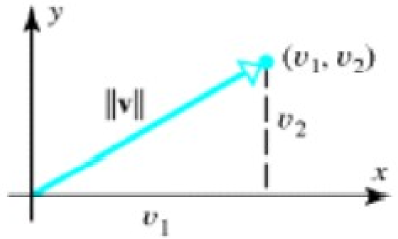
Inner Product Space
Himpunan Orthonormal
Proses Gramm-Schmidt

SUKMAWATI NE

INGAT KEMBALI!!

PANJANG (NORM) SEBUAH VEKTOR

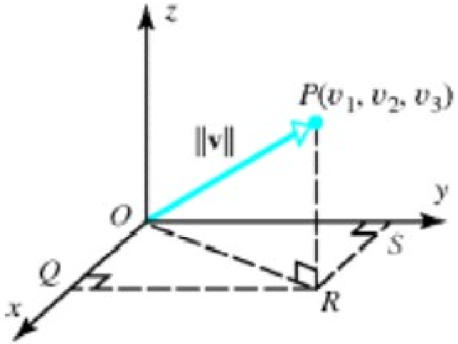


(a)

DEFINITION 1

If $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ is a vector in R^n, then the ***norm*** of $\mathbf{v}$ (also called the ***length*** of $\mathbf{v}$ or the ***magnitude*** of $\mathbf{v}$) is denoted by $\|\mathbf{v}\|$, and is defined by the formula

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots + v_n^2}$$



(b)

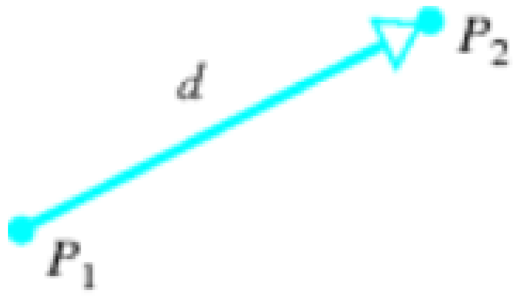
INGAT KEMBALI!!

JARAK (DISTANCE) DUA BUAH VEKTOR

DEFINITION 2

If $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ and $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ are points in R^n, then we denote the ***distance*** betwee
$\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ by $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ and define it to be

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$$



$$\boxed{d = \|\overrightarrow{P_1P_2}\|}$$

INGAT KEMBALI !

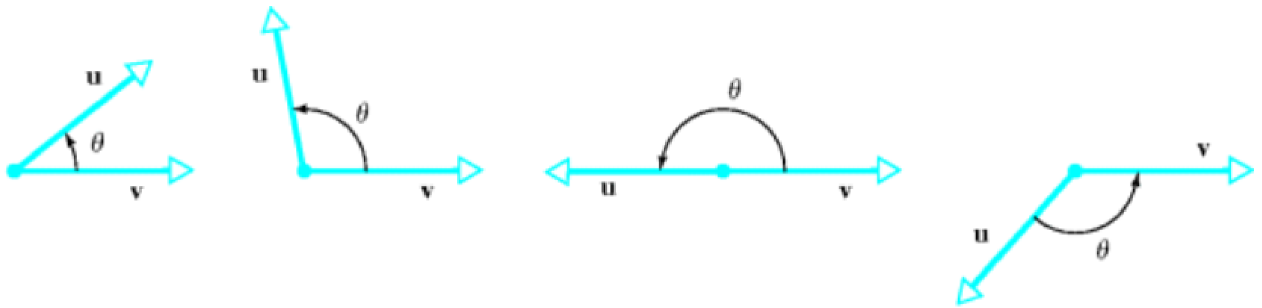
HASIL KALI TITIK (DOT PRODUCT)

DEFINITION 3

If **u** and **v** are nonzero vectors in R^2 or R^3, and if θ is the angle between **u** and **v**, then the ***dot product*** (also called the ***Euclidean inner product***) of **u** and **v** is denoted by $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ and is defined as

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$$

If $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ or $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, then we define $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ to be 0.



The angle θ between $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ satisfies $0 \le \theta \le \pi$.

Inner Product Space

Inner Product Space

- Disebut juga **Ruang Hasil Kali Dalam**

Definisi

Hasil kali dalam adalah fungsi yang mengaitkan setiap pasangan vektor di ruang vektor V (misalkan pasangan $\bar{u}$ dan $\bar{v}$, dinotasikan dengan $< \bar{u}, \bar{v} >$) dengan bilangan riil dan memenuhi 4 aksioma , yaitu :

1. Simetris : $< \bar{u}, \bar{v} > = < \bar{v}, \bar{u} >$
2. Aditivitas : $< \bar{u} + \bar{v} , \bar{w} > = < \bar{u}, \bar{w} > + < \bar{v}, \bar{w} >$
3. Homogenitas : $< k\bar{u}, \bar{v} > = k < \bar{u}, \bar{v} >$, k skalar
4. Positivitas : $< \bar{u}, \bar{u} > \geq 0$ dan $(< \bar{u}, \bar{u} > = 0 \leftrightarrow \bar{u} = \bar{0})$

Catatan

- Inner product di dasarkan pada sifat-sifat dalam Dot Product
- Inner product dari dua buah vektor u dan v dalam R^n dapat didefinisikan sebagai :
  - $(u,v) = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n$
- Ruang vektor yang dilengkapi Hasil Kali Dalam (Inner Product) seperti diatas disebut **Ruang Hasil Kali Dalam (Real Inner Product Space)**

Contoh 1

Tunjukkan bahwa operasi perkalian titik standar (Dot Product) di R^3 Euclides merupakan hasil kali dalam!

Jawab

Akan ditunjukkan bahwa perkalian titik standar memenuhi keempat aksioma hasil kali dalam , yaitu :

Misalkan $\bar{a} = (a_1,a_2,a_3)$, $\bar{b} = (b_1,b_2,b_3)$, $\bar{c} = (c_1,c_2,c_3)$ maka $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in R^3$

1. Simetris

$$\begin{aligned} < \bar{a}, \bar{b} > &= (\bar{a} \cdot \bar{b}) \\ &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ &= (b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3) \\ &= < \bar{b}, \bar{a} > \quad \text{............ (terpenuhi)} \end{aligned}$$

2. Aditivitas

$$\begin{aligned} < \bar{a} + \bar{b} , \bar{c} > &= ((\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c}) \\ &= ((a_1+b_1 , a_2+b_2 , a_3+b_3) \cdot (c_1,c_2,c_3)) \\ &= ((a_1c_1 + b_1c_1) + (a_2c_2+b_2c_2) + (a_3c_3 + b_3c_3)) \\ &= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) + (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) \\ &= (\bar{a} \cdot \bar{c}) + (\bar{b} \cdot \bar{c}) \\ &= < \bar{a}, \bar{c} > + < \bar{b}, \bar{c} > \quad \text{...... (terpenuhi)} \end{aligned}$$

Lanjutan

3. Homogenitas

$$< k\bar{a}, \bar{b} > \quad = (k\bar{a} \,.\, \bar{b})$$
$$= (ka_1b_1 + ka_2b_2 + ka_3b_3)$$
$$= k(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$$
$$= k(\bar{a} \,.\, \bar{b})$$
$$= k< \bar{a}, \bar{b} > \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(terpenuhi)}$$

4. Positivitas

$$< \bar{a}, \bar{a} > \quad = (\bar{a} \,.\, \bar{a}) = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \geq 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(terpenuhi)}$$

dan

$$< \bar{u}, \bar{u} > = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = 0 \leftrightarrow \bar{u} = (0,0,0) = \bar{0} \qquad \ldots\ldots\text{(terpenuhi)}$$

Ruang Hasil Kali Dalam yang memiliki Hasil Kali Dalam berupa perkalian titik standar (Dot Product) seperti diatas biasa disebut Ruang Hasil Kali Dalam Euclides atau Euclidean Inner Product

Contoh 2

Diketahui $< \bar{u}, \bar{v} > = ad + cf$ dengan $\bar{u} = (a,b,c)$ dan $\bar{v} = (d,e,f)$, Apakah $< \bar{u}, \bar{v} >$ tersebut merupakan hasil kali dalam ?

Jawab

Akan ditunjukkan apakah $< \bar{u}, \bar{v} >$ tersebut memenuhi keempat aksioma hasil kali dalam

Aksioma

1. Simetris

$$\begin{aligned} < \bar{u}, \bar{v} > &= ad + cf \\ &= da + fc \\ &= < \bar{v}, \bar{u} > \quad \text{............ (terpenuhi)} \end{aligned}$$

2. Aditivitas

Misalkan $\bar{w} = (g,h,i)$

$$\begin{aligned} < \bar{u} + \bar{v}, \bar{w} > &= < (a+d, b+e, c+f), (g,h,i) > \\ &= (a+d)g + (c+f)i \\ &= (ag + ci) + (dg + fi) \\ &= < \bar{u}, \bar{w} > + < \bar{v}, \bar{w} > \quad \text{...... (terpenuhi)} \end{aligned}$$

Lanjutan

3. Homogenitas

   $< k\bar{u}, \bar{v} > \quad = (kad + kcf)$

   $= k(ad + cf)$

   $= k< \bar{u}, \bar{v} >$ .... (terpenuhi)

4. Positivitas

   $< \bar{u}, \bar{u} > \; = (\bar{u} \,.\, \bar{u}) = (a^2 + c^2) \geq 0$ .... (terpenuhi)

   dan

   ($< \bar{u}, \bar{u} > = (a^2 + c^2) = 0$ tidak selalu $\leftrightarrow$ $\bar{u} = (0,0,0)$ karena untuk nilai $\bar{u} = (0,b,0)$ dengan $b \neq 0$ maka nilai $< \bar{u}, \bar{u} > = 0$ ...... (tidak terpenuhi)

   Aksioma positivitas tidak terpenuhi maka $< \bar{u}, \bar{v} > = ad + cf$ dengan $\bar{u} = (a,b,c)$ dan $\bar{v} = (d,e,f)$ **bukan** merupakan hasil kali dalam.

Definisi

If V is a real inner product space, then the ***norm*** (or ***length***) of a vector $\mathbf{v}$ in V is denoted by $\|\mathbf{v}\|$ and is defined by

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$

and the ***distance*** between two vectors is denoted by $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ and is defined by

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle}$$

A vector of norm 1 is called a ***unit vector***.

Misalkan θ sudut antara $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ dalam Ruang Hasil Kali Dalam, maka besar cos θ adalah

$$\cos\theta = \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\|\bar{u}\| \ \|\bar{v}\|}$$

Contoh

Dikctahui V adalah RHD dcngan hasil kali dalam $< \bar{u}, \bar{v} > = (u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_3v_3)$ dengan $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Jika vektor – vektor $\bar{a}, \bar{b} \in V$ dengan $\bar{a} = (1,2,3)$ dan $\bar{b} = (1,2,2)$, Tentukan

a. Besar cos α jika sudut yang dibentuk antara $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ adalah α !

b. Jarak antara $\bar{a}$ dan $\bar{b}$!

Jawab

$$\cos\theta = \frac{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle}{\|\bar{a}\| \; \|\bar{b}\|}$$

$< \bar{a}, \bar{b} > = 1.1 + 2.(2.2) + 2.3 = 15$

$\|\bar{a}\| = \sqrt{1^2 + 2.2^2 + 3^2} = \sqrt{18}$

$\|\bar{b}\| = \sqrt{1^2 + 2.2^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

Jadi $\cos\theta = \dfrac{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle}{\|\bar{a}\| \; \|\bar{b}\|} = \dfrac{15}{\sqrt{18}\,\sqrt{13}} = \dfrac{15}{\sqrt{234}}$

Himpunan Orthonormal

Definisi

Diketahui V ruang hasil kali dalam dan $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$ adalah vektor – vektor dalam V.

Beberapa definisi penting

a. $H = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n\}$ disebut **himpunan orthogonal** bila setiap vektor dalam V saling tegak lurus ,yaitu $<\overline{v}_i, \overline{v}_j> = 0$ untuk $i \neq j$ dan $i,j = 1,2,\ldots,n$.

b. $G = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n\}$disebut **himpunan orthonormal** bila

- G himpunan orthogonal
- Norm dari $v_i = 1$, $i = 1,2,\ldots,n$ atau $< \overline{v}_i, \overline{v}_i > = 1$

Contoh

Vektor-vektor berikut adalah vektor yang saling tegak lurus (orthogonal).

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}\right\}$$

Bukti :

Untuk $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$ = 1.0+0.2+0.0 = 0,

lainnya bisa dibuktikan sendiri

Vektor mana yang orthonormal?

Proyeksi

Jika a dan b adalah vektor-vektor di ruang dimensi 2 dan di ruang dimensi 3, dan jika $||b|| \neq 0$, maka proyeksi vektor a yang sejajar dengan b adalah:

$$a_b = \frac{a.b}{\|b\|^2} b$$

(Komponen vektor a yang sejajar dengan b atau proyeksi vektor a yang sejajar dengan b)

Proyeksi

Proyeksi vektor a yang ortogonal terhadap b adalah:

$$a - a_b = a - \frac{a.b}{\|b\|^2} b$$

Contoh

a = (2,-1,3), b = (4,-1,2) Carilah :

- komponen vektor a yang sejajar dengan b!
- Komponen vektor a yang orthogonal terhadap b

Proses Gramm-Schmidt

Proses Gram-Schmidt

Diketahui himpunan vektor u=$\{u_1,u_2,...u_n\}$ yang belum orthogonal dan vektor W = span $(u_1,u_2,...u_n)$, yaitu vektor W yang dibentuk dari himpunan vektor u=$\{u_1,u_2,...u_n\}$

Proses Gram-Schmidt adalah proses untuk mencari himpunan vektor v = $\{v_1,v_2,...v_n\}$ yang orthogonal (saling tegak lurus) dan merupakan vektor pembentuk W

Langkah Prosesnya

Ambil $v_1 = u_1$

$v_2 = u_2$ - (proyeksi u_2 pada v_1)

$v_3 = u_3$ - (proyeksi u_3 pada v_1) - (proyeksi u_3 pada v_2)

…

$v_i = u_i$ - (proyeksi u_i pada v_1) - (proyeksi u_i pada v_2) - … - (proyeksi u_i pada v_{i-1})

…

$v_n = u_n$ - (proyeksi u_n pada v_1) - (proyeksi u_n pada v_2) - … - (proyeksi u_n pada v_{n-1})

Ingat Rumus Proyeksi

Misal :

proyeksi u_2 pada v_1 $= \frac{u_2 . v_1}{\|v_1\|^2} v_1$

Contoh

Diketahui himpunan vektor berikut :

$S = \{u_1, u_2, \ldots u_n\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

dan W = span (S)

Tentukan vektor $v = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ yang orthogonal dan membentuk W.

Penyelesaian

$v_1 = (1,0,0)$

$v_2 = u_2$ - (proyeksi u_2 pada v_1)

$= u_2 - \frac{u_2.v_1}{\|v_1\|^2}\ v_1$

$= (1,2,0) - \frac{(1.1+0.2+0.0)}{1} (1,0,0)$

$= (0,2,0)$

Demikian seterusnya, sebagai latihan silakan dicoba di cari untuk v_3

Soal Latihan

1. Tentukan cos sudut yang terbentuk oleh pasangan vektor berikut :

   a. $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $\bar{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$

   b. $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ dan $\bar{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. Tentukan proyeksi ortogonal vektor a terhadap vektor b dan tentukan panjang vektor proyeksi tersebut:

   a. $\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\bar{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

   b. $\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dan $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. Tentukan dua buah vektor satuan yang tegak lurus terhadap

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

4. Tentukan vektor yang tegak lurus terhadap vektor

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

5. Diketahui himpunan vektor berikut : S $=\{u_1, u_2, u_3\}$, dengan $u_1 = (1,2,3), u_2 = (3,2,1)$, dan $u_3 = (1,1,2)$ dan W = span (S)

Tentukan vektor v $= \{v_1, v_2, v_3\}$ yang orthogonal dan membentuk W.

Referensi

Howard Anton & Chris Rorres, Elementary Linear Algebra, 10th Edition, 2010

Yuliant Sibaroni, Buku Ajar Aljabar Linier, 2002