

BUKU AJAR (DIKTAT)

MATEMATIKA DISKRIT



Oleh:
Anita T. Kurniawati, MSi
Diah Arianti, S.Kom

JURUSAN TEKNIK INFORMATIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI
INSTITUT TEKNOLOGI ADHI TAMA SURABAYA
SUARABAYA
2010

KATA PENGANTAR

Perkembangan informasi khususnya ilmu komputer sangat cepat dewasa ini perlu diimbangi dengan pengetahuan tentang teorinya. Salah satu teori yang mendukung ilmu komputer adalah Matematika diskrit. Selain itu matematika diskrit banyak diaplikasikan dalam berbagai bidang, antara lain: bisnis, kimia, geografi, dan botani.

Matematika diskrit merupakan ilmu dasar dalam pendidikan informatika atau ilmu komputer. Dalam kenyataannya komputer digital bekerja secara diskrit. Informasi yang disimpan dan dimanipulasi oleh komputer adalah dalam bentuk diskrit. Selain itu mata kuliah matematika diskrit ini juga sebagai dasar/punjang bagi mata kuliah Basis data, struktur data, algoritma dan pemrograman, jaringan komputer, sistem operasi, dan lainnya. Sebagian besar mata kuliah dibidang informatika dilandasi secara matematis oleh matematika diskrit, sehingga matematika diskrit dianggap sebagai matematika-nya orang informatika.

Buku ajar Matematika Diskrit ini akan menguraikan logika dan pembuktian, induksi matematika, teori himpunan, relasi dan fungsi, Kombinatorika, teori graph, pohon (tree), Aljabar Boolean, dan algoritma, yang secara rinci dan sistematis disertai contoh-contoh penyelesaian secara analitis maupun simulasi (algoritma dan pemrograman). Dengan adanya buku ajar ini, diharapkan akan dicapai peningkatan kualitas dan aktivitas pembelajaran.

Penulis berterima kasih kepada semua pihak yang telah mendukung penyelesaian buku ajar ini. Kritik dan saran penulis harapkan untuk perbaikan dalam buku ajar ini sehingga didapat buku ajar yang berkualitas dan diharapkan oleh pembaca.

Surabaya, Oktober 2010

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	ii
BAB 1 : PENDAHULUAN	
1.1 Apakah matematika diskrit itu?	1
1.2 Pentingnya matematika diskrit	3
BAB 2 : LOGIKA DAN PEMBUKTIAN	
2.1 Dasar-dasar logika	4
2.2 Pembuktian	23
BAB 3 : INDUKSI MATEMATIKA	38
BAB 4 : HIMPUNAN	54
4.1 Definisi Himpunan	54
4.2 Kardinalitas dari suatu himpunan	58
4.3 Himpunan Kosong	59
4.4 Himpunan Bagian (Subset)	59
4.5 Kesamaan dua himpunan	61
4.6 Himpunan yang ekivalen	62
4.7 Himpunan bagian sejati (Properset)	62
4.8 Himpunan Kuasa (Power set)	63
4.9 Himpunan saling lepas	63
4.10 Operasi pada himpunan	63

4.11 Diagram Venn untuk operasi himpunan	66
4.12 Generalisasi operasi himpunan	67
4.13 Hukum-hukum aljabar pada himpunan	67
4.14 Prinsip Dualitas	74
4.15 Himpunan tak hingga dan tak tentu	75
4.16 Himpunan tak hingga terhitung	77
4.17 Himpunan tak hingga tak terhitung	77
BAB 5 : KOMBINATORIKA	81
5.1 Prinsip inklusi dan eksklusi	81
5.2 Teknik Menghitung (Membilang)	85
5.3 Pigeonhole Principle (Sarang Merpati)	87
5.4 Permutasi	93
5.5 Pembangkitan permutasi dan kombinasi	99
5.6 Peluang diskrit	101
5.7 Peluang bersyarat	104
5.8 Aplikasi kombinatorika dalam ilmu komputer	106
BAB 6 : RELASI DAN FUNGSI	112
6.1 Relasi	112
6.2 Fungsi	139

BAB 7 : ALJABAR BOOLE	150
7.1 Definisi Aljabar Boole	150
7.2 Hukum-Hukum Aljabar	152
7.3 Fungsi Boole dan Ekspresi Boole	153
7.4 Bentuk Kanonik	155
7.5 Aplikasi aljabar boole pada rangkaian logika	158
BAB 8 : GRAF	164
8.1 Definisi	164
8.2 Tipe	164
8.3 Graf Bipartite	182
8.4 Graf Isomorfik	183
8.5 Graf planar dan Bidang	184
8.6 Lintasan dan sirkuit/rangkaian Euler	185
8.7 Lintasan dan sirkuit/rangkaian Hamilton	186
8.8 Aplikasi graf	188
BAB 9 : POHON (TREE)	194
9.1 Definisi pohon dan sifat-sifatnya	194
9.2 Pohon Rentang	196
9.3 Pohon berakar	202
9.4 Pohon Terurut	204
9.5 Pohon n-arry	204

9.6 Pohon Biner	204
9.7 Aplikasi pohon biner	205
BAB 10: ANALISIS ALGORITMA	210
10.1 Kompleksitas Waktu	210
DAFTAR PUSTAKA	

BAB 1

PENDAHULUAN

1. 1 APAKAH MATEMATIKA DISKRIT ITU?

Matematika diskrit adalah salah satu cabang dari matematika yang mengkaji objek-objek diskrit. Benda disebut diskrit jika terdiri dari sejumlah berhingga elemen yang berbeda atau elemen-elemennya tidak bersambungan (*unconnected*). Lawan dari diskrit adalah kontinyu atau terus menerus (*continuous*). Matematika diskrit merupakan mata kuliah utama dan dasar untuk bidang informatika atau komputer. Banyak aplikasinya dalam berbagai bidang ilmu komputer, kimia, bisnis, geografi dan botani. Beberapa contoh permasalahan yang dikaji dalam matematika diskrit, antara lain:

- Ada berapa cara dalam membuat password dalam sistem komputer
- Bagaimana menentukan lintasan terpendek antar kota tujuan
- Bagaimana rangkaian logika untuk membuat peraga digital
- Berapa besar memenangkan suatu undian

Secara umum, matematika diskrit digunakan untuk:

- a. Menghitung banyak objek
- b. Mempelajari hubungan antara himpunan berhingga
- c. Menganalisis proses yang melibatkan langkah-langkah yang jumlahnya berhingga

Secara umum topik yang dipelajari dalam matematika diskrit dapat dikelompokkan seperti berikut:

1. Penalaran matematika;

Bertujuan untuk memberikan pemahaman penalaran matematika dalam membaca, memahami, dan membangun argumen matematika.

2. Analisis kombinatorial

Bertujuan untuk memberikan ketrampilan menghitung banyak objek sebagai salah satu dasar untuk memecahkan masalah.

3. Struktur diskrit

Bertujuan untuk memberikan pemahaman tentang struktur diskrit sebagai salah satu struktur matematika abstrak yang digunakan untuk menyajikan objek diskrit dan hubungan diantara objek-objek tersebut.

4. Aplikasi dan pemodelan

Bertujuan memperkenalkan aplikasi matematika diskrit dan pemodelan matematika sebagai salah satu kemampuan pemecahan masalah yang penting.

5. Berpikir algoritmik

Bertujuan memberikan kemampuan membuat algoritma serta verifikasinya dan menganalisis memori komputer dan waktu yang dibutuhkan untuk memproses algoritma tersebut.

Berdasarkan kelima topik diatas, maka dalam buku ini akan dibahas dasar-dasar logika, teori himpunan, Induksi matematika, kombinatorika, teori graf, pohon, relasi dan fungsi, aljabar boole, dan analisis algoritma.

1.2 PENTINGNYA MATEMATIKA DISKRIT

Matematika diskrit sangat penting dipelajari terutama untuk mahasiswa jurusan teknik Informatika atau ilmu komputer, karena ada beberapa alasan:

1. Matematika diskrit merupakan mata kuliah dasar sehingga sebagai pintu gerbang untuk mempelajari mata kuliah lanjutan dalam teori logika, aljabar linier, teori graf, dan sebagainya
2. Matematika diskrit memberikan kemampuan membaca, memahami dan membangun argumen matematika
3. Sebagai landasan dalam mempelajari ilmu komputer seperti struktur data, algoritma, teori basis data, automata dan sistem operasi
4. Sebagai dasar dalam mata kuliah riset operasi seperti metode pemecahan masalah (teknik optimasi).

BAB 2

LOGIKA DAN

PEMBUKTIAN

2. 1 DASAR-DASAR LOGIKA

Logika adalah studi penalaran yaitu cara berpikir dengan mengembangkan sesuatu berdasarkan akal budi dan bukan pada perasaan atau pengalaman. Logika dikaitkan dengan hubungan antar pernyataan, dengan pengertian kalimat adalah sebagai sebuah pernyataan yang benar atau salah maka sebuah proposisi disebut sebagai kalimat yang memberikan nilai benar atau salah. Adapun pengertian dari argumen adalah suatu deret proposisi yang bisa ditentukan kevalidannya. Sedemikian hingga jika kita mau membedakan antara argumen yang valid (sahih) atau tidak valid maka kita dapat menggunakan logika. Aplikasi Logika dalam bidang komputer sangat luas, misalnya dalam bidang pemrograman, analisis algoritma, rancang komputer dan lain sebagainya.

2.1. 1 PROPOSISI (PERNYATAAN/DEKLARATIF)

Sebuah kalimat akan berhubungan dengan logika atau penalaran jika memiliki nilai benar atau salah. Sedemikian hingga bisa dapat didefinisikan bahwa **proposisi** adalah suatu kalimat yang memiliki nilai benar (*true*) atau salah (*false*) tetapi tidak memiliki nilai keduanya. Kalimat tanya atau perintah tidak dianggap sebagai proposisi.

Contoh proposisi dengan nilai kebenarannya:

- a. 5 adalah bilangan ganjil. (Benar).

- b. $2 + 4 = 6$. (Benar).
- c. Ibukota propinsi Jawa Barat adalah Surabaya. (Salah).
- d. Hari ini hujan. (tidak bisa diberikan nilai kebenarannya, tetapi pasti memiliki nilai kebenaran).

Berikut ini diberikan contoh bukan proposisi:

- a. Minumlah sirup tiga kali sehari
- b. Mengapa kamu pergi ke tempat itu?

Secara notasi atau simbol untuk menetapkan suatu proposisi biasanya menggunakan huruf kecil, misalnya:

p : 5 adalah bilangan ganjil. (Benar).

q : Ibukota propinsi Jawa Barat adalah Surabaya. (Salah).

Jenis-jenis proposisi jika ditinjau dari banyaknya pembangun proposisi dibagi menjadi 2 kategori yaitu proposisi atomik (proposisi tunggal) dan proposisi majemuk (proposisi majemuk).

2.1.2 OPERATOR LOGIKA

Dari proposisi tunggal, kita dapat membuat proposisi majemuk dengan mengkombinasikan 2 proposisi atau lebih menggunakan operator. Operator yang digunakan disebut sebagai operator logika (konektor). Operator logika yang dasar adalah “dan” (*and*), “atau” (*or*) dan “tidak” (*not*). Jenis operator logika jika ditinjau dari jumlah operand yang ada dibagi menjadi: operator uner (membutuhkan 1 operand), biner (membutuhkan 2 operand), ..., n-ner (membutuhkan n buah operand; biasanya

ditulis n-arry). Untuk operator tidak (*not*) disebut sebagai operator uner, sedangkan untuk operator dan (*and*), atau (*or*) adalah operator binner.

Definisi 1: Jika diberikan proposisi atomik p dan q maka komposisi majemuk dapat dibagi menjadi 3 macam yaitu:

- a. Konjungsi p dan q dengan notasi $p \wedge q$ adalah proposisi p dan q .
- b. Disjungsi p dan q dengan notasi $p \vee q$ adalah proposisi p atau q .
- c. Ingkaran (negasi) dari p dinotasikan dengan $\sim p$ adalah proposisi tidak p .

Proposisi yang dikomposisikan akan menghasilkan proporsosi baru. Untuk notasi ingkaran yang juga biasanya disebut sebagai “tidak”, “bukan” dapat dituliskan dengan \bar{p} .

Contoh 2.1:

Jika diketahui bahwa:

p : Hari ini Rabu.

q : Mahasiswa mengadakan kuliah lapangan.

Maka:

$p \wedge q$ = Hari ini Rabu dan mahasiswa mengadakan kuliah lapangan.

$p \vee q$ = Hari ini Rabu atau mahasiswa mengadakan kuliah lapangan.

$\sim p$ = Tidak benar hari ini Rabu.

$p \vee \sim q$ = Hari ini Rabu atau mahasiswa tidak mengadakan kuliah lapangan.

$\sim(\sim p)$ = Tidak benar hari ini bukan hari Rabu.

2.1. 3 TABEL KEBENARAN

Sebuah proposisi majemuk dapat ditentukan nilai kebenarannya jika telah diketahui nilai kebenaran dari proposisi atomiknya, yaitu dengan mengoperasikannya pada tabel kebenaran.

Definisi 2: Jika diberikan proposisi atomik p dan q maka nilai kebenaran dari komposisi majemuk berikut adalah:

- Konjungsi $p \wedge q$ bernilai benar jika p dan q keduanya benar , sedangkan kemungkinan yang lainnya adalah salah .
- Disjungsi $p \vee q$ bernilai salah jika p dan q keduanya salah, sedangkan kemungkinan yang lainnya adalah benar.
- Ingkaran(negasi) dari p yaitu $\sim p$ bernilai salah jika p benar, bernilai benar jika p salah.

Tabel kebenaran konjungsi dan disjungsi disajikan dalam tabel 2.1. Pada tabel kebenaran, T = menunjukkan *True* (benar) dan F = menunjukkan *False* (Salah).

P	Q	$p \wedge q$	$p \vee q$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	F

Tabel 2.1 Tabel kebenaran Konjungsi, disjungsi

Contoh 2.2:

Jika p , q , dan r adalah proposisi. Bentuklah kebenaran dari ekspresi logika $(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge \sim r)$.

Penyelesaian:

Ada tiga buah proposisi atomik di dalam ekspresi logika dan setiap proposisi hanya memiliki 2 kemungkinan nilai yaitu *True/benar* (T) dan *False/salah* (F). Jadi dapat ditunjukkan bahwa ada $2^3 = 8$ kemungkinan kombinasi untuk ekspresi logika tersebut dapat dilihat pada tabel 2.2.

p	q	r	$p \wedge q$	$\sim p$	$\sim r$	$\sim p \wedge \sim q$	$(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge \sim r)$
T	T	T	T	F	F	F	T
T	T	F	T	F	T	F	T
T	F	T	F	F	F	F	F
T	F	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F	F
F	T	F	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	F	F	F
F	F	F	F	T	T	T	T

Tabel 2.2 : Tabel kebenaran $(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge \sim r)$

Suatu proposisi majemuk jika memiliki nilai benar untuk semua kemungkinan kasus maka disebut **Tautologi**; dan sebaliknya disebut **Kontradiksi** jika salah untuk semua kemungkinan kasus.

Pada operasi “atau”(or) dapat digunakan dengan 2 cara yaitu: “or” inklusif dan “or” eksklusif. “or” inklusif dinotasikan dengan $p \vee q$ yaitu bentuk p atau q atau

keduanya artinya proposisi majemuk $p \vee q$ bernilai benar jika proposisi p benar atau q bernilai benar atau keduanya benar. Sedangkan untuk “or” eksklusif dinotasikan dengan $p \oplus q$ yaitu bentuk p atau q tetapi bukan keduanya artinya $p \oplus q$ bernilai benar jika salah satu proposisi atomiknya bernilai benar tetapi bukan keduanya. Tabel kebenaran “or” eksklusif disajikan pada tabel 2.3.

P	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Tabel 2.3: Tabel kebenaran $p \oplus q$

2.1.4 IMPLIKASI

Selain operator konjungsi, disjungsi dan negasi pada proposisi majemuk juga muncul operarator proposisi bersyarat (Implikasi) atau kadang juga disebut sebagai kondisional yaitu berbentuk “jika p maka q ”. Misalkan:

1. Jika adik lolos lomba maka ia akan mendapat penghargaan dari sekolah.
2. Jika tidak membayar iuran wajib maka akan dikenai sanksi.

Definisi 3: misalkan p dan q adalah proposisi atomik, maka proposisi majemuk “jika p maka q ” disebut proposisi bersyarat/implikasi dan dilambangkan dengan:

$$p \Rightarrow q$$

Proposisi p disebut hipotesis/ antesenden/ premis/ kondisi dan propisisi q disebut konklusi/ konsekuensi.

Pernyataan “jika p maka q ” adalah pernyataan standart untuk implikasi, tetapi juga dapat di nyatakan dalam berbagai cara, antara lain sebagai berikut:

- | | |
|--------------------------|------------------------------|
| 1. Jika p , maka q | 5. p hanya jika q |
| 2. Jika p , q | 6. p syarat cukup agar q |
| 3. p mengakibatkan q | 7. q syarat perlu agar p |
| 4. q jika p | 8. q bilamana p |

Tabel kebenaran implikasi dapat disajikan pada tabel 2.4.

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Tabel 2.4 : Tabel kebenaran implikasi

Contoh 2.3:

Tunjukkan bahwa $p \Rightarrow q$ ekivalen secara logika dengan $\sim p \vee q$.

Penyelesaian:

Dengan menggunakan tabel kebenaran maka dapat dituliskan sebagai berikut:

P	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Jika diketahui $p \Rightarrow q$ maka bisa kita dapatkan Konvers/ kebalikan, invers dan kontraposisi yang dinyatakan sebagai berikut:

Konvers/ kebalikan : $q \Rightarrow p$

Invers : $\sim p \Rightarrow \sim q$

Kontraposisi : $\sim q \Rightarrow \sim p$

Tabel kebenaran untuk proposisi-proposisi bersyarat dapat disajikan pada tabel 2.5.

Salah satu hal terpenting dalam logika adalah bahwa implikasi selalu ekivalen dengan kontraposisinya.

P	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

Tabel 2.5 : Tabel kebenaran konvers, invers, dan kontraposisi

Contoh 2.4:

Tentukan konvers, invers dan kontraposisi dari proposisi bersyarat berikut:

“ Jika manusia tidak memelihara lingkungan dengan baik maka akan terjadi kerusakan-kerusakan bumi yang merugikan manusia.”

Penyelesaian:

Konvers/ kebalikan : jika terjadi kerusakan-kerusakan bumi yang merugikan manusia maka manusia tidak memelihara lingkungan dengan baik.

- Invers : jika manusia memelihara lingkungan dengan baik maka tidak akan terjadi kerusakan-kerusakan bumi yang merugikan manusia.
- Kontraposisi : jika tidak terjadi kerusakan-kerusakan bumi yang merugikan manusia maka manusia akan memelihara lingkungan.

Proposisi bersyarat yang penting lainnya adalah “ p jika hanya jika q ” yang dinamakan dengan bikondisional atau biimplikasi.

Definisi 4: misalkan p dan q adalah proposisi atomik, maka proposisi majemuk “ p jika dan hanya jika q ” disebut proposisi bersyarat biimplikasi/ bikondisional dan dilambangkan dengan:

$$p \Leftrightarrow q$$

Pernyataan $p \Leftrightarrow q$ adalah benar jika p dan q memiliki nilai kebenaran yang sama, yaitu $p \Leftrightarrow q$ benar jika p dan q keduanya bernilai benar atau bernilai salah. Untuk melihat nilai kebenaran proposisi biimplikasi dapat dilihat pada tabel 2.6 .

p	Q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Tabel 2.6 : Tabel kebenaran biimplikasi

Untuk menyatakan proposisi bersyarat biimplikasi bisa berupa:

1. p jika dan hanya jika q ,
2. p adalah syarat perlu dan cukup bagi q ,
3. jika p maka q dan jika q maka p ,
4. $p \text{ iff } q$.

Pada pengujian tabel kebenaran, jika nilai proposisi majemuk yang di uji benar untuk setiap kemungkinan kasus maka disebut sebagai Tautologi (T), dan jika nilai kebenaran proposisi tersebut adalah salah (F) untuk semua kasus maka dapat disebut dengan Kontradiksi.

2.1. 5 ALJABAR PROPOSISI

Hukum-hukum aljabar pada proposisi hampir sama dengan sifat-sifat aljabar pada bilangan riil. Hukum-hukum logika atau hukum-hukum aljabar proposisi pada proposisi-proposisi majemuk adalah sebagai berikut:

- | | |
|--|--|
| 1. Hukum Identitas: | 4. Hukum Idempoten |
| (i) $p \vee F \Leftrightarrow p$ | (i) $p \vee p \Leftrightarrow p$ |
| (ii) $p \wedge T \Leftrightarrow p$ | (ii) $p \wedge p \Leftrightarrow p$ |
| 2. Hukum null/Dominasi: | 5. Hukum involusi (negasi ganda) |
| (i) $p \vee T \Leftrightarrow T$ | $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$ |
| (ii) $p \wedge F \Leftrightarrow F$ | |
| 3. Hukum Negasi | 6. Hukum Penyerapan atau absorpsi |
| (i) $p \vee \sim p \Leftrightarrow T$ | (i) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ |
| (ii) $p \wedge \sim p \Leftrightarrow F$ | (ii) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ |

7. Hukum komutatif

$$(i) \quad p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

$$(ii) \quad p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

8. Hukum Asosiatif

$$(i) \quad p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$$

$$(ii) \quad p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$$

9. Hukum distributif

$$(i). \quad p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$(ii). \quad p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

10. Hukum De Morgan

$$(i) \quad \sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$

$$(ii) \quad \sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$$

Selain menggunakan tabel kebenaran untuk membuktikan keekivalenensi (ekivalensi) dan kebenaran suatu logika proposisi dari suatu proposisi majemuk bisa menggunakan hukum-hukum aljabar proposisi di atas. Ekivalensi dapat ditulis dengan simbol: "≡".

Dalam membuktikan ekivalensi dengan menggunakan hukum-hukum aljabar dapat dilakukan dengan cara:

1. Ruas kiri diturunkan terus menerus sampai mendapatkan ruas kanan,
2. Ruas kanan diturunkan terus menerus sampai mendapatkan ruas kiri,
3. Masing-masing ruas diturunkan secara terpisah sampai mendapatkan hasil yang sama.

Contoh 2.5:

Buktikan ekivalensi kalimat-kalimat berikut tanpa menggunakan tabel kebenaran.

- a. $\sim(p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim p$
- b. $(p \wedge (\sim(\sim p \vee q))) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 a. \quad & \sim(p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \\
 & \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim(\sim q)) \vee (\sim p \wedge \sim q) \quad (\text{Hukum de Morgan}) \\
 & \Leftrightarrow (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \quad (\text{Hukum Negasi ganda}) \\
 & \Leftrightarrow \sim p \wedge (q \vee \sim q) \quad (\text{Hukum distributif}) \\
 & \Leftrightarrow \sim p \wedge T \quad (\text{Hukum negasi}) \\
 & \Leftrightarrow \sim p \quad (\text{Hukum identitas})
 \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $\sim(p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim p$

$$\begin{aligned}
 b. \quad & (p \wedge (\sim(\sim p \vee q))) \vee (p \wedge q) \\
 & \Leftrightarrow (p \wedge (\sim(\sim p) \wedge \sim q)) \vee (p \wedge q) \quad (\text{Hukum de Morgan}) \\
 & \Leftrightarrow (p \wedge (p \wedge \sim q)) \vee (p \wedge q) \quad (\text{Hukum negasi ganda}) \\
 & \Leftrightarrow ((p \wedge p) \wedge \sim q) \vee (p \wedge q) \quad (\text{Hukum asosiatif}) \\
 & \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q) \quad (\text{Hukum idempoten}) \\
 & \Leftrightarrow p \wedge (\sim q \vee q) \quad (\text{Hukum distributif}) \\
 & \Leftrightarrow p \wedge T \quad (\text{Hukum negasi}) \\
 & \Leftrightarrow p \quad (\text{Hukum identitas})
 \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $(p \wedge (\sim(\sim p \vee q))) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

Untuk membuktikan ekivalensi 2 kalimat yang melibatkan penghubung implikasi (\Rightarrow) dan biimplikasi (\Leftrightarrow), lebih dahulu diubah menjadi penghubung \wedge , \vee , dan \sim . Hal ini dapat ditunjukkan dalam **contoh 2.6**.

Contoh 2.6:

Buktikan ekivalensi berikut tanpa menggunakan tabel kebenaran.

- $(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$
- $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$

Penyelesaian:

- Karena ruas kanan lebih kompleks, maka yang diturunkan adalah ruas kanan.

$$\begin{aligned}
 \sim p \Rightarrow \sim q &\Leftrightarrow \sim(\sim p) \vee \sim q && \text{(Transformasi dari } \Rightarrow \text{ ke } \vee \text{)} \\
 &\Leftrightarrow p \vee \sim q && \text{(Hukum negasi ganda)} \\
 &\Leftrightarrow \sim q \vee p && \text{(Hukum komutatif)} \\
 &\Leftrightarrow q \Rightarrow p && \text{(Transformasi dari } \vee \text{ ke } \Rightarrow \text{)}
 \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $(\sim p \Rightarrow \sim q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$ atau $(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$

$$\begin{aligned}
 b. \quad p \Rightarrow (q \Rightarrow r) &\Leftrightarrow \sim p \vee (q \Rightarrow r) && \text{(Transformasi dari } \Rightarrow \text{ ke } \vee \text{)} \\
 &\Leftrightarrow \sim p \vee (\sim q \vee r) && \text{(Transformasi dari } \Rightarrow \text{ ke } \vee \text{)} \\
 &\Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \vee r && \text{(Hukum Asosiatif)} \\
 &\Leftrightarrow \sim(p \wedge q) \vee r && \text{(Hukum de Morgan)} \\
 &\Leftrightarrow (p \wedge q) \Rightarrow r && \text{(Transformasi dari } \vee \text{ ke } \Rightarrow \text{)}
 \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$.

2.1. 6 PENARIKAN KESIMPULAN

Jika diberikan deret proposisi baik proposisi atomik maupun proposisi majemuk, maka dapat dilakukan penarikan kesimpulan yang disebut dengan inferensi. Berikut ini akan diberikan beberapa metode inferensi, yaitu teknik untuk menurunkan

kesimpulan berdasarkan hipotesis yang ada, tanpa harus menggunakan tabel kebenaran. Adapun metode inferensi adalah sebagai berikut:

a. Modus Ponens

adalah kaidah penarikan kesimpulan dari beberapa proposisi yang didasarkan pada tautologi $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ yang dalam hal ini p dan $(p \Rightarrow q)$ adalah hipotesis sedangkan untuk q adalah konklusi/kesimpulan. Sedemikian hingga kaidah modus ponens dapat ditulis sebagai berikut:

$$p \Rightarrow q$$

$$\begin{array}{c} p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Tanda \therefore adalah kesimpulan atau dibaca “jadi” atau “karena itu”.

Contoh 2.7:

Jika n adalah bilangan genap maka n^2 adalah bilangan genap.

n adalah bilangan genap.

$\therefore n^2$ adalah bilangan genap.

b. Modus Tollen

adalah kaidah penarikan akar yang didasarkan pada tautologi $(\sim q \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \sim p$.

Kaidah modus tollen ini dapat dituliskan dalam bentuk:

$$p \Rightarrow q$$

$$\underline{\sim q}$$

$$\therefore \sim q$$

Contoh 2.8:

Jika n bilangan ganjil maka n^2 bernilai ganjil.

n^2 bernilai genap.

$\therefore n$ bukan bilangan ganjil.

c. Silogisme Hipotesis

adalah penarikan kesimpulan dari proposisi-proposisi yang didasarkan pada kaidah tautologi $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$, sedemikian hingga dapat ditulis sebagai berikut:

$$p \Rightarrow q$$

$$q \Rightarrow r$$

$$\therefore \overline{p \Rightarrow r}$$

Contoh 2.9:

Jika seseorang menderita rabun jauh maka memerlukan kacamata.

Jika seseorang memerlukan kacamata maka harus membeli kacamata

Jadi jika seseorang menderita rabun jauh maka harus membeli kacamata

d. Silogisme Disjungtif

Adalah penarikan kesimpulan yang didasarkan pada kaidah tautologi

$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$, yang dapat ditulis dengan:

$$p \vee q$$

$$\sim p$$

$$\therefore q$$

Contoh 2.10:

Maman akan pergi kuliah atau nonton film.

Ternyata ia pergi kuliah

Jadi ia tidak pergi nonton film.

e. Simplifikasi (penyederhanaan konjungtif)

Kaidah ini didasarkan pada tautologi $(p \wedge q) \Rightarrow p$, dengan p dan q adalah hipotesis dan p adalah konklusi, sedemikian hingga kaidah ini dapat ditulis sebagai berikut:

$$\underline{p \wedge q}$$

$$\therefore p$$

Contoh 2.11:

Iza makan sate atau krupuk

Jadi Iza makan sate

f. Penjumlahan (penambahan disjungtif)

adalah kaidah yang didasarkan pada tautologi $p \Rightarrow (p \vee q)$, sedemikian hingga dapat ditulis:

$$p$$

$$\underline{\therefore p \vee q}$$

Contoh 2.12:

Nana adalah siswa sekolah menengah umum (SMU)

Jadi Nana siswa SMU atau SMK

g. Konjungsi

adalah kaidah penarikan akar yang didasarkan pada tautologi $((p) \wedge (q)) \Rightarrow (p \wedge q)$, sedemikian hingga dapat ditulis dengan:

p

q

$\therefore p \wedge q$

Contoh 2.13:

Lala pergi ke kota

Lala pergi ke rumah tantenya

Jadi Lala pergi ke kota dan ke rumah tantenya

Berikut ini diberikan contoh-contoh soal logika matematika.

Contoh 2.14:

Pada suatu hari Adi pergi ke kampus dan pada saat mau ujian dia baru sadar bahwa kacamatanya ketinggalan. Setelah mengingat-ingat, ada beberapa fakta yang dipastikan kebenarannya:

- a. Jika kacamata Adi ada dimeja makan, maka pasti dia sudah melihatnya pada saat sarapan.
- b. Adi membaca koran diruang tamu atau dia membacanya dimeja makan.
- c. Jika Adi membaca Koran diruang tamu, maka pastilah kacamata diletakkan di meja ruang tamu.
- d. Adi tidak melihat kacamatanya pada saat sarapan

- e. Jika Adi membaca buku di tempat tidur, maka kacamataanya diletakkan di meja samping tempat tidur
- f. Jika Adi membaca Koran di meja makan, maka kacamataanya ada di meja makan.

Berdasarkan fakta-fakta tersebut, tentukan dimana letak kacamata Adi.

Penyelesaian:

Sebelum diselesaikan, kalimat-kalimat tersebut dinyatakan dalam simbol logika lebih dulu.

Misal:

p : Kacamata Adi ada dimeja dapur

q : Adi melihat kacamatanya ketia sarapan

r : Adi membaca Koran di ruang tamu

s : Adi membaca Koran di meja makan

t : Kacamata Adi diletakkan di meja tamu

u : Adi membaca buku di tempat tidur

w : Kacamata Adi diletakkan di meja samping tempat tidur

Dengan simbol-simbol tersebut, fakta-fakta di atas dapat dituliskan sebagai berikut:

- | | |
|----------------------|----------------------|
| a. $p \Rightarrow q$ | d. $\sim q$ |
| b. $r \vee s$ | e. $u \Rightarrow w$ |
| c. $r \Rightarrow t$ | f. $s \Rightarrow p$ |

Inferensi dapat dilakukan sebagai berikut:

1. $p \Rightarrow q$ fakta a.

$\sim q$ fakta d.

$\therefore \sim p$ Modus Ponens

2. $s \Rightarrow p$ fakta f.

$\sim p$ kesimpulan 1.

$\therefore \sim s$ Modus Tollen

3. $r \vee s$ fakta b.

$\sim s$ kesimpulan 2.

$\therefore r$

4. $r \Rightarrow t$ fakta c.

r kesimpulan 3.

$\therefore t$

Jadi dapat disimpulkan bahwa Kacamata Adi ada di meja tamu.

Contoh 2.15:

Buktikan kevalidan argumen dibawah ini dengan menggunakan prinsip-prinsip (metode) inferensi logika:

$$p \wedge q$$

$$\underline{(p \vee q) \Rightarrow r}$$

$$\therefore r$$

Penyelesaian:

1. $p \wedge q$ hipotesa
2. $\frac{\therefore p}{p}$ Penyederhanaan konjungtif
3. $\frac{p}{\therefore p \vee q}$ kesimpulan 1
Penambahan disjungtif
4. $\frac{(p \vee q) \Rightarrow r}{p \vee q}$ hipotesa
5. $\frac{\frac{p \vee q}{\therefore r}}{\therefore r}$ kesimpulan 2
Modus ponen

Jadi terbukti bahwa argumen pada **contoh 2.15** valid.

2.2 PEMBUKTIAN

Rumus-rumus dalam matematika tidak tercipta begitu saja tetapi melewati suatu proses yang harus ditunjukkan kebenarannya berdasarkan definisi, teorema, ataupun rumus yang lainnya. Dalam subbab ini akan dijelaskan beberapa metode/teknik untuk membuktikan suatu rumus tertentu dengan disertai beberapa kasus sederhana. Sebelum dijelaskan metode yang digunakan untuk membuktikan suatu teorema tertentu, sebelumnya yang harus diketahui adalah langkah-langkah untuk melakukan pembuktian tersebut. Adapun beberapa langkah yang perlu diketahui adalah sebagai berikut:

1. Tulis teorema yang akan dibuktikan.

Pertama kali harus diperhatikan adalah hal-hal yang diketahui (hipotesis) dan mana yang akan dibuktikan. Hal ini dilakukan agar tidak terjadi kesalahan fatal

yang biasanya sering kita menggunakan hal-hal yang akan dibuktikan dalam proses pembuktian.

2. Tandai permulaan pembuktian dengan kata-kata “Bukti”.

Kata “ Bukti” tersebut sebagai pemisah antara teorema dan pembuktian yang akan dilakukan.

3. Buktikan secara lengkap dan menyeluruh.

Dalam pembuktian harus dilengkapi dengan keterangan yang lengkap agar mudah dibaca dan dimengerti oleh pengguna yang lain.

Beberapa keterangan pelengkap antara lain:

a. Tulis variabel beserta tipenya, karena ini penting untuk mengingatnya pada saat dipakai pada proses pembuktian. Kalau didalam pemrogram biasanya diawal harus dideklarasikan varibel yang akan digunakan.

b. Apabila dalam proses pembuktiannya menggunakan sifat tertentu, maka harus dituliskan secara jelas dan lengkap. Sedangkan jika menggunakan sifat, misalnya komutatif atau yang lain maka bisa ditulis disebelah kanan pembuktian tersebut.

4. Tandai akhir pembuktian

Hal ini bertujuan agar diketahui dengan jelas bahwa teorema tersebut terbukti.

Biasanya ditandai dengan tanda #, \square , qed, dan lain-lain. Bisa juga ditandai dengan menggunakan kata-kata “Jadi terbukti bahwa....” (sebutkan teoremany).

Dalam mebuktikan suatu teorema kadang tanpa kita sadari pernah melakukan kesalahan, antara lain:

1. Mengambil kesimpulan berdasarkan satu/beberapa contoh

Misalkan hendak dibuktikan bahwa semua siswa SD muhammadiyah X adalah laki-laki. Jika hanya diambil beberapa sampel dari siswa SD Muhammadiyah X dan ditunjukkan siswa yang terpilih tersebut adalah laki-laki. Karena mungkin saja ada siswa yang tidak terpilih tersebut perempuan. Ada dua cara untuk membuktikan hal ini, yaitu:

- a. Ambil semua siswa SD Muhammadiyah X dan tunjukkan bahwa semua siswa tersebut laki-laki, atau
- b. Mengambil sebarang siswa SD Muhammadiyah X dan dibuktikan bahwa siswa yang diambil tersebut laki-laki. Bukti ini benar karena jika pengambilan sebarang ini diulang-ulang, maka pada akhirnya semua siswa SD Muhammadiyah X terpilih dan semuannya laki-laki.

Cara yang pertama (a) seringkali kurang praktis untuk jumlah objek yang banyak, sehingga cara kedua (b) lebih mudah.

2. Menggunakan simbol yang sama untuk menggambarkan dua hal yang berbeda
3. Melompat kepada kesimpulan
4. Mengasumsikan apa yang akan dibuktikan.

Dalam membuktikan suatu teorema atau pernyataan tertentu ada berbagai macam cara, tetapi secara umum dapat dibedakan menjadi dua, yaitu:

1. Metode Pembuktian Langsung

Hal-hal yang diketahui diturunkan secara langsung dengan menggunakan teknik-teknik tertentu sampai mendapatkan kesimpulan yang diinginkan. Ada beberapa metode, antara lain: metode pengecekan satu persatu, pembuktian berdasarkan kasus-kasus, pembuktian dengan eliminasi kasus, pembuktian ekivalensi).

Berikut ini akan diberikan beberapa contoh.

Contoh 2.16: (Metode Pengecekan satu persatu)

Buktikan bahwa untuk semua bilangan bulat m antara 1 dan 10, $2m$ adalah bilangan genap.

Bukti:

Dengan pengecekan satu persatu:

$$2 \cdot 1 = 2$$

$$2 \cdot 5 = 10$$

$$2 \cdot 9 = 18$$

$$2 \cdot 2 = 4$$

$$2 \cdot 6 = 12$$

$$2 \cdot 10 = 20$$

$$2 \cdot 3 = 6$$

$$2 \cdot 7 = 14$$

$$2 \cdot 4 = 8$$

$$2 \cdot 8 = 16$$

Terlihat bahwa semua hasil dari perkalian $2m$ adalah bilangan genap.

Jadi terbukti bahwa untuk semua bilangan bulat m antara 1 dan 10, $2m$ adalah bilangan genap.

Dalam **contoh 2.16**, semua bilangan dicek satu persatu karena m berhingga.

Secara umum pengecekan satu persatu hanya berlaku untuk m bilangan yang berhingga.

Contoh 2.17:

Buktikan bahwa jumlah dua bilangan genap adalah genap.

Bukti:

Ambil sebarang bilangan genap, misal: m, n .

Akan dibuktikan bahwa $(m+n)$ juga bilangan genap.

Karena m dan n adalah bilangan genap, maka $m=2r$ dan $n=2s$ untuk setiap bilangan bulat r dan s .

Dengan demikian:

$$m + n = 2r + 2s$$

$$= 2(r+s) \quad (\text{sifat distributif})$$

$$= 2k, \text{ dengan } k=r+s$$

Oleh karena r dan s adalah bilangan bulat, maka k juga bilangan bulat. Menurut definisi bilangan genap, $(m+n)$ adalah bilangan genap karena merupakan hasil kali 2 bilangan bulat.

Jadi terbukti bahwa jumlah dua bilangan genap adalah bilangan genap juga.

Contoh 2.18: (Pembuktian ekivalensi)

Buktikan ekivalensi berikut.

a dan b memiliki sisa yang sama jika dibagi dengan bilangan positif n jika dan hanya jika $(a-b)$ habis dibagi n, dengan a dan b adalah bilangan bulat.

Bukti:

Untuk membuktikan biimplikasi, maka akan ditunjukkan dua hal, yaitu:

a. (\Rightarrow) Jika a dan b memiliki sisa yang sama jika dibagi dengan bilangan positif n, maka $(a-b)$ habis dibagi n dengan a dan b adalah bilangan bulat.

b. (\Leftarrow) Jika $(a-b)$ habis dibagi n dengan a dan b adalah bilangan bulat maka a dan b memiliki sisa yang sama jika dibagi dengan bilangan positif n.

Sekarang akan ditunjukkan bahwa a benar.

(\Rightarrow) Misalnya a dan b adalah bilangan bulat yang memiliki sisa sama (misal: s) jika dibagi dengan n.

Akan dibuktikan bahwa $(a-b)$ habis dibagi n .

$a = k \cdot n + s$ dan $b = j \cdot n + s$ dengan $0 \leq s < n$; k dan j bilangan bulat.

$$a - b = (k \cdot n + s) - (j \cdot n + s)$$

$$= k \cdot n - j \cdot n$$

$$= (k-j) \cdot n$$

$$= p \cdot n; \text{ dengan } p = k-j; \text{ karena } k \text{ dan } j \text{ bilangan bulat}$$

Ini berarti $(a-b)$ habis dibagi n .

Jadi terbukti bahwa Jika a dan b memiliki sisa yang sama jika dibagi dengan bilangan positif n , maka $(a-b)$ habis dibagi n dengan a dan b adalah bilangan bulat.

(\Leftarrow) Misalkan a dan b sedemikian hingga $(a-b)$ habis dibagi n .

Akan dibuktikan bahwa a dan b memiliki sisa yang sama jika dibagi dengan n .

Misalkan s_1 adalah sisa jika a dibagi n dan

s_2 adalah sisa jika b dibagi n .

Jadi,

$$a = k \cdot n + s_1, \text{ dengan } 0 \leq s_1 < n$$

$$b = j \cdot n + s_2, \text{ dengan } 0 \leq s_2 < n$$

Akan ditunjukkan bahwa $s_1 = s_2$.

Diketahui bahwa $(a-b)$ habis dibagi n , berarti

$$a-b = p.n \quad \text{untuk sebarang bilangan bulat } p$$

$$a = b + p.n$$

$$= (j.n + s_2) + p.n$$

$$= (j+p).n + s_2$$

Misalkan $r = j + p$. Oleh karena j dan p adalah bilangan bulat, maka r juga bilangan bulat, sehingga

$$a = (j+p).n + s_2 \quad \text{dengan } 0 \leq s_2 < n$$

Akan tetapi jika a dibagi dengan n , maka hasil dan sisanya merupakan bilangan yang tunggal. Ini berarti $s_1 = s_2$.

Jadi terbukti bahwa jika $(a-b)$ habis dibagi n dengan a dan b adalah bilangan bulat maka a dan b memiliki sisa yang sama jika dibagi dengan bilangan positif n .

2. Metode Pembuktian tidak Langsung

Pembuktian ini tidak langsung menggunakan fakta-fakta yang ada, tetapi hal-hal lain yang terkait sehingga bisa menuju pada kesimpulan. Metode pembuktian tak langsung, antara lain metode kontradiksi dan kontraposisi.

a. Pembuktian dengan kontradiksi

Pembuktian ini dilakukan dengan mengandaikan bahwa ingkaran pernyataan yang akan dibuktikan itu bernilai benar.

Contoh 2.19:

Buktikan bahwa hasil kali dua bilangan ganjil adalah bilangan ganjil.

Bukti:

Ambil sebarang dua bilangan ganjil, misalkan m dan n.

Andaikan hasil kalinya ($m \cdot n$) adalah genap.

Karena m dan n bilangan ganjil, maka $m = 2k + 1$ dan $n = 2s + 1$, untuk setiap bilangan bulat k dan s.

$$\begin{aligned}m \cdot n &= (2k + 1) \cdot (2s + 1) \\&= 4 \cdot k \cdot s + 2s + 2k + 1 \\&= 2(2ks + s + k) + 1\end{aligned}$$

Misalkan $p = 2ks + s + k$, maka p merupakan bilangan bulat karena k dan s bilangan bulat, sehingga

$$m \cdot n = 2p + 1 \text{ untuk suatu bilangan bulat } p$$

Terlihat bahwa $m \cdot n$ merupakan bilangan ganjil. Hal ini kontradiksi dengan pengandaian, berarti pengandaian salah.

Jadi terbukti bahwa hasil kali dua bilangan ganjil adalah ganjil.

b. Pembuktian dengan kontraposisi

Berdasarkan subbab 2.1, dijelaskan bahwa suatu pernyataan akan selalu ekivalen dengan kontraposisinya. Dengan demikian kita bisa membuktikan suatu pernyataan itu dengan kontraposisinya.

Contoh 2.20:

Buktikan bahwa untuk bilangan bulat k dan s:

Jika $k + s \geq 10$, maka $k \geq 3$ atau $s \geq 8$.

Bukti:

Kontraposisi dari jika $k + s \geq 10$, maka $k \geq 3$ atau $s \geq 8$ adalah jika $k < 3$ dan $s < 8$ maka $k + s < 10$.

Sehingga akan ditunjukkan bahwa jika $k < 3$ dan $s < 8$ maka $k + s < 10$.

Ambil 2 bilangan bulat k dan s dengan $k < 3$ dan $s < 8$.

$k < 3$ berarti $k \leq 2$; $s < 8$ berarti $s \leq 7$; sehingga

$$k + s \leq 2 + 7$$

$$k + s \leq 9$$

$$k + s < 10$$

Terbukti bahwa jika $k < 3$ dan $s < 8$ maka $k + s < 10$.

Karena kontraposisi terbukti, maka terbukti juga pernyataan sebelumnya, yaitu jika $k + s \geq 10$, maka $k \geq 3$ atau $s \geq 8$.

Dari berbagai metode yang sudah dijelaskan bisa dipakai untuk membuktikan suatu pernyataan tertentu. Walaupun beberapa metode bisa dipakai untuk membuktikan pernyataan tertentu. Sehingga pemilihan metode yang dipakai ini tergantung dari kebiasaan kita dalam membuktikan suatu pernyataan. Semakin sering kita membuktikan suatu pernyataan maka semakin kuat perasaan matematika kita sehingga memudahkan dalam membuktikan pernyataan tertentu.

LATIHAN SOAL

1. Tentukan mana diantara kalimat berikut yang merupakan proposisi:
 - a. 5 adalah bilangan prima.
 - b. $x + 2 > x$
 - c. Bapak pergi ke kerja
 - d. Silahkan Anda menemui Direktur pada hari Sabtu.
 - e. Jika $3 + 2 = 7$ maka hari kiamat pasti tiba
2. Tulis lambang logika matematika untuk setiap pernyataan berikut ini. Kemudian buatlah tabel kebenarannya.
 - a. Hari ini tidak hujan lebat tetapi angin bertiup kencang atau air sungai meluap
 - b. Jika segitiga ABC siku-siku di C maka $c^2 = a^2 + b^2$ dan luasnya $= \frac{1}{2}ab$
 - c. Segitiga ABC sama sisi jika dan hanya jika $AB = AC = BC$ atau $\angle A = \angle B = \angle C$
3. Misalkan:

p: Rina sedang bermain di halaman

q :Rina sedang membaca buku di kamar

r : Rina sedang mengerjakan tugas sekolah

s : Rina sedang melihat TV

Nyatakan kalimat-kalimat dibawah ini dengan simbol logika beserta penghubungnya.

- a. Rina sedang bermain di halaman atau melihat TV
 - b. Rina tidak bermain di halaman dan tidak sedang mengerjakan tugas sekolah
 - c. Rina sedang mengerjakan tugas sekolah sambil melihat TV, dan dia tidak bermain di halaman
 - d. Jika Rina tidak sedang membaca buku dikamar dan tidak mengerjakan tugas sekolah, pastilah dia sedang bermain di halaman
 - e. Rina sedang mengerjakan tugas sekolah atau dia tidak sedang membaca buku di kamar.
-
4. Tulislah tabel kebenaran dari pernyataan dibawah ini:
 - a. $p \wedge \sim q$
 - b. $(\sim p \wedge q) \vee p$
 - c. $(p \wedge (\sim p \vee q)) \Rightarrow r$
 - d. $(p \Rightarrow q) \vee \sim(q \vee p)$
 - e. $(\sim p \wedge (\sim q \wedge r)) \vee (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

 5. Tunjukkan apakah pernyataan dibawah ini valid atau tidak.
 - a. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \equiv (p \wedge \sim r) \Rightarrow \sim q$
 - b. $\sim(p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \equiv \sim p$
 - c. $(r \vee p) \wedge ((\sim r \vee (p \wedge q)) \wedge (r \vee q)) \equiv p \wedge q$
 - d. $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
 - e. $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge (\sim p \wedge q)) \equiv \sim p \wedge q$

6. Sederhanakan pernyataan-pernyataan berikut:
- $(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$
 - $(p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (\sim p \wedge (\sim q \wedge r))$
7. Telitilah pernyataan dibawah ini merupakan tautologi atau kontradiksi.
- $((p \Rightarrow q) \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$
 - $((\sim p \wedge q) \wedge (q \wedge r)) \wedge \sim q$
 - $(p \wedge q) \vee (\sim p \vee (p \wedge \sim q))$
8. Buktikan pernyataan $\sim(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p$ dengan hukum-hukum dalam aljabar proposisi.
9. Ubahlah pernyataan berikut menjadi konvers, invers dan kontraposisi.
- Jika $a^2 + b^2 = c^2$ maka a, b, c adalah sisi-sisi segitiga siku-siku.
 - Jika $ab = 0$ maka $a = 0$ atau $b = 0$.
 - Jika x tidak positif maka x adalah bilangan negatif atau $x = 0$.
 - Jika p adalah bujur sangkar maka p adalah adalah empat persegi panjang.
 - Jika n habis dibagi 8 maka n habis dibagi 2.
10. Tunjukkan tahap demi tahap bahwa hipotesis berikut:
- Jika anda mengirim saya email maka saya akan menyelesaikan penulisan program
 - Jika anda tidak bisa mengirim saya email maka saya akan tidur lebih awal

- c. Jika saya tidur lebih awal maka saya akan bangun lebih segar

menghasilkan kesimpulan: “Jika saya tidak menyelesaikan penulisan program maka saya akan bangun lebih segar.”

11. Tariklah kesimpulan yang diberikan oleh premis berikut:

- a. Jika saya bermain hoki maka saya akan sakit besok paginya. Saya akan menggunakan pusaran air jika saya sakit. Saya tidak menggunakan pusaran air.
- b. Semua serangga mempunyai enam kaki. Capung adalah serangga. Laba-laba tidak mempunyai enam kaki. Laba-laba memakan capung.
- c. Semua makanan yang sehat untuk dimakan rasanya tidak enak. Tahu sehat untuk dimakan. Anda hanya makan makanan yang rasanya enak. Anda tidak makan tahu. Burger keju tidak sehat untuk dimakan.

12. Perhatikan pernyataan berikut:

Ketika pertama kali seorang astronot mendatangi planet Mars kembali ke Bumi, ia diminta memberikan gambaran penduduk yang menghuni “planet merah” tersebut. Karena dalam kondisi tidak stabil, astronot tersebut memberikan jawaban yang benar tapi membingungkan. “Ini suatu kebenaran bahwa jika orang Mars berwarna hijau maka mereka mempunyai tiga kepala atau kalau tidak, mereka tidak dapat terbang. Selain itu, juga benar bahwa mereka berwarna hijau jika dan hanya jika mereka tidak mempunyai tiga kepala.”

Dengan asumsi semua orang Mars mirip satu sama lain dan mereka mempunyai paling sedikit satu dari tiga ciri yang disebutkan diatas:

Apakah orang Mars berkepala tiga?

Apakah mereka berkepala hijau?

Dapatkah mereka terbang?

13. Gunakan metode inferensi untuk menghasilkan kesimpulan yang valid.

- a. Jika matematika adalah mata kuliah yang mudah, maka pastilah saya seorang professor.

Saya bukan seorang professor.

∴

- b. Iza rajin belajar maka ia naik kelas.

Iza naik kelas.

∴

- c. Hari ini hujan atau Ibu pergi ke pasar.

Jika Ibu sakit maka Ibu tidak pergi ke pasar.

∴

- d. Jika dosen matematika tidak datang maka mahasiswa merasa senang.

Dosen matematika datang.

∴

14. Buktikan pernyataan berikut.

- a. Untuk setiap bilangan bulat n, jika n^2 adalah bilangan genap maka n bilangan genap.
- b. Untuk setiap bilangan bulat a, jika $(a-2)$ habis dibagi 3 maka $(a^2 - 1)$ habis dibagi 3 juga
- c. Tidak ada bilangan real positif terkecil
- d. Tidak ada bilangan genap terbesar

15. Tunjukkan apakah pernyataan berikut benar atau salah:
- Hasil kali dua bilangan ganjil adalah bilangan genap
 - Hasil kali dua bilangan ganjil adalah bilangan ganjil
 - Jumlah bilangan ganjil dan bilangan genap adalah bilangan ganjil
 - Selisih dua bilangan ganjil adalah bilangan ganjil
 - Untuk semua bilangan bulat a, b ; jika $a|b$ maka $a|(-b)$
16. Misalkan m dan n adalah bilangan bulat
- Apakah $2m + 4n$ bilangan genap? Mengapa?
 - Apakah $6mn$ bilangan genap? Mengapa?
 - Apakah $4mn + 3$ bilangan ganjil? Mengapa?
 - Apakah $2m + 4n + 5$ bilangan ganjil? Mengapa?

BAB 3

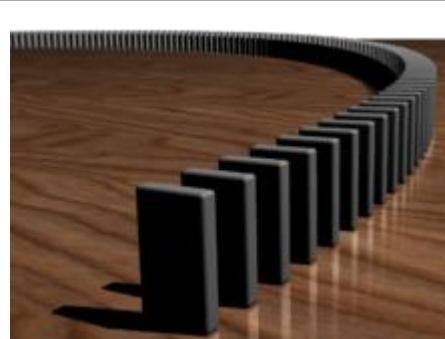
INDUKSI

MATEMATIKA

Metode untuk menunjukkan suatu proposisi benar dalam matematika ada beberapa macam antara lain ada metode pembuktian secara langsung, tidak langsung atau dengan kontradiksi. Demikian juga ada yang menggunakan induksi matematika. Induksi Matematika adalah cara standart dalam membuktikan bahwa sebuah pernyataan tertentu yang berlaku untuk setiap bilangan asli (N).

Induksi matematika digunakan untuk mengecek hasil proses yang terjadi secaraberulang sesuai dengan pola tertentu.

Melalui induksi matematika dapat dikurangi langkah-langkah pembuktian menjadi lebih terbatas.



↗ Sebuah deskripsi tidak formal dari induksi matematika dapat diilustrasikan dengan mengacu kepada efek sekuensial dari jatuhnya domino.[wikipedia.org](https://en.wikipedia.org)

Pembuktian dengan cara ini terdiri dari dua langkah, yaitu:

1. Menunjukkan bahwa pernyataan itu berlaku untuk bilangan 1.
2. Menunjukkan bahwa jika pernyataan itu berlaku untuk bilangan n , maka pernyataan itu juga berlaku untuk bilangan $n + 1$.

Pada prinsipnya induksi matematika berbunyi sebagai berikut:

“Misalkan $p(n)$ adalah proposisi perihal bilangan bulat positif dan akan dibuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n . Untuk membuktikan proposisi ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

1. $p(n)$ benar, dan
2. Jika $p(n)$ benar, maka $p(n + 1)$ juga benar untuk setiap $n \geq 1$.

Sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan positif n .”

Langkah 1 dinamakan basis induksi sedangkan langkah 2 dinamakan langkah induksi atau kadang juga disebut jembatan. Asumsi pada langkah 2 disebut sebagai hipotesis induksi. Jika sudah terdapatkan ke-2 langkah itu benar maka $p(n)$ juga sudah terbukti benar untuk semua bilangan n benar.

Contoh 3.1:

Buktikan $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ berlaku untuk setiap bilangan asli,

Bukti:

Langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Menunjukkan bahwa pernyataan tersebut benar untuk $n = 1$. (basis induksi) Jelas sekali bahwa jumlah 1 bilangan asli pertama adalah $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Jadi pernyataan tersebut adalah benar untuk $n = 1$.
2. Menunjukkan bahwa jika pernyataan tersebut benar untuk $n = k$, maka pernyataan tersebut juga benar untuk $n = k+1$. (Langkah induksi). Hal ini bisa dilakukan dengan cara:

mengasumsikan bahwa pernyataan tersebut benar untuk $n = k$, (Hipotesis induksi) yaitu

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k + 1)}{2}$$

maka akan diperlihatkan kebenarannya untuk $n = k+1$, yaitu:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$

Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) &= \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) \\ &= \frac{k(k + 1)}{2} + \frac{2(k + 1)}{2} \\ &= \frac{k^2 + 3k + 2}{2} \\ &= \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} \end{aligned}$$

Dengan demikian, karena langkah 1 dan 2 terbukti benar maka pernyataan pada contoh 3.1 juga benar.

Jika akan membuktikan dengan menggunakan induksi matematika bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Sehingga pembuktian induksi matematika tidak hanya di mulai dari 1 saja. Prinsip induksi matematika ini disebut sebagai prinsip perampatan.

“Misalkan $p(n)$ adalah proposisi perihal bilangan bulat positif dan akan dibuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif $n \geq n_0$. Untuk membuktikan proposisi ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

1. $p(n_0)$ benar, dan
2. Jika $p(n)$ benar, maka $p(n + 1)$ juga benar untuk setiap $n \geq n_0$.

Sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan positif $n \geq n_0$.”

Contoh 3.2:

Untuk semua bilangan bulat tak negatif n , buktikan dengan induksi matematika bahwa :

$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

Bukti:

Misalkan $p(n)$ adalah proposisi bahwa untuk semua bilangan bulat tidak negatif n , memenuhi $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

1. Basis Induksi: $p(n_0)$ benar, karena untuk $n = 0$ (bilangan bulat tidak negatif yang pertama) di peroleh: $2^0 = 2^{0+1} - 1$

Ini jelas benar, karena

$$2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1$$

$$= 2 - 1$$

$$= 1$$

2. Langkah induksi: Misalkan $p(n)$ benar yaitu proposisi

$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

diasumsikan benar (hipotesis).

Sedemikian hingga akan dibuktikan untuk $p(n + 1)$ adalah benar juga yaitu:

$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$$

Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} &= (2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n) + 2^{n+1} \\ &= (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} \\ &= (2^{n+1} + 2^{n+1}) + 1 \\ &= 2^{n+2} - 1 \\ &= 2^{(n+1)+1} - 1 \end{aligned}$$

Karena langkah 1 dan langkah 2 terbukti maka untuk semua bilangan bulat tidak negatif n , berlaku proposisi $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

Untuk membuktikan suatu proposisi kadang-kadang juga membutuhkan prinsip induksi kuat yaitu:

“Misalkan $p(n)$ adalah proposisi perihal bilangan bulat positif dan akan dibuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif $n \geq n_0$. Untuk membuktikan proposisi ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

1. $p(n_0)$ benar, dan
2. Jika $p(n_0), p(n_0 + 1), \dots, p(n)$ benar, maka $p(n + 1)$ juga benar untuk setiap $n \geq n_0$.

Sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan positif $n \geq n_0$. ”

Contoh 3.3:

Buktikan bahwa pernyataan berikut ini benar:

"Jika terdapat dua nilai perangko, yaitu Rp. 3,- dan Rp. 5,-. maka dari dua nilai perangko ini dapat dibuat untuk mengirim surat yang biayanya \geq Rp. 8,-."

Bukti:

Jika biaya pengiriman surat Rp. 8,-, maka disusun perangko Rp. 3,- dan Rp. 5,-

Jika biaya pengiriman surat Rp. 9,-, maka disusun perangko Rp. 3,- sebanyak 3 buah

Jika biaya pengiriman surat Rp. 10,-, maka disusun perangko Rp. 5,- sebanyak 2 buah

Jika biaya pengiriman surat Rp. 11,-, maka disusun perangko Rp. 3,- sebanyak 2 buah
dan Rp. 5,- sebanyak 1 buah

..... dan seterusnya.

Untuk meyakinkan bahwa dengan perangko yang bernilai Rp. 3,- dan Rp. 5,- dapat digunakan untuk pengiriman surat dengan biaya \geq Rp. 8,- digunakan pendekatan sebagai berikut:

Jika dari perangko bernilai Rp. 3,- dan Rp. 5,- dapat digunakan untuk pengiriman surat dengan biaya Rp. k ,- maka perangko tersebut dapat untuk pengiriman dengan biaya Rp. $k+1$,-. (ingat $k \geq$ Rp. 8,-)

Terdapat dua kemungkinan.

Kemungkinan ke-1: Misalkan biaya pengiriman Rp. $k,-$ dengan menggunakan hanya satu jenis perangko Rp. $5,-$ maka dapat dibuat biaya Rp. $k+1,-$ dengan mengganti dua jenis perangko Rp. $5,-$ dan perangko Rp. $3,-$.

Kemungkinan ke-2: Misalkan biaya pengiriman Rp. $k,-$ dengan menggunakan hanya satu jenis perangko Rp. $3,-$ maka dapat dibuat biaya Rp. $k+1,-$ dengan mengganti dua jenis perangko Rp. $3,-$ dan perangko Rp. $5,-$.

Langkah pembuktian dengan menggunakan induksi matematika adalah sebagai berikut:

1. Basis induksi, untuk $n = 1$ pernyataan benar bahwa jika biaya pengiriman surat Rp. $8,-$, maka disusun perangko Rp. $3,-$ dan Rp. $5,-$.
2. Langkah induksi.

Andaikan $p(n)$ benar, yaitu untuk mengirim surat dengan biaya sebesar n ($n \geq$ Rp. $8,-$) dapat menggunakan perangko Rp. $3,-$ dan Rp. $5,-$. (Hipotesis) Akan ditunjukkan bahwa $p(n + 1)$ juga benar, yaitu jika dari perangko bernilai Rp. $3,-$ dan Rp. $5,-$ dapat digunakan untuk pengiriman surat dengan biaya Rp. $n+1,-$. (ingat $n \geq$ Rp. $8,-$).

Ada dua kemungkinan yang bisa diperiksa, yaitu:

- a. Kemungkinan ke-1: Misalkan biaya pengiriman Rp. $n,-$ dengan menggunakan hanya satu jenis perangko Rp. $5,-$ maka dapat dibuat biaya Rp. $n+1,-$ dengan mengganti dua jenis perangko Rp. $5,-$ dan perangko Rp. $3,-$
- b. Kemungkinan ke-2: Misalkan biaya pengiriman Rp. $n,-$ dengan menggunakan hanya satu jenis perangko Rp. $3,-$ maka dapat dibuat biaya Rp. $n+1,-$ dengan mengganti dua jenis perangko Rp. $3,-$ dan perangko Rp. $5,-$.

Contoh 3.4:

Tunjukkan bahwa $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, untuk $n \geq 1$

Bukti:

1. Basis induksi: Untuk $n = 1$, maka $1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$. Karena ruas kiri sama dengan ruas kanan, maka pernyataan tersebut benar.

2. Langkah induksi: Misalkan bahwa $n = k$ benar, jadi

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Akan dibuktikan bahwa untuk $n=k+1$ juga benar, yaitu:

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$

untuk $n = k + 1$ diperoleh:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ &= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6} \end{aligned}$$

Terbukti berlaku untuk $n = k + 1$.

Disimpulkan bahwa $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ benar untuk $n \geq 1$

Contoh 3.5:

Buktikan bahwa: $2^n > n^3$ untuk $n \geq 10$

Bukti.

1. Basis induksi: untuk $n = 10$ didapat $2^{10} = 1024 > 10^3$. Karena ruas kiri sama dengan ruas kanan maka pernyataan tersebut benar.
2. Langkah induksi: Misalkan bahwa $n = k$ benar, jadi $2^k > k^3$.

Akan dibuktikan bahwa untuk $n=k+1$ juga benar, yaitu: $2^{k+1} > (k+1)^3$

Perhatikan bahwa:

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > \left(1 + \frac{1}{10}\right)^3 \cdot 2^k \geq \left(1 + \frac{1}{k}\right)^3 \cdot 2^k > \left(1 + \frac{1}{k}\right)^3 \cdot k^3 = (k+1)^3$$

Jadi terbukti bahwa pernyataan tersebut benar untuk $n=k+1$.

Disimpulkan bahwa $2^n > n^3$ untuk $n \geq 10$.

Contoh 3.6:

Tunjukkan bahwa setiap bilangan bulat positif $n \geq 2$ merupakan bilangan prima atau hasil kali beberapa bilangan prima.

Bukti.

1. Basis Induksi: Untuk $n = 2$, benar karena 2 adalah bilangan prima.

2. Langkah induksi: Misalkan pernyataan benar untuk bilangan bulat n , $2 \leq n \leq k$.

Untuk bilangan bulat $k+1$, jika $k+1$ bilangan prima maka pernyataan benar. Jika $k+1$ bukan bilangan prima, bentuk $k+1$ dapat dibuat $p \cdot q$ dengan $p \leq k$ dan $q \leq k$. Menurut hipotesis induksi p merupakan bilangan prima atau hasil kali beberapa bilangan prima, demikian juga q . Jadi $k+1$ merupakan bilangan prima atau hasil kali beberapa bilangan prima.

Contoh 3.7:

Buktikan bahwa $2^{2n} - 1$ habis dibagi 3 untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$.

Bukti:

1. Basis induksi.

Untuk $n = 1$, akan ditunjukkan bahwa $2^2 - 1$ habis dibagi 3.

Hal ini jelas benar karena $2^2 - 1 = 3$ jelas habis dibagi 3.

2. Langkah induksi.

Andaikan untuk $n = k$ benar, yaitu $2^{2k} - 1$ habis dibagi 3. (Hipotesis)

Akan dibuktikan bahwa untuk $n = k + 1$ benar, yaitu $2^{2(k+1)} - 1$ habis dibagi 3.

Untuk $n = k + 1$ diperoleh

$$\begin{aligned} 2^{2(k+1)} - 1 &= 2^{2k+2} - 1 \\ &= 2^{2k} \cdot 2^2 - 1 \\ &= 4 \cdot 2^{2k} - 1 \\ &= (3 \cdot 2^{2k} + 1 \cdot 2^{2k}) - 1 \\ &= 3 \cdot 2^{2k} + (2^{2k} - 1) \end{aligned}$$

Jelas bahwa $3 \cdot 2^{2k}$ habis dibagi 3 karena merupakan kelipatan 3, sedangkan $2^{2k} - 1$

habis dibagi 3 menurut hipotesis. Jadi $2^{2(k+1)} - 1$ habis dibagi 3.

Jadi terbukti bahwa $2^{2n} - 1$ habis dibagi 3 untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$.

Aplikasi induksi matematika dalam Pemrograman.

Dalam ilmu komputer, metode induksi matematika dipakai untuk membuktikan suatu program tertentu apakah benar atau tidak. Karena dalam membuat suatu program haruslah menghasilkan keluaran yang benar sesuai dengan data masukan yang diberikan. Salah satu bentuk yang digunakan dalam program adalah bentuk kalang (Loop). Untuk menunjukkan kebenaran kalang dapat menggunakan **Teorema Kalang Invarian**. [Susanna, 1990].

Teorema Kalang Invarian

Misalkan diberikan kalang WHILE dengan syarat kondisi S, kondisi sebelum dan sesudah kalang. Misalkan pula diberikan predikat $I(n)$ yang disebut kalang invarian. Apabila keempat syarat berikut benar, maka kalang benar terhadap kondisi sebelum dan sesudahnya.

1. Basis

Kondisi sebelum kalang berarti bahwa $I(0)$ benar sebelum iterasi pertama kalang.

2. Induksi

Jika syarat kondisi S dan kalang invarian $I(k)$ benar untuk suatu bilangan bulat $k \geq 0$ sebelum iterasi kalang, maka $I(k+1)$ juga benar setelah iterasi kalang.

3. Kondisi penghentian

Setelah sejumlah itetrasi kalang yang berhingga, maka syarat kondisi S menjadi salah.

4. Kebenaran kondisi setelah kalang

Jika untuk suatu bilangan bulat tak negatif N , syarat kondisi S salah dan $I(N)$ benar, maka harga variabel akan sama dengan yang ditentukan dalam kondisi akhir kalang.

Contoh 3.8:

Perkalian n (bilangan bulat tak negatif) dengan y didefinisikan sebagai berikut:

$$m \cdot y = \underbrace{y + y + y + \cdots + y}_{m \text{ buah}}$$

Pernyataan tersebut dapat dibuat program sebagai berikut:

[Kondisi sebelum kalang:

$m :=$ bilangan bulat tak negatif

$y :=$ bilangan real

$I := 0$

Kali:=0

]

While ($i \neq m$)

Kali:= Kali + y

$i := i + 1$

End While

[Kondisi setelah kalang

Kali := $m * y$

]

Bukti:

Untuk membuktikan bahwa kalang pada **contoh 3.8** tersebut benar, maka harus ditunjukkan 4 syarat sesuai **Teorema Kalang Invarian**.

1. Basis

Akan ditunjukkan bahwa $I(0)$ benar sebelum iterasi kalang yang pertama.

$I(0)$: “ $i=0$, maka $kali=0.y=0$ ”

Kondisi sebelum kalang dideklarasikan bahwa: $i=0$ dan $kali = 0$.

Jadi terbukti benar.

2. Induksi

Akan ditunjukkan bahwa jika $i \neq m$ dan $I(k)$ benar sebelum iterasi kalang ($k \geq 0$), maka $I(k+1)$ benar setelah iterasi kalang.

$I(k+1)$: “ $i=k+1$ dan $kali = (k+1).y$ ”

Misalkan k adalah bilangan bulat tak negative sedemikian sehingga $i \neq m$ dan $I(k)$ benar sebelum iterasi.

Diawal kalang, $i \neq m$, $i=k$ dan $kali=k.y$

Oleh karena $i \neq m$, maka kalang dieksekusi dan didapat:

$$Kali_{baru} = Kali_{lama} + y = ky + y = (k + 1)y$$

$$i_{baru} = i_{lama} + 1 = k + 1$$

Dengan demikian, setelah eksekusi kalang, $I(k+1)$ benar.

3. Kondisi penghentian

Akan ditunjukkan bahwa setelah sejumlah iterasi (berhingga), maka kondisi sebelum kalang menjadi salah sehingga iterasi berhenti.

Setelah kalang diiterasi sebanyak m kali, maka $i=m$ dan $kali=my$.

Pada keadaan ini, syarat kondisi sebelum kalang menjadi salah sehingga iterasi berhenti.

4. Kebenaran kondisi setelah kalang

Dalam algoritma, syarat kondisi sebelum kalang menjadi salah setelah $i=m$.

Kondisi $I(m)$ benar berarti “ $i=N$ dan $Kali=Ny$ ”.

Oleh karena terpenuhinya kedua kondisi, yaitu kondisi sebelum kalang salah dan $I(N)$ benar, maka

$$m=i=N \text{ dan } Kali=Ny=ny$$

Hal tersebut sama dengan kondisi setelah kalang.

SOAL LATIHAN

1. Gunakan induksi matematika untuk membuktikan pernyataan berikut:

- a. $3^{2n} - 1$ habis dibagi 3 untuk semua bilangan bulat $n \geq 0$
- b. $n < 2^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$
- c. $\sum_{i=1}^n 2^i = 2^{n+1} - 2$
- d. $2^{3n} - 1$ habis dibagi 7 untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$
- e. $n^3 > 2n + 1$ untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$
- f. $\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$
- g. $\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
- h. $\sum_{r=1}^n r(r+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$; $n \geq 1$
- i. $n^4 - 4n^2$ habis dibagi 3 untuk semua bilangan bulat $n \geq 2$

2. Buktikan dengan menggunakan induksi matematika bahwa untuk setiap n bilangan

asli berlaku: $21 \mid 2^{6n} - 1$.

3. Tunjukkan bahwa

$$\frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)} + \frac{1}{3(4)} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

4. Tunjukkan bahwa

$$\frac{1}{1(3)} + \frac{1}{3(5)} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

5. Telah diketahui bahwa untuk sebarang bilangan positif $n \geq 2$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} - A > 0$$

dalam hal ini A sebuah konstanta. Seberapa besarkah A tersebut dapat diambil?

6. Tunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan positif $n > 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

7. Buktikan melalui induksi matematika bahwa jumlah pangkat tiga dari tiga bilangan

bulat positif berurutan selalu habis dibagi Sembilan.

8. Berikut ini disajikan sebuah pembuktian bagi pernyataan “Setiap n bola bilyar selalu berwarna sama” melalui induksi matematika.

Basis induksi. Untuk $n = 1$, pernyataan ini jelas benar.

Langkah induksi. Misalkan kita diberi $k+1$ bola bilyar yang dinomori $1, 2, 3, \dots, (k+1)$. Menurut hipotesis induksi, bola bilyar $1, 2, 3, \dots, k$ berwarna sama. Selain itu, bola bilyar $2, 3, \dots, (k+1)$ juga berwarna sama. Dengan demikian, bola bilyar $1, 2, 3, \dots, k, (k+1)$ semuanya berwarna sama.

Dimana letak kesalahan pembuktian ini?

9. Sebuah ATM hanya menyediakan uang pecahan Rp. 20.000,- dan Rp. 50.000,-. Kelipatan uang berapakah yang dapat dikeluarkan oleh ATM tersebut?
10. Didalam sebuah pesta, setiap tamu berjabat tangan dengan tamu yang lain sebanyak satu kali. Buktikan dengan induksi matematika bahwa jika ada n orang tamu maka jumlah jabat tangan yang terjadi adalah $n(n-1)/2$.
11. Buktikan dengan induksi matematika bahwa semua bilangan berbentuk $x = 11\dots1_n$ (n adalah jumlah perulangan angka 1, misalnya $n = 4$ maka $x = 1111$) pasti kongruen dengan 0 (mod 11) atau 1 (mod 11) (misalnya $111 \equiv 1 \pmod{11}$ dan $111111 \equiv 0 \pmod{11}$).
12. Kita memiliki 2 orang tua (ayah dan ibu), 4 kakek-nenek, 8 kakek buyut, dst.
- Jika semua nenek moyang kita (ayah, ibu, kakek, nenek, kakek buyut, dan semua generasi di atas kita) adalah orang yang berbeda, berapa jumlah total nenek moyang kita selama 40 generasi (dengan menganggap ayah ibu kita sebagai generasi pertama)?
 - Misalkan setiap generasi menunjukkan masa selama 30 tahun. Berapa tahun lamanya waktu 40 generasi tersebut?
 - Total jumlah manusia yang pernah hidup didunia ini diperkirakan sebanyak 10 miliar orang (10^{10}). Bandingkan jumlah itu dengan jawaban a. Apa kesimpulan Anda?

BAB 4

HIMPUNAN

4.1 Definisi Himpunan

Definisi 4.1:

Himpunan (Set) ialah suatu kumpulan obyek – obyek (benda) yang *berbeda*.

Obyek didalam himpunan dinamakan unsur/elemen/anggota himpunan. Untuk menyatakan keanggotaan himpunan dilambangkan dengan \in dan bukan anggota himpunan dilambangkan dengan \notin . Kata berbeda pada definisi dicetak miring karena menunjukkan hal yang penting artinya anggota himpunan tidak boleh sama. Notasi himpunan biasanya diberikan huruf besar (misal A, B,...) dan untuk elemen himpunan biasanya memakai huruf kecil (misal a, b, ...)

Penulisan keanggotaan himpunan tidak hanya diurutkan menurut aturan tertentu.

Ada 4 cara penyajian keanggotaan himpunan yaitu:

1. **Enumerasi** yaitu dengan cara mendaftar/mencacah semua elemen himpunan yang bersangkutan di antara dua buah tanda kurung kurawal.

Misalkan himpunan B adalah berisi lima buah bilangan ganjil positif pertama sedemikian hingga bisa ditulis, $B = \{1,3,5,7,9\}$. Pada saat mendaftar anggota maka setiap anggota tidak boleh berulang, misalnya $A = \{1,1,3,3,5,7,9,9\}$ maka harusnya ditulis $A = \{1,3,5,7,9\}$.

Contoh 4.1:

Menyatakan keanggotaan himpunan

Himpunan P yang anggotanya 3 huruf pertama dalam abjad latin.

$$P = \{a, b, c\}$$

$a \in P$, a anggota himpunan P ; $g \notin P$, g bukan anggota himpunan P

2. **Simbol-simbol Baku** yaitu menyajikan himpunan dengan sejumlah simbol yang berbentuk huruf tebal yang biasa digunakan untuk mendefinisikan himpunan, antara lain:

P : Himpunan bilangan bulat positif : {1,2,3, ... }

N : Himpunan bilangan asli : {1,2,3, ... }

Z : Himpunan bilangan bulat : {..., -1,0,1,2,3, ... }

Q : Himpunan bilangan rasional

R : Himpunan bilangan riil

C : Himpunan bilangan kompleks

3. **Notasi Pembentuk Himpunan** yaitu dengan mendeskripsikan sifat dari semua elemen himpunan, yaitu:

Notasi: {x / syarat yang harus dipenuhi oleh x}

Contoh 4.2:

A adalah himpunan bilangan bulat positif yang lebih kecil dari 4 sehingga dapat dinyatakan dengan:

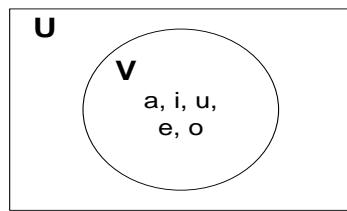
$$A = \{x / x \text{ adalah bilangan bulat positif yang lebih kecil dari } 4\} \text{ atau}$$

$$A = \{x | x \in P, x < 4\}$$

Contoh 4.3:

Himpunan H yang anggotanya bilangan asli yang kurang dari 5, dapat dinyatakan dengan:

- a. Cara mendaftar semua anggota himpunan : $H = \{1, 2, 3, 4\}$
 - b. Cara deskripsi : $H = \{x | x \text{ bilangan asli yang kurang dari } 5\}$
-
4. **Diagram Venn** yaitu penyajian himpunan secara grafis yang digambarkan dalam bentuk lingkaran. Himpunan dapat dinyatakan dalam bentuk grafik yang dinamakan **diagram Venn**, didalam diagram venn himpunan universal **U** merupakan himpunan yang memuat semua obyek pembicaraan. Misalkan, diberikan himpunan $V=\{a, i, u, e, o\}$ sehingga bentuk grafik himpunan V dinyatakan dalam diagram venn ditunjukkan pada Gambar 4.1.

Gambar 4.1 Diagram Venn himpunan **V**

Suatu himpunan dapat mempunyai elemen yang berupa himpunan.

Contoh 4.4:

$$A = \{ \{a,b\}, c, d, e \}, \text{ maka } \{a, b\} \in A, \quad c \in A, \quad b \notin A$$

Analogi.

A adalah suatu kotak yang berisi kotak empat benda yaitu kotak yang berisi a dan b dan benda c, d dan f .

Contoh 4.5:

$$S_1 = \{a, b\}, \quad S_2 = \{\{a, b\}\}, \quad S_3 = \{\{\{a, b\}\}\}, \text{ maka}$$

$$a \in S_1, \quad a \notin S_2, \quad a \notin S_3, \quad S_1 \in S_2, \quad S_1 \notin S_3, \quad S_2 \in S_3$$

4.2 Kardinalitas dari suatu Himpunan

Definisi 4.2:

Suatu himpunan dikatakan berhingga (Finite Set) jika terdapat n (n bilangan bulat tak negatif) elemen yang berbeda, jumlah elemen yang berbeda di dalam suatu himpunan disebut Kardinal. Notasi dari kardinal himpunan A adalah $n(A)$ atau $|A|$.

Untuk menentukan banyaknya elemen dari $P \cup Q$ adalah banyak elemen di P ditambah banyaknya elemen di Q ditulis $|P| + |Q|$, akan tetapi ada elemen yang berada di P dan Q yang dihitung dua kali sehingga banyaknya elemen dikurangkan dengan banyaknya elemen yang berada di P dan Q yang ditulis dengan $|P \cap Q|$.

Jadi

$$|P \cup Q| = |P| + |Q| - |P \cap Q|$$

Bentuk ini disebut **prinsip inklusi-eksklusi** yang akan dibahas pada bab berikutnya (Bab Kombinatorika). Kardinal dari himpunan tak berhingga adalah tak hingga, misalnya kardinal himpunan Real $= |R| = \sim$.

Contoh 4.6:

1. $A = \{a, b\}$, maka kardinal dari $A = 2$
2. Ambil S himpunan huruf latin, maka $|S| = 26$
3. Karena himpunan kosong tidak mempunyai elemen, maka $|\emptyset| = 0$

4.3 Himpunan kosong.

Definisi 4.3:

Himpunan yang tidak memiliki satupun elemen atau himpunan dengan kardinal = 0 adalah himpunan kosong.

Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak mempunyai anggota dan dilambangkan dengan: { } atau \emptyset

Istilah seperti kosong, hampa, nihil, ketiganya mengacu pada himpunan yang tidak mengandung elemen tetapi tetapi istilah nol tidak sama dengan istilah di atas, sebab nol menyatakan sebuah bilangan tertentu.

4.4 Himpunan bagian (Subset).

Misalkan P dan Q himpunan. P adalah himpunan bagian (subset) dari Q jika setiap elemen di dalam P merupakan elemen di dalam Q dan dilambangkan dengan $P \subseteq Q$.

Himpunan P dikatakan himpunan bagian (Subset) dari himpunan Q jika dan hanya jika setiap elemen P merupakan elemen dari Q . Dalam hal ini Q dikatakan superset dari P . Dinotasikan dengan $P \subseteq Q$.

$$P \subseteq Q \Leftrightarrow ((\forall x)x \in P \Rightarrow x \in Q)$$

Teorema 4.3:

Untuk setiap himpunan S ,

- i. $\emptyset \subseteq S$,
- ii. $S \subseteq S$.

Bukti Teorema 4.3:

Akan dibuktikan i, bukti ii untuk latihan.

Ambil S suatu himpunan.

Akan ditunjukkan bahwa $\emptyset \subseteq S$, artinya $\forall x (x \in \emptyset \rightarrow x \in S)$ adalah benar.

Karena himpunan kosong tidak mempunyai elemen, berarti bahwa $x \in \emptyset$ selalu salah, sehingga implikasi dari $x \in \emptyset \rightarrow x \in S$ selalu benar. Jadi $\forall x (x \in \emptyset \rightarrow x \in S)$ adalah benar.

Jadi terbukti bahwa i benar.

Pernyataan dibawah ini selalu benar

1. Untuk setiap himpunan P , P adalah himpunan bagian dari P .
2. Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari sebarang himpunan, tetapi himpunan kosong belum tentu menjadi elemen himpunan lain.
3. Himpunan $\{\emptyset\}$ bukan merupakan himpunan bagian dari himpunan $\{\{\emptyset\}\}$, tetapi $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$

Contoh 4.7:

$$1. \quad A = \{a, b\}$$

$$\emptyset \subset A, \quad \{a\} \subset A, \quad \{b\} \subset A, \quad \{a,b\} \subset A$$

$$2. \quad B = \{\{\emptyset\}, a\}$$

$$\emptyset \subset B, \quad \{\{\emptyset\}\} \subset B, \quad \{a\} \subset B, \quad \{\{\emptyset\}, a\} \subset B, \quad \text{tetapi } \emptyset \notin B$$

$$3. \quad C = \{\emptyset, a\}$$

$$\emptyset \subset C, \quad \{\emptyset\} \subset C, \quad \{a\} \subset C, \quad \{\{\emptyset\}, a\} \subset C, \quad \text{juga } \emptyset \in C$$

4.5 Kesamaan dua himpunan

Dua himpunan P dan Q dikatakan sama ($P = Q$) jika kedua himpunan mempunyai elemen-elemen yang sama, atau dengan kata lain dua himpunan dikatakan sama jika $P \subseteq Q$ dan $Q \subseteq P$.

Contoh:

(i). Jika $A = \{0,1\}$ dan $B = \{x|x(x - 1) = 0\}$, maka $A = B$.

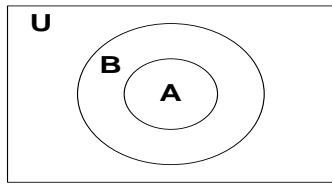
(ii). Jika $A = \{3,5,8,5\}$ dan $B = \{3,5,8\}$, maka $A = B$.

4.6 Himpunan Yang Ekivalen

Dua buah himpunan dapat mempunyai kardinal yang sama meskipun anggota kedua himpunan tersebut tidak sama, maka himpunan tersebut dikatakan ekivalen. Notasi:
 $A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$.

4.7 Himpunan bagian sejati (proper subset)

A himpunan bagian sejati dari **B** jika ada satu elemen di dalam **B** yang tidak ada di dalam **A** dan dinyatakan dengan $A \subset B$; diagram venn dari himpunan bagian sejati diperlihatkan pada gambar 4.2.



Gambar 4.2. Diagram venn dari $A \subset B$

Contoh 4.8:

$$P = \{a, b\}, Q = \{a, b, c\} \text{ maka } P \subset Q$$

4.8 Himpunan Kuasa (Power Set)

Himpunan kuasa (Poset-Power Set) dari himpunan A dinyatakan dengan $\wp(A)$ ialah himpunan yang elemen – elemennya semua himpunan bagian A . Dengan jumlah anggotanya adalah 2^A , notasinya adalah $\wp(A)$

Contoh 4.9:

1. $A = \{a, b\}$, maka $\wp(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
2. $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$
3. Untuk sebarang himpunan A , maka $\emptyset \in \wp(A)$ dan $\emptyset \subseteq \wp(A)$

4.9 Himpunan Saling Lepas

Dua buah himpunan mungkin saja tidak memiliki anggota yang sama satu buah pun. Kedua himpunan tersebut dikatakan saling lepas (Disjoint). Notasi dari dua buah himpunan A dan B yang disjoint adalah $A \parallel B$.

4.10 Operasi pada himpunan

a. Gabungan (Union) dari dua himpunan

Gabungan dua himpunan P dan Q dinyatakan dengan $P \cup Q$ ialah himpunan yang elemen – elemennya di dalam P atau Q atau kedua-duanya.

Suatu elemen x anggota dari $P \cup Q$ jika dan hanya jika x anggota P atau x anggota Q dan ditulis sebagai:

$$P \cup Q = \{ x \mid x \in P \vee x \in Q \}$$

Contoh 4.10:

1. $\{a, b\} \cup \{a, c\} = \{a, b, c\}$
2. $\{a, b\} \cup \{\} = \{a, b\}$
3. $\{a, b\} \cup \{\{a, b\}\} = \{a, b, \{a, b\}\}$

b. Irisan (*intersection*) dari dua himpunan.

Irisan dua himpunan P dan Q dinyatakan dengan $P \cap Q$ ialah himpunan yang elemennya di dalam P dan Q . Jika $P \cap Q = \emptyset$, maka himpunan P dan Q saling asing (disjoint).

Suatu elemen x anggota dari $P \cap Q$ jika dan hanya jika x anggota P dan x anggota Q ditulis sebagai:

$$P \cap Q = \{ x \mid x \in P \wedge x \in Q \}$$

Contoh 4.11:

1. $\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\}$
2. $\{a, b\} \cap \{\} = \{\},$
3. $\{a, b\} \cap \{\{a, b\}\} = \{\}$

c. Beda (*difference*) dari dua himpunan

Beda antara dua himpunan P dan Q dinyatakan dengan $P - Q$ adalah himpunan yang mengandung tepat elemen – elemen di dalam P yang tidak ada di dalam Q . Suatu x anggota dari $P - Q$ jika dan hanya $x \in P$ dan $x \notin Q$. Jadi $P - Q = \{x \mid x \in P \wedge x \notin Q\}$

Contoh 4.12:

$P = \{a, b, c\}$, $Q = \{a\}$, $R = \{a, d\}$, $S = \{d, e\}$, maka

1. $P - Q = \{a, b, c\} - \{a\} = \{b, c\}$
2. $P - R = \{a, b, c\} - \{a, d\} = \{b, c\}$
3. $P - S = \{a, b, c\} - \{d, e\} = \{a, b, c\}$

Pada **contoh 4.12**, perhatikan bahwa $Q \subset P$, $P - Q$ adalah himpunan yang elemen – elemennya bukan anggota Q yang dinamakan komplemen dari Q dinyatakan dengan \overline{Q} . Jadi, jika $Q \subset P$ maka $P - Q = \overline{Q}$.

d. Beda Simetri/ Beda Simetri (*Symmetric Difference*)

Beda simetri antara himpunan P dan Q dinyatakan dengan $P \oplus Q$ ialah himpunan yang mengandung semua elemen yang ada di dalam P atau Q tetapi tidak di dalam keduanya.

Dengan demikian: $P \oplus Q = (P \cup Q) - (P \cap Q)$

Contoh 4.13:

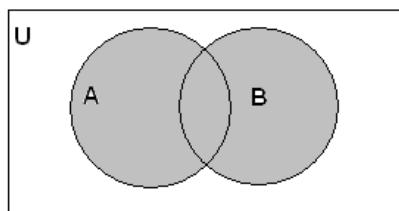
$P = \{a, b\}$, $Q = \{a, c\}$, $R = \{a, b\}$, maka

1. $P \oplus Q = \{b, c\}$
2. $P \oplus \phi = \{a, b\}$
3. $P \oplus R = \{a, b\}$

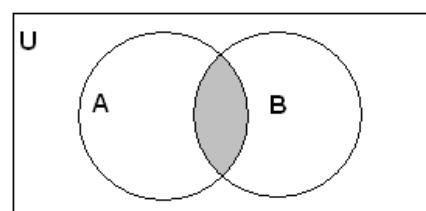
Hubungan antar himpunan dalam bentuk hasil kali kartesian akan dijelaskan pada bab Relasi (Bab VI).

4.11 Diagram Venn untuk operasi himpunan.

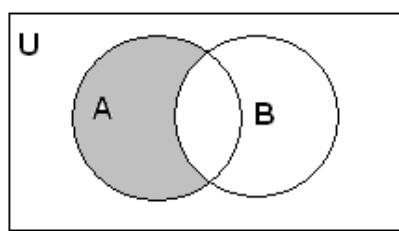
Diberikan himpunan A dan B , diagram venn untuk operasi himpunan diberikan dibawah ini.



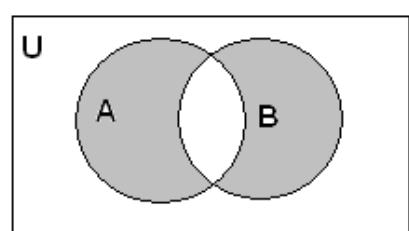
Gambar 4.3 Diagram venn $A \cup B$



Gambar 4.4 Diagram venn $A \cap B$



Gambar 4.5 Diagram venn $A - B$



Gambar 4.6 Diagram venn $A \oplus B$

4. 12 Generalisasi Operasi Himpunan

Karena gabungan dan irisan dari himpunan mempunyai hukum asosiatif, maka dapat didefinisikan secara general untuk gabungan dan irisan himpunan.

Gabungan untuk koleksi dari himpunan adalah himpunan yang memuat semua elemen-elemen yang berada di koleksi himpunan dan dinyatakan dengan:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

Irisan untuk koleksi dari himpunan adalah himpunan yang memuat elemen-elemen yang menjadi anggota semua koleksi himpunan dan dinyatakan dengan:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$$

Beda Simetri untuk koleksi dari himpunan adalah himpunan yang memuat elemen-elemen yang menjadi anggota semua koleksi himpunan dan dinyatakan dengan:

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n = \bigoplus_{i=1}^n A_i$$

4. 13 Hukum-hukum Aljabar pada Himpunan

Tabel 4.1. merupakan tabel hukum-hukum aljabar yang penting untuk himpunan, pembuktian dari beberapa identitas diberikan sebagai contoh, sedangkan yang lain sebagai latihan.

Identitas	Nama
$A \cup \phi = A$ $A \cap U = A$	Hukum identitas
$A \cup U = U$ $A \cap \phi = \phi$	Hukum Dominasi/null
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Hukum idempotent
$(\bar{A}) = A$	Hukum komplementasi
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Hukum kumutatif
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Hukum asosiatif
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Hukum distributive
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	Hukum De Morgan's
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Hukum absorpsi
$A \cup \bar{A} = U$ $A \cap \bar{A} = \phi$	Hukum komplemen

Tabel 4.1. Identitas Himpunan

Metode pembuktian kebenaran suatu proposisi himpunan dapat dilakukan dengan berbagai cara, di antaranya yaitu:

a. Pembuktian dengan menggunakan diagram Venn

Dengan menggunakan diagram venn pembuktian dapat dilakukan dengan cepat, ini adalah kelebihan dari metode ini, tetapi kekurangannya adalah hanya bisa membuktikan untuk sedikit himpunan saja.

b. Pembuktian dengan Tabel keanggotaan.

Pada tabel keanggotaan angka 1 menyatakan bahwa suatu elemen adalah anggota himpunan dan angka 0 untuk menyatakan bukan anggota himpunan. Artinya dapat dianalogikan bahwa angka 1 menyatakan *true* dan angka 0 adalah *false*.

c. Pembuktian dengan menggunakan hukum-hukum aljabar himpunan

Pembuktian ini menggunakan hukum-hukum aljabar apad himpunan. Selanjutnya akan diberikan contoh pembuktian himpunan diantaranya sebagai berikut:

Contoh 4.15:

Buktikan bahwa: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Bukti:

Akan dibuktikan menggunakan dua himpunan yang sama dengan memperlihatkan bahwa masing-masing adalah subset dari yang lain.

Pertama akan ditunjukkan bahwa jika $x \in \overline{A \cap B}$ maka $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

Misalkan bahwa $x \in \overline{A \cap B}$, berarti: $x \notin A \cap B$ (definisi komplemen).

Dengan demikian: $\sim((x \in A) \wedge (x \in B))$ adalah benar. (definisi irisan)

Selanjutnya:

$\sim(x \in A)$ atau $\sim(x \in B)$ (Hukum De Morgan pada logika)

$\Leftrightarrow x \notin \bar{A}$ atau $x \notin \bar{B}$ (definisi komplemen)

$\Leftrightarrow x \in \bar{A} \cup \bar{B}$ (definisi gabungan).

Hal ini menunjukkan bahwa: $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.

Kedua akan ditunjukkan bahwa jika $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$ maka $x \in \overline{A \cap B}$.

Misalkan $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$, berarti $x \notin \bar{A}$ atau $x \notin \bar{B}$ (dengan definisi gabungan).

Dengan demikian: $x \in \sim A$ atau $x \in \sim B$ (definisi komplemen)

Konsekuensi:

$x \in \sim A \vee x \in \sim B$ adalah benar (definisi komplemen).

$\Leftrightarrow \sim((x \in A) \wedge (x \in B))$ adalah benar (hukum De Morgan pada logika)

$\Leftrightarrow \sim(x \in A \cap B)$ (definisi irisan)

$\Leftrightarrow x \in \overline{A \cap B}$ (definisi komplemen)

Hal ini menunjukkan bahwa: $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

Dapat disimpulkan bahwa kedua himpunan adalah sama.

Contoh 4.16:

Buktikan bahwa: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Bukti:

Bukti dengan menggunakan hukum-hukum aljabar himpunan

Akan dibuktikan dengan menggunakan notasi pembangun himpunan dan ekuivalensi untuk memperlihatkan: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

$$\overline{A \cap B} = \{x \mid x \notin A \cap B\}$$

$$= \{x \mid \sim(x \in (A \cap B))\}$$

$$= \{x \mid \sim(x \in A \wedge x \in B)\}$$

$$= \{x \mid x \notin A \vee x \notin B\}$$

$$= \{x \mid x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}\}$$

$$= \{x \mid x \in \overline{A} \cup \overline{B}\}$$

$$= \overline{A} \cup \overline{B}$$

Contoh 4.17:

Buktikan bahwa: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, untuk semua himpunan A, B, C .

Bukti:

Akan dibuktikan menggunakan dua himpunan yang sama dengan memperlihatkan bahwa masing-masing adalah subset dari yang lain.

Pertama, akan ditunjukkan bahwa $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Misalkan bahwa $x \in A \cap (B \cup C)$, maka $x \in A$ dan $x \in (B \cup C)$.

Selanjutnya:

$x \in A$ dan ($x \in B$ atau $x \in C$) atau kedua-duanya (definisi gabungan)

$\Leftrightarrow x \in A$ dan $x \in B$ atau $x \in A$ dan $x \in C$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B)$ atau $x \in (A \cap C)$ (definisi irisan)

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (definisi gabungan)

Hal ini menunjukkan bahwa: $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Kedua, akan ditunjukkan bahwa $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$

Misalkan $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, maka $x \in (A \cap B)$ atau $x \in (A \cap C)$ (definisi gabungan)

Selanjutnya:

$x \in A$ dan $x \in B$ atau $x \in A$ dan $x \in C$ (definisi gabungan)

$\Leftrightarrow x \in A$, dan $x \in B$ atau $x \in C$

$\Leftrightarrow x \in A$ dan $x \in (B \cup C)$ (definisi gabungan)

$\Leftrightarrow x \in A \cap (B \cup C)$ (definisi irisan).

Hal ini menunjukkan bahwa: $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$

Dari kedua hal tersebut dapat disimpulkan bahwa kedua himpunan adalah sama.

Contoh 4.18:

Buktikan bahwa: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, untuk semua himpunan A, B, C .

Bukti:

Akan dibuktikan dengan tabel kebenaran/ tabel keanggotaan pada logika.

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Tabel 4.2 Tabel kebenaran $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Terlihat dari hasil tabel kebenaran nilai kebenaran kolom ke-5 sama dengan kolom ke-8.

Jadi $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Contoh 4.19:

Ambil A, B, C suatu himpunan, perlihatkan bahwa: $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$.

Bukti:

Akan dibuktikan dengan menggunakan hukum-hukum aljabar himpunan

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = \overline{A} \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \quad (\text{Hukum De Morgan kedua})$$

$$= \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) \quad (\text{Hukum De Morgan pertama})$$

$$= (\overline{B} \cup \overline{C}) \cap \overline{A} \quad (\text{Hukum komutatif untuk irisan})$$

$$= (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A} \quad (\text{Hukum komutatif untuk gabungan})$$

4. 14 Prinsip Dualitas

Prinsip Dualitas merupakan prinsip yang penting di dalam aljabar himpunan yang dapat digunakan untuk menurunkan kesamaan himpunan yang lain, tabel 4.3 menunjukkan bahwa hukum-hukum aljabar himpunan adalah contoh himpunan.

Hukum-hukum aljabar himpunan	Dualitas
Hukum identitas $A \cup \phi = A$	$A \cap U = A$
Hukum Dominasi/null $A \cap \phi = \phi$	$A \cup U = U$
Hukum idempotent $A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Hukum komplementasi $A \cup \bar{A} = U$	$A \cap \bar{A} = \emptyset$
Hukum kumutatif $A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Hukum asosiatif $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Hukum distributive $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Hukum De Morgan's $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
Hukum absorpsi $A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$

Tabel 4.3: Hukum aljabar dan dualitas

4.15 Himpunan Tak Hingga dan Tak Terhitung

a. Successor dari suatu himpunan

Untuk sebarang himpunan A , $A \cup \{A\}$ disebut successor A dinyatakan dengan A^+ .

Jadi $A^+ = A \cup \{A\}$

b. Himpunan tak hingga

Diberikan suatu himpunan ϕ .

Successor dari ϕ adalah $\{\phi\}$

Successor dari $\{\phi\}$ adalah $\{\phi, \{\phi\}\}$

Successor dari $\{\{\phi\}\}$ adalah $\{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}\}$

.....

Misalkan diberikan nama untuk himpunan ini dengan nama 0, 1, 2, ...

$$0 = \phi$$

$$1 = \{\phi\}$$

$$2 = \{\phi, \{\phi\}\}$$

$$3 = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}\}$$

.....

Dengan cara lain

$$1 = 0^+, \text{ himpunan 1 successor himpunan 0}$$

$$2 = 1^+, \text{ himpunan 2 successor himpunan 1}$$

$$3 = 2^+, \text{ himpunan 3 successor himpunan 2}$$

.....

Banyaknya elemen himpunan adalah tak hingga, maka dapat dikatakan himpunan bilangan asli adalah himpunan tak hingga.

4. 16 Himpunan tak hingga terhitung.

Suatu himpunan dikatakan tak hingga terhitung jika ada korespondensi satu – satu dengan bilangan asli.

Contoh 4.20:

1. Himpunan bilangan genap
2. Himpunan bilangan asli yang habis dibagi 7

4. 17 Himpunan tak hingga tak terhitung.

Suatu himpunan dikatakan tak hingga tak terhitung jika tidak berkorespondensi satu – satu dengan bilangan asli.

Contoh 4.21:

Himpunan bilangan riil antara 0 dan 1

Misalkan dibuat daftar semua bilangan desimal sebagai berikut:

$$0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \dots$$

$$0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \dots$$

$$0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34} \dots$$

.....

$$0.a_{i1}a_{i2}a_{i3}a_{i4} \dots$$

.....

Himpunan ini berkorespondensi satu – satu dengan bilangan asli. Sedangkan masih ada bilangan desimal yang lain, yaitu $0.b_1b_2b_3b_4 \dots$

Dengan

$$b_i = \begin{cases} 1, & \text{jika } a_{ii} = 9 \\ 9 - a_{ii}, & \text{jika } a_{ii} = 0, 1, \dots, 8 \end{cases}$$

Sebagai contoh, misalkan bentuk desimal:

$$0.10000 \dots$$

$$0.11000 \dots$$

$$0.11100 \dots$$

.....

Bentuk desimal ini berkorespondensi satu – satu dengan himpunan bilangan asli. Sedangkan bentuk desimal yang lain masih banyak, misal $0.20000 \dots$

Ternyata masih ada bilangan desimal yang lain yang menjadi elemen himpunan bilangan riil antara 0 dan 1 yang tidak mempunyai pasangan, sehingga himpunan bilangan riil antara 0 dan 1 tidak berkorespondensi satu – satu dengan himpunan bilangan asli. Jadi himpunan bilangan riil antara 0 dan 1 adalah himpunan tak hingga tak terhitung.

SOAL LATIHAN

1. Tentukan apakah setiap pernyataan berikut ini benar atau salah. Jelaskan secara singkat
 - a. $\phi \subseteq \phi$
 - b. $\phi \in \phi$
 - c. $\phi \subseteq \{\phi\}$
 - d. $\phi \in \{\phi\}$
 - e. $\{\phi\} \subseteq \phi$
 - f. $\{\phi\} \in \{\phi\}$
 - g. $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$
 - h. $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$
 - i. $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$
 - j. $\{a, b\} \in \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$
 - k. $\{a, \phi\} \subseteq \{a, \{a, \phi\}\}$
 - l. $\{a, \phi\} \in \{a, \{a, \phi\}\}$
2. Tentukan himpunan-himpunan berikut:
 - a. $\phi \cup \{\phi\}$
 - b. $\phi \cap \{\phi\}$
 - c. $\{\phi\} \cup \{a, \phi, \{\phi\}\}$
 - d. $\{\phi\} \cap \{a, \phi, \{\phi\}\}$
 - e. $\phi \oplus \{a, \phi, \{\phi\}\}$
 - f. $\{\phi\} \oplus \{a, \phi, \{\phi\}\}$
3. a. Misalkan A dan B adalah himpunan sedemikian rupa sehingga $(A \cup B) \subseteq B$ namun tidak benar bahwa $B \subseteq A$. Gambar diagram Venn-nya
- b. Misalkan A , B dan C adalah himpunan sedemikian rupa sehingga $A \subseteq B$, $A \subseteq C$, $(B \cap C) \subseteq A$, dan $A \subseteq (B \cap C)$. Gambar diagram Venn-nya
4. Berikan contoh himpunan-himpunan A , B , dan C sedemikian rupa sehingga $A \in B$, $B \in C$, dan $A \notin C$
5. Apa yang dapat anda katakan mengenai himpunan-himpunan P dan Q jika:
 - a. $P \cap Q = P$?.
 - b. $P \cup Q = P$?.
 - c. $P \oplus Q = P$?.
 - d. $P \cap Q = P \cup Q$?.

6. Jika $A = \{a, b, \{a, c\}, \phi\}$, tentukan himpunan-himpunan berikut:
- a. $A - \{a\}$
 - b. $A - \phi$
 - c. $A - \{\phi\}$
 - d. $A - \{a, b\}$
 - e. $A - \{\{a, b\}\}$
 - f. $\{a\} - A$
 - g. $\phi - A$
 - h. $\{\phi\} - A$
 - i. $\{a, c\} - A$
 - j. $\{\{a, c\}\} - A$
 - k. $A - \{\{a, c\}\}$
 - l. $\{a\} - A$
7. Tentukan himpunan kuasa dari himpunan-himpunan berikut ini
- a. $\{a\}$
 - b. $\{\{a\}\}$
 - c. $\{\phi, \{\phi\}\}$
8. Misalkan $A = \{a, \{a\}\}$, periksalah apakah setiap pernyataan berikut ini benar atau salah.
- a. $\phi \in \wp(A)$
 - b. $\phi \subseteq \wp(A)$
 - c. $\{a\} \in \wp(A)$
 - d. $\{a\} \subseteq \wp(A)$
 - e. $\{\{a\}\} \in \wp(A)$
 - f. $\{\{a\}\} \subseteq \wp(A)$
 - g. $\{a, \{a\}\} \in \wp(A)$
 - h. $\{a, \{a\}\} \subseteq \wp(A)$
 - i. $\{\{\{a\}\}\} \subseteq \wp(A)$
9. Buktikan hukum De Morgan's dan Absorpsi
10. Buktikan bahwa:
- a. $A - (A \cap B) = A \cap B$
 - b. $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

BAB 5

KOMBINATORIKA

Kombinatorika adalah cabang matematika yang mempelajari pengaturan objek-objek. Solusi yang diperoleh dengan kombinatorika ini adalah jumlah cara pengaturan objek-objek tertentu dalam himpunannya. Contoh : misalkan nomor plat mobil di negara X terdiri atas lima angka diikuti dengan dua huruf. Angka pertama tidak boleh nol. Berapa banyak nomor plat mobil yang dapat dibuat?

5. 1 Prinsip Inklusi dan Eksklusi

Kekardinalan suatu himpunan P dinyatakan $|P|$ (beberapa referensi dilambangkan dengan $n(P)$).

Pernyataan dibawah ini benar.

1. $|P \cup Q| \leq |P| + |Q|$
2. $|P \cap Q| \leq \min(|P|, |Q|)$
3. $|P \oplus Q| = |P| + |Q| - 2|P \cap Q|$
4. $|P - Q| \geq |P| - |Q|$
5. $|P \cup Q| = |P| + |Q| - |P \cap Q|$
6. $|P \cup Q \cup R| = |P| + |Q| + |R| - |P \cap Q| - |P \cap R| - |R \cap Q| + |P \cap Q \cap R|$

Contoh 5.1:

Misalkan terdapat 6 komputer dengan spesifikasi sebagai berikut:

Komputer	CD R – W	Monitor Warna	Modem
1	Ya	Ya	Tidak
2	Ya	Ya	Ya
3	Tidak	Tidak	Tidak
4	Tidak	Ya	Ya
5	Tidak	Ya	Tidak
6	Tidak	Ya	Ya

Ada berapa komputer yang mempunyai satu atau lebih dari ketiga jenis H/W yang disebutkan (CD R – W, Monitor warna, Modem)?

Penyelesaian:

Misalkan:

Himpunan P adalah Komputer yang mempunyai CD R – W, maka $|P| = 2$

Himpunan Q adalah Komputer yang mempunyai Monitor warna, maka $|Q| = 5$

Himpunan R adalah Komputer yang mempunyai Modem, maka $|R| = 3$

$$|P \cap Q| = 2, |P \cap R| = 1, |Q \cap R| = 3, |P \cap Q \cap R| = 1$$

$$\text{Sehingga: } |P \cup Q \cup R| = 2 + 5 + 3 - 2 - 1 - 3 + 1 = 5$$

Jadi ada 5 komputer yang mempunyai satu atau lebih dari ketiga jenis H/W yang disebutkan (CD R – W, Monitor warna, Modem).

Untuk lebih jelas gambarkan dalam diagram venn !

Contoh 5.2:

Diantara 200 mahasiswa Jurusan Statistika FMIPA ITS 50 mengambil kuliah Matematika Diskrit, 140 Mata kuliah Bahasa Inggris dan 24 mengambil kedua-duanya. Karena besok akan diadakan ujian dari kedua mata kuliah tersebut, mahasiswa yang tidak mengambil salah satu atau kedua mata kuliah tersebut dapat menghadiri pesta. Berapa mahasiswa yang menghadiri pesta ?.

Penyelesaian:

Misalkan:

Himpunan S adalah mahasiswa Jurusan Statistika FMIPA ITS, maka $|S| = 200$

Himpunan P adalah Mahasiswa yang mengambil Matematika Diskrit, maka $|P| = 50$

Himpunan Q adalah Mahasiswa yang mengambil Bahasa Inggris, maka $|Q| = 140$

Mahasiswa yang mengambil kedua mata kuliah: $|P \cap Q| = 24$

Mahasiswa yang mengambil salah satu mata kuliah atau kedua mata kuliah adalah:

$$|P \cup Q| = 50 + 140 - 24 = 166$$

Jadi yang datang ke Pesta = $200 - 166 = 34$ mahasiswa.

Contoh 5.3:

Misalkan ada 60 diantara 200 mahasiswa adalah bukan mahasiswa yang sedang skripsi, 20 diantaranya mengambil Matematika Diskrit, 45 mangambil Bahasa Inggris, dan 16 mengambil kedua-duanya. Berapa mahasiswa yang skripsi datang ke pesta ?.

Penyelesaian:

Himpunan R adalah Mahasiswa yang bukan mahasiswa yang skripsi, maka $|R| = 60$

Mahasiswa yang mengambil mata kuliah Matematika Diskrit tetapi bukan mahasiswa yang sedang skripsi : $|P \cap R| = 20$

Mahasiswa yang mengambil mata kuliah Bahasa Inggris tetapi bukan mahasiswa yang sedang skripsi : $|Q \cap R| = 45$

Mahasiswa yang mengambil kedua mata kuliah tetapi bukan mahasiswa yang sedang skripsi : $|P \cap Q \cap R| = 16$

Sehingga: $|P \cup Q \cup R| = 50 + 140 + 60 - 24 - 20 - 45 + 16 = 177$

Jadi, banyaknya mahasiswa yang sedang skripsi datang ke pesta = $200 - 177 = 23$

Secara umum, untuk himpunan – himpunan A_1, A_2, \dots, A_r diperoleh:

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r| &= \sum_i |A_i| - \sum_{1 \leq i < j < k \leq r} |A_i \cap A_j| + \\&\quad \sum_{1 \leq i < j < k \leq r} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{r-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_r|\end{aligned}$$

5.2 Teknik Menghitung (Membilang)

Masalah perhitungan seringkali dialami pada aplikasi komputer, misalnya dalam menganalisis algoritma. Biasanya dianalisis berapa besar kapasitas penyimpanan (memori) yang diperlukan dan berapa banyak operasi-operasi yang perlu dilakukan. Berikut ini akan dijelaskan dasar-dasar perhitungan, tetapi sebelumnya akan disampaikan definisi percobaan dan keterkaitannya dengan dasar-dasar perhitungan.

Percobaan (*experiment*) adalah suatu proses fisik yang mempunyai sejumlah hasil percobaan (*outcomes*) yang dapat diamati. Contohnya: memilih wakil dari beberapa kelompok orang, melempar sekeping koin, memasukkan kelereng ke dalam beberapa kotak, memasukkan beberapa bola ke dalam sejumlah kotak tertentu, permainan poker, dan sebagainya. Percobaan tersebut akan menghasilkan sesuatu, contohnya pada percobaan pada pelemparan sekeping koin akan menghasilkan sisi gambar dan sisi angka. Jika dikaitkan dengan hasil-hasil percobaan, maka kita akan mengikuti kaidah penjumlahan dan perkalian.

a. Kaidah Penjumlahan.

Jika terdapat percobaan-1 yang mempunyai m hasil, percobaan-2. mempunyai n hasil, dan dilakukan hanya satu percobaan, maka terdapat $m + n$ kemungkinan hasil percobaan.

Contoh 5.4:

Misalkan ada 7 Mata Kuliah yang berbeda dilaksanakan pagi hari dan 5 Mata Kuliah yang berbeda dilaksanakan sore hari. Jika seorang mahasiswa hanya mengambil satu Mata Kuliah maka ada $7 + 5$ pilihan.

b. Kaidah Perkalian.

Jika terdapat percobaan-1 yang mempunyai m hasil, percobaan-2. mempunyai n hasil, dan melakukan kedua percobaan, maka terdapat $m \times n$ kemungkinan hasil percobaan.

Contoh 5.5:

Berdasarkan **contoh 5.4**, jika seorang mahasiswa mengambil satu Mata Kuliah pagi hari dan satu Mata Kuliah sore hari, maka ada 7×5 pilihan.

Contoh 5.6:

Ada tiga rute dari kota A ke kota B dan ada dua jalan dari kota B ke kota C.

Berapa banyak cara untuk bepergian dari kota A ke kota C lewat B?

Penyelesaian:

Berdasarkan kaidah perkalian kita dapatkan bahwa terdapat $3 \times 2 = 6$ cara bepergian dari kota A ke kota C lewat kota B.

Kaidah ini dapat diperluas sampai k percobaan. Misalkan terdapat k percobaan yang dilakukan secara berurutan. Jika percobaan T_1 menghasilkan n_1 , percobaan T_2 menghasilkan n_2 , dan seterusnya hingga T_n menghasilkan n_k , maka terdapat

$$\prod_{i=1}^k n_i = n_1 \cdot n_2 \dots n_k$$

kemungkinan yang dihasilkan oleh percobaan T_1, T_2, \dots, T_n .

Contoh 5.7:

Mahasiswa mengerjakan 40 soal tes pilihan ganda dengan tiap nomor mempunyai 4 opsi. Ada berapa cara mahasiswa mengerjakan soal tes tersebut?

Penyelesaian:

Karena ada 40 soal dan tiap soal dapat dijawab 4 cara, sehingga ada 4^{40} cara mahasiswa menjawab soal tes tersebut.

5.2 Pigeonhole Principle (Sarang Merpati)

Bentuk sederhana dari prinsip *Pigeonhole* dapat disajikan pada Teorema 5.1.

Teorema 5.1:

Jika n merpati ditempatkan dalam m sarang dengan $m < n$, maka paling sedikit satu sarang yang berisi dua atau lebih merpati.

Bukti:

Burung merpati diberi nomor mulai dari 1 sampai n dan sarangnya diberi nomor mulai 1 sampai dengan m . Sekarang masukkan merpati nomor 1 dimasukkan ke dalam sarang nomor 1 dan seterusnya sampai merpati nomor m dimasukkan ke

dalam sarang nomor m . Sehingga masih tersisa $n-m$ merpati yang belum mendapat sarang. Oleh karena itu, paling tidak ada satu sarang yang memuat dua atau lebih merpati.

Contoh 5.8:

Diantara 13 orang ada dua orang yang mempunyai tanggal lahir dibulan yang sama

Penyelesaian:

Ada 12 bulan kelahiran (dianggap kotak) dan ada 13 orang (dianggap objek). Jika 12 objek dipasangkan dengan nama bulan dan tepat berpasangan, maka masih ada satu objek yang belum dipasangkan, sehingga ada bulan yang mempunyai pasangan lebih dari satu objek.

Prinsip lainnya yang berhubungan dengan prinsip pigeonhole adalah sebagai berikut:

- 5. 1**“Jika n objek diletakkan kedalam n kotak dan tidak ada kotak yang kosong, maka masing-masing kotak memuat secara pasti satu objek.”
- 5. 2**“Jika n objek diletakkan kedalam n kotak dan tidak ada kotak yang mendapat lebih dari satu objek, maka masing-masing kotak berisi objek tersebut.”

Contoh 5.9:

Diberikan m bilangan bulat positif $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$, ada bilangan bulat positif k dan l dengan $0 \leq k < l \leq m$ demikian hingga $a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_l$ habis dibagi m .

Penyelesaian:

Untuk menunjukkan ini, pertimbangkan jumlah m .

$$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m$$

Jika ada jumlahan yang habis dibagi m (sisa 0), maka jumlahan ini dipegang. Untuk jumlahan yang lain dibagi m mempunyai sisa 1, 2, 3, ..., $(m - 1)$.

Karena ada m jumlahan dan hanya ada $(m - 1)$, maka ada 2 dari jumlahan ini mempunyai sisa yang sama saat dibagi dengan m . Jadi ada bilangan bulat positif k dan l dengan $k < l$ demikian hingga: $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ dan $a_1 + a_2 + \dots + a_l$ mempunyai sisa r saat dibagi dengan m .

Jadi

$$a_1 + a_2 + \dots + a_l = cm + r$$

$$\begin{array}{rcl} a_1 + a_2 + \dots + a_k & = & bm + r \\ \hline \end{array}$$

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_l = (c - b)m$$

Jadi $a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_l$ habis dibagi m .

Ilustrasi.

Ambil $m = 7$,

$m = 7$	1	2	3	4	5	6	7
Bilangan bulat positip	2	3	4	6	7	9	12
Jumlahan	2	5	9	15	22	31	43
Jumlahan dibagi dengan m sisa:	2	5	2	1	1	3	1

$$\text{Jumlahan } l : 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 9 + 12 = 6.7 + 1$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Jumlahan } k: & 2 + 3 + 4 + 6 & = 2.7 + 1 - \\ & & \hline & 7 + 9 + 12 & = (6-2).7 \end{array}$$

Hasil dari jumlahan l dan k adalah $(6-2).7$. Jelas bahwa $(6-2).7$ habis dibagi 7.

Contoh 5.10:

Dari bilangan bulat positip 1, 2, 3, ..., 200, kita pilih 101 bilangan bulat positip. Perlihatkan bahwa diantara bilangan yang dipilih ada dua bilangan yang satu bilangan habis membagi bilangan yang lain.

Penyelesaian:

Dengan menggunakan faktor 2, bilangan bulat positif dapat ditulis:

$$2^k \times a, \text{ dimana } k \geq 0 \text{ dan } a \text{ bilangan ganjil}$$

Untuk bilangan 1, 2, 3, ..., 200, banyaknya a adalah 100 bilangan yaitu: 1, 3, 5, ..., 199

Jika diambil 101 bilangan, maka ada 2 bilangan mempunyai nilai a yang sama. Misal nilai tersebut adalah: $2^r \times a$ dan $2^s \times a$. Jika $r < s$, maka bilangan kedua membagi bilangan pertama. Jika $r > s$, maka bilangan pertama membagi bilangan kedua.

Sebagai ilustrasi

Ambil 100 bilangan integer: 101, 102, ..., 200. Jika kita mengambil satu bilangan lagi agar menjadi 101 bilangan diantara 1, 2, 3, ..., 100 pasti ada padanannya dengan nilai a sama. Misal ambil bilangan 6, maka:

$$6 = 2^1 \times 3 \text{ padanannya}$$

$$192 = 2^6 \times 3 \text{ Sehingga } 192 \text{ habis dibagi } 6$$

Kita akhiri bagian ini dengan contoh 9 dari teori bilangan. Pertama, kita katakan bahwa dua bilangan bulat positif m dan n disebut prima relative jika faktor persekutuan besar (FPB) adalah 1. Jadi 12 dan 35 adalah prima relative, tetapi 12 dan 15 bukan prima relative karena faktor persekutuan besar adalah 3.

Contoh 5.11: (*Chinese remainder theorem*)

Ambil m dan n prima relative bulat positif, ambil a dan b bilangan bulat dimana $0 \leq a \leq m-1$ dan $0 \leq b \leq n-1$. Ada bilangan bulat positif x , demikian hingga sisa saat x dibagi m adalah a , dan sisa saat x dibagi n adalah b . Perlihatkan bahwa: x dapat dituliskan dalam bentuk:

$$x = pm + a$$

dan

$$x = qn + b$$

untuk beberapa bilangan bulat p dan q .

Penyelesaian:

Untuk memperlihatkan hal ini, kita pertimbangkan n bilangan bulat

$$a, m+a, 2m+a, \dots, (n-1)m+a$$

Masing-masing bilangan bulat ini mempunyai sisa a saat dibagi dengan m . Misalkan bahwa 2 dari bilangan ini mempunyai sisa yang sama yaitu r saat dibagi dengan n . Ambil bilangan ini $im+a$ dan $jm+a$ dimana $0 \leq i < j \leq n-1$. Kemudian ada bilangan q_i dan q_j demikian hingga:

$$im+a = q_i n + r \quad (1)$$

dan

$$jm+a = q_j n + r \quad (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) dikurangkan sehingga didapat:

$$(2) - (1): (j-i)m = (q_j - q_i)n$$

5.3 Permutasi

Marilah kita perhatikan kasus sederhana yang dijelaskan berikut ini.

Terdapat 3 kelereng yang masing-masing berwarna merah, biru dan putih. Kelereng tersebut dimasukkan kedalam 10 kantong yang diberi nomor 1, 2, 3, ..., 10. Jika setiap kantong tidak boleh diisi lebih dari 1 kelereng, maka banyaknya cara memasukkan kelereng kedalam kantong: $10 \times 9 \times 8$.

Selanjutnya kasus ini digeneralisasi, ada r kelereng dengan warna yang berbeda, dimasukkan kedalam kantong sebanyak n . Setiap kantong hanya boleh diisi dengan 1 kelereng, maka banyaknya cara memasukkan kelereng kedalam kantong adalah:

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \dots \quad (3)$$

Jika $P(n, r)$ menyatakan permutasi dan nilainya adalah sama dengan (3), maka permutasi dari n dengan r objek yang berbeda dinyatakan dengan:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

Dalam permutasi, perulangan tidak diperbolehkan, artinya objek yang sudah dipilih tidak bisa dipilih lagi.

Contoh 5.12:

Akan disusun 4 angka yang tidak berulang dari 10 angka yaitu: 0, 1, 2, ... , 9.

Banyaknya cara menyusun adalah: $P(10,4) = \frac{10!}{(10-4)!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$.

Dari 5040 terdapat angka 0 didepan, banyaknya angka 0 didepan: $9 \times 8 \times 7 = 504$.

Sehingga ada $= 5040 - 504 = 4536$ cara dengan angka 0 tidak ada didepan

Cara lain:

Tempat didepan tanpa angka 0 jadi ada 9 angka, selanjutnya tempat kedua tinggal 9 angka, tempat ketiga 8 angka, tempat keempat 7 angka.

Jadi banyak cara: $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$.

Contoh 5.13:

Akan disusun string yang terdiri dari huruf dan angka, susunan string didepan 4 huruf yang berbeda dilanjutkan 3 angka yang berbeda dibelakangnya. Banyaknya cara

menyusun adalah: $P(26,4) \times P(10,3) = \frac{26!}{(26-4)!} \cdot \frac{10!}{(10-3)!} = 258.336.000$.

Pada kasus sebelumnya, yaitu memasukkan 3 kelereng yang berbeda warna ke dalam 10 kantong yang berbeda dengan tiap kantong hanya boleh diisi oleh satu kelereng. Sekarang jika tiap kantong boleh diisi kelereng sebanyak yang kita mau, maka banyaknya cara keseluruhan terdapat: $10 \times 10 \times 10 = 1.000$ cara.

Secara umum ada: n^r cara untuk r objek yang berbeda dipasangkan n objek yang berbeda dengan cara r objek boleh berulang.

Contoh 5.14:

Menyusun jadwal ujian untuk 3 mata kuliah dalam waktu 5 hari tanpa ada syarat pembatasan mengenai banyaknya mata kuliah yang diujikan dalam satu hari maka banyaknya kemungkinan jadwal: $5^3 = 125$.

Menyusun n benda dengan q objek, q_1 diantaranya dari jenis pertama, q_2 diantaranya dari jenis kedua, ..., q_t diantaranya dari jenis ke- t , untuk $n = 1 + 2 + \dots + t$. Banyaknya cara menyusun adalah:

$$\frac{n!}{q_1!q_2!q_3!\dots q_t!}$$

Contoh 5.15:

- a. Cara mengecat 11 ruangan kantor sehingga 3 diantaranya berwarna hijau, 2 diantaranya berwarna biru, 2 diantaranya berwarna kuning, sisanya berwarna putih.

Banyak cara mengecat: $\frac{11!}{3!2!2!4!} = 166320$

- b. Cara pengiriman pesan dengan menggunakan sandi yang terdiri dari 5 sandi dengan 3 sandi garis putus-putus dan 2 sandi titik.

Banyaknya cara menyusun adalah: $\frac{5!}{3!2!} = 10$

4.4. Kombinasi

Misalkan 3 kelereng berwarna sama, dimasukan kedalam 10 kantong yang berbeda, jika setiap kantong hanya boleh diisi satu kelereng, maka banyaknya cara:

$$\frac{10 \times 9 \times 8}{3!}$$

Secara umum, banyaknya cara memasukan r kelereng yang berwarna sama ke dalam n kantong yang berbeda adalah:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Besaran $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ dinamakan kombinasi dinotasikan dengan $C(n, r)$

Jadi:

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Untuk:

$$C(n, n-r) = \frac{n!}{(n-r)! (n-(n-r))!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Sehingga:

$$C(n, r) = C(n, n-r)$$

Dalam himpunan bagian yang dipilih, urutan kemunculan anggotanya tidak diperhatikan. Hal yang diperhatikan adalah objek-objek yang muncul.

Contoh 5.16:

Misalkan terdapat 5 calon pengurus HIMA, dari lima calon akan dipilih sebagai pengurus HIMA sebagai Ketua, Sekretaris dan bendahara. Banyaknya cara menyusun pengurus HIMA adalah:

$$C(5,3) = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

Tulis kombinasi susunan pengurus tersebut !.

Contoh 5.17:

Terdapat 11 anggota DPR

1. Banyak cara membentuk komisi yang beranggotakan 5 orang: $C(11,5) = 462$
2. Banyak cara membentuk komisi yang beranggotakan 5 orang dengan 1 orang anggota selalu termasuk didalam komisi: $C(10,4) = 210$
3. Banyak cara membentuk komisi yang beranggotakan 5 orang dengan 1 orang anggota tidak termasuk didalam komisi: $C(10,5) = 252$
4. Berapa banyak cara membentuk sebuah komisi beranggotakan 5 orang setidaknya salah satu dari anggota DPR **A** dan **B** ada didalamnya ?.

Penyelesaian:

Banyak cara membentuk komisi tanpa **A** dan **B**: $C(9,3) = 84$

Banyak cara membentuk komisi menyertakan **A**, **B** tidak ikut: $C(9,4) = 126$

Banyak cara membentuk komisi menyertakan **B**, **A** tidak ikut: $C(9,4) = 126$

Total banyak cara: $84 + 126 + 126 = 336$

Cara lain.

Total banyaknya cara membentuk komisi tidak menyertakan **A** dan **B**: $C(9,5)$

Total banyaknya cara yang ditanyakan: $C(11,5) - C(9,5) = 336$

Penerapan Inklusi – Eksklusi

$$|A| = C(10,4), \quad |B| = C(10,4), \quad |A \cap B| = C(9,3),$$

$$\text{Maka, } |A \cup B| = C(10,4) + C(10,4) - C(9,3) = 336$$

Misalkan akan memasukkan **r** kelereng yang berwarna sama kedalam **n** kantung yang dinomori, tanpa ada pembatasan berapa kelereng yang boleh dimasukkan kedalam setiap kantung. Banyaknya cara memasukkan kelereng-kelereng tersebut adalah:

$$\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = C(n+r-1, r)$$

Masalah ini identik dengan banyaknya cara mengambil **r** benda dari **n** benda yang berbeda, dengan membolehkan pengambilan berulang adalah: $C(n+r-1, r)$.

Contoh 5.18:

- a. Banyaknya cara memilih 3 dari 7 hari yang disediakan, pengulangan diperbolehkan adalah:

$$C(7 + 3 - 1, 3) = C(9, 3) = 84$$

- b. Banyaknya cara memilih 7 dari 3 hari yang disediakan, pengulangan jelas harus diperbolehkan adalah:

$$C(3 + 7 - 1, 7) = C(9, 7) = 36$$

Contoh 5.19 :

Kartu domino terdiri dari: Kosong, 1, 2, 3, 4, 5, 6 bulatan yang diletakan 2 tempat dan terjadi pengulangan. Jadi, banyaknya kartu domino adalah: $C(7 + 2 - 1, 2) = 28$.

Contoh 5.20 :

Tiga dadu dilempar bersamaan, banyaknya hasil yang berbeda: $C(6 + 3 - 1, 3) = 56$.

Contoh 5.21:

Misalkan akan dihitung banyaknya cara mendudukkan 5 anak laki-laki pada 12 kursi yang disusun sebaris. Banyaknya cara ada: $C(12 + 5 - 1, 5)$

5.4 Pembangkitan Permutasi dan Kombinasi

Misalkan diberikan sebuah permutasi $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$, bagaimana cara menentukan permutasi berikutnya ?. (yang disebut *lexicographic order*)

Misalkan permutasi berikutnya adalah: $x = b_1 b_2 b_3 \dots b_n$, maka x memenuhi syarat sebagai berikut:

1. $a_i = b_i$, $1 \leq i \leq m - 1$ dan $a_m < b_m$ untuk kemungkinan m yang terbesar
2. b_m merupakan unsur terkecil diantara $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n$ yang lebih besar daripada a_m
3. $b_{m+1} < b_{m+2} < \dots < b_n$

Contoh 5.22:

Misalkan akan dibangkitkan permutasi dari 4 angka yaitu 1, 2, 3 dan 4, berarti ada $4!$ cara menyusun. Urutan penyusunan adalah sebagai berikut:

1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1232

2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431

3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421

4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.

Contoh 5.23:

- a. Misalkan nilai permutasi dari 6 angka adalah: 124635, maka nilai permutasi berikutnya adalah: 124653.
- b. Misalkan nilai permutasi dari 6 angka adalah: 124635, maka nilai permutasi sebelumnya adalah: 124563.

5. 5 Peluang Diskrit

Ruang sampel (*sample space*): himpunan semua kemungkinan hasil percobaan.

Sampel: hasil percobaan pada ruang sampel.

Contoh 5.24:

- a. Sebuah dadu dilempar 1 kali.

Ruang sampel (S): $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Sampel: Munculnya angka 6: 1 kali

Peluang munculnya angka 6: $\frac{1}{6}$

- b. Sebuah mata uang dilempar 1 kali

Ruang sampel (S): $S = \{g, a\}$, g : gambar, a : angka

Sampel: Munculnya gambar: 1 kali

Peluang munculnya gambar: $\frac{1}{2}$

- c. Sebuah mata uang dilempar 2 kali atau 2 mata uang dilempar 1 kali

Ruang sampel (S): $S = \{gg, ga, ag, aa\}$, g : gambar, a : angka

Sampel: Munculnya gambar: 3 kali

Peluang munculnya gambar: $\frac{3}{4}$

Peluang titik sampel harus memenuhi 2 syarat yaitu:

1. Nilai peluang titik sampel bilangan tidak negatif yang lebih kecil atau sama dengan 1. Dengan kata lain setiap x_i di dalam S , $0 \leq p(x_i) \leq 1$.
2. Jumlah semua titik sampel di S sama dengan 1. Dengan kata lain $\sum_{x_i \in S} p(x_i) = 1$.

Contoh 5.25:

Dua mata uang setimbang dilempar satu kali.

$$P(gg) = \frac{1}{4}, \quad P(ga) = \frac{1}{4}, \quad P(ag) = \frac{1}{4}, \quad P(aa) = \frac{1}{4}$$

Dua mata uang tidak setimbang dilempar satu kali, peluang munculnya sisi gambar $\frac{2}{3}$

dan peluang sisi angka $\frac{1}{3}$, maka

$$P(gg) = \frac{4}{9}, \quad P(ga) = \frac{2}{9}, \quad P(ag) = \frac{2}{9}, \quad P(aa) = \frac{1}{9}$$

Contoh 5.26:

Melempar dadu yang tidak setimbang, peluang memperoleh angka 1 adalah $\frac{1}{3}$, peluang

angka yang lain $\frac{2}{5}$.

a. Peluang memperoleh angka ganjil: $\frac{1}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{3}{5}$

b. Peluang memperoleh angka genap: $\frac{2}{15} + \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{2}{5}$

Contoh 5.27:

Diantara 100.000 orang, 51.500 wanita dan 48.500 pria. Diantara wanita 9.000 berambut pendek, dan diantara pria 30.200 berambut pendek.

Misalkan:

wp :wanita berambut pendek

wr : wanita berambut panjang

pp : pria berambut pendek

pr : pria berambut panjang

maka ruang sampel : $S = \{wp, wr, pp, pr\}$

Sehingga:

$$p(wp) = 0.090, \quad p(wr) = 0.425, \quad p(pp) = 0.302, \quad p(pr) = 0.183$$

Misalkan A kejadian terpilihnya orang berambut pendek dan B kejadian terpilihnya wanita, maka $A \cap B$ adalah kejadian terpilihnya wanita yang berambut pendek dan $A \cup B$ terpilihnya orang berambut pendek atau wanita, $A \oplus B$ terpilihnya wanita berambut panjang atau pria berambut pendek, dan $B - A$ terpilihnya wanita berambut panjang.

$$P(A) = 0.090 + 0.032 = 0.392$$

$$P(B) = 0.090 + 0.425 = 0.515$$

$$P(A \cap B) = 0.090$$

$$P(A \cup B) = 0.090 + 0.425 + 0.032 = 0.817$$

$$P(A \oplus B) = 0.425 + 0.032 = 0.727$$

$$P(A - B) = 0.425$$

5.6 Peluang Bersyarat

Peluang bersyarat adalah peluang kejadian A apabila kejadian B sudah terjadi dan dinyatakan dengan $P(A | B)$.

Misalkan $P_B(x_i)$ menyatakan peluang kejadian B telah terjadi, sehingga:

$$P_B(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{jika } x_i \notin B \\ \frac{P(x_i)}{P(B)}, & \text{jika } x_i \in B \end{cases}$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned} P(A | B) &= \sum_{x_i \in A \cap B} P_B(x_i) \\ &= \sum_{x_i \in A \cap B} \frac{P(x_i)}{P(B)} \\ &= \frac{1}{P(B)} \sum_{x_i \in A \cap B} P(x_i) \\ &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \end{aligned}$$

Contoh 5.28:

Perhatikan kejadian pada **contoh 5.27**. Misalkan A menyatakan kejadian terpilihnya orang berambut panjang, B kejadian terpilihnya seorang wanita, dan C kejadian terpilihnya seorang pria.

$$\text{a. } P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.090}{0.515} = 0.175$$

$$\text{b. } P(A | C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{0.090}{0.485} = 0.623$$

$$\text{c. } P(B | A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.090}{0.392} = 0.23$$

$$\text{d. } P(C | A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{0.302}{0.392} = 0.77$$

Contoh 5.29:

Tiga buah dadu digulirkan, jika diketahui tidak ada dua dadu yang menunjukkan hasil yang sama, tentukan peluang ada dadu yang muncul angka 1.

Misalkan A kejadian ada dadu yang muncul angka 1, sedangkan B kejadian tidak ada dua dadu yang menunjukkan hasil yang sama, maka

$$P(B) = \frac{P(6,3)}{6^3}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3P(5,2)}{6^3}$$

Sehingga

$$P(A | B) = \frac{3P(5,2)}{P(6,3)} = \frac{1}{2}$$

Pada umumnya bahwa $P(A | B) \neq P(B | A)$

Sebagai ilustrasi pengguliran sebuah dadu, misalkan A kejadian munculnya angka 5, sedangkan B munculnya angka ganjil.

$$P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A | B) = \frac{1}{3}, \text{ sedangkan } P(B | A) = 1$$

5.7 Aplikasi Kombinatorika dalam Ilmu Komputer

Kombinatorika banyak dipakai dalam dunia komputer seperti perangkat lunak. Berikut ini akan diberikan beberapa contoh.

Contoh 5.30: (Jumlah iterasi dalam suatu kalang)

Berapa jumlah eksekusi statement dalam kalang berikut:

For i = 1 to n Do

Statement dalam kalang. Tidak ada perintah didalamnya yang menyebabkan eksekusi melompat keluar.

{ End For -i }

Penyelesaian:

Misalkan $y =$ statement di dalam kalang, yang tidak boleh melompat keluar kalang sebelum selesai dieksekusi. Jika tidak demikian, maka perhitungan untuk mengetahui jumlah eksekusi menjadi sulit dilakukan.

y akan dieksekusi untuk $i=1,2,3,\dots,n$

Jadi secara keseluruhan, y dieksekusi sebanyak n kali.

SOAL LATIHAN

1. Sebuah restoran masakan Cina menghidangkan menu sebagai berikut:

Grup A: Sup Wonton

Sup Sirip Ikan Hiu

Dadar Gulung

Rumayki

Grup B: Ayam Almond

Chow Mie Ayam

Moo Goo Gai Pan

Grup C: Babi Asam Manis

Steak Merica

Sapi Naga

Udang Kupu-kupu

Udang dengan saus Lobster

Foo Young Telor

Grup D: Kopi

Teh

Susu

- a. Misalkan Anda memesan satu pilihan dari setiap grup. Berapa macam hidangan lengkap yang dapat anda susun dari pilihan menu diatas ?
 - b. Misalkan Anda boleh tidak memesan apapun dari suatu grup kalau Anda memang tidak suka. Berapa macam hidangan yang berbeda yang dapat Anda susun ?
 - c. Misalkan Anda memesan satu pilihan setiap grup A, B, dan D dan dua pilihan dari grup C. Berapa macam hidangan yang dapat Anda susun ?. Jika Anda boleh memilih satu atau dua pilihan di grup C, berapa macam hidangan yang dapat Anda susun ?.
-
2. Berapa banyak kode barang yang dapat dibuat menggunakan 1 atau 2 atau 3 huruf yang diikuti oleh 4 buah angka?
 3. Ada 6 jalan yang berbeda dari kota A ke kota B, 4 jalan berbeda dari kota B ke kota C, dan 2 jalan berbeda dari kota A langsung ke kota C.

- a. Berapa banyak cara yang ada untuk bepergian dari kota A ke kota C lewat kota B?
 - b. Berapa banyak cara yang ada untuk bepergian dari kota A ke kota C secara keseluruhan?
 - c. Berapa banyak cara yang ada untuk bepergian dari kota A ke kota C dan kemudian kembali ke A lagi?
 - d. Berapa banyak cara yang ada untuk bepergian dari kota A ke kota C dan kemudian kembali ke A lagi dengan selalu melewati kota B?
 - e. Misalkan jalan yang sudah dilalui tidak boleh dipakai lagi, maka berapa banyak perjalanan berbeda dari A ke C , melewati B dan kembali ke A dengan melewati B kembali?
4. Suatu komite yang beranggotakan paling sedikit 6 orang akan dipilih dari 10 calon yang ada. Berapa macam komite yang akan dibuat?
 5. Dari 100 mahasiswa yang ada, akan dipilih dua tim yang masing-masing terdiri 10 mahasiswa. Berapa banyak cara pemilihan dapat dilakukan supaya mahasiswa yang paling tinggi berada dalam tim pertama dan mahasiswa yang paling pendek berada di tim kedua? (Diasumsikan bahwa ke-100 mahasiswa tersebut tingginya berbeda-beda).
 6. Misalkan plat nomor kendaraan terdiri dari 4 huruf dan diikuti 4 angka.
 - a. Berapa banyak plat nomor yang mungkin ada?
 - b. Berapa banyak plat nomor yang diawali dengan A dan diakhiri dengan 0?
 - c. Berapa banyak plat nomor yang diawali dengan PDQ?
 - d. Berapa banyak plat nomor dengan semua huruf dan angkanya berbeda?

7. Sebuah Badan Eksekutif Mahasiswa (BEM) beranggotakan 20 mahasiswa.
 - a. Dalam berapa cara sebuah komite yang terdiri 4 mahasiswa dapat dipilih dari anggota BEM tersebut?
 - b. Misalkan anggota BEM terdiri dari 12 pria dan 8 wanita.
 - Berapa macam cara komite yang terdiri dari 3 pria dan 3 wanita dapat dibentuk?
 - Berapa macam komite yang beranggotakan 8 mahasiswa dapat dibentuk jika paling sedikit harus beranggotakan 1 wanita?
8. Seorang mahasiswa harus menjawab 5 dari 7 pertanyaan didalam sebuah ujian.
 - a. Berapa banyak pilihan yang tersedia bagi mahasiswa?
 - b. Berapa banyak pilihan yang tersedia baginya jika ia harus menjawab dua pertanyaan pertama?
9. Seseorang mempunyai 10 teman. Dalam berapa banyak cara ia dapat pergi makan ke restoran dengan dua atau lebih temannya?
10. Dalam sebuah kelas kursus bahas inggris, terdapat 5 anak laki-laki dan 5 anak perempuan duduk dalam satu baris. Berapa banyak susunan yang mungkin jika:
 - a. Semua anak laki-laki harus duduk di lima kursi paling kiri?
 - b. Tidak boleh ada yang dipangku?
 - c. Ana dan Didi harus duduk bersebelahan?
 - d. Laki-laki dan wanita duduk berselang seling?
11. Ada 5 jas di dalam lemari. Jika dua jas diambil secara acak , berapa peluang tidak ada satu jas yang terambil?

12. Berapa banyak bilangan

- a. Genap antara 1 hingga 101?
- b. Bulat antara 1 hingga 101 yang habis dibagi 4?
- c. Bulat 2 digit yang merupakan kelipatan 3?

13. Dalam berapa macam cara 8 orang dapat duduk dalam meja bundar jika ada 2 orang yang saling membenci sehingga keduanya tidak mau duduk bersebelahan?

14. Dalam kata “KOMBINATORIKA”:

- a. Berapa macam cara berbeda untuk mengatur huruf-huruf dalam satu baris?
- b. Ulangi soal (a) jika dalam pengaturan tersebut, huruf K dan O harus bersebelahan satu sama lain sebagai satu kesatuan?

15. Diantara $2n$ benda, n diantaranya sama. Hitunglah banyaknya cara memilih n benda dari $2n$ tersebut.

16. Dalam berapa banyak cara tiga bilangan dapat diambil dari $1, 2, 3, \dots, n-1$ sehingga jumlahnya lebih besar daripada n ?

17. Tujuh orang masuk dalam sebuah lift pada lantai dasar sebuah gedung bertingkat 10. Berapa peluang mereka semua keluar pada lantai/tingkat yang berbeda?

18. Berdasarkan data dari kepolisian dinyatakan bahwa dalam satu bulan kemarin terjadi 30 kecelakaan mobil. Berapa peluang bahwa semuanya terjadi pada hari yang sama?

BAB 6

RELASI DAN

FUNGSI

Dalam berbagai permasalahan yang terkait dengan benda/element diskrit, sering dijumpai hubungan diantara benda-benda tersebut. Hubungan antara elemen himpunan dengan elemen himpunan lain dinyatakan dengan struktur ini disebut Relasi. Konsep relasi ini banyak dipakai dalam Basis Data (Database) untuk menggambarkan hubungan yang terjadi diantara data-data. Dalam bab ini akan dibahas relasi dan sifat-sifatnya serta jenis khusus dari relasi yaitu fungsi.

6.1 RELASI

Sebelum dibahas lebih lanjut mengenai relasi, sebelumnya akan dijelaskan mengenai matriks. Karena didalam matematika diskrit, matriks digunakan untuk merepresentasikan struktur diskrit. Struktur diskrit adalah struktur matematika abstrak yang digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Struktur diskrit yang direpresentasikan dalam matriks, antara lain relasi, graf, dan pohon.

6.1.1 Matriks

Matriks adalah susunan skalar elemen-elemen dalam bentuk baris dan kolom. Bentuk matriks yang berukuran dari m -baris dan n -kolom ($m \times n$) adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Beberapa bentuk matriks khusus yaitu:

- Matriks Diagonal, adalah matriks bujursangkar dengan elemen selain yang terletak di diagonal utama bernilai nol.
- Matriks Identitas, adalah matriks diagonal dengan semua elemen diagonal utama bernilai satu.
- Matriks Segitiga atas/bawah

Matriks segitiga atas adalah matriks dengan elemen diatas diagonal utama bernilai nol, dan sebaliknya dinamakan matriks segitiga bawah.

- Matriks Transpose, adalah matriks yang diperoleh dengan menukarkan baris dengan kolom atau sebaliknya.

Operasi aritmatika Matriks:

1. Penjumlahan dan pengurangan 2 buah matriks

Dua buah matriks bisa dijumlahkan atau dikurangkan jika mempunyai ordo / ukuran yang sama. Misalkan matriks $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$, dijumlahkan maka akan didapat matriks C yang mempunyai ordo sama dengan $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Demikian juga jika dikurangkan maka hanya mengganti tanda pengurangan.

2. Perkalian Skalar dengan matriks

Misalkan matriks $A = [a_{ij}]$, jika dikalikan dengan skalar k maka akan didapat matriks $C = [ka_{ij}]$.

3. Perkalian 2 buah matriks

Misalkan matriks $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$, bisa dikalikan jika banyaknya kolom matriks A sama dengan banyaknya baris matriks B . Perkalian dua buah matriks ini akan menghasilkan matriks C , dalam hal ini

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Contoh 6.1:

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Ditanyakan: a. $A + B$ b. $A - B$ c. $2A$ d. $A \cdot B$

Penyelesaian:

$$\text{a. } A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 3-1 & -1+0 \\ 0+1 & 2+3 & 1-2 \\ -1-1 & 1+2 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{b. } A - B = \begin{pmatrix} 1-2 & 3+1 & -1-0 \\ 0-1 & 2-3 & 1+2 \\ -1+1 & 1-2 & 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c. } 2A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot -1 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot -1 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{d. } A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + (-1)(-1) & 1(-1) + 3 \cdot 3 + (-1)2 & 1 \cdot 0 + 3(-2) + (-1)3 \\ 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 0 + 2(-2) + 1(3) \\ -1(2) + 1 \cdot 1 + 2(-1) & -1(-1) + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 & -1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 6 & -9 \\ 1 & 8 & -1 \\ -3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

6.1. 2 Relasi

Hasil kali kartesian himpunan A dengan B dinyatakan $A \times B$ ialah himpunan pasangan terurut (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

Relasi antara himpunan A dan himpunan B disebut sebagai relasi biner. Relasi biner antara A dan B adalah himpunan bagian dari $A \times B$.

Contoh 6.2:

Misalkan $A = \{a, b\}; B = \{1, 2, 3\}; C = \{a, c, d\}$

Hitunglah: a. $A \times B$ b. $A \times C$

Penyelesaian:

- a. $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$
- b. $A \times C = \{(a, a), (a, c), (a, d), (b, a), (b, c), (b, d)\}$

Contoh 6.3:

Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{1, 2\}$. Didefinisikan relasi R dari A ke B sebagai berikut:

$x \in A$ berelasi dengan $y \in B$ jika dan hanya jika perkalian xy ganjil.

Tuliskan anggota-anggota R .

Penyelesaian:

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$$

Menurut definisi R , $(x, y) \in R$ jika $(x \cdot y)$ ganjil, maka:

$(1,1) \in R$ karena $1 \cdot 1 = 1$ adalah bilangan ganjil

$(1,2) \notin R$ karena $1 \cdot 2 = 2$ adalah bukan bilangan ganjil

$(2,1) \notin R$ karena $2 \cdot 1 = 2$ adalah bukan bilangan ganjil

$(2,2) \notin R$ karena $2 \cdot 2 = 4$ adalah bukan bilangan ganjil

$(3,1) \in R$ karena $3 \cdot 1 = 3$ adalah bilangan ganjil

$(3,2) \notin R$ karena $3 \cdot 2 = 6$ adalah bukan bilangan ganjil

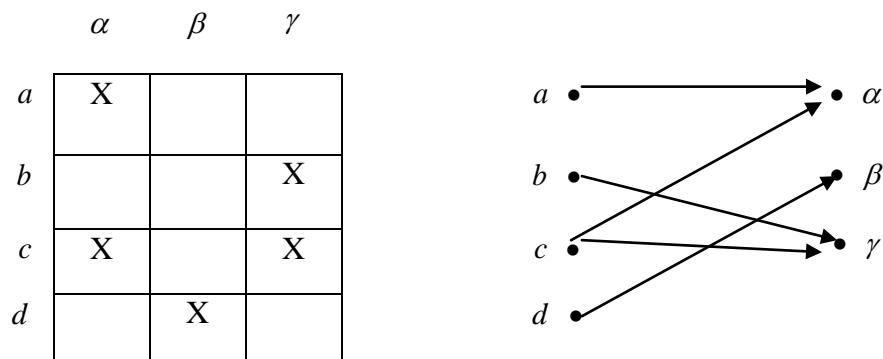
Jadi $R = \{(1,1), (3,1)\}$

Tampak bahwa $R \subseteq A \times B$.

Relasi biner R dapat dilihat pada gambar 6.1. Suatu relasi biner dapat ditulis dalam bentuk tabel ataupun grafik. Hal ini bisa dilihat pada gambar 6.1. Kedua gambar tersebut mempunyai makna sama, tetapi secara penulisannya saja yang berbeda. Pada gambar 6.1, daerah asal (domain) adalah $\{a, b, c, d\}$ dan daerah hasil (range atau codomain) adalah $\{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Relasi biner R didefinisikan sebagai:

$$R = \{(a, \alpha), (b, \gamma), (c, \alpha), (c, \gamma), (d, \beta)\}.$$



Gambar 6.1: Relasi biner R

Karena relasi biner merupakan himpunan pasangan terurut, maka operasi himpunan berlaku juga pada relasi biner.

Dalam menvisualisasikan relasi kadang sulit, terutama bagi yang belum terbiasa dengan konsep relasi. Untuk itu, graf dan matriks dapat digunakan untuk membantu visualisasi relasi.

- Misalkan relasi biner dari $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ke himpunan $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$.

Jika divisualisasikan dalam bentuk matriks, maka R dinyatakan dalam matriks

Boolean C berordo $n \times m$ dengan elemen:

$$C(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{jika } (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{jika } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

- Misalkan $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Jika divisualisasikan dalam bentuk graf berarah G dengan titik-titik G menyatakan anggota-anggota A dan relasi $a_i R a_j$ digambarkan dengan garis berarah dari a_i ke a_j .

Contoh 6.4:

Misalkan: $A = \{a, b, c, d\}$ himpunan mahasiswa

$B = \{IK121, IK221, IK257, IK264, IK273, IK281\}$ himpunan mata kuliah

Jika relasi R_1 merupakan mata kuliah yang diambil mahasiswa yang dinyatakan dengan:

$IK121 \quad IK221 \quad IK257 \quad IK264 \quad IK273 \quad IK281$

a	x					
b		x	x			
c		x			x	x
d				x		x

Relasi R_2 merupakan mata kuliah yang diminati mahasiswa, dinyatakan dengan:

$IK121 \quad IK221 \quad IK257 \quad IK264 \quad IK273 \quad IK281$

a	x			x		
b		x			x	
c						
d				x	x	x

Maka, akan didapatkan relasi seperti pada himpunan antara lain:

$R_1 \cap R_2$ = mata kuliah yang diambil dan diminati, yaitu:

$$R_1 \cap R_2 = \{(a, IK121), (b, IK221), (d, IK264), (d, IK281)\}$$

$R_1 \cup R_2$ = mata kuliah yang diambil atau diminati, yaitu:

$$R_1 \cup R_2 = \{ (a, IK121), (a, IK264), (b, IK221), (b, IK257), (b, IK257), (b, IK273), \dots$$

$$(c, IK221), (c, IK273), (c, IK281), (d, IK264), (d, IK273), (c, IK281) \}$$

$R_1 \oplus R_2$ = mata kuliah yang diminati tapi tidak diambil atau diambil tapi tidak diminati

$$R_1 \oplus R_2 =$$

$$\{(a, IK264), (b, IK257), (b, IK257), (b, IK273), (c, IK221), (c, IK281), (d, IK273)\}$$

$R_1 - R_2$ = mata kuliah yang diambil tapi tidak diminati

$$R_1 - R_2 = \{(b, IK257), (c, IK221), (c, IK273), (c, IK281)\}$$

Contoh 6.5:

Diketahui himpunan $A = \{1, 2, 3\}$. Relasi R yang didefinisikan pada himpunan A adalah

$R = \{(x, y) | x < y\}$. Nyatakan R dalam matriks dan graf.

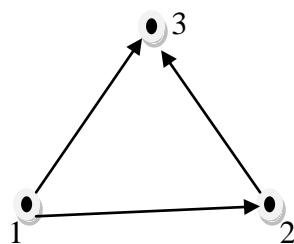
Penyelesaian:

$$R = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$$

Dalam bentuk matriks adalah

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jika digambarkan dalam bentuk graf, seperti berikut:



Himpunan bagian dari $A \times B$ dapat dibuat suatu relasi biner, selanjutnya konsep ini dikembangkan menjadi relasi *ternary*, *quartenary*, dan seterusnya.

Relasi *ternary* adalah relasi yang didapat dari himpunan bagian $A \times B \times C$, dan relasi *quartenary* suatu relasi yang didapat dari himpunan bagian $A \times B \times C \times D$.

Secara umum, relasi ***n*-er** merupakan relasi yang didapat dari himpunan bagian $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$

Relasi ***n*-er** perlakunya sama dengan relasi biner, dengan demikian relasi ***n*-er** juga dapat dioperasikan seperti pada operasi himpunan.

6.1. 3 Relasi Basis Data

Relasi basis data ini merupakan salah satu aplikasi relasi dalam ilmu komputer. Penggunaan komputer dalam perusahaan biasanya akan memproses sejumlah besar data, seperti data penjualan dan pembelian, data pribadi karyawan, dan lain-lain. Agar data tersebut dapat diproses secara efektif dan efisien maka harus diatur sehingga mendapatkan bentuk yang cocok agar dapat melakukan operasi-operasi yang cepat. Salah satu cara mengatur organisasi adalah menggunakan model data relasional.

Misalkan $A_1, A_2, A_3 \dots \times A_n$ adalah n buah himpunan.

Pada basis data relasi **n -er** dinamakan tabel, himpunan $A_1, A_2, A_3 \dots \times A_n$ dinamakan domain tabel dan **n** dinamakan derajat/*degree table*. Hal ini bisa diilustrasikan sebagai berikut:

Misalkan:

$\text{PEMASOK} = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, menyatakan himpunan pemasok (supplier)

$\text{SUKU_CADANG} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7\}$, menyatakan himpunan suku cadang (part)

$\text{PROYEK} = \{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5\}$, menyatakan proyek (job) yang dikerjakan.

KUANTITAS = himpunan bilangan asli.

Relasi PASOKAN, merupakan relasi yang didapat dari himpunan PEMASOK, SUKU_CADANG, PROYEK dan Kuantitas. Tabel relasi diperlihatkan pada tabel 6.1.

Relasi ASEMLING, relasi yang didapat dari SUKU_CADANG, SUKU_CADANG dan KUANTITAS. Tabel relasi diperlihatkan pada tabel 6.2.

Pada basis data kolom disebut **field** sedangkan baris disebut **record**. Operasi yang sering digunakan dalam basis data adalah proyeksi dan gabungan tabel-tabel.

Proyeksi R merupakan suatu relasi m -er, dengan $m \leq n$, yang diperoleh dari R dengan cara menghapus $n - m$ komponen di dalam setiap pasangan terurut ganda- n yang ada di dalam R yang dinotasikan $\pi_{i_1, i_2, \dots, i_m}(R)$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$.

PASOKAN

PEMASOK	SUKU_CADANG	PROYEK	KUANTITAS
s_1	P_2	J_5	5
s_1	P_3	J_5	17
s_2	P_3	J_3	9
s_2	P_1	J_5	5
s_4	P_1	J_1	4

Tabel 6.1: Pasokan

ASEMBLING

SUKU_CADANG	SUKU_CADANG	KUANTITAS
p_1	p_5	9
p_2	p_5	7
p_3	p_5	2
p_2	p_6	12
p_3	p_6	3
p_4	p_7	1
p_6	p_7	1

Tabel 6.2: Asembling

Proyeksi dari tabel PASOKAN untuk kolom 1 dan 3 pada tabel 6.1, adalah:

$$\pi_{1,3}(PASOKAN)$$

PEMASOK	PROYEK
S_1	J_5
S_2	J_3
S_2	J_5
S_4	J_1

Operasi gabungan (join) adalah menggabungkan dua tabel menjadi satu.

Misalkan R sebuah tabel berderajat n dan S sebuah tabel berderajat m . Gabungan R dan S , yang berupa sebuah tabel dilambangkan dengan $\tau_p(R * S)$ sedemikian sehingga

$$\tau_p(R * S) = \{(a_1, a_2, \dots, a_{n-p}, b_1, b_2, \dots, b_p, c_1, c_2, \dots, c_{m-p}) |$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n-p}, b_1, b_2, \dots, b_p) \in R$$

$$(b_1, b_2, \dots, b_p, c_1, c_2, \dots, c_{m-p}) \in S\}$$

Misalkan diberikan tabel PASOKAN dan WARNA pada Tabel 6.3.

PASOKAN

PEMASOK	SUKU_CADANG	PROYEK
s_1	P_1	j_1
s_2	P_1	j_1
s_2	P_2	j_2

WARNA

SUKU_CADANG	PROYEK	WARNA
p_1	j_1	c_1
p_2	$J2$	c_2
p_2	j_2	c_3

Tabel 6.3: Pasokan dan Warna

Gabungan/join dari dua tabel tersebut dapat dilihat pada tabel 6.4.

τ_2 (PASOKAN*WARNA)

PEMASOK	SUKU_CADANG	PROYEK	WARNA
S_1	p_1	J_1	c_1
S_2	p_1	j_1	c_1
S_2	p_2	j_2	c_2
S_2	p_2	j_2	c_3

Tabel 6.4: Gabungan dari pasokan dan warna

Domain/field sebuah tabel dinamakan *primary key* jika nilainya didalam pasangan terurut ganda- n secara tunggal mengidentifikasi pasangan terurut ganda- n tersebut. Untuk memudahkan, *primary key* diletakkan pada domain yang pertama. Misalkan pada data pegawai yang terlihat pada tabel 6.5. NIP merupakan primary key, karena setiap pegawai mempunyai NIP yang berbeda, sedangkan NAMA mungkin ada yang sama, demikian juga untuk field BAGIAN.

NIP	NAMA	BAGIAN
131633388	Daryono	Jur.Matematika
132345666	Indah	BAUK
132111555	Dewi	BAUK
133456777	Indah	KPA

Tabel 6.5: Data Pegawai

6.1. 4 Jenis-jenis (Sifat) Relasi Biner

Jenis-jenis relasi Biner adalah relasi memantul, relasi setangkup, relasi tolak setangkup, relasi penghantar, dan relasi perluasan penghantar.

Misalkan R relasi biner pada A , relasi R dikatakan:

- Relasi memantul/refleksi** (reflexive relation) jika (a,a) ada di R untuk setiap a didalam A . Dengan kata lain, didalam relasi refleksi setiap unsur di A berhubungan dengan dirinya sendiri. Jika dituliskan seperti berikut:

$$R \text{ relasi refleksif} \Leftrightarrow (\forall x \in A) x R x$$

Contoh 6.6:

Misalkan $A = \{a, b, c, d\}$ dan relasi R dibawah ini didefinisikan pada A , maka

- Relasi $R = \{(a, a), (a, c), (b, a), (b, b), (b, d), (c, c), (c, d), (d, a), (d, d)\}$ bersifat refleksif, karena terdapat elemen relasi yang berbentuk (a, a) , yaitu $(a, a), (b, b), (c, c)$ dan (d, d) .
- Relasi $R = \{(a, a), (a, c), (b, b), (b, d), (c, a), (d, d), (d, b)\}$ tidak bersifat refleksif, karena $(c, c) \notin R$.
- Relasi setangkup** (symmetric relation) jika (a, b) ada di R berimplikasi (b, a) ada di didalam R .

Contoh 6.7:

	A	b	c	D
a		X		X
b	X		X	
c		X		X
d	X		X	X

Relasi Setangkup

	a	b	c	d
a		X		X
b	X			
c				
d				X

Relasi tidak Setangkup

- c. **Relasi tolak setangkup** (antisymmetric relation) jika (a, b) ada di R berimplikasi (b, a) tidak ada di didalam R kecuali $a = b$. Dengan kata lain jika (a, b) dan (b, a) ada di R maka $a = b$.

Contoh 6.8:

Misalkan $A = \{a, b, c\}$, $S = \{(a, a), (b, b)\}$ dan $N = \{(a, b), (a, c), (c, a)\}$ relasi biner. S adalah relasi setangkup dan tolak setangkup, sedangkan N adalah relasi tidak setangkup dan tidak tolak setangkup.

- d. **Relasi penghantar** (transitive relation) jika (a, b) dan (b, c) ada di R berimplikasi (a, c) ada di didalam R .

Contoh 6.9:

Misalkan $A = \{a, b, c\}$,

- $S = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, c)\}$ merupakan relasi penghantar
- $N = \{(a, b)\}$ merupakan relasi penghantar
- $Z = \{(a, b), (b, c)\}$ bukan relasi penghantar

- e. **Perluasan pengantar** (transitive extention) dari R , dilambangkan R_1 ialah suatu relasi biner pada A sedemikian sehingga R_1 mengandung R ($R \subseteq R_1$) selain itu, jika (a, b) dan (b, c) ada di R maka (a, c) ada di didalam R_1 .

Misalkan R relasi biner pada A , R_1 , R_2 , ... , R_i perluasan pengantar, tutupan pengantar dilambangkan dengan R^* adalah gabungan (union) dari himpunan R , R_1 , R_2 , ... , R_i

Contoh 6.10:

A himpunan kota-kota. R relasi biner pada A sedemikian rupa sehingga pasangan terurut (a,b) ada di dalam R jika ada hubungan komunikasi dari a ke b untuk mengirimkan pesan. R_1 menggambarkan pengiriman pesan melalui kota satu ke kota lainnya, baik secara langsung atau melalui satu kota antara. Jelas R_1 perluasan pengantar. R_2 menggambarkan pengiriman pesan melalui kota satu ke kota lainnya, baik secara langsung atau melalui sebanyak-banyaknya tiga kota antara. Jelas R_2 perluasan pengantar. Tutupan pengantar R^* adalah pesan dikirim secara langsung atau meelalui kota sebanyak yang dimau.

Contoh 6.11:

Relasi pengantar, perluasan pengantar, dan tutupan pengantar dapat dilihat pada gambar 6.2.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	
<i>a</i>		X	X	X	Relasi Penghantar		X	X		Perluasan Penghantar		X	X	X	
<i>B</i>			X			<i>b</i>		X	X		<i>b</i>		X	X	X
<i>c</i>		X		X		<i>c</i>		X	X	X	<i>c</i>		X	X	X
<i>d</i>						<i>d</i>					<i>d</i>				

Gambar 6.2: Relasi penghantar, perluasan penghantar, dan tutupan penghantar

6.1. 5 Relasi Setara (Ekivalensi) dan Sekatan

Suatu relasi biner pada himpunan dinamakan relasi **kesetaraan** (equivalence relation) jika bersifat: **memantul, setangkup, dan penghantar**. Sedangkan sekatan (partition) himpunan *A* ialah suatu himpunan yang anggotanya humpunan-himpunan bagian *A*, dilambangkan $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ sedemikian sehingga gabungan semua A_i sama dengan *A* dan irisan A_i dan A_j sama dengan himpunan kosong untuk sebarang A_i dan A_j yang berbeda. Sekatan suatu himpunan merupakan pembagian unsur-unsur himpunan ke dalam beberapa himpunan bagian yang saling terpisah (tidak saling tumpang tindih). Himpunan bagian tersebut disebut blok-blok sekatan.

Contoh 6.12:

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$, suatu relasi *R* ditunjukkan pada gambar 6.3 merupakan relasi kesetaraan.

	<i>A</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
<i>a</i>	X	x				
<i>b</i>	X	x				
<i>c</i>			x			
<i>d</i>				x	x	x
<i>e</i>				x	x	x
<i>f</i>				x	x	x

Gambar 6.3: Relasi kesetaraan

Contoh 6.13:

Misalkan $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, maka $\{\{a\}, \{b, c, d\}, \{e, f\}, \{g\}\}$ atau $\{\overline{a}, \overline{bcd}, \overline{ef}, \overline{g}\}$

merupakan partisi dari A

Contoh 6.14:

Misalkan B himpunan kartu bridge, maka kartu tersebut dapat di sekat menjadi 4 bentuk

yaitu: $\{\overline{\text{spade}}, \overline{\text{heart}}, \overline{\text{diamond}}, \overline{\text{clover}}\}$, masing-masing bentuk disekat menjadi 13

perigkat yaitu: $\{\overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{\text{jack}}, \overline{\text{queen}}, \overline{\text{king}}, \overline{\text{As}}\}$

Diberikan relasi kesetaraan R pada himpunan A , dari relasi ini dapat dibuat suatu sekatan himpunan A sedemikian hingga dua unsur sebarang di dalam blok yang sama berhubungan, sedangkan dari blok yang berbeda tidak berhubungan. Sekatan ini dinamakan sekatan yang ditimbulkan oleh relasi kesetaraan (partition induced by the equivalence).

Sebaliknya, dari sekatan himpunan A dapat dibuat dapat dibuat relasi kesetaraan pada A sedemikian sehingga setiap dua unsur pada blok yang sama berhubungan dan setiap dua unsur yang berbeda tidak berhubungan.

Contoh 6.15:

Perhatikan **Contoh 6.12**.

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$ dan relasi kesetaraan terlihat pada gambar 6.3. Sekatan dari himpunan A adalah: $\{\overline{ab}, \overline{c}, \overline{def}\}$

Misalkan π_1 dan π_2 sekatan pada himpunan A , R_1 dan R_2 relasi kesetaraan padanannya. π_1 dikatakan penghalusan (refinement) dari π_2 dilambangkan dengan $\pi_1 \leq \pi_2$ jika $R_1 \subseteq R_2$. Hasil kali π_1 dan π_2 dilambangkan dengan $\pi_1 \cdot \pi_2$ sebagai sekatan yang ditimbulkan oleh relasi kesetaraan $R_1 \cap R_2$.

Hasil kali π_1 dan π_2 merupakan sekatan himpunan A demikian hingga dua unsur a dan b berada didalam blok yang sama di dalam $\pi_1 \cdot \pi_2$ jika a dan b berada di dalam blok yang sama didalam π_1 dan berada didalam blok yang sama di dalam π_2 .

Jadi $\pi_1 \cdot \pi_2$ merupakan penghalusan dari π_1 , juga penghalusan dari π_2

Jumlah π_1 dan π_2 dilambangkan dengan $\pi_1 + \pi_2$ sebagai sekatan yang ditimbulkan oleh relasi kesetaraan $R_1 \cup R_2$.

Jumlah π_1 dan π_2 merupakan sekatan himpunan A demikian hingga dua unsur a dan b berada didalam blok yang sama di dalam $\pi_1 + \pi_2$ jika ada unsur-unsur c_1, c_2, \dots, c_k demikian hingga a dan c_1 berada didalam blok yang sama di dalam π_1 atau π_2 , c_1 dan c_2 berada didalam blok yang sama di dalam π_1 atau π_2 , c_2 dan c_3 berada didalam blok yang sama di dalam π_1 atau π_2 , ..., c_k dan b berada didalam blok yang sama di dalam π_1 atau π_2 . Berarti dua unsur a dan b berada di dalam blok yang sama di dalam $\pi_1 + \pi_2$ jika keduanya dihubungkan oleh rantai (*chain connected*), dalam pengertian ada barisan unsur-unsur $a, c_1, c_2, \dots, c_k, b$ demikian hingga setiap pasangan unsur yang berurutan di dalam barisan ini berada di dalam blok yang sama di dalam π_1 atau π_2 .

Jadi π_1 dan π_2 merupakan penghalusan dari $\pi_1 + \pi_2$.

Catatan :

Gabungan dua relasi kesetaraan selalu merupakan relasi memantul dan setangkup.

Contoh 6.16 :

$$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$$

$$\pi_1 = \left\{ \overline{abcd}, \overline{efg}, \overline{hi}, \overline{jk} \right\}, \quad \pi_2 = \left\{ \overline{abch}, \overline{di}, \overline{efjk}, \overline{g} \right\}$$

$$\pi_1 \cdot \pi_2 = \left\{ \overline{\overline{abc}}, \overline{\overline{d}}, \overline{\overline{ef}}, \overline{\overline{g}}, \overline{\overline{h}}, \overline{\overline{i}}, \overline{\overline{jk}} \right\}$$

$$\pi_1 + \pi_2 = \left\{ \overline{\overline{abcdhi}}, \overline{\overline{efgjk}} \right\}$$

Tafsiran fisik

A himpunan orang-orang

π_1 sekatan himpunan A menurut kelompok umur

π_2 sekatan himpunan A menurut kelompok tinggi badan

$\pi_1 \cdot \pi_2$ menentukan sekatan kelompok umur dan tinggi badan, artinya identifikasi orang sebagai salah satu dari a, b, c , sebagai d , sebagai salah satu e, f , sebagai g , sebagai h , sebagai i , atau sebagai salah satu j, k . Jadi $\pi_1 \cdot \pi_2$ menyatakan informasi total yang dimiliki tentang identifikasi orang-orang. $\pi_1 + \pi_2$ membedakan kelompok orang-orang dari kelompok a, b, c, d, h, i dengan orang-orang dari kelompok e, f, g, j, k . Jadi $\pi_1 + \pi_2$ menyatakan informasi yang dimiliki tentang identifikasi orang-orang hanya π_1 atau π_2 saja.

6.1. 6 Relasi Pengurutan dan Kisi

Relasi biner dinamakan relasi pengurutan tak lengkap atau relasi pengurutan parsial (partial ordering relation) jika bersifat:

1. Memantul (reflexive)

2. Tolak setangkup (antisymmetric)

3. Pengantar (transitive)

Didalam relasi pengurutan parsial, dua benda saling berhubungan jika salah satunya lebih kecil (lebih besar) daripada lainnya menurut sifat atau kriteria tertentu. Ada kemungkinan didalam himpunan terdapat dua benda yang tidak berhubungan, maka dari itu pengurutannya dinamakan parsial.

Contoh 6.17 :

$A = \{a, b, c, d, e\}$, suatu relasi R ditunjukkan pada gambar 6.4 merupakan relasi pengurutan parsial.

	A	b	c	d	e
a	X	x	x	x	x
b		x	x		x
c			x		x
d				x	x
e					x

Gambar 6.4: Relasi pengurutan parsial

Contoh 6.18:

A = Himpunan bulat positif, R relasi biner pada A sedemikian hingga $(a,b) \in R$ jika a membagi habis b . Tunjukkan bahwa R relasi pengurutan parsial.

Penyelesaian:

Refleksif : Karena a bilangan bulat maka a habis dibagi oleh dirinya sendiri.

Antisimetri: Karena b habis dibagi a maka a tidak habis dibagi oleh b kecuali $a = b$.

Transitif : Jika a membagi habis b dan b membagi habis c , maka a membagi habis c .

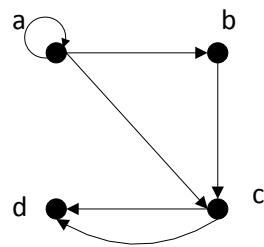
Jadi R relasi pengurutan parsial.

Misalkan diberikan relasi biner R pada Gambar 6.5, maka secara grafik dapat ditunjukkan pada gambar 6.6. Perhatikan Gambar 6.6 yang merupakan Relasi pengurutan parsial, relasi ini bersifat refleksif, maka arah panah yang ke dirinya sendiri dapat dihilangkan. Selain itu relasi tersebut bersifat transitif maka arah panah dapat dihilangkan.

Representasi grafik suatu relasi pengurutan parsial yang semua tanda panahnya mengarah keatas disebut dikenal dengan **diagram Hasse**

	a	b	c	d
a	x	x	x	
b			x	
c				x
d			x	

Gambar 6.5



Gambar 6.6

Himpunan terurut parsial juga disebut **poset** (**partially ordered set**) dan dilambangkan dengan (A, R) atau (A, \leq)

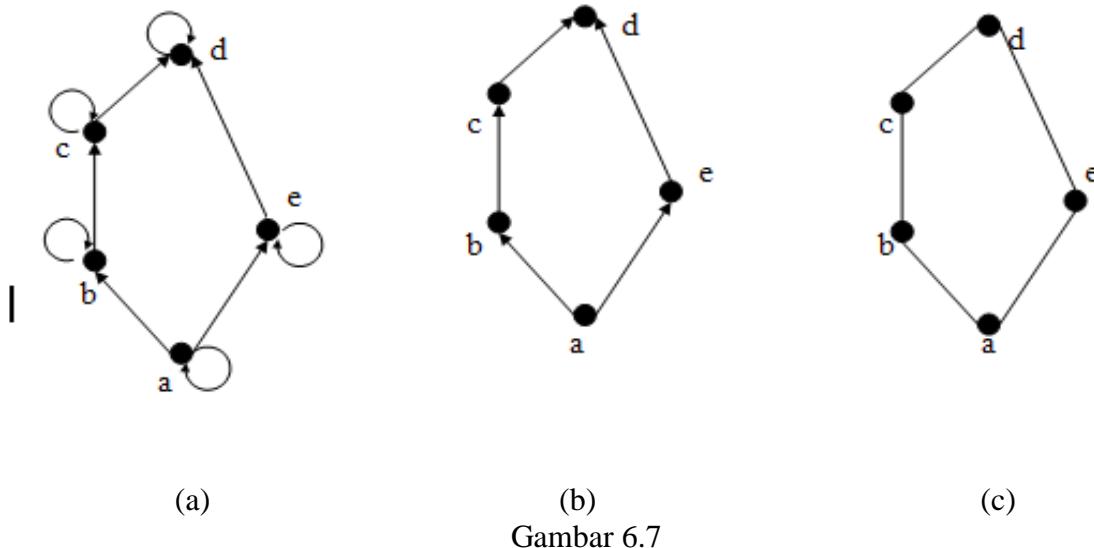
Misalkan (A, \leq) himpunan terurut parsial, suatu himpunan bagian dari A dinamakan **chain** (rantai) jika setiap unsur didalam himpunan bagian berhubungan. Jika tidak berhubungan dikatan **antichain** (tolak rantai)

Contoh 6.19:

Perhatikan relasi terurut parsial pada gambar 6.7.

Chain : $\{a\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, e, d\}$, $\{a, b, c, d\}$

Antichain : $\{a\}$, $\{b, d\}$, $\{c, e\}$



Suatu himpunan terurut parsial (A, \leq) dikatakan himpunan terurut sempurna (**totally ordered set**) jika A merupakan chain. Relasi pada A dinamakan relasi pengurutan sempurna (**total ordering relation**).

Misalkan (A, \leq) himpunan terurut parsial.

Suatu unsur a di dalam A dinamakan unsur maksimum jika tidak ada unsur b di dalam A yang bersifat $a \neq b$ dan $a < b$

Suatu unsur a di dalam A dinamakan unsur minimum jika tidak ada unsur b di dalam A yang bersifat $a \neq b$ dan $b < a$

Misalkan a dan b dua unsur sebarang di dalam himpunan terurut parsial (A, \leq) , unsur c dikatakan sebagai **batas atas** (upper bound) bagi a dan b jika $a \leq c$ dan $b \leq c$.

Unsur c dinamakan **batas atas terkecil** (least upper bound) bagi a dan b jika c merupakan batas atas bagi a dan b dan tidak ada batas atas lain d bagi a dan b .

Misalkan a dan b dua unsur sebarang di dalam himpunan terurut parsial (A, \leq) , unsur c dikatakan sebagai **batas bawah** (lower bound) bagi a dan b jika $c \leq a$ dan $c \leq b$.

Unsur c dinamakan **batas bawah terbesar** (greatest lower bound) bagi a dan b jika c merupakan batas bawah bagi a dan b dan tidak ada batas atas lain d bagi a dan b .

Contoh 6.20:

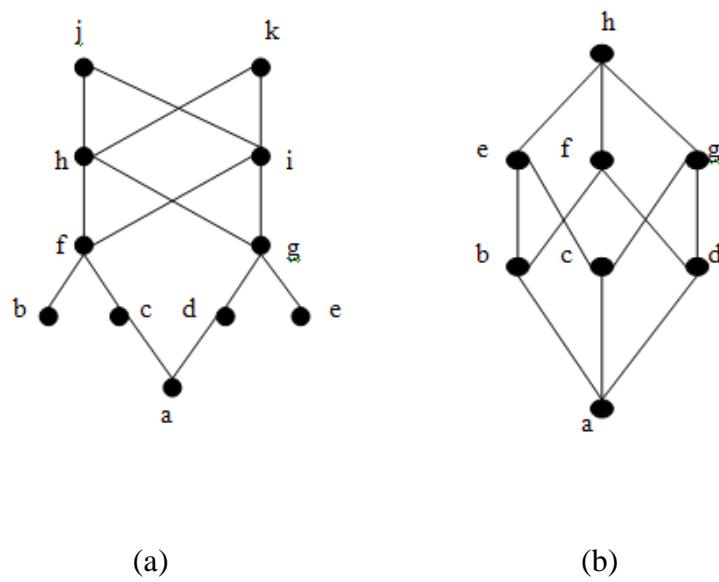
Diberikan (A, \leq) himpunan terurut parsial pada gambar 6.8.

h, i, j dan k merupakan batas atas bagi f dan g

h batas atas terkecil bagi f dan g

a, b, c, d, e merupakan batas bawah dari f dan g

a batas bawah terbesar bagi c dan d



Gambar 6.8

Suatu himpunan terurut parsial dinamakan **kisi** (*lattice*) jika setiap dua unsur di dalam himpunan itu mempunyai satu dan hanya satu batas atas terkecil dan hanya satu batas atas terbesar. Pada gambar 6.8 (a) bukan lattice sedangkan Gambar 6.8 (b) merupakan lattice.

6.2 Fungsi

6.2.1 Pengertian

Suatu relasi biner R dari A ke B merupakan fungsi jika untuk setiap unsur a di dalam A ada unsur tunggal b di dalam B sedemikian hingga (a,b) ada didalam R . Fungsi disebut juga pemetaan atau transformasi.

Himpunan A disebut domain (daerah asal), dan himpunan B disebut range (daerah hasil). Fungsi dapat dispesifikasikan dalam berbagai bentuk, antara lain:

- Himpunan pasangan terurut

Karena relasi dapat dinyatakan sebagai pasangan terurut, padahal fungsi adalah salah satu bentuk khusus relasi.

- Formula pengisian nilai

Didalam kalkulus, fungsi dinyatakan dalam suatu rumus. Misal: $f(x) = x^2$.

- Kata-kata

Misalnya f adalah fungsi yang memetakan bilangan bulat ke bilangan bulat.

- Kode program (*source code*)

Dalam bahasa pemrograman, fungsi dinyatakan dalam suatu kode tertentu sesuai dengan bahasa pemrograman yang dipakai.

6.1. 2 Komposisi Fungsi

Misalkan fungsi $f: A \rightarrow B$ dan $g: B \rightarrow C$. Komposisi fungsi f dan g dinotasikan dengan $f \circ g$, adalah fungsi dari A ke C yang didefinisikan:

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

Contoh 6.21:

Diberikan fungsi $g = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$ yang memetakan $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{a, b, c\}$ dan fungsi $f = \{(a, s), (b, t), (c, u)\}$ yang memetakan $B = \{a, b, c\}$ ke $C = \{s, t, u\}$. Fungsi komposisi dari A ke C adalah

$$f \circ g = \{(1, s), (2, s), (3, t)\}$$

Contoh 6.22:

Diberikan fungsi $f(x) = 2x + 3$ dan $g(x) = x^2 - 2x + 1$. Dapatkan komposisi fungsi $f \circ g$ dan $g \circ f$.

Penyelesaian:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 2x + 1) = 2(x^2 - 2x + 1) + 3 = 2x^2 - 4x + 5$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = (2x + 3)^2 - 2(2x + 3) + 1 = 4x^2 + 8x + 4$$

6.1. 3 Fungsi Invers

Syarat suatu fungsi mempunyai invers adalah fungsi tersebut berkorespondensi satu-satu. Diberikan suatu fungsi berkorespondensi satu-satu $f: A \rightarrow B$. Fungsi f mempunyai invers (*invertible*) yang didefinisikan:

$$f^{-1}(b) = a, \text{ jika } f(a) = b \text{ dengan } a \in A, b \in B.$$

Contoh 6.23:

Tentukan invers dari fungsi $f(x) = x + 1$.

Penyelesaian: Misalkan $f(x) = y$ maka

$$y = x + 1 \rightarrow x = y - 1$$

Jadi inversnya adalah $f^{-1}(y) = y - 1$.

6.1. 4 Beberapa fungsi khusus

a. Fungsi *Floor* dan *Ceiling*

Fungsi *floor* dari x adalah nilai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x , dengan x adalah bilangan real. Fungsi *floor* dinotasikan dengan $\lfloor x \rfloor$. Sedangkan *ceiling* adalah nilai bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x , dengan x bilangan real. Fungsi *ceiling* dinotasikan dengan $\lceil x \rceil$.

Contoh 6.24:

$$\lfloor 2.5 \rfloor = 2$$

$$\lceil 2.5 \rceil = 3$$

$$\lfloor -1.5 \rfloor = -2$$

$$\lceil -1.5 \rceil = -1$$

$$\lfloor 1.8 \rfloor = 1$$

$$\lceil 1.8 \rceil = 2$$

b. Fungsi Modulo

Fungsi modulo adalah fungsi dengan operator **mod**, yang didefinisikan sebagai:

$a \text{ mod } m$ memberikan sisa pembagian bilangan bulat jika a dibagi m .

Contoh 6.25:

$10 \text{ mod } 3 = 1$, karena $10 = 3 \cdot 3 + 1$

$25 \text{ mod } 7 = 4$, karena $25 = 7 \cdot 3 + 4$

$0 \text{ mod } 3 = 0$, karena $0 = 3 \cdot 0 + 0$

$-25 \text{ mod } 7 = 3$, karena $-25 = 7 \cdot (-4) + 3$

c. Fungsi Faktorial

Untuk sebarang bilangan bulat tidak negatif n , faktorial dari n dinotasikan dengan $n!$, yang didefinisikan:

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n, & n > 0 \end{cases}$$

Contoh 6.26:

$0! = 0$

$2! = 1 \times 2 = 2$

$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

d. Fungsi Identitas

Fungsi identitas adalah suatu fungsi yang memetakan pada dirinya sendiri, yang didefinisikan:

$$i: X \rightarrow X \text{ dengan } i(x) = x$$

e. Fungsi Jarak Hamming

Fungsi jarak Hamming H didefinisikan sebagai berikut

$$H: \Sigma^n \times \Sigma^n \rightarrow \mathbb{Z}^+$$

$H(s, t) =$ banyaknya posisi dimana s dan t memiliki harga yang berbeda

Contoh 6.27:

Jika $n=5$, maka

$H(11111,00000) = 5$ karena kedua string berbeda posisi

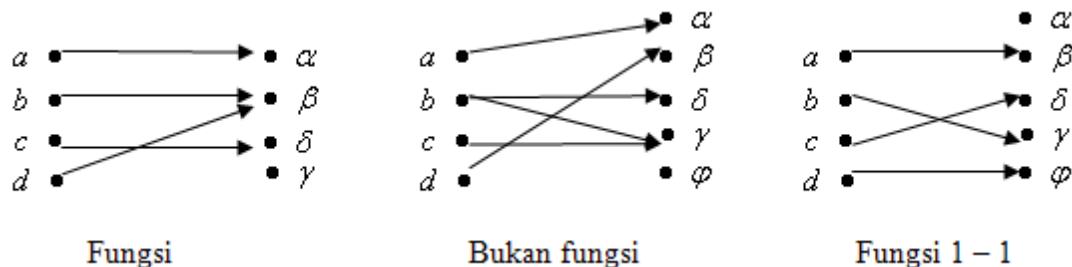
$H(11000,00010) = 3$ karena kedua string berbeda di 3 posisi.

6.1. 5 Fungsi Injektif, Surjektif, dan Bijektif

- **Fungsi satu – satu (injektif)**

Misalkan f suatu fungsi dari A ke B , f disebut **fungsi 1 – 1** jika dan hanya jika setiap unsur B paling banyak paling banyak hanya mempunyai satu kawan di A .

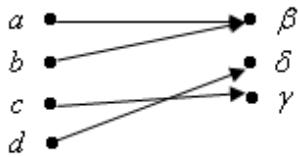
Contoh 6.28:



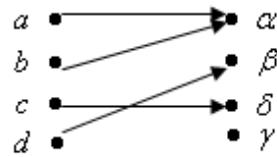
- **Fungsi Onto (surjektif)**

Misalkan f suatu fungsi dari A ke B , f disebut **fungsi onto** jika dan hanya jika setiap unsur B mempunyai satu atau lebih kawan di A .

Contoh 6.29:



Fungsi Onto

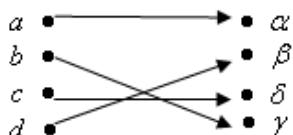


Bukan fungsi Onto

- **Fungsi satu – satu dan onto (bijektif)**

Fungsi bijektif adalah fungsi yang memenuhi syarat 1 – 1 dan onto.

Contoh 6.30:



Fungsi Bijektif

6.1. 6 Fungsi Rekursif

Fungsi f disebut sebagai fungsi rekursif jika definisi fungsinya mengacu pada dirinya sendiri. Fungsi rekursif dapat disusun menjadi dua bagian, yaitu:

a. Basis

Bagian ini berisi nilai awal yang mengacu pada dirinya sendiri dan sekaligus menghentikan definisi rekursif.

b. Rekurens

Bagian ini mendefinisikan argumen fungsi dalam terminologi dirinya sendiri sehingga lebih dekat ke nilai awal (basis).

Contoh 6.31:

Tinjaulah perhitungan $n!$ secara rekursif dan dapatkan nilai dari $4!$

Penyelesaian:

a. Basis

$$n!=1, \text{ jika } n=0$$

b. Rekurens

$$n!= n \times (n-1)!, \text{ jika } n>0$$

Misalnya $4!$, dapat dihitung dengan langkah-langkah sebagai berikut:

$$(1) 4! = 4 \times 3!$$

$$(2) \quad 3! = 3 \times 2!$$

$$(3) \quad 2! = 2 \times 1!$$

$$(4) \quad 1! = 1 \times 0!$$

$$(5) \quad 0! = 1$$

Pada (5) didapat nilai yang terdefinisi secara langsung dan bukan faktorial dari bilangan lainnya. Dengan merunut balik mulai (5) sampai (1) akan didapat:

$$(5) 0! = 1$$

$$(4) 1! = 1 \times 0! = 1 \times 1 = 1$$

$$(3) 2! = 2 \times 1! = 2 \times 1 = 2$$

$$(2) 3! = 3 \times 2! = 3 \times 2 = 6$$

$$(1) 4! = 4 \times 3! = 4 \times 6 = 24$$

Jadi nilai $4! = 24$.

Yang termasuk fungsi rekursif antara lain faktorial, fungsi chebysev, dan fibonacci.

SOAL LATIHAN

1. Misalkan R sebuah relasi biner pada himpunan semua bilangan bulat positif sedemikian hingga: $R = \{(a,b) | a - b \text{ bilangan bulat positif ganjil}\}$

Apakah R memantul ?, Setangkup ?, Penghantar ?, Sebuah relasi kesetaraan ?.

2. Misalkan R sebuah relasi biner pada himpunan semua string angka-angka 0 dan 1 sedemikian rupa sehingga:

$R = \{(a,b) | a \text{ dan } b \text{ adalah string yang mempunyai jumlah angka } 0 \text{ sama banyaknya}\}$

Apakah R memantul ?, Setangkup ?, Tolak setangkup ?, Penghantar ?, Sebuah relasi kesetaraan ?, Sebuah relasi pengurutan parsial ?.

3. Misalkan A sebuah himpunan dengan 10 unsur yang berbeda.

- a. Berapa banyak relasi biner pada A yang bisa dibentuk ?
- b. Berapa banyak di antaranya yang memantul ?
- c. Berapa banyak di antaranya yang setangkup ?
- d. Berapa banyak di antaranya yang memantul dan setangkup ?
- e. Berapa banyak di antaranya yang merupakan pengurutan sempurna (total ordering relation) ?

4. Misalkan R sebuah relasi setangkup dan pengantar pada suatu himpunan A . Tunjukkan bahwa jika untuk setiap a di dalam A ada b di dalam A sedemikian rupa sehingga (a, b) ada di dalam R , maka R merupakan relasi kesetaraan.
5. Misalkan R sebuah relasi pengantar dan memantul. Misalkan T sebuah relasi pada A sedemikian rupa sehingga (a, b) ada di dalam T jika dan hanya jika (a, b) dan (b, a) keduanya ada di dalam R . Tunjukkan bahwa T relasi kesetaraan.
6. Misalkan R sebuah relasi biner. Jika $S = \{(a, b) \mid (a, c) \in R \text{ dan } (c, b) \in R \text{ untuk semua } c \text{ tertentu}\}$, tunjukkan bahwa jika R sebuah relasi kesetaraan, maka S juga relasi kesetaraan ?
7. Sebuah relasi biner pada suatu himpunan yang bersifat memantul dan setangkup dinamakan suatu relasi **kompatibel** (*compatible relation*).
 - a. Misalkan A suatu himpunan orang-orang dan R sebuah relasi biner pada A sedemikian hingga (a, b) ada di dalam R jika a kawan b . Tunjukkan R suatu relasi kompatibel.
 - b. Berikan dua contoh yang lain suatu relasi yang kompatibel
 - c. Misalkan R_1 dan R_2 dua buah relasi kompatibel pada A . Apakah $R_1 \cap R_2$ suatu relasi yang kompatibel ?, Apakah $R_1 \cup R_2$ suatu relasi yang kompatibel ?
8. Misalkan R sebuah relasi biner dari A ke B . **Kebalikan** (*converse*) relasi R , dilambangkan R^{-1} ialah suatu relasi biner dari B ke A sedemikian hingga

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

- a. Misalkan R_1 dan R_2 relasi biner dari A ke B . Apakah $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$?

- b. Misalkan R sebuah relasi biner pada A . Jika R memantul, apakah R^{-1} juga memantul ? Jika R setangkup, apakah R^{-1} juga setangkup ? Jika R penghantar, apakah R^{-1} juga penghantar ?
9. Diketahui sebuah himpunan A dan sebuah fungsi f dari A ke A . Suatu sekatan π terhadap A dikatakan memiliki **sifat substitusi relatif** terhadap f jika untuk sebarang dua unsur a dan b yang berada di dalam salah satu blok di dalam π , kedua unsur $f(a)$ dan $f(b)$ juga di dalam satu blok didalam π . Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dan f suatu fungsi dari A ke A sedemikian hingga $f(1) = 3, f(2) = 3, f(3) = 2, f(4) = 5, f(5) = 4$, dan $f(6) = 4$,
- Apakah $\pi_1 = \{\overline{123}, \overline{456}\}$ memiliki sifat substitusi relatif ?
- Bagaimana dengan: $\pi_2 = \{\overline{15}, \overline{25}, \overline{34}\}$ dan $\pi_3 = \{\overline{12}, \overline{34}, \overline{56}\}$?
- Misalkan A himpunan semua bilangan bulat dan π sebuah sekatan himpunan A menjadi himpunan bilang bulat dan ganjil. Jika $f(a) = a+1$ untuk setiap unsur a di dalam A . Apakah π memiliki sifat substitusi relatif terhadap f ?
- Jika
- $$g(a) = \begin{cases} \frac{a}{2}, & a \text{ genap} \\ \frac{a-1}{2}, & a \text{ ganjil} \end{cases}$$
- Apakah π memiliki sifat substitusi relatif terhadap g ?
10. Diketahui (A, \leq) sebuah himpunan terurut parsial. Misalkan \leq_R sebuah relasi biner pada A sedemikian hingga untuk a dan b di dalam A , $a \leq_R b$ jika dan hanya jika $b \leq_R a$

- a. Tunjukkan bahwa \leq_R sebuah relasi pengurutan parsial
- b. Tunjukkan bahwa jika (A, \leq) sebuah kisi, maka (A, \leq_R) juga sebuah kisi
11. Diketahui relasi S yang didefinisikan pada himpunan $A = \{a, b, c, d\}$. Relasi direpresentasikan dalam graf berarah berikut ini:
-
- ```

graph LR
 a((a)) -->[] b((b))
 a((a)) -->[] b((b))
 b((b)) -->[] c((c))
 c((c)) -->[] d((d))
 c((c)) -->[] d((d))

```
- (a) Jelaskan alasan mengapa relasi  $S$  tidak bersifat menghantar. Tambahkan busur tambahan yang dimaksud sehingga  $S$  bersifat menghantar.
- (b) Jika didefinisikan bahwa  $S^n = S \circ S \circ \dots \circ S$  (sebanyak  $n$  kali), tentukan matriks dan graf berarah yang merepresentasikan  $S^2$  (graf berarah  $S$  yang digunakan adalah graf pada gambar soal)
12. Misalkan  $m$  adalah suatu bilangan bulat positif dengan  $m > 1$ . Perlihatkan bahwa relasi  $R$ , yang dalam hal ini  $R = \{(a,b) \mid a \equiv b \pmod{m}\}$  adalah relasi kesetaraan (*equivalence*) pada himpunan bilangan bulat.

## BAB VII

# ALJABAR BOOLE

---

Aljabar Boole merupakan dasar teknologi digital seperti pada rangkaian pensaklaran, rangkaian digital, dan *integrated circuit* komputer; karena rangkaian elektronik di dalam komputer bekerja dengan mode bit.

George Boole seorang ilmuwan Inggris yang menemukan teori aljabar boole pada tahun 1854. Boole memaparkan aturan-aturan dasar logika yang kemudian dikenal sebagai logika boole yang dapat ditemukan dalam buku *The Law of Thought*. Aturan logika ini membentuk struktur matematika yang disebut aljabar boole.

Pada tahun-tahun berikutnya banyak ilmuwan yang memperlihatkan aljabar boole dalam berbagai bidang terutama teknologi digital. Salah satunya Claude Shannon yang merancang rangkaian sirkuit yang menerima masukan 0 dan 1, dengan menerapkan aljabar boole.

Berikut ini akan dijelaskan dasar-dasar aljabar boole dan aplikasinya dalam rangkaian logika.

### 7.1 Definisi Aljabar Boole

Definisi aljabar boole dapat dijelaskan pada definisi 7.1.

**Definisi 7.1:**

Misalkan  $B$  himpunan yang didefinisikan pada operasi “ $\wedge$ ”, “ $\vee$ ”, dan “ $\sim$ ”. Misalkan  $0$  dan  $1$  adalah dua elemen yang berbeda dari  $B$  maka  $\langle B, \vee, \wedge, \sim, 0, 1 \rangle$  disebut aljabar boole jika memenuhi aksioma (Postulat Huntington) berikut: dengan  $x, y, z \in B$

## 1. Hukum komutatif

- a.  $x \vee y = y \vee x$
- b.  $x \wedge y = y \wedge x$

## 2. Hukum asosiatif

- a.  $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
- b.  $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$

## 3. Hukum distributif

- a.  $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
- b.  $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

## 4. Hukum identitas

- a.  $x \vee 0 = x$
- b.  $x \wedge 1 = x$

## 5. Hukum negasi (komplemen)

- a.  $x \vee \sim x = 1$
- b.  $x \wedge \sim x = 0$

Kadang dalam buku tertentu agar menyerupai dengan aritmatika, operasi  $\vee$  diganti  $+$ , operasi  $\wedge$  diganti  $*$  atau  $,$ , dan operasi  $\sim$  diganti  $'$ . Aljabar proposisi dan aljabar himpunan merupakan aljabar boole, sehingga sifat-sifatnya mirip.

Dalam aljabar boole dikenal prinsip dualitas, karena jika pada aksioma dalam aljabar boole misalnya 3a, penghubung  $\wedge$  diganti  $\vee$  maka akan didapat 3b.

## 7.2 Hukum-hukum aljabar boole

Dalam subbab 7.1 sudah disampaikan bahwa hukum-hukum pada aljabar boole mirip dengan hukum pada himpunan atau proposisi. Hukum pada aljabar boole dapat dilihat pada tabel 7.1.

|                                                                                                                      |                                                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Hukum identitas:                                                                                                  | 7. Hukum dominansi/ikatan:                                                               |
| a. $x \vee 0 = x$<br>b. $x \wedge 1 = x$                                                                             | a. $x \wedge 0 = 0$<br>b. $x \vee 1 = 1$                                                 |
| 2. Hukum negasi (komplemen)                                                                                          | 8. Hukum absorbsi (penyerapan):                                                          |
| a. $x \vee \sim x = 1$<br>b. $x \wedge \sim x = 0$                                                                   | a. $(x \wedge y) \vee x = x$<br>b. $(x \vee y) \wedge x = x$                             |
| 3. Hukum distributif:                                                                                                | 9. Hukum idempotent:                                                                     |
| a. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$<br>b. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ | a. $x \wedge x = x$<br>b. $x \vee x = x$                                                 |
| 4. Hukum asosiatif:                                                                                                  | 10. Hukum De Morgan:                                                                     |
| a. $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$<br>b. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$                     | a. $\sim(x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$<br>b. $\sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$ |
| 5. Hukum komutatif:                                                                                                  | 11. Hukum 0/1:                                                                           |
| a. $x \vee y = y \vee x$<br>b. $x \wedge y = y \wedge x$                                                             | a. $\sim 0 = 1$<br>b. $\sim 1 = 0$                                                       |
| 6. Hukum involusi:<br>$\sim(\sim x) = x$                                                                             |                                                                                          |

Tabel 7.1: Hukum-hukum pada Aljabar Boole

### 7.3 Fungsi Boole dan ekspresi boole

Definisi fungsi boole dan ekspresi boole dapat dilihat pada **Definisi 7.2** dan **Definisi 7.3**.

#### Definisi 7.2:

Misalnya  $B = \langle B, \vee, \wedge, \sim, 0, 1 \rangle$  adalah aljabar boole.

Fungsi boole adalah pemetaan dari  $B^n$  ke  $B$  melalui ekspresi boole, yang ditulis

$$f: B^n \rightarrow B$$

yang dalam hal ini  $B^n$  adalah himpunan yang beranggotakan pasangan terurut ganda- $n$  di dalam daerah asal  $B$ .

#### Definisi 7.3:

Ekspresi boole dalam  $n$  buah peubah  $x_1, x_2, \dots, x_n$  adalah

1. 0 dan 1 adalah ekspresi boole
2.  $x_1, x_2, \dots, x_n$  masing-masing adalah ekspresi boole
3. Jika  $E_1$  dan  $E_2$  adalah ekspresi boole, maka  $E_1 \wedge E_2, E_1 \vee E_2, \sim E_1$  adalah ekspresi boole.

Secara aljabar, fungsi boole dapat dinyatakan dalam tabel kebenaran dan rangkaian logika. Jika fungsi boole dinyatakan dalam tabel kebenaran, maka untuk fungsi boole dengan  $n$  peubah, kombinasi dari nilai peubahnya sebanyak  $2^n$ .

Kedua fungsi boole dikatakan sama jika kedua ekspresi boole-nya ekivalen.

Maksudnya ekivalen adalah kedua ekspresi boole tersebut tidak sama tetapi mempunyai nilai yang sama (menyatakan fungsi yang sama). Hal ini bisa dibuktikan

dengan menggunakan tabel kebenaran atau dengan menurunkan ekspresi boole sampai mendapatkan ekspresi yang lain dengan menggunakan hukum-hukum yang terdapat pada aljabar boole.

**Contoh 7.1:**

Nyatakan fungsi boole  $f(x, y, z) = (x \wedge y) \vee \sim z$  dalam tabel kebenaran.

Penyelesaian:

Nilai-nilai dari fungsi boole dapat dilihat pada tabel 7.2.

| $x$ | $y$ | $z$ | $x \wedge y$ | $(x \wedge y) \vee \sim z$ |
|-----|-----|-----|--------------|----------------------------|
| 1   | 1   | 1   | 1            | 1                          |
| 1   | 1   | 0   | 1            | 1                          |
| 1   | 0   | 1   | 0            | 0                          |
| 1   | 0   | 0   | 0            | 1                          |
| 0   | 1   | 1   | 0            | 0                          |
| 0   | 1   | 0   | 0            | 1                          |
| 0   | 0   | 1   | 0            | 0                          |
| 0   | 0   | 0   | 0            | 1                          |

Tabel 7.2: Tabel kebenaran  $f(x, y, z) = (x \wedge y) \vee \sim z$

**Contoh 7.2:**

Jelaskan apakah kedua ekspresi boole ini ekivalen.

$$E_1: (x \wedge y) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee z; E_2: (x \wedge y) \vee z$$

Penyelesaian:

Untuk menunjukkan ekivalen atau tidak ada dua cara, yaitu:

- merurunkan salah satu ekspresi boole sampai memndapatkan ekspresi boole lainnya dengan menggunakan hukum aljabar.

$$\begin{aligned}
 (x \wedge y) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee z &= (x \wedge y) \wedge (1 \vee z) \vee z && \text{Hukum distributif} \\
 &= (x \wedge y) \wedge 1 \vee z && \text{Hukum ikatan} \\
 &= (x \wedge y) \vee z && \text{Hukum identitas}
 \end{aligned}$$

Karena  $E_1 = E_2$  maka kedua ekspresi boole ini ekivalen.

b. Tabel kebenaran

| $x$ | $y$ | $z$ | $(x \wedge y)$ | $(x \wedge y \wedge z)$ | $E_1$ | $E_2$ |
|-----|-----|-----|----------------|-------------------------|-------|-------|
| 1   | 1   | 1   | 1              | 1                       | 1     | 1     |
| 1   | 1   | 0   | 1              | 0                       | 1     | 1     |
| 1   | 0   | 1   | 0              | 0                       | 1     | 1     |
| 1   | 0   | 0   | 0              | 0                       | 0     | 0     |
| 0   | 1   | 1   | 0              | 0                       | 1     | 1     |
| 0   | 1   | 0   | 0              | 0                       | 0     | 0     |
| 0   | 0   | 1   | 0              | 0                       | 1     | 1     |
| 0   | 0   | 0   | 0              | 0                       | 0     | 0     |

Tabel 7.3: Tabel kebenaran  $E_1: (x \wedge y) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee z$  dan

$$E_2: (x \wedge y) \vee z$$

Dari Tabel 7.3 juga menunjukkan bahwa nilai  $E_1 = E_2$ . Jadi  $E_1$  ekivalen dengan  $E_2$ .

#### 7.4 Bentuk Kanonik

Ekspresi boole yang dinyatakan sebagai penjumlahan satu atau lebih *minterm* atau perkalian dari satu atau lebih *maxterm* disebut dalam bentuk kanonik. Suatu ekspresi boole  $n$  peubah  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dinamakan ***minterm*** jika berbentuk

$$\tilde{x}_1 \wedge \tilde{x}_2 \wedge \dots \wedge \tilde{x}_n$$

dan dikatakan **maxterm** jika berbentuk

$$\tilde{x}_1 \vee \tilde{x}_2 \vee \dots \vee \tilde{x}_n$$

dalam hal ini digunakan  $\tilde{x}_i$  yang menyatakan literal  $x_i$  atau  $\sim x_i$ .

Sedangkan literal adalah ekspresi boole yang mengandung satu peubah atau komplementnya.

Jadi bentuk kanonik ada 2, yaitu:

1. Bentuk normal disjungtif (Penjumlahan dari hasil kali / *Disjunctive Normal Form*=DNF)

Suatu ekspresi boole di dalam  $\langle\{0,1\}, \vee, \wedge, \sim\rangle$  disebut DNF jika merupakan suatu join beberapa *minterm*. Misalnya:  $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \bar{x}_3$ ,  $\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3$ , dan  $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ .

2. Bentuk normal konjungtif (Perkalian dari hasil jumlah / *Conjunctive Normal Form*=CNF)

Suatu ekspresi boole di dalam  $\langle\{0,1\}, \vee, \wedge, \sim\rangle$  disebut CNF jika merupakan suatu meet beberapa *maxterm*. Misalnya  $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$  adalah suatu ekspresi boole dalam bentuk CNF dengan 2 *maxterm*.

### Contoh 7.3:

Nyatakan fungsi boole  $f(x, y, z) = (x \vee (y \wedge \sim z)) \wedge \sim(y \wedge z)$  dalam bentuk DNF.

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan ini dapat digunakan dua cara, yaitu;

- a. Dengan membuat tabel kebenaran:

Pada tabel 7.4, nilai fungsi  $f(x, y, z) = 1$  terdapat pada baris ke-2,3,4, dan 6 yang masing-masing bersesuaian dengan *minterm*  $x \wedge y \wedge \sim z$ ,  $x \wedge \sim y \wedge z$ ,  $x \wedge \sim y \wedge \sim z$ ,  $\sim x \wedge y \wedge \sim z$ ; sehingga bentuk DNF-nya:

$$f(x, y, z) = (x \wedge y \wedge \sim z) \vee (x \wedge \sim y \wedge z) \vee (x \wedge \sim y \wedge \sim z) \vee (\sim x \wedge y \wedge \sim z).$$

| $x$ | $y$ | $z$ | $y \wedge \sim z$ | $x \vee (y \wedge \sim z)$ | $(y \wedge z)$ | $\sim(y \wedge z)$ | $f(x, y, z)$ |
|-----|-----|-----|-------------------|----------------------------|----------------|--------------------|--------------|
| 1   | 1   | 1   | 0                 | 1                          | 1              | 0                  | 0            |
| 1   | 1   | 0   | 1                 | 1                          | 0              | 1                  | 1            |
| 1   | 0   | 1   | 0                 | 1                          | 0              | 1                  | 1            |
| 1   | 0   | 0   | 0                 | 1                          | 0              | 1                  | 1            |
| 0   | 1   | 1   | 0                 | 0                          | 1              | 0                  | 0            |
| 0   | 1   | 0   | 1                 | 1                          | 0              | 1                  | 1            |
| 0   | 0   | 1   | 0                 | 0                          | 0              | 1                  | 0            |
| 0   | 0   | 0   | 0                 | 0                          | 0              | 1                  | 0            |

 Tabel 7.4: Tabel kebenaran  $f(x, y, z) = (x \vee (y \wedge \sim z)) \wedge \sim(y \wedge z)$ 

b. Mengubah ekspresi secara langsung dengan hukum-hukum aljabar boole

$$(x \vee (y \wedge \sim z)) \wedge \sim(y \wedge z)$$

$$= (x \vee (y \wedge \sim z)) \wedge (y \vee \sim z) \quad \text{Hukum De Morgan}$$

$$= x \wedge (\sim y \vee \sim z) \vee (y \wedge \sim z) \wedge (\sim y \vee \sim z) \quad \text{Hukum Distributif}$$

$$= ((x \wedge \sim y) \vee (x \wedge \sim z)) \vee ((y \wedge \sim z \wedge \sim y) \vee (y \wedge \sim z)) \quad \text{Hukum distributif}$$

$$= (x \wedge \sim y) \vee (x \wedge \sim z) \vee (y \wedge \sim z)$$

$(x \wedge \sim y) \vee (x \wedge \sim z) \vee (y \wedge \sim z)$  merupakan ekspresi yang merupakan gabungan literal tetapi bukan gabungan minterm dalam  $x$ ,  $y$ , dan  $z$  (karena suku pertama tidak memuat  $z$ , suku kedua tidak memuat  $y$  dan suku ketiga tidak memuat  $x$ ).

Untuk mengubahnya dengan menambahkan peubah yang belum ada.

$$x \wedge \sim y = x \wedge \sim y \wedge 1 = x \wedge \sim y \wedge (z \vee \sim z) = (x \wedge \sim y \wedge z) \vee (x \wedge \sim y \wedge \sim z)$$

$$x \wedge \sim z = x \wedge 1 \wedge \sim z = x \wedge (y \vee \sim y) \wedge \sim z = (x \wedge y \wedge \sim z) \vee (x \wedge \sim y \wedge \sim z)$$

$$y \wedge \sim z = 1 \wedge y \wedge \sim z = (x \vee \sim x) \wedge y \wedge \sim z = (x \wedge y \wedge \sim z) \vee (\sim x \wedge y \wedge \sim z)$$

Sehingga,

$$E = ((x \wedge \sim y \wedge z) \vee (x \wedge \sim y \wedge \sim z)) \vee ((x \wedge y \wedge \sim z) \vee (x \wedge \sim y \wedge \sim z))$$

$$\vee ((x \wedge y \wedge \sim z) \vee (\sim x \wedge y \wedge \sim z))$$

$$E = (x \wedge \sim y \wedge z) \vee (x \wedge \sim y \wedge \sim z) \vee (\sim x \wedge y \wedge \sim z)$$

### 7.5 Aplikasi aljabar boole pada rangkaian logika

Rangkaian listrik dibedakan menjadi dua yaitu rangkaian seri dan rangkaian paralel.

Analogi antara struktur aljabar dan rangkaian listrik dapat dilihat pada Tabel 7.5.

| Jenis             | Gambar | Arti         |
|-------------------|--------|--------------|
| Saklar terbuka    |        | 0            |
| Saklar tertutup   |        | 1            |
| Rangkaian seri    |        | $p \wedge q$ |
| Rangkaian paralel |        | $p \vee q$   |

Tabel 7.5: Rangkaian listrik

Kombinasi sinyal berbentuk bit-bit dapat diteruskan ke komponen lain dalam berbagai rangkaian. Rangkaian yang rumit dapat disusun dari gerbang (gates) yang bersesuaian dengan suatu fungsi boole sederhana. Beberapa gerbang dasar dapat dilihat pada Tabel 7.6.

| Nama Gerbang | Simbol | Ekuivalensi dalam aljabar Boole |
|--------------|--------|---------------------------------|
| NOT          |        | $z = x'$                        |
| OR           |        | $z = x \vee y$                  |
| AND          |        | $z = xy$                        |
| NOR          |        | $z = (x \vee y)'$<br>(Not OR)   |
| NAND         |        | $z = (xy)'$<br>(Not AND)        |
| XOR          |        | $z = x \oplus y$                |

Tabel 7.6: Jenis gerbang dasar

**Contoh 7.4:**

Sederhanakan fungsi boole  $f(x, y, z) = (\sim x \wedge \sim y \wedge z) \vee (\sim x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \sim y)$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &= (\sim x \wedge \sim y \wedge z) \vee (\sim x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \sim y) \\
 &= (\sim x \wedge z) \wedge (\sim y \vee y) \vee (x \wedge \sim y) && \text{Hukum distributif} \\
 &= (\sim x \wedge z) \wedge 1 \vee (x \wedge \sim y) && \text{Hukum komplemen} \\
 &= (\sim x \wedge z) \vee (x \wedge \sim y) && \text{Hukum identitas}
 \end{aligned}$$

**Contoh 7.5:**

Fungsi mayoritas adalah rangkaian digital yang menghasilkan keluaran = 1, jika dan hanya jika mayoritas masukannya = 1. Jika tidak demikian, keluaran = 0. Buatlah skema rangkaianya untuk masukan  $x, y, z$ .

Penyelesaian:

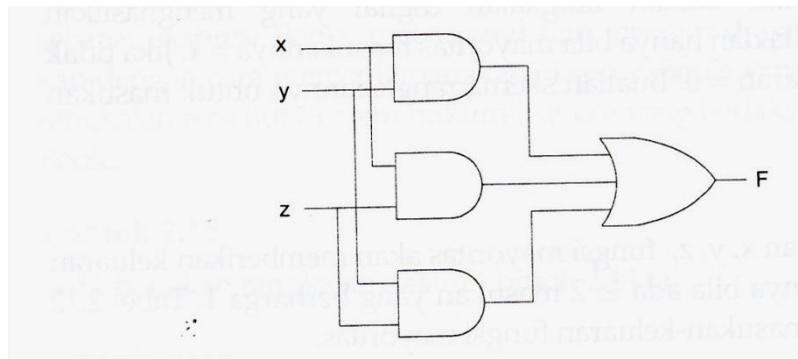
Untuk masukan  $x, y, z$  fungsi mayoritas akan memberikan keluaran = 1 jika dan hanya jika minimal ada dua masukan berharga = 1. Hal ini bisa dilihat pada tabel berikut:

| $x$ | $y$ | $z$ | $F$ |
|-----|-----|-----|-----|
| 1   | 1   | 1   | 1   |
| 1   | 1   | 0   | 1   |
| 1   | 0   | 1   | 1   |
| 1   | 0   | 0   | 0   |
| 0   | 1   | 1   | 1   |
| 0   | 1   | 0   | 0   |
| 0   | 0   | 1   | 0   |
| 0   | 0   | 0   | 0   |

Bentuk DNF-nya:

$$\begin{aligned}
 F &= (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \sim z) \vee (x \wedge \sim y \wedge z) \vee (\sim x \wedge y \wedge z) \\
 &= ((x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)) \vee (x \wedge y \wedge \sim z) \vee (x \wedge \sim y \wedge z) \vee \\
 &\quad (\sim x \wedge y \wedge z) \\
 &= ((x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \sim z)) \vee ((x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \sim y \wedge z)) \vee ((x \wedge y \wedge z) \vee \\
 &\quad (\sim x \wedge y \wedge z)) \\
 &= (x \wedge y) \wedge (z \vee \sim z) \vee (x \wedge z) \wedge (y \vee \sim y) \vee (y \wedge z) \wedge (x \vee \sim x) \\
 &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)
 \end{aligned}$$

Rangkaian logika dari hasil penyederhanaan tersebut dapat dilihat pada gambar berikut:



**SOAL LATIHAN**

1. Diketahui fungsi boole  $f(x, y, z) = (x \wedge \sim y) \vee (x \wedge y \wedge \sim z) \vee (\sim x \wedge y \wedge \sim z)$ .  
Buktikan bahwa:
  - a.  $f(x, y, z) \vee (x \wedge \sim z) = f(x, y, z)$
  - b.  $f(x, y, z) \vee x \neq f(x, y, z)$
  - c.  $f(x, y, z) \vee \sim z \neq f(x, y, z)$
2. Tentukan mana diantara ekspresi berikut yang merupakan ekspresi boole dalam  $x, y, z$ :
  - a. 1
  - b.  $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$
  - c.  $(x \wedge y \wedge \sim z) \vee (x \wedge \sim y \wedge z) \vee (\sim x \wedge y \wedge z)$
3. Nyatakan ekspresi boole berikut ke dalam bentuk DNF:
  - a.  $E(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (\sim y \wedge z)$
  - b.  $E(x, y, z) = (x \vee y) \wedge \sim z$
  - c.  $E(x, y, z) = (\sim x \wedge y) \vee (x \wedge y \wedge \sim z)$
  - d.  $E(x, y, z) = x' + ((y + z')(yz)')(x + yz')$
4. Carilah komplemen dari fungsi  $f(w, x, y, z) = x'z + w'xy' + wx'y + w'xy$
5. Sederhanakan ekspresi boole berikut:
  - a.  $E(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (y \wedge z)$
  - b.  $E(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge \sim y \wedge z) \vee (y \wedge z)$
  - c.  $E(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (\sim x \wedge y \wedge \sim z) \vee (y \wedge z)$
6. Buatlah ekspresi boole dalam 3 peubah  $p, q, r$  yang sesuai dengan tabel berikut dan kemudian gambarkan rangkaianya.

| P | Q | R | F |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

7. Buatlah rangkaian yang akan menghasilkan keluaran = 1 jika dan hanya jika:
- Tepat satu diantara masukan  $x, y, z$  berharga = 1
  - Paling sedikit 2 diantara masukan  $w, x, y, z$  berharga = 1
  - $x$  dan  $y$  berharga sama serta  $y$  dan  $z$  berlawanan harga (masukan  $x, y, z$ )
8. Gambarkan rangkaian logika yang menyatakan ekspresi boole  $(x \wedge y) \vee (x \wedge \sim y \wedge z) \vee y \wedge (\sim x \vee z) \vee (\sim y \wedge \sim z)$ .

# BAB 8

## GRAF

---

Graf merupakan pokok bahasan keilmuan matematika yang cukup lama, tetapi teorinya banyak digunakan dalam aplikasi modern. Tulisan pertama tentang teori graf itu sendiri bermula dari seorang ahli matematika Swiss bernama Leonhard Euler, pada tahun 1736. Tulisan tersebut dikenal dengan penyelesaian masalah Jembatan Konigsberg.

### 8.1 DEFINISI

Graf adalah sepasang set  $(V, E)$ , yang mana  $V$  adalah set himpunan kosong yang elemen-nya disebut dengan *vertex* (simpul) dan  $E$  adalah kumpulan dua elemen subset  $V$  yang disebut *edge* (tepi).

Jika  $G$  adalah sebuah graf yang terdiri dari verteks-verteks  $V$  dan rusuk-rusuk  $E$ , maka kita dapat menuliskan  $G = (V, E)$ .

### 8.2 TIPE GRAF

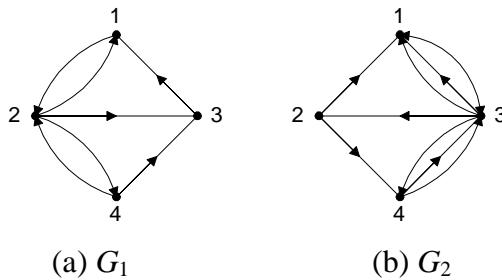
Tipe graf dapat dibedakan berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, jumlah simpul, dan orientasi arah pada sisi.

Tipe graf berdasarkan orientasi arah pada sisi, dapat dibedakan menjadi:

### a. Graf berarah

Graf berarah adalah suatu graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah.

Sebuah graf terarah  $G$ , terdiri dari suatu himpunan  $V$  yang disebut *verteks* (titik) dan suatu himpunan  $E$  yang disebut dengan *edge* (rusuk) sedemikian rupa sehingga, tiap rusuk-rusuk  $e$  dihubungkan dengan pasangan verteks tak terurut. Kemudian jika terdapat rusuk  $e_1$  yang menghubungkan dua buah verteks  $v_1$  dan  $v_2$ , maka kita dapat menuliskan  $e_1 = (v_1, v_2)$ . Pada Gambar 8.1 merupakan dua contoh graf berarah.

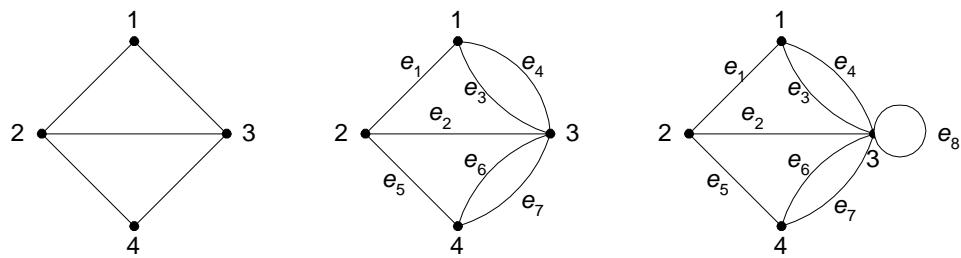


Gambar 8.1: (a) graf berarah, (b) graf-ganda berarah

### b. Graf tidak berarah

Graf tak berarah adalah graf yang kedua sisinya tidak mempunyai orientasi arah.

Sebuah graf (tak terarah)  $G$ , terdiri dari suatu himpunan  $V$  yang disebut *verteks* (titik) dan suatu himpunan  $E$  yang disebut dengan *edge* (rusuk) sedemikian rupa sehingga, tiap rusuk-rusuk  $e$  dihubungkan dengan pasangan verteks tak terurut. Kemudian jika terdapat rusuk  $e_1$  yang menghubungkan dua buah verteks  $v_1$  dan  $v_2$ , maka kita dapat menuliskan  $e_1 = (v_1, v_2)$  atau  $e_1 = (v_2, v_1)$ . Misalnya dapat dilihat pada Gambar 8.2.

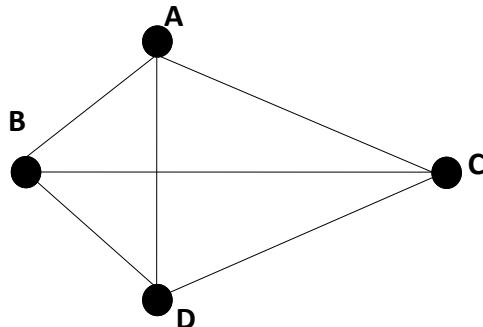


Gambar 8.2: Graf tak berarah

Tipe graf berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda ada sebuah graf, dapat dibedakan menjadi:

### 1. Graf sederhana /Simple graph

Jika sebuah vertek terhubung dengan vertek lain hanya melalui sebuah edge seperti yang terlihat pada Gambar 8.3.



Gambar 8.3.: Simple Graph

*Simple graph*  $G = (V, E)$  terdiri dari  $V$ , yaitu set dari *vertek*, dan  $E$  adalah set dari pasangan element  $V$  yang disebut *edge*. Sebuah *edge* menghubungkan 2 *vertek* yang berbeda, dan tidak terdapat *edge* lain yang menghubungkan 2 *verteks* yang telah terhubung tersebut. Atau dengan kata lain graf sederhana ini tidak mengandung gelang maupun sisi ganda.

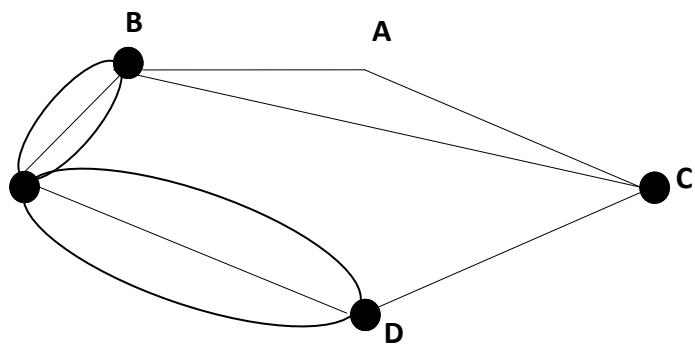
## 2. Graf tak sederhana (*unsimple graph*)

Graf tak sederhana adalah graf yang mengandung sisi ganda atau gelang.

Graf tak sederhana dapat dibedakan menjadi 2, yaitu graf ganda (*multigraph*) dan graf semu (*pseudograph*).

### a. Graf ganda

Jika sebuah vertek terhubung dengan vertek lain hanya melalui sebuah edge seperti yang terlihat pada gambar 8.4.



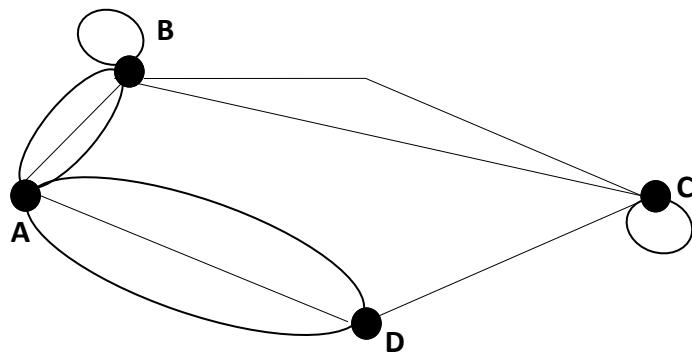
Gambar 8.4: Graf ganda (Multigraph)

Sehingga, tiap rusuk-rusuk e dihubungkan dengan pasangan verteks tak terurut.

Kemudian jika terdapat rusuk e1 yang menghubungkan dua buah verteks v1 dan v2, maka kita dapat menuliskan  $e1 = (v1, v2)$ .

### b. Graf semu (Pseudograph)

Pseudograph adalah jenis paling umum dari grafik berarah yang bisa mengandung loop dan beberapa edge, seperti yang terlihat pada gambar 8.5.



Gambar 8.5: Pseudograph

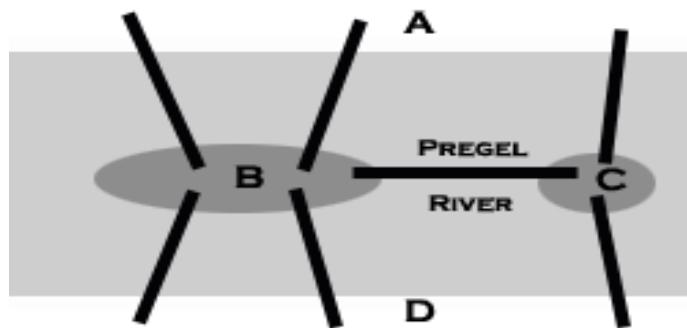
Definisi graf dapat diperluas sehingga mencakup graf berarah ganda. Pada graf berarah ganda , gelang dan sisi ganda diperbolehkan ada. Sehingga perluasan definisi graf dapat dirangkum seperti pada tabel 8.1.

| Nama                | Tipe               | sisi ganda<br>diperbolehkan? | Loops<br>diperbolehkan? |
|---------------------|--------------------|------------------------------|-------------------------|
| Simple graph        | Graf tidak berarah | Ya                           | Tidak                   |
| Multigraph          | Graf tidak berarah | Ya                           | Tidak                   |
| Pseudograph         | Graf tidak berarah | Ya                           | Ya                      |
| Directed graph      | Graf berarah       | Tidak                        | Ya                      |
| Directed multigraph | Graf berarah       | Tidak                        | Ya                      |

Tabel 8.1 : Perluasan jenis graf

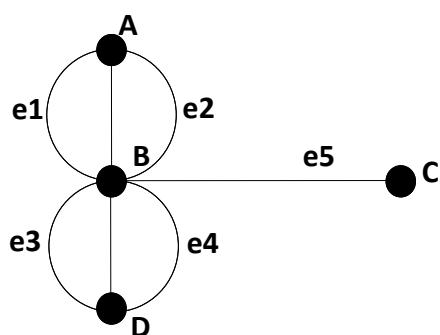
**Contoh Kasus : Jembatan Konigsberg**

Dua pulau terhampar di Sungai Pregel yang terletak di kota Konigsberg saling terhubung oleh jembatan-jembatan, seperti yang tampak pada gambar 8.6.



Gambar 8.6: Jembatan-jembatan Konigsberg

Untuk memulai dari sembarang lokasi (A, B, C atau D), menyeberangi setiap jembatan satu kali, kemudian kembali lagi ke tempat semula, yaitu tempat memulai tadi. Konfigurasi jembatan dimodelkan dengan sebuah graf seperti pada gambar 8.7.



Gambar 8.7 : Model graf Jembatan konigsberg

Dengan model jembatan konigsberg (dimisalkan graf G) pada gambar 8.7 notasi yang bisa digunakan untuk menerangkan keadaan di atas adalah :

$$G = (V, E); V = \{A, B, C, D\} \text{ dan } E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}.$$

Contoh pada kasus ini adalah contoh graf berarah, kecuali jika pada e1 hanya memperbolehkan arus kendaraan dari A ke B atau sebaliknya.

Sebuah *edge* yang menghubungkan dua *verteks* memiliki nilai. Nilai tersebut bisa merupakan deskripsi jarak atau yang lainnya.

**Contoh 8.1.** Pada Gambar 8.8,  $G_1$  adalah graf dengan

$$V = \{ 1, 2, 3, 4 \} \quad E = \{ (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4) \}$$

$G_2$  adalah graf dengan

$$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

$$E = \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4) \}$$

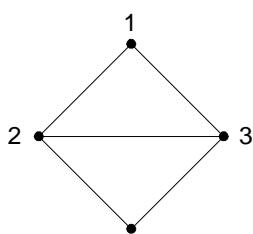
$$= \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \}$$

$G_3$  adalah graf dengan

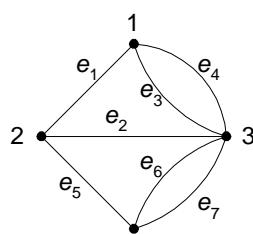
$$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

$$E = \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4), (3, 3) \}$$

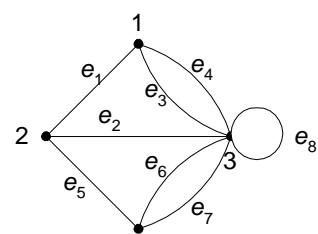
$$= \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8 \}$$



(a)



(b)



(c)

Gambar 8.8. (a) graf sederhana, (b) graf ganda, dan (c) graf semu

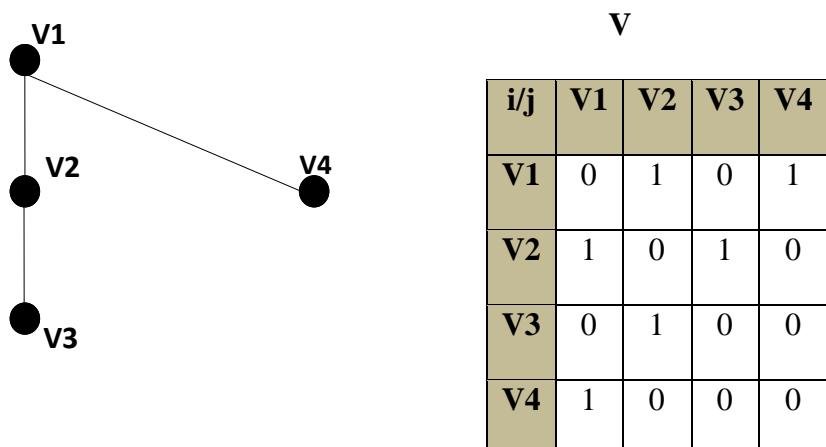
- Pada  $G_2$ , sisi  $e_3 = (1, 3)$  dan sisi  $e_4 = (1, 3)$  dinamakan **sisi-ganda** (*multiple edges* atau *parallel edges*) karena kedua sisi ini menghubungi dua buah simpul yang sama, yaitu simpul 1 dan simpul 3.
- Pada  $G_3$ , sisi  $e_8 = (3, 3)$  dinamakan **gelang** atau **kalang** (*loop*) karena ia berawal dan berakhir pada simpul yang sama.

Beberapa istilah yang berkaitan dengan graf, antara lain:

### 1. Bertetangga (*Adjacent Matrix*)

Kedua simpul/vertrek bertetangga jika keduanya terhubung langsung. Misalnya dapat dilihat Gambar 8.9. Pada gambar 8.9, v1 bertetangga dengan v2 dan v4, tetapi v3 tidak bertetangga dengan v4.

Sebuah graf dapat disajikan dalam bentuk adjacent matrik. Jika sebuah graf memiliki vertrek-vertrek  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ , maka adjacent matrik adalah  $n \times n$ . Nilai dari adjacent matrik pada baris  $i$  dan kolom  $j$  akan bernilai 1 jika terdapat edge antara  $v_i$  dan  $v_j$ . Dan sebaliknya, nilai dari adjacent matrik pada baris  $i$  dan kolom  $j$  akan bernilai 0 jika tidak terdapat edge antara  $v_i$  dan  $v_j$ .



Gambar 8.9: Adjacent Matrik

Untuk kejadian pada graf tidak berarah, adjacent matrik selalu simetrik, dan nilai dari  $V(i,j)$  yang mana  $i = j$  adalah 0. Representasi graf dalam bentuk matrik ini berguna untuk beberapa alasan, antara lain :

- 1) Dengan adjacent matrik, maka penyajian graf ke dalam sistem komputer menjadi lebih mudah.
- 2) Dengan memetakan graf dengan matriks, dapat membawa semua permasalahan aljabar linear untuk menanggung studi grafik.

## 2. Bersisian (*Incidency*)

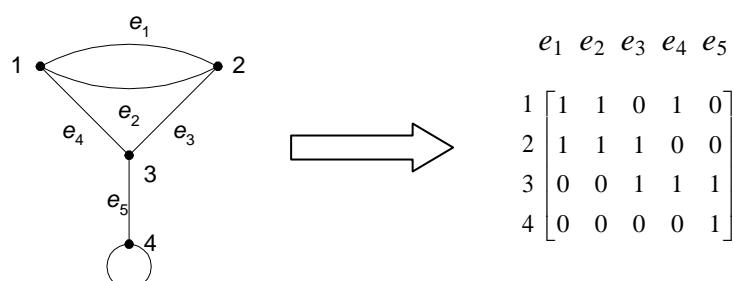
Untuk sebarang sisi  $e = (v_i, v_j)$  dikatakan bahwa  $e$  bersisian dengan simpul  $v_i$  atau  $e$  bersisian dengan simpul  $v_j$ .

Sebuah graf juga bisa disajikan dalam bentuk matriks bersisian.

Diberikan  $A = [a_{ij}]$  dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika simpul } i \text{ bersisian dengan sisi } j \\ 0, & \text{jika simpul } i \text{ tidak bersisian dengan sisi } j \end{cases}$$

Misalnya dapat dilihat pada gambar



Gambar 8.10: Matriks bersisian

### 3. Derajat (*Degree*)

Derajat suatu simpul adalah jumlah sisi yang bersisian dengan dengan simpul tersebut.

Derajat dari simpul di dalam sebuah graf tidak berarah adalah jumlah edge yang terdai, kecuali adanya loop. Jika terjadi loop, akan dihitung 2 untuk satu loop. Derajat ini di notasikan dengan  $\deg(v)$ . Dan sebuah vertek akan dikatakan sebagai ***pendant*** vertek jika hanya memiliki nilai derajat 1.

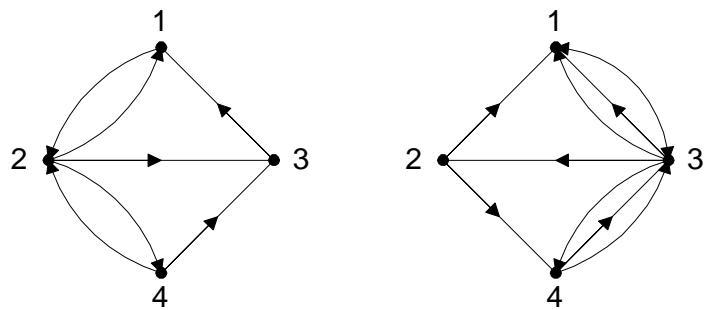
Pada graf berarah,

$$\deg_{\text{in}}(v) = \text{derajat-masuk (in-degree)}$$

= jumlah busur yang masuk ke simpul  $v$

$$\deg_{\text{out}}(v) = \text{derajat-keluar (out-degree)}$$

= jumlah busur yang keluar dari simpul  $v$



$$\deg(v) = \deg_{\text{in}}(v) + \deg_{\text{out}}(v)$$

$G_4$

$G_5$

Gambar 8.11: Graf berarah

Tinjau graf  $G_4$ :

$$\deg_{\text{in}}(1) = 2; \deg_{\text{out}}(1) = 1$$

$$\deg_{\text{in}}(2) = 2; \deg_{\text{out}}(2) = 3$$

$$\deg_{\text{in}}(3) = 2; \deg_{\text{out}}(3) = 1$$

$$\deg_{\text{in}}(4) = 1; \deg_{\text{out}}(4) = 2$$

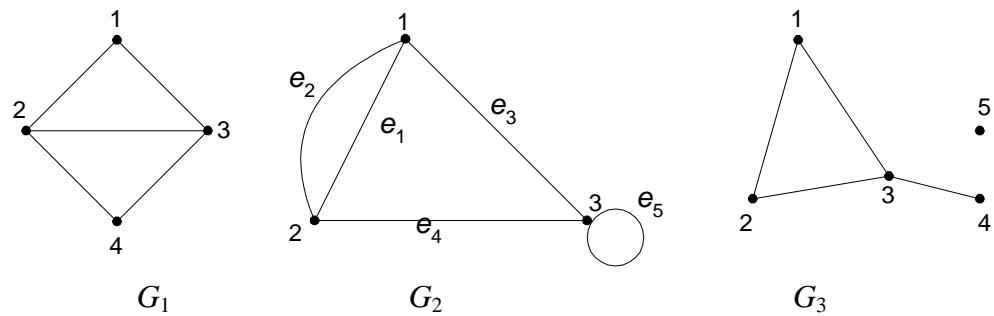
**Lemma Jabat Tangan.** Jumlah derajat semua simpul pada suatu graf adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graf tersebut.

Dengan kata lain, jika  $G = (V, E)$ , maka  $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$

### Contoh 8.2:

Tinjaulah graf pada gambar 8.12, berapa derajat dari masing-masing graf tersebut.

Penyelesaian:



Gambar 8.12

Tinjau graf  $G_1$ :  $\deg(1) + \deg(2) + \deg(3) + \deg(4) = 2 + 3 + 3 + 2 = 10$

$$= 2 \times \text{jumlah sisi} = 2 \times 5$$

Tinjau graf  $G_2$ :  $\deg(1) + \deg(2) + \deg(3) = 3 + 3 + 4 = 10$

$$= 2 \times \text{jumlah sisi} = 2 \times 5$$

Tinjau graf  $G_3$ :  $\deg(1) + \deg(2) + \deg(3) + \deg(4) + \deg(5) = 2 + 2 + 3 + 1 + 0 = 8$

$$= 2 \times \text{jumlah sisi} = 2 \times 4$$

Bagaimana jika nilai degree untuk semua vertek adalah sama? Maka gunakan rumus Handshaking berikut untuk menghitung jumlah edge yang ada :

The Handshaking Theorema :

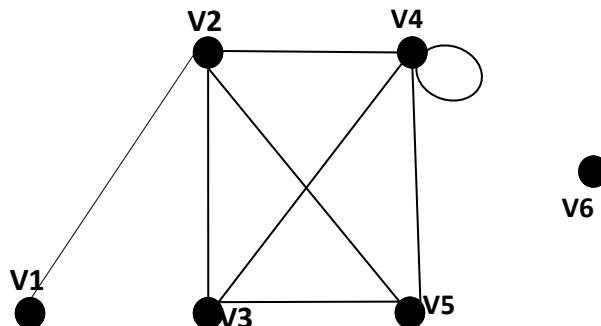
$$2e = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

### Contoh 8.3:

Berapa banyak edge yang ada pada sebuah graf dengan 20 vertek yang mana tiap verteknya memiliki derajat 5?

Penyelesaian :

Nilai jumlah dari verteknya (simpulnya) adalah  $5 \times 20 = 100$ , dengan menggunakan rumus handshaking di atas, maka  $2e = 100$ , Untuk itu nilai e adalah  $100/2 = 50$  edge.

**Contoh 8.4:**

Gambar 8.13: Graf

Solusi untuk menghitung nilai derajat dari graf pada gambar 8.12 adalah :

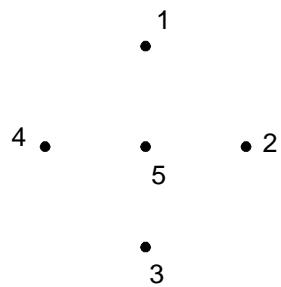
$\text{Deg}(v1) = 1$ ,  $\text{Deg}(v2) = 4$ ,  $\text{Deg}(v3) = \text{Deg}(v5) = 3$  ,  $\text{Deg}(v4) = 5$  dan  $\text{Deg}(v6) = 0$ .

#### 4. Isolated vertek (Simpul terpencil)

Vertek yang memiliki nilai derajat adalah 0 disebut dengan *isolated* vertek yang artinya bahwa vertek tersebut tidak terhubung dengan vertek yang lain. Untuk contoh isolated vertek ini adalah vertek v6 pada gambar 8.13.

#### 5. Graf Kosong

Graf kosong adalah graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Misalnya dapat dilihat pada gambar 8.14.



Gambar 8.14: Graf kosong

## 6. Lintasan (Path)

**Lintasan** yang panjangnya  $n$  dari simpul awal  $v_0$  ke simpul tujuan  $v_n$  di dalam graf  $G$  ialah barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk  $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$  sedemikian sehingga  $e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \dots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$  adalah sisi-sisi dari graf  $G$ .

Pada gambar 8.12,  $G_1$ : lintasan 1, 2, 4, 3 adalah lintasan dengan barisan sisi (1,2), (2,4), (4,3).

**Panjang lintasan** adalah jumlah sisi dalam lintasan tersebut. Lintasan 1, 2, 4, 3 pada  $G_1$  memiliki panjang 3.

## 7. Siklus (Cycle) atau sirkuit (circuit)

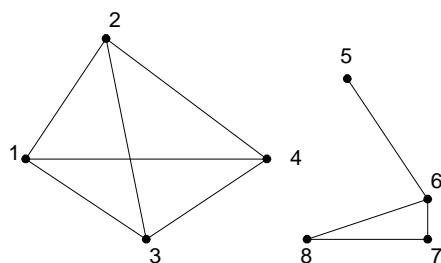
Siklus/sirkuit adalah lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama. Panjang sirkuit adalah jumlah sisi dalam sirkuit tersebut. Pada gambar 8.12, graf  $G_1$ : 1, 2, 3, 1 adalah sebuah sirkuit yang mempunyai panjang 3.

### 8. Terhubung (*Connected*)

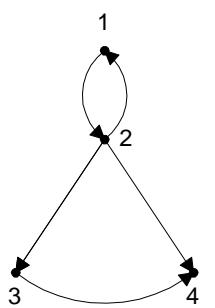
Ketika  $(u,v)$  adalah edge dari sebuah graf berarah  $G$ ,  $u$  dikatakan terhubung ke  $v$  dan  $v$  terhubung ke  $u$ . Vertek  $u$  disebut sebagai initial vertek dari  $(u,v)$ , dan  $v$  disebut sebagai terminal verteks dari  $(u,v)$ . Initial dan terminal vertek dari sebuah loop adalah sama.

Atau dengan kata lain dua buah simpul  $v_1$  dan simpul  $v_2$  disebut **terhubung** jika terdapat lintasan dari  $v_1$  ke  $v_2$ .  $G$  disebut **graf terhubung** (*connected graph*) jika untuk setiap pasang simpul  $v_i$  dan  $v_j$  dalam himpunan  $V$  terdapat lintasan dari  $v_i$  ke  $v_j$ . Jika tidak, maka  $G$  disebut **graf tak-terhubung** (*disconnected graph*).

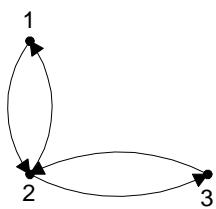
Salah satu contoh graf tak-terhubung dapat dilihat pada gambar 8.15.



Gambar 8.15: Graf tak terhubung



graf berarah terhubung lemah



graf berarah terhubung kuat

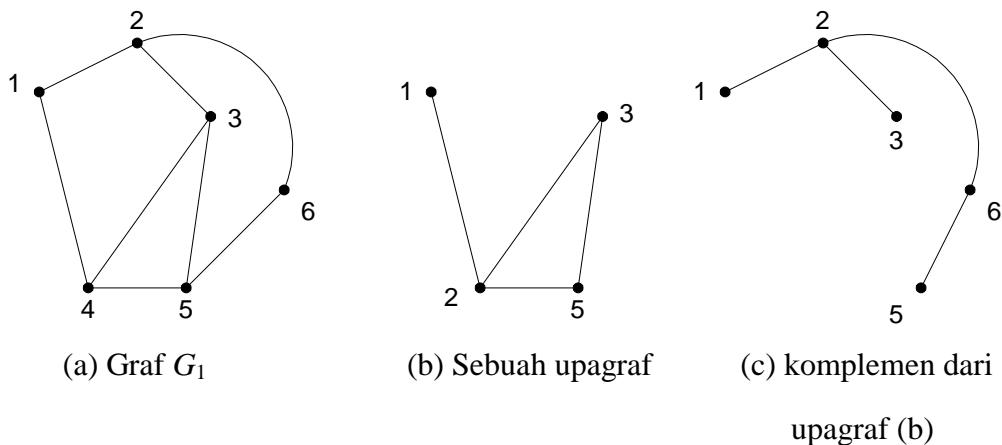
Gambar 8.16: Graf berarah terhubung kuat dan lemah

Graf berarah  $G$  disebut **graf terhubung kuat** (*strongly connected graph*) apabila untuk setiap pasang simpul sembarang  $u$  dan  $v$  di  $G$ , terhubung kuat. Kalau tidak,  $G$  disebut **graf terhubung lemah**. Hal ini bisa dilihat pada gambar 8.16.

## 9. Upagraf (Subgraph)

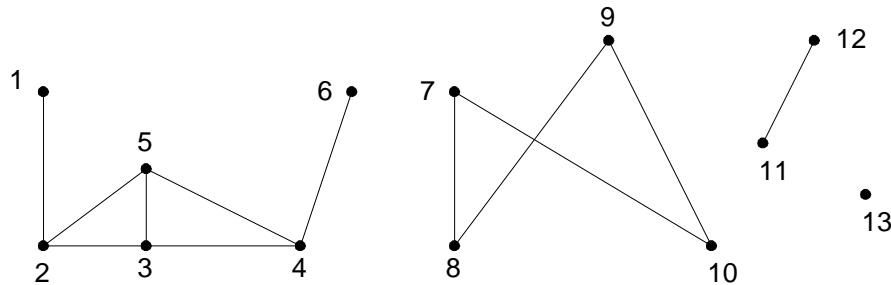
Misalkan  $G = (V, E)$  adalah sebuah graf.  $G_1 = (V_1, E_1)$  adalah **upagraf** (*subgraph*) dari  $G$  jika  $V_1 \subseteq V$  dan  $E_1 \subseteq E$ .

**Komplemen** dari upagraf  $G_1$  terhadap graf  $G$  adalah graf  $G_2 = (V_2, E_2)$  sedemikian sehingga  $E_2 = E - E_1$  dan  $V_2$  adalah himpunan simpul yang anggota-anggota  $E_2$  bersisian dengannya. Misalnya pada gambar 8.17, gambar (b) merupakan upagraf dari Graf  $G_1$ , sedangkan gambar (c) adalah komplemen dari upagraf pada gambar (b).



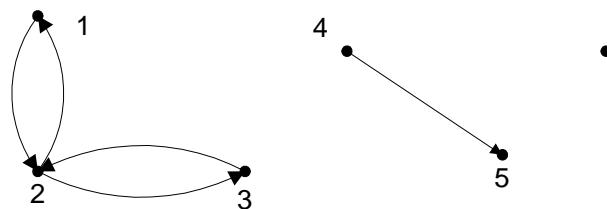
Gambar 8.17:Upagraf dan komplemen upagraf

**Komponen** graf (*connected component*) adalah jumlah maksimum upagraf terhubung dalam graf  $G$ . Misalnya pada gambar 8.18, graf  $G$  mempunyai 4 komponen.



Gambar 8.18:Upagraf dari graf  $G$

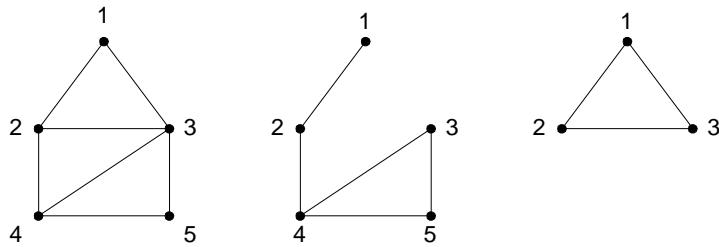
Pada graf berarah, komponen terhubung kuat (*strongly connected component*) adalah jumlah maksimum upagraf yang terhubung kuat. Pada gambar 8.19, graf mempunyai 2 buah komponen terhubung kuat.



Gambar 8.19:Graf terhubung kuat

## 10. Upagrap Rentang (*Spanning Subgraph*)

Upagraf  $G_1 = (V_1, E_1)$  dari  $G = (V, E)$  dikatakan **upagrap rentang** jika  $V_1 = V$  (yaitu  $G_1$  mengandung semua simpul dari  $G$ ).

(a) graf  $G$ , (b) upagraf rentang dari  $G$ , (c) bukan upagraf rentang dari  $G$ 

Gambar 8.20

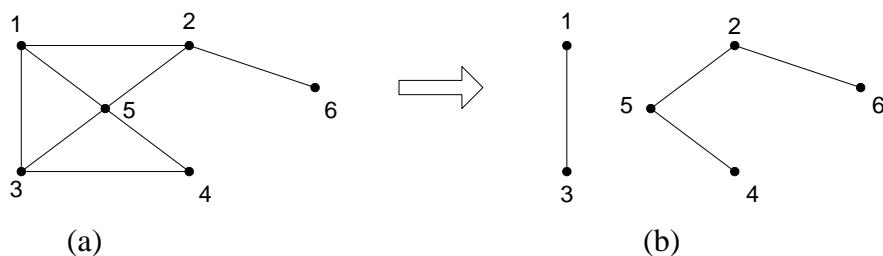
## 11. Cut-set

*Cut-set* dari graf terhubung  $G$  adalah himpunan sisi yang bila dibuang dari  $G$  menyebabkan  $G$  tidak terhubung. Jadi, *cut-set* selalu menghasilkan dua buah komponen.

Pada graf yang terdapat pada gambar 8.21,  $\{(1,2), (1,5), (3,5), (3,4)\}$  adalah *cut-set*.

Terdapat banyak *cut-set* pada sebuah graf terhubung.

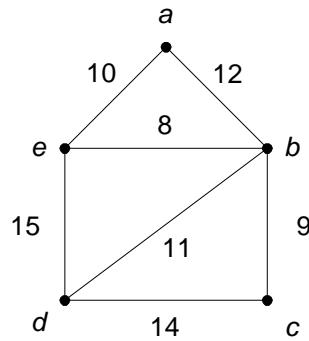
Himpunan  $\{(1,2), (2,5)\}$  juga adalah *cut-set*,  $\{(1,3), (1,5), (1,2)\}$  adalah *cut-set*,  $\{(2,6)\}$  juga *cut-set*, tetapi  $\{(1,2), (2,5), (4,5)\}$  bukan *cut-set* sebab himpunan bagiannya,  $\{(1,2), (2,5)\}$  adalah *cut-set*.



Gambar 8.21

## 12. Graf Berbobot (Weighted Graph)

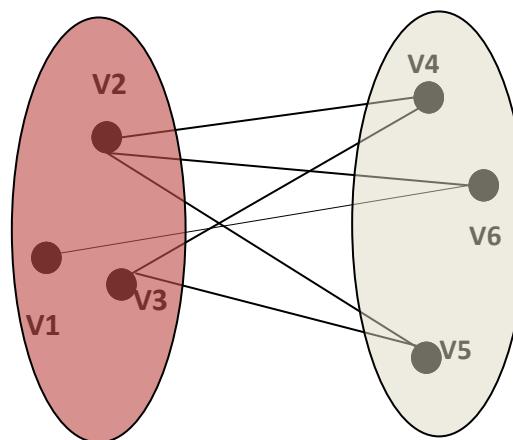
*Graf berbobot* adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot). Hal ini dapat dilihat pada gambar 8.22. Jumlah bobot semua sisi disebut Total bobot.



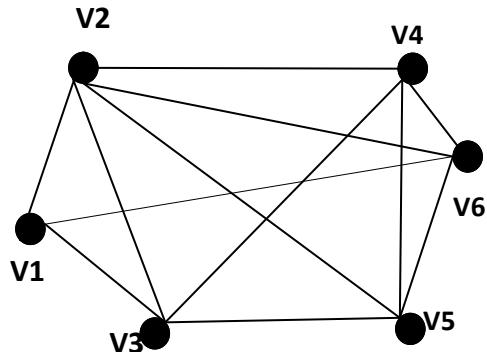
Gambar 8.22: Graf berbobot

### 8.3 Graf bipartite (*Bipartite Graph*)

Sebuah graf sederhana dikatakan *bipartite* jika simpul-simpulnya dapat dibagi ke dalam 2 domain, yaitu V1 dan V2 berdasarkan pengelompokan edge-edgenya.



Gambar 8.23: Bipartite graph.



Gambar 8.24: Non-Bipartite graph

#### 8.4 Graf Isomorfik (Isomorphic Graph)

Dua graf dikatakan saling isomorfik jika dua buah graf tersebut sama tetapi secara geometri penggambarannya berbeda.

**Definisi 8.3:**

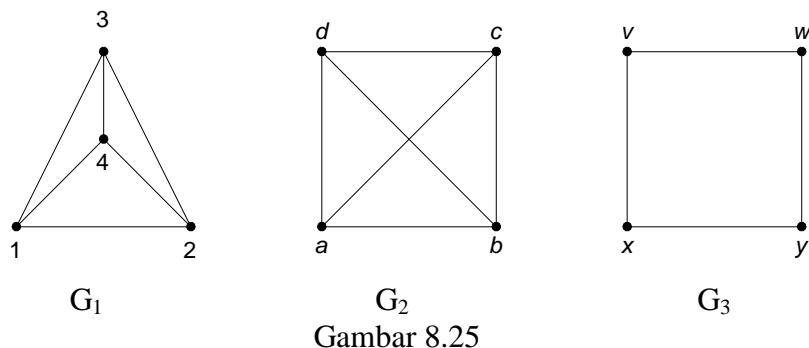
Dua buah graf  $G_1$  dan  $G_2$  dikatakan isomorfik jika terdapat korepondensi satu-satu antara simpul-simpul keduanya dan antara sisi-sisi keduanya sedemikian sehingga jika sisi  $e$  bersisian dengan simpul  $u$  dan  $v$  di  $G_1$ , maka  $e'$  yang berkorespondensi di  $G_2$  juga harus bersisian dengan simpul  $u'$  dan  $v'$  di  $G_2$ .

Dari definisi 8.3, dapat disimpulkan bahwa dua graf isomorfik jika memenuhi syarat:

1. Jumlah simpul harus sama
2. Jumlah sisi harus sama
3. Jumlah simpul yang sama berderajat tertentu

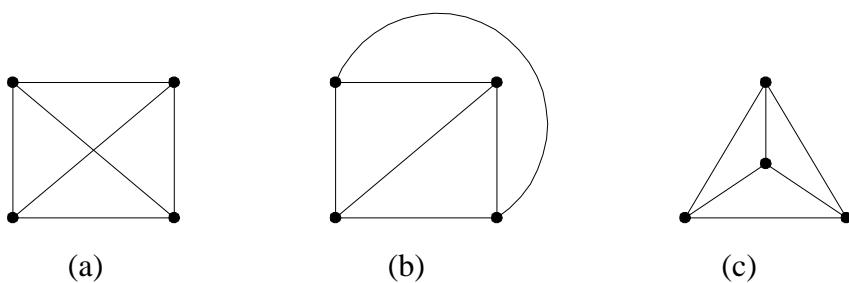
Namun dari ketiga syarat tersebut belum tentu benar karena harus dilihat juga secara visual.

Pada gambar 8.25, terlihat bahwa  $G_1$  isomorfik dengan  $G_2$  tetapi tidak isomorfik dengan  $G_3$ .



### 8.5 Graf Planar dan Bidang

Graf planar adalah graf yang dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi-sisi tidak saling memotong (bersilangan). Jika tidak maka dinamakan graf tak planar. Hal ini bisa dilihat pada gambar 8.26 (a) dan (b). Graf planar yang digambar dengan sisi-sisi yang tidak saling berpotongan disebut graf bidang. Misalnya dapat dilihat pada gambar 8.26 (a) dan (c).



Gambar 8.26: Graf Planar

Pada graf planar sederhana terhubung dengan  $f$  buah wilayah,  $n$  buah simpul, dan  $e$  buah sisi ( $e > 2$ ) selalu berlaku:  $e \leq 3n - 6$ .

Ketidaksamaan yang terakhir dinamakan **ketidaksamaan Euler**, yang dapat digunakan untuk menunjukkan keplanaran suatu graf sederhana. Sehingga graf planar memenuhi ketidaksamaan Euler, sebaliknya jika tidak planar maka ketidaksamaan tersebut tidak dipenuhi.

Untuk menentukan dengan tegas keplanaran suatu graf, dapat digunakan Teorema Kuratowski pada Teorema 8.4.

#### **Teorema 8.4 (Teorema Kuratowski)**

Graf  $G$  adalah graf tidak planar jika dan hanya jika  $G$  mengandung upagraf yang isomorfik dengan graf lengkap yang mempunyai lima buah simpul ( $K_5$ ) atau graf terhubung teratur dengan 6 buah simpul dan 9 buah sisi ( $K_{3,3}$ ) atau homeomorfik dengan salah satu dari keduanya.

### **8.6 Lintasan dan Sirkuit/Rangkaian Euler**

Lintasan Euler adalah lintasan yang melalui masing-masing sisi didalam graf tepat satu kali. Rangkaian Euler adalah rangkaian yang melalui masing-masing sisi tepat satu kali. Jadi keberadaan lintasan Euler atau rangkaian Euler di dalam suatu graf ada kaitannya dengan derajat simpul. Graf yang mempunyai rangkaian Euler disebut **graf Euler** (*Eulerian graph*). Graf yang mempunyai lintasan Euler dinamakan juga graf **semi-Euler** (*semi-Eulerian graph*). Berikut ini akan ditunjukkan beberapa teorema yang berasal dari Euler.

#### **Teorema 8.5:**

Suatu graf tak berarah mempunyai lintasan Euler jika dan hanya jika ia terhubung dan mempunyai nol atau dua simpul berderajat ganjil.

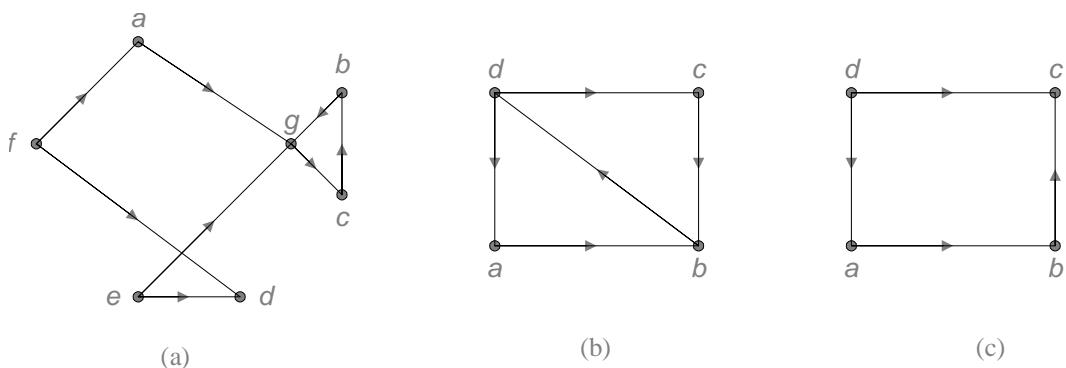
**Teorema 8.6:**

Suatu graf tak berarah mempunyai rangkaian Euler jika dan hanya jika ia terhubung dan semua simpulnya berderajat genap.

**Teorema 8.7:**

Suatu graf berarah mempunyai rangkaian Euler jika dan hanya jika ia terhubung dan derajat setiap simpulnya sama dengan derajat keluarnya. Suatu graf berarah mempunyai lintasan Euler jika dan hanya jika setiap simpul memiliki derajat-masuk dan derajat-keluar sama kecuali dua simpul, yang pertama memiliki derajat-keluar satu lebih besar derajat-masuk, dan yang kedua memiliki derajat-masuk satu lebih besar dari derajat-keluar.

Beberapa contoh graf ditunjukkan pada gambar 8.27. Gambar 8.27 (a) merupakan graf berarah Euler, (b) merupakan graf berarah semi Euler, dan (c) merupakan graf berarah bukan Euler maupun semi Euler.



Gambar 8.27.

**8.7 Lintasan dan Sirkuit/Rangkaian Hamilton**

Lintasan Hamilton adalah lintasan yang melalui setiap simpul dalam graf tepat satu kali.

**Rangkaian Hamilton** ialah rangkaian yang melalui tiap simpul di dalam graf tepat satu kali, kecuali simpul asal (sekaligus simpul akhir) yang dilalui dua kali. Graf yang memiliki rangkaian Hamilton dinamakan **graf Hamilton**, sedangkan graf yang hanya memiliki lintasan Hamilton disebut **graf semi-Hamilton**.

Berikut ini akan diberikan syarat cukup agar suatu graf bisa disebut sebagai graf Hamilton, seperti yang terdapat **Teorema 8.8**.

### Teorema 8.8.

Syarat cukup supaya graf sederhana  $G$  dengan  $n$  ( $\geq 3$ ) buah simpul adalah graf Hamilton ialah bila derajat tiap simpul paling sedikit  $n/2$  (yaitu,  $\deg(v) \geq n/2$  untuk setiap simpul  $v$  di  $G$ ).

Berikut ini akan diberikan teorema yang terkait.

### Teorema 8.8.

Setiap graf lengkap adalah graf Hamilton.

### Teorema 8.9.

Di dalam graf lengkap  $G$  dengan  $n$  buah simpul ( $n \geq 3$ ), terdapat  $(n - 1)!/2$  buah rangkaian Hamilton.

### Teorema 8.10.

Di dalam graf lengkap  $G$  dengan  $n$  buah simpul ( $n \geq 3$  dan  $n$  ganjil), terdapat  $(n - 1)/2$  buah rangkaian Hamilton yang saling lepas (tidak ada sisi yang beririsan). Jika  $n$  genap dan  $n \geq 4$ , maka di dalam  $G$  terdapat  $(n - 2)/2$  buah rangkaian Hamilton yang saling lepas.

## 8.8 Aplikasi graf

Graf banyak sekali diaplikasikan dalam kehidupan kita sehari-hari, antara lain dalam persoalan optimasi untuk menentukan lintasan terpendek, persoalan tukang pos, dan masih banyak lagi. Berikut ini akan diberikan aplikasi graf terkait **lintasan minimum/terpendek**. Misalnya jalur mana diantara dua kota yang paling dekat. Penyelesaian kasus ini dengan menggunakan Algoritma Warshall atau Algoritma Dijkstraa. Algoritma Dijkstraa lebih efisien dibandingkan Algoritma Warshall, walaupun aplikasinya lebih sulit.

Berikut ini akan dijelaskan masing-masing Algoritma tersebut:

### a. Algoritma Warshall

Masukan dari algoritma ini adalah matriks hubung graf berarah berbobot dan keluarannya adalah lintasan terpendek dari semua titik ke semua titik.

Misalnya:  $W_0$  adalah matriks hubung berarah berbobot mula-mula

$W^*$  adalah matrik hubung minimal dengan  $w_{ij}^* = \text{lintasan terpendek dari titik } v_i \text{ ke } v_j$ .

Algoritma Warshall adalah sebagai berikut:

$$W=W_0$$

Untuk  $k = 1$  hingga  $n$ , lakukan:

Untuk  $i = 1$  hingga  $n$ , lakukan:

Untuk  $j = 1$  hingga  $n$ , lakukan:

jika  $W[i,j] > W[i,k] + W[k,j]$  maka

Tukar  $W[i,j]$  dengan  $W[i,k] + W[k,j]$

$$W^*=W$$

### b. Algoritma Dijkstra

Misalkan:  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

$L$  = himpunan titik-titik elemen  $V(G)$  yang sudah terpilih dalam jalur  
lintasan terpendek

$D(j)$  = jumlah bobot lintasan terkecil dari  $v_1$  ke  $v_j$

$W(i,j)$  = bobot garis dari titik  $v_i$  ke  $v_j$

$w^*(1,j)$ = jumlah bobot lintasan terkecil dari  $v_1$  ke  $v_j$

Algoritma Dijkstra dapat dijelaskan sebagai berikut:

$L = \{ \} ;$

$V = \{v_2, v_3, \dots, v_n\}.$

Untuk  $i=2, \dots, n$ , lakukan  $D(i)=W(1,i)$

Selama  $v_n \notin L$ , lakukan:

a. Pilih titik  $v_k \in V-L$  dengan  $D(k)$  terkecil.

$L=L \cup \{v_k\}$

b. Untuk setiap  $v_j \in V-L$  lakukan:

Jika  $D(j) > D(k) + W(k,j)$  maka ganti  $D(j)$  dengan  $D(k) + W(k,j)$

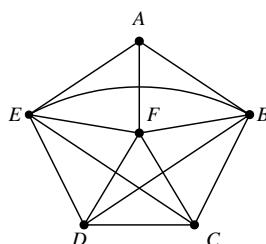
Untuk setiap  $v_j \in V$ ,  $w^*(1,j)=D(j)$

### Soal Latihan

1. Gambarkan graf yang menggambarkan sistem pertandingan  $\frac{1}{2}$  kompetisi (*round robin tournament*) yang diikuti oleh 6 tim.
2. Tentukan jumlah simpul pada graf sederhana jika mempunyai 12 buah sisi dan tiap simpul berderajat 2.
3. Berapa jumlah maksimum dan minimum simpul pada graf sederhana yang mempunyai 12 buah sisi dan tiap simpul berderajat  $\geq 3$ ?
4. Berapa jumlah maksimum dan jumlah minimum simpul pada graf sederhana yang mempunyai 16 buah sisi dan tiap simpul berderajat sama dan  $\geq 4$  ?
5. Gambarkan dua buah graf dengan lima buah simpul yang isomorfik
6. Gambarkan graf tidak berarah dari matriks bertetangga (*adjency matrix*) berikut

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

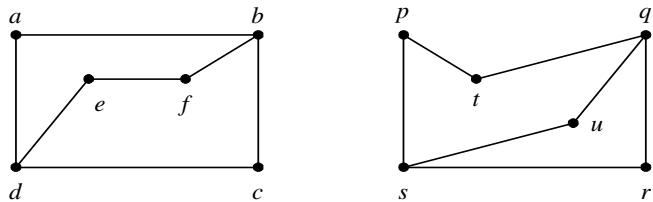
7. Misalkan graf sederhana planar dan terhubung memiliki 24 buah simpul, masing-masing simpul berderajat 4. Representasi planar dari graf tersebut membagi bidang datar menjadi sejumlah wilayah atau muka. Berapa banyak wilayah yang terbentuk?
8. Perlihatkan dengan Teorema Kuratowski bahwa dua buah graf di bawah ini tidak planar!



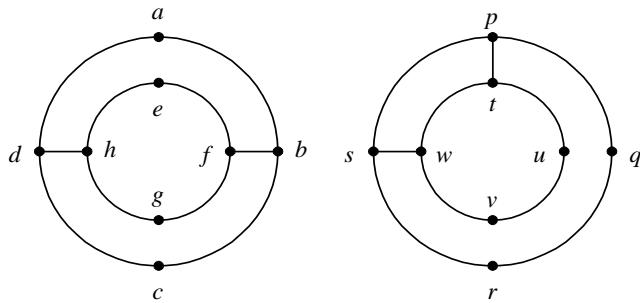
9. Suatu departemen mempunyai 6 kelompok kerja yang setiap bulannya masing-masing selalu mengadakan rapat satu kali. Keenam kelompok kerja dengan masing-masing anggotanya adalah:  $K_1 = \{Amir, Budi, Yanti\}$ ,  $K_2 = \{Budi, Hasan, Tommy\}$ ,  $K_3 = \{Amir, Tommy, Yanti\}$ ,  $K_4 = \{Hasan, Tommy, Yanti\}$ ,  $K_5 = \{Amir, Budi\}$ ,  $K_6 = \{Budi, Tommy, Yanti, Hasan\}$ .

Berapa sedikitnya banyak waktu rapat berbeda yang harus direncanakan sehingga tidak ada anggota kelompok kerja yang dijadwalkan rapat pada waktu yang sama. Gambarkan graf yang merepresentasikan persoalan ini lalu (sisi menyatakan apa, simpul menyatakan apa) tentukan jumlah waktu rapat ini.

10. Apakah pasangan graf berikut isomorfik?



11. Apakah pasangan graf berikut isomorfik?



12. Gambarlah dua pasangan graf yang isomorfik dengan graf beratur berderajat 3 yang mempunyai delapan buah simpul.
13. Diberikan graf planar yang mempunyai simpul sebanyak 24 buah, masing-masing berderajat 4. Representasi planar dari graf tersebut membagi bidang datar menjadi sejumlah wilayah atau muka. Berapa banyak wilayah yang dibentuk?

14. Untuk setiap soal di bawah, sebutkan apakah ada graf sederhana dengan lima simpul yang memiliki derajat untuk masing-masing simpul sebagai berikut? Jika ada, gambarkan grafnya!
- a) 3,3,2,3,3
  - b) 4,3,1,4,2
  - c) 2,1,3,0,2
  - d) 4,4,3,3,3
15. Gambarkan dua buah graf yang memiliki lintasan Hamilton tetapi tidak mempunyai rangkaian Hamilton.

# BAB 9

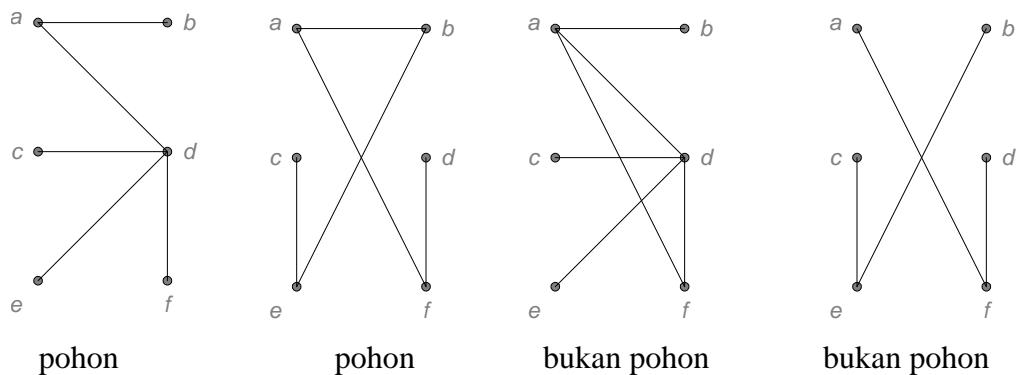
## POHON (TREE)

Pohon adalah salah satu jenis graf yang tidak mengandung rangkaian. Konsep pohon sangat penting karena aplikasinya sangat luas di berbagai bidang ilmu, khususnya ilmu komputer. Dalam kehidupan sehari-hari banyak dijumpai aplikasi pohon seperti struktur keluarga, organisasi pertandingan, dan sebagainya.

Pada bab ini akan dibahas mengenai pohon sebagai struktur data rekursif yang merupakan bagian dari struktur data.

### 9.1 Definisi pohon dan sifat-sifatnya

Pohon didefinisikan sebagai graf tak berarah terhubung yang tidak mengandung rangkaian. Sedangkan graf tak berarah tak terhubung dan tidak mengandung rangkaian disebut pohon. Atau dengan kata lain, hutan adalah kumpulan pohon-pohon yang saling lepas. Sifat-sifat pohon dapat ditunjukkan pada **Teorema 9.1**. Berikut ini diberikan contoh pohon dan bukan pohon yang dapat dilihat pada gambar 9.1.



Gambar 9.1: Contoh pohon dan bukan pohon

### Teorema 9.1

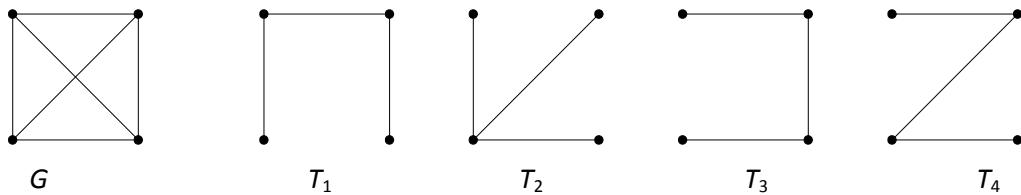
Misalkan  $G = (V, E)$  adalah graf tak-berarah sederhana dan jumlah simpulnya  $n$ .

Maka, semua pernyataan di bawah ini adalah ekivalen:

1.  $G$  adalah pohon.
2. Setiap pasang simpul di dalam  $G$  terhubung dengan lintasan tunggal.
3.  $G$  terhubung dan memiliki  $m = n - 1$  buah sisi.
4.  $G$  tidak mengandung rangkaian dan memiliki  $m = n - 1$  buah sisi.
5.  $G$  tidak mengandung rangkaian dan penambahan satu sisi pada graf akan membuat hanya satu rangkaian.
6.  $G$  terhubung dan semua sisinya adalah jembatan

## 9.2 Pohon rentang (*Spanning Tree*)

Pohon rentang dari graf terhubung adalah upagraf rentang yang berupa pohon. Pohon rentang didapat dengan cara memutus rangkaian di dalam graf. Hal ini bisa dilihat pada gambar 9.2.



Gambar 9.2: Pohon rentang

Setiap graf terhubung paling sedikit mempunyai satu buah pohon rentang. Graf tak terhubung dengan  $k$  komponen mempunyai  $k$  buah hutan rentang yang disebut hutan rentang.

Pohon rentang banyak diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari, misalnya rute pesan pada jaringan komputer dan masalah jaringan listrik.

## POHON RENTANG MINIMUM

Permasalahan pohon rentang minimum misalnya jika dalam suatu daerah mau dipasang jaringan listrik, maka agar biaya pemasangannya minimum maka dapat menggunakan metode tertentu. Dalam hal ini sudah dalam lingkup permasalahan pohon rentang minimum. Untuk mencari pohon rentang dengan total bobot minimum, cara yang paling sederhana adalah dengan mendaftarkan semua pohon rentang yang dibuat dan menghitung bobotnya. Selanjutnya dipilih total bobot yang paling kecil. Metode ini tidak efisien terutama pada graf yang cukup besar. Sehingga ada metode yang lebih efisien, yaitu Algoritma Kruskal dan Algoritma Prim.

### a. Algoritma kruskal

Sebelum langkah pertama, yang harus dilakukan adalah sisi-sisi dari graf diurut menaik berdasarkan bobotnya mulai dari bobot terkecil sampai terbesar. Pada setiap langkah dipilih sisi dengan bobot terkecil, tetapi tidak membentuk loop dengan sisi-sisi yang sudah dipilih terdahulu (rangkaian). Langkah-langkah pada Algoritma Kruskal, adalah:

1. T masih kosong
2. Pilih sisi  $(u,v)$  dengan bobot minimum yang tidak membentuk rangkaian di T.  
Tambahkan  $(u,v)$  ke dalam T.
3. Ulangi langkah 2 sebanyak  $(n-1)$  kali

```
procedure Kruskal(input G : graf, output T : pohon)
{ Membentuk pohon rentang minimum T dari graf terhubung -berbobot G.
Masukan: graf-berbobot terhubung G = (V, E) , dengan $|V| = n$
Keluaran: pohon rentang minimum T = (V, E')
}
```

#### Deklarasi

i, p, q, u, v : integer

#### Algoritma

(Asumsi: sisi-sisi dari graf sudah diurut menaik berdasarkan bobotnya dari bobot kecil ke bobot besar)

$T \leftarrow \emptyset$

while jumlah sisi T <  $n-1$  do

Pilih sisi  $(u,v)$  dari E yang bobotnya terkecil

if  $(u,v)$  tidak membentuk siklus di T then

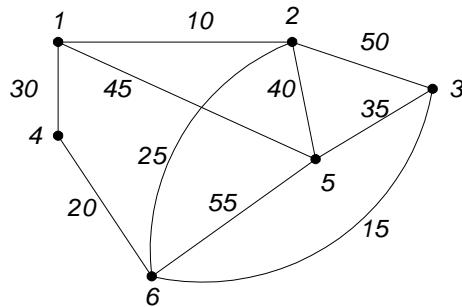
$T \leftarrow T \cup \{(u,v)\}$

endif

endfor

**Contoh 9.1:**

Carilah pohon rentang dari graf pada gambar 9.3 dengan menggunakan Algoritma Kruskal.



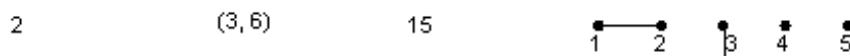
Gambar 9.3: Graf

Penyelesaian:

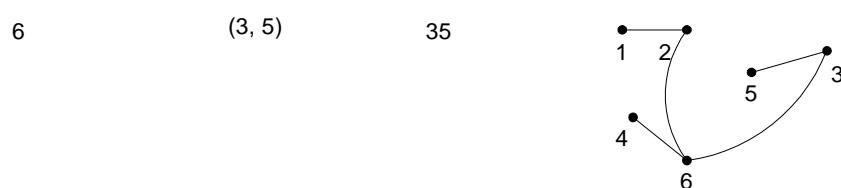
Sisi-sisi diurut menaik:

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Sisi  | (1,2) | (3,6) | (4,6) | (2,6) | (1,4) | (3,5) | (2,5) | (1,5) | (2,3) | (5,6) |
| Bobot | 10    | 15    | 20    | 25    | 30    | 35    | 40    | 45    | 50    | 55    |

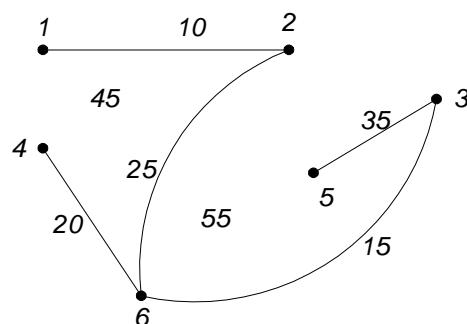
| Langkah | Sisi   | Bobot | Hutan rentang           |
|---------|--------|-------|-------------------------|
| 0       |        |       | 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * |
| 1       | (1, 2) | 10    | 1 ————— 2 *             |



5                     $(1, 4)$                     30                    ditolak



Pohon merentang minimum yang dihasilkan:



Dengan bobot =  $10 + 25 + 15 + 20 + 35 = 105$ .

## b. Algoritma prim

Algoritma prim dimulai dari graf yang kosong sama sekali. Langkah-langkah pada algoritma prim dapat ditunjukkan sebagai berikut:

1. Ambil sisi dari graf G yang berbobot minimum, masukkan ke dalam T.
2. Pilih sisi  $(u,v)$  yang mempunyai bobot minimum dan bersisian dengan dengan simpul T, tetapi  $(u,v)$  tidak membentuk rangkaian di T. Masukkan  $(u,v)$  ke dalam T.
3. Ulangi langkah 2 sebanyak  $(n-1)$  kali

```
procedure Prim(input G : graf, output T : pohon)
{ Membentuk pohon rentang minimum T dari graf terhubung-berbobot G.
Masukan: graf-berbobot terhubung G = (V, E), dengan |V| = n
Keluaran: pohon rentang minimum T = (V, E')
}
```

### Deklarasi

i, p, q, u, v : integer

### Algoritma

Cari sisi  $(p,q)$  dari E yang berbobot terkecil

$T \leftarrow \{(p,q)\}$

for  $i \leftarrow 1$  to  $n-2$  do

Pilih sisi  $(u,v)$  dari E yang bobotnya terkecil namun

bersisian dengan simpul di T

$T \leftarrow T \cup \{(u,v)\}$

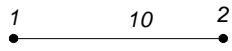
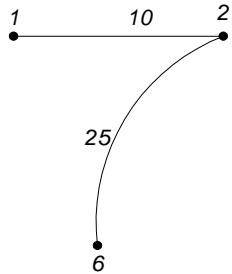
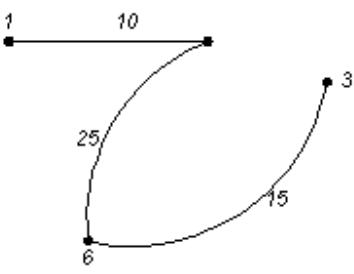
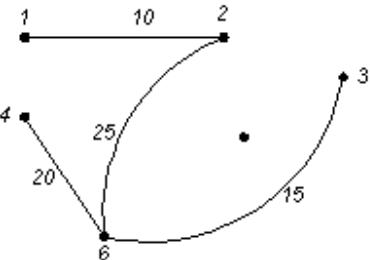
endfor

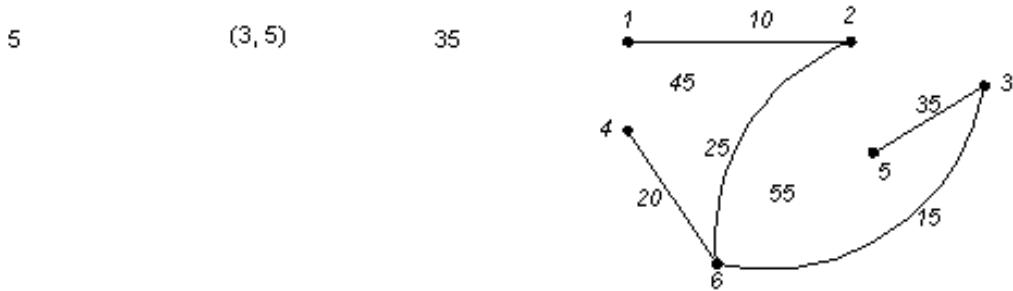
Pohon rentang yang dihasilkan tidak selalu unik, meskipun bobotnya sama. Hal ini terjadi jika ada beberapa sisi yang berbobot sama.

**Contoh 9.2:**

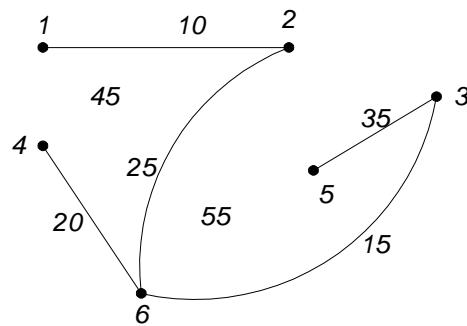
Carilah pohon rentang dari graf pada gambar 9.3 (pada **contoh 9.1**) dengan menggunakan Algoritma Prim.

Penyelesaian:

| Langkah | Sisi   | Bobot | Pohon rentang                                                                        |
|---------|--------|-------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 1       | (1, 2) | 10    |    |
| 2       | (2, 6) | 25    |   |
| 3       | (3, 6) | 15    |  |
| 4       | (4, 6) | 20    |  |



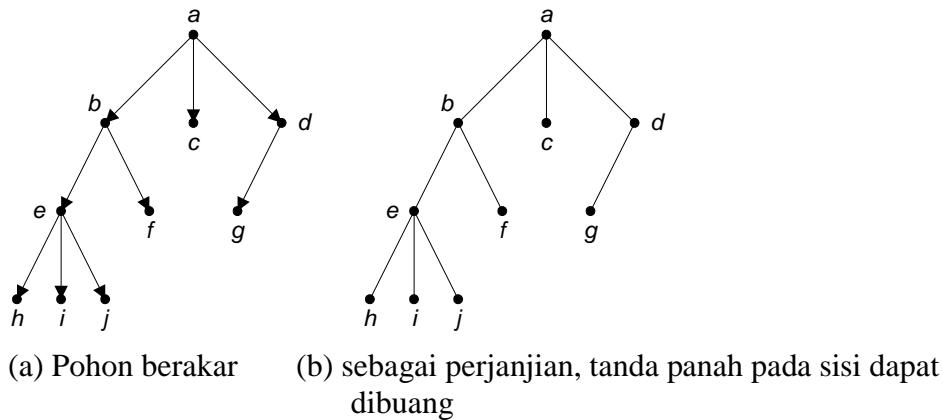
Pohon rentang minimum yang dihasilkan:



dengan bobot =  $10 + 25 + 15 + 20 + 35 = 105$ .

### 9.3 Pohon berakar

Pohon yang satu buah simpulnya diperlakukan sebagai akar dan sisi-sisinya diberi arah sehingga menjadi graf berarah dinamakan **pohon berakar** (*rooted tree*).



Gambar 9.4: Pohon berakar

### Terminologi pada pohon berakar

#### a. Anak (*child* atau *children*) dan Orangtua (*parent*)

Pada gambar 9.4 (a), dapat dilihat bahwa:

*b*, *c*, dan *d* adalah anak-anak simpul *a*,

*a* adalah orangtua dari anak-anak itu

#### b. Lintasan

Pada gambar 9.4 (a), lintasan dari *a* ke *j* adalah *a, b, e, j* dengan panjang lintasan dari *a* ke *j* adalah 3.

#### c. Saudara kandung

Pada gambar 9.4 (a), *f* adalah saudara kandung *e*, tetapi *g* bukan saudara kandung *e*, karena orangtua mereka berbeda.

#### d. Upapohon

Upapohon adalah bagian dari pohon berakar. Pada gambar 9.4 (a), salah satu upapohon adalah  $\{b, e, f, h, i, j\}$ .

#### e. Derajat

**Derajat** sebuah simpul adalah jumlah upapohon (atau jumlah anak) pada simpul tersebut. Pada gambar 9.4 (b) dapat dilihat bahwa derajat *a* adalah 3, derajat *b* adalah 2, derajat *d* adalah satu dan derajat *c* adalah 0. Jadi, derajat yang dimaksudkan di sini adalah derajat-keluar.

Derajat maksimum dari semua simpul merupakan derajat pohon itu sendiri. Pohon pada gambar 9.4 (a) mempunyai derajat 3.

#### f. Daun

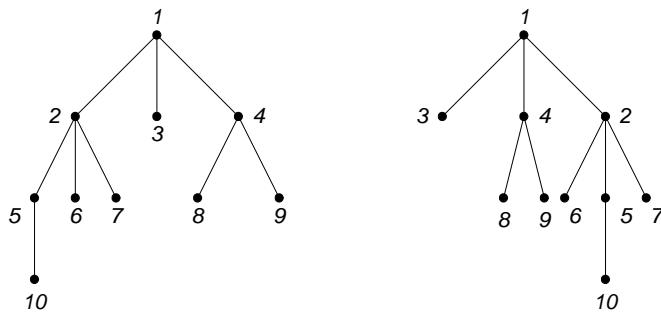
Daun adalah simpul yang berderajat nol (atau tidak mempunyai anak). Pada gambar 9.4 (a), simpul *h, i, j, f, c, l*, dan *m* adalah daun.

g. Simpul dalam

Simpul yang mempunyai anak disebut **simpul dalam**. Pada gambar 9.4 (a), simpul *b*, *d*, *e*, *g*, dan *k* adalah simpul dalam.

#### 9.4 Pohon Terurut

Yang dimaksud dengan **pohon terurut** (*ordered tree*) adalah pohon berakar yang urutan anak-anaknya penting. Misalnya pada gambar 9.5 menunjukkan pohon terurut yang berbeda.



Gambar 9.5: Pohon terurut berbeda

#### 9.5 Pohon *n*-ary

Yang dimaksud dengan **pohon *n*-ary** adalah pohon berakar yang setiap simpul cabangnya mempunyai paling banyak *n* buah anak. Pohon *n*-ary dikatakan **teratur** atau **penuh** (*full*) jika setiap simpul cabangnya mempunyai tepat *n* anak.

#### 9.6 Pohon Biner

Pohon biner ini sangat penting karena banyak diaplikasikan di berbagai bidang terutama ilmu komputer. Misalnya untuk mengambil suatu keputusan dalam suatu organisasi. Pada subbab berikutnya akan dijelaskan beberapa aplikasi pohon biner.

Yang dimaksud pohon biner adalah pohon n-ary dengan  $n=2$ . Setiap simpul dalam pohon biner maksimal mempunyai 2 anak, yang dibedakan antara anak kiri dan anak kanan. Karena ada perbedaan ini, maka pohon biner merupakan pohon terurut.

## 9.7 Aplikasi pohon biner

Aplikasi pohon biner banyak sekali. Pada subbab ini hanya akan dijelaskan beberapa aplikasi dalam ilmu komputer, antara lain kode awalan dan kode Huffman.

### a. Kode awalan (*prefix code*)

Kode awalan adalah himpunan kode sedemikian sehingga tidak ada anggota kumpulan yang merupakan awalan dari anggota yang lain.

Misalnya himpunan {000,001,01}.

### b. Kode Huffman

Kode Huffman ini bertujuan untuk meminimumkan jumlah bit yang dibutuhkan dengan cara memperpendek kode untuk setiap karakter, terutama untuk karakter yang kekerapan (frekuensi) kemunculannya besar. Kode Huffman ini tidak bersifat unik, artinya kode untuk setiap karakter berbeda-beda pada setiap pesan tergantung pada kekerapan kemunculan karakter tersebut di dalam pesan. Untuk mendapatkan kode Huffman, mula-mula yang dilakukan adalah menghitung kekerapan kemunculan tiap symbol didalam teks. Kemudian dicari peluangnya.

Algoritma pembentukan pohon Huffman adalah:

1. Pilih dua simbol dengan peluang (*probability*) paling kecil
2. Pilih dua simbol berikutnya, termasuk simbol baru, yang mempunyai peluang terkecil.
3. Ulangi langkah 1 dan 2 sampai seluruh simbol habis

**Contoh 9.3:**

Tentukan kode Huffman untuk string 'NANASENANG' (tidak termasuk tanda petik), beserta gambar pohon huffman untuk string tersebut.

Penyelesaian:

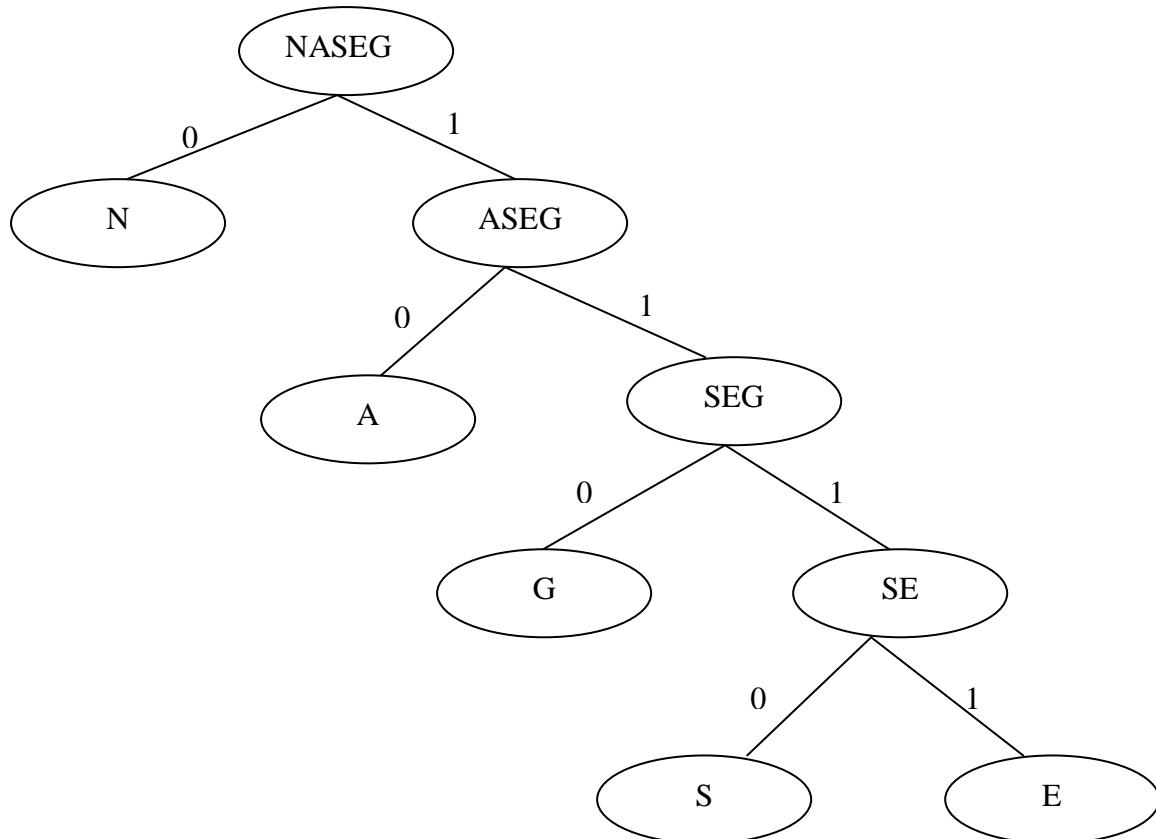
| Simbol | Kekerapan | Peluang | Kode Huffman |
|--------|-----------|---------|--------------|
| N      | 4         | 4/10    | 0            |
| A      | 3         | 3/10    | 10           |
| S      | 1         | 1/10    | 1110         |
| E      | 1         | 1/10    | 1111         |
| G      | 1         | 1/10    | 110          |

Untuk mendapatkan pohon Huffman dengan mengikuti langkah-langkah sebagai berikut:

- Pilih dua simbol dengan peluang paling kecil. Dalam hal ini ada 3 yaitu S,E, dan G. Kita pilih dua diantaranya, misalnya S dan E. Kedua simbol dikombinasikan menjadi SE dengan peluang  $1/10 + 1/10 = 2/10$ .
- Pilih dua simbol berikutnya termasuk simbol baru (SE) pada (a), yang mempunyai peluang paling kecil. Dalam hal ini G. Kedua simbol dikombinasikan menjadi SEG yang mempunyai peluang  $1/10 + 2/10 = 3/10$ .
- Prosedur selanjutnya sama dengan (b). Dalam hal ini mengkombinasikan A dengan SEG menjadi ASEG dengan peluang  $3/10 + 3/10 = 6/10$ .

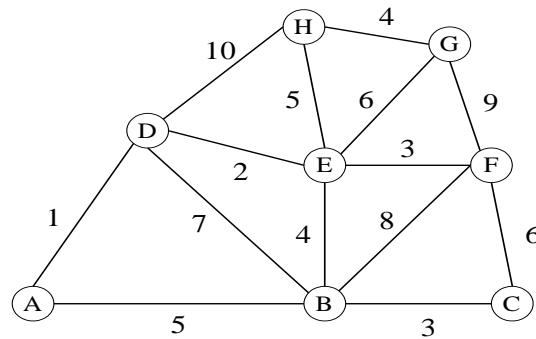
- d. Selanjutnya mengkombinasikan ASEG dengan N menjadi NASEG dengan peluang  $6/10 + 4/10 = 10/10 = 1$ .

Sehingga pohon Huffman dapat digambarkan sebagai berikut:



## SOAL LATIHAN

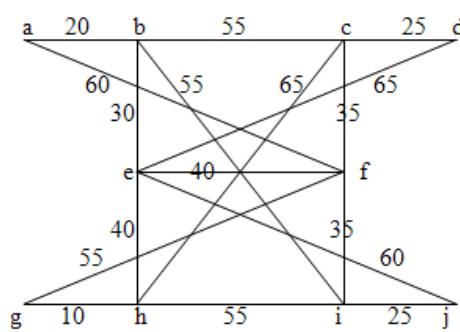
1. Gambarkan semua pohon rentang dari graf lengkap dengan empat buah simpul.
  2. Carilah pohon merentang dari graf pada gambar 9.6 dengan menggunakan Algoritma Prim.



Gambar 9.6: Graf

3. Carilah pohon merentang dari graf pada gambar 9.7 dengan menggunakan (tunjukkan langkah-langkah pembuatannya) :

  - a. Algoritma Prim
  - b. Algoritma Kruskal



Gambar 9.7: graf

4. Sebuah pohon  $m$ -ary penuh (*full  $m$ -ary tree*) mempunyai 81 buah daun dan tinggi 4. Tentukan batas atas (*upper bound*) dan batas bawah (*lower bound*) untuk  $m$

5. Berapa banyak daun pada pohon  $3\text{-ary}$  dengan 100 simpul?
6. Misalkan  $n$  bilangan antara 100 dan 300 sedemikian hingga pohon  $m\text{-ary}$  dengan  $n$  buah simpul adalah pohon  $m\text{-ary}$  penuh dengan kedalaman 3 (asumsi bahwa pohon dengan hanya satu simpul memiliki kedalaman 0). Tentukan dua nilai yang mungkin untuk  $n$ .
7. Tentukan kode Huffman untuk string " hypochondriac" (tidak termasuk tanda petik).  
Syarat pada pohon Huffman yang dibangun ialah simbol dengan peluang lebih kecil sebagai anak kiri dan simbol dengan peluang lebih besar sebagai anak kanan, sisi kiri dilabeli dengan 0 dan sisi kanan dilabeli dengan 1
8. Tentukan kode Huffman untuk string ‘saya suka makan bakso’ (tidak termasuk tanda petik). Kemudian gambar pohon Huffman-nya.

## BAB 10

# ANALISIS ALGORITMA

---

Algoritma adalah prosedur langkah-langkah untuk melakukan suatu pekerjaan tertentu. Tanpa kita sadari, dalam kehidupan sehari-hari kita sering membuat algoritma untuk merencanakan aktivitas kita. Misalnya: membuat jadwal sehari-hari, membuat daftar belanja, menyiapkan masakan, dan sebagainya.

Ada beberapa pertimbangan penting tentang algoritma, yaitu:

- a. Algoritma yang dibuat harus benar, maksudnya mengerjakan pekerjaan yang ditentukan dengan benar.
- b. Seberapa baik hasil dari algoritma tersebut. Algoritma yang baik seharusnya memberikan hasil yang mendekati nilai sebenarnya
- c. Efisiensi algoritma, yaitu efisiensi waktu dan memori.

Dalam bab ini akan dipelajari cara menganalisis algoritma yang berhubungan dengan waktu proses.

### 10.1 Kompleksitas waktu

Kompleksitas waktu adalah waktu yang diperlukan untuk mengeksekusi suatu algoritma. Kompleksitas waktu suatu algoritma banyak dipengaruhi oleh banyaknya perulangan (iterasi). Perbedaan waktu proses sebagai fungsi jumlah data yang diproses sangat erat hubungannya dengan laju pertumbuhan (rate of growth) algoritma yang bersangkutan. Laju pertumbuhan menunjukkan faktor kelipatan waktu proses seiring dengan kenaikan jumlah data. Dalam komputer, laju pertumbuhan ini dinyatakan

dengan notasi O (dibaca big-oh). Jadi kompleksitas algoritma cukup dinyatakan dalam order waktu proses (big-oh).

**Definisi 10.1:**

Misalkan f dan g adalah fungsi berharga real yang didefinisikan pada himpunan bilangan real. Fungsi f berorder g ((ditulis:  $f(x) = O(g(x))$ ) jika dan hanya jika terdaat suatu biangan positif M dan bilangan real  $x_0$  sedemikian sehingga  $|f(x)| \leq M|g(x)|$  untuk  $x > x_0$ .

**Contoh 10.1:**

Buktikan bahwa  $3x^3 + 2x + 7$  adalah  $O(x^3)$  untuk  $x > 1$

Penyelesaian:

Untuk setiap  $x > 1$ ,  $|3x^3 + 2x + 7| = 3x^3 + 2x + 7 \leq 3x^3 + 2x^3 + 7x^3$

Karena  $2x < 2x^3$  dan  $7 < 7x^3$  untuk  $x > 1$ .

$$|3x^3 + 2x + 7| \leq 12x^3 = 12|x^3| \quad (1)$$

untuk setiap  $x > 1$  karena  $x^3$  tidak negatif.

Ambil  $M = 12$  dan  $x_0 = 1$  maka pertidaksamaan (1) menjadi:

$$|3x^3 + 2x + 7| \leq M|x^3|, \forall x > x_0$$

Ini berarti bahwa  $3x^3 + 2x + 7$  adalah  $O(x^3)$ .

Beberapa contoh algoritma, misalnya algoritma lintasan pendek, algoritma Euclidean, algoritma bubblesort.

## SOAL LATIHAN

1. Berapakah nilai kompleksitas waktu asimptotik dalam notasi big-oh untuk

$$T(n) = \begin{cases} k, & n = 1 \\ k + k^2 T(n-1), & n > 1 \end{cases}$$

2. Buktikan atau sangkal kesamaan berikut :

a.  $2n^2 - 100 = O(n)$

b.  $n^3 2^n + n^2 3^n = O(n^3 2^n)$

3. Tentukan kompleksitas waktu dari algoritma dibawah ini jika melihat banyaknya jumlah proses  $a \leftarrow a + 1$

```

for i ← 1 to n do
 for j ← 1 to i do
 for k ← j to n do
 a ← a + 1
 endfor
endfor
endfor

```

4. Tentukan pula nilai  $O$ -besar,  $\Omega$ -besar, dan  $\Theta$ -besar dari algoritma pada latihan soal no 3.

5. Perlihatkan bahwa  $n^2 = O(2^n)$  tapi tidak berlaku sebaliknya.

6. Berikan estimasi Big- $O$  untuk:

a.  $f(n) = 3n \log(n!) + (n^2 + 3) \log n$ , dimana  $n$  adalah bilangan bulat positif.

b.  $f(x) = (x+1) \log(x^2 + 1) + 3x^2$

## **DAFTAR PUSTAKA**

1. Johnsonbaugh, Richard. (1997). *Matematika Diskret ( Edisi Bahasa Indonesia )*. Jilid 2. Jakarta: PT Prenhallindo
2. Lipschutz, Seymour. (1991) *Schaum's 2000 Solved Problems in Discrete Mathematics*. New York: McGraw-Hill
3. Siang, Jong Jek. (2006).*Matematika Diskret dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta: Andi
4. Munir, Rinaldi. (2005). Buku Teks Ilmu Komputer Matematika Diskrit. Edisi ketiga. Penerbit Informatika.