PEMBAHASAN
SOAL UTS ALJABAR LINIER
TAHUN 2016/2017

1. Syarat Bebas Linier

   $k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + ….. + k_nu_n = 0$

   $k_1 = k_2 = k_3 = ….. = k_n = 0$

   a. {[2,4,5], [2,6,7], [2p,4p,5p]}

   u_1 = [2,4,5]

   u_2 = [2,6,7]

   u_3 = [2p,4p,5p]

   ❖ SPL

   $$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2p \\ 4 & 6 & 4p \\ 5 & 7 & 5p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} H_{1(1/2)}H_{21(-4)}H_{31(-5)}H_{32(-1)}H_{2(1/2)}H_{12(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   $k_1 + pk_3 = 0$ dan $k_2 = 0$, karena vektor u_3 merupakan kelipatan dari vektor u_1, maka nilai dari $k_1 = k_3$, dan dari persamaan tersebut didapat nilai dari $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, maka vektor tersebut termasuk vektor bebas linier.

   b. {[2,-1,3], [1,1,2], [4,-5,5]}

   u_1 = [2,-1,3]

   u_2 = [1,1,2]

   u_3 = [4,-5,5]

   ❖ SPL

   $$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} H_{12(1)}H_{21(1)}H_{31(-3)}H_{2(1/3)}H_{32(4)}H_{12(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   $k_1 + 3k_3 = 0$ dan $k_2 - 2k_3 = 0$, dari persamaan tersebut didapat $k_1 = -\frac{3}{2} k_2$

   karena syarat bebas linier tidak terpenuhi maka himpunan vektor tersebut tidak bebas linier.

2. $$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 11 & 25 & 4 & 6 \\ 1 & 21 & 31 & 8 & 2 \\ 4 & 32 & 56 & 12 & 8 \end{bmatrix} H_{51(-2)}H_{42(1)}H_{32(3)}H_{21(1/2)}H_{54(-1)}H_{43(-1)}H_{32(-4)} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 & 1 & 4 \\ 0 & 6{,}5 & 8{,}5 & 2{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Karena bentuk eselonnya adalah $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 & 1 & 4 \\ 0 & 6{,}5 & 8{,}5 & 2{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ maka ranknya adalah 2.

3. $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

   Dengan menggunakan metode kofaktor, pada pembahasan ini dipilih kolom satu.

   $(2)(a) - (0)(a^2 – a + 1) + (1)(a^2 – a + 1) – (0)(a^2 – a + 1) = 3$

   $a^2 + a + 1 = 3$

   $a^2 + a - 2 = 0$

   Dari persamaan diatas didapatkan nilai a = -2 atau a = 1.

4. Diketahui matriks A = matriks B maka didapatkan nilai x = 6, y = 12, z = 16, maka

A = B = $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 12 \\ 8 & 48 & 11 \end{bmatrix}$

❖ Mencari matriks B^T

$B^T = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 48 \\ 3 & 12 & 11 \end{bmatrix}$

❖ Menghitung matriks AB^T

$(AB^T) = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 12 \\ 8 & 48 & 11 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 48 \\ 3 & 12 & 11 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 49 & 74 & 169 \\ 74 & 185 & 364 \\ 177 & 375 & 2489 \end{bmatrix}$

❖ Menghitung adjoint dari matriks AB^T

$A_{11} = M_{11} = 323965$

$A_{12} = -M_{12} = -119758$

$A_{13} = M_{13} = -4995$

$A_{21} = -M_{21} = -120811$

$A_{22} = M_{21} = 92048$

$A_{23} = -M_{23} = -5277$

$A_{31} = M_{31} = -4329$

$A_{32} = -M_{32} = -5330$

$A_{33} = M_{33} = 3589$

$\text{adj}(AB^T) = \begin{bmatrix} 323965 & -120811 & -4329 \\ -119758 & 92048 & -5330 \\ -4995 & -5277 & 3589 \end{bmatrix}$

❖ Menghitung determinan matriks AB^T

$\text{Det}(AB^T) = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$

$= (177)(-4995) + (375)(-5277) + (2489)(3589)$

$= 6070031$

❖ Menghitung invers dari matriks AB^T

$$(AB^T)^{-1} = \frac{\text{adj}\begin{bmatrix} 49 & 74 & 169 \\ 74 & 185 & 364 \\ 177 & 375 & 2489 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} 49 & 74 & 169 \\ 74 & 185 & 364 \\ 177 & 375 & 2489 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 323965 & -120811 & -4329 \\ -119758 & 92048 & -5330 \\ -4995 & -5277 & 3589 \end{bmatrix}}{6070031}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}0533 & -0{,}0199 & -0{,}0007 \\ -0{,}0197 & 0{,}0151 & -0{,}0008 \\ -0{,}0008 & -0{,}0008 & 0{,}0005 \end{bmatrix}$$