

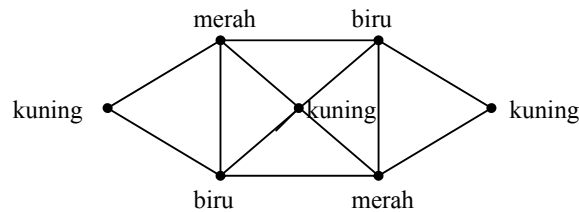
## BAB VI PEWARNAAN GRAF

### 6.1. Pendahuluan

Ada tiga macam pewarnaan graf, yaitu pewarnaan simpul, pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah (*region*). Yang akan kita bahas adalah pewarnaan simpul dan pewarnaan wilayah (*region*).

Pewarnaan simpul adalah memberi warna pada simpul-simpul suatu graf sedemikian hingga tidak ada dua simpul bertetangga yang mempunyai warna yang sama. Kita dapat memberikan sembarang warna pada simpul-simpul asalkan berbeda dengan simpul-simpul tetangganya.

Dalam pewarnaan graf, kita tidak hanya sekedar mewarnai simpul-simpul dengan warna yang berbeda dengan warna simpul tetangganya saja, namun kita juga menginginkan agar jumlah warna yang digunakan sesedikit mungkin. Jumlah warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai simpul simpul disebut bilangan kromatik dari graf  $G$ , yang dinotasikan dengan  $\chi(G)$ . Gambar 1 memperlihatkan sebuah graf, dengan  $\chi(G) = 3$ .



Gambar 1. Tiga warna cukup untuk mewarnai graf ini

### 6.2. Algoritma Welch-Powell

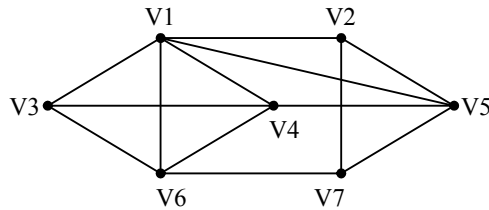
Algoritma Welch-Powell adalah suatu cara yang efisien untuk mewarnai sebuah graf  $G$ , namun algoritma ini hanya memberikan batas atas untuk  $\aleph(G)$ . Jadi algoritma ini tidak selalu memberikan jumlah warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai  $G$ . Menentukan  $\aleph(G)$  sebenarnya sangat sulit kecuali dalam kasus-kasus sederhana seperti pada contoh-contoh yang akan kita bahas dalam bab ini.

Langkah-langkah dalam algoritma Welch-Powell :

1. Urutkan simpul-simpul dari  $G$  dalam urutan derajat yang menurun. Urutan ini mungkin tidak unik karena beberapa simpul mungkin mempunyai derajat yang sama.
2. Gunakan satu warna tertentu untuk mewarnai simpul pertama. Secara berurutan, setiap simpul dalam daftar yang tidak bertetangga dengan simpul sebelumnya diwarnai dengan warna ini.
3. Ulangi langkah 2 di atas untuk simpul dengan urutan tertinggi yang belum diwarnai.
4. Ulangi langkah 3 di atas sampai semua simpul dalam daftar terwarnai.

**Contoh 1 .**

Gunakan algoritma Welch-Powell untuk mewarnai graf G yang ditunjukkan pada gambar 2 dan tentukan bilangan kromatiknya.



**Gambar 2.**

Penyelesaian :

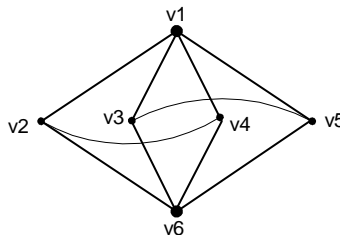
Simpul	v1	v4	v5	v6	v2	v3	v7
Derajat	5	4	4	4	3	3	3
Warna	a	b	c	c	b	d	a

Jadi, paling tidak ada 4 warna diperlukan untuk mewarnai graf G, sehingga  $\chi(G) = 4$ .

**Contoh 2.**

Permasalahan sama dengan contoh 1, untuk graf H yang ditunjukkan pada gambar 3.

Penyelesaian :



**Gambar 3.**

Simpul	v1	v6	v2	v3	v4	v5
Derajat	4	4	3	3	3	3
Warna	a	a	b	b	c	c

Jadi  $\chi(G) = 3$

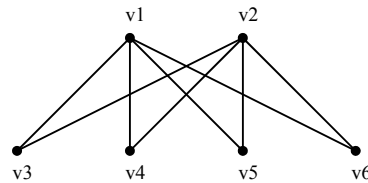
**6.3. Pewarnaan pada Graf Bipartit**

Sebuah graf bipartit adalah sebuah graf yang simpul-simpulnya dapat dibagi ke dalam dua himpunan bagian dimana simpul-simpul pada masing-masing himpunan bagian bertetangga dengan semua simpul pada himpunan bagian lainnya dan bukan pada simpul-simpul dalam himpunan bagiannya sendiri. Karena tidak ada simpul-simpul yang bertetangga ke simpul-simpul yang bertetangga ke simpul lain dalam himpunan

bagian yang sama, maka semua simpul dalam sebuah himpunan bagian dapat dipetakan ke dalam warna yang sama. Karena simpul-simpul pada dua himpunan bagian saling bertetangga, maka pada setiap himpunan bagian harus diwarnai dengan warna yang berbeda. Dengan demikian, dibutuhkan dua warna untuk mewarnai graf bipartit, sehingga bilangan kromatis pada graf bipartit adalah 2.

**Contoh 3.**

Diketahui sebuah graf bipartit  $K_{2,4}$  seperti ditunjukkan pada gambar 4.



**Gambar 4.**

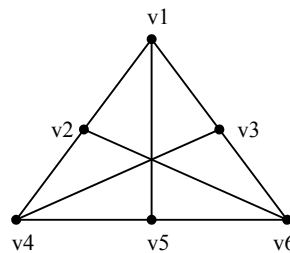
Dengan menggunakan algoritma Welch-Powell, tentukan nilai kromatis dari graf di atas

Simpul	v1	v2	v3	v4	v5	v6
Derajat	4	4	2	2	2	2
Warna	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>

Jadi  $\chi(G) = 2$ , dan dapat dilihat bahwa dua himpunan bagian dalam graf bipartit tersebut adalah  $m = \{v1, v2\}$  dan  $n = \{v3, v4, v5, v6\}$

**Contoh 4**

Graf  $G$  pada gambar 5 adalah graf bipartit. Petakan warna-warna ke simpul-simpul dari  $G$  dengan menggunakan algoritma Welch Powell untuk menunjukkan dua himpunan bagian dari simpul-simpul yang membangun  $G$ .



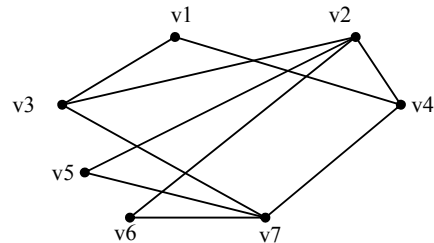
**Gambar 5.**

Simpul	v1	v2	v3	v4	v5	v6
Derajat	3	3	3	3	3	3
Warna	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>

Jadi dua himpunan bagian yang membentuk  $G$  adalah  $m = \{v1, v4, v6\}$   $n = \{v2, v3, v5\}$

**Contoh 5.**

Permasalahan yang sama dengan contoh 4, pada graf  $G$  yang ditunjukkan pada gambar 6 di bawah ini.



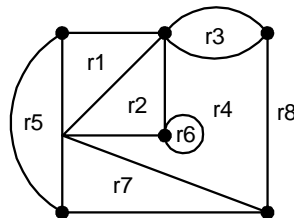
Gambar 6.

Simpul	v2	v7	v3	v4	v1	v5	v6
Derajat	4	4	3	3	2	2	2
Warna	$a$	$a$	$b$	$b$	$a$	$b$	$b$

Jadi dua himpunan bagian yang membentuk  $G$  adalah  $m = \{v2, v7, v1\}$   $n = \{v3, v4, v5, v6\}$

**6.4. Pewarnaan Wilayah/Region pada Graf Bidang**

Dua buah region dari sebuah graf bidang dikatakan bertetangga jika keduanya mempunyai sebuah sisi bersama.



Gambar 7.

Dari sebuah graf bidang pada gambar 7, tentukan region dari graf tersebut yang bertetangga dengan region-region :

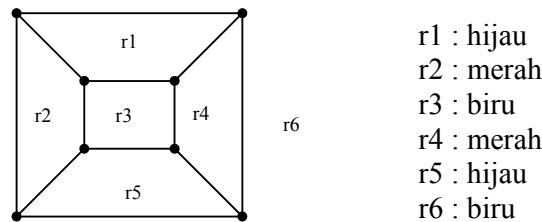
- a.  $r7$
- b.  $r2$
- c.  $r6$

Penyelesaian :

- a.  $r4, r5, r8$
- b.  $r1, \text{ dan } r4$
- c.  $r4$

### Pewarnaan Region (wilayah)

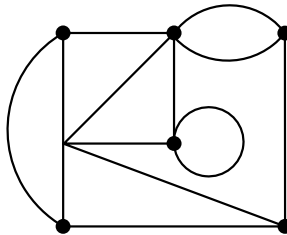
Pewarnaan region dari suatu graf planar (graf bidang)  $G$  adalah suatu pemetaan warna-warna ke region-region dari graf  $G$  sedemikian hingga region-region yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda. Gambar 8 menunjukkan contoh permasalahan pewarnaan region.



Gambar 8.

### Contoh 6.

Misal kita melakukan pewarnaan region dari graf pada gambar 7, yang hasilnya akan bisa dilihat seperti pada gambar 9 di bawah ini.



Gambar 9.

Pada gambar 9 bisa dilihat bahwa  $\aleph(G) = 3$ .

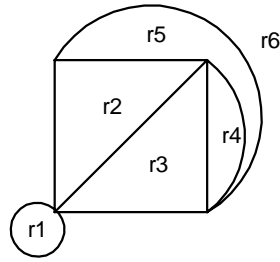
### 6.5. Graf Dual dari Graf Planar

Dari suatu permasalahan pewarnaan region pada graf bidang, bisa kita bawa ke permasalahan pewarnaan simpul dengan membangun sebuah graf dual dari graf bidang tersebut.

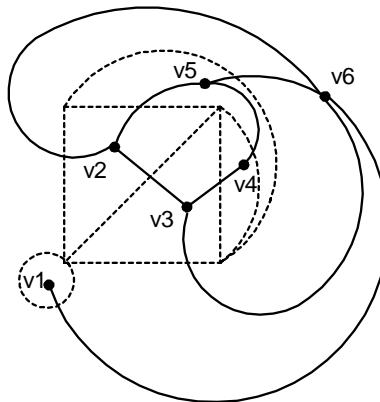
#### Cara membentuk graf dual

Misal terdapat sebuah graf bidang  $M$ . Dalam setiap region dari  $M$ , pilih sebuah titik. **Jika dua buah region mempunyai sebuah sisi bersama, maka titik-titik yang terkait dapat dihubungkan dengan sebuah garis melalui sisi bersama tersebut.** Garis-garis ini akan membentuk kurva. Kurva-kurva ini digambarkan sedemikian hingga agar **tidak bersilangan**. Dengan demikian kurva-kurva tersebut membentuk sebuah graf yang disebut sebagai graf dual dari  $M$ . Gambar 11 menunjukkan graf dual dari graf planar pada gambar 10.

kuning

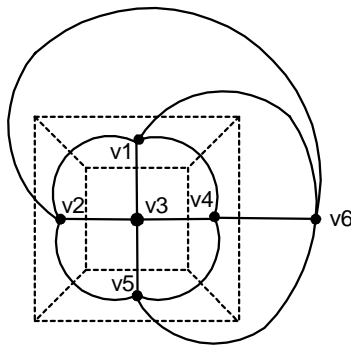


Gambar 10.



Gambar 11.

Permasalahan pewarnaan region seperti yang ditunjukkan pada gambar 8 dapat kita bawa ke masalah pewarnaan simpul, dengan kita buat graf dual dari gambar 8 seperti ditunjukkan dalam gambar 12.



Gambar 12.

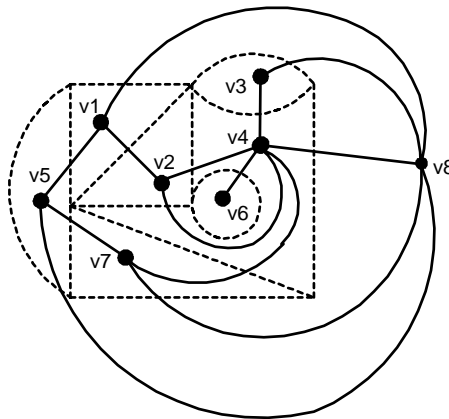
Dengan algoritma Welch Powell (permasalahan pewarnaan simpul),

Simpul	v1	v2	v3	v4	v5	v6
Derajat	4	4	4	4	4	4
Warna	a	b	c	b	a	c

$\aleph(G) = 3$ . Hasil ini sama dengan hasil dari pewarnaan region pada gambar 8.

**Contoh 7.**

Permasalahan pada contoh 6 juga dapat kita bawa ke masalah pewarnaan simpul, dengan kita buat graf dual seperti ditunjukkan pada gambar 13.



**Gambar 13.**

Dengan algoritma Welch Powell,

Simpul	v4	v8	v1	v2	v5	v7	v3	v6
Derajat	6	5	3	3	3	3	2	1
Warna	a	b	a	b	c	d	c	b

$\aleph(G) = 4$ . Hasil ini sama dengan hasil dari pewarnaan region pada contoh 6.

Jika kita lihat pewarnaan region yang kita lakukan sebelumnya pada subbab 6.4, hasil ini memang berbeda. Ini adalah bukti bahwa algoritma welch Powell memang tidak selalu menghasilkan warna minimum (lihat kembali subbab 6.2)

**Contoh 8.** (Contoh aplikasi pewarnaan graf)

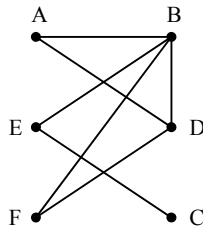
Ada 6 jenis zat kimia yang perlu disimpan di dalam gudang. Beberapa pasangan zat itu tidak dapat disimpan di dalam ruangan yang sama, karena campuran gasnya bersifat eksplosif (mudah meledak). Untuk zat yang semacam itu, perlu dibangun ruang-ruang terpisah yang dilengkapi ventilasi dan penyedot udara keluar yang berlainan. Jika lebih banyak ruang yang dibutuhkan, berarti lebih banyak ongkos yang dikeluarkan. Karena itu perlu diketahui berapa banyak minimum ruangan yang diperlukan untuk dapat menyimpan semua zat kimia dengan aman. Berikut ini adalah daftar pasangan zat kimia yang tidak dapat disimpan dalam ruangan yang sama.

Zat Kimia	Tidak dapat disimpan bersama zat kimia
-----------	--

A	B, D
B	A, D, E, F
C	E
D	A, F, B
E	B, C
F	B, D

Gambarkan graf yang menyatakan persoalan di atas. Kemudian tentukan jumlah minimum ruangan yang dibutuhkan untuk menyimpan semua zat kimia di atas.

Graf yang merepresentasikan permasalahan di atas di tunjukkan pada gambar 14. Simpul-simpul pada graf menyatakan masing-masing zat kimia. Sisi yang menghubungkan dua simpul menyatakan bahwa dua zat kimia yang terkait tidak dapat disimpan dalam ruangan yang sama.



Gambar 14.

Berdasarkan graf tersebut kita menyimpulkan, bahwa apabila terdapat dua simpul yang dihubungkan oleh sisi, maka kedua zat kimia tersebut tidak dapat tidak dapat disimpan dalam ruang yang sama, jadi dua simpul tersebut tidak boleh mempunyai warna yang sama. Permasalahan di atas, sama saja kita mencari bilangan kromatik dari graf yang ditunjukkan pada gambar 14.

Dengan algoritma Welch Powell,

Simpul	B	D	A	E	F	C
Derajat	4	3	2	2	2	1
Warna	$x$	$y$	$z$	$y$	$z$	$x$

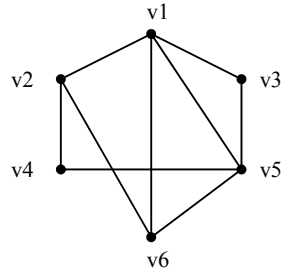
$\chi(G) = 3$ , Jadi jumlah minimum ruangan yang dibutuhkan untuk menyimpan semua zat kimia tersebut adalah 3 ruangan.



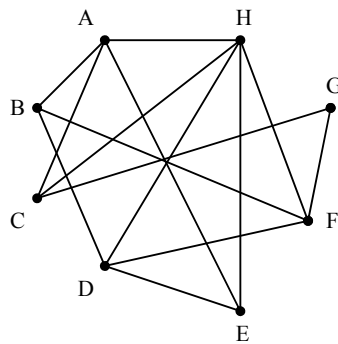
### Soal Latihan

1. Gunakan algoritma Welch Powell untuk mewarnai graf di bawah ini dan tentukan bilangan kromatiknya

a..

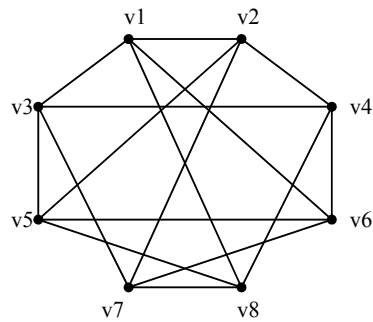


b.

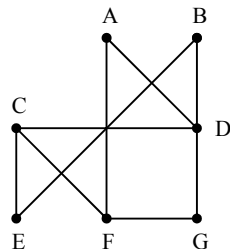


2. Pada masing-masing graf bipartit di bawah ini, tentukan 2 himpunan bagian yang membentuk graf-graf bipartit tersebut (gunakan pewarnaan graf).

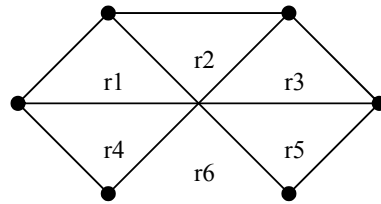
a.



b.



3. Diketahui sebuah peta :



- Buat graf dual dari peta tersebut
  - Dengan menggunakan algoritma Welch Powell, tentukan nilai kromatis dari pewarnaan graf dual tersebut.
4. Di suatu negara terdapat 7 buah stasiun televisi. Pemerintah menetapkan aturan bahwa dua stasiun yang berjarak  $\leq 150$  km tidak boleh beroperasi pada saluran frekuensi yang sama. Tabel di bawah ini memperlihatkan jarak (km) stasiun televisi satu sama lain. Berapa jumlah minimum frekuensi yang berbeda yang diperlukan, yang menjamin tidak ada dua stasiun televisi yang beroperasi pada frekuensi yang sama?

	1	2	3	4	5	6	7
1	-	85	175	200	50	100	230
2	85	-	125	175	100	160	145
3	175	125	-	100	200	250	160
4	200	175	100	-	210	220	180
5	50	100	200	210	-	100	235
6	100	160	250	220	100	-	120
7	230	145	160	180	235	120	-

5. Pada suatu semester, akan disusun suatu jadwal UAS untuk matakuliah Kalkulus, Matematika Diskrit, Fisika, Bahasa Inggris, Bahasa Indonesia, Agama, Pancasila dan Kimia.

Diketahui tidak ada mahasiswa yang mengambil pasangan matakuliah berikut ini **secara bersamaan** (dalam semester yang sama):

- Kalkulus & Kimia
- Matematika Diskrit & Kimia
- Bahasa Inggris & Bahasa Indonesia
- Bahasa Inggris & Agama
- Kalkulus & Matematika Diskrit
- Kalkulus & Fisika
- Fisika & Bahasa Inggris

Tetapi ada mahasiswa yang mengambil secara bersamaan untuk kombinasi matakuliah lainnya, dalam semester tersebut.

Berapa jumlah slot waktu **minimum** yang diperlukan untuk menyusun jadwal ujian UAS tersebut, sehingga tidak ada mahasiswa yang bentrok jadwal ujiannya?