

# DIKTAT KALKULUS 1

**Penyusun:**

Drs. Warsoma Djohan M.Si.

Dr. Wono Setya Budhi



**Departemen Matematika, Fakultas MIPA  
Institut Teknologi Bandung  
Agustus 2007**

## Pengantar

Kalkulus merupakan matakuliah wajib tingkat pertama bagi hampir semua departemen/jurusan di Institut Teknologi Bandung (kecuali Departemen Desain dan Seni Murni). Berdasarkan kebutuhan yang berbeda pada berbagai departemen yang ada ITB, sejak tahun ajaran 2004 pelaksanaannya dibagi dua yaitu perkuliahan **Kalkulus Elmenter** dan **Kalkulus**. Diktat ini ditulis untuk digunakan pada perkuliahan Kalkulus, meskipun tidak menutup kemungkinan untuk dipakai pada perkuliahan Kalkulus Elementer, dengan membuang beberapa topik yang tidak diperlukan.

Dari segi konsep, isi perkuliahan kalkulus dapat dikatakan sudah baku, artinya tidak banyak mengalami perubahan untuk jangka waktu yang cukup panjang. Bagian yang secara berkala perlu direvisi adalah teknik penyajiannya. Selain itu soal-soal yang disajikan mulai banyak diaktualkan dengan situasi saat ini, melalui pemecahan problem-problem real sederhana yang dijumpai sehari-hari.

Penyusunan diktat ini bertujuan untuk mengefektifkan proses pembelajaran. Pada proses pembelajaran konvensional, biasanya dosen menjelaskan perkuliahan sambil mencatat di papan tulis. Mahasiswa umumnya menyalin catatan tersebut sambil menyimak penjelasan dosen. Proses pembelajaran lebih banyak mendengarkan ceramah dari dosen. Peran serta mahasiswa sebagai pembelajar sangat terbatas. Melalui diktat ini diharapkan proses pembelajaran dapat lebih diefektifkan. Fungsi dari diktat ini, bagi dosen untuk dipakai menjelaskan materi kuliah, sedangkan bagi mahasiswa sebagai pengganti catatan kuliah. Dengan demikian waktu pembelajaran di kelas dapat digunakan secara lebih efektif untuk ceramah dan diskusi. Perlu diperhatikan bahwa pada diktat ini soal-soal yang disajikan umumnya tidak disertai solusi. Hal ini memang disengaja karena pembelajaran akan lebih efektif bila solusinya dibicarakan bersama-sama mahasiswa di kelas.

Idealnya ada dua materi yang disediakan, yaitu buku teks yang rinci dan beningan (*transparancies*) untuk ceramah. Mengingat sempitnya waktu yang ada, untuk saat ini penulis baru dapat menyediakan beningan saja, tetapi ditulis dengan cukup rinci. Penulis 1 (Warsoma Djohan) mulai merancang diktat ini pada awal Juli tahun 2004. Penyusunan didasarkan pada buku teks yang digunakan yaitu: *Kalkulus dan Geometri Analitis, edisi 5, jilid 1, E.J. Purcell & D. Varberg*. Pada tahun ajaran 2005, isi diktat direvisi bersama-sama dengan penulis 2 (Wono Setya Budhi). Semoga diktat ini dapat berguna untuk meningkatkan kualitas pembelajaran Kalkulus.

Penyusun,

Warsoma Djohan & Wono Setya Budhi

## Daftar Isi

<b>BAB 1 Sistem Bilangan, Pertaksamaan dan Koordinat Kartesius</b>	<b>4</b>
<b>BAB 2 Fungsi dan Limit</b>	<b>14</b>
<b>BAB 3 Turunan</b>	<b>32</b>
<b>BAB 4 Penggunaan Turunan</b>	<b>42</b>
<b>BAB 5 Integral</b>	<b>57</b>
<b>BAB 6 Penggunaan Integral</b>	<b>78</b>
<b>BAB 7 Fungsi-Fungsi Transenden</b>	<b>92</b>

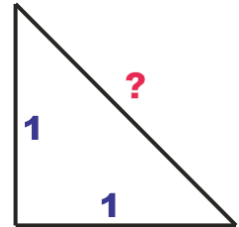
## Sistem Bilangan / Himpunan Bilangan

Himpunan Bilangan Asli:  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Himpunan Bilangan Bulat:  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Himpunan Bilangan Rasional:  $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$

Perhatikan gambar segitiga di samping. Panjang sisi miringnya adalah  $\sqrt{2}$ . Apakah bilangan tersebut merupakan bilangan rasional ([periksa!](#)).



Gabungan himpunan bilangan rasional dan irrasional disebut himpunan bilangan real, disimbolkan  $\mathbb{R}$ . Jelas  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

**Notasi Interval:** Misalkan  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

- |  |  |
|--|--|
| 1. $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$       |  |
| 2. $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ |  |
| 3. $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$    |  |
| 4. $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$    |  |
| 5. $(a, \infty) = \{x \mid x > a\}$      |  |
| 6. $[a, \infty) = \{x \mid x \geq a\}$   |  |
| 7. $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$     |  |
| 8. $(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$  |  |
| 9. $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$      |  |

**Hati<sup>2</sup>:**  $-\infty$  dan  $\infty$  bukan bilangan real, jadi tidak pernah termasuk dalam subset bilangan real.

## Polinom / Suku Banyak

**Bentuk umum:**  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ , dengan  $n$  bilangan asli,  $a_0, a_1, \cdots, a_n$  bilangan<sup>2</sup> real (disebut koefisien dari polinom), dan  $x$  bilangan real yang belum ditentukan (variabel).

**Derajat polinom** adalah nilai  $n$  terbesar yang koefisiennya tidak nol.

**Contoh:**  $p(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$ , derajat  $p(x)$  adalah 4.

Bilangan real  $t$  disebut **akar dari polinom**  $p(x)$  bila  $p(t) = 0$ .

Pada contoh terakhir,  $t = 2$  adalah akar  $p(x)$ , sebab  $p(t) = p(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^3 - 7 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 12 = 0$

**Polinom Linear/Derajat Satu:**  $p(x) = ax + b$ ,  $a \neq 0$  akarnya  $x = \frac{-b}{a}$ .

**Polinom Kuadrat/Derajat Dua:**  $p(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ .

Akar-akarnya  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$  dan  $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$  dengan  $\underbrace{D = b^2 - 4ac}_{\text{Diskriminan}}$

Di sini ada tiga kemungkinan akar:

- $D > 0$ , Dua akar real berbeda ( $x_1 \neq x_2$ ).
- $D = 0$ , Dua akar kembar ( $x_1 = x_2$ ).
- $D < 0$ , tidak ada akar real.

Koefisien  $a$  menentukan kecekungan grafiknya. Bila  $a > 0$  grafik cekung ke atas (membuka ke atas) sebaliknya bila  $a < 0$  grafiknya cekung ke bawah.

Bila  $D < 0$  dan  $a > 0$  polinom disebut **definit positif** (ilustrasikan grafiknya!).

Bila  $D < 0$  dan  $a < 0$  polinom disebut **definit negatif**.

**Sifat:** Setiap polinom derajat  $n > 2$  dapat difaktorkan atas faktor-faktor linear / kuadrat definit. (Bukti, bonus !!!).

**Contoh:**

$$\begin{aligned} p(x) &= x^6 - 1 \\ &= (x^3 - 1)(x^3 + 1) \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

## Pertaksamaan Rasional

**Bentuk umum:**  $\frac{A(x)}{B(x)} < \frac{C(x)}{D(x)}$

$A(x), B(x), C(x)$ , dan  $D(x)$  masing-masing polinom.

Catatan: Tanda  $<$  dapat juga berupa  $\leq$ ,  $>$  atau  $\geq$

**Contoh:**  $\frac{x^3+1}{x^2-2x+8} \geq \frac{3x}{x^5+3x-4}$

Himpunan dari **semua** titik  $x \in \mathbb{R}$  yang 'memenuhi' pertaksamaan tersebut disebut **solusi**.

### Langkah-Langkah menentukan solusi pertaksamaan rasional:

(dijelaskan seiring dengan pencarian solusi dari  $\frac{x+1}{2-x} \geq \frac{x}{x+3}$ )

1. Tentukan 'daerah definisi' dari pertaksamaan tersebut
2. Tambahkan kedua ruas dengan  $-\frac{C(x)}{D(x)}$ , shg. diperoleh bentuk  $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$
3. Faktorkan  $P(x)$  dan  $Q(x)$  atas faktor-faktor 'linier' & 'kuadrat definit'.
4. Gambarkan garis bil. real dan tandai akar-akar dari  $P(x)$  dan  $Q(x)$ .



5. Pada setiap 'subinterval' yang terbentuk, ambil satu buah titik dan periksa tanda dari  $\frac{P(x)}{Q(x)}$



6. Simpulkan solusi dari pertaksamaan tersebut.

**Diskusi:** Perhatikan langkah kelima di atas. Untuk menentukan tanda dari  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  sepanjang suatu subinterval, mengapa cukup kita uji pada satu titik saja ? Jelaskan !

**Latihan:** Tentukan solusi dari:  $2 \leq x^2 - x < 6$

### Hati-Hati:

- Jangan mengalikan pertaksamaan dengan bilangan yang tidak diketahui tandanya  
ilustrasi:  $\frac{1}{x-1} < 1$ .
- Sebaiknya, hindari mencoret faktor yang sama, ilustrasi:  $\frac{(x-3)^3(x+1)}{(x-3)^2} \leq 0$ .

### Harga Mutlak

Misalkan  $x \in \mathbb{R}$ . Harga mutlak dari  $x$ , ditulis  $|x| = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$

**Contoh:**  $|3| = 3$ ,  $|-4| = 4$ ,  $|0| = 0$ .

**Sifat<sup>2</sup>:** Misalkan  $a$  dan  $b$  bilangan-bilangan real,

1.  $|ab| = |a| |b|$
2.  $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$
3.  $|a + b| \leq |a| + |b|$       ilustrasi  $|3 + (-4)| \leq |3| + |-4|$ .
4.  $|a - b| \geq ||a| - |b||$

### Latihan:

1. Tuliskan tanpa tanda mutlak: (a)  $|x - 4|$     (b)  $|x + 2| + |x + 3|$
2. Tentukan solusi dari (a)  $|x - 3| = x - 3$     (b)  $|x - 1| = 2$ .

### Akar Kuadrat

Misalkan  $x \geq 0$ . Akar kuadrat dari  $x$ , ditulis  $\sqrt{x}$  adalah **bilangan real non-negatif**  $a$  sehingga  $a^2 = x$ .

Ilustrasi: (a)  $\sqrt{9} = 3$ ,    (b)  $\sqrt{(-4)^2} = 4$ .

Secara umum : Bila  $b \in \mathbb{R}$  maka  $\sqrt{b^2} = |b|$ .

## Pertaksamaan yang memuat nilai mutlak dan akar kuadrat

**Sifat<sup>2</sup>** (buktikan/ilustrasikan !):

- $|x| < a \iff -a < x < a$
- $|x| > a \iff x < -a \text{ atau } x > a$

*Untuk mencari solusi pertaksamaan yang memuat nilai mutlak / akar kuadrat, usahakan menghilangkan nilai mutlak / akar kuadratnya, lalu diselesaikan sebagai pertaksamaan rasional.*

**Contoh<sup>2</sup>:**

1.  $|x - 4| \leq 1.5$
2.  $|2x + 3| \leq |x - 3|$
3. Benarkah pernyataan berikut ?  $-1 \leq x \leq 3 \implies |x| < 1$
4. Tentukan bilangan positif  $\delta$  supaya pernyataan berikut benar:
  - (a)  $|x - 2| < \delta \implies |5x - 10| < 1$
  - (b)  $|x - 2| < \delta \implies |6x - 18| < 24$ .
5.  $\sqrt{x - 1} < 1$

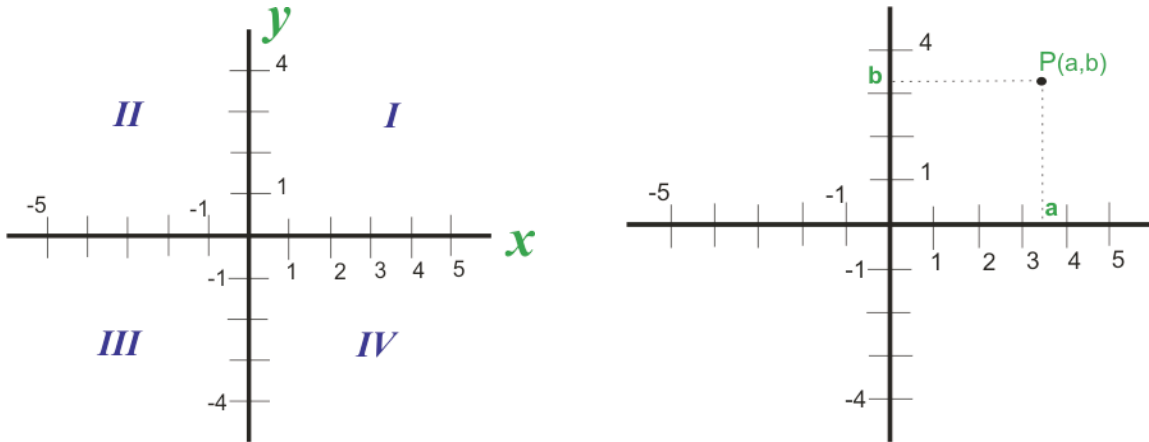
### **Soal-Soal Latihan Mandiri:**

1.  $|2x - 7| < 3$
2.  $|2x - 3| > 3$
3.  $|x - 2| < 3|x + 7|$
4.  $|x - 2| + |x + 2| > 7$
5.  $|x - 2| + |x + 2| < 3$
6.  $|x + \frac{1}{x}| \leq 2$
7.  $1 < |x - 2| < 3$
8.  $|x - 3| + |x - 2| + |x + 1| < 7$
9.  $|x - 3| + |x - 2| + |x + 1| < 2$
10.  $|x - 3| + |x - 2| + |x + 1| > 8$
11. Cari bil.  $\delta$  positif supaya
  - a.  $|x - 5| < \delta \implies |3x - 15| < 6$
  - b.  $|x - 4| < \delta \implies |3x - 15| < 6$
12. Tunjukkan
$$|x| \leq 2 \implies \left| \frac{2x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2} \right| \leq 8$$



# Sistem Koordinat Kartesius / Persegi Panjang

Pelopori: Pierre de Fermat (1629) & René Descartes (1637)



Sumbu horizontal dinamakan sumbu- $x$  (*absis*) dan sumbu vertikal dinamakan sumbu- $y$  (*ordinat*). Setiap pasangan terurut bilangan  $(a, b)$  dapat digambarkan sebagai sebuah titik pada koordinat tersebut dan sebaliknya, setiap titik pada bidang koordinat Kartesius berkorespondensi dengan satu buah pasangan bilangan  $(a, b)$ .

## Jarak dua titik di bidang

Misalkan  $P(x_1, y_1)$  dan  $Q(x_2, y_2)$  dua buah titik pada bidang, jaraknya adalah  $d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

## Garis Lurus

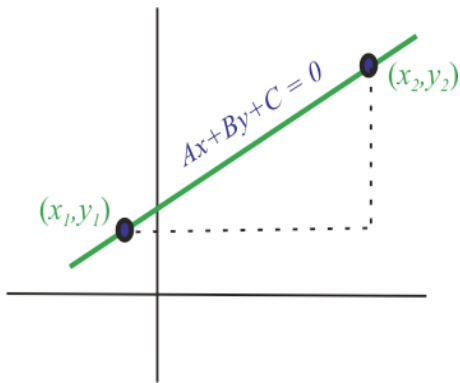
Bentuk umum:  $Ax + By + C = 0$  dengan  $A, B$ , dan  $C$  konstanta.

Nilai  $A$  dan  $B$  tidak boleh nol secara bersamaan.

Grafik garis lurus ditentukan oleh dua titik  $(x_1, y_1)$  dan  $(x_2, y_2)$  yang memenuhi persamaan tersebut.

### Hal<sup>2</sup> khusus:

- Bila  $A = 0$ , persamaan berbentuk  $y = \frac{-C}{B}$ , grafiknya sejajar sumbu- $x$ .
- Bila  $B = 0$ , persamaan berbentuk  $x = \frac{-C}{A}$ , grafiknya sejajar sumbu- $y$ .
- Bila  $A, B$  tak nol,  $Ax + By + C = 0 \iff y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ .



Misalkan  $(x_1, y_1)$  dan  $(x_2, y_2)$  dua titik pada garis tersebut. Kemiringan garis didefinisikan sebagai  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Buktikan bahwa  $m = -\frac{A}{B}$ .

Persamaan garis lurus yang melalui dua titik  $(x_1, y_1)$  dan  $(x_2, y_2)$  :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Persamaan garis lurus dengan kemiringan  $m$  dan melalui titik  $(x_1, y_1)$  :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

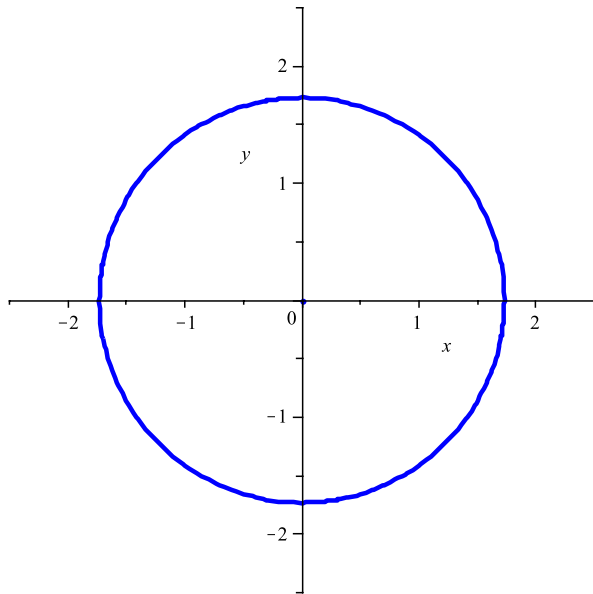
Misalkan garis  $\ell_1$  dan  $\ell_2$  dua buah garis dengan kemiringan  $m_1$  dan  $m_2$ .

Kedua garis tersebut sejajar  $\iff m_1 = m_2$

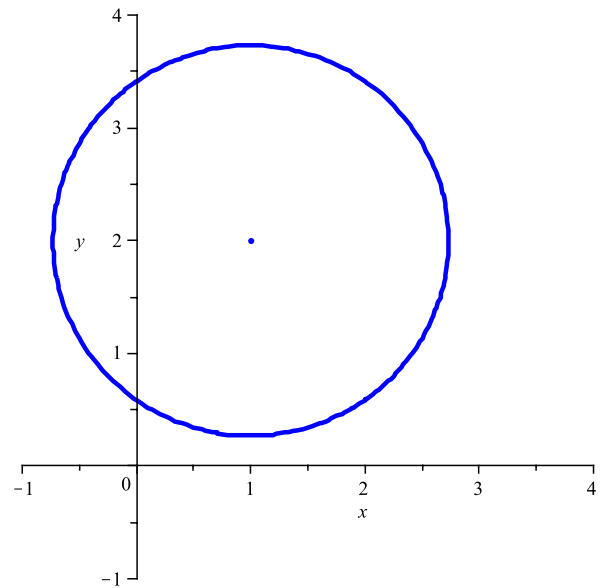
Kedua garis tersebut saling tegak lurus  $\iff m_1 \cdot m_2 = -1$  (mengapa?)

## Lingkaran

Lingkaran adalah himpunan titik-titik yang jaraknya sama terhadap titik tertentu (disebut pusat lingkaran). Persamaan lingkaran yang berpusat di  $(0, 0)$  dan jari-jari  $r$  adalah:  $x^2 + y^2 = r^2$  (gambar sebelah kiri). Bila pusat lingkaran berada di titik  $(p, q)$  maka persamaannya menjadi  $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$  (gambar sebelah kanan).



lingkaran  $x^2 + y^2 = 3$



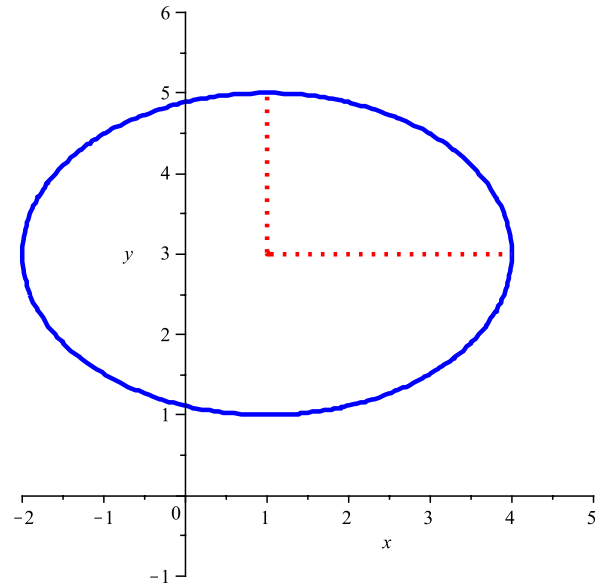
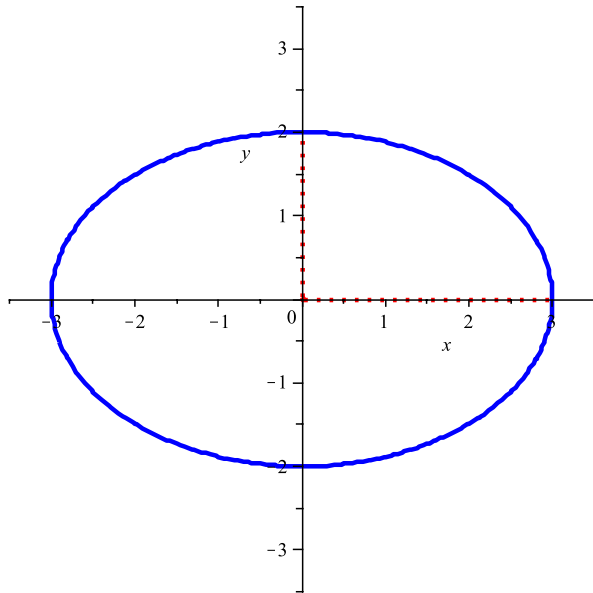
lingkaran  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3$

**Latihan:** Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran  $x^2 - 2x + y^2 + 4y - 20 = 0$

## Elips

Bentuk umum elips yang berpusat di  $(0, 0)$  :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (gambar kiri).

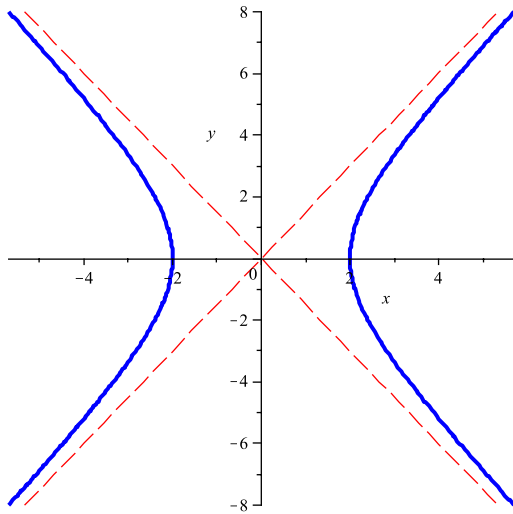
Untuk elips yang berpusat di  $(p, q)$  persamaannya  $\frac{(x - p)^2}{a^2} + \frac{(y - q)^2}{b^2} = 1$



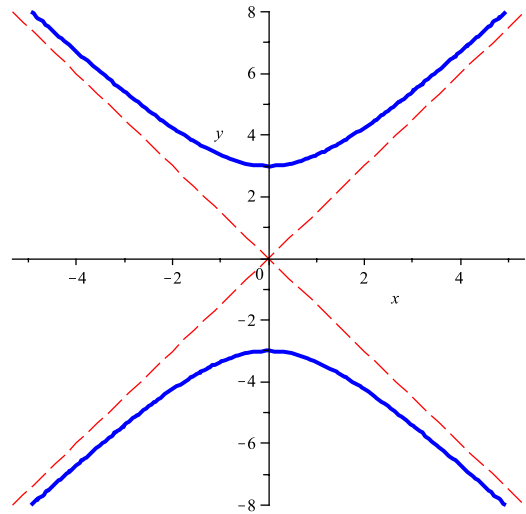
**Latihan:** Gambarkan elips berikut  $4x^2 - 24x + y^2 - 4y + 39 = 0$ .

# Hiperbola

Bentuk umum :  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  atau  $\frac{-x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



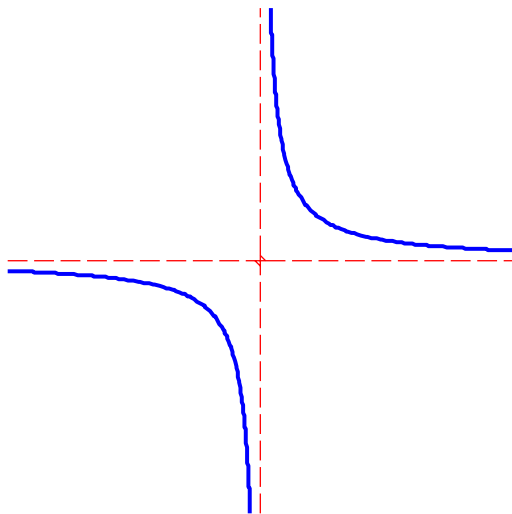
$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$



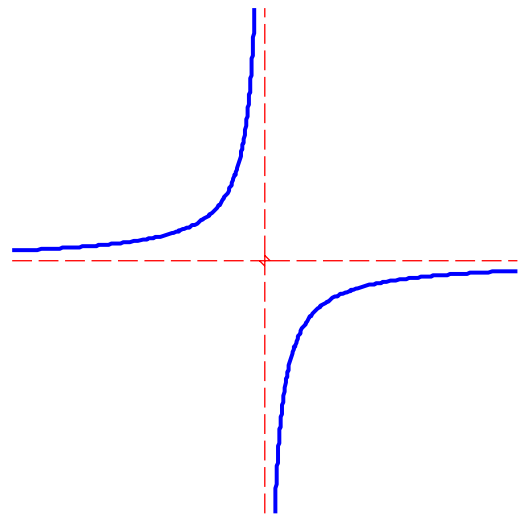
$$-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Garis putus-putus mempunyai persamaan  $2y = 3x$  dan merupakan *asimtot* terhadap hiperbola tersebut.

Bila kedua parabola di atas dirotasi berlawanan arah dengan putaran jarum jam sebesar  $45^\circ$  maka diperoleh:

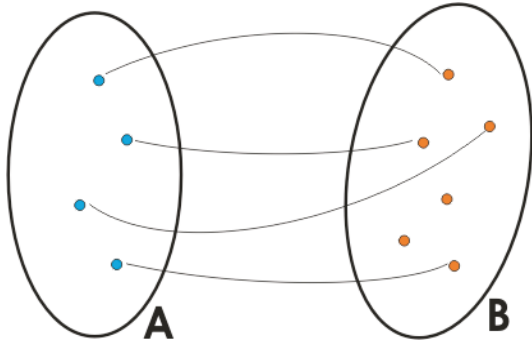


$$xy = 1$$



$$-xy = 1$$

## Fungsi



Misalkan  $A$  dan  $B$  dua buah himpunan. Fungsi dari  $A$  ke  $B$  adalah aturan memasangkan (memadankan) setiap elemen di  $A$  **dengan satu** elemen di  $B$ .

*Bila elemen-elemen dari  $A$  lebih banyak dari elemen-elemen  $B$ , dapatkah kita membuat fungsi dari  $A$  ke  $B$ ?*

Sebuah fungsi disebut **fungsi real** bila  $B \subset \mathbb{R}$ .

Pembahasan selanjutnya akan dibatasi untuk  $A, B \subset \mathbb{R}$ .

**Notasi fungsi:**  $y = f(x)$  dengan:  $x$  elemen  $A$ ,  $f(x)$  aturan pemadanan-nya, dan  $y$  adalah elemen  $B$  yang merupakan pasangan dari  $x$ .

Pada persamaan berikut, tentukan mana yang mendefinisikan fungsi:

- |                    |                    |                    |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| 1. $y = x^2 + x^4$ | 3. $x^2y = 1$      | 5. $x^3 + y^3 = 1$ |
| 2. $xy^3 = 1$      | 4. $x^2 + y^2 = 1$ | 6. $x^2 + y^3 = 1$ |

**Daerah Definisi** (daerah asal/wilayah/domain) dari suatu fungsi  $f(x)$ , dinotasikan  $D_f$  adalah himpunan semua bilangan real yang menyebabkan aturan fungsi berlaku/terdefinisi.

**Daerah Nilai** (daerah hasil/jelajah/range) dari suatu fungsi  $f(x)$ , dinotasikan  $R_f = \{y \mid y = f(x), x \in D_f\}$  (berisi semua pasangan dari  $x$ ).

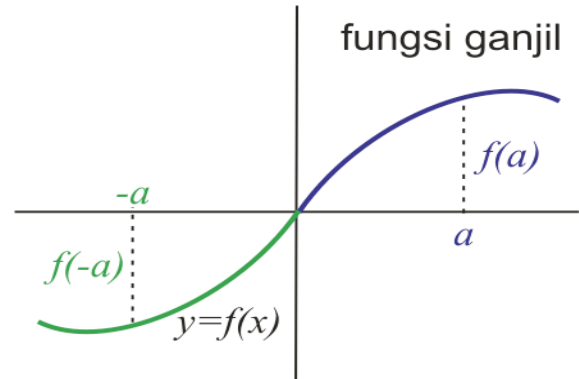
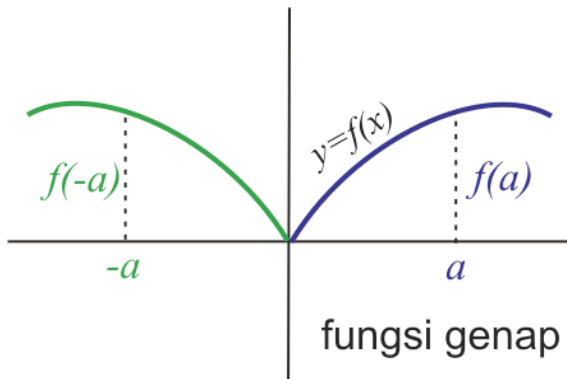
**Contoh<sup>2</sup>:** Tentukan  $D_f$  dan  $R_f$  dan grafik dari fungsi-fungsi berikut:

- |   |  |
|---|--|
| 1. $f(x) = x + \sqrt{x}$  | 4. $f(x) =  x $  |
| 2. $f(x) = x^2 \quad -1 \leq x \leq 1$                            | 5. $f(x) = [ x ]$ , bilangan bulat terbesar, yang lebih kecil atau sama dengan $x$ . |
| 3. $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ |  |

## Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil/Gasal:

Fungsi  $f$  disebut **fungsi genap** bila memenuhi  $f(-a) = f(a)$ . Grafik dari fungsi genap simetri terhadap sumbu- $y$

Fungsi  $f$  disebut **fungsi ganjil** bila memenuhi  $f(-a) = -f(a)$ . Grafiknya simetri terhadap titik asal (titik pusat koordinat).

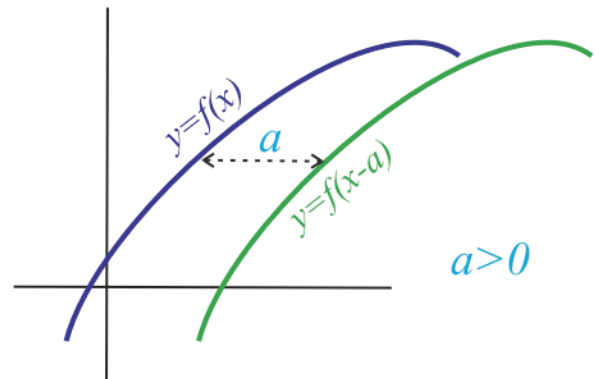


### Latihan:

- Periksa apakah fungsi berikut termasuk fungsi ganjil / genap.  
(a)  $y = x^2$                       (c)  $y = x^5 + 3x^2 + 1$                       (e)  $y = [|x|]$   
(b)  $y = x^3$                       (d)  $y = |x - 1|$                       (f)  $y = [|x^2|]$
- Adakah fungsi yang sekaligus genap dan ganjil? (bahas!)

### Pergeseran Grafik Fungsi:

Diberikan grafik fungsi  $y = f(x)$  dan  $a > 0$ . Selanjutnya dibentuk fungsi  $g(x) = f(x - a)$ , maka gambar grafik  $g(x)$  dapat diperoleh dengan menggeser grafik  $f(x)$  sejauh  $a$  ke kanan (jelaskan!).



**Diskusi:** Jika  $a > 0$ , jelaskan cara memperoleh grafik-grafik

$h = f(x + a)$ ,  $l(x) = f(x) + a$  dan  $m(x) = f(x) - a$  dari grafik  $f(x)$ .

**Contoh:** Berdasarkan grafik  $y = x^2$ , gambarkan grafik  $h = x^2 + 4x + 3$

## Operasi pada fungsi

Misalkan  $f(x)$  dan  $g(x)$  fungsi<sup>2</sup> real dengan daerah definisi  $D_f$  dan  $D_g$ .

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g$
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x), \quad D_{f-g} = D_f \cap D_g$
- $(fg)(x) = f(x)g(x), \quad D_{fg} = D_f \cap D_g$
- $(f/g)(x) = f(x)/g(x), \quad D_{f/g} = D_f \cap D_g \cap \{x | g(x) \neq 0\}$
- $f^n(x) = \underbrace{f(x) f(x) \cdots f(x)}_{n \text{ suku}} \quad D_{f^n} = D_f$

**Contoh:** Misalkan  $f(x) = \sqrt[4]{x+1}$  dan  $g(x) = \sqrt{9-x^2}$ .

Tentukan  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $fg$ ,  $f/g$ , dan  $f^5$  beserta daerah definisinya.

## Peta/Image dan Prapeta/Preimage:

Misalkan  $f$  suatu fungsi dengan daerah definisi  $D_f$  dan daerah nilai  $R_f$ .

Misalkan  $A \subset D_f$  dan  $B \subset \mathbb{R}$ .

- Peta dari  $A$  oleh  $f$  adalah  $f(A) = \{y \in R_f \mid y = f(x), x \in A\}$
- Prapeta dari  $B$  oleh  $f$  adalah  $f^{-1}(B) = \{x \in D_f \mid f(x) \in B\}$

*(ilustrasikan kedua konsep di atas dengan gambar)*

**Contoh:** Diberikan  $f(x) = x^2$ ,

tentukan  $f([0, 1])$ ,  $f([-\frac{1}{2}, 1])$ ,  $f^{-1}([0, 1])$ ,  $f^{-1}([-1, 1])$ , dan  $f^{-1}(\{-1\})$

**Diskusi:** Benar atau salah (a)  $f^{-1}(f(A)) = A$  , (b)  $f(f^{-1}(B)) = B$



## Fungsi Komposisi

Perhatikan dua buah fungsi  $f(x) = \frac{6x}{x^2-9}$  dan  $g(x) = \sqrt{3x}$ .

Dibentuk fungsi baru  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

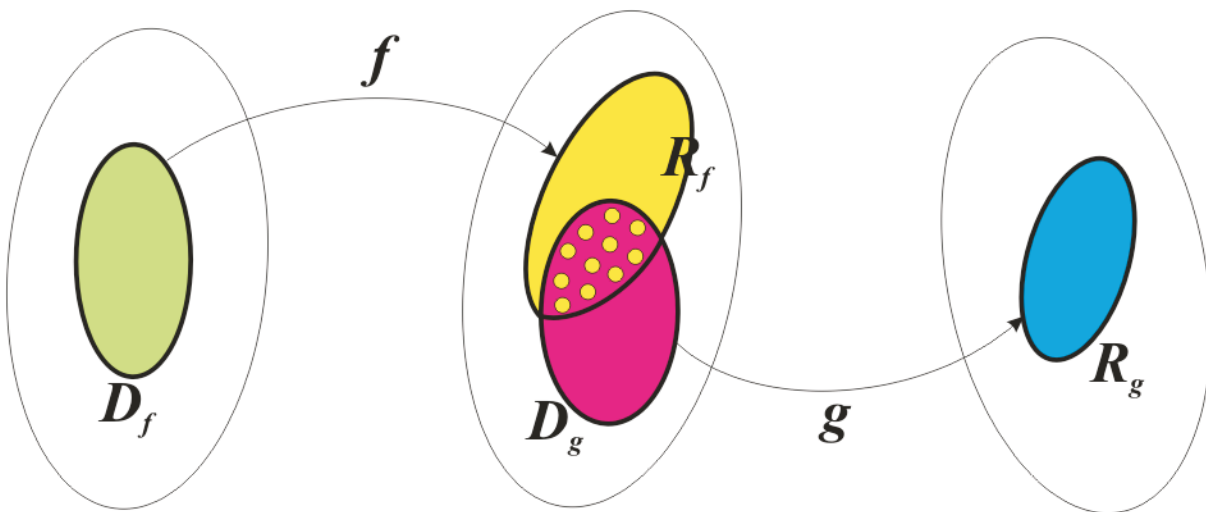
$$\text{Jadi } (g \circ f)(x) = g\left(\frac{6x}{x^2-9}\right) = \sqrt{\frac{6x}{x^2-9}}$$

Fungsi demikian disebut sebagai fungsi komposisi dari  $f$  dan  $g$ .

**Masalah:** Bagaimana cara menentukan  $D_{g \circ f}$  dan  $R_{g \circ f}$

Perhatikan gambar di bawah ini. Titik-titik dari  $D_f$  yang dapat dievaluasi oleh fungsi komposisi  $g \circ f$  adalah titik-titik yang oleh fungsi  $f$  dipetakan ke dalam  $D_g$  (**mengapa?**). Sebut  $A = R_f \cap D_g$ , maka:

$$D_{g \circ f} = f^{-1}(A) \quad \text{dan} \quad R_{g \circ f} = g(A)$$



**Contoh<sup>2</sup>:**

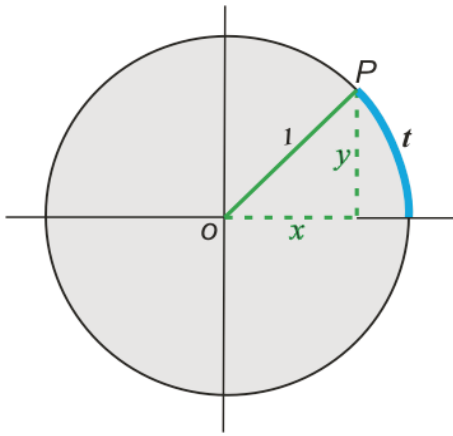
1.  $f(x) = 1 + x^2$  dan  $g(x) = \sqrt{1-x}$ .

Tentukan  $f \circ g$ ,  $D_{f \circ g}$ , dan  $R_{f \circ g}$

2.  $f(x) = \sqrt{x(10-x)}$  dan  $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ .

Tentukan  $g \circ f$ ,  $D_{g \circ f}$ , dan  $R_{g \circ f}$

# Fungsi Trigonometri



Perhatikan gambar lingkaran berjari-jari satu di sebelah kiri. Posisi titik  $P=(x, y)$ . Sudut  $t$ -positif dihitung berdasarkan arah yang berlawanan jarum jam dengan satuan radian.  $1^\circ = \frac{1}{180}\pi$  rad.

## Definisi:

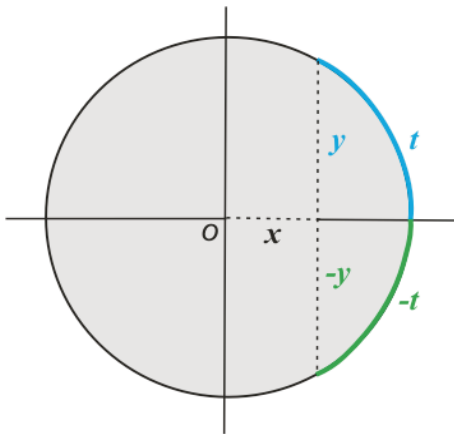
$$f(t) = \sin t = y \quad \text{dan} \quad g(t) = \cos t = x.$$

$$D_f = D_g = \dots \quad R_f = R_g = \dots$$

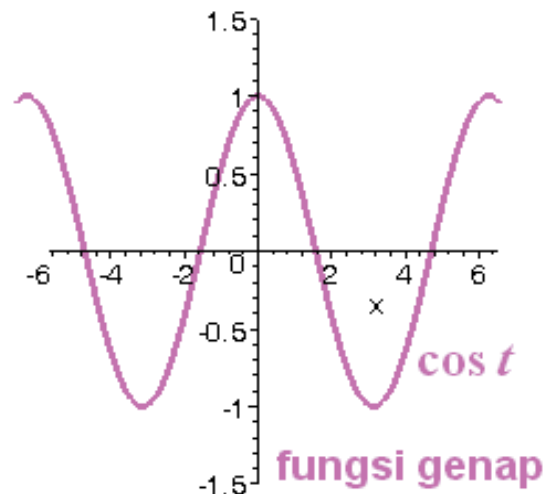
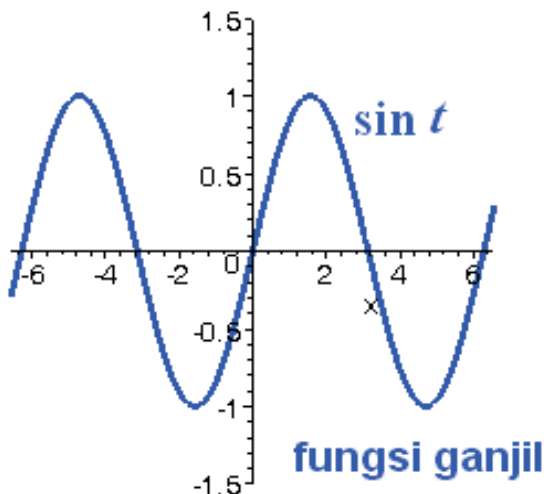
Sudut  $t + 2\pi$  dan  $t$  menentukan posisi titik P yang sama, sehingga,

$$\sin(t + 2\pi) = \sin t \quad \text{dan} \quad \cos(t + 2\pi) = \cos t.$$

Dikatakan fungsi tersebut **periodik** dengan periode  $2\pi$ .



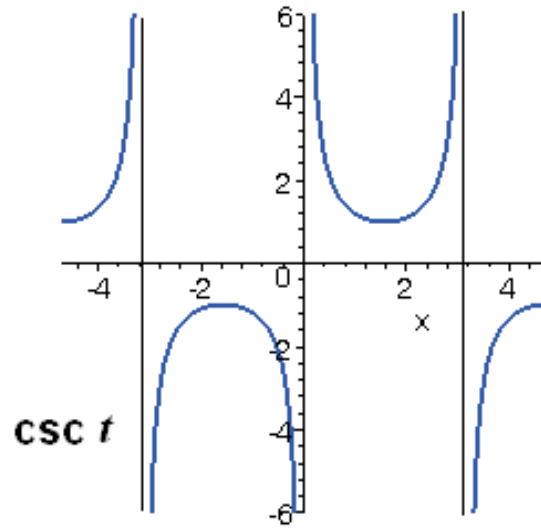
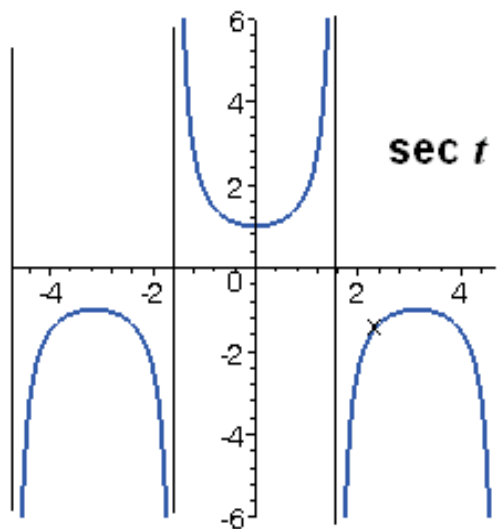
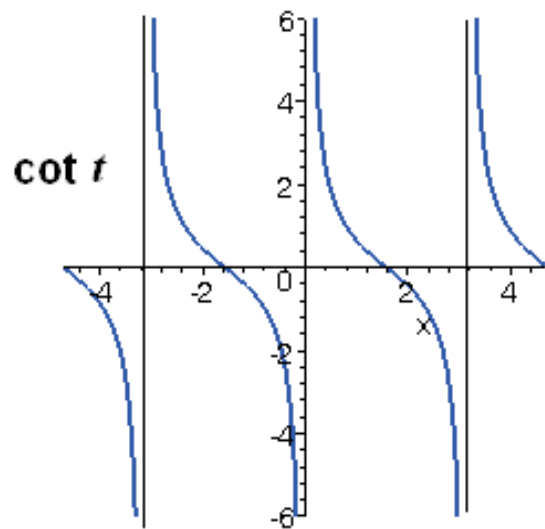
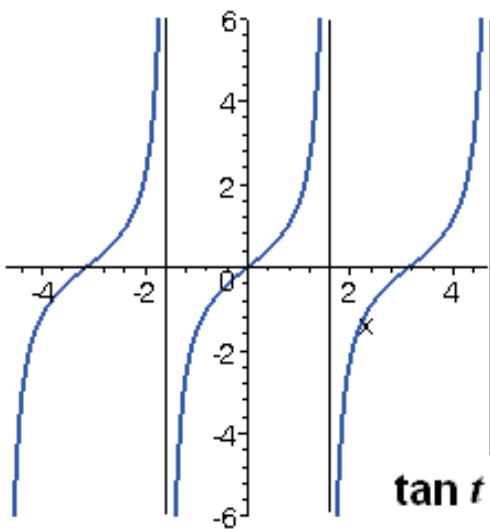
$$\left. \begin{array}{l} \sin(-t) = -\sin t \\ \cos(-t) = \cos t \\ \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \end{array} \right\} \text{ jelaskan !}$$



## Fungsi-Fungsi Trigonometri Lainnya:

- $f(x) = \tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$        $D_f = \{x \mid x \neq \frac{2k+1}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \quad R_f = \mathbb{R}$
- $f(x) = \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$        $D_f = \dots \quad R_f = \dots$
- $f(x) = \sec t = \frac{1}{\cos t}$        $D_f = \dots \quad R_f = \dots$
- $f(x) = \csc t = \frac{1}{\sin t}$        $D_f = \dots \quad R_f = \dots$

**latihan:** Periksa apakah fungsi<sup>2</sup> tersebut termasuk fungsi ganjil/genap



**latihan:** Apakah fungsi<sup>2</sup> tersebut periodik, berapa periodenya ?

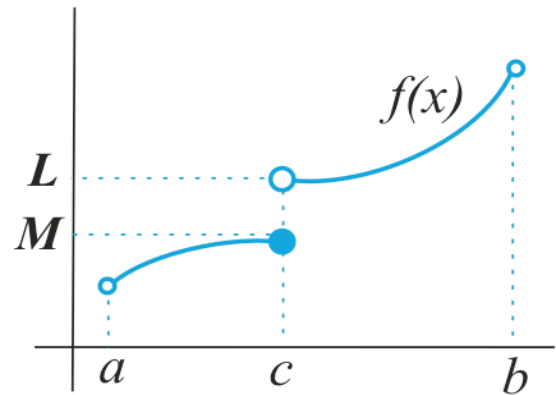
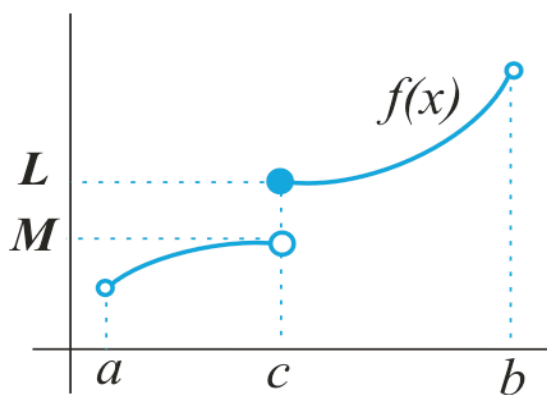
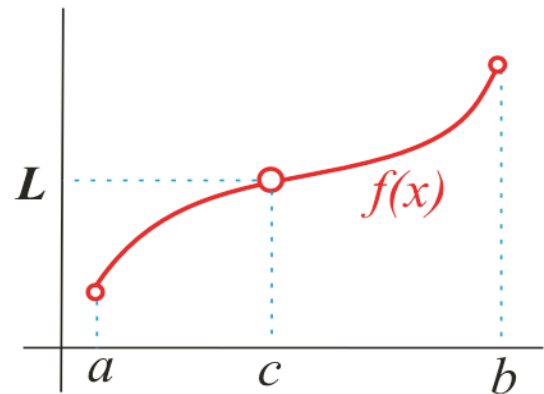
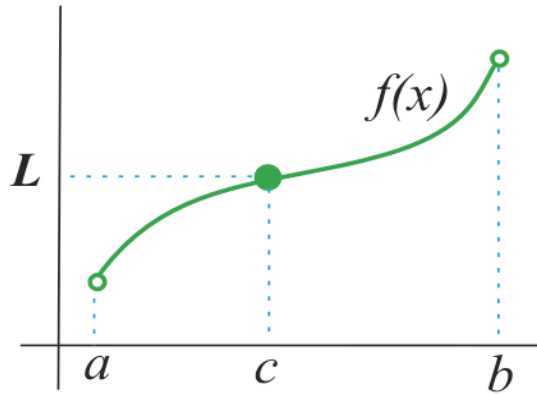
## Sifat-Sifat Penting Fungsi Trigonometri:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x, \quad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
- $\sin(-x) = -\sin x \quad \text{dan} \quad \cos(-x) = \cos x$
- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$   
 $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x) \quad \text{dan} \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)$
- $\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$   
 $\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$   
 $\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

## Konsep Limit

Misalkan  $I = (a, b)$  suatu *interval buka* di  $\mathbb{R}$  dan  $c \in I$ . Fungsi  $f(x)$  dikatakan *terdefinisi di  $I$  kecuali mungkin di  $c$* , artinya  $f(x)$  terdefinisi di semua titik pada  $I \setminus \{c\}$  dan di  $c$  boleh terdefinisi boleh juga tidak.

**Ilustrasi:**



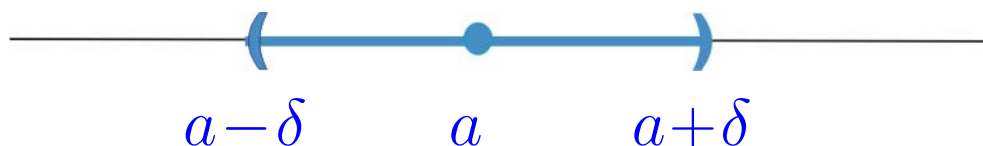
**Diskusi:** Adakah bentuk lain dari  $f(x)$  yang memenuhi definisi di atas?

Pada gambar<sup>2</sup> di atas, berapakah nilai limit  $f(x)$  bila  $x$  mendekati titik  $c$ .

Untuk memudahkan pembahasan konsep limit, hayatilah pengertian berikut:

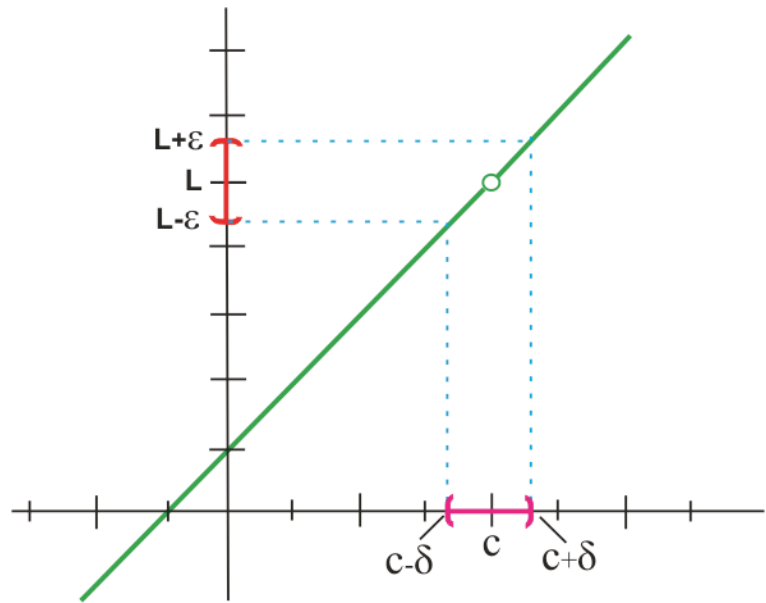
$$|x - a| < \delta \iff -\delta < x - a < \delta$$

himpunan semua bil. real  $x$  yang jaraknya ke titik  $a$  kecil dari  $\delta$



Perhatikan fungsi  $f(x) = \frac{2x^2-3x-2}{x-2}$ ,  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$x$	$f(x)$
0.00000	1.00000
1.00000	3.00000
1.90000	4.80000
1.95000	4.90000
1.99999	4.99998
$\vdots$	
2.00000	?
$\vdots$	
2.00001	5.00002
2.05000	5.10000
2.10000	5.20000
3.00000	7.00000



$$f(x) = \frac{2x^2-3x-2}{x-2} = \frac{(2x+1)(x-2)}{x-2} = 2x + 1 \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

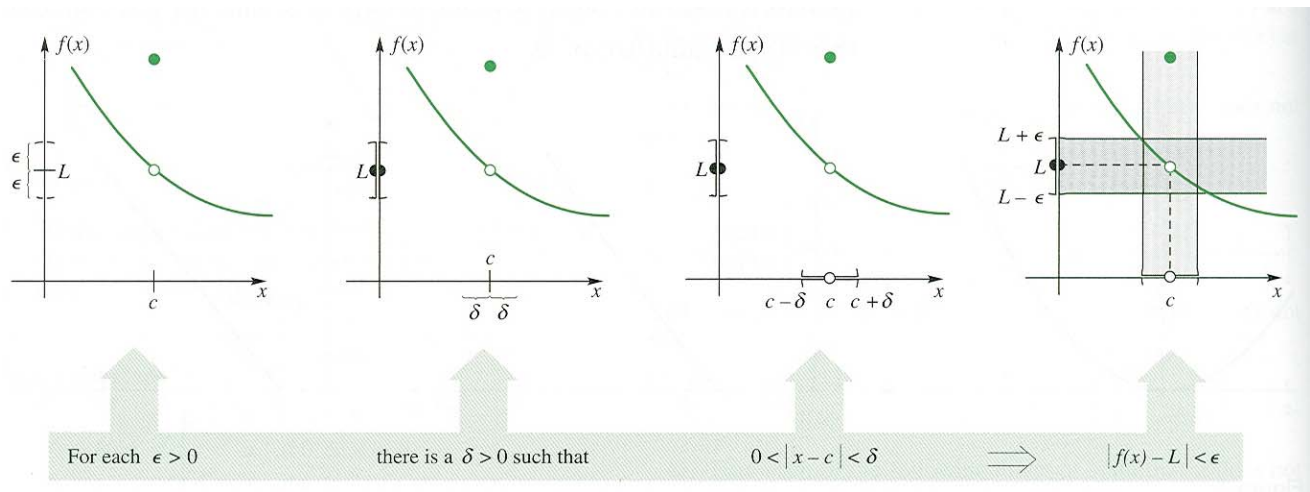
Amatilah fungsi di atas beserta grafiknya, lalu lengkapilah implikasi berikut:

- Tentukan  $\delta_1$  supaya  $|x - 2| < \delta_1 \implies |f(x) - 5| < 1$   
Apakah  $\delta_1 = 3/8$  memenuhi syarat ?
- Tentukan  $\delta_2$  supaya  $|x - 2| < \delta_2 \implies |f(x) - 5| < \frac{1}{2}$
- Tentukan  $\delta_3$  supaya  $|x - 2| < \delta_3 \implies |f(x) - 5| < \frac{1}{1000000}$
- Bila  $\epsilon$  bilangan positif sebarang, carilah  $\delta$  supaya

$$|x - 2| < \delta \implies |f(x) - 5| < \epsilon$$

Dari uraian di atas, terlihat untuk setiap  $\epsilon > 0$ , selalu dapat dicari  $\delta > 0$  sehingga  $|x - 2| < \delta \implies |f(x) - 5| < \epsilon$ . **Dikatakan**  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$

**Definisi Limit:** Misalkan  $f(x)$  terdefinisi pada  $I = (a, b)$ , kecuali mungkin di  $c \in I$ . Limit dari  $f(x)$  untuk  $x$  mendekati  $c$  disebut  $L$ , dinotasikan  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  artinya untuk setiap  $\epsilon > 0$ , dapat dicari  $\delta > 0$  sehingga  $|x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$



## Contoh:

1. Tunjukkan  $\lim_{x \rightarrow 2} 3x + 2 = 8$
2. Tunjukkan  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$

**Sifat-Sifat Limit:** Misalkan  $f$  dan  $g$  dua buah fungsi dan  $k \in \mathbb{R}$ .

1.  $\lim_{x \rightarrow c} k = k$
2.  $\lim_{x \rightarrow c} x = c$
3.  $\lim_{x \rightarrow c} (kf)(x) = k \lim_{x \rightarrow c} f(x)$
4.  $\lim_{x \rightarrow c} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
5.  $\lim_{x \rightarrow c} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
6.  $\lim_{x \rightarrow c} (fg)(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
7.  $\lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$

8.  $\lim_{x \rightarrow c} f^n(x) = \left( \lim_{x \rightarrow c} f(x) \right)^n, \quad n \in \mathbb{N}$
9.  $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) \geq 0 \text{ untuk } n \text{ genap}$
10. Bila  $p(x)$  polinom maka  $\lim_{x \rightarrow c} p(x) = p(c)$
11. **Prinsip Apit.** Misalkan  $f, g$ , dan  $h$  tiga fungsi dengan  
 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  untuk setiap  $x \in I$ . Bila  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$  dan  
 $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$  maka  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  (Ilustrasikan secara grafik!)

### Sifat-Sifat Limit Fungsi Trigonometri:

1.  $\lim_{x \rightarrow c} \sin x = \sin c$  dan  $\lim_{x \rightarrow c} \cos x = \cos c$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  dan  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$  dan  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$

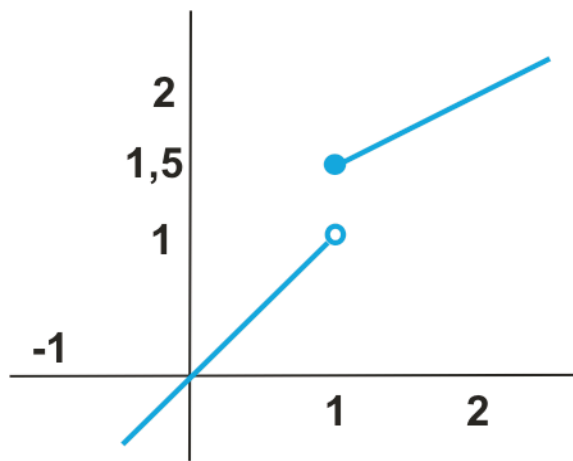
Hati<sup>2</sup>, bila  $\lim_{x \rightarrow c} u \neq 0$   
 maka  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{\sin u}{u} \neq 1$

### Soal-Soal: Hitung limit-limit berikut ini

1.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 3x}{3x^2 - 5x + 7}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$
3.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 3x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(2x)}{2x + \tan x}$
5.  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} (x - \frac{1}{2}\pi) \tan(3x)$
6.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{\sin(2x)}$
7.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x}$
8.  $\lim_{x \rightarrow 1} [|x|]$
9. Bila  $f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ \frac{1}{2}x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$  tentukan  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

(dengan alat yang ada saat ini dua soal terakhir akan sukar untuk dihitung,  
 kita tunda dulu sampai konsep berikutnya dibahas)





## Limit Sepihak

Gambar di samping adalah grafik dari fungsi pada contoh no. 9 di atas. Di sini terlihat bahwa fungsi  $f(x)$  mengalami loncatan pada titik  $x = 1$ . Sekarang coba lengkapi implikasi berikut ini:

- Tentukan  $\delta_1$  supaya  $|x - 1| < \delta_1 \implies |f(x) - 1,5| < 1$
- Tentukan  $\delta_2$  supaya  $|x - 1| < \delta_2 \implies |f(x) - 1,5| < \frac{3}{4}$
- Tentukan  $\delta_3$  supaya  $|x - 1| < \delta_3 \implies |f(x) - 1,5| < \frac{1}{4}$

Kesimpulan apa yang dapat diperoleh?

Dapatkah disimpulkan bahwa  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  tidak ada?

Sekarang coba perhatikan kembali grafik tadi dan lengkapi implikasi berikut:

- Tentukan  $\delta_1$  supaya  $x - 1 < \delta_1 \implies |f(x) - 1,5| < 1$
- Tentukan  $\delta_2$  supaya  $x - 1 < \delta_2 \implies |f(x) - 1,5| < \frac{3}{4}$
- Tentukan  $\delta_3$  supaya  $x - 1 < \delta_3 \implies |f(x) - 1,5| < \frac{1}{4}$
- Bila  $\epsilon > 0$ , adakah  $\delta > 0$  supaya  $x - 1 < \delta \implies |f(x) - 1,5| < \epsilon$

Karena untuk setiap  $\epsilon > 0$  kita dapat mencari  $\delta > 0$  sehingga implikasinya berlaku, dikatakan limit dari  $f(x)$  untuk  $x$  menuju 1 dari kanan bernilai 1,5 dan dinotasikan  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1,5$

Sekarang coba perhatikan kembali grafik tadi dan lengkapi implikasi berikut:

- Tentukan  $\delta_1$  supaya  $1 - x < \delta_1 \implies |f(x) - 1,5| < 1$
- Tentukan  $\delta_2$  supaya  $1 - x < \delta_2 \implies |f(x) - 1,5| < \frac{3}{4}$
- Tentukan  $\delta_3$  supaya  $1 - x < \delta_3 \implies |f(x) - 1,5| < \frac{1}{4}$
- Bila  $\epsilon > 0$ , adakah  $\delta > 0$  supaya  $1 - x < \delta \implies |f(x) - 1,5| < \epsilon$

Hasil terakhir menunjukkan bahwa limit kiri dari  $f(x)$  untuk  $x$  menuju 1 dari kiri **bukan 1,5**. Apakah limit kirinya ada ?

**Definisi Limit Kanan:** Misalkan  $f(x)$  terdefinisi pada  $I = (a, b)$ , kecuali mungkin di  $c \in I$ . Limit dari  $f(x)$  untuk  $x$  *mendekati  $c$  dari kanan* disebut  $L$ , dinotasikan  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$  artinya untuk setiap  $\epsilon > 0$ , dapat dicari  $\delta > 0$  sehingga  $x - c < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$

**Latihan:** Tuliskan Definisi Limit Kiri

Dengan konsep limit sepihak, selesaikanlah 2 soal terakhir di halaman 24 -2mm]

**Sifat-sifat:**

- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \implies \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = |L|$
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$

**Soal-Soal:** Hitung limit-limit berikut ini

1. (a)  $\lim_{x \rightarrow 2} |x^2 - 1|$       (b)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|}$

2.  $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x < 1 \\ x + 1 & 1 \leq x < 2 \\ 5 & x = 2 \\ 2x - 1 & x > 2 \end{cases}$

Gambarkan grafik  $f(x)$ , lalu hitunglah:

a.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$       b.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$       c.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$       d.  $\lim_{x \rightarrow 2,001} f(x)$

3. Misalkan  $f(x)$  fungsi yang terdefinisi pada interval  $I = (-a, a)$ .

Bila  $\left| \frac{f(x)}{x} \right| < 1$  untuk semua  $x \in I \setminus \{0\}$ , hitung  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

## Limit di takhingga:

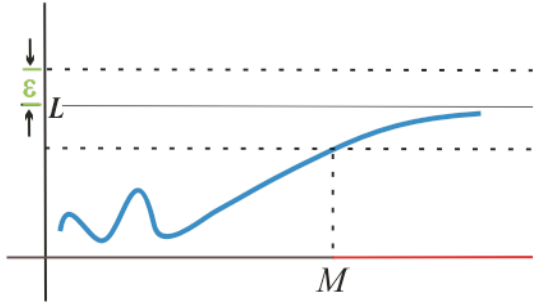
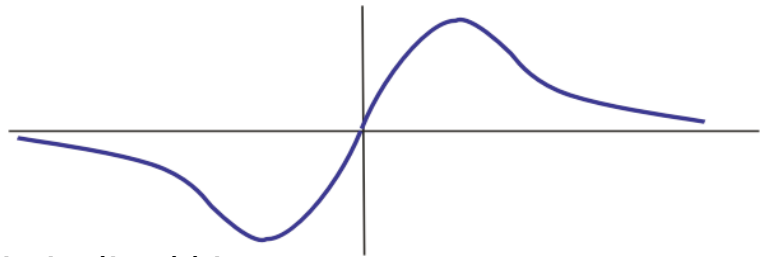
Bagian ini mengamati perilaku fungsi  $f(x)$  bila  $x$  membesar mengecil tanpa batas.

### Ilustrasi:

Perhatikan  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Bila  $x$  membesar terus tanpa batas, ditulis  $x \rightarrow \infty$ , nilai  $f(x)$  'cenderung' menuju 0.

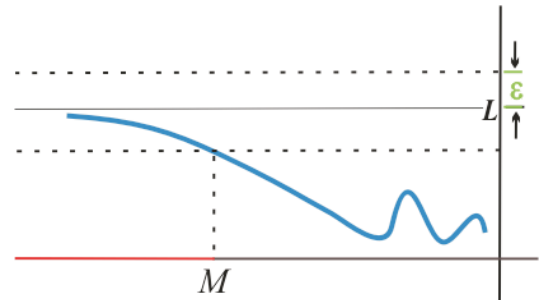
Fenomena ini mendasari konsep limit di takhingga



Misalkan  $f$  terdefinisi pada  $[c, \infty)$ .  
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  artinya untuk setiap  $\epsilon > 0$ ,  
dapat dicari bilangan  $M$  sehingga  
 $x > M \implies |f(x) - L| < \epsilon$ .

Misalkan  $f$  terdefinisi pada  $(-\infty, c)$ .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$  artinya untuk setiap  $\epsilon > 0$ ,  
dapat dicari bilangan  $M$  sehingga  
 $x < M \implies |f(x) - L| < \epsilon$ .



Misalkan  $k \in \mathbb{N}$  maka  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$  dan  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^k} = 0$  Buktikan!

**Contoh:** Tentukan (a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^2}$  dan (b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{1+x^3}$

### Pengertian Asimptot Datar:

Garis  $y = L$  disebut asimptot datar dari fungsi  $f(x)$  jika memenuhi salah satu dari  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$  atau  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$

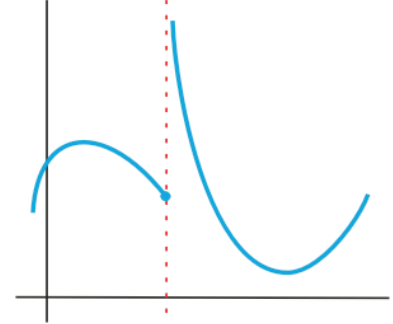
Pada contoh terakhir, tentukanlah asimptot-asimptot datar dari fungsi ybs.

**Diskusi:** Dari definisi di atas, apakah  $y = 0$  asimptot dari  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ .

## Limit Takhingga:

Bagian ini mengamati perilaku fungsi  $f(x)$  di mana nilai  $f(x)$  membesar/mengecil tanpa batas.

Misalkan  $f$  terdefinisi pada  $(a, b)$  yang memuat titik  $c$ .  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty$  artinya untuk setiap bilangan  $M$ , dapat dicari  $\delta > 0$ , sehingga  $0 < x - c < \delta \implies f(x) > M$ .



Dengan cara sama, coba definisikan dan gambarkan secara grafik dari pengertian-pengertian berikut:

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty, \quad \text{dan} \quad \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$$

Misalkan  $k \in \mathbb{N}$  maka

a.	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^k} = \infty$	
b.	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^k} = \begin{cases} \infty & n \text{ genap} \\ -\infty & n \text{ ganjil} \end{cases}$	<b>Buktikan!</b>

**Contoh:** Tentukan (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  (b)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x^2-5x+6}$

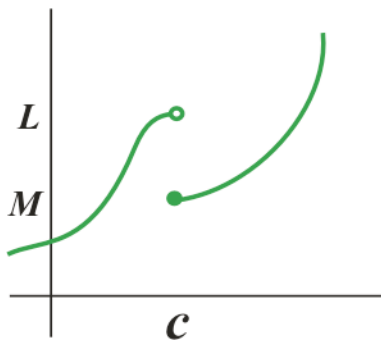
### **Pengertian Asimptot Tegak:**

Garis  $x = c$  disebut asimptot tegak dari fungsi  $f(x)$  jika memenuhi salah satu dari:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$       (b) atau  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \infty$
- (c)  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$       (d) atau  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty$

Pada contoh terakhir, tentukanlah asimptot-asimptot tegak dari fungsi ybs.

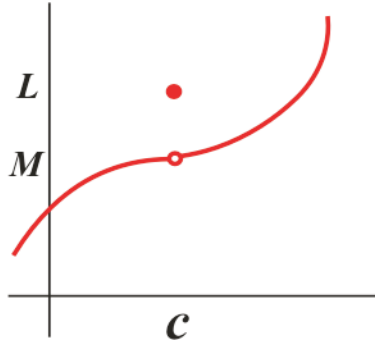
## Kekontinuan Fungsi



$$f(c) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \dots$$

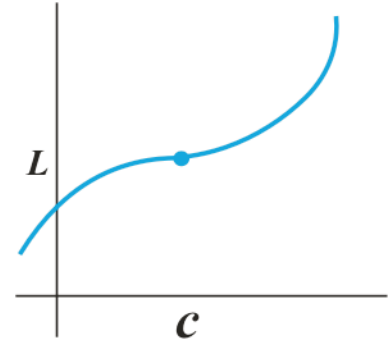
$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \dots$$



$$f(c) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \dots$$



$$f(c) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \dots$$

### Kekontinuan di satu titik:

Misalkan  $f(x)$  terdefinisi pada interval buka  $I$  dan  $c \in I$ . Fungsi  $f$  disebut kontinu di titik  $c$  jika

$$f(c) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \iff f(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$$

**Contoh:** Misalkan  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ 5 & x = 2 \end{cases}$

Periksa kekontinuan  $f$  dititik  $x = 2$ .

**Akibat:** Bila  $f(x)$  kontinu di  $c$  maka  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow c} x)$

### Kekontinuan sepihak:

- Fungsi  $f$  disebut kontinu kiri di  $x = c$  bila  $f(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$
- Fungsi  $f$  disebut kontinu kanan di  $x = c$  bila  $f(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$

Pada ketiga ilustrasi di halaman 29, tentukan fungsi yang kontinu sepihak.

## Kekontinuan pada interval:

- Fungsi  $f$  disebut kontinu pada interval buka  $(a, b)$  bila  $f$  kontinu di setiap titik pada  $(a, b)$
- Fungsi  $f$  disebut kontinu pada interval tutup  $[a, b]$  bila  $f$  kontinu pada  $(a, b)$ , kontinu kanan di  $a$  dan kontinu kiri di  $b$ .

## Sifat-sifat:

1. Suatu polinom  $p(x)$  kontinu pada seluruh  $\mathbb{R}$ .
2. Fungsi rasional  $\left(\frac{p(x)}{q(x)}, p(x) \text{ dan } q(x) \text{ polinom}\right)$ , kontinu pada seluruh daerah definisinya.
3. Fungsi  $f(x) = |x|$  kontinu di seluruh  $\mathbb{R}$
4. Fungsi  $f(x) = \sqrt[n]{x}$  dengan  $n \in \mathbb{N}$  kontinu diseluruh daerah definisinya
5. Bila  $f$  dan  $g$  kontinu di titik  $c$  dan  $k \in \mathbb{R}$  maka:  
 $kf, f + g, f - g, fg, \frac{f}{g}$  dengan  $g(c) \neq 0, f^n$ , dan  $\sqrt[n]{f}$  kontinu di  $c$ .

## Soal-soal:

1. Sketsakan sebuah grafik fungsi yang memenuhi semua sifat berikut:
  - Daerah definisinya  $[-2, 4]$
  - $f(-2) = f(0) = f(1) = f(3) = f(4) = 1$
  - $f$  kontinu di seluruh  $D_f$  kecuali di  $-2, 0, 3$
  - $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$ , dan  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 1$
2. Tentukan  $a$  dan  $b$  agar  $f(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 0 \\ ax + b & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$  kontinu di  $\mathbb{R}$ .

## Kekontinuan fungsi komposisi:

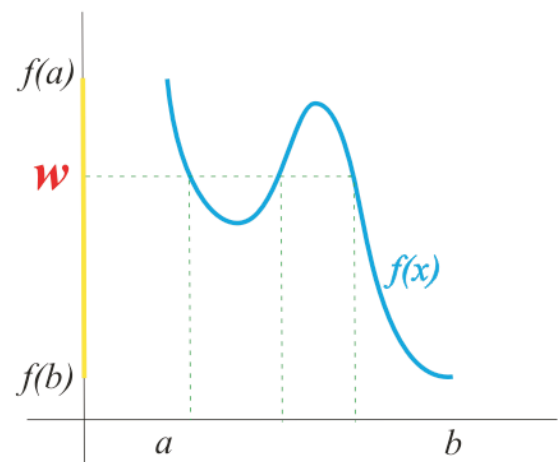
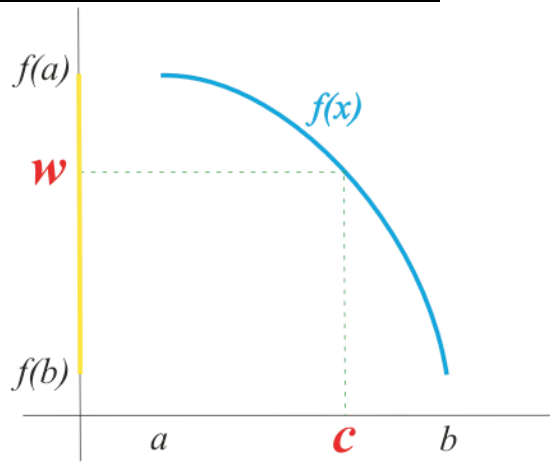
Misalkan  $f$  dan  $g$  fungsi<sup>2</sup> real.

Bila  $f$  kontinu di  $c$  dan  $g$  kontinu di  $f(c)$  maka  $g \circ f$  kontinu di  $c$ .

**Akibat:**  $\lim_{x \rightarrow c} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow c} f(x)\right)$  mengapa ?

**Contoh:** Dengan sifat di atas, tunjukkan  $h(x) = |x^2 - 3x|$  kontinu di  $\mathbb{R}$ .

## Teorema Nilai Antara:



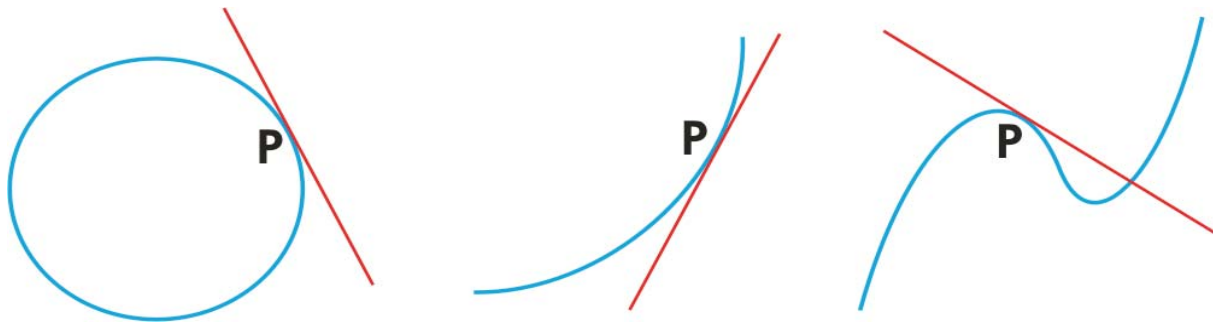
Misalkan  $f$  kontinu pada  $[a, b]$ . Bila  $w$  bilangan diantara  $f(a)$  dan  $f(b)$ , maka terdapat bilangan  $c \in [a, b]$  sehingga  $f(c) = w$

**Diskusi:** Bila  $f$  tak kontinu, apakah sifat di atas masih berlaku ?

**Contoh<sup>2</sup>:**

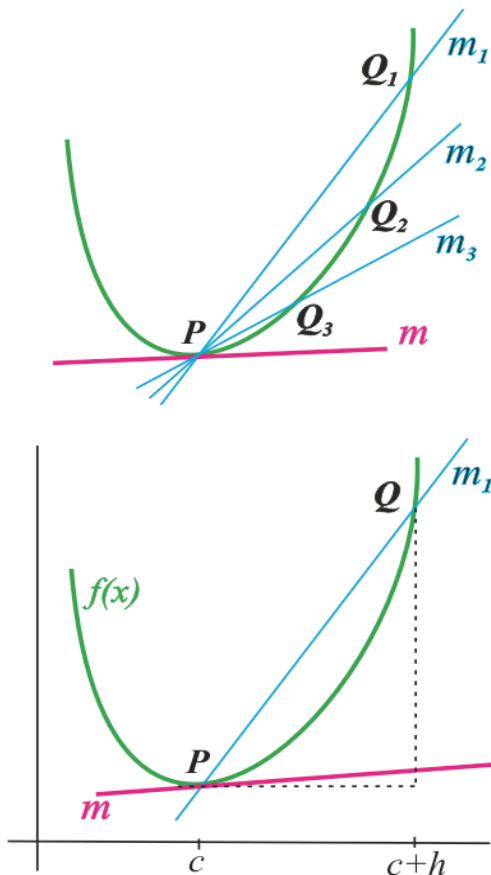
1. Tunjukkan  $p(x) = x^3 + 3x - 2$  mempunyai akar real diantara 0 dan 1.
2. Tunjukkan  $p(x) = x^5 + 4x^3 - 7x + 14$  mempunyai paling sedikit satu akar real.
3. Misalkan  $f$  kontinu pada  $[0, 1]$  dengan  $0 \leq f(x) \leq 1$ . Tunjukkan  $f$  mempunyai titik tetap. (titik tetap adalah titik  $c$  yang bersifat  $f(c) = c$ )
4. Tunjukkan selalu terdapat dua titik pada cincin kawat melingkar yang temperaturnya sama. (petunjuk gambarkan cincin pada koordinat kartesius dengan pusatnya di titik  $(0,0)$  dan bentuk  $f(\theta)$  sebagai fungsi temperaturnya).
5. Pada pukul Pk 4.00 seorang biarawan secara perlahan mendaki gunung dan tiba dipuncaknya pada sore hari. Keesokan harinya dia menuruni gunung tersebut mulai Pk 5.00 dan tiba di bawah Pk 11.00. Tunjukkan bahwa ada titik pada jalan yang dilaluinya yang menunjukkan waktu yang sama saat naik dan turun.

## Turunan : (Konsep Garis Singgung)



Perhatikan sebuah titik  $P$  yang terletak pada sebuah kurva di bidang kartesius. Apakah yang dimaksudkan dengan garis singgung di titik  $P$  ?

Euclides memberi gagasan garis singgung adalah garis yang memotong kurva tersebut di satu titik, tetapi bgm dengan kurva ketiga di atas ?



Untuk mendefinisikan pengertian garis singgung secara formal, perhatikanlah gambar di samping kiri. Garis talibusur  $m_1$  menghubungkan titik  $P$  dan  $Q_1$  pada kurva. Selanjutnya titik  $Q_1$  kita gerakkan mendekati titik  $P$ . Saat sampai di posisi  $Q_2$ , talibusurnya berubah menjadi garis  $m_2$ . Proses ini diteruskan sampai titik  $Q_1$  'berimpit' dengan titik  $P$ , dan garis talibusurnya menjadi garis singgung  $m$ .

Agar fenomena ini dapat dirumuskan secara matematis, perhatikan kembali gambar disebelah kiri. Kemiringan garis talibusur yang melalui  $P$  dan  $Q$  adalah:


$$m_{\text{sec}} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Kemiringan garis singgung di titik  $P = (c, f(c))$  didefinisikan sebagai:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} m_{\text{sec}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$



## Masalah kecepatan sesaat:



0	Perhatikan sebuah benda yang jatuh bebas. Hasil percobaan menunjukkan posisinya setiap saat $S(t) = 16t^2$ .				
16	Ingin diketahui berapa kecepatannya saat $t = 1$ ?				
	$t_1$	$t_2$	$S(t_1)$	$S(t_2)$	$V_{\text{rata-rata}} = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1}$
32	1	2	16	64	$\frac{64-16}{2-1} = 48$
48	1	1,5	16	36	$\frac{36-16}{1,5-1} = 40$
	1	1,1	16	19,36	$\frac{19,36-16}{1,1-1} = 33,6$
64	1	1,01	16	16,3216	$\frac{16,3216-16}{1,01-1} = 32,16$
	1	1,001	16	16,032016	$\frac{16,032016-16}{1,001-1} = 32,016$

Dengan tabel di atas kita hanya dapat menghitung kecepatan rata-rata antara  $t = 1$  dan  $t = 1 + \Delta t$ , tetapi yang ingin dihitung adalah *kecepatan sesaat* pada  $t = 1$ . Untuk itu kita definisikan kecepatan sesaat tersebut sebagai berikut:

$$V = V_{\text{sestaat}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} V_{\text{rata-rata}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

Perhatikan kembali rumus garis singgung dan bandingkan dengan rumus kecepatan sesaat. Keduanya mempunyai rumusan matematika yang sama. Pada kehidupan sehari-hari, asih banyak sekali masalah-masalah fisis yang mempunyai model matematika yang sama dengan rumus di atas. Untuk itu, dalam matematika diperkenalkan konsep baru yang disebut **turunan**.

## Definisi turunan:

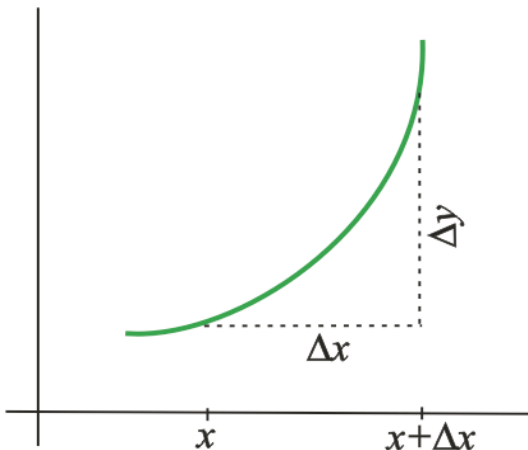
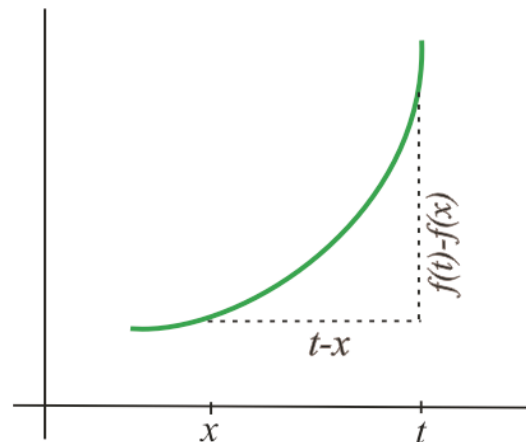
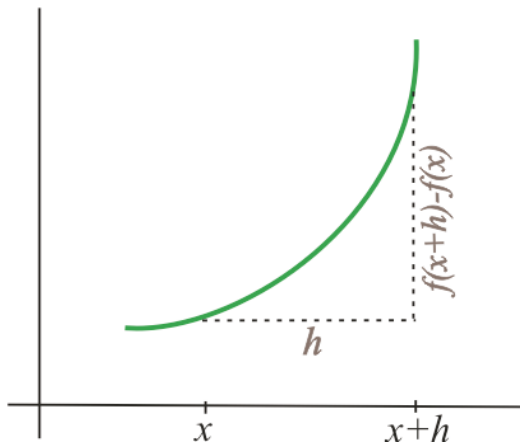
Misalkan  $f$  sebuah fungsi real dan  $x \in D_f$ .

Turunan dari  $f$  di titik  $x$ , ditulis  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

**Soal<sup>2</sup>:** (dikerjakan hanya dengan definisi turunan).

1. Cari kemiringan garis singgung terhadap  $y = x^2 - 2x$  di titik  $(2, 0)$ .
2. Seekor bakteri berkembang sehingga beratnya setelah  $t$  jam adalah  $\frac{1}{2}t^2 + 1$  gram. Berapa laju perkembangannya pada saat  $t = 2$  jam ?
3. Massa sepotong kawat (1 dimensi) yang panjangnya sejauh  $x$  cm dari ujung kirinya adalah  $x^3$  gram. Berapa rapat massanya pada posisi 3 cm dari ujung kirinya?

**Notasi-notasi lain untuk turunan:**



$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

**Notasi Leibniz:**

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

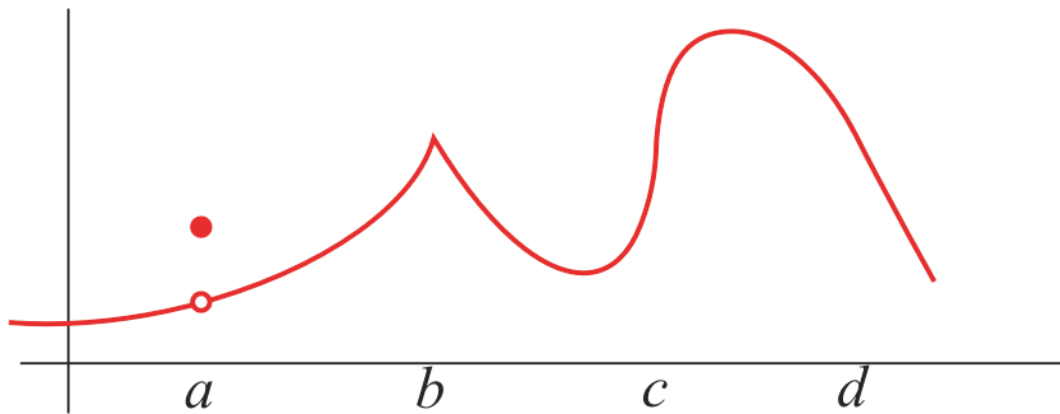
Simbol-simbol berikut mempunyai arti yang sama:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = D[f] = D_x[f]$$

### Hubungan turunan dan kekontinuan:

Bila  $f'(c)$  ada maka  $f(x)$  kontinu di  $x = c$ .

Fungsi  $f(x) = |x|$  telah diketahui diseluruh  $\mathbb{R}$ . Dengan memakai definisi turunan, periksa apakah  $f'(0)$  ada, lalu simpulkan kebalikan sifat di atas.



Perhatikan grafik di atas, lalu tentukan apakah  $f(x)$  kontinu / mempunyai turunan di titik-titik  $a, b, c$  dan  $d$ . (beri penjelasan !)

### Aturan-aturan Turunan:

- Misalkan  $k$  suatu konstanta, maka  $D_x[k] = 0$  (buktikan !)
- $D_x[x] = 1$
- Misalkan  $n \in \mathbb{N}$  maka  $D_x[x^n] = n x^{n-1}$  (buktikan !)
- Misalkan  $k$  suatu konstanta, maka  $D_x[k f(x)] = k D_x[f(x)]$
- $D_x[(f \pm g)(x)] = D_x[f(x)] \pm D_x[g(x)]$
- $D_x[(fg)(x)] = D_x[f(x)] g(x) + f(x) D_x[g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $D_x[\left(\frac{f}{g}\right)(x)] = \frac{D_x[f(x)]g(x) - f(x)D_x[g(x)]}{(g(x))^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
- Misalkan  $n \in \mathbb{N}$  maka  $D_x[x^{-n}] = -n x^{-n-1}$

## Aturan Turunan Fungsi Trigonometri:

- $D_x[\sin x] = \cos x$  (buktikan !)
- $D_x[\tan x] = \sec^2 x$
- $D_x[\sec x] = \sec x \tan x$
- $D_x[\cos x] = -\sin x$
- $D_x[\cot x] = -\csc^2 x$
- $D_x[\csc x] = -\csc x \cot x$

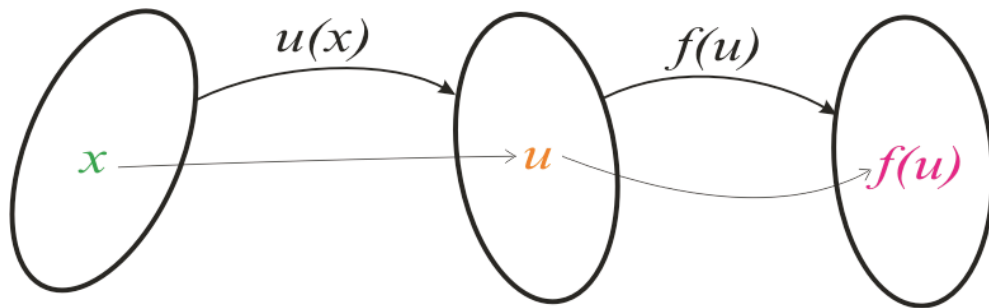
## Soal-soal:

1. Tentukan turunan dari fungsi-fungsi berikut
  - a.  $f(x) = \sqrt{2x^2}$
  - b.  $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+1}$
2. Cari persamaan garis singgung terhadap  $y = \frac{1}{x^2+1}$  di titik  $(1, \frac{1}{2})$
3. Tentukan titik<sup>2</sup> pada grafik  $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x$  yang kemiringan garis singgungnya bernilai 1
4. Tentukan pers. garis singgung pada  $y = 4x - x^2$  yang melalui  $(2, 5)$ .
5. Seekor lalat merayap dari kiri ke kanan sepanjang kurva  $y = 7 - x^2$ . Seekor laba-laba menunggu di titik  $(4, 0)$ . Tentukan jarak antara keduanya pada saat pertama kali saling melihat.
6. Tunjukkan kurva  $y = \sqrt{2}\sin x$  dan  $y = \sqrt{2}\cos x$  berpotongan tegak lurus pada  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

**Aturan Rantai :** (*untuk menentukan turunan fungsi komposisi*).

Masalah: Misalkan  $f = f(u)$  dan  $u = u(x)$ , bagaimanakah menghitung  $\frac{df}{dx}$

Ilustrasi:  $f(u) = \sin^2(u)$  dan  $u = x^3 - 2x + 1$ . Berapakah  $\frac{df}{dx}$



Misalkan  $f = f(u)$  dan  $u = u(x)$  maka  $\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \frac{du}{dx} = D_u[f] D_x[u]$

**Contoh:** Tentukan  $D_x[\sin(x^3 - 3x)]$ .

Pandang  $y = \sin(u)$  dengan  $u = x^3 - 3x$ , maka

$$\begin{aligned} D_x[\sin(x^3 - 3x)] &= D_x[y] = D_u[y] D_x[u] \\ &= \cos(u) (3x^2 - 3) = \cos(x^3 - 3x) (3x^2 - 3) \end{aligned}$$

Aturan rantai bersusun: Misalkan  $f = f(u)$ ,  $u = u(v)$ , dan  $v = v(x)$

maka  $\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx} = D_u[f] D_v[u] D_x[v]$

**Contoh:** Tentukan  $D_x[\sin^3(x^3 - 3x)]$ .

Pandang  $y = u^3$ ,  $u = \sin(v)$ , dan  $v = x^3 - 3x$ , maka

$$\begin{aligned} D_x[\sin^3(x^3 - 3x)] &= D_x[y] = D_u[y] D_v[u] D_x[v] \\ &= 3u^2 \cos(v) (3x^2 - 3) \\ &= 3 \sin^2(x^3 - 3x) \cos(x^3 - 3x) (3x^2 - 3) \end{aligned}$$

**Hati<sup>2</sup> dengan notasi  $f'$ :**

Mis.  $f = f(u)$  dan  $u = u(x)$ , maka notasi  $f'$  berarti  $\frac{df}{du}$ , bukan  $\frac{df}{dx}$ .

Ilustrasi:  $f(x^2) = \sin(x^2)$ .

Disini  $u = x^2$  dan  $f' = \cos(x^2)$ , tetapi  $\frac{df}{dx} = \cos(x^2) 2x$

**Soal-soal:**

1. Tentukan turunan dari fungsi-fungsi berikut:

a.  $y = \left(\frac{x^2-1}{x+4}\right)^4$

d.  $y = \sin^3(\cos x^3)$

b.  $y = \left(\frac{\sin x}{\cos(2x)}\right)^3$

e.  $y = \sin(\cos^2 x^3)$

c.  $y = \sin^3(\cos x)$

f.  $y = \sin(\cos(\sin 2x))$

2. Sisi sebuah kubus bertambah dengan laju 16 cm/menit.

a. Cari laju pertambahan volumenya pada saat sisinya 20 cm.

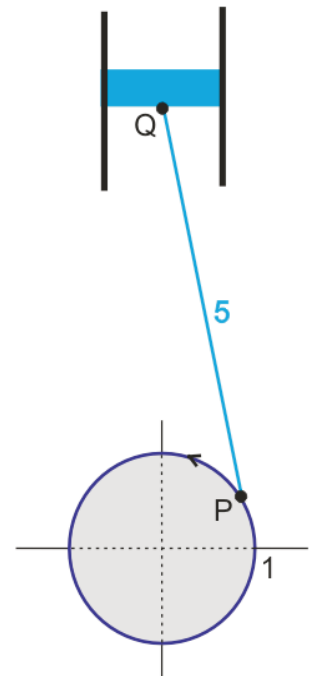
b. Cari laju perubahan luas permukaannya saat sisinya 15 cm

3. Perhatikan gambar roda-piston di samping. Roda berputar berlawanan jarum jam dengan laju 2 rad/detik. Pada saat  $t = 0$ , P berada di posisi  $(1, 0)$ .

- Tentukan kedudukan titik P setiap saat.
- Tentukan ordinat dari titik Q setiap saat.
- Tentukan kecepatan gerak titik Q.

4. Dua buah kapal bertolak dari titik yang sama. Kapal A bergerak ke timur dengan laju 20 km/jam. Kapal B bergerak ke utara dengan laju 12 km/jam. Seberapa cepat mereka berpisah setelah 3 jam?

5. Garis singgung terhadap kurva  $y = x^2 \cos(x^2)$  di  $x = \sqrt{\pi}$  akan memotong sumbu- $x$  di posisi berapa?



## Turunan tingkat tinggi:

Misalkan  $f(x)$  sebuah fungsi dan  $f'(x)$  turunan pertamanya.

Turunan kedua dari  $f$  adalah  $f''(x) = D_x^2[f] = \frac{d^2 f}{dx^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$

Dengan cara yang sama turunan ketiga, keempat dst. diberi notasi:

$$f'''(x) = D_x^3[f] = \frac{d^3 f}{dx^3}, \quad f^{(4)}(x) = D_x^4[f] = \frac{d^4 f}{dx^4}, \quad \dots$$

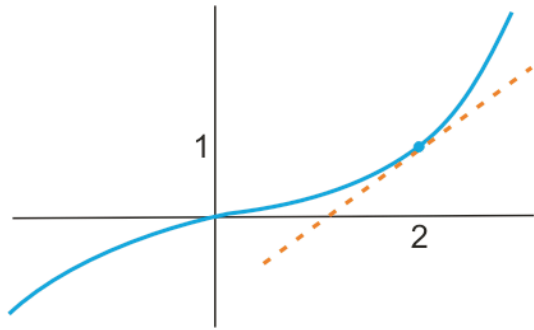
Salah satu penggunaan turunan tingkat tinggi adalah pada masalah gerak partikel. Bila  $S(t)$  menyatakan posisi sebuah partikel, maka kecepatannya adalah  $v(t) = S'(t)$  dan percepatannya  $a(t) = v'(t) = S''(t)$ .

**Contoh:** 1. Sebuah partikel bergerak sepanjang sumbu- $x$  dengan posisi tiap saat  $S(t) = t^3 - 12t^2 + 36t - 30$ .

- Kapan kecepatannya nol?
- Kapan kecepatannya positif?
- Kapan dia bergerak mundur?
- Kapan percepatannya positif?
- Ilustrasikan gerak partikel tersebut

2. Cari rumus umum turunan ke  $n$  dari  $y = \frac{1}{1-x}$ .

## Pendiferensialan Implisit:



Perhatikan grafik dari  $y^3 + 7y = x^3$ . Akan dicari persamaan garis singgungnya yang melalui titik  $(2, 1)$ . Masalah: bagaimana mencari  $\frac{dy}{dx}$  dari persamaan tersebut ?

Sebuah fungsi dikatakan berbentuk *implisit* bila berbentuk  $F(x, y) = 0$ .

Pada bentuk ini, variabel  $x$  dan  $y$  tercampur dalam suatu ekspresi.

Contoh: (a.)  $y^3 + 7y - x^3 = 0$     (b.)  $\sin(xy) + xy^3 - 5 = 0$

**Prinsip:** Perhatikan bentuk implisit  $F(x, y) = 0$ . Untuk mencari  $\frac{dy}{dx}$ , turunkan kedua ruas terhadap  $x$  dengan mengingat bahwa  $y = y(x)$ .

Untuk mencari  $\frac{d^2y}{dx^2}$ , kita pandang turunan pertama sebagai  $G(x, y, y')$ , lalu turunkan terhadap  $x$  dengan mengingat  $y = y(x)$  dan  $y' = y'(x)$ .

### Soal-soal:

1. Carilah  $\frac{dy}{dx}$  dan  $\frac{d^2y}{dx^2}$  dari

a.  $y^3 + 7y - x^3 = 0$

c.  $y = \sqrt{\sin(xy^2)}$

b.  $x^3y^4 - 1 = 0$

d.  $\frac{y^2}{x^3} - 1 = y^{\frac{3}{2}}$

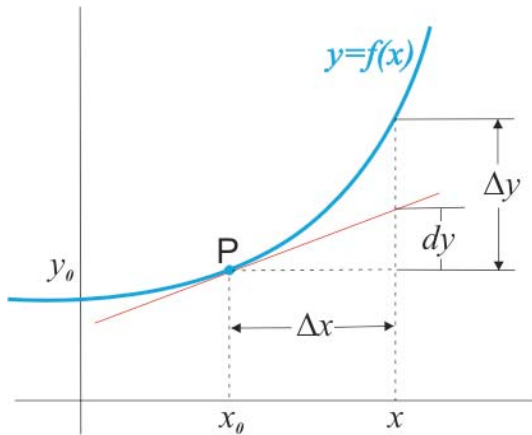
2. Tentukan persamaan garis singgung dan *garis normal* (garis yang  $\perp$  thd garis singgung) terhadap  $y^3 - xy^2 + \cos(xy) = 2$  di titik  $(0, 1)$ .

3. Tunjukkan hiperbola<sup>2</sup>  $xy = 1$  dan  $x^2 - y^2 = 1$  berpotongan  $\perp$ .

**Sifat:** Bila  $r \in \mathbb{Q}$  maka  $D_x[x^r] = r x^{r-1}$  (buktikan!)

## Diferensial dan Aproksimasi:

Pikirkan: Bagaimanakah orang menghitung nilai  $\sin(31^0)$ ,  $\sqrt{4,1}$  dll ?  
Apakah data yang ada di tabel<sup>2</sup> nilainya *eksak*?



Perhatikan grafik di samping kiri.

Koordinat titik  $P = (x_0, y_0)$

$x_0, x \in D_f$ . Sebut  $\Delta x = x - x_0$ .

Diferensial dari variabel/peubah bebas  $x$ ,

$$dx = \Delta x = x - x_0$$

sedangkan  $\Delta y = f(x) - f(x_0)$

Diferensial dari *peubah tak bebas*  $y$  adalah:  $dy = f'(x_0) dx$

Amati dan pahami arti geometri (lihat gambar) dari pengertian<sup>2</sup> tersebut!

Secara geometri kita lihat bila titik  $x_0$  dan  $x$  semakin dekat maka perbedaan  $\Delta y$  dan  $dy$  akan semakin kecil. Hal ini mendasari hampiran berikut:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y \approx dy = f'(x_0) dx$$

**Contoh:** Tentukan  $\sqrt{3,9}$  dengan menggunakan hampiran diferensial.

Bentuk  $f(x) = \sqrt{x}$  dan tetapkan  $x_0 = 4$ .

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ jadi } f'(x_0) = f'(4) = \frac{1}{4}$$

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\text{Pada } x = 3,9 \text{ diperoleh } \sqrt{3,9} = f(3,9) \approx f(4) + f'(4)(3,9 - 4)$$

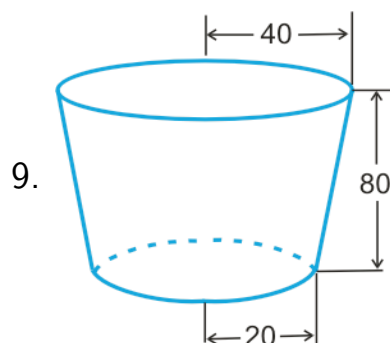
$$\sqrt{3,9} \approx 2 - \frac{1}{4}(-0,1) = 1,975$$

**Perhatikan:** Pada hampiran diferensial titik  $x_0$  selalu dipilih supaya nilai  $f(x_0)$  mudah dihitung.



### Soal-Soal:

- Gunakan hampiran diferensial untuk menaksir nilai  $\sin(\frac{31}{180}\pi)$ .
- Dari pengukuran diperoleh rusuk sebuah kubus 11,4 cm dengan galat/ kesalahan  $\pm 0,05$  cm Hitung volume kubus dan taksir kesalahannya.
- Limit berikut merupakan suatu turunan. Tentukan fungsi asalnya dan turunannya (menggunakan aturan turunan).
  - $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(2+h)^2 - 2(2)^2}{h}$
  - $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\tan(\frac{\pi}{4} + \Delta x) - 1}{\Delta x}$
  - $\lim_{p \rightarrow x} \frac{3/p - 3/x}{p - x}$
  - $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$
- Gambarkan sebuah fungsi  $f$  yang memenuhi semua kriteria berikut:
  - Daerah definisinya  $D_f = [-2, 3]$
  - $f(-2) = f(-1) = f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = 1$
  - $f$  kontinu di  $D_f$  kecuali di  $-2, -1, 1$
  - $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$ , dan  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$
  - $f$  tidak memiliki turunan di 0 dan 2.
- Sebuah kotak baja berbentuk kubus, tebal dindingnya 0,25 cm dan volumenya 40 cm<sup>3</sup>. Gunakan diferensial untuk mengaproksimasi volume bahannya.
- Sebuah bak berbentuk kerucut terbalik diisi air dengan laju 8 dm<sup>3</sup>/menit. Bila tinggi kerucut 12 dm dan jari-jari atasnya 6 dm, tentukan laju permukaan air naik pada saat tinggi air 4 dm.
- Pada tengah hari, sebuah pesawat terbang ke utara melewati kota Bandung dengan kecepatan 640 km/jam. Pesawat kedua bergerak ke timur dan melintasi Bandung 15 menit kemudian. Bila keduanya terbang dengan ketinggian yang sama, seberapa cepat mereka berpisah pada saat Pk 13.15
- Sebuah tongkat panjang 20 dm bersandar di dinding. Ujung bawah tongkat ditarik sepanjang lantai menjauhi dinding dengan kecepatan 2 dm/detik. Pada saat ujung bawahnya berjarak 4 dm dari dinding, seberapa cepat ujung tangga atas bergeser menuruni dinding.



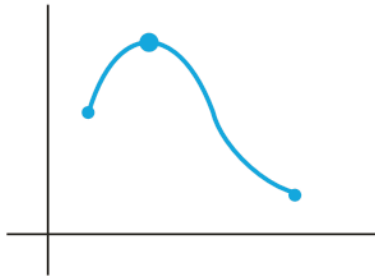
Tangki di sebelah kiri (ukuran dalam dm) diisi air dengan laju 2 liter/menit. Seberapa cepat permukaan air naik pada saat tinggi air 30 cm ?  
*Petunjuk: Tunjukkan volume air pada kerucut terpotong dengan jari-jari alas  $a$ , jari-jari atas  $b$  dan tinggi  $h$  adalah  $V = \frac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2)$*

## Maksimum & Minimum Nilai Fungsi:

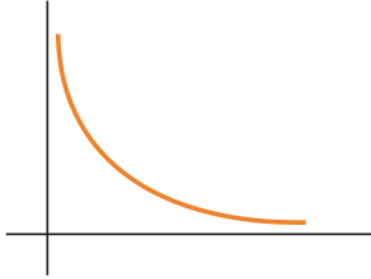
Misalkan  $f$  sebuah fungsi dengan daerah definisi  $D_f$  dan  $c \in D_f$ .

- $f$  disebut mencapai maksimum di  $c$  bila  $f(c) \geq f(x) \forall x \in D_f$  dan  $f(c)$  disebut nilai maksimum.
- $f$  disebut mencapai minimum di  $c$  bila  $f(c) \leq f(x) \forall x \in D_f$  dan  $f(c)$  disebut nilai minimum.

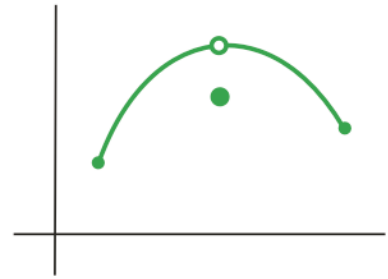
Titik di mana  $f$  mencapai maksimum/minimum disebut *titik ekstrim*.



maksimum ada ☐  
minimum ada ☐



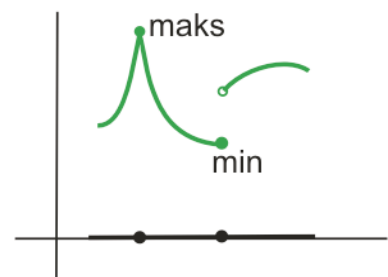
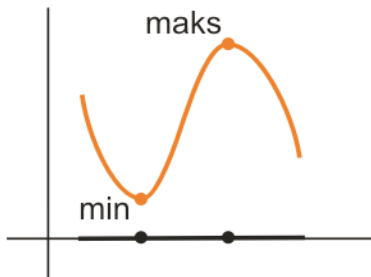
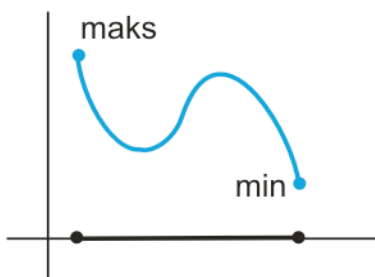
maksimum ada ☐  
minimum ada ☐



maksimum ada ☐  
minimum ada ☐

Bila  $f$  kontinu dan  $D_f$  berupa selang tutup  $[a, b]$  maka  $f$  mempunyai titik mempunyai titik maksimum dan minimum

Grafik berikut menggambarkan kemungkinan tempat terjadinya ekstrim.



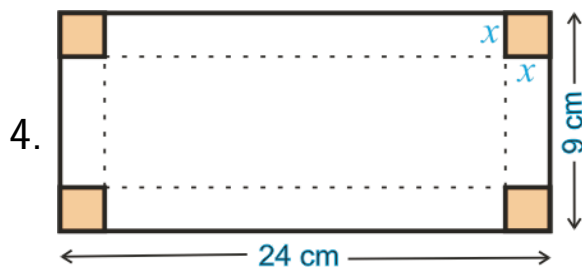
**Tempat-tempat kemungkinan terjadinya ekstrim (calon ekstrim):**

- Titik ujung interval
- Titik stasioner (titik dengan sifat  $f'(x) = 0$ ).
- Titik singular (titik di mana  $f$  tidak mempunyai turunan)

} Titik kritis

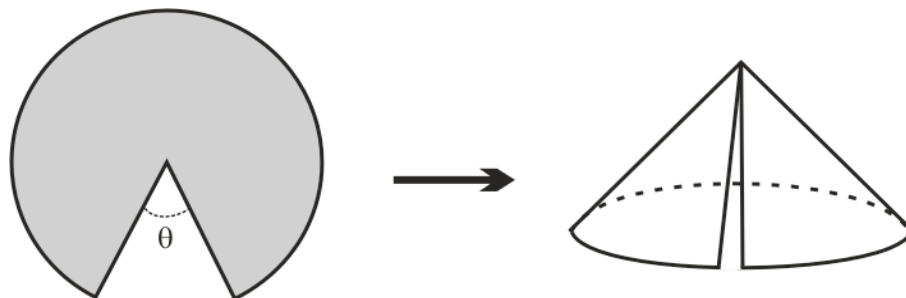
## Contoh<sup>2</sup>:

1. Tentukan titik<sup>2</sup> ekstrim dari fungsi-fungsi berikut:
  - a.  $f(x) = -2x^3 + 3x^2$  pada  $[-\frac{1}{2}, 2]$ .
  - b.  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$  pada  $[-1, 2]$ .
2. Carilah dua buah bilangan tak negatif yang jumlahnya 10 dan hasil kalinya maksimum.
3. Carilah bilangan yang bila dikurangi kuadratnya bernilai maksimum. (*bilangan tersebut berada diantara 0 dan 1, mengapa ?*).



Sebuah kotak persegipanjang dibuat dari selembar kertas dengan memotongnya sisi-sisinya sepanjang  $x$  cm dan melipatnya. Tentukan  $x$  supaya volumenya maksimum.

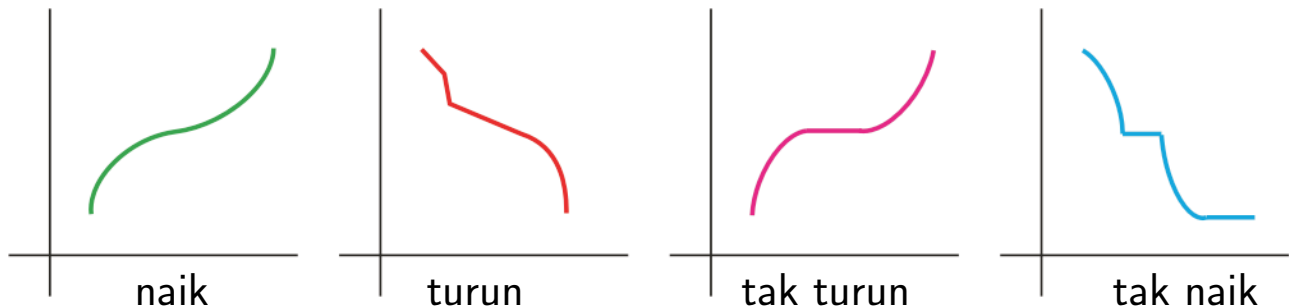
5. Kawat sepanjang 16 cm dipotong jadi dua bagian. Salah satu potongan dibentuk jadi bujur sangkar dan potongan lainnya dibuat jadi lingkaran. Berapa ukuran potongan tersebut agar:
  - a. jumlah seluruh luasnya minimum.
  - b. jumlah seluruh luasnya maksimum.
6. Sebuah kerucut dibuat dari potongan selembar lingkaran kertas berjari-jari 10 cm. Tentukan volume maksimum kerucut yang dapat dibuat.



## Kemonotonan Grafik Fungsi:

Misalkan  $f$  fungsi yang terdefinisi pada interval  $I$ .

- $f$  disebut monoton naik pada  $I$  bila  $\forall x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$
- $f$  disebut monoton turun pada  $I$  bila  $\forall x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$
- $f$  monoton tak turun pada  $I$  bila  $\forall x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
- $f$  monoton tak naik pada  $I$  bila  $\forall x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$



Perhatikan gambar kesatu dan kedua di atas, lalu pahami sifat berikut:

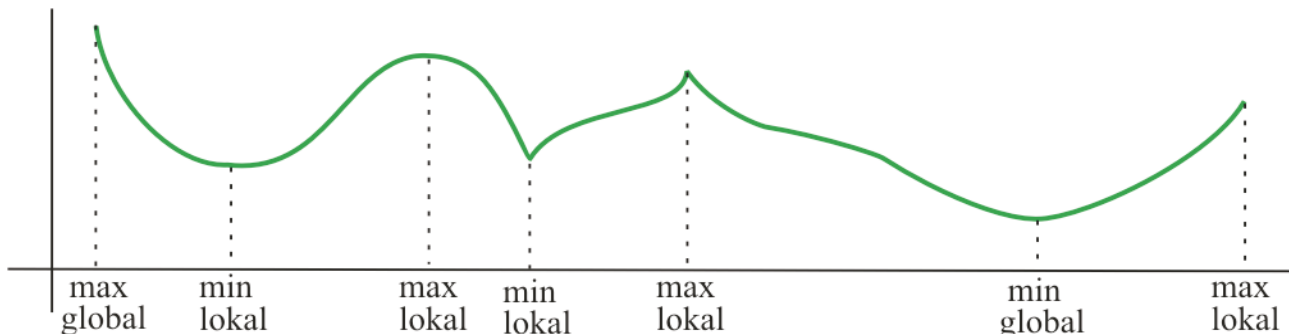
- Bila  $f'(x) > 0$  pada setiap  $x$  di interval  $I$  maka  $f$  naik.
  - Bila  $f'(x) < 0$  pada setiap  $x$  di interval  $I$  maka  $f$  turun.
- } **Jelaskan !**

**Contoh:** Tentukan daerah kemonotonan dari  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$

## Ekstrim Lokal:

Misalkan  $f$  sebuah fungsi dengan daerah definisi  $S$  dan  $c \in S$ .

$f$  dikatakan mencapai maksimum minimum lokal di  $c$  bila terdapat interval  $(a, b)$  yang memuat  $c$  sehingga  $f$  mencapai maksimum minimum di  $(a, b) \cap S$ .

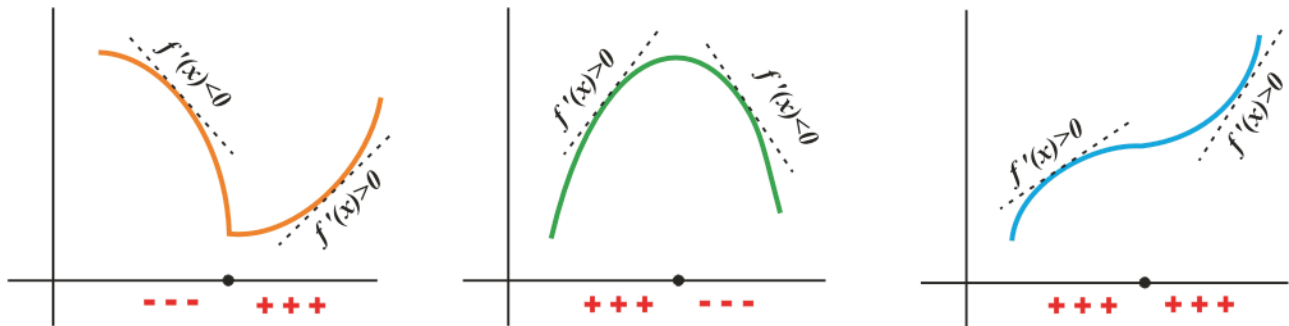


Seperti pada masalah ekstrim global, calon-calon ekstrim lokal adalah titik-titik kritis. Aturan berikut dipakai menentukan jenis titik kritis:

**Pengujian ekstrim lokal:** Mis. fungsi  $f$  kontinu pada interval buka  $(a, b)$  yang memuat titik kritis  $c$ .

- Bila tanda  $f'(x)$  berubah dari negatif ke positif *disekitar*  $c$ , maka  $c$  titik minimum lokal
- Bila tanda  $f'(x)$  berubah dari positif ke negatif *disekitar*  $c$ , maka  $c$  titik maksimum lokal
- Bila tanda  $f'(x)$  dikiri dan kanan  $c$  sama dan  $\neq 0$ , maka  $c$  bukan titik ekstrim lokal

Perhatikan  
ilustrasi  
grafik  
di bawah



**Diskusi:** Apakah titik ekstrim global termasuk ekstrim lokal ?

**Contoh:** Tentukan titik-titik ekstrim lokal dari  $f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$

**Uji turunan kedua untuk ekstrim lokal:**

Mis.  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  ada pada  $(a, b)$  yang memuat  $c$  dan  $f'(c) = 0$ , maka:

- bila  $f''(c) < 0$  maka  $c$  adalah titik maksimum lokal.
- bila  $f''(c) > 0$  maka  $c$  adalah titik minimum lokal.

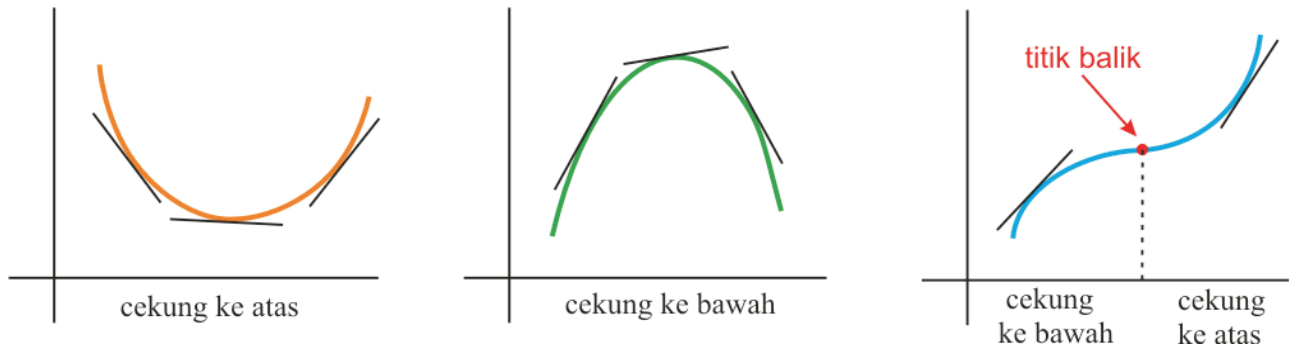
$\Rightarrow$  Uji terakhir ini kurang berguna karena hanya berlaku untuk titik stasioner

**Contoh:** Tentukan titik-titik ekstrim lokal dari  $f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$

## Kecekungan dan Titik Balik/Belok:

Misalkan  $f$  fungsi yang terdiferensialkan pada interval  $I$  yang memuat  $c$ .

- $f$  disebut cekung ke atas bila  $f'$  monoton naik.
- $f$  disebut cekung ke bawah bila  $f'$  monoton turun.
- Titik  $c$  disebut titik balik/belok bila terjadi perubahan kecekungan di kiri dan kanan  $c$ .



**Pengujian kecekungan:** Mis. fungsi  $f$  terdiferensial dua kali pada interval buka  $(a, b)$ .

- Bila  $f''(x) > 0$  maka  $f$  cekung ke atas.
  - Bila  $f''(x) < 0$  maka  $f$  cekung ke bawah.
- } **Buktikan !**

**Contoh:** Tentukan kecekungan dan titik balik dari

(b)  $f(x) = x^3$

(b)  $f(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$

(c)  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$

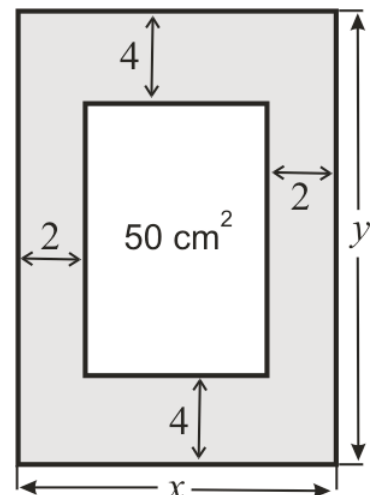
**Soal-soal:**

1. Cari (jika ada) titik-titik ekstrim dari

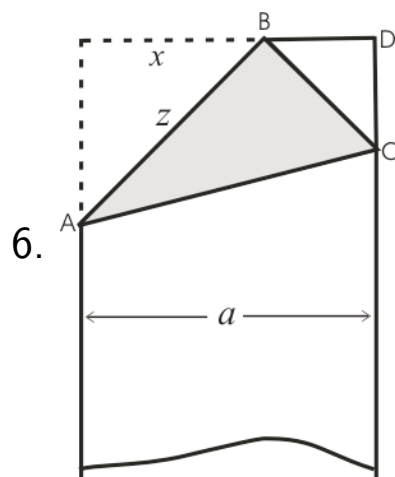
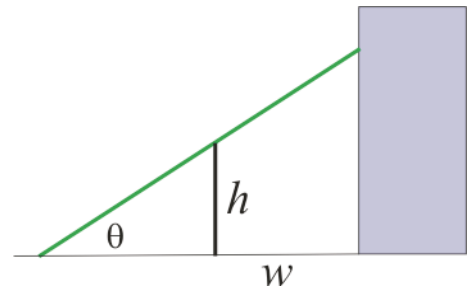
(a)  $f(x) = x^4 - 4x$

(b)  $f(x) = \frac{x}{x^3 + 2}$

2. Sebuah surat akan diketik pada kertas dengan batas-batas seperti pada gambar di samping. Bila luas tulisan  $50 \text{ cm}^2$ , Berapa ukuran  $x$  dan  $y$  supaya luas kertas semimumum mungkin.

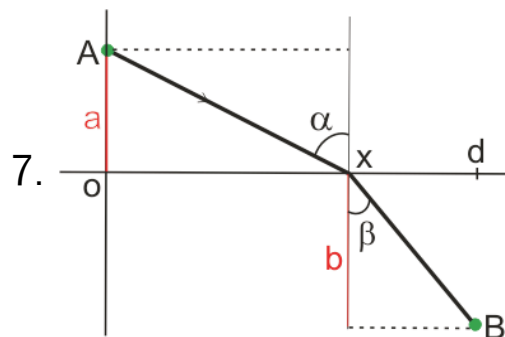


3. Anton berada di perahu dayung 2 km dari titik terdekat B pada sebuah pantai. Ia melihat rumahnya yang terletak di pantai, 6 km dari titik B, sedang terbakar. Bila Anton dapat mendayung dengan laju 6 km/jam dan berlari 10 km/jam, Tentukan jalur yang harus diambilnya supaya secepat mungkin sampai di rumah.
4. Tentukan ukuran sebuah tabung lingkaran tegak yang volumenya sebesar mungkin yang dapat ditempatkan di dalam sebuah kerucut berukuran tinggi  $a$  cm dan jari-jari alas  $b$  cm.
5. Pagar setinggi  $h$  meter berdiri sejajar sebuah gedung tinggi, sejauh  $w$  meter darinya. Tentukan panjang tangga terpendek yang dapat dicapai dari tanah di seberang puncak pagar ke dinding bangunan.



Secarik kertas berbentuk persegi panjang dengan lebar  $a$ , salah satu sudutnya dilipat seperti pada gambar di samping kiri. Tentukanlah  $x$  agar:

6.
  - (a) Luas segitiga BCD maksimum.
  - (b) Luas segitiga ABC minimum.
  - (c) panjang  $z$  minimum.

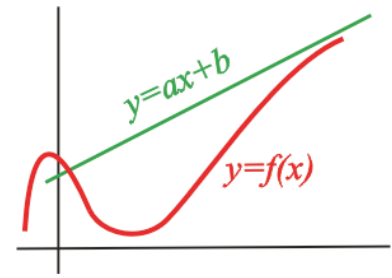


Prinsip Fermat dalam optik mengatakan bahwa cahaya melintas dari titik A ke B sepanjang jalur yang memerlukan waktu tersingkat. Misalkan cahaya melintas di medium satu dengan kecepatan  $c_1$  dan di medium kedua dengan kecepatan  $c_2$ . Perlihatkan bahwa  $\frac{\sin \alpha}{c_1} = \frac{\sin \beta}{c_2}$

Garis  $y = ax + b$  disebut **asimptot miring** terhadap fungsi  $f$  bila memenuhi salah satu dari:

(a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - (ax + b) = 0$  ilustrasi  $\rightarrow$

(b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$



### Menentukan asimptot miring:

- Hitung  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ , bila hasilnya takhingga atau nol maka asimptot miring tidak ada, bila berhingga dan tak nol maka hasilnya  $a$ .
- Hitung  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$ , bila hasilnya nol maka asimptot miring tidak ada, bila bukan nol maka hasilnya adalah  $b$ .
- Lakukan langkah (a) dan (b) untuk  $x \rightarrow -\infty$ .

$\Rightarrow$  Jelaskan mengenai prosedur di atas!

**Contoh:** Tentukan semua asimptot dari  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$

### Menggambar Grafik Fungsi:

Langkah-langkah menggambar grafik dari sebuah fungsi  $f$ :

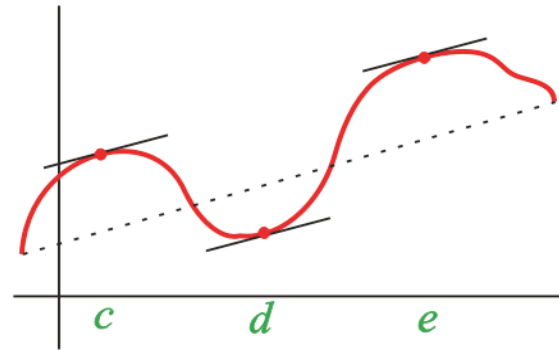
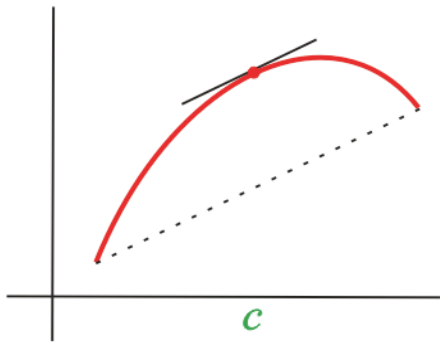
- Tentukan daerah definisinya
- Tentukan (jika mudah) perpotongan  $f$  dengan sumbu-sumbu koordinat
- Periksa kesimetrian grafik, apakah fungsi ganjil atau genap.
- Dengan uji turunan pertama, tentukan daerah kemonotonan dan titik-titik ekstrim lokal & global.
- Dengan uji turunan kedua, tentukan daerah kecekungan dan titik-titik baliknya.
- Tentukan asimptot-asimptot dari  $f$ .
- Sketsakan grafik  $f$ .



**Contoh:** Sketsakan grafik (a)  $\frac{f(x)=3x^5-20x^3}{32}$  (b)  $f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$

### Teorema Nilai Rata-Rata:

Misalkan  $f$  kontinu pada  $[a, b]$  dan terdiferensial di  $(a, b)$ , maka terdapat titik  $c \in (a, b)$  dengan sifat:  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  (lihat ilustrasi di bawah).



**Contoh:** Cari titik  $c$  yang memenuhi teorema nilai rata-rata terhadap:

(a)  $f(x) = 2\sqrt{x}$  pada  $[1, 4]$  (b)  $f(x) = x^{2/3}$  pada  $[-8, 27]$

### Soal-soal:

1. Tentukan limit-limit berikut:

a.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-2x}{x+5}$

b.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x\sqrt{x}+3x+1}{x^2-x+11}$

c.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}$

d.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}$

e.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{2x^2+3} - \sqrt{2x^2-5} \right)$

f.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x^3+1}{x^2-2x+2}$

g.  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3+x}{3-x}$

h.  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3+x}{3-x}$

j.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+\cos x}{\sin x}$

2. Tentukan asimtot-asimtot dari :

a.  $f(x) = \frac{2x}{x-3}$

b.  $f(x) = \frac{2x^4-3x^3-2x-4}{x^3-1}$

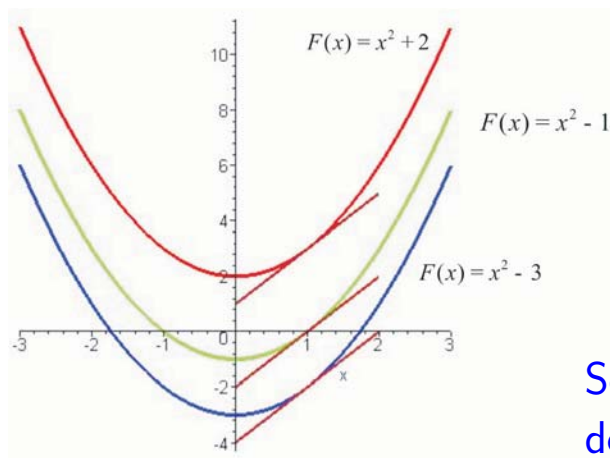
3. Buat sketsa grafik yang memenuhi semua kriteria berikut:

- $f$  kontinu diseluruh  $\mathbb{R}$
- $f(2) = -3, f(6) = 1$
- $f'(2) = 0, f'(x) > 0$  untuk  $x \neq 2, f'(6) = 3$
- $f''(6) = 0, f''(x) > 0$  untuk  $2 < x < 6, f''(x) < 0$  untuk  $x > 6$ .

4. Sketsakan grafik fungsi  $f(x) = \frac{4x}{x^2+2}$ .

5. Pak Pono berangkat Pk. 6.00 dari Bandung dan tiba di Jakarta Pk 9.00. Jarak tempuhnya adalah 180 km. Menurut pengamatan, speedometer kendaraannya selalu menunjukkan angka dibawah 60 km/jam. Tunjukan bahwa speedometer tersebut sudah tidak akurat lagi.

## Anti Turunan/Integral Tak Tentu



Diketahui fungsi  $F(x)$  dan turunannya

$F(x)$	$F'(x)$
$x^2 + 2$	$2x$
$x^2$	$2x$
$x^2 - 3$	$2x$

Secara umum jika  $F(x) = x^2 + c$ ,  
dengan  $c \in \mathbb{R}$ , berlaku  $F'(x) = 2x$

Pada bagian ini akan dipelajari proses kebalikan dari turunan.

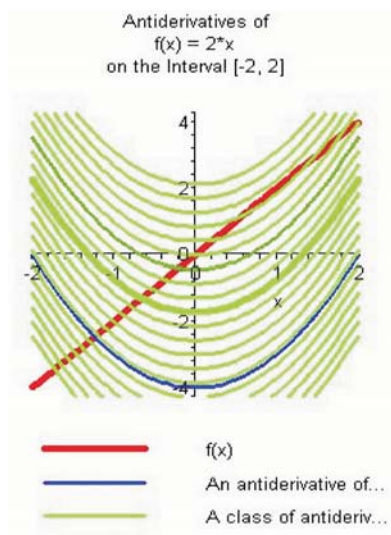
Diberikan  $F'(x) = x^2$ , tentukan aturan  $F(x)$ .

Dugaan kita:  $F(x) = x^2 + c$  dengan  $c$  sebarang bilangan real.

Apakah ada jawaban lain ?. Gunakan sifat berikut ini untuk menjawabnya:

**Sifat:** Misalkan  $F$  dan  $G$  dua buah fungsi dengan sifat  $F'(x) = G'(x)$  maka terdapat konstanta  $c$  sehingga  $F(x) = G(x) + c$

Fungsi  $F$  disebut anti turunan dari fungsi  $f$ ,  
dinotasikan  $A(f)$  atau  $\int f(x) dx$  bila  $F'(x) = f(x)$



Gambar di samping memperlihatkan anti turunan dari  $f(x) = 2x$  (kurva berwarna merah). Anti turunannya adalah  $f(x) = x^2 + c$  yaitu kurva-kurva berwarna hijau.

**Sifat-sifat:**

1. Misalkan  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $r \neq -1$  maka  $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$
  2. Misalkan  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $r \neq -1$  maka  $\int u^r u'(x) dx = \frac{u^{r+1}}{r+1} + c$
  3.  $\int \sin x dx = -\cos x + c$ ,  $\int \cos x dx = \sin x + c$
  4.  $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$
  - $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
  - $\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$
- } Sifat linear

**Contoh-contoh:** Tentukan anti turunan berikut

1.  $\int \left( \frac{4}{x^5} - \frac{3}{x^4} \right) dx$
2.  $\int \frac{4x^6 + 3x^5 - 8}{x^5} dx$
3.  $\int (5x^3 - 18)^7 15x^2 dx$
4.  $\int 3t \sqrt[3]{2t^2 - 1} dx$
5.  $\int \sin^{10} x \cos x dx$
6.  $\int |x| dx$

## Pengantar Persamaan Diferensial (PD):

Pada pasal sebelumnya kita telah mempelajari cara mencari sebuah fungsi bila diketahui turunannya. Sekarang kita akan memperluasnya.

Perhatikan masalah mencari fungsi  $y = F(x)$ , bila turunannya  $F'(x)$  diberikan. Masalah ini dapat dituliskan dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) \quad (1)$$

Bentuk ini dinamakan persamaan diferensial. Secara umum, **persamaan diferensial adalah persamaan yang melibatkan turunan fungsi.**

## Contoh<sup>2</sup> persamaan diferensial:

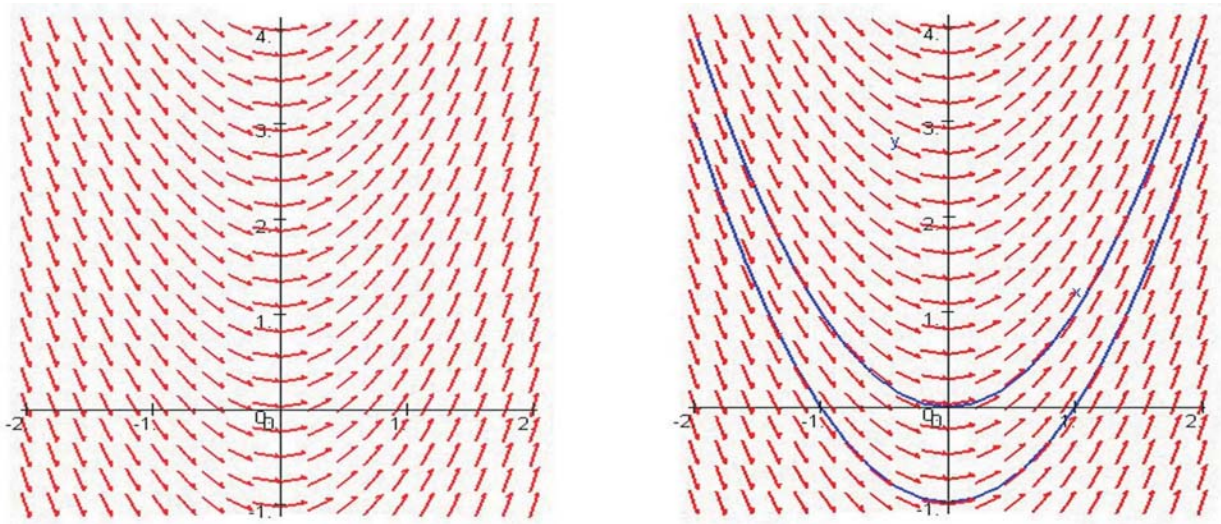
$$y' + 2xy = \sin(x) \qquad y'' + 3y' + 4y - \cos x = 2 \qquad y''' + 3x^2y' = 2y$$

Masalah: bagaimana mencari fungsi  $y = F(x)$  yang merupakan solusi PD tersebut.

Perhatikan kembali PD (1), solusinya adalah:

$$y = \int F'(x) dx = F(x) + c \qquad c \text{ bilangan real sebarang} \quad (2)$$

Secara geometris, masalah menyelesaikan persamaan diferensial  $\frac{dy}{dx} = F'(x)$  sama dengan masalah mencari lengkungan yang garis singgungnya di setiap titik sudah diberikan.



*Isoklin* (warna merah) dan beberapa kurva solusi (warna biru) dari  $\frac{dy}{dx} = 2x$ .

## Metode Pemisahan Variabel

Secara umum, tidak ada prosedur baku untuk mencari solusi persamaan diferensial. Untuk saat ini pembicaraan akan dibatasi pada persamaan diferensial yang sangat sederhana. Metode pencarian solusinya menggunakan **metode pemisahan variabel**. Prinsip dari metode ini adalah mengumpulkan semua suku yang memuat peubah  $x$  dengan  $dx$  dan yang memuat peubah  $y$  dengan  $dy$ , kemudian diintegrasikan.

**Contoh:** Tentukan solusi dari  $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3x^2}{y^2}$  yang melalui  $(0, 1)$

Jawab: Tulis sebagai  $y^2 dy = x + 3x^2 dx$

$$\int y^2 dy = \int x + 3x^2 dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{1}{2}x^2 + x^3 + c$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}x^2 + x^3 + c}$$

Syarat melalui (0,1) menghasilkan  $c = 1$ , jadi  $y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}x^2 + x^3 + 1}$

*Catatan: Solusi PD yang masih memuat konstanta sebarang disebut **solusi umum**, sedangkan yang sudah diberi syarat tertentu sehingga konstantanya bisa ditentukan, disebut **solusi khusus**.*

### Soal-soal:

1. Tunjukkan fungsi yang diberikan merupakan solusi PD ybs:
  - a.  $y = \sqrt{4 - x^2}$ ,  $\frac{dy}{dx} + \frac{x}{y} = 0$
  - b.  $y = A \cos x + B \sin x$ ,  $y'' + y = 0$
2. Dari sebuah gedung yang tingginya 100 m, sebuah bola dilempar tegak lurus ke atas dengan kecepatan 200 m/det. Setelah meluncur ke atas, bola jatuh ke tanah. Bila percepatan gravitasi  $g$  m/det<sup>2</sup>,
  - Cari kecepatan dan posisinya 4 detik kemudian ?
  - Berapa tinggi maksimum yang dicapai bola ?
  - Berapa waktu yang dibutuhkan sampai mencapai tanah ?
3. Cari persamaan- $xy$  dari kurva yang melalui (-1,2) dan kemiringannya dua kali absisnya.
4. Cari persamaan- $xy$  dari kurva yang melalui (1,2) dan kemiringannya pada setiap titik adalah setengah kuadrat ordinatnya.
5. Dapatkah PD  $y' + x^2y - \sin(xy) = 0$  diselesaikan dengan metode pemisahan variabel ?

## Penerapan Ekonomi:

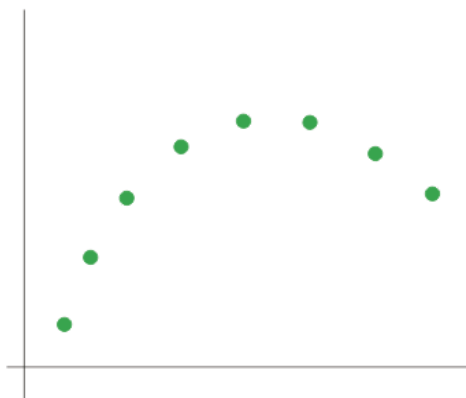
Pabrik 'KeSeTrum' yang dipimpin tuan *TeKoTjai* akan mengamati perilaku penjualan accu mobil menggunakan konsep turunan. Untuk itu dimunculkan notasi-notasi sebagai berikut:

- $x$  : banyaknya accu yang terjual.

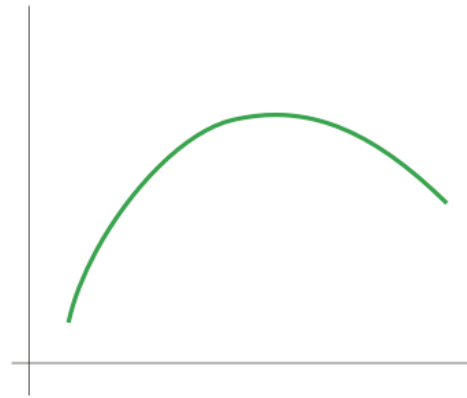
- $p(x)$  : harga satuan accu.

Pikirkan, mengapa harga ini bergantung pada  $x$ .

Pada pembahasan ini semua variabel diasumsikan kontinu.



real problem



model matematika

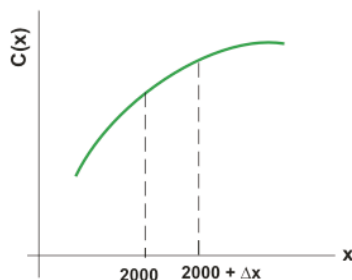
- $R(x)$  : pendapatan total.  $R(x) = x p(x)$

- $C(x)$  : biaya total (biaya tetap + biaya produksi)

contoh a.  $C(x) = 10.000 + 50x$ . biaya per unit 50

b.  $C(x) = 10.000 + 45x + 100\sqrt{x}$ . Biaya per unit  $\frac{45x+100\sqrt{x}}{x}$

- $P(x)$  : laba total.  $P(x) = R(x) - C(x) = x p(x) - C(x)$ .



Misalkan pabrik 'KeSeTrum' akan memproduksi 2000 buah accu dan fungsi biayanya terlihat seperti gambar di samping. Bila kemudian produksinya akan dinaikkan sebanyak  $\Delta x$ , berapakah pertambahan biaya  $\Delta C$ ? Untuk nilai  $\Delta x \ll x$  nilai ini dapat kita hampiri dengan  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$ , dihitung saat  $x = 2000$ . Nilai ini disebut **biaya marginal**.

## Soal-Soal:

1. Misalkan  $C(x) = 8300 + 3,25x + 40\sqrt[3]{x}$ . Cari biaya rata-rata tiap satuan dan biaya marginalnya untuk  $x = 1000$ .
2. Sebuah perusahaan memprediksi akan dapat menjual 1000 barang tiap minggu jika harga satuannya 3000. Penjualan akan meningkat sebanyak 100 unit untuk tiap penurunan harga sebanyak 100. Jika  $x$  menyatakan banyaknya barang yang terjual tiap minggu ( $x \geq 1000$ ), tentukan
  - a. fungsi harga  $p(x)$
  - b. banyaknya satuan barang dan harganya yang akan memaksimumkan pendapatan mingguan.
  - c. pendapatan mingguan maksimum.
3. Dalam menjual  $x$  satuan botol minuman, fungsi harga dan fungsi biaya produksinya diberikan oleh  $p(x) = 5,00 - 0.002x$  dan  $C(x) = 3,00 + 1,10x$ . Tentukan pendapatan marginal, biaya marginal dan keuntungan marginal. Tentukan tingkat produksi yang menghasilkan laba maksimum.
4. Perusahaan XYZ memproduksi kursi rotan. Produksi maksimum dalam satu tahun adalah 500 kursi. Jika perusahaan itu membuat  $x$  kursi dan menetapkan harga jual satuannya  $p(x) = 200 - 0,15x$ , biaya tahunannya  $C(x) = 4000 + 6x - 0,001x^2$ . Tentukan tingkat produksi yang memaksimumkan laba.



## Notasi Sigma ( $\Sigma$ )

Notasi ini digunakan untuk menyingkat penulisan suatu 'jumlahan':

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i \quad \text{dengan } a_i \in \mathbb{R}$$

Dengan notasi tersebut, maka berlaku sifat-sifat berikut:

$$\left. \begin{aligned} \bullet \sum_{i=1}^n 1 &= \dots & \sum_{i=1}^n c &= \dots \\ \bullet \sum_{i=1}^n c a_i &= c \sum_{i=1}^n a_i \\ \bullet \sum_{i=1}^n (a_i \pm b_i) &= \sum_{i=1}^n a_i \pm \sum_{i=1}^n b_i \end{aligned} \right\} \text{Sifat linear}$$

Perhatikan jumlahan  $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$

$n$	1	2	3	4	5	6	...
$S_n$	1	3	6	10	15	21	...
$\frac{S_n}{n}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	...

disusun  
menjadi

$n$	1	2	3	4	5	6	...
$S_n$	1	3	6	10	15	21	...
$\frac{S_n}{n}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{7}{2}$	...

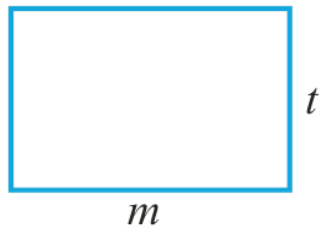
Jadi  $\frac{S_n}{n} = \frac{n+1}{2}$  atau  $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

**Beberapa Jumlah Khusus** (hafalkan):

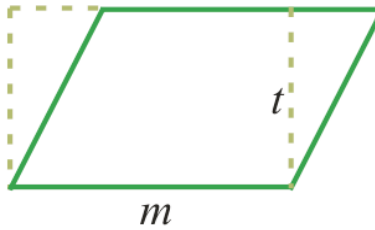
- $\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

**Contoh:** Tentukan nilai dari  $\sum_{i=1}^n [(i-1)(4i+3)]$

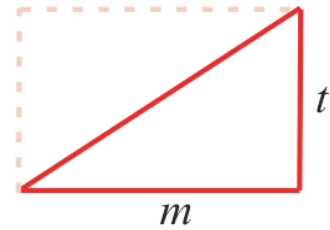
## Luas Daerah di Bidang:



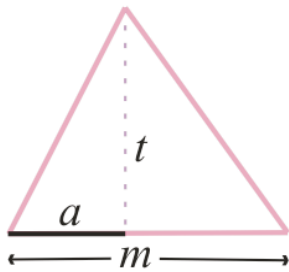
$$L = m t$$



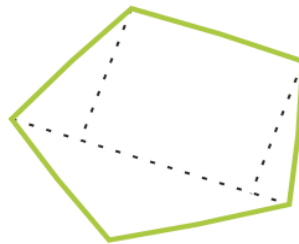
$$L = m t$$



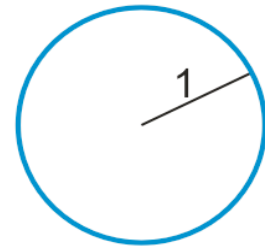
$$L = \frac{1}{2} m t$$



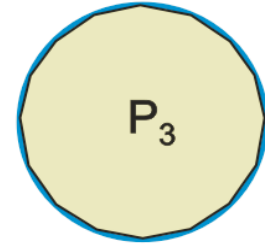
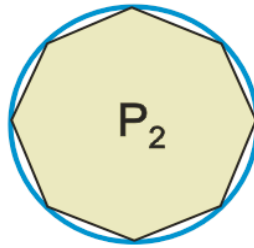
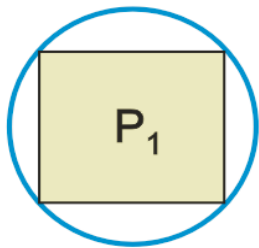
$$L = \frac{1}{2} m t$$



$$L = \dots$$



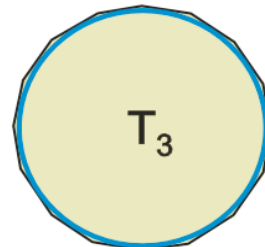
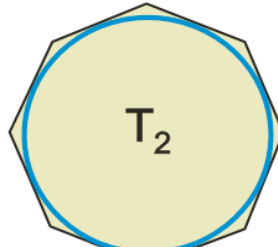
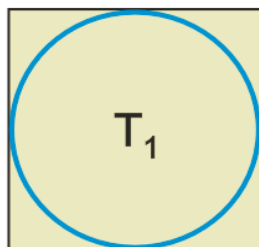
$$L = \dots$$



Archimedes ( $\pm 2000$  tahun yang lalu) :

$A(P_n) \leq L$  (Luas Lingkaran) sehingga

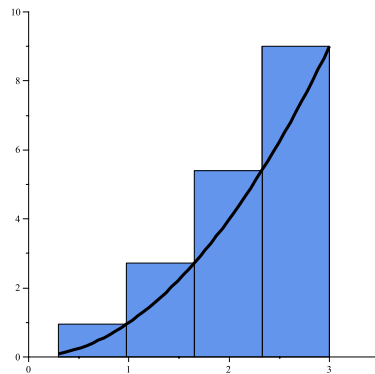
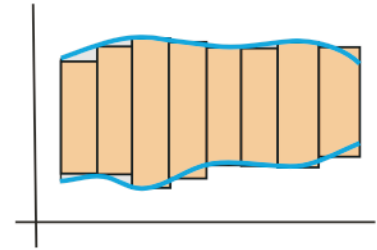
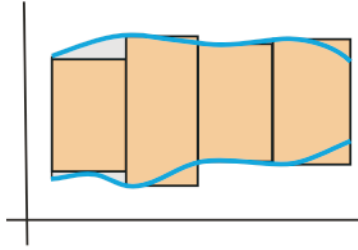
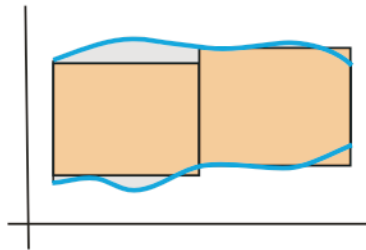
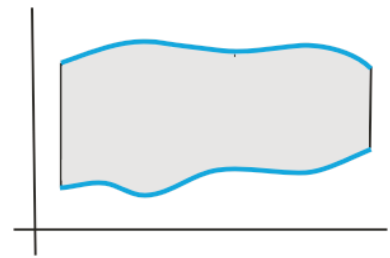
$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(P_n) = \pi \leq L$$



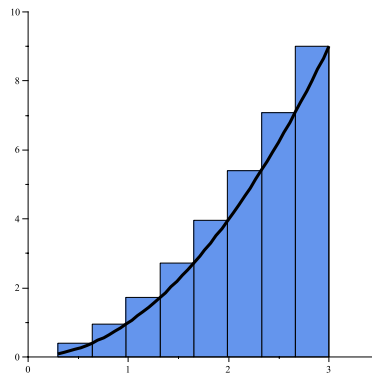
$$L \leq A(T_n) \text{ sehingga } L \leq \lim_{n \rightarrow \infty} A(T_n) = \pi$$

Kesimpulan: Luas lingkaran dengan jari<sup>2</sup> satu adalah  $\pi$

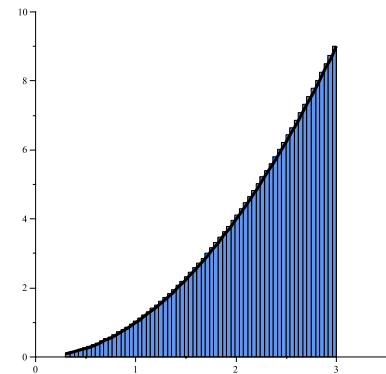
Perhatikan sebuah keping tipis di bidang. Bagaimana cara menentukan luas keping tersebut? Pola yang dilakukan Archimedes ditiru dengan cara menghampiri keping tersebut dengan persegi panjang-persegi panjang.



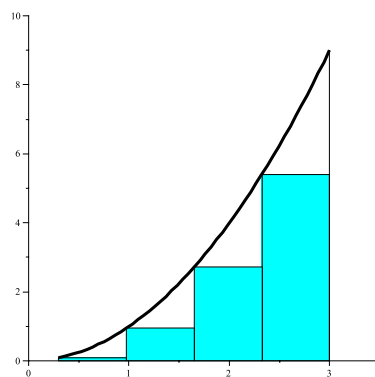
$n=4$



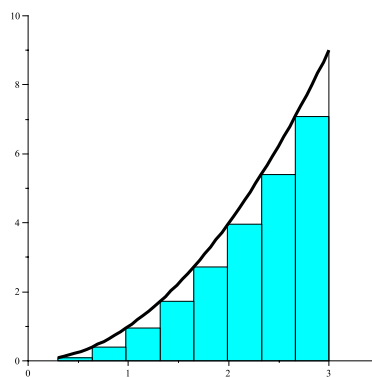
$n=8$



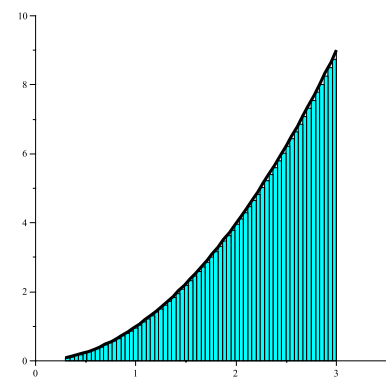
$n=64$



$n=4$



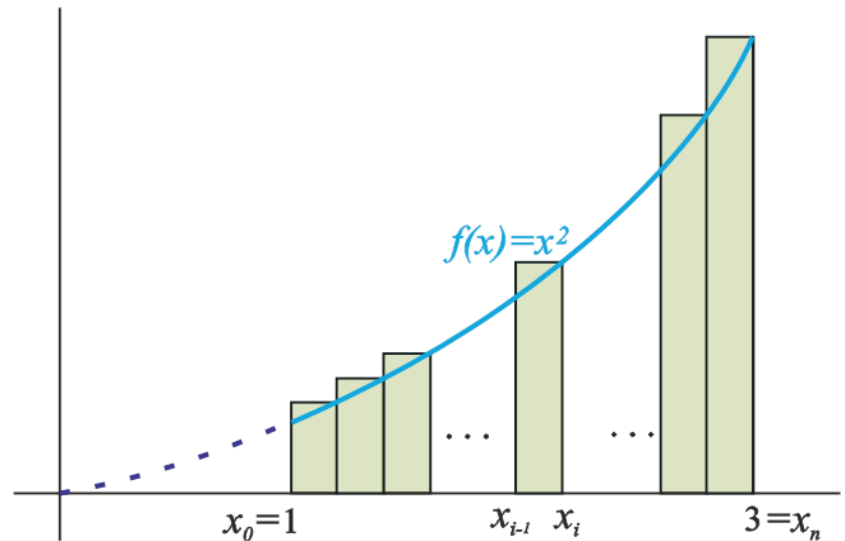
$n=8$



$n=64$

## Luas Menurut Poligon-Poligon Luar:

Perhatikan daerah yang dibatasi oleh  $f(x) = x^2$ , sumbu- $x$ , garis  $x = 1$  dan garis  $x = 3$ . Misalkan luas daerah ini adalah  $K$ . Luas ini akan dihampiri dengan *poligon-poligon luar* seperti pada gambar di samping.



Partisikan interval  $[1, 3]$  atas  $n$  bagian, sama lebar.

Lebar tiap subinterval  $\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$

$\mathcal{P} : 1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 3$  dengan  $x_i = 1 + i \Delta x = 1 + \frac{2i}{n}$

Perhatikan interval ke- $i$ , yaitu  $[x_{i-1}, x_i]$ .

Bentuk persegi panjang dengan lebar  $\Delta x$  dan tinggi  $f(x_i)$

Luas persegi panjang ini:  $L(\Delta R_n) = f(x_i) \Delta x$ .

Lakukan proses ini untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Luas seluruh persegi panjang adalah:

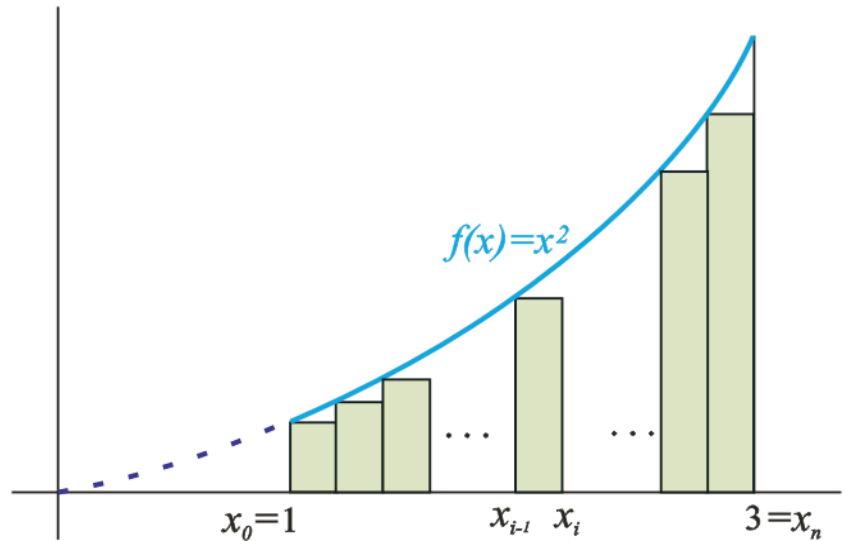
$$\begin{aligned}
L(R_n) &= f(x_1) \Delta x + f(x_2) \Delta x + f(x_3) \Delta x + \cdots + f(x_n) \Delta x \\
&= \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \\
&= \sum_{i=1}^n x_i^2 \Delta x \\
&= \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^2 \frac{2}{n} \\
&= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{4i}{n} + \frac{4i^2}{n^2}\right) \\
&= \frac{2}{n} \left[ \sum_{i=1}^n 1 + \sum_{i=1}^n \frac{4i}{n} + \sum_{i=1}^n \frac{4i^2}{n^2} \right] \\
&= \frac{2}{n} \left[ n + \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n i + \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2 \right] \\
&= 2 + \frac{8}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{8}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= 2 + \frac{4(n^2+n)}{n^2} + \frac{4(2n^3+3n^2+n)}{3n^3} \\
&= \frac{26}{3} + \frac{8}{n} + \frac{4}{3n^2}
\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(R_n) = \frac{26}{3}$$

Jelas  $K \leq L(R_n)$  sehingga  $K \leq \lim_{n \rightarrow \infty} L(R_n) = \frac{26}{3}$

## Luas Menurut Poligon-Poligon Dalam:

Perhatikan daerah yang dibatasi oleh  $f(x) = x^2$ , sumbu- $x$ , garis  $x = 1$  dan garis  $x = 3$ . Misalkan luas daerah ini adalah  $K$ . Luas ini akan dihipotesiskan dengan *poligon-poligon dalam* seperti pada gambar di samping.



Partisikan interval  $[1, 3]$  atas  $n$  bagian, sama lebar.

Lebar tiap subinterval  $\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$

$\mathcal{P} : 1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 3$  dengan  $x_i = 1 + i \Delta x = 1 + \frac{2i}{n}$

Perhatikan interval ke- $i$ , yaitu  $[x_{i-1}, x_i]$ .

Bentuk persegi panjang dengan lebar  $\Delta x$  dan tinggi  $f(x_{i-1})$

Luas persegi panjang ini:  $L(\Delta T_n) = f(x_{i-1}) \Delta x$ .

Lakukan proses ini untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Luas seluruh persegi panjang adalah:

$$\begin{aligned} L(T_n) &= f(x_0) \Delta x + f(x_1) \Delta x + f(x_2) \Delta x + \cdots + f(x_{n-1}) \Delta x \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x \\ &= \sum_{i=1}^n x_{i-1}^2 \Delta x \\ &= \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{2(i-1)}{n}\right)^2 \frac{2}{n} \\ &\quad \vdots \\ &= \frac{26}{3} - \frac{4}{n} + \frac{2}{3n^2} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(T_n) = \frac{26}{3}$$

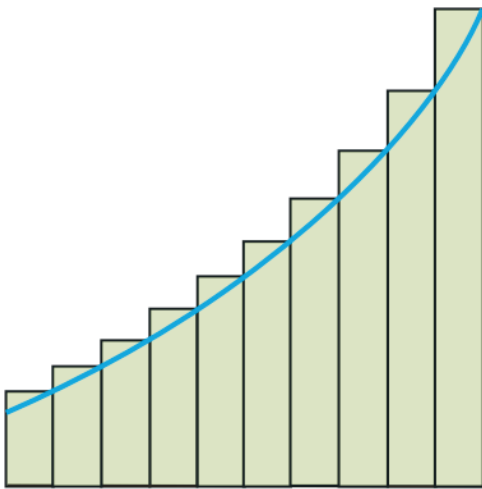
Jelas  $L(T_n) \leq K$  sehingga  $\lim_{n \rightarrow \infty} L(T_n) = \frac{26}{3} \leq K$

Dari hasil terakhir ini dan hasil di halaman 61 paling bawah, diperoleh:

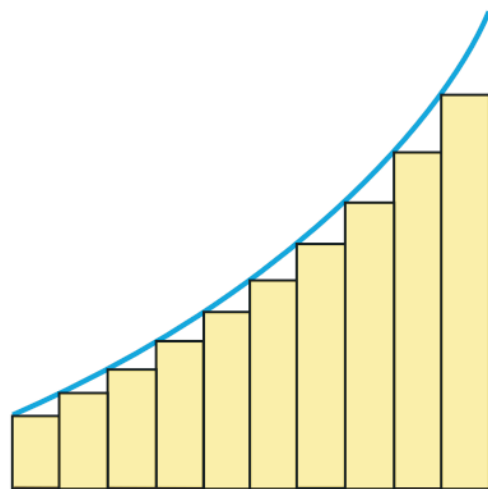
$$\frac{26}{3} \leq K \leq \frac{26}{3}$$

$$\text{Jadi } K = \frac{26}{3}$$

Fenomena ini menunjukkan bahwa perhitungan luas tidak bergantung pada jenis poligon yang dipakai. Untuk  $n \rightarrow \infty$  keduanya memberikan hasil yang sama.



Hampiran dengan poligon<sup>2</sup> luar



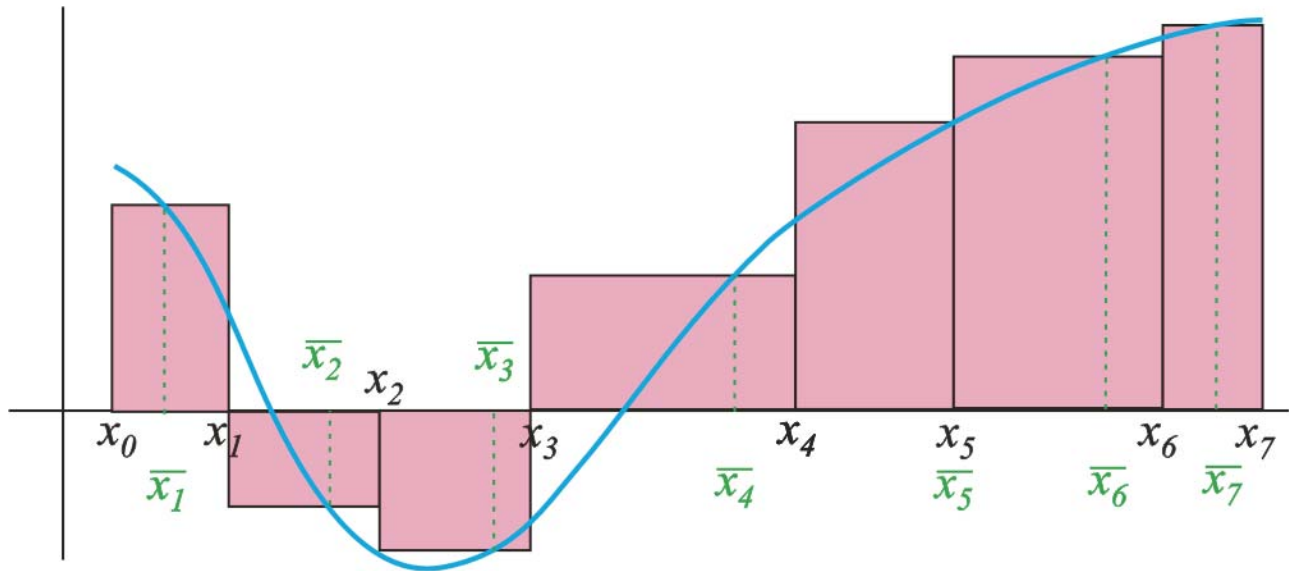
Hampiran dengan poligon<sup>2</sup> dalam

**Latihan:** Ikutilah prosedur seperti contoh sebelumnya untuk menghitung luas daerah yang dibatasi oleh grafik-grafik berikut:

- (a)  $y = x^2 + 1$ ;  $x = 0$ ;  $x = 2$ .      (b)  $y = x^3$ ;  $x = 1$ ;  $x = 4$ .

## Jumlah Riemann:

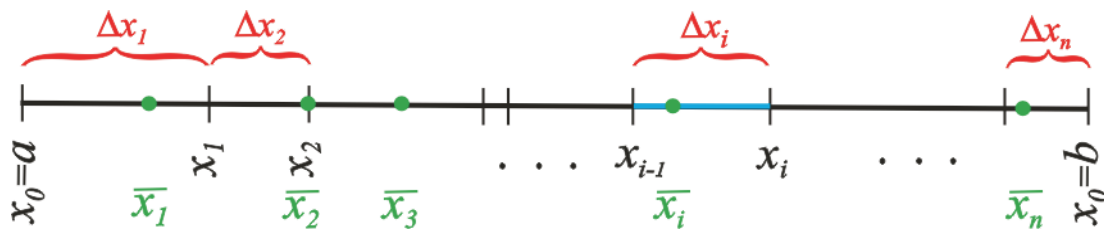
Misalkan  $f$  fungsi yang terdefinisi pada interval tutup  $[a, b]$ .



Partisikan interval  $[a, b]$  atas  $n$  bagian (tidak perlu sama lebar)

$\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$  dan sebut  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Pada setiap subinterval  $[x_{i-1}, x_i]$ , pilih *titik wakil*  $\bar{x}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$



$$\text{Jumlahan } R_{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i \text{ disebut Jumlah Riemann dari } f.$$

### Perhatian !

1. Nilai sebuah jumlah Riemann tidak tunggal, tergantung pada pemilihan: 'banyaknya interval', 'lebar tiap interval' dan 'titik wakil yang digunakan'.
2. Suku  $f(\bar{x}_i) \Delta x_i$  pada jumlah Riemann dapat bernilai negatif sehingga  $R_{\mathcal{P}}$  hasilnya juga dapat negatif.



## Contoh:

1. Tentukan suatu jumlah Riemann dari  $f(x) = x^3 + 2x$  pada  $[1, 5]$ .
2. Tentukan suatu jumlah Riemann dari  $f(x) = x^2 + 1$  pada  $[-1, 2]$  memakai 6 subinterval sama lebar dan titik wakilnya adalah ujung kanan tiap subinterval.

### Integral Tentu:

Misalkan  $f$  terdefinisi pada interval  $[a, b]$  dengan  $\mathcal{P}$ ,  $\Delta x_i$  dan  $\bar{x}_i$  mempunyai arti seperti pada pembahasan sebelumnya. Tetapkan  $|\mathcal{P}|$ , dibaca **Norm**  $\mathcal{P}$ , sebagai panjang dari subinterval yang paling lebar.

Jika  $\lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$  ada maka disebut integral tentu/Riemann dari  $f$  pada  $[a, b]$ , dinotasikan  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$

## Diskusi:

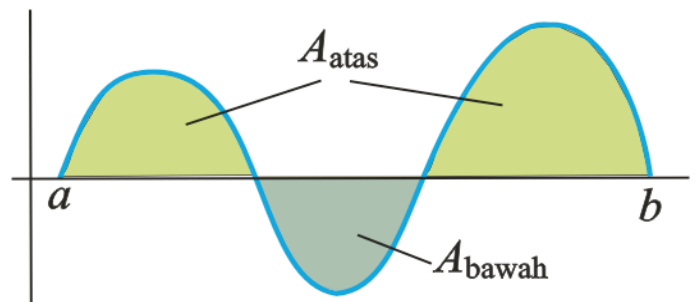
- Benarkah : jika  $n \rightarrow \infty$  maka  $|\mathcal{P}| \rightarrow 0$
- Benarkah : jika  $|\mathcal{P}| \rightarrow 0$  maka  $n \rightarrow \infty$

## Kesimpulan:

Jika ..... maka  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$

## Arti Geometris Integral tentu:

$$\int_a^b f(x) dx = A_{\text{atas}} - A_{\text{bawah}}$$



## Sifat-sifat:

1.  $\int_a^a f(x) dx = 0$  dan  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$  **Buktikan !**

2. (Sifat linear) Misalkan  $k$  konstanta, maka:

$$\bullet \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$\bullet \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\bullet \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

3. (Sifat penambahan selang) Misalkan  $f$  terintegralkan pada interval yang memuat titik  $a, b$ , dan  $c$ , maka

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

4. Jika  $f(x) < g(x)$ , maka  $\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$

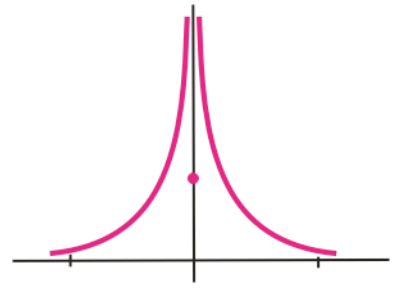
5. Misalkan  $N, M$  konstanta-konstanta dan  $N \leq f(x) \leq M$  maka

$$N(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

**Ilustrasikan sifat 3 s/d 5 di atas secara grafik !**

Perhatikan fungsi  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

Sepanjang interval  $[-2, 2]$  fungsi ini tidak terintegralkan sebab nilai  $f(x)$  tak terbatas *di-sekitar* titik nol.



**Sifat:** Bila  $f$  terbatas dan kontinu (kecuali disejumlah berhingga titik) pada  $[a, b]$  maka  $f$  terintegralkan.

**Fungsi-fungsi berikut terintegralkan sepanjang  $[a, b]$ :**

- polinom
- fungsi rasional (syarat penyebut tidak nol sepanjang  $[a, b]$ )
- fungsi sinus dan cosinus.

**Soal-soal:**

1. Dengan konsep limit jumlah Riemann, hitunglah

a.  $\int_{-1}^2 (2x^2 - 8) dx$

b.  $\int_{-1}^2 [|x|] dx$

2. Nyatakan limit berikut sebagai suatu integral tentu

a.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{4i}{n}} \frac{4}{n}$

b.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{2i}{n}\right) \frac{2}{n}$

## Teorema Dasar kalkulus 1:

Misalkan  $f$  kontinu di  $[a, b]$  dan  $F$  suatu anti turunan dari  $f$ , maka

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

**Contoh:**

$$(a) \int_{-1}^2 (2x^2 - 8) dx \quad (b) \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+6} dx \quad (\text{substitusi } u = x^2 + 2x + 6)$$

## Pendiferensialan fungsi berbentuk integral:

Perhatikan bentuk  $\int_a^x f(t) dt$  ( $a$  konstanta). Bentuk tersebut merupakan

sebuah fungsi dengan variabel bebas . . . . Ilustrasi:  $\int_0^x 3t^2 dt = t^3 \Big|_0^x = x^3$ .

Sifat berikut memberikan aturan mendiferensialkan fungsi seperti di atas.

$$\text{Teorema Dasar kalkulus 2: } D_x \left[ \int_a^x f(t) dt \right] = f(x)$$

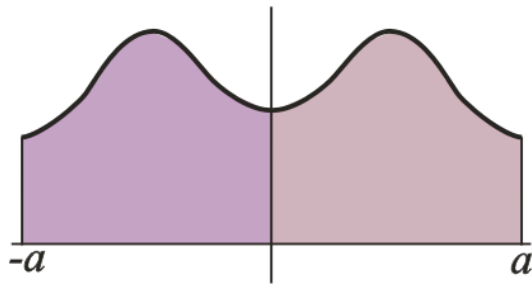
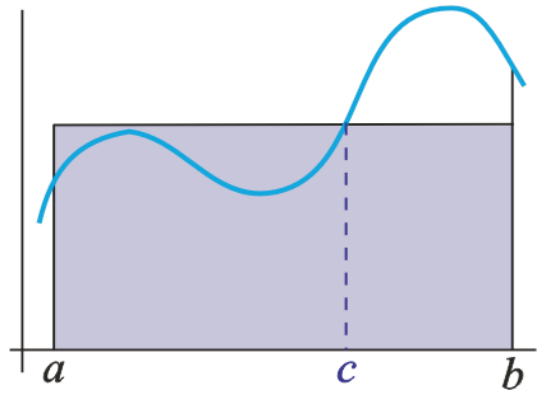
**Contoh:** Tentukan turunan dari

$$1. (a) \int_1^x \sin \sqrt{t} dt \quad (b) \int_1^{x^2} \sin \sqrt{t} dt \quad (c) \int_{-2x}^{x^3} \sin \sqrt{t} dt$$

## Teorema Nilai Rata<sup>2</sup> Integral:

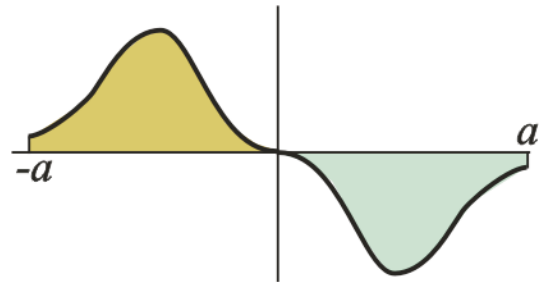
Jika  $f$  kontinu pada  $[a, b]$  maka terdapat bilangan  $c \in [a, b]$  sehingga

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) (b - a)$$



Bila  $f$  fungsi genap maka

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$



Bila  $f$  fungsi ganjil maka

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

Bila  $f$  fungsi periodik dengan periode  $p$  maka  $\int_{a+p}^{b+p} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

## Soal-soal Mandiri:

1. Hitung nilai integral-integral berikut:

a.  $\int_2^3 (x^3 - 3x^2 + 3\sqrt{x}) dx$     b.  $\int_1^5 \left( \frac{y^2 - 1}{(y^3 - 3y)^2} \right) dy$     c.  $\int_{-2}^3 [|x|] dx$

2. Carilah bilangan  $c$  yang memenuhi Teorema Nilai Rata<sup>2</sup> integral dari

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} \text{ sepanjang interval } [0, 3]$$

3. Misalkan  $f(x) = \int_0^{x^2} \frac{1+t}{1+t^2} dt$ . tentukan daerah kemonotonan dari  $f$ .

4. Misalkan  $f$  fungsi ganjil dengan  $\int_0^1 f^2(x) dx = 1$ .

Tentukan  $\int_{-1}^1 (f^2(x) + x^2 f(x) + f^3(x)) dx$

5. Tentukan  $f'(x)$  dari

$$(a) f(x) = \sin(x) \int_1^{x^2} \cos t dt \quad (b) f(x) = \int_x^1 x^2 \sqrt{u^2 + 1} du$$

6. Tuliskan  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{4 + \frac{31}{n}} \right)^2 \frac{3}{n}$  sebagai integral tentu

7. Gunakan Teorema Dasar kalkulus I untuk menghitung  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{4i}{n}} \frac{4}{n}$

# METODE NUMERIK

Metode Numerik adalah prosedur<sup>2</sup>/teknik<sup>2</sup>/skema<sup>2</sup> yang digunakan untuk mencari solusi hampiran dari masalah matematika memakai operasi-operasi aljabar (tambah, kurang, kali dan bagi), pangkat dan akar.

Alasan pemakaian metode numerik:

- Pencarian solusi eksak/ analitis sukar/tidak mungkin.
- Jumlah hitungan yang dilakukan sangat besar

Ilustrasi: (a)  $\int_1^2 e^{x^2} dx$  (b) Cari solusi  $x^2 = \ln x$  (c) SPL ukuran besar.

*Solusi yang diperoleh dari suatu metode numerik selalu berupa hampiran/aproksimasi, tetapi ketelitiannya selalu dapat dikontrol/dikendalikan.*

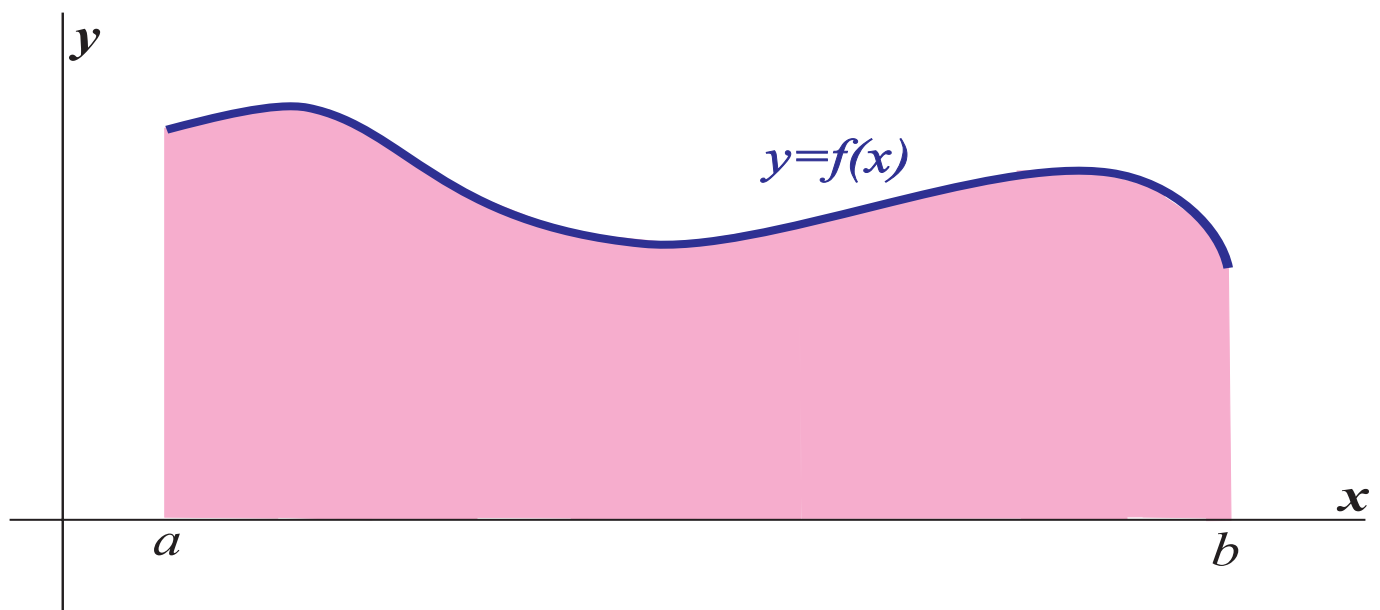
## Pengintegralan Numerik

Pada perhitungan  $\int_a^b f(x) dx$ , umumnya ada tiga macam fungsi  $f(x)$ :

- $f(x)$  fungsi sederhana (anti turunannya mudah dicari)
- $f(x)$  fungsi yang rumit (anti turunannya sukar/tidak mungkin dicari)
- $f(x)$  hanya diketahui berupa tabulasi nilai (data hasil percobaan)

*Berikan contoh dari ketiga jenis integral tak tentu di atas !!*

Jenis (a) dapat diselesaikan secara analitis dan diperoleh hasil eksak, sedangkan jenis (b) dan (c) diselesaikan secara numerik sehingga hasilnya berupa hampiran/aproksimasi.

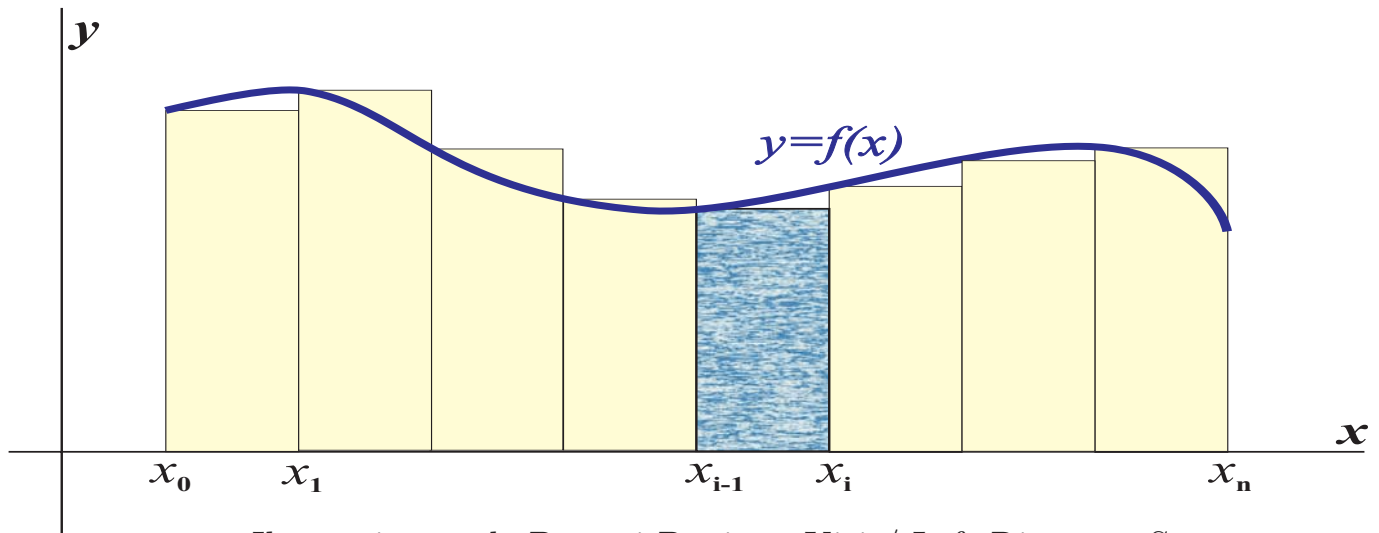


Pada pasal ini akan dibahas tiga buah metode numerik untuk hampiran integral, yaitu: metode *Persegi Panjang/Riemann*, metode *Trapezium* dan metode *Simpson/Parabol*.



## Metode Persegi Panjang Kiri / Left Riemann Sum (LRS)

Perhatikan integral tentu  $\int_a^b f(x) dx$ . Fungsi  $f(x)$  fungsi dapat bernilai negatif ataupun tak kontinu, asalkan titik diskontinuitasnya berhingga.



Gambar 1: Ilustrasi metode Persegi Panjang Kiri / Left Riemann Sum

Partisikan interval  $[a, b]$  atas  $n$  bagian, sama lebar:

$$\mathcal{P} : x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b \quad \text{dengan} \quad \Delta x_i = h = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

Pada setiap subinterval  $[x_{i-1}, x_i]$  dibentuk persegi-panjang (pp) dengan panjang

$f(x_{i-1})$  dan lebar  $h$  (lihat gambar 1). Luas persegi panjang tersebut,  $\Delta L_i = h f(x_{i-1})$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx$$

$$\approx h f(x_0) + h f(x_1) + \cdots + h f(x_{n-1})$$

Hampiran ini disebut **metode Persegi Panjang Kiri (Left Riemann Sum)**.

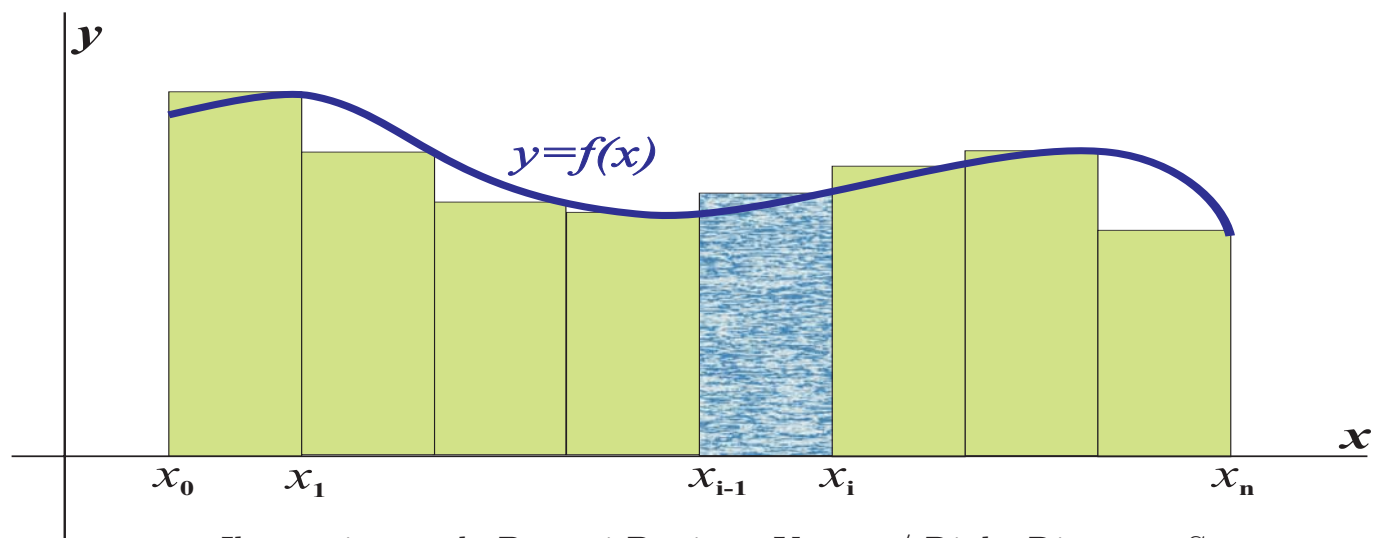
Contoh: Terapkan metode LRS dengan  $n=6$  terhadap  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ .

Galat Metode LRS :  $\int_a^b (f(x) dx = [h f(x_0) + h f(x_1) + \cdots + h f(x_{n-1})] + E_n$ ,

dengan  $E_n = \frac{(b-a)^2}{2n} f'(c)$ ,  $a \leq c \leq b$ .

Contoh: Tentukan n agar galat hampiran LRS pada  $\int_0^1 e^{-x^2} dx < 0,0001$ .

## Metode Persegi Panjang Kanan / Right Riemann Sum (RRS)



Gambar 2: Ilustrasi metode Persegi Panjang Kanan / Right Riemann Sum

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx$$

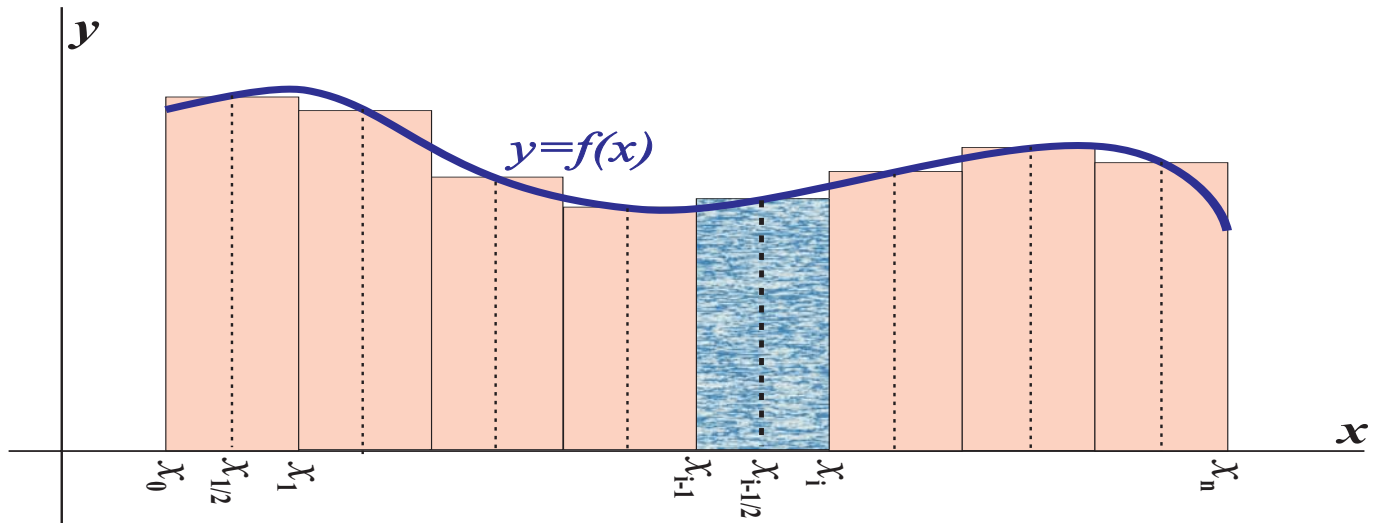
$$\approx h f(x_1) + h f(x_2) + \cdots + h f(x_n)$$

Hampiran ini disebut **metode Persegi Panjang Kanan (Right Riemann Sum)**.

Galat Metode RRS :  $E_n = -\frac{(b-a)^2}{2n} f'(c)$ ,  $a \leq c \leq b$ .

Contoh: Tentukan n supaya galat hampiran RRS terhadap  $\int_0^1 e^{-x^2} dx < 0,0001$ , lalu hitung hampiran nilai integral tersebut.

## Metode Persegi Panjang Tengah / Midpoint Riemann Sum (MRS)



Gambar 3: Ilustrasi metode Persegi Panjang Tengah / Midpoint Riemann Sum

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx$$

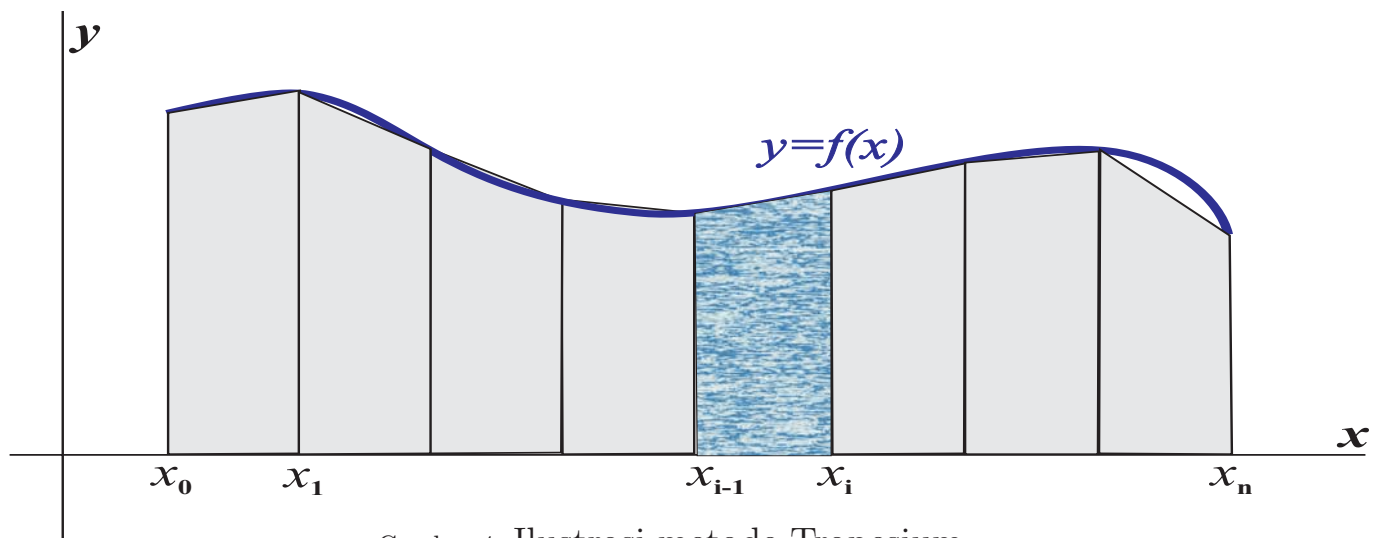
$$\approx h f(x_{\frac{1}{2}}) + h f(x_{\frac{3}{2}}) + \cdots + h f(x_{n-\frac{1}{2}})$$

Hampiran ini disebut metode Persegi Panjang Tengah (Midpoint Riemann Sum).

Galat Metode MRS :  $E_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(c)$ ,  $a \leq c \leq b$ .

Contoh: Gunakan metode MRS untuk mengaproksimasi  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  memakai  $n=6$ , dan tentukan batas galatnya.

## Metode Trapesium



Gambar 4: Ilustrasi metode Trapesium

Partisikan interval  $[a, b]$  atas  $n$  bagian, sama lebar:

$\mathcal{P} : x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  dengan  $\Delta x_i = h = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$

Pada setiap subinterval  $[x_{i-1}, x_i]$  dibentuk trapesium dengan sisi-sisi  $f(x_{i-1})$  dan  $f(x_i)$  dan lebar  $h$  (lihat gambar 4).

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx \\ &\approx \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \dots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)] \\ &= \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \end{aligned}$$

Hampiran ini disebut **metode Trapesium**.

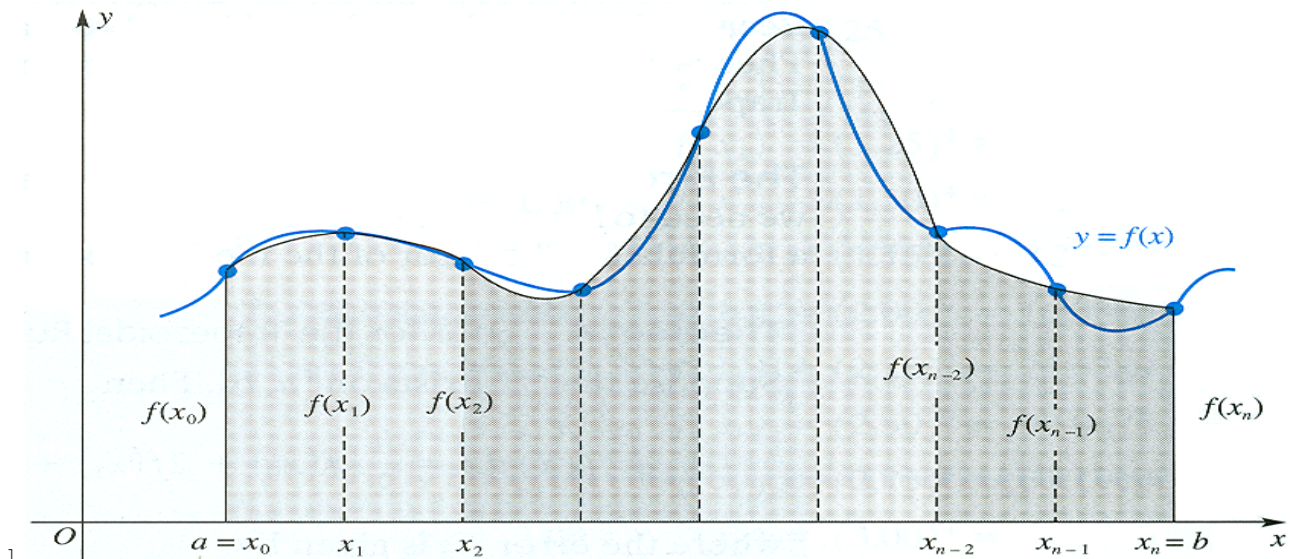
### Galat Metode Trapesium

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] + E_n$$

dengan  $E_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c)$ ,  $a \leq c \leq b$  (galat metode Trapesium).

Contoh: Gunakan metode Trapesium untuk mengaproksimasi  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  memakai  $n=6$ , dan tentukan batas galatnya.

## Metode Simpson (Parabol)



Gambar 5: Ilustrasi metode Simpson/Parabol

Partisikan interval  $[a, b]$  atas  $n$  bagian ( $n$  genap):

$$\mathcal{P} : x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b \quad \text{dengan} \quad \Delta x_i = h = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

Pada setiap dua subinterval  $[x_{i-1}, x_i]$  dan  $[x_i, x_{i+1}]$  dibentuk parabol (fungsi kuadrat)  $p_2(x)$  yang melalui titik-titik  $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ ,  $(x_i, f(x_i))$ , dan  $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ .

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} p_2(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

Selanjutnya:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x) dx$$

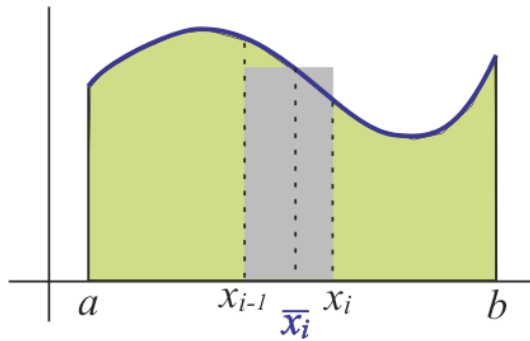
$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Hampiran ini disebut **metode Simpson/Parabol**.

**Galat Metode Simpson:**  $E_n = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(c)$  dengan  $a \leq c \leq b$ .

Contoh: Terapkan metode Simpson thd.  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  dengan galat  $\leq 0,0001$

## Perhitungan Luas Daerah/Keping:



Perhatikan keping yang dibatasi oleh fungsi positif  $f(x)$ , garis  $x = a$ , garis  $x = b$  dan sumbu- $x$ . Akan dihitung luas keping tersebut memakai konsep integral.

Bentuk partisi  $\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

Perhatikan elemen partisi ke  $i$ , yaitu  $[x_{i-1}, x_i]$

Pilih titik wakil  $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$

Bentuk persegi panjang dengan lebar  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  dan tinggi  $f(\bar{x}_i)$ .

Luas elemen ke  $i$  adalah  $\Delta L_i = f(\bar{x}_i) \Delta x_i$

Luas seluruh  $n$  persegi panjang adalah  $\sum_{i=1}^n \Delta L_i = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$

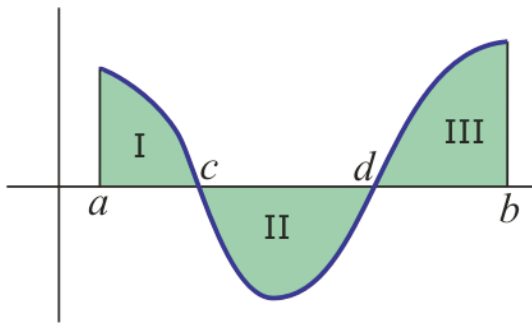
Luas daerah seluruhnya :  $L = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$ .

**Perhatikan:**

- Tanda  $\lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n$  berubah menjadi  $\int_a^b$
- Fungsi  $f(\bar{x}_i)$  berubah menjadi  $f(x)$ .
- Besaran  $\Delta x_i$  berubah menjadi  $dx$ .

**Contoh:**

Hitung luas daerah yang dibatasi oleh grafik  $f(x) = x^3 + 3x^2$ , garis  $x = 1$ , garis  $x = 3$  dan sumbu- $x$ .



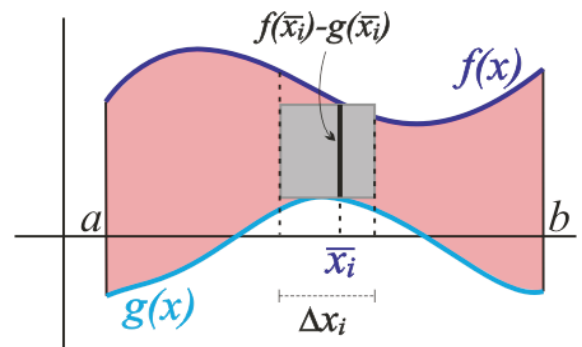
Bagaimana bila fungsi  $f$  memuat bagian negatif (lihat ilustrasi). Prinsip menghitung luas daerahnya sama saja dengan ilustrasi sebelumnya, hanya nilai fungsi  $f$  harus dihitung positif.

Jadi luasnya  $L = \int_a^b |f(x)| dx$ .

Untuk menghindari tanda mutlak biasanya dihitung sbb:

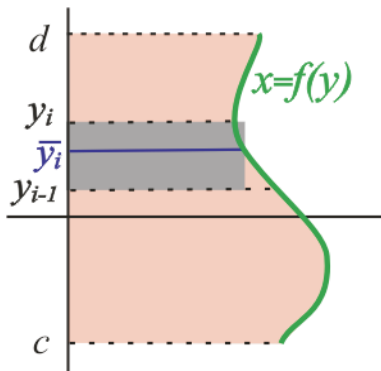
$$L = L_I + L_{II} + L_{III} = \int_a^c f(x) dx + \int_c^d (-f(x)) dx + \int_d^b f(x) dx$$

Perhatikan bentuk keping yang lebih umum dengan batas-batas: fungsi  $f(x)$ , fungsi  $g(x)$ , garis  $x = a$  dan garis  $x = b$ .  
**Prinsip dasar:** gambarkan *elemen luasnya* lalu tentukan *panjang* dan *lebar* dari elemen tersebut.



Luas elemen integrasi:  $\Delta L_i = [f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)] \Delta x_i$ .

Luas daerah seluruhnya:  $L = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ .



Alternatif lain dari keping di bidang adalah seperti pada gambar di samping kiri. Keping ini dibatasi oleh grafik  $x = f(y)$ , garis  $y = c$ , garis  $y = d$ , dan sumbu- $y$ . Pada kasus ini partisi dibuat pada sumbu- $y$  sepanjang  $[c, d]$ :

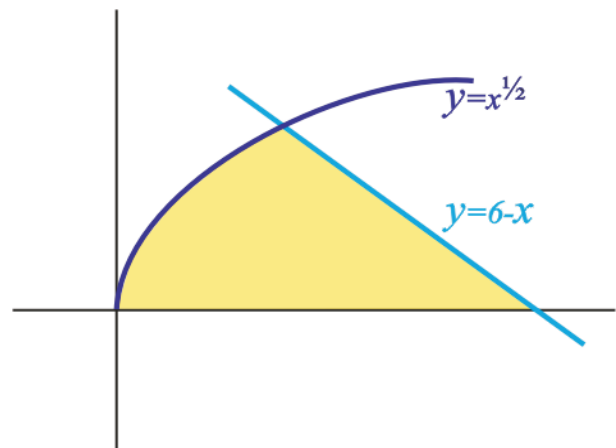
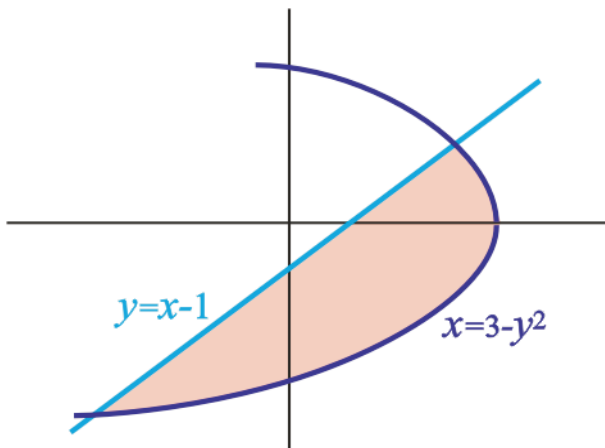
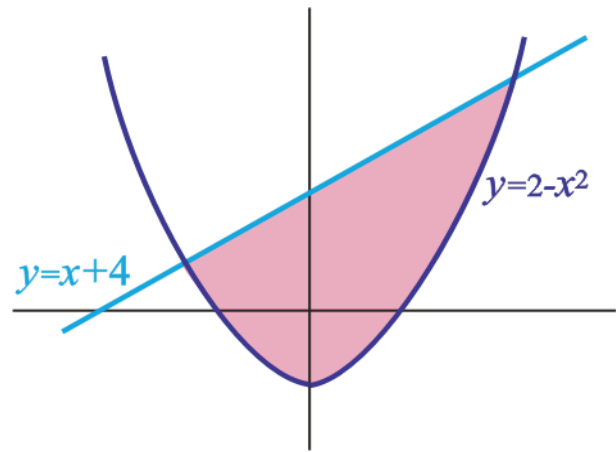
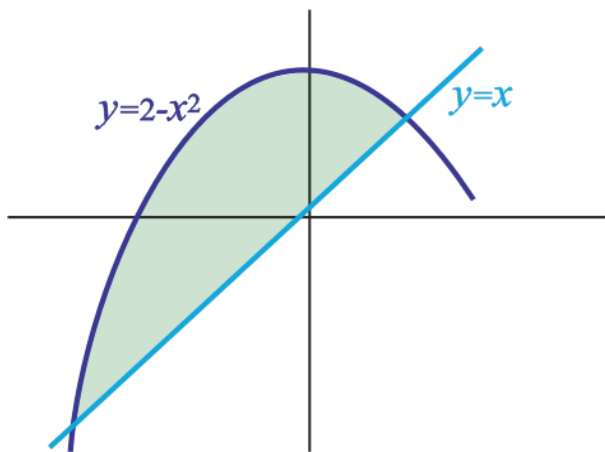
$$\mathcal{P} : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d$$

Luas elemen integrasi:  $\Delta L = f(\bar{y}_i) \Delta y_i$  dengan  $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ .

Luas daerah seluruhnya :  $L = \int_c^d f(y) dy$ .

Pada gambar-gambar di halaman berikutnya, lakukanlah sebagai berikut:

- Nyatakanlah batas-batas daerah yang dimaksud
- Gambarkan elemen integrasi untuk menghitung luas daerahnya.
- Tuliskan rumus elemen luasnya.
- Tuliskan rumus luasnya sebagai integral tentu.

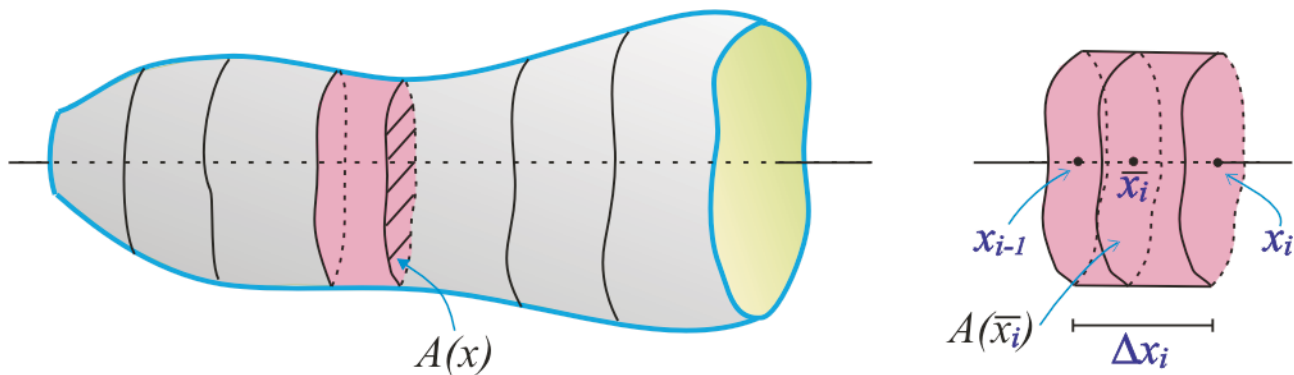




## Soal-Soal:

1. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh grafik-grafik  $y = x + 6$ ,  $y = x^3$ , dan  $2y + x = 0$
2. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh grafik  $y = \sqrt{x}$ , sumbu- $y$ , garis  $y = 0$  dan garis  $y = 1$
3. Sebuah benda bergerak sepanjang garis lurus dengan kecepatan  $v(t) = 3t^2 - 24t + 36$ . Tentukan *perpindahan* dan *jarak tempuh keseluruhan* selama interval waktu  $-1 \leq t \leq 9$ .
4. Misalkan  $y = \frac{1}{x^2}$  untuk  $1 \leq x \leq 6$ 
  - a. Hitung luas daerah di bawah kurva tersebut.
  - b. Tentukan  $c$  sehingga garis  $x = c$  membagi daerah tersebut atas dua bagian dengan luas sama.
  - c. Tentukan  $d$  sehingga garis  $y = d$  membagi daerah tersebut atas dua bagian dengan luas sama

## Volume Benda yang Luas Irisan Penampangnya Diketahui



Perhatikan gambar sebuah benda pejal di atas. Benda tersebut terletak sepanjang interval  $[a, b]$ . Luas irisan penampang benda tersebut pada setiap posisi  $x$  adalah  $A(x)$  (diketahui). Akan dihitung volumenya.

Partisikan interval  $[a, b]$ :  $\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

Perhatikan elemen partisi ke  $i$ . Pilih titik wakil  $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ .

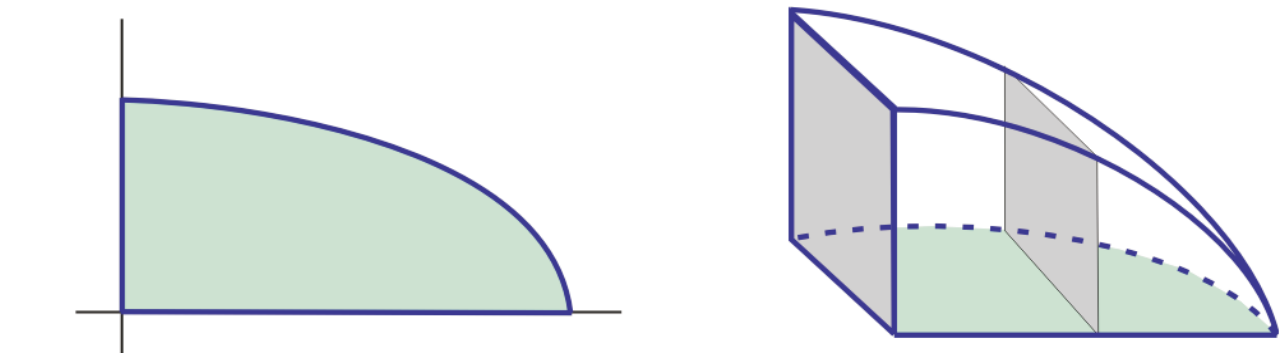
Bentuk *silinder* (lihat gambar sebelah kanan) dengan luas penampang  $A(\bar{x}_i)$  dan tinggi  $\Delta x_i$ .

Volume elemen integrasi:  $\Delta V_i = A(\bar{x}_i) \Delta x_i$ .

Volume benda:  $V = \int_a^b A(x) dx$ .

### Contoh<sup>2</sup>:

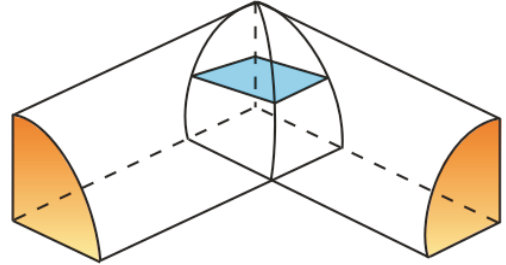
1. Alas sebuah benda adalah daerah yang dibatasi oleh  $y = 1 - \frac{x^2}{4}$ , sumbu- $x$ , sumbu- $y$ . Bila penampang-penampang yang tegak lurus sumbu- $x$  berbentuk bujur sangkar, tentukan volume benda tersebut.



2. Alas sebuah benda adalah daerah yang dibatasi oleh sumbu- $x$  dan grafik  $y = \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ . Penampang yang tegak lurus sumbu- $x$  berbentuk segitiga sama sisi. Tentukan volumenya.
3. Alas sebuah benda adalah suatu daerah  $R$  yang dibatasi oleh  $y = \sqrt{x}$  dan  $y = x^2$ . Tiap penampang dengan bidang yang tegak lurus sumbu- $x$  berbentuk setengah lingkaran dengan garis tengah yang melintasi daerah  $R$ . Tentukan volume benda tersebut.

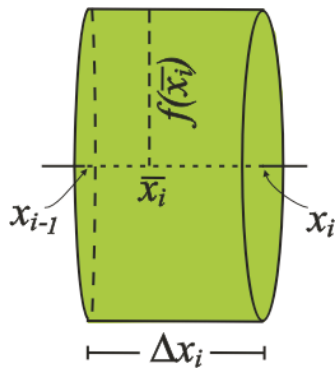
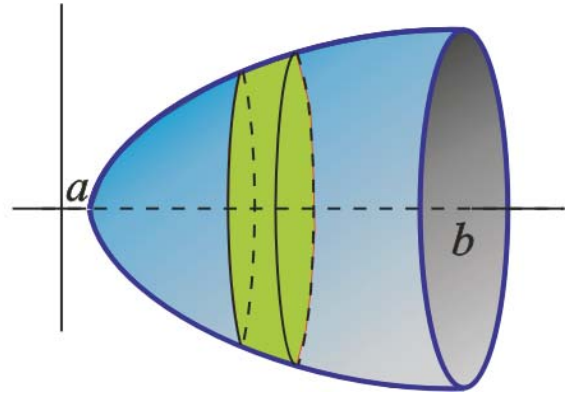
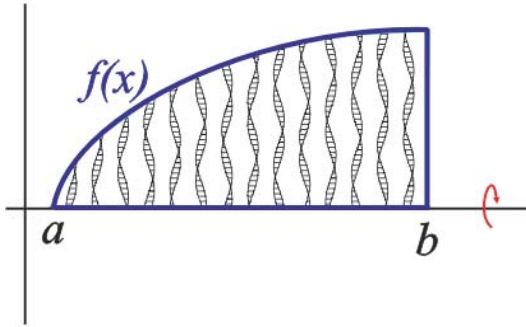
Tentukan volume irisan dua buah silinder berjari-jari satu seperti pada gambar disamping.

4. *Petunjuk: penampang mendatar dari benda tersebut berbentuk bujur sangkar.*



## Volume Benda Putar: Metode Cakram dan Cincin

Perhatikan sebuah keping yang dibatasi oleh grafik-grafik  $y = f(x) \geq 0$ , sumbu- $x$ , garis  $x = a$ , dan garis  $x = b$  (gambar sebelah kiri). Keping ini diputar terhadap sumbu- $x$  sehingga terbentuk gambar di sebelah kanan. Dengan menggunakan konsep integral Riemann, akan dihitung volumenya.



Bentuk partisi  $\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

Pada setiap subint.  $[x_{i-1}, x_i]$ , pilih titik wakil  $\bar{x}_i$ .

Bentuk silinder dengan jari-jari  $f(\bar{x}_i)$ . dan tinggi  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ .

Volume elemen integrasi:  $\Delta V_i = \pi f^2(\bar{x}_i) \Delta x_i$

Volume benda putar seluruhnya:  $\int_a^b \pi f^2(x) dx$  **(Metode Cakram)**

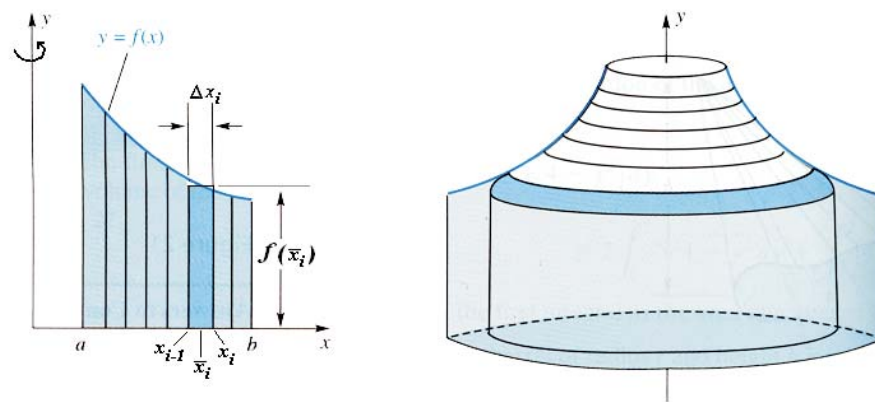
**Contoh<sup>2</sup>:** Gambarkan, lalu tentukan volume benda-benda putar berikut:

1. Daerah yang dibatasi oleh grafik  $y = \sqrt{x}$ , garis  $x = 4$  dan sumbu-sumbu koordinat diputar terhadap sumbu- $x$ .
2. Daerah yang dibatasi oleh grafik  $y = \sqrt{x}$ , garis  $x = 4$  dan sumbu-sumbu koordinat diputar terhadap sumbu- $y$ .  
(disebut **Metode Cincin** karena cakramnya berlubang )
3. Daerah diantara grafik  $y = x^2$  dan  $y = \sqrt{8x}$  diputar terhadap sumbu- $x$ .

4. Daerah diantara grafik  $y = x^2$  dan  $y = \sqrt{8x}$  diputar terhadap sumbu- $y$ .
5. Daerah yang dibatasi oleh grafik  $y = \sqrt{x}$ , garis  $x = 4$  dan sumbu-sumbu koordinat diputar terhadap garis  $x = -1$ .
6. Daerah yang dibatasi oleh grafik  $y = \sqrt{x}$ , garis  $x = 4$  dan sumbu-sumbu koordinat diputar terhadap garis  $y = 5$ .
7. Daerah diantara  $y = x^2$  dan  $y = \sqrt{8x}$  diputar terhadap garis  $y = -2$ .
8. Daerah diantara  $y = x^2$  dan  $y = \sqrt{8x}$  diputar terhadap garis  $x = 3$ .

## **Volume Benda Putar: Metode Kulit Tabung**

Metode ini pada prinsipnya sama saja dengan metode cakram/cincin. Perbedaannya adalah partisi dilakukan pada sumbu yang tegak lurus terhadap sumbu putar (lihat gambar berikut).



Pada metode kulit tabung dipilih  $\bar{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ .

$$\Delta V_i = \pi x_i^2 f(\bar{x}_i) - \pi x_{i-1}^2 f(\bar{x}_i)$$

$$\Delta V_i = \pi (x_i^2 - x_{i-1}^2) f(\bar{x}_i)$$

$$\Delta V_i = \pi 2 \frac{x_i + x_{i-1}}{2} (x_i - x_{i-1}) f(\bar{x}_i)$$

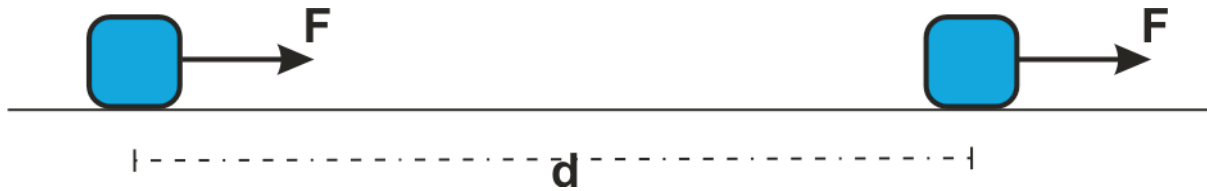
$$\Delta V_i = 2 \pi \bar{x}_i f(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

Volume benda putar seluruhnya:  $\int_a^b 2 \pi x f(x) dx$ .

*Bahas soal-soal pada pasal sebelumnya memakai metode kulit tabung.*

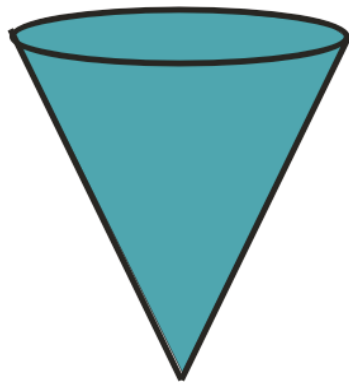
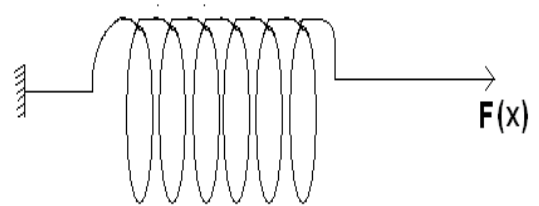
## Kerja

Definisi: *Kerja* = *Gaya*  $\times$  *perpindahan*, dinotasikan:  $W = F \times d$



Definisi di atas berlaku bila gaya dan perpindahannya berupa konstanta. Sekarang coba perhatikan dua ilustrasi berikut ini:

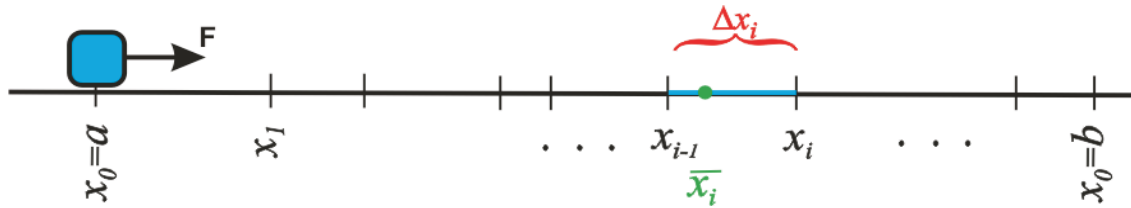
Sebuah pegas ditarik sejauh  $d$  cm dari posisi alamiahnya. Gaya yang diperlukan untuk menarik pegas tersebut tidak konstan. Semakin panjang pegas ditarik, gaya yang diperlukan semakin besar. Jadi pada situasi ini gaya yang bekerja tidak konstan.



Sebuah bak kerucut terbalik berisi penuh air. Seluruh air tersebut dipompa sampai ke permukaan bak. akan dihitung kerja yang dilakukan. Pada masalah ini kita lihat perpindahan komponen air berbeda-beda, air dekat permukaan atas hanya berpindah sedikit, sedangkan yang dibagian bawah pindah lebih jauh. Jadi pada masalah ini perpindahannya tidak konstan.

Untuk menghitung kerja secara umum, perhatikan sebuah benda yang ditarik oleh gaya  $F(x)$  dan berpindah dari  $x = a$  sampai  $x = b$  (lihat gambar paling atas pada halaman 86).

Partisikan interval  $[a, b]$  atas  $x_0 = a < x_1, \dots, x_n = b$ .



Perhatikan interval  $[x_{i-1}, x_i]$ . Pilih titik wakil  $\bar{x}_i$

Sepanjang subinterval ini, gaya yang bekerja diaproksimasi oleh  $F(\bar{x}_i)$ .

Dengan demikian kerja sepanjang subinterval ini:  $\Delta W_i = F(\bar{x}_i) \Delta x_i$ .

Kerja seluruhnya adalah 
$$W = \int_a^b F(x) dx$$

### Soal-soal:

1. Sebuah pegas mempunyai panjang alami 10 cm. Untuk menarik dan menahannya sejauh 2 cm diperlukan gaya sebesar 3 dyne. Tentukan kerja yang dilakukan untuk menariknya sejauh 5 cm dari panjang alaminya. (Gunakan hukum Hooke: untuk menahan pegas sejauh  $x$  cm diperlukan gaya sebesar  $F = kx$ , dengan  $k$  adalah konstanta pegas).
2. Tangki berbentuk kerucut terbalik penuh berisi air. Tinggi tangki 2 meter dan jari-jari permukaan atasnya 1 meter. Bila besarnya gaya gravitasi adalah  $g$ , tentukan kerja yang dilakukan untuk memompa seluruh air sampai permukaan atas tangki.
3. Sebuah rantai yang beratnya 1 kg tiap meter, dipakai mengangkat benda seberat 200 kg dari dasar sumur yang dalamnya 15 meter. Tentukan kerja yang dilakukan untuk mengangkat benda tersebut sampai permukaan sumur. (petunjuk: gaya yang diperlukan untuk mengangkat benda adalah berat benda + berat rantai yang terjulur).

## Momen & Titik Berat/Pusat Massa

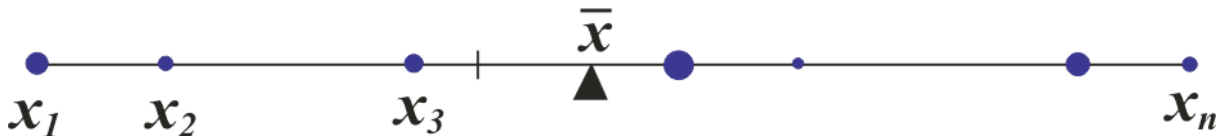


Dua buah benda masing-masing dengan massa  $m_1$  dan  $m_2$  dihubungkan dengan sepotong kawat kaku dan ringan (massa kawat diabaikan). Posisi masing-masing benda adalah  $x_1$  dan  $x_2$ . Titik  $\bar{x}$  adalah titik tumpuan agar keadaan sistem setimbang. Dari hukum fisika:

$$(x_1 - \bar{x}) m_1 + (x_2 - \bar{x}) m_2 = 0$$

Besaran  $(x_i - \bar{x}) m_i$  disebut **momen**. Secara umum momen sebuah benda terhadap sebuah titik/garis adalah **massa  $\times$  jarak benda terhadap titik/garis tersebut**.

Sekarang perhatikan sistem  $n$  buah benda dengan massa  $m_1, m_2, \dots, m_n$  yang dihubungkan oleh kawat ringan sepanjang sumbu- $x$  sbb.:



Dimanakah titik tumpuan  $\bar{x}$  harus diletakkan agar sisystem menjadi setimbang. Menurut hukum fisika, agar setimbang maka momen total benda terhadap titik  $\bar{x}$  harus bernilai nol. Jadi:

$$(x_1 - \bar{x}) m_1 + (x_2 - \bar{x}) m_2 + \dots + (x_n - \bar{x}) m_n = 0$$

Bila kita susun diperoleh:  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$  **Titik  $\bar{x}$  disebut titik berat**

Besaran  $m = \sum_{i=1}^n m_i$  disebut massa total benda.

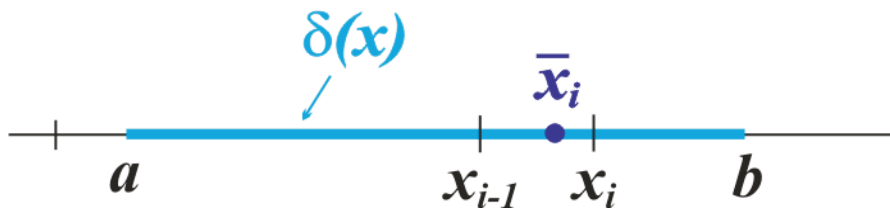
Besaran  $M = \sum_{i=1}^n x_i m_i$  disebut momen total benda terhadap titik 0.



**Contoh:** Massa sebesar 4, 2, 6 dan 7 pon diletakkan pada posisi 0, 1, 2 dan 4. Tentukan titik berat dari sistem tersebut.

## Titik Berat Kawat/Benda Satu Dimensi

Perhatikan sepotong kawat yang diletakkan sepanjang sumbu- $x$  pada posisi  $x = a$  sampai  $x = b$ . Bila rapat massa benda tersebut homogen maka titik beratnya terletak ditengah-tengah kawat,  $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$ . Sekarang akan ditinjau kasus di mana rapat massa benda tidak homogen. Misalkan rapat massanya adalah  $\delta(x)$ .



Bentuk partisi  $\mathcal{P} : x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ . Perhatikan potongan kawat pada subinterval  $[x_{i-1}, x_i]$ . Pilih titik wakil  $\bar{x}_i$ . Selanjutnya kita hitung aproksimasi massa dan momen potongan ini terhadap titik nol:

$$\Delta m = \delta(\bar{x}_i) \Delta x_i \quad \text{dan} \quad \Delta M = \bar{x}_i \delta(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

Dengan demikian Massa, momen dan titik berat kawat adalah:

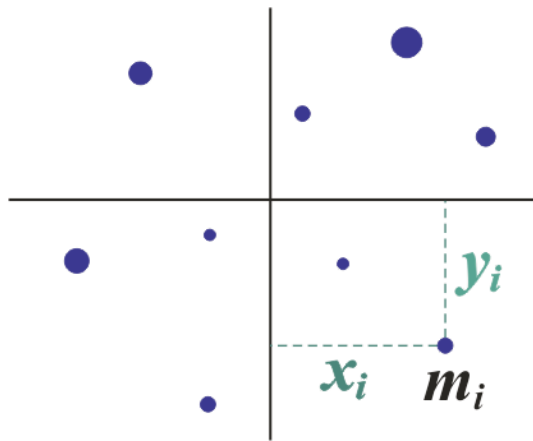
$$m = \int_a^b \delta(x) dx, \quad M = \int_a^b x \delta(x) dx \quad \text{dan} \quad \bar{x} = \frac{M}{m}$$

### Contoh:

Kepadatan/rapat massa sepotong kawat adalah  $\delta(x) = 3x^2$  gr/cm.

Tentukan pusat massa kawat antara  $x = 2$  dan  $x = 10$

## Distribusi Massa Pada Bidang

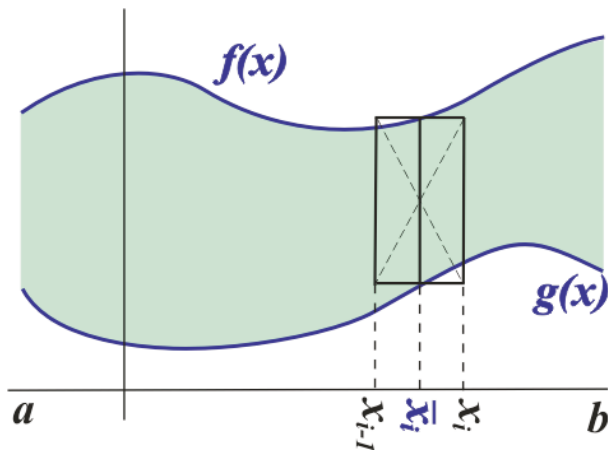


Perhatikan  $n$  buah benda dengan massa  $m_1, m_2, \dots, m_n$  yang terletak di bidang dengan koordinat  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ . Misalkan koordinat titik beratnya adalah  $(\bar{x}, \bar{y})$ . *(Perhatikan bahwa  $\bar{x}$  adalah jarak titik berat ke sumbu- $y$  dan  $\bar{y}$  adalah jarak titik berat ke sumbu- $x$ )*

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}, \quad \underbrace{m = \sum_{i=1}^n m_i}_{\text{massa total}}, \quad \underbrace{M_y = \sum_{i=1}^n x_i m_i}_{\text{momen thd sb-}y}, \quad \underbrace{M_x = \sum_{i=1}^n y_i m_i}_{\text{momen thd sb-}x}$$

**Contoh:** Lima buah benda dengan massa 1, 4, 2, 3, dan 6 gram terletak pada koordinat  $(6, -1), (2, 3), (-4, 2), (-7, 4)$  dan  $(2, -2)$ . Tentukan titik beratnya (pusat massanya).

## Pusat Massa Keping Homogen



Perhatikan sebuah keping homogen seperti pada gambar di samping. Partisikan interval  $[a, b]$  dan perhatikan subinterval  $[x_{i-1}, x_i]$ . Tetapkan  $\bar{x}_i$  titik tengah antara  $x_{i-1}$  dan  $x_i$ . Bentuk persegi panjang seperti pada gambar di samping.

Pusat massa persegipanjang tersebut terletak pada perpotongan diagonalnya (lihat gambar). Misalkan rapat massa keping adalah  $\delta$  (konstanta),

maka:

$$\Delta m = \delta (f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)) \Delta x_i \quad m = \delta \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

$$\Delta M_y = x \delta (f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)) \Delta x_i \quad M_y = \delta \int_a^b x (f(x) - g(x)) dx$$

$$\Delta M_x = \frac{f(\bar{x}_i) + g(\bar{x}_i)}{2} \delta (f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)) \Delta x_i \quad M_x = \frac{\delta}{2} \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx$$

Pusat massanya  $(\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \bar{y} = \frac{M_x}{m})$ . Pusat massa keping homogen ini tidak bergantung pada rapat massa  $\delta$ , dan biasa disebut *sentroid*.

*Catatan: Perhitungan pusat massa untuk keping tak homogen memerlukan konsep integral lipat dua, akan dipelajari pada Kalkulus 2.*

### Latihan:

1. Tentukan sentroid keping yang dibatasi oleh  $y = x^3$  dan  $y = \sqrt{x}$ .
2. Tentukan rumus sentorid untuk keping homogen yang dibatasi oleh grafik  $x = f(y)$ ,  $x = g(y)$ , garis  $y = c$  dan garis  $y = d$ . Asumsikan  $g(y) < f(y) \forall y \in [c, d]$ .
3. Pelajari teorema Pappus dari buku Purcell jilid 1 (terjemahan bahasa Indonesia) edisi 5 halaman 365.

## Fungsi-Fungsi Transenden

Fungsi real secara umum dibagi atas dua kelas yaitu:

- fungsi aljabar (polinom, fungsi rasional, akar, harga mutlak).
- fungsi transenden, yaitu yang bukan fungsi aljabar (contoh  $\sin x$ ).

Pada bagian ini akan dipelajari berbagai macam fungsi transenden disertai sifat-sifatnya.

### Fungsi Logaritma Asli

Perhatikan fungsi  $\int_1^x \frac{1}{t^k} dt$  dengan  $x > 0$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \neq 1$ . Fungsi tersebut

merupakan fungsi aljabar karena  $\int_1^x \frac{1}{t^k} dt = \frac{1}{1-k} \left( \frac{1}{x^{k-1}} - 1 \right)$ .

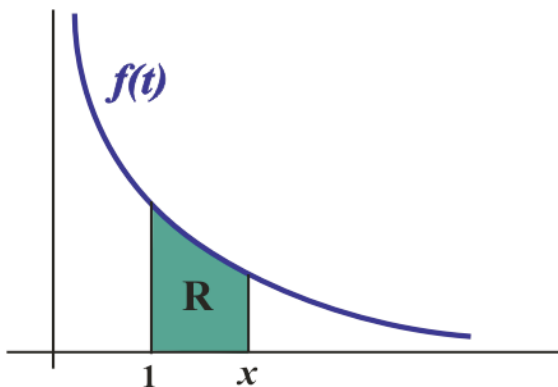
Untuk  $k = 1$ , fungsi di atas berbentuk  $\int_1^x \frac{1}{t} dt$ . Fungsi ini tidak dapat ditentukan secara eksplisit seperti di atas.

Fungsi logaritma asli, ditulis  $\ln$  didefinisikan sbb.

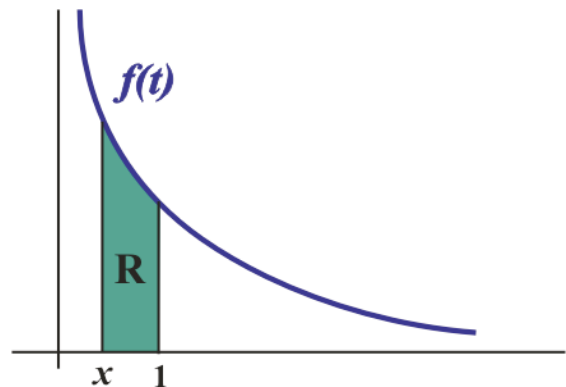
$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0$$

Secara geometri, fungsi  $\ln x$  dapat diilustrasikan sebagai berikut:

Perhatikan daerah yang dibatasi  $f(t) = \frac{1}{t}$ , sumbu- $x$ ,  $t = 1$ , dan  $t = x$



untuk  $x > 1$ ,  $\int_1^x \frac{1}{t} dt = \text{Luas R}$



untuk  $x < 1$ ,  $\int_1^x \frac{1}{t} dt = - \text{Luas R}$

Berdasarkan teorema dasar Kalkulus 2, maka

$$D_x[\ln x] = \frac{1}{x}$$

### Latihan:

1. Tentukan  $D_x[\ln \sqrt{x}]$

2. Tunjukkan  $D_x[\ln |x|] = \frac{1}{x}$ , jadi diperoleh

$$\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + c$$

3. Tentukan  $\int_{-1}^3 \frac{x}{10 - x^2} dx$

**Sifat<sup>2</sup>:** Misalkan  $a$  dan  $b$  bilangan-bilangan positif dan  $r \in \mathbb{Q}$

- $\ln 1 = 0$
- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln(a^r) = r \ln a$

### Grafik Fungsi Logaritma Asli

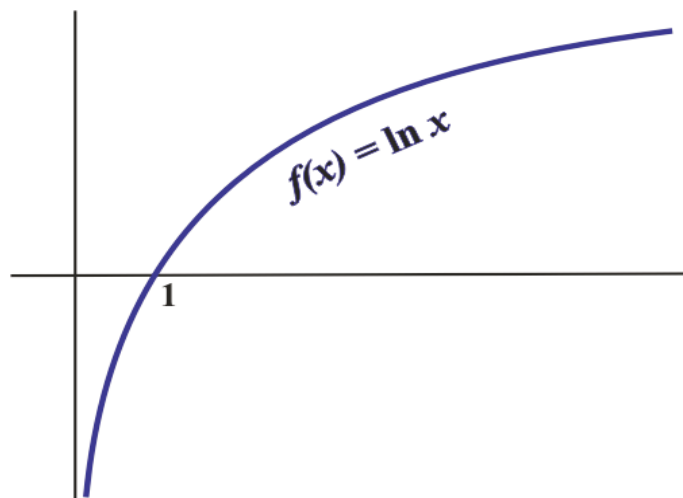
Misalkan  $f(x) = \ln x$ ,  $x > 0$ . Grafik memotong sumbu- $x$  pada  $x = 1$

$f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ , jadi grafik selalu monoton naik.

$f''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$ , jadi grafik selalu cekung ke bawah.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \end{array} \right\}$$

lihat Purcell edisi 5, pasal 7.1  
soal-soal 39 dan 40.



## Penurunan Fungsi dengan Bantuan Fungsi Logaritma Asli:

Fungsi logaritma asli dapat digunakan untuk menyederhanakan proses perhitungan turunan fungsi yang memuat pemangkatan, perkalian dan pembagian seperti diilustrasikan berikut ini:

Tentukan turunan dari fungsi  $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x+1)^{2/3}}$

Jawab:  $\ln y = \ln \left( \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x+1)^{2/3}} \right)$   
 $\ln y = \ln (\sqrt{1-x^2}) - \ln(x+1)^{2/3}$   
 $\ln y = \frac{1}{2} \ln (1-x^2) - \frac{2}{3} \ln(x+1)$

Selanjutnya kita turunkan kedua ruas terhadap  $x$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{2} \frac{1}{1-x^2} (-2x) - \frac{2}{3} \frac{1}{x+1}$$
$$y' = y \left( \frac{1}{2} \frac{1}{1-x^2} (-2x) - \frac{2}{3} \frac{1}{x+1} \right)$$
$$y' = \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x+1)^{2/3}} \left( \frac{1}{2} \frac{1}{1-x^2} (-2x) - \frac{2}{3} \frac{1}{x+1} \right)$$

### Soal-Soal:

1. Tentukan turunan dari:

a.  $y = \ln (x^2 - 5x + 6)$

c.  $y = \ln \sqrt[3]{x}$

b.  $y = \frac{1}{\ln x} + \ln \left( \frac{1}{x} \right)$

d.  $y = \ln(\sin x)$

2. Tentukan integral-integral berikut:

a.  $\int \frac{4}{2x+1} dx$

c.  $\int \frac{\ln x}{x} dx$

b.  $\int \frac{4x+2}{x^2+x+5} dx$

d.  $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx$

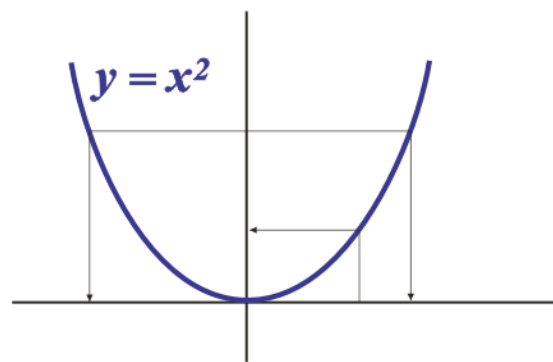
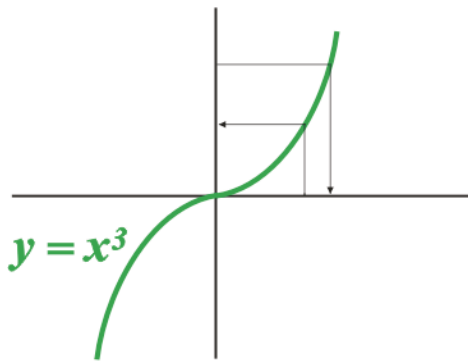
3. Hitunglah  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right]$

dengan cara menyusun bagian dalam kurung siku sebagai:

$$\left[ \frac{1}{1+1/n} + \frac{1}{1+2/n} + \cdots + \frac{1}{1+n/n} \right] \frac{1}{n}$$

lalu terapkan konsep integral tentu sebagai limit jumlah Riemann.

## Fungsi Invers dan Turunannya



Pada setiap grafik di atas, periksalah kebenaran pernyataan berikut:

- Setiap satu titik  $x$  berpasangan dengan tepat satu titik  $y$
- Setiap satu titik  $y$  berpasangan dengan tepat satu titik  $x$

Sebuah fungsi disebut *fungsi satu-satu*, bila untuk setiap titik  $y$  berpasangan hanya dengan satu titik  $x$ .

fungsi  $f$  bersifat satu-satu  $\iff f$  monoton murni (ilustrasikan)

Misalkan  $f$  fungsi satu-satu. Kita definisikan fungsi baru, dinamakan *fungsi invers*, disimbolkan  $f^{-1}$ , dengan aturan:

$$f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b$$

Perhatikan pada aturan fungsi di atas  $b \in R_f$  dan  $a \in D_f$ .

Secara umum  $D_{f^{-1}} = R_f$ , dan  $R_{f^{-1}} = D_f$

$$f^{-1}(f(a)) = a \quad \text{dan} \quad f(f^{-1}(b)) = b$$

- fungsi  $y = f(x) = x^3$  mempunyai invers dengan aturan  $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$
- fungsi  $y = f(x) = x^2$  tidak mempunyai invers (bukan fungsi satu-satu).

*Catatan:* penulisan nama peubah/variabel pada fungsi invers tidak harus menggunakan huruf  $y$ , boleh saja menggunakan sebarang simbol, misalnya  $f^{-1}(t)$  atau  $f^{-1}(x)$ . Hal yang perlu diperhatikan adalah formula dari aturan tersebut.

## Contoh-Contoh:

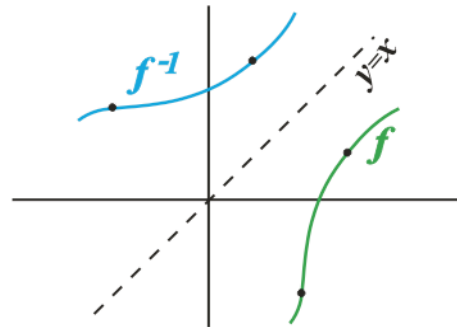
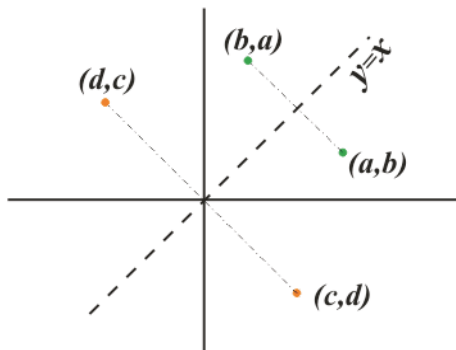
1. Tunjukkan  $f(x) = x^5 + 2x + 1$  memiliki invers
2. Tunjukkan  $f(x) = 2x + 6$  memiliki invers dan tentukan aturannya.
3. Tentukan fungsi invers dari  $f(x) = \frac{x}{1-x}$ .

## Menggambar Grafik Fungsi dan Inversnya

Misalkan diberikan grafik dari fungsi  $f(x)$ , kita akan menggambar grafik fungsi inversnya pada koordinat yang sama. Dengan demikian  $f$  dan  $f^{-1}$  keduanya kita tuliskan dalam variabel yang sama, yaitu  $x$ .

**Prinsip:** misalkan titik  $(a, b)$  pada grafik  $f(x)$ , maka titik  $(b, a)$  berada pada grafik  $f^{-1}$  (lihat gambar di bawah, sebelah kiri).

Dengan demikian grafik  $f^{-1}(x)$  dapat diperoleh dari grafik  $f(x)$  dengan mencerminkannya (titik demi titik) terhadap garis  $y = x$  (gambar kanan).



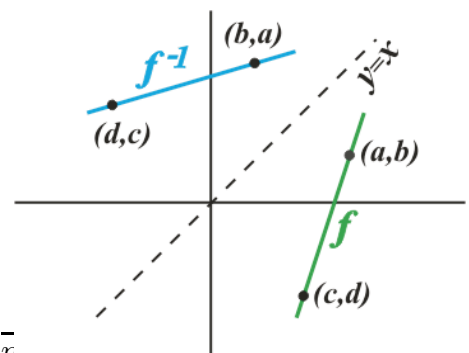
## Turunan Fungsi Invers

Akan ditinjau hubungan turunan fungsi dengan turunan fungsi inversnya.

Pada gambar di samping, diberikan garis lurus  $f(x)$  yang melalui titik  $(a, b)$  dan  $(c, d)$ . Fungsi inversnya  $f^{-1}(x)$  adalah garis lurus yang melalui titik  $(b, a)$  dan  $(d, c)$ .

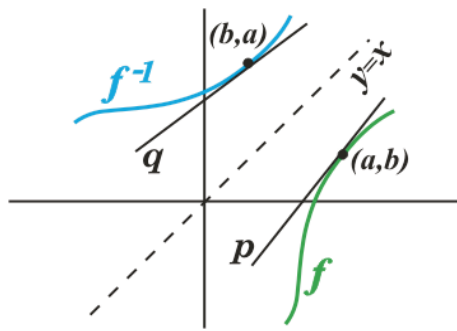
Gradien  $f$  di titik  $(a, b)$  adalah  $m_1 = \frac{b-d}{a-c}$ .

Gradien  $f^{-1}$  di titik  $(b, a)$  adalah  $m_2 = \frac{a-c}{b-d} = \frac{1}{m_1}$





Dengan demikian, bila  $(a, b)$  pada grafik  $f$  maka  $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ .  
 Sekarang kita perhatikan untuk fungsi sebarang  $f(x)$ .



Terhadap fungsi  $f$ , kemiringan garis singgung di titik  $(a, b)$  adalah kemiringan garis  $p$ , yaitu  $f'(a)$ . Terhadap grafik  $f^{-1}$ , garis singgung singgung di titik  $(b, a)$  (garis  $q$ ) merupakan cermin dari garis  $p$  terhadap garis  $y = x$ . Berdasarkan hasil di halaman sebelumnya, maka  $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ .

**Sifat:** Misalkan  $(x, y)$  pada grafik fungsi  $f$  maka  $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ .

### Soal-Soal:

1. Tunjukkan  $f(x) = \frac{x^3+1}{x^3+2}$  punya invers dan tentukan aturan  $f^{-1}(x)$ .
2. Tentukan  $(f^{-1})'(4)$  jika  $f(x) = x^2 + 2x + 1$ .
3. Misalkan  $f(x) = \int_0^x \sqrt{1+2t^2} dt, \quad x > 0$ 
  - a. Tunjukkan  $f(x)$  punya invers
  - b. Jika  $f(2) = A$ , tentukan  $(f^{-1})'(A)$

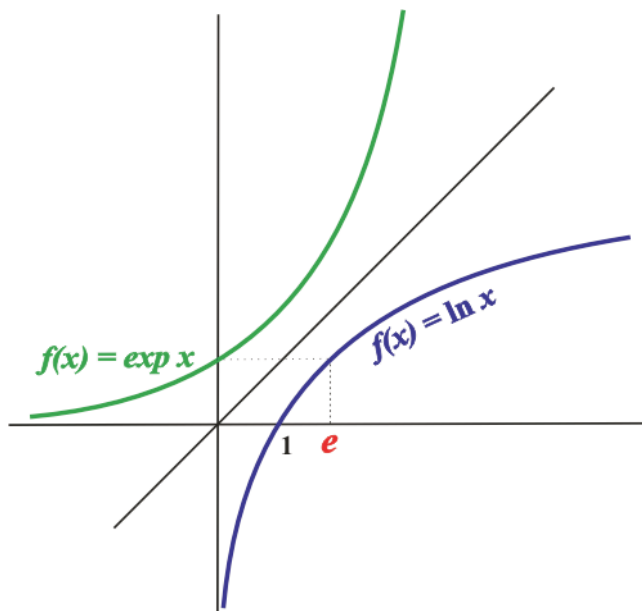
### Fungsi Exponen Asli

Perhatikan kembali fungsi logaritma asli  $f(x) = \ln x, \quad x > 0$ .  
 $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ . Jadi  $f$  fungsi monoton naik, sehingga mempunyai invers.  
 Fungsi inversnya disebut fungsi exponen asli dan dinotasikan sbb.

$$x = f^{-1}(y) = \exp y \iff y = f(x) = \ln x$$

Perhatikan, di sini  $D_{f^{-1}} = R_f = \mathbb{R}$  dan  $R_{f^{-1}} = D_f = (0, \infty)$

**Sifat:** (a.)  $\exp(\ln x) = x, \quad x > 0$       dan       $\ln(\exp y) = y, \quad y \in \mathbb{R}$



Pada gambar di samping disajikan grafik fungsi  $y = \exp x$  yang diperoleh dari pencerminan grafik  $y = \ln x$  terhadap sumbu- $y = x$ .

Untuk mengamati sifat-sifat lanjut dari fungsi exponen, kita definisikan bilangan baru, yaitu  $e$  yang bersifat  $\ln e = 1$  (lihat ilustrasi).

$$e = 2.71828182845904 \dots$$

Misalkan  $x \in \mathbb{R}$  maka  $\exp x = \exp(x \ln e) = \exp(\ln e^x) = e^x$ .

Dari sifat fungsi invers:  $e^{\ln x} = x, \quad x > 0$  dan  $\ln(e^x) = y, \quad y \in \mathbb{R}$

### Sifat-Sifat:

- $e^a e^b = e^{a+b}$  dan  $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
- $D_x[e^x] = e^x$  sehingga  $\int e^u du = e^u + c$

Bukti: Misalkan  $y = \ln x$ , maka  $x = \ln y$

$$D_x[x] = D_x[\ln y]$$

$$1 = \frac{1}{y} y'$$

$$y' = y$$

$$y' = \ln x$$

### Soal-Soal

1. Tentukan  $D_x[e^{\sqrt{x}}]$  dan  $D_x[x^2 \ln x]$
2. Tentukan  $\int e^{-4x} dx$  dan  $\int x^2 e^{-x^3} dx$
3. Tentukan luas daerah yang dibatasi grafik  $y = e^{-x}$  dan garis yang melalui titik  $(0, 1)$  dan  $(1, \frac{1}{e})$ .

## Fungsi Eksponen Umum

Fungsi eksponen umum didefinisikan sebagai berikut:

Misalkan  $a > 0$  dan  $x \in \mathbb{R}$ , fungsi eksponen umum  $a^x := e^{x \ln a}$

**Sifat-Sifat:** 1. Misalkan  $a, b > 0$  dan  $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \bullet a^x a^y &= a^{x+y} & \bullet (ab)^x &= a^x b^x \\ \bullet \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y} & \bullet \left(\frac{a}{b}\right)^x &= \frac{a^x}{b^x} \\ \bullet (a^x)^y &= a^{xy} \end{aligned}$$

$$2. D_x[a^x] = a^x \ln a$$

$$3. \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c$$

**Contoh:** (1) Tentukan  $D_x[3^{\sqrt{x}}]$       (2) Tentukan  $\int_1^2 2^{x^3} x^2 dx$

## Fungsi Logaritma Umum

Fungsi logaritma umum didefinisikan sebagai invers dari fungsi eksponen umum sebagai berikut:

Misalkan  $a > 0$  dan  $a \neq 1$ ,  $y = \log_a x \iff x = a^y$

**Sifat:**  $\bullet \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$        $\bullet D_x[\log_a x] = \frac{1}{x \ln a}$

**Soal-Soal:**

1. Tentukan (a)  $D_x[x^x]$       (b)  $D_x[(x^2 + 1)^{\sin x}]$       (c)  $D_x[(\ln x^2)^{2x+3}]$

2. Tentukan (a)  $\int x 2^{x^2} dx$       (b)  $\int_1^4 \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

3. Misalkan  $f(x) = \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$ ,  $a > 0, a \neq 1$ . Tunjukkan  $f(x)$  punya invers dan cari rumus untuk  $f^{-1}(x)$ .

4. Tunjukkan  $\lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = e$

## Masalah<sup>2</sup> Pertumbuhan dan Peluluhan Eksponensial

Pada tahun 1975, penduduk dunia diperkirakan berjumlah  $4 \cdot 10^9$  orang. Salah satu *model* pertumbuhan mengatakan *laju pertambahan penduduk berbanding lurus dengan jumlah penduduk saat itu* (wajarkah model ini ?). Misalkan  $t$  menyatakan waktu dalam tahun, dengan  $t = 0$  adalah tahun 1975 dan  $y$  adalah jumlah penduduk saat  $t$ , maka

$$\frac{dy}{dt} = k y \quad k = 0,0198 \quad (\text{konstanta, hasil statistik}).$$

Konstanta  $k$  dicari dari hasil sensus ditahun-tahun sebelumnya (jelaskan). Dengan menyelesaikan persamaan diferensial di atas, maka kita dapat memperkirakan jumlah penduduk setiap saat.

$$\frac{dy}{y} = k dt \iff \int \frac{dy}{y} = \int k dt \iff \ln |y| = kt + c$$

Karena  $y$  selalu positif maka tanda mutlak bisa dihilangkan, jadi

$$\ln y = kt + c \iff y = e^{kt+c} \iff y = e^c e^{kt}$$

Untuk mencari nilai  $c$ , kita gunakan  $y(0) = 4 \cdot 10^9$

$$4 \cdot 10^9 = e^c e^0, \text{ jadi } e^c = 4 \cdot 10^9.$$

$$y = 4 \cdot 10^9 e^{kt}$$

Prakiraan jumlah penduduk pada tahun 2004 ( $t = 29$ ) adalah:

$$y = 4 \cdot 10^9 e^{0,0198 \cdot 29} \approx 7,102837564 \cdot 10^9$$

### **Diskusi:**

Bila  $t$  besar sekali ( $t \longrightarrow \infty$ ), menuju berapakah jumlah penduduk ? dengan demikian, wajarkan model pertumbuhan di atas ?

## Soal-Soal:

1. Laju pembiakan bakteri adalah sebanding dengan jumlah bakteri saat itu. Jumlah bakteri pada Pk 12.00 adalah 10000. Setelah 2 jam jumlahnya menjadi 40000. Berapa jumlahnya pada pk 17.00 ?
2. Akibat memancarkan sinar radioaktif, Karbon-14 meluruh (berkurang beratnya dengan laju sebanding dengan jumlah zat saat itu. Waktu paruhnya (waktu untuk mencapai setengah beratnya) adalah 5730 tahun. Bila pada saat awal terdapat 10 gram, berapakan beratnya setelah 2000 tahun ?

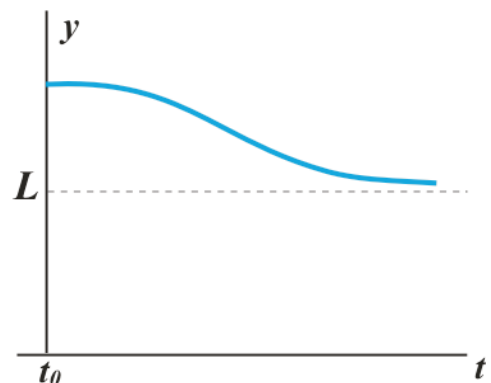
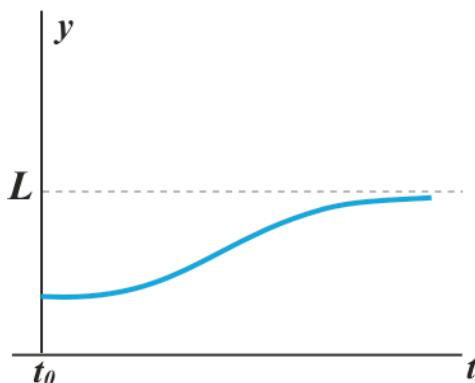
**Tugas Mandiri:** Pelajari model bunga majemuk (Purcell jilid 1 (terjemahan, Edisi 5 Pasal 7.5 halaman 403)

## Model Pertumbuhan Logistik (optional)

Model pertumbuhan yang telah di bahas bukanlah model matematika yang ideal, karena bila  $t$  membesar terus, jumlah individu menuju nilai  $\infty$ . Hal ini tentunya tidak realistik. Bila jumlah individu terlalu banyak sedangkan jumlah makanan terbatas tentunya yang mati akan banyak. Model yang lebih baik adalah model logistik sbb.:

$$y' = ky(L - y), \quad k, L \text{ konstanta}$$

Dua grafik di bawah ini menjelaskan keadaan jumlah penduduk bila  $t$  membesar. Gambar sebelah kiri untuk keadaan awal  $y < K$ , sedangkan gambar sebelah kanan untuk keadaan awal  $y > K$ . (Jelaskan!).



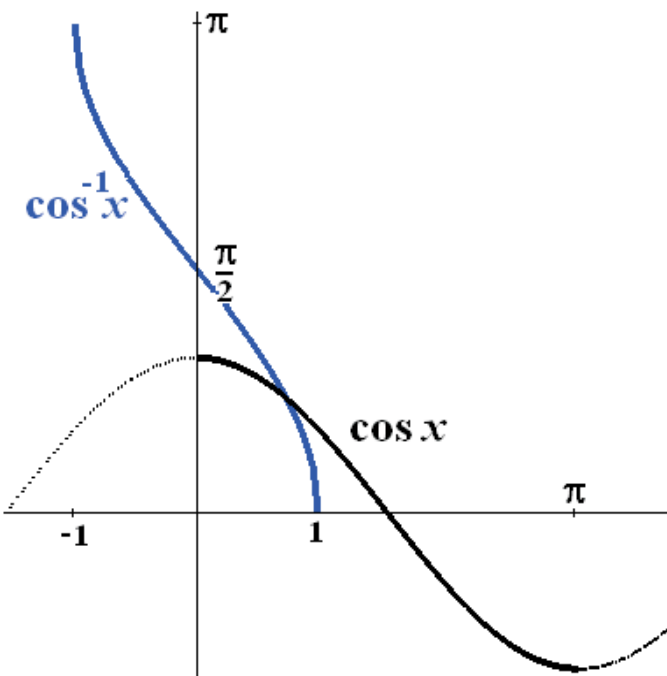
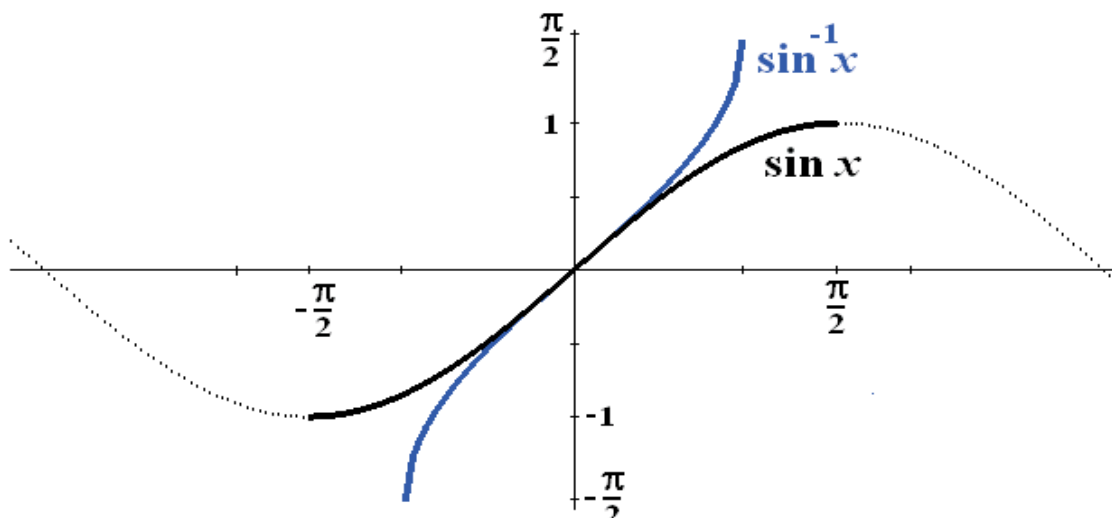
## Fungsi Trigonometri Invers

Fungsi-fungsi trigonometri bukanlah fungsi satu-satu. Supaya fungsi inversnya dapat didefinisikan, maka daerah definisinya dibatasi (pada bagian yang monoton murni saja). karena fungsi-fungsi trigonometri bersifat periodik, pembatasan daerah definisinya diambil yang berada disekitar  $x = 0$ .

### Fungsi Invers Sinus

$$x = \sin^{-1} y \iff y = \sin x \quad \text{dengan} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$D_{\sin^{-1}} = [-1, 1] \text{ dan } R_{\sin^{-1}} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



### Fungsi Invers Cosinus

$$x = \cos^{-1} y \iff y = \cos x$$

$$D_{\cos^{-1}} = [-1, 1]$$

$$R_{\cos^{-1}} = [0, \pi]$$

## Contoh: Hitunglah

(a.)  $\sin^{-1}(\sqrt{2}/2)$

(c.)  $\cos^{-1}(\sqrt{3}/2)$

(e.)  $\cos(\cos^{-1}(0,6))$

(b.)  $\sin^{-1}(-\frac{1}{2})$

(d.)  $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$

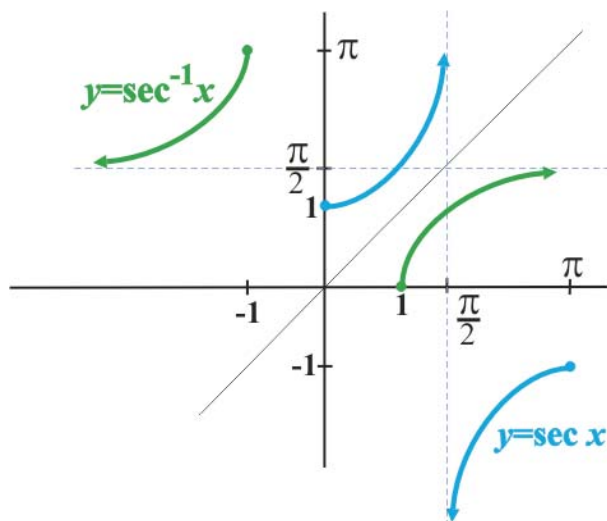
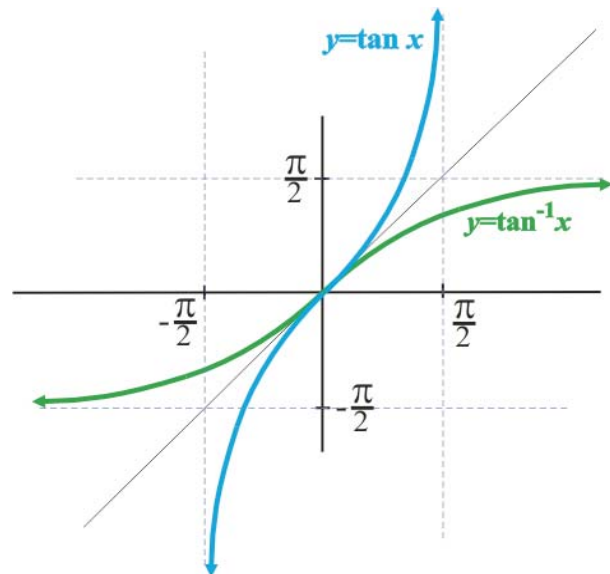
(f.)  $\sin^{-1}(\sin(3\pi/2))$

## Fungsi Invers Tangens

$$x = \tan^{-1} y \iff y = \tan x$$

$$D_{\tan^{-1}} = \mathbb{R}$$

$$R_{\tan^{-1}} = (-\pi/2, \pi/2)$$



## Fungsi Invers Secan

$$x = \sec^{-1} y \iff y = \sec x$$

$$D_{\sec^{-1}} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

$$R_{\sec^{-1}} = (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$$

**Sifat:**  $\sec^{-1} y = \cos^{-1}(\frac{1}{y})$

## Sifat-Sifat

a.  $\sin(\cos^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$  (buktikan!)

b.  $\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$

c.  $\sec(\tan^{-1} x) = \sqrt{1+x^2}$

d.  $\tan(\sec^{-1} x) = \begin{cases} -\sqrt{x^2-1} & x \leq -1 \\ +\sqrt{x^2-1} & x \geq 1 \end{cases}$  (buktikan!)

## Turunan Fungsi Trigonometri Invers:

a.  $D_x[\sin^{-1} x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad -1 < x < 1 \quad (\text{buktikan!})$

b.  $D_x[\cos^{-1} x] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad -1 < x < 1$

c.  $D_x[\tan^{-1} x] = \frac{1}{1+x^2}$

d.  $D_x[\sec^{-1} x] = \frac{1}{|x| \sqrt{x^2-1}} \quad |x| > 1 \quad (\text{buktikan!})$

## Akibat:

a.  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$

b.  $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$

c.  $\int \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} |x| + c$

## Contoh-Contoh:

1. Tentukan (a)  $D_x[\sin^{-1}(x^3 + 2x)]$  (b)  $D_x[(\sec^{-1} x^2)^2]$

2. Tentukan (a)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta}{1+\cos^2 \theta} d\theta$   $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

3. Daerah yang dibatasi oleh  $y = 5(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$ , sumbu- $x$ , sumbu- $y$  dan garis  $x = 4$  diputar terhadap sumbu- $x$ . Tentukan volumenya.

4. Pada ketinggian 2 km, sebuah pesawat bergerak horizontal dengan laju 600 km/jam, di atas seorang pengamat. Tentukan laju sudut elevasi antara pesawat dan orang tersebut pada saat jarak keduanya 3 km.



## Fungsi-Fungsi Hiperbol dan Inversnya

Fungsi hiperbol dibentuk dari berbagai kombinasi fungsi eksponen sbb:

$$1. \sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$$

$$4. \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$2. \cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

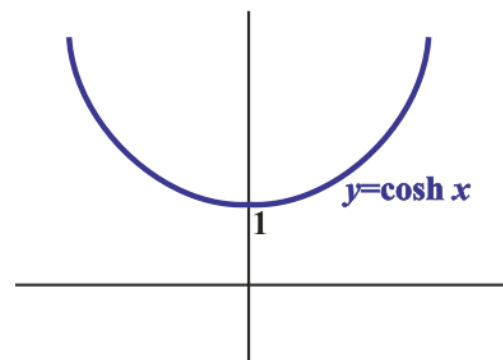
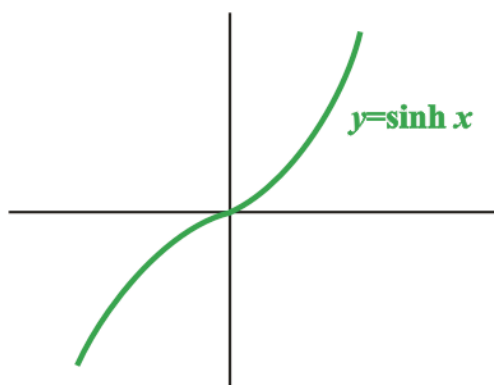
$$5. \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$3. \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$6. \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

Dari definisi di atas, buktikanlah isi tabel berikut ini:

	$\sinh x$	$\cosh x$
daerah definisi	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
sifat fungsi	ganjil	genap
turunan fungsi	$\cosh x$	$\sinh x$
kemonotonan	naik	turun di $(-\infty, 0)$ naik di $(0, \infty)$
titik ekstrim	tidak ada	min. global di $x = 0$
kecekungan	cekung ke bawah di $(-\infty, 0)$ cekung ke atas di $(0, \infty)$	cekung ke atas
titik belok	$x = 0$	tidak ada



**Sifat-Sifat:**

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$
- $1 - \coth^2 x = -\operatorname{csch}^2 x$
- $D_x[\tanh x] = \operatorname{sech}^2 x$                        $D_x[\coth x] = -\operatorname{csch}^2 x$
- $D_x[\operatorname{sech} x] = -\operatorname{sech} x \tanh x$                        $D_x[\operatorname{csch} x] = -\operatorname{csch} x \coth x$

**Contoh:** Tentukan (a)  $D_x[\cosh^2(3x - 1)]$       (b)  $\int \tanh x \, dx$

## Invers Fungsi Hiperbol

$$\begin{aligned}x &= \sinh^{-1} y \iff y = \sinh x \\x &= \cosh^{-1} y \iff y = \cosh x \quad x \geq 0 \\x &= \tanh^{-1} y \iff y = \tanh x \\x &= \operatorname{sech}^{-1} y \iff y = \operatorname{sech} x \quad x \geq 0\end{aligned}$$

### Sifat-Sifat:

$$\begin{aligned}\text{a. } \sinh^{-1} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ \text{b. } \cosh^{-1} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad x \geq 1 \\ \text{c. } \tanh^{-1} x &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad -1 < x < 1 \\ \text{d. } \operatorname{sech}^{-1} x &= \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \quad 0 < x \leq 1\end{aligned}$$

Bukti b.  $y = \cosh^{-1} x \iff x = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \quad y \geq 0$

$$(e^y)^2 - 2xe^y + 1 = 0$$

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

$$y = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$$

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (\text{karena } y \geq 0)$$



### Turunan Fungsi Invers Hiperbol

$$D_x[\sinh^{-1} x] = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$D_x[\cosh^{-1} x] = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad x > 1$$

$$D_x[\tanh^{-1} x] = \frac{1}{1 - x^2} \quad -1 < x < 1$$

$$D_x[\operatorname{sech}^{-1} x] = \frac{-1}{x\sqrt{1 - x^2}} \quad 0 < x < 1$$