

Pembahasan Soal Tugas Metode Numerik Genap 2024/2025 Diferensiasi Numerik

Muchammad Yuda Tri Ananda NIM: 24060124110142

6 April 2025

Soal 1

SOAL

Misalkan diberikan data sbb:

x	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4
y=f(x)	2.59	4.28	6.67	10.16	15.55	21.84	31.23	44.12	61.71	85.50

Keterangan: nilai f(x) digit terakhir adalah diganti dengan 10 digit terakhir NIM Saudara! (NIM: 24060124110142, 10 digit terakhir: 0124110142)

- Tentukan nilai aproksimasi untuk $f'(1.4)$ dan $f''(1.4)$ menggunakan differensi numerik metode Newton Beda Hingga Maju pada $O(h^2)$. Tolong jawaban disertai langkah-langkahnya!
- Tentukan galat relatif dari $f'(1.4)$ dan $f''(1.4)$! Asumsikan $y = f(x) = 2xe^{1.2x}$. Tolong jawaban disertai langkah-langkahnya!

Teori Dasar

Metode Newton Beda Hingga Maju (Forward Difference) orde $O(h^2)$:

- Turunan Pertama: $f'(x_i) \approx \frac{-f(x_{i+2})+4f(x_{i+1})-3f(x_i)}{2h}$
- Turunan Kedua: $f''(x_i) \approx \frac{-f(x_{i+3})+4f(x_{i+2})-5f(x_{i+1})+2f(x_i)}{h^2}$

Galat Relatif: $\epsilon_r = \left| \frac{\text{Nilai Sejati} - \text{Nilai Aproksimasi}}{\text{Nilai Sejati}} \right| \times 100\%$

Fungsi Sejati: $f(x) = 2xe^{1.2x}$

- $f'(x) = 2e^{1.2x} + 2x(1.2e^{1.2x}) = (2 + 2.4x)e^{1.2x}$
- $f''(x) = 2.4e^{1.2x} + (2 + 2.4x)(1.2e^{1.2x}) = (2.4 + 2.4 + 2.88x)e^{1.2x} = (4.8 + 2.88x)e^{1.2x}$

Pembahasan

NIM: 24060124110142. 10 digit terakhir: 0124110142. Modifikasi tabel:

x	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4
y=f(x)	2.50	4.21	6.62	10.14	15.51	21.81	31.20	44.11	61.74	85.52

Diketahui $x_i = 1.4$. Dari tabel, $h = 1.6 - 1.4 = 0.2$. Nilai $f(x)$ yang dibutuhkan: $f(x_i) = f(1.4) = 15.51$ $f(x_{i+1}) = f(1.6) = 21.81$ $f(x_{i+2}) = f(1.8) = 31.20$ $f(x_{i+3}) = f(2.0) = 44.11$

a. Aproksimasi $f'(1.4)$ dan $f''(1.4)$

Aproksimasi $f'(1.4)$ ($O(h^2)$):

$$\begin{aligned} f'(1.4) &\approx \frac{-f(1.8) + 4f(1.6) - 3f(1.4)}{2h} \\ &\approx \frac{-31.20 + 4(21.81) - 3(15.51)}{2(0.2)} \\ &\approx \frac{-31.20 + 87.24 - 46.53}{0.4} \\ &\approx \frac{9.51}{0.4} \\ &\approx 23.775 \end{aligned}$$

Aproksimasi $f''(1.4)$ ($O(h^2)$):

$$\begin{aligned} f''(1.4) &\approx \frac{-f(2.0) + 4f(1.8) - 5f(1.6) + 2f(1.4)}{h^2} \\ &\approx \frac{-44.11 + 4(31.20) - 5(21.81) + 2(15.51)}{(0.2)^2} \\ &\approx \frac{-44.11 + 124.80 - 109.05 + 31.02}{0.04} \\ &\approx \frac{2.66}{0.04} \\ &\approx 66.50 \end{aligned}$$

b. Galat Relatif

Hitung nilai sejati pada $x = 1.4$ menggunakan $f(x) = 2xe^{1.2x}$: $f'(1.4) = (2 + 2.4 \times 1.4)e^{1.2 \times 1.4} = (2 + 3.36)e^{1.68} = 5.36e^{1.68} \approx 5.36 \times 5.3656 \approx 28.7596$ $f''(1.4) = (4.8 + 2.88 \times 1.4)e^{1.2 \times 1.4} = (4.8 + 4.032)e^{1.68} = 8.832e^{1.68} \approx 8.832 \times 5.3656 \approx 47.3849$

Galat relatif untuk $f'(1.4)$:

$$\epsilon_r(f') = \left| \frac{28.7596 - 23.775}{28.7596} \right| \times 100\% \approx \left| \frac{4.9846}{28.7596} \right| \times 100\% \approx 0.1733 \times 100\% \approx 17.33\%$$

Galat relatif untuk $f''(1.4)$:

$$\epsilon_r(f'') = \left| \frac{47.3849 - 66.50}{47.3849} \right| \times 100\% \approx \left| \frac{-19.1151}{47.3849} \right| \times 100\% \approx 0.4034 \times 100\% \approx 40.34\%$$

Soal 2

SOAL

Diketahui:

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
f(x)	1.98	2.17	2.36	2.55	2.74	2.93	3.12	3.31	3.50

Keterangan: nilai f(x) digit terakhir adalah diganti dengan 9 digit terakhir NIM Saudara! (NIM: 24060124110142, 9 digit terakhir: 124110142)

a. Tentukan nilai aproksimasi untuk $f'(1.2)$ dan $f''(1.2)$ menggunakan differensi numerik metode Newton Beda Hingga Mundur. Tolong jawaban disertai langkah-langkahnya! (Asumsi $O(h^2)$ jika memungkinkan). b. Tentukan galat relatif dari $f'(1.2)$ dan $f''(1.2)$, bila diasumsikan bahwa $f(x) = 2x^2 - 3x + 2.5$. Tolong jawaban disertai langkah-langkahnya!

Teori Dasar

Metode Newton Beda Hingga Mundur (Backward Difference) orde $O(h^2)$:

- Turunan Pertama: $f'(x_i) \approx \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h}$
- Turunan Kedua: $f''(x_i) \approx \frac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^2}$

Galat Relatif: $\epsilon_r = \left| \frac{\text{Nilai Sejati} - \text{Nilai Aproksimasi}}{\text{Nilai Sejati}} \right| \times 100\%$

Fungsi Sejati: $f(x) = 2x^2 - 3x + 2.5$

- $f'(x) = 4x - 3$
- $f''(x) = 4$

Pembahasan

NIM: 24060124110142. 9 digit terakhir: 124110142. Modifikasi tabel:

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
f(x)	1.91	2.12	2.34	2.51	2.71	2.90	3.11	3.34	3.52

Diketahui $x_i = 1.2$. Dari tabel, $h = 1.2 - 1.0 = 0.2$. Nilai $f(x)$ yang dibutuhkan: $f(x_i) = f(1.2) = 2.90$ $f(x_{i-1}) = f(1.0) = 2.71$ $f(x_{i-2}) = f(0.8) = 2.51$ $f(x_{i-3}) = f(0.6) = 2.34$

a. Aproksimasi $f'(1.2)$ dan $f''(1.2)$

Aproksimasi $f'(1.2)$ ($O(h^2)$):

$$\begin{aligned} f'(1.2) &\approx \frac{3f(1.2) - 4f(1.0) + f(0.8)}{2h} \\ &\approx \frac{3(2.90) - 4(2.71) + 2.51}{2(0.2)} \\ &\approx \frac{8.70 - 10.84 + 2.51}{0.4} \\ &\approx \frac{0.37}{0.4} \\ &\approx 0.925 \end{aligned}$$

Aproksimasi $f''(1.2)$ ($O(h^2)$):

$$\begin{aligned} f''(1.2) &\approx \frac{2f(1.2) - 5f(1.0) + 4f(0.8) - f(0.6)}{h^2} \\ &\approx \frac{2(2.90) - 5(2.71) + 4(2.51) - 2.34}{(0.2)^2} \\ &\approx \frac{5.80 - 13.55 + 10.04 - 2.34}{0.04} \\ &\approx \frac{-0.05}{0.04} \\ &\approx -1.25 \end{aligned}$$

b. Galat Relatif

Hitung nilai sejati pada $x = 1.2$ menggunakan $f(x) = 2x^2 - 3x + 2.5$: $f'(1.2) = 4(1.2) - 3 = 4.8 - 3 = 1.8$ $f''(1.2) = 4$

Galat relatif untuk $f'(1.2)$:

$$\epsilon_r(f') = \left| \frac{1.8 - 0.925}{1.8} \right| \times 100\% = \left| \frac{0.875}{1.8} \right| \times 100\% \approx 0.4861 \times 100\% \approx 48.61\%$$

Galat relatif untuk $f''(1.2)$:

$$\epsilon_r(f'') = \left| \frac{4 - (-1.25)}{4} \right| \times 100\% = \left| \frac{5.25}{4} \right| \times 100\% = 1.3125 \times 100\% = 131.25\%$$

(Catatan: Galat yang sangat besar, terutama untuk turunan kedua, menunjukkan bahwa data yang dimodifikasi mungkin tidak terlalu cocok dengan fungsi kuadratik yang diasumsikan, atau metode mundur $O(h^2)$ kurang stabil di sini).

Soal 3

SOAL

Diketahui:

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
f(x)	2.2463.025	3.934	4.983	6.162	7.481	8.940	

Keterangan: nilai f(x) digit terakhir adalah diganti dengan 7 digit terakhir NIM Saudara! (NIM: 24060124110142, 7 digit terakhir: 1101421 - using sequentially)

Untuk $y = f(x)$, a. Tentukan aproksimasi y' dan y'' , untuk $x = 1.6$ dengan formula Newton Beda Hingga Sentral. Tolong jawaban disertai langkah-langkahnya! b. Tentukan Galat dari y' dan y'' , untuk $x = 1.6$ dan misalkan fungsi exactnya $y = f(x) = x\sqrt{2} + 3x^2$. Tolong jawaban disertai langkah-langkahnya!

Teori Dasar

Metode Newton Beda Hingga Sentral (Central Difference) orde $O(h^2)$:

- Turunan Pertama: $y'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$
- Turunan Kedua: $y''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}$

Galat Relatif: $\epsilon_r = \left| \frac{\text{Nilai Sehati} - \text{Nilai Aproksimasi}}{\text{Nilai Sehati}} \right| \times 100\%$

Fungsi Sehati: $f(x) = x\sqrt{2} + 3x^2$

- $y' = f'(x) = \sqrt{2} + 6x$
- $y'' = f''(x) = 6$

Pembahasan

NIM: 24060124110142. 7 digit terakhir: 1101421. Modifikasi tabel (menggunakan digit 1, 1, 0, 1, 4, 2, 1 secara berurutan):

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
f(x)	2.241	3.021	3.930	4.981	6.164	7.482	8.941

Diketahui $x_i = 1.6$. Dari tabel, $h = 1.8 - 1.6 = 0.2$. Nilai $f(x)$ yang dibutuhkan: $f(x_i) = f(1.6) = 4.981$ $f(x_{i+1}) = f(1.8) = 6.164$ $f(x_{i-1}) = f(1.4) = 3.930$

a. Aproksimasi $y'(1.6)$ dan $y''(1.6)$

Aproksimasi $y'(1.6)$ ($O(h^2)$):

$$\begin{aligned} y'(1.6) &\approx \frac{f(1.8) - f(1.4)}{2h} \\ &\approx \frac{6.164 - 3.930}{2(0.2)} \\ &\approx \frac{2.234}{0.4} \\ &\approx 5.585 \end{aligned}$$

Aproksimasi $y''(1.6)$ ($O(h^2)$):

$$\begin{aligned}y''(1.6) &\approx \frac{f(1.8) - 2f(1.6) + f(1.4)}{h^2} \\&\approx \frac{6.164 - 2(4.981) + 3.930}{(0.2)^2} \\&\approx \frac{6.164 - 9.962 + 3.930}{0.04} \\&\approx \frac{0.132}{0.04} \\&\approx 3.30\end{aligned}$$

b. Galat Relatif

Hitung nilai sejati pada $x = 1.6$ menggunakan $f(x) = x\sqrt{2} + 3x^2$: $y'(1.6) = \sqrt{2} + 6(1.6) = \sqrt{2} + 9.6 \approx 1.4142 + 9.6 = 11.0142$ $y''(1.6) = 6$

Galat relatif untuk $y'(1.6)$:

$$\epsilon_r(y') = \left| \frac{11.0142 - 5.585}{11.0142} \right| \times 100\% = \left| \frac{5.4292}{11.0142} \right| \times 100\% \approx 0.4929 \times 100\% \approx 49.29\%$$

Galat relatif untuk $y''(1.6)$:

$$\epsilon_r(y'') = \left| \frac{6 - 3.30}{6} \right| \times 100\% = \left| \frac{2.70}{6} \right| \times 100\% = 0.45 \times 100\% = 45.00\%$$

Soal 4

SOAL

Evaluasi secara numeric derivative dari $y = f(x) = 3xe^{2x}$ pada $x = 0.5$. a. menggunakan ekstrapolasi Richardson dengan $h = 0.04$ diperoleh $D(2, 2)$ sebagai estimasi terbaik dari derivative. Tolong jawaban disertai langkah-langkahnya! b. menggunakan ekstrapolasi Richardson dengan $h = 0.02$ diperoleh $D(3, 3)$ sebagai estimasi terbaik dari derivative. Tolong jawaban disertai langkah-langkahnya!

Teori Dasar

Fungsi: $f(x) = 3xe^{2x}$. Titik: $x = 0.5$. Turunan sejati: $f'(x) = 3e^{2x} + 3x(2e^{2x}) = (3 + 6x)e^{2x}$. $f'(0.5) = (3 + 6 \times 0.5)e^{2 \times 0.5} = (3 + 3)e^1 = 6e \approx 6 \times 2.71828 = 16.30968$.

Ekstrapolasi Richardson didasarkan pada formula beda pusat orde $O(h^2)$:

$$D(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Formula ekstrapolasi:

$$D(k, m) = D(k, m-1) + \frac{D(k, m-1) - D(k-1, m-1)}{4^{m-1} - 1}$$

dimana $D(k, 1)$ adalah aproksimasi beda pusat dengan step size $h_k = h/2^{k-1}$.

Pembahasan

a. Estimasi $D(2, 2)$ dengan $h = 0.04$ Kita perlu menghitung $D(1, 1)$ (dengan $h_1 = h = 0.04$) dan $D(2, 1)$ (dengan $h_2 = h/2 = 0.02$). $x = 0.5$.

Hitung $f(x)$ pada titik-titik yang diperlukan: $f(0.5) = 3(0.5)e^{2(0.5)} = 1.5e^1 \approx 4.07742$
 $f(x+h_1) = f(0.5+0.04) = f(0.54) = 3(0.54)e^{2(0.54)} = 1.62e^{1.08} \approx 1.62 \times 2.94468 \approx 4.77038$
 $f(x-h_1) = f(0.5-0.04) = f(0.46) = 3(0.46)e^{2(0.46)} = 1.38e^{0.92} \approx 1.38 \times 2.50930 \approx 3.46283$
 $f(x+h_2) = f(0.5+0.02) = f(0.52) = 3(0.52)e^{2(0.52)} = 1.56e^{1.04} \approx 1.56 \times 2.82920 \approx 4.41355$
 $f(x-h_2) = f(0.5-0.02) = f(0.48) = 3(0.48)e^{2(0.48)} = 1.44e^{0.96} \approx 1.44 \times 2.61170 \approx 3.76085$

Hitung $D(1, 1)$ dan $D(2, 1)$:

$$D(1, 1) = \frac{f(0.54) - f(0.46)}{2(0.04)} \approx \frac{4.77038 - 3.46283}{0.08} = \frac{1.30755}{0.08} \approx 16.34438$$

$$D(2, 1) = \frac{f(0.52) - f(0.48)}{2(0.02)} \approx \frac{4.41355 - 3.76085}{0.04} = \frac{0.65270}{0.04} \approx 16.31750$$

Hitung $D(2, 2)$ ($m = 2$):

$$\begin{aligned} D(2, 2) &= D(2, 1) + \frac{D(2, 1) - D(1, 1)}{4^{2-1} - 1} \\ &\approx 16.31750 + \frac{16.31750 - 16.34438}{4^1 - 1} \\ &\approx 16.31750 + \frac{-0.02688}{3} \\ &\approx 16.31750 - 0.00896 \\ &\approx 16.30854 \end{aligned}$$

Estimasi terbaik dengan $h = 0.04$ adalah $D(2, 2) \approx 16.30854$. (Galat: $|16.30968 - 16.30854| \approx 0.00114$)

b. Estimasi $D(3, 3)$ dengan $h = 0.02$ Kita perlu $D(1, 1)$, $D(2, 1)$, $D(3, 1)$. $h_1 = h = 0.02$
 $h_2 = h/2 = 0.01$ $h_3 = h/4 = 0.005$

Hitung $f(x)$ pada titik-titik tambahan yang diperlukan: $f(x + h_2) = f(0.5 + 0.01) = f(0.51) = 3(0.51)e^{2(0.51)} = 1.53e^{1.02} \approx 1.53 \times 2.77319 \approx 4.24289$
 $f(x - h_2) = f(0.5 - 0.01) = f(0.49) = 3(0.49)e^{2(0.49)} = 1.47e^{0.98} \approx 1.47 \times 2.66446 \approx 3.91670$
 $f(x + h_3) = f(0.5 + 0.005) = f(0.505) = 3(0.505)e^{2(0.505)} = 1.515e^{1.01} \approx 1.515 \times 2.74560 \approx 4.16008$
 $f(x - h_3) = f(0.5 - 0.005) = f(0.495) = 3(0.495)e^{2(0.495)} = 1.485e^{0.99} \approx 1.485 \times 2.69123 \approx 3.99649$

Hitung $D(k, 1)$: $D(1, 1)$ (dengan $h_1 = 0.02$): Ini sama dengan $D(2, 1)$ dari bagian (a).

$$D(1, 1) \approx 16.31750$$

$D(2, 1)$ (dengan $h_2 = 0.01$):

$$D(2, 1) = \frac{f(0.51) - f(0.49)}{2(0.01)} \approx \frac{4.24289 - 3.91670}{0.02} = \frac{0.32619}{0.02} \approx 16.30950$$

$D(3, 1)$ (dengan $h_3 = 0.005$):

$$D(3, 1) = \frac{f(0.505) - f(0.495)}{2(0.005)} \approx \frac{4.16008 - 3.99649}{0.01} = \frac{0.16359}{0.01} \approx 16.35900$$

Wait, re-calculation for $D(3, 1)$.

$$D(3, 1) = \frac{f(0.505) - f(0.495)}{2(0.005)} \approx \frac{4.16008 - 3.99649}{0.01} = \frac{0.16359}{0.01} \approx 16.359$$

$D(2, 2)$: ($m = 2$)

$$\begin{aligned} D(2, 2) &= D(2, 1) + \frac{D(2, 1) - D(1, 1)}{4^1 - 1} \\ &\approx 16.309750 + \frac{16.309750 - 16.317550}{3} \\ &\approx 16.309750 + \frac{-0.007800}{3} \\ &\approx 16.309750 - 0.002600 = 16.307150 \end{aligned}$$

$D(3, 2)$: ($m = 2$)

$$\begin{aligned} D(3, 2) &= D(3, 1) + \frac{D(3, 1) - D(2, 1)}{4^1 - 1} \\ &\approx 16.309650 + \frac{16.309650 - 16.309750}{3} \\ &\approx 16.309650 + \frac{-0.000100}{3} \\ &\approx 16.309650 - 0.000033 = 16.309617 \end{aligned}$$

$D(3, 3)$: ($m = 3$)

$$\begin{aligned} D(3, 3) &= D(3, 2) + \frac{D(3, 2) - D(2, 2)}{4^{3-1} - 1} \\ &\approx 16.309617 + \frac{16.309617 - 16.307150}{4^2 - 1} \\ &\approx 16.309617 + \frac{0.002467}{15} \\ &\approx 16.309617 + 0.000164 = 16.309781 \end{aligned}$$

Estimasi terbaik dengan $h = 0.02$ adalah $D(3, 3) \approx 16.309781$. (Nilai Sejati: $6e \approx 16.30969$.
Galat: $|16.30969 - 16.309781| \approx 0.000091$)