APLIKASI INTEGRAL LIPAT DUA

Penerapan integral lipat dua dapat digunakan untuk menghitung :

- Volume benda pejal,
- Massa, pusat massa, dan momen inersi (dalam bidang Fisika) dan
- Luas permukaan.

Penerapan integral lipat dua untuk menentukan volume benda pejal telah dipaparkan di depan. Sekarang kita akan uraikan penerapan integral lipat dua untuk menghitung massa, pusat massa, dan momen inersi, serta luas permukaan kurva.

- Massa

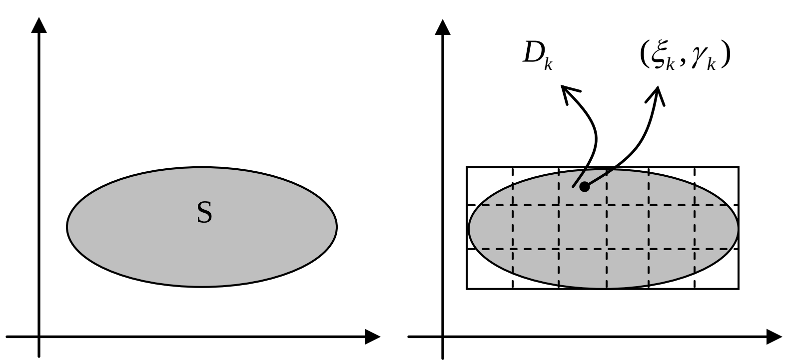
Diberikan pelat tipis (lamina) dengan kerapatan berubah-ubah (yaitu lamina yang terbuat dari bahan tak homogen, untuk lamina homogen kerapatannya konstan).

Andaikan suatu lamina mencakup daerah S di bidang xy dan kerapatan (yaitu massa persatuan luas) di (x, y) diberikan oleh $\rho(x, y)$. Partisikan S ke dalam persegipanjang-persegipanjang kecil $D_1, D_2, \ldots, D_k$. Ambil titik tengah (ξ_k, γ_k) pada persegipanjang kecil D_k yang luasnya $A(D_k)$. Maka massa dari D_k secara hampiran adalah

$$\rho(\xi_k, \gamma_k).A(D_k)$$

Sedangkan massa total lamina secara hampiran adalah

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \gamma_k).A(D_k).$$



soli_erf@yahoo.com

Massa sebenarnya, dengan mengambil limit di atas untuk norma partisi mendekati nol, yakni integral lipat dua, jadi

$$m = \iint_S \rho(x,y)\, dA$$

Contoh 1

Suatu lamina dengan kerapatan $\rho(x,y) = xy$ di batasi oleh sumbu-x, garis $x = 8$, dan kurva $y = x^{\frac{2}{3}}$. Tentukan massa totalnya!

Solusi:

$$m = \iint_S \rho(x,y)\, dA = \iint_S xy\, dA = \int_0^8 \int_0^{x^{\frac{2}{3}}} xy\, dy\, dx$$

$$= \int_0^8 \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_0^{x^{\frac{2}{3}}} dx = \int_0^8 \frac{1}{2} x^{\frac{7}{3}}\, dx = \frac{1}{2} . \frac{3}{10} x^{\frac{10}{3}} \Big|_0^8 = \frac{768}{5} .$$

- Pusat Massa

Jika $m_1, m_2, \ldots, m_n$ adalah titik massa yang masing-masing ditempatkan di $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ pada bidang, maka

(i) Momen massa total terhadap sumbu-y diberikan oleh :

$$M_y = \sum_{k=1}^{n} x_k m_k \quad \text{dan} \quad M_y = \iint_S x\rho(x,y)\, dA$$

(ii) Momen massa total terhadap sumbu-x adalah :

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} y_k m_k \quad \text{dan} \quad M_x = \iint_S y\rho(x,y)\, dA$$

(iii) Koordinat pusat massa (titik kesetimbangan), yaitu $(\bar{x}, \bar{y})$ diberikan:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \quad \text{dan} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} .$$

soli_erf@yahoo.com

Diberikan lamina dengan kerapatan $\rho(x,y)$ pada daerah S, maka

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint_S x\rho(x,y)\,dA}{\iint_S \rho(x,y)\,dA} \quad \text{dan} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_S y\rho(x,y)\,dA}{\iint_S \rho(x,y)\,dA}$$

Contoh 2

Tentukan pusat massa dari lamina pada contoh 1 di atas.

Solusi:

Telah diperoleh massa lamina $m = \frac{768}{5} = 153,6$.

Momen massa M_y terhadap sumbu-y adalah

$$M_y = \iint_S x\rho(x,y)dA = \int_0^8 \int_0^{x^{\frac{2}{3}}} x(xy)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^8 \left[\frac{x^2y^2}{2}\right]_0^{x^{\frac{2}{3}}} dx = \int_0^8 \frac{x^{\frac{10}{3}}}{2} dx = \frac{1}{2}.\frac{3}{13} x^{\frac{13}{3}}\Big|_0^8 = \frac{12.288}{13} = 945,23.$$

Momen massa M_x terhadap sumbu-x adalah

$$M_x = \iint_S y\rho(x,y)dA = \int_0^8 \int_0^{x^{\frac{2}{3}}} y(xy)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^8 \int_0^{x^{\frac{2}{3}}} xy^2 dy\,dx = \int_0^8 \left[\frac{xy^3}{3}\right]_0^{x^{\frac{2}{3}}} dx = \int_0^8 \frac{x^3}{3} dx = \frac{1}{3}.\frac{1}{4} x^4\Big|_0^8 = \frac{1024}{3} = 341,33.$$

Sehingga pusat massanya sbb :

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{945,23}{153,6} = 6,15 \quad \text{dan} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{341,33}{153,6} = 2,22.$$

Contoh 3

Tentukan pusat massa lamina yang berbentuk seperempat lingkaran dengan radius a yang kerapatannya sebanding terhadap jarak dari pusat lingkaran.

Solusi :

soli_erf@yahoo.com

Fungsi kerapatan sebanding terhadap jarak dari pusat lingkaran ditulis $\rho(x,y) \sim \sqrt{x^2+y^2}$.

Jadi $\rho(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2}$, dengan k konstanta.

Karena $\sqrt{x^2+y^2} = r$ maka

$$m = \iint_S k\sqrt{x^2+y^2}\,dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a k\,r\,r\,dr\,d\theta$$

$$= k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^a d\theta = k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}a^3 d\theta = \frac{k}{3}.a^3\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ka^3\pi}{6}.$$

$$M_y = \iint_S xk\sqrt{x^2+y^2}\,dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a k(r\cos\theta)r\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a kr^3\cos\theta\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(k\cos\theta).\frac{1}{4}r^4\right]_0^a d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k}{4}a^4\cos\theta\,d\theta = \frac{k}{4}a^4.\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{k}{4}a^4$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{ka^4}{4}}{\frac{ka^3\pi}{6}} = \frac{3a}{2\pi}.$$

Karena kesimetrian lamina maka $\bar{y} = \bar{x} = \frac{3a}{2\pi}$. (Atau buktikan bahwa $\bar{y} = \frac{3a}{2\pi}$, cara analog)

Jadi pusat massa lamina $\left(\frac{3a}{2\pi}, \frac{3a}{2\pi}\right)$.

- Momen Inersia

Suatu partikel bermassa m dan bergerak dengan kecepatan v maka enegri kinetik E_k :

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Jika pertikel berputar dengan kecepatan sudut (angular) ω dengan jari-jari r maka kecepatan linier v sebesar :

$$v = r\omega$$

Energi kinetik menjadi :

soli_erf@yahoo.com

$$E_k = \frac{1}{2}\left(mr^2\right)\omega^2$$

mr^2 disebut **momen inersia** (ukuran kelembaman suatu benda).

Suatu partikel bermassa m dan jaraknya r satuan dari garis g maka momen inersianya didefinisikan sebagai :

$$I = mr^2$$

Momen inersia keping S diberikan oleh :

(i) Momen inersia keping S terhadap sumbu-x

$$I_x = \iint_S y^2 \rho(x,y)\, dA$$

(ii) Momen inersia keping S terhadap sumbu-y

$$I_y = \iint_S x^2 \rho(x,y)\, dA$$

(iii)Momen inersia keping S terhadap sumbu-z (titik asal/ titik koordinat)

$$I_z = \iint_S \left(x^2 + y^2\right)\rho(x,y)\, dA = I_x + I_y$$

Contoh 4

Jika rapat massa di setiap titik pada keping

$$S = \left\{(x,y) : 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2x\right\}$$

adalah $\rho(x,y) = xy$. Tentukan momen inersianya terhadap sumbu x, sumbu y, dan sumbu z.

Solusi:

Momen inersia terhadap sumbu x

$$I_x = \iint_S y^2\left(xy\right) dA = \int_0^3 \int_0^{2x} (xy^3) dy\, dx$$

$$= \int_0^3 \left[\frac{1}{4}xy^4\right]_0^{2x} dx = \int_0^3 \frac{1}{4}(16x^5) dx = \frac{4}{6}x^6\Big|_0^3 = 486$$

soli_erf@yahoo.com

Momen inersia terhadap sumbu y

$$I_y = \iint_S x^2\left(xy\right)dA = \int_0^3\int_0^{2x}(x^3y)dy\,dx$$

$$= \int_0^3\left[\frac{1}{2}x^3y^2\right]_0^{2x}dx = \int_0^3\frac{1}{2}x^3(4x^2)dx = \frac{4}{2}\frac{1}{6}x^6\Big|_0^3 = 243$$

Momen inersia terhadap sumbu z

$$I_z = I_x + I_y = 486 + 243 = 729\,.$$

Latihan

1. Tentukan massa m dan pusat massa $(\bar{x}, \bar{y})$ dari lamina berikut :
   a. $x = 0,\ x = 4,\ y = 0,\ y = 3;\ \rho(x,y) = y + 1$
   b. $y = 0,\ y = \sqrt{4 - x^2};\ \rho(x,y) = y$
   c. $y = x,\ y = 0,\ x = 2;\ \rho(x,y) = x$
   d. $r = 2\sin\theta,\ \rho(r,\theta) = r$

2. Tentukan momen inersia terhadap sumbu x, sumbu y, dan sumbu z dari lamina di bawah :
   - $y = \sqrt{x},\ x = 9,\ y = 0;\ \rho(x,y) = x + y$
   - $y = x^2,\ y = 4;\ \rho(x,y) = y$
   - Segiempat dengan titik sudut $(0,0), (0,a), (a,a), (a,0);\ \rho(x,y) = x + y$.

3. Tunjukkan bahwa momen inersia suatu lamina persegipanjang homogen ($\rho(x,y) = k$ konstanta) dengan panjang sisi a dan b terhadap sumbu yang tegak lurus melalui pusat massanya adalah

$$I = \frac{1}{12}k\left(a^3b + ab^3\right).$$

soli_erf@yahoo.com

- Luas Permukaan

Diberikan fungsi $z = f(x,y)$ pada daerah di bidang xy, jika turunan parsial pertama $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ dan $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ kontinu pada S maka luas permukaan kurva diberikan oleh :

$$A = \iint_S \left(\sqrt{\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2 + 1} \right) dA$$

Contoh 5

Tentukan luas permukaan $z = x^2 + y^2$ di bawah bidang $z = 9$.

Solusi :

Diketahui fungsi $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Daerah S yaitu, $S = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 9\}$ sehingga $r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$.

Diperoleh,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y$$

$$A = \iint_S \left(\sqrt{\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2 + 1} \right) dA$$

$$= \iint_S \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^3 \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{8}\left[\frac{2}{3}\left(4r^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}\left(37^{\frac{3}{2}} - 1\right) d\theta = \frac{1}{12}\left(37^{\frac{3}{2}} - 1\right)\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{6}\left(37^{\frac{3}{2}} - 1\right) \text{ satuan luas.}$$

Jadilah diri sendiri

Belajarlah berhenti melihat orang lain selalu lebih hebat…

--= ☺ =--

soli_erf@yahoo.com