Matematika Diskrit 1

Himpunan

Dr. Ahmad Sabri

Universitas Gunadarma

Apakah Matematika Diskrit itu?

Matematika diskrit adalah kajian terhadap objek/struktur matematis, di mana objek-objek tersebut diasosiasikan sebagai nilai-nilai diskrit.

Himpunan

Definisi

Himpunan adalah kumpulan objek dengan karakteristik yang telah didefinisikan sebelumnya.

Contoh

- Himpunan mahasiswa UG.
- Himpunan bilangan genap.
- Himpunan untai biner panjang 5 yang memiliki 3 simbol '1'.
- dsb.

Himpunan

Definisi

Himpunan adalah kumpulan objek dengan karakteristik yang telah didefinisikan sebelumnya.

Contoh

- Himpunan mahasiswa UG.
- Himpunan bilangan genap.
- Himpunan untai biner panjang 5 yang memiliki 3 simbol ‘1’.
- dsb.

Notasi pada himpunan

- Simbol himpunan dinyatakan dalam *huruf besar miring*, anggota-anggotanya ditulis di antara kurung kurawal $\{\}$, dan setiap anggotanya dipisahkan oleh koma. Urutan simbol tidak berpengaruh. Contoh $A = \{a, i, u, e, o\} = \{i, o, a, e, u\}$
- Relasi: $\in$, $\ni$, $\subset$, $\subseteq$, $\supset$, $\supseteq$.
- Negasi dari relasi: $\notin$, $\not\ni$, $\not\subset$, $\not\subseteq$, $\not\supset$, $\not\supseteq$.
- Operasi: $\cap$, $\cup$

Contoh

- $A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ dapat dinyatakan sebagai $A = \{x | x \text{ bilangan ganjil}\}$
- $B = \{x | x^2 + 3x - 10 = 0\}$, $C = \{ -5, 2\}$, $D = \{-5, 2, 2, -5\}$. Maka, $B = C = D$.

Subhimpunan

Definisi

- Diberikan dua himpunan A dan B. Jika untuk sebarang $x \in A$ berlaku $x \in B$, maka dikatakan A adalah *subhimpunan* dari B. Secara matematis, $A \subseteq B$, atau $B \supseteq A$.
- $A = B$ jika dan hanya jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.
- Jika $A \subseteq B$ dan $A \neq B$, maka A dikatakan sebagai *subhimpunan sejati* (*proper subset*) dari B, dan dinotasikan sebagai $A \subset B$.

Untuk seterusnya, istilah "subhimpunan" mengacu pada simbol $\subset$.

Beberapa himpunan yang sering digunakan

- **N**: himpunan bilangan natural (asli) $1, 2, 3, \ldots$.
- **Z**: himpunan bilangan integer (bulat) $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$.
- **Q**: himpunan bilangan rasional.
- **R**: himpunan bilangan riil.
- **C**: himpunan bilangan kompleks.

Perhatikan bahwa $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$.

- **U**: himpunan semesta
- $\emptyset$ atau $\{\}$: himpunan kosong

Himpunan disjoin

Definisi

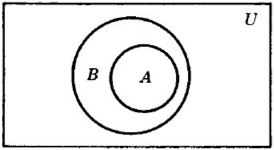
Himpunan A dan B dikatakan *disjoin* jika tidak terdapat elemen anggota A yang juga menjadi anggota B.

Contoh

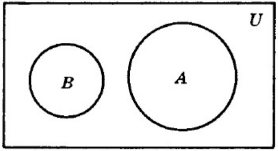
Diberikan $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{2, 4, 8, 16\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. A dan B tidak disjoin. Namun, A dan C disjoin, demikian pula halnya denga B dan C.

Diagram Venn

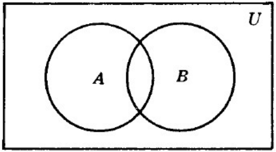
Diagram Venn adalah representasi himpunan secara visual, di mana reprsentasi himpunan tersebut berada dalam sua-
tu daerah persegi panjang sebagai representasi himpunan semesta **U**.



(a) $A \subseteq B$



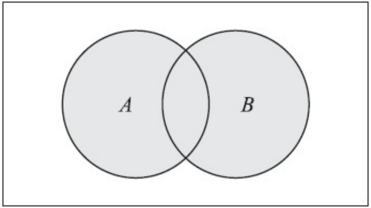
(b) A and B are disjoint



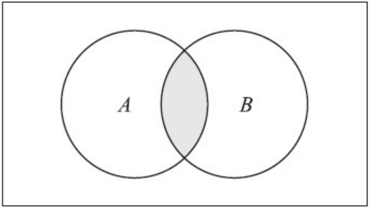
(c)

Operasi pada himpunan

- $\cup$: operasi *gabung*. $A \cup B = \{x|x \in A \text{ atau } x \in B\}$
- $\cap$: operasi *iris*. $A \cap B = \{x|x \in A \text{ dan } x \in B\}$



(a) $A \cup B$ is shaded



(b) $A \cap B$ is shaded

- Jika A dan B disjoin, maka $A \cap B = \emptyset$.
- Jika $S = A \cup B$ dan $A \cap B = \emptyset$, maka S dikatakan sebagai *gabungan disjoin* dari A dan B.

Teorema

Diberikan sebarang dua himpunan A dan B. Maka berlaku:

- $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$, *dan*
- $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$.

Teorema

Ketiga pernyataan berikut ekivalen:

- $A \subseteq B$,
- $A \cap B = A$,
- $A = B$.

Teorema

Diberikan sebarang dua himpunan A dan B. Maka berlaku:

- $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$, *dan*
- $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$.

Teorema

Ketiga pernyataan berikut ekivalen:

- $A \subseteq B$,
- $A \cap B = A$,
- $A = B$.

Generalisasi operasi himpunan

Diberikan sejumlah hingga himpunan $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Operasi gabung dan iris untuk semua himpunan tersebut didefinisikan sebagai berikut:

- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m = \bigcup_{i=1}^{m} A_i = \{x | x \in A_i \text{ untuk beberapa } i\}$
- $A_1 \cup A_2 \cap \ldots \cup A_m = \bigcap_{i=1}^{m} A_i = \{x | x \in A_i \text{ untuk semua } i\}$

Komplemen mutlak

Definisi

Komplemen mutlak (selanjutnya disebut *komplemen*) dari himpunan A, dinotasikan sebagai A^C atau A', adalah himpunan elemen semesta yang bukan merupakan elemen himpunan A. Secara matematis, $A' = \{x | x \in \mathbf{U}, x \notin A\}$.

Komplemen relatif

Definisi

Komplemen relatif dari himpunan B terhadap himpunan A, dinotasikan sebagai $A \setminus B$ (dibaca A kurang B), adalah himpunan elemen anggota A yang bukan merupakan elemen anggota B. Secara matematis, $A' = \{x | x \in A, x \notin B\}$.

Perbedaan simetris

Definisi

Perbedaan simetris (*symmetric difference*) dari himpunan A dan B, dinotasikan sebagai $A \oplus B$, terdiri dari elemen-elemen anggota A atau anggota B, namun tidak keduanya. Secara matematis:

$$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B),$$

atau

$$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Aljabar himpunan

Table 1-1 Laws of the algebra of sets

Idempotent laws:	(1a) $A \cup A = A$	(1b) $A \cap A = A$
Associative laws:	(2a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	(2b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Commutative laws:	(3a) $A \cup B = B \cup A$	(3b) $A \cap B = B \cap A$
Distributive laws:	(4a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	(4b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Identity laws:	(5a) $A \cup \emptyset = A$	(5b) $A \cap \mathbf{U} = A$
	(6a) $A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$	(6b) $A \cap \emptyset = \emptyset$
Involution laws:	(7) $(A^C)^C = A$	
Complement laws:	(8a) $A \cup A^C = \mathbf{U}$	(8b) $A \cap A^C = \emptyset$
	(9a) $\mathbf{U}^C = \emptyset$	(9b) $\emptyset^C = \mathbf{U}$
DeMorgan's laws:	(10a) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$	(10b) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Himpunan hingga

- Himpunan A dikatakan *hingga* jika A adalah $\emptyset$ atau $|A| = c > 0$, c integer (A memuat tepat sejumlah hingga elemen). Dalam kasus lain, A dikatakan *tak-hingga*.
- Himpunan A dikatakan *terhitung* (*countable*) jika A hingga, atau jika elemen-elemen pada A dapat disusun dalam pola barisan. Dalam kasus yang terakhir ini A dikatakan *terhitung tak-hingga* (*countably infinite*). Dalam hal yang lainnya, A dikatakan *tak terhitung* (*uncountable*).

Prinsip pencacahan

Kardinalitas (banyak elemen) dari himpunan A dinotasikan sebagai $n(A)$, $|A|$, $\#(A)$, atau card(A).
Jika A dan B himpunan hingga dan disjoin, maka:

- $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.
- $n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B)$.
- $n(A') = n(\mathbf{U}) - n(A)$.

Prinsip pencacahan

Jika A dan B himpunan hingga dan tidak disjoin, maka:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Prinsip di atas di sebut sebagai **Prinsip inklusi-eksklusi**.

Prinsip pencacahan

Jika A dan B himpunan hingga dan tidak disjoin, maka:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Prinsip di atas di sebut sebagai **Prinsip inklusi-eksklusi**.

Kelas himpunan

- Himpunan-himpunan yang memiliki beberapa kesamaan karakteristik objek membentuk sebuah *kelas himpunan*.
- Kelas himpunan pada dasarnya adalah himpunan yang beranggotakan himpunan.

Himpunan pangkat

Definisi

Diberikan sebuah himpunan hingga A. *Himpunan pangkat* dari A, dinotasikan sebagai $P(A)$, adalah sebuah himpunan yang beranggotakan *semua* subhimpunan dari A.

Kardinalitas $P(A)$ dinotasikan sebagai 2^A, dan diberikan oleh $2^{n(A)}$.

Himpunan pangkat

Definisi

Diberikan sebuah himpunan hingga A. *Himpunan pangkat* dari A, dinotasikan sebagai $P(A)$, adalah sebuah himpunan yang beranggotakan *semua* subhimpunan dari A.

Kardinalitas $P(A)$ dinotasikan sebagai 2^A, dan diberikan oleh $2^{n(A)}$.

Himpunan partisi

Sebuah k-partisi dari himpunan S adalah himpunan $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ di mana:

- $A_i \cap A_j = \emptyset$, untuk $i \neq j$ (A_i dan A_j disjoin).
- $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = S$