Transformasi Linier
Matriks Transformasi
Kernel dan Jangkauan

SUKMAWATI NUR ENDAH - UNDIP

Transformasi Linier

Transformasi Linear

Misalkan V dan W adalah ruang vektor, T : V → W dinamakan transformasi linear, jika untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in V$ dan $\alpha \in R$ berlaku :

1. $T\left(\bar{a}+\bar{b}\right)= T\left(\bar{a}\right)+T\left(\bar{b}\right)$

2. $T\left(\alpha\,\bar{a}\right)= \alpha T\left(\bar{a}\right)$

Jika V = W maka T dinamakan operator linear

Contoh :

Tunjukkan bahwa T : $R^2 \rightarrow R^3$, dimana

$$T\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x - y \\ -x \\ y \end{pmatrix}$$

Rumus Transformasi

merupakan tranformasi linear.

Jawab :

Ambil unsur sembarang di R^2,

Misalkan $\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in R^2$

(i) Akan ditunjukan bahwa $T(\bar{u} + \bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$

$$T(\bar{u}+\bar{v}) = T\left[\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} (u_1+v_1)-(u_2+v_2) \\ -(u_1+v_1) \\ u_2+v_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (u_1+v_1)-(u_2+v_2) \\ -u_1-v_1 \\ u_2+v_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1-u_2 \\ -u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1-v_2 \\ -v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Terbukti bahwa $T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$

(ii) Ambil unsur sembarang $\bar{u} \in R^2$ dan $\alpha \in R$

$$\mathrm{T}(\alpha\bar{u}) = \mathrm{T}\left[\begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha u_1 - \alpha u_2 \\ -\alpha u_1 \\ \alpha u_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(u_1 - u_2) \\ \alpha(-u_1) \\ \alpha(u_2) \end{pmatrix}$$

$$= \alpha\begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ -u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha T(\bar{u})$$

Jadi, T merupakan transformasi linear.

Contoh 2 :

Misalkan T merupakan suatu transformasi dari M_{2x2} ke R yang didefinisikan oleh

$T(A) = det\ (A)$, untuk setiap $A \in M_{2x2}$,

Apakah T merupakan Transformasi linier.

Jawab :

Misalkan $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_{2x2}$

maka untuk setiap $\alpha \in$ R berlaku

$$\det(\alpha A) = \det \begin{pmatrix} \alpha\, a_1 & \alpha\, a_2 \\ \alpha\, a_3 & \alpha\, a_4 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha^2 (a_1 a_2 - a_3 a_4) = \alpha^2 \det(A)$$

Perhatikan bahwa $det(\alpha A) \neq \alpha\, det(A)$

Jadi T bukan transformasi linier.

Contoh 3 :

Diketahui $T : R^3 \rightarrow R^2$, dimana $T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ a-c \end{pmatrix}$

a. Apakah T merupakan transformasi linear

b. Tentukan $T(1, 1, 1)$

Jawab :

a.(i) Ambil unsur sembarang R_3,

$$\bar{u} = (u_1, u_2, u_3) \qquad \bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

Sehingga

$$\bar{u} + \bar{v} = \quad ((u_1 + v_1),(u_2 + v_2),(u_3 + v_3))$$

Perhatikan bahwa

$$T(\bar{u} + \bar{v}) = T((u_1 + v_1),(u_2 + v_2),(u_3 + v_3))$$

$$= \begin{pmatrix} (u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) \\ (u_1 + v_1) - (u_3 + v_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (u_1 - u_2) + (v_1 - v_2) \\ (u_1 - u_3) + (v_1 - v_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ u_1 - u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 - v_2 \\ v_1 - v_3 \end{pmatrix}$$

$$= T\ (u_1, u_2, u_3) + T\ (v_1, v_2, v_3)$$

Ambil unsur sembarang R_3, $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$

dan $\alpha \in$ R, sehingga

$$T(\alpha\,\bar{u}) = T(\alpha\ (u_1, u_2, u_3))$$

$$= \begin{pmatrix} (\alpha u_1 - \alpha u_2) \\ (\alpha u_1 - \alpha u_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(u_1 - u_2) \\ \alpha(u_1 - u_3) \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ u_1 - u_3 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha\, T\ (u_1, u_2, u_3)$$

Jadi, T merupakan transformasi linear

b. $T(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Latihan Soal Dulu Ya....

Latihan Soal 1

1. Misalkan $T : R^2 \rightarrow R^3$,adalah sebuah fungsi yang didefinisikan oleh :
   - $T(x,y) = (x, x+y, x-y)$
   - Buktikan bahwa T adalah transformasi linier

2. Misalkan $L : P_2 \rightarrow P_1$,

$L(a_2x^2+a_1x+a_0) = (a_2+a_1)x+a_0$,

dimana P_n adalah himpunan polinomial berderajat $\leq n$. Apakah L transformasi linier?

Latihan Soal 1

3. Misalkan L : $R^3 \rightarrow R^2$,didefinisikan oleh

$$L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Apakah L transformasi linier?

Matriks Transformasi

MATRIKS TRANSFORMASI

Suatu transformasi linear $T : R^n \rightarrow R^m$ dapat direpresentasikan dalam bentuk :

$$T\left(\bar{u}\right) = A\bar{u} \quad \text{untuk setiap } \bar{u} \in V.$$

➔ A_{mxn} dinamakan matriks transformasi dari *T*.

Contoh :

Misalkan, suatu transformasi linear $T : R^2 \rightarrow R^3$ didefinisikan oleh :

$$T\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x - y \\ -x \\ y \end{pmatrix}$$

Jawab :

Perhatikan bahwa $\quad T\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x-y \\ -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Jadi matriks transformasi untuk T : $R^2 \rightarrow R^3$ adalah

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jika T : $R^n \rightarrow R^m$ merupakan transformasi linear

maka ukuran matriks transformasi adalah **m x n**

Matriks Transformasi Linier

Misalkan $e_1,e_2,\ldots e_n$ adalah basis baku untuk R^n dan misalkan A adalah sebuah matriks m x n yang dibentuk oleh $T(e_1)$, $T(e_2)$, … $T(e_n)$ sebagai vektor kolom-kolomnya, maka A disebut matriks transformasi linier

Contoh

Misalkan T : $R^2 \rightarrow R^2$, diberikan oleh :

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 - 2x_2 \end{bmatrix}$$

Maka

$$T([e_1]) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dan

$$T([e_2]) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Jadi matriks transformasi adalah

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Latihan Soal 2

Berapa matriks transformasinya jika

- Misalkan T : $R^2 \rightarrow R^3$, diberikan oleh

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

- Misalkan T : $R^3 \rightarrow R^2$, diberikan oleh

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_3 \\ x_3 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

Open Question

Bagaimana menentukan matriks transformasi linier dari

beberapa vektor yang merupakan basis ruang vektor V?

Misalkan

$B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ basis bagi ruang vektor V dan

$T : R^2 \to R^3$ merupakan transformasi linear

dimana

$T(\bar{v}_i) = (\bar{u}_i)$ untuk setiap i = 1,2.

Matriks transformasinya dapat ditentukan dengan cara, ditulis :

$$T(\bar{v}_1) = A\bar{v}_1 = \bar{u}_1$$
$$T(\bar{v}_2) = A\bar{v}_2 = \bar{u}_2$$

Sehingga

$$A_{3x2}\begin{bmatrix}\bar{v}_1 & \bar{v}_2\end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix}\bar{u}_1 & \bar{u}_2\end{bmatrix}_{3x2}$$

$\begin{bmatrix}\bar{v}_1 & \bar{v}_2\end{bmatrix}$ basis bagi V maka ia punya invers

Jadi

$$A = \begin{bmatrix}\bar{u}_1 & \bar{u}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{v}_1 & \bar{v}_2\end{bmatrix}^{-1}$$

Contoh :

Misalkan

$$\left\{ \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ adalah basis bagi R^3

$T : R^3 \rightarrow R^2$ Transformasi linear didefinisikan

$$T(\bar{v}_i) = A\bar{v}_i = \bar{p}_i$$ untuk setiap i = 1,2,3.

Jika

$$\bar{p}_1 = (1,-1); \quad \bar{p}_2 = (1,0); \quad \bar{p}_3 = (0,\ 2)$$

Tentukan :

Matrix transformasi dan $T\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$

Karena

$$A\bar{v}_i = \bar{p}_i, \qquad \forall_i = 1,2,3$$

Maka

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

atau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

invers matriks dicari dengan OBE :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Sehingga

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Jadi matriks transformasi T adalah $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Sehingga

$$T\left[\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right] = A\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\-1 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

jadi

$$T\left[\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right] = (-1,\ 1)$$

LATIHAN SOAL 3

Suatu transformasi linear, $T : R^2 \rightarrow R^3$

Yang diilustrasikan sebagai berikut :

$$T\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad T\left[\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Tentukan matriks transformasi dari T !
2. Tentukan hasil transformasi, $T\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$

Kernel dan Jangkauan

Kernel dan Jangkauan

Misalkan T : V → W merupakan transformasi linear

Semua unsur di V yang dipetakan ke vektor nol di W dinamakan kernel T

notasi *ker* (*T*).

atau

$$Ker(T) = \left\{ \bar{u} \in V \mid T(\bar{u}) = \bar{0} \right\}$$

Contoh :

Trans. Linear T : $R^3 \rightarrow R^2$ $\quad T(a,b,c) = \begin{pmatrix} a-b \\ a-c \end{pmatrix}$

Perhatikan bahwa $T(1,\ 1,\ 1) = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

maka $(1,\ 1,\ 1) \in Ker(T)$

Sementara itu, $\left(1,2,1\right) \notin Ker(T)$

karena $T(1,2,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \bar{0}$

Jelas bahwa vektor nol pada daerah asal transformasi merupakan unsur kernel T.

Tetapi, tak semua transformasi linear mempunyai vektor tak nol sebagai unsur kernel T.

Teorema :

Jika T : V → W adalah transformasi linear

maka *Ker* (*T*) merupakan subruang dari V

Bukti :

Ambil $\bar{a}, \bar{b} \in Ker(T)$ sembarang dan $\alpha \in$ Riil

1. Karena setiap $\bar{a} \in Ker(T)$

   artinya setiap $\bar{a} \in V$ sehingga $T(\bar{a}) = \bar{0}$

   maka $Ker(T) \subseteq V$

2. Perhatikan bahwa $\bar{0} \in Ker\ (T)$

   artinya setiap $T\left(\bar{0}\right) = A\bar{0} = \bar{0}$

   oleh karena itu $Ker(T) \neq \{\}$

3. Karena $\bar{a}, \bar{b} \in Ker\,(T)$ dan $Ker(T) \subseteq V$

   Ingat bahwa V mrp ruang vektor, sehingga berlaku $\bar{a} + \bar{b} \in V$

   akibatnya $T\left(\bar{a} + \bar{b}\right) = T\bar{a} + T\bar{b} = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$

   Jadi $\bar{a} + \bar{b} \in \ker(T)$

4. Karena $\bar{a} \in Ker(T)$ maka $\bar{a} \in V$

karena V adalah ruang vektor

maka untuk setiap $\alpha \in$ Riil berlaku :

$$T\left(\alpha\ \bar{a}\right) = \alpha\, T\left(\bar{a}\right) = \alpha\ \bar{0} = \bar{0}$$

Jadi, $\alpha\, \bar{a} \in Ker(T)$

- Dengan demikian, terbukti bahwa

Jika T : V → W adalah transformasi linear maka $Ker(T)$ merupakan **subruang** dari ruang vektor V

- Karena $Ker(T)$ merupakan subruang

→ T mempunyai Basis Ker(T).

Jangkauan

- Himpunan dari $\bar{b}$ sedemikian hingga T(ū) = $\bar{b}$ disebut Jangkauan

dari T atau disingkat R(T).

- R(T) disebut juga dengan bayangan ū oleh T(ū)

$$R(T) = \{ \bar{b} \in W \mid \text{ ada } \bar{u} \in V \text{ sehingga } T(\bar{u}) = \bar{b} \}$$

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan bahwa R(T) merupakan subruang dari ruang vektor W. Karena Ker(T) dan R(T) merupakan subruang maka Ker(T) dan R(T) masing-masing memiliki basis.

Perhatikan bahwa, misal $\bar{u} \in V$ maka $T(\bar{u}) = A\bar{u}$ sehingga

$$Ker(T) = \{ \bar{u} \in V \mid T(\bar{u}) = A\bar{u} = \bar{0} \}$$

Dengan demikian, basis Ker(T) berkorespondensi dengan basis ruang solusi (ingat SPL homogen), sedangkan basis R(T) merupakan basis bagi ruang kolom dari A.

- Jumlah vektor pada basis ker(T) dinamakan nullitas
- Jumlah vektor pada basis R(T) dinamakan Rank

Contoh :

Diketahui Transformasi linear T : $R^3 \rightarrow R^3$ dengan

$$T\left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right] = ((a+b),\ (2a-c),\ (2a+b+c))$$

Tentukan basis dan dimensi Ker(T) dan R(T)

Jawab :

Perhatikan bahwa :

$$T\left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right] = \left((a+b),(2a-c),(2a+b+c)\right) = \bar{0}$$

Ini memberikan

$$\begin{pmatrix} a+b \\ 2b-c \\ 2a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sehingga

$$T\left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a+b \\ 2b-c \\ 2a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Jadi, matriks transformasi bagi T adalah

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dengan melakukan OBE pada matriks tersebut :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Dengan demikian, Basis ker(T) = { }

dan nulitasnya adalah nol.

Perhatikan hasil OBE
maka basis ruang kolom dari matriks A adalah :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Sekaligus ini merupakan basis jangkauan dari T

sehingga *rank* (dimensi basis R(T)) = 3

Contoh :

Diketahui transformasi linear T : $R^4 \rightarrow R^3$

didefinisikan oleh :

$$T\left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a+b \\ c-2d \\ -a-b+c-2d \end{pmatrix}$$

Tentukan basis kernel dari T dan nulitasnya

Jawab :

$$T\left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a+b \\ c-2d \\ -a-b+c-2d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Jadi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Basis Ker(T) dan Nulitasnya?

Ker(T) adalah ruang solusi dari

$$T(\bar{v}) = A(\bar{v}) = \bar{0},\ \forall \bar{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in R^4$$

Dengan OBE

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lanjutan

Dari OBE :

$a + b = 0$

$c – 2d = 0$

Dengan menggunakan parameter $a = s$, maka $b = -a = - s$

Dengan menggunakan parameter $c = t$, maka $2d = c = t$ sehingga $d = \frac{1}{2} t$

Ker(T) = ruang solusi dari $A\bar{v} = \bar{0}$

yaitu

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} t \ , s, t \neq 0 \right\}$$

Jadi Basis Ker(T) adalah

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\}$$

Nulitas = Dimensi dari Ker(T) = 2

Latihan Soal 4

Misalkan T : $\Re^3 \rightarrow \Re^2$ didefinisikan oleh

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2b \\ a+c \end{pmatrix}$$

Tentukan basis Ker(T) dan basis R(T) beserta dimensinya !

Ada Pertanyaan?