Pembuktian Tautologi dengan Indirect Proof

Informatika - Undip

Ingat Definisi Tautologi

- **Definition**
  - **Tautologi adalah** sebuah formula proposisi yang mempunyai nilai kebenaran True (T) untuk semua nilai kebenaran dari variabel yang membentuk formula tersebut
  - Tautologi juga disebut ***logically valid formulae.***
- Bagaimana membuktikan sebuah formula itu Tautologi?
  - Dengan menggunakan Tabel Kebenaran

Contradictory formula

- Kebalikan dari Tautologi adalah C**ontradictory formula**
  - Formula yang selalu mempunyai nilai kebenaran False
  - Contoh : $(p \wedge \neg p)$ adalah contradictory formula.

Satisfiable

- **Definition**
  - Sebuah formula proposisi yang memperoleh formula kebenaran True untuk **beberapa** nilai kebenaran dari variabel pembentuk formula tersebut dinamakan **satisfiable.**

- **Contoh** *:*
  - The formula $p \wedge \neg q \wedge r$ is satisfied by the assignment $p : T, q : F, r : T$.
  - The formula $p \wedge \neg p$ is not satisfiable.

Soal Latihan 1

– Construct the truth tables of the following propositional formulae and determine which of them (if any) are tautologies, which are contradictory formulae and which are satisfiable formulae.

a) $\neg((p \land \neg p) \to q)$

b) $((p \to q) \to p) \to p$

c) $(p \lor \neg q) \to \neg(q \land \neg p)$

d) $(p \to q) \land (q \to r) \land \neg(\neg p \lor r)$

e) $\neg(\neg p \leftrightarrow q) \to (r \lor \neg q)$

f) $\neg((p \land \neg q) \to r) \leftrightarrow (\neg(q \lor r) \to \neg p)$

Pembuktian Tautologi

- Selain dengan Tabel Kebenaran, pembuktian Tautologi dapat dilakukan dengan ***Indirect Proof*** atau ***Proof by Contradiction***

  - Menemukan *falsifying assigment*

  - Jika ada kontradiksi (ada nilai yang harus benar dan salah), maka terbukti Tautologi

Contoh

- Misalkan dibuat notasi sbb :
  - *A : T,* artinya *'A must be true',*
  - *A : F,* artinya *'A must be false'.*

- Buktikan $\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \vee \neg r)$.
  - Pernyataan akan salah jika $\neg(p \rightarrow \neg q) : T$ dan $p \vee \neg r : F$.
  - Pada Anteseden , $p \rightarrow \neg q : F$, sehingga $p : T$ dan $\neg q : F$.
  - Pada Konsekuen , $p : F$ dan $\neg r : F$.
  - Lihat pada Anteseden p harus True dan pada konsekuen p harus False. Hal tersebut "**impossible**"
  - Sehingga menyatakan formula tersebut salah telah gagal, oleh karena itu **Tautology**.

Contoh lain

Apakah $\neg p \rightarrow \neg(p \vee \neg q)$ Tautology?

- Pernyataan akan salah untuk $\neg p : T$, $\neg(p \vee \neg q) : F$.
- Oleh karena itu $\boldsymbol{p : F}$ dan $p \vee \neg q : T$.
- $p \vee \neg q : T$ berarti $p : T$ *or* $\neg q : T$.
- Perhatikan 2 kasus yang ada:

  Case 1 $p : T$. kontradiksi dengan $\boldsymbol{p : F}$**.**

  Case 2 $\neg q : T$. Maka $q : F$.

- Pada kasus kedua ini tidak ada kontradiksi dan tidak ada yang bisa kita lakukan lagi. Namun kita dapat cek bahwa untuk $p : F$ and $q : F$ akan didapatkan formula yang False ➔ **Bukan Tautologi**

Pembuktian kontradiksi pada sub formula

- Untuk membuktikan kontradiksi tidak harus sampai ke variable, bisa dibuktikan cukup hanya pada sub formulanya
- Contoh :
- Buktikan apakah $(p \vee \neg q) \rightarrow (\neg p \rightarrow (p \vee \neg q))$ tautology?
- Pernyataan false, maka $(p \vee \neg q)$: T dan $(\neg p \rightarrow (p \vee \neg q))$: F, sehingga $\neg p$: T and $(p \vee \neg q)$: F, yang kontradiksi dengan semula

Pembuktian untuk Biimplikasi

- Misalkan: $((p \land \neg q) \rightarrow \neg r) \leftrightarrow ((p \land r) \rightarrow q)$.
- Untuk nilai kebenaran False , maka terdapat 2 kemungkinan:

Case 1 $((p \land \neg q) \rightarrow \neg r) : T$ dan $((p \land r) \rightarrow q) : F$.

- Dari pernyataan kedua $(p \land r) : T$ and $q : F$, sehingga $p : T$, $q : F$, $r : T$.
- Dari pernyataan pertama terdapat 2 subkasus:
  - Case 1.1 $\neg r : T$. Then $r : F$, kontradiksi dengan $r : T$.
  - Case 1.2 $(p \land \neg q) : F$, maka:
    - Case 1.2.1 $p : F$ kontradiksi dengan $p : T$.
    - Case 1.2.1 $\neg q : F$. Then $q : T$ kontradiksi dengan $q : F$.
- Subcase ini dapat dihindari jika kita berikan nilai $p : T$, $q : F$, $r : T$ akan membuat $((p \land \neg q) \rightarrow \neg r) : F$.

Lanjutan

Case 2 $((p \land r) \rightarrow q) : T$ and $(p \land \neg q) \rightarrow \neg r) : F$.

- Sehingga $(p \land \neg q) : T$ and $\neg r : F$, i.e., $p : T$, $q : F$, $r : T$.
- Nilai kebenaran tersebut bisa kita masukkan ke pernyataan ke formula 1 sehingga membuat $((p \land r) \rightarrow q) : F$
- Dengan kata lain pernyataan tersebut kontradiksi dengan $((p \land r) \rightarrow q) : T$.

Karena tidak ada semua kasis yang dapat di "falsified" maka pernyataan formula tersebut tautology.

Soal Latihan 2

Apakah formula proposisi berikut Tautologi? Buktikan dengan Indirect proof

– *$p \rightarrow r$ and $q \rightarrow r$ logically imply $(p \vee q) \rightarrow r$.*

– Soal latihan sebelumnya (b,c,e,f)