METODE NUMERIK 2022/2023

((Jawaban Hanya Referensi))

1.) diket : $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x^2 e^x$, $1 \le x \le 2,2$, $y(1) = 0$

Asumsi : $y(x) = x^2(e^x - e)$

•) Variabel dan parameter

$x_0 = 1$ $\quad x_{target} = 2,2$

$y_0 = 0$ $\quad d = 0,0001$

$h = 0,4$

•) Jumlah iterasi

$$n_i = \frac{(x_{target} - x_0)}{h}$$

$$= \frac{2,2 - 1}{0,4} = 3$$

•) Iterasi menggunakan metode Runge Kutta orde 3.

Rumus Runge-Kutta Orde 3.

$k_1 = h \times f(x[i], y[i])$

$k_2 = h \times f(x[i] + h/2, y[i] + k_1/2)$

$k_3 = h \times f(x[i] + h, y[i] - k_1 + 2k_2)$

$y[i+1] = y[i] + 1/6 (k_1 + 4k_2 + k_3)$

dimana $f(x,y) = x^2 \times e^x - \frac{2}{x}y$

• Iterasi pertama ($i = 0$)

$k_1 = 0,4 \times (e - 0)$

$k_2 = 0,4 \times ((1+0,4/2)^2 \times e^{1+0,4/2} - \frac{2}{1+0,4/2} \times 0)$

$k_3 = 0,4 \times ((1+0,4)^2 \times e^{1+0,4/2} - \frac{2}{1+0,4} \times 0)$

$y[i] = y[0] + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$

• Iterasi kedua ($i = 1$)

$k_1 = 0,4 \times ((1,4)^2 \times e^{1,4} - \frac{2}{1,4} \times y[1])$

$k_2 = 0,4 \times ((1,4 + 0,4/2)^2 \times e^{1,4+0,4/2} - \frac{2}{1,4+0,4/2} \times y[1])$

$k_3 = 0,4 \times ((1,4 + 0,4)^2 \times e^{1,4+0,4} - \frac{2}{1,4+0,4} \times y[1])$

$y[2] = y[1] + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$

• Iterasi ketiga ($i = 2$)

$k_1 = 0,4 \times ((1,8)^2 \times e^{1,8} - \frac{2}{1,8} \times y[2])$

$k_2 = 0,4 \times ((1,8 + 0,4/2)^2 \times e^{1,8+0,4/2} - \frac{2}{1,8+0,4/2} \times y[2])$

$k_3 = 0,4 \times ((1,8 + 0,4)^2 \times e^{1,8+0,4} - \frac{2}{1,8+0,4} \times y[2])$

$y[3] = y[2] + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$

•) Galat

$y_{approx} = (2,2)^2 \times (e^{2,2} - e)$

≈ 30.53068

$Galat = |y[3] - y_{approx}|$

$Galat\ Relatif = \frac{Galat}{|y[3]|} \times 100\ \%$

2.) a. Metode selisih maju

Asumsi : $f(x) = x \cos x - 2x^2 + 3x - 1$

- $f'(0,4) \approx \frac{0,248 - 0,007}{0,4 - 0,3}$

  $\approx 2,41$

- $f'(0,6) \approx \frac{0,575 - 0,439}{0,6 - 0,5}$

  $\approx 1,36$

- $f''(0,6) \approx \frac{1,36 - 2,41}{0,6 - 0,5}$

  $\approx -10,5$

- $f(x) = x \cos x - 2x^2 + 3x - 1$ {perhitungan analitik}

  $f(0,4) = 0,4 \cos(0,4) - 2(0,4)^2 + 3(0,4) - 1$

  $= 0,280$

  $f'(0,4) = \cos(0,4) - 0,8 + 3$

  $= 4,80$

  $f''(0,6) = -0,6 \sin(0,6) - 2$

  $= -2,006$

- Galat absolut $f'(0,4)$ = |selisih maju - hasil analitik|

  $= |2,41 - 4,80| = 1,67$

  Galat relatif $f'(0,4) = \frac{\text{Galat absolut}}{\text{Hasil analitik}} \times 100\%$

  $= \frac{1,67}{4,8} \times 100\%$

  $= 0,34$

  Galat absolut $f''(0,6) = |-10,5 - (-2,006)| = 8,49$

  Galat relatif $f''(0,6) = \frac{8,49}{-2,006} \times 100\% = -4,23$

b. Interpolasi polynomial Newton derajat 3.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$
0,3	0,007		
0,4	0,248	0,775	
0,5	0,439	0,63	
0,6	0,575	0,464	

- Hitung $f[x_i]$

  $f[x_i] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$

  $f[x_0] = 0,775$

  $f[x_1] = 0,63$

  $f[x_2] = 0,464$

- Hitung $f[x_i, x_{i+1}]$

  $f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$

  $f(x_0, x_1) = -0,925$

  $f(x_1, x_2) = -0,83$

- Hitung $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$

  $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$

  $f[x_0, x_1, x_3] = \frac{-0,83 + 0,925}{0,6 - 0,3} = 0,55$

- $P_3(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$

  $= 0,775 - 0,925(x - 0,3) + 0,55(x - 0,3)(x - 0,4)$

$P_3(0,45) = 0,775 - 0,925(0,45 - 0,3) + 0,55(0,45 - 0,3)(0,45 - 0,4) = 0,64$

- Galat absolut $= |0,64 - (0,40)|$ → nilai sebenarnya dari fungsi asumsi $f(x) = x \cos x - 2x^2 + 3x - 1$ dengan $x = 0,45$
  $= 0,24$

  Galat relatif $= \frac{0,24}{0,40} \times 100\ \%$
  $= 0,6$

c. Metode simpson 1/3

$\int_{0,3}^{0,9} f(x)\,dx$

- h (lebar subinterval) $= \frac{0,9 - 0,3}{7} \approx 0,086$
- hitung $f(x)$ pd tiap titik subinterval

  $f(x) = x \cos(x) - 2x^2 + 3x - 1$
  $f(x_0) = f(0,3) \approx -0,308$
  $f(x_1) = f(0,386) \approx -0,247$
  $f(x_2) = f(0,472) \approx -0,173$
  $f(x_3) = f(0,558) \approx -0,089$
  $f(x_4) = f(0,644) \approx 0,001$
  $f(x_5) = f(0,730) \approx 0,094$
  $f(x_6) = f(0,816) \approx 0,189$
  $f(x_7) = f(0,902) \approx 0,278$
- Simpson's Rule $= \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + 2f(x_6) + f(x_7)]$
- Subtitusi nilai $= \frac{0,086}{3}[-0,308 + 4(-0,247) + 2(0,173) + 4(-0,089) + 2(0,001) + 4(0,094) + 2(0,189) + 0,278]$
  $\approx -0,101$
- Nilai eksak $= f(0,9) - f(0,3)$
  $= 0,9798 - 0,01999$
  $= 0,9598$
- Galat absolut $= 1,0608$
- Galat relatif $= \frac{1,0608}{0,9598} \times 100\ \%$
  $= 1,1\ \%$