

**Заповеди:**

1. Be good, drink milk and **think of Russia** (с)
2. Обязательно фиксируйте зерно генератора случайных чисел в экспериментах. При перезапуске кода значения не должны меняться :)
3. Закомитьте задание в виде .ipynb файла на гитхаб <https://classroom.github.com/a/3KL2oSuX>.
4. Вверху файла подпишите фамилию, имя и группу.
5. Дедлайн: 7 июня 21:00 без штрафа, 8 июня 21:00 со штрафом 50%.
6. Ещё потребуется загрузить задачи в контекст для проверки на плагиат ;)

## Задачи

1. Парадокс инспектора.

Автобусы отходят от автостанции с 8:00 до 20:00. Первый автобус отходит ровно в 8:00. Затем интервалы между автобусами случайны, независимы и равновероятно равны либо 5-и, либо 10-и минутам. Будем считать, что за минуту на автостанцию приходит ровно один пассажир, и все пассажиры едут ближайшим автобусом.

Проведите  $10^4$  экспериментов и с их помощью:

- а) [10] Постройте гистограмму количества автобусов, отошедших от автостанции за сутки. Похоже ли визуально распределение на нормальное?
- б) [10] Инспектор Тимон выбирает равновероятно один из всех автобусов отошедших от автостанции за сутки. Постройте гистограмму числа пассажиров на этом автобусе. Оцените математическое ожидание и дисперсию этого числа.
- в) [10] Инспектор Пумба приходит на автостанцию в случайный момент времени, равномерный от 8:00 до 20:00 и садится в первый пришедший автобус. Постройте гистограмму числа пассажиров на этом автобусе. Оцените математическое ожидание и дисперсию этого числа.
- г) [10] Как изменятся ответы на эти вопросы, если время между автобусами будет экспоненциально со средним в 10 минут?

Пояснения: первый автобус можно не включать в выборку, Пумбу за пассажира можно не считать.

## 2. Парадокс Хуана Мануэля Родригеса Паррондо.

У Атоса, Портоса и Арамиса по 1000 франков.

Атос постоянно ходит в казино А, где каждый раз выигрывает один франк с вероятностью 0.49 и проигрывает один франк с вероятностью 0.51.

Портос ходит в казино Б, где ситуация интереснее :) Если богатство посетителя кратно трём, то посетитель выигрывает франк с вероятностью 0.09 и проигрывает один франк с вероятностью 0.91. Если богатство посетителя не кратно трём, то посетитель выигрывает франк с вероятностью 0.74 и проигрывает один франк с вероятностью 0.26.

Арамис каждый раз выбирает казино А или казино Б равновероятно.

Проведите  $10^4$  симуляций эволюции благосостояния Атоса, Портоса и Арамиса. Каждая симуляция предусматривает 1000 посещений казино. Все три игрока все деньги носят с собой и ни на что не тратят :)

- [10] Постройте на графике 10 случайных траекторий изменений богатства Атоса, по горизонтали — номер посещения казино, по вертикали — богатство. На том же графике постройте усреднённую по всем экспериментам траекторию изменения богатства.
- [10] Постройте на графике 10 случайных траекторий изменений богатства Портоса, по горизонтали — номер посещения казино, по вертикали — богатство. На том же графике постройте усреднённую по всем экспериментам траекторию изменения богатства.
- [10] Постройте на графике 10 случайных траекторий изменений богатства Арамиса, по горизонтали — номер посещения казино, по вертикали — богатство. На том же графике постройте усреднённую по всем экспериментам траекторию изменения богатства.

## 3. Парадокс Берксона.

Предположим, что результаты ЕГЭ школьников по русскому и математике независимы и хорошо аппроксимируются нормальным распределением с ожиданием 60 и стандартным отклонением 10.

УШЭ (Урюпинская Школа Экономики) ныне престижна и забирает себе всех школьников набравших более  $n$  баллов в сумме по русскому и математике.

Для каждого  $n$  от 80 до 160 с шагом 5 случайно создайте  $10^4$  школьников и поделите их на прошедших и не прошедших в УШЭ.

- [10] Постройте график числа прошедших в УШЭ в зависимости от  $n$ .
- [10] Постройте график выборочной корреляции между результатами по русскому и математике в зависимости от  $n$  среди прошедших в УШЭ.
- [10] Постройте график выборочной корреляции между результатами по русскому и математике в зависимости от  $n$  среди не прошедших в УШЭ.

Тем, кто хочет получить бонусные балы и смыть ими тяжкие грехи прошлого...:)

#### 4. Парадокс Штайна.

Ниф-Ниф, Наф-Наф и Нуф-Нуф качают пресс на карантине, чтобы подготовиться к встрече Волка :) Количества подъямов туловища в  $i$ -й день у поросят обозначим  $X_i$ ,  $Y_i$  и  $Z_i$ . Эти величины независимы и хорошо аппроксимируются нормальным распределением  $X_i \sim \mathcal{N}(60, 100)$ ,  $Y_i \sim \mathcal{N}(70, 100)$ ,  $Z_i \sim \mathcal{N}(80, 100)$ .

Карантин длится 100 дней. Волк не знает математических ожиданий (60, 70, 80), но знает дисперсии. Волку удаётся подсмотреть, сколько раз поросята поднимают свои туловища.

Проведите  $10^4$  симуляций карантина :)

- [10] Для каждой симуляции помогите Волку посчитать оценки  $\hat{\mu}_x$ ,  $\hat{\mu}_y$ ,  $\hat{\mu}_z$  методом максимального правдоподобия. Постройте гистограмму каждой из оценок и обозначьте на них истинные значения параметров.
- [3] Постройте гистограмму суммарной квадратичной ошибки,  $S = (\hat{\mu}_x - \mu_x)^2 + (\hat{\mu}_y - \mu_y)^2 + (\hat{\mu}_z - \mu_z)^2$ . Оцените математическое ожидание суммарной квадратичной ошибки.
- [5] Отложите оценки Волка  $\hat{\mu}_x$  и  $\hat{\mu}_y$  на диаграмме рассеяния. Найдите их выборочную корреляцию.

Обозначим вектор трёх оценок Волка одной буквой  $\hat{\mu}$ . Хитрый Лис тоже охотится на Трёх Поросят. Он берёт вектор оценок Волка, домножает его на хитрый множитель, и получает вектор оценок Хитрого Лиса:

$$\tilde{\mu} = \left(1 - \frac{1}{\|\hat{\mu}\|^2}\right) \hat{\mu}$$

- [10] Выполните предыдущие три пункта для оценок Хитрого Лиса.
- [2] Кто точнее оценивает накачанность Ниф-Нифа? Кто точнее оценивает вектор накачанности Трёх Поросят?

### Почитать больше:

- <https://towardsdatascience.com/the-inspection-paradox-is-everywhere-2ef1c2e9d709>
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Parrondo%27s\\_paradox](https://en.wikipedia.org/wiki/Parrondo%27s_paradox)
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Berkson%27s\\_paradox](https://en.wikipedia.org/wiki/Berkson%27s_paradox)
- <http://www.statslab.cam.ac.uk/~rjs57/SteinParadox.pdf>