

$$x^2 + ax + y^2 + by = c$$

Ini mengandung pertanyaan apakah setiap persamaan dari bentuk yang belakangan merupakan persamaan suatu lingkaran. Jawabnya adalah ya (dengan suatu pengecualian yang jelas), seperti yang terlihat dalam contoh berikut.

Dalam contoh ini, diperlukan untuk melengkapi kuadrat, suatu proses penting dalam banyak hal. Untuk melengkapi kuadrat dari $x^2 \pm ax$, tambahkan $(a/2)^2$. Sehingga

$$x^2 - 12x + 6^2 = (x - 6)^2$$

$$x^2 + \frac{2}{5}x + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{5}\right)^2$$

CONTOH 3. Buktikan bahwa persamaan

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y = -6$$

merupakan sebuah lingkaran, dan tentukanlah pusat serta jari-jarinya.

Penyelesaian. Kita selesaikan kuadrat untuk ungkapan baik dalam x maupun y dengan menambahkan bilangan yang sama pada kedua ruas persamaan.

$$(x^2 - 2x) + (y^2 + 6y) = -6$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) = -6 + 1 + 9$$

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$$

Persamaan yang terakhir adalah dalam bentuk baku. Ini merupakan persamaan lingkaran dengan pusat $(1, -3)$ dan jari-jari 2. Jika sebagai hasil proses ini, suatu bilangan negatif muncul di ruas kanan, persamaan tidak akan menggambarkan suatu kurva apa pun. Jika muncul nol, persamaan akan menggambarkan titik tunggal $(1, -3)$.

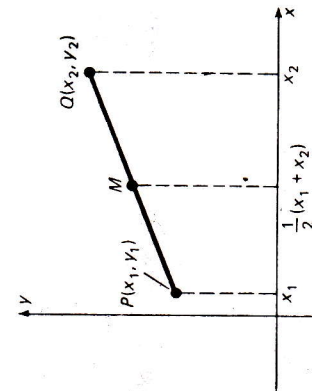
RUMUS TITIK TENGAH Ada dua titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ di mana $x_1 \leq x_2$, lihat Gambar 7:

$$x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1$$

$$= \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$$

$$= \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Ini berarti bahwa titik $(x_1 + x_2)/2$ berada di tengah-tengah antara x_1 dan x_2 pada sumbu x , dengan demikian titik tengah M dari potongan garis PQ memiliki absis $(x_1 + x_2)/2$ dan dengan cara yang sama dapat kita buktikan bahwa $(y_1 + y_2)/2$ adalah merupakan koordinat dari M . Maka kita peroleh hasil sebagai berikut:



GAMBAR 7

Titik tengah dari potongan garis PQ dengan $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ adalah

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

CONTOH 4. Tentukan persamaan lingkaran yang mempunyai potongan garis dari $(1, 3)$ ke $(7, 1)$ sebagai garis tengahnya.

Penyelesaian. Pusat lingkaran terletak di tengah-tengah garis tengahnya sehingga titik pusat mempunyai koordinat $(1 + 7)/2 = 4$ dan $(3 + 1)/2 = 2$. Panjang garis tengah, diperoleh dari rumus jarak sebagai berikut

$$[(7 - 1)^2 + (1 - 3)^2]^{1/2} = [36 + 4]^{1/2} = 10$$

berarti jari-jari lingkaran itu adalah 5. Jadi persamaan lingkaran:

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

SOAL-SOAL 1.5

Dalam Soal-soal 1-6, rajahlah titik-titik yang diberikan dalam bidang koordinat dan kemudian carilah jarak antara titik-titik tersebut.

1. $(2, -1)$, $(5, 3)$
2. $(-2, 1)$, $(7, 13)$
3. $(4, 2)$, $(2, 4)$
4. $(-1, 5)$, $(6, 3)$
5. $(1, 232)$, $4, 153$, $(\pi, \sqrt{2})$
6. $(2, 7)$, $(-3, 42)$, $(5, 16)$, $4, 33$

7. Buktikanlah bahwa segitiga yang titik-titik sudutnya adalah $(5, 3)$, $(-2, 4)$, dan $(10, 8)$ adalah samakaki.

8. Tunjukkanlah bahwa segitiga yang titik-titik sudutnya adalah $(2, -4)$, $(4, 0)$, dan $(8, -2)$ adalah siku-siku.

9. Titik-titik $(3, -1)$ dan $(3, 3)$ adalah titik-titik sudut suatu bujur sangkar. Berikan tiga pasang titik-titik sudut lain yang mungkin.

10. Carilah titik pada sumbu x -yang berjarak sama dari $(3, 1)$ dan $(6, 4)$.

11. Tentukan jarak antara $(-2, 3)$ dengan titik tengah potongan garis yang digabungkan $(-2, -2)$ dan $(4, 3)$.

12. Carilah panjang ruas garis yang menghubungkan titik-titik tengah ruas-ruas AB dan CD , di mana $A = (1, 3)$, $B = (2, 6)$, $C = (4, 7)$, dan $D = (3, 4)$.

Dalam Soal-soal 13-18, carilah persamaan lingkaran yang memenuhi persyaratan yang diberikan.

13. Pusat $(1, -2)$, jari-jari 6.
14. Pusat $(-3, 4)$, jari-jari 8.
15. Pusat $(2, -1)$, melalui $(5, 3)$.
16. Pusat $(4, 3)$, melalui $(6, 2)$.
17. Garis tengah AB , dengan $A = (-1, 2)$ dan $B = (3, 8)$.
18. Pusat $(3, 4)$ dan menyinggung sumbu x .

19. Cari koordinat y dari dua titik pada lingkaran dari Soal 13 dengan koordinat x adalah 3 (lihat Contoh 2).

20. Cari koordinat x dari dua titik pada lingkaran dari Soal 14 dengan koordinat y adalah 8.