தமிழ்நாடு அரசு

ஒன்பதாம் வகுப்பு

முதல் பருவம்

தொகுதி 2

கணக்கு

விற்பனைக்கு அன்று

தீண்டாமை மனிதநேயமற்ற செயலும் பெருங்குற்றமும் ஆகும்

தமிழ்நாடு அரசு
இலவசப்பாடநூல் வழங்கும்
திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்பட்டது

பள்ளிக் கல்வித்துறை

முதல் பதிப்பு – 2013
மறுபதிப்பு – 2015
(பொதுப் பாடத்திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்பட்ட முப்பருவ நூல்)

பாடநூல் உருவாக்கம்
மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம்
கல்லூரிச் சாலை, சென்னை – 600 006.

நூல் அச்சாக்கம்
தமிழ்நாடு பாடநூல் மற்றும் கல்வியியல் பணிகள் கழகம்
கல்லூரிச் சாலை, சென்னை – 600 006.

இந்நூல் 80 ஜி. எஸ். எம். மேப்லித்தோ தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது.

விலை : ரூ.

வெப் ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர் :

பாடநூல் வலைதளம்
www.textbooksonline.tn.nic.in

முன்னுரை

சீரிளமைத் திறம் வியந்து செயல் மறந்து வாழ்த்துதுமே!

–'மனோன்மணீயம்' பெ. சுந்தரனார்

சமூக நீதியை உறுதி செய்யவும் தமிழ்நாட்டில் உள்ள அனைத்துப் பள்ளிகளிலும் தரமான கல்வியைக் கொடுக்கவும் தமிழக அரசு பொதுப்பாட திட்டத்தை அறிமுகப்படுத்தியுள்ளது. இதனையே மிக முக்கிய கருத்தாகக் கொண்டும் கணிதவியலில் ஏற்படும் மாற்றங்களை மாணவர்கள் எவ்வாறு எதிர்கொள்ளச் செய்வது என்பதைக் கருத்தில் கொண்டும் இப்புத்தகம் தேசியப் பாடத்திட்ட அமைப்பு (NCF) 2005 இன் கட்டமைப்பில் உள்ளவாறு கல்லூரி மற்றும் பள்ளிகளில் பணியாற்றும் ஆசிரியர்களை உள்ளடக்கிய வல்லுநர் குழுவால் உருவாக்கப்பட்டுள்ளது.

கணிதம் என்பது மிகவும் சிக்கலான கருத்துகளை மிக எளிய சொற்களால் புரியவைக்கும் ஒரு மொழியாகும். கணிதத்தின் துணையோடும் சிந்தனைத் திறன் மூலமும் 10^{-9} (Nano) போன்ற மிகச்சிறிய எண்களையும் 10^{100} (Googolplex) போன்ற மிகப்பெரிய எண்களையும் மனிதன் தன் கட்டுப்பாட்டுப் பகுதியில் கொணரமுடியும். மடிக்கணினி போன்ற இப்பாடநூல் பன்னிரண்டு தலைப்புகளைக் கொண்ட ஒரு முக்கிய தொகுப்பாகும். ஒவ்வொரு பாடப்பகுதியும் மிகச் சுருக்கமான முகவுரைகளையும், எளிதில் புரிந்து கொள்ளும்படியான விளக்கங்களையும் கொண்டு ஆரம்பிக்கின்றன. மாணவர்களை ஊக்குவிக்கும் பொருட்டு ஒவ்வொரு அத்தியாயத்தின் தொடக்கத்திலும் சிறந்த கணித வல்லுநர்களின் முக்கிய பங்களிப்பு பற்றி விளக்கப்பட்டுள்ளது. மேலும் சுருக்கமான வரையறைகள், முக்கிய கருத்துகள், தேற்றங்கள் மற்றும் பயிற்சி கணக்குகள் ஆகியன இப்பாடநூலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வோர் அத்தியாயத்தின் இறுதியிலும் அப்பாடத்தில் மாணவர்கள் என்னென்ன கற்றறிந்தனர் என்பதைச் சுருக்கமாக நினைவூட்டப்படுகிறது. வழக்கமான கணக்கீடுகளிலிருந்து மாணவர்கள் சற்று கடினமான கணக்கீடுகளைச் செய்வதற்கு இப்பாடநூல் உதவும் என நம்புகிறோம்.

கணிதவியலின் தேவையைப் பற்றி தெரிந்து கொள்ளவும், அதனை எளிதாகப் புரிந்து கொள்ளவும் வாழ்க்கையோடு தொடர்புடைய கணக்குகள் கையாளப்பட்டுள்ளன. இத்தகைய வாழ்க்கையோடு தொடர்புடைய கணக்குகள், முக்கிய கருத்துகள், வரையறைகள் மற்றும் தேற்றங்களை எளிதாகப் புரிந்து கொள்ள ஏதுவாக எடுத்துக்காட்டுகளுடன் மிக எளிய அமைப்பில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இத்தகைய எடுத்துக்காட்டுகளைப் புரிந்து கொள்வதோடு மட்டுமல்லாமல், வரையறைகள் எக்காரணங்களுக்காகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன என்பதை தெளிவாக அறிந்துகொள்ளுதல் வேண்டும். இதன் மூலம்

சிக்கலான கணக்குகளை வெவ்வேறு வழிகளில் எளிதாக எவ்வாறு தீர்ப்பது என்பதை அறிய இது வழிவகுக்கும்.

இப்பாடநூல் கண்ணைக் கவரும் வண்ணங்களைக் கொண்டு அச்சிடப்பட்டுள்ளதால் மாணவர்கள் கணிதப் பாடத்தின் அழகை ரசிக்கவும், தங்களது கருத்துகளை மற்றவர்களுடன் பரிமாறிக்கொள்ளவும் மற்றும் புதிய கருத்துகளை உருவாக்கவும் வழிவகை செய்யும் என நம்புகிறோம். ஒரு மாணவன் தான் சந்திக்கும் ஒரு சராசரி மனிதனுக்குத் தான் கற்ற கணிதத்தை எளிதாகப் புரியவைக்காத வரையில் அம்மாணவன் கணிதக் கொள்கையைத் தெளிவாக அறிந்துவிட்டதாக நாம் கருத முடியாது. எனவே கணிதம் என்பது வெறும் கணக்கீடுகளை மட்டுமே செய்வது அன்று. அது அறிவு சார் பகுதியை முறையாகச் செயல்படுத்தவும் உதவுகிறது என்பது தெளிவாகிறது.

எனவே கணிதத்தின் சிறப்பைப் பாராட்டவும் அதன் மதிப்பைத் தெரிந்து கொள்ளவும் இந்நூலில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள அடிப்படைக் கணிதவியலை கற்க வேண்டும். யார் கணிதத்தை மிக ஆழ்ந்து கற்கின்றாரோ அவர் கணிதத்தின் முக்கியத்துவத்தையும், பயன்பாட்டையும் அறிவர்.

கணிதத்தைப் படிப்பதும், படைப்பதும் ஒருவரின் வாழ்வின் சிறப்பம்சமாகும். கணிதம் விசித்திரமானதுமன்று, விந்தையானதுமன்று. வாழ்க்கையைச் சிறக்கவைக்க உதவும் ஓர் இசைக்கருவி. அதனை மீட்டும் ஞானத்தைப் பெறுவோம்; மகிழ்வோம்! மலர்வோம்! வளர்வோம்!! வாழ்வோம்!!!.

–பாடநூல் குழு

குறியீடுகள்

$=$	சமம் (equal to)
$\neq$	சமமில்லை (not equal to)
$<$	விடக்குறைவு (less than)
$\leq$	குறைவு அல்லது சமம் (less than or equal to)
$>$	விட அதிகம் (greater than)
$\geq$	அதிகம் அல்லது சமம் (greater than or equal to)
$\approx$	சமானமான (equivalent to)
$\cup$	சேர்ப்பு (union)
$\cap$	வெட்டு (intersection)
$\mathbb{U}$	அனைத்துக் கணம் (universal Set)
$\in$	உறுப்பு (belongs to)
$\notin$	உறுப்பல்ல(does not belong to)
$\subset$	தகு உட்கணம் (proper subset of)
$\subseteq$	உட்கணம் (subset of or is contained in)
$\not\subset$	தகு உட்கணமல்ல (not a proper subset of)
$\nsubseteq$	உட்கணமல்ல (not a subset of or is not contained in)
A' (or) A^c	A இன் நிரப்புக்கணம் (complement of A)
$\varnothing$ (or) $\{\ \}$	வெற்றுக்கணம் அல்லது இன்மை கணம் (empty set or null set or void set)
$n(A)$	ஆதிஎண் அல்லது செவ்வெண் (number of elements in the set A)
$P(A)$	A இன் அடுக்குக் கணம் (power set of A)
$\|\|\|^{ly}$	இதே போன்று (similarly)
$\mathrm{P}(A)$	A என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு (probability of the event A)
Δ	சமச்சீர் வித்தியாசம் (symmetric difference)
$\mathbb{N}$	இயல் எண்கள் (natural numbers)

$\mathbb{W}$	முழுஎண்கள் (whole numbers)
$\mathbb{Z}$	முழுக்கள் (integers)
$\mathbb{R}$	மெய்யெண்கள் (real numbers)
$\triangle$	முக்கோணம் (triangle)
$\angle$	கோணம் (angle)
$\perp$	செங்குத்து (perpendicular to)
$\parallel$	இணை (parallel to)
$\Longrightarrow$	உணர்த்துகிறது (implies)
$\therefore$	எனவே (therefore)
$\because$	ஏனெனில் (since (or) because)
$\mid\ \mid$	தனிமதிப்பு (absolute value)
$\simeq$	தோராயமாகச் சமம் (approximately equal to)
$\mid$ (or) :	அதன்படி அல்லது என்றவாறு (such that)
$\equiv$ (or) $\cong$	சர்வசமம் (congruent)
$\equiv$	முற்றொருமை (identically equal to)
π	பை (pi)
$\pm$	மிகை அல்லது குறை (plus or minus)
$\blacksquare$	தேற்றம் முடிவு (end of the proof)

பொருளடக்கம்

1.		**கணவியல்**	**1-41**
	1.1	அறிமுகம்	1
	1.2	கணங்களை விளக்குதல்	1
	1.3	கணத்தைக் குறிப்பிடும் முறை	3
	1.4	கணங்களின் பல்வேறு வகைகள்	7
	1.5	கணச் செயல்கள்	18
	1.6	கணச் செயல்களை வென்படங்கள் மூலம் குறிப்பிடுதல்	25
2.		**மெய்யெண் தொகுப்பு**	**42-68**
	2.1	அறிமுகம்	42
	2.2	விகிதமுறு எண்களைத் தசமவடிவில் குறிப்பிடுதல்	45
	2.3	விகிதமுறா எண்கள்	52
	2.4	மெய்யெண்கள்	53
3.		**இயற்கணிதம்**	**69-86**
	3.1	அறிமுகம்	69
	3.2	இயற்கணிதக் கோவைகள்	69
	3.3	பல்லுறுப்புக் கோவைகள்	70
	3.4	மீதித்தேற்றம்	78
	3.5	காரணித் தேற்றம்	81
4.		**வடிவியல்**	**87-101**
	4.1	அறிமுகம்	87
	4.2	வடிவியல் அடிப்படைக் கருத்துகள்	88
	4.3	நாற்கரம்	92
	4.4	இணைகரம்	93

5.	**ஆயத்தொலை வடிவக்கணிதம்**		**102-126**
	5.1	அறிமுகம்	102
	5.2	கார்டீசியன் அச்சுத்தொலைவு முறை	103
	5.3	இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு	112
6.	**செய்முறை வடிவியல்**		**127-135**
	6.1	அறிமுகம்	127
	6.2	முக்கோணம் சார்ந்த சிறப்புக் கோட்டுத் துண்டுகள்	128
	6.3	ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடுகள்	130

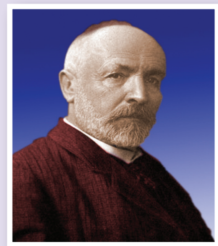
1 கணவியல்

No one shall expel us from the paradise that Cantor has created for us

- DAVID HILBERT

முதன்மைக் குறிக்கோள்கள்

- கணத்தை வரையறுத்தல்
- விவரித்தல் முறை, கணக்கட்டமைப்பு முறை மற்றும் பட்டியல் முறையில் கணங்களைக் குறிப்பிடுதல்
- பல்வேறு வகையான கணங்களை அடையாளம் காணல்
- கணச்செயல்களைப் புரிந்து கொள்ளுதல்
- கணங்கள் மற்றும் கணச்செயல்களை வென்படங்களில் குறிக்கக் கற்றுக்கொள்ளுதல்
- $n(A \cup B)$க்கான சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி எளிய கணக்குகளைச் செய்தல்



ஜார்ஜ் கேண்டர்
(1845-1918)

கணவியலின் அடிப்படைக்கருத்துகள் ஜார்ஜ் கேண்டர் *(Georg Cantor)* என்ற ஜெர்மன் நாட்டுக் கணிதவியல் அறிஞரால் உருவாக்கப்பட்டது. பூரியர் தொடர் எனப்படும் ஒரு வகை முடிவிலி தொடர் குறித்து அவர் ஆராய்ந்தார். அதனடிப்படையில் நவீன கணிதவியல் பகுப்பாய்வுகளின் அடிப்படையாகக் கணவியல் அமைந்துள்ளது என்று பெரும்பாலான கணிதவியல் அறிஞர்கள் ஏற்றுக் கொண்டனர். கேண்டரின் இப்பணியானது பிற்காலத்தில் கண்டுபிடிக்கப்பட்ட கணிதவியல் தர்க்க முறைக்கு அடிப்படையாக அமைந்தது.

1.1 அறிமுகம்

கணிதவியலில் முக்கிய பங்காற்றுவதும் அனைத்துப் பிரிவுகளிலும் பயன்படுத்தப்படுவதும் கணம் என்ற கருத்தாகும்.

கணிதவியலின் அனைத்து வடிவங்களையும் கணங்களாகக் கருத முடியும் என்பதால், கணிதவியலில் கணக்குறியீடு முறை ஒரு வசதியான அமைப்பாகக் கருதப்படுகிறது. கணக்கொள்கைகளைப் புரிந்து கொள்வதன் மூலம் கணிதவியல் கருத்துகளை ஓர் அமைப்பாகக் கருதி, அவற்றை ஒழுங்குபடுத்தி கணங்களாக எழுதவும், தர்க்க ரீதியாகப் புரிந்து கொள்ளவும் முடியும். பின்னர், இவ்வகுப்பில் இயல் எண்கள், விகிதமுறு எண்கள் மற்றும் மெய்யெண்களை எவ்வாறு கணங்களாக எழுதலாம் என நாம் படிக்க உள்ளோம். இப்பாடப்பகுதியில், கணக்கொள்கைகள் பற்றியும், கணவியலின் சில அடிப்படைச்செயல்கள் பற்றியும் படிக்கலாம்.

1.2 கணங்களை விளக்குதல்

புத்தகங்களின் தொகுப்பு, மாணவர்களின் குழு, ஒரு நாட்டில் உள்ள மாநிலங்களின் பட்டியல், நாணயங்களின் தொகுப்பு போன்றவற்றில் தொகுப்பு அல்லது குழு என்ற சொற்களை நாம் அடிக்கடி பயன்படுத்துகிறோம். பொருள்களின் தொகுப்பு அல்லது குழு என்பவற்றைக் கணித முறையில் குறிப்பிடும் முறையே கணமாகும்.

முக்கிய கருத்து	கணம்
நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட பொருள்களின் தொகுப்பு கணம் எனப்படும். கணத்தில் உள்ள பொருள்கள் அக்கணத்தின் உறுப்புகள் எனப்படும்.	

ஒரு கணம் 'நன்கு வரையறுக்கப்பட்டது' என்பது கணிதவியலில் கணத்தின் ஒரு முக்கியமான பண்பாகும். அதாவது, கொடுக்கப்பட்ட எந்தவொரு பொருளும் அக்கணத்தின் ஓர் உறுப்பாகும் அல்லது உறுப்பாகாது எனத் தெளிவாகக் குறிப்பிடுவதாகும்.

மேலும், ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் வெவ்வேறானவை. அதாவது எந்த இரு உறுப்புகளும் சமமல்ல.

பின்வரும் தொகுப்புகளில் எவை நன்கு வரையறுக்கப்பட்டவை?

(1) உன் வகுப்பில் உள்ள மாணவர்களில் ஆண்களின் தொகுப்பு.

(2) 2, 4, 6, 10 மற்றும் 12 என்ற எண்களின் தொகுப்பு.

(3) தமிழ் நாட்டில் உள்ள அனைத்து மாவட்டங்களின் தொகுப்பு.

(4) நல்ல திரைப்படங்களின் தொகுப்பு.

(1), (2) மற்றும் (3) ஆகியவை நன்கு வரையறுக்கப்பட்டவை. ஆகவே அவை கணங்களாகும். (4) ஆனது நன்கு வரையறுக்கப்பட்டது அன்று. ஏனெனில், 'நல்ல திரைப்படம்' என்ற சொல் நன்கு வரையறுக்கப்படவில்லை. எனவே, (4) கணமாகாது.

பொதுவாகக் கணங்களை A, B, C போன்ற ஆங்கிலப் பெரிய எழுத்துகளால் குறிப்போம். கணத்தின் உறுப்புகளை a, b, c போன்ற ஆங்கில சிறிய எழுத்துகளால் குறிப்போம்.

குறியீட்டைப் படித்தல்

$\in$	'இன் ஓர் உறுப்பு' அல்லது 'இல் உள்ளது'

x என்பது கணம் A இன் உறுப்பு என்பதை $x \in A$ என எழுதுவோம்.

$\notin$	'இன் ஓர் உறுப்பல்ல' அல்லது 'இல் இல்லை'

x என்பது கணம் A இன் உறுப்பன்று என்பதை $x \notin A$ என எழுதுவோம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{1, 3, 5, 9\}$ என்ற கணத்தைக் கருதுக.

1 என்பது கணம் Aஇன் ஓர் உறுப்பாகும். இதனை $1 \in A$ என எழுதலாம்.

3 என்பது கணம் Aஇன் ஓர் உறுப்பாகும். இதனை $3 \in A$ என எழுதலாம்.

8 என்பது கணம் Aஇன் உறுப்பல்ல. இதனை $8 \notin A$ என எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.1

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ என்க. காலியிடங்களை $\in$ அல்லது $\notin$ என்ற பொருத்தமான குறியிட்டு நிரப்புக.

(i) 3 .... A (ii) 7 .... A (iii) 0 ...... A (iv) 2 ...... A

தீர்வு (i) $3 \in A$ ($\because$ 3 என்பது A இன் ஓர் உறுப்பாகும்)

(ii) $7 \notin A$ ($\because$ 7 என்பது A இன் உறுப்பல்ல)

(iii) $0 \notin A$ ($\because$ 0 என்பது A இன் உறுப்பல்ல)

(iv) $2 \in A$ ($\because$ 2 என்பது A இன் ஓர் உறுப்பாகும்)

1.3 கணத்தைக் குறிப்பிடும் முறை (Representation of a Set)

ஒரு கணத்தினைப் பின்வரும் மூன்று வழிகளில் அல்லது முறைகளில் ஏதேனும் ஒன்றால் குறிப்பிடலாம்.

(i) விவரித்தல் முறை அல்லது வருணனைமுறை (Descriptive Form)
(ii) கணக்கட்டமைப்பு முறை அல்லது விதி முறை (Set-Builder Form or Rule Form)
(iii) பட்டியல் முறை அல்லது அட்டவணை முறை (Roster Form or Tabular Form)

1.3.1 விவரித்தல் முறை

முக்கிய கருத்து — **விவரித்தல் முறை**

கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளைச் சொற்களால் தெளிவாக விவரிக்கும் முறை 'விவரித்தல்' அல்லது 'வருணனை முறை' எனப்படும்.

எவை கணத்தின் உறுப்புகள் மற்றும் கணத்தின் உறுப்புகள் அல்ல என்பதைச் சுருக்கமாகவும், தெளிவாகவும் தெரிவிப்பதாக விவரித்தல் முறை அமைய வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) அனைத்து இயல் எண்களின் கணம்.
(ii) 100 ஐ விடக் குறைவான பகா எண்களின் கணம்.
(iii) அனைத்து ஆங்கில எழுத்துகளின் கணம்.

1.3.2 கணக்கட்டமைப்பு முறை

முக்கிய கருத்து — **கணக்கட்டமைப்பு முறை**

ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் நிறைவு செய்யும் பண்புகளின் அடிப்படையில் கணத்தைக் குறிப்பிடும் முறை கணக்கட்டமைப்பு முறையாகும்.

குறியீட்டைப் படித்தல்

'|' அல்லது ':'	'அதன்படி' அல்லது 'என்றவாறு'

A = $\{x : x$ என்பது dictionary என்ற சொல்லில் உள்ள ஓர் எழுத்து$\}$

இக்கணத்தினை, "x என்பது dictionary என்ற சொல்லில் உள்ள ஓர் எழுத்து என்றவாறுள்ள எல்லா x இன் கணம் A" என படிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) $\mathbb{N} = \{x : x$ ஓர் இயல் எண்$\}$

(ii) $P = \{x : x$ என்பது 100ஐ விடக் குறைவான ஒரு பகா எண்$\}$

(iii) $A = \{x : x$ ஓர் ஆங்கில எழுத்து$\}$

1.3.3 பட்டியல் முறை

முக்கிய கருத்து	பட்டியல் முறை
ஒரு கணத்தின் உறுப்புகளை $\{\}$ என்ற ஒரு சோடி அடைப்பிற்குள் பட்டியலிடுவது பட்டியல் முறை அல்லது அட்டவணை முறை என்றழைக்கப்படுகிறது.	

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) A என்பது 11ஐ விடக் குறைவாக உள்ள இரட்டைப்படை இயல் எண்களின் கணம் என்க. இக்கணத்தினைப் பட்டியல் முறையில் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

(ii) $A = \{x : x$ ஒரு முழு (Integer) மற்றும் $-1 \leq x < 5\}$

இக்கணத்தினைப் பட்டியல் முறையில் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

குறிப்பு

(i) பட்டியல் முறையில் கணத்தின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் ஒரு முறை மட்டுமே பட்டியலிடப்பட வேண்டும். வழக்கமாக ஒரு கணத்தில் ஏற்கனவே வந்த உறுப்புகள் மீண்டும் வராது.

(ii) "coffee" என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துகளின் கணம் A என்க.

அதாவது, $A = \{$ c, o, f, e $\}$. பட்டியல் முறையில் எழுதப்பட்டுள்ள A என்ற கணத்தின் பின்வரும் தொகுப்புகள் பொருத்தமற்றவை.

{c, o, e} (எல்லா உறுப்புகளும் பட்டியலிடப்படவில்லை)

{c, o, f, f, e} (F என்ற எழுத்து இருமுறை பட்டியலிடப்பட்டுள்ளது)

(iii) பட்டியல் முறையில் குறிப்பிடும்போது ஒரு கணத்தின் உறுப்புகளை எந்த வரிசையிலும் எழுதலாம். எனவே 2, 3 மற்றும் 4 ஆகியவற்றை உறுப்புகளாகக் கொண்ட கணத்தினைப் பின்வருமாறு பொருளுடைய (பொருத்தமான) பட்டியல் அமைப்புகளாக எழுதலாம்.

$\{2, 3, 4\}$ $\{2, 4, 3\}$ $\{4, 3, 2\}$

மேற்கண்ட கணங்கள் ஒவ்வொன்றும் ஒரே கணத்தைக் குறிக்கின்றன.

(iv) ஒரு முடிவிலாக்கணம் அல்லது முடிவுறு கணம் அதிக எண்ணிக்கையிலான உறுப்புகளைப் பெற்றிருந்தால், பட்டியலிடப்பட்ட உறுப்புகளின் அமைப்பு தொடர்ந்து செல்லும் என்பதை $\{5, 6, 7, \cdots\}$ அல்லது $\{3, 6, 9, 12, 15, \cdots, 60\}$ என்பவற்றில் உள்ளது போன்று '$\cdots$' என்ற மூன்று தொடர்புள்ளிகளால் (*ellipsis*) குறிப்பிடுவோம்.

(v) ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் முழு அமைப்பையும் புரிந்து கொள்ளும் வகையில் போதுமான விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டால் மட்டுமே '$\cdots$' என்ற தொடர்ச்சியான மூன்று புள்ளிகளைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

கணங்களைக் குறிப்பிடும் பல்வேறு முறைகள்

விவரித்தல் முறை	கணக்கட்டமைப்பு முறை	பட்டியல் முறை
அனைத்து ஆங்கில உயிரெழுத்துகளின் கணம்	$\{x : x$ ஓர் ஆங்கில உயிரெழுத்து$\}$	$\{a, e, i, o, u\}$
15 இக்குக் குறைவாகவோ சமமாகவோ உள்ள ஒற்றைப்படை மிகைமுழு எண்களின் கணம்	$\{x : x$ ஓர் ஒற்றைப்படை எண் மற்றும் $0 < x \leq 15\}$	$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$
0 இக்கும் 100 இக்கும் இடையில் உள்ள முழு கன எண்களின் (Perfect Cube numbers) கணம்	$\{x : x$ ஒரு முழு கன எண் மற்றும் $0 < x < 100\}$	$\{1, 8, 27, 64\}$

எடுத்துக்காட்டு 1.2

பின்வரும் கணங்களின் உறுப்புகளைப் பட்டியல் முறையில் எழுதுக

(i) 7இன் மடங்குகளாக உள்ள மிகை முழுக்களின் கணம்.

(ii) 20 ஐ விடக் குறைவான பகா எண்களின் கணம்.

தீர்வு (i) 7 இன் மடங்குகளாக உள்ள மிகை முழுக்களின் கணத்தைப் பட்டியல் முறையில் $\{7, 14, 21, 28, \cdots\}$ என எழுதலாம்.

(ii) 20 ஐ விடக் குறைவாக உள்ள பகா எண்களின் கணத்தைப் பட்டியல் முறையில் $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ என எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.3

$A = \{x : x$ ஓர் இயல் எண் $\leq 8\}$ என்ற கணத்தைப் பட்டியல் முறையில் எழுதுக.

தீர்வு $A = \{x : x$ ஓர் இயல் எண் $\leq 8\}$.

இக்கணத்தில் உள்ள உறுப்புகள் 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

எனவே, பட்டியல் முறையில் இக்கணத்தினைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

எடுத்துக்காட்டு 1.4

பின்வரும் கணங்களைக் கணக்கட்டமைப்பு முறையில் குறிப்பிடுக.

(i) $X = \{$ஞாயிறு, திங்கள், செவ்வாய், புதன், வியாழன், வெள்ளி, சனி$\}$

(ii) $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots\right\}$

தீர்வு (i) X = {ஞாயிறு, திங்கள், செவ்வாய், புதன், வியாழன், வெள்ளி, சனி}

X என்ற கணம் வாரத்தின் அனைத்து நாள்களையும் கொண்டுள்ளது.

எனவே, X என்ற கணத்தைக் கணக்கட்டமைப்பு முறையில் பின்வருமாறு குறிப்பிடலாம்.

X = {x : x என்பது வாரத்தின் ஒருநாள்}

(ii) $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots\right\}$. கணம் A இல் உள்ள உறுப்புகளின் பகுதிகள் $1, 2, 3, 4, \cdots$ ஆகும்.

எனவே, A என்ற கணத்தைக் கணக்கட்டமைப்பு முறையில் பின்வருமாறு குறிப்பிடலாம்.

$$A = \left\{x : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

1.3.4 ஆதி எண் அல்லது செவ்வெண் (Cardinal Number)

முக்கிய கருத்து	ஆதி எண்
ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அக்கணத்தின் ஆதி எண் அல்லது செவ்வெண் எனப்படும்.	
குறியீட்டைப் படித்தல்	

$n(A)$	A என்ற கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

A என்ற கணத்தின் ஆதி எண்ணை $n(A)$ எனக் குறிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ என்ற கணத்தை எடுத்துக் கொள்க.

கணம் A இல் 7 உறுப்புகள் உள்ளன.

எனவே, A என்ற கணத்தின் ஆதி எண் 7 ஆகும்.

அதாவது, $n(A) = 7$

எடுத்துக்காட்டு 1.5

பின்வரும் கணங்களின் ஆதி எண்ணைக் காண்க

(i) A = {x : x என்பது 12 இன் ஒரு பகாகாரணி}

(ii) $B = \{x : x \in \mathbb{W}, x \leq 5\}$

தீர்வு (i) 12 இன் காரணிகள் 1, 2, 3, 4, 6, 12. 12 இன் பகா காரணிகள் 2, 3.

பட்டியல் முறையில் கணம் Aஐ பின்வருமாறு எழுதலாம். $A = \{2, 3\}$ எனவே, $n(A) = 2$.

(ii) $B = \{x : x \in \mathbb{W}, x \leq 5\}$

பட்டியல் முறையில் கணம் Bஐப் பின்வருமாறு எழுதலாம். $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

கணம் B இல் ஆறு உறுப்புகள் உள்ளன. எனவே, $n(B) = 6$

1.4 கணங்களின் பல்வேறு வகைகள் (Different kinds of Sets)

1.4.1 வெற்றுக்கணம் (Empty Set)

முக்கிய கருத்து **வெற்றுக்கணம்**

உறுப்புகள் இல்லாத கணம் வெற்றுக்கணம் அல்லது இன்மைக்கணம் அல்லது வெறுமைக்கணம் என்றழைக்கப்படும்

குறியீட்டைப் படித்தல்

$\varnothing$ அல்லது $\{\ \}$	வெற்றுக்கணம் அல்லது இன்மைக்கணம் அல்லது வெறுமைக்கணம்

வெற்றுக்கணத்தை $\varnothing$ அல்லது $\{\ \}$ என்ற குறியீட்டால் குறிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{x : x < 1, x \in \mathbb{N}\}$ என்ற கணத்தைக் கருதுக.

1ஐ விடக் குறைவான இயல் எண் எதுவும் இல்லை.

எனவே, A என்ற கணத்தில் உறுப்புகள் எதுவும் இல்லை.

$\therefore\ A = \{\ \}$

நினைவு கூர்ந்து விடையளி !
$n(\varnothing) = ?$

குறிப்பு எண்ணியலில் 'பூச்சியம்' என்ற மெய்யெண்ணும் கணவியலில், $\varnothing$ ஆன வெற்றுக்கணமும் சிறப்பிடம் பெறுகின்றன.

1.4.2 முடிவுறு கணம் (Finite set)

முக்கிய கருத்து **முடிவுறு கணம்**

ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை பூச்சியம் அல்லது முடிவுறு (எண்ணிக்கைக்குட்பட்ட) எண் எனில், அக்கணம் முடிவுறு கணம் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) 8 க்கும் 9 க்கும் இடைப்பட்ட இயல் எண்களின் கணம் A என்க.
8 க்கும் 9 க்கும் இடையில் எந்த இயல் எண்ணும் இல்லை.

எனவே, $A = \{\ \}\ \therefore\ n(A) = 0$.

A என்பது முடிவுறு கணமாகும்.

(ii) $X = \{x : x$ ஒரு முழு மற்றும் $-1 \leq x \leq 2\}$ என்ற கணத்தைக் கருதுக

பட்டியல் முறையில் X என்ற கணத்தைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$X = \{-1, 0, 1, 2\}$. $\quad \therefore n(X) = 4$

எனவே, X ஒரு முடிவுறு கணமாகும்.

குறிப்பு முடிவுறு கணத்தின் ஆதி எண் முடிவுறு எண்ணாகும்.

1.4.3 முடிவிலா கணம் (Infinite set)

முக்கிய கருத்து	முடிவிலா கணம்
ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை முடிவுறு எண் அல்ல எனில், அக்கணம் முடிவிலா அல்லது முடிவுறாக் கணமாகும்	

எடுத்துக்காட்டாக,

பின்வரும் கணத்தைக் கருதுக.

முழு எண்களின் கணம் $\mathbb{W}$ ஐ பட்டியல் முறையில் $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$என எழுதலாம்.

முழு எண்களின் கணம் முடிவிலா எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகளைக் கொண்டிருப்பதால், $\mathbb{W}$ முடிவிலாக் கணமாகும்.

குறிப்பு முடிவிலாக் கணத்தின் ஆதி எண் முடிவுறு எண் அல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 1.6

பின்வரும் கணங்களில் முடிவுறு மற்றும் முடிவிலாக் கணங்கள் எவை எனக் கூறுக.

(i) $A = \{x : x$ என்பது 5 இன் மடங்கு, $x \in \mathbb{N}\}$

(ii) $B = \{x : x$ ஓர் இரட்டைப் பகாஎண்$\}$

(iii) 50 ஐ விடப் பெரிய மிகை முழுக்களைக் கொண்ட கணம்.

தீர்வு (i) $A = \{x : x$ ஒரு 5 இன் மடங்கு, $x \in \mathbb{N}\}$. பட்டியல் முறையில் இக்கணத்தை எழுத,

$A = \{5, 10, 15, 20, ...\}$

$\therefore A$ என்ற கணம் முடிவிலாக் கணமாகும்.

(ii) $B = \{x : x$ ஒரு இரட்டைப் பகாஎண்$\}$.

பகா எண்களில் 2 மட்டுமே இரட்டைப் பகாஎண் ஆகும்.

பட்டியல் முறையில் B என்ற கணத்தைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்

$B = \{ 2 \}$. எனவே, B முடிவுறு கணமாகும்.

(iii) X என்பது 50 ஐ விடப் பெரிய மிகை முழுக்களின் கணம் என்க.
பட்டியல் முறையில் X என்ற கணத்தைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.
$X = \{51, 52, 53, ...\}$

கணம் X எண்ணற்ற உறுப்புகளைக் கொண்டுள்ளது. எனவே, X முடிவிலாக் கணமாகும்.

1.4.4 ஒருறுப்புக் கணம் (Singleton set)

முக்கிய கருத்து	ஒருறுப்புக் கணம்
ஓர் உறுப்பை மட்டும் கொண்டுள்ள கணம் ஒருறுப்புக் கணம் என்றழைக்கப்படும்.	

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{x : x$ ஒரு முழு மற்றும் $1 < x < 3\}$ கணத்தைப் பட்டியல் முறையில் எழுத, $A = \{ 2 \}$ எனக் கிடைக்கும்.

கணம் A ஓர் உறுப்பை மட்டும் கொண்டுள்ளது.

ஆகவே, A ஒருறுப்புக் கணமாகும்.

குறிப்புரை

பின்வருவன அனைத்தும் ஒரே கணமல்ல என்பதைப் புரிந்து கொள்வது இன்றியமையாததாகும்.

(i) வெற்றுக்கணம் $\varnothing$

(ii) வெற்றுக் கணத்தை மட்டும் ஓர் உறுப்பாகக் கொண்ட கணம் $\{\varnothing\}$

(iii) பூச்சியத்தை மட்டும் ஓர் உறுப்பாகக் கொண்ட கணம் $\{0\}$

1.4.5 சமான கணங்கள் (Equivalent sets)

முக்கிய கருத்து	சமான கணம்
A, B என்ற இரு கணங்களில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை சமம் எனில், அவை சமான கணங்கள் எனப்படும். A, B என்ற கணங்கள் சமான கணங்கள் எனில், $n(A) = n(B)$ ஆகும்.	

குறியீட்டைப் படித்தல்

$\approx$	சமானமான

A, B என்பன சமானமானவை எனில், $A \approx B$ என எழுதலாம்

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{ 7, 8, 9, 10 \}$ மற்றும் $B = \{ 3, 5, 6, 11 \}$ என்ற கணங்களைக் கருதுக.

இங்கு $n(A) = 4$ மற்றும் $n(B) = 4$.

$\therefore\ A \approx B$

1.4.6 சம கணங்கள் (Equal sets)

முக்கிய கருத்து **சம கணம்**

A, B என்ற இரு கணங்களில் உள்ள உறுப்புகள் அவை எழுதப்பட்டுள்ள வரிசையைப் பொருட்படுத்தாமல் சரியாக அதே உறுப்புகளை கொண்டிருந்தால், அவை சம கணங்கள் எனப்படும். அவ்வாறு இல்லையெனில், அவை சமமற்ற கணங்கள் எனப்படும்.

A, B என்ற கணங்கள் சமம் எனில்,

(i) கணம் A இன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் கணம் B இன் உறுப்பாகவும் இருக்கும்.

(ii) கணம் B இன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் கணம் A இன் உறுப்பாகவும் இருக்கும்

குறியீட்டைப் படித்தல்

$=$	சமம்	A, B என்ற கணங்கள் சமம் எனில், $A = B$ என எழுதலாம்.
$\neq$	சமமல்ல	A, B என்ற கணங்கள் சமமற்றவை எனில், $A \neq B$ என எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{ a, b, c, d \}$ மற்றும் $B = \{ d, b, a, c \}$ என்ற கணங்களைக் கருதுக.

A, B என்ற கணங்கள் சரியாக அதே உறுப்புகளைப் பெற்றுள்ளன.

$\therefore A = B$

குறிப்பு A, B என்ற கணங்கள் சமம் எனில், $n(A) = n(B)$ ஆகும். ஆனால் $n(A) = n(B)$ எனில் A, B என்ற கணங்கள் சமமாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

எனவே, சம கணங்கள் அனைத்தும் சமான கணங்களாகும். ஆனால், சமான கணங்கள் அனைத்தும் சம கணங்களாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

எடுத்துக்காட்டு 1.7

கொடுக்கப்பட்ட $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ மற்றும்

$B = \{x : x$ என்பது இரண்டின் மடங்கு, $x \in \mathbb{N}$ மற்றும் $x \leq 14\}$

ஆகியன சமகணங்களா எனக் கூறுக.

தீர்வு $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ மற்றும்

$B = \{x : x$ என்பது இரண்டின் மடங்கு, $x \in \mathbb{N}$ மற்றும் $x \leq 14\}$

பட்டியல் முறையில் எழுத, $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$

A, B என்ற இரு கணங்களும் சரியாக அதே உறுப்புகளைப் பெற்றுள்ளதால், $A = B$ ஆகும்.

1.4.7 உட்கணம் (Subset)

முக்கிய கருத்து **உட்கணம்**

கணம் X இல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் கணம் Y இன் உறுப்பாகவும் இருக்குமானால், X ஆனது Y இன் ஓர் உட்கணமாகும். இதனைக் குறியீட்டில் $X \subseteq Y$ என எழுதலாம்.

குறியீட்டைப் படித்தல்

$\subseteq$	உட்கணம் அல்லது உள்ளடங்கியது

$X \subseteq Y$ என்பதை 'X என்பது Y இன் உட்கணம்' அல்லது 'X என்பது Y இல் உள்ளடங்கியது' எனப் படிப்போம்.

$\nsubseteq$	உட்கணமல்ல அல்லது உள்ளடங்காதது

$X \nsubseteq Y$ என்பதை 'X என்பது Y இன் உட்கணமல்ல' அல்லது 'X என்பது Y இல் உள்ளடங்காதது' எனப் படிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$X = \{7, 8, 9\}$ மற்றும் $Y = \{ 7, 8, 9, 10 \}$ என்ற கணங்களைக் கருதுக. இங்குக் கணம் X இன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் கணம் Y இன் உறுப்பாகவும் இருப்பதைக் காண்கிறோம்.

எனவே, X என்பது Y இன் உட்கணமாகும். அதாவது, $X \subseteq Y$.

குறிப்பு

(i) ஒவ்வொரு கணமும் தனக்குத்தானே உட்கணமாகும். அதாவது, X என்ற எந்தவொரு கணத்திற்கும் $X \subseteq X$ ஆகும்.

(ii) வெற்றுக்கணம் எந்தவொரு கணத்துக்கும் உட்கணமாகும். அதாவது, X என்ற எந்தவொரு கணத்திற்கும் $\varnothing \subseteq X$.

(iii) $X \subseteq Y$ மற்றும் $Y \subseteq X$ எனில், $X = Y$ ஆகும்.
இதன் மறுதலையும் உண்மை. அதாவது, $X = Y$ எனில், $X \subseteq Y$ மற்றும் $Y \subseteq X$ ஆகும்.

(iv) ஒவ்வொரு கணமும் ($\varnothing$ ஐத்தவிர) குறைந்தபட்சம் அக்கணத்தையும், $\varnothing$ யையும் இரு உட்கணங்களாகக் கொண்டிருக்கும்.

1.4.8 தகு உட்கணம் (Proper subset)

முக்கிய கருத்து **தகு உட்கணம்**

$X \subseteq Y$ மற்றும் $X \neq Y$ என்றவாறு இருப்பின், கணம் X ஆனது கணம் Y இன் தகு உட்கணம் எனப்படும். இதனைக் குறியீட்டில் $X \subset Y$ என எழுதலாம். Y என்பது X இன் மிகை கணம் (Super set) எனப்படும்.

குறியீட்டைப் படித்தல்

$\subset$	தகு உட்கணம்

$X \subset Y$ என்பதை 'X என்பது Y இன் தகு உட்கணம்' எனப் படிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$X = \{5, 7, 8\}$ மற்றும் $Y = \{5, 6, 7, 8\}$ என்ற கணங்களைக் கருதுக.

இங்கு, X இன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் Y இன் உறுப்பாகும். மேலும் $X \neq Y$.

எனவே, X என்பது Y இன் தகு உட்கணமாகும்.

குறிப்பு

(i) தகு உட்கணம், மிகை கணத்தைவிட குறைந்தபட்சம் ஓர் உறுப்பையாவது குறைவாகப் பெற்றிருக்கும்.

(ii) எந்தவொரு கணமும் அக்கணத்திற்கே தகு உட்கணமாகாது.

(iii) வெற்றுக்கணம் $\varnothing$ ஆனது அக்கணத்தைத்தவிர மற்ற அனைத்துக் கணங்களுக்கும் தகு உட்கணமாகும். [வெற்றுக்கணம் $\varnothing$ க்குத் தகு உட்கணம் இல்லை] அதாவது, $\varnothing$ ஐத் தவிர மற்ற எந்தவொரு கணம் X வுக்கும் $\varnothing \subset X$ ஆகும்.

(iv) $\in$ மற்றும் $\subseteq$ என்ற குறியீடுகளுக்கான வேறுபாட்டைப் புரிந்து கொள்வது அவசியமாகும். $x \in X$ என்ற குறியீடு, x என்பது X இன் உறுப்பு என்பதைக் குறிப்பிடுகிறது. $X \subseteq Y$ என்ற குறியீடு, X என்பது Y இன் உட்கணம் என்பதைக் குறிப்பிடுகிறது.

எனவே, $\varnothing \subseteq \{a,b,c\}$ என்பது சரியானது. ஆனால், $\varnothing \in \{a,b,c\}$ என்பது சரியல்ல.

$x \in \{x\}$, என எழுதுவது சரியானது. ஆனால், $x = \{x\}$ அல்லது $x \subseteq \{x\}$ என எழுதுவது சரியல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 1.8

பின்வரும் கூற்றுகளை உண்மையாக்க, காலியிடங்களில் $\subseteq$ அல்லது $\nsubseteq$ என்ற குறிகளைக் கொண்டு நிரப்புக.

(a) $\{4, 5, 6, 7\}$ ----- $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ (b) $\{a, b, c\}$ ----- $\{b, e, f, g\}$

தீர்வு (a) $\{4, 5, 6, 7\}$ என்ற கணத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ என்ற கணத்தின் உறுப்பாகவும் உள்ளது.

எனவே, காலியிடத்தில் $\subseteq$ என்ற குறியை இடுக.

அதாவது, $\{4, 5, 6, 7\} \subseteq \{4, 5, 6, 7, 8\}$

(b) $a \in \{a, b, c\}$ ஆனால், $a \notin \{b, e, f, g\}$

எனவே, காலியிடத்தில் $\nsubseteq$ என்ற குறியை இடுக.

அதாவது, $\{a,b,c\} \nsubseteq \{b,e,f,g\}$

எடுத்துக்காட்டு 1.9

பின்வரும் கூற்றுகளை உண்மையாக்க $\subset, \subseteq$ என்ற குறியீடுகளில் எதைக் காலியிடங்களில் இடவேண்டும் எனத் தீர்மானிக்க.

(i) $\{8, 11, 13\}$ ----- $\{8, 11, 13, 14\}$

(ii) $\{a, b, c\}$ ------ $\{a, c, b\}$

தீர்வு (i) $\{8, 11, 13\}$ என்ற கணத்தின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் $\{8, 11, 13, 14\}$ என்ற கணத்தின் உறுப்பாகவும் உள்ளதால், காலியிடத்தில் $\subseteq$ என்ற குறியை இடவேண்டும்.

$\therefore \{8, 11, 13\} \subseteq \{8, 11, 13, 14\}$

மேலும் $14 \in \{8, 11, 13, 14\}$. ஆனால் $14 \notin \{8, 11, 13\}$

எனவே, $\{8, 11, 13\}$ என்ற கணம் $\{8, 11, 13, 14\}$ என்ற கணத்தின் தகு உட்கணமாகும். ஆதலால், காலியிடத்தில் $\subset$ என்ற குறியையும் இடலாம்.

$\therefore \{8, 11, 13\} \subset \{8, 11, 13, 14\}$

(ii) $\{a, b, c\}$ என்ற கணத்தின் ஒவ்வொரு உறுப்பும், $\{a, c, b\}$ என்ற கணத்தின் உறுப்பாகவும் உள்ளது.

எனவே, இவ்விரு கணங்களும் சம கணங்களாகும். $\{a, b, c\}$ என்பது $\{a, c, b\}$ என்ற கணத்தின் தகு உட்கணமாகாது.

எனவே, காலியிடத்தை $\subseteq$ என்ற குறியைக் கொண்டு மட்டுமே நிரப்ப முடியும்.

1.4.9 அடுக்குக்கணம் (Power Set)

முக்கிய கருத்து	அடுக்குக்கணம்
A என்ற கணத்தின் அனைத்து உட்கணங்களையும் கொண்ட கணம், அக்கணத்தின் அடுக்குக்கணம் எனப்படும்.	
குறியீட்டைப் படித்தல்	
$P(A)$	A இன் அடுக்குக்கணம்
A இன் அடுக்குக்கணம் $P(A)$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.	

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{-3, 4\}$ என்ற கணத்தை எடுத்துக்கொள்க.

கணம் A இன் உட்கணங்கள்

$\varnothing, \{-3\}, \{4\}, \{-3, 4\}$ ஆகும்.

எனவே, A இன் அடுக்குக் கணம்

$P(A) = \{\varnothing, \{-3\}, \{4\}, \{-3, 4\}\}$

எடுத்துக்காட்டு 1.10

$A = \{3, \{4, 5\}\}$ என்ற கணத்தின் அடுக்குக்கணத்தை எழுதுக.

தீர்வு $A = \{3, \{4, 5\}\}$

A இன் உட்கணங்கள், $\varnothing, \{3\}, \{\{4, 5\}\}, \{3, \{4, 5\}\}$

$\therefore P(A) = \{\varnothing, \{3\}, \{\{4, 5\}\}, \{3, \{4, 5\}\}\}$

ஒரு முடிவுறு கணத்தின் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை

மிக அதிக அளவில் உறுப்புகளைக் கொண்டுள்ள கணங்களுக்கு உட்கணங்களை எழுதி அவற்றின் எண்ணிக்கையைக் காண்பது கடினமாகும். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட ஒரு முடிவுறு கணம் எத்தனை உட்கணங்களைக் கொண்டிருக்கும் என்பதைக் காண ஒரு விதியைக் காண்போம்.

(i) $A = \varnothing$ என்ற கணம் அக்கணத்தை மட்டுமே உட்கணமாகக் கொண்டிருக்கும்.

(ii) $A = \{5\}$ என்ற கணத்தின் உட்கணங்கள் $\varnothing$ மற்றும் $\{5\}$ ஆகும்.

(iii) $A = \{5, 6\}$ என்ற கணத்தின் உட்கணங்கள் $\varnothing, \{5\}, \{6\}$ மற்றும் $\{5, 6\}$ ஆகும்.

(iv) $A = \{5, 6, 7\}$ என்ற கணத்தின் உட்கணங்கள் $\varnothing, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{5, 7\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}$ மற்றும் $\{5, 6, 7\}$ ஆகும்.

இவ்விவரங்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3
உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை	$1 = 2^0$	$2 = 2^1$	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$

மேற்கண்ட அட்டவணை, ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையில் ஒன்றை அதிகரிக்க, உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை இரு மடங்காகிறது என்பதைக் காட்டுகிறது. அதாவது, ஒவ்வொரு நிலையிலும் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை 2 இன் அடுக்காக உள்ளது என்பதை தெரிவிக்கிறது. எனவே, கீழ்க்கண்ட பொதுவிதியை நாம் பெறுகிறோம்.

m உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு கணத்தின் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை 2^m ஆகும்.

$n(A) = m \Rightarrow n[P(A)] = 2^{n(A)} = 2^m$

இந்த 2^m உட்கணங்களில் கொடுக்கப்பட்ட கணமும் உள்ளடங்கியுள்ளது.

எனவே, ***m*** உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு கணத்தின் தகு உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை $2^m - 1$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.11

பின்வரும் கணங்கள் ஒவ்வொன்றின் உட்கணங்கள் மற்றும் தகுஉட்கணங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(i) $A = \{3,4,5,6,7\}$ (ii) $A = \{1,2,3,4,5,9,12,14\}$

தீர்வு (i) $A = \{3,4,5,6,7\}$. எனவே, $n(A) = 5$.

உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை $= n[P(A)] = 2^5 = 32$.

தகு உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை $= 2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$

(ii) $A = \{1,2,3,4,5,9,12,14\}$. $n(A) = 8$.

உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை $= 2^8 = 2^5 \times 2^3 = 32 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$

தகுஉட்கணங்களின் எண்ணிக்கை $= 2^8 - 1 = 256 - 1 = 255$

பயிற்சி 1.1

1. பின்வருவனவற்றில் எவை கணங்களாகும்? உமது விடைக்குக் காரணம் கூறுக.
   (i) நல்ல புத்தகங்களின் தொகுப்பு
   (ii) 30 ஐ விடக் குறைவாக உள்ள பகாஎண்களின் தொகுப்பு
   (iii) மிகவும் திறமையான பத்து கணித ஆசிரியர்களின் தொகுப்பு
   (iv) உன் பள்ளியிலுள்ள மாணவர்களின் தொகுப்பு
   (v) அனைத்து இரட்டைப்படை எண்களின் தொகுப்பு

2. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ என்க. காலியிடங்களை $\in$ அல்லது $\notin$ என்ற குறியீடுகளில் சரியான குறியிட்டு நிரப்புக.
   (i) 0 ----- A (ii) 6 ----- A (iii) 3 ----- A
   (iv) 4 ----- A (v) 7 ----- A

3. பின்வரும் கணங்களைக் கணக்கட்டமைப்பு முறையில் எழுதுக.
   (i) அனைத்து மிகை இரட்டைப்படை எண்களின் கணம்
   (ii) 20ஐ விடக்குறைவாக உள்ள முழு எண்களின் கணம்
   (iii) 3 இன் மடங்குகளாக உள்ள மிகை முழுக்களின் கணம்
   (iv) 15ஐ விடக் குறைவாக உள்ள ஒற்றை இயல் எண்களின் கணம்
   (v) 'computer' என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துகளின் கணம்

4. பின்வரும் கணங்களைப் பட்டியல் முறையில் எழுதுக.
   (i) $A = \{x : x \in \mathbb{N},\ 2 < x \le 10\}$
   (ii) $B = \left\{x : x \in \mathbb{Z},\ -\frac{1}{2} < x < \frac{11}{2}\right\}$

(iii) C = $\{x : x$ ஒரு பகா எண் மற்றும் 6 இன் ஒரு வகுஎண்$\}$

(iv) $X = \{x : x = 2^n,\ n \in \mathbb{N}$ மற்றும் $n \le 5\}$

(v) $M = \{x : x = 2y - 1, y \le 5, y \in \mathbb{W}\}$

(vi) $P = \{x : x$ ஒரு முழு, $x^2 \le 16\}$

5. பின்வரும் கணங்களை விவரித்தல் முறையில் எழுதுக.

(i) $A = \{a, e, i, o, u\}$

(ii) $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

(iii) $C = \{1, 4, 9, 16, 25\}$

(iv) $P = \{x : x$ என்பது 'set theory' என்ற சொல்லில் உள்ள ஓர் எழுத்து$\}$

(v) $Q = \{x : x$ என்பது 10 க்கும் 20 க்கும் இடைப்பட்ட ஒரு பகாஎண் $\}$

6. பின்வரும் கணங்களின் ஆதி எண்களைக் காண்க.

(i) $A = \{x : x = 5^n, n \in \mathbb{N}$ மற்றும் $n < 5\}$

(ii) $B = \{x : x$ ஓர் ஆங்கில மெய்யெழுத்து$\}$

(iii) $X = \{x : x$ ஓர் இரட்டைப் பகாஎண்$\}$

(iv) $P = \{x : x < 0, x \in \mathbb{W}\}$

(v) $Q = \{x : -3 \le x \le 5, x \in \mathbb{Z}\}$

7. பின்வரும் கணங்களில் எவை முடிவுறு கணங்கள் மற்றும் எவை முடிவிலாக் கணங்கள் எனக் காண்க.

(i) $A = \{4, 5, 6, ...\}$

(ii) $B = \{0, 1, 2, 3, 4, ..., 75\}$

(iii) $X = \{x : x$ ஓர் இரட்டை இயல்எண்$\}$

(iv) $Y = \{x : x$ என்பது 6 இன் மடங்கு மற்றும் $x > 0\}$

(v) P = 'freedom' என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துகளின் கணம்.

8. பின்வரும் கணங்களில் எவை சமான கணங்களாகும்?

(i) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $\mathrm{B} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

(ii) $X = \{x : x \in \mathbb{N}, 1 < x < 6\}$, $Y = \{x : x$ ஓர் ஆங்கில உயிரெழுத்து$\}$

(iii) $P = \{x : x$ ஒரு பகாஎண் மற்றும் $5 < x < 23\}$

$Q = \{x : x \in \mathbb{W},\ 0 \le x < 5\}$

9. பின்வரும் கணங்களில் எவை சமகணங்களாகும்?

(i) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{4, 3, 2, 1\}$

(ii) $A = \{4, 8, 12, 16\}$, $B = \{8, 4, 16, 18\}$

(iii) $X = \{2, 4, 6, 8\}$

$Y = \{x : x$ ஓர் இரட்டை முழு $0 < x < 10\}$

(iv) $P = \{x : x$ என்பது 10 இன் மடங்கு, $x \in \mathbb{N}\}$

$Q = \{10, 15, 20, 25\ 30, ... \}$

10. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணங்களிலிருந்து சமகணங்களைத் தேர்வு செய்க.

$A = \{12, 14, 18, 22\}$, $B = \{11, 12, 13, 14\}$, $C = \{14, 18, 22, 24\}$

$D = \{13, 11, 12, 14\}$, $E = \{-11, 11\}$, $F = \{10, 19\}$, $G = \{11, -11\}$, $H = \{10, 11\}$

11. $\varnothing = \{\varnothing\}$ ஆகுமா? காரணம் கூறுக.

12. பின்வரும் கணங்களில் எவை சமகணங்கள்? காரணம் கூறுக.

$\varnothing, \{0\}, \{\varnothing\}$

13. கோடிட்ட இடங்களை $\subseteq$ அல்லது $\nsubseteq$ என்ற குறியீடுகளைக் கொண்டு நிரப்புக.

(i) $\{3\}$ ----- $\{0, 2, 4, 6\}$ (ii) $\{a\}$ ----- $\{a, b, c\}$

(iii) $\{8, 18\}$ ----- $\{18, 8\}$ (iv) $\{d\}$ ----- $\{a, b, c\}$

14. $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ மற்றும் $Y = \{x : x$ ஒரு முழு மற்றும் $-3 \leq x < 2\}$ என்க.

(i) X என்பது Y இன் உட்கணமாகுமா? (ii) Y என்பது X இன் உட்கணமாகுமா?

15. $A = \{x : x$ என்பது 3 ஆல் வகுபடும் மிகை முழு$\}$ என்ற கணம்

$B = \{x : x$ என்பது 5 இன் மடங்கு, $x \in \mathbb{N}\}$ என்ற கணத்திற்கு உட்கணமாகுமா

எனச்சோதிக்க.

16. பின்வரும் கணங்களின் அடுக்குக்கணங்களை எழுதுக.

(i) $A = \{x, y\}$ (ii) $X = \{a, b, c\}$ (iii) $A = \{5, 6, 7, 8\}$ (iv) $A = \varnothing$

17. பின்வரும் கணங்களின் உட்கணங்கள் மற்றும் தகு உட்கணங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(i) $A = \{13, 14, 15, 16, 17, 18\}$

(ii) $B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

(iii) $X = \{x : x \in \mathbb{W}, x \notin \mathbb{N}\}$

18. (i) $A = \varnothing$ எனில், $n[P(A)]$ காண்க (ii) $n(A) = 3$ எனில், $n[P(A)]$ காண்க

(iii) $n[P(A)] = 512$ எனில், $n(A)$ காண்க.

(iv) $n[P(A)] = 1024$ எனில், $n(A)$ காண்க.

19. $n[P(A)] = 1$ எனில், A என்ற கணத்தைப் பற்றி என்ன கூறமுடியும்?

20. $A = \{x : x$ என்பது 11ஐ விடக் குறைவாக உள்ள ஓர் இயல் எண்$\}$

$B = \{x : x$ ஓர் இரட்டைப்படை எண் மற்றும் $1 < x < 21\}$

$C = \{x : x$ ஒரு முழு மற்றும் $15 \leq x \leq 25\}$ எனில்

(i) A, B, C என்ற கணங்களின் உறுப்புகளைப் பட்டியலிடுக.

(ii) $n(A),\ n(B),\ n(C)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(iii) பின்வருனவற்றைச் சரி (T) அல்லது தவறு (F) எனக் கூறுக.

(a) $7 \in B$ ☐ (b) $16 \notin A$ ☐

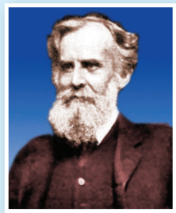
(c) $\{15, 20, 25\} \subset C$ ☐ (d) $\{10, 12\} \subset B$ ☐

1.5 கணச் செயல்கள் (Set Operations)

1.5.1 வென்படம் (Venn Diagram)

வடிவியலில் கருத்துக்கள் அல்லது நிகழ்வுகளை விளக்கவும், சில சமயங்களில் கணக்குகளின் தீர்வுகள் காணவும் படங்கள் அல்லது வரைபடங்களை நாம் பயன்படுத்துகிறோம்.

கணிதவியலில் கணங்களுக்கு இடையேயான தொடர்புகளைக் குறிக்கவும் மற்றும் கணச்செயல்களைப் பார்த்து புரிந்து கொள்ளவும் நாம் பயன்படுத்தும் படங்கள் வென்படங்கள் ஆகும்.



ஜான் வென்

(1834-1883)

ஜான் வென் என்ற பிரிட்டிஷ் நாட்டு கணித மேதை கணங்களுக்கும் கணச் செயல்களுக்கும் உள்ள தொடர்புகளைக் கண்ணால் காண்பதற்கு உதவும் வரைபடங்கள் வரையும் முறையைப் பயன்படுத்தினார்.

1.5.2 அனைத்துகணம் (Universal Set)

கொடுக்கப்பட்ட விவாதத்திற்குப் பொருத்தமான அனைத்து உறுப்புகளையும் உள்ளடக்கிய ஒரு கணத்தினைக் கருதுவது சில நேரங்களில் பயனுள்ளதாகிறது.

முக்கிய கருத்து **அனைத்துக்கணம்**

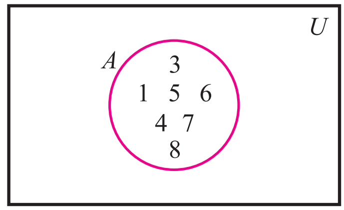
ஒரு குறிப்பிட்ட விவாதத்திற்கு எடுத்துக் கொண்ட அனைத்து உறுப்புகளையும் உள்ளடக்கிய கணம் அனைத்துகணம் எனப்படும். அனைத்துகணம் U என்ற குறியீட்டால் குறிப்பிடப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

தற்சமயம் நாம் விவாதத்திற்கு எடுத்துக் கொண்ட உறுப்புகள் முழுக்கள் எனில், அனைத்துகணம் U என்பது அனைத்து முழுக்களின் கணமாகும். அதாவது, $U = \{n : n \in \mathbb{Z}\}$

குறிப்பு ஒவ்வொரு கணக்கிற்கும் அனைத்துகணம் மாறுபடலாம்.

வென்படங்கள் மூலம் குறிப்பிடும் போது பொதுவாக அனைத்துகணத்தை ஒரு செவ்வகமாகவும், அதன் தகு உட்கணங்களை வட்டங்கள் அல்லது நீள்வட்டங்களாகவும் குறிப்போம். அவற்றின் உறுப்புகளைப் படத்தின் உள்ளே எழுதுவோம்.



படம் 1.1

1.5.3 ஒரு கணத்தின் நிரப்புக்கணம் (Complement of a Set)

முக்கிய கருத்து **நிரப்புக்கணம்**

கணம் A இல் இல்லாத ஆனால் அனைத்துகணம் U இல் உள்ள உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம், A இன் நிரப்புக்கணம் எனப்படும். A என்ற கணத்தின் நிரப்புக்கணத்தை A' அல்லது A^c எனக் குறிப்போம்.

குறியீட்டைப் படித்தல்

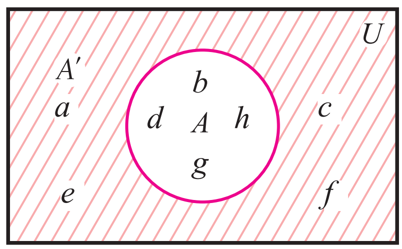
குறியீட்டில், $A' = \{x : x \in U$ மற்றும் $x \notin A\}$

எடுத்துக்காட்டாக,

U $= \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ மற்றும் $A = \{b,d,g,h\}$ எனில்,

$A' = \{a,c,e,f\}$

வென்படத்தில், கணம் A இன் நிரப்புக்கணம் A'ஐ படம் 1.2 இல் உள்ளது போல் குறிப்பிடலாம்.



A' (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம் 1.2

குறிப்பு (i) $(A')' = A$ (ii) $\varnothing' = U$ (iii) $U' = \varnothing$

1.5.4 இரு கணங்களின் சேர்ப்பு (Union of Two Sets)

முக்கிய கருத்து **சேர்ப்புக்கணம்**

A, B என்ற இரு கணங்களின் சேர்ப்புக்கணம் என்பது A அல்லது B அல்லது இரண்டிலும் உள்ள உறுப்புகளைக் கொண்ட கணமாகும். இதனை $A \cup B$ என எழுதலாம்.

குறியீட்டைப் படித்தல்

$\cup$	சேர்ப்பு

$A \cup B$ என்பதை ‘A சேர்ப்பு B’ எனப் படிப்போம்.

குறியீட்டில், $A \cup B = \{x : x \in A$ அல்லது $x \in B\}$

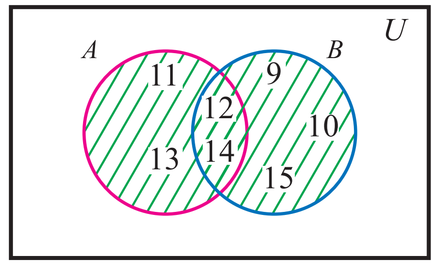
எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{11, 12, 13, 14\}$ மற்றும்

$B = \{9, 10, 12, 14, 15\}$ எனில்,

$A \cup B = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

இரு கணங்களின் சேர்ப்பினை வென்படத்தில் படம் 1.3 இல் உள்ளவாறு குறிப்பிடலாம்.



$A \cup B$ (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம் 1.3

குறிப்பு

(i) $A \cup A = A$ (ii) $A \cup \varnothing = A$ (iii) $A \cup A' = U$

(iv) A என்ற கணம் அனைத்துக்கணம் U இன் உட்கணம் எனில், $A \cup U = U$

(v) $A \subseteq B$ எனில், எனில் மட்டுமே $A \cup B = B$ (vi) $A \cup B = B \cup A$

எடுத்துக்காட்டு 1.12

பின்வரும் கணங்களின் சேர்ப்பினைக் காண்க.

(i) $A = \{1,2,3,5,6\}$ மற்றும் $B = \{4,5,6,7,8\}$

(ii) $X = \{3,4,5\}$ மற்றும் $Y = \varnothing$

நினைவு கூர்ந்து விடையளி !
$A \subset (A \cup B)$ மற்றும் $B \subset (A \cup B)$ என கூறமுடியுமா?

தீர்வு (i) $A = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ மற்றும் $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$

1, 2, 3, 5, 6 ; 4, 5, 6, 7, 8 (5, 6 திரும்ப வந்துள்ளன)

$\therefore A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

(ii) $X = \{3,4,5\}$, $Y = \varnothing$. Y இல் உறுப்புகள் எதுவும் இல்லை.

$\therefore X \cup Y = \{3,4,5\}$

1.5.5 இரு கணங்களின் வெட்டு (Intersection of Two Sets)

முக்கிய கருத்து **வெட்டுக்கணம்**

A, B என்ற இரு கணங்களின் வெட்டுக்கணம் என்பது A மற்றும் B இரண்டிலும் பொதுவாக உள்ள உறுப்புகளைக் கொண்ட கணமாகும். இதனை $A \cap B$ என எழுதுவோம்.

குறியீட்டைப் படித்தல்

$\cap$	வெட்டு

$A \cap B$ என்பதை 'A வெட்டு B' எனப் படிக்கலாம்.

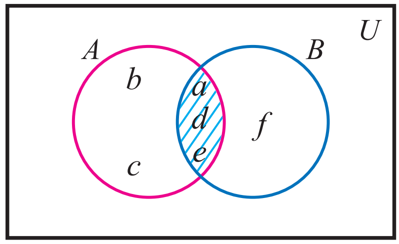
குறியீட்டில், $A \cap B = \{x : x \in A$ மற்றும் $x \in B\}$ என எழுதுவோம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A=\{a,b,c,d,e\}$ மற்றும் $B=\{a,d,e,f\}$ என்க.

$\therefore A\cap B=\{a,d,e\}$

இரு கணங்களின் வெட்டுக்கணத்தை படம் 1.4 இல் காட்டியுள்ளவாறு வென்படத்தின் மூலம் குறிப்பிடலாம்.



$A\cap B$ (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம் 1.4

குறிப்பு

(i) $A\cap A=A$ (ii) $A\cap\varnothing=\varnothing$

(iii) $A\cap A'=\varnothing$ (iv) $A\cap B=B\cap A$

(v) A என்பது அனைத்துக்கணம் U வின் உட்கணம் எனில் $A\cap U=A$

(vi) $A\subseteq B$ எனில், எனில் மட்டுமே $A\cap B=A$

எடுத்துக்காட்டு 1.13

(i) $A=\{10, 11, 12, 13\}$, $B=\{12, 13, 14, 15\}$

(ii) $A=\{5, 9, 11\}$, $B=\varnothing$ எனில், $A\cap B$ காண்க.

நினைவு கூர்ந்து விடையளி!
$(A\cap B)\subset A$ மற்றும்
$(A\cap B)\subset B$ எனக் கூறமுடியுமா?

தீர்வு (i) A = {10, 11, 12, 13} மற்றும் B = {12, 13, 14, 15}.

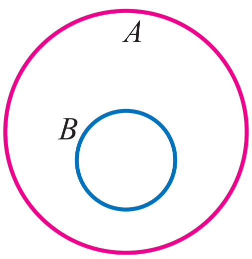
12, 13 என்பன A மற்றும் B இரண்டிற்கும் பொதுவானவை.

$\therefore\ A\cap B=\{12, 13\}$

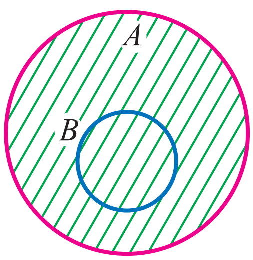
(ii) $A=\{5, 9, 11\}$ மற்றும் $B=\varnothing$.

A மற்றும் B க்குப் பொதுவான உறுப்பு எதுவும் இல்லை என்பதால், $A\cap B=\varnothing$

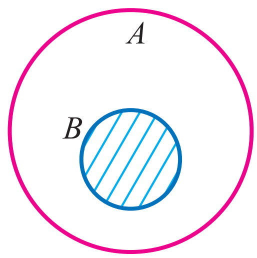
குறிப்புரை $B\subseteq A$ என்றவாறு உள்ள A, B என்ற கணங்களின் சேர்ப்பு மற்றும் வெட்டு ஆகியவற்றை வென்படங்களின் மூலம் முறையே படம் 1.6 மற்றும் படம் 1.7 இல் காட்டியுள்ளவாறு குறிப்போம்.



$B\subseteq A$
படம்1.5



$A\cup B$ (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம்1.6



$A\cap B$ (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம்1.7

1.5.6 வெட்டாக்கணங்கள் அல்லது சேராக்கணங்கள் (Disjoint Sets)

முக்கிய கருத்து	வெட்டாக்கணம்

A மற்றும் B என்ற இரு கணங்களுக்கும் பொதுவான உறுப்பு இல்லையெனில், அவ்விரு கணங்களும் வெட்டாக்கணங்கள் அல்லது சேராக்கணங்கள் எனப்படும்.

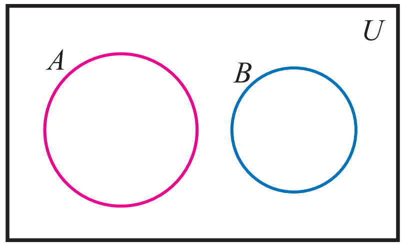
A மற்றும் B என்ற கணங்கள் வெட்டாக்கணங்கள் எனில், $A\cap B=\varnothing$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{5, 6, 7, 8\}$ மற்றும் $B = \{11, 12, 13\}$ என்ற கணங்களைக் கருதுக.

இப்போது $A \cap B = \varnothing$. எனவே, A மற்றும் B என்பன வெட்டாக்கணங்களாகும்.

A, B என்ற இரு வெட்டாக்கணங்களைப் படம் 1.8-ல் காட்டியுள்ளவாறு வென்படம் மூலம் குறிப்பிடலாம்.

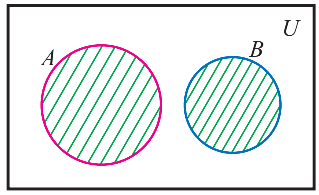


வெட்டாக்கணங்கள்
படம்1.8

குறிப்பு

(i) A மற்றும் B என்ற இரு வெட்டாக்கணங்களின் சேர்ப்பை படம் 1.9-ல் காட்டியுள்ளவாறு வென்படம் மூலம் குறிக்கலாம்.

(ii) $A \cap B \neq \varnothing$ எனில், A மற்றும் B என்ற இருகணங்களும் வெட்டும் கணங்கள் (overlapping sets) எனப்படும்.



$A \cup B$ (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம்1.9

எடுத்துக்காட்டு 1.14

கொடுக்கப்பட்ட $A = \{4, 5, 6, 7\}$ மற்றும் $B = \{1, 3, 8, 9\}$ என்ற இரு கணங்களுக்கு $A \cap B$ காண்க.

தீர்வு $A = \{4, 5, 6, 7\}$ மற்றும் $B = \{1, 3, 8, 9\}$. இங்கு $A \cap B = \varnothing$.
எனவே, A மற்றும் B என்பன வெட்டாக்கணங்களாகும்.

1.5.7 இரு கணங்களின் வித்தியாசம் (Difference of Two sets)

முக்கிய கருத்து — **கணங்களின் வித்தியாசம்**

A மற்றும் B என்ற இரு கணங்களின் வித்தியாச கணமானது, A-ல் உள்ள ஆனால் B இல் இல்லாத உறுப்புகளைக் கொண்ட கணமாகும். இரு கணங்களின் வித்தியாசமானது $A - B$ அல்லது $A \backslash B$ எனக் குறிக்கப்படும்.

குறியீட்டைப் படித்தல்

$A - B$ அல்லது $A \backslash B$	A வித்தியாசம் B

குறியீட்டில், $A - B = \{x : x \in A$ மற்றும் $x \notin B\}$

இதேபோல், $B - A = \{x : x \in B$ மற்றும் $x \notin A\}$.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ மற்றும் $B = \{5, 7, 9, 11, 13\}$ என்ற கணங்களைக் கருதுக.

$A - B$ ஐக்காண A யிலிருந்து B இல் உள்ள உறுப்புகளை நாம் நீக்குகிறோம்.

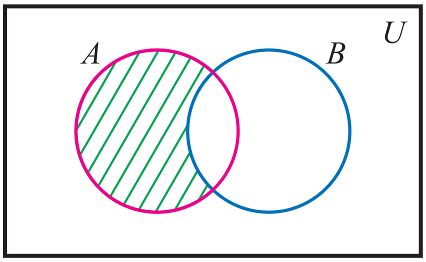
$\therefore \quad A - B = \{2, 3\}$

குறிப்பு

(i) பொதுவாக, $A - B \neq B - A$. (ii) $A - B = B - A \Leftrightarrow A = B$

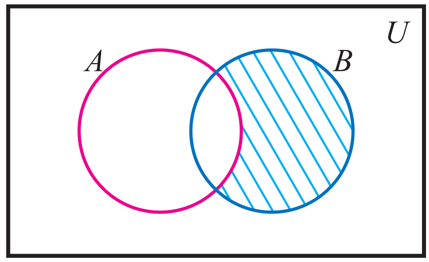
(iii) $U - A = A'$ (iv) $U - A' = A$

A மற்றும் B என்ற இரு கணங்களின் வித்தியாசமானது படம் 1.10 மற்றும் படம் 1.11 ஆகியவற்றில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு வென்படங்கள் மூலம் குறிக்கப்படும். நிழலிட்டப்பகுதி இரு கணங்களின் வித்தியாசத்தைக் குறிக்கிறது.



A – B

படம் 1.10



B – A

படம் 1.11

எடுத்துக்காட்டு 1.15

$A = \{-2, -1, 0, 3, 4\}$, $B = \{-1, 3, 5\}$ எனில் (i) $A - B$ (ii) $B - A$ காண்க.

தீர்வு $A = \{-2, -1, 0, 3, 4\}$ மற்றும் $B = \{-1, 3, 5\}$.

(i) $A - B = \{-2, 0, 4\}$ (ii) $B - A = \{5\}$

1.5.8 கணங்களின் சமச்சீர் வித்தியாசம் (Symmetric Difference of Sets)

முக்கிய கருத்து இரு கணங்களின் சமச்சீர் வித்தியாசம்

A மற்றும் B என்ற இரு கணங்களின் சமச்சீர் வித்தியாசமானது அவற்றின் வித்தியாசங்களின் சேர்ப்பாகும். இதனை $A \Delta B$ எனக்குறிப்பிடுவோம்.

குறியீட்டைப் படித்தல்

$A \Delta B$	A சமச்சீர் வித்தியாசம் B

குறியீட்டில், $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

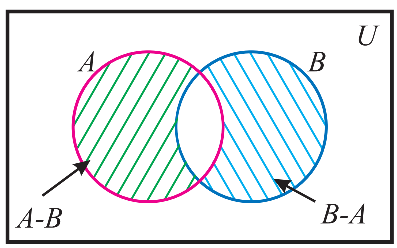
எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{a, b, c, d\}$ மற்றும் $B = \{b, d, e, f\}$ என்ற கணங்களைக் கருதுக.

$A - B = \{a, c\}$ மற்றும் $B - A = \{e, f\}$ என நாம் பெறுகிறோம்.

$\therefore \; A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{a, c, e, f\}$

A மற்றும் B என்ற இரு கணங்களின் சமச்சீர் வித்தியாசமானது படம் 1.12 இல் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு வென்படம் மூலம் குறிக்கப்படும். நிழலிட்டப்பகுதி A மற்றும் B கணங்களின் சமச்சீர் வித்தியாசத்தைக் குறிக்கிறது.



$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$

படம்1.12

குறிப்பு (i) $A \triangle A = \varnothing$ (ii) $A \triangle B = B \triangle A$

(iii) வென்படம் 1.12 இல் இருந்து $A \triangle B = \{x : x \in A, x \in B$ மற்றும் $x \notin A \cap B\}$ என எழுதலாம். எனவே A மற்றும் B இரண்டிற்கும் பொதுவாக இல்லாத உறுப்புகளைப் பட்டியலிடுவதன் மூலம் நாம் $A \triangle B$ இன் உறுப்புகளை நேரடியாகக் காணமுடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.16

$A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ மற்றும் $B = \{5, 7, 9, 11, 13\}$ எனில், $A \triangle B$ காண்க.

தீர்வு $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ மற்றும் $B = \{5, 7, 9, 11, 13\}$

$A - B = \{2, 3\}$ மற்றும் $B - A = \{9, 13\}$.

ஆதலால், $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = \{2, 3, 9, 13\}$

பயிற்சி 1.2

1. பின்வரும் கணங்களுக்கு $A \cup B$ மற்றும் $A \cap B$ காண்க.
   (i) $A = \{0, 1, 2, 4, 6\}$ மற்றும் $B = \{-3, -1, 0, 2, 4, 5\}$
   (ii) $A = \{2, 4, 6, 8\}$ மற்றும் $B = \varnothing$
   (iii) $A = \{x : x \in \mathbb{N}, x \le 5\}$ மற்றும் $B = \{x : x$ என்பது 11ஐ விடக் குறைவான பகாஎண்$\}$
   (iv) $A = \{x : x \in \mathbb{N}, 2 < x \le 7\}$ மற்றும் $B = \{x : x \in \mathbb{W}, 0 \le x \le 6\}$

2. $A = \{x : x$ என்பது 5-ன் மடங்கு, $x \le 30$ மற்றும் $x \in \mathbb{N}\}$,
   $B = \{1, 3, 7, 10, 12, 15, 18, 25\}$ எனில், (i) $A \cup B$ (ii) $A \cap B$ காண்க.

3. $X = \{x : x = 2n, x \le 20$ மற்றும் $n \in \mathbb{N}\}$ மற்றும்
   $Y = \{x : x = 4n, x \le 20$ மற்றும் $n \in \mathbb{W}\}$ எனில், (i) $X \cup Y$ (ii) $X \cap Y$ காண்க.

4. $U = \{1, 2, 3, 6, 7, 12, 17, 21, 35, 52, 56\}$,
   $P = \{$7 ஆல் வகுபடும் எண்கள்$\}$, $Q = \{$பகாஎண்கள்$\}$ எனில்,
   $\{x : x \in P \cap Q\}$ என்ற கணத்தின் உறுப்புகளைப் பட்டியலிடுக.

5. பின்வரும் கணங்களில் எவையிரண்டு வெட்டாக்கணங்கள் எனக் கூறுக.
   (i) $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{x : x$ ஒரு இரட்டைப்படை எண் < 10, $x \in \mathbb{N}\}$
   (ii) $X = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $Y = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$
   (iii) $P = \{x : x$ ஒரு பகாஎண் $< 15\}$; $Q = \{x : x$ என்பது 2 இன் மடங்கு மற்றும் $x < 16\}$
   (iv) $R = \{a, b, c, d, e\}$, $S = \{d, e, a, b, c\}$

6. (i) $U = \{x : 0 \le x \le 10, x \in \mathbb{W}\}$ மற்றும் $A = \{x : x$ என்பது 3 இன் மடங்கு$\}$ எனில், A' ஐக் காண்க.
   (ii) U என்பது இயல் எண்களின் கணம் மற்றும் A' என்பது அனைத்து பகுஎண்களின் கணம் எனில், A ஐக் காண்க.

7. $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $A = \{a, b, c, d\}$ மற்றும் $B = \{b, d, f, g\}$ எனில், பின்வரும் கணங்களைக் காண்க.
   (i) $A \cup B$ (ii) $(A \cup B)'$ (iii) $A \cap B$ (iv) $(A \cap B)'$

8. $U = \{x : 1 \le x \le 10, x \in \mathbb{N}\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ மற்றும் $B = \{2, 3, 5, 9, 10\}$ எனில், பின்வரும் கணங்களைக் காண்க.
   (i) A' (ii) B' (iii) $A' \cup B'$ (iv) $A' \cap B'$

9. $U = \{3, 7, 9, 11, 15, 17, 18\}$, $M = \{3, 7, 9, 11\}$ மற்றும் $N = \{7, 11, 15, 17\}$ எனில், பின்வரும் கணங்களைக் காண்க.

(i) $M - N$ (ii) $N - M$ (iii) $N' - M$ (iv) $M' - N$

(v) $M \cap (M - N)$ (vi) $N \cup (N - M)$ (vii) $n(M - N)$

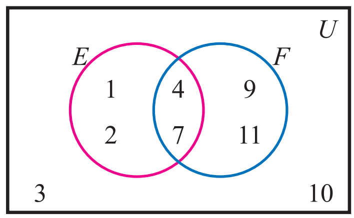
10. $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, $B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ மற்றும் $D = \{5, 10, 15, 20, 25\}$ எனில், பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

    (i) $A - B$ (ii) $B - C$ (iii) $C - D$ (iv) $D - A$ (v) $n(A - C)$

11. $U = \{x : x$ என்பது 50 ஐ விடக் குறைவான மிகை முழு$\}$,
    $A = \{x : x$ என்பது 4 ஆல் வகுபடும்$\}$,
    $B = \{x : x$ ஐ 14 ஆல் வகுத்தால் மீதி 2 கிடைக்கும்$\}$
    எனில், (i) $U,\ A$ மற்றும் B ஆகியவற்றின் உறுப்புகளைப் பட்டியலிடுக.
    (ii) $A \cup B,\ A \cap B,\ n(A \cup B),\ n(A \cap B)$ ஆகியவற்றைக் காண்க

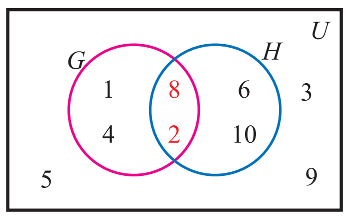
12. பின்வரும் கணங்களின் சமச்சீர் வித்தியாசம் காண்க.
    (i) $X = \{a, d, f, g, h\}, Y = \{b, e, g, h, k\}$
    (ii) $P = \{x : 3 < x < 9, x \in \mathbb{N}\},\ Q = \{x : x < 5, x \in \mathbb{W}\}$
    (iii) $A = \{-3, -2, 0, 2, 3, 5\},\ B = \{-4, -3, -1, 0, 2, 3\}$

13. வென்படம் 1.13ஐப் பயன்படுத்தி பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடையளி.
    (i) $U, E, F, E \cup F$ மற்றும் $E \cap F$ இவற்றின் உறுப்புகளைப் பட்டியலிடுக.
    (ii) $n(U)$, $n(E \cup F)$ மற்றும் $n(E \cap F)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.



படம் 1.13

14. வென்படம் 1.14ஐப் பயன்படுத்தி பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடையளி.
    (i) U, G மற்றும் H இவற்றின் உறுப்புகளைப் பட்டியலிடுக
    (ii) G', H', $G' \cap H'$, $n(G \cup H)'$ மற்றும் $n(G \cap H)'$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

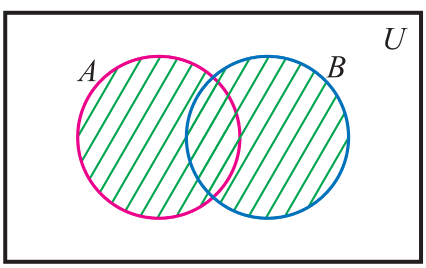


படம் 1.14

1.6 கணச் செயல்களை வென்படங்கள் மூலம் குறிப்பிடுதல்

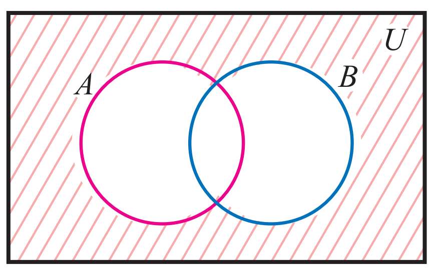
இப்பொழுது மேலும் சில கணச் செயல்களை வென்படங்கள் மூலம் குறிப்பிடுவோம்.

(a) $A \cup B$



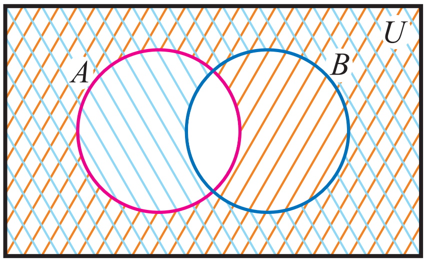
படம் 1.15

(b) $(A \cup B)'$

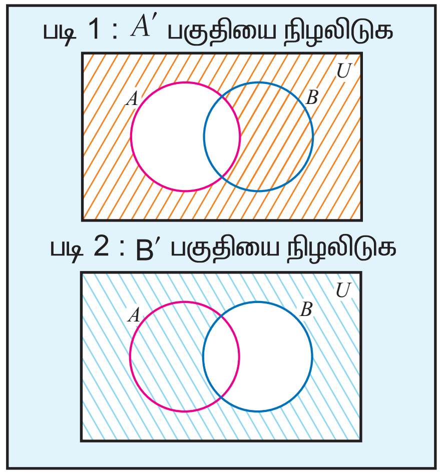


படம் 1.16

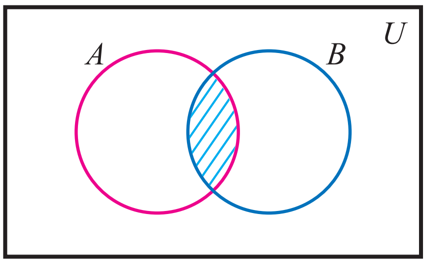
(c) $A' \cup B'$



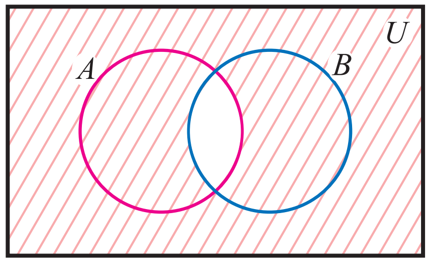
$A' \cup B'$ (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம் 1.17



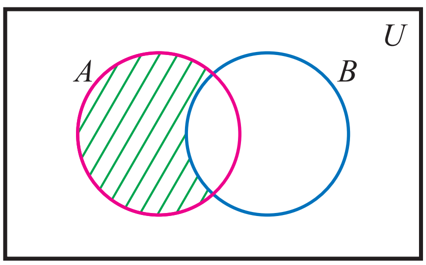
இதேபோல், கீழ்காணும் படங்களில் நிழலிட்டப்பகுதிகள் ஒவ்வொன்றும் பின்வரும் கணச்செயல்களைக் குறிக்கின்றன.



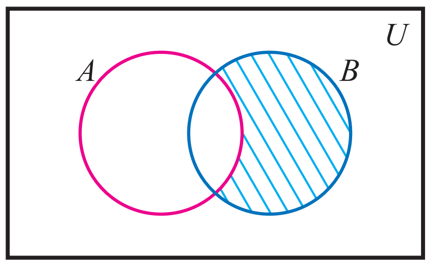
$A \cap B$ (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம் 1.18



$(A \cap B)'$ (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம் 1.19



$A \cap B'$ (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம் 1.20.

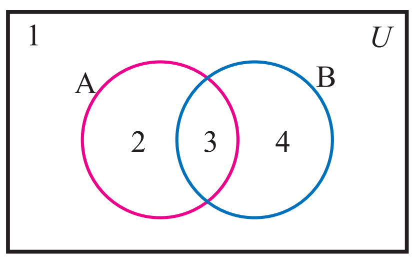


$A' \cap B$ (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம் 1.21

குறிப்புரை

கணங்கள் மற்றும் கணச் செயல்களை வென்படங்கள் மூலம் குறிப்பிட பின்வரும் முறையையும் நாம் பயன்படுத்தலாம்.

கணங்கள் A மற்றும் B என்பவை அனைத்துக் கணத்தைப்படம் 1.22இல் உள்ளவாறு நான்கு பகுதிகளாகப் பிரிக்கிறது. இந்நான்கு பகுதிகளும் அடையாளத்திற்காக எண்ணிடப்படுகின்றன. இந்த எண்ணிடுதல் விருப்பம் போல் (arbitrary) அமையலாம்.

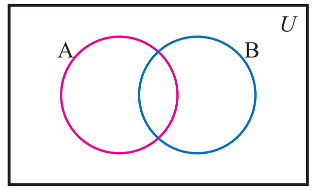


படம் 1.22

பகுதி 1 A மற்றும் B என்ற இருகணங்களுக்கும் வெளியேயுள்ள உறுப்புகளைக் கொண்டிருக்கும்.
பகுதி 2 A இல் உள்ள ஆனால் B இல் இல்லாத உறுப்புகளைக் கொண்டிருக்கும்.
பகுதி 3 A மற்றும் B என்ற இரு கணங்களுக்கும் பொதுவான உறுப்புகளைக் கொண்டிருக்கும்.
பகுதி 4 B இல் உள்ள ஆனால் A இல் இல்லாத உறுப்புகளைக் கொண்டிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.17

அருகிலுள்ள படத்தைப் போன்ற வென்படங்கள் வரைந்து பின்வரும் கணங்களைக் குறிக்கும் பகுதிகளை நிழலிடுக

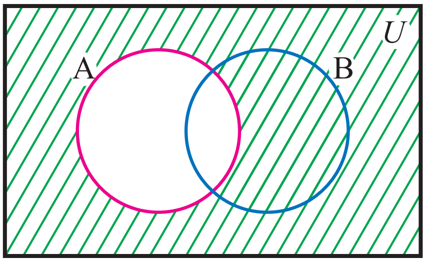


படம் 1.23

(i) A' (ii) B' (iii) $A' \cup B'$ (iv) $(A \cup B)'$ (v) $A' \cap B'$

தீர்வு

(i) A'

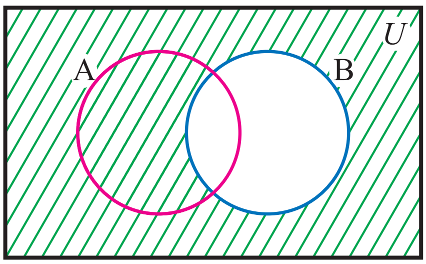


A' (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம் 1.24

நிழலிட குறிப்பு

கணம்	நிழலிட்டப் பகுதி
A'	1 மற்றும் 4

(ii) B'

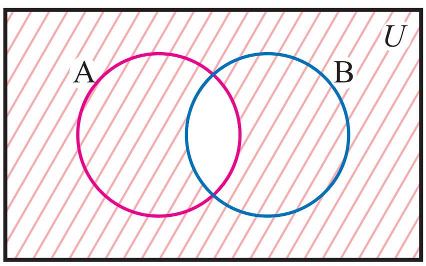


B' (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம் 1.25

நிழலிட குறிப்பு

கணம்	நிழலிட்டப் பகுதி
B'	1 மற்றும் 2

(iii) $A' \cup B'$

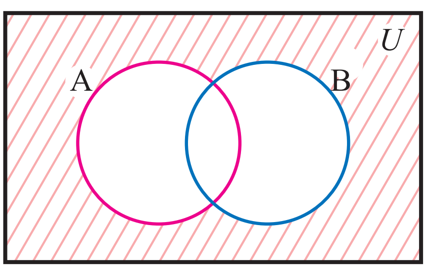


$A' \cup B'$ (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம் 1.26

நிழலிட குறிப்பு

கணம்	நிழலிட்டப் பகுதி
A'	1 மற்றும் 4
B'	1 மற்றும் 2
$A' \cup B'$	1, 2 மற்றும் 4

(iv) $(A \cup B)'$

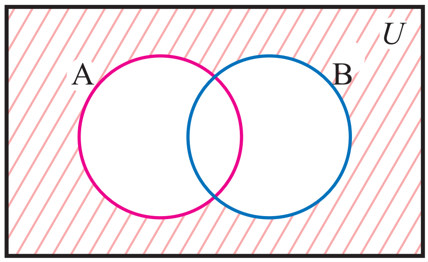


$(A \cup B)'$ (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம் 1.27

நிழலிட குறிப்பு

கணம்	நிழலிட்டப் பகுதி
$A \cup B$	2, 3 மற்றும் 4
$(A \cup B)'$	1

(v) $A' \cap B'$



$A' \cap B'$ (நிழலிட்டப்பகுதி)

படம் 1.28

நிழலிட குறிப்பு

கணம்	நிழலிட்டப் பகுதி
A'	1 மற்றும் 4
B'	1 மற்றும் 2
$A' \cap B'$	1

முக்கிய முடிவுகள்

A மற்றும் B என்ற முடிவுறு கணங்களுக்குப் பின்வரும் பயனுள்ள சில முடிவுகளை நாம் காண்போம்.

(i) $n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$

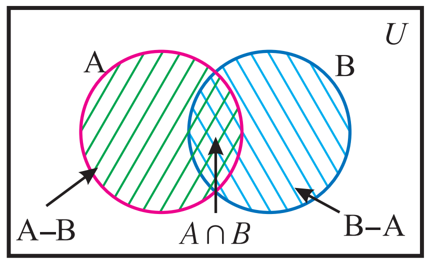
(ii) $n(B) = n(B - A) + n(A \cap B)$

(iii) $n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$

(iv) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(v) $A \cap B = \varnothing$ எனும் போது, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

(vi) $n(A) + n(A') = n(U)$



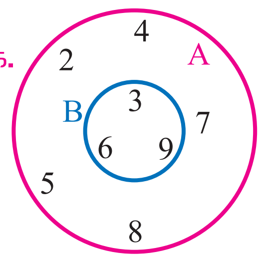
படம் 1.29

எடுத்துக்காட்டு 1.18

கொடுக்கப்பட்ட வென்படத்திலிருந்து பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) A (ii) B (iii) $A \cup B$ (iv) $A \cap B$

மேலும் $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ எனச் சரிபார்க்க.



படம் 1.30

தீர்வு வென்படத்திலிருந்து (i) A = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

(ii) B = {3, 6, 9,} (iii) $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (iv) $A \cap B = \{3, 6, 9\}$

இப்பொழுது, $n(A) = 8,\ n(B) = 3,\ n(A \cup B) = 8,\ n(A \cap B) = 3$.

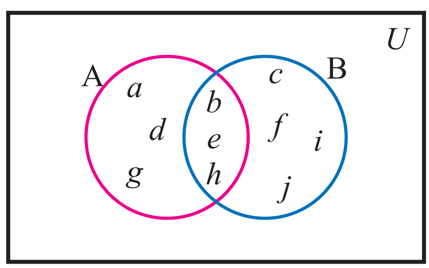
$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 8 + 3 - 3 = 8$

எனவே, $n(A) + n(B) - n(A \cap B) = n(A \cup B)$

எடுத்துக்காட்டு 1.19

கொடுக்கப்பட்டுள்ள வென்படத்திலிருந்து

(i) A (ii) B (iii) $A \cup B$ (iv) $A \cap B$ ஆகியவற்றைக் காண்க. மேலும் $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ எனச் சரிபார்க்க.



படம் 1.31

தீர்வு வென்படத்திலிருந்து

(i) $A = \{a,b,d,e,g,h\}$ (ii) $B = \{b,c,e,f,h,i,j\}$

(iii) $A \cup B = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}$ (iv) $A \cap B = \{b,e,h\}$

எனவே, $n(A) = 6,\ n(B) = 7,\ n(A \cup B) = 10,\ n(A \cap B) = 3$.

$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 6 + 7 - 3 = 10$

எனவே, $n(A) + n(B) - n(A \cap B) = n(A \cup B)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.20

$n(A) = 12, n(B) = 17$ மற்றும் $n(A \cup B) = 21$ எனில், $n(A \cap B)$ காண்க.

தீர்வு $n(A) = 12, n(B) = 17$ மற்றும் $n(A \cup B) = 21$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த,

$n(A \cap B) = 12 + 17 - 21 = 8$

எடுத்துக்காட்டு 1.21

ஒரு நகரத்தில் உள்ளவர்களில் 65% நபர்கள் தமிழ் திரைப்படங்களையும் 40% நபர்கள் ஆங்கிலத் திரைப்படங்களையும் காண்கிறார்கள். 20% நபர்கள் தமிழ் மற்றும் ஆங்கிலத் திரைப்படங்கள் இரண்டையும் காண்கிறார்கள். இவ்விரு மொழித் திரைப்படங்களையும் பார்க்காதவர்கள் எத்தனை சதவீதம் எனக்காண்க.

தீர்வு நகரில் உள்ள மொத்த நபர்கள் 100 பேர் என்க. T என்பது தமிழ் திரைப்படம் காண்போர் கணம் மற்றும் E என்பது ஆங்கிலத் திரைப்படம் காண்போர் கணம் என்க.

பிறகு $n(T) = 65, n(E) = 40$ மற்றும் $n(T \cap E) = 20$.

இவ்விரு திரைப்படங்களில் ஏதேனும் ஒரு மொழித் திரைப்படத்தையாவது காணும் மக்களின் சதவீதம்

$$n(T \cup E) = n(T) + n(E) - n(T \cap E)$$
$$= 65 + 40 - 20 = 85$$

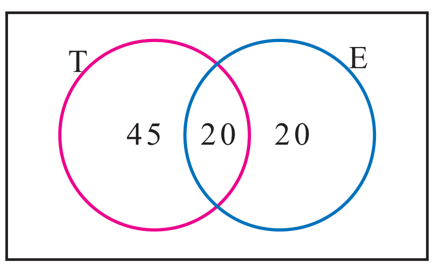
எனவே, இவ்விரு திரைப்படங்களில் எந்த ஒரு திரைப்படத்தையும் பார்க்காதவர் சதவீதம்

$$100 - 85 = 15$$

மாற்றுமுறை

வென்படத்திலிருந்து, இரு திரைப்படங்களில் ஏதேனும் ஒரு திரைப்படத்தையாவது காணும் மக்களின் சதவீதம் $= 45 + 20 + 20 = 85$

எனவே, இவ்விரு மொழித்திரைபடங்களில் எந்த ஒரு திரைப்படத்தையும் பார்க்காதவர் சதவீதம் $= 100 - 85 = 15$



படம் 1.32

எடுத்துக்காட்டு 1.22

1000 குடும்பங்களில் நடத்தப்பட்ட ஓர் ஆய்வில், 484 குடும்பங்கள் மின்சார அடுப்பையும், 552 குடும்பங்கள் எரிவாயு அடுப்பையும் பயன்படுத்துவதாக கண்டறியப்பட்டது. அனைத்து குடும்பங்களும் இவ்விரு அடுப்புகளில் குறைந்தபட்சம் ஏதேனும் ஒரு அடுப்பை பயன்படுத்துகிறார்கள் எனில், இரண்டு வகை அடுப்புகளையும் பயன்படுத்தும் குடும்பங்கள் எத்தனை எனக் காண்க.

தீர்வு E என்பது மின்சார அடுப்பைப் பயன்படுத்தும் குடும்பங்களின் கணம் மற்றும் G என்பது எரிவாயு அடுப்பைப் பயன்படுத்தும் குடும்பங்களின் கணம் என்க.

$n(E) = 484, n(G) = 552, \ n(E \cup G) = 1000.$

இரண்டு வகை அடுப்புகளையும் பயன்படுத்தும் குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை x என்க. பின்னர், $n(E \cap G) = x$

$n(E \cup G) = n(E) + n(G) - n(E \cap G)$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த,

$$1000 = 484 + 552 - x$$

$$\Rightarrow \quad x = 1036 - 1000 = 36$$

எனவே, 36 குடும்பங்கள் இரண்டு வகை அடுப்புகளையும் பயன்படுத்துகின்றனர்.

மாற்றுமுறை

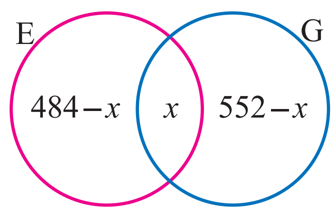
வென்படத்திலிருந்து,

$$484 - x + x + 552 - x = 1000$$

$$\Rightarrow \quad 1036 - x = 1000$$

$$\Rightarrow \quad -x = -36$$

$$x = 36$$



படம் 1.33

எனவே, 36 குடும்பங்கள் இரண்டு வகை அடுப்புகளையும் பயன்படுத்துகின்றனர்.

எடுத்துக்காட்டு 1.23

50 மாணவர்கள் உள்ள ஒரு வகுப்பில், ஒவ்வொரு மாணவனும் கணிதம் அல்லது அறிவியல் அல்லது இரண்டிலும் தேர்ச்சி பெற்றுள்ளனர். 10 மாணவர்கள் இரண்டு பாடங்களிலும் தேர்ச்சி பெற்றுள்ளனர் மற்றும் 28 மாணவர்கள் அறிவியலில் தேர்ச்சி பெற்றுள்ளனர். கணிதத்தில் தேர்ச்சி பெற்ற மாணவர்கள் எத்தனை பேர்?

தீர்வு $M =$ கணிதத்தில் தேர்ச்சி பெற்ற மாணவர்களின் கணம் என்க.

$S =$ அறிவியலில் தேர்ச்சி பெற்ற மாணவர்களின் கணம் என்க.

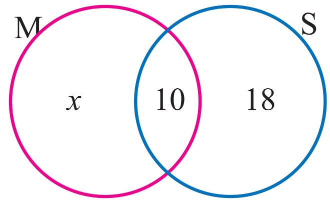
பின்னர், $n(S) = 28, \ n(M \cap S) = 10, \ n(M \cup S) = 50$

$$n(M \cup S) = n(M) + n(S) - n(M \cap S)$$

$$50 = n(M) + 28 - 10$$

$$\Rightarrow \quad n(M) = 32$$

மாற்றுமுறை



படம் 1.34

வென்படத்திலிருந்து,

$$x + 10 + 18 = 50$$

$$x = 50 - 28 = 22$$

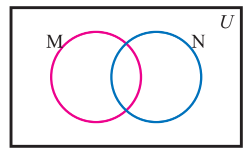
கணிதத்தில் தேர்ச்சி பெற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $= x + 10 = 22 + 10 = 32$

பயிற்சி 1.3

1. பின்வரும் கணங்களின் உறுப்புகளைக் கொடுக்கப்பட்ட வென்படத்தில் சரியான இடத்தில் குறிக்கவும்.

   $U = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$

   $M = \{5, 8, 10, 11\}$, $N = \{5, 6, 7, 9, 10\}$



படம் 1.35

2. A, B என்ற இரு கணங்களில், A என்பது 50 உறுப்புகளையும் B என்பது 65 உறுப்புகளையும் மற்றும் $A \cup B$ என்பது 100 உறுப்புகளையும் கொண்டிருந்தால், $A \cap B$ என்பது எத்தனை உறுப்புகளைக் கொண்டிருக்கும் ?

3. A, B என்ற இருகணங்கள் முறையே 13 மற்றும் 16 உறுப்புகளைப் பெற்றிருந்தால், $A \cup B$ பெற்றுள்ள குறைந்தபட்ச மற்றும் அதிகபட்ச உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க

4. $n(A \cap B) = 5$, $n(A \cup B) = 35$, $n(A) = 13$ எனில், $n(B)$ காண்க.

5. $n(A) = 26$, $n(B) = 10$, $n(A \cup B) = 30$, $n(A') = 17$ எனில், $n(A \cap B)$ மற்றும் $n(\cup)$ காண்க.

6. $n(\cup) = 38$, $n(A) = 16$, $n(A \cap B) = 12$, $n(B') = 20$ எனில், $n(A \cup B)$ காண்க.

7. $n(A - B) = 30$, $n(A \cup B) = 180$ என்றவாறு உள்ள இரண்டு முடிவுறு கணங்கள் A மற்றும் B எனில், $n(B)$ ஐக் காண்க.

8. ஒரு நகரத்தின் மக்கள் தொகை 10000. இவர்களில் 5400 பேர் செய்தித்தாள் A ஐயும் 4700 பேர் செய்தித்தாள் B ஐயும் படிக்கின்றனர். 1500 பேர் இரண்டு செய்தித்தாள்களையும் படிக்கின்றனர். இவ்விரு செய்தித்தாள்களில் ஒன்றைக் கூட படிக்காத நபர்கள் எத்தனை பேர் எனக் காண்க.

9. ஒரு பள்ளியில் உள்ள அனைத்து மாணவர்களும் கால்பந்து அல்லது கைப்பந்து அல்லது இரண்டும் விளையாடுகிறார்கள். அவர்களில் 300 மாணவர்கள் கால்பந்தும், 270 மாணவர்கள் கைப்பந்தும், 120 மாணவர்கள் இரண்டு விளையாட்டுகளையும் விளையாடுகிறார்கள் எனில்,

   (i) கால்பந்து மட்டும் விளையாடும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை

   (ii) கைப்பந்து மட்டும் விளையாடும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை

   (iii) பள்ளியில் உள்ள மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை ஆகியவற்றைக் காண்க.

10. ஒரு தேர்வில், 150 மாணவர்கள் ஆங்கிலம் அல்லது கணிதத்தில் முதல் வகுப்பு மதிப்பெண்கள் பெற்றுள்ளனர். 115 மாணவர்கள் கணிதத்தில் முதல் வகுப்பு மதிப்பெண்கள் பெற்றுள்ளனர். ஆங்கிலத்தில் மட்டும் முதல் வகுப்பு மதிப்பெண் பெற்ற மாணவர்கள் எத்தனை பேர் ?

11. 30 நபர்கள் உள்ள ஒரு குழுவில் 18 பேர் தேநீர் அருந்துவார்கள். குழுவில் உள்ள ஒவ்வொரு நபரும் இவ்விரண்டில் குறைந்தபட்சம் ஒன்றையாவது அருந்துவார்கள் எனில், காபி அருந்தி தேநீர் அருந்தாதவர்கள் எத்தனை பேர் எனக் காண்க.

12. ஒரு கிராமத்தில் 60 குடும்பங்கள் உள்ளன. இவற்றில் 28 குடும்பங்கள் தமிழ் மட்டும் பேசுகிறார்கள். 20 குடும்பங்கள் உருது மட்டும் பேசுகிறார்கள். தமிழ் மற்றும் உருது இரண்டினையும் பேசும் குடும்பங்கள் எத்தனை எனக் காண்க.

13. ஒரு பள்ளியில் 150 மாணவர்கள் பத்தாம் வகுப்புத் தேர்வில் தேர்ச்சிப் பெற்றுள்ளனர். இவர்களில் மேல்நிலை வகுப்பில் 95 மாணவர்கள் பிரிவு I இக்கு விண்ணப்பித்தார்கள். 82 மாணவர்கள் பிரிவு II இக்கு விண்ணப்பித்தார்கள் 20 மாணவர்கள் இவ்விரு பிரிவுகளில் எதற்கும் விண்ணப்பிக்கவில்லை எனில், இரண்டு பிரிவுகளுக்கும் விண்ணப்பித்த மாணவர்கள் எத்தனை பேர் எனக் காண்க.

14. மின்சாதனப் பயன்பாட்டு நிறுவனத்தின் ஒரு பிரிவின் உயர் அதிகாரி பிரதீப். இவருடைய பிரிவில் உள்ள பணியாளர்கள் உயரமான மரங்களை வெட்டுவார்கள் அல்லது மின்கம்பத்தில் ஏறுவார்கள். அண்மையில், பிரதீப் அவருடைய நிறுவனத்திற்குத் தனது பிரிவு சார்பான விவர அறிக்கையைப் பின்வருமாறு அனுப்பினார்.

‘என்னுடைய பிரிவில் பணிபுரியும் 100 பணியாளர்களில், 55 பேர் உயரமான மரங்களை வெட்டுவார்கள், 50 பேர் மின் கம்பம் ஏறுவார்கள், 11 பேர் இரண்டையும் செய்வார்கள், 6 பேர் இவ்விரண்டில் எதையும் செய்ய மாட்டார்கள்’. அவர் அனுப்பிய விவரம் சரியானதா?

15. A மற்றும் B என்பன $n(A-B) = 32 + x, n(B-A) = 5x$ மற்றும் $n(A \cap B) = x$ என்றவாறு உள்ள இரு கணங்கள் என்க. இவ்விவரங்களை வென்படம்மூலம் விளக்குக. $n(A) = n(B)$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் (i) x இன் மதிப்பு (ii) $n(A \cup B)$ ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

16. ஒரு பள்ளியில் நடைபெற்ற பேச்சு மற்றும் ஓவியப் போட்டிகளில் பங்கு பெற்ற மாணவர்கள் சதவீதத்தைப் பின்வரும் அட்டவணை காட்டுகிறது.

போட்டி	பேச்சு	ஓவியம்	இரண்டும்
மாணவர்கள் சதவீதம்	55	45	20

இவ்விவரங்களைக் குறிக்க வென்படம் வரைக மற்றும் அதனைப் பயன்படுத்தி

(i) பேச்சுப் போட்டியில் மட்டும் பங்குபெற்ற

(ii) ஓவியப் போட்டியில் மட்டும் பங்கு பெற்ற

(iii) எந்தவொரு போட்டியிலும் பங்குபெறாத

மாணவர்களின் சதவீதம் காண்க.

17. ஒரு கிராமத்தின் மொத்த மக்கள் தொகை 2500. இவர்களில் 1300 நபர்கள் A வகை சோப்பையும், 1050 நபர்கள் B வகை சோப்பையும், 250 நபர்கள் இரண்டு வகை சோப்புகளையும் பயன்படுத்துகிறார்கள். இவ்விரு வகை சோப்புகளையும் பயன்படுத்தாதவர்கள் சதவீதம் காண்க.

பயிற்சி 1.4

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடு

1. $A = \{5,\{5,6\},7\}$ எனில், பின்வருவனவற்றில் எது சரியானது?
(A) $\{5,6\} \in A$ (B) $\{5\} \in A$ (C) $\{7\} \in A$ (D) $\{6\} \in A$

2. $X = \{a,\{b,c\},d\}$ எனில், பின்வருவனவற்றில் எது X இன் உட்கணமாகும்?
(A) $\{a,b\}$ (B) $\{b,c\}$ (C) $\{c,d\}$ (D) $\{a,d\}$

3. பின்வரும் கூற்றுகளில் எது சரியானது?
(i) எந்த ஒரு கணம் A க்கும், A என்பது A இன் தகு உட்கணம் ஆகும்.
(ii) எந்த ஒரு கணம் A க்கும், $\varnothing$ என்பது A இன் தகு உட்கணம் ஆகும்.
(iii) எந்த ஒரு கணம் A க்கும் A என்பது A இன் உட்கணம் ஆகும்.
(A) (i) மற்றும் (ii) (B) (ii) மற்றும் (iii) (C) (i) மற்றும் (iii) (D) (i)(ii) மற்றும் (iii)

4. A என்ற முடிவுறு கணம் m உறுப்புகளைக் கொண்டுள்ளது எனில், A இன் வெற்றற்ற தகு உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை.
(A) 2^m (B) $2^m - 1$ (C) 2^{m-1} (D) $2(2^{m-1} - 1)$

5. $\{10, 11, 12\}$ என்ற கணத்தின் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை
(A) 3 (B) 8 (C) 6 (D) 7

6. பின்வருவனவற்றில் எது சரியானது?
(A) $\{x : x^2 = -1, x \in \mathbb{Z}\} = \varnothing$ (B) $\varnothing = 0$
(C) $\varnothing = \{0\}$ (D) $\varnothing = \{\varnothing\}$

7. பின்வருவனவற்றில் எது சரியல்ல?
(A) முடிவுறு கணத்தில் ஒவ்வொரு உட்கணமும் முடிவுற்றது.
(B) $P = \{x : x - 8 = -8\}$ என்பது ஒருறுப்புக் கணமாகும்.
(C) ஒவ்வொரு கணமும் தகு உட்கணத்தைப் பெற்றிருக்கும்
(D) ஒவ்வொரு வெற்றற்ற கணமும் குறைந்தபட்சம் இரண்டு உட்கணங்கள் $\varnothing$ மற்றும் அதே கணத்தைப் பெற்றிருக்கும்.

8. பின்வருவனவற்றில் எது சரியானது?
(A) $\varnothing \subseteq \{a,b\}$ (B) $\varnothing \in \{a,b\}$ (C) $\{a\} \in \{a,b\}$ (D) $a \subseteq \{a,b\}$

9. பின்வருவனவற்றில் எது முடிவுறு கணமாகும்?

(A) $\{x : x \in \mathbb{Z}, x < 5\}$ (B) $\{x : x \in \mathbb{W}, x \geq 5\}$

(C) $\{x : x \in \mathbb{N}, x > 10\}$ (D) $\{x : x$ ஒரு இரட்டைப் பகாஎண்$\}$

10. $A = \{5,6,7,8\}$ எனில், பின்வருவனவற்றில் எது சரியல்ல?

(A) $\varnothing \subseteq A$ (B) $A \subseteq A$ (C) $\{7,8,9\} \subseteq A$ (D) $\{5\} \subset A$

11. $A = \{3,4,5,6\}$ மற்றும் $B = \{1,2,5,6\}$ எனில், $A \cup B =$

(A) $\{1,2,3,4,5,6\}$ (B) $\{1,2,3,4,6\}$ (C) $\{1,2,5,6\}$ (D) $\{3,4,5,6\}$

12. $\{x : x \in \mathbb{Z}, x^2 = 1\}$ என்ற கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

13. $n(X) = m,\ n(Y) = n$ மற்றும் $n(X \cap Y) = p$ எனில், $n(X \cup Y) =$

(A) $m + n + p$ (B) $m + n - p$ (C) $m - p$ (D) $m - n + p$

14. $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ மற்றும் $A = \{2,5,6,9,10\}$ எனில், A' என்பது

(A) $\{2,5,6,9,10\}$ (B) $\varnothing$ (C) $\{1,3,5,10\}$ (D) $\{1,3,4,7,8\}$

15. $A \subseteq B$ எனில், $A - B$ என்பது

(A) B (B) A (C) $\varnothing$ (D) $B - A$

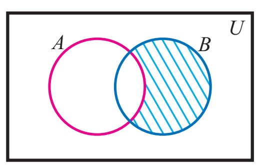
16. A என்பது B இன் தகு உட்கணம் எனில், $A \cap B =$

(A) A (B) B (C) $\varnothing$ (D) $A \cup B$

17. A என்பது B இன் தகு உட்கணம் எனில், $A \cup B =$

(A) A (B) $\varnothing$ (C) B (D) $A \cap B$

18. அருகில் உள்ள படத்தில் நிழலிட்டப் பகுதி குறிப்பது

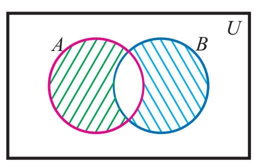


(A) $A - B$ (B) A' (C) B' (D) $B - A$

19. $A = \{a,b,c\},\ B = \{e,f,g\}$ எனில், $A \cap B =$

(A) $\varnothing$ (B) A (C) B (D) $A \cup B$

20. அருகில் உள்ள படத்தில் நிழலிட்டப் பகுதி குறிப்பது



(A) $A - B$ (B) $B - A$ (C) $A \triangle B$ (D) A'

நினைவில் கொள்க...

- நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட பொருள்களின் தொகுப்பு கணம் எனப்படும்.
- ஒரு கணத்தினை பின்வரும் மூன்று வழிகளில் ஏதேனும் ஒன்றால் குறிப்பிடலாம்
  - (i) விவரித்தல் முறை அல்லது வருணனை முறை (Descriptive Form)
  - (ii) கணக்கட்டமைப்பு முறை அல்லது விதி முறை (Set-Builder Form or Rule Form)
  - (iii) பட்டியல் முறை அல்லது அட்டவணை முறை (Roster Form or Tabular Form)
- ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அக்கணத்தின் ஆதி எண் அல்லது செவ்வெண் எனப்படும்.
- உறுப்புகள் இல்லாத கணம் வெற்றுக்கணம் என்றழைக்கப்படும்.
- ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை பூச்சியம் அல்லது முடிவுறு (எண்ணிக்கைக்குட்பட்ட) எண் எனில், அக்கணம் முடிவுறு கணம் எனப்படும். அவ்வாறு இல்லையெனில், அது முடிவிலா கணம் எனப்படும்.
- A, B என்ற இரு கணங்களில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை சமம் எனில், அவை சமான கணங்கள் எனப்படும்.
- A, B என்ற இரு கணங்களில் உள்ள உறுப்புகள் அவை எழுதப்பட்டுள்ள வரிசையை பொருட்படுத்தாமல் சரியாக அதே உறுப்புகளைக் கொண்டிருந்தால், அவை சம கணங்கள் எனப்படும்.
- கணம் X இல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் கணம் Y இன் உறுப்பாகவும் இருக்குமானால், X ஆனது Y இன் ஓர் உட்கணமாகும்.
- $X \subseteq Y$ மற்றும் $X \neq Y$ என்றவாறு இருப்பின், கணம் X ஆனது கணம் Y இன் தகு உட்கணம் எனப்படும்.
- A என்ற கணத்தின் அனைத்து உட்கணங்களையும் கொண்ட கணம், அக்கணத்தின் அடுக்குக்கணம் எனப்படும். A இன் அடுக்குக்கணம் $P(A)$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.
- m உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு கணத்தின் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை 2^m ஆகும்.
- m உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு கணத்தின் தகு உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை $2^m - 1$ ஆகும்.
- கணம் A இன் உறுப்புகளைத் தவிர்த்து அனைத்துக்கணம் U இல் உள்ள உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம், A இன் நிரப்புக்கணம் எனப்படும். A என்ற கணத்தின் நிரப்புக்கணத்தை A' அல்லது A^c எனக் குறிப்போம்.
- A, B என்ற இரு கணங்களின் சேர்ப்புக்கணம் என்பது A அல்லது B அல்லது இரண்டிலும் உள்ள உறுப்புகளைக் கொண்ட கணமாகும்.
- A, B என்ற இரு கணங்களின் வெட்டுகணம் என்பது A மற்றும் B இரண்டிலும் பொதுவாக உள்ள உறுப்புகளைக் கொண்ட கணமாகும்.
- A மற்றும் B என்பன வெட்டாக்கணங்கள் எனில், $A \cap B = \varnothing$

- A மற்றும் B என்ற இரு கணங்களின் வித்தியாச கணமானது, A இல் உள்ள ஆனால் B இல் இல்லாத உறுப்புகளைக் கொண்ட கணமாகும்.
- A மற்றும் B என்ற இரு கணங்களின் சமச்சீர் வித்தியாசமானது $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.
- A மற்றும் B என்ற முடிவுறு கணங்களுக்குப் பின்வரும் பயனுள்ள சில முடிவுகளை நாம் காண்போம்.

  (i) $n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$

  (ii) $n(B) = n(B - A) + n(A \cap B)$

  (iii) $n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$

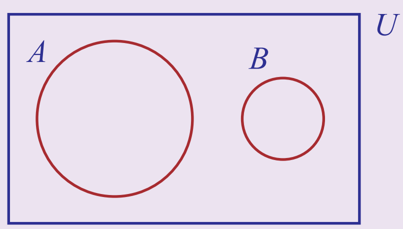
  (iv) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

  (v) $A \cap B = \varnothing$ எனும் போது, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

செயல் 1

$A' \cap B$, $A \cap B$ மற்றும் $A \cap B'$ ஆகியவற்றை வென்படத்தில் குறித்து, இவற்றின் சேர்ப்பு கணத்தைக் காண்க.

செயல் 2

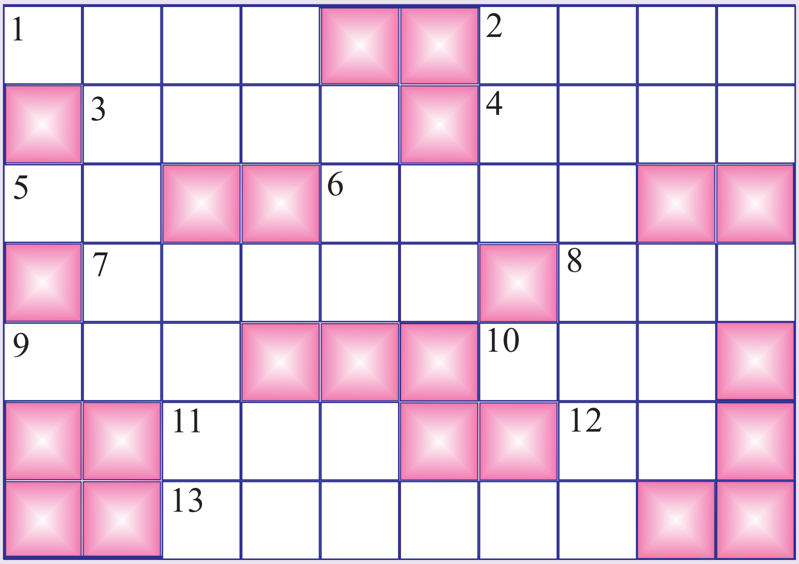


கொடுக்கப்பட்டுள்ள வென்படத்தினைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் கூற்றுகள் ஒவ்வொன்றினையும் சரி அல்லது தவறு எனக் குறிப்பிடுக.

வ. எண்	கணச்செயல்கள்	சரி அல்லது தவறு
1.	$A \subset B$	
2.	$B \subset A'$	
3.	$A \cap B = \{\ \}$	
4.	$A' \cap B = A'$	
5.	$B' \subset A$	
6.	$\varnothing \subset A$	
7.	$A' \cap B' = A$	
8.	$A \cup B' = B'$	

செயல் 3

கொடுக்கப்பட்டுள்ள குறிப்புகளை பயன்படுத்தி சொல் விளையாட்டை பூர்த்தி செய்க.

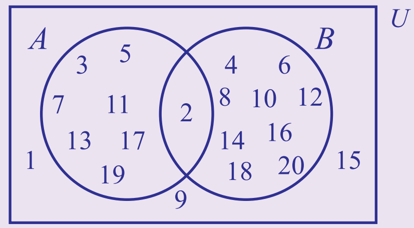


சொற்களை இடமிருந்து வலமாக பூர்த்தி செய்க.

1. $A = \{o,r,y\},\ \ B = \{r,u,y\},\ \ A \cup B =$
2. $C = \{k, m, o, r, w, z\},\ \ D = \{k, o, r, t, w\}, C \cap D =$
3. $U = \{h, i, k, p, t. w\}, W = \{k, p\},\ \ W' =$
4. $M = \{t,e,s\}, N = \{s\}, M \cup N \text{ and } M \cap N =$
5. $P = \{h,i,k,s\}, Q = \{g,i,m,s\}, P \cap Q =$
6. $U = \{a,b,e,m,r,u,v,y\}, L = \{a,b,e,m,u\}, K = \{a,b,m,r,u,y\}, (L \cap K)' =$
7. $X = \{d,e,n,o,p,s,u\}, Y = \{d,h,n,o,s,u\}, X \cap Y =$
8. $A = \{a,b,c,d,n,s\}, B = \{a,d,h,n,t\},\ \ A \cap B =$
9. $U = \{o,p,r,s,u,v,y\}, D = \{p,r,s,v\}, D' =$
10. $E = \{a,e\}, F = \{r,e,a\}, E \cup F =$
11. $K = \{n,o,v,w,x\}, L = \{m,n,o,p,w,r\}, K \cap L =$
12. $P = \{a,d,e,n,p\}, Q = \{a,b,c,m,n,o\},\ \ P \cap Q =$
13. $X = \{e,h,r,p,s,t,x,v\}, Y = \{e,m,p,u,x\}, Z = \{e,n,r,t,w\}, (X \cap Y) \text{ and } (X \cap Z) =$

கணக்கு

செயல் 4



வென்படத்தினைப் பயன்படுத்தி கொடுக்கப்பட்ட கணங்களை விவரித்தல், கணக்கட்டமைப்பு மற்றும் பட்டியல் முறைகளில் குறிப்பிடுக.

(i) A (ii) B (iii) U (iv) B' (v) $A \cap B$

செயல் 5

'statistics' என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துக்களின் கணம் B எனில், பின்வரும் ஒவ்வொன்றினையும் சரியா அல்லது தவறா எனக் குறிப்பிடுக.

(i) $\{t\} \in B$ ☐ (ii) $\{a, c\} \subset B$ ☐

(iii) $\{\ \} \subset B$ ☐ (iv) $n(B) = 10$ ☐

செயல் திட்டம் 1

உங்கள் பள்ளியில் எட்டாம் வகுப்பு பயிலும் மாணவ, மாணவியரின் முதல் பருவத்தின் FA(a1) மற்றும் FA(b1) தரநிலை மதிப்பீட்டு படிவங்களை கணித ஆசிரியரிடமிருந்து பெற்று FA(a1) மற்றும் FA(b1) ஆகியவற்றில் தரநிலை A2 பெற்ற மாணவ, மாணவியர்களின் பதிவெண்களை கொண்டு முறையே P, Q என்ற இருகணங்களை அமைத்து $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ என்பதை சரிபார்க்க.

செயல் திட்டம் 2

உங்கள் தெருவில் சலவை இயந்திரம் (washing machine) பயன்படுத்தும் குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை, கணினி (Computer) பயன்படுத்தும் குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை மற்றும் இரண்டினையும் பயன்படுத்தும் குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை ஆகியவற்றை சேகரித்து சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களை வென்படத்தில் குறிப்பிட்டுக் காட்டுக.

பயிற்சி 1.1

1. (i) கணம் அல்ல (ii) கணம் (iii) கணம் அல்ல (iv) கணம் (v) கணம்

2. (i) $0 \in A$ (ii) $6 \notin A$ (iii) $3 \in A$ (iv) $4 \in A$ (v) $7 \notin A$

3. (i) $\{x : x$ ஒரு மிகை இரட்டைப்படை எண்$\}$ (ii) $\{x : x$ ஒரு முழுஎண் மற்றும் $x < 20\}$

(iii) $\{x : x$ ஒரு மிகைமுழு மற்றும் 3ன் மடங்கு$\}$

(iv) $\{x : x$ ஒரு ஒற்றை இயல்எண் மற்றும் $x < 15\}$

(v) $\{x : x$ என்பது 'computer' என்ற சொல்லில் உள்ள ஒரு எழுத்து$\}$

4. (i) $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (ii) $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ (iii) $C = \{2, 3\}$

(iv) $X = \{2, 4, 8, 16, 32\}$ (v) $M = \{-1, 1, 3, 5, 7, 9\}$

(vi) $P = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

5. (i) $A =$ ஆங்கில உயிரெழுத்துக்களின் கணம்

(ii) $B = 11$ஐ விடக் குறைவாகவோ சமமாகவோ உள்ள ஒற்றை இயல் எண்களின் கணம்

(iii) $C = 26$ ஐ விடக் குறைவாக உள்ள முழு வர்க்கஎண்களின் கணம்.

(iv) $P =$ ‘set theory’ என்ற சொல்லிலுள்ள எழுத்துகளின் கணம்

(v) $Q = 10$ இக்கும், 20 இக்கும் இடைப்பட்ட உள்ள பகாஎண்களின் கணம்

6. (i) 4 (ii) 21 (iii) 1 (iv) 0 (v) 9

7. (i) முடிவிலாக்கணம் (ii) முடிவுறுகணம்

(iii) முடிவிலாக்கணம் (iv) முடிவிலாக்கணம் (v) முடிவுறுகணம்

8. (i) சமானகணங்கள் (ii) சமானகணங்கள் அல்ல (iii) சமானகணங்கள்

9. (i) சமகணங்கள் (ii) சமகணங்கள் அல்ல (iii) சமகணங்கள்

(iv) சமகணங்கள் அல்ல

10. $B = D$ மற்றும் $E = G$

11. இல்லை, $\varnothing$ இல் உறுப்புகள் ஏதும் இல்லை. ஆனால், $\{\varnothing\}$ ஒரு உறுப்பைக் கொண்டுள்ளது.

12. ஒவ்வொன்றும் மற்றவற்றிலிருந்து மாறுபட்டது.

$\varnothing$ இன் உறுப்புகள் ஏதும் இல்லை

$\{0\}$ ஓர் உறுப்பைப் பெற்றுள்ளது, i.e., 0.

$\{\varnothing\}$ ஓர் உறுப்பைப் பெற்றுள்ளது, i.e., வெற்றுக்கணம்

13. (i) $\not\subseteq$ (ii) $\subseteq$ (iii) $\subseteq$ (iv) $\not\subseteq$

14. (i) X என்பது Y இன் உட்கணமல்ல (ii) Y என்பது X இன் உட்கணம்

15. A என்பது B இன் உட்கணமல்ல

16. (i) $P(A) = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{x,y\}\}$ (ii) $P(X) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

(iii) $P(A) = \{ \varnothing, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}, \{5,6\}, \{5,7\}, \{5,8\}, \{6,7\}, \{6,8\}, \{7,8\}, \{5,6,7\},$
$\{5,6,8\}, \{5,7,8\}, \{6,7,8\}, \{5,6,7,8\}\}$ (iv) $P(A) = \{\phi\}$

17. (i) 64, 63 (ii) 128, 127 (iii) 2, 1 **18.** (i) 1 (ii) 8 (iii) 9 (iv) 10 **19.** A என்பது வெற்றுக்கணம்

20. (i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$,
$C = \{15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25\}$

(ii) $n(A) = 10$, $n(B) = 10$, $n(C) = 11$ (iii) a) F b) T c) T d) T

பயிற்சி 1.2

1. (i) $A \cup B = \{-3, -1, 0, 1, 2, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{0, 2, 4\}$
(ii) $A \cup B = \{2, 4, 6, 8\}$, $A \cap B = \phi$

(iii) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$, $A \cap B = \{2, 3, 5\}$

(iv) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \cap B = \{3, 4, 5, 6\}$

2. (i) $A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 10, 12, 15, 18, 20, 25, 30\}$ (ii) $A \cap B = \{10, 15, 25\}$

3. (i) $X \cup Y = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$, $X \cap Y = \{4, 8, 12, 16, 20\}$

4. $\{7\}$ **5.** (ii) X மற்றும் Y வெட்டாக்கணங்கள்

6. (i) $A' = \{0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$ (ii) A என்பது அனைத்து பகா எண்களின் கணம் மற்றும் 1

7. (i) $A \cup B = \{a, b, c, d, f, g\}$ (ii) $(A \cup B)' = \{e, h\}$ (iii) $A \cap B = \{b, d\}$

(iv) $(A \cap B)' = \{a, c, e, f, g, h\}$ **8.** (i) $A' = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ (ii) $B' = \{1, 4, 6, 7, 8\}$

(iii) $A' \cup B' = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 10\}$ (iv) $A' \cap B' = \{4, 6, 8\}$

9. (i) $M - N = \{3, 9\}$ (ii) $N - M = \{15, 17\}$ (iii) $N' - M = \{18\}$ (iv) $M' - N = \{18\}$

(v) $M \cap (M - N) = \{3, 9\}$ (vi) $N \cup (N - M) = \{7, 11, 15, 17\}$ (vii) $n(M - N) = 2$

10. (i) $A - B = \{3, 6, 9, 15, 18\}$ (ii) $B - C = \{16, 20\}$ (iii) $C - D = \{2, 4, 6, 8, 12\}$

(iv) $D - A = \{5, 10, 20, 25\}$ (v) $n(A - C) = 4$

11. (i) $\mathrm{U} = \{1,2,3\cdots 49\}$, $A = \{4,8,12,16,20,24,28,32,36,40,44,48\}$

$B = \{16,30,44\}$ (ii) $A \cup B = \{4,8,12,16,20,24,28,30,32,36,40,44,48\}$

$A \cap B = \{16,44\}$, $n(A \cup B) = 13$, $n(A \cap B) = 2$

12. (i) $X \triangle Y = \{a,b,d,e,f,k\}$ (ii) $P \triangle Q = \{0,1,2,3,5,6,7,8\}$

(iii) $A \triangle B = \{-4,-2,-1,5\}$

13. (i) $\mathrm{U} = \{1,2,3,4,7,9,10,11\}$, $E = \{1,2,4,7\}$, $F = \{4,7,9,11\}$

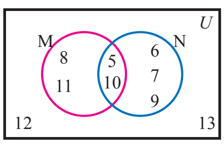
$E \cup F = \{1,2,4,7,9,11\}$, $E \cap F = \{4,7\}$

(ii) $n(\cup) = 8$, $n(E \cup F) = 6$, $n(E \cap F) = 2$

14. (i) $\mathrm{U} = \{1,2,3,4,5,6,8,9,10\}$, $G = \{1,2,4,8\}$, $H = \{2,6,8,10\}$

(ii) $G' = \{3,5,6,9,10\}$, $H' = \{1,3,4,5,9\}$, $G' \cap H' = \{3,5,9\}$, $n(G \cup H)' = 3$,
$n(G \cap H)' = 7$

பயிற்சி 1.3

1. 

2. $n(A \cap B) = 15$ **3.** 16, 29 **4.** $n(B) = 27$

5. $n(A \cap B) = 6$, $n(\cup) = 43$ **6.** $n(A \cup B) = 22$ **7.** 150 **8.** 1400

9. (i) 180 (ii) 150 (iii) 450 **10.** 35 **11.** 12 **12.** 12 **13.** 47 **14.** ஆம், சரி

15. (i) $x = 8$ (ii) $n(A \cup B) = 88$ **16.** (i) 35 (ii) 25 (iii) 20 **17.** 16%

பயிற்சி 1.4

1. A **2.** D **3.** B **4.** D **5.** B **6.** A **7.** C **8.** A **9.** D **10.** C **11.** A **12.** B

13. B **14.** D **15.** C **16.** A **17.** C **18.** D **19.** A **20.** C

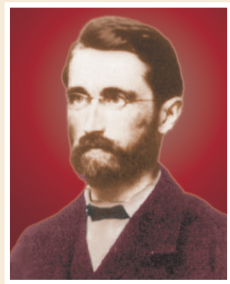
2 மெய்யெண் தொகுப்பு

Life is good for only two things, discovering mathematics and teaching mathematics

- SIMEON POISSON

முதன்மைக் குறிக்கோள்கள்

- இயல்எண்கள், முழு எண்கள் மற்றும் முழுக்களை நினைவு கூர்தல்.
- விகிதமுறு எண்களை முடிவுறு / சுழல் தன்மையுள்ள தசமஎண்களாக வகைப்படுத்துதல்.
- முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற தசம எண்கள் இருப்பதை புரிந்து கொள்ளுதல்.
- முடிவுறு மற்றும் முடிவுறா தசம எண்களை எண்கோட்டில் குறித்தல்.



ரிச்சர்ட் டெடிகண்ட்
(1831-1916)

ரிச்சர்ட் டெடிகண்ட் *(Richard Dedekind)* என்பவர் புகழ்பெற்ற கணிதவியல் அறிஞர்களில் ஒருவராவார். இவர் மாபெரும் கணிதவியல் அறிஞர் கார்ல் பிரடரிக் காஸ் என்பவரின் மாணவராவார். இவர் நுண் இயற்கணிதம், இயற்கணித எண்ணியல் ஆகியவற்றில் முக்கியமான ஆராய்ச்சிகளை மேற்கொண்டு மெய்யெண் கருத்தாக்கத்திற்கு அடித்தளத்தை அமைத்தார். கேண்டர் என்பவரால் உருவாக்கப்பட்ட கணவியலின் முக்கியத்துவத்தை உணர்ந்து பயன்படுத்தியவர்களில் இவரும் ஒருவராவார். தொழில் நுட்பக் கல்லூரியில் நுண்கணிதத்தை போதித்த போது உருவான டெடிகண்ட் துண்டு (Dedekind cut) பற்றிய வரையறை மெய்யெண்களின் முக்கியமான கோட்பாடு ஆகும்.

2.1 அறிமுகம்

அன்றாட வாழ்க்கையில் சாதாரணமாக நாம் பயன்படுத்தும் தொலைவு, நேரம், வேகம், பரப்பளவு, இலாபம், நட்டம், வெப்பநிலை போன்ற அளவைகளைக் குறிப்பிடப் பயன்படுத்தும் எண்கள் மெய்யெண்கள் ஆகும். இயல் எண்களின் தொகுப்பை தேவைக்கேற்ப மென்மேலும் விரிவாக்கியதின் விளைவாக மெய்யெண்களின் தொகுப்பு தோன்றியது. மனிதன் முதலில் எண்ணத் தொடங்கிய போது இயல் எண்கள் வழக்கத்திற்கு வந்தன. கி.மு 1700 ஆம் ஆண்டுகளில் எகிப்தியர்கள் பின்னங்களைப் பயன்படுத்தினர். கி.மு 500 ஆம் ஆண்டில் கிரேக்க கணித அறிஞர்கள் பிதாகரசின் தலைமையில் ஆராய்ந்து விகிதமுறா எண்களின் தேவையை உணர்ந்தனர். கி.பி 1600ஆம் ஆண்டுகளில் குறை எண்களை ஏற்றுக்கொள்ளத் தொடங்கினர். கி.பி 1700 ஆம் ஆண்டுகளில் நுண்கணிதத்தில் மெய்யெண்களின் கணம் தெளிவாக வரையறுக்கப்படாமல் பயன்படுத்தப்பட்டது. கி.பி 1871 இல் ஜார்ஜ் கேண்டர் என்பவர் மெய்யெண்களுக்கு முதன் முதலில் சரியான வரையறையை அளித்தார்.

இப்பாடத்தில் மெய்யெண்களின் சில பண்புகளைப் பற்றி நாம் காணலாம். முன் வகுப்புகளில் நாம் கற்றுக் கொண்ட பல்வேறு எண் தொகுப்புகளைப் பற்றி முதலில் நினைவு கூர்வோம்.

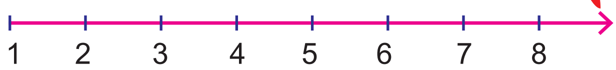
2.1.1 இயல் எண்கள் (Natural Numbers)

இக்கோடு 1 இன் வலப்புறம் மட்டும் முடிவில்லாமல் நீண்டு செல்லும்.

எண்ணுவதற்குப் பயன்படும் $1, 2, 3, \cdots$ என்பன இயல் எண்கள் எனப்படும்.

இயல் எண்களின் கணத்தை $\mathbb{N}$ எனக் குறிப்போம்.

i.e., $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$



படம் 2.1

குறிப்புரை இயல் எண்களில் மிகச்சிறிய எண் 1 ஆகும். இவ்வெண்கள் முடிவில்லாமல் தொடர்ந்து செல்வதால் மிகப்பெரிய எண் எது என கூறமுடியாது.

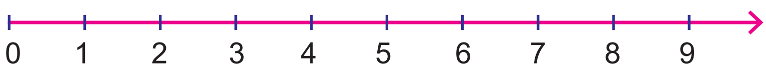
2.1.2 முழு எண்கள் (Whole Numbers)

இக்கோடு 0 இன் வலப்புறம் மட்டும் முடிவில்லாமல் நீள்கிறது.

இயல் எண்களுடன் பூச்சியம் சேர்ந்தது முழு எண்களின் கணமாகும்.

முழு எண்களின் கணத்தை $\mathbb{W}$ எனக் குறிப்போம்.

$\mathbb{W} = \{ 0, 1, 2, 3, \cdots \}$

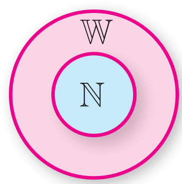


படம் 2.2

முழு எண்களில் மிகச்சிறிய எண் 0 ஆகும்.

குறிப்புரை

1) ஒவ்வொரு இயல் எண்ணும் ஒரு முழு எண்ணாகும்.
2) ஒவ்வொரு முழு எண்ணும் ஒரு இயல் எண்ணாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. ஏனெனில், $0 \in \mathbb{W}$ ஆனால் $0 \notin \mathbb{N}$
3) $\mathbb{N} \subset \mathbb{W}$



2.1.3 முழுக்கள் (Integers)

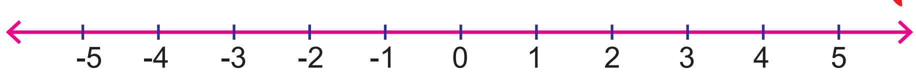
இயல் எண்கள் மற்றும் அவற்றின் குறை எண்கள் இவற்றுடன் பூச்சியம் சேர்ந்த கணம் முழுக்கள் எனப்படும்.

$\mathbb{Z}$ என்பது 'Zahlen', என்ற ஜெர்மன் வார்த்தையிலிருந்து பெறப்பட்டது. 'எண்ணுதல்' என்பது இதன் பொருளாகும்.

முழுக்களின் கணத்தை $\mathbb{Z}$ எனக் குறிப்போம்.

$\mathbb{Z} = \{\cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$

இக்கோடு 0 இன் இரு புறமும் முடிவில்லாமல் செல்கிறது.



படம் 2.3

$1, 2, 3, \cdots$ என்பன மிகை முழுக்கள் எனப்படும்.

$-1, -2, -3, \cdots$ என்பன குறை முழுக்கள் எனப்படும்.

எனவே, $\{\cdots -3, -2, -1, 1, 2, 3, \cdots\}$ என்பது பூச்சியமற்ற முழுக்களின் கணமாகும்.

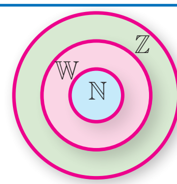
நினைவு கூர்ந்து விடையளி !
0 என்பது மிகை முழுவா அல்லது குறை முழுவா ?

குறிப்புரை

1) ஒவ்வொரு இயல் எண்ணும் ஒரு முழு ஆகும்.

2) ஒவ்வொரு முழு எண்ணும் ஒரு முழு ஆகும்.

3) $\mathbb{N} \subset \mathbb{W} \subset \mathbb{Z}$



2.1.4 விகிதமுறு எண்கள் (Rational Numbers)

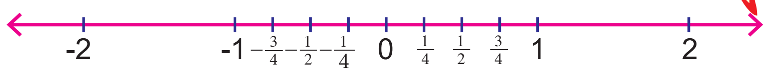
p மற்றும் q முழுக்கள், மேலும் $q \neq 0$ எனில், $\frac{p}{q}$ என்ற வடிவில் அமையும் எண் விகிதிமுறு எண் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $3 = \frac{3}{1}, -\frac{5}{6}, \frac{7}{8}$ என்பன விகிதமுறு எண்களாகும்.

விகிதமுறு எண்களின் கணம் $\mathbb{Q}$ எனக் குறிப்பிடப்படும்.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, \text{மற்றும் } q \neq 0 \right\}$$

இரு முழுக்களுக்கு இடையில் விகிதமுறு எண்களை காண்கிறோம்.



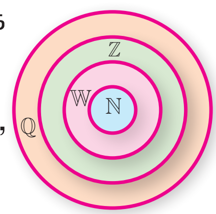
படம் 2.4

குறிப்புரை

1) ஒரு விகிதமுறு எண் மிகை, குறை அல்லது பூச்சியமாக இருக்கலாம்.

2) ஒரு முழு n ஐ $\frac{n}{1}$ என்ற வடிவில் எழுதலாம். எனவே, ஒவ்வொரு முழுவும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும்.

3) $\mathbb{N} \subset \mathbb{W} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$



முக்கிய முடிவுகள்

1) இரண்டு வெவ்வேறு விகிதமுறு எண்கள் a மற்றும் b என்பவற்றிற்கு இடையே $a < \frac{a+b}{2} < b$ என்றவாறு $\frac{a+b}{2}$ என்ற ஒரு விகிதமுறு எண் அமையும்.

2) கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு விகிதமுறு எண்களுக்கிடையே எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்கள் இருக்கும்.

நினைவு கூர்ந்து விடையளி !
விகிதம் என்பதை விகிதமுறு எண்களுடன் தொடர்பு படுத்த முடியுமா ?

எடுத்துக்காட்டு 2.1

$\frac{1}{4}$ மற்றும் $\frac{3}{4}$ ஆகிய எண்களுக்கிடையே உள்ள ஏதேனும் இரண்டு விகிதமுறு எண்களைக் காண்க.

தீர்வு $\frac{1}{4}$ மற்றும் $\frac{3}{4}$ இவற்றிற்கு இடையே அமையும் ஒரு விகிதமுறு எண்

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\,(1)=\frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2}$ மற்றும் $\frac{3}{4}$ இவற்றிற்கு இடையே அமையும் விகிதமுறு எண் $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{4}=\frac{5}{8}$

$\frac{1}{2}$ மற்றும் $\frac{5}{8}$ என்ற விகிதமுறு எண்கள் $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ இக்கு இடையே அமைந்துள்ளன.

குறிப்பு $\frac{1}{4}$ மற்றும் $\frac{3}{4}$ இவற்றிற்கு இடையில் எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்கள் உள்ளன. எடுத்துக்காட்டு 2.1இல் நமக்கு கிடைத்த $\frac{1}{2}, \frac{5}{8}$ என்பவை அவ்வாறான இரண்டு எண்களாகும்.

பயிற்சி 2.1

1. பின்வரும் கூற்றுகளில் எவை சரி அல்லது தவறு எனக் கூறுக.

   (i) ஒவ்வொரு இயல் எண்ணும் ஒரு முழு எண் ஆகும்.
   (ii) ஒவ்வொரு முழு எண்ணும் ஓர் இயல் எண் ஆகும்.
   (iii) ஒவ்வொரு முழுவும் ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகும்.
   (iv) ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் ஒரு முழு எண் ஆகும்.
   (v) ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் ஒரு முழு ஆகும்.
   (vi) ஒவ்வொரு முழுவும் ஒரு முழு எண் ஆகும்.

2. பூச்சியம் என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகுமா? உங்கள் விடைக்கு காரணம் கூறுக.

3. $-\frac{5}{7}$ மற்றும் $-\frac{2}{7}$ என்ற எண்களுக்கு இடையே உள்ள ஏதேனும் இரண்டு விகிதமுறு எண்களைக் காண்க.

2.2 விகிதமுறு எண்களைத் தசமவடிவில் குறிப்பிடுதல்

$\frac{p}{q}$ என்ற விகிதமுறு எண்ணின் தசம வடிவத்தை நீள் வகுத்தல் முறையில் நாம் பெறலாம்.

p என்ற எண்ணை q ஆல் வகுக்கும் போது சில படிகளுக்குப் பின்னர் மீதி பூச்சியமாகும் அல்லது மீதி எந்நிலையிலும் பூச்சியமாகாது மற்றும் மீண்டும் மீண்டும் வரும் எண் தொகுதி மீதியாகக் கிடைக்கும்.

நிலை (i) சில படிகளுக்குப் பின்னர் மீதி பூச்சியமாகும்

முதலில், $\frac{7}{16}$ ஐத் தசம வடிவத்தில் எழுதுவோம். இங்கு $\frac{7}{16}=0.4375$

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டிலிருந்து, $\frac{7}{16}$ இன் தசமவடிவத்தை நீள்வகுத்தல் முறையில் காணும் போது சில படிகளுக்குப் பின்னர் மீதி பூச்சியமாவதைக் காண்கிறோம். மேலும் தசம விரிவும் முடிவு பெறுகிறது.

$$\begin{array}{r|l} & 0.4375 \\ \hline 16 & 7.0000 \\ & 6\,4 \\ \hline & 60 \\ & 48 \\ \hline & 120 \\ & 112 \\ \hline & 80 \\ & 80 \\ \hline & 0 \end{array}$$

இதைப்போலவே, நீள்வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் விகிதமுறு எண்களை தசம வடிவில் எழுதலாம்.

$$\frac{1}{2} = 0.5,\ \frac{7}{5} = 1.4,\ -\frac{8}{25} = -0.32,\ \frac{9}{64} = 0.140625,\ \frac{527}{500} = 1.054$$

இந்த எடுத்துக்காட்டுகளில் தசம விரிவுகளானது சில படிகளுக்குப் பின்னர் முற்றுப்பெறுவதைக் காண்கிறோம்.

முக்கிய கருத்து — முடிவுறு தசம விரிவு

$\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ என்ற வடிவில் உள்ள எண்ணின் தசம விரிவானது முடிவு பெறும் எனில், $\frac{p}{q}$ இன் தசம விரிவு முடிவுறு தசமவிரிவு (Terminating decimal expansion) எனப்படும். முடிவுறு தசம விரிவினைக்கொண்ட எண் முடிவுறு தசம எண் எனப்படும்.

நிலை (ii) எந்நிலையிலும் மீதி பூச்சியமாகாது

ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் முடிவுறு தசம விரிவினைப் பெற்றிருக்குமா?

இவ்வினாவிற்கு விடையளிக்குமுன், $\frac{5}{11}$, $\frac{7}{6}$ மற்றும் $\frac{22}{7}$ ஆகிய விகிதமுறு எண்களின் தசம விரிவுகளைக் காண்போம்.

$$\begin{array}{r|l} & 0.4545\cdots \\ \hline 11 & 5.0000 \\ & 4\,4 \\ \hline & 60 \\ & 55 \\ \hline & 50 \\ & 44 \\ \hline & 60 \\ & 55 \\ \hline & 50 \\ & \ddots \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} & 1.1666\cdots \\ \hline 6 & 7.0000 \\ & 6\,0 \\ \hline & 10 \\ & 6 \\ \hline & 40 \\ & 36 \\ \hline & 40 \\ & 36 \\ \hline & 40 \\ & 36 \\ \hline & 40 \\ & \ddots \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} & 3.142857\,142857\cdots \\ \hline 7 & 22.00000000 \\ & 21 \\ \hline & 10 \\ & 7 \\ \hline & 30 \\ & 28 \\ \hline & 20 \\ & 14 \\ \hline & 60 \\ & 56 \\ \hline & 40 \\ & 35 \\ \hline & 50 \\ & 49 \\ \hline & 10 \\ & \ddots \end{array}$$

$$\therefore \frac{5}{11} = 0.4545\cdots,\qquad \frac{7}{6} = 1.1666\cdots,\qquad \frac{22}{7} = 3.142857\,1\cdots$$

எனவே, அனைத்து விகிதமுறு எண்களின் தசம விரிவுகளும் முற்றுப்பெற்று இருக்க வேண்டும் என்ற அவசியமில்லை.

மேற்கண்ட எண்களின் தசம விரிவுகளை நீள் வகுத்தல் முறையில் காணும் போது எந்நிலையிலும் மீதி பூச்சியமாகவில்லை. மேலும் குறிப்பிட்ட இடைவெளிகளில் கிடைக்கின்ற மீதிகள் வரிசை மாறாமல் மீண்டும் மீண்டும் வருவதைக் காண்கிறோம். ஆதலால் ஈவில் மீண்டும் மீண்டும் வரும் இலக்கங்களின் தொகுதியை (repeating block of digits) நாம் பெறுகிறோம்.

முக்கிய கருத்து — **முடிவுறாச் சுழல் தசம விரிவு**

$\frac{p}{q}, q \neq 0$ என்ற எண்ணின் தசம விரிவு காணும் போது எந்நிலையிலும் மீதி பூச்சியமாகவில்லை எனில், ஈவில் மீண்டும் மீண்டும் வரும் இலக்கங்களின் தொகுதி கிடைக்கும். இந்நிலையில் $\frac{p}{q}$ இன் தசம விரிவு முடிவுறாச் சுழல் தசம விரிவு அல்லது முடிவுறா மீள்வரு தசம விரிவு (Non-terminating and recurring decimal expansion) எனப்படும். முடிவுறாச் சுழல் தசம விரிவினைக் கொண்ட எண் முடிவுறாச் சுழல் தசம எண் எனப்படும்.

தசம எண்ணில் இலக்கங்களின் தொகுதி மீண்டும் மீண்டும் வருவதைக்குறிக்க, அந்தத் தொகுதியின் மீது கோடிட்டுக் (bar) காட்டி, மற்ற எண் தொகுதிகளை நீக்கிவிடலாம். எடுத்துக்காட்டாக,

$\frac{5}{11}, \frac{7}{6}$ மற்றும் $\frac{22}{7}$ இன் விரிவுகளை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$\frac{5}{11} = 0.4545\cdots = 0.\overline{45}$, $\quad \frac{7}{6} = 1.16666\cdots = 1.1\overline{6}$

$\frac{22}{7} = 3.142857\ 142857\ \cdots = 3.\overline{142857}$

n என்ற எண்ணின் தலைகீழி $\frac{1}{n}$ ஆகும். மேலும் இயல்எண்களின் தலைகீழிகள் விகிதமுறு எண்களாகும். முதல் பத்து இயலெண்களின் தலைகீழிகளின் தசம வடிவங்களைப் பின்வரும் அட்டவணை காட்டுகிறது.

எண்	தலைகீழி	தசம எண் வகை
1	1.0	முடிவுறு தசம எண்
2	0.5	முடிவுறு தசம எண்
3	$0.\overline{3}$	முடிவுறாச் சுழல் தசம எண்
4	0.25	முடிவுறு தசம எண்
5	0.2	முடிவுறு தசம எண்
6	$0.1\overline{6}$	முடிவுறாச் சுழல் தசம எண்
7	$0.\overline{142857}$	முடிவுறாச் சுழல் தசம எண்
8	0.125	முடிவுறு தசம எண்
9	$0.\overline{1}$	முடிவுறாச் சுழல் தசம எண்
10	0.1	முடிவுறு தசம எண்

ஆகவே,

> ஒரு விகிதமுறு எண்ணை முடிவுறு தசம விரிவாகவோ அல்லது முடிவுறாச் சுழல் தசம விரிவாகவோ குறிப்பிடலாம்.

இதன் மறுதலையும் உண்மையாகும். அதாவது,

முடிவுறு தசம விரிவு அல்லது முடிவுறா சுழல் தசம விரிவைப் பெற்றுள்ள ஒரு எண் விகிதமுறு எண்ணாகும்.

இதனை பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் விளக்குவோம்.

2.2.1 முடிவுறு தசம எண்களை $\frac{p}{q}$ வடிவில் குறித்தல்

முடிவுறு தசம எண்ணை எளிதாக $\frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{Z}$ மற்றும் $q \neq 0)$ என்ற வடிவத்தில் குறிப்பிடலாம். அவ்வாறு குறிப்பிடும் முறையைப் பின்வரும் எடுத்துக்காட்டின் மூலம் விளக்குவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.2

கீழ்க்காணும் தசம எண்களை $\frac{p}{q}$ வடிவில் எழுதுக. இங்கு p, q என்பன முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$.

(i) 0.75 (ii) 0.625 (iii) 0.5625 (iv) 0.28

தீர்வு (i) $0.75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

(ii) $0.625 = \frac{625}{1000} = \frac{5}{8}$

(iii) $0.5625 = \frac{5625}{10000} = \frac{45}{80} = \frac{9}{16}$

(iv) $0.28 = \frac{28}{100} = \frac{7}{25}$

2.2.2 முடிவுறா சுழல் தசம எண்ணை $\frac{p}{q}$ வடிவில் குறித்தல்

முடிவுறா சுழல் தசம எண்ணை $\frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{Z}$ மற்றும் $q \neq 0)$ என்ற வடிவத்திற்கு மாற்றும் முறை எளிதான செயல் அல்ல. முடிவுறாச் சுழல் தசம எண்ணை $\frac{p}{q}$ வடிவத்திற்கு மாற்றும் முறையை பின்வரும் எடுத்துக்காட்டின் மூலம் விளக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.3

பின்வருவனவற்றை $\frac{p}{q}$, வடிவில் எழுதுக. இங்கு p, q முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$.

(i) $0.\overline{47}$ (ii) $0.\overline{001}$ (iii) $0.5\overline{7}$ (iv) $0.2\overline{45}$ (v) $0.\overline{6}$ (vi) $1.\overline{5}$

தீர்வு (i) $x = 0.\overline{47}$ என்க. $x = 0.474747\cdots$

இங்கு இரண்டு இலக்கத் தொகுதி 47 மீண்டும் மீண்டும் வருவதால், இருபுறமும் 100 ஆல் பெருக்குக.

$$100x = 47.474747\cdots = 47 + 0.474747\cdots = 47 + x$$

$$99x = 47$$

$$x = \frac{47}{99} \qquad \therefore\ 0.\overline{47} = \frac{47}{99}$$

(ii) $x = 0.\overline{001}$ என்க. $x = 0.001001001\cdots$

மூன்று இலக்கங்கள் மீண்டும் மீண்டும் வருவதால், இரு புறமும் 1000 ஆல் பெருக்குக.

$$1000x = 1.001001001\cdots = 1 + 0.001001001\cdots = 1 + x$$

$$1000x - x = 1$$

$$999x = 1$$

$$x = \frac{1}{999} \qquad \therefore\ 0.\overline{001} = \frac{1}{999}$$

(iii) $x = 0.5\overline{7}$ என்க. பிறகு $x = 0.57777\cdots$

இருபுறமும் 10 ஆல் பெருக்க,

$$10x = 5.7777\cdots = 5.2 + 0.57777\cdots = 5.2 + x$$

$$9x = 5.2$$

$$x = \frac{5.2}{9}$$

$$x = \frac{52}{90} \qquad \therefore\ 0.5\overline{7} = \frac{52}{90} = \frac{26}{45}$$

(iv) $x = 0.2\overline{45}$ என்க. பிறகு $x = 0.2454545\cdots$

இருபுறமும் 100 ஆல் பெருக்க,

$$100x = 24.545454\cdots = 24.3 + 0.2454545\cdots = 24.3 + x$$

$$99x = 24.3$$

$$x = \frac{24.3}{99}$$

$$0.2\overline{45} = \frac{243}{990} = \frac{27}{110}$$

(v) $x = 0.\overline{6}$ என்க. பின்னர் $x = 0.66666\cdots$

இருபுறமும் 10 ஆல் பெருக்க,

$$10x = 6.66666\cdots = 6 + 0.6666\cdots = 6 + x$$

$$9x = 6$$

$$x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \qquad \therefore\ 0.\overline{6} = \frac{2}{3}$$

(vi) $x = 1.\overline{5}$ என்க. பின்னர் $x = 1.55555\cdots$

இருபுறமும் 10 ஆல் பெருக்க,

$$10x = 15.5555\cdots = 14 + 1.5555\cdots = 14 + x$$

$$9x = 14$$

$$x = \frac{14}{9} \quad \therefore\ 1.\overline{5} = 1\frac{5}{9}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.3 (vi)

மாற்றுமுறை

$x = 1.\overline{5}$ என்க.

அதாவது, $x = 1.55555\cdots$

இருபுறமும் 10 ஆல் பெருக்க,

$$10x = 15.5555\cdots$$

$$\therefore\ 10x - x = 14$$

$$9x = 14$$

$$x = \frac{14}{9} = 1\frac{5}{9}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.3 இல் உள்ள எல்லாக் கணக்குகளையும் $\frac{p}{q}$, p, q முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$ வடிவில் எழுத, மாற்று முறையையும் பயன்படுத்தலாம்.

எனவே, முடிவுறா சுழல் தசம விரிவினைப் பெற்றுள்ள ஒவ்வொரு எண்ணையும் $\frac{p}{q}$, (p, q முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$) என்ற வடிவில் எழுத முடிகிறது.

ஒரு விகிதமுறு எண்ணின் தசம வடிவம் முடிவுற்றதா அல்லது முடிவுறாததா என்பதைக் கண்டறிய பின்வரும் விதியைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

$\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ வடிவில் உள்ள விகிதமுறு எண்ணை $\frac{p}{2^m \times 5^n}$, $(p \in \mathbb{Z}$ மற்றும் $m, n \in \mathbb{W})$ என்ற வடிவில் எழுத முடியுமானால், அந்த விகிதமுறு எண் முடிவுறு தசம விரிவினைப்பெற்றிருக்கும். அவ்வாறில்லையெனில், அந்த விகிதமுறு எண் முடிவுறாச் சுழல் தசம விரிவினைப் பெற்றிருக்கும்.

தசம எண்கள் 10 இன் அடுக்குகளைப் பின்னத்தின் பகுதிகளாகக் கொண்டிருக்கும் மற்றும் 2,5 என்பவை 10 இன் பகாக் காரணிகள் என்ற உண்மைகளின் அடிப்படையில் இம்முடிவானது அமைந்துள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 2.4

வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தாமல், பின்வரும் எண்களின் தசம விரிவுகளில் எவையெவை முடிவுறு தசம விரிவு அல்லது முடிவுறாச் சுழல் தசம விரிவைப் பெற்றிருக்கும் என வகைப்படுத்துக.

(i) $\frac{7}{16}$ (ii) $\frac{13}{150}$ (iii) $\frac{-11}{75}$ (iv) $\frac{17}{200}$

தீர்வு

(i) $16 = 2^4$

$\frac{7}{16} = \frac{7}{2^4} = \frac{7}{2^4 \times 5^0}$. எனவே, $\frac{7}{16}$ என்பது முடிவுறு தசம விரிவைப் பெற்றிருக்கும்.

(ii) $150 = 2 \times 3 \times 5^2$

$\frac{13}{150} = \frac{13}{2 \times 3 \times 5^2}$

இது $\frac{p}{2^m \times 5^n}$, என்ற வடிவில் இல்லை. எனவே, $\frac{13}{150}$ என்பது முடிவுறாச் சுழல் தசம விரிவைப் பெற்றிருக்கும்.

(iii) $\frac{-11}{75} = \frac{-11}{3 \times 5^2}$

இது $\frac{p}{2^m \times 5^n}$, என்ற வடிவில் இல்லை. எனவே, $\frac{-11}{75}$ என்பது முடிவுறாச் சுழல் தசம விரிவைப் பெற்றிருக்கும்.

(iv) $\frac{17}{200} = \frac{17}{8 \times 25} = \frac{17}{2^3 \times 5^2}$. எனவே, $\frac{17}{200}$ என்பது முடிவுறு தசம விரிவைப் பெற்றிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.5

$0.\overline{9}$ ஐ விகிதமுறு எண்ணாக மாற்றுக.

தீர்வு $x = 0.\overline{9}$ என்க. பின்னர் $x = 0.99999\cdots$

இருபுறமும் 10 ஆல் பெருக்க

$$10x = 9.99999\cdots = 9 + 0.9999\cdots = 9 + x$$

$$\Longrightarrow \quad 9x = 9$$

$$\Longrightarrow \quad x = 1. \text{ அதாவது, } 0.\overline{9} = 1 \qquad (\because 1 \text{ என்பது விகிதமுறு எண்})$$

உங்கள் சிந்தனைக்கு

நாம் $0.\overline{9} = 1$ என நிருபித்தோம். இது வியப்பூட்டுவதாக இல்லையா?

$0.9999\cdots$ என்பது 1 ஐ விடக்குறைவானது என பெரும்பாலானோர் கருதுகின்றனர். ஆனால் உண்மை அதுவல்ல. மேற்கண்ட விவாதத்திலிருந்து $0.\overline{9} = 1$ என்பது தெளிவாகிறது. மேலும் இம்முடிவானது $3 \times 0.333\cdots = 0.999\cdots$ மற்றும் $3 \times \frac{1}{3} = 1$ என்ற உண்மைகளையும் நிறைவு செய்கிறது. இதேபோல், ஒவ்வொரு முடிவுறு தசமவிரிவினையும் முடிவில்லாத 9-களின் தொகுதியாக எழுதுவதன் மூலம் முடிவுறாச் சுழல் தசம விரிவாக குறிப்பிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $6 = 5.9999\cdots$,
$2.5 = 2.4999\cdots$.

பயிற்சி 2.2

1. பின்வரும் விகிதமுறு எண்களை தசம எண்களாக மாற்றி அவை ஒவ்வொன்றும் எவ்வகை தசம விரிவினைப் பெற்றுள்ளது எனக் கூறுக.

   (i) $\frac{42}{100}$ (ii) $8\frac{2}{7}$ (iii) $\frac{13}{55}$ (iv) $\frac{459}{500}$

   (v) $\frac{1}{11}$ (vi) $-\frac{3}{13}$ (vii) $\frac{19}{3}$ (viii) $-\frac{7}{32}$

2. நீள் வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தாமல், பின்வரும் விகிதமுறு எண்களில் எவை முடிவுறு தசம விரிவினைப் பெற்றிருக்கும் எனக் காண்க.

   (i) $\frac{5}{64}$ (ii) $\frac{11}{12}$ (iii) $\frac{27}{40}$ (iv) $\frac{8}{35}$

3. கீழ்க்கண்ட தசம எண்களை விகிதமுறு எண்களாக்குக.

   (i) $0.\overline{18}$ (ii) $0.\overline{427}$ (iii) $0.\overline{0001}$

   (iv) $1.4\overline{5}$ (v) $7.\overline{3}$ (vi) $0.4\overline{16}$

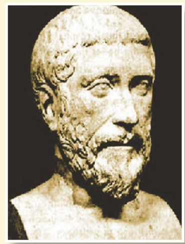
4. $\frac{1}{13}$ஐ தசம வடிவில் எழுதுக. மீண்டும் மீண்டும் வரும் எண் தொகுதியில் எத்தனை இலக்கங்கள் உள்ளன ?

5. $\frac{1}{7}$ மற்றும் $\frac{2}{7}$ ஆகியவற்றின் தசம விரிவுகளை நீள் வகுத்தல் முறையில் காண்க. நீள் வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தாமல் $\frac{1}{7}$ இன் தசம விரிவினைப் பயன்படுத்தி $\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ ஆகியவற்றின் தசம விரிவுகளைப் பெறுக.

2.3 விகிதமுறா எண்கள் (Irrational Numbers)

முன் வகுப்புகளில் பயின்ற எண் கோடு பற்றிய பாடக்கருத்துகளை மீண்டும் நினைவு கூர்வோம். விகிதமுறு எண்களை எண் கோட்டில் குறிக்க முடியும் என்பதை நாம் அறிந்துள்ளோம்.

மேலும் எந்த இரண்டு விகிதமுறு எண்களுக்கிடையேயும் எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்கள் உள்ளன என்பதையும் அறிந்துள்ளோம். உண்மையில் விகிதமுறு எண்கள் அல்லாத எண்ணிலடங்கா மேலும் பல எண்கள் எண் கோட்டில் உள்ளன. அதாவது, முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற தசம விரிவுகளைக் கொண்ட எண்ணற்ற எண்கள் எண்கோட்டில் உள்ளன. ஆகவே விகிதமுறு எண்களின் தொகுப்பை மேலும் விரிவுபடுத்த வேண்டியது அவசியமாகிறது.



பிதாகரஸ்

(கி.மு 569 - கி.மு 500)

கி.மு 500 ஆம் ஆண்டுகளில், கிரேக்க நாட்டு கணித அறிஞர் பிதாகரஸ் வழி வந்தவர்கள் முதன் முதலில் பின்ன வடிவில் எழுத முடியாத எண்களைக் கண்டுபிடித்தனர். அவ்வகை எண்கள் விகிதமுறா எண்கள் என்றழைக்கப்பட்டன.

பின்வரும் தசம விரிவினை எடுத்துக்கொள்க.

$$0.808008000800008\cdots \qquad (1)$$

இது முடிவுறாத் தசம விரிவாகும். இந்தத் தசம விரிவு சுழல் தன்மையுடையதா ?

தசம விரிவு (1) ஆனது ஒரு குறிப்பிட்ட அமைப்பினைப் பெற்றுள்ளது என்பது உண்மை. ஆனால், எந்த ஒரு இலக்கங்களின் தொகுதியும் இவ்விரிவில் மீண்டும் மீண்டும் காணப்படாததால் இத்தசம விரிவு சுழல் தன்மையற்றது.

ஆகவே, இத்தசமவிரிவு முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற (மீள்வரு தன்மையற்ற) (non-terminating and recurring) தசமவிரிவாகும் எனவே, இது ஒரு விகிதமுறு எண்ணைக் குறிக்காது.

இவ்வகை எண்கள் விகிதமுறா எண்கள் எனப்படும்.

முக்கிய கருத்து — **விகிதமுறா எண்**

முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற தசம விரிவினைக் கொண்ட எண் ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும். எனவே, ஒரு விகிதமுறா எண்ணை $\frac{p}{q}$ (இங்கு p, q முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$) என்ற வடிவில் எழுதமுடியாது.

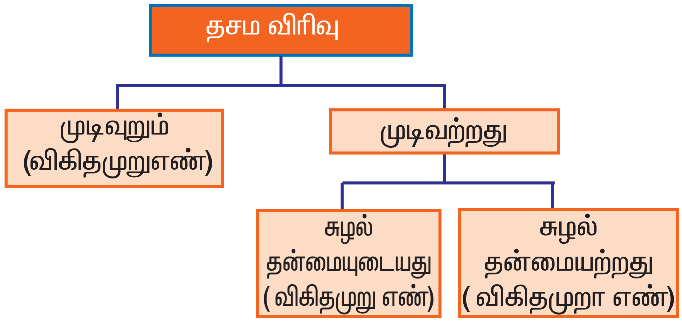
$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, e, \pi, \sqrt{17}, 0.2020020002\cdots$ போன்றவை விகிதமுறா எண்களுக்கு மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

குறிப்பு (1) இல் எடுத்துக்கொண்ட தசம எண்ணில் உள்ள எண்ணுரு 8 இக்குப் பதிலாக நம் விருப்பம் போல் எந்தவொரு இயல் எண்ணையும் பயன்படுத்தி எண்ணற்ற முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற தசம விரிவுகளைப் பெறமுடியும்.

π ஐப் பற்றி அறிந்து கொள்க: 18 ஆம் நூற்றாண்டின் பிற்பகுதியில் கணிதவியல் அறிஞர்கள் லாம்பர்ட், லெஜண்டர் ஆகியோர் π ஒரு விகிதமுறா எண் என நிருபித்தார்கள்.

$\frac{22}{7}$ (ஒரு விகிதமுறு எண்) என்பதை π (ஒரு விகிதமுறா எண்) இன் தோராய மதிப்பாக எடுத்துக் கொள்வது வழக்கம்.

தசம விரிவுகளின் வகைப்பாடு



2.4 மெய்யெண்கள் (Real Numbers)

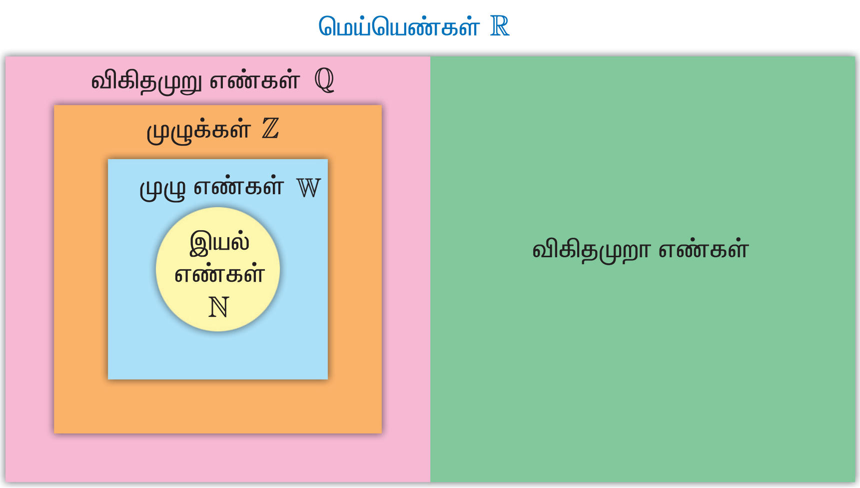
முக்கிய கருத்து	மெய்யெண்கள்
மெய்யெண்களின் கணமானது விகிதமுறு மற்றும் விகிதமுறா எண்களின் சேர்ப்புக் கணமாகும். ஆகவே, ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகவோ அல்லது விகிதமுறா எண்ணாகவோ இருக்கும். அதாவது, ஒருமெய்யெண் விகிதமுறு எண் அல்ல எனில், அது ஒரு விகிமுறா எண்ணாகும்.	

அனைத்து மெய்யெண்களின் கணத்தை $\mathbb{R}$ எனக் குறிப்போம்.

ஜெர்மன் நாட்டு கணிதவியல் அறிஞர்கள் ஜார்ஜ் கேண்டர் மற்றும் ரிச்சர்ட் டெடிகண்ட் இருவரும் தனித்தனியே ஆய்வுகளை மேற்கொண்டு ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் எண் கோட்டில் ஒரு தனித்த புள்ளியால் குறிக்கப்படும் எனவும், எண் கோட்டின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் ஒரு தனித்த மெய்யெண்ணால் குறிக்கப்படும் எனவும் நிருபித்தனர்.

எண் கோட்டின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் ஒரு தனித்த மெய்யெண்னைக் குறிக்கும். அதேபோல், ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் எண் கோட்டின் மீதுள்ள ஒரு தனித்த புள்ளியால் குறிப்பிடப்படும்.

மெய்யெண்கள் கணம் உள்ளடக்கியுள்ள கணங்களுக்கு இடையேயான தொடர்புகளைப் பின்வரும் படம் விளக்குகிறது.



படம் 2.5

2 இன் வர்க்க மூலத்தைத் தசம விரிவாகக் காண்போம்.

	1.4142135⋯
1	2.00 00 00 00 00
	1
24	100
	96
281	400
	281
2824	11900
	11296
28282	60400
	56564
282841	383600
	282841
2828423	10075900
	8485269
28284265	159063100
	141421325
	17641775
	⋮

$\therefore \sqrt{2} = 1.4142135\cdots$

இவ்வகுத்தல் செயலைத் தொடர்ந்து செய்யும் போது கிடைக்கும் தசம விரிவானது முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற இலக்கங்களைக் கொண்டிருப்பதைக் காணலாம். $\sqrt{2}$ இன் தசம விரிவு முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்றது. எனவே, $\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும்.

குறிப்பு

(i) $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \cdots$ என்பவற்றின் தசம விரிவுகள் முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்றவை. எனவே $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \cdots$ என்பன விகிதமுறா எண்களாகும்.

(ii) ஒரு மிகைமுழுவின் வர்க்கமூலம் எப்பொழுதும் விகிதமுறா எண்ணாகும் என்பது உண்மையல்ல.

எடுத்துக்காட்டாக, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{25} = 5 \cdots$. எனவே $\sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt{25}$, என்பன விகிதமுறு எண்களாகும்.

(iii) முழு வர்க்கஎண் அல்லாத எந்தவொரு மிகைமுழுவின் வர்க்க மூலமும் ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும்.

2.4.1 விகிதமுறா எண்களை எண்கோட்டில் குறித்தல்

$\sqrt{2}$ மற்றும் $\sqrt{3}$ என்ற விகிதமுறா எண்களை எண் கோட்டில் குறிக்கலாம்.

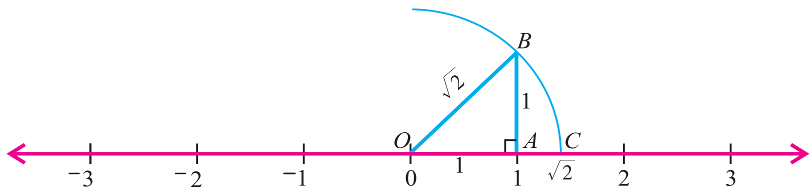
(i) $\sqrt{2}$ ஐ எண் கோட்டில் குறித்தல்.

எண் கோட்டை வரைக. O என்பது பூச்சியம் என்ற எண்ணையும், A என்பது 1 என்ற எண்ணையும் குறிப்பிடுமாறு O மற்றும் A என்ற புள்ளிகளை எண் கோட்டில் குறிக்க. அதாவது, $OA = 1$ அலகு.

$AB = 1$ அலகு என இருக்குமாறு $AB \perp OA$ ஐ வரைக. OB ஐச் சேர்க்க.

செங்கோண முக்கோணம் OAB இல், பிதாகரஸ் தேற்றப்படி,

$$OB^2 = OA^2 + AB^2$$
$$= 1^2 + 1^2$$
$$OB^2 = 2$$
$$OB = \sqrt{2}$$



படம் 2.6

O இன் வலப்புறம் C என்ற புள்ளியில் எண்கோட்டை வெட்டுமாறு O ஐ மையமாகவும் OB ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டவில் வரைக.

இப்பொழுது படத்திலிருந்து $OC = OB = \sqrt{2}$ என்பது தெளிவாகிறது.

எனவே, எண்கோட்டின் மீதுள்ள C என்ற புள்ளி $\sqrt{2}$ ஐக் குறிக்கிறது.

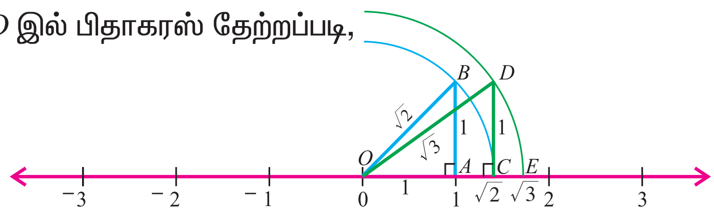
(ii) $\sqrt{3}$ ஐ எண் கோட்டில் குறித்தல்.

எண் கோட்டை வரைக. O என்பது பூச்சியம் என்ற எண்ணையும் C என்பது $\sqrt{2}$ ஐயும் குறிக்குமாறு O மற்றும் C என்ற புள்ளிகளை (i) இல் உள்ளவாறு எண் கோட்டில் குறிக்க.

$\therefore OC = \sqrt{2}$ அலகு. $CD = 1$ அலகு உள்ளவாறு $CD \perp OC$ ஐ வரைக. ODஐச் சேர்க்க.

செங்கோண முக்கோணம் OCD இல் பிதாகரஸ் தேற்றப்படி,

$$OD^2 = OC^2 + CD^2$$
$$= (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 3$$
$$\therefore OD = \sqrt{3}$$



படம் 2.7

O இன் வலப்புறம் E என்ற புள்ளியில் எண் கோட்டை வெட்டுமாறு Oஐ மையமாவும் ODஐ ஆரமாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டவில் வரைக. படத்திலிருந்து $OE = OD = \sqrt{3}$ என்பது தெளிவாகிறது. எனவே, எண் கோட்டின் மீதுள்ள E என்ற புள்ளி $\sqrt{3}$ ஐக் குறிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2.6

பின்வருவனவற்றில் எவை விகிதமுறு அல்லது விகிதமுறா எண்கள் என வகைப்படுத்துக.

(i) $\sqrt{11}$ (ii) $\sqrt{81}$ (iii) 0.0625 (iv) $0.8\overline{3}$ (v) 1.505500555$\cdots$

தீர்வு

(i) $\sqrt{11}$ ஒரு விகிதமுறா எண். (11ஒரு முழுவர்க்க எண் அல்ல)

(ii) $\sqrt{81} = 9 = \frac{9}{1}$, ஒரு விகிதமுறு எண் .

(iii) 0.0625 ஒரு முடிவுறு தசம விரிவு.

$\therefore$ 0.0625 ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும்.

(iv) $0.8\overline{3} = 0.8333\cdots$

இந்த தசம விரிவு முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையுள்ளது.

$\therefore$ $0.8\overline{3}$ விகிதமுறு எண்ணாகும்.

(v) $1.505500555\cdots$ இத்தசம விரிவு முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற தசம விரிவாகும். $\therefore$ $1.505500555\cdots$ ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.7

$\frac{5}{7}$ மற்றும் $\frac{9}{11}$ ஆகியவற்றிற்கு இடைப்பட்ட ஏதேனும் மூன்று விகிதமுறா எண்களைக் காண்க.

தீர்வு

$$\begin{array}{r|l} & 0.714285\cdots \\ 7 & 5.000000 \\ & 4\,9 \\ \hline & \;\;10 \\ & \;\;\;7 \\ \hline & \;\;\;30 \\ & \;\;\;28 \\ \hline & \;\;\;\;20 \\ & \;\;\;\;14 \\ \hline & \;\;\;\;\;60 \\ & \;\;\;\;\;56 \\ \hline & \;\;\;\;\;\;40 \\ & \;\;\;\;\;\;35 \\ \hline & \;\;\;\;\;\;\;50 \\ & \;\;\;\;\;\;\;\;\ddots \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 0.8181\cdots \\ 11 & 9.0000 \\ & 8\,8 \\ \hline & \;\;20 \\ & \;\;11 \\ \hline & \;\;\;90 \\ & \;\;\;88 \\ \hline & \;\;\;\;20 \\ & \;\;\;\;\;\ddots \end{array}$$

$\frac{5}{7} = 0.\overline{714285}$ $\qquad$ $\frac{9}{11} = 0.8181\cdots = 0.\overline{81}$

$\frac{5}{7}$ மற்றும் $\frac{9}{11}$ இவற்றுக்கு இடையே (அதாவது $0.714285\ldots$ மற்றும் $0.8181\ldots$ ஆகியவற்றுக்கு இடையே) மூன்று விகிதமுறா எண்களைக் காண, நாம் முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற தசம விரிவுகளைக் கொண்ட மூன்று எண்களைக் காண வேண்டும். உண்மையில், $\frac{5}{7}$ இக்கும் $\frac{9}{11}$ இக்கும் இடையில் இது போன்ற எண்ணற்ற எண்கள் உள்ளன. அவற்றில் மூன்று எண்கள்,

$0.72022002220002\cdots$

$0.73033003330003\cdots$

$0.75055005550005\cdots$

எடுத்துக்காட்டு 2.8

பின்வரும் சமன்பாடுகளில் x, y, z என்பன விகிதமுறு அல்லது விகிதமுறா எண்களைக் குறிக்கின்றனவா என்பதைத் தீர்மானிக்க.

(i) $x^3 = 8$ $\quad$ (ii) $x^2 = 81$ $\quad$ (iii) $y^2 = 3$ $\quad$ (iv) $z^2 = 0.09$

தீர்வு

(i) $x^3 = 8 = 2^3$ (8 என்பது ஒரு முழு கன எண்)

$\Rightarrow x = 2$, ஒரு விகித முறு எண்.

(ii) $x^2 = 81 = 9^2$ (81 ஒரு முழு வர்க்கம்)

$\Rightarrow x = 9$, ஒரு விகிதமுறு எண்.

(iii) $y^2 = 3 \quad \Rightarrow y = \sqrt{3}$, ஒரு விகிதமுறா எண்.

(iv) $z^2 = 0.09 = \dfrac{9}{100} = \left(\dfrac{3}{10}\right)^2$

$\Rightarrow z = \dfrac{3}{10}$, ஒரு விகிதமுறு எண்.

பயிற்சி 2.3

1. $\sqrt{5}$ ஐ எண்கோட்டில் குறிக்க.
2. $\sqrt{3}$ மற்றும் $\sqrt{5}$ இவற்றிற்கு இடையே ஏதேனும் மூன்று விகிதமுறா எண்களைக் காண்க.
3. 3 மற்றும் 3.5 இவற்றிற்கு இடையே ஏதேனும் இரண்டு விகிதமுறா எண்களைக் காண்க.
4. 0.15 மற்றும் 0.16 இவற்றிற்கு இடையில் ஏதேனும் இரண்டு விகிதமுறா எண்களைக் காண்க.
5. $\dfrac{4}{7}$ மற்றும் $\dfrac{5}{7}$ இவற்றிற்கு இடையே ஏதேனும் இரண்டு விகிதமுறா எண்களைக் காண்க.
6. $\sqrt{3}$ மற்றும் 2 இவற்றிற்கு இடையே ஏதேனும் இரண்டு விகிதமுறா எண்களைக் காண்க.
7. $1.1011001110001\cdots$ மற்றும் $2.1011001110001\cdots$ இவற்றிற்கு இடையில் ஒரு விகிதமுறு எண்ணையும், ஒரு விகிதமுறா எண்ணையும் காண்க.
8. $0.12122122212222\cdots$ மற்றும் $0.2122122212222\cdots$ இவற்றிற்கு இடையே ஏதேனும் இரண்டு விகிதமுறு எண்களைக் காண்க.

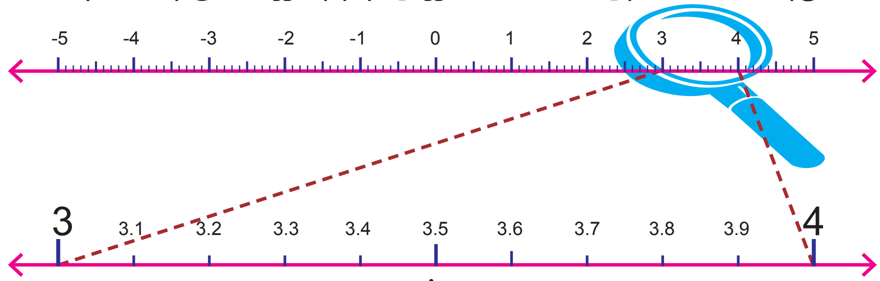
(குறிப்பு : 2 முதல் 8 முடிய உள்ள கணக்குகளுக்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் இருக்கும். அவ்வாறான தீர்வுகளில் ஏதேனும் இரண்டு அல்லது மூன்று தீர்வுகள் போதுமானது.)

2.4.2 மெய்யெண்களை எண்கோட்டில் குறித்தல்

எந்தவொரு மெய்யெண்ணையும் தசமவிரிவாகக் குறிப்பிடலாம் எனக் கண்டோம். இது ஒரு மெய்யெண்ணை எண் கோட்டில் குறிக்க உதவுகிறது.

3.776 ஐ நாம் எண் கோட்டில் குறிப்போம். 3.776 என்பது 3 இக்கும் 4 இக்கும் இடையில் உள்ளது என்பது நமக்குத் தெரியும்.

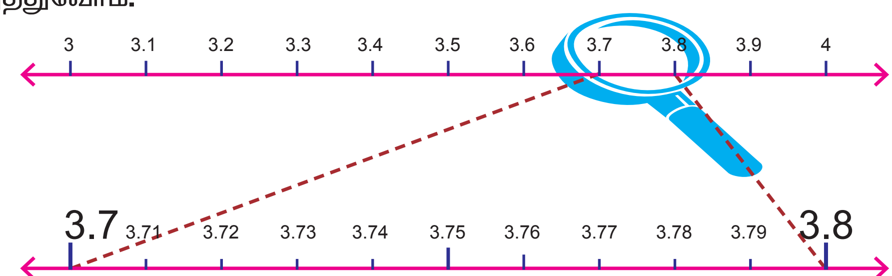
எண் கோட்டில் 3 மற்றும் 4 இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட பகுதியை மிக அருகில் காண்போம்.



படம் . 2.8

3க்கும் 4க்கும் இடைப்பட்ட பகுதியை 10 சமபாகங்களாகப் பிரித்து, படம் 2.8இல் காட்டியுள்ளவாறு குறிப்பிடுவோம். 3 இன் வலப்புறம் உள்ள முதல் குறியீடு 3.1, இரண்டாவது 3.2 எனத் தொடர்ந்து குறிக்கப்பட்டுள்ளது. 3க்கும் 4க்கும் இடைப்பட்ட இக்குறியீடுகளைத் தெளிவாகக் காண உருப்பெருக்கும் கண்ணாடியைப் பயன்படுத்துவோம். இந்த உருப்பெருக்கம் படம் 2.8 இல் உள்ளவாறு இருக்கும்.

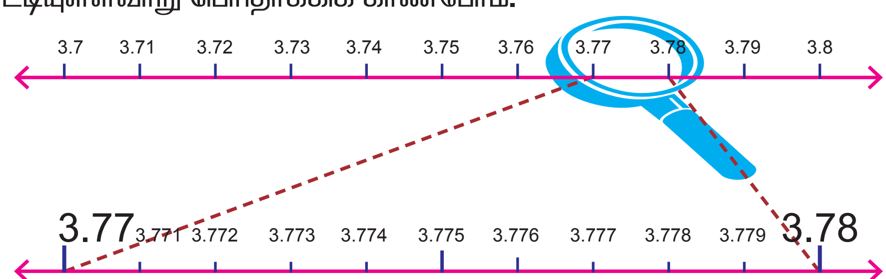
இப்பொழுது 3.776 ஆனது 3.7க்கும் 3.8க்கும் இடையில் இருப்பதைக் காண்கிறோம். எனவே நம்முடைய கவனத்தை 3.7 மற்றும் 3.8 இவற்றிற்கு இடைப்பட்டப் பகுதியின்(படம் 2.9) மேல் செலுத்துவோம்.



படம். 2.9

3.7 மற்றும் 3.8 இவற்றிற்கு இடைப்பட்டப் பகுதியை மீண்டும் 10 சமபாகங்களாகப் பிரிப்போம். முதல் குறியீடு 3.71, இரண்டாவது 3.72 என தொடர்ந்து குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது. இக்குறியீடுகளைத் தெளிவாகக் காண, 3.7க்கும் 3.8க்கும் இடைப்பட்ட பகுதி படம் 2.9 இல் காட்டியுள்ளவாறு உருப்பெருக்கம் செய்யப்பட்டுள்ளது.

இப்போது 3.776 என்பது 3.77க்கும் 3.78க்கும் இடையில் இருப்பதைக் காண்கிறோம். ஆகவே, 3.77க்கும் 3.78க்கும் இடைப்பட்ட பகுதியை மீண்டும் 10 சமபாகங்களாகப் பிரித்து படம் 2.10 இல் காட்டியுள்ளவாறு பெரிதாக்கிக் காண்போம்.



படம். 2.10

முதல் குறியீடு 3.771, அடுத்த குறியீடு 3.772 எனத் தொடர்ந்து குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது. 3.776 என்பது இக்குறியீட்டில் ஆறாவதாக இருப்பதைக் காண்கிறோம்.

இவ்வாறு, உருப்பெருக்கும் கண்ணாடிமூலம் இருஎண்களின் இடைவெளியைப் பெரிதாக்கி எண்களை எண்கோட்டில் குறிக்கும் முறை தொடர் உருப்பெருக்க முறை (process of successive magnification) எனப்படும்.

ஆகவே, எண்கோட்டின் மீது முடிவுறு தசம விரிவைப் பெற்றுள்ள ஒரு மெய்யெண்ணின் நிலையை போதுமான அளவு தொடர் உருப்பெருக்கம் செய்து காணலாம்.

இப்போது, முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையுள்ள தசம விரிவினைக் கொண்ட ஒரு மெய்யெண்ணை எடுத்துக்கொண்டு எண் கோட்டின் மீது அதன் நிலையினைக் காண முற்படுவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.9

$4.\overline{26}$ஐ எண் கோட்டின் மீது 4 தசம இடத்திருத்தமாக அதாவது, 4.2626 முடிய பெரிதாக்கிக் காண்க.

தீர்வு எண்கோட்டின் மீது $4.\overline{26}$ இன் நிலையை தொடர் உருப்பெருக்க முறையில் காண்போம். இம் முறையானது படம். 2.11 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

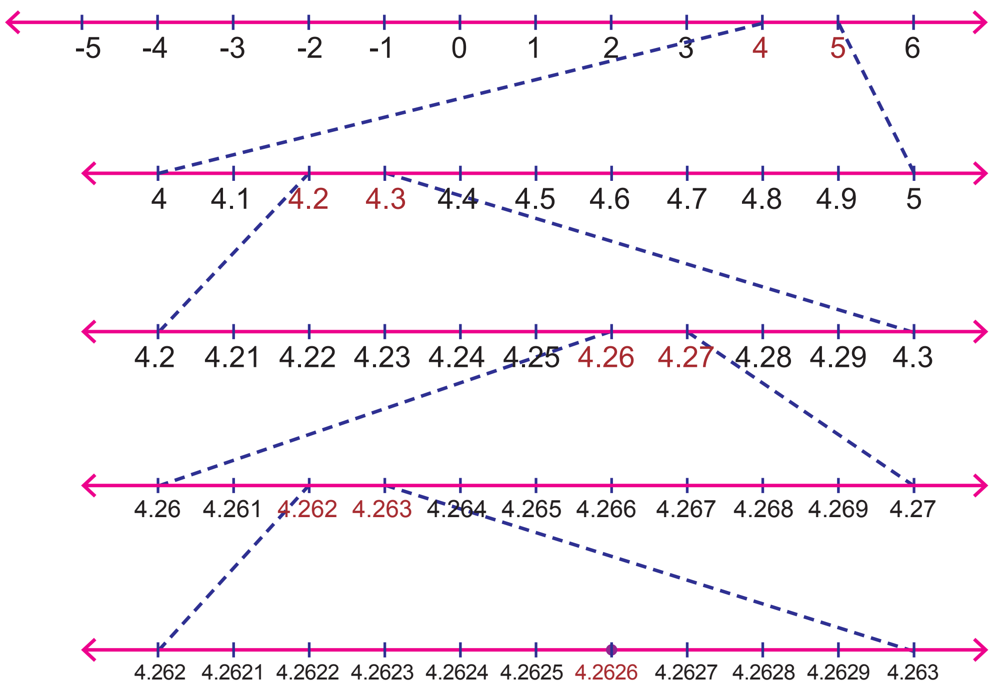
படி 1: $4.\overline{26}$ என்பது 4க்கும் 5க்கும் இடையில் இருப்பதைக்காண்கிறோம்.

படி 2: 4க்கும் 5க்கும் இடைப்பட்டப்பகுதியை 10 சமபாகங்களாகப்பிரித்து, உருப்பெருக்கும் கண்ணாடியைப் பயன்படுத்தி $4.\overline{26}$ என்பது 4.2க்கும் 4.3க்கும் இடையில் இருப்பதைக் காண்கிறோம்.

படி 3: 4.2க்கும் 4.3க்கும் இடைப்பட்டப்பகுதியை 10 சமபாகங்களாகப் பிரித்து, உருப்பெருக்கும் கண்ணாடியைப் பயன்படுத்தி, $4.\overline{26}$ என்பது 4.26க்கும் 4.27க்கும் இடையில் இருப்பதைக் காண்கிறோம்.

படி 4: 4.26க்கும் 4.27க்கும் இடைப்பட்டப்பகுதியை 10 சமபாகங்களாகப் பிரித்து உருப்பெருக்கும் கண்ணாடியைப் பயன்படுத்தி, $4.\overline{26}$ என்பது 4.262க்கும் 4.263க்கும் இடையில் இருப்பதைக் காண்கிறோம்.

படி 5: 4.262க்கும் 4.263க்கும் இடைப்பட்டப்பகுதியை 10 சமபாகங்களாகப் பிரித்து, உருப்பெருக்கும் கண்ணாடியைப் பயன்படுத்தி, $4.\overline{26}$ என்பது 4.2625க்கும் 4.2627க்கும் இடையில் இருப்பதைக் காண்கிறோம்.



படம். 2.11

படத்திலிருந்து, $4.\overline{26}$ என்பது 4.262ஐ விட 4.263 இக்கு நெருக்கமாக அமைந்துள்ளதைக் காண்கிறோம்.

இதேமுறையைப் பயன்படுத்தி எண் கோட்டின் மீது முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற தசம விரிவினைக் கொண்ட ஒரு மெய்யெண்ணின் நிலையை தேவையான அளவு துல்லியமாகக் காணலாம்.

மேற்கண்ட விவாதங்களிலிருந்து, ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணையும் எண்கோட்டின் மீது ஒரு தனித்த புள்ளியால் குறிக்கலாம் என்ற முடிவுக்கு வருகிறோம். மேலும் எண் கோட்டின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் ஒரே ஒரு மெய்யெண்ணை மட்டுமே குறிக்கும் எனவும் முடிவு செய்யலாம்.

2.4.3 மெய்யெண்களின் பண்புகள்

- a, b என்ற ஏதேனும் இரண்டு மெய்யெண்களுக்கு, $a = b$ அல்லது $a > b$ அல்லது $a < b$ ஆகும்.
- இரண்டு மெய்யெண்களின் கூடுதல், கழித்தல் மற்றும் பெருக்கல் மீண்டும் ஒரு மெய் எண்ணாகும்.
- ஒரு மெய்யெண்ணைப் பூச்சியமல்லாத மெய்யெண்ணால் வகுக்கக் கிடைப்பது ஒரு மெய்யெண்ணாகும்.
- விகிதமுறு எண்களைப்போலவே மெய்யெண்களும் அடைப்புவிதி, சேர்ப்புவிதி, பரிமாற்று விதி, கூட்டல் மற்றும் பெருக்கலின் கீழ் பங்கீட்டு விதிகளை நிறைவு செய்கின்றன.
- ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் அதனுடைய எதிர்மறை மெய்யெண்ணைப் பெற்றுள்ளது. பூச்சியம் தனக்குத்தானே எதிர் மறையாகும். மேலும் பூச்சியம் என்பது குறைஎண்ணும் அல்ல மிகைஎண்ணும் அல்ல.

இரு விகிதமுறு எண்களின் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் (பூச்சியத்தால் வகுப்பதை தவிர) ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும். இருப்பினும், இரு விகிதமுறா எண்களின் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் சில நேரங்களில் விகிதமுறு எண்ணாக மாறும்.

விகிதமுறு எண்கள் மற்றும் விகிதமுறா எண்கள் தொடர்பான சில உண்மைகளைக் காண்போம்.

முக்கிய கருத்து
1. ஒரு விகிதமுறு எண் மற்றும் ஒரு விகிதமுறா எண் இவற்றின் கூட்டல் அல்லது கழித்தல் எப்பொழுதும் ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும்.
2. ஒரு பூச்சியமற்ற விகிதமுறு எண் மற்றும் ஒரு விகிதமுறா எண் இவற்றின் பெருக்கல் அல்லது வகுத்தல் ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும்.
3. இரண்டு விகிதமுறா எண்களின் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் எப்பொழுதும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும் எனக் கூறமுடியாது. இது விகிதமுறு எண்ணாகவோ அல்லது விகிதமுறா எண்ணாகவோ இருக்கலாம்.

குறிப்புரை

a ஒரு விகிதமுறு எண் மற்றும் $\sqrt{b}$ ஒரு விகிமுறா எண் எனில்,

(i) $a+\sqrt{b}$ ஒரு விகிதமுறா எண் (ii) $a-\sqrt{b}$ ஒரு விகிதமுறா எண்

(iii) $a\sqrt{b}$ ஒரு விகிதமுறா எண் (iv) $\frac{a}{\sqrt{b}}$ ஒரு விகிதமுறா எண்

(v) $\frac{\sqrt{b}}{a}$ ஒரு விகிதமுறா எண்

எடுத்துக்காட்டாக, (i) $2+\sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறா எண் (ii) $2-\sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறா எண்

(iii) $2\sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறா எண் (iv) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ஒரு விகிதமுறா எண்

2.4.4 மெய்யெண்களின் வர்க்கமூலம்

$a>0$ ஒரு மெய்யெண் என்க. $\sqrt{a}=b$ என்பதன் பொருள் $b^2=a$ மற்றும் $b>0$ என்பதாகும்.

$2\times 2=4$ என்பதால் 2 என்பது 4 இன் ஒரு வர்க்க மூலமாகும். ஆனால் $(-2)\times(-2)=4$ என்பதால் -2 என்பதும் 4 இன் ஒரு வர்க்க மூலமாகும். இவ்விரண்டுக்கும் இடையே உள்ள குழப்பத்தைத் தவிர்க்க, $\sqrt{\ }$ என்ற குறியீடு முதன்மை அல்லது மிகை வர்க்க மூலத்தைக் குறிக்கிறது என வரையறுப்போம்.

இனி வர்க்க மூலம் தொடர்பான சில பயனுள்ள முற்றொருமைகளைக் குறிப்பிடுவோம்.

a, b என்பன மிகை மெய்யெண்கள் எனில்,	
1	$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$
2	$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
3	$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$
4	$(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-b$
5	$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{c}+\sqrt{d})=\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}$
6	$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}$

எடுத்துக்காட்டு 2.10

இரண்டு விகிதமுறா எண்களை, அவற்றின்

(i) கூடுதல் ஒரு விகிதமுறா எண்

(ii) கூடுதல் ஒரு விகிதமுறா எண் அல்ல

(iii) கழித்தல் ஒரு விகிதமுறா எண்

(iv) கழித்தல் ஒரு விகிதமுறா எண் அல்ல

(v) பெருக்கல் ஒரு விகிதமுறா எண்

(vi) பெருக்கல் ஒரு விகிதமுறா எண் அல்ல

(vii) வகுத்தல் ஒரு விகிதமுறா எண்

(viii) வகுத்தல் ஒரு விகிதமுறா எண் அல்ல

என்றிருக்குமாறு காண்க.

கணக்கு

தீர்வு

(i) $2+\sqrt{3}$ மற்றும் $\sqrt{3}-2$ என்ற இரண்டு விகிதமுறா எண்களை எடுத்துக்கொள்க.

அவற்றின் கூடுதல் $2+\sqrt{3}+\sqrt{3}-2 = 2\sqrt{3}$, ஒரு விகிதமுறா எண்.

(ii) $\sqrt{2}$ மற்றும் $-\sqrt{2}$ என்ற இரண்டு விகிதமுறா எண்களை எடுத்துக்கொள்க.

அவற்றின் கூடுதல் $\sqrt{2}+(-\sqrt{2}) = 0$, ஒரு விகிதமுறு எண்.

(iii) $\sqrt{3}$ மற்றும் $\sqrt{2}$ என்ற இரண்டு விகிதமுறா எண்களை எடுத்துக்கொள்க.

அவற்றின் கழித்தல் $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, ஒரு விகிதமுறா எண்.

(iv) $5+\sqrt{3}$ மற்றும் $\sqrt{3}-5$ என்ற இரண்டு விகிதமுறா எண்களை எடுத்துக்கொள்க.

அவற்றின் கழித்தல் $(5+\sqrt{3})-(\sqrt{3}-5) = 10$, ஒரு விகிதமுறு எண்.

(v) $\sqrt{3}$ மற்றும் $\sqrt{5}$ என்ற இரண்டு விகிதமுறா எண்களை எடுத்துக்கொள்க.

அவற்றின் பெருக்கல் $\sqrt{3}\times\sqrt{5} = \sqrt{15}$, ஒரு விகிதமுறா எண்.

(vi) $\sqrt{18}$ மற்றும் $\sqrt{2}$ என்ற இரண்டு விகிதமுறா எண்களை எடுத்துக்கொள்க.

அவற்றின் பெருக்கல் $\sqrt{18}\times\sqrt{2} = \sqrt{36} = 6$, ஒரு விகிதமுறு எண்.

(vii) $\sqrt{15}$ மற்றும் $\sqrt{3}$ என்ற இரண்டு விகிதமுறா எண்களை எடுத்துக்கொள்க.

அவற்றின் வகுத்தல் $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{15}{3}} = \sqrt{5}$, ஒரு விகிதமுறா எண்.

(viii) $\sqrt{75}$ மற்றும் $\sqrt{3}$ என்ற இரண்டு விகிதமுறா எண்களை எடுத்துக்கொள்க.

அவற்றின் வகுத்தல் $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{75}{3}} = 5$, ஒரு விகிதமுறு எண்.

பயிற்சி 2.4

1. தொடர் உருப்பெருக்க முறையைப் பயன்படுத்தி

(i) எண் கோட்டின் மீது 3.456 இன் நிலையைக் காண்க.

(ii) எண் கோட்டின் மீது $6.7\overline{3}$ இன் நிலையை 4 தசம இடத்திருத்தமாகக் காண்க.

பயிற்சி 2.5

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடு

1. முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையுள்ள தசம விரிவினைப் பெற்றுள்ள எண்

   (A) ஒரு முழு (B) ஒரு விகிதமுறு எண்

   (C) ஒரு விகிதமுறா எண் (D) ஒரு முழு எண்

2. முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற தசம விரிவினைப் பெற்றுள்ள எண்

   (A) ஒரு விகிதமுறு எண் (B) ஒரு இயல் எண்

   (C) ஒரு விகிதமுறா எண் (D) ஒரு முழு.

3. $-\frac{3}{4}$ இன் தசம வடிவம்

   (A) – 0.75 (B) – 0.50 (C) – 0.25 (D) – 0.125

4. $0.\bar{3}$ இன் $\frac{p}{q}$ வடிவம்

   (A) $\frac{1}{7}$ (B) $\frac{2}{7}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$

5. பின்வருவனவற்றுள் எது உண்மையல்ல?

   (A) ஒவ்வொரு இயல் எண்ணும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும்

   (B) ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும்

   (C) ஒவ்வொரு முழு எண்ணும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும்

   (D) ஒவ்வொரு முழுவும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும் .

6. பின்வருவனவற்றில் எது முடிவுறு தசம விரிவைப் பெற்றுள்ளது?

   (A) $\frac{5}{32}$ (B) $\frac{7}{9}$ (C) $\frac{8}{15}$ (D) $\frac{1}{12}$

7. பின்வருவனவற்றில் எது விகிதமுறா எண்ணாகும்?

   (A) π (B) $\sqrt{9}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$

8. பின்வருவனவற்றுள் எவை விகிதமுறா எண்கள்?

   (i) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ (ii) $\sqrt{4+\sqrt{25}}$ (iii) $\sqrt[3]{5+\sqrt{7}}$ (iv) $\sqrt{8-\sqrt[3]{8}}$

   (A) (ii),(iii) மற்றும் (iv) (B) (i),(ii) மற்றும் (iv)

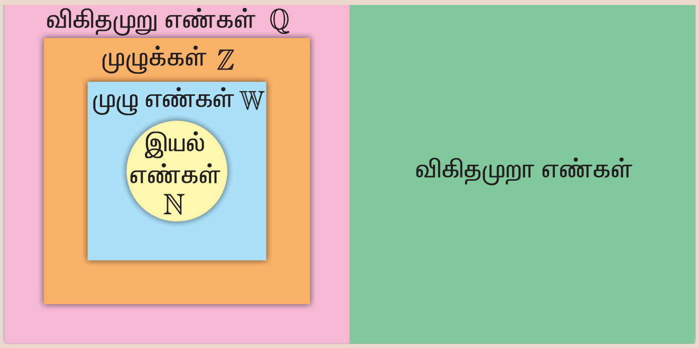
   (C) (i),(ii) மற்றும் (iii) (D) (i),(iii) மற்றும் (iv)

நினைவில் கொள்க...

- $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ என்ற வடிவில் உள்ள எண்ணின் தசம விரிவானது முடிவு பெறும் எனில், $\frac{p}{q}$ -ன் தசம விரிவு முடிவுறு தசமவிரிவு (Terminating decimal expansion) எனப்படும். முடிவுறு தசம விரிவினைக்கொண்ட எண் முடிவுறு தசம எண் எனப்படும்.
- $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ என்ற எண்ணின் தசம விரிவு காணும் போது எந்நிலையிலும் மீதி பூச்சியமாகவில்லை எனில், ஈவில் மீண்டும் மீண்டும் வரும் இலக்கங்களின் தொகுதி கிடைக்கும். இந்நிலையில் $\frac{p}{q}$ இன் தசம விரிவு முடிவுறாச் சுழல் தசம விரிவு அல்லது முடிவுறா மீள்வரு தசம விரிவு (Non-terminating and recurring decimal expansion) எனப்படும். முடிவுறாச் சுழல் தசம விரிவினைக் கொண்ட எண் முடிவுறாச் சுழல் தசம எண் எனப்படும்.
- ஒரு விகிதமுறு எண்ணினை முடிவுறு தசம விரிவாகவோ அல்லது முடிவுறா சுழல் தசம விரிவாகவோ குறிப்பிடலாம்.
- $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ வடிவில் உள்ள விகிதமுறு எண்ணை $\frac{p}{2^m \times 5^n}$, $(p \in \mathbb{Z}$ மற்றும் $m, n \in \mathbb{W})$ என்ற வடிவில் எழுத முடியுமானால், அந்த விகிதமுறு எண் முடிவுறு தசம விரிவினைப் பெற்றிருக்கும். அவ்வாறில்லையெனில், அந்த விகிதமுறு எண் முடிவுறா சுழல் தசம விரிவினைப் பெற்றிருக்கும்.
- முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற தசம விரிவினை கொண்ட எண் ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும். எனவே, ஒரு விகிதமுறா எண்ணை $\frac{p}{q}$, (இங்கு p, q முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$) என்ற வடிவில் எழுதமுடியாது.
- மெய்யெண்களின் கணமானது விகிதமுறு மற்றும் விகிதமுறா எண்களின் சேர்ப்புக் கணமாகும்.
- ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகவோ அல்லது விகிதமுறா எண்ணாகவோ இருக்கும்.
- ஒருமெய்யெண் விகிதமுறு எண் அல்ல எனில், அது ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும்.
- ஒரு விகிதமுறு எண் மற்றும் ஒரு விகிதமுறா எண் இவற்றின் கூட்டல் அல்லது கழித்தல் எப்பொழுதும் ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும்.
- ஒரு பூச்சியமற்ற விகிதமுறு எண் மற்றும் ஒரு விகிதமுறா எண் இவற்றின் பெருக்கல் அல்லது வகுத்தல் ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும்.
- இரண்டு விகிதமுறா எண்களின் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் எப்பொழுதும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும் எனக் கூறமுடியாது. இது விகிதமுறு எண்ணாகவோ அல்லது விகிதமுறா எண்ணாகவோ இருக்கலாம்.

செயல் 1

பின்வரும் படத்தைப் பயன்படுத்தி கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூற்றுகள் ஒவ்வொன்றையும் சரி அல்லது தவறு எனக் காரணம் மற்றும் எடுத்துக்காட்டுடன் கூறுக.



(i) ஒவ்வொரு இயல்எண்ணும் ஒரு முழு ஆகும்.

(ii) 0 ஒரு இயல்எண் ஆகும்.

(iii) ஒவ்வொரு முழுவும் ஓர் இயல்எண் ஆகும்.

(iv) $\sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகும்

(v) ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும்.

செயல் 2

பின்வரும் கூற்றுகளை $=, \subset, \cup$ அல்லது $\cap$ ஆகிய குறியீடுகளை பயன்படுத்தி நிரப்புக. இங்கு $\mathbb{N}$ - இயல்எண்களின் கணம், $\mathbb{W}$ - முழுஎண்களின் கணம், $\mathbb{Z}$ - முழுக்களின் கணம், $\mathbb{Q}$ - விகிதமுறு எண்களின் கணம், $\mathbb{T}$ - விகிதமுறா எண்களின் கணம் மற்றும் $\mathbb{R}$ - மெய்யெண்களின் கணம் என்க. ஒவ்வொரு கூற்றையும் உண்மையாக்கும் அனைத்து விடைகளையும் தருக.

(i) $\mathbb{N}$ ________ $\mathbb{Z}$	(ii) $\mathbb{N}$ ________ $\mathbb{R} = \mathbb{R}$
(iii) $\mathbb{N}$ ________ $\mathbb{W} = \mathbb{N}$	(iv) $\mathbb{Q}$ ________ $\mathbb{T} = \varnothing$
(v) $\mathbb{T}'$ ________ $\mathbb{Q}$	(vi) $\mathbb{Z}$ ________ $\mathbb{R} = \mathbb{Z}$
(vii) $\mathbb{T}$ ________ $\mathbb{Q} = \mathbb{R}$	

செயல் 3

கீழ்காணும் அட்டவணையை பூர்த்தி செய்க.

எண்	இயல்	முழு	முழுக்கள்	விகிதமுறு	விகிதமுறா	மெய்
8	ஆம்					
-11				ஆம்		
0					இல்லை	
$\frac{1}{4}$						ஆம்
π					ஆம்	
$\sqrt{7}$	இல்லை					
6.32	இல்லை					
$1.555\cdots$	இல்லை	இல்லை	இல்லை			
$2.\overline{91}$			இல்லை			
$\sqrt{16}$					இல்லை	

செயல் திட்டம் 1

ஒரு வெள்ளைத்தாளில் அளவுகோல் மற்றும் கவராயத்தின் உதவியுடன் முக்கோணத்தின் கர்ணம் $\sqrt{10}$ வரும்வரை வர்க்கமூல சுருள் (Square root spiral) வரைக.

(அல்லது)

காகித மடிப்பின் மூலம் முக்கோணத்தின் கர்ணம் $\sqrt{10}$ வரும்வரை வர்க்கமூல சுருள் (Square root spiral) வரைக.

செயல் திட்டம் 2

π இன் வரலாற்றை ஆராய்ந்து எழுதுக. மேலும் அதற்குப் பயன்படுத்தப்பட்ட மூலங்களை (sources) பட்டியலிடுக.

(அல்லது)

கணித மேதை இராமனுஜன் எண் 1729 இன் முக்கியத்துவத்தை அறிந்து கொள்க.

பயிற்சி 2.1

1. (i) சரி (ii) தவறு (iii) சரி (iv) தவறு (v) தவறு (vi) தவறு

2. ஆம், ஏனெனில் $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} = \frac{0}{-1} = \cdots$ **3.** $-\frac{4}{7}, -\frac{3}{7}$

பயிற்சி 2.2

1. (i) 0.42, முடிவுறு தசமபின்னம் (ii) $8.\overline{285714}$, முடிவுறா மற்றும் சுழல்தன்மையுள்ளது

(iii) $0.2\overline{36}$, முடிவுறா மற்றும் சுழல்தன்மையுள்ளது (iv) 0.918, முடிவுறு தசமபின்னம்

(v) $0.\overline{09}$, முடிவுறா மற்றும் சுழல்தன்மையுள்ளது

(vi) $-0.\overline{230769}$, முடிவுறா மற்றும் சுழல்தன்மையுள்ளது

(vii) $6.\overline{3}$, முடிவுறா மற்றும் சுழல்தன்மையுள்ளது (viii) -0.21875, முடிவுறு தசமபின்னம்

2. (i) முடிவுறு தசமபின்னம் (ii) முடிவுறா தசமபின்னம் (iii) முடிவுறு தசமபின்னம்

(iv) முடிவுறா தசமபின்னம்

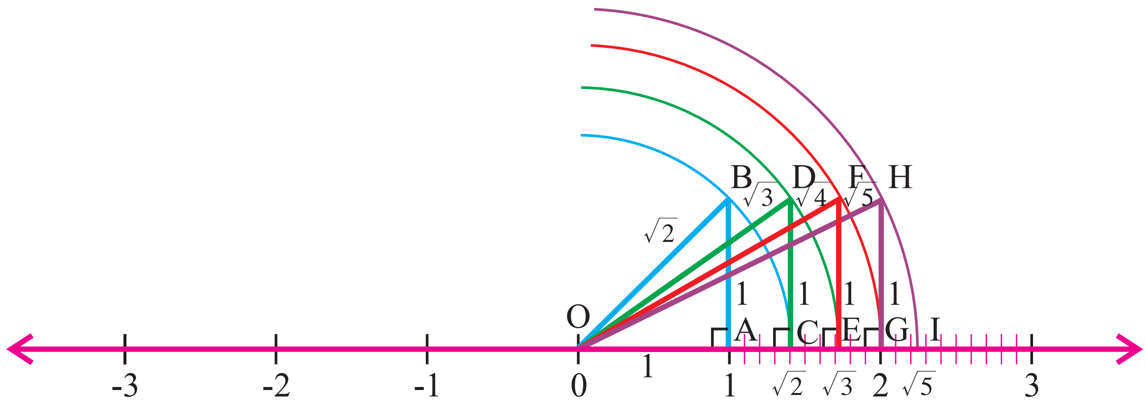
3. (i) $\frac{2}{11}$ (ii) $\frac{427}{999}$ (iii) $\frac{1}{9999}$ (iv) $\frac{16}{11}$ (v) $\frac{22}{3}$ (vi) $\frac{206}{495}$ **4.** $0.\overline{076923}, 6$

5. $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$, $\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$, $\frac{3}{7} = 0.\overline{428571}$, $\frac{4}{7} = 0.\overline{571428}$,

$\frac{5}{7} = 0.\overline{714285}$, $\frac{6}{7} = 0.\overline{857142}$

பயிற்சி 2.3

1.



2. 1.83205⋯, 1.93205⋯, 2.03205⋯
3. 3.10110011100011110⋯, 3.2022002220002222⋯
4. 0.1510100110001110⋯, 0.1530300330003330⋯
5. 0.58088008880⋯, 0.59099009990⋯
6. 1.83205⋯, 1.93205⋯
7. ஒரு விகிதமுறு எண்: 1.102, ஒரு விகிதமுறா எண்: 1.9199119991119⋯
8. 0.13, 0.20 [குறிப்பு: வினா எண் 2 முதல் 8 வரை உள்ளவற்றிற்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டு]

பயிற்சி 2.5

1. B 2. C 3. A 4. C 5. B 6. A 7. A 8. D

3 இயற்கணிதம்

Mathematics is as much an aspect of
culture as it is a collection of algorithms
- CARL BOYER

முதன்மைக் குறிக்கோள்கள்

- பல்லுறுப்புக் கோவைகளை வகைப்படுத்துதல்.
- மீதித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துதல்.
- காரணித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துதல்.

3.1 அறிமுகம்

இயற்கணிதம் என்பது புரிந்து கொள்ள இயலாத கருத்துக்களை கொண்ட மிகவும் கடினமான தொடர்புகளைச் சுருக்கமாக, தெளிவாக, வேகமாக மற்றும் கேட்பவர்களைச் சிந்திக்கும் படியாக எடுத்துக் கூறுவதாகும். $ax = b$ என்ற நேரியச் சமன்பாடு, $ax^2 + bx = c$ என்ற இருபடிச் சமன்பாடு மற்றும் $x^2 + y^2 = z^2$ போன்ற பல்வேறு மாறிகளை உடைய தீர்மானிக்க முடியாத சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க பழங்கால எகிப்து மற்றும் பாபிலோனியா மக்கள் அறிய முற்பட்டதிலிருந்து இயற்கணித வரலாறு ஆரம்பிக்கிறது. 4000 வருடங்களுக்கும் மேலாக இது வளர்ச்சி பெற்றுள்ளது. ஆனால் 17 ஆம் நூற்றாண்டின் மத்தியில் விவரிக்கப்பட்ட இயற்கணித எளிய கணக்குகள் மற்றும் தொடர்புகள் நாம் இன்றைய நிலையில் குறிப்பிடப்படுவது போல இருந்தது. 20ஆம் நூற்றாண்டின் முற்பகுதியில் இயற்கணிதமானது அடிகோள்களின் தொகுப்பாக உருவெடுத்தது. பின்னர் இந்த அடிகோள் உத்திகள் நவீன இயற்கணிதம் எனக் கூறப்பட்டது. புதிய முக்கியமான முடிவுகள் கண்டறியப்பட்டன. மேலும் இயற்கணிதம் கணிதத்தின் அனைத்துத் துறைகளிலும் மற்றும் அறிவியலின் பற்பல துறைகளிலும் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

3.2 இயற்கணிதக் கோவைகள் (Algebraic Expressions)

கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல் என்ற நான்கு அடிப்படைக் கணிதச் செயல்கள், அடுக்குக்குறிகள் அல்லது

டையோபாண்டஸ்
(கி.பி.200 - கி.பி.284)
அல்லது
(கி.பி 214 -கி.பி 298)

சிர்க்கா என்ற நகரத்தில் வாழ்ந்த டையோபாண்டஸ் *(Diophantus)* ஒரு ஹெல்லனிஸ்டிக் கணித அறிஞர் ஆவார். அவர் வாழ்ந்த காலம் தெளிவாகத் தெரியாததால் நூறு ஆண்டுகளுக்கு முன்பே வாழ்ந்திருக்கலாம் எனவும் கருதப்படுகிறது. பதிமூன்று நூல்கள் அடங்கிய ஒரு கணிதப்புதையலான அரித்மெடிக்கா என்ற நூல்களின் தொகுப்பினை எழுதினார். ஆனால் அவற்றில் எஞ்சியுள்ளவை முதல் ஆறு நூல்கள் மட்டுமே. வடிவியல் முறைகளிலிருந்தும் பாபிலோனிய கணிதவியலிலிருந்தும் அவை மாறுபட்டவை. மேலும் இவர் தோராய தீர்வுகளுக்கு பதிலாக மிகச்சரியான தீர்வுகளை முதன்மைப்படுத்தினார். ஆகவே அரித்மெடிக்கா நூலானது கிரேக்க பாரம்பரிய கணிதவியலுடன் சிறிதளவே பொதுவாக இருந்தது.

மூலங்களைக் கண்டெடுத்தல் ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி எண்கள் மற்றும் மாறிகளின் இணைப்பைக் கொண்டு அமைக்கப்படும் கோவைதான் ஒரு இயற்கணிதக் கோவை.

எடுத்துக்காட்டாக, $7,\ x,\ 2x-3y+1,\ \dfrac{5x^3-1}{4xy+1},\ \pi r^2$ மற்றும் $\pi r\sqrt{r^2+h^2}$ என்பன இயற்கணிதக் கோவைகள். சில மாறிகளின் கோவை என்பது அம்மாறிகளை மட்டுமே கொண்டுள்ள கோவை எனப் பொருள்படும். ஒரு இயற்கணிதக் கோவையில் மாறிகளே இல்லாவிடில் அது மாறிலி எனப் பொருள்படும். ஒரு இயற்கணிதக் கோவையில் உள்ள மாறிகளுக்கு எண்களை பிரதியிடும்போது கிடைக்கப்பெறும் விளைவெண் அம்மாறிகளின் மதிப்புகளுக்கான கோவையின் மதிப்பு எனப்படும்.

ஒரு இயற்கணிதக் கோவையின் பகுதிகள் கூட்டல் அல்லது கழித்தல் குறிகளால் இணைக்கப்பட்டிருந்தால் அது இயற்கணிதக் கூடுதல் எனப்படும். ஒவ்வொரு பகுதியும் அதற்கு முன்னால் உள்ள குறியுடன் சேர்த்து ஓர் உறுப்பு எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, $3x^2y-\dfrac{4xz^2}{y}+\pi x^{-1}y$ என்ற இயற்கணிதக் கூடுதலில் $3x^2y,\ -\dfrac{4xz^2}{y}$ மற்றும் $\pi x^{-1}y$ ஆகியன உறுப்புகளாகும்.

ஓர் உறுப்பின் ஏதேனும் ஒருபகுதி மீதமுள்ள பகுதியுடன் பெருக்கப்பட்டிருப்பின், அப்பகுதியானது மீதமுள்ள பகுதியின் கெழு அல்லது குணகம் எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, $-\dfrac{4xz^2}{y}$ என்ற உறுப்பில் $\dfrac{z^2}{y}$ இன் கெழு $-4x$ மற்றும் $\dfrac{xz^2}{y}$ இன் கெழு -4 ஆகும். -4 ஐப் போன்று மாறிகளில்லாத கெழு எண்கெழு எனப்படும். $5x^2y$ மற்றும் $-12x^2y$ போன்ற உறுப்புகள் எண்கெழுக்களில் மட்டுமே வேறுபட்டுள்ளதால், இவைகள் ஒத்த உறுப்புகள் எனப்படும்.

$4\pi r^2$ போன்ற இயற்கணிதக் கோவை ஓர் உறுப்பை மட்டும் கொண்ட இயற்கணிதக் கோவையாக கருதப்படும். இவ்வாறான ஓர் உறுப்பை மட்டும் கொண்ட கோவையானது ஒருறுப்புக் கோவை எனப்படும். இரண்டு உறுப்புகளைக் கொண்ட கோவையானது ஈருறுப்புக் கோவை எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, $3x^2+2xy$ என்பது ஓர் ஈருறுப்புக் கோவை. அதேபோன்று $-2xy^{-1}+3\sqrt{x}-4$ என்பது மூவுறுப்புக் கோவை எனவும் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளைக் கொண்ட கோவை ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை எனவும் அழைக்கலாம்.

3.3 பல்லுறுப்புக் கோவைகள் (Polynomials)

வகுத்திகளில் மாறிகள் இல்லாததும், மூலக் குறிகளின் உள்ளே மாறிகள் இல்லாததும் மற்றும் மிகை முழுக்களை அடுக்குகளாகக் கொண்ட, மாறிகளைக் கொண்டு அமையும் இயற்கணிதக் கோவை ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக, $-2xy^{-1}+3\sqrt{x}-4$ என்ற மூவுறுப்புக் கோவை ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையல்ல. இருப்பினும் $3x^2y^4+\sqrt{2}\,xy-\dfrac{1}{2}$ என்ற மூவுறுப்புக் கோவை x மற்றும் y என்ற மாறிகளைக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். மாறிகளில்லாத $-\dfrac{1}{2}$ என்ற உறுப்பு பல்லுறுப்புக் கோவையின் மாறிலியாகும். பல்லுறுப்புக் கோவையிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்கெழுக்கள் பல்லுறுப்புக் கோவையின் கெழுக்களாகும். மேலேயுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவையின் கெழுக்கள் $3,\ \sqrt{2}$ மற்றும் $-\dfrac{1}{2}$ ஆகும்.

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையிலுள்ள ஓர் உறுப்பின் படி என்பது அவ்வுறுப்பிலுள்ள மாறிகளின் அடுக்குகளின் கூடுதல் ஆகும். அடுக்குகளைக் கூட்டும் போது ஒரு மாறியில் அடுக்கு இல்லையெனில் அதன் அடுக்கு ஒன்று எனக் கருதவேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, $9xy^7 - 12x^3yz^2 + 3x - 2$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையில் $9xy^7$ என்ற உறுப்பின் படி $1 + 7 = 8$ மற்றும் $-12x^3yz^2$ என்ற உறுப்பின் படி $3 + 1 + 2 = 6$ மற்றும் $3x$ என்ற உறுப்பின் படி 1 ஆகும். மாறிலி உறுப்பின் படி பூச்சியம் என எப்போதும் எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையில் பூச்சியமல்லாத கெழுவைக் கொண்ட உறுப்புகளில் மிக உயர்ந்த படி கொண்ட உறுப்பின் படி அப்பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி (degree) எனக் கூறப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, மேலே எடுத்துக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி 8. 0 என்ற ஒருறுப்பு மாறிலியும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகக் கருதப்பட்டாலும் இந்தக் குறிப்பிட்ட பல்லுறுப்புக் கோவைக்குப் படி வரையறுக்கப் படவில்லை.

3.3.1 ஒரு மாறியில் அமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவைகள்

இப்பாடப் பகுதியில் ஒரு மாறியில் அமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவைகளை மட்டுமே நாம் எடுத்துக் கொள்வோம்.

முக்கிய கருத்து — **ஒரு மாறியில் அமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவை**

x என்ற ஒரு மாறியில் அமைந்த ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் இயற்கணித அமைப்பு

$$\mathrm{p}(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0,\ \ a_n \neq 0$$

இங்கு $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ ஆகியன மாறிலிகள் மற்றும் n என்பது ஒரு குறையற்ற மிகை முழு.

இங்கு, n என்பது பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி மற்றும் $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ என்பன பல்லுறுப்புக் கோவையின் கெழுக்கள். a_0 என்பது மாறிலி உறுப்பு. $a_n x^n, a_{n-1}x^{n-1}, \cdots, a_2x^2, a_1x, a_0$ ஆகியன பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$-ன் உறுப்புகள். எடுத்துக்காட்டாக, $5x^2 + 3x - 1$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையில் x^2- ன் கெழு 5, x-ன் கெழு 3 மற்றும் -1 என்பது மாறிலி. இப்பல்லுறுப்புக் கோவையின் மூன்று உறுப்புகள் $5x^2, 3x$ மற்றும் -1 ஆகும்.

3.3.2 பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வகைகள்

முக்கிய கருத்து — **உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அடிப்படையிலான பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வகைகள்**

ஒருறுப்புக் கோவை

ஓர் உறுப்பை மட்டுமே கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை ஒருறுப்புக் கோவை எனப்படும்.

ஈருறுப்புக் கோவை

இரண்டு உறுப்புகளை மட்டுமே கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை ஈருறுப்புக் கோவை எனப்படும்.

மூவுறுப்புக் கோவை

மூன்று உறுப்புகளை மட்டுமே கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை மூவுறுப்புக் கோவை எனப்படும்.

குறிப்பு

1. ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையானது, வெவ்வேறு படிகளைக் கொண்ட இரண்டு ஒருறுப்புக் கோவைகளின் கூடுதல் ஆகும்.
2. ஒரு மூவுறுப்புக் கோவையானது, வெவ்வேறு படிகளைக் கொண்ட மூன்று ஒருறுப்புக் கோவைகளின் கூடுதல் ஆகும்.
3. ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையானது, ஒருறுப்புக் கோவை அல்லது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட ஒருறுப்புக் கோவைகளின் கூடுதல் ஆகும்.

முக்கிய கருத்து **படியின் அடிப்படையில் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வகைகள்**

மாறிலிப் பல்லுறுப்புக் கோவை

படி பூச்சியமாக உள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை மாறிலிப் பல்லுறுப்புக் கோவை ஆகும்.

இதன் பொதுவடிவம் : $p(x)= c$, இங்கு c ஒரு மெய்யெண்.

ஒருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை அல்லது நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவை

படி ஒன்றாக உள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை ஒருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை ஆகும்.

இதன் பொதுவடிவம் : $p(x) = ax+b$, a மற்றும் b மெய்யெண்கள் மேலும் $a \neq 0$.

இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை

படி இரண்டாக உள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை எனப்படும்.

இதன் பொது வடிவம்: $ax^2 + bx + c$, இங்கு a, b மற்றும் c ஆகியன மெய்யெண்கள் மேலும் $a \neq 0$.

முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை

படி மூன்றாக உள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை எனப்படும்.

இதன் பொது வடிவம் : $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ இங்கு a,b,c மற்றும் d ஆகியன மெய்யெண்கள் மேலும் $a \neq 0$.

எடுத்துக்காட்டு 3.1

பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை அவற்றின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைப் பொறுத்து வகைப்படுத்துக.

(i) $x^3 - x^2$	(ii) $5x$	(iii) $4x^4 + 2x^3 + 1$	(iv) $4x^3$
(v) $x + 2$	(vi) $3x^2$	(vii) $y^4 + 1$	(viii) $y^{20} + y^{18} + y^2$
(ix) 6	(x) $2u^3 + u^2 + 3$	(xi) $u^{23} - u^4$	(xii) y

தீர்வு

$5x$, $3x^2$, $4x^3$, y மற்றும் 6 என்பன ஒருறுப்புக் கோவைகள் ஏனெனில், இவற்றில் ஒரே ஒரு உறுப்பு உள்ளது.

$x^3 - x^2$, $x + 2$, $y^4 + 1$ மற்றும் $u^{23} - u^4$ என்பன ஈருறுப்புக் கோவைகள் ஏனெனில், இவற்றில் இரண்டு உறுப்புகள் உள்ளன.

$4x^4 + 2x^3 + 1$, $y^{20} + y^{18} + y^2$ மற்றும் $2u^3 + u^2 + 3$ என்பன மூவுறுப்புக் கோவைகள் ஏனெனில், இவற்றில் மூன்று உறுப்புகள் உள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 3.2

பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை அவற்றின் படிகளைப் பொறுத்து வகைப்படுத்துக.

(i) $p(x) = 3$ (ii) $p(y) = \frac{5}{2}y^2 + 1$ (iii) $p(x) = 2x^3 - x^2 + 4x + 1$

(iv) $p(x) = 3x^2$ (v) $p(x) = x + 3$ (vi) $p(x) = -7$

(vii) $p(x) = x^3 + 1$ (viii) $p(x) = 5x^2 - 3x + 2$ (ix) $p(x) = 4x$

(x) $p(x) = \frac{3}{2}$ (xi) $p(x) = \sqrt{3}\,x + 1$ (xii) $p(y) = y^3 + 3y$

தீர்வு

$p(x) = 3,\ p(x) = -7,\ p(x) = \frac{3}{2}$ என்பன மாறிலி பல்லுறுப்புக் கோவைகள்.

$p(x) = x + 3,\ p(x) = 4x,\ p(x) = \sqrt{3}\,x + 1$ என்பன ஒருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவைகள் ஏனெனில், மாறி x-ன் மிக உயர்ந்த படி 1.

$p(x) = 5x^2 - 3x + 2,\ p(y) = \frac{5}{2}y^2 + 1,\ p(x) = 3x^2$ என்பன இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவைகள் ஏனெனில், மாறியின் மிக உயர்ந்த படி 2.

$p(x) = 2x^3 - x^2 + 4x + 1,\ p(x) = x^3 + 1,\ p(y) = y^3 + 3y$ என்பன முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவைகள் ஏனெனில், மாறியின் மிக உயர்ந்த படி 3.

பயிற்சி 3.1

1. பின்வரும் இயற்கணிதக் கோவைகள் ஒரு மாறியில் அமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவையா ? எனக் கூறு. உன்னுடைய விடைக்கு காரணம் கூறுக.

   (i) $2x^5 - x^3 + x - 6$ (ii) $3x^2 - 2x + 1$ (iii) $y^3 + 2\sqrt{3}$

   (iv) $x - \frac{1}{x}$ (v) $\sqrt[3]{t} + 2t$ (vi) $x^3 + y^3 + z^6$

2. பின்வரும் ஒவ்வொன்றிலும் x^2 மற்றும் x இன் கெழுக்களைக் காண்க.

   (i) $2 + 3x - 4x^2 + x^3$ (ii) $\sqrt{3}\,x + 1$ (iii) $x^3 + \sqrt{2}\,x^2 + 4x - 1$

   (iv) $\frac{1}{3}x^2 + x + 6$

3. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் ஒவ்வொன்றின் படியினைக் காண்க.

   (i) $4 - 3x^2$ (ii) $5y + \sqrt{2}$ (iii) $12 - x + 4x^3$ (iv) 5

4. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை அவற்றின் படியினைப் பொறுத்து வகைப்படுத்துக.

   (i) $3x^2 + 2x + 1$ (ii) $4x^3 - 1$ (iii) $y + 3$

   (iv) $y^2 - 4$ (v) $4x^3$ (vi) $2x$

5. படி 27 ஆக உள்ள ஒரு ஈருறுப்புக் கோவை, படி 49 ஆக உள்ள ஒரு ஓருறுப்புக் கோவை, படி 36 ஆக உள்ள ஒரு மூவுறுப்புக் கோவை ஆகியவற்றிக்கு ஓர் உதாரணம் தருக.

3.3.3 பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூச்சியங்கள்

$p(x) = x^2 - x - 2$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையைக் கருதுக. $x = -1$, $x = 1$ மற்றும் $x = 2$ எனில், $p(x)$ இன் மதிப்புகளைக் காண்போம்.

$$p(-1) = (-1)^2 - (-1) - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$$
$$p(1) = (1)^2 - 1 - 2 = 1 - 1 - 2 = -2$$
$$p(2) = (2)^2 - 2 - 2 = 4 - 2 - 2 = 0$$

அதாவது, $x = -1$, 1 மற்றும் 2 எனும் போது பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ இன் மதிப்புகள் முறையே $0, -2$ மற்றும் 0 ஆகும்.

மாறியின் சில மதிப்புகளுக்குப் பல்லுறுப்புக் கோவையின் மதிப்பு பூச்சியம் எனில், அந்த மதிப்பு பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியம் எனப்படும்.

$p(-1) = 0$. எனவே $x = -1$ என்பது $p(x) = x^2 - x - 2$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒரு பூச்சியம் ஆகும். இதேபோன்று, $x = 2$ எனில், $p(2) = 0$. எனவே $x = 2$ என்பதுவும் $p(x)$ இன் ஒரு பூச்சியம் ஆகும்.

முக்கிய கருத்து	பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியம்
$p(x)$ என்பது x இல் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை என்க. $p(a) = 0$ எனில், a என்பது $p(x)$ இன் ஒரு பூச்சியம் எனக் கூறுவோம்.	

குறிப்பு ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை பல்லுறுப்புக் கோவையின் படிக்குச் சமமாகவோ அல்லது அதற்குக் குறைவாகவோ இருக்கும். கார்ல் பிரெடெரிக் காஸ் (1777 - 1855) என்பவர் 1798 ஆம் ஆண்டு தனது ஆராய்ச்சிப் பட்டப் படிப்புக் கட்டுரையில் n படி பல்லுறுப்புக் கோவைக்குச் சரியாக n தீர்வுகள் உண்டு என நிரூபித்துள்ளார். இந்த முக்கியமான முடிவு இயற்கணிதத்தின் அடிப்படைத் தேற்றம் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.3

$p(x) = 5x^3 - 3x^2 + 7x - 9$ எனில், (i) $p(-1)$ மற்றும் (ii) $p(2)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு $p(x) = 5x^3 - 3x^2 + 7x - 9$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

(i) $p(-1) = 5(-1)^3 - 3(-1)^2 + 7(-1) - 9 = -5 - 3 - 7 - 9$

$\therefore\ p(-1) = -24$

(ii) $p(2) = 5(2)^3 - 3(2)^2 + 7(2) - 9 = 40 - 12 + 14 - 9$

$\therefore\ p(2) = 33$

எடுத்துக்காட்டு 3.4

பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூச்சியங்களைக் காண்க.

(i) $p(x) = 2x - 3$ (ii) $p(x) = x - 2$

தீர்வு

(i) $p(x) = 2x - 3 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

எனவே, $p\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right) = 2(0) = 0$ என நாம் பெறுகிறோம்.

$\therefore\ x = \frac{3}{2}$ என்பது $p(x)$-ன் பூச்சியம் ஆகும்.

(ii) $p(x)= x - 2$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

இப்போது, $p(2) = 2 - 2 = 0$

$\therefore\ x = 2$ என்பது $p(x)$- ன் பூச்சியம் ஆகும்.

3.3.4 பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளின் மூலங்கள்

$p(x)$ என்பது ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை என்க. பின்னர் $p(x) = 0$ என்பது x-ல் அமைந்த ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடு எனப்படும்.

$p(x) = x - 1$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை எடுத்துக் கொள்க. x = 1 என்பது பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x) = x - 1$ இன் பூச்சியம் ஆகும். இப்போது, $p(x) = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்க. அதாவது, $x - 1 = 0$ ஐ எடுத்துக் கொள்வோம். $x - 1 = 0$ எனில், $x = 1$ ஆகும். $x = 1$ என்பது பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடு $p(x) = 0$இன் மூலம் ஆகும்.

எனவே, பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியங்கள், ஒத்த பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் ஆகும்.

முக்கிய கருத்து	பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டின் மூலம்
$x = a$ என்பது $p(x) = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்தால், $x = a$என்பது $p(x) = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் எனப்படும்.	

எடுத்துக்காட்டு 3.5

பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளின் மூலங்களைக் காண்க.

(i) $x - 6 = 0$ (ii) $2x + 1 = 0$

தீர்வு

(i) $x - 6= 0$ எனில், $x = 6$

$\therefore\ x= 6$ என்பது $x - 6 = 0$ -ன் ஒரு மூலம் ஆகும்.

(ii) $2x + 1= 0$ எனில், $2x = -1 \implies x = -\frac{1}{2}$

$\therefore\ x = -\frac{1}{2}$ என்பது $2x + 1 = 0$ -ன் ஒரு மூலம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.6

பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளுக்கு அவற்றிற்கு எதிரே குறிப்பிட்டுள்ளவைகள் மூலங்களா என ஆராய்க.

(i) $2x^2 - 3x - 2 = 0; \quad x = 2, 3$

(ii) $x^3 + 8x^2 + 5x - 14 = 0; \quad x = 1, 2$

தீர்வு

(i) $p(x) = 2x^2 - 3x - 2$ என்க.

இப்போது, $p(2) = 2(2)^2 - 3(2) - 2 = 8 - 6 - 2 = 0$

$\therefore \quad x = 2$ என்பது $2x^2 - 3x - 2 = 0$ இன் ஒரு மூலம்ஆகும்.

ஆனால், $p(3) = 2(3)^2 - 3(3) - 2 = 18 - 9 - 2 = 7 \neq 0$

$\therefore \quad x = 3$ என்பது $2x^2 - 3x - 2 = 0$ இன் ஒரு மூலம் ஆகாது.

(ii) $p(x) = x^3 + 8x^2 + 5x - 14$ என்க.

$p(1) = (1)^3 + 8(1)^2 + 5(1) - 14 = 1 + 8 + 5 - 14 = 0$

$\therefore \quad x = 1$ என்பது $x^3 + 8x^2 + 5x - 14 = 0$ இன் ஒரு மூலம் ஆகும்.

ஆனால், $p(2) = (2)^3 + 8(2)^2 + 5(2) - 14 = 8 + 32 + 10 - 14 = 36 \neq 0$

$\therefore \quad x = 2$ என்பது $x^3 + 8x^2 + 5x - 14 = 0$ இன் ஒரு மூலம் ஆகாது.

பயிற்சி 3.2

1. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூச்சியங்களைக் காண்க.

   (i) $p(x) = 4x - 1$ (ii) $p(x) = 3x + 5$ (iii) $p(x) = 2x$ (iv) $p(x) = x + 9$

2. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளின் மூலங்களைக் காண்க.

   (i) $x - 3 = 0$ (ii) $5x - 6 = 0$ (iii) $11x + 1 = 0$ (iv) $-9x = 0$

3. பின்வரும்பல்லுறுப்புக்கோவைச்சமன்பாடுகளுக்கு,அவற்றிக்குஎதிரேகுறிப்பிட்டுள்ளவை மூலங்களா என ஆராய்க.

   (i) $x^2 - 5x + 6 = 0; \quad x = 2, 3$ (ii) $x^2 + 4x + 3 = 0; \quad x = -1, 2$

   (iii) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0; \; x = 1, -2, 3$ (iv) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0; \; x = -1, 2, 3$

3.3.5 பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வகுத்தல்

இயற்கணிதத்தில் $p(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் வகுத்தலை கோவைகளின் வகுத்தல் படிநிலைகளாக எழுத இயலும்.

முக்கிய கருத்து **பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வகுத்தல் படிநிலை**

$p(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்பன இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகள், $p(x)$ இன் படி $\geq g(x)$ இன் படி, மேலும் $g(x) \neq 0$ என்றவாறு உள்ளது எனில், $q(x)$ மற்றும் $r(x)$ என்ற தனித்துவமான இரு பல்லுறுப்பு கோவைகளை

$$p(x) = g(x)\,q(x) + r(x) \qquad \ldots (1)$$

என்றவாறு காண இயலும். இங்கு $r(x) = 0$ அல்லது $r(x)$ இன் படி $g(x)$ இன் படியை விட சிறியது.

இங்கு வகுபடும் கோவை $p(x)$, வகுக்கும் கோவை $g(x)$, ஈவு $q(x)$, மீதி $r(x)$ ஆகும்.

$(1) \Longrightarrow$ வகுபடும் கோவை = (வகுக்கும் கோவை x ஈவு) + மீதி

எடுத்துக்காட்டு 3.7

$10 - 4x + 3x^2$ ஐ $x - 2$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் ஈவு, மீதியைக் காண்க.

தீர்வு முதலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோவையின் உறுப்புகளை இறங்கு வரிசையில் (அல்லது ஏறு வரிசையில்) நாம் எழுத வேண்டும். இதன்படி கொடுப்பட்டுள்ள கணக்கு $(3x^2 - 4x + 10) \div (x - 2)$ என ஆகும்.

$$\begin{array}{r|l}
 & 3x + 2 \\ \hline
x - 2 & 3x^2 - 4x + 10 \\
 & 3x^2 - 6x \\
 & {}_{-}\quad\ {}_{+} \\ \hline
 & \qquad 2x + 10 \\
 & \qquad 2x - 4 \\
 & \qquad {}_{-}\quad\ {}_{+} \\ \hline
 & \qquad\qquad 14
\end{array}$$

(i) $\dfrac{3x^2}{x} = 3x$

(ii) $3x(x - 2) = 3x^2 - 6x$

(iii) $\dfrac{2x}{x} = 2$

(iv) $2(x - 2) = 2x - 4$

$\therefore$ ஈவு $= 3x + 2$ மீதி $= 14$

(வகுபடும் கோவை = (வகுக்கும் கோவை x ஈவு) + மீதி என்ற வகுத்தல் படி நிலையில் $3x^2 - 4x + 10 = (x - 2)(3x + 2) + 14$ உள்ளது.)

எடுத்துக்காட்டு 3.8

$(4x^3 + 6x^2 - 23x - 15) \div (3 + x)$ எனில் ஈவு மற்றும் மீதியைக் காண்க.

தீர்வு முதலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோவையின் உறுப்புகளை இறங்கு வரிசையில் (அல்லது ஏறு வரிசையில்) நாம் எழுத வேண்டும். இதன்படி கொடுப்பட்டுள்ள கணக்கு $(4x^3 + 6x^2 - 23x - 15) \div (x + 3)$ என ஆகும்.

$$\begin{array}{r|l}
 & 4x^2 - 6x - 5 \\ \hline
x + 3 & 4x^3 + 6x^2 - 23x - 15 \\
 & 4x^3 + 12x^2 \\
 & {}_{-}\qquad {}_{-} \\ \hline
 & \qquad -6x^2 - 23x \\
 & \qquad -6x^2 - 18x \\
 & \qquad {}_{+}\qquad {}_{+} \\ \hline
 & \qquad\qquad -5x - 15 \\
 & \qquad\qquad -5x - 15 \\
 & \qquad\qquad {}_{+}\qquad {}_{+} \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

(i) $\dfrac{4x^3}{x} = 4x^2$

(ii) $4x^2(x + 3) = 4x^3 + 12x^2$

(iii) $\dfrac{-6x^2}{x} = 6x$

(iv) $-6x(x + 3) = -6x^2 - 18x$

(v) $\dfrac{-5x}{x} = -5$

(vi) $-5(x + 3) = -5x - 15$

$\therefore$ ஈவு $= 4x^2 - 6x - 5$ மீதி $= 0$

எடுத்துக்காட்டு 3.9

$8x^3 - 14x^2 - 19x - 8$ ஐ $4x + 3$ ஆல் வகுக்க கிடைக்கும் ஈவு, மீதியைக் காண்க.

தீர்வு

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 5x - 1 \\
\hline
4x + 3 & 8x^3 - 14x^2 - 19x - 8 \\
 & 8x^3 + 6x^2 \\
 & (-)\quad (-) \\
\hline
 & \quad -20x^2 - 19x \\
 & \quad -20x^2 - 15x \\
 & \quad (+)\quad (+) \\
\hline
 & \qquad -4x - 8 \\
 & \qquad -4x - 3 \\
 & \qquad (+)\quad (+) \\
\hline
 & \qquad\quad -5
\end{array}
$$

(i) $\dfrac{8x^3}{4x} = 2x^2$

(ii) $2x^2(4x+3) = 8x^3 + 6x^2$

(iii) $\dfrac{-20x^2}{4x} = -5x$

(iv) $-5x(4x+3) = -20x^2 - 15x$

(v) $\dfrac{-4x}{4x} = -1$

(vi) $-1(4x+3) = -4x - 3$

$\therefore$ ஈவு $= 2x^2 - 5x - 1$ மீதி $= -5$

பயிற்சி 3.3

1. பின்வரும் வகுத்தலில் ஈவு மற்றும் மீதியைக் காண்க.

   (1) $(5x^3 - 8x^2 + 5x - 7) \div (x - 1)$ (2) $(2x^2 - 3x - 14) \div (x + 2)$

   (3) $(9 + 4x + 5x^2 + 3x^3) \div (x + 1)$ (4) $(4x^3 - 2x^2 + 6x + 7) \div (3 + 2x)$

   (5) $(18 - 9x - 7x^2) \div (x - 2)$

3.4 மீதித் தேற்றம் (Remainder Theorem)

மீதித் தேற்றம்

$p(x)$ என்பது ஏதேனும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை மற்றும் a என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் என்க. $p(x)$ ஐ $(x - a)$ என்ற ஒருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $p(a)$ ஆகும்.

குறிப்பு

1. $p(x)$ ஐ $(x + a)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $p(-a)$ ஆகும்.
2. $p(x)$ ஐ $(ax - b)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $p\left(\dfrac{b}{a}\right)$ ஆகும்.
3. $p(x)$ ஐ $(ax + b)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $p\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ ஆகும்.
4. இங்கு $-a$, $\dfrac{b}{a}$ மற்றும் $-\dfrac{b}{a}$ ஆகியவை முறையே வகுத்திகள் $x + a$, $ax - b$ மற்றும் $ax + b$ ஆகியவற்றின் பூச்சியங்கள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.10

$4x^3 - 5x^2 + 6x - 2$ ஐ $(x - 1)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.

தீர்வு $p(x) = 4x^3 - 5x^2 + 6x - 2$ என்க. $x - 1$ இன் பூச்சியம் 1.

$p(x)$ ஐ $(x - 1)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $p(1)$ ஆகும்.

இப்போது, $p(1) = 4(1)^3 - 5(1)^2 + 6(1) - 2$

$= 4 - 5 + 6 - 2 = 3$

$\therefore$ மீதி $= 3$.

எடுத்துக்காட்டு 3.11

$x^3 - 7x^2 - x + 6$ ஐ $(x + 2)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.

தீர்வு $p(x) = x^3 - 7x^2 - x + 6$ என்க. $x + 2$ இன் பூச்சியம் -2 ஆகும்.

$p(x)$ ஐ $(x + 2)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $p(-2)$ ஆகும்.

இப்போது, $p(-2) = (-2)^3 - 7(-2)^2 - (-2) + 6$

$= -8 - 7(4) + 2 + 6$

$= -8 - 28 + 2 + 6 = -28$

$\therefore$ மீதி $= -28$

எடுத்துக்காட்டு 3.12

$2x^3 - 6x^2 + 5ax - 9$ என்பதை $(x - 2)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி 13 எனில், a இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு $p(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5ax - 9$ என்க. $(x - 2)$ இன் பூச்சியம் 2.

$p(x)$ ஐ $(x - 2)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $p(2)$ ஆகும்.

$p(2) = 13$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\Longrightarrow \quad 2(2)^3 - 6(2)^2 + 5a(2) - 9 = 13$$

$$2(8) - 6(4) + 10a - 9 = 13$$

$$16 - 24 + 10a - 9 = 13$$

$$10a - 17 = 13$$

$$10a = 30$$

$$\therefore \quad a = 3$$

எடுத்துக்காட்டு 3.13

$x^3 + ax^2 - 3x + a$ ஐ $(x + a)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.

தீர்வு

$p(x) = x^3 + ax^2 - 3x + a$ என்க.

$p(x)$ ஐ $(x + a)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $p(-a)$ ஆகும்.

$p(-a) = (-a)^3 + a(-a)^2 - 3(-a) + a = -a^3 + a^3 + 4a = 4a$

$\therefore$ மீதி $= 4a$.

எடுத்துக்காட்டு 3.14

$f(x) = 12x^3 - 13x^2 - 5x + 7$ ஐ $(3x+2)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.

தீர்வு $f(x) = 12x^3 - 13x^2 - 5x + 7$.

$f(x)$ ஐ $(3x+2)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $f\left(-\frac{2}{3}\right)$ ஆகும்.

இப்போது,
$$\begin{aligned} f\left(-\tfrac{2}{3}\right) &= 12\left(-\tfrac{2}{3}\right)^3 - 13\left(-\tfrac{2}{3}\right)^2 - 5\left(-\tfrac{2}{3}\right) + 7 \\ &= 12\left(-\tfrac{8}{27}\right) - 13\left(\tfrac{4}{9}\right) + \tfrac{10}{3} + 7 \\ &= -\tfrac{32}{9} - \tfrac{52}{9} + \tfrac{10}{3} + 7 = \tfrac{9}{9} = 1 \end{aligned}$$

$\therefore$ மீதி = 1.

எடுத்துக்காட்டு 3.15

பல்லுறுப்புக் கோவைகள் $2x^3 + ax^2 + 4x - 12$ மற்றும் $x^3 + x^2 - 2x + a$ ஆகியவற்றை $(x-3)$ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதிகள் சமம் எனில், a இன் மதிப்பைக் காண்க. மேலும் மீதியையும் காண்க.

தீர்வு $p(x) = 2x^3 + ax^2 + 4x - 12$

மற்றும் $q(x) = x^3 + x^2 - 2x + a$ என்க.

$p(x)$ ஐ $(x-3)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $p(3)$ ஆகும்.

இப்போது,
$$\begin{aligned} p(3) &= 2(3)^3 + a(3)^2 + 4(3) - 12 \\ &= 2(27) + a(9) + 12 - 12 \\ &= 54 + 9a \qquad (1) \end{aligned}$$

$q(x)$ ஐ $(x-3)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $q(3)$ ஆகும்.

இப்போது,
$$\begin{aligned} q(3) &= (3)^3 + (3)^2 - 2(3) + a \\ &= 27 + 9 - 6 + a \\ &= 30 + a \qquad (2) \end{aligned}$$

மீதிகள் சமம் எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால், $p(3) = q(3)$ ஆகும்.

அதாவது, $54 + 9a = 30 + a$ ((1), (2) ஆகியவற்றின் படி)
$$\begin{aligned} 9a - a &= 30 - 54 \\ 8a &= -24 \\ \therefore a &= -\frac{24}{8} = -3 \end{aligned}$$

$a = -3$ என $p(3)$ இல் பதிலிட, நாம் பெறுவது
$$p(3) = 54 + 9(-3) = 54 - 27 = 27$$

$\therefore$ மீதி = 27.

பயிற்சி 3.4

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள முதல் பல்லுறுப்புக் கோவையை இரண்டாம் பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதியை மீதித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.
   (i) $3x^3 + 4x^2 - 5x + 8$, $x - 1$
   (ii) $5x^3 + 2x^2 - 6x + 12$, $x + 2$
   (iii) $2x^3 - 4x^2 + 7x + 6$, $x - 2$
   (iv) $4x^3 - 3x^2 + 2x - 4$, $x + 3$
   (v) $4x^3 - 12x^2 + 11x - 5$, $2x - 1$
   (vi) $8x^4 + 12x^3 - 2x^2 - 18x + 14$, $x + 1$
   (vii) $x^3 - ax^2 - 5x + 2a$, $x - a$
2. $2x^3 - ax^2 + 9x - 8$ ஐ $(x - 3)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி 28 எனில், a இன் மதிப்பைக் காண்க.
3. $(x + 2)$ ஆல் வகுக்கும் போது $x^3 - 6x^2 + mx + 60$ எனும் கோவையானது மீதி 2 ஐத் தருமானால் m இன் மதிப்பைக் காண்க.
4. $(x - 1)$ என்பது $mx^3 - 2x^2 + 25x - 26$ ஐ மீதியின்றி வகுக்கிறது எனில், m இன் மதிப்பைக் காண்க.
5. பல்லுறுப்புக் கோவைகள் $x^3 + 3x^2 - m$ மற்றும் $2x^3 - mx + 9$ ஆகியவற்றை $(x - 2)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதிகள் சமம் எனில், m இன் மதிப்பைக் காண்க. மேலும் மீதியையும் காண்க.

3.5 காரணித் தேற்றம் (Factor Theorem)

காரணித் தேற்றம்
$p(x)$ என்பது ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை மற்றும் a என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் என்க. $p(a)=0$ எனில், $(x-a)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி ஆகும்.

குறிப்பு $p(x)$ இன் ஒரு காரணி $(x-a)$ எனில், $p(a) = 0$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.16

$(x - 5)$ என்பது $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 28x + 15$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒரு காரணியா எனத் தீர்மானி.

தீர்வு காரணித் தேற்றத்தின்படி, $p(5) = 0$ எனில், $(x - 5)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி ஆகும்.

இப்போது,
$$\begin{aligned} p(5) &= 2(5)^3 - 5(5)^2 - 28(5) + 15 \\ &= 2(125) - 5(25) - 140 + 15 \\ &= 250 - 125 - 140 + 15 = 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ $(x - 5)$ என்பது $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 28x + 15$ இன் ஒரு காரணி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.17

$(x-2)$ என்பது $2x^3-6x^2+5x+4$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒரு காரணியா எனத் தீர்மானி.

தீர்வு $p(x)=2x^3-6x^2+5x+4$ என்க.

காரணித் தேற்றத்தின் படி, $p(2)=0$ எனில், $(x-2)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி ஆகும்.

இப்போது, $p(2) = 2(2)^3-6(2)^2+5(2)+4 = 2(8)-6(4)+10+4$

$= 16-24+10+4 = 6 \neq 0$

$\therefore$ $(x-2)$ என்பது $2x^3-6x^2+5x+4$ இன் ஒரு காரணி ஆகாது.

எடுத்துக்காட்டு 3.18

$(2x-3)$ என்பது $2x^3-9x^2+x+12$ இன் ஒரு காரணியா எனத் தீர்மானி.

தீர்வு $p(x)=2x^3-9x^2+x+12$ என்க. காரணித் தேற்றத்தின் படி, $p\left(\frac{3}{2}\right)=0$ எனில், $(2x-3)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி ஆகும்.

இப்போது, $p\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^3-9\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}+12 = 2\left(\frac{27}{8}\right)-9\left(\frac{9}{4}\right)+\frac{3}{2}+12$

$= \frac{27}{4}-\frac{81}{4}+\frac{3}{2}+12 = \frac{27-81+6+48}{4} = 0$

$\therefore$ $(2x-3)$ என்பது $2x^3-9x^2+x+12$ இன் ஒரு காரணி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.19

$(x-1)$ என்பது x^3+5x^2+mx+4-ன் ஒரு காரணி எனில், m இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு $p(x)=x^3+5x^2+mx+4$ என்க

$(x-1)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே, $p(1)=0$ ஆகும்.

$$p(1)=0 \Longrightarrow (1)^3+5(1)^2+m(1)+4=0$$
$$\Longrightarrow 1+5+m+4=0$$
$$m+10=0$$
$$\therefore m=-10$$

பயிற்சி 3.5

1. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கு $(x+1)$ என்பது ஒரு காரணியா எனத் தீர்மானி.
   (i) $6x^4+7x^3-5x-4$ (ii) $2x^4+9x^3+2x^2+10x+15$
   (iii) $3x^3+8x^2-6x-5$ (iv) $x^3-14x^2+3x+12$
2. $(x+4)$ என்பது $x^3+3x^2-5x+36$ இன் ஒரு காரணியா எனத் தீர்மானி.
3. காரணித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $(x-1)$ என்பது $4x^3-6x^2+9x-7$ இன் ஒரு காரணி என நிரூபி.

4. $(2x+1)$ என்பது $4x^3+4x^2-x-1$ இன் ஒரு காரணியா எனத் தீர்மானி.
5. $(x+3)$ என்பது $x^3-3x^2-px+24$ இன் ஒரு காரணி எனில், p இன் மதிப்பைக் காண்க.

பயிற்சி 3.6

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடு

1. $2x^3-3x^2-2x+3$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவையில் x^2 மற்றும் x இன் கெழுக்கள் முறையே

   (A) 2,3 (B) –3,–2 (C) –2,–3 (D) 2,–3

2. $4x^2-7x^3+6x+1$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவையின் படி

   (A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) 0

3. $3x-2$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவை என்பது ஒரு

   (A) நேரியப் பல்லுறுப்புக்கோவை (B) இருபடிப் பல்லுறுப்புக்கோவை
   (C) முப்படிப் பல்லுறுப்புக்கோவை (D) மாறிலி பல்லுறுப்புக்கோவை

4. $4x^2+2x-2$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவை என்பது ஒரு

   (A) நேரியப் பல்லுறுப்புக்கோவை (B) இருபடிப் பல்லுறுப்புக்கோவை
   (C) முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை (D) மாறிலி பல்லுறுப்புக் கோவை

5. $2x-5$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியம்

   (A) $\frac{5}{2}$ (B) $-\frac{5}{2}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $-\frac{2}{5}$

6. $3x-1=0$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டின் மூலம்

   (A) $x=-\frac{1}{3}$ (B) $x=\frac{1}{3}$ (C) $x=1$ (D) $x=3$

7. $x^2+2x=0$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள்

   (A) $x=0,2$ (B) $x=1,2$ (C) $x=1,-2$ (D) $x=0,-2$

8. $p(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவையை $(ax+b)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி

   (A) $p\left(\frac{b}{a}\right)$ (B) $p\left(-\frac{b}{a}\right)$ (C) $p\left(\frac{a}{b}\right)$ (D) $p\left(-\frac{a}{b}\right)$

9. x^3-ax^2+2x-a என்ற பல்லுறுப்புக்கோவையை $(x-a)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி

   (A) a^3 (B) a^2 (C) a (D) $-a$

10. $(ax-b)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி எனில்,

    (A) $p(b)=0$ (B) $p\left(-\frac{b}{a}\right)=0$ (C) $p(a)=0$ (D) $p\left(\frac{b}{a}\right)=0$

11. $x^2-3x-10$ இன் காரணிகளில் ஒன்று

    (A) $x-2$ (B) $x+5$ (C) $x-5$ (D) $x-3$

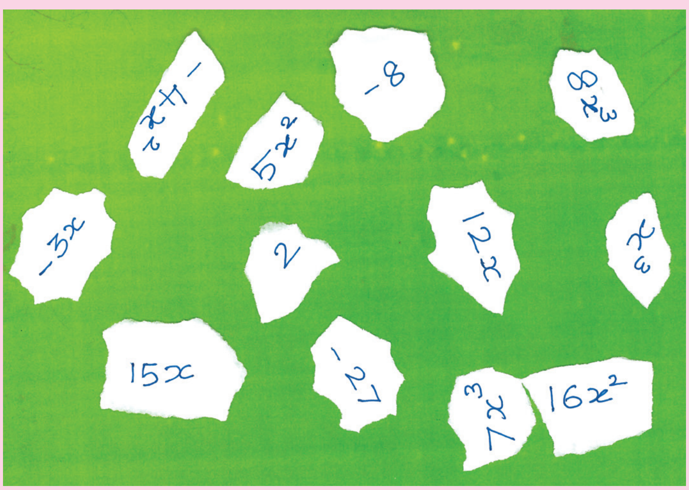
12. x^3-2x^2+2x-1 இன் காரணிகளில் ஒன்று

    (A) $x-1$ (B) $x+1$ (C) $x-2$ (D) $x+2$

நினைவில் கொள்க...

- x என்ற ஒரு மாறியில் அமைந்த ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் இயற்கணித அமைப்பு $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ இங்கு $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ என்பன மாறிலிகள் மற்றும் n ஒரு குறையற்ற மிகை முழு.
- $p(x)$ என்பது x இல் ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை என்க. $p(a) = 0$ எனில், a என்பது $p(x)$ இன் ஒரு பூச்சியம் எனக் கூறுவோம்.
- $x = a$ என்பது $p(x) = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்தால், $x = a$ என்பது $p(x) = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் எனப்படும்
- மீதித் தேற்றம்: $p(x)$ என்பது ஏதேனும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை மற்றும் a என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் என்க. $p(x)$ஐ $(x - a)$ என்ற நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுத்தால் மீதி $p(a)$ ஆகும்
- காரணித் தேற்றம் : $p(x)$ என்பது ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை மற்றும் a என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் என்க. $p(a) = 0$ எனில், $(x-a)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி ஆகும்.

செயல் 1



இடதுபக்கம் கொடுக்கப்பட்டுள்ள உறுப்புகளிலிருந்து:

(i) குறைந்தது மூன்று வெவ்வேறு பல்லுறுப்புக் கோவைகளை உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையின் அடிப்படையில் அமைக்கவும்.

(ii) குறைந்தது மூன்று வெவ்வேறு பல்லுறுப்புக் கோவைகளை அதன் படியின் அடிப்படையில் அமைக்கவும்.

செயல் 2

நீள்வகுத்தல் முறையில் $4x^3 - 5x^2 + 7x + 6$ ஐ $(x - 1)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க. மீதித்தேற்றத்தின் மூலம் உன் விடையைச் சரிபார்க்கவும்.

செயல் 3

நீள்வகுத்தல் முறையில் $2x^3 - 6x^2 + 5x - 2$ ஐ $(x - 2)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க. இதிலிருந்து நீ அறிவது என்ன?

சிந்திக்க !

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை மற்றொரு பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுக்க இயலுமா !

பயிற்சி 3.1

1. (i) ஒரு மாறி பல்லுறுப்புக்கோவை (ii) ஒரு மாறி பல்லுறுப்புக்கோவை

(iii) ஒரு மாறி பல்லுறுப்புக்கோவை

(iv) x இன் அடுக்கு முழுஎண் அல்ல. எனவே, ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை அல்ல.

(v) t இன் அடுக்கு முழுஎண் அல்ல. எனவே, ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை அல்ல.

(vi) மூன்று மாறிகளில் அமைந்த பல்லுறுப்புக்கோவை

2. (i) $-4, 3$ (ii) $0, \sqrt{3}$ (iii) $\sqrt{2}, 4$ (iv) $\frac{1}{3}, 1$ **3.** (i) 2 (ii) 1 (iii) 3 (iv) 0

4. (i) இருபடிப் பல்லுறுப்புக்கோவை (ii) முப்படிப் பல்லுறுப்புக்கோவை

(iii) ஒருபடிப் பல்லுறுப்புக்கோவை (iv) இருபடிப் பல்லுறுப்புக்கோவை

(v) முப்படிப் பல்லுறுப்புக்கோவை (vi) ஒருபடிப் பல்லுறுப்புக்கோவை

5. $ax^{27} + b,\ cx^{49},\ lx^{36} + mx^{35} + nx^2$

பயிற்சி 3.2

1. (i) $x = \frac{1}{4}$ (ii) $x = -\frac{5}{3}$ (iii) $x = 0$ (iv) $x = -9$
2. (i) $x = 3$ (ii) $x = \frac{6}{5}$ (iii) $x = -\frac{1}{11}$ (iv) $x = 0$
3. (i) $x = 2$, $x = 3$ மூலங்கள் (ii) $x = -1$ மூலம் , $x = 2$ மூலம் அல்ல

   (iii) $x = 1$, $x = -2$, $x = 3$ மூலங்கள்

   (iv) $x = -1$, $x = 2$ மூலங்கள் , $x = 3$ மூலம் அல்ல

பயிற்சி 3.3

1. ஈவு $5x^2 - 3x + 2$, மீதி -5
2. ஈவு $2x - 7$, மீதி 0
3. ஈவு $3x^2 + 2x + 2$, மீதி 7
4. ஈவு $2x^2 - 4x + 9$, மீதி -20
5. ஈவு $7x + 5$, மீதி -8

பயிற்சி 3.4

1. (i) 10 (ii) -8 (iii) 20 (iv) -145 (v) -2 (vi) 26 (vii) $-3a$
2. $a = 5$ **3.** $m = 13$ **4.** $m = 3$ **5.** $m = 5$, மீதி 15.

பயிற்சி 3.5

1. (i) காரணி (ii) காரணி (iii) காரணி அல்ல (iv) காரணி அல்ல
2. காரணி அல்ல **4.** காரணி **5.** $p = 10$

பயிற்சி 3.6

1. B **2.** C **3.** A **4.** B **5.** A **6.** B **7.** D **8.** B **9.** C **10.** D **11.** C **12.** A

4 வடிவியல்

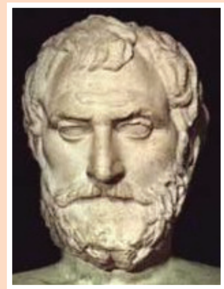
Truth can never be told so as to be understood,
and not to be believed
- WILLIAM BLAKE

முதன்மைக் குறிக்கோள்கள்

- வடிவியலின் அடிப்படைக் கருத்துகளை நினைவு கூர்தல்.
- இணைகரத்தின் மீதான தேற்றங்களை புரிந்து கொள்ளுதல்.

4.1 அறிமுகம்

Geometry என்ற பெயர் இரண்டு கிரேக்க வார்த்தைகளில் "புவியை அளவிடல்" என்ற பொருளிலிருந்து பெறப்பட்டது. காலப்போக்கில் வடிவியல் மிக அழகாக அமைக்கப்பட்ட தருக்க முறையில் ஒழுங்குபடுத்தப்பட்ட கணித அறிவாகும். இது புள்ளிகள், கோடுகள், தளங்கள், உருவங்களுக்கு இடையேயுள்ள பண்புகள் மற்றும் தொடர்புகளை உள்ளடக்கியது. சுமார் கி.மு. 3000 ஆண்டின் போது முற்கால எகிப்து மற்றும் சிந்து சமவெளியில் வடிவியல் பற்றிய பதிவுகள் காணப்பட்டன. வரையறுக்கப்படாத வார்த்தைகள், வரையறைகள் மற்றும் ஊகங்கள் ஆகியவற்றால் வடிவியல் தொடங்குகிறது. இவை தேற்றங்களுக்கும் வரைபடங்களுக்கும் கொண்டு செல்கின்றன. இது நுட்பமான பாடம் ஆனால், மனக்கண்ணால் எளிதாக ஊகிக்கலாம். மேலும் உறுதியான நடைமுறைப் பயன்பாடுகளைக் கொண்டது. வடிவியல் நிலங்களை அளவெடுப்பதில் முக்கிய பங்காற்றுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, தற்போது கட்டுமானத்தில் உறுதிபாடுடைய பாலங்கள், விண்வெளி ஆய்வுக்கூடங்கள் மற்றும் மிகப்பெரிய விளையாட்டு மற்றும் பொழுது போக்கு அரங்குகள் அமைக்க இவ்வறிவானது பயன்படுத்தப்படுகிறது. யூக்ளிட்டின் முதல்புத்தகமான *Elements*-இல் குறிப்பிடப்பட்டவற்றின் மேற்கூறிய கட்டுமானப் பணிகளின் வடிவியல் தேற்றம் தெளிவாக எழுதப்பட்டுள்ளது.

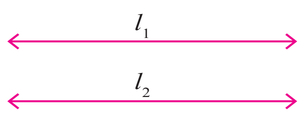
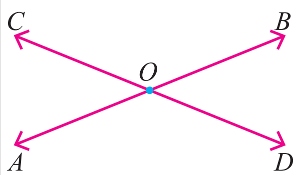
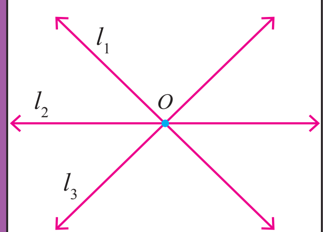
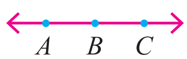


தேலீஸ்
(640 - 546 BC)
Thales (pronounced THAY-lees)

கிரேக்க நகரமான மிலேட்டசில் தேலீஸ் பிறந்தார். வடிவியலில் கருத்தியல் மற்றும் வரைதல் புரிதலுக்காக நன்கு அறியப்பட்டவர். ஒரு வட்டத்தின் விட்டத்தை முக்கோணத்தின் நீண்ட பக்கமாகக் கொண்டு அதற்குள் ஒரு முக்கோணத்தை வரைந்தால் நீண்ட பக்கத்திற்கு எதிரேயுள்ள கோணம் எப்போதுமே செங்கோணமாகும் என்ற தேற்றத்தை நிறுவினார். பிரமிடுகளின் உயரம் மற்றும் கடற்கரைக்கும் கப்பலுக்கும் இடையேயுள்ள தூரம் ஆகிய கணக்குகளுக்கு வடிவியல் முறையில் தீர்வு கண்டறிந்தார். வடிவியலில் உய்த்தறி காரணத்தைப் பயன்படுத்தி தேலீஸ் தேற்றத்திற்கு நான்கு துணைத் தேற்றங்களை முதன்முதலில் பயன்படுத்தினார். இதற்காக முதன் முறையாக உண்மையான கணித அறிஞர் என்றும் கணித கண்டுபிடிப்புகளைக் கண்டறிந்த முதல் மனிதர் என இவர் பாராட்டப்பட்டார். கிரேக்க நாட்டின் ஏழு அறிவு ஜீவிகளில் அல்லது ஏழு துறவிகளில் ஒருவராக விளங்கினார். மேற்கத்திய பண்பாட்டின் முதல் தத்துவ மேதையாக மற்றவர்களால் அவர் மதிக்கப்பட்டார்.

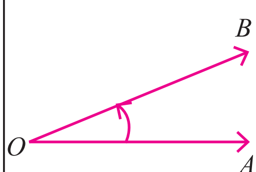
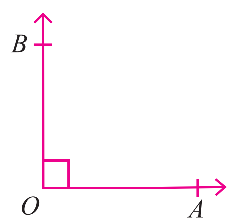
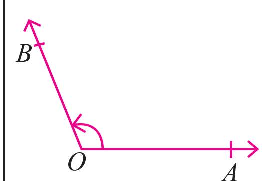
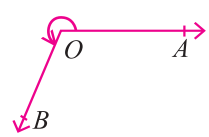
4.2 வடிவியல் அடிப்படைக் கருத்துகள்

நாம் முந்தைய வகுப்புகளில் படித்த சில முக்கியமான வடிவியலின் அடிப்படைக் கருத்துகளை இப்பகுதியில் நினைவு கூர்வோம்.

கருத்து	படம்	விளக்கம்
இணை கோடுகள்		ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளாமல் ஒரே தளத்தில் செல்லும் கோடுகளை இணைகோடுகள் என்கிறோம். இரு இணைகோடுகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு எப்பொழுதும் சமமாக இருக்கும்.
வெட்டும் கோடுகள்		இரண்டு கோடுகளுக்கு ஒரேயொரு பொதுவான புள்ளி இருந்தால் அவை வெட்டும்கோடுகள் எனப்படும். பொதுப்புள்ளிக்கு வெட்டிக்கொள்ளும் (வெட்டுப்புள்ளி) புள்ளி என்று பெயர். அருகில் உள்ளபடத்தில் கோடுகள் *AB* மற்றும் *CD* ஆகியவை *O* என்ற புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்கின்றன.
ஒருபுள்ளி வழிக்கோடுகள்		மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட கோடுகள் ஒருபுள்ளி வழிச் சென்றால் அவை ஒருபுள்ளி வழிக்கோடுகள் எனப்படும். அருகில் உள்ள படத்தில் கோடுகள் l_1, l_2, l_3 ஆகியவை *O* என்ற புள்ளியின் வழியே செல்கின்றன. எனவே, அவை ஒருபுள்ளி வழிக்கோடுகள் எனப்படும்.
ஒருகோடமைப் புள்ளிகள்		மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைந்தால், அந்த புள்ளிகள் ஒருகோடமைப் புள்ளிகள் எனப்படும். அவ்வாறு இல்லையெனில், அவை ஒரு கோடமையாப்புள்ளிகள் எனப்படும்.

4.2.1 கோணங்களின் வகைகள்

கோணங்களை அவற்றின் கோண அளவுகளைப் பொறுத்து வகைப்படுத்தலாம்.

பெயர்	குறுங்கோணம் (Acute Angle)	செங்கோணம் (Right Angle)	விரிகோணம் (Obtuse Angle)	பின்வளை கோணம் (Reflex Angle)
வரைபடம்				
கோண அளவு	$\angle AOB < 90^\circ$	$\angle AOB = 90^\circ$	$90^\circ < \angle AOB < 180^\circ$	$180^\circ < \angle AOB < 360^\circ$

நிரப்புக் கோணங்கள் (*Complementary Angles*)

இரு கோண அளவுகளின் கூடுதல் 90° எனில், அக்கோணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று நிரப்புக் கோணங்களாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\angle A = 52^\circ$ மற்றும் $\angle B = 38^\circ$ எனில், கோணம் $\angle A$ மற்றும் $\angle B$ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று நிரப்புக் கோணங்களாகும்.

மிகைநிரப்புக் கோணங்கள் (*Supplementary Angles*)

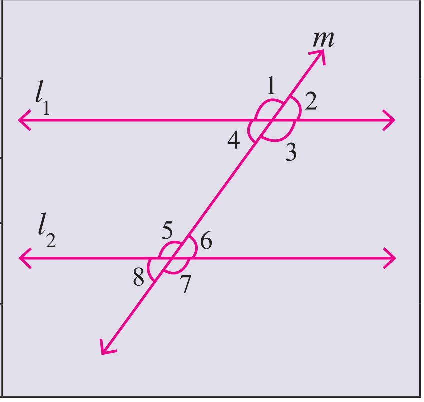
இரு கோணங்களின் கூடுதல் 180° எனில், அக்கோணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று மிகைநிரப்புக் கோணங்களாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, 112° மற்றும் 68° அளவு கொண்ட கோணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று மிகைநிரப்புக் கோணங்களாகும்.

4.2.2 குறுக்குவெட்டி (*Transversal*)

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட கோடுகளை ஒரு நேர்க்கோடானது வெவ்வேறு புள்ளிகளில் வெட்டினால் அதற்கு குறுக்குவெட்டி என்று பெயர்.

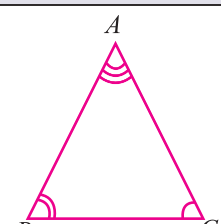
இரு இணை கோடுகளை ஒரு குறுக்குவெட்டி வெட்டுவதால் ஏற்படும் கோணங்கள்

பெயர்	கோணம்	வரைபடம்
குத்தெதிர் கோணங்கள் சமம்	$\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$, $\angle 5 = \angle 7$, $\angle 6 = \angle 8$	
ஒத்த கோணங்கள் சமம்	$\angle 1 = \angle 5$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 4 = \angle 8$	
உள்ளெதிர் கோணங்கள் சமம்	$\angle 3 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 6$	
வெளி எதிர் கோணங்கள் சமம்	$\angle 1 = \angle 7$, $\angle 2 = \angle 8$	
உள் கோணங்கள் மிகை நிரப்புக் கோணங்கள்	$\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$; $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$	

4.2.3 முக்கோணங்கள் (*Triangles*)

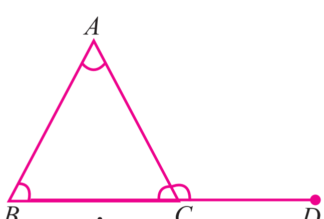
ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் கூடுதல் 180°.

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (படம் 4.1.)



படம் 4.1

குறிப்புரை



படம் 4.2

(i) ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கம் நீட்டப்படுவதால் ஏற்படும் வெளிக்கோணம் அதன் உள்ளெதிர் கோணங்களின் கூடுதலுக்கு சமம். $\angle ACD = \angle BAC + \angle ABC$

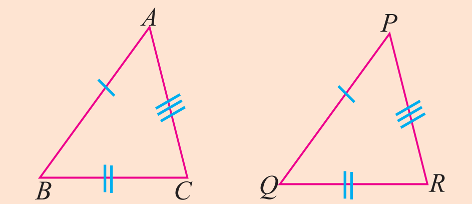
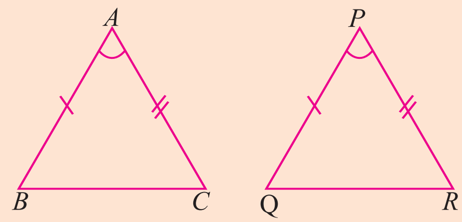
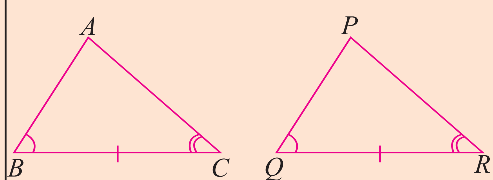
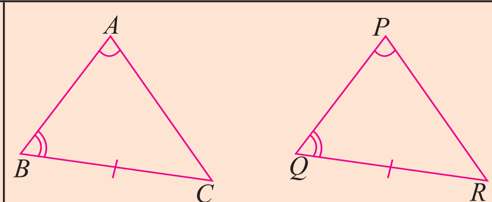
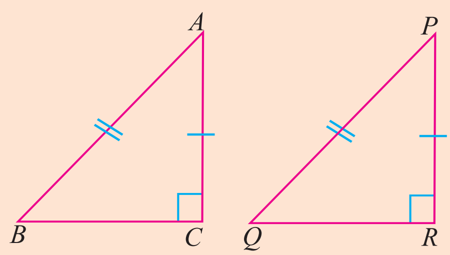
(ii) ஒரு முக்கோணத்தின் வெளிக்கோணமானது உள்ளெதிர் கோணங்களை விட அதிகமாக இருக்கும்.

(iii) எந்தவொரு முக்கோணத்திலும் பெரிய பக்கத்திற்கு எதிரே உள்ள கோணம் பெரியதாக இருக்கும்.

சர்வசம முக்கோணங்கள் (*Congruent Triangles*)

ஒரு முக்கோணத்தின் அனைத்து பக்கங்களும், கோணங்களும் மற்றொரு முக்கோணத்தின் ஒத்த பக்கங்களுக்கும், ஒத்த கோணங்களுக்கும் சமமானால் அம்முக்கோணங்கள் சர்வசம முக்கோணங்கள் எனப்படும்.

> சர்வசமம் என்பதற்கு நாம் '$\equiv$' குறியீட்டைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

	விளக்கம்	படம்
ப–ப–ப SSS	ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்கள் மற்றொரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களுக்குச் சமமெனில், அவ்விரு முக்கோணங்களும் சர்வசமமாகும்.	 $\Delta ABC \equiv \Delta PQR$
ப–கோ–ப SAS	ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களும் அவை உள்ளடக்கிய கோணமும் மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களுக்கும் அவை உள்ளடக்கிய கோணத்திற்கும் சமமெனில், அவ்விரு முக்கோணங்களும் சர்வசமமாகும்.	 $\Delta ABC \equiv \Delta PQR$
கோ–ப–கோ ASA	ஒரு முக்கோணத்தின் இரு கோணங்களும் அவற்றால் இணைந்த பக்கமும் மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரு கோணங்களுக்கும் அவற்றால் இணைந்த பக்கத்திற்கும் சமமானால், அவ்விரு முக்கோணங்களும் சர்வசமமாகும்.	 $\Delta ABC \equiv \Delta PQR$
கோ–கோ–ப AAS	ஒரு முக்கோணத்தின் இரு கோணங்களும் அதன் ஏதாவது ஒரு பக்கமும் மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரு கோணங்களுக்கும் ஒத்த பக்கத்திற்கும் சமமெனில், அவ்விரு முக்கோணங்களும் சர்வசமமாகும்.	 $\Delta ABC \equiv \Delta PQR$
செ–க–ப RHS	ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம், ஏதேனும் ஒரு பக்கம், மற்றொரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம், ஒரு பக்கம் ஆகியவற்றிற்கு முறையே சமமாக இருப்பின், அவ்விரு முக்கோணங்களும் சர்வசமமாகும்.	 $\Delta ABC \equiv \Delta PQR$

பயிற்சி 4.1

1. பின்வரும் கோணங்களின் நிரப்புக் கோணங்களைக் காண்க.

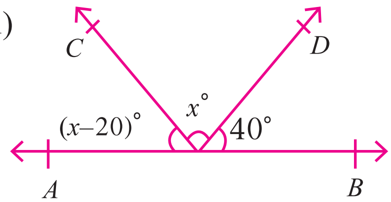
   (i) 63° (ii) 24° (iii) 48° (iv) 35° (v) 20°

2. பின்வரும் கோணங்களின் மிகைநிரப்புக் கோணங்களைக் காண்க.

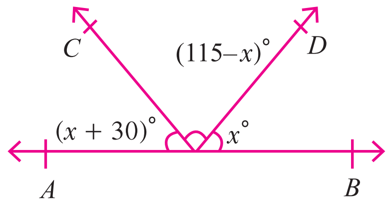
   (i) 58° (ii) 148° (iii) 120° (iv) 40° (v) 100°

3. பின்வரும் படங்களில் x இன் மதிப்பைக் காண்க.

   (i)



   (ii)



4. பின்வரும் கோண அளவுகளைக் காண்க.

   i) ஒரு கோணம் அதன் நிரப்புக் கோணத்தைப் போல இரு மடங்கு.

   ii) ஒரு கோணம் அதன் மிகை நிரப்புக் கோணத்தைப் போல நான்கு மடங்கு.

   iii) ஒரு கோணத்தின் மிகைநிரப்பானது அதன் நிரப்புக் கோணத்தைப் போல நான்கு மடங்கு.

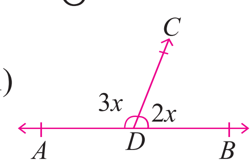
   iv) ஒரு கோணத்தின் நிரப்பானது அதன் மிகைநிரப்புக் கோணத்தில் ஆறில் ஒரு பங்கு.

   v) மிகை நிரப்புக் கோணங்கள் 4:5 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன.

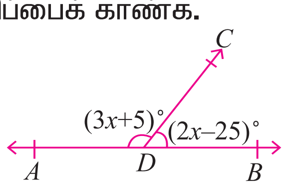
   vi) நிரப்புக் கோணங்கள் 3:2 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன.

5. பின்வரும் படங்களில் x, y இன் மதிப்பைக் காண்க.

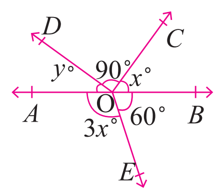
   (i)



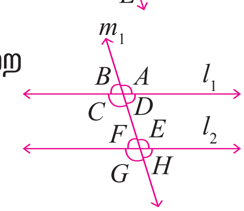
   (ii)



   (iii)

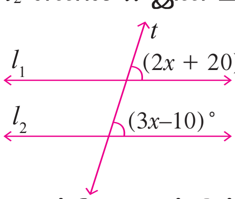


6. $l_1 \parallel l_2$ மற்றும் m_1 ஒரு குறுக்குவெட்டி என்க. $\angle F = 65^\circ$ எனில், மற்ற கோண அளவுகளைக் காண்க.

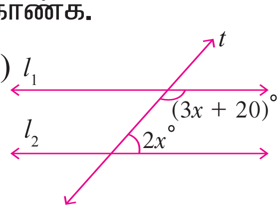


7. $l_1 \parallel l_2$ எனில் x இன் மதிப்பைக் காண்க.

   (i)



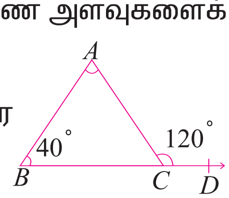
   (ii)



8. ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள் 1:2:3 என்ற விகிதத்தில் இருப்பின், அவற்றின் கோண அளவுகளைக் காண்க.

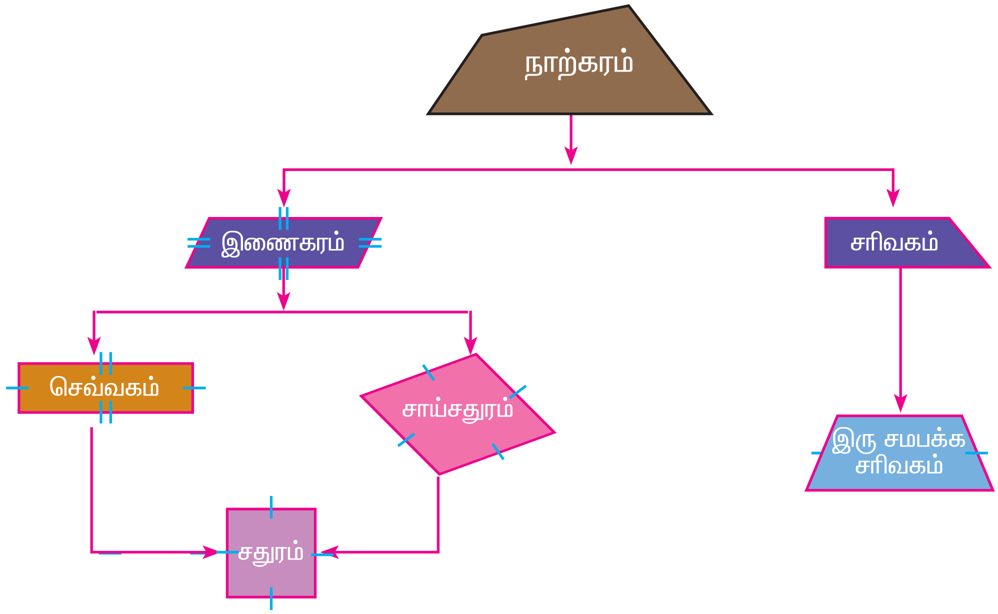
9. $\triangle ABC$-ல் $\angle A + \angle B = 70^\circ$ மற்றும் $\angle B + \angle C = 135^\circ$ எனில், அதன் கோண அளவுகளைக் காண்க.

10. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படம் $\triangle ABC$ இல் பக்கம் BC ஆனது D வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது எனில், $\angle A$ மற்றும் $\angle C$ யைக் காண்க.



4.3 நாற்கரம் (*Quadrilateral*)

நான்கு பக்கங்கள் மற்றும் நான்கு முனைகளால் அடைபடும் உருவம் நாற்கரம் ஆகும். நாற்கரத்தின் நான்கு கோணங்களின் கூடுதல் 360° ஆகும்.



4.3.1 சரிவகம், இணைகரம் மற்றும் சாய்சதுரத்தின் பண்புகள்

சரிவகம்	பக்கம்	ஒரு சோடி எதிர்ப்பக்கங்கள் இணை
	கோணம்	இணையில்லாப் பக்கங்களின் முனைகளில் உள்ள கோணங்கள் மிகைநிரப்பு
	மூலைவிட்டம்	மூலைவிட்டங்கள் சமமாக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை
இருசமபக்க சரிவகம்	பக்கம்	ஒரு சோடி எதிர்ப்பக்கங்கள் இணை, இணையில்லாப் பக்கங்களின் அளவுகள் சமம்
	கோணம்	இணைப் பக்கங்களின் முனைகளில் உள்ள கோணங்கள் சமம்
	மூலைவிட்டம்	மூலைவிட்டங்கள் சமம்
இணைகரம்	பக்கம்	எதிர்ப்பக்கங்கள் இணை மற்றும் சமம்
	கோணம்	எதிர்க் கோணங்கள் சமம் மற்றும் அடுத்துள்ள கோணங்கள் மிகைநிரப்பு
	மூலைவிட்டம்	மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக் கூறிடும்
சாய்சதுரம்	பக்கம்	அனைத்து பக்கங்களும் சமம் மற்றும் எதிர்ப்பக்கங்கள் இணை
	கோணம்	எதிர் கோணங்கள் சமம், மற்றும் அடுத்துள்ள கோணங்கள் மிகைநிரப்பு.
	மூலைவிட்டம்	மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று மையக்குத்துக்கோடு.

குறிப்பு

(i) செவ்வகம் என்பது சம கோண அளவுள்ள இணைகரம் ஆகும்.

(ii) சாய்சதுரம் என்பது சமபக்க இணைகரம் ஆகும்.

(iii) சதுரம் என்பது சமபக்க அளவுள்ள, சம கோண அளவுள்ள இணைகரம் ஆகும்.

(iv) ஆகவே, சதுரம் என்பது ஒரு செவ்வகம், சாய்சதுரம் மற்றும் இணைகரம் எனக் காணலாம்.

4.4 இணைகரம் (*Parallelogram*)

எதிர்ப்பக்கங்கள் இணையாக உள்ள நாற்கரம் இணைகரம் ஆகும்.

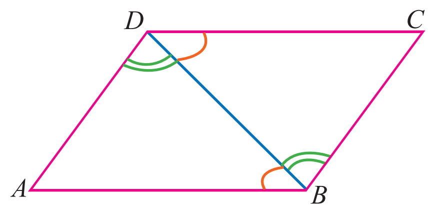
4.4.1 இணைகரத்தின் பண்புகள்

பண்பு 1 : ஓர் இணைகரத்தின் எதிர்ப் பக்கங்கள் சமம்.

தரவு : $ABCD$ என்பது ஓர் இணைகரம். எனவே, $AB \parallel DC$ மற்றும் $AD \parallel BC$

நிரூபிக்க : $AB = CD$ மற்றும் $AD = BC$

அமைப்பு : BD ஐ இணைக்க



படம் 4.3

நிரூபணம் :

ΔABD மற்றும் ΔBCD ஆகியவற்றில்.

(i) $\angle ABD = \angle BDC$ ($AB \parallel DC$ மற்றும் BD ஒரு குறுக்கு வெட்டி. எனவே, ஒன்றுவிட்ட உட்கோணங்கள் சமம்.)

(ii) $\angle BDA = \angle DBC$ ($AD \parallel BC$ மற்றும் BD ஒரு குறுக்கு வெட்டி. எனவே, ஒன்றுவிட்ட உட்கோணங்கள் சமம்.)

(iii) BD பொதுப் பக்கம்

$\therefore\ \Delta ABD \equiv \Delta BCD$ (கோ-ப-கோ பண்பின் படி)

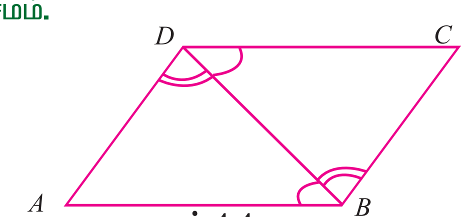
ஆகவே, $AB = DC$ மற்றும் $AD = BC$ (ஒத்த பக்கங்கள் சமம்) ■

பண்பு 1இன் மறுதலை : ஒரு நாற்கரத்தின் எதிர்ப்பக்கங்கள் சமமெனில், அந்த நாற்கரம் ஓர் இணைகரமாகும்.

பண்பு 2 : ஓர் இணைகரத்தின் எதிர்க் கோணங்கள் சமம்.

தரவு : $ABCD$ என்பது ஓர் இணைகரம். அதில் $AB \parallel DC,\ AD \parallel BC$

நிரூபிக்க : $\angle ABC = \angle ADC$ மற்றும் $\angle DAB = \angle BCD$



படம் 4.4

அமைப்பு : BD ஐ இணைக்க

நிரூபணம் :

(i) $\angle ABD = \angle BDC$ ($AB \parallel DC$ மற்றும் BD ஒரு குறுக்கு வெட்டி எனவே, ஒன்றுவிட்ட உட்கோணங்கள் சமம்.)

(ii) $\angle DBC = \angle BDA$ ($AD \parallel BC$ மற்றும் BD ஒரு குறுக்கு வெட்டி. எனவே, ஒன்றுவிட்ட உட்கோணங்கள் சமம்.)

(iii) $\angle ABD + \angle DBC = \angle BDC + \angle BDA$

$\therefore \angle ABC = \angle ADC$

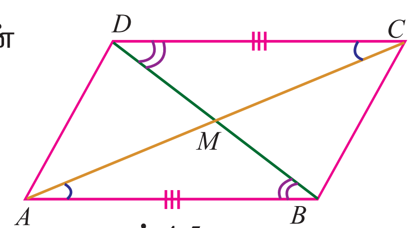
இதேபோன்று, $\angle BAD = \angle BCD$ ■

பண்பு 2 இன் மறுதலை: ஒரு நாற்கரத்தின் எதிர்க் கோணங்கள் சமமெனில், அந்த நாற்கரம் ஓர் இணைகரமாகும்.

பண்பு 3 : இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக் கூறிடும்.

தரவு : $ABCD$ என்பது ஒரு இணைகரம். அதில் $AB \parallel DC$ மற்றும் $AD \parallel BC$

நிரூபிக்க : M என்பது மூலைவிட்டம் AC மற்றும் BD இன் மையப்புள்ளி .



படம் 4.5

நிரூபணம் :

ΔAMB மற்றும் ΔCMD ஆகியவற்றுள்

(i) $AB = DC$ இணைகரத்தின் எதிர்ப்பக்கங்கள் சமம்.

(ii) $\angle MAB = \angle MCD$ ஒன்றுவிட்ட உட்கோணங்கள் ($\because AB \parallel DC$)

$\angle ABM = \angle CDM$ ஒன்றுவிட்ட உட்கோணங்கள் ($\because AB \parallel DC$)

(iii) $\Delta AMB \equiv \Delta CMD$ (கோ-ப-கோ பண்பின் படி)

$\therefore AM = CM$ மற்றும் $BM = DM$

i.e., M என்பது AC மற்றும் BD இன் மையப்புள்ளி

$\therefore$ இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக் கூறிடும் ■

பண்பு 3 இன் மறுதலை: ஒரு நாற்கரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக்கூறிடும் எனில், அந்நாற்கரம் ஓர் இணைகரமாகும்.

குறிப்பு

(i) இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் அவ்விணைகரத்தைச் சம பரப்பளவு கொண்ட இரு முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கும்.

(ii) இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில், அது சாய்சதுரம் ஆகும்.

(iii) ஒரே அடியின் மீதும், இரு இணை கோடுகளுக்கிடையேயும் அமையும் இணைகரங்கள் சமபரப்புடையவை.

எடுத்துக்காட்டு 4.1

ஒரு நாற்கரத்தில் மூன்று கோணங்களின் அளவுகள் $100^\circ, 84^\circ$ மற்றும் 76° எனில், நான்காவது கோணத்தின் அளவைக் காண்க.

தீர்வு நான்காவது கோணத்தின் அளவு x° என்க.

நாற்கரத்தின் நான்கு கோணங்களின் கூடுதல் 360° ஆகும். எனவே,

$$100^\circ + 84^\circ + 76^\circ + x^\circ = 360^\circ$$
$$260^\circ + x^\circ = 360^\circ$$
$$\text{i.e.,} \quad x^\circ = 100^\circ$$

எனவே, நான்காவது கோணத்தின் அளவு 100° ஆகும்.

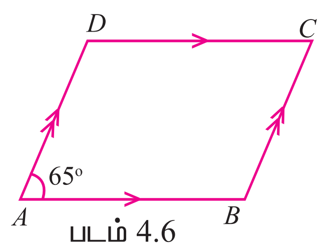
எடுத்துக்காட்டு 4.2

இணைகரம் $ABCD$ இல் $\angle A = 65^\circ$ எனில், $\angle B, \angle C$ மற்றும் $\angle D$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு $ABCD$ ஓர் இணைகரம் மற்றும் $\angle A = 65^\circ$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$AD \parallel BC$, AB ஐ குறுக்குவெட்டி என்க. எனவே,

$$\angle A + \angle B = 180^\circ$$
$$65^\circ + \angle B = 180^\circ$$
$$\angle B = 180^\circ - 65^\circ$$
$$\angle B = 115^\circ$$



படம் 4.6

இணைகரத்தின் எதிர்க் கோணங்கள் சமம் என்பதால், நாம் பெறுவது

$$\angle C = \angle A = 65^\circ \text{ மற்றும் } \angle D = \angle B = 115^\circ$$

ஆகவே, $\angle B = 115^\circ$, $\angle C = 65^\circ$ மற்றும் $\angle D = 115^\circ$

எடுத்துக்காட்டு 4.3

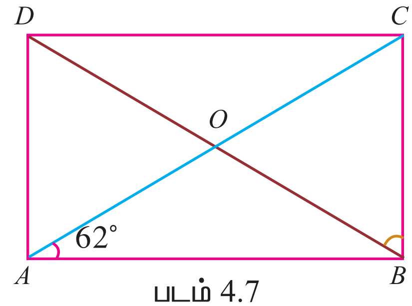
$ABCD$ என்ற செவ்வகத்தின் மூலைவிட்டங்கள் AC மற்றும் BD, ஆகியவை O-வில் வெட்டிக்கொள்கின்றன. மேலும் $\angle OAB = 62^\circ$ எனில், $\angle OBC$ ஐக் காண்க.

தீர்வு செவ்வகத்தின் மூலைவிட்டங்கள் சமம் மற்றும் ஒன்றையொன்று இருசமக் கூறிடும்.

எனவே, $OA = OB$ மற்றும் $\angle OBA = \angle OAB = 62^\circ$

மேலும் செவ்வகத்தின் ஒவ்வொரு கோண அளவும் 90° என்பதிலிருந்து

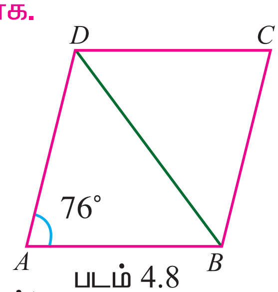
$$\angle ABC = 90^\circ$$
$$\angle ABO + \angle OBC = 90^\circ$$
$$62^\circ + \angle OBC = 90^\circ$$
$$\angle OBC = 90^\circ - 62^\circ$$
$$= 28^\circ$$



படம் 4.7

எடுத்துக்காட்டு 4.4

ABCD என்ற சாய்சதுரத்தில் $\angle A = 76^\circ$ எனில், $\angle CDB$ ஐக் காண்க.



படம் 4.8

தீர்வு $\angle A = \angle C = 76^\circ$ (சாய்சதுரத்தின் எதிர்க் கோணங்கள்)

$\angle CDB = x^\circ$ என்க.

$\triangle CDB$-ல், $CD = CB$

$$\angle CDB = \angle CBD = x^\circ$$

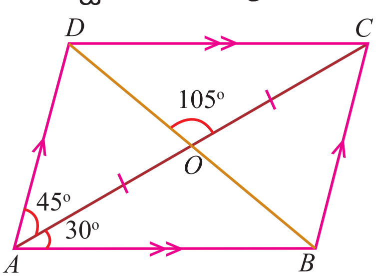
$\angle CDB + \angle CBD + \angle DCB = 180^\circ$ (முக்கோணத்தின் கோணங்கள்)

$$2x^\circ + 76^\circ = 180^\circ \implies 2x = 104^\circ$$
$$x^\circ = 52^\circ$$
$$\therefore \angle CDB = 52^\circ$$

பயிற்சி 4.2

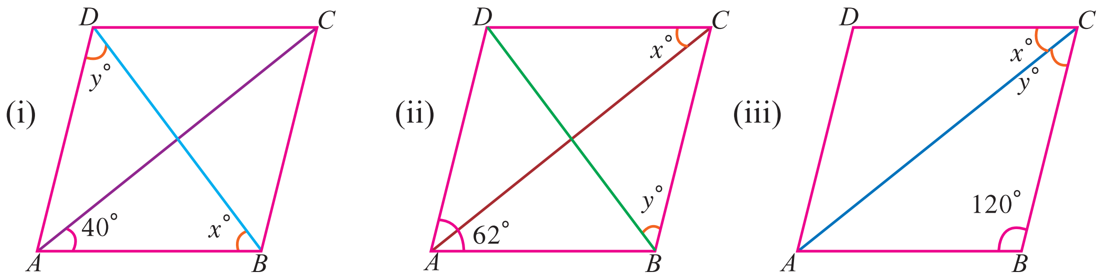
1. *ABCD* என்ற நாற்கரத்தில் $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ மற்றும் $\angle D$ ஆகியன 2:3:4:6 என்ற விகிதத்தில் இருந்தால், அவற்றின் அளவுகளைக் காண்க.
2. இணைகரம் *ABCD*-ல் $\angle A = 108^\circ$ எனில், $\angle B$, $\angle C$ மற்றும் $\angle D$ ஐக் கணக்கிடுக.
3. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் *ABCD* ஓர் இணைகரம். அதில் $\angle BAO = 30^\circ$, $\angle DAO = 45^\circ$ மற்றும் $\angle COD = 105^\circ$ எனில், பின்வரும் கோணங்களைக் காண்க.

   (i) $\angle ABO$ (ii) $\angle ODC$ (iii) $\angle ACB$ (iv) $\angle CBD$



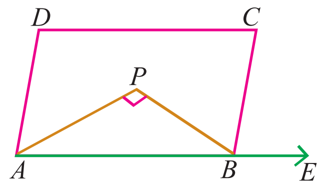
4. இணைகரத்தின் பெரிய கோண அளவானது சிறிய கோணத்தின் இருமடங்கில் 30° குறைவு எனில், அனைத்து கோண அளவுகளையும் காண்க.
5. இணைகரம் *ABCD*-ல் $AB = 9$ செ.மீ மற்றும் அதன் சுற்றளவு 30 செ.மீ எனில், இணைகரத்தின் பக்க அளவுகளைக் காண்க.
6. சாய்சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் 24 செ.மீ, 18 செ.மீ எனில், அதன் பக்க அளவுகளைக் காண்க.

7. பின்வரும் படங்களில் $ABCD$ என்பது ஒரு சாய்சதுரம். அதில் x மற்றும் y இன் மதிப்பினைக் காண்க.



8. சாய்சதுரத்தின் பக்கஅளவு 10 செ.மீ மற்றும் ஒரு மூலைவிட்டத்தின் நீளம் 12 செ.மீ எனில், மற்றொரு மூலைவிட்டத்தின் நீளத்தைக் காண்க.

9. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் $ABCD$ ஓர் இணைகரம். அதில் $\angle A$ மற்றும் $\angle B$ இன் கோண இருசமவெட்டிகள் P என்ற புள்ளியில் சந்திக்கின்றன எனில், $\angle APB = 90^\circ$ என நிருபி.



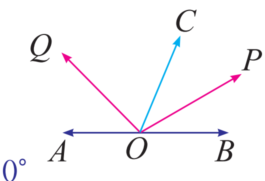
பயிற்சி 4.3

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடு

1. ஒரு கோணம் அதன் மிகை நிரப்புக் கோணத்தின் அளவில் மூன்றில் ஒரு பங்கு எனில் அந்தக் கோணத்தின் அளவு

(A) 40° (B) 50° (C) 45° (D) 55°

2. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் $\angle BOC$ இன் இரு சமவெட்டி OP மற்றும் $\angle AOC$ இன் இரு சமவெட்டி OQ எனில், $\angle POQ$ இன் மதிப்பு



(A) 90° (B) 120°
(C) 60° (D) 100°

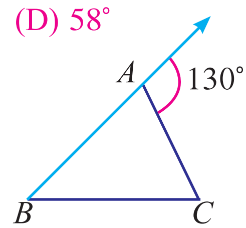
3. ஒரு கோணத்தின் நிரப்புக் கோணமானது அக்கோணத்தை விட 60° அதிகம் எனில், அக்கோணத்தின் அளவு

(A) 25° (B) 30° (C) 15° (D) 35°

4. ஒரு கோணத்தினுடைய நிரப்புக்கோணத்தின் ஆறுமடங்கானது அதன் மிகை நிரப்புக் கோணத்தின் இரு மடங்கை விட 12° குறைவு எனில், அக்கோணத்தின் அளவு

(A) 48° (B) 96° (C) 24° (D) 58°

5. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் $\angle B : \angle C = 2:3$ எனில், $\angle B$ இன் மதிப்பு



(A) 120° (B) 52°

(C) 78° (D) 130°

6. இணைகரம் $ABCD$ இல் AB இன் மையப்புள்ளி E மற்றும் $\angle BCD$ இன் கோண இரு சமவெட்டி CE எனில் $\angle DEC$ இன் அளவு

(A) 60° (B) 90° (C) 100° (D) 120°

நினைவில் கொள்க...

- ஓர் இணைகரத்தின் எதிர்ப் பக்கங்கள் சமம்.
- ஓர் இணைகரத்தின் எதிர்க் கோணங்கள் சமம்.
- இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக் கூறிடும்.
- செவ்வகம் என்பது சம கோண அளவுள்ள இணைகரம் ஆகும்.
- சாய்சதுரம் என்பது சமபக்க இணைகரம் ஆகும்.
- சதுரம் என்பது சமபக்க மற்றும் சமகோண அளவுள்ள இணைகரம் ஆகும்.
- இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் அவ்விணைகரத்தை சம பரப்பளவு கொண்ட இரு முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கும்.
- இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒவ்வொன்றும் இணைகரத்தை இரண்டு சர்வசம முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கும்.
- இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில், அது சாய்சதுரம் ஆகும்.
- ஒரே அடியின் மீதும், இரு இணை கோடுகளுக்கிடையேயும் அமையும் இணைகரங்கள் சமபரப்புடையவை.

செயல் 1

நாற்கரம் ஒன்றினை வரைந்து அதன் ஒவ்வொரு பக்கத்தின் மையப்புள்ளிகளை கண்டுபிடி, அடுத்தடுத்த பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைக்கவும்.

1. கிடைத்த புதிய வடிவத்தின் பெயர் என்ன?
2. அனைத்து நாற்கரத்திலும் இப்புதிய வடிவம் கிடைக்கும் என்பது உண்மையாகுமா?
3. வெளிப்புற நாற்கரத்தில் மாற்றம் ஏற்படுத்தும்போது உட்புற நாற்கரத்தில் எத்தகைய மாற்றம் நிகழ்கிறது?

செயல் 2

ஒரு அட்டையில் இணைகரத்தை வரைந்து அதனை வெட்டி எடுத்துக்கொள். அதன் ஏதேனும் ஒரு மூலைவிட்டத்தின் வழியே வெட்டி இரண்டு முக்கோணங்களைத் தயாரிக்க.

ஒரு முக்கோணத்தை மற்றொரு முக்கோணத்தின் மேல் பொருந்துமாறு வை. அவ்வாறு வைக்கும்போது என்ன காண்கிறாய்?

இதே செயலை இணைகரத்தின் மற்றொரு மூலைவிட்டத்தைக் கொண்டு செய்து பார்.

செயல் 3

ஓர் அட்டையில் இணைகரம் ஒன்றை வரைந்து அதை வெட்டி எடுத்துக்கொள். அதன் இரு மூலைவிட்டத்தின் வழியே நான்கு முக்கோணங்களாக வெட்டி எடு.

ஒரு முக்கோணத்தின் மீது மற்ற முக்கோணத்துண்டுகளை பொருத்திப் பாத்த்தால் இருசோடி சர்வசம முக்கோணங்கள் கிடைப்பதை காணலாம்.

செயல் திட்டம் 1

நோக்கம் : நாற்கரத்தின் உட்கோணங்களின் கூடுதலை அறிந்துகொள்ளுதல்

தேவையான பொருட்கள்: வரைபடத்தாள், அளவுகோல், பாகைமானி மற்றும் கத்தரிக்கோல்

வழிமுறைகள்:

1. ஒரு வரைபடத்தாள் அல்லது அட்டையில் பல்வேறு வகையான நாற்கரங்களை வெட்டி எடுத்துக்கொள்.
2. நாற்கரத்தின் நான்கு உச்சிக்கோணங்களும் தனித்தனித் துண்டுகளாகக் கிடைக்கும்படி வெட்டி எடுக்கவும்.
3. வெட்டி எடுத்த நான்குத் துண்டுகளையும் ஒழுங்குபடுத்தி நாற்கரத்தின் நான்கு கோணங்களின் கூடுதலை கோணங்களை அளந்தறியாமலேயே கண்டுபிடி.
4. நாற்கரத்தின் கோணங்களை அளந்து பின்வரும் அட்டவணையைப் பூர்த்தி செய்து உனது விடையைச் சரிபார்.

நாற்கரத்தின் வகை	கோணம் 1	கோணம் 2	கோணம் 3	கோணம் 4	கோணங்களின் கூடுதல்
இணைகரம்					
செவ்வகம்					
சதுரம்					
சாய்சதுரம்					
சரிவகம்					

செயல் திட்டம் 2

நோக்கம் : இணைகரத்தின் பண்புகள்

தேவையான பொருள்கள்: வரைபடத்தாள், அளவுகோல், பாகைமானி மற்றும் கத்தரிக்கோல்

வழிமுறை:

1. ஒரு வரைபடத்தாளில் பல்வேறு வகையான நாற்கரங்களை வெட்டி எடுத்துக்கொள்.
2. வெட்டியெடுக்கப்பட்ட நாற்கர உருவங்களைக் கொண்டு கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் ✓ அல்லது X எனக் குறியிடுக.

பண்புகள்	சதுரம்	சாய்சதுரம்	செவ்வகம்	இணைகரம்
எதிர்ப்பக்கங்கள் சமம்				
எதிர்ப்பக்கங்கள் இணை				
அடுத்துள்ள பக்கங்கள் சமம்				
அனைத்து கோணமும் செங்கோணம்				
எதிர்க் கோணங்கள் சமம்				
மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக் கூறிடும்				
மூலைவிட்டங்கள் செங்கோணத்தில் ஒன்றையொன்று இருசமக் கூறிடும்				
மூலைவிட்டங்கள் நாற்கரத்தை இரண்டு சர்வசம முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கும்				
மூலைவிட்டங்கள் அளவில் சமம்				

பயிற்சி 4.1

1. (i) 27° (ii) 66° (iii) 42° (iv) 55° (v) 70° **2.** (i) 122° (ii) 32° (iii) 60° (iv) 140° (v) 80° **3.** (i) 80° (ii) 35° **4.** (i) 60° (ii) 144°. (iii) 60° (iv) 72° (v) $80^\circ, 100^\circ$ (vi) $54^\circ, 36^\circ$ **5.** (i) 36° (ii) 40° (iii) $40^\circ, 50^\circ$

6. (i) $\angle A = \angle C = \angle E = \angle G = 115^\circ$, $\angle B = \angle D = \angle H = 65^\circ$ **7.** (i) 30° (ii) 32°

8. $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ **9.** $45^\circ, 25^\circ, 110^\circ$ **10.** $80^\circ, 60^\circ$

பயிற்சி 4.2

1. $48^\circ, 72^\circ, 96^\circ, 144^\circ$ **2.** $72^\circ, 108^\circ, 72^\circ$ **3.** (i) 45° (ii) 45° (iii) 45° (iv) 60°

4. $70^\circ, 110^\circ, 70^\circ, 110^\circ$ **5.** $l = 9, b = 6$ **6.** 15

7. (i) $50^\circ, 50^\circ$ (ii) $31^\circ, 59^\circ$ (iii) $30^\circ, 30^\circ$ **8.** 16

பயிற்சி 4.3

1. C **2.** A **3.** C **4.** A **5.** B **6.** B

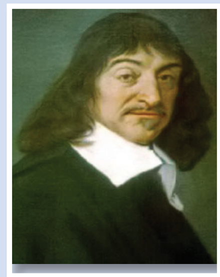
5 ஆயத்தொலை வடிவக்கணிதம்

I hope that posterity will judge me kindly, not only as to the things which I have explained, but also as to those which I have intentionally omitted so as to leave to others the pleasure of discovery

- RENE DESCARTES

முதன்மைக் குறிக்கோள்கள்

- கார்டீசியன் ஆயத்தொலை முறையைப் புரிந்து கொள்ளுதல்.
- x மற்றும் y ஆயத்தொலைவுகளை அறிந்து கொள்ளுதல்.
- கார்டீசியன் தளத்தில் ஒரு புள்ளியைக் குறித்தல்.
- இரு புள்ளிகளுக்கு இடையிலான தொலைவைக் காணுதல்.



டேகார்ட்
(1596-1650)

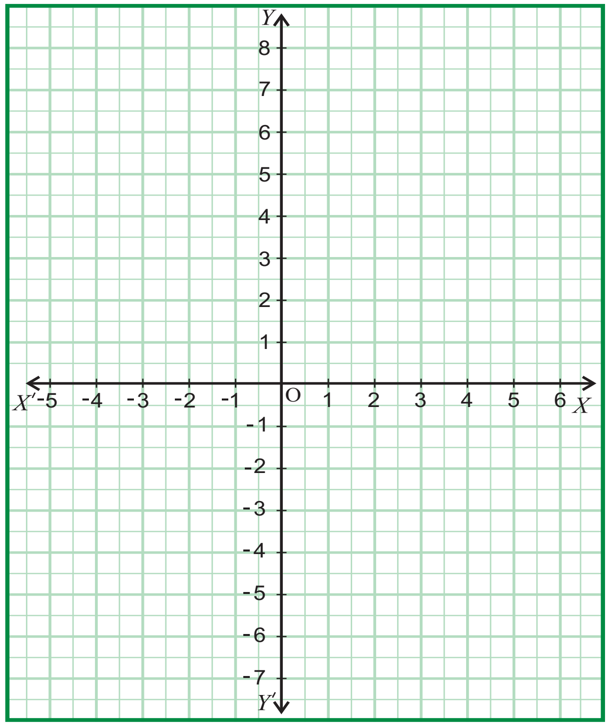
டேகார்ட் *(Descartes)* நவீன தத்துவத்தின் தந்தை என அழைக்கப்படுகிறார். அவர் அறிவியல் வழியில் அறிவுபூர்வமாக ஒரு புதிய முறையை சிந்தித்தார். அதன் மூலம் இயற்பியலிலும், வானவியலிலும் ஒரு புதிய பார்வையை ஏற்படுத்தினார். டேகார்ட் குறியீடுகளின் உதவியோடு பகுமுறை வடிவியலை எண் கணிதப்படுத்தி அதனை உயர்நிலைபடிகளைக் கொண்ட சமன்பாடுகளின் தொகுப்பாக்கினார். ஒரு புள்ளியை அதன் அச்சு தூரங்கள் என்று அழைக்கப்படும் இரு எண்களைக் கொண்டு குறிக்க முடியும் எனக் கண்டவர் டேகார்ட்.

5.1 அறிமுகம்

ஆயத்தொலை வடிவக்கணிதம் அல்லது பகுமுறை வடிவக்கணிதம் என்பது, எண்களாலான அச்சு தூரங்களின் வரிசை சோடிகளின் மூலம் தளத்தின் மேல் உள்ள புள்ளிகளை விவரிப்பதே. இம்முறையை அறிமுகப்படுத்தி அதன்மூலம் புள்ளிகளைக் குறிக்கும் முறையை விவரித்தவர் ரேனே டேகார்ட் என்ற பிரெஞ்சு நாட்டுக் கணித வல்லுநர் ஆவார். அவர் இதே முறையை கொண்டு வளைவரைகளையும், கோடுகளையும் சமன்பாடுகளின்மூலம்விவரிக்கமுடியும்என்றுஎடுத்துரைத்தார். இவரே வடிவியலையும் இயற்கணிதத்தையும் முதன் முதலில் இணைத்து பார்த்தவர். இந்த கண்டுபிடிப்புகளுக்காக அவரைக் கௌரவப்படுத்தும் விதமாக, ஒரு புள்ளியின் அச்சுத்தொலைவுகளைக் (அச்சுத்தூரங்களை) "கார்டீசியன்" அச்சுத்தூரங்கள் எனவும், அச்சு தளங்களைக் "கார்டீசியன் அச்சுத்தளங்கள்" எனவும் அழைக்கின்றோம். பகுமுறை வடிவக்கணிதத்தின் கண்டுபிடிப்பு நவீன கணிதத்தின் ஆரம்பமாகக் கருதப்படுகின்றது.

இந்தப் பாடப்பிரிவில், புள்ளிகளைக் கார்டீசியன் அச்சுத் தளத்தில் குறிக்கவும், புள்ளிகளின் அச்சுத்தூரங்களை கொண்டு இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவை அறிய உதவும் சூத்திரத்தை வருவிக்கவும் தெரிந்து கொள்வோம்.

5.2 கார்டீசியன் அச்சுத்தொலைவு முறை



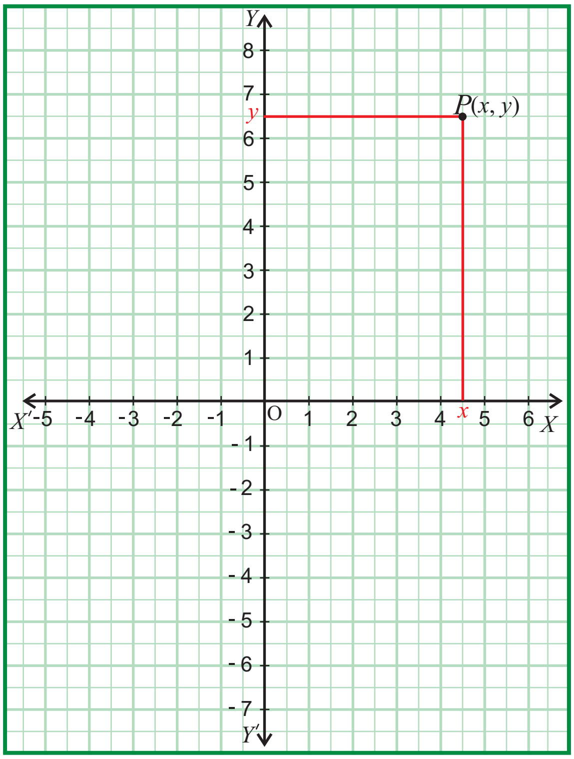
படம் 5.1

மெய்யெண்களின் தொகுப்பு என்ற பாடப்பிரிவில், எண் கோட்டின் மீது மெய்யெண்களை எவ்வாறு குறிக்கலாம் என நாம் கற்றிருக்கிறோம். மெய்யெண் கோட்டின் மீது ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணுக்கும், ஒரு தனிப்பட்ட P என்ற புள்ளி இருக்கும். அதே போல் எண் கோட்டின் மீது உள்ள ஒவ்வொரு P என்ற புள்ளியும் ஒரு தனிப்பட்ட மெய்யெண்ணால் அறியப்படும். இதேபோல் கார்டீசியன் அச்சுத்தொலைவு முறையில், தளத்தின் மேலுள்ள எந்த ஒரு P என்ற புள்ளியையும் அச்சுத்தூரங்கள் என்று அழைக்கப்படும் இரண்டு மெய்யெண்களைக் கொண்டு ஒரு நிலையான இடத்தில் குறிக்கலாம்.

கார்டீசியன் அச்சுத்தொலைவு முறை அல்லது செவ்வக அச்சுத்தொலைவு முறை என்பது ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரண்டு மெய்யெண் நேர்கோடுகளை கொண்ட ஒரு தளமாகும். அந்த இரண்டு செங்குத்து மெய்யெண் நேர்கோடுகள் கார்டீசியன் தளத்தின் அச்சுகள் எனப்படும். அவ்விரண்டு அச்சுகளும் பூச்சியத்தில் வெட்டிக் கொள்ளுமாறு அமைக்கப்பெற்று, அந்த புள்ளி ஆதிப்புள்ளி என அழைக்கப்படுகிறது. கிடையான மெய்யெண் நேர்கோடு x-அச்சு எனவும் குத்தான மெய்யெண் நேர்கோடு y-அச்சு எனவும் அழைக்கப்படுகின்றது. y-அச்சின் வலதுபுறம் உள்ள புள்ளிகளின் x-அச்சுத்தொலைவு மிகை எண்களாகவும் இடதுபுறம் உள்ள புள்ளிகளின் x-அச்சுத்தொலைவு குறை எண்களாகவும் கொள்ளப்படும். அதேபோல் x-அச்சின் மேற்புறம் உள்ள புள்ளிகளின் y-அச்சுத்தொலைவு மிகை எண்களாகவும் கீழ்ப்புறம் உள்ள புள்ளிகளின் y-அச்சுத்தொலைவு குறை எண்களாகவும் கொள்ளப்படும். இரண்டு அச்சுகளிலும் ஒரே அலகினை பயன்படுத்துவோம்.

5.2.1 ஒரு புள்ளியின் அச்சுத்தொலைவுகள்

கார்டீசியன் முறையில் தளத்தின் மேல் உள்ள P என்ற எந்த ஒரு புள்ளியும் மெய்யெண்களாலான ஒரு வரிசை சோடியின் மூலம் அறியப்படும். அந்த மெய்யெண்களைப்



படம் 5.2

பெறுவதற்கு P என்ற புள்ளி வழியே இரண்டு நேர்க்கோடுகள் அச்சுகளுக்கு இணையாக வரையப்படும். குத்துக்கோடு x-அச்சினை வெட்டும் புள்ளி x-அச்சுத்தொலைவு எனவும், கிடைக்கோடு y-அச்சினை வெட்டும் புள்ளி y-அச்சுத்தொலைவு எனவும் அழைக்கப்படும். இவ்விரண்டும் P என்ற புள்ளியின் அச்சுத் தொலைவுகள் என்றழைக்கப்படுகின்றது. இதனை வழக்கமாக, முதலில் x-அச்சுத் தொலைவையும் இரண்டாவதாக y-அச்சுத் தொலைவையும் கொண்டு (x, y) என்ற வரிசை சோடியாக எழுதலாம்.

குறிப்புரை

1. (a, b) என்ற எந்த ஒரு வரிசை சோடியிலும், அதன் உறுப்புகள் a மற்றும் b ஒரு குறிப்பட்ட வரிசையில் அமைக்கப்படுகின்றது. எனவே வரிசை சோடிகள் (a, b) மற்றும் (b, a) வேறுபட்ட இரு வரிசை சோடிகள் ஆகும். அதாவது $(a,b) \neq (b,a)$.
2. $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ எனில் $a_1 = a_2$ மற்றும் $b_1 = b_2$ ஆகும்.
3. பின்வரும் பாடப்பகுதியில் புள்ளி மற்றும் புள்ளியின் அச்சுத்தூரங்கள் இரண்டும் ஒன்றாக அறியப்படும்.

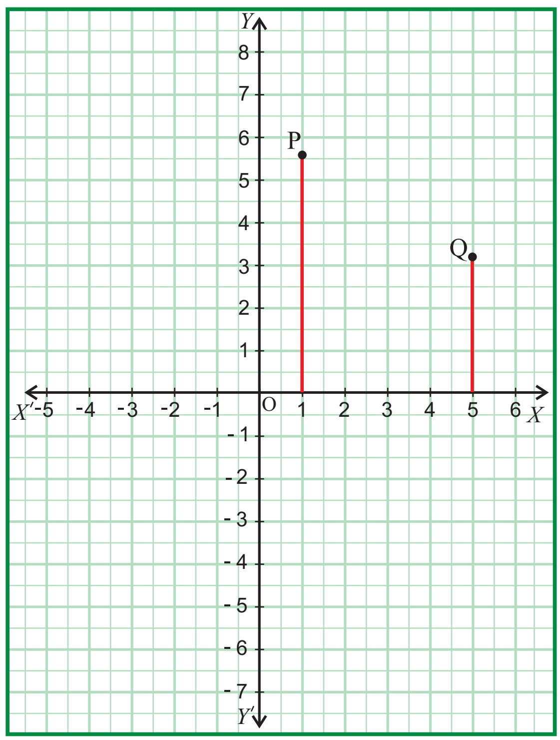
5.2.2 x-அச்சுத்தொலைவு

ஒரு புள்ளியின் x-அச்சுத்தூரம் அல்லது x-தொலைவு (abscissa), அப்புள்ளி y-அச்சின் வலப்புறமாக உள்ளதா அல்லது இடப்புறமாக உள்ளதா என அறிய உதவுகின்றது. P என்ற புள்ளியின் x-அச்சுத்தூரத்தை காண்பதற்கு:

(i) P என்ற புள்ளியிலிருந்து x-அச்சிற்கு ஒரு செங்குத்துக் கோடு வரைக.

(ii) அச்செங்குத்துக் கோடு x-அச்சினைச் சந்திக்கும் இடத்தின் எண்மதிப்பு அப்புள்ளியின் x-அச்சுத்தூரம் ஆகும்.

படம் 5.3 இல், P என்ற புள்ளியின் x-அச்சுத்தூரம் 1 மற்றும் Q என்ற புள்ளியின் x-அச்சுத்தூரம் 5 எனக் காண்கிறோம்.



படம் 5.3

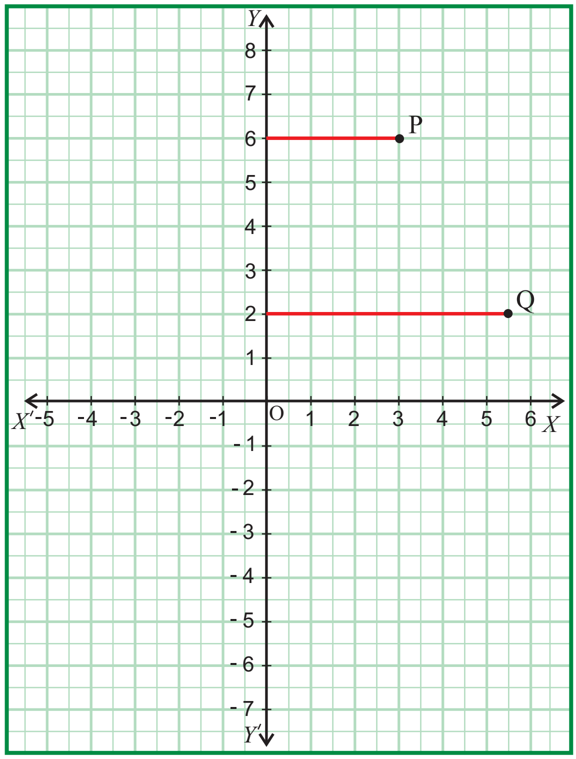
5.2.3 y-அச்சுத்தொலைவு

ஒரு புள்ளியின் y-அச்சுத்தூரம் அல்லது y-தொலைவு (ordinate), அப்புள்ளி x-அச்சின் மேற்புறமாக உள்ளதா அல்லது கீழ்புறமாக உள்ளதா என அறிய உதவுகின்றது. P என்ற புள்ளியின் y-அச்சுத்தூரத்தை காண்பதற்கு:

(i) P என்ற புள்ளியிலிருந்து y-அச்சிற்கு ஒரு செங்குத்து கோடு வரைக.

(ii) அச்செங்குத்து கோடு y-அச்சினைச் சந்திக்கும் இடத்தின் எண்மதிப்பு அப்புள்ளியின் y-அச்சுத்தூரம் ஆகும்.

படம் 5.4 இல், P என்ற புள்ளியின் y-அச்சுத்தூரம் 6 மற்றும் Q என்ற புள்ளியின் y-அச்சுத்தூரம் 2 எனக் காண்கிறோம்.



படம் 5.4

குறிப்பு

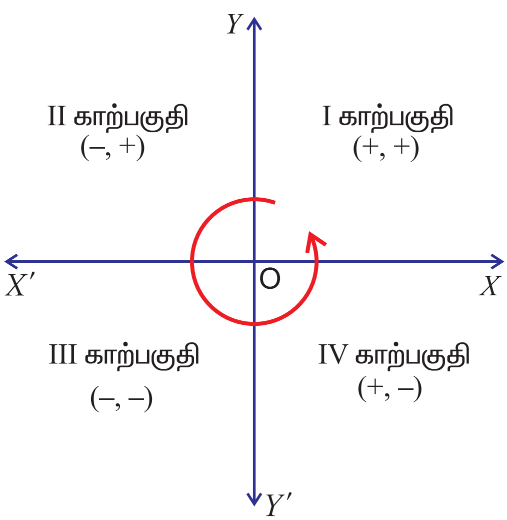
(i) x-அச்சின் மீதுள்ள எந்த ஒரு புள்ளியின் y-அச்சுத்தொலைவு பூச்சியம் ஆகும்.

(ii) y-அச்சின் மீதுள்ள எந்த ஒரு புள்ளியின் x-அச்சுத்தொலைவு பூச்சியம் ஆகும்.

(iii) ஆதிப்புள்ளியின் x மற்றும் y அச்சுத்தொலைவுகள் பூச்சியம் ஆகும். எனவே, ஆதிப்புள்ளியை $(0,0)$ எனக் குறிப்போம்.

5.2.4 காற்பகுதிகள் (Quadrants)

செவ்வக அச்சுகளைக் கொண்ட தளம் கார்டீசியன் தளம் என்றழைக்கப்படும். கார்டீசியன் தளத்தின் அச்சுகள் அத்தளத்தை நான்கு பகுதிகளாகப் பிரிக்கின்றன. அவை படம் 5.5 இல் உள்ளவாறு, கடிகார எதிர் திசையில் எண்ணிடப்பட்டு I-ம் காற்பகுதி, II-ம் காற்பகுதி, III-ம் காற்பகுதி, மற்றும் IV-ம் காற்பகுதி என்றழைக்கப்படுகின்றன. x-அச்சுத்தூரம் I-ம் மற்றும் IV-ம் காற்பகுதிகளில் மிகை எண்களாகவும், II-ம் மற்றும் III-ம் காற்பகுதிகளில் குறை எண்களாகவும் இருக்கும். y-அச்சுத்தூரம் I-ம் மற்றும் II-ம் காற்பகுதிகளில் மிகை எண்களாகவும், III-ம் மற்றும் IV-ம் காற்பகுதிகளில் குறை எண்களாகவும் இருக்கும். படம் 5.5 இல் அச்சுத்தூரங்களின் இயற்கணிதக் குறிகள் அடைப்புக் குறிகளுக்குள் காட்டப்பட்டுள்ளன.



படம் 5.5

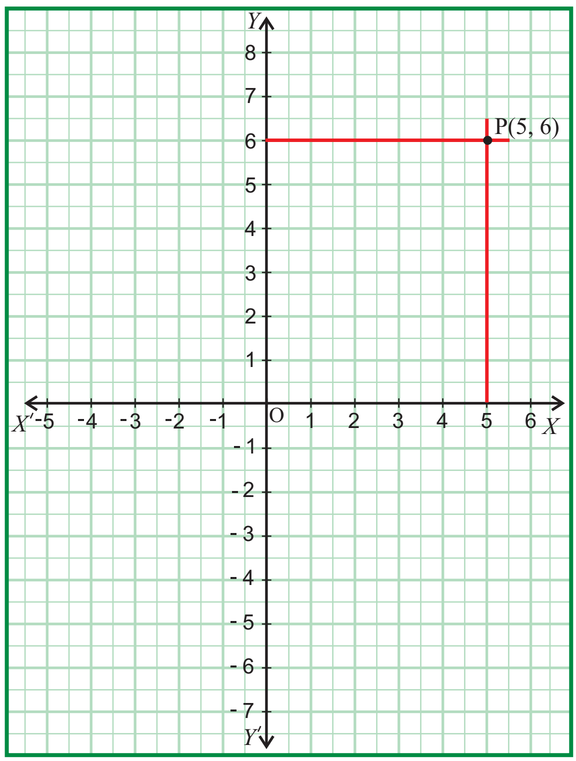
ஒவ்வொரு புள்ளியின் அச்சுத்தூரங்களின் குறிகள் எவ்வாறு அமைகின்றன ? என்பது பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பகுதி	காற்பகுதி	அச்சுத்தூரங்களின் தன்மை	அச்சுத்தூரங்களின் இயற்கணித குறிகள்
XOY	I	$x > 0, y > 0$	+, +
X′OY	II	$x < 0, y > 0$	−, +
X′OY′	III	$x < 0, y < 0$	−, −
XOY′	IV	$x > 0, y < 0$	+, −

5.2.5 செவ்வக அச்சுத்தூர முறையில் ஒரு புள்ளியை குறித்தல்

கார்டீசியன் அச்சுத்தூர முறையில் ஒரு புள்ளியை எப்படி குறிப்பது என ஒரு எடுத்துக்காட்டின் மூலம் விளக்குவோம். கார்டீசியன் அச்சுத்தூர முறையில் (5, 6) என்ற புள்ளியைக் குறிக்க, x-அச்சின் மேல் 5 வரும் வரை நகர்ந்து, பின் 5-ன் வழியே x-அச்சிற்கு செங்குத்தாக ஒரு கோடு வரைய வேண்டும். அதே போல் y-அச்சின் மேல் 6 வரும் வரை நகர்ந்து, பின் 6 இன் வழியே y-அச்சிற்கு செங்குத்தாக ஒரு கோடு வரைய வேண்டும். இந்த இரண்டு கோடுகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி (5, 6) ஆகும்.

அதாவது, x-அச்சின் மிகை திசையில் 5 அலகுகள் நகர்ந்து பின் அங்கிருந்து y-அச்சின் மிகை திசையில் 6 அலகுகள் நகர்ந்தால் நாம் (5, 6) என்ற புள்ளியை அடைவோம். (5, 6) என்ற புள்ளி, y-அச்சிலிருந்து 5 அலகுகள் தொலைவிலும் x-அச்சிலிருந்து 6 அலகுகள் தொலைவிலும் உள்ளது. இவ்வாறு (5, 6) என்ற புள்ளி கார்டீசியன் தளத்தில் குறிக்கப்படுகின்றது.

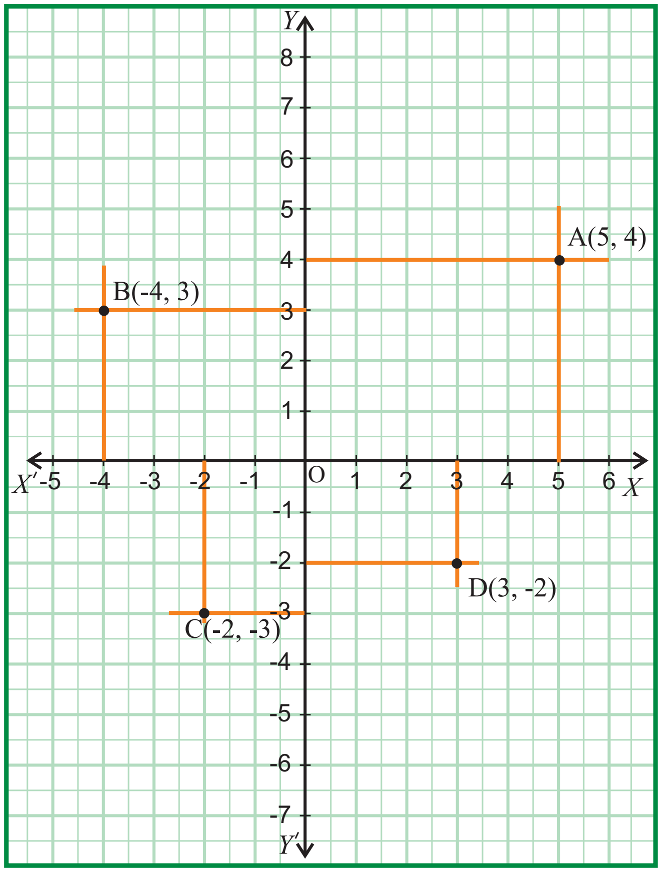


படம் 5.6

எடுத்துக்காட்டு 5.1

கீழ்வரும் புள்ளிகளைச் செவ்வக அச்சுத்தொலைவு முறையில் குறிக்கவும்.

(i) A (5, 4) (ii) B (– 4, 3) (iii) C (– 2, – 3) (iv) D (3, – 2)



படம் 5.7

தீர்வு

(i) கார்டீசியன் தளத்தில் (5,4) என்ற புள்ளியைக் குறிக்க, $x = 5$ இல் ஒரு குத்துக்கோடும், $y=4$ இல் ஒரு கிடைக்கோடும் வரையவும். இந்த இரண்டு கோடுகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியே A(5, 4) என்ற புள்ளியாகும்.

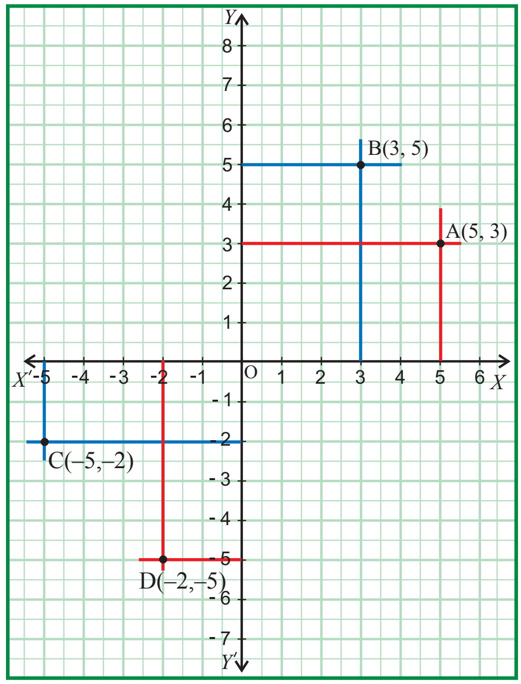
(ii) கார்டீசியன் தளத்தில் $(-4, 3)$ என்ற புள்ளியைக் குறிக்க, $x=-4$ இல் ஒரு குத்துக்கோடும், $y = 3$ இல் ஒரு கிடைக்கோடும் வரையவும். இந்த இரண்டு கோடுகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியே $B(-4, 3)$ என்ற புள்ளியாகும்.

(iii) கார்டீசியன் தளத்தில் $(-2, -3)$ என்ற புள்ளியைக் குறிக்க, $x = -2$ இல் ஒரு குத்துக்கோடும், $y = -3$ இல் ஒரு கிடைக்கோடும் வரையவும். இந்த இரண்டு கோடுகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியே $C(-2, -3)$ என்ற புள்ளியாகும்.

(iv) கார்டீசியன் தளத்தில் $(3, -2)$ என்ற புள்ளியைக் குறிக்க, $x = 3$ இல் ஒரு குத்துக்கோடும், $y = -2$ இல் ஒரு கிடைக்கோடும் வரையவும். இந்த இரண்டு கோடுகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியே $D(3, -2)$ என்ற புள்ளியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.2

(i) (3, 5) மற்றும் (5, 3) (ii) (– 2, – 5) மற்றும் (– 5, – 2) என்ற புள்ளிகளைச் செவ்வக அச்சுத்தூர முறையில் குறிக்கவும்.

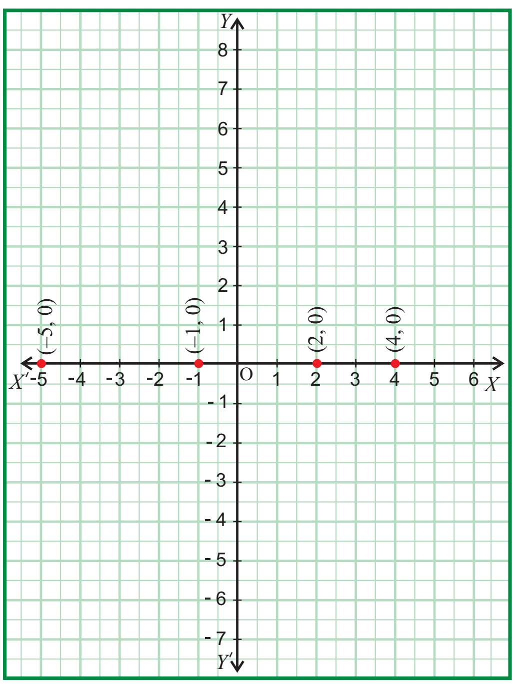


படம் 5.8

கார்டீசியன் தளத்தில், (x, y) என்ற புள்ளியின் x-அச்சுத்தொலைவு மற்றும் y-அச்சுத்தொலைவு ஆகியவற்றை இடம் மாற்றி எழுதும் போது, அது (y, x) என்ற வேறொரு புள்ளியாக அமையும் என அறியவும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.3

(–1, 0), (2, 0), (–5, 0) மற்றும் (4, 0) என்ற புள்ளிகளைச் செவ்வக அச்சுத்தூர முறையில் குறிக்கவும்.

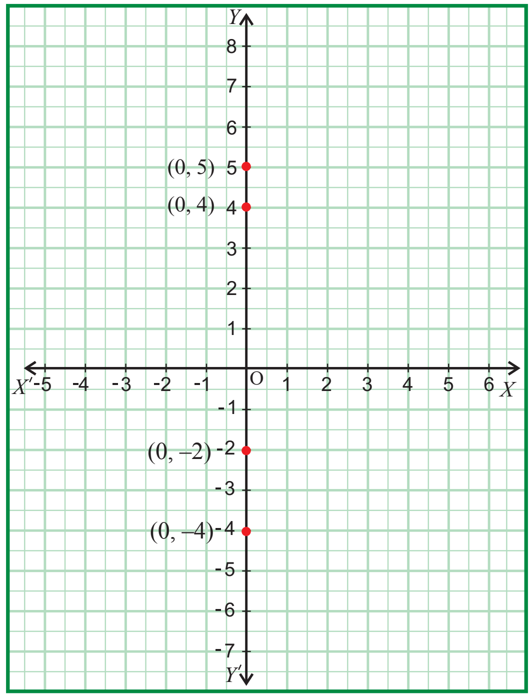


படம் 5.9

கார்டீசியன் தளத்தில், ஒரு புள்ளியின் y-அச்சுத்தொலைவு பூச்சியம் எனில், அந்தப் புள்ளி x-அச்சின் மேல் அமையும் என அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.4

(0, 4), (0,–2), (0, 5) மற்றும் (0,–4) என்ற புள்ளிகளைச் செவ்வக அச்சுத்தூர முறையில் குறிக்கவும்.

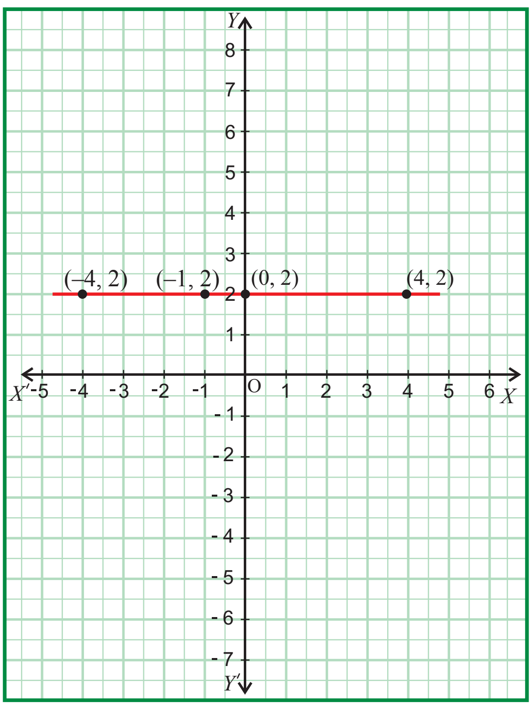


படம் 5.10

கார்டீசியன் தளத்தில், ஒரு புள்ளியின் x-அச்சுத்தொலைவு பூச்சியம் எனில் அப்புள்ளி y-அச்சின் மேல் அமையும் எனக் காண்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.5

(i) (–1, 2), (– 4, 2), (4, 2) மற்றும் (0, 2) என்ற புள்ளிகளைச் செவ்வக அச்சுத்தூர முறையில் குறிக்கவும். அப்புள்ளிகளின் அமைப்பைப் பற்றி உன்னால் என்ன கூற முடியும்?



படம் 5.11

இப்புள்ளிகளைக் குறித்து, ஒரு கோட்டின் மூலம் இணைக்கும் போது அக்கோடு x-அச்சிற்கு இணையான ஒரு நேர்கோடாக அமைவதைக் காணலாம்.

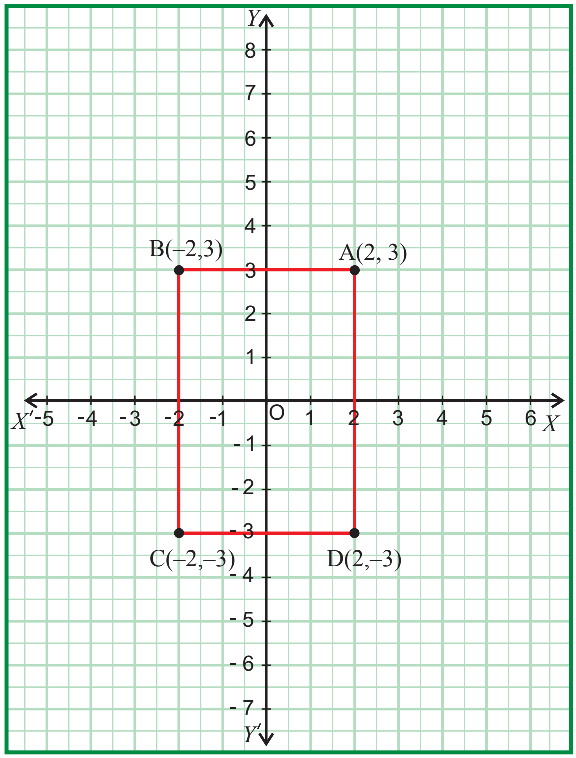
குறிப்புரை x-அச்சிற்கு இணையான கோட்டின் மேல் உள்ள புள்ளிகளின் y-அச்சுத்தொலைவுகள் சமமாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.6

A (2, 3), B (–2, 3), C (–2, –3) மற்றும் D (2, –3) என்ற புள்ளிகள் அமையும் காற்பகுதியைக் காண்க. இப்புள்ளிகளை இணைப்பதால் எவ்வகை வரைபடம் கிடைக்கும் ? எனக் கூறுக.

தீர்வு

புள்ளி	A	B	C	D
காற்பகுதி	I	II	III	IV

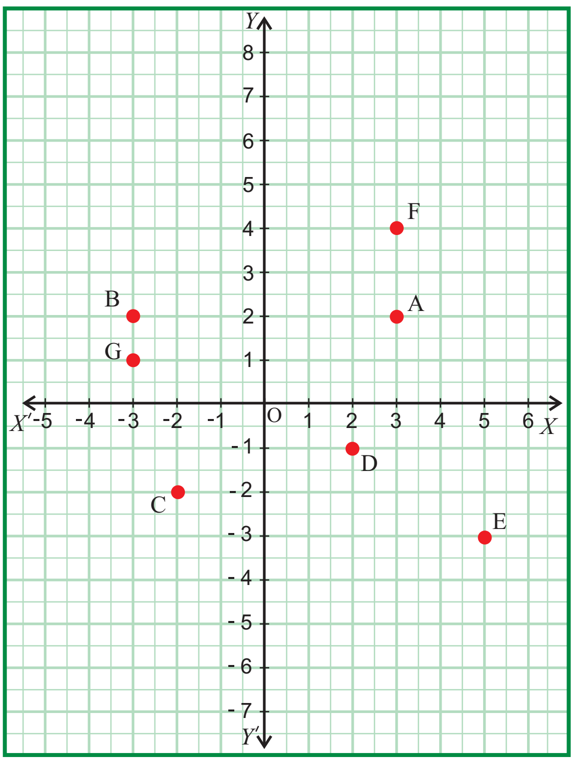


படம் 5.12

படத்திலிருந்து, $ABCD$ ஒரு செவ்வகமாகும்.

படம் 5.12-ல் உள்ள செவ்வகத்தின் நீளம், அகலம் மற்றும் பரப்பளவை உன்னால் காண முடியுமா?

எடுத்துக்காட்டு 5.7



படம் 5.13

படம் 5.13 இல் குறிக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகளின் அச்சுத்தூரங்களைக் காண்க. இங்கு ஒவ்வொரு சதுரமும் ஓரலகு சதுரம் (Unit Square) ஆகும்.

தீர்வு A என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்க. இப்புள்ளி x-அச்சின் மிகை திசையில் ஆதிப்புள்ளியில் இருந்து மூன்று அலகுகள் தொலைவிலும் y-அச்சின் மிகை திசையில் ஆதிப்புள்ளியில் இருந்து இரண்டு அலகுகள் தொலைவிலும் அமைந்துள்ளது. எனவே, A இன் அச்சுத்தொலைவுகள் (3, 2) ஆகும்.

இதேபோல் மற்ற புள்ளிகள் B, C, D, E, F மற்றும் G ஆகியவற்றின் அச்சுத்தொலைவுகள் முறையே $(-3,2)$, $(-2,-2)$, $(2,-1)$, $(5,-3)$, $(3,4)$, $(-3,1)$ ஆகும்.

பயிற்சி 5.1

1. கீழ்வரும் வாக்கியங்கள் சரியா அல்லது தவறா எனக் கூறவும்.

   (i) (5, 7) என்ற புள்ளி நான்காம் காற்பகுதியில் அமைகிறது.

   (ii) $(-2, -7)$ என்ற புள்ளி மூன்றாம் காற்பகுதியில் அமைகிறது.

   (iii) $(8, -7)$ என்ற புள்ளி x-அச்சிற்குக் கீழே அமைகிறது.

   (iv) (5, 2) மற்றும் $(-7, 2)$ என்ற புள்ளிகள் y-அச்சிற்கு இணையான கோட்டின் மேல் உள்ளன.

   (v) $(-5, 2)$ என்ற புள்ளி y-அச்சிற்கு இடப்பக்கம் உள்ளது.

   (vi) (0, 3) என்ற புள்ளி x-அச்சின் மேல் உள்ளது.

   (vii) $(-2, 3)$ என்பது இரண்டாம் காற்பகுதியில் உள்ள ஒரு புள்ளி ஆகும்.

   (viii) $(-10, 0)$ என்ற புள்ளி x-அச்சின் மேல் உள்ளது.

   (ix) $(-2, -4)$ என்ற புள்ளி x-அச்சிற்கு மேற்பகுதியில் அமைகிறது.

   (x) x-அச்சின் மீதுள்ள எந்த ஒரு புள்ளிக்கும் y-அச்சுத்தொலைவு பூச்சியம் ஆகும்.

2. கார்டீசியன் அச்சுத்தூர முறையில், பின்வரும் புள்ளிகளைக் குறித்து அவை எந்த காற்பகுதியில் அமைகின்றன எனக் கூறவும்.

   (i) (5, 2) (ii) $(-1, -1)$ (iii) (7, 0) (iv) $(-8, -1)$ (v) $(0, -5)$
   (vi) (0, 3) (vii) $(4, -5)$ (viii) (0, 0) (ix) (1, 4) (x) $(-5, 7)$

3. பின்வரும் புள்ளிகளின் x-அச்சுத்தொலைவைக் காண்க.

   (i) $(-7, 2)$ (ii) (3, 5) (iii) $(8, -7)$ (iv) $(-5, -3)$

4. பின்வரும் புள்ளிகளின் y-அச்சுத்தொலைவைக் காண்க.

   (i) (7, 5) (ii) (2, 9) (iii) $(-5, 8)$ (iv) $(7, -4)$

5. பின்வரும் புள்ளிகளை அச்சுத்தளத்தில் குறிக்கவும்.

   (i) (4, 2) (ii) $(4, -5)$ (iii) (4, 0) (iv) $(4, -2)$

   இப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு எவ்வாறு அமைந்துள்ளது எனக் கூறுக.

6. இரண்டுபுள்ளிகளில்ஒவ்வொன்றின் y-அச்சுத்தொலைவும் -6 என்க. அந்தபுள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடு x-அச்சினைப் பொறுத்து எவ்வாறு அமையும் எனக் கூறுக.

7. இரண்டு புள்ளிகளில் ஒவ்வொன்றின் x-அச்சுத்தொலைவும் பூச்சியம் எனில், அந்த புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடு x-அச்சினைப் பொறுத்து எவ்வாறு அமையும் எனக் கூறுக.

8. கார்டீசியன் தளத்தில் A (2, 4), B $(-3, 4)$, C $(-3, -1)$ மற்றும் D $(2, -1)$ என்ற புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். வரிசை மாறாமல் இப்புள்ளிகளைக் கோட்டுத் துண்டுகளால் இணைப்பதால் எவ்வகை வரைபடம் கிடைக்கும் எனக் கூறுக.

9. செவ்வக அச்சுத்தொலைவு முறையில் $O(0, 0)$, $A(5, 0)$, $B(5, 4)$ என்ற புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். $OABC$ ஒரு செவ்வகமாக அமையுமாறு C இன் அச்சுத்தூரங்களைக் காண்க.

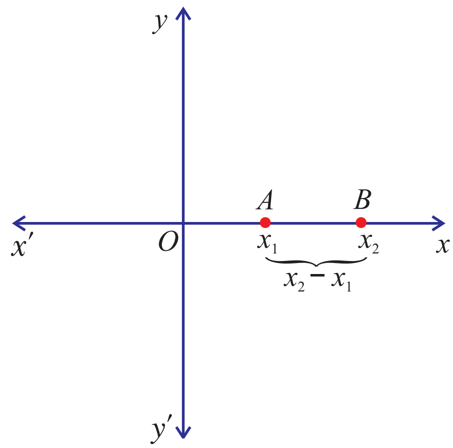
10. $ABCD$ என்ற செவ்வகத்தில், A, B, D என்ற புள்ளிகளின் அச்சுத்தூரங்கள் முறையே $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(0, 3)$ எனில், C இன் அச்சுத்தூரங்களைக் காண்க.

5.3 இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு

பகுமுறை வடிவக்கணிதத்தில், மிக எளிமையானது இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவைக் கணக்கிடுவது ஆகும். A, B என்ற இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு AB என்று குறிக்கப்படும்.

5.3.1 கார்டீசியன் தளத்தில் அச்சுக்களின் மீது உள்ள இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு

இரு புள்ளிகள் x-அச்சின் மீது அமையும் போது அவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொலைவை எளிதில் காண முடியும், ஏனெனில் அவ்விரு புள்ளிகளின் x-அச்சுத்தூரங்களின் வித்தியாசமே அத்தொலைவாகும்.



படம் 5.14

x-அச்சின் மீது அமையும் $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$ என்ற இரு புள்ளிகளைக் கருதுக.

$x_2 > x_1$ எனில், A-லிருந்து B இன் தொலைவு

$AB = OB - OA = x_2 - x_1$

$x_1 > x_2$ எனில், $AB = x_1 - x_2$

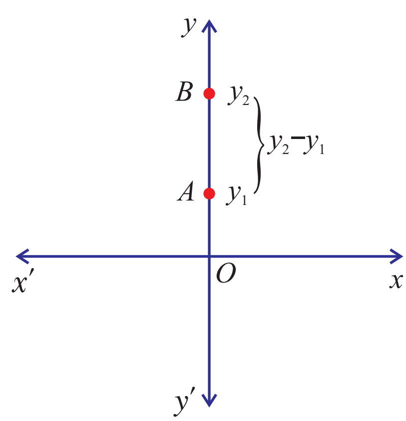
எனவே, $AB = |x_2 - x_1|$ ஆகும்.

அதேபோல் இரு புள்ளிகள் y-அச்சின் மீது அமையும் போது அவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொலைவு அவற்றின் y-அச்சுத்தூரங்களின் வித்தியாசத்திற்குச் சமமாகும். y-அச்சின் மீது அமையும் $A(0, y_1)$, $B(0, y_2)$ என்ற இரு புள்ளிகளைக் கருதுக.

$y_2 > y_1$ எனில், A இல் இருந்து B இன் தொலைவு $AB = OB - OA = y_2 - y_1$

$y_1 > y_2$ எனில் $AB = y_1 - y_2$

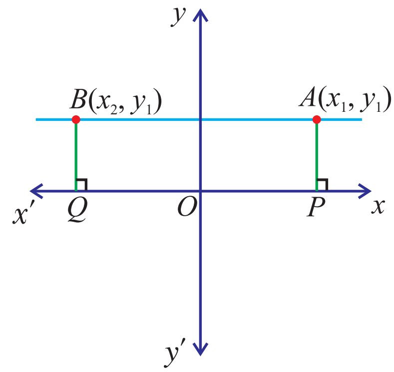
எனவே, $AB = |y_2 - y_1|$ ஆகும்.



படம் 5.15

5.3.2 அச்சுக்கு இணையான நேர்கோட்டின் மீதுள்ள இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு

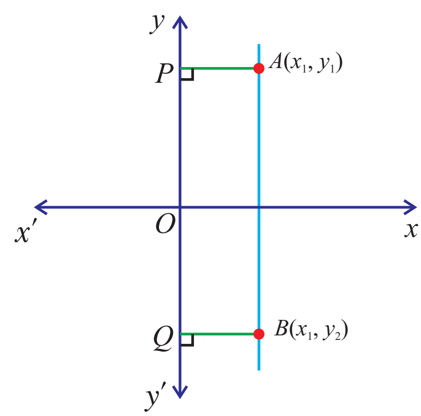
$A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_2, y_1)$ என்ற இரு புள்ளிகளை எடுத்துக் கொள்வோம். இப்புள்ளிகளின் y அச்சுத்தூரங்கள் சமமாக உள்ளதால் இவ்விரு புள்ளிகளும் x-அச்சிற்கு இணையான ஒரு நேர் கோட்டின் மேல் அமையும். A மற்றும் B-லிருந்து x-அச்சிற்கு முறையே AP மற்றும் BQ என்ற குத்துக்கோடுகளை வரையவும். A, B ஆகியவற்றிற்கிடையேயான தொலைவானது, P, Q ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொலைவுக்குச் சமமாகும்.



படம் 5.16

எனவே, $AB = PQ = |x_1 - x_2|$

தற்போது y-அச்சிற்கு இணையாக உள்ள ஒரு கோட்டின் மேல் $A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_1, y_2)$ என்ற இரு புள்ளிகளை எடுத்துக்கொள்க. y-அச்சிற்கு, A மற்றும் B-லிருந்து முறையே AP மற்றும் BQ என்ற குத்துக் கோடுகளை வரையவும். தற்போது P மற்றும் Q-ன் அச்சுத்தூரங்கள் $(0, y_1)$ மற்றும் $(0, y_2)$ ஆகும். A, B ஆகியவற்றிற்கிடையேயான தொலைவானது, P, Q ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொலைவுக்குச் சமமாகும்.



படம் 5.17

எனவே, $PQ = AB = |y_1 - y_2|$

குறிப்புரை அச்சுக்கு இணையான நேர்கோட்டின் மேல் உள்ள இரு புள்ளிகளுக்கு இடையிலான தொலைவு, அந்த நேர்கோடு எந்த அச்சிற்கு இணையாக உள்ளதோ, அந்த அச்சுத்தொலைவுகளின் வித்தியாசமாகும்.

5.3.3 இரு புள்ளிகளின் இடைப்பட்ட தொலைவு

கார்டீசியன் தளத்தில் $A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_2, y_2)$ என்ற இரு புள்ளிகளை எடுத்துக்கொள்வோம். A, B இல் இருந்து x-அச்சிற்கு வரையப்பட்ட குத்துக்கோடுகளின் அடிப்புள்ளிகள் முறையே P மற்றும் Q என்க. A இல் இருந்து BQ விற்கு AR என்ற குத்துக்கோடு வரையவும். படம் 5.18 இல் இருந்து நாம் அறிவது,

$AR = PQ = OQ - OP = x_2 - x_1$ மற்றும்

$BR = BQ - RQ = y_2 - y_1$

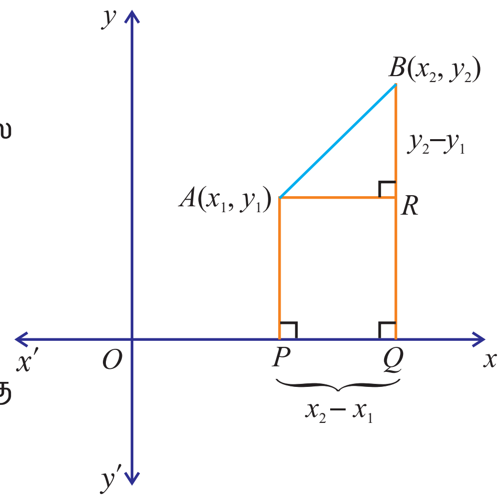
செங்கோண முக்கோணம் ARB இல் இருந்து பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி,

$$AB^2 = AR^2 + RB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

அதனால், $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

எனவே A மற்றும் B என்ற புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



படம் 5.18

முக்கியகருத்து	இரு புள்ளிகளுக்கு இடையிலான தொலைவு

(x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) என்ற இரு புள்ளிகளுக்கு இடையேயான தொலைவைக் காணும் சூத்திரம்

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

குறிப்புரை

(i) இச்சூத்திரம் மேலே கூறப்பட்ட அனைத்து வகை புள்ளிகளுக்கும் பொருந்தும்.

(ii) ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியின் தொலைவு $OP = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.8

$(-4, 0)$ மற்றும் $(3, 0)$ என்ற புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவைக் காண்க.

தீர்வு $(-4, 0)$ மற்றும் $(3, 0)$ என்பன x-அச்சின் மேல் உள்ள இரு புள்ளிகள்.

எனவே, $d = |x_1 - x_2| = |3 - (-4)| = |3 + 4| = 7$

மாற்றுமுறை :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3 + 4)^2 + 0^2} = \sqrt{49} = 7$$

எடுத்துக்காட்டு 5.9

$(-7, 2)$ மற்றும் $(5, 2)$ என்ற புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவைக் காண்க.

தீர்வு $(5, 2)$ மற்றும் $(-7, 2)$ என்ற புள்ளிகள் x-அச்சிற்கு இணையான ஒரு கோட்டின் மீதுள்ளன.

எனவே, $d = |x_1 - x_2| = |-7 - 5| = |-12| = 12$

மாற்றுமுறை :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5 + 7)^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{12^2} = \sqrt{144} = 12$$

எடுத்துக்காட்டு 5.10

(–5, – 6) மற்றும் (– 4, 2) என்ற புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவைக் காண்க.

தீர்வு $(x_1, y_1) = (-5, -6), (x_2, y_2) = (-4, 2)$ என்க.

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ என்ற தொலைவு சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த,

$$d = \sqrt{(-4+5)^2 + (2+6)^2} = \sqrt{1^2 + 8^2} = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.11

(0, 8) மற்றும் (6, 0) என்ற புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவைக் காண்க.

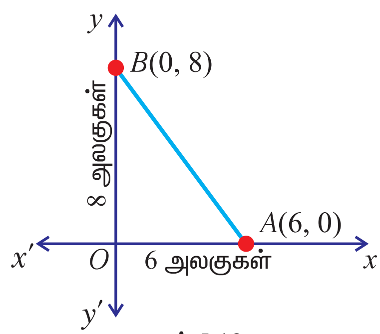
தீர்வு $(x_1, y_1) = (0, 8), \ (x_2, y_2) = (6, 0)$ என்க. இவ்விரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(6-0)^2 + (0-8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

மாற்றுமுறை :

A, B என்பன (6, 0) மற்றும் (0, 8) என்ற புள்ளிகளையும், O என்பது ஆதிப்புள்ளியையும் குறிக்கட்டும். $A(6, 0)$ என்ற புள்ளிx-அச்சின் மீதும், $B(0, 8)$ என்ற புள்ளி y-அச்சின் மீதும் அமைந்துள்ளன. அச்சுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் செங்கோணம் என்பதால் AOB என்ற முக்கோணம் ஒரு செங்கோண முக்கோணம் ஆகும்.



படம் 5.19

$OA = 6, OB = 8$

பிதாகரஸ் தேற்றத்தின் படி,

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 = 36 + 64 = 100.$$

$$\therefore \ AB = \sqrt{100} = 10$$

எடுத்துக்காட்டு 5.12

(–3, –4) மற்றும் (5, –7) என்ற புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவைக் காண்க.

தீர்வு $(x_1, y_1) = (-3, -4), (x_2, y_2) = (5, -7)$ என்க.

இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(5+3)^2 + (-7+4)^2} = \sqrt{8^2 + (-3)^2} = \sqrt{64+9} = \sqrt{73}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.13

$(4, 2), (7, 5)$ மற்றும் $(9, 7)$ என்ற மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே நேர்கோட்டின் மீது அமையும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட மூன்று புள்ளிகள் $A(4, 2)$, $B(7, 5)$ மற்றும் $C(9, 7)$ என்க.

தொலைவு சூத்திரத்தினைப் பயன்படுத்த,

$$AB^2 = (4-7)^2 + (2-5)^2 = (-3)^2 + (-3)^2 = 9 + 9 = 18$$

$$BC^2 = (9-7)^2 + (7-5)^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$$

$$CA^2 = (9-4)^2 + (7-2)^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$$

எனவே, $AB = \sqrt{18} = \sqrt{9\times 2} = 3\sqrt{2}$; $BC = \sqrt{8} = \sqrt{4\times 2} = 2\sqrt{2}$;

$CA = \sqrt{50} = \sqrt{25\times 2} = 5\sqrt{2}$.

இங்கு $AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$ எனக் கிடைக்கிறது.

எனவே, A, B, C என்ற புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டின் மீது அமைகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 5.14

$A(-3, -4)$, $B(2, 6)$ மற்றும் $C(-6, 10)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிகளாகுமா எனத் தீர்மானிக்க.

தீர்வு தொலைவு சூத்திரத்தினைப் பயன்படுத்த,

$$AB^2 = (2+3)^2 + (6+4)^2 = 5^2 + 10^2 = 25 + 100 = 125$$

$$BC^2 = (-6-2)^2 + (10-6)^2 = (-8)^2 + 4^2 = 64 + 16 = 80$$

$$CA^2 = (-6+3)^2 + (10+4)^2 = (-3)^2 + (14)^2 = 9 + 196 = 205$$

மேலும், $AB^2 + BC^2 = 125 + 80 = 205 = CA^2$

ஒரு பக்கத்தின் வர்க்கமானது மற்ற இரு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம் என்பதால், ABC ஒரு செங்கோண முக்கோணமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.15

$(a, a), (-a, -a)$ மற்றும் $(-a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் $A(a, a)$, $B(-a, -a)$ மற்றும் $C(-a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$ எனக் கொள்க.

தொலைவு சூத்திரம் $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ஐப் பயன்படுத்த,

$$AB = \sqrt{(a+a)^2 + (a+a)^2}$$
$$= \sqrt{(2a)^2 + (2a)^2} = \sqrt{4a^2 + 4a^2} = \sqrt{8a^2} = 2\sqrt{2}\,a$$
$$BC = \sqrt{(-a\sqrt{3}+a)^2 + (a\sqrt{3}+a)^2} = \sqrt{3a^2 + a^2 - 2a^2\sqrt{3} + 3a^2 + a^2 + 2a^2\sqrt{3}}$$
$$= \sqrt{8a^2} = \sqrt{4 \times 2a^2} = 2\sqrt{2}\,a$$
$$CA = \sqrt{(a+a\sqrt{3})^2 + (a-a\sqrt{3})^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2\sqrt{3} + 3a^2 + a^2 - 2a^2\sqrt{3} + 3a^2}$$
$$= \sqrt{8a^2} = 2\sqrt{2}\,a$$

எனவே, $AB = BC = CA = 2\sqrt{2}\,a$.

அனைத்து பக்கங்களும் சமமானதால், கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தை அமைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.16

(–7, –3), (5, 10), (15, 8) மற்றும் (3, –5) என்ற புள்ளிகளை, வரிசைமாறாமல் எடுத்து கொண்டால், அவை ஓர் இணைகரத்தின் உச்சிகளாகும் என நிரூபிக்கவும்.

தீர்வு A, B, C மற்றும் D என்பன முறையே (–7, –3), (5, 10), (15, 8) மற்றும் (3, –5) என்ற புள்ளிகளைக் குறிப்பதாகக் கொள்க. தொலைவு சூத்திரம் d = $\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

$$AB^2 = (5+7)^2 + (10+3)^2 = 12^2 + 13^2 = 144 + 169 = 313$$
$$BC^2 = (15-5)^2 + (8-10)^2 = 10^2 + (-2)^2 = 100 + 4 = 104$$
$$CD^2 = (3-15)^2 + (-5-8)^2 = (-12)^2 + (-13)^2 = 144 + 169 = 313$$
$$DA^2 = (3+7)^2 + (-5+3)^2 = 10^2 + (-2)^2 = 100 + 4 = 104$$

எனவே,

$AB = CD = \sqrt{313}$ மற்றும் $BC = DA = \sqrt{104}$ என்பதால்

எதிர் பக்கங்கள் சமம். எனவே, $ABCD$ ஓர் இணைகரமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.17

(3, –2), (3, 2), (–1, 2) மற்றும் (–1, –2) என்ற புள்ளிகளை வரிசை மாறாமல் எடுத்துக்கொண்டால் அவை ஒரு சதுரத்தின் உச்சிகளாகும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு A, B, C மற்றும் D என்பன முறையே (3, –2), (3, 2), (–1, 2) மற்றும் (–1, –2) என்ற புள்ளிகளைக் குறிப்பதாகக் கொள்க.

தொலைவு சூத்திரம் d = $\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$.

$$AB^2 = (3-3)^2 + (2+2)^2 = 4^2 = 16$$

$$BC^2 = (3+1)^2 + (2-2)^2 = 4^2 = 16$$

$$CD^2 = (-1+1)^2 + (2+2)^2 = 4^2 = 16$$

$$DA^2 = (-1-3)^2 + (-2+2)^2 = (-4)^2 = 16$$

மேலும்,

$$AC^2 = (3+1)^2 + (-2-2)^2 = 4^2 + (-4)^2 = 16 + 16 = 32$$

$$BD^2 = (3+1)^2 + (2+2)^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$$

$$AB = BC = CD = DA = \sqrt{16} = 4.$$

எனவே, அனைத்து பக்கங்களும் சமம்.

மேலும், $AC = BD = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. எனவே, மூலைவிட்டங்கள் சமம்.

ஆகவே, A, B, C மற்றும் D என்ற புள்ளிகள் ஒரு சதுரத்தை அமைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.18

P என்ற புள்ளி (2, 3) மற்றும் (6, 5) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் மையக்குத்துக் கோட்டின் மேல் அமைவதாகக் கொள்க. அப்புள்ளியின் x-அச்சுத்தொலைவு y-அச்சுத்தொலைவுக்கு சமம் எனில், P இன் அச்சுத்தூரங்களைக் காண்க.

தீர்வு P என்ற புள்ளியை (x, y) என்க. இப்புள்ளியின் x-அச்சுத்தொலைவு y-அச்சுத்தொலைவுக்கு சமம் என்பதால், $y = x$ ஆகும். எனவே, P என்ற புள்ளி (x, x) ஆகும். A, B என்பன முறையே (2, 3) மற்றும் (6, 5) என்ற புள்ளிகளை குறிப்பதாகக் கொள்க. P என்ற புள்ளி AB இன் மையக் குத்துக் கோட்டின் மீது அமைந்துள்ளதால், $PA^2 = PB^2$ ஆகும்.

எனவே, $$(x-2)^2 + (x-3)^2 = (x-6)^2 + (x-5)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + x^2 - 6x + 9 = x^2 - 12x + 36 + x^2 - 10x + 25$$

$$2x^2 - 10x + 13 = 2x^2 - 22x + 61$$

$$22x - 10x = 61 - 13$$

$$12x = 48$$

$$x = \frac{48}{12} = 4$$

எனவே, P என்ற புள்ளி (4, 4) ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.19

(9, 3), (7, –1) மற்றும் (1, –1) என்ற புள்ளிகளின் வழியே செல்லும் ஒரு வட்டத்தின் மையப்புள்ளி (4, 3) என நிருபிக்க. மேலும் அவ்வட்டத்தின் ஆரத்தைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு (4, 3) என்ற புள்ளியை C எனவும், (9, 3), (7, – 1) மற்றும் (1, – 1) என்ற புள்ளிகளை முறையே P, Q மற்றும் R எனவும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

தொலைவு சூத்திரம் $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$CP^2 = (9-4)^2 + (3-3)^2 = 5^2 = 25$$

$$CQ^2 = (7-4)^2 + (-1-3)^2 = 3^2 + (-4)^2 = 9 + 16 = 25$$

$$CR^2 = (4-1)^2 + (3+1)^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

எனவே, $CP^2 = CQ^2 = CR^2 = 25$ அல்லது $CP = CQ = CR = 5$ ஆகும். இதிலிருந்து P, Q, R என்ற புள்ளிகளின் வழியாக செல்லும் வட்டத்தின் மையப்புள்ளி (4, 3) எனவும், அதன் ஆரம் 5 அலகுகள் எனவும் அறிகின்றோம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.20

(α, β) என்ற புள்ளி (3, –4) மற்றும் (8, –5) என்ற புள்ளிகளுக்கு சமதூரத்தில் அமைந்தால் $5\alpha - \beta - 32 = 0$ எனக் காட்டு.

தீர்வு (α, β) என்ற புள்ளியை P எனவும், (3, – 4) மற்றும் (8, – 5) என்ற புள்ளிகளை முறையே A மற்றும் B எனவும் எடுத்துக் கொள்ளவும். P என்ற புள்ளி A மற்றும் B-லிருந்து சமதூரத்தில் உள்ளதால், $PA = PB$ ஆகும். எனவே, $PA^2 = PB^2$

அதாவது, $(\alpha - 3)^2 + (\beta + 4)^2 = (\alpha - 8)^2 + (\beta + 5)^2$

$$\alpha^2 - 6\alpha + 9 + \beta^2 + 8\beta + 16 = \alpha^2 - 16\alpha + 64 + \beta^2 + 10\beta + 25$$

$$-6\alpha + 8\beta + 25 + 16\alpha - 10\beta - 89 = 0$$

$$10\alpha - 2\beta - 64 = 0$$

$$\therefore 5\alpha - \beta - 32 = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 5.21

A (9, 3), B (7, –1) மற்றும் C (1, –1) என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையம் S (4, 3) என நிறுவுக.

தீர்வு தொலைவு சூத்திரம் $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$SA = \sqrt{(9-4)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

$SB = \sqrt{(7-4)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

$SC = \sqrt{(1-4)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

எனவே, $SA = SB = SC$.

ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட மையம் அதன் உச்சிப் புள்ளிகளில் இருந்து சம தூரத்தில் அமையும். S என்ற புள்ளி உச்சிப் புள்ளிகளில் இருந்து சம தூரத்தில் அமைந்துள்ளதால், அப்புள்ளி முக்கோணம் ABC-ன் சுற்றுவட்டமையமாகும்.

பயிற்சி 5.2

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சோடிப்புள்ளிகளுக்கும் இடைப்பட்ட தொலைவை காண்க.

   (i) $(7, 8)$ மற்றும் $(-2, -3)$ (ii) $(6, 0)$ மற்றும் $(-2, 4)$

   (iii) $(-3, 2)$ மற்றும் $(2, 0)$ (iv) $(-2, -8)$ மற்றும் $(-4, -6)$

   (v) $(-2, -3)$ மற்றும் $(3, 2)$ (vi) $(2, 2)$ மற்றும் $(3, 2)$

   (vii) $(-2, 2)$ மற்றும் $(3, 2)$ (viii) $(7, 0)$ மற்றும் $(-8, 0)$

   (ix) $(0, 17)$ மற்றும் $(0, -1)$ (x) $(5, 7)$ மற்றும் ஆதிப்புள்ளி.

2. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் அமையும் எனக் காட்டுக.

   (i) $(3, 7)$, $(6, 5)$ மற்றும் $(15, -1)$ (ii) $(3, -2)$, $(-2, 8)$ மற்றும் $(0, 4)$

   (iii) $(1, 4)$, $(3, -2)$ மற்றும் $(-1, 10)$ (iv) $(6, 2)$, $(2, -3)$ மற்றும் $(-2, -8)$

   (v) $(4, 1)$, $(5, -2)$ மற்றும் $(6, -5)$

3. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் ஒரு இருசம பக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகள் எனக் காட்டுக.

   (i) $(-2, 0)$, $(4, 0)$ மற்றும் $(1, 3)$ (ii) $(1, -2)$, $(-5, 1)$ மற்றும் $(1, 4)$

   (iii) $(-1, -3)$, $(2, -1)$ மற்றும் $(-1, 1)$ (iv) $(1, 3)$, $(-3, -5)$ மற்றும் $(-3, 0)$

   (v) $(2, 3)$, $(5, 7)$ மற்றும் $(1, 4)$

4. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிகள் எனக் காட்டுக.

   (i) $(2, -3)$, $(-6, -7)$ மற்றும் $(-8, -3)$ (ii) $(-11, 13)$, $(-3, -1)$ மற்றும் $(4, 3)$

   (iii) $(0, 0)$, $(a, 0)$ மற்றும் $(0, b)$ (iv) $(10, 0)$, $(18, 0)$ மற்றும் $(10, 15)$

   (v) $(5, 9)$, $(5, 16)$ மற்றும் $(29, 9)$

5. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் ஒரு சம பக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகள் எனக் காட்டுக.

(i) $(0, 0), (10, 0)$ மற்றும் $(5, 5\sqrt{3})$ (ii) $(a, 0), (-a, 0)$ மற்றும் $(0, a\sqrt{3})$

(iii) $(2, 2), (-2, -2)$ மற்றும் $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ (iv) $(\sqrt{3}, 2), (0, 1)$ மற்றும் $(0, 3)$

(v) $(-\sqrt{3}, 1), (2\sqrt{3}, -2)$ மற்றும் $(2\sqrt{3}, 4)$

6. வரிசையில் அமைந்த கீழ்காணும் புள்ளிகள் ஒரு இணைகரத்தின் உச்சிகள் எனக் காட்டுக.

(i) $(-7, -5), (-4, 3), (5, 6)$ மற்றும் $(2, -2)$ (ii) $(9, 5), (6, 0), (-2, -3)$ மற்றும் $(1, 2)$

(iii) $(0, 0), (7, 3), (10, 6)$ மற்றும் $(3, 3)$ (iv) $(-2, 5), (7, 1), (-2, -4)$ மற்றும் $(7, 0)$

(v) $(3, -5), (-5, -4), (7, 10)$ மற்றும் $(15, 9)$

7. வரிசையில் அமைந்த கீழ்காணும் புள்ளிகள் ஒரு சாய் சதுரத்தின் உச்சிகள் எனக் காட்டுக.

(i) $(0, 0), (3, 4), (0, 8)$ மற்றும் $(-3, 4)$ (ii) $(-4, -7), (-1, 2), (8, 5)$ மற்றும் $(5, -4)$

(iii) $(1, 0), (5, 3), (2, 7)$ மற்றும் $(-2, 4)$ (iv) $(2, -3), (6, 5), (-2, 1)$ மற்றும் $(-6, -7)$

(v) $(15, 20), (-3, 12), (-11, -6)$ மற்றும் $(7, 2)$

8. வரிசையில் அமைந்த கீழ்காணும் புள்ளிகள் ஒரு சதுரத்தை அமைக்குமா எனக் காண்க.

(i) $(0, -1), (2, 1), (0, 3)$ மற்றும் $(-2, 1)$ (ii) $(5, 2), (1, 5), (-2, 1)$ மற்றும் $(2, -2)$

(iii) $(3, 2), (0, 5), (-3, 2)$ மற்றும் $(0, -1)$ (iv) $(12, 9), (20, -6), (5, -14)$ மற்றும் $(-3, 1)$

(v) $(-1, 2), (1, 0), (3, 2)$ மற்றும் $(1, 4)$

9. வரிசையில் அமைந்த கீழ்காணும் புள்ளிகள் ஒரு செவ்வகத்தை அமைக்குமா எனக் காண்க.

(i) $(8, 3), (0, -1), (-2, 3)$ மற்றும் $(6, 7)$ (ii) $(-1, 1), (0, 0), (3, 3)$ மற்றும் $(2, 4)$

(iii) $(-3, 0), (1, -2), (5, 6)$ மற்றும் $(1, 8)$

10. $(x, 7)$ மற்றும் $(1, 15)$ என்ற புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு 10 எனில், x-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

11. $(4, 1)$ என்ற புள்ளி, $(-10, 6)$ மற்றும் $(9, -13)$ என்ற புள்ளிகளிலிருந்து சமதூரத்தில் உள்ளது எனக் காட்டுக.

12. (x, y) என்ற புள்ளி, $(2, 3)$ மற்றும் $(-6, -5)$ என்ற புள்ளிகளிலிருந்து சமதூரத்தில் அமைந்தால், $x + y + 3 = 0$ எனக் காட்டுக.

13. $(2, -6)$ மற்றும் $(2, y)$ என்ற புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு 4 எனில், y-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

14. கீழ்க்காணும் புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணங்களின் சுற்றளவுகளைக் காண்க. (i) $(0, 8), (6, 0)$ மற்றும் ஆதிப்புள்ளி ; (ii) $(9, 3), (1, -3)$ மற்றும் ஆதிப்புள்ளி.

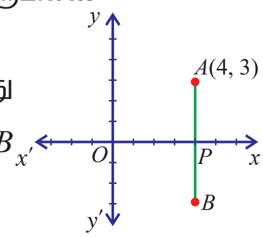
கணக்கு

15. $(-5, 2)$, $(9, -2)$ என்ற புள்ளிகளுக்கு சம தூரத்தில் உள்ள புள்ளி y-அச்சின் மீது அமைந்தால் அப்புள்ளியைக் காண்க. (குறிப்பு : y-அச்சின் மேல் உள்ள ஒரு புள்ளியின் x-அச்சுதூரம் பூச்சியம் ஆகும்)

16. $(-5, 6)$ என்ற புள்ளி வழி செல்லும் ஒரு வட்டத்தின் மையம் $(3, 2)$ எனில், அதன் ஆரத்தைக் காண்க.

17. ஆதிப்புள்ளியை மையமாகவும், ஆரம் 5 அலகுகள் ஆகவும் உள்ள ஒரு வட்டத்தின் மேல் $(0, -5)$ $(4, 3)$ மற்றும் $(-4, -3)$ என்ற புள்ளிகள் அமையும் என நிரூபிக்க.

18. படம் 5.20 இல், AB என்பது $A(4,3)$ என்ற புள்ளியில் இருந்து x-அச்சுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோடு மற்றும் $PA = PB$ எனில், B என்ற புள்ளியின் அச்சுத்தூரங்களைக் காண்க.



படம் 5.20

19. $A(2, 0)$, $B(5, -5)$, $C(8, 0)$ மற்றும் $D(5, 5)$ என்ற வரிசையில் எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரு சாய்சதுரத்தின் உச்சிப்புள்ளிகள் எனில், அதன் பரப்பளவைக் காண்க. (குறிப்பு : சாய்சதுரத்தின் பரப்பு $= \frac{1}{2}d_1 d_2$)

20. $(1, 5)$ $(5, 8)$ மற்றும் $(13, 14)$ என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்டு ஒரு முக்கோணம் வரைய முடியுமா காரணம் கூறவும்.

21. ஒரு வட்டத்தின் மையம் ஆதிப்புள்ளி மற்றும் ஆரம் 17 அலகுகள் எனில், அவ்வட்டத்தின் மேல் அமைந்த ஆனால் அச்சுகளின் மேல் அமையாத நான்கு புள்ளிகளைக் காண்க. (குறிப்பு : 8, 15, 17 என்பவை பிதாகரஸ் செங்கோண முக்கோண எண்களாகும்)

22. $(3, 1)$, $(2, 2)$ மற்றும் $(1, 1)$ என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட மையம் $(2, 1)$ எனக் காட்டுக.

23. $(1, 0)$, $(0, -1)$ மற்றும் $\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட மையம் ஆதிப்புள்ளி எனக் காட்டுக.

24. வரிசையில் அமைந்த $A(6, 1)$, $B(8, 2)$, $C(9, 4)$ மற்றும் $D(p, 3)$ என்ற புள்ளிகள் ஓர் இணைகரத்தின் உச்சிப்புள்ளிகளானால், தொலைவு சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி, p இன் மதிப்பைக் காண்க.

25. ஒரு வட்டத்தின் மையம் ஆதிப்புள்ளி மற்றும் ஆரம் 10 அலகுகள் என்க. இவ்வட்டம் கார்டீசியன் அச்சுக்களை வெட்டும் புள்ளிகளின் அச்சுத்தொலைவுகளைக் காண்க. மேலும் அவ்வாறான ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவைக் காண்க.

பயிற்சி 5.3

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடு

1. $(-2,7)$ என்ற புள்ளி அமையும் கால்பகுதி

   (A) I (B) II (C) III (D) IV

2. $(x,0)$, $x < 0$ என்ற புள்ளி எங்கு அமையும்

   (A) OX (B) OY (C) OX' (D) OY'

3. A(a,b) என்ற புள்ளி எம்மதிப்பிற்கு மூன்றாவது கால் பகுதியில் அமையும்

   A) $a > 0, b < 0$ (B) $a < 0, b < 0$ C) $a > 0, b > 0$ D) $a < 0, b > 0$

4. $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ மற்றும் $(0,-1)$ என்ற புள்ளிகளால் அமையும் சதுரத்தின் மூலைவிட்டம்

   A) 2 B) 4 C) $\sqrt{2}$ D) 8

5. $A(-5,0)$, $B(5,0)$ மற்றும் $C(0,6)$ என்ற புள்ளிகளால் அமையும் முக்கோணம்.

   A) இரு சமப்பக்க முக்கோணம் B) செங்கோண முக்கோணம்

   C) அசமபக்க முக்கோணம் D) சமப்பக்க முக்கோணம்

6. $(0,8)$ மற்றும் $(0,-2)$ ஆகிய புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு

   A) 6 B) 100 C) 36 D) 10

7. $(4,1)$, $(-2,1)$, $(7,1)$ மற்றும் $(10,1)$ என்ற புள்ளிகள்

   (A) x அச்சின் மேல் உள்ளது (B) x அச்சுக்கு இணையான கோட்டின் மேல் உள்ளது

   (C) y அச்சுக்கு இணையான கோட்டின் மேல் உள்ளது (D) y அச்சின் மேல் உள்ளது

8. (a, b) மற்றும் $(-a, -b)$ ஆகிய புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு

   (A) 2a (B) 2b (C) 2a + 2b (D) $2\sqrt{a^2 + b^2}$

9. $(-4, 0)$ மற்றும் $(4,0)$ என்ற புள்ளிகளுக்கு சமதொலைவில் உள்ள புள்ளி (p,q) எனில், p மற்றும் q க்கு இடையேயுள்ள தொடர்பு

   (A) p = 0 (B) q = 0 (C) p + q = 0 (D) p + q = 8

10. y-அச்சின் மீது அமைந்துள்ள புள்ளியின் y ஆயத்தொலைவு -5 எனில், அப்புள்ளி

    (A) $(0, -5)$ (B) $(-5, 0)$ (C) $(5, 0)$ (D) $(0, 5)$

நினைவில் கொள்க...

- ஒரு தளத்தில் ஒரு புள்ளியைக் குறிக்க ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளும் இரு கோடுகள் தேவை. செவ்வக அச்சுத்தூர முறையில் அவ்விரு கோடுகளில் ஒன்று கிடைக்கோடாகவும் மற்றொன்று குத்துக் கோடாகவும் இருக்கும்.
- இவ்விரண்டு கிடை மற்றும் குத்துக்கோடுகள் கார்டீசியன் தளத்தின் அச்சுகள் என்று அழைக்கப்படும். (x-அச்சு மற்றும் y-அச்சு)
- x-அச்சு மற்றும் y-அச்சு வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி $(0, 0)$ ஆதிப்புள்ளி ஆகும்.
- எந்த ஒரு புள்ளிக்கும் y-அச்சிற்கும் இடையிலான தொலைவு x-அச்சுத்தூரம் அல்லது x-தொலைவு என்றும், புள்ளிக்கும் x-அச்சிற்கும் இடையிலான தொலைவு y-அச்சுத்தூரம் அல்லது y-தொலைவு என்றும் அழைக்கப்படும்.
- x-அச்சின் மேல் உள்ள ஒரு புள்ளியின் y அச்சுத்தூரம் பூச்சியம் ஆகும்.
- y-அச்சின் மேல் உள்ள ஒரு புள்ளியின் x அச்சுத்தூரம் பூச்சியம் ஆகும்.
- ஒரு கிடைக்கோட்டின் மேல் உள்ள புள்ளிகளின் y அச்சுத்தூரங்கள் சமமாக இருக்கும்.
- ஒரு குத்துக்கோட்டின் மேல் உள்ள புள்ளிகளின் x அச்சுத்தூரங்கள் சமமாக இருக்கும்.
- x-அச்சின் மேல் உள்ள இரு புள்ளிகளின் x-அச்சுத்தூரங்கள் x_1 மற்றும் x_2 எனில், அவற்றிக்கு இடையிலான தொலைவு $|x_1 - x_2|$ ஆகும்.
- y-அச்சின் மேல் உள்ள இரு புள்ளிகளின் y-அச்சுத்தூரங்கள் y_1 மற்றும் y_2 எனில், அவைகளுக்கு இடையிலான தொலைவு $|y_1 - y_2|$ ஆகும்.
- (x_1, y_1) மற்றும் ஆதிப்புள்ளிக்கும் இடையிலான தொலைவு $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ ஆகும்.
- (x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளுக்கு இடையிலான தொலைவு $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ஆகும்.

செயல் 1

வரைபடத்தாளில் $(1, 1)$, $(3, 1)$ மற்றும் $(3, 4)$ ஆகிய புள்ளிகளைக் குறித்து அவற்றை இணைத்து முக்கோணத்தை உருவாக்கவும். அம்முக்கோணத்தின் பிம்பத்தை

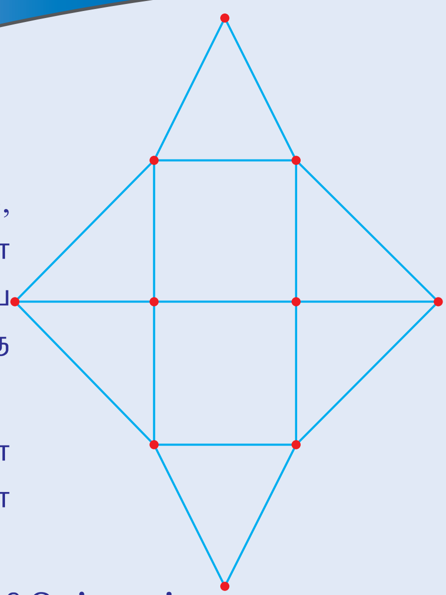
(i) x -அச்சை பொருத்து (ii) y -அச்சை பொருத்து வரைக.

அப்பிம்பங்களின் அச்சுதொலைவுகளில் ஏற்படும் மாற்றங்களை அட்டவணைப்படுத்து.

செயல் 2

$A(4, 5), B(4, 2)$ மற்றும் $C(-2, 2)$ ஆகிய புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறித்து அவற்றை இணைத்து முக்கோணத்தை உருவாக்கவும். மேலும் $D(1, 2)$ மற்றும் $E(1, 3.5)$ ஆகிவற்றைக் குறிக்கவும். AD மற்றும் BE ஐ இணைக்கும் போது $G(2, 3)$ என்ற புள்ளியில் வெட்டுகிறதா என ஆராய்க. இப்புள்ளி $G(2, 3)$ என்பது இம்முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் மற்றும் AD, BE என்பன நடுக்கோடுகளாகும். தொலைவு வாய்ப்பாட்டினைப் பயன்படுத்தி AG மற்றும் GD ன் நீளங்கள் AG:GD $= 2:1$ என்றவாறு இருக்கும்.

செயல் 3



(2, 0), (–2, 0), (–6, 0), (6, 0), (2, 4), (2,–4), (–2, 4), (–2, –4), (0, 8) மற்றும் (0, –8) ஆகிய புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறித்து அருகில் உள்ளவாறு கையை எடுக்காமல் அப்புள்ளிகளை ஒருமுறை கடந்து படத்தை உருவாக்க இயலுமா என முயற்சி செய்.

அப்படத்தில் எத்தனை முக்கோணங்கள், செங்கோண முக்கோணங்கள், சதுரங்கள் மற்றும் செவ்வகங்கள் உள்ளன எனக் காண்க.

இதுபோன்று வெவ்வேறு படங்களை வரைந்து முயற்சி செய்து பார்.

செயல் 4

பின்வரும் புள்ளிகளைக் கொடுக்கப்பட்ட வரிசையில் வரைபடத்தாளில் குறித்து இணைக்கவும்

(4, 4), (0, 0), (–3, 0), (–2, 2), (4, 4), (–3, 7), (–4, 11), (0, 10), (4, 4), (3, 9), (5, 11), (6, 9), (4,4), (8, 9), (11, 8), (10, 6), (4, 4), (12, 4), (14, 2), (11, 0), (4, 4), (8, –2), (7, –5), (4, –3), (4, 4), (–1, –11), (–4, –6), (–7, –5), (–6, –8), (–1, –11), (1, –16), (4, –11), (8, –10), (7, –13), (1, –16), (3, –21).

நீ காண்பது என்ன?

பயிற்சி 5.1

1. (i) தவறு (ii) சரி (iii) சரி (iv) தவறு (v) சரி (vi) தவறு (vii) சரி (viii) சரி
(ix) தவறு (x) சரி **2.** (i) I (ii) III (iii) x அச்சின் மீது (iv) III (v) y அச்சின் மீது
(vi) y அச்சின் மீது (vii) IV (viii) ஆதி (ix) I (x) II **3.**(i) –7 (ii) 3 (iii) 8 (iv) –5

4. (i) 5 (ii) 9 (iii) 8 (iv) –4 **5.** y அச்சுக்கு இணை **6.** x அச்சுக்கு இணை **7.** y அச்சு

8. $ABCD$ ஒரு சதுரம் **9.** (0,4) **11.** (4,3)

பயிற்சி 5.2

1. (i) $\sqrt{202}$ (ii) $4\sqrt{5}$ (iii) $\sqrt{29}$ (iv) $2\sqrt{2}$ (v) $5\sqrt{2}$ (vi) 1 (vii) 5
(viii) 15 (ix) 18 (x) $\sqrt{74}$ **10.** 7, –5 **13.** –10, –2 **14.** (i) 24 (ii) $10 + 4\sqrt{10}$

15. (0,–7) **16.** $4\sqrt{5}$ **18.** (4,–3) **19.** 30

20. வரைய இயலாது, நேர்கோட்டில் அமையும் புள்ளிகள்

21. (8,–15) (–8,–15) (–8,15)(8, 15) **24.**11, 7 **25.** 20

பயிற்சி 5.3

1. B **2.** C **3.** B **4.** A **5.** A **6.** D **7.** B **8.** D **9.** A **10.** A

6 செய்முறை வடிவியல்

முதன்மைக் குறிக்கோள்கள்

- சுற்றுவட்டம் வரைதல்
- குத்துக்கோட்டு மையம் வரைதல்

6.1 அறிமுகம்

புள்ளிகள், நேர்க்கோடுகள் மற்றும் பிற உருவங்களின் பண்புகளைப் பற்றி வடிவியலின் அடிப்படைக் கொள்கைகள் விவரிக்கின்றன. வடிவியலின் விதிகளைப் பயன்படுத்தி வடிவியல் உருவங்களை வரையும் முறையே செய்முறை வடிவியலாகும். வடிவியலில் "வரைதல்" என்பது உருவங்கள், கோணங்கள் அல்லது நேர்க்கோடுகளைத் துல்லியமாக வரைதலாகும். யூக்ளிடின் 'Elements' என்ற புத்தகத்தில் வடிவியலின் வரைபடங்களைப் பற்றித் தெளிவாகக் கூறப்பட்டுள்ளது. எனவே இவ்வரைபடங்கள் யூக்ளிடின் வரைபடங்கள் என அறியப்படுகின்றன. அடிக்கோல் மற்றும் காம்பஸைப் பயன்படுத்தி இவ்வரைபடங்கள் வரையப்படுகின்றன. காம்பஸ் சரிசம தூரத்தையும், அடிக்கோல் ஒன்றின் மீது ஒன்று அமைவதையும் உறுதிப்படுத்துகின்றன. அனைத்து வடிவியல் வரைபடங்களும் இவ்விரு கருத்துகளின் அடிப்படையில் அமைகின்றன.

இரண்டாம் பாடப்பகுதியில் அடிக்கோல் மற்றும் காம்பஸைப் பயன்படுத்தி விகிதமுறு எண்கள் மற்றும் விகிதமுறா எண்களைக் குறிக்க இயலும் என்பதை கற்றோம். 1913 இல் இந்திய கணிதமேதை இராமனுஜன் $355/113 = \pi$ ஐக் குறிக்க ஒரு வடிவியல் முறையை அளித்தார். தற்போது துல்லியமான அளவுகளைக் கொண்டு வரையும் திறன்களைப் பயன்படுத்தி நேர்க்கோடுகளால் மலைக்குள்ளே செல்லும் சுரங்கப்பாதைகளை வரையமுடியும் என்பது மிகச்சிறப்பான அம்சமாகும். ஒரு செவ்விய சதுரத்தின் ஒவ்வொரு முனையிலிருந்தும் ஒரு குறிப்பிட்ட கோணத்தில் நூற்றுக்கணக்கான அடி உயரத்தில் எழும்பும் நேர்க்கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் நிலைநிறுத்தப்படுகிறது. இவ்வாறு நான்கு முனைகளிலிருந்து எழும்பும் நேர்க்கோடுகள் மூலம் ஒரு பிரமிட் கட்டப்படுகிறது.

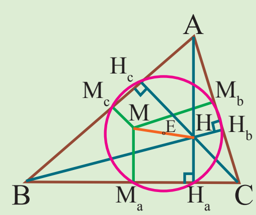
ஆய்லர்

1707 - 1783

18ஆம் நூற்றாண்டில் சுவிட்சர்லாந்து நாட்டு கணித அறிஞர் ஆய்லர் *(Euler)* வாழ்ந்தார். அவர் காலத்திற்கு முன்பும் பின்பும் அவரைப் போன்று யாரும் அறிவியல் ஆய்வுக்கட்டுரைகள் அதிகமாக எழுதியதில்லை. உலகைப் புரிந்து கொள்ள ஆய்லருக்குக் கணிதம் ஒரு கருவியாக இருந்தது. ஒவ்வொரு கண்டுபிடிப்பின் மூலமும் இயற்கையை புரிந்து கொள்வதில் ஓர் அடி நெருங்குவதாக அவர் உணர்ந்தார்.

வடிவியல் முற்றுப்பெற்ற துறை என எண்ணியபோது யூக்ளிடின் வடிவியலில் ஒரு புதிய தேற்றத்தை இவர் கண்டுபிடித்தார். ஆய்லரின் ஒன்பது புள்ளிகளடங்கிய வட்டத் தேற்றத்தைக் கீழே காண்போம்.

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று குத்துயரங்கள் H என்ற புள்ளியிலும் பக்கங்களின் செங்குத்து இருசம வெட்டிகள் M என்ற புள்ளியிலும் சந்திக்கின்றன எனில், HM என்ற நேர்க்கோட்டின் நடுப்புள்ளி E-ஐ மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் மீது அனைத்து குத்துயரங்களும், செங்குத்து இருசம வெட்டிகளும் அமைகின்றன.



கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவுகளுக்கு முக்கோணம் வரைவதைப் பற்றி நாம் எட்டாம் வகுப்பில் கற்றுள்ளோம்.

இப்பாடத்தில் நாம் சுற்றுவட்ட மையம் மற்றும் குத்துக்கோட்டு மையம் ஆகியவற்றை வரையும் முறைபற்றி கற்போம்.

முதலில் கீழ்க்கண்டவற்றை வரையும் முறை பற்றி நினைவு கூர்வோம்.

6.2 முக்கோணம் சார்ந்த சிறப்பு கோட்டுத் துண்டுகள்

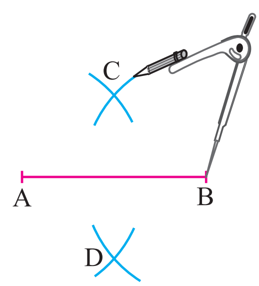
(i) கொடுக்கப்பட்ட கோட்டுத்துண்டிற்கு மையக்குத்துக்கோடு வரைதல்

(ii) கொடுக்கப்பட்ட கோட்டுத்துண்டிற்கு வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து செங்குத்துக்கோடு வரைதல்

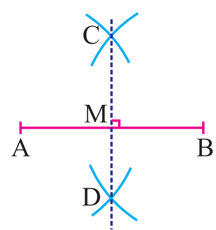
6.2.1 கொடுக்கப்பட்ட கோட்டுத்துண்டிற்கு மையக்குத்துக்கோடு (Perpendicular Bisector) வரைதல்

படி 1 : கோட்டுத்துண்டு AB வரைக.

படி 2 : கோட்டுத்துண்டின் நீளத்தின் பாதியளவிற்கு மேல் அளவெடுத்து, கோட்டுத்துண்டின் இறுதிப்புள்ளிகள் A மற்றும் B ஆகியவற்றை மையமாகக் கொண்டு மேலும் கீழும் வட்டவிற்களை ஒன்றையொன்று வெட்டும்படி வரைந்து, வெட்டும் புள்ளிகளுக்கு C, D எனப் பெயரிடுக.



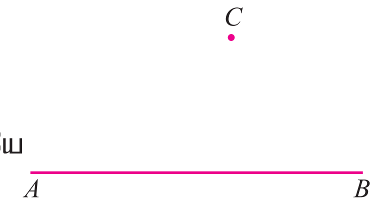
படி 3 : C மற்றும் D-ஐ இணைக்க AB-ன் மையக்குத்துக்கோடு கிடைக்கும்.



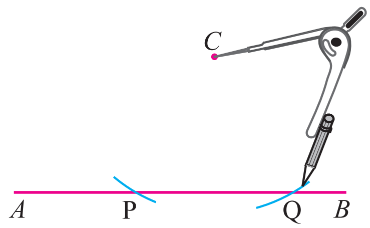
முக்கிய கருத்து	மையக்குத்துக்கோடு
ஒரு கோட்டுத்துண்டின் மையப்புள்ளி வழியாக வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு அதன் மையக்குத்துக்கோடு (*Perpendicular Bisector*) எனப்படும்.	

6.2.2 கொடுக்கப்பட்ட கோட்டுத்துண்டிற்கு வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து அக்கோட்டு துண்டிற்கு குத்துக்கோடு வரைதல்

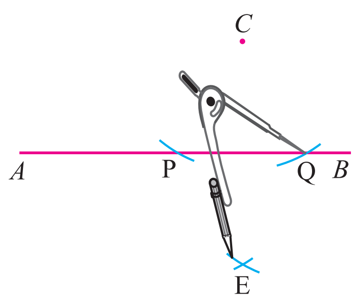
படி 1 : கோட்டுத்துண்டு AB வரைந்து அதற்கு வெளியே C என்ற புள்ளியை குறி.



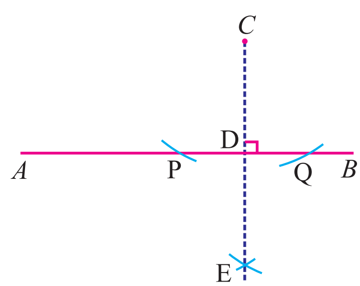
படி 2 : C ஐ மையமாக கொண்டு ஏதேனும் ஒரு அளவில் கோட்டுத்துண்டு AB இல் வெட்டுமாறு இரு வட்டவிற்கள் வரைந்து அவற்றிற்கு P மற்றும் Q எனப் பெயரிடு.



படி 3 : P மற்றும் Q ஆகிய புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரத்தில் பாதிக்கு மேல் அளவெடுத்து C என்ற புள்ளியின் எதிர்புறத்தில் P மற்றும் Q யிலிருந்து வட்டவில்களை வரைந்து வெட்டும் புள்ளிக்கு E எனப் பெயரிடு.

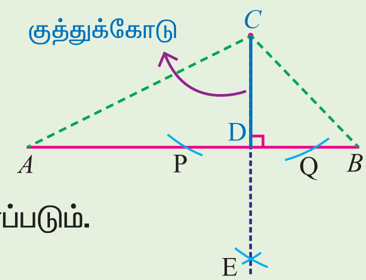


படி 4 : C மற்றும் E ஐ இணைக்கக் கிடைக்கும் கோடு தேவையான குத்துக்கோடு ஆகும்.



முக்கிய கருத்து **குத்துக்கோடு**

முக்கோணத்தின் ஒரு உச்சியிலிருந்து அதற்கு எதிரே உள்ள பக்கத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு குத்துக்கோடு *(Altitude)* எனப்படும்.



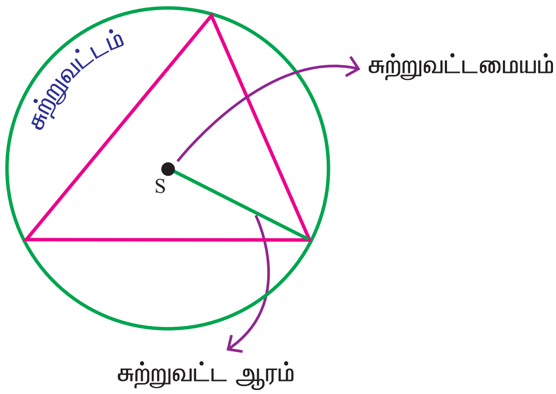
6.3 முக்கோணத்தில் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடுகள் (The Points of Concurrency of a triangle)

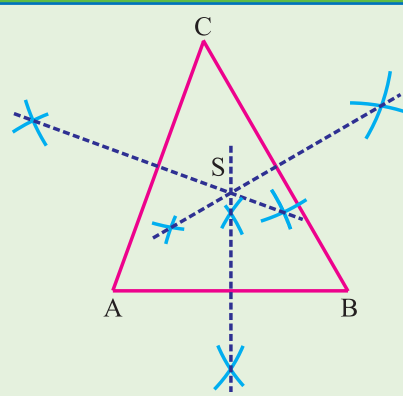
மையக்குத்துக்கோடு மற்றும் குத்துக்கோடு வரைவது பற்றி இதுவரை கற்றோம். இப்போது நாம் சுற்றுவட்ட மையம், குத்துக்கோட்டு மையம் போன்றவற்றைக் காணும் முறையைப் பற்றி அறிவோம்.

6.3.1 முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டமையம் வரைதல்

சுற்றுவட்டம் (*Circumcircle*)

முக்கோணத்தின் மூன்று உச்சிகளையும் தொட்டுச் செல்லுமாறு (உச்சிகளின் வழியே) வரையப்படும் வட்டம் சுற்றுவட்டம் எனப்படும்.



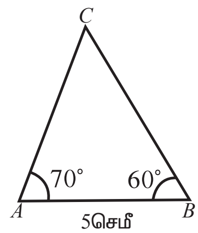
முக்கிய கருத்து	**சுற்றுவட்டமையம்**
முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் மையக்குத்துக் கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டமையம் (*Circumcentre*) எனப்படும். இதனை S என குறிப்போம்.	

சுற்றுவட்ட ஆரம் (*Circumradius*)

சுற்றுவட்ட மையம் S க்கும் முக்கோணத்தின் ஏதேனும் ஓர் உச்சிப்புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரம் சுற்றுவட்ட ஆரம் எனப்படும். அதாவது, சுற்றுவட்டத்தின் ஆரத்தை சுற்றுவட்ட ஆரம் என்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 6.1

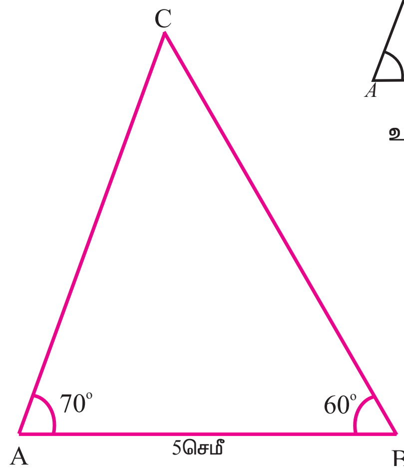
$AB = 5$ செமீ, $\angle A = 70^\circ$ மற்றும் $\angle B = 60^\circ$ அளவுள்ள ΔABC வரைக. அதன் சுற்று வட்டம் வரைந்து சுற்றுவட்ட ஆரம் காண்க.



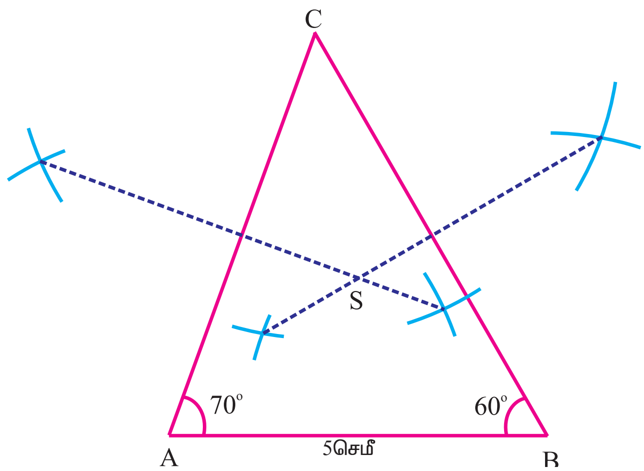
உதவிப் படம்

தீர்வு

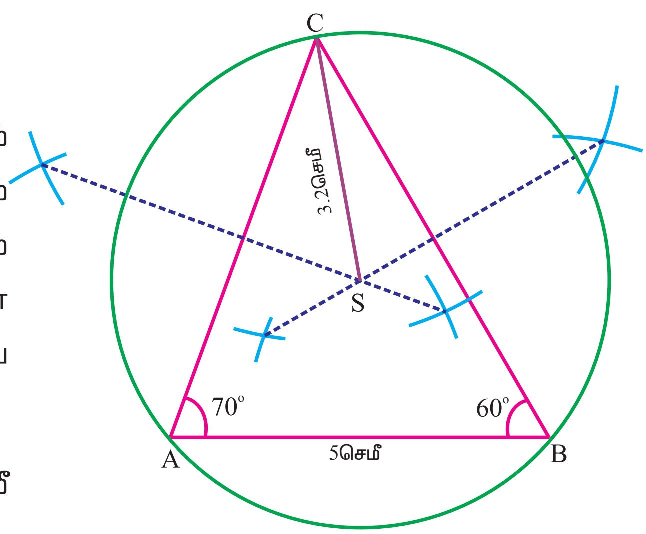
படி 1 : கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவிற்கு ΔABC வரைக.



படி 2 : ஏதேனும் இரண்டு பக்கங்களுக்கு (AC மற்றும் BC) மையக்குத்துக் கோடுகள் வரைக. அவை வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி S என்பது சுற்றுவட்டமையம் ஆகும்.



படி 3 : S-ஐ மையமாகவும் $SA = SB = SC$ ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு சுற்றுவட்டம் வரைந்தால் அது உச்சிகள் A, B மற்றும் C வழியே செல்லும்.



சுற்று வட்ட ஆரம் = 3. 2 செமீ

குறிப்புரை

1. குறுங்கோண முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையம் முக்கோணத்தின் உள்ளே அமையும்.
2. செங்கோண முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையம் கர்ணத்தின் மையப்புள்ளி ஆகும்.
3. விரிகோண முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையம் முக்கோணத்தின் வெளியே அமையும்.

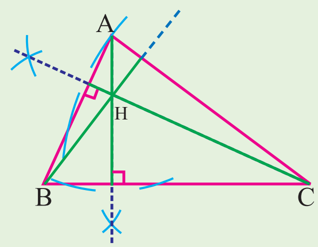
பயிற்சி 6.1

1. $PQ = 5$ செமீ, $\angle P = 100^\circ$ மற்றும் $PR = 5$ செமீ அளவுள்ள ΔPQR வரைந்து அதன் சுற்றுவட்டம் வரைக.
2. சுற்றுவட்டம் வரைக:
   (i) சமபக்க முக்கோணத்தின் பக்க அளவு 6 செமீ.
   (ii) இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணத்தின் சம பக்கங்களின் அளவு 5 செமீ.
3. $AB = 7$ செமீ, $BC = 8$ செமீ மற்றும் $\angle B = 60^\circ$ அளவுள்ள ΔABC வரைந்து சுற்றுவட்ட மையம் காண்க.
4. செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் 4.5 செமீ, 6 செமீ மற்றும் 7.5 செமீ ஆகும். அதன் சுற்றுவட்ட மையம் காண்க.

6.3.2 முக்கோணத்தின் குத்துக்கோட்டுமையம் வரைதல்

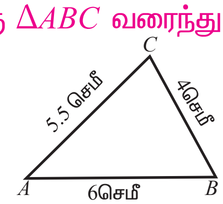
முக்கிய கருத்து — **குத்துக்கோட்டு மையம்**

முக்கோணத்தின்குத்துக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி குத்துக்கோட்டுமையம் அல்லது செங்கோட்டு மையம் (*Orthocentre*) எனப்படும். இதை H என்று குறிப்போம்.



எடுத்துக்காட்டு 6.2

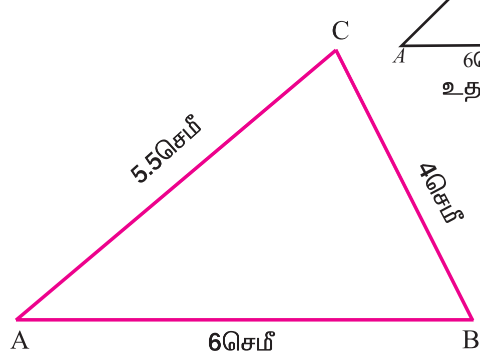
$AB = 6$ செமீ, $BC = 4$ செமீ மற்றும் $AC = 5.5$ செமீ ஆகிய அளவுகளுக்கு ΔABC வரைந்து குத்துக்கோட்டு மையம் வரைக.



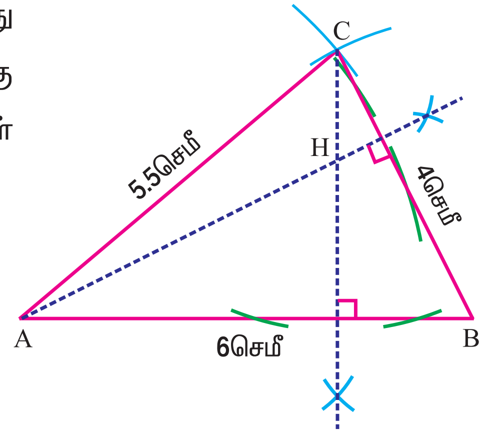
உதவிப் படம்

தீர்வு

படி 1 : கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவுகளுக்கு ΔABC வரைக



படி 2 : ஏதேனும் இரு புள்ளிகளிலிருந்து (A மற்றும் C) எதிரே உள்ள பக்கங்களுக்கு (முறையே BC மற்றும் AB) குத்துக்கோடுகள் வரைக.



இக்குத்துக்கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி H, ΔABC இன் குத்துக்கோட்டு மையம் ஆகும்.

குறிப்புரை

1. ஒரு முக்கோணத்திற்கு மூன்று குத்துக்கோடுகள் வரைய முடியும்.
2. குறுங்கோண முக்கோணத்தில் குத்துக்கோட்டு மையம் முக்கோணத்தின் உள்ளே அமையும்.
3. செங்கோண முக்கோணத்தில் குத்துக்கோட்டு மையம் செங்கோணத்தின் உச்சிப் புள்ளி.
4. விரிகோண முக்கோணத்தில் குத்துக்கோட்டு மையம் முக்கோணத்திற்கு வெளியே அமையும்.

பயிற்சி 6.2

1. $AB = 8$ செ.மீ, $BC = 7$ செ.மீ மற்றும் $AC = 5$ செ.மீ என்ற அளவுள்ள ΔABC வரைந்து, அதன் குத்துக்கோட்டு மையம் காண்க.
2. $LM = 7$ செ.மீ, $\angle M = 130^\circ$ மற்றும் $MN = 6$ செ.மீ என்ற அளவுள்ள ΔLMN வரைந்து, அதன் குத்துக்கோட்டு மையம் காண்க.
3. 6 செ.மீ பக்க அளவுள்ள சமபக்க முக்கோணம் வரைந்து, அதன் குத்துக்கோட்டு மையம் காண்க.
4. $PQ = 4.5$ செ.மீ, $QR = 6$ செ.மீ மற்றும் $\angle Q = 90^\circ$ என்ற அளவுள்ள ΔPQR வரைந்து, அதன் குத்துக்கோட்டு மையத்தைக் குறி.
5. இருசமபக்க முக்கோணம் ABC இல் சமபக்கங்களின் அளவு 6 செ.மீ, $AB = BC$ மற்றும் $\angle B = 80^\circ$ வரைந்து, அதன் குத்துக்கோட்டு மையத்தைக் குறி.

செயல் 1

நோக்கம் : காகித மடிப்பைப் பயன்படுத்தி ஒரு கோட்டுத்துண்டின் மையப்புள்ளியைக் காணுதல்.

செய்முறை: ஒரு காகிதத்தை மடித்து PQ என்ற கோட்டுத்துண்டை உருவாக்குவோம். P என்ற புள்ளி Q இன் மீது பொருந்துமாறு மீண்டும் காகிதத்தை மடிக்கும் போது இரண்டு கோட்டுத்துண்டுகளும் வெட்டும் புள்ளி, PQ இன் மையப்புள்ளி M ஆகும்

செயல் 2

நோக்கம் : காகித மடிப்பைப் பயன்படுத்தி ஒரு கோட்டுத்துண்டின் மையக்குத்துக் கோட்டைக் காணுதல்.

செய்முறை: ஒரு காகிதத்தை மடித்து PQ என்ற கோட்டுத்துண்டை உருவாக்குவோம். P என்ற புள்ளி Q இன் மீது பொருந்துமாறு மீண்டும் காகிதத்தை மடிக்கும் போது கிடைக்கும் கோட்டுத்துண்டு RS என்பது PQ இன் மையக்குத்துக்கோடு ஆகும்

செயல் 3

நோக்கம் : காகித மடிப்பைப் பயன்படுத்தி கோட்டுத்துண்டிற்கு வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து குத்துக்கோடு அமைத்தல்.

செய்முறை: ஒரு தாளில் AB என்ற கோட்டுத்துண்டை வரைந்து அதற்கு மேல் பகுதியில் P என்ற புள்ளியைக் குறிக்கவும். B என்ற புள்ளியை BA என்ற கோட்டித்துண்டின் வழியே நகர்த்தும் போது P என்ற புள்ளியைத் தொடும்போது தாளை மடிக்க கிடைக்கும் கோடு P என்ற புள்ளியிலிருந்து AB க்கு குத்துக்கோடு ஆகும்.

செயல் 4

நோக்கம் : காகித மடிப்பைப் பயன்படுத்தி ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையத்தைக் காணுதல்.

செய்முறை: ஒரு தாளில் முக்கோணத்தை வரைந்து கொள். பின்னர் செய்முறை 2ஐப் பயன்படுத்தி முக்கோணத்தின் ஏதேனும் இரண்டு பக்கங்களுக்கு மையக்குத்துக்கோட்டைக் காணவேண்டும். இந்த இரண்டு மையக்குத்துக் கோடுகளும் வெட்டும் புள்ளி அம்முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையம் ஆகும்

செயல் 5

நோக்கம் : காகித மடிப்பைப் பயன்படுத்தி ஒரு முக்கோணத்தின் குத்துக்கோட்டு மையத்தைக் காணுதல்.

செய்முறை: ஒரு தாளில் முக்கோணத்தை வரைந்து கொள். முக்கோணத்தின் ஏதேனும் இரண்டு முனைகளை அவற்றிற்கு எதிரே உள்ள பக்கத்திற்கு வெளியே உள்ள புள்ளிகளாகக் கொண்டு செய்முறை 3 ஐப் பயன்படுத்தி குத்துக்கோடுகள் வரையவும். அக்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி அம்முக்கோணத்தின் குத்துக்கோட்டு மையம் ஆகும்

'என்னால் முடியும், நான் செய்தேன்'

('I can, I did')

மாணவர் கற்றல் செயல்பாடுகள் பதிவேடு

பாடம் :

வ. எண்	நாள்	பாட எண்	பாடத் தலைப்பு	செயல்பாடுகள்	குறிப்புரை