Rentang, Basis, Dimensi, Persamaan Garis dan Bidang dalam Vektor

Sukmawati Nur Endah

Contents

- Konsep Rentang (Span)
- Basis
- Dimensi
- Persamaan Garis dan Bidang secara Vektor

Rentang (Span)

Rentang (span)

- Jika v_1, v_2,....v_r, adalah vektor vektor dalam suatu ruang vektor V, maka secara umum beberapa vektor dalam V mungkin kombinasi linier dari v_1, v_2,....v_r, yang lainnya mungkin tidak.
- Jika W himpunan semua vektor yang merupakan kombinasi linier dari v_1, v_2,....v_r, maka W membentuk **sub-ruang** dari V
- **INGAT DEFINISI SUB-RUANG**
- **Definisi**
  - Suatu himpunan bagian W dari suatu vektor V disebut suatu **sub-ruang** dari V jika W sendiri adalah suatu ruang vektor di bawah penjumlahan dan perkalian skalar yang didefinisikan pada V

Definisi

- Jika $S = \{v_1, v_2, \ldots. v_r\}$ adalah suatu himpunan vektor dalam suatu ruang vektor V,
- maka sub-ruang W dari V yang mengandung semua kombinasi linier dari vektor-vektor dalam S disebut **ruang terentang** oleh $v_1, v_2, \ldots. v_r$, dan dikatakan bahwa vektor $v_1, v_2, \ldots. v_r$ adalah **rentang (span)** W
- Untuk menunjukkan W adalah ruang terentang oleh vektor-vektor dalam himpunan $S = \{v_1, v_2, \ldots. v_r\}$, maka **ditulis**:

  $W = \text{rent}(S)$ atau $W = \text{rent}\{v_1, v_2, \ldots. v_r\}$

Ref lain :

$W = \text{span}(S)$ atau $W = \text{span}\{v_1, v_2, \ldots. v_r\}$

Contoh

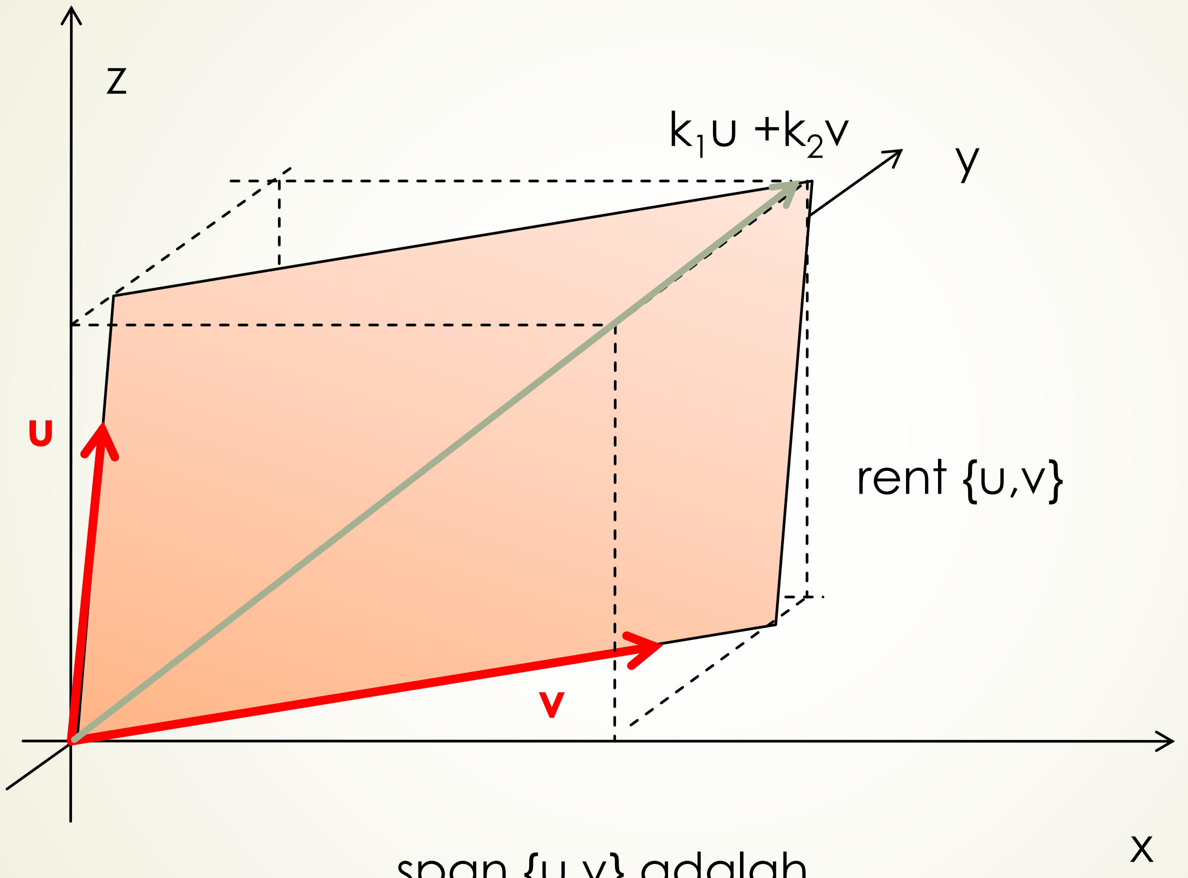
- Jika u dan v adalah vektor dalam R^3 dengan titik pangkal adalah titik asal (0,0,0), maka :

  span {u,v} yang berisi semua kombinasi linier $k_1u + k_2v$ adalah bidang yang ditentukan oleh u dan v

- Jika v adalah vektor tak nol dalam R^2 atau R^3, maka :

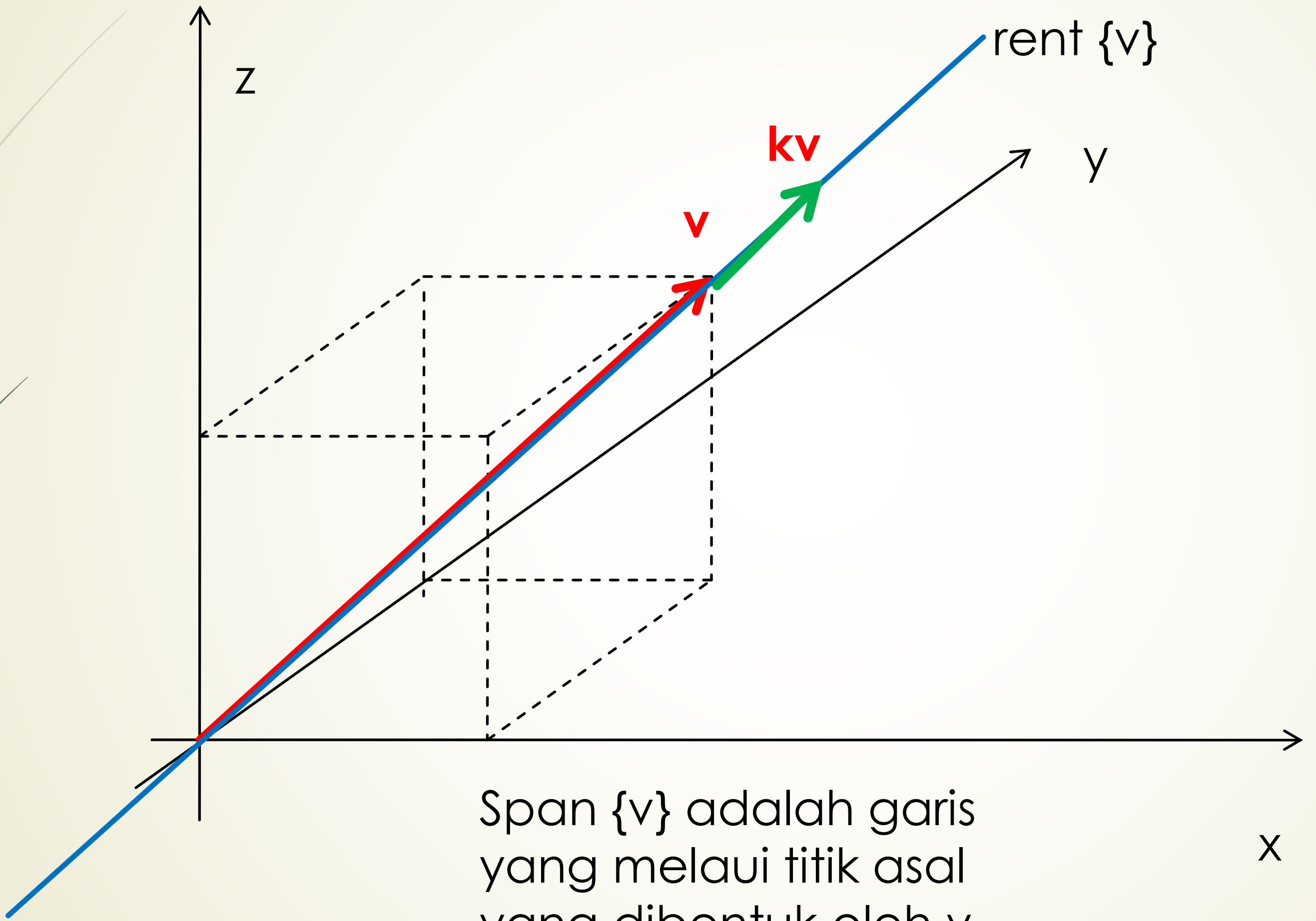
  span {v} yang merupakan himpunan semua penggandaan skalar kv adalah garis yang dibentuk oleh v

Visualisasi span dua vektor di R^3



span {u,v} adalah bidang yang melalui titik asal dan dibentuk oleh u dan v

Visualisasi span single vector v



Span {v} adalah garis
yang melaui titik asal
yang dibentuk oleh v.

Contoh soal

- Diketahui $V_1 = (1,2,1)$, $V_2 = (1,0,2)$, $V_3 = (1,1,0)$ dan $S = \{V_1, V_2, V_3\}$. Apakah span $(S) = R^3$?

- Penyelesaian:
- Span $(S) = R^3 \Leftrightarrow$ untuk setiap vektor $v = (a,b,c) \in R^3$, ada bilangan c_1,c_2,c_3 sehingga

  $v=(a,b,c) = c_1(1,2,1) + c_2(1,0,2) + c_3\ (1,1,0)$

- Berapakah solusinya?

Basis

Definisi Basis

- Vektor v_1, v_2,....v_k dalam ruang vektor V dikatakan membentuk basis V, jika:
  - v_1, v_2,....v_k span V atau span {v_1, v_2,....v_k } = V
  - v_1, v_2,....v_k adalah bebas linier
- Ingat Definisi Bebas Linier
  - $k_1v_1 + k_2v_2 ...+ k_rv_r = 0$ hanya dipenuhi oleh $k_1 = k_2 = ... = k_r = 0$

    dengan v_1, v_2,....v_r vektor dan k_1, k_2, ... k_r skalar

Contoh

- e_1= [1,0,0], e_2 = [0,1,0], e_3 = [0,0,1] dan S = {e_1,e_2,e_3}. Apakah e_1,e_2,dan e_3 basis dalam R^3?

Penyelesaian :

- e_1,e_2,dan e_3 membentuk basis dalam R^3 karena
  - Span (S) = span {e_1,e_2,e_3}= R^3 ➔ Buktikan
  - e_1,e_2,dan e_3 adalah bebas linier ➔ Buktikan

Contoh :

Tunjukan bahwa himpunan matriks berikut :

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

merupakan basis bagi matriks berukuran 2 x 2

Jawab :

Tulis kombinasi linear :

$$k_1 \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix} + k_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

atau

$$\begin{pmatrix} 3k_1 + k_4 & 6k_1 - k_2 - 8k_3 \\ 3k_1 - k_2 - 12k_3 - k_4 & -6k_1 - 4k_3 + 2k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

dengan menyamakan setiap unsur pada kedua matriks, diperoleh SPL :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -8 & 0 \\ 3 & -1 & -12 & -1 \\ -6 & 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Determinan matriks koefisiennya (MK) = 48

- *det*(MK) $\neq$ 0 ➔ SPL memiliki solusi untuk setiap a,b,c,d

Jadi, **M merentang (span)** $M_{2 \times 2}$

- Ketika *a = 0, b = 0, c = 0, d = 0,*

det(MK) $\neq$ 0 ➔SPL homogen punya solusi tunggal.

Jadi, M bebas linear.

Karena M bebas linear dan membangun (merentang) $M_{2 \times 2}$ maka M merupakan basis bagi $M_{2 \times 2}$.

Ingat…

Basis untuk setiap ruang vektor adalah tidak tunggal.

Contoh :

Untuk ruang vektor dari $M_{2 \times 2}$, himpunan matriks :

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

juga merupakan basisnya.

Latihan soal 1

- $v_1 = [1,0]$, $v_2 = [0,1]$, $v_3 = [3,4]$

  Apakah v_1, v_2, dan v_3 basis dalam R^2?

- $v_1 = [1,2,3]$, $v_2 = [-2,1,1]$, $v_3 = [8,6,10]$

  Apakah v_1, v_2, dan v_3 basis dalam R^3?

- $v_1 = [1,2,1]$, $v_2 = [1,0,2]$, $v_3 = [1,1,0]$ dan $S = \{v_1, v_2, v_3\}$. Apakah S basis dalam R^3?

Dimensi

Definisi Dimensi

- Dimensi dari ruang vektor V adalah jumlah vektor-vektor yang membentuk basis pada V
- Ruang vektor V disebut berdimensi terhingga jika V berisi suatu himpunan vektor berhingga $\{v_1, v_2, \ldots v_k\}$ yang membentuk suatu basis
- Jika tidak ada himpunan yang seperti itu, maka V disebut berdimensi tak-hingga
- Ruang vektor nol sebagai berdimensi terhingga

Contoh

- Contoh sebelumnya, diketahui e_1= [1,0,0], e_2 = [0,1,0], e_3 = [0,0,1] maka S = {e_1,e_2,e_3} adalah basis untuk R^3 ➔ dimensi dari R^3 adalah 3
- v_1= [1,3,-1], v_2 = [2,1,0], v_3 = [4,2,1] dan S = {v_1,v_2,v_3}. Apakah S basis dalam R^3? Berapa dimensinya?
  - Dicek apakah S basis? Bebas linier kah? Jika S basis dari R^3,maka dimensinya adalah 3

Latihan Soal 2

- Tentukan basis dan dimensi dari ruang vektor v yang dibentuk oleh :
  - a = [2,3,6], b = [5,7,2], c = [7,8,10]
    - Catatan :
    - Cek apakah a,b dan c bebas linier?
    - Cek apakah a,b bebas linier?
    - Cek apakah a,b basis dari ruang vektor v?
  - p = [3,2,7,11] dan q = [2,5,8,9]
  - u = [2,1,6,3] dan v = [6,3,18,9]

Catatan

- Suatu ruang vektor v dikatakan berdimensi n jika ruang vektor tersebut mempunyai n buah vektor yang bebas linier

- Sedangkan untuk setiap himpunan (n+1) vektor-vektor anggota v yang lain selalu bergantung linier

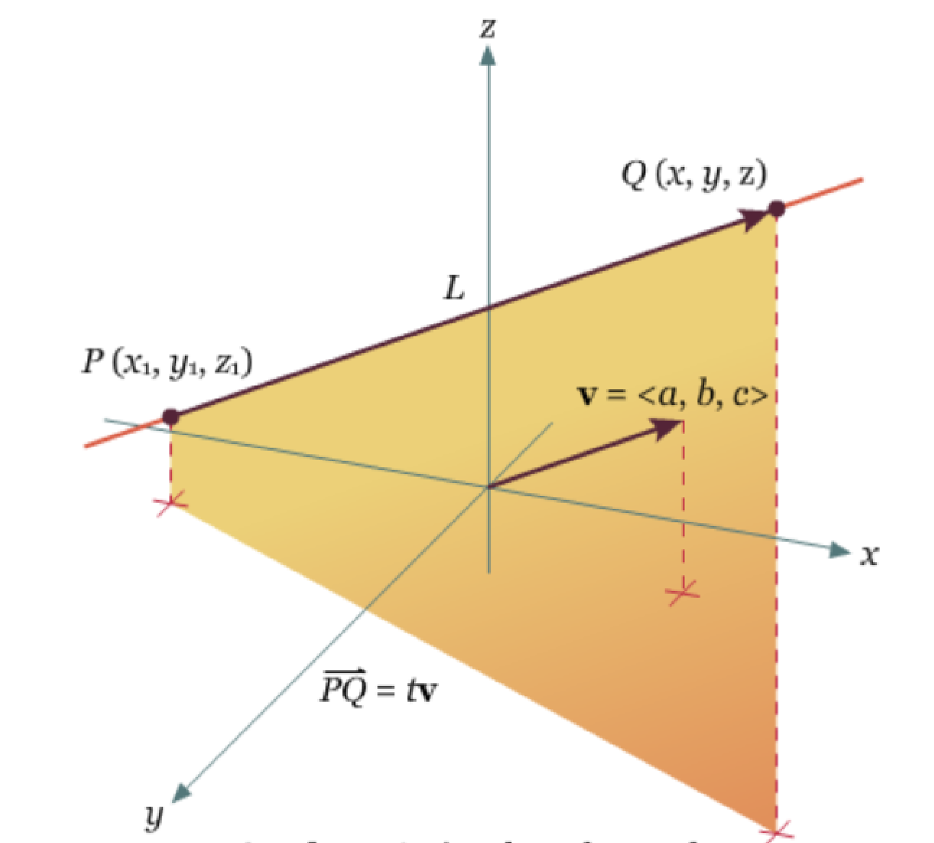
- Setiap himpunan n vektor yang bebas linier dari ruang vektor berdimensi n disebut basis dari ruang vektor tersebut

- Vektor-vektor lainnya (selain basis), dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor basis

Persamaan Garis dan Bidang secara Vektor

Persamaan Garis

- Untuk menentukan persamaan garis dapat menggunakan vektor.
- Perhatikan garis *L* yang melalui titik *P*(x_1, y_1, z_1) dan sejajar terhadap vektor **v** = <*a*, *b*, *c*>.
- Vektor **v** adalah **vektor arah** untuk garis *L*, dan *a*, *b*, dan *c* merupakan **bilangan-bilangan arah**.
- Garis *L* adalah himpunan semua titik *Q*(*x*, *y*, *z*) sedemikian sehingga vektor *PQ* sejajar dengan **v**.
- Ini berarti bahwa *PQ* merupakan perkalian skalar **v** dan dapat dituliskan *PQ* = *t***v**, dimana *t* adalah suatu skalar (bilangan real).



Gambar 1 Garis *L* dan vektor arah **v**.

$$\overrightarrow{PQ} = \langle x - x_1, y - y_1, z - z_1 \rangle = \langle at, bt, ct \rangle = t\mathbf{v}$$

Persamaan Parametris Garis dalam Ruang

- Garis L yang sejajar dengan vektor $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ dan melewati titik $P(x_1, y_1, z_1)$ direpresentasikan dengan **persamaan-persamaan parametris**

$$x = x_1 + at, \qquad y = y_1 + bt, \qquad \text{dan} \qquad z = z_1 + ct$$

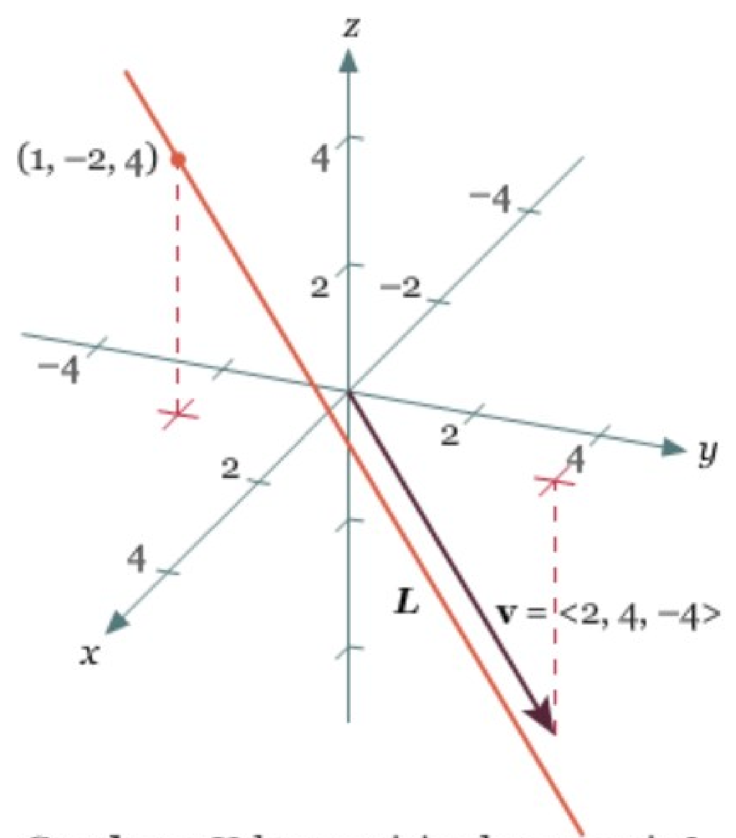
- Jika bilangan-bilangan arah a, b, dan c tidak nol, maka parameter t dapat dieliminasi untuk mendapatkan **persamaan-persamaan simetris garis**.

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

Persamaan-persamaan simetris

Contoh

- Tentukan persamaan-persamaan parametris dan simetris garis *L* yang melalui titik (1, –2, 4) dan sejajar terhadap **v** = <2, 4, –4>, seperti yang ditunjukkan Gambar 2.



Gambar 2 Vektor **v** sejajar dengan garis *L*.

Penyelesaian

- Untuk menentukan persamaan-persamaan parametris garis tersebut, gunakan koordinat-koordinat $x_1 = 1$, $y_1 = -2$, dan $z_1 = 4$ dan arah $a = 2$, $b = 4$, dan $c = -4$.

$$x = 1 + 2t, \qquad y = -2 + 4t, \qquad z = 4 - 4t$$ Persamaan-persamaan parametris

- Karena *a*, *b*, dan *c* semuanya tidak nol, persamaan simetris garis tersebut adalah

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-4}{-4}$$ Persamaan-persamaan simetris

Lanjutan

- Persamaan-persamaan parametris atau simetris untuk garis yang diberikan tidaklah tunggal.
- Sebagai contoh, dengan memisalkan $t = 1$ dalam persamaan-persamaan parametris, di dapatkan titik (3, 2, 0).
- Dengan menggunakan titik ini dengan bilangan-bilangan arah $a = 2$, $b = 4$, dan $c = -4$ dihasilkan himpunan persamaan-persamaan parametris yang berbeda

$$x = 3 + 2t, \qquad y = 2 + 4t, \qquad \text{dan} \qquad z = -4t.$$

Contoh

- Tentukan persamaan-persamaan parametris suatu garis yang melalui titik-titik (–2, 1, 0) dan (1, 3, 5)

Penyelesaian :

- Gunakan titik-titik *P*(–2, 1, 0) dan *Q*(1, 3, 5) untuk menentukan vektor arah garis yang melalui *P* dan *Q*.

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle 1-(-2), 3-1, 5-0\rangle = \langle 3, 2, 5\rangle = \langle a, b, c\rangle$$

- Dengan menggunakan bilangan-bilangan arah *a* = 3, *b* = 2, dan *c* = 5 dengan titik *P*(–2, 1, 0), dapat memperoleh persamaan-persamaan parametris

$$x = -2 + 3t, \quad y = 1 + 2t, \quad \text{dan} \quad z = 5t.$$

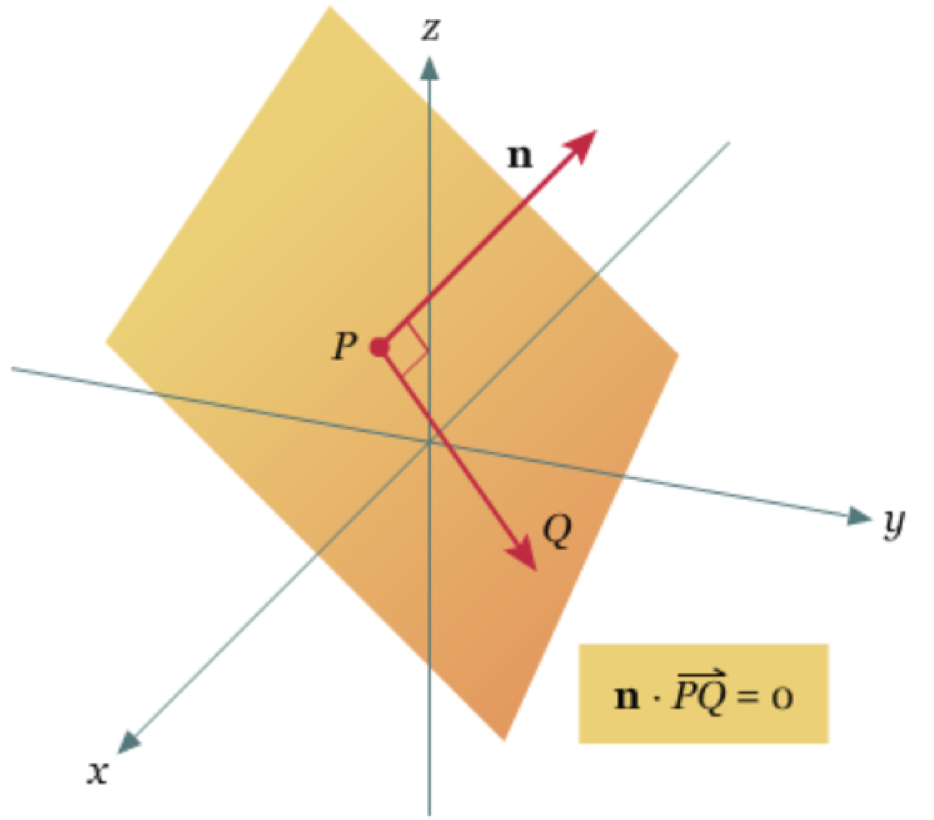
lanjutan

Catatan :

- Karena *t* beragam untuk semua bilangan real, persamaan-persamaan parametris pada Contoh di atas digunakan untuk menentukan titik-titik (*x*, *y*, z) yang terletak pada garis.
- Secara khusus, untuk $t = 0$ dan $t = 1$ memberikan titik-titik awal yang diketahui, yaitu (–2, 1, 0) dan (1, 3, 5).

Persamaan Bidang

- Persamaan suatu bidang dalam ruang dapat diperoleh dari suatu titik pada bidang dan vektor *normal* (tegak lurus) terhadap bidang tersebut.
- Perhatikan bidang yang memuat titik $P(x_1, y_1, z_1)$ dan memiliki vektor normal tidak nol, n = (a,b,c) seperti yang ditunjukkan Gambar 3.
- Bidang ini memuat semua titik $Q(x, y, z)$ sedemikian sehingga vektor *PQ* ortogonal terhadap **n**.



Gambar 3 Vektor normal **n** ortogonal terhadap semua vektor $\overrightarrow{PQ}$ pada bidang.

Lanjutan

- Dengan menggunakan hasil kali titik, dapat dituliskan persamaan berikut.

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PQ} &= 0 \\ \langle a, b, c \rangle \cdot \langle x - x_1, y - y_1, z - z_1 \rangle &= 0 \\ a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) &= 0 \end{aligned}$$

Persamaan Baku Bidang dalam Ruang

- Bidang yang memuat titik (x_1, y_1, z_1) dan memiliki vektor normal n = (a,b,c) dapat direpresentasikan oleh suatu bidang yang memiliki **persamaan dalam bentuk baku :**

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

- Dengan mengelompokkan kembali suku-suku pada persamaan di atas, didapatkan **bentuk umum** persamaan suatu bidang dalam ruang.

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

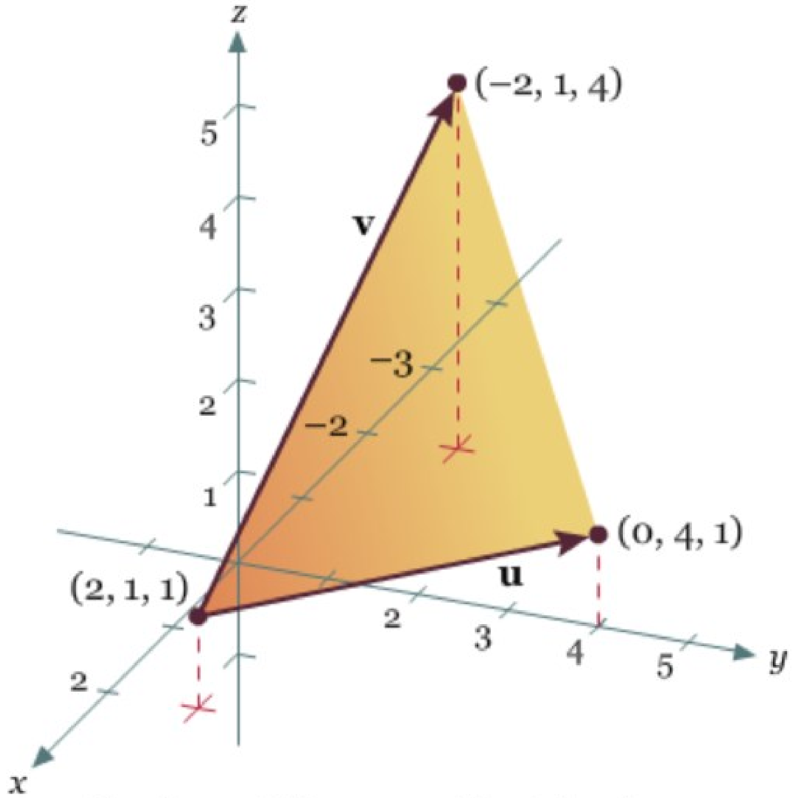
Bentuk umum persamaan bidang

Contoh

- Tentukan persamaan umum bidang yang memuat titik-titik (2, 1, 1), (0, 4, 1) dan (–2, 1, 4).

Penyelesaian

- Untuk menerapkan materi ini, kita dibutuhkan suatu titik pada bidang dan vektor yang normal terhadap bidang tersebut.
- Terdapat tiga pilihan untuk titik pada bidang, tetapi tidak ada vektor normal yang diberikan.
- Untuk mendapatkan vektor normal, gunakan hasil kali silang vektor-vektor **u** dan **v** yang membentang dari titik (2, 1, 1) ke titik-titik (0, 4, 1) dan (–2, 1, 4), seperti yang ditunjukkan Gambar 4.



Gambar 4 Bidang yang dibentuk **u** dan **v**.

Lanjutan

- Bentuk-bentuk komponen **u** dan **v** adalah

$$\mathbf{u} = \langle 0-2, 4-1, 1-1\rangle = \langle -2, 3, 0\rangle$$

$$\mathbf{v} = \langle -2-2, 1-1, 4-1\rangle = \langle -4, 0, 3\rangle$$

yang mengakibatkan

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \mathbf{u}\times\mathbf{v}\\ &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -2 & 3 & 0\\ -4 & 0 & 3\end{vmatrix}\\ &= 9\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 12\mathbf{k}\\ &= \langle a, b, c\rangle\end{aligned}$$

adalah normal terhadap bidang yang diberikan.

Lanjutan

- Dengan menggunakan bilangan-bilangan arah pada **n** dan titik $(x_1, y_1, z_1) = (2, 1, 1)$, dapat menentukan persamaan bidang tersebut adalah

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

$$9(x - 2) + 6(y - 1) + 12(z - 1) = 0$$

Bentuk baku

$$9x + 6y + 12z - 36 = 0$$

Bentuk umum

$$3x + 2y + 4z - 12 = 0$$

Sederhanakan bentuk umum

Lanjutan

Catatan :

- Dalam Contoh tersebut, dapat diuji bahwa titik-titik yang diberikan, (2, 1, 1), (0, 4, 1) dan (–2, 1, 4), memenuhi persamaan bidang yang diperoleh

$$
\begin{aligned}
(x,y,z) = (2,1,1) \quad &\Longrightarrow \quad 3x + 2y + 4z - 12 &&= 3(2) + 2(1) + 4(1) - 12 \\
&&&= 6 + 2 + 4 - 12 \\
&&&= 0 \quad \checkmark \\
(x,y,z) = (0,4,1) \quad &\Longrightarrow \quad 3x + 2y + 4z - 12 &&= 3(0) + 2(4) + 4(1) - 12 \\
&&&= 0 + 8 + 4 - 12 \\
&&&= 0 \quad \checkmark \\
(x,y,z) = (-2,1,4) \quad &\Longrightarrow \quad 3x + 2y + 4z - 12 &&= 3(-2) + 2(1) + 4(4) - 12 \\
&&&= -6 + 2 + 16 - 12 \\
&&&= 0 \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

Latihan Soal 3

- Tentukan persamaan garis g yang melalui titik A (3,1,5) dan B (2,4,3)!
- Tentukan persamaan bidang melalui titik A (2,1,9), B(1,2,8) dan C(3,3,1)!

Terima kasih

Ada Pertanyaan?