Validitas dan Ketak-validan

Departemen Informatika

Latihan

- Buktikan validitas dari kalimat :

  F : IF (FOR SOME x)[p(x) and r(x)] then [(FOR SOME x)p(x) and (FOR SOME x) r(x)]

- Penyelesaian:

  Cukup dengan memperlihatkan bahwa untuk interpretasi sebarang I untuk F jika antecedent bernilai TRUE maka consequent harus juga bernilai TRUE di bawah I

INGAT :

Implikasi TRUE jika

(i) antecedent FALSE

(ii) consequent TRUE

Penyelesaian Soal 1

- (FOR SOME x)[p(x) and r(x)] bernilai TRUE di bawah I,

berdasarkan aturan FOR SOME

- Ada suatu elemen d di dalam domain D sedemikian hingga p(x) dan r(x) bernilai TRUE dibawah $<x \leftarrow d> \circ I$

berdasarkan aturan AND

- Ada suatu elemen d di dalam domain D sedemikian hingga keduanya (p(x) dan r(x)) bernilai TRUE dibawah $<x \leftarrow d> \circ I$

dengan akal sehat – common sense

- Ada suatu elemen d di dalam domain D sedemikian hingga p(x) bernilai TRUE dibawah $<x \leftarrow d> \circ I$

Dan

- Ada suatu elemen d di dalam domain D sedemikian hingga r(x) bernilai TRUE dibawah $<x \leftarrow d> \circ I$

Penyelesaian Soal 1

Berdasarkan aturan FOR SOME

- (FOR SOME x)p(x) bernilai TRUE di bawah I

Dan

- (FOR SOME x)r(x) bernilai TRUE di bawah I

Berdasarkan Aturan AND

- (FOR SOME x)p(x) AND (FOR SOME x)r(x) bernilai TRUE di bawah I

KETAK-VALIDAN

- Suatu interpretasi dikatakan kalimat valid, jika kalimat tersebut bernilai TRUE di bawah setiap interpretasi
- Untuk membuktikan kalimat tidak valid, cukup memenuhi satu interpretasi yang menyebabkan kalimat tersebut FALSE

Latihan

- Buktikan bahwa kalimat berikut tidak valid:

  F : IF [(FOR SOME x)p(x) and (FOR SOME x) r(x)] then (FOR SOME x)[p(x) and r(x)]

- Penyelesaian:
  - Temukan satu interpretasi I yang menyebabkan F bernilai FALSE
  - Ambil I sebagai interpretasi atas domain himpunan bilangan bulat, dimana:

    p ← relasi "positif" (yaitu $p_1(d)$ artinya $d > 0$)

    r ← relasi "negatif" (yaitu $r_1(d)$ artinya $d < 0$)
  - Arti kalimat : Jika ada suatu bilangan x sedemikian hingga $x > 0$ dan ada suatu bilangan x sedemikian hingga $x < 0$, maka ada suatu bilangan bulat x sedemikian sehingga $x > 0$ dan $x < 0$
  - F bernilai FALSE di bawah interpretasi I

Penyelesaian Soal 2

- Untuk membuktikannya :

Dengan aturan PROPOSISI

- p(x) bernilai TRUE dibawah <x←d> ○ I

Dan

- r(x) bernilai TRUE dibawah <x←d> ○ I

Sehingga dengan aturan FOR SOME

- (FOR SOME x)p(x) bernilai TRUE dibawah I

Dan

- (FOR SOME x)p(x) bernilai TRUE dibawah I

Di satu sisi, untuk sebarang bil bulat d diketahui bahwa d tidak bisa sekaligus positif dan negatif, sehingga

- p(x) dan r(x) bernilai FALSE dibawah <x←d> ○ I

Dengan aturan FOR SOME

- (FOR SOME x)[p(x) and r(x)] bernilai FALSE dibawah I

Contoh kalimat-kalimat valid

- Contoh kalimat logika proposisional valid
  - (for all x) p(x) or not (for all x) p(x)
  - (for all y) [if (for some x) q(x,y) then (for some x) q(x,y)
- Penghilangan dan pengenalan kuantifaier
  - If (for all x) p(x) then p(a)
  - If p(a) then (for some y) p(y)
- Penamaan kembali variabel
  - (for all x) p(x) if and only if (for all y) p(y)
  - (for some x) p(x) if and only if (for some y) p(y)

Contoh kalimat-kalimat valid

- Pembalikan Kuantifaier
  - [(for all x) (for all y) q(x,y)] if and only if [(for all y) (for all x) q(x,y)]
  - [(for some x) (for some y) q(x,y)] if and only if [(for some y) (for some x) q(x,y)]
  - If (for some y) (for all x) q(x,y) then (for all x) (for some y) q(x,y)
- Kuantifaier-kuantifaier berlebih (redudants)
  - [(for all x) (for all x) p(x)] if and only if (for all x) p(x)
  - [(for some x) (for some x) p(x)] if and only if (for some x) p(x)
- Dualitas Kuntifaier
  - [not(for all x) p(x)] if and only if (for some x) [not p(x)]
  - [not(for some x) p(x)] if and only if (for all x) [not p(x)]

Contoh kalimat-kalimat valid

- Distribusi Kuantifaier
  - (for all x) [p(x) and r(x)] if and only if [(for all x) p(x) and (for all x) r(x)]
  - (for some x) [p(x) or r(x)] if and only if [(for some x) p(x) or (for some x) r(x)]
  - (for some x) [if p(x) then r(x)] if and only if [if (for all x) p(x) then (for some x) r(x)]

- Distribusi Kondisional
  - (for all x) [p (if r(x) then a else b) if and only if (if r(x) then p(a) else p(b)]
  - (for all x) [p (f(if r(x) then a else b)) if and only if p(if r(x) then f(a) else f(b)]

Latihan

- Buatlah contoh-contoh kalimat valid di atas dalam bentuk bahasa natural (alami/sehari-hari)

Satisfiable, Contradictory, Consistent

- Suatu kalimat tertutup F adalah satisfiable jika bernilai TRUE di bawah suatu interpretasi untuk F
- Suatu kalimat tertutup F adalah contradictory (unstaisfiable) jika bernilai FALSE dibawah setiap interpretasi untuk F
- Suatu kumpulan kalimat-kalimat tertutup F1, F2, ... adalah consistent jika ada suatu interpretasi untuk F1, F2,... yang menyebabkan masing-masing kalimat tersebut bernilai TRUE

Keterkaitan dengan validitas

- Kalimat yang contradictory merupakan kalimat yang tidak valid
- Misalkan F adalah kalimat contradictory maka not F adalah kalimat yang valid
- Bukti :
  - F contadictory, yaitu bernilai FALSE dibawah setiap interpretasi

  Tepat (dengan aturan not)
  - Not F bernilai TRUE di bawah setiap interpretasi

  Tepat (dengan definisi validitas)
  - Not F adalah valid

Satisfiable dan Contadictory

- Contoh satisfiable:

  F : (for some x) p(x)

  - F adalah satisfiable, karena F bernilai TRUE di bawah satu I atas domain himpunan bilangan-bilangan bulat sedemikian sehingga p1(d) adalah relasi dimana d = 0

- Contoh contadictory:

  G : [(for all x) p(x)] and [(for some x) (not p(X))]

  - G bernilai FALSE dengan interpretasi J atas domain bilangan-bilangan bulat untuk setiap bilangan bulat d.

Klosur (Closure) Universal dan Eksistensial

- Andaikan bahwa x1,x2, ...xn adalah daftar semua variabel bebas yang berbeda dalam kalimat F (dalam urutan pemunculannya dalam kalimat), maka :

- Universal Closure dari kalimat F, dinyatakan dengan (for all *) F adalah kalimat tertutup

  (for all x1) (for all x2)... (for all xn) F

- Existensial Closure dari kalimat F, dinyatakan dengan (for some *) F adalah kalimat tertutup

  (for some x1) (for some x2)... (for some xn) F

Contoh

- F : (for some z) [{q(y,z) or r(x)} and {(for all w) p(y,z,w)}]

- Variabel bebas berdasarkan urutan pemunculannya y dan x, maka
- Klosur universal dari F adalah (for all *) F, yaitu

  (for all y) (for all x) (for some z) [{q(y,z) or r(x)} and {(for all w) p(y,z,w)}]

- Klosur eksistensial dari F adalah (for some *) F, yaitu

  (for some y) (for some x) (for some z) [{q(y,z) or r(x)} and {(for all w) p(y,z,w)}]

Latihan

- F : q(x1,x2) or not q(x1,x2)
- Tentukan klosur universal dan klosur existensial!

Aturan Semantik untuk klosur universal

- Misal F adalah suatu kalimat dan I adalah suatu interpretasi atas domain D untuk klosur universal (for all *) F dari kalimat F.
- x1, x2, ...xn adalah daftar lengkap dari variabel-variabel bebas yang berbeda dari F dengan urutan sesuai dengan pemunculannya
- Maka nilai klosur universal (for all *) Fadalah TRUE ---→ (closure)

Tepat

- Untuk setiap domain d1,d2,..dn$\in$ D, nilai dari F adalah TRUE dibawah interpretasi yang diperluas

  < x1←d1> ○ < x1←d1> ○ ... ○ < x1←d1> ○ I ------→ (extention)

Tepat

- Untuk setiap interpretasi J untuk F agree dengan I pada simbol-simbol bebas dari (for all *) F, maka F TRUE di bawah J. ------→ (agreement)

Hubungan Kuantifaier Universal dan Existensial

- Melalui Negasi
- Menurut Hukum De Morgan:
  - $\forall x \neg P \equiv \neg \exists x P$
  - $\neg \forall x P \equiv \exists x \neg P$
  - $\forall x P \equiv \neg \exists x \neg P$
  - $\exists x P \equiv \neg \forall x \neg P$
- Buatlah contoh kalimatnya!

SOAL-SOAL LATIHAN....

- Kalimat berikut ada yang valid ada yang tidak. Buktikanlah!
- If(for all x)[p(x) or r(x)] then [(for all x) p(x) or (for all x) r(x)]
- If [(for all x) p(x) or (for all x) r(x)] then (for all x)[p(x) or r(x)]
- (for some x) [if p(x) then p(a) and (if p(x) then p(b))]
- (for some x) [if p(x) then r(x)] if and only if [if (for all x) p(x) then (for some x) r(x)]