

## Bab 2

### Logika Proposisional

#### 2.1. Pendahuluan - Introduction

Bahasa logika proposisional masih terlalu primitif untuk menyatakan obyek, sifat obyek, atau hubungan antar obyek.

Bahasa logika predikat yang akan diperkenalkan dalam Bab ini memperluas bahasa logika proposisional yang bisa digunakan untuk membicarakan obyek dan hubungan-hubungan antar mereka. Dalam bahasa ini, kalimat di atas bisa dianggap sebagai instances dan kalimat abstrak

$F: (for\ some\ x)\ p(x)\ or\ (for\ all\ x)\ not\ p(x)$

Untuk kalimat *makhluk*,  $p(x)$  diambil sebagai '*x adalah makhluk di planet Jupiter meyerupai manusia*'. Sebaliknya, tidak setiap instance dari kalimat abstrak

$G: (for\ all\ x)\ p(x)\ or\ (for\ all\ x)\ not\ p(x)$

adalah benar. Sebagai contoh, jika kita ambil  $p(x)$  sebagai '*x adalah bilangan bulat positif kurang dari 256*' maka anti intuitif dari kalimat G adalah

$(for\ all\ x)[x\ adalah\ bilangan\ bulat\ positif\ kurang\ dari\ 256]$

or

$(for\ all\ x)\ [not(x\ adalah\ bilangan\ bulat\ positif\ kurang\ dari\ 256)]$

yaitu

*setiap sesuatu merupakan bilangan bulat positif kurang dari 256*

atau

*setiap sesuatu bukan bilangan bulat positif kurang dari 256.*

Karena kenyataannya tidak semuanya merupakan bilangan bulat positif kurang dari 256, demikian juga tidak semuanya bukan bilangan bulat positif kurang dari 256 berarti secara keseluruhan kalimatnya bernilai false.

Tujuan dari bab ini adalah mengadaptasikan bahasa logika-proposisional untuk membicarakan obyek dan hubungan-hubungan antara mereka dan memperluas pengertian validitas. Bahasa baru yang dimaksud, bersama-sama dengan pengertian validitas yang diperluas disebut logika predikat.

#### 2.2 Bahasa - language

##### Kalimat - sentence

Seperti kalimat dalam logika-proposisional, berikut adalah simbol-simbol yang merupakan komponen pembentuk kalimat dalam logika-predikat.

## Definisi (Simbol - symbols)

Kalimat-kalimat logika-predikat dibentuk dari simbol-simbol berikut:

- Simbol-simbol Kebenaran (truth symbols)

*true* dan *false*

- Simbol-simbol Konstan (constant symbols atau constant saja)

$a, b, c, a', b', c', a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c,$

(yaitu huruf-huruf  $a, b, c$ , bisa dengan tanda aksen atau indeks bilangan)

- Simbol-simbol Variabel (variable symbols atau variables saja)

$u, v, w, x, y, z, u', v', w', x', y', z', u_1, v_1, w_1, \dots$

- Simbol-simbol Fungsi (function symbols)

$f, g, h, f_1, g_1, h_1, f_2, g_2, h_2, \dots$

masing-masing simbol fungsi terhubung dengan bilangan bulat positif yang disebut aritas-nya (arity), yang menandakan banyaknya argument fungsi.

- Simbol-simbol Predikat (predicate symbols)

$p, q, r, p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2, \dots$

masing-masing simbol predikat juga mempunyai aritas yang terhubung.

Selanjutnya, untuk membangun bahasa dan simbol-simbol tersebut diperlukan tiga tahapan, pertama-tama mendefinisikan *term* dari bahasa, kemudian proposisi-proposisi (propositions) nya, dan akhirnya kalimat-kalimat nya.

## Defisi (term – terms)

Term dari logika-predikat merupakan ekspresi yang menunjukkan obyek-obyek. Term dibangun aturan-aturan berikut:

- Konstan-konstan  $a, b, c, \dots$  adalah *terms*.
- Variabel-variabel  $x, y, z, u, v, w, \dots$  adalah *terms*.
- Jika  $t_1, t_2, \dots, t_n$  merupakan *terms*, dengan  $n \geq 1$  dan  $f$  merupakan simbol fungsi dengan aritas  $n$ , maka aplikasi (application)  $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$  merupakan *terms*
- Jika  $F$  adalah kalimat dan  $s$  dan  $t$  merupakan *terms*, maka *conditional if F then s else t* merupakan *term*.

## Contoh 2.1 (tem)

Misal  $f$  adalah simbol fungsi biner (*binary*), yaitu fungsi 2-arithas, dan  $g$  adalah simbol fungsi terner (*ternary*), yaitu fungsi 3-arithas. Maka  $g(x, f(a, x), a)$  merupakan *term*, karena

- $a$  merupakan *term* ( $a$  adalah konstan);

- $x$  merupakan term ( $x$  adalah variabel);
- $f(a, x)$  merupakan *term* (karena  $a$  dan  $x$  merupakan term dan  $f$  merupakan simbol fungsi biner).

Sehingga aplikasi,  $g(x, f(a, x), a)$  merupakan term.

### Catatan Remark

Dalam suatu ekspresi (kalimat bagian) simbol fungsi yang sama harus mempunyai aritas sama. Jadi ekspresi seperti  $g(x, b, f(a, f(y)), y)$  tidak diperbolehkan, karena dalam  $f(a, f(y))$ ,  $f$  mempunyai aritas 2, sementara dalam  $f(y)$ , mempunyai aritas 1. Akan tetapi diperbolehkan bahwa dalam satu pembicaraan kita mengasumsikan bahwa  $f$  mempunyai aritas 2 dan dalam pembicaraan lain kita mengasumsikan bahwa  $f$  mempunyai aritas 1.

### Definisi (proposisi - propositions)

Proposisi dan logika-predikat mempunyai kegunaan untuk menyatakan relasi antar obyek. Aturan-aturan yang digunakan untuk membentuk proposisi adalah:

- Simbol-simbol kebenaran
- Jika  $t_1, t_2, \dots, t_n$  merupakan terms, dengan  $n \geq 1$  dan  $p$  merupakan simbol predikat dengan aritas  $n$ , maka  $p(t_1, t_2, \dots, t_n)$  merupakan proposisi.

Sebagai contoh,  $q(x, J(g(a), j), b, g(x))$  merupakan proposisi, karena

- $a$  dan  $b$  merupakan term ( $a$  dan  $b$  keduanya konstan);
- $x$  dan  $y$  merupakan term ( $x$  dan  $y$  keduanya variabel);
- $g$  merupakan simbol fungsi 1-aitas (sehingga  $g(a)$  dan  $g(x)$  keduanya term);
- $f$  merupakan simbol fungsi 2-aitas (sehingga  $f(g(a), y)$  merupakan term);
- $q$  merupakan simbol predikat dengan aritas-4.

Sehingga  $q(x, f(g(a), y), b, g(x))$  merupakan proposisi.

### Definisi (kalimat - sentences)

Kalimat-kalimat dan logika-predikat dibentuk (atau dibangun) dari proposisi-proposisi nya, halnya dalam logika-proposisional, sesuai dengan aturan-aturan berikut:

- Setiap proposisi merupakan kalimat.
- Jika  $F$  kalimat, maka negasi (negation) yaitu  $\neg F$  merupakan kalimat.
- Jika  $F$  dan  $G$  keduanya kalimat, maka konjungsi mereka (conjunction) yaitu  $(F \text{ and } G)$  merupakan kalimat.
- Jika  $F$  dan  $G$  keduanya kalimat, maka disjungsi mereka (disjunction) yaitu  $(F \text{ or } G)$  merupakan kalimat.

- (e) Jika  $F$  dan  $G$  keduanya kalimat, maka implikasi (implication) yaitu  $(F \text{ then } G)$  merupakan kalimat.
- (f) Jika  $F$  dan  $G$  keduanya kalimat, maka ekuivalensi nya (equivalence) yaitu  $(F \text{ and only if } G)$  merupakan kalimat.
- (g) Jika  $F$ ,  $G$  dan  $H$  merupakan kalimat, maka kondisional nya (conditional) yaitu  $(F \text{ then } G \text{ else } H)$  merupakan kalimat.
- (h) Jika  $x$  sebarang variable dan  $F$  adalah kalimat, maka  $((\text{for all } x) F)$  dan  $((\text{for some } x) F)$  keduanya merupakan kalimat. Awalan (prefix) "*for all*" dan "*for some*" masing-masing disebut universal quantifier dan existential quantifier, selanjutnya pemunculan  $F$  dikatakan berada dalam lingkup (scope) quantifier yang bersangkutan.

### Contoh 2.3 (kalimat ter-kuantifikasi *quantified sentence*)

Akan diperlihatkan bahwa ekspresi  $((\text{for all } x) (b(a, x, f(a, x)) \text{ and } ((\text{for some } y) q(g(b, x), y))))$  merupakan sentence. Perhatikan bahwa, karena:

- $a$  dan  $b$  konstan,  $x$  dan variabel, maka  $a$ ,  $b$ ,  $x$ , dan  $y$  merupakan terms.
- $f$  dan  $g$  merupakan simbol fungsi masing-masing dengan aritas 2, maka  $f(a, x)$  dan  $g(b, x)$  masing-masing merupakan terms.
- $p$  dan  $q$  merupakan simbol predikat masing-masing dengan aritas 3 dan 2, maka  $p(a, x, f(a, x))$  dan  $q(g(b, x), y)$  masing-masing merupakan proposisi.
- $p(a, x, f(a, x))$  dan  $q(g(b, x), y)$  merupakan proposisi, maka  $p(a, x, f(a, x)) \text{ and } q(g(b, x), y)$  keduanya merupakan kalimat.

Sehingga:

$((\text{for some } y) q(g(b, x), y))$  merupakan kalimat

$p(a, x, f(a, x)) \text{ and } ((\text{for some } y) q(g(b, x), y))$  merupakan kalimat,

akhirnya

$((\text{for all } x) (b(a, x, f(a, x)) \text{ and } ((\text{for some } y) q(g(b, x), y))))$

Untuk tujuan kejelasan bentuk kalimat, maka dalam penulisan kalimat akan digunakan kurung siku (brackets), kurung-biasa (parenthesis), dua-dimensi, dan indentasi, menghilangkan pasangan-pasangan kurung jika tidak diperlukan untuk menunjukkan struktur sebuah kalimat. Cara penulisan ini hanya merupakan kesepakatan (convention) tak-resmi (informal), yang sebenarnya tidak memperluas bahasa logika-predikat.

### Contoh 2.4 (Kondisional)

$\text{if } ((\text{for all } x) p(a, b, x)) \text{ then } f(a, x) \text{ else } g(b, y)$

merupakan term, karena  $((\text{for all } x) p(a, b, x))$  merupakan kalimat, sedang  $f(a, x)$  dan  $g(b, y)$  merupakan terms.

### Catatan – Remark (*if-then-else*)

Bentuk *if-then-else* telah kita gunakan sebagai operator untuk membentuk term kondisional sebagai connective untuk membentuk kalimat kondisional. Arti yang kita maksudkan akan kelihatan dari klausa-klausa *then* dan *else* dari ekspresi.

### Contoh 2.6 (kalimat Kondisional)

*if (for all  $x$ )  $p(a, b, x)$  then  $f(a, x)$  else  $g(b, y)$*

merupakan terms, karena  $f(a, x)$  dan  $g(b, y)$  merupakan term, sementara

*if (for all  $x$ )  $p(a, b, x)$  then (for some  $y$ )  $q(x, y)$  else  $r(y)$*

merupakan kalimat, karena (for some  $y$ )  $q(x, y)$  dan  $r(y)$  merupakan kalimat.

### Definisi (ekspresi – expressions)

Suatu ekspresi dari logika – predikat adalah kalimat atau term.

Sehingga  $a, z, u(fa, g(v)), p(x, f(b), z)$  merupakan ekspresi. Karena  $a$  (konstan),  $(variabel)$ ,  $u$  variabel, dan  $f(a, g(v))$  (aplikasi fungsi) semuanya merupakan terms, sementara  $p(x, f(b), z)$  (merupakan proposisi) merupakan kalimat.

### Definisi (term, kalimat, ekspresi bagian)

Setiap term tengahan (*intermediate term*) yang kita gunakan untuk membangun term  $t$  (termasuk  $t$  sendiri) atau kalimat  $F$  disebut term - bagian masing-masing dari  $t$  atau  $F$ .

Setiap kalimat tengahan (*intermediate sentence*) yang digunakan untuk membangun term  $t$  atau kalimat  $F$  (termasuk  $F$  sendiri) masing-masing disebut kalimat-bagian dari  $t$  atau  $F$ .

Term bagian dan kalimat-bagian dari term  $t$  (termasuk  $t$  sendiri) disebut ekspresi-bagian dari  $t$ . Secara serupa, term bagian - term bagian, kalimat bagian - kalimat bagian dari kalimat  $F$  (termasuk  $F$  sendiri) disebut ekspresi bagian - ekspresi bagian dari  $F$ .

Term bagian wajar (*proper subterin*), kalimat-bagian wajar (*proper subsentence*), atau ekspresi bagian wajar (*proper subexpression*) dari suatu kalimat  $E$  adalah sesuatu yang berbeda dan  $E$ .

Ekspresi bagian tunggal dari suatu ekspresi yang diberikan bisa mempunyai lebih dari satu pemunculan dalam ekspresi tersebut.

### Contoh 2.5 (Term bagian)

Dalam term kondisional berikut yaitu

*$t : \text{if } (\text{for some } x)(\text{for all } y)[p(a, f(x, b), y) \text{ or } q(b, g(x))] \text{ then } f(g(b), a) \text{ else } g(a)$*

mempunyai term bagian- term bagian :

$a, b, x, y, f(x, b), f(g(b), a), g(x), g(b), g(a)$ , dan  $t$  sendiri.

Sementara kalimat-bagian - kalimat-bagian nya adalah

$p(a, f(x, b), y), q(b, g(x)), p(a, f(x, b), y) \text{ or } q(b, g(x)),$

$(\text{for all } y)[p(a, f(x, b), y) \text{ or } q(b, g(x))]$ , dan

$(\text{for some } x)(\text{for all } y)[p(a, f(x, b), y) \text{ or } q(b, g(x))]$

Dalam hal ini  $t$  mempunyai tiga pemunculan dari term bagian  $a$ , tiga pemunculan dari term bagian  $h$ , dua pemunculan dari term bagian  $x$ , satu pemunculan dari term bagian  $y$ , satu pemunculan dari term bagian  $f(x, b)$ , satu pemunculan dari term bagian  $f(g(b), a)$ , satu pemunculan dari term bagian  $g(x)$ , satu pemunculan dari term bagian  $g(h)$ , dan satu pemunculan dari term bagian  $g(a)$ .

### Variabel Bebas dan Terikat - Free and Bound Variables

Mulai saat ini akan diperkenalkan term-term dan kalimat-kalimat dari logika-predikat. Akan sebelum kita bisa mengetahui anti dan ekspresi-ekspresi ini, terlebih dahulu kita harus pengertian-pengertian teknis tentang variabel-variabel bebas dan terikat. Dalam bagian kami akan memperkenalkan interpretasi-interpretasi untuk logika-predikat dan membicarakan Bagaimana menentukan nilai dan ekspresi logika-predikat di bawah interpretasi yang diberikan. persis seperti yang sudah kita lakukan sebelumnya dalam logika-proposisional. Perbedaan antara pemunculan bebas dan terikat dari suatu variabel akan menjadi sangat penting, karena pemunculan-pemunculan bebas akan diberi nilai oleh interpretasi, sementara nilai dan pemunculan-pemunculan terikat tidak tergantung (atau bebas dari) pada interpretasi.

Selanjutnya untuk menghindari kesalahpahaman terhadap definisi tentang variable-variabel bebas dan terikat, (karena pada umumnya akan terjadi kebingungan untuk pertama kali) maka seperti biasa akan digunakan contoh, seperti

$$(\text{for all } x) \left( \begin{array}{c} p(x, y) \\ \text{and} \\ (\text{for some } y) q(y, x) \end{array} \right)$$

Dalam kalimat di atas,  $x$  muncul dua kali dalam lingkup (scope) nya universal quantifier (for all  $x$ ); pemunculan-pemunculan dan  $x$  ini selanjutnya akan dikatakan terikat atau bound oleh quantifier (for all  $x$ ). Sebaliknya, pemunculan pertama dan variabel  $y$ , dalam  $p(x, y)$  tidak berada dalam scope nya quantifier manapun, yaitu (for some  $y$ ) atau (for all  $y$ ); oleh karena ini dikatakan sebagai pemunculan bebas dan  $y$  Pemunculan terakhir dan  $y$ , dalam  $q(y, x)$  merupakan pemunculan terikat karena pemunculannya berada dalam scope quantifier (for some  $y$ ). Pemunculan dari simbol-simbol  $x$  dan  $y$  berada dalam quantifier-

quantifier (for all x) dan (for some y), sementara mereka sendiri (yaitu (for all x) dan (for some x)) dianggap sebagai variabel yang tidak bebas demikian juga tidak terikat.

Pemunculan yang sama suatu variabel bisa berada dalam scope dan lebih dari satu quantifier (for all...) atau (for some . . .).

### Contoh 2.6 (Nested quantifier)

Perhatikan pemunculan variabel x dalam kalimat berikut

$$(for\ all\ x) \left( \begin{array}{l} p(x,y) \\ and \\ (for\ some\ x)(for\ all\ y)\ q(x,y) \end{array} \right)$$

Pemunculan akhir dari x, dalam q(y, x) adalah berada dalam scope dari dua quantifier dalam (for some x) dan quantifier luar (for all x). Akan tetapi kita tidak akan menganggap x sebagai variabel terikat oleh dua quantifier, melainkan hanya terikat oleh quantifier dalam, yaitu (for some x).

### Contoh 2.7 (Pemunculan bebas dan terikat)

Perhatikan kalimat berikut

$$if\ (for\ some\ x)p(a, f(x,y))\ then\ (for\ all\ y)[q(y,z)\ or\ r(b,f(x,a),z)]$$

Pemunculan x dalam p(a, f(x,y)) berada dalam scope (for some x), berarti pemunculannya merupakan pemunculan terikat. Sebaliknya y muncul bebas, karena pemunculan y dalam p(a, f(x, y)) tidak berada dalam scope dan quantifier manapun. Sehingga dalam hal ini, x merupakan variabel terikat, dan sebaliknya y merupakan variabel bebas. Selanjutnya perhatikan pemunculan y dalam q(y,z), karena pemunculan y berada dalam scope dan quantifier (for all y), maka pemunculan y merupakan pemunculan terikat. Sebaliknya pemunculan x dalam r(b, f(x,a), z) merupakan pemunculan bebas, karena tidak berada dalam scope dan quantifier manapun.

Menurut informasi di atas bisa diambil suatu kesimpulan bahwa x dan y masing-masing merupakan variabel-variabel terikat dan sekaligus bebas.

### Kalimat Tertutup - Closed Sentence

#### Definisi (kalimat tertutup closed sentence)

Suatu kalimat dikatakan closed jika semua variabel yang muncul dalam kalimat tersebut tidak mempunyai pemunculan bebas.

### Contoh 2.8 (Variabel bebas dan terikat)

Perhatikan kalimat berikut

$(\text{for all } x)(\text{for all } y)(\text{for some } z)[\text{if } q(x, f(y, z), z) \text{ then } r(f(y, g(x)), z)]$

semua variabel muncul terikat.

### Definisi (simbol bebas - free symbols)

Simbol-simbol bebas dalam suatu ekspresi E terdiri dari variabel-variabel bebas dalam E dan semua simbol konstanta, fungsi, dan predikat dan E.

Sehingga simbol-simbol bebas dari kalimat

$(\text{for all } x)[p(x, y) \text{ and } (\text{for some } y) q(y, f(a, z))]$

adalah variabel-variabel bebas y dan z, konstanta a, simbol fungsi f dan simbol-simbol predikat dan q. Karena variabel x hanya muncul terikat, maka x tidak termasuk simbol bebasnya

### Arti Suatu Kalimat - Meaning of Sentence

Dalam menentukan validitas kalimat dalam logika-proposisional, pertama-tama kita definisikan pengertian tentang kebenaran kalimat dibawah suatu interpretasi, yang membeni nilai-nilai kebenaran ke semua simbol proposisional dan kalimat. Dalam bagian ini, kita akan melakukan perluasan terhadap pengertian mi untuk kalimat-kalimat dalam logika-predikat dengan cam yang sama. Akan tetapi, kanena dalam logika-predikat kalimat-kalimatnya melibatkan temis, maka suatu interpretasi harus memuat sebuah “domain “, yaitu himpunan obyek-obyek yang menyediakan anti atau nilai untuk terms.

### Contoh 2.9 (Penentuan nilai kalimat)

Perhatikan kalimat tertutup

$E : \text{if } (\text{for all } x)(\text{for some } y)p(x, y) \text{ then } p(a, f(a))$

Setiap interpretasi untuk kalimat E harus menentukan sebuah domain dan memberi anti terhadap konstanta a, simbol fungsi unerf dan simbol predikat binerp. Karena kalimat E tidak mempunyai vaniabel bebas, maka interpretasi tidak penlu membeni nilai ke vaniabel manapun.

Selanjutnya, perhatikan interpretasi I, di mana domain D yang di ambil merupakan himpunan bilangan-bilangan bulat, sedemikian hingga:

oa  $\leftarrow$  0;

o f $\leftarrow$  fungsi ‘successor’, yaitu fungsi  $f_1$  sedemikian hingga  $f_1(d) = d+ 1$ ;

op  $\leftarrow$  relasi ‘lebih-dari”, yaitu relasi  $p_1$  sedemikian hingga  $p_1(d_1, d_2)$  adalah hubungan  $d_1 > d_2$ .



Berdasarkan pemberian nilai terhadap simbol-simbol di atas, maka arti intuitif yang disediakan (bisa diberikan) untuk consequent  $p(a, f(a))$  dari E di bawah interpretasi ini adalah ketaksamaan

$$0 > 0 + 1.$$

Secara lebih tepatnya, nilai dari term  $f(a)$  adalah 1 (karena  $0 + 1$  adalah 1), jadi nilai dari consequent  $p(a, f(a))$  adalah false (karena  $0 > 1$  adalah false).

Kalimat E merupakan kalimat implikasi if-then. Sehingga untuk bisa mengetahui nilai kebenaran kalimat B terlebih dahulu kita harus mengetahui nilai kebenaran dan antecedent, yaitu

$$(\text{for all } x) (\text{for some } y) p(x, y).$$

Sebenarnya bisa diterapkan aturan semantik if then dari logika-proposisional untuk menentukan nilai kebenaran keseluruhan kalimat. Akan tetapi antecedent kalimat E memuat quantifier, sehingga untuk menentukan nilai kebenarannya kita harus terlebih dahulu memperkenalkan dua aturan semantik baru masing-masing kuantifikasi universal dan eksistensial (universal dan existential quantifier).

Menurut salah satu dari aturan-aturan tersebut, suatu kalimat yang dinyatakan dengan bentuk  $(\text{for all } x) F$  akan bernilai true di bawah interpretasi yang diberikan jika kalimat bagian  $F$  bernilai true di bawah interpretasi untuk setiap kemungkinan pemasangan elemen domain  $d$  ke  $x$ . Menurut aturan yang satunya, suatu kalimat dengan bentuk  $(\text{for some } x) F$  akan bernilai true di bawah suatu interpretasi yang diberikan jika ada suatu pemasangan elemen domain  $d$  ke  $x$  sedemikian hingga  $F$  bernilai true di bawah interpretasi.

Sehingga antecedent

$$(\text{for all } x) (\text{for some } y) p(x, y)$$

akan diberi anti intuitif sebagai berikut:

*Untuk setiap bilangan bulat  $d$ ,  
ada suatu bilangan bulat  $d'$ ,  
sedemikian hingga  $d > d'$*

Pernyataan ini bernilai true (yaitu, untuk setiap  $d$ , kita bisa mengambil  $d'$  sebagai  $d-1$ ).

Sehingga di bawah interpretasi I di atas, keseluruhan kalimat akan diberi anti intuitif sebagai berikut:

*Jika untuk setiap bilangan bulat  $d$   
ada suatu bilangan bulat  $d'$   
sedemikian hingga  $d > d'$ ,  
maka  $0 > 0 + 1$ .*

Karena antecedent kalimatnya bernilai true dan consequent kalimatnya bernilai false, maka dengan menerapkan aturan if then, keseluruhan kalimat

*If (for all  $x$ ) (for some  $y$ )  $p(x,y)$   
then  $p(a,f(a))$*

bernilai false di bawah interpretasi I.

Sebaliknya, andaikan kita perhatikan interpretasi J, yang berbeda dengan I hanya pada pemasangan nilai terhadap simbol fungsi  $f$  dan simbol predikat  $p$ . Sehingga di bawah interpretasi J berlaku

- $f$  merupakan fungsi ‘predecessor’, yaitu fiingsif sedemikian  $f(d) = d-1$ ;
- $p$  merupakan relasi “ketidak-samaan”, yaitu relasi  $p(d_1, d_2)$  merupakan relasi  $d_1 \neq d_2$ .

Di bawah interpretasi J, kalimat mempunyai anti intuitif sebagai berikut:

*Jika untuk setiap bilangan bulat  $d$   
ada suatu bilangan bulat  $d'$   
sedemikian hingga  $d \neq d'$ ,  
maka  $0 \neq 0-1$ .*

Pernyataan tersebut adalah true untuk bilangan-bilangan bulat. Antecedent dari kalimat tersebut adalah

*Untuk setiap bilangan bua  $d$   
ada suatu bilangan bit/at  $d'$   
sedemikian hingga  $d \neq d'$*

Ternyata bernilai true (yaitu, untuk setiap  $d$ , ambil  $d'$  sama dengan  $d+1$ ). Karena antecedent kalimat true, maka untuk bisa menentukan nilai kebenaran dan keseluruhan kalimat hams ditentukan ‘dahulu nilai dan consequent nya. Consequent kalimat tersebut adalah

$0 \neq 0-1$

bernilai true; sehingga (dengan aturan if then) keseluruhan kalirnat (implikasi) bernilai true di bawah interpretasi J.

Untuk menjadi valid suatu kalimat tertutup harus bernilai true di bawah setiap interpretasi yang mungkin. Sehingga meskipun kalimat E di atas bernilai true di bawah interpretasi J, akan tetapi E tidak valid, karena bernilai false di bawah interpretasi I.

Selanjutnya perhatikan kalimat

$H : \text{if } (\text{for all } x) p(x, f(x)) \text{ then } (\text{for some } y) p(a, y).$

Kalimat H bernilai true di bawah kedua interpretasi I maupun J.

*Jika untuk setiap bilangan bulat  $d$   
 $d > d+1$ ,  
maka ada suatu bilangan bulat  $d'$   
sehingga  $0 > d'$ .*

Dalam hal ini, antecedent kalimat (bagian bernilai false, dan consequent (bagian then) bernilai true, oleh karena itu (dengan aturan if then) keseluruhan kalimat bernilai true di bawah J.

Di bawah J, arti intuitif kalimat H adalah

Di bawah J, arti intuitif kalimat H adalah  
*Jika untuk setiap bilangan bulat d*  
 $d \neq d - 1,$   
*maka ada suatu bilangan bulat d'*  
*sehingga  $0 \neq d'$ .*

Dalam kasus ini, kedua antecedent dan consequent bernilai true, sehingga keseluruhan kalimat juga bernilai true di bawah J.

Lebih dari itu, kalimat ini valid, yaitu bernilai true di bawah setiap interpretasi, seperti yang akan kita jumpai dalam bagian berikut.

## Interpretasi Interpretation

### Definisi (interpretasi interpretation)

D adalah sebarang himpunan tidak kosong. Suatu interpretasi I atas (over) domain D memasang atau memberi nilai-nilai ke masing-masing himpunan simbol-simbol konstan, variabel, fungsi, dan predikat dengan aturan sebagai berikut:

- Masing-masing simbol konstan a dalam himpunan diberi elemen domain  $a_i$  ( $a_i \in D$ ).
- Masing-masing simbol variabel x dalam himpunan diberi elemen domain ( $\in D$ ).
- Masing-masing simbol fungsi f dengan aritas n dalam himpunan, diberi *fungsi aritas-n*,  $f_1(d_1, d_2, \dots, d_n)$ ; fungsi  $f_1$  didefinisikan pada argumen-argumen  $d_1, d_2, \dots, d_n$  dalam D, dan nilainya  $f_1(d_1, d_2, \dots, d_n)$  merupakan elemen D.
- Masing-masing simbol predikat p dengan aritas-n dalam himpunan, diberi relasi aritas-n,  $p_1(d_1, d_2, \dots, d_n)$ ; relasi  $p_1$  didefinisikan pada argumen-argumen  $d_1, d_2, \dots, d_n$ , dalam D, dan nilainya  $p_1(d_1, d_2, \dots, d_n)$  bernilai true atau false (salah satu).

Sehingga untuk setiap ekspresi E dalam logika predikat, suatu interpretasi I dikatakan sebagai interpretasi untuk E jika I memberi sebuah nilai ke masing-masing simbol bebas dari E, yaitu ke masing-masing simbol konstan, fungsi, dan predikat dan masing-masing variabel bebas dari E.

Perhatikan bahwa persyaratan domain suatu interpretasi adalah himpunan tidak kosong, karena merupakan himpunan kosong maka kita tidak akan bisa memberi nilai apapun ke konstan dan variabel dari ekspresi.

Pada umumnya, suatu interpretasi untuk suatu ekspresi E mungkin memberi nilai pada simbol yang tidak bebas dalam E, yaitu simbol-simbol konstan, variabel, fungsi, dan yang sama sekali tidak muncul dalam E, atau variabel-variabel yang hanya muncul terikat

### Contoh 2.10 (interpretasi)

Perhatikan kalimat

E: if  $p(x, f(x))$  then (for some  $y$ ) $p(ay)$  (E mempunyai sebuah variabel bebas  $x$ ).

Selanjutnya ambil I suatu interpretasi untuk E atas domain bilangan-bilangan riil, di mana

$a \leftarrow \sqrt{2}$ ,  
 $x \leftarrow \pi$ ,  
 $f \leftarrow$  fungsi "pembagian oleh 2", yaitu  $f_i(d) = d/2$ , dan  
 $p \leftarrow$  relasi "lebih dari atau sama dengan", yaitu  $p_i(d1, d2)$  adalah  $d1 \geq d2$ .

Sehingga arti intuitif dari kalimat di bawah I adalah

"Jika  $\pi \geq \pi/2$ , maka ada suatu bilangan riil  $d$ , sedemikian hingga bahwa  $\sqrt{2} \geq d$ "

Perhatikan bahwa interpretasi tidak memberi nilai apapun terhadap variabel  $y$ , yang muncul terikat dalam E.

Sekarang ambil J sebagai interpretasi untuk E atas domain yang berupa himpunan semua orang, di mana

$a \leftarrow$  Ratu Elizabeth,  
 $b \leftarrow$  Napoleon,  
 $x \leftarrow$  George Washington,  
 $f \leftarrow$  fungsi "ibu", yaitu  $f_i(d)$  adalah ibu dari  $d$ , dan  
 $p \leftarrow$  relasi "anak", yaitu  $p_i(d1, d2)$  adalah " $d1$  adalah anak  $d2$ ".

Sehingga arti intuitif dari kalimat di bawah J adalah

"Jika George Washington anaknya ibu George Washington, maka ada seorang  $y$  sedemikian hingga Ratu Elizabeth anaknya  $y$ ".

Perhatikan bahwa interpretasi memberi nilai (Napoleon) ke konstan  $b$  meskipun  $b$  tidak muncul dalam kalimat.

### Aturan- aturan Semantik - Semantic Rules

Seperti yang telah diketahui bahwa setelah suatu interpretasi (kalimat atau term) E, maka nilai ekspresi tersebut bisa ditentukan. Untuk suatu kalimat, nilai ini adalah nilai kebenaran, true atau false (hanya bisa salah satu); untuk term, nilai ini adalah suatu obyek D dari interpretasi. Sebagaimana dalam logika proposisional, pengawanan suatu nilai ke suatu dilakukan secara rekursif, yaitu nilai dan ekspresi ditentukan dari nilai-nilai komponennennya, dengan menerapkan aturan-aturan semantik berikut.

## Definisi (aturan-aturan dasar semantic - basic rules of semantic)

Ambil suatu ekspresi  $E$ , dan suatu interpretasi  $I$  untuk  $E$  atas himpunan tidak kosong  $D$ . Maka nilai dari  $E$  di bawah  $I$  ditentukan dengan menerapkan secara berulang-ulang aturan-aturan semantic berikut :

- aturan konstan (constant rule)  
Nilai dari suatu konstan  $a$  adalah elemen domain  $a_1$ .
- aturan variabel (variable rule)  
Nilai variabel adalah elemen domain  $x_1$ .
- aturan aplikasi (application rule)  
Nilai dari suatu aplikasi  $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$  adalah elemen domain  $f_1(d_1, d_2, \dots, d_n)$ , dimana  $f_1$  merupakan yang dipasang ke  $f$  dan  $d_1, d_2, \dots, d_n$  merupakan nilai-nilai dari terms  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , di bawah  $I$ .
- aturan term *if-then-else* (*if-then-else term rule*)  
Nilai dari suatu term kondisional  $f \text{ then } s \text{ else } t$  sama dengan nilai term  $s$  jika kalimat  $F$  bernilai true, dan sama dengan nilai term  $t$  jika kalimat  $F$  bernilai false, di bawah  $I$ .
- aturan true dan false (*true and false rule*)  
Nilai dan simbol-simbol kebenaran true dan false masing-masing adalah nilai-nilai kebenaran true dan false.
- aturan proposisi (*proposition rule*)  
Nilai dari suatu proposisi  $p(t_1, t_2, \dots, t_n)$  adalah nilai kebenaran  $p_1(d_1, d_2, \dots, d_n)$ , true atau false (salah satu), di mana  $p_1$  merupakan relasi yang dipasang ke  $p$  dan  $d_1, d_2, \dots, d_n$  masing-masing merupakan nilai-nilai term  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , di bawah  $I$ .

Selanjutnya, aturan-aturan untuk konektif logika (logical connective rules) sama seperti untuk logika proposisional.

Sebenarnya masih ada dua aturan lagi, yaitu aturan semantik untuk kuantifikasi (*for all*  $x$ ) dan (*for some*  $x$ ) yang sedikit lebih kompleks, maka sebelumnya akan diberikan contoh yang tidak memerlukan kedua aturan tersebut.

### Contoh 2.11 (aturan not)

Perhatikan kalimat  $E : [not\ p(y, f(y))] \text{ or } [p(a, f(f(a)))]$

Kemudian ambil  $I$  sebagai interpretasi atas domain bilangan-bilangan bulat tak-negatif, dimana

$a \leftarrow 0,$

$g \leftarrow 2,$

$f \leftarrow$  fungsi "successor" (yaitu,  $f_1(d) = d+1$ ), dan

$p \leftarrow$  relasi "kurang dari" (yaitu,  $p_1(d_1, d_2)$  adalah  $d_1 < d_2$ ).

Dengan kata lain, interpretasi I memberi kalimat E anti intuitif

( $\text{not } 2 < 2+1$ ) atau ( $0 < (0+1) + 1$ ).

Kemudian dengan aturan-aturan semantik, kita bisa menentukan nilai dan “disjunct” pertama  $\text{not } p(y, f(y))$  di bawah interpretasi ini sebagai berikut:

(Dengan aturan variabel) maka nilai dari  $y$  adalah 2.

Karena  $y$  sama dengan 2 dan  $f$  adalah fungsi ‘successor’, maka (dengan aturan aplikasi) diperoleh

nilai dan  $f(y)$  adalah  $2+1$ , yaitu 3.

Karena  $y$  sama dengan 2,  $f(y)$  sama dengan 3, dan  $p$  merupakan relasi “kurang dari” ( $<$ ), maka (dengan proposisi) diperoleh nilai dari  $(p(y, f(y)))$  adalah  $2 < 3$ , yaitu true.

Karena  $p(y, f(y))$  bernilai true, maka (dengan aturan not) diperoleh nilai dari  $\text{not } p(y, f(y))$  adalah false.

Sebaliknya bisa ditentukan nilai dari “disjunct” kedua, yaitu  $p(a, f(f(a)))$  di bawah I sebagai berikut:

(Dengan aturan konstan) maka nilai dan  $a$  adalah 0.

Karena  $a$  sama dengan 0 dan  $f$  merupakan fungsi “successor”, maka (dengan aturan aplikasi) diperoleh bahwa nilai dari  $f(a)$  adalah  $0+1$ , yaitu 1.

Karena  $f(a)$  sama dengan 1 dan  $f$  merupakan fungsi “successor”, maka (dengan aturan aplikasi) diperoleh bahwa nilai dari  $f(f(a))$  adalah  $1+1$ , yaitu 2.

Karena  $a$  sama dengan 0,  $f(f(a))$  sama dengan 2, dan  $p$  merupakan relasi “kurang dari”, maka (dengan aturan proposisi) diperoleh bahwa nilai dari  $p(a, f(f(a)))$  adalah  $0 < 2$ , yaitu true.

Akhirnya, karena di bawah interpretasi I “disjunct” pertama, yaitu  $\text{not } p(y, f(y))$  bernilai false dan “disjunct” kedua, yaitu  $p(a, f(f(a)))$  bernilai true, maka (dengan aturan or) diperoleh bahwa nilai keseluruhan kalimat E, yaitu  $\text{not } p(y, f(y)) \text{ or } p(a, f(f(a)))$  adalah true.

Sampai saat ini terlihat bahwa aturan-aturan yang tersedia sudah bisa digunakan untuk menyelesaikan masalah, yaitu menentukan nilai dan kalimat dalam logika predikat. Akan tetapi permasalahan muncul ketika kita mencoba untuk menyatakan (atau mengekspresikan) nilai dari kalimat ter-kuantifier ( $\text{quant'f led senthce}$ ), dengan bentuk (for all  $x$ )  $F$  atau (for some)  $F$ , dalam term nilai dan komponen-komponennya  $F$ , secara analog terhadap aturan-aturan semantik lain.

### Contoh 2.12 (Kalimat ter-kuantifier)

Jika  $E$  adalah kalimat yang memuat kuantifier universal (for all  $x$ )  $p(x, y)$ , suatu interpretasi  $I$  untuk  $E$  akan memberi suatu elemen domain ke variabel  $y$ , dan suatu relasi ke symbol predikat  $p$ . akan tetapi mungkin tidak memberi nilai apapun terhadap variabel  $x$ , karena  $x$  bukan merupakan variabel bebas dalam  $E$ . Akibatnya, kita tidak bisa menentukan nilai kebenaran untuk kalimat bagian  $p(x, y)$  di bawah interpretasi  $I$ .

Lebih dari itu, meskipun interpretasi untuk kalimat  $(\text{for all } x) p(x, y)$  memberi suatu elemen domain ke variabel  $x$ , akan tetapi kita akan mengabaikan pemberian nilai ini dan tetap mengatakan bahwa kalimat bernilai true jika  $p(x, y)$  bernilai true tidak tergantung elemen domain apa yang diberikan ke variabel  $x$ . Untuk membuat gagasan ini lebih tepat (precise) kita perlu memperkenalkan suatu pengertian tentang interpretasi yang diperluas untuk logika predikat. Interpretasi ini memberi nilai-nilai baru ke simbol-simbol dari interpretasi yang diberikan, persis seperti dalam logika proposisional.

## Interpretasi yang Diperluas Extended interpretation

### Definisi (interpretasi yang diperluas extended interpretation)

Ambil  $I$  suatu interpretasi atas suatu domain  $D$ . Untuk sebarang variabel  $x$  dan elemen  $d$  dari domain  $D$ , interpretasi yang diperluas  $\langle x \leftarrow d \rangle o I$  dan interpretasi  $I$  merupakan interpretasi atas  $D$  dimana:

- variabel  $x$  diberi elemen domain  $d$
- masing-masing variabel  $y$  selain  $x$  diberi elemen domain  $y_i$ , yaitu nilai yang diberi oleh interpretasi  $I$ . (Jika  $y$  tidak mempunyai nilai di bawah  $I$ , maka  $y$  juga tidak mempunyai nilai di bawah  $\langle x \leftarrow d \rangle o I$ ).
- masing-masing konstan  $a$ , simbol fungsi  $f$  dan simbol predikat  $p$  diberi nilai-nilai mereka sebelumnya, yaitu masing-masing  $a_i$ ,  $f_i$ , dan  $p_i$  di bawah interpretasi  $I$ . (Jika simbol-simbol tersebut tidak mempunyai nilai dibawah  $I$ , mereka juga tidak mempunyai nilai dibawah  $\langle x \leftarrow d \rangle o I$ ).

Secara serupa, untuk sebarang konstan  $a$  (atau masing-masing simbol fungsi  $f$  dengan aritas- $n$ , bol predikat  $p$  aritas- $n$ ) dan untuk sebarang elemen domain  $d$  (atau masing-masing fungsi  $k$  atau relasi  $r$  aritas- $n$  atas  $D$ ), interpretasi yang diperluas

$$\langle a \leftarrow d \rangle o I$$

(atau masing-masing  $\langle f \leftarrow k \rangle o I$  atau  $\langle p \leftarrow r \rangle o I$ ) dari interpretasi  $I$  adalah interpretasi atas domain  $D$  dimana :

- konstan  $a$  (atau masing-masing simbol fungsi  $f$  atau simbol predikat  $p$ ) diberi elemen domain  $d$  (atau masing-masing fungsi  $k$  atau relasi  $r$ ).
- masing-masing simbol selain  $a$  (atau masing-masing  $f$  atau  $p$ ) diberi nilai mereka sebelumnya di bawah. (Jika simbol tidak mempunyai nilai di bawah  $I$ , maka simbol tersebut juga tidak mempunyai nilai di bawah interpretasi yang diperluas.)

Perhatikan bahwa interpretasi asli (original interpretation)  $I$  mungkin sudah memberi suatu nilai ke symbol  $x$  (atau  $a$ ,  $f$  atau  $p$ ). Jika benar bahwa  $I$  sudah melakukan pemberian nilai ke simbol-simbol tersebut, diganti oleh interpretasi yang diperluas.

### Contoh 2.13 (Interpretasi yang diperluas)

Sebagai contoh, misal  $I$  adalah interpretasi atas domain himpunan bilangan-bilangan bulat dimana

$$x \leftarrow 1$$

$$y \leftarrow 2$$

maka interpretasi yang diperluas  $\langle x \leftarrow 3 \rangle o I$  akan tetap memberi nilai 2 ke variable  $y$ , dan memberi nilai 3 ke variabel  $x$ ; dengan kata lain, di bawah interpretasi yang diperluas  $\langle x \leftarrow 3 \rangle o I$  terjadi proses pemberian nilai

$$x \leftarrow 3$$

$$y \leftarrow 2$$

### Contoh 2.14 (Interpretasi atas domain)

Misal  $I$  adalah interpretasi atas domain himpunan-himpunan bilangan bulat,  $f$  adalah simbol fungsi biner, dan  $+$  adalah fungsi penambahan (*addition*) atas bilangan-bilangan

$$\langle f \leftarrow + \rangle o I$$

merupakan interpretasi atas bilangan-bilangan bulat di mana  $f \leftarrow$  fungsi penambahan “+” tetapi semua simbol lain diberi nilai aslinya, yaitu nilai yang diberi oleh interpretasi  $I$ .

Meskipun akhirnya perlu dipertimbangkan interpretasi-interpretasi yang diperluas untuk simbol-simbol konstan, fungsi, dan predikat, akan tetapi dalam aturan-aturan semantik untuk kuantifikasi yang akan digunakan adalah interpretasi yang diperluas  $\langle x \leftarrow d \rangle o I$  untuk variabel-variabel. Mulai sekarang dan seterusnya, kita hanya membahas interpretasi-interpretasi yang diperluas semacam ini, dengan pengertian bahwa apa yang disampaikan bisa juga diterapkan pada simbol-simbol konstan, fungsi, dan predikat.

Sebagaimana dalam logika proposisional, kita bisa memperluas suatu interpretasi beberapa kali dalam sam rangkaian. Untuk suatu interpretasi  $I$  atas domain  $D$ , variabel-variabel  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , dan elemen-elemen domain  $d_1, d_2, \dots, d_n$  dalam  $D$ , notasi

$$\langle x_1 \leftarrow d_1 \rangle o \langle x_2 \leftarrow d_2 \rangle o \dots o \langle x_n \leftarrow d_n \rangle o I$$

merupakan cara tulis singkat (atau ringkas) untuk multiply extended interpretation (interpretasi yang diperluas beberapa kali)  $\langle x_1 \leftarrow d_1 \rangle o \langle x_2 \leftarrow d_2 \rangle o \dots o \langle x_n \leftarrow d_n \rangle o I$ .

Perhatikan bahwa, jika  $x$  dan  $y$  adalah dua variabel yang berbeda, maka multiply extended interpretations  $\langle x \leftarrow d \rangle o \langle y \leftarrow e \rangle o I$  dan  $\langle y \leftarrow e \rangle o \langle x \leftarrow d \rangle o I$  adalah identik untuk setiap elemen domain  $d$  dan  $e$ . Sebaliknya, jika  $d$  dan  $e$  adalah dua elemen domain yang berbeda, maka multiply extended interpretations  $\langle x \leftarrow d \rangle o \langle x \leftarrow e \rangle o I$  dan  $\langle x \leftarrow e \rangle o \langle x \leftarrow d \rangle o I$  berbeda; yang pertama identik dengan  $\langle x \leftarrow d \rangle o I$ , sementara yang terakhir identik dengan  $\langle x \leftarrow e \rangle o I$ .



### Catatan – Remark (Interpretasi yang diperluas)

Interpretasi yang diperluas mempunyai sifat bahwa,

Jika  $I$  adalah suatu interpretasi untuk kalimat dengan bentuk  $(\text{for all } x) F$  atau  $(\text{for some } x) F$ , maka  $\langle x \leftarrow d \rangle o I$  adalah suatu interpretasi untuk  $F$ .

Meskipun kalimat  $F$  mungkin mempunyai variabel bebas  $x$  yang tidak muncul bebas dalam  $(\text{for all } x) F$  atau  $(\text{for some } x) F$ , suatu pemberian elemen domain  $d$  ke  $x$  disediakan oleh interpretasi yang diperluas  $\langle x \leftarrow d \rangle o I$ .

### Aturan Untuk Kuantifaier “Rules of Quantifier”

Akhirnya siap disajikan aturan-aturan semantik yang menentukan nilai-nilai kebenaran dari kalimat  $E$  dengan bentuk  $(\text{for all } x)F$  dan  $(\text{for some } x)F$  di bawah suatu interpretasi  $I$ . Dalam masing-masing kasus, nilai  $F$  di bawah  $I$  ditentukan dari nilai-nilai komponen  $F$ , akan tetapi bukan di bawah  $I$  melainkan di bawah interpretasi-interpretasi tertentu hasil perluasan dari  $I$ .

### Definisi (aturan semantik untuk kuantifaier - *semantic rules for quantifier*)

- Aturan for-all (for-all rule)

Ambil  $I$  sebagai interpretasi untuk kalimat  $(\text{for all } x) F$  atas suatu domain  $D$ . Maka nilai kalimat yang terkuantifaier secara universal (universally quantified sentence)  $(\text{for all } x) F$  bernilai true di bawah  $I$  jika untuk setiap elemen domain  $d \in D$ , nilai  $F$  adalah true di bawah interpretasi yang diperluas  $\langle x \leftarrow d \rangle o I$ .

Sebaliknya,  $(\text{for all } x)F$  bernilai false di bawah  $I$  jika ada suatu elemen domain  $d \in D$ , sedemikian hingga nilai  $F$  adalah false di bawah interpretasi yang diperluas  $\langle x \leftarrow d \rangle o I$ .

- Aturan for-some (for-some rule)

Ambil  $I$  sebagai interpretasi untuk kalimat  $(\text{for some } x)F$  atas suatu domain  $D$ . Maka nilai kalimat yang terkuantifaier secara eksistensial (existential quantified sentence)  $(\text{for some } x)F$  bernilai true di bawah  $I$  jika ada suatu elemen domain  $d \in D$ , sedemikian hingga nilai  $F$  adalah true di bawah interpretasi yang diperluas  $\langle x \leftarrow d \rangle o I$ .

Sebaliknya,  $(\text{for some } x) F$  bernilai false di bawah  $I$  jika untuk setiap elemen domain  $d \in D$ , nilai  $F$  adalah false di bawah interpretasi yang diperluas  $\langle x \leftarrow d \rangle o I$ .

### Contoh 2.15 (Kalimat terkuantifaier)

Perhatikan kalimat  $G$ :  $(\text{for some } x)p(x)$  dan ambil  $I$  sebagai interpretasi atas himpunan bilangan-bilangan bulat, di mana

$y \leftarrow 2$

$p \leftarrow$  relasi kurang-dari “ $<$ ”.

Dari informasi di atas bisa dipastikan bahwa  $G$  bernilai true di bawah  $I$ .

Untuk memperlihatkankannya, harus bisa ditunjukkan bahwa (dengan aturan for-some) ada suatu elemen domain  $d \in D$ , sedemikian hingga nilai  $p(x,y)$  adalah true di bawah interpretasi yang diperluas  $\langle x \leftarrow d \rangle \circ I$ .

Untuk memperlihatkan ini, ambil  $d$  sebagai bilangan bulat 1. Karena  $p$  merupakan relasi kurang-dari " $<$ ",  $x \leftarrow 1$ , dan  $y$  adalah 2 di bawah interpretasi yang diperluas  $\langle x \leftarrow d \rangle \circ I$ , kita tahu (dengan aturan proposisi) bahwa nilai dari  $p(x,y)$  adalah  $1 < 2$ , yaitu true di bawah interpretasi yang diperluas  $\langle x \leftarrow d \rangle \circ I$ , sebagaimana yang akan diperlihatkan. Oleh karena itu, kalimat  $G$  true di bawah interpretasi  $I$ .

### Contoh 2.16 (Kalimat ter-kuantifaler ganda)

Perhatikan kalimat  $H$  : if (for all  $x$ )(for some  $y$ ) $p(xy)$  then  $p(a, f(a))$ , dan ambil  $I$  sebagai interpretasi atas himpunan bilangan-bilangan di positif, di mana

$a \leftarrow 1$

$f \leftarrow$  fungsi akar-pangkat dua " $\sqrt{\phantom{x}}$ "

$p \leftarrow$  relasi ketidaksamaan " $\neq$ ".

Terlihat bahwa kalimat  $H$  bernilai false di bawah interpretasi di atas. Untuk memperlihatkankannya, bisa menunjukkan bahwa, di bawah interpretasi  $I$ , *antecedent* (for all  $x$ )(for some  $y$ )  $p(x,y)$  bernilai true, dan *consequent*  $p(a,f(a))$  bernilai false.

Untuk memperlihatkan bahwa antecedent bernilai true di bawah interpretasi  $I$ , kita harus memperlihatkan (dengan aturan for-a14 maka untuk setiap elemen domain  $d \in D$ , nilai dari kalimat bagian (for some  $y$ )  $p(x,y)$  adalah true di bawah interpretasi yang diperluas  $\langle x \leftarrow d \rangle \circ I$ .

Untuk tujuan ini, diperlihatkan (dengan aturan for-some) bahwa untuk setiap elemen domain  $d \in D$ , ada suatu elemen domain  $e \in D$  sedemikian hingga nilai dari  $p(x,y)$  adalah true di bawah interpretasi yang diperluas beberapa kali  $\langle y \leftarrow e \rangle \circ \langle x \leftarrow d \rangle \circ I$ .

Akan tetapi, untuk sebarang elemen domain  $d$ , ambil  $e = d + 1$ . Karena  $p$  adalah relasi ketidaksamaan " $\neq$ ",  $x$  sama dengan  $d$ , dan  $y$  sama dengan  $d+1$ , maka (dengan aturan proposisional) diperoleh bahwa nilai  $p(x,y)$  adalah  $d \neq d+1$ , yaitu true dibawah  $\langle y \leftarrow d+1 \rangle \circ \langle x \leftarrow d \rangle \circ I$ .

Sebagaimana yang ingin diperlihatkan. Oleh karena itu nilai dan antecedent (for all  $x$ )(for some  $y$ ) $p(x,y)$  adalah true di bawah  $I$ .

Di lain pihak, karena  $p$  adalah relasi ketidaksamaan " $\neq$ ",  $a$  sama dengan 1, dan  $f$  adalah fungsi akar-kuadrat, maka (dengan aturan proposisi) diperoleh bahwa nilai dan consequent  $p(a,f(a))$  adalah  $1 \neq \sqrt{1}$ , yaitu false di bawah  $I$ .

Karena *antecedent* bernilai true dan *consequent* bernilai false, maka keseluruhan implikasi  $H$  bernilai false di bawah  $I$ .

## Agreement - Kesepakatan

### Definisi (kesepakatan - agreement)

Dua interpretasi agree on (sepakat pada) suatu simbol (yaitu simbol variabel, konstan, fungsi, atau predikat) jika

- keduanya memberi nilai yang sama ke setup simbol (khususnya simbol bebas), atau
- keduanya tidak memberi nilai ke simbol (ada simbol bebas yang tidak diberi nilai).

Dua interpretasi I dan J agree on suatu ekspresi E jika

- nilai dan E dibawah I sama dengan nilai E di bawah J, atau
- kedua interpretasi I dan J bukan merupakan interpretasi untuk E.

### Proposition (kesepakatan - agreement)

Jika dua interpretasi (atas domain yang sama) untuk suatu ekspresi E agree on masing-masing simbol bebas dad E, maka dua interpretasi tersebut agree on E sendiri.

Karena I dan J agree on masing-masing simbol bebas, maka dengan menerapkan aturan-aturan semantik dalam menentukan nilai E di bawah masing-masing interpretasi, menghasilkan nilai yang sama di masing-masing tahapan. Sehingga, secara intuisi jelas.

Selanjutnya, pengamatan berikut menghubungkan pengertian tentang agreement dengan interpretasi yang diperluas beberapa kali. Pengamatan ini pun juga analog dengan apa yang dilakukan logika proposisional.

### Catatan – remark (interpretasi yang diperluas beberapa kali)

Misal E adalah suatu ekspresi dan I suatu interpretasi untuk E atas domain D. Selanjutnya  $x_1, x_2, \dots, x_n$  merupakan variabel-variabel yang tidak muncul bebas dalam E, dan ambil  $d_1, d_2, \dots, d_n$  adalah sebarang elemen-elemen domain D. Maka interpretasi yang diperluas beberapa kali

$$J = \langle x_1 \leftarrow d_1 \rangle \circ \langle x_2 \leftarrow d_2 \rangle \circ \dots \circ \langle x_n \leftarrow d_n \rangle \circ I$$

dan I sendiri agree on E.

- **Validitas - Validity**

### Definisi (valid)

Suatu kalimat tertutup F adalah *valid* jika kalimat tersebut bernilai true di bawah setiap interpretasi untuk F.

### Contoh 2.17 (validitas)

Misal ingin diperlihatkan validitas dan kalimat kualitas kuantifikasi (duality of quantifiers) berikut

$$J = \langle x_1 \leftarrow d_1 \rangle \circ \langle x_2 \leftarrow d_2 \rangle \circ \dots \circ \langle x_n \leftarrow d_n \rangle \circ I$$

Dengan aturan if and-only-if cukup diperlihatkan bahwa  $\text{not } (\text{for all } x)p(x)$  dan  $(\text{for some } x)[\text{not } p(x)]$  mempunyai nilai kebenaran sama di bawah setiap interpretasi, yaitu bahwa kalimat pertama adalah true precisely when kalimat kedua juga true.

Perhatikan sebarang interpretasi  $I$  untuk  $E$ . Menurut ketentuan di atas, maka mempunyai  $\text{not } (\text{for all } x)p(x)$  adalah true di bawah interpretasi  $I$ , selanjutnya precisely when (dengan aturan not),  $(\text{for all } x)p(x)$  adalah false di bawah interpretasi  $I$  precisely when (dengan aturan for-all, ada suatu elemen domain  $d$  sedemikian hingga  $p(x)$  bernilai false di bawah interpretasi yang diperluas  $\langle x \leftarrow d \rangle \circ I$  precisely when (dengan aturan not), ada suatu elemen domain  $d$  sedemikian hingga  $(\text{not } p(x))$  bernilai true di bawah interpretasi yang diperluas  $\langle x \leftarrow d \rangle \circ I$ . precisely when (dengan aturan for-some),  $(\text{for some } x)(\text{not } p(x))$  bernilai true di bawah interpretasi  $I$  sebagaimana yang diinginkan.

Selanjutnya, kalimat  $E$  dan kalimat-kalimat yang serupa  $[(\text{not } (\text{for all } x)p(x)) \text{ and only if } ((\text{for some } x)(\text{not } p(x)))]$  dikatakan untuk menyatakan (mengekspresikan) dualitas antara kuantifikasi universal dan eksistensial.

### Contoh 2.18 validitas kalimat lebih kompleks

Misal kita akan memperlihatkan validitas dan kalimat

$$E : f(\text{for some } x)[p(x) \text{ and } r(x)] \text{ then } [(\text{for some } x)p(x) \text{ and } (\text{for some } x)r(x)].$$

Dalam kasus ini, cukup (dengan aturan if then) diperlihatkan bahwa untuk sebarang interpretasi  $I$  untuk  $F$ , jika antecedent  $(\text{for some } x)[p(x) \text{ and } r(x)]$  bernilai true di bawah  $I$ , maka consequent

$$(\text{for some } x)p(x) \text{ and } (\text{for some } x)r(x)$$

harus juga bernilai true di bawah  $I$ .

Ingat bahwa  $F$  merupakan kalimat dalam bentuk implikasi, dan implikasi bernilai true apabila (i) antecedent bernilai false, atau (ii) consequent bernilai true. Akan tetapi, jika untuk memperlihatkan validitas kalimat  $F$  kita menggunakan (i), maka consequentnya bisa bernilai apa saja (maksudnya bisa true atau false, salah satu), sehingga tidak ada artinya. Oleh karena itu, satu-satunya penyebab implikasi bernilai true yang harus kita ambil adalah (ii), yaitu dengan bermula dan diketahuinya antecedent yang true, kita

harus bisa menurunkan berdasarkan aturan-aturan yang berlaku bahwa consequent nya bernilai true.

Selanjutnya perhatikan sebarang interpretasi  $I$  untuk  $F$ , dan anggap bahwa antecedent

$$(for\ some\ x)[p(x)\ and\ r(x)]$$

bernilai true di bawah  $I$ .

Maka (dengan aturan *for-some*) ada suatu elemen domain  $d$  sedemikian hingga  $p(x)$  dan  $x$  bernilai true di bawah interpretasi yang diperluas  $\langle x \leftarrow d \rangle o\ I$ .

Jadi (dengan aturan *and*), ada suatu elemen domain  $d$  sedemikian hingga  $p(x)$  dan  $r(x)$  keduanya bernilai true di bawah interpretasi yang diperluas  $\langle x \leftarrow d \rangle o\ I$ .

Selanjutnya dengan *akal sehat - common sense*) ada suatu elemen domain  $d$  sedemikian hingga  $p(x)$  bernilai true di bawah interpretasi yang diperluas  $\langle x \leftarrow d \rangle o\ I$  dan ada suatu elemen domain  $e$  sedemikian hingga  $r(x)$  bernilai true di bawah interpretasi yang diperluas  $\langle x \leftarrow d \rangle o\ I$ .

Jadi (dengan aturan *for-some* yang diterapkan dua kali) kalimat bagian  $(for\ some\ x)p(x)$  bernilai true di bawah interpretasi  $I$ , dan kalimat bagian  $(for\ some\ x)r(x)$  bernilai true di bawah interpretasi  $I$ .

Jadi (dengan aturan *and*), kalimat  $(for\ some\ x)p(x)\ and\ (for\ some\ x)r(x)$ , yaitu consequent dan kalimat  $F$  bernilai true di bawah interpretasi  $I$ , sebagaimana yang dikehendaki.

Selanjutnya perhatikan ilustrasi suatu pendekatan tidak langsung untuk memperlihatkan validitas kalimat. Dalam pendekatan ini, kita mengandalkan bahwa kalimat tidak valid dan kemudian menurunkan suatu kontradiksi.

### Contoh 2.19 (validitas dengan asumsi tidak valid)

Misal ingin diperlihatkan validitas dan kalimat

$$G: if (for\ some\ y) (for\ all\ x)q(xy) then (for\ all\ x) (for\ some\ y)q(xy).$$

Andaikan  $G$  tidak valid, berarti menurut definisi ada suatu Interpretasi  $I$  sedemikian hingga  $G$  bernilai false. Selanjutnya dicoba menurunkan suatu kontradiksi. (dengan aturan *if-then*) berarti antecedent  $(for\ some\ y)(for\ all\ x)q(x,y)$  bernilai true di bawah interpretasi  $I$ , tetapi consequent  $(for\ all\ x) (for\ some\ y)q(xy)$  false di bawah interpretasi  $I$ .

Karena antecedent bernilai true di bawah  $I$ , maka (dengan aturan *for-some*) ada suatu elemen domain  $e$  sedemikian hingga

(1)  $(for\ all\ x) q(xy)$  bernilai true di bawah interpretasi  $\langle y \leftarrow e \rangle o\ I$ .

Karena *consequent* bernilai false di bawah  $I$ , maka (dengan aturan *for-all*) ada suatu elemen domain  $d$  sedemikian hingga

(2)  $(\text{for some } y)q(xy)$  bernilai false di bawah interpretasi  $\langle x \leftarrow d \rangle \text{ o } I$ . Dari (1) di atas, kita bisa menyimpulkan (dengan aturan for-all) bahwa

(3) untuk setiap elemen domain  $e'$ , sedemikian hingga  $q(xy)$  bernilai true di bawah interpretasi yang diperluas beberapa kali  $\langle x \leftarrow e' \rangle \text{ o } \langle y \leftarrow e \rangle \text{ o } I$

Dari (2) di atas, (dengan aturan for-some) bisa disimpulkan bahwa

(4) untuk setiap elemen domain  $d$  bernilai false di bawah interpretasi yang diperluas beberapa kali  $\langle y \leftarrow d \rangle \text{ o } \langle x \leftarrow d \rangle \text{ o } I$ .

Khususnya dalam (3) di atas, kita bisa mengambil elemen domain  $e'$  sebagai  $d$ ; dan dalam (4) di atas, kita bisa mengambil elemen domain  $d'$  sebagai  $e$ . Sehingga diperoleh, masing-masing

(5)  $q(xy)$  bernilai true di bawah  $\langle x \leftarrow d \rangle \text{ o } \langle y \leftarrow e \rangle \text{ o } I$  dan

(6)  $q(xy)$  bernilai false di bawah  $\langle y \leftarrow e \rangle \text{ o } \langle x \leftarrow d \rangle \text{ o } I$ .

(maksudnya bisa true atau false, salah satu), sehingga tidak ada artinya. Oleh karena itu, satu-satunya aplikasi bernilai true yang harus kita ambil adalah (ii), yaitu dengan bermula dari diketahuinya antecedent yang true, kita harus bisa menurunkan berdasarkan aturan-aturan yang berlaku consequent nya bernilai true.

Selanjutnya perhatikan sebarang interpretasi  $I$  untuk  $F$ , dan anggap bahwa antecedent

$(\text{for some } x)[p(x) \text{ and } r(x)]$

Maka (dengan aturan for-some) ada suatu elemen domain  $d$  sedemikian hingga  $p(x)$  dan  $r(x)$  bernilai true di bawah interpretasi yang diperluas  $\langle x \leftarrow d \rangle \text{ o } I$ .

Jadi dengan aturan andy, ada suatu elemen domain  $d$  sedemikian hingga  $p(x)$  dan  $r(x)$  keduanya bernilai true di bawah interpretasi yang diperluas  $\langle x \leftarrow d \rangle \text{ o } I$ .

Selanjutnya dengan akal sehat (common sense) ada suatu elemen domain  $d$  sedemikian hingga  $p(x)$  bernilai true di bawah interpretasi yang diperluas  $\langle x \leftarrow d \rangle \text{ o } I$  dan ada suatu elemen domain  $e$  sedemikian hingga  $r(x)$  bernilai true di bawah interpretasi yang diperluas  $\langle x \leftarrow d \rangle \text{ o } I$ .

Jadi (dengan aturan for-some yang diterapkan dua kali) kalimat bagian (for some  $x$ ) $p(x)$  bernilai true di bawah interpretasi  $I$ , dan kalimat bagian (for some  $x$ ) $r(x)$  bernilai true di bawah interpretasi  $I$ .

Jadi (dengan aturan and), kalimat (for some  $x$ ) $p(x)$  and (for some  $x$ ) $r(x)$ , yaitu consequent dan kalimat  $F$  bernilai true di bawah interpretasi  $I$ , sebagaimana yang dikehendaki.

Selanjutnya perhatikan ilustrasi suatu pendekatan tidak langsung untuk memperlihatkan validitas kalimat. Dalam pendekatan ini, kita mengandaikan bahwa kalimat tidak valid dan kemudian menurunkan suatu kontradiksi.

Karena  $x$  dan  $y$  berbeda, maka interpretasi-interpretasi  $\langle x \leftarrow d \rangle \circ \langle y \leftarrow e \rangle \circ I$  dan  $\langle y \leftarrow e \rangle \circ \langle x \leftarrow d \rangle \circ I$  identik, jadi (5) dan (6) saling kontradiksi.

Sehingga sampai di sini telah terjadi kontradiksi dengan pengandaian kita semula, yaitu  $G, \text{f (for some } y) \text{ (for all } x)q(xy) \text{ then (for all } x)(\text{for some } y)q(x2y) \text{)}$ . bernilai false di bawah suatu etasi  $I$  sehingga yang benar adalah kalimat  $G$  valid.

### Pembuktian (Ketak-validan Non validity)

Seperti yang telah kita ketahui bahwa agar supaya suatu kalimat itu valid, kalimat harus true di bawah setiap interpretasi. Sehingga untuk memperlihatkan bahwa suatu kalimat tidak itu cukup menemukan satu interpretasi yang menyebabkan kalimat bernilai false.

### Contoh 2.20 (Kalimat tidak valid)

Akan diperlihatkan bahwa kalimat

$F'$ : if [(for some  $x$ ) $p(x)$  and (for some  $x$ ) $r(x)$ ] then (for some  $x$ )[ $p(x)$  and  $r(x)$ ]

yang merupakan konvers dari kalimat  $F$  dalam contoh sebelumnya, tidak valid

Untuk memperlihatkannya, hanya perlu ditemukan satu interpretasi  $I$  yang menyebabkan  $F'$  false. Sekarang ambil  $I$  sebagai interpretasi atas domain himpunan semua bilangan bulat, di

$p \leftarrow$  relasi 'positif' (yaitu,  $p_i(d)$  artinya  $d > 0$ )

$r \leftarrow$  relasi "negatif" (yaitu,  $p_i(d)$  artinya  $d < 0$ ).

Arti intuitif kalimat  $F'$  di bawah  $I$  adalah

"Jika ada suatu bilangan bulat  $x$  sedemikian hingga  $x > 0$  dan ada suatu bilangan bulat  $x$  sedemikian hingga  $x < 0$ , maka ada suatu bilangan bulat  $x$  sedemikian hingga  $x > 0$  dan  $x < 0$ ."

Dengan kata lain kalimat  $F'$  menyatakan bahwa keberadaan bilangan bulat positif  $x$  dan keberadaan bilangan bulat negatif  $x$  menjamin keberadaan bilangan bulat tunggal  $x$  yang positif sekaligus negatif.

Kenyataannya,  $F'$  bernilai false di bawah interpretasi  $I$ . Untuk menunjukkannya cukup (dengan aturan if-then dan aturan and) untuk memperlihatkan bahwa (for some  $x$ ) $p(x)$  bernilai true di bawah  $I$ , dan (for some  $x$ ) $r(x)$  bernilai true di bawah  $I$ , akan tetapi (for some  $x$ )( $p(x)$  and  $r(x)$ ) bernilai false di bawah  $I$ .

(Dengan aturan proposisi) dipunyai  $p(x)$  bernilai true di bawah  $\langle x \leftarrow 1 \rangle \circ I$  dan  $r(x)$  bernilai true dibawah  $\langle x \leftarrow -1 \rangle \circ I$ .

Sehingga (dengan aturan for-some), (for some  $x$ ) $p(x)$  bernilai true di bawah  $I$  dan (for some  $x$ ) $r(x)$  bernilai true di bawah  $I$ .

Di lain pihak, untuk sebarang bilangan bulat  $d$  diketahui bahwa  $d$  tidak bisa sekaligus positif dan negatif. Sehingga ( $p(x)$  and  $r(x)$ ) bernilai false di bawah interpretasi  $\langle x \leftarrow d \rangle \circ I$ .

Jadi (dengan aturan for-some),  $(\text{for some } x)[p(x) \text{ and } r(x)]$  bernilai false di bawah I, seperti yang dikehendaki.

### Contoh 2.21 (Kalimat-kalimat Valid valid sentences)

Di bagian ini akan disajikan beberapa contoh kalimat valid, dan dikelompokkan ke dalam kategori-kategori terpisah.

- Contoh-contoh kalimat logika proposisional valid

$$(\text{for all } x)p(x) \text{ or not}(\text{for all } x)p(x) \\ (\text{for all } y)[\text{if } (\text{for some } x)q(x, y) \text{ then } (\text{for some } x)q(x, y)]$$

- Penghilangan dan pengenalan kuantifikasi  $f(\text{for all } x)p(x) \text{ then } p(a)$

$$\text{if } (\text{for all } x)p(x) \text{ then } p(a) \\ \text{if } p(a) \text{ then } (\text{for some } y)p(y)$$

- Penanaman kembali variable

$$(\text{for all } x)p(x) \text{ if and only if } (\text{for all } y)p(y) \\ (\text{for some } x)p(x) \text{ if and only if } (\text{for some } y)p(y)$$

- Pembalikan kuantifikasi

$$[(\text{for all } x)(\text{for all } y)q(x, y)] \text{ if and only if } [(\text{for all } y)(\text{for all } x)q(x, y)] \\ [(\text{for some } x)(\text{for some } y)q(x, y)] \text{ if and only if } [(\text{for some } y)(\text{for some } x)q(x, y)] \\ \text{if } (\text{for some } y)(\text{for all } x)q(x, y) \text{ then } (\text{for all } x)(\text{for some } y)q(x, y)$$

- Kuantifikasi-kuantifikasi berlebih (redundant)

$$[(\text{for all } x)(\text{for all } x)p(x)] \text{ if and only if } (\text{for all } x)p(x) \\ [(\text{for some } x)(\text{for some } x)p(x)] \text{ if and only if } (\text{for some } x)p(x)$$

- Dualitas kuantifikasi

$$[\text{not } (\text{for all } x)p(x)] \text{ if and only if } (\text{for some } x)[\text{not } p(x)] \\ [\text{not } (\text{for some } x)p(x)] \text{ if and only if } (\text{for all } x)[\text{not } p(x)]$$

- Distribusi kuantifikasi

$$(\text{for all } x)[p(x) \text{ and } r(x)] \text{ if and only if } [(\text{for all } x)p(x) \text{ and } (\text{for all } x)r(x)] \\ (\text{for some } x)[p(x) \text{ or } r(x)] \text{ if and only if } [(\text{for some } x)p(x) \text{ or } (\text{for some } x)r(x)] \\ (\text{for some } x)[\text{if } p(x) \text{ then } r(x)] \text{ if and only if } [\text{if } (\text{for all } x)p(x) \text{ then } (\text{for some } x)r(x)]$$

- Distribusi kondisional

$$(\text{for all } x)[p(\text{if } r(x) \text{ then } a \text{ else } b)] \text{ if and only if } (\text{if } r(x) \text{ then } p(a) \text{ else } p(b)) \\ (\text{for all } x)[p(f(\text{if } r(x) \text{ then } a \text{ else } b))] \text{ if and only if } p(\text{if } r(x) \text{ then } f(a) \text{ else } f(b))$$

### Konsep Tambahan - Additional Concept

Ada beberapa konsep tambahan yang berhubungan dengan validitas meskipun tidak sepenting validitas.

### Definisi (satisfiable, contradictory, consistent)



- Suatu kalimat tertutup  $F$  adalah satisfiable jika bernilai true di bawah suatu interpretasi untuk  $F$ .
- Suatu kalimat tertutup  $F$  adalah contradictory (atau unsatisfiable) jika bernilai false di bawah setiap interpretasi untuk  $F$ .
- Suatu kumpulan kalimat-kalimat tertutup  $F_1, F_2, \dots$  adalah consistent jika ada suatu interpretasi untuk  $F_1, F_2, \dots$  yang menyebabkan masing-masing mereka bernilai true.

Sebagaimana dalam logika proposisional, masing-masing pengertian ini bisa diuraikan (paraphrased) menjadi terms validitas.

Sebagai contoh, suatu kalimat tertutup  $F$  adalah contradictory, yaitu bernilai false di bawah setiap interpretasi untuk  $F$ , precisely when (dengan aturan not), maka diperoleh kalimat not  $F$  bernilai true di bawah setiap Interpretasi, precisely when (dengan definisi validitas), maka diperoleh not  $F$  adalah valid.

### Contoh 2.21 (Kalimat satisfiable)

Kalimat  $F: (\text{for some } x)p(x)$

adalah satisfiable.  $F$  bernilai true di bawah suatu interpretasi  $I$  atas domain himpunan bilangan-bilangan bulat sedemikian hingga  $p(d)$  adalah relasi dimana  $d = 0$ . Kenyataannya memang benar, yaitu ada bilangan bulat sama dengan nol.

Perhatikan juga bahwa ada suatu interpretasi yang menyebabkan kalimat  $F$  bernilai false; sebagai contoh interpretasi  $J$  atas domain himpunan bilangan-bilangan bulat sedemikian hingga  $F$  bernilai false untuk setiap bilangan bulat  $d$ . Sehingga  $F$  tidak valid.

### Contoh 2.22 (Kalimat contradictory)

Kalimat  $G : [(\text{for all } x)p(x)] \text{ and } [(\text{for some } x)(\text{not } p(x))]$  adalah contradictory.

## Klosur Universal dan Eksistensial - Universal and Existential Closure

Di bagian ini akan didefinisikan dua operasi yang menambahkan kuantifikasi kuantifikasi pada kalimat yang diberikan untuk menghasilkan kalimat tertutup.

### Definisi (klosur - closure)

Andaikan bahwa  $x_1, x_2, \dots, x_n$  adalah daftar semua variabel bebas yang berbeda dalam kalimat  $F$  (dalam urutan menurut pemunculannya dalam kalimat).

Maka

universal closure dari kalimat  $F$ , dinyatakan dengan  $(\text{for all } *) F$ , adalah kalimat tertutup  $(\text{for all } x_1)(\text{for all } x_2) \dots (\text{for all } x_n) F$ . Selanjutnya

existential closure dari kalimat  $F$ , dinyatakan dengan  $(\text{for some } *) F$ , adalah kalimat tertutup  $(\text{for some } x_1)(\text{for some } x_2) \dots (\text{for some } x_n) F$ .

### Contoh 2.23 (klosur universal)

Variabel-variabel bebas dan kalimat  $F$ :  $(\text{for some } z) [ \{q(y, z) \text{ or } r(x)\} \text{ and } \{(\text{for all } w)p(y, z, w)\}]$  berdasarkan urutan pemunculannya adalah  $y$  dan  $x$ . Sehingga klosur universal dari  $F$  adalah  $(\text{for all } *) F$ , yaitu

$$(\text{for all } y)(\text{for all } x)(\text{for some } z) [ \{q(y, z) \text{ or } r(x)\} \text{ and } \{(\text{for all } w)p(y, z, w)\} ]$$

dan klosur eksistensial dari  $F$ , yaitu  $(\text{for some } *) F$ , adalah

$$(\text{for some } y)(\text{for some } x)(\text{for some } z) [ \{q(y, z) \text{ or } r(x)\} \text{ and } \{(\text{for all } w)p(y, z, w)\} ]$$

Meskipun operator-operator klosur,  $(\text{for all } *)$  dan  $(\text{for some } *)$ , hanya simbol-simbol singkatan dan bukan simbol resmi dari logika predikat, akan tetapi mereka rupanya mematuhi aturan-aturan semantik menyerupai kuantifikasi. Selanjutnya akan ditampilkan masing-masing aturan dalam suatu proposisi terpisah.

### Proposition (aturan semantik untuk klosur universal)

Misal  $F$  adalah suatu kalimat dan  $I$  adalah suatu interpretasi atas domain  $D$ , untuk klosur universal  $(\text{for all } *) F$  dan kalimat  $F$ .

Selanjutnya,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  adalah daftar lengkap dari variabel-variabel bebas yang berbeda dari  $F$ , dengan urutan sesuai pemunculannya.

Maka nilai klosur universal  $(\text{for all } *) F$  adalah true (closure)

precisely when

(closure)

untuk setiap elemen domain  $d_1, d_2, \dots, d_n \in D$ , nilai dari  $F$  adalah true di bawah interpretasi yang diperluas

$$\langle x_1 \leftarrow d_1 \rangle \circ \langle x_2 \leftarrow d_2 \rangle \circ \dots \circ \langle x_n \leftarrow d_n \rangle \circ I.$$

precisely when

(extention)

Untuk setiap interpretasi  $J$  untuk  $F$  yang agree dengan  $I$  pada simbol-simbol bebas dari  $(\text{for all } *) F$ , maka  $F$  true di bawah  $J$ .

(agreement)

Untuk kemudahan dalam rujukan terhadap mereka (tiga persyaratan) nantinya, masing-masing persyaratan telah diberi nama, yaitu closure, extention, dan agreement.

Perhatikan bahwa, dalam proposisi,  $I$  adalah suatu interpretasi untuk klosur universal  $(\text{for all } *) F$  dari  $F$ , akan tetapi  $I$  tidak perlu sebagai interpretasi untuk  $F$  sendiri, karena variabel-variabel bebas  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dari  $F$  tidak lagi bebas dalam klosur universal  $(\text{for all } *) F$  dan  $F$ . Sehingga tidak perlu memberi nilai apapun terhadap mereka (yaitu  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ).

Perhatikan juga bahwa, karena  $(\text{for all } *) F$  tidak memuat variabel-variabel bebas, maka simbol-simbol bebas yang dimaksud dalam persyaratan agreement harus berupa simbol-simbol konstan, dan predikat dan  $F$ . Selanjutnya interpretasi-interpretasi yang dimaksud dalam persyaratan agreement dengan  $I$  pada simbol-simbol ini, akan tetapi tidak perlu agree dengan  $I$  pada variabel-variabel  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Akhirnya, perhatikan bahwa interpretasi yang diperluas beberapa kali  $\langle x_1 \leftarrow d_1 \rangle \circ \langle x_2 \leftarrow d_2 \rangle \circ \dots \circ \langle x_n \leftarrow d_n \rangle \circ I$  yang dirujuk dalam persyaratan extension adalah salah satu interpretasi  $J$  untuk  $F$  yang disebut dalam persyaratan agreement. Dengan kata lain, interpretasi ini agree dengan  $I$  pada simbol-simbol bebas dan  $(\text{for all } *)F$ .

### Contoh 2.24 (klosur universal)

Perhatikan kalimat  $F: q(x_1, x_2) \text{ or not } q(x_1, x_2)$ . Variabel-variabel bebas dari  $F$ , sesuai dengan urutan pemunculannya adalah  $x_1$  dan  $x_2$ . Klosur universal dari  $F$  adalah

$(\text{for all } *)F : (\text{for all } x_1)(\text{for all } x_2)[q(x_1, x_2) \text{ or not } q(x_1, x_2)]$ .

Satu-satunya simbol bebas dari  $(\text{for all } *)F$  adalah simbol predikat  $q$ . suatu interpretasi  $I$  atas domain  $D$  untuk  $(\text{for all } *)F$  harus memberi nilai, yaitu suatu relasi  $q_I$  ke simbol predikat  $q$ , tetapi tidak perlu memberi elemen domain apapun ke  $x_1$  atau  $x_2$ .

Sesuai dengan proposisi,  $(\text{for all } *)F$  bernilai true di bawah  $I$  precisely when

untuk setiap elemen domain  $d_1$  dan  $d_2$  dalam  $D$ ,  $F$  bernilai true di bawah interpretasi yang diperluas beberapa kali  $\langle x_1 \leftarrow d_1 \rangle \circ \langle x_2 \leftarrow d_2 \rangle \circ \dots \circ \langle x_n \leftarrow d_n \rangle \circ I$

precisely when

untuk setiap interpretasi  $J$  untuk  $F$  yang agree dengan  $I$  pada simbol predikat  $q$ ,  $F$  bernilai true di bawah  $J$ .

Proposisi di atas bisa dibuktikan kebenarannya dengan membandingkan dengan aturanaturan semantik untuk kuantifikasi universal dan eksistensial dan dengan proposisi agreement.

### Proposition (validitas dan satisfiabilitas klosur)

Untuk sebarang kalimat  $F$ , klosur universal  $(\text{for all } *)F$  adalah valid precisely when

$F$  bernilai true di bawah setiap interpretasi untuk  $F$ . (validitas)

Untuk sebarang kalimat  $F$ , klosur eksistensial  $(\text{for some } *)F$  adalah satisfiable precisely when

$F$  bernilai true di bawah suatu interpretasi untuk  $F$ . (satisfiabilitas)

## Soal-soal – Problems

### Soal 2.1 (interpretasi)

Perhatikan kalimat-kalimat berikut :

- (a)  $p(x, a)$
- (b)  $p(a, x)$  and  $p(x, f(x))$
- (c)  $(\text{for some } y)p(y, x)$
- (d)  $(\text{for some } y)[p(y, a) \text{ or } p(f(y), y)]$
- (e)  $(\text{for all } x)(\text{for some } y)p(x, y)$
- (f)  $(\text{for some } y)(\text{for all } x)p(x, y)$

Misal I merupakan interpretasi atas domain himpunan bilangan-bilangan bulat tak-negatif di mana

$a \leftarrow 0$   
 $x \leftarrow 1$   
 $f \leftarrow \text{fungsi "successor" (yaitu, } f(d) = d+1)$   
 $p \leftarrow \text{relasi "kurang-dari" (yaitu, } p(d_1, d_2) \text{ adalah } d_1 < d_2).$

Misal J merupakan interpretasi atas domain himpunan semua bilangan bulat (tak-negatif dan negatif)

$a \leftarrow 0$   
 $x \leftarrow -1$   
 $y \leftarrow 0$   
 $f \leftarrow \text{fungsi "successor" (yaitu, } f(d) = d+1)$   
 $p \leftarrow \text{relasi "kurang-dari" (yaitu, } p(d_1, d_2) \text{ adalah } d_1 < d_2).$

Tentukan nilai-nilai kebenaran dari masing-masing kalimat di atas, di bawah interpretasi I dan di interpretasi J.

### Soal 2.2 (validitas)

Beberapa kalimat berikut valid, sementara beberapa yang lain tidak. Untuk masing-masing atau suatu interpretasi, berikan argumentasi tak-formal yang memperlihatkan validitas nya, membuat kalimat bernilai false.

- (a)  $(\text{for some } x)[\text{if } p(x) \text{ then } r(x)]$   
if and only if  
 $[\text{if } (\text{for all } x)p(x) \text{ then } (\text{for some } x)r(x)]$
- (b)  $\text{if } (\text{for all } x)[p(x) \text{ or } r(x)] \text{ then } [(\text{for all } x)p(x) \text{ or } (\text{for all } x)r(x)]$
- (c)  $\text{if } [(\text{for all } x)p(x) \text{ or } (\text{for all } x)r(x)] \text{ then } (\text{for all } x)[p(x) \text{ or } r(x)]$
- (d)  $(\text{for some } x)[p(x) \text{ if and only if } r(x)]$   
if and only if  
 $[(\text{for some } x)p(x) \text{ if and only if } (\text{for some } x)r(x)]$
- (e)  $(\text{for some } x)[(\text{if } p(x) \text{ then } p(a)) \text{ and } (\text{if } p(x) \text{ then } p(b))]$
- (f)  $(\text{for some } x)(\text{for all } y)[\text{if } (q(x, y) \text{ and not } q(x, y))$   
then  $(q(x, x) \text{ if and only if } q(y, y))]$
- (g)  $(\text{for some } x)[p(x) \text{ and } q(x)] \text{ or } (\text{for all } x)[\text{if } p(x) \text{ then not } q(x)]$
- (h)  $(\text{for all } x)[p(\text{if } r(x) \text{ then } a \text{ else } b)]$   
if and only if  
 $(\text{if } r(x) \text{ then } p(a) \text{ else } p(b))]$