BAB 8
TEKNIK PENGINTEGRALAN

- Standar Kompetensi

  Mahasiswa dapat menerapkan teknik pengintegralan untuk menentukan nilai integral.

- Kompetensi dasar
  1. Mahasiswa dapat menerapkan teknik integral parsial untuk mencari nilai integral.
  2. Mahasiswa dapat menentukan nilai interal fungsi trigonometri.
  3. Mahasiswa dapat menerapkan teknik substitusi trigonometri untuk mencari nilai integral.
  4. Mahasiswa dapat menentukan integral fungsi rasional.
  5. Mahasiswa dapat menerapkan teknik substitusi yang merasionalkan untuk menentukan nilai integral.

- Pokok Bahasan
  1. Integral parsial
  2. Integral fungsi trigonometri
  3. Integral substitusi trigonometri
  4. Integral fungsi rasional
  5. Substitusi yang merasionalkan

Salah satu kendala yang sering dijumpai dalam pengintegralan adalah tidak semua fungsi integran mempunyai anti turunan. Pengintegralan melibatkan berbagai teknik dan banyak teknik pengintegralan yang hasilnya bukan hanya fungsi-fungsi elementer atau fungsi dasar. Oleh karena itu dikembangkan metode atau teknik pengintegralan untuk menyatakan integran dalam bentuk baku rumus-rumus dasar integral.

Berikut dibahas berbagai Teknik Pengintegralan, antara lain:

8.1. Integral Parsial

Jika aturan substitusi digunakan untuk menyelesaikan integral yang berkaitan dengan aturan rantai, maka untuk menyelesaikan integral yang berkaitan dengan aturan hasil kali turunan digunakan rumus integral parsial.

Diketahui fungsi f dan g terdiferensial (mempunyai turunan) pada interval I, maka

$$\frac{d}{dx}(f.g) = f'g + g'f \quad \Leftrightarrow \quad \int (f'g + g'f)\,dx = f.g$$

$$\Leftrightarrow \quad \int (fg')\,dx = f.g - \int (gf')\,dx.$$

Jika kita misalkan $f(x) = u$ dan $g(x) = v$ maka

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

yang disebut rumus integral parsial.

Contoh 8.1 Tentukan $\int x \sin x\, dx$.

Solusi:

Misalkan $u = x$ maka $du = dx$

$dv = \sin x\, dx$ maka $v = -\cos x$

$$\int x \sin x\, dx = -x\cos x - \int (-\cos x)\, dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + C.$$

Contoh 8.2 Tentukan $\int x^2 \sin x\, dx$.

Solusi:

Misalkan $u = x^2$ maka $du = 2x dx$

$dv = \sin x\, dx$ maka $v = -\cos x$

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x - \int (-\cos x) 2x\, dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2\left(x \sin x - \int \sin x dx\right)$$

$$= -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C$$

$$= 2x\sin x + \left(2 - x^2\right)\cos x + C\,.$$

Contoh 8.3 Tentukan integral $\int e^x \sin x\, dx$.

Solusi:

Misalkan $u = e^x$ maka $du = e^x dx$

$dv = \sin x\, dx$ maka $v = -\cos x$

$$\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x - \int (-\cos x) e^x dx$$

$$= -e^x \cos x + \int (\cos x) e^x dx$$

$$= -e^x \cos x + \left(e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx\right)$$

$$\int e^x \sin x\, dx + \int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + C\,.$$

Contoh 8.4 Tentukan integral $\int xe^{2x}\, dx$.

Solusi:

Misalkan $u = x \;\Rightarrow\; du = dx$ dan $dv = e^{2x}dx \;\Rightarrow\; v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$\int xe^{2x}\, dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \int \frac{1}{2}e^{2x}du = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) + C$$

$$= \frac{e^{2x}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C\,.$$

Contoh 8.5 Tentukan integral dari $\int x\cos 2x dx$.

Solusi:

Misalkan $u = x \;\Rightarrow\; du = dx$ dan $dv = \cos 2x \;\Rightarrow\; v = \int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\sin 2x$

$$\int x\cos 2x dx = x\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) - \int \frac{1}{2}\sin 2x\, dx$$

$$= x\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) + C$$

$$= \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

Contoh 8.6 Tentukan integral $\int x^2 \ln x dx$.

Solusi:

Misalkan $u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x} dx$ dan $dv = x^2 \quad \Rightarrow \quad v = \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3$.

$$\int x^2 \ln x \, dx = (\ln x)\left(\frac{1}{3} x^3\right) - \int \frac{1}{3} x^3 \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} x^3\right) + C$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C.$$

Latihan 8.1

Tentukan hasil dari integral berikut!

1. $\int x \sin 4x \, dx$
2. $\int x^2 \cos 3x \, dx$
3. $\int \cos(\ln x) \, dx$
4. $\int e^{2x} \sin 3x \, dx$
5. $\int x^3 e^x dx$
6. $\int e^x \sin x \, dx$
7. $\int x^3 e^{x^2} \, dx$
8. $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$
9. $\int x \sec^2 x \, dx$
10. $\int e^{2x} \cos 3x \, dx$.

8.2. Integral Fungsi Trigonometri

Integral Fungsi Trigonometri bentuk $\int \sin^n x \cos^m x \, dx$.

1) Jika pangkat dari kosinus ganjil ($m = 2k+1$) maka misalkan $u = \sin x$ dan gunakan $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

$$\int \sin^n x \cos^m x \, dx = \int \sin^n x \cos^{2k+1} x \, dx = \int \sin^n x \cos^{2k} x \cos x \, dx$$

$$= \int \sin^n x \left(1 - \sin^2 x\right)^k \cos x \, dx$$

2) Jika pangkat sinus ganjil ($n = 2k+1$) maka misalkan $u = \cos x$ dan gunakan $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

$$\int \sin^n x \cos^m x \, dx = \int \sin^{2k+1} x \cos^m x \, dx = \int \sin^{2k} x \sin x \cos^m x \, dx$$

$$= \int \left(1 - \cos^2 x\right)^k \cos^m x \sin x \, dx$$

3) Jika baik pangkat sinus atau pangkat kosinus semuanya ganjil maka gunakan salah satu aturan di atas.
4) Jika baik pangkat sinus maupun kosinus genap maka gunakan kesamaan sudut paruh, $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, atau $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

Contoh 8.7 Tentukan hasil dari integral $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$.

Solusi:

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x \, dx$$

$$= \int \sin^2 x \left(1 - \sin^2 x\right) d\left(\sin x\right)$$

$$= \int \left(\sin^2 x - \sin^4 x\right) d\left(\sin x\right)$$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

Atau

Misalkan $u = \sin x$ maka $du = \cos x \, dx$

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x \, dx$$

$$= \int \sin^2 x \left(1 - \sin^2 x\right) \cos x dx$$

$$= \int \left(u\right)^2 \left(1 - u^2\right) du$$

$$= \int \left(u^2 - u^4\right) du$$

$$= \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 + C$$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

Contoh 8.8 Tentukan integral dari $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$.

Solusi:

Misalkan $u = \cos x$ maka $du = -\sin x \, dx$.

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x \, dx$$

$$= \int \left(1 - \cos^2 x\right) \cos^2 x \sin x \, dx$$

$$= \int \left(1 - u^2\right) u^2 du$$

$$= \int \left(u^2 - u^4\right) du$$

$$= \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 + C$$

$$= \frac{1}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$$

Contoh 8.9 Tentukan integral $\int \sin^7 x \cos^3 x \, dx$.

Solusi:

Misalkan $u = \sin x$ maka $du = \cos x \, dx$

$$\int \sin^7 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^7 x \cos^2 x \cos x \, dx$$

$$= \int \sin^7 x \left(1 - \sin^2 x\right) \cos x \, dx$$

$$= \int u^7 \left(1 - u^2\right) du$$

$$= \frac{1}{8}u^8 - \frac{1}{10}u^{10} + C$$

$$= \frac{1}{8}\sin^8 x - \frac{1}{10}\sin^{10} x + C.$$

Contoh 8.10 Tentukan integral $\int \sin^3 x\, dx$.

Solusi:

$$\int \sin^3 x\, dx = \int \sin^2 x \sin x\, dx$$

$$= \int \left(1-\cos^2 x\right)\sin x\, dx$$

$$= \int \sin x dx - \int \cos^2 x \sin x\, dx.$$

$\int \sin x dx = -\cos x$ dan

$\int \cos^2 x \sin x\, dx$ dicari dengan metode substitusi, yaitu

Misalkan $u = \cos x$ maka $du = -\sin x\, dx$.

$$\int \cos^2 x \sin x\, dx = \int u^2 (-du) = -\frac{1}{3}u^3 = -\frac{1}{3}(\cos x)^3.$$

Jadi, $\int \sin^3 x\, dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$.

Latihan 8.2

Carilah hasil dari integral di bawah ini!

1. $\int \tan x\, dx$
2. $\int \sin^5 x\, dx$
3. $\int \sin x \cos^2 x\, dx$
4. $\int \sin^2 x \cos x\, dx$
5. $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$
6. $\int \sin 4x \cos 2x\, dx$
7. $\int \cos^2 x\, dx$
8. $\int \sin^2 x\, dx$
9. $\int \sin^6 x \cos^4 x\, dx$
10. $\int \cos^3 x\, dx$.

8.3. Integral Substitusi Trigonometri

Untuk menyelesaikan integral yang memuat bentuk akar kuadrat diperlukan substitusi trigonometri agar bentuk akarnya hilang. Teknik pengintegralan substitusi trigonometri menggunakan segitiga siku-siku.

Bentuk	substitusi	kesamaan
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin t$	$1 - \sin^2 t = \cos^2 t$

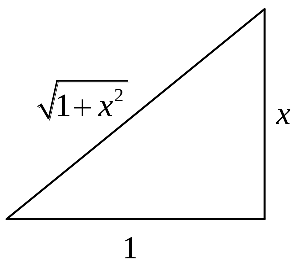
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan t$	$\tan^2 t+1=\sec^2 t$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec t$	$\sec^2 t-1=\tan^2 t$

Contoh 8.11 Tentukan integral $\int \frac{1}{x^2+1}dx$.

Solusi:

Misalkan $\tan t=x$ maka $d(\tan t)=dx \quad \Leftrightarrow \quad \sec^2 t\,dt=dx$.

$\tan t=x \quad \Leftrightarrow \quad t=\arctan x$



$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+1}dx &= \int \frac{1}{(\tan t)^2+1}\sec^2 t\,dt \\
&= \int \frac{1}{\sec^2 t}\sec^2 t\,dt \\
&= \int dt \\
&= t+C \\
&= \arctan x+C.
\end{aligned}
$$

Contoh 8.12 Tentukan hasil integral dari $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Solusi:

Misalkan $\sin t=x$ maka $\cos t\,dt=dx$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\,dt \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{\cos^2 t}}\cos t\,dt \\
&= \int dt \\
&= t+C \\
&= \arcsin x+C.
\end{aligned}
$$

Contoh 8.13 Tentukan hasil integral dari $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$.

Solusi:

Misalkan $\sec t = x$ maka $\tan t \sec t \; dt = dx$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \int \frac{1}{\sec t\sqrt{\sec^2 t-1}} \tan t \sec t \; dt$$

$$= \int \frac{1}{\sec t\sqrt{\tan^2 t}} \tan t \sec t \; d$$

$$= arc\sec x + C.$$

Contoh 8.14 Tentukan integral $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Solusi:

Misalkan $\tan t = x$ maka $\sec^2 t \; dt = dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{\tan^2 t+1}} \sec^2 t \; dt$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{\sec^2 t}} \sec^2 t \; dt$$

$$= \int \sec t \; dt$$

$$= \int \sec t \; \frac{(\tan t + \sec t)}{(\tan t + \sec t)} dt$$

Misal $u = \tan t + \sec t$ maka

$$du = \left(\sec^2 t + \tan t \sec t\right)dt = \sec t\left(\sec t + \tan t\right)dt$$

$$\int \sec t \; \frac{(\tan t + \sec t)}{(\tan t + \sec t)} dt = \int \frac{1}{u} du$$

$$= \ln\left|\arctan x + \text{arcsec} x\right| + C.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \ln\left|\arctan x + \text{arcsec} x\right| + C.$$

Latihan 8.3

Tentukan hasil integral di bawah ini!

1. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx$

6. $\int x^3\sqrt{a^2-x^2}\; dx$

2. $\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$
3. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4x}}dx$
4. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-6x}}dx$
5. $\int \frac{\sqrt{x^2+16}}{x^2}dx$
7. $\int \sqrt{x^2+4}\, dx$
8. $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}dx$
9. $\int x^2\sqrt{x^2-16}\, dx$
10. $\int x\sqrt{x^2+4}\, dx$

8.4. Integral Fungsi Rasional

Diingatkan kembali bahwa fungsi rasional berbentuk $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}, q(x)\neq 0$. Fungsi rasional dapat dinyatakan sebagai jumlahan fungsi parsial.

Contoh 8.15 Carilah integral dari $\int \frac{x-5}{x^2-5x+6}dx$.

Solusi:

$f(x)=\frac{x-5}{x^2-5x+6}$ dapat ditulis $f(x)=\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-3}$

$$\int \frac{x-5}{x^2-5x+6}dx=\int\left(\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-3}\right)dx$$

$$=3\int\frac{1}{x-2}dx-2\int\frac{1}{x-3}dx$$

$$=3\ln|x-2|-2\ln|x-3|+C.$$

Integral fungsi rasional dapat digunakan bila derajat (pangkat) fungsi p lebih kecil dari derajat (pangkat) fungsi q. Bila derajat p lebih besar dari derajat q maka bagilah p dengan q sehingga diperoleh bentuk

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=s(x)+\frac{r(x)}{q(x)}.$$

1) Bila $q(x)$ adalah hasil kali n faktor linear yang berbeda.

   $q(x)$ dapat ditulis

$$q(x) = (a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\ldots(a_nx+b_n)$$

   Maka ada $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sehingga

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \ldots + \frac{A_n}{a_nx+b_n}.$$

Contoh 8.16 Tentukan hasil dari integral $\int \frac{x^3+x}{x^2-x-2}\,dx$.

Solusi:

$$\frac{x^3+x}{x^2-x-2} = (x+1) + \frac{4x+2}{(x-2)(x+1)}$$

$$\frac{4x+2}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+1)}$$

Dengan menyamakan koefisien diperoleh $A = \frac{10}{3}$ dan $B = \frac{2}{3}$ sehingga

$$\int \frac{x^3+x}{x^2-x-2}\,dx = \int (x+1) + \frac{\frac{10}{3}}{(x-2)} + \frac{\frac{2}{3}}{(x+1)}\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) + \frac{10}{3}\ln|x-2| + \frac{2}{3}\ln|x+1| + C.$$

2) Bila $q(x)$ adalah hasil kali n faktor linear, beberapa diantaranya berulang.

   Misalkan faktor linear (a_1x+b_1) muncul k kali maka

Contoh 8.17 Hitung $\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx$!

Solusi:

$$\frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1} = (x+1) + \frac{4x}{x^3-x^2-x+1}$$

$$\frac{4x}{x^3-x^2-x+1}=\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x+1)}$$

sehingga dengan menyamakan koefisien diperoleh $A=2; B=1; C=-1$.

$$\int\frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx=\int(x+1)+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)}-\frac{1}{(x+1)}\,dx$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)-\frac{2}{(x-1)}+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

3) Bila $q(x)$ mengandung faktor kuadrat yang tak dapat diuraikan dan tak ada yang berulang.

Contoh 8.18 Hitung $\int\frac{3x^2+2}{x^3+x}\,dx$!

Solusi:

$$\frac{3x^2+2}{x^3+x}=\frac{3x^2+2}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)}.$$

Dengan menyamakan koefisien diperoleh $A=2; B=1; C=0$, sehingga

$$\int\frac{3x^2+2}{x^3+x}\,dx=\int\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{x^2+1}\right)dx=2\ln x+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+C$$

4) Bila $q(x)$ mengandung faktor kuadrat yang tak dapat diuraikan dan ada yang berulang.

Contoh 8.19 Hitunglah $\int\frac{2x^4+x^3+7x^2+2}{x^5+2x^3+x}\,dx$!

Solusi:

$$\frac{2x^4+x^3+7x^2+2}{x^5+2x^3+x}=\frac{2x^4+x^3+7x^2+2}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

Dengan menyamakan koefisien diperoleh $A=2; B=1; C=0; D=2; E=0$

$$\int \frac{2x^4+x^3+7x^2+2}{x^5+2x^3+x}\,dx = \int\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{\left(x^2+1\right)}+\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\right)dx$$

$$= 2\ln x + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| - \frac{1}{x^2+1} + C\,.$$

Latihan 8.4

Tentukan integral berikut ini!

1. $\int \frac{3x+1}{x^2+x}\,dx$
3. $\int \frac{6-x-x^2}{x^3+2x^2}\,dx$
5. $\int \frac{x^2+1}{x\left(x^2-1\right)^2}\,dx$
2. $\int \frac{\frac{5}{2}x+1}{x^2-x+1}\,dx$
4. $\int \frac{4x^2+3x+2}{x^3+x^2+2x+2}\,dx$
6. $\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\,dx$.

8.5. Substitusi yang Merasionalkan

Beberapa fungsi yang tidak rasional dapat diubah menjadi fungsi rasional dengan cara substitusi. Jika sebuah integran berbentuk $\sqrt[n]{f(x)}$ maka substitusi $u=\sqrt[n]{f(x)}$ dapat kita gunakan.

Contoh 8.20 Tentukan $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$.

Solusi:

Misalkan $u=\sqrt{x+4}$ maka $u^2=x+4$ sehingga $2u\,du=dx$

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx = \int \frac{u}{u^2-4}2u\,du$$

$$= \int \frac{2u^2}{u^2-4}\,du\,.$$

Perhatikan!

$$\frac{2u^2}{u^2-4} = \frac{2\left(u^2-4\right)+8}{u^2-4} = 2+\frac{8}{u^2-4}$$

$$\frac{8}{u^2-4}=\frac{8}{(u-2)(u+2)}=\frac{A}{(u-2)}+\frac{B}{(u+2)}.$$

Dengan menyamakan koefisien kita peroleh $A=2; B=-2$.

Dengan demikian kita dapatkan

$$\int \frac{2u^2}{u^2-4}\,du=\int\left(2+\frac{2}{(u-2)}-\frac{2}{(u+2)}\right)du$$

$$=2u+2\ln|u-2|-2\ln|u+2|+C$$

$$=2\sqrt{x+4}+2\ln\left|\sqrt{x+4}-2\right|-2\ln\left|\sqrt{x+4}+2\right|+C$$

Jadi $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx=2\sqrt{x+4}+2\ln\left|\sqrt{x+4}-2\right|-2\ln\left|\sqrt{x+4}+2\right|+C$.

Latihan 8.5

Tentukan integral dari

1. $\int \frac{x}{\sqrt{x+4}}\,dx$
2. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$