

Interpretasi

Sukmawati Nur E

Ingat Kembali

- ▶ Simbol-simbol dalam logika predikat
- ▶ Definisi Term
- ▶ Definisi Proposisi
- ▶ Definisi Kalimat
- ▶ Representasi kalimat dari bahasa natural ke dalam logika predikat atau sebaliknya



Logika Predikat-Definisi Simbol

Kalimat dalam kalkulus predikat dibuat dari simbol-simbol berikut :

- ▶ Simbol Kebenaran : *true* dan *false*
- ▶ Simbol Konstanta : A, B, C, A_1, B_1, \dots
- ▶ Simbol variabel : x, y, z, x_1, x_2, \dots
- ▶ Simbol fungsi : $f, g, h, g_1, f_1, h_1, \dots$

Setiap simbol fungsi mempunyai arity yang menyatakan banyaknya parameter/ argumen yang harus dipenuhi.

- ▶ Simbol Predikat (menyatakan relasi) : $p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, \dots$

Setiap simbol predikat juga memiliki arity

Catatan :

Objek didalam kalkulus predikat dinyatakan sebagai konstanta atau variabel

Logika Predikat-Definisi Term

Term adalah sebuah ekspresi yang menyatakan objek.

Term dibangun berdasarkan aturan-aturan sebagai berikut :

- ▶ Semua konstanta adalah term
- ▶ Semua variabel adalah term
- ▶ Jika t_1, t_2, \dots, t_n adalah term dengan $(n \geq 1)$ dan f adalah fungsi dengan $\text{arity} = n$, maka fungsi $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ adalah term
- ▶ **Jika A adalah kalimat, sedang s dan t adalah term, maka kondisional if A then s else t adalah term**

Logika Predikat-Definisi Term

Contoh :

- ▶ $f(A, x)$ adalah term, karena

A adalah simbol konstanta, dan semua konstanta adalah term,
 x adalah simbol variabel, dan semua variabel adalah term,
 f adalah simbol fungsi dan semua fungsi adalah term

- ▶ $g(x, f(A, x))$ adalah term, karena

A adalah simbol konstanta, dan semua konstanta adalah term,
 x adalah simbol variabel, dan semua variabel adalah term,
 f dan g adalah simbol fungsi dan semua fungsi adalah term

Logika Predikat-Definisi Proposisi

Proposisi digunakan untuk merepresentasikan relasi antar objek

Proposisi dibangun berdasarkan aturan sebagai berikut :

- ▶ Simbol kebenaran adalah proposisi
- ▶ Jika t_1, t_2, \dots, t_n adalah term dan p adalah simbol predikat dengan n – ary maka $p(t_1, t_2, \dots, t_n)$ adalah proposisi

Contoh :

$p(A, x, f(A, x))$ adalah proposisi, karena

A adalah simbol konstanta dan x adalah simbol variabel, dan f adalah simbol fungsi, dan semua konstanta, variabel, dan fungsi adalah term dan p adalah simbol predikat 3-ary

Kalkulus Predikat-Definisi Kalimat

Kalimat dalam kalkulus predikat dibangun dengan aturan,

- ▶ Setiap proposisi adalah kalimat,
- ▶ Jika A, B, C adalah kalimat maka
 - ▶ **Negasi** ($\text{not } A$) adalah kalimat
 - ▶ **Konjungsi** A dengan B : $(A \text{ and } B)$ adalah kalimat
 - ▶ **Disjungsi** A dengan B : $(A \text{ or } B)$ adalah kalimat
 - ▶ **Implikasi** ($\text{If } A \text{ then } B$) adalah kalimat
 - ▶ **Ekivalensi** A dan B ($A \text{ if and only if } B$) adalah kalimat
 - ▶ **Kondisional if A then B else C adalah kalimat.**
- ▶ Jika A adalah kalimat dan x adalah variabel maka,
 - ▶ **(For all x)** A adalah kalimat
 - ▶ **(For some x)** A adalah kalimat

Catatan : kemunculan A dikatakan berada dalam lingkup kuantifier

Logika Predikat-Definisi Kalimat

Contoh :

1. if (for all x) $p(A, B, x)$ then $g(y)$ else $f(A, y)$ adalah term, karena
 - ▶ A dan B adalah simbol konstanta,
 - ▶ x dan y adalah simbol variabel,
 - ▶ f dan g adalah simbol fungsi, dan
 - ▶ Semua konstanta, variabel dan fungsi adalah term.
 - ▶ p adalah simbol predikat.
 - ▶ (for all x) $p(A, B, x)$ adalah kalimat, $g(y)$ dan $f(B, y)$ adalah term, maka kondisional if (for all x) $p(A, B, x)$ then $g(y)$ else $f(A, y)$ adalah term

Logika Predikat-Definisi Kalimat

2. if (for all x) $p(A, B, x)$ then (for some y) $q(y)$ else not $p(A, B, C)$ adalah kalimat
- ▶ A, B dan C adalah simbol konstanta,
 - ▶ x dan y adalah simbol variabel,
 - ▶ Semua konstanta dan variabel adalah term,
 - ▶ p dan q adalah simbol predikat,
 - ▶ (for all x) $p(A, B, x)$ dan (for some y) $q(y)$ adalah kalimat, maka kondisional if (for all x) $p(A, B, x)$ then (for some y) $q(y)$ else not $p(A, B, C)$ adalah kalimat

Latihan Soal

- ▶ There is a real number which equals its square
- ▶ Every negative real number have a negative cube
- ▶ If the product of (any) two real numbers is positive, then at least one of them is positive
- ▶ Every positive real number is a square of a real number
- ▶ There is a real number x such that, for every real number y , if xy is negative, then y is 0
- ▶ If John is the father of Mary then (there is) someone (who) loves Mary
- ▶ There is someone (x) *who loves everyone who does not love y*
- ▶ Every mother loves all her children

Jawaban

- ▶ $\exists x(x = x^2)$
- ▶ $\forall x(x < 0 \rightarrow x^3 < 0)$
- ▶ $\forall x \forall y(xy > 0 \rightarrow (x > 0 \vee y > 0))$
- ▶ $\forall x(x > 0 \rightarrow \exists y(y^2 = x))$
- ▶ $\exists x \forall y(xy < 0 \rightarrow y = 0)$
- ▶ $(\text{John} = \text{father}(\text{Mary})) \rightarrow \exists x \text{Love}(x, \text{Mary})$
- ▶ $\exists x \forall z(\neg \text{Love}(z, y) \rightarrow \text{Love}(x, z))$
- ▶ $\forall x(\exists y(x = \text{mother}(y)) \rightarrow \forall z(x = \text{mother}(z) \rightarrow \text{Love}(x, z)))$

Kalkulus Predikat-Definisi Ekspresi

Suatu ekspresi dalam kalkulus predikat dapat berupa kalimat atau term

Contoh :

x merupakan ekspresi

$f(x,y)$ merupakan ekspresi

$(\text{for some } x) p(x)$ merupakan ekspresi

Kalkulus Predikat-Definisi

- ▶ **Subterm** dari term t atau dari kalimat A adalah setiap term antara yang digunakan untuk membangun t atau A
- ▶ **Subkalimat** adalah setiap kalimat antara yang digunakan untuk membangun term atau kalimat yang lebih luas
- ▶ **Subekspresi** adalah subterm atau subkalimat yang terdapat pada sebuah ekspresi

Kalkulus Predikat-Definisi

Contoh :

Sebutkan semua subterm dan subkalimat yang terdapat pada ekspresi berikut :

E : if (for all x) q (x, f(A)) then f (A) else B

Subterm : A, x, f(A), B, if (for all x) q (x, f(A)) then f (A) else B

Subkalimat : q(x, f(B)), (for all x) q(x,f(A))

Semuanya merupakan subekspresi dari E

Kalkulus Predikat - Variabel Bebas/Terikat

Kemunculan variabel terikat dipengaruhi oleh kemunculan kuantifier yang paling dekat.

Contoh :

$(\text{FOR ALL } x) [p(x) \text{ OR } (\text{FOR SOME } x) (\text{FOR ALL } y) r(x, y)]$

variabel x pada $p(x)$ dipengaruhi kuantifier $\text{FOR ALL } x$

variabel x pada $r(x, y)$ dipengaruhi kuantifier $\text{FOR SOME } x$

Catatan,

Perbedaan antara variabel Bebas dan Variabel Terikat adalah

Variabel Bebas, Nilainya diberikan oleh interpretasi

Variabel Terikat, Nilainya terbatas dari interpretasi yang diberikan

Kalkulus Predikat - Kalimat Tertutup

Sebuah kalimat dikatakan tertutup jika tidak mempunyai kemunculan bebas dari variabel-variabelnya

Contoh :

1. $(\text{FOR ALL } x) (\text{FOR SOME } y) p(x, y)$ adalah kalimat tertutup
2. $(\text{FOR ALL } x) p(x, y)$ bukan merupakan kalimat tertutup

Latihan

- ▶ Buatlah contoh kalimat tertutup!

Kalkulus Predikat - Simbol Bebas

Simbol bebas dari ekspresi A adalah :

- ▶ variabel-variabel bebas
- ▶ semua konstanta
- ▶ semua simbol fungsi
- ▶ semua simbol predikat

dari ekspresi A

Kalkulus Predikat - Interpretasi

Misal D adalah sebarang himpunan tak kosong, maka sebuah interpretasi I dalam domain D akan memberi nilai pada setiap simbol konstanta, variabel bebas, fungsi dan predikat yang ada pada kalimat dengan aturan sebagai berikut :

- ▶ Untuk setiap konstanta A , yaitu elemen A_1 dari D
- ▶ Untuk setiap variabel x , yaitu elemen x_1 dari D
- ▶ Untuk setiap simbol fungsi f dengan arity = n , yaitu :
- ▶ Fungsi $f_1(d_1, d_2, \dots, d_n)$ dimana argumen d_1, d_2, \dots, d_n merupakan elemen dari D , dan nilai fungsi $f_1(d_1, d_2, \dots, d_n)$ merupakan anggota D
- ▶ Untuk setiap simbol predikat p dengan arity = n , yaitu relasi $p_1(d_1, d_2, \dots, d_n)$ dimana argumen d_1, d_2, \dots, d_n merupakan elemen dari D dan nilai $p_1(d_1, d_2, \dots, d_n)$ adalah TRUE atau FALSE

Jadi untuk suatu ekspresi A , sebuah interpretasi I dikatakan interpretasi untuk A , jika I memberikan nilai kepada setiap simbol bebas dari A .

Kalkulus Predikat - Arti Kalimat

- ▶ Arti kalimat ditentukan oleh interpretasi yang diberikan. Tetapi karena dalam kalkulus predikat mengandung pengertian objek, maka interpretasi dalam kalimat predikat harus juga mendefinisikan suatu domain yaitu himpunan objek yang memberi arti pada term.
- ▶ Suatu interpretasi harus memberi nilai pada setiap simbol bebas pada kalimat tersebut.

Kalkulus Predikat - Arti Kalimat

Misalkan ada kalimat tertutup :

$$A : \text{IF (FOR ALL } x) \text{ (FOR SOME } y) p(x, y) \text{ THEN } p(A, f(A))$$

Interpretasi untuk kalimat A harus

- ▶ Mendefinisikan Domain
- ▶ Memberikan nilai untuk simbol bebas dalam hal ini :
- ▶ Konstanta A, Simbol fungsi f, Simbol p

Contoh :

1. Diberikan interpretasi I dengan Domain D adalah himpunan bilangan integer positif, dimana :

$$A = 0$$

$$p = \text{relasi "lebih besar"} \text{ yaitu : } p(d1, d2) = (d1 > d2)$$

$$f = \text{fungsi yaitu } f(d) = d + 1$$

berdasarkan interpretasi I, kalimat tersebut dapat diartikan sebagai :

$$\text{IF untuk setiap integer } x \text{ Ada integer } y \text{ sedemikian sehingga } x > y \text{ THEN } 0 > 0 + 1$$

Kalkulus Predikat - Arti Kalimat

2. Misalkan interpretasi J dengan domain bilangan integer positif, yang akan memberi nilai :

$$A = 0$$

$$p = \text{relasi "ketidaksamaan"} \text{ yaitu : } p(d1, d2) = (d1 \neq d2)$$

$$f = \text{fungsi predesesor yaitu } f(d) = d - 1$$

Berdasarkan interpretasi J, kalimat tersebut dapat diartikan sebagai :

IF untuk setiap integer x Ada integer y sedemikian sehingga $x \neq y$
THEN $0 \neq 0 - 1$

Kalkulus Predikat - Arti Kalimat

Contoh Soal :

Diberikan Ekspresi :

$E = \text{IF } p(x, f(x)) \text{ THEN } (\text{FOR SOME } y) p(A, y)$

Tentukan arti kalimat

1. Misalkan I adalah interpretasi untuk E dengan Domain bilangan real; dimana
 $A = \sqrt{2}$
 $x = \Pi$
 f = fungsi “dibagi 2” yaitu : $f_1(d_1) = d_1/2$
 p = relasi “lebih besar atau sama dengan” yaitu $p(d_1, d_2) = (d_1 \geq d_2)$
2. Misalkan J adalah interpretasi untuk E dengan Domain semua orang; dimana
 $A = \text{Soeharto}$
 $x = \text{Soekarno}$
 f = fungsi “Ibu dari” yaitu : $f_1(d_1) = \text{ibu dari } d_1$
 p = relasi “anak dari” yaitu $p(d_1, d_2) = d_1 \text{ adalah anak dari } d_2$
Apakah arti ekspresi E berdasarkan interpretasi I dan interpretasi J ?

Kalkulus Predikat - Aturan Semantik

Misal A adalah suatu ekspresi dan I adalah interpretasi untuk A yang meliputi domain tak kosong D . Maka nilai dibawah I ditentukan berdasarkan aturan semantik sebagai berikut :

- a. Nilai suatu konstanta A adalah elemen domain D
- b. Nilai variabel x adalah elemen domain D
- c. Nilai $f_1(t_1, t_2, \dots, t_n)$ adalah elemen domain D dimana $f_1(t_1, t_2, \dots, t_n)$ adalah fungsi yang diberikan kepada f dan t_1, t_2, \dots, t_n adalah nilai term berdasarkan interpretasi I
- d. Nilai Term kondisional *if A then s else t* adalah nilai term s jika A bernilai TRUE dan sama dengan nilai term t jika A bernilai FALSE
- e. Nilai proposisi $p_1(t_1, t_2, \dots, t_n)$ adalah nilai kebenaran TRUE atau FALSE dimana p adalah relasi yang diberikan oleh interpretasi I dan nilai dari t_1, t_2, \dots, t_n berdasarkan I .
- f. Aturan untuk penghubung logik (not, or, dsb) sama dengan aturan pada kalkulus proposisi

Kalkulus Predikat - Kecocokan

- ▶ Dua interpretasi dikatakan cocok jika keduanya memberi nilai yang sama untuk simbol-simbolnya atau keduanya tidak memberi nilai untuk simbol-simbolnya
- ▶ Dua interpretasi I dan J cocok untuk ekspresi A jika nilai A berdasarkan I sama dengan nilai A berdasarkan J atau I dan J bukan interpretasi untuk A

Kalkulus Predikat - Kecocokan

Contoh :

Misalkan I adalah interpretasi yang meliputi bilangan integer dengan :

$A \rightarrow 0$

$B \rightarrow 2$

$x \rightarrow -1$

$f \rightarrow$ fungsi $f_1(d) = d + 1$

dan interpretasi J yang meliputi integer dengan :

$A \rightarrow 0$

$x \rightarrow 1$

$f \rightarrow$ fungsi $f_1(d) = d - 1$

- ▶ I dan J cocok untuk konstanta A
- ▶ I dan J cocok untuk simbol predikat p
- ▶ I dan J tidak cocok untuk variabel x
- ▶ I dan J cocok untuk ekspresi $f(x)$
- ▶ I dan J tidak cocok untuk ekspresi $f(B)$, karena I adalah interpretasi untuk $f(B)$ tetapi tidak untuk J

Soal

- ▶ Buat 3 buah ekspresi !
- ▶ Masing-masing ekspresi buatlah 2 interpretasi (I, J)!
- ▶ Tentukan kecocokan dari interpretasi yang telah Anda buat!