simply-typed λ-calculus

myuon

2017 年 10 月 7 日

目次

概要

型と項の関係は, 集合とそこに属する元の関係に似ている. 型を導入することで, 項がどんな集合に属しているかを表現することができる. 型なしラムダ計算の項は自由生成されていたのでどのような項でも許されていたが, これには通常の関数としての意味付けができないような異常な項も含まれている (例えば $f(f)$ など). 型システムを導入することの利点の 1 つとして, このような異常な項を含まない正常な項だけを考えることで型付きラムダ計算は正規化性などの “よい” 性質をもつようにできる.

第 I 部
Syntax

型付き λ 計算の中で最も単純なものが単純型付き λ 計算 ($\lambda^{\rightarrow}$) である.

1 Types

定義 1 (型)**.** 単純型付き λ 計算の型を, 次のように定義する. これを $\mathrm{Typ}(\lambda^{\to})$ などとかく.

$\langle type\rangle$ ::= $\langle typevar\rangle$
| $\langle type\rangle$ '->' $\langle type\rangle$

ただし ⟨typevar⟩ とは型変数であり, ここでは適当な型変数の集合 V_t が与えられているとする. 型変数は $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ などとかく.

$t_1 \to t_2$ のことを**関数型 (function type)** などとよぶ. これはまさに関数を表現するためのものであり, 写像 $A \to B$ などと書いたりするのとちょうど同じことを表していると思えばよい.

さて, 項が型に属している $(x \in A)$ ことを表明する関係を定義する.

定義 2 (型判断 (typing judgement))**.** 関係 $- \vdash - : - \subseteq (V_t \times \mathrm{Typ}) \times \Lambda \times \mathrm{Typ}$ を以下のように定義する.

$$(\text{var})\ \frac{x : A \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : A} \qquad (\text{abs})\ \frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x.M : A \to B} \qquad (\text{app})\ \frac{\Gamma \vdash M_1 : A \to B \qquad \Gamma \vdash M_2 : A}{\Gamma \vdash M_1 M_2 : B}$$

図 1 simply-typed typing rules

- Γ を**文脈 (context)** と呼ぶ.
  - 関係 $\Gamma \vdash M : A$ が成り立っているとき, Γ の下で M の型は A である, などという.
  - 項 M に対して judgement $\Gamma \vdash M : A$ が存在する時, M は **well-typed である**という.

補題 3 (coherence)**.**

1. $\Gamma \vdash x : A$ ならば $x : A \in \Gamma$.
   (a) $\Gamma \vdash \lambda x.M : A$ ならば, A_1, A_2 が存在して, $A = A_1 \to A_2$ かつ $\Gamma, x : A_1 \vdash M : A_2$.
   (b) $\Gamma \vdash M_1 M_2 : B$ ならば, A が存在して, $\Gamma \vdash M_1 : A \to B$ かつ $\Gamma \vdash M_2 : A$.

Proof. typing judgement の導出に関する場合分けにより明らか. □

typing rule とは逆向きに, "この型がついているならば, 前提となる項がこのようになっているはず" というような性質を指してしばしば coherence(一貫性) と呼ぶ.

2 Simple Extension

2.1 Product Type

product type はタプルあるいは組のことである.

定義 4 (product type extension)**.** 型と項を次のように拡張する.

$$\alpha ::= \ldots \mid \alpha_1 \times \alpha_2$$
$$M ::= \ldots \mid \mathrm{proj}_i M \mid \langle M_1, M_2\rangle$$

それに付随して, いくつかの typing rule が追加される (図 2).

$$(\text{pair})\ \frac{\Gamma \vdash M_1 : A_1 \qquad \Gamma \vdash M_2 : A_2}{\Gamma \vdash \langle M_1, M_2 \rangle : A_1 \times A_2} \qquad (\text{proj})\ \frac{\Gamma \vdash M : A_1 \times A_2}{\Gamma \vdash \mathrm{proj}_i M : A_i \quad (i = 1, 2)}$$

図 2　product typing rules

2.2　Unit Type

unit type は 1 点集合のようなものである. product type を入れる時には入れることが多い.

定義 5 (unit type extension)**.** 型と項を次のように拡張する.

$$\begin{aligned} \alpha &::= \dots \mid 1 \\ M &::= \dots \mid \star \end{aligned}$$

あるいは, unit type を `Unit`, 唯一の term を `()` などとかくこともある.

$$\frac{}{\Gamma \vdash \star : 1}$$

図 3　unit typing rules

第 II 部
Semantics

3　Equational Theory

calculus の中で等しいラムダ項同士を全て集めた集合をその calculus の equational theory とよぶ. 具体的には, $\mathcal{E}_\lambda = \{\Gamma \vdash_\lambda M = N : A;\ \Gamma \vdash_\lambda M : A,\ \Gamma \vdash_\lambda N : A\}$ のような集合である.

3.1　$\lambda^{\rightarrow}$

定義 6. $\lambda^{\rightarrow}$ の equational theory を, $\beta\eta$-equivalence から得られるものとする. 書き下すと図 4 のような規則によって equational theory が定まる. ただしここでは, 出現する項が well-typed であることなどは省略してかいた.

$$(\text{refl})\ \frac{}{\Gamma \vdash M = M : A} \qquad (\text{sym})\ \frac{\Gamma \vdash M = N : A}{\Gamma \vdash N = M : A} \qquad (\text{trans})\ \frac{\Gamma \vdash L = M : A \qquad \Gamma \vdash M = N : A}{\Gamma \vdash L = N : A}$$

$$(\text{abs})\ \frac{\Gamma, x : A \vdash M = N : B}{\Gamma \vdash \lambda x.M = \lambda x.N : A \to B} \qquad (\text{app})\ \frac{\Gamma \vdash M = M' : A \to B \qquad \Gamma \vdash N = N' : A}{\Gamma \vdash MN = M'N' : B}$$

$$(\beta)\ \frac{}{\Gamma \vdash (\lambda x.M)N = M[N/x] : B} \qquad (\eta)\ \frac{x \notin \mathrm{FV}(M)}{\Gamma \vdash \lambda x.Mx = M : A \to B}$$

図 4　equational theory of $\mathcal{E}_{\lambda^{\rightarrow}}$

(refl), (sym), (trans) は同値関係の定義である. (abs), (app) は $M = N \Longrightarrow L[M/x] = L[N/x]$ という規則 (subst rule という) が成り立つようにコンストラクターごとに決まる等式である. このよ

うな規則は自然に決まるので今後は逐一かかないことにする.

3.2 $\lambda^{\times,1}$

定義 7. $\lambda^{\times,1}$ の equational theory を, $\mathcal{E}_{\lambda\to}$ に加え次の rule からなるものとする.

$$\text{(prodU)}\ \frac{}{\Gamma \vdash \langle \mathrm{proj}_1 M, \mathrm{proj}_2 M\rangle = M : A \times B} \qquad \text{(prodC)}\ \frac{}{\Gamma \vdash \mathrm{proj}_i \langle M_1, M_2\rangle = M_i : A_i}$$

$$\text{(unitU)}\ \frac{}{\Gamma \vdash M = \star : 1}$$

図 5 equational theory of $\mathcal{E}_{\lambda^{\times,1}}$

前述の通り, subst rule が成り立つような, proj と pair についての等式は省略した.

4 Interpretation

$\lambda^{\times,1}$ の型と judgement を, ある category の射に対応付けるということをする. このような対応が calculus と category の構造を 1 対 1 に対応付けるのであれば, calculus で考えることと category で考えることは同じといえる.

4.1 Syntactic category

定義 8 (syntactic category)**.** 次のようにして定まる category $\mathbb{S}$ を $\lambda^{\times,1}$ の **syntactic category** $\mathrm{Syn}(\lambda^{\times,1})$ とよぶ.

- $\mathrm{Obj}(\mathbb{S}) = \mathrm{Typ}(\lambda^{\times,1})$
- $\mathbb{S}(A,B) = \{x : A \vdash M : B\}/\sim_{\mathcal{E}_{\lambda^{\times,1}}}$ (ただし, $(x : A \vdash M : B) \sim (x : A \vdash N : B) \iff (x : A \vdash M = N : B \in \mathcal{E}_{\lambda^{\times,1}})$)
- $id_A := [x : A \vdash x : A]$ by (var)
- $[y : B \vdash N : C] \circ [x : A \vdash M : B] := [x : A \vdash N[M/y] : C]$ by (app), (abs)

Proof. (associativity) 項 L, M, N に対し (M の context に使う変数 y は fresh にとってよい[*1]),

$$\begin{aligned}([z : C \vdash N : D] \circ [y : B \vdash M : C]) \circ [x : A \vdash L : B] &= [y : B \vdash N[M/z] : D] \circ [x : A \vdash L : B]\\ &= [x : A \vdash (N[M/z])[L/y] : D]\\ &= [x : A \vdash (N[L/y])[(M[L/y])/z] : D]\\ &= [x : A \vdash N[(M[L/y])/z] : D]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[z : C \vdash N : D] \circ ([y : B \vdash M : C] \circ [x : A \vdash L : B]) &= [z : C \vdash N : D] \circ [x : A \vdash M[L/y] : C]\\ &= [x : A \vdash N[(M[L/y])/z] : D]\end{aligned}$$

となるので, associativity が成り立つ.

(left identity) 項 M に対し,

---

*1 judgement $x : A \vdash M : B$ により, M は x 以外の自由変数を含まない. よって y は出現したとしても束縛変数であるから, 適当に fresh な名前に取り替えておけばよい. ということを一々断る必要もないだろう.

$$
\begin{aligned}
[y : B \vdash y : B] \circ [x : A \vdash M : B] &= [x : A \vdash M[y/y] : B] \\
&= [x : A \vdash M : B]
\end{aligned}
$$

となるので, left identity が成り立つ.

right identity も同様. □

補題 9. $\mathbb{S}$ は *cartesian closed.*

Proof. type constructor $1, \times, \to$ がそれぞれ terminal object, product, exponential を与えることをみる.

(terminal obj) 1 への射の存在と一意性がいえればよいが, 前者は $[x : A \vdash \star : 1]$ によって, 後者は (unitU) の規則によってわかる.

(product) projection が $[x : A_1 \times A_2 \vdash \mathrm{proj}_i(x) : A_i]$ $(i = 1, 2)$ によって与えられる. また, $[x : P \vdash M_i : A_i]$ $(i = 1, 2)$ が与えられたとき $[x : P \vdash \langle M_1, M_2 \rangle : A_1 \times A_2]$ が mediating arrow になり, 図式の可換性が (prodC) によってわかる. mediating arrow の一意性は (prodU) によりわかる.

$$
\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "M_1"'] \arrow[d, dashed, "\langle M_1, M_2 \rangle"] \arrow[dr, "M_2"] & \\
A_1 & A_1 \times A_2 \arrow[l, "\mathrm{proj}_1"] \arrow[r, "\mathrm{proj}_2"'] & A_2
\end{tikzcd}
$$

図 6　product の図式

(exponential) hom の同型は次のようにして与えられる:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{S}(A \times B, C) &\cong \mathbb{S}(A, B \to C) \\
[x : A \times B \vdash M : C] &\mapsto [y : A \vdash \lambda b. M[\langle y, b \rangle / x] : C] \\
[x : A \times B \vdash (N[\mathrm{proj}_1(x)/y])(\mathrm{proj}_2(x)) : C] &\mapsfrom [y : A \vdash N : B \to C]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, dashed, "\bar{M}"] & A \times B \arrow[d, "\bar{M} \times 1"] \arrow[dr, "M"] & \\
C^B & C^B \times B \arrow[r, "(\mathrm{app})"] & C
\end{tikzcd}
$$

図 7　exponential の図式

上の同型[*2]は, 左から右が $M \mapsto \hat{M}$ になっており, 右から左が $\hat{M} \mapsto (\mathrm{app}) \circ (\hat{M} \times 1)$ を得る操作になっている.

[*2] 厳密にはこれが同型であることはまだ示していない; 結果的には上の同型が exponential の同型を与えるが, 以下では図式の射の存在と一意性を示すことで exponential の存在を示している.

図式の可換性は,

$$
\begin{aligned}
&[x : A \times B \vdash (\hat{M}[\mathrm{proj}_1(x)/y])(\mathrm{proj}_2(x)) : C] \\
&= [x : A \times B \vdash ((\lambda b.M[\langle y, b\rangle/x])[\mathrm{proj}_1(x)/y])(\mathrm{proj}_2(x)) : C] \\
&= [x : A \times B \vdash (\lambda b.M[\langle \mathrm{proj}_1(x), b\rangle/x])(\mathrm{proj}_2(x)) : C] \\
&= [x : A \times B \vdash M[\langle \mathrm{proj}_1(x), \mathrm{proj}_2(x)\rangle/x] : C] \\
&= [x : A \times B \vdash M[x/x] : C] \\
&= [x : A \times B \vdash M : C]
\end{aligned}
$$

によってわかる. 一意性は, $[y : A \vdash N : B \to C]$ が $(\mathrm{app}) \circ ((\lambda y.N) \times 1) = M$ を満たすとする. このとき, $y : A \vdash N = \lambda b.\ M[\langle y, b\rangle/x] : B \to C \in \mathcal{E}_{\lambda^{\times,1}}$ が言えればよいが, このことは η 変換により $y : A, b : B \vdash N\, b = M[\langle y, b\rangle/x] : C \in \mathcal{E}_{\lambda^{\times,1}}$ と同値である. そしてこれは,

$$
\begin{aligned}
&[y : A, b : B \vdash M[\langle y, b\rangle/x] : C] \\
&= [y : A, b : B \vdash (N[\mathrm{proj}_1(x)/y])(\mathrm{proj}_2(x))[\langle y, b\rangle/x] : C] \qquad (\mathrm{app}) \circ ((\lambda y.N) \times 1) = M \text{ を代入} \\
&= [y : A, b : B \vdash (N[y/y])b : C] \\
&= [y : A, b : B \vdash N\, b : C]
\end{aligned}
$$

によって示される. □

この補題により, $\lambda^{\times,1}$ の equational theory は syntactic category に CCC の構造を生む. さて逆に, $\mathbb{S}$ は CCC 以外の構造をもたないのであろうか. これを示すには, 適当な setting で一般の CCC $\mathbb{C}$ と $\mathbb{S}$ が同型などが言えればよい. これを示すことがここでの目的である.

4.2 Interpretation

注意 10. 次のような変換 $[\![-]\!]$ を考える:

context: $[\![\{x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n\}]\!] = A_1 \times \cdots \times A_n$; $[\![\emptyset]\!] = 1$

judgement: $[\![\Gamma \vdash M : A]\!] = [z : [\![\Gamma]\!] \vdash M[\mathrm{pr}_i(z)/x_i] : A] \qquad (\Gamma = \{x_1 : A_1, \ldots x_n : A_n\})$

特に, $\mathbb{S}$ の射 $[x : A \vdash M : B]$ は $\{x : A\} \vdash M : B$ とすれば逆に $\lambda^{\times,1}$ の judgement へ変換できる. この変換は同型なので, $\lambda^{\times,1}$ の (well-typed な)term と $\mathbb{S}$ の射は同一視できる.

$\mathbb{S}$ は $\lambda^{\times,1}$ から自然に作った category なので当然といえば当然である. この同一視は以下でも暗黙的に使う.

以下, $\mathbb{C}$ を一般の CCC とする.

定義 11 (interpretation)**.** interpretation $[\![-]\!] : \lambda^{\times,1} \to \mathbb{C}$ を, 次のように定める:

型に対しては, $[\![1]\!] = 1$, $[\![A \times B]\!] = [\![A]\!] \times [\![B]\!]$, $[\![A \to B]\!] = [\![B]\!]^{[\![A]\!]}$ とする.

judgement に対しても $[\![\Gamma \vdash M : A]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!]$ となるような射を対応させる. これは judgement が typing rule に沿って帰納的に定義されているのでそれに合わせて interpretation も typing rule に沿って帰納的に次のようにして定義する.

$$\left[\!\!\left[\frac{x : A \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : A}\right]\!\!\right] = [\![\Gamma]\!] \xrightarrow{\mathrm{pr}_x} [\![A]\!]$$

$$\left[\!\!\left[\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x.M : A \to B}\right]\!\!\right] = \frac{[\![\Gamma]\!] \times [\![A]\!] \xrightarrow{M} [\![B]\!]}{[\![\Gamma]\!] \xrightarrow[\hat{M}]{} [\![B]\!]^{[\![A]\!]}}$$

$$\left[\!\!\left[\frac{\Gamma \vdash M_1 : A \to B \qquad \Gamma \vdash M_2 : A}{\Gamma \vdash M_1 M_2 : B}\right]\!\!\right] = \frac{[\![\Gamma]\!] \xrightarrow{M_1} B^A \qquad [\![\Gamma]\!] \xrightarrow{M_2} A}{[\![\Gamma]\!] \xrightarrow{\langle M_2, M_1\rangle} A \times B^A \xrightarrow{\mathrm{ev}} B}$$

$$\left[\!\!\left[\frac{\Gamma \vdash M_i : A_i}{\Gamma \vdash \langle M_1, M_2\rangle : A_1 \times A_2}\right]\!\!\right] = \frac{[\![\Gamma]\!] \xrightarrow{M_i} A_i}{[\![\Gamma]\!] \xrightarrow{\langle M_1, M_2\rangle} A_1 \times A_2}$$

$$\left[\!\!\left[\frac{\Gamma \vdash M : A_1 \times A_2}{\Gamma \vdash \mathrm{proj}_i M : A_i}\right]\!\!\right] = \frac{[\![\Gamma]\!] \xrightarrow{M} A_1 \times A_2}{[\![\Gamma]\!] \xrightarrow{M} A_1 \times A_2 \xrightarrow{\mathrm{pr}_i} A_i}$$

$$\left[\!\!\left[\frac{}{\Gamma \vdash \star : 1}\right]\!\!\right] = \frac{}{[\![\Gamma]\!] \xrightarrow{!} 1}$$

上でも述べたとおり, この $[\![-]\!]$ は $\lambda^{\times,1} \to \mathbb{S}$ の変換を経由して $\mathbb{S} \to \mathbb{C}$ を定めていると思えば良い. また, この interpretation は $\mathbb{C}$ の (つまり一般の)CCC の構造だけで定義できることに注意.

$[\![\Gamma \vdash M : A]\!]$ を, 記号を濫用して単に $[\![M]\!]$ とかくこともある.

定義 12 (sound)**.** $\vdash_\lambda M = N : A \Longrightarrow [\![M]\!] =_A [\![N]\!]$ が成り立つとき, interpretation$[\![-]\!]$ は **sound** という.

定義 13 (complete)**.** $[\![M]\!] =_A [\![N]\!] \Longrightarrow \vdash_\lambda M = N : A$ が成り立つとき, interpretation$[\![-]\!]$ は **complete** という.

interpretation の sound, complete は $\lambda^{\times,1}$ の equation と $\mathbb{C}$ での equality の対応, とみて定義をしているが, これは $[\![-]\!] : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ が fully faithful, という言い方もできる.

定理 14. $[\![-]\!]$ は *sound.*

Proof. より強く, $\Gamma \vdash M = N : A \Longrightarrow [\![M]\!] = [\![N]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!]$ を示す. judgement に関する帰納法による.

(refl, sym, trans)　明らか.

(abs)　$\Gamma \vdash \lambda x.M = \lambda x.N : A \to B$ とする.　帰納法の仮定より $[\![\Gamma, x : A \vdash M : B]\!] = [\![\Gamma, x : A \vdash N : B]\!]$ であるが, 両辺を curry 化すれば欲しい等式が得られる.

(app)　$\Gamma \vdash M_1 M_2 = N_1 N_2 : A$ とする. 帰納法の仮定により, $[\![M_i]\!] = [\![N_i]\!]$ $(i = 1, 2)$ となり OK.

(β)　$\Gamma \vdash (\lambda x.M)N = M[N/x] : B$ とする. $\Gamma = \{x_1 : A_1 \times \cdots x_n : A_n\}$ とすると, interpretation の定義によって $[\![\Gamma \vdash M : A]\!] = [\![x : \Gamma \vdash M[\mathrm{pr}_i(x)/x_i] : A]\!]$ が成り立つことに注意して,

$$
\begin{aligned}
&[\![\Gamma \vdash (\lambda x.M)N : B]\!] \\
&= (\mathrm{app}) \circ \langle [\![\Gamma \vdash \lambda x.M : A \to B]\!], [\![\Gamma \vdash N : A]\!] \rangle \\
&= (\mathrm{app}) \circ \langle \mathrm{curry}([\![\Gamma, x : A \vdash M : B]\!]), [\![\Gamma \vdash N : A]\!] \rangle \\
&= (\mathrm{app}) \circ (\mathrm{curry}([\![\Gamma, x : A \vdash M : B]\!]) \times 1) \circ \langle 1, [\![\Gamma \vdash N : A]\!] \rangle \\
&= \mathrm{uncurry}(\mathrm{curry}([\![\Gamma, x : A \vdash M : B]\!])) \circ \langle 1, [\![\Gamma \vdash N : A]\!] \rangle \\
&= [\![\Gamma, x : A \vdash M : B]\!] \circ \langle 1, [\![\Gamma \vdash N : A]\!] \rangle \\
&= [\![z : [\![\Gamma]\!] \times A \vdash M[\mathrm{pr}_i(\mathrm{pr}_1(z))/x_i,\ \mathrm{pr}_2(z)/x] : B]\!] \circ [\![y : [\![\Gamma]\!] \vdash \langle y, N[\mathrm{pr}_i(y)/x_i] \rangle : [\![\Gamma]\!] \times A]\!] \\
&= [\![y : [\![\Gamma]\!] \vdash M[\mathrm{pr}_i(\mathrm{pr}_1(z))/x_i,\ \mathrm{pr}_2(z)/x][\langle y, N[\mathrm{pr}_i(y)/x_i] \rangle / z] : B]\!] \\
&= [\![y : [\![\Gamma]\!] \vdash M[\mathrm{pr}_i(y)/x_i,\ N[\mathrm{pr}_i(y)/x_i]/x] : B]\!] \\
&= [\![\Gamma \vdash M[x_i/x_i,\ N[x_i/x_i]/x] : B]\!] \\
&= [\![\Gamma \vdash M[N/x] : B]\!]
\end{aligned}
$$

よって OK.

(η) $\Gamma \vdash \lambda x. (M\ x) = M : A \to B$ とする．このとき,

$$
\begin{aligned}
&[\![\Gamma \vdash \lambda x. (M\ x) : A \to B]\!] \\
&= \mathrm{curry}([\![\Gamma, x : A \vdash M\ x : B]\!]) \\
&= \mathrm{curry}((\mathrm{app}) \circ \langle [\![\Gamma, x : A \vdash M : A \to B]\!], [\![\Gamma, x : A \vdash x : A]\!] \rangle) \\
&= \mathrm{curry}((\mathrm{app}) \circ \langle [\![\Gamma, x : A \vdash M : A \to B]\!], \mathrm{pr}_2^{[\![\Gamma]\!], A} \rangle) \\
&= \mathrm{curry}((\mathrm{app}) \circ ([\![\Gamma \vdash M : A \to B]\!] \times 1) \circ \langle \mathrm{pr}_1^{[\![\Gamma]\!], A}, \mathrm{pr}_2^{[\![\Gamma]\!], A} \rangle) \\
&= \mathrm{curry}((\mathrm{app}) \circ ([\![\Gamma \vdash M : A \to B]\!] \times 1)) \\
&= \mathrm{curry}(\mathrm{uncurry}([\![\Gamma \vdash M : A \to B]\!])) \\
&= [\![\Gamma \vdash M : A \to B]\!]
\end{aligned}
$$

により OK.

(prodU), (prodC), (unitU) これは unit type が $\mathbb{C}$ の 1 へ, product type が $\mathbb{C}$ の product に対応していることから明らか.

よって $\Gamma \vdash M = N : A \Longrightarrow [\![M]\!] = [\![N]\!] : [\![\Gamma]\!] \to A$ がいえたので, $[\![-]\!]$ は sound. □

定理 15. $[\![-]\!]$ は *complete.*

Proof. $\mathbb{C}$ での等式は CCC の等式であり, すなわち $\mathbb{S}$ でも成り立つことは補題 9 からわかる. □

注意 16. 上で $\lambda^{\times,1}$ と (他に構造の入っていない)CCC の対応を見たが, 通常は calculus を拡張することも含めて考える．すなわち, $\mathcal{E}_{\lambda^{\times,1}}$ を含む任意の equational theory は適当な interpretation により CCC に対応付けることができ, すると $\lambda^{\times,1}$(の equational theory) を拡大することと CCC に構造を付与することがぴったり対応する．このような意味を込めて simply-typed lambda calculus の model は CCC である, とか, CCC の internal language は simply-typed lambda calculus であるなどと言ったりする.

よってここでの証明は, calculus とそのモデルの対応という意味では少し弱いことを主張しているが, この pdf はまだ途中なので勘弁して欲しい.