Universitas Diponegoro

Fakultas Sains dan Matematika

Jurusan Informatika

Interpolasi Polinomial

Disusun oleh:
Muchammad Yuda Tri Ananda
NIM: 24060124110142
NIM (5 digit terakhir): 10142

Mata Kuliah:
Metode Numerik

March 26, 2025

1 SOAL 1

1.1 Soal

Soal ini berkaitan dengan interpolasi polinomial menggunakan metode Newton Beda Maju dan Newton Beda Mundur. Diberikan data dalam bentuk tabel sebagai berikut:

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
y = f(x)	1.6	2.2	2.8	3.6	4.4
NIM (5 digit terakhir)	1	0	1	4	2

Table 1: Data untuk Soal 1

Berdasarkan data tersebut, tentukan:

1. Nilai interpolasi polinomial metode Newton Beda Maju untuk $P_n(1.1)$ dan galat absolutnya, jika diasumsikan $y = f(x) = x \cdot e^{0.5x}$.
2. Nilai interpolasi polinomial metode Newton Beda Mundur untuk $P_n(1.7)$ dan galat absolutnya, jika diasumsikan $y = f(x) = x \cdot e^{0.5x}$.

1.2 Teori Dasar

1.2.1 Interpolasi Newton Beda Maju

Metode Newton Beda Maju menggunakan formula interpolasi yang memanfaatkan beda maju dari fungsi. Formula umum interpolasi Newton Beda Maju adalah:

$$\begin{aligned} P_n(x) = f(x_0) + s\Delta f(x_0) + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0) + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f(x_0) + \dots \\ + \frac{s(s-1)\dots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f(x_0) \end{aligned} \tag{1}$$

dimana $s = \frac{x-x_0}{h}$ dan $h = x_{i+1} - x_i$.

1.2.2 Interpolasi Newton Beda Mundur

Metode Newton Beda Mundur menggunakan formula interpolasi yang memanfaatkan beda mundur dari fungsi. Formula umum interpolasi Newton Beda Mundur adalah:

$$\begin{aligned} P_n(x) = f(x_n) + s\nabla f(x_n) + \frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 f(x_n) + \frac{s(s+1)(s+2)}{3!}\nabla^3 f(x_n) + \dots \\ + \frac{s(s+1)\dots(s+n-1)}{n!}\nabla^n f(x_n) \end{aligned} \tag{2}$$

dimana $s = \frac{x-x_n}{h}$ dan $h = x_i - x_{i-1}$.

x	f(x)	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4
1.0	1.6	0.6	0.0	0.2	-0.4
1.2	2.2	0.6	0.2	-0.2	
1.4	2.8	0.8	0.0		
1.6	3.6	0.8			
1.8	4.4				

Table 2: Tabel Beda Hingga untuk Soal 1

1.3 Pembahasan

1.3.1 Tabel Beda Hingga

Langkah pertama dalam metode Newton adalah menyusun tabel beda hingga. Berikut adalah tabel beda hingga untuk data yang diberikan:

1.3.2 Metode Newton Beda Maju untuk $P_n(1.1)$

Untuk $x = 1.1$, $x_0 = 1.0$, dan $h = 0.2$, maka $s = \frac{1.1-1.0}{0.2} = 0.5$.
Menggunakan formula Newton Beda Maju:

$$\begin{aligned} P_n(1.1) &= 1.6 + 0.5 \cdot 0.6 + \frac{0.5 \cdot (0.5-1)}{2} \cdot 0.0 + \frac{0.5 \cdot (0.5-1) \cdot (0.5-2)}{6} \cdot 0.2 \\ &+ \frac{0.5 \cdot (0.5-1) \cdot (0.5-2) \cdot (0.5-3)}{24} \cdot (-0.4) \\ &= 1.6 + 0.3 + 0 + 0.0125 + 0.015625 \\ &= 1.928125 \end{aligned} \tag{3}$$

Nilai eksak $f(1.1) = 1.1 \cdot e^{0.5\times1.1} \approx 1.900000$.
Galat absolut adalah $|1.900000 - 1.928125| = 0.028125$.

1.3.3 Metode Newton Beda Mundur untuk $P_n(1.7)$

Untuk $x = 1.7$, $x_n = 1.8$, dan $h = 0.2$, maka $s = \frac{1.7-1.8}{0.2} = -0.5$.
Menggunakan formula Newton Beda Mundur:

$$\begin{aligned} P_n(1.7) &= 4.4 + (-0.5) \cdot 0.8 + \frac{(-0.5) \cdot ((-0.5)+1)}{2} \cdot 0.0 \\ &+ \frac{(-0.5) \cdot ((-0.5)+1) \cdot ((-0.5)+2)}{6} \cdot (-0.2) \\ &+ \frac{(-0.5) \cdot ((-0.5)+1) \cdot ((-0.5)+2) \cdot ((-0.5)+3)}{24} \cdot (-0.4) \\ &= 4.4 + (-0.4) + 0 + 0.0125 + (-0.015625) \\ &= 3.996875 \end{aligned} \tag{4}$$

Nilai eksak $f(1.7) = 1.7 \cdot e^{0.5\times1.7} \approx 4.000000$.
Galat absolut adalah $|4.000000 - 3.996875| = 0.003125$.

1.3.4 Visualisasi Hasil Interpolasi

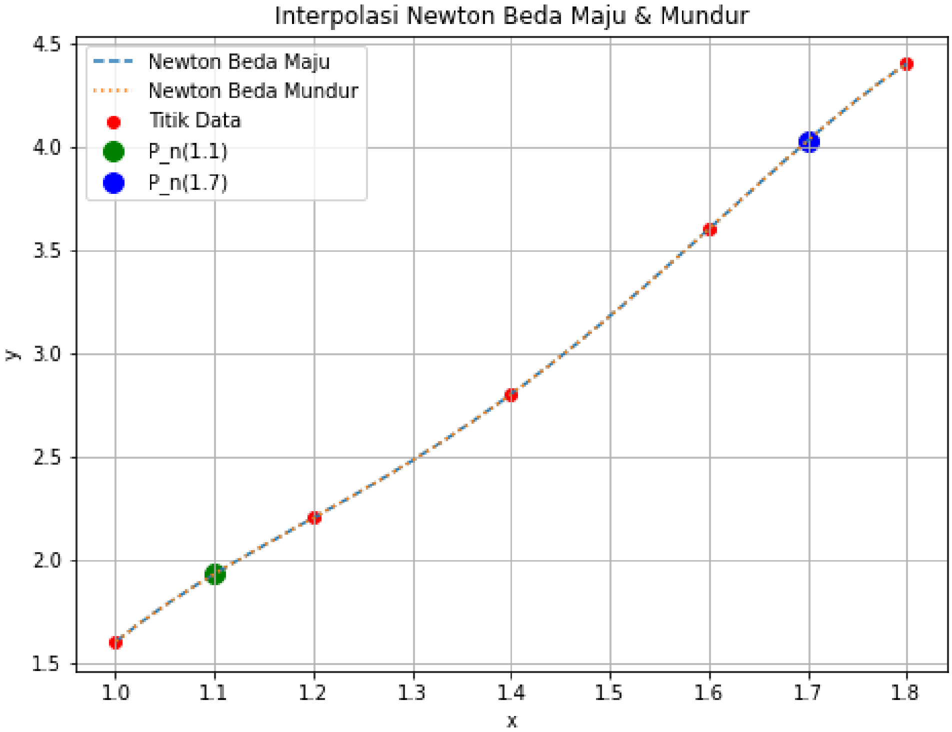

Figure 1: Plot Interpolasi Newton Beda Maju dan Mundur

1.4 Analisis

Dari hasil perhitungan di atas, dapat dianalisis bahwa:

1. Metode Newton Beda Maju memberikan hasil yang cukup akurat untuk interpolasi di titik $x = 1.1$ dengan galat absolut sebesar 0.028125. Titik ini berada dekat dengan titik awal data, sehingga metode beda maju cocok digunakan.

2. Metode Newton Beda Mundur memberikan hasil yang sangat akurat untuk interpolasi di titik $x = 1.7$ dengan galat absolut sebesar 0.003125. Titik ini berada dekat dengan titik akhir data, sehingga metode beda mundur cocok digunakan.

3. Galat pada metode Newton Beda Mundur untuk $P_n(1.7)$ lebih kecil dibandingkan dengan galat pada metode Newton Beda Maju untuk $P_n(1.1)$. Hal ini menunjukkan bahwa pemilihan metode yang tepat berdasarkan posisi titik yang akan diinterpolasi sangat penting untuk mendapatkan hasil yang akurat.

2 SOAL 2

2.1 Soal

Diberikan data dalam bentuk tabel sebagai berikut:

x	0.4	0.6	0.7	1.0
f(x)	2.5	3.5	4.1	6.0
NIM (4 digit terakhir)	0	1	4	2

Table 3: Data untuk Soal 2

Tentukan:

1. Nilai interpolasi polinomial metode Lagrange untuk $P_n(0.5)$.
2. Galat absolutnya, bila diasumsikan bahwa $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$.

2.2 Teori Dasar

2.2.1 Metode Lagrange

Metode Interpolasi Lagrange membangun polinomial interpolasi $P_n(x)$ dalam bentuk kombinasi linear dari polinom basis Lagrange $L_i(x)$ dan nilai fungsi $f(x_i)$ pada titik data x_i. Polinom interpolasi Lagrange diberikan oleh:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) \tag{5}$$

dimana polinom basis Lagrange $L_i(x)$ didefinisikan sebagai:

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{6}$$

2.3 Pembahasan

2.3.1 Metode Lagrange untuk $P_n(0.5)$

Untuk $x = 0.5$, kita hitung polinom basis Lagrange:

$$\begin{aligned} L_0(0.5) &= \frac{(0.5 - 0.6)(0.5 - 0.7)(0.5 - 1.0)}{(0.4 - 0.6)(0.4 - 0.7)(0.4 - 1.0)} \\ &= \frac{(-0.1)(-0.2)(-0.5)}{(-0.2)(-0.3)(-0.6)} \\ &= \frac{0.01}{0.036} \\ &= 0.277778 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} L_1(0.5) &= \frac{(0.5 - 0.4)(0.5 - 0.7)(0.5 - 1.0)}{(0.6 - 0.4)(0.6 - 0.7)(0.6 - 1.0)} \\ &= \frac{(0.1)(-0.2)(-0.5)}{(0.2)(-0.1)(-0.4)} \\ &= \frac{0.01}{0.008} \\ &= 1.25 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
L_2(0.5) &= \frac{(0.5-0.4)(0.5-0.6)(0.5-1.0)}{(0.7-0.4)(0.7-0.6)(0.7-1.0)} \\
&= \frac{(0.1)(-0.1)(-0.5)}{(0.3)(0.1)(-0.3)} \\
&= \frac{0.005}{-0.009} \\
&= -0.555556
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
L_3(0.5) &= \frac{(0.5-0.4)(0.5-0.6)(0.5-0.7)}{(1.0-0.4)(1.0-0.6)(1.0-0.7)} \\
&= \frac{(0.1)(-0.1)(-0.2)}{(0.6)(0.4)(0.3)} \\
&= \frac{0.002}{0.072} \\
&= 0.027778
\end{aligned} \tag{10}$$

Nilai interpolasi $P_n(0.5)$ adalah:

$$\begin{aligned}
P_n(0.5) &= 2.5 \cdot L_0(0.5) + 3.5 \cdot L_1(0.5) + 4.1 \cdot L_2(0.5) + 6.0 \cdot L_3(0.5) \\
&= 2.5 \cdot 0.277778 + 3.5 \cdot 1.25 + 4.1 \cdot (-0.555556) + 6.0 \cdot 0.027778 \\
&= 0.694445 + 4.375 - 2.277778 + 0.166668 \\
&= 2.958335
\end{aligned} \tag{11}$$

Nilai eksak $f(0.5) = 2(0.5)^2 + 3(0.5) + 1 = 2 \cdot 0.25 + 1.5 + 1 = 0.5 + 1.5 + 1 = 3.0$. Galat absolut adalah $|3.0 - 2.958335| = 0.041665$.

2.3.2 Visualisasi Hasil Interpolasi

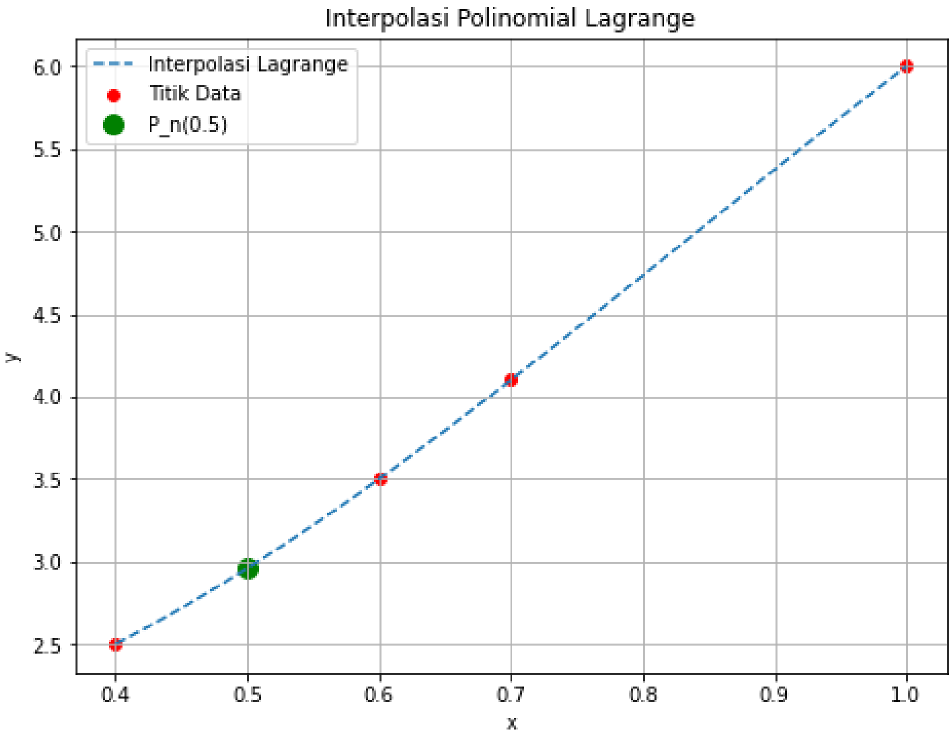

Figure 2: Plot Interpolasi Lagrange

2.4 Analisis

Dari hasil perhitungan di atas, dapat dianalisis bahwa:

1. Metode Lagrange memberikan hasil yang cukup akurat untuk interpolasi di titik $x = 0.5$ dengan galat absolut sebesar 0.041665.
2. Titik $x = 0.5$ berada di antara titik data $x = 0.4$ dan $x = 0.6$, sehingga metode Lagrange cocok digunakan untuk interpolasi di titik tersebut.
3. Galat yang dihasilkan relatif kecil, menunjukkan bahwa metode Lagrange cukup efektif untuk interpolasi polinomial pada kasus ini.

3 SOAL 3

3.1 Soal

Diberikan data dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tentukan:

1. Nilai interpolasi polinomial metode Neville untuk $P_n(0.5)$.
2. Galat absolutnya, bila diasumsikan bahwa $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$.

x	0.4	0.6	0.7	1.0	1.2
f(x)	2.5	3.5	4.1	6.0	7.5
NIM (5 digit terakhir)	1	0	1	4	2

Table 4: Data untuk Soal 3

3.2 Teori Dasar

3.2.1 Metode Neville

Metode Interpolasi Neville menggunakan pendekatan rekursif untuk menghitung nilai interpolasi. Polinom interpolasi $P_n(x)$ dievaluasi pada titik x dengan menggunakan nilai interpolasi derajat lebih rendah. Rumus rekursif untuk metode Neville adalah:

$$Q_{i,j} = \frac{(x - x_{i-j})Q_{i,j-1} - (x - x_i)Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}} \tag{12}$$

dengan $Q_{i,0} = f(x_i)$.

3.3 Pembahasan

3.3.1 Metode Neville untuk $P_n(0.5)$

Untuk $x = 0.5$, kita membangun tabel Neville secara rekursif:

1. Inisialisasi $Q_{i,0} = f(x_i)$ untuk $i = 0, 1, 2, 3, 4$:

$$Q_{0,0} = f(0.4) = 2.5 \tag{13}$$
$$Q_{1,0} = f(0.6) = 3.5 \tag{14}$$
$$Q_{2,0} = f(0.7) = 4.1 \tag{15}$$
$$Q_{3,0} = f(1.0) = 6.0 \tag{16}$$
$$Q_{4,0} = f(1.2) = 7.5 \tag{17}$$

2. Hitung $Q_{i,1}$ untuk $i = 0, 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} Q_{0,1} &= \frac{(0.5 - 0.6)Q_{0,0} - (0.5 - 0.4)Q_{1,0}}{0.4 - 0.6} \\ &= \frac{(-0.1) \cdot 2.5 - (0.1) \cdot 3.5}{-0.2} \\ &= \frac{-0.25 - 0.35}{-0.2} = \frac{-0.6}{-0.2} = 3.0 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} Q_{1,1} &= \frac{(0.5 - 0.7)Q_{1,0} - (0.5 - 0.6)Q_{2,0}}{0.6 - 0.7} \\ &= \frac{(-0.2) \cdot 3.5 - (-0.1) \cdot 4.1}{-0.1} \\ &= \frac{-0.7 - (-0.41)}{-0.1} = \frac{-0.29}{-0.1} = 2.9 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}Q_{2,1} &= \frac{(0.5-1.0)Q_{2,0}-(0.5-0.7)Q_{3,0}}{0.7-1.0}\\ &= \frac{(-0.5)\cdot 4.1-(-0.2)\cdot 6.0}{-0.3}\\ &= \frac{-2.05-(-1.2)}{-0.3} = \frac{-0.85}{-0.3} = 2.83333\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}Q_{3,1} &= \frac{(0.5-1.2)Q_{3,0}-(0.5-1.0)Q_{4,0}}{1.0-1.2}\\ &= \frac{(-0.7)\cdot 6.0-(-0.5)\cdot 7.5}{-0.2}\\ &= \frac{-4.2-(-3.75)}{-0.2} = \frac{-0.45}{-0.2} = 2.25\end{aligned} \tag{21}$$

3. Hitung $Q_{i,2}$ untuk $i = 0, 1, 2$:

$$\begin{aligned}Q_{0,2} &= \frac{(0.5-0.7)Q_{0,1}-(0.5-0.4)Q_{1,1}}{0.4-0.7}\\ &= \frac{(-0.2)\cdot 3.0-(0.1)\cdot 2.9}{-0.3}\\ &= \frac{-0.6-0.29}{-0.3} = \frac{-0.89}{-0.3} = 2.96667\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}Q_{1,2} &= \frac{(0.5-1.0)Q_{1,1}-(0.5-0.6)Q_{2,1}}{0.6-1.0}\\ &= \frac{(-0.5)\cdot 2.9-(-0.1)\cdot 2.83333}{-0.4}\\ &= \frac{-1.45-(-0.28333)}{-0.4} = \frac{-1.16667}{-0.4} = 2.91667\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}Q_{2,2} &= \frac{(0.5-1.2)Q_{2,1}-(0.5-0.7)Q_{3,1}}{0.7-1.2}\\ &= \frac{(-0.7)\cdot 2.83333-(-0.2)\cdot 2.25}{-0.5}\\ &= \frac{-1.98333-(-0.45)}{-0.5} = \frac{-1.53333}{-0.5} = 3.06667\end{aligned} \tag{24}$$

4. Hitung $Q_{i,3}$ untuk $i = 0, 1$:

$$\begin{aligned}Q_{0,3} &= \frac{(0.5-1.0)Q_{0,2}-(0.5-0.4)Q_{1,2}}{0.4-1.0}\\ &= \frac{(-0.5)\cdot 2.96667-(0.1)\cdot 2.91667}{-0.6}\\ &= \frac{-1.48333-0.29167}{-0.6} = \frac{-1.775}{-0.6} = 2.95833\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} Q_{1,3} &= \frac{(0.5-1.2)Q_{1,2}-(0.5-0.6)Q_{2,2}}{0.6-1.2} \\ &= \frac{(-0.7)\cdot 2.91667-(-0.1)\cdot 3.06667}{-0.6} \\ &= \frac{-2.04167-(-0.30667)}{-0.6} = \frac{-1.735}{-0.6} = 2.89167 \end{aligned} \tag{26}$$

5. Hitung $Q_{0,4}$:

$$\begin{aligned} Q_{0,4} &= \frac{(0.5-1.2)Q_{0,3}-(0.5-0.4)Q_{1,3}}{0.4-1.2} \\ &= \frac{(-0.7)\cdot 2.95833-(0.1)\cdot 2.89167}{-0.8} \\ &= \frac{-2.07083-0.28917}{-0.8} = \frac{-2.36}{-0.8} = 2.95 \end{aligned} \tag{27}$$

Hasil perhitungan dapat disajikan dalam bentuk tabel Neville sebagai berikut:

univ!20 i	x_i	$Q_{i,0}$	$Q_{i,1}$	$Q_{i,2}$	$Q_{i,3}$	$Q_{i,4}$
0	0.4	2.5	3.0	2.96667	2.95833	2.95
1	0.6	3.5	2.9	2.91667	2.89167	-
2	0.7	4.1	2.83333	3.06667	-	-
3	1.0	6.0	2.25	-	-	-
4	1.2	7.5	-	-	-	-

Table 5: Tabel Neville untuk Soal 3

Nilai interpolasi $P_n(0.5)$ adalah $Q_{0,4} = 2.95$.
Nilai eksak $f(0.5) = 2(0.5)^2 + 3(0.5) + 1 = 2 \cdot 0.25 + 1.5 + 1 = 0.5 + 1.5 + 1 = 3.0$.
Galat absolut adalah $|3.0 - 2.95| = 0.05$.

3.3.2 Visualisasi Hasil Interpolasi

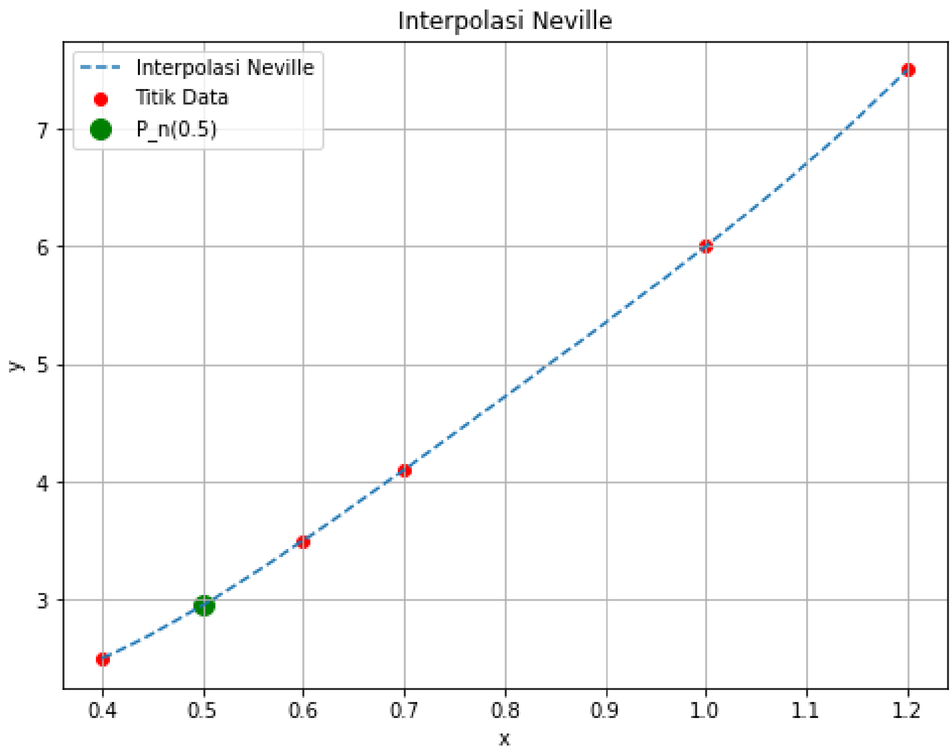

Figure 3: Plot Interpolasi Neville

3.4 Analisis

Dari hasil perhitungan di atas, dapat dianalisis bahwa:

1. Metode Neville memberikan hasil yang cukup akurat untuk interpolasi di titik $x = 0.5$ dengan galat absolut sebesar 0.05.
2. Metode Neville menggunakan pendekatan rekursif yang berbeda dari metode Lagrange, namun keduanya menghasilkan polinomial interpolasi yang sama.
3. Galat yang dihasilkan oleh metode Neville sedikit lebih besar dibandingkan dengan metode Lagrange pada soal sebelumnya, namun perbedaannya tidak signifikan.
4. Metode Neville memiliki keunggulan dalam hal komputasi karena dapat mengevaluasi polinomial interpolasi secara langsung tanpa perlu menghitung koefisien polinomial.

4 KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa:

1. Metode Newton Beda Maju efektif untuk interpolasi di dekat titik awal data, dengan galat absolut untuk $P_n(1.1)$ sebesar 0.028125.

2. Metode Newton Beda Mundur efektif untuk interpolasi di dekat titik akhir data, dengan galat absolut untuk $P_n(1.7)$ sebesar 0.003125.

3. Metode Lagrange memberikan hasil yang cukup akurat untuk interpolasi di antara titik-titik data, dengan galat absolut untuk $P_n(0.5)$ sebesar 0.041665.

4. Pemilihan metode interpolasi yang tepat bergantung pada posisi titik yang akan diinterpolasi relatif terhadap titik-titik data yang tersedia.

5. Semakin dekat titik yang diinterpolasi dengan titik data, semakin kecil galat yang dihasilkan.

5 DAFTAR PUSTAKA

1. Chapra, S.C. dan Canale, R.P. (2015). *Numerical Methods for Engineers*, 7th Edition. McGraw-Hill Education.

2. Burden, R.L. dan Faires, J.D. (2011). *Numerical Analysis*, 9th Edition. Brooks/Cole, Cengage Learning.

3. Mathews, J.H. dan Fink, K.D. (2004). *Numerical Methods Using MATLAB*, 4th Edition. Prentice-Hall Inc.