ALJABAR LINIER

DR. RETNO KUSUMANINGRUM, S.SI., M.KOM.

Matriks
~ Determinan ~

Untuk setiap matriks persegi **A** dengan elemen-elemen bilangan real, terdapat tepat **satu nilai** yang berhubungan dengan matriks tersebut. Satu nilai real ini disebut ***determinan***.

Determinan dari matriks A ditulis **det(A)** atau **|A|.**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Det(A)} = -7.$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow |B| = 25$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Det(C)} = 0$$

Bagaimana menghitung nilai determinan ?

CARA MENGHITUNG DETERMINAN

1. Definisi Determinan
2. Sifat-sifat Determinan
3. Ekspansi Minor dan Kofaktor (Laplace)
4. Kombinasi 2 dan 3

MENGGUNAKAN DEFINISI DETERMINAN

MELALUI DEFINISI DETERMINAN

Determinan : produk (hasil kali) bertanda dari unsur-unsur matriks sedemikian hingga berasal dari **baris dan kolom yang berbeda**, kemudian hasilnya dijumlahkan.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Det}(A) = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

$-$ $\quad$ $+$

Bagaimana menentukan tanda + dan – tiap suku ?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow Det(A) = |A| = 3.6 - 7.8 = 18 - 56 = -38$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Det}(A) = ?$$

Jumlah dari 4! = 24 suku, dengan tiap suku terdiri dari empat faktor.

Catatan : Khusus determinan matrik berdimensi 3, bisa pakai aturan SARRUS

$$\text{Det}(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

$$= a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$$

Tentukan determinan dari matriks berikut ini menggunakan metode Sarrus!

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} - & - & - & + & + & + \end{matrix}$$

$$= (4.2.1 + 5.7.5 + 6.3.4) - (6.2.5 + 4.7.4 + 5.3.1)$$

$$= (8 + 175 + 72) - (60 + 112 + 15)$$

$$= 255 - 187 = 68$$

MENGGUNAKAN SIFAT-SIFAT DETERMINAN

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 26$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Dengan bantuan **sifat determinan**, membantu memudahkan menghitung nilai determinan.

SIFAT-SIFAT DETERMINAN

1. Determinan dari matriks dan transposenya adalah sama; $|A^T| = |A|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 26 \longrightarrow |A^T| = \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 26$$

2. Matriks persegi yang mempunyai baris (kolom) nol, determinannya nol (0).

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 0 \qquad \det(C) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ 7 & -8 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3. Determinan dari suatu matriks persegi A yang salah satu baris (kolom) dikalikan dengan skalar *k*, maka determinannya berubah menjadi $k\,|A|$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$

Jika baris kedua dikalikan dengan 7

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -21 & 28 \end{vmatrix} = 35 = 7\,|A|$

$|A| = 5$

Akibat sifat ini : $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -21 & 28 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 7\,(5) = 35$

$$\begin{vmatrix} 9 & 6 & 12 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 8 & -1 \\ 1 & -12 & 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

4. Determinan suatu matriks yang salah satu baris (kolom) nya ditukar dengan baris (kolom) yang lain, maka nilai determinan matriks tersebut berubah menjadi negatip determinan semula.

$$\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 31$$ Baris pertama ditukar baris kedua $$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -31$$

5. Determinan dari suatu matriks persegi yang mempunyai dua baris (kolom) yang sama adalah sama dengan 0 (nol).

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

6. Determinan dari suatu matriks persegi yang salah satu barisnya (kolomnya) merupakan kelipatan dari baris (kolom) yang lain adalah sama dengan 0 (nol).

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & 2 & -2 \\ 1 & -6 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$ Karena kolom ke dua kelipatan kolom ke empat, |B| = 0

7. Determinan dari matriks persegi A = (a_{ij}) berdimensi *n* yang baris ke –i (kolom ke-j) terdiri dari elemen-elemen yang dapat diuraikan menjadi dua suku ,maka determinannya sama dengan determinan A yang baris ke-i (kolom ke-j) diganti dengan suku yang pertama *ditambah* determinan A yang baris ke-i (kolom ke-j) diganti dengan suku yang kedua.

$$\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 5+3 & 4+1 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{vmatrix} 5+3 & 5 \\ 5+4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

8. Determinan suatu matriks persegi tidak berubah nilainya jika salah satu baris (kolom) ditambah dengan kelipatan baris (kolom) yang lain.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 11$$

Sifat ke 8 ini sering dipakai untuk menyederhanakan baris (kolom), sebelum menghitung nilai determinan

Jika k2 + 3k1 $$\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 11$$

Jika b1 – b2 $$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 11$$

9. Determinan dari matriks segitiga adalah sama dengan produk (hasil kali) elemen-elemen diagonalnya.

$$\begin{vmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (3)(-1)(5) = -15$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-3)(-2)(4)(1) = 24$$

Strategi :

Terapkan Operasi Baris Elementer (OBE) untuk mendapatkan Bentuk Echelon (Echelon Form), kemudian gunakan sifat determinan nomer 9

Tentukan determinan dari matriks berikut ini menggunakan sifat determinan dan transformasi elementer!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{H_{31(-2)}}{\overset{H_{21(3)}}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \overset{H_{32(3)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Det(A) = 1.(-1).3 = -3$$

EKSPANSI MINOR DAN KOFAKTOR (LAPLACE)

Submatriks / matriks bagian :

Matriks yang diperoleh dengan menghilangkan beberapa baris dan/atau beberapa kolom dari suatu matriks

A = $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 8 & -5 \end{pmatrix}$

Menghilangkan baris pertama diperoleh submatriiks : $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 8 & -5 \end{pmatrix}$

Menghilangkan baris kedua dan kolom ketiga diperoleh submatriks : $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}$

dan sebagainya.

Minor dan Kofaktor

Andaikan **A** berdimensi *n*, **determinan** dari submatriks yg berdimensi (*n*-1) disebut **minor**.

M_{rs} : minor dari submatriks dng menghilangkan baris ke *r* kolom ke *s*.

$$\text{Andaikan } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32}$$

Untuk matriks A berdimensi 3 tersebut ada berapa minor ?

Matriks tersebut mempunyai 9 minor

Kofaktor

Kofaktor yang berhubungan dengan minor M_{rs} adalah $A_{rs} = (-1)^{r+s} M_{rs}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\ (7) = 7$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\ (9) = -9$$

$$A_{13} = (-1)^4 M_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{21} = (-1)^3 M_{21} = - M_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$A_{22} = M_{22} = 0$

$A_{23} = - M_{23} = 0$

$A_{31} = M_{31} = 7$

$A_{32} = - M_{32} = - 9$

$A_{33} = M_{33} = 5$

Menghitung determinan dengan ekspansi kofaktor :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ekspansi melalui baris pertama :

$$\text{Det}(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Atau ekspansi melalui baris ketiga :

$$\text{Det}(A) = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$

Atau ekspansi melalui kolom ke dua :

$$\text{Det}(A) = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

Dan sebagainya.

Dengan ekspansi kofaktor, hitung determinan :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Andaikan dilakukan ekspansi melalui baris kedua :

$Det(B) = b_{21}\, B_{21} + b_{22}\, B_{22} + b_{23}\, B_{23}$

$Det(B) = (3)(9) + (1)(3) + (-1)\,(-3)$

$Det(B) = 33$

$$B_{21} = -\,M_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 9$$

$B_{22} = M_{22} = 3$

$B_{23} = -\,M_{23} = -\,3$

Atau jika dikerjakan dengan ekspansi melalui kolom ketiga :

$Det(B) = b_{13}\, B_{13} + b_{23}\, B_{23} + b_{33}\, B_{33}$

$Det(B) = (1)(2) + (-1)(-3) + (4)(7)$

$Det(B) = 33$

$B_{13} = M_{13} = 2$

$B_{23} = -\,M_{23} = -\,3$

$B_{33} = M_{33} = 7$

KOMBINASI SIFAT DETERMINAN DAN LAPLACE

Strategi menghitung determinan :

1. Gunakan kombinasi beberapa metode (definisi, sifat, ekspansi kofaktor).

2. Pilih ekspansi melalui baris atau kolom yang paling sederhana.

3. Gunakan sifat ke 8 untuk membuat unsur-unsur pada baris/kolom yang dipilih sebanyak mungkin menjadi nol.

Hitung determinan dari : E = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

Dikerjakan dengan ekspansi melalui baris ke dua dengan menerapkan serangkaian OKE

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix} \underset{K_{31(-1)}}{\overset{K_{21(1)}}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & -7 \end{bmatrix}$$

$|E| = e_{21}\, E_{21} + e_{22}\, E_{22} + e_{23}\, E_{23}$

$|E| = e_{21}\, E_{21} + 0 + 0$ dimana $E_{21} = -\, M_{21} = -\, \{(3)(-7) - (-5)(9)\} = -\, 24$

$|E| = (1)\,(-24) = -\, 24$

Berapakah determinan dari F = $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Dipilih ekspansi melalui kolom pertama dengan menerapkan OBE untuk membuat elemen f_{31} bernilai 0

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{H_{31(1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Det(F) = f_{11}F_{11}$$

dimana $F_{11} = (-1)^{(1+1)}\Big(4.4 - \big((-5).(-2)\big)\Big) = 1.(16 - 10) = 6$

maka $Det(F) = 1.6 = 6$

Tentukan nilai determinan dari matriks G = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Dipilih ekspansi melalui kolom ke tiga dengan menerapkan serangkaian OBE:

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underset{H_{31(1)}}{\overset{H_{21(1)}}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 7 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Det(G) = g_{13}G_{13} + g_{23}G_{23} + g_{33}G_{33} + g_{43}G_{43}$$

Karena $g_{23} = g_{33} = g_{43} = 0$ maka $Det(G) = g_{13}G_{13} = (-1)G_{13}$

$$G_{13} = (-1)^{1+3}.M_{13}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 3 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \overset{H_{32(-1)}}{\sim} \begin{vmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 3.\left((-1)^{(2+1)}.\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 3.\big((-1).(-20+35)\big) = 3.(-15) = -45$$

Sehingga $Det(G) = (-1)G_{13} = (-1)(-45) = 45$

Matriks kofaktor :

Matriks yang anggota-anggotanya berupa kofaktor suatu matriks.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$C_{11} = M_{11} = -5$

$C_{12} = -M_{12} = -4$

$C_{21} = -M_{21} = -2$

$C_{22} = M_{22} = 3$

Jadi matriks kofaktor dari A adalah : $K = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Matriks adjoint :

Transpose dari matriks kofaktor.

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$