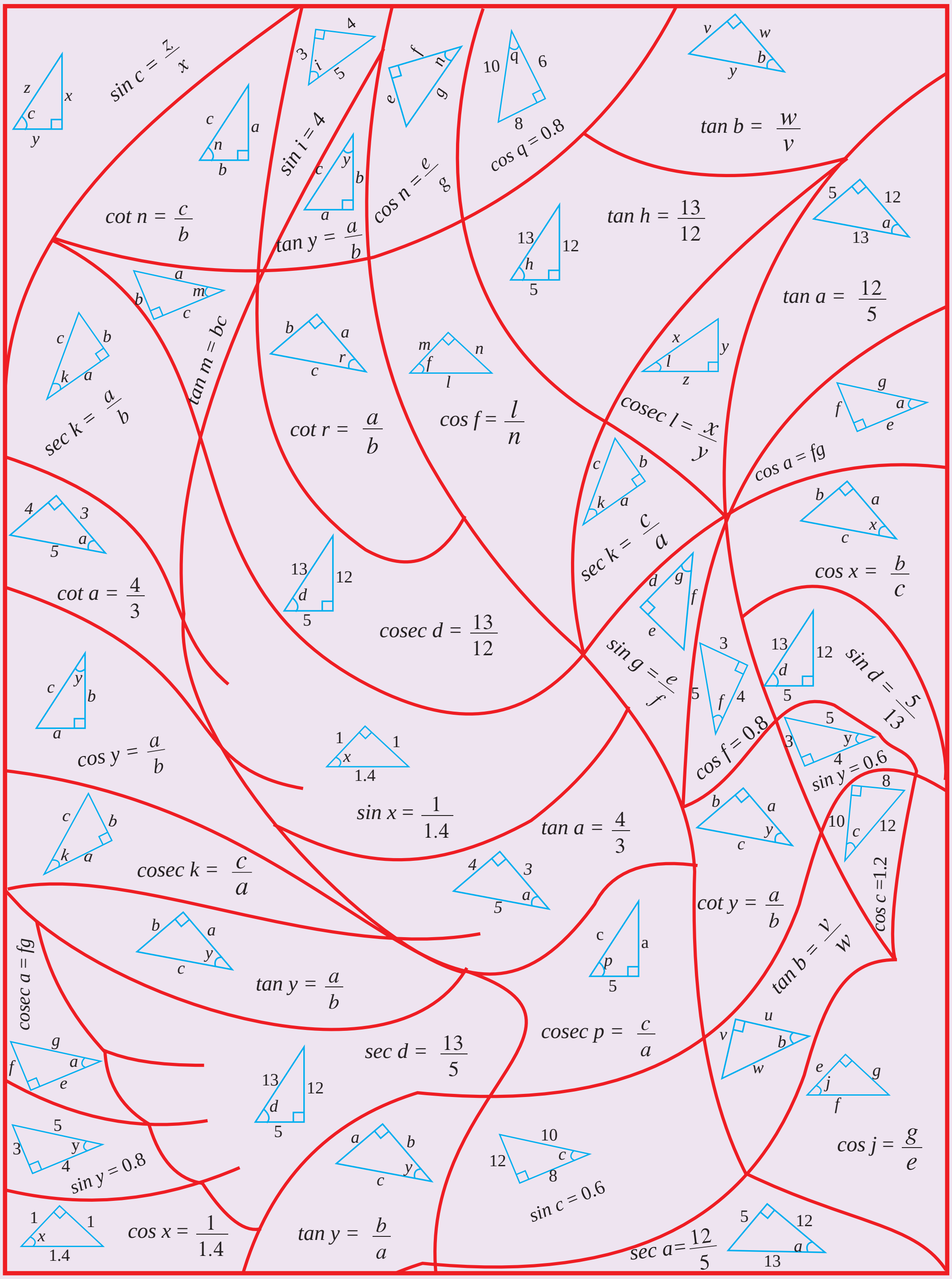
கணக்கு

செயல் 1

கண்டுபிடி ! கண்டுபிடி !!

நோக்கம் : முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் கண்டறிந்து சரிபார்த்தல்

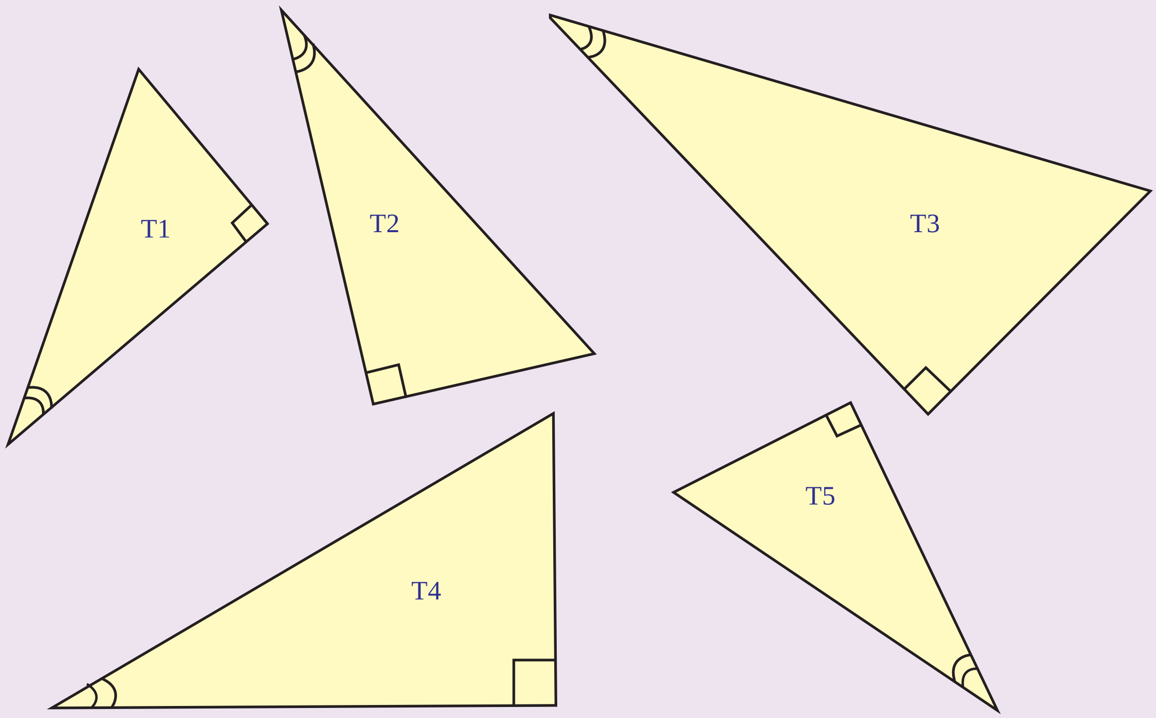
செய்முறை : சரியான முக்கோணவியல் விகிதம் அமைந்துள்ள பகுதியை நிழலிட்டு மறைந்துள்ள உருவத்தைக் கண்டுபிடி.



செயல் 2

கோண அளவு 30° உடைய செங்கோண முக்கோணங்களின் விகிதங்களைக் காணல்.

- பின்வரும் முக்கோணங்களின் இரு கோண அளவுகள் $30^\circ, 90^\circ$ என்பதை அளந்தறிக. மூன்றாவது கோணத்தைக் கண்டுபிடியுங்கள்.
- கோண அளவு 30° ஐப் பொறுத்து எதிர்ப்பக்கம், அடுத்துள்ள பக்கம் மற்றும் கர்ணம் ஆகியவற்றைக் காண்க.
- ஒவ்வொரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களை அளவுகோல் கொண்டு அளந்தறிந்து, பின் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையை நிறைவு செய்க.



குறிக்கப்பட்டுள்ள கோண அளவு 30°	எதிர்ப் பக்கம்	அடுத்துள்ள பக்கம்	கர்ணம்	$\frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$ (கோணம்=30°)		$\frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$ (கோணம்=30°)		$\frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$ (கோணம்=30°)	
				பின்னம்	தசமம்	பின்னம்	தசமம்	பின்னம்	தசமம்
T1									
T2									
T3									
T4									
T5									
சராசரி மதிப்பு (2 தசம இடத்திருத்தமாக)									

செயல் 3

நோக்கம் : முக்கோணவியல் விகிதங்கள் மற்றும் அதன் மதிப்புகளை அறிதல்.

செய்முறை :
- கீழ்கண்ட படத்தில் உள்ளவாறு முக்கோணவியல் விகிதம், மதிப்புகளை உள்ளடக்கிய ஒரே அளவிலான 16 சதுர அட்டைகளைத் தயார் செய்க.
- ஒரு சதுரத்திலுள்ள முக்கோணவியல் விகிதத்திற்கு, அவ்விகதத்தின் மதிப்புடைய மற்றொரு சதுரத்தின் பக்கத்தோடு இணைக்க. இவ்வாறு சதுர அட்டைகளைத் தொடர்ச்சியாக இணைத்து ஒரே சதுரமாக உருவாக்கவும்.

$\tan 45^\circ$ $\frac{1}{2}$ $\cot 0^\circ$ 2	$\tan 30^\circ$ $\cot 45^\circ$ $\cos 45^\circ$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$	0 $\cos 30^\circ$ $\sqrt{3}$ $\sin 60^\circ$	$\cos\frac{\pi}{6}$ undefined $\cos 60^\circ$ $\sin 0^\circ$
$\sqrt{2}$ $\frac{1}{2}$ 1 $\sin 45^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\tan 60^\circ$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sec 45^\circ$	2 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin 30^\circ$ $\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cot 30^\circ$ 1 $\sin 90^\circ$
1 $\cot\frac{\pi}{4}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$	0 $\sin\frac{\pi}{2}$ $\sqrt{3}$	$\sec 60^\circ$ 0 1 $\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sin 60^\circ$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 1 $\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\text{cosec}\, 45^\circ$ 0 $\tan\pi$ 0	$\cos 90^\circ$ 2 1 $\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$ 1 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 1	1 2 $\cos 0^\circ$ $\cos 30^\circ$

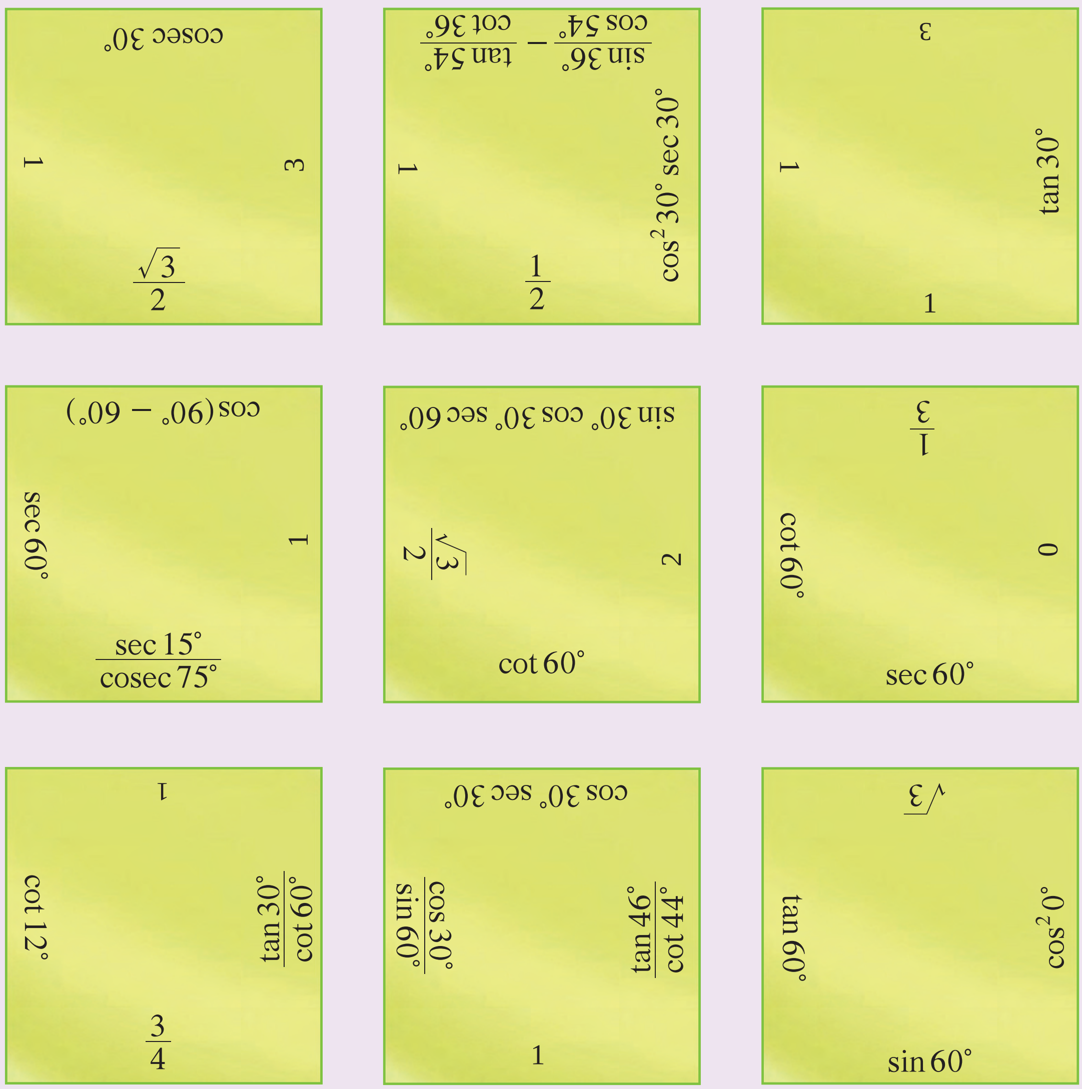
செயல் 4

நோக்கம்: நிரப்புக் கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்களை அறிதல்.

செய்முறை:

கீழ்க்கண்ட படத்தில் உள்ளவாறு முக்கோணவியல் விகிதம், மதிப்புகளை உள்ளடக்கிய ஒரே அளவிலான 9 சதுர அட்டைகளைத் தயார் செய்க.

ஒரு சதுரத்திலுள்ள, நிரப்புக் கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதத்திற்கு அவ்விகிதத்தின் மதிப்புடைய மற்றொரு சதுரத்தின் பக்கத்தோடு இணைக்க. இவ்வாறு சதுர அட்டைகளைத் தொடர்ச்சியாக இணைத்து ஒரே சதுரமாக உருவாக்கவும்.



NATURAL SINES

Degree	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
0	0.0000	0.0017	0.0035	0.0052	0.0070	0.0087	0.0105	0.0122	0.0140	0.0157	3	6	9	12	15
1	0.0175	0.0192	0.0209	0.0227	0.0244	0.0262	0.0279	0.0297	0.0314	0.0332	3	6	9	12	15
2	0.0349	0.0366	0.0384	0.0401	0.0419	0.0436	0.0454	0.0471	0.0488	0.0506	3	6	9	12	15
3	0.0523	0.0541	0.0558	0.0576	0.0593	0.0610	0.0628	0.0645	0.0663	0.0680	3	6	9	12	15
4	0.0698	0.0715	0.0732	0.0750	0.0767	0.0785	0.0802	0.0819	0.0837	0.0854	3	6	9	12	15
5	0.0872	0.0889	0.0906	0.0924	0.0941	0.0958	0.0976	0.0993	0.1011	0.1028	3	6	9	12	14
6	0.1045	0.1063	0.1080	0.1097	0.1115	0.1132	0.1149	0.1167	0.1184	0.1201	3	6	9	12	14
7	0.1219	0.1236	0.1253	0.1271	0.1288	0.1305	0.1323	0.1340	0.1357	0.1374	3	6	9	12	14
8	0.1392	0.1409	0.1426	0.1444	0.1461	0.1478	0.1495	0.1513	0.1530	0.1547	3	6	9	12	14
9	0.1564	0.1582	0.1599	0.1616	0.1633	0.1650	0.1668	0.1685	0.1702	0.1719	3	6	9	12	14
10	0.1736	0.1754	0.1771	0.1788	0.1805	0.1822	0.1840	0.1857	0.1874	0.1891	3	6	9	12	14
11	0.1908	0.1925	0.1942	0.1959	0.1977	0.1994	0.2011	0.2028	0.2045	0.2062	3	6	9	11	14
12	0.2079	0.2096	0.2113	0.2130	0.2147	0.2164	0.2181	0.2198	0.2215	0.2233	3	6	9	11	14
13	0.2250	0.2267	0.2284	0.2300	0.2317	0.2334	0.2351	0.2368	0.2385	0.2402	3	6	8	11	14
14	0.2419	0.2436	0.2453	0.2470	0.2487	0.2504	0.2521	0.2538	0.2554	0.2571	3	6	8	11	14
15	0.2588	0.2605	0.2622	0.2639	0.2656	0.2672	0.2689	0.2706	0.2723	0.2740	3	6	8	11	14
16	0.2756	0.2773	0.2790	0.2807	0.2823	0.2840	0.2857	0.2874	0.2890	0.2907	3	6	8	11	14
17	0.2924	0.2940	0.2957	0.2974	0.2990	0.3007	0.3024	0.3040	0.3057	0.3074	3	6	8	11	14
18	0.3090	0.3107	0.3123	0.3140	0.3156	0.3173	0.3190	0.3206	0.3223	0.3239	3	6	8	11	14
19	0.3256	0.3272	0.3289	0.3305	0.3322	0.3338	0.3355	0.3371	0.3387	0.3404	3	5	8	11	14
20	0.3420	0.3437	0.3453	0.3469	0.3486	0.3502	0.3518	0.3535	0.3551	0.3567	3	5	8	11	14
21	0.3584	0.3600	0.3616	0.3633	0.3649	0.3665	0.3681	0.3697	0.3714	0.3730	3	5	8	11	14
22	0.3746	0.3762	0.3778	0.3795	0.3811	0.3827	0.3843	0.3859	0.3875	0.3891	3	5	8	11	14
23	0.3907	0.3923	0.3939	0.3955	0.3971	0.3987	0.4003	0.4019	0.4035	0.4051	3	5	8	11	14
24	0.4067	0.4083	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4163	0.4179	0.4195	0.4210	3	5	8	11	13
25	0.4226	0.4242	0.4258	0.4274	0.4289	0.4305	0.4321	0.4337	0.4352	0.4368	3	5	8	11	13
26	0.4384	0.4399	0.4415	0.4431	0.4446	0.4462	0.4478	0.4493	0.4509	0.4524	3	5	8	10	13
27	0.4540	0.4555	0.4571	0.4586	0.4602	0.4617	0.4633	0.4648	0.4664	0.4679	3	5	8	10	13
28	0.4695	0.4710	0.4726	0.4741	0.4756	0.4772	0.4787	0.4802	0.4818	0.4833	3	5	8	10	13
29	0.4848	0.4863	0.4879	0.4894	0.4909	0.4924	0.4939	0.4955	0.4970	0.4985	3	5	8	10	13
30	0.5000	0.5015	0.5030	0.5045	0.5060	0.5075	0.5090	0.5105	0.5120	0.5135	3	5	8	10	13
31	0.5150	0.5165	0.5180	0.5195	0.5210	0.5225	0.5240	0.5255	0.5270	0.5284	2	5	7	10	12
32	0.5299	0.5314	0.5329	0.5344	0.5358	0.5373	0.5388	0.5402	0.5417	0.5432	2	5	7	10	12
33	0.5446	0.5461	0.5476	0.5490	0.5505	0.5519	0.5534	0.5548	0.5563	0.5577	2	5	7	10	12
34	0.5592	0.5606	0.5621	0.5635	0.5650	0.5664	0.5678	0.5693	0.5707	0.5721	2	5	7	10	12
35	0.5736	0.5750	0.5764	0.5779	0.5793	0.5807	0.5821	0.5835	0.5850	0.5864	2	5	7	10	12
36	0.5878	0.5892	0.5906	0.5920	0.5934	0.5948	0.5962	0.5976	0.5990	0.6004	2	5	7	9	12
37	0.6018	0.6032	0.6046	0.6060	0.6074	0.6088	0.6101	0.6115	0.6129	0.6143	2	5	7	9	12
38	0.6157	0.6170	0.6184	0.6198	0.6211	0.6225	0.6239	0.6252	0.6266	0.6280	2	5	7	9	11
39	0.6293	0.6307	0.6320	0.6334	0.6347	0.6361	0.6374	0.6388	0.6401	0.6414	2	4	7	9	11
40	0.6428	0.6441	0.6455	0.6468	0.6481	0.6494	0.6508	0.6521	0.6534	0.6547	2	4	7	9	11
41	0.6561	0.6574	0.6587	0.6600	0.6613	0.6626	0.6639	0.6652	0.6665	0.6678	2	4	7	9	11
42	0.6691	0.6704	0.6717	0.6730	0.6743	0.6756	0.6769	0.6782	0.6794	0.6807	2	4	6	9	11
43	0.6820	0.6833	0.6845	0.6858	0.6871	0.6884	0.6896	0.6909	0.6921	0.6934	2	4	6	8	11
44	0.6947	0.6959	0.6972	0.6984	0.6997	0.7009	0.7022	0.7034	0.7046	0.7059	2	4	6	8	10

NATURAL SINES

Degree	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
45	0.7071	0.7083	0.7096	0.7108	0.7120	0.7133	0.7145	0.7157	0.7169	0.7181	2	4	6	8	10
46	0.7193	0.7206	0.7218	0.7230	0.7242	0.7254	0.7266	0.7278	0.7290	0.7302	2	4	6	8	10
47	0.7314	0.7325	0.7337	0.7349	0.7361	0.7373	0.7385	0.7396	0.7408	0.7420	2	4	6	8	10
48	0.7431	0.7443	0.7455	0.7466	0.7478	0.7490	0.7501	0.7513	0.7524	0.7536	2	4	6	8	10
49	0.7547	0.7559	0.7570	0.7581	0.7593	0.7604	0.7615	0.7627	0.7638	0.7649	2	4	6	8	9
50	0.7660	0.7672	0.7683	0.7694	0.7705	0.7716	0.7727	0.7738	0.7749	0.7760	2	4	6	7	9
51	0.7771	0.7782	0.7793	0.7804	0.7815	0.7826	0.7837	0.7848	0.7859	0.7869	2	4	5	7	9
52	0.7880	0.7891	0.7902	0.7912	0.7923	0.7934	0.7944	0.7955	0.7965	0.7976	2	4	5	7	9
53	0.7986	0.7997	0.8007	0.8018	0.8028	0.8039	0.8049	0.8059	0.8070	0.8080	2	3	5	7	9
54	0.8090	0.8100	0.8111	0.8121	0.8131	0.8141	0.8151	0.8161	0.8171	0.8181	2	3	5	7	8
55	0.8192	0.8202	0.8211	0.8221	0.8231	0.8241	0.8251	0.8261	0.8271	0.8281	2	3	5	7	8
56	0.8290	0.8300	0.8310	0.8320	0.8329	0.8339	0.8348	0.8358	0.8368	0.8377	2	3	5	6	8
57	0.8387	0.8396	0.8406	0.8415	0.8425	0.8434	0.8443	0.8453	0.8462	0.8471	2	3	5	6	8
58	0.8480	0.8490	0.8499	0.8508	0.8517	0.8526	0.8536	0.8545	0.8554	0.8563	2	3	5	6	8
59	0.8572	0.8581	0.8590	0.8599	0.8607	0.8616	0.8625	0.8634	0.8643	0.8652	1	3	4	6	7
60	0.8660	0.8669	0.8678	0.8686	0.8695	0.8704	0.8712	0.8721	0.8729	0.8738	1	3	4	6	7
61	0.8746	0.8755	0.8763	0.8771	0.8780	0.8788	0.8796	0.8805	0.8813	0.8821	1	3	4	6	7
62	0.8829	0.8838	0.8846	0.8854	0.8862	0.8870	0.8878	0.8886	0.8894	0.8902	1	3	4	5	7
63	0.8910	0.8918	0.8926	0.8934	0.8942	0.8949	0.8957	0.8965	0.8973	0.8980	1	3	4	5	6
64	0.8988	0.8996	0.9003	0.9011	0.9018	0.9026	0.9033	0.9041	0.9048	0.9056	1	3	4	5	6
65	0.9063	0.9070	0.9078	0.9085	0.9092	0.9100	0.9107	0.9114	0.9121	0.9128	1	2	4	5	6
66	0.9135	0.9143	0.9150	0.9157	0.9164	0.9171	0.9178	0.9184	0.9191	0.9198	1	2	3	5	6
67	0.9205	0.9212	0.9219	0.9225	0.9232	0.9239	0.9245	0.9252	0.9259	0.9265	1	2	3	4	6
68	0.9272	0.9278	0.9285	0.9291	0.9298	0.9304	0.9311	0.9317	0.9323	0.9330	1	2	3	4	5
69	0.9336	0.9342	0.9348	0.9354	0.9361	0.9367	0.9373	0.9379	0.9385	0.9391	1	2	3	4	5
70	0.9397	0.9403	0.9409	0.9415	0.9421	0.9426	0.9432	0.9438	0.9444	0.9449	1	2	3	4	5
71	0.9455	0.9461	0.9466	0.9472	0.9478	0.9483	0.9489	0.9494	0.9500	0.9505	1	2	3	4	5
72	0.9511	0.9516	0.9521	0.9527	0.9532	0.9537	0.9542	0.9548	0.9553	0.9558	1	2	3	3	4
73	0.9563	0.9568	0.9573	0.9578	0.9583	0.9588	0.9593	0.9598	0.9603	0.9608	1	2	2	3	4
74	0.9613	0.9617	0.9622	0.9627	0.9632	0.9636	0.9641	0.9646	0.9650	0.9655	1	2	2	3	4
75	0.9659	0.9664	0.9668	0.9673	0.9677	0.9681	0.9686	0.9690	0.9694	0.9699	1	1	2	3	4
76	0.9703	0.9707	0.9711	0.9715	0.9720	0.9724	0.9728	0.9732	0.9736	0.9740	1	1	2	3	3
77	0.9744	0.9748	0.9751	0.9755	0.9759	0.9763	0.9767	0.9770	0.9774	0.9778	1	1	2	3	3
78	0.9781	0.9785	0.9789	0.9792	0.9796	0.9799	0.9803	0.9806	0.9810	0.9813	1	1	2	2	3
79	0.9816	0.9820	0.9823	0.9826	0.9829	0.9833	0.9836	0.9839	0.9842	0.9845	1	1	2	2	3
80	0.9848	0.9851	0.9854	0.9857	0.9860	0.9863	0.9866	0.9869	0.9871	0.9874	0	1	1	2	2
81	0.9877	0.9880	0.9882	0.9885	0.9888	0.9890	0.9893	0.9895	0.9898	0.9900	0	1	1	2	2
82	0.9903	0.9905	0.9907	0.9910	0.9912	0.9914	0.9917	0.9919	0.9921	0.9923	0	1	1	2	2
83	0.9925	0.9928	0.9930	0.9932	0.9934	0.9936	0.9938	0.9940	0.9942	0.9943	0	1	1	1	2
84	0.9945	0.9947	0.9949	0.9951	0.9952	0.9954	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0	1	1	1	2
85	0.9962	0.9963	0.9965	0.9966	0.9968	0.9969	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974	0	0	1	1	1
86	0.9976	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9981	0.9982	0.9983	0.9984	0.9985	0	0	1	1	1
87	0.9986	0.9987	0.9988	0.9989	0.9990	0.9990	0.9991	0.9992	0.9993	0.9993	0	0	0	1	1
88	0.9994	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998	0.9998	0	0	0	0	0
89	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0	0	0	0	0

கணக்கு

NATURAL COSINES

(Numbers in mean difference columns to be subtracted, not added)

Degree	0´	6´	12´	18´	24´	30´	36´	42´	48´	54´	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0	0	0	0	0
1	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995	0.9995	0	0	0	0	0
2	0.9994	0.9993	0.9993	0.9992	0.9991	0.9990	0.9990	0.9989	0.9988	0.9987	0	0	0	1	1
3	0.9986	0.9985	0.9984	0.9983	0.9982	0.9981	0.9980	0.9979	0.9978	0.9977	0	0	1	1	1
4	0.9976	0.9974	0.9973	0.9972	0.9971	0.9969	0.9968	0.9966	0.9965	0.9963	0	0	1	1	1
5	0.9962	0.9960	0.9959	0.9957	0.9956	0.9954	0.9952	0.9951	0.9949	0.9947	0	1	1	1	2
6	0.9945	0.9943	0.9942	0.9940	0.9938	0.9936	0.9934	0.9932	0.9930	0.9928	0	1	1	1	2
7	0.9925	0.9923	0.9921	0.9919	0.9917	0.9914	0.9912	0.9910	0.9907	0.9905	0	1	1	2	2
8	0.9903	0.9900	0.9898	0.9895	0.9893	0.9890	0.9888	0.9885	0.9882	0.9880	0	1	1	2	2
9	0.9877	0.9874	0.9871	0.9869	0.9866	0.9863	0.9860	0.9857	0.9854	0.9851	0	1	1	2	2
10	0.9848	0.9845	0.9842	0.9839	0.9836	0.9833	0.9829	0.9826	0.9823	0.9820	1	1	2	2	3
11	0.9816	0.9813	0.9810	0.9806	0.9803	0.9799	0.9796	0.9792	0.9789	0.9785	1	1	2	2	3
12	0.9781	0.9778	0.9774	0.9770	0.9767	0.9763	0.9759	0.9755	0.9751	0.9748	1	1	2	3	3
13	0.9744	0.9740	0.9736	0.9732	0.9728	0.9724	0.9720	0.9715	0.9711	0.9707	1	1	2	3	3
14	0.9703	0.9699	0.9694	0.9690	0.9686	0.9681	0.9677	0.9673	0.9668	0.9664	1	1	2	3	4
15	0.9659	0.9655	0.9650	0.9646	0.9641	0.9636	0.9632	0.9627	0.9622	0.9617	1	2	2	3	4
16	0.9613	0.9608	0.9603	0.9598	0.9593	0.9588	0.9583	0.9578	0.9573	0.9568	1	2	2	3	4
17	0.9563	0.9558	0.9553	0.9548	0.9542	0.9537	0.9532	0.9527	0.9521	0.9516	1	2	3	3	4
18	0.9511	0.9505	0.9500	0.9494	0.9489	0.9483	0.9478	0.9472	0.9466	0.9461	1	2	3	4	5
19	0.9455	0.9449	0.9444	0.9438	0.9432	0.9426	0.9421	0.9415	0.9409	0.9403	1	2	3	4	5
20	0.9397	0.9391	0.9385	0.9379	0.9373	0.9367	0.9361	0.9354	0.9348	0.9342	1	2	3	4	5
21	0.9336	0.9330	0.9323	0.9317	0.9311	0.9304	0.9298	0.9291	0.9285	0.9278	1	2	3	4	5
22	0.9272	0.9265	0.9259	0.9252	0.9245	0.9239	0.9232	0.9225	0.9219	0.9212	1	2	3	4	6
23	0.9205	0.9198	0.9191	0.9184	0.9178	0.9171	0.9164	0.9157	0.9150	0.9143	1	2	3	5	6
24	0.9135	0.9128	0.9121	0.9114	0.9107	0.9100	0.9092	0.9085	0.9078	0.9070	1	2	4	5	6
25	0.9063	0.9056	0.9048	0.9041	0.9033	0.9026	0.9018	0.9011	0.9003	0.8996	1	3	4	5	6
26	0.8988	0.8980	0.8973	0.8965	0.8957	0.8949	0.8942	0.8934	0.8926	0.8918	1	3	4	5	6
27	0.8910	0.8902	0.8894	0.8886	0.8878	0.8870	0.8862	0.8854	0.8846	0.8838	1	3	4	5	7
28	0.8829	0.8821	0.8813	0.8805	0.8796	0.8788	0.8780	0.8771	0.8763	0.8755	1	3	4	6	7
29	0.8746	0.8738	0.8729	0.8721	0.8712	0.8704	0.8695	0.8686	0.8678	0.8669	1	3	4	6	7
30	0.8660	0.8652	0.8643	0.8634	0.8625	0.8616	0.8607	0.8599	0.8590	0.8581	1	3	4	6	7
31	0.8572	0.8563	0.8554	0.8545	0.8536	0.8526	0.8517	0.8508	0.8499	0.8490	2	3	5	6	8
32	0.8480	0.8471	0.8462	0.8453	0.8443	0.8434	0.8425	0.8415	0.8406	0.8396	2	3	5	6	8
33	0.8387	0.8377	0.8368	0.8358	0.8348	0.8339	0.8329	0.8320	0.8310	0.8300	2	3	5	6	8
34	0.8290	0.8281	0.8271	0.8261	0.8251	0.8241	0.8231	0.8221	0.8211	0.8202	2	3	5	7	8
35	0.8192	0.8181	0.8171	0.8161	0.8151	0.8141	0.8131	0.8121	0.8111	0.8100	2	3	5	7	8
36	0.8090	0.8080	0.8070	0.8059	0.8049	0.8039	0.8028	0.8018	0.8007	0.7997	2	3	5	7	9
37	0.7986	0.7976	0.7965	0.7955	0.7944	0.7934	0.7923	0.7912	0.7902	0.7891	2	4	5	7	9
38	0.7880	0.7869	0.7859	0.7848	0.7837	0.7826	0.7815	0.7804	0.7793	0.7782	2	4	5	7	9
39	0.7771	0.7760	0.7749	0.7738	0.7727	0.7716	0.7705	0.7694	0.7683	0.7672	2	4	6	7	9
40	0.7660	0.7649	0.7638	0.7627	0.7615	0.7604	0.7593	0.7581	0.7570	0.7559	2	4	6	8	9
41	0.7547	0.7536	0.7524	0.7513	0.7501	0.7490	0.7478	0.7466	0.7455	0.7443	2	4	6	8	10
42	0.7431	0.7420	0.7408	0.7396	0.7385	0.7373	0.7361	0.7349	0.7337	0.7325	2	4	6	8	10
43	0.7314	0.7302	0.7290	0.7278	0.7266	0.7254	0.7242	0.7230	0.7218	0.7206	2	4	6	8	10
44	0.7193	0.7181	0.7169	0.7157	0.7145	0.7133	0.7120	0.7108	0.7096	0.7083	2	4	6	8	10

NATURAL COSINES

(Numbers in mean difference columns to be subtracted, not added)

Degree	0´	6´	12´	18´	24´	30´	36´	42´	48´	54´	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
45	0.7071	0.7059	0.7046	0.7034	0.7022	0.7009	0.6997	0.6984	0.6972	0.6959	2	4	6	8	10
46	0.6947	0.6934	0.6921	0.6909	0.6896	0.6884	0.6871	0.6858	0.6845	0.6833	2	4	6	8	11
47	0.6820	0.6807	0.6794	0.6782	0.6769	0.6756	0.6743	0.6730	0.6717	0.6704	2	4	6	9	11
48	0.6691	0.6678	0.6665	0.6652	0.6639	0.6626	0.6613	0.6600	0.6587	0.6574	2	4	7	9	11
49	0.6561	0.6547	0.6534	0.6521	0.6508	0.6494	0.6481	0.6468	0.6455	0.6441	2	4	7	9	11
50	0.6428	0.6414	0.6401	0.6388	0.6374	0.6361	0.6347	0.6334	0.6320	0.6307	2	4	7	9	11
51	0.6293	0.6280	0.6266	0.6252	0.6239	0.6225	0.6211	0.6198	0.6184	0.6170	2	5	7	9	11
52	0.6157	0.6143	0.6129	0.6115	0.6101	0.6088	0.6074	0.6060	0.6046	0.6032	2	5	7	9	12
53	0.6018	0.6004	0.5990	0.5976	0.5962	0.5948	0.5934	0.5920	0.5906	0.5892	2	5	7	9	12
54	0.5878	0.5864	0.5850	0.5835	0.5821	0.5807	0.5793	0.5779	0.5764	0.5750	2	5	7	9	12
55	0.5736	0.5721	0.5707	0.5693	0.5678	0.5664	0.5650	0.5635	0.5621	0.5606	2	5	7	10	12
56	0.5592	0.5577	0.5563	0.5548	0.5534	0.5519	0.5505	0.5490	0.5476	0.5461	2	5	7	10	12
57	0.5446	0.5432	0.5417	0.5402	0.5388	0.5373	0.5358	0.5344	0.5329	0.5314	2	5	7	10	12
58	0.5299	0.5284	0.5270	0.5255	0.5240	0.5225	0.5210	0.5195	0.5180	0.5165	2	5	7	10	12
59	0.5150	0.5135	0.5120	0.5105	0.5090	0.5075	0.5060	0.5045	0.5030	0.5015	3	5	8	10	13
60	0.5000	0.4985	0.4970	0.4955	0.4939	0.4924	0.4909	0.4894	0.4879	0.4863	3	5	8	10	13
61	0.4848	0.4833	0.4818	0.4802	0.4787	0.4772	0.4756	0.4741	0.4726	0.4710	3	5	8	10	13
62	0.4695	0.4679	0.4664	0.4648	0.4633	0.4617	0.4602	0.4586	0.4571	0.4555	3	5	8	10	13
63	0.4540	0.4524	0.4509	0.4493	0.4478	0.4462	0.4446	0.4431	0.4415	0.4399	3	5	8	10	13
64	0.4384	0.4368	0.4352	0.4337	0.4321	0.4305	0.4289	0.4274	0.4258	0.4242	3	5	8	11	13
65	0.4226	0.4210	0.4195	0.4179	0.4163	0.4147	0.4131	0.4115	0.4099	0.4083	3	5	8	11	13
66	0.4067	0.4051	0.4035	0.4019	0.4003	0.3987	0.3971	0.3955	0.3939	0.3923	3	5	8	11	14
67	0.3907	0.3891	0.3875	0.3859	0.3843	0.3827	0.3811	0.3795	0.3778	0.3762	3	5	8	11	14
68	0.3746	0.3730	0.3714	0.3697	0.3681	0.3665	0.3649	0.3633	0.3616	0.3600	3	5	8	11	14
69	0.3584	0.3567	0.3551	0.3535	0.3518	0.3502	0.3486	0.3469	0.3453	0.3437	3	5	8	11	14
70	0.3420	0.3404	0.3387	0.3371	0.3355	0.3338	0.3322	0.3305	0.3289	0.3272	3	5	8	11	14
71	0.3256	0.3239	0.3223	0.3206	0.3190	0.3173	0.3156	0.3140	0.3123	0.3107	3	6	8	11	14
72	0.3090	0.3074	0.3057	0.3040	0.3024	0.3007	0.2990	0.2974	0.2957	0.2940	3	6	8	11	14
73	0.2924	0.2907	0.2890	0.2874	0.2857	0.2840	0.2823	0.2807	0.2790	0.2773	3	6	8	11	14
74	0.2756	0.2740	0.2723	0.2706	0.2689	0.2672	0.2656	0.2639	0.2622	0.2605	3	6	8	11	14
75	0.2588	0.2571	0.2554	0.2538	0.2521	0.2504	0.2487	0.2470	0.2453	0.2436	3	6	8	11	14
76	0.2419	0.2402	0.2385	0.2368	0.2351	0.2334	0.2317	0.2300	0.2284	0.2267	3	6	8	11	14
77	0.2250	0.2233	0.2215	0.2198	0.2181	0.2164	0.2147	0.2130	0.2113	0.2096	3	6	9	11	14
78	0.2079	0.2062	0.2045	0.2028	0.2011	0.1994	0.1977	0.1959	0.1942	0.1925	3	6	9	11	14
79	0.1908	0.1891	0.1874	0.1857	0.1840	0.1822	0.1805	0.1788	0.1771	0.1754	3	6	9	11	14
80	0.1736	0.1719	0.1702	0.1685	0.1668	0.1650	0.1633	0.1616	0.1599	0.1582	3	6	9	12	14
81	0.1564	0.1547	0.1530	0.1513	0.1495	0.1478	0.1461	0.1444	0.1426	0.1409	3	6	9	12	14
82	0.1392	0.1374	0.1357	0.1340	0.1323	0.1305	0.1288	0.1271	0.1253	0.1236	3	6	9	12	14
83	0.1219	0.1201	0.1184	0.1167	0.1149	0.1132	0.1115	0.1097	0.1080	0.1063	3	6	9	12	14
84	0.1045	0.1028	0.1011	0.0993	0.0976	0.0958	0.0941	0.0924	0.0906	0.0889	3	6	9	12	14
85	0.0872	0.0854	0.0837	0.0819	0.0802	0.0785	0.0767	0.0750	0.0732	0.0715	3	6	9	12	15
86	0.0698	0.0680	0.0663	0.0645	0.0628	0.0610	0.0593	0.0576	0.0558	0.0541	3	6	9	12	15
87	0.0523	0.0506	0.0488	0.0471	0.0454	0.0436	0.0419	0.0401	0.0384	0.0366	3	6	9	12	15
88	0.0349	0.0332	0.0314	0.0297	0.0279	0.0262	0.0244	0.0227	0.0209	0.0192	3	6	9	12	15
89	0.0175	0.0157	0.0140	0.0122	0.0105	0.0087	0.0070	0.0052	0.0035	0.0017	3	6	9	12	15

NATURAL TANGENTS

Degree	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
0	0.0000	0.0017	0.0035	0.0052	0.0070	0.0087	0.0105	0.0122	0.0140	0.0157	3	6	9	12	15
1	0.0175	0.0192	0.0209	0.0227	0.0244	0.0262	0.0279	0.0297	0.0314	0.0332	3	6	9	12	15
2	0.0349	0.0367	0.0384	0.0402	0.0419	0.0437	0.0454	0.0472	0.0489	0.0507	3	6	9	12	15
3	0.0524	0.0542	0.0559	0.0577	0.0594	0.0612	0.0629	0.0647	0.0664	0.0682	3	6	9	12	15
4	0.0699	0.0717	0.0734	0.0752	0.0769	0.0787	0.0805	0.0822	0.0840	0.0857	3	6	9	12	15
5	0.0875	0.0892	0.0910	0.0928	0.0945	0.0963	0.0981	0.0998	0.1016	0.1033	3	6	9	12	15
6	0.1051	0.1069	0.1086	0.1104	0.1122	0.1139	0.1157	0.1175	0.1192	0.1210	3	6	9	12	15
7	0.1228	0.1246	0.1263	0.1281	0.1299	0.1317	0.1334	0.1352	0.1370	0.1388	3	6	9	12	15
8	0.1405	0.1423	0.1441	0.1459	0.1477	0.1495	0.1512	0.1530	0.1548	0.1566	3	6	9	12	15
9	0.1584	0.1602	0.1620	0.1638	0.1655	0.1673	0.1691	0.1709	0.1727	0.1745	3	6	9	12	15
10	0.1763	0.1781	0.1799	0.1817	0.1835	0.1853	0.1871	0.1890	0.1908	0.1926	3	6	9	12	15
11	0.1944	0.1962	0.1980	0.1998	0.2016	0.2035	0.2053	0.2071	0.2089	0.2107	3	6	9	12	15
12	0.2126	0.2144	0.2162	0.2180	0.2199	0.2217	0.2235	0.2254	0.2272	0.2290	3	6	9	12	15
13	0.2309	0.2327	0.2345	0.2364	0.2382	0.2401	0.2419	0.2438	0.2456	0.2475	3	6	9	12	15
14	0.2493	0.2512	0.2530	0.2549	0.2568	0.2586	0.2605	0.2623	0.2642	0.2661	3	6	9	12	16
15	0.2679	0.2698	0.2717	0.2736	0.2754	0.2773	0.2792	0.2811	0.2830	0.2849	3	6	9	13	16
16	0.2867	0.2886	0.2905	0.2924	0.2943	0.2962	0.2981	0.3000	0.3019	0.3038	3	6	9	13	16
17	0.3057	0.3076	0.3096	0.3115	0.3134	0.3153	0.3172	0.3191	0.3211	0.3230	3	6	10	13	16
18	0.3249	0.3269	0.3288	0.3307	0.3327	0.3346	0.3365	0.3385	0.3404	0.3424	3	6	10	13	16
19	0.3443	0.3463	0.3482	0.3502	0.3522	0.3541	0.3561	0.3581	0.3600	0.3620	3	7	10	13	16
20	0.3640	0.3659	0.3679	0.3699	0.3719	0.3739	0.3759	0.3779	0.3799	0.3819	3	7	10	13	17
21	0.3839	0.3859	0.3879	0.3899	0.3919	0.3939	0.3959	0.3979	0.4000	0.4020	3	7	10	13	17
22	0.4040	0.4061	0.4081	0.4101	0.4122	0.4142	0.4163	0.4183	0.4204	0.4224	3	7	10	14	17
23	0.4245	0.4265	0.4286	0.4307	0.4327	0.4348	0.4369	0.4390	0.4411	0.4431	3	7	10	14	17
24	0.4452	0.4473	0.4494	0.4515	0.4536	0.4557	0.4578	0.4599	0.4621	0.4642	4	7	11	14	18
25	0.4663	0.4684	0.4706	0.4727	0.4748	0.4770	0.4791	0.4813	0.4834	0.4856	4	7	11	14	18
26	0.4877	0.4899	0.4921	0.4942	0.4964	0.4986	0.5008	0.5029	0.5051	0.5073	4	7	11	15	18
27	0.5095	0.5117	0.5139	0.5161	0.5184	0.5206	0.5228	0.5250	0.5272	0.5295	4	7	11	15	18
28	0.5317	0.5340	0.5362	0.5384	0.5407	0.5430	0.5452	0.5475	0.5498	0.5520	4	8	11	15	19
29	0.5543	0.5566	0.5589	0.5612	0.5635	0.5658	0.5681	0.5704	0.5727	0.5750	4	8	12	15	19
30	0.5774	0.5797	0.5820	0.5844	0.5867	0.5890	0.5914	0.5938	0.5961	0.5985	4	8	12	16	20
31	0.6009	0.6032	0.6056	0.6080	0.6104	0.6128	0.6152	0.6176	0.6200	0.6224	4	8	12	16	20
32	0.6249	0.6273	0.6297	0.6322	0.6346	0.6371	0.6395	0.6420	0.6445	0.6469	4	8	12	16	20
33	0.6494	0.6519	0.6544	0.6569	0.6594	0.6619	0.6644	0.6669	0.6694	0.6720	4	8	13	17	21
34	0.6745	0.6771	0.6796	0.6822	0.6847	0.6873	0.6899	0.6924	0.6950	0.6976	4	9	13	17	21
35	0.7002	0.7028	0.7054	0.7080	0.7107	0.7133	0.7159	0.7186	0.7212	0.7239	4	9	13	18	22
36	0.7265	0.7292	0.7319	0.7346	0.7373	0.7400	0.7427	0.7454	0.7481	0.7508	5	9	14	18	23
37	0.7536	0.7563	0.7590	0.7618	0.7646	0.7673	0.7701	0.7729	0.7757	0.7785	5	9	14	18	23
38	0.7813	0.7841	0.7869	0.7898	0.7926	0.7954	0.7983	0.8012	0.8040	0.8069	5	9	14	19	24
39	0.8098	0.8127	0.8156	0.8185	0.8214	0.8243	0.8273	0.8302	0.8332	0.8361	5	10	15	20	24
40	0.8391	0.8421	0.8451	0.8481	0.8511	0.8541	0.8571	0.8601	0.8632	0.8662	5	10	15	20	25
41	0.8693	0.8724	0.8754	0.8785	0.8816	0.8847	0.8878	0.8910	0.8941	0.8972	5	10	16	21	26
42	0.9004	0.9036	0.9067	0.9099	0.9131	0.9163	0.9195	0.9228	0.9260	0.9293	5	11	16	21	27
43	0.9325	0.9358	0.9391	0.9424	0.9457	0.9490	0.9523	0.9556	0.9590	0.9623	6	11	17	22	28
44	0.9657	0.9691	0.9725	0.9759	0.9793	0.9827	0.9861	0.9896	0.9930	0.9965	6	11	17	23	29

NATURAL TANGENTS

Degree	0´	6´	12´	18´	24´	30´	36´	42´	48´	54´	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
45	1.0000	1.0035	1.0070	1.0105	1.0141	1.0176	1.0212	1.0247	1.0283	1.0319	6	12	18	24	30
46	1.0355	1.0392	1.0428	1.0464	1.0501	1.0538	1.0575	1.0612	1.0649	1.0686	6	12	18	25	31
47	1.0724	1.0761	1.0799	1.0837	1.0875	1.0913	1.0951	1.0990	1.1028	1.1067	6	13	19	25	32
48	1.1106	1.1145	1.1184	1.1224	1.1263	1.1303	1.1343	1.1383	1.1423	1.1463	7	13	20	27	33
49	1.1504	1.1544	1.1585	1.1626	1.1667	1.1708	1.1750	1.1792	1.1833	1.1875	7	14	21	28	34
50	1.1918	1.1960	1.2002	1.2045	1.2088	1.2131	1.2174	1.2218	1.2261	1.2305	7	14	22	29	36
51	1.2349	1.2393	1.2437	1.2482	1.2527	1.2572	1.2617	1.2662	1.2708	1.2753	8	15	23	30	38
52	1.2799	1.2846	1.2892	1.2938	1.2985	1.3032	1.3079	1.3127	1.3175	1.3222	8	16	24	31	39
53	1.3270	1.3319	1.3367	1.3416	1.3465	1.3514	1.3564	1.3613	1.3663	1.3713	8	16	25	33	41
54	1.3764	1.3814	1.3865	1.3916	1.3968	1.4019	1.4071	1.4124	1.4176	1.4229	9	17	26	34	43
55	1.4281	1.4335	1.4388	1.4442	1.4496	1.4550	1.4605	1.4659	1.4715	1.4770	9	18	27	36	45
56	1.4826	1.4882	1.4938	1.4994	1.5051	1.5108	1.5166	1.5224	1.5282	1.5340	10	19	29	38	48
57	1.5399	1.5458	1.5517	1.5577	1.5637	1.5697	1.5757	1.5818	1.5880	1.5941	10	20	30	40	50
58	1.6003	1.6066	1.6128	1.6191	1.6255	1.6319	1.6383	1.6447	1.6512	1.6577	11	21	32	43	53
59	1.6643	1.6709	1.6775	1.6842	1.6909	1.6977	1.7045	1.7113	1.7182	1.7251	11	23	34	45	56
60	1.7321	1.7391	1.7461	1.7532	1.7603	1.7675	1.7747	1.7820	1.7893	1.7966	12	24	36	48	60
61	1.8040	1.8115	1.8190	1.8265	1.8341	1.8418	1.8495	1.8572	1.8650	1.8728	13	26	38	51	64
62	1.8807	1.8887	1.8967	1.9047	1.9128	1.9210	1.9292	1.9375	1.9458	1.9542	14	27	41	55	68
63	1.9626	1.9711	1.9797	1.9883	1.9970	2.0057	2.0145	2.0233	2.0323	2.0413	15	29	44	58	73
64	2.0503	2.0594	2.0686	2.0778	2.0872	2.0965	2.1060	2.1155	2.1251	2.1348	16	31	47	63	78
65	2.1445	2.1543	2.1642	2.1742	2.1842	2.1943	2.2045	2.2148	2.2251	2.2355	17	34	51	68	85
66	2.2460	2.2566	2.2673	2.2781	2.2889	2.2998	2.3109	2.3220	2.3332	2.3445	18	37	55	73	92
67	2.3559	2.3673	2.3789	2.3906	2.4023	2.4142	2.4262	2.4383	2.4504	2.4627	20	40	60	79	99
68	2.4751	2.4876	2.5002	2.5129	2.5257	2.5386	2.5517	2.5649	2.5782	2.5916	22	43	65	87	108
69	2.6051	2.6187	2.6325	2.6464	2.6605	2.6746	2.6889	2.7034	2.7179	2.7326	24	47	71	95	119
70	2.7475	2.7625	2.7776	2.7929	2.8083	2.8239	2.8397	2.8556	2.8716	2.8878	26	52	78	104	131
71	2.9042	2.9208	2.9375	2.9544	2.9714	2.9887	3.0061	3.0237	3.0415	3.0595	29	58	87	116	145
72	3.0777	3.0961	3.1146	3.1334	3.1524	3.1716	3.1910	3.2106	3.2305	3.2506	32	64	96	129	161
73	3.2709	3.2914	3.3122	3.3332	3.3544	3.3759	3.3977	3.4197	3.4420	3.4646	36	72	108	144	180
74	3.4874	3.5105	3.5339	3.5576	3.5816	3.6059	3.6305	3.6554	3.6806	3.7062	41	81	122	163	204
75	3.7321	3.7583	3.7848	3.8118	3.8391	3.8667	3.8947	3.9232	3.9520	3.9812	46	93	139	186	232
76	4.0108	4.0408	4.0713	4.1022	4.1335	4.1653	4.1976	4.2303	4.2635	4.2972	53	107	160	213	267
77	4.3315	4.3662	4.4015	4.4373	4.4737	4.5107	4.5483	4.5864	4.6252	4.6646					
78	4.7046	4.7453	4.7867	4.8288	4.8716	4.9152	4.9594	5.0045	5.0504	5.0970					
79	5.1446	5.1929	5.2422	5.2924	5.3435	5.3955	5.4486	5.5026	5.5578	5.6140					
80	5.6713	5.7297	5.7894	5.8502	5.9124	5.9758	6.0405	6.1066	6.1742	6.2432					
81	6.3138	6.3859	6.4596	6.5350	6.6122	6.6912	6.7720	6.8548	6.9395	7.0264					
82	7.1154	7.2066	7.3002	7.3962	7.4947	7.5958	7.6996	7.8062	7.9158	8.0285					
83	8.1443	8.2636	8.3863	8.5126	8.6427	8.7769	8.9152	9.0579	9.2052	9.3572					
84	9.5144	9.6768	9.8448	10.0187	10.1988	10.3854	10.5789	10.7797	10.9882	11.2048					
85	11.4301	11.6645	11.9087	12.1632	12.4288	12.7062	12.9962	13.2996	13.6174	13.9507					
86	14.3007	14.6685	15.0557	15.4638	15.8945	16.3499	16.8319	17.3432	17.8863	18.4645					
87	19.0811	19.7403	20.4465	21.2049	22.0217	22.9038	23.8593	24.8978	26.0307	27.2715					
88	28.6363	30.1446	31.8205	33.6935	35.8006	38.1885	40.9174	44.0661	47.7395	52.0807					
89	57.2900	63.6567	71.6151	81.8470	95.4895	114.5887	143.2371	190.9842	286.4777	572.9572					

பயிற்சி 2.1

1. (i) $\sin\theta = \frac{6}{10}$, $\cos\theta = \frac{8}{10}$, $\tan\theta = \frac{6}{8}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{10}{6}$, $\sec\theta = \frac{10}{8}$, $\cot\theta = \frac{8}{6}$

   (ii) $\sin\theta = \frac{7}{25}$, $\cos\theta = \frac{24}{25}$, $\tan\theta = \frac{7}{24}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{25}{7}$, $\sec\theta = \frac{25}{24}$, $\cot\theta = \frac{24}{7}$

   (iii) $\sin\theta = \frac{35}{37}$, $\cos\theta = \frac{12}{37}$, $\tan\theta = \frac{35}{12}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{37}{35}$, $\sec\theta = \frac{37}{12}$, $\cot\theta = \frac{12}{35}$

   (iv) $\sin\theta = \frac{9}{41}$, $\cos\theta = \frac{40}{41}$, $\tan\theta = \frac{9}{40}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{41}{9}$, $\sec\theta = \frac{41}{40}$, $\cot\theta = \frac{40}{9}$

2. (i) $\cos A = \frac{12}{15}$, $\tan A = \frac{9}{12}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{15}{9}$, $\sec A = \frac{15}{12}$, $\cot A = \frac{12}{9}$

   (ii) $\sin A = \frac{8}{17}$, $\tan A = \frac{8}{15}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{17}{8}$, $\sec A = \frac{17}{15}$, $\cot A = \frac{15}{8}$

   (iii) $\sin P = \frac{5}{13}$, $\cos P = \frac{12}{13}$, $\operatorname{cosec} P = \frac{13}{5}$, $\sec P = \frac{13}{12}$, $\cot P = \frac{12}{5}$

   (iv) $\sin\theta = \frac{15}{17}$, $\cos\theta = \frac{8}{17}$, $\tan\theta = \frac{15}{8}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{17}{15}$, $\cot\theta = \frac{8}{15}$

   (v) $\sin\theta = \frac{60}{61}$, $\cos\theta = \frac{11}{61}$, $\tan\theta = \frac{60}{11}$, $\sec\theta = \frac{61}{11}$, $\cot\theta = \frac{11}{60}$

   (vi) $\cos\theta = \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{y}$, $\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{y^2 - x^2}}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{y}{x}$,

   $\sec\theta = \frac{y}{\sqrt{y^2 - x^2}}$, $\cot\theta = \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{x}$

3. (i) 45° (ii) 0° (iii) 60° (iv) 30°

4. $\sin A = \frac{24}{26}$, $\cos A = \frac{10}{26}$, $\tan A = \frac{24}{10}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{26}{24}$, $\sec A = \frac{26}{10}$, $\cot A = \frac{10}{24}$

   $\sin C = \frac{10}{26}$, $\cos C = \frac{24}{26}$, $\tan C = \frac{10}{24}$, $\operatorname{cosec} C = \frac{26}{10}$, $\sec C = \frac{26}{24}$, $\cot C = \frac{24}{10}$

5. $\frac{17}{19}$ 6. 1 7. $\frac{-63}{4}$ 8. 1 9. $\frac{225}{64}$ 10. (i) 1 (ii) 0

13. (i) $\sqrt{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (iv) $\frac{25}{144}$ (v) 7 (vi) $\frac{4}{3}$ (vii) 9 (viii) 2

பயிற்சி 2.2

1. (i) 1 (ii) 1 (iii) 1 (iv) 1 (v) 1 (vi) 1

2. (i) 0 (ii) 2 (iii) 0 (iv) 6 (v) 1 (vi) 9 (vii) 0 (viii) $\frac{3}{2}$ (ix) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

3. (i) 60° (ii) 41° (iii) 55° (iv) 55° (v) 47° (vi) 60°

பயிற்சி 2.3

1. (i) 0.4384 (ii) 0.3090 (iii) 0.7002 (iv) 0.9670 (v) 0.2113 (vi) 0.9760 (vii) 0.7623 (viii) 0.1841 (ix) 2.7475 (x) 1.1778 2. (i) $44^\circ 30'$ (ii) $14^\circ 54'$ (iii) $20^\circ 12'$ (iv) $76^\circ 30'$ (v) $89^\circ 6'$ 3. (i) 1.2698 (ii) 1.3579 (iii) 1.0042 (iv) 4.4996 (v) 4.8098 4. 99.4134 cm^2 5. 14.6278 cm^2 6. 109.376 cm^2
7. 67.0389 cm^2 8. 13.8568 m 9. 60° 10. 8.09 cm 11. 3.1056 cm 12. 20.784 cm

பயிற்சி 2.4

1. A 2. C 3. C 4. C 5. B 6. A 7. B 8. C 9. B 10. C 11. D 12. B 13. D 14. A 15. A

கணக்கு

3 புள்ளியியல்

"Statistical thinking today is as necessary for efficient citizenship as the ability to read and write"

Herbert. G. Wells

முதன்மைக் குறிக்கோள்கள்

- நிகழ்வெண் செவ்வகம் மற்றும் நிகழ்வெண் பலகோணம் வரைதல்
- மையப்போக்கு அளவைகளான கூட்டுச்சராசரி, இடைநிலை மற்றும் முகடு ஆகியவற்றைக் கண்டு பிடித்தல்

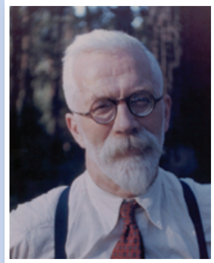
3.1 அறிமுகம்

புள்ளியியல் என்பது விவரங்களைச் சேகரித்து, பாகுபடுத்தி பட்டியலிட்டு, ஆய்வு செய்து பின் அவ்விவரங்களுக்கு விளக்கம் காண்பதன் மூலம் பிரச்சனைகளுக்கு முடிவு காண்பதற்கு உதவுகின்றது. முதல்நிலைப் புள்ளிவிவரங்கள் மற்றும் இரண்டாம்நிலைப் புள்ளிவிவரங்கள் எவ்வாறு சேகரிக்கப்படுகின்றன என்பது பற்றி நீங்கள் முந்தைய வகுப்புகளில் படித்துள்ளீர்கள். அவ்வாறு பெறப்பட்ட புள்ளி விவரங்கள் அதிகமான விவரங்களைக் கொண்டதாக இருப்பின், அந்த விவரங்களை ஆய்வு செய்து விளக்கம் காண்பதற்கு முன்பாகப் பகுத்து, பட்டியலிட வேண்டும்.

ஒரு சில ஆய்வுகளின் போது, பாகுபடுத்தி பட்டியலிடுவதன் மூலமாகவே, அந்தப் புள்ளி விவரங்கள் பற்றிய தெளிவான விளக்கமும் அதன் முக்கியத்துவமும் தெரிய வரும். எனினும் இவ்வகையில் அளிக்கப்படும் புள்ளிவிவரங்கள் ஒரு சராசரி மனிதனுக்கு ஆர்வம் ஊட்டுவதாகவும், புரியும்படியாகவும் எப்போதும் இருப்பதில்லை. எனவே அப்புள்ளிவிவரங்கள் முழுமையாக ஏற்றுக்கொள்ளும் வகையிலும் மேலும் ஆர்வத்தைத் தூண்டும் வகையிலும் உள்ளதாக அமைய, அதனை ஒரு விளக்கப் படம் மூலமாகவோ ஒரு வரைபடம் மூலமாகவோ அளிப்பது சிறந்தது.

3.2 நிகழ்வெண் பரவலின் வரைபட வடிவம்

"ஒரு படம் ஆயிரம் வார்த்தைகளுக்குச் சமம்" என்பதற்கிணங்க புள்ளியியல் வல்லுநர்கள், புள்ளி விவரங்களைத் தெளிவாக விவரிக்க வரைபடங்களையும் அதன் நுணுக்கங்களையும் நன்கு பயன்படுத்தினார்கள். குறிப்பாக நிகழ்வெண் பரவலாகவோ சதவீத பரவலாகவோ தொகுக்கப்பட்ட புள்ளிவிவரங்களை விவரிக்க நிகழ்வெண் செவ்வகம் மற்றும் நிகழ்வெண் பலகோணம் ஆகியன பயன்படுத்தபடுகின்றன.



ரொனால்டு ஆல்மர் ஃபிஷர்
1890 – 1962

ரொனால்டு ஆல்மர் ஃபிஷர் (17 பிப்ரவரி 1890 – 29 ஜுலை 1962) கைதேர்ந்த ஆங்கிலப் புள்ளியியல் வல்லுநர் மட்டுமின்றி உயிரினங்களின் பரிணாம வளர்ச்சிவாதி, மரபியலாளர் மற்றும் இன மேம்பாட்டுவாதி ஆவார். இவர் நியோ டார்வின் கோட்பாடுகளை வடிவமைத்தவர்களுள் முதன்மையானவராக அறியப்பட்டவர். புள்ளியியலில் பகுப்பாய்வு கோட்பாடு, அதிகபட்ச சாத்திய முறை மற்றும் மாதிரி பரவல்களின் வேறுபாடு ஆகியவற்றை அளிப்பதில் பெரும் பங்காற்றியுள்ளார். மேலும் மக்கள் தொகை மரபியலை கண்டறிந்த மூவர்களுள் முக்கியமாவனவராவர். இவருக்கு லண்டனின் லின்னியன் சங்கம் 1958 ஆம் ஆண்டு பெரு மதிப்பிற்குரிய டார்வின் வாலன் பதக்கம் வழங்கியது.

கணக்கு

நிகழ்வெண் பரவல் என்பது பிரிவுகள் மற்றும் நிகழ்வெண்களைப் பயன்படுத்தி, வகைப்படுத்தப்படாத புள்ளிவிவரங்களைப் பகுத்து பட்டியலிடுதல் ஆகும். ஒரு நிகழ்வெண் பரவலைப் பின்வரும் நான்கு வழிகளில் வரைபடம் மூலம் குறிப்பிடலாம்.

(i) நிகழ்வெண் செவ்வகம் (Histogram)

(ii) நிகழ்வெண் பலகோணம் (Frequency Polygon)

(iii) நிகழ்வெண் வளைகோடு (Smoothened frequency curve)

(iv) குவிவு நிகழ்வெண் கோடுகள். (Ogive or Cumulative frequency curve)

இந்த அத்தியாயத்தில் முதல் இரண்டு வகை வரைபடங்களைப் பற்றி பார்ப்போம். மற்ற இரண்டும் மேல் வகுப்புகளில் அறிந்து கொள்வோம்.

3.2.1 நிகழ்வெண் செவ்வகம் (Histogram)

நிகழ்வெண் பரவலை விவரிக்கப் பயன்படும் பலவிதமான வரைபட முறைகளில் அதிகம் பேசப்படுவதும் பலராலும் பயன்படுத்தப்படுவதும் நிகழ்வெண் செவ்வகம் ஆகும். நிகழ்வெண் செவ்வகம் என்பது ஒரு தொடர்நிகழ்வெண் பரவலை இரு பரிமாண வரைபடமாக மாற்றிக் காட்டுவதாகும். நிகழ்வெண் செவ்வகத்தில், நிகழ்வெண் பரவலின் பிரிவு இடைவெளிகளை அகலமாகவும் அப்பிரிவுகளின் நிகழ்வெண்களை நீளமாகவும் கொண்டு செவ்வகங்கள் வரையப்படுகின்றன. இச்செவ்வகங்களின் பரப்பு அந்தந்த நிகழ்வெண்களுக்கு நேர் விகிதத்தில் இருக்கும்.

சமமான பிரிவு இடைவெளிகளைக் கொண்டு நிகழ்வெண்செவ்வகம் வரைய செய்ய வேண்டியன:

1. பிரிவுகளை x-அச்சிலும், நிகழ்வெண்களை y-அச்சிலும் குறிக்க வேண்டும்.
2. இரு அச்சுகளிலும் அலகுகள் ஒன்றாக இருக்க வேண்டிய அவசியம் இல்லை.
3. பிரிவுகள் விலக்கும் பிரிவுகளாக (Exclusive Intervals) இருத்தல் அவசியம். பிரிவுகள் உள்ளடக்கும் பிரிவுகளாக (Inclusive Intervals) இருந்தால் விலக்கும் பிரிவுகளாக மாற்றப்பட வேண்டும்.
4. பிரிவு இடைவெளிகளை அகலமாகவும், அப்பிரிவுகளின் நிகழ்வெண்களை நீளமாகவும் கொண்டு செவ்வகங்கள் வரையவேண்டும். இவ்வாறு ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியின் மேலும் ஒரு செவ்வகம் அமைக்கவேண்டும்.

குறிப்புரை

நிகழ்வெண் செவ்வகமானது பட்டை விளக்கபடங்களைப் போன்று இருக்கும். எனினும்,நிகழ்வெண் செவ்வகம்,நிகழ்வெண் பரவலின் பிரிவு இடைவெளியையும் அதன் நிகழ்வெண்களையும் பயன்படுத்தி வரையப்படுகின்றன. ஆனால், பட்டை விளக்கபடங்களில், புள்ளி விவரங்களின் வகைகளையும், அந்தந்த வகைக்கான நிகழ்வெண்களையும் பயன்படுத்தி வரையப்படுகின்றன. தொடர்புள்ளி விவரங்களுக்கு மட்டுமே நிகழ்வெண் செவ்வகம் வரைய முடியும்.

3.2.2 நிகழ்வெண் பலகோணம் *(Frequency Polygon)*

நிகழ்வெண் பலகோணத்தில் ஒவ்வொரு பிரிவின் நடுப்புள்ளியும், அப்பிரிவில் உள்ள புள்ளிவிவரங்களுக்குபதிலாகப்பயன்படுத்தப்படுகின்றன. பிரிவுகளின்நடுப்புள்ளிகளை x-அச்சிலும் நிகழ்வெண்களை y-அச்சிலும் எடுத்துக்கொண்டு, அதன்மூலம் குறிக்கப்படும் புள்ளிகளை இணைப்பதன் மூலம் நிகழ்வெண் பலகோணம் பெறப்படுகின்றது. நிகழ்வெண் பலகோணத்தின் இரண்டு கடைக்கோடுகள் பிரிவு இடைவெளியில் பாதி அளவு தூரத்தில், கடைப்புள்ளிகளுக்கு (Extreme points) வெளிப்புறம் x-அச்சினைத் தொடுமாறு அமைக்கப்பட வேண்டும்.

நிகழ்வெண் செவ்வகம் மற்றும் நிகழ்வெண் பலகோணம் இரண்டும் வரையப்பட வேண்டுமெனில், முதலில் நிகழ்வெண் செவ்வகம் வரைந்து கொள்ளவேண்டும். பின்பு செவ்வகங்களின் மேற்பகுதிகளின் நடுப்புள்ளிகளை இணைப்பதன் மூலம் நிகழ்வெண் பலகோணத்தை வரைய முடியும்.

குறிப்புரை நிகழ்வெண் பலகோணம் வரைய, நிகழ்வெண் செவ்வகம் ஒரு வழிகாட்டியாக முதலில் வரையப்படுகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 3.1

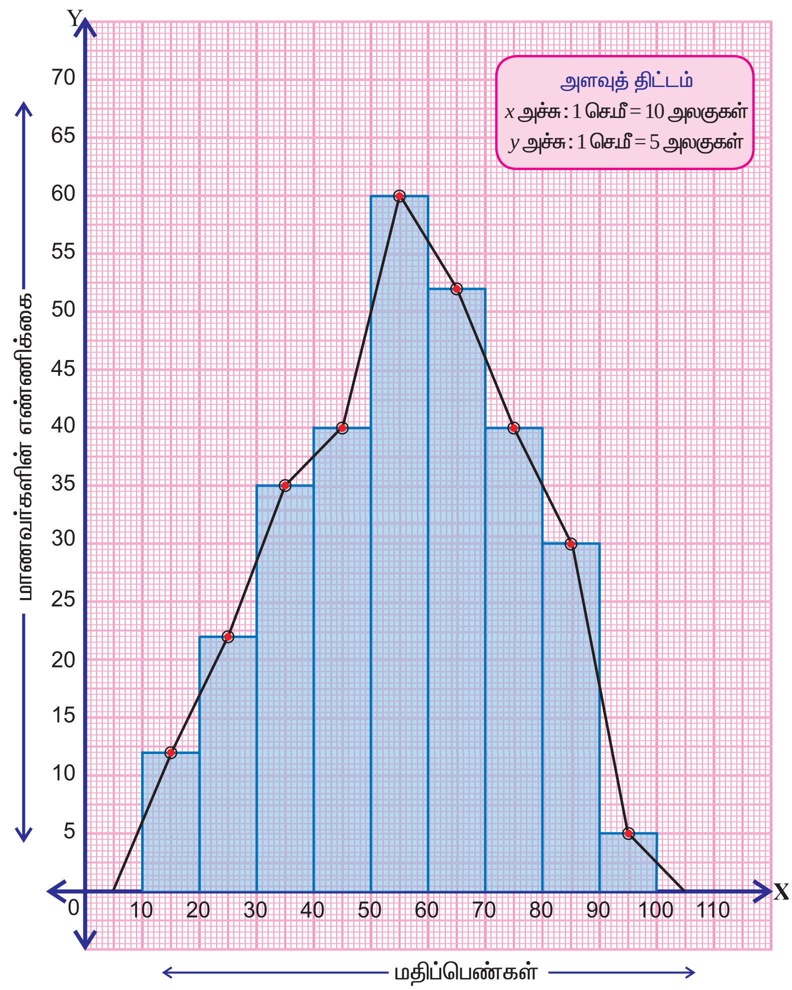
பின்வரும் புள்ளி விவரங்களுக்கான நிகழ்வெண் செவ்வகம் மற்றும் நிகழ்வெண் பலகோணம் வரைக.

மதிப்பெண்கள்	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	12	22	35	40	60	52	40	30	5

தீர்வு முதலில் நிகழ்வெண் செவ்வகம் வரையப்பட்டு பின்பு, அடுத்தடுத்த செவ்வகங்களின் மேற்பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளை இணைப்பதால் நிகழ்வெண் பலகோணம் பெறப்படுகின்றது.

நிகழ்வெண் செவ்வகம் மற்றும் நிகழ்வெண் பலகோணம்

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில், பிரிவுகள் விலக்கும் பிரிவுகளாக உள்ளன. இப்போது உள்ளடக்கும் பிரிவுகளைக் கொண்ட ஓர் எடுத்துக்காட்டை எடுத்துக்கொள்வோம்.



எடுத்துக்காட்டு 3.2

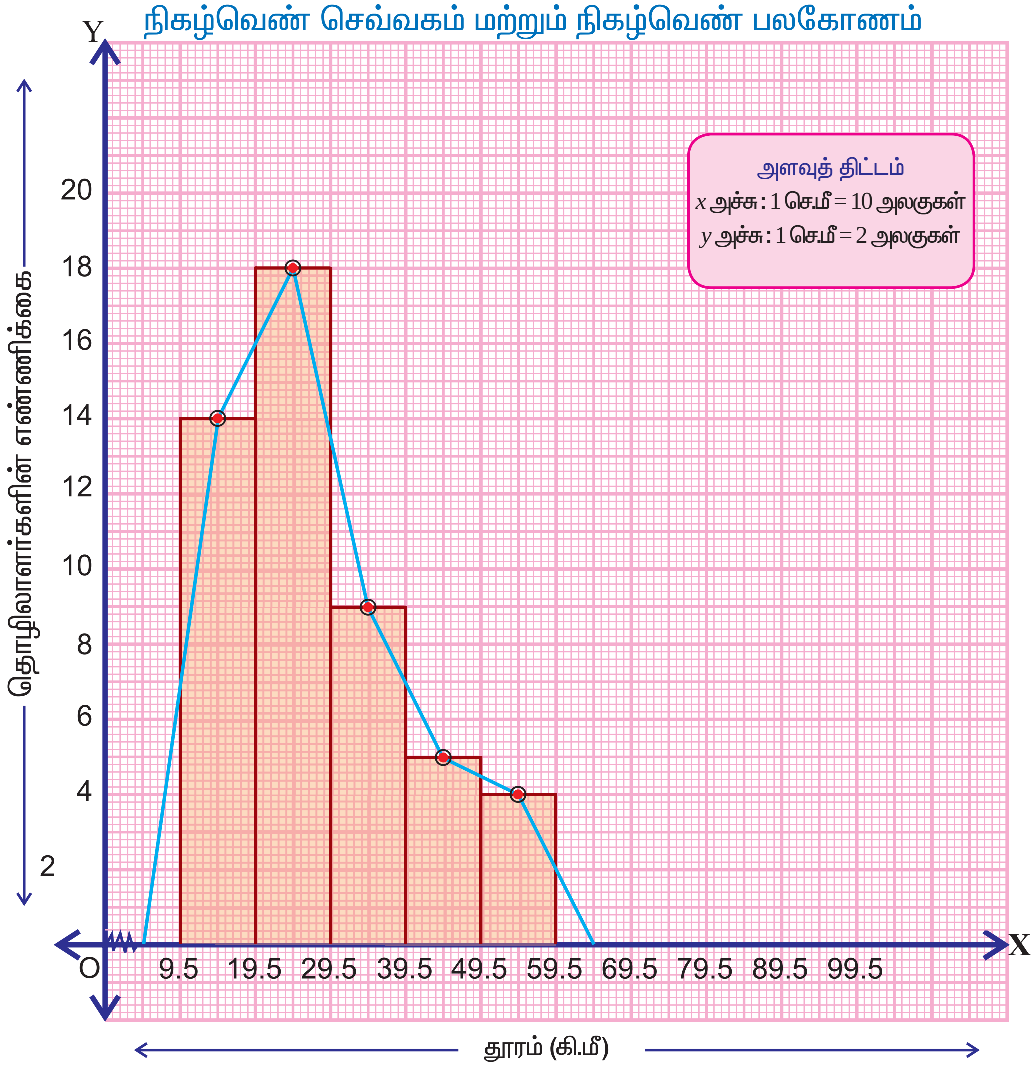
ஒரு சிறிய தொழிற்கூடத்தில் வேலை செய்யும் 50 தொழிலாளர்களிடம், அவர்கள் ஒவ்வொருவரும் வேலைக்காக எத்தனை கிலோ மீட்டர் தொலைவு வந்து செல்கிறார்கள் என்ற கணக்கெடுப்பு நடத்தப்பட்டதில் கீழ்க்கண்ட விவரங்கள் பெறப்பட்டன. இவ்விவரங்களுக்கு ஒரு நிகழ்வெண் செவ்வகம் மற்றும் நிகழ்வெண் பலகோணம் அமைக்கவும்.

தூரம் (கி.மீ)	50-59	40-49	30-39	20-29	10-19
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	4	5	9	18	14

தீர்வு கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் பட்டியலின் பிரிவுகள் உள்ளடக்கும் பிரிவுகளாகவும், தொடர்ச்சியாக அமையாமலும் உள்ளன. அதனால், அப்பிரிவுகள் விலக்கும் பிரிவுகளாக மாற்றப்பட்டு, ஏறுவரிசையில் அமைக்கப்பட்டுள்ளன.

தூரம் (கி. மீ)	9.5-19.5	19.5-29.5	29.5-39.5	39.5-49.5	49.5-59.5
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	14	18	9	5	4

நிகழ்வெண் செவ்வகம் மற்றும் நிகழ்வெண் பலகோணம்



குறிப்பு

(i) பிரிவுகள் தொடர் இடைவெளிகளாக மாற்றப்பட்டு பின்பு நிகழ்வெண் செவ்வகம் அமைக்கவேண்டும்.

(ii) x-அச்சில் அளவுகள் ஆதிப்புள்ளியில் இருந்து தொடங்காவிடில், ஆதிப்புள்ளிக்கு அருகில் குறுக்குக் கோடுகளால் (Zig-zag Curve) குறிப்பிடப்பட வேண்டும்.

3.2.3 மாறுபட்ட பிரிவு இடைவெளிகளைக் கொண்ட நிகழ்வெண் பரவலின் நிகழ்வெண் செவ்வகம்

கீழ்க்காணும் நிகழ்வெண் பரவலை எடுத்துக் கொள்வோம்:

நேரம் (வினாடிகள்)	40-60	60-70	70-80	80-85	85-90	90-120
நிகழ்வெண்	100	60	90	70	60	90

இங்கு, பெரிய நிகழ்வெண்ணை பெற்றுள்ளதால் பிரிவு இடைவெளி 40-60 அதிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது போல் தோன்றுகிறது. ஆனால், நிகழ்வெண் 100-க்கான பிரிவுஇடைவெளியின் அளவு 20 ஆகும். அதே சமயம் பிரிவுஇடைவெளி 80-85 க்கான நிகழ்வெண் 70 ஆக இருந்தாலும் அதன் அளவு 5 வினாடிகள் மட்டுமே. எனவே, நிகழ்வெண் செவ்வகம் வரையும் முன்பு ஒவ்வொரு பிரிவுஇடைவெளியின் அளவையும் (நீளத்தையும்) கணக்கில் கொள்ள வேண்டும். அவ்வாறு இல்லையெனில் அந்நிகழ்வெண் செவ்வகம், கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களை சரியான முறையில் விவரிப்பதாக அமையாது. இதனைச் சரிசெய்ய, பிரிவுஇடைவெளிகள் மற்றும் அதன் நிகழ்வெண்களைப் பொறுத்து, செவ்வகங்களின் நீளங்கள் மாற்றியமைக்கப்பட வேண்டும்.

செவ்வகத்தின் மாற்றியமைக்கப்பட்ட நீளங்கள் நிகழ்வெண் அடர்த்தியைக் காண்பதன் மூலம் கணக்கிடப்படுகின்றது.

நிகழ்வெண் அடர்த்தி : நிகழ்வெண்களை அதன் பிரிவுஇடைவெளியின் அளவைக் கொண்டு வகுக்கும் போது நிகழ்வெண் அடர்த்தி கிடைக்கின்றது.

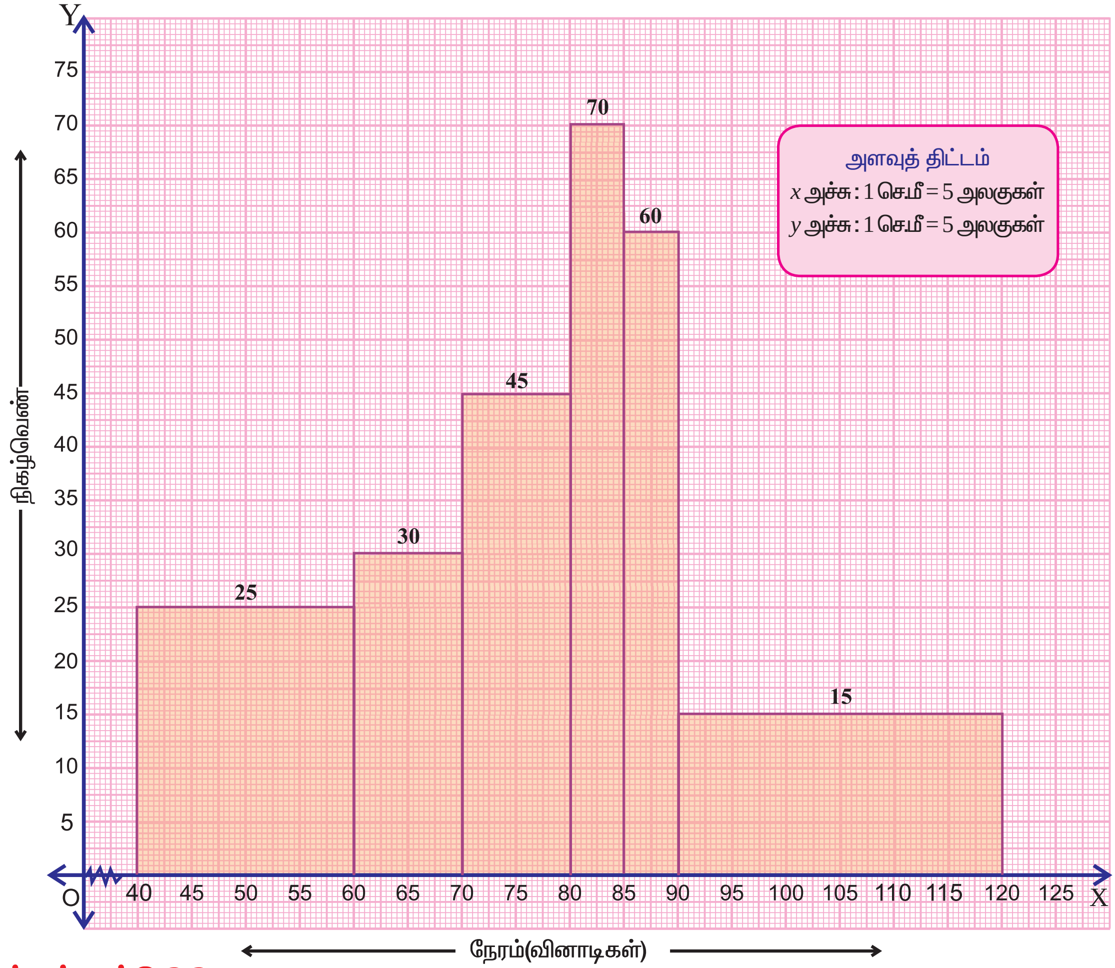
முக்கிய கருத்து

நிகழ்வெண் அடர்த்தி = நிகழ்வெண் $\div$ பிரிவுஇடைவெளியின் அளவு

கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவலில், C என்பது மிகச்சிறிய பிரிவு இடைவெளியின் நீளம் எனக்கொண்டால், செவ்வகத்தின் மாற்றியமைக்கப்பட்ட நீளம் கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கிடப்படும்.

$$\text{மாற்றியமைக்கப்பட்ட நீளம்} = \frac{\text{நிகழ்வெண்}}{\text{அதன் பிரிவு இடைவெளியின் அளவு}} \times C$$

நேரம் (வினாடிகள்)	40-60	60-70	70-80	80-85	85-90	90-120
நிகழ்வெண்	100	60	90	70	60	90
பிரிவு இடைவெளியின் அளவு	20	10	10	5	5	30
செவ்வகத்தின் நீளம்	$\frac{100}{20}\times 5 = 25$	$\frac{60}{10}\times 5 = 30$	$\frac{90}{10}\times 5 = 45$	$\frac{70}{5}\times 5 = 70$	$\frac{60}{5}\times 5 = 60$	$\frac{90}{30}\times 5 = 15$



எடுத்துக்காட்டு 3.3

பின்வரும் புள்ளி விவரங்களுக்கான நிகழ்வெண் செவ்வகத்தை வரையவும்.

மதிப்பெண்	0-10	10-20	20-40	40-50	50-60	60-70	70-90	90-100
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	4	6	14	16	14	8	16	5

தீர்வு இப்புள்ளி விவரத்தின் மிகச்சிறிய பிரிவு இடைவெளியின் நீளம் 10. மாறுபட்ட பிரிவு இடைவெளிகளைக் கொண்ட இப்புள்ளி விவரத்திற்கு நிகழ்வெண் செவ்வகம் வரைய செவ்வகத்தின் நீளங்கள் மாற்றியமைக்கப்பட வேண்டும்.

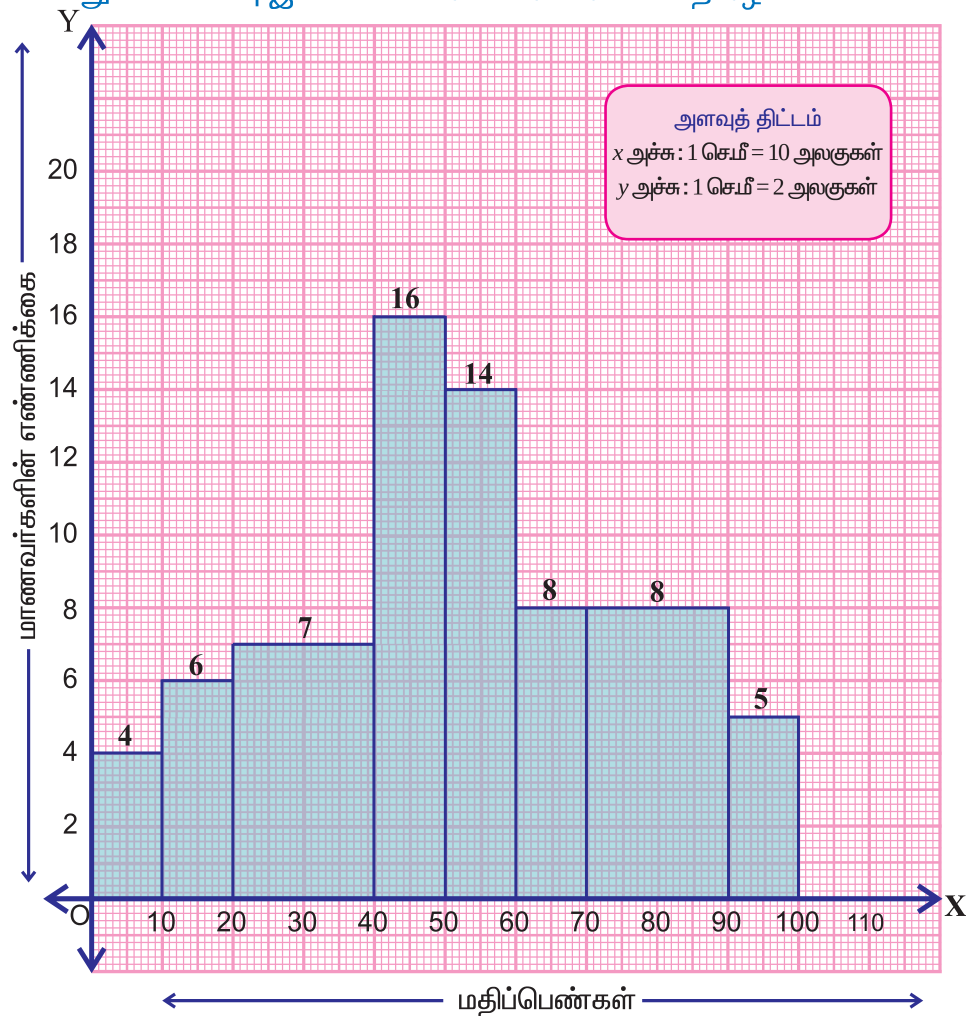
$$\text{நிகழ்வெண் அடர்த்தி} = \frac{\text{நிகழ்வெண்}}{\text{நிகழ்வெண்ணின் பிரிவு இடைவெளியின் நீளம்}}.$$

செவ்வகத்தின் நீளம் = நிகழ்வெண் அடர்த்தி $\times 10$

மதிப்பெண்கள்	0-10	10-20	20-40	40-50	50-60	60-70	70-90	90-100
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	4	6	14	16	14	8	16	5
பிரிவு இடை–வெளியின் நீளம்	10	10	20	10	10	10	20	10
செவ்வகத்தின் நீளம்	$\frac{4}{10}\times 10 = 4$	$\frac{6}{10}\times 10 = 6$	$\frac{14}{20}\times 10 = 7$	$\frac{16}{10}\times 10 = 16$	$\frac{14}{10}\times 10 = 14$	$\frac{8}{10}\times 10 = 8$	$\frac{16}{20}\times 10 = 8$	$\frac{5}{10}\times 10 = 5$

கணக்கு

மாறுபட்ட பிரிவு இடைவெளிகளைக் கொண்ட நிகழ்வெண் செவ்வகம்



பயிற்சி 3.1

1. பின்வரும் பரவலுக்கு நிகழ்வெண் செவ்வகத்தை வரைக.

பிரிவுகள்	0-10	10-30	30-45	45-50	50-60
நிகழ்வெண்	8	28	18	6	10

2. ஒரு தொழிற்சாலையில் பணிபுரியும் தொழிலாளர்களின் மாதச்சம்பளம் பற்றிய கீழ்க்காணும் புள்ளி விவரங்களுக்கு ஒரு நிகழ்வெண் செவ்வகம் வரைக.

மாதச் சம்பளம் (₹)	2000 - 2200	2200 - 2400	2400 - 2800	2800 - 3000	3000 - 3200	3200 - 3600
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	25	30	50	60	15	10

3. பின்வரும் பரவலில் 48 பொருள்களின் அடர்த்தி கிராமில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இப்புள்ளி விவரங்களை விளக்குவதற்கு ஒரு நிகழ்வெண் செவ்வகம் வரையவும்.

அடர்த்தி (கிராம்)	10-19	20-24	25-34	35-49	50-54
பொருள்களின் எண்ணிக்கை	6	4	12	18	8

4. பின்வரும் புள்ளி விவரங்களுக்கு ஒரு நிகழ்வெண் செவ்வகம் வரைக.

பிரிவு இடைவெளி	10-14	14-20	20-32	32-52	52-80
நிகழ்வெண்	5	6	9	25	21

5. ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் மருத்துவமனையில் சிகிச்சை பெற்ற 360 நோயாளிகளின் வயது (வருடங்களில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

வயது (வருடங்களில்)	10-20	20-30	30-50	50-60	60-70
நோயாளிகளின் எண்ணிக்கை	80	50	80	120	30

மேற்கண்ட புள்ளி விவரத்திற்கான நிகழ்வெண் செவ்வகம் வரைக.

மையப்போக்கு அளவைகள் (Measures of Central Tendency)

புள்ளியியல் ஆய்வின் முக்கிய நோக்கங்களில் ஒன்று கொடுக்கப்பட்ட மொத்த விவரத்தின் தன்மைகள் மற்றும் சிறப்பியல்புகளை ஒரு குறிப்பிட்ட தனி எண்ணால் குறிப்பதாகும். அத்தகைய எண் அப்புள்ளி விவரத்தின் மைய மதிப்பு அளவு அல்லது மையப்போக்கு அளவு என்று அழைக்கப்படுகின்றது. கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலைஅளவு, முகடு ஆகியன பொதுவாக அதிகமாகப் பயன்படும் மையப்போக்கு அளவைகள் ஆகும்

3.3 சராசரி (Mean)

3.3.1 கூட்டுச் சராசரி – வகைப்படுத்தப்படாத புள்ளி விவரம்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகையை மொத்த மதிப்புகளின் எண்ணிக்கையால் வகுக்க கிடைக்கும் எண் அந்த மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரி (Arithmetic Mean) ஆகும். கூட்டுச் சராசரி $\overline{x}$ எனக் குறிக்கப்படும்.

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \text{ அல்லது } \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ அல்லது } \overline{x} = \frac{\sum x}{n}$$

குறிப்புரை $\overline{x} = \frac{\sum x}{n} \Longrightarrow n\overline{x} = \sum x$ அதாவது,

மொத்த மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை $\times$ சராசரி = மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகை

சராசரி 4 அடி ஆழம் உள்ள ஆற்றை நீச்சல் தெரியாத 5 அடி உயரம் உள்ள மனிதன் கடந்து எதிர் கரைக்குச் செல்ல முடியுமா?

நினைவுகூர்ந்து விடையளி

எடுத்துக்காட்டு **3.4**

ஒரு மாணவன் முழு ஆண்டுத் தேர்வில் 5 பாடங்களில் எடுத்த மதிப்பெண்கள் 72, 73, 75, 82, 74 எனில், சராசரி மதிப்பெண் காண்க.

தீர்வு ஐந்து பாடங்களில் வாங்கிய மதிப்பெண்கள் 72, 73, 75, 82, 74. இங்கு $n = 5$

$$\overline{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{72 + 73 + 75 + 82 + 74}{5} = \frac{376}{5} = 75.2$$

எனவே, சராசரி = 75.2

எடுத்துக்காட்டு 3.5

5 எண்களின் சராசரி 32. அவ்வெண்களில் ஒன்றை நீக்கும்போது, சராசரியில் 4 குறைந்தால் நீக்கப்பட்ட எண்ணைக் காணவும்.

தீர்வு

5 எண்களின் சராசரி = 32.

5 எண்களின் கூட்டுத்தொகை = $32 \times 5 = 160$ $\quad (\because n\overline{x} = \sum x)$

4 எண்களின் சராசரி = $32 - 4 = 28$

4 எண்களின் கூட்டுத்தொகை = $28 \times 4 = 112$

தவிர்க்கப்பட்ட எண் = (5 எண்களின் கூட்டுத் தொகை) − (4 எண்களின் கூட்டுத் தொகை)

= 160 − 112 = 48

3.3.2 சராசரி – வகைப்படுத்தப்படாத நிகழ்வெண் பரவல்

$x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ ஆகிய உறுப்புகளின் நிகழ்வெண்கள் முறையே $f_1, f_2, f_3 \ldots f_n$ எனில், சராசரி

$$\overline{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

மேற்கண்ட சூத்திரம் $\overline{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$ என்றும் எழுதப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.6

பின்வரும் புள்ளி விவரத்திற்கான சராசரியைக் காண்க.

x	5	10	15	20	25
f	3	10	25	7	5

தீர்வு

x	f	fx
5	3	15
10	10	100
15	25	375
20	7	140
25	5	125
	$\sum f = 50$	$\sum fx = 755$

சராசரி $= \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{755}{50} = 15.1$

சராசரி = 15.1

3.3.3 சராசரி – வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவல்

பின்வரும் நிகழ்வெண் பட்டியலை எடுத்துக்கொள்வோம்.

பிரிவு இடைவெளி (மதிப்பெண்கள்)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
நிகழ்வெண் (மாணவர்களின் எண்ணிக்கை)	3	4	3	7	8

பட்டியலின் முதல் பிரிவிலிருந்து 3 மாணவர்கள் 10 மதிப்பெண்களுக்குக் குறைவாகப் பெற்றிருப்பதாகத் தெரிகின்றது. ஆனால் அது அம்மூவரும் தனித்தனியாக வாங்கிய மதிப்பெண்களைப் பற்றி ஏதும் குறிப்பிடப்படவில்லை. இப்போது ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியின் பிரதிநிதியாக ஒரு மதிப்பு தேவைப்படுகின்றது. பிரிவு 0-10 க்கான அந்த மதிப்பு 5 எனக் கொள்வோம். இது அந்த பிரிவின் மையப்புள்ளியாகும். அதாவது, ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியில் உள்ள உறுப்புகளும் அப்பிரிவின் மையப்புள்ளிக்கு அருகில் உள்ளதாக எடுத்துக்கொள்வோம். இதன்படி ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியின் மையப்புள்ளி, அப்பிரிவில் உள்ள உறுப்புகளின் பிரதிநிதியாக ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகின்றது.

மையப்புள்ளி = $\dfrac{UCL + LCL}{2}$. இங்கு UCL என்பது பிரிவின் மேல் எல்லை (Upper Class Limit) LCL என்பது பிரிவின் கீழ் எல்லை (Lower Class Limit)ஆகும்.

பிரிவின் மையப்புள்ளியை x என்று குறித்து, மேற்கூறிய சூத்திரத்தின் மூலம் x கணக்கிடப்படுகின்றது. தற்போது

$\bar{x} = \dfrac{\sum fx}{\sum f}$ ஐ பயன்படுத்தி கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவலின் சராசரியைக் காணலாம்.

தொகுக்கப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவலின் சராசரியைக் கீழ்க்காணும் முறைகளில் ஏதேனும் ஒரு முறையைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடலாம்:

(i) நேரடி முறை

(ii) ஊகச் சராசரி முறை

(iii) படிவிலக்க முறை

நேரடி முறை (Direct method)

நேரடி முறையைப் பயன்படுத்தும் போது, சராசரி காண்பதற்கான சூத்திரம் $\bar{x} = \dfrac{\sum fx}{\sum f}$,

இங்கு x என்பது பிரிவு இடைவெளியின் மையப்புள்ளி மற்றும் f என்பது அந்தப் பிரிவு இடைவெளியின் நிகழ்வெண் ஆகும்.

நேரடி முறையில் சராசரி காண்பதற்கான படிகள் :

(i) ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியின் மையப்புள்ளியைக் கண்டுபிடித்து அதை x எனக் குறிக்க.

(ii) இம்மையப்புள்ளிகளை அதற்குரிய பிரிவு இடைவெளியின் நிகழ்வெண்ணோடு பெருக்கி, அப்பெருக்கல் பலனின் கூடுதல் $\sum fx$ ஐக் காணவும்.

(iii) எல்லா நிகழ்வெண்களின் கூடுதல் $\sum f$ ஐக் காணவும். $\sum fx$ ஐ $\sum f$ ஆல் வகுக்க, சராசரி கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.7

கீழ்க்காணும் விவரத்திற்கு நேரடி முறை மூலம் சராசரியைக் காண்க.

மதிப்பெண்கள்	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	5	10	25	30	20	10

தீர்வு

மதிப்பெண்கள்	மையப்புள்ளி (x)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (f)	fx
0-10	5	5	25
10-20	15	10	150
20-30	25	25	625
30-40	35	30	1050
40-50	45	20	900
50-60	55	10	550
		$\sum f = 100$	$\sum fx = 3300$

$$\overline{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{3300}{100} = 33$$

எனவே, சராசரி = 33

ஊகச் சராசரி முறை (Assumed mean method)

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரத்தின் ஊகச் சராசரி A எனில், “விலக்கம்” $d = x - A$ என்பது ஊகச் சராசரி A இல் இருந்து பிரிவின் மையப்புள்ளி x இன் விலக்கமாகும். ஊகச் சராசரி முறையில், சராசரி காண்பதற்கான சூத்திரம்

$$\overline{x} = A + \frac{\sum fd}{\sum f}.$$

ஊகச் சராசரி முறையில் சராசரி காண்பதற்கான படிகள் :

(i) ஊகச் சராசரியை A என்போம்.

(ii) ஒவ்வொரு பிரிவின் மையப்புள்ளி x ஐக் காண்க.

(iii) ஒவ்வொரு x க்கும் விலக்கம் $d = x - A$ ஐக் காண்க.

(iv) விலக்கத்தினை அந்தந்தப் பிரிவு இடைவெளியின் நிகழ்வெண்ணோடு பெருக்கி, பின்பு fd இன் கூடுதல் $\sum fd$ ஐக் காண்க.

(v) $\overline{x} = A + \dfrac{\sum fd}{\sum f}$ என்ற சூத்திரத்தின் வாயிலாய்ச் சராசரியைக் காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 3.8

எடுத்துக்காட்டு 11.7-ல் உள்ள விவரத்திற்கு, ஊகச் சராசரி முறையில், சராசரியைக் காண்க.

தீர்வு ஊகச் சராசரி A = 35 என்க.

மதிப்பெண்கள்	மையப்புள்ளி(x)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (f)	$d = x - 35$	fd
0-10	5	5	–30	–150
10-20	15	10	–20	–200
20-30	25	25	–10	–250
30-40	35	30	0	0
40-50	45	20	10	200
50-60	55	10	20	200
		$\sum f = 100$		$\sum fd = -200$

$$\overline{x} = A + \frac{\sum fd}{\sum f}$$

$$= 35 + \left(\frac{-200}{100}\right) = 35 - 2 = 33$$

படிவிலக்க முறை (Step deviation method)

புள்ளி விவரத்தின் பிரிவு இடைவெளிகளின் நீளம் சமமாக இருந்தால், படிவிலக்க முறையில் சராசரி காண்பது எளிது. இம்முறையில், கணக்கிடுவதை எளிமைப்படுத்துவதற்காக விலக்கம் $d = x - A$ ஐ இடைவெளியின் நீளம் c ஆல் வகுக்கப்படுகின்றது. பிறகு,

$\overline{x} = A + \frac{\sum fd}{\sum f} \times c$ என்ற சூத்திரத்தின் மூலம் சராசரி காணப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 11.7-ல் உள்ள புள்ளிவிவரத்திற்கு, படிவிலக்க முறையில் சராசரியைக் காணவும்.

தீர்வு

ஊகச் சராசரி A = 35 என்க. இங்கு இடைவெளி நீளம் c = 10.

மதிப்பெண்கள்	மையப்புள்ளி (x)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை(f)	$d = \frac{x-35}{10}$	fd
0-10	5	5	–3	–15
10-20	15	10	–2	–20
20-30	25	25	–1	–25
30-40	35	30	0	0
40-50	45	20	1	20
50-60	55	10	2	20
		$\sum f = 100$		$\sum fd = -20$

$$\overline{x} = A + \frac{\sum fd}{\sum f} \times c \quad = 35 - \left(\frac{20}{100} \times 10\right) = 35 - 2 = 33$$

$\therefore$ சராசரி $= 33$

கணக்கு

3.3.4 சராசரியின் பண்புகள்

பண்பு 1

சராசரியிலிருந்து, அனைத்து உறுப்புகளின் விலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியம் ஆகும்.

அதாவது, புள்ளிவிவரத்தின் உறுப்புகள் $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ எனில், $(x_1 - \overline{x}) + (x_2 - \overline{x}) + \ldots + (x_n - \overline{x}) = 0$

உதாரணமாக, 6, 8, 9, 14, 13 என்ற விவரத்தின் சராசரி 10. 10 இலிருந்து ஒவ்வொரு விவரத்தின் விலங்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$(6-10)+(8-10)+(9-10)+(14-10)+(13-10)$$
$$= -4+(-2)+(-1)+4+3 = -7+7=0$$

எனவே, சராசரியிலிருந்து, அனைத்து உறுப்புகளின் விலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியம் என அறியப்படுகின்றது.

பண்பு 2

ஒரு புள்ளிவிவரத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு எண்ணுடனும், ஒரு குறிப்பிட்ட மாறாத எண் k ஐ அதிகரிப்பதனால் கிடைக்கும் புதிய புள்ளிவிவரத்தின் கூட்டுச் சராசரி மதிப்பும் அதே மாறிலி k அளவு அதிகரிக்கும்.

அதாவது, $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ என்ற எண்களின் சராசரி $\overline{x}$ எனில், $x_1 + k, x_2 + k, x_3 + k, \ldots, x_n + k$ என்ற எண்களின் சராசரி $\overline{x} + k$ ஆகும்.

உதாரணமாக, x_1, x_2, x_3, x_4 மற்றும் x_5 என்ற எண்களின் சராசரி 20 என்க.

$$\text{எனவே, } \overline{x} = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5} = 20$$

ஒவ்வொரு எண்ணோடும் 5 ஐக் கூட்டினால் கிடைக்கும் புதிய எண்கள்

$x_1 + 5, x_2 + 5, x_3 + 5, x_4 + 5$ மற்றும் $x_5 + 5$ ஆகும்.

இதன் சராசரி

$$\frac{x_1+5+x_2+5+x_3+5+x_4+5+x_5+5}{5}$$
$$= \frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+25}{5}$$
$$= \frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5} + \frac{25}{5} = 20+5$$

புதிய விவரத்தின் சராசரி பழைய விவரத்தின் சராசரியை விட 5 அதிகரித்துள்ளதைக் காண்கிறோம்.

பண்பு 3

ஒரு புள்ளிவிவரத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு எண்ணிலிருந்தும், ஒரு குறிப்பிட்ட மாறாத எண் k ஐக் குறைப்பதனால் கிடைக்கும் புதிய புள்ளிவிவரத்தின் கூட்டுச் சராசரி மதிப்பும் அதே மாறிலி k அளவு குறையும். அதாவது,

$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$ என்ற எண்களின் சராசரி $\overline{x}$ எனில்,

$x_1 - k, x_2 - k, x_3 - k, x_4 - k, \ldots, x_n - k$ ஆகிய எண்களின் சராசரி $\overline{x} - k$ ஆகும்.

உதாரணமாக, x_1, x_2, x_3, x_4 மற்றும் x_5 ஆகிய எண்களின் சராசரி $\overline{x}$ எனில்,

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$$

ஒவ்வொரு எண்ணிலிருந்தும் 5 ஐக் கழித்தால், கிடைக்கும் புதிய எண்கள்

$$x_1 - 5, x_2 - 5, x_3 - 5, x_4 - 5, x_5 - 5.$$

$$\text{புதிய சராசரி} = \frac{x_1 - 5 + x_2 - 5 + x_3 - 5 + x_4 - 5 + x_5 - 5}{5}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} - \frac{25}{5}$$

$$= 20 - 5$$

புதிய விவரத்தின் சராசரி பழைய விவரத்தின் சராசரியை விட 5 குறைந்துள்ளதைக் காண்கிறோம்.

பண்பு 4

ஒரு புள்ளிவிவரத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு எண்ணுடனும், ஒரு குறிப்பிட்ட மாறாத எண் $k, (k \neq 0)$ ஆல் பெருக்கினால் கிடைக்கும் புதிய புள்ளிவிவரத்தின் கூட்டுச் சராசரி மதிப்பும் அதே மாறிலி k ஆல் பெருக்கிக் கிடைக்கிறது. அதாவது,

$x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ ஆகிய எண்களின் சராசரி $\overline{x}$ எனில், $kx_1, kx_2, kx_3, \ldots, kx_n$ ஆகிய எண்களின் சராசரி $k\overline{x}$ ஆகும்.

உதாரணம், x_1, x_2, x_3, x_4 மற்றும் x_5 ஆகிய எண்களின் சராசரி 20 எனில்,

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = 20$$

ஒவ்வொரு எண்ணையும் 5-ஆல் பெருக்கினால், கிடைக்கும் எண்கள் $5x_1, 5x_2, 5x_3, 5x_4, 5x_5$.

$$\text{புதிய சராசரி} = \frac{5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 5x_5}{5}$$

$$= \frac{5(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)}{5} = 5\,(20)$$

புதிய விவரத்தின் சராசரி பழைய விவரத்தின் சராசரியை 5 ஆல் பெருக்கக் கிடைக்கிறது.

பண்பு 5

ஒரு புள்ளிவிவரத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு எண்ணுடனும், ஒரு குறிப்பிட்ட மாறாத எண் $k, (k \neq 0)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் புதிய புள்ளிவிவரத்தின் கூட்டுச் சராசரி மதிப்பும் அதே மாறிலி k ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கிறது. அதாவது,

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots, x_n$ ஆகிய எண்களின் சராசரி $\overline{x}$ எனில், $\frac{x_1}{k}, \frac{x_2}{k}, \frac{x_3}{k}, \ldots, \frac{x_n}{k}$ ஆகிய எண்களின் சராசரி $\frac{\overline{x}}{k}$ ஆகும்.

உதாரணமாக, x_1, x_2, x_3, x_4 மற்றும் x_5 ஆகிய எண்களின் சராசரி 20 எனில்,

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = 20$$

ஒவ்வொரு எண்ணையும் 5 ஆல் வகுக்க கிடைக்கும் எண்கள் $y_1 = \frac{x_1}{5}$, $y_2 = \frac{x_2}{5}$, $y_3 = \frac{x_3}{5}$, $y_4 = \frac{x_4}{5}$ மற்றும் $y_5 = \frac{x_5}{5}$.

$$\text{புதிய சராசரி } \overline{y} = \frac{\frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{5} + \frac{x_3}{5} + \frac{x_4}{5} + \frac{x_5}{5}}{5}$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}\right) = \frac{1}{5}(20)$$

$$= \frac{1}{5}\,(\overline{x})$$

புதிய விவரத்தின் சராசரி பழைய விவரத்தின் சராசரியை 5 ஆல் வகுக்க கிடைத்துள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 3.9

100 மாணவர்களின் மதிப்பெண்களின் சராசரி 40 என்று கணக்கிடப்பட்டது. பின்பு, 53 என்ற மதிப்பெண் 83 என்று தவறுதலாக எடுக்கப்பட்டது தெரியவந்தது. சரியான மதிப்பெண்களைக் கொண்டு சரியான சராசரியைக் காண்க.

தீர்வு மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $n = 100$, சராசரி மதிப்பெண் $\overline{x} = 40$.

$$\text{தவறான } \sum x = \overline{x} \times n = 40 \times 100 = 4000$$

சரியான $\sum x$ = தவறான $\sum x$ − தவறான மதிப்பெண் + சரியான மதிப்பெண்.

$$= 4000 - 83 + 53 = 3970$$

$$\text{சரியான சராசரி } \overline{x} = \frac{\text{சரியான} \sum x}{n}$$

$$= \frac{3970}{100} = 39.7$$

எனவே $\overline{x}$-ன் சராசரி மதிப்பு 39.7 ஆகும்.

பயிற்சி 3.2

1. ஒரு கடைக்காரர் தொடர்ந்து 6 நாள்களில் விற்ற பைகளின் எண்ணிக்கை கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. விற்கப்பட்ட பைகளின் சராசரி எண்ணிக்கையைக் காண்க.

நாட்கள்	திங்கள்	செவ்வாய்	புதன்	வியாழன்	வெள்ளி	சனி
பைகளின் எண்ணிக்கை	55	32	30	25	10	20

2. ஒரு பகுதியில் உள்ள 10 குடும்பங்களில் உள்ள குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை 2, 4, 3, 4, 1, 6, 4, 5, x, 5 ஆகும். குழந்தைகளின் எண்ணிக்கையின் சராசரி 4 எனில், x-ன் மதிப்பைக் காண்க.

3. 20 எண்களின் சராசரி **59** என்க. ஒவ்வொரு எண்ணுடனும் 3 ஐக் கூட்டினால், கிடைக்கும் எண்களின் சராசரி என்ன?

4. 15 எண்களின் சராசரி 44 என்க. ஒவ்வொரு எண்ணிலிருந்து 7 ஐக் கழித்தால், கிடைக்கும் எண்களின் சராசரி என்ன?

5. 12 எண்களின் சராசரி 48 என்க. ஒவ்வொரு எண்ணையும் 4 ஆல் பெருக்கினால், கிடைக்கும் எண்களின் சராசரி என்ன?

6. 16 எண்களின் சராசரி 54 என்க. ஒவ்வொரு எண்ணையும் 9 ஆல் வகுத்தால், கிடைக்கும் எண்களின் சராசரி என்ன?

7. 6 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு குழுவின் சராசரி எடை 48 கிலோ ஆகும். அவற்றில் 5 மாணவர்களின் எடை 50 கிலோ, 45 கிலோ, 50 கிலோ, 42 கிலோ மற்றும் 40 கிலோ எனில், ஆறாவது மாணவனின் எடையைக் காண்க.

8. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள 40 மாணவர்களின் எடை பற்றிய புள்ளிவிவரத்திற்கு, ஊகச் சராசரி வழிமுறையில், சராசரி எடையைக் கணக்கிடவும்.

எடை (கிலோகிராம்)	50	52	53	55	57
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	10	15	5	6	4

9. 75 எண்களைக் கொண்ட ஒரு தொகுதியின் சராசரி 27 எனக் கணக்கிடப்பட்டது. பின்பு, 53 என்ற எண் தவறுதலாக 43 என்று படிக்கப்பட்டது கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. அத்தொகுதியின் சரியான சராசரியைக் காணவும்.

10. 100 எண்களின் சராசரி 40 என்று காணப்பட்டது. கணக்கிடும் நேரத்தில் 3 மற்றும் 72 என்ற இரு விவரங்கள் 30 மற்றும் 27 எனத் தவறுதலாக எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டது தெரியவந்தது எனில், சரியான சராசரியைக் காண்க.

11. ஒரு மாதத்தில் மருத்துவமனைக்கு வந்து சென்ற நோயாளிகளின் எண்ணிக்கை பற்றிய புள்ளிவிவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு நாளில் மருத்துவமனைக்கு வந்த நோயாளிகளின் சராசரி எண்ணிக்கையைக் காண்க.

நோயாளிகளின் எண்ணிக்கை	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
நாட்களின் எண்ணிக்கை	2	6	9	7	4	2

12. படிவிலக்க வழிமுறையைப் பயன்படுத்தி கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்திற்கான சராசரியைக் காண்க.

மதிப்பெண்	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	8	15	22	20	10	5

13. கீழ்க்கண்ட புள்ளிவிவரம், நோயாளிகளைப் பற்றிய ஓர் கணக்கெடுப்பில் இருந்து பெறப்பட்டது. இதன் சராசரியைக் காண்க.

வயது (ஆண்டுகள்)	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59
நோயாளிகளின் எண்ணிக்கை	1	0	1	10	13

14. ஆண்டு இறுதித் தேர்வில் 40 மாணவர்கள் வாங்கிய மொத்த மதிப்பெண்கள் பற்றிய விவரம் கீழே தரப்பட்டடுள்ளது.

மதிப்பெண்கள்	150 - 200	200 - 250	250 - 300	300 - 350	350 - 400	400 - 450	450 - 500
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	2	3	12	10	4	6	3

படிவிலக்க வழிமுறையைப் பயன்படுத்தி மேற்கண்ட புள்ளிவிவரத்தின் சராசரியைக் காண்க.

15. கீழ்க்காணும் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடவும்.

பிரிவு இடைவெளி	0 - 19	20 - 39	40 - 59	60 - 79	80 - 99
நிகழ்வெண்	3	4	15	14	4

3.4 இடைநிலை அளவு (Median)

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிவிவரத்தின் உறுப்புகளை ஏறு அல்லது இறங்கு வரிசையில் எழுதும் போது, வரிசையில் நடுநிலையாக அமைந்து இருக்கும் உறுப்பின் மதிப்பைப் புள்ளிவிவரத்தின் இடைநிலை அளவு என்போம்.

3.4.1 இடைநிலை அளவு – வகைப்படுத்தப்படாத புள்ளி விவரம்

இடைநிலை அளவு காண்பதற்கான படிகள் :

(i) கொடுக்கப்பட்ட n எண்களை ஏறு அல்லது இறங்கு வரிசையில் எழுதவும்.

(ii) n ஓர் ஒற்றைப்படை எண்ணாக இருந்தால், $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு இடைநிலை அளவாகும்.

(iii) n ஓர் இரட்டைப்படை எண்ணாக இருந்தால் இடையில் உள்ள இரண்டு உறுப்புகளின் சராசரி இடைநிலை அளவாகும். அதாவது,

இடைநிலை அளவு = $\left(\frac{n}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு மற்றும் $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ ஆவது உறுப்பு ஆகியவற்றின் சராசரி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.10

கீழ்க்காணும் எண்களின் இடைநிலை அளவு காண்க

(i) 24, 22, 23, 14, 15, 7, 21 (ii) 17, 15, 9, 13, 21, 32, 42, 7, 12, 10.

தீர்வு

(i) கொடுக்கப்பட்ட எண்களை ஏறு வரிசையில் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதுவோம்.

7, 14, 15, 21, 22, 23, 24

உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n = 7$

$$\text{இடைநிலை அளவு} = \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{ ஆவது உறுப்பு} \quad (n \text{ ஒரு ஒற்றைப்படை எண்})$$

$$= \left(\frac{7+1}{2}\right) \text{ ஆவது உறுப்பு}$$

$$= 4 \text{ ஆவது உறுப்பு} = 21$$

(ii) கொடுக்கப்பட்ட எண்களைக் கீழ்க்கண்டவாறு ஏறு வரிசையில் அமைப்போம்.

7, 9, 10, 12, 13, 15, 17, 21, 32, 42.

உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n = 10$ (n ஒரு இரட்டைப்படை எண்)

$\left(\frac{n}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு மற்றும் $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ ஆவது உறுப்பு ஆகியவற்றின் சராசரியே இடைநிலை அளவாகும்.

$$\left(\frac{n}{2}\right) \text{ ஆவது உறுப்பு} = \left(\frac{10}{2}\right) \text{ ஆவது உறுப்பு}$$

$$= 5 \text{ ஆவது உறுப்பு}$$

$$= 13$$

$$\left(\frac{n}{2}+1\right) \text{ ஆவது உறுப்பு} = \left(\frac{10}{2}+1\right) \text{ ஆவது உறுப்பு}$$

$$= 6 \text{ ஆவது உறுப்பு}$$

$$= 15.$$

$$\text{எனவே, இடைநிலை அளவு} = \frac{13+15}{2} = 14$$

3.4.2 இடைநிலை அளவு – வகைப்படுத்தப்படாத நிகழ்வெண் பரவல்

இடைநிலை அளவு காண்பதற்கான படிகள் :

(i) கொடுக்கப்பட்ட n எண்களை ஏறு அல்லது இறங்கு வரிசையில் எழுதவும்.

(ii) குவிவு நிகழ்வெண் பரவலைக் கணக்கிடவும்.

(iii) n ஒரு ஒற்றைப்படை எண்ணாக இருந்தால், $\frac{n+1}{2}$ ஆவது உறுப்பே இடைநிலை அளவாகும்.

(iv) n ஒரு இரட்டைப்படை எண்ணாக இருந்தால் இடைநிலை அளவு

$$= \frac{\left(\frac{n}{2}\right)\text{வது உறுப்பு} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{வது உறுப்பு}}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.11

கீழ்க்காணும் புள்ளி விவரத்திற்கான இடைநிலை அளவுக் காண்க.

மதிப்பெண்கள்	20	9	25	50	40	80
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	6	4	16	7	8	2

கணக்கு

தீர்வு முதலில் மதிப்பெண்களை ஏறுவரிசையில் எழுதுவோம்.

மதிப்பெண்கள்	நிகழ்வெண் f	குவிவு நிகழ்வெண் cf
9	4	4
20	6	10
25	16	26
40	8	34
50	7	41
80	2	43
	n = 43	

நிகழ்வெண்களின் மொத்தம் n = 43(ஒரு ஒற்றைப் படை எண்)

இடைநிலை அளவு $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு

$= \left(\frac{43+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு

= 22 ஆவது உறுப்பு.

பட்டியலில் கண்டுள்ளபடி, 11 இல் இருந்து 26 வரை உள்ள உறுப்புகள் 25 ஆகும் .

எனவே, 22 ஆவது உறுப்பு 25 ஆகும்.

$\therefore$ இடைநிலை அளவு = 25.

எடுத்துக்காட்டு 3.12

கீழ்காணும் பரவலின் இடைநிலை அளவு காண்க.

மதிப்பு	1	2	3	4	5	6
நிகழ்வெண்	1	3	2	4	8	2

தீர்வு

மதிப்பு	நிகழ்வெண் f	குவிவு நிகழ்வெண் cf
1	1	1
2	3	4
3	2	6
4	4	10
5	8	18
6	2	20
	n = 20	

n = 20 (இரட்டைப்படை எண்)

n ஒரு இரட்டைப்படை எண்ணாக இருந்தால் இடைநிலை அளவு

$$= \frac{\left(\frac{n}{2}\right)\text{வது உறுப்பு} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{வது உறுப்பு}}{2}$$

$$= \frac{10\text{ஆவது உறுப்பு} + 11\text{ஆவது உறுப்பு}}{2}$$

$\therefore$ இடைநிலை அளவு $= \dfrac{4+5}{2} = \dfrac{9}{2} = 4.5$

3.4.3 இடைநிலை அளவு – வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவல்

வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவலின் இடைநிலை அளவின் கணக்கீடு கீழ்க்காணும் படிகளைக் கொண்டது.

(i) குவிவு நிகழ்வெண்களைக் கணக்கிடவும்.

(ii) N என்பது நிகழ்வெண்களின் கூடுதல் எனில், $\dfrac{N}{2}$ இன் மதிப்பைக் காண்க

(iii) குவிவு நிகழ்வெண் $\dfrac{N}{2}$ ஐ உறுப்பாகக் கொண்டிருக்கும் பிரிவு இடைவெளி, இடைநிலை அளவு பிரிவு என்று அழைக்கப்படும்.

(iv) இடைநிலை அளவு $= l + \dfrac{\frac{N}{2} - m}{f} \times c$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காணலாம்.

l = இடைநிலை அளவு பிரிவின் கீழ்எல்லை f = இடைநிலை அளவு பிரிவின் நிகழ்வெண்

c = இடைநிலை அளவு பிரிவின் நீளம் N = நிகழ்வெண்களின் கூடுதல்

m = இடைநிலை அளவு பிரிவின் குவிவு நிகழ்வெண்ணுக்கு உடனடியான முந்தைய குவிவு நிகழ்வெண்

எடுத்துக்காட்டு 3.13

கீழ்க்காணும் பரவலின் இடைநிலை அளவு காண்.

சம்பளம் (₹100-ல்)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
தொழிலாளர்கள் எண்ணிக்கை	22	38	46	35	20

தீர்வு

சம்பளம்	நிகழ்வெண் f	குவிவு நிகழ்வெண் cf
0-10	22	22
10-20	38	60
20-30	46	106
30-40	35	141
40-50	20	161
	N = 161	

$\dfrac{N}{2} = \dfrac{161}{2} = 80.5$ எனவே இடைநிலை அளவு பிரிவு 20-30.

இடைநிலை அளவு பிரிவின் கீழ்எல்லை l = 20

இடைநிலை அளவு பிரிவின் நிகழ்வெண் f = 46

இடைநிலை அளவு பிரிவின் குவிவு நிகழ்வெண்ணுக்கு உடனடியான முந்தைய குவிவு நிகழ்வெண் $m = 60$. இடைநிலை அளவு பிரிவின் நீளம் $c = 10$

$$\text{இடைநிலை அளவு} = l + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times c$$

$$= 20 + \frac{80.5 - 60}{46} \times 10 = 20 + \frac{10}{46} \times 20.5$$

$$= 20 + \frac{205}{46} = 20 + 4.46 = 24.46$$

$\therefore$ இடைநிலை அளவு $= 24.46$

எடுத்துக்காட்டு 3.14

கீழ்க்காணும் புள்ளி விவரத்தின் இடைநிலை அளவைக் காண்க.

மதிப்பெண்	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40
நிகழ்வெண்	7	10	13	26	9	5

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் பட்டியலில், பிரிவுகள் உள்ளடக்கும் பிரிவுகளாக உள்ளமையால் அவை விலக்கும் பிரிவுகளாகப் பின்வருமாறு மாற்றி எழுதுவோம்.

மதிப்பெண்	நிகழ்வெண் f	குவிவு நிகழ்வெண் cf
10.5- 15.5	7	7
15.5-20.5	10	17
20.5-25.5	13	30
25.5-30.5	26	56
30.5-35.5	9	65
35.5-40.5	5	70
	N = 70	

$$N = 70, \quad \frac{N}{2} = \frac{70}{2} = 35$$

இடைநிலை அளவு பிரிவு 25.5-30.5

இடைநிலை அளவு பிரிவின் கீழ் எல்லை $l = 25.5$

இடைநிலை அளவு பிரிவின் நிகழ்வெண் $f = 26$

இடைநிலை அளவு பிரிவின் குவிவு நிகழ்வெண்ணுக்கு முந்தைய குவிவு நிகழ்வெண் $m = 30$

இடைநிலை அளவு பிரிவின் நீளம் $c = 30.5 - 25.5 = 5$

$$\text{இடைநிலை அளவு} = l + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times c$$

$$= 25.5 + \frac{35 - 30}{26} \times 5 = 25.5 + \frac{25}{26} = 26.46$$

பயிற்சி 3.3

1. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்தின் இடைநிலை அளவைக் காண்க
   (i) 18,12,51,32,106,92,58
   (ii) 28,7,15,3,14,18,46,59,1,2,9,21
2. கீழ்க்காணும் நிகழ்வெண் பரவலின் இடைநிலை அளவைக் காண்க.

மதிப்பு	12	13	15	19	22	23
நிகழ்வெண்	4	2	4	4	1	5

3. கீழ்க்காணும் புள்ளி விவரத்திற்கான இடைநிலை அளவைக் காண்க.

உயரம் (அடி)	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
மரங்களின் எண்ணிக்கை	4	3	10	8	5

4. கீழ்க்காணும் நிகழ்வெண் பரவலின் இடைநிலை அளவைக் காண்க.

வயது	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69
நபர்களின் எண்ணிக்கை	4	6	10	11	12	6	1

5. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்தின் இடைநிலை அளவைக் கணக்கிடவும்.

பிரிவு இடைவெளி	1 - 5	6 - 10	11 - 15	16 - 20	21 - 25	26 - 30	31 - 35
நிகழ்வெண்	1	18	25	26	7	2	1

6. கீழ்க்காணும் பட்டியலில் ஒரு தொழிற்சாலையின் 800 தொழிலாளர்களின் சராசரி வாரச் சம்பளத்தின் பரவல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இப்புள்ளிவிவரத்தின் இடைநிலை அளவைக் காண்க.

சம்பளம் (100 ரூபாயில்)	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	50	70	100	180	150	120	70	60

3.5 முகடு (Mode)

ஒரு பரவலின் எந்த உறுப்பின் அருகில் மிக அதிக உறுப்புகள் அமைகிறதோ அந்த உறுப்பின் மதிப்பு முகடு என்று அழைக்கப்படும்.

3.5.1 முகடு – வகைப்படுத்தப்படாத புள்ளி விவரம்

செப்பனிடப்படாத புள்ளி விவரத்தின் உறுப்புகளை ஒரு வரிசையில் அமைத்து ஒவ்வொரு உறுப்பும் எத்தனை முறை இடம் பெற்றுள்ளது என்று கணக்கிடுவதன் மூலம், அப்புள்ளி விவரத்தின் முகடை எளிதாக அடைய முடியும். அதிக முறை இடம் பெற்றுள்ள உறுப்பின் மதிப்பே முகடு ஆகும்.

உதாரணத்திற்கு, 20,25,21,15,14,15 என்ற உறுப்புகளை கொண்ட புள்ளி விவரத்தை எடுத்துக் கொண்டால் 15 இருமுறை இடம் பெற்றுள்ளது. மற்ற அனைத்தும் ஒரு முறையே இடம் பெற்றுள்ளது. எனவே, முகடு = 15.

கணக்கு

குறிப்புரை முகடு எண்ணாலான புள்ளிவிவரத்திற்கு மட்டுமல்லாது தரம் சார்ந்த புள்ளிவிவரத்தை அளப்பதற்கும் பயன்படும். ஒரு அச்சகம் 5 அச்சுகள் வெளியிட்டதில், அவை மிகத் தெளிவு, தெளிவு, தெளிவு மற்றும் தெளிவற்றது என்று தரம் பிரிக்கப்பட்டால், இந்த விவரத்தின் முகடு, "தெளிவு" என அறியப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.15

கணிதத் திறமையை சோதிக்கும் தேர்வில் 10 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் 75,72,59,62, 72,75,71,70,70,70 ஆகும். இப்புள்ளி விவரத்தின் முகடு காண்க.

தீர்வு 10 மாணவர்களின் மதிப்பெண்கள் முறையே 75, 72, 59, 62, 72, 75, 71, 70, 70, 70 இவ்விவரத்தில் 70 மூன்று முறை இடம் பெற்று, மற்றவை இரண்டு அல்லது ஒருமுறை இடம் பெற்றிருப்பதால், முகடு 70 ஆகும்.

குறிப்பு ஒரே ஒரு முகடு உள்ள பரவலை ஒற்றை முகடு பரவல் என்று அழைக்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.16

482,485,483,485,487,487,489 என்ற தொகுப்பின் முகடு காண்க.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பில், இரண்டு எண்கள் **485** மற்றும் **487** இருமுறை இடம் பெற்று, இரண்டு எண்களும் தொகுப்பின் முகடுகள் ஆகின்றன. இவ்வாறு இரண்டு முகடுகள் உள்ள பரவல் இரட்டை முகட்டுப் பரவல் என்று அழைக்கப்படும் .

குறிப்பு
(i) இரண்டு முகடுகள் உள்ள பரவல் இரட்டை முகட்டுப் பரவல் என்று அழைக்கப்படும்.
(ii) மூன்று முகடுகள் உள்ள பரவல் மும்முகட்டுப் பரவல் என்று அழைக்கப்படும்.
(iii) மூன்று முகடுகளுக்கு மேல் உள்ள பரவல் பன்முகட்டுப் பரவல் என்று அழைக்கப்படும்.

3.5.2 முகடு – வகைப்படுத்தப்படாத நிகழ்வெண் பரவல்

வகைப்படுத்தப்படாத நிகழ்வெண் பரவலில் மிகப்பெரிய நிகழ்வெண்ணை பெற்றுள்ள உறுப்பின் மதிப்பு முகடு எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.17

கீழ்க்காணும் பரவலில் சென்னையைச் சார்ந்த ஒரு காலணிக் கடையில் ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் 100 சோடி காலணிகள் விற்பனை செய்ததற்கான விவரம் தரப்பட்டு உள்ளது. இப்புள்ளி விவரத்தின் முகடு காண்க.

காலணியின் அளவு (அங்குலம்)	4	5	6	7	8	9	10
சோடிகளின் எண்ணிக்கை	2	5	3	23	39	27	1

தீர்வு மிகப்பெரிய நிகழ்வெண்ணை கொண்ட உறுப்பு முகடு ஆகும். கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தில், மிகப்பெரிய நிகழ்வெண் 39 ஐப் பெற்றிருக்கும் காலணியின் அளவு 8. எனவே முகடு 8 ஆகும்.

3.5.3 முகடு – வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவல்

வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவலில், உறுப்புகளின் சரியான மதிப்பு தெரியாது என்பதால் முகட்டின் சரியான மதிப்பை காண்பது மிகக் கடினமானது. எனினும், பிரிவு இடைவெளிகளின் நீளம் சமமானதாக உள்ள போது முகட்டின் தோராய மதிப்பை கீழ்வரும் சூத்திரத்தின் மூலம் காணலாம்.

$$\text{முகடு} = l + \left(\frac{f - f_1}{2f - f_1 - f_2}\right) \times c,$$

இதில், மிகப்பெரிய நிகழ்வெண்ணை பெற்றுள்ள பிரிவை முகடு பிரிவு என்று அழைப்போம்

l = முகடு பிரிவின் கீழ் எல்லை

f = முகடு பிரிவின் நிகழ்வெண்

c = முகடு பிரிவு இடைவெளியின் நீளம்

f_1 = முகடு பிரிவின் நிகழ்வெண்ணுக்கு முந்தைய நிகழ்வெண்.

f_2 = முகடு பிரிவின் நிகழ்வெண்ணுக்கு பிந்தைய நிகழ்வெண்.

எடுத்துக்காட்டு 3.18

கீழ்க்காணும் புள்ளி விவரத்திற்கு முகடு காண்க.

மதிப்பு	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
நிகழ்வெண்	4	8	18	30	20	10	5	2

தீர்வு

மதிப்பெண்	நிகழ்வெண் f
10-15	4
15-20	8
20-25	18
25-30	30
30-35	20
35-40	10
40-45	5
45-50	2

மிகப்பெரிய நிகழ்வெண் 30-ஐ பிரிவு 25-30 பெற்றிருப்பதால், இது முகடு பிரிவு ஆகும்.

முகடு பிரிவின் கீழ் எல்லை $l = 25$

முகடு பிரிவின் நிகழ்வெண் $f = 30$

முகடு பிரிவின் நிகழ்வெண்ணுக்கு முந்தைய நிகழ்வெண் $f_1 = 18$ மற்றும் பிந்தைய நிகழ்வெண் $f_2 = 20$

முகடு பிரிவு இடைவெளியின் நீளம் $c = 5$

$$\text{முகடு} = l + \left(\frac{f - f_1}{2f - f_1 - f_2} \right) \times c$$

$$= 25 + \left(\frac{30 - 18}{60 - 18 - 20} \right) \times 5 = 25 + \frac{12 \times 5}{22}$$

$$= 25 + \frac{60}{22} = 25 + 2.73 = 27.73$$

எனவே, முகடு $= 27.73$

பயிற்சி 3.4

1. ஒரு வகுப்பில் 15 மாணவர்கள் வாங்கிய மதிப்பெண்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. 42,45,47, 49,52,65,65,71,71,72,75,82,72,47,72. இவ்விவரத்தின் முகடு காண்க.

2. கீழ்வரும் புள்ளிவிவரத்திற்கு முகடு காண்க.

காலணிகளின் அளவுகள்	4	5	6	7	8	9	10
விற்ற சோடிகளின் எண்ணிக்கை	15	17	13	21	18	16	11

3. ஒரு மாதத்தில், ஒரு மருத்துவமனைக்குச் சிகிச்சைக்கு வந்த 150 நோயாளிகளின் வயது பற்றிய விவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்விவரத்திற்கான முகடு காண்க.

வயது (வருடங்களில்)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
நோயாளிகளின் எண்ணிக்கை	12	14	36	50	20	18

4. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்தின் முகடு காண்க.

எடை (கிராம்)	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55	56-60
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	5	4	3	18	20	14	8	3

5. ஒரு சாரணர் முகாமில் இருந்த குழந்தைகளின் வயது விவரம் கீழே தரப்பட்டு உள்ளது. 13, 13, 14, 15, 13, 15, 14, 15, 13, 15- வருடங்கள். கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரத்தின் சராசரி, இடைநிலை அளவு மற்றும் முகடு காண்க.

6. ஒரு பள்ளித் தோட்டத்தில் உள்ள மரங்களின் எண்ணிக்கை மற்றும் அம்மரங்களின் உள்ள கிளைகளின் எண்ணிக்கை பற்றிய விவரம் கீழ்க்காணும் பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளது.

கிளைகளின் எண்ணிக்கை	2	3	4	5	6
மரங்களின் எண்ணிக்கை	14	21	28	20	17

மேற்கண்ட விவரத்திற்கு சராசரி, இடைநிலை அளவு மற்றும் முகடு ஆகியவற்றை காண்க..

7. ஓராண்டில், ஒரு நகரத்தில் ஒருவித நோயினால் பாதிக்கப்பட்டவர்கள் பற்றிய விவரம் கீழே தரப்பட்டு உள்ளது.

வயது (வருடங்களில்)	5 - 14	15 - 24	25 - 34	35 - 44	45 - 54	55 - 64
பாதிக்கப்பட்டோர் எண்ணிக்கை	6	11	12	10	7	4

மேற்கண்ட புள்ளி விவரத்தின் சராசரி, இடைநிலை அளவு மற்றும் முகடு காண்க.

8. ஒரு தேர்வில் **20** மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களுக்குச் சராசரி, முகடு மற்றும் இடைநிலை அளவுக் காண்க.

மதிப்பெண்	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	1	4	5	8	2

பயிற்சி 3.5

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடு

1. முதல் 10 இயல் எண்களின் சராசரி

(A) 25 (B) 55 (C) 5.5 (D) 2.5

2. -5 முதல் 5 முடிய உள்ள முழுக்களின் கூட்டுச்சராசரி

(A) 3 (B) 0 (C) 25 (D) 10

3. $x, x + 2, x + 4, x + 6, x + 8$ என்பவற்றின் கூட்டுச்சராசரி 20 எனில், x-ன் மதிப்பு

(A) 32 (B) 16 (C) 8 (D) 4

4. 5, 5, 5, 5, 5, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4 என்ற விவரங்களின் முகடு

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

5. 14, 12, 10, 9, 11 என்ற விவரங்களின் இடைநிலை அளவு

(A) 11 (B) 10 (C) 9.5 (D) 10.5

6. 2, 7, 4, 8, 9, 1 என்ற விவரங்களின் இடைநிலை அளவு

(A) 4 (B) 6 (C) 5.5 (D) 7

7. முதல் 5 முழு எண்களின் சராசரி

(A) 2 (B) 2.5 (C) 3 (D) 0

8. 10 எண்களின் கூட்டுச்சராசரி -7. ஒவ்வொரு எண்ணுடனும் 5 ஐக் கூட்டினால் கிடைக்கும் புதிய கூட்டுச்சராசரி

(A) -2 (B) 12 (C) -7 (D) 17

9. 24 இன் காரணிகளின் கூட்டுச்சராசரி

(A) 8.5 (B) 5.67 (C) 7 (D) 7.5

10. 5 எண்களின் கூட்டுச்சராசரி 20. அவற்றிலிருந்து ஓர் எண்ணை நீக்கினால் அவற்றின் கூட்டுச்சராசரி 15 எனில், நீக்கப்பட்ட எண்

(A) 5 (B) 40 (C) 20 (D) 10

நினைவில் கொள்க...

வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரத்தின் சராசரிக்கான சூத்திரம் :

- நேர்வழிமுறை $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$
- உத்தேச சராசரி வழிமுறை

  $\bar{x} = A + \frac{\sum fd}{\sum f}$
- படிவிலகல் வழிமுறை $\bar{x} = A + \frac{\sum fd}{\sum f} \times C$
- ஒரு பிரிவின் குவிவு நிகழ்வெண், அந்தப் பிரிவின் நிகழ்வெண்ணோடு, அதற்கு முந்தைய பிரிவுகளின் நிகழ்வெண்களைக் கூட்டுவதால் கிடைக்கப் பெறுவது.
- வகைப்படுத்தப்பட்ட புள்ளி விவரத்தின் இடைநிலை அளவு காணும் சூத்திரம்

  இடைநிலை அளவு $= l + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times c$
- வகைப்படுத்தப்பட்ட புள்ளி விவரத்தின் முகடு காணும் சூத்திரம்

  முகடு $= l + \left(\frac{f - f_1}{2f - f_1 - f_2}\right) \times c$

செயல் 1

10,20,30,40 மற்றும் 50 ஆகியவற்றின் சராசரி காண்க.

* ஒவ்வொரு எண்ணோடும் 10 ஐக் கூட்டி, வரும் எண்களின் சராசரி காண்க.
* ஒவ்வொரு எண்ணிலிருந்தும் 10 ஐக் கழித்து வரும் எண்களின் சராசரி காண்க.
* ஒவ்வொரு எண்ணையும்10 ஆல் பெருக்கி, வரும் எண்களின் சராசரி காண்க.
* ஒவ்வொரு எண்ணையும் 10 ஆல் வகுத்து, வரும் எண்களின் சராசரி காண்க.
* ஒவ்வொரு செயல் முறைக்கும் பொதுவான தீர்வு எழுதி அதனைச் சராசரியின் தன்மைகளோடு ஒப்பிடுக.

செயல் 2

பின்வருவனவற்றிற்கு உதாரணம் கொடுக்கவும்.

(i) சராசரியை விட இடைநிலை அளவு ஏற்கத்தக்கது.

(ii) இடைநிலை அளவை விட முகடு ஏற்கத்தக்கது.

(iii) முகடை விட இடைநிலை அளவு ஏற்கத்தக்கது.

செயல் 3

உனது வகுப்பில் உள்ள மாணவர்களின் சட்டைகளின் அளவுகளைக் குறித்துக் கொள். அதிலிருந்து நிகழ்வெண் பட்டியல் அமைத்து மாணவர்கள் அதிக அளவு பயன்படத்தக் கூடிய சட்டையின் அளவு எது என்பதை கண்டுபிடி.

செயல் 4

வகுப்பறையில் உள்ள மாணவர்களை ஐந்து குழுக்களாகப் பிரித்துக் கொள். ஒவ்வொரு குழுவும் ஒரு குழுவிற்கு ஒரு பாடம் வீதம் அந்தந்தக் குழுவில் உள்ள மாணவர்களின் முதல் பருவத்தின் தொகுத்தறி மதிப்பீட்டு மதிப்பெண்களைக் கொண்டு சராசரி கண்டுபிடி. மற்ற குழுக்களின் சராசரிகளை ஒப்பிட்டு எது அதிகம் என்பதைப் பார்.

செயல் 5

- கீழ்க்கண்டவாறு 5 அட்டைகளை தயார் செய்து கொள்.

A	B	C	D	E

- ஒவ்வொரு அட்டைக்கும் A = 5, B = 4, C = 3, D = 2, E = 1 என மதிப்புகளை நிர்ணயித்துக் கொள்.

- ஒவ்வொரு மாணவரும் 10 முறை அட்டைகளை எடுத்து அதில் வரும் எழுத்துகளுக்கு நிகரான மதிப்புகளை பதிவு செய்து கொள்ள வேண்டும்.
- பதிவு செய்துள்ள மதிப்புகளிலிருந்து சராசரியைக் காண்க.
- அதிஷ்டசாலி யார் ?

பயிற்சி 3.1

1. 4, 7, 6, 6, 5 **2.** 25, 30, 25, 60, 15, 5 **3.** 3, 4, 6, 6, 8
4. 5, 4, 3, 5, 3 **5.** 80, 50, 40, 120, 30

பயிற்சி 3.2

1. 28.67 **2.** 6 **3.** 62 **4.** 37 **5.** 192 **6.** 6 **7.** 61கி.கி **8.** 52.58 **9.** 27.13
10. 40.18 **11.** 28.67 **12.** 28 **13.** 48.1 **14.** 326.25 **15.** 55.5

பயிற்சி 3.3

1. (i) 51 (ii) 14.5 **2.** 17 **3.** 19 **4.** 34.05 **5.** 14.7 **6.** 40

பயிற்சி 3.4

1. 72 **2.** 7 **3.** 43.18 **4.** 41.75

வினா எண்	சராசரி	இடைநிலை அளவு	முகடு
5.	14	14	13,15
6.	4.05	4	4
7.	32.1	31.2	27.8
8.	28	30	33.3

பயிற்சி 3.5

1. C **2.** B **3.** B **4.** D **5.** A **6.** C
7. A **8.** A **9.** D **10.** B

4 செய்முறை வடிவியல்

முதன்மைக் குறிக்கோள்கள்

- உள்வட்ட மையம் வரைதல்
- நடுக்கோட்டு மையம் வரைதல்

ஜோஹன் கார்ல் ஃப்ரெடெரி காஸ்

1777 – 1855

ஜோஹன் கார்ல் ஃப்ரெடெரி காஸ் (30 ஏப்ரல் 1777 - 23 பிப்ரவரி 1855) தலைசிறந்த ஜெர்மன் கணித அறிஞர் ஆவார். எண் கோட்பாடு இயற்கணிதம், புள்ளியியல், பகுப்பாய்வு முதலியன கொண்டு மின்னியல், வானியல் மற்றும் ஒளியியல் துறைகளில் குறிப்பிடத்தக்க பங்களித்தார். முன்னணிக் கணித மேதை என்றும் கணிதத்தின் இளவரசர் என்றும் அழைப்பர். அவர் கணிதத்தை 'அறிவியலின் ராணி' எனக் குறிப்பிட்டிருந்தார். தனது 21 ஆவது வயதில் 1798 ஆம் ஆண்டு, தலைசிறந்த படைப்பான "*Disquisitiones Arithmeticae*" என்ற நூலை வெளியிட்டார், இந்நூல் எண் கோட்பாட்டின் அடிப்படை நூலாக இன்றும் திகழ்கிறது.

4.1 அறிமுகம்

நடைமுறை அறிவியலோடுத் தொடர்புடைய பரப்புகள், கொள்ளளவுகள், அளவீடுகள் மற்றும் கணக்கெடுப்பு ஆகியவையே வடிவியலின் பிறப்பிடமாய்த் திகழ்கின்றன. இத்தகைய செயல்பாடுகளால் ஒருவரால் நீளம், பரப்பளவு, கொள்ளளவு, வட்டத்தின் சுற்றளவு மற்றும் பரப்பளவு, முக்கோணத்தின் பரப்பளவு, உருளை, கோணம் மற்றும் பிரமிடுகளின் கனஅளவு மற்றும் பிதாகரசு தேற்றம் போன்றவற்றிற்கு சூத்திரத்தைக் காண இயலும்.

தேல்ஸ் என்பவர் அணுக இயலாத தூரம் அல்லது உயரத்தை அளப்பதற்கு ஒத்த வடிவியல் உருவங்களை அடிப்படையாகக் கொண்டு கணக்கிடும் முறையை வழங்கியுள்ளார்.

கணக்கீட்டு தொழில்நுட்பத்துடன் கூடிய வானிலை வளர்ச்சியால் கோணவியல் மற்றும் உருளை கோணவியல் *(Spherical Trigonometry)* ஆகியவற்றின் தேற்றத்திற்கு வழிவகுத்துள்ளது.

முதற்பருவத்தில் ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையம் மற்றும் குத்துக்கோட்டு மையம் ஆகியவை வரைதல் குறித்து கற்றோம். இப்பருவத்தில் ஒரு முக்கோணத்தின் உள்வட்ட மையம் மற்றும் நடுக்கோட்டு மையம் ஆகியவை வரைதல் குறித்து கற்போம்.

4.2 முக்கோணம் சார்ந்த சிறப்புக் கோட்டுத் துண்டுகள்

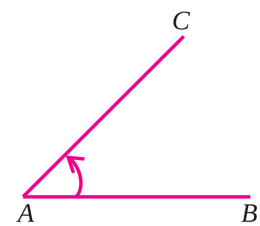
முதலில் கீழ்க்கண்டவற்றை வரையும் முறை பற்றி கற்போம்.

(i) கொடுக்கப்பட்ட கோணத்திற்கு இருசமவெட்டி வரைதல்

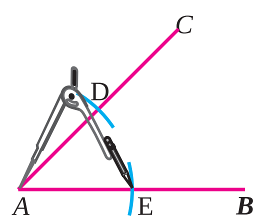
(ii) கொடுக்கப்பட்ட கோட்டுத்துண்டிற்கு வெளியேயுள்ள ஒரு புள்ளியையும் அக்கோட்டுத்துண்டின் மையப்புள்ளியையும் இணைத்தல்

4.2.1 கோணத்தின் இருசமவெட்டி வரைதல் (*Angle Bisector*)

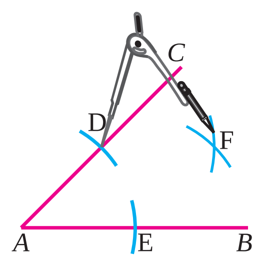
படி 1 : கொடுக்கப்பட்ட கோண அளவுக்கு ஏற்ப $\angle CAB$ ஐ வரைக.



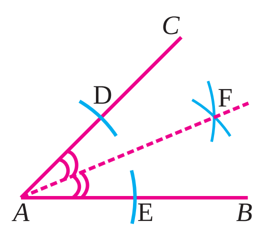
படி 2 : A ஐ மையமாகக் கொண்டு ஏதேனும் ஓர் அளவிற்கு ஆரம் எடுத்து AC மற்றும் AB ஐ D மற்றும் E யில் வெட்டுமாறு விற்களை வரைக.



படி 3 : D மற்றும் E ஐ முறையே மையமாகக் கொண்டு DE இன் அளவில் பாதிக்குமேல் ஆரமாக எடுத்து விற்களை வரைந்து அவை வெட்டும் புள்ளிக்கு F எனப் பெயரிடுக.

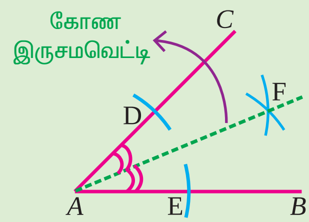


படி 4 : A மற்றும் F ஐ இணைக்கக் கிடைக்கும் AF ஆனது $\angle CAB$ இன் கோண இரு சமவெட்டி ஆகும்.



முக்கிய கருத்து **கோண இருசமவெட்டி**

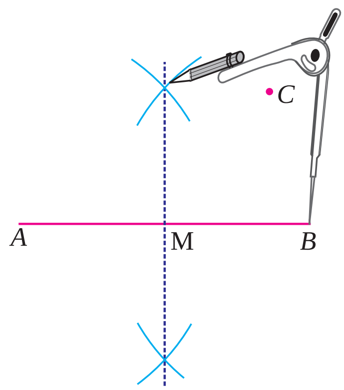
கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோணத்தை இரு சமகோணங்களாகப் பிரிக்கும் கோடு அக்கோணத்தின் கோண இருசமவெட்டி *(Angle Bisector)* எனப்படும்.



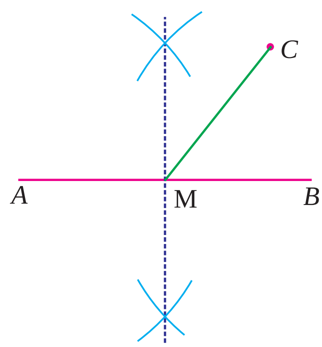
4.2.2 கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோட்டுத் துண்டின் மையப்புள்ளியைக் கோட்டுத்துண்டிற்கு வெளியே உள்ள புள்ளியுடன் இணைத்தல்

படி 1 : கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவிற்குக் கோட்டுத்துண்டு AB வரைந்து, அதற்கு வெளியே C என்ற புள்ளியைக் குறி.

படி 2 : கொடுக்கப்பட்ட கோட்டுத்துண்டிற்கு மையக்குத்துக் கோடு வரைந்து அது AB யை வெட்டும் புள்ளிக்கு M எனப் பெயரிடுக.

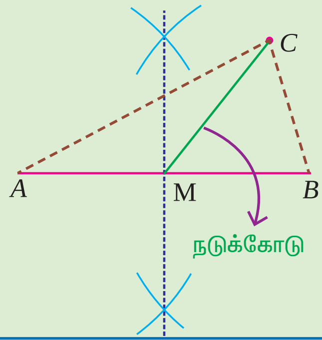


படி 3 : C மற்றும் M ஐ இணைக்கவும்.



முக்கியக் கருத்து **நடுக்கோடு**

ஒரு முக்கோணத்தின் ஓர் உச்சியை அதற்கு எதிரே உள்ள பக்கத்தின் நடுப்புள்ளியுடன் இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டு நடுக்கோடு *(Median)* எனப்படும்.



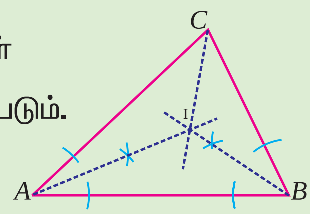
4.3 ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடுகள் (Points of Concurrency)

கோண இருசமவெட்டி மற்றும் நடுக்கோடு ஆகியவற்றை வரைவது பற்றி கற்றோம். இப்போது நாம் உள்வட்ட மையம், நடுக்கோட்டு மையம் போன்றவற்றைக் காணும் முறையைப் பற்றி அறிவோம்.

4.3.1 முக்கோணத்தின் உள்வட்ட மையம் வரைதல்

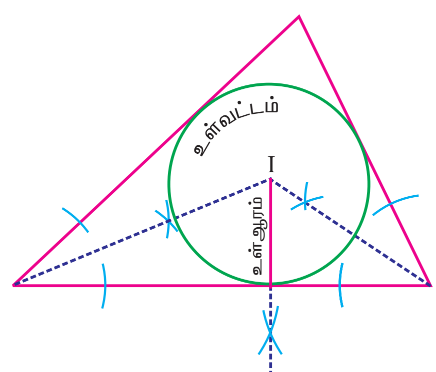
முக்கியக் கருத்து **உள்வட்ட மையம்**

முக்கோணத்தின் கோணங்களின் இருசமவெட்டிகள் சந்திக்கும் புள்ளி உள்வட்ட மையம் *(Incentre)* எனப்படும். அதனை *I* என்று குறிப்பிடுவோம்.



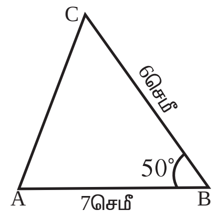
உள்வட்டம்: உள்வட்ட மையத்தை (*I*) மையமாக வைத்து முக்கோணத்தின் அனைத்து பக்கங்களையும் உட்புறமாகத் தொட்டுச் செல்லுமாறு வரையப்படும் வட்டம் உள்வட்டம் *(Incircle)* எனப்படும்.

உள்ஆரம்: உள்வட்ட மையத்திலிருந்து முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு உள்ள செங்குத்துத்தூரம் உள்ஆரம் *(Inradius)* எனப்படும்.



எடுத்துக்காட்டு 4.1

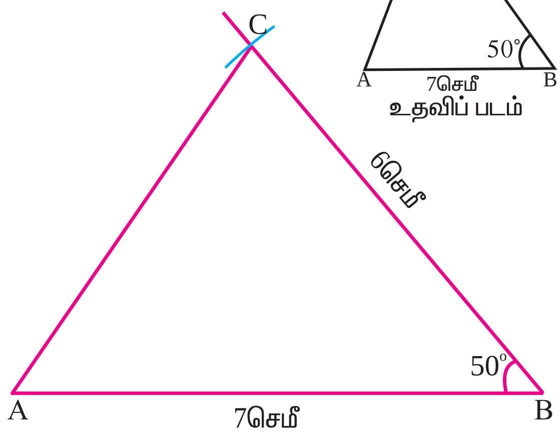
$AB = 7$ செ.மீ, $\angle B = 50^\circ$ மற்றும் $BC = 6$ செ.மீ அளவுள்ள ΔABC வரைந்து அதன் உள்வட்டம் வரைக. மேலும் உள்ஆரத்தை அளந்து எழுது.



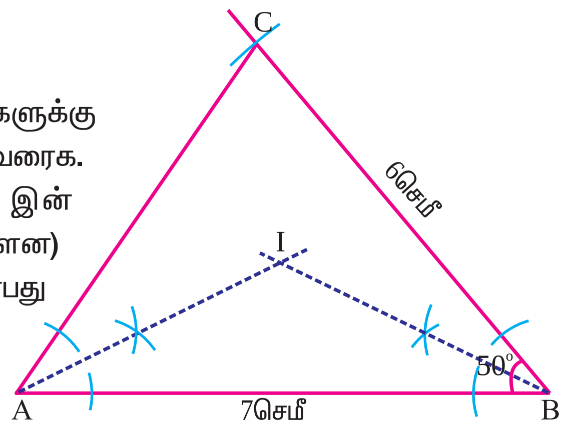
உதவிப் படம்

தீர்வு

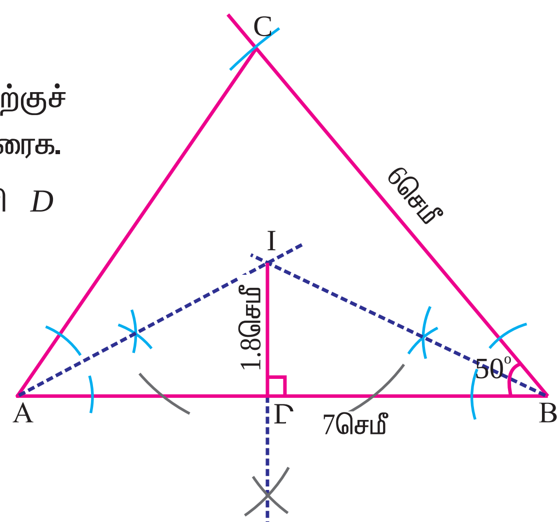
படி 1 : கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவுகளுக்கு ΔABC வரைக.

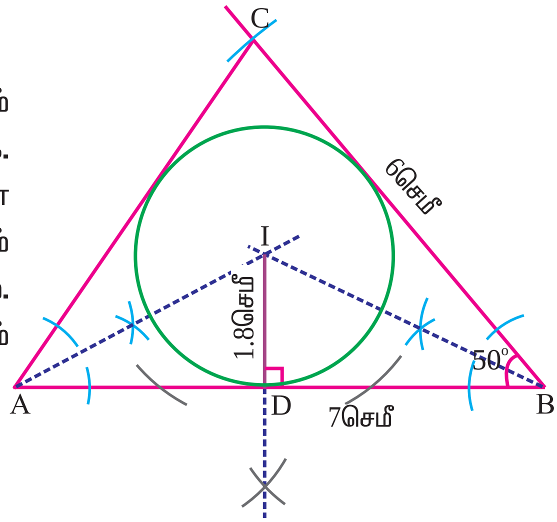


படி 2 : ஏதேனும் இரு கோணங்களுக்கு கோண இருசமவெட்டிகள் வரைக. (இங்கு $\angle A$ மற்றும் $\angle B$ இன் இருசமவெட்டிகள் வரையப்பட்டுள்ளன) அவை சந்திக்கும் புள்ளி I என்பது ΔABCஇன் உள்வட்ட மையம் ஆகும்.



படி 3 : I இல் இருந்து ஏதேனும் ஒரு பக்கத்திற்குச் (இங்கு AB) செங்குத்துக்கோடு வரைக. அக்கோடு AB ஐச் சந்திக்கும் புள்ளி D ஆகும்.





படி 4 : I ஐ மையமாகவும் ID ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு வட்டம் வரைக. இவ்வட்டமானது முக்கோணத்தின் அனைத்துப் பக்கங்களையும் உட்புறமாகத் தொட்டுச் செல்லும். இதுவே தேவையான உள்வட்டம் ஆகும்.

உள்வட்ட ஆரம் = 1.8 செ.மீ

குறிப்புரை எல்லா வகை முக்கோணங்களுக்கும் உள்வட்ட மையம் எப்போதும் முக்கோணத்தின் உள்ளே அமையும்.

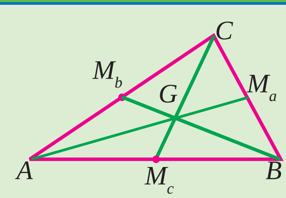
பயிற்சி 4.1

1. $AB = 9$ செ.மீ, $BC = 7$ செ.மீ, மற்றும் $AC = 6$ செ.மீ அளவுள்ள ΔABC க்கு உள்வட்டம் வரைக.
2. $AB = 6$ செ.மீ, $AC = 7$ செ.மீ மற்றும் $\angle A = 40^\circ$ அளவுள்ள ΔABC க்கு உள்வட்டம் வரைந்து உள்வட்ட ஆரம் காண்க.
3. பக்க அளவு 6 செ.மீ உள்ள சமபக்க முக்கோணத்திற்கு உள்வட்டம் வரைக.
4. $AB = 6$ செ.மீ, $AC = 5$ செ.மீ மற்றும் $\angle A = 110^\circ$ அளவுள்ள ΔABC க்கு உள்வட்டம் வரைந்து உள்வட்ட மையத்தைக் குறி.

4.3.2 முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் வரைதல்

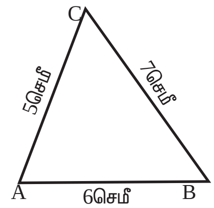
முக்கியக் கருத்து — **நடுக்கோட்டு மையம்**

முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் *(Centroid)* எனப்படும்.
இதனை G என்று குறிப்பிடுவோம்.



எடுத்துக்காட்டு 4.2

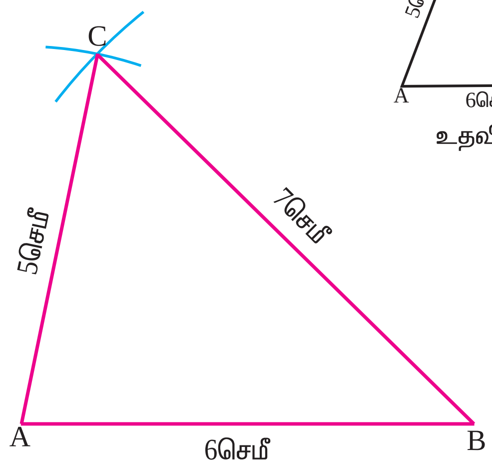
$AB = 6$ செ.மீ, $BC = 7$ செ.மீ மற்றும் $AC = 5$ செ.மீ ஆகிய அளவுகளுக்கு ΔABC வரைந்து அதன் நடுக்கோட்டு மையம் வரைக.



உதவிப் படம்

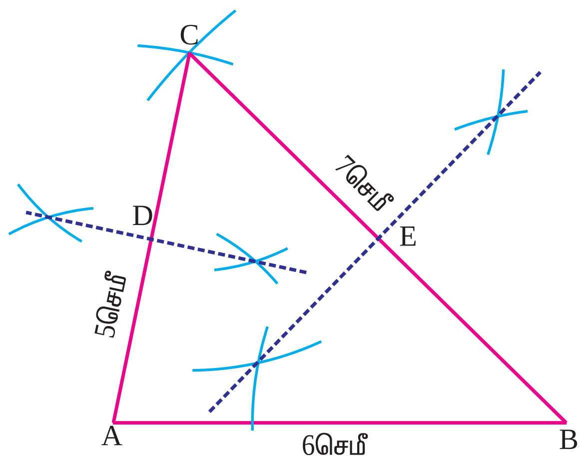
தீர்வு

படி 1 : கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவுகளுக்கு ΔABC வரைக.

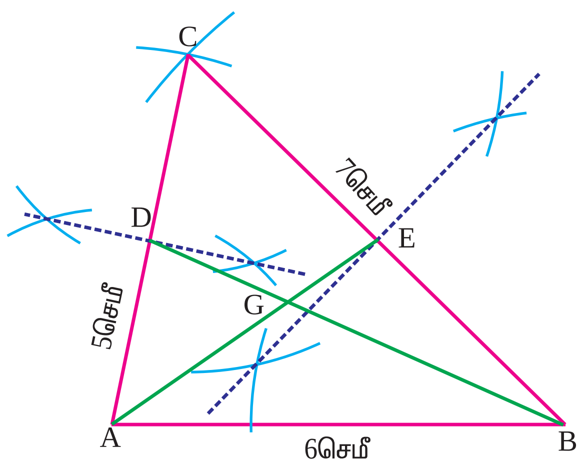


படி 2 : ஏதேனும் இரு பக்கங்களுக்கு மையக்குத்துக்கோடுகள் வரைக.

(இங்கு AC மற்றும் BC க்கு மையக்குத்துக்கோடுகள் வரையப்பட்டுள்ளன)



படி 3 : அப்பக்கங்களின் மையப் புள்ளியை முறையே எதிர் உச்சியுடன் இணைக்கும் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி G என்க.



புள்ளி G ஆனது ΔABC இன் நடுக்கோட்டு மையம் ஆகும்.

குறிப்புரை

(i) முக்கோணத்திற்கு மூன்று நடுக்கோடுகள் வரையலாம்.

(ii) நடுக்கோடுகளை நடுக்கோட்டு மையம் முனையிலிருந்து 2:1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும்.

(iii) அனைத்து வகை முக்கோணங்களிலும் நடுக்கோட்டு மையம் முக்கோணத்தின் உள்பகுதியில் அமையும்.

பயிற்சி 4.2

1. AB = 6 செ.மீ, BC = 5 செ.மீ மற்றும் AC = 4 செ.மீ அளவுகளுக்கு ΔABC வரைந்து நடுக்கோட்டு மையத்தைக் குறி.

2. LM = 5.5 செ.மீ, $\angle M = 100^o$ MN = 6.5 செ.மீ அளவுள்ள முக்கோணம் வரைந்து நடுக்கோட்டு மையத்தைக் குறி.

3. பக்கஅளவு 7.5 செ.மீ, உள்ள சமபக்க முக்கோணம் வரைந்து அதன் நடுக்கோட்டு மையத்தைக் காண்க.

4. பக்கஅளவுகள் 3 செ.மீ, 4 செ.மீ மற்றும் 5 செ.மீ உள்ள செங்கோண முக்கோணம் வரைந்து அதன் நடுக்கோட்டு மையத்தைக் காண்க.

5. PQ = 6 செ.மீ, $\angle P$ = 110^o மற்றும் QR = 8 செ.மீ அளவுகளுக்கு ΔPQR இன் நடுக்கோட்டு மையத்தைக் குறி.

செயல் 1

நோக்கம் : காகித மடிப்பை பயன்படுத்தி முக்கோணத்தின் உள்வட்ட மையம் காணுதல்.

செய்முறை : கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களையும் கோண இரு சம வெட்டிகளைத் தாளில் மடித்து அவை சந்திக்கும் புள்ளி முக்கோணத்தின் உள்வட்ட மையமாக அமைகிறதா என ஆராய்க.

செயல் 2

நோக்கம் : காகித மடிப்பை பயன்படுத்தி முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் காணுதல்.

செய்முறை : முதல் பருவத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள செயல்பாடுகளில் முக்கோணத்தின் நடுக் கோடுகள் வரையும் முறையைப் பயன்படுத்தி நடுக்கோட்டு மையம் காண்க.

'என்னால் முடியும், நான் செய்தேன்'

('I can, I did')

மாணவர் கற்றல் செயல்பாடுகள் பதிவேடு

பாடம் :

வ. எண்	நாள்	பாட எண்	பாடத் தலைப்பு	செயல்பாடுகள்	குறிப்புரை