連続系アルゴリズム
レポート課題10

連絡先：mail@myuuuuun.com

平成 28 年 1 月 7 日

問題 1

K 点離散 Fourier 変換で、多項式 $p(x)$ のベキ表現の係数が全て実数の場合、$p(\omega^0)$, $p(\omega^{K/2})$ は実数であることを示せ。また、$h = 1, 2, \ldots\ K/2-1$ に対して、$p(\omega^h)$ と $p(\omega^{K-h})$ が複素共役であることを示せ。

ω^k は複素平面で単位円周上に反時計周りに並ぶので、ω^h と ω^{K-h} は複素共役である。

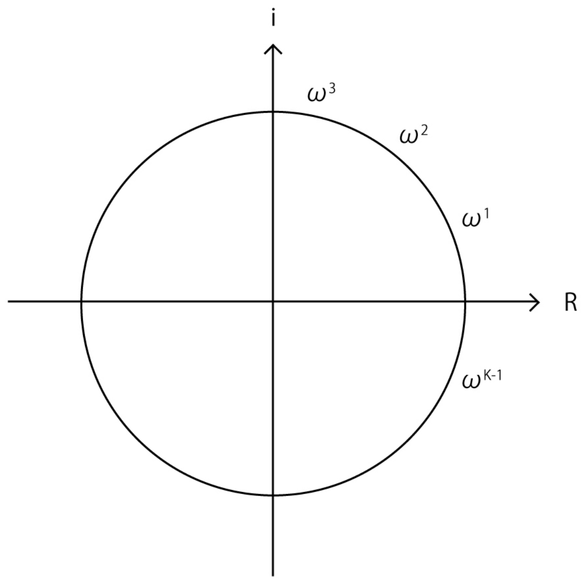

図 1: K 乗根

また一般に、ある複素数 w, z について、

$$\overline{w+z} = \bar{w} + \bar{z}$$
$$\overline{wz} = \bar{w}\bar{z}$$

が成り立つので、$p(x)$ のべき表現の多項式を $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ とすれば、

$$\begin{aligned}
\overline{p(z)} &= \overline{a_0} + \overline{a_1x} + \overline{a_2x^2} + \ldots + \overline{a_nx^n} \\
&= \overline{a_0} + \bar{a_1}\bar{x} + \bar{a_2}\bar{x}\bar{x} + \ldots + \bar{a_n}(\bar{x})^n \\
&= a_0 + a_1\bar{x} + a_2\bar{x}^2 + \ldots + a_n\bar{x}^n \\
&= p(\bar{z})
\end{aligned}$$

となる（a_i は全て実数）。よって問題の後半は示された。
前半は、$\omega^0 = 1$, $\omega^{K/2} = -1$ を $p(x)$ に代入すれば実数であることがわかる。