BAB III

EKSTRIM FUNGSI DUA PEUBAH

3.1. MASALAH MAKSIMUM DAN MINIMUM

Pengantar

Konsep Ekstrim dan relative (Maksimum-Minimum) fungsi dua peubah real dirancang dengan cara yang sama sepertiekstrim satu peubah real. Peranan selang buka pada fungsi satu peubah diganti dengan daerah bidang yang dibatasi oleh suatu lengkungan tertutup yang bentuk sederhananya adalah cakram terbuka di bidang.

Seperti halnya dengan fungsi satu peubah yang sederhana, proses menentukan ekstrim relative untuk fungsi dua peubah dimulai dengan mencari titik kritis. Uji titik kritis tresebut dapat diperiksa dengan cara membandingkan nilai fungsinya terhadap nilai disekitarnya atau dengan uji turunan parsial ke dua. Pada berbagai situasi, terdapat kasus titik stasioner yang bukan titik ekstrim.

Defenisi Maksimum relative dan Minimum relative

Diktehui fungsi dua peubah $f(x,y)$ terdefenisi pada daerah D di bidang yang memuat titik $(x_{o-,}y_o)$.

(i) Titik $(x_{o-,}y_o)$ disebut titik maksimum relative, jika terdapat cakram dengan pusat $(x_{o-,}y_o)$ pada D sehingga $f(x_{o-,}y_o) \geq f(x,y)$, untuk stiap (x,y) di cakram.

(ii) Titik $(x_{o-,}y_o)$ disebut titik minimum relative, jika terdapat cakram dengan pusat $(x_{o-,}y_o)$ pada D sehingga $f(x_{o-,}y_o) \leq f(x,y)$, untuk setiap (x,y) di cakram.

Nilai minimum relatifnya adalah $f(x_{o-,}y_o)$.

Dimana nilai-nilai ekstrim muncul?

Situasinya serupa seperti pada kasusu satu peubah. Sebagaimana dalam fungsi satu peubah untuk mencari titik ekstrim, kita harus mencari titik kritis terlebih dahulu.

Titik kritis dari *f* pada D, ada tiga jenis sebagai berikut :

1. Titik-titik batas

   (x_{o-},y_o) adalah titik batas dari himpunan D, jika semua persekitaran dari (x_{o-},y_o) memuat titik-titik yang berada di D dan titik-titik yang bukan D.

2. Titik stasioner

   Misalkan fungsi *f*(x,y) kontinu pada daerah D yang memuat titik (x_{o-},y_o).

   (x_{o-},y_o) adalah titik stasioner, jika ∇(x_{o-},y_o) = 0. dalam hal ini

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

3. Titik singular

   (x_{o-},y_o) adalah titik singular, jika fungsi *f* tidak terdiferensialkan di (x_{o-},y_o).

   Dengan kata lain $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ tidak ada dan $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ tidak ada.

Teorema 3.1

Misalkan *f* (x,y) adalah terdefinisi pada D yang memuat (x_{o-},y_o).

Jika *f* (x_{o-},y_o) adalah suatu nilai ekstrim, maka (x_{o-},y_o) haruslah berupa salah satu dari

(i) suatu titik batas dari D; atau

(ii) suatu titik stasioner *f*; dan

(iii) suatu titik singular dari *f*

Contoh 1

Cari nilai-nilai maksimum atau minimum relatif dari

$$f(x, y) = x^2 - 2x + \frac{y^2}{4}$$

Penyelesaian

Perhatikan fungsi tersebut dapat dideferensialkan sepanjang bidang xy. Jadi titik-titik kritis yang mungkin adalah titik stasioner.

Titik stasioner diperoleh dengan cara menetapkan

$$f_x(x,y) = 2x - 2 = 0 dan f_y(x,y) = y/2 = 0$$

Hal ini didapat x=1 dan y=0. Jadi (1,0) adalah titik stasioner.

Kemudian diselidiki apakah titik (1,0) sebagai titik staioner memberikan suatu maksimum atau suatu minimum atau bukan keduanya. Untuk keperluan tersebut, yaitu memeriksa apakah nilai fungsi dititik stasioner lebih besar atau lebih kecil dari nilai fungsi di sekitarnya. Untuk itu diperhatikan bahwa

f(1,0) = -1 dan

$$f(x,y) = x^2 - 2x + \frac{y^2}{4} = x^2 - 2x + 1 + \frac{y^2}{4} - 1 = (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} - 1 \geq -1 = f(1,0)$$

Jadi kita lihat bahwa $f(x,y) \geq f(1,0)$ untuk setiap (x,y)

Dengan demikian fungsi tersebut mencapai minimum relative di titik (1,0), dengan nilai relatifnya adalah -1.

Kemudian perlu dicatat bahwa tidak setiap titik stasioner akan menjadi titik ekstrimnya (tidak memberikan suatu maksimum ataupun minimum). Hal ini dapat dilihat pada contoh Sbb:

Contoh 2:

Dik: $f(x,y) = x^2 - y^2$

Pada fungsi tersebut diperoleh :

$$f_x(x,y) = 2x dan f_y(x,y) = -2y$$

Sehingga titik stasionernya diperoleh dengan menetapkan 2x=0 dan -2y=0

Jadi titik stasionernya (0,0), dengan f(0,0) =0. Sekarang akan ditunjukan bahwa titik stasioner ini bukan titik ekstrrim.

Perhatikan $f(x,y) = x^2 - y^2 = (x - y(x + y)$.

Fungsi ini terdefinisi pada R^2, yang dapat dibagi menjadi empat daerah berikut :

1. Untuk daerah $-x \leq y \leq x$, berlaku $x + y \geq 0$ dan $x - y \geq 0$, jadi $f(x,y) \geq 0 = f(0,0)$

2. Untuk daerah $y \geq x$ dan $y \geq -x$, berlaku $x + y \geq 0$ dan $x - y \leq 0$, jadi $f(x, y) \leq 0 = f(0,0)$

3. Untuk daerah $x \leq y \leq -x$, berlaku $x + y \leq 0$ dan $x - y \leq 0$, jadi $f(x, y) \geq 0 = f(0,0)$

4. Untuk daerah $y \leq x$ dan $y \leq -x$, berlaku $x + y \leq 0$ dan $x - y \geq 0$, jadi $f(x, y) \leq 0 = f(0,0)$

Dari keempat situasi yang muncul, dapat disimpulkan bahwa titik (0,0) sebagai titik stasioner bukan sebagai titik ekstrim. Dalam hal ini titik (0,0) tidak memberikan suatu maksimum atau minimum walaupun titik (0,0) sebagai titik stasioner.

Untuk menyelidiki apakah titik stasioner menjadi titik ekstrim, kita berkerja dengan ketidaksamaan yaitu memeriksa apakah nilai fungsi di titik stasioner lebih besar atau lebih kecil dari nilai fungsi disekitarnya. Cara seperti ini sukar bila persamaan fungsi dua peubahnya agak rumit. Untuk mengatasi ini akan, digunakan uji turunan parsial kedua. Karena uji ini melibatkan turunan parsial, maka uji ini berlaku jika titik kritisnya adalah titik-titik stasioner. Sedangkan fungsi yang tidak mempunyai turunan parsial, maka penyelidikan suatu fungsi apakah mencapai ekstrim tetap seperti perhitungan semula.

UJI TURUNAN PARSIAL KEDUA UNTUK EKSTRIM RELATIF.

Misalkan f(x,y) mempunyai turunan parsial kedua yang kontinu di suatu persekitaran dari (x_0, y_0) adalah titik stasioner dari f.

Misalkan $D = f_{xx}(x_0, y_0) f_{xx}(x_0, y_0) - \left[f_{xy}(x_0, y_0)\right]^2$, maka :

(i) Jika D>0 dan $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, maka $f(x_0, y_0)$ adalah nilai maksimum local.

(ii) Jika D>0 dan f(x .y)>0,maka f(x)adalah nilai maksimum lokal

(iii) Jika D<0 dan f(x.y)bukan suatu nilai ekstrim((x)adalah titik pelana).

(iv) Jika D=0,pengujian tidak memberikan kesimpulan.

Contoh 3

Tentukan ekstrim,jika ada,untuk fungsi *F* yang didefinisikan oleh

F(x,y)=3x^3+y^2-9x+4y .

Penyelesaian

Karena $F(x,y)=9x^2-9$ dan $F(x,y)=2y+4$,maka titik-titik kritis diperoleh dengan memecahkan persamaan simultan $F(x,y)= F(x,y)=0$ .Jadi titik kritisnya adalah (1,-2) dan (-1,-2).Sekarang $F(x,y)=18x$, $F(x,y)=2$,dan $F=0$. Jadi pada titik kritis(1,-2),diperoleh $D = F(1,-2). F(1,-2)-(F(1,-2))^2=18(2)-0=36>0$.Tambahan pula, $F(1,-2)=18>0$,sehingga menurut (ii), $F(1,-2)=-10$ adalah nilai minimum I lokal dari F.Untuk titik kritis (-1,-2),diperolah

$D= F(-1,-2)., F(-1,-2)- (F(-1,-2))^2 = -18(2)-0 = -36 < 0$.

KarenaD<0,maka menurut (iii) titik (-1,-2)adalah titik pelana dan $F(-1,-2)$ bukan suatu ekstrem.

Contoh 4

Tentukan jarak minimum antara titik asal dan permukaan $z^2= x^2+y+4$.

Penyelesaian

Ambil $p(x,y,z)$ adalah titik sembarang permukaan tersebut . Maka jarak dari titik asal dan p adalah $d =\sqrt{x^2+y^2+z^2}$Kita akan mencari koordinat p yang memberikan jarak minimum.Untuk itu kita cukup mencari koordinat p yang memberikan kuadrat jarak minimum.

Karena p terletak pada permukaan itu,koordinatnya memenuhi persamaan permukaan.

Subtitusi $z^2=x^2+y+4$ pada $d^2=x^2+y^2+z^2$,diperoleh d^2 sebaga fungsi dua peubah x dan y ,yakni : $d^2=x^2+y^2+x^2y+4$.

Untuk mencari titik kritisnya,kiat tetapkan $F(x,y)=0$ dan $F(x,y)=0$,sehingga $2x+2xy=0$ dan $2y+x^2=0$.

Dari persamaan di atas,kita dapatkan $2x-x^3 =0$

Jadi $x=0$ atau $x=\pm\sqrt{2}$.Dengan subtitusi nilai-nilai ini pada persamaan diatas,diperoleh $y=0$ dan $y=-1$. Karena itu titik kritisnya adalah (0,0), ($\sqrt{2}$,-1), (-$\sqrt{2}$,-1).Kemudian uji masing-masing titik kritis sebagai berikut :

Perhatikan F(x,y)=2+2y, F(x,y)=2, F(x,y)=2x

Jadi D(x,y)= f. f-(f)²=4+4y-4x².Karena $D(\pm\sqrt{2},-1)=-8<0$, maka titik ($\sqrt{2}$,-1)atau(-$\sqrt{2}$,-1) tidak memberikan suatu ekstrim . Tetapi, $D(0,0)=4>0$ dan $f(0,0)=2>0$,sehingga (0,0)menghasilkan jarak minimum. Dengan subtitusi x=0 dan y=0,diperoleh d=4.

Dengan demikian jarak minimum antara titik asal dan permukaan yang diberikan adalah 2.

Sebagaimana dikemukakan bahwa,uji turunan parsial kedua hanya dimungkinkan dipakai apabila titik kritisnya berupa titik stasioner.Jadi uji ini belum menjangkau semua kasus yang mungkin.Beberapa diantaranya adalah contoh berikut.

Contoh 5 .

Diberikan fungsi $f(x,y)=|x|+|y|$

Perhatikan bahwa $f(0,0)$ dan $f(0,0)$ tidak ada.Jadi titik(0,0)adalah titik kritis berupa titik singular.Jadi uji turunan parsial kedua tidak bisa digunakan. Untuk itu pengujian titik(0,0)apakah memberikan ekstrim relatif akan digunakan definisi semula yakni :

$f(x,y)=|x|+|y| \geq 0 = f(0,0)$,v(x,y)di domain f.Jadi fungsi f mencapai minimum di titik(0,0).Dalam hal ini nilai minimumnya adalah $f(0,0)=0$

Contoh 6

Diberikan $f(x,y)=|x|-|y|$

Perhatikan bahwa $f_x(0,0)$ dan $f_y(0,0)$ tidak ada. Sehingga titik (0,0) adalah titik kritis.

Akan tetapi fungsi ini akan mencapai ekstrim di (0,0) karena

$f(x,y)=|x|-|y| \geq 0 = f(0,0)$, jika $|y| \leq |x|$ dan

$f(x,y)=|x|-|y| \leq 0 = f(0,0)$, jika $|y| \geq |x|$.

SOAL-SOAL LATIHAN

Carilah titik kritis dari fungsi-fungsi berikut, dan tentukan jenisnya (titik maksimum atau titik minimum) :

1. $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ -4 x
2. $f(x,y) = 2x^4$ - x^2 +3 y^2
3. $f(x,y) =$ x^2 +4 y^2 -2 x +8 $y - 1$
4. $f(x,y) = xy^2$ -6 x^2 -3 y^2
5. $f(x,y) = x^3 + y^3$ - $9xy$
6. $f(x,y) = x^2$ -3 $xy^2 + y^2$
7. Tentukan ukuran kotak persegipanjang yang volumenya V_0 untuk mana jumlah panjang rusuk-rusuknya paling kecil.
8. Sebuah kotak persegipanjang, yang rusuk-rusuknya sejajar sumbu koordinat- koordinat, terletak didalam ellipsoid $96x^2 + 4y^2 + 4z^2$ =36. Berapakah volume terbesar yang untuk kotak yang demikian?
9. Nyatakan suatu bilangan positif N sebagai jumlah tiga bilangan sedemikian sehingga hasil kali tiga bilangan ini maksimum.
10. Tentukan Jarak Terdekat Dari (1,-2,3) Ke Permukaan Bidang $3x + 2y - x = 5$

3.2 MASALAH EKSTRIM BERSYARAT

Kita mulai dengan membedakan dua jenis masalah. Untuk mencari nilai minimum dari $x^2 + 2y^2 + z^4$ +4 adalah suatu masalah niali ekstrim bebas sebagaimana sudah dibahas sebelumnya. Untuk mencari nilai minimum dari $x^2 + 2y^2 + z^4$ +4 terhadap kondisi bahwa $x + 3y - z = 7$ adalah masalah nilai ekstrim bersyarat. Banyak permasalahan didunia nyata, khususnya dibidan ekonomi merupakan masalah ekstrim bersyarat. Sebagai contoh, seorang pengusaha ingin memaksimunkan keuntungan, tetapi dibatasi oleh banyaknya bahan mentah yang tersedia, banyaknya tenaga kerja, dan sebagainya.

Dari contoh 4 kita bisa lihat sebagai sebuah masalah ekstrim bersyarat. Kita diminta mencari jarak minimum dari permukaan $z^2 = x^2 \ y + 4$ ke titik asal, lalu kita formulasikan masalah sebagai peminimumam $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$ terhadap syarat $z^2 = x^2 \ y + 4$.

Sebagaimana dalam contoh tersebut kita selesaikan dengan mensubtitusi nilai z^2 dari kendala dalam rumus untuk d^2 dam kemudian menyelesaikan masalah nilai ekstrim tersebut.

Tetapi sering kali terjadi bahwa persamaan kendala tidak mudah diselesaikan untuk salah satu peubah dan, kendatipun jika ini dapat dikerjakan, boleh jadi terdapat metode lain yang lebih praktis. Untuk masalah ekrim bersyarat akan digunakan metode Lagrange, hal ini dapat dilihat dalam teorema berikut ini ;

Teorema : Medote Lagrange

Untuk memeksimumkan atau meminimumkan f(p) terdapat kendala g(p)=0, selesaikan system persamaan

$\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$ dan g(p)=0

Untuk p dan λ. Tiap titik p yang demikian adalah suatu titik kritis untuk masalah nilai ekstrim terkendala dan λ yang berpadanan disebut pengali lagrange.

Contoh 7

Gunakan metode Lagrange untuk mencari nilai-nilai maksimum dan minimum dari

$f(x,y) = y^2 - x^2$ pada elips $x^2/4 + y^2 = 1$

Penyelesaian

Misalkan persamaan kendala ditulis sabagai

$g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0.$

Perhatikan $\nabla f = -2xi + 2yj$ dan $\nabla g = 2xi + 8yj$

Jadi persamaan lagrange adalah

(1) $-2x = \lambda 2x$

(2) $2y = \lambda 8y$

(3) $x^2 + 4y^2 = 4$

Yang harus diselesaikan secara simultan.

Dari persamaan (3) *x* dan *y* keduanya tidak dapat sama dengan nol

(i) jika $x \neq 0$

Dari (1), maka $\lambda = -1$, kemudian dari persamaan (2), maka $y = 0$

Jadi dengan persamaan (3) didapat $x = \pm 2$

Akibatnya titik kritisnya adalah (-2,0),(2,0)

(ii) Jika $y \neq 0$

Dari (2), maka $\lambda = \frac{1}{4}$, kemudian dari persamaan (1), maka $x = 0$

Jadi dengan persamaan (3) didapat $x = \pm 1$

Akibatnya titik kritisnya adalah (0,-1),(0,1)

Sekarang untuk $f(x, y) = y^2 - x^2$

$$f(-2,0) = -4$$
$$f(2,0) = -4$$
$$f(0,-1) = 1$$
$$f(0,1) = 1$$

Jadi nilai minimum dari $f(x, y)$ pada elips yang diberikan adalah -4, sedangkan nilai maksimum adalah 1.

Bilamana lebih dari satu kendala yang ditekankan pada peubah-peubah suatu fungsi yang harus dimaksimumkan atau diminimumkan, digunakan pengali-pengali Lagrange tambahan (satu untuk setiap kendala). Misalkan, jika kita mencari ekstrim suatu fungsi *f* tiga peubah, terhadap dua kendala *g(x,y,z)* = 0 dan *h(x,y,z)* = 0, maka kita pecahkan persamaan-persamaan :

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z), \qquad g(x, y, z) = 0\,, \quad h(x, y, z) = 0$$

Untuk *x,y,z,* λ, μ dengan λ, μ adalah pengali-pengali Lagrange. Ini setara terhadap pencarian penyelesaian system lima persamaan simultan dalam peubah-peubah x, y, z, λ, μ

(1) $f_x(x, y, z) = \lambda g_x(x, y, z) + \mu h_x(x, y, z)$

(2) $f_y(x, y, z) = \lambda g_y(x, y, z) + \mu h_y(x, y, z)$

(3) $f_z(x, y, z) = \lambda g_z(x, y, z) + \mu h_z(x, y, z)$

(4) $g(x, y, z) = 0$

(5) h $h(x, y, z) = 0$

Dari penyelesaian system ini kita akan peroleh titik-titik kritis.

Contoh 8

Tentukan nilai-nilai maksimum dan minimum dari

$f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ pada elips yang merupakan perpotongan tabung $x^2 + y^2 = 2$ dan bidang $y + z = 1$

Penyelesaian :

Perhatikan bahwa kita ingin memaksimumkan dan meminimumkan $f(x, y, z)$ terhadap $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0$ dan $h(x, y, z) = y + z - 1 = 0$

Persamaan-persamaan Lagrange adalah

(1) $1 = 2\lambda x$

(2) $2 = 2\lambda y + \mu$

(3) $3 = \mu$

(4) $X^2 Y^2 - 2 = 0$

(5) $Y + Z - 1 = 0$

Dari (1), maka $x = 1/2\lambda$,dari pers (2) dan (3), $y = -1/2\lambda$.

Dengan pers (4), maka $\lambda = \pm\frac{1}{2}$

Jika $\lambda = \frac{1}{2}$, maka titik kritis (*x*,*y*,*z*) = (1,-1,2)

Jika $\lambda = -\frac{1}{2}$, maka titik kritis (*x*,*y*,*z*) = (-1,1,0)

Perhatikan bahwa *f*(1,-1,2)=5 adan *f*(-1,1,0)=1

Jadi nilai maksimum adalah 5 dan nilai minimum adalah 1

SOAL – SOAL LATIHAN

1. Tentukan nilai minimum $f(x, y) = x^2 + y^2$, terhadap kendala $g(x, y) = xy - 3 = 0$
2. Tentukan nilai maksimum $f(x, y) = xy,$ terhadap kendala

   $g(x, y) = 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$
3. Tentukan nilai maksimum $f(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2,$ terhadap kendala $x^2 + y^2 = 1$
4. Tentukan nilai minimum $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$ terhadap kendala x – y – 6 =0
5. Tentukan nilai minimum $f(x, y, z) = 4x - 2y + 3z,$ terhadap kendala

   $g(x, y) = xy - 3 = 0$
6. Gunakan metode Lagrange untuk mencari jarak terpendek antara titik asal dan permukaan $x^2 y - z^2 + 9 = 0$
7. Cari maksimum dan minimum $f(x, y, z) = -x + 2y + 2z$ pada elips

   $x^2 + y^2 = 2, y + 2z = 1$
8. Gunakan metode Lagrange untuk mencari maksimum dan minimum $f(x, y) = xy,$ terhadap kendala $x + y^2 = 1$