ALJABAR LINIER

DR. RETNO KUSUMANINGRUM, S.SI., M.KOM.

Matriks
~ Invers ~

DEFINISI

- Perhatikan sebuah matriks bujur sangkar $\boldsymbol{A}$ berukuran $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Matriks $\boldsymbol{A}$ disebut memiliki invers, jika terdapat matriks bujur sangkar B, sedemikan sehingga berlaku:

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$$

$\boldsymbol{B}$ disebut balikan atau invers dari $\boldsymbol{A}$ dan dituliskan $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$

SYARAT

- Syarat matriks A agar mempunyai invers adalah matriks A **non singular** $\mathbf{(|A| \neq 0)}$
- Jika matriks A matriks **singular** $\mathbf{(|A| = 0)}$ maka matriks A tidak mempunyai invers

Sifat :

- Bila ada invers, tunggal
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

INVERS MATRIKS 2×2

- Invers matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ adalah sebagai berikut:

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

CONTOH

- Tentukan invers matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Jawaban:

$$A^{-1} = \frac{1}{3.2 - 5.1} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

ANOTHER WAY:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}$$

Misal $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka : $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(i). $3a + 5c = 1$

(ii). $3b + 5d = 0$

(iii). $a + 2c = 0$

(iv). $b + 2d = 1$

$\Rightarrow$

(i) $3a + 5c = 1$

3x(iii) $\underline{3a + 6c = 0}$

$$-c = 1$$

$$c = -1$$

$$a + 2.(-1) = 0$$

$$a - 2 = 0$$

$$a = 2$$

(i). $3a + 5c = 1$
(ii). $3b + 5d = 0$
(iii). $a + 2c = 0$
(iv). $b + 2d = 1$

$\rightarrow$

(ii) $3b + 5d = 0$
3x(iv) $\underline{3b + 6d = 3}$

$$-d = -3$$
$$d = 3$$

$$b + 2.3 = 1$$
$$b + 6 = 1$$
$$b = -5$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

INVERS MATRIKS DIAGONAL

Bentuk umum matriks diagonal berukuran $n \times n$

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

Maka :

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} {}^{1}/_{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & {}^{1}/_{d_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & {}^{1}/_{d_n} \end{bmatrix}$$

$$D^m = \begin{bmatrix} {d_1}^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & {d_2}^m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & {d_n}^m \end{bmatrix}$$

CONTOH

Jika diketahui $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, tentukan D^{-1} dan D^5!

SIFAT

- Matriks segitiga bisa diinvers jika dan hanya jika elemen diagonalnya tidak ada yang nol
- Invers pada matriks segitiga bawah adalah matriks segitiga bawah, dan invers pada matriks segitiga atas adalah matriks segitiga atas

2. Dengan matriks adjoin

Jika $A = (a_{ij})$ dan A_{ij} adalah kofaktor dari elemen a_{ij}

maka matriks adjoin dari A adalah matriks transpose (A_{ij})

$$\text{Adj }(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots.. & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots.. & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots.. & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots.. & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A)$$

CONTOH

Tentukan invers dari matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (2.3 - 2.1) = 4$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1).(1.3 - 2.2) = 1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1.1 - 2.2) = -3$$

(LANJUTAN 1)

Tentukan invers dari matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1).(3.3 - 1.1) = -8$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (2.3 - 1.2) = 4$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1).(2.1 - 2.3) = 4$$

(LANJUTAN 2)

Tentukan invers dari matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (2.3 - 2.1) = 4$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1).(2.2 - 1.1) = -3$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (2.2 - 3.1) = 1$$

(LANJUTAN 3)

- Menghitung determinan menggunakan ekspansi kofaktor baris pertama:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$
$$= 2.4 + 3.1 + 1.(-3)$$
$$= 8$$

Maka $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$