J. Metode Lagrange Multiplier

Metode Langrang digunakan untuk optimasi fungsi dengan kendala kesamaan:

Min $f(x, y, z)$ atau Max $f(x, y, z)$

dengan kendala

$$g(x, y, z) = k,$$

dengan x, y, z adalah variabel dan k konstanta.

Berikut diberikan langkah-langkah optimasi fungsi dengan menggunakan metode Lagrange:

1. Selesaikan persamaan berikut:
   $$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$
   $$g(x, y, z) = k,$$
   dengan λ disebut pengali Lagrange (*Lagrange multiplier*)
2. Masukkan semua solusi yang diperoleh dari langkah 1 ke $f(x, y, z)$ dan identifikasi nilai minimum dan maksimum.

Catatan: $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$ dapat ditulis

$$(f_x, f_y, f_z) = \lambda(g_x, g_y, g_z)$$

Contoh 1.

Tentukan volume maksimum dari sebuah kotak tanpa tutup yang memiliki luas permukaan 12 cm^2.

Penyelesaian:

Misal x, y, z berturut-turut merupakan panjang, lebar, dan tinggi kotak. Akan dicari volume maksimum, yaitu

Maks $V = xyz$

dengan kendala

$$g(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy = 12.$$

1. Menyelesaikan persamaan

$$\nabla V = \lambda \nabla g$$
$$g(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy = 12,$$

yaitu

$$V_x = \lambda g_x \to yz = \lambda(2z + y) \qquad (1)$$
$$V_y = \lambda g_y \to xz = \lambda(2z + x) \qquad (2)$$
$$V_z = \lambda g_z \to xy = \lambda(2x + 2y) \qquad (3)$$
$$2xz + 2yz + xy = 12 \qquad (4)$$

Dengan mengalikan (1) dengan x, (2) dengan y, dan (3) dengan z diperoleh

$$xyz = \lambda(2xz + xy) \qquad (5)$$
$$xyz = \lambda(2yz + xy) \qquad (6)$$
$$xyz = \lambda(2xz + 2yz) \qquad (7)$$

Persamaan (5) dan (6) mempunyai nilai sama, sehingga

$$\lambda(2xz + xy) = \lambda(2yz + xy)$$
$$\Leftrightarrow \lambda(2xz + xy) - \lambda(2yz + xy) = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda(2xz + xy - 2yz - xy) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\lambda(xz - yz) = 0$$
$$\lambda = 0 \text{ atau } (xz - yz) = 0$$

$\lambda = 0$ tidak memenuhi, karena berarti persamaan (1) menghasilkan

$yz = 0 \rightarrow y = 0$ *atau* $z = 0$,

sedangkan panjang, lebar, dan tinggi tidak boleh 0.

Jadi, $(xz - yz) = 0$ atau

$x = y$. (8)

Persamaan (6) dan (7) mempunyai nilai sama, sehingga

$$\lambda(2yz + xy) = \lambda(2xz + 2yz)$$
$$\Leftrightarrow \lambda(2yz + xy) - \lambda(2xz + 2yz) = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda(2yz + xy - 2xz - 2yz) = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda(xy - 2xz) = 0$$

$\lambda = 0$ atau $(xy - 2xz) = 0$

Diperoleh $xy = 2xz$ atau

$y = 2z$. (9)

. Dari (8) dan (9) diperoleh

$x = y = 2z$

Dari (4) diperoleh

$$2xz + 2yz + xy = 12$$
$$\Leftrightarrow 4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = 12$$
$$\Leftrightarrow 12z^2 = 12$$
$$\Leftrightarrow z = 1$$

Jadi, $x = 2, y = 2, z = 1$.

2. Volume maksimum $V(2,2,1) = 4$ cm^3.

Contoh 2.

Tentukan nilai ekstrim (minimum dan maksmum) dari $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ dengan kendala $x^2 + y^2 = 1$.

Penyelesaian:

Kendala pada soal di atas adalah

$g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$.

1. Menyelesaikan persamaan

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$
$$g(x,y) = x^2 + y^2 = 1,$$

yaitu

$f_x = \lambda g_x \rightarrow 2x = \lambda 2x$ (1)

$f_y = \lambda g_y \rightarrow 4y = \lambda 2y$ (2)

$x^2 + y^2 = 1$. (3)

Dari (1) diperoleh $2x(1 - \lambda) = 0$ yaitu

$x = 0$ atau $\lambda = 1$.

(i) Jika $x = 0$, maka dari (3) diperoleh

$y = \pm 1$

(ii) Jika $\lambda = 1$, maka dari (2) diperoleh $4y = 2y$ atau

$y = 0$,

sehingga dari (3) diperoleh

$x = \pm 1.$

Jadi f mempunyai 4 kemungkinan nilai ekstrim di titik

$(0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0)$

2. Nilai fungsi untuk setiap titik yaitu

$f(0,1) \quad = 2$

$f(0,-1) = 2$

$f(1,0) \quad = 1$

$f(-1,0) = 1$

Jadi, nilai maksimum dari f dengan kendala $x^2 + y^2 = 1$ adalah 2 dan nilai minimum 1.

Contoh 3.

Tentukan minimum dan maksimum dari $f(x,y,z) = 4y - 2z$ dengan kendala $2x - y - z = 2$ dan $x^2 + y^2 = 1$.

Penyelesaian:

Kendala pada soal di atas adalah

$g(x,y,z) = 2x - y - z = 2$

$h(x,y,z) = x^2 + y^2 = 1.$

1. Menyelesaikan persamaan

$\nabla f = \lambda_1 \nabla g + \lambda_2 \nabla g$

$g(x,y,z) = 2x - y - z = 2$

$h(x,y,z) = x^2 + y^2 = 1,$

yaitu

$f_x = \lambda_1 g_x + \lambda_2 h_x \rightarrow 0 = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 x$ (1)

$f_y = \lambda_1 g_y + \lambda_2 h_y \rightarrow 4 = -\lambda_1 + 2\lambda_2 y$ (2)

$f_z = \lambda_1 g_z + \lambda_2 h_z \rightarrow -2 = -\lambda_1$ (3)

$2x - y - z = 2$ (4)

$x^2 + y^2 = 1$ (5)

. Dari (3) diperoleh

$\lambda_1 = 2,$

sehingga dari (1) dan (2) diperoleh

$0 = 4 + 2\lambda_2 x \quad \rightarrow x = -\frac{2}{\lambda_2}$

$4 = -2 + 2\lambda_2 y \rightarrow y = \frac{3}{\lambda_2}.$

Dari (5) diperoleh

$\frac{4}{\lambda_2^2} + \frac{9}{\lambda_2^2} = \frac{13}{\lambda_2^2} = 1 \rightarrow \lambda_2 = \pm\sqrt{13}$

(i) Untuk $\lambda_2 = \sqrt{13}$ diperoleh

$x = -\frac{2}{\sqrt{13}}, y = \frac{3}{\sqrt{13}}, z = -2 - \frac{7}{\sqrt{13}}..$

(ii) Untuk $\lambda_2 = -\sqrt{13}$ diperoleh

$x = \frac{2}{\sqrt{13}}, y = -\frac{3}{\sqrt{13}}, z = -2 + \frac{7}{\sqrt{13}}.$

Jadi, diperoleh 2 titik: $\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, -2 - \frac{7}{\sqrt{13}}\right)$ dan $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, -2 + \frac{7}{\sqrt{13}}\right).$

2. Nilai fungsi untuk setiap titik yaitu

$$f\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, -2-\frac{7}{\sqrt{13}}\right) = 4+\frac{26}{\sqrt{13}} = 11.2111$$

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, -2+\frac{7}{\sqrt{13}}\right) = 4-\frac{26}{\sqrt{13}} = -3.2111$$

Jadi, didapatkan maksimum pada $\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, -2-\frac{7}{\sqrt{13}}\right)$ dan minimum pada $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, -2+\frac{7}{\sqrt{13}}\right)$.

Tugas 4.

Tentukan mínimum dan maksimum dari fungsi berikut.

a. $f(x, y) = x^2 - y^2$, dengan kendala $x^2 + y^2 = 1$

b. $f(x, y, z) = x + 2y$, dengan kendala $x + y + z = 1$ dan $y^2 + z^2 = 4$.