

Pembahasan Soal Tugas Metode Numerik Genap 2024/2025 Integrasi Numerik

Muchammad Yuda Tri Ananda NIM: 24060124110142

6 April 2025

Soal 1

SOAL

Diketahui kumpulan data sebagai berikut:

x	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8
f(x)	1.000	1.581	2.322	3.244	4.351	5.661	7.180	7.381	7.584	7.782

Keterangan: nilai f(x) digit terakhir adalah diganti dengan 10 digit terakhir NIM Saudara! (NIM: 24060124110142, 10 digit terakhir: 0124110142)

Dengan Metode Simpson 3/8, Tentukan $\int_{1,0}^{2,8} f(x)dx$ dan misalkan fungsi exactnya $y = f(x) = x^2\sqrt{x}$, tentukan galatnya! Tolong diberikan langkah-langkahnya!

Teori Dasar

Metode Simpson 3/8 (Komposit): Digunakan ketika jumlah interval n adalah kelipatan 3.

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{3h}{8}[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+2f(x_3)+3f(x_4)+\dots+2f(x_{n-3})+3f(x_{n-2})+3f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

dimana $h = (x_n - x_0)/n$.

Fungsi Sejati: $f(x) = x^2\sqrt{x} = x^{5/2}$. Integral Sejati: $\int f(x)dx = \int x^{5/2}dx = \frac{x^{7/2}}{7/2} + C = \frac{2}{7}x^{7/2} + C$. $\int_a^b f(x)dx = \left[\frac{2}{7}x^{7/2}\right]_a^b = \frac{2}{7}(b^{7/2} - a^{7/2})$.

Galat Relatif: $\epsilon_r = \left| \frac{\text{Nilai Sejati} - \text{Nilai Aproksimasi}}{\text{Nilai Sejati}} \right| \times 100\%$.

Pembahasan

NIM: 24060124110142. 10 digit terakhir: 0124110142. Modifikasi tabel:

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8
f(x)	1.000	1.581	2.322	3.244	4.351	5.661	7.180	7.381	7.584	7.782

Diketahui $a = x_0 = 1.0$, $b = x_n = 2.8$. Step size $h = 1.2 - 1.0 = 0.2$. Jumlah interval $n = (b - a)/h = (2.8 - 1.0)/0.2 = 1.8/0.2 = 9$. Karena $n = 9$ adalah kelipatan 3, Metode Simpson 3/8 dapat digunakan.

Aproksimasi Integral dengan Simpson 3/8:

$$\begin{aligned}
 \int_{1.0}^{2.8} f(x)dx &\approx \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) \\
 &\quad + 3f(x_4) + 3f(x_5) + 2f(x_6) + 3f(x_7) + 3f(x_8) + f(x_9)] \\
 &\approx \frac{3(0.2)}{8}[f(1.0) + 3f(1.2) + 3f(1.4) + 2f(1.6) \\
 &\quad + 3f(1.8) + 3f(2.0) + 2f(2.2) + 3f(2.4) + 3f(2.6) + f(2.8)] \\
 &\approx \frac{0.6}{8}[1.000 + 3(1.581) + 3(2.322) + 2(3.244) \\
 &\quad + 3(4.351) + 3(5.661) + 2(7.180) + 3(7.381) + 3(7.584) + 7.782] \\
 &\approx 0.075[1.000 + 4.743 + 6.966 + 6.488 \\
 &\quad + 13.053 + 16.983 + 14.360 + 22.143 + 22.752 + 7.782] \\
 &\approx 0.075[116.270] \\
 &\approx 8.72025
 \end{aligned}$$

Nilai Integral Sejati: $f(x) = x^{5/2}$

$$\begin{aligned}
 \int_{1.0}^{2.8} x^{5/2}dx &= \left[\frac{2}{7}x^{7/2} \right]_{1.0}^{2.8} \\
 &= \frac{2}{7}[(2.8)^{7/2} - (1.0)^{7/2}] \\
 &= \frac{2}{7}[(2.8)^{3.5} - 1] \\
 &\approx \frac{2}{7}[41.48936 - 1] \\
 &\approx \frac{2}{7}[40.48936] \\
 &\approx 11.56839
 \end{aligned}$$

Galat Relatif:

$$\epsilon_r = \left| \frac{11.56839 - 8.72025}{11.56839} \right| \times 100\% = \left| \frac{2.84814}{11.56839} \right| \times 100\% \approx 0.2462 \times 100\% \approx 24.62\%$$

Soal 2

SOAL

Diberikan pasangan data berikut:

x	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4
f(x)	2.4962	6.6152	7.242	8.8332	9.9323	10.0313	10.130

Keterangan: nilai f(x) digit terakhir adalah diganti dengan 7 digit terakhir NIM Saudara! (NIM: 24060124110142, 7 digit terakhir: 1101421)

Misalkan fungsi exactnya $y = f(x) = \sqrt{2x+5}$. i. Dengan Metode Trapesium, Tentukan $\int_{0.6}^{2.4} f(x)dx$ dan tentukan galatnya! Tolong diberikan langkah-langkahnya! ii. Dengan Metode Simpson 1/3, Tentukan $\int_{0.6}^{2.4} f(x)dx$ dan tentukan galatnya! Tolong diberikan langkah-langkahnya! iii. Tentukan $\int_{0.6}^{2.4} f(x)dx$, dengan gabungan Metode Trapesium dan Metode Simpson 1/3, Tolong diberikan langkah-langkahnya!

Teori Dasar

Metode Trapesium (Komposit):

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Metode Simpson 1/3 (Komposit): Digunakan ketika jumlah interval n adalah genap.

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Fungsi Sejati: $f(x) = \sqrt{2x+5} = (2x+5)^{1/2}$. Integral Sejati: $\int \sqrt{2x+5}dx$. Misal $u = 2x+5$, $du = 2dx$, $dx = du/2$. $\int u^{1/2} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{3} u^{3/2} + C = \frac{1}{3} (2x+5)^{3/2} + C$. $\int_a^b f(x)dx = \left[\frac{1}{3} (2x+5)^{3/2} \right]_a^b = \frac{1}{3} [(2b+5)^{3/2} - (2a+5)^{3/2}]$.

$$\text{Galat Relatif: } \epsilon_r = \left| \frac{\text{Nilai Sejati} - \text{Nilai Aproksimasi}}{\text{Nilai Sejati}} \right| \times 100\%.$$

Gabungan Metode: Jika n ganjil, gunakan Simpson 1/3 untuk $n-1$ interval pertama (genap) dan Trapesium untuk interval terakhir. Jika n genap, biasanya hanya Simpson 1/3 yang digunakan. Namun, soal meminta "gabungan". Kita bisa interpretasikan sebagai penggunaan Simpson 1/3 pada sebagian interval dan Trapesium pada sisanya. Misal, Simpson 1/3 pada $n-2$ interval pertama dan Trapesium pada 2 interval terakhir.

Pembahasan

NIM: 24060124110142. 7 digit terakhir: 1101421. Modifikasi tabel:

x	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4
f(x)	2.491	2.611	2.720	2.831	2.934	3.032	3.131

Diketahui $a = x_0 = 0.6$, $b = x_n = 2.4$. Step size $h = 0.9 - 0.6 = 0.3$. Jumlah interval $n = (b-a)/h = (2.4 - 0.6)/0.3 = 1.8/0.3 = 6$. Jumlah titik data $= n+1 = 7$.

Nilai Integral Sejati: $f(x) = \sqrt{2x+5}$

$$\begin{aligned}\int_{0.6}^{2.4} \sqrt{2x+5} dx &= \left[\frac{1}{3} (2x+5)^{3/2} \right]_{0.6}^{2.4} \\&= \frac{1}{3} [(2(2.4)+5)^{3/2} - (2(0.6)+5)^{3/2}] \\&= \frac{1}{3} [(4.8+5)^{3/2} - (1.2+5)^{3/2}] \\&= \frac{1}{3} [(9.8)^{1.5} - (6.2)^{1.5}] \\&\approx \frac{1}{3} [30.6816 - 15.4363] \\&\approx \frac{1}{3} [15.2453] \\&\approx 5.08177\end{aligned}$$

i. Metode Trapesium

$$\begin{aligned}\int_{0.6}^{2.4} f(x) dx &\approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + 2f(x_5) + f(x_6)] \\&\approx \frac{0.3}{2} [f(0.6) + 2f(0.9) + 2f(1.2) + 2f(1.5) + 2f(1.8) + 2f(2.1) + f(2.4)] \\&\approx 0.15 [2.491 + 2(2.611) + 2(2.720) + 2(2.831) + 2(2.934) + 2(3.032) + 3.131] \\&\approx 0.15 [2.491 + 5.222 + 5.440 + 5.662 + 5.868 + 6.064 + 3.131] \\&\approx 0.15 [33.878] \\&\approx 5.08170\end{aligned}$$

Galat Relatif Trapesium:

$$\epsilon_r = \left| \frac{5.08177 - 5.08170}{5.08177} \right| \times 100\% = \left| \frac{0.00007}{5.08177} \right| \times 100\% \approx 0.00138\%$$

ii. Metode Simpson 1/3 Karena $n = 6$ (genap), Simpson 1/3 dapat digunakan.

$$\begin{aligned}\int_{0.6}^{2.4} f(x) dx &\approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)] \\&\approx \frac{0.3}{3} [f(0.6) + 4f(0.9) + 2f(1.2) + 4f(1.5) + 2f(1.8) + 4f(2.1) + f(2.4)] \\&\approx 0.1 [2.491 + 4(2.611) + 2(2.720) + 4(2.831) + 2(2.934) + 4(3.032) + 3.131] \\&\approx 0.1 [2.491 + 10.444 + 5.440 + 11.324 + 5.868 + 12.128 + 3.131] \\&\approx 0.1 [50.826] \\&\approx 5.08260\end{aligned}$$

Galat Relatif Simpson 1/3:

$$\epsilon_r = \left| \frac{5.08177 - 5.08260}{5.08177} \right| \times 100\% = \left| \frac{-0.00083}{5.08177} \right| \times 100\% \approx 0.0163\%$$

iii. Gabungan Metode Trapesium dan Simpson 1/3 Karena $n = 6$ (genap), Simpson 1/3 dapat diterapkan untuk seluruh interval. Soal meminta "gabungan". Interpretasi yang mungkin (meskipun tidak standar untuk n genap) adalah menggunakan Simpson 1/3 untuk

$n - 2 = 4$ interval pertama ($x = 0.6$ ke $x = 1.8$) dan Trapezium untuk 2 interval terakhir ($x = 1.8$ ke $x = 2.4$).

Integral bagian 1 (Simpson 1/3, $x = 0.6$ to $x = 1.8$, $n = 4$):

$$\begin{aligned} I_1 &\approx \frac{h}{3}[f(0.6) + 4f(0.9) + 2f(1.2) + 4f(1.5) + f(1.8)] \\ &\approx \frac{0.3}{3}[2.491 + 4(2.611) + 2(2.720) + 4(2.831) + 2.934] \\ &\approx 0.1[2.491 + 10.444 + 5.440 + 11.324 + 2.934] \\ &\approx 0.1[32.633] \\ &\approx 3.2633 \end{aligned}$$

Integral bagian 2 (Trapezium, $x = 1.8$ to $x = 2.4$, $n = 2$):

$$\begin{aligned} I_2 &\approx \frac{h}{2}[f(1.8) + 2f(2.1) + f(2.4)] \\ &\approx \frac{0.3}{2}[2.934 + 2(3.032) + 3.131] \\ &\approx 0.15[2.934 + 6.064 + 3.131] \\ &\approx 0.15[12.129] \\ &\approx 1.81935 \end{aligned}$$

Integral Total Gabungan:

$$I_{total} = I_1 + I_2 \approx 3.2633 + 1.81935 = 5.08265$$

(Catatan: Hasil ini sangat dekat dengan hasil Simpson 1/3 murni, karena metode Simpson jauh lebih dominan dalam kontribusinya di sini. Galat relatif untuk metode gabungan ini akan mirip dengan Simpson 1/3).