BAB V

RUANG VEKTOR UMUM

5.1 RUANG VEKTOR REAL

Definisi:

Misalkan V sebarang himpunan benda yang dua operasinya kita definisikan, yakni **penjumlahan** (addition) dan **perkalian scalar** (scalar multiplication). Penjumlahan tersebut dapat diartikan suatun aturan yang mengasosiasikan setiap pasang benda **u** dan **v** dalam V, yang mengandung elemen **u** + **v**, yang kita namakan jumlah (sum) **u** dan **v**; dengan perkalian scalar kita artikan aturan untuk mengasosiasikannya baik untuk setiap scalar k maupun setiap benda **u** pada V yang mengandung elemen k**u**, yang dinamakan perkalian scalar (scalar multiple) **u** oleh k. jika aksioma-aksioma berikut dipenuhi oleh semua benda **u**, **v**, **w** pada V dan oleh semua scalar k dan l, maka kita namakan V sebuah **ruang vector** (vector space) dan benda – benda pada V kita namakan **vector** :

1) jika **u** dan **v** adalah benda – benda pada V, maka **u** + **v** berada di V
2) **u** + **v** = **v** + **u**
3) **u** + (**v** + **w**) = (**u** + **v**) + **w**
4) ada sebuah benda **0** di V,yang disebut **vektor nol** (zero vector) untuk V, sehingga 0 + **u** = **u** + 0 = **u** untuk semua **u** di V
5) untuk setiap **u** di V, ada sebuah benda – **u** di V yang kita namakan **negative u** sehingga **u** + (- **u**) = (-**u**) + **u** = 0
6) jika k adalah sebarang scalar dan **u** adalah sebarang benda di V, maka k**u** berada di V
7) K(**u** + **v**) = k**u** + k**v**
8) (k + l)**u** = k**u** + l**u**
9) k (l**u**) = (kl) **u**
10) 1**u** = **u**

CONTOH 1 Ruang Vektor Matriks 2 x 2

Tunjukan bahwa himpunan V dari semua matriks 2 x 2 dengan entri-entri real adalah suatu ruang vektor jika penjumlahan vektor didefenisikan sebagi penjumlahan matriks dan perkalian skalar vektor didefenisikan sebagi perkalian skalar matriks.

Penyelesaian :

Pada contoh ini, kita akan membuktikan aksioma 1

Misalkan :

$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$

Untuk membuktikan Aksioma 1, kita harus menunjukan bahwa **u** + **v** adalah suatu objek pada V, atau dengan kata lain, kita harus menujukan bahwa **u** + **v** adalah suatu matriks 2 x 2. Hal ini dapat diperoleh dari defenisi penjumlahan matriks, karena

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{bmatrix}$$

CONTOH 2 Himpunan yang Bukan Merupakan Ruang Vektor

Misalkan V = R^2 dan defenisikan operasi penjumlahan dan perkalian skalar sebagai berikut Jika $\mathbf{u} = (u_1,u_2)$ dan $\mathbf{v} = (v_1,v_2)$, maka defenisikan

$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1+ v_1, u_2+v_2)$

dan jika k adalah bilangan real sebarang, maka defenisikan

$k\mathbf{u} = (ku_1,0)$

sebagai contoh, jika $\mathbf{u} = (2,4)$, $\mathbf{v} = (-3,5)$ dan k = 7 maka

$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (2 +(-3), 4+5) = (-1,9)$

$k\mathbf{u} = 7\mathbf{u} = (14,0)$

operasi penjumlahan merupakan operasi penjumlahan standar pada R^2, tetapi perkalian skalar bukan merupakan perkalian standar.

Jadi, V bukan merupakan ruang vektor untuk operasi –operasi tersebut.

CONTOH 3 Ruang Vektor Nol

Misalkan V terdiri dari suatu objek tunggal, yang dinotasikan dengan **0**, dan defenisikan

$$\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \text{ dan } k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Untuk semua skalar k. sehingga kita menyebut ruang vektor ini sebagai *ruang vektor nol (zero vector space).*

Teorema 5.1.1.

Misalkan V adalah sebuah ruang vector, **u** sebuah vector pada V, dan k sebuah skalar, maka:

a) $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
b) $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$
c) $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$
d) Jika $k\mathbf{u} = \mathbf{0}$, maka $k = 0$ atau $\mathbf{u} = 0$

Bukti *(a)*. Kita dapat menulis.

$$0\mathbf{u} + 0\mathbf{u} = (0 + 0)\,\mathbf{u} \qquad \textbf{(aksioma 8)}$$

$$= 0\mathbf{u} \qquad \textbf{(sifat dari bilangan 0)}$$

berdasarkan aksioma 5, vector $0\mathbf{u}$ memiliki bentuk negative $-0\mathbf{u}$. Dengan menambahkan negatifnya ini pada kedua ruas di atas akan menghasilkan.

$$(0\mathbf{u} + 0\mathbf{u}) + (-0\mathbf{u}) = 0\mathbf{u} + (-0\mathbf{u})$$

atau

$$0\mathbf{u} + [0\mathbf{u} + (-0\mathbf{u})] = 0u + (-0u) \qquad \textbf{[Aksioma 3]}$$

$$0\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \qquad \textbf{[Aksioma 5]}$$

$$0\mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad \textbf{[Aksioma 4]}$$

5.2 SUB-RUANG

Definisi :

Subhimpunan W dari sebuah ruang vector V dinamakan **subruang** (subspace) dari V jika W itu sendiri adalah suatu ruang vector di bawah penjumlahan dan perkalian scalar yang didefinisikan pada V.

Teorema 5.2.1

Jika w adalah suatu himpunan yang terdiri dari satu atau lebih vector dari suatu ruang vector V, maka W adalah subruang dari V jika dan hanya jika syara-syarat berikut terpenuhi,

a) Jika **u** dan **v** adalah vector-vektor pada , maka **u + v** terletak di w
b) Jika k adalah sebarang skalar dan **u** adalah sebarang vector padaW, maka k**u** berada pada

CONTOH 1

Perlihatkanlah bahwa himpunan W dari semua matriks 2x2 yang mempunyai bilangan nol pada diagonal utamanya adalah subruang dari ruang vector M_{22} dari semua matriks 2x2 .

Pemecahan. Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

Adalah sebarang dua matriks pada matriks pada W dan k adalah sebarang scalar. Maka

$$kA = \begin{bmatrix} 0 & ka_{22} \\ ka_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad dan \quad A + B = \begin{bmatrix} 0 & a_{12}b_{12} \\ a_{21}a_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

Oleh karena kA dan A + B mempunyai bilangan nol diagonal utama, maka kA dan A + B terletak pada W. jadi, W adalah subruang dari M_{22}

CONTOH 2

Tinjaulah vector-vektor u = (1, 2, -1) dan v = (6, 4, 2) di R^3. Perlihatkan bahwa w = (9, 2, 7) adalah kombinasi linear u dan v serta bahwa w' = (4, -1, 8) bukanlah kombinasi linear u dan v.

Pemecahan. Supaya w merupakan kombinasi linear u dan v, harus ada scalar k_1 dan k_2 hingga $w = k_1 u + k_2 v$; yakni $(4,-1, 8)=k_1(1, 2, -1)+k_2(6, 4, 2)$

Atau $(9, 2, 7)=(k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2)$

Dengan menyamakan komponen yang bersesuaian memberikan

$k_1 + 6k_2 = 4$

$2k_1 + 4k_2 = -1$

$-k_1 + 2k_2 = 8$

System persamaan – persamaan ini tidak konsisten. Sehingga tidak ada scalar-skalar seperti itu. Sebagai konsekuensinya, maka w' bukanlah kombinasi linear u dan v.

Ruang Solusi dari Sistem Homogen

Jika **Ax = b** adalah suatu sistem persamaan linear, maka setiap vektor x yang memenuhi persamaan ini disebut sebagai **vektor solusi** (solution vector) dari sistem tersebut. Teorema berikut menunjukan bahwa vektor-vektor solusi dari suatu sistem linear yang homogen membentuk ruang vektor yang akan disebut sebagai **ruang solusi** (solution space) dari sistem tersebut.

Teorema 5.2.2

Jika **Ax = 0** adalah suatu sistem linear homogen yang terdiri dari m persamaan dengan n faktor yang tidak diketahui, maka himpunan vektor solusi adalah suatu subruang dari R^n

Bukti.

Misalkan W adalah himpunan vector solusi. Terdapat paling tidak satu vector pada W, yaitu **0**. Untuk menunjukkan bahwa W adalah tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian scalar, kita harus menunjukkan bahwa jika **x** dan **x**' adalah vector solusi sebarang dan k adalah scalar sebarang, maka **x + x'** dank **x** adalah juga merupakan vector solusi. Tetapi jika **x** dan **x'** adalah vector solusi, maka.

$$\boldsymbol{Ax = 0} \text{ dan } \boldsymbol{Ax' = 0}$$

di mana selanjutnya

$$\boldsymbol{A(x + x') = Ax + Ax' = 0 + 0 = 0}$$

dan

$$\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{x}) = k\boldsymbol{Ax} = k\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

yang membuktikan bahwa **x + x'** dan *k***x** adalah vector solusi.

CONTOH 3 Ruang solusi yang Merupakan Subruang R^3

Tentukan solusi dari sistem-sistem linear berikut ini :

a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & -8 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

a) Solusinya adalah

   x = 2s-3t, y = s, z = t

   dimana selanjutnya

   x = 2y-3z atau x-2y + 3z = 0

ini merupakan persamaan dari bidang yang melewati titik asal dengan n = (1,-2,3) sebagai vektor normal.

b) Solusinya adalah

x = -5t, y = -t, z = t

Definisi:

Suatu vector **w** disebut suatu ***kombinasi linear*** *(linear combination)* dari vector-vektor $\boldsymbol{v}_{,}\boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ jika dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\boldsymbol{w} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + k_r\boldsymbol{v}_r$$

dimana $k_1, k_2, \ldots k_r$ adalah scalar.

Merentang (*Spanning*)

Jika $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$, adalah vector-vektor pada suatu ruang vector V, maka umumnya beberapa vector pada V merupakan kombinasi linear dari $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ dan vector lainnya mungkin tidak. Teorema berikut ini menunjukkan bahwa jika kita menyusun suatu himpunan W yang mengandung semua vector yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ maka W membentuk suatu subruang dari V.

Teorema 5.2.3

Jika $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ adalah vector-vektor pada suatu ruang vector V, maka:

(a) Himpunan W yang terdiri dari semua kombinasi linear $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ adalah suatu subruang dari V.

(b) W adalah subruang terkecil dari V yang mengandung $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ dalam arti bahwa setiap subruang lain dari V mengandung $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ pasti mengandung W.

Bukti (a).

Untuk menunjukkan bahwa W adalah subruang dari V, kita harus membuktikan bahwa W tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian scalar. Terdapat paling tidak satu vector pada W, yaitu **0**, kaena $\mathbf{0} = 0\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 + \ldots, + 0\boldsymbol{v}_r$ jika **u** dan **v** adalah vector-vektor pada W, maka:

$$\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots, + c_r\boldsymbol{v}_r$$

dan

$$\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots, + k_r\boldsymbol{v}_r$$

di mana $c_1, c_2, \ldots, c_r\ k_1, k_2, \ldots, k_r$ adalah scalar. Oleh karena itu

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (c_1 + k_1)\,\boldsymbol{v}_1 + (c_2 + k_2)\,\boldsymbol{v}_2 + \ldots + (c_r + k_r)\,\boldsymbol{v}_r$$

dan, untuk scalar sebarang *k,*

$$k\boldsymbol{u} = (kc_1)\boldsymbol{v}_1 + (kc_2)\boldsymbol{v}_2 + \ldots + (kc_r)\boldsymbol{v}_r$$

Jadi $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ dan $k\boldsymbol{u}$ adalah kombinasi-kombinasi linear dari $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$, dan sebagai konsekuensinya terletak pada W. Oleh karena itu W adalah tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian scalar.

Bukti (b).

Setiap vector v_i adalah kombinasi linear dari $v_1, v_2, \ldots, v_r$, karena kita dapat menuliskan.

$$v_i = 0v_1 + 0v_2 + \ldots, + 1v_i + \ldots + 0vr$$

Oleh karena itu, subruang W mengandung setiap vector $v_1, v_2, \ldots, v_r$. Misalkan W adalah subruang lain sebarang yang mengandung $v_1, v_2, \ldots, v_r$. Karena W tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian scalar. W pasti mengandung semua kombinasi linear dari $v_1, v_2, \ldots, v_r$. Jadi, W mengandung setiap vector dari W.

Kami menyusun definisi berikut.

Definisi

Jika $S = (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_r})$ adalah suatu himpunan vector-vektor pada suatu ruang vector V, maka subruang W dari V yang terdiri dari semua kombinasi linear vector-vektor pada S disebut sebagai ***ruang yang direntang*** (*space spanned*) oleh $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_r}$ dan vector-vektor $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_r}$, ***merentang*** (*span*) W. Untuk menyatakan bahwa W adalah ruang yang direntang oleh vector-vektor pada himpunan $S = (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_r})$ kita menuliskan.

$$W = \text{rentang } (S) \text{ atau } W = \text{rentang } (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_r})$$

CONTOH 4

Vector-vektor i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0) dan k = (0, 0, 1) merentang R^3 karena setiap vector (a, b, c) pada R^3 dapat kita tuliskan sebagai (a, b, c) = ai + bj + ck .Yang merupakan kombinasi linear I, j, dan k

CONTOH 5

Tentukan apakah $v_1 = (1, 1, 2)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, dan $v_3 = (2, 1, 3)$ merentang R^3.

Pemecahan:

Kita harus menentukan apakah sebarang vector $b = (b_1, b_2, b_3)$ pada R^3 dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear

$b = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3$

dari vector – vector v_1, v_2, v_3. Dengan menyatakan persamaan ini dalam komponen – komponen maka akan memberikan

$(b_1, b_2, b_3) = k_1 \ (1, 1, 2) + k_2 \ (1, 0, 1) + k_3 \ (2, 1, 3)$ atau

$(b_1, b_2, b_3) = (k_1 + k_2 + 2 k_3, \quad k_1 + k_3, 2k_1 + k_2 + 3k_3$

Dapat juga $k_1 + k_2 + 2 k_3 = b_1$

$k_1 + \qquad k_3 = b_2$

$2k_1 + k_2 + 3k_3 = b_3$

Menurut bagian a dan bagian d dari teorema 15, maka system ini akan konsisten untuk semua nilai b_1, b_2, dan b_3 jika dan hanya matriks koefisien – koefisien dapat dibalik.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tetapi det (A) = 0, sehingga A tidak dapat dibalik, dan sebagai konsekuensinya, maka v_1, v_2, v_3 tidak merentang R^3.

5.3 KEBEBASAN LINEAR

Definisi:

Jika $S = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots.., \boldsymbol{v}_r)$ adalah himpunan takkosong vektor-vektor, maka persamaan vektor.

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots..,+ k_r\boldsymbol{v}_r = 0$$

memiliki paling tidak satu solusi, yaitu

$$k1 = 0_1k_2 = 0, \ldots., k_r = 0$$

Jika ini adalah satu-satunya pemecahan, maka S kita namakan himpunan ***bebas linier (linearly independen).*** Jika ada pemecahan lain, maka S kita namakan himpunan ***tak-bebas linier*** **(*linier dependent*).**

CONTOH 2

Tinjaulah vektor-vektor i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0) dan k = (0, 0, 1) pada R^3. Ruas komponen persamaan vector

K_1 i + k_2 j + k_3 k = 0

$K_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) + k_3(0, 0, 1) = 0$

Jadi , $K_1 = 0$, $k_2 = 0$ dan $k_3 = 0$; sehingga himpunan S = (i, j, k) bebas linier. Uraian serupa dapat digunakan untuk memperlihatkan bahwa vector-vector e_1 = (0, 0, 0, … , 1), e_2 = (0, 1, 0, 0, …, 0), … ,e_n = (0, 0, 0, …,0) membentuk himpunan bebas linier pada R^n.

CONTOH 3

Tentukan apakah vektor-vektor

$$v_1 = (1,-2,3), \quad v_2 = (5,6,-1) \quad v_3 = (3,2,1)$$

membentuk suatu himpunan tidak bebas linear atau himpunan bebas linear.

Penyelesaian :

Persamaan vector dalam bentuk komponen-komponennya

$$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = 0$$

menjadi

$$k_1 (1,-2,3) + k_2 (5,6,-1) + k_3 (3,2,1) = (0,0,0)$$

atau secara ekuivalen,

$$(k_1 + 5k_2 + 3k_3 -2k_1 + 6k_2 + 2k_3, 3k_1 - k_2 + k_3) = (0,0,0)$$

Dengan menyetarakan komponen-komponen yang bersesuaian akan diperoleh

$$\begin{aligned} k_1 + 5k_2 + 3k_3 &= 0 \\ -2k_1 + 6k_2 + 2k_3 &= 0 \\ 3k_1 - k_2 + k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Jadi v_1, v_2 dan v_3 membentuk suatu himpunan tidak bebas linear jika system ini memiliki solusi nontrivial, atau suatu himpunan bebas linear jika hanya memiliki solusi trivial.

Dengan menyelesaikan system ini kita memperoleh

$$k_1 = -\tfrac{1}{2}t,\ k_2 = -\tfrac{1}{2}t,\ k_3 = t$$

Jadi, system ini memiliki solusi-solusi nontrivial dan v_1, v_2 dan v_3 membentuk suatu himpunan tidak bebas linear. sebagai alternative kita dapat menunjukkan keberadaan solusi nontrivial tanpa perlu menyelesaikan system ini dengan hanya menunjukkan bahwa matriks koefisiennya memiliki determinan nol dan sebagai konsukuensinya tidak dapat dibalik (buktikan).

Teorema 5.3.1

Himpunan S dengan dua vector atau lebih adalah

(a) Takbebas linier jika dan hanya jika paling tidak satu diantara vector S dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vector S lainnya.
(b) Bebas linier jika dan hanya jika tidk ada vector S yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dalam vector S lainnya.

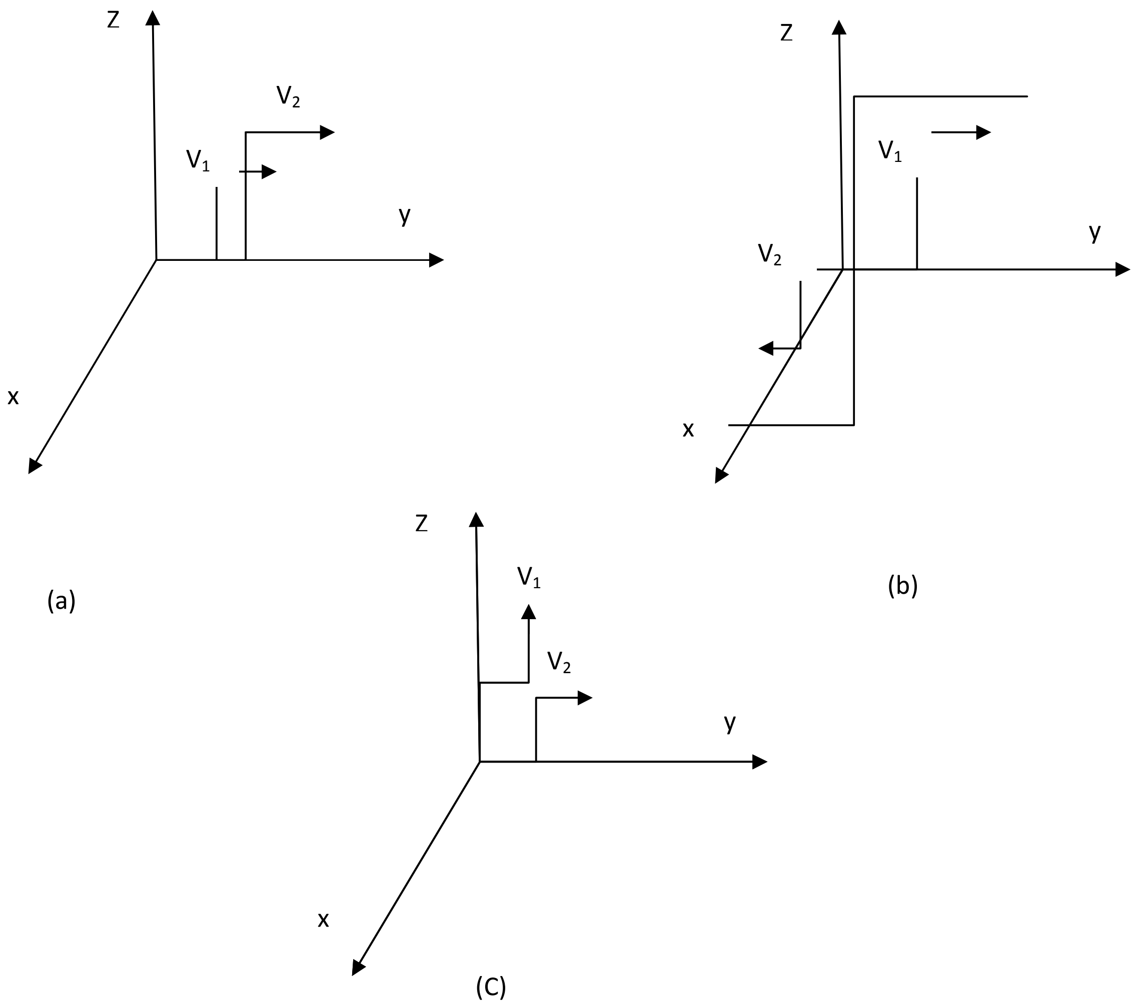
Teorema 5.3.2

(a) Jika sebuah himpunan mengandung vector nol, maka himpunan itu takbebas linier
(b) Sebuah himpunan yang mempunyai persis dua vector takbebas linier jika dan hanya jika salah satu dari vector itu adalah perkalian dari scalar lainnya

Teorema 5.3.3

Misalkan $S = \{v_{1,}\ v_2, \dots, v_r\}$ adalah himpunan vector-vektor pada R^n jika r > n, maka S takbebas linier.

Contoh interpretasi geometric dari ketakbebasan linier dalam R^2

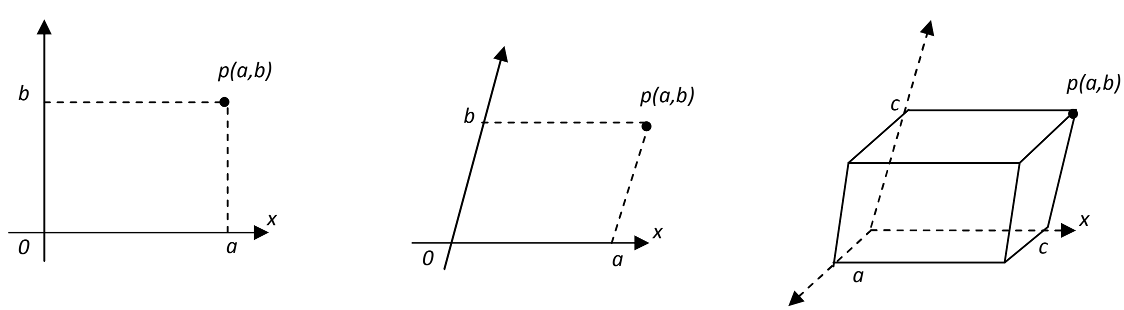


Gambar 4.6 (a) takbebas linier, (b) takbebas linier, (C) bebas linier

5.4 DIMENSI DAN BASIS

Sistem Koordinat Bukan Siku-siku. Pada geometri analitik bidang kita telah belajar untuk mengaitkan suatu titi P pada suatu bidang dengan sepasang koordinat (a, b) dengan memproyeksikan P pada sepasang sumbu koordinat yang saling tegak lurus (Gambar 5.4.1a). dengan cara ini, setiap titik pada bidang tersebut ditentukan oleh suatu himpunan koordinat yang unik dan sebaliknya, setiap pasang koordinat dikaitkan suatu himpunan koordinat yang unik pada bidang tersebut. Kita menggambarkan hal ini dengan menyatakan bahwa sistem koordinat menyusun suatu ***korespondensi satu ke satu*** (*to-one correspondence*) antara itik-titik pada bidang tersebut dan pasangan-pasangan bilangan real yang berurutan.

Meskipun sumbu-sumbu koordinat yang saling tegak lurus adalah yang paling umum digunakan, tetapi dua garis sejajar sebarang dapat digunakan untuk menentukan suatu sistem koordinat pada bidang. Sebagai contoh, pada gambar 5.4.1b, kita melampirkan sepasang koordinat yang tidak saling tegak lurus. Demikian juga, tiga sumbu koordinat sebarang yang nonkoplanar pada ruang berdimensi 3 dapat digunakan untuk mendefinisikan suatu sistem koordinat (Gambar 5.4.1c).



Gambar 5.4.1

Definisi

Jika V adalah suatu ruang vektor sebarang dan $S = (v_1, v_2, \ldots, v_r)$ adalah suatu himpunan vektor-vektor pada V, maka S disebut basis untuk V jika dua syarat berikut berlaku:

(a) S bebas linear

(b) S merentang V

Teorema 5.4.1

Keunikan Representasi Basis. *Jika $S = (v_1, v_2, \ldots, v_r)$ adalah suatu basis dari ruang vektor V, maka setiap vektor v pada V dapat dinyatakan dalam bentuk* $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n$ *dengan tepat satu cara.*

Koordinat-koordinat Relatif terhadap suatu Basis. Jika $S = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ adalah basis untuk vektor V, dan

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n$$

adalah pernyataan untuk suatu vektor v dalam bentuk basis S, maka skalar $c_1, c_2, \ldots, c_n$ disebut sebagai **koordinat v** relatif terhadap basis **S**. Vektor $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ pada R^n yang disusun dari koordinat-koordinat ini disebut **vektor koordinat v relatif terhadap S** *(coordinate vector of **v** relative to S)*; ini donotasikan sebagai

$$(\mathbf{v})_S = (c1, c_2, \ldots, c_n)$$

CATATAN. Harus dicatat bahwa vektor koordinat tidak hanya tergantung pada basis S tetapi juga pada urutan penulisan vektor basis. Perubahan vektor basis akan berakibat pada perubahan yang berkaitan dengan urutan entri-entri pada vektor koordinat.

Basis Standar untuk R^3

Pada contoh 3 subbab sebelumnya, kita telah menunjukkan bahwa jika

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \quad \text{dan} \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

maka $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ adalah suatu himpunan bebas linear pada R^3. Himpunan ini juga merentang R^3 himpunan ini juga merentang R^3 karena vektor sebarang $\mathbf{v} = (a, b, c)$ pada R^3 dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{v} = (a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k} \qquad (1)$$

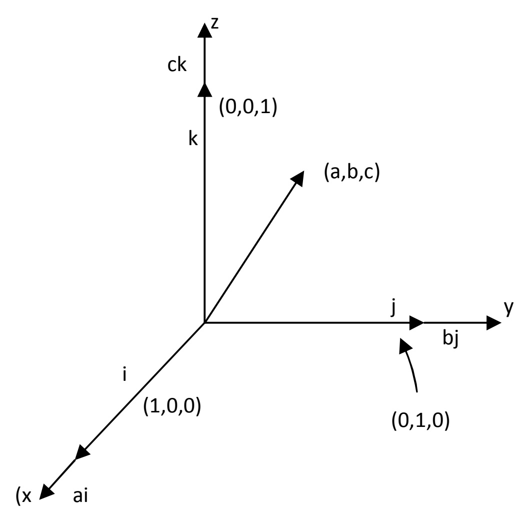
jadi S adalah basis untuk R^3 dan disebut sebagai ***basis standar*** *(standard basis)* untuk R^3 . Dengan melihat koefisien-koefisien **i, j,** dan **k** pada (1), karena koordinat-koordinat **v** relatif terhadap basis standar adalah *a, b,* dan *c,* sehingga

$$(\mathbf{v})_s = (a, b, c)$$

Dengan membandingkan hasil ini dengan (1) maka

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v})_s$$

Persamaan ini menyatakan bahwa komponen-komponen dari suatu vektor **v** relatif terhadap suatu sistem koordinat siku-siku xyz dan koordinat-koordinat **v** relatif terhadap basis standar adalah sama. Jadi, sistem koordinat dan basisnya menghasilkan korespondensi satu ke satu yang tepat sama antara ruang berdimensi 3 dan tripel bilangan real yang berurutan (Gambar 5.4.4).



Basis standar untuk P_n

(a) Tunjukkan bahwa $S = (1, x, x^2, …., x^n)$ adalah suatu bisnis untuk ruang vector P_n yang terdiri dari polynomial-polinomial berbentuk $a_0 + a_1x + …. + a_nx^n$

(b) Tentukan vector koordinat dari polynomial $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$ relatif terhadap basis $S = (1, x, x^2)$ untuk P_2.

Penyelesaian

(a) Kami telah menunjukkan bahwa S merentang P_n pada contoh 11 subbab 5.2, dan kami telah menunjukkan bahwa S adalah himpunan bebas linear pada contoh 5 subbab 5.3. Jadi, S adalah basis untuk Pn dan disebut sebagai basis standar untuk P_n (standar basis for P_n).

(b) Koordinat-koordinat $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$ adalah koefisien-koefisien scalar dari vector basis 1, x, dan x^2, sehingga $(p)_s = (a_0, a_1, a_2)$.

Definisi:

Suatu ruang vector taknol V disebut berdimensi terhingga *(finite-dimensional)* jika terdiri dari himpunan terhingga vector-vektor $(v_1, v_2, …., v_n)$ yang membentuk suatu basis. Jika tidak terdapat himpunan semacam ini. V disebut sebagai berdimensi takterhingga *(infinite-dimensional).* Selain itu kita akan menganggap ruang vector nol sebagai berdimensi terhingga.

Teorema 5.4.2

Misalkan V adalah suatu ruang vektor berdimensi terhingga dan $(v_1, v_2, …., v_n)$ adalah basis sebarang.

(a) Jika suatu himpunan memiliki vektor lebih dari n, maka himpunan tersebut bersifat tidak bebas linear.

(b) Jika suatu himpunan memiliki vektor kurang dari n, maka himpunan tersebut bersifat tidak merentang V.

Teorema 5.4.3

Semua basis untuk ruang vector berdimensi terhingga memiliki jumlah vector yang sama.

Definisi

Dimensi dari ruang vector V yang berdimensi terhingga, dinotasikan dengan dim (V), didefinisikan sebagai banyaknya vector-vektor pada suatu basis untuk V. Selain itu, kita mendefinisikan ruang vector nol sebagai berdimensi nol.

Beberapa Teorema Dasar:

Teorema berikut, yang disebut *teorema plus/Minus* (penamaan kami sendiri) menyusun dua prinsip dasar yang akan menjadi patokan sebagian besar teorema selanjutnya.

Teorema 5.4.4. Teorema Plus Minus

Misalkan S adalah himpunan takkosong vector-vektor pada ruang vector V.

(a) Jika S adalah himpunan bebas linear dan jika v adalah suatu vector pada V yang terletak diruang rentang (S), maka himpunan S $\cup$ (v) yang diperoleh dengan menyisipkan v ke dalam S masih bersifat bebas linear.

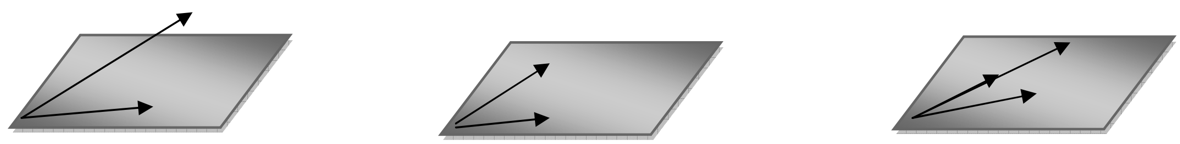
(b) Jika v adalah suatu vector pada S yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vector-vektor lainnya pada S, dan jika S – (v) menotasikan himpunan yang diperoleh dengan mengeluarkan v dan S, maka S dan S – (v) merentang ruang yang sama: yaitu

rentang (S) = rentang S – (v)

Namun demikian, teorema tersebut dapat divisualisasikan pada R^3 sebagaimana berikut:

(a) Suatu himpunan *S* yang terdiri dari dua vektor bebas linear pada R^3 merentang suatu bidang melwati titik asal. Jika kiita memperbesar *S* dengan menyisipkan suatu vektor **v** sebarang di liar bidang ini (Gambar 5.4. 5*a*), maka himpunan yang diperoleh yang terdiri dari ketiga vektor masih bersifat bebas linear karena tidak satu pun dari ketiga vektro terletak pada bidang yang sama dengan dua vektor lainnya.

(b) Jika S adalah suatu himpunan yang terdiri dari tiga vektor nonkoliner pada R^3 yang terletak pada suatu bidang yang sama melewati titik asal (Gambar 5.4.5*b*, c), maka ketiga vektor merentang bidang. Tetapi, jika kita mengeluarkan dari S vektor sebarang **v** yang merupakan kombinasi linear dari dua vektor lainnya, himpunan sisa yang terdiri dari dua vektor akan tetap merentang bidang.



(b) Tidak satu pun dari ketig vektor terletak pada bidang yang sama dengan dua vekor lainnya.

(a) Vektro yang manapun dapat dikeluarkan, dan dua vektro sisanya akan tetap merentang bidang.

(c) Salah satu dari vektor-vektor koliner dapat dikeluarkan, dan dua vektor lainnya akan tetap merentang bidang.

Gambar 5.4.5

Secara umum, untuk menunjukkan bahwa suatu himpunan vektor-vektor $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots \mathbf{v_n}\}$ adalah basis untuk suati ruang vektor V, kita harus menunjukkan bahwa V , kita harus menunjukkan bahwa vektor-vektor tersebut bebas linear dan merentang V. Tetapi, jika kita kebetulan mengetahui bahwa V memiliki dimensi n (sehingga $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots \mathbf{v_n}\}$ mengandung jumlah vektor yang tepat untuk suatu basis), maka kita hanya perlu memeriksa *salah satu*, yaitu apakah bebas linear *atau* merentang-sedangkan syarat lainnya akan berlaku secara otomatis. Penjelasan ini merupakan isi dari teorema berikut.

Teorema 5.4.5

Jika V ruang vektor berdimensi n, dan jika s adalah suatu himpunan pada v dengan tepat n vektor, maka S adalah basis untuk V jika salah satu dari hal berikut berlaku, S merentang V atau S bebas linear.

Teorema 5.4.6

Misalkan S adalah suatu himpunan terhingga dari vektor-vektor pada suatu ruang vektor V berdimensi terhingga.

(a) Jika S merentang V, tetapi bukan suatu basis untuk V, maka S dapat direduksi menjadi suatu basis untuk V dengan mengeluarkan vektor-vektor yang sesuai dari S.

(b) Jika S adalah suatu himpunan bebas linear yang belum merupakan basis untuk V, maka S dapat diperbesar menjadi suatu basis untuk V dengan menyisipkan vektor-vektor yang sesuai ke dalam S.

Teorema 5.4.7

Jika W adalah suatu subruang dari suatu ruang vektor V yang berdimensi terhingga, maka dim(W) $\leq$ dim(V). Lebih lanjut, jika dim(W) = dim(V), maka W = V.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard, *Aljabar Linear Elementer*, Jakarta: Erlangga, 1991.

ww.ut.ac.id/html/suplemen/mata4412/ruang_vektor/ruang_vektor.htm

http://id.answers.yahoo.com/question/index?qid=20120104022158AA6Ysb1

id.wikipedia.org/wiki/Kebebasan_linear

http://putuananta.blogspot.com/2010/06/basis-dimensi.html