simply-typed λ-calculus

myuon

2017 年 10 月 13 日

目次

概要

型と項の関係は, 集合とそこに属する元の関係に似ている. 型を導入することで, 項がどんな集合に属しているかを表現することができる. 型なしラムダ計算の項は自由生成されていたのでどのような項でも許されていたが, これには通常の関数としての意味付けができないような異常な項も含まれている (例えば $f(f)$ など). 型システムを導入することの利点の 1 つとして, このような異常な項を含まない正常な項だけを考えることで型付きラムダ計算は正規化性などの “よい” 性質をもつようにできる.

第 I 部
Syntax

型付き λ 計算の中で最も単純なものが単純型付き λ 計算 $(\lambda^{\to})$ である.

1 Types

定義 1 (型)**.** 単純型付き λ 計算の型を, 次のように定義する. これを $\mathrm{Typ}(\lambda^{\to})$ などとかく.

$$\alpha ::= v \mid \alpha_1 \to \alpha_2$$

ただし v とは型変数であり, ここでは適当な型変数の集合 V_t が与えられているとする.

$\alpha_1 \to \alpha_2$ のことを**関数型 (function type)** などとよぶ. これはまさに関数を表現するためのものであり, 写像 $A \to B$ などと書いたりするのとちょうど同じことを表していると思えばよい.

さて, 項が型に属している $(x \in A)$ ことを表明する関係を定義する.

定義 2 (型判断 (typing judgement))**.** 関係 $- \vdash - : - \subseteq (V_t \times \mathrm{Typ}) \times \Lambda \times \mathrm{Typ}$ を以下のように定義する.

$$(\mathrm{var})\ \frac{x : A \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : A} \qquad (\mathrm{abs})\ \frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x.M : A \to B} \qquad (\mathrm{app})\ \frac{\Gamma \vdash M_1 : A \to B \qquad \Gamma \vdash M_2 : A}{\Gamma \vdash M_1 M_2 : B}$$

図 1 simply-typed typing rules

- Γ を**文脈 (context)** と呼ぶ.
  - 関係 $\Gamma \vdash M : A$ が成り立っているとき, Γ の下で M の型は A である, などという.
  - 項 M に対して judgement $\Gamma \vdash M : A$ が存在する時, M は **well-typed であるという**.

補題 3 (coherence)**.**

1. $\Gamma \vdash x : A$ ならば $x : A \in \Gamma$.
   (a) $\Gamma \vdash \lambda x.M : A$ ならば, A_1, A_2 が存在して, $A = A_1 \to A_2$ かつ $\Gamma, x : A_1 \vdash M : A_2$.
   (b) $\Gamma \vdash M_1 M_2 : B$ ならば, A が存在して, $\Gamma \vdash M_1 : A \to B$ かつ $\Gamma \vdash M_2 : A$.

Proof. typing judgement の導出に関する場合分けにより明らか. □

2 Simple Extension

2.1 Ground Type

$\lambda^{\to}$ の型以外に, 基本となる組み込みの型を追加する. このような型を base type や ground type とよぶ.

例えば boolean expression を追加する場合は, 型と項を次のように拡張する.

$$\begin{aligned} \alpha &::= \ldots \mid \mathrm{bool} \\ M &::= \ldots \mid \mathrm{true} \mid \mathrm{false} \mid \mathrm{if}\ M\ \mathrm{then}\ M\ \mathrm{else}\ M \end{aligned}$$

2.2 Product Type

product type はタプルあるいは組のことである.

定義 4 (product type extension)**.** 型と項を次のように拡張する.

$$\begin{aligned} \alpha &::= \ldots \mid \alpha_1 \times \alpha_2 \\ M &::= \ldots \mid \mathrm{proj}_i M \mid \langle M_1, M_2 \rangle \end{aligned}$$

それに付随して, いくつかの typing rule が追加される (図 2).

$$\text{(pair)}\ \frac{\Gamma \vdash M_1 : A_1 \qquad \Gamma \vdash M_2 : A_2}{\Gamma \vdash \langle M_1, M_2 \rangle : A_1 \times A_2} \qquad\qquad \text{(proj)}\ \frac{\Gamma \vdash M : A_1 \times A_2}{\Gamma \vdash \mathrm{proj}_i M : A_i \quad (i = 1, 2)}$$

図 2　product typing rules

2.3 Unit Type

unit type は 1 点集合のようなものである. product type を入れる時には入れることが多い.

定義 5 (unit type extension)**.** 型と項を次のように拡張する.

$$\begin{aligned} \alpha &::= \ldots \mid 1 \\ M &::= \ldots \mid \star \end{aligned}$$

あるいは, unit type を `Unit`, 唯一の term を `()` などとかくこともある.

$$\frac{}{\Gamma \vdash \star : 1}$$

図 3　unit typing rules

2.4 Abbreviations

- $\lambda^{\rightarrow}$ の unit, product type extension を $\lambda^{\times,1}$ とかく.

第 II 部
Semantics

3 Equational Theory

ラムダ項同士の等式を定義しておく. 以下, calculus $\lambda^{\rightarrow}$ や $\lambda^{\times,1}$ と言ったらこのような等式が使えるもの (judgement はこれらの等式で割った同値類で考えている) とする.

3.1 $\lambda^{\rightarrow}$

定義 6. $\beta\eta$-equivalence から得られる $\lambda^{\rightarrow}$ の equational theory を, $\lambda^{\rightarrow}$ の標準的な equational theory$\mathcal{E}_{\lambda^{\rightarrow}}$ として採用する. 書き下すと図 4 のような規則によって equational theory が定まる. た

だしここでは, 出現する項が well-typed であることなどは省略してかいた.

$$(\beta)\ \frac{}{\Gamma \vdash (\lambda x.M)N = M[N/x] : B} \qquad (\eta)\ \frac{x \notin \mathrm{FV}(M)}{\Gamma \vdash \lambda x.Mx = M : A \to B}$$

図 4　equational theory of $\mathcal{E}_{\lambda\to}$

preliminaries でも言ったように, (refl), (sym), (trans), (subst) の 4 ルールはすでに含まれているものとして扱う.

3.2　$\lambda^{\times,1}$

定義 7. $\lambda^{\times,1}$ の標準的な equational theory$\mathcal{E}_{\lambda^{\times,1}}$ を, $\mathcal{E}_{\lambda\to}$ に加え次の rule からなるものとする.

$$(\mathrm{prodU})\ \frac{}{\Gamma \vdash \langle \mathrm{proj}_1 M, \mathrm{proj}_2 M\rangle = M : A \times B} \qquad (\mathrm{prodC})\ \frac{}{\Gamma \vdash \mathrm{proj}_i\langle M_1, M_2\rangle = M_i : A_i}$$

$$(\mathrm{unitU})\ \frac{}{\Gamma \vdash M = \star : 1}$$

図 5　equational theory of $\mathcal{E}_{\lambda^{\times,1}}$

4　Categorical Semantics

$\lambda^{\times,1}$ の categorical semantics を与えよう.

4.1　Syntactic category

定義 8 (syntactic category)**.** 次のようにして定まる category $\mathbb{S}$ を $\lambda^{\times,1}$ の **syntactic category** $\mathrm{Syn}(\lambda^{\times,1})$ とよぶ.

- object: $\lambda^{\times,1}$ の context $\Gamma = \{x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n\}$
- hom(Γ,$\{y_1 : B_1, \ldots, y_n : B_n\}$): 項の組 $\langle t_1, \ldots, t_n\rangle$ で, $\Gamma \vdash t_i : B_i$ となるもの
- identity: $\Gamma = \{x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n\}$ に対して $\Gamma \vdash x_i : A_i$ となるので, 組 $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ が identity を与える.
- composition: context Δ の変数が $\{y_1, \ldots, y_m\}$ だったとすると,

$$\begin{gathered}\mathbb{S}(\Delta, \Theta) \times \mathbb{S}(\Gamma, \Delta) \to \mathbb{S}(\Gamma, \Theta) \\ (\langle s_1, \ldots, s_n\rangle, \langle t_1, \ldots, t_m\rangle) \mapsto \langle s_1[t_i/y_i], \ldots, s_n[t_i/y_i]\rangle\end{gathered}$$

  によって定まる.

これが category になることは明らか.

補題 9. $\mathbb{S}$ は *cartesian closed.*

4.2　Categorical Model

$\lambda^{\times,1}$ の categorical model とは, category $\mathbb{C}$ と interpretation $[\![-]\!] : \mathrm{Syn}(\lambda^{\times,1}) \to \mathbb{C}$ のことであった.

定義 10. $\mathbb{C}$ を CCC とする. $[\![-]\!] : \mathrm{Typ}(\lambda^{\times,1}) \to \mathbb{C}_0$ なる型から $\mathbb{C}$ への対象への interpretation が与えられているとする. このとき, 次のようにして interpretation を与えると, これは CCC の構造を保つ射である. このような interpretation $[\![-]\!] : \lambda^{\times,1} \to \mathbb{C}$ を $\lambda^{\times,1}$ の (CCC) モデルとよぶ.

- $[\![\{x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n\}]\!] = [\![A_1]\!] \times \cdots \times [\![A_n]\!]$
- $[\![\langle t_1, \ldots, t_n \rangle : \Gamma \to \Delta]\!]$ は, 各 judgement $\Gamma \vdash t_i : \Delta$ の interpretation $[\![\Gamma \vdash t_i : \Delta]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![\Delta_i]\!]$ を以下のようにして定め, これらの組 $\langle [\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!] \rangle$ として与える.

$$\left[\!\!\left[\frac{x : A \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : A}\right]\!\!\right] = [\![\Gamma]\!] \xrightarrow{\mathrm{pr}_x} [\![A]\!]$$

$$\left[\!\!\left[\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x.M : A \to B}\right]\!\!\right] = \frac{[\![\Gamma]\!] \times [\![A]\!] \xrightarrow{M} [\![B]\!]}{[\![\Gamma]\!] \xrightarrow[\hat{M}]{} [\![B]\!]^{[\![A]\!]}}$$

$$\left[\!\!\left[\frac{\Gamma \vdash M_1 : A \to B \qquad \Gamma \vdash M_2 : A}{\Gamma \vdash M_1 M_2 : B}\right]\!\!\right] = \frac{[\![\Gamma]\!] \xrightarrow{M_1} B^A \qquad [\![\Gamma]\!] \xrightarrow{M_2} A}{[\![\Gamma]\!] \xrightarrow{\langle M_2, M_1 \rangle} A \times B^A \xrightarrow{\mathrm{ev}} B}$$

$$\left[\!\!\left[\frac{\Gamma \vdash M_i : A_i}{\Gamma \vdash \langle M_1, M_2 \rangle : A_1 \times A_2}\right]\!\!\right] = \frac{[\![\Gamma]\!] \xrightarrow{M_i} A_i}{[\![\Gamma]\!] \xrightarrow{\langle M_1, M_2 \rangle} A_1 \times A_2}$$

$$\left[\!\!\left[\frac{\Gamma \vdash M : A_1 \times A_2}{\Gamma \vdash \mathrm{proj}_i M : A_i}\right]\!\!\right] = \frac{[\![\Gamma]\!] \xrightarrow{M} A_1 \times A_2}{[\![\Gamma]\!] \xrightarrow{M} A_1 \times A_2 \xrightarrow{\mathrm{pr}_i} A_i}$$

$$\left[\!\!\left[\frac{}{\Gamma \vdash \star : 1}\right]\!\!\right] = \frac{}{[\![\Gamma]\!] \xrightarrow{!} 1}$$

4.3 Soundness

ここでは equational theory $\mathcal{E}_{\lambda^{\times,1}}$ の soundness をみよう.

定理 11 (sound)**.** $\Gamma \vdash_{\lambda^{\times,1}} M = N : A$ ならば, 任意の $\lambda^{\times,1}$ モデル *(上で与えた interpretation)* $[\![-]\!] : \lambda^{\times,1} \to \mathbb{C}$ に対して $[\![M]\!] = [\![N]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!]$ となる.

Proof. $\mathcal{E}_{\lambda^{\times,1}}$ の構造に関する帰納法に依る. □

4.4 Completeness

示したいのは次の定理である.

定理 12 (complete)**.** 任意の $\lambda^{\times,1}$ のモデル $[\![-]\!] : \lambda^{\times,1} \to \mathbb{C}$ に対して $[\![M]\!] = [\![N]\!] : [\![A]\!] \to [\![B]\!]$ が成り立つならば, $\vdash_{\lambda^{\times,1}} M = N :$ である.

4.4.1 Term Model

定義 13. 次のようにして category $\mathbb{C}_{\lambda^{\times,1}}$ を定める.

- $\mathrm{Obj}(\mathbb{C}_{\lambda^{\times,1}}) = \mathrm{Typ}(\lambda^{\times,1})$
- $\mathbb{C}_{\lambda^{\times,1}}(A, B) = [x : A \vdash M : B]$
- $id_A := [x : A \vdash x : A]$ by (var)
- $[y : B \vdash N : C] \circ [x : A \vdash M : B] := [x : A \vdash N[M/y] : C]$ by (app), (abs)

Proof. (associativity) 項 L, M, N に対し (M の context に使う変数 y は fresh にとってよい[*1]),

$$\begin{aligned}([z:C\vdash N:D]\circ[y:B\vdash M:C])\circ[x:A\vdash L:B] &= [y:B\vdash N[M/z]:D]\circ[x:A\vdash L:B]\\ &= [x:A\vdash (N[M/z])[L/y]:D]\\ &= [x:A\vdash (N[L/y])[(M[L/y])/z]:D]\\ &= [x:A\vdash N[(M[L/y])/z]:D]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[z:C\vdash N:D]\circ([y:B\vdash M:C]\circ[x:A\vdash L:B]) &= [z:C\vdash N:D]\circ[x:A\vdash M[L/y]:C]\\ &= [x:A\vdash N[(M[L/y])/z]:D]\end{aligned}$$

となるので, associativity が成り立つ.

(left identity) 項 M に対し,

$$\begin{aligned}[y:B\vdash y:B]\circ[x:A\vdash M:B] &= [x:A\vdash M[y/y]:B]\\ &= [x:A\vdash M:B]\end{aligned}$$

となるので, left identity が成り立つ.

right identity も同様. □

補題 14. $\mathbb{C}_{\lambda^{\times,1}}$ は *cartesian closed.*

さてこのようにして定めた category が $\lambda^{\times,1}$ のモデルであることを示そう.

命題 15. *interpretation* $[\![-]\!]:Syn(\lambda^{\times,1})\to\mathbb{C}_{\lambda^{\times,1}}$ を, 次のようにして定める:

- $[\![\{x_1:A_1,\dots,x_n:A_n\}]\!]=A_1\times\cdots\times A_n$
- $[\![\langle t_1,\dots,t_n\rangle:\Gamma\to\Delta]\!]=\left\langle [z:[\![\Gamma]\!]\vdash t_1[\vec{pr_i(z)}/\vec{x_i}]:\Delta_1],\dots,[z:[\![\Gamma]\!]\vdash t_n[\vec{pr_i(z)}/\vec{x_i}]:\Delta_n]\right\rangle:$ $[\![\Gamma]\!]\to[\![\Delta]\!]$ *where* $\Gamma=\{x_1:\Gamma_1,\dots,x_m:\Gamma_m\}$, $\Delta=\{y_1:\Delta_1,\dots,y_n:\Delta_n\}$

ただし, *2* 行目の式で, 左辺の $\langle-\rangle$ は単なる組だが右辺の $\langle-\rangle$ は $\mathbb{C}_{\lambda^{\times,1}}$ の *product* を使って作った *mediating arrow* であることに注意. このときこの *interpretation* は *CCC* の構造を保つ.

よって $\mathbb{C}_{\lambda^{\times,1}}$ が $\lambda^{\times,1}$ のモデルであることが分かった. このモデルを **term model** という.

補題 16. *term model* の *interpretation* は *complete.*

Proof. $[\![M]\!]=[\![N]\!]:[\![\Gamma]\!]\to[\![\Delta]\!]$ が $\mathbb{C}_{\lambda^{\times,1}}$ で成り立つならば, $M=N:\Gamma\to\Delta$ が $\mathrm{Syn}(\lambda^{\times,1})$ で成り立つことをみればよい. $M=\left\langle\vec{M_i}\right\rangle$, $N=\left\langle\vec{N_i}\right\rangle$ とすると, term model の定義より, $[z:[\![\Gamma]\!]\vdash M_j[\vec{\mathrm{pr}_i(z)}/\vec{x_i}]:\Delta_j]=[z:[\![\Gamma]\!]\vdash N_j[\vec{\mathrm{pr}_i(z)}/\vec{x_i}]:\Delta_j]$ となって, $\Gamma\vdash M_j=N_j:\Delta_j$ がいえる. ゆえに $\Gamma\vdash M=N:\Delta_j$ である. □

ゆえに term model の completeness がいえた.

4.5 Logical Formalism

categorical semantics の話をするにあたって, モデルなどの概念をもう少し形式的に定義しておこう. 本当に正しく議論をするには以下では不十分であるが, ここでは詳細には立ち入らないことにする.

[*1] judgement $x:A\vdash M:B$ により, M は x 以外の自由変数を含まない. よって y は出現したとしても束縛変数であるから, 適当に fresh な名前に取り替えておけばよい. ということを一々断る必要もないだろう.

4.5.1 Category of Theories

$\lambda^{\times,1}$ の signature とは, ラムダ計算としての構成要素を集めたもののことであった. 具体的に書き下すと以下のようになる.

定義 17. 次のものを $\lambda^{\times,1}$ の **signature** とよぶ.

- sort $\{p, m, v_p, v_m\}$: p は type, m は term, v_- は variable の意味である. それぞれ型, 項, 変数 (変数には項変数と型変数とがある) であることを表す.
- constructor symbols: これは以下のようなものからなる. また, variable を term と別の sort として考える必要はあまりないが, あとの証明の都合とわかりやすさを考慮の上でこのように定義している.
  - type variables: $\alpha, \beta, \gamma, \cdots : v_p$
  - term variables: $x, y, z, \cdots : v_m$
  - type constructor symbols: $\{\mathrm{TVar} : v_p \to p, (\to) : p \to p \to p, 1 : p, (\times) : p \to p \to p\}$
  - term constructor symbols: $\{\mathrm{Var} : v_m \to m, \mathrm{Abs} : v_m \to m \to m, \mathrm{App} : m \to m \to m, \star : m, \langle -, - \rangle : m \to m \to m, \mathrm{proj}_i(-) : m \to m\}$
- typing rules 前述のもの: sort$p$ と m を関係づける typing rule である. 各 term constructor が満たすべきルールともいえる.
- equational theory $\mathcal{E}_{\lambda^{\times,1}}$: すでに見たように, $\beta\eta$-equality と product, 1 に関する equation を集めたものである.

同様にして, 一般のラムダ計算の signature も, このような sort, constructor symbols, typing rules, equational theory の組として定めることができる.

定義 18. category $\mathbf{Theory}(\lambda^{\times,1})$ を, 次のように定める.

- object: signatureΣ であって, sort が $\{p, m, v_p, v_m\}$, type/term constructor symbols と typing rules と equational theory は $\Sigma(\lambda^{\times,1})$ を含むようなもの[*2]
- hom: signature の各要素ごとの包含

これは, product type と unit type をもつ calculus とその間の拡大のなす category(poset) だと思ってよい. このとき, $\Sigma(\lambda^{\times,1})$ は initial object である.

4.5.2 Category of Models

さて, 定義 10 で $\lambda^{\times,1}$ のモデルを定義したが, signature に沿って改めて定義することにする. そしてこのようなモデルのなす category を考えて, categorical semantics の議論を行う.

定義 19. 可算集合 A, B が与えられているとする. signature $\Sigma(\lambda^{\times,1}) \in \mathbf{Theory}(\lambda^{\times,1})$ のモデルとは, product をもつ category $\mathbb{C}$ と interpretation $[\![-]\!]$ の組で, 次を満たすものとする.

- sort interpretation
  - type/term variables: $[\![v_p]\!] = A, [\![v_m]\!] = B$ は disjoint とし, 型変数と項変数が属する集合と考える.
  - type/term: $[\![p]\!] = \mathrm{Obj}(\mathbb{C}), [\![m]\!] = \mathrm{Arr}(\mathbb{C})$

[*2] sort はこれらを含む一般の形と弱めることもできるはずだが, 複数の sort を含むような constructor symbol の扱いをどうするかという問題がある. 後に signature に沿ってモデルを定義する必要がある関係で, ここではこのような定義を採用した.

- constructor symbol $c_p : \mathrm{dom}(c_p) \to \mathrm{cod}(c_p)$ に対し, $\forall x \in [\![\mathrm{dom}(c_p)]\!] . [\![c_p]\!](x) \in [\![\mathrm{cod}(c_p)]\!]$ となる function が割り当てられている.
- typing rule: $\Gamma \vdash M : A$ なる typing rule に対応する射 $[\![M]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!]$ が割り当てられている. ただし context は product で解釈する.
- equational theory $\Gamma \vdash M = N : A \in \mathcal{E}$ に対し, $[\![\Gamma \vdash M : A]\!] = [\![\Gamma \vdash B : A]\!]$ となるような射の equality が $\mathbb{C}$ で成り立っている.

モデルとは, signature のそれぞれの要素に対して interpretation を割り当てたもの, ということができる.

以下, 変数の割り当てに用いる可算集合 A, B を fix する.

定義 20. category $\mathbf{Model}(\lambda^{\times,1})$ を, 次のように定める.

- object: $\Sigma(\lambda^{\times,1})$ のモデル $\mathbb{C}$
- hom($\mathbb{C}$,$\mathbb{D}$): functor $F : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ であって, interpretation を

このとき, $\mathrm{Syn}(\lambda^{\times,1})$ も当然この category の object であり, さらに任意のモデルへの morphism が存在するので, $\mathrm{Syn}(\lambda^{\times,1})$ は $\mathbf{Model}(\lambda^{\times,1})$ の initial object である.

4.5.3 Category of Theories

$\lambda^{\times,1}$ の signature とは, type と type constructor symbol と equational theory の組のことであった. 具体的に書き下すと次のようになる.

定義 21. 次のものを $\lambda^{\times,1}$ の **signature** とよぶ.

- sort $\{p, m, v_p, v_m\}$: p は type, m は term, v_{-} は variable の意味である. それぞれ型, 項, 変数 (変数には項変数と型変数とがある) であることを表す.
- constructor symbols: これは以下のようなものからなる. また, variable を term と別の sort として考える必要はあまりないが, あとの証明の都合とわかりやすさを考慮の上でこのように定義している.
  - type variables: $\alpha, \beta, \gamma, \cdots : v_p$
  - term variables: $x, y, z, \cdots : v_m$
  - type constructor symbols: $\{\mathrm{TVar} : v_p \to p, (\to) : p \to p \to p, 1 : p, (\times) : p \to p \to p\}$
  - term constructor symbols: $\{\mathrm{Var} : v_m \to m, \mathrm{Abs} : v_m \to m \to m, \mathrm{App} : m \to m \to m, \star : m, \langle -, - \rangle : m \to m \to m, \mathrm{proj}_i(-) : m \to m\}$
- typing rules 前述のもの: sort$p$ と m を関係づける typing rule である. 各 term constructor が満たすべきルールともいえる.
- equational theory $\mathcal{E}_{\lambda^{\times,1}}$: すでに見たように, $\beta\eta$-equality と product, 1 に関する equation を集めたものである.

同様にして, 一般の ($\lambda^{\times,1}$ を拡張した)calculus の signature も, sort, constructor symbols, typing rules, equational theory の組として定めることができる.

定義 22. category $\mathbf{Theory}(\lambda^{\times,1})$ を, 次のように定める.

- object: signatureΣ であって, $\Sigma(\lambda^{\times,1})$ を含むようなもの[*3]

[*3] 正確には, ここでは calculus を以下の議論をする上で不都合にならないように制限をする. 具体的には, sort が

- hom: signature の各要素ごとの包含

これは, product type と unit type をもつ calculus とその間の拡大のなす category(poset) だと思ってよい. このとき, $\Sigma(\lambda^{\times,1})$ は initial object である.

4.6 Categorical Semantics

定義 23. functor Syn : $\mathbf{Theory}(\lambda^{\times,1}) \to \mathbf{Model}(\lambda^{\times,1})$ が次のようにして定まる.

- $\mathrm{Syn}(\lambda)$ は, syntactic category で, 次のようにして定まる:
  - object: λ の type
  - hom(A,B): λ の項 M が作る typing judgement $[x : A \vdash_\lambda M : B]$
- $\mathrm{Syn}(\lambda \subseteq \lambda')$ は, inclusion functor. これが CCC の構造を保つことは λ が $\mathcal{E}_{\lambda^{\times,1}}$ を含んでいることからわかる.

定理 24. $\mathbf{Theory}(\lambda^{\times,1})$ と $\mathbf{Model}(\lambda^{\times,1})$ は *categorical semantics* を与える.

Proof. Syn の右随伴が存在することをみる. さて, 任意のモデル $\mathbb{C}$ と interpretation $[\![-]\!] : \lambda^{\times,1} \to \mathbb{C}$ に対して $\mathrm{Lan}(\mathbb{C})$ を,

- sort, constructor symbol: $\lambda^{\times,1}$ と同じ
- equational theory: $\{M = N; M, N : m, [\![M]\!] = [\![N]\!]\}$

と定める. これが Syn の右随伴であることを示せばよいが, これは Syn がモデルの category の initial object を与えることから,

$$\mathbf{Model}(\mathrm{Syn}(\lambda), \mathbb{C}) \cong \{\star\} \cong \mathbf{Theory}(\lambda, \mathrm{Lan}(\mathbb{C}))$$

を満たすこと, i.e.

$$\Sigma(\lambda) \subseteq \Sigma(\mathrm{Lan}(\mathbb{C}))$$

が成り立つことと随伴 $\mathrm{Syn} \dashv \mathrm{Lan}$ が成り立つことは同値. type と constructor symbol は両者等しいので, equational theory の包含のみみればよい. つまり, $\Gamma \vdash_\lambda M = N : B$ □

$\{p, m, v\}$ であり, constructor symbol で p, m をいずれも含むことはない, など.