

---

# Иллюстрации к лекциям по курсу 'Теория Вероятностей и Математическая Статистика'

---

*Сделали с любовью:  
Никитанова Мария  
Пешков Максим  
Пономаренко Анна*

## Contents

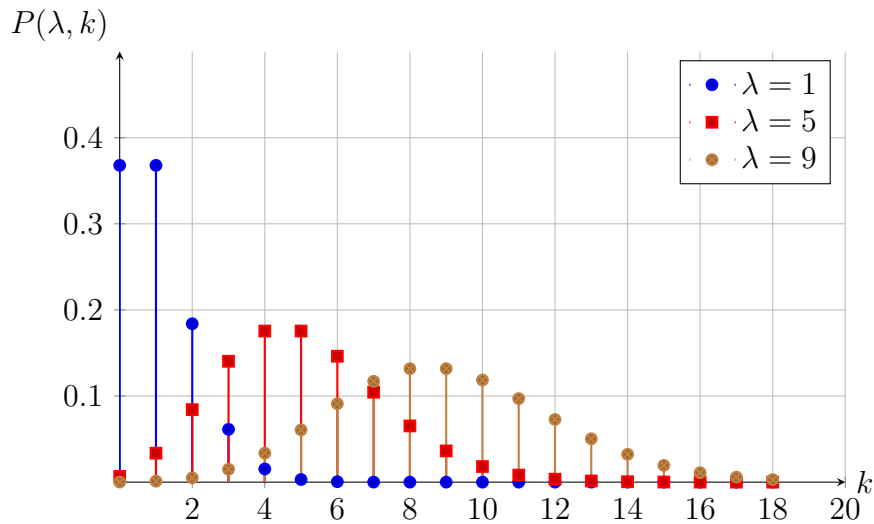
|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Дискретные распределения</b>                | <b>2</b>  |
| 1.1      | Распределение Пуассона . . . . .               | 2         |
| 1.2      | Биномиальное распределение . . . . .           | 3         |
| 1.3      | Геометрическое распределение . . . . .         | 4         |
| <b>2</b> | <b>Непрерывные распределения</b>               | <b>5</b>  |
| 2.1      | Равномерное распределение . . . . .            | 5         |
| 2.1.1    | Функция плотности . . . . .                    | 5         |
| 2.1.2    | Функция распределения . . . . .                | 6         |
| 2.2      | Экспоненциальное распределение . . . . .       | 7         |
| 2.2.1    | Функция плотности . . . . .                    | 7         |
| 2.2.2    | Функция распределения . . . . .                | 8         |
| 2.3      | Нормальное распределение . . . . .             | 9         |
| 2.4      | Multidimensional Normal Distribution . . . . . | 10        |
| 2.5      | Парето распределение . . . . .                 | 11        |
| 2.6      | Хи-квадрат распределение . . . . .             | 12        |
| 2.7      | Распределение Стьюдента . . . . .              | 13        |
| <b>3</b> | <b>Теоремы</b>                                 | <b>15</b> |
| 3.1      | Иллюстрация закона больших чисел . . . . .     | 15        |

# 1 Дискретные распределения

## 1.1 Распределение Пуассона

Функция вероятности

$$P(\lambda, k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

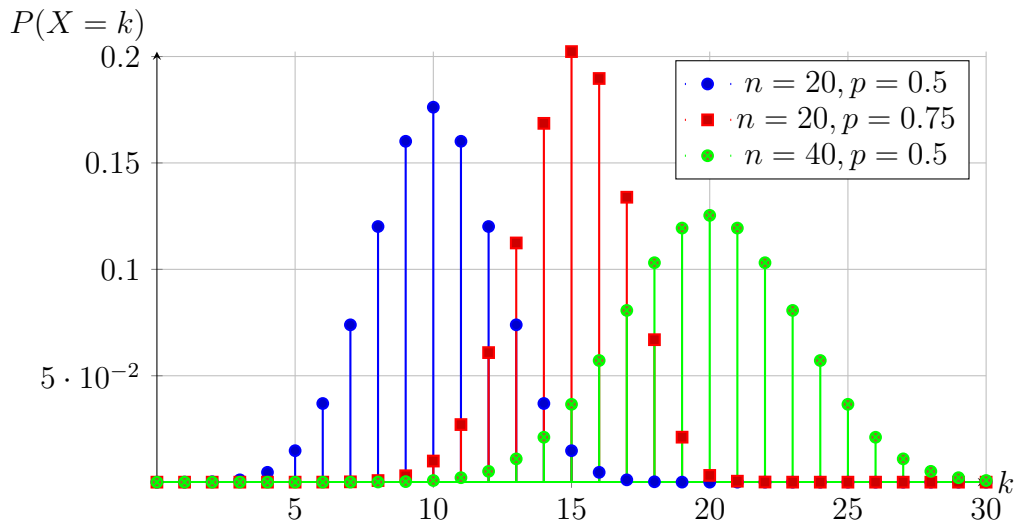


```
\pgfmathdeclarefunction{poiss}{1}{%
  \pgfmathparse{(#1^x)*exp(-#1)/(x!)}
\begin{tikzpicture}
\begin{axis}[
  axis x line=center,
  axis y line=center,
  xtick={0,2,...,19},
  ytick={0.1,0.2,...,0.4},
  domain = 0:18,
  samples = 19,
  xlabel={k},
  ylabel={P(\lambda,k)},
  xlabel style={right},
  ylabel style={above left},
  ymax=0.5,xmax=20,x post scale=1.4,grid = major]
\addplot+[ycomb,blue,thick] {poiss(1)};
\addlegendentry{\lambda = 1}
\addplot+[ycomb,red,thick] {poiss(5)};
\addlegendentry{\lambda = 5}
\addplot+[ycomb,brown,thick] {poiss(9)};
\addlegendentry{\lambda = 9};
\end{axis}
\end{tikzpicture}
```

## 1.2 Биномиальное распределение

### Функция вероятности

$$P(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$



```
\pgfmathdeclarefunction{binom}{2}{\pgfmathparse{
(((#2)!)/(((#2-x)!)*(x!))) * ((#1)^x) * (1-#1)^(#2-x)}}%
}

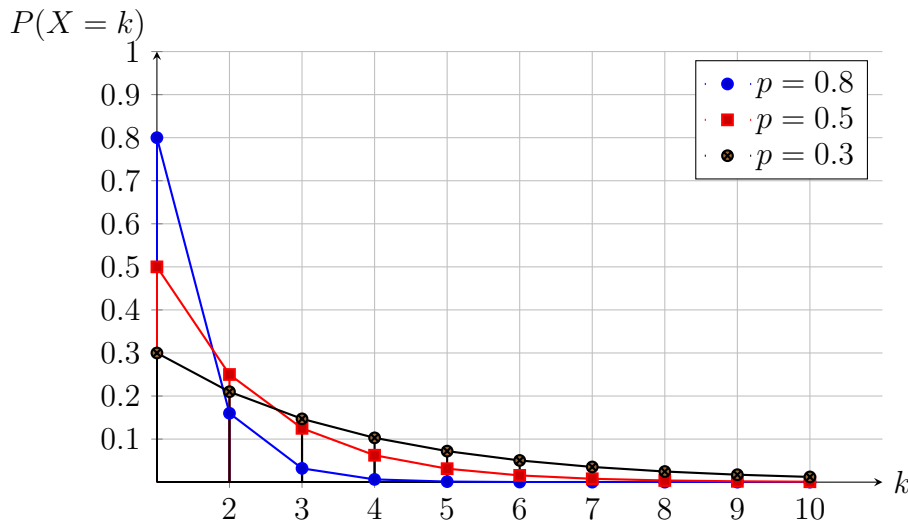
\begin{tikzpicture}

\begin{axis}[axis x line=center,
axis y line=center,
domain = 0:30,
samples = 31,
ytick = {0,0.05,0.1,...,0.5},
xlabel={k},
ylabel={P(X = k)},
xlabel style={right},
ylabel style={above left},
x post scale=1.6,
grid = major]
\addplot+[ycomb,blue,thick] {binom(0.5, 20)} \closedcycle;
\addlegendentry{$n=20, p=0.5$};
\addplot+[ycomb,red,thick] {binom(0.75, 20)} \closedcycle;
\addlegendentry{$n=20, p=0.75$};
\addplot+[ycomb,green,thick] {binom(0.5, 40)} \closedcycle;
\addlegendentry{$n=40, p=0.5$};
\end{axis}
\end{tikzpicture}
```

## 1.3 Геометрическое распределение

### Функция вероятности

$$P(X = k) = p \cdot (1 - p)^{k-1}$$



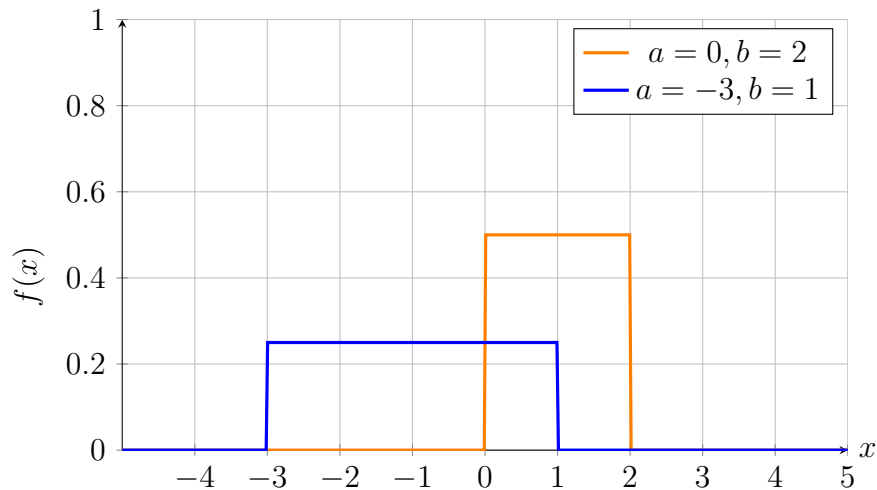
```
\pgfmathdeclarefunction{geom}{1}{\pgfmathparse{( 1 - #1 ) ^ ( x - 1 ) * #1}}
\begin{tikzpicture}
\begin{axis}[axis x line=center,
axis y line=center,
xtick={1,2,...,10},
ytick={0.1, 0.2,...,1},
domain = 1:10,
samples = 10,
xlabel={k},
ylabel={P(X = k)},
xlabel style={right},
ylabel style={above left},
ymax=1,
xmax=11,
x post scale=1.4,
grid = major]
\addplot+[ycomb,blue,thick] {geom(0.8)} \closedcycle;
\addlegendentry{$p = 0.8$};
\addplot+[ycomb,red,thick] {geom(0.5)} \closedcycle;
\addlegendentry{$p = 0.5$};
\addplot+[ycomb,black,thick] {geom(0.3)} \closedcycle;
\addlegendentry{$p = 0.3$};
\addplot[blue,thick] {geom(0.8)};
\addplot[red,thick] {geom(0.5)};
\addplot[black,thick] {geom(0.3)};
\end{axis}
\end{tikzpicture}
```

## 2 Непрерывные распределения

### 2.1 Равномерное распределение

#### 2.1.1 Функция плотности

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , x \in [a, b] \\ 0 & , x \notin [a, b] \end{cases}$$

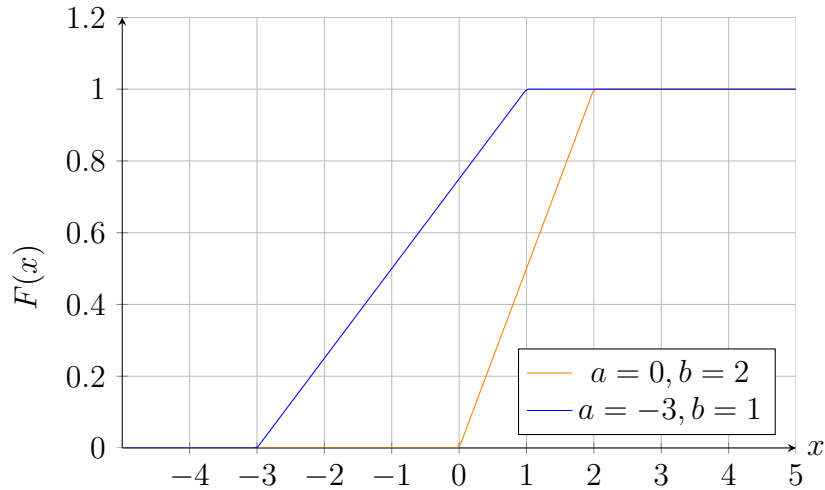


```
\begin{tikzpicture}[
  declare function={unipdf(\x,\x1,\xu)= (\x>=\x1)*(\x<\xu)*1/(\xu-\x1);}
]

\begin{axis}[axis x line=center,
  axis y line = left,
  ymin=0,ymax=1,
  xmin=-5, xmax=5,
  samples = 500,
  xlabel={\x$},
  ylabel={f(x)$},
  xlabel style={right},
  ylabel style={above left},
  x post scale=1.4,
  grid = major
]
\addplot [very thick, orange] {unipdf(x,0,2)};
\addlegendentry{\$a=0, b=2\$};
\addplot [very thick, blue] {unipdf(x,-3,1)};
\addlegendentry{\$a=-3, b=1\$};
\end{axis}
\end{tikzpicture}
```

### 2.1.2 Функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 1 & , x > b \\ \frac{x-a}{b-a} & , x \in [a, b] \\ 0 & , x < a \end{cases}$$



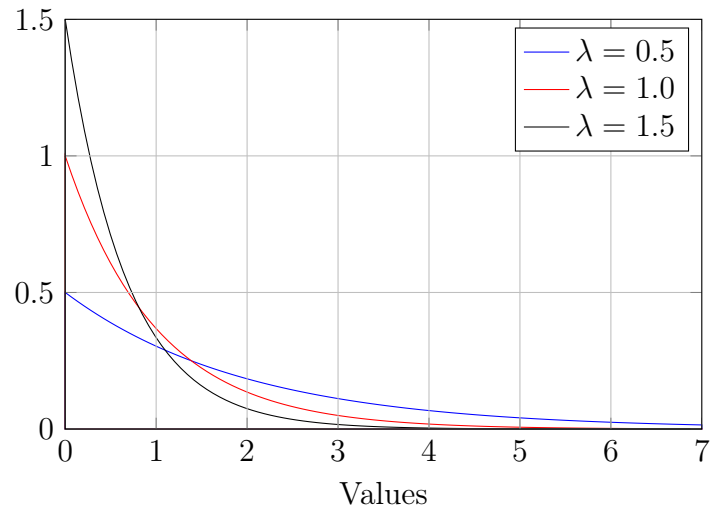
```
\begin{tikzpicture}[
  declare function={unip(\x,\x1,\xu) = (\x>=\x1)*(\x<\xu)*(\x-\x1)/(\xu-\x1)
    + (\x>\xu);}
]

\begin{axis}[axis x line=center,
  axis y line=left,
  samples = 200,
  ymax = 1.2,
  xlabel={\$x\$},
  ylabel={\$F(x)\$},
  xlabel style={right},
  ylabel style={above left},
  x post scale=1.3,
  grid = major, legend pos=south east
]
\addplot [orange] {unip(x,0,2)};
\addlegendentry{\$a=0, b=2\$};
\addplot [blue] {unip(x,-3,1)};
\addlegendentry{\$a=-3, b=1\$};
\end{axis}
\end{tikzpicture}
```

## 2.2 Экспоненциальное распределение

### 2.2.1 Функция плотности

$$f(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

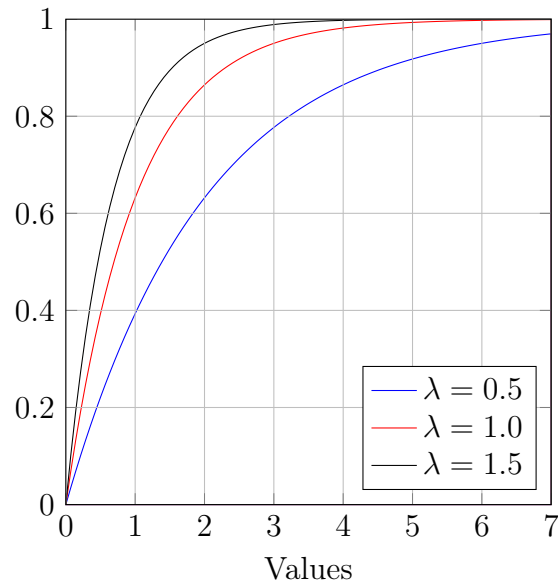


```
\pgfmathdeclarefunction{exp}{1}{\pgfmathparse{exp(-#1 * x)}}%

\begin{tikzpicture}
\begin{axis}
[no markers, domain=0:10,
samples=100, xlabel={Values}, enlargelimits=false,
height=7cm, width=7cm,
clip=false, axis on top, grid = major]
\addplot [domain=1:10, color = blue] {expon(0.5)} \closedcycle;
\addlegendentry{$ \lambda = 0.5$};
\addplot [domain=1:10, color = red] {expon(1,0)} \closedcycle;
\addlegendentry{$ \lambda = 1.0$};
\addplot [domain=1:10] {expon(1.5)} \closedcycle;
\addlegendentry{$ \lambda = 1.5$};
\end{axis}
\end{tikzpicture}
```

## 2.2.2 Функция распределения

$$f(x; \lambda) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$



```
\pgfmathdeclarefunction{expondist}{1}{\pgfmathparse{ 1 - exp(- (#1 * x))}%}

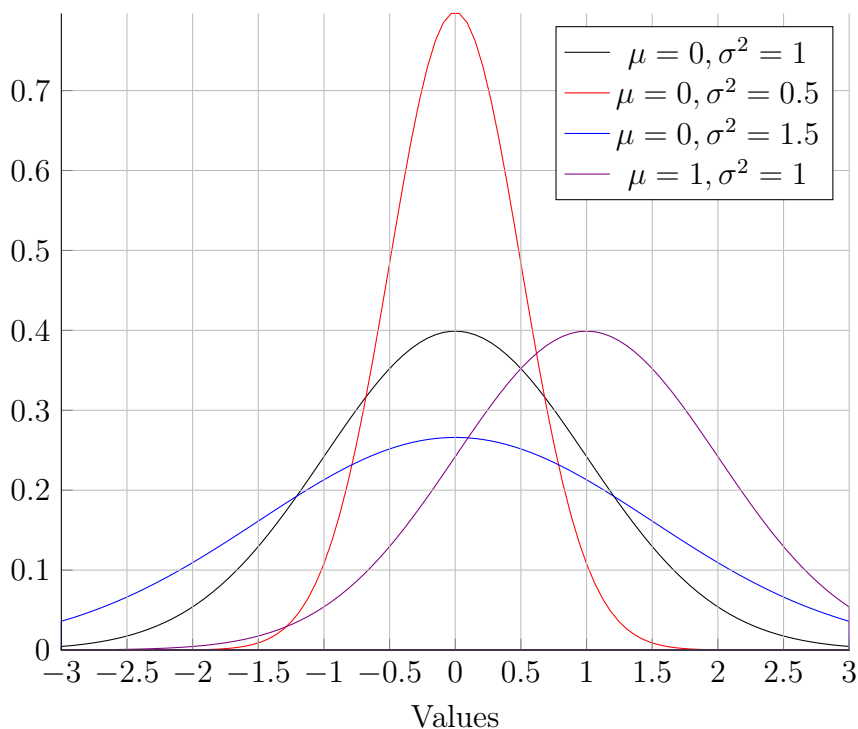
\begin{tikzpicture}
\begin{axis}[no markers,
domain=0:10, samples=100, xlabel={Values}, enlargelimits=false,
height=8cm, width=8cm, clip=false, axis on top,
grid = major]
\addplot [domain=0:7, color = blue] {expondist(0.5)} \closedcycle;
\addlegendentry{$ \lambda = 0.5$};
\addplot [domain=0:7, color = red] {expondist(1.0)} \closedcycle;
\addlegendentry{$ \lambda = 1.0$};
\addplot [domain=0:7] {expondist(1.5)} \closedcycle;
\addlegendentry{$ \lambda = 1.5$};
\end{axis}
\end{tikzpicture}
```



## 2.3 Нормальное распределение

### Функция плотности

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

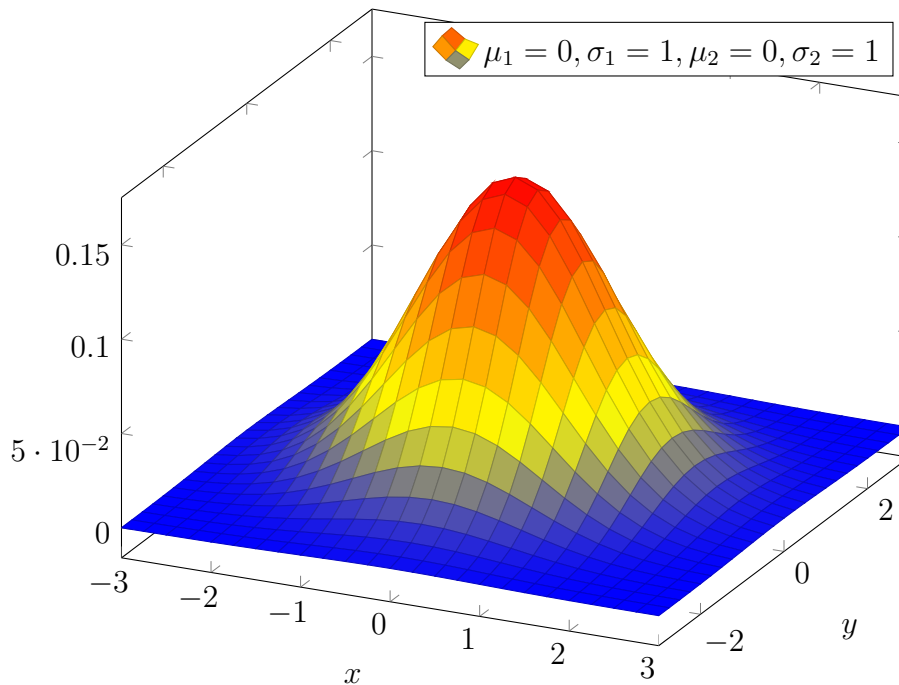


```
\pgfmathdeclarefunction{gauss}{2}{\pgfmathparse{1/(#2*sqrt(2*pi))*exp(-((x
-#1)^2)/(2*#2^2))}}
\begin{tikzpicture}
\begin{axis}[no markers, domain=0:10, samples=100,axis lines*=left, xlabel=
Values,
height=10cm, width=12cm, ytick={0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8,
0.9, 1.0},enlargelimits=false, clip=false, axis on top, grid = major]
\addplot [domain=-3:3] {gauss(0,1)};
\addlegendentry{$\mu = 0, \sigma^2 = 1$};
\addplot [domain=-3:3, color = red] {gauss(0,0.5)};
\addlegendentry{$\mu = 0, \sigma^2 = 0.5$};
\addplot [domain=-3:3, color = blue] {gauss(0,1.5)};
\addlegendentry{$\mu = 0, \sigma^2 = 1.5$};
\addplot [domain=-3:3, color = violet] {gauss(1,1)};
\addlegendentry{$\mu = 1, \sigma^2 = 1$};
\end{axis}
\end{tikzpicture}
```

## 2.4 Multidimensional Normal Distribution

Функция распределения

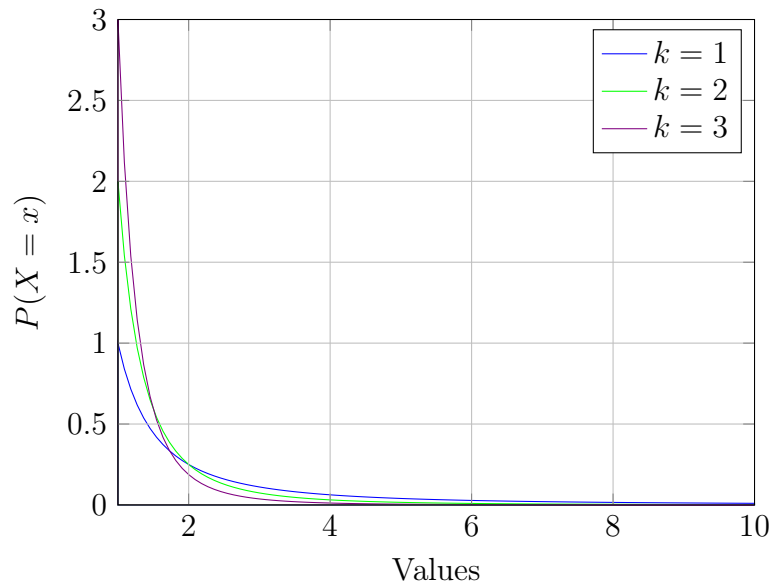
$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{(x - \mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y - \mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right)}$$



```
\pgfmathdeclarefunction{norm2}{4}{%
  \pgfmathparse{(1/(2*pi*#2*#4))* exp((-0.5)*(((x-#1)/#2)^2+((y-#3)/#4)^2))}
}%

\begin{tikzpicture}
  \begin{axis}[
    height=10cm, width=12cm,
    xlabel=$x$,
    ylabel=$y$]
    \addplot3[surf,domain=-3:3] {norm2(0,1,0,1)};
    \addlegendentry{$\mu_1 = 0, \sigma_1 = 1, \mu_2 = 0, \sigma_2 = 1$};
  \end{axis}
\end{tikzpicture}
```

## 2.5 Парето распределение

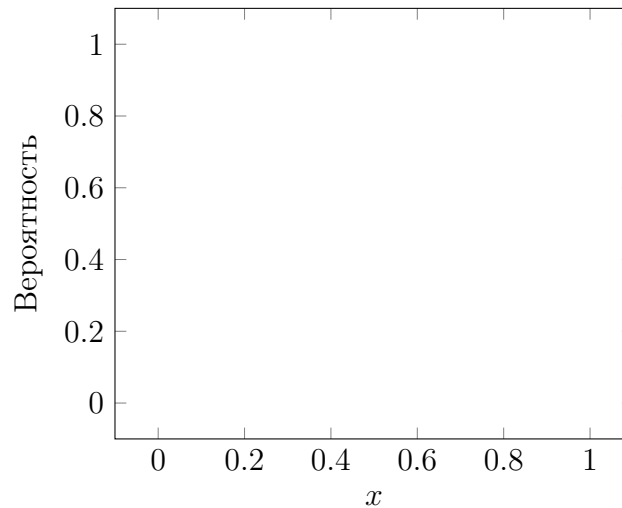


```
\pgfmathdeclarefunction{pareto}{1}{\pgfmathparse{( #1 * 1 ^ ( #1 ) / ( x ^
    ( #1 + 1 ) ) )}%
}
\begin{center}
\begin{tikzpicture}

\begin{axis}[no markers, domain=0:10, samples=100, xlabel={Values}, ylabel={
    $P(X = x)$}, enlargelimits=false, ytick = {0, 0.5, ..., 3},
height=8cm, width=10cm, clip=false, axis on top,
grid = major]
\addplot [domain=1:10, color = blue] {pareto(1)} \closedcycle;
\addlegendentry{$k = 1$};
\addplot [domain=1:10, color = green] {pareto(2)} \closedcycle;
\addlegendentry{$k = 2$};
\addplot [domain=1:10, color = violet] {pareto(3)} \closedcycle;
\addlegendentry{$k = 3$};

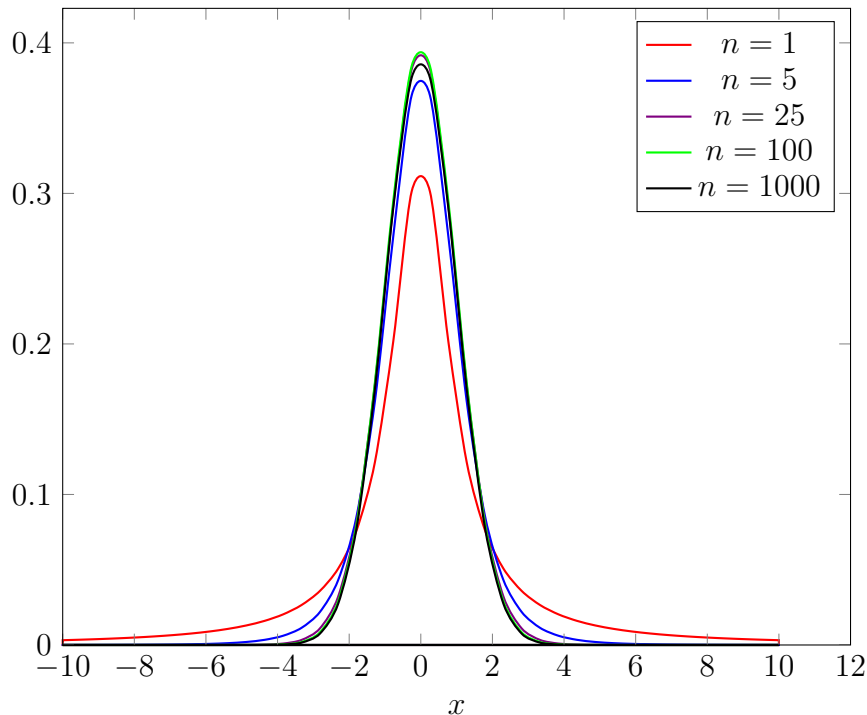
\end{axis}
\end{tikzpicture}
\end{center}
```

## 2.6 Хи-квадрат распределение



```
\begin{tikzpicture}
  \begin{axis}[%
    xlabel =  $x$ ,
    ylabel = {Вероятность},
    samples = 200,
    restrict y to domain = 0:0.5,
    domain = 0.01:15]
    \foreach \k in {1,...,8} {%
      \addplot+[mark={}] gnuplot[raw gnuplot] {%
        isint(x) = (int(x)==x);
        log2 = 0.693147180559945;
        chisq(x,k)=k<=0||!isint(k)?1/0:x<=0?0.0:exp((0.5*k-1.0)*log(x)-0.5*x
          -lgamma(0.5*k)-k*0.5*log2);
        set xrange [1.00000e-5:15.0000];
        set yrange [0.00000:0.500000];
        samples=200;
        plot chisq(x,\k)};
      \addlegendentryexpanded{$k = \k$}
    }
  \end{axis}
\end{tikzpicture}
```

## 2.7 Распределение Стьюдента



```

\begin{center}
\begin{tikzpicture}[
  declare function={gamma(\z)=
    2.506628274631*sqrt(1/\z)+ 0.20888568*(1/\z)^(1.5)+ 0.00870357*(1/\z)
      ^{(2.5)}- (174.2106599*(1/\z)^(3.5))/25920- (715.6423511*(1/\z)^(4.5))
      /1244160)*exp((-ln(1/\z)-1)*\z;},
  declare function={student(\x,\n)= gamma((\n+1)/2.)/(sqrt(\n*pi) *gamma(\n/2.))
    *((1+(\x*\x)/\n)^(-((\n+1)/2.)));}
]

\begin{axis}[xlabel = $x$, height=10cm, width=12cm,
ytick={0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5},
enlargelimits=false, clip=false, axis on top,
grid = major
  axis lines=left,
  enlargelimits=upper,
  samples=50
]

\addplot [thick, smooth, domain=-10:10, color = red]{student(x,1)} \
  closedcycle;
\addlegendentry{$n = 1$};
\addplot [thick, smooth, domain=-10:10, color = blue]{student(x,5)} \
  closedcycle;
\addlegendentry{$n = 5$};
\addplot [thick, smooth, domain=-10:10, color = violet]{student(x,25)} \
  closedcycle;
\addlegendentry{$n = 25$};
\addplot [thick, smooth, domain=-10:10, color = green]{student(x,100)} \
  closedcycle;
\addlegendentry{$n = 100$};
\addplot [thick, smooth, domain=-10:10, color = black]{student(x,1000)} \
  closedcycle;
\addlegendentry{$n = 1000$};

```

```
\end{axis}  
\end{tikzpicture}  
\end{center}
```

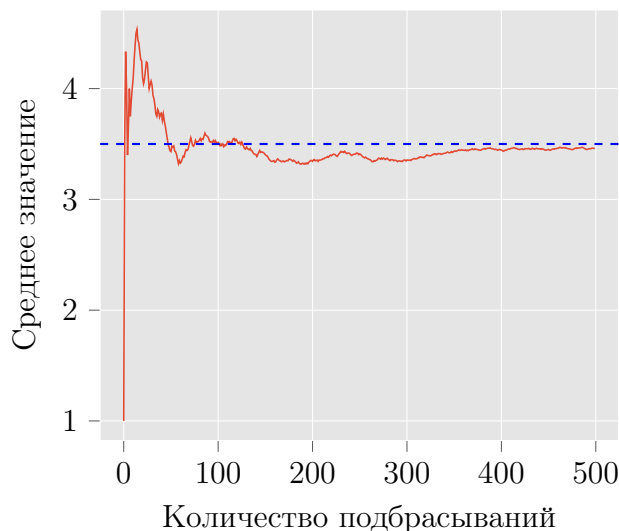
## 3 Теоремы

### 3.1 Иллюстрация закона больших чисел

Согласно Закону Больших Чисел (ЗБЧ), среднее значение конечной выборки из фиксированного распределения близко к математическому ожиданию этого распределения.

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \rightarrow \mathbb{E}(x_i)$$

На данной картинке изображена динамика среднего значения выпавшего кубика в зависимости от количества подбрасываний. Как можно наблюдать, при достаточно большом количестве подбрасываний среднее значение стремится к математическому ожиданию (3.5).



```
\begin{tikzpicture}

\definecolor{color0}{rgb}{0.886274509803922,0.290196078431373,0.2}

\begin{axis}[
axis background/.style={fill=white!89.8039215686275!black},
axis line style={white},
tick align=outside,
tick pos=left,
x grid style={white},
xlabel={Text},
xmajorgrids,
xmin=-24.95, xmax=523.95,
xtick style={color=white!33.3333333333333!black},
y grid style={white},
ylabel={Text},
ymajorgrids,
ymin=0.823333333333333, ymax=4.71,
ytick style={color=white!33.3333333333333!black}
]
\addplot [semithick, color0]
table {%
0 1
1 3.5
2 4.333333333333333
3 4

```

```

4 3.4
5 3.666666666666667
6 4
7 3.75
8 3.888888888888889
9 4
10 4.09090909090909
...
490 3.45010183299389
491 3.45121951219512
492 3.45436105476673
493 3.45748987854251
494 3.45656565656566
495 3.45766129032258
496 3.46277665995976
497 3.46184738955823
498 3.46092184368737
499 3.458
};
\addplot [thick, blue, dashed]
table {%
-24.95 3.5
523.95 3.5
};
\end{axis}

\end{tikzpicture}

```