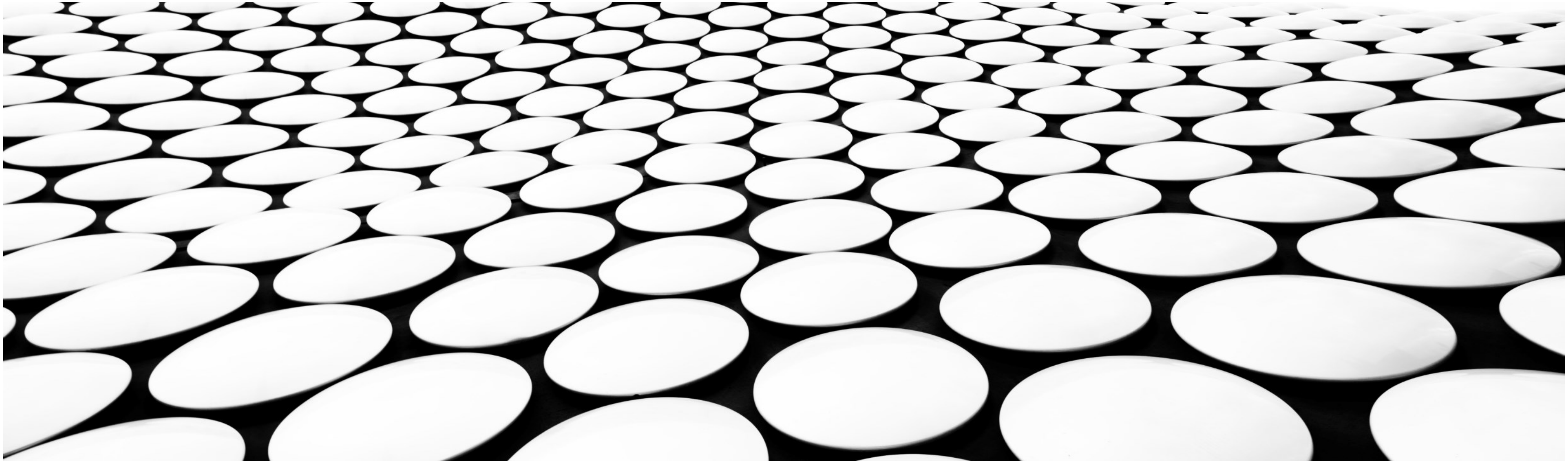
VEKTOR BEBAS LINIER, BERGANTUNG LINIER DAN KOMBINASI LINIER

SUKMAWATI NUR ENDAH - UNDIP



DEFINISI VEKTOR BEBAS LINIER

- Misalkan $S = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n\}$ adalah himpunan vektor di ruang vektor *V*, S

  dikatakan **bebas linier** (*linearly independent*), jika $k_1\overline{u}_1 + k_2\overline{u}_2 + \ldots + k_n\overline{u}_n = \overline{0}$

  hanya mempunyai satu solusi (tunggal), yakni :

  $k_1 = 0, k_2 = 0, \ldots., k_n = 0$

Contoh : Diketahui $\bar{u} = (-1,\ 3,\ 2)$ dan $\bar{a} = (1,\ 1,\ -1)$

Apakah saling bebas linear di R^3

Jawab : Tulis

$$k_1\vec{u} + k_2\vec{a} = \vec{0}$$

atau

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dengan Operasi Baris Elementer (OBE) dapat diperoleh :

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

dengan demikian diperoleh solusi tunggal yaitu :

$k_1 = 0$, dan $k_2 = 0$.

Ini berarti ū dan ā adalah saling bebas linear.

DEFINISI VEKTOR BERGANTUNG LINIER

- Misalkan $S = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$ adalah himpunan vektor di ruang vektor *V*, S dikatakan **bergantung linier** (*linearly dependent*), jika terdapat scalar k_1, k_2, …., k_n yang tidak nol sehingga berlaku $k_1\bar{u}_1 + k_2\bar{u}_2 + ... + k_n\bar{u}_n = \bar{0}$

Contoh :

Misalkan

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Apakah ketiga vektor diatas saling bebas linear R^3

Jawab :

Tulis : $\bar{0} = k_1\bar{a} + k_2\bar{b} + k_3\bar{c}$

atau $$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dengan OBE diperoleh :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Didapatkan :

$k_2 = 0$

$k_1 - k_2 - 2k_3 = 0 \Rightarrow k_1 = 2k_3$

Ini menunjukan bahwa

k_1, k_2, k_3 mrp solusi tak hingga banyak

Jadi $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ adalah vektor-vektor yang bergantung linear.

CATATAN

1. Untuk kumpulan vektor yang terdiri dari hanya satu elemen $\vec{u}$ dengan $\vec{u} \neq 0$, adalah bebas linier, sebab jika $\lambda\ \vec{u} = \vec{0}$ di mana $\vec{u} \neq \vec{0}$ maka $\lambda = 0$.
2. Untuk kumpulan vektor yang terdiri dari hanya satu elemen $\vec{0}$ vektor nol adalah vektor yang bergantungan linier, sebab jika $\lambda\ \vec{0} = \vec{0}$, maka terdapat $\lambda \neq 0$.

CONTOH

- {(2,1,3,4,5)} merupakan kumpulan vektor bebas linier, karena elemen kumpulan vektor ini terdiri dari satu elemen yaitu (2,1,3,4,5)
- {(0,0,0)} merupakan kumpulan vektor yang bergantung linier, sebab terdapat scalar $k \neq 0$, sehingga $(0,0,0) = (k_1.0, k_2.0, k_3.0) = (0,0,0)$

KOMBINASI LINIER

- Definisi
  - Suatu vektor w disebut sebagai **kombinasi linier** dari vektor v_1, v_2,....v_n, jika bisa dinyatakan dalam bentuk

    $$w = k_1v_1 + k_2v_2 \ldots + k_nv_n$$

    dengan k_1, k_2, ... k_n adalah skalar

- Catatan :
  - Jika n=1, maka $w = k_1v_1$ ➔ w adalah kombinasi linier dari suatu vektor tunggal v_1 jika w adalah suatu penggandaan skalar dari v_1

CONTOH

- Setiap vektor v = (a, b, c) dalam R^3 bisa dinyatakan sebagai suatu kombinasi linier dari vektor basis standar

  i = (1,0,0), j = (0,1,0), k = (0,0,1)

  karena

  v = (a, b, c) = a (1,0,0) +b (0,1,0) + c (0,0,1)

  = ai+bj +ck

CONTOH

- Diketahui ruang vektor V dibentuk oleh sekumpulan vektor {(-2,3), (6,-9)}
  - Selidiki apakah pembentuk ruang vector bebas linier atau bergantung linier?
  - Gambarkan bentuk geometrinya!

- **Penyelesaian :**
  - V = {(-2,3), (6,-9)}, sebutlah $\bar{a} = (-2{,}3)$ dan $\bar{b} = (6, -9)$
  - $k_1\bar{a} + k_2\bar{b} = 0$
  - $k_1(-2{,}3) + k_2(6, -9) = 0$

LANJUTAN

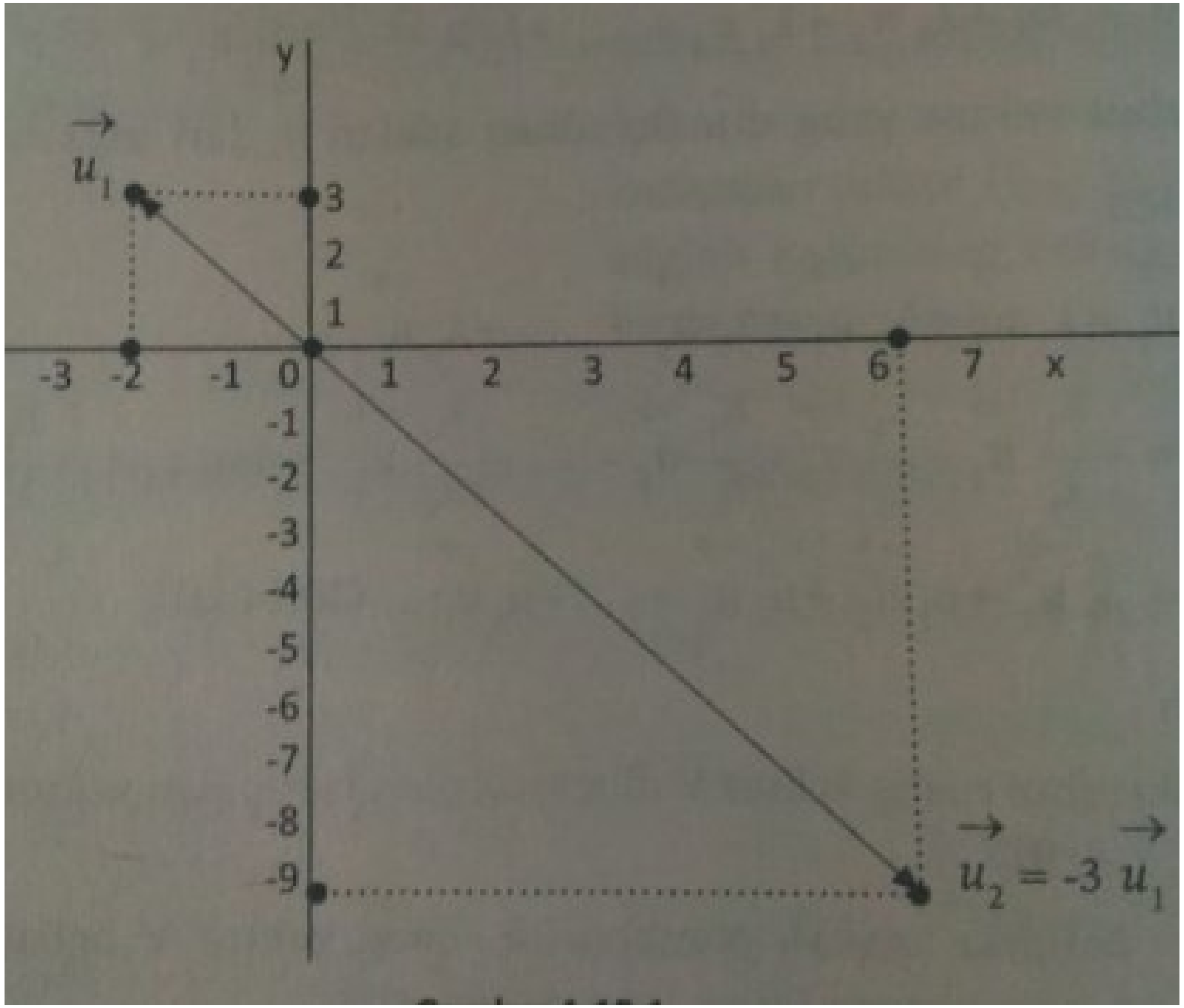
- $-2k_1 + 6k_2 = 0$ ... (1)
- $3k_1 - k_2 = 0$ ... (2)

- Persamaan (1) : (-2) ⇔ $k_1 - 3k_2 = 0$
- Persamaan (2) : 3 ⇔ $k_1 - 3k_2 = 0$
- Kedua persamaan sama, sehingga diperoleh hubungan $k_1 = 3k_2$, ambil k_1=3, k_2=1
- Jadi V merupakan kumpulan vector yang bergantung linier.
- Berlaku hubungan 3(-2,3) +(6,-9) = (0,0) atau $3\bar{a} + \bar{b} = \bar{0}$ atau $\bar{b} = -3\bar{a}$

LANJUTAN

- Bentuk geometri :

Dengan mengasumsikan $\bar{a} = \overline{u_1}$ dan $\bar{b} = \overline{u_2}$



CONTOH

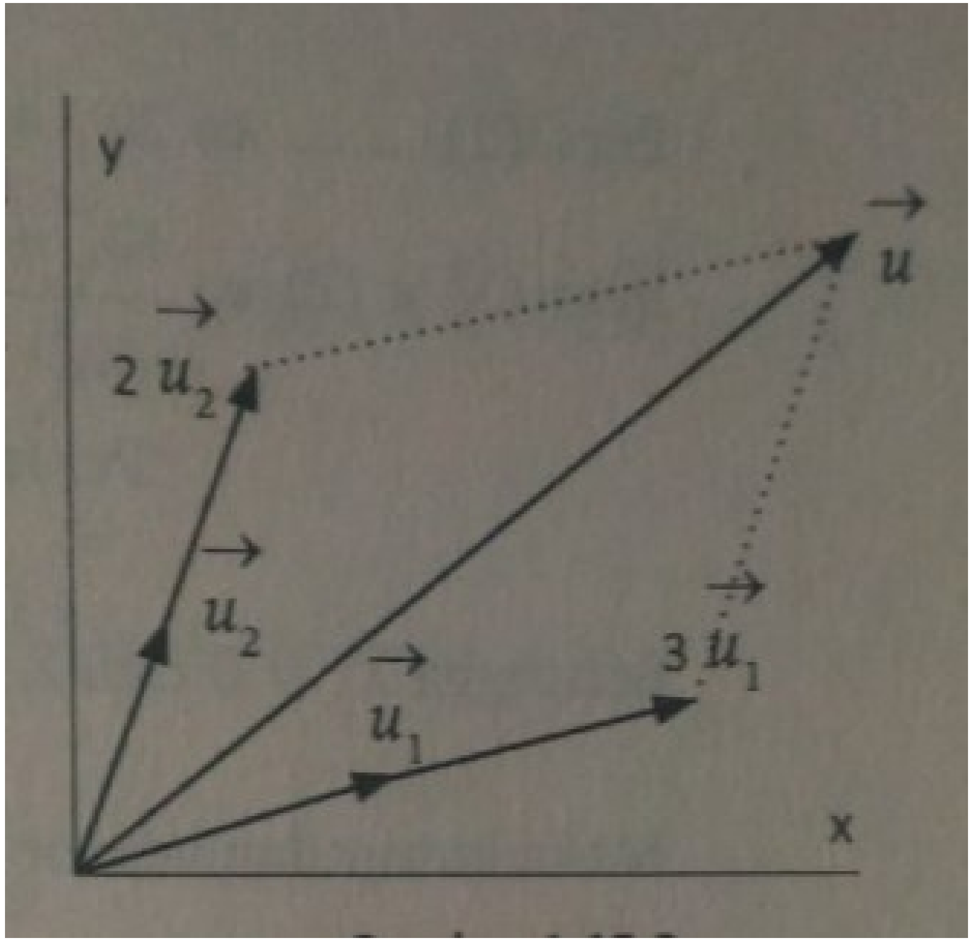
- Tuliskan $\bar{u} = (8,9)$ sebagai kombinasi dari $\overline{u_1}$ = (2,1) dan $\overline{u_2}$ = (1,3) dan nyatakan bentuk geometrinya!

Penyelesaian :

- Dengan cara yang sama dengan contoh sebelumnya, sebagai Latihan ya..., didapatkan k_1=3, k_2=1
- $\bar{u} = 3\,\overline{u_1} + 2\,\overline{u_2}$

LANJUTAN

- Bentuk geometri



CONTOH

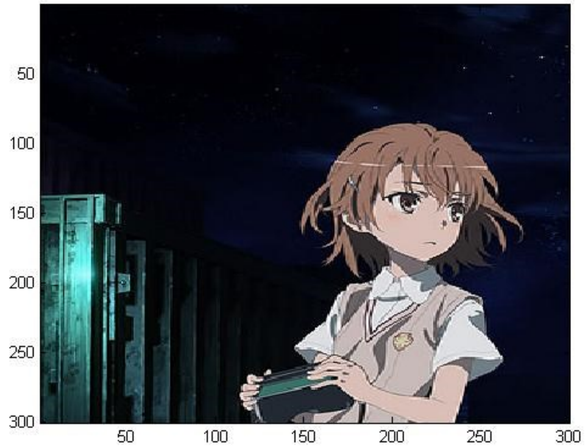
- Tinjau vektor u = (1,2,-1) dan v = (6,4,2). Tunjukkan bahwa :
  - w = (9,2,7) adalah kombinasi linier dari u dan v
  - w' = (4,-1,8) **bukanlah** kombinasi linier dari u dan v

Penyelesaian :

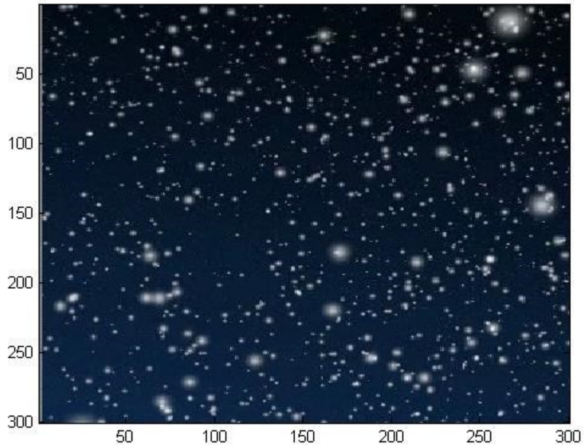
- Agar w adalah kombinasi linier dari u dan v, maka harus ada k_1 dan k_2 sedemikian hingga:

  $(9,2,7) = k_1(1,2,-1) + k_2(6,4,2)$
- Coba carilah nilai k_1 dan k_2 !
- Bagaimana dengan w'?

Apa sih contoh hasil dari sebuah kombinasi linier??

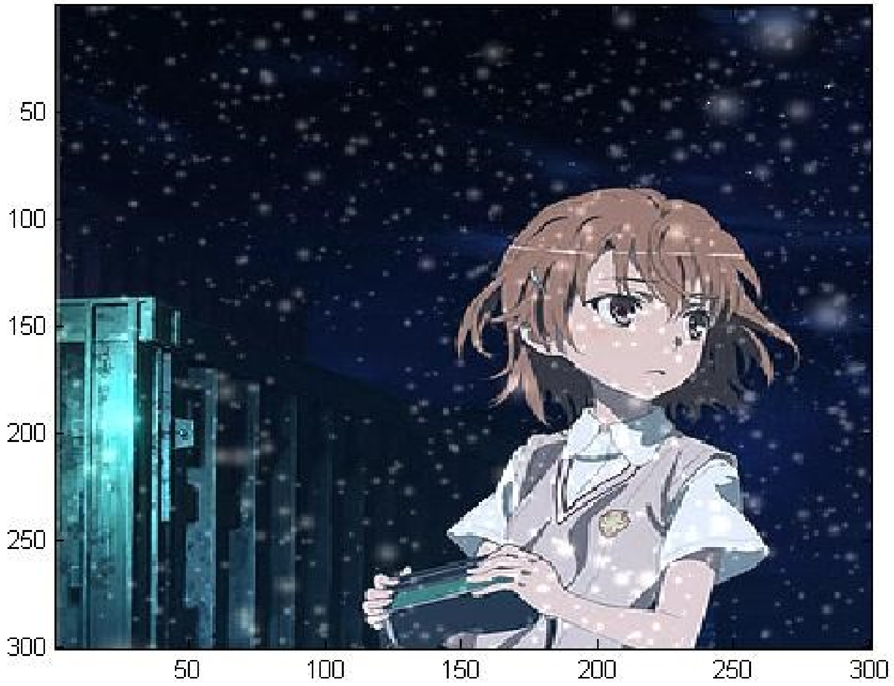


u_1

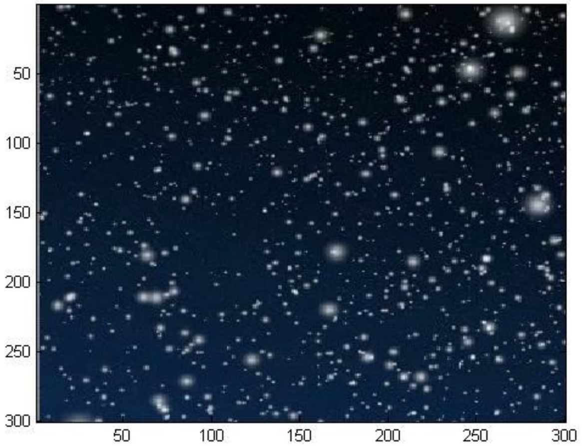


u_2

$$1 \cdot u_1 + 0.5 \cdot u_2 =$$

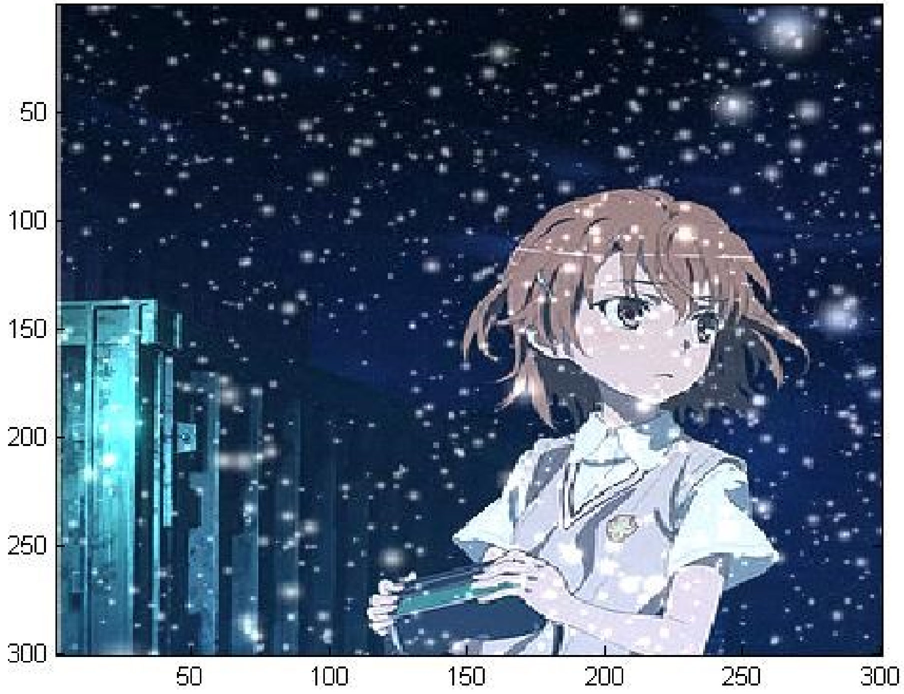


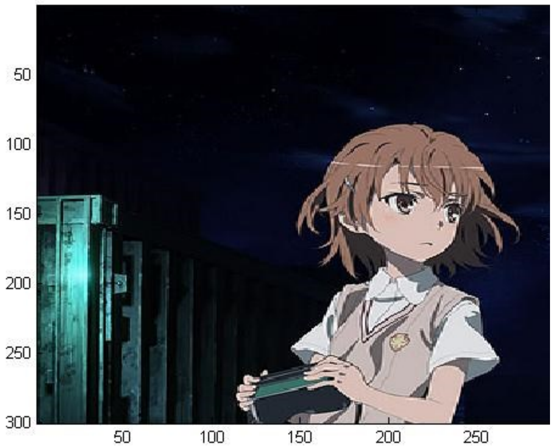
u_1



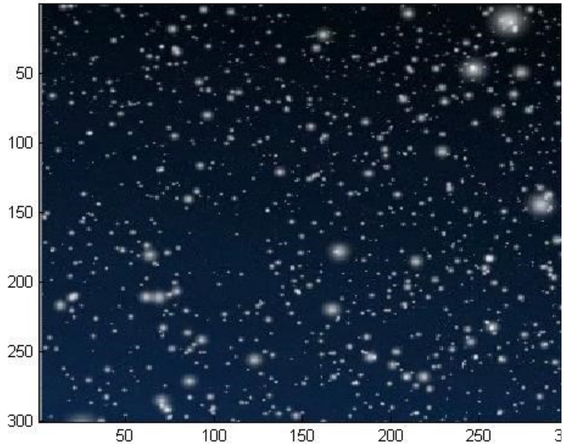
u_2

$$1 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 =$$

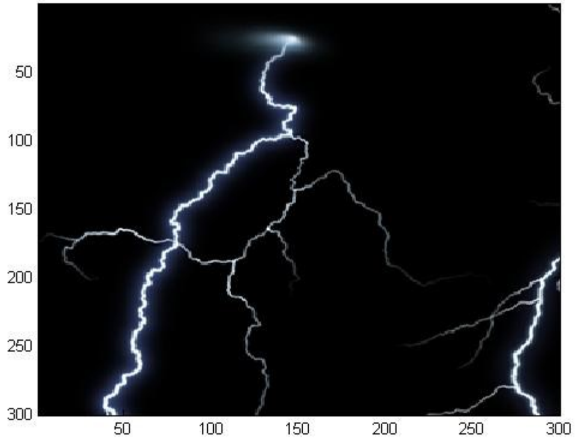




u_1

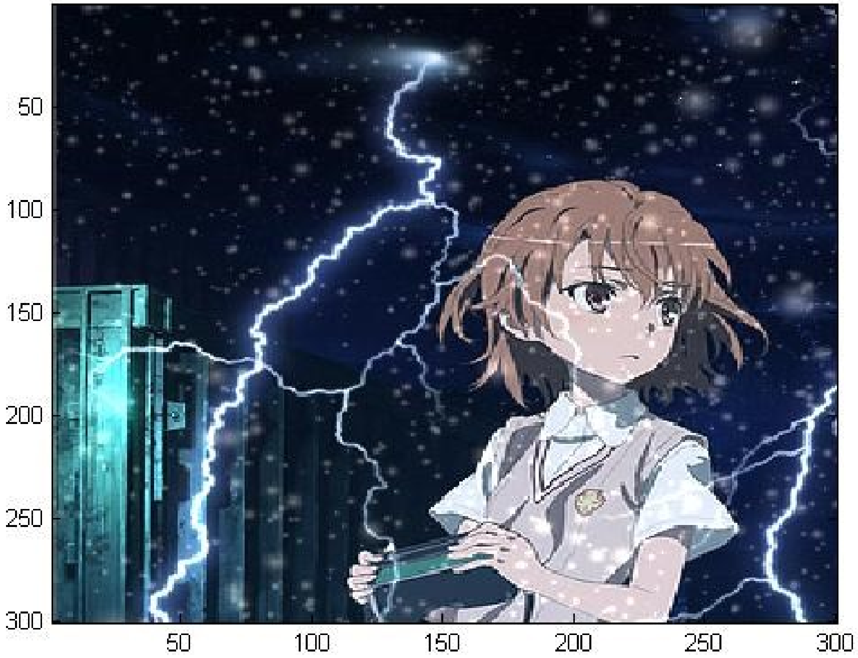


u_2



u_3

$$1 \cdot u_1 + 0.5 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3 =$$



TERIMA KASIH, ADA PERTANYAAN?