CCC model の soundness に関する補足

myuon

2018年5月16日

次のような型を持つ simply-typed lambda calculus を考える. Σ を signature set とする.

$$A ::= 1 \mid A_1 \times A_2 \mid A_1 \to A_2 \mid b \qquad (b \in \Sigma)$$

このようなラムダ計算の CCC model を構成する. このとき次の soundness を示すことを考える.

定理 1 (Soundness for CCC models). \mathcal{C} を CCC とする. このとき, $\Gamma \vdash M = N : A$ であれば $\mathcal{C}[\Gamma \vdash M : A] = \mathcal{C}[\Gamma \vdash N : A]$.

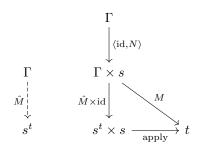
β変換に関する部分のみ示す.

証明. 次のケースを考える.

$$\frac{\Gamma, x: s \vdash M: t \qquad \Gamma \vdash N: s}{\Gamma \vdash (\lambda x: s.M)N = M[N/x]: t} (\beta)$$

等式の左辺は CCC model の定義を思い出すと次のように変形できる.

$$\begin{split} \llbracket \Gamma \vdash (\lambda x : s.M)N : t \rrbracket &= \text{apply} \circ \langle \text{curry} \left(\llbracket \Gamma, x : s \vdash M : t \rrbracket \right), \llbracket \Gamma \vdash N : s \rrbracket \rangle \\ &= \text{apply} \circ \left(\text{curry} \left(\llbracket \Gamma, x : s \vdash M : t \rrbracket \right) \times \text{id} \right) \circ \langle \text{id}, \llbracket \Gamma \vdash N : s \rrbracket \rangle \\ &= \llbracket \Gamma, x : s \vdash M : t \rrbracket \circ \langle \text{id}, \llbracket \Gamma \vdash N : s \rrbracket \rangle \end{split}$$



よって、 $[\![\Gamma,x:s\vdash M:t]\!]\circ\langle\mathrm{id},[\![\Gamma\vdash N:s]\!]\rangle=[\![\Gamma\vdash M[N/x]:t]\!]$ を示せばよいことがわかる. 証明は次の補題による.

補題 2. $\llbracket\Gamma \vdash M\lceil N/x \rceil : t \rrbracket = \llbracket\Gamma, x : s \vdash M : t \rrbracket \circ \langle \operatorname{id}, \llbracket\Gamma \vdash N : s \rrbracket \rangle$.

証明. M についての induction.

ケース 1. $M\equiv \lambda y:u.\ M',\ t\equiv u \to v$ のとき. au_k^n を直積 $\prod A_i$ の (k,k+1) 番目を swap する射

(積自体はいずれも左結合として考える)とする.

(LHS) $= \llbracket\Gamma \vdash \lambda y : u. \ M'[N/x] : u \to v \rrbracket$ $= \operatorname{curry}\left(\llbracket\Gamma, y : u \vdash M'[N/x] : v \rrbracket\right)$ $= \operatorname{curry}\left(\llbracket\Gamma, y : u, x : s \vdash M' : v \rrbracket \circ \langle \operatorname{id}, \llbracket\Gamma, y : u \vdash N : s \rrbracket\rangle\right)$ $= \operatorname{curry}\left(\llbracket\Gamma, y : u, x : s \vdash M' : v \rrbracket \circ \langle \operatorname{id}, \llbracket\Gamma \vdash N : s \rrbracket \circ \operatorname{fst}\rangle\right)$ $= \operatorname{curry}\left(\llbracket\Gamma, x : s, y : u \vdash M' : v \rrbracket \circ \langle \operatorname{id}, \llbracket\Gamma \vdash N : s \rrbracket \circ \operatorname{fst}\rangle\right)$ $= \operatorname{curry}\left(\llbracket\Gamma, x : s, y : u \vdash M' : v \rrbracket \circ \langle \operatorname{id}, \llbracket\Gamma \vdash N : s \rrbracket\rangle \times \operatorname{id}\right)$ $= \operatorname{curry}\left(\llbracket\Gamma, x : s, y : u \vdash M' : v \rrbracket \circ \langle \operatorname{id}, \llbracket\Gamma \vdash N : s \rrbracket\rangle \times \operatorname{id}\right)$ $= \operatorname{curry}\left(\llbracket\Gamma, x : s, y : u \vdash M' : v \rrbracket\right) \circ \langle \operatorname{id}, \llbracket\Gamma \vdash N : s \rrbracket\rangle$ $= \llbracket\Gamma, x : s \vdash \lambda y : u. \ M' : u \to v \rrbracket \circ \langle \operatorname{id}, \llbracket\Gamma \vdash N : s \rrbracket\rangle$ $(\overline{\mathsf{ME}} \ 4 \ \mathbb{C} \ \mathbb{C} \ \mathbb{C})$

ケース 2. 他のケースは省略.

= (RHS)

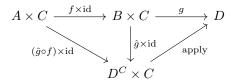
補題 3. $g: A \to C$ とする. $\tau_2^3 \circ \langle \operatorname{id}, g \circ \operatorname{fst} \rangle = \langle \operatorname{id}, g \rangle \times \operatorname{id}$ である.

 $A \times B \xrightarrow{\langle \mathrm{id}, g \rangle \times \mathrm{id}} A \times C \times B$ $A \times B \times C$

証明. A 及び B は不変であり, C は両辺ともに g によって引き起こされることからわかる.

補題 **4.** $f: A \to B$, $g: B \times C \to D$ に対し, $\operatorname{curry}(g) \circ f = \operatorname{curry}(g \circ (f \times \operatorname{id}))$.

証明. 次の図式を考える. 左の三角は可換である. 右の三角は exponential の定義により可換である.



全体の可換性により、apply \circ ((curry(g) \circ f) \times id) = g \circ (f \times id) が成り立つ. さて、exponential の一意性により、任意の g : $B \times C \to D$ に対し、g' : $B \to D^C$ であって g = apply \circ ($g' \times id$) となるような g' がただ一つ存在する. このことを用いると、apply \circ ((curry(g) \circ f) \times id) = apply \circ (curry(g \circ (f \times id)) \times id) を示せれば欲しい等式が得られることがわかる. このことと、apply \circ (curry(g) \times id) = g とを合わせれば証明が完了する.