Matematika Diskrit 1

Poset dan Lattice

Dr. Ahmad Sabri

Universitas Gunadarma

Himpunan terurut

Misalkan R adalah sebuah relasi pada himpunan S dan memenuhi ketiga sifat berikut ini:

- Refleksif (untuk sebarang $a \in S$, berlaku $(a, a) \in R$);
- Antisimetrik (jika $(a, b), (b, a) \in R$, maka $a = b$;
- Transitif (jika $(a, b), (b, c) \in R$, maka $(a, c) \in R$;

mala R disebut sebagai sebuah *pengurutan parsial*, atau singkatnya *relasi urut*. Dalam hal ini R dikatakan sebagai *pengurutan parsial* dari S.

Himpunan terurut parsial

Definisi

Sebuah *himpunan terurut parsial* (*partially ordered set/POSET*) adalah sebuah himpunan di mana elemen-elemennya terurut berdasarkan sebuah relasi urut.

Simbol relasi urut

- Relasi urut yang berlaku pada bilangan riil: $\leq$, $<$.
- Simbol umum: $\precsim$ (dibaca: mendahului), $\prec$ (tepat mendahului).

Relasi urut semu (*quasi order*)

Definisi

Misalkan $\prec$ adalah relasi pada himpunan S dengan dua sifat berikut:

- Irefleksif (untuk sebarang $a \in S$, berlaku $a \not\prec a$).
- Transitif.

Dalam hal ini, $\prec$ disebut sebagai *relasi urut semu* pada S.

Komparabilitas

Definisi

Misalkan a dan b adalah elemen pada poset S. Maka, a dan b dikatakan *dapat dibandingkan* (*comparable*) jika

$$a \precsim b \text{ atau } b \precsim a.$$

Dalam hal lain, a dan b dikatakan *tidak dapat dibandingkan* (*noncomparable*), dan dinotasikan sebagai $a||b$.

Himpunan terurut total

Sebuah himpunan S dikatakan *terurut total* atau *terurut linier* (*totally ordered/linearly ordered*) jika sebarang dua elemen pada S dapat dibandingkan. Dalam hal lain, dikatakan S terurut parsial.

Q1: Apakah subhimpunan dari himpunan terurut parsial dimungkinkan untuk terurut total?
Q2: Apakah subhimpunan dari himpunan terurut total dimungkinkan untuk terurut parsial?

Himpunan terurut total

Sebuah himpunan S dikatakan *terurut total* atau *terurut linier* (*totally ordered/linearly ordered*) jika sebarang dua elemen pada S dapat dibandingkan. Dalam hal lain, dikatakan S terurut parsial.

Q1: Apakah subhimpunan dari himpunan terurut parsial dimungkinkan untuk terurut total?
Q2: Apakah subhimpunan dari himpunan terurut total dimungkinkan untuk terurut parsial?

Pengurutan himpunan hasil kali

Dua cara di antaranya:

- Urutan hasil kali (*product order*): $(a, b) \precsim (a', b')$ jika $a \leq a'$ and $b \leq b'$.
- Urutan leksikografis (urutan kamus/alfabetis): $(a, b) \prec (a', b')$ jika $a < a$ atau jika $a = a'$ dan $b < b'$.

Aturan pengurutan ini dapat diperluas untuk n-tupel.

Pengurutan himpunan hasil kali

Dua cara di antaranya:

- Urutan hasil kali (*product order*): $(a, b) \precsim (a', b')$ jika $a \leq a'$ and $b \leq b'$.
- Urutan leksikografis (urutan kamus/alfabetis): $(a, b) \prec (a', b')$ jika $a < a$ atau jika $a = a'$ dan $b < b'$.

Aturan pengurutan ini dapat diperluas untuk n-tupel.

Penutup Kleene

Definisi

Diberikan A himpunan alfabet terurut linier. A^* disebut *penutup Kleene* dari A, jika A^* terdiri dari semua untai w pada A.

Relasi urut pada penutup Kleene

Relasi urut pada A^*:

- Urutan leksikografis:
  1. Jika $\lambda =$, maka $\lambda < w$ untuk sebarang w tidak-kosong.
  2. Misalkan $u = au'$ dan $v = bc'$ adalah dua untai tidak-kosong, di mana $a, b \in A$ dan $u', v' \in A^*$. Maka $u \prec v$ jika $a < b$ atau jika $a = b$ namun $u' < v'$.
- Urutan *short-lex*: A^* terlebih dahulu diurutkan menurut panjangnya, kemudian secara leksikografis. Secara formal, jika $u, v \in A*$, $u \neq v$, maka berlaku: $u \prec v$ jika $|u| < |v|$ atau jika $|u| = |v|$ dan $u \prec v$.

Relasi urut pada penutup Kleene

Relasi urut pada A^*:

- Urutan leksikografis:
  1. Jika $\lambda =$, maka $\lambda < w$ untuk sebarang w tidak-kosong.
  2. Misalkan $u = au'$ dan $v = bc'$ adalah dua untai tidak-kosong, di mana $a, b \in A$ dan $u', v' \in A^*$. Maka $u \prec v$ jika $a < b$ atau jika $a = b$ namun $u' < v'$.
- Urutan *short-lex*: A^* terlebih dahulu diurutkan menurut panjangnya, kemudian secara leksikografis. Secara formal, jika $u, v \in A*$, $u \neq v$, maka berlaku: $u \prec v$ jika $|u| < |v|$ atau jika $|u| = |v|$ dan $u \prec v$.

Pendahulu dan penerus terdekat

Definisi

Diberikan poset S dan $a, b \in S$ di mana $a < b$. Jika tidak terdapat $c \in$ sehingga $a < c < b$, maka, a dikatakan sebagai *pendahulu terdekat* (*immediate predecessor*) dari b, atau b adalah *penerus terdekat* (*immediate successor*) dari a, atau b adalah *tutup* dari a, dan dinotasikan sebagai $a \ll b$.

Relasi urut pada S terdefinisi jika kita mengetahui semua pasangan elemen $a, b \in S$ di mana $a \ll b$.

Diagram Hasse

Diagram Hasse dari poset berhingga S adalah graf berarah di mana simpulnya adalah elemen dari S dan busurnya menghubungkan simpul a dan b jika $a \ll b$.

Secara alternatif, diagram Hasse dapat digambarkan secara vertikal, di mana simpul a digambarkan di bawah simpul b jika $a < b$, dan kedua simpul tersebut terhubung langsung oleh ruas garis jika $a \ll b$.

Diagram Hasse

Diagram Hasse dari poset berhingga S adalah graf berarah di mana simpulnya adalah elemen dari S dan busurnya menghubungkan simpul a dan b jika $a \ll b$.

Secara alternatif, diagram Hasse dapat digambarkan secara vertikal, di mana simpul a digambarkan di bawah simpul b jika $a < b$, dan kedua simpul tersebut terhubung langsung oleh ruas garis jika $a \ll b$.

Elemen maksimum dan minimum

Definisi

Diberikan poset S. Sebuah elemen $a \in S$ disebut elemen*minimum* [*maksimum*] jika tidak ada elemen lain dengan urutan sebelum [sesudah] a.

Poset hingga memiliki elemen minimum dan maksimum. Sedangkan poset tak-hingga mungkin tidak memiliki elemen maksimum, minimum, atau tidak keduanya.

Elemen minimum dan maksimum dimungkinkan lebih dari satu. Jika hanya terdapat satu elemen minimum [maksimum], maka elemen ini disebut juga elemen *pertama* [*terakhir*].

Elemen maksimum dan minimum

Definisi

Diberikan poset S. Sebuah elemen $a \in S$ disebut elemen*minimum* [*maksimum*] jika tidak ada elemen lain dengan urutan sebelum [sesudah] a.

Poset hingga memiliki elemen minimum dan maksimum. Sedangkan poset tak-hingga mungkin tidak memiliki elemen maksimum, minimum, atau tidak keduanya.

Elemen minimum dan maksimum dimungkinkan lebih dari satu. Jika hanya terdapat satu elemen minimum [maksimum], maka elemen ini disebut juga elemen *pertama* [*terakhir*].

Elemen maksimum dan minimum

Definisi

Diberikan poset S. Sebuah elemen $a \in S$ disebut elemen*minimum* [*maksimum*] jika tidak ada elemen lain dengan urutan sebelum [sesudah] a.

Poset hingga memiliki elemen minimum dan maksimum. Sedangkan poset tak-hingga mungkin tidak memiliki elemen maksimum, minimum, atau tidak keduanya.

Elemen minimum dan maksimum dimungkinkan lebih dari satu. Jika hanya terdapat satu elemen minimum [maksimum], maka elemen ini disebut juga elemen *pertama* [*terakhir*].

Enumerasi konsisten

Definisi

Diberikan poset S. *Enumerasi konsisten* adalah sebuah fungsi $f : S \to N$ di mana $f(a) < f(b)$ untuk semua $a, b \in S$ di mana $a < b$.

Teorema

Terdapat enumerasi konsisten untuk sebarang poset hingga S.

Enumerasi konsisten

Definisi

Diberikan poset S. *Enumerasi konsisten* adalah sebuah fungsi $f : S \to N$ di mana $f(a) < f(b)$ untuk semua $a, b \in S$ di mana $a < b$.

Teorema

Terdapat enumerasi konsisten untuk sebarang poset hingga S.

Supremum

Definisi

Diberikan A subhimpunan dari poset S. Sebuah elemen $M \in S$ disebut *batas atas* (*upper bound*) dari A jika untuk semua $x \in A$ berlaku $x \precsim M$. Lebih lanjut, jika sebuah batas atas dari A mendahului batas atas A lainnya, maka batas atas ini disebut *supremum* dari A, dan dinotasikan sebagai $\sup(A)$.

Istilah lain supremum: batas atas terkecil.

Infimum

Definisi

Diberikan A subhimpunan dari poset S. Sebuah elemen $m \in S$ disebut *batas bawah* (*lower bound*) dari A jika untuk semua $x \in A$ berlaku $m \precsim x$. Lebih lanjut, jika sebuah batas bawah dari A mendahului batas bawah A lainnya, maka batas bawah ini disebut *infimum* dari A, dan dinotasikan sebagai $\inf(A)$.

Istilah lain infimum: batas atas terbesar.

Relasi-relasi urut yang isomorfis

Diberikan poset X dan Y. Sebuah fungsi injektif (satu-satu) $f : X \to Y$ disebut *pemetaan keserupaan* (*similarity mapping*) dari X ke Y jika f mempertahankan relasi urut, yaitu dengan terpenuhinya dua kondisi berikut:

1. Jika $a \precsim a'$ maka $f(a) \precsim f(a')$.
2. Jika $a || a'$, maka $f(a) || f(a')$.

Latis (*Lattice*)

Definisi

Sebuah *latis* (kisi) L adalah sebuah poset di mana $\inf(a, b)$ dan $\sup(a, b)$ ada untuk sebarang $a, b \in L$.

Dalam konteks latis, infimum disebut *meet*, dan supremum disebut *join*.

Pendefinisian latis secara aksioma

Diberikan L sebuah himpunan tidak kosong dan tertutup terhadap operasi $\wedge$ (meet) dan $\vee$ (join). Maka, L adalah sebuah latis jika, untuk $(a, b, c \in L)$, ketiga aksioma berikut terpenuhi:

1. $a \wedge b = b \wedge a$, dan $a \vee b = b \vee a$ (komutatif)
2. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$, dan $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ (asosiatif)
3. $a \wedge (a \vee b) = a$ dan $a \vee (a \wedge b) = a$ (absorpsi)

Jika latis L juga memenuhi aksioma hukum distributif

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \text{ dan } a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

maka L disebut latis distributif.

Pendefinisian latis secara aksioma

Diberikan L sebuah himpunan tidak kosong dan tertutup terhadap operasi $\wedge$ (meet) dan $\vee$ (join). Maka, L adalah sebuah latis jika, untuk $(a, b, c \in L)$, ketiga aksioma berikut terpenuhi:

1. $a \wedge b = b \wedge a$, dan $a \vee b = b \vee a$ (komutatif)
2. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$, dan $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ (asosiatif)
3. $a \wedge (a \vee b) = a$ dan $a \vee (a \wedge b) = a$ (absorpsi)

Jika latis L juga memenuhi aksioma hukum distributif

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \text{ dan } a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

maka L disebut latis distributif.

Pendefinisian latis secara aksioma

Diberikan L sebuah himpunan tidak kosong dan tertutup terhadap operasi $\wedge$ (meet) dan $\vee$ (join). Maka, L adalah sebuah latis jika, untuk $(a, b, c \in L)$, ketiga aksioma berikut terpenuhi:

1. $a \wedge b = b \wedge a$, dan $a \vee b = b \vee a$ (komutatif)
2. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$, dan $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ (asosiatif)
3. $a \wedge (a \vee b) = a$ dan $a \vee (a \wedge b) = a$ (absorpsi)

Jika latis L juga memenuhi aksioma hukum distributif

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \text{ dan } a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

maka L disebut latis distributif.

Pendefinisian latis secara aksioma

Diberikan L sebuah himpunan tidak kosong dan tertutup terhadap operasi $\wedge$ (meet) dan $\vee$ (join). Maka, L adalah sebuah latis jika, untuk $(a, b, c \in L)$, ketiga aksioma berikut terpenuhi:

1. $a \wedge b = b \wedge a$, dan $a \vee b = b \vee a$ (komutatif)
2. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$, dan $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ (asosiatif)
3. $a \wedge (a \vee b) = a$ dan $a \vee (a \wedge b) = a$ (absorpsi)

Jika latis L juga memenuhi aksioma hukum distributif

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \text{ dan } a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

maka L disebut latis distributif.

Relasi urut pada latis

Diberikan latis L, urut parsial pada L didefinisikan sebagai:

$$a \precsim b \text{ jika } a \wedge b = a$$

analog dengan

$$a \precsim b \text{ jika } a \vee b = b$$

Sublatis

Definisi

Misalkan M adalah subhimpunan tidak kosong dari latis L. Maka, M adalah *sublatis* dari L jika M adalah latis.

Definisi

Dua latis L dan L' dikatakan *isomorfis* jika terdapat korespondensi satu-satu $f : L \to L'$ sedemikian sehingga

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) \text{ dan } f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$$

untuk sebarang $a, b \in L$.

Sublatis

Definisi

Misalkan M adalah subhimpunan tidak kosong dari latis L. Maka, M adalah *sublatis* dari L jika M adalah latis.

Definisi

Dua latis L dan L' dikatakan *isomorfis* jika terdapat korespondensi satu-satu $f : L \to L'$ sedemikian sehingga

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) \text{ dan } f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$$

untuk sebarang $a, b \in L$.

Komplemen

Definisi

Diberikan L latis berbatas dengan batas bawah 0 dan batas atas I, dan $a \in L$. Sebuah elemen $x \in L$ dikatakan *komplemen* dari a jika

$$a \vee x = I \text{ dan } a \wedge x = 0.$$

Teorema

Diberikan L latis distributif berbatas. Komplemen dari setiap elemen di L , jika ada, adalah unik.

Komplemen

Definisi

Diberikan L latis berbatas dengan batas bawah 0 dan batas atas I, dan $a \in L$. Sebuah elemen $x \in L$ dikatakan *komplemen* dari a jika

$$a \vee x = I \text{ dan } a \wedge x = 0.$$

Teorema

Diberikan L latis distributif berbatas. Komplemen dari setiap elemen di L , jika ada, adalah unik.

Latis komplemen

Sebuah latis L dikatakan memiliki komplemen jika L berbatas dan setiap elemen di L memiliki komplemen