BAB III
INTEGRAL LIPAT DUA

Bahasan:

- ✓ Integral lipat dua atas daerah persegipanjang
- ✓ Integral lipat dua atas daerah sebarang
- ✓ Integral lipat dua dalam koordinat kutub

➢ Integral lipat dua atas daerah persegipanjang

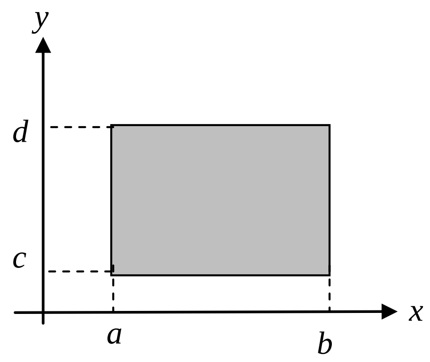
Integral Riemann, dibentuk berdasarkan partisi P pada interval $[a,b]$, yaitu membagi $[a,b]$ menjadi interval bagian yang panjangnya $\Delta x_k, k = 1, 2, \ldots, n.$ dan menuliskan

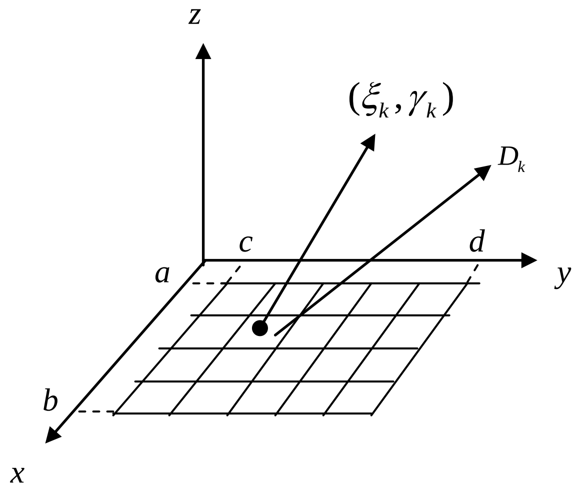
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \, .$$

Jika $f(x) \geq 0$ maka $\int_a^b f(x)dx$ menyatakan luas daerah dibawah kurva $y = f(x)$ antara a dan b.

Diberikan D suatu persegipanjang dengan sisi-sisi sejajar sumbu-sumbu koordinat, yaitu :

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$





soli_erf@yahoo.com

Dibentuk suatu partisi P pada D dengan membuat garis-garis sejajar sumbu x dan sumbu y.

Persegipanjang D dibagi menjadi n buah persegipanjang kecil, namakan $D_k, k = 1, 2, \ldots, n$ dengan panjang Δx_k dan lebar Δy_k. Sehingga luas persegipanjang D_k, yaitu $\Delta A_k = \Delta x_k . \Delta y_k$.

Pada setiap persegipanjang D_k diambil titik tengah (ξ_k, γ_k) dan dibentuk jumlahan Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \gamma_k) \Delta A_k .$$

Definisi : Integral lipat dua

Diberikan f fungsi dua peubah yang terdefinisi pada persegipanjang tertutup D. Jika

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \gamma_k) \Delta A_k$$

ada, maka f dapat terintegralkan pada D. Lebih lanjut $\iint_D f(x,y)\, dA$ disebut integral lipat dua f pada D, dan

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \gamma_k) \Delta A_k .$$

Jika $f(x,y) \geq 0$ maka $\iint_D f(x,y)\, dA$ menyatakan volume benda pejal di bawah permukaan $z = f(x,y)$ dan di atas persegipanjang D.

Sifat-sifat integral lipat dua

a. Integral lipat dua bersifat linear, yaitu :

(i) $$\iint_D cf(x,y)\, dA = c \iint_D f(x,y)\, dA$$

(ii) $$\iint_D \left(f(x,y) + g(x,y) \right) dA = \iint_D f(x,y)\, dA + \iint_D g(x,y)\, dA$$

b. Integral lipat dua bersifat aditif pada persegipanjang.

$$\iint_{D = D_1 \cup D_2} f(x,y)\, dA = \iint_{D_1} f(x,y)\, dA + \iint_{D_2} f(x,y)\, dA$$

c. Sifat perbandingan

soli_erf@yahoo.com

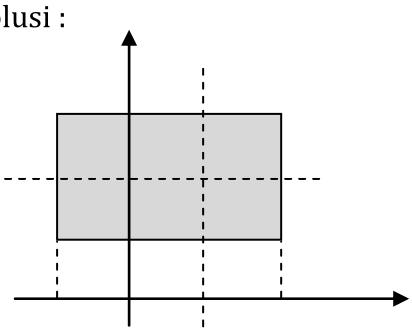
Jika $f(x,y) \le g(x,y)$ untuk setiap $(x,y) \in D$ maka

$$\iint_D f(x,y)dA \le \iint_D g(x,y)dA$$

Contoh 1

Carilah nilai hampiran untuk $\iint_D (2x^2 - 3y)\, dA$ dengan D adalah daerah segiempat yang titik-titik pojoknya $(-1,1)$ dan $(2,3)$. Ambil partisi P yang dibentuk oleh garis $x = 0,\ x = 1,$ dan $y = 2$, dan ambil (ξ_k, γ_k) titik pusat daerah bagian ke-*k.*

Solusi :



Diketahui $f(x,y) = 2x^2 - 3y$.

Dari setiap persegipanjang diambil titik tengah yaitu,

$$\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right),\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right),\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right), \text{dan} \left(-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right).$$

dengan $\Delta x_k = 1$ dan $\Delta y_k = 1$ maka $\Delta A_k = \Delta x_k . \Delta y_k = 1$.

Diperoleh

$$\iint_D (2x^2 - 3y)dA = \sum_{k=1}^{6} f(\xi_k, \gamma_k)\Delta A_k$$

$$= f\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right).1 + f\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right).1 + f\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right).1 + f\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right).1 + f\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right).1 + f\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right).1$$

$$= -4 - 4 + 0 - 3 - 7 - 7 = -25.$$

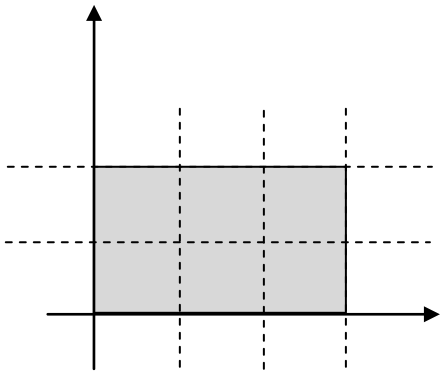
Contoh 2

Tentukan nilai hampiran volume benda yang dibatasi oleh permukaan

$f(x,y) = 4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2$, bidang $x = 3,\ y = 2$ dan ketiga bidang koordinat.

soli_erf@yahoo.com

Diambil partisi P pada bidang xy dengan garis $x=1, x=2,$ dan $y=1$, dan ambil (ξ_k, γ_k) titik pusat daerah bagian ke-*k.*



Solusi:

Diketahui $f(x,y)=4-\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{16}y^2$

Diambil titik-titik tengah (ξ_k, γ_k) dari tiap

Persegipanjang, yaitu

$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right),\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right),$ dan $\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$

dengan $\Delta x_k = 1$ dan $\Delta y_k = 1$ maka $\Delta A_k = \Delta x_k . \Delta y_k = 1$.

Diperoleh

$$V=\iint_D (4-\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{16}y^2)\, dA = \sum_{k=1}^{6} f(\xi_k,\gamma_k)\Delta A_k$$

$$= f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).1+f\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right).1+f\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right).1+f\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right).1+f\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right).1+f\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right).1$$

$$=24-\frac{695}{288}=21,59 \text{ satuan kubik.}$$

Nilai hampiran isi adalah 21,59 satuan kubik.

Latihan

1. Carilah nilai hampiran $\iint_D 3x-3y+1\, dA$ dengan D adalah daerah segiempat dengan titik sudut $(0,-2)$ dan $(3,0)$. Ambil partisi P yang dibentuk garis $x=1, x=2,$ dan $y=-1$, dan (ξ_k, γ_k) titik pusat daerah bagian ke-*k.*
2. Tentukan nilai hampiran $\iint_D y^2-4x\, dA$ dengan D adalah daerah segiempat dengan titik sudut $(-1,0)$ dan $(1,3)$. Ambil partisi P yang dibentuk oleh garis $x=0,\ y=1,\ y=2$ dan (ξ_k, γ_k) titik tengah daerah bagian ke-*k.*
3. Diberikan f fungsi tangga, yaitu :

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 3, 0\le y<1\\ 2 & 0\le x\le 3, 1\le y<2\\ 3 & 0\le x\le 3, 2\le y\le 3\end{cases}$$

Hitung $\iint_D f(x,y)dA$ dengan $D=\{(x,y): 0\le x\le 3, 0\le y\le 3\}$.

soli_erf@yahoo.com

- Integral lipat dua atas daerah persegipanjang sebagai volume

  Diberikan f fungsi dua peubah yang terdefinisi di daerah tertutup D pada bidang *xy*, dan $f(x,y)\geq 0, \forall(x,y)\in D$. Jika V adalah volume (isi) benda S dengan D sebagai alasnya dan $f(x,y)$ sebagai tingginya maka

$$V=\iint_D f(x,y)dA.$$

Diberikan persegipanjang D, $D=\{(x,y): a\leq x\leq b, c\leq y\leq d\}$

Maka

$$\begin{aligned} V &= \iint_D f(x,y)dA \\ &= \int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx \\ &= \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx \end{aligned}$$

Jadi $\iint_D f(x,y)dA=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$, atau $\iint_D f(x,y)dA=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$.

Contoh 3

Hitung $\int_0^3\left(\int_1^2 (2x+3y)dx\right)dy$ dan $\int_1^2\left(\int_0^3 (2x+3y)dy\right)dx$.

Solusi:

Pada integral sebelah dalam, y dipandang sebagai konstanta.

$\int_1^2 (2x+3y)dx = x^2+3yx\Big|_1^2 = (2^2+3y2)-(1^2+3y1)=3+3y$.

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} \int_0^3\left(\int_1^2 (2x+3y)dx\right)dy &= \int_0^3 (3+3y)dy = 3y+\frac{3}{2}y^2\Big|_0^3 \\ &= (3.3+\frac{3}{2}(3)^2)-(3.0+\frac{3}{2}(0)^2)=9+\frac{27}{2}=\frac{45}{2}. \end{aligned}$$

Pada integral sebelah dalam, x dipandang sebagai konstanta.

soli_erf@yahoo.com

$$\int_0^3 (2x+3y)dy = 2xy + \frac{3}{2}y^2\Big|_0^3 = \left(2.x.3 + \frac{3}{2}(3)^2\right) - \left(2x.0 + \frac{3}{2}(0)^2\right) = 6x + \frac{27}{2}$$

Sehingga,

$$\int_1^2 \left(\int_0^3 (2x+3y)dy\right)dx = \int_1^2 \left(6x + \frac{27}{2}\right)dx$$

$$= \frac{6}{2}x^2 + \frac{27}{2}x\Big|_1^2 = \left(3(2)^2 + \frac{27}{2}(2)\right) - \left(3(1)^2 + \frac{27}{2}(1)\right) = 9 + \frac{27}{2} = \frac{45}{2}.$$

Contoh 4

Tentukan volume benda pejal yang dibatasi oleh permukaan $z = 4 - x^2 - y$ dan di bawah oleh persegipanjang $D = \{(x,y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}$.

Solusi:

$$V = \iint_D (4 - x^2 - y)dA = \int_0^2\int_0^1 (4 - x^2 - y)dxdy$$

$$= \int_0^2 \left(4x - \frac{1}{3}x^3 - yx\Big|_0^1\right)dy = \int_0^2 \left(4 - \frac{1}{3} - y\right)dy$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{11}{3} - y\right)dy = \frac{11}{3}y - \frac{1}{2}y^2\Big|_0^2 = \frac{22}{3} - 2 = \frac{16}{3}.$$

Latihan

1. Hitung integral lipat berikut:

   a. $\int_1^2\int_0^2 x^2 y\, dydx$ c. $\int_0^{\ln 3}\int_0^{\ln 2} e^{x+y}\, dydx$ e. $\int_0^{\pi}\int_0^1 x\sin y\, dxdy$

   b. $\int_{-1}^1\int_1^2 (x^2+y^2)\, dxdy$ d. $\int_0^1\int_0^2 \frac{y}{1+x^2}\, dydx$ f. $\int_0^3\int_0^1 2x\sqrt{x^2+y}\, dxdy$

2. Hitung integral lipat dua pada D

   a. $\iint_D xy^3 dA \quad D = \{(x,y): 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$

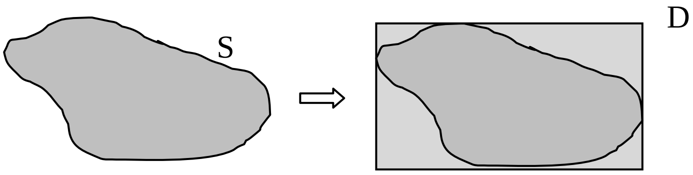
   b. $\iint_D \sin(x+y)dA \quad D = \left\{(x,y): 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$

3. Tentukan volume benda pejal yang dibatasi oleh permukaan $z = x + y + 1$ atas $D = \{(x,y): 0 \le x \le 1, 1 \le y \le 3\}$.

- Integral lipat dua atas daerah sebarang

Diberikan sebarang himpunan S tertutup dan terbatas. Kelilingi S dengan persegipanjang D yang sisi-sisinya sejajar sumbu koordinat. Andaikan $f(x,y)$ terdefinisi pada S dan $f(x,y)=0$ pada D diluar S. Dikatakan f dapat terintegral pada S jika f dapat terintegral pada D, dan ditulis

$$\iint_S f(x,y)dA = \iint_D f(x,y)dA.$$



Himpunan x sederhana dan y sederhana

- Himpunan S adalah y sederhana jika terdapat fungsi-fungsi kontinu ϕ_1 dan ϕ_2 pada $[a,b]$ sehingga

$$S=\{(x,y): \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x), a \le x \le b\}$$

- Himpunan S adalah x sederhana jika terdapat fungsi-fungsi kontinu ψ_1 dan ψ_2 pada $[c,d]$ sehingga

$$S=\{(x,y): \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), c \le y \le d\}$$

Diberikan fungsi $f(x,y)$ dan himpunan S

(i) Jika S himpunan y sederhana, yaitu $S=\{(x,y): \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x), a \le x \le b\}$ maka

$$\iint_S f(x,y)dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dydx$$

(ii) Jika S himpunan x sederhana, yaitu $S=\{(x,y): \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), c \le y \le d\}$ maka

$$\iint_S f(x,y)dA = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dxdy.$$

Contoh 1

Hitung integral lipat $\int_0^1 \int_{-x}^{x^2} (4x+10y)dydx$.

Solusi:

$$\int_0^1\int_{-x}^{x^2}(4x+10y)dydx=\int_0^1\left(4xy+5y^2\Big|_{-x}^{x^2}\right)dx=\int_0^1\left(\left(4x^3+5x^4\right)-\left(-4x^2+5x^2\right)\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(4x^3+5x^4-x^2\right)dx=x^4+x^5-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{5}{3}.$$

Jika $f(x,y)=1$ pada D, maka integral lipat dua f pada D merupakan **luas daerah** D.

Contoh 2

Hitunglah luas keping tipis $D=\{(x,y):0\le x\le 2, x\le y\le 2x\}$.

Solusi:

$$L=\int_0^2\int_x^{2x}dydx=\int_0^2\left(y\Big|_x^{2x}\right)dx=\int_0^2\left(x\right)dx=2 \text{ satuan luas.}$$

Contoh 3

Carilah luas daerah pada bidang xy yang dibatasi oleh kurva $y=x^2$ dan $y=4x-x^2$.

Solusi:

Perpotongan kurva $y=x^2$ dan $y=4x-x^2$, yaitu

$$x^2=4x-x^2 \quad\Leftrightarrow\quad 2x^2+4x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0\vee x=2$$

Jadi daerah $D=\left\{(x,y):0\le x\le 2, x^2\le y\le 4x-x^2\right\}$, sehingga luasnya:

$$L=\int_0^2\int_{x^2}^{4x-x^2}dydx=\int_0^2\left(y\Big|_{x^2}^{4x-x^2}\right)dx=\int_0^2 4x-2x^2dx=2x^2-\frac{2}{3}x^3\Big|_0^2=(8-\frac{16}{3})=\frac{8}{3} \text{ satuan luas.}$$

Contoh 4

Hitung volume prisma yang alasnya berupa segitiga di bidang xy yang dibatasi oleh sumbu-x, garis $y=x$, dan garis $x=1$, serta bagian atasnya berada pada bidang $x+y+z=3$.

Solusi:

Sumbu-x berarti $y=0$. Batas y, yaitu $0\le y\le x$.

Karena $y=0$, maka $x=y=0$. Batas x, yaitu $0\le x\le 1$.

$x+y+z=3$ maka $z=3-x-y$. Sehingga volumenya:

soli_erf@yahoo.com

$$V=\int_0^1\int_0^x (3-x-y)dydx=\int_0^1\left(3y-xy-\frac{1}{2}y^2\Big|_0^x\right)dx=\int_0^1 3x-\frac{3}{2}x^2dx$$

$$=\int_0^1 3x-\frac{3}{2}x^2dx=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{6}x^3\Big|_0^1=1.$$

Latihan

1. Hitung integral berikut:

   a. $\int_0^1\int_0^{3x} x^2dydx$ c. $\int_{-1}^{3}\int_0^{3y}(x^2+y^2)\,dxdy$

   b. $\int_1^2\int_0^{x-1} y\,dydx$ d. $\int_1^5\int_0^x \frac{3}{x^2+y^2}\,dydx$

2. Hitung integral berikut:

   a. $\iint_S xydA$ S adalah daerah yang dibatasi kurva $y=x^2$ dan $y=1$

   b. $\iint_S xdA$ S adalah daerah yang dibatasi oleh $y=x$ dan $y=x^3$

   c. $\iint_S (x^2-xy)dA$ S adalah daerah antara $y=x$ dan $y=3x-x^2$.

3. Tentukan volume bidang empat yang dibatasi oleh bidang-bidang koordinat dan bidang $3x+6y+4z-12=0$.

4. Hitung integral $\int_0^4\int_{\frac{x}{2}}^2 e^{y^2}dydx$.

soli_erf@yahoo.com

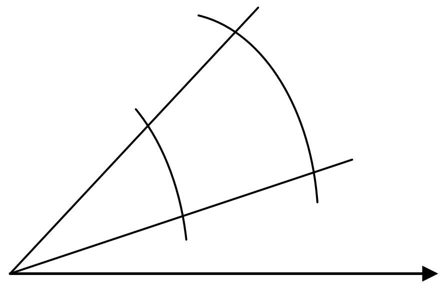
- Integral lipat dua dalam koordinat kutub

  Misalkan R adalah daerah yang dibatasi sinar-sinar $\theta = \alpha, \theta = \beta, \alpha < \beta$ dan oleh lingkaran $r = a, r = b, a < b$. Jika $z = f(x, y)$ menentukan suatu permukaan atas R dan f fungsi kontinu dan tak negatif, maka volume V dari benda pejal di bawah permukaan ini dan di atas R diberikan oleh

  $$V = \iint_R f(x, y)dA.$$

  Dalam koordinat kutub suatu persegipanjang R berbentuk :

  $R = \{(r, \theta) : a \le r \le b, \alpha \le \theta \le \beta\}$ dengan $a \ge 0, \beta - \alpha \le 2\pi$.



  Persamaan permukaan ditulis sebagai :

  $$z = f(x, y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = F(r, \theta).$$

  Volume V diberikan oleh:

  $$V = \iint_R F(r, \theta)\, r\, dr\, d\theta = \iint_R f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, dr\, d\theta \ .$$

  Dengan demikian diperoleh rumusan :

  $$\iint_R f(x, y)\ dA = \iint_R f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, dr\, d\theta \ .$$

  Contoh 1

  Tentukan volume V benda padat di bawah permukaan $z = e^{x^2+y^2}$ dan di atas persegipanjang kutub $R = \left\{(r, \theta) : 1 \le r \le 3,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\right\}$.

  Solusi :

  Karena $x^2 + y^2 = r^2$ maka

  $$V = \iint_R e^{x^2+y^2} dA = \int_0^{\pi/4} \left[\int_1^3 e^{r^2} r\, dr \right] d\theta$$

soli_erf@yahoo.com

$$= \int_0^{\pi/4} \left[\frac{1}{2} e^{r^2} \right]_1^3 d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}(e^9 - e) d\theta = \frac{1}{2}(e^9 - e)\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}(e^9 - e) .$$

Daerah sebarang himpunan S

Himpunan S adalah r sederhanan jika berbentuk :

$$S = \{(r,\theta) : \phi_1(\theta) \le r \le \phi_2(\theta), \alpha \le \theta \le \beta\} .$$

Himpunan S adalah θ sederhana jika berbentuk :

$$S = \{(r,\theta) : a \le r \le b, \psi_1(r) \le \theta \le \psi_2(r)\} .$$

Contoh 2

Hitung integral $\iint_S y\, dA$ dengan $S = \left\{ (r,\theta) : 2 \le r \le 2(1+\cos\theta), 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \right\}$.

Solusi :

Karena $y = r\sin\theta$ maka

$$\iint_S y\, dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_2^{2(1+\cos\theta)} (r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \sin\theta \right]_2^{2(1+\cos\theta)} d\theta$$

$$= \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((1+\cos\theta)^3 \sin\theta - \sin\theta \right) d\theta$$

$$= \frac{8}{3} \left[-\frac{1}{4}(1+\cos\theta)^4 + \cos\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3} \left[-\frac{1}{4} + 0 - (-4+1) \right] = \frac{22}{3} .$$

Contoh 3

Carilah volume benda pejal di bawah permukaan $z = x^2 + y^2$ di atas bidang xy, dan di dalam tabung $x^2 + y^2 = 2y$.

Solusi:

Diambil $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$ sehingga permukaan $z = x^2 + y^2$ menjadi :

$$z = x^2 + y^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2.1 = r^2 .$$

Persamaan tabung $x^2 + y^2 = 2y$ menjadi :

$$x^2 + y^2 = 2y \quad \Leftrightarrow \quad r^2 = 2r\sin\theta \quad \Leftrightarrow \quad r = 2\sin\theta .$$

soli_erf@yahoo.com

Menentukan batas-batas :

$$0 \le r \le 2\sin\theta \text{ dan } 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

Volume V diberikan oleh :

$$V = 2\iint_S (x^2+y^2)\,dA = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\sin\theta} (r^2)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^{2\sin\theta} d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}(2\sin\theta)^4\, d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\, d\theta$$

$$= 8\left(\frac{3}{8}.\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$$

Latihan

1. Hitung integral berikut:

   a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta$ b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sin\theta} r\, dr\, d\theta$ c. $\int_0^{\pi}\int_0^{\sin\theta} r^2\, dr\, d\theta$

2. Hitung luas daerah S dengan cara menghitung $\iint_S r\, dr\, d\theta$

   a. S daerah di dalam lingkaran $r = 4\cos\theta$ dan luar lingkaran $r = 2$

   b. S daerah kecil yang dibatasi $\theta = \frac{\pi}{6}$ dan $r = 4\sin\theta$.

3. Tentukan nilai integral $\iint_S e^{x^2+y^2}\, dA$ dengan S adalah daerah yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 4$.

soli_erf@yahoo.com