Diagonalisasi Matriks Persegi

Kuliah Aljabar Linier Semester Ganjil 2015-2016

MZI

Fakultas Informatika
Telkom University

FIF Tel-U

November 2015

Acknowledgements

Slide ini disusun berdasarkan materi yang terdapat pada sumber-sumber berikut:

1. *Aplikasi Matriks dan Ruang Vektor, Edisi 1, 2014*, oleh Adiwijaya.
2. *Elementary Linear Algebra, 10th Edition*, 2010, oleh H. Anton dan C. Rorres.
3. *Slide* kuliah Aljabar Linier di Telkom University oleh Jondri.
4. *Slide* kuliah Aljabar Linier di Fasilkom UI oleh Kasiyah M. Junus dan Siti Aminah.
5. *Slide* kuliah Aljabar Linier di Fasilkom UI oleh L. Y. Stefanus.

Beberapa gambar dapat diambil dari sumber-sumber di atas. *Slide* ini ditujukan untuk keperluan akademis di lingkungan FIF Telkom University. Jika Anda memiliki saran/ pendapat/ pertanyaan terkait materi dalam *slide* ini, silakan kirim email ke `<pleasedontspam>@telkomuniversity.ac.id`.

Bahasan

Bahasan

Pangkat Sebuah Matriks Persegi

Salah satu dari penerapan *diagonalisasi* matriks adalah untuk menghitung pangkat (yang cukup besar) dari sebuah matriks dan menentukan solusi dari *permasalahan logaritma matriks*.

Permasalahan

Jika

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

tentukan $\mathbf{A}^{13}$.

Permasalahan

Jika $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, carilah bilangan bulat n sehingga

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1024 & 1024 \\ 0 & 1024 & 1024 \end{bmatrix}.$$

Bahasan

Masalah Diagonalisasi

Ingat kembali bahwa suatu matriks $\mathbf{D}$ dikatakan sebagai matriks diagonal apabila $\mathbf{D}$ berbentuk

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & & & \mathbf{O} \\ & d_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

Permasalahan

Misalkan $\mathbf{A}$ adalah sebuah matriks persegi berorde n, apakah terdapat matriks $\mathbf{P}$ yang invertibel dan memenuhi sifat

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$$

dengan $\mathbf{D}$ adalah sebuah **matriks diagonal**.

Permasalahan

Apakah terdapat matriks invertibel $\mathbf{P}$ sedemikian hingga $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$ untuk suatu matriks diagonal $\mathbf{D}$ apabila $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Permasalahan

Apakah terdapat matriks invertibel $\mathbf{P}$ sedemikian hingga $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$ untuk suatu matriks diagonal $\mathbf{D}$ apabila $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Pilih $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, sehingga $\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, tinjau bahwa

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

Permasalahan

Apakah terdapat matriks invertibel $\mathbf{P}$ sedemikian hingga $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$ untuk suatu matriks diagonal $\mathbf{D}$ apabila $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Pilih $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, sehingga $\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, tinjau bahwa

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Permasalahan

Apakah terdapat matriks invertibel $\mathbf{P}$ sedemikian hingga $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$ untuk suatu matriks diagonal $\mathbf{D}$ apabila $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Pilih $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, sehingga $\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, tinjau bahwa

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah matriks diagonal yang **entri-entri diagonalnya adalah nilai eigen** dari $\mathbf{A}$ (yaitu -1 dan 1).

Permasalahan

Apakah terdapat matriks invertibel $\mathbf{P}$ sedemikian hingga $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$ untuk suatu matriks diagonal $\mathbf{D}$ apabila $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Pilih $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, sehingga $\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, tinjau bahwa

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah matriks diagonal yang **entri-entri diagonalnya adalah nilai eigen** dari $\mathbf{A}$ (yaitu -1 dan 1). Anda juga bisa memeriksa bahwa $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah salah satu vektor basis bagi E_{-1} dan $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ adalah salah satu vektor basis bagi E_1.

Perhatikan bahwa penempatan dari $\mathbf{P}$ maupun $\mathbf{P}^{-1}$ berpengaruh, karena bila posisi dari $\mathbf{P}$ dan $\mathbf{P}^{-1}$ ditukar diperoleh

Perhatikan bahwa penempatan dari $\mathbf{P}$ maupun $\mathbf{P}^{-1}$ berpengaruh, karena bila posisi dari $\mathbf{P}$ dan $\mathbf{P}^{-1}$ ditukar diperoleh

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} =$$

Perhatikan bahwa penempatan dari $\mathbf{P}$ maupun $\mathbf{P}^{-1}$ berpengaruh, karena bila posisi dari $\mathbf{P}$ dan $\mathbf{P}^{-1}$ ditukar diperoleh

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{5}{4} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix},$$

yang **bukan matriks diagonal**.

Matriks yang Terdiagonalkan

Definisi

Sebuah matriks persegi $\mathbf{A}$ berorde n disebut terdiagonalkan (dapat didiagonalkan, *diagonalizable*) apabila terdapat matriks invertibel $\mathbf{P}$ dan matriks diagonal $\mathbf{D}$ sedemikian hingga

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}. \tag{1}$$

Ketika kondisi (1) terpenuhi, maka $\mathbf{P}$ dikatakan mendiagonalkan $\mathbf{A}$ (Inggris: $\mathbf{P}$ *diagonalize* $\mathbf{A}$).

Permasalahan

Matriks yang Terdiagonalkan

Definisi

Sebuah matriks persegi $\mathbf{A}$ berorde n disebut terdiagonalkan (dapat didiagonalkan, *diagonalizable*) apabila terdapat matriks invertibel $\mathbf{P}$ dan matriks diagonal $\mathbf{D}$ sedemikian hingga

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}. \tag{1}$$

Ketika kondisi (1) terpenuhi, maka $\mathbf{P}$ dikatakan mendiagonalkan $\mathbf{A}$ (Inggris: $\mathbf{P}$ *diagonalize* $\mathbf{A}$).

Permasalahan

Syarat apa yang diperlukan agar sebuah matriks persegi $\mathbf{A}$ terdiagonalkan?

Teorema

Matriks yang Terdiagonalkan

Definisi

Sebuah matriks persegi $\mathbf{A}$ berorde n disebut terdiagonalkan (dapat didiagonalkan, *diagonalizable*) apabila terdapat matriks invertibel $\mathbf{P}$ dan matriks diagonal $\mathbf{D}$ sedemikian hingga

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}. \quad (1)$$

Ketika kondisi (1) terpenuhi, maka $\mathbf{P}$ dikatakan mendiagonalkan $\mathbf{A}$ (Inggris: $\mathbf{P}$ *diagonalize* $\mathbf{A}$).

Permasalahan

Syarat apa yang diperlukan agar sebuah matriks persegi $\mathbf{A}$ terdiagonalkan?

Teorema

Jika $\mathbf{A}$ adalah sembarang matriks persegi berorde n, maka kedua pernyataan berikut ekivalen

1. $\mathbf{A}$ terdiagonalkan.
2. $\mathbf{A}$ memiliki himpunan n vektor eigen yang bebas linier.

Bukti $(1 \Rightarrow 2)$

Asumsikan $\mathbf{A}$ terdiagonalkan.

Bukti $(1 \Rightarrow 2)$

Asumsikan $\mathbf{A}$ terdiagonalkan. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{A}$ memiliki n vektor eigen yang bebas linier. Dari asumsi $\mathbf{A}$ terdiagonalkan, kita dapat menulis

Bukti $(1 \Rightarrow 2)$

Asumsikan $\mathbf{A}$ terdiagonalkan. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{A}$ memiliki n vektor eigen yang bebas linier. Dari asumsi $\mathbf{A}$ terdiagonalkan, kita dapat menulis

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}, \tag{2}$$

untuk suatu matriks invertibel $\mathbf{P}$ dan matriks diagonal $\mathbf{D}$.

Bukti $(1 \Rightarrow 2)$

Asumsikan $\mathbf{A}$ terdiagonalkan. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{A}$ memiliki n vektor eigen yang bebas linier. Dari asumsi $\mathbf{A}$ terdiagonalkan, kita dapat menulis

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}, \tag{2}$$

untuk suatu matriks invertibel $\mathbf{P}$ dan matriks diagonal $\mathbf{D}$. Misalkan entri-entri diagonal dari $\mathbf{D}$ adalah $d_1, d_2 \ldots, d_n$. Ekspresi (2) juga dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{D}.$$

Misalkan $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix}$.

Bukti $(1 \Rightarrow 2)$

Asumsikan $\mathbf{A}$ terdiagonalkan. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{A}$ memiliki n vektor eigen yang bebas linier. Dari asumsi $\mathbf{A}$ terdiagonalkan, kita dapat menulis

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}, \tag{2}$$

untuk suatu matriks invertibel $\mathbf{P}$ dan matriks diagonal $\mathbf{D}$. Misalkan entri-entri diagonal dari $\mathbf{D}$ adalah $d_1, d_2 \ldots, d_n$. Ekspresi (2) juga dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{D}.$$

Misalkan $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix}$. Mengingat $\mathbf{P}$ invertibel, maka $\operatorname{rank}(\mathbf{P}) =$

Bukti $(1 \Rightarrow 2)$

Asumsikan $\mathbf{A}$ terdiagonalkan. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{A}$ memiliki n vektor eigen yang bebas linier. Dari asumsi $\mathbf{A}$ terdiagonalkan, kita dapat menulis

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}, \tag{2}$$

untuk suatu matriks invertibel $\mathbf{P}$ dan matriks diagonal $\mathbf{D}$. Misalkan entri-entri diagonal dari $\mathbf{D}$ adalah $d_1, d_2 \ldots, d_n$. Ekspresi (2) juga dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{D}.$$

Misalkan $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix}$. Mengingat $\mathbf{P}$ invertibel, maka $\operatorname{rank}(\mathbf{P}) = n$. Ini artinya himpunan vektor-vektor kolom $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_n \ldots, \mathbf{p}_n\}$ bebas linier. Dari sifat perkalian matriks, kita memiliki

$$\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix} =$$

Bukti ($1 \Rightarrow 2$)

Asumsikan $\mathbf{A}$ terdiagonalkan. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{A}$ memiliki n vektor eigen yang bebas linier. Dari asumsi $\mathbf{A}$ terdiagonalkan, kita dapat menulis

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}, \tag{2}$$

untuk suatu matriks invertibel $\mathbf{P}$ dan matriks diagonal $\mathbf{D}$. Misalkan entri-entri diagonal dari $\mathbf{D}$ adalah $d_1, d_2 \ldots, d_n$. Ekspresi (2) juga dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{D}.$$

Misalkan $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix}$. Mengingat $\mathbf{P}$ invertibel, maka $\operatorname{rank}(\mathbf{P}) = n$. Ini artinya himpunan vektor-vektor kolom $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_n \ldots, \mathbf{p}_n\}$ bebas linier. Dari sifat perkalian matriks, kita memiliki

$$\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{p}_1 & \mathbf{A}\mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{p}_n \end{bmatrix}.$$

Kemudian karena $\mathbf{D}$ adalah matriks diagonal kita memiliki

$$\mathbf{P}\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix}\mathbf{D} =$$

Bukti ($1 \Rightarrow 2$)

Asumsikan $\mathbf{A}$ terdiagonalkan. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{A}$ memiliki n vektor eigen yang bebas linier. Dari asumsi $\mathbf{A}$ terdiagonalkan, kita dapat menulis

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}, \tag{2}$$

untuk suatu matriks invertibel $\mathbf{P}$ dan matriks diagonal $\mathbf{D}$. Misalkan entri-entri diagonal dari $\mathbf{D}$ adalah $d_1, d_2 \ldots, d_n$. Ekspresi (2) juga dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{D}.$$

Misalkan $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix}$. Mengingat $\mathbf{P}$ invertibel, maka $\operatorname{rank}(\mathbf{P}) = n$. Ini artinya himpunan vektor-vektor kolom $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_n \ldots, \mathbf{p}_n\}$ bebas linier. Dari sifat perkalian matriks, kita memiliki

$$\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{p}_1 & \mathbf{A}\mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{p}_n \end{bmatrix}.$$

Kemudian karena $\mathbf{D}$ adalah matriks diagonal kita memiliki

$$\mathbf{P}\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix}\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1\mathbf{p}_1 & d_2\mathbf{p}_2 & \cdots & d_n\mathbf{p}_n \end{bmatrix}.$$

Karena $\mathbf{AP} = \mathbf{PD}$ kita memperoleh

Karena $\mathbf{AP} = \mathbf{PD}$ kita memperoleh

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{p}_1 & \mathbf{A}\mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1\mathbf{p}_1 & d_2\mathbf{p}_2 & \cdots & d_n\mathbf{p}_n \end{bmatrix} \text{ atau}$$

Karena $\mathbf{AP} = \mathbf{PD}$ kita memperoleh

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{Ap}_1 & \mathbf{Ap}_2 & \cdots & \mathbf{Ap}_n \end{array}\right] &= \left[\begin{array}{cccc} d_1\mathbf{p}_1 & d_2\mathbf{p}_2 & \cdots & d_n\mathbf{p}_n \end{array}\right] \text{ atau} \\ \mathbf{Ap}_i &= d_i\mathbf{p}_i \text{ untuk setiap } 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Karena $\mathbf{AP} = \mathbf{PD}$ kita memperoleh

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{p}_1 & \mathbf{A}\mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{p}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} d_1\mathbf{p}_1 & d_2\mathbf{p}_2 & \cdots & d_n\mathbf{p}_n \end{bmatrix} \text{ atau} \\ \mathbf{A}\mathbf{p}_i &= d_i\mathbf{p}_i \text{ untuk setiap } 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Ini berarti $\mathbf{p}_i$ (vektor kolom dari matriks $\mathbf{P}$) adalah vektor eigen dari $\mathbf{A}$, dan entri-entri diagonal utama dari $\mathbf{D}$ adalah nilai-nilai eigen yang bersesuaian dengan vektor-vektor eigen untuk setiap vektor $\mathbf{p}_i$ dengan $1 \leq i \leq n$.

Karena $\mathbf{AP} = \mathbf{PD}$ kita memperoleh

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{Ap}_1 & \mathbf{Ap}_2 & \cdots & \mathbf{Ap}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} d_1\mathbf{p}_1 & d_2\mathbf{p}_2 & \cdots & d_n\mathbf{p}_n \end{bmatrix} \text{ atau} \\ \mathbf{Ap}_i &= d_i\mathbf{p}_i \text{ untuk setiap } 1 \le i \le n. \end{aligned}$$

Ini berarti $\mathbf{p}_i$ (vektor kolom dari matriks $\mathbf{P}$) adalah vektor eigen dari $\mathbf{A}$, dan entri-entri diagonal utama dari $\mathbf{D}$ adalah nilai-nilai eigen yang bersesuaian dengan vektor-vektor eigen untuk setiap vektor $\mathbf{p}_i$ dengan $1 \le i \le n$. Kemudian karena $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_n \ldots, \mathbf{p}_n\}$ bebas linier, maka $\mathbf{A}$ memiliki himpunan n vektor eigen yang bebas linier.

Bukti $(2 \Rightarrow 1)$

Asumsikan $\mathbf{A}$ memiliki himpunan n vektor eigen yang bebas linier.

Bukti ($2 \Rightarrow 1$)

Asumsikan $\mathbf{A}$ memiliki himpunan n vektor eigen yang bebas linier. Akan dibuktikan bahwa $\mathbf{A}$ terdiagonalkan. Dari asumsi $\mathbf{A}$ memiliki himpunan n vektor eigen yang bebas linier, misalkan himpunan n vektor eigen yang bebas linier itu adalah $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Masing-masing $\mathbf{v}_i$ bersesuaian dengan nilai eigen λ_i untuk $1 \leq i \leq n$. Kita memiliki

Bukti ($2 \Rightarrow 1$)

Asumsikan $\mathbf{A}$ memiliki himpunan n vektor eigen yang bebas linier. Akan dibuktikan bahwa $\mathbf{A}$ terdiagonalkan. Dari asumsi $\mathbf{A}$ memiliki himpunan n vektor eigen yang bebas linier, misalkan himpunan n vektor eigen yang bebas linier itu adalah $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Masing-masing $\mathbf{v}_i$ bersesuaian dengan nilai eigen λ_i untuk $1 \leq i \leq n$. Kita memiliki

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda \mathbf{v}_i \text{ untuk setiap } 1 \leq i \leq n.$$

Selanjutnya konstruksi matriks $\mathbf{P}$ yang vektor-vektor kolomnya adalah $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, yaitu

$$\mathbf{P} =$$

Bukti ($2 \Rightarrow 1$)

Asumsikan $\mathbf{A}$ memiliki himpunan n vektor eigen yang bebas linier. Akan dibuktikan bahwa $\mathbf{A}$ terdiagonalkan. Dari asumsi $\mathbf{A}$ memiliki himpunan n vektor eigen yang bebas linier, misalkan himpunan n vektor eigen yang bebas linier itu adalah $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Masing-masing $\mathbf{v}_i$ bersesuaian dengan nilai eigen λ_i untuk $1 \leq i \leq n$. Kita memiliki

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda \mathbf{v}_i \text{ untuk setiap } 1 \leq i \leq n.$$

Selanjutnya konstruksi matriks $\mathbf{P}$ yang vektor-vektor kolomnya adalah $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, yaitu

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}.$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \mathbf{AP} &= \mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\ &= \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\mathbf{AP} &= \mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{v}_1 & \mathbf{A}\mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\
&=
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\mathbf{AP} &= \mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{v}_1 & \mathbf{A}\mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\ &= \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
\mathbf{AP} &= \mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{v}_1 & \mathbf{A}\mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}\mathbf{\Lambda} \\
&=
\end{aligned}
$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\mathbf{AP} &= \mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{Av}_1 & \mathbf{Av}_2 & \cdots & \mathbf{Av}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}\mathbf{\Lambda} \\
&= \mathbf{P\Lambda}
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\mathbf{AP} &= \mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{Av}_1 & \mathbf{Av}_2 & \cdots & \mathbf{Av}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}\mathbf{\Lambda} \\ &= \mathbf{P\Lambda}\end{aligned}$$

dengan $\mathbf{\Lambda}$ adalah matriks diagonal yang entri-entri diagonalnya adalah $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\mathbf{AP} &= \mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{v}_1 & \mathbf{A}\mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}\mathbf{\Lambda} \\
&= \mathbf{P\Lambda}
\end{aligned}$$

dengan $\mathbf{\Lambda}$ adalah matriks diagonal yang entri-entri diagonalnya adalah $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Jadi kita memperoleh $\mathbf{AP} = \mathbf{P\Lambda}$. Karena $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n\}$ bebas linier maka $\dim(\mathrm{col}(\mathbf{P})) = \mathrm{rank}(\mathbf{P}) = n$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\mathbf{AP} &= \mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{Av}_1 & \mathbf{Av}_2 & \cdots & \mathbf{Av}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}\mathbf{\Lambda} \\
&= \mathbf{P\Lambda}
\end{aligned}$$

dengan $\mathbf{\Lambda}$ adalah matriks diagonal yang entri-entri diagonalnya adalah $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Jadi kita memperoleh $\mathbf{AP} = \mathbf{P\Lambda}$. Karena $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n\}$ bebas linier maka $\dim(\mathrm{col}(\mathbf{P})) = \mathrm{rank}(\mathbf{P}) = n$. Akibatnya $\mathbf{P}$ invertibel. Jadi kita memiliki

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\mathbf{AP} &= \mathbf{A}\left[\begin{array}{cccc}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{cccc}\mathbf{Av}_1 & \mathbf{Av}_2 & \cdots & \mathbf{Av}_n\end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{cccc}\lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{v}_n\end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{cccc}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{array}\right]\mathbf{\Lambda} \\ &= \mathbf{P\Lambda}\end{aligned}$$

dengan $\mathbf{\Lambda}$ adalah matriks diagonal yang entri-entri diagonalnya adalah $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Jadi kita memperoleh $\mathbf{AP} = \mathbf{P\Lambda}$. Karena $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n\}$ bebas linier maka $\dim(\mathrm{col}(\mathbf{P})) = \mathrm{rank}(\mathbf{P}) = n$. Akibatnya $\mathbf{P}$ invertibel. Jadi kita memiliki

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{\Lambda}.$$

Dengan demikian $\mathbf{A}$ dapat didiagonalkan. □

Matriks yang Tak Terdiagonalkan

Permasalahan

Apakah ada matriks yang tak terdiagonalkan?

Matriks yang Tak Terdiagonalkan

Permasalahan

Apakah ada matriks yang tak terdiagonalkan?

Ada, matriks $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tidak terdiagonalkan. Persamaan karakteristik dari $\mathbf{A}$ adalah $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda - 1)^3 = 0$. Sehingga diperoleh nilai eigen 1 dengan $m_a(1) = 3$. Untuk mencari vektor-vektor eigen dari $\mathbf{A}$ akan ditinjau $E_1 = \ker(\mathbf{I} - \mathbf{A})$.

Matriks yang Tak Terdiagonalkan

Permasalahan

Apakah ada matriks yang tak terdiagonalkan?

Ada, matriks $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tidak terdiagonalkan. Persamaan karakteristik dari $\mathbf{A}$ adalah $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda - 1)^3 = 0$. Sehingga diperoleh nilai eigen 1 dengan $m_a(1) = 3$. Untuk mencari vektor-vektor eigen dari $\mathbf{A}$ akan ditinjau $E_1 = \ker(\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Tinjau bahwa

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

sehingga diperoleh

Matriks yang Tak Terdiagonalkan

Permasalahan

Apakah ada matriks yang tak terdiagonalkan?

Ada, matriks $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tidak terdiagonalkan. Persamaan karakteristik dari $\mathbf{A}$ adalah $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda - 1)^3 = 0$. Sehingga diperoleh nilai eigen 1 dengan $m_a(1) = 3$. Untuk mencari vektor-vektor eigen dari $\mathbf{A}$ akan ditinjau $E_1 = \ker(\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Tinjau bahwa

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

sehingga diperoleh $x_2 = x_3 = 0$, $x_1 = t \in \mathbb{R}$. Jadi jika $E_1 = \ker(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathrm{span}$

Matriks yang Tak Terdiagonalkan

Permasalahan

Apakah ada matriks yang tak terdiagonalkan?

Ada, matriks $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tidak terdiagonalkan. Persamaan karakteristik dari $\mathbf{A}$ adalah $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda - 1)^3 = 0$. Sehingga diperoleh nilai eigen 1 dengan $m_a(1) = 3$. Untuk mencari vektor-vektor eigen dari $\mathbf{A}$ akan ditinjau $E_1 = \ker(\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Tinjau bahwa

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

sehingga diperoleh $x_2 = x_3 = 0$, $x_1 = t \in \mathbb{R}$. Jadi jika
$E_1 = \ker(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \operatorname{span}\{(1,0,0)\}$.

Matriks yang Tak Terdiagonalkan

Permasalahan

Apakah ada matriks yang tak terdiagonalkan?

Ada, matriks $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tidak terdiagonalkan. Persamaan karakteristik dari $\mathbf{A}$ adalah $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda - 1)^3 = 0$. Sehingga diperoleh nilai eigen 1 dengan $m_a(1) = 3$. Untuk mencari vektor-vektor eigen dari $\mathbf{A}$ akan ditinjau $E_1 = \ker(\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Tinjau bahwa

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

sehingga diperoleh $x_2 = x_3 = 0$, $x_1 = t \in \mathbb{R}$. Jadi jika $E_1 = \ker(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \operatorname{span}\{(1,0,0)\}$. Akibatnya semua vektor eigen dari $\mathbf{A}$ pasti berbentuk $(t, 0, 0)$ dengan $t \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$. Jadi **tidak mungkin** $\mathbf{A}$ memiliki himpunan 3 vektor yang bebas linier. Berdasarkan teorema sebelumnya, $\mathbf{A}$ tidak terdiagonalkan.

Diagonalisasi – Multiplisitas Aljabar dan Geometri Nilai Eigen

Pada ilustrasi sebelumnya kita melihat bahwa $\mathbf{A}$ tak terdiagonalkan dan memiliki nilai eigen 1 dengan $m_a(1) = 3$ dan $m_g(1) = 1$. Secara umum, kita memiliki teorema berikut.

Teorema

Matriks persegi $\mathbf{A}$ terdiagonalkan jika dan hanya jika $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$ untuk setiap nilai eigen λ dari matriks $\mathbf{A}$.

Himpunan Vektor Eigen dari Nilai Eigen Berbeda

Teorema

Jika $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ adalah n vektor eigen yang masing-masing bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ yang **berbeda**, maka $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ **bebas linier**.

Akibat

Jika $\mathbf{A}$ adalah matriks $n \times n$ dengan n nilai eigen berbeda, maka $\mathbf{A}$ dapat didiagonalkan.

Bukti

Karena $\mathbf{A}$ adalah matriks $n \times n$ dengan n nilai eigen berbeda, maka $\mathbf{A}$ memiliki himpunan n vektor eigen yang bersifat bebas linier. Akibatnya $\mathbf{A}$ dapat didiagonalkan. $\square$

Bahasan

Prosedur Diagonalisasi Matriks

Dari teorema yang telah dijelaskan kita dapat mengkonstruksi prosedur diagonalisasi matriks sebagai berikut.

Prosedur Diagonalisasi Matriks

Misalkan $\mathbf{A}$ adalah sebuah matriks persegi berorde n.

Prosedur Diagonalisasi Matriks

Dari teorema yang telah dijelaskan kita dapat mengkonstruksi prosedur diagonalisasi matriks sebagai berikut.

Prosedur Diagonalisasi Matriks

Misalkan $\mathbf{A}$ adalah sebuah matriks persegi berorde n.

- **Langkah 1**: Tentukan nilai eigen dari $\mathbf{A}$. Selanjutnya carilah (jika ada) n vektor eigen dari $\mathbf{A}$ yang bebas linier dan bersesuaian dengan suatu nilai eigen tertentu. Vektor-vektor eigen tersebut dapat diperoleh dari basis-basis bagi ruang eigen untuk $\mathbf{A}$. Jika tidak ada n vektor dari $\mathbf{A}$ yang bebas linier, maka $\mathbf{A}$ tidak dapat didiagonalkan.

Prosedur Diagonalisasi Matriks

Dari teorema yang telah dijelaskan kita dapat mengkonstruksi prosedur diagonalisasi matriks sebagai berikut.

Prosedur Diagonalisasi Matriks

Misalkan $\mathbf{A}$ adalah sebuah matriks persegi berorde n.

- **Langkah 1**: Tentukan nilai eigen dari $\mathbf{A}$. Selanjutnya carilah (jika ada) n vektor eigen dari $\mathbf{A}$ yang bebas linier dan bersesuaian dengan suatu nilai eigen tertentu. Vektor-vektor eigen tersebut dapat diperoleh dari basis-basis bagi ruang eigen untuk $\mathbf{A}$. Jika tidak ada n vektor dari $\mathbf{A}$ yang bebas linier, maka $\mathbf{A}$ tidak dapat didiagonalkan.
- **Langkah 2**: Misalkan n vektor eigen yang diperoleh dari langkah 1 adalah $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$. Konstruksi matriks $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix}$. Karena $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ bebas linier, maka $\mathbf{P}$ invertibel.

Prosedur Diagonalisasi Matriks

Dari teorema yang telah dijelaskan kita dapat mengkonstruksi prosedur diagonalisasi matriks sebagai berikut.

Prosedur Diagonalisasi Matriks

Misalkan $\mathbf{A}$ adalah sebuah matriks persegi berorde n.

- **Langkah 1**: Tentukan nilai eigen dari $\mathbf{A}$. Selanjutnya carilah (jika ada) n vektor eigen dari $\mathbf{A}$ yang bebas linier dan bersesuaian dengan suatu nilai eigen tertentu. Vektor-vektor eigen tersebut dapat diperoleh dari basis-basis bagi ruang eigen untuk $\mathbf{A}$. Jika tidak ada n vektor dari $\mathbf{A}$ yang bebas linier, maka $\mathbf{A}$ tidak dapat didiagonalkan.
- **Langkah 2**: Misalkan n vektor eigen yang diperoleh dari langkah 1 adalah $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$. Konstruksi matriks $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix}$. Karena $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ bebas linier, maka $\mathbf{P}$ invertibel.
- **Langkah 3**: Tentukan matriks $\mathbf{P}^{-1}$. Selanjutnya matriks $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ adalah matriks diagonal yang entri-entri diagonal utamanya adalah nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Setiap vektor eigen $\mathbf{p}_i$ bersesuaian dengan nilai eigen λ_i untuk setiap $1 \leq i \leq n$. Biasanya matriks diagonal $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ ditulis dengan $\mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Latihan

Latihan

Lakukan diagonalisasi pada matriks $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Solusi:

Latihan

Latihan

Lakukan diagonalisasi pada matriks $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Solusi: Untuk matriks $\mathbf{A}$, kita memiliki persamaan karakteristik $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$.

Latihan

Latihan

Lakukan diagonalisasi pada matriks $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Solusi: Untuk matriks $\mathbf{A}$, kita memiliki persamaan karakteristik $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$. Jadi diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = 1$. Pertama kita akan menentukan basis bagi $E_{-1} = \ker(-\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Tinjau SPL

Latihan

Latihan

Lakukan diagonalisasi pada matriks $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Solusi: Untuk matriks $\mathbf{A}$, kita memiliki persamaan karakteristik $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$. Jadi diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = 1$. Pertama kita akan menentukan basis bagi $E_{-1} = \ker(-\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Tinjau SPL

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

diperoleh $2x_1 + x_2 = 0$, jadi jika $x_2 = s$ maka $x_1 = -\frac{1}{2}s$. Akibatnya $E_{-1} = \mathrm{span}$

Latihan

Latihan

Lakukan diagonalisasi pada matriks $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Solusi: Untuk matriks $\mathbf{A}$, kita memiliki persamaan karakteristik $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$. Jadi diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = 1$. Pertama kita akan menentukan basis bagi $E_{-1} = \ker(-\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Tinjau SPL

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

diperoleh $2x_1 + x_2 = 0$, jadi jika $x_2 = s$ maka $x_1 = -\frac{1}{2}s$. Akibatnya $E_{-1} = \operatorname{span}\left\{\left(-\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$. Selanjutnya kita akan menentukan basis bagi $E_1 = \ker(\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Tinjau SPL

Latihan

Latihan

Lakukan diagonalisasi pada matriks $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Solusi: Untuk matriks $\mathbf{A}$, kita memiliki persamaan karakteristik $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$. Jadi diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = 1$. Pertama kita akan menentukan basis bagi $E_{-1} = \ker(-\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Tinjau SPL

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

diperoleh $2x_1 + x_2 = 0$, jadi jika $x_2 = s$ maka $x_1 = -\frac{1}{2}s$. Akibatnya $E_{-1} = \text{span}\left\{\left(-\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$. Selanjutnya kita akan menentukan basis bagi $E_1 = \ker(\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Tinjau SPL

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

diperoleh $x_2 = 0$ dan $x_1 = t \in \mathbb{R}$. Akibatnya $E_1 = \text{span}$

Latihan

Latihan

Lakukan diagonalisasi pada matriks $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Solusi: Untuk matriks $\mathbf{A}$, kita memiliki persamaan karakteristik $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$. Jadi diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = 1$. Pertama kita akan menentukan basis bagi $E_{-1} = \ker(-\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Tinjau SPL

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

diperoleh $2x_1 + x_2 = 0$, jadi jika $x_2 = s$ maka $x_1 = -\frac{1}{2}s$. Akibatnya $E_{-1} = \operatorname{span}\left\{\left(-\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$. Selanjutnya kita akan menentukan basis bagi $E_1 = \ker(\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Tinjau SPL

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

diperoleh $x_2 = 0$ dan $x_1 = t \in \mathbb{R}$. Akibatnya $E_1 = \operatorname{span}\{(1, 0)\}$.

Perhatikan bahwa $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ dan $(1, 0)$ adalah dua vektor eigen dari $\mathbf{A}$ yang bebas linier. Jadi kita dapat memilih

$$\mathbf{P} =$$

Perhatikan bahwa $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ dan $(1, 0)$ adalah dua vektor eigen dari $\mathbf{A}$ yang bebas linier. Jadi kita dapat memilih

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Akibatnya $\mathbf{P}^{-1} =$

Perhatikan bahwa $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ dan $(1, 0)$ adalah dua vektor eigen dari $\mathbf{A}$ yang bebas linier. Jadi kita dapat memilih

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Akibatnya $\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Oleh karena itu diperoleh matriks diagonal $\mathbf{\Lambda}$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ dan $(1, 0)$ adalah dua vektor eigen dari $\mathbf{A}$ yang bebas linier. Jadi kita dapat memilih

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Akibatnya $\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Oleh karena itu diperoleh matriks diagonal $\mathbf{\Lambda}$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen -1 dan $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen 1.

Bahasan

Permasalahan

Misalkan $\mathbf{A}$ adalah sebuah matriks persegi berorde n yang terdiagonalkan. Bagaimana cara yang **efisien** untuk menghitung $\mathbf{A}^k$, $k \in \mathbb{N}$?

Misalkan $\mathbf{A}$ adalah matriks $n \times n$ yang terdiagonalkan, maka kita memiliki matris invertibel $\mathbf{P}$ dan matriks diagonal $\mathbf{\Lambda}$ yang memenuhi

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda} =$$

Permasalahan

Misalkan $\mathbf{A}$ adalah sebuah matriks persegi berorde n yang terdiagonalkan. Bagaimana cara yang **efisien** untuk menghitung $\mathbf{A}^k$, $k \in \mathbb{N}$?

Misalkan $\mathbf{A}$ adalah matriks $n \times n$ yang terdiagonalkan, maka kita memiliki matris invertibel $\mathbf{P}$ dan matriks diagonal $\mathbf{\Lambda}$ yang memenuhi

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \mathbf{O} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad (3)$$

dengan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adalah nilai-nilia eigen dari $\mathbf{A}$. Karena $\mathbf{\Lambda}$ adalah matriks diagonal, maka kita memiliki

$$\mathbf{\Lambda}^k =$$

Permasalahan

Misalkan $\mathbf{A}$ adalah sebuah matriks persegi berorde n yang terdiagonalkan. Bagaimana cara yang **efisien** untuk menghitung $\mathbf{A}^k$, $k \in \mathbb{N}$?

Misalkan $\mathbf{A}$ adalah matriks $n \times n$ yang terdiagonalkan, maka kita memiliki matris invertibel $\mathbf{P}$ dan matriks diagonal $\mathbf{\Lambda}$ yang memenuhi

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \mathbf{O} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \tag{3}$$

dengan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adalah nilai-nilia eigen dari $\mathbf{A}$. Karena $\mathbf{\Lambda}$ adalah matriks diagonal, maka kita memiliki

$$\mathbf{\Lambda}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \mathbf{O} \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}, \text{ untuk setiap } k \in \mathbb{N}.$$

Dengan mengkuadratkan kedua ruas pada (3) diperoleh

Dengan mengkuadratkan kedua ruas pada (3) diperoleh

$$\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\right)^2 = \boldsymbol{\Lambda}^2$$

Dengan mengkuadratkan kedua ruas pada (3) diperoleh

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\right)^2 &= \mathbf{\Lambda}^2 \\ \left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\right)\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\right) &= \mathbf{\Lambda}^2\end{aligned}$$

Dengan mengkuadratkan kedua ruas pada (3) diperoleh

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\right)^2 &= \mathbf{\Lambda}^2 \\ \left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\right)\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\right) &= \mathbf{\Lambda}^2 \\ \mathbf{P}^{-1}\left(\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\right)\mathbf{P} &= \mathbf{\Lambda}^2\end{aligned}$$

Dengan mengkuadratkan kedua ruas pada (3) diperoleh

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\right)^2 &= \mathbf{\Lambda}^2 \\
\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\right)\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\right) &= \mathbf{\Lambda}^2 \\
\mathbf{P}^{-1}\left(\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\right)\mathbf{P} &= \mathbf{\Lambda}^2 \\
\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{P} &= \mathbf{\Lambda}^2
\end{aligned}$$

Secara umum melalui induksi matematika, kita memiliki

Dengan mengkuadratkan kedua ruas pada (3) diperoleh

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\right)^{2} &= \mathbf{\Lambda}^{2}\\ \left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\right)\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\right) &= \mathbf{\Lambda}^{2}\\ \mathbf{P}^{-1}\left(\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\right)\mathbf{P} &= \mathbf{\Lambda}^{2}\\ \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^{2}\mathbf{P} &= \mathbf{\Lambda}^{2}\end{aligned}$$

Secara umum melalui induksi matematika, kita memiliki

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^{k}\mathbf{P} &= \mathbf{\Lambda}^{k} \text{ untuk setiap } k \in \mathbb{N}, \text{ jadi}\\ \mathbf{A}^{k} &= \end{aligned}$$

Dengan mengkuadratkan kedua ruas pada (3) diperoleh

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\right)^{2} &= \mathbf{\Lambda}^{2} \\
\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\right)\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\right) &= \mathbf{\Lambda}^{2} \\
\mathbf{P}^{-1}\left(\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\right)\mathbf{P} &= \mathbf{\Lambda}^{2} \\
\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^{2}\mathbf{P} &= \mathbf{\Lambda}^{2}
\end{aligned}$$

Secara umum melalui induksi matematika, kita memiliki

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^{k}\mathbf{P} &= \mathbf{\Lambda}^{k} \text{ untuk setiap } k \in \mathbb{N}, \text{ jadi} \\
\mathbf{A}^{k} &= \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^{k}\mathbf{P}^{-1} \text{ untuk setiap } k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Latihan: Menentukan Pangkat dari Matriks

Latihan

Dengan metode diagonalisasi matriks, tentukan $\mathbf{A}^{13}$ apabila $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Solusi:

Latihan: Menentukan Pangkat dari Matriks

Latihan

Dengan metode diagonalisasi matriks, tentukan $\mathbf{A}^{13}$ apabila $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Solusi: $\mathbf{A}$ memiliki persamaan karakteristik sebagai berikut

$$0 = p_{\mathbf{A}}(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

dengan ekspansi baris pertama

$$0 =$$

Latihan: Menentukan Pangkat dari Matriks

Latihan

Dengan metode diagonalisasi matriks, tentukan $\mathbf{A}^{13}$ apabila $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Solusi: $\mathbf{A}$ memiliki persamaan karakteristik sebagai berikut

$$0 = p_{\mathbf{A}}(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

dengan ekspansi baris pertama

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & \lambda - 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3) + 2(\lambda - 2) \\ &= (\lambda - 2)(\lambda(\lambda - 3) + 2) \\ &= (\lambda - 2)\left(\lambda^2 - 3\lambda + 2\right) = (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 1) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1). \end{aligned}$$

Latihan: Menentukan Pangkat dari Matriks

Latihan

Dengan metode diagonalisasi matriks, tentukan $\mathbf{A}^{13}$ apabila $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Solusi: $\mathbf{A}$ memiliki persamaan karakteristik sebagai berikut

$$\begin{aligned} 0 &= p_{\mathbf{A}}(\lambda) = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \\ & \quad \text{dengan ekspansi baris pertama} \\ 0 &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & \lambda - 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3) + 2(\lambda - 2) \\ &= (\lambda - 2)(\lambda(\lambda - 3) + 2) \\ &= (\lambda - 2)\left(\lambda^2 - 3\lambda + 2\right) = (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 1) = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 1). \end{aligned}$$

Jadi diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Pertama akan ditentukan $E_1 = \ker(\mathbf{I} - \mathbf{A})$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pertama akan ditentukan $E_1 = \ker(\mathbf{I} - \mathbf{A})$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh $\begin{array}{r} x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array}$, akibatnya jika $x_3 = s$ maka $x_1 = -2s$ dan $x_2 = s$ dengan $s \in \mathbb{R}$. Jadi $E_1 = \mathrm{span}$

Pertama akan ditentukan $E_1 = \ker(\mathbf{I} - \mathbf{A})$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh $\begin{aligned} x_1 + 0x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$, akibatnya jika $x_3 = s$ maka $x_1 = -2s$ dan $x_2 = s$ dengan $s \in \mathbb{R}$. Jadi $E_1 = \operatorname{span}\{(-2, 1, 1)\}$. Selanjutnya akan ditentukan $E_2 = \ker(2\mathbf{I} - \mathbf{A})$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pertama akan ditentukan $E_1 = \ker(\mathbf{I} - \mathbf{A})$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh $\begin{array}{r} x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array}$, akibatnya jika $x_3 = s$ maka $x_1 = -2s$ dan $x_2 = s$ dengan $s \in \mathbb{R}$. Jadi $E_1 = \operatorname{span}\{(-2, 1, 1)\}$. Selanjutnya akan ditentukan $E_2 = \ker(2\mathbf{I} - \mathbf{A})$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh $x_1 + x_3 = 0$, akibatnya jika $x_3 = t$ maka $x_1 = -t$. Kemudian $x_2 = u \in \mathbb{R}$. Jadi jika $\vec{x} \in \ker(2\mathbf{I} - \mathbf{A})$, maka $\vec{x} = (-t, u, t) = t(-1, 0, 1) + u(0, 1, 0)$ dengan $t, u \in \mathbb{R}$. Oleh karenanya $E_2 = \operatorname{span}$

Pertama akan ditentukan $E_1 = \ker(\mathbf{I} - \mathbf{A})$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh $\begin{matrix} x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{matrix}$, akibatnya jika $x_3 = s$ maka $x_1 = -2s$ dan $x_2 = s$ dengan $s \in \mathbb{R}$. Jadi $E_1 = \operatorname{span}\{(-2, 1, 1)\}$. Selanjutnya akan ditentukan $E_2 = \ker(2\mathbf{I} - \mathbf{A})$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh $x_1 + x_3 = 0$, akibatnya jika $x_3 = t$ maka $x_1 = -t$. Kemudian $x_2 = u \in \mathbb{R}$. Jadi jika $\vec{x} \in \ker(2\mathbf{I} - \mathbf{A})$, maka $\vec{x} = (-t, u, t) = t(-1, 0, 1) + u(0, 1, 0)$ dengan $t, u \in \mathbb{R}$. Oleh karenanya $E_2 = \operatorname{span}\{(-1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$.

Kita dapat memiliki $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ yang bebas linier, dengan $\mathbf{p}_1 = (-2, 1, 1)$, $\mathbf{p}_2 = (-1, 0, 1)$, dan $\mathbf{p}_3 = (0, 1, 0)$. Sehingga

Kita dapat memiliki $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ yang bebas linier, dengan $\mathbf{p}_1 = (-2, 1, 1)$, $\mathbf{p}_2 = (-1, 0, 1)$, dan $\mathbf{p}_3 = (0, 1, 0)$. Sehingga

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (tunjukkan!)}$$

Tinjau bahwa $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{\Lambda}$.

Kita dapat memiliki $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ yang bebas linier, dengan $\mathbf{p}_1 = (-2, 1, 1)$, $\mathbf{p}_2 = (-1, 0, 1)$, dan $\mathbf{p}_3 = (0, 1, 0)$. Sehingga

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (tunjukkan!)}$$

Tinjau bahwa $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{\Lambda}$. Akibatnya $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^{13}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}^{13}$, jadi $\mathbf{A}^{13} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^{13}\mathbf{P}^{-1}$

$$\mathbf{A}^{13} =$$

Kita dapat memiliki $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ yang bebas linier, dengan $\mathbf{p}_1 = (-2, 1, 1)$, $\mathbf{p}_2 = (-1, 0, 1)$, dan $\mathbf{p}_3 = (0, 1, 0)$. Sehingga

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (tunjukkan!)}$$

Tinjau bahwa $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{\Lambda}$. Akibatnya $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^{13}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}^{13}$, jadi $\mathbf{A}^{13} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^{13}\mathbf{P}^{-1}$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{13} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -8190 & 0 & -16\,382 \\ 8191 & 8192 & 8191 \\ 8191 & 0 & 16\,383 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Bahasan

Masalah Logaritma Matriks

Permasalahan

Jika $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, carilah bilangan bulat n sehingga $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1024 & 1024 \\ 0 & 1024 & 1024 \end{bmatrix}$. (Petunjuk: cari terlebih dulu matriks yang mendiagonalkan $\mathbf{B}$).

Solusi:

Solusi: $\mathbf{B}$ memiliki persamaan karakteristik sebagai berikut

$$\begin{aligned} 0 &= p_{\mathbf{B}}(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{B}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ & \quad \text{dengan ekspansi baris pertama} \\ 0 &= \end{aligned}$$

Solusi: $\mathbf{B}$ memiliki persamaan karakteristik sebagai berikut

$$\begin{aligned}
0 &= p_{\mathbf{B}}(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{B}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
& \quad \text{dengan ekspansi baris pertama} \\
0 &= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)\left((\lambda-1)^2 - 1\right) \\
&= (\lambda-1)\left(\lambda^2 - 2\lambda\right) = (\lambda-1)(\lambda)(\lambda-2) \\
&= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2).
\end{aligned}$$

Solusi: $\mathbf{B}$ memiliki persamaan karakteristik sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
0 &= p_{\mathbf{B}}(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{B}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\
& \quad \text{dengan ekspansi baris pertama} \\
0 &= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - 1)\left((\lambda - 1)^2 - 1\right) \\
&= (\lambda - 1)\left(\lambda^2 - 2\lambda\right) = (\lambda - 1)(\lambda)(\lambda - 2) \\
&= \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2).
\end{aligned}
$$

Jadi diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, dan $\lambda_3 = 2$.

Pertama akan ditentukan $E_0 = \ker(0\mathbf{I} - \mathbf{B}) = \ker(-\mathbf{B})$.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pertama akan ditentukan $E_0 = \ker(0\mathbf{I} - \mathbf{B}) = \ker(-\mathbf{B})$.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan OBE diperoleh matriks diperbesar dalam bentuk EB: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$,

akibatnya diperoleh SPL $\begin{array}{rl} x_1 & = 0 \\ x_2 + x_3 & = 0 \end{array}$. Akibatnya $x_1 = 0$ dan bila $x_3 = r \in \mathbb{R}$, maka $x_2 = -r$. Jadi $E_0 =$

Pertama akan ditentukan $E_0 = \ker(0\mathbf{I} - \mathbf{B}) = \ker(-\mathbf{B})$.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan OBE diperoleh matriks diperbesar dalam bentuk EB: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$,

akibatnya diperoleh SPL $\begin{array}{rl} x_1 & = 0 \\ x_2 + x_3 & = 0 \end{array}$. Akibatnya $x_1 = 0$ dan bila $x_3 = r \in \mathbb{R}$, maka $x_2 = -r$. Jadi $E_0 = \ker(0\mathbf{I} - \mathbf{B}) = \operatorname{span}\{(0,-1,1)\} = \operatorname{span}\{(0,1,-1)\}$.

Selanjutnya akan ditentukan $E_1 = \ker(\mathbf{I} - \mathbf{B})$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan ditentukan $E_1 = \ker(\mathbf{I} - \mathbf{B})$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh $x_2 = x_3 = 0$ dan $x_1 = s \in \mathbb{R}$ karena nilai x_1 tidak terkait x_2 dan x_3.
Oleh karenanya $E_1 = \mathrm{span}$

Selanjutnya akan ditentukan $E_1 = \ker(\mathbf{I} - \mathbf{B})$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh $x_2 = x_3 = 0$ dan $x_1 = s \in \mathbb{R}$ karena nilai x_1 tidak terkait x_2 dan x_3. Oleh karenanya $E_1 = \operatorname{span}\{(1,0,0)\}$.

Terakhir akan ditentukan $E_2 = \ker(2\mathbf{I} - \mathbf{B})$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan ditentukan $E_1 = \ker(\mathbf{I} - \mathbf{B})$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh $x_2 = x_3 = 0$ dan $x_1 = s \in \mathbb{R}$ karena nilai x_1 tidak terkait x_2 dan x_3. Oleh karenanya $E_1 = \operatorname{span}\{(1,0,0)\}$.

Terakhir akan ditentukan $E_2 = \ker(2\mathbf{I} - \mathbf{B})$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan OBE diperoleh matriks diperbesar dalam bentuk EB:
$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, akibatnya diperoleh SPL $\begin{array}{rl} x_1 & = 0 \\ x_2 - x_3 & = 0 \end{array}$. Akibatnya $x_1 = 0$ dan bila $x_3 = t \in \mathbb{R}$, maka $x_2 = t$. Jadi
$E_2 =$

Selanjutnya akan ditentukan $E_1 = \ker(\mathbf{I} - \mathbf{B})$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh $x_2 = x_3 = 0$ dan $x_1 = s \in \mathbb{R}$ karena nilai x_1 tidak terkait x_2 dan x_3. Oleh karenanya $E_1 = \mathrm{span}\{(1,0,0)\}$.

Terakhir akan ditentukan $E_2 = \ker(2\mathbf{I} - \mathbf{B})$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan OBE diperoleh matriks diperbesar dalam bentuk EB:
$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, akibatnya diperoleh SPL $\begin{array}{rl} x_1 & = 0 \\ x_2 - x_3 & = 0 \end{array}$. Akibatnya $x_1 = 0$ dan bila $x_3 = t \in \mathbb{R}$, maka $x_2 = t$. Jadi $E_2 = \ker(2\mathbf{I} - \mathbf{B}) = \mathrm{span}\{(0,1,1)\}$.

Kita dapat memiliki $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ yang bebas linier, dengan $\mathbf{p}_1 = (0, 1, -1)$, $\mathbf{p}_2 = (1, 0, 0)$, dan $\mathbf{p}_3 = (0, 1, 1)$. Sehingga

Kita dapat memiliki $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ yang bebas linier, dengan $\mathbf{p}_1 = (0, 1, -1)$, $\mathbf{p}_2 = (1, 0, 0)$, dan $\mathbf{p}_3 = (0, 1, 1)$. Sehingga

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ (tunjukkan!)}$$

Tinjau bahwa

$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} =$

Kita dapat memiliki $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ yang bebas linier, dengan $\mathbf{p}_1 = (0, 1, -1)$, $\mathbf{p}_2 = (1, 0, 0)$, dan $\mathbf{p}_3 = (0, 1, 1)$. Sehingga

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ (tunjukkan!)}$$

Tinjau bahwa

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{\Lambda}.$$

Kita memiliki $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda} \Leftrightarrow \mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$, sehingga $\mathbf{B}^n = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1}$. Kita memiliki

$$\mathbf{B}^n =$$

Kita dapat memiliki $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ yang bebas linier, dengan $\mathbf{p}_1 = (0, 1, -1)$, $\mathbf{p}_2 = (1, 0, 0)$, dan $\mathbf{p}_3 = (0, 1, 1)$. Sehingga

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ (tunjukkan!)}$$

Tinjau bahwa

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{\Lambda}.$$

Kita memiliki $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda} \Leftrightarrow \mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$, sehingga $\mathbf{B}^n = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1}$. Kita memiliki

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^n &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}2^n & \frac{1}{2}2^n \\ 0 & \frac{1}{2}2^n & \frac{1}{2}2^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Karena $\mathbf{B}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1024 & 1024 \\ 0 & 1024 & 1024 \end{bmatrix}$, maka

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}2^n & \frac{1}{2}2^n \\ 0 & \frac{1}{2}2^n & \frac{1}{2}2^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1024 & 1024 \\ 0 & 1024 & 1024 \end{bmatrix}$$

Akibatnya

Karena $\mathbf{B}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1024 & 1024 \\ 0 & 1024 & 1024 \end{bmatrix}$, maka

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}2^n & \frac{1}{2}2^n \\ 0 & \frac{1}{2}2^n & \frac{1}{2}2^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1024 & 1024 \\ 0 & 1024 & 1024 \end{bmatrix}$$

Akibatnya $\frac{1}{2}2^n = 1024$, jadi $2^n = 2048$ sehingga $n = 11$.

Bahasan

Definisi Matriks Ortogonal

Definisi

Sebuah matriks persegi $\mathbf{Q}$ disebut matriks ortogonal apabila $\mathbf{Q}$ invertibel dan inversnya sama dengan transposnya, yaitu

Definisi Matriks Ortogonal

Definisi

Sebuah matriks persegi $\mathbf{Q}$ disebut matriks ortogonal apabila $\mathbf{Q}$ invertibel dan inversnya sama dengan transposnya, yaitu

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T.$$

Akibat

Definisi Matriks Ortogonal

Definisi

Sebuah matriks persegi $\mathbf{Q}$ disebut matriks ortogonal apabila $\mathbf{Q}$ invertibel dan inversnya sama dengan transposnya, yaitu

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^{T}.$$

Akibat

$\mathbf{Q}$ adalah matriks ortogonal jika dan hanya jika $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{T} = \mathbf{Q}^{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$.

Latihan

Periksa apakah matriks-matriks berikut adalah matriks ortogonal.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Solusi:

Latihan

Periksa apakah matriks-matriks berikut adalah matriks ortogonal.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Solusi: $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$ semuanya adalah matriks ortogonal (tunjukkan!).
Perhatikan bahwa baris-baris matriks $\mathbf{A}$ maupun $\mathbf{B}$ diperoleh dari permutasi baris matriks identitas. Matriks seperti ini dikatakan sebagai matriks permutasi.

Beberapa Sifat Matriks Ortogonal

Teorema

Misalkan $\mathbf{Q}$ adalah sebuah matriks persegi berorde n, maka pernyataan-pernyataan berikut ekivalen.

1. $\mathbf{Q}$ matriks ortogonal.
2. Jika $R = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n\}$ adalah himpunan vektor-vektor baris dari $\mathbf{Q}$, maka R adalah himpunan ortonormal.
3. Jika $C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ adalah himpunan vektor-vektor kolom dari $\mathbf{Q}$, maka C adalah himpunan ortonormal.

Invers dan Hasil Kali Matriks Ortogonal

Teorema

Jika $\mathbf{Q}$ adalah matriks ortogonal, maka $\mathbf{Q}^{-1}$ juga matriks ortogonal.

Bukti

Invers dan Hasil Kali Matriks Ortogonal

Teorema

Jika $\mathbf{Q}$ adalah matriks ortogonal, maka $\mathbf{Q}^{-1}$ juga matriks ortogonal.

Bukti

Karena $\mathbf{Q}$ matriks ortogonal, maka $\mathbf{Q}^{-1} =$

Invers dan Hasil Kali Matriks Ortogonal

Teorema

Jika $\mathbf{Q}$ adalah matriks ortogonal, maka $\mathbf{Q}^{-1}$ juga matriks ortogonal.

Bukti

Karena $\mathbf{Q}$ matriks ortogonal, maka $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^{T}$. Tinjau bahwa
$\left(\mathbf{Q}^{-1}\right)^{T} \mathbf{Q}^{-1} =$

Invers dan Hasil Kali Matriks Ortogonal

Teorema

Jika $\mathbf{Q}$ adalah matriks ortogonal, maka $\mathbf{Q}^{-1}$ juga matriks ortogonal.

Bukti

Karena $\mathbf{Q}$ matriks ortogonal, maka $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^{T}$. Tinjau bahwa
$\left(\mathbf{Q}^{-1}\right)^{T} \mathbf{Q}^{-1} = \left(\mathbf{Q}^{T}\right)^{T} \mathbf{Q}^{-1} =$

Invers dan Hasil Kali Matriks Ortogonal

Teorema

Jika $\mathbf{Q}$ adalah matriks ortogonal, maka $\mathbf{Q}^{-1}$ juga matriks ortogonal.

Bukti

Karena $\mathbf{Q}$ matriks ortogonal, maka $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$. Tinjau bahwa $\left(\mathbf{Q}^{-1}\right)^T \mathbf{Q}^{-1} = \left(\mathbf{Q}^T\right)^T \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{I}$. Jadi $\mathbf{Q}^{-1}$ juga matriks ortogonal. $\square$

Teorema

Jika $\mathbf{P}$ dan $\mathbf{Q}$ adalah matriks ortogonal, maka $\mathbf{PQ}$ juga matriks ortogonal.

Bukti

Karena $\mathbf{P}$ dan $\mathbf{Q}$ adalah matriks ortogonal, maka $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$ dan $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$. Tinjau bahwa

$$(\mathbf{PQ})^{-1} =$$

Invers dan Hasil Kali Matriks Ortogonal

Teorema

Jika $\mathbf{Q}$ adalah matriks ortogonal, maka $\mathbf{Q}^{-1}$ juga matriks ortogonal.

Bukti

Karena $\mathbf{Q}$ matriks ortogonal, maka $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$. Tinjau bahwa $\left(\mathbf{Q}^{-1}\right)^T \mathbf{Q}^{-1} = \left(\mathbf{Q}^T\right)^T \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{I}$. Jadi $\mathbf{Q}^{-1}$ juga matriks ortogonal. $\square$

Teorema

Jika $\mathbf{P}$ dan $\mathbf{Q}$ adalah matriks ortogonal, maka $\mathbf{PQ}$ juga matriks ortogonal.

Bukti

Karena $\mathbf{P}$ dan $\mathbf{Q}$ adalah matriks ortogonal, maka $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$ dan $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$. Tinjau bahwa

$$(\mathbf{PQ})^{-1} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}^{-1} =$$

Invers dan Hasil Kali Matriks Ortogonal

Teorema

Jika $\mathbf{Q}$ adalah matriks ortogonal, maka $\mathbf{Q}^{-1}$ juga matriks ortogonal.

Bukti

Karena $\mathbf{Q}$ matriks ortogonal, maka $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$. Tinjau bahwa $\left(\mathbf{Q}^{-1}\right)^T \mathbf{Q}^{-1} = \left(\mathbf{Q}^T\right)^T \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{I}$. Jadi $\mathbf{Q}^{-1}$ juga matriks ortogonal. □

Teorema

Jika $\mathbf{P}$ dan $\mathbf{Q}$ adalah matriks ortogonal, maka $\mathbf{PQ}$ juga matriks ortogonal.

Bukti

Karena $\mathbf{P}$ dan $\mathbf{Q}$ adalah matriks ortogonal, maka $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$ dan $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$. Tinjau bahwa

$$(\mathbf{PQ})^{-1} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{Q}^T\mathbf{P}^T =$$

Invers dan Hasil Kali Matriks Ortogonal

Teorema

Jika $\mathbf{Q}$ adalah matriks ortogonal, maka $\mathbf{Q}^{-1}$ juga matriks ortogonal.

Bukti

Karena $\mathbf{Q}$ matriks ortogonal, maka $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$. Tinjau bahwa $\left(\mathbf{Q}^{-1}\right)^T \mathbf{Q}^{-1} = \left(\mathbf{Q}^T\right)^T \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{I}$. Jadi $\mathbf{Q}^{-1}$ juga matriks ortogonal. $\square$

Teorema

Jika $\mathbf{P}$ dan $\mathbf{Q}$ adalah matriks ortogonal, maka $\mathbf{PQ}$ juga matriks ortogonal.

Bukti

Karena $\mathbf{P}$ dan $\mathbf{Q}$ adalah matriks ortogonal, maka $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$ dan $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$. Tinjau bahwa

$$(\mathbf{PQ})^{-1} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{Q}^T\mathbf{P}^T = (\mathbf{PQ})^T,$$

jadi $\mathbf{PQ}$ juga matriks ortogonal. $\square$

Determinan Matriks Ortogonal

Teorema

Jika $\mathbf{Q}$ adalah matriks ortogonal, maka $\det(\mathbf{Q}) = \pm 1$.

Bukti

Karena $\mathbf{Q}$ matriks ortogonal, maka $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, akibatnya

$$1 = \det\left(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\right) =$$

Determinan Matriks Ortogonal

Teorema

Jika $\mathbf{Q}$ adalah matriks ortogonal, maka $\det(\mathbf{Q}) = \pm 1$.

Bukti

Karena $\mathbf{Q}$ matriks ortogonal, maka $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, akibatnya

$$\begin{aligned} 1 &= \det\left(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\right) = \det\left(\mathbf{Q}^T\right)\det(\mathbf{Q}) \\ &= \end{aligned}$$

Determinan Matriks Ortogonal

Teorema

Jika $\mathbf{Q}$ adalah matriks ortogonal, maka $\det(\mathbf{Q}) = \pm 1$.

Bukti

Karena $\mathbf{Q}$ matriks ortogonal, maka $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, akibatnya

$$\begin{aligned} 1 &= \det\left(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\right) = \det\left(\mathbf{Q}^T\right)\det(\mathbf{Q}) \\ &= \det(\mathbf{Q})\det(\mathbf{Q}) \\ &= (\det(\mathbf{Q}))^2 \end{aligned}$$

Jadi $\det(\mathbf{Q}) = \pm 1$. □

Matriks Ortogonal dan Hasil Kali Titik

Permasalahan

Misalkan $\mathbf{Q}$ adalah sebuah matriks ortogonal berukuran $n \times n$ dan $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Apa kaitan antara $\mathbf{Qx} \cdot \mathbf{Qy}$ dan $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$? Apa kaitan antara $\|\mathbf{Qx}\|$ dan $\|\mathbf{x}\|$?

Teorema

Jika $\mathbf{Q}$ adalah sebuah matriks berukuran $n \times n$ dan $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, maka pernyataan-pernyataan berikut ekivalen.

1. $\mathbf{Q}$ ortogonal
2. $\|\mathbf{Qx}\| = \|\mathbf{x}\|$
3. $\mathbf{Qx} \cdot \mathbf{Qy} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$

Diagonalisasi Ortogonal

Definisi

Suatu matriks persegi $\mathbf{A}$ dikatakan dapat didiagonalkan secara ortogonal jika terdapat matriks ortogonal $\mathbf{P}$ yang mendiagonalkan $\mathbf{A}$. Dengan perkataan lain terdapat matriks ortogonal $\mathbf{P}$ dengan sifat

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}, \text{ dengan } \mathbf{D} \text{ matriks diagonal.}$$

Akibat

Diagonalisasi Ortogonal

Definisi

Suatu matriks persegi $\mathbf{A}$ dikatakan dapat didiagonalkan secara ortogonal jika terdapat matriks ortogonal $\mathbf{P}$ yang mendiagonalkan $\mathbf{A}$. Dengan perkataan lain terdapat matriks ortogonal $\mathbf{P}$ dengan sifat

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}, \text{ dengan } \mathbf{D} \text{ matriks diagonal.}$$

Akibat

Jika $\mathbf{A}$ dapat didiagonalkan secara ortogonal, maka terdapat matriks ortogonal $\mathbf{P}$ sehingga

$$\mathbf{P}^{T}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}, \text{ dengan } \mathbf{D} \text{ matriks diagonal.}$$

Bukti

Karena $\mathbf{P}$ matriks ortogonal, maka $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{T}$, akibatnya

$$\mathbf{P}^{T}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}. \quad \square$$

Syarat Diagonalisasi Ortogonal

Teorema

Suatu matriks persegi $\mathbf{A}$ dapat didiagonalkan secara ortogonal jika dan hanya jika $\mathbf{A}$ matriks simetris.

Perhatikan bahwa jika $\mathbf{A}$ adalah matriks yang dapat didiagonalkan secara ortogonal, maka terdapat matriks diagonal $\mathbf{D}$ sehingga

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathbf{P}^T\mathbf{D}\mathbf{P}, \text{ sehingga} \\
\mathbf{A}^T &= \left(\mathbf{P}^T\mathbf{D}\mathbf{P}\right)^{\mathbf{T}} \\
&= \mathbf{P}^T\mathbf{D}^T\mathbf{P} = \mathbf{P}^T\mathbf{D}\mathbf{P} \text{ (karena } \mathbf{D}^T = \mathbf{D}) \\
&= \mathbf{A}.
\end{aligned}$$

Prosedur Diagonalisasi Secara Ortogonal

Prosedur pendiagonalan matriks simetris secara ortogoal hampir sama dengan prosedur pendiagonalan matriks seperti biasa. Misalkan $\mathbf{A}$ adalah matriks simetris berukuran $n \times n$ yang akan didiagonalkan secara ortogonal, maka prosedur yang dapat dilakukan adalah:

1. Tentukan nilai eigen dari $\mathbf{A}$, kemudian buat matriks Λ yang diagonalnya adalah nilai-nilai eigen dari $\mathbf{A}$
2. Tentukan basis tiap ruang eigen, misalkan diperoleh himpunan n vektor eigen $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ yang bebas linier.
3. Ubah himpunan $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ menjadi himpunan **ortonormal** $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n\}$. Hal ini dapat dilakukan dengan prosedur Gram-Schmidt.
4. Bentuk matriks $\mathbf{P}$ yang vektor-vektor kolomnya adalah $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n$, yaitu $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_n \end{bmatrix}$.
5. Matris $\mathbf{P}$ dan $\mathbf{A}$ akan memenuhi $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D} = \mathbf{\Lambda}$.

Contoh Diagonalisasi Secara Ortogonal

Latihan

Carilah matriks $\mathbf{P}$ yang mendiagonalkan $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ secara ortogonal.

Solusi:

Contoh Diagonalisasi Secara Ortogonal

Latihan

Carilah matriks $\mathbf{P}$ yang mendiagonalkan $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ secara ortogonal.

Solusi: dari latihan pada masalah logaritma matriks, kita mengetahui bahwa nilai eigen dari $\mathbf{A}$ adalah $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, dan $\lambda_3 = 2$ dan ruang-ruang eigennya adalah

- $E_0 =$

Contoh Diagonalisasi Secara Ortogonal

Latihan

Carilah matriks $\mathbf{P}$ yang mendiagonalkan $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ secara ortogonal.

Solusi: dari latihan pada masalah logaritma matriks, kita mengetahui bahwa nilai eigen dari $\mathbf{A}$ adalah $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, dan $\lambda_3 = 2$ dan ruang-ruang eigennya adalah

- $E_0 = \operatorname{span}\{(0, 1, -1)\}$
- $E_1 =$

Contoh Diagonalisasi Secara Ortogonal

Latihan

Carilah matriks $\mathbf{P}$ yang mendiagonalkan $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ secara ortogonal.

Solusi: dari latihan pada masalah logaritma matriks, kita mengetahui bahwa nilai eigen dari $\mathbf{A}$ adalah $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, dan $\lambda_3 = 2$ dan ruang-ruang eigennya adalah

- $E_0 = \text{span}\{(0, 1, -1)\}$
- $E_1 = \text{span}\{(1, 0, 0)\}$
- $E_2 =$

Contoh Diagonalisasi Secara Ortogonal

Latihan

Carilah matriks $\mathbf{P}$ yang mendiagonalkan $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ secara ortogonal.

Solusi: dari latihan pada masalah logaritma matriks, kita mengetahui bahwa nilai eigen dari $\mathbf{A}$ adalah $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, dan $\lambda_3 = 2$ dan ruang-ruang eigennya adalah

- $E_0 = \text{span}\{(0, 1, -1)\}$
- $E_1 = \text{span}\{(1, 0, 0)\}$
- $E_2 = \text{span}\{(0, 1, 1)\}$

Kita memiliki himpunan 3 vektor yang bebas linier, yaitu $\{(0, 1, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$. Untuk memperoleh himpunan ortonormal dari himpunan ini, kita dapat melakukan prosedur Gram-Schmidt.

Contoh Diagonalisasi Secara Ortogonal

Latihan

Carilah matriks $\mathbf{P}$ yang mendiagonalkan $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ secara ortogonal.

Solusi: dari latihan pada masalah logaritma matriks, kita mengetahui bahwa nilai eigen dari $\mathbf{A}$ adalah $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, dan $\lambda_3 = 2$ dan ruang-ruang eigennya adalah

- $E_0 = \operatorname{span}\{(0,1,-1)\}$
- $E_1 = \operatorname{span}\{(1,0,0)\}$
- $E_2 = \operatorname{span}\{(0,1,1)\}$

Kita memiliki himpunan 3 vektor yang bebas linier, yaitu $\{(0,1,-1),(1,0,0),(0,1,1)\}$. Untuk memperoleh himpunan ortonormal dari himpunan ini, kita dapat melakukan prosedur Gram-Schmidt. Namun karena $\{(0,1,-1),(1,0,0),(0,1,1)\}$ adalah himpunan ortogonal, maka himpunan ortonormal dari himpunan ini dapat diperoleh dengan cara membagi setiap vektor dengan norm-nya masing-masing, sehingga diperoleh himpunan

Contoh Diagonalisasi Secara Ortogonal

Latihan

Carilah matriks $\mathbf{P}$ yang mendiagonalkan $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ secara ortogonal.

Solusi: dari latihan pada masalah logaritma matriks, kita mengetahui bahwa nilai eigen dari $\mathbf{A}$ adalah $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, dan $\lambda_3 = 2$ dan ruang-ruang eigennya adalah

- $E_0 = \operatorname{span}\{(0, 1, -1)\}$
- $E_1 = \operatorname{span}\{(1, 0, 0)\}$
- $E_2 = \operatorname{span}\{(0, 1, 1)\}$

Kita memiliki himpunan 3 vektor yang bebas linier, yaitu $\{(0, 1, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$. Untuk memperoleh himpunan ortonormal dari himpunan ini, kita dapat melakukan prosedur Gram-Schmidt. Namun karena $\{(0, 1, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ adalah himpunan ortogonal, maka himpunan ortonormal dari himpunan ini dapat diperoleh dengan cara membagi setiap vektor dengan norm-nya masing-masing, sehingga diperoleh himpunan

$$\left\{\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), (1, 0, 0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}.$$

Akibatnya diperoleh matriks $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. Matriks $\mathbf{P}$ adalah matriks ortogonal karena $\mathbf{P}\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^T\mathbf{P} = \mathbf{I}$. Kemudian matriks $\mathbf{P}$ juga mendiagonalkan $\mathbf{A}$ karena

$$\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D} = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$