

Seri : Modul Diskusi Fakultas Ilmu Komputer



HANDOUT :

**KALKULUS
DASAR**



Oleh :

Tony Hartono Bagio

2010

KATA PENGANTAR

Kalkulus Dasar adalah salah satu mata diskusi di Fakultas Ilmu Komputer Universitas Narotama, buku ini merupakan modul untuk menunjang mata kuliah tersebut, diharapkan buku ini menjadi buku pegangan bagi mahasiswa sebagai modul (hand out) untuk melengkapi isi dari modul ini, saya harap para mahasiswa membaca buku-buku lain yang sejenis, karena modul (hand out) ini sangat jauh dari sempurna.

Modul / hand out dari http://blog.uad.ac.id/aris_thobirin/files/2008/11/xxx.pdf,
xxx.pdf : terdiri dari 7 files, yakni :

- kalkulus1-diktat1.pdf = Bab 1. Pendahuluan.
- kalkulus1-diktat2.pdf = Bab 2. Fungsi dan Limit (Sub bab 2.1 s/d 2.3)
- kalkulus1-diktat2a.pdf = Bab 2. Fungsi dan Limit (Sub bab 2.4 s/d 2.7)
- kalkulus1-diktat3.pdf = Bab 3. Turunan Fungsi.
- kalkulus2-diktat1.pdf = Bab 4. Integral
- kalkulus2-diktat2.pdf = Bab 5. Integral Tertentu (Sub bab 5.1 s/d 5.2.5)
- kalkulus2-diktat3.pdf = Bab 5. Integral Tertentu (Sub bab 5.2.6)

Dari ke 7 files diatas, digabung menjadi satu, dan dapat di download langsung dari <http://tonyhartonobagio.blogspot.com/2010/11/modul-mata-kuliah.html>, pilih Kalkulus Dasar, mudah-mudahan modul/hand out ini dapat berguna bagi semua mahasiswa,

Pembagian diskusi ini dibagi dalam 14 kali pertemuan, yang terdiri dari :

- I. PENDAHULUAN
 - Sistem Bilangan Real
 - Operasi Bilangan
 - Urutan
 - Pertidaksamaan
 - Nilai Mutlak
- II. FUNGSI dan LIMIT
 - Fungsi dan Grafik
 - Operasi pada Fungsi
 - Pengertian Limit
- III. FUNGSI dan LIMIT
 - Teorema Limit
 - Limit Kiri dan :Limit Kanan
 - Limit Tak Hingga
 - Kekontinuan Fungsi
- IV. TURUNAN FUNGSI
 - Pengertian Turunan Fungsi
 - Turunan Fungsi Konstan dan Fungsi Pangkat
- V. TURUNAN FUNGSI

- Sifat - Sifat Turunan
 - Aturan Rantai
- VI. TURUNAN FUNGSI
 - Turunan Fungsi Invers
 - Turunan Fungsi Implisit
 - Turunan Tingkat Tinggi
- VII. TURUNAN FUNGSI
 - Turunan Fungsi Aljabar dan Fungsi Transenden
 - Turunan Fungsi Parameter
- VIII. UJIAN TENGAH SEMESTER
- IX. INTEGRAL
 - Rumus Dasar
 - Integral dengan Subsitusi
- X. INTEGRAL
 - Integral Parsial
 - Integral Arcus Tangen dan Logaritma
- XI. INTEGRAL Fungsi Pecah Rasional
 - Keadaan $N(x) = D'(x)$
 - Keadaan derajat $N(x) \geq$ derajat $D(x)$
 - Keadaan Derajat $N(x) <$ Derajat $D(x)$
- XII. INTEGRAL Fungsi Trigonometri
 - Rumus-rumus Sederhana
 - Bentuk $\int R(\sin x) \cos x \, dx$ dan $\int R(\cos x) \sin x \, dx$
 - Integral dengan memperhatikan rumus-rumus
- XIII. INTEGRAL Fungsi Trigonometri
 - Subsitusi $y = \tan(x/2)$
 - Integral $R(\tan x)$
 - Rumus Reduksi untuk Integral Fungsi Trigonometri
- XIV. INTEGRAL Fungsi Irrasional
 - Rumus Penting
 - Bentuk Irrasional Satu Suku
 - Satu-satunya Bentuk Irrasional
 - Subsitusi Trigonometri
- XV. INTEGRAL TERTENTU
 - Pengertian Integral Tertentu
 - Aplikasi Integral
- XVI. UJIAN AKHIR SEMESTER

Angka Romawi diatas, merupakan jadwal pertemuan, termasuk jadwal Ujian, baik UTS (Ujian Tengah Semester) maupun UAS (Ujian Akhir Semester), sedang jadwal tugas tidak tercantum diatas, melainkan tergantung dari situasi.

Bila para pembaca sekalian ingin memberi tambahan, koreksi atau penyempurnaan, penulis menghaturkan terima kasih sebelumnya, karena modul ini pasti akan menjadi lebih bermanfaat.

Atas perhatiannya dalam membaca modul ini, penulis mengucapkan terima kasih.

Narotama, 20 November 2010



Tony Hartono Bagio
Dosen Fakultas Ilmu Komputer
Universitas Narotama Surabaya

DAFTAR ISI

	Hal
Kata Pengantar	i
Daftar Isi	iv
1. PENDAHULUAN	1
1.1 Sistem Bilangan Real	1
1.2 Operasi Bilangan	3
1.3 Urutan	3
1.4 Pertidaksamaan	4
1.5 Nilai Mutlak	7
2. FUNGSI dan LIMIT	12
2.1 Fungsi dan Grafik	12
2.2 Operasi pada Fungsi	15
2.3 Pengertian Limit	16
2.4 Teorema Limit	23
2.5 Limit Kiri dan :Limit Kanan	31
2.6 Limit Tak Hingga	32
2.7 Kekontinuan Fungsi	34
3. TURUNAN FUNGSI	38
3.1 Pengertian Turunan Fungsi	38
3.2 Turunan Fungsi Konstan dan Fungsi Pangkat	39
3.3 Sifat - Sifat Turunan	40
3.4 Aturan Rantai (untuk Turunan Fungsi Komposisi)	41
3.5 Turunan Fungsi Invers	42
3.6 Turunan Fungsi Implisit	42
3.7 Turunan Tingkat Tinggi	43
3.8 Turunan Fungsi Aljabar dan Fungsi Transenden	44
3.8.1 Turunan Fungsi Rasional	44
3.8.2 Turunan Fungsi Irrasional	44
3.8.3 Turunan Fungsi Trigonometri	45
3.8.4 Turunan Fungsi Siklometri	46
3.8.5 Turunan Fungsi Logaritma	47
3.8.6 Turunan Fungsi Eksponensial	49
3.8.7 Turunan Fungsi Hiperbolik	50

3.9	Turunan Fungsi Parameter	50
4.	INTEGRAL	53
4.1	Rumus Dasar	54
4.2	Integral dengan Subsitusi	55
4.3	Integral Parsial	57
4.4	Integral yang Menghasilkan Arcus Tangen dan Logaritma	59
4.5	Integral Fungsi Pecah Rasional	62
	4.5.1 Keadaan $N(x) = D'(x)$	62
	4.5.2 Keadaan derajat $N(x) \geq$ derajat $D(x)$	62
	4.5.3 Keadaan Derajat $N(x) <$ Derajat $D(x)$	63
4.6	Integral Fungsi Trigonometri	70
	4.6.1 Rumus-rumus Sederhana	70
	4.6.2 Bentuk $\int R(\sin x) \cos x \, dx$ dan $\int R(\cos x) \sin x \, dx$	70
	4.6.3 Integral dengan memperhatikan rumus-rumus	71
	4.6.4 Substitusi $y = \tan(x/2)$	71
	4.6.5 Integral $R(\tan x)$	73
	4.6.6 Rumus Reduksi untuk Integral Fungsi Trigonometri	73
4.7	Integral Fungsi Irrasional	74
	4.7.1 Rumus yang perlu dihafal	74
	4.7.2 Bentuk Irrasional Satu Suku	75
	4.7.3 Satu-satunya Bentuk Irrasional	75
	4.7.4 Subsitusi Trigonometri	75
5.	INTEGRAL TERTENTU	77
5.1	Pengertian Integral Tertentu	77
5.2	Aplikasi Integral	83
	5.2.1 Luas Daerah	83
	5.2.2 Volume Benda Putar	86
	5.2.3 Panjang Kurva	93
	5.2.4 Luas Permukaan Benda Putar	97
	5.2.5 Usaha atau Kerja	101
	5.2.6 Momen dan Pusat Massa (Titik Berat)	104

PENDAHULUAN

1.1 Sistem Bilangan Real

Untuk mempelajari kalkulus perlu memahami bahasan tentang sistem bilangan real, karena kalkulus didasarkan pada sistem bilangan real dan sifat-sifatnya.

Sistem bilangan yang paling sederhana adalah **bilangan asli**, yaitu 1, 2, 3, ... Dengan menggunakan bilangan asli kita dapat menghitung banyaknya buku yang kita miliki, kendaraan yang melalui suatu jalan, orang-orang yang berada dalam suatu ruang dan lain-lainnya. Himpunan semua bilangan asli biasa dinotasikan dengan N. Jadi

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Jika di dalam himpunan semua bilangan asli kita tambahkan semua negatifnya dan nol, maka diperoleh **bilangan-bilangan bulat**, yaitu ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... Himpunan semua bilangan bulat biasa disimbolkan dengan Z. Jadi

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Selanjutnya untuk mengukur besaran-besaran seperti panjang, berat dan arus listrik maka bilangan bulat tidak memadai. Dalam hal ini bilangan bulat tidak dapat memberikan ketelitian yang cukup. Untuk keperluan ini maka dapat digunakan

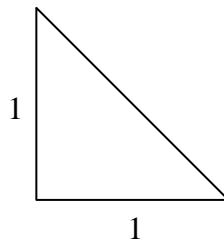
bilangan-bilangan rasional, seperti $\frac{3}{4}, \frac{-2}{5}, \frac{19}{2}$, dan $\frac{7}{8}$. Bilangan rasional

didefinisikan sebagai *bilangan yang dapat ditulis dengan $\frac{a}{b}$ dengan a dan b keduanya bilangan bulat dan $b \neq 0$* . Dengan demikian bilangan-bilangan bulat termasuk bilangan rasional juga. Bilangan bulat 3 merupakan bilangan rasional sebab 3 dapat ditulis sebagai $\frac{6}{2}$. Himpunan semua bilangan rasional biasa

dinotasikan dengan Q. Jadi

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in Z, b \in Z, b \neq 0 \right\}$$

Bilangan rasional yang dapat menjadi ukuran dengan ketelitian yang cukup ternyata masih tidak dapat menjadi ukuran semua besaran misalnya panjang sisi miring segitiga siku-siku berikut.



Gambar 1

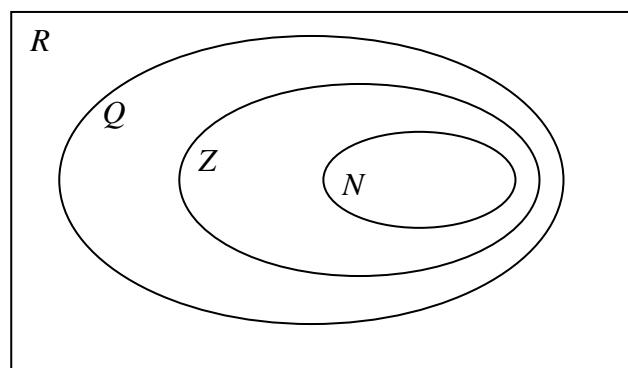
Dengan menggunakan **bilangan irrasional** maka hal tersebut di atas tidak menjadi masalah. Panjang sisi miring segitiga siku-siku tersebut adalah $\sqrt{2}$. Bilangan irrasional yang lain antara lain $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$, e dan π .

Sekumpulan bilangan rasional dan irrasional beserta negatifnya dan nol **bilangan-bilangan real** (bilangan nyata). Himpunan semua bilangan real dinotasikan dengan R .

Hubungan keempat himpunan N , Z , Q , dan R dapat dinyatakan dengan

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

dan digambarkan dengan diagram venn berikut.



Gambar 2

Masih terdapat sistem bilangan yang lebih luas dari system bilangan real yaitu bilangan yang secara umum dapat dinyatakan dalam bentuk $a + b\sqrt{-1}$ dengan a dan b keduanya bilangan bulat, atau $a + bi$ dengan $i = \sqrt{-1}$. Bilangan demikian dinamakan **bilangan kompleks** dan himpunan semua bilangan kompleks dinotasikan dengan C .

Dalam buku ini bilangan kompleks tidak dibicarakan lebih lanjut. Jadi, apabila dalam buku ini disebutkan suatu bilangan tanpa keterangan apapun dimaksudkan adalah bilangan real.

1.2 Operasi Bilangan

Pada R telah dikenal operasi *penjumlahan* dan *perkalian*. Misalkan x dan y bilangan real maka penjumlahan x dan y ditulis $x + y$ dan perkalian x dan y ditulis $x \cdot y$ atau secara singkat ditulis xy . Sifat-sifat operasi penjumlahan dan perkalian pada R adalah sebagai berikut.

- 1) Hukum komutatif: $x + y = y + x$ dan $xy = yx$.
- 2) Hukum asosiatif: $x + (y + z) = (x + y) + z$ dan $x(yz) = (xy)z$.
- 3) Hukum distributif: $x(y + z) = xy + xz$.
- 4) Elemen-elemen identitas:

Terhadap penjumlahan: 0 sebab $x + 0 = x$.

Terhadap perkalian: 1 sebab $x \cdot 1 = x$.

- 5) Invers (balikan):

Setiap bilangan real x mempunyai *invers aditif* (disebut juga *negatif*) $-x$ yang memenuhi $x + -x = 0$ dan setiap bilangan real x yang tidak nol mempunyai *invers multiplikatif* (disebut juga *balikan*) yaitu x^{-1} yang memenuhi $x \cdot x^{-1} = 1$.

Pengurangan dan *pembagian* didefinisikan dengan

$$x - y = x + (-y)$$

dan

$$\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$$

1.3 Urutan

Bilangan-bilangan real bukan nol dibedakan menjadi dua himpunan terpisah yaitu bilangan-bilangan real positif dan bilangan-bilangan real negatif. Berdasarkan fakta ini diperkenalkan relasi *urutan* $<$ (dibaca “kurang dari”) yang didefinisikan dengan:

$$x < y \text{ jika dan hanya jika } y - x \text{ positif.}$$

$x < y$ mempunyai arti yang sama dengan $y > x$.

Sifat-sifat urutan:

- 1) Trikotomi: Jika x dan y bilangan-bilangan real maka pasti berlaku salah satu di antara yang berikut:

$$x < y \text{ atau } x = y \text{ atau } x > y.$$

- 2) Transitif: jika $x < y$ dan $y < z$ maka $x < z$.
- 3) Penambahan: $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$
- 4) Perkalian:

Jika z positif maka $x < y \Leftrightarrow xz < yz$

Jika z negatif maka $x < y \Leftrightarrow xz > yz$

Relasi *urutan* \leq (dibaca “kurang dari atau sama dengan”) didefinisikan dengan:

$$x \leq y \text{ jika dan hanya jika } y - x \text{ positif atau nol.}$$

Sifat-sifat ini adalah:

- 1) Transitif: jika $x \leq y$ dan $y \leq z$ maka $x \leq z$.
- 2) Penambahan: $x \leq y \Leftrightarrow x + z \leq y + z$
- 3) Perkalian:

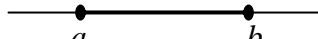
Jika z positif maka $x \leq y \Leftrightarrow xz \leq yz$

Jika z negatif maka $x \leq y \Leftrightarrow xz \geq yz$

1.4. Pertidaksamaan

Pertidaksamaan merupakan kalimat terbuka yang menggunakan relasi $<$, $>$, \leq atau \geq . Penyelesaian suatu pertidaksamaan adalah semua bilangan yang memenuhi pertidaksamaan tersebut yang biasanya merupakan interval atau gabungan interval-interval. Mengenai interval dapat dijelaskan sebagai berikut.

Interval terbuka (a,b) adalah himpunan semua bilangan real yang lebih besar dari a dan kurang dari b . Jadi $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$. Sedangkan interval tertutup $[a,b]$ adalah himpunan semua bilangan real yang lebih besar atau sama dengan a dan kurang atau sama dengan b . Jadi $[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$. Beberapa interval ditunjukkan dalam daftar berikut.

Penulisan Interval	Penulisan Himpunan	Dalam Garis Bilangan
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	
(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \mid x \geq a\}$	
$(-\infty, \infty)$	\mathbb{R}	

Contoh Pertidaksamaan

1) $2x - 7 < 4x - 2$

2) $-5 \leq 2x + 6 < 4$

3) $x^2 - x - 6 < 0$

4) $3x^2 - x - 2 > 0$

5) $\frac{2x-5}{x-2} \leq 1$

Contoh 1

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $2x - 7 < 4x - 2$.

Penyelesaian: $2x - 7 < 4x - 2$

$$\Leftrightarrow 2x < 4x + 5$$

$$\Leftrightarrow -2x < 5$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{5}{2}$$

Hp: interval $(-\frac{5}{2}, \infty) = \{x \mid x > -\frac{5}{2}\}$

Contoh 2

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $-5 \leq 2x + 6 < 4$.

$$\text{Penyelesaian: } -5 \leq 2x + 6 < 4$$

$$\Leftrightarrow -11 \leq 2x < -2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{11}{2} \leq x < -1$$

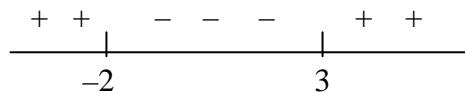
$$\text{Hp: interval } [-\frac{11}{2}, -1) = \{x \mid -\frac{11}{2} \leq x < -1\}$$

Contoh 3

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $x^2 - x - 6 < 0$.

$$\text{Penyelesaian: } x^2 - x - 6 < 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 2) < 0$$



$$\text{Hp: interval } (-2, 3) = \{x \mid -2 < x < 3\}$$

Contoh 4

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $3x^2 - x - 2 > 0$

$$\text{Penyelesaian: } 3x^2 - x - 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(3x + 2) > 0$$



$$\text{Hp: interval } (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (1, \infty) = \{x \mid x < -\frac{2}{3} \text{ atau } x > 1\}$$

Contoh 5

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\frac{2x-5}{x-2} \leq 1$

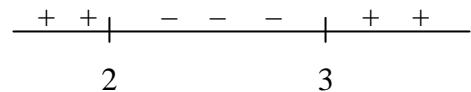
$$\text{Penyelesaian: } \frac{2x-5}{x-2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-5}{x-2} - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-5-(x-2)}{x-2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x-2} \leq 0$$

$\Leftrightarrow (x-3)(x-2) \leq 0$ dengan syarat $x \neq 2$ (mengapa?)



Hp: interval $(2, 3] = \{x \mid 2 < x \leq 3\}$

1.5 Nilai Mutlak

Konsep nilai mutlak sangat diperlukan untuk mempelajari kalkulus. Oleh karena pembaca yang ingin memahami betul konsep-konsep dalam kalkulus disarankan mempunyai ketrampilan dalam bekerja menggunakan nilai mutlak.

Definisi:

Nilai mutlak bilangan real x , ditulis $|x|$ didefinisikan dengan

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

Misal: $|5| = 5$, $|-5| = -(-5) = 5$, $|0| = 0$

Sifat-sifat nilai mutlak

- 1) $|ab| = |a||b|$
- 2) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
- 3) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (*ketidaksamaan segitiga*)
- 4) $|a-b| \geq ||a| - |b||$

Pertidaksamaan yang memuat nilai mutlak

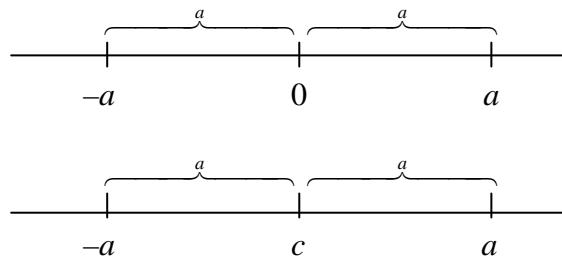
Untuk menyelesaikan pertidaksamaan yang memuat nilai mutlak dapat digunakan teorema berikut.

Teorema:

1. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
2. $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ atau $x > a$.

Secara fisis $|x|$ dapat menyatakan jarak x ke 0, sehingga x yang memenuhi $|x| < a$ menyatakan x yang jaraknya ke 0 kurang dari a .

Secara fisis $|x - c|$ dapat menyatakan jarak x ke c , sehingga x yang memenuhi $|x - c| < a$ menyatakan x yang jaraknya ke c kurang dari a .



Contoh 1

Tentukan penyelesaian $|x| < 3$.

Penyelesaian:

Nilai x yang memenuhi $-3 < x < 3$ merupakan penyelesaian pertidaksamaan $|x| < 3$.

Gambarkan penyelesaian pertidaksamaan tersebut pada garis bilangan.

Contoh 2

Tentukan penyelesaian pertidaksamaan $|x - 2| < 3$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}|x - 2| < 3 &\Leftrightarrow -3 < x - 2 < 3 \\&\Leftrightarrow -3 + 2 < x < 3 + 2 \\&\Leftrightarrow -1 < x < 5\end{aligned}$$

Jadi, penyelesaiannya adalah x yang memenuhi $-1 < x < 5$. Gambarkan pada garis bilangan penyelesaian pertidaksamaan ini.

Contoh 3

Tentukan penyelesaian pertidaksamaan $|3x - 5| \geq 1$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}|3x - 5| \geq 1 &\Leftrightarrow 3x - 5 \leq -1 \text{ atau } 3x - 5 \geq 1 \\&\Leftrightarrow 3x \leq 4 \quad \text{atau} \quad 3x \geq 6 \\&\Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3} \quad \text{atau} \quad x \geq 2\end{aligned}$$

Jadi, penyelesaiannya adalah x yang memenuhi $x \leq \frac{4}{3}$ atau $x \geq 2$. Gambarkan pada garis bilangan penyelesaian pertidaksamaan ini.

Contoh 4

Andaikan ε (epsilon) adalah bilangan positif.

Tunjukkan bahwa $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} \Leftrightarrow |5x - 10| < \varepsilon$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}|x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} &\Leftrightarrow 5|x - 2| < \varepsilon \\&\Leftrightarrow |5(x - 2)| < \varepsilon \\&\Leftrightarrow |5x - 10| < \varepsilon\end{aligned}$$

Contoh 5

Andaikan ε (epsilon) adalah bilangan positif, carilah bilangan positif δ sedemikian sehingga $|x - 3| < \delta \Rightarrow |6x - 18| < \varepsilon$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}|6x - 18| < \varepsilon &\Leftrightarrow |6(x - 3)| < \varepsilon \\&\Leftrightarrow |6||x - 3| < \varepsilon \\&\Leftrightarrow 6|x - 3| < \varepsilon \\&\Leftrightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{6}\end{aligned}$$

Oleh karena itu dapat dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{6}$.

Secara mundur dapat dilihat bahwa $|x - 3| < \delta \Rightarrow |6x - 18| < \varepsilon$.

Terkait dengan bilangan akar pangkat dua dapat dinyatakan bahwa

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

SOAL 1

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan berikut dan gambarkan himpunan penyelesaiannya pada garis bilangan.

1. $4x - 7 < 3x - 5$
2. $2x + 16 < x + 25$
3. $7x - 1 \leq 10x + 4$
4. $6x - 10 \geq 5x - 16$
5. $10x + 1 > 8x + 5$
6. $-6 < 2x + 3 < -1$
7. $-3 < 4x - 9 < 11$
8. $3x + 2 < 5x + 1 < 16$
9. $2x - 4 \leq 6 - 7x \leq 3x + 6$
10. $x^2 + x - 12 < 0$
11. $x^2 - 5x + 6 > 0$
12. $3x^2 - 11x - 4 \leq 0$
13. $2x^2 + 7x - 15 \geq 0$
14. $\frac{x+5}{2x-1} \leq 0$
15. $\frac{2x-3}{x+1} > 0$
16. $(x + 2)(2x - 1)(3x + 7) \geq 0$
17. $x^3 - 5x^2 - 6x < 0$
18. $(x + 5)(x + 2)^2(2x - 1) > 0$
19. $\frac{x-2}{x+4} < 2$
20. $\frac{2x-1}{x-3} \geq 1$
21. $|x + 1| < 4$
22. $|3x + 4| < 8$
23. $\left| \frac{x}{3} - 2 \right| \leq 6$
24. $|4x + 2| \geq 10$
25. $|2 - 4x| \geq 10$
26. $\left| \frac{3x}{5} + 1 \right| \leq 4$
27. $\left| \frac{x}{2} + 7 \right| > 2$
28. $\left| 1 - \frac{3x}{5} \right| \leq 4$
29. $\left| 2 + \frac{5}{x} \right| > 1$
30. $\left| \frac{1}{x} - 3 \right| > 6$.

Buktikan bahwa implikasi yang ditunjukkan adalah benar

$$31. |x - 3| < 0,5 \Rightarrow |5x - 15| < 2,5 .$$

$$32. |x - 2| < \frac{\varepsilon}{6} \Rightarrow |6x - 12| < \varepsilon .$$

$$33. |x + 4| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |2x + 8| < \varepsilon .$$

Dalam soal berikut, jika ε bilangan positif, carilah bilangan positif δ sedemikian sehingga implikasi yang diberikan benar.

$$34. |x - 5| < \delta \Rightarrow |3x - 15| < \varepsilon$$

$$35. |x - 2| < \delta \Rightarrow |(4x - 5) - 3| < \varepsilon$$

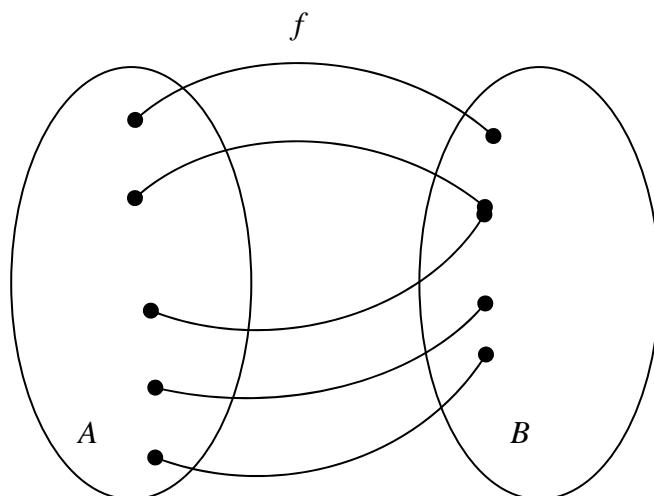
FUNGSI DAN LIMIT FUNGSI

2.1 Fungsi dan Grafiknya

Definisi

Sebuah fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu aturan yang memasangkan setiap x anggota A dengan tepat satu y anggota B .

A disebut **domain** (daerah asal) fungsi f dan B disebut **kodomain** (daerah kawan). Sedangkan himpunan semua anggota B yang mempunyai pasangan disebut **range** (daerah hasil).



Gambar 2.1 Fungsi

Definisi di atas tidak memberikan pembatasan pada domain dan kodomain. Domain dapat berupa himpunan yang beranggotakan orang atau yang lain, demikian pula kodomain.

Dalam uraian selanjutnya domain dan kodomain dibatasi pada himpunan-himpunan bilangan real.

Untuk memberi nama fungsi digunakan huruf tunggal seperti f (atau g , atau F), maka $f(x)$ menunjukkan nilai yang diberikan oleh f kepada x . Jadi jika $f(x) = x^3 - 4$, maka

$$f(2) = 2^3 - 4 = 4$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 4 = -5$$

$$f(a) = a^3 - 4$$

$$f(a + h) = (a + h)^3 - 4 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 4$$

Contoh 1

Untuk $f(x) = x^2 - 2x$, carilah dan sederhanakan:

- a. $f(4)$
- b. $f(4 + h)$
- c. $f(4 + h) - f(4)$
- d. $\frac{f(4 + h) - f(4)}{h}$ dengan $h \neq 0$.

Penyelesaian:

Contoh 2

Untuk $f(x) = x^2 - 2x$ dengan daerah asal $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$, carilah daerah hasil fungsi f .

Penyelesaian:

Bilamana untuk sebuah fungsi daerah asalnya tidak dirinci, maka dianggap daerah asal fungsi tersebut adalah himpunan bilangan real sehingga aturan fungsinya bermakna dan memberikan nilai bilangan real.

Contoh 3

- a. Daerah asal $f(x) = \frac{1}{x-3}$ adalah $\{x \in R \mid x \neq 3\}$.
- b. Daerah asal $g(t) = \sqrt{9-t^2}$ adalah $\{t \in R \mid 9-t^2 \geq 0\}$.

Apabila daerah asal dan daerah hasil sebuah fungsi merupakan himpunan bilangan real, kita dapat membayangkan fungsi itu dengan menggambarkan grafiknya pada suatu bidang koordinat, dan grafik fungsi f adalah grafik dari persamaan $y = f(x)$.

Contoh 4

Buatlah sketsa grafik dari: (a) $f(x) = x^2 - 4$

(b) $g(x) = \frac{1}{x}$
(c) $h(x) = |x|$

Penyelesaian:

2.2 Operasi pada Fungsi

Jika f dan g dua fungsi maka jumlah $f + g$, selisih $f - g$, hasil kali fg , hasil bagi f/g dan perpangkatan f^n adalah fungsi-fungsi dengan daerah asal berupa irisan dari daerah asal f dan daerah asal g , dan dirumuskan sebagai berikut.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ asalkan } g(x) \neq 0$$

Contoh 5

Jika $f(x) = x^2 - 2x$ dan $g(x) = x - 1$, tentukan $f + g$, $f - g$, fg , f/g dan f^3 . Selanjutnya gambarlah sketsa grafiknya.

Penyelesaian:

Selanjutnya didefinisikan komposisi fungsi sebagai berikut.

Jika f dan g dua fungsi dengan daerah asal g merupakan daerah hasil f maka komposisi $g \circ f$ memenuhi

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Contoh 6

Jika $f(x) = x^2 - 2x$ dan $g(x) = x - 1$, tentukan $g \circ f$ dan $f \circ g$. Selanjutnya gambarlah sketsa grafiknya.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\&= g(x^2 - 2x) \\&= x^2 - 2x - 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\&= f(x - 1) \\&= (x - 1)^2 - 2(x - 1) \\&= x^2 - 2x + 1 - 2x + 2 \\&= x^2 - 4x + 3\end{aligned}$$

Gambar grafik dibiarkan untuk latihan.

2.3 Pengertian Limit

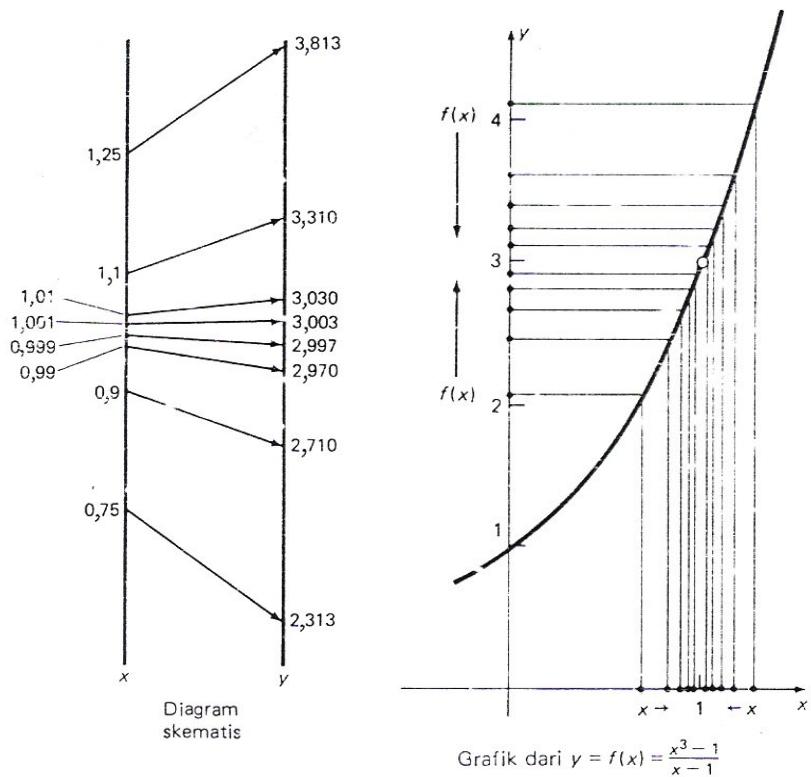
Perkataan limit berarti mendekati, seperti “Saya sudah menahan sampai mendekati batas kesabaran saya,” atau “Janganlah kamu mendekati zina.”

Untuk memahami pengertian limit fungsi kita awali dengan fungsi berikut.

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Fungsi tersebut tidak terdefinisi di $x = 1$ sebab di titik ini $f(x)$ berbentuk $\frac{0}{0}$. Tetapi dapat diselidiki mengenai nilai $f(x)$ di titik-titik yang dekat dengan 1 (x mendekati 1). Perhatikan nilai $f(x)$ untuk beberapa x seperti terlihat pada daftar dan grafik $y = f(x)$ dapat dilihat pada gambar berikut.

x	$y = f(x)$
1,25	3,813
1,1	3,310
1,01	3,030
1,001	3,003
↓	↓
1	?
↑	↑
0,999	2,997
0,99	2,970
0,9	2,710
0,75	2,313



Gambar 2.2

Berdasarkan informasi pada tabel dan pada grafik menunjukkan bahwa $f(x)$ mendekati 3 apabila x mendekati 1. Secara matematis hal tersebut dituliskan dengan

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

dan ini dibaca “limit $(x^3 - 1)/(x - 1)$ untuk x mendekati 1 adalah 3.”

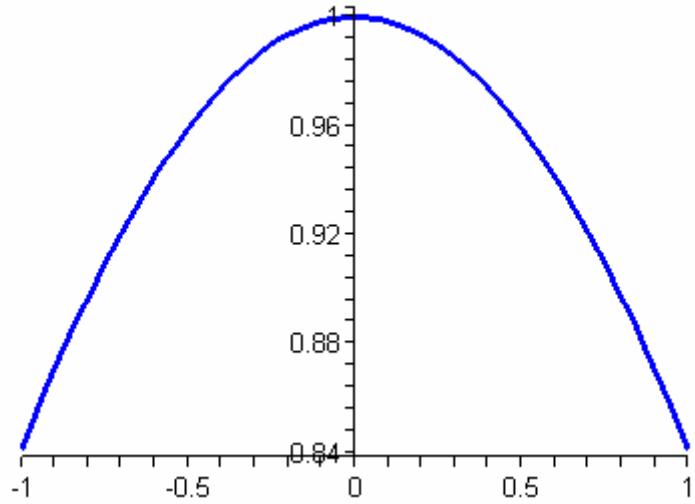
Dalam contoh ini kita menghubungkan limit dengan perilaku fungsi dekat dengan 1, bukannya di 1.

Contoh 1

Dengan menggunakan beberapa nilai pendekatan x tentukan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

Penyelesaian:

x	$y = \frac{\sin x}{x}$
1	0,84147
0,5	0,95885
0,1	0,99833
0,01	0,99998
↓	↓
0	?
↑	↑
-0,01	0,99998
-0,1	0,99833
-0,5	0,95885
-1	0,84147



$$\text{Jadi, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Ingat kembali mengenai nilai mutlak. Jika ε adalah sembarang bilangan positif, maka jarak $f(x)$ ke bilangan L kurang dari ε dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

dan ini ekuivalen dengan

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

yang menunjukkan bahwa $f(x)$ terletak pada interval terbuka $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ seperti terlihat pada gambar 2.3 (a).

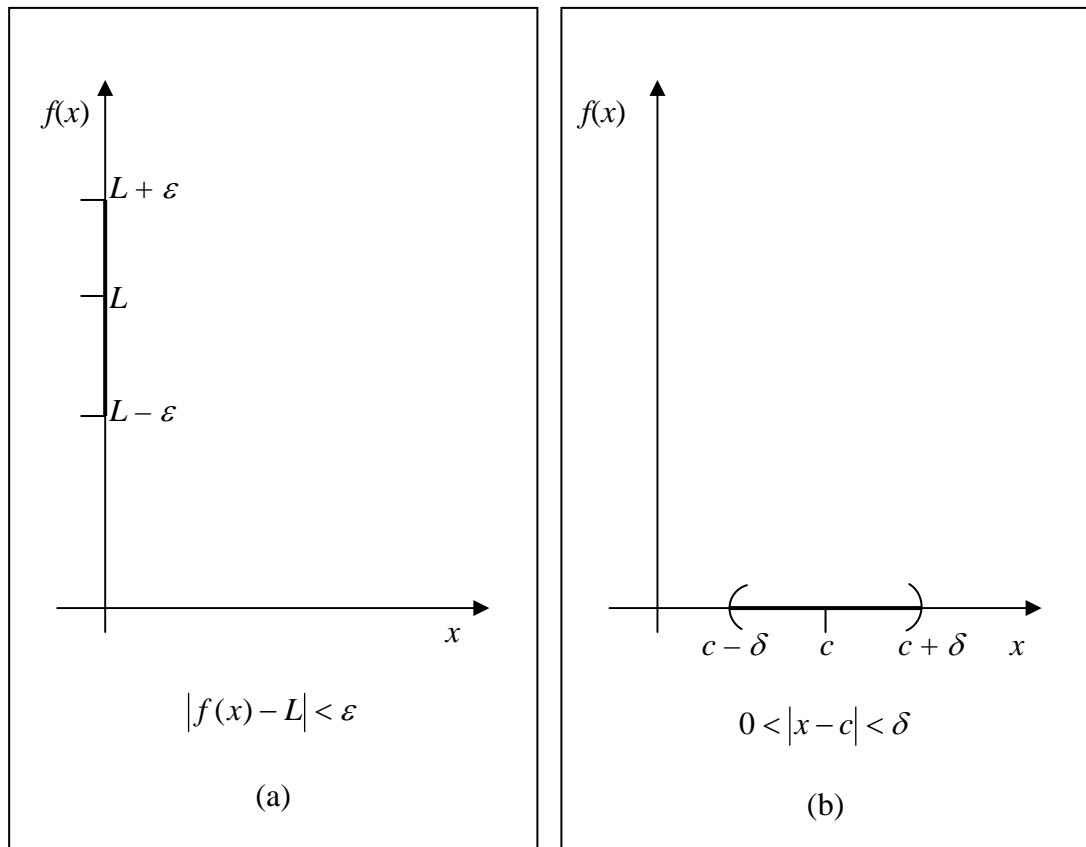
Selanjutnya misalkan δ adalah suatu bilangan positif dan x cukup dekat dengan c sehingga jarak x ke c kurang dari δ , tetapi $x \neq c$ maka

$$0 < |x - c| < \delta$$

dan ini ekuivalen dengan

$$c - \delta < x < c + \delta$$

yang berarti x terletak dalam interval terbuka $(c - \delta, c + \delta)$ dan dapat digambarkan seperti terlihat pada gambar 2.3 (b).



Gambar 2.3

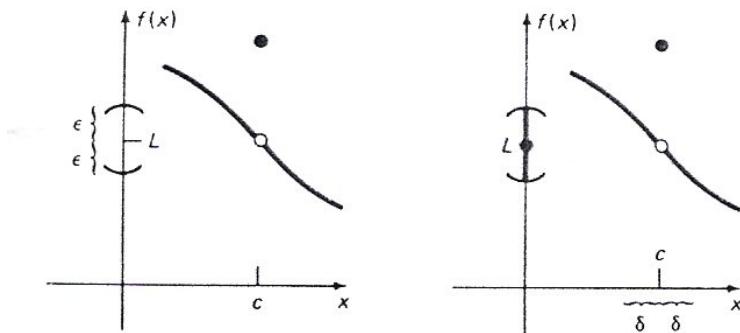
Gambar-gambar dalam Gambar 2.2 dan Gambar 2.3 diharapkan dapat memudahkan kita untuk memahami definisi formal dari limit sebagai berikut.

Definisi

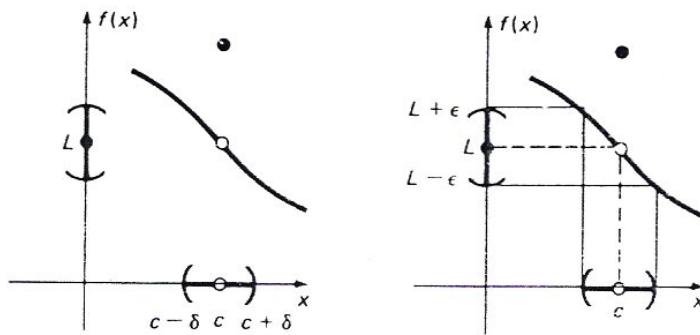
Limit $f(x)$ untuk x mendekati c adalah L , ditulis

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ (betapapun kecilnya), terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga apabila $0 < |x - c| < \delta$ berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$.



Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga



apabila $0 < |x - c| < \delta$ berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$

Gambar 2.4

Contoh 2

Buktikan bahwa $\lim_{x \rightarrow 4} (3x - 7) = 5$

Analisis pendahuluan:

Misalkan $\varepsilon > 0$ sembarang, kita harus dapat menemukan bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga apabila $0 < |x - 4| < \delta$ berlaku $|(3x - 7) - 5| < \varepsilon$.

$$\text{Perhatikan } |(3x - 7) - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x - 12| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |3(x - 4)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 3|x - 4| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x - 4| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Oleh karena itu dapat dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Tentu saja dapat dipilih bilangan δ yang kurang dari $\frac{\varepsilon}{3}$.

Bukti:

Ambil sembarang bilangan $\varepsilon > 0$. Kita pilih $\delta > 0$, yaitu $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Apabila $0 < |x - 4| < \delta$ maka berlaku

$$\begin{aligned} |(3x - 7) - 5| &= |3x - 12| \\ &= |3(x - 4)| \\ &= 3|x - 4| \\ &= 3\delta \\ &< 3\delta = 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Jadi, terbukti $\lim_{x \rightarrow 4} (3x - 7) = 5$. \square

Contoh 3

Buktikan bahwa $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = 5$

Analisis pendahuluan:

Misalkan $\varepsilon > 0$ sembarang, kita harus dapat menemukan bilangan $\delta > 0$ sedemikian

sehingga apabila $0 < |x - 2| < \delta$ berlaku $\left| \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5 \right| < \varepsilon$.

Perhatikan

$$\begin{aligned} \left| \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5 \right| &< \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{(2x+1)(x-2)}{x-2} - 5 \right| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |(2x+1) - 5| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |2(x-2)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |2|x-2| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Oleh karena itu dapat dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ atau yang lebih kecil dari $\frac{\varepsilon}{2}$.

Bukti:

Ambil sembarang $\varepsilon > 0$ dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ sehingga $0 < |x - 2| < \delta$ berlaku

$$\begin{aligned} \left| \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5 \right| &= \left| \frac{(2x+1)(x-2)}{x-2} - 5 \right| \\ &= |(2x+1) - 5| \\ &= |2(x-2)| \\ &= |2|x-2|| \\ &= |x-2| \\ &< \delta = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

Berarti terbukti bahwa $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = 5$. \square

Contoh 4

Buktikan $\lim_{x \rightarrow c} (mx + b) = mc + b$

Analisis Pendahuluan:

Untuk setiap $\varepsilon > 0$, akan dicari bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga apabila $0 < |x - c| < \delta$ berlaku $|(mx + b) - (mc + b)| < \varepsilon$.

Perhatikan:

$$\begin{aligned} |(mx + b) - (mc + b)| &< \varepsilon \Leftrightarrow |mx - mc| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |m| |x - c| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |x - c| < \frac{\varepsilon}{|m|} \text{ asalkan } m \neq 0 \end{aligned}$$

Dapat dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$.

Bukti:

Untuk $m = 0$, bukti cukup jelas.

Misal $m \neq 0$. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$. Oleh karenanya jika $0 < |x - c| < \delta$

$$\begin{aligned} |(mx + b) - (mc + b)| &= |(mx + b) - (mc + b)| \\ &= |mx - mc| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= |m| |x - c| \\ &< |m| \frac{\varepsilon}{|m|} = \varepsilon. \square \end{aligned}$$

Contoh 5

Buktikan, jika $c > 0$, maka $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$

Analisis Pendahuluan

Akan dicari bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga apabila $0 < |x - c| < \delta$ berlaku $|\sqrt{x} - \sqrt{c}| < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$.

Perhatikan:

$$\begin{aligned} |\sqrt{x} - \sqrt{c}| &= \left| \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{c})(\sqrt{x} + \sqrt{c})}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} \right| \\ &= \left| \frac{x - c}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} \right| \\ &= \frac{|x - c|}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} \\ &\leq \frac{|x - c|}{\sqrt{c}} \end{aligned}$$

Dapat dipilih $\delta = \varepsilon\sqrt{c}$

Bukti:

Ambil sembarang $\varepsilon > 0$ dipilih $\delta = \varepsilon\sqrt{c}$. Oleh karenanya jika $0 < |x - c| < \delta$ maka berlaku $|\sqrt{x} - \sqrt{c}| \leq \frac{|x - c|}{\sqrt{c}} < \frac{\varepsilon\sqrt{c}}{\sqrt{c}} < \varepsilon$. \square

2.4 Teorema Limit

Teorema 2.4.1

Misalkan n bilangan bulat positif, k konstanta, serta f dan g fungsi-fungsi yang mempunyai limit di c , maka:

- 1) $\lim_{x \rightarrow c} k = k$
- 2) $\lim_{x \rightarrow c} x = c$
- 3) $\lim_{x \rightarrow c} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow c} f(x)$

- 4) $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
- 5) $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
- 6) $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
- 7) $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$, asalkan $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$
- 8) $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]^n$
- 9) $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$, asalkan $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$ untuk n bilangan genap.

Bukti teorema 2.4.1 ini dibiarkan untuk latihan.

Dengan menggunakan teorema ini maka penentuan nilai limit suatu fungsi akan menjadi lebih mudah.

Contoh 6

Carilah $\lim_{x \rightarrow 3} 5x^2$

$$\begin{aligned}
 \text{Penyelesaian: } \quad \lim_{x \rightarrow 3} 5x^2 &= 5 \lim_{x \rightarrow 3} x^2 && \text{teorema 2.2.1 3)} \\
 &= 5 \left[\lim_{x \rightarrow 3} x \right]^2 && \text{teorema 2.2.1 8)} \\
 &= 5(3)^2 && \text{teorema 2.2.1 2)} \\
 &= 45.
 \end{aligned}$$

Contoh 7

Carilah $\lim_{x \rightarrow 3} (5x^2 - 20)$

$$\begin{aligned}
 \text{Penyelesaian: } \quad \lim_{x \rightarrow 3} (5x^2 - 20) &= \lim_{x \rightarrow 3} 5x^2 - \lim_{x \rightarrow 3} 20 && \text{teorema 2.2.1 5)} \\
 &= 45 - 20 && \text{teorema 2.2.1 1)} \\
 &= 25.
 \end{aligned}$$

Contoh 8

Carilah $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x^2 - 20}}{x}$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x^2 - 20}}{x} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{5x^2 - 20}}{\lim_{x \rightarrow 3} x} && \text{teorema 2.2.1 7)} \\ &= \frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} 5x^2 - 20}}{3} && \text{teorema 2.2.1 2) dan 9)} \\ &= \frac{\sqrt{25}}{3} && \text{dari contoh 7.} \\ &= \frac{5}{3}\end{aligned}$$

Ingat, bentuk $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ disebut polinom dan hasil bagi polinom disebut fungsi rasional, $\frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m}$.

Teorema 2.4.2

- 1) Jika f fungsi polinom maka $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$
- 2) Jika f fungsi rasional maka $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ asalkan nilai penyebut di c tidak nol.

Teorema 2.4.2 ini dapat dibuktikan dengan menggunakan teorema 2.4.1.

Dengan adanya teorma 2.4.2 maka penentuan nilai limit fungsi polinom atau fungsi rasional menjadi sangat mudah, tentunya asalkan syarat perlu pada teorema tersebut untuk fungsi rasional dipenuhi.

Contoh 9

Tentukan $\lim_{x \rightarrow 2} 7x^5 - 10x^4 - 13x + 6$

Penyelesaian: $\lim_{x \rightarrow 2} 7x^5 - 10x^4 - 13x + 6 = 7(2)^5 - 10(2)^4 - 13(2) + 6 = 44$

Contoh 10

Tentukan $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8}$

Penyelesaian: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8} = \frac{7(2)^5 - 10(2)^4 - 13(2) + 6}{3(2)^2 - 6(2) - 8} = \frac{44}{-8} = -\frac{11}{2}$.

Contoh 11

Tentukan $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x + 7}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x + 7}{(x-1)^2}$

Penyelesaian:

Teorema 2.4.2 tidak dapat digunakan karena nilai penyebut di $x = 1$ adalah nol dan teorema 2.4.1 bagian 7) juga tidak dapat digunakan karena limit penyebut nol. Tetapi, karena limit pembilang 11, maka selama x mendekati 1 terjadi pembagian bilangan yang dekat 11 dengan bilangan positif dekat 0. Hasilnya adalah sebuah bilangan positif yang besar dan dapat dibuat besar sekehendak kita dengan membiarkan x cukup dekat dengan 1. Dalam hal ini dikatakan limitnya tidak ada. Contoh seperti ini akan diuraikan lebih lanjut pada bagian lain.

Contoh 12

Tentukan $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6}$

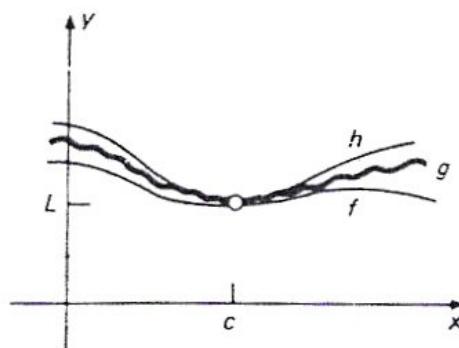
Penyelesaian:

Sebelum mencoba mengambil limitnya terlebih dahulu diadakan penyederhanaan pecahan dengan faktorisasi.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+5}{x+3} \\ &= \frac{7}{5}\end{aligned}$$

Teorema 2.4.3 (Teorema Apit)

Misalkan f , g dan h adalah fungsi-fungsi dengan $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ untuk setiap x di sekitar c , kecuali mungkin di c . Jika $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$,

$$\text{maka } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L.$$
**Bukti:**

Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$

Karena $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$, berarti terdapat bilangan $\delta_1 > 0$ sedemikian hingga

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon.$$

Karena $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$, berarti terdapat bilangan $\delta_2 > 0$ sedemikian hingga

$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$$

Dipilih $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

Apabila $0 < |x - c| < \delta$ maka berlaku

$$\begin{aligned} L - \varepsilon &< f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon \\ \Rightarrow L - \varepsilon &< g(x) < L + \varepsilon \\ \Leftrightarrow |g(x) - L| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Terbukti $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$.

Contoh 13

Dapat diselidiki bahwa $1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ untuk semua x yang mendekati tetapi

tidak 0. Tunjukkan bahwa $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Penyelesaian:

Misalkan $f(x) = 1 - \frac{x^2}{6}$, $g(x) = \frac{\sin x}{x}$, dan $h(x) = 1$, maka $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{x^2}{6} = 1$
 dan $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1$, sehingga diperoleh

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{x^2}{6} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} 1$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

Berdasarkan teorema 2.4.3 maka dapat disimpulkan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

SOAL 2

1. Untuk fungsi $f(x) = 3x^3 + x$, hitunglah masing-masing nilai

a. $f(1)$ c. $f\left(\frac{1}{2}\right)$

b. $f(-6)$ d. $f\left(\frac{1}{x}\right)$

2. Untuk fungsi $g(t) = \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}$, hitunglah masing-masing nilai

a. $f(1)$ c. $f\left(\frac{1}{4}\right)$

b. $f(9)$ d. $f\left(\frac{1}{x^4}\right)$

- ### 3. Gambarlah grafik fungsi

$$\text{a. } f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & , \quad x \leq 1 \\ 3x & , \quad x > 1 \end{cases}$$

$$\text{b. } g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , \quad x \leq 0 \\ 1 & , \quad 0 < x < 2 \\ x + 1 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

4. Jika $f(x) = x^2 + x$ dan $g(x) = \frac{2}{x+3}$, tentukan:

a. $(f + g)(2)$ d. $(f / g)(1)$

b. $(f - g)(2)$ e. $(g \circ f)(1)$

c. $(fg)(1)$ f. $(f \circ g)(1)$

5. Jika $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ dan $g(x) = \frac{2}{x}$, tentukan:

- | | |
|---------------------|----------------------|
| a. $(fg)(x)$ | d. $(f \circ g)(x)$ |
| b. $(f/g)(x)$ | e. $f^4(x) + g^4(x)$ |
| c. $(g \circ f)(x)$ | |

Dalam soal nomor 6 – 10, buktikan limit-limit tersebut.

6. $\lim_{x \rightarrow 3} (3x - 7) = 2$

7. $\lim_{x \rightarrow -2} (2x - 4) = -8$

8. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = 10$

9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} = 7$

10. $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x} = 2$

11. Buktikan bahwa jika $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ dan $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = M$, maka $L = M$.

12. Misalkan F dan G adalah fungsi-fungsi sedemikian sehingga $0 \leq F(x) \leq G(x)$ untuk semua x dekat dengan c , kecuali mungkin di c , buktikan bahwa jika $\lim_{x \rightarrow c} G(x) = 0$ maka $\lim_{x \rightarrow c} F(x) = 0$.

Untuk soal-soal berikut (no. 13 s.d. 20), tentukan nilai limit fungsi berikut

13. $\lim_{x \rightarrow 3} (7x - 4)$

14. $\lim_{x \rightarrow -1} (2x^3 - 5x)$

15. $\lim_{x \rightarrow 0} (4x^2 - 3)(7x^3 + 2x)$

16. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^4 - 8}{x^3 + 24}$

17. $\lim_{u \rightarrow 2} \frac{u^2 - 2u}{u^2 - 4}$

18. $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^2 + 7t + 7}{t^2 - 4t - 5}$

$$19. \lim_{w \rightarrow -2} \frac{(w+2)(w^2 - w - 6)}{w^2 + 4w + 4}$$

$$20. \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y-1)(y^2 + 2y - 3)}{y^2 - 2y + 1}$$

2.5 Limit Kiri dan Limit Kanan

Definisi

Limit $f(x)$ untuk x mendekati c dari **kiri** adalah L , ditulis

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$$

jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ (betapapun kecilnya), terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga apabila $0 < c - x < \delta$, maka berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Limit $f(x)$ untuk x mendekati c dari **kanan** adalah L , ditulis

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ (betapapun kecilnya), terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga apabila $0 < x - c < \delta$, maka berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Teorema 2.5.1

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \text{ jika dan hanya jika } \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

Contoh 14

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \geq 1 \\ x^2, & x < 1 \end{cases}$$

Tentukan $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, dan $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, selanjutnya gambarkan grafik fungsi f .

Penyelesaian:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2 - x = 1$$

Karena $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ maka $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

Contoh 15

$$g(x) = \begin{cases} 3-x, & x \geq 1 \\ x^2, & x < 1 \end{cases}$$

Tentukan $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$, dan $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$,

selanjutnya gambarkan grafik fungsi g

Tentukan $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$, dan $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$, selanjutnya gambarkan grafik fungsi f .

Penyelesaian:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 3-x = 2$$

Karena $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ maka $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ tidak ada.

2.6 Limit Tak Hingga

Contoh 16

Carilah $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ jika ada.

Penyelesaian:

x	$\frac{1}{x^2}$
± 1	1
$\pm 0,5$	4
$\pm 0,2$	25
$\pm 0,1$	100
$\pm 0,05$	400
$\pm 0,01$	10.000
$\pm 0,001$	1.000.000

Semakin x mendekati 0, x^2 juga semakin dekat dengan 0, dan nilai $\frac{1}{x^2}$ menjadi sangat besar (lihat tabel di samping). Nampak dari grafik fungsi $f(x) = \frac{1}{x^2}$ yang diperlihatkan pada gambar 2.4 bahwa nilai $f(x)$ dapat dibuat sangat besar dengan mengambil x cukup dekat ke 0. dengan demikian nilai $f(x)$ tidak mendekati suatu bilangan, sehingga $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ tidak ada.

Untuk menunjukkan jenis perilaku seperti uang ditunjukkan dalam contoh ini kita gunakan notasi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Hal ini tidak berarti bahwa kita menganggap ∞ sebagai suatu bilangan. Tidak juga bermakna bahwa limit tersebut ada. Notasi tersebut hanyalah menyatakan cara khusus untuk menunjukkan bahwa limit tersebut tidak ada.

Secara umum kita tuliskan

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$$

untuk menunjukkan nilai $f(x)$ menjadi semakin besar ketika x semakin mendekati c .

Limit jenis serupa, untuk fungsi yang menjadi negatif tak berhingga ketika x mendekati c dituliskan dengan

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$$

Contoh 17

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$

Hal ini juga dapat diberlakukan untuk limit kiri dan limit kanan

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$$

Sebuah garis $x = c$ disebut asimtot tegak kurva $y = f(x)$ jika paling sedikit salah satu dari pernyataan berikut benar:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$$

Sebagai contoh, sumbu Y atau $x = 0$ merupakan asimtot tegak kurva $y = \frac{1}{x^2}$ karena

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Contoh 18

Hitunglah $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \tan x$ dan $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \tan x$

Penyelesaian:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \tan x = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \sin x}{\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \cos x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \tan x = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \sin x}{\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \cos x} = -\infty$$

2.7 Kekontinuan Fungsi

Definisi

Misalkan $f: A \rightarrow R$ suatu fungsi, maka

- Fungsi f dikatakan kontinu di $c \in A$ jika $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$
- Fungsi f dikatakan kontinu pada himpunan A jika f kontinu disetiap anggota A .

Definisi a mengandung arti bahwa f dikatakan kontinu di $c \in A$ jika dipenuhi ketiga syarat berikut:

- 1) $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ada
- 2) Nilai $f(c)$ ada
- 3) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

Contoh 19

$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

Apakah f kontinu di $x = 2$?

Gambarkan grafik fungsi f .

Penyelesaian:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4 \quad (\text{ada})$$

$$2) f(2) = 1 \quad (\text{ada})$$

$$3) \text{ Karena } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2) \text{ maka } f \text{ tidak kontinu di } x = 2.$$

Gambarkan grafik fungsi f diserahkan kepada pembaca.

$$2. f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Apakah f kontinu di $x = 2$?

Gambarkan grafik fungsi f .

Penyelesaian:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4 \quad (\text{ada})$$

$$2) f(2) \text{ tidak ada}$$

$$3) \text{ Karena } f(2) \text{ tidak ada, maka } f \text{ tidak kontinu di } x = 2.$$

Gambarkan grafik fungsi f diserahkan kepada pembaca.

$$3. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$$

Apakah f kontinu di $x = 2$?

Gambarkan grafik fungsi f .

Penyelesaian:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4 \quad (\text{ada})$$

$$2) f(2) = 4 \quad (\text{ada})$$

$$3) \text{ Karena } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \text{ maka } f \text{ kontinu di } x = 2.$$

Gambarkan grafik fungsi f diserahkan kepada mahasiswa.

$$4. \ f(x) = \begin{cases} 2-x, & x \geq 1 \\ x^2, & x < 1 \end{cases}$$

Apakah f kontinu di $x = 1$?

Gambarkan grafik fungsi f .

Penyelesaian:

$$1) \ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2-x = 1$$

$$\text{Karena } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \text{ maka } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \quad (\text{ada})$$

Lihat kembali contoh 14.

$$2) f(1) = 2-1 = 1 \quad (\text{ada})$$

$$3) \text{ Karena } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1), \text{ maka } f \text{ kontinu di } x = 1.$$

Gambarkan grafik fungsi f diserahkan kepada mahasiswa.

$$5. \ g(x) = \begin{cases} 3-x, & x \geq 1 \\ x^2, & x < 1 \end{cases}$$

Apakah g kontinu di $x = 1$?

Gambarkan grafik fungsi g .

Penyelesaian:

$$1) \ \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 3-x = 2$$

Karena $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ maka $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ tidak ada.

(lihat kembali contoh 15)

Karena $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ tidak ada, maka g tidak kontinu di $x = 1$

Teorema 2.7.1

1. Fungsi polinom (fungsi suku banyak) kontinu pada R .
2. Jika fungsi-fungsi f dan g keduanya kontinu di c dan k sembarang konstanta maka fungsi $f + g$, $f - g$, kf , f/g (asal $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$) juga kontinu di c .
3. Jika g fungsi yang kontinu di c dan f fungsi kontinu di $g(c)$ maka $f \circ g$ kontinu di c .

SOAL 2

1. Tentukan limit (sepihak) berikut:

a. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|}$

c. $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & x > 1 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \text{ dan } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

2. Apakah fungsi-fungsi berikut kontinu di 2?

a. $h(t) = \begin{cases} \frac{t^3 - 8}{t - 2}, & t \neq 2 \\ 12, & t = 2 \end{cases}$

b.
$$h(t) = \begin{cases} \frac{4t-8}{t-2}, & t \neq 2 \\ 2, & t = 2 \end{cases}$$

c.
$$g(x) = \begin{cases} x+3, & x < 2 \\ x^2 + 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

d.
$$f(x) = \begin{cases} -3x+4, & x \leq 2 \\ -2, & x > 2 \end{cases}$$

3.
$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & x > 1 \end{cases}$$

- a. Apakah f kontinu di 0?
- b. Apakah f kontinu di 1?

4.
$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ -x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$$

- a. Apakah g kontinu di 0?
- b. Apakah g kontinu di 1?

TURUNAN FUNGSI

3.1 Pengertian Turunan Fungsi

Definisi

Turunan fungsi f adalah fungsi f' yang nilainya di c adalah

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

asalkan limit ini ada.

Contoh 1

Jika $f(x) = 3x^2 + 2x + 4$, maka turunan f di $x = 2$ adalah

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(2+h)^2 + 2(2+h) + 4 - (3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(4 + 4h + h^2) + 4 + 2h + 4 - (12 + 4 + 4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12h + 3h^2 + 2h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(12 + 3h + 2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (12 + 3h + 2) \\ &= 14 \end{aligned}$$

Jika f mempunyai turunan di setiap x anggota domain maka

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Jika $y = f(x)$ turunan y atau turunan f dinotasikan dengan y' , atau $\frac{dy}{dx}$, atau $f'(x)$, atau

$$\frac{df(x)}{dx}$$

Contoh 2

Jika $f(x) = 3x^2 + 2x + 4$, maka turunan f di sembarang x adalah

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 + 2(x+h) + 4 - (3x^2 + 2x + 4)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x^2 + 2xh + h^2) + 2x + 2h + 4 - (3x^2 + 2x + 4)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6xh + 3h^2 + 2h}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6x + 3h + 2)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h + 2) \\&= 6x + 2\end{aligned}$$

3.2 Turunan Fungsi Konstan dan Fungsi Pangkat

1. Jika $f(x) = k$ dengan k konstan untuk setiap x (f fungsi konstan), maka $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned}\text{Bukti: } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} \\&= 0\end{aligned}$$

2. Jika $f(x) = x$ untuk setiap x (f fungsi identitas), maka $f'(x) = 1$.

$$\begin{aligned}\text{Bukti: } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} \\&= 1.\end{aligned}$$

3. Jika $f(x) = x^n$ dengan n bilangan bulat positif, untuk setiap x , maka $f'(x) = nx^{n-1}$.

$$\begin{aligned}\text{Bukti: } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} nx^{n-1} \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

Contoh 3

Jika $f(x) = x^5$, maka turunan f adalah $f'(x) = 5x^4$

3.3 Sifat-sifat Turunan

Jika k suatu konstanta, f dan g fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, u dan v fungsi-fungsi dalam x sehingga $u = f(x)$ dan $v = g(x)$ maka berlaku:

1. Jika $y = ku$ maka $y' = k(u')$
2. Jika $y = u + v$ maka $y' = u' + v'$
3. Jika $y = u - v$ maka $y' = u' - v'$
4. Jika $y = uv$ maka $y' = u'v + uv'$
5. Jika $y = \frac{u}{v}$ maka $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Contoh 4

1. Jika $f(x) = 3x^5$, maka $f'(x) = 3.5x^4 = 15x^4$
2. Jika $f(x) = 3x^5 + 2x$, maka $f'(x) = 15x^4 + 2$
3. Jika $f(x) = 3x^5 - 2x$, maka $f'(x) = 15x^4 - 2$
4. Jika $f(x) = (3x^5 + 2x)(4x + 7)$, maka $f'(x) = (15x^4 + 2)(4x + 7) + (3x^5 + 2x)4$
5. Jika $f(x) = \frac{3x^5 + 2x}{4x + 7}$, maka $f'(x) = \frac{(15x^4 + 2)(4x + 7) - (3x^5 + 2x)4}{(4x + 7)^2}$

6. Jika $f(x) = x^p$ dengan p bilangan bulat negatif maka $f(x) = x^{-n}$ dengan $-n = p$,

sehingga $f(x) = \frac{1}{x^n}$. Dengan menggunakan turunan $y = \frac{u}{v}$ diperoleh

$$f'(x) = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot n x^{n-1}}{(x^n)^2}$$

$$= \frac{-n x^{n-1}}{x^{2n}}$$

$$= -n x^{n-1} x^{-2n}$$

$$= -n x^{-n-1}$$

$$= p x^{p-1}$$

3.4 Aturan Rantai (untuk Turunan Fungsi Komposisi)

Untuk menentukan turunan $y = (3x^4 + 7x - 8)^9$ dengan cara mengalikan bersama kesembilan faktor $(3x^4 + 7x - 8)$ kemudian mencari turunan polinom berderajat 36 tentulah sangat melelahkan. Cara yang mudah untuk menentukan turunan $y = (3x^4 + 7x - 8)^9$ adalah dengan menggunakan aturan rantai.

Aturan Rantai

Misalkan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ menentukan fungsi komposisi yang dirumuskan dengan $y = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$. Jika g terdiferensialkan di x dan f terdiferensialkan di $u = g(x)$ maka $y = (f \circ g)(x)$ terdiferensialkan di x dan

$$\begin{aligned} y' &= (f \circ g)'(x) \\ &= f'(g(x)) g'(x) \end{aligned}$$

atau

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

Fungsí komposisi dapat diperluas menjadi komposisi 3 fungsi, 4 fungsi dan seterusnya.

$$\text{Jika } y = f(u)$$

$$u = g(v)$$

$$v = h(x)$$

$$\text{yakni } y = (f \circ g \circ h)(x)$$

$$\text{maka } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx}$$

Contoh 5

Tentukan turunan $y = (3x^4 + 7x - 8)^9$

Penyelesaian:

$$\text{Misalkan } u = 3x^4 + 7x - 8 \rightarrow \frac{du}{dx} = 12x^3 + 7$$

$$y = u^9 \rightarrow \frac{dy}{du} = 9u^8.$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = 9u^8(12x^3 + 7) \\ &= 9(3x^4 + 7x - 8)^8(12x^3 + 7)\end{aligned}$$

3.5 Turunan Fungsi Invers

Misalkan $y = f(x)$ dan f mempunyai invers f^{-1} sehingga $x = f^{-1}(y)$. Dengan menggunakan aturan rantai pada $x = f^{-1}(y)$ diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy} &= \frac{df^{-1}(y)}{dy} \frac{dy}{dx} \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{dx}{dy} \frac{dy}{dx} \\ \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{\frac{dy}{dx}}\end{aligned}$$

3.6 Turunan Fungsi Implisit

Fungsí implisit secara umum dapat ditulis sebagai $f(x, y) = 0$ dengan y sebagai fungsí dalam x .

Contoh fungsi implisit: 1) $y - 2x^3 - 8 = 0$

$$2) 2x^3y - 7y - x^2 + 1 = 0$$

Contoh 6

1. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsí yang dirumuskan dengan $y - 2x^3 - 8 = 0$

Penyelesaian:

Apabila kedua ruas $y - 2x^3 - 8 = 0$ diturunkan terhadap x , maka diperoleh:

$$\frac{dy}{dx} - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 6x^2$$

2. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi yang dirumuskan dengan $2x^3y - 7y - x^2 + 1 = 0$

Penyelesaian:

Apabila kedua ruas $2x^3y - 7y - x^2 + 1 = 0$ diturunkan terhadap x , maka diperoleh:

$$\begin{aligned} 6x^2y + 2x^3 \frac{dy}{dx} - 7 \frac{dy}{dx} - 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} (2x^3 - 7) &= 2x - 6x^2y \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{2x - 6x^2y}{2x^3 - 7} \end{aligned}$$

3.7 Turunan Tingkat Tinggi

Jika fungsi diturunkan maka turunannya, yaitu f' juga berupa fungsi sehingga boleh jadi f' mempunyai turunan tersendiri yang dinyatakan oleh $(f')' = f''$. Fungsi yang f'' baru ini disebut turunan kedua dari f karena dia merupakan turunan dari turunan f . Dengan notasi Leibniz kita tuliskan turunan kedua dari $y = f(x)$ sebagai

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Notasi lain adalah $f''(x) = D^2 f(x)$

Contoh 7

Jika $f(x) = 3x^4 + 7x - 8$, tentukan $f''(x)$.

Penyelesaian:

$$f'(x) = 12x^3 + 7$$

untuk mencari $f''(x)$ kita turunkan $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}(12x^3 + 7) \\ &= 36x^2 \end{aligned}$$

Contoh 8

Jika $f(x) = (3x^5 + 2x)(4x + 7)$, tentukan $f''(x)$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\frac{d}{dx} (3x^5 + 2x) \right) (4x + 7) + (3x^5 + 2x) \left(\frac{d}{dx} (4x + 7) \right) \\
 &= (15x^4 + 2)(4x + 7) + (3x^5 + 2x)4 \\
 f''(x) &= \frac{d}{dx} [(15x^4 + 2)(4x + 7) + (3x^5 + 2x)4] \\
 &= \frac{d}{dx} [(15x^4 + 2)(4x + 7)] + \frac{d}{dx} [(3x^5 + 2x)4] \\
 &= \left(\frac{d}{dx} (15x^4 + 2) \right) (4x + 7) + (15x^4 + 2) \left(\frac{d}{dx} (4x + 7) \right) + \\
 &\quad \left(\frac{d}{dx} (3x^5 + 2x) \right) 4 + (3x^5 + 2x) \left(\frac{d}{dx} 4 \right) \\
 &= 60x^3(4x + 7) + (15x^4 + 2)4 + (15x^4 + 2)4 + (3x^5 + 2x).0 \\
 &= 60x^3(4x + 7) + (15x^4 + 2)4 + (15x^4 + 2)4
 \end{aligned}$$

3.8 Turunan Fungsi Aljabar dan Fungsi Transenden



3.8.1 Turunan Fungsi Rasional

Contoh-contoh tentang turunan yang diuraikan sebelumnya (contoh 3) adalah contoh-contoh turunan fungsi rasional. Jadi turunan fungsi rasional ini tidak perlu dibahas kembali.

3.8.2 Turunan Fungsi Irrasional

Fungsi Irrasional adalah akar dari fungsi-fungsi rasional

Contoh 9

Tentukan turunan $y = \sqrt[n]{x}$ dengan n bilangan bulat positif

Penyelesaian: $y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow x = y^n$ sehingga $\frac{dx}{dy} = ny^{n-1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n} y^{1-n} = \frac{1}{n} (\sqrt[n]{x})^{1-n} = \frac{1}{n} (x^{\frac{1}{n}})^{1-n} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

Contoh 10

Tentukan turunan $y = \sqrt{x^3 + 4x}$

Penyelesaian: $y = \sqrt{x^3 + 4x} = (x^3 + 4x)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} \text{Dengan aturan rantai diperoleh: } y' &= \frac{1}{2} (x^3 + 4x)^{-\frac{1}{2}} (3x^2 + 4) \\ &= \frac{3x^2 + 4}{2\sqrt{x^3 + 4x}} \end{aligned}$$

3.8.3 Turunan Fungsi Trigonometri

Akan dicari turunan fungsi kosinus sebagai berikut.

Ingat: $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Jika $f(x) = \cos x$, maka

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cos h - 1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

Jadi, jika $f(x) = \cos x$, maka $f'(x) = -\sin x$

Analog:

jika $f(x) = \sin x$, maka $f'(x) = \cos x$
jika $f(x) = \operatorname{tg} x$, maka $f'(x) = \sec^2 x$
jika $f(x) = \operatorname{ctg} x$, maka $f'(x) = -\operatorname{cosec}^2 x$
jika $f(x) = \sec x$, maka $f'(x) = \sec x \operatorname{tg} x$
jika $f(x) = \operatorname{cosec} x$, maka $f'(x) = -\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x$

3.8.4 Turunan Fungsi Siklometri

Fungsi siklometri adalah invers fungsi trigonometri.

Akan dicari turunan invers fungsi sinus (arcus sinus) berikut.

$$\begin{array}{ccc}
 y = \operatorname{arc} \sin x & \rightarrow & x = \sin y \\
 & & \downarrow \\
 & & \text{Diagram: A right-angled triangle with hypotenuse 1, vertical leg } x, \text{ and horizontal leg } \sqrt{1-x^2}. \text{ The angle at the bottom-left vertex is } y. \\
 & & \rightarrow \\
 & & \frac{dx}{dy} = \cos y \\
 & & \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} \\
 & & = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
 \end{array}$$

Jadi, jika $y = \operatorname{arc} \sin x$, maka $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Analog:

$$\text{jika } y = \text{arc cos } x, \text{ maka } y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{jika } y = \text{arc tg } x, \text{ maka } y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{jika } y = \text{arc ctg } x, \text{ maka } y' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{jika } y = \text{arc sec } x, \text{ maka } y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\text{jika } y = \text{arc cosec } x, \text{ maka } y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

3.8.5 Turunan Fungsi Logaritma

Akan dicari turunan $f(x) = \ln x$ berikut.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x} \cdot x}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{x}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}}{x}$$

$$= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}}{\lim_{h \rightarrow 0} x}$$

Mengingat (1) $\lim_{h \rightarrow 0} \ln f(x) = \ln \lim_{h \rightarrow 0} f(x)$ dan (2) $\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = e$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}}{\lim_{h \rightarrow 0} x} \\ &= \frac{\ln \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}}{\lim_{h \rightarrow 0} x} \\ &= \frac{\ln e}{x} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Jadi,

$$\boxed{\text{jika } f(x) = \ln x, \text{ maka } f'(x) = \frac{1}{x}}$$

Selanjutnya jika $y = {}^a \log x$ maka turunannya dapat dicari sebagai berikut.

$$\begin{aligned} y = {}^a \log x &\Leftrightarrow y = \frac{\ln x}{\ln a} \\ &= \frac{1}{\ln a} \ln x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sehingga } y' &= \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x \ln a} \end{aligned}$$

Jadi,

$$\text{jika } y = {}^a \log x , \text{ maka } y' = \frac{1}{x \ln a}$$

3.8.6 Turunan Fungsi Eksponensial

Akan dicari turunan $y = a^x$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} y = a^x &\Leftrightarrow \ln y = \ln a^x \\ &\Leftrightarrow \ln y = x \ln a \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\ln y}{\ln a} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln a} \ln y \end{aligned}$$

$$\text{Sehingga } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{y}$$

$$\begin{aligned} \text{Diperoleh } \frac{dy}{dx} &= y \ln a. \\ &= a^x \ln a \end{aligned}$$

Jadi,

$$\text{jika } y = a^x , \text{ maka } y' = a^x \ln a$$

$$\begin{aligned} \text{Khususnya untuk } a = e, \text{ jika } y = e^x , \text{ maka } y' &= e^x \ln e \\ &= e^x \end{aligned}$$

Jadi,

$$\text{jika } y = e^x , \text{ maka } y' = e^x$$

3.8.7 Turunan Fungsi Hiperbolik

Definisi

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

Jika $f(x) = \sinh x$, maka dengan menggunakan turunan fungsi eksponensial diperoleh

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \\ &= \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \cosh x. \end{aligned}$$

Jadi,

jika $f(x) = \sinh x$, maka $f'(x) = \cosh x$

3.9 Turunan Fungsi Parameter

Apabila disajikan persamaan berbentuk:

$$x = f(t)$$

$$y = g(t)$$

maka persamaan ini disebut persamaan parameter dari x dan y , dan t disebut parameter. Dari bentuk parameter ini dapat dicari $\frac{dy}{dx}$ dengan cara sebagai berikut. Dari $x = f(t)$ dibentuk $t = h(x)$ dengan h fungsi invers dari f . Nampak bahwa $y = g(t)$ merupakan bentuk fungsi komposisi

$$y = g(t)$$

$$= g(h(x))$$

Diperoleh $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$ atau $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$

sehingga

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

SOAL

Carilah $\frac{dy}{dx}$ untuk yang berikut

1. $y = (3x^4 + 2x^2 + x)(x^2 + 7)$

5. $y = \frac{1}{4x^2 - 3x + 9}$

2. $y = (x^3 + 3x^2)(4x^2 + 2)$

6. $y = \frac{x-1}{x+1}$

3. $y = \frac{1}{3x^2 + 1}$

7. $y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x + 1}$

4. $y = \frac{2}{5x^2 - 1}$

Dengan aturan rantai tentukan $\frac{dy}{dx}$ untuk yang berikut

8. $y = (2 - 9x)^{15}$

15. $y = \sin \left(\frac{3x-1}{2x+5} \right)$

10. $y = \frac{1}{(4x^2 - 3x + 9)^9}$

16. $y = \cos \left(\frac{x^2 - 1}{x + 4} \right)$

11. $y = \sin (3x^2 + 11x)$

17. $y = \arcsin (3x^4 - 11x)$

12. $y = \cos (3x^4 - 11x)$

18. $y = \operatorname{arctg} (3x^4 - 11x)^8$

13. $y = \sin^3 x$

19. $y = \ln (5x^2 + 2x - 8)$

14. $y = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^4$

20. $y = e^{(2-9x)}$

Tentukan turunan fungsí implisit berikut

21. $x^2 + y^2 = 9$

26. $4x^3 + 11xy^2 - 2y^3 = 0$

22. $4x^2 + 9y^2 = 36$

27. $\sqrt{xy} + 3y = 10x$

23. $xy = 4$

28. $xy + \sin y = x^2$

24. $xy^2 - x + 16 = 0$

29. $\cos(xy) = y^2 + 2x$

25. $x^3 - 3x^2y + 19xy = 0$

30. $6x - \sqrt{2xy} + xy^3 = y^2$

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ untuk fungis parameter berikut

$$31. \begin{aligned} y &= 2 - 9t \\ x &= \sin t \end{aligned}$$

$$34. \begin{aligned} x &= \ln(2t - 9) \\ y &= (t^2 + 7)^3 \end{aligned}$$

$$32. \begin{aligned} y &= 2 - 9t^2 \\ x &= \arcsin(t - 1) \end{aligned}$$

$$35. \begin{aligned} x &= e^{(2t - 9)} \\ y &= \operatorname{cosec} t \end{aligned}$$

$$33. \begin{aligned} x &= \ln(2 - 9t) \\ y &= \sin t \end{aligned}$$

$$36. \begin{aligned} y &= \sec(t - 1) \\ x &= \operatorname{tg}(t - 1) \end{aligned}$$

4 INTEGRAL

Definisi 4.0.1

Fungsi F disebut anti turunan (integral tak tentu) dari fungsi f pada himpunan D jika

$$F'(x) = f(x)$$

untuk setiap $x \in D$.

Fungsi integral tak tentu f dinotasikan dengan $\int f(x) dx$ dan $f(x)$ dinamakan integran.

Jadi $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$.

Contoh 1

$\sin x, \sin x + 5, \sin x - \sqrt{7}$ adalah fungsi-fungsi integral tak tentu dari $\cos x$ pada seluruh garis real, sebab derivatif mereka sama dengan $\cos x$ untuk semua x .

Sifat 4.0.2:

Misalkan f dan g mempunyai anti turunan dan k suatu konstanta, maka

1. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$
2. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

Teorema 4.0.3

Jika F dan G keduanya integral tak tentu dari f pada interval I, maka $F(x)$ dan $G(x)$ berselisih suatu konstanta pada I

Jadi $F(x) - G(x) = C$ dengan C sembarang konstanta.

Akibat 4.0.4

Jika F suatu fungsi integral tak tentu dari f , maka

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

dengan C konstanta sembarang.

4.1 Rumus Dasar

1. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, n \neq -1$
2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C, x \neq 0$
3. $\int e^x dx = e^x + C$
4. $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C, a \neq 1$
 $a > 0$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
8. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
9. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
10. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$
11. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$
12. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$
13. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcsec} x + C$
 $= -\operatorname{arccsc} x + C$
14. $\int \sinh x dx = \cosh x + C$
15. $\int \cosh x dx = \sinh x + C$

SOAL

Tentukan:

1. $\int (x-2)^2 dx$
2. $\int \frac{2x^2 + x + 1}{x^3} dx$
3. $\int \frac{1+\sqrt{x}}{x} dx$
4. $\int (\sin x - \sqrt{x}) dx$
5. $\int 2^x dx$

4.2 Integral dengan Substitusi

Masalah: Tentukan $\int (2x+5)^{2006} dx$

Untuk menyelesaikan permasalahan seperti ini dapat digunakan aturan seperti pada teorema berikut.

Teorema 4.2.1

Jika $u = g(x)$ yang didefinisikan pada interval I mempunyai invers $x = g^{-1}(u)$ dan fungsi-fungsi g dan g^{-1} keduanya mempunyai derivatif yang kontinu pada intervalnya masing-masing, dan f kontinu pada interval di mana g^{-1} didefinisikan, maka

$$\int f\{g(x)\} g'(x) dx = \int f(u) du$$

Contoh 2

Tentukan $\int (2x+5)^{2006} dx$

Penyelesaian:

$$\text{Substitusikan } u = 2x + 5 \quad \rightarrow \quad \frac{du}{dx} = 2 \\ du = 2 dx$$

$$\begin{aligned} \text{maka} \quad \int (2x+5)^{2006} dx &= \int \frac{1}{2} (2x+5)^{2006} 2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int u^{2006} du \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2007} u^{2007} + C \\ &= \frac{1}{4014} (2x+5)^{2007} + C \end{aligned}$$

Contoh 3

Tentukan $\int x(3x^2 + 5)^{2006} dx$

Penyelesaian:

$$\text{Substitusikan } u = 3x^2 + 5 \quad \rightarrow \quad \frac{du}{dx} = 6x \\ du = 6x dx$$

$$\begin{aligned}
 \text{maka } \int x(3x^2 + 5)^{2006} dx &= \int \frac{1}{6} (3x^2 + 5)^{2006} 6x dx \\
 &= \frac{1}{6} \int u^{2006} du \\
 &= \frac{1}{6} \frac{1}{2007} u^{2007} + C \\
 &= \frac{1}{12042} (3x^2 + 5)^{2007} + C
 \end{aligned}$$

Contoh 4

Tentukan $\int \cos \frac{1}{2}x dx$

Penyelesaian:

$$\text{Substitusikan } u = \frac{1}{2}x \quad \rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad du = \frac{1}{2} dx$$

$$\begin{aligned}
 \text{maka } \int 2 \cos \frac{1}{2}x \frac{1}{2} dx &= 2 \int \cos u du \\
 &= 2 \sin u + C \\
 &= 2 \sin \frac{1}{2}x + C
 \end{aligned}$$

SOAL

Tentukan:

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $\int 3(x-2)^9 dx$ | 6. $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$ |
| 2. $\int x(5x^2 + 2)^9 dx$ | 7. $\int \frac{dx}{4+(x+1)^2}$ |
| 3. $\int \frac{8}{(x+3)^4} dx$ | 8. $\int x\sqrt{2x^2 - 1} dx$ |
| 4. $\int \frac{1}{x \ln x} dx$ | 9. $\int e^{\sin x} \cos x dx$ |
| 5. $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$ | 10. $\int e^{4x} dx$ |

4.3 Integral Parsial

Masalah: Tentukan $\int x e^x dx$

$$\text{Misalkan: } u = f(x) \rightarrow \frac{du}{dx} = f'(x) \rightarrow du = f'(x) dx \rightarrow du = u' dx$$

$$v = g(x) \rightarrow \frac{dv}{dx} = g'(x) \rightarrow dv = g'(x) dx \rightarrow dv = v' dx$$

$$uv = f(x)g(x) \rightarrow \frac{d(uv)}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$d(uv) = f'(x)g(x)dx + f(x)g'(x)dx$$

$$d(uv) = u'v dx + uv' dx$$

$$d(uv) = v du + u dv$$

Jika kedua ruas diintegralkan, diperoleh

$$uv = \int v du + \int u dv$$

\Leftrightarrow

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

Contoh 5

Tentukan $\int x e^x dx$

Penyelesaian:

$$\text{Misalkan } u = x \rightarrow du = dx$$

$$dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x$$

$$\begin{aligned} \text{sehingga } \int x e^x dx &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x + C \end{aligned}$$

Contoh 6

Tentukan $\int x^2 e^x dx$

Penyelesaian:

$$\text{Misalkan } u = x^2 \rightarrow du = 2x dx$$

$$dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x$$

$$\begin{aligned}
\text{sehingga } \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - \int e^x 2x dx \\
&= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \\
&= x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C \\
&= x^2 e^x - 2x e^x + e^x + C
\end{aligned}$$

Contoh 7

Tentukan $\int x \cos x dx$ 5.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
\text{Misalkan } u &= x \rightarrow du = dx \\
dv &= \cos x dx \rightarrow v = \int \cos x dx = \sin x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{sehingga } \int x \cos x dx &= x \sin x - \int \sin x dx \\
&= x \sin x + \cos x + C
\end{aligned}$$

Contoh 8

Tentukan $\int e^x \cos x dx$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
\text{Misalkan } u &= e^x \rightarrow du = e^x dx \\
dv &= \cos x dx \rightarrow v = \int \cos x dx = \sin x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{sehingga } \int e^x \cos x dx &= e^x \sin x - \int \sin x e^x dx \\
&= e^x \sin x - \int e^x \sin x dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{misal } u = e^x \rightarrow du = e^x dx \\
dv &= \sin x dx \rightarrow v = \int \sin x dx \\
&= -\cos x \\
&= e^x \sin x - \left\{ e^x (-\cos x) - \int -\cos x e^x dx \right\} \\
&= e^x \sin x + e^x \cos x - \int \cos x e^x dx
\end{aligned}$$

$$\text{Diperoleh } \int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int \cos x e^x dx$$

$$2 \int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x \sin x + \frac{1}{2} e^x \cos x + C$$

SOAL

Tentukan:

- | | |
|-------------------------|-----------------------------------|
| 1. $\int x \sin x dx$ | 6. $\int e^x \sin x dx$ |
| 2. $\int x \sin 2x dx$ | 7. $\int \arcsin x dx$ |
| 3. $\int \ln x dx$ | 8. $\int \arctan dx$ |
| 4. $\int x e^{-x} dx$ | 9. $\int x \ln x^2 dx$ |
| 5. $\int x^2 e^{-x} dx$ | 10. $\int \frac{\ln \ln x}{x} dx$ |

4.4 Integral yang Menghasilkan Arcus Tangen dan Logaritma

$$\text{Ingat: } \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

Berdasarkan rumus di atas dapat dibuktikan bahwa untuk konstanta $a \neq 0$, maka berlaku:

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad (4.4.1)$$

Perhatikan penyebut dalam integran.

Selanjutnya akan dicari $\int \frac{1}{x^2 + 2bx + c} dx$

Jika $f(x) = x^2 + 2bx + c$ dengan $D = 4b^2 - 4c < 0$, maka $f(x)$ **definit positif** dan selalu dapat dibawa ke bentuk

$$f(x) = (x + b)^2 + p^2$$

dengan $p^2 = c - b^2 > 0$

sehingga $\int \frac{1}{x^2 + 2bx + c} dx = \int \frac{1}{(x + b)^2 + p^2} dx$ dan dengan menggunakan (4.4.1)

dapat diperoleh

$$\int \frac{1}{x^2 + 2bx + c} dx = \frac{1}{p} \arctan \frac{x+b}{p} + C \quad (4.4.2)$$

dengan $p = \sqrt{c - b^2}$

Contoh 9

Tentukan $\int \frac{1}{3+x^2} dx$

Penyelesaian:

Dengan menggunakan rumus (4.4.1) diperoleh $\int \frac{1}{3+x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc tan} \frac{x}{\sqrt{3}} + C$

Contoh 10

Tentukan $\int \frac{1}{x^2+9} dx$

Penyelesaian:

Dengan menggunakan rumus (4.4.1) diperoleh $\int \frac{1}{3+x^2} dx = \frac{1}{3} \operatorname{arc tan} \frac{x}{3} + C$

Contoh 11

Tentukan $\int \frac{1}{x^2+2x+5} dx$

Penyelesaian:

$$b = 1$$

$$c = 5$$

$$p = \sqrt{5-1^2} = \sqrt{4} = 2$$

Dengan rumus (4.4.2) diperoleh $\int \frac{1}{x^2+2x+5} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arc tan} \frac{x+1}{2} + C$

Atau secara langsung dengan cara berikut:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+5} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+4} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arc tan} \frac{x+1}{2} + C$$

Selanjutnya ingat: $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$

Dengan rumus ini dapat ditunjukkan bahwa

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)| + C$$

(4.4.3)

Contoh 11

Tentukan $\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4} dx$

Penyelesaian:

Dengan rumus (4.4.3) diperoleh $\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4} dx = \ln|x^2+2x+4| + C$

Contoh 12

Tentukan $\int \frac{x+5}{x^2+6x+13} dx$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\int \frac{x+5}{x^2+6x+13} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+6)+2}{x^2+6x+13} dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+6)}{x^2+6x+13} dx + \int \frac{2}{x^2+6x+13} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2+6x+13| + 2 \int \frac{1}{(x+3)^2+4} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2+6x+13| + 2 \cdot \frac{1}{2} \arctan \frac{x+3}{2} + C \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2+6x+13| + \arctan \frac{x+3}{2} + C\end{aligned}$$

SOAL

Tentukan:

1. $\int \frac{x+5}{x^2+10x+13} dx$

2. $\int \frac{x^2+5}{x^3+15x-1} dx$

3. $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

4. $\int \frac{5}{x^2+4x+7} dx$

5. $\int \frac{3x+2}{x^2+4x+7} dx$

6. $\int \frac{5x+1}{x^2+6x+13} dx$

7. $\int \frac{4x+1}{x^2-6x+13} dx$

8. $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+7} dx$

4.5 Integral Fungsi Pecah Rasional

$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$ dengan $a_n \neq 0$ dinamakan polinomial (fungsi suku banyak) berderajat n .

Fungsi konstan $P_0(x) = a_0$ dapat dipandang sebagai polinomial berderajat nol.

Fungsi pecah rasional adalah fungsi berbentuk $\frac{N(x)}{D(x)}$ dengan $N(x)$ dan $D(x)$ polinomial-polinomial.

Uraian mengenai integral fungsi pecah rasional dapat diperinci untuk beberapa kasus sebagai berikut.

4.5.1 Kedaan $N(x) = D'(x)$

Jika $N(x) = D'(x)$ maka berdasarkan rumus (4.4.3) diperoleh:

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \ln |D(x)| + C$$

dan ini sudah dibahas pada bagian 4.4 sehingga tidak perlu diulang.

4.5.2 Kedaan derajat $N(x) \geq$ derajat $D(x)$

Lakukan pembagian $N(x)$ oleh $D(x)$ sehingga diperoleh bentuk

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \text{ dengan derajat } R(x) < \text{derajat } D(x)$$

$Q(x)$ adalah polinom, sehingga integralnya sangat mudah.

Contoh 13

$$1. \int \frac{x^3}{x^2+1} dx = \int \left\{ x - \frac{x}{x^2+1} \right\} dx = \dots$$

$$2. \int \frac{x^4 - 19x^2 - 48x + 60}{x^2 + 6x + 13} dx = \int \left\{ x^2 - 6x + 4 + \frac{6x + 8}{x^2 + 6x + 13} \right\} dx = \dots$$

Kepada pembaca dipersilakan untuk melanjutkan penyelesaian kedua contoh dalam contoh 13 di atas.

Dengan demikian yang perlu dipelajari lebih lanjut adalah kedaan dimana derajat $N(x) <$ derajat $D(x)$ dan $N(x) \neq D'(x)$

4.5.3 Keadaan Derajat $N(x) <$ Derajat $D(x)$

Pada pembahasan ini $N(x) \neq D'(x)$. Tanpa mengurangi umumnya pembicaraan, diambil koefisien suku pangkat tertinggi dari x dalam $D(x)$ adalah satu. Untuk menghitung $\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$, terlebih dahulu integran dipisah menjadi pecahan-pecahan parsialnya.

Contoh 14

$\frac{6x^2 + 6}{x^3 + 4x^2 + x - 6}$ dapat dipecah menjadi pecahan-pecahan parsial berikut

$$\frac{6x^2 + 6}{x^3 + 4x^2 + x - 6} = \frac{1}{x-1} - \frac{10}{x+2} + \frac{15}{x+3}$$

Jadi

$$\begin{aligned} \int \frac{6x^2 + 6}{x^3 + 4x^2 + x - 6} dx &= \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{10}{x+2} dx + \int \frac{15}{x+3} dx \\ &= \int \frac{1}{x-1} dx - 10 \int \frac{1}{x+2} dx + 15 \int \frac{1}{x+3} dx \\ &= \ln|x-1| - 10 \ln|x+2| + 15 \ln|x+3| + C \end{aligned}$$

Karena sebelum melakukan pengintegralan terlebih dahulu diadakan pemisahan $\frac{N(x)}{D(x)}$ menjadi pecahan-pecahan parsialnya, maka sebelumnya perlu dipelajari

cara memisah $\frac{N(x)}{D(x)}$ menjadi pecahan-pecahan parsialnya tersebut.

Memisah Pecahan Menjadi Pecahan Parsial

Dalam pembicaraan ini tetap diasumsikan:

- 1) derajat $N(x) <$ derajat $D(x)$
- 2) koefisien suku pangkat tertinggi dari x dalam $D(x)$ adalah satu
- 3) $N(x)$ dan $D(x)$ tidak lagi mempunyai faktor persekutuan

Menurut keadaan faktor-faktor $D(x)$, dalam memisahkan $\frac{N(x)}{D(x)}$ menjadi pecahan-

pecahan parsialnya dapat dibedakan menjadi 4 keadaan, yaitu:

- Semua faktor $D(x)$ linear dan berlainan
- Semua faktor $D(x)$ linear tetapi ada yang sama (berulang)
- $D(x)$ mempunyai faktor kuadrat dan semua faktor kuadratnya berlainan
- $D(x)$ mempunyai faktor kuadrat yang sama.

a. Semua faktor $D(x)$ linear dan berlainan

Misalkan faktor-faktor $D(x)$ adalah $x - a$, $x - b$, $x - c$, dan $x - d$, maka

$$D(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d).$$

$$\text{Dibentuk } \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \frac{D}{x-d} \quad (1)$$

sebagai suatu identitas dalam x , sehingga untuk setiap nilai x yang diberikan maka nilai ruas kiri dan nilai ruas kanan dalam (1) sama. Konstanta A , B , C , dan D adalah konstanta-konstanta yang masih akan dicari nilainya.

Contoh 15

Pisahkan $\frac{6x^2 + 6}{x^3 + 4x^2 + x - 6}$ atas pecahan-pecahan parsialnya.

Penyelesaian:

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x+2)(x+3) = 0$$

Dibentuk

$$\begin{aligned} \frac{6x^2 + 6}{x^3 + 4x^2 + x - 6} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} \\ \Leftrightarrow \frac{6x^2 + 6}{x^3 + 4x^2 + x - 6} &= \frac{A(x+2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x+3)} \\ \Leftrightarrow 6x^2 + 6 &= A(x+2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+2) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{untuk } x = 1 \quad \rightarrow \quad 12 = A(3)(4) \quad \Leftrightarrow \quad A = 1$$

$$\text{untuk } x = -2 \quad \rightarrow \quad 30 = B(-3)(1) \quad \Leftrightarrow \quad B = -10$$

$$\text{untuk } x = -3 \quad \rightarrow \quad 60 = C(-4)(-1) \quad \Leftrightarrow \quad C = 15$$

Jika nilai A , B , dan C ini disubstitusikan ke dalam (2) maka diperoleh

$$\frac{6x^2 + 6}{x^3 + 4x^2 + x - 6} = \frac{1}{x-1} - \frac{10}{x+2} + \frac{15}{x+3}$$

sehingga

$$\begin{aligned} \int \frac{6x^2 + 6}{x^3 + 4x^2 + x - 6} dx &= \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{10}{x+2} dx + \int \frac{15}{x+3} dx \\ &= \ln|x-1| - 10 \ln|x+2| + 15 \ln|x+3| + C \end{aligned}$$

Pada bagian ini dijumpai bentuk $\int \frac{1}{x-a} dx$

b. Semua faktor $D(x)$ linear tetapi ada yang sama (berulang)

Misalkan faktor-faktor $D(x)$ adalah $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-c$, $x-d$, $x-d$, dan $x-d$, maka $D(x) = (x-a)(x-b)(x-c)^2(x-d)^3$.

Selanjutnya dibentuk

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \frac{D}{(x-c)^2} + \frac{E}{x-d} + \frac{F}{(x-d)^2} + \frac{G}{(x-d)^3} \quad (3)$$

Perhatikan suku-suku pecahan di ruas kanan terutama yang sesuai dengan akar sama c dan d .

Contoh 16

Pisahkan $\frac{x}{(x-2)(x+1)^3}$ atas pecahan-pecahan parsialnya.

Penyelesaian:

Dibentuk

$$\frac{x}{(x-2)(x+1)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3} \quad (4)$$

$$x = A(x+1)^3 + B(x-2)(x+1)^2 + C(x-2)(x+1) + D(x-2)$$

$$\text{untuk } x = -1 \quad \rightarrow \quad -1 = -3D$$

$$\text{untuk } x = 2 \quad \rightarrow \quad 2 = 27A$$

$$\text{untuk } x = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = A - 2B - 2C - 2D$$

$$\text{untuk } x = 1 \quad \rightarrow \quad 1 = 8A - 4B - 2C - D$$

Dari keempat persamaan tersebut diperoleh:

$$A = \frac{2}{27}, \quad B = -\frac{2}{27}, \quad C = -\frac{6}{27}, \quad D = \frac{1}{3}$$

$$\text{Jadi } \frac{x}{(x-2)(x+1)^3} = \frac{\frac{2}{27}}{x-2} + \frac{-\frac{2}{27}}{x+1} + \frac{-\frac{6}{27}}{(x+1)^2} + \frac{\frac{1}{3}}{(x+1)^3}$$

Selanjutnya dapat dicari integral $\int \frac{x}{(x-2)(x+1)^3} dx$

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x-2)(x+1)^3} dx &= \int \frac{\frac{2}{27}}{x-2} dx + \int \frac{-\frac{2}{27}}{x+1} dx + \int \frac{-\frac{6}{27}}{(x+1)^2} dx + \int \frac{\frac{1}{3}}{(x+1)^3} dx \\ &= \dots\end{aligned}$$

Pada bagian ini dijumpai bentuk $\int \frac{1}{x-a} dx$ dan $\int \frac{1}{(x-a)^n} dx \quad n = 2, 3, \dots$

c. $D(x)$ mempunyai faktor kuadrat dan semua faktor kuadratnya berlainan

Ingat teorema dalam aljabar berikut.

Teorema: Akar-akar tidak real persamaan derajat tinggi dengan koefisien real sepasang-sepasang bersekawan, artinya jika $a + bi$ suatu akar maka $a - bi$ juga akar persamaan itu

Berdasarkan teorema tersebut maka apabila $a + bi$ akar persamaan $D(x) = 0$ maka demikian juga $a - bi$, sehingga salah satu faktor $D(x)$ adalah

$$\{x - (a + bi)\} \{x - (a - bi)\} = (x - a)^2 + b^2 \text{ yang definit positif.}$$

Misal $D(x) = (x - p)(x - q)^2 \{(x - a)^2 + b^2\} \{(x - c)^2 + d^2\}$ maka perlu dibentuk

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A}{x-p} + \frac{B}{x-q} + \frac{C}{(x-q)^2} + \frac{Dx+E}{(x-a)^2+b^2} + \frac{Fx+G}{(x-c)^2+d^2} \quad (5)$$

Contoh 17

Pisahkan $\frac{3x}{x^3-1}$ atas pecahan-pecahan parsialnya.

Penyelesaian:

$$\frac{3x}{x^3-1} = \frac{3x}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$\text{Dibentuk } \frac{3x}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$3x = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$$

$$\text{untuk } x = 1 \quad \longrightarrow \quad 3 = 3A$$

$$\text{untuk } x = 0 \quad \longrightarrow \quad 0 = A - C$$

$$\text{untuk } x = -1 \quad \longrightarrow \quad -3 = A + 2B - 2C$$

Setelah dicari nilai-nilai A , B , dan C diperoleh $A = 1$, $B = -1$, dan $C = 1$, sehingga

$$\frac{3x}{x^3 - 1} = \frac{1}{x-1} + \frac{-x+1}{x^2+x+1}$$

Jadi $\int \frac{3x}{x^3 - 1} dx = \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{-x+1}{x^2+x+1} dx$

 $= \dots$ $= \dots$

Pada bagian ini dijumpai bentuk $\int \frac{1}{x-a} dx$, $\int \frac{1}{(x-a)^n} dx$ $n=2, 3, \dots$, dan

$$\int \frac{AX+B}{(x-a)^2+b^2} dx$$

d. $D(x)$ mempunyai faktor kuadrat yang sama

Berdasarkan teorema dalam bagian c di atas maka apabila $a + bi$ merupakan akar berlipat k dari persamaan $D(x) = 0$ maka demikian juga $a - bi$, dan faktor-faktor dari $D(x)$ yang sesuai dengan akar-akar ini adalah $\{(x-a)^2 + b^2\}^k$.

Misal $D(x) = (x-p)(x-q)^2 \{(x-a)^2 + b^2\} \{(x-c)^2 + d^2\}^3$ maka perlu dibentuk

$$\begin{aligned} \frac{N(x)}{D(x)} &= \frac{A}{x-p} + \frac{B}{x-q} + \frac{C}{(x-q)^2} + \frac{Dx+E}{(x-a)^2+b^2} + \frac{Fx+G}{(x-c)^2+d^2} + \frac{Hx+J}{\{(x-c)^2+d^2\}^2} \\ &\quad + \frac{Kx+L}{\{(x-c)^2+d^2\}^3} \end{aligned}$$

Contoh 18

Pisahkan $\frac{3x^3 - 2x^2 + 5x - 1}{(x-2)(x^2+1)^2}$ atas pecahan-pecahan parsialnya.

Penyelesaian:

Dengan cara seperti yang telah diberikan sebelumnya didapatkan

$$\frac{3x^3 - 2x^2 + 5x - 1}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{x-1}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

$$\text{Jadi } \int \frac{3x^3 - 2x^2 + 5x - 1}{(x-2)(x^2+1)^2} dx = \int \frac{1}{x-2} dx - \int \frac{x-1}{x^2+1} dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$$

Pada bagian ini dapat muncul bentuk $\int \frac{AX+B}{\{(x-a)^2+b^2\}^n} dx$, $n = 2, 3, \dots$, dan

Dalam mencari $\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$ kita dihadapkan kepada empat jenis integral yang berbentuk:

$$(1) \int \frac{1}{x-a} dx$$

$$(2) \int \frac{1}{(x-a)^n} dx \quad n = 2, 3, \dots$$

$$(3) \int \frac{AX+B}{(x-a)^2+b^2} dx$$

$$(4) \int \frac{AX+B}{\{(x-a)^2+b^2\}^n} dx \quad n = 2, 3, \dots$$

Tiga bentuk yang pertama telah dapat diselesaikan menggunakan teori-teori yang sudah diberikan. Adapun integral bentuk keempat dapat diselesaikan dengan substitusi $y = x - a$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \int \frac{AX+B}{\{(x-a)^2+b^2\}^n} dx &= \int \frac{Ay+aA+B}{\{y^2+b^2\}^n} dy \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{d(y^2+b^2)}{\{y^2+b^2\}^n} + \int \frac{aA+B}{\{y^2+b^2\}^n} dy \end{aligned}$$

Integral untuk suku pertama pada ruas terakhir bukan masalah karena berbentuk $\int \frac{du}{u^n}$, $n = 2, 3, \dots$. Sedangkan integral pada suku keduanya dapat diubah menjadi

$$\begin{aligned} \int \frac{aA+B}{\{y^2+b^2\}^n} dy &= \frac{aA+B}{b^{2n}} \int \frac{dy}{\left\{1+\left(\frac{y}{b}\right)^2\right\}^n} \\ &= \frac{aA+B}{b^{2n-1}} \int \frac{dt}{\{1+t^2\}^n} \quad \text{dengan } t = \frac{y}{b} \end{aligned}$$

Untuk menghitung integral $\int \frac{dt}{\{1+t^2\}^n}$ dapat digunakan **rumus reduksi** berikut

$$\int \frac{dt}{\{1+t^2\}^n} = \frac{t}{(2n-2)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dt}{\{1+t^2\}^{n-1}}$$

Dalam tulisan ini tidak diberikan bukti rumus reduksi tersebut.

Contoh 19

Selesaikan $\int \frac{x+3}{(x^2+4x+13)^2} dx$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{(x^2+4x+13)^2} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+4)+1}{(x^2+4x+13)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{(x^2+4x+13)^2} dx + \int \frac{1}{(x^2+4x+13)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+4x+13)}{(x^2+4x+13)^2} + \int \frac{1}{\{(x+2)^2+9\}^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+4x+13)}{(x^2+4x+13)^2} + \int \frac{1}{\{(x+2)^2+9\}^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+4x+13} + \int \frac{1}{9[(x+2)/3]^2+1} dx \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+4x+13} + \frac{1}{81} \int \frac{1}{\{(x+2)/3\}^2+1} dx \end{aligned}$$

Untuk $\frac{1}{81} \int \frac{1}{\{(x+2)/3\}^2+1} dx$ substitusikan $t = \frac{x+2}{3}$, $dt = \frac{1}{3}dx$ sehingga

$$\begin{aligned} \frac{1}{81} \int \frac{1}{\{(x+2)/3\}^2+1} dx &= \frac{1}{27} \int \frac{1}{\{t^2+1\}^2} dt \\ &= \frac{1}{27} \left(\frac{t}{(2.2-2)(1+t)} + \frac{2.2-3}{2.2-2} \int \frac{1}{\{t^2+1\}} dt \right) \\ &= \frac{1}{27} \left(\frac{t}{2(1+t)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\{t^2+1\}} dt \right) \\ &= \frac{1}{27} \left(\frac{t}{2(1+t)} + \frac{1}{2} \arctan t \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{27} \left(\frac{x+2}{3.2(1+\frac{x+2}{3})} + \frac{1}{2} \arctan \frac{x+2}{3} \right) \\
&= \frac{1}{27} \left(\frac{x+2}{6+2(x+2)} + \frac{1}{2} \arctan \frac{x+2}{3} \right) \\
&= \frac{1}{27} \frac{x+2}{2x+10} + \frac{1}{54} \arctan \frac{x+2}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Jadi } \int \frac{x+3}{(x^2+4x+13)^2} dx &= -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+4x+13} + \frac{1}{81} \int \frac{1}{[(x+2)/3]^2+1} dx \\
&= -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+4x+13} + \frac{1}{27} \frac{x+2}{2x+10} + \frac{1}{54} \arctan \frac{x+2}{3} + C.
\end{aligned}$$

LATIHAN

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 1. $\int \frac{x}{x^2+3x-4} dx$ | 4. $\int \frac{x}{(x^2-1)^2(x^2+1)} dx$ |
| 2. $\int \frac{x+3}{(x-1)^2(x+4)} dx$ | 5. $\int \frac{2x^4-2x^3+3x^2-2}{x^2-x} dx$ |
| 3. $\int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$ | 6. $\int \frac{4x^3+x^2+1}{(x^2-2)^3} dx$ |

4.6 Integral Fungsi Trigonometri

4.6.1 Rumus-rumus Sederhana

$$\begin{array}{lll}
\int \cos x \, dx = \sin x + C & \int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C \\
\int \sin x \, dx = -\cos x + C & \int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + C \\
\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C & \int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C \\
\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C & \int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C \\
\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C & \int \csc x \, dx = -\ln |\csc x + \cot x| + C
\end{array}$$

4.6.2 Bentuk $\int R(\sin x) \cos x \, dx$ dan $\int R(\cos x) \sin x \, dx$

$$\begin{aligned}
\text{Jika } R \text{ fungsi rasional maka } \int R(\sin x) \cos x \, dx &= \int R(\sin x) \, d(\sin x) \\
&= \int R(y) \, dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int R(\cos x) \sin x dx &= - \int R(\cos x) d(\cos x) \\ &= - \int R(t) dt\end{aligned}$$

Dengan mengingat rumus $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, maka:

$$\begin{aligned}\int R(\sin x, \cos^2 x) \cos x dx &= \int R(y, 1-y^2) dy \\ \int R(\cos x, \sin^2 x) \sin x dx &= - \int R(t, 1-t^2) dt\end{aligned}$$

Contoh 20

1. $\int (2\cos^2 x - \sin x + 7) \cos x dx$
2. $\int \sin^3 x dx$

4.6.3 Integral dengan memperhatikan rumus-rumus

$$\begin{aligned}\sin x \sin y &= \frac{1}{2} \{\cos(x-y) - \cos(x+y)\} \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2} \{\sin(x+y) + \sin(x-y)\} \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2} \{\cos(x+y) + \cos(x-y)\} \\ \sin^2 x &= \frac{1}{2} \{1 - \cos 2x\} \\ \cos^2 x &= \frac{1}{2} \{1 + \cos 2x\}\end{aligned}$$

Contoh 21

Carilah

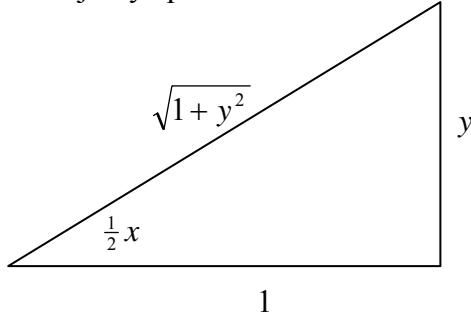
1. $\int \sin 3x \sin 2x dx$
2. $\int \sin 3x \cos 2x dx$
3. $\int \cos 3x \cos 2x dx$
4. $\int \sin^2 x dx$
5. $\int \sin^4 x dx$

4.6.4 Substitusi $y = \tan \frac{1}{2}x$

Jika $R(\sin x, \cos x)$ fungsi rasional dalam $\sin x$ dan $\cos x$, maka $\int R(\sin x, \cos x) dx$ dapat dibawa menjadi integral fungsi rasional dalam y dengan menggunakan substitusi $y = \tan \frac{1}{2}x$.

$$y = \tan \frac{1}{2}x \rightarrow x = 2 \arctan y \rightarrow dx = \frac{2}{1+y^2} dy$$

Selanjutnya perhatikan



Memperhatikan gambar di atas dapat dipahami bahwa

$$\sin \frac{1}{2}x = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \quad \text{dan} \quad \cos \frac{1}{2}x = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$\sin x = \sin(2 \cdot \frac{1}{2}x)$$

$$= 2 \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x = 2 \cdot \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{2y}{1+y^2}$$

$$\text{Jadi } \sin x = \frac{2y}{1+y^2}.$$

Dengan menggunakan rumus $\cos x = \cos(2 \cdot \frac{1}{2}x)$ diperoleh

$$\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

$$\tan x = \frac{2y}{1-y^2}$$

$$\cot x = \frac{1-y^2}{2y}$$

Contoh 22

- Carilah:
1. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$
 2. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$
 3. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$
 4. $\int \csc x \, dx$

4.6.5 Integral $R(\tan x)$

Jika integran fungsi rasional dalam $\tan x$ saja, maka dapat dijadikan integral fungsi rasional dalam y dengan substitusi $y = \tan x$, sehingga $x = \arctan y$ dan

$$dx = \frac{dy}{1+y^2}.$$

Jadi $\int R(\tan x) dx = \int \frac{R(y)}{1+y^2} dy$

Contoh 23

Carilah: 1. $\int \tan x dx$ 2. $\int \frac{dx}{1+\tan x}$

4.6.6 Rumus Reduksi untuk Integral Fungsi Trigonometri

Jika n bilangan bulat positif, maka:

$$\int \sin^{2n+1} x dx = -\int (1-y^2)^n dy \quad \text{dengan } y = \cos x$$

$$\int \cos^{2n+1} x dx = \int (1-t^2)^n dt \quad \text{dengan } t = \sin x$$

Untuk n bilangan genap positif dapat digunakan rumus:

$$\int \cos^n x dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

$$\int \sin^n x dx = \frac{-\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

$$\int \tan^n x dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} + \int \tan^{n-2} x dx$$

$$\int \cot^n x dx = \frac{-\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x dx$$

$$\int \sec^n x dx = \frac{\sin x \sec^{n-1} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx$$

$$\int \csc^n x dx = \frac{-\cos x \csc^{n-1} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} x dx$$

Bukti rumus-rumus di atas tidak diberikan dalam tulisan ini.

LATIHAN

4.7 Integral Fungsi Irrasional

Dalam tulisan ini dibahas beberapa jenis integral fungsi irrasional. Pada dasarnya integral ini diselesaikan dengan mengubah integral irrasional menjadi integral rasional, baik rasional aljabar maupun trigonometri.

4.7.1 Rumus yang perlu dihafal

$$1) \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$2) \int \frac{a}{x\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \operatorname{arc sec} \frac{x}{a} + C$$

$$3) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$$

$$4) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$$

$$5) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$6) \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$$

$$7) \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$$

Dua rumus pertama mudah dibawa ke bentuk rumus integral dasar dengan substitusi $y = \frac{x}{a}$. Sedangkan rumus-rumus yang lain dapat dibuktikan dengan menggunakan metode yang akan diterangkan pada bagian 4.7.4.

4.7.2 Bentuk Irrasional Satu Suku

Jika integran hanya memuat bentuk irrasional dari satu macam suku, misalnya x , maka integral dapat dijadikan integral rasional dengan substitusi $y = \sqrt[n]{x}$ dimana n kelipatan persekutuan terkecil dari pangkat-pangkat akar.

Contoh 24

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt{x}} dx \quad \text{diambil substitusi } y = \sqrt[6]{x}, \text{ sehingga } x = y^6 \text{ dan } dx = 6y^5 dy$$

4.7.3 Satu-satunya Bentuk Irrasional $\sqrt{ax^2 + bx + c}$

Dalam hal ini $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ sebagai satu-satunya bentuk irrasional di dalam integran, maka integran dapat dijadikan rasional dengan substitusi

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} + y, \text{ jika } a > 0$$

atau

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xy + \sqrt{c}, \text{ jika } c \geq 0$$

Dengan substitusi yang pertama diperoleh $x = \frac{-(y^2 - c)}{2y\sqrt{a} - b}$ dan dx dapat dinyatakan

ke dalam bentuk rasional dalam y kali dy .

Contoh 25

$$\int \frac{1}{(x-3)\sqrt{x^2 - 6x + 2}} dx \quad \text{diambil substitusi } \sqrt{x^2 - 6x + 2} = x + y, \text{ sehingga}$$

$x = \frac{-(y^2 - 2)}{2(y+3)}$ dan $dx = -\frac{1}{2} \frac{y^2 + 6y + 2}{(y+3)^2} dy$. Selanjutnya dapat diselesaikan seperti integral rasional

4.7.4 Substitusi Trigonometri

Dengan memperhatikan rumus trigonometri

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{dan} \quad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

bentuk-bentuk irrasional berikut dapat dijadikan bentuk rasional fungsi trigonometri.

Bentuk	Substitusi	Diferensial
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin \theta$	$dx = a \cos \theta \ d\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta$	$dx = a \sec \theta \tan \theta \ d\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan \theta$	$dx = a \sec^2 \theta \ d\theta$

Contoh 26

1. Buktikan $\int \sqrt{a^2 - x^2} \ dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$
2. Gunakan substitusi $x = a \sin \theta$ untuk menentukan $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} \ dx$
3. Carilah $\int \frac{1}{(x-3)\sqrt{x^2-6x+2}} \ dx$

LATIHAN 4.7

1. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}} \ dx$
2. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ dx$
3. $\int \frac{1}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+1}} \ dx$
4. $\int \frac{1}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+8}} \ dx$

5

INTEGRAL TERTENTU**5.1 Pengertian Integral Tertentu****Definisi 5.1.1**

Partisi P pada interval $[a,b]$ adalah suatu subset berhingga $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dari $[a,b]$ dengan $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

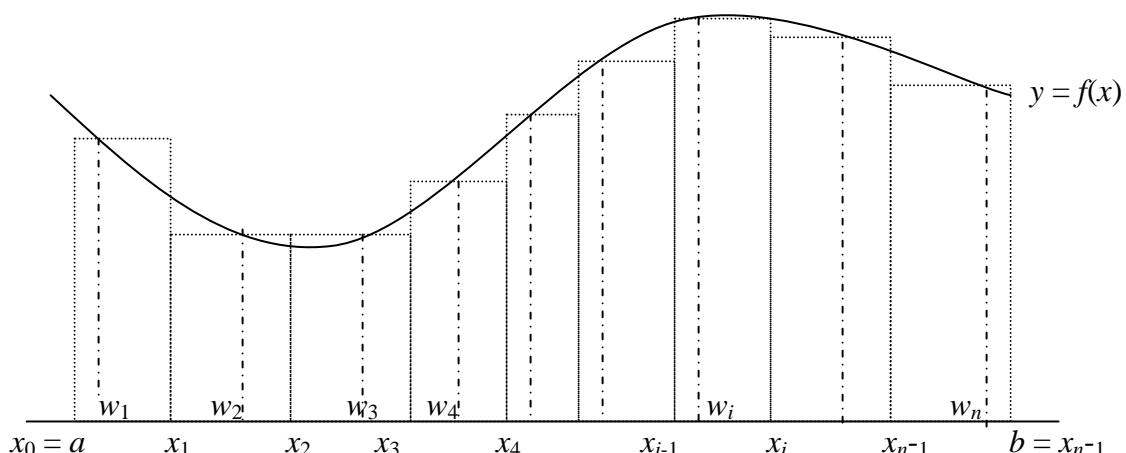
Jika $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ partisi pada $[a,b]$ maka Norm P , ditulis $\|P\|$, didefinisikan sebagai $\|P\| = \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, 2, 3, \dots, n\}$.

**Contoh 1:**

Pada interval $[-3, 3]$, suatu partisi $P = \{-3, -1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2, 3\}$ mempunyai norm:

$$\begin{aligned}\|P\| &= \max\{-1\frac{1}{2} - (-3), -\frac{1}{2} - (-1\frac{1}{2}), \frac{1}{3} - (-\frac{1}{2}), 2 - \frac{1}{3}, 3 - 2\} \\ &= \max\{\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{6}, \frac{5}{3}, 1\} \\ &= \frac{5}{3}.\end{aligned}$$

Jika f fungsi yang didefinisikan pada $[a,b]$, $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ suatu partisi pada $[a,b]$, $w_i \in [x_{i-1}, x_i]$, dan $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, maka $\sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i$ disebut **Jumlah Riemann f** pada $[a,b]$.



Contoh 2:

Fungsi f pada $[-3, 3]$ didefinisikan dengan $f(x) = x^2 - 1$ dan $P = \{-3, -1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2, 3\}$ partisi pada $[-3, 3]$. Dipilih titik-titik: $w_1 = -2, w_2 = -\frac{1}{2}, w_3 = 0, w_4 = 1\frac{1}{2}, w_5 = 2\frac{2}{3}$.

$$\begin{array}{llllll} w_1 = -2 & \longrightarrow & f(w_1) = 3 & \Delta x_1 = \frac{3}{2} & \longrightarrow & f(w_1) \cdot \Delta x_1 = \frac{9}{2} \\ w_2 = -\frac{1}{2} & \longrightarrow & f(w_2) = -\frac{3}{4} & \Delta x_2 = 1 & \longrightarrow & f(w_2) \cdot \Delta x_2 = -\frac{3}{4} \\ w_3 = 0 & \longrightarrow & f(w_3) = -1 & \Delta x_3 = \frac{5}{6} & \longrightarrow & f(w_3) \cdot \Delta x_3 = -\frac{5}{6} \\ w_4 = 1\frac{1}{2} & \longrightarrow & f(w_4) = \frac{5}{4} & \Delta x_4 = \frac{5}{3} & \longrightarrow & f(w_4) \cdot \Delta x_4 = \frac{25}{12} \\ w_5 = 2\frac{2}{3} & \longrightarrow & f(w_5) = \frac{55}{9} & \Delta x_5 = 1 & \longrightarrow & f(w_5) \cdot \Delta x_5 = \frac{55}{9} \end{array}$$

Jumlah Riemann fungsi f tersebut pada interval $[-3, 3]$ bersesuaian dengan partisi P di atas adalah $\sum_{i=1}^5 f(w_i) \Delta x_i = \frac{100}{9}$.

Jika $P = \{-3, -1\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2, 2\frac{1}{2}, 3\}$ partisi pada $[-3, 3]$ dan $w_1 = -2, w_2 = -1, w_3 = -\frac{1}{2}, w_4 = 0, w_5 = 1\frac{1}{2}, w_6 = 2\frac{1}{3}$, serta $w_7 = 2\frac{3}{4}$ tentukan jumlah Riemann fungsi f pada $[-3, 3]$ bersesuaian dengan partisi P ini.

Definisi 5.1.2

1. Jika f fungsi yang terdefinisi pada $[a,b]$ maka: $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i = L$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan positif ε terdapat bilangan positif δ sehingga untuk setiap partisi $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ pada $[a,b]$ dengan $\|P\| < \delta$, berlaku $\left| \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i - L \right| < \varepsilon$.
2. Jika f fungsi yang terdefinisi pada $[a,b]$ dan $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i$ ini ada, maka limit tersebut dinamakan **integral tertentu (Integral Riemann)** fungsi f pada $[a,b]$. Selanjutnya f dikatakan *integrable* pada $[a,b]$ dan integralnya ditulis $\int_a^b f(x) dx$.

$$\text{Jadi } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i$$

3. Jika f integrable pada $[a,b]$ maka:
 - a. $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$
 - b. Jika $a = b$ maka $\int_a^a f(x) dx = \int_a^a f(x) dx = 0$

Dari definisi 5.1.2 bagian 2 dapat dipahami bahwa jika $f(x) > 0$, maka $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i)\Delta x_i$ secara geometris menyatakan luas daerah di bawah kurva $y = f(x)$, di atas sumbu X , di antara garis $x = a$ dan $x = b$.

Contoh 3:

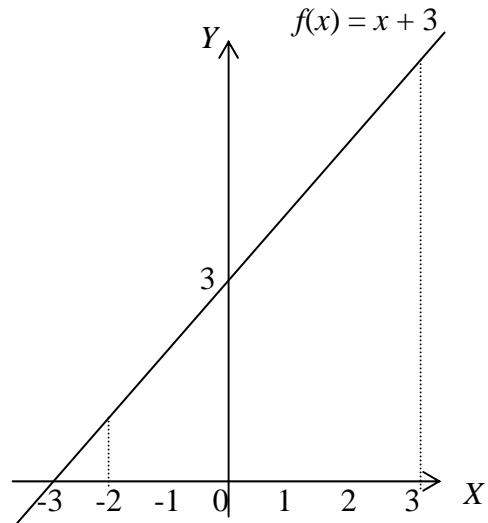
Jika $f(x) = x + 3$, tentukan $\int_{-2}^3 (x + 3) dx$.

Penyelesaian:

Buat partisi pada $[-2, 3]$ dengan menggunakan n interval bagian yang sama panjang. Jadi panjang setiap interval bagian adalah $\Delta x = \frac{5}{n}$.

Dalam setiap interval bagian $[x_{i-1}, x_i]$ partisi tersebut diambil $w_i = x_i$.

Akan dicari nilai $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i)\Delta x_i$.



$$x_0 = -2$$

$$x_1 = -2 + \Delta x = -2 + \frac{5}{n}$$

$$x_2 = -2 + 2\Delta x = -2 + 2\left(\frac{5}{n}\right)$$

$$x_3 = -2 + 3\Delta x = -2 + 3\left(\frac{5}{n}\right)$$

.

:

$$x_i = -2 + i\Delta x = -2 + i\left(\frac{5}{n}\right)$$

.

:

$$x_n = -2 + n\Delta x = -2 + n\left(\frac{5}{n}\right) = 3$$

Karena untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, n$ dipilih $w_i = x_i$ maka $w_i = -2 + i\left(\frac{5}{n}\right) = -2 + \frac{5i}{n}$, sehingga

$$\begin{aligned}
 f(w_i) &= w_i + 3 \\
 &= (-2 + \frac{5i}{n}) + 3 \\
 &= 1 + \frac{5i}{n}
 \end{aligned}$$

Jadi jumlah Riemann fungsi f pada $[-2, 3]$ bersesuaian dengan partisi P tersebut adalah

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i &= \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{5i}{n}\right) \frac{5}{n} \\
 &= \frac{5}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{5i}{n}\right) \\
 &= \frac{5}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{5}{n} \sum_{i=1}^n \frac{5i}{n} \\
 &= \frac{5}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{25}{n^2} \sum_{i=1}^n i \\
 &= \frac{5}{n}(n) + \frac{25}{n^2} \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\} \\
 &= 5 + \frac{25}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)
 \end{aligned}$$

Jika $\|P\| \rightarrow 0$ maka $n \rightarrow \infty$, sehingga:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{25}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) \\
 &= 17 \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Jadi $\int_{-2}^3 (x+3) dx = 17 \frac{1}{2}$.

Contoh 4:

Tentukan $\int_a^b dx$.

Penyelesaian:

Dalam hal ini $f(x) = 1$ untuk setiap $x \in [a,b]$. Ambil sembarang partisi $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ pada $[a,b]$ dan sembarang titik $w_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, maka

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i &= \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta x_i \text{ dan } \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \\
 &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \\
 &= (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots + (x_n - x_{n-1}) \\
 &= x_n - x_0 \\
 &= b - a
 \end{aligned}$$

Jadi $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} (b - a) = b - a$

Dengan demikian $\int_a^b dx = b - a$.

Teorema 5.1.3 (Teorema Fundamental Kalkulus)

Jika f integrable pada $[a,b]$ dan F suatu anti turunan dari f pada $[a,b]$

(atau $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$), maka : $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

$F(b) - F(a)$ biasa ditulis $[F(x)]_a^b$

Bukti:

Ambil sembarang partisi $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ pada $[a,b]$. Karena $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$ maka $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Berdasarkan teorema nilai rata-rata maka terdapat $w_i \in [x_{i-1}, x_i]$ sehingga

$$\begin{aligned}
 F(x_i) - F(x_{i-1}) &= F'(w_i) (x_i - x_{i-1}) \\
 &= f(w_i) (x_i - x_{i-1}) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n
 \end{aligned}$$

Diperoleh:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i &= \sum_{i=1}^n f(w_i)(x_i - x_{i-1}) \\
 &= \sum_{i=1}^n \{F(x_i) - F(x_{i-1})\} \\
 &= \{F(x_1) - F(x_0)\} + \{F(x_2) - F(x_1)\} + \{F(x_3) - F(x_2)\} + \dots + \{F(x_n) - F(x_{n-1})\} \\
 &= F(x_n) - F(x_0) \\
 &= F(b) - F(a)
 \end{aligned}$$

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \{F(b) - F(a)\} = F(b) - F(a).$$

Jadi $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

Contoh 5

$$\int_{-2}^3 (x+3) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_2^3 = \{\frac{1}{2}(3)^2 + 3(3)\} - \{\frac{1}{2}(-2)^2 + 3(-2)\} = 17\frac{1}{2}.$$

Contoh 6

Tentukan integral berikut.

$$1. \int_{-2}^2 x^3 dx$$

$$2. \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$$

Teorema 5.1.4

Jika f integrable pada $[a,b]$ dan $c \in (a,b)$ maka $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

Teorema 5.1.5

$$1. \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad k \text{ konstanta}$$

$$2. \int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$3. \text{ Jika } f(x) \geq 0 \text{ untuk setiap } x \in [a,b] \text{ maka } \int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

$$4. \text{ Jika } f(x) \leq g(x) \text{ untuk setiap } x \in [a,b] \text{ maka } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

5.2 Aplikasi Integral

5.2.1 Luas Daerah

Berdasarkan pengertian integral tertentu (Integral Riemann) pada definisi 5.1.2 dan uraian di atas dapat dipahami bahwa jika $f(x) > 0$, maka $\int_a^b f(x)dx$ secara geometris menyatakan luas daerah di antara kurva $y = f(x)$ dan sumbu X serta dibatasi oleh garis-garis $x = a$ dan $x = b$. Jadi

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Contoh 7

Tentukan luas daerah tertutup yang dibatasi oleh kurva $y = x + 3$, sumbu X , garis $x = -2$ dan garis $x = 3$.

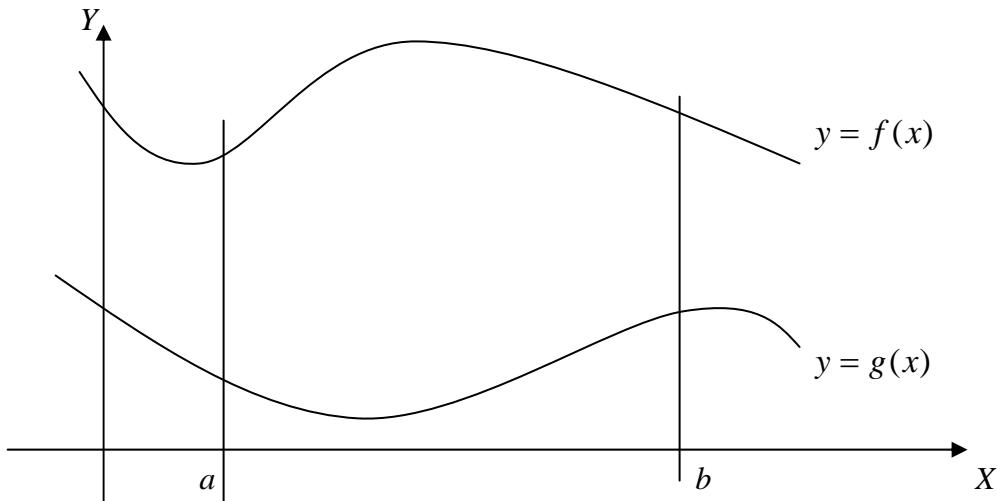
Penyelesaian:

$$A = \int_{-2}^3 (x+3) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_2^3 = \{\frac{1}{2}(3)^2 + 3(3)\} - \{\frac{1}{2}(-2)^2 + 3(-2)\} = 17\frac{1}{2}.$$

Contoh 8

Tentukan luas daerah tertutup yang dibatasi oleh kurva $y = x^3$, sumbu X , garis $x = -2$ dan garis $x = 2$.

Penyelesaian:



Selanjutnya jika suatu daerah dibatasi oleh dua kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ serta garis-garis $x = a$ dan $x = b$ seperti gambar di atas, maka luas daerahnya adalah sebagai berikut

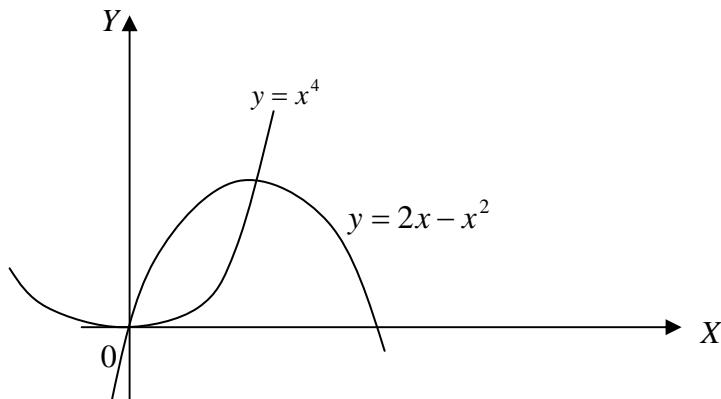
$$A = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$

Contoh 9

Tentukan luas daerah tertutup yang dibatasi oleh kurva $y = x^4$ dan $y = 2x - x^2$.

Penyelesaian:

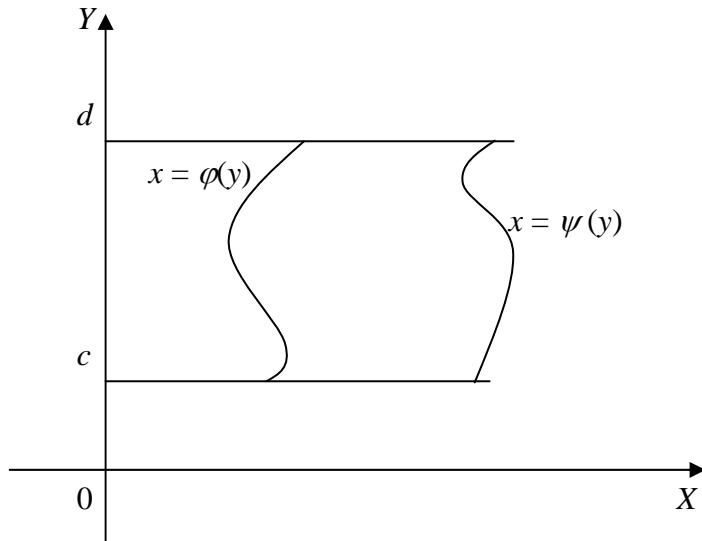
Menentukan batas-batas dicari dengan menentukan akar-akar persamaan $x^4 = 2x - x^2$ yang dapat kita temukan akar-akarnya adalah $x = 0$ dan $x = 1$.



sehingga luasnya adalah $A = \int_0^1 (2x - x^2 - x^4) dx = \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$.

Selanjutnya jika suatu daerah dibatasi oleh dua kurva $x = \varphi(y)$ dan $x = \psi(y)$ serta garis-garis $y = c$ dan $y = d$ seperti gambar di bawah ini, maka luas daerahnya adalah sebagai berikut

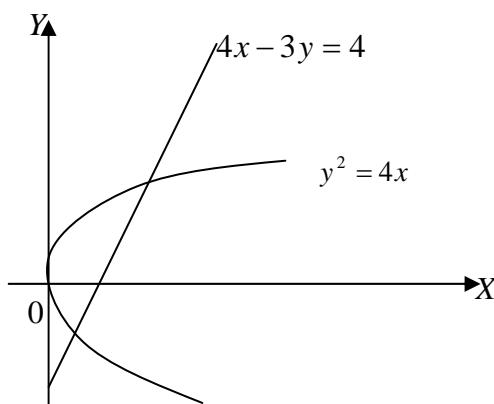
$$A = \int_c^d \{\psi(y) - \varphi(y)\} dy$$



Contoh 10

Tentukan luas daerah tertutup yang dibatasi oleh kurva $y^2 = 4x$ dan $4x - 3y = 4$.

Penyelesaian:



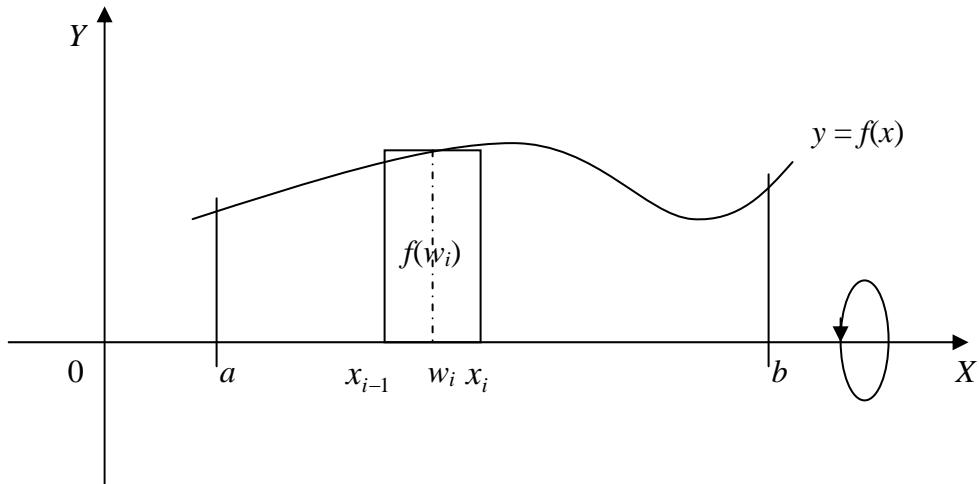
Menentukan batas-batas dengan mencari akar-akar persamaan $y^2 = 3y + 4$ yang diperoleh $y = -1$ dan $y = 4$.

$$y^2 = 4x \text{ ekuivalen dengan } x = \frac{1}{4}y^2 \text{ dan } 4x - 3y = 4 \text{ ekuivalen dengan } x = \frac{1}{4}(3y + 4)$$

$$\text{sehingga luasnya adalah } A = \int_{-1}^4 \left\{ \frac{1}{4}(3y+4) - \frac{1}{4}y^2 \right\} dy = \frac{1}{4} \int_{-1}^4 \{3y+4-y^2\} dy = \frac{125}{24}.$$

5.2.2 Volume Benda Putar

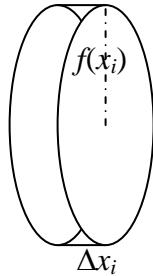
a. Metode Cincin



Jika daerah yang dibatasi kurva $y = f(x)$, sumbu X , garis-garis $x = a$ dan $x = b$ diputar mengelilingi sumbu X sebagai sumbu putar, maka volume benda putar yang terjadi dapat dicari sebagai berikut.

Dibuat partisi $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ pada $[a,b]$. Untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$ dipilih satu titik $w_i \in [x_{i-1}, x_i]$, selanjutnya dibuat persegi panjang dengan panjang $f(w_i)$ dan lebar $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Jika persegi panjang ini diputar terhadap sumbu X , maka diperoleh silinder hampiran dengan volume

$$\Delta V_i = \pi \{f(w_i)\}^2 \Delta x_i$$



Akibatnya diperoleh jumlahan Riemann

$$\sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n \pi \{f(w_i)\}^2 \Delta x_i$$

Apabila $\|P\| \rightarrow 0$ maka diperoleh volume benda putar yang dimaksud, yaitu

$$V_X = \pi \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \{f(w_i)\}^2 \Delta x_i$$

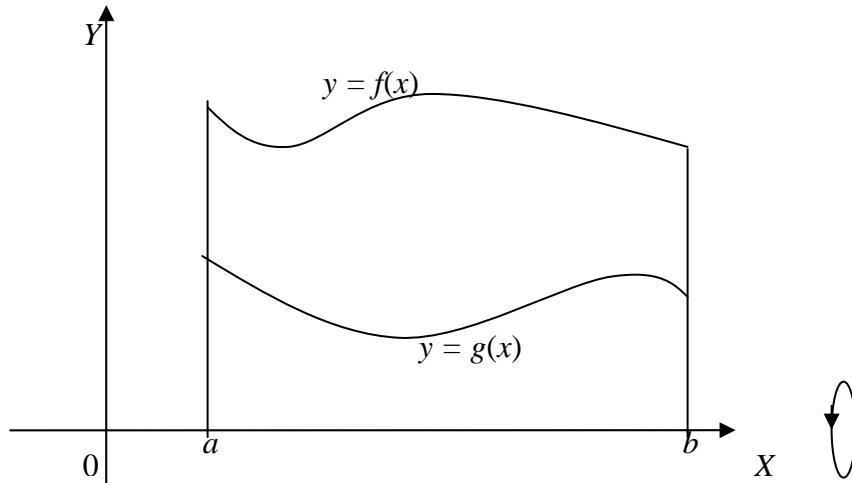
$$= \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

Jadi

$$V_X = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

Selanjutnya apabila daerah yang dibatasi oleh dibatasi oleh dua kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ serta garis-garis $x = a$ dan $x = b$ seperti gambar di bawah ini diputar mengelilingi sumbu X sebagai sumbu putar, maka volume benda yang terjadi adalah

$$V_X = \pi \int_a^b [\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2] dx$$



Dengan cara sama, jika daerah yang dibatasi kurva $x = \varphi(y)$, sumbu Y , garis-garis $y = c$ dan $y = d$ diputar mengelilingi sumbu Y sebagai sumbu putar, maka volume benda putar yang terjadi adalah.

$$V_Y = \pi \int_c^d \{\varphi(y)\}^2 dy$$

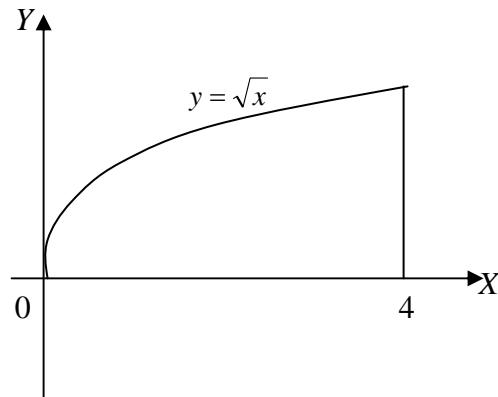
Demikian pula apabila daerah yang dibatasi oleh dua kurva $x = \psi(y)$ dan $x = \varphi(y)$ serta garis-garis $y = c$ dan $y = d$ diputar mengelilingi sumbu Y sebagai sumbu putar, maka volume benda yang terjadi adalah

$$V_Y = \pi \int_c^d [\psi(y)^2 - \varphi(y)^2] dy$$

Contoh 11

Tentukan volume benda putar yang terjadi apabila daerah tertutup yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$, sumbu X dan garis $x = 4$ diputar mengelilingi sumbu X.

Penyelesaian:

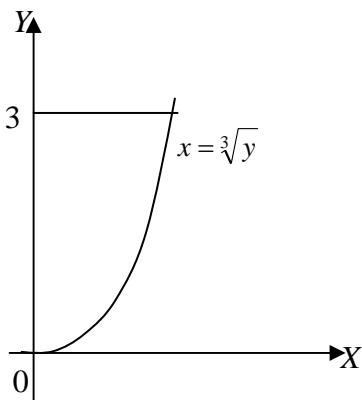


$$V_X = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = \pi \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^4 = 8\pi$$

Contoh 12

Tentukan volume benda putar yang terjadi apabila daerah tertutup yang dibatasi oleh kurva $y = x^3$, sumbu Y dan garis $x = 3$ diputar mengelilingi sumbu Y.

Penyelesaian:



Karena $y = x^3$ maka $x = \sqrt[3]{y}$, sehingga

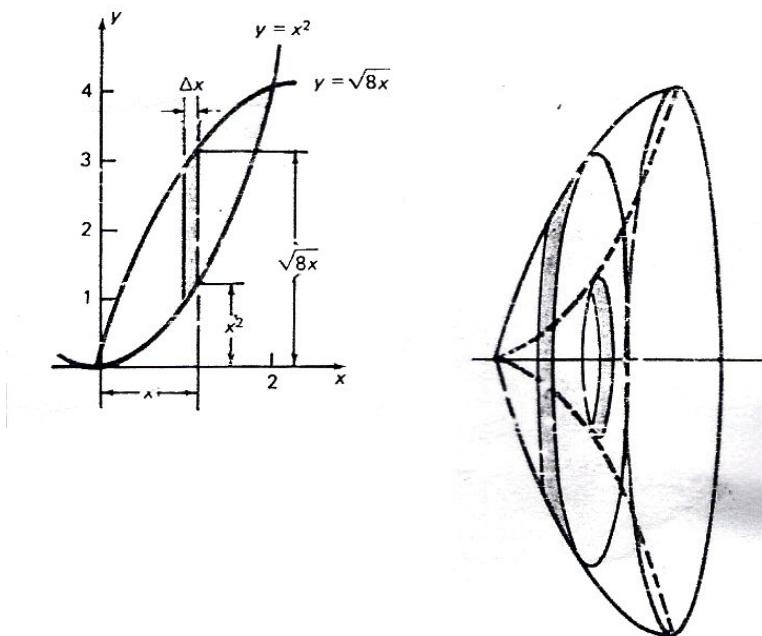
$$V_Y = \pi \int_0^3 (\sqrt[3]{y})^2 dy = \pi \int_0^3 y^{\frac{2}{3}} dy = \pi \left[\frac{3}{5}y^{\frac{5}{3}} \right]_0^3 = \frac{9\sqrt[3]{9}}{5}\pi$$

Contoh 13

Tentukan volume benda putar yang terjadi apabila daerah tertutup yang dibatasi oleh dua kurva $y = x^2$ dan $y^2 = 8x$ diputar mengelilingi sumbu X.

Penyelesaian:

Dapat dicari bahwa perpotongan kedua kurva adalah di $(0, 0)$ dan $(2, 4)$. Jika $y^2 = 8x$ maka $y = \sqrt{8x}$. Perhatikan gambar berikut.



$$V_x = \pi \int_0^2 \left[(\sqrt{8x})^2 - (x^2)^2 \right] dx = \pi \int_0^2 [8x - x^4] dx = \pi \left[4x^2 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^2 = \frac{48}{5}\pi$$

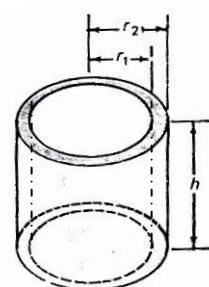
Tentukan pula apabila daerah tersebut diputar mengelilingi sumbu Y.

b. Metode Kulit Tabung

Perhatikan gambar di samping.

Volume benda pejal (ruang antara tabung besar dan kecil) adalah

$$\begin{aligned} V &= (\pi r_2^2 - \pi r_1^2)h \\ &= \pi(r_2^2 - r_1^2)h \\ &= \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h \end{aligned}$$



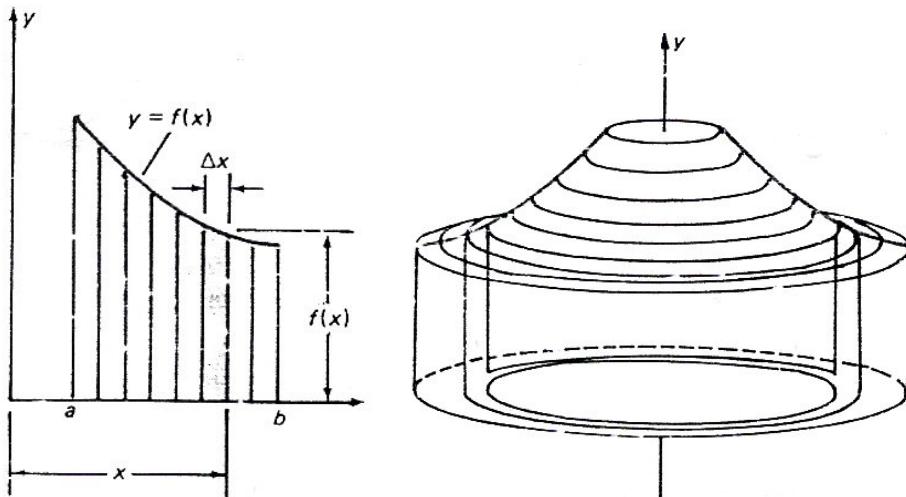
$$= 2\pi \left(\frac{r_2 + r_1}{2} \right) (r_2 - r_1) h$$

Rumusan ini dapat ditulis sebagai

$$V = 2\pi \bar{r} h \Delta r$$

dengan $\bar{r} = \frac{r_2 + r_1}{2}$ dan $\Delta r = r_2 - r_1$

Misalkan diketahui daerah dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, sumbu X serta garis-garis $x = a$ dan $x = b$. Apabila daerah tersebut diputar **mengelilingi sumbu Y** sebagai sumbu putarnya, maka volume benda putar yang terjadi dapat dicari sebagai berikut.



Dibuat partisi $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ pada $[a, b]$. Untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$ dipilih satu titik $w_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \in [x_{i-1}, x_i]$, selanjutnya dibuat persegi panjang dengan panjang $f(w_i)$ dan

dan lebar $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Jika persegi panjang ini diputar terhadap sumbu Y , maka diperoleh tabung hampiran dengan volume

$$\Delta V_i = 2\pi w_i f(w_i) \Delta x_i$$

Akibatnya diperoleh jumlahan Riemann

$$\sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n 2\pi w_i f(w_i) \Delta x_i$$

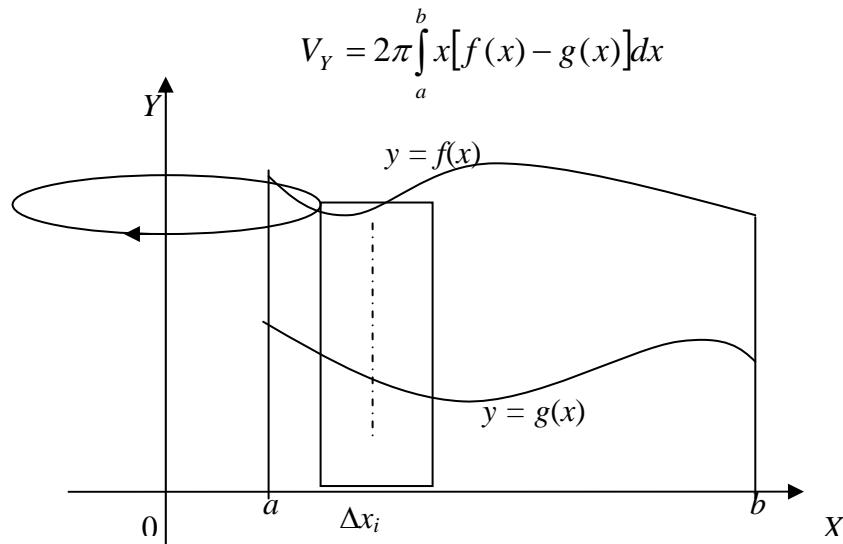
Apabila $\|P\| \rightarrow 0$ maka diperoleh volume benda putar yang dimaksud, yaitu

$$V_Y = 2\pi \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n w_i f(w_i) \Delta x_i$$

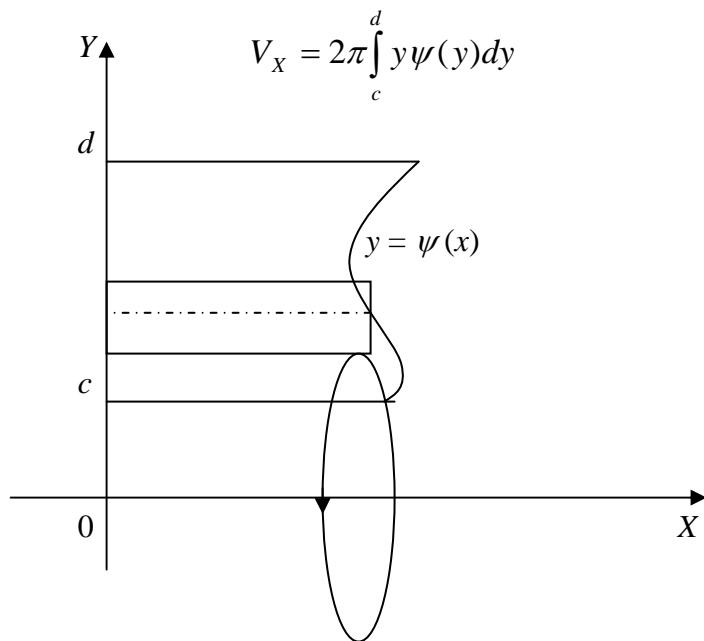
$$= 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Jadi $V_Y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$

Selanjutnya apabila daerah yang dibatasi oleh dibatasi oleh dua kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ serta garis-garis $x = a$ dan $x = b$ seperti gambar di bawah ini diputar mengelilingi sumbu Y sebagai sumbu putar, maka volume benda yang terjadi adalah

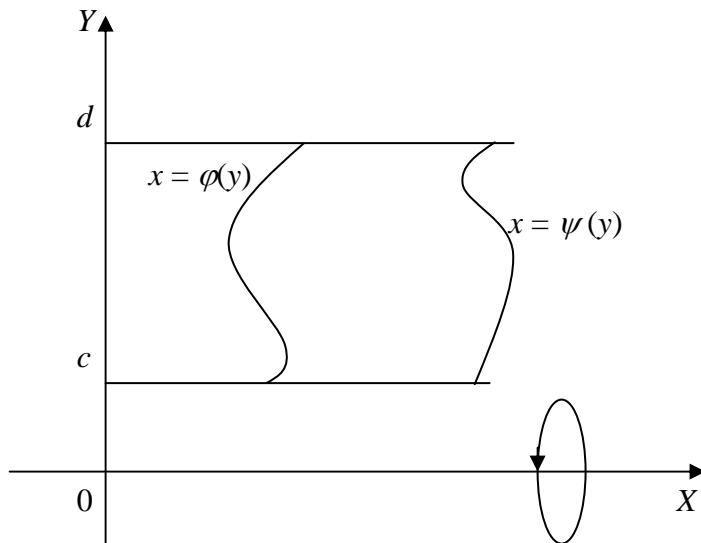


Dengan cara sama, misalkan diketahui daerah dibatasi oleh kurva $x = \psi(y)$, sumbu Y serta garis-garis $y = c$ dan $y = d$. Apabila daerah tersebut diputar **mengelilingi sumbu X** sebagai sumbu putarnya, maka volume benda putar yang terjadi adalah



Demikian pula apabila daerah yang dibatasi oleh dua kurva $x = \psi(y)$ dan $x = \varphi(y)$ serta garis-garis $y = c$ dan $y = d$ seperti gambar di bawah ini diputar mengelilingi sumbu X sebagai sumbu putar, maka volume benda yang terjadi adalah

$$V_X = 2\pi \int_c^d y [\psi(y) - \varphi(y)] dy$$



Contoh 14

Tentukan volume benda putar yang terjadi apabila daerah tertutup yang dibatasi oleh kurva $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, sumbu X , dan garis $x = 1$ diputar mengelilingi sumbu Y .

Penyelesaian:

$$V_Y = 2\pi \int_1^4 x \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\pi \int_1^4 x^{1/2} dx = 2\pi \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_1^4 = \frac{28}{3}\pi$$

Contoh 15

Diketahui suatu daerah tertutup dibatasi oleh kurva garis $y = \frac{r}{t}x$, sumbu X , dan garis $x = t$.

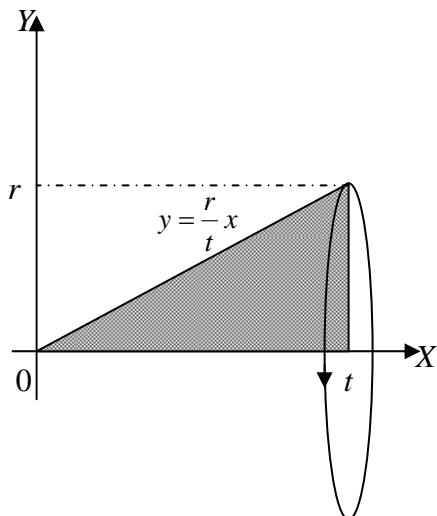
Dalam hal ini $r > 0$ dan $t > 0$. Jika daerah tersebut diputar mengelilingi sumbu X , tentukan volume benda yang terjadi dengan dua cara.

Penyelesaian:

Cara I

Dengan metode cincin

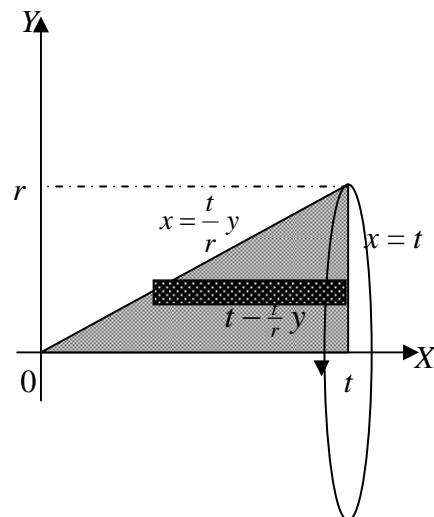
$$\begin{aligned}
 V_X &= \pi \int_0^t \left\{ \frac{r}{t} x \right\}^2 dx \\
 &= \pi \frac{r^2}{t^2} \int_0^t x^2 dx \\
 &= \pi \frac{r^2}{t^2} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^t \\
 &= \frac{1}{3} \pi r^2 t
 \end{aligned}$$



Cara II

Dengan metode kulit tabung. Karena $y = \frac{r}{t}x$, maka $x = \frac{t}{r}y$

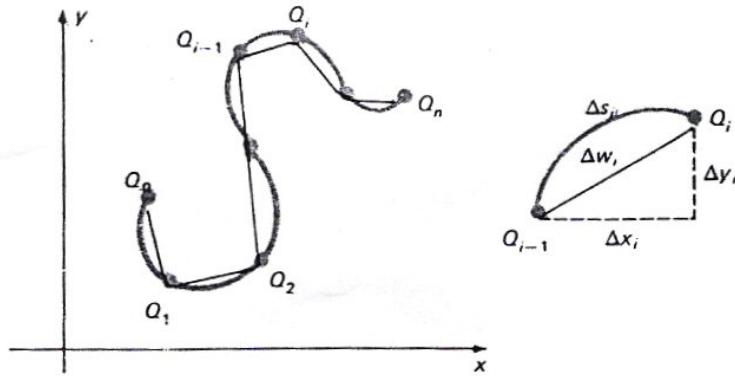
$$\begin{aligned}
 V_X &= 2\pi \int_0^r y(t - \frac{t}{r}y) dy \\
 &= 2\pi t \int_0^r (y - \frac{1}{r}y^2) dy \\
 &= 2\pi t \left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3r}y^3 \right]_0^r \\
 &= 2\pi t \left[\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{3}r^2 \right] \\
 &= \frac{1}{3}\pi r^2 t
 \end{aligned}$$



5.2.3 Panjang Kurva

Misalkan suatu kurva mulus diberikan oleh persamaan parameter $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$. Panjang kurva tersebut dapat dicari sebagai berikut.

Dibuat partisi $P = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$ pada $[a,b]$ dengan $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$, maka kurva akan terbagi menjadi n bagian oleh titik-titik $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}, Q_n$. Perhatikan gambar berikut.



Pada bagian ke i , panjang busur $Q_{i-1}Q_i$, yaitu Δs_i dapat didekati oleh Δw_i . Dengan Pythagoras kita peroleh

$$\begin{aligned}\Delta w_i &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &= \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2}\end{aligned}$$

Selanjutnya berdasarkan Teorema Nilai Rata-rata pada Derivatif tentu terdapat $\bar{t} \in (t_{i-1}, t_i)$ dan $\hat{t} \in (t_{i-1}, t_i)$ demikian sehingga

$$\begin{aligned}f(t_i) - f(t_{i-1}) &= f'(\bar{t}_i)(t_i - t_{i-1}) \\ g(t_i) - g(t_{i-1}) &= g'(\hat{t}_i)(t_i - t_{i-1})\end{aligned}$$

atau

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(\bar{t}_i)\Delta t_i$$

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(\hat{t}_i)\Delta t_i$$

dengan $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

Oleh karena itu diperoleh

$$\begin{aligned}\Delta w_i &= \sqrt{[f'(\bar{t}_i)\Delta t_i]^2 + [g'(\hat{t}_i)\Delta t_i]^2} \\ &= \sqrt{[f'(\bar{t}_i)]^2 + [g'(\hat{t}_i)]^2} \Delta t_i\end{aligned}$$

dan panjang polygon dari segmen garis

$$\sum_{i=1}^n \Delta w_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{[f'(\bar{t}_i)]^2 + [g'(\hat{t}_i)]^2} \Delta t_i$$

Apabila $\|P\| \rightarrow 0$ maka diperoleh panjang kurva seluruhnya adalah

$$L = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{[f'(\bar{t}_i)]^2 + [g'(\hat{t}_i)]^2} \Delta t_i = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$$

Jadi

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$$

atau

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Jika persamaan kurvanya adalah $y = f(x)$ dengan $a \leq x \leq b$, maka

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

dan jika persamaan kurvanya adalah $x = \psi(y)$ dengan $c \leq y \leq d$, maka

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

Contoh 16

Hitunglah keliling lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$.

Penyelesaian:

Lingkaran tersebut dapat ditulis dalam persamaan parameter sebagai

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t \quad \text{dengan } 0 \leq t \leq 2\pi, \text{ sehingga } \frac{dx}{dt} = -r \sin t \quad \text{dan} \quad \frac{dy}{dt} = r \cos t.$$

$$\text{Akibatnya } L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} r dt = [r t]_0^{2\pi} = 2\pi r$$

Contoh 17

Menggunakan integral hitunglah panjang ruas garis yang menghubungkan titik $P(0, 1)$ dan $Q(5, 13)$.

Penyelesaian:

Persamaan ruas garis PQ adalah $y = \frac{12}{5}x + 1$, sehingga $\frac{dy}{dx} = \frac{12}{5}$. Oleh karena itu

$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} dx = \int_0^5 \frac{\sqrt{13}}{5} dx = \left[\frac{\sqrt{13}}{5} x \right]_0^5 = 13$$

Contoh 18

Menggunakan integral hitunglah panjang kurva $y = x^{\frac{3}{2}}$ dari $(1, 1)$ dan $(4, 8)$.

Penyelesaian:

$y = x^{\frac{3}{2}}$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$. Oleh karenanya

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \left[\frac{8}{27} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{8}{27} \left(10^{\frac{3}{2}} - \frac{13^{\frac{3}{2}}}{8}\right) \approx 7,63$$

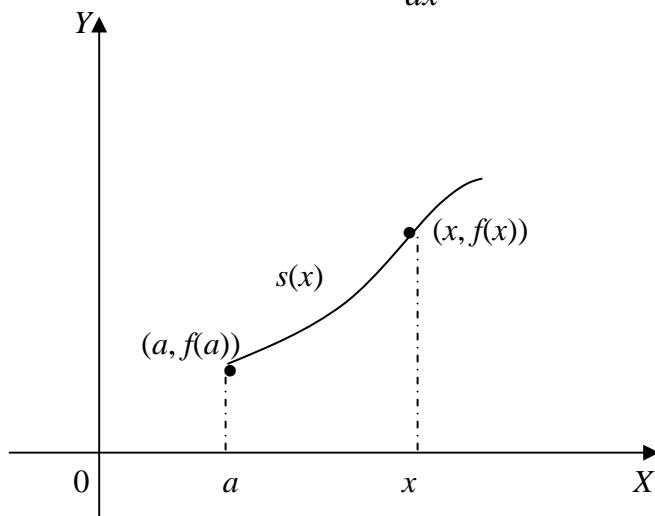
Diferensial Panjang Busur

Misalkan f suatu fungsi yang dapat didiferensialkan pada $[a, b]$. Untuk setiap $x \in (a, b)$ didefinisikan $s(x)$ sebagai

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(u)]^2} du$$

maka $s(x)$ adalah panjang kurva $y = f(u)$ dari titik $(a, f(a))$ ke titik $(x, f(x))$, sehingga

$$s'(x) = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$



Oleh karenanya diferensial panjang kurva ds dapat ditulis sebagai

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Selanjutnya hal ini dapat ditulis dalam bentuk-bentuk

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \quad \text{atau} \quad ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

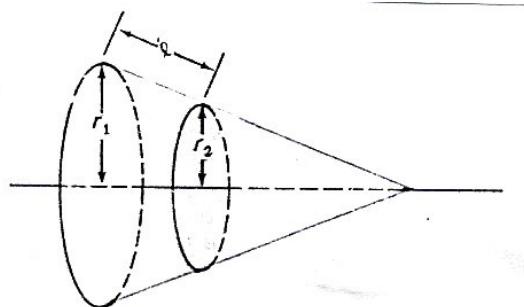
Untuk keperluan mengingat, dapat pula ditulis dalam bentuk:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

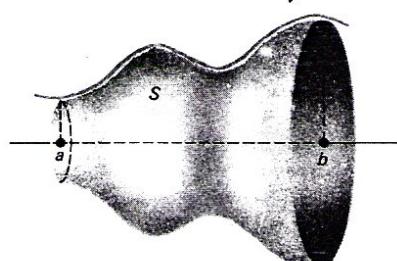
5.2.4 Luas Permukaan Benda Putar

Kita mulai dengan mencari rumus untuk luas permukaan (selimut) kerucut terpancung. Misalkan jari-jari lingkaran alas kerucut terpancung adalah r_1 dan jari-jari lingkaran atasnya r_2 sedangkan panjang ruas garis pada pembangun kerucut antara dua lingkaran itu (rusuk kerucut terpancung) l , maka luas selimut kerucut terpancung itu adalah

$$A = 2\pi \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) l$$

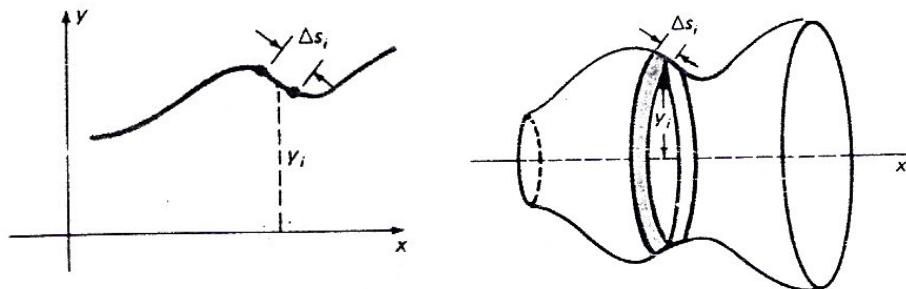


Apabila sebuah kurva pada suatu bidang diputar mengelilingi sebuah garis pada bidang itu, maka hasilnya berupa permukaan benda putar dengan luas permukaan dapat dicari sebagai berikut.



Pemutaran terhadap sumbu X

Misalkan suatu kurva mulus pada kuadran pertama diberikan oleh persamaan parameter $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$. Dibuat partisi $P = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$ pada $[a, b]$ dengan $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$, maka kurva terbagi menjadi n bagian. Misalkan Δs_i panjang kurva bagian ke i dan y_i ordinat sebuah titik pada bagian ini. Apabila kurva itu diputar mengelilingi sumbu X , maka ia akan membentuk suatu permukaan dan bagian Δs_i ini akan membentuk permukaan bagian. Luas permukaan bagian ini dapat dihampiri oleh luas kerucut terpancung, yaitu $2\pi y_i \Delta s_i$.



Apabila kita jumlahkan luas-luas ini dan kemudian mengambil limitnya dengan membuat $\|P\| \rightarrow 0$, kita akan memperoleh hasil yang kita definisikan sebagai luas permukaan benda putar tersebut. Jadi luasnya adalah

$$A = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi y_i \Delta s_i = \int_{*}^{**} 2\pi y ds$$

Dengan menggunakan rumus A tersebut di atas, kita harus memberi arti yang tepat pada y , ds , dan batas-batas pengintegralan * dan **.

Misalkan apabila permukaan itu terbentuk oleh kurva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, yang diputar mengelilingi sumbu X , maka kita peroleh untuk luasnya:

$$A = \int_{*}^{**} 2\pi y ds = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Contoh 19

Tentukan luas permukaan benda putar apabila kurva $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$, diputar mengelilingi sumbu X .

Penyelesaian:

Misalkan $f(x) = \sqrt{x}$ maka $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, sehingga

$$A = 2\pi \int_0^4 \sqrt{x} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx = \pi \int_0^4 \sqrt{4x+1} dx = \left[\pi \frac{1}{4} \frac{2}{3} (4x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \frac{\pi}{6} (17^{\frac{3}{2}} - 1) \approx 36,18$$

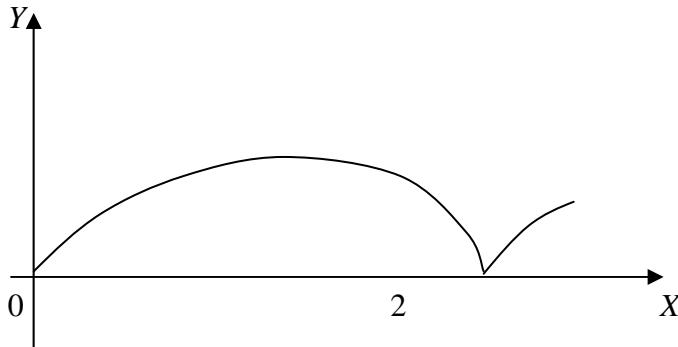
Apabila persamaan kurva yang bersangkutan diketahui dalam bentuk persamaan parameter $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, maka rumus untuk luas permukaan menjadi:

$$A = \int_{*}^{**} 2\pi y ds = 2\pi \int_a^b g(t) \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$$

Contoh 20

Tentukan luas permukaan benda yang terbentuk apabila suatu busur dari sikloid $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ diputar mengelilingi sumbu X .

Penyelesaian:



Misalkan $f(t) = a(t - \sin t)$ dan $g(t) = a(1 - \cos t)$, maka $f'(t) = a(1 - \cos t)$ dan $g'(t) = a \sin t$, sehingga:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt \\ &= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{2 - 2\cos t} dt \\ &= 2\pi a^2 \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{\frac{3}{2}} dt \end{aligned}$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3\left(\frac{t}{2}\right) dt \\ = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left[1 - \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right] \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

Dengan substitusi $u = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$ maka $du = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt$

Untuk $t = 0 \rightarrow u = 1$

Untuk $t = 2\pi \rightarrow u = -1$

$$\text{Jadi } A = -16\pi a^2 \int_1^{-1} (1-u^2) du = -16\pi a^2 \left[u - \frac{1}{3}u^3 \right]_1^{-1} = \frac{64}{3}\pi a^2$$

Pemutaran terhadap sumbu Y

Analog:

Apabila sebuah kurva pada suatu bidang diputar mengelilingi sumbu Y, maka hasilnya berupa permukaan benda putar dengan luas permukaannya adalah:

$$A = \int_{*}^{**} 2\pi x ds$$

Contoh 21

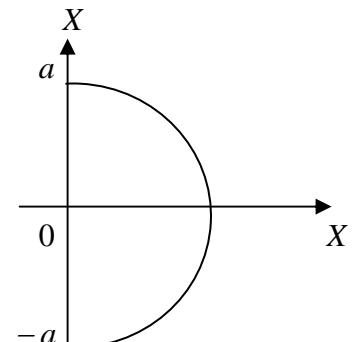
Tentukan luas permukaan benda yang terbentuk apabila kurva $x = \sqrt{a^2 - y^2}$, $-a \leq y \leq a$ diputar mengelilingi sumbu Y.

Penyelesaian:

$$\text{Misalkan } x = g(y) = \sqrt{a^2 - y^2} \text{ maka } g'(y) = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

$$\text{sehingga } A = \int_{*}^{**} 2\pi x ds = 2\pi \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} \sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2 - y^2}} dy$$

$$= 2\pi \int_{-a}^a a dy = 2\pi [ay]_{-a}^a = 4\pi a^2$$



Dengan demikian luas permukaan bola dengan jari-jari a adalah $4\pi a^2$.

5.2.5 Usaha atau Kerja

Dalam fisika kita tahu bahwa apabila ada gaya F yang konstan menggerakkan suatu benda sehingga bergerak sejauh d sepanjang suatu garis dengan arah gaya dan gerakan benda sama, maka kerja W yang dilakukan oleh gaya tersebut adalah

$$W = F \cdot d$$

Apabila satuan untuk F adalah pond an satuan jarak adalah kaki maka satuan kerja adalah **kaki pond**. Apabila gaya diukur dengan satuan dyne dan jarak dengan satuan sentimeter maka satuan kerja adalah **dyne cm** atau **erg**. Apabila gaya diukur dengan satuan Newton dan jarak dengan satuan meter maka satuan kerja adalah **Newton meter** atau **joule**.

Pada kenyataannya biasanya gaya itu tidak konstan. Misalkan sebuah benda digerakkan sepanjang sumbu X dari titik $x = a$ ke titik $x = b$. Misalkan gaya yang menggerakkan benda tersebut pada jarak x adalah $F(x)$ dengan F suatu fungsi kontinu. Untuk menentukan kerja yang dilakukan gaya tersebut dapat dicari sebagai berikut.

Interval $[a,b]$ dibagi dengan menggunakan partisi $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Pada setiap interval bagian $[x_{i-1}, x_i]$ gaya F dapat dihampiri oleh gaya konstan $F(w_i)$, dengan $w_i \in [x_{i-1}, x_i]$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$. Jika $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, maka kerja yang dilakukan gaya F pada interval bagian $[x_{i-1}, x_i]$ adalah

$$\Delta W_i = F(w_i) \Delta x_i.$$

Jika dijumlahkan kemudian dicari limitnya untuk $\|P\| \rightarrow 0$ maka diperoleh kerja yang dilakukan gaya F pada interval $[a, b]$, yaitu

$$W = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(w_i) \Delta x_i = \int_a^b F(x) dx$$

Jadi

$$W = \int_a^b F(x) dx$$

a. Aplikasi pada Pegas

Dengan menggunakan hukum Hooke yang berlaku dalam fisika, gaya $F(x)$ yang diperlukan untuk menarik (atau menekan) pegas sejauh x satuan dari keadaan alami adalah

$$F(x) = k \cdot x$$

Di sini, k adalah konstanta dan disebut konstanta pegas yang nilainya positif dan tergantung pada sifat fisis pegas. Semakin keras pegas, maka semakin besar nilai k .

Contoh 22

Apabila panjang alami sebuah pegas adalah 10 inci. Untuk menarik dan menahan pegas sejauh 2 inci diperlukan gaya 3 pon. Tentukan kerja yang dilakukan gaya untuk menarik pegas itu sehingga panjang pegas 15 inci.

Penyelesaian:

Menurut hukum Hooke gaya $F(x)$ yang diperlukan untuk menarik pegas sejauh x inci adalah $F(x) = k \cdot x$. Dari sini dapat dicari nilai konstanta k . Diketahui bahwa $F(2) = 3$, sehingga

$$3 = k \cdot 2 \text{ atau } k = \frac{3}{2}. \text{ Oleh karena itu } F(x) = \frac{3}{2}x.$$

Apabila pegas dalam keadaan alami sepanjang 10 inci menyatakan $x = 0$, maka pegas dengan panjang 15 inci menyatakan bahwa $x = 5$, sehingga

$$W = \int_0^5 \frac{3}{2}x \, dx = \frac{75}{4} = 18,75$$

Jadi, kerja untuk menarik pegas itu adalah 18,75 inci pond.

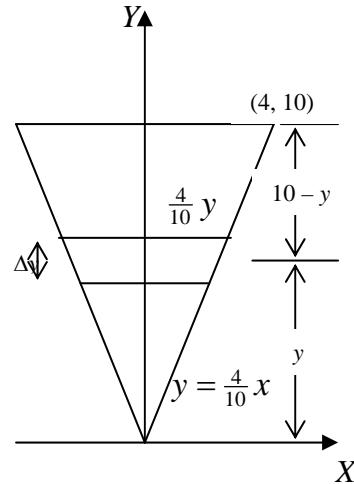
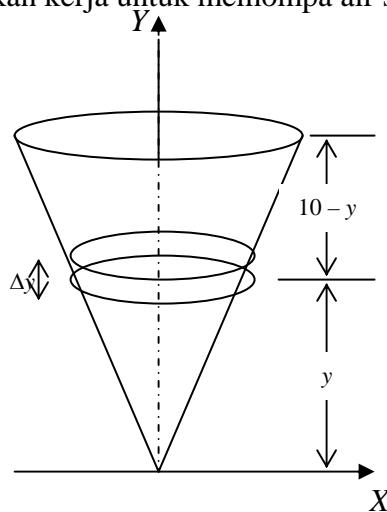
b. Aplikasi pada Pemompaan Cairan

Dengan menggunakan prinsip-prinsip yang sama dapat dihitung kerja yang dilakukan pada pemompaan cairan.

Contoh 23

Sebuah tangki berbentuk kerucut lingkaran tegak penuh dengan air. Apabila tinggi tangki 10 kaki dan jari-jari lingkaran atasnya 4 kaki,

- tentukan kerja untuk memompa air sehingga sampai tepi tangki
- tentukan kerja untuk memompa air sehingga mencapai 10 kaki di atas tepi tangki.



Penyelesaian:

a. Letakkan tangki dalam sistem koordinat seperti tampak dalam gambar. Buatlah sketsa yang berdimensi tiga dan juga sketsa penampang dimensi dua. Misalkan air dimasukkan ke dalam kerucut-kerucut terpanjang (horizontal),

Air ini harus diangkat sehingga mencapai tepi tangki. Perhatikan sebuah kerucut terpanjang ke i dengan tinggi Δy yang berjarak y dari puncak kerucut (puncak kerucut berada di bawah),

memiliki jari-jari $\frac{4}{10}y$, maka ia mempunyai volume hampiran $\Delta V = \pi\left(\frac{4}{10}y\right)^2 \Delta y$ dan

beratnya (gaya berat) $F = \delta \pi\left(\frac{4}{10}y\right)^2 \Delta y$, dengan $\delta = 62,4$ adalah kepadatan air dalam satuan pon/kaki kubik. Gaya yang diperlukan untuk mengangkat air tersebut adalah sama dengan beratnya dan harus diangkat sejauh $10 - y$. Jadi kerja ΔW adalah

$$\Delta W = \delta \pi\left(\frac{4}{10}y\right)^2 \Delta y (10 - y)$$

Karenanya, apabila dijumlahkan kemudian dicari limitnya diperoleh

$$W = \delta \pi \frac{4}{25} \int_0^{10} (10y^2 - y^3) dy = \delta \pi \frac{4}{25} \left[\frac{10}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 \right]_0^{10} \approx 26,138$$

Jadi kerja untuk memompa air sehingga sampai ke tepi tangki adalah 26,138 kaki pond.

b. Seperti dalam a, sekarang air dalam kerucut terpanjang harus diangkat $20 - y$, sehingga

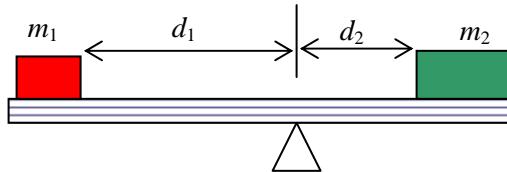
$$W = \delta \pi \int_0^{10} \left(\frac{4}{10}y\right)^2 (20 - y) dy = \delta \pi \frac{4}{25} \int_0^{10} (20y^2 - y^3) dy = \delta \pi \frac{4}{25} \left[\frac{20}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 \right]_0^{10} \approx 130,69$$

Jadi kerja untuk memompa air sehingga sampai ke tepi tangki adalah 130,690 kaki pond.

5.2.6 Momen dan Pusat Massa (Titik Berat)

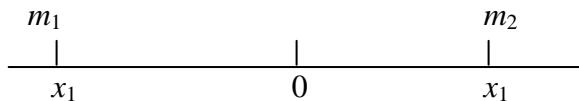
Misalkan ada dua benda masing-masing memiliki massa sebesar m_1 dan m_2 yang diletakkan pada papan berimbang dengan jarak berturut-turut d_1 dan d_2 dari titik penyangga pada bagian-bagian yang berbeda. Keadaan tersebut akan seimbang jika dipenuhi

$$d_1 m_1 = d_2 m_2.$$



Suatu model amtematis yang baik diperoleh apabila papan tersebut kita letakkan pada suatu sistem bandmil yang titik asalnya kita impitkan dengan titik penyangga papan, maka koordinat x_1 dari massa m_1 adalah $x_1 = -d_1$ dan dari massa m_2 adalah $x_2 = -d_2$. Jadi syarat keseimbangan adalah

$$x_1 m_1 + x_2 m_2 = 0$$



Hasil kali massa m dan jarak berarah dari suatu titik tertentu dinamakan **momen** partikel (benda) terhadap titik tersebut. Momen ini mengukur kecenderungan massa yang menghasilkan suatu putaran pada titik tersebut. Syarat supaya dua massa pada sebuah garis berimbang adalah jumlah momen-momen terhadap titik itu sama dengan nol.

Keadaan tersebut dapat diperluas untuk sejumlah n benda (partikel). Jumlah momen M (terhadap titik asal) suatu system yang terdiri atas n massa, yaitu m_1, m_2, \dots, m_n yang berbeda pada x_1, x_2, \dots, x_n pada sumbu X adalah jumlah momen masing-masing massa, yaitu

$$M = x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n = \sum_{i=1}^n x_i m_i$$

Syarat keseimbangan di titik asal adalah $M = 0$. Tentunya titik asal tidak selalu menjadi titik seimbang system tersebut, kecuali dalam hal khusus. Akan tetapi pasti terdapat titik seimbang dalam suatu system tersebut. Misalkan \bar{x} merupakan koordinat titik seimbang system pada sumbu X , maka momen terhadap titik tersebut harus nol. Jadi berlaku

$$(x_1 - \bar{x})m_1 + (x_2 - \bar{x})m_2 + \dots + (x_n - \bar{x})m_n = 0$$

atau

$$x_1 m_1 - \bar{x} m_1 + x_2 m_2 - \bar{x} m_2 + \dots + x_n m_n - \bar{x} m_n = 0$$

$$x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n = \bar{x} m_1 + \bar{x} m_2 + \dots + \bar{x} m_n$$

sehingga diperoleh

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{M}{m}$$

Titik dengan koordinat \bar{x} dinamakan **pusat massa**, titik ini adalah titik seimbang. Perhatikan bahwa \bar{x} diperoleh sebagai hasil bagi momen system terhadap titik asal dan jumlah massa.

a. Distribusi massa yang kontinu pada suatu garis

Perhatikan sepotong kawat lurus dengan kepadatan massa (massa tiap satuan panjang) yang berlainan. Kita ingin mengetahui kedudukan titik berat kawat itu. Untuk ini kita letakkan kawat itu sepanjang sistem koordinat (dengan batas-batas $x = a$ dan $x = b$) dan andaikan kepadatan di x adalah $\delta(x)$. Dengan menggunakan prosedur yang sudah kita lakukan untuk berbagai macam fenomena di depan, dibuat partisi, metode hampiran dan dicari limitnya, dengan memperhatika bagian sepanjang Δx , sehingga $\Delta m \approx \delta(x)\Delta x$ berakibat $\Delta M \approx x\delta(x)\Delta x$, diperoleh

$$m = \int_a^b \delta(x) dx \text{ dan } M = \int_a^b x \delta(x) dx$$

Akhirnya maka diperoleh

$$\bar{x} = \frac{M}{m} = \frac{\int_a^b x \delta(x) dx}{\int_a^b \delta(x) dx}$$

Contoh 24

Kepadatan $\delta(x)$ sepotong kawat di sebuah titik yang terletak x cm dari salah satu ujungnya adalah $\delta(x) = 3x^2$ g/cm. Tentukan pusat massa kawat antara $x = 0$ dan $x = 10$.

Penyelesaian:

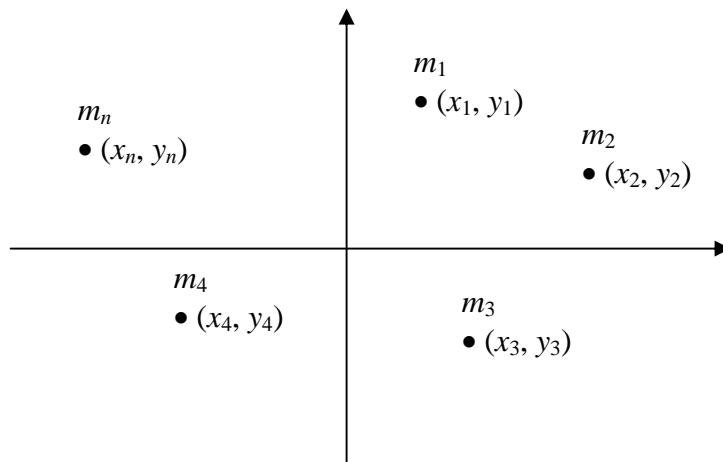


Dengan memperhatika $\delta(x)$ jelas bahwa kawat dibagian $x = 10$ lebih berat dari pada di bagian $x = 0$, sehingga pusat massanya akan lebih dekat ke $x = 10$. Secara pasti bahwa pusat massanya adalah

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{10} x 3x^2 dx}{\int_0^{10} 3x^2 dx} = \frac{\left[\frac{3}{4}x^4 \right]_0^{10}}{\left[x^3 \right]_0^{10}} = 7,5$$

b. Distribusi massa yang kontinu pada bidang

Perhatika n partikel yang masing-masing memiliki massa m_1, m_2, \dots, m_n yang terletak pada bidang koordinat berturut-turut di $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.



Jumlah momen n partikel terhadap sumbu Y adalah

$$M_Y = x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n = \sum_{i=1}^n x_i m_i$$

Sedangkan jumlah momen n partikel terhadap sumbu X adalah

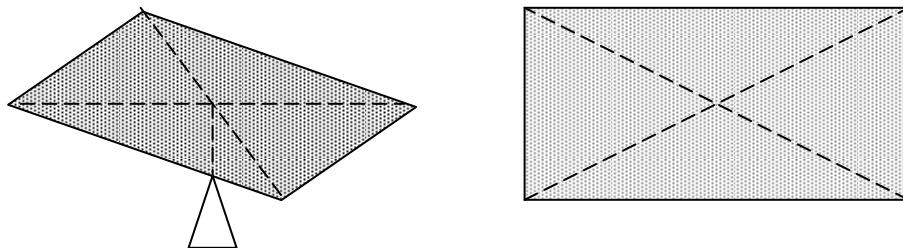
$$M_X = y_1 m_1 + y_2 m_2 + \dots + y_n m_n = \sum_{i=1}^n y_i m_i$$

Koordinat pusat massa system tersebut adalah (\bar{x}, \bar{y}) dengan

$$\bar{x} = \frac{M_Y}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad \text{dan} \quad \bar{y} = \frac{M_X}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Persoalan yang kita hadapi sekarang adalah menentukan pusat massa lamina, yaitu sepotong lempeng tipis yang rata.

Misalkan lamina ini homogen, yang berarti kepadatan δ adalah konstan. Untuk suatu lempeng homogen yang berbentuk persegi panjang, pusat massanya terletak pada perpotongan kedua diagonalnya.

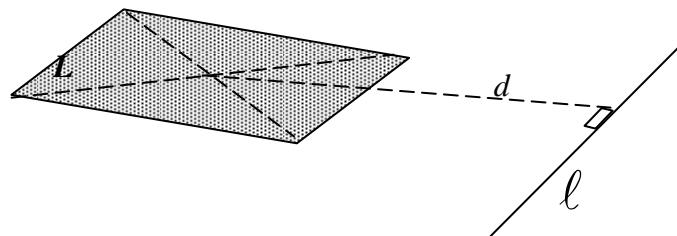


Jika diketahui lamina homogen berbentuk persegi panjang L mempunyai kepadatan massa δ konstan dan garis lurus ℓ terletak pada bidang yang memuat lamina tersebut, maka momen lamina L terhadap garis ℓ adalah

$$M_\ell(L) = d m$$

dengan d : jarak pusat massa lamina L ke garis ℓ

m : massa lamina yang dapat dihitung dari $m = \delta A$ (disini A adalah luas lamina L)
ilustrasi ini dapat dilihat pada gambar berikut.



Selanjutnya perhatikan lamina homogen L dengan kepadatan massa δ dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, dan $x = b$ dengan $g(x) \leq f(x)$.

Dibuat partisi $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ pada $[a,b]$. Untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$ dipilih satu titik $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ yang merupakan titik tengah sub interval $[x_{i-1}, x_i]$, maka $\bar{x}_i = (x_i + x_{i-1})/2$. Selanjutnya dibuat persegi panjang dengan panjang $[f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)]$ dan lebar $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ sebagai lamina hampiran L_i . Tentu pusat massa lamina L_i berada di garis $x = \bar{x}_i$, tepatnya berada pada koordinat $\left(\bar{x}_i, \frac{f(\bar{x}_i) + g(\bar{x}_i)}{2}\right)$. Oleh karena itu momen L_i terhadap sumbu Y adalah

$$\begin{aligned} M_Y(L_i) &= \bar{x}_i m_i \\ &= \bar{x}_i \delta A_i \\ &= \bar{x}_i \delta [f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)] \Delta x_i \end{aligned}$$

Kita peroleh jumlahan

$$\sum_{i=1}^n M_Y(L_i) = \delta \sum_{i=1}^n \bar{x}_i [f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)] \Delta x_i$$

Apabila $\|P\| \rightarrow 0$, maka diperoleh momen lamina L terhadap sumbu Y , yaitu

$$\begin{aligned} M_Y(L) &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_Y(L_i) \\ &= \delta \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \bar{x}_i [f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)] \Delta x_i \\ &= \delta \int_a^b x [f(x) - g(x)] dx \end{aligned}$$

Jadi

$$M_Y(L) = \delta \int_a^b x [f(x) - g(x)] dx$$

Selanjutnya perhatikan bahwa momen L_i terhadap sumbu X adalah

$$\begin{aligned} M_X(L_i) &= \frac{f(\bar{x}_i) + g(\bar{x}_i)}{2} m_i \\ &= \frac{f(\bar{x}_i) + g(\bar{x}_i)}{2} \delta A_i \\ &= \frac{f(\bar{x}_i) + g(\bar{x}_i)}{2} \delta [f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)] \Delta x_i \end{aligned}$$

$$= \frac{\delta}{2} [\{f(\bar{x}_i)\}^2 - \{g(\bar{x}_i)\}^2] \Delta x_i$$

Kita peroleh jumlahan

$$\sum_{i=1}^n M_x(L_i) = \frac{\delta}{2} \sum_{i=1}^n [\{f(\bar{x}_i)\}^2 - \{g(\bar{x}_i)\}^2] \Delta x_i$$

Apabila $\|P\| \rightarrow 0$, maka diperoleh momen lamina L terhadap sumbu X , yaitu

$$\begin{aligned} M_x(L) &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_x(L_i) \\ &= \frac{\delta}{2} \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [\{f(\bar{x}_i)\}^2 - \{g(\bar{x}_i)\}^2] \Delta x_i \\ &= \frac{\delta}{2} \int_a^b [\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2] dx \end{aligned}$$

Jadi

$$M_x(L) = \frac{\delta}{2} \int_a^b [\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2] dx$$

Selanjutnya massa lamina L adalah $m(L) = \delta A$

Jadi

$$m(L) = \delta \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Oleh karena itu diperoleh koordinat pusat massa lamina L adalah (\bar{x}, \bar{y}) dengan

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{M_y(L)}{m(L)} = \frac{\delta \int_a^b x [f(x) - g(x)] dx}{\delta \int_a^b [f(x) - g(x)] dx} = \frac{\int_a^b x [f(x) - g(x)] dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)] dx} \\ \bar{y} &= \frac{M_x(L)}{m(L)} = \frac{\frac{\delta}{2} \int_a^b [\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2] dx}{\delta \int_a^b [f(x) - g(x)] dx} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2] dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)] dx} \end{aligned}$$

Contoh 25

Diketahui suatu lamina homogen L dengan kepadatan massa δ konstan, yang merupakan daerah tertutup yang dibatasi kurva $y = x^3$ dan $y = \sqrt{x}$. Tentukan

- momen L terhadap sumbu Y
- momen L terhadap sumbu X
- massa lamina L
- pusat massa lamina L .

Penyelesaian:

Dapat dicari bahwa perpotongan kedua kurva adalah $(0, 0)$ dan $(1, 1)$, sehingga batas-batas x adalah 0 dan 1.

$$\begin{aligned} \text{a. } M_Y(L) &= \delta \int_0^1 x [\sqrt{x} - x^3] dx = \delta \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 = \frac{1}{5}\delta \\ \text{b. } M_X(L) &= \frac{\delta}{2} \int_0^1 [\{\sqrt{x}\}^2 - \{x^3\}^2] dx = \frac{\delta}{2} \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{7}x^7 \right]_0^1 = \frac{5}{28}\delta \\ \text{c. } m(L) &= \delta \int_0^1 [\sqrt{x} - x^3] dx = \delta \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = \frac{5}{12}\delta \\ \text{d. } \bar{x} &= \frac{M_Y(L)}{m(L)} = \frac{\frac{1}{5}\delta}{\frac{5}{12}\delta} = \frac{12}{25} \quad \text{dan} \quad \bar{y} = \frac{M_X(L)}{m(L)} = \frac{\frac{5}{28}\delta}{\frac{5}{12}\delta} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

Jadi koordinat pusat massa lamina L adalah $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{12}{25}, \frac{3}{7} \right)$