

Konsep Dasar First Order Logic

Sukmawati Nur E

FIRST ORDER LOGIC (FOL)

- ▶ Disebut juga kalkulus predikat (*predicate calculus*) atau logika predikat
- ▶ Alasan pentingnya belajar FOL:
 - ▶ memberi alasan logis yang mendasari bahasa pemrograman logika, misalnya Prolog dan LISP.
 - ▶ mampu mendorong pengembangan kebutuhan aplikasi komputer.
 - ▶ mampu berperan di bagian pembuktian tentang masalah “*correctness*” sehingga dapat secara tepat mengetahui kondisi program yang menghasilkan keluaran yang benar
- ▶ FOL digunakan untuk merepresentasikan hal-hal yang tidak dapat direpresentasikan dengan menggunakan logika proposisi

FOL

► Komponen :

- Objects : Sesuatu dengan identitas individual (people, houses, colors, students, lectures)
- Properties : Sifat yang membedakannya dari object yang lain (red, circle, ...)
- Relation : Hubungan antar object (brother of, bigger than, part of, has color,...)
- Function : Relation yang mempunyai satu nilai (father of, best friend, ...)

Relations

- ▶ Some relations are **properties**: they state some fact about a single object: Round(ball), Prime(7).
- ▶ **n-ary relations** state facts about two or more objects: Married(John,Mary), LargerThan(3,2).
- ▶ Some relations are **functions**: their value is another object: Plus(2,3), Father(Dan).

Logics in General

<u>Language</u>	<u>Ontological Commitment</u>	<u>Epistemological Commitment</u>
Propositional Logic	Facts	True / False / Unknown
First-Order Logic	Fact, objects, relations	True / False / Unknown
Temporal Logic	Facts, objects, relations, times	True / False / Unknown
Probability Theory	Facts	Degree of belief $\in [0,1]$
Fuzzy Logic	Degree of truth $\in [0,1]$	Known interval value

Syntax Pada FOL

- ▶ Constant \rightarrow A | Xi | John | ...
- ▶ Predicate \rightarrow Before | HasColor | ...
- ▶ Function \rightarrow MotherOf | ...
- ▶ Variable \rightarrow a | x | s | ...
- ▶ Connective $\rightarrow \Rightarrow$ | \wedge | \vee | \Leftrightarrow
- ▶ Equality $\rightarrow =$
- ▶ Quantifier $\rightarrow \forall$ | \exists

Syntax pada FOL

▶ Constant

- ▶ Dituliskan dalam huruf besar : A, X1, Budi
- ▶ Harus menyatakan secara spesifik objek yang dimaksud
- ▶ Memungkinkan mengacu pada beberapa nama berbeda

▶ Variable

- ▶ Dituliskan dalam huruf kecil: a, x, s

▶ Function

- ▶ Relasi yang hanya mempunyai satu nilai
- ▶ IbuKandung(Nina, Budi)

Syntax pada FOL

► Predicate

- Menyatakan relasi khusus
- Dapat memiliki beberapa nilai
- Bentuk umum :

PREDIKAT [individu(objek)1, individu(objek)2]

► Misal :

- Mobil berada dalam garasi,
Kalkulus predikat: di dalam (mobil,garasi)
- Proposisi : Hanif rajin belajar
Kalkulus predikat : rajin (Hanif, belajar)
- Proposisi : Pintu terbuka
Kalkulus predikat : buka(pintu)
- Berwarna (Tasku,Hijau); Berwarna(Tasku,Merah)

TERM

- ▶ Term
 - ▶ Ekspresi logika yang mengacu pada sebuah objek
 - ▶ Dapat berupa constant, variable atau function
- ▶ Term \rightarrow Function (Term, ...)
 - | Constant
 - | Variable
- ▶ Contoh term:
 - ▶ constant symbols: Table, Computer
 - ▶ function symbols: LeftLeg(Pete), Sqrt(3), Plus(2,3) etc
- ▶ Functions can be nested:
 - ▶ Grandfather(x) = father(father(x))
- ▶ No variables = **ground term**.

SENTENCE

- ▶ Sentence \rightarrow Atomic Sentence
 - | Sentence Connective Sentence
 - | Quantifier Variable,...Sentence
 - | \neg Sentence
 - | (Sentence)

Atomic Sentence

- ▶ Atomic Sentence \rightarrow Predicate (Term, ...)
| Term = Term
- ▶ Atomic Sentence
 - ▶ Dapat dibentuk dari Predicate (Term,...) atau Term=Term
 - ▶ Misal :
 - ▶ Sepatu (Budi)
 - ▶ Saudara (Andi,Budi)
 - ▶ Memberi (Andi, Budi, KueCoklat)
 - ▶ Saudara(Andi) = Budi

Complex Sentence

- ▶ Complex sentence :
 - ▶ Sentence yang dibangun menggunakan connective
 - ▶ Misal :
 - ▶ Saudara (Andi, Budi) → Memberi (Andi, Budi, Kue Coklat)

Quantifier

► Universal Quantifier (\forall)

► Dibaca : "For All" atau "untuk semua/untuk setiap"

► Misal :

► Untuk setiap objek x , jika x adalah anak kecil, maka x suka permen dinyatakan :

$$\forall x \text{ AnakKecil } (x) \rightarrow \text{Suka}(x, \text{Permen})$$

► Kalimat bernilai benar jika dan hanya jika semua kalimat di bawah ini benar

► $\text{AnakKecil}(\text{Andi}) \rightarrow \text{Suka}(\text{Andi}, \text{Permen}) \wedge$

► $\text{AnakKecil}(\text{Budi}) \rightarrow \text{Suka}(\text{Budi}, \text{Permen}) \wedge$

► $\text{AnakKecil}(\text{Sinta}) \rightarrow \text{Suka}(\text{Sinta}, \text{Permen}) \wedge \dots$

Quantifier

► Existential Quantifier (\exists)

- Dibaca : "There Exist" atau "ada satu atau beberapa"
- Misal :
 - "Ada objek x, jika x adalah anak kecil, maka x suka permen" dinyatakan :
 $\exists x \text{ AnakKecil}(x) \rightarrow \text{Suka}(x, \text{Permen})$
- Kalimat bernilai benar jika dan hanya jika ada (minimal satu) kalimat di bawah ini benar
 - $\text{AnakKecil}(\text{Andi}) \rightarrow \text{Suka}(\text{Andi}, \text{Permen}) \vee$
 - $\text{AnakKecil}(\text{Budi}) \rightarrow \text{Suka}(\text{Budi}, \text{Permen}) \vee$
 - $\text{AnakKecil}(\text{Sinta}) \rightarrow \text{Suka}(\text{Sinta}, \text{Permen}) \vee \dots$

► Nested Quantifier

- Kalimat kompleks yang menggunakan quantifier ganda
- Misal :
 - "Untuk semua x dan semua y, jika x adalah orang tua y, maka y adalah anak dari x" dinyatakan : "
 $\forall x, y \text{ OrangTua}(x, y) \rightarrow \text{Anak}(y, x)$

Terjemahan antara FoL (Fisrt-order Language) ke Bhs Harian

Contoh.

Andaikan dipunyai predikat sbb :

- | | |
|----------------------|---------------------------|
| a). Truk(x) | x adalah Truk |
| b). Mobil(x) | x adalah Mobil |
| c). Sepeda(x) | x adalah Sepeda |
| d). Lebih_Mahal(x,y) | x adalah lebih mahal dp y |
| e). Lebih_Cepat(x,y) | x adalah lebih cepat dp y |

(a). Terjemahkan kedalam bahasa sehari-hari.

$$\forall x (\text{Sepeda}(x) \rightarrow \exists y (\text{Mobil}(y) \wedge \text{Lebih_Mahal}(y,x)))$$

Solusi :

Untuk semua x, jika x adalah suatu sepeda, maka terdapatlah suatu y sedemikian sehingga y adalah mobil dan y lebih mahal dp x

Tulis kembali :

Untuk setiap sepeda terdapatlah suatu mobil yg lebih mahal.

Logika Predikat

Pendahuluan

Terjemahan antara FoL (First-order Language) ke Bhs Harian

Contoh.

(b). Terjemahkan formula berikut ke bahasa natural.

$$\forall x \forall y ((\text{Truk}(x) \wedge \text{Sepeda}(y)) \rightarrow \text{Lebih_cepat}(x,y))$$

(c). Terjemahkan formula berikut ke bahasa natural.

$$\begin{aligned} &\exists z (\text{Mobil}(z) \wedge \forall x \forall y (\text{Truk}(x) \wedge \text{Sepeda}(y)) \rightarrow \\ &(\text{Lebih_cepat}(z,x) \wedge \text{Lebih_cepat}(z,y) \wedge \text{Lebih_mahal}(z,x) \\ &\wedge \text{Lebih_mahal}(z,y))) \end{aligned}$$

Logika Predikat

Pendahuluan

Terjemahan antara FoL (First-order Language) ke Bhs Harian

Contoh.

(b). Terjemahkan formula berikut ke bahasa natural.

$$\forall x \forall y ((\text{Truk}(x) \wedge \text{Sepeda}(y)) \rightarrow \text{Lebih_cepat}(x,y))$$

Solusi

Secara literal maka :

Untuk semua x, untuk semua y, jika x adalah truk dan y adalah sepeda, maka x lebih cepat dp y.

Tulis kembali :

Setiap truk lebih cepat dp sebarang sepeda.

(c). Terjemahkan formula berikut ke bahasa natural.

$$\begin{aligned} &\exists z (\text{Mobil}(z) \wedge \forall x \forall y (\text{Truk}(x) \wedge \text{Sepeda}(y)) \rightarrow \\ &(\text{Lebih_cepat}(z,x) \wedge \text{Lebih_cepat}(z,y) \wedge \text{Lebih_mahal}(z,x) \\ &\wedge \text{Lebih_mahal}(z,y))) \end{aligned}$$

Logika Predikat

Pendahuluan

Terjemahan antara FoL (First-order Language) ke Bhs Harian

Contoh.

(c). Terjemahkan formula berikut ke bahasa natural.

$$\begin{aligned} &\exists z (\text{Mobil}(z) \wedge \forall x \forall y (\text{Truk}(x) \wedge \text{Sepeda}(y)) \rightarrow \\ &(\text{Lebih_cepat}(z,x) \wedge \text{Lebih_cepat}(z,y) \wedge \text{Lebih_mahal}(z,x) \\ &\wedge \text{Lebih_mahal}(z,y))) \end{aligned}$$

Solusi :

Terdapatlah z sedemikian sehingga z adl suatu mobil dan untuk semua x , untuk semua y jika x adl suatu truk dan y suatu sepeda, maka z lebih cepat dp x dan z adl lebih cepat dp y dan z lebih mahal dp x dan z adl lebih mahal dp y .

Ditulis kembali :

Terdapatlah suatu mobil yang lebih cepat dan lebih mahal dp sebarang truk dan sepeda.

Logika Predikat

Pendahuluan

Ekspresi kalimat Harian sebagai FoL (First-order Language)

Andaikan suatu kalimat diekspresikan dalam bahasa sehari-hari, di inginkan untuk disajikan dalam FoL.

Pertama-tama diidentifikasi predikat yg inginkan dan kemudian kalimat diatur kembali sehingga ia mempunyai suatu formulasi logis. Formulasi logis berarti bahwa penghubung logis dan kuantor harus di buat eksplisit.

Jadi urutannya sbb :

- a). Buat penafsiran mengenai pernyataan tersebut (jika kurang jelas).
- b). Tentukan dan deklarasikan predikat-predikat yang digunakan.
- c). Tentukan kuantor-kuantor yang diperlukan.

Logika Predikat

Pendahuluan

Ekspresi kalimat Harian sebagai FoL (Fisrt-order Language)

Contoh.

Setiap orang kehilangan uang pada pacuan kuda.

Solusi

(Catatan : *kita tidak memperhatikan nilai kebenaran dp pernyataan ini , yg penting adalah bagaimana mengekspresikannya sebagai suatu formula logis order-pertama*).

Jelas bahwa predikat dapat dicirikan sehingga didapat :

“ x kehilangan uang ” (yg akan disajikan dengan ***Hilang_uang(x)***),

dan

“ x berada pada pacuan kuda ” (yg disajikan dng ***Pacu_kuda(x)***.)

Logika Predikat

Pendahuluan

Ekspresi kalimat Harian sebagai FoL (First-order Language)

Contoh.

Jadi kalimat “Setiap orang kehilangan uang pada pacuan kuda.” dapat diartikan/ditafsirkan bahwa , untuk semua orang yang berada pada pacuan kuda maka kehilangan uang , jadi kita dapat mendeduksi bahwa kuantornya adl “Untuk semua” dan terdapat satu penghubung logis “implikasi” sehingga kalimat dapat diatur kembali menjadi :

“Untuk semua x, jika x berada pada pacuan kuda maka x kehilangan uang”

Sehingga didapat hasilnya :

$$\forall x (\text{Pacu_kuda}(x) \rightarrow \text{Hilang_uang}(x))$$

Logika Predikat

Pendahuluan

Ekspresi kalimat Harian sebagai FoL (Fisrt-order Language)

Contoh.

Terjemahkan kalimat berikut ke formula logis.

“Beberapa orang yg berada di pacuan kuda kehilangan uang tetapi be berapa orang yang cerdas tak kehilangan”

Logika Predikat

Pendahuluan

Ekspresi kalimat Harian sebagai FoL (First-order Language)

Contoh.

Terjemahkan kalimat berikut ke formula logis.

“Beberapa orang yg berada di pacuan kuda kehilangan uang tetapi be berapa orang yang cerdas tak kehilangan”

Solusi

Predikat yang diperlukan adl :

Pacuan_kuda(x)	x orang yg berada di pacuan kuda
Hilang_uang(x)	x orang yang kehilangan uang
Cerdik(x)	x orang yang cerdas

Maka

“ Terdapatlah x sedemikian sehingga x berada di pacuan kuda dan x kehilangan uang, dan terdapatlah y sedemikian sehingga y berada di pacuan kuda, y cerdas dan tidak kehilangan uang”

Logika Predikat

Pendahuluan

Ekspresi kalimat Harian sebagai FoL (First-order Language)

Perhatikan bahwa kata “tetapi” diganti dengan “dan” sehingga dalam hal ini perlu penafsiran yang cermat.

Dengan demikian maka didapat formula :

$$\exists x (\text{Pacuan_kuda}(x) \wedge \text{Hilang_uang}(x)) \wedge \exists y (\text{Pacuan_kuda}(y) \wedge \text{Cerdik}(y) \wedge \neg \text{Hilang_uang}(y))$$

Logika Predikat

Pendahuluan

Ekspresi kalimat Harian sebagai FoL (Fisrt-order Language)

Contoh.

Setiap Mahasiswa mempunyai seorang kawan belajar.

Logika Predikat

Pendahuluan

Ekspresi kalimat Harian sebagai FoL (First-order Language)

Contoh.

Setiap Mahasiswa mempunyai seorang kawan belajar.

Solusi

Jika kalimat diatas ditafsirkan “Untuk setiap mahasiswa x ada mahasiswa lain y , dimana y adalah kawan belajar x ”, maka jelaslah bahwa predikat dapat dicirikan sehingga didapat : “ y adl kawan belajar x ” yg disajikan dng **Kawan_belajar(y,x)**. Selanjutnya dapat dideduksi kan bahwa terdapat kuantor “Untuk semua” dan “Terdapatlah “ sehingga didapat bentuk formula :

$$\forall x \exists y (\text{Kawan_belajar}(y,x))$$

Logika Predikat

Pendahuluan

Ekspresi kalimat Harian sebagai FoL (First-order Language)

Contoh.

Jika kalimat diatas ditafsirkan “Untuk setiap mahasiswa x ada mahasiswa lain y , dimana y adalah kawan belajar x dan jika ada mahasiswa z maka jika z bukan y maka z bukan kawan belajar dng x ”, maka jelaslah bahwa predikat dapat dicirikan sehingga didapat : “ y adl kawan belajar x ” yg disajikan dng **Kawan_belajar(y,x)**, selanjut nya dapat dideduksikan bahwa terdapat kuantor “Untuk semua”, “Ter dapatlah “, penggandeng logis “negasi”, “konjungsi”, sehingga didapat bentuk formula :

$$\forall x \exists y \forall z (\text{Kawan_belajar}(y,x) \wedge ((z \neq y) \rightarrow \neg \text{Kawan_belajar}(z,x)))$$

Logika Predikat

Pendahuluan

Ekspresi kalimat Harian sebagai FoL (Fisrt-order Language)

Bantuan dalam mengekspresikan kalimat sehari-hari ke FoL.

(a). Jika menggunakan **kuantor universal** biasanya diikuti oleh peng gunaan **implikasi**.

Contoh :

“ Semua orang tua mempunyai rambut putih”

Andaikan **Or_tu(x)** adl “x adl orang tua“ dan **Ra_tih(x)** adl “ x berambut putih” m sehingga jika ditulis kembali :

“ Untuk semua x, jika x orang tua maka x mempunyai rambut putih”

dengan FoL : **$\forall x (Or_tu(x) \rightarrow Ra_tih(x))$** .

Logika Predikat

Pendahuluan

Ekspresi kalimat Harian sebagai FoL (First-order Language)

Sangat umum membuat pernyataan dengan menggunakan kuantor uni versal yang diikuti dengan implikasi selalu berbentuk :

“Untuk setiap anggota dari variabel, jika suatu kondisi dipenuhi maka kondisi yang lain dipenuhi “

Contoh : “Setiap laki-laki harus wajib militer”,

FoL adl : $(\forall x)p(x) \rightarrow q(x)$

(b). Jika menggunakan suatu **kuantor eksistensial** biasanya diikuti dng suatu **konjungsi**.

Contoh : “Ada beberapa laki-laki yang tidak wajib militer”,

FoL adl : $(\exists x)p(x) \wedge q(x)$

Logika Predikat

Pendahuluan

Ekspresi kalimat Harian sebagai FoL (First-order Language)

Contoh :

- a). Setiap laki-laki harus wajib militer
- b). Ada beberapa laki-laki yang tidak wajib militer.

Ditulis sebagai berikut (ditafsirkan) :

- a). Untuk setiap x , jika x laki-laki maka x harus wajib militer
- b). Terdapat x sehingga x laki-laki dan x tidak wajib militer.

Didapat predikat : jika p (predikat) adalah menunjukkan sifat “laki-laki” dan q (predikat) menunjukkan sifat “wajib militer”, dan terdapat juga penggandeng logis “implikasi” serta “konjungsi” maka kalimat tersebut dapat ditulis :

- a). $(\forall x)p(x) \rightarrow q(x)$ dan
- b). $(\exists x)p(x) \wedge q(x)$

Latihan (1)

Konversikan kalimat-kalimat di bawah ini ke dalam logika predikat :

- a. Mandala seorang manusia
- b. Mandala berasal dari Papua
- c. Semua orang Papua adalah orang Indonesia
- d. Raja adalah pembuat aturan
- e. Semua orang Indonesia loyal kepada raja atau membencinya
- f. Tiap orang loyal kepada seseorang
- g. Warga hanya membunuh pembuat aturan yang mereka tidak loyal padanya
- h. Mandala membunuh raja