

Dasar Teori Graf

Dr. Ahmad Sabri
Universitas Gunadarma
2016

Kuliah Matrikulasi Magister Teknik Elektro, 11 April 2016

Review konsep

- Definisi Graf
- Jenis-jenis graf: sederhana, berarah, multi, pseudo.
- Derajat simpul, derajat-masuk, derajat-keluar
- Beberapa kelas graf: garis (P_n), lengkap (K_n), siklis (C_n), roda (W_n), kubus- n (Q_n), bipartit ($B_{m,n}$), bipartit lengkap ($K_{m,n}$)

- Graf terhubung
- Subgraf
- Representasi graf secara aljabar: matriks insidensi, matriks adjasensi

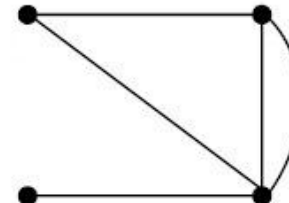
Isomorfisma Graf

Graf $G_1(V_1, E_1)$ dan $G_2(V_2, E_2)$ dikatakan *isomorfis* jika:

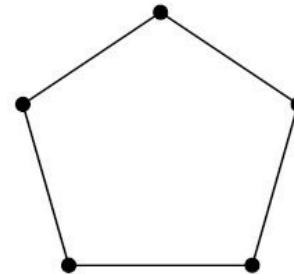
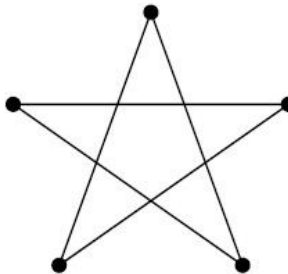
- Terdapat bijeksi $f : V_1 \rightarrow V_2$
- Untuk sebarang dua simpul a, b anggota V_1 , $f(a)$ berdampingan (*adjacent*) dengan $f(b)$ jika dan hanya jika a berdampingan dengan b .

- Periksa apakah pasangan graf berikut isomorfis

(1)



(2)



Graf terhubung

- Graf G dikatakan ***terhubung*** jika untuk sebarang dua simpul pada G selalu terdapat path yang menghubungkan keduanya.

Istilah terkait keterhubungan pada graf

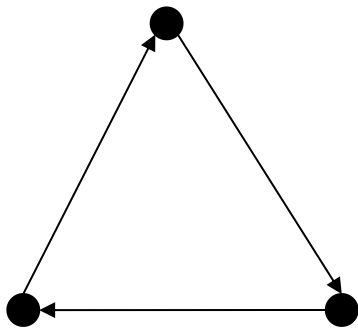
- **Perjalanan (*walk*)**: barisan simpul-ruas. Contoh: $v_1e_1v_2e_2\ldots v_ne_n$, di mana e_i menghubungkan simpul v_i dengan v_{i+1} .
- **Perjalanan terbuka [tertutup]**: walk yang dimulai dan diakhiri oleh simpul yang berbeda [sama].
- **Lintasan (*trail*)**: walk di mana semua ruasnya berbeda
- **Jalur (*path*)**: walk di mana semua simpulnya berbeda.
- **Sirkuit**: path yang diawali dan diakhiri oleh simpul yang sama
- Jika pada path terdapat n ruas, maka disebut juga path dengan panjang n .
- Path sederhana: jika $n = 1$.

Keterhubungan pada graf berarah

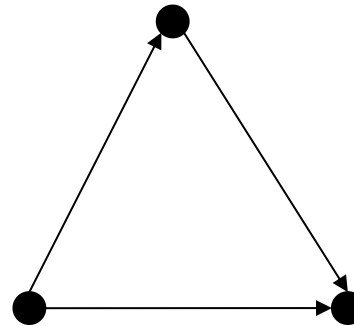
Graf berarah dikatakan:

- **Terhubung kuat (*strongly connected*)**
jika terdapat path antara sebarang dua simpul a dan b.
- **Terhubung lemah (*weakly connected*)**
jika terdapat path antara sebarang dua simpul a dan b, *jika graf dijadikan tak berarah.*

- Manakah di antara graf berikut yang terhubung kuat dan terhubung lemah?

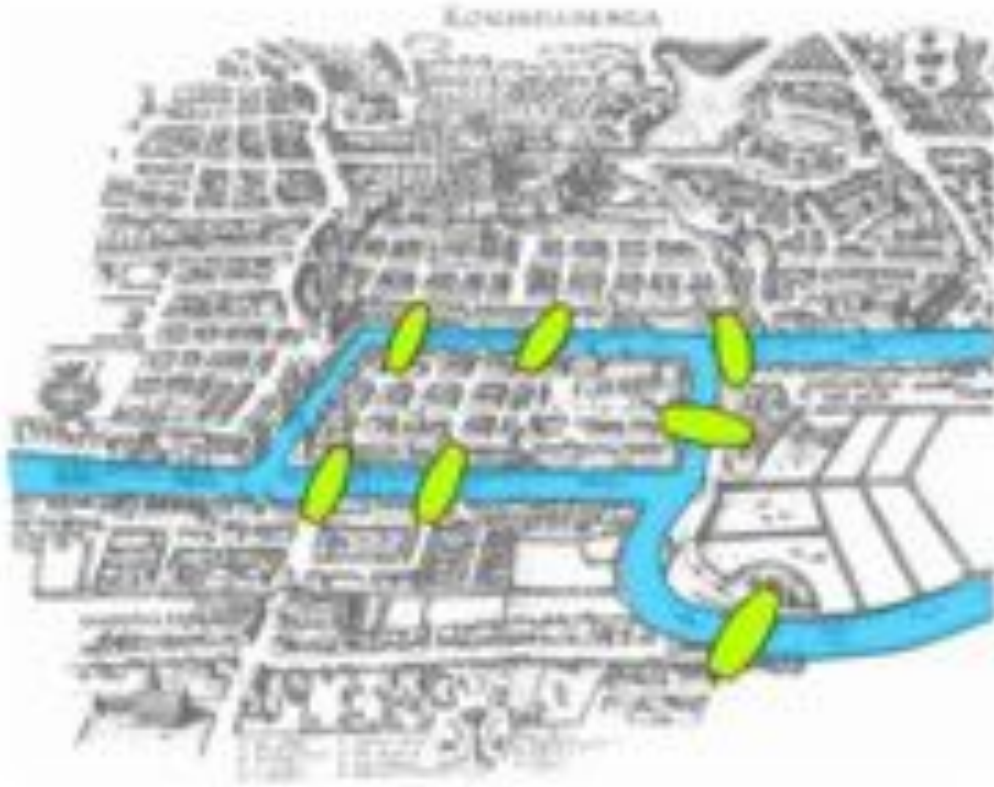


G_1



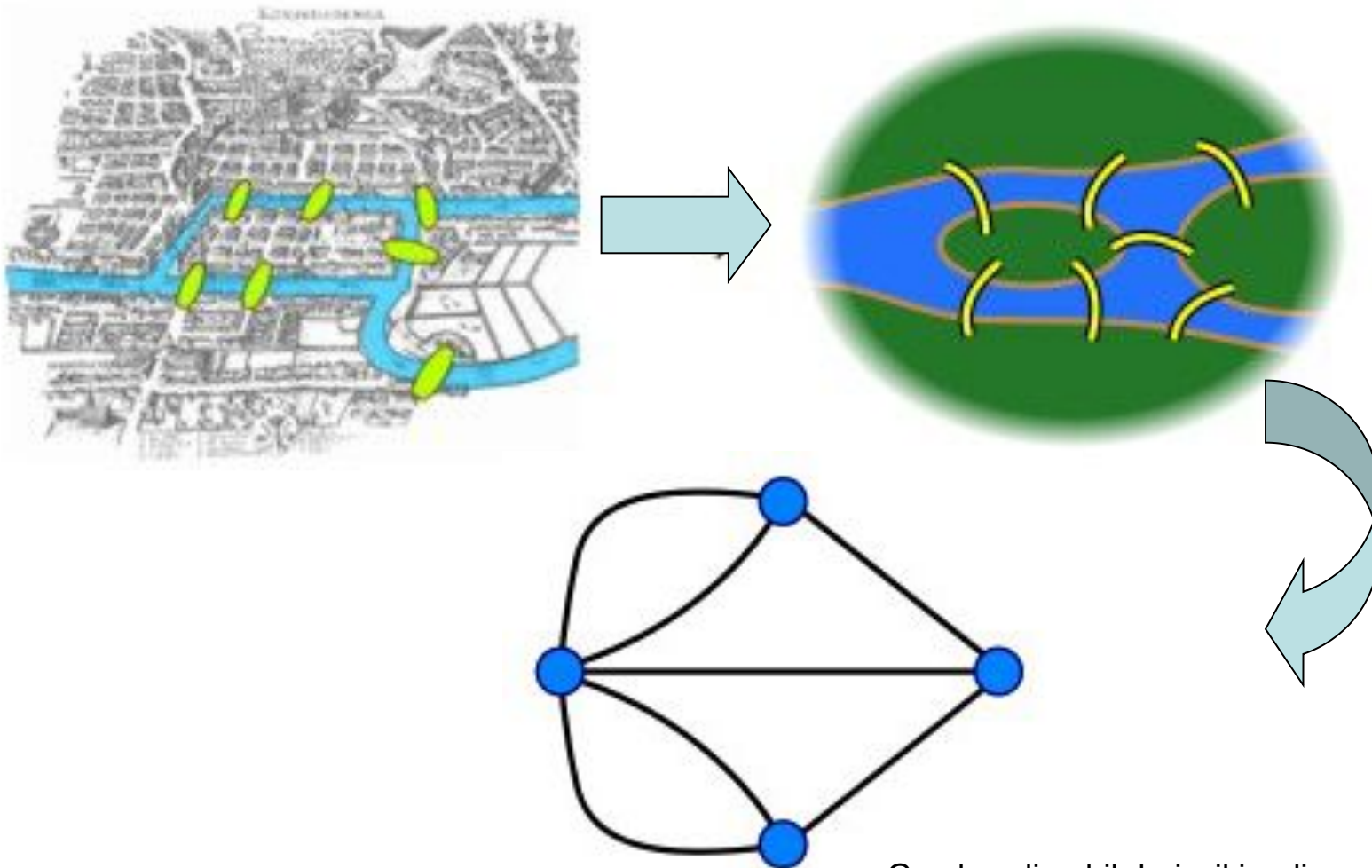
G_2

Problem 7 Jembatan di Konigsberg



Adakah lintasan
yang melewati
ketujuh
jembatan
tersebut **tepat
satu kali dalam
satu kali
perjalanan?**

Problem 7 Jembatan di Konigsberg



Gambar diambil dari wikipedia.org

- **Lintasan Euler**: lintasan yang melewati *semua* ruas pada graf tepat satu kali.
- **Sirkuit Euler**: lintasan Euler yang diawali dan diakhiri pada simpul yang sama.
- Pikirkan manakah yang benar:
 - Lintasan euler \rightarrow sirkuit euler; atau
 - Sirkuit euler \rightarrow lintasan euler ???

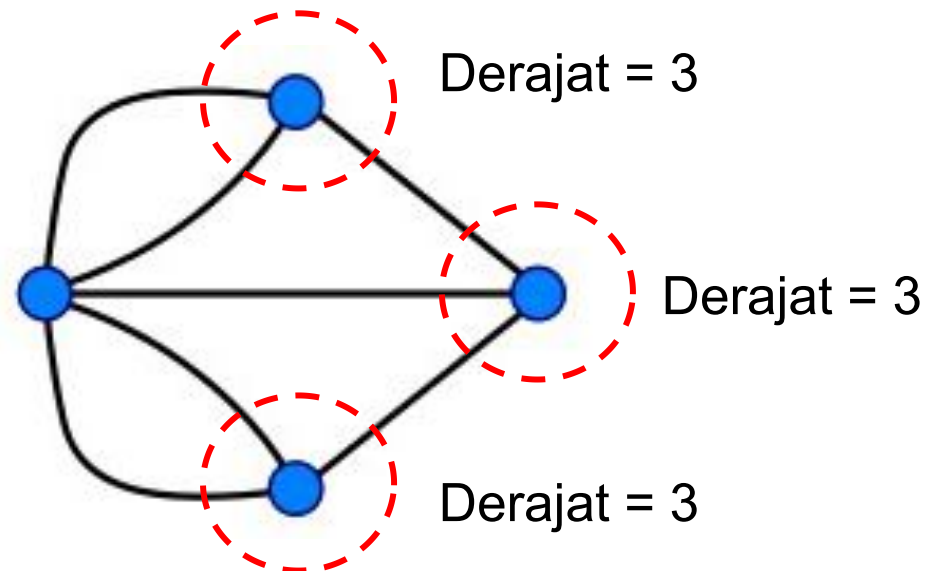
Euler membuktikan bahwa terdapat lintasan Euler pada graf jika banyaknya simpul berderajat ganjil adalah **dua** atau **tidak ada sama sekali**.

(Mengapa demikian...?)

Pertanyaan lanjutan:

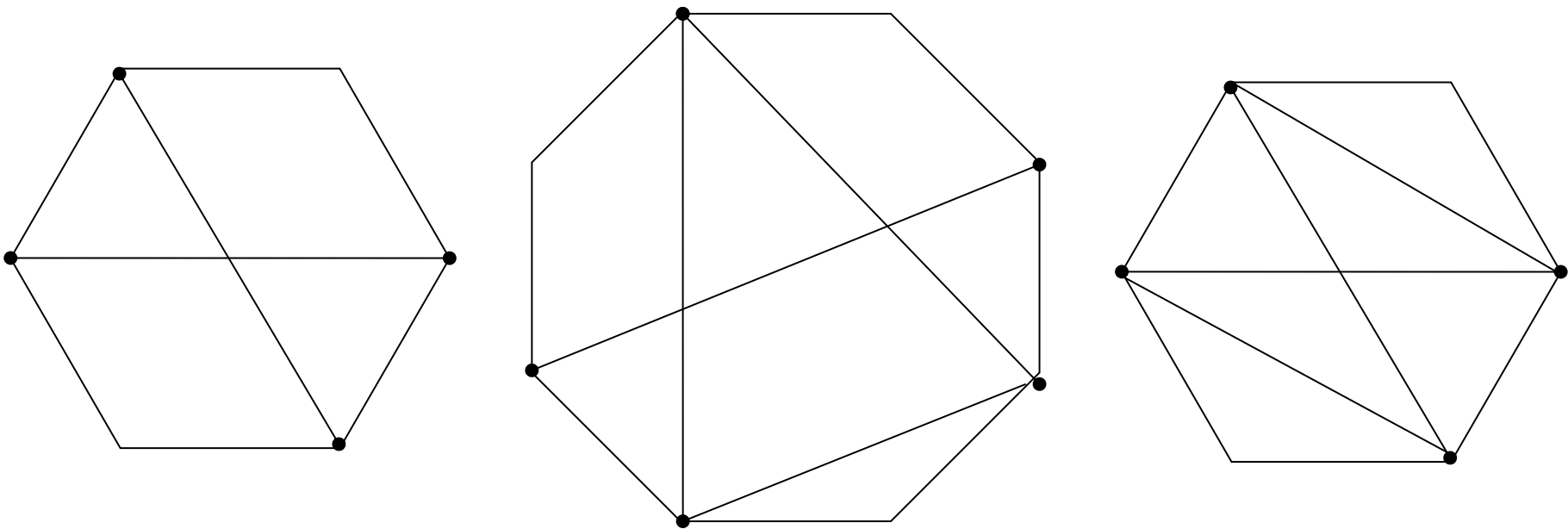
Temukanlah perbedaan antara lintasan Euler pada graf ***dengan dua simpul berderajat ganjil***, dengan lintasan Euler pada ***graf tanpa simpul berderajat ganjil***.

- Jadi.... adakah lintasan Euler pada problem 7 jembatan Konigsberg?



Graf Eulerian

- **Graf Eulerian**: graf yang memiliki **sirkuit Euler**
- Manakah graf berikut ini yang Eulerian?



Teorema Euler

Bentuklah Teorema Euler dengan memilih kalimat yang tepat pada setiap kolom

1. Sebuah graf terhubung G :

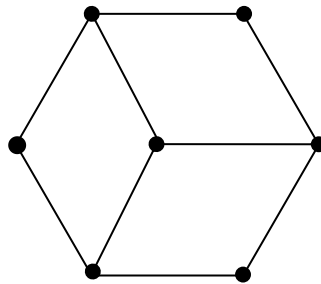
• Adalah Eulerian jika dan hanya jika	• Memiliki • Tidak memiliki	• simpul	• Berderajat dua • Berderajat ganjil
--	--------------------------------	----------	---

2. Sebuah graf terhubung G :

• Memiliki lintasan Euler jika dan hanya jika	• Memiliki • Tidak memiliki	• Tepat dua simpul	• Berderajat dua • Berderajat ganjil
--	--------------------------------	--------------------------	---

Pertanyaan latihan

1. Diberikan graf G berikut. Berapa ruas yang perlu ditambah agar graf G Eulerian?

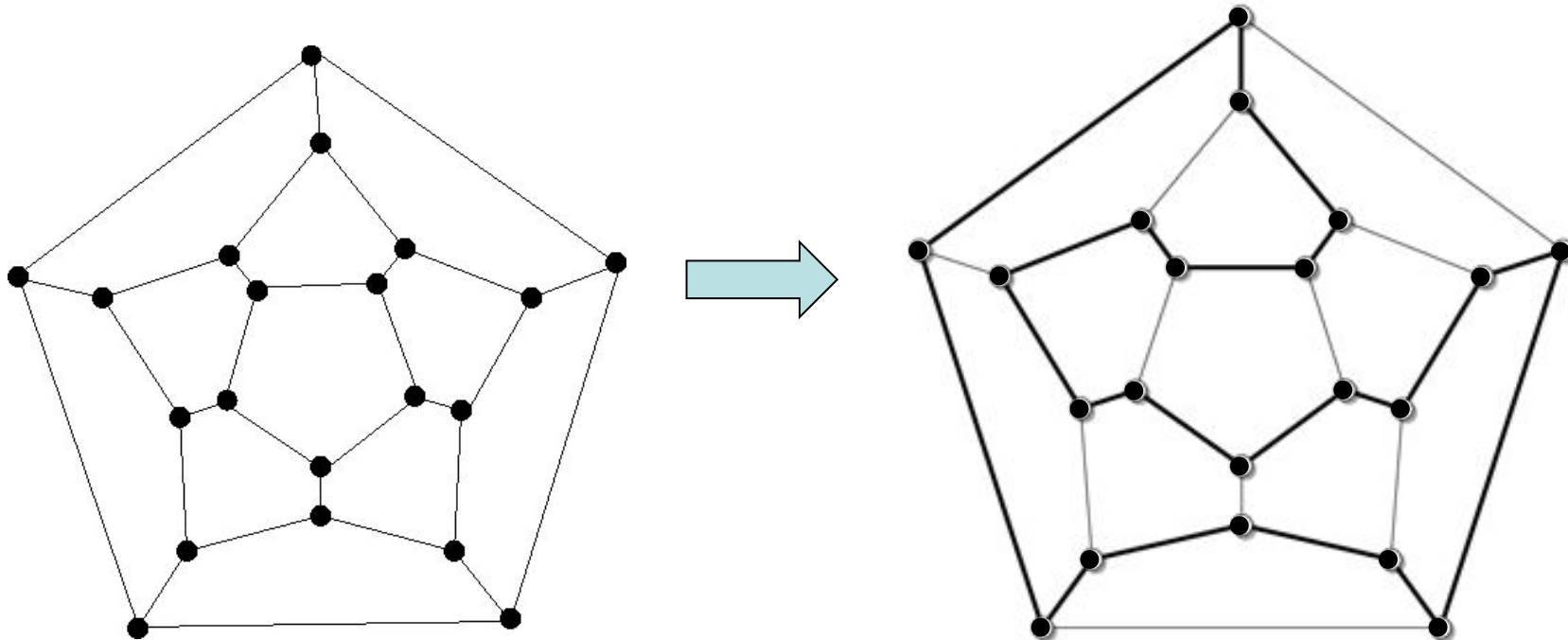


2. Tentukan n sehingga graf lengkap K_n , $n \geq 2$, adalah Eulerian
3. (Benar/Salah) Jika dua simpul terhubung oleh sebuah walk, maka kedua simpul tersebut terhubung oleh sebuah path.

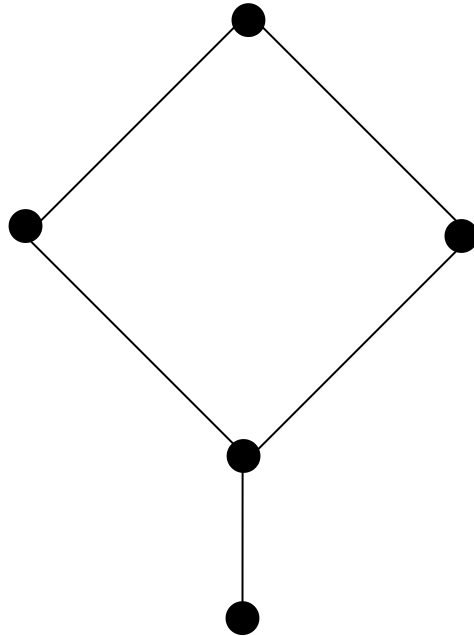
Graf Hamiltonian

- **Hamiltonian path**: path yang melalui semua simpul tepat satu kali
- **Hamiltonian cycle**: Hamiltonian path dengan pengecualian: diawali dan diakhiri oleh simpul yang sama
- **Graf Hamiltonian**: graf yang memuat Hamiltonian cycle

- Apakah graf dodekahedron adalah Hamiltonian?



- Hamiltonian cycle atau hamiltonian path?



- Apakah Graf Eulerian selalu Hamiltonian?
- Berikan contohnya

Teorema tentang graf Hamiltonian

Teorema Dirac

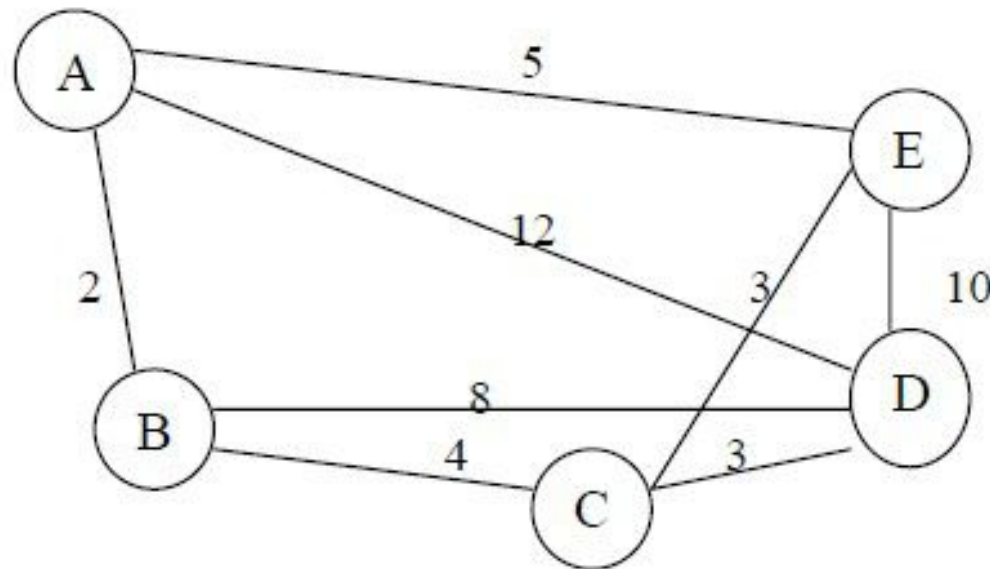
1. Sebuah graf sederhana dengan $n \geq 3$ simpul adalah Hamiltonian jika setiap simpulnya berderajat $n/2$ atau lebih.

Teorema Ore

2. Diberikan G graf sederhana. Jika untuk sebarang dua simpul tak-berdampingan u dan v pada G berlaku $\deg(u) + \deg(v) \geq n$, maka G adalah Hamiltonian

Traveling salesman problem

- Seorang salesman yang berdomisili di kota A akan mengunjungi kota B,C,D,E, dan kembali ke kota A. Diagram jarak antar kota diberikan sebagai berikut. Tentukan rute perjalanan yang harus ditempuh agar total jarak tempuh minimal!



Latihan

- Tulis semua biner dengan panjang 3
- Buat sebuah graf, di mana setiap simpul berlabel sebuah biner dengan panjang 3, dan ruas-ruas menghubungkan pasangan simpul dengan label biner berbeda hanya pada 1 digit.
- Graf apakah yang terbentuk?
- Temukan Hamiltonian cycle pada graf tersebut