INTEGRAL LIPAT TIGA

Bahasan :

- ✓ Integral Lipat Tiga dalam Koordinat Cartesius
- ✓ Integral Lipat Tiga dalam Koordinat Tabung
- ✓ Integral Lipat Tiga dalam Koordinat Bola

➢ Integral Lipat Tiga (Koordinat Cartesius)

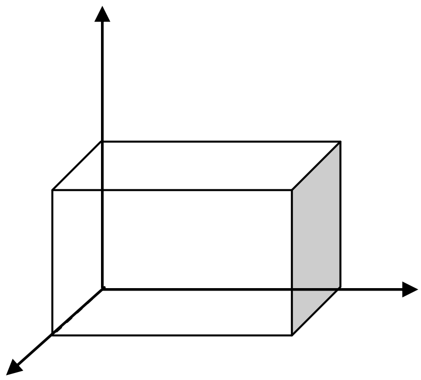
Integral Lipat Tiga atas Balok B

Diberikan fungsi f tiga peubah pada balok B dan partisi P pada balok B. Jika

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\,\Delta V_k$$

dengan $\Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$, ada maka f terintegral pada B, lebih lanjut $\iiint\limits_B f(x,y,z)\, dV$ disebut integral lipat tiga f pada B dan

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\, dV = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\,\Delta V_k \,.$$



Jika diberikan balok B,

$$B = \{(x,y,z) : a \le x \le b, c \le y \le d, e \le z \le f\}$$

maka

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\, dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx \text{ , atau}$$

$$= \int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \,.$$

(Pada koordinat Cartesius $dV = dx\, dy\, dz$)

Sifat-sifat yang berlaku pada integral lipat dua juga berlaku pada integral lipat tiga, yaitu sifat kelinearan, penjumlahan pada himpunan (sifat aditif), dan perbandingan.

soli_erf@yahoo.com

Contoh 1

Hitung $\iiint\limits_B x^2yz\,dV$, dengan B adalah balok $B=\{(x,y,z):1\le x\le 2,\ 0\le y\le 1, 0\le z\le 2\}$.

Solusi :

$$\iiint\limits_B x^2yz\,dV=\int_0^2\int_0^1\int_1^2 x^2yz\,dx\,dy\,dz=\int_0^2\int_0^1\left[\frac{1}{3}x^3yz\right]_1^2 dy\,dz=\int_0^2\int_0^1\frac{7}{3}yz\,dy\,dz=\int_0^2\left[\frac{7}{3}.\frac{1}{2}y^2z\right]_0^1 dz$$

$$=\int_0^2\frac{7}{6}z\,dz=\left[\frac{7}{6}.\frac{1}{2}z^2\right]_0^2=\frac{7}{3}.$$

Integral Lipat Tiga atas Daerah Umum

Diberikan himpunan tertutup dan terbatas S, yaitu

$$S=\{(x,y,z):a\le x\le b,\phi_1(x)\le y\le\phi_2(x),\psi_1(x,y)\le z\le\psi_2(x,y)\}$$

Maka

$$\iiint\limits_S f(x,y,z)dV=\int_a^b\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)}\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

Contoh 2

Hitung integral $\int_0^1\int_0^{2x}\int_y^{x+2} 4\,dz\,dy\,dx$.

Solusi :

$$\int_0^1\int_0^{2x}\int_y^{x+2} 4\,dz\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{2x}[4z]_y^{x+2}\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{2x}4x-4y+8\,dy\,dx=\int_0^1\left[(4x+8)y-4.\frac{1}{2}y^2\right]_0^{2x}dx$$

$$=\int_0^1(4x+8)(2x)-2(2x)^2\,dx=\int_0^1 8x^2+16x-8x^2\,dx=\int_0^1 16x\,dx=\left[8x^2\right]_0^1=8$$

Contoh 3

Tentukan $\iiint\limits_S 2xyz\,dV$, dengan S adalah daerah yang dibatasi oleh tabung parabola $z=2-\frac{1}{2}x^2$ dan bidang $z=0,\ y=x,\ y=0$.

Solusi :

Batas-batas daerah S, yaitu $z=0, z=2-\frac{1}{2}x^2$; $y=0, y=x$, dan $x=0, x=2$ (sebab $z=0$ maka $=z=2-\frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow 0=2-\frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow x=2$), jadi

$$\iiint_S 2xyz\, dV = \int_0^2\int_0^x\int_0^{2-\frac{1}{2}x^2} 2xyz\, dz\, dy\, dx = \int_0^2\int_0^x \left[2xy.\frac{1}{2}z^2\right]_0^{2-\frac{1}{2}x^2} dy\, dx$$

$$= \int_0^2\int_0^x xy\left((2-\frac{1}{2}x^2)^2-0\right)dy\, dx = \int_0^2\int_0^x xy\left(2-\frac{1}{2}x^2\right)^2 dy\, dx$$

$$= \int_0^2\left[\frac{1}{2}xy^2\left(2-\frac{1}{2}x^2\right)^2\right]_0^x dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^3\left(2-\frac{1}{2}x^2\right)^2 dx$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{2}x^3\left(4-2x^2+\frac{1}{4}x^4\right)dx = \int_0^2 (2x^3-x^2+\frac{1}{8}x^7)dx$$

$$= \left[2.\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{8}\frac{1}{8}x^8\right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Jika $f(x,y,z)=1$ maka integral lipat tiganya yaitu $\iiint_B dx\, dy\, dz$ diartikan sebagai ukuran volume benda B.

Contoh 4

Hitung volume benda B yang dibatasi oleh silinder $z=4-x^2$ dan bidang-bidang $x=0,\ y=0,\ y=6,$ dan $z=0$ di oktan pertama.

Solusi :

$$V=\iiint_B dV = \int_0^6\int_0^2\int_0^{4-x^2} dz\, dx\, dy = 32 \text{ satuan kubik.}$$

- Massa, Pusat Massa, dan Momen Inersia benda Pejal

Diberikan benda pejal dengan fungsi kerapatan $\rho(x,y,z)$ di titik (x,y,z), maka

i. Massa benda

$$m=\iiint_S \rho(x,y,z)\, dV$$

ii. Momen massa

a. Momen total terhadap bidang xy

$$M_{xy} = \iiint_S z\rho(x,y,z)\, dV$$

b. Momen total terhadap bidang xz

$$M_{xz} = \iiint_S y\rho(x,y,z)\, dV$$

c. Momen total terhadap bidang yz

$$M_{yz} = \iiint_S x\rho(x,y,z)\, dV$$

iii. Pussat massa $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$

$$\overline{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \overline{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \overline{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

iv. Momen inersia

a. Momen inersia terhadap sumbu x

$$I_x = \iiint_S (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)\, dV$$

b. Momen inersia terhadap sumbu y

$$I_y = \iiint_S (x^2 + z^2)\rho(x,y,z)\, dV$$

c. Momen inersia terhadap sumbu z

$$I_z = \iiint_S (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)\, dV$$

Contoh 5

Jika rapat massa di setiap titik pada benda pejal

$$S = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x, 0 \le z \le 1\}$$

adalah $\rho(x,y,z) = 1 + z$, tentukan pusat massa benda S.

Solusi :

Massa benda : $m = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^1 (1+z)\, dz\, dy\, dx = \frac{3}{4}$

Momen total terhadap bidang xy

$$M_{xy} = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^1 z(1+z)\, dz\, dy\, dx = \frac{5}{12}$$

Momen total terhadap bidang xz

$$M_{xz} = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^1 y(1+z)\, dz\, dy\, dx = \frac{1}{4}$$

Momen total terhadap bidang yz

soli_erf@yahoo.com

$$M_{yz} = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^1 x(1+z)\, dz\, dy\, dx = \frac{1}{4}$$

Pusat massa benda : $\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$, $\quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$, dan $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{9}$.

Jadi pusat massa benda S di ruang yaitu titik $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{9}\right)$.

Latihan

1. Tentukan integral berikut :

   a. $\int_{-3}^{7} \int_0^{2x} \int_y^{x-1} dz\, dy\, dx$ $\qquad$ c. $\int_0^5 \int_{-2}^{4} \int_1^2 6xy^2z^3\, dx\, dy\, dz$

   b. $\int_0^2 \int_{-1}^{4} \int_0^{3y+x} dz\, dy\, dx$ $\qquad$ d. $\int_0^2 \int_1^z \int_0^{\sqrt{x/z}} 2xyz\, dy\, dx\, dz$

2. Hitung volume benda pejal yang dibatasi oleh $y = x^2$, $y + z = 4$, $x = 0$, dan $z = 0$.
3. Tentuka volume benda pejal yang dibatasi oleh $x = 0$, $x = 1$, $z = 0$, $z = 1$, dan bidang $2x + y + 2z = 6$.
4. Benda pejal $S = \{(x, y, z) : 0 \le x \le 2, 1 \le y \le 3, 0 \le z \le 4\}$ mempunyai rapat massa $\rho(x, y, z) = x$. Tentukan

   a. Massa benda pejal S
   b. Pusat massa benda pejal S
   c. Momen inersia terhadap sumbu x, sumbu y, dan sumbu z.

- Integral Lipat Tiga (Koordinat Tabung)

Perlu diingatkan kembali bahwa :

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, dan $x^2 + y^2 = r^2$, dengan $r \geq 0\,; 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Koordinat Cartesius (x, y, z) diubah ke dalam koordinat Tabung (r, θ, z).

Diberikan fungsi $f(x, y, z)$ pada daerah benda pejal S, maka

$$f(x, y, z) = f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) = F(r, \theta, z).$$

Jika benda pejal S dipartisi menjadi kepingan-kepingan baji tabung dengan volume $\Delta V_k = r_k \Delta z_k \Delta r_k \Delta\theta_k$ maka jumlah yang mengaproksimasi integral yaitu

$$\sum_{k=1}^{n} F(r_k, \theta_k, z_k)\, r_k \Delta z_k \Delta r_k \Delta\theta_k\,.$$

Andaikan S benda pejal z sederhanan, dan S_{xy} pada bidang xy berupa r sederhana dan jika f kontinu maka

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} \int_{g_1(r,\theta)}^{g_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta\,.$$

(dalam koordinat tabung $dV = r\, dz\, dr\, d\theta$)

Contoh 1

Tentukan volume benda pejal yang dibatasi oleh paraboloida $z = 4 - x^2 - y^2$ dibagian atas, $z = 0$ dibagian bawah, dan $y = 0$, tabung $x^2 + y^2 = 2x$.

Solusi :

Karena $x^2 + y^2 = r^2$ dan $x = r\cos\theta$ maka

$z = 4 - x^2 - y^2 \quad \Rightarrow \quad z = 4 - r^2$

$x^2 + y^2 = 2x \quad \Rightarrow \quad r = 2\cos\theta$

Jadi batas z, r, dan θ yaitu : $0 \leq z \leq 4 - r^2$, $0 \leq r \leq 2\cos\theta$, dan $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$.

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^{4-r^2} 1\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

soli_erf@yahoo.com

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \left[rz \right]_0^{4-r^2} dr\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r(4-r^2) dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^{2\cos\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (8\cos^2\theta - 4\cos^4\theta)\, d\theta$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta = 8.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} - 4.\frac{1.3}{2.4}.\frac{\pi}{2} = \frac{5}{4}\pi \text{ satuan kubik.}$$

Catatan : $\displaystyle \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\, d\theta = \begin{cases} \dfrac{1.3.5...(n-1)}{2.4.6...(n)}.\dfrac{\pi}{2}, & n \geq 2 \text{ genap} \\ \dfrac{2.4.6...(n-1)}{3.5.7...(n)}.\dfrac{\pi}{2}, & n \geq 3 \text{ ganjil} \end{cases}$.

Contoh 2

Tentukan koordinat pusat massa benda pejal homogen yang dibatasi oleh bidang $z = 1$ dan bagian terkecil dari bola $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ yang dipotong oleh bidang tersebut.

Solusi: ;

Menentukan batas :

$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad z^2 = 4 - r^2 \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt{4-r^2}$. Batas z : $1 \leq z \leq \sqrt{4-r^2}$.

Karena $z = 1$ dan $z^2 = 4 - r^2$ maka $r^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{3}$. Batas r : $0 \leq r \leq \sqrt{3}$

Sedangkan batas θ : $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Massa benda pejal :

$$m = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta = \frac{5\pi}{3}.$$

Momen massa terhadap bidang xy :

$$M_{xy} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-r^2}} zr\, dz\, dr\, d\theta = \frac{9\pi}{4}.$$

Diperoleh $\bar{z} = \dfrac{M_{xy}}{m} = \dfrac{27}{20}$. Karena kesimeetrian maka $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

Jadi pusat massa benda pejal tersebut adalah $(0, 0, \dfrac{27}{20})$.

soli_erf@yahoo.com

- Integral Lipat Tiga (Koordinat Bola)

Ingat : $x=\rho\sin\phi\cos\theta$, $y=\rho\sin\phi\sin\theta$, dan $z=\rho\cos\phi$

dengan $\rho\geq 0$; $0\leq\theta\leq 2\pi$; $0\leq\phi\leq\pi$.

Koordinat Cartesius (x,y,z) diubah ke dalam koordinat Bola (ρ,θ,ϕ).

Diberikan fungsi $f(x,y,z)$ pada daerah benda pejal S, maka

$$f(x,y,z)=f(\rho\sin\phi\cos\theta,\rho\sin\phi\sin\theta,\rho\cos\phi)=F(\rho,\theta,\phi).$$

Jika benda pejal S dipartisi menjadi kepingan-kepingan baji bola dengan ukuran $\Delta\rho_k$, $\rho_k\sin\phi\,\Delta\theta_k$, dan $\rho_k\,\Delta\phi_k$ sehingga volumenya $\Delta V_k=\rho_k^2\sin\phi\,\Delta\rho_k\Delta\theta_k\Delta\phi_k$ maka jumlah yang mengaproksimasi integral yaitu

$$\sum_{k=1}^{n}F(\rho_k,\theta_k,\phi_k)\,\rho_k^2\sin\phi\Delta\rho_k\Delta\theta_k\Delta\phi_k.$$

Integralnya didefinisikan oleh:

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dV=\iiint_S f(\rho\sin\phi\cos\theta,\rho\sin\phi\sin\theta,\rho\cos\phi)\,\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi.$$

$$=\iiint_S F(\rho,\theta,\phi)\,\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi.$$

(dalam koordinat Bola $dV=\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$)

Contoh 3

Tentukan massa benda pejal S yang berbentuk bola jika fungsi rapat massanya δ sebanding dengan jaraknya dari pusat.

Solusi :

Misalkan bola dengan jari-jari a. Karena rapat massanya δ sebanding dengan jaraknya dari pusat, maka kerapatan δ diberikan :

$$\delta(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}=k\rho \text{ (karena } \rho^2=x^2+y^2+z^2\text{)}.$$

Menentukan batas: $0\leq\rho\leq a$; $0\leq\theta\leq 2\pi$; $0\leq\phi\leq\pi$.

Massa benda, yaitu

$$m=\iiint_S \delta(x,y,z)\,dV$$

$$=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} k\rho\,\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{k}{4}\rho^4\sin\phi\right]_0^a d\theta\,d\phi=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{k}{4}a^4\sin\phi\right)d\theta\,d\phi$$

$$=\int_0^{\pi}\left[\left(\frac{k}{4}a^4\sin\phi\right)\theta\right]_0^{2\pi}d\phi=\int_0^{\pi}\left(\frac{k}{2}a^4\pi\sin\phi\right)d\phi$$

$$=\left[-\left(\frac{k}{2}a^4\pi\cos\phi\right)\right]_0^{\pi}=-\frac{k}{2}a^4\pi\left(\cos\pi-\cos 0\right)=-\frac{k}{2}a^4\pi(-1-1)=ka^4\pi\ .$$

Contoh 4

Tentukan volume bola padat $x^2+y^2+z^2=9$ di oktan pertama.

Solusi :

Karena $\rho^2=x^2+y^2+z^2$ maka $\rho^2=9$ sehingga $\rho=3$. Batasnya $0\le\rho\le 3$.

Karena di oktan pertama, maka $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ dan $0\le\phi\le\frac{\pi}{2}$.

Volume V, yaitu

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{3}1.\,\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{3}\rho^3\sin\phi\right]_0^3 d\theta\,d\phi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(9\sin\phi\right)d\theta\,d\phi$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(9\sin\phi\right)\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}d\phi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{9}{2}\pi\sin\phi\right)d\phi=\frac{9}{2}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\phi\right)d\phi=\frac{9}{2}\pi\left[-\cos\phi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{9}{2}\pi\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=-\frac{9}{2}\pi(0-1)=\frac{9}{2}\pi$$

Latihan

1. Hitung volume bola padat $x^2+y^2+z^2=16$ di oktan pertama. (koord. Bola)
2. Hitung volume benda pejal yang dibatasi oleh paraboloida $z=x^2+y^2$ dan $z=4$. (Gunakan koordinat Tabung).
3. Tentukan pusat massa benda pejal homogen (kerapatan konstan) yang dibatasi oleh $z=12-2x^2-2y^2$ dan $z=x^2+y^2$. (gunakan koordinat tabung)
4. Tentukan massa benda pejal di dalam bola $\rho=b$ dan di luar bola $\rho=a$ dengan $b>a$, jika kerapatan massanya berbanding lurus terhadap jarak titik asal.
5. Tunjukkan bahwa rumus volume bola $x^2+y^2+z^2=R^2$ adalah $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ dengan R sebagai jari-jari bola! (Gunakan integral lipat tiga)