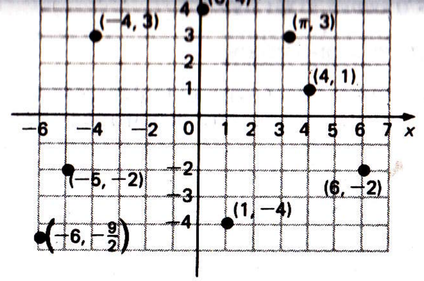
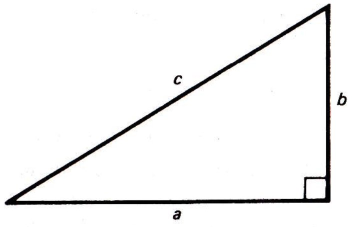


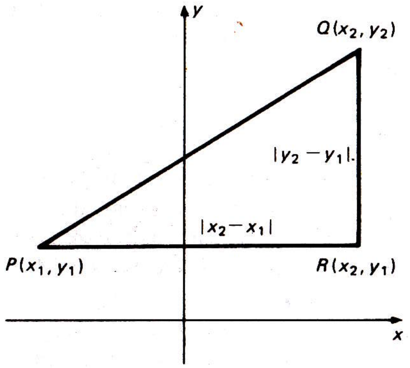
GAMBAR 3



GAMBAR 4

RUMUS JARAK Dengan menggunakan koordinat, kita dapat memperkenalkan sebuah rumus sederhana untuk jarak antara dua titik pada bidang. Ini didasarkan pada **teorema Pythagoras**, yang mengatakan jika a dan b merupakan ukuran dua kali suatu segitiga siku-siku dan c merupakan ukuran sisi miringnya (Gambar 4) maka

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$



GAMBAR 5

Sebaliknya, hubungan antara tiga sisi segitiga ini hanya berlaku untuk segitiga siku-siku.

Sekarang pandang dua titik P dan Q sebarang, masing-masing dengan koordinat-koordinat (x_1, y_1) dan (x_2, y_2). Bersama dengan R – titik dengan koordinat-koordinat (x_2, y_1) – P dan Q adalah titik-titik sudut sebuah segitiga siku-siku (Gambar 5). Panjang PR dan RQ masing-masing $|x_2 - x_1|$ dan $|y_2 - y_1|$. Bilamana **teorema Pythagoras** diterapkan dan diambil akar kuadrat utama dari kedua ruas maka diperoleh ungkapan berikut untuk $d(P,Q)$, jarak (takberarah) antara P dan Q.

$$\boxed{d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Ini disebut **rumus jarak.**

CONTOH 1. Carilah jarak antara

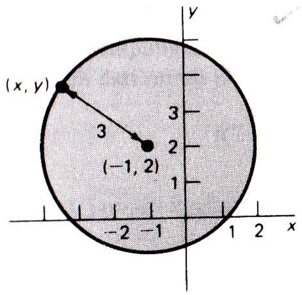
(a) $P(-2, 3)$ dan $Q(4, -1)$
(b) $P(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ dan $Q(\pi, \pi)$

(a) $d(P, Q) = \sqrt{(4-(-2))^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} \approx 7{,}21$

(b) $d(P, Q) = \sqrt{(\pi - \sqrt{2})^2 + (\pi - \sqrt{3})^2} \approx \sqrt{4{,}971} \approx 2{,}23$ ■

Rumus tetap berlaku walaupun dua titik tersebut terletak pada garis mendatar atau garis tegak yang sama. Jadi, jarak antara P (–2,2) dan Q(6,2) adalah

$$\sqrt{(-2-6)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{64} = 8$$



GAMBAR 6

PERSAMAAN LINGKARAN Dari rumus jarak ke persamaan suatu lingkaran hanyalah sebuah langkah kecil. **Lingkaran** adalah himpunan titik-titik yang terletak pada suatu jarak tetap (jari-jari) dari suatu titik tetap (pusat). Misalnya, pandang lingkaran dengan jari-jari 3 berpusat di (–1,2) (Gambar 6). Andaikan (x,y) menyatakan titik sebarang pada lingkaran ini. Menurut rumus jarak,

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = 3$$

Bilamana kedua ruas dikuadratkan, kita peroleh

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$$

yang disebut persamaan dari lingkaran ini.

Secara lebih umum, lingkaran berjari-jari r dan pusat (h,k) mempunyai persamaan

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$$

Ini disebut **persamaan baku sebuah lingkaran.**

CONTOH 2. Carilah persamaan lingkaran berjari-jari 5 dan pusat (1, –5). Cari juga koordinat-koordinat y dari dua titik pada lingkaran ini dengan koordinat x adalah 2.

Penyelesaian. Persamaan yang diinginkan adalah

$$(x-1)^2 + (y+5)^2 = 25$$

Untuk memenuhi tugas yang kedua, kita masukkan $x = 2$ dalam persamaan dan selesaikan untuk y.

$$(2-1)^2 + (y+5)^2 = 25$$
$$(y+5)^2 = 24$$
$$y + 5 = \pm\sqrt{24}$$
$$y = -5 \pm \sqrt{24} = -5 \pm 2\sqrt{6}$$ ■

kan, persamaan akan berbentuk

$$x^2 + ax + y^2 + by = c$$

Ini mengundang pertanyaan apakah setiap persamaan dari bentuk yang belakangan merupakan persamaan suatu lingkaran. Jawabnya adalah ya (dengan suatu perkecualian yang jelas), seperti yang terlihat dalam contoh berikut.

Dalam contoh ini, diperlukan untuk *melengkapi kuadrat,* suatu proses penting dalam banyak hal. Untuk melengkapi kuadrat dari $x^2 \pm ax$, tambahkan $(a/2)^2$. Sehingga

$$x^2 - 12x + 6^2 = (x - 6)^2$$

$$x^2 + \frac{2}{5}x + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{5}\right)^2$$

CONTOH 3. Buktikan bahwa persamaan

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y = -6$$

merupakan sebuah lingkaran, dan tentukanlah pusat serta jari-jarinya.

Penyelesaian. Kita selesaikan kuadrat untuk ungkapan baik dalam x maupun y dengan menambahkan bilangan yang sama pada kedua ruas persamaan.

$$(x^2 - 2x \quad) + (y^2 + 6y \quad) = -6$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) = -6 + 1 + 9$$

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$$

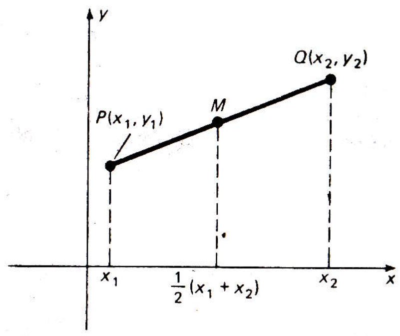
Persamaan yang terakhir adalah dalam bentuk baku. Ini merupakan persamaan lingkaran dengan pusat $(1, -3)$ dan jari-jari 2. Jika sebagai hasil proses ini, suatu bilangan negatif muncul di ruas kanan, persamaan tidak akan menggambarkan suatu kurva apa pun. Jika muncul nol, persamaan akan menggambarkan titik tunggal $(1, -3)$. ■

RUMUS TITIK TENGAH Ada dua titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ di mana $x_1 \leqslant x_2$, lihat Gambar 7:

$$x_1 + \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1) = x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_1$$

$$= \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2$$

$$= \frac{x_1 + x_2}{2}$$



GAMBAR 7

Ini berarti bahwa titik $(x_1 + x_2)/2$ berada di tengah-tengah antara x_1 dan x_2 pada sumbu x, dengan demikian titik tengah M dari potongan garis PQ memiliki absis $(x_1 + x_2)/2$ dan dengan cara yang sama dapat kita buktikan bahwa $(y_1 + y_2)/2$ adalah merupakan koordinat dari M. Maka kita peroleh hasil sebagai berikut:

Titik tengah dari potongan garis PQ dengan $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ adalah

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

CONTOH 4. Tentukan persamaan lingkaran yang mempunyai potongan garis dari (1,3) ke (7,11) sebagai garis tengahnya.

Penyelesaian. Pusat lingkaran terletak di tengah-tengah garis tengahnya sehingga titik pusat mempunyai koordinat $(1 + 7)/2 = 4$ dan $(3 + 11)/2 = 7$. Panjang garis tengah, diperoleh dari rumus jarak sebagai berikut

$$[(7 - 1)^2 + (a1 - 3)^2]^{1/2} = [36 + 64]^{1/2} = 10$$

berarti jari-jari lingkaran itu adalah 5. Jadi persamaan lingkaran:

$$(x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 25$$ ■

SOAL-SOAL 1.5

Dalam Soal-soal 1-6, rajahlah titik-titik yang diberikan dalam bidang koordinat dan kemudian carilah jarak antara titik-titik tersebut.

1. (2, −1), (5. 3) **2.** (−2, 1), (7, 13)

3. (4, 2), (2, 4) **4.** (−1, 5), (6, 3)

C **5.** (1,232: 4,153), $(\pi, \sqrt{2})$

C **6.** (2,71; −3,42), (5,16; 4,33)

7. Buktikanlah bahwa segitiga yang titik-titik sudutnya adalah (5,3), (−2,4), dan (10,8) adalah samakaki.

8. Tunjukkanlah bahwa segitiga yang titik-titik sudutnya adalah (2, −4), (4,0), dan (8, −2) adalah siku-siku.

9. Titik-titik (3, −1) dan (3,3) adalah titik-titik sudut suatu bujur sangkar. Berikan tiga pasang titik-titik sudut lain yang mungkin.

10. Carilah titik pada sumbu x- yang berjarak sama dari (3,1) dan (6,4).

11. Tentukan jarak antara (−2,3) dengan titik tengah potongan garis yang digabungkan (−2, −2) dan (4,3).

12. Carilah panjang ruas garis yang menghubungkan titik-titik tengah ruas-ruas AB dan CD, di mana A = (1,3), B = (2,6), C = (4,7), dan D = (3,4).

Dalam Soal-soal 13-18, carilah persamaan lingkaran yang memenuhi persyaratan yang diberikan.

13. Pusat (1, −2), jari-jari 6.

14. Pusat (−3, 4), jari-jari 8.

15. Pusat (2, −1), melalui (5, 3).

16. Pusat (4, 3), melalui (6, 2).

17. Garis tengah AB, dengan A = (−1,2) dan B = (3,8).

18. Pusat (3,4) dan menyinggung sumbu x.

19. Cari koordinat y dari dua titik pada lingkaran dari Soal 13 dengan koordinat x adalah 3 (lihat Contoh 2).

20. Cari koordinat x dari dua titik pada lingkaran dari Soal 14 dengan koordinat y adalah 8.

jari-jari lingkaran dengan persamaan yang diberikan (lihat Contoh 3).

21. $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 25 = 0$

22. $x^2 + y^2 - 6y = 16$

23. $x^2 + y^2 - 12x + 35 = 0$

24. $x^2 + y^2 - 10x + 10y = 0$

25. $4x^2 + 4y^2 + 4x - 12y + 1 = 0$

26. $3x^2 + 3y^2 - 2x + 4y = \frac{20}{3}$

27. Titik-titik (2,3), (6,3), (6, −1), dan (2, −1) adalah sudut-sudut suatu bujur sangkar. Carilah persamaan-persamaan lingkaran dalam dan luar.

28. Sebuah tali secara ketat mengelilingi dua lingkaran dengan persamaan-persamaan $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$ dan $(x + 9)^2 + (y - 10)^2 = 16$. Berapakah panjang tali ini?

C 29. Kota-kota di A, B, dan C merupakan titik-titik sudut sebuah segitiga siku-siku, dengan sudut siku-siku di titik sudut B. AB dan BC juga merupakan jalan, masing-masing dengan panjang 214 dan 179 mil. Sebuah pesawat terbang dapat menerbangi rute AC, yang bukan suatu jalan. Biaya mengirim suatu barang tertentu dengan truk \$3,71 tiap mil dan dengan pesawat terbang \$4,82 tiap mil. Putuskan apakah lebih murah mengirim barang tersebut dari A ke C dengan truk atau pesawat terbang dan cari biaya total memakai metode yang lebih murah.

C 30. Kota B berjarak 10 mil ke arah hilir dari kota A dan berseberangan dari sungai yang lebarnya ½ mil. Mary Crane akan lari dari kota A sepanjang sungai sejauh 6 mil, kemudian berenang secara diagonal ke kota B. Jika ia lari dengan kecepatan 8 mil/jam dan berenang dengan kecepatan 3 mil/jam, berapa lama waktu yang ditempuhnya dari kota A ke kota B? Anggap laju arus dapat diabaikan.

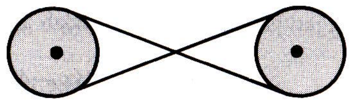
31. Buktikan bahwa titik tengah sisi miring sebarang segitiga siku-siku berjarak sama dari ketiga titik-titik sudutnya.

32. Cari persamaan lingkaran yang melingkupi segitiga siku-siku yang titik-titik sudutnya adalah (0,0), (8,0), dan (0,6).

$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 11 = 0$ dan $x^2 + y^2 + 20x - 12y + 72 = 0$ tidak berpotongan. *Petunjuk:* Cari jarak antara pusat-pusatnya.

34. Bagaimanakah hubungan antara a, b dan c yang harus dipenuhi bila $a^2 + ax + y^2 + by + c = 0$ merupakan persamaan lingkaran?

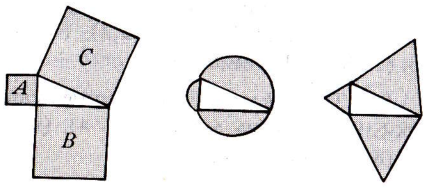
C 35. Tentukan panjang dari tali bersilang pada Gambar 8 yang dipasang erat di sekeliling lingkaran $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 9$ dan $(x-10)^2 + (y-8)^2 = 9$. *Catatan:* Diperlukan sedikit pengertian trigonometri untuk menyelesaikan soal ini.



GAMBAR 8

36. Tunjukkan bahwa himpunan titik-titik yang jaraknya ke (3,4) dua kali lebih besar dari jarak ke (1,1) membentuk suatu lingkaran. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran tersebut.

37. Teorema Pythagoras menyebutkan bahwa luas A, B dan C dari segi empat-segi empat pada Gambar 9 memenuhi $A + B = C$. Tunjukkan bahwa setengah lingkaran dan segitiga sama sisi juga memenuhi persamaan tersebut.

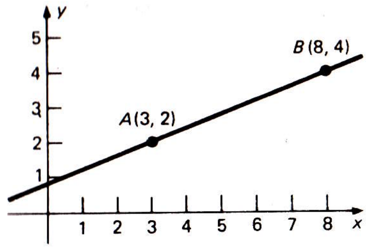


GAMBAR 9

38. Diketahui sebuah lingkaran C dan sebuah titik P yang berada di luar lingkaran tersebut. Apabila potongan garis PT menyinggung C di T dan ada garis lain yang melalui P dan pusat C memotong C pada M dan N. Tunjukkan bahwa $(PM)(PN) = (PT)^2$.

1.6 Garis Lurus

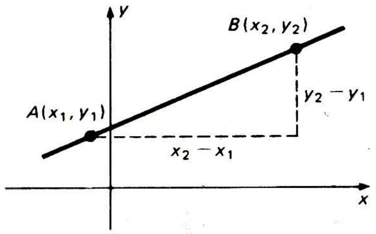
Dalam banyak hal garis lurus adalah yang paling sederhana dari semua kurva. Dianggap bahwa semua pembaca memahami dengan baik mengenai konsep ini dengan melihat pada sebuah tali tegang atau mengamati sepanjang sisi sebuah penggaris. Dalam banyak kasus, marilah kita sepakati bahwa dua titik – misalnya, $A(3,2)$ dan $B(8,4)$ yang diperlihatkan dalam Gambar 1 – menentukan sebuah garis unik yang melalui mereka. Dan mulai saat ini, kita gunakan kata garis sebagai kata lain untuk *garis lurus*.



GAMBAR 1

Sebuah garis adalah sebuah obyek geometri. Bila ditempatkan pada suatu koordinat bidang, garis ini tentulah mempunyai persamaan, sebagaimana halnya lingkaran. Bagaimana kita mencari persamaan suatu garis? Untuk menjawabnya, kita memerlukan pengertian yang mendasar tentang kemiringan*.

KEMIRINGAN GARIS Pandang garis dalam Gambar 1. Dari titik A ke titik B, terdapat suatu **kenaikan** (perubahan tegak) 2 satuan dan suatu **run** (perubahan mendatar) 5 satuan. Dikatakan bahwa garis itu mempunyai tanjakan $\frac{2}{5}$. Umumnya (Gambar 2) untuk sebuah garis melalui $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$, dengan $x_1 \neq x_2$, **kemiringan** m dari garis itu didefinisikan oleh

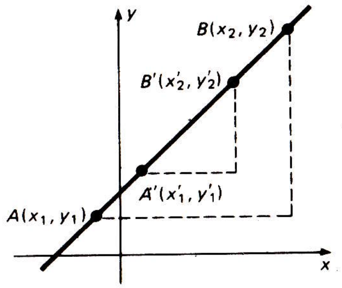


GAMBAR 2

$$\boxed{m = \frac{\text{kenaikan}}{\text{run}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Anda tentu segera bertanya. Sebuah garis mempunyai banyak titik. Apakah nilai yang diperoleh untuk kemiringan tergantung kepada pasangan mana yang dipakai untuk A dan B? Segitiga-segitiga sebangun dalam Gambar 3 memperlihatkan bahwa

$$\frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



GAMBAR 3

Jadi, titik-titik A' dan B' akan memenuhi sebagaimana halnya A dan B. Tidak menjadi masalah apakah A terletak di kiri atau di kanan B, karena

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

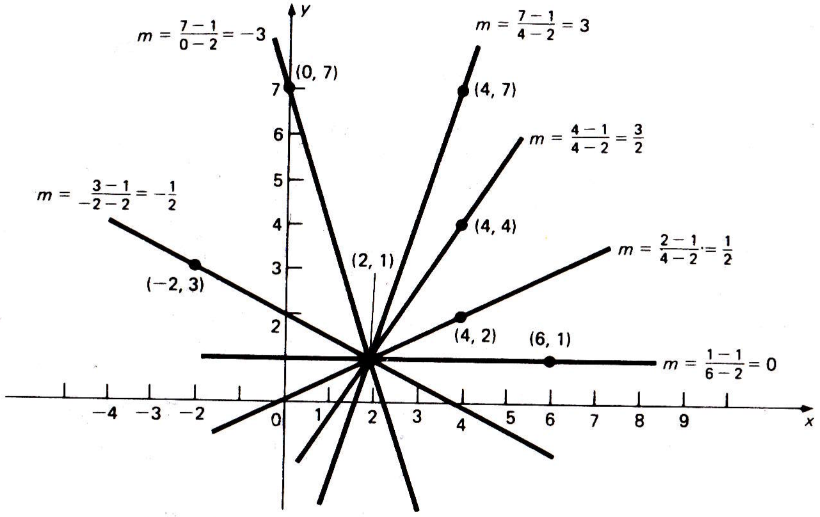
*)Di sini kemiringan menerjemahkan pengertian "slope"; para penulis lain menggunakan "tanjakan", "lereng".

bilang dan penyebut.

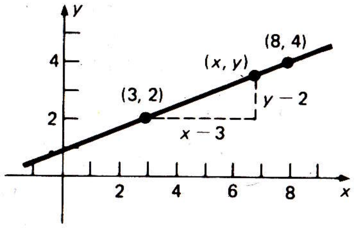
Kemiringan m adalah ukuran kecuraman suatu garis, seperti digambarkan pada Gambar 4. Perhatikan bahwa garis mendatar mempunyai kemiringan nol, garis yang naik ke kanan mempunyai kemiringan positif, dan garis yang jatuh ke kanan mempunyai kemiringan negatif. Semakin besar kemiringannya, semakin curam garis tersebut. Konsep kemiringan untuk garis tegak tidak mempunyai arti, karena akan menyangkut pembagian oleh nol. Karenanya, kemiringan untuk garis tegak dibiarkan tak terdefinisi.

BENTUK KEMIRINGAN-TITIK Pandang lagi garis pada awal pembicaraan kita; ini digambar-ulang dalam Gambar 5. Kita ketahui bahwa garis ini:

1. melalui (3, 2);
2. mempunyai kemiringan $\frac{2}{5}$.



GAMBAR 4



GAMBAR 5

Ambillah sebarang titik pada garis itu, misalnya titik dengan koordinat (x, y). Jika kita gunakan titik ini dan titik-titik (3, 2) untuk mengukur kemiringannya, kita pasti memperoleh $\frac{2}{5}$ – yaitu,

$$\frac{y-2}{x-3} = \frac{2}{5}$$

$$y - 2 = \tfrac{2}{5}(x - 3)$$

Perhatikan bahwa persamaan yang terakhir ini dipenuhi oleh semua titik pada garis, bahkan oleh (3, 2). Lebih lanjut, tak satu pun titik yang tidak terletak pada garis tersebut dapat memenuhi persamaan ini.

Apa yang baru saja dilakukan dalam contoh kita, tentunya dapat dilakukan secara umum. Garis yang melalui titik (tetap) (x_1, y_1) dengan kemiringan m mempunyai persamaan

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Ini disebut bentuk **kemiringan-titik** dari persamaan sebuah garis.

Pandang sekali lagi garis dari contoh kita. Garis itu melalui (8,4) seperti halnya (3,2). Jika dipakai (8,4) sebagai (x_1, y_1) kita peroleh persamaan

$$y - 4 = \tfrac{2}{5}(x - 8)$$

yang kelihatannya berbeda dari

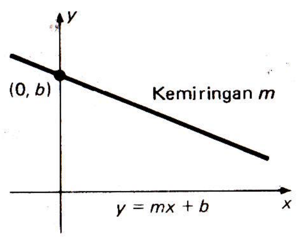
$$y - 2 = \tfrac{2}{5}(x - 3)$$

Namun, keduanya dapat disederhanakan menjadi $5y - 2x = 4$; keduanya sama.

CONTOH 1. Cari persamaan garis yang melalui (–4,2) dan (6,–1).

Penyelesaian. Kemiringan m adalah $(-1-2)/(6+4) = -\frac{3}{10}$. Sehingga, dengan menggunakan (–4,2) sebagai titik tetap, kita dapatkan persamaan

$$y - 2 = -\tfrac{3}{10}(x + 4)$$ ■



GAMBAR 6

BENTUK KEMIRINGAN PERPOTONGAN. Persamaan suatu garis dapat dinyatakan dalam bermacam-macam bentuk. Andaikan diberikan kemiringan m untuk suatu garis dan b perpotongan sumbu y (artinya), garis memotong sumbu y di $(0, b)$), seperti diperlihatkan dalam Gambar 6. Dengan memilih $(0, b)$ sebagai (x_1, y_1) dan menerapkan bentuk kemiringan-titik diperoleh

$$y - b = m(x - 0)$$

yang dapat ditulis-ukuran sebagai

$$\boxed{y = mx + b}$$

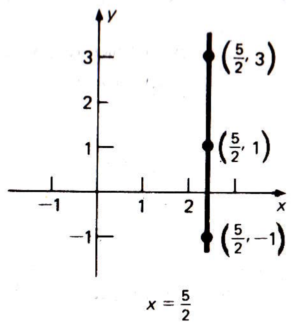
Yang belakangan ini disebut bentuk **kemiringan perpotongan**.

Apa menariknya hal ini, tanya anda? Setiap kali melihat persamaan yang dituliskan seperti ini, kita mengenalinya sebagai garis dan dengan segera dapat mengetahui kemiringan dan perpotongan y-nya. Misalnya, lihat persamaan

$$3x - 2y + 4 = 0$$

$$y = \tfrac{3}{2}x + 2$$

Ini adalah persamaan garis dengan kemiringan $\frac{3}{2}$ dan perpotongan–y 2.



GAMBAR 7

PERSAMAAN GARIS VERTIKAL Garis-garis vertikal tidak sesuai dalam pembahasan di atas; garis seperti ini tidak mempunyai kemiringan. Tetapi tetap mempunyai persamaan, yang sangat sederhana. Garis dalam Gambar 7 mempunyai persamaan $x = \frac{5}{2}$, karena sebuah titik berada pada garis jika dan hanya jika memenuhi persamaan ini. Persamaan sebarang garis tegak dapat dilukiskan dalam bentuk

$$\boxed{x = k}$$

di mana k adalah suatu konstanta. Patut dicatat bahwa persamaan suatu garis vertikal dapat dituliskan dalam bentuk $y = k$.

BENTUK $Ax + By + C = 0$ Akan sangat menarik untuk mempunyai suatu bentuk yang meliput semua garis, termasuk garis-garis tegak. Ambillah misalnya,

(1) $y - 2 = -4(x + 2)$

(2) $y = 5x - 3$

(3) $x = 5$

Ini dapat ditulis-ulang (dengan memindahkan semuanya ke ruas kiri) sebagai berikut:

(1) $4x + y + 6 = 0$

(2) $-5x + y + 3 = 0$

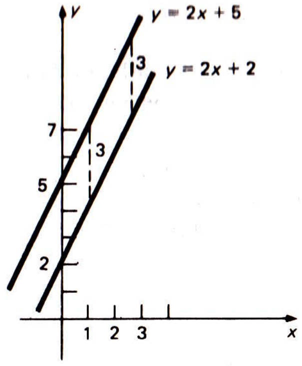
(3) $x + 0y - 5 = 0$

Semuanya berbentuk

$$\boxed{Ax + By + C = 0, \quad A \text{ dan } B \text{ keduanya tak } 0.}$$

yang disebut **persamaan linear umum.** Hanya memerlukan pemikiran sekejap untuk melihat bahwa persamaan sebarang garis dapat dibuat dalam bentuk ini. Sebaliknya, grafik persamaan garis umum selalu berupa sebuah garis (lihat Soal 43).

GARIS-GARIS SEJAJAR Jika dua garis mempunyai kemiringan sama, maka keduanya sejajar. Jadi, $y = 2x + 2$ dan $y = 2x + 5$ merupakan garis-garis sejajar; keduanya mempunyai kemiringan 2 (lihat Gambar 8).



GAMBAR 8

Demikian pula, garis-garis dengan persamaan $-2x + 3y + 12 = 0$ dan $4x - 6y = 5$ adalah sejajar. Untuk melihat ini, selesaikan persamaan-persamaan ini untuk y (yaitu, cari bentuk kemiringan-perpotongan); anda peroleh masing-masing: $y = \frac{2}{3}x - 4$ dan $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}$. Keduanya mempunyai kemiringan $\frac{2}{3}$; garis-garis ini sejajar.

Kita boleh meringkaskan dengan menyatakan bahwa *dua garis tak-vertikal adalah sejajar jika dan hanya jika keduanya mempunyai kemiringan yang sama.*

CONTOH 2. Carilah persamaan garis yang melalui (6,8), yang sejajar dengan garis yang mempunyai persamaan $3x - 5y = 11$.

Penyelesaian. Bilamana kita selesaikan $3x - 5y = 11$ untuk y, kita peroleh

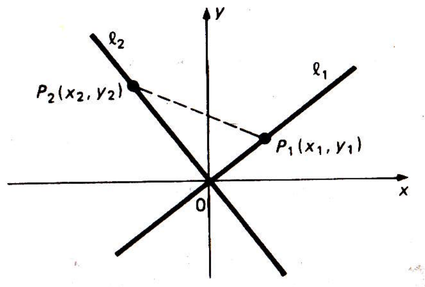
$$y = \tfrac{3}{5}x - \tfrac{11}{5}$$

dari mana terbaca kemiringan garis adalah $\frac{3}{5}$. Persamaan garis yang diinginkan adalah

$$y - 8 = \tfrac{3}{5}(x - 6)$$

atau, sama dengan $3x - 5y + 22 = 0$. ■

GARIS-GARIS TEGAKLURUS Apakah terdapat persyaratan kemiringan yang sederhana yang mencirikan garis-garis yang tegaklurus? Ya; ***dua garis tak-vertikal saling tegaklurus jika dan hanya jika kemiringan keduanya saling berkebalikan negatif.*** Untuk melihat mengapa ini benar, pandang dua garis tak-vertikal l_1 dan l_2. Tanpa mengurangi generalitas, kita dapat menganggapnya berpotongan di titik asal karena jika tidak demikian, kita dapat menggesernya sedemikian rupa sehingga tidak mengubah kemiringannya. Andaikan $P_1\ (x_1, y_1)$ suatu titik pada l_1 dan $P_2\ (x_2, y_2)$ titik pada l_2, seperti diperlihatkan dalam Gambar 9. Menurut Teorema Pythagoras dan kebalikannya (Pasal 1.5) $P_1\ OP_2$ merupakan sudut siku-siku jika dan hanya jika



GAMBAR 9

$$[d(P_1, O)]^2 + [d(P_2, O)]^2 = [d(P_1, P_2)]^2$$

yakni, jika dan hanya jika

$$(x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$\frac{y_1}{x_1} = -\frac{x_2}{y_2}$$

Sekarang y_1/x_1 adalah kemiringan dari l_1, sedangkan y_2/x_2 adalah kemiringan dari l_2. Sehingga $P_1\ OP_2$ adalah sudut siku-siku jika dan hanya jika kemiringan-kemiringan dua garis tersebut berbanding terbalik satu sama lain.

Garis-garis $y = \frac{3}{4}x$ dan $y = -\frac{4}{3}x$ saling tegaklurus. Demikian juga $2x - 3y = 5$ dan $3x + 2y = -4$, karena setelah menyelesaikan persamaan-persamaan ini untuk y, terlihat bahwa garis yang pertama mempunyai kemiringan $\frac{2}{3}$ dan yang kedua mempunyai kemiringan $-\frac{3}{2}$.

CONTOH 3. Carilah persamaan garis yang melalui titik potong garis-garis dengan persamaan $3x + 4y = 8$ dan $6x - 10y = 7$, yang tegak lurus dengan garis yang pertama.

Penyelesaian. Untuk mencari titik potong dua garis ini, persamaan yang pertama dikalikan -2 dan hasilnya ditambahkan pada persamaan yang kedua.

$$\begin{aligned} -6x - 8y &= -16 \\ 6x - 10y &= 7 \\ \hline -18y &= -9 \\ y &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusi $y = \frac{1}{2}$ dalam salah satu persamaan awal akan menghasilkan $x = 2$. Titik potongnya adalah $(2, \frac{1}{2})$.

Bilamana persamaan yang pertama diselesaikan untuk y (membuatnya dalam bentuk kemiringan-perpotongan), diperoleh $y = -\frac{3}{4}x + 2$. Garis yang tegaklurus padanya mempunyai kemiringan $\frac{4}{3}$. Persamaan garis yang diminta adalah

$$y - \tfrac{1}{2} = \tfrac{4}{3}(x - 2)$$

■

SOAL-SOAL 1.6

Dalam Soal-soal 1-8, cari kemiringan dari garis yang mengandung dua titik yang di berikan

1. (2, 3) dan (4, 8)
2. (4, 1) dan(8, 2)
3. (−4, 2) dan(3, 0)
4. (2, −4) dan (0, −6)
5. (3, 0) dan (0, 5)
6. (−6, 0) dan (0, 6)

C 7. (−1,732; 5,014) dan (4,315; 6,175)

C 8. $(\pi, \sqrt{3})$ dan $(1{,}642, \sqrt{2})$

Dalam Soal-soal 9-16, cari sebuah persamaan untuk tiap garis. Kemudian tuliskan jawab anda dalam bentuk $Ax + By + C = 0$.

9. Melalui (2,3) dengan kemiringan 4.
10. Melalui (3, −4) dengan kemiringan −2.

miringan −2.

12. **Dengan perpotongan-y 5 dan kemiringan −2.**
13. Melalui (2,3) dan (4,8).
14. Melalui (4,1) dan (8,2).
15. Melalui (2,−3) dan (2,5).
16. Melalui (−5,0) dan (−5,4).

Dalam Soal-soal 17-20, carilah kemiringan dan perpotongan-y untuk tiap garis.

17. $3y = 2x - 4$
18. $2y = 5x + 2$
19. $2x + 3y = 6$
20. $4x + 5y = -20$

21. Tuliskan persamaan garis melalui (3, −3) yang:
(a) sejajar garis $y = 2x + 5$;
(b) tegaklurus garis $y = 2x + 5$;
(c) sejajar garis $2x + 3y = 6$;
(d) tegaklurus garis $2x + 3y = 6$;
(e) sejajar garis yang melalui (−1,2) dan (3,−1);
(f) sejajar garis $x = 8$;
(g) tegak lurus garis $x = 8$.

22. Cari nilai k untuk mana garis $4x + ky = 5$:
(a) melalui titik (2,1);
(b) sejajar sumbu y;
(c) sejajar garis $6x - 9y = 10$;
(d) mempunyai perpotongan−x dan y sama;
(e) tegaklurus pada garis $y - 2 = 2(x + 1)$.

23. Tuliskan persamaan garis yang melalui (0−4) yang tegaklurus pada garis $y + 2 = -\frac{1}{2}(x - 1)$.

24. Cari nilai k sedemikian sehingga garis $kx - 3y = 10$:
(a) sejajar garis $y = 2x + 4$;
(b) tegaklurus garis $y = 2x + 4$;
(c) tegaklurus garis $2x + 3y = 6$.

25. Apakah (3,9) terletak di atas atau di bawah garis $y = 3x - 1$?

26. Buktikan bahwa persamaan garis dengan perpotongan-x adalah $a \neq 0$ dan perpotongan-y adalah $b \neq 0$ adalah

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

koordinat titik potongnya. Kemudian tu kan persamaan garis yang melalui ti tersebut tegaklurus pada garis yang ditu kan pertama (lihat Contoh 3).

27. $\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ -3x + y &= 5 \end{aligned}$
28. $\begin{aligned} 4x - 5y &= 8 \\ 2x + y &= -10 \end{aligned}$
29. $\begin{aligned} 3x - 4y &= 5 \\ 2x + 3y &= 9 \end{aligned}$
30. $\begin{aligned} 5x - 2y &= 5 \\ 2x + 3y &= 6 \end{aligned}$

Dapat diperlihatkan bahwa jarak d d titik (x_1, y_1) ke garis $Ax + By + C$ = adalah

$$\boxed{d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Gunakan hasil ini untuk mencari **jarak d** titik yang diberikan ke garis yang **diberik**

31. $(-3, 2)$; $3x + 4y = 6$
32. $(4, -1)$; $2x - 2y + 4 = 0$
33. $(-2, -1)$; $5y = 12x + 1$
34. $(3, -1)$; $y = 2x - 5$

Dalam Soal 35 dan 36, cari jarak (teg lurus) antara garis-garis sejajar yang dib kan. *Petunjuk:* Pertama cari sebuah ti pada salah satu garis.

35. $3x + 4y = 6$, $3x + 4y = 12$
36. $5x + 12y = 2$, $5x + 12y = 7$

37. Sebuah bulldozer bernilai $120 dan setiap tahun mengalami **depresiasi** besar 8% dari nilai awalnya. **Cari sebu** rumus untuk V, yaitu nilai bulldozer telah t tahun.

38. Grafik dari jawaban untuk Soal berupa sebuah garis lurus. Berapa kemiri annya, dengan anggapan sumbu t- ho sontal? Tafsirkan kemiringan terseb

produksi telur di daerah R tumbuh secara linear. Pada tahun 1960 sebanyak 700.000 peti, dan pada tahun 1970 sebanyak 820.000 peti. Tuliskan rumus untuk N, yaitu banyaknya peti telur yang diproduksi n tahun setelah 1960 dan gunakan rumus tersebut untuk meramalkan produksi telur pada tahun 2000.

40. Sebuah peralatan yang dibeli hari ini seharga \$80.000 akan mengalami depresiasi secara linear sampai suatu nilai sebagai besi tua seharga \$2000 setelah 20 tahun. Tuliskan rumus untuk V, yaitu nilainya setelah n tahun.

41. Andaikan bahwa laba P yang direalisasikan suatu perusahaan dalam menjual x butir suatu mata dagangan tertentu diberikan oleh $P = 450x - 2000$ dolar.
(a) Berapa nilai P bilamana $x = 0$. Apa artinya ini?
(b) Cari kemiringan dari grafik persamaan di atas. Kemiringan ini dinamakan **keuntungan marjinal.** Apa tafsiran ekonominya?

42. Biaya C untuk menghasilkan x butir suatu mata dagangan tertentu diberikan oleh $C = 0{,}75x + 200$ dolar. Tanjakan grafiknya dinamakan **biaya marjinal.** Cari tanjakan itu dan berikan tafsiran ekonominya.

43. Buktikan bahwa grafik dari $Ax + By + C = 0$ selalu berupa sebuah garis (asalkan A dan B keduanya tak 0). *Petunjuk:* Pandang dua kasus; (1) $B = 0$ dan (2) $B \neq 0$.

44. Cari persamaan garis yang melalui (2,3) yang mempunyai perpotongan-x dan y sama. *Petunjuk:* Gunakan Soal 26.

45. Perlihatkan bahwa untuk tiap nilai k, persamaan

$$2x - y + 4 + k(x + 3y - 6) = 0$$

perpotongan dua garis $2x - y + 4 = 0$ dan $x + 3y - 6 = 0$. *Petunjuk:* Tidak perlu mencari titik potong (x_0, y_0).

46. Cari persamaan garis yang membagi dua ruas garis dari $(-2,1)$ ke $(4,-7)$ dan yang bersudut siku-siku terhadap ruas garis ini.

47. Pusat lingkaran luar suatu segitiga terletak pada garis pembagi dua tegaklurus dari sisi-sisi. Gunakan kenyataan ini untuk mencari pusat lingkaran luar dari segitiga yang titik-titik sudutnya adalah (0,4), (2,0), dan (4,6).

48. Andaikata (a, b) terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$. Tunjukkan bahwa garis $ax + by = r^2$ menyinggung lingkaran pada (a, b).

49. Tentukan persamaan-persamaan dari dua garis singgung terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = 36$ yang melalui (12,0). *Petunjuk:* Lihat Soal 48.

50. Nyatakanlah jarak tegaklurus antara garis-garis sejajar $y = mx + b$ dan $y = mx$ dalam bentuk m, b dan B. *Petunjuk:* Jarak yang diperlukan adalah sama dengan jarak antara $y = mx$ dengan $y = mx + B - b$.

51. Tunjukkan bahwa garis yang melalui titik tengah dari dua sisi suatu segitiga, sejajar dengan sisi ke tiga. *Petunjuk:* Anda dapat memisalkan segitiganya mempunyai titik-titik sudut (0,0), $(a, 0)$ dan (b, c).

52. Tunjukkan bahwa potongan garis yang menghubungkan titik tengah dari sisi-sisi yang berseberangan dari suatu segi empat membentuk suatu empat persegi panjang.

1.7 Grafik Persamaan

Penggunaan koordinat untuk titik-titik pada bidang memungkinkan kita untuk memerikan suatu kurva (obyek geometri) dengan memakai suatu persamaan (obyek aljabar). Kita melihat bagaimana ini dilakukan untuk lingkaran-lingkaran dan garis-garis dalam pasal sebelumnya. Sekarang kita ingin memandang proses kebalikannya: yaitu menggambarkan suatu koordinat-koordinat (x,y)-nya memenuhi persamaan – artinya, membuatnya suatu persamaan yang benar.

PROSEDUR PENGGAMBARAN GRAFIK Untuk menggambar suatu persamaan – misalnya, $y = 2x^3 - x + 19$ – **kita ikuti prosedur sederhana tiga langkah:**

Langkah 1 Dapatkan koordinat-koordinat beberapa titik yang memenuhi persamaan.
Langkah 2 Rajah titik-titik tersebut di bidang.
Langkah 3 Hubungkan titik-titik tersebut dengan sebuah kurva mulus.

Cara terbaik untuk melakukan Langkah 1 adalah membuat sebuah tabel nilai-nilai. Berikan nilai-nilai pada salah satu variabel, seperti misalnya x, dan tentukan nilai-nilai yang berpadanan dari lainnya, dengan mendaftarkan hasil-hasil yang tersusun dalam tabel.

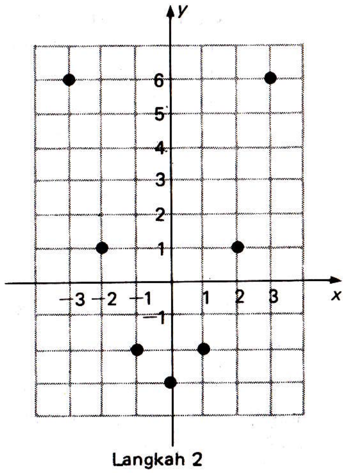
CONTOH 1 Gambar grafik persamaan $y = x^2 - 3$.

Penyelesaian. Prosedur tiga langkah diperlihatkan dalam Gambar 1.

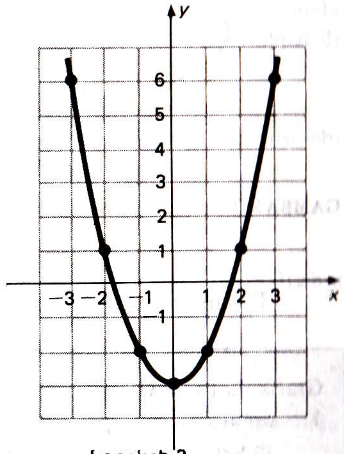
$y = x^2 - 3$

x	y
−3	6
−2	1
−1	−2
0	−3
1	−2
2	1
3	6

Langkah 1
Buat sebuah daftar nilai



Langkah 2
Rajah titik-titik itu

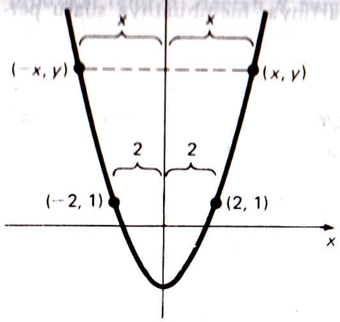


Langkah 3
Hubungkan titik-titik itu dengan sebuah kurva mulus

GAMBAR 1

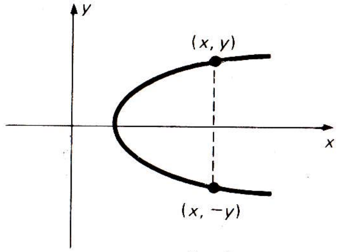
Tentu saja anda memerlukan akal sehat dan bahkan sedikit keyakinan. Pada waktu anda menghubungkan titik-titik yang telah anda rajah dengan sebuah kurva mulus, anda mengasumsikan bahwa kurva berkelakuan manis diantara titik-titik yang beruntun, yang merupakan keyakinan. Itulah sebabnya kenapa anda harus merajah titik-titik secukupnya sehingga garis bentuk kurva kelihatan amat jelas; makin banyak titik yang anda rajah, makin sedikit keyakinan yang anda perlukan. Selain itu, anda juga harus mengenali bahwa jarang sekali dapat memperagakan keseluruhan kurva. Dalam contoh kita, kurva mempunyai lengan panjang tak terhingga, membuka dengan semakin lebar. Tetapi grafik kita sudah memperlihatkan segi-seginya yang perlu. Inilah tujuan kita dalam penggambaran grafik: Perlihatkan grafik secukupnya sehingga segi-seginya yang perlu dapat terlihat.

KESIMETRIAN GRAFIK Kita dapat menghemat kerja dan juga menggambarkan grafik yang lebih tepat jika kita dapat mengenali simetri tertentu dari grafik tersebut dengan memeriksa persamaan yang berpadanan. Lihat grafik $y = x^2 - 3$, yang digambar di atas dan



$y = x^2 - 3$

GAMBAR 2



$x = y^2 + 1$

GAMBAR 3

... Gambar 2. Jika bidang koordinat dilipat sepanjang sumbu y, kedua cabang akan berimpit. Misalnya, (3, 6) akan berimpit dengan (−3,6), (2,1) akan berimpit dengan (−2,1) dan secara lebih umum, (x, y) akan berimpit dengan $(-x,y)$. Secara aljabar ini berpadanan dengan kenyataan bahwa penggantian x oleh $-x$ dalam persamaan $y = x^2 - 3$ menghasilkan persamaan yang setara.

Ambil sebarang grafik. Grafik itu **simetris terhadap sumbu** y bila (x, y) maupun $(-x, y)$ terletak pada grafik itu (Gambar 2). Serupa dengan itu, maka grafik dikatakan **simetris terhadap sumbu** y bila (x, y) maupun $(x, -y)$ berada pada grafik itu (Gambar 3). Demikian pula, suatu grafik dikatakan **simetris terhadap titik asal** bila baik (x, y) maupun $(-x, -y)$ terletak pada grafik itu (lihat Contoh 2).

Dalam bentuk persamaan-persamaan, kita memiliki tiga pengujian sederhana.

Grafik dari suatu persamaan adalah:

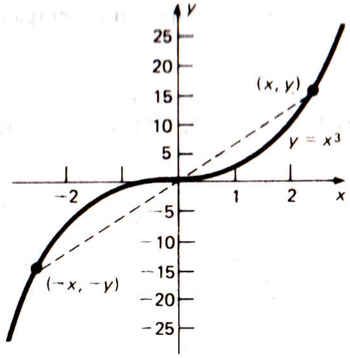
1. **simetris terhadap sumbu y bila penggantian x dengan $-x$ memberikan persamaan yang setara (sebagai contoh $y = x^2$).**
2. **simetris terhadap sumbu x bila penggantian y dengan $-y$ memerikan persamaan yang setara (sebagai contoh $y = 1 + y^2$).**
3. **simetris terhadap titik asal bila penggantian x dengan $-x$ dan y dengan $-y$ memberikan persamaan yang setara ($y = x^3$ merupakan contoh yang bagus karena $y = (-x)^3$ setara dengan $y = x^3$).**

CONTOH 2. Sketsakan grafik dari $y = x^3$.

Penyelesaian. Seperti ditunjukkan di atas, kita catat bahwa grafik akan simetri terhadap titik asal. Sehingga kita hanya perlu memperoleh tabel nilai untuk x yang taknegatif; kita dapat mencari titik yang sebanding melalui simetri (Gambar 4). ■

Dalam menggambar grafik $y = x^3$, kita memakai skala yang lebih kecil pada sumbu y daripada sumbu x. Ini memungkinkan untuk memperlihatkan porsi grafik yang lebih besar (juga mengubah bentuk grafik dengan mempergemuknya). Kami sarankan agar sebelum meletakkan skala pada kedua sumbu, anda seharusnya memeriksa tabel nilai anda. Pilih skala-skala sedemikian sehingga semua atau hampir semua titik-titik anda dapat dirajah dan tetap mempertahankan grafik anda berukuran wajar.

x	y
0	0
1	1
2	8
3	27
4	64



Simetri terhadap titik asal

GAMBAR 4

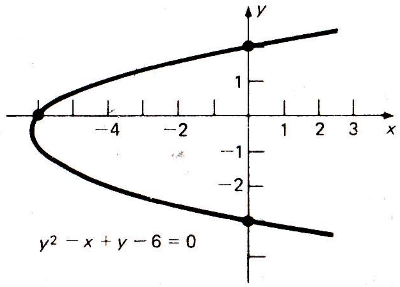
PERPOTONGAN Titik-titik di mana grafik suatu persamaan memotong kedua sumbu koordinat memainkan peranan penting dalam banyak hal. Misalnya, pandang

$$y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$$

Perhatikan bahwa $y = 0$ bilamana $x = -2, 1, 3$. Bilangan-bilangan -2, 1, dan 3 disebut **perpotongan** $-x$ Serupa, $x = 0$ bilamana $y = 6$, sehingga 6 disebut **perpotongan** $-y$.

CONTOH 3. Sketsakan grafik dari $y^2 - x + y - 6 = 0$, dengan memperlihatkan semua perpotongan secara jelas.

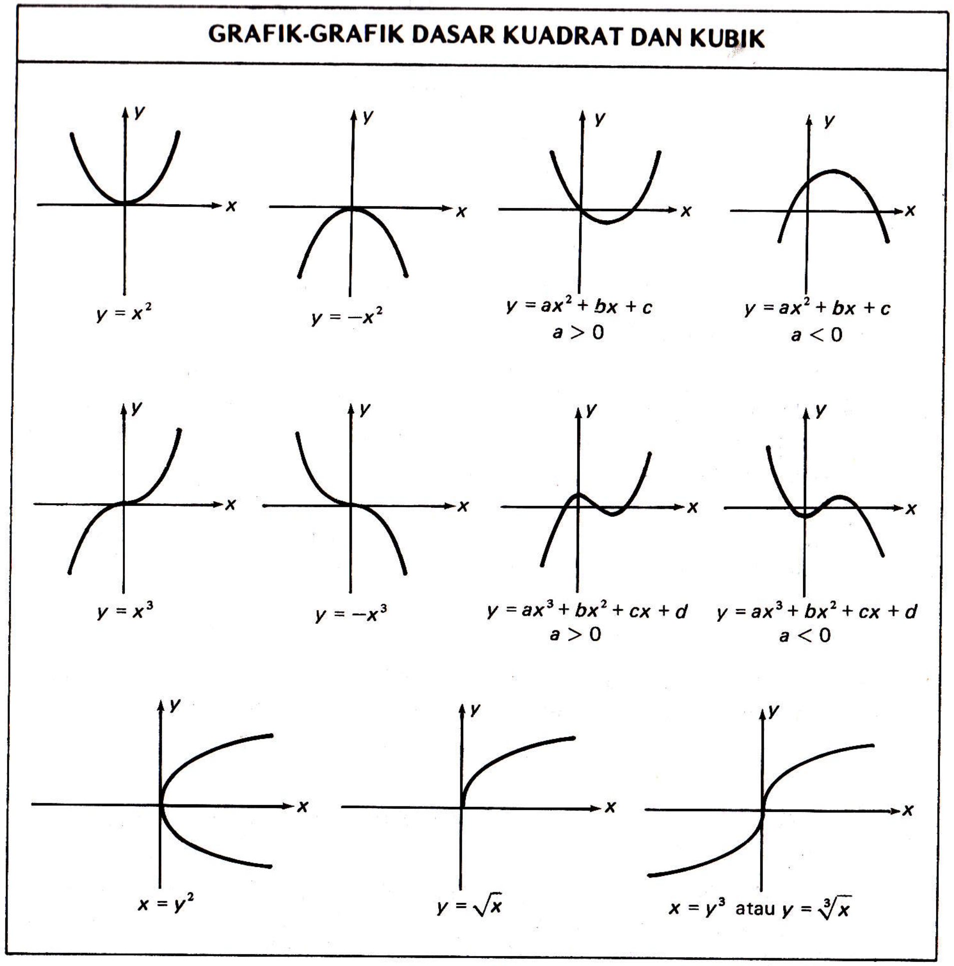
Penyelesaian. Dengan meletakkan $y = 0$ dalam persamaan yang diberikan, diperoleh $x = -6$, sehingga perpotongan$-x$ adalah -6. Dengan meletakkan $x = 0$ dalam persamaan, diperoleh $y^2 + y - 6 = 0$, atau $(y + 3)(y - 2) = 0$; perpotongan$-y$ adalah -3 dan 2. Pemeriksaan kesimetrian menunjukkan bahwa grafik tidak mempunyai salah satu dari tiga tipe simetri yang dibahas sebelumnya. Grafik diperagakan dalam Gambar 5. ■



$y^2 - x + y - 6 = 0$

GAMBAR 5

drat dan kubik akan sering digunakan sebagai contoh-contoh dalam pekerjaan selanjutnya, pada Gambar 6 berikut kami tampilkan beberapa contoh grafiknya.



GAMBAR 6

Grafik-grafik persamaan kuadrat bentuknya seperti mangkok dan dinamakan **parabol**. Bila persamaannya berbentuk $y = ax^2 + bx + c$ atau $x = ay^2 + by + c$ dengan $a \neq 0$, grafiknya akan selalu berupa parabol. Pada persamaan pertama, grafik membuka ke atas atau ke bawah sesuai dengan $a > 0$ atau $a < 0$. Pada persamaan kedua, grafik membuka ke kanan atau ke kiri sesuai dengan $a > 0$ atau $a < 0$. Perlu dicatat bahwa persamaan dalam Contoh 3 dapat diambil dalam bentuk $x = y^2 + y - 6$.

PERPOTONGAN ANTAR GRAFIK Adakalanya kita perlu mengetahui titik-titik potong antara dua grafik. Titik-titik ini diperoleh dengan memecahkan kedua persamaan grafik tersebut secara bersamaan.

dan sketsakan kedua grafik tersebut pada bidang koordinat yang sama.

Penyelesaian. Kita harus menyelesaikan dua persamaan itu secara serentak. Ini mudah dilakukan dengan penggantian ungkapan untuk y dari persamaan pertama ke dalam persamaan kedua dan kemudian menyelesaikan persamaan yang dihasilkan untuk x.

$$-2x + 2 = 2x^2 - 4x - 2$$

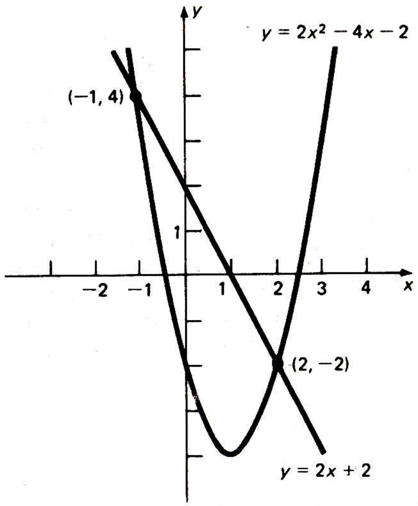
$$0 = 2x^2 - 2x - 4$$

$$0 = 2(x - 2)(x + 1)$$

$$x = -1, \qquad x = 2$$

Melalui substitusi, kita temukan nilai-nilai y yang berpadanan adalah 4 dan -2; karena itu titik-titik perpotongan adalah $(-1,4)$ dan $(2,-2)$.

Dua grafik tersebut diperlihatkan dalam Gambar 7.



GAMBAR 7 ■

SOAL-SOAL 1.7

Dalam Soal-soal 1-18, gambarlah sketsa grafik dari persamaan yang diberikan. Mulai dengan memeriksa simetri dan yakinkan untuk mencari semua perpotongan-x dan y.

1. $y = -x^2 + 4$ **2.** $x = -y^2 + 4$

3. $3x^2 + 4y = 0$ **4.** $y = 2x^2 - x$

5. $x^2 + y^2 = 36$ **6.** $(x - 2)^2 + y^2 = 4$

7. $4x^2 + 9y^2 = 36$ **8.** $16x^2 + y^2 = 16$

9. $y = x^3 - 3x$ **10.** $y = x^3 + 1$

11. $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ **12.** $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

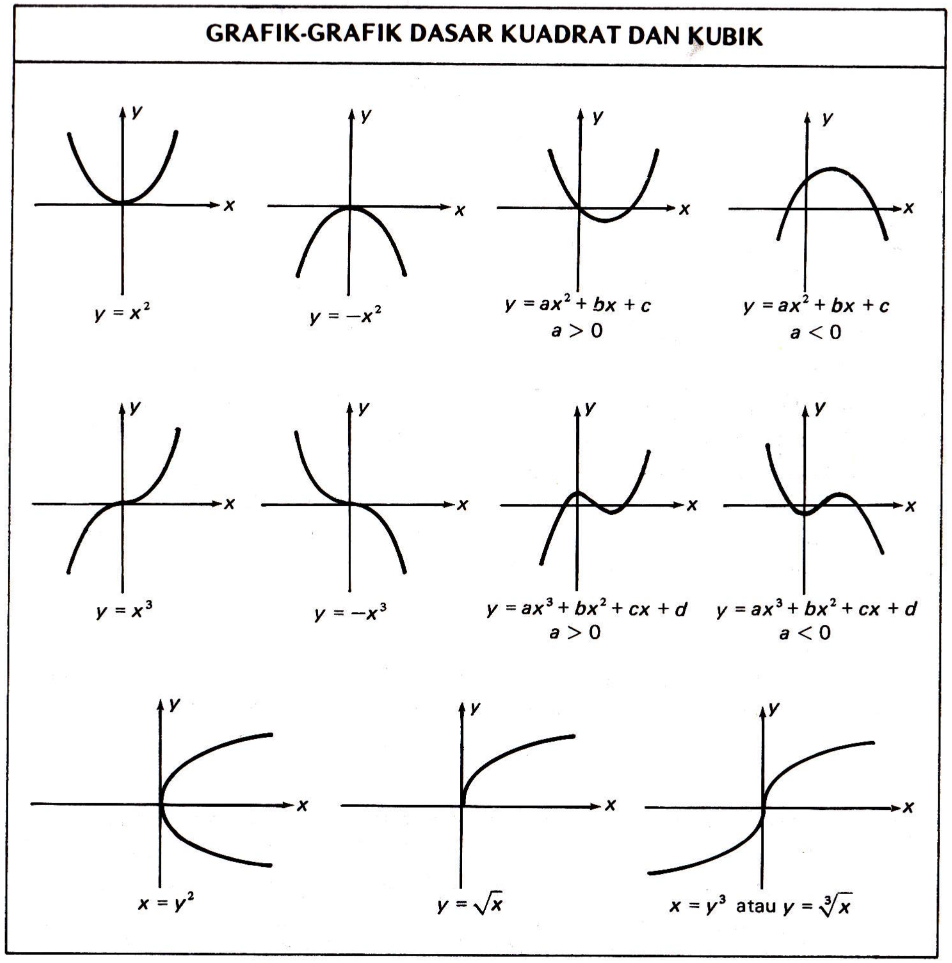
13. $x^3 - y^2 = 0$ **14.** $x^4 + y^4 = 16$

15. $y = (x - 2)(x + 1)(x + 3)$

16. $y = x(x - 3)(x - 5)$

17. $y = x^2(x - 2)$ **18.** $|x| + |y| = 4$

drat dan kubik akan sering digunakan sebagai contoh-contoh dalam pekerjaan selanjutnya, pada Gambar 6 berikut kami tampilkan beberapa contoh grafiknya.



GAMBAR 6

Grafik-grafik persamaan kuadrat bentuknya seperti mangkok dan dinamakan **parabol**. Bila persamaannya berbentuk $y = ax^2 + bx + c$ atau $x = ay^2 + by + c$ dengan $a \neq 0$, grafiknya akan selalu berupa parabol. Pada persamaan pertama, grafik membuka ke atas atau ke bawah sesuai dengan $a > 0$ atau $a < 0$. Pada persamaan kedua, grafik membuka ke kanan atau ke kiri sesuai dengan $a > 0$ atau $a < 0$. Perlu dicatat bahwa persamaan dalam Contoh 3 dapat diambil dalam bentuk $x = y^2 + y - 6$.

PERPOTONGAN ANTAR GRAFIK Adakalanya kita perlu mengetahui titik-titik potong antara dua grafik. Titik-titik ini diperoleh dengan memecahkan kedua persamaan grafik tersebut secara bersamaan.

dan sketsakan kedua grafik tersebut pada bidang koordinat yang sama.

Penyelesaian. Kita harus menyelesaikan dua persamaan itu secara serentak. Ini mudah di lakukan dengan penggantian ungkapan untuk y dari persamaan pertama ke dalam per samaan kedua dan kemudian menyelesaikan persamaan yang dihasilkan untuk x

$$-2x + 2 = 2x^2 - 4x - 2$$

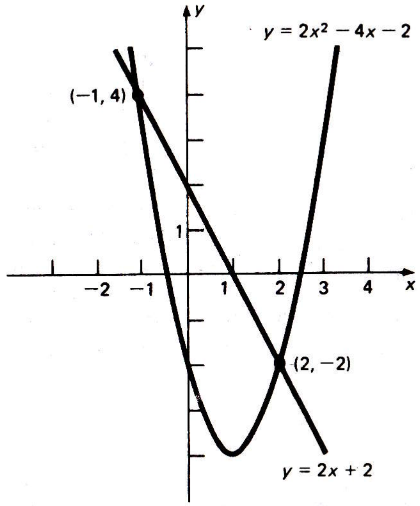
$$0 = 2x^2 - 2x - 4$$

$$0 = 2(x - 2)(x + 1)$$

$$x = -1, \qquad x = 2$$

Melalui substitusi, kita temukan nilai-nilai y yang berpadanan adalah 4 dan -2; karena itu titik-titik perpotongan adalah $(-1,4)$ dan $(2,-2)$.

Dua grafik tersebut diperlihatkan dalam Gambar 7.



GAMBAR 7

SOAL-SOAL 1.7

Dalam Soal-soal 1-18, gambarlah sketsa grafik dari persamaan yang diberikan. Mulai dengan memeriksa simetri dan yakinkan untuk mencari semua perpotongan-x dan y.

1. $y = -x^2 + 4$ **2.** $x = -y^2 + 4$

3. $3x^2 + 4y = 0$ **4.** $y = 2x^2 - x$

5. $x^2 + y^2 = 36$ **6.** $(x - 2)^2 + y^2 = 4$

7. $4x^2 + 9y^2 = 36$ **8.** $16x^2 + y^2 = 16$

9. $y = x^3 - 3x$ **10.** $y = x^3 + 1$

11. $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ **12.** $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

13. $x^3 - y^2 = 0$ **14.** $x^4 + y^4 = 16$

15. $y = (x - 2)(x + 1)(x + 3)$

16. $y = x(x - 3)(x - 5)$

17. $y = x^2(x - 2)$ **18.** $|x| + |y| = 4$