Aturan Semantik dan Validitas

Departemen Informatika

Kalkulus Predikat – Aturan Dasar Semantik

Misal A adalah suatu ekspresi dan I adalah interpretasi untuk A yang meliputi domain tak kosong D. Maka nilai dibawah I ditentukan berdasarkan aturan semantik sebagai berikut :

a. Aturan konstan

   Nilai suatu konstanta a adalah elemen domain D

b. Aturan variabel

   Nilai variabel x adalah elemen domain D

c. Aturan Aplikasi

   Nilai $f_1(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ adalah elemen domain D dimana $f_1(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ adalah fungsi yang diberikan kepada f dan $t_1, t_2, \ldots, t_n$ adalah nilai term berdasarkan interpretasi I

Lanjutan Aturan Dasar Semantik

d. Aturan term if-then-else

   Nilai Term kondisional *if A then s else t* adalah nilai term s jika A bernilai TRUE dan sama dengan nilai term t jika A bernilai FALSE

e. Aturan Proposisi

   Nilai proposisi $p_1(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ adalah nilai kebenaran TRUE atau FALSE dimana p adalah relasi yang diberikan oleh interpretasi I dan nilai dari $t_1, t_2, \ldots, t_n$ berdasarkan I.

f. Aturan untuk penghubung logik (not, or, dsb) sama dengan aturan pada kalkulus proposisi

Aturan NOT

- Nilai dari negasi F, not F adalah
  - True jika kalimat F bernilai False
  - False jika kalimat F bernilai True

- Contoh :

  E : [not p(y,f(y))] or [p(a,f(f(a)))]

  Dan ambil I sebagai interpretasi atas domain bilangan bulat tak negatif, dimana:

  $a \leftarrow 0$

  $y \leftarrow 2$

  $f \leftarrow$ *fungsi "successor", yaitu* $f_1(d) = d+1$

  $p \leftarrow$ *relasi "kurang dari", yaitu* $p_1(d1,d2)$ *adalah* $d1 < d2$

  Apa nilai dari kalimat *E?*

Kalkulus Predikat – Interpretasi yang diperluas

Misal I adalah suatu interpretasi yang mencakup domain D maka untuk sembarang variabel x dan elemen d pada domain D, interpretasi yang diperluas

$$< x \leftarrow d > o \; I$$

adalah interpretasi yang mencakup domain D dimana :

1. Variabel x diberikan nilai elemen domain D
2. Setiap variabel y (selain x) diberi nilai sama dengan elemen domain y_1 (yaitu nilai berdasar interpretasi D. jika y tidak mempunyai nilai berdasar I maka y juga tidak mempunyai nilai berdasar $< x \leftarrow d > o \; I$
3. Setiap konstanta a, simbol fungsi f, dan simbol predikat p diberi nilai sesuai dengan nilai aslinya yaitu a_I, f_I, p_I dibawah interpretasi I krn yang didefinisikan hanya x, $< x \leftarrow d > o \; I$

Sifat interpretasi yang diperluas

Jika I adalah interpretasi untuk kalimat berbentuk

(FOR ALL x) A atau (FOR SOME x) A,

maka $< x \leftarrow d > o \; I$ adalah interpretasi yang berlaku untuk A juga

Kalkulus Predikat – Interpretasi yang diperluas

Contoh :

1. I adalah interpretasi yang meliputi bilangan integer, dengan

   $x = 1$

   $y = 2$

   Maka perluasan interpretasi terhadap I :

   $< x \leftarrow 3 >$ o I

   akan memberikan nilai :

   $x = 3$

   $y = 2$

2. I adalah interpretasi yang meliputi bilangan integer, dengan

   f adalah simbol fungsi biner,

   + adalah fungsi penambahan integer

   maka :

   $< f \leftarrow + >$ o I adalah interpretasi yang meliputi domain bilangan integer dengan f fungsi penambahan +.

Kalkulus Predikat – Aturan Semantik Untuk Kuantifier

Aturan FOR ALL

- Kalimat (FOR ALL x) A bernilai TRUE berdasarkan interpretasi I jika :

  Untuk setiap elemen d dari domain D menyebabkan subkalimat A bernilai TRUE berdasarkan interpretasi yang diperluas < x ← d> o I

- Kalimat (FOR ALL x) A bernilai FALSE berdasarkan interpretasi I jika :

  Ada elemen d dari domain D sedemikian sehingga subkalimat A bernilai FALSE berdasarkan interpretasi yang diperluas < x ← d> o I

Aturan FOR SOME

- Kalimat (FOR SOME x) A bernilai FALSE berdasarkan interpretasi I jika :

  Untuk setiap elemen d dari domain D menyebabkan subkalimat A bernilai FALSE berdasarkan interpretasi yang diperluas < x ← d> o I

- Kalimat (FOR SOME x) A bernilai TRUE berdasarkan interpretasi I jika :

  Ada elemen d dari domain D sedemikian sehingga subkalimat A bernilai TRUE berdasarkan interpretasi yang diperluas < x ← d> o I

Kalkulus Predikat – Aturan Semantik Untuk Kuantifier

Contoh

1. A : (FOR SOME x) p(x,y)

   Diberikan interpretasi I yang meliputi himpunan bilangan integer positif

   y = 2

   p : relasi "kurang dari", yaitu p1(d1, d2) = d1 < d2

   Berdasarkan aturan (FOR SOME x) maka

   (FOR SOME x) p(x, y) bernilai TRUE jika ada elemen dari D sehingga nilai p(x, y) bernilai TRUE berdasarkan interpretasi < x ← d > o I

   Misal diambil d = 1 maka perluasan interpretasi menjadi < x ← 1 > o I sehingga berdasarkan aturan proposisi diperoleh bahwa

   p(1, 2) yaitu 1 < 2 adalah TRUE

Kalkulus Predikat – Aturan Semantik Untuk Kuantifier

2. B : IF (FOR ALL x) (FOR SOME y) p(x, y) THEN p(a, f(a))

   Misal I adalah interpretasi untuk B yang meliputi domain bilangan real positif dimana:

   a = 1

   f : fungsi "akar dari" yaitu $f1(d) = \sqrt{d}$

   p : relasi "tidak sama dengan", yaitu $p1(d_1, d_2) = d_1 \neq d_2$

Misal diasumsikan bahwa B bernilai FALSE

Maka harus diperhatikan bahwa :

Antisenden : (FOR ALL x) (FOR SOME y) p(x, y) bernilai TRUE

Konsekuen : p(a, f(a)) bernilai FALSE

Kalkulus Predikat – Aturan Semantik Untuk Kuantifier

Untuk lebih mudahnya, dimulai dari Konsekuen karena bentuknya lebih sederhana. Berdasarkan aturan proposisi, maka nilai konsekuen $p(a, f(a))$ yaitu $1 \neq \sqrt{1}$ adalah FALSE berdasarkan I

Antisenden : berdasarkan Aturan (FOR ALL x)

Untuk setiap elemen d_1 dari D, subkalimat (for some y) $p(x,y)$ bernilai TRUE berdasarkan $< x \leftarrow d_1 >$ o I

Berdasarkan Aturan (FOR SOME y)

Ada elemen d_1 dari D, ada elemen d_2 sedemikian sehingga $p(x,y)$ bernilai TRUE berdasarkan $< y \leftarrow d_2 >$ o $< x \leftarrow d_1 >$ o I

Misal ambil sembarang elemen domain dan $d_2 = d_1 + 1$

Maka berdasarkan aturan proposisi, nilai $p(x,y)$ yaitu $p(d_1, d_2)$

Berarti $p(d_1, d_1+1)$ menyatakan bahwa $d_1 \neq d_1 + 1$ adalah TRUE

berdasarkan $< y \leftarrow d_2 >$ o $< x \leftarrow d_1 >$ o I

Jadi dapat disimpulkan bahwa kalimat B bernilai FALSE berdasarkan I

Kalkulus Predikat – Validitas

Validitas di dalam kalkulus predikat didefinisikan **hanya untuk kalimat tertutup, yaitu kalimat yang tidak memiliki variabel bebas.**

Definisi

Sebuah kalimat A dikatakan <u>valid</u> jika kalimat tersebut bernilai TRUE berdasarkan setiap interpretasi untuk A

Pembuktian validitas kalimat dapat menggunakan :

- Dengan membuktikan bahwa kalimat tertutup A adalah VALID

  (biasanya lebih "enak" untuk kalimat-kalimat yang memiliki penghubung logik : IF AND ONLY IF, AND, NOT)

- Dengan membuktikan bahwa kalimat tertutup A adalah TIDAK VALID dengan cara mencari satu interpretasi tertentu yang menyebabkan kalimat tersebut bernilai FALSE.

  (biasanya untuk kalimat-kalimat yang memiliki penghubung logik : IF-THEN, OR)

Kalkulus Predikat – Validitas

Contoh

- Contoh1

  Misalkan ingin dibuktikan validitas kalimat A berikut :

  A : [NOT (FOR ALL x) p(x)] IF AND ONLY IF [(FOR SOME x) NOT p(x)]

Berdasarkan aturan IFF (IF AND ONLY IF), cukup diperlihatkan bahwa :

NOT (FOR ALL x) p(x)] dan [(FOR SOME x) NOT p(x)] memiliki nilai kebenaran yang sama berdasarkan setiap interpretasi, atau dengan kata lain subkalimat pertama bernilai TRUE tepat bila subkalimat kedua juga bernilai TRUE

Kalkulus Predikat – Validitas

A : [NOT (FOR ALL x) p(x)] IFF [(FOR SOME x) NOT p(x)]

Misalkan terdapat sebarang interpretasi I untuk A, maka
NOT (FOR ALL x) p(x) bernilai TRUE berdasarkan I
Tepat bila (berdasarkan aturan NOT)
    (FOR ALL x) p(x) bernilai FALSE berdasarkan I
Tepat bila (berdasarkan (FOR ALL x))
    Ada elemen d di dalam domain D
Sehingga p(x) bernilai FALSE berdasarkan $< x \leftarrow d > o\ I$
Tepat bila (berdasarkan aturan NOT)
    Ada elemen d di dalam domain D
sehingga NOT p(x) bernilai TRUE berdasarkan $< x \leftarrow d > o\ I$
Tepat bila (berdasarkan aturan (FOR SOME x))
    (FOR SOME x) NOT p(x) bernilai TRUE berdasarkan Interpretasi I

Kalkulus Predikat – Validitas

Contoh 2

Misalkan ingin dibuktikan validitas kalimat B berikut : (cara 2)

B : IF (FOR SOME y) (FOR ALL x) q(x, y) THEN
(FOR ALL x) (FOR SOME y) q(x, y)

Asumsikan bahwa B <u>tidak valid</u>, sehingga bahwa untuk suatu interpretasi I untuk B

Jika Antisenden : (FOR SOME y) (FOR ALL x) q(x, y) bernilai TRUE berdasarkan I

maka konsekuen : (FOR ALL x) (FOR SOME y) q(x, y) bernilai FALSE berdasarkan I

Kalkulus Predikat – Validitas

Karena Antisenden bernilai TRUE berdasarkan I,

maka (berdasarkan aturan FOR SOME y)

Ada elemen d_1 di dalam domain D sehingga (FOR ALL x) q(x, y) bernilai TRUE berdasarkan $< y \leftarrow d_1 > o\ I$

Tepat bila (berdasarkan aturan FOR ALL x)

Ada elemen d_1 di dalam domain D sedemikian sehingga untuk setiap elemen d_2 di dalam domain D sedemikian sehingga q(x, y) bernilai TRUE

berdasarkan $< x \leftarrow d_2 > o < y \leftarrow d_1 > o\ I$ …………………….. (1)

Karena konsekuen bernilai FALSE berdasarkan I,

Maka (berdasarkan aturan FOR ALL x)

Ada elemen e_1 di dalam domain D sehingga (FOR SOME y) q(x, y) bernilai FALSE berdasarkan $< x \leftarrow e_1 > o\ I$

Tepat bila (berdasarkan aturan FOR SOME y)

Ada elemen e_1 di dalam domain D sedemikian sehingga untuk semua elemen e_2 di dalam domain D sedemikian sehingga q(x, y) bernilai FALSE

berdasarkan $<y \leftarrow e_2 > o < x \leftarrow e_1 > o\ I$ ……………………………(2)

Kalkulus Predikat – Validitas

Berdasarkan (1) dan (2) kita dapat mengambil nilai elemen d_1 sama dengan e_2 dan d_2 sama dengan e_1, sehingga dari (1) diperoleh :

q(x, y) bernilai TRUE berdasarkan $< x \leftarrow e_1 > o < y \leftarrow d_1 > o\ I$ …….. (3)

dan dari (2) diperoleh

q(x, y) bernilai FALSE berdasarkan $<y \leftarrow d_1 > o < x \leftarrow e_1 > o\ I$ ……..(4)

Karena variabel x dan y berbeda, maka interpretasi

$< x \leftarrow e_1 > o < y \leftarrow d_1 > o\ I$ dan $< y \leftarrow d_1 > o < x \leftarrow e_1 > o\ I$

adalah identik, sehingga terlihat bahwa (3) dan (4) saling berkontradiksi.

Berarti asumsi bahwa B tidak valid adalah tidak benar, sehingga B <u>VALID</u>

Latihan

- Buktikan validitas dari kalimat :

  F : IF (FOR SOME x)[p(x) and r(x)] then [(for some x)p(x) and (for some x) r(x)]

  Catatan: dibuktikan jika antecedent bernilai TRUE maka consequent harus juga bernilai TRUE

- Buktikan bahwa kalimat berikut tidak valid:

  F : IF [(FOR SOME x)p(x) and (FOR SOME x) r(x)] then (for some x)[p(x) and r(x)]

  Catatan: Temukan satu interpretasi I yang menyebabkan F bernilai FALSE