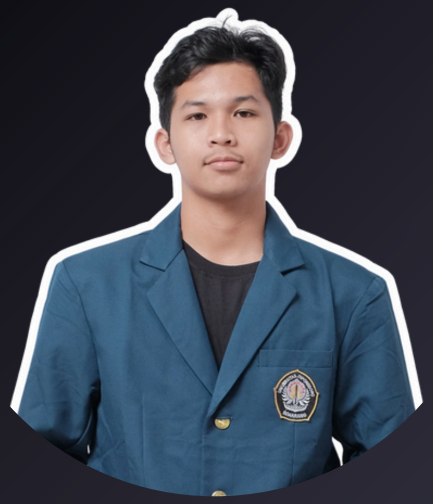
Informatika

Home About Content Others

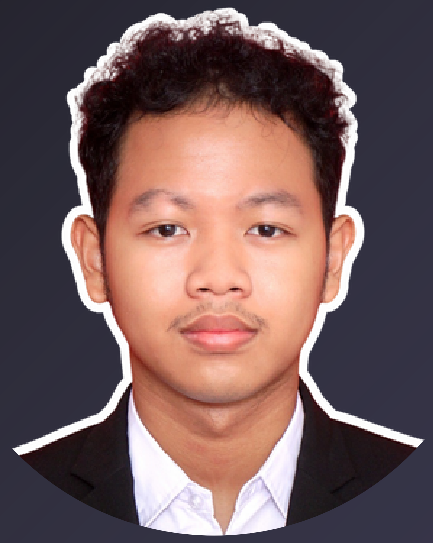
Diferensiasi Numerik

Kelompok 3 - Kelas D

Anggota Kelompok

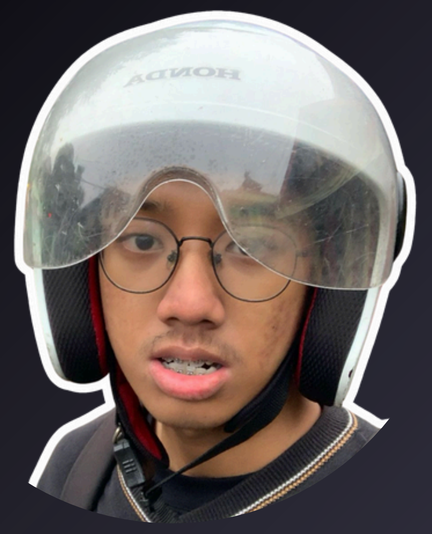


M. Kemal Faza
24060124120013

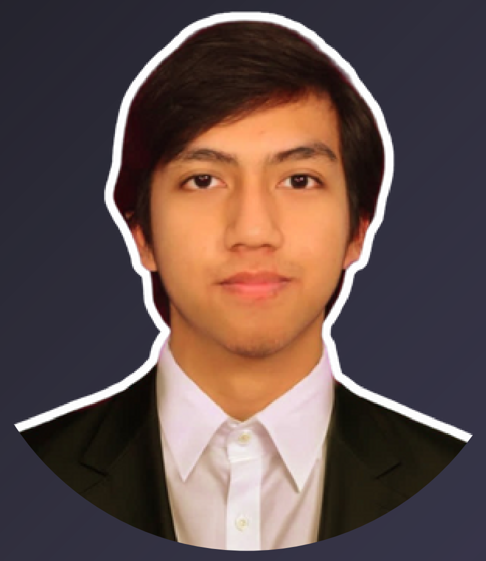


M. Dimas Arya Putra
24060124130062

Anggota Kelompok

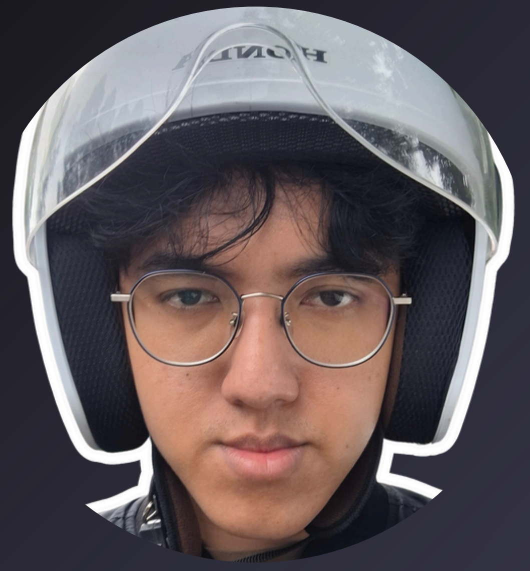


M. Akmal Fazli Riyadi
24060124130123



M. Yuda Tri Ananda
24060124110142

Anggota Kelompok



M. Zaidaan Ardiansyah
24060124140200

Konsep Dasar

Diferensiasi numerik digunakan untuk menghampiri nilai turunan suatu fungsi ketika fungsi tersebut tidak diketahui secara eksplisit atau terlalu kompleks untuk diturunkan secara analitik. Perhitungan ini rentan terhadap error numerik karena melibatkan pengurangan nilai yang hampir sama dan pembagian dengan bilangan kecil (h).

Pendekatan berdasarkan Deret Taylor

- Selisih Maju (Forward Difference): f′(x)≈f(x+h)−f(x)hf'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}f′(x)≈hf(x+h)−f(x) (error O(h))
- Selisih Mundur (Backward Difference): f′(x)≈f(x)−f(x−h)hf'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}f′(x)≈hf(x)−f(x−h) (error O(h))
- Selisih Pusat (Central Difference): f′(x)≈f(x+h)−f(x−h)2hf'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}f′(x)≈2hf(x+h)−f(x−h) (error O(h²))

Pendekatan deret Taylor ini melibatkan perluasan fungsi di sekitar titik tertentu untuk mengidentifikasi suku error dan menghasilkan rumus-hampiran yang sesuai.

Konsep Dasar

Diferensiasi numerik digunakan untuk menghampiri nilai turunan suatu fungsi ketika fungsi tersebut tidak diketahui secara eksplisit atau terlalu kompleks untuk diturunkan secara analitik. Perhitungan ini rentan terhadap error numerik karena melibatkan pengurangan nilai yang hampir sama dan pembagian dengan bilangan kecil (h).

Pendekatan berdasarkan Polinom Interpolasi

Dalam pendekatan ini, data fungsi diinterpolasi dengan polinom (misalnya polinom Newton-Gregory) sehingga didapatkan bentuk polinom yang kemudian diturunkan untuk memperoleh nilai turunan. Pendekatan ini berguna ketika data hanya tersedia dalam bentuk tabel.

Pengembangan Rumus Turunan Lebih Tinggi

Contoh rumus untuk turunan kedua:

- Selisih Pusat (Central Difference): f′′(x)≈f(x+h)−2f(x)+f(x−h)h2f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(xh)}{h^2}f′′(x)≈h2f(x+h)−2f(x)+f(x−h) (error O(h^2))

Rumus untuk turunan ketiga dan keempat melibatkan lebih banyak titik data, misalnya:

- Turunan Ketiga (Central Difference): f′′′(x)≈f(x−2h)−2f(x−h)+2f(x+h)−f(x+2h)2h3f'''(x) \approx \frac{f(x-2h) - 2f(x-h) + 2f(x+h) - f(x+2h)}{2h^3}f′′′(x)≈2h3f(x−2h)−2f(x−h)+2f(x+h)−f(x+2h)
- Turunan Keempat (Central Difference): f(4)(x)≈f(x−2h)−4f(x−h)+6f(x)−4f(x+h)+f(x+2h)h4f^{(4)}(x) \approx \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 6f(x) - 4f(x+h) + f(x+2h)}{h^4}f(4)(x)≈h4f(x−2h)−4f(x−h)+6f(x)−4f(x+h)+f(x+2h)

Ekstrapolasi Richardson

Konsep Dasar:
Ekstrapolasi Richardson merupakan teknik untuk meningkatkan akurasi perhitungan diferensiasi numerik dengan mengeliminasi suku error orde rendah. Misalkan kita mendapatkan hampiran turunan dengan suatu metode (misalnya, selisih pusat) sehingga: D(h)=f′(x0)+C hn+suku error lebih tinggiD(h) = f'(x_0) + C \, h^n + \text{suku error lebih tinggi}D(h)=f′(x0)+Chn+suku error lebih tinggi Jika kita juga menghitung dengan langkah yang berbeda, misalnya 2h2h2h: D(2h)=f′(x0)+C (2h)n+…=f′(x0)+C 2nhn+…D(2h) = f'(x_0) + C\,(2h)^n + \cdots = f'(x_0) + C\,2^n h^n + \cdotsD(2h)=f′(x0)+C(2h)n+…=f′(x0)+C2nhn+…

Ekstrapolasi Richardson

Eliminasi Suku Error:
Untuk mengeliminasi suku error C hnC\, h^nChn, perhatikan selisih kedua hasil: D(2h)-D(h)=C hn(2n-1)D(2h) - D(h) = C\, h^n (2^n - 1)D(2h)-D(h)=Chn(2n-1) Sehingga: C hn=D(2h)-D(h)2n-1C\, h^n = \frac{D(2h) - D(h)}{2^n - 1}Chn=2n-1D(2h)-D(h)
Memperoleh Nilai Turunan Lebih Akurat:
Substitusikan kembali ke persamaan D(h)D(h)D(h): f′(x0)=D(h)-C hn=D(h)-D(2h)-D(h)2n-1f'(x_0) = D(h) - C\, h^n = D(h) - \frac{D(2h) - D(h)}{2^n - 1}f′(x0)=D(h)-Chn=D(h)-2n-1D(2h)-D(h) Atau dengan bentuk lain: f′(x0)=D(h)+D(h)-D(2h)2n-1f'(x_0) = D(h) + \frac{D(h) - D(2h)}{2^n - 1}f′(x0)=D(h)+2n-1D(h)-D(2h)

Ekstrapolasi Richardson

Contoh:

Jika menggunakan rumus selisih pusat orde $O(h^2)$ (n = 2), maka: f′(x0)=D(h)+D(h)-D(2h)3f'(x_0) = D(h) + \frac{D(h) - D(2h)}{3}f′(x0)=D(h)+3D(h)-D(2h) Ekstrapolasi Richardson ini dapat diterapkan berulang (misalnya, dengan nilai error awal $O(h^4)$) untuk meningkatkan akurasi hingga $O(h^6)$ atau lebih tinggi.

Ekstrapolasi Richardson

Langkah-langkah Ekstrapolasi Richardson:

1. Hitung hampiran turunan D(h)D(h)D(h) dengan langkah h.
2. Hitung hampiran turunan D(2h)D(2h)D(2h) dengan langkah 2h.
3. Gunakan rumus: f′(x0)=D(h)+D(h)−D(2h)2n−1f'(x_0) = D(h) + \frac{D(h) - D(2h)}{2^n - 1}f′(x0)=D(h)+2n−1D(h)−D(2h) untuk mendapatkan nilai turunan dengan error yang lebih kecil.
4. Jika diperlukan, lakukan ekstrapolasi tambahan untuk meningkatkan orde error lebih tinggi.

Aplikasi pada Pengolahan Citra

- **Deteksi Tepi dengan Turunan Parsial:**

Turunan parsial ∂f∂x\frac{\partial f}{\partial x}∂x∂f dan ∂f∂y\frac{\partial f}{\partial y}∂y∂f dapat dihampiri secara numerik (misalnya, menggunakan selisih maju atau pusat) untuk mendeteksi perubahan intensitas dalam citra.

- **Operator Laplace:**

Menggunakan turunan kedua untuk mendeteksi tepi yang lebih curam. Operator Laplace didefinisikan sebagai:
∇2f(x,y)=∂2f∂x2+∂2f∂y2\nabla^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}∇2f(x,y)=∂x2∂2f+∂y2∂2f Hampiran numeriknya, misalnya dengan selisih pusat, digunakan untuk mencari titik nol (zerocrossing) yang menunjukkan lokasi tepi.

Rumus Diferensiasi Numerik

Turunan Pertama (f′(x)):

- **Forward Difference (Orde 1):**

f′(x)≈f(x+h)−f(x)hf'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}f′(x)≈hf(x+h)−f(x)

- **Forward Difference (Orde 2):**

f′(x)≈−3f(x)+4f(x+h)−f(x+2h)2hf'(x) \approx \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h}f′(x)≈2h−3f(x)+4f(x+h)−f(x+2h)

- **Backward Difference (Orde 1):**

f′(x)≈f(x)−f(x−h)hf'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}f′(x)≈hf(x)−f(x−h)

- **Backward Difference (Orde 2):**

f′(x)≈3f(x)−4f(x−h)+f(x−2h)2hf'(x) \approx \frac{3f(x) - 4f(x-h) + f(x2h)}{2h}f′(x)≈2h3f(x)−4f(x−h)+f(x−2h)

- **Central Difference (Orde 2):**

f′(x)≈f(x+h)−f(x−h)2hf'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}f′(x)≈2hf(x+h)−f(x−h)

- **Central Difference (Orde 4):**

f′(x)≈−f(x+2h)+8f(x+h)−8f(x−h)+f(x−2h)12hf'(x) \approx \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h}f′(x)≈12h−f(x+2h)+8f(x+h)−8f(x−h)+f(x−2h)

Rumus Diferensiasi Numerik

Turunan Kedua (f″(x)):

- **Forward Difference (Orde 1):**

f″(x)≈f(x+2h)−2f(x+h)+f(x)h2f"(x) \approx \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}f″(x)≈h2f(x+2h)−2f(x+h)+f(x)

- **Backward Difference (Orde 1):**

ff″(x)≈f(x)−2f(x−h)+f(x−2h)h2f"(x) \approx \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x2h)}{h^2}f″(x)≈h2f(x)−2f(x−h)+f(x−2h)

- **Central Difference (Orde 2):**

f″(x)≈f(x+h)−2f(x)+f(x−h)h2f"(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(xh)}{h^2}f″(x)≈h2f(x+h)−2f(x)+f(x−h)

- **Central Difference (Orde 4):**

f″(x)≈−f(x+2h)+16f(x+h)−30f(x)+16f(x−h)−f(x−2h)12h2f"(x) \approx \frac{-f(x+2h) + 16f(x+h) - 30f(x) + 16f(x-h) - f(x2h)}{12h^2}f″(x)≈12h2−f(x+2h)+16f(x+h) −30f(x)+16f(x−h)−f(x−2h)

Turunan Ketiga (f‴(x)):

- **Central Difference (Orde 2):**

f‴(x)≈f(x−2h)−2f(x−h)+2f(x+h) −f(x+2h)2h3f"'(x) \approx \frac{f(x-2h) - 2f(x-h) + 2f(x+h) - f(x+2h)}{2h^3}f‴(x)≈2h3f(x−2h)−2f(x−h)+2f(x+h)−f(x+2h)

Rumus Diferensiasi Numerik

Turunan Keempat ($f^{(4)}(x)$):

- **Central Difference (Orde 2):**

f(4)(x)≈f(x-2h)-4f(x-h)+6f(x) -4f(x+h)+f(x+2h)h4f^{(4)}(x) \approx \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 6f(x) - 4f(x+h) + f(x+2h)}{h^4}f(4)(x)≈h4f(x-2h)-4f(x-h)+6f(x)-4f(x+h)+f(x+2h)

Catatan:

Jika kamu menggunakan metode ekstrapolasi Richardson, pastikan untuk memilih nilai n sesuai dengan orde error dari metode dasar yang kamu gunakan (misalnya, n = 2 untuk metode orde $O(h^2)$). Teknik ini sangat berguna untuk meningkatkan akurasi perhitungan turunan numerik.

Informatika

Home About Content **Others**

Thank You

Kelompok 3 - Kelas D