

# Finitary Projections の作る同型について

@myuon

2019 年 3 月 23 日

**定義 1.** domain  $D$  の finitary projection  $p$  とは, 次の条件を満たすもののこと.

1.  $p : D \rightarrow D$  は連続写像
2.  $p \circ p = p \sqsubseteq \text{id}$
3.  $\text{im}(p)$  は domain

**定義 2.**  $N$  が poset  $P$  の normal subset であるとは,  $N \subseteq P$  であって, 任意の  $y \in P$  に対し  $\downarrow y \cap N$  が directed なことをいう. このとき  $N \triangleleft P$  とかく.

**定理.** 任意の domain  $D$  に対し, cpt のなす poset  $\mathbf{K}(D)$  の normal subset と,  $D$  の finitary projections のなす poset  $\mathbf{Fp}(D)$  の間に包含関係を保つ同型が存在する.

*Proof.*  $\{N \mid N \triangleleft \mathbf{K}(D)\}$  と  $\mathbf{Fp}(D)$  の間の同型を定義する. まず normal subset  $N$  に対し, 写像  $q$  を,

$$q : D \rightarrow D$$
$$q(x) = \bigsqcup (\downarrow x \cap N)$$

によって定義する.

**補題 3.** この  $q$  は finitary projection である.

*Proof.* はじめに continuous であることを示す.  $D$  の任意の directed subset  $M$  を 1 つ fix する.  $\bigsqcup q(M) = \bigsqcup_{y \in M} q(y) = \bigsqcup_{y \in M} \bigsqcup (\downarrow y \cap N) \sqsubseteq \bigsqcup (\downarrow (\bigsqcup M) \cap N) = q(\bigsqcup M)$  であることは明らかであろう. 逆をみる.  $\bigsqcup q(M)$  が  $\downarrow (\bigsqcup M) \cap N$  の upper bound であることを示せばよい.  $\alpha \in \downarrow (\bigsqcup M) \cap N$  とすると,  $\alpha \sqsubseteq \bigsqcup M$  かつ  $\alpha \in N$  である. ところで  $N$  は  $\mathbf{K}(D)$  の normal subset だったから  $N$  の点  $\alpha$  は cpt である. ゆえにある  $z \in M$  が存在して,  $\alpha \sqsubseteq z$  となり, すなわち  $\alpha \sqsubseteq \bigsqcup (\downarrow z \cap N) = q(z)$  である. よって,  $\alpha \sqsubseteq \bigsqcup q(M)$  となり,  $\bigsqcup q(M) = q(\bigsqcup M)$  であることがわかった.

次に,  $q \circ q = q \sqsubseteq \text{id}$  を示す.  $q$  の作り方から  $q \sqsubseteq \text{id}$  は明らか.

$$\begin{aligned}
q(q(x)) &= q(\bigsqcup \downarrow x \cap N) \\
&= \bigsqcup q(\downarrow x \cap N) && (q \text{ は continuous}) \\
&= \bigsqcup_{z \in \downarrow x \cap N} q(z) \\
&= \bigsqcup_{z \in \downarrow x \cap N} \bigsqcup (\downarrow z \cap N) \\
&= \bigsqcup_{z \in \downarrow x \cap N} z && (\text{下で説明する}) \\
&= q(x)
\end{aligned}$$

ただし最後から2つ目の式は,  $z \in \downarrow x \cap N$  に対し,  $\bigsqcup (\downarrow z \cap N) = z$  であることを用いた. このことは次のようにしてわかる:  $\bigsqcup (\downarrow z \cap N) \sqsubseteq z$  であることは明らかであり, また  $z$  は  $N$  の元でもあるから  $z \in \downarrow z \cap N$  でもあることより逆もわかる.

最後に,  $\text{im}(q)$  が domain であることをいう. ここでは,  $N \cap \text{im}(q)$  が  $\text{im}(q)$  の basis となること, すなわち, 任意の  $y \in \text{im}(q)$  に対して  $\bigsqcup (\downarrow y \cap N \cap \text{im}(q)) = y$  となることを示す.  $x \in D$  を,  $q(x) = y$  となるものとしてとる.

$$\begin{aligned}
\bigsqcup (\downarrow y \cap N \cap \text{im}(q)) &= \bigsqcup (\downarrow q(x) \cap N \cap \text{im}(q)) \\
&= \bigsqcup (\downarrow x \cap N \cap \text{im}(q)) && (a) \\
&= \bigsqcup (\downarrow q(x) \cap N) && (b) \\
&= \bigsqcup (\downarrow x \cap N) && (c) \\
&= y
\end{aligned}$$

順に示す. (a)  $z \in (\downarrow x \cap N \cap \text{im}(q))$  に対し,  $z \sqsubseteq x$  かつ  $z \in \text{im}(q)$  であるから, 両辺を  $q$  で写すと  $z = q(z) \sqsubseteq q(x)$  となり,  $z \in (\downarrow q(x) \cap N \cap \text{im}(q))$  である. (b)  $q(x) \sqsubseteq x$  により,  $\bigsqcup (\downarrow q(x) \cap N) \sqsubseteq \bigsqcup (\downarrow x \cap N \cap \text{im}(q))$  であることはよい.  $z \in (\downarrow x \cap N \cap \text{im}(q))$  に対し,  $z \sqsubseteq x$  かつ  $z \in \text{im}(q)$  であるから, 先程と同様にして  $z \sqsubseteq q(x)$  であり,  $z \in (\downarrow q(x) \cap N)$ . (c)  $z \in (\downarrow x \cap N)$  に対し,  $z \sqsubseteq \bigsqcup (\downarrow x \cap N) = q(x)$  であり,  $z \in N$  でもあるから  $z \in (\downarrow q(x) \cap N)$  となる. よって  $\text{im}(q)$  は domain.

以上のことより,  $q$  は finitary projection である. □

次に,  $D$  の finitary projection  $p$  に対し,  $L = \text{im}(p) \cap \mathbf{K}(D)$  によって定義する.

**事実.**  $D$  を domain,  $p$  を  $D$  上の finitary projection とすると,  $\mathbf{K}(\text{im}(p)) = \text{im}(p) \cap \mathbf{K}(D)$  である.

**補題 4.** 次の等式が成り立つ.

$$p(x) = \bigsqcup (\downarrow p(x) \cap L)$$

*Proof.*  $p$  は finitary projection であるから  $\text{im}(p)$  は domain であり, このことと上の事実により, 任意の  $y \in \text{im}(p)$  に対し  $y = \bigsqcup(\downarrow y \cap L)$  が成り立つ.  $\square$

**補題 5.**  $L$  は  $\mathbf{K}(D)$  の *normal subset* である.

*Proof.* subset であることはよい.  $x \in \mathbf{K}(D)$  を 1 つ fix する.  $\downarrow x \cap L$  が directed であることを示す.  $\downarrow x \cap L$  の任意の元  $x_1, x_2$  に対しその upper bound が存在すればよい. ところで,  $i \in \{1, 2\}$  とすると  $x_i \sqsubseteq x$  であり, これらを  $p$  で写すと  $p(x_i) = x_i \sqsubseteq p(x)$  が成り立つ ( $x_i \in \text{im}(p)$  であることと  $p \circ p = p$  を用いた). 補題の右辺の  $\downarrow p(x) \cap L$  は directed であり,  $x_i \in \downarrow p(x) \cap L$  であることより,  $x_1, x_2$  の upper bound が存在する. よって  $\downarrow x \cap L$  は directed.  $\square$

$\square$

## 参考文献

[1] Carl A. Gunter. (1992). Semantics of Programming Languages, Theorem 10.12.