by DMW++ from HMIF UNDIP
Jawaban belum tentu benar dan hanya sebagai referensi!!!

Mata Kuliah : Aljabar Linier
Tahun Ajaran : 2020/2021
Semester : genap / 2
* UAS *

Soal no 1

(1) Diket : Persamaan bidang yang melewati titik : $P(2,1,3)$, $Q(4,3,2)$ dan $R(7,4,2)$

Ditanya : solusi (tentukan vektor normal dahulu, lalu tentukan persamaan bidangnya!

Jawab :

* $u = Q - P = (4-2, 3-1, 2-3) = (2, 2, -1)$
* $v = R - P = (7-2, 4-1, 2-3) = (5, 3, -1)$
* Vektor normalnya :

$$n = u \times v$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = i - 3j + 4k = (a, b, c)$$

→ vektor normal terhadap bidang yang diketahui.

* Dengan pangkal $P(2,1,3)$, maka persamaan bidangnya adalah :

$$a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$$

$$1(x-2) + 3(y-1) + 4(z-3) = 0 \rightarrow \text{Bentuk Baku}$$

$$(x-2) + (3y-3) + (4z-12) = 0$$

$$x + 3y + 4z - 17 = 0 \rightarrow \text{Bentuk Umum}$$

* Dengan menguji titik A, B, C, maka akan memenuhi persamaan bidang :

$$x + 3y + 4z - 17 = 0$$

→ titik $P(2,1,3)$ → $2 + 3 + 12 - 17 = 0$

$$17 - 17 = 0 \quad \text{terbukti benar}$$

$$0 = 0 \quad //$$

Jadi persamaan bidangnya adalah $x + 3y + 4z - 17 = 0$ //

Soal no 2

(2a) Diket : $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ Ditanya : Tentukan eigenvalue & eigenvector matriks A !

Jawab :

$\Rightarrow$ dengan rumus $(\lambda I - A) = 0$ maka

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det\begin{bmatrix} \lambda-5 & -2 \\ -4 & \lambda-3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-5)(\lambda-3) - (-2)\cdot(-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 15 + 8 = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0$$

$$(\lambda-7)(\lambda-1) = 0$$

$$\lambda_1 = 7 \lor \lambda_2 = 1 \longrightarrow \text{eigenvalue}$$

* eigenvectornya adalah :

$\Rightarrow$ dengan perolehan dari $(\lambda I - A)x = 0$, maka

$$\begin{bmatrix} \lambda-5 & -2 \\ -4 & \lambda-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

* Untuk $\lambda_1 = 7$

* $2x_1 + (-2x_2) = 0$

* $-4x_1 + 4x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

misal: $x_1 = s \Rightarrow x_2 = s$

eigenvectornya = $\begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

* Untuk $\lambda_2 = 1$

* $-4x_1 - 2x_2 = 0$

* $-4x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow -2x_1 = x_2 = 0$

misal : $x_2 = s \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}s$

eigenvectornya = $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}s \\ s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Jadi Eigenvaluenya adalah $\lambda_1 = 7$ atau $\lambda_2 = 1$ dan eigenvectornya adalah $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ //

(2b) Ditanya: P, P^{-1} & D sehingga $P^{-1}AP = D$!

Jawab : Dr eigenvector tsb. maka :

$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $P_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$; maka $P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$P^{-1} \Rightarrow \frac{1}{\det[P]}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{3/2}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & 2 \end{bmatrix}$$ //

Scanned with CamScanner

Nama : Fayza Aulia
Kelas : Informatika A
NIM : 24060120120010

Mata Kuliah : Aljabar Linier
Tahun ajaran : 2020/2021
Semester : 2
UAS 2020/2021

Soal Essay! no 3

3a. Diketahui : Persamaan Diferensial :

a.) $e^x y' = \frac{4(xy-x)}{x}$.

Ditanya: carilah solusi umum PD tsb!

jawab:

$$y' = \frac{4\cancel{x}(y-1)}{\cancel{x}\cdot e^x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 4(y-1)\cdot e^{-x}$$

$$\frac{dy}{dx} = (4y-4).e^{-x}$$

$$\left(\frac{1}{4y-4}\right)\frac{dy}{dx} = e^{-x} \rightarrow \text{(integrasikan ke-2 ruas)}$$

$$\int\left(\frac{1}{4y-4}\right)\frac{dy}{\cancel{dx}}\cancel{dx} = \int e^{-x}\,dx$$

$$\underbrace{\frac{1}{4}\int\frac{1}{(y-1)}dy}_{\text{pers. 2}} = \underbrace{-\int e^{u}\,du}_{\text{pers. 1}}$$

$$= -e^{u}$$

$$\frac{1}{4}\ln(y-1)+C = -e^{-x}+C$$

Persamaan (1) :

* misal : $-x = u$

$\frac{du}{dx} = -1 \rightarrow dx = -du$

* misal : $u = y-1$

$du = dy$

maka $\frac{1}{4}\int\frac{1}{(y-1)}dy = \frac{1}{4}\int\frac{1}{u}du$

$= \frac{1}{4}\ln|u|$

$= \frac{1}{4}\ln(y-1)+C.$

persamaan (2)

Jadi bentuk umumnya adalah $\frac{1}{4}\ln(y-1)+C = -e^{-x}+C$ //

3b Diket : Persamaan diferensial :

$y' - 2xy = x$

Ditanya: solusi khusus dengan $y(0)=0$!

jawab :

$\Rightarrow y' = 2xy + x$

$\frac{dy}{dx} = x(2y+1) \xrightarrow{\text{pisahkan}} \frac{1}{(2y+1)}\frac{dy}{dx} = x$

(integrasikan ke-2 ruas) $\Rightarrow \int\frac{1}{(2y+1)}\frac{dy}{\cancel{dx}}\cancel{dx} = \int x\,dx$

misal: $u = 2y+1$

$\frac{du}{dy} = 2 \rightarrow dy = \frac{1}{2}du$

masukkan ke persamaan

$\Rightarrow \int\frac{1}{u}\frac{1}{2}du = \frac{x^2}{2}+C$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(u) = \frac{x^2}{2}+C$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(2y+1) = \frac{x^2}{2}+C$

lanjutan no 3b

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(2y+1) = \frac{x^2}{2} + C$$ dimana $y(0)=0$, maka:

$$\ln(2y+1) = x^2 + C$$
$$\ln(2y+1) = 0^2 + C$$
$$\ln(2y+1) = C$$

maka,

$$\ln(2y+1) = x^2 + \ln(2y+1)$$

sehingga $(2y+1)$:

$$|2y+1| = e^{-x^2} e^{\ln(2y+1)}$$
$$|2y+1| = (2y+1)e^{-x^2}$$

//

Jadi solusi khususnya adalah $\ln(2y+1) = x^2 + \ln(2y+1)$

atau

$$|2y+1| = (2y+1)e^{-x^2}$$

//