BAB 7
INTEGRAL

- Standar Kompetensi

  Mahasiswa dapat menjelaskan dan menentukan nilai integral.

- Kompetensi dasar
  1. Mahasiswa dapat menjelaskan integral tak tentu dan sifat-sifatnya.
  2. Mahasiswa dapat menentukan nilai integral tak tentu.
  3. Mahasiswa dapat menjelaskan integral tentu dan sifat-sifatnya.
  4. Mahasiswa dapat menentukan nilai integral tentu.

- Pokok Bahasan
  1. Integral tak tentu
  2. Sifat-sifat integral tak tentu
  3. Integral tentu
  4. Sifat-sifat integral tentu

7.1. Integral Tak Tentu

Konsep integral tak tentu diperkenalkan sebagai kebalikan dari pendiferensialan, yaitu bentuk paling umum dari anti turunan. Sedangkan integral tentu diperkenalkan sebagai limit dari jumlahan Riemann dari perhitungan luas daerah tertutup pada bidang datar. Kaitan antara integral dan diferensial dinyatakan sebagai Teorema Dasar Kalkulus.

Untuk fungsi f yang terdefinisi pada interval buka I, maka dapat ditentukan suatu fungsi F yang memenuhi $F' = f$. Fungsi F seperti ini disebut anti turunan dari f.

Definisi

Fungsi F disebut anti turunan dari f pada interval I jika $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in I$.

Teorema

Jika F adalah anti turunan f pada interval I maka bentuk F yang paling umum adalah $F(x)+C$ dengan C adalah konstanta sebarang.

Contoh 7.1

1. Misalkan $f(x)=x^2$ maka anti turunannya adalah $\frac{1}{3}x^3$ sehingga $F(x)=\frac{1}{3}x^3+C$ (sebab turunan dari $F(x)=\frac{1}{3}x^3+C$ adalah $F'(x)=x^2=f(x)$)
2. Misalkan $f(x)=\cos x$ maka anti turunannya adalah $\sin x$ sehingga $F(x)=\sin x+C$ (ingat turunan dari $F(x)=\sin x+C$ adalah $F'(x)=\cos x=f(x)$)

Proses menemukan anti turunan (anti diferensial) dari fungsi f pada I dinamakan integral tak tentu dari fungsi f pada interval I, dan ditulis dengan lambang

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

Contoh 7.2

Berdasarkan Contoh 7.1 diperoleh

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C, \text{ dan}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

7.2. Sifat-sifat integral tak tentu

Sifat-sifat dari integral tak tentu antara lain:

1. Linearitas

   Jika fungsi f dan g mempunyai anti turunan dan α, β konstanta maka

   a. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$

b. $\int \left(f(x) + g(x) \right) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

c. $\int \left(\alpha f(x) + \beta g(x) \right) dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$

2. Jika $y = x^n, n \neq -1$ dan n bilangan rasional maka

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \text{ dan } \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

3. Integral dengan penggantian (substitusi)

Jika g fungsi yang terdiferensialkan pada interval I dan f fungsi yang terdefinisi pada I serta F anti turunan dari f maka dengan memisalkan $g(x) = u$

$$\int f\left(g(x)\right) g'(x) dx = \int f(u) du = F(u).$$

4. Integral fungsi eksponensial

$$\int e^{nx} dx = \frac{1}{n} e^{nx} + C$$

5. Integral fungsi Trigonometri

a. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

b. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

c. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

d. $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + C$

e. $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$

f. $\int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C$

Contoh 7.3 Tentukan integral $\int \left(x^3 + 2x^2 - 5x + 1 \right) dx$.

Solusi:

$$\int \left(x^3 + 2x^2 - 5x + 1 \right) dx = \left(\frac{1}{4} x^4 + \frac{2}{3} x^3 - \frac{5}{2} x^2 + x \right) + C.$$

Contoh 7.4 Tentukan integral $\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int 2 \sin x \cos x \, dx$.

Solusi:

$$\int \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int 2\sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\, dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) + C.$$

Contoh 7.5 Tentukan $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Solusi:

Misalkan $u = x^2+1$ maka $du = 2xdx$.

Jadi $xdx = \frac{1}{2}du$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}u^{-\frac{1}{2}+1}\right) + C = \left(\sqrt{x^2+1}\right) + C$$

Contoh 7.6 Tentukan $\int x^5\sqrt{x^2+1}\, dx$.

Solusi:

Misalkan $u = x^2+1$ maka $du = 2xdx$ dan $x^2 = u-1$

$$\int x^5\sqrt{x^2+1}\, dx = \int x^4\sqrt{x^2+1}\, xdx = \int \left(x^2\right)^2\sqrt{x^2+1}\, xdx = \int (u-1)^2\sqrt{u}\,\frac{1}{2}du$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(u^2-2u+1\right)\sqrt{u}\, du = \frac{1}{2}\int \left(u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right)du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right) + C$$

$$= \left(\frac{1}{7}\left(x^2+1\right)^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{5}\left(x^2+1\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\right) + C.$$

Contoh 7.7 Tentukan integral $\int x^2\cos\left(x^3+1\right)dx$.

Solusi:

Misalkan $u = x^3+1$ maka $du = 3x^2dx$ sehingga $x^2dx = \frac{1}{3}du$

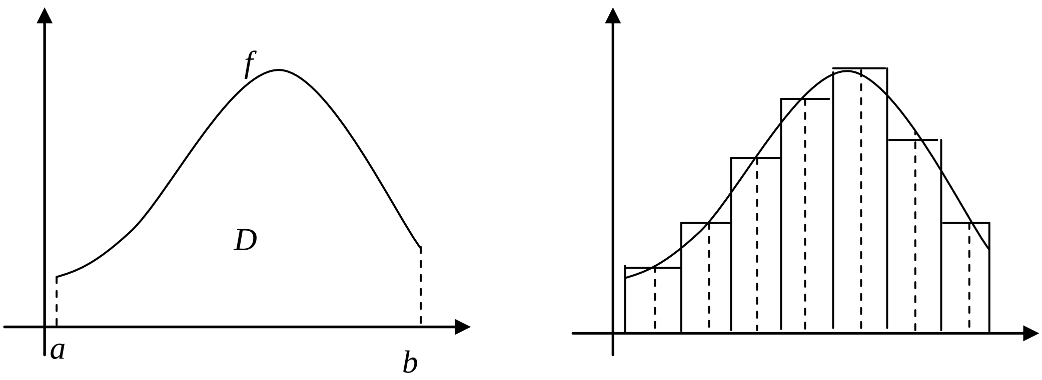
$$\int x^2\cos\left(x^3+1\right)dx = \int (\cos u)\frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\sin u + C = \frac{1}{3}\sin\left(x^3+1\right) + C.$$

Latihan 7.1

1. $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x}} dx$
2. $\int (x^2+1)\sqrt{x^3+3x}\, dx$
3. $\int \sin^5 x\, dx$
4. $\int \cos^4 x \sin x\, dx$
5. $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\, dx$
6. $\int \frac{\ln(x^2)}{x}\, dx$
7. $\int \frac{x^3 \sin(x^2+a^2)}{x^2}\, dx$
8. Tunjukkan bahwa $\int 2|x|\, dx = x|x| + C$

7.3. Integral Tentu

Luas bidang D yang dibatasi oleh fungsi f , garis $x=a$, garis $x=b$, dan sumbu x dengan $f(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$.



Gambar 7.1 Fungsi f pada [*a,b*] dan Jumlahan Riemann

Interval $[a,b]$ dibagi dalam n subinterval yang sama panjang, dengan titik partisinya adalah $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dengan $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

Subinterval $[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \ldots, n$ dengan panjang subinterval $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Panjang partisi dinotasikan dengan $\|p\|$ dan didefinisikan sebagai $\|p\| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$.

Pilih $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ dan bentuk persegipanjang dengan alas Δx_i dan tinggi $f(c_i)$, sehingga luas persegipanjang ke-i adalah $\Delta L_i = f(c_i)\Delta x_i$.

Bila ada n persegipanjang (n subinterval) maka luas kurva D dapat dihampiri dengan n luas persegipanjang tersebut, yaitu

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \quad \text{(disebut jumlahan Riemann dari } f \text{ pada } [a,b]\text{).}$$

Luas yang sebenarnya (luas eksak) dari D dapat diperoleh bila $n \to \infty$ (banyaknya subinterval tak hingga). Hal ini sama saja bila $\|p\| \to 0$.

Jadil

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \lim_{\|p\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i .$$

Jika limit di atas ada, maka dikatakan bahwa fungsi f terintegral pada $[a,b]$ dan ditulis

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|p\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i .$$

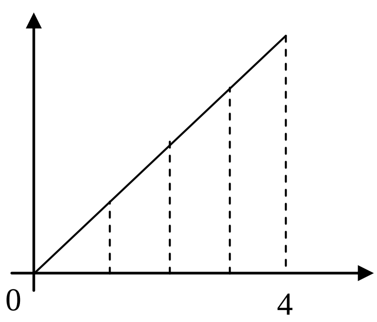
Definisi

Integral tentu dari fungsi f pada $[a,b]$ ditulis $\int_a^b f(x)\,dx$ didefinisikan oleh

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|p\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

asalkan limit ini ada.

Contoh 7.8 Hitunglah $\int_0^4 x\,dx$!



Solusi:

Diketahui $f(x) = x$ pada $[0,4]$.

Kita bagi interval $[0,4]$ ke dalam 4 subinterval dengan panjang $\Delta x_i = 1$ yaitu $[0,1]; [1,2]; [2,3]; [3,4]$.

Kemudian masing-masing kita pilih

titik tengah $\frac{1}{2} \in [0,1]; \frac{3}{2} \in [1,2]; \frac{5}{2} \in [2,3]; \frac{7}{2} \in [3,4]$.

$$\int_0^4 x\,dx = \sum_{i=1}^{4} f(c_i)\Delta x_i = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + f(c_3)\Delta x_3 + f(c_4)\Delta x_4$$

$$= f(\tfrac{1}{2})(1) + f(\tfrac{3}{2})(1) + f(\tfrac{5}{2})(1) + f(\tfrac{7}{2})(1) = \frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+\frac{7}{2} = 8.$$

Jadi $\int_0^4 x\,dx = 8$.

7.4. Sifat-sifat Integral Tentu

Beberapa sifat integral tentu diberikan sebagai berikut.

1. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$, dengan c konstanta sebarang.
2. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$
3. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
4. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
5. $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$
6. Jika $f(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$ maka $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.
7. Jika $f(x) \geq g(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$ maka $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.
8. Jika $m \leq f(x) \leq M$ untuk setiap $x \in [a,b]$ maka $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$.

Teorema Dasar Kalkulus

a. Jika f fungsi kontinu pada $[a,b]$ dan F anti turunan dari f pada $[a,b]$ maka

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

b. Jika f fungsi kontinu pada $[a,b]$ maka $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ terdiferensialkan pada $[a,b]$ dengan $F'(x)=f(x)$ untuk setiap $x\in[a,b]$.

Contoh 7.9 Tentukan nilai integral $\int_0^1 \left(3x^2+x+2\right) dx$.

Solusi:

$$\int_0^1 \left(3x^2+x+2\right) dx=\left(x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right)\Bigg|_0^1$$
$$=\left((1)^3+\frac{1}{2}(1)^2+2(1)\right)-0=\frac{7}{2}.$$

Contoh 7.10 Tentukan nilai integral $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$.

Solusi:

Kita gunakan substitusi, misalkan $u=x^2+9$ maka $du=2x\,dx$ sehingga $x\,dx=\frac{1}{2}du$

$$\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx=\int_0^4 \sqrt{u}\,\frac{1}{2}du=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4$$
$$=\frac{1}{3}\left(x^2+9\right)\sqrt{x^2+9}\Bigg|_0^4$$
$$=\left(\frac{1}{3}\left(4^2+9\right)\sqrt{4^2+9}\right)-\left(\frac{1}{3}\left(0^2+9\right)\sqrt{0^2+9}\right)$$
$$=\frac{1}{3}(25)5-\frac{1}{3}(9)3=\frac{98}{3}.$$

Contoh 7.11 Tentukan nilai integral $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$.

Solusi:

Kita gunakan substitusi trigonometri (teknik pengintegralan dibahas lebih khusus di bab 8), misalkan $x=\tan t$ maka $dx=\sec^2 t\,dt$ sehingga

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\tan^2 t+1}\sec^2 t\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sec^2 t}\sec^2 t\,dt$$

$$= \int_0^1 dt = t\Big|_0^1 = \arctan x\Big|_0^1$$

$$= \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{1}{4}\pi - 0 = \frac{1}{4}\pi\,.$$

Teorema (Teorema Simetri)

a. Jika f fungsi genap maka $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

b. Jika f fungsi ganjil maka $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Contoh 7.12 Hitung $\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos x\,dx$!

Solusi:

Karena $f(x) = \cos x$ fungsi genap ($f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$) maka

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos x\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x\,dx = 2(\sin x)\Big|_0^{\frac{1}{2}\pi} = 2\,.$$

Contoh 7.13 Hitung $\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{x^2+4}\,dx$!

Solusi:

Karena $f(x) = \frac{x^3}{x^2+4}$ fungsi ganjil maka $\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{x^2+4}\,dx = 0$.

Latihan 7.2

Tentukan nilai integral di bawah ini!

1. $\int_{0}^{\sqrt{5}} x\sqrt{9-x^2}\ dx$

2. $\int_{0}^{1} \frac{x+2}{\left(x^2+4x+1\right)^2}\ dx$

3. $\int_{0}^{4} \sqrt{2x+1}\ dx$

4. $\int_{0}^{2} \frac{x^2}{\left(9-x^3\right)^{\frac{3}{2}}}\ dx$

5. $\int_{-2}^{2} 2|x|\ dx$

6. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin x\ dx$

7. $\int_{0}^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

8. $\int_{0}^{2} \frac{x}{\left(x^2+9\right)^2}\ dx$

9. $\int_{-\sqrt[3]{\pi}}^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 \cos\left(x^3\right)\ dx$

10. $\int_{-1}^{1} \left(1+x+x^2+x^3\right)\ dx$

11. $\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin x+\cos x\right)^2\ dx$